ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ

ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

ΤΕΧΝΙΚΕΣ MONTE CARLO ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΑΞΙΟΓΡΑΦΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ ΑΝΤΩΝΙΟΣ

(ΜΧΡΗ10/19)

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

ΕΓΓΛΕΖΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

Λέκτορας Πανεπιστημίου Πειραιώς

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

ΜΑΛΛΙΑΡΟΠΟΥΛΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

ΣΚΙΑΔΟΠΟΥΛΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ Αναπληρωτής Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

ΕΓΓΛΕΖΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ Λέκτορας Πανεπιστημίου Πειραιώς

ΠΕΙΡΑΙΑΣ, ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2011

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η μέθοδος Monte Carlo έχει αποδειχθεί ένα πολύτιμο και ευέλικτο υπολογιστικό εργαλείο στη σύγχρονη χρηματοοικονομική θεωρία. Η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία εξετάζει ορισμένες εφαρμογές της μεθόδου Monte Carlo για την τιμολόγηση παραγώγων αξιογράφων, δίνοντας έμφαση στη βελτίωση της αποτελεσματικότητας τους. Αρχικά, περιγράφεται ο τρόπος παραγωγής των τυχαίων αριθμών για την προσομοίωση Monte Carlo. Στη συνέχεια αναλύονται ορισμένες τεχνικές για τη μείωση της διακύμανσης όπως η αντιθετική δειγματοληψία, η μέθοδος των μεταβλητών ελέγχου και η μέθοδος μείωσης της διακύμανσης μέσω δέσμευσης. Παρουσιάζεται η χρήση ντετερμινιστικών ακολουθιών χαμηλής διαφοράς, γνωστές ως Quasi Monte Carlo τεχνικές για την αποτίμηση των παραγώγων αξιογράφων. Τέλος παραθέτονται κάποιες εφαρμογές της μεθόδου Monte Carlo για την αποτίμηση Αμερικανικών και Ασιατικών δικαιωμάτων προαίρεσης.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *Μέθοδος Monte Carlo, Quasi Monte Carlo, Τιμολόγηση δικαιωμάτων, Μείωση διακύμανσης.*

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια η πολυπλοκότητα των αριθμητικών υπολογισμών στη χρηματοοικονομική ανάλυση και πράξη έχει αυξηθεί ραγδαία, απαιτώντας μεγαλύτερη ταχύτητα και αποτελεσματικότητα στους υπολογισμούς. Αριθμητικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται για διάφορους σκοπούς στα χρηματοοικονομικά όπως για παράδειγμα στην αποτίμηση αξιογράφων, την εκτίμηση της ευαισθησίας των αξιογράφων αυτών ως προς ορισμένους παράγοντες και την εκτίμηση των κινδύνων τους, καθώς επίσης και στα διάφορα stress tests των χαρτοφυλακίων. Η μέθοδος Monte Carlo είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για πολλούς από αυτούς τους υπολογισμούς. Αυτό αποδεικνύεται εν μέρει από τη μεγάλη βιβλιογραφία των επιτυχημένων εφαρμογών. Παρουσιάστηκε για πρώτη φορά, στα χρηματοοικονομικά, από τον Hertz D. το 1964 στο άρθρο του Risk Analysis In Capital Investment. Το 1977 ο P. Boyle εισήγαγε την προσομοίωση Monte Carlo για την αποτίμηση παραγώγων αξιογράφων.

Στη χρηματοοικονομική επιστήμη, οι τιμές των βασικών αξιογράφων καθώς και οι μεταβλητές κατάστασης των υποκείμενων τίτλων συχνά μοντελοποιούνται ως στοχαστικές διαδικασίες σε συνεχή χρόνο. Η πληρωμή ενός παραγώγου αξιογράφου, όπως ένα δικαίωμα αγοράς, εξαρτάται από την τιμή ενός ή περισσοτέρων βασικών αξιογράφων. Χρησιμοποιώντας την παραδοχή ότι δεν υπάρχει arbitrage, οι οικονομολόγοι απέδειξαν ότι η τιμή ενός παραγώγου αξιογράφου μπορεί να εκφραστεί ως η αναμενόμενη τιμή του προεξοφλημένου του κέρδους. Η αναμενόμενη τιμή έχει ληφθεί με βάση το μετασχηματισμό του αρχικού μέτρου πιθανότητας, γνωστό και ως ισοδύναμο μέτρο martingale ή μέτρο ουδέτερου κινδύνου.

Η προσομοίωση Monte Carlo χρησιμοποιείται για την αποτίμηση δικαιωμάτων σε περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου. Ουσιαστικά προσομοιώνονται μονοπάτια αποδόσεων έτσι ώστε να βρεθεί η αναμενόμενη απόδοση και στη συνέχεια υπολογίζεται η παρούσα αξία της απόδοσης αυτής. Έστω ένα χρηματοοικονομικό παράγωγο το οποίο εξαρτάται από μία μόνο μεταβλητή S, η τιμή του υποκείμενου τίτλου, και παρέχει κάποια απόδοση σε χρόνο T, υποθέτοντας ότι το επιτόκιο παραμένει σταθερό, η αποτίμηση του παραγώγου μπορεί αν γίνει ως εξής:

1. Προσομοιώνουμε δειγματικά μονοπάτια για τον υποκείμενο τίτλο S στο χρονικό ορίζοντα T, σε περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου.
2. Εκτιμούμε τις προεξοφλημένες ταμειακές ροές του αξιογράφου σε κάθε δειγματικό μονοπάτι όπως προκύπτει από την δομή του.
3. Παίρνουμε το μέσο όρο των προεξοφλημένων ταμειακών ροών των δειγματικών μονοπατιών.

Στην πραγματικότητα, η μέθοδος αυτή υπολογίζει ένα πολυδιάστατο ολοκλήρωμα, την αναμενόμενη τιμή των προεξοφλημένων κερδών σε ένα διάστημα δειγματικών μονοπατιών. Η αύξηση της πολυπλοκότητας των παραγώγων αξιογράφων τα τελευταία χρόνια έχει οδηγήσει στην ανάγκη εκτίμησης ολοκληρωμάτων μεγάλων διαστάσεων.

Η μέθοδος Monte Carlo γίνεται όλο και πιο ελκυστική σε σύγκριση με τις άλλες μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης καθώς οι διαστάσεις ενός προβλήματος αυξάνονται. Έστω το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x)$ στον d-διάστατο μοναδιαίο υπέρκυβο. Η εκτίμηση του απλού Monte Carlo του ολοκληρώματος είναι ίσο με την μέση τιμή της συνάρτησης f των n σημείων που έχουν επιλεγεί τυχαία από τον μοναδιαίο υπερκύβο. Από το Νόμο των Μεγάλων Αριθμών αυτή η εκτίμηση συγκλίνει στην πραγματική τιμή του ολοκληρώματος καθώς το n τείνει στο άπειρο. Επίσης, το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα διασφαλίζει ότι το τυπικό σφάλμα $O(1/\sqrt{n})$ τείνει στο μηδέν καθώς το n αυξάνει. Συνεπώς, το ποσοστό σφάλματος σύγκλισης είναι ανεξάρτητο από τις διαστάσεις του προβλήματος και αυτό είναι το μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου σε σχέσεις με τις άλλες τεχνικές αριθμητικής ολοκλήρωσης.

Επιπλέον, η τεχνική Monte Carlo είναι ευέλικτη και εύκολη στην εφαρμογή και τροποποίηση. Επίσης, η αυξανόμενη διαθεσιμότητα των ισχυρών υπολογιστών έχει αυξήσει την ελκυστικότητα της μεθόδου. Ωστόσο, η τεχνική έχει κάποια μειονεκτήματα αλλά τα τελευταία χρόνια έχει σημειωθεί πρόοδος στην αντιμετώπιση τους. Ένα χαρακτηριστικό μειονέκτημα είναι ότι για πολύ σύνθετα προβλήματα απαιτείται μεγάλος αριθμός επαναλήψεων ώστε τα αποτελέσματα να είναι ακριβή. Για το λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί διάφορες τεχνικές μείωσης διακύμανσης. Δύο κλασσικές μέθοδοι μείωσης διακύμανσης είναι η αντιθετική δειγματοληψία και οι μεταβλητές ελέγχου. Πιο πρόσφατα, η δειγματοληψία σημαντικότητας και η μέθοδος Monte Carlo μέσω δέσμευσης έχουν χρησιμοποιηθεί σε χρηματοοικονομικές εφαρμογές.

Μία άλλη τεχνική για την επιτάχυνση της αποτίμησης των πολυδιάστατων ολοκληρωμάτων εφαρμόζει ντετερμινιστικές ακολουθίες αντί τυχαίων ακολουθιών. Αυτές οι ντετερμινιστικές ακολουθίες επιλέγονται ώστε να είναι καλύτερα κατανεμημένες στο διάστημα ολοκλήρωσης σε σχέση με τις τυχαίες ακολουθίες. Αν χρησιμοποιήσουμε αυτές τις ακολουθίες για να εκτιμήσουμε πολυδιάστατα ολοκληρώματα μπορούμε να βελτιώσουμε τη σύγκλιση. Ντετερμινιστικές ακολουθίες με αυτή την ιδιότητα είναι γνωστές ως ακολουθίες χαμηλής διαφοράς ή quasi-random (σχεδόν τυχαίες) ακολουθίες. Χρησιμοποιώντας αυτή την προσέγγιση μπορούμε να αντλήσουμε ντετερμινιστικά όρια σφάλματος παρόλο που η πρακτική χρήση αυτών των ορίων είναι προβληματική. Σε αντίθεση, το τυπικό Monte Carlo παρέχει απλά εύχρηστα όρια σφάλματος πιθανοτήτων. Παρόλο που οι ακολουθίες χαμηλής διαφοράς έχουν εφαρμοσθεί ευρέως στη φυσική, μόλις πρόσφατα χρησιμοποιήθηκαν σε χρηματοοικονομικά προβλήματα. Υπάρχουν διαφορετικές διαδικασίες για την εφαρμογή τέτοιων ακολουθιών χαμηλής διαφοράς που βασίζονται σε μεθόδους θεωρίας αριθμών. Κάποιες από αυτές αναλύονται παρακάτω. Επίσης, γίνεται σύγκριση ανάμεσα στις τυπικές μεθόδους Monte Carlo και στις quasi-random προσεγγίσεις.

Σε αυτή την διπλωματική εργασία θα αναλυθούν τα εξής:

- Στο Κεφάλαιο 2 αναλύεται ο τρόπος μοντελοποίησης των χρηματοοικονομικών δικαιωμάτων.
- Στο Κεφάλαιο 3 εξετάζονται οι μέθοδοι παραγωγής των τυχαίων αριθμών.
- Το Κεφάλαιο 4 περιέχει τις διάφορες μεθόδους μείωσης της διακύμανσης.
- Στο Κεφάλαιο 5 γίνεται ανάλυση της προσέγγισης Quasi Monte Carlo.
- Στο Κεφάλαιο 6 γίνεται προσέγγιση της τιμολόγηση ενός Αμερικανικού δικαιώματος με την προσομοίωση Monte Carlo.

- Στο Κεφάλαιο 7 τιμολογείται ένα Ασιατικό δικαίωμα με την προσομοίωση Monte Carlo και τη χρήση κάποιων μεθόδων μείωσης της διακύμανσης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Η Μοντελοποίηση των Χρηματοοικονομικών Δικαιωμάτων

2.1. Διαδικασίες Wiener και Λήμμα του Ito

2.1.1. Στοχαστικές Διαδικασίες

Κάθε μεταβλητή η τιμή της οποίας αλλάζει στη διάρκεια του χρόνου με τρόπο αβέβαιο λέγεται ότι ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία. Οι στοχαστικές διαδικασίες κατηγοριοποιούνται σε διακριτού και συνεχούς χρόνου. Μία στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου είναι εκείνη κατά την οποία μεταβλητή μπορεί να μεταβληθεί μόνο σε συγκεκριμένες στιγμές στο χρόνο, ενώ σε μία διαδικασία συνεχούς χρόνου η μεταβλητή μπορεί να μεταβάλλεται κάθε στιγμή. Επίσης υπάρχουν οι διαδικασίες διακριτής μεταβλητής και συνεχούς μεταβλητής. Στην πρώτη κατηγορία η μεταβλητή μπορεί να πάρει μόνο συγκεκριμένες τιμές στη διάρκεια του χρόνου, ενώ στη δεύτερη η μεταβλητή μπορεί να πάρει οποιεσδήποτε τιμές.

2.1.2. Διαδικασία Markov

Μία διαδικασία Markov είναι ένας συγκεκριμένος τύπος στοχαστικής διαδικασίας όπου μόνο η παρούσα τιμή της μεταβλητής παίζει ρόλο στην πρόβλεψη του μέλλοντος. Η παρελθοντική ιστορία της μεταβλητής και ο τρόπος με τον οποίο το μέλλον προκύπτει από το παρόν είναι ανεξάρτητα. Οι τιμές μετοχών συνήθως ακολουθούν μια διαδικασία Markov .

Παράδειγμα. Έστω μια μετοχή της IBM με τιμή \$100. Εάν η μετοχή ακολουθεί διαδικασία Markov οι προβλέψεις για το μέλλον δεν θα έπρεπε να επηρεάζονται από την τιμή της μετοχής μία εβδομάδα πριν, ένα μήνα πριν ή ένα χρόνο πριν. Το μοναδικό σχετικό κομμάτι πληροφορίας που υπάρχει είναι ότι η τιμή της μετοχής σήμερα είναι \$100. Οι προβλέψεις για το μέλλον είναι αβέβαιες και πρέπει να εκφράζονται με όρους κατανομής πιθανοτήτων. Η ιδιότητα Markov υποδηλώνει ότι η κατανομή πιθανοτήτων της τιμής της μετοχής σε οποιαδήποτε μελλοντική χρονική στιγμή είναι ανεξάρτητη από οποιοδήποτε μονοπάτι και αν ακολούθησε η τιμή στο παρελθόν.

2.1.3. Στοχαστικές Διαδικασίες Συνεχούς Χρόνου

Έστω μια μετοχή η οποία ακολουθεί μία διαδικασία Markov . Υποτίθεται ότι η τρέχουσα τιμή της μεταβλητής είναι 10 και ότι η μεταβολή στην τιμή της στη διάρκεια ενός χρόνου είναι $\phi(0,1)$, όπου $\phi(\mu,\sigma)$ συμβολίζει την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ. Η μεταβολή στην τιμή της μεταβλητής μετά από 2 χρόνια είναι το άθροισμα δύο κανονικών κατανομών , κάθε μια εκ των οποίων έχει μηδενική μέση τιμή και τυπική απόκλιση 1. Επειδή η μεταβλητή είναι Markov οι δύο κατανομές πιθανότητας είναι ανεξάρτητες . Κατά την πρόσθεση δύο ανεξάρτητων κανονικών κατανομών το αποτέλεσμα είναι μία νέα κανονική κατανομή με μέση τιμή το άθροισμα των δύο μέσων τιμών και διασπορά το άθροισμα των δύο διασπορών. Για τη συγκεκριμένη μεταβλητή μετά από δύο χρόνια θα παρουσιάσει μεταβολή με μέση τιμή 0 και διασπορά 2 , άρα τυπική απόκλιση $\sqrt{2}$, έτσι θα παρουσιάσει κατανομή πιθανότητας $\phi(0,\sqrt{2})$.

Για την μεταβολή της μεταβλητής σε χρονική διάρκεια 6 μηνών, η διασπορά της παρουσιάζει τη μισή διασπορά από αυτή που παρουσιάζει για τη διάρκεια ενός έτους, άρα η κατανομή πιθανότητας για 6 μήνες είναι $\phi(0,\sqrt{0.5})$. Με την ίδια λογική υπολογίζεται και η κατανομή πιθανότητας για διάρκεια τριών ή οσωνδήποτε μηνών. Γενικεύοντας, η κατανομή πιθανότητας της μεταβολής της μεταβλητής για χρονική διάρκεια Τ είναι $\phi(0,\sqrt{T})$.

2.1.3.1. Διαδικασίες Wiener

Η διαδικασία την οποία ακολουθεί η μεταβλητή η οποία αναλύθηκε παραπάνω είναι γνωστή ως διαδικασία Wiener και αποτελεί συγκεκριμένο τύπο της στοχαστικής διαδικασία Markov , με μέση τιμή μηδέν και ποσοστό διασποράς (variance rate) 1 ανά έτος. Τυπικά μια μεταβλητή z ακολουθεί μια Wiener διαδικασία όταν ικανοποιεί τις δύο παρακάτω ιδιότητες :

- ✓ *Ιδιότητα 1:* Η μεταβολή Δz κατά τη διάρκεια μιας μικρής χρονικής περιόδου Δt είναι

$$\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}, \quad (2.1)$$

όπου το ε ακολουθεί κανονική κατανομή $\phi(0,1)$.

- ✓ Ιδιότητα 2: *Οι τιμές του Δz για δύο οποιαδήποτε διαφορετικά χρονικά διαστήματα Δt είναι ανεξάρτητες.*

Από την πρώτη ιδιότητα προκύπτει ότι η Δz ακολουθεί και αυτή κανονική κατανομή με:

- μέση τιμή του $\Delta z = 0$,
- τυπική απόκλιση του $\Delta z = \sqrt{\Delta t}$,
- διασπορά του $\Delta z = \Delta t$.

Η δεύτερη ιδιότητα υποδηλώνει ότι η μεταβλητή z ακολουθεί διαδικασία Markov. Η μεταβολή της τιμής του z κατά τη διάρκεια ενός σχετικά μεγάλου χρονικού διαστήματος T μπορεί να συμβολιστεί ως $z(T) - z(0)$. Η μεταβολή αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα των μεταβολών του z σε Ν πολύ μικρά χρονικά διαστήματα διάρκειας Δt όπου:

$$N = \frac{T}{\Delta t}$$

Άρα

$$z(T)-z(0)=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\sqrt{\Delta t}, \quad (2.2)$$

όπου τα ε_i $(i=1,2...,N)$ ακολουθούν την $\phi(0,1)$. Από τη δεύτερη ιδιότητα είναι γνωστό ότι τα ε_i είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους . Από τις εξισώσεις (2.1) και (2.2) προκύπτει ότι το $z(T)-z(0)$ είναι κανονικά κατανεμημένο με:

- μέση τιμή $\left[z(T)-z(0)\right]=0,$
- τυπική απόκλιση $\left[z(T)-z(0)\right]=N\Delta t=T,$
- διασπορά $\left[z(T)-z(0)\right]=\sqrt{T},$

Παράδειγμα. Έστω ότι η τιμή z μιας μεταβλητής η οποία ακολουθεί μια διαδικασία Markov είναι αρχικά 25, και ότι ο χρόνος μετριέται σε χρόνια. Στο τέλος του πρώτου χρόνου η τιμή της μεταβλητής είναι κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή 5 και τυπική απόκλιση 1. Μετά από 5 χρόνια , η μεταβλητή είναι κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή 25 και τυπική απόκλιση $\sqrt{5}$ ή 2,236 . Η αβεβαιότητα για την τιμή της μεταβλητής σε κάποια στιγμή στο μέλλον , η οποία μετράται με την τυπική απόκλιση , αυξάνεται όπως η τετραγωνική ρίζα του χρόνου. Σε συνηθισμένους υπολογισμούς , είναι σύνηθες να προχωράμε από μικρές μεταβολές στο όριο καθώς οι μικρές μεταβολές τείνουν στο 0. Έτσι ο συμβολισμός $dx=adt$ χρησιμοποιείται για να δείξει το $\Delta x=a\Delta t$ στο όριο καθώς το $\Delta t\rightarrow 0$.

2.1.3.2. Γενικευμένη Διαδικασία Wiener

Η μέση μεταβολή ανά μονάδα χρόνου για μια στοχαστική διαδικασία ονομάζεται ποσοστό μεταβολής (drift rate) ενώ η διασπορά ανά μονάδα χρόνου ονομάζεται ποσοστό διασποράς (variance rate). Η βασική διαδικασία Wiener, dz, που αναπτύχθηκε ως τώρα έχει ποσοστό μεταβολής μηδέν και ποσοστό διασποράς 1. Η γενικευμένη διαδικασία Wiener για μία μεταβλητή x μπορεί να εκφρασθεί με όρους dz ως εξής :

$$dx = adt + bdz \quad (2.3)$$

όπου τα a και b είναι σταθερές. Για την καλύτερη κατανόηση της σχέσης (2.3) είναι σημαντικό να εξετάσει κανείς χωριστά τους όρους της δεξιάς πλευράς της εξίσωσης. Ο όρος adt υποδηλώνει ότι το x έχει αναμενόμενο ποσοστό μεταβολής a ανά μονάδα χρόνου. Χωρίς τον όρο bdz η εξίσωση $dx = adt$ υποδηλώνει ότι $dx/dt = a$ και ολοκληρώνοντας ως προς το χρόνο προκύπτει :

$$x = x_0 + at,$$

όπου x_0 είναι η τιμή του x σε μηδενικό χρόνο. Για μία περίοδο χρόνου T, η μεταβλητή x αυξάνεται κατά το ποσό aT. Ο όρος bdz μπορεί να θεωρηθεί ως η προσθήκη θορύβου ή μεταβλητότητας στο μονοπάτι που ακολουθεί η μεταβλητή. Το ποσό αυτού του θορύβου ή της μεταβλητότητας είναι b φορές μια διαδικασία Wiener. Μία διαδικασία Wiener έχει μεταβλητότητα 1. Επομένως b φορές μια διαδικασία Wiener έχει μεταβλητότητα b για μικρά διαστήματα Δt και η μεταβολή Δx δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t},$$

όπου όπως και προηγουμένως το ε ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή. Συνεπώς το Δx ακολουθεί κανονική κατανομή με :

- μέση τιμή του $\Delta x = a\Delta t,$
- τυπική απόκλιση του
  $\Delta x = b\sqrt{\Delta t},$
- διασπορά του $\Delta x = b^2\Delta t.$

Με παρόμοια επιχειρήματα με αυτά που χρησιμοποιήθηκαν για τη διαδικασία Wiener φαίνεται ότι η μεταβολή στην τιμή του x σε χρονικό διάστημα T είναι κανονικά κατανεμημένη με :

- μέση τιμή του $\Delta x = aT$,
- τυπική απόκλιση του $\Delta x = \mathrm{b}\sqrt{T}$,
- διασπορά του $\Delta x = \mathrm{b}^2 T$.

Κατά συνέπεια η γενικευμένη διαδικασία Wiener της εξίσωσης (2.3) έχει ποσοστό μεταβολής a και ποσοστό διασποράς b^2.

2.1.3.3. Διαδικασία Ito

Είναι δυνατόν να οριστεί ακόμη ένας τύπος στοχαστικής διαδικασίας γνωστός ως διαδικασία Ito. Η διαδικασία Ito είναι και αυτή μία γενικευμένη διαδικασία Wiener της οποίας όμως οι παράμετροι a και b είναι συναρτήσεις των υποκείμενων μεταβλητών x και t . Μια διαδικασία Ito μπορεί να εκφρασθεί αλγεβρικά ως εξής :

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz.$$

Τόσο το ποσοστό μεταβολής όσο και το ποσοστό διασποράς μίας διαδικασίας Ito μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου. Για ένα μικρό χρονικό διάστημα μεταξύ t και $t + \Delta t$ η μεταβλητή μεταβάλλεται από x σε $x + \Delta x$, όπου :

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}.$$

Η παραπάνω σχέση εμπεριέχει μία μικρή προσέγγιση . Γίνεται η υπόθεση ότι τα ποσοστά μεταβολής και διασποράς του x παραμένουν σταθερά στο χρονικό διάστημα μεταξύ $t + \Delta t$.

2.1.4. Διαδικασία για την Τιμή Μετοχής

Θα ήταν δελεαστική η πρόταση να χρησιμοποιηθεί η γενικευμένη διαδικασία Wiener για την τιμή μετοχών καθώς τα ποσοστά διασποράς και μεταβολής είναι σταθερά. Δυστυχώς όμως αυτό το μοντέλο αποτυγχάνει καθώς το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους που απαιτούν οι επενδυτές από μία μετοχή είναι ανεξάρτητο από την τιμή της μετοχής. Δηλαδή αν οι επενδυτές απαιτούν 14% ετήσιο κέρδος όταν η τιμή της μετοχής είναι $10 , τότε θα ζητούν το ίδιο ποσοστό και όταν η τιμή της μετοχής θα είναι $50.

Προφανώς η υπόθεση για σταθερά ποσοστά μεταβολής και διασποράς είναι ακατάλληλη και πρέπει να αντικατασταθεί από την υπόθεση σταθερού ποσοστού κέρδους. Δηλαδή αν S είναι η τιμή της μετοχής σε χρόνο t τότε το αναμενόμενο ποσοστό μεταβολής του S μπορεί να θεωρηθεί ίσο με μS για κάποια σταθερή παράμετρο μ. Αυτό σημαίνει ότι για ένα μικρό διάστημα Δt το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους είναι $\mu S \Delta t$. Η παράμετρος μ αποτελεί το αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης της μετοχής, εκφρασμένο σε δεκαδική μορφή. Εάν η μεταβλητότητα της μετοχής είναι πάντα μηδενική, τότε το μοντέλο υποδηλώνει ότι :

$$\Delta S = \mu S \Delta t.$$

Στο όριο καθώς το $\Delta t \to 0$

$$dS = \mu S dt \Leftrightarrow \frac{dS}{S} = \mu dt.$$

Ολοκληρώνοντας στο χρόνο από 0 μέχρι Τ προκύπτει :

$$S_T = S_0 e^{\mu \mathrm{T}}, \quad (2.4)$$

όπου S_0 και S_T είναι οι τιμές της μετοχής για χρόνο 0 και Τ . Η εξίσωση (2.4) δείχνει ότι το ποσοστό μεταβλητότητας της ποσοστιαίας απόδοσης για κάποιο μικρό χρονικό διάστημα Δt είναι το ίδιο ανεξαρτήτως της τιμής της μετοχής.

Κατά αναλογία, η τυπική απόκλιση της μεταβολής της τιμής της μετοχής για ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt θα πρέπει να είναι ανάλογη της τιμής της μετοχής , έτσι προκύπτει το μοντέλο:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \Leftrightarrow \frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz. \quad (2.5)$$

Η εξίσωση αυτή αποτελεί το πιο διαδεδομένο και ευρέως χρησιμοποιούμενο μοντέλο ανάλυσης συμπεριφοράς της τιμής μετοχών. Η μεταβλητή μ εκφράζει το αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης της μετοχής.

Μοντέλο Διακριτού Χρόνου

Το μοντέλο ανάλυσης της συμπεριφοράς της τιμής μετοχών που αναπτύχθηκε παραπάνω είναι γνωστό ως *Γεωμετρική Κίνηση Brown* . Η εκδοχή διακριτού χρόνου για το μοντέλο αυτό είναι η εξής :

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t} \Leftrightarrow \frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}. \quad (2.6)$$

Η μεταβλητή ΔS εκφράζει τη μεταβολή στην τιμή της μετοχής S, για μικρό χρονικό διάστημα Δt, ενώ το ε ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή. Η παράμετρος μ εκφράζει το ποσοστό απόδοσης της μετοχής ανά μονάδα χρόνου και η παράμετρος σ είναι η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής. Για τη συνέχεια θέτουμε ότι οι παράμετροι αυτές είναι σταθερές. Το αριστερό μέρος της εξίσωσης (2.6) εκφράζει την απόδοση της μετοχής για μικρό χρονικό διάστημα Δt. Ο όρος $\mu\Delta t$ είναι η αναμενόμενη αξία της απόδοσης αυτής και ο όρος $\sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$ αποτελεί το στοχαστικό όρο της απόδοσης. Η διασπορά του στοχαστικού αυτού όρου και επομένως της απόδοσης είναι $\sigma^2\Delta t$. Η εξίσωση (2.6) δείχνει ότι το $\Delta S / S$ είναι κανονικά κατανεμημένο με μέσο $\mu\Delta t$ και τυπική απόκλιση $\sigma\sqrt{\Delta t}$.

