ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΜΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

Τίτλος διατριβής:

Strategic Portfolio Choice

Όνομα φοιτητή:

Κωστούλας Παναγιώτης Δημοσθένης MXPH0818

Επιβλέπων καθηγητής:

Καθηγητής κ .Μαλλιαρόπουλος Δημήτριος

Μέλη επιτροπής:
Καθηγητής κ. Διακογίαννης Γεώργιος
Αναπληρωτής Καθηγητής κ. Στεφανάδης Χριστόδουλος

Αθήνα

15-1-2010

1 Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική διατριβή διαπραγματεύεται την κατασκευή και μελέτη Στρατηγικών Χαρτοφυλακίων.

Η κατασκευή και ανάλυση χαρτοφυλακίων ουσιαστικά ξεκίνησε με την έρευνα του Markowitz (1952), ο οποίος ήταν ο πρώτος που ασχολήθηκε συστηματικά με τη θεωρία τους. Ουσιαστικά έθεσε της βάσεις για την μετέπειτα έρευνα και έδωσε το έναυσμα για πολλές μελέτες. Μεγάλη συμβολή είχε και ο Merton όπου έδωσε νέες βάσεις προκειμένου να ξεφύγει η τότε υπάρχουσα έρευνα από το υπόδειγμα μέσου διακύμανσης.

Με τον όρο Στρατηγικά Χαρτοφυλάκια εννοούμε χαρτοφυλάκια με μεγάλο χρονικό ορίζοντα επένδυσης, τα οποία ενσωματώνουν τον παράγοντα αποστροφής κινδύνου του επενδυτή γ. Επιπλέον για την κατασκευή τους χρησιμοποιούνται στην ουσία 2 χαρτοφυλάκια , το ένα το οποίο βασίζεται στις γνωστές αρχές του Markowitz και ένα hedging χαρτοφυλάκιο το οποίο είναι υπεύθυνο για την διαφοροποίηση του συνολικού χαρτοφυλακίου ανάλογα με τους κινδύνους που ο κάθε επενδυτής πιστεύει ότι αντιμετωπίζει.

Η πρώτη έρευνα στο συγκεκριμένο πεδίο ήταν των Brennan, Schwartz, Lagnado to 1997 όπου και για πρώτη φορά παρουσιάστηκε ο συγκεκριμένος όρος.

Ξεκινάμε την ανάλυση μας παρουσιάζοντας τις βασικές αρχές κατασκευής χαρτοφυλακίου και κάποιες βασικές έννοιες καθώς και σχέσεις που θα χρησιμοποιηθούν στην μελέτη μας. Έπειτα παρουσιάζονται άρθρα και μελέτες που υπάρχουν στη διεθνή βιβλιογραφία και διαπραγματεύονται το συγκεκριμένο αντικείμενο. Τέλος θα επιχειρήσουμε να αναπτύξουμε ένα παρόμοιο οικονομετρικό μοντέλο και να βγάλουμε τα δικά μας συμπεράσματα τα οποία θα συγκριθούν με τα αντίστοιχα των μελετών.

Περιεχόμενα

2 Θεωρία επιλογής χαρτοφυλακίου

2.1 Επιλογή χαρτοφυλακίου με βραχυχρόνιο ορίζοντα

Ανάλυση μέσου-διακύμανσης

Ξεκινάμε την ανάλυση μας με το κλασικό πρόβλημα επιλογής χαρτοφυλακίου. Ένας επενδυτής τη δεδομένη στιγμή t έχει διαθέσιμα προς επιλογή δύο περιουσιακά στοιχεία. Ένα στοιχείο χωρίς κίνδυνο (risk free) καθώς και ένα με κίνδυνο (risky asset). Γνωρίζει την μελλοντική απόδοση για το χρονικό σημείο t+1 ότι είναι $R_{f,t+1}$ και R_{t+1} για το στοιχείο χωρίς κίνδυνο και το στοιχείο με κίνδυνο αντίστοιχα. Επιπλέον το risky asset έχει μέση απόδοση E_tR_{t+1} και διακύμανση $\sigma^2_{t.}$

Ο επενδυτής επενδύει ένα ποσοστό α_t από το χαρτοφυλάκιο στο risky asset. Συνεπώς η συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου του θα είναι :

$$R_{p,t+1} = a_t R_{t+1} + (1 - a_t) R_{f,t+1} = R_{f,t+1} + a_t (R_{t+1} - R_{f,t+1} \qquad (1)$$

Η μέση απόδοση θα είναι: $E_t R_{p,t+1} = R_{f,t+1} + a_t (E_t R_{t+1} - R_{f,t+1})$ και η διακύμανση $\sigma^2_{pt} = a^2_t \sigma^2_t$

Ο συνετός επενδυτής προτιμάει ένα χαρτοφυλάκιο χαμηλής διακύμανσης και υψηλής μέσης απόδοσης. Θεωρούμε ότι η συνάρτηση μέσου διακύμανσης είναι γραμμική. Για να μεγιστοποιηθεί αυτός ο γραμμικός συνδυασμός έχουμε θετικό βάρος στον μέσο και αρνητικό στη διακύμανση:

$$\max_{a_t} \left(E_t R_{p,t+1} - \frac{k}{2} \sigma^2_{pt} \right) \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας το μέσο και τη διακύμανση με τα αντίστοιχα του χαρτοφυλακίου όπως υπολογίστηκαν παραπάνω καταλήγουμε στην σχέση:

$$\max_{a_t} a_t (E_t R_{t+1} - R_{f,t+1}) - \frac{k}{2} a^2_t \sigma^2_t \qquad (3)$$

Επιλύουμε ως προς το ποσοστό α_t έχουμε:

$$a_t = \frac{E_t R_{t+1} - R_{f,t+1}}{k \sigma^2_t} \qquad (4)$$

Το ποσοστό που έχει επενδυθεί στο risky asset θα πρέπει να είναι ίσο με την αναμενόμενη επιπλέον απόδοση (risk premium), διαιρεμένο με τον συντελεστή k, που υποδηλώνει την αποστροφή προς την διακύμανση.

Ένας επιπλέον σημαντικός δείκτης στην ανάλυση χαρτοφυλακίων είναι ο δείκτης Sharpe, που ορίζεται ως η μέση επιπλέον απόδοση προς την τυπική απόκλιση.

$$S_t = \frac{E_t R_{t+1} - R_{f,t+1}}{\sigma_t} \qquad (5)$$

Συνεπώς η σχέση (4) με τη βοήθεια του δείκτη αυτό μπορεί να γραφεί ως:

$$a_t = \frac{S_t}{k\sigma_t} \qquad (6)$$

Η μέση επιπλέον απόδοση του χαρτοφυλακίου ορίζεται ως S^2_t/k και η διακύμανση του ως S^2_t/k^2 .Η τυπική απόδοση S_t/k και συνεπώς προκύπτει ότι ο δείκτης Sharpe του χαρτοφυλακίου είναι S_t.

Στην περίπτωση που ο επενδυτής επεκταθεί σε περισσότερα του ενός στοιχείων με κίνδυνο, μπορούμε να ορίσουμε με τον ίδιο τρόπο τις ανωτέρω σχέσεις. Για καλύτερη κατανόηση με τονισμένους χαρακτήρες υπονοείται η ύπαρξη διανυσμάτων και πινάκων. Με $\mathbf{R}_{t+1}$ υποδηλώνεται ένα διάνυσμα αποδόσεων Ν περιουσιακών στοιχείων, $E_t\mathbf{R}_{t+1}$ το διάνυσμα των μέσων αποδόσεων και με $\mathbf{\Sigma}^2_t$.ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων. Τέλος ορίζεται ως $\mathbf{\alpha}_t$ το διάνυσμα των ποσοστώσεων σε κάθε περιουσιακό στοιχείο. Η σχέση (3) πλέον γίνεται:

$$\max_{a_t} a_t' \left(E_t R_{t+1} - R_{f,t+1l}\right) - \frac{k}{2} a_t' \textstyle\sum_t a_t \qquad (7)$$

Ο όρος **i** είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα και ως ($E_t\mathbf{R}_{t+1} - R_{f,t+1}i$) υποδηλώνεται το διάνυσμα των υπερβάλλων αποδόσεων των Ν περιουσιακών στοιχείων. Η διακύμανση του χαρτοφυλακίου πλέον είναι $\boldsymbol{\alpha}_t'\boldsymbol{\Sigma}_t\boldsymbol{\alpha}_t$.. Επιλύοντας την σχέση (7) έχουμε :

$$a_t = \frac{1}{k} \textstyle\sum_t^{-1} \left(E_t R_{t+1} - R_{f,t+1l}\right) \qquad (8)$$

Ουσιαστικά αυτό που διαφοροποιεί τον κάθε επενδυτή είναι ο βαθμός αποστροφής στον κίνδυνο που έχει, κάτι που μας φανερώνει ο όρος 1/k. Οι συντηρητικοί επενδυτές έχουν υψηλό k και έχοντας μεγαλύτερη ποσόστωση σε στοιχεία χωρίς κίνδυνο και μικρότερη σε επικίνδυνα. Παρόλα αυτά οι ποσοστώσεις ανάμεσα στο επικίνδυνα στοιχεία παραμένουν σταθερές όπως καθορίζονται από το διάνυσμα $\mathbf{\Sigma}^{-1}_{t}(E_t\mathbf{R}_{t+1} - R_{f,t+1}i)$.

Τέλος στην περίπτωση που δεν έχουμε στοιχείο χωρίς κίνδυνο, χρησιμοποιείται ως σημείο αναφοράς ένα στοιχείο με κίνδυνο και βάση αυτού υπολογίζονται οι υπερβάλλουσες αποδόσεις. Η διακύμανση πλέον του χαρτοφυλακίου είναι $Var_t(R_{0,t+1})=\mathbf{\alpha}'_t\mathbf{\Sigma}_t\mathbf{\alpha}_t +2\ \alpha'_t\sigma_{0t}$ και πλέον $\mathbf{\Sigma_t}$ είναι ο πίνακας διακύμανσης-συνδιακύμανσης των νέων υπερβάλλων αποδόσεων ενώ με $\boldsymbol{\sigma}_{0t}$ δηλώνεται το διάνυσμα των συνδιακυμάνσεων των νέων αυτών αποδόσεων.

Η νέα λύση του προβλήματος είναι:

$$a_t = \frac{1}{k}\Sigma_t^{-1}(E_t R_{t+1} - R_{0,t+1l}) - \Sigma_t^{-1}\sigma_{0t} \quad (9)$$

Ανάλυση χρησιμότητας (utility function)

Αν κάνουμε την υπόθεση ότι οι επενδυτές ενδιαφέρονται κυρίως για την ωφέλεια που θα έχουν στον πλούτο τους στο τέλος της περιόδου, τότε μπορούμε να ορίσουμε το πρόβλημα ως:

$$\max \quad E_t\, U(W_{t+1}) \quad (10)$$

όπου ισχύει

$$W_{t+1} = (1 + R_{p,t+1})W_t \quad (11)$$

Ο όρος $U(W_{t+1})$ είναι η τυπική κοίλη συνάρτηση χρησιμότητας. Η κυρτότητα της καμπύλης υποδηλώνει τον βαθμό αποστροφής του επενδυτή προς τον κίνδυνο, και μπορεί να υπολογιστεί ως η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης χρησιμότητας σε σχέση με τον πλούτο.

Ο συντελεστής της απόλυτης αποστροφής ως προς τον κίνδυνο είναι:

$$A(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} \quad (12)$$

και υποδηλώνει το ποσό που ένας επενδυτής θα πλήρωνε για να αποφύγει τον κίνδυνο σε μια επένδυση όπου θα επενδύσει ένα συγκεκριμένο ποσό.

Ο συντελεστής σχετικής αποστροφής ως προς τον κίνδυνο είναι:

$$R(W) = WA(W) = -\frac{WU''(W)}{U'(W)} \quad (13)$$

και υποδηλώνει το ποσοστό πλούτου που ένας επενδυτής θα θυσίαζε προκειμένου να μην εκτεθεί στους κινδύνους της επένδυσης του.

Υπάρχουν τρία διαφορετικά είδη επενδυτών ανάλογα με τη συνάρτηση χρησιμότητας που έχουν.

- Επενδυτές που έχουν τετραγωνική συνάρτηση χρησιμότητας σε σχέση με τον πλούτο. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει $U(W_{t+1}) = \alpha + b W_{t+1}$. Κάτω από αυτή την υπόθεση η σχέση (10) ισούται με τη σχέση (2). Η τετραγωνική συνάρτηση χρησιμότητας υποδηλώνει υψηλό βαθμό αποστροφής κινδύνου.
- Επενδυτές που έχουν εκθετική συνάρτηση $U(W_{t+1}) = -\exp(-\theta W_{t+1})$ και οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων ακολουθούν κανονική κατανομή. Το θ υποδηλώνει το ποσό που απαιτείται για την απόλυτη αποστροφή προς τον κίνδυνο
- Επενδυτές με εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας όπου $U(W_{t+1}) = (W_{t+1}^{1-\gamma} - 1)/(1-\gamma)$ και οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων κατανέμονται λογαριθμικά (lognormally). Η σταθερά γ υποδηλώνει τη σχετική αποστροφή προς τον κίνδυνο.

<u>Λογαριθμικό μοντέλο με εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας</u>

Στην περίπτωση που υποθέσουμε ότι οι επενδυτές έχουν power utility και ότι οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων κατανέμονται λογαριθμικά, τότε η σχέση (10) μπορεί να γραφεί ως:

$$\max E_t W_{t+1}^{1-\gamma}/(1-\gamma) \qquad (14)$$

Ομοίως με την υπόθεση ότι ο πλούτος στην επόμενη περίοδο είναι ακολουθεί λογαριθμική κατανομή έχουμε τη σχέση:

$$\max \quad \log E_t W_{t+1}^{1-\gamma} = (1-\gamma) E_t\, w_{t+1} + \frac{1}{2}(1-\gamma)^2 \sigma_{wt}^2 \qquad (15)$$

ενώ ο περιορισμός όπως παρουσιάζεται στη σχέση (11) μετατρέπεται σε:

$$w_{t+1} = r_{p,t+1} + w_t \qquad (16)$$

όπου $r_{p,t+1}=\log(1+R_{p,t+1})$.

Διαιρώντας με (1-γ) και χρησιμοποιώντας τη σχέση (16) μορφοποιούμε το πρόβλημα ως :

$$\max \quad E_t r_{p,t+1} + \frac{1}{2}(1-\gamma) \qquad (17)$$

όπου σ^2_{pt} είναι η διακύμανση των λογαριθμικών αποδόσεων του χαρτοφυλακίου.

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι ισχύει η σχέση :

$$E_t r_{p,t+1} + \sigma_{pt}^2/2 = \log E_t(1 + R_{p,t+1}) \qquad (18)$$

με τη βοήθεια της οποίας μετατρέπουμε τη σχέση (17) σε :

$$\max \quad \log E_t(1 + R_{p,t+1}) - \frac{1}{2}\gamma\sigma_{pt}^2 \qquad (19)$$

Ο συντελεστής της σχετικής αποστροφής στον κίνδυνο γ, είναι όμοιος με το συντελεστή k όπως ορίστηκε στην ανάλυση μέσου-διακύμανσης.

- Όταν γ=1 ο επενδυτής έχει λογαριθμική χρησιμότητα και επιλέγει το χαρτοφυλάκιο με τη μεγαλύτερη λογαριθμική απόδοση.
- Όταν γ>1 ο επενδυτής καταφεύγει σε χαρτοφυλάκια με μικρότερο κίνδυνο.
- Όταν γ<1 ο επενδυτής καταφεύγει σε χαρτοφυλάκια με υψηλότερο κίνδυνο.

Επιπρόσθετα για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τη λογαριθμική απόδοση του χαρτοφυλακίου πρέπει να ορίσουμε τις λογαριθμικές αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων. Έστω ότι υπάρχουν ξανά δυο στοιχεία ένα μηδενικού κινδύνου και ένα με κίνδυνο. η λογαριθμική απόδοση του χαρτοφυλακίου θα είναι ο γραμμικός συνδυασμός των λογαριθμικών αποδόσεων των στοιχείων όπως στη σχέση (1) :

$$r_{p,t+1} - r_{f,t+1} = a_t(r_{t+1} - r_{f,t+1}) + \frac{1}{2}a_t(1 - a_t)\sigma_t^2 \qquad (20)$$

Ομοίως σε περίπτωση που έχουμε N περιουσιακά στοιχεία με κίνδυνο έχουμε των πίνακα διακυμάνσεων –συνδιακυμάνσεων των λογαριθμικών αποδόσεων $\mathbf{\Sigma}_t$ και το διάνυσμα των διακυμάνσεων $\boldsymbol{\sigma}^2_t$. συνεπώς η σχέση (20) μπορεί να γραφεί ως :

$$r_{p,t+1} - r_{f,t+1} = a_t'(r_{t+1} - r_{f,t+1l}) + \frac{1}{2}a_t'\sigma_t^2 - \frac{1}{2}a_t' \textstyle\sum_t a_t \qquad (21)$$

Η μέση απόδοση μπορεί είναι :

$$E_t r_{p,t+1} - r_{f,t+1} = a_t(E_t r_{t+1} - r_{f,t+1}) + \frac{1}{2}a_t(1-a_t) \quad (22)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (17) έχουμε:

$$\max \quad a_t(E_t r_{t+1} - r_{f,t+1}) + \frac{1}{2}a_t(1-a_t)\sigma_t^2 + \frac{1}{2}(1-\gamma)a_t^2\sigma_t^2 \quad (23)$$

Επιλύουμε και η λύση σχετικά με τις ποσοστώσεις των περιουσιακών στοιχείων είναι :

$$a_t = \frac{E_t r_{t+1} - r_{f,t+1} + \sigma_t^2/2}{\gamma\sigma_t^2} \quad (24)$$

Στην περίπτωση Ν περιουσιακών στοιχείων με κίνδυνο η βέλτιστη λύση είναι :

$$a_t = \frac{1}{\gamma}\Sigma_t^{-1}\left(E_t r_{t+1} - r_{f,t+1l} + {\sigma_t^2}/{2}\right) \quad (25)$$

Ενώ αν δεν υπάρχει περιουσιακό στοιχείο χωρίς κίνδυνο καταλήγουμε στη ακόλουθη βέλτιστη λύση :

$$a_t = \frac{1}{\gamma}\Sigma_t^{-1}(E_t r_{t+1} - r_{0,t+1l} + \sigma_t^2/2) + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)(-\Sigma_t^{-1}\sigma_{0t}) \quad (26)$$

Σε αυτή την περίπτωση οι επενδυτές προτιμούν στοιχεία με θετική συνδιακύμανση τα οποία καθώς αυξάνουν την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου, αλλά παράλληλα αυξάνουν και το επίπεδο κινδύνου. Καθώς βέβαια το γ αυξάνεται τότε το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο τείνει προς το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διακύμανσης.

