ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΒΕΛΤΙΣΤΟΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ

Χρήστος Π. Πεβερέτος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

ΠΕΙΡΑΙΑΣ

Δεκέμβριος 2011

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΒΕΛΤΙΣΤΟΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ

Χρήστος Π. Πεβερέτος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

ΠΕΙΡΑΙΑΣ

Δεκέμβριος 2011

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ’ αριθμ. ………. συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Καθηγητής Μ. Κούτρας (Επιβλέπων)
- Επίκουρος Καθηγητής Π. Μαραβελάκης
- Επίκουρος Καθηγητής Μ. Μπούτσικας

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN APPLIED STATISTICS

OPTIMAL DESIGN SYSTEM RELIABILITY

Christos P. Peveretos

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece

December 2011

Στους γονείς μου

Παναγιώτη και Γεσθημανή

και στον αδερφό μου

Πέτρο

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την υποδειγματική υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια σε όλες τις επιλογές μου, στους οποίους οφείλω ότι έχω επιτύχει. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Κούτρα Μάρκο, επιβλέποντα καθηγητή, για τη σημαντική συμβολή του στη δημιουργία της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Οι παρατηρήσεις του και οι συμβουλές του αποτέλεσαν χρήσιμο και αναγκαίο αρωγό για τη μορφή της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελούς επιτροπής τους κ.κ. Μπούτσικα Μ. και Μαραβελάκη Π. για τη συμμετοχή τους ως μέλη της τριμελούς επιτροπής της παρούσας διπλωματικής.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως θέμα την εύρεση της βέλτιστης τοποθέτησης των μονάδων ενός συστήματος, έτσι ώστε η αξιοπιστία του να λάβει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή. Συγκεκριμένα ενδιαφέρον παρουσιάζει το ερώτημα αν με τη γνώση μόνο μιας διάταξης των τιμών των αξιοπιστιών των μονάδων και χωρίς να γνωρίζουμε τις πραγματικές αυτές τιμές, μπορούμε να δημιουργήσουμε τη βέλτιστη αυτή τοποθέτηση. Η αντιμετώπιση αυτή του προβλήματος ονομάζεται εύρεση αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού του συστήματος. Επιπλέον θα παρουσιαστούν μέθοδοι οι οποίοι μπορούν να εξασφαλίσουν μεγαλύτερη αξιοπιστία στο σύστημα από μια τοποθέτηση η οποία μας δίνεται, με προϋπόθεση τη γνώση των πραγματικών τιμών των αξιοπιστιών των μονάδων. Η αντιμετώπιση αυτή του προβλήματος ονομάζεται εύρεση μη αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού του συστήματος και ενδείκνυται σε περιπτώσεις που επιθυμούμε τη βελτίωση της αξιοπιστίας του συστήματος, αλλά όχι απαραίτητα τη μέγιστη αξιοπιστία.

Στο πρώτο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια της συνάρτησης δομής, καθώς και η έννοια της συνάρτησης αξιοπιστίας σε ένα σύστημα. Επιπλέον παρουσιάζονται τα σημαντικότερα από τα συστήματα τα οποία θα μελετήσουμε στα επόμενα κεφάλαια και δίνονται απαραίτητες πληροφορίες για τον τρόπο λειτουργίας τους καθώς και για τον υπολογισμό της συνάρτησης δομής και αξιοπιστίας τους.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται η παρουσίαση του προβλήματος της εύρεσης βέλτιστης τοποθέτησης. Παρουσιάζονται οι έννοιες του αναλλοίωτου και μη αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού, καθώς και οι διαφορές που έχουν μεταξύ τους οι δύο προσεγγίσεις. Τέλος δίνονται χρήσιμα αποτελέσματα και μέθοδοι, σύμφωνα με τα οποία θα μελετήσουμε το πρόβλημα.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η επίλυση του αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού. Βασικό τμήμα του κεφαλαίου αυτού αποτελεί η παρουσίαση των μεθόδων και των αποτελεσμάτων για τα διάφορα συστήματα που έχουμε παρουσιάσει σαν βασικά σε προηγούμενο κεφάλαιο. Δίνονται έτοιμες λύσεις μέσω συγκεντρωτικών πινάκων για κάθε σύστημα ξεχωριστά, ενώ παρουσιάζονται και εφαρμογές των μεθόδων που αφορούν το αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η επίλυση του μη αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού. Εισάγεται η ευρετική μέθοδος, η μέθοδος της τυχαιοποίησης, καθώς και η μέθοδος της δυαδικής αναζήτησης. Γίνεται μια παρουσίαση των παραπάνω μεθόδων και

δίνεται και μια εφαρμογή για κάθε μέθοδο. Τέλος παρατίθεται εφαρμογή που περιλαμβάνει και τις τρεις μεθόδους και σχολιάζονται τα αποτελέσματα.

Abstract

The subject of the present Msc Dissertation is the study of the optimal arrangement problem for the components of a structure, so that its reliability attains its highest possible value. Special attention is drawn to the problem of identifying optimal arrangements when the ordering of the component reliabilities is known while the actual values of them remain unknown. Addressing this problem is called invariant optimal design of the system. In addition we present methods that can secure higher system reliability (not necessarily the maximum one) when no invariant design exists and the actual values of the component reliabilities are known. Addressing this problem is called variant optimal design of the system.

In the first chapter of the present Msc we introduce the concept of structure function, and reliability function of a system. Moreover we present the most important reliability structures, which will be studied later on, and provide their structure function and formulae for the evaluation of their reliability function.

The second chapter deals with the problem of defining the optimal arrangement notion. We discuss the concepts of invariant and variant optimal designs, and the differences between them. Finally we provide several general results and techniques that can be practiced to face the optimal arrangement.

The third chapter deals with the invariant optimal (arrangement) design. We illustrate how the general methods can be applied to the systems presented in Chapter 1. We provide comprehensive tables describing the optimal design for each system separately, and discuss interesting applications of the optimal arrangements in real life systems.

Finally, in Chapter 4 we present near-optimal solutions of systems where no invariant design exists. This is achieved by the application of the heuristic method, the method of randomization, and the method of binary search. Besides the presentation of these methods, an application is offered for each method for specific systems.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος Σχημάτων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Συνάρτηση δομής-Αξιοπιστία-Συστήματα

1.1 Εισαγωγή – Αρχικές έννοιες

Στο πρώτο κεφάλαιο θα παρουσιαστούν κάποιες βασικές έννοιες οι οποίες θα μας χρειαστούν στην περαιτέρω ανάλυση της πτυχιακής εργασίας. Παρακάτω θα παρουσιαστούν οι έννοιες της συνάρτησης δομής και της συνάρτησης αξιοπιστίας. Παρουσιάζονται επίσης ο ορισμός του δυϊκού συστήματος καθώς και τα i.i.d. συστήματα, για τα οποία γίνεται μια απλή αναφορά.

Αρχικές αλλά και βασικές έννοιες θεωρούνται η έννοια της μονάδος και του συστήματος:

Ως μονάδα θεωρούμε οποιοδήποτε τμήμα, το οποίο δύναται να μας δώσει μια χρήσιμη λειτουργία όταν βρίσκεται σε κατάσταση λειτουργίας. Παράδειγμα μονάδος αποτελεί η αντίσταση, η οποία όταν βρίσκεται σε λειτουργία παράγει θερμότητα.

Ως σύστημα θεωρούμε ένα σύνολο μονάδων τοποθετημένων και συνδεδεμένων με κάποια δομή. Το σύστημα στοχεύει στο να πραγματοποιήσει λειτουργία, η οποία δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί ανεξάρτητα από κάθε μονάδα. Ένα παράδειγμα συστήματος μπορεί να θεωρηθεί ο Ηλεκτρονικός Υπολογιστής, ο οποίος μέσω των ανεξαρτήτων μονάδων του (πχ. σκληρός δίσκος, οθόνη κλπ.) μπορεί να μας δώσει αποτέλεσμα σε μια πράξη που του ζητάμε να εκτελέσει.

1.2 Ορισμός συνάρτησης δομής

Κάθε μονάδα του συστήματος δύναται να λειτουργεί ή όχι. Για τον προσδιορισμό της κατάστασης που βρίσκεται η i-μονάδα (με i=1,2,…,n) ενός συστήματος αξιοπιστίας ορίζουμε την παρακάτω δείκτρια συνάρτηση ως εξής:

$$x_i = \begin{cases} 1\text{ , αν η } i - \text{μονάδα λειτουργεί} \\ 0\text{ , αν η } i - \text{μονάδα δε λειτουργεί} \end{cases}$$

Επιλέγοντας να χρησιμοποιήσουμε τη δείκτρια x_i για κάθε μία από τις n μονάδες του συστήματος αξιοπιστίας, δημιουργούμε το διάνυσμα $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Το διάνυσμα $\mathbf{x}$ ονομάζεται διάνυσμα κατάστασης των n μονάδων του συστήματος, αφού έχει για συντεταγμένες τις καταστάσεις των n μονάδων. Η χρησιμότητα του διανύσματος κατάστασης έγκειται στο ότι με βάση αυτό μπορούμε σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή να γνωρίζουμε ποιες από τις μονάδες του βρίσκονται σε κατάσταση λειτουργίας και ποιες όχι.

Σε αντιστοιχία με τις μονάδες, το σύστημα δύναται να βρίσκεται σε κατάσταση λειτουργίας ή όχι, ανάλογα του πόσες και ποιες μονάδες του βρίσκονται σε κατάσταση λειτουργίας ή όχι. Ομοίως με παραπάνω μπορεί να δημιουργηθεί μια αντίστοιχη δείκτρια συνάρτηση φ για το σύστημα, η οποία θα περιγράφει την κατάσταση του συστήματος:

$$\varphi = \begin{cases} 1\text{ , αν το σύστημα λειτουργεί} \\ 0\text{ , αν το σύστημα δε λειτουργεί} \end{cases}$$

Εφόσον η κατάσταση του συστήματος είναι άμεσα συνδεδεμένη με τις καταστάσεις των μονάδων που αποτελούν το σύστημα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ισχύει:

$$\varphi = \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

(με $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$ το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος)

Παρατηρούμε δηλαδή ότι η δείκτρια συνάρτηση φ είναι συνάρτηση του διανύσματος κατάστασης.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να πούμε ότι η συνάρτηση δομής του συστήματος είναι μια συνάρτηση $\varphi : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$, η οποία εκφράζει την κατάσταση $\varphi(\mathbf{x})$ του συστήματος για κάθε διάνυσμα κατάστασης $\mathbf{x}$ των μονάδων του συστήματος.

Για τη συνάρτηση δομής φ ενός συστήματος n μονάδων ισχύει:

α. $\varphi(\mathbf{x}) = x_i\varphi(1_i,x) + (1-x_i)\varphi(0_i,x)$, i∈{1,2,…,n}

β. $\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{y\in\{0,1\}^n}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{y_i}(1-x_i)^{1-y_i}\right)\varphi(\boldsymbol{y})$

για κάθε $\mathbf{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n$.

Στους παραπάνω τύπους χρησιμοποιήθηκαν οι συμβολισμοί:

$(1_i,x) = (x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)$,$(0_i,x) = (x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)$

(Επιπλέον χρησιμοποιούμε την σύμβαση ότι $0^0 = 1$)

Όταν σε ένα σύστημα η βελτίωση των μονάδων του συνεπάγεται και την παράλληλη βελτίωση (ή έστω τη μη χειροτέρευση) του συστήματος, τότε το σύστημα ονομάζεται μονότονο. Πιο συγκεκριμένα ένα σύστημα ονομάζεται μονότονο αν ισχύουν τα εξής:

α. Η συνάρτηση δομής $\varphi(\mathbf{x})$ του συστήματος είναι αύξουσα κατά συντεταγμένες, ως εξής:

$x_i \le y_i,\ \ i = 1,2,\ldots,n \Longrightarrow \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n) \le \varphi(y_1,y_2,\ldots,y_n) = \varphi(\mathbf{y})$

β. Κάθε μονάδα του επηρεάζει το σύστημα, δηλαδή η φ δεν είναι σταθερή ως προς κάποια συντεταγμένη.

Τέλος αναφέρεται το ότι αν η φ έχει μονότονη συνάρτηση δομής, τότε ισχύει:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \le \varphi(x) \le 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-x_i)$$

για κάθε $\mathbf{x}\in\{0,1\}^n$.

Παρατηρούμε δηλαδή, όπως θα δούμε και στη συνέχεια, ότι η συνάρτηση δομής ενός οποιουδήποτε συστήματος είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση από τη συνάρτηση δομής του αντίστοιχου σειριακού συστήματος και πάντα μικρότερη ή ίση από τη συνάρτηση δομής του αντίστοιχου παράλληλου συστήματος.

Σημειώνεται ότι τα συστήματα που θα ασχοληθούμε στην παρούσα πτυχιακή εργασία είναι μονότονα συστήματα.

Αν φ είναι μια μονότονη συνάρτηση δομής, τότε ορίζουμε τα ακόλουθα:

α. Το $\mathbf{x}\in\{0,1\}^n$ καλείται διάνυσμα λειτουργίας αν $\varphi(\mathbf{x}) = 1$. Αν $\varphi(\mathbf{x}) = 1$ και $\varphi(\mathbf{y}) = 0$, για κάθε $\mathbf{y} \le \mathbf{x}$, τότε το $\mathbf{x}$ καλείται ελάχιστο διάνυσμα λειτουργίας.

β. Το $\mathbf{x}\in\{0,1\}^n$ καλείται διάνυσμα διακοπής αν $\varphi(\mathbf{x}) = 0$. Αν $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ και $\varphi(\mathbf{y}) = 1$, για κάθε $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$, τότε το $\mathbf{x}$ καλείται ελάχιστο διάνυσμα διακοπής.

Ο υπολογισμός της συνάρτησης δομής ενός μονότονου συστήματος γίνεται μέσω της χρήσης των ελαχίστων συνόλων λειτουργίας και των ελαχίστων συνόλων διακοπής.

Σύνολα λειτουργίας ενός μονότονου συστήματος αποτελούν όλα τα σύνολα μονάδων του συστήματος, των οποίων η λειτουργία συνεπάγεται και τη λειτουργία του συστήματος. Άρα σύνολο λειτουργίας είναι το σύνολο για το οποίο ισχύει:

$$P_x = \{i, x_i = 1\} \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \text{ με } \mathbf{x} \text{ διάνυσμα λειτουργίας}$$

Αν το **x** είναι ελάχιστο διάνυσμα λειτουργίας, τότε το σύνολο καλείται ελάχιστο σύνολο λειτουργίας.

Σύνολα διακοπής ενός μονότονου συστήματος αποτελούν όλα τα σύνολα μονάδων του συστήματος, των οποίων η μη λειτουργία συνεπάγεται και μη λειτουργία του συστήματος. Άρα σύνολο διακοπής είναι το σύνολο για το οποίο ισχύει:

$$C_x = \{\, i, x_i = 0\} \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \text{ με } \mathbf{x} \text{ διάνυσμα διακοπής}$$

Αν το **x** είναι ελάχιστο διάνυσμα διακοπής, τότε το σύνολο καλείται ελάχιστο σύνολο διακοπής.

Η χρησιμότητα των ελάχιστων συνόλων διακοπής (ε.σ.δ.) και των ελαχίστων συνόλων λειτουργίας (ε.σ.λ.) έγκειται στην εύρεση της συνάρτησης δομής μέσω αυτών. Έτσι προκύπτουν οι ακόλουθες προτάσεις:

α. Αν $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_M\}$ είναι η οικογένεια των ε.σ.λ. μιας μονότονης δομής, τότε:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \max_{j \in \{1,2,\ldots,M\}} \prod_{i \in P_j} x_i = \coprod_{j=1}^{M} \prod_{i \in P_j} x_i = 1 - \prod_{j=1}^{M}\left(1 - \prod_{i \in P_j} x_i\right).$$

β. Αν $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_N\}$ είναι η οικογένεια των ε.σ.δ. μιας μονότονης δομής, τότε:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \min_{j \in \{1,2,\ldots,N\}}\left(1 - \prod_{i \in C_j}(1 - x_i)\right) = \prod_{j=1}^{N}\left(1 - \prod_{i \in C_j}(1 - x_i)\right) = \prod_{j=1}^{N} \coprod_{i \in C_j} x_i.$$

Έστω φ συνάρτηση δομής ενός μονότονου συστήματος με σύνολο μονάδων $I_n = \{1,2,\ldots,n\}$. Ένα μονότονο σύστημα το οποίο έχει συνάρτηση δομής:

$$\varphi_D(\mathbf{x}) = 1 - \varphi(1-\mathbf{x})$$

και το ίδιο σύνολο μονάδων I_n, ονομάζεται δυϊκό σύστημα του αρχικού συστήματος. Το αρχικό σύστημα ονομάζεται πρωτεύον σύστημα.

Για το πρωτεύον σύστημα και το δυϊκό του σύστημα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 0 \Longleftrightarrow \varphi_D(1-\mathbf{x}) = 1 \text{ και } \varphi_D(\mathbf{x}) = 0 \Longleftrightarrow \varphi(1-\mathbf{x}) = 1$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι όταν το πρωτεύον σύστημα (με συνάρτηση δομής $\varphi(\mathbf{x})$) βρίσκεται σε κατάσταση μη λειτουργίας, τότε το δυϊκό του σύστημα (με συνάρτηση δομής $\varphi_D(1-\mathbf{x})$) βρίσκεται σε κατάσταση λειτουργίας και αντιστρόφως.

Τέλος για τον υπολογισμό της συνάρτησης δομής των σύνθετων συστημάτων, που θα μελετηθούν σε παρακάτω κεφάλαια, προτείνεται, όπου είναι εφικτό, ο χωρισμός του συστήματος σε μικρότερα υποσυστήματα. Τα υποσυστήματα αυτά ονομάζονται modules και καθένα από αυτά αποτελείται από διαφορετικές μονάδες του αρχικού συστήματος. Με τη μέθοδο αυτή υπολογίζεται πρώτα η συνάρτηση δομής των υποσυστημάτων και στη συνέχεια θεωρούμε τα υποσυστήματα ως μονάδες και υπολογίζουμε τη συνάρτηση δομής του αρχικού συστήματος.