2.1.5. Παράμετροι

Το παραπάνω μοντέλο χρησιμοποιεί δύο βασικές παραμέτρους, το μ και το σ. Η παράμετρος μ είναι η συνεχόμενη σύνθετη απόδοση που κερδίζει ένας επενδυτής ανά έτος. Οι περισσότεροι επενδυτές απαιτούν υψηλότερη αναμενόμενη απόδοση ώστε να επιτύχουν υψηλότερο ρίσκο. Συνεπώς η τιμή του μ θα πρέπει να εξαρτάται από το ρίσκο που εμπεριέχει η απόδοση της μετοχής αλλά και από τα επίπεδα των επιτοκίων. Όσο υψηλότερα είναι τα επιτόκια τόσο μεγαλύτερη είναι η αναμενόμενη απόδοση για οποιαδήποτε μετοχή. Όσον αφορά όμως τα παράγωγα , το μ δεν παίζει σημαντικό ρόλο καθώς η τιμή ενός παραγώγου σε κάποια μετοχή γενικά είναι ανεξάρτητη του μ. Η παράμετρος σ, η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής, είναι αντιθέτως πολύ καθοριστική στην αποτίμηση παραγώγων.

2.1.6. Το Λήμμα του Ito (Ito's Lemma)

Η τιμή ενός δικαιώματος σε μετοχή είναι συνάρτηση της τιμής της υποκείμενης μετοχής και του χρόνου. Γενικότερα η τιμή οποιουδήποτε παραγώγου αποτελεί συνάρτηση των στοχαστικών μεταβλητών της τιμής του υποκείμενου τίτλου και του χρόνου.

Υποθέτουμε ότι η τιμή της μεταβλητής x ακολουθεί μία διαδικασία Ito :

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz, \qquad (2.7)$$

όπου dz είναι μία διαδικασία Wiener και τα a και b αποτελούν συναρτήσεις του x και του t. Η μεταβλητή x έχει ποσοστό μεταβολής a και ποσοστό διασποράς b^2. Το λήμμα του Ito δείχνει ότι η συνάρτηση $G(x,t)$ ακολουθεί τη διαδικασία :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2 \right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz. \qquad (2.8)$$

Συνεπώς η $G(x,t)$ επίσης ακολουθεί διαδικασία Ito , με ποσοστό μεταβολής :

$$\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2,$$

και ποσοστό διασποράς:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 b^2.$$

Προηγουμένως αναφέρθηκε ότι η εξίσωση (2.5) με τα μ και σ σταθερά αποτελεί ένα μοντέλο της κίνησης της τιμής οποιασδήποτε μετοχής. Από το λήμμα του Ito συνεπάγεται ότι η διαδικασία που ακολουθείται από μία συνάρτηση $G(S,t)$ είναι :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S dz. \quad (2.9)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι τόσο το G όσο και το S επηρεάζονται από την ίδια πηγή αβεβαιότητας dz .

2.1.7. Λογαριθμοκανονική Ιδιότητα των Τιμών των Μετοχών.

Με τη χρήση του λήμματος Ito μπορεί να προκύψει η διαδικασία που ακολουθείται από το $\ln S$ όταν το S ακολουθεί τη διαδικασία της εξίσωσης (2.5). Ορίζεται:

$$G = \ln S$$

και άρα

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0.$$

Από την εξίσωση (2.9) συνεπάγεται ότι η διαδικασία που ακολουθείται από τη μεταβλητή G είναι

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz. \quad (2.10)$$

Εφόσον τα μ και σ είναι σταθερά η εξίσωση δείχνει ότι η $G = \ln S$ ακολουθεί μία γενικευμένη διαδικασία Wiener που έχει σταθερό ποσοστό μεταβολής $\mu - \sigma^2/2$ και σταθερό ποσοστό διασποράς σ^2. Συνεπώς η μεταβολή του $\ln S$ στο χρονικό διάστημα από 0 μέχρι T είναι κατανεμημένη κανονικά με μέση τιμή $\left(\mu - \sigma^2/2\right)\mathrm{T}$ και διασπορά σ^2. Αυτό σημαίνει ότι

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \varphi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{\mathrm{T}}\right]$$

ή

$$\ln S_T \sim \varphi\left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{\mathrm{T}}\right] \quad (2.11)$$

όπου S_T είναι η τιμή της μετοχής σε χρόνο T , S_0 είναι η τιμή της μετοχής σε χρόνο μηδέν και $\varphi(m,s)$ συμβολίζει την κανονική κατανομή με μέση τιμή m και τυπική απόκλιση s.Η εξίσωση (2.11) δείχνει ότι το $\ln S$ είναι κανονικά κατανεμημένο.

Μία μεταβλητή έχει λογαριθμοκανονική κατανομή όταν ο φυσικός λογάριθμος της μεταβλητής είναι κανονικά κατανεμημένος . Το μοντέλο συμπεριφοράς της τιμής της μετοχής υποδηλώνει ότι η τιμή της μετοχής σε χρόνο T , δεδομένης της τιμής της σήμερα , είναι λογαριθμοκανονικά κατανεμημένη . Η τυπική απόκλιση του λογαρίθμου της τιμής της μετοχής είναι $\sigma\sqrt{T}$ και είναι ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας του πόσο μακριά στο χρόνο γίνεται η ανάλυση της.

2.2. Το Μοντέλο Black-Scholes-Merton

2.2.1. Η Κατανομή του Ποσοστού Απόδοσης

Η λογαριθμοκανονική ιδιότητα των τιμών των μετοχών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη λήψη πληροφοριών σχετικά με την κατανομή πιθανότητας του ποσοστού απόδοσης, μιας που η τελευταία αποκομίζεται από μια μετοχή στο χρονικό διάστημα από 0 έως T. Ορίζοντας το ποσοστό απόδοσης της μετοχής ως x προκύπτει:

$$S_T = S_0 e^{xT},$$

$$x = \frac{1}{T}\ln\frac{S_T}{S_0}. \quad (2.12)$$

Από την εξίσωση (2.11) προκύπτει ότι:

$$x \sim \varphi\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{T}}}\right). \quad (2.13)$$

Συνεπώς το ποσοστό απόδοσης ανά έτος ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu - \sigma^2 / 2$ και τυπική απόκλιση $\sigma / \sqrt{\mathrm{T}}$. Καθώς το Τ αυξάνεται η τυπική απόκλιση του x μειώνεται.

2.2.2. Απαραίτητες Υποθέσεις

Οι υποθέσεις οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν για την παραγωγή της διαφορικής εξίσωσης Black-Scholes-Merton είναι:

1. Η τιμή της μετοχής ακολουθεί τη διαδικασία που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο με τα μ και σ σταθερά.
2. Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών και φόροι.
3. Δεν αποκόπτονται μερίσματα κατά τη διάρκεια ισχύος του παραγώγου.
4. Δεν υπάρχουν ευκαιρίες κερδοσκοπίας.
5. Οι συναλλαγές αξιογράφων είναι συνεχείς.
6. Το χωρίς ρίσκο επιτόκιο είναι σταθερό.

2.2.3. Παραγωγή της Διαφορικής Εξίσωσης Black-Scholes-Merton

Υποθέτουμε ότι f είναι η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς εξαρτώμενο από την τιμή S ενός υποκείμενου τίτλου. Η μεταβλητή f θα πρέπει να είναι συνάρτηση των S και t . Συνεπώς από την εξίσωση (2.9) προκύπτει :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz. \quad (2.14)$$

Σε διακριτή μορφή η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta z, \quad (2.15).$$

όπου ΔS και Δf είναι οι μεταβολές των S και f για μικρό χρονικό διάστημα Δt και $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$.

Συνεπώς επιλέγοντας ένα χαρτοφυλάκιο με μετοχές και το δικαίωμα προαίρεσης , η διαδικασία Wiener μπορεί να παραλειφθεί. Το κατάλληλο χαρτοφυλάκιο είναι το εξής :

- -1 : δικαίωμα προαίρεσης
- $+\partial f \,/\, \partial S$: μετοχές

Ο κάτοχος του χαρτοφυλακίου έχει θέση πώλησης (short) στο δικαίωμα και θέση αγοράς (long) στις μετοχές. Ορίζεται ως Π η αξία του χαρτοφυλακίου. Εξ ορισμού ισχύει :

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S}S. \quad (2.16)$$

Η μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου $\Delta\Pi$ σε χρονικό διάστημα Δt είναι

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S. \quad (2.17)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.18) και (2.19) στην (2.21) προκύπτει :

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right)\Delta t. \quad (2.18)$$

Αφού η εξίσωση δεν περιλαμβάνει τον όρο Δz, το χαρτοφυλάκιο είναι μηδενικού κινδύνου στο χρονικό διάστημα Δt. Με βάση τις υποθέσεις που αναφέρθηκαν, το χαρτοφυλάκιο θα πρέπει να παρουσιάζει στιγμιαία το ίδιο ποσοστό απόδοσης με οποιοδήποτε άλλο αξιόγραφο χωρίς κίνδυνο. Εάν αυτό το ποσοστό απόδοσης είναι μεγαλύτερο , οι κερδοσκόποι θα μπορούσαν εύκολα να αποκομίσουν κέρδος χωρίς κίνδυνο δανειζόμενοι χρήματα και αγοράζοντας το χαρτοφυλάκιο. Εάν η απόδοση είναι μικρότερη τότε αποκομίζουν κέρδος λαμβάνοντας θέση πώλησης στο χαρτοφυλάκιο και αγοράζοντας τα ακίνδυνα αξιόγραφα. Συνεπώς :

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t, \quad (2.19)$$

όπου r το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο. Αντικαθιστώντας από τις εξισώσεις (2.16) και (2.18) στην (2.19) προκύπτει:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(f - \frac{\partial f}{\partial S}S\right)\Delta t$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = rf. \quad (2.20)$$

Η εξίσωση (2.20) αποτελεί την διαφορική εξίσωση Black-Scholes-Merton. Η εξίσωση αυτή έχει πολλές λύσεις για κάθε παράγωγο το οποίο μπορεί να εξαρτάται από το S ως υποκείμενη αξία. Συγκεκριμένα για τα δικαιώματα προαίρεση η λύση εξαρτάται από τις οριακές συνθήκες που υπάρχουν και οι οποίες είναι :

- για δικαιώματα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου

$$f = \max\{S_T - K, 0\},$$

- για δικαιώματα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου

$$f = \max\{K - S_T, 0\},$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Η Ολοκλήρωση Monte Carlo και Η Παραγωγή των Τυχαίων Αριθμών

3.1. Η Ολοκλήρωση Monte Carlo

Το ορισμένο ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης είναι ένας αριθμός και ο υπολογισμός του είναι ένα ντετερμινιστικό πρόβλημα που δεν εμπεριέχει τυχαιότητα. Ωστόσο, μπορούμε να θέσουμε το πρόβλημα αυτό σε ένα στοχαστικό πλαίσιο ερμηνεύοντας το ολοκλήρωμα ως μία αναμενόμενη τιμή. Έστω ένα ολοκλήρωμα στο μοναδιαίο διάστημα $[0,1]$:

$$I = \int_0^1 g(x)dx. \quad (3.1)$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα αυτό σαν μία αναμενόμενη τιμή $E(g(U))$, όπου U είναι ομοιόμορφη τυχαία παρατήρηση που ανήκει στο διάστημα $(0,1)$. Μπορούμε να εκτιμήσουμε την αναμενόμενη τιμή από το δειγματικό μέσο. Αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι να παράγουμε μία ακολουθία $\{U_i\}$ από ανεξάρτητες τυχαίες παρατηρήσεις από την ομοιόμορφη κατανομή και μετά να εκτιμήσουμε τον δειγματικό μέσο:

$$\hat{I}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} g(U_i). \quad (3.2)$$

Ο Νόμος των Μεγάλων Αριθμών το εμπεριέχει αυτό, με πιθανότητα 1, δηλαδή:

$$\lim_{m\to\infty} \hat{I}_m = I. \quad (3.3)$$

Η τυχαία δειγματοληψία , από όπου προέρχεται η μέθοδος Monte Carlo, δεν είναι στην πραγματικότητα εφικτή μέσω ηλεκτρονικού υπολογιστή, αλλά μπορούμε να παράγουμε ακολουθίες ψευδοτυχαίων αριθμών χρησιμοποιώντας γεννήτορες που παρέχονται από διάφορες γλώσσες προγραμματισμού.

Γενικά, αν έχουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής:

$$I = \int_A \phi(x)dx, \quad (3.4)$$

όπου $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^n$, μπορούμε να εκτιμήσουμε την I με τυχαία δειγματοληψία μίας ακολουθίας σημείων $x^i \in \mathrm{A}, i = 1,...,m$ και μετά να κατασκευάσουμε τον εκτιμητή

$$\hat{I}_m = \frac{vol(\mathrm{A})}{m} \sum_{i=1}^{m} \phi(x_i). \quad (3.5)$$

Το μέγεθος $vol(\mathrm{A})$ συμβολίζει τον όγκο της περιοχής A. Για να κατανοήσουμε τον τύπο θα πρέπει να σκεφτούμε ότι το $(1/m)\sum_{i=1}^{m}\phi(x_i)$ εκτιμά τη μέση τιμή της συνάρτησης, η οποία πολλαπλασιάζεται με τον όγκο της περιοχής ολοκλήρωσης έτσι ώστε να πάρουμε το ολοκλήρωμα.

Πρακτικά θα χρειαστεί να ολοκληρώσουμε στο μοναδιαίο υπερκύβο, δηλαδή:

$$\mathrm{A} = \left[0,1\right] \times \left[0,1\right] \times ... \left[0,1\right],$$

Δηλαδή ο όγκος είναι $vol(\mathrm{A}) = 1$. Γενικά, αν έχουμε ένα διάνυσμα τυχαίων μεταβλητών τέτοιο ώστε

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x_1, \ldots, x_n)$, θα χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση Monte Carlo για να εκτιμήσουμε την αναμενόμενη τιμή μίας αυθαίρετης συνάρτησης του X:

$$E\left(g\left(X\right)\right)=\int\int\ldots\int g\left(x_1,\ldots,x_n\right)f\left(x_1,\ldots,x_n\right)dx_1\ldots dx_n. \qquad (3.6)$$

Η γλώσσα προγραμματισμού Matlab μας παρέχει αρκετές συναρτήσεις ώστε να παράγουμε τυχαίες παρατηρήσεις, αλλά η αρχική παρατήρηση εισόδου είναι πάντα ένα διάνυσμα τυχαίων αριθμών από την ομοιόμορφη κατανομή $U_i \sim U\left(0,1\right)$.

Εφαρμογή. Γνωρίζουμε ότι η τιμή ενός απλού δικαιώματος ευρωπαϊκού τύπου είναι η αναμενόμενη τιμή, στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου, της προεξοφλημένης τιμής στην λήξη:

$$f = e^{-rT}\hat{E}(f_T), \qquad (3.7)$$

όπου f_T είναι η τιμή του δικαιώματος στην λήξη T. Ο συμβολισμός $\hat{E}(\bullet)$ χρησιμοποιείται για να δώσει έμφαση στο ότι η αναμενόμενη τιμή λαμβάνεται με βάση το μέτρο του ουδέτερου κινδύνου. Εάν υποθέσουμε ότι η τιμή της μετοχής ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown, αυτό σημαίνει ότι η τάση μ θα πρέπει να αντικατασταθεί με το επιτόκιο ουδέτερου κινδύνου r. Αναλόγως το είδος του δικαιώματος, θα χρειαστεί να παράγουμε είτε ολόκληρα μονοπάτια είτε απλά την τιμή της μετοχής στην λήξη. Ένα απλό ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς απαιτεί να δημιουργήσουμε το δείγμα των τιμών του δικαιώματος στην λήξη

$$\max\left\{S(T)-K,0\right\}, \qquad (3.8)$$

όπου $S(T)$ είναι η τιμή του υποκείμενου τίτλου στην λήξη και K η τιμή εξάσκησης. Από την στιγμή που η τιμή της μετοχής ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown έχουμε

$$f_T = \max\left\{0, S\left(0\right)e^{((r-\sigma^2/2)\mathrm{T}+\sigma\sqrt{\mathrm{T}}\varepsilon} - \mathrm{K}\right\} \qquad (3.9)$$

με $\varepsilon \sim \mathrm{N}(0,1)$. Ο κώδικας της Matlab για την τιμολόγηση ενός δικαιώματος αγοράς με την μέθοδο Monte Carlo είναι :

```
function Price=BlsMC1(S0,K,r,T,sigma,NRepl)
nuT=(r-sigma^2)*T;
siT=sigma*sqrt(T);
DiscPayoff=exp(-r*T)*max(0,S0*exp(nuT+siT*randn(NRepl,1))-K);
Price=mean(DiscPayoff);
```

3.2. Η Μέθοδος Αντίστροφου Μετασχηματισμού

Υποθέτουμε ότι δίνεται η συνάρτηση κατανομής $F(x)=P\{X\leq x\}$, και ότι θέλουμε να παράγουμε τυχαίες παρατηρήσεις από τη συνάρτηση αυτή. Εάν μπορούμε να αντιστρέψουμε την F εύκολα, τότε εφαρμόζουμε την παρακάτω μέθοδο αντίστροφου μετασχηματισμού:

1. Παίρνουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$.
2. Δημιουργούμε μία νέα μεταβλητή X που ορίζεται ως εξής $X=F^{-1}(U)$.

Γίνεται εύκολα κατανοητό ότι η τυχαία μεταβλητή X που παράγεται με αυτή την μέθοδο, στην πραγματικότητα χαρακτηρίζεται από τη συνάρτηση κατανομής F:

$$P\{X\leq x\}=P\{F^{-1}(U)\leq x\}=P\{U\leq F(x)\}=F(x). \quad (3.11)$$

Εφαρμόσαμε τη μονοτονία της συνάρτησης F και το γεγονός ότι η U κατανέμεται ομοιόμορφα.

Παράδειγμα. Μία τυπική κατανομή που προσομοιώνεται εύκολα με τη μέθοδο του αντίστροφου μετασχηματισμού είναι η εκθετική κατανομή. Αν $X \sim \exp(\mu)$, όπου $1/\mu$ είναι η αναμενόμενη τιμή της X, η συνάρτηση κατανομής είναι :

$$F(x)=1-e^{-\mu x}. \quad (3.12)$$

Με άμεση εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού έχουμε:

$$X = \frac{1}{\mu}\ln(1-U). \qquad (3.13)$$

Από τη στιγμή που οι κατανομές U και $(1-U)$ είναι στην πραγματικότητα ίδιες, μπορούμε να παράγουμε εκθετικές παρατηρήσεις παίρνοντας έναν τυχαίο αριθμό U και μετατρέποντας τον σε $X = -\ln(U)/\mu$.

3.3. Η Μέθοδος Αποδοχής - Απόρριψης

Η μέθοδος του αντίστροφου μετασχηματισμού δεν είναι ελκυστική όταν είναι δύσκολο να αντιστρέψουμε μία συνάρτηση πιθανότητας $f(x)$. Σε αυτό το σημείο υποθέτουμε την συνάρτηση $t(x)$ τέτοια ώστε

$$t(x) \geq f(x),\ \forall x \in I.$$

Η συνάρτηση $t(x)$ δεν είναι συνάρτηση πιθανότητας, ωστόσο η συνάρτηση $r(x) = t(x)/c$ είναι όπου:

$$c = \int_I t(x)dx. \qquad (3.14)$$

Αν η συνάρτηση κατανομής $r(x)$ μπορεί εύκολα να προσομοιωθεί, τότε αυτή η τεχνική μπορεί να εφαρμοσθεί για να παράγουμε μία τυχαία μεταβλητή X σύμφωνα με την κατανομή της $f(x)$:

1. Παράγουμε $Y \sim r$.
2. Παράγουμε $U \sim U(0,1)$, ανεξάρτητες από τις Y.
3. Αν $U \leq f(Y)/t(Y)$, τότε $X = Y$, αλλιώς απορρίπτεται και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

3.4. Η Μέθοδος Box - Muller

Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, έστω ότι έχουμε δύο ανεξάρτητες μεταβλητές $X, Y \sim N(0,1)$ και τις πολικές συντεταγμένες (R,θ) του σημείου των καρτεσιανών συντεταγμένων (X,Y) στο επίπεδο, τέτοιο ώστε:

$$d = R^2 = X^2 + Y^2, \ \theta = \tan^{-1} Y / X \qquad (3.15).$$

Η συνάρτηση πυκνότητας για τις X και Y είναι:

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} = \frac{1}{2\pi} e^{-d/2}. \qquad (3.16)$$

Η τελευταία έκφραση μοιάζει με προϊόν εκθετικής συνάρτησης πυκνότητας για το d. Ο όρος $1/2\pi$ ερμηνεύεται ως μία ομοιόμορφη κατανομή για την γωνία $\theta \in (0, 2\pi)$. Ωστόσο μας λείπει κάποιος σταθερός όρος ώστε να έχουμε εκθετική πυκνότητα. Για να εκφράσουμε αυτή την πυκνότητα σε όρους του (d,θ), θα πρέπει να λάβουμε υπόψη την μετατροπή από (x, y) σε (d,θ). Μετά από υπολογισμούς έχουμε:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial d}{\partial x} & \frac{\partial d}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{vmatrix} = 2,$$

και η μετασχηματισμένη συνάρτηση πυκνότητας είναι

$$f(d,\theta) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi} e^{-d/2}. \qquad (3.17)$$

Συνεπώς, μπορούμε να παράγουμε την R^2 σαν εκθετική μεταβλητή με μέσο 2 και την θ ως μία ομοιόμορφα κατανεμημένη γωνία, και μετά τις μετατρέπουμε ξανά σε

Καρτεσιανές συντεταγμένες ώστε να πάρουμε 2 ανεξάρτητες παρατηρήσεις από την κανονική κατανομή. Ο αλγόριθμος Box-Muller μπορεί να εφαρμοσθεί ως ακολούθως:

1. Παράγουμε δύο ανεξάρτητες ομοιόμορφες μεταβλητές $U_1, U_2 \sim U(0,1)$.
2. Ορίζουμε $R^2 = -2\log U_1$ και $\theta = 2\pi U_2$.
3. Επίσης ορίζουμε $X = R\cos\theta$ και $Y = R\sin\theta$.

Πρακτικά, αυτός ο αλγόριθμος μπορεί να βελτιωθεί αποφεύγοντας τη χρονοβόρα εκτίμηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, συμπληρώνοντας την προσέγγιση Box-Muller με τη μέθοδο της απόρριψης. Δηλαδή:

1. Παράγουμε δύο ανεξάρτητες ομοιόμορφες μεταβλητές $U_1, U_2 \sim U(0,1)$.
2. Ορίζουμε $V_1 = 2U_1 - 1,\ V_2 = 2U_2 - 1,\ S = V_1^2 + V_2^2$.
3. Αν $S \geq 1$, τότε γυρνάμε στο βήμα 1, αλλιώς, οι ανεξάρτητες μεταβλητές από την κανονική κατανομή είναι:

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{-2\ln U_1}\cos(2\pi U_2) \\ Y &= \sqrt{-2\ln U_1}\sin(2\pi U_2). \end{aligned} \qquad (3.18)$$

3.5. Θέτοντας το Πλήθος των Επαναλήψεων

Η διεξαγωγή της προσομοίωσης Monte Carlo προϋποθέτει την παραγωγή του δείγματος που μας ενδιαφέρει και στη συνέχεια την εκτίμηση των σχετικών παραμέτρων. Θα περίμενε κανείς ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός του δείγματος ή των επαναλήψεων τόσο καλύτερη θα είναι η ποιότητα των εκτιμήσεων. Δοθέντος μίας ακολουθίας ανεξάρτητων μεταβλητών X_i που προέρχονται από την ίδια υποκείμενη κατανομή, μπορούμε να κατασκευάσουμε τον δειγματικό μέσο:

$$\bar{X}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Όπου $\bar{X}(n)$ είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής της παραμέτρου $\mu = E(X_i)$ ενώ η δειγματική διακύμανση είναι:

$$S^2(n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}(n))^2..$$

Θα προσπαθήσουμε να ποσοτικοποιήσουμε την ποιότητα του εκτιμητή μας λαμβάνοντας υπόψη την αναμενόμενη τιμή του τετραγωνικού σφάλματος της εκτίμησης:

$$E\left(\left(\bar{X}(n)-\mu\right)^2\right) = Var\left(\bar{X}(n)\right) = \frac{Var(X_i)}{n},$$

Είναι σαφές ότι αυξάνοντας τον αριθμό των n επαναλήψεων η εκτίμηση μας βελτιώνεται. Το θέμα όμως είναι το πώς θα θέσουμε τον αριθμό n.

Το διάστημα εμπιστοσύνης για τον πληθυσμιακό μέσο μ με συντελεστή εμπιστοσύνης $(1-\alpha)$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\bar{X}(n) \pm z_{1-a/2}\sqrt{S^2(n)/n}, \quad (3.19)$$

όπου $z_{1-a/2}$ είναι το ποσοστιμόριο της τυποποιημένης κανονικής κατανομής που αντιστοιχεί σε πιθανότητα $(1-\alpha)$. Η προσέγγιση θα είναι καλή με την προϋπόθεση ότι το n θα είναι αρκετά μεγάλο διότι και το $\bar{X}(n)$ θα είναι περίπου η μέση τιμή της κανονικής κατανομής (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα) και διότι το ποσοστιμόριο $t_{n-1,1-a/2}$ από την κατανομή t με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας θα τείνει στο z_{1-a}.

Έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε το ακριβές σφάλμα με τέτοιο τρόπο ώστε, με πιθανότητα $(1-\alpha)$, να έχουμε:

$$|\bar{X}(n)-\mu| \le \beta.$$

Αλλά το διάστημα εμπιστοσύνης (3.19) έχει κατασκευαστεί με τέτοιο τρόπο ώστε

$$P\left\{\bar{X}(n)-H \le \mu \le \bar{X}(n)+H\right\} \approx 1-a,$$

όπου H:

$$H = z_{1-a/2}\sqrt{S^2(n)/n}.$$

Αυτό σημαίνει ότι με πιθανότητα $(1-\alpha)$ έχουμε:

$$\left|\bar{X}(n)-\mu\right| \le H.$$

Συνεπώς, συνδέοντας το H με το β, μπορούμε να τρέξουμε τόσες επαναλήψεις μέχρι το H να είναι μικρότερο ή και ίσο του β και ο αριθμός n θα πρέπει να ικανοποιεί το εξής:

$$z_{1-a/2}\sqrt{S^2(n)/n} \le \beta. \quad (3.20)$$

Στην πραγματικότητα δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε τη δειγματική διακύμανση $S^2(n)$ μέχρι να ορισθεί ο αριθμός n. Για το λόγο αυτό μπορούμε να τρέξουμε έναν αριθμό πιλοτικών επαναλήψεων ώστε να εκτιμήσουμε το $S^2(n)$. Μετά εφαρμόζουμε την ανισότητα (3.20) χρησιμοποιώντας το $S^2(n)$ ώστε να πάρουμε τον αριθμό n. Αφού τρέξουμε τις n επαναλήψεις θα πρέπει να ελέγξουμε αν ικανοποιείται η ανισότητα με την εκτίμηση της $S^2(n)$. Αν όχι, μπορούμε απλά να προσθέσουμε επαναλήψεις, αλλάζοντας τη δειγματική διακύμανση, μέχρις ότου να ικανοποιείται το κριτήριο. Ωστόσο με αυτή την προσέγγιση δε μπορούμε να ελέγξουμε το μέγεθος των υπολογισμών που απαιτούνται.