2.2 Επιλογή χαρτοφυλακίου με μακροχρόνιο ορίζοντα

Εκθετική συνάρτηση πλούτου

Στην περίπτωση που οι επενδυτές ενδιαφέρονται να επενδύσουν σε Κ περιόδους, η συνάρτηση χρησιμότητας παίρνει τη μορφή $U(W_{t+K})$. Επιπλέον θεωρούμε ότι όλος ο πλούτος επανεπενδύεται , και για το λόγο αυτό ο περιορισμός μας γίνεται :

$$W_{t+K} = (1 + R_{pK,t+K})W_t = (1 + R_{p,t+1})(1 + R_{p,t+2})\ldots(1 + R_{p,t+K})W_t \quad (27)$$

Ουσιαστικά η απόδοση των Κ περιόδων είναι το γινόμενο των Κ ετήσιων αποδόσεων. Λογαριθμίζοντας βλέπουμε ότι η λογαριθμική απόδοση των Κ περιόδων είναι το άθροισμα των Κ ετήσιων αποδόσεων :

$$r_{pK,t+K} = r_{p,t+1} + \ldots + r_{p,t+K} \tag{28}$$

Όταν ο επενδυτής έχει έναν μακροχρόνιο ορίζοντα μπορεί να επιλέξει ανάμεσα στην αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου του σε κάθε περίοδο ή όχι.

Στη δεύτερη περίπτωση το χαρτοφυλάκιο συμπεριφέρεται ανάλογα με ένα βραχυχρόνιο με μέση απόδοση το γινόμενο των Κ ετήσιων μέσων αποδόσεων και διακύμανση επίσης το γινόμενο των Κ ετήσιων διακυμάνσεων.

Στην περίπτωση αναπροσαρμογής των σταθμίσεων του χαρτοφυλακίου σε κάθε διακριτή χρονική περίοδο, θεωρούμε ότι οι αποδόσεις είναι IID όπως και οι αντίστοιχες λογαριθμικές.

Για παράδειγμα αν σε δυο χρονικές περιόδους έχουμε ένα στοιχείο χωρίς κίνδυνο και στοιχεία με κίνδυνο τότε η απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι :

$$r_{p2,t+2} - 2r_f = \left(r_{p,t+1} - r_f\right) + \left(r_{p,t+2} - r_f\right) = a_t(r_{t+1} - r_f) + \frac{1}{2}a_t(1 - a_t)\sigma^2 + a_{t+1}(r_{t+2} - r_f) + \frac{1}{2}a_{t+1}(1 - a_{t+1})\sigma^2 \tag{29}$$

και η διακύμανση :

$$Var_t(r_{p,t,t+2}) = (a_t^2 + a_{t+1}^2)\sigma^2 \tag{30}$$

με a_t και a_{t+1} οι διαφορετικές σταθμίσεις την κάθε διακριτή περίοδο. Συνεπώς η μέση απόδοση υπολογίζεται ως :

$$E_t(r_{p,t,t+2}) + \frac{1}{2}Var_t(r_{p,t,t+2}) = 2r_f + (a_t + a_{t+1})(Er - r_f + \sigma^2/2) \tag{31}$$

και το πρόβλημα ης μεγιστοποίησης παίρνει τη μορφή :

$$\max \quad E_t(r_{p,t,t+2}) + \frac{1}{2}Var_t(r_{p,t,t+2}) - \frac{\gamma}{2}Var_t(r_{p,t,t+2}) \tag{32}$$

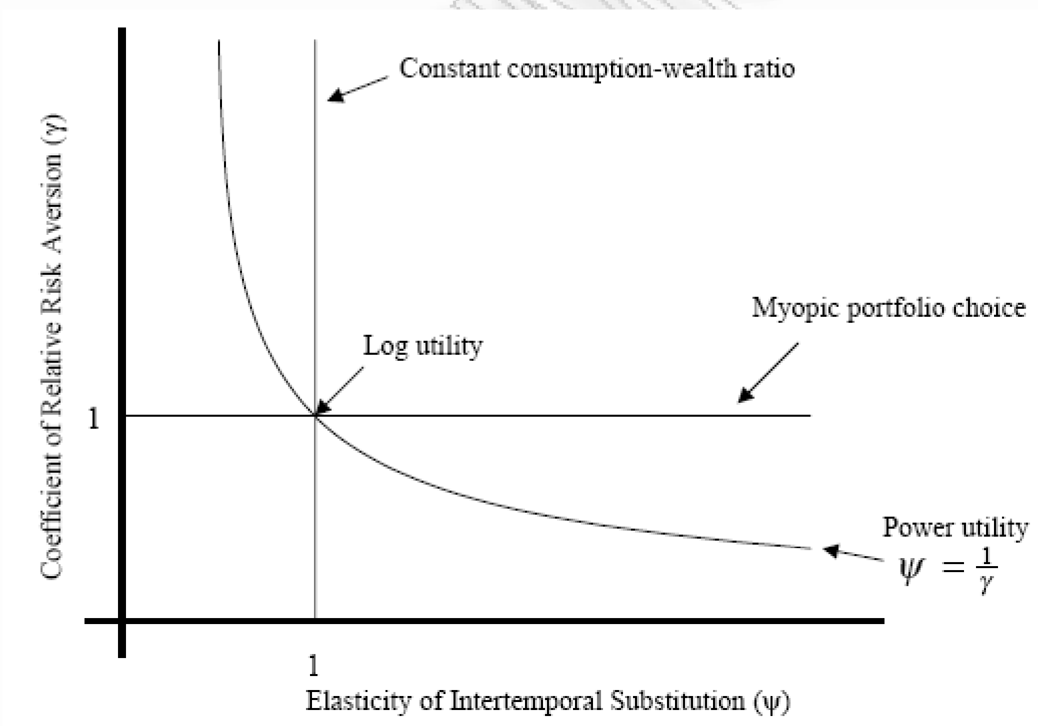
Συνάρτηση χρησιμότητας Epstein Zin

Παρά τα πολλά πλεονεκτήματα που προσφέρει το μοντέλο της εκθετικής χρησιμότητας (power utility) έχει ένα μεγάλο περιορισμό. Το μοντέλο αυτό θεωρεί ότι η ελαστικότητα του καταναλωτή στο intertemporal substitution,ψ, είναι αμοιβαία με τον συντελεστή σχετικής αποστροφής προς τον κίνδυνο γ.

Οι Epstein και Zin το 1989 αναπτύσσοντας το θεωρητικό υπόβαθρο των Kreps και Porteus κατέληξαν στην συνάρτηση :

$$U_t = \left\{(1-\delta)C_t^{\frac{1-\gamma}{\theta}} + \delta(E_t U_{t+1}^{1-\gamma})^{\frac{1}{\theta}}\right\}^{\frac{\theta}{1-\gamma}} \qquad (33)$$

όπου θ=(1-γ)/(1-1/ψ) και δ ένας προεξοφλητικός παράγοντας χρόνου. Όταν γ=1/ψ και θ=1 τότε η σχέση (33) γίνεται γραμμική. Το μοντέλο αυτό μπορεί εύκολα να περιγραφεί με το ακόλουθο διάγραμμα.



Ο οριζόντιος άξονας δείχνει την ελαστικότητα του ψ ενώ ο κάθετος τον συντελεστή σχετικής αποστροφής προς τον κίνδυνο γ. η συνάρτηση χρησιμότητας περιγράφεται από την υπερβολή γ=1/ψ.

Επιπλέον οι Epstein και Zin επέδειξαν, χρησιμοποιώντας στοιχεία δυναμικού προγραμματισμού ότι αν ισχύει ο περιορισμός ότι χρηματοδοτεί ο επενδυτής από τον υπάρχον πλούτο του το χαρτοφυλάκιο, τότε μπορούμε να καταλήξουμε σε μια εξίσωση Euler της μορφής :

$$1 = E_t \left[\left\{ \delta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\frac{1}{\psi}} \right\}^{\theta} \left\{ \frac{1}{(1+R_{p,t+1})} \right\}^{1-\theta} (1 + R_{i,t+1}) \right] \quad (34)$$

όπου $(1 + R_{i,t+1})$ είναι η συνολική απόδοση όλων των στοιχείων ακόμα και του ίδιου του χαρτοφυλακίου. Αν τόσο οι αποδόσεις όσο και η κατανάλωση είναι λογαριθμικές τότε έχουμε ότι η συνάρτηση κατανάλωσης ισούται με :

$$E_t[\Delta c_{t+1}] = \psi \log \delta + \psi E_t r_{p,t+1} + \frac{\theta}{2\psi} Var_t[\Delta c_{t+1} - \psi r_{p,t+1}] \quad (35)$$

Όταν υπάρχει ένα μόνο περιουσιακό στοιχείο με κίνδυνο τότε το premium σε σχέση με το risk free στοιχείο είναι :

$$E_t r_{t+1} - r_{f,t+1} + \frac{\sigma_t^2}{2} = \theta \frac{Cov_t(r_{t+1}, \Delta c_{t+1})}{\psi} + (1-\theta) Cov_t(r_{t+1}, r_{p,t+1}) \quad (36)$$

Σε αυτή την περίπτωση τα βάρη είναι θ και 1-θ αντίστοιχα. Αν υπάρχουν περισσότερα περιουσιακά στοιχεία με κίνδυνο τότε ισχύει :

$$E_t(r_{t+1} - r_{0,t+1l}) + \frac{\sigma_t^2}{2} = \frac{\theta}{\psi}\sigma_{ct} + (1-\theta)\sigma_{pt} - \sigma_{0t} \quad (37)$$

με $\boldsymbol{\sigma}^2_t$ το διάνυσμα των διακυμάνσεων των υπερβάλλων αποδόσεων,

$\boldsymbol{\sigma}_{ct}$ το διάνυσμα των συναδιακυμάνσεων των υπερβάλλων αποδόσεων με την αύξηση της κατανάλωσης,

$\boldsymbol{\sigma}_{pt}$ το διάνυσμα των συναδιακυμάνσεων των υπερβάλλων αποδόσεων σε σχέση με τη συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου,

$\boldsymbol{\sigma}_{0t}$ το διάνυσμα των συναδιακυμάνσεων των υπερβάλλων αποδόσεων σε σχέση με τη συνολική απόδοση περιουσιακού στοιχείου αναφοράς.

Στην περίπτωση που οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων είναι IID τότε η κατανάλωση είναι σταθερή ως προς τον πλούτο και η συναδιακύμανση ως προς την αύξηση της κατανάλωσης ισούται με τη συνδιακύμανση ως προς τη συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου. Συνεπώς μπορούμε να αντικαταστήσουμε το δεξί μέρος της σχέσης (36) και να έχουμε :

$$(\theta/\psi \ +1-\theta)Cov_t(r_{t+1}, r_{p,t+1}) = \gamma Cov_t(r_{t+1}, r_{p,t+1}) \qquad (38)$$

σχέση η οποία καταλήγει στην μυωπική επιλογή χαρτοφυλακίου.

3 Προηγούμενες μελέτες

3.1 Strategic asset allocation

Michael J. Brennan, Eduardi S. Schwartz, Ronald Lagnado

Οι τρεις αυτοί ερευνητές ήταν οι πρώτοι που με τη μελέτη τους "Strategic asset allocation" το1997 έθεσαν για πρώτη φορά τον όρο στρατηγικό χαρτοφυλάκιο. Έως τότε η κυρίαρχη στρατηγική ήταν το tactical asset allocation, το οποίο βασιζόταν σε βραχυχρόνιο ορίζοντα και ακολουθούσε μυωπικές στρατηγικές. Η έρευνα αυτή βασίστηκε σε μακροχρόνιο ορίζοντα, χρησιμοποιώντας τρία διαφορετικά περιουσιακά στοιχεία, στοιχείο χωρίς κίνδυνο όπως μετρητά, μακροπρόθεσμα ομόλογα, και ένα χρηματιστηριακό δείκτη. Επιπλέον το μοντέλο υποθέτει ότι ο επενδυτής δεν έχει υποχρεώσεις ενώ παράλληλα αγνοεί τον πληθωρισμό.

Η επίλυση της βέλτιστης λύσης του χαρτοφυλακίου επιτυγχάνεται με στοχαστικές διαδικασίες χρησιμοποιώντας τα υποδείγματα που ανέπτυξε ο Merton. Τα στοχαστικά αυτά μοντέλα μπορούν να αιχμαλωτίσουν την αβεβαιότητα χρησιμοποιώντας μια δομή δένδρου όπου σε κάθε διακλάδωση υπάρχουν οι μεταβλητές και η κατάσταση στην οποία αυτές βρίσκονται.

Παρουσίαση μοντέλου

Οι ερευνητές χρησιμοποίησαν τρεις κύριες μεταβλητές, το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο r , την απόδοση των μακροπρόθεσμων ομολόγων l και τη μερισματική απόδοση των μετοχών του χρηματιστηριακού δείκτη που χρησιμοποίησαν ως χαρτοφυλάκιο μετοχών δ. Μια τέταρτη μεταβλητή που πρότειναν αλλά τελικά δε χρησιμοποίησαν ήταν η απόδοση ενός ομολόγου με υψηλό κίνδυνο (junk bond). Γνωρίζοντας τον στοχαστικό δείκτη απόδοσης ενός χαρτοφυλακίου μετοχών dS/S υπέθεσαν ότι ισχύουν τα ακόλουθα :

$$\frac{dS}{S} = \mu_s\, dt + \sigma_s\, dz_s \quad (39)$$

$$dr = \mu_r\, dt + \sigma_r\, dz_r \quad (40)$$

$$dl = \mu_l\, dt + \sigma_l\, dz_l \quad (41)$$

$$d\delta = \mu_\delta\, dt + \sigma_\delta\, dz_\delta \quad (42)$$

όπου οι παράμετροι μ, σ είναι συναρτήσεις των μεταβλητών r,l,δ και ως dz ορίζονται οι προσαυξήσεις (iincrements) της διαδικασίας Wiener. Η συσχέτιση των συντελεστών μεταξύ των προσαυξήσεων καθορίζεται ως $\rho_{r,\delta}$ και ούτω καθεξής.

Η τιμή των ομολόγων γνωρίζουμε ότι είναι συνάρτηση της απόδοσης τους B(l), και με τη χρήση του λύματος του Ito παίρνουμε ως συνολική απόδοση των ομολόγων :

$$\frac{dB}{B} + ldt = \left(l - \frac{\mu_l}{l} + \frac{\sigma_l^2}{l^2}\right) dt - \frac{\sigma_l}{l} dz_l \quad (43)$$

Έστω ότι χ το ποσοστό που επενδύουμε στο μετοχικό χαρτοφυλάκιο και y το ποσοστό στο ομόλογο. Τότε η στοχαστική διαδικασία για τον πλούτο (W) είναι

$\frac{dW}{W} = \left[x \frac{dS}{S} + y\left(\frac{dB}{B} + ldt\right) + (1 - x - y)r\right] dt \ = \Big[x(\mu_s - r) + y\Big(1 - r - \frac{\mu_l}{l} +$

σl2l2+rdt+x2σs2+y2σl2l2−2xyσlσsρsll1/2dzw≡μwdt+σwdzw

(44)

Ορίζοντας V(r,l,δ,W,τ) ως την αναμενόμενη χρησιμότητα (utility) σύμφωνα με τη βελτιστοποίηση για τα χρονικές περιόδους έχουμε την ακόλουθη εξίσωση Bellman :

$$\max_{x,y} E[dV] = 0 \quad (45)$$

ή

$\max_{x,y} \Big[V_w \mu_w W + V_r \mu_r + V_l \mu_l + V_\delta \mu_\delta - V_\tau + \frac{1}{2} V_{ww} \sigma_w^2 W^2 + \frac{1}{2} V_{rr} \sigma_r^2 + \frac{1}{2} V_{ll} \sigma_l^2 +$

12Vδδσδ2+VwδWσδσwρδw+Vrlσrσlρrl+Vrδσrσδρrδ+VwrWσrσwρrw+Vwl Wσlσwρlw+VlδWσlσδρlδ=0 (46)

Όπως καθορίστηκε η σχέση (46) έχει τέσσερις σταθερές μεταβλητές. Με σκοπό να μειωθούν θεωρούμε την χρησιμότητα ισοελαστικής μορφής έτσι ώστε :

$$V(r, l, \delta, W, 0) = \frac{1}{\gamma} W^\gamma$$

για γ<1 (47)

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η συνάρτηση V(r,l,δ,W,τ) να μπορεί να γραφεί ως

$$\gamma^{-1} W^{\gamma} u(r, l, \delta, \tau) \quad (48)$$

όπου $u(r.l.\delta, 0) = 1$

και

$\max_{x,y}\left[\mu_w u + \frac{1}{\gamma}\mu_r u_r + \frac{1}{\gamma}\mu_l u_l + \frac{1}{\gamma}\mu_\delta u_\delta - \frac{1}{\gamma}u_\tau + \frac{1}{2}(\gamma-1)\sigma_w^2 u + \frac{1}{2\gamma}\sigma_r^2 u_{rr} + \right.$

12γσl2ull+12γσδ2uδδ+σwσrρrwur+σwσlρlwul+σwσδρδwuδ+1γσrσlρrlurl

+1γσrσδρrδurδ+1γσlσδρlδulδ=0

(49)

όπου

$$\sigma_w \sigma_r \rho_{rw} \equiv \sigma_{wr} = x\sigma_s\sigma_r\rho_{rs} - y\frac{\sigma_l}{l}\sigma_r\rho_{rl},$$

$$\sigma_w \sigma_l \rho_{lw} \equiv \sigma_{wl} = x\sigma_s\sigma_l\rho_{ls} - y\frac{\sigma_l^2}{l},$$

$$\sigma_w \sigma_\delta \rho_{\delta w} \equiv \sigma_{w\delta} = x\sigma_s\sigma_\delta\rho_{s\delta} - y\frac{\sigma_l}{l}\sigma_\delta\rho_{\delta l} \quad (50)$$

Αντικαθιστώντας για μ_w, καταλήγουμε

$\max_{x,y}\left\{u\left[x(\mu_s - r) + y\left(l - r - \frac{\mu_l}{l} + \frac{\sigma_l^2}{l^2}\right) + r + \frac{1}{2}(\gamma-1)\left(x^2\sigma_s^2 + y^2\frac{\sigma_l^2}{l^2} - \right.\right.\right.$

2xyσsσlρsll+ur1γμr+xσsr−ylσrl+ul1γμl+xσsl−ylσl2+uδ1γμδ+xσsδ−ylσlδ

−1γuτ+1γ12urrσr2+12ullσl2+12uδδσδ2+urlσrl+urδσrδ+ulδσlδ=0(51)

Οι συνθήκες πρώτης τάξης για τη μεγιστοποίηση της σχέσης (51) μας δείχνουν την βέλτιστη λύση για της ποσοστώσεις χ* ,y*

$x^* = \frac{1}{(\gamma-1)(\sigma_{sl}^2 - \sigma_s^2\sigma_l^2)}\left[\frac{\sigma_l^2}{l}(\mu_s - r) + \sigma_{sl}\left(l - r - \frac{\mu_l}{l} + \frac{\sigma_l^2}{l^2}\right) + \frac{u_r}{lu}(\sigma_{sr}\sigma_l^2 - \sigma_{rl}\sigma_{sl}) + \right.$

uδluσsδσl2−σlsσlδ

(52)

$y^+ = \frac{l^2}{(\gamma-1)(\sigma_{sl}^2 - \sigma_s^2\sigma_l^2)}\left[\frac{\sigma_{sl}}{l}(\mu_s - r) + \sigma_s^2\left(l - r - \frac{\mu_l}{l} + \frac{\sigma_l^2}{l^2}\right) + \frac{u_r}{lu}(\sigma_{sr}\sigma_{sl} - \sigma_{rl}\sigma_s^2) + \right.$

uδluσsδσsl−σs2σls+ulluσsl2−σl2σs2

(53)

Η στοχαστική διαδικασία

Προκειμένω να εκτιμήσουν τις στοχαστικές εξισώσεις (39)-(42) οι Michael J. Brennan, Eduardi S. Schwartz, Ronald Lagnado έκαναν τις ακόλουθες υποθέσεις. Θεώρησαν ότι οι αποδόσεις είναι γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών όπως και το drift τους, ενώ η διακύμανση τους ως ποσοστό της αντίστοιχης των μεταβλητών. Συνεπώς οι σχέσεις μπορούν να ξαναγραφούν ως :

$$\frac{dS}{S} = (a_{s1} + a_{s2}\delta + a_{s3}r + a_{s4}l)dt + \sigma_s dz_s \quad (54)$$

$$dr = (a_{r1} + a_{r2}\delta + a_{r3}r + a_{r4}l)dt + r\sigma_r dz_r \quad (55)$$

$$dl = l(a_{l1} + a_{l2}\delta + a_{l3}r + a_{l4}l)dt + l\sigma_l dz_l \quad (56)$$

$$d\delta = (a_{\delta1} + a_{\delta2}\delta + a_{\delta3}r + a_{\delta4}l)dt + \delta\sigma_\delta dz_\delta \quad (57)$$

Ως δεδομένα χρησιμοποιήθηκαν, για την περίοδο Ιανουάριος 1972 έως Δεκέμβριος 1991, η μηνιαία σταθμισμένη απόδοση του δείκτη αγοράς CRSP για το μετοχικό χαρτοφυλάκιο, η μηνιαία απόδοση των US T-Bills για το στοιχείο μηδενικού κινδύνου, και η μηνιαία απόδοση στη λήξη των πιο μακροπρόθεσμων ομολόγων της αμερικάνικης κυβέρνησης.