1.3 Ορισμός συνάρτησης αξιοπιστίας

Η πιθανότητα να λειτουργεί ικανοποιητικά, τουλάχιστον για δοσμένο χρονικό διάστημα, η i-μονάδα ενός συστήματος, ονομάζεται αξιοπιστία της i-μονάδας. Η αξιοπιστία της i-μονάδας συμβολίζεται με p_i (με i=1,2,…,n).

Σε αντιστοιχία με την αξιοπιστία της μονάδας, ορίζεται και η αξιοπιστία του συστήματος. Αξιοπιστία του συστήματος ονομάζεται η πιθανότητα να λειτουργεί ικανοποιητικά το σύστημα, τουλάχιστον για δοσμένο χρονικό διάστημα. Η αξιοπιστία του συστήματος συμβολίζεται ως R.

Στην παρούσα ενότητα θα αναφερθούμε στη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην αξιοπιστία των μονάδων και στην αξιοπιστία του συστήματος. Θα μελετήσουμε δηλαδή μεθόδους εύρεσης του τύπου της συνάρτησης:

$$R = R\,(p_1,p_2,\dots,p_n).$$

Επιλέγουμε σύστημα n μονάδων (I_n = {1,2,…,n}) με συνάρτηση δομής φ. Έστω X_i μια τυχαία μεταβλητή, η οποία παρουσιάζει την κατάσταση της i-μονάδας του συστήματος, κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t, ως εξής:

$$X_i = \begin{cases} 1\text{ , αν η } i-\text{μονάδα λειτουργεί την χρονική στιγμή } t \\ 0\text{ , αν η } i-\text{μονάδα δεν λειτουργεί την χρονική στιγμή } t \end{cases}$$

Τότε η αξιοπιστία της i-μονάδας είναι ίση με:

$$p_i = P(X_i = 1) = E(X_i).$$

Αντίστοιχα προκύπτει η πιθανότητα μη λειτουργίας της i-μονάδας μέσω του τύπου:

$$q_i = P(X_i = 0) = 1\text{-}p_i = 1 - E(X_i) = E(1\text{-}X_i).$$

Σε όλη την έκταση της παρούσας πτυχιακής οι μονάδες του συστήματος θα θεωρούνται ανεξάρτητες και ως εκ τούτου οι τυχαίες μεταβλητές $X_1,X_2,\dots,X_n$ θα είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

Σε αντιστοιχία με τα παραπάνω ορίζεται και η συνάρτηση αξιοπιστίας για το σύστημα. Η συνάρτηση δομής φ του συστήματος για τη χρονική στιγμή t είναι τυχαία μεταβλητή, η οποία εξαρτάται από τις τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$ των μονάδων. Άρα η συνάρτηση δομής του συστήματος θα έχει την παρακάτω μορφή:

$$\varphi = \begin{cases} 1 \text{ , αν το σύστημα λειτουργεί την χρονική στιγμή } t \\ 0 \text{ , αν το σύστημα δε λειτουργεί την χρονική στιγμή } t \end{cases} = \varphi\ (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Με βάση τα παραπάνω η αξιοπιστία του συστήματος τη χρονική στιγμή t θα δίνεται από τον τύπο:

$$R = E\ (\varphi(\mathbf{X})) = P(\varphi(\mathbf{X})=1) = 1P(\varphi(\mathbf{X})=1)+0P(\varphi(\mathbf{X})=0) = E(\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n))$$

με $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ το τυχαίο διάνυσμα κατάστασης των μονάδων και $\varphi(\mathbf{X})=\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ την κατάσταση του συστήματος.

Η αξιοπιστία $R(\mathbf{p}) = R(p_1, p_2, \ldots, p_n) = E(\varphi(\mathbf{X}))$ είναι πολυώνυμο 1$^{\text{ου}}$ βαθμού ως προς κάθε μία από τις n μεταβλητές $p_1, p_2, \ldots, p_n$ με:

$$R(\mathbf{0}) = 0,\ R(\mathbf{1}) = 1$$

Η αξιοπιστία του αντίστοιχου δυϊκού συστήματος συμβολίζεται με R^D. Δεδομένου ότι η συνάρτηση δομής του δυϊκού είναι φ_D , η συνάρτηση αξιοπιστίας του δυϊκού είναι η:

$$R^D(p_1, p_2, \ldots, p_n) = E\ (\varphi^D(\mathbf{X})) = 1\text{-}E(\varphi(1\text{-}\mathbf{X})) = 1\text{-}R(E(1\text{-}\mathbf{X})) = 1\text{-}R(1\text{-}p_1, 1\text{-}p_2, \ldots, 1\text{-}p_n)$$

Ένας τρόπος υπολογισμού της αξιοπιστίας του συστήματος είναι με τη χρήση των ε.σ.δ. και ε.σ.λ.. Έστω **C** το σύνολο των ε.σ.δ. και **P** το σύνολο των ε.σ.λ.. Τότε η συνάρτηση δομής του συστήματος εκφράζεται από τον τύπο:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1\text{-}\prod_{P \in P}(1 - \prod_{i \in P} x_i) = \prod_{C \in C}(1 - \prod_{i \in C}(1 - x_i))$$

Ακόμα με την χρήση των τυχαίων μεταβλητών x_i (με i=1,2,..,n) μπορούμε να εκφράσουμε αντίστοιχα τη συνάρτηση δομής του συστήματος και ως:

$$\varphi(\mathbf{X}) = 1\text{-}\prod_{P \in P}(1 - \prod_{i \in P} X_i) = \prod_{C \in C}(1 - \prod_{i \in C}(1 - X_i))$$

Με βάση τον παραπάνω τύπο, η αξιοπιστία του συστήματος θα δίνεται από τη σχέση:

$$E(\varphi(\mathbf{X})) = E\{1\text{-}\prod_{P \in P}(1 - \prod_{i \in P} X_i)\} = E\{\prod_{C \in C}(1 - \prod_{i \in C}(1 - X_i))\}.$$

Η συνάρτηση αξιοπιστίας ενός σειριακού συστήματος, δηλαδή ενός συστήματος που όλες οι μονάδες του είναι ενωμένες στην σειρά, θα συμβολίζεται ως R_{SS} (**p**). Η συνάρτηση αξιοπιστίας ενός παράλληλου συστήματος, δηλαδή ενός συστήματος που όλες οι μονάδες του είναι ενωμένες παράλληλα, θα συμβολίζεται ως R_{PS} (**p**).

Για κάθε μονότονο σύστημα με n μονάδες ισχύει:

$$R_{SS}(\mathbf{p}) = \prod_{i=1}^{n} p_i \leq \mathrm{R} \leq 1\text{-}\prod_{i=1}^{n}(1 - p_i) = R_{PS}(\mathbf{p})$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι η αξιοπιστία ενός τυχαίου μονότονου συστήματος είναι μεγαλύτερη ή ίση από την αξιοπιστία R_{SS} (**p**) ενός σειριακού συστήματος με τις ίδιες μονάδες και μικρότερη ή ίση από την αξιοπιστία R_{PS} (**p**) του αντίστοιχου παράλληλου συστήματος με τις ίδιες μονάδες.

Ακόμα για κάθε σύστημα με συνάρτηση δομής φ, ισχύουν τα εξής:

α. $R(\mathbf{p}) = p_i R(1_i,p) + (1-p_i) R(0_i,p)$, για όλα τα i=1,2,…,n

β. $R(\mathbf{p}) = \sum_{y\in\{0,1\}}\left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{y_i}(1-p_i)^{1-y_i}\right)\varphi(y)$

όπου $(1_i,p) = (p_1,p_2,\ldots,p_{i-1},1,p_{i+1},\ldots,p_n)$, $(0_i,p) = (p_1,p_2,\ldots,p_{i-1},0,p_{i+1},\ldots,p_n)$.

Για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας με βάση τη θεωρία των modules, υπολογίζουμε πρώτα την αξιοπιστία κάθε υποσυστήματος ξεχωριστά και στη συνέχεια, θεωρώντας τα υποσυστήματα ως μονάδες, υπολογίζουμε την αξιοπιστία του σύνθετου συστήματος.

Όταν για ένα σύστημα n μονάδων, οι μονάδες που το αποτελούν έχουν την ίδια αξιοπιστία, δηλαδή όταν ισχύει $p_i = p$ (με i=1,2,…,n), θα λέμε ότι έχουμε ένα σύστημα i.i.d. (identically, independently distributed).

Στην περίπτωση i.i.d. συστήματος n μονάδων, η αξιοπιστία $R(\mathbf{p})$ είναι πολυώνυμο ως προς $p\in[0,1]$, με βαθμό το πολύ n, για το οποίο ισχύουν οι τύποι:

$$R(\mathbf{0}) = 0 \text{ και } R(\mathbf{1}) = 1.$$

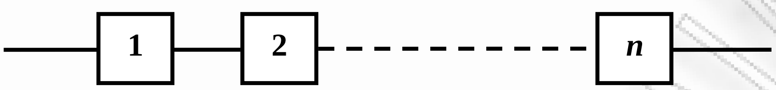
Τέλος αναφέρεται ότι εκτός από την πιθανότητα λειτουργίας του συστήματος (που αναφέρεται ως αξιοπιστία R) υπάρχει και η πιθανότητα αποτυχίας του συστήματος F (τη χρονική στιγμή t), η οποία F ονομάζεται συνάρτηση αναξιοπιστίας. Για την F έχουμε τις εκφράσεις:

$$F = 1-R = 1- E(\varphi(\mathbf{X})) = E(1-\varphi(\mathbf{X})) = P(\varphi(\mathbf{X})=0).$$

1.4 Κλασσικά συστήματα

Στην παρούσα ενότητα θα αναφερθούμε σε κάποια από τα χαρακτηριστικά συστήματα αξιοπιστίας που θα μελετηθούν σε επόμενα κεφάλαια. Θα αναφερθούμε επιπλέον και στα βασικά χαρακτηριστικά των συστημάτων αυτών, όπως είναι η συνάρτηση δομής και η αξιοπιστία τους.

1) Σειριακό σύστημα (*SS* – Serial System)



Σχήμα 1.1: Σειριακό σύστημα

Σειριακό σύστημα είναι το σύστημα στο οποίο η αποτυχία έστω και μίας μονάδας του οδηγεί σε αποτυχία όλου του συστήματος. Εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι το σύστημα λειτουργεί όταν όλες οι μονάδες του βρίσκονται σε κατάσταση λειτουργίας.

Γίνεται εύκολα αντιληπτό εξ' ορισμού ότι στο σειριακό σύστημα η συνάρτηση δομής του είναι μηδέν (φ = 0), δηλαδή το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση μη λειτουργίας, όταν και μόνο όταν έστω και μία μονάδα του βρίσκεται σε κατάσταση μη λειτουργίας. Υπενθυμίζουμε ότι η i-μονάδα βρίσκεται σε κατάσταση μη λειτουργίας όταν για τη δείκτρια της ισχύει $x_i = 0$.

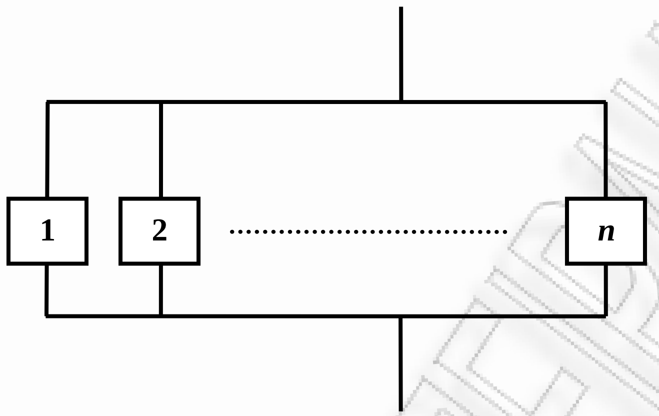
Δοθέντος του παραπάνω ορισμού προκύπτει ότι το σειριακό σύστημα έχει την ακόλουθη συνάρτηση δομής:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Δεχόμενοι την ανεξαρτησία των μονάδων του συστήματος και ως εκ τούτου δεχόμενοι και τη στοχαστική ανεξαρτησία των τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots, X_n$ των μονάδων, προκύπτει η ακόλουθη μορφή για την αξιοπιστία του σειριακού συστήματος:

$$R = E(\varphi(\mathbf{X})) = E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i) = p_1 p_2 \ldots p_n = R_{SS}$$

2) Παράλληλο σύστημα (*PS* – Parallel System)



Σχήμα 1.2: Παράλληλο σύστημα

Παράλληλο σύστημα είναι το σύστημα το οποίο οδηγείται σε κατάσταση μη λειτουργίας όταν όλες οι μονάδες του βρίσκονται σε κατάσταση μη λειτουργίας ή εναλλακτικά το σύστημα λειτουργεί όταν έστω και μία μονάδα του λειτουργεί.

Στο παράλληλο σύστημα θα ισχύει άρα $\varphi = 1$, αν και μόνο αν $x_i = 1$ για κάποιο $i=1,2,\ldots,n$. Σύμφωνα με τον ορισμό προκύπτει η παρακάτω συνάρτηση δομής για το παράλληλο σύστημα:

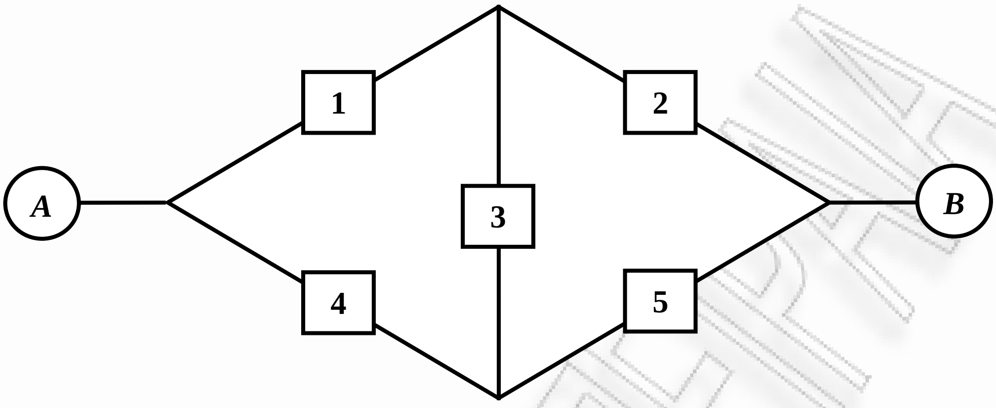
$$\varphi(\mathbf{x}) = 1-\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) = \max\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$$

Με δεδομένη την παραπάνω συνάρτηση δομής και υποθέτοντας ανεξαρτησία των μονάδων (και ως εκ τούτου τη στοχαστική ανεξαρτησία των τυχαίων μεταβλητών $X_1,X_2,\ldots,X_n$), προκύπτει η ακόλουθη μορφή για την αξιοπιστία του παράλληλου συστήματος:

$$R = E(\varphi(\mathbf{X})) = E[1-\prod_{i=1}^{n}(1 - X_i)] = 1- E[\prod_{i=1}^{n}(1 - X_i)] =$$

$$1-\prod_{i=1}^{n} E(1 - X_i) = 1-\prod_{i=1}^{n}[1 - E(X_i)] = 1-(1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n) = R_{PS}.$$

3) Γέφυρα (*BS* – Bridge Structure)



Σχήμα 1.3: Γέφυρα

Η γέφυρα αποτελεί ένα σύστημα το οποίο λειτουργεί όταν υπάρχει τουλάχιστον μία διαδρομή από το Α στο Β (μέσω μονάδων που λειτουργούν). Αυτό επιτυγχάνεται αν λειτουργούν οι μονάδες 1 και 2 ή οι μονάδες 1, 3 και 5 κοκ. Για το συγκεκριμένο σύστημα έχουμε την ακόλουθη συνάρτηση δομής:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1\text{-}\prod_{j=1}^{4}(1-\prod_{i\in P_j} x_i) = 1\text{-}(1\text{-}x_1x_2)(1\text{-}x_4x_5)(1\text{-}x_1x_3x_5)(1\text{-}x_4x_3x_2) =$$

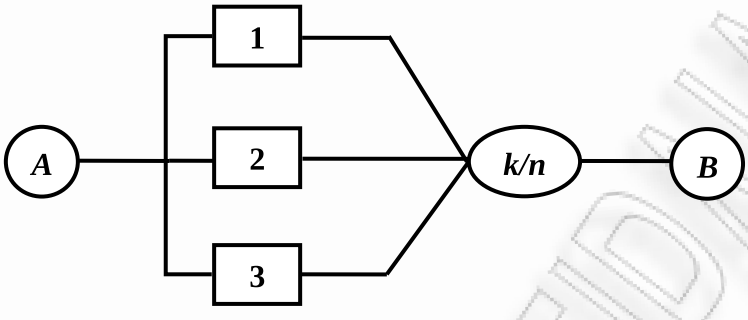
$$x_1x_2+x_4x_5+x_2x_3x_4-x_1x_3x_5-x_1x_2x_3x_4-x_1x_2x_3x_5-x_1x_2x_4x_5-x_1x_3x_4x_5-x_2x_3x_4x_5+2x_1x_2x_3x_4x_5$$

Με βάση την παραπάνω συνάρτηση δομής (και τις υποθέσεις ανεξαρτησίας των μονάδων) προκύπτει η ακόλουθη συνάρτηση αξιοπιστίας για τη γέφυρα:

$$R = E(\varphi(\mathbf{X})) =$$

$$p_1p_2+p_4p_5+p_2p_3p_4-p_1p_3p_5-p_1p_2p_3p_4-p_1p_2p_3p_5-p_1p_2p_4p_5-p_1p_3p_4p_5-p_2p_3p_4p_5+2p_1p_2p_3p_4p_5.$$

4) Σύστημα $S(n, k) : G$



Σχήμα 1.4: Σύστημα $S(n, k) : G$

Το σύστημα $S(n, k)$:G είναι ένα σύστημα το οποίο λειτουργεί αν και μόνο αν από τις n μονάδες που αποτελούν το σύστημα λειτουργούν τουλάχιστον οι k. Το σύστημα $S(n, k)$:G έχει την ακόλουθη συνάρτηση δομής:

$$\varphi = \begin{cases} 1, \alpha\nu \ \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \\ 0, \alpha\nu \ \sum_{i=1}^{n} x_i < k \end{cases}$$

όπου $\sum_{i=1}^{n} x_i$ ο αριθμός των μονάδων που λειτουργούν. Εναλλακτικά η συνάρτηση δομής θα μπορούσε να οριστεί και ως:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1\text{-}\prod_{\{a_1, a_2, \ldots, a_x\} \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} \left(1 - \prod_{i=1}^{k} x_{a_i}\right) = \prod_{\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-k+1}\} \subseteq \{1,2,\ldots,\mathrm{n}\}} \left(1 - \prod_{i=1}^{n-k+1} (1 - x_{a_i})\right)$$

Γνωρίζοντας τη συνάρτηση δομής του συστήματος μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση αξιοπιστίας μέσω του τύπου $R = E\ (\varphi(\mathbf{X}))$. Αναφέρεται γενικά ότι όσο μεγαλύτερα είναι τα n, k τόσο δυσκολότερη γίνεται η εύρεση της συνάρτησης αξιοπιστίας, αφού στη γενική περίπτωση εμφανίζεται ένα γινόμενο $\binom{n}{k}$ όρων.