Αν μας ενδιαφέρει να ελέγξουμε το σχετικό σφάλμα, έτσι ώστε η σχέση

$$\frac{\left|\bar{X}(n)-\mu\right|}{|\mu|} \le \gamma$$

να έχει πιθανότητα $(1-\alpha)$, η κατάσταση περιπλέκεται. Η δυσκολία είναι ότι θα πρέπει να τρέξουμε επαναλήψεις μέχρις ότου το H να ικανοποιεί το εξής:

$$\frac{H}{\left|\bar{X}(n)\right|} \leq \gamma .$$

Αλλά σε αυτήν την ανισότητα χρησιμοποιείται η γνωστή ποσότητα $\bar{X}(n)$ παρά η άγνωστη ποσότητα μ. Παρόλα αυτά, αν ισχύει η παραπάνω ανισότητα τότε μπορούμε έχουμε:

$$\begin{aligned}
1-\alpha &= P\left\{\frac{\left|\bar{X}(n)-\mu\right|}{\left|\bar{X}(n)\right|} \leq \frac{H}{\left|\bar{X}(n)\right|}\right\} \\
&\leq P\left\{\left|\bar{X}(n)-\mu\right| \leq \gamma\left|\bar{X}(n)\right|\right\} \\
&= P\left\{\left|\bar{X}(n)-\mu\right| \leq \gamma\left|\bar{X}(n)-\mu+\mu\right|\right\} \\
&\leq P\left\{\left|\bar{X}(n)-\mu\right| \leq \gamma\left|\bar{X}(n)-\mu\right|+\gamma\,|\,\mu\,|\right\} \qquad (3.21) \\
&= P\left\{\frac{\left|\bar{X}(n)-\mu\right|}{|\,\mu\,|} \leq \frac{\gamma}{1-\gamma}\right\}.
\end{aligned}$$

Η ανισότητα (3.21) προκύπτει από την τριγωνική ανισότητα ενώ η τελευταία ανισότητα προκύπτει με μία μικρή αναδιάταξη. Ως εκ τούτου, το πραγματικό σχετικό σφάλμα που παίρνουμε οριοθετείται από το $\gamma/(1-\gamma)$ το οποίο είναι μεγαλύτερο από το επιθυμητό όριο γ, άρα, θα πρέπει να επιλέξουμε n τέτοιο ώστε να ικανοποιείται το παρακάτω κριτήριο:

$$\frac{z_{1-a/2}\sqrt{S^2(n)/n} \leq \beta}{\left|\bar{X}(n)\right|} \leq \gamma' \qquad (3.22)$$

όπου

$$\gamma' = \frac{\gamma}{1+\gamma} < \gamma.$$

Ξανά, θα πρέπει να τρέξουμε μερικές πιλοτικές επαναλήψεις για να πάρουμε την δειγματική διακύμανση $S^2(n)$.

Παράδειγμα. Μπορούμε να επεκτείνουμε τον κώδικα για την τιμολόγηση ενός απλού δικαιώματος αγοράς έτσι ώστε να υπολογίσουμε τα διαστήματα εμπιστοσύνης της τιμής. Δηλαδή:

```
function[Price,CI]=BlsMC2(S0,K,r,T,sigma,NRepl)
nuT=(r-0.5*sigma^2)*T;
siT=sigma*sqrt(T);
DiscPayoff=exp(-r*T)*max(0,S0*exp(siT*randn(NRepl,1)+nuT)-K);
[Price,VarPrice,CI]=normfit(DiscPayoff);
```

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι από την τελευταία γραμμή του κώδικα θα πρέπει να πάρουμε τρεις μεταβλητές εξόδου από την εντολή **normfit**. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κώδικα **BlsMC2** ώστε να κατανοήσουμε πόσες επαναλήψεις χρειάζονται ώστε να πάρουμε μία αρκετά ακριβή εκτίμηση:

```
>> randn('state',0)
>> S0=50;
>> K=55;
>> r=0.05;
>> T=5/12;
>> sigma=0.2;
>> Call=blsprice(S0,K,r,T,sigma)

Call =

    1.1718
>> [CallMC,CI]=BlsMC2(S0,K,r,T,sigma,50000)

CallMC =
```

```
    1.1873
CI =
    1.1625
    1.2121

>> (CI(2)-CI(1))/CallMC

ans =

    0.0418
```

Παρατηρούμε ότι με δείγμα 50.000 η εκτίμηση μας δεν είναι αρκετά ικανοποιητική, ωστόσο η τιμή του δικαιώματος βρίσκεται μέσα στο διάστημα εμπιστοσύνης. Αν πάρουμε ένα μεγαλύτερο αριθμό επαναλήψεων τότε θα πάρουμε μία αρκετά πιο αξιόπιστη εκτίμηση.

```
>> [CallMC,CI]=BlsMC2(S0,K,r,T,sigma,1000000)

CallMC =

    1.1692

CI =
1.1637
1.1747

>> (CI(2)-CI(1))/CallMC

ans =0.0094
```

Από την εξίσωση (3.22) βλέπουμε ότι ο ρυθμός μείωσης του σφάλματος είναι της τάξης $O(1/\sqrt{n})$. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι όσο μεγαλύτερο δείγμα έχουμε τόσο καλύτερη εκτίμηση έχουμε, αλλά ο ρυθμός βελτίωσης βελτιώνεται όλο και πιο αργά όσο προσθέτουμε παρατηρήσεις στο δείγμα. Παρατηρούμε ότι με την απλή προσομοίωση Monte Carlo απαιτείται μεγάλη ποσότητα υπολογισμών ώστε να πάρουμε μια αποδεκτή εκτίμηση. Ένας τρόπος για να βελτιώσουμε αυτό το ζήτημα είναι να ακολουθήσουμε μία έξυπνη στρατηγική για το δείγμα μας ώστε να βελτιώσουμε τη διακύμανση. Ένας άλλος τρόπος είναι να υιοθετήσουμε την προσέγγιση Quasi Monte Carlo.

3.6. Τυχαία Μονοπάτια

3.6.1 Η Δημιουργία Δειγματικού Μονοπατιού

Το σημείο εκκίνησης για την εφαρμογή των μεθόδων Monte Carlo για την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης είναι η δημιουργία δειγματικών μονοπατιών των υποκείμενων τίτλων. Στα απλά δικαιώματα επιλογής δεν υπάρχει ανάγκη για παραγωγή δειγματικού μονοπατιού, αφού μας ενδιαφέρει η τιμή του υποκείμενου τίτλου κατά την λήξη. Υπάρχει όμως η περίπτωση το δικαίωμα να εξαρτάται από το δειγματικό μονοπάτι, είτε ολόκληρη την διαδρομή του μονοπατιού είτε τουλάχιστον μία ακολουθία τιμών σε δεδομένες χρονικές στιγμές. Με την Γεωμετρική κίνηση Brown βρισκόμαστε μπροστά σε μία πολύ καλή περίπτωση. Στην πραγματικότητα, θα πρέπει να γίνει κατανοητό ότι έχουμε δύο πιθανές πηγές σφαλμάτων στον τομέα της παραγωγής μονοπατιού.

1. Το δειγματοληπτικό σφάλμα.
2. Το σφάλμα διακριτοποίησης.

Το *δειγματοληπτικό σφάλμα* οφείλεται στην τυχαία φύση των μεθόδων Monte Carlo και μπορεί να περιοριστεί με τη χρήση των στρατηγικών της μείωσης διακύμανσης. Για να κατανοήσουμε το *σφάλμα διακριτοποιήσης* ας εξετάσουμε πως μπορούμε να διακριτοποιήσουμε ένα τυπικό μοντέλο συνεχούς χρόνου, δηλαδή μία στοχαστική διαφορική εξίσωση Ito:

$$dS_t = a(S_t, t)dt + b(S_t, t)dW_t .$$

Η απλούστερη προσέγγιση διακριτοποίησης , γνωστή ως σχήμα Euler, δίνει το εξής μοντέλο διακριτού χρόνου:

$$\delta S = S_{t+\delta t} - S_t = a(S_t, t)\delta t + b(S_t, t)\sqrt{\delta t}\varepsilon,$$

όπου δt είναι το βήμα διακριτοποίησης και $\varepsilon \sim N(0,1)$. Το σχήμα αυτό είναι εννοιολογικά συνδεδεμένο με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών και η εφαρμογή του σε μια ντετερμινιστική διαφορική εξίσωση οδηγεί σε ένα σφάλμα αποκοπής το οποίο είναι αναμφισβήτητα αμελητέο όταν το βήμα διακριτοποίησης είναι μικρό. Η σύγκλιση είναι μία κρίσιμη έννοια στις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις, αφού χειριζόμαστε στοχαστικές διαδικασίες. Με δειγματοληπτικές υλοποιήσεις της τυχαίας μεταβλητής ε από την τυποποιημένη κανονική κατανομή, θα μπορούσαμε να προσομοιώσουμε μία στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου που συνδέεται με τη λύση της εξίσωσης συνεχούς χρόνου. Η αύξηση του αριθμού των μονοπατιών ή των επαναλήψεων είναι ένας ακόμα τρόπος για να μειωθεί το σφάλμα δειγματοληψίας.

Ενώ η παραπάνω συλλογιστική δε μπορεί να δικαιολογηθεί με αυστηρό τρόπο, θα πρέπει να συνειδητοποιήσουμε ότι το σφάλμα διακριτοποίησης μπορεί να μετασχηματίσει ακόμη και τις κατανομές πιθανότητας που χαρακτηρίζουν την λύση. Για παράδειγμα, εξετάζουμε το γεωμετρικό μοντέλο της κίνησης Brown

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \qquad (3.23)$$

Από το σχήμα του Euler προκύπτει ότι :

$$S_{t+\delta t} = (1+\mu\delta t)S_t + \sigma S_t \sqrt{\delta t}\varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0,1).$$

Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα κατανοητό και να εφαρμοστεί, αλλά η οριακή κατανομή για κάθε τιμή $S_t = S(i\delta t)$ είναι κανονική παρά λογαριθμοκανονική. Στην πραγματικότητα επιλέγοντας ένα πολύ μικρό δt ενδεχομένως να μειώναμε το σφάλμα, αλλά αυτό θα ήταν χρονοβόρο. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, μπορούμε να απαλείψουμε εντελώς το σφάλμα διακριτοποίησης απλά εφαρμόζοντας του λήμμα του Ito. Όμως αυτό δεν ισχύει σε γενικές γραμμές. Μπορεί να χρειαστεί να δημιουργήσουμε ολόκληρο το δειγματικό μονοπάτι, με περίπλοκες στοχαστικές διαφορικές διαδικασίες, ακόμη και αν μας ενδιαφέρουν μόνο οι τιμές στη λήξη, απλά για να μειώσουμε το σφάλμα διακριτοποίησης. Στην περίπτωση αυτή είναι σκόπιμο να χρησιμοποιηθούν πιο ευέλικτα σχήματα διακριτοποίησης, που είναι διαθέσιμα στην βιβλιογραφία.

3.6.2 Η Προσομοίωση της Γεωμετρικής Κίνησης Brown.

Εφαρμόζοντας το λήμμα του Ito, η σχέση (3.23) μετασχηματίζεται στην εξής:

$$d\log S_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t .$$

Για να διακριτοποιήσουμε την πορεία των τιμών ενός τίτλου σε ένα διάστημα $[0,T]$ πρέπει να διακριτοποιήσουμε το χρόνο με βήμα δt. Από την τελευταία και υπενθυμίζοντας τις ιδιότητες της διαδικασίας Wiener, όπου θέτουμε $v = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$, έχουμε :

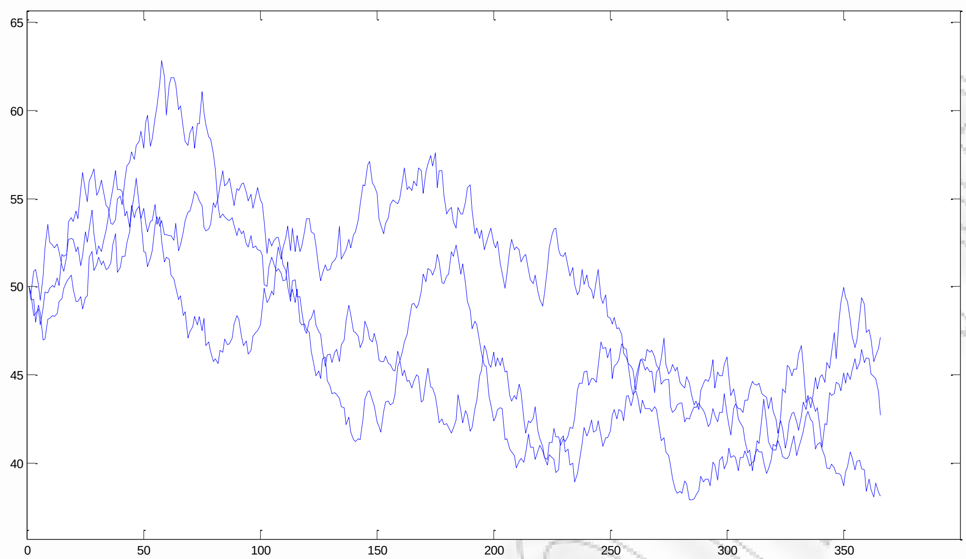
$$S_{t+\delta t} = S_1 \exp(v\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}\varepsilon),\ \varepsilon \sim N(0,1) . \quad (3.24)$$

Με βάση την εξίσωση αυτή είναι εύκολο να παραχθούν δειγματικά μονοπάτια για τη τιμή του υποκείμενου τίτλου. Ένας απλός κώδικας της Matlab για τη δημιουργία δειγματικών μονοπατιών για τις τιμές ενός τίτλου, που ακολουθούν τη Γεωμετρική κίνηση Brown, είναι:

```
function SPaths=AssetPaths(S0,m,T,NSteps,NRepl)
SPaths=zeros(NRepl,1+NSteps);
SPaths(:,1)=S0;
dt=T/NSteps;
nudt=(mu-0.5*sigma^2)*dt;
sidt=sigma*sqrt(dt);
for i=1:NRepl
    for j=1:NSteps
        SPaths(i,j+1)=SPaths(i,j)*exp(nudt+sidt*randn);
    end
end
```

Η συνάρτηση **AssetPaths** οδηγεί σε ένα πίνακα δειγματικών μονοπατιών **SPaths** όπου οι επαναλήψεις αποθηκεύονται ανά γραμμή και οι χρονικές στιγμές ανά στήλη. Η πρώτη στήλη περιέχει την ίδια αρχική τιμή για όλα τα δειγματικά μονοπάτια. Η συνάρτηση έχει μεταβλητές εισόδου την αρχική τιμή S_0, την απόδοση **mu**, τη μεταβλητότητα **sigma**, το χρονικό ορίζοντα **T**, τον αριθμό χρονικών βημάτων **NSteps** και τον αριθμό των δειγματικών μονοπατιών **NRepl**. Για παράδειγμα, δημιουργούμε ένα γράφημα από τρία δειγματικά μονοπάτια ενός χρόνου για έναν τίτλο με αρχική τιμή $50, απόδοση 0.1 και μεταβλητότητα 0.3, έχοντας υποθέτει ότι το χρονικό βήμα είναι μία ημέρα:

```
>> randn('state',0)
>> paths=AssetPaths(50,0.1,0.3,1,365,3);
>> plot(1:length(paths),paths(1,:))
>> hold on
>> plot(1:length(paths),paths(2,:))
>> hold on
>>  plot(1:length(paths),paths(3,:))
```



Το αποτέλεσμα δίνεται από το παραπάνω σχήμα. Αν κανείς ξεκινήσει το γεννήτορα των τυχαίων αριθμών με διαφορετικό seed ‘state’ για τυποποιημένους κανονικούς **`randn`** τότε το αποτέλεσμα αλλάζει.

Ο παραπάνω κώδικας βασίζεται σε δύο ένθετα loop με **`for`**. Μερικές φορές η αποτελεσματικότητα του κώδικα είναι δυνατόν να βελτιωθεί στη Matlab κάνοντας χρήση διανυσμάτων στον κώδικα. Για τη διανυσματοποίηση του κώδικα, η σχέση (3.24) γράφεται ως εξής:

$$\log S_{t+\delta t} - \log S_t = \nu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}\varepsilon\,, \quad \varepsilon \sim N(0,1)\,.$$

Μπορούν λοιπόν να παραχθούν οι διαφορές των λογαριθμικών τιμών των τίτλων και στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση **`cumsum`** με όρισμα το 2, μια προαιρετική παράμετρο προκειμένου να υπολογίσει τα αθροιστικά ποσά πάνω στις γραμμές. Η προκύπτουσα συνάρτηση **`AssetPathsV`** είναι η παρακάτω:

```
function SPaths=AssetPathsV(S0,mu,sigma,T,NSteps,NRepl)
dt=T/NSteps;
nudt=(mu-0.5*sigma^2)*dt;
sidt=sigma*sqrt(dt);
Increments=nudt+sidt*randn(NRepl,NSteps);
LogPaths=cumsum([log(S0)*ones(NRepl,1),Increments],2);
SPaths=exp(LogPaths);
SPaths(:,1)=S0;
```

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην τελευταία γραμμή του κώδικα θέτουμε την αρχική τιμή του τίτλου στα στοιχεία της πρώτης στήλης. Ο λόγος είναι ότι αποφεύγουμε έτσι το παρακάτω σφάλμα το οποίο, αν και φαίνεται αμελητέα ποσότητα, μπορεί να παίξει καθοριστικό ρόλο σε τεχνικές αντιστάθμισης κινδύνου. Μπορούμε επίσης να συγκρίνουμε τις δύο υλοποιήσεις ως προς την ταχύτητα τους:

```
>> format long
>> exp(log(50))
ans =
  49.999999999999993
>>  tic,paths=AssetPaths(50,0.1,0.3,1,100,1000);,toc
Elapsed time is 0.036818 seconds.
>> tic,paths=AssetPathsV(50,0.1,0.3,1,100,1000);,toc
Elapsed time is 0.035468 seconds.
```

Σε αυτή την περίπτωση δε βλέπουμε τα πλεονεκτήματα της διανυσματοποίησης του κώδικα. Θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι ο χρόνος που παρήλθε και επιστρέφεται με τις εντολές tic, toc υπόκειται σε κάποια μεταβλητότητα λόγω των διαδικασιών που εκτελούνται από το λειτουργικό σύστημα. Το θέμα είναι ότι οι βελτιώσεις στο λογισμικό μπορεί να κάνουν ορισμένες πρακτικές προγραμματισμού παρωχημένες.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Οι Μέθοδοι Μείωσης της Διακύμανσης

Είδαμε στην ενότητα 3.5 ότι ένας τρόπος για να βελτιώσουμε την ακρίβεια της εκτίμησης είναι να αυξήσουμε τον αριθμό των επαναλήψεων n, δεδομένου ότι $Var(X(n)) = Var(X_i)/n$. Ωστόσο, αυτή η προσέγγιση απαιτεί μεγάλο όγκο υπολογισμών. Μία εναλλακτική προσέγγιση είναι να μειώσουμε τη διακύμανση του δείγματος X_i. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με διάφορους τρόπους, περισσότερο ή λιγότερο περίπλοκους και αποτελεσματικούς.

4.1. Η μέθοδος της Αντιθετική δειγματοληψίας

Μία πρώτη προσέγγιση που είναι εύκολο να εφαρμοστεί και δεν απαιτεί βαθιά γνώση για το τι προσομοιώνουμε είναι η αντιθετική δειγματοληψία. Στο απλό Monte Carlo παίρνουμε μία ακολουθία από ανεξάρτητα δείγματα. Ωστόσο, το να προκαλέσουμε συσχέτιση με συγκεκριμένο τρόπο κάποιες φορές μπορεί να μας φανεί χρήσιμο. Έστω ότι παίρνουμε δύο δείγματα μεγέθους n:

$$X_1^{(1)}\ X_1^{(1)} \ldots X_i^{(1)} \ldots\ X_n^{(1)},$$
$$X_1^{(2)}\ X_2^{(2)} \ldots\ X_i^{(2)} \ldots X_n^{(2)}.$$

Όλες οι παρατηρήσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους εκτός από τα κατακόρυφα ζευγάρια. Από τα δύο αυτά δείγματα δημιουργούμε ένα τρίτο δείγμα

$$X_1\ X_2\ \ldots X_n,$$

τέτοιο ώστε

$$X_i = \frac{X_i^{(1)} + X_i^{(2)}}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Αν ο μέσος του νέου δείγματος είναι $\bar{X}_n$ τότε η διακύμανση του είναι:

$$Var(\bar{X}_n) = Var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2} nVar(X_i) = \frac{Var(X_i)}{n} = \frac{Var(\frac{X_i^{(1)} + X_i^{(2)}}{2})}{n} =$$

$$= \frac{Var(X_i^{(1)} + X_i^{(2)})}{4n} = \frac{Var(X_i^{(1)}) + Var(X_i^{(2)}) + 2Cov(X_i^{(1)}, X_i^{(2)})}{4n} =$$

$$= \frac{Var(X_i^{(1)}) + Var(X_i^{(2)}) + 2\rho(X_i^{(1)}, X_i^{(2)})\sqrt{Var(X_i^{(1)})}\sqrt{Var(X_i^{(2)})}}{4n} =$$

$$\frac{Var(X_i^{(1)}) + Var(X_i^{(2)}) + 2\rho(X_i^{(1)}, X_i^{(2)})Var(X_i^{(1)})}{4n} = \frac{Var(X_i^{(1)})}{2n}\left[1 + \rho(X_i^{(1)}, X_i^{(2)})\right].$$

Βλέπουμε ότι για να μειώσουμε τη διακύμανση του δειγματικού μέσου θα πρέπει τα ζεύγη $X_i^{(1)}$ και $X_i^{(2)}$ να είναι αρνητικά συσχετισμένα, δηλαδή $\rho(X_i^{(1)}, X_i^{(2)}) < 0$. Για να εισάγουμε αρνητική συσχέτιση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μία ακολουθία τυχαίων ομοιόμορφων αριθμών $\{U_k\}$ για την πρώτη επανάληψη σε κάθε ζευγάρι και μετά $\{1-U_k\}$ για το δεύτερο.

Τώρα έχουμε τη συνάρτηση $h(x)$ τέτοια ώστε:

$$h(x) = \begin{cases} 0, \text{ όταν } x<0, \\ 2x, \text{ όταν } 0 \le x < 0.5, \\ 2-2x, \text{ όταν } 0.5 \le x < 0.5, \\ 0, \text{ όταν } x > 1, \end{cases}$$

Η τελευταία παρατήρηση δεν ισχύει πάντα. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε με Monte Carlo το εξής ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 h(x)dx.$$

Η συνάρτηση που θέλουμε να ολοκληρώσουμε είναι προφανώς ένα τρίγωνο με βάση και ύψος 1. Η συνάρτηση αυτή δεν είναι μονότονη όπως η εκθετική που χρησιμοποιούμε στην προσομοίωση Monte Carlo. Είναι εύκολο να υπολογίσουμε αυτό το ολοκλήρωμα σαν εμβαδό τριγώνου:

$$E(h(U)) = \int_0^1 h(x)dx = \int_0^1 h(u)\cdot 1du = 1/2,$$

Όπου το U ακολουθεί ομοιόμορφη στο [0,1].

$$X_I = \frac{h(U_1)+h(U_2)}{2},$$

όπου U_1 και U_2 είναι ανεξάρτητες ομοιόμορφες παρατηρήσεις, και

$$X_A = \frac{h(U)+h(1-U)}{2}$$

είναι το δείγμα που κατασκευάζεται από την αντιθετική δειγματοληψία. Μπορούμε να συγκρίνουμε τις δύο διακυμάνσεις:

$$Var(X_I) = \frac{Var(h(U))}{2}$$
$$Var(X_A) = \frac{Var(h(U))}{2} + \frac{Cov(h(U),h(1-U))}{2}.$$

Η διαφορά ανάμεσα στις δύο διακυμάνσεις είναι

$$\Delta = Var(X_A) - Var(X_I) = \frac{Cov(h(U),h(1-U))}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{E(h(U)h(1-U)) - E(h(U))E(h(1-U))\right\}.$$

Σε αυτή την περίπτωση, λόγω της μορφής της h, έχουμε

$$E(h(U)) = E(h(1-U)) = 1/2,$$

και

$$E(h(U)h(1-U)) = \int_0^{1/2} 2u\cdot(2-2(1-u)du + \int_{1/2}^{1} 2(1-u)\cdot(2-2u)du$$
$$= \int_0^{1/2} 4u^2 du + \int_{1/2}^{1} (2-2u)^2 du = 1/3.$$

Συνεπώς, $Cov(h(U), h(1-U)) = 1/3 - 1/4 = 1/12$ και $\Delta = 1/24 > 0$. Δηλαδή η αντιθετική δειγματοληψία αυξάνει την διακύμανση σε αυτή την περίπτωση.

Στην πραγματικότητα, ενώ γνωρίζουμε ότι οι τυχαίοι αριθμοί $\{U_i\}$ και $\{1-U_i\}$ συσχετίζονται αρνητικά, ωστόσο δεν μπορούμε να πούμε ότι ισχύει το ίδιο και για τους $X_i^{(1)}, X_i^{(2)}$ γενικά. Για να είμαστε σίγουροι ότι η αρνητική συσχέτιση των αρχικών τυχαίων αριθμών θα δημιουργήσει αρνητική συσχέτιση και στο τελικό δείγμα θα πρέπει να υπάρχει μία σχέση μονοτονίας ανάμεσα τους. Η εκθετική συνάρτηση είναι μονότονη ενώ η συνάρτηση του τριγώνου δεν είναι. Θα πρέπει επίσης να δώσουμε προσοχή στο πως παράγονται οι μεταβλητές. Η μέθοδος του αντίστροφου μετασχηματισμού στην κατανομή της συνάρτησης είναι μονότονη. Αυτό δεν είναι απαραίτητο στην μέθοδο Box-Muller.

Όταν θέλουμε παρατηρήσεις από την κανονική κατανομή , μπορούμε απλά να παράγουμε μία ακολουθία Z_i με $Z_i \sim N(0,1)$ και να χρησιμοποιήσουμε την ακολουθία $-Z_i$ για το αντιθετικό δείγμα. Η τεχνική της αντιθετικής δειγματοληψίας παρουσιάστηκε από τους Bratley (1987), Hammersley και Handscomb (1964) ενώ εφαρμόστηκε στη χρηματοοικονομική από τους Boyle (1977) και Hull και White (1987).