Επιλύοντας πήραν χρήσιμα στοιχεία για τη χρήση στο μοντέλο τους ώστε να επιλυθεί με τις σχέσεις που καθορίστηκαν ανωτέρω.

Αποτελέσματα

Το μοντέλο όπως το ανέπτυξαν το επέλυσαν για 2 χαρτοφυλάκια, ένα βραχυπρόθεσμο (διάρκεια ένας μήνας) και ένα μακροπρόθεσμο (διάρκεια 20 χρόνια). Το συμπεράσματα στα οποία κατέληξαν ήταν ότι ο χρόνος επένδυσης είναι σημαντικός παράγοντας στη διαμόρφωση του βέλτιστου χαρτοφυλακίου. Οι μακροπρόθεσμοι επενδυτές προτιμούν να επενδύουν σε μετοχές και ομόλογα σε σχέση με τους βραχυπρόθεσμους, ώστε να είναι προστατευμένοι σε δραματικές αλλαγές επιτοκίων, ενώ παράλληλα οι αποδόσεις σε μεγάλα χρονικά διαστήματα τείνουν προς το μέσο, γεγονός που κάνει τα στοιχεία αυτά λιγότερα επικίνδυνα.

3.2 Long-Term Portfolio Choice

Campbell and Viceira (2002)

Σε μια παρόμοια έρευνα με την αντίστοιχη των Michael J. Brennan, Eduardi S. Schwartz, Ronald Lagnado οι John Y. Campbell και Luis M. Viceira, ανέπτυξαν μια παρόμοια θεωρία για μακροπρόθεσμα χαρτοφυλάκια. Για να απλοποιήσουν το μοντέλο τους έκαναν την υπόθεση ότι οι αποδόσεις των στοιχείων κατανέμονται λογαριθμικά και με σταθερή διακύμανση και συνδιακύμανση, γεγονός που δεν είναι απόλυτα σύμφωνο με τα πραγματικά δεδομένα. Επίσης θεώρησαν ότι οι επενδυτές έχουν έναν συγκεκριμένο πλούτο και δεν προστίθενται εισοδήματα από εργασία, ενώ παράλληλα καταναλώνουν και ένα μέρος του πλούτου. Τέλος θεωρούν ότι ο επενδυτής ακολουθεί μια συνάρτηση Epstein-Zin με συντελεστή αποστροφής κινδύνου γ και σταθερή ελαστικότητα της intertemporal substitution ψ.

Η ανάλυση τους διαχωρίστηκε σε 2 μοντέλα :

- Μοντέλο με σταθερές μεταβλητές και ασφάλιστρα κινδύνου.
- Μοντέλο με καμπύλη επιτοκίων

<u>Μοντέλο με σταθερές μεταβλητές και ασφάλιστρα κινδύνου</u>

Οι Campbell και Viceira ξεκινάν την ανάλυση του μοντέλου τους με τον περιορισμό του κεφαλαίου χρηματοδότησης (budget). Σε ένα μοντέλο που λαμβάνει υπόψη την κατανάλωση ο περιορισμός αυτό παίρνει την μορφή :

$$W_{t+1} = \left(1 + R_{p,t+1}\right)(W_t - C_t) \tag{58}$$

Το βασικό πρόβλημα με τον περιορισμό είναι η μη γραμμικότητα του καθώς η κατανάλωση είναι συνάρτηση του πλούτου. Δηλαδή ο επενδυτής επανεπενδύει σε κάθε χρονική στιγμή τον πλούτο που έχει από την επένδυση αφαιρώντας την κατανάλωση που θα χρειαστεί για το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Σύμφωνα με την εργασίας του Campbell (1993) μπόρεσαν να προσεγγίσουν αυτό τον περιορισμό. Διαίρεσαν τη σχέση (58) με W_t

$$\frac{W_{t+1}}{W_t} = \left(1 + R_{p,t+1}\right)\left(1 - \frac{C_t}{W_t}\right) \quad (59)$$

και λογαριθμίζοντας έχουμε :

$$\Delta w_{t+1} = r_{p,t+1} + \log\left(1 - exp(c_t - w_t)\right) \quad (60)$$

Ο δεύτερος όρος της δεξιάς ισότητας της σχέσης (60) είναι μια μη γραμμική συνάρτηση του λογαρίθμου του δείκτη κατανάλωση/πλούτος. Θεώρησαν ότι αυτός ο όρος δεν είναι τόσο ευμετάβλητος οπότε με τη χρήση πρώτου βαθμού αναπτύγματος Taylor κατέληξαν στη σχέση :

$$\Delta w_{t+1} = k + r_{p,t+1} + \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)(c_t - w_t) \quad (61)$$

με k και ρ παραμέτρους γραμμικότητας. Η παράμετρος ρ ισούται με :

$$\rho = 1 - exp(\overline{c - w}) \quad (62)$$

ενώ όταν ο λόγος κατανάλωση/πλούτος είναι σταθερός τότε ρ=(W-C)/W δηλαδή ως δείκτης επανεπενδυμένου πλούτου προς συνολικού πλούτου. Η παράμετρος k ορίζεται ως :

$$k = \log(\rho) + (1 - \rho)\log(1 - \rho)/\rho \quad (63)$$

Από τον περιορισμό (60) παρήγαγαν τον νέο περιορισμό

$$\Delta w_{t+1} = \Delta c_{t+1} + (c_t - w_t) - (c_{t+1} - w_{t+1}) \quad (64)$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (63) και (64) έχουμε μια διαφορική εξίσωση η οποία με την υπόθεση $\lim_{j\to\infty} \rho^j \left(c_{t+j} - w_{t+j}\right) = 0$ μας δίνει :

$$c_t - w_t = \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j \left(r_{p,t+j} - \Delta c_{t+j}\right) + \frac{\rho k}{1-\rho} \quad (65)$$

υποδηλώνοντας ότι ένας υψηλός δείκτης κατανάλωση/πλούτου πρέπει να ακολουθείται είτε από υψηλές αποδώσεις είτε από χαμηλό ρυθμό αύξησης της κατανάλωσης. Γενικεύοντας κατέληξαν

$$c_t - w_t = E_t \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j \left(r_{p,t+j} - \Delta c_{t+j}\right) + \frac{\rho k}{1-\rho} \qquad (66)$$

και με τη βοήθεια των σχέσεων (61) και (64)

$$c_{t+1} - E_t c_{t+1} = (E_{t+1} - E_t) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \, r_{p,t+1+j} - (E_{t+1} - E_t) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \, \Delta c_{t+1+j} \qquad (67)$$

που δείχνει ότι μια απροσδόκητη αύξηση στην κατανάλωση σήμερα πρέπει να ακολουθείται σε απροσδόκητη αύξηση του πλούτου, ή σε υψηλές μελλοντικές αποδόσεις, ή σε μελλοντική μείωση της κατανάλωσης.

Προχωρώντας το μοντέλο τους χρησιμοποίησαν τη σχέση (35) της συνάρτησης Epstein-Zin με σκοπό να βγάλουν την κατανάλωση από το μοντέλο

$$E_t[\Delta c_{t+1}] = \psi \log \delta + \psi \, E_t r_{p,t+1} + \frac{\theta}{2\psi} Var_t\left[\Delta c_{t+1} - \psi r_{p,t+1}\right]$$

και στην περίπτωση που η διακύμανση είναι σταθερή γράφεται η παραπάνω σχέση ως :

$$E_t[\Delta c_{t+1}] = \mu + \psi E_t r_{p,t+1} \qquad (68)$$

με μ να περιλαμβάνει την χρονική προτίμηση και την επίδραση του κινδύνου στην κατανάλωση.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (66) και (68) βρήκαν ότι

$$c_t - w_t = (1 - \psi) E_t \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j r_{p,t+j} + \frac{\rho(k-\mu)}{1-\rho} \qquad (69)$$

και ότι αν ψ<1 οι υψηλότερες αποδόσεις του χαρτοφυλακίου οδηγούν σε υψηλή μελλοντική κατανάλωση και το αντίστροφο για ψ>1.

Με τη βοήθεια της (69) η (67) μπορεί να πάρει τη μορφή

$$c_{t+1} - E_t c_{t+1} = r_{p,t+1} - E_t r_{p,t+1} + (1 - \psi)(E_{t+1} - E_t) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \, r_{p,t+1+j} \qquad (70)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση οι λογαριθμικές αποδόσεις του χαρτοφυλακίου πρέπει να ναι κανονικές και ομοσκεδαστικές. Η σχέση αυτή μπορεί επιπλέον να μας υποδηλώσει ότι η συνδιακύμανση με την κατανάλωση μπορεί να υποκατασταθεί από τη συνδιακύμανση με τις αποδόσεις του χαρτοφυλακίου. Χρησιμοποιώντας επιπροσθέτως τη σχέση (36) καταλήγουμε

$$E_t r_{t+1} - r_{f,t+1} + \frac{\sigma_t^2}{2} = \gamma Cov_t\left(r_{t+1}, r_{p,t+1}\right) + (\gamma - 1) Cov_t\left(r_{t+1}, (E_{t+1} -\right.$$

$$Et\,j{=}0\infty\rho jrp{,}t{+}1{+}j \qquad (71)$$

Σε μοντέλο με ένα στοιχείο με κίνδυνο υπέθεσαν ότι $Cov_t(r_{t+1}, r_{p,t+1}) = \alpha_t \sigma^2_t$ οπότε επιλύοντας κατέληξαν στην ποσόστωση α στο επικίνδυνο στοιχείο.

$$a = \frac{1}{\gamma}\frac{E_t r_{t+1} - r_{f,t+1} + \frac{\sigma_t^2}{2}}{\sigma_t^2} + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{Cov_t\left(r_{t+1}, -(E_{t+1} - E_t)\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j r_{f,t+1+j}\right)}{\sigma_t^2} \qquad (72)$$

Γενικεύοντας για πολλαπλά στοιχεία με κίνδυνο (risky asset) όρισαν πίνακα διακύμανσης συνδιακύμανσης υπερβάλλων αποδόσεων $\mathbf{\Sigma}_t$ και διάνυσμα διακυμάνσεων $\boldsymbol{\sigma}^2_t$**.** Επιπλέον όρισαν διάνυσμα $\boldsymbol{\sigma}_{ht}$ που περιέχει της συνδιακυμάνσεις κάθε risky asset με αλλαγές στα μελλοντικά επιτόκια.

$$\sigma_{ht} \equiv Cov_t\left(r_{t+1}, -(E_{t+1} - E_t)\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j\, r_{f,t+1+j}\right) \qquad (73)$$

Συνδυάζοντας τις 2 σχέσεις έχουμε

$$a_t = \frac{1}{\gamma}\Sigma_t^{-1}\left(E_t r_{t+1} - r_{f,t+1l} + \frac{\sigma_t^2}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\Sigma_t^{-1}\sigma_{ht} \qquad (74)$$

<u>Μοντέλο με term structure των επιτοκίων</u>

Μετά την μελέτη των Campbell και Viceira (2001) μπόρεσαν να προσθέσουν στο υφιστάμενο μοντέλο τα αποπληθωρισμένα ομόλογα (iinflation indexed consol). Για το λόγο αυτό χρησιμοποίησαν έναν στοχαστικό παράγοντα προεξόφλησης (SDF) M_{t+1}.

Λογαριθμίζοντας και θεωρώντας μια υποθετική προσδοκία την περίοδο t ως x_t και ένα σοκ την περίοδο t+1, $u_{m,t+1}$

$$-m_{t+1} = x_t + u_{m,t+1} \qquad (75)$$

και χρησιμοποιώντας μια διαδικασία AR(1)

$$x_{t+1} = (1 - \varphi_x)\mu_x + \varphi_x x_t + \varepsilon_{x,t+1} \qquad (76)$$

$$u_{m,t+1} = \beta_{mx}\,\varepsilon_{x,t+1} + \varepsilon_{m,t+1} \qquad (77)$$

Η απόδοση ενός ομολόγου για μια περίοδο υπολογίστηκε ως

$$r_{1,t+1} = -\log E_t\,[M_{t+1}] = E_t[-m_{t+1}] - \frac{1}{2}Var_t[m_{t+1}] \tag{78}$$

και συνδυάζοντας τις ανωτέρω σχέσεις κατέληξαν

$$r_{1,t+1} = x_t - \frac{1}{2}(\beta_{mx}^2\sigma_x^2 + \sigma_m^2) \tag{79}$$

με $\sigma^2_X = Var_t(\varepsilon_{x,t+1})$ και $\sigma^2_m = Var_t(\varepsilon_{m,t+1})$. Τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια ακλουθούν την μεταβλητή x_t προσαρμοσμένα με μια σταθερά ώστε να ακολουθούν μια διαδικασία AR(1) με επιμονή φ.

Κατέληξαν ότι η ιδανική στάθμιση για αποπληθωρισμένα ομόλογα είναι

$$a_n = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{-\beta_{mx}}{B_{n-1}}\right) + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{B_{n-1}}\right)\left(\frac{\rho}{1-\rho\varphi_x}\right) \tag{80}$$

<u>Αποτελέσματα έρευνας</u>

Για την ερευνά τους χρησιμοποίησαν ως δεδομένα από US T-Bills ως risk free assets, ομόλογα της αμερικάνικής αγοράς, σταθμισμένη απόδοση των δεικτών NYSE, AMEX και NASDAQ σύμφωνα με τα αρχεία που διατίθενται στο CRSP. Για τον πληθωρισμό πήραν δεδομένα από τον CPI για την περίοδο 1958-1996.

Τα συμπεράσματα που προέκυψαν είναι ότι για το συγκεκριμένο διάστημα η υπερβάλλουσα απόδοση των ομολόγων είναι 1% σε σχέση με το τριμηνιαίο T-Bill με τυπική απόκλιση 11% ενώ οι μετοχές είχαν απόδοση σχεδόν 7 % με τυπική απόκλιση 16%. Συνεπώς οι επενδυτές όσο μειωνόταν η αποστροφή τους στον κίνδυνο επένδυαν στις μετοχές. Στο διάστημα 1983-1996 τα ομόλογα είχαν σημαντική βελτίωση στις αποδόσεις τους.

Οι Campbell και Viceira εκτιμούν όμως ότι οι επενδυτές, για μακροχρόνιο ορίζοντα επένδυσης πρέπει να επιλέγουν ομόλογα καθώς απέδειξαν ότι ένα inflation indexed ομόλογο είναι πιο ασφαλές ακόμα και από τα μετρητά. Ουσιαστικά προστατεύουν τους επενδυτές από δραστικές μεταβολές στα βραχυπρόθεσμα επιτόκια καθώς και από τον πληθωρισμό.

3.3 Long-Term portfolio Choice in a VAR Model

Campbell and Viceira (2002)

Σε συνέχεια της προηγούμενης μελέτης τους οι Campbell και Viceira προσπάθησαν να επιλύσουν το πρόβλημα της βέλτιστης κατανομής περιουσιακών στοιχείων με τη βοήθεια ενός μοντέλου VAR (Vector AutoRegressive).

Χρησιμοποίησαν ένα στοιχείο με κίνδυνο ως σημείο αναφοράς με απόδοση $r_{0,t+1}$ και ένα διάνυσμα με n υπερβάλλων αποδόσεις σε σχέση με το σημείο αναφοράς $\mathbf{r}_{t+1} - r_{0,t+1}{}^{i}$. Επιπλέον με το διάνυσμα $\mathbf{s}_{t+1}$ περιλαμβάνουν μεταβλητές πρόβλεψης όπως ο δείκτης μέρισμα /τιμή των μετοχών . Με τα τρία αυτά δεδομένα κατασκεύασαν ένα διάνυσμα m x1 to z_{t+1}

$$z_{t+1} \equiv \begin{bmatrix} r_{0,t+1} \\ r_{t+1} - r_{0,t+1l} \\ s_{t+1} \end{bmatrix} \tag{81}$$

Χρησιμοποιώντας τη διαδικασία VAR(1) κατέληξαν στη σχέση

$$z_{t+1} = \Phi_0 + \Phi_1 z_t + v_{t+1} \tag{82}$$

όπου $\mathbf{\Phi}_0$ ένα m x 1 διάνυσμα μεταβλητών $\mathbf{\Phi}_1$ ένας m x m πίνακας συντελεστών κλίσης (slope coefficients) και $\mathbf{v}_{t+1}$ ένα m x 1 διάνυσμα από σοκ στις μεταβλητές που προσομοιώνουν τον θόρυβο γύρω από αυτές,

Οι υποθέσεις που γίνονται είναι ότι υπάρχει ομοσκεδαστικότητα και ότι οι αγορές είναι πλήρεις.

Συνδυάζοντας ξανά τις εξισώσεις του μοντέλου Epstein-Zin της κατανάλωσης και των περιορισμών χρηματοδότησης κατέληξαν στις ακόλουθες σχέσεις

$$c_t - w_t = -\rho\,\psi \log\delta - \rho x_{p,t} + \rho(1-\ \psi)E_t\big(r_{p,t+1}\big) + \rho k + \rho E_t(c_{t+1} - w_{t+1}) \tag{83}$$

$$E_t\big(r_{t+1} - r_{0,t+1l}\big) + \frac{\sigma_t^2}{2} = \frac{\theta}{\psi}\sigma_{c-w,t} + \gamma\sigma_{p,t} - \sigma_{0,t} \tag{84}$$

και ουσιαστικά την επίλυση του προβλήματος την μοντελοποίησαν με την απλή σχέση

$$a_t = a_0 + A_1 z_t \tag{85}$$

Ως δεδομένα για την επίλυση του μοντέλου τους χρησιμοποίησαν τόσο ετήσια όσο και τριμηνιαία.