Για παράδειγμα έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε το σύστημα $S(3,2)$:G. Το σύστημα αυτό θα λειτουργεί όταν λειτουργούν τουλάχιστον οι δύο από τις 3 μονάδες του. Το σύστημα έχει συνάρτηση δομής:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1\text{-}(1\text{-}x_1x_2)(1\text{-}x_1x_3)(1\text{-}x_2x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - 2x_1x_2x_3$$

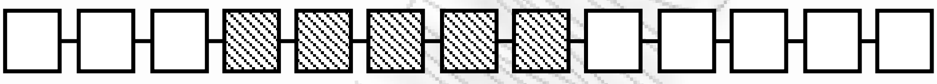
Και από την τελευταία έκφραση προκύπτει άμεσα η επόμενη συνάρτηση αξιοπιστίας:

$$R = E(\varphi(\mathbf{X})) = p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 - 2p_1p_2p_3$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι για τα συστήματα $S(n, k)$ ισχύει το παρακάτω σχόλιο.

<u>Σχόλιο:</u> Το σύστημα k-από-τα-n:G είναι ισοδύναμο με ένα (n-k+1)-από-τα-n:F σύστημα. Αντιστρόφως ένα k-από-τα-n:F σύστημα είναι ισοδύναμο με ένα (n-k+1)-από-τα-n:G σύστημα.

5) Σύστημα συνεχόμενο-*k*-από-τα-*n* : *G*



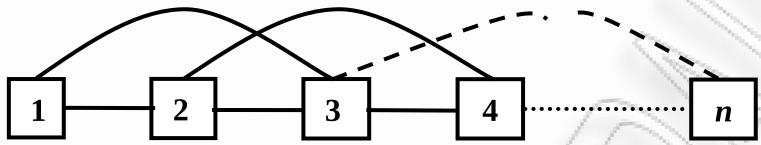
Σχήμα 1.5: Σύστημα συνεχόμενο-k-από-τα-n:G

Το σύστημα Συνεχόμενο k-από-τα-n:G (Consecutive k-out-of-n:G) είναι ένα σύστημα το οποίο λειτουργεί αν και μόνο αν από τις n μονάδες που αποτελούν το σύστημα λειτουργούν τουλάχιστον οι k συνεχόμενες. Το σύστημα Συνεχόμενο k-από-τα-n:G έχει την ακόλουθη συνάρτηση δομής:

$$\varphi = \begin{cases} 1, \alpha\nu \ \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=i}^{i+k-1} (x_j) > 0 \\ 0, \qquad \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

όπου $\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=i}^{i+k-1} (x_j)$ είναι ο αριθμός των συνεχόμενων μονάδων που λειτουργούν.

6) Σύστημα *C*(*n*, *k*) : *F* ή συνεχόμενο-*k*-από-τα-*n* : *F*



Σχήμα 1.6: Σύστημα *C*(*n*, *k*):*F* ή συνεχόμενο-*k*-από-τα-*n*:*F*

Το σύστημα Συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*:*F* (Consecutive *k*-out-of-*n*:*F*) είναι το σύστημα το οποίο αποτυγχάνει αν και μόνο αν από τις *n* μονάδες του αποτυγχάνουν τουλάχιστον οι *k* συνεχόμενες μονάδες του. Το σύστημα αυτό έχει την εξής συνάρτηση δομής:

$$\varphi = \begin{cases} 0, \alpha\nu \ \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=i}^{i+k-1} (1 - x_j) > 0 \\ 1, \qquad\qquad \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

όπου $\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=i}^{i+k-1} (1 - x_j)$ ο αριθμός των μονάδων που λειτουργούν.

Εναλλακτικά η συνάρτηση δομής θα μπορούσε να οριστεί και ως:

$$\varphi(\mathrm{x}) = \prod_{j=1}^{n-k+1} (1 - \prod_{i=j}^{j+k-1} (1 - x_i))$$

Η συνάρτηση αξιοπιστίας του συστήματος ορίζεται ως $R = E\ (\varphi(\mathbf{X}))$.

Για παράδειγμα έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε το σύστημα *C*(3,2):*F*, το οποίο αποτυγχάνει όταν αποτύχουν 2 συνεχόμενες μονάδες του. Άρα το σύστημα αποτυγχάνει όταν αποτύχουν συγχρόνως οι μονάδες 1 και 2 ή οι μονάδες 2 και 3. Το σύστημα αυτό έχει συνάρτηση δομής:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 0, \text{αν } x_1 = x_2 = 0 \text{ ή } x_2 = x_3 = 0 \\ 1, \qquad\qquad \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Άρα προκύπτει ότι το σύστημα έχει συνάρτηση δομής:

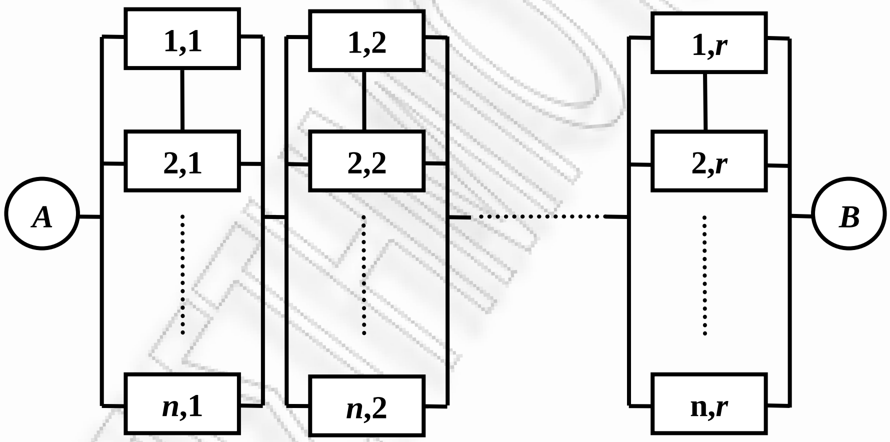
$$\varphi(\mathbf{x}) = x_2+x_1x_3-x_1x_2x_3$$

Άρα έχει συνάρτηση αξιοπιστίας ίση με:

$$R = E(\varphi(\mathbf{X})) = p_2+p_1p_3-p_1p_2p_3$$

Εκτός από τα παραπάνω συστήματα αξίζει να αναφερθούμε και σε συστήματα τα οποία αποτελούνται από υποσυστήματα(modules) σε διαφορετική συνδεσμολογία. Παρακάτω παρουσιάζονται δύο από τα πιο βασικά συστήματα τέτοιου είδους που θα μελετήσουμε και σε επόμενα κεφάλαια.

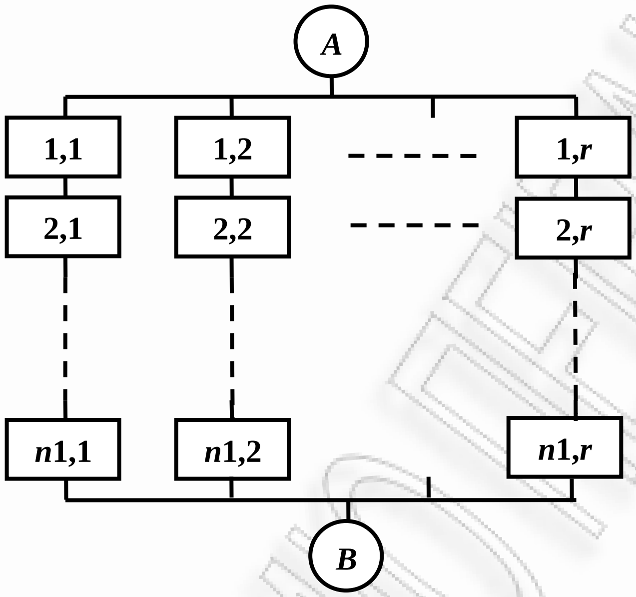
7) Σειριακό – Παράλληλο σύστημα (Series - Parallel System)



Σχήμα 1.7: Σειριακό – Παράλληλο σύστημα

Το σειριακό-παράλληλο σύστημα είναι ένα σύνθετο σύστημα το οποίο αποτελείται από r υποσυστήματα (modules) συνδεδεμένα σε σειρά. Κάθε υποσύστημα είναι ένα παράλληλο σύστημα n_i μονάδων.

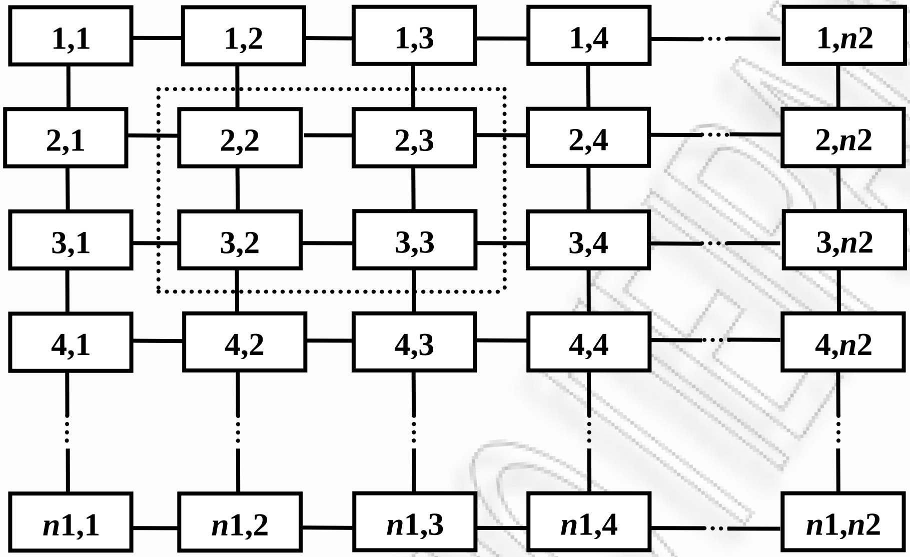
8) Παράλληλο – Σειριακό σύστημα (Parallel - Series System)



Σχήμα 1.8: Παράλληλο – Σειριακό σύστημα

Το παράλληλο-σειριακό σύστημα είναι ένα σύνθετο σύστημα αποτελούμενο από r υποσυστήματα (modules) συνδεδεμένα παράλληλα. Κάθε υποσύστημα είναι ένα σειριακό σύστημα n_i μονάδων.

9) Σύστημα δισδιάστατο συνεχόμενο $k_1 \times k_2$–από–τα-$n_1 \times n_2$:F ή G

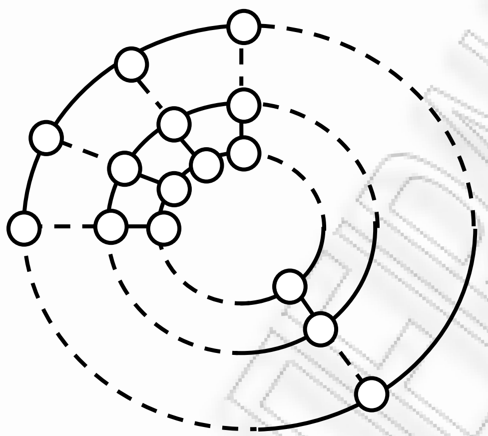


Σχήμα 1.9: Σύστημα δισδιάστατο συνεχόμενο $k_1 \times k_2$–από–τα-$n_1 \times n_2$:F ή G

Το δισδιάστατο συνεχόμενο $k_1 \times k_2$–από–τα-$n_1 \times n_2$:F σύστημα αποτελείται από n_1, n_2 μονάδες τοποθετημένες σε ορθογώνιο διάστασης $n_1 \times n_2$, το οποίο αποτυγχάνει όταν αποτύχουν όλες οι μονάδες ενός τουλάχιστον ορθογωνίου διάστασης $k_1 \times k_2$. Αντίστοιχα το δισδιάστατο συνεχόμενο $k_1 \times k_2$–από–τα-$n_1 \times n_2$:G σύστημα αποτελείται από n_1, n_2 μονάδες τοποθετημένες σε ορθογώνιο διάστασης $n_1 \times n_2$, το οποίο λειτουργεί όταν λειτουργούν όλες οι μονάδες ενός τουλάχιστον ορθογωνίου διάστασης $k_1 \times k_2$.

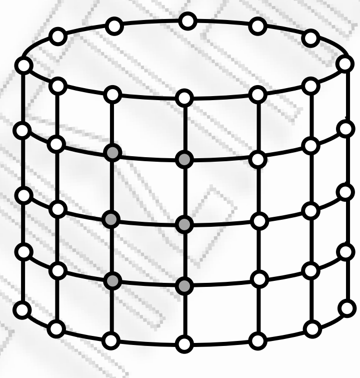
Αξίζει να σημειωθεί ότι το παρόν σύστημα μπορεί να έχει πολλές μορφές εκτός από ορθογώνιο. Παρακάτω παρατίθενται δύο εξ αυτών:

α)Κυκλική μορφή



Σχήμα 1.10: Κυκλική μορφή δισδιάστατου συνεχόμενου $k_1 \times k_2$–από–τα-$n_1 \times n_2$:F or G συστήματος

β)Κυλινδρική μορφή



Σχήμα 1.11: Κυλινδρική μορφή δισδιάστατου συνεχόμενου $k_1 \times k_2$–από–τα-$n_1 \times n_2$:F or G συστήματος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Το πρόβλημα της βέλτιστης τοποθέτησης και γενική μεθοδολογία επίλυσής του

2.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε το πρόβλημα της βέλτιστης τοποθέτησης των μονάδων ενός συστήματος αξιοπιστίας. Επιπλέον θα παρουσιάσουμε αναγκαίες προϋποθέσεις για να υπάρχει βέλτιστο σύστημα.

Θα παρουσιαστούν δύο διαφορετικές οπτικές γωνίες του προβλήματος, ο αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός συστήματος (Invariant optimal design) και ο μη αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός συστήματος (Variant optimal design). Διεξοδικά θα παρουσιαστούν οι βασικότερες από τις μεθόδους που εφαρμόζουμε για την επίλυση του προβλήματος. Τέλος παρουσιάζονται κάποια παραδείγματα με σκοπό να αποσαφηνιστούν οι δύο διαφορετικές αντιμετωπίσεις του προβλήματος.

Αναφέρεται ότι για τις αποδείξεις όλων των αποτελεσμάτων του παρόντος κεφαλαίου, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να καταφύγει στην εργασία των Boland, Proschan and Tong (1989), Zuo and Kuo (1990) καθώς και στην εργασία των Koutras, Papadopoulos and Papastavridis (1994).

2.2 Το πρόβλημα της βέλτιστης τοποθέτησης

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ως αξιοπιστία συστήματος ορίζεται η πιθανότητα να λειτουργεί ικανοποιητικά το σύστημα (τουλάχιστον για δοσμένο χρονικό διάστημα). Από τον ορισμό της αξιοπιστίας γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι σε ένα σύστημα θα επιθυμούσαμε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή της αξιοπιστίας, αφού τότε το σύστημα έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να λειτουργεί ικανοποιητικά σε δοσμένο χρονικό διάστημα. Η αναζήτηση της μέγιστης αυτής αξιοπιστίας, δημιούργησε το πρόβλημα της βέλτιστης τοποθέτησης (Optimal arrangement).

Η τοποθέτηση των μονάδων με τέτοιο τρόπο ώστε να έχουμε τη μέγιστη αξιοπιστία του συστήματος, ορίζεται ως βέλτιστη τοποθέτηση των μονάδων μας.

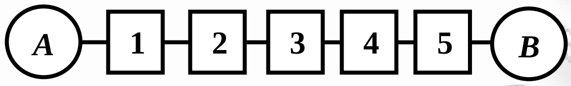
Τα προβλήματα που αντιμετωπίζει σε θεωρητικό επίπεδο η βέλτιστη τοποθέτηση θα μπορούσαν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες:

Στην πρώτη κατηγορία συναντάμε τα προβλήματα για τα οποία γνωρίζουμε εξ αρχής τις αριθμητικές τιμές των αξιοπιστιών των μονάδων που θα δημιουργήσουν το σύστημα ή έστω μας είναι γνωστή μια διάταξη των αξιοπιστιών χωρίς να γνωρίζουμε τις πραγματικές τιμές τους. Στη δεύτερη κατηγορία συναντάμε τα προβλήματα για τα οποία γνωρίζουμε τις αριθμητικές τιμές των αξιοπιστιών των μονάδων και θέλουμε να δημιουργήσουμε μια τοποθέτηση που θα παρέχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερη αξιοπιστία στο σύστημα, χωρίς απαραίτητα η τοποθέτηση αυτή να είναι και η βέλτιστη του συστήματος.