Εφαρμογή. Παίρνοντας δείγμα από την κανονική κατανομή μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο αντιθετικής δειγματοληψίας για να τιμολογήσουμε ένα δικαίωμα. Ο κώδικας της Matlab για την τιμολόγηση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς είναι ο εξής:

```
function [Price,CI]=BlsMCAV(S0,K,r,T,sigma,NRepl)
nuT=(r-0.5*sigma^2)*T;
siT=sigma*sqrt(T);
Veps=randn(NRepl,1);
Payoff1=max(0,S0*exp(nuT+siT*Veps)-K);
Payoff2=max(0,S0*exp(nuT+siT*(-Veps))-K);
DiscPayoff=exp(-r*T)*0.5*(Payoff1+Payoff2);
[Price,VarPrice,CI]=normfit(DiscPayoff);
```

Στον κώδικα αυτό παράγουμε μία ακολουθία παρατηρήσεων από την κανονική κατανομή και χρησιμοποιούμε την ακολουθία αυτή αλλάζοντας πρόσημο. Συγκρίνουμε παρακάτω τη μέθοδο της αντιθετικής δειγματοληψίας με το απλό Monte Carlo για να ελέγξουμε αν υπάρχει μείωση της διακύμανσης:

```
>> randn('state',0)

>> [Price,CI]=BlsMC2(50,50,0.05,1,0.4,200000)

Price =   9.0843

CI =    9.0154

        9.1532

>> (CI(2)-CI(1))/Price

ans = 0.0152

>> randn('state',0

>> [Price,CI]=BlsMCAV(50,50,0.05,1,0.4,200000)

Price =  9.0052

CI =    8.9657

       9.0447

>> (CI(2)-CI(1))/Price

ans = 0.0088
```

Παρατηρούμε πως όντως υπάρχει μείωση της διακύμανσης σε σχέση με το απλό Monte Carlo.

4.2. Η Μέθοδος των Μεταβλητών Ελέγχου

Η αντιθετική δειγματοληψία είναι τεχνική ,με δεδομένη την μονοτονία, που δεν απαιτεί επιπλέον γνώση για το σύστημα που προσομοιώνουμε. Μπορούμε να πάρουμε καλύτερα αποτελέσματα εάν γνωρίζουμε κάποια επιπρόσθετη πληροφορία. Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε τη $\theta = E(X)$ και υπάρχει μία άλλη τυχαία μεταβλητή Y με γνωστή αναμενόμενη τιμή ν, η οποία με κάποιο τρόπο συσχετίζεται με τη X. Η μεταβλητή Y ονομάζεται <u>μεταβλητή ελέγχου</u>. Επιπλέον πληροφορίες για τη X δίνονται υιοθετώντας τον εκτιμητή ελέγχου

$$X_C = X + c(Y - \nu),$$

όπου c είναι η παράμετρος για την οποία πρέπει να γίνει η κατάλληλη επιλογή.

Διαπιστώνουμε ότι :

$$E(X_C) = \theta,$$

$$Var(X_C) = Var(X) + c^2 + 2cCov(X,Y).$$

Ο πρώτος τύπος μας δείχνει ότι ο εκτιμητής ελέγχου είναι μία αμερόληπτη εκτιμήτρια του θ για οποιαδήποτε επιλογή της παραμέτρου c. Με το δεύτερο τύπο διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να μειώσουμε τη διακύμανση του με κατάλληλη επιλογή της παραμέτρου c. Επιλέγοντας την κατάλληλη παράμετρο c, μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε τη διακύμανση της μεταβλητής ελέγχου. Δηλαδή:

$$\frac{dVar(X_c)}{dc} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dc}(Var(X) + c^2 + 2cCov(X,Y)) = 0 \Leftrightarrow$$
$$2cVar(Y) + 2Cov(X,Y) = 0 \Leftrightarrow c^* = -\frac{Cov(X,Y)}{Var(Y)}.$$

Αντικαθιστώντας το c^* στον τύπο της διασποράς έχουμε:

$$Var(X_c) = Var(X) + \left(c^*\right)^2 Var(Y) + 2c^* Cov(X,Y) =$$

$$= Var(X) + \frac{\left[Cov(X,Y)\right]^2}{Var(Y)} - 2\frac{\left[Cov(X,Y)\right]^2}{Var(Y)} = Var(X) - \frac{[Cov(X,Y)]^2}{Var(Y)}.$$

Γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής συσχέτισης $\rho_{X,Y}$ δίνεται από τον τύπο:

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} \Leftrightarrow Cov(X,Y) = \rho_{X,Y}\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)},$$

συνεπώς :

$$Var(X_c) = Var(X) + \rho_{\mathrm{XY}} + Var(X) \Rightarrow$$
$$\frac{Var(X_c)}{Var(X)} = 1 - \rho^2{}_{X,Y}.$$

Το πρόσημο του c^* εξαρτάται από το πρόσημο της συσχέτισης ανάμεσα στο X και στο Y. Για παράδειγμα, αν $Cov(X,Y) > 0$ τότε $c^* < 0$.

Στην πράξη, η βέλτιστη τιμή c^* πρέπει να εκτιμηθεί αφού το $Cov(X,Y)$ και το $Var(Y)$ είναι πιθανότατα άγνωστα. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί με την βοήθεια *πιλοτικών* προσομοιώσεων. Οι προσομοιώσεις αυτές εφαρμόζονται μόνο για την επιλογή του βέλτιστου c^* και όχι για την εκτίμηση του θ, η οποία γίνεται με νέες προσομοιώσεις. Με αυτόν τον τρόπο δεν παρουσιάζεται μεροληψία στην εκτίμηση του θ αφού σε αυτήν την περίπτωση το c^* δεν εξαρτάται από το X.

Η προσέγγιση με τις μεταβλητές ελέγχου μπορεί να γενικευτεί με όσες μεταβλητές είναι απαραίτητες ώστε να βελτιωθεί η ποιότητα των εκτιμήσεων. Αυτό απαιτεί περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το σύστημα που προσομοιώνουμε και περισσότερη προσπάθεια για την εκτίμηση των μεταβλητών ελέγχου. Η τεχνική αυτή παρουσιάστηκε από τους Boyle και Emanuel (1985).

Εφαρμογή. Θα χρησιμοποιήσουμε προσομοίωση Monte Carlo για την αποτίμηση ενός δικαιώματος αγοράς, όπου θ είναι η άγνωστη αναμενόμενη τιμή του. Σε αυτήν την περίπτωση η τιμή της μετοχής στην λήξη είναι μία φυσική μεταβλητή ελέγχου, έτσι τόσο η μέση τιμή της $E(Y)=\nu$ όσο και η διακύμανση της $Var(Y)$ στη λήξη είναι γνωστές παράμετροι:

$$E(S_T)=S_0 e^{rT} \quad \text{και} \quad Var(S_T)=S_0^2 e^{2rT}(e^{r^2\mathrm{T}}-1).$$

Στο μοντέλο Black-Scholes, η τιμή της μετοχής ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή. Ανεξάρτητες προσομοιώσεις της τελικής τιμής της μετοχής, σε συνθήκες ουδέτερου κινδύνου, μπορούν να παραχθούν από τον παρακάτω τύπο:

$$S_T^{(i)}=S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{\mathrm{T}}\mathrm{Z}_i}, \qquad i=1,\ldots,n,$$

όπου S_0 η αρχική τιμή της μετοχής, r το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, σ η μεταβλητότητα της μετοχής, T ο χρόνος λήξης του δικαιώματος, και $\{Z_i\}$ δείγμα ανεξάρτητων μεταβλητών από την κανονική κατανομή. Δημιουργώντας n_1 παρατηρήσεις, ένας αμερόληπτος εκτιμητής για την τιμή ενός δικαιώματος με τιμή εξάσκησης K δίνεται από τον εξής τύπο:

$$C_i=e_i^{-rT}\max\left\{0,S_T^{(i)}-K\right\}.$$

Σε αυτή τη φάση, μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τη συνδιακύμαση μεταξύ της τιμής της μετοχής και της τιμής του δικαιώματος στη λήξη ενώ θεωρούμε δεδομένη την αναμενόμενη τιμή και την διακύμανση της τιμής της μετοχής στην λήξη.

Η παράμετρος c^* για την οποία ο εκτιμητής ελέγχου ελαχιστοποιείται προκύπτει από τον τύπο:

$$\beta=-\frac{Cov(S_T,C)}{Var(S_T)}.$$

Προσομοιώνουμε ξανά την τιμή της μετοχής και την τιμή του δικαιώματος στην λήξη με ένα νέο δείγμα μεγέθους n_2. Οι νέες τιμές $S_T'^{(i)}$ και C_i' θα χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή του εκτιμητή ελέγχου. Ο κώδικας της Matlab για την αποτίμηση ενός δικαιώματος αγοράς με Monte Carlo εφαρμόζοντας την μέθοδο των μεταβλητών ελέγχου είναι:

```
function[Price,CI]=BlsMCCV(S0,K,r,T,sigma,NRepl,NPilot)
nuT=(r-0.5*sigma^2)*T;
siT=sigma*sqrt(T);
StockVals=S0*exp(nuT+siT*randn(NPilot,1));
OptionVals=exp(-r*T)*max(0,StockVals-K);
MatCov=cov(StockVals,OptionVals);
VarY=S0^2*exp(2*r*T)*exp((T*sigma^2)-1);
c=-MatCov(1,2)/VarY;
ExpY=S0*exp(r*T);
NewStockVals=S0*exp(nuT+siT*randn(NRepl,1));
NewOptionVals=exp(-r*T)*max(0,NewStockVals-K);
ControlVars=NewOptionVals+c*(NewStockVals-ExpY);
[Price,VarPrice,CI]=normfit(ControlVars);
```

Ελέγχοντας τη μέθοδο των μεταβλητών ελέγχου σε σχέση με το απλό Monte Carlo:

```
>> randn('state',0)

>> [Price,CI]=BlsMC2(50,52,0.1,5/12,0.4,200000)

Price =

   5.2328

CI =

    5.1939

    5.2717

>> (CI(2)-CI(1))/Price

ans =0.0149

>> randn('state',0)

>> [Price,CI]=BlsMCCV(50,52,0.1,5/12,0.4,195000,5000)
```

```
Price =5.2008

CI =

    5.1837

    5.2180

>> (CI(2)-CI(1))/Price

ans =   0.0066
```

Παρατηρούμε πως όντως υπάρχει μείωση της διακύμανσης σε σχέση με το απλό Monte Carlo.

4.3. Η Μέθοδος Μείωσης Διακύμανσης Μέσω Δέσμευσης

Ο υπολογισμός αναμενόμενων τιμών μέσω δέσμευσης είναι μια κλασική τεχνική στη θεωρία πιθανοτήτων. Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε την $E(X)$, τότε κάποιες φορές είναι χρήσιμο να δεσμεύσουμε την τυχαία μεταβλητή X ως προς μία άλλη μεταβλητή Y όπως στον παρακάτω τύπο:

$$E(X) = E(E(X \mid Y)).$$

Οι διακυμάνσεις μπορούν επίσης να υπολογισθούν βάσει του τύπου της δεσμευμένης διακύμανσης:

$$Var(X) = E(Var(X \mid Y)) + Var(E(X \mid Y)).$$

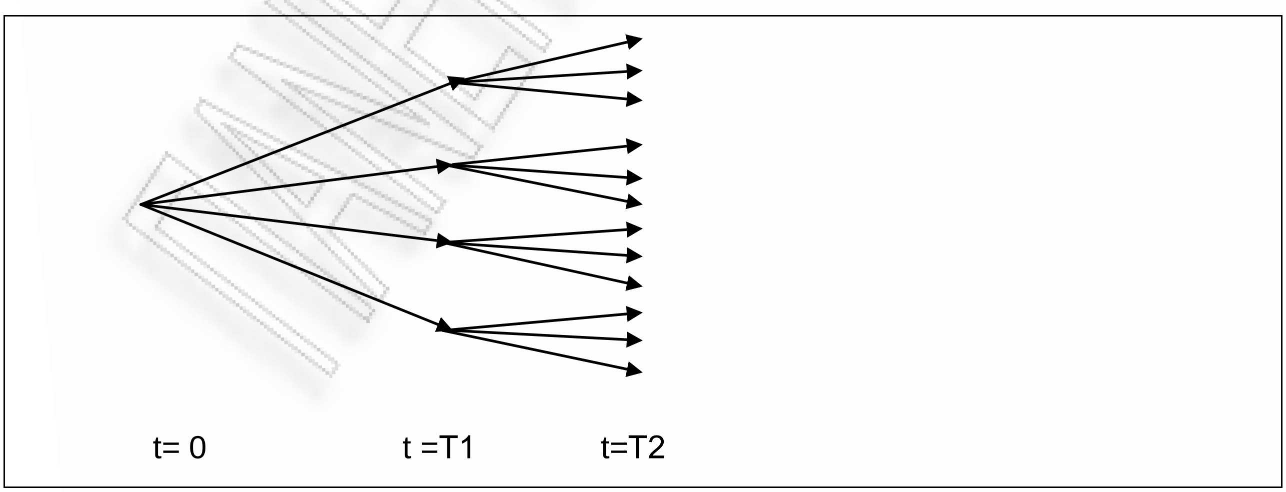
Αφού όλες οι ποσότητες που εμπλέκονται στον παραπάνω τύπο είναι μη αρνητικές, καταλήγουμε στην ανισότητα:

$$Var(X) \geq Var(E(X \mid Y)),$$

η οποία οδηγεί στην μείωση της διακύμανσης μέσω δέσμευσης.

Η χρήση της δέσμευσης είναι χρήσιμη όταν στόχος είναι να εκτιμηθεί η $\theta = E(X)$ και υπάρχει μια άλλη τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε η τιμή $E(X \mid Y = y)$ να είναι γνωστή. Από την ανισότητα $Var(X) \geq Var(E(X \mid Y))$ βλέπουμε ότι η $E(X \mid Y)$ είναι μία αμερόληπτη εκτιμήτρια για την θ και ο τύπος της δεσμευμένης διακύμανσης είναι καλύτερος σε σχέση με αυτόν της X. Πρακτικά, για την εφαρμογή της μείωσης διακύμανσης μέσω δέσμευσης, προσομοιώνουμε την Y αντί της X.

Εφαρμογή: Μας ενδιαφέρει να αποτιμήσουμε ένα δικαίωμα επιλογής. Το δικαίωμα αυτό είναι ευρωπαϊκού τύπου και έχει ημερομηνία λήξης T_2. Τη χρονική στιγμή $T_1 < T_2$ πρέπει να επιλέξουμε αν το δικαίωμα είναι αγοράς ή πώλησης, δηλαδή πρέπει να συγκρίνουμε τις τιμές των δύο δικαιωμάτων και να επιλέξουμε αυτό που είναι πιο ακριβό. Η τιμή εξάσκησης K είναι καθορισμένη την στιγμή $t = 0$. Αυτό μπορεί να συμβεί μέσω του τύπου του Black-Scholes που υπολογίζει την τιμή δικαιώματος αγοράς και πώλησης με αρχική τιμή υποκείμενου τίτλου $S(T_1)$ και χρόνο μέχρι τη λήξη $T_2 - T_1$. Αυτός σημαίνει ότι, δεσμεύοντας ως προς $S(T_1)$, μπορούμε να πάρουμε μια ακριβή εκτίμηση της αναμενόμενης απόδοσης τη στιγμή T_2 στον κόσμο του ουδέτερου κινδύνου. Ωστόσο εάν εφαρμόσουμε την απλή προσομοίωση Monte Carlo, αυτό δεν είναι τόσο τετριμμένο. Εφόσον πρέπει να αποφασίσουμε τη χρονική στιγμή T_1, αυτό είναι όμοιο με την αρχή της πρόωρης εξάσκησης για τα δικαιώματα Αμερικανικού τύπου. Για να καταλάβουμε τα σχετικά ζητήματα ας θεωρήσουμε το παρακάτω σχήμα :



Ξεκινώντας από τον αρχικό κόμβο, με τιμή S_0, παράγουμε τέσσερα δείγματα της τιμής $S(T_1)$, και για κάθε ένα από αυτά παίρνουμε δείγμα τριών τιμών $S(T_2)$. Έχουμε 4x3=12 σενάρια, αλλά είναι δομημένα ως δέντρο. Χρειαζόμαστε αυτή τη δομή, διότι η απόφαση τη χρονική στιγμή T_1 για το αν το δικαίωμα θα είναι αγοράς ή πώλησης πρέπει να είναι ίδια για όλα τα σενάρια που ξεκινούν από κάθε κόμβο στο χρόνο T_1. Χωρίς αυτή τη δομή, οι αποφάσεις θα πρέπει να βασίζονται σε τέλεια πρόβλεψη για τη μελλοντική τιμή τη χρονική στιγμή T_2, πράγμα που δεν επιτρέπεται. Ο κώδικας της Matlab για την τιμολόγηση αυτού του είδους το δικαίωμα που στη διεθνή ορολογία ονομάζεται as-you-like-it option με τη μέθοδο του απλού Monte Carlo είναι ο ακόλουθος:

```
function[Price,CI]=AYLIMC(S0,K,r,T1,T2,sigma,NRepl1,NRepl2)
DeltaT=T2-T1;
muT1=(r-sigma^2/2)*T1;
muT2=(r-sigma^2/2)*(T2-T1);
siT1=sigma*sqrt(T1);
siT2=sigma*sqrt(T2-T1);

DiscountedPayoffs=zeros(NRepl1*NRepl2,1);

Samples1=randn(NRepl1,1);
PriceT1=S0*exp(muT1+siT1*Samples1);
for k=1:NRepl1
    Samples2=randn(NRepl2,1);
    PriceT2=PriceT1(k)*exp(muT2+siT2*Samples2);
    ValueCall=exp(-r*DeltaT)*mean(max(PriceT2-K,0));
    ValuePut=exp(-r*DeltaT)*mean(max(K-PriceT2,0));
    if ValueCall>ValuePut
        DiscountedPayoffs(1+(k-1)*NRepl2:NRepl2)=exp(-r*T2)*max(PriceT2-K,0);
    else
        DiscountedPayoffs(1+(k-1)*NRepl2:NRepl2)=exp(-r*T2)*max(K-PriceT2,0);
    end
end
    [Price dummy,CI]=normfit(DiscountedPayoffs);
```

Στον κώδικα με **NRepl1** συμβολίζουμε τον αριθμό των δειγμάτων τη στιγμή T_1 και **NRepl2** τον αριθμό των δειγμάτων τη στιγμή T_2 για κάθε κόμβο τη στιγμή T_1. Συνεπώς, ο ολικός αριθμός των σεναρίων είναι **Repl1*NRepl2**. Το διάνυσμα

DiscountedPayoffs έχει μέγεθος που αντιστοιχεί στον ολικό αριθμό σεναρίων. Για κάθε ένα από τους **NRepl1** κόμβους τη στιγμή T_1, οι οποίοι έχουν δημιουργηθεί από την Γεωμετρική κίνηση Brown, παράγουμε **NRepl2** κόμβους τη στιγμή T_2 και συγκρίνουμε τις εκτιμήσεις των αναμενομένων αποδόσεων για να επιλέξουμε το δικαίωμα αγοράς ή πώλησης. Αφού επιλέξουμε μία από τις δύο εκδοχές, συμπληρώνουμε ένα σύνολο, μεγέθους **NRepl2**, στο διάνυσμα των προεξοφλημένων αποδόσεων. Τέλος υπολογίζουμε την αναμενόμενη τιμή και τα διαστήματα εμπιστοσύνης.

Σαφώς, στην απλή προσομοίωση Monte Carlo έχουμε κάνει περισσότερη δουλειά από αυτή που χρειάζεται. Με τη χρήση της μεθόδου μείωσης διακύμανσης μέσω δέσμευσης, δεδομένης μιας τιμής $S(T_1)$, μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές σε κάθε ένα από τα δύο δικαιώματα με τη βοήθεια του τύπου Black-Scholes. Ο κώδικας της Matlab είναι ο ακόλουθος.

```
function[Price,CI]=AYLIMCCond(S0,K,r,T1,T2,sigma,NRepl)
muT1=(r-sigma^2/2)*T1;
siT1=sigma*sqrt(T1);
Samples=randn(NRepl,1);
PriceT1=S0*exp(muT1+siT1*Samples);
[Calls,Puts]=blsprice(PriceT1,K,r,T2-T1,sigma);
Values=exp(-r*T1)*max(Calls,Puts);
[Price,dummy,CI]=normfit(Values);
```

Ο κώδικας αυτός είναι πιο εύκολος σε σύγκριση με αυτόν του απλού Monte Carlo. Για κάθε κόμβο τη χρονική στιγμή T_1 παίρνουμε τη μεγαλύτερη τιμή μεταξύ ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς και ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης. Ο χρόνος μέχρι τη λήξη είναι $T_2 - T_1$ και προεξοφλούμε προς τα πίσω από τη στιγμή T_1 στη στιγμή $t = 0$.

```
>> S0=50;K=50;r=0.05;T1=2/12;T2=7/12;sigma=0.4;NRepl1=100;NRepl2=100;
>> [call,put]=blsprice(S0,K,r,T2,sigma)
call =6.7287
put =5.2915
>> randn('state',0)
>> [Price,CI]=AYLIMC(S0,K,r,T1,T2,sigma,NRepl1,NRepl2)
Price =
    8.6982
CI =
    8.4898
    8.9065
>> (CI(2)-CI(1))/Price
ans = 0.0479
>> randn('state',0)
>> [PriceCond,CICond]=AYLIMCCond(S0,K,r,T1,T2,sigma,NRepl1*NRepl2)
PriceCond =
    9.2588
CICond =
    9.1779
    9.3397
>> (CI(2)-CI(1))/PriceCond
ans = 0.0450
```

Όσον αφορά τη μέθοδο μείωσης διακύμανσης μέσω δέσμευσης θα πρέπει να τονισθούν τα εξής:

1. Η τιμή του δικαιώματος επιλογής είναι μεγαλύτερη από την τιμή του δικαιώματος αγοράς και πώλησης, ανεξαρτήτως της τιμής που επιλέγεται.
2. Η δέσμευση φαίνεται ότι μειώνει τη διακύμανση, χρησιμοποιώντας τον ίδιο αριθμό σεναρίων `Repl1*NRepl2` και στις δύο περιπτώσεις.
3. Η τιμή που παίρνουμε από το Monte Carlo με δέσμευση είναι μεγαλύτερη.

Το τελευταίο σημείο είναι αναμενόμενο. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Monte Carlo με δέσμευση δε μειώνουμε μόνο τη διακύμανση αλλά λαμβάνουμε πραγματικά βέλτιστες αποφάσεις. Ενώ στο απλό Monte Carlo μπορούμε να πάρουμε λανθασμένη επιλογή την χρονική στιγμή T_1 διότι συγκρίνουμε τις εκτιμήσεις των αναμενόμενων αποδόσεων. Συνεπώς έχουμε μεροληψία. Ο εκτιμητής με το απλό Monte Carlo είναι χαμηλά μεροληπτικός, αφού θα έχουμε λιγότερα χρήματα σε σχέση με μία μη ιδανική στρατηγική.

4.4. Η Μέθοδος της Στρωματοποιημένης Δειγματοληψίας

Έστω ότι ενδιαφερόμαστε να εκτιμήσουμε την αναμενόμενη τιμή $E(X)$ και ότι η τυχαία μεταβλητή X με κάποιο τρόπο εξαρτάται από την τιμή μίας άλλης τυχαίας μεταβλητής Y, η οποία μπορεί να λάβει ένα διακριτό σύνολο τιμών y_j με γνωστή πιθανότητα. Για τον λόγο αυτό, η Y έχει διακριτή κατανομή πιθανότητας με γνωστή συνάρτηση πιθανότητας:

$$P\{Y = y_j\} = p_j, \quad j = 1,\ldots,m \ . \quad (4.1)$$

Χρησιμοποιώντας δέσμευση, έχουμε :

$$E(X) = \sum_{j=1}^{m} E(X \mid Y = y_j) p_j \ . \quad (4.2)$$

Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε προσομοίωση για να εκτιμήσουμε τις τιμές $E(X \mid Y = y_j)$, για $j = 1,\ldots,m$, και να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (4.2) ώστε να πάρουμε τα αποτελέσματα συγκεντρωτικά. Όταν εφαρμόζουμε τη μέθοδο της μείωσης διακύμανσης μέσω δέσμευσης η μείωση της διακύμανσης γίνεται με βάση το αρχικό δείγμα. Η συγκεκριμένη προσέγγιση είναι παρόμοια με αυτήν της μείωσης διακύμανσης μέσω δέσμευσης. Η διαφορά τους είναι ότι στη συγκεκριμένη μέθοδο, επιλέγουμε μία τιμή για την Y και δημιουργούμε δείγμα X, δεσμευμένο ως προς $Y = y_j$. Το δείγμα αυτό ονομάζεται *στρώμα*. Το παρακάτω παράδειγμα καθιστά σαφές γιατί αυτό το είδος της δειγματοληψίας ονομάζεται στρωματοποιημένη. Η μέθοδος αυτή παρουσιάστηκε από τον Mc Kay (1979).

Παράδειγμα. Έστω, χρησιμοποιώντας προσομοίωση, ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τη μεταβλητή θ:

$$\theta = \int_0^1 h(x)dx = E(h(u))$$

Στην απλή Monte Carlo προσομοίωση θα παίρναμε από την ομοιόμορφη κατανομή ένα δείγμα n τυχαίων αριθμών $U_i \sim U(0,1)$, $i = 1,2,...,n$, και θα υπολογίζαμε το δειγματικό μέσο:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(U_i).$$

Ένας βελτιωμένος εκτιμητής για το αρχικό δείγμα μπορεί να επιτευχθεί με την κατάτμηση του διαστήματος ολοκλήρωσης (0,1) σε m υποδιαστήματα $((j-1)/m, j/m)$, με $j = 1,...,m$. Κάθε $Y = y_j$ αντιστοιχεί σε έναν τυχαίο αριθμό που εμπίπτει στο j υποδιάστημα. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει $p_j = 1/m$. Για κάθε στρώμα $j = 1,...,m$ παράγουμε n_j τυχαίους αριθμούς $U_k \sim U(0,1)$, $k = 1,2,...,n_j$ για να εκτιμήσουμε :

$$\hat{\theta}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{k=1}^{n_j} h\left(\frac{U_k + j - 1}{m}\right),$$

και μετά κατασκευάζουμε το συνολικό εκτιμητή:

$$\hat{\theta} = \sum_{j=1}^{m} \hat{\theta}_j p_j$$

Το θέμα πλέον είναι το πώς θα καθοριστεί το μέγεθος του δείγματος n_j που θα κατανέμεται σε κάθε στρώμα. Μία ομοιόμορφη κατανομή διασφαλίζει ότι παίρνουμε ομοιόμορφο δείγμα από το διάστημα (0,1), αλλά αυτό δεν είναι πάντα η βέλτιστη λύση.