Τα ετήσια αφορούσαν τον δείκτη S&P 500 για το χαρτοφυλάκιο μετοχών, ένα σταθμισμένο χαρτοφυλάκιο ομολόγων που ήταν χαρακτηρισμένα ως ΑΑΑ από την Moody's, το εξαμηνιαίο κυβερνητικό γραμμάτιο και των δείκτη τιμών παραγωγού για την μέτρηση του πληθωρισμού. Η εξεταζόμενη διάρκεια ήταν από το 1890 εως το 1995.

Για τα τριμηνιαία, ως risk free asset θεώρησαν το τριμηνιαίο US T-Bill, ένα σταθμισμένο χαρτοφυλάκιο των δεικτών NYSE, NASDAQ και AMEX για τις μετοχές, ως ομόλογα τα πενταετή κρατικά .

Επιπλέον υπολόγισαν το μοντέλο για γ = 1 ,2, 5, 20 δ= 0,92 και ψ=1 ή ψ=1/γ.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι όσο αυξανόταν η αποστροφή προς τον κίνδυνο γ, οι επενδυτές προτιμούσαν να επενδύουν μεγαλύτερο μέρος του πλούτου τους σε στοιχεία χωρίς κίνδυνο κάτι αναμενόμενο. Επιπλέον σε ετήσια βάση απεδείχθη ότι οι επενδυτές προτιμούν ένα πιο ισορροπημένο χαρτοφυλάκιο μετοχών και ομολόγων, ενώ σε τριμηνιαία υπήρχε ροπή προς τις μετοχές, Αυτό οφείλεται στην πολύ υψηλή συσχέτιση των υπερβάλλων αποδόσεων μεταξύ των δυο αυτών διαφορετικών στοιχείων σε επίπεδο τριμηνιαίας ανάλυσης.

3.4 A Multivariate Model of Strategic Asset Allocation

Campbell, Chan, Viceira (2003)

Εν συνεχεία της προηγούμενης μελέτης τους το 2003 με τη σύμπραξη του Chan χρησιμοποιώντας το ίδιο μοντέλο και με συνάρτηση χρησιμότητας

$$U\left(C_t, E_t(U_{t+1})\right) = \left[(1-\delta)C_t^{\frac{1-\gamma}{\theta}} + \delta\left(E_t\left(U_{t+1}^{1-\gamma}\right)\right)^{\frac{1}{\theta}}\right]^{\frac{\theta}{1-\gamma}} \qquad (86)$$

όπου C η κατανάλωση γ>0 και ψ>0 , με δ συντελεστή προεξόφλησης μικρότερο της μονάδας και $\theta=(1-\gamma)/(1-\psi^{-1})$.

Λαμβάνοντας υπόψη τον περιορισμό χρηματοδότησης και με βέλτιστο δείκτη κατανάλωσης/πλούτου

$$V_t \equiv \frac{U_t}{W_t} = (1-\delta)^{-\frac{\psi}{1-\psi}}\left(\frac{C_t}{W_t}\right)^{\frac{1}{1-\psi}} \qquad (87)$$

με τον δείκτη C/W να πλησιάζει το (1-δ) όσο το ψ πλησιάζει το 1.

Ο λογάριθμος της απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι :

$$r_{p,t+1} = r_{1,t+1} + a_t' x_{t+1} + \frac{1}{2} a_t'(\sigma_x^2 - \Sigma_{xx}\, a_t) \qquad (88)$$

και $\boldsymbol{\Sigma}_{XX}$ ο πίνακας διακύμανσης συνδιακύμανσης των υπερβάλλων αποδόσεων.

Ο λογάριθμος του περιορισμού είναι

$$\Delta w_{t+1} \approx r_{p,t+1} + \left(1-\frac{1}{\rho}\right)(c_t - w_t) + k \qquad (89)$$

Στο τέλος συνδυάζοντας της σχέσης που αναλύθηκαν παραπάνω στη συνάρτηση Epstein-Zin κατέληξαν στη σχέση

$$a_t = \frac{1}{\gamma}\Sigma_{xx}^{-1}\left[E_t(x_{t+1}) + \frac{1}{2}Var_t(x_{t+1}) + (1-\gamma)\sigma_{1x}\right] + \frac{1}{\gamma}\Sigma_{xx}^{-1}\left[-\frac{\theta}{\psi}\left(\sigma_{c-w,t} - \right.\right.$$

$$\sigma 1{,}c{-}w{,}tl \qquad (90)$$

Ξανατρέχοντας το μοντέλο με τα ίδια δεδομένα κατέληξαν στο ίδιο συμπέρασμα με την προηγούμενη ερευνά τους.

3.5 The Term Structure of the Risk-Return Tradeoff

Campbell and Viceira (2005)

Συνεχίζοντας τις μελέτες τους στο θέμα οι Campbell και Viceira για να επαληθεύσουν τα αποτελέσματα των δυο προηγουμένων μελετών τους στη νέα αυτή μελέτη τους πρόσθεσαν τον παράγοντα του κινδύνου τους στο μοντέλο, ώστε να επιτύχουν την κατασκευή ενός βέλτιστου χαρτοφυλακίου ως προς τον κίνδυνο (Global Minimum Variance portfolio GMV). Για την απλοποίηση του μοντέλου τους δεν λαμβάνουν υπόψη το γεγονός ότι οι επενδυτές μπορούν να καταφύγουν και σε άλλες επενδύσεις.

Βασισμένοι στο ήδη υπάρχων μοντέλο VAR και χρησιμοποιώντας τα ίδια δεδομένα, προχώρησαν σε ανάλυση για κατασκευή χαρτοφυλακίων με διαφορετικό επενδυτικό ορίζοντα (τρίμηνο, 1,5,10,25,50,100 χρόνια).

Τα επιπρόσθετα συμπεράσματα που ήταν απόρροια αυτής της μελέτης τους είναι τα ακόλουθα:

Οι τιμές των μακροπρόθεσμων ομολόγων είναι ευμετάβλητες στον πληθωρισμό. Ένα θετικό σοκ στον πληθωρισμό μπορεί να μειώσει την απόδοση των ομολόγων, και η πιθανόν μεγάλη περίοδος υψηλού πληθωρισμού που θα ακολουθήσει θα αυξήσει την μεταβλητότητα στις τιμές των ομολόγων. Μια στρατηγική προστασίας από τον πληθωρισμό θα είναι η επένδυση σε βραχυχρόνια ομόλογα. Απέδειξαν ότι τα μακροχρόνια ομόλογα μπορούν σε πολλές περιπτώσεις να είναι πιο επικίνδυνα ακόμα και από ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών.

Σε μεγάλος ορίζοντες επένδυσης, απέδειξαν ότι η πιο σημαντική μεταβλητή είναι ο δείκτης μέρισμα/τιμής καθώς έχει τη μεγαλύτερη σταθερότητα στο μοντέλο τους. Ο δείκτης αυτός μπορεί να προβλέψει υψηλές αποδόσεις μετοχών και χαμηλές αποδόσεις ομολόγων και το αντίστροφο.

Τέλος αναρωτήθηκαν αν όντως μπορούν να θεωρήσουν το US T-Bill ως ένα πραγματικό risk free asset. Κατέληξαν ότι ο επενδυτής μπορεί να το χρησιμοποιήσει μόνο για μικρό χρονικό ορίζοντα επένδυσης. Για μεγαλύτερες περιόδους προτείνουν ένα μακροχρόνιο ομόλογο μηδενικού κουπονιού, το οποίο να είναι αποπληθωρισμένο, με λήξη τη στιγμή που επιθυμεί να ρευστοποιήσει το χαρτοφυλάκιο του. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει ένα τέτοιο ομόλογο, προτείνεται η χρήση ενός μικρού χαρτοφυλακίου μακροχρόνιων ομολόγων με μικρή συμμετοχή μετοχών και T-Bills.

Ουσιαστικά για να πετύχουν στα αποτελέσματα της έρευνας τους, προχώρησαν στην κατασκευή και ενός δεύτερου συμπληρωματικού χαρτοφυλακίου, με ομόλογα πενταετούς διάρκειας και μετοχές καθώς και T-Bills .

Τα τελικά αποτελέσματα απέδειξαν ότι για βραχυπρόθεσμα χαρτοφυλάκια που να είναι βελτιστοποιημένα προς τον κίνδυνο, η σύσταση τους περιλαμβάνει κυρίως T-Bills με μικρά ποσοστά σε μετοχές και ομόλογα. Αντιθέτως καθώς ο ορίζοντας επένδυσης μεγαλώνει τα T-Bills γίνονται όλο και πιο επικίνδυνα ενώ οι επενδυτές καταφεύγουν σε ομόλογα και μετοχές, με τις μετοχές να είναι κυρίαρχες όσο μεγαλώνει ο επενδυτικός ορίζοντας.

3.6 Dynamic Portfolio Selection by Augmenting the Asset Space

Michael Brandt, Pedro Santa Clara (2006)

Οι Brandt και Santa Clara προσπάθησαν στο συγκεκριμένο άρθρο να επεκτείνουν τον χώρο των περιουσιακών στοιχείων και να συμπεριλάβουν σε αυτόν και χαρτοφυλάκια ώστε να καταλήξουν σε ένα βέλτιστο χαρτοφυλάκιο. Επιλύουν το πρόβλημα βελτιστοποίησης σε ένα βήμα χρησιμοποιώντας τεχνικές δυναμικής διαπραγμάτευσης. Μοντελοποιούν τα ποσοστά των στοιχείων ως συναρτήσεις μεταβλητών, και βρίσκουν τις συσχετίσεις που μεγιστοποιούν την χρησιμότητα του επενδυτή. Με τον τρόπο αυτό μπορούν να λάβουν υπόψη τις μεταβολές μεταβλητών και πως αλληλεπιδρούν με το χαρτοφυλάκιο.

Ξεκινάνε τη μελέτη τους ορίζοντας τη μεταβλητή $x_t = \theta z_t$ με x_t το διάνυσμα των αποδόσεων, z_t το διάνυσμα των σταθερών μεταβλητών και θ ένας πίνακας συντελεστών. Επιπλέον ορίζει ως R^f_t ως την απόδοση του risk free στοιχείου, και $r_{t+1} = R_{t+1} - R^f_t$ ως το διάνυσμα υπερβάλλων αποδόσεων N στοιχείων .

Οι αρχικές σχέσεις βελτιστοποίησης όπως έχουν αναφερθεί και από άλλους ερευνητές είναι

$$\max_{x_t} E_t\left[x_t^T r_{t+1} - \frac{\gamma}{2} x_t^T r_{t+1} r_{t+1}^T x_t\right]$$

$$x = \frac{1}{\gamma}\left[\sum_{t=1}^{T-1} r_{t+1} r_{t+1}^T\right]^{-1}\left[\sum_{t=1}^{T-1} r_{t+1}\right]$$

Όμως αφού $x_t = \theta z_t$ έχουμε

$$\max_{\theta} E_t\left[(\theta z_t)^T r_{t+1} - \frac{\gamma}{2}(\theta z_t)^T r_{t+1} r_{t+1}^T (\theta z_t)\right] \quad (91)$$

Και χρησιμοποιώντας γραμμική άλγεβρα έδειξαν ότι

$$(\theta z_t)^T r_{t+1} = z_t^T \theta^T r_{t+1} = vec(\theta)^T (z_t \otimes r_{t+1}) \quad (92)$$

Κατέληξαν στη βέλτιστη λύση για μια περίοδο

$$\tilde{x} = \frac{1}{\gamma}\left[\sum_{t=0}^{T} (z_t z_t^T) \otimes (r_{t+1} r_{t+1}^T)\right]^{-1}\left[\sum_{t=0}^{T} z_t \otimes r_{t+1}\right] \quad (93)$$

ενώ γενικεύοντας για H περιόδους

$$\tilde{x} = \frac{1}{\gamma}\left[\sum_{t=1}^{T-H} \tilde{r}_{t\to t+H}\tilde{r}^{T}_{t\to t+H}\right]^{-1}\left[\sum_{t=1}^{T-H} \tilde{r}_{t\to t+H}\right] \tag{94}$$

με υπερβάλλουσα απόδοση χαρτοφυλακίου

$$r^{p}_{t\to t+H} = \sum_{j=0}^{H-1} x^{T}_{t+j} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{H-1} R^{f}_{t+i} r_{t+j+1} + \sum_{j=0}^{H-1} \sum_{\substack{k=0\\ k\neq j}}^{H-1} x^{T}_{t+j} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{H-1} R^{f}_{t+i} r_{t+j+1} x^{T}_{t+k} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{H-1} R^{f}_{t+i} r_{t+k+1} \dots + \prod_{j=0}^{H-1} x^{T}_{t+j}\, r_{t+j+1} \tag{95}$$

Επιλύοντας της παραπάνω σχέσεις με τη βοήθεια ενός VAR μοντέλου κατέληξαν στις βέλτιστες σταθμίσεις.

Ως δεδομένα χρησιμοποίησαν για τις μετοχές τον σταθμισμένο δείκτη αγορά της CRSP, για ομόλογα τον δείκτη μακροχρόνιων ομολόγων από την Ibbotson Associates και ως risk free το μηνιαίο T-Bill. Επίσης πήραν τον δείκτη Dividend Price (DP) ως τη διαφορά του λογαρίθμου των μερισμάτων των μετοχών με το λογάριθμο των τιμών τους, αλλά και το δυο spreads. Το term spread δείχνει τη διαφορά μεταξύ δεκαετών και ετήσιων κρατικών ομολόγων, και το default spread που είναι η διαφορά μεταξύ BAA και AAA εταιρικών ομολόγων. Θεώρησαν γ=5 καθώς και ότι αναπροσαρμογές στη σύνθεση του χαρτοφυλακίου μπορούν να γίνουν κάθε μήνα , τρίμηνο και έτος.

Απέδειξαν ότι για μηνιαία η τριμηνιαία αναπροσαρμογή οι επενδυτές επιλέγουν να έχουν το μεγαλύτερο μέρος του χαρτοφυλακίου τους σε μετοχές. Αντίθετα όσο ο χρόνος αναπροσαρμογής μεγαλώνει, οι επενδυτές δίνουν μεγαλύτερο βάρος στα ομόλογα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι για μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα η μεταβλητότητα των μετοχών ανεβαίνει σε σημαντικό βαθμό ενώ αντίστοιχα των ομολόγων μειώνεται.

Τέλος ισχυρίζονται ότι με τη μέθοδο τους μπορούν οι επενδυτές να κατασκευάσουν χαρτοφυλάκια με χαμηλότερη διακύμανση και ευνοούν κυρίως τους συντηρητικούς επενδυτές.

3.7 Strategic asset allocation with liabilities: Beyond stocks and bonds

Hoevenaars, Molenaar, Schotman, Steenkamp (2008)

Η μελέτη των Hoevenaars, Molenaar, Schotman και Steenkamp προσθέτει δυο νέες διαστάσεις σε σχέση με την προηγούμενη βιβλιογραφία. Η πρώτη αφορά την εξέταση και άλλων περιουσιακών στοιχειών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε ένα χαρτοφυλάκιο όπως εμπορεύματα και ακίνητα. Η δεύτερη διάσταση αφορά στην ύπαρξη υποχρεώσεων που μπορεί να έχει ο επενδυτής. Για το λόγο αυτό εστίασαν τις έρευνες τους σε ασφαλιστικά ταμεία, χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου επενδυτή. Ως παράγοντες κινδύνου θεωρούν μόνο τον πληθωρισμό και την μεταβολή στα επιτόκια. Βασιζόμενοι στις μελέτες των Campbell και Viceira (2005a) προσπάθησαν να ανακαλύψουν ποιο από τα υπό εξέταση περιουσιακά στοιχεία είναι μπορεί να διαφοροποιηθεί σε σχέση με τους κινδύνους και για διάφορους επενδυτικούς ορίζοντες ενώ αγνόησαν θέματα φορολογίας.

Για την συγκεκριμένη μελέτη κατασκεύασαν δυο διαφορετικά χαρτοφυλάκια, ένα ελάχιστης διακύμανσης και ένα αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο υποχρεώσεων.

Ορίζουν ως δείκτη χρηματοδότησης F το πηλίκο περιουσιακών στοιχείων προς υποχρεώσεων. Λογαριθμίζοντας έχουμε ως απόδοση του δείκτη αυτού την διαφορά αποδόσεων μεταξύ των περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων. Με τη βοήθεια των σχέσεων που έχουν ήδη αναπτυχθεί και κυρίως βασιζόμενοι ξανά στις μελέτες των Campbell και Viceira κατέληξαν στις εξής σχέσεις :

$$r_{F,t+\tau}^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{\tau} r_{F,t+j} = a_t^{(\tau)'} \left(x_{A,t+\tau}^{(\tau)} + \frac{\tau}{2}\sigma_A^2\right) - \frac{\tau}{2} a_t^{(\tau)'} \Sigma_{AA}\, a_t^{(\tau)} - x_{L,t+r}^{(\tau)} \qquad (96)$$

$$a_t^{(\tau)} = \frac{1}{\gamma}\left(\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\Sigma_{AA}^{(\tau)} + \frac{1}{\gamma}\Sigma_{AA}\right)^{-1}\left(\mu_t^{(\tau)} + \frac{1}{2}\sigma_A^2 - (1-\gamma)\sigma_{AL}^{(\tau)}\right) \qquad (97)$$

με το διάνυσμα των ποσοστών να διαιρείται σε 2 νέα διανύσματα :

το διάνυσμα του κερδοσκοπικού χαρτοφυλακίου

$$a_{S,t}^{(\tau)} = \frac{1}{\gamma}\left(\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\Sigma_{AA}^{(\tau)} + \frac{1}{\gamma}\Sigma_{AA}\right)^{-1}\left(\mu_{A,t}^{(\tau)} + \frac{1}{2}\sigma_{A}^{2}\right) \qquad (98)$$

και το διάνυσμα του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης υποχρεώσεων

$$a_{H}^{(\tau)} = \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\left(\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\Sigma_{AA}^{(\tau)} + \frac{1}{\gamma}\Sigma_{AA}\right)^{-1}\sigma_{AL}^{(\tau)} \qquad (99)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποίησαν μια μέθοδο VAR για την εκτίμηση των αποτελεσμάτων τους.

Ως δεδομένα χρησιμοποίησαν τριμηνιαία στοιχεία από την αμερικανική αγορά . Για ομόλογα και μετοχές χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα από το 1952, για εμπορεύματα από το 1970, για ακίνητα από το 1972, ενώ για hedge funds από το 1990. Ως ομόλογα χρησιμοποιήθηκαν εικοσαετής σταθερής απόδοσης λήξης, και τρίμηνο T-Bill, για το χαρτοφυλάκιο μετοχών από τους δείκτες NYSE, AMEX, NASDAQ και το χρηματιστήριο του Τορόντο.