Σε πρακτικό επίπεδο συχνά οι δυσκολίες είναι μεγαλύτερες. Η παρουσία των μονάδων στο σύστημα δεν ισοδυναμεί απαραίτητα ότι όλες οι μονάδες είναι ίδιες μεταξύ τους ή ότι όλες μπορούν να εκτελέσουν την ίδια λειτουργία. Στην κατασκευή λοιπόν ενός συστήματος πρέπει να υπολογίσουμε επιπλέον ότι κάποιες μονάδες πιθανόν να μην μπορούν να τοποθετηθούν σε κάποιες θέσεις. Η τελευταία αυτή παρατήρηση πολλές φορές μπορεί να οδηγήσει στην μη ύπαρξη βέλτιστης τοποθέτησης, αφού λόγω της φύσης κάποιων μονάδων θα είμαστε αναγκασμένοι να τις τοποθετήσουμε σε κάποιες θέσεις ανεξάρτητα αν βελτιώνεται ή όχι η αξιοπιστία του συστήματός μας. Τέλος αναλόγως του προβλήματος που έχουμε να αντιμετωπίσουμε, είναι δυνατόν κάποιο εκ των ιδανικών συστημάτων να μην μπορεί να χρησιμοποιηθεί λόγω της φύσης του προβλήματος.

Για να γίνει καλύτερα αντιληπτό το πρόβλημα της βέλτιστης τοποθέτησης, παρουσιάζουμε το κάτωθι παράδειγμα:

Έστω ότι έχουμε πέντε αντλίες νερού με άγνωστες αξιοπιστίες p_1, p_2, p_3, p_4 και p_5 αντίστοιχα, οι οποίες τοποθετούνται όπως το παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 2.1: Σειριακό σύστημα πέντε μονάδων

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι το σύστημα θα χαλάσει αν και μόνο αν χαλάσουν δύο συνεχόμενες αντλίες. Γνωρίζουμε ότι οι αντλίες διεκπεραιώνουν όλες την ίδια διεργασία και ότι για τις αξιοπιστίες τους ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$0 \leq p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq p_4 \leq p_5 \leq 1$$

Εμείς επιθυμούμε να εισέρθει νερό από την θέση A και να καταφέρει να καταλήξει στην θέση B.

Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι οποιαδήποτε τοποθέτηση των μονάδων παρέχει το ζητούμενο. Ιδανική τοποθέτηση στο συγκεκριμένο πρόβλημα θεωρείται αυτή η οποία μπορεί να μας εξασφαλίσει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να επιτευχθεί ο στόχος.

Αν και το παραπάνω παράδειγμα θεωρείται απλό, γίνεται αντιληπτό ότι αν αποφασίζαμε να δοκιμάσουμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των αντλιών θα προέκυπταν 5!=120 διαφορετικές μεταθέσεις των πέντε μονάδων. Αμέσως λοιπόν διαφαίνεται η ανάγκη μιας μεθοδολογίας που θα μας έδινε αυτόματα τη λύση (αν είναι μοναδική), αφού στην καθημερινότητά μας οι συνδυασμοί των μονάδων μπορεί να αγγίζουν ένα πολύ μεγάλο νούμερο για να υπολογιστούν εύκολα. Αυτό ακριβώς το πρόβλημα δημιούργησε τη θεωρία της βέλτιστης τοποθέτησης.

Το πρόβλημα της βέλτιστης τοποθέτησης παρουσιάζει δύο διαφορετικές οπτικές γωνίες.

Η μία οπτική γωνία αναφέρεται στο πρόβλημα της βέλτιστης τοποθέτησης n μονάδων, για τις οποίες γνωρίζουμε ότι οι αξιοπιστίες τους ικανοποιούν μια σχέση της μορφής:

$$0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_{n-1} \leq p_n \leq 1$$

Δηλαδή γνωρίζουμε μόνο τη διάταξή τους και οι ακριβείς τιμές των αξιοπιστιών των μονάδων του συστήματος είναι άγνωστες. Η λύση του προβλήματος σε αυτή την περίπτωση αναφέρεται σαν αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός (Invariant optimal design).

Η άλλη οπτική γωνία αναφέρεται στο πρόβλημα της βέλτιστης τοποθέτησης n μονάδων, για τις οποίες γνωρίζουμε ακριβώς τις τιμές των αξιοπιστιών τους και προσπαθούμε να κατασκευάσουμε το σύστημα με τη μέγιστη δυνατή αξιοπιστία. Η λύση του προβλήματος σε αυτή την περίπτωση αναφέρεται ως μη αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός (Variant optimal design).

Και οι δύο παραπάνω οπτικές γωνίες αποτελούν το πρόβλημα της βέλτιστης τοποθέτησης. Γίνεται αντιληπτό ότι αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός δεν υπάρχει πάντα, σε αντίθεση με το μη αναλλοίωτο που υπάρχει για όλα τα συστήματα. Η δυνατότητα εύρεσης αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού σε ένα σύστημα κρίνεται σημαντική, αφού στα διάφορα προβλήματα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε, δεν έχουμε πάντα την ευχέρεια να γνωρίζουμε τις τιμές των αξιοπιστιών των μονάδων μας.

Προτού όμως προχωρήσουμε σε περαιτέρω ανάλυση, θα πρέπει να αναφέρουμε το οπτικό πρίσμα κάτω από το οποίο θα παρουσιάσουμε το πρόβλημα της βέλτιστης τοποθέτησης.

2.3 Οικογένεια συστημάτων υπό μελέτη

Η βέλτιστη τοποθέτηση όπως αναφέραμε δύναται να μην είναι εφικτή σε κάποια συστήματα. Στην παρούσα διπλωματική θα παρουσιάζουμε το πρόβλημα της βέλτιστης τοποθέτησης για μια συγκεκριμένη οικογένεια συστημάτων. Λύσεις ενδέχεται να υπάρχουν και για άλλες οικογένειες συστημάτων, αλλά η μελέτη τους δε βρίσκεται στους σκοπούς της παρούσας πτυχιακής εργασίας.

Η οικογένεια συστημάτων που θα μελετήσουμε ικανοποιεί τρεις βασικές αρχές. Αν οι αρχές αυτές δεν ικανοποιούνται τότε εξ αρχής γνωρίζουμε ότι το σύστημά μας δεν ανήκει στην οικογένεια συστημάτων που μελετάμε. Οι αρχές αυτές είναι οι παρακάτω:

i) Το σύστημά μας δύναται να βρίσκεται σε κατάσταση λειτουργίας ή σε κατάσταση μη λειτουργίας.

Το σύστημα μπορεί να μεταβεί από την μία κατάσταση στην άλλη και αντιστρόφως, αλλάζοντας την κατάσταση των μονάδων του. Αντιθέτως το σύστημα δε δύναται να βρίσκεται σε κατάσταση μερικής λειτουργίας, δηλαδή ένα τμήμα του να βρίσκεται σε μία κατάσταση ενώ το υπόλοιπο σύστημα να βρίσκεται σε άλλη κατάσταση.

ii) Κάθε μονάδα του συστήματος μπορεί να βρίσκεται σε κατάσταση λειτουργίας ή σε κατάσταση μη λειτουργίας.

Σε αντιστοιχία με την παραπάνω εξήγηση που δόθηκε για το σύστημα, κάθε μονάδα δύναται να έχει μία από τις δύο καταστάσεις.

iii) Όλες οι μονάδες του συστήματος είναι στατιστικά ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Ως στατιστική ανεξαρτησία για τις μονάδες θεωρείται ότι η κατάσταση της μίας δεν επηρεάζει την κατάσταση της άλλης. Η μη λειτουργία (ή αντίστοιχα η λειτουργία) δηλαδή της μονάδας i δεν προκαλεί μη λειτουργία ή λειτουργία στη μονάδα j, όπου μονάδες i,j είναι οποιεσδήποτε από τις n μονάδες που αποτελούν το σύστημα.

Τα συστήματα τα οποία θα μελετήσουμε θα θεωρούνται μονότονα συστήματα (coherent systems).

2.4 Αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός συστήματος

Έστω ότι έχουμε n το πλήθος μονάδες με αξιοπιστίες p_1, p_2, ..., p_n αντίστοιχα. Οι ακριβείς τιμές των αξιοπιστιών μας είναι άγνωστες. Γνωρίζουμε όμως ότι ισχύει μια διάταξη της μορφής:

$$0<p_1\leq p_2\leq\ldots\leq p_{n-1}\leq p_n<1$$

(οι τιμές p_i=0 και p_i=1 δεν παρουσιάζουν κάποιο ιδιαίτερο ενδιαφέρον γι' αυτό θεωρούμε ότι p_1>0 και p_n<1.)

Αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός συστήματος (Invariant Optimal Design) ονομάζεται ο σχεδιασμός για τον οποίο η βέλτιστη τοποθέτηση των μονάδων του συστήματος δημιουργείται με βάση τη διάταξη των αξιοπιστιών τους. Δύναται δηλαδή να μην γνωρίζουμε την αριθμητική τιμή των αξιοπιστιών των μονάδων, αλλά μόνο τη διάταξη που ακολουθούν. Η βέλτιστη αξιοπιστία δημιουργείται μέσω της βέλτιστης τοποθέτησης των μονάδων του.

Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι σε ένα σύστημα n μονάδων οι υπολογισμοί αυτών των μεταθέσεων-τοποθετήσεων είναι της τάξεως του $n!$. Κρίνεται άρα απαραίτητη η δημιουργία θεωρίας για την εξάλειψη κάποιων μεταθέσεων.

Το πρόβλημα της ιδανικής αξιοπιστίας ανάγεται πλέον σε πρόβλημα σωστής τοποθέτησης των n μονάδων του συστήματος, έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η αξιοπιστία του συστήματος.

Για να γίνει καλύτερα αντιληπτή η έννοια του αναλλοίωτου βέλτιστου συστήματος παραθέτουμε το ακόλουθο παράδειγμα:

Έστω ότι έχουμε το σύστημα συνεχόμενο 4-από-τα-6:G (Consecutive-4-out-of-6:G) και μας ζητείται να βρεθεί η μετάθεση η οποία δίνει τη μεγαλύτερη δυνατή αξιοπιστία στο σύστημα.

Γνωρίζουμε ότι για τις αξιοπιστίες των μονάδων του συστήματος ισχύει η σχέση:

$$p_1 \le p_2 \le p_3 \le p_4 \le p_5 \le p_6$$

Από την φύση του προβλήματός μας γνωρίζουμε ότι το σύστημά μας λειτουργεί αν και μόνον αν τέσσερις συνεχόμενες μονάδες του λειτουργούν (από τις έξι συνολικά μονάδες που αποτελούν το σύστημα). Οι δυνατές μετατοπίσεις στο σύστημά μας είναι της τάξεως του 6!, δηλαδή έχουμε 720 δυνατές μεταθέσεις των μονάδων στο σύστημά μας. Από τις μεταθέσεις αυτές εκ θεωρίας (που θα αναπτύξουμε και εκτενέστερα σε επόμενο κεφάλαιο) γνωρίζουμε ότι η μετάθεση που μεγιστοποιεί την αξιοπιστία του συστήματος είναι η 1-3-5-6-4-2, δηλαδή η μετάθεση στην οποία τοποθετούμε τις μονάδες με τη σειρά 1, 3, 5, 6, 4 και 2.

Στο παρόν παράδειγμα θα δοκιμάσουμε να συγκρίνουμε τη βέλτιστη μετάθεση με την τυχαία τοποθέτηση 1-2-3-4-5-6. Η σύγκριση θα επιτευχθεί μέσω τυχαίων τιμών που θα επιλέξουμε να δώσουμε στις αξιοπιστίες των μονάδων μας.

Για το παράδειγμά μας επιλέξαμε να τοποθετήσουμε τις τιμές p_1=0,8, p_2=0,85, p_3=0,87, p_4=0,88, p_5=0,90 και p_6=0,95 στην πρώτη εφαρμογή του παραδείγματος και στη δεύτερη εφαρμογή τις τιμές p_1=0,4, p_2=0,5, p_3=0,6, p_4=0,7, p_5=0,8 και p_6=0,9. Αναφέρουμε ότι οι τιμές δόθηκαν τυχαία με μοναδικό κριτήριο να εξασφαλίζεται η διάταξη των αξιοπιστιών.

Μετάθεση 1-2-3-4-5-6

Τα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας του συστήματος σύμφωνα με αυτή τη μετάθεση είναι τα:

$$P_1=\{1,2,3,4\},\ P_2=\{2,3,4,5\} \text{ και } P_3=\{3,4,5,6\},$$

από τα οποία σύνολα λειτουργίας προκύπτει η ακόλουθη συνάρτηση δομής:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1-\prod_{j=1}^{3}(1-\prod_{i\in P_j} x_i) = 1-(1-x_1x_2x_3x_4)(1-x_2x_3x_4x_5)(1-x_3x_4x_5x_6) =$$
$$x_1x_2x_3x_4+x_2x_3x_4x_5+x_3x_4x_5x_6-x_1x_2x_3x_4x_5-x_2x_3x_4x_5x_6.$$

Γνωρίζουμε ότι η αξιοπιστία δίνεται μέσω του τύπου $E(\varphi(\mathbf{x}))=R(\mathbf{p})$, άρα η αξιοπιστία προκύπτει ίση με

$$R(\mathbf{p})= p_1p_2p_3p_4+p_2p_3p_4p_5+p_3p_4p_5p_6-p_1p_2p_3p_4p_5-p_2p_3p_4p_5p_6.$$

Για την παρούσα μετάθεση, με βάση τις τιμές p_1=0,8, p_2=0,85, p_3=0,87, p_4=0,88, p_5=0,90 και p_6=0,95 προκύπτει ότι η αξιοπιστία του συστήματος είναι ίση με $R(\mathbf{p})$=0,735933 ενώ με βάση τις τιμές p_1=0,4, p_2=0,5, p_3=0,6, p_4=0,7, p_5=0,8 και p_6=0,9 προκύπτει ίση με $R(\mathbf{p})$=0,336.

Μετάθεση 1-3-5-6-4-2

Τα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας του συστήματος σύμφωνα με αυτή τη μετάθεση είναι τα:

$$P_1=\{1,3,5,6\},\ P_2=\{3,5,6,4\} \text{ και } P_3=\{5,6,4,2\},$$

από τα οποία προκύπτει η ακόλουθη συνάρτηση δομής:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1-\prod_{j=1}^{3}(1-\prod_{i\in P_j} x_i) = 1-(1-x_1x_3x_5x_6)(1-x_3x_4x_5x_6)(1-x_2x_4x_5x_6) =$$
$$x_1x_3x_5x_6+x_2x_4x_5x_6+x_3x_4x_5x_6-x_1x_3x_4x_5x_6-x_2x_3x_4x_5x_6.$$

Άρα

$$R(\mathbf{p})= p_1p_3p_5p_6+p_2p_4p_5p_6+p_3p_4p_5p_6-p_1p_3p_4p_5p_6-p_2p_3p_4p_5p_6.$$

Για την παρούσα μετάθεση με βάση τις πρώτες τιμές προκύπτει ότι η αξιοπιστία του συστήματος σε αυτή την περίπτωση είναι ίση με $R(\mathbf{p})$=0,809138 ενώ με βάση τις δεύτερες τιμές προκύπτει ίση με $R(\mathbf{p})$=0,45504.

Με βάση λοιπόν τα αποτελέσματα των δύο μεταθέσεων παρατηρούμε ότι και με τα δύο διαφορετικά σύνολα τιμών προκύπτει ότι η δεύτερη μετάθεση είναι καλύτερη. Στο συμπέρασμα αυτό οδηγούμαστε παρατηρώντας ότι η δεύτερη μετάθεση έδωσε μεγαλύτερη αξιοπιστία στο σύστημα και στις δύο περιπτώσεις. Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγαμε όποιες τιμές αξιοπιστιών και αν επιλέγαμε για τις μονάδες μας (δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι οι τιμές που δόθηκαν στις αξιοπιστίες των μονάδων είναι τυχαίες). Συνεπώς η παρούσα μετάθεση δεν επηρεάζεται από τις τιμές των αξιοπιστιών αλλά μόνο από τη διάταξη των τιμών των αξιοπιστιών. Αυτό αποτελεί και την βασική ιδέα του αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού συστήματος (Invariant Optimal Design).

Αυτό που γίνεται εύκολα αντιληπτό από το παραπάνω παράδειγμα είναι ότι οι τιμές των αξιοπιστιών των μονάδων δεν επηρέασαν τη βέλτιστη μετάθεση. Η τιμή της αξιοπιστίας και στις δύο περιπτώσεις παρουσίασε τη μεγαλύτερη τιμή της στη δεύτερη μετάθεση. Προφανώς αλλάζοντας τις τιμές των αξιοπιστιών, μπορούμε να επηρεάσουμε και την αξιοπιστία του συστήματος, αφού μεγαλύτερες τιμές αξιοπιστίας στις μονάδες θα μας οδηγήσουν σε μεγαλύτερη αξιοπιστία συστήματος. Ότι τιμές αξιοπιστίας όμως και να δοθούν στις μονάδες του παρόντος συστήματος, η βέλτιστη μετάθεση που θα μεγιστοποιεί την αξιοπιστία του θα είναι η 1-3-5-6-4-2.

Έστω $\pi=(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n)$ μια μετάθεση των $(1,2,\ldots,n)$ μονάδων μας και $p=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ το διάνυσμα των αξιοπιστιών των μονάδων. Υποθέτουμε ότι κάθε μια από τις n μονάδες μπορεί να τοποθετηθεί σε οποιαδήποτε από τις n θέσεις (κόμβους) του συστήματος. Για τη μετάθεση π η αξιοπιστία του συστήματος θα συμβολίζεται με $R(p;\pi)$.

Ορισμός 2.1. *Μία μετάθεση $\pi^{(0)}=(\pi_1^{(0)},\pi_2^{(0)},\ \ldots,\pi_n^{(0)})$ ονομάζεται βέλτιστη μετάθεση ή βέλτιστη τοποθέτηση αν για την αξιοπιστία της μετάθεσης αυτής ισχύει:*

$$R(\boldsymbol{p};\boldsymbol{\pi}^{(\mathbf{0})})=max_{\pi}\,R(\boldsymbol{p};\boldsymbol{\pi})$$

Δηλαδή αν η αξιοπιστία της μετάθεσης δίνει τη μέγιστη δυνατή αξιοπιστία στο σύστημα.