Εξετάζουμε τη διακύμανση του εκτιμητή $\hat{\theta}$, με X_j την τυχαία μεταβλητή της δειγματοληψίας σε κάθε στρώμα. Αν τα στρώματα είναι δειγματικά ανεξάρτητα τότε έχουμε:

$$Var(\hat{\theta}) = \sum_{j=1}^{m} p_j^2 Var(\hat{\theta}_j) = \sum_{j=1}^{m} \frac{p_j^2}{n_j} Var(X_j).$$

Για να ελαχιστοποιήσουμε τη συνολική διακύμανση, θα πρέπει να κατανείμουμε μεγαλύτερο δείγμα στο στρώμα όπου το $Var(X_j)$ είναι μεγαλύτερο. Για το λόγο αυτό μπορούμε να τρέξουμε σύνολα πιλοτικών επαναλήψεων για να εκτιμήσουμε το $Var(X_j)$ από τις δειγματικές διακυμάνσεις S_j^2 και στη συνέχεια να βρούμε το μέγεθος του δείγματος που πρέπει να διατεθεί σε κάθε στρώμα λύνοντας ένα μη γραμμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\min \sum_{j=1}^{m} \frac{p_j^2 S_j^2}{n_j}$$

έτσι ώστε $\sum_{j=1}^{m} n_j = n$

$$n_j \geq 0 \quad .$$

4.5. Η Μέθοδος της Δειγματοληπτικής Σημαντικότητας

Σε αντίθεση με τις άλλες τεχνικές μείωσης διακύμανσης, η μέθοδος της *δειγματοληπτικής σημαντικότητας* βασίζεται στην ιδέα της αλλαγής του μέτρου της πιθανότητας. Η τεχνική αυτή είναι χρήσιμη όταν θέλουμε να προσομοιώσουμε δείγμα από τις άκρες μίας κατανομής. Αναλύθηκε και παρουσιάστηκε από τον Bratley (1987).

Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε την παρακάτω αναμενόμενη τιμή της συνάρτησης $h(X)$:

$$\theta = E_f(h(X)) = \int h(x) f(x) dx \ ,$$

όπου X είναι ένα τυχαίο διάνυσμα με συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$. Εάν γνωρίζουμε μία άλλη συνάρτηση πυκνότητας $g(x)$ τέτοια ώστε να ισχύει $f(x)=0$ όταν $g(x)=0$, τότε ισχύει:

$$\theta = \int \frac{h(x) f(x)}{g(x)} g(x) dx = E_g\left(\frac{h(X) f(X)}{g(x)}\right).$$

Ο συμβολισμός E_g χρησιμοποιείται για να τονίσει το γεγονός ότι η τελευταία αναμενόμενη τιμή έχει παρθεί με βάση το μέτρο g. Ο λόγος $f(x)/g(x)$ χρησιμοποιείται για να διορθώσει την αλλαγή στο μέτρο της πιθανότητας. Όταν χρησιμοποιούμε τυχαίο δείγμα, ο λόγος αυτό θα θεωρείται τυχαία μεταβλητή. Αυτή η αλλαγή στο μέτρο πιθανότητας λειτουργεί ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως η αποτίμηση ουδέτερου κινδύνου.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα πως θα γίνει η επιλογή της πυκνότητας g για λόγους απλοποίησης θεωρούμε ότι $h(x) \geq 0$. Υπάρχουν δύο τρόποι για την εκτίμηση του θ, δηλαδή:

$$E_f(h(X)) = \int h(x) f(x) dx = \int \frac{h(x) f(x)}{g(x)} g(x) dx =$$

$$= \int h^*(x) g(x) dx = E_g(h^*(X)),$$

όπου $h^*(X) = h(x) f(x) / g(x)$. Όπως έχει προαναφερθεί όταν, $g(x)=0$ τότε $f(x)=0$. Η υπόθεση αυτή είναι απαραίτητη ώστε να ορίζεται η $h^*(X)$.

Οι δύο εκτιμητές έχουν την ίδια αναμενόμενη τιμή. Χρησιμοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες της διακύμανσης θα ελέγξουμε τις διακυμάνσεις τους

$$Var_f(h(X)) = \int h^2(x) f(x) dx - \theta^2,$$

$$Var_g(h^*(X)) = \int h^2(x) f(x) \frac{f(x)}{g(x)} dx - \theta^2 \quad .$$

Από τη δεύτερη εξίσωση εύκολα συμπεραίνουμε ότι επιλέγοντας $g(x)$ τέτοιο ώστε

$$g(x) = \frac{h(x) f(x)}{\theta} \quad (4.3) \, ,$$

οδηγούμαστε στην ιδανική συνθήκη $Var_g(h^*(X)) \equiv 0$. Δυστυχώς, αυτή η συνθήκη δεν είναι εφικτή στην πραγματικότητα, καθώς χρησιμοποιώντας αυτήν την πυκνότητα απαιτείται πληροφορία για την θ. Επίσης είναι απαραίτητο να ισχύει $h(x) \geq 0$ ώστε να διασφαλίσουμε πως όντως είναι πυκνότητα.

Η διαφορά ανάμεσα στις δύο διακυμάνσεις είναι :

$$\Delta Var = Var_f(h(X)) - Var_g(h^*(X)) = h^2(x) f(x) \left[1 - \frac{f(x)}{g(x)} \right] dx \, .$$

Από αυτήν την έκφραση παρατηρούμε ότι, για να διασφαλίσουμε τη μείωση της διακύμανσης θα πρέπει να επιλέξουμε μία νέα πυκνότητα g τέτοια ώστε

- $g(x) > f(x)$ όταν ο όρος $h^2(x) f(x)$ είναι μεγάλος,
- $g(x) < f(x)$ όταν ο όρος $h^2(x) f(x)$ είναι μικρός.

Η ονομασία *δειγματοληπτική σημαντικότητα* προκύπτει από αυτή την παρατήρηση.

Παράδειγμα. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα παράδειγμα κλασικής ολοκλήρωσης για να δείξουμε πως λειτουργεί η συγκεκριμένη μέθοδος. Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την τιμή της π δεδομένου ότι

$$\theta \equiv \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Από τη στιγμή που γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν αυτό είναι το ένα τέταρτο ενός κύκλου με μοναδιαία ακτίνα, μπορούμε να εκτιμήσουμε την τιμή του π με τη βοήθεια της Matlab υπολογίζοντας το ανωτέρω ολοκλήρωμα. Ο κώδικας υπολογισμού είναι ο εξής:

```
function out=estpi(m)
z=sqrt(1-rand(1,m)^2);
out=4*sum(z)/m;
```

Η παράμετρος **m** συμβολίζει τον αριθμό των παρατηρήσεων που χρησιμοποιούνται στο δείγμα. Με ένα δείγμα 1000 παρατηρήσεων διαπιστώνουμε ότι η εκτίμηση δεν είναι αξιόπιστη. Συγκεκριμένα :

```
>> rand('state',0)
>>estpi(1000)
ans =3.1378
>> estpi(1000)
ans =3.1311
>> estpi(1000)
ans =3.0971
```

Θα προσπαθήσουμε να βελτιώσουμε την εκτίμηση μας με τη βοήθεια της μεθόδου δειγματοληπτικής σημαντικότητας. Για να μπορέσουμε να προσεγγίσουμε την ιδανική κατανομή πιθανότητας θα χωρίσουμε το διάστημα ολοκλήρωσης $[0,1]$σε L ίσα υποδιαστήματα πλάτους $1/L$. Τα ακραία σημεία για το k υποδιάστημα $(k=1,\ldots,L)$ είναι $(k-1)/L$ και k/L, ενώ η ενδιάμεσος τιμή είναι $s_k = (k-1)/L + 1/(2L)$. Μία γρήγορη εκτίμηση για το ολοκλήρωμα προκύπτει υπολογίζοντας τον τύπο:

$$\frac{\sum_{k=1}^{L} h(s_k)}{L} = \tilde{\theta} \approx \theta .$$

Μία προσέγγιση της ιδανικής συνάρτησης πυκνότητας $g(x)$ προκύπτει αντικαθιστώντας τον όρο θ με $\tilde{\theta}$ στην εξίσωση (4.3) η οποία μετασχηματίζεται ως εξής

$$\tilde{g}(x) = \frac{h(x) f(x)}{\tilde{\theta}} = \frac{h(x)L}{\sum_{k=1}^{L} h(s_k)} \quad ,$$

από την ομοιόμορφη κατανομή έχουμε $f(x)=1$. Δυστυχώς, αυτή δεν είναι απαραίτητα μία πυκνότητα που ολοκληρώνεται στη μονάδα πάνω στο μοναδιαίο διάστημα. Για να αποφύγουμε αυτή την δυσκολία και να απλοποιήσουμε το δείγμα, μπορούμε να ορίσουμε μία πιθανότητα μέσω της δειγματοληψίας από ένα υποδιάστημα και να χρησιμοποιούμε μία ομοιόμορφη πυκνότητα στο κάθε υποδιάστημα. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε τον παρακάτω τύπο

$$q_k = \frac{h(s_k)}{\sum_{k=1}^{L} h(s_k)}, \ \left(k = 1, \ldots, L\right).$$

Βλέπουμε, ότι $\sum_k q_k = 1$ και $q_k \geq 0$ από την στιγμή που η συνάρτηση h είναι μη-αρνητική. Για το λόγο αυτό οι αριθμοί q_k μπορούν να αναπαραστήσουν πιθανότητες. Στη δική μας περίπτωση, χρησιμοποιούνται ως πιθανότητες για την επιλογή ενός δειγματικού σημείου από το κ-οστό υποδιάστημα.

Ανακεφαλαιώνοντας, για να εκφράσουμε το πρόβλημα μέσα σε ένα γενικό πλαίσιο έχουμε:

$$\begin{aligned} &h(x) = \sqrt{1-x^2} \\ &f(x) = 1 \qquad , \ (k-1)/L \leq x \leq k/L \\ &g(x) = Lq_k . \end{aligned}$$

Εδώ, η $g(x)$ εκφράζει μία τμηματικά σταθερή συνάρτηση πυκνότητας. Ο παράγοντας L, στην συνάρτηση $g(x)$, πολλαπλασιάζεται με την q_k που απαιτείται για να κατασκευάσουμε μία ομοιόμορφη συνάρτηση πυκνότητας σε ένα διάστημα μήκους $1/L$.

```
function z=estpiIS(m,L)
s=(0:(1/L):(1-1/L))+1/(2*L);
hvals=sqrt(1-s.^2);
cs=cumsum(hvals);
for j=1:m
    loc=sum(rand*cs(L)>cs)+1;
    x=(loc-1)/L+rand/L;
    p=hvals(loc)/cs(L);
    est(j)=sqrt(1-x.^2)/(p*L);
end
z=4*sum(est)/m;
```

Με την εκτέλεση του παραπάνω κώδικα παρατηρούμε ότι υπάρχει μείωση της διακύμανσης για την εκτίμηση του π. Συγκεκριμένα:

```
>> z=estpiIS(1000,10)

z =    3.1398

>> z=estpiIS(1000,10)

z =    3.1452

>> z=estpiIS(1000,10)

z =    3.1405

>> z=estpiIS(1000,10)

z =    3.1433

>> z=estpiIS(1000,10)

z =    3.1466
```

Η μέθοδος της δειγματοληπτικής σημαντικότητας χρησιμοποιείται και σε περιπτώσεις όπου οι τιμές των πιθανοτήτων είναι μικρές. Έστω για παράδειγμα, ένα τυχαίο διάνυσμα X με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας f και υποθέτουμε ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το εξής:

$$\theta = E\left(h(X) \mid X \in \mathrm{A}\right),$$

όπου $\left\{X \in \mathrm{A}\right\}$ είναι ένα σπάνιο γεγονός με μικρή αλλά άγνωστη πιθανότητα $P\left\{X \in \mathrm{A}\right\}$. Η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας είναι:

$$f(x \mid X \in \mathrm{A}) = \frac{f(x)}{P\left\{X \in \mathrm{A}\right\}}$$

για $x \in \mathrm{A}$. Η συνάρτηση $I_A(X)$ ορίζεται ως εξής:

$$I_A(X) = \begin{cases} 1, X \in A, \\ 0, X \notin A. \end{cases}$$

Συνεπώς, η θ μπορεί να γραφτεί

$$\theta = \frac{\int_{x \in \mathrm{A}} h(x) f(x) dx}{P\left\{x \in \mathrm{A}\right\}} = \frac{E\left(h(X) I_A(X)\right)}{E\left(I_A(X)\right)}.$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε την απλή προσομοίωση Monte Carlo, πολλές παρατηρήσεις θα χαθούν καθώς το γεγονός $\left\{X \in \mathrm{A}\right\}$ συμβαίνει σπάνια. Τώρα, υποθέτοντας ότι υπάρχει μία συνάρτηση πυκνότητας g τέτοια ώστε το ενδεχόμενο $\left\{X \in \mathrm{A}\right\}$ να είναι πιο πιθανό κάτω από το αντίστοιχο μέτρο πιθανότητας, μπορούμε να παράγουμε τα δείγματα X_i σύμφωνα με το g και να εκτιμήσουμε το ακόλουθο:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{k} h(X_i) I_A(X_i) f(X_i) / g(X_i)}{\sum_{i=1}^{k} I_A(X_i) f(X_i) / g(X_i)}.$$

Η μέθοδος της δειγματοληπτικής σημαντικότητας είναι πιο δύσκολο να εφαρμοστεί σε σχέση με την αντιθετική δειγματοληψία ή την τεχνική μεταβλητών ελέγχου. Απαιτεί περισσότερη πληροφορία σχετικά με αυτό που προσομοιώνουμε, από την στιγμή που θα πρέπει να είμαστε σε θέση να βρούμε το κατάλληλα μορφοποιημένο μέτρο πιθανότητας.

Παράδειγμα. Έστω ότι θέλουμε να αποτιμήσουμε ένα απλό δικαίωμα αγοράς με μεγάλη αρνητική εσωτερική αξία (deep OTM). Αν S_0 είναι η αρχική τιμή του υποκείμενου τίτλου γνωρίζουμε ότι η αναμενόμενη τιμή στη λήξη, σύμφωνα με τη γεωμετρική κίνηση Brown κάτω από το μέτρο ουδέτερου κινδύνου, είναι $S_0 e^{rT}$. Αν η αναμενόμενη τιμή είναι μικρή σε σχέση με την τιμή εξάσκησης K, τότε είναι δύσκολο το δικαίωμα να έχει θετική εσωτερική αξία στη λήξη. Αν εφαρμόσουμε το απλό Monte Carlo πολλές επαναλήψεις θα χαθούν αφού η αξία του δικαιώματος στην λήξη θα είναι μηδέν στις περισσότερες. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να αλλάξουμε την τάση ώστε να αυξήσουμε την πιθανότητα η αξία του δικαιώματος να είναι θετική στη λήξη. Είναι εύκολο να βρούμε μία τέτοια τάση ώστε η αναμενόμενη τιμή του τίτλου στη λήξη S_T να είναι ίση με την τιμή άσκησης K :

$$S_0 e^{\mu T} = K \Leftrightarrow e^{\mu T} = \frac{K}{S_0} \Leftrightarrow \log e^{\mu T} = \log\left(\frac{K}{S_0}\right) \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{T}\log\left(\frac{K}{S_0}\right).$$

Ενώ κάτω από το μέτρο ουδέτερου κινδύνου δημιουργούμε δείγμα $S_T = S_0 e^{Z}$ παράγοντας παρατηρήσεις από την κανονική κατανομή

$$Z \sim N\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right),$$

Θα πρέπει να δημιουργήσουμε ένα δείγμα παράγοντας μεταβλητές Y:

$$Y \sim N\left(\log\left(\frac{K}{S_0}\right) - \frac{\sigma^2 T}{2}, \sigma\sqrt{T}\right),$$

που με την σειρά τους απαιτεί την παραγωγή μεταβλητών ε από την τυπική κανονική κατανομή και μετά να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση

$$Y = \log\left(\frac{K}{S_0}\right) - \frac{\sigma^2 T}{2} + \sigma\sqrt{T}\varepsilon.$$

Τώρα το δύσκολο κομμάτι είναι να υπολογίσουμε το λόγο πιθανότητας λόγω αλλαγής της τάσης. Για λόγους απλοποίησης, υποθέτουμε ότι το δείγμα Y προέρχεται από μία κανονική κατανομή $N(\beta,\xi)$, ενώ η πρωτότυπη κατανομή είναι $N(a,\xi)$. Τότε ο λόγος των δύο συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi} e^{-\frac{(Y-a)^2}{2\xi^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi} e^{-\frac{(Y-\beta)^2}{2\xi^2}}} = e^{-\left[(Y-\alpha)^2-(Y-\beta)^2\right]/2\xi^2} = e^{-\left[2(\alpha-\beta)Y-a^2+\beta^2\right]/2\xi^2}$$

Ο κώδικας της Matlab για την αποτίμηση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με αρνητική εσωτερική αξία (deep OTM) είναι:

```
function [Price, CI]=BlsMCIS(S0,K,r,T,sigma,NRepl)
nuT=(r-0.5*sigma^2)*T;
siT=sigma*sqrt(T);
ISnuT=log(K/S0)-0.5*sigma^2*T;
Veps=randn(NRepl,1);
VY=ISnuT+siT*Veps;
ISRatios=exp((2*(nuT-ISnuT)*VY-nuT^2+ISnuT^2)/2/siT^2);
DiscPayoff=exp(-r*T)*max(0,(S0*exp(VY)-K));
[Price,VarPrice,CI]=normfit(DiscPayoff.*ISRatios);
```

Τώρα μπορούμε να ελέγξουμε την αποτελεσματικότητα της μεθόδου της δειγματοληπτικής σημαντικότητας τρέχοντας το σύνολο εντολών **CheckBlsMCIS.** Για ένα deep out-of-the-money απλό δικαίωμα αγοράς υπολογίζουμε την τιμή του με το απλό Monte Carlo και με τη μέθοδο της δειγματοληπτικής σημαντικότητας και συγκρίνουμε το ποσοστιαίο σφάλμα με την τιμή που προκύπτει από το μοντέλο Black-Scholes. Μηδενίζουμε τον γεννήτορα των τυχαίων μεταβλητών **randn** δύο φορές ώστε να πάρουμε τις ίδιες τυχαίες μεταβλητές και στις δύο περιπτώσεις.

```
>> %CheckBlsMCIS
>> S0=50;K=80;r=0.05;sigma=0.4;T=5/12;NRepl=100000;
MCError=zeros(NRepl,1);
MCISError=zeros(NRepl,1);
TruePrice=blsprice(S0,K,r,sigma,T);
randn('state',0);
for k=1:100
MCPrice=BlsMC2(S0,K,r,sigma,T,NRepl);
MCError=abs(MCPrice-TruePrice)/TruePrice;
end
randn('state',0)
for k=1:100
MCISPrice=BlsMCIS(S0,K,r,sigma,T,NRepl);
MCISError=abs(MCISPrice-TruePrice)/TruePrice;
end
fprintf(1,'Average Percentage Error:\n');
fprintf(1,'MC =%6.3f%%\n',100*mean(MCError));
fprintf(1,'MC+IS =%6.3f%%\n',100*mean(MCISError));
Average Percentage Error:
MC = 3.060%
MC+IS = 1.155%
```

4.6. Η μέθοδος των Κοινών Τυχαίων Αριθμών

Η τεχνική των κοινών τυχαίων αριθμών είναι παρόμοια με αυτή της αντιθετικής δειγματοληψίας, αλλά εφαρμόζεται σε διαφορετική περίπτωση. Έστω ότι θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε προσομοίωση Monte Carlo για να εκτιμήσουμε μία μέση τιμή που εξαρτάται από μία παράμετρο a, δηλαδή θέλουμε να εκτιμήσουμε το εξής:

$$h(a) = E_{\omega}\left(f(a;\omega) \right),$$

όπου δίνεται έμφαση στην τυχαιότητα μέσω της μεταβλητής ω. Μπορεί επίσης να μας ενδιαφέρει να αξιολογήσουμε την ευαισθησία αυτής της τιμής σε σχέση με την παράμετρο a:

$$\frac{dh(a)}{da},$$

Αυτό μπορεί να είναι ενδιαφέρον όταν ασχολούμαστε με την ευαισθησία δικαιωμάτων πέρα από το μοντέλο Black-Scholes. Προφανώς δε μπορούμε να υπολογίσουμε το παράγωγο αναλυτικά, διαφορετικά, δεν θα χρησιμοποιούσαμε προσομοίωση για να εκτιμήσουμε το h ούτως ή άλλως .Έτσι, η πιο απλή ιδέα είναι να εφαρμόσουμε προσομοίωση για να εκτιμήσουμε την τιμή της πεπερασμένης διαφοράς:

$$\frac{h(a+\delta a) - h(a)}{\delta a}$$

για μία μικρή αύξηση της τιμής δa. Ωστόσο αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι να παράγουμε δείγμα για την διαφορά

$$\frac{f(a+\delta a;\omega) - f(a;\omega)}{\delta a}$$

και να εκτιμήσουμε την αναμενόμενη τιμή του. Δυστυχώς όταν αυτή η αύξηση δa είναι πολύ μικρή, είναι δύσκολο να καταλάβουμε αν η διαφορά που παίρνουμε από την προσομοίωση οφείλεται στον τυχαίο θόρυβο ή στην διακύμανση της παραμέτρου. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να εκτιμήσουμε την τιμή της διαφοράς ανάμεσα σε δύο τυχαίες μεταβλητές.

Έστω ότι η διαφορά ανάμεσα σε δύο τυχαίες μεταβλητές είναι :

$$Z = X_1 - X_2$$

όπου $E\left(X_1\right) \neq E\left(X_2\right)$, από την στιγμή που προέρχονται από προσομοίωση δύο διαφορετικών συστημάτων που πιθανότατα διαφέρουν μόνο ως προς την τιμή μίας παραμέτρου. Με προσομοίωση Monte Carlo παίρνουμε την παρακάτω ακολουθία ανεξαρτήτων δειγμάτων:

$$Z_j = X_{1,j} - X_{2,j},$$

και κάνουμε χρήση στατιστικών τεχνικών ώστε να κατασκευάσουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης για το $E(X_1 - X_2)$. Για βελτιωθεί η εκτίμηση μας μπορούμε να μειώσουμε τη διακύμανση του δείγματος Z_j :

$$Var(X_{1,j} - X_{2,j}) = Var(X_{1,j}) + Var(X_{2,j}) - 2Cov(X_{1,j}, X_{2,j}).$$

Για να το πετύχουμε αυτό, θα προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε θετική συσχέτιση ανάμεσα στο $X_{1,j}$ και στο $X_{2,j}$. Αυτό μπορεί να συμβεί χρησιμοποιώντας τους ίδιους τυχαίους αριθμούς για να προσομοιώσουμε τους X_1 και X_2. Αυτή η τεχνική δουλεύει περίπου με τον ίδιο τρόπο που λειτουργεί και η μέθοδος της αντιθετικής δειγματοληψίας ενώ και εδώ είναι απαραίτητη η υπόθεση τη μονοτονίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Quasi Monte Carlo

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, θεωρήσαμε ότι η εφαρμογή των τεχνικών μείωσης διακύμανσης βασίζεται στο γεγονός ότι το δείγμα που χρησιμοποιούμε είναι πραγματικά τυχαίο ακόμα και αν οι τυχαίοι αριθμοί παράγονται από διάφορους αλγορίθμους οι οποίοι δεν είναι τυχαίοι. Τώρα θα εξετάσουμε κάποιες εναλλακτικές ντετερμινιστικές ακολουθίες αριθμών οι οποίες λειτουργούν καλά για τη δημιουργία δειγμάτων. Οι ακολουθίες αυτές κατανέμονται καλύτερα σε σχέση με ένα τυχαίο δείγμα. Για να γίνει κατανοητό θα προσδιορίσουμε την διαφορά μίας ακολουθίας αριθμών.

Έστω ότι θέλουμε να παράγουμε μία ακολουθία από N τυχαία διανύσματα $X^1, X^2, ..., X^N$ στον m-διαστάσεων υπερκύβο $I^m = \left[0,1\right]^m \subset \mathbb{R}^m$. Δοθέντος μίας ακολουθίας τέτοιων διανυσμάτων, με την προϋπόθεση ότι είναι καλώς κατανεμημένα, ο αριθμός των σημείων που περιλαμβάνονται σε κάθε υποσύνολο G του I^m θα πρέπει να είναι περίπου ανάλογος του όγκου του $vol\left(G\right)$. Με δεδομένο το διάνυσμα $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$, θεωρούμε ένα ορθογώνιο υποσύνολο G_X που ορίζεται ως εξής:

$$G_X = [0, x_1) \times [0, x_2) \times ... \times [0, x_m),$$

το οποίο έχει όγκο $x_1 x_2 ... x_m$. Αν η συνάρτηση $S_N\left(G\right)$ μετράει τον αριθμό των σημείων στην ακολουθία τα οποία εμπεριέχονται στο υποσύνολο $G \subset I^m$, τότε ένας πιθανός ορισμός της διαφοράς είναι:

$$D\left(X^1, X^2, ..., X^N\right) = \sup_{X \in I^m} | S_N\left(G_X\right) - N x_1 x_2 ... x_m |.$$

Όταν υπολογίζουμε ένα πολυδιάστατο ολοκλήρωμα του μοναδιαίου υπερκύβου, είναι φυσικό να ψάχνουμε για *ακολουθίες χαμηλής διαφοράς* , μία εναλλακτική ονομασία για την ακολουθία χαμηλής διαφοράς είναι *quasi random* (σχεδόν τυχαία) ακολουθία, από την οποία προκύπτει ο όρος Quasi Monte Carlo. Οι Spanier και Maize (1994) παρέχουν μία επισκόπηση της προσέγγισης αυτής. Στην πραγματικότητα ο όρος quasi random είναι παραπλανητικός αφού δεν υπάρχει τυχαιότητα. Γνωρίζουμε ότι το σφάλμα από την εκτίμηση με προσομοίωση Monte Carlo είναι της τάξης του $O(1/\sqrt{N})$, όπου N είναι το μέγεθος του δείγματος. Σε ορισμένες *χαμηλής διαφοράς ακολουθίες,* μπορεί να δειχθεί ότι το σφάλμα είναι της τάξης του $O(\ln N)^m / N$, όπου m είναι οι διαστάσεις του διαστήματος στο οποίο εμείς ολοκληρώνουμε. Παρακάτω θα αναλύσουμε την βασική ιδέα δύο ακολουθιών χαμηλής διαφοράς, τις ακολουθίες Halton και Sobol στο μοναδιαίο διάστημα $(0,1)$, και θα δούμε τις εφαρμογές τους.

5.1. Παραγωγή Ακολουθιών Χαμηλής Διαφοράς Halton

Οι ακολουθίες χαμηλής διαφοράς Halton βασίζονται σε μία απλή μέθοδο:

- Αναπαριστούμε έναν ακέραιο αριθμό n με βάση b, όπου b είναι ένας πρώτος αριθμός:
$$n = (\dots d_4 d_3 d_2 d_1 d_0)_b .$$
- Αντιστρέφουμε τα ψηφία και τα μετατρέπουμε σε δεκαδικό έτσι ώστε να πάρουμε έναν αριθμό στο μοναδιαίο διάστημα:
$$h = (0.d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 \dots)_b .$$

Πιο συγκεκριμένα, αν αναπαραστήσουμε ένα ακέραιο αριθμό n με τον εξής τρόπο :

$$n = \sum_{k=0}^{m} d_k b^k ,$$

ο n-οστός αριθμός από την ακολουθία Halton με βάση b είναι:

$$h = \sum_{k=0}^{m} d_k b^{-(k+1)} .$$

Χρησιμοποιώντας τις αρχές του δυαδικού συστήματος μπορούμε εύκολα να παράγουμε τον n-οστό αριθμό στην ακολουθία Halton με βάση b. Ο κώδικας της Matlab έχει ως εξής:

```
function h=Halton(n,b)
n0=n;
h=0;
f=1/b;
while(n0>0)
n1=floor(n0/b);
r=n0-n1*b;
h=h+f*r;
f=f/b;
n0=n1;
end
```

Με τη βοήθεια της Matlab παράγουμε τους δέκα πρώτους αριθμούς σε μία ακολουθία Halton με βάση 2:

```
seq=zeros(10,1);
>> seq=zeros(10,1);
>> for i=1:10, seq(i)=Halton(i,2),end
```

```
seq =

    0.5000
    0.2500
    0.7500
    0.1250
    0.6250
    0.3750
    0.8750
    0.0625
    0.5625
    0.3125
```

Παρατηρούμε ότι στις ακολουθίες Halton, αντιστρέφοντας και προσθέτοντας περισσότερα δυαδικά ψηφία, γεμίζουμε το χώρο ανάμεσα στο 0 και το 1 με όλο και λεπτότερα διαστήματα. Με την βοήθεια της Matlab μπορούμε να κατασκευάσουμε μία ολόκληρη ακολουθία με μεταβλητές εισόδου τις HowMany, που προσδιορίζει το μήκος της ακολουθίας, και τη βάση b.