Χρησιμοποιήθηκαν τέσσερις μεταβλητές πρόβλεψης : την πραγματική απόδοση του T-Bill, το λογάριθμο του δείκτη μέρισμα/τιμή του S&P Composite, τη διαφορά μεταξύ του δεκαετούς ομολόγου χωρίς κουπόνι με το T-Bill, και τη διαφορά μεταξύ ομολόγων BAA και του δεκαετούς ομολόγου χωρίς κουπόνι.

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης των ομολόγων και των μετοχών συνέπεσαν με αυτά της μελέτης των Campbell και Viceira (2005a) σχετικά με την διακύμανση τους σε σχέση με το χρόνο.

Επίσης έδειξαν ότι τα T-Bill είναι χρήσιμα στη διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου για όλα τους χρονικούς ορίζοντες επένδυσης. Επίσης η συσχέτιση μετοχών και πιστώσεων είναι ίδια με την συσχέτιση μετοχών και ομολόγων. Η πιθανότητα χρεοκοπίας αυξάνει όσο μειώνονται οι τιμές των μετοχών. Τα ομόλογα μεγάλης διάρκειας είναι πολύ ευαίσθητα στις μεταβολές επιτοκίων. Τα εμπορεύματα είναι αρνητικώς συσχετισμένα με ομόλογα και μετοχές, γεγονός που βοηθάει στη διαφοροποίηση.

Επιπλέον τα T-Bill είναι πολύ ευαίσθητα σε μεταβολές του πληθωρισμού και μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως αντιστάθμισμα στον κίνδυνο αυτό. Αντίθετα μετοχές, ομόλογα, ακίνητα και πιστώσεις αντισταθμίζουν καλά των πληθωρισμό μακροπρόθεσμα μόνο, ενώ βραχυπρόθεσμα αυξάνεται η μεταβλητότητα τους. Τα εμπορεύματα κινούνται μαζί με τον πληθωρισμό και για αυτό είναι και ελκυστικά για επένδυση καθώς αντισταθμίζουν πλήρως τον κίνδυνο.

Στον κίνδυνο μεταβολής των πραγματικών επιτοκίων καλύτερο αντιστάθμισμα μπορούν να προσφέρουν οι πιστώσεις και τα ομόλογα. Τέλος τα εμπορεύματα και τα hedge funds έχουν τη χαμηλότερη συσχέτιση με τις υποχρεώσεις.

Μετά τις ανωτέρω διαπιστώσεις κατασκεύασαν τα χαρτοφυλάκια για 1,5,10,25 έτη με γ =5 και 20.

Τα αποτελέσματα απέδειξαν ότι για μεγαλύτερο γ ο επενδυτής στρέφεται πιο πολύ στα T-Bill, ενώ όσο ο χρόνος μεγαλώνει σε μετοχές. Επίσης για γ = 5 βλέπουμε μεγάλες επενδύσεις και σε εμπορεύματα πιστώσεις και hedge funds και στα 2 χαρτοφυλάκια. Τέλος στο χαρτοφυλάκιο υποχρεώσεων τα T-Bill δεν προτιμώνται, έχοντας παράλληλα μεγάλες επενδύσεις στα εναλλακτικά περιουσιακά στοιχεία ενώ όσο μεγαλώνει ο επενδυτικός ορίζοντας αυξάνουν οι ποσοστώσεις σε μετοχές.

4 Εμπειρική μελέτη

Για τους σκοπούς της παρούσης διπλωματικής εργασίας θα βασιστούμε στα μοντέλα που έχουν αναπτύξει οι Campbell και Viceira. Ουσιαστικά θα δειχθεί ότι αν οι αποδώσεις των περιουσιακών στοιχείων μπορούν να περιγραφούν από ένα VAR μοντέλο ,οι επενδυτές έχουν συνάρτηση χρησιμότητας Epstein - Zin και δεν υπάρχουν περιορισμοί σχετικά με δανεισμό ή short sale, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο καθορισμός ποσοστώσεων ανάμεσα στα περιουσιακά στοιχεία μπορεί να υπολογισθούν ως συναρτήσεις σταθερών μεταβλητών. Οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται αν και δύσκολο να επιλυθούν με αναλυτικές μεθόδους, μπορούν εύκολα να επιλυθούν με αριθμητικές μεθόδους. Επιπλέον είναι ακριβείς προσεγγίσεις για μικρά χρονικά διαστήματα και ελαστικότητες που τείνουν στο ένα.

4.1 Μοντέλο

Θεωρούμε ότι το μοντέλο μας είναι σε διακριτό χρόνο και ότι ο επενδυτής ακολουθεί για πάντα τη συνάρτηση Epstein-Zin .

Υπάρχουν n περιουσιακά στοιχειά για επένδυση. Ο επενδυτής διαμοιράζει τον επιπλέον πλούτο του ανάμεσα σε αυτά. Η πραγματική απόδοση του χαρτοφυλακίου του δίνεται από τη σχέση:

$$R_{p,t+1} = \sum_{i=2}^{n} a_{i,t}\left(R_{i,t+1} - R_{1,t+1}\right) + R_{1,t+1} \qquad (100)$$

όπου $α_{i,t}$ είναι η στάθμιση κάθε περιουσιακού στοιχείου i. Σαν περιουσιακό στοιχείο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ένα βραχυχρόνιο περιουσιακό στοιχείο όπως τα αμερικάνικα t-bill τριών μηνών ,αν και κυρίως χρησιμοποιείται ως σημείο αναφοράς για την μέτρηση της απόδοσης των λοιπών περιουσιακών στοιχείων. Αν και θεωρείται μηδενικού κινδύνου μπορεί να επηρεαστεί από βραχυχρόνιες μεταβολές του πληθωρισμού.

Θεωρούμε ότι μπορούμε να ερμηνεύσουμε ικανοποιητικά την αλληλεπίδραση των μεταβλητών χρησιμοποιώντας ένα αυτοπαλίνδρομο μοντέλο διανυσμάτων πρώτης τάξης VAR(1). Αυτό δεν είναι δεσμευτικό αν και η προσθήκη επιπλέον χρονικών υστερήσεων στην παλινδρόμηση των σειρών προσθέτει επιπλέον περιπλοκότητα χωρίς σημαντικά αποτελέσματα.

Ξεκινώντας ορίζεται ένα διάνυσμα $\mathbf{x_{t+1}}$:

$$x_{t+1} \equiv \begin{bmatrix} r_{2,t+1} - r_{1,t+1} \\ r_{3,t+1} - r_{1,t+1} \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{101}$$

όπου $r_{i,t+1} \equiv \log(R_{i,t+1})$για κάθε i, και $\mathbf{x_{t+1}}$ είναι το διάνυσμα των λογαριθμημένων υπερβαλουσών αποδόσεων. Το $r_{1,t+1}$ είναι το ακίνδυνο περιουσιακό στοιχείο και τα υπόλοιπα αναφέρονται στα λοιπά περιουσιακά στοιχεία .

Επιπλέον στο μοντέλο εισάγουμε μεταβλητές με δυνατότητα πρόβλεψης όπως ο δείκτης μέρισμα/τιμή, οι οποίες αποτελούν το διάνυσμα $\mathbf{s_{t+1}}$. Ενώνοντας καταλήγουμε σε ένα διάνυσμα m x 1 $\mathbf{z_{t+1}}$

$$\boldsymbol{z_{t+1}} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{r_{1,t+1}} \\ \boldsymbol{x_{t+1}} \\ \boldsymbol{s_{t+1}} \end{bmatrix} \tag{102}$$

Παλινδρομώντας το διάνυσμα $\mathbf{z_{t+1}}$ χρησιμοποιώντας VAR(1) καταλήγουμε στην σχέση :

$$\boldsymbol{z_{t+1}} = \Phi_0 + \Phi_1 z_t + v_{t+1} \tag{103}$$

συμβολίζοντας με Φ_o ένα m x 1 διάνυσμα intercepts,Φ_1 ένας m x m πίνακας slope coefficients και $\mathbf{v_{t+1}}$ τα κατάλοιπα της παλινδρόμησης, τα οποία ακολουθούν κανονική κατανομή.

$$v_{t+1} \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \Sigma_u)$$

$$\Sigma_u \equiv \boldsymbol{Var_t}(\boldsymbol{v_{t+1}}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma_1^2} & \boldsymbol{\sigma_{1x}'} & \boldsymbol{\sigma_{1s}'} \\ \boldsymbol{\sigma_{1x}} & \boldsymbol{\Sigma_{xx}} & \boldsymbol{\Sigma_{xs}'} \\ \boldsymbol{\sigma_{1s}} & \boldsymbol{\Sigma_{xs}} & \boldsymbol{\Sigma_{ss}} \end{bmatrix} \tag{104}$$

Το παραπάνω μοντέλο μπορεί να ερμηνεύσει τόσο την εξάρτηση των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων από τα ιστορικά τους στοιχεία, όσο και από τα άλλα στοιχεία και τις μεταβλητές που θεωρούμε ότι έχουν προβλεπτική ικανότητα. Θωρείται δεδομένη η υπόθεση της ομοοσκεδαστικότητας. Γενικώς έχει αποδειχτεί από την βιβλιογραφία ότι οι μεταβλητές που μπορούν να προβλέψουν τον κίνδυνο, επηρεάζουν τις σταθμίσεις ενός χαρτοφυλακίου αλλά και τις αναμενόμενες αποδόσεις.

Μια βασική προϋπόθεση του μοντέλου είναι ότι ο επενδυτής χρησιμοποιεί τη συνάρτηση Epstein-Zin σύμφωνα με την οποία ισχύει:

$$U\big(C_t, E_t(U_{t+1})\big) = \left[(1-\delta)C_t^{\frac{1-\gamma}{\theta}} + \delta\left(E_t\big(U_{t+1}^{1-\gamma}\big)\right)^{\frac{1}{\theta}}\right]^{\frac{\theta}{1-\gamma}} \qquad (105)$$

ορίζοντας ως C_t την κατανάλωση τη χρονική στιγμή t, γ >0 την σχετική αποστροφή στον κίνδυνο, ψ την ελαστικότητα, δ, όπου 0<δ<1, τον χρονικό συντελεστή προεξόφλησης, $\theta \equiv (1-\gamma)/(1-\psi^{-1})$ και E(.) τις υποθετικές προσδοκίες.

Την χρονική στιγμή t, ο επενδυτής χρησιμοποιώντας όλη τη διαθέσιμη πληροφορία προχωρά στη βέλτιστη κατανομή μεταξύ κατανάλωσης και χαρτοφυλακίου. Συνεπώς αντιμετωπίζει τον ακόλουθο περιορισμό:

$$W_{t+1} = (W_t - C_t)R_{p,t+1} \qquad (106)$$

όπου W ο πλούτος κάθε χρονική στιγμή.

Οι Epstein και Zin ενώνοντας τις δύο ανωτέρω σχέσεις κατέληξαν στην ακόλουθη σχέση:

$$E_t\left[\left\{\delta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\frac{1}{\psi}}\right\}^{\theta} R_{p,t+1}^{-(1-\theta)} R_{i,t+1}\right] = 1 \qquad (107)$$

Οι βέλτιστες αποφάσεις του επενδυτή πρέπει να ικανοποιούν την ανωτέρω σχέση. Όταν οι επενδυτικές ευκαιρίες είναι σταθερές, τότε ο δείκτης κατανάλωσης πλούτου είναι σταθερός και ο επενδυτής συμπεριφέρεται θεωρώντας ότι ο επενδυτικός ορίζοντας είναι μόνο μια περίοδος. Αν δεν ισχύει η παραπάνω παραδοχή τότε η επίλυση των εξισώσεων είναι πρακτικά αδύνατη για συγκεκριμένες τιμές των γ και ψ.

4.2 Επίλυση του μοντέλου

Η απόδοση του χαρτοφυλακίου μπορεί να υπολογιστεί σύμφωνα με τη σχέση (100) αν και υπολογίζεται βάση των τυπικών αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων. Παρόλα αυτά είναι προτιμότερο να χρησιμοποιηθούν λογαριθμικές αποδώσεις. Συνεπώς η σχέση (100) μπορεί να γραφεί και ως

$$r_{p,t+1} = r_{1,t+1} + a_t^{'} x_{t+1} + \frac{1}{2} a_t^{'} (\sigma_x^2 - \Sigma_{xx} a_t) \qquad (108)$$

με $\sigma_x^2 \equiv diag(\Sigma_{xx})$ ένα διάνυσμα που αποτελείται από την διαγώνιο του πίνακα Σ_{XX} , ο οποίος υπολογίζεται από τα κατάλοιπα της παλινδρόμησης και απεικονίζει την διακύμανση των υποβαλλουσών αποδόσεων.

Επιπροσθέτως ο περιορισμός χρηματοδότησης (106) είναι μη γραμμικός. Λογαριθμίζοντας το δείκτη κατανάλωσης-πλούτου καταλήγουμε στη σχέση:

$$\Delta w_{t+1} \approx r_{p,t+1} + \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)(c_t - w_t) + k \qquad (109)$$

με $\rho \equiv 1 - exp(E[c_t - w_t])$ και $k \equiv \log(\rho) + (1-\rho)\log(1-\rho)/\rho$. Όταν η κατανάλωση είναι η βέλτιστη το ρ , καθώς σχετίζεται με την κατανάλωση σε σχέση με τον πλούτο, θεωρείται ως ενδογενής μεταβλητή.

Συνεχίζοντας την επίλυση του μοντέλου, καταλήγουμε σε μια λύση της μορφής:

$$a_t = A_0 + A_1 z_t \qquad (110)$$

$$c_t - w_t = b_0 + B_1^{'} z_t + z_t^{'} B_2 z_t \qquad (111)$$

Αν και τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την επίλυση μέσω της μεθόδου VAR είναι γραμμικά, η βέλτιστη κατανάλωση έχει τετραγωνική μορφή. Οι πίνακες A_o, A_1, b_o , B_1 και B_2 έχουν διαστάσεις (n-1) x1,(n-1) x m , 1 x1, m x1 και m x m.

Για να επιβεβαιώσουμε τα αποτελέσματα της παλινδρόμησης λαμβάνοντας υπόψη και τις ροπές που προκύπτουν από τον περιορισμό χρηματοδότησης καθώς και τις σχέσεις (109) και (110) καταλήγουμε στην κάτωθι εξίσωση:

$$E_t(x_{t+1}) + \frac{1}{2} Var_t(x_{t+1}) = H_x \Phi_0 + H_x \Phi_1 z_t + \frac{1}{2}\sigma_x^2 \qquad (112)$$

όπου H_x είναι ένας πίνακας επιλογής, ο οποίος διαχωρίζει τα περιουσιακά στοιχεία από το σύνολο των μεταβλητών της παλινδρόμησης.

Επιπροσθέτως έχουν αποδειχθεί και οι κάτωθι εξισώσεις

$$\sigma_{c-w,t} - \sigma_{1,c-w,tl} \equiv \left[\sigma_{i,c-w,t} - \sigma_{1,c-w,t}\right]_{i=2,\dots n} = \Lambda_0 + \Lambda_1 z_t, \qquad (113)$$

$$\sigma_{p,t} - \sigma_{1,p,tl} \equiv \left[\sigma_{i,p,t} - \sigma_{1,p,t}\right]_{i=2,\dots n} = \Sigma_{xx}\, a_t + \sigma_{1x} \qquad (114)$$

$$\sigma_{1,t} - \sigma_{1,1,tl} \equiv \left[\sigma_{i,1,t} - \sigma_{1,1,t}\right]_{i=2,\dots n} = \sigma_{1x} \qquad (115)$$

Συνδυάζοντας το σύνολο των σχέσεων μπορούμε να καταλήξουμε στην ακόλουθη βέλτιστη σύνθεση του χαρτοφυλακίου

$$a_t = \frac{1}{\gamma}\Sigma_{xx}^{-1}\left[E_t(x_{t+1}) + \frac{1}{2}Var_t(x_{t+1}) + (1-\gamma)\sigma_{1x}\right] + \frac{1}{\gamma}\Sigma_{xx}^{-1}\left[-\frac{\theta}{\psi}\left(\sigma_{c-w,t} - \sigma 1,c{-}w,tl \right.\right. \qquad (116)$$

Ο πρώτος όρος στο δεξί μέρος είναι το μυωπικό μέρος του χαρτοφυλακίου. Στην περίπτωση που το στοιχείο αναφοράς είναι χωρίς κίνδυνο ($\boldsymbol{\sigma}_{1X}$= 0), τότε η μυωπική κατανομή των σταθμίσεων είναι το διάνυσμα των δεικτών Sharpe των περιουσιακών στοιχείων με κίνδυνο, πολλαπλασιασμένο με τον ανάστροφο πίνακα διακυμάνσεων συνδιακυμάνσεων των επικίνδυνων περιουσιακών στοιχείων και διαιρεμένος με το συντελεστή αποστροφής κινδύνου γ. Οι επενδυτές με γ ≠ 1 προσαρμόζουν τις σταθμίσεις τους ελαφρώς κατά τον όρο (1-γ) $\boldsymbol{\sigma}_{1X}$ όταν το στοιχείο 1 έχει κίνδυνο. Τέλος ο όρος αυτός λόγω της μυωπικής του φύσης δεν λαμβάνουν υπόψη το ψ.

Ο δεύτερος όρος καταδεικνύει την απαίτηση του επενδυτή για αντιστάθμιση των κινδύνων. Στο συγκεκριμένο μοντέλο, το μείγμα των επενδυτικών στοιχείων επηρεάζεται από εξωγενής μεταβλητές. Ο Merton (1969,1971) απέδειξε ότι ο συνετός επενδυτής που αποστρέφεται πιο πολύ τον κίνδυνο θα προσπαθήσει να αντισταθμίσει το χαρτοφυλάκιο του σε σχέση με αλλαγές στις επενδυτικές του επιλογές. Για έναν επενδυτή που ακολουθεί μόνο τις λογαριθμικές αποδώσεις, το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο προκύπτει κυρίως από τον πρώτο όρο και συνεπώς η ανάγκη αντιστάθμισης είναι μηδέν. Επιπλέον, όταν οι επενδυτικές ευκαιρίες είναι σταθερές κατά τη διάρκεια του χρόνου, ξανά ανάγκη αντιστάθμισης είναι μηδέν για οποιαδήποτε επίπεδο κινδύνου.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (112) και (113) στη σχέση (116) καταλήγουμε ότι:

$$a_t \equiv A_0 + A_1 z_t$$

$$A_0 = \left(\frac{1}{\gamma}\right)\sum\nolimits_{xx}^{-1}\left(H_x \Phi_0 + \frac{1}{2}\sigma_X^2 + (1-\gamma)\sigma_{1x}\right) + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sum\nolimits_{xx}^{-1}\left(\frac{-\Lambda_0}{1-\psi}\right)$$

$$A_1 = \left(\frac{1}{\gamma}\right)\sum\nolimits_{xx}^{-1} H_x \Phi_1 + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sum\nolimits_{xx}^{-1}\left(\frac{-\Lambda_1}{1-\psi}\right) \qquad (117)$$

Η τελευταίες σχέσεις επιβεβαιώνουν την υπόθεση ότι η βέλτιστη στάθμιση ενός χαρτοφυλακίου έχει τη μορφή ενός διανύσματος και το γεγονός ότι οι πίνακες A_o, A_1 είναι συναρτήσεις των προτιμήσεων και δυναμικών που έχουν οι εξωγενείς μεταβλητές. Επίσης οι A_o, A_1 εξαρτώνται από τις παραμέτρους της συνάρτησης του δείκτη κατανάλωσης πλούτου B_1 και B_2 ,καθώς και τους πίνακες Λ_0 και Λ_1 . Πρέπει να τονιστεί ότι ο όρος (1-1/γ) απεικονίζει την ανάγκη για αντιστάθμιση.