2.4.1. Κρισιμότητα κόμβου

Έστω n το πλήθος μονάδες και $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ το διάνυσμα με τις δίτιμες μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ που περιγράφουν αν λειτουργούν ή όχι οι μονάδες μας. Έστω ακόμα $\varphi(\mathbf{x})$ η συνάρτηση δομής του μονότονου συστήματος που θέλουμε να μελετήσουμε. Τέλος ορίζουμε το $(1_i, 0_j, \mathbf{x}^{(i,j)})$ ως το διάνυσμα για το οποίο ισχύει x_i=1, x_j=0 και $\mathbf{x}^{(i,j)}$ είναι το διάνυσμα που προκύπτει αν διαγράψουμε τα στοιχεία x_i, x_j από το διάνυσμα $\mathbf{x}$.

Με τον όρο κόμβος του συστήματος εννοούμε οποιαδήποτε θέση του συστήματος, στην οποία μπορούμε να τοποθετήσουμε τις μονάδες μας. Τότε για τις μεταθέσεις και τους κόμβους του συστήματος, ισχύουν τα ακόλουθα σύμφωνα με τους Koutras, Papadopoulos and Papastavridis (1994):

Ορισμός 2.2. *Ο κόμβος i σε ένα μονότονο σύστημα είναι πιο κρίσιμος από τον κόμβο j, για τη συνάρτηση δομής φ, αν και μόνο αν ισχύει:*

$$\varphi(1_i, 0_j, \mathbf{x}^{(i,j)}) \geq \varphi(0_i, 1_j, \mathbf{x}^{(i,j)})$$

για όλα τα $\mathbf{x}^{(i,j)}$ *και για κάποια* $\mathbf{x}^{(i,j)}$ *ισχύει η αυστηρή ανισότητα.*

Ότι ο κόμβος i είναι κρισιμότερος από τον κόμβο j το συμβολίζουμε ως $i \overset{c}{>} j$.

Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι αν έχουμε για τρείς κόμβοι i, j, k για τους οποίους ο κόμβος i είναι κρισιμότερος από τον κόμβο j και ο κόμβος j είναι κρισιμότερος από τον κόμβο k, τότε και ο κόμβος i είναι κρισιμότερος από τον κόμβο k.

Θεώρημα 2.1. *Ο κόμβος i είναι πιο κρίσιμος για το σύστημά μας από τον κόμβο j, αν και μόνο αν ισχύει:*

$$R(\boldsymbol{p};\boldsymbol{\pi}_{i,j}) \geq R(\boldsymbol{p};\boldsymbol{\pi}),$$

για όλα τα $\mathbf{p}$ *και με αυστηρή ανισότητα για μερικά εκ των* $\mathbf{p}$.

Το σύμβολο $\boldsymbol{\pi}_{i,j}$ δηλώνει την μετάθεση που προκύπτει αν αλλαχθούν θέσεις στα i και j, $\boldsymbol{\pi}$ δηλώνει οποιαδήποτε μετάθεση και $\mathbf{p}$ αποτελεί το διάνυσμα των αξιοπιστιών των μονάδων.

Το Θεώρημα 2.1 παρουσιάζει τη χρησιμότητα της θεωρίας της κρισιμότητας κόμβου στη βέλτιστη τοποθέτηση. Αν οι μονάδες μας τοποθετηθούν σε θέσεις οι οποίες μεγιστοποιούν την κρισιμότητά τους, τότε εξασφαλίζεται και η μεγιστοποίηση της αξιοπιστίας της παρούσας μετάθεσης, άρα μεγιστοποιείται και η αξιοπιστία του συστήματός μας.

Παρακάτω παραθέτουμε κάποια θεωρήματα των οποίων η χρήση μας οδηγεί στο να καταλάβουμε πότε ένας κόμβος είναι κρισιμότερος από έναν άλλο.

Θεώρημα 2.2. *Έστω A_i το σύνολο που περιέχει όλα τα ελάχιστα σύνολα διακοπής (ή αντίστοιχα λειτουργίας) μιας δομής φ που περιέχουν τον κόμβο i. Αν ισχύει $A_j \subset A_i$ τότε ισχύει $i \overset{c}{>} j$.*

Θεώρημα 2.3. *Εάν $i, j \in I=\{1, 2, \ldots, n\}$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

- $i \overset{c}{>} j$

- *Για κάθε $S \subseteq I - \{i,j\}$, τέτοιο ώστε το $S \cup \{j\}$ να είναι σύνολο διακοπής, τότε και το $S \cup \{i\}$ είναι σύνολο διακοπής.*

  Επιπλέον υπάρχει $S_0 \subseteq I - \{i,j\}$, τέτοιο ώστε $S_0 \cup \{i\}$ είναι σύνολο διακοπής, ενώ το $S_0 \cup \{j\}$ δεν είναι.

- *Για κάθε $S \subseteq I - \{i,j\}$, τέτοιο ώστε $S \cup \{j\}$ είναι σύνολο λειτουργίας, τότε και το $S \cup \{i\}$ είναι σύνολο λειτουργίας.*

  Επιπλέον υπάρχει $S_0 \subseteq I - \{i,j\}$, τέτοιο ώστε $S_0 \cup \{i\}$ είναι σύνολο λειτουργίας, ενώ το $S_0 \cup \{j\}$ δεν είναι.

Θεώρημα 2.4. *Εάν $i, j \in I=\{1, 2, \ldots, n\}$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

- $i \overset{c}{>} j$

- *Για κάθε $C \subseteq I - \{i,j\}$, τέτοιο ώστε $C \cup \{j\}$ είναι ένα ελάχιστο σύνολο διακοπής, τότε και το $C \cup \{i\}$ είναι ένα σύνολο διακοπής.*

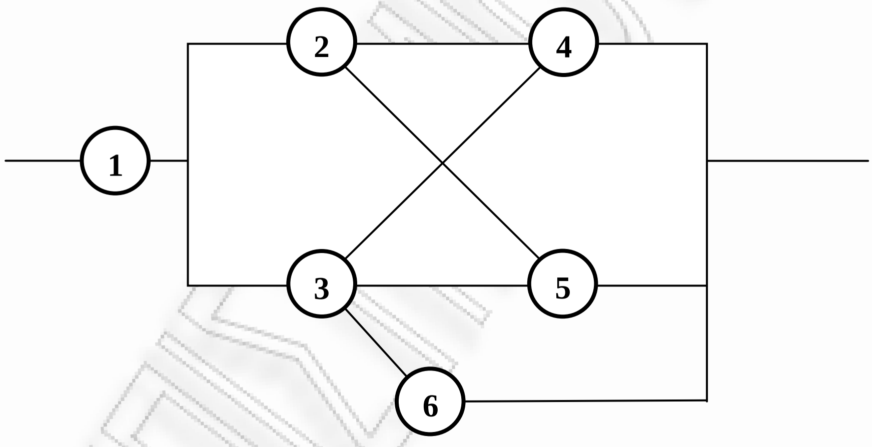
  Επιπλέον υπάρχει $S_0 \subseteq I - \{i,j\}$, τέτοιο ώστε $S_0 \cup \{i\}$ είναι σύνολο διακοπής, ενώ το $S_0 \cup \{j\}$ δεν είναι.

- *Για κάθε $C \subseteq I - \{i,j\}$, τέτοιο ώστε $C \cup \{j\}$ είναι ένα ελάχιστο σύνολο λειτουργίας, τότε και το $C \cup \{i\}$ είναι ένα σύνολο λειτουργίας.*

Επιπλέον υπάρχει $S_0 \subseteq I - \{i,j\}$*, τέτοιο ώστε* $S_0 \cup \{i\}$ *είναι ένα σύνολο λειτουργίας, ενώ το* $S_0 \cup \{j\}$ *δεν είναι.*

Με βάση τα παραπάνω παρατηρούμε ότι ενώ το $C \cup \{j\}$ είναι ένα ελάχιστο σύνολο διακοπής (ή αντίστοιχα ένα ελάχιστο σύνολο λειτουργίας), το σύνολο $C \cup \{i\}$ δεν είναι απαραίτητα ελάχιστο σύνολο διακοπής (ή λειτουργίας αντίστοιχα).

Για να γίνει καλύτερα αντιληπτή η χρησιμότητα των παραπάνω θεωρημάτων παραθέτουμε το ακόλουθο παράδειγμα των Koutras, Papadopoulos and Papastavridis (1994).



Σχήμα 2.2: Σύστημα έξι μονάδων

Έστω ότι έχουμε το παραπάνω σύστημα, για το οποίο γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση δομής του δίνεται από τον τύπο:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_6) = x_1[1-(1-x_2)(1-x_3)][1-(1-x_4)(1-x_5)(1-x_6)]$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2 που παρουσιάστηκε παραπάνω, για να είναι η μονάδα 1 κρισιμότερη από την μονάδα 2, θα πρέπει το σύνολο A_2 που περιέχει όλα τα ελάχιστα σύνολα διακοπής που περιέχουν τον κόμβο 2, να είναι υποσύνολο του συνόλου A_1 που περιέχει όλα τα ελάχιστα σύνολα διακοπής που περιέχουν τον κόμβο 1.

Παρατηρούμε ότι το σύνολο A_2 περιέχει το ελάχιστο σύνολο διακοπής {2,3}. Σύνολο το οποίο δεν περιέχει την μονάδα 1 και ως εκ τούτου δεν περιλαμβάνεται στο σύνολο A_1. Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2 δεν μπορούμε να δεχτούμε ότι ισχύει $1\overset{c}{>}2$.

Αντιθέτως, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.4, παρατηρούμε ότι μοναδική επιλογή για το C αποτελεί το {3} , οδηγώντας μας στο $C\cup\{1\}=\{3,1\}$, το οποίο αποτελεί επίσης σύνολο διακοπής. Άρα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ισχύει $1\overset{c}{>}2$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η χρήση των παραπάνω θεωρημάτων κρίνεται απαραίτητη σε περιπτώσεις για τις οποίες δε μπορούμε να διαπιστώσουμε τη σχέση κρισιμότητας των κόμβων που διαθέτουμε. Τα θεωρήματα αυτά μας βοηθούν να βρούμε ποιοι κόμβοι είναι κρισιμότεροι για τη λειτουργία του συστήματός μας. Οι κόμβοι αυτοί, όντας σημαντικότεροι, θα παίξουν κρίσιμο ρόλο στην απόφασή μας για τη βέλτιστη τοποθέτηση των μονάδων στο σύστημα.

2.4.2. Η έννοια του δείκτη δομικής σπουδαιότητας

Σύμφωνα με την προηγούμενη ενότητα, γίνεται αντιληπτή η χρησιμότητα της έννοιας της κρισιμότητας ενός κόμβου.

Μία ευρέως γνωστή τακτική για τη σύγκριση της σημαντικότητας των κόμβων σε ένα μονότονο σύστημα με συνάρτηση δομής $\varphi(\mathbf{x})$, βασίζεται στην έννοια του δείκτη δομικής σπουδαιότητας (Structural Importance Index). Ο δείκτης I_φ ενός κόμβου i δίνεται από τον τύπο:

$$I_\varphi(i) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{(\boldsymbol{x}:x_i=1)}[\varphi(1_i,\boldsymbol{x}) - \varphi(0_i,\boldsymbol{x})]$$

όπου $(1_i, \mathbf{x})$ υποδηλώνει το διάνυσμα $\mathbf{x}$ για το οποίο ισχύει $x_i=1$, ενώ $(0_i, \mathbf{x})$ υποδηλώνει το διάνυσμα $\mathbf{x}$ για το οποίο ισχύει $x_i=0$.

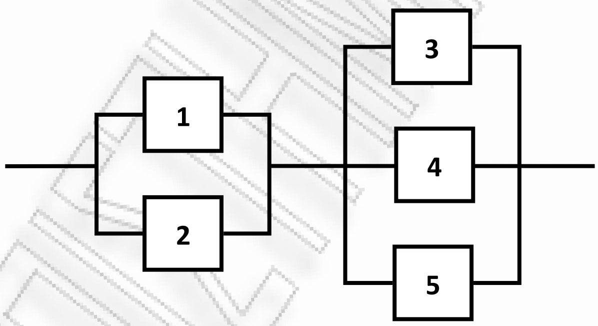
Για δύο κόμβους i, j θα λέμε ότι ο κόμβος i είναι δομικά σπουδαιότερος από τον κόμβο j αν ισχύει $I_\varphi(i)>I_\varphi(j)$.

Σύμφωνα με την εργασία των Boland, Proschan and Tong (1989) ισχύουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

Θεώρημα 2.5. *Έστω i και j δύο κόμβοι ενός μονότονου συστήματος με συνάρτηση δομής $\varphi(\mathbf{x})$. Αν ισχύει $i \overset{c}{>} j$ θα ισχύει και $I_\varphi(i)>I_\varphi(j)$.*

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα γίνεται αντιληπτό ότι αν ένα κόμβος *i* είναι κρισιμότερος από έναν κόμβο *j*, τότε ο κόμβος *i* θα έχει και μεγαλύτερο δείκτη δομικής σπουδαιότητας από τον κόμβο *j*. Ως εκ τούτου προκύπτει σύμφωνα, με τα προηγούμενα θεωρήματα, ότι στον κόμβο *i* θα πρέπει να τοποθετηθεί μονάδα με μεγαλύτερη αξιοπιστία από ότι στον κόμβο *j*, με σκοπό την αύξηση της αξιοπιστίας του συστήματος. Τέλος αναφέρεται ότι το Θεώρημα 2.5 δεν αποτελεί αναγκαία και ικανή συνθήκη για την εύρεση βέλτιστη τοποθέτησης.

Για να γίνει εύκολα αντιληπτό ότι η ισχύς της σχέσης $I_\varphi(i)>I_\varphi(j)$ δεν προϋποθέτει απαραίτητα και την ισχύ της σχέσης $i \overset{c}{>} j$, οι Boland, Proschan and Tong (1989) παρουσίασαν το παρακάτω παράδειγμα.



Σχήμα 2.3: Σύστημα πέντε μονάδων

Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα πέντε κόμβων συνδεδεμένων σύμφωνα με το σχήμα 2.3. Εύκολα δείχνεται ότι ισχύει $I_\varphi(1)>I_\varphi(3)$. Αλλά εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι ισχύει:

$$0 = \varphi(1,1,0,0,0) < \varphi(0,1,1,0,0) = 1,$$
$$1 = \varphi(1,0,0,1,0) > \varphi(0,0,1,1,0) = 0.$$

Δηλαδή δεν ισχύει ούτε $1 \overset{c}{>} 3$ ούτε $3 \overset{c}{>} 1$.

2.4.3. Βέλτιστη τοποθέτηση μέσω ζευγαρωτών αναδιατάξεων

Οι ζευγαρωτές αναδιατάξεις μονάδων αποτελούν το βασικότερο εργαλείο επίλυσης προβλημάτων αναλλοίωτων (Invariant) σχεδιασμών. Με βάση αυτή τη θεωρία προκύπτει η βέλτιστη μετάθεση ή τουλάχιστον μία εξ αυτών (σε περίπτωση που η βέλτιστη μετάθεση δεν είναι μοναδική), μέσω μιας διαδικασίας εξάλειψης των μη βέλτιστων μεταθέσεων.

Ορισμός 2.3. *Έστω* $\boldsymbol{\pi}$ *μία συγκεκριμένη μετάθεση και* $R(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{p}))=E_{\pi(p)}\varphi(\boldsymbol{x})$ *η συνάρτηση αξιοπιστίας ενός μονότονου συστήματος μέσω της μετάθεσης αυτής. Δύο κόμβοι i και j λέγονται ισοδύναμοι μέσω της μετάθεσης* $\boldsymbol{\pi}$ *αν, για όλα τα* $\boldsymbol{p}$*, ισχύει* $R(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{p}))=R(\boldsymbol{\pi}_{ij}(\boldsymbol{p}))$.

Θεώρημα 2.6. *Οι κόμβοι i και j είναι ισοδύναμοι μέσω μίας συγκεκριμένης μετάθεσης* $\boldsymbol{\pi}$*, αν και μόνο αν η* $\varphi(\mathbf{x})$ *είναι συμμετρική ως προς τη μετάθεση των* x_i *και* x_j*. Δηλαδή* $\varphi(x_i, x_j, \boldsymbol{x}^{(i,j)})=\varphi(x_j, x_i, \boldsymbol{x}^{(i,j)})$ *για όλα τα* $\boldsymbol{x}^{(i,j)}$.

Με βάση τα παραπάνω γίνεται αντιληπτό ότι σε κόμβους οι οποίοι θεωρούνται ισοδύναμοι μεταθετικά, η αξιοπιστία του συστήματος δε μπορεί να βελτιωθεί με την αμοιβαία ανταλλαγή των μονάδων τους.

Ορισμός 2.4. *Μία μετάθεση* $\boldsymbol{\pi}$ *θεωρείται απαράδεκτη ή μη επιτρεπτή εάν υπάρχει μετάθεση* $\boldsymbol{\pi}'$ *τέτοια ώστε για τις μεταθέσεις αυτές να ισχύει* $R(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{p}))\leq R(\boldsymbol{\pi}'(\boldsymbol{p}))$ *για όλα τα* $\boldsymbol{p}$ *και αυστηρή ανισότητα για μερικά εξ αυτών.*

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό προκύπτει και το ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 2.1. *Έστω* $\boldsymbol{\pi}$ *οποιαδήποτε μετάθεση για την οποία ισχύει* $\boldsymbol{\pi}_i < \boldsymbol{\pi}_j$*. Αν επιπλέον ισχύει ότι ο κόμβος i είναι κρισιμότερος από τον κόμβο j, τότε η μετάθεση* $\boldsymbol{\pi}$ *είναι μη επιτρεπτή. Ως συνέπεια αυτού, η μετάθεση* $\boldsymbol{\pi}$ *απορρίπτεται από περαιτέρω ανάλυση, αφού η* $\boldsymbol{\pi}_{i,j}$ *κρίνεται ουσιαστικά καλύτερη μετάθεση.*

2.4.4. Μεθοδολογία εύρεσης βέλτιστης τοποθέτησης σε ένα αναλλοίωτο σχεδιασμό

Στην παρούσα ενότητα θα δώσουμε, με βάση τη θεωρία που παρουσιάστηκε στις προηγούμενες ενότητες, τη μεθοδολογία εύρεσης βέλτιστης τοποθέτησης (σε ένα Invariant σχεδιασμό).