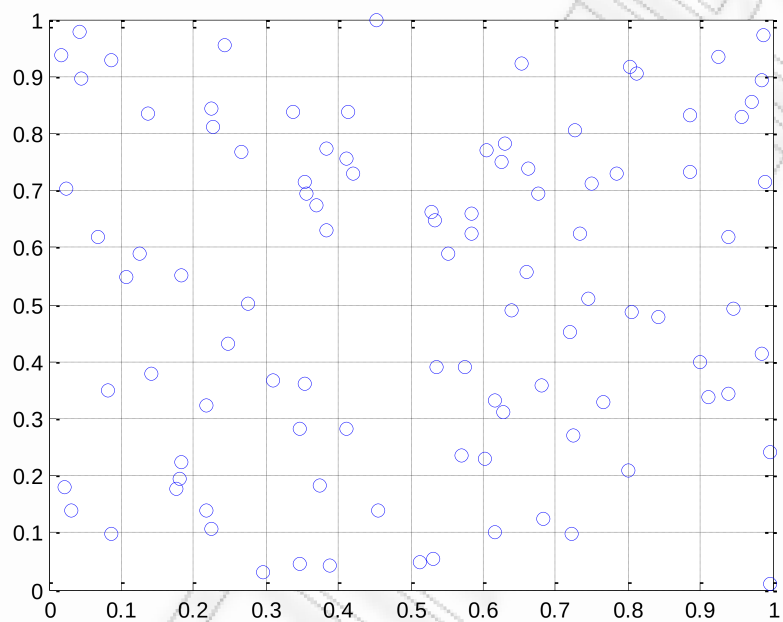
```
function Seq=GetHalton(HowMany,Base)
Seq=zeros(HowMany,1);
NumBits=1+ceil(log(HowMany)/log(Base));
VetBase=Base.^(-(1:NumBits));
WorkVet=zeros(1,NumBits);
for i=1:HowMany
    j=1;
    ok=0;
    while ok==0
        WorkVet(j)=WorkVet(j)+1;
        if WorkVet(j)<Base
            ok=1;
        else
            WorkVet(j)=0;
            j=j+1;
        end
    end
    Seq(i)=dot(WorkVet,VetBase);
end
```

Είναι προτιμότερο από το να παράγουμε έναν αριθμό κάθε φορά, να παράγουμε την ακολουθία $1,\ldots,n$ αυξάνοντας τα δυαδικά ψηφία σε βάση **b,** η οποία αμέσως μετατρέπεται σε $H(n,b)$.

Παράδειγμα 5.1 Για να γίνει καλύτερα κατανοητό θα χρησιμοποιήσουμε ένα παράδειγμα για να συγκρίνουμε το πώς κατανέμονται στο μοναδιαίο κύβο δύο διαστάσεων ένα δείγμα ψευδοτυχαίων μεταβλητών και πως οι ακολουθίες Halton.

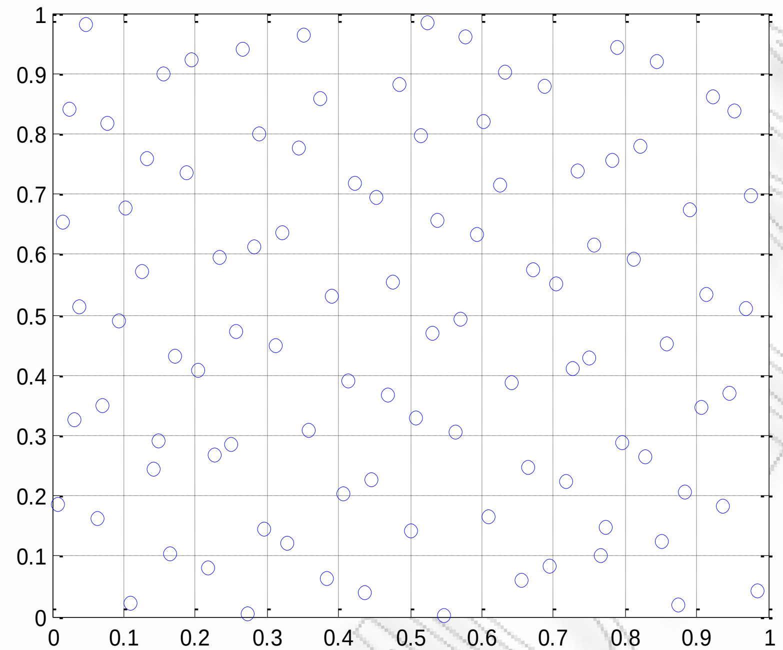
Χρησιμοποιώντας την παραγωγή τυχαίων παρατηρήσεων της Matlab, παίρνουμε την εξής γραφική παράσταση:

```
>>  plot(rand(100,1),rand(100,1),'o')
>> grid on
```



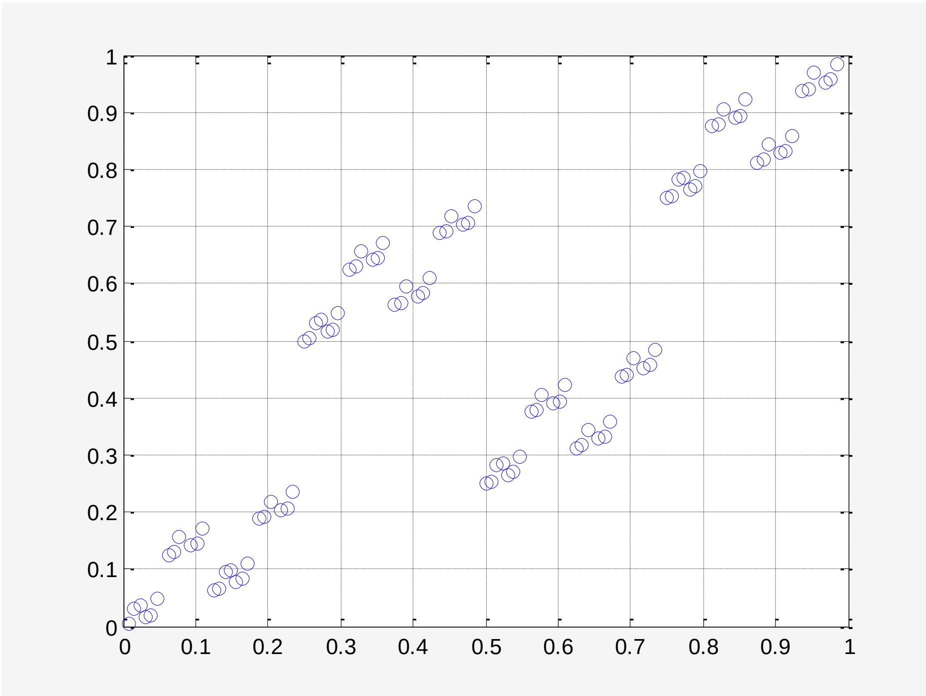
Κάνουμε την ίδια διαδικασία με ακολουθίες Halton διαφορετικής βάσης. Και στις δύο ακολουθίες η βάση θα πρέπει να είναι *πρώτοι αριθμοί*. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα δοκιμάζουμε με 2 και 7:

```
>>  plot(GetHalton(100,2),GetHalton(100,7),'o')
>> grid on
```



Αν στη βάση χρησιμοποιήσουμε έναν μη πρώτο αριθμό τότε τα σημεία δε θα κατανέμονται καλά στο μοναδιαίο κύβο . Η παρακάτω γραφική παράσταση μας δείχνει το πώς κατανέμονται οι παρατηρήσεις όταν στη μία ακολουθία η βάση είναι 4 :

```
>>  plot(GetHalton(100,2),GetHalton(100,4),'o')
>> grid on
```



Παράδειγμα 5.2 Θα προσπαθήσουμε να τιμολογήσουμε ένα απλό ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς χρησιμοποιώντας ακολουθίες Halton. Για να μετατρέψουμε τη ακολουθία σε παρατηρήσεις από την τυπική κανονική κατανομή θα εφαρμόσουμε είτε την μέθοδο Box-Muller είτε τη μέθοδο αντίστροφου μετασχηματισμού. Και οι δύο τεχνικές έχουν περιγραφεί στο Κεφάλαιο 3.

Σύμφωνα με την μέθοδο Box-Muller για να κατασκευάσουμε δύο ανεξάρτητες μεταβλητές από την τυπική κανονική κατανομή θα πρέπει πρώτα να παράγουμε δύο ανεξάρτητους αριθμούς U_1 και U_2 από την ομοιόμορφη κατανομή [0,1] και μετά να θέσουμε

$$X = \sqrt{-2\ln U_1}\cos(2\pi U_2),$$
$$Y = \sqrt{-2\ln U_1}\sin(2\pi U_2).$$

Αντί τώρα να παράγουμε ψευδοτυχαίους αριθμούς, θα κάνουμε χρήση δύο ακολουθιών Halton με δύο πρώτους αριθμούς ως βάση. Ο παρακάτω κώδικας τιμολογεί ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς χρησιμοποιώντας ακολουθίες Halton και τη μέθοδο Box-Muller :

```
function Price=BlsHaltonBM (S0,K,r,T,sigma,NPoints,Base1,Base2)
nuT=(r-0.5*sigma^2)*T;
siT=sigma *sqrt(T);
%use of Box Muller to generate standard normals
H1=GetHalton(ceil(NPoints/2),Base1);
H2=GetHalton(ceil(NPoints/2),Base2);
VLog=sqrt(-2*log(H1));
Norm1=VLog.*cos(2*pi*H2);

Norm2=VLog.*sin(2*pi*H2);
Norm=[Norm1,Norm2];
DiscPayoff=exp(-r*T)*max(0,S0*exp(nuT+siT*Norm)-K);
Price=mean(DiscPayoff);
```

Μία διαφορετική προσέγγιση βασίζεται στη μέθοδο αντίστροφου μετασχηματισμού για την παραγωγή παρατηρήσεων από την κανονική κατανομή. Ο κώδικας για την αποτίμηση του ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς είναι:

```
function Price=BlsHaltonINV(S0,K,r,T,sigma,NPoints,Base)
nuT=(r-0.5*sigma^2)*T;
siT=sigma*sqrt(T);
%use inverse transform to generate standard normals
H=GetHalton(NPoints,Base);
Veps=norminv(H);

DiscPayoff=exp(-r*T)*max(0,S0*exp(nuT+siT*Veps)-K);
Price=mean(DiscPayoff);
```

Θα ελέγξουμε τη χρήση των ακολουθιών Halton με τη μέθοδο Box-Muller και με τη μέθοδο του αντίστροφου μετασχηματισμού για την τιμολόγηση ενός απλού δικαιώματος αγοράς. Τα δεδομένα μας είναι τα εξής $: S_0 = 50,\ K = 52,\ r = 0.1,\ T = 5/12,\ \sigma = 0.4$, ενώ το μέγεθος του δείγματος που χρησιμοποιούμε είναι $\mathrm{NPoints{=}5000}$.

- Αρχικά κάνουμε χρήση της συνάρτησης του Black-Scholes για την τιμολόγηση του δικαιώματος αγοράς ώστε να λάβουμε την θεωρητική τιμή του δικαιώματος:

```
>> blsprice(50,52,0.1,5/12,0.4)

ans =

5.1911
```

- Τώρα θα κάνουμε χρήση της συνάρτησης `BlsHaltonBM` επιλέγοντας ως βάσεις τους πρώτους αριθμούς **2** και **7**:

```
>> BlsHaltonBM(50,52,0.1,5/12,0.4,5000,2,7)

ans =

    5.1970
```

Παρατηρούμε ότι παίρνουμε μία καλή εκτίμηση για την τιμή του δικαιώματος ακόμα και αν το μέγεθος του δείγματος είναι σχετικά μικρό.

- Αν εφαρμόσουμε την απλή προσομοίωση του Monte Carlo για την εκτίμηση του δικαιώματος παρατηρούμε ότι η εκτίμηση έχει μεγάλη μεταβλητότητα. Συγκεκριμένα:

```
>> randn('state',0)
>> BlsMC2(50,52,0.1,5/12,0.4,5000)

ans =   5.2549

>> BlsMC2(50,52,0.1,5/12,0.4,5000)

ans =    5.1090
```

```
>> BlsMC2(50,52,0.1,5/12,0.4,5000)

ans = 5.2777
```

- Ξανακάνουμε χρήση της συνάρτησης **BlsHaltonBM** επιλέγοντας τώρα ως βάσεις τους πρώτους αριθμούς 11 και 7.

```
>> BlsHaltonBM(50,52,0.1,5/12,0.4,5000,11,7)

ans =

    5.2173
```

Παρατηρούμε ότι η ποιότητα της εκτίμησης μπορεί να εξαρτάται από την επιλογή των βάσεων.

- Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία χρησιμοποιώντας όμως τώρα στη μία βάση ένα <u>μη πρώτο αριθμό</u> παρατηρούμε ότι η εκτίμηση μας δεν είναι <u>αξιόπιστη</u>. Συγκεκριμένα:

```
>> BlsHaltonBM(50,52,0.1,5/12,0.4,5000,2,4)

ans =
 6.2485
```

- Αν χρησιμοποιήσουμε ως βάσεις μεγάλους αριθμούς, ακόμα και αν αυτοί είναι πρώτοι αριθμοί, θα παρατηρήσουμε ότι έχει επιζήμιες συνέπειες για την εκτίμηση μας. Επιλέγοντας ως βάση τους πρώτους αριθμούς 59,83 στην πρώτη επανάληψη και 109,113 στην δεύτερη έχουμε

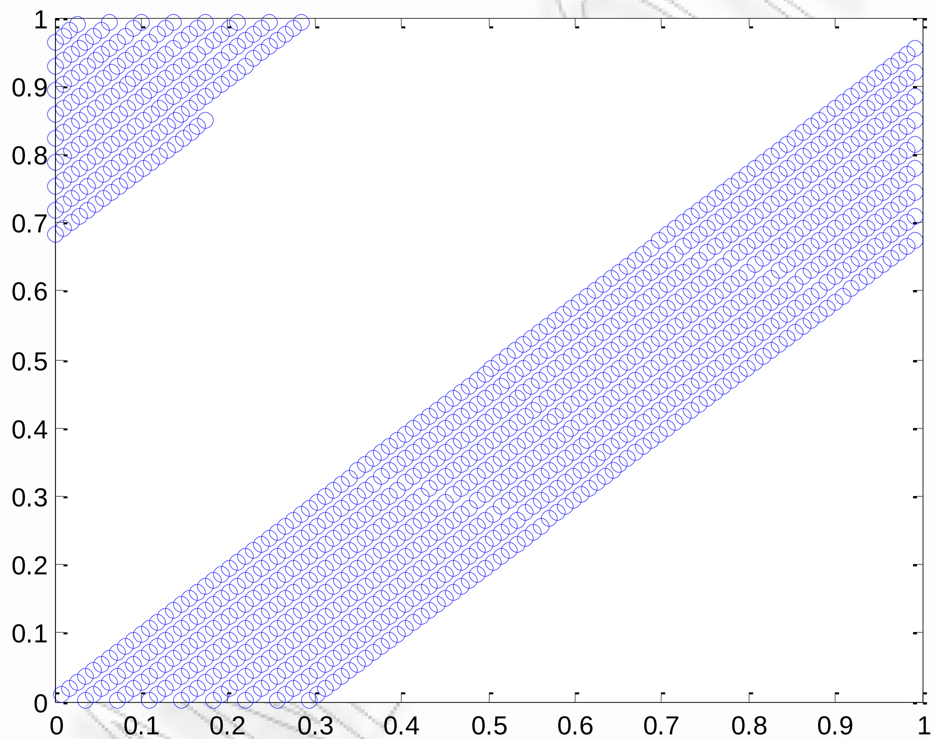
```
>> BlsHaltonBM(50,52,0.1,5/12,0.4,5000,59,83)

   ans =    5.3232

>> BlsHaltonBM(50,52,0.1,5/12,0.4,5000,101,103)

   ans =    6.0244
```

Για να κατανοήσουμε το λόγο για τον οποίο η χρήση μεγάλων αριθμών ως βάσεις δεν είναι καλή ιδέα, θα κατανείμουμε τα πρώτα 1000 σημεία σε μία δισδιάστατη ακολουθία όπου οι αριθμοί 109 και 113 χρησιμοποιούνται ως βάση:



Παρατηρούμε ότι γίνεται κακή κάλυψη του μοναδιαίου τετραγώνου. Συνεπώς στις ακολουθίες Halton <u>δε θα πρέπει να επιλέγουμε ως βάσεις μεγάλους αριθμούς ακόμα και αν αυτοί είναι πρώτοι.</u>

- Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε τους ίδιους αριθμούς βάσης με αυτούς της πρώτης επανάληψης, δηλαδή το 2 και το 7, αλλά διπλασιάσουμε τα σημεία δηλαδή $NPoints=10000$ έχουμε :

```
>> BlsHaltonBM(50,52,0.1,5/12,0.4,10000,2,7)

ans =

    5.1978
```

Η εκτίμηση μας δεν έχει μεγάλη διαφορά σε σχέση με την πρώτη επανάληψη (ans =5.1911). Συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να πάρουμε μία σχετικά ακριβή εκτίμηση του δικαιώματος αγοράς χρησιμοποιώντας ένα δείγμα μικρού μεγέθους.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του αντίστροφου μετασχηματισμού θα εκτιμήσουμε την τιμή ενός δικαιώματος αγοράς. . Τα δεδομένα μας είναι τα εξής:

$S_0 = 50,\ K = 52,\ r = 0.1,\ T = 5/12,\ \sigma = 0.4.$

- Αρχικά, χρησιμοποιούμε ως βάση τον αριθμό 2 και αυξάνουμε διαδοχικά τον αριθμό των παρατηρήσεων:

```
>> BlsHaltonINV(50,52,0.1,5/12,0.4,1000,2)

ans = 5.1094

>> BlsHaltonINV(50,52,0.1,5/12,0.4,2000,2)

ans = 5.1469

>> BlsHaltonINV(50,52,0.1,5/12,0.4,5000,2)

ans = 5.1688

>> BlsHaltonINV(50,52,0.1,5/12,0.4,10000,2)

ans = 5.1789

>> BlsHaltonINV(50,52,0.1,5/12,0.4,50000,2)

ans = 5.1879
```

Παρατηρούμε ότι οι τιμές αυξάνονται μονοτονικά καθώς αυξάνεται ο αριθμός των δειγμάτων.

- Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε ως βάση ένα μεγάλο πρώτο αριθμό, έστω το 499, έχουμε:

```
>> BlsHaltonINV(50,52,0.1,5/12,0.4,1000,499)

ans = 5.1139

>> BlsHaltonINV(50,52,0.1,5/12,0.4,2000,499)

ans = 5.1141

>> BlsHaltonINV(50,52,0.1,5/12,0.4,3000,499)

ans = 5.1143

>> BlsHaltonINV(50,52,0.1,5/12,0.4,5000,499)

ans = 5.1148

>> BlsHaltonINV(50,52,0.1,5/12,0.4,10000,499)

ans = 5.1159
```

Βλέπουμε ότι πάλι οι τιμές αυξάνονται καθώς αυξάνεται ο αριθμός των παρατηρήσεων όμως τώρα με πολύ μικρότερο ρυθμό.

5.2 Ακολουθίες Χαμηλής Διαφοράς Sobol.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε ακολουθίες διαφορετικές σε σχέση με αυτές του Halton που είδαμε νωρίτερα. Οι ακολουθίες αυτές ονομάζονται Sobol. Για λόγους απλούστευσης είναι καλύτερα να εξετάσουμε την παραγωγή μίας μονοδιάστατης ακολουθίας x^n που ανήκει στο διάστημα $[0,1]$. Μία ακολουθία Sobol παράγεται με βάση ένα σύνολο *κατευθυντήριων αριθμών* $u_1 u_2 \dots$. Στην συνέχεια θα εξετάσουμε πως επιλέγονται αυτοί οι κατευθυντήριοι αριθμοί, προς το παρόν όμως θα τους θεωρήσουμε αριθμούς μικρότερους του 1. Για να πάρουμε τον n$^{\text{οστό}}$ αριθμό της ακολουθίας εξετάζουμε τη δυαδική παρουσίαση του ακεραίου n:

$$n = (\dots b_1 b_2 b_3)_2$$

Το αποτέλεσμα το παίρνουμε υπολογίζοντας τη *λογική πύλη **xor*** των κατευθυντήριων αριθμών u_i για τα οποία ισχύει $b_i \neq 0$:

$$x^n = b_1 u_1 \oplus b_2 u_2 \oplus \dots \quad \textbf{(5.1)}$$

Η λογική πύλη xor στο δυαδικό σύστημα, προσθέτει τις ίδιες τάξεις μεγέθους σε δύο αριθμητικές δυαδικές παραστάσεις ίδιους μήκους και αποδίδεται με το σύμβολο $\oplus$. Αν μία από τις δύο τάξεις μεγέθους που προστίθενται είναι 1, τότε η αντίστοιχη τάξη μεγέθους της νέας δυαδικής παράστασης θα είναι 1. Αν και οι δύο τάξεις μεγέθους είναι είτε 0 είτε 1 τότε η νέα τάξη μεγέθους που προκύπτει θα είναι 0. Για να γίνει κατανοητό παρατίθεται ένα παράδειγμα. Έστω οι δυαδικοί αριθμοί 0101 (δεκαδικός 5) και 0011 (δεκαδικός 3), οπότε αν εφαρμόσουμε τη λογική πύλη xor έχουμε:

$$\boxed{\begin{array}{r} 0101\ (\text{δεκαδικός } 5) \\ xor\ 0011\ (\text{δεκαδικός } 3) \\ =\ 0110\ (\text{δεκαδικός } 6) \end{array}}$$

Εάν οι κατευθυντήριοι αριθμοί επιλεχθούν κατάλληλα τότε θα παραχθεί μία ακολουθία χαμηλής διαφοράς. Ένας κατευθυντήριος αριθμός μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$u_i = (0.u_{i1}u_{i2}u_{i3}\dots)_2$$

είτε ως δυαδικό κλάσμα

$$u_i = \frac{m_i}{2^i},$$

όπου $m_i < 2^i$ είναι ένας περιττός ακέραιος αριθμός. Για να παράγουμε τους κατευθυντήριους αριθμούς, θα πρέπει να εκμεταλλευτούμε πρωτογενή πολυώνυμα που ανήκουν στο πεδίο $\mathbb{Z}_2$ δηλαδή πολυώνυμα με δυαδικούς συντελεστές:

$$P = x^d + a_1 x^{d-1} + \ldots + a_{d-1} x + 1 \;\; a_k \in \{0,1\}.$$

Μη ανάγωγα πολυώνυμα είναι αυτά τα οποία δεν παραγοποιούνται, πρωτογενή είναι ένα υποσύνολο αυτών. Δοθέντος ενός πρωτογενούς πολυωνύμου βαθμού *d,* η διαδικασία για την παραγωγή κατευθυντήριων αριθμών βασίζεται στον παρακάτω αναδρομικό τύπο:

$$u_i = a_1 u_{i-1} \oplus a_2 u_{i-2} \oplus \ldots \oplus a_{d-1} u_i \oplus u_{i-d} \oplus \left[u_{i-d} / 2^d \right], \;\; i > d .$$

Ο τύπος εφαρμόζεται καλύτερα ως εξής:

$$m_i = 2 a_1 m_{i-1} \oplus 2^2 a_2 m_{i-2} \oplus \ldots \oplus 2^{d-1} a_{d-1} m_{i-d+1} \oplus 2^d m_{i-d} \oplus m_{i-d} .$$

Οι αριθμοί $m_1 \ldots m_d$ είναι απαραίτητοι για να λειτουργήσει ο τύπος. Αυτοί μπορούν επιλεχθούν αυθαίρετα αρκεί να πληρούν τα προαναφερθέντα κριτήρια, δηλαδή να είναι περιττοί και να ισχύει $m < 2^i$.

Παράδειγμα 5.3. Θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε ένα σύνολο κατευθυντήριων αριθμών βασιζόμενοι στο πρωτογενές πολυώνυμο

$$x^3 + x + 1 .$$

Ο αναδρομικός τύπος λειτουργεί ως εξής:

$$m_i = 4 m_{i-2} \oplus 8 m_{i-3} \oplus m_{i-3} .$$

Οι αυθαίρετες αρχικές τιμές που χρησιμοποιούμε είναι $m_1 = 1,\; m_2 = 3,\; m_3 = 7$. Μπορούμε να μεταφέρουμε στην Matlab τους απαραίτητους υπολογισμούς βήμα-βήμα, εφαρμόζοντας τη συνάρτηση bitxor.

```
>>  m=[1 3 7];
>>  i=4;
>>  m(i)=bitxor(4*m(i-2),bitxor(8*m(i-3),m(i-3)));
>> i=5;
>> m(i)=bitxor(4*m(i-2),bitxor(8*m(i-3),m(i-3)));
>> i=6;
>> m(i)=bitxor(4*m(i-2),bitxor(8*m(i-3),m(i-3)));
>> m

m=   1     3     7     5     7    43
```

Δοθέντος ενός ακεραίου αριθμού m_i, μπορούμε να κατασκευάσουμε τους κατευθυντήριους αριθμούς u_i. Για να εφαρμόσουμε την παραγωγή των κατευθυντήριων αριθμών θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση **GetDirNumbers**, η οποία παρουσιάζεται παρακάτω. Η συνάρτηση απαιτεί ένα πρωτογενές πολυώνυμο p, ένα διάνυσμα αρχικών αριθμών m και το πλήθος n των κατευθυντήριων αριθμών που παράγονται. Ο κώδικας είναι:

```
function[v,m]=GetDirNumbers(p,m0,n)
degree=length(p)-1;
p=p(2:degree);
m=[m0,zeros(1,n-degree)];
for i=(degree+1):n
    m(i)=bixtor(m(i-degree),2^degree*m(i-degree);
    for j=1:(degree-1)
        m(i)=bitxor(m(i),2^j*p(j)*m(i-j);
    end
end
v=m./(2.^(1:length(m)));
```

Η συνάρτηση εξάγει τους κατευθυντήριους αριθμούς v και τους ακέραιους αριθμούς m**.**

```
>> p=[1 0 1 1];
>> m0=[1 3 7];
>> [v,m]=GetDirNumbers(p,m0,6)
v = 0.5000    0.7500    0.8750    0.3125    0.2188    0.6719
m =  1     3     7     5     7    43
```

Ο κώδικας δεν είναι βελτιστοποιημένος, <u>ο πρώτος και ο τελευταίος συντελεστής θα πρέπει είναι 1 από την προεπιλογή.</u>

Αφού υπολογίσαμε τους κατευθυντήριους αριθμούς, τώρα θα προσπαθήσουμε να παράγουμε μία ακολουθία Sobol όπως της εξίσωσης (5.1) .Ωστόσο, μία βελτιωμένη μέθοδος προτάθηκε από τους Antonov και Saleev (1979) και δείχνει ότι η διαφορά δε μεταβάλλεται από την χρήση του κώδικα Gray για την αναπαράσταση του n. Τα απαραίτητα, για τους κώδικες Gray, που πρέπει να γνωρίζουμε είναι τα εξής:

1. Ένας κώδικας Gray είναι μία συνάρτηση που απεικονίζει έναν ακέραιο αριθμό i σε μία αντίστοιχη δυαδική αναπαράσταση $G(i)$. Η συνάρτηση, για έναν δοσμένο αριθμό N, είναι $0 \le i \le 2^N - 1$.
2. Ο κώδικα Gray για τον ακέραιο n προκύπτει από την δυαδική αναπαράσταση του υπολογίζοντας το εξής:
$$...g_3 g_2 g_1 = (...b_3 b_2 b_1)_2 \oplus (...b_4 b_3 b_2)_2 .$$
3. Το κύριο χαρακτηριστικό αυτού του κώδικα είναι ότι η δυαδική αναπαράσταση για τους διαδοχικούς αριθμούς n και n+1 διαφέρουν κατά μία θέση.