Τέλος οι Campbell και Viceira απέδειξαν ότι δοσμένου της παραμέτρου ρ, οι όροι $-\Lambda_0/(1-\psi)$ και $-\Lambda_1/(1-\psi)$ είναι ανεξάρτητοι της ελαστικότητας ψ . Το ψ επηρεάζει την επιλογή του βέλτιστου χαρτοφυλακίου στο μέτρο που καθορίζει το ρ. Αυτή η πρόταση είναι η γενίκευση του μοντέλου με πολλαπλά περιουσιακά στοιχεία και μας οδηγεί σε μια γενική αλλά εύκολα υπολογίσιμη επίλυση του προβλήματος.

4.3 Δεδομένα

Για την επίλυση του οικονομετρικού μας μοντέλου και την εξαγωγή αποτελεσμάτων θεωρείται ως χώρα στην οποία βρίσκεται ο επενδυτής είναι οι Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής και χρησιμοποιήσαμε μηνιαία στοιχεία. Ο χρονικός ορίζοντας που καλύφθηκε είναι από τον Ιανουάριο του 1980 έως τον Δεκέμβριο του 2008. Ο καθορισμός αυτού του χρονικού ορίζοντα έγινε με βάση τη διαθεσιμότητα ορισμένων χρονοσειρών.

Ως στοιχείο μηδενικού κινδύνου, συνεπώς και στοιχείο αναφοράς βάση του οποίου υπολογίσθηκαν οι υπερβάλλουσες αποδώσεις των υπολοίπων περιουσιακών στοιχείων είναι το τριμηνιαίο T-Bill. Ως χρονοσειρά χρησιμοποιήθηκαν οι αποδόσεις έκδοσης, οι οποίες καθώς αναφερόντουσαν σε ετήσια απόδοση διαιρέθηκαν με το δώδεκα και στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκε οι λογαριθμική τους διαφορά. Για τα ομόλογα, προτιμήθηκαν τα κρατικά δεκαετούς διάρκειας καθώς και τα εταιρικά ομόλογα εταιρειών που είναι χαρακτηρισμένες ως BBB. Εταιρικά ομόλογα της κατηγορίας AAA παρατηρήθηκε ότι έχουν ανάλογη συμπεριφορά με τα μακροχρόνια κρατικά και για το λόγο αυτό απορρίφθηκαν. Ως δεδομένα χρησιμοποιήθηκαν δείκτες ομολόγων (Bond Indexes), και από αυτούς προέκυψαν οι λογαριθμικές αποδώσεις. Ένα τρίτο περιουσιακό στοιχείο που χρησιμοποιήθηκε είναι ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών. Για το λόγο αυτό επιλέχθηκε ο χρηματιστηριακός δείκτης SP500 που περιέχει 500 από τις μεγαλύτερες εταιρείες που δραστηριοποιούνται στις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής. Τέλος επιλέχθηκε ως περιουσιακό στοιχείο ο χρυσός, καθώς θεωρείται ως ένα στοιχείο που καταφεύγουν οι επενδυτές; σε περίπτωση κρίσης. Στο μοντέλο εισήχθηκαν οι υπερβάλλουσες αποδόσεις που προέκυψαν ως η διαφορά της μηνιαίας απόδοσης του περιουσιακού στοιχείου με την απόδοση του στοιχείου χωρίς κίνδυνο.

Ως μεταβλητές με ικανότητα πρόβλεψης της πορείας της οικονομίας, και συνεπώς μεταβλητές πάνω στις οποίες αντισταθμίζεται το χαρτοφυλάκιο μας χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθες. Πληθωρισμός (CPI) του οποίο η χρονοσειρά χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό των μηνιαίων μεταβολών του. Άλλη μια μεταβλητή είναι ο λόγος μερισματικής απόδοσης των τιμών των μετοχών του δείκτη SP500 που μπορεί να προβλέψει την κίνηση των μετοχών. Μια μεταβλητή π[ου δείχνει την κατάσταση στην οικονομία είναι η μεταβολή του επιπέδου ανεργίας, η οποία μπορεί να εξηγήσει σε ποίο στάδιο της οικονομίας είναι μια χώρα. Τέλος χρησιμοποιήθηκαν δύο ακόμα μεταβλητές, το περιθώριο χρεοκοπίας (default spread), το οποίο είναι η διαφορά μεταξύ ομολόγων AAA και BBB και το πραγματικό ονομαστικό επιτόκιο (real short term), το οποίο υπολογίζεται ως η διαφορά μεταξύ του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου και του πληθωρισμού. Οι μεταβλητές αυτές έχουν χρησιμοποιηθεί και από την υφιστάμενη βιβλιογραφία και από άλλες μελέτες.

Τα δεδομένα βρέθηκαν στη βάση δεδομένων της DataStream.

Τέλος το μοντέλο επιλύθηκε για τιμές του γ =1, 2, 5, 10, 20 με το γ να δείχνει το επίπεδο αποστροφής κινδύνου, με συνέπεια μεγαλύτερο γ να υπονοεί πιο συντηρητικό επενδυτή.

4.4 Υπολογισμός σταθμίσεων χαρτοφυλακίου

Για τον υπολογισμό των σταθμίσεων του χαρτοφυλακίου χρησιμοποιήθηκε το οικονομετρικό πακέτο E-Views. Στην αρχή υπολογιζόταν το μοντέλο VAR των χρονοσειρών που κάθε φορά επιθυμούσαμε και στη συνέχεια αφού κατασκευάστηκε ο κάτωθι αλγόριθμος, χρησιμοποιώντας σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου διαφορετικό γ μπορούσαμε να εξάγουμε τα αποτελέσματα.

```
%var="var01"

!numberofs=2
!numberofx=2
!g= 2

!n={%var}.@neqn
freeze(temp) {%var}.residcov
matrix(!n,!n) sigma_u
vector(!n-!numberofs-1) sigma_x2
vector(!n-!numberofs-1) sigma_1x
matrix(!n-!numberofs-1,!n-!numberofs-1) sigma_xx
for !r=1 to !n
for !c=1 to !n
```

```
sigma_u(!r,!c)=@val(temp(!r+2,!c+1))
next
next
for !r=1 to !n-!numberofs-1
for !c=1 to !n-!numberofs-1
sigma_xx(!r,!c)=sigma_u(!r+1,!c+1)
next
next
for !r=1 to !n-!numberofs-1
sigma_x2(!r)=sigma_xx(!r,!r)
next
for !r=1 to !n-!numberofs-1
sigma_1x(!r)=sigma_u(!r+1,1)
next
vector(!n) zt
vector(!n) f0
matrix(!n,!n) f1
for !a=1 to !n
for !b=1 to !n
f1(!a,!b)={%var}.c(!a,!b)
next
for !a=1 to !n
f0(!a)={%var}.c(!a,!n+1)
next
matrix(!n-!numberofs-1,!n) hx=0
for !r=1 to !n-!numberofs-1
for !k=2 to !n-!numberofs
hx(!r,!k)=1
next

matrix        a0=(1/!g)*@inverse(sigma_xx)*(hx*f0+0.5*sigma_x2+(1-
!g)*sigma_1x)
```

```
matrix a1=(1/!g)*@inverse(sigma_xx)*hx*f1
matrix at=a0+a1*zt

delete temp
```

όπου numberofx ο αριθμός των περιουσιακών στοιχείων, numberofs ο αριθμός των μεταβλητών που έχουν προβλεπτική ικανότητα και ως g χαρακτηρίζουμε το γ.

4.5 Ανάλυση-σχολιασμός αποτελεσμάτων

Για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων αφού γινόταν παλινδρόμηση των μεταβλητών που χρησιμοποιήθηκαν στο μοντέλο, προσθέτοντας συνεχώς σε κάθε επανάληψη και από μια επιπλέον μεταβλητή με προβλεπτική ικανότητα, στη συνέχεια εκτελούταν ο άνωθι αλγόριθμος για κάθε γ.

Στην πρώτη παλινδρόμηση παλινδρομήθηκαν μόνο τα περιουσιακά στοιχεία, ενώ σταδιακά προστέθηκαν ο πληθωρισμός, η μερισματική απόδοση του χρηματιστηριακού δείκτη, η μεταβολή του δείκτη ανεργίας, το περιθώριο χρεοκοπίας και τέλος το πραγματικό επιτόκιο.

Από κάθε παλινδρόμηση μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για το πως η μια μεταβλητή μπορεί να επηρεάσει τις υπόλοιπες, πόσο στατιστικά σημαντική είναι, ενώ στο τέλος θα σχολιαστούν τις σταθμίσεις των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου.

Vector Autoregression Estimates
Date: 01/13/10 Time: 19:25
Sample (adjusted): 1980M03 2008M12
Included observations: 346 after adjustments
Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]

	LN3MTBILL12	EXCGB10Y	EXCCORPBBB	EXCSP500	EXCGOLD
LN3MTBILL12(-1)	0.571562	-0.001094	0.008815	0.012128	-0.076532
	(0.07635)	(0.01998)	(0.01671)	(0.03852)	(0.03236)
	[7.48559]	[-0.05476]	[0.52743]	[0.31483]	[-2.36508]
EXCGB10Y(-1)	-1.426623	0.159790	0.082714	0.080205	0.120042
	(0.37590)	(0.09836)	(0.08228)	(0.18965)	(0.15931)
	[-3.79519]	[1.62456]	[1.00529]	[0.42290]	[0.75352]
EXCCORPBBB(-1)	2.655086	-0.123640	0.096658	-0.125826	-0.020437
	(0.40979)	(0.10723)	(0.08970)	(0.20675)	(0.17367)
	[6.47909]	[-1.15307]	[1.07761]	[-0.60858]	[-0.11768]
EXCSP500(-1)	-0.039118	0.020726	0.000882	0.134384	-6.23E-05
	(0.10654)	(0.02788)	(0.02332)	(0.05375)	(0.04515)
	[-0.36718]	[0.74349]	[0.03783]	[2.50015]	[-0.00138]
EXCGOLD(-1)	-0.391564	0.044551	0.060144	0.065407	-0.065479
	(0.12709)	(0.03325)	(0.02782)	(0.06412)	(0.05386)
	[-3.08100]	[1.33971]	[2.16209]	[1.02007]	[-1.21571]
C	-0.013667	0.003677	0.002749	0.001513	-0.005065
	(0.00640)	(0.00167)	(0.00140)	(0.00323)	(0.00271)

	[-2.13561]	[2.19590]	[1.96240]	[0.46862]	[-1.86737]
R-squared	0.293646	0.016264	0.047845	0.021449	0.033088
Adj. R-squared	0.283259	0.001797	0.033843	0.007059	0.018868
Sum sq. resids	4.689462	0.321070	0.224669	1.193706	0.842257
S.E. equation	0.117442	0.030730	0.025706	0.059253	0.049772
F-statistic	28.26902	1.124225	3.416958	1.490512	2.326947
Log likelihood	253.1412	717.0260	778.7920	489.8493	550.1800
Akaike AIC	-1.428562	-4.109977	-4.467006	-2.796817	-3.145549
Schwarz SC	-1.361861	-4.043276	-4.400304	-2.730115	-3.078848
Mean dependent	-0.014908	0.003704	0.002929	0.001233	-0.003774
S.D. dependent	0.138721	0.030757	0.026152	0.059463	0.050248
Determinant resid covariance (dof adj.)		2.05E-14			
Determinant resid covariance		1.88E-14			
Log likelihood		3012.663			
Akaike information criterion		-17.24083			
Schwarz criterion		-16.90732			

Στην πρώτη αυτή παλινδρόμηση μόνο με τα περιουσιακά στοιχεία μπορούμε να δούμε οτι οι υστερήσεις των λοιπών περιουσιακών στοιχείων επηρεάζουν σημαντικά το περιουσιακό στοιχείο χωρίς κίνδυνο (3 months T-Bill) καθώς το t-statistic είναι σε όλες τις περιπτώσεις αρκετά μεγαλύτερο του δυο. Επίσης παρατηρείται ότι με εξαίρεση τις αποδόσεις του χρηματιστηριακού δείκτη, οι υστερήσεις των άλλων περιουσιακών στοιχείων δεν είναι σημαντικές για τις αποδώσεις τον χρόνο t καθώς το t-statistic είναι μικρότερο του 2. Το adj R squared είναι χαμηλό σε όλες τις σειρές γεγονός που δείχνει φυσιολογική μεταβλητότητα.

Vector Autoregression Estimates
Date: 01/13/10 Time: 19:20
Sample (adjusted): 1980M03 2008M12
Included observations: 346 after adjustments
Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]

	LN3MTBILL12	EXCGB10Y	EXCCORPBBB	EXCSP500	EXCGOLD	CPI
LN3MTBILL12(-1)	0.499841	0.014177	0.017941	0.011987	-0.057656	0.004065
	(0.07598)	(0.02008)	(0.01696)	(0.03946)	(0.03278)	(0.00159)
	[6.57894]	[0.70604]	[1.05813]	[0.30379]	[-1.75869]	[2.55285]
EXCGB10Y(-1)	-1.180345	0.107354	0.051377	0.080689	0.055224	-0.011532
	(0.36978)	(0.09773)	(0.08252)	(0.19205)	(0.15956)	(0.00775)
	[-3.19201]	[1.09850]	[0.62259]	[0.42014]	[0.34610]	[-1.48797]
EXCCORPBBB(-1)	2.404728	-0.070335	0.128514	-0.126318	0.045454	0.009530
	(0.40254)	(0.10639)	(0.08983)	(0.20907)	(0.17370)	(0.00844)
	[5.97385]	[-0.66113]	[1.43059]	[-0.60420]	[0.26169]	[1.12967]
EXCSP500(-1)	-0.014981	0.015587	-0.002189	0.134432	-0.006415	0.000829
	(0.10378)	(0.02743)	(0.02316)	(0.05390)	(0.04478)	(0.00218)
	[-0.14434]	[0.56826]	[-0.09451]	[2.49401]	[-0.14324]	[0.38102]
EXCGOLD(-1)	-0.370821	0.040135	0.057505	0.065448	-0.070938	-0.000979
	(0.12373)	(0.03270)	(0.02761)	(0.06426)	(0.05339)	(0.00259)
	[-2.99708]	[1.22739]	[2.08264]	[1.01849]	[-1.32872]	[-0.37765]

CPI(-1)	9.888571	-2.105432	-1.258220	0.019430	-2.602559	0.525646
	(2.19866)	(0.58107)	(0.49066)	(1.14191)	(0.94872)	(0.04608)
	[4.49754]	[-3.62335]	[-2.56433]	[0.01702]	[-2.74324]	[11.4074]
C	-0.043131	0.009950	0.006498	0.001455	0.002690	0.001362
	(0.00904)	(0.00239)	(0.00202)	(0.00469)	(0.00390)	(0.00019)
	[-4.77238]	[4.16594]	[3.22172]	[0.31001]	[0.68985]	[7.19295]
R-squared	0.333420	0.052941	0.065963	0.021450	0.054086	0.360025
Adj. R-squared	0.321623	0.036179	0.049432	0.004131	0.037344	0.348698
Sum sq. resids	4.425401	0.309099	0.220394	1.193705	0.823966	0.001944
S.E. equation	0.114255	0.030196	0.025498	0.059340	0.049301	0.002395
F-statistic	28.26107	3.158386	3.990131	1.238489	3.230567	31.78467
Log likelihood	263.1677	723.5994	782.1156	489.8494	553.9784	1600.540
Akaike AIC	-1.480738	-4.142193	-4.480437	-2.791037	-3.161725	-9.211215
Schwarz SC	-1.402920	-4.064375	-4.402619	-2.713219	-3.083907	-9.133397
Mean dependent	-0.014908	0.003704	0.002929	0.001233	-0.003774	0.002847
S.D. dependent	0.138721	0.030757	0.026152	0.059463	0.050248	0.002967

Determinant resid covariance (dof adj.)	1.01E-19
Determinant resid covariance	8.97E-20
Log likelihood	4641.636
Akaike information criterion	-26.58749
Schwarz criterion	-26.12058

Στην δεύτερη αυτή παλινδρόμηση προστέθηκε και ο πληθωρισμός. Τα αποτελέσματα σχετικά με τη συσχέτιση των περιουσιακών στοιχείων τόσο μεταξύ τους όσο και τις υστερήσεις τους ακολουθούν τα αντίστοιχα της πρώτης παλινδρόμησης.

Ενδιαφέρον όμως παρουσιάζει ότι η χρονική υστέρηση της μεταβολής του πληθωρισμού έχει σημαντική επίδραση σε όλα τα περιουσιακά στοιχεία με εξαίρεση τις αποδώσεις του χρηματιστηριακού δείκτη.

Συνεπώς κρίνεται απαραίτητη η χρήση της μεταβλητής αυτής από τους υποψήφιους επενδυτές ώστε να μπορέσουν να κατασκευάσουν ένα πιο αντισταθμισμένο χαρτοφυλάκιο.

Η σταθερά c παύει να είναι σημαντική για τον SP500 ενώ ενισχύει την επίδρασή της στα ομόλογα.