Μεθοδολογία

- **Βήμα 1**

  Απορρίπτουμε όλες τις μη επιτρεπτές μεταθέσεις μέσω της αρχής των ζευγαρωτών αναδιατάξεων.

- **Βήμα 2**

  Σβήνουμε όλες εκτός μίας τις μεταθέσεις, οι οποίες προέκυψαν ισοδύναμες μεταθετικά.

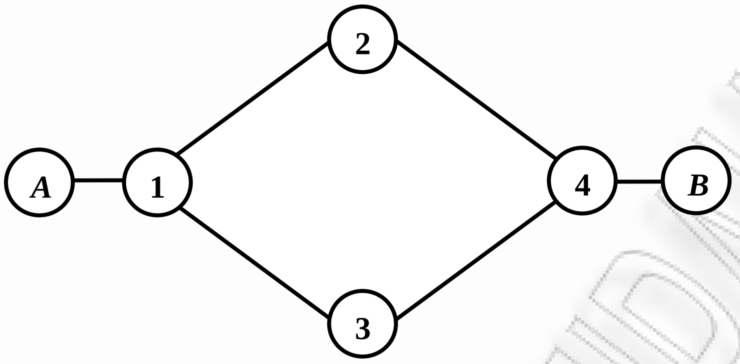
- **Βήμα 3**

  Έστω Q_0 το υποσύνολο του συνόλου Q όλων των μεταθέσεων των n στοιχείων, οι οποίες δεν έχουν απορριφθεί ή σβηστεί στα προηγούμενα βήματα. Τότε βρίσκουμε τη μετάθεση $\boldsymbol{\pi}^{(0)}$, η οποία ικανοποιεί την σχέση:

$$R(\boldsymbol{\pi}^{(0)}(\mathbf{p}))= \max_{\boldsymbol{\pi}\in Q_0} R(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{p}))$$

Η $\boldsymbol{\pi}^{(0)}$ αποτελεί μία βέλτιστη μετάθεση.

Για παράδειγμα έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα:



Σχήμα 2.4: Σύστημα τύπου γέφυρας με τέσσερις μονάδες

Το σύστημα παρουσιάζει μια υπαρκτή κατάσταση κατά την οποία επιθυμούμε να διέλθει πετρέλαιο από την τοποθεσία Α στην τοποθεσία Β, μέσω των κόμβων 1, 2 και 4 ή των κόμβων 1, 3 και 4.

Υποθέτουμε ότι δεν γνωρίζουμε την ακριβή τιμή των αξιοπιστιών των μονάδων, παρά μόνο ότι για τις αξιοπιστίες αυτές ισχύει η σχέση:

$$p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq p_4$$

Ζητούμενο είναι να βρεθεί μια μετάθεση (από τις 4!=24 μεταθέσεις που δημιουργούνται), που να μεγιστοποιεί την αξιοπιστία του συστήματος.

Παρατηρούμε ότι το δοθέν πρόβλημα παρουσιάζει μια συνάρτηση δομής της μορφής:

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=x_1(x_2 \sqcup x_3)x_4.$$

Ήδη από τη συνάρτηση δομής του συστήματος διαφαίνεται η κρισιμότητα του κόμβου 1 και του κόμβου 4, οι οποίοι θεωρούνται πιο κρίσιμοι από τους κόμβους 2 και 3. Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι σχέσεις $1 \overset{c}{>} 2$, $1 \overset{c}{>} 3$ και $4 \overset{c}{>} 2$, $4 \overset{c}{>} 3$. Προκύπτει δηλαδή ότι στους κόμβους 1 και 4 θα πρέπει να τοποθετήσουμε τις μονάδες με τη μεγαλύτερη αξιοπιστία, δηλαδή τις μονάδες p_3 και p_4. Τέλος παρατηρούμε ότι οι κόμβοι 2 και 3 αποτελούν ισοδύναμες μεταθέσεις.

Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει ότι από τις 24 δυνατές μεταθέσεις, βέλτιστες μεταθέσεις θεωρούνται οι 4-1-2-3, 4-2-1-3, 3-1-2-4 και 3-2-1-4. Ως μη επιτρεπτές μεταθέσεις κρίνονται όλες οι μεταθέσεις που δεν έχουν την καλύτερη μονάδα (από πλευράς αξιοπιστίας) για αρχή και την αμέσως καλύτερη για τέλος και αντίστροφα.

2.5 Μη αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός συστήματος

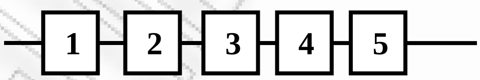
Μη αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός συστήματος (Variant Optimal Design) ονομάζεται ο σχεδιασμός για τον οποίο οι τιμές των αξιοπιστιών των μονάδων του συστήματος επηρεάζουν τη βέλτιστη τοποθέτηση των μονάδων. Σε ένα σύστημα αυτού του τύπου, όλες οι τιμές των αξιοπιστιών είναι γνωστές, σε αντίθεση με τον αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό συστήματος όπου οι τιμές ήταν άγνωστες και γνωρίζαμε μόνο τη διάταξή τους.

Στο μη αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό συστήματος διαφορετικές τιμές αξιοπιστιών των μονάδων μας παράγουν διαφορετικά βέλτιστα συστήματα.

Η θεωρία του μη αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού συστήματος παρουσιάζεται στα συνεχόμενα-k-από-τα-n συστήματα, όπως θα δούμε και στο κεφάλαιο 4, για τα οποία δεν υπάρχει αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός συστήματος. Πιο συγκεκριμένα, αναφέρουμε ότι μη αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό συστήματος παρουσιάζουν όλα τα γραμμικά συνεχόμενα-k-από-τα-n:F συστήματα για τα οποία ισχύει $2<k<n-2$ και όλα τα γραμμικά συνεχόμενα-k-από-τα-n:G για τα οποία ισχύει $2\leq k<n/2$.

Με σκοπό να γίνει καλύτερα αντιληπτή η έννοια του μη αναλλοίωτου βέλτιστου συστήματος παραθέτουμε το παρακάτω παράδειγμα:

Έστω ότι έχουμε το γραμμικό συνεχόμενο-2-από-τα-5:G σύστημα. Σύστημα δηλαδή για το οποίο ισχύει $2\leq k<n/2$, άρα αναμένουμε την ύπαρξη μη αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού.



Σχήμα 2.5: Γραμμικό συνεχόμενο-2-από-τα-5:G σύστημα

Γνωρίζουμε ότι το σύστημά μας λειτουργεί όταν λειτουργούν δύο συνεχόμενες από τις πέντε μονάδες που το αποτελούν. Ως εκ τούτου συμπεραίνουμε ότι τα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας του είναι τα:

$$P_1=\{1,2\},\ P_2=\{2,3\},\ P_3=\{3,4\} \text{ και } P_4=\{4,5\}$$

Άρα η συνάρτηση δομής του συστήματος θα είναι η ακόλουθη:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1-\prod_{j=1}^{4}\left(1-\prod_{i\in P_j} x_i\right) = 1-(1-x_1x_2)(1-x_2x_3)(1-x_3x_4)(1-x_4x_5)=$$

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5-x_1x_2x_3-x_2x_3x_4-x_3x_4x_5-x_1x_2x_4x_5+x_1x_2x_3x_4x_5$$

Η συνάρτηση αξιοπιστίας του συστήματος θα έχει τη μορφή:

$$R(\mathbf{p}) = p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_4 + p_4p_5 - p_1p_2p_3 - p_2p_3p_4 - p_3p_4p_5 - p_1p_2p_4p_5 + p_1p_2p_3p_4p_5$$

Θέλοντας να δούμε κατά πόσο οι τιμές που δίνουμε στις αξιοπιστίες των μονάδων επηρεάζουν τη βέλτιστη μετάθεση του συστήματος μας, θα πρέπει να υπολογίσουμε όλες τις δυνατές μεταθέσεις (οι οποίες είναι ίσες με 5!=120) για δύο διαφορετικές περιπτώσεις. Τέλος να συγκρίνουμε πια μετάθεση δίνει τη βέλτιστη αξιοπιστία σε κάθε περίπτωση.

i) Έστω p_1=0,1, p_2=0,2, p_3=0,3, p_4=0,4 και p_5=0,5. Τότε όλες οι δυνατές μεταθέσεις μαζί με την αξιοπιστία που δίνουν για το σύστημα, παρατίθενται στον παρακάτω πίνακα:

ΜΕΤΑΘΕΣΗ					R	ΜΕΤΑΘΕΣΗ					R
0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,3072	0,4	0,1	0,2	0,3	0,5	0,2212
0,1	0,2	0,3	0,5	0,4	0,3312	0,4	0,1	0,2	0,5	0,3	0,2572
0,1	0,2	0,4	0,3	0,5	0,2762	0,4	0,1	0,3	0,2	0,5	0,1792
0,1	0,2	0,4	0,5	0,3	0,3402	0,4	0,1	0,3	0,5	0,2	0,2602
0,1	0,2	0,5	0,3	0,4	0,2888	0,4	0,1	0,5	0,2	0,3	0,1888
0,1	0,2	0,5	0,4	0,3	0,3288	0,4	0,1	0,5	0,3	0,2	0,2338
0,1	0,3	0,4	0,5	0,2	0,3362	0,4	0,2	0,1	0,3	0,5	0,2402
0,1	0,3	0,4	0,2	0,5	0,2522	0,4	0,2	0,1	0,5	0,3	0,2562
0,1	0,3	0,5	0,2	0,4	0,2738	0,4	0,2	0,3	0,1	0,5	0,1722
0,1	0,3	0,5	0,4	0,2	0,3438	0,4	0,2	0,3	0,5	0,1	0,2682
0,1	0,3	0,2	0,4	0,5	0,2952	0,4	0,2	0,5	0,1	0,3	0,1938
0,1	0,3	0,2	0,5	0,4	0,3092	0,4	0,2	0,5	0,3	0,1	0,2738
0,1	0,4	0,5	0,2	0,3	0,3088	0,4	0,3	0,1	0,2	0,5	0,2312
0,1	0,4	0,5	0,3	0,2	0,3388	0,4	0,3	0,1	0,5	0,2	0,2522
0,1	0,4	0,2	0,5	0,3	0,2872	0,4	0,3	0,2	0,1	0,5	0,2052
0,1	0,4	0,2	0,3	0,5	0,2632	0,4	0,3	0,2	0,5	0,1	0,2612
0,1	0,4	0,3	0,5	0,2	0,3052	0,4	0,3	0,5	0,2	0,1	0,2888
0,1	0,4	0,3	0,2	0,5	0,2512	0,4	0,3	0,5	0,1	0,2	0,2538
0,1	0,5	0,2	0,3	0,4	0,2612	0,4	0,5	0,1	0,2	0,3	0,2832
0,1	0,5	0,2	0,4	0,3	0,2712	0,4	0,5	0,1	0,3	0,2	0,2882
0,1	0,5	0,3	0,2	0,4	0,2682	0,4	0,5	0,2	0,1	0,3	0,2892
0,1	0,5	0,3	0,4	0,2	0,2982	0,4	0,5	0,2	0,3	0,1	0,3092
0,1	0,5	0,4	0,3	0,2	0,3242	0,4	0,5	0,3	0,2	0,1	0,3312
0,1	0,5	0,4	0,2	0,3	0,3042	0,4	0,5	0,3	0,1	0,2	0,3162
0,2	0,1	0,3	0,4	0,5	0,2892	0,5	0,1	0,2	0,3	0,4	0,2052
0,2	0,1	0,3	0,5	0,4	0,3162	0,5	0,1	0,2	0,4	0,3	0,2232
0,2	0,1	0,4	0,3	0,5	0,2482	0,5	0,1	0,3	0,2	0,4	0,1722
0,2	0,1	0,4	0,5	0,3	0,3202	0,5	0,1	0,3	0,4	0,2	0,2262
0,2	0,1	0,5	0,3	0,4	0,2538	0,5	0,1	0,4	0,2	0,3	0,1762
0,2	0,1	0,5	0,4	0,3	0,2988	0,5	0,1	0,4	0,3	0,2	0,2122
0,2	0,3	0,4	0,1	0,5	0,2122	0,5	0,2	0,1	0,3	0,4	0,2312
0,2	0,3	0,4	0,5	0,1	0,3242	0,5	0,2	0,1	0,4	0,3	0,2392
0,2	0,3	0,5	0,1	0,4	0,2338	0,5	0,2	0,3	0,1	0,4	0,1792
0,2	0,3	0,5	0,4	0,1	0,3388	0,5	0,2	0,3	0,4	0,1	0,2512
0,2	0,3	0,1	0,4	0,5	0,2812	0,5	0,2	0,4	0,1	0,3	0,1882
0,2	0,3	0,1	0,5	0,4	0,2882	0,5	0,2	0,4	0,3	0,1	0,2522
0,2	0,4	0,3	0,1	0,5	0,2262	0,5	0,3	0,1	0,2	0,4	0,2402
0,2	0,4	0,3	0,5	0,1	0,2982	0,5	0,3	0,1	0,4	0,2	0,2542
0,2	0,4	0,5	0,1	0,3	0,2838	0,5	0,3	0,2	0,1	0,4	0,2212
0,2	0,4	0,5	0,3	0,1	0,3438	0,5	0,3	0,2	0,4	0,1	0,2632

0,2	0,4	0,1	0,3	0,5	0,2542	0,5	0,3	0,4	0,1	0,2	0,2482
0,2	0,4	0,1	0,5	0,3	0,2662	0,5	0,3	0,4	0,2	0,1	0,2762
0,2	0,5	0,3	0,1	0,4	0,2602	0,5	0,4	0,1	0,2	0,3	0,2752
0,2	0,5	0,3	0,4	0,1	0,3052	0,5	0,4	0,1	0,3	0,2	0,2812
0,2	0,5	0,4	0,1	0,3	0,2962	0,5	0,4	0,2	0,1	0,3	0,2712
0,2	0,5	0,4	0,3	0,1	0,3362	0,5	0,4	0,2	0,3	0,1	0,2952
0,2	0,5	0,1	0,3	0,4	0,2522	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,3072
0,2	0,5	0,1	0,4	0,3	0,2572	0,5	0,4	0,3	0,1	0,2	0,2892
0,3	0,1	0,2	0,4	0,5	0,2712						
0,3	0,1	0,2	0,5	0,4	0,2892						
0,3	0,1	0,4	0,2	0,5	0,1882						
0,3	0,1	0,4	0,5	0,2	0,2962						
0,3	0,1	0,5	0,2	0,4	0,1938						
0,3	0,1	0,5	0,4	0,2	0,2838						
0,3	0,2	0,1	0,4	0,5	0,2752						
0,3	0,2	0,1	0,5	0,4	0,2832						
0,3	0,2	0,4	0,1	0,5	0,1762						
0,3	0,2	0,4	0,5	0,1	0,3042						
0,3	0,2	0,5	0,1	0,4	0,1888						
0,3	0,2	0,5	0,4	0,1	0,3088						
0,3	0,4	0,1	0,2	0,5	0,2392						
0,3	0,4	0,1	0,5	0,2	0,2572						
0,3	0,4	0,2	0,1	0,5	0,2232						
0,3	0,4	0,2	0,5	0,1	0,2712						
0,3	0,4	0,5	0,1	0,2	0,2988						
0,3	0,4	0,5	0,2	0,1	0,3288						
0,3	0,5	0,1	0,2	0,4	0,2562						
0,3	0,5	0,1	0,4	0,2	0,2662						
0,3	0,5	0,2	0,1	0,4	0,2572						
0,3	0,5	0,2	0,4	0,1	0,2872						
0,3	0,5	0,4	0,1	0,2	0,3202						
0,3	0,5	0,4	0,2	0,1	0,3402						

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα παρατηρούμε ότι η μέγιστη αξιοπιστία που μπορεί να προκύψει, για αυτές τις τιμές των αξιοπιστιών των μονάδων, είναι ίση με 0,3438. Αυτό που γίνεται γρήγορα αντιληπτό με βάση τον παραπάνω πίνακα είναι ότι η μέγιστη αξιοπιστία παρουσιάζεται για δύο διαφορετικές μεταθέσεις των μονάδων μας, για την μετάθεση 1-3-5-4-2, αλλά και για την μετάθεση 2-4-5-3-1.

ii) Αποφασίζουμε να δοκιμάσουμε επιπλέον και τις τιμές p_1=0,5, p_2=0,6, p_3=0,7, p_4=0,8 και p_5=0,9, με σκοπό να συγκρίνουμε τις μεταθέσεις που δίνουν μέγιστη αξιοπιστία στο σύστημα. Οι δυνατές μεταθέσεις μαζί με την αξιοπιστία που δίνουν για το σύστημα, με βάση αυτές τις τιμές των αξιοπιστιών, παραθέτονται στον παρακάτω πίνακα:

ΜΕΤΑΘΕΣΗ					R	ΜΕΤΑΘΕΣΗ					R
0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,8852	0,8	0,5	0,6	0,7	0,9	0,8212
0,5	0,6	0,7	0,9	0,8	0,9132	0,8	0,5	0,6	0,9	0,7	0,8812
0,5	0,6	0,8	0,7	0,9	0,8522	0,8	0,5	0,7	0,6	0,9	0,7772
0,5	0,6	0,8	0,9	0,7	0,9162	0,8	0,5	0,7	0,9	0,6	0,8822
0,5	0,6	0,9	0,7	0,8	0,8612	0,8	0,5	0,9	0,6	0,7	0,7852
0,5	0,6	0,9	0,8	0,7	0,8972	0,8	0,5	0,9	0,7	0,6	0,8302
0,5	0,7	0,8	0,9	0,6	0,9162	0,8	0,6	0,5	0,7	0,9	0,8438
0,5	0,7	0,8	0,6	0,9	0,8442	0,8	0,6	0,5	0,9	0,7	0,8838
0,5	0,7	0,9	0,6	0,8	0,8582	0,8	0,6	0,7	0,5	0,9	0,7742
0,5	0,7	0,9	0,8	0,6	0,9122	0,8	0,6	0,7	0,9	0,5	0,8862
0,5	0,7	0,6	0,8	0,9	0,8912	0,8	0,6	0,9	0,5	0,7	0,7862
0,5	0,7	0,6	0,9	0,8	0,9092	0,8	0,6	0,9	0,7	0,5	0,8582
0,5	0,8	0,9	0,6	0,7	0,8932	0,8	0,7	0,5	0,6	0,9	0,8388
0,5	0,8	0,9	0,7	0,6	0,9112	0,8	0,7	0,5	0,9	0,6	0,8838
0,5	0,8	0,6	0,9	0,7	0,8992	0,8	0,7	0,6	0,5	0,9	0,8132
0,5	0,8	0,6	0,7	0,9	0,8752	0,8	0,7	0,6	0,9	0,5	0,8852
0,5	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9032	0,8	0,7	0,9	0,6	0,5	0,8612
0,5	0,8	0,7	0,6	0,9	0,8612	0,8	0,7	0,9	0,5	0,6	0,8342
0,5	0,9	0,6	0,7	0,8	0,8852	0,8	0,9	0,5	0,6	0,7	0,8988
0,5	0,9	0,6	0,8	0,7	0,8912	0,8	0,9	0,5	0,7	0,6	0,9038
0,5	0,9	0,7	0,6	0,8	0,8862	0,8	0,9	0,6	0,5	0,7	0,8972
0,5	0,9	0,7	0,8	0,6	0,9002	0,8	0,9	0,6	0,7	0,5	0,9092
0,5	0,9	0,8	0,7	0,6	0,9122	0,8	0,9	0,7	0,6	0,5	0,9132
0,5	0,9	0,8	0,6	0,7	0,9042	0,8	0,9	0,7	0,5	0,6	0,9062
0,6	0,5	0,7	0,8	0,9	0,8712	0,9	0,5	0,6	0,7	0,8	0,8132
0,6	0,5	0,7	0,9	0,8	0,9062	0,9	0,5	0,6	0,8	0,7	0,8432
0,6	0,5	0,8	0,7	0,9	0,8282	0,9	0,5	0,7	0,6	0,8	0,7742
0,6	0,5	0,8	0,9	0,7	0,9082	0,9	0,5	0,7	0,8	0,6	0,8442
0,6	0,5	0,9	0,7	0,8	0,8342	0,9	0,5	0,8	0,6	0,7	0,7762
0,6	0,5	0,9	0,8	0,7	0,8792	0,9	0,5	0,8	0,7	0,6	0,8162
0,6	0,7	0,8	0,5	0,9	0,8162	0,9	0,6	0,5	0,7	0,8	0,8388
0,6	0,7	0,8	0,9	0,5	0,9122	0,9	0,6	0,5	0,8	0,7	0,8588
0,6	0,7	0,9	0,5	0,8	0,8302	0,9	0,6	0,7	0,5	0,8	0,7772
0,6	0,7	0,9	0,8	0,5	0,9112	0,9	0,6	0,7	0,8	0,5	0,8612
0,6	0,7	0,5	0,8	0,9	0,8888	0,9	0,6	0,8	0,5	0,7	0,7802
0,6	0,7	0,5	0,9	0,8	0,9038	0,9	0,6	0,8	0,7	0,5	0,8442
0,6	0,8	0,7	0,5	0,9	0,8442	0,9	0,7	0,5	0,6	0,8	0,8438
0,6	0,8	0,7	0,9	0,5	0,9002	0,9	0,7	0,5	0,8	0,6	0,8738
0,6	0,8	0,9	0,5	0,7	0,8762	0,9	0,7	0,6	0,5	0,8	0,8212
0,6	0,8	0,9	0,7	0,5	0,9122	0,9	0,7	0,6	0,8	0,5	0,8752
0,6	0,8	0,5	0,7	0,9	0,8738	0,9	0,7	0,8	0,5	0,6	0,8282
0,6	0,8	0,5	0,9	0,7	0,8938	0,9	0,7	0,8	0,6	0,5	0,8522
0,6	0,9	0,7	0,5	0,8	0,8822	0,9	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8788
0,6	0,9	0,7	0,8	0,5	0,9032	0,9	0,8	0,5	0,7	0,6	0,8888
0,6	0,9	0,8	0,5	0,7	0,9002	0,9	0,8	0,6	0,5	0,7	0,8672
0,6	0,9	0,8	0,7	0,5	0,9162	0,9	0,8	0,6	0,7	0,5	0,8912
0,6	0,9	0,5	0,7	0,8	0,8838	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,8852
0,6	0,9	0,5	0,8	0,7	0,8888	0,9	0,8	0,7	0,5	0,6	0,8712
0,7	0,5	0,6	0,8	0,9	0,8672						
0,7	0,5	0,6	0,9	0,8	0,8972						
0,7	0,5	0,8	0,6	0,9	0,7802						
0,7	0,5	0,8	0,9	0,6	0,9002						
0,7	0,5	0,9	0,6	0,8	0,7862						
0,7	0,5	0,9	0,8	0,6	0,8762						

0,7	0,6	0,5	0,8	0,9	0,8788						
0,7	0,6	0,5	0,9	0,8	0,8988						
0,7	0,6	0,8	0,5	0,9	0,7762						
0,7	0,6	0,8	0,9	0,5	0,9042						
0,7	0,6	0,9	0,5	0,8	0,7852						
0,7	0,6	0,9	0,8	0,5	0,8932						
0,7	0,8	0,5	0,6	0,9	0,8588						
0,7	0,8	0,5	0,9	0,6	0,8888						
0,7	0,8	0,6	0,5	0,9	0,8432						
0,7	0,8	0,6	0,9	0,5	0,8912						
0,7	0,8	0,9	0,5	0,6	0,8792						
0,7	0,8	0,9	0,6	0,5	0,8972						
0,7	0,9	0,5	0,6	0,8	0,8838						
0,7	0,9	0,5	0,8	0,6	0,8938						
0,7	0,9	0,6	0,5	0,8	0,8812						
0,7	0,9	0,6	0,8	0,5	0,8992						
0,7	0,9	0,8	0,5	0,6	0,9082						
0,7	0,9	0,8	0,6	0,5	0,9162						

Παρατηρούμε ότι η μέγιστη αξιοπιστία σε αυτή την περίπτωση είναι ίση με 0,9162. Προφανώς περιμέναμε μεγαλύτερη τιμή αξιοπιστίας για το σύστημά μας, αφού αυξήσαμε την αξιοπιστία των μονάδων που το αποτελούν (και το σύστημα είναι γραμμικό συνεχόμενο-2-από-τα-5:G σύστημα). Παρατηρούμε επίσης ότι σε αντίθεση με την πρώτη περίπτωση οι βέλτιστες μεταθέσεις σε αυτή την περίπτωση είναι η μετάθεση 1-2-4-5-3, η 1-3-4-5-2, η 2-5-4-3-1 και η 3-5-4-2-1.

Το παραπάνω παράδειγμα παρουσιάζει ακριβώς το πρόβλημα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε με το μη αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό συστήματος. Παρατηρήσαμε παραπάνω ότι και στις δύο περιπτώσεις οι βέλτιστες μεταθέσεις ήταν τελείως διαφορετικές. Άρα σε αυτές τις περιπτώσεις διαφορετικές τιμές αξιοπιστιών για τις μονάδες, μας δίνουν διαφορετικές βέλτιστες μεταθέσεις για το σύστημα.

2.5.1. Σημαντικότητα αξιοπιστίας μονάδος κατά Birnbaum

Έστω R η αξιοπιστία ενός συστήματος, p_i η αξιοπιστία της i μονάδος του ($1 \leq i \leq n$) και $q_i = 1 - p_i$ η αναξιοπιστία της i μονάδος. Η τιμή 1 στην αξιοπιστία αντιπροσωπεύει την κατάσταση λειτουργίας, ενώ η τιμή 0 την κατάσταση μη λειτουργίας της μονάδος i.

Η σημαντικότητα αξιοπιστίας κατά Birnbaum $I(i)$ της μονάδος i, δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$I(i) = R(\text{system}|\text{i works}) - R(\text{system}|\text{i fail})$$

Δηλαδή το $I(i)$ είναι ίσο με τη διαφορά της αξιοπιστίας του συστήματος δεδομένου ότι η i μονάδα δουλεύει και της αξιοπιστίας του συστήματος δεδομένου ότι η i μονάδα δεν δουλεύει, ή με σύμβολα

$$I(i) = R(p_1, \ldots, p_{i-1}, 1, p_{i+1}, \ldots, p_n) - \mathrm{R}(p_1, \ldots, p_{i-1}, 0, p_{i+1}, \ldots, p_n)$$

Η σημαντικότητα αξιοπιστίας κατά Birnbaum στα συνεχόμενα (consecutive) συστήματα προκύπτει από τους ακόλουθους τύπους (σύμφωνα με τα αποτελέσματα των Zuo and Kuo (1990)):

α) Για τα συνεχόμενα-k-από-τα-n:F συστήματα προκύπτει η παρακάτω μορφή σημαντικότητας:

$$I_i = \frac{R(i-1;k)R'(n-i;k)-R(n;k)}{q_i},$$

όπου $R'(n-i;k)$ είναι η αξιοπιστία του γραμμικού συνεχόμενου-k-από-τα-(n-i) υποσυστήματος, που αποτελείται από τις μονάδες n-(n-i)+1, n-(n-i)+2, …, n.

β) Για τα συνεχόμενα-k-από-τα-n:G συστήματα προκύπτει η ακόλουθη μορφή σημαντικότητας:

$$I_i = \frac{1}{p_i}\left[R(n;k) - R(i-1;k) - R'(n-i;k) + R(i-1;k)R'(n-i;k)\right]$$

Η σημαντικότητα αξιοπιστίας κατά Birnbaum αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο, όπως θα δούμε και στις επόμενες ενότητες, για να αποφασίσουμε που θα τοποθετήσουμε την κάθε μονάδα μας ώστε να μεγιστοποιήσουμε την αξιοπιστία του συστήματός μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μελέτη αναλλοίωτων βέλτιστων σχεδιασμών

3.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναλυθεί η θεωρία του αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού συστήματος. Θα παρουσιαστούν οι λύσεις που έχουν προταθεί για τα διάφορα συστήματα, που έχουμε αναφέρει ήδη σε προηγούμενες ενότητες, αναφέροντας όλες τις σχετικές θεωρίες. Οι διάφορες θεωρίες θα αναλυθούν και με τη βοήθεια εφαρμογών, με σκοπό την καλύτερη κατανόησή τους.

Τέλος εκτός από όλες τις δυνατές λύσεις που θα παρουσιαστούν για τα συστήματά μας, θα προταθούν και λύσεις οι οποίες βελτιώνουν την αξιοπιστία συστημάτων, για τα οποία δε μπορεί να υπάρξει επίλυση με βάση τη θεωρία του αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού συστήματος.

Για τις αποδείξεις όλων των αποτελεσμάτων του παρόντος κεφαλαίου, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να καταφύγει στην εργασία των Zuo and Kuo (1990) καθώς και στο βιβλίο των ιδίων (2003), στις εργασίες των Shen and Zuo (1994α),(1994β) και στην εργασία των El-Neweihi, Proschan and Sethuraman (1986). Τέλος ορισμένα χρήσιμα αποτελέσματα υπάρχουν στην εργασία των Duan, Wu, and Zuo (2005), Zuo (1993), Hwang and Shi (1987), καθώς και στην εργασία του Meng (2004).

3.2 Αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός για το σειριακό σύστημα

Γνωρίζουμε από προηγούμενη ενότητα, ότι ως σειριακό θεωρείται εκείνο το σύστημα το οποίο βρίσκεται σε κατάσταση λειτουργίας, όταν λειτουργούν όλες οι μονάδες που το αποτελούν.

Για το σειριακό σύστημα n μονάδων γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση δομής του δίνεται από τον τύπο:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

όπου $x_1, x_2, \ldots, x_n$ υποδηλώνει τη δείκτρια της $1^{ης}$, …, n μονάδος αντίστοιχα, και δείχνει σε τι κατάσταση βρίσκεται η εκάστοτε μονάδα.

Αντίστοιχα η αξιοπιστία του συστήματος δίνεται από τον τύπο:

$$R_{SS} = p_1 p_2 \ldots p_n,$$

όπου $p_1, p_2, \ldots, p_n$ είναι η αξιοπιστία της μονάδος 1, 2, …, n αντίστοιχα.

Για την εύρεση του βέλτιστου αναλλοίωτου σχεδιασμού για το σειριακό σύστημα, θα πρέπει να βρούμε με τη βοήθεια των θεωριών της κρισιμότητας κόμβου και της τοποθέτησης μέσω ζευγαρωτών αναδιατάξεων, τη βέλτιστη μετάθεση για τις μονάδες μας. Υπενθυμίζεται ότι βέλτιστη μετάθεση για το σύστημα, είναι η μετάθεση των μονάδων η οποία μεγιστοποιεί την αξιοπιστία του συστήματος.

Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι στο σειριακό σύστημα όλες οι μονάδες έχουν τον ίδιο βαθμό κρισιμότητας. Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει εύκολα μέσω της παρατήρησης, ότι στο σειριακό σύστημα η κατάρρευση οποιασδήποτε μονάδας οδηγεί σε κατάρρευση και το σύστημα. Η θέση της μονάδος δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα αυτό. Όλοι οι κόμβοι λοιπόν σε ένα μονότονο σειριακό σύστημα έχουν την ίδια κρισιμότητα. Ως εκ τούτου όλοι οι κόμβοι θα έχουν και τους ίδιους δείκτες δομικής σπουδαιότητας.

Η παραπάνω παρατήρηση μας οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι δεν έχει σημασία σε ποιο κόμβο θα τοποθετηθεί η μονάδα με τη μέγιστη αξιοπιστία, αφού όλοι οι κόμβοι θεωρούνται ισοδύναμοι.

Με βάση τη συνάρτηση δομής του σειριακού συστήματος παρατηρούμε ότι για δύο τυχαίους κόμβους i ,j, ισχύει:

$$\varphi(x_i, x_j, \mathbf{x}^{(i,j)})= \varphi(x_j, x_i, \mathbf{x}^{(i,j)}), \quad \text{για όλα τα } \mathbf{x}^{(i,j)}.$$

Η παραπάνω σχέση υποδηλώνει ότι η $\varphi(\mathbf{x})$ είναι συμμετρική μετάθεση σε x_i και x_j. Ως εκ τούτου προκύπτει ότι οι κόμβοι i και j είναι ισοδύναμοι μεταθετικά κόμβοι μέσω οποιασδήποτε μετάθεσης έστω $\boldsymbol{\pi}$. Με βάση τη θεωρία τοποθέτησης μέσω ζευγαρωτών αναδιατάξεων λοιπόν, προκύπτει ότι όλες οι ζευγαρωτές αναδιατάξεις είναι ισοδύναμες. Άρα η τοποθέτηση των μονάδων δεν επηρεάζει την αξιοπιστία του συστήματος.

Με βάση τα παραπάνω συμπεράσματα, προκύπτει ότι δεν υπάρχει βέλτιστος αναλλοίωτος σχεδιασμός για ένα σειριακό σύστημα. Η αξιοπιστία του συστήματος διατηρεί την ίδια τιμή για όλες τις δυνατές ζευγαρωτές αναδιατάξεις.

Με σκοπό την καλύτερη κατανόηση του παραπάνω συμπεράσματος, επιλέξαμε να παραθέσουμε το παρακάτω παράδειγμα:

Έστω ότι μας δίνονται πέντε μονάδες, των οποίων οι αξιοπιστίες είναι ναι μεν άγνωστες, αλλά γνωρίζουμε ότι ικανοποιούν την παρακάτω ανισοτική σχέση:

$$0<p_1\leq p_2\leq p_3\leq p_4\leq p_5<1$$

Ζητείται να βρούμε το βέλτιστο σειριακό σύστημα για τις πέντε αυτές μονάδες.

Το πρώτο σύστημα που επιλέξαμε να δημιουργήσουμε είναι αυτό της μετάθεσης 1-2-3-4-5, δηλαδή το σύστημα στο οποίο τοποθετούμε πρώτα τη μονάδα με τη μικρότερη αξιοπιστία, μετά τη μονάδα με την αμέσως καλύτερη αξιοπιστία κ. ο. κ.

Το σύστημα αυτό έχει συνάρτηση δομής ίση με

$$\varphi(\mathbf{x}) = \min \{x_1, x_2, \ldots, x_5\}$$

όπου $x_1, x_2, \ldots, x_5$ υποδηλώνει τη δείκτρια της 1ης, 2ης, …, 5ης μονάδος αντίστοιχα, η οποία δείχνει σε τι κατάσταση βρίσκεται η μονάδα.

Αντίστοιχα το σύστημα αυτό έχει συνάρτηση αξιοπιστίας ίση με

$$R_{SS} = p_1p_2p_3p_4p_5$$

Αξίζει να αναφέρουμε ότι τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτουν δεδομένου της στοχαστικής ανεξαρτησίας των τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots, X_5$ των μονάδων.

Έστω τώρα ότι αποφασίζουμε να επιλέξουμε τυχαία κάποια άλλη μετάθεση από τις 5! μεταθέσεις που έχουμε, για παράδειγμα την 1-3-5-4-2.

Ομοίως με την παραπάνω διαδικασία το νέο σειριακό σύστημα θα έχει συνάρτηση δομής ίση με

$$\varphi(\mathbf{x}) = \min \{x_1, x_2, \ldots, x_5\}$$

Ενώ η συνάρτηση αξιοπιστίας του θα είναι ίση με

$$R_{SS} = p_1 p_3 p_5 p_4 p_2 = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5.$$

Παρατηρούμε ότι και για τη τυχαία μετάθεση η αξιοπιστία του συστήματος παρέμεινε σταθερή. Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγαμε με βάση οποιαδήποτε μετάθεση και αν επιλέγαμε. Συμπεραίνουμε άρα ότι στο σειριακό σύστημα δεν είναι εφικτή η εύρεση αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού.