Παράδειγμα 5.4 Ο υπολογισμός του κώδικα Gray επιτυγχάνεται εύκολα με τη βοήθεια της Matlab. Για παράδειγμα, μπορούμε να ορίσουμε μία συνάρτηση εισόδου και να υπολογίσουμε τους κώδικες Gray για τους αριθμούς $i = 0,1,...,15$ ως εξής:

```
>> gray=inline('bitxor(x,bitshift(x,1))');
codes=zeros(16,4);
for i=1:16,codes(i,:)=bitget(gray(i-1),[4 3 2 1]);,end
codes
codes =

     0     0     0     0
     0     0     0     1
     0     0     1     1
     0     0     1     0
     0     1     1     0
     0     1     1     1
     0     1     0     1
     0     1     0     0
     1     1     0     0
     1     1     0     1
     1     1     1     1
     1     1     1     0
     1     0     1     0
     1     0     1     1
     1     0     0     1
     1     0     0     0
```

Χρησιμοποιήσαμε τη συνάρτηση **`bitshift`** για να μετατοπίσουμε τη δυαδική αναπαράσταση του x μία θέση προς τα δεξιά. Και την συνάρτηση **`bitget`** για να πάρουμε συγκεκριμένα δυαδικά στοιχεία από το δυαδικό αριθμό. Παρατηρούμε ότι όντως οι κώδικες Gray για τους διαδοχικούς αριθμούς i και i+1 διαφέρουν κατά μία θέση.

Εφαρμόζοντας τους κώδικες Gray μπορούμε να παράγουμε μία ακολουθία Sobol. Δοθέντος x^n, έχουμε

$$x^{n+1} = x^n \oplus u_c ,$$

όπου c είναι ο δείκτης του ακραίου μηδενικού δυαδικού ψηφίου b_c στη δυαδική αναπαράσταση του n.

Παράδειγμα 5.5. Για να εφαρμόσουμε αυτό το μηχανισμό στη Matlab θα πρέπει με κάποιο τρόπο να βρούμε το ακραίο από τα δεξιά μηδενικό ψηφίο στη δυαδική αναπαράσταση του αριθμού. Η παρακάτω συνάρτηση έχει αυτή την λειτουργία. Θα πρέπει να επισημανθεί ότι στη συνάρτηση η δυαδική αναπαράσταση του x αποτελείται από το πολύ οκτώ ψηφία.

```
rightbit=inline('min(find(bitget(x,1:8)==0))')
```

Τώρα μπορούμε να τα βάλουμε όλα μαζί. Αρχικά, παράγουμε τους κατευθυντήριους αριθμούς από τη συνάρτηση **`GetDirNumbers`**. Μετά ορίζουμε την αρχή της ακολουθίας (π.χ. $x^0 = 0$), και χρησιμοποιούμε τον παρακάτω κώδικα :

```
function SobSeq=GetSobol(GenNumbers,x0,HowMany)
NBits=20;
factor=2^NBits;
BitNumbers=GenNumbers*factor;
SobSeq=zeros(HowMany+1,1);
SobSeq(1)=fix(x0*factor);
for i=1:HowMany
    c=min(find(bitget(i-1,1:16)==0));
    SobSeq(i+1)=bitxor(SobSeq(i),BitNumbers(c));
End
SobSeq=SobSeq/factor;
```

Ο κώδικας είναι απλός, το μόνο σημείο που θα πρέπει να δώσουμε προσοχή είναι ότι στη θεωρία θα πρέπει να υπολογίσουμε την **xor** στα ψηφία ως ένα δυαδικό κλάσμα, ωστόσο η εντολή `bitxor` λειτουργεί μόνο με ακέραιους αριθμούς . Για τον λόγο αυτό θα πρέπει να μετατοπίσουμε τα πάντα προς τα αριστερά. Αυτό επιτυγχάνεται πολλαπλασιάζοντας με το `factor` και διαιρώντας το στο τέλος του κώδικα `GetSobol` έτσι ώστε να πάρουμε την ακολουθία. Επίσης στρογγυλοποιούμε τον αρχικό αριθμό ώστε να είμαστε σίγουροι ότι εκτελούμε την **xor** σε ακέραιους αριθμούς.

```
>> p=[1 0 1 1];

>> m0=[1 3 7];

>> [v,m]=GetDirNumbers(p,m0,6)

v = 0.5000    0.7500    0.8750    0.3125    0.2188    0.6719

m =      1      3      7      5      7     43

>> GetSobol(v,0,10)

ans =

         0

    0.5000

    0.2500

    0.7500

    0.1250

    0.6250

    0.3750

    0.8750

    0.6875

    0.1875

    0.9375
```

Παράδειγμα 5.6. Θα προσπαθήσουμε να τιμολογήσουμε ένα απλό ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με προσομοίωση Monte Carlo χρησιμοποιώντας ακολουθίες χαμηλής διαφοράς Sobol. Με τις ακολουθίες Sobol παράγουμε ομοιόμορφους ‘quasi-random’ αριθμούς, και με τη μέθοδο του αντίστροφου μετασχηματισμού μετατρέπουμε τους αριθμούς αυτούς σε δείγμα από την τυπική κανονική κατανομή. Από τη στιγμή που θα παραχθεί το δείγμα είναι εύκολο να τιμολογήσουμε το δικαίωμα με προσομοίωση Monte Carlo. Ο κώδικας της Matlab είναι ο εξής:

```
function Price=BlsMCSobol(S0,K,r,T,sigma,v,x0,HowMany)
nuT=(r-0.5*sigma^2)*T;
siT=sigma*sqrt(T);
H=GetSobol(v,x0,HowMany);
%inverse transform to generate standard normals
Veps=norminv(H);
DiscPayoff=exp(-r*T)*max(0,S0*exp(nuT+siT*Veps)-K);
Price=mean(DiscPayoff);
```

Η διαδικασία που ακολουθούμε για να τιμολογήσουμε το δικαίωμα είναι η ακόλουθη:

- Αρχικά θέτουμε το μέγεθος του πρωτογενούς πολυωνύμου p καθώς επίσης και τους αρχικούς αριθμούς m0 ώστε να πάρουμε τους κατευθυντήριους αριθμούς. Συγκεκριμένα:

```
p=[1 0 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1];

m0=[1 3 7 15  31 63 127 255 511 1023 2047 4095];

[v.m]=GetDirNumbers(p,m0,30);
```

- Κάνουμε χρήση των κατευθυντήριων αριθμών ώστε να παράγουμε την ακολουθία Sobol και μετασχηματίζουμε την ομοιόμορφη ακολουθία σε δείγμα από την τυπική κανονική με τη μέθοδο του αντίστροφου μετασχηματισμού. Το δείγμα που παράγεται το χρησιμοποιούμε στην προσομοίωση Monte Carlo ώστε να πάρουμε εκτίμηση για την τιμή του δικαιώματος.
- Τώρα θα συγκρίνουμε τη τιμή που προκύπτει από τις ακολουθίες Sobol με τη τιμή που προκύπτει από το μοντέλο του Black-Scholes και από την απλή προσομοίωση Monte Carlo:

```
>> p=blsprice(50,60,0.05,1,0.2)

p =1.6237

>> [p,CI]=BlsMC2(50,60,0.05,1,0.2,1000000)

p =   1.6201

CI =

    1.6116

    1.6286

>> (CI(2)-CI(1))/2

ans =0.0085
```

- Για την απλή προσομοίωση Monte Carlo παίρνουμε δείγμα μεγάλου μεγέθους (1.000.000) ώστε να πάρουμε μία αρκετά ακριβή εκτίμηση. Παρόλο που το σχετικό σφάλμα είναι της τάξης του 10^{-3} , ωστόσο η τιμή που παίρνουμε δεν είναι αρκετά ικανοποιητική.

```
>> Price=BlsMCSobol(50,60,0.05,1,0.2,v,0.24,1000)

Price =1.6460

>> Price=BlsMCSobol(50,60,0.05,1,0.2,v,0.24,3000)

Price =1.6275

>> Price=BlsMCSobol(50,60,0.05,1,0.2,v,0.24,10000)

Price =1.6168

>> Price=BlsMCSobol(50,60,0.05,1,0.2,v,0.24,20000)

Price =1.6230

>> Price=BlsMCSobol(50,60,0.05,1,0.2,v,0.24,30000)

Price =1.6232

>> Price=BlsMCSobol(50,60,0.05,1,0.2,v,0.24,40000)

Price =1.6237

>> Price=BlsMCSobol(50,60,0.05,1,0.2,v,0.24,50000)
```

```
Price =1.6239
>> Price=BlsMCSobol(50,60,0.05,1,0.2,v,0.24,100000)
Price =1.6236
```

- Παρατηρούμε πως με δείγμα μόλις 20.000 παρατηρήσεων παίρνουμε πολύ καλή εκτίμηση για την τιμή του δικαιώματος, ενώ με δείγμα 40.000 παίρνουμε τιμή ακριβώς ίδια με αυτή του Black-Scholes. Συνεπώς η προσομοίωση Monte Carlo με τη χρήση ακολουθιών Sobol είναι αποτελεσματική, αφού με μικρό σχετικά δείγμα παρατηρήσεων παίρνουμε πολύ καλή εκτίμηση για την τιμή του δικαιώματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: Τιμολόγηση Αμερικανικού Δικαιώματος με Monte Carlo

Στα προηγούμενα κεφάλαια ασχοληθήκαμε με δικαιώματα προαίρεσης ευρωπαϊκού τύπου, τα οποία εξασκούνται αποκλειστικά στη λήξη. Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε πως εφαρμόζεται η προσομοίωση Monte Carlo για την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης που μπορούν να εξασκηθούν πρόωρα. Τα δικαιώματα αυτά ονομάζονται Αμερικάνικα. Παρακάτω περιγράφεται μία προσέγγιση που αναλύθηκε από τους Longstaff και Schwartz (2001) και μπορεί να ερμηνευτεί ως ένας τρόπος για να προσεγγίσουμε την τιμή μίας συνάρτησης δυναμικού προγραμματισμού με γραμμική παλινδρόμηση με την βοήθεια ενός συνόλου εξισώσεων βάσης.

Έστω ένα αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης που είναι γραμμένο σε μία απλή μετοχή που δε δίνει μέρισμα. Ως συνήθως, όταν εφαρμόζουμε προσομοίωση Monte Carlo παράγουμε δειγματικά μονοπάτια $(S_{0,}S_1,...,S_j,...S_N)$, το j είναι ο δείκτης του διακριτού χρόνου, $S_j = S(j\delta t)$ είναι η τιμή της μετοχής και $T = M\delta t$ είναι ο χρόνος λήξης του δικαιώματος. Αν συμβολίσουμε με $I_j(S_j)$ την εσωτερική αξία του δικαιώματος στον χρόνο j, η αναδρομική εξίσωση του δυναμικού προγραμματισμού για τη συνάρτηση της τιμής $V_j(S_j)$ είναι :

$$V_j(S_j) = \max\left\{I_j(S_j), E_j^Q\left[e^{-r\delta t}V_{j+1}(\tilde{S}_{j+1}) \mid S_j\right]\right\}. \quad (6.1)$$

Στην περίπτωση του Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης η εσωτερική αξία είναι $I_j(S_j) = \max\left\{K - S_j, 0\right\}$. Το πρόβλημα που έχουμε εδώ είναι ότι οι τιμές της μετοχής είναι συνεχείς ενώ ο χρόνος είναι διακριτοποιημένος, και το σύνολο των ενεργειών είναι πεπερασμένο είτε εξασκούμε το δικαίωμα είτε συνεχίζουμε. Είναι σημαντικό να γίνει κατανοητό ότι δε μπορούμε να πάρουμε αυτή την απόφαση κατά μήκος των ανεξάρτητων δειγματικών μονοπατιών. Αν είμαστε σε ένα δεδομένο σημείο ενός δειγματικού μονοπατιού που έχει παραχθεί με δειγματοληψία Monte Carlo , δε μπορούμε να γνωρίζουμε τις μελλοντικές τιμές κατά μήκος του μονοπατιού καθώς αυτό θα απαιτούσε μαντικές ικανότητες. Αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα σύνολο σεναρίων, ώστε να κατασκευάσουμε μία προσέγγιση της αναμενόμενης τιμής στην εξίσωση (6.1) επιλέγοντας συναρτήσεις βάσης $\psi_k(S_j)$ για $k=1,...,K$. Η πιο απλή επιλογή είναι να παλινδρομήσουμε την αναμενόμενη τιμή με κάποια μονώνυμα βάσης: $\psi_1(S)=1,\ \psi_2(S)=S,\ \psi_3(S)=S^2$,κτλ. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι εφαρμόζουμε το ίδιο σύνολο των συναρτήσεων βάσης για κάθε χρονική στιγμή, αλλά τα σταθμά στο γραμμικό συνδυασμό θα εξαρτώνται από τον χρόνο:

$$E_j^Q\left[e^{-r\delta t}V_{j+1}(\tilde{S}_{j+1})\,|\,S_j\right]\approx\sum_{k=1}^{K}a_{kj}S_j^{k-1}.$$

Τα σταθμά a_{kj} μπορούν να βρεθούν με γραμμική παλινδρόμηση, πηγαίνοντας πίσω στον χρόνο. Η προσέγγιση είναι μη γραμμική ως προς τα S_j, αλλά είναι γραμμική ως προς τα σταθμά.

Για να παρουσιασθεί αυτή η μέθοδος, θα πρέπει να αρχίσουμε από την τελευταία περίοδο. Υποθέτουμε ότι έχουν παραχθεί *N* δειγματικά μονοπάτια και ορίζουμε με $S_{j,i}$ την τιμή στον χρόνο $j=0,1,..,M$ και στο δειγματικό μονοπάτι $i=1,...,N$. Όταν $j=M$, η συνάρτηση της τιμής στη λήξη:

$$V_M(S_{Mi})=\max\left\{K-S_{Mi},0\right\}$$

για κάθε δειγματικό μονοπάτι i. Αυτές οι τιμές ,προεξοφλημένες, μπορούν να εφαρμοσθούν όπως οι μεταβλητές *Y* σε μία γραμμική παλινδρόμηση, ενώ οι *X* είναι οι τιμές της μετοχής στον χρόνο $j=M-1$. Πιο συγκεκριμένα το μοντέλο παλινδρόμησης είναι:

$$e^{-r\delta t}\max\left\{K-S_{Mi},0\right\}=\sum_{k=1}^{K}a_{k,M-1}S_{M-1,i}^{k-1}+e_i,\qquad i=1,...,N,$$

όπου e_i είναι τα κατάλοιπα για κάθε δειγματικό μονοπάτι. Μπορούμε να βρούμε τα σταθμά $a_{k,M-1}$ από τη συνηθισμένη προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων, ελαχιστοποιώντας το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι προεξοφλημένες πληρωμές είναι αυτές που μας ενδιαφέρουν έτσι ώστε να μπορούμε μετά να τις συγκρίνουμε απευθείας με τις εσωτερικές αξίες.

Στην παραπάνω παλινδρόμηση εξετάσαμε όλα τα δειγματικά μονοπάτια. Στην πραγματικότητα, είναι καλύτερο να εξετάσουμε μόνο το υποσύνολο των δειγματικών μονοπατιών στα οποία το δικαίωμα είναι in-the-money στον χρόνο $j = M-1$. Αν το δικαίωμα είναι out-of-the-money δεν υπάρχει λόγος να το εξασκήσουμε. Το να χρησιμοποιήσουμε μόνο τα δειγματικά μονοπάτια για τα οποία το δικαίωμα είναι in-the-money ονομάζεται 'moneyness' κριτήριο και βελτιώνει την επίδοση της συνολικής προσέγγισης. Ορίζοντας αυτό το υποσύνολο ως I_{M-1} και υποθέτοντας ότι $K=3$, θα πρέπει να λύσουμε το παρακάτω πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων:

$$\min \sum_{i \in I_{M-1}} e_i^2$$

$$a_{1,M-1} + a_{2,M-1} S_{M-1,i} + a_{3,M-1} S^2_{M-1,i} + e_i = e^{-r\delta t} \max\{K - S_{Mi}, 0\},\ i \in I_{M-1}.$$

Το αποτέλεσμα που θα εξαχθεί από αυτό το πρόβλημα θα είναι ένα σύνολο από σταθμά, το οποίο μας επιτρέπει να προσεγγίσουμε την τιμή της συνέχισης. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα σταθμά σχετίζονται με το χρονικό διάστημα και όχι με τα δειγματικά μονοπάτια. Εφαρμόζοντας την ίδια προσέγγιση για κάθε δειγματικό μονοπάτι που βρίσκεται στο υποσύνολο I_{M-1} θα επιλέξουμε αν θα το εξασκήσουμε εκείνη την στιγμή ή όχι.

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα για να παρουσιάσουμε όσα έχουμε δει μέχρι στιγμής αναφορικά με τα αμερικάνικα δικαιώματα προαίρεσης. Στον Πίνακα (1) υπάρχουν οχτώ δειγματικά μονοπάτια για ένα Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης με τιμή εξάσκησης $K=1.1$. Επίσης στον Πίνακα 2, για κάθε δειγματικό μονοπάτι, έχουμε ένα σύνολο ταμειακών ροών στη λήξη. Οι ταμειακές ροές στη λήξη είναι θετικές όταν το δικαίωμα είναι in-the-money.

Δειγματικά Μονοπάτια	j=1	j=2	j=3
1	1.00	1.09	1.34
2	1.00	1.16	1.54
3	1.00	1.22	1.03
4	1.00	0.93	0.92
5	1.00	1.11	1.52
6	1.00	0.76	0.90
7	1.00	0.92	1.01
8	1.00	0.88	1.34

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Δειγματικά Μονοπάτια	j=1	j=2	j=3
1	-	-	.00
2	-	-	.00
3	-	-	.07
4	-	-	.18
5	-	-	.00
6	-	-	.20
7	-	-	.09
8	-	-	.00

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

Οι ταμειακές ροές προεξοφλούνται στο χρόνο $j=2$ και χρησιμοποιούνται στην πρώτη γραμμική παλινδρόμηση. Υποθέτοντας επιτόκιο ουδέτερου κινδύνου 6% ανά περίοδο, ο παράγοντας προεξόφλησης είναι $e^{-r\delta t}=e^{-0.06}=0.94176$. Τα στοιχεία για την παλινδρόμηση δίνονται στον Πίνακα 3. Το *X* αντιπροσωπεύει την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου ενώ το *Y* τις προεξοφλημένες ταμειακές ροές στην επόμενη χρονική στιγμή.

Δειγματικά Μονοπάτια	Y	X
1	.00×0.94176	1.08
2	-	-
3	.07×0.94176	1.07
4	.18×0.94176	0.97
5	-	-
6	.20×0.94176	0.77
7	.09×0.94176	0.84
8	-	-

ΠΙΝΑΚΑΣ 3 Στοιχεία παλινδρόμησης για j=2

Βλέπουμε ότι χρησιμοποιούνται μόνο τα δειγματικά μονοπάτια για τα οποία το δικαίωμα είναι in-the-money στον χρόνο $j=2$. Με βάση τα παραπάνω στοιχεία προκύπτει η παρακάτω προσέγγιση:

$$E[Y\,|\,X] \approx -1.070 + 2.983X + 1.813X^2 .$$

Τώρα βασιζόμενοι σε αυτή την προσέγγιση, μπορούμε να συγκρίνουμε, στον χρόνο $j=2$, την εσωτερική αξία και την αξία συνέχισης. Τα στοιχεία παρουσιάζονται στον Πίνακα 4

Δειγματικά Μονοπάτια	Άσκηση	Συνέχιση
1	.02	.0396
2	-	-
3	.03	.0461
4	.13	.1176
5	-	-
6	.33	.1520
7	.26	.1565
8	-	-

ΠΙΝΑΚΑΣ 4 Σύγκριση εσωτερικής και αξίας συνέχισης στο j=2

Με δεδομένες τις αποφάσεις εξάσκησης οι ταμειακές ροές έχουν ως εξής:

Δειγματικά Μονοπάτια	j=1	j=2	j=3
1	-	.00	.00
2	-	.00	.00
3	-	.00	.07
4	-	.13	.00
5	-	.00	.00
6	-	.33	.00
7	-	.26	.00
8	-	.00	.00

ΠΙΝΑΚΑΣ 5 Αποτελέσματα ταμειακών ροών για j=2.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η απόφαση εξάσκησης δεν αξιοποιεί τη γνώση του μέλλοντος. Για παράδειγμα το δειγματικό μονοπάτι 4 το εξασκούμε στο j=2 κερδίζοντας \$0.13. θα μετανιώσουμε για την απόφαση μας διότι αν το εξασκούσαμε στη λήξη θα κερδίζαμε \$0.18.

Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται πηγαίνοντας προς τα πίσω στον χρόνο. Για να δημιουργήσουμε την παλινδρόμηση θα πρέπει να γνωρίζουμε τις ταμειακές ροές σε κάθε μονοπάτι που προκύπτουν από την απόφαση πρόωρης εξάσκησης. Αν είμαστε στη χρονική στιγμή j και έστω το δειγματικό μονοπάτι i. Για κάθε δειγματικό μονοπάτι i, θα υπάρχει ένας χρόνος εξάσκησης j_e^* τον οποίο θέτουμε ίσο με M+1 αν το δικαίωμα δεν θα εξασκηθεί ποτέ στο μέλλον. Τότε η γραμμική παλινδρόμηση μπορεί να γραφτεί, για την γενικευμένη χρονική στιγμή j, ως εξής:

$$\min \sum_{i \in I_j} e_i^2$$

$$\textit{έτσι ώστε } a_{1j} + a_{2j}S_{ji} + a_{3j}S_{ji}^2 + e_i$$
$$= \begin{cases} e^{-r(j_e^* - j)\delta t} \max\left\{K - S_{j_e^*, i}, 0\right\} & \text{αν } j_e^* \le M \\ 0 & \text{αν } j_e^* = M + 1. \end{cases} \quad i \in I_j$$

Πηγαίνοντας προς τα πίσω στη χρονική στιγμή j=1, τα δεδομένα της παλινδρόμησης είναι τα ακόλουθα:

Δειγματικά Μονοπάτια	*Y*	*X*
1	.00	1.09
2	-	-
3	-	-
4	.13×.94176	.1176
5	-	-
6	.33×.94176	.1520
7	.26×.94176	.1565
8	.00	0.88

ΠΙΝΑΚΑΣ 6 Δεδομένα παλινδρόμησης για j=1

Από την προσέγγιση με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων έχουμε:

$$E[Y \mid X] \approx 2.038 - 3.335X + 1.356X^2.$$

Η προσέγγιση αυτή μπορεί να φαίνεται παράλογη, αφού αναμένουμε μικρότερα κέρδη για μεγαλύτερες τιμές της μετοχής. Ωστόσο, η μεγαλύτερη δύναμη του πολυωνύμου εδώ έχει θετικό συντελεστή. Μπορεί να επαληθευτεί ότι για το εύρος των τιμών του X που χρησιμοποιούμε στη συγκεκριμένη περίπτωση, η συνάρτηση μειώνεται. Με βάση αυτή την προσέγγιση μπορούμε να λάβουμε τις αποφάσεις εξάσκησης στον χρόνο j=1 που παρουσιάζονται στους Πίνακες 7 και 8.

Δειγματικά Μονοπάτια	Άσκηση	Συνέχιση
1	.01	.0139
2	-	-
3	-	-
4	.17	.1092
5	-	-
6	.34	.2866
7	.18	.1175
8	.22	.1533

ΠΙΝΑΚΑΣ 7 Τιμές εξάσκησης και συνέχισης για j=1

Δειγματικά Μονοπάτια	j=1	j=2	j=3
1	.00	.00	.00
2	.00	.00	.00
3	.00	.00	.07
4	.17	.00	.00
5	.00	.00	.00
6	.34	.00	.00
7	.18	.00	.00
8	.22	.00	.00

ΠΙΝΑΚΑΣ 8 Ταμειακές ροές για j=1

Προεξοφλώντας όλες τις ταμειακές ροές στη χρονική στιγμή j=0 και παίρνοντας τον μέσο όρο των οχτώ δειγματικών μονοπατιών καταλήγουμε πως η αξίας συνέχισης είναι $ 0.194, μεγαλύτερη από την εσωτερική αξία $0.1. <u>Συνεπώς, το δικαίωμα δε θα πρέπει να εξασκηθεί άμεσα.</u>

Εφαρμόζουμε το παραπάνω παράδειγμα με τη βοήθεια της Matlab.

```
function price = ExampleLS
S0=1;K=1.1;r=0.06;T=3;NSteps=3;
dt=T/NSteps;
discountVet=exp(-r*dt*(1:NSteps)');
%paragogi deigmatikon monopation
NRepl=8;
SPaths=[
    1.09 1.08 1.34
    1.16 1.26 1.54
    1.22 1.07 1.03
    0.93 0.97 0.92
    1.11 1.56 1.52
    0.76 0.77 0.90
    0.92 0.84 1.01
    0.88 1.22 1.34
    ];
alpha=zeros(3,1); %parametroi palindromisis
CashFlows=max(0,K-SPaths(:,NSteps));
ExerciseTime=NSteps*ones(NRepl,1);
for step=NSteps-1:-1:1
    InMoney=find(SPaths(:,step)<K);
    XData=SPaths(InMoney,step);
    RegrMat=[ones(length(XData),1),XData,XData.^2];
    YData=CashFlows(InMoney).*discountVet(ExerciseTime(InMoney)-step);
    alpha=RegrMat\YData;
    IntrinsicValue=K-XData;
    ContinuationValue=RegrMat*alpha;
    Index=fing(IntrinsicValue>ContinuationValue);
    ExercisePaths=InMoney(Index);
    CashFlows(ExercisePaths)=IntrinsicValue(Index);
    ExerciseTime(ExercisePaths)=step;
end
price=max(K-S0,mean(CashFlows.*dicountVet(ExerciseTime)));
```

Αρχικά τα δειγματικά μονοπάτια από το παράδειγμα καταχωρούνται στον πίνακα `SPaths`. Όπου δεν περιλαμβάνεται η αρχική τιμή S_0. Ο πίνακας των ταμειακών ροών αποθηκεύεται στο διάνυσμα `CashFlows`. Στο διάνυσμα `ExerciseTime` αποθηκεύουμε τη χρονική στιγμή που το δικαίωμα εξασκείται σε κάθε δειγματικό μονοπάτι και χρησιμοποιείται για να επιλέξουμε τον κατάλληλο συντελεστή προεξόφλησης στο διάνυσμα `discountVet`. Το διάνυσμα `InMoney` περιλαμβάνει τους δείκτες για τους οποίους τα δειγματικά μονοπάτια είναι in-the-money τη χρονική στιγμή που εξετάζουμε. Η εκτέλεση της παλινδρόμησης των ελαχίστων τετραγώνων γίνεται με τη χρήση των ανάλογων δεδομένων. Το σύμβολο **'\'** , στην Matlab, μας δίνει τις λύσεις της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε το διάνυσμα των συντελεστών alpha , δηλαδή των σταθμών. Το διάνυσμα `Index` περιέχει τους δείκτες των in-the-money δειγματικών μονοπατιών στα οποία εξασκούμε το δικαίωμα. Μετά την εκτέλεση όλων των παλινδρομήσεων παίρνουμε το μέσο όρο των προεξοφλημένων ταμειακών ροών για υπολογίσουμε την αξία συνέχισης τη χρονική στιγμή j=0. Αυτό θα πρέπει να συγκριθεί με την εσωτερική αξία στην ίδια χρονική στιγμή ώστε να πάρουμε την τιμή του δικαιώματος.

Έχοντας δημιουργήσει το κώδικα του παραπάνω παραδείγματος `ExampleLS` είναι αρκετά εύκολο να τον επεκτείνουμε για την τιμολόγηση ενός αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης εφαρμόζοντας ένα αυθαίρετο σύνολο συναρτήσεων βάσης. Η διαφορά του νέου κώδικα με τον `ExampleLS` είναι ότι χρησιμοποιούμε τη συστοιχία συναρτήσεων, `fhandles`, η οποία περιέχει το σύνολο των συναρτήσεων βάσης. Κάθε στοιχείο στο σύνολο των συναρτήσεων βάσης χρησιμοποιείται για να εκτιμηθεί μία στήλη στον πίνακα παλινδρόμησης. Για το σκοπό αυτό κάνουμε χρήση της συνάρτησης της Matlab `feval` η οποία εκτιμά τη συστοιχία `fhandles`. Θα πρέπει να σημειωθεί επίσης ότι η παραγωγή των δειγματικών μονοπατιών γίνεται με τη βοήθεια της συνάρτησης `AssetPaths` την οποία έχουμε δει στο Κεφάλαιο 3. Από τον πίνακα των μονοπατιών αφαιρείται η αρχική τιμή S_0. Ο γενικός κώδικας της Matlab για την τιμολόγηση ενός αμερικανικού δικαιώματος πώλησης είναι ο ακόλουθος:

```
function price=GenericLS(S0,K,r,T,sigma,NSteps,NRepl,fhandles)
dt=T/NSteps;
discountVet=exp(-r*dt*(1:NSteps)');
NBasis=length(fhandles); %number of basis functions
alpha=zeros(NBasis,1);%parameters of regression
RegrMat=zeros(NRepl,NBasis);
%generate sample paths
SPaths=AssetPaths(S0,r,sigma,T,NSteps,NRepl);
SPaths(:,1)=[];% get rid of starting prices
CashFlows=max(0,K-SPaths(:,NSteps));
ExerciseTime=NSteps*ones(NRepl,1);
for step=NSteps-1:-1:1
    InMoney=find(SPaths(:,step)<K);
    XData=SPaths(InMoney,step);
    RegrMat=zeros(length(XData),NBasis);
    for k=1:NBasis
        RegrMat(:,k)=feval(fhandles{k},XData);
    end
    YData=CashFlows(InMoney).*discountVet(ExerciseTime(InMoney)-step);
    alpha=RegrMat\YData;% least square solutions
    IntrinsicValue=K-XData;
    ContinuationValue=RegrMat*alpha;
    Index=find(IntrinsicValue>ContinuationValue);
    ExercisePaths=InMoney(Index);
    CashFlows(ExercisePaths)=IntrinsicValue(Index);
    ExerciseTime(ExercisePaths)=step;
end
price=max(K-S0,mean(CashFlows.*dicountVet(ExerciseTime)));
```

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: Τιμολόγηση Ασιατικού δικαιώματος αγοράς με Monte Carlo.

Θα εξετάσουμε την τιμολόγηση ενός Ασιατικού δικαιώματος αγοράς με διακριτό αριθμητικό μέσο όρο. Η απόδοση του δικαιώματος προκύπτει από τον τύπο:

$$\max\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}S\left(t_i\right)-K,0\right\},$$

όπου T είναι ο χρόνος λήξης του δικαιώματος, $t_i = i\delta t$, και $\delta t = T/N$. Για λόγους απλότητας θα υποθέσουμε ότι το συμβόλαιο του δικαιώματος ορίζει ότι οι δειγματικές τιμές παίρνονται σε χρονικά διαστήματα που ισαπέχουν . Στην προσέγγιση του απλού Monte Carlo μπορούμε απλά να παράγουμε δειγματικά μονοπάτια για την τιμή της μετοχής και να πάρουμε τον προεξοφλημένο μέσο όρο. Ο κώδικας της Matlab είναι ο εξής:

```
function [P,CI]=AsianMC(S0,K,r,T,sigma,NSamples,NRepl)
Payoff=zeros(NRepl,1);
for i=1:NRepl
    Path=AssetPaths(S0,r,sigma,T,NSamples,1);
    Payoff(i)=max(0,mean(Path(2:(NSamples+1)))-K);
end
[P,aux,CI]=normfit(exp(-r*T)*Payoff);
```

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι το **NSamples** είναι ο αριθμός των δειγματικών σημείων N από τον οποίο υπολογίζεται ο αριθμητικός μέσος όρος. Δεν θα πρέπει να τον συγχέουμε με το **NRepl** όπου είναι ο αριθμός των δειγματικών μονοπατιών.

7.1 Η Μέθοδος των Μεταβλητών Ελέγχου.

Η απλή προσέγγιση Monte Carlo μπορεί να βελτιωθεί εφαρμόζοντας τη μέθοδο των μεταβλητών ελέγχου. Ως μεταβλητή ελέγχου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το άθροισμα των τιμών της μετοχής:

$$Y = \sum_{i=0}^{N} S(t_i),$$

διότι μπορούμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη της τιμή. Επίσης η Y είναι ξεκάθαρα συσχετισμένη με την τιμή του δικαιώματος. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι το άθροισμα εμπεριέχει και την αρχική τιμή S_0, η οποία δεν είναι τυχαία. Ωστόσο, θα προτιμήσουμε να μη την αφαιρέσουμε για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τη τελευταία έκφραση του παρακάτω τύπο. Η αναμενόμενη τιμή του αθροίσματος των τιμών των μετοχών Y, κάτω από το μέτρο του ουδέτερου κινδύνου είναι:

$$E(Y) = E\left[\sum_{i=0}^{N} S(t_i)\right] = \sum_{i=0}^{N} E\left[S(i\delta t)\right] = \sum_{i=0}^{N} S(0)e^{ri\delta t} = S(0)\sum_{i=0}^{N}\left[e^{r\delta t}\right]^{i} = S(0)\frac{1-e^{r(N+1)\delta t}}{1-e^{r\delta t}},$$

όπου η τελευταία έκφραση προκύπτει από τον εξής τύπο:

$$\sum_{i=0}^{N} a^{i} = \frac{1-a^{\mathrm{N}+1}}{1-\alpha}.$$

Ο κώδικας της Matlab είναι ο ακόλουθος:

```
function[P,CI]=AsianMCCV(S0,K,r,T,sigma,NSamples,NRepl,NPilot)
%pilot to set control parameter
TryPath=AssetPaths(S0,r,sigma,T,NSamples,NPilot);
StockSum=sum(TryPath,2);
PP=mean(TryPath(:,2:(NSamples+1)),2);
TryPayoff=exp(-r*T)*max(0,PP-K);
MatCov=cov(StockSum,TryPayoff);
c=-MatCov(1,2)/var(StockSum);
dt=T/NSamples;
ExpSum=S0*(1-exp((NSamples+1)*r*dt))/(1-exp(r*dt));
%MC run
ControlVars=zeros(NRepl,1);
for i=1:NRepl
    StockPath=AssetPaths(S0,r,sigma,T,NSamples,1);
    Payoff=exp(-r*T)*max(0,mean(StockPath(2:(NSamples+1)))-K);
    ControlVars(i)=Payoff+c*(sum(StockPath)-ExpSum);
end
[P,aux,CI]=normfit(ControlVars);
```

Συγκρίνοντας τη μέθοδο των μεταβλητών ελέγχου με το απλό Monte Carlo παρατηρούμε σαφή βελτίωση των αποτελεσμάτων που παίρνουμε. Συγκεκριμένα:

```
>> randn('state',0)
>> [P,CI]=AsianMC(50,50,0.1,5/12,0.4,5,50000)
P =   3.9939
CI =
    3.9418
    4.0460
>> CI(2)-CI(1)
ans =
    0.1042
>> randn('state',0)
>> [P,CI]=AsianMCCV(50,50,0.1,5/12,0.4,5,45000,5000)
P =
    3.9618
CI =
    3.9390
    3.9845
>> CI(2)-CI(1)
ans = 0.0456
```

7.2 Εφαρμογή των Ακολουθιών Χαμηλής Διαφοράς Halton

Ένα άλλο εργαλείο που μπορούμε να εφαρμόσουμε για να βελτιώσουμε την τιμολόγηση ενός Ασιατικού δικαιώματος είναι η quasi Monte Carlo προσομοίωση που βασίζεται σε ακολουθίες χαμηλής διαφοράς . Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τις ακολουθίες Halton για να παράγουμε ομοιόμορφες ‘quasi-random’ ακολουθίες στο [0,1] και τη μέθοδο του αντίστροφου μετασχηματισμού για να τις μετασχηματίσουμε σε παρατηρήσεις από την τυπική κανονική κατανομή. Αυτή είναι η πιο απλή περίπτωση, αφού μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ακολουθίες Sobol και ίσως τη μέθοδο Box-Muller για να παράγουμε μεταβλητές από την κανονική κατανομή.

Το πρώτο ζήτημα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε είναι η παραγωγή δειγματικών μονοπατιών από τη Γεωμετρική Κίνηση Brown χρησιμοποιώντας ακολουθίες χαμηλής διαφοράς Halton. Έστω ότι θέλουμε να τιμολογήσουμε ένα Ασιατικό δικαίωμα με χρόνο λήξης 1 χρόνο και ότι πρέπει να έχουμε δείγμα για κάθε μήνα. Συνεπώς ολοκληρώνουμε σε ένα διάστημα δώδεκα διαστάσεων και χρειαζόμαστε δώδεκα ακολουθίες Halton. Είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσουμε πως κάθε ακολουθία θα πρέπει να αντιστοιχεί σε μία χρονική στιγμή. Οι ακολουθίες δε σχετίζονται με τα δειγματικά μονοπάτια. Θα πρέπει επίσης να επισημανθεί πως αν χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση Box-Muller για να μετασχηματίσουμε το ομοιόμορφο δείγμα σε παρατηρήσεις από την τυπική κανονική κατανομή θα χρειαστούμε τις διπλάσιες ακολουθίες. Για κάθε διάσταση θα χρειαστούμε έναν πρώτο αριθμό για να χρησιμοποιήσουμε ως βάση. Για να παράγουμε τους πρώτους αριθμούς θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση της Matlab **`myPrimes`** που συγκεντρώνει τους πρώτους αριθμούς από μία συστοιχία αριθμών. Η συνάρτηση **`HaltonPaths`** είναι μία επέκταση της συνάρτησης **`AssetPathsV`** για να παράγουμε τυχαία δειγματικά μονοπάτια. Η ιδέα είναι να παράγουμε κάθε στήλη του πίνακα **`NormMat`** χρησιμοποιώντας μία διάσταση από την ακολουθία Halton που αντιστοιχεί σε έναν πρώτο αριθμό. Παρατηρούμε τις επαναλήψεις στις διαφορετικές γραμμές του πίνακα, και κάθε στήλη αντιστοιχεί σε μία χρονική στιγμή. Δοθέντος αυτού, υπολογίζουμε τις προσαυξήσεις των φυσικών αλγορίθμων της τιμής της μετοχής, οι οποίες προστίθενται και μετατρέπονται σε τιμές μετοχών.

```
function SPaths=HaltonPaths(S0,mu,sigma,T,NSteps,NRepl)
dt=T/NSteps;
nudt=(mu-0.5*sigma^2)*dt;
sidt=sigma*sqrt(dt);
%use inverse transform to generate standard normals
NormMat=zeros(NRepl, NSteps);
Bases=myPrimes(1000000);
for i=1:NSteps
    H=GetHalton(NRepl,Bases(i));
    RandMat(:,i)=norminv(H);
end
Increments=nudt+sidt*RandMat;
LogPaths=cumsum([log(S0)*ones(NRepl,1)  , Increments] ,2);
SPaths=exp(LogPaths);
SPaths(:,1)=S0;
```

Βασιζόμενοι στα δειγματικά μονοπάτια που παράγονται από τη συνάρτηση **HaltonPaths**, είναι πολύ εύκολο να δημιουργήσουμε μία συνάρτηση που να υπολογίζει το Ασιατικό δικαίωμα.

```
function P=AsianHalton(S0,K,r,T,sigma,NSamples,NRepl)
Payoff=zeros(NRepl,1);
Path=HaltonPaths(S0,r,sigma,T,NSamples,NRepl);
Payoff=max(0, mean(Path(:,2:(NSamples+1)),2)-K);
P=mean(exp(-r*T)*Payoff);
```

Μπορούμε να δούμε πως λειτουργούν οι ακολουθίες χαμηλής διαφοράς από τις ακόλουθες εκτελέσεις. Αρχικά υπολογίζουμε μία ακριβή τιμή χρησιμοποιώντας ένα μεγάλο αριθμό επαναλήψεων με το απλό Monte Carlo έτσι ώστε να έχουμε αξιόπιστο σημείο αναφοράς.

```
>> randn('state',0)
>> [P,CI]=AsianMC(50,50,0.1,5/12,0.4,5,500000)
P =
    3.9639
CI =
    3.9474
    3.9803
>> P=AsianHalton(50,50,0.1,5/12,0.4,5,1000)
P =
    3.8450
>> P=AsianHalton(50,50,0.1,5/12,0.4,5,3000)
P =
    3.9103
>> P=AsianHalton(50,50,0.1,5/12,0.4,5,10000)
P =
    3.9461
>> P=AsianHalton(50,50,0.1,5/12,0.4,5,50000)
P =
    3.9605
```

Παρατηρούμε ότι με ένα περιορισμένο αριθμό επαναλήψεων παίρνουμε ένα αποδεκτό αποτέλεσμα. Εδώ έχουμε υποθέσει ένα δικαίωμα με χρόνο λήξης τους πέντε μήνες με μηνιαίο δείγμα. Τώρα ας ελέγξουμε τι συμβαίνει αν αυξήσουμε το χρόνο λήξης σε δύο χρόνια., που αντιστοιχεί σε μεγάλη αύξηση του αριθμού των μηνιαίων δειγμάτων:

```
>> randn('state',0)
>> [P,CI]=AsianMC(50,50,0.1,2,0.4,24,500000)
P =  8.3859
CI =
    8.3495
    8.4222
>> P=AsianHalton(50,50,0.1,2,0.4,24,1000)
P =
    6.6219
>> P=AsianHalton(50,50,0.1,2,0.4,24,5000)
P =
    7.9257
>> P=AsianHalton(50,50,0.1,2,0.4,24,50000)
P = 8.3424
```

Παρατηρούμε πως σε αυτή την περίπτωση η απόδοση των ακολουθιών Halton δεν είναι καλή. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι χρειαζόμαστε 24 βάσεις, όπου κάποιες από αυτές είναι μεγάλοι πρώτοι αριθμοί. Όπως έχουμε δει στο Κεφάλαιο 5 η χρήση μεγάλων πρώτων αριθμών δε μας δίνει καλά αποτελέσματα. Για δικαιώματα με μεγαλύτερο χρόνο λήξης η κατάσταση γίνεται ακόμα χειρότερη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8. Σύγκριση Μεθόδων για την Τιμολόγηση ενός Ευρωπαϊκού Δικαιώματος Αγοράς

Θα τιμολογήσουμε ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με αρχική τιμή υποκείμενου τίτλου $S_0 = 50$, τιμή εξάσκησης $K = 52$, επιτόκιο ουδέτερου κινδύνου $r = 0.1$ και μεταβλητότητα $\sigma = 0.4$.

Αρχικά τιμολογούμε το δικαίωμα με το μοντέλο του Black-Scholes και η θεωρητική τιμή που προκύπτει είναι **5.1911**. Με βάση αυτή την τιμή θα συγκρίνουμε την τιμή που προκύπτει από την απλή προσομοίωση Monte Carlo, την τιμή που προκύπτει από το Monte Carlo κάνοντας χρήση των διάφορων μεθόδων μείωσης της διακύμανσης, καθώς και την τιμή του δικαιώματος που λαμβάνουμε από το Monte Carlo παίρνοντας ως δείγμα ακολουθίες χαμηλής διαφοράς.

BLS PRICE	**5.1911**

	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	ΤΙΜΗ	ΣΧΕΤΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ
ΑΠΛΟ MC	100.000	5.2319	0.0210
MC+ ΑΝΤΙΘΕΤΙΚΗ	100.000	5.2142	0.0121
MC+ ΜΕΤ. ΕΛΕΓΧΟΥ	95.000/5.000	5.2014	0.0094

ΠΙΝΑΚΑΣ 9

Με δείγμα 100.000 παρατηρήσεων βλέπουμε πως δεν παίρνουμε ιδιαιτέρως καλές εκτιμήσεις για την τιμή του δικαιώματος σε σχέση με τη θεωρητική. Παρόλα αυτά η μέθοδος των μεταβλητών ελέγχου μας δίνει καλύτερη τιμή σε σχέση με το απλό Monte Carlo και τη μέθοδο της αντιθετικής δειγματοληψίας. Επίσης μόνο στη μέθοδο των μεταβλητών ελέγχου έχουμε σχετικό σφάλμα της τάξης του 10^{-3}.

	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	ΤΙΜΗ	ΣΧΕΤΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ
ΑΠΛΟ MC	200.000	5.2328	0.0149
MC+ ΑΝΤΙΘΕΤΙΚΗ	200.000	5.2092	0.0085
MC+ ΜΕΤ. ΕΛΕΓΧΟΥ	195.000/5.000	5.2008	0.0066

ΠΙΝΑΚΑΣ 10

Αν τώρα διπλασιάσουμε το δείγμα μας παρατηρούμε πως οι εκτιμήσεις προσεγγίζουν καλύτερα τη θεωρητική τιμή του Black-Scholes. Και πάλι η καλύτερη εκτίμηση προκύπτει από τη μέθοδο των μεταβλητών ελέγχου. Το σχετικό σφάλμα είναι της τάξης του 10^{-3} τόσο στη μέθοδο της αντιθετικής δειγματοληψίας όσο και στη μέθοδο των μεταβλητών ελέγχου.

	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	ΤΙΜΗ	ΣΧΕΤΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ
ΑΠΛΟ MC	1.000.000	5.2062	0.0067
MC+ ΑΝΤΙΘΕΤΙΚΗ	1.000.000	5.1931	0.0038
MC+ ΜΕΤ. ΕΛΕΓΧΟΥ	990.000/10.000	5.1922	0.0029

ΠΙΝΑΚΑΣ 11

Στον Πίνακα 11, το δείγμα είναι 1.000.000. Παρατηρούμε ότι οι εκτιμήσεις μας βελτιώνονται αισθητά και προσεγγίζουν πολύ καλύτερα τη θεωρητική τιμή. Το σχετικό σφάλμα, και στις τρείς μεθόδους, είναι της τάξης του 10^{-3}. Και πάλι η μέθοδος των μεταβλητών ελέγχου μας δίνει την καλύτερη εκτίμηση και μικρότερο σχετικό σφάλμα. <u>Συμπεραίνουμε ότι η καλύτερη μέθοδος είναι αυτή των μεταβλητών ελέγχου.</u>

	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	ΒΑΣΗ 1	ΒΑΣΗ 2	ΤΙΜΗ
HALTON B-M	1.000	2	7	5.2128
	10.000	2	7	5.1978
	100.000	2	7	5.1914
	1.000.000	2	7	5.1912

ΠΙΝΑΚΑΣ 12

Στον Πίνακα 12, το δείγμα μας προκύπτει από τις ακολουθίες χαμηλής διαφοράς Halton. Το δείγμα που λαμβάνουμε είναι αριθμοί από την ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1]. Τους μετασχηματίζουμε σε παρατηρήσεις από την τυπική κανονική κατανομή με τη βοήθεια της μεθόδου Box-Muller. Οι βάσεις που χρησιμοποιούμε είναι οι μικροί πρώτοι αριθμοί 2 και 7. Παρατηρούμε πως με δείγμα 100.000 λαμβάνουμε μία πολύ καλή εκτίμηση σε σχέση με την θεωρητική τιμή (5.1911). Με δείγμα 1.000.000 η εκτίμηση μας γίνεται ακόμα καλύτερη. Ωστόσο ο χρόνος υπολογισμού αυξάνεται αισθητά.

	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	ΒΑΣΗ 1	ΒΑΣΗ 2	ΤΙΜΗ
HALTON B-M	1.000	103	499	5.4498
	10.000	103	499	5.3002
	100.000	103	499	5.2227
	1.000.000	103	499	5.2217

ΠΙΝΑΚΑΣ 13

Στον Πίνακα 13 ακολουθούμε ακριβώς την ίδια μέθοδο με αυτήν στον Πίνακα 12. Η μόνη διαφορά είναι πώς τώρα χρησιμοποιούμε ως βάσεις μεγάλους πρώτους αριθμούς (103,499). Παρατηρούμε πως τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε δεν είναι ικανοποιητικά.

	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	ΒΑΣΗ	ΤΙΜΗ
HALTON ΑΝΤΙΣ. ΜΕΤ.	1.000	2	5.1094
	10.000	2	5.1789
	100.000	2	5.1894
	200.000	2	5.1902
	300.000	2	5.1904
	1.000.000	2	5.1912

ΠΙΝΑΚΑΣ 14

Στον Πίνακα 14, παίρνουμε δείγμα από τις ακολουθίες χαμηλής διαφοράς Halton και τις μετασχηματίζουμε σε παρατηρήσεις από την τυπική κανονική κατανομή με τη βοήθεια της μεθόδου του αντίστροφου μετασχηματισμού. Ως βάση χρησιμοποιούμε το μικρό πρώτο αριθμό 2. Παρατηρούμε πώς η καλύτερη εκτίμηση, σε σχέση με την θεωρητική τιμή, προκύπτει με δείγμα μεγέθους 1.000.000. Ωστόσο και με δείγμα 200.000 παρατηρήσεων λαμβάνουμε καλή εκτίμηση, με αρκετά μικρότερο υπολογιστικό χρόνο.

	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	ΒΑΣΗ	ΤΙΜΗ
HALTON ΑΝΤΙΣ. ΜΕΤ.	1.000	499	5.1139
	10.000	499	5.1159
	100.000	499	5.1372
	200.000	499	5.1666
	1.000.000	499	5.1906

ΠΙΝΑΚΑΣ 15

Στο Πίνακα 15, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με αυτή του Πίνακα 14 όμως η βάση μας τώρα είναι ένας μεγάλος πρώτος αριθμός (499). Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι έχουμε καλή εκτίμηση με δείγμα μεγέθους 1.000.000.

	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	ΤΙΜΗ
SOBOL ΑΝΤΙΣ. ΜΕΤ.	1.000	5.2131
	10.000	5.1806
	20.000	5.1922
	30.000	5.1906
	40.000	5.1903
	50.000	5.1909
	60.000	5.1909

ΠΙΝΑΚΑΣ 16

Στον Πίνακα 16 το δείγμα μας έχει παραχθεί από τις ακολουθίες χαμηλής διαφοράς Sobol και έχει μετασχηματισθεί σε παρατηρήσεις από την τυπική κανονική με τη βοήθεια της μεθόδου του αντίστροφου μετασχηματισμού. Παρατηρούμε πως με μόλις 50.000 παρατηρήσεις η εκτίμηση μας είναι πολύ κοντά στη θεωρητική τιμή. Συνεπώς, η προσομοίωση Monte Carlo με παραγωγή δείγματος από τις ακολουθίες χαμηλής διαφοράς Sobol μας δίνει τα καλύτερα δυνατά αποτελέσματα με το μικρότερο δυνατό δείγμα σε σχέση με τις υπόλοιπες μεθόδους.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

I.A. Antonov and V.M. Saleev. An Economic Method of Computing LPT Sequences. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1979

Barraquand, J., 1995. Numerical valuation of high dimensional multivariate European securities. Management Science 41, 1882-1891.

Boyle, P., 1977. Options: a Monte Carlo approach. Journal of Financial Economics 4, 323-338.

Boyle, P., Broadie, M. and Glasserman P. (1996). *Monte Carlo Methods for Security Pricing*. Journal of Economics Dynamics and Control.

Boyle, P., Emanuel, D., 1985. The pricing of options on the generalized mean. Working paper, University of Waterloo.

Bratley, P., Fox, B., 1988. ALGORITHM 659: Implementing Sobol's quasirandom sequence generator. ACM Transactions on Mathematical Software 14, 88-100.

Brandimarte, P. (2002). *Numerical Methods in Finance and Economics.* John Wiley & Sons, UK.

Halton, J.H., 1960. On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals. Numerische Mathematik 2, 84-90.

Hammersley, J.M., Handscomb, D.C., 1964. Monte Carlo Methods. Chapman & Hall, London.

Hull, J., White, A., 1987. The pricing of options on assets with stochastic volatilities. Journal of Finance 42, 281-300.

Hull, J., 1997. Options, Futures, and Other Derivative Securities, 3rd ed. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

P. Jaeckel. Monte Carlo Methods in Finance. Wiley, Chichester, 2002.

McKay, M.D., Conover, W.J., Beckman, R.J., 1979. A comparison of three methods for selecting input variables in the analysis of output from a computer code. Technometrics 21, 239-245.

F.A. Longstaff and E.S. Schwartz. Valuing American Options by Simulation:
a Simple Least-Squares Approach. The Review of Financial Studies, 2001.

I.M. Sobol. On the Distribution of Points in a Cube and the Approximate Evaluation of Integrals. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1967.

Spanier, J., Maize, E.H., 1994. Quasi-random methods for estimating integrals using relatively small samples. SIAM Review 36, 18-44.

Εγγλέζος Ν. 2011. Σημειώσεις παραδόσεων μεταπτυχιακού προγράμματος Ειδικά θέματα ποσοτικών μεθόδων στα χρηματοοικονομικά. Πανεπιστήμιο Πειραιώς.