Vector Autoregression Estimates
Date: 01/13/10 Time: 19:28
Sample (adjusted): 1980M03 2008M12
Included observations: 346 after adjustments
Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]

	LN3MTBILL12	EXCGB10Y	EXCCORPBBB	EXCSP500	EXCGOLD	CPI	SP500DY
LN3MTBILL12(-1)	0.474571	0.020780	0.024636	0.017217	-0.065270	0.004759	-0.000257
	(0.07591)	(0.02007)	(0.01687)	(0.03977)	(0.03293)	(0.00158)	(0.00092)
	[6.25156]	[1.03554]	[1.46045]	[0.43293]	[-1.98209]	[3.01383]	[-0.27840]
EXCGB10Y(-1)	-1.179631	0.107167	0.051188	0.080541	0.055440	-0.011551	0.000687
	(0.36654)	(0.09689)	(0.08145)	(0.19202)	(0.15900)	(0.00762)	(0.00446)
	[-3.21826]	[1.10602]	[0.62845]	[0.41943]	[0.34867]	[-1.51500]	[0.15394]
EXCCORPBBB(-1)	2.423251	-0.075175	0.123606	-0.130151	0.051035	0.009022	-0.015538
	(0.39908)	(0.10549)	(0.08868)	(0.20907)	(0.17311)	(0.00830)	(0.00486)
	[6.07212]	[-0.71260]	[1.39383]	[-0.62253]	[0.29481]	[1.08677]	[-3.19754]
EXCSP500(-1)	0.003311	0.010807	-0.007035	0.130646	-0.000904	0.000326	4.42E-05
	(0.10311)	(0.02726)	(0.02291)	(0.05402)	(0.04473)	(0.00214)	(0.00126)
	[0.03212]	[0.39648]	[-0.30707]	[2.41868]	[-0.02020]	[0.15213]	[0.03518]
EXCGOLD(-1)	-0.414732	0.051610	0.069139	0.074536	-0.084168	0.000227	-0.004744
	(0.12376)	(0.03272)	(0.02750)	(0.06484)	(0.05369)	(0.00257)	(0.00151)
	[-3.35111]	[1.57753]	[2.51406]	[1.14962]	[-1.56781]	[0.08813]	[-3.14838]
CPI(-1)	12.10217	-2.683893	-1.844718	-0.438686	-1.935606	0.464842	0.082386

	(2.33414)	(0.61702)	(0.51868)	(1.22281)	(1.01252)	(0.04855)	(0.02842)
	[5.18486]	[-4.34976]	[-3.55659]	[-0.35875]	[-1.91168]	[9.57392]	[2.89879]
SP500DY(-1)	-1.334598	0.348759	0.353604	0.276202	-0.402112	0.036660	0.981298
	(0.50385)	(0.13319)	(0.11196)	(0.26396)	(0.21856)	(0.01048)	(0.00613)
	[-2.64881]	[2.61850]	[3.15826]	[1.04640]	[-1.83980]	[3.49786]	[159.954]
C	-0.011720	0.001742	-0.001825	-0.005046	0.012155	0.000500	0.000251
	(0.01486)	(0.00393)	(0.00330)	(0.00779)	(0.00645)	(0.00031)	(0.00018)
	[-0.78855]	[0.44338]	[-0.55251]	[-0.64804]	[1.88529]	[1.61599]	[1.38620]
R-squared	0.346976	0.071771	0.092737	0.024610	0.063465	0.382381	0.989084
Adj. R-squared	0.333452	0.052547	0.073948	0.004409	0.044069	0.369591	0.988858
Sum sq. resids	4.335407	0.302953	0.214077	1.189851	0.815797	0.001876	0.000643
S.E. equation	0.113255	0.029938	0.025167	0.059332	0.049128	0.002356	0.001379
F-statistic	25.65599	3.733467	4.935602	1.218280	3.272091	29.89477	4374.993
Log likelihood	266.7221	727.0737	787.1471	490.4089	555.7023	1606.692	1791.988
Akaike AIC	-1.495503	-4.156496	-4.503741	-2.788491	-3.165909	-9.240993	-10.31207
Schwarz SC	-1.406568	-4.067561	-4.414806	-2.699556	-3.076974	-9.152058	-10.22313
Mean dependent	-0.014908	0.003704	0.002929	0.001233	-0.003774	0.002847	0.028660
S.D. dependent	0.138721	0.030757	0.026152	0.059463	0.050248	0.002967	0.013064

Determinant resid covariance (dof adj.)	1.48E-25
Determinant resid covariance	1.25E-25
Log likelihood	6482.955
Akaike information criterion	-37.15003
Schwarz criterion	-36.52748

Στη συγκεκριμένη παλινδρόμηση προστέθηκε ως εξωγενής μεταβλητή ο δείκτης μερισματικής απόδοσης του SP500.

Η μεταβλητή αυτή είναι στατιστικά σημαντική μόνο για τα ομόλογα ενώ πλέον και ο πληθωρισμός έγινε στατιστικά σημαντικός στα ομόλογα.

Έκπληξη είναι το γεγονός ότι ο δείκτης καθεαυτό φαίνεται ότι δε επηρεάζεται σημαντικά από τη μερισματική του απόδοση, αν και θα έπρεπε. Ακριβώς το ίδιο παρατηρείται με τη χρονική υστέρηση των υπερβάλλων αποδόσεων του δείκτη με τη τωρινή μερισματική του απόδοση. Τέλος φαίνεται ότι κινείται παράλληλα με τον πληθωρισμό αν και με πολύ μικρό συντελεστή.

Ο σταθερός συντελεστής πλέον έχει χάσει τη στατιστική μεταβλητότητα από όλα τα περιουσιακά στοιχεία (το t-statistic είναι αρκετά μικρότερο του 2).

Vector Autoregression Estimates
Date: 01/13/10 Time: 19:26
Sample (adjusted): 1980M03 2008M12
Included observations: 346 after adjustments
Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]

	LN3MTBILL12	EXCGB10Y	EXCCORP BBB	EXCSP500	EXCGOLD	CPI	SP500DY	LNUNEMPLO YMENT
LN3MTBILL12(-1)	0.432465	0.038894	0.036646	0.011153	-0.057156	0.004774	-0.000458	-0.084327
	(0.07687)	(0.01996)	(0.01696)	(0.04066)	(0.03363)	(0.00162)	(0.00094)	(0.01805)
	[5.62595]	[1.94832]	[2.16019]	[0.27430]	[-1.69973]	[2.95458]	[-0.48497]	[-4.67183]
EXCGB10Y(-1)	-1.210588	0.120485	0.060018	0.076083	0.061405	-0.011540	0.000540	0.086625
	(0.36345)	(0.09439)	(0.08021)	(0.19226)	(0.15899)	(0.00764)	(0.00446)	(0.08534)
	[-3.33081]	[1.27649]	[0.74827]	[0.39573]	[0.38621]	[-1.51056]	[0.12084]	[1.01500]
EXCCORPBBB(-1)	2.426831	-0.076716	0.122585	-0.129636	0.050346	0.009020	-0.015520	-0.105227
	(0.39551)	(0.10271)	(0.08728)	(0.20922)	(0.17302)	(0.00831)	(0.00486)	(0.09287)
	[6.13590]	[-0.74688]	[1.40443]	[-0.61962]	[0.29098]	[1.08500]	[-3.19435]	[-1.13302]
EXCSP500(-1)	-0.006426	0.014996	-0.004258	0.129244	0.000973	0.000330	-2.24E-06	-0.015670
	(0.10225)	(0.02655)	(0.02257)	(0.05409)	(0.04473)	(0.00215)	(0.00126)	(0.02401)
	[-0.06285]	[0.56472]	[-0.18869]	[2.38952]	[0.02175]	[0.15342]	[-0.00178]	[-0.65263]
EXCGOLD(-1)	-0.414642	0.051571	0.069113	0.074548	-0.084185	0.000227	-0.004744	-0.025677
	(0.12265)	(0.03185)	(0.02707)	(0.06488)	(0.05365)	(0.00258)	(0.00151)	(0.02880)
	[-3.38061]	[1.61904]	[2.55334]	[1.14901]	[-1.56902]	[0.08799]	[-3.14843]	[-0.89154]
CPI(-1)	12.34655	-2.789025	-1.914422	-0.403494	-1.982694	0.464755	0.083550	1.514381

	(2.31508)	(0.60122)	(0.51091)	(1.22462)	(1.01274)	(0.04866)	(0.02844)	(0.54362)
	[5.33309]	[-4.63891]	[-3.74710]	[-0.32948]	[-1.95776]	[9.55052]	[2.93778]	[2.78575]
SP500DY(-1)	-1.261069	0.317127	0.332632	0.286791	-0.416280	0.036634	0.981648	0.022237
	(0.50010)	(0.12988)	(0.11037)	(0.26454)	(0.21877)	(0.01051)	(0.00614)	(0.11743)
	[-2.52162]	[2.44177]	[3.01390]	[1.08410]	[-1.90281]	[3.48491]	[159.785]	[0.18936]
LNUNEMPLOYMENT (-1)	-0.609719	0.262304	0.173911	-0.087804	0.117486	0.000216	-0.002905	-0.073127
	(0.22842)	(0.05932)	(0.05041)	(0.12083)	(0.09992)	(0.00480)	(0.00281)	(0.05364)
	[-2.66927]	[4.42179]	[3.44995]	[-0.72668]	[1.17576]	[0.04506]	[-1.03537]	[-1.36337]
C	-0.014698	0.003023	-0.000975	-0.005475	0.012728	0.000501	0.000237	-0.005496
	(0.01477)	(0.00384)	(0.00326)	(0.00781)	(0.00646)	(0.00031)	(0.00018)	(0.00347)
	[-0.99501]	[0.78807]	[-0.29917]	[-0.70063]	[1.96977]	[1.61240]	[1.30419]	[-1.58456]
R-squared	0.360497	0.122672	0.123687	0.026136	0.067291	0.382385	0.989118	0.092605
Adj. R-squared	0.345315	0.101845	0.102884	0.003017	0.045149	0.367724	0.988860	0.071065
Sum sq. resids	4.245644	0.286340	0.206774	1.187989	0.812464	0.001876	0.000641	0.234098
S.E. equation	0.112242	0.029149	0.024770	0.059373	0.049101	0.002359	0.001379	0.026356
F-statistic	23.74642	5.890124	5.945721	1.130515	3.039121	26.08095	3829.069	4.299120
Log likelihood	270.3416	736.8306	793.1517	490.6798	556.4105	1606.693	1792.537	771.6802
Akaike AIC	-1.510645	-4.207113	-4.532669	-2.784276	-3.164223	-9.235219	-10.30946	-4.408556
Schwarz SC	-1.410593	-4.107061	-4.432617	-2.684224	-3.064171	-9.135167	-10.20941	-4.308504
Mean dependent	-0.014908	0.003704	0.002929	0.001233	-0.003774	0.002847	0.028660	0.000386
S.D. dependent	0.138721	0.030757	0.026152	0.059463	0.050248	0.002967	0.013064	0.027346

Determinant resid covariance (dof adj.)	9.40E-29
Determinant resid covariance	7.62E-29
Log likelihood	7273.194

Akaike information criterion	-41.62540
Schwarz criterion	-40.82498

Η τρίτη μεταβλητή που προστέθηκε στο μοντέλο είναι η μεταβολή του επιπέδου της ανεργίας. συνήθως υψηλή ανεργία είναι σήμα ύφεσης, ενώ όταν ο ρυθμός αύξησης της είναι έντονα αρνητικός αποτελεί ένδειξη ανάκαμψης της οικονομίας. Συνεπώς με τη μεταβλητή αυτή μπορούμε να λάβουμε υπόψη τους οικονομικούς κύκλους.

Φαίνεται ότι είναι στατιστικά σημαντική κυρίως για τα ομόλογα όπως και οι άλλες δυο εξωγενής μεταβλητές. Παράλληλα τα αποτελέσματα φανερώνουν ότι οι προηγούμενες αποδόσεις του στοιχείου χωρίς κίνδυνο επηρεάζουν σημαντικά το πως θα κινηθεί η μεταβλητή αυτή στο χρόνο.

Ο σταθερός όρος γίνεται σημαντικός οριακά μόνο για το χρυσό t-stastic (1.969)

Vector Autoregression Estimates
Date: 01/13/10 Time: 19:29
Sample (adjusted): 1980M03 2008M12
Included observations: 346 after adjustments
Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]

	LN3MTBILL12	EXCGB10Y	EXCCORP BBB	EXCSP500	EXCGOLD	CPI	SP500DY	LNUNEMPLOY MENT	DEFAULTS PREAD
LN3MTBILL12(-1)	0.434245	0.038654	0.036346	0.011183	-0.057321	0.004755	-0.000449	-0.084317	-0.010390
	(0.07472)	(0.01984)	(0.01670)	(0.04072)	(0.03363)	(0.00161)	(0.00094)	(0.01808)	(0.00724)
	[5.81131]	[1.94869]	[2.17637]	[0.27462]	[-1.70427]	[2.96023]	[-0.47708]	[-4.66436]	[-1.43523]
EXCGB10Y(-1)	0.528167	-0.114335	-0.233162	0.104946	-0.099273	-0.029900	0.009299	0.096217	0.194578
	(0.52087)	(0.13827)	(0.11641)	(0.28385)	(0.23445)	(0.01120)	(0.00656)	(0.12601)	(0.05046)
	[1.01401]	[-0.82692]	[-2.00296]	[0.36972]	[-0.42344]	[-2.67030]	[1.41747]	[0.76359]	[3.85582]
EXCCORPBBB(-1)	0.648395	0.163463	0.422456	-0.159158	0.214690	0.027799	-0.024480	-0.115039	-0.314382
	(0.54869)	(0.14565)	(0.12263)	(0.29902)	(0.24697)	(0.01180)	(0.00691)	(0.13274)	(0.05316)
	[1.18172]	[1.12229]	[3.44506]	[-0.53227]	[0.86930]	[2.35679]	[-3.54237]	[-0.86667]	[-5.91401]
EXCSP500(-1)	0.006077	0.013307	-0.006366	0.129451	-0.000183	0.000198	6.07E-05	-0.015601	0.002784
	(0.09943)	(0.02639)	(0.02222)	(0.05419)	(0.04476)	(0.00214)	(0.00125)	(0.02405)	(0.00963)
	[0.06111]	[0.50416]	[-0.28648]	[2.38896]	[-0.00408]	[0.09250]	[0.04851]	[-0.64855]	[0.28898]
EXCGOLD(-1)	-0.379544	0.046831	0.063195	0.075131	-0.087429	-0.000144	-0.004567	-0.025483	-0.017955
	(0.11948)	(0.03172)	(0.02670)	(0.06511)	(0.05378)	(0.00257)	(0.00150)	(0.02890)	(0.01158)
	[-3.17668]	[1.47657]	[2.36667]	[1.15389]	[-1.62574]	[-0.05597]	[-3.03506]	[-0.88166]	[-1.55113]

CPI(-1)	11.18930	-2.632738	-1.719292	-0.422704	-1.875754	0.476974	0.077720	1.507997	-0.612724
	(2.26481)	(0.60120)	(0.50616)	(1.23424)	(1.01940)	(0.04869)	(0.02852)	(0.54789)	(0.21942)
	[4.94051]	[-4.37912]	[-3.39672]	[-0.34248]	[-1.84005]	[9.79677]	[2.72471]	[2.75235]	[-2.79245]
SP500DY(-1)	-1.139378	0.300692	0.312113	0.288811	-0.427525	0.035349	0.982262	0.022908	0.013756
	(0.48688)	(0.12924)	(0.10881)	(0.26533)	(0.21915)	(0.01047)	(0.00613)	(0.11778)	(0.04717)
	[-2.34018]	[2.32657]	[2.86837]	[1.08850]	[-1.95088]	[3.37734]	[160.187]	[0.19450]	[0.29163]
LNUNEMPLOYMENT(-1)	-0.630577	0.265121	0.177427	-0.088151	0.119414	0.000437	-0.003010	-0.073242	0.046819
	(0.22209)	(0.05895)	(0.04964)	(0.12103)	(0.09996)	(0.00477)	(0.00280)	(0.05373)	(0.02152)
	[-2.83928]	[4.49702]	[3.57464]	[-0.72833]	[1.19457]	[0.09145]	[-1.07624]	[-1.36322]	[2.17591]
DEFAULTSPREAD(-1)	-3.794278	0.512420	0.639772	-0.062985	0.350627	0.040064	-0.019114	-0.020933	-0.249116
	(0.83518)	(0.22170)	(0.18666)	(0.45514)	(0.37592)	(0.01795)	(0.01052)	(0.20204)	(0.08092)
	[-4.54305]	[2.31129]	[3.42756]	[-0.13838]	[0.93272]	[2.23148]	[-1.81715]	[-0.10361]	[-3.07873]
C	-0.015783	0.003170	-0.000792	-0.005493	0.012829	0.000512	0.000231	-0.005502	0.001502
	(0.01436)	(0.00381)	(0.00321)	(0.00783)	(0.00646)	(0.00031)	(0.00018)	(0.00347)	(0.00139)
	[-1.09904]	[0.83147]	[-0.24683]	[-0.70181]	[1.98464]	[1.65879]	[1.27822]	[-1.58374]	[1.07976]
R-squared	0.397506	0.136403	0.153292	0.026191	0.069699	0.391405	0.989224	0.092634	0.189984
Adj. R-squared	0.381367	0.113271	0.130612	0.000107	0.044781	0.375103	0.988936	0.068330	0.168287
Sum sq. resids	3.999942	0.281859	0.199788	1.187922	0.810366	0.001848	0.000634	0.234090	0.037545
S.E. equation	0.109108	0.028963	0.024385	0.059460	0.049110	0.002346	0.001374	0.026395	0.010571
F-statistic	24.63129	5.896688	6.759002	1.004105	2.797061	24.01010	3427.233	3.811415	8.756279
Log likelihood	280.6548	739.5595	799.0973	490.6897	556.8579	1609.238	1794.229	771.6857	1088.305
Akaike AIC	-1.564479	-4.217107	-4.561256	-2.778553	-3.161028	-9.244150	-10.31346	-4.402807	-6.232977
Schwarz SC	-1.453310	-4.105938	-4.450087	-2.667384	-3.049859	-9.132981	-10.20229	-4.291639	-6.121808
Mean dependent	-0.014908	0.003704	0.002929	0.001233	-0.003774	0.002847	0.028660	0.000386	0.000106

S.D. dependent	0.138721	0.030757	0.026152	0.059463	0.050248	0.002967	0.013064	0.027346	0.011591

Determinant resid covariance (dof adj.)	3.70E-33
Determinant resid covariance	2.84E-33
Log likelihood	8546.193
Akaike information criterion	-48.87973
Schwarz criterion	-47.87921

Η προσθήκη του περιθωρίου χρεοκοπίας παρουσιάζει αναμενόμενα αποτελέσματα. επιδρά σημαντικά τα ομόλογα. Αυτό είναι αναμενόμενο καθώς η μια συνιστώσα του υπολογισμού του είναι εταιρικά ομόλογα BBB και η άλλη τα εταιρικά ομόλογα AAA. Έχει όμως προαναφερθεί ότι τα εταιρικά ομόλογα έχουν παρόμοια αντίδραση με τα μακροχρόνια κυβερνητικά ομόλογα, και για το λόγο αυτό έχει σημαντική αλληλεπίδραση με αυτά.

Η μεταβλητή αυτή δείχνει το πόσο πιθανό είναι να χρεοκοπήσουν εταιρίες καθώς όσο αυξάνεται το περιθώριο τόσο πιο επικίνδυνες θεωρούνται οι εταιρίες αυτές, συνεπώς η οικονομία απειλείται με ύφεση και ο επενδυτής οφείλει να αντισταθμίσει τους κινδύνους που ενέχουν για το χαρτοφυλάκιο του.