3.3 Αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός για το παράλληλο σύστημα

Παράλληλο σύστημα, όπως έχουμε ήδη αναφέρει σε προηγούμενη ενότητα, είναι το σύστημα το οποίο λειτουργεί όταν λειτουργεί έστω μία εκ των μονάδων του. Το σύστημα αυτό έχει συνάρτηση δομής την:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \max \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

όπου $x_1, x_2, \ldots, x_n$ υποδηλώνει τη δείκτρια της $1^{ης}$, $2^{ης}$, …, n μονάδος αντίστοιχα, και δείχνει σε τι κατάσταση βρίσκεται η εκάστοτε μονάδα.

Η συνάρτηση αξιοπιστίας του παράλληλου συστήματος δίνεται από τον τύπο:

$$R_{PS} = 1-(1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n)$$

με p_1, p_2, …, p_n να υποδηλώνουν την αξιοπιστία των μονάδων 1, 2, …, n αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι στο παράλληλο σύστημα όλοι οι κόμβοι που το αποτελούν έχουν την ίδια κρισιμότητα. Κανένας από τους κόμβους δεν κρίνεται σημαντικότερος, αφού για να λειτουργήσει το σύστημα αρκεί να λειτουργεί έστω μία και μόνο μονάδα. Έχοντας όλοι οι κόμβοι την ίδια κρισιμότητα, προκύπτει ότι εκφράζονται και από τον ίδιο δείκτη δομικής σπουδαιότητας. Σύμφωνα λοιπόν με τις παραπάνω παρατηρήσεις οδηγούμαστε στο λογικό συμπέρασμα ότι οι κόμβοι σε ένα παράλληλο σύστημα είναι ισοδύναμοι μεταξύ τους.

Έστω ότι έχουμε τους τυχαίους κόμβους i και j ενός παράλληλου συστήματος. Παρατηρούμε ότι για τους τυχαίους αυτούς κόμβους ισχύει:

$$\varphi(x_i, x_j, \boldsymbol{x}^{(i,j)}) = \varphi(x_j, x_i, \boldsymbol{x}^{(i,j)}), \quad \text{για όλα τα } \boldsymbol{x}^{(i,j)}.$$

Η $\varphi(\mathbf{x})$ δηλαδή είναι συμμετρική ως προς τις μεταθέσεις των x_i και x_j. Ως εκ τούτου προκύπτει ότι οι κόμβοι i και j είναι ισοδύναμοι μεταθετικά. Γενικεύοντας το συμπέρασμα αυτό για όλους τους κόμβους, προκύπτει ότι όλοι οι κόμβοι στο παράλληλο σύστημα είναι ισοδύναμοι μεταθετικά, δηλαδή οποιαδήποτε ζευγαρωτή αναδιάταξη των μονάδων και να πραγματοποιήσουμε η αξιοπιστία του συστήματος θα παραμείνει η ίδια.

Δεχόμενοι λοιπόν όλες τις παραπάνω παρατηρήσεις προκύπτει, ότι με βάση τις θεωρίες που έχουν αναπτυχθεί για τη δημιουργία ενός αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού συστήματος, δε μπορούμε να βελτιώσουμε την αξιοπιστία ενός παράλληλου συστήματος.

Τέλος στο παραπάνω συμπέρασμα καταλήγουμε παρατηρώντας και τη μορφή της αξιοπιστίας του παράλληλου συστήματος $R_{PS.}$ Η αξιοπιστία του συστήματος υπολογίζεται ως η τιμή που προκύπτει αν από τη μονάδα αφαιρέσουμε το γινόμενο των διαφορών $(1\text{-}p_1)(1\text{-}p_2)\ldots(1\text{-}p_n)$. Γίνεται αντιληπτό ότι σε όποια θέση και να τοποθετηθούν οι μονάδες μας, το αποτέλεσμα του γινομένου, ως εκ τούτου και της τιμής της αξιοπιστίας, παραμένει το ίδιο.

3.4 Αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός για το σύστημα γέφυρα

Ως γέφυρα παρουσιάζεται το σύστημα το οποίο λειτουργεί αν υπάρχει τουλάχιστον μία διαδρομή από την περιοχή εισόδου στην περιοχή εξόδου. Μια κλασική γέφυρα πέντε μονάδων έχει ήδη παρουσιαστεί σε προηγούμενη ενότητα (Σχήμα 1.3).

Η απλή γέφυρα των πέντε μονάδων χαρακτηρίζεται από μια συνάρτηση δομής της μορφής:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1\text{-}(1\text{-}x_1x_2)(1\text{-}x_4x_5)(1\text{-}x_1x_3x_5)(1\text{-}x_4x_3x_2).$$

Για να μπορέσουμε να βρούμε βέλτιστη μετάθεση για το σύστημα της γέφυρας θα πρέπει πρώτα να βρούμε τη σχέση που διέπει τις κρισιμότητες των κόμβων του.

Αν A_i είναι το σύνολο που περιέχει όλα τα ελάχιστα σύνολα διακοπής της συνάρτησης δομής φ που περιέχουν τον κόμβο i, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2 για να ισχύει $i \overset{c}{>} j$ αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει $A_j \subset A_i$.

Για τους πέντε κόμβους της γέφυρας έχουμε:

- Για τον κόμβο 1: A_1=({1,4},{1,3,5}}
- Για τον κόμβο 2: A_2=({2,5},{2,3,4}}
- Για τον κόμβο 3: A_3=({1,3,5},{2,3,4}}

- Για τον κόμβο 4: A_4=({1,4},{2,3,4})
- Για τον κόμβο 5: A_5=({2,5},{1,3,5})

Με βάση λοιπόν το Θεώρημα 2.2 αδυνατούμε να αποφανθούμε ποιος κόμβος είναι κρισιμότερος στο σύστημα γέφυρα.

Αντιθέτως με βάση τη θεωρία του δείκτη δομικής σπουδαιότητας ο Meng (2004) κατάφερε να δείξει ότι ο κεντρικός κόμβος σε μία γέφυρα (ο κόμβος 3 με βάση το Σχήμα 1.3) είναι ο κόμβος με τη μικρότερη κρισιμότητα και ο κόμβος με το μικρότερο δείκτη δομικής σπουδαιότητας.

Παρατηρούμε ακόμα ότι με βάση το Θεώρημα 2.6 μπορούμε να αποφανθούμε ότι το ζευγάρι των κόμβων 1,2 και 4,5 είναι ισοδύναμα μεταθετικά. Στο συμπέρασμα αυτό καταλήγουμε παρατηρώντας ότι αν αντικαταστήσουμε το ζευγάρι των κόμβων 1,2 με το ζευγάρι 4,5 (και αντίστροφα) δημιουργούμε μία συμμετρική μετάθεση, αφού η συνάρτηση δομής του συστήματος παραμένει αμετάβλητη.

Το παραπάνω συμπέρασμα σημαίνει ότι για την εύρεση των συμμετρικών μεταθέσεων, για παράδειγμα της μετάθεσης 1-2-3-4-5, αρκεί να κρατήσουμε την κεντρική μονάδα (τη μονάδα 3 δηλαδή) σταθερή και να εναλλάσσουμε αμοιβαία θέσεις ανάμεσα στα 1, 2 και 4, 5. Πιο αναλυτικά η δοθείσα μετάθεση 1-2-3-4-5 έχει συμμετρική μετάθεση την μετάθεση 4-5-3-1-2.

Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις μπορούμε να ισχυριστούμε ότι δεν υπάρχει αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός για το σύστημα της γέφυρας. Μπορεί όμως να υπάρξει μεθοδολογία η οποία θα μας δώσει σύστημα μεγαλύτερης αξιοπιστίας από την αξιοπιστία του αρχικού μας συστήματος, χωρίς να μπορούμε να ισχυριστούμε όμως ότι η αυτή αξιοπιστία αποτελεί τη μέγιστη δυνατή αξιοπιστία για το σύστημα. Με βάση τα παραπάνω καταφέρνουμε να μειώσουμε το πλήθος των 5! μεταθέσεων που χρειάζονται για την εύρεση της βέλτιστης αξιοπιστίας σε 4!, αφού έχουμε εκ των προτέρων αποφασίσει να τοποθετήσουμε τη μονάδα με τη μικρότερη αξιοπιστία στο κέντρο της γέφυρας.

Για τη δημιουργία λοιπόν μιας καλύτερης αξιοπιστίας για ένα σύστημα γέφυρα πέντε μονάδων, των οποίων οι αξιοπιστίες ακολουθούν την σχέση $0<p_1\leq p_2\leq p_3\leq p_4\leq p_5<1$, με βάση τα όσα ειπώθηκαν παραπάνω, θα πρέπει να ακολουθήσουμε την ακόλουθη μέθοδο:

- Επιλέγουμε τη μονάδα με τη μικρότερη αξιοπιστία p_1 και την τοποθετούμε στο κέντρο της γέφυρας

- Επιλέγουμε τις δύο αμέσως καλύτερες μονάδες p_2, p_3 και τις τοποθετούμε είτε στους κόμβους 1, 2 είτε στους κόμβους 4, 5
- Επιλέγουμε τέλος τις δύο καλύτερες μονάδες p_4, p_5 και τις τοποθετούμε επίσης είτε στους κόμβους 4, 5 είτε στους κόμβους 1, 2

Για να γίνει καλύτερα αντιληπτή η μέθοδος εφαρμόζουμε το ακόλουθο παράδειγμα:

Έστω ότι έχουμε πέντε μονάδες με αξιοπιστίες p_1=0,1, p_2=0,2, p_3=0,3, p_4=0,4 και p_5=0,5 και θέλουμε να δημιουργήσουμε σύστημα γέφυρα βέλτιστης αξιοπιστίας.

Τοποθετώντας τις μονάδες όπως μας δίνονται (δηλαδή δημιουργώντας τη μετάθεση 1-2-3-4-5) προκύπτει ότι το σύστημα έχει αξιοπιστία R=0,234.

Χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία που δόθηκε παραπάνω, επιλέγουμε για την κεντρική θέση της γέφυρας την μονάδα p_1, μιας και αυτή έχει τη μικρότερη τιμή αξιοπιστίας. Άρα οι μεταθέσεις που αυξάνουν την αρχική μας αξιοπιστία θα είναι οι μεταθέσεις 2-3-1-4-5 και 4-5-1-2-3. Πράγματι οι παραπάνω μεταθέσεις δημιουργούν μεγαλύτερη αξιοπιστία στο σύστημα, της τάξεως του R=0,258.

Τέλος αξίζει να αναφερθεί ότι εναλλάσσοντας αμφότερα τις μονάδες μέσα στα ζεύγη των κόμβων που μεταθέτουμε, δηλαδή δημιουργώντας τις μεταθέσεις 2-3-1-5-4, 3-2-1-4-5, 3-2-1-5-4, 4-5-1-3-2, 5-4-1-2-3 και 5-4-1-3-2, παράγουμε αξιοπιστία η τιμή της οποίας πλησιάζει την αξιοπιστία που δόθηκε παραπάνω (προκύπτει αξιοπιστία της τάξεως του R=0,257).

Για επιπλέον επαλήθευση των ισχυρισμών μας μπορούμε να δοκιμάσουμε να υπολογίσουμε την αξιοπιστία για τις υπόλοιπες 118 μεταθέσεις (από 5!=120 το σύνολο) και να επιβεβαιώσουμε το αποτέλεσμά μας.

3.5 Αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός για το σύστημα $S(n,k)$:G

Το σύστημα $S(n,k)$:G είναι ένα σύστημα το οποίο λειτουργεί αν λειτουργούν k από τις n μονάδες του.

Παρατηρούμε ότι για την τιμή k=1, το σύστημα λειτουργεί αν έστω και μία μονάδα του λειτουργεί. Προκύπτει δηλαδή ότι το σύστημα αντιστοιχεί σε ένα παράλληλο σύστημα.

Αντίστοιχα παρατηρούμε ότι αν k=n, τότε το σύστημα λειτουργεί αν όλες οι μονάδες του λειτουργούν. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει ένα σειριακό σύστημα.

Για τις περιπτώσεις που k=1 και k=n, δηλαδή για τις περιπτώσεις του παράλληλου και του σειριακού αντίστοιχα συστήματος που δημιουργείται, γνωρίζουμε από προηγούμενες υποενότητες του παρόντος κεφαλαίου ότι η τιμή της αξιοπιστίας του συστήματος είναι ανεξάρτητη της μετάθεσης των μονάδων του συστήματος.

Με χρήση του Θεωρήματος 2.6 και εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση του σειριακού και του παράλληλου συστήματος, καταλήγουμε ότι στο σύστημα $S(n,k)$:G οποιαδήποτε μετάθεση και αν επιλεχθεί, το σύστημα αποκτά τη μέγιστη δυνατή αξιοπιστία για τις δοθέντες μονάδες του.

3.6 Αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός για το συνεχόμενο-*k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα

Τα συνεχόμενα-*k*-από-τα-*n*:*G* συστήματα (consecutive-*k*-out-of-*n*:*G* σε συντομογραφία Con/*k*/*n*:*G*) αποτελούν συστήματα για οποία, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, λειτουργούν αν και μόνο αν λειτουργούν *k* συνεχόμενες μονάδες τους. Τα συστήματα αυτά χωρίζονται σε δύο βασικές μεγάλες κατηγορίες, στα γραμμικά και στα κυκλικά συνεχόμενα-*k*-από-τα-*n*: *G* συστήματα.

Τα γραμμικά (linear) συνεχόμενα-*k*-από-τα-*n*:*G* συστήματα είναι τα συστήματα για τα οποία οι *n* μονάδες τοποθετούνται σε ευθεία γραμμή, ενώ τα κυκλικά (circular) συνεχόμενα-*k*-από-τα-*n*:*G* συστήματα είναι συστήματα στα οποία η αρχική μονάδα ενώνεται και με την τελευταία μονάδα, με αποτέλεσμα το σχηματισμό κυκλικής τοποθέτησης.

3.6.1. Γραμμικό συνεχόμενο-*k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα

Για τη δημιουργία ενός αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού στα γραμμικά συνεχόμενα-*k*-από-τα-*n*:*G* συστήματα θα πρέπει να εξετάσουμε ξεχωριστά τις διάφορες τιμές που παίρνει το *k* και αναλόγως με την περίπτωση θα προκύψουν τα αποτελέσματά μας.

- $\boldsymbol{k = 1}$

Ξεκινώντας την ανάλυσή μας επιλέγουμε την τιμή k=1, δηλαδή ένα γραμμικό Con/1/*n*:*G* σύστημα. Το σύστημά μας λειτουργεί όταν λειτουργεί έστω και μία από τις μονάδες του. Επομένως προκύπτει ότι το σύστημά μας πλέον συμπίπτει με ένα παράλληλο σύστημα το οποίο εξ' ορισμού χρειάζεται μόνο μία μονάδα σε λειτουργία για να λειτουργήσει. Όπως έχουμε ήδη δείξει σε προηγούμενη ενότητα η τοποθέτηση των μονάδων σε ένα τέτοιο σύστημα, δεν επηρεάζει την αξιοπιστία του συστήματος.

Άρα για την τιμή k=1, μπορούμε να τοποθετήσουμε τις μονάδες μας με βάση οποιαδήποτε μετάθεση.

- $\boldsymbol{k = n}$

Εξετάζοντας την ακραία τιμή k=n, παρατηρούμε ότι δημιουργείται το γραμμικό σύστημα Con/n/n:G. Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε ένα γραμμικό σύστημα το οποίο λειτουργεί, αν και μόνο αν λειτουργούν όλες οι μονάδες του. Το σύστημά μας πλέον αντιστοιχεί σε ένα κλασσικό σειριακό σύστημα που καταρρέει αν έστω και μία εκ των μονάδων του καταρρεύσει. Όπως γνωρίζουμε η τοποθέτηση των μονάδων σε αυτό το σύστημα δε βελτιώνει την αξιοπιστία του συστήματος.

Άρα στο γραμμικό συνεχόμενο-k-από-τα-n:G σύστημα για k=n, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε μετάθεση.

- $\boldsymbol{2 \leq k < \frac{1}{2}n}$

Για την περίπτωση που η τιμή του k βρίσκεται εντός του διαστήματος $[2, \frac{1}{2}n)$, έχει δειχθεί το παρακάτω θεώρημα για την ύπαρξη αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού συστήματος (βλέπε Zuo and Kuo (1990) καθώς και το βιβλίο των ιδίων (2003)).

Θεώρημα 3.1. *Δεν υπάρχει αναλλοίωτη βέλτιστη μετάθεση για ένα γραμμικό συνεχόμενο-k-από-τα-n:G σύστημα, όταν* $2 \leq k < \frac{1}{2}n$.

Το Θεώρημα 3.1 υποδηλώνει ότι η βέλτιστη μετάθεση στο γραμμικό Con/k/n:G σύστημα, για το οποίο ισχύει $2 \leq k < \frac{1}{2}n$, εξαρτάται από τις τιμές των αξιοπιστιών των μονάδων και δε μπορεί να βρεθεί λύση καθολική και ανεξάρτητη αυτών.

- $\boldsymbol{k < n \leq 2k}$

Σύμφωνα με τους Zuo and Kuo (1990) η αξιοπιστία ενός γραμμικού συνεχόμενου-k-από-τα-n:G συστήματος για το οποίο ισχύει $n \leq 2k$, είναι ίση με

$$R_G(n;k)=\sum_{i=1}^{n-k+1}(q_{i+k}\prod_{j=i}^{i+k-1}p_j),$$

όπου p_i είναι η αξιοπιστία της μονάδος i, με i=1, 2, …, n, ενώ q_i είναι η αναξιοπιστία της μονάδος i και q_{n+1}=1. Μια διαφορετική έκφραση της αξιοπιστίας