Vector Autoregression Estimates
Date: 01/13/10 Time: 19:30
Sample (adjusted): 1980M03 2008M12
Included observations: 346 after adjustments
Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]

	LN3MTBILL 12	EXCGB10Y	EXCCORP BBB	EXCSP500	EXCGOLD	CPI	SP500DY	LNUNEMPLO YMENT	DEFAULT SPREAD	REALSHO RTTERM
LN3MTBILL12(-1)	0.444149	0.038894	0.036906	0.022865	-0.045270	0.004018	-0.000591	-0.085270	-0.010381	-0.003732
	(0.07562)	(0.02010)	(0.01692)	(0.04104)	(0.03379)	(0.00161)	(0.00095)	(0.01831)	(0.00733)	(0.00160)
	[5.87360]	[1.93549]	[2.18150]	[0.55718]	[-1.33958]	[2.50262]	[-0.62068]	[-4.65693]	[-1.41540]	[-2.33254]
EXCGB10Y(-1)	0.541192	-0.114019	-0.232426	0.120311	-0.083423	-0.030870	0.009112	0.094964	0.194590	0.027572
	(0.52128)	(0.13853)	(0.11662)	(0.28290)	(0.23296)	(0.01107)	(0.00656)	(0.12622)	(0.05056)	(0.01103)
	[1.03821]	[-0.82307]	[-1.99297]	[0.42528]	[-0.35810]	[-2.78951]	[1.38839]	[0.75234]	[3.84872]	[2.50012]
EXCCORPBBB(-1)	0.611303	0.162562	0.420358	-0.202911	0.169554	0.030562	-0.023948	-0.111470	-0.314417	-0.028926
	(0.55055)	(0.14631)	(0.12317)	(0.29879)	(0.24604)	(0.01169)	(0.00693)	(0.13331)	(0.05340)	(0.01165)
	[1.11035]	[1.11109]	[3.41276]	[-0.67912]	[0.68913]	[2.61479]	[-3.45487]	[-0.83615]	[-5.88804]	[-2.48347]
EXCSP500(-1)	-0.003885	0.013065	-0.006930	0.117701	-0.012304	0.000940	0.000204	-0.014642	0.002774	-0.000698
	(0.10013)	(0.02661)	(0.02240)	(0.05434)	(0.04475)	(0.00213)	(0.00126)	(0.02425)	(0.00971)	(0.00212)
	[-0.03880]	[0.49100]	[-0.30934]	[2.16599]	[-0.27497]	[0.44205]	[0.16143]	[-0.60390]	[0.28567]	[-0.32929]
EXCGOLD(-1)	-0.401631	0.046294	0.061946	0.049076	-0.114306	0.001501	-0.004251	-0.023358	-0.017976	-0.002996
	(0.12220)	(0.03248)	(0.02734)	(0.06632)	(0.05461)	(0.00259)	(0.00154)	(0.02959)	(0.01185)	(0.00259)
	[-3.28661]	[1.42553]	[2.26579]	[0.74000]	[-2.09305]	[0.57872]	[-2.76265]	[-0.78937]	[-1.51662]	[-1.15900]

CPI(-1)	8.191760	-2.705557	-1.888855	-3.958622	-5.523354	0.700237	0.120678	1.796436	-0.615560	0.268261
	(4.13091)	(1.09779)	(0.92419)	(2.24185)	(1.84611)	(0.08770)	(0.05201)	(1.00028)	(0.40067)	(0.08739)
	[1.98304]	[-2.46455]	[-2.04380]	[-1.76579]	[-2.99189]	[7.98470]	[2.32029]	[1.79594]	[-1.53634]	[3.06954]
SP500DY(-1)	-0.614056	0.313454	0.341829	0.908483	0.211720	-0.003778	0.974733	-0.027641	0.014253	0.006523
	(0.77696)	(0.20648)	(0.17383)	(0.42166)	(0.34722)	(0.01649)	(0.00978)	(0.18814)	(0.07536)	(0.01644)
	[-0.79033]	[1.51811]	[1.96651]	[2.15456]	[0.60975]	[-0.22906]	[99.6435]	[-0.14692]	[0.18914]	[0.39682]
LNUNEMPLOYME NT(-1)	-0.628878	0.265162	0.177524	-0.086147	0.121481	0.000310	-0.003035	-0.073405	0.046820	-0.004201
	(0.22218)	(0.05904)	(0.04971)	(0.12058)	(0.09929)	(0.00472)	(0.00280)	(0.05380)	(0.02155)	(0.00470)
	[-2.83048]	[4.49089]	[3.57137]	[-0.71445]	[1.22346]	[0.06574]	[-1.08486]	[-1.36441]	[2.17266]	[-0.89364]
DEFAULTSPREAD (-1)	-3.783073	0.512692	0.640406	-0.049767	0.364263	0.039229	-0.019275	-0.022011	-0.249106	-0.039304
	(0.83559)	(0.22206)	(0.18694)	(0.45348)	(0.37343)	(0.01774)	(0.01052)	(0.20233)	(0.08105)	(0.01768)
	[-4.52743]	[2.30882]	[3.42569]	[-0.10975]	[0.97546]	[2.21145]	[-1.83213]	[-0.10879]	[-3.07365]	[-2.22331]
REALSHORTTERM (-1)	-3.597819	-0.087401	-0.203518	-4.244008	-4.378056	0.267973	0.051560	0.346201	-0.003403	0.687263
	(4.14589)	(1.10177)	(0.92754)	(2.24998)	(1.85280)	(0.08802)	(0.05220)	(1.00391)	(0.40212)	(0.08771)
	[-0.86780]	[-0.07933]	[-0.21942]	[-1.88625]	[-2.36294]	[3.04461]	[0.98777]	[0.34485]	[-0.00846]	[7.83550]
C	-0.015559	0.003175	-0.000780	-0.005227	0.013102	0.000495	0.000228	-0.005524	0.001503	-0.000428
	(0.01437)	(0.00382)	(0.00321)	(0.00780)	(0.00642)	(0.00031)	(0.00018)	(0.00348)	(0.00139)	(0.00030)
	[-1.08281]	[0.83154]	[-0.24249]	[-0.67036]	[2.04040]	[1.62392]	[1.26016]	[-1.58762]	[1.07812]	[-1.40648]
R-squared	0.398857	0.136419	0.153414	0.036425	0.084951	0.407791	0.989256	0.092956	0.189984	0.397407
Adj. R-squared	0.380912	0.110640	0.128142	0.007662	0.057636	0.390113	0.988935	0.065880	0.165804	0.379419
Sum sq. resids	3.990970	0.281854	0.199759	1.175438	0.797081	0.001799	0.000633	0.234007	0.037545	0.001786
S.E. equation	0.109148	0.029006	0.024419	0.059235	0.048779	0.002317	0.001374	0.026430	0.010587	0.002309

F-statistic	22.22717	5.291953	6.070683	1.266367	3.110041	23.06790	3084.384	3.433171	7.857206	22.09308
Log likelihood	281.0433	739.5627	799.1222	492.5174	559.7175	1613.960	1794.732	771.7471	1088.305	1615.157
Akaike AIC	-1.560944	-4.211345	-4.555619	-2.783337	-3.171777	-9.265664	-10.31059	-4.397382	-6.227197	-9.272583
Schwarz SC	-1.438658	-4.089059	-4.433334	-2.661052	-3.049492	-9.143378	-10.18830	-4.275096	-6.104911	-9.150298
Mean dependent	-0.014908	0.003704	0.002929	0.001233	-0.003774	0.002847	0.028660	0.000386	0.000106	0.001845
S.D. dependent	0.138721	0.030757	0.026152	0.059463	0.050248	0.002967	0.013064	0.027346	0.011591	0.002931

Determinant resid covariance (dof adj.)	4.19E-40
Determinant resid covariance	3.03E-40
Log likelihood	10832.57
Akaike information criterion	-61.98016
Schwarz criterion	-60.75730

Η τελευταία εξωγενής μεταβλητή που επιλέχθηκε ως μεταβλητή που έχει προβλεπτική ικανότητα είναι το πραγματικό. Το μόνο περιουσιακό στοιχείο που φαίνεται ότι επηρεάζεται από τις κινήσεις της μεταβλητής αυτής είναι ο χρυσός, καθώς μόνο σε αυτή τη περίπτωση είναι στατιστικά σημαντική, ενώ ο συντελεστής συσχέτισης είναι αρνητικός και αρκετά υψηλός (-4,38). Αντίθετα η εξωγενής μεταβλητή αυτή επηρεάζεται τόσο από τις αποδώσεις των ομολόγων όσο και από τον πληθωρισμό.

Ο σταθερός όρος συνεχίζει να ενισχύεται σε σχέση πάντα με το χρυσό

Με τις έξι αυτές επαναλήψεις μπορεί να παρουσιαστεί συνοπτικά πως αλληλεπιδρούν οι μεταβλητές μεταξύ τους αλλά και πως αλλάζουν οι αλληλεπιδράσεις με την προσθήκη των επιπλέον εξωγενών μεταβλητών.

Ακολουθούν τα αποτελέσματα σταθμίσεων για τους παραπάνω συνδυασμούς μεταβλητών και για κάθε γ.

Μόνο περιουσιακά στοιχεία	γ=1	γ=2	γ=5	γ=10	γ=20
10ετες κρατικό ομόλογο	9.463486	10.312	12.82282	16.89524	24.6436
Εταιρικά ομόλογα BBB	59.56006	58.82676	56.65687	53.13744	46.4412
Δείκτης SP500	14.89936	14.81931	14.58244	14.19825	13.46728
Χρυσός	16.0771	16.04193	15.93786	15.76907	15.44792
	100	100	100	100	100
Περιουσιακά στοιχεία και πληθωρισμός	γ=1	γ=2	γ=5	γ=10	γ=20
10ετες κρατικό ομόλογο	12.01085	12.98751	15.8755	20.55326	29.43161
Εταιρικά ομόλογα BBB	56.80042	55.96798	53.50643	49.51939	41.95204
Δείκτης SP500	14.53051	14.4413	14.17752	13.75027	12.93934
Χρυσός	16.65822	16.60321	16.44055	16.17708	15.67701
	100	100	100	100	100
Περιουσιακά στοιχεία, πληθωρισμός και μερισματική απόδοση	γ=1	γ=2	γ=5	γ=10	γ=20
10ετες κρατικό ομόλογο	12.0292	13.06229	16.11839	21.07237	30.48836
Εταιρικά ομόλογα BBB	57.62336	56.72299	54.0595	49.74194	41.53559
Δείκτης SP500	14.57489	14.47974	14.19826	13.74198	12.87474
Χρυσός	15.77255	15.73498	15.62385	15.44371	15.10131
	100	100	100	100	100
Περιουσιακά στοιχεία, πληθωρισμός, μερισματική απόδοση και ανεργία	γ=1	γ=2	γ=5	γ=10	γ=20
10ετες κρατικό ομόλογο	14.7248	16.10361	20.16532	26.69559	38.9273
Εταιρικά ομόλογα BBB	55.51881	54.31422	50.76575	45.06063	34.37449
Δείκτης SP500	14.02028	13.89725	13.5348	12.95208	11.86059
Χρυσός	15.73611	15.68492	15.53414	15.2917	14.83761
	100	100	100	100	100
Περιουσιακά στοιχεία, πληθωρισμός, μερισματική απόδοση, ανεργία και περιθώριο χρεοκοπίας	γ=1	γ=2	γ=5	γ=10	γ=20
10ετες κρατικό ομόλογο	13.80435	14.90082	18.15562	23.46757	33.68813
Εταιρικά ομόλογα BBB	57.08464	56.10175	53.18412	48.42243	39.26063
Δείκτης SP500	13.59914	13.51813	13.27763	12.88514	12.12995
Χρυσός	15.51187	15.4793	15.38263	15.22486	14.92129
	100	100	100	100	100

Περιουσιακά στοιχεία, πληθωρισμός, μερισματική απόδοση, ανεργία ,περιθώριο χρεοκοπίας και πραγματικό επιτόκιο	γ=1	γ=2	γ=5	γ=10	γ=20
10ετες κρατικό ομόλογο	13.60919	14.95689	18.9465	25.42275	37.76295
Εταιρικά ομόλογα BBB	56.61335	55.3983	51.80137	45.96254	34.8369
Δείκτης SP500	13.85994	13.76306	13.47625	13.01068	12.12356
Χρυσός	15.91751	15.88175	15.77588	15.60404	15.27659
	100	100	100	100	100

Οι παραπάνω πίνακες έχουν τις σταθμίσεις όπως αυτές προέκυψαν από την εκτέλεση, μέσω του προγράμματος, του μοντέλου καθορισμών σταθμίσεων. Τα αποτελέσματα παρουσιάζουν αρκετό ενδιαφέρον.

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι ο χρυσός έχει μια σχετικά σταθερή στάθμιση γύρω στο 16% για γ=1 σε όλες τις επαναλήψεις του μοντέλου. Επιπλέον καθώς το επίπεδο αποστροφής κινδύνου αυξάνεται, η ποσόστωση στο χαρτοφυλάκιο του μειώνεται οριακά με μέγιστη μείωση το 1%. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι είναι προτιμητέο να έχουν ένα μικρό ποσοστό του πλούτο τους μακροχρόνια επενδυμένο σε αυτό το περιουσιακό στοιχείο. Το συγκεκριμένο γεγονός έρχεται σε αντίθεση με την ευρεία αντίληψη ότι οι επενδυτές πρέπει να καταφεύγουν στο χρυσό προκειμένου να αντισταθμίσουν τους κινδύνους που πιθανόν να αντιμετωπίζουν.

Όσο αφορά το χρηματιστηριακό δείκτη SP500 παρατηρείται μια χαμηλή ποσόστωση, χαμηλότερη και από την αντίστοιχη του χρυσού. Το μέγιστο ποσοστό πλούτου που επενδύεται είναι περίπου 14,9 % και στη περίπτωση που δεν στο μοντέλο μας δεν υπάρχουν εξωγενής μεταβλητές. Σε κάθε επανάληψη της παλινδρόμησης με πρόσθετη εξωγενή μεταβλητή το ποσοστό αυτό μειώνεται. Επίσης καθώς το γ αυξάνεται οι επενδυτές αποφεύγουν την επένδυση σε αυτό το στοιχείο και μειώνουν τον πλούτο που επενδύουν σε αυτό. Η μείωση από γ=1 έως γ=20 μπορεί να κυμανθεί περίπου έως 2% και έχει ελάχιστη στάθμιση 11,86%.

Οι σημαντικότερες όμως επισημάνσεις μπορούν να γίνουν στη επένδυση στα δυο είδη ομολόγων που έχουν επιλεγεί ως προς επένδυση περιουσιακά στοιχεία, καθώς εκεί υπάρχουν οι μεγαλύτερες μεταβολές.

Ξεκινώντας από τα κρατικά ομόλογα μπορεί κανείς να προσέξει, ότι για χαμηλό επίπεδο αποστροφής κινδύνου, μόνο ένα μικρό ποσοστό του πλούτου επενδύεται σε αυτά. Στην περίπτωση που δεν έχουμε εξωγενής μεταβλητές το ποσοστό είναι 9,46% ενώ μεγιστοποιείται όταν λαμβάνει υπόψη το μοντέλο τον πληθωρισμό, την μερισματική απόδοση και τον ρυθμό μεταβολής της ανεργίας, που σε αυτή την περίπτωση ανέρχεται στο 14%. Εντελώς αντίθετη συμπεριφορά έχουν τα εταιρικά ομόλογα πιστοληπτικής ικανότητας BBB τα οποία ξεκινούν με ποσοστά γύρω στο 60% έως 55,5%. Είναι το πιο προτιμητέο στοιχείο για ένα επενδυτή με μικρή αποστροφή στον κίνδυνο.

Καθώς το επίπεδο αποστροφής κινδύνου ανεβαίνει υπάρχει μια αντίθετη κατεύθυνση κεφαλαίων από τα εταιρικά ομόλογα προς τα κρατικά. Η Διαφορά μπορεί να φθάσει σε μετακίνηση κεφαλαίων έως 23% του επενδυμένου πλούτου. Αυτό φαίνεται στην τελευταία παλινδρόμηση όπου για γ=1 έχουμε επένδυση σε κρατικά ομόλογα 13,6% και σε εταιρικά 56,6% ενώ για γ=20 τα ποσοστά είναι 37,76% και 34,83% αντίστοιχα.

Συνοψίζοντας το μοντέλο θεωρεί ως πιο ασφαλές περιουσιακό στοιχείο τα μακροχρόνια κρατικά ομόλογα τα οποία προσφέρουν σίγουρες αποδόσεις αν και σχετικά μικρές σε σχέση με τα άλλα στοιχεία, τα οποία έχουν μεγαλύτερη μεταβλητότητα και συνεπώς όχι σίγουρες αποδόσεις. Επιπλέον για μικρά γ το πιο προτιμητέο στοιχείο είναι τα εταιρικά ομόλογα καθώς παρουσιάζουν υψηλό κουπόνι, θεωρητικά δηλαδή πάντα υψηλές θετικές αποδόσεις, αλλά με μεγάλο επίπεδο κινδύνου, γίνεται στροφή σε επενδύσεις προς πιο ασφαλή στοιχεία.

Τέλος τα δυο εταίρα περιουσιακά στοιχεία , μετοχές και χρυσός, δεν έχουν σταθερές αποδόσεις, σε περιόδους ύφεσης μπορούν να γίνουν έντονα αρνητικές ειδικά για τις μετοχές, με συνέπεια ένας στρατηγικός επενδυτής που θέλει να είναι σχετικά ασφαλής από τους κινδύνους της αγοράς, σύμφωνα με το υπόδειγμα, οφείλει να επενδύσει αθροιστικά ένα ποσοστό περίπου 30% του πλούτου του. Στον αντίποδα μη επένδυση σε αυτά τα περιουσιακά στοιχεία αντιστοιχεί σε μικρή πιθανότητα ύπαρξης πολύ μεγάλων αποδόσεων στο χαρτοφυλάκιο.

Η μελέτη κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ένα στρατηγικό χαρτοφυλάκιο πρέπει να δίνει έμφαση σε προϊόντα σταθερού εισοδήματος, ώστε να παρέχει πάντα μια θετική αν και μικρή απόδοση.

5 Βιβλιογραφία

Brennan, Michael J., Eduardo S. Schwartz, and Ronald Lagnado, 1997, “Strategic Asset Allocation”, Journal of Economic Dynamics and Control 21, 1377—1403.

Campbell, John Y. and LuisM. Viceira, 1999, “Consumption and Portfolio Decisions when Expected Returns are Time Varying”, Quarterly Journal of Economics 114, 433—495.

Campbell, John Y. and LuisM. Viceira, 2001, “Who Should Buy Long-Term Bonds?”, American Economic Review 91, 99—127.

Campbell, John Y. and Luis M. Viceira, 2002, Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-Term Investors, Oxford University Press, New York, NY.

Campbell, John Y., Y. Lewis Chan, and Luis M. Viceira, 2003, “A Multivariate Model of Strategic Asset Allocation,” Journal of Financial Economics 67, 41-80.

Campbell, J.Y., and L.M. Viceira (2005), The Term Structure of the Risk-Return Tradeoff,Financial Analysts Journal 61, January/February, 34

Epstein, Lawrence and Stanley Zin, 1989, “Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework”, Econometrica 57, 937—69.

Markowitz, Harry, 1952, “Portfolio Selection”, Journal of Finance 7, 77—91.

Merton, Robert C., 1969, “Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty: The Continuous Time Case”, Review of Economics and Statistics 51, 247—257.

Michael Brandt and P.Santa (2003): Dynamic Portfolio Choice By Augmenting the Asset Space. Working Paper, Duke University

Hoevenaars, Molenaar, Schotman, Steenkamp (2008) : Strategic asset allocation with liabilities: Beyond stocks and bonds ,Journal of Economics Dynamics & Control 32 2939-2970

Μαλλιαρόπουλος Δημήτριος (2009) Ειδικά Θέματα Χρηματοοικονομικής: Επιλογή και Αξιολόγηση Χαρτοφυλακίων, Πανεπιστήμιο Πειραιώς Τμήμα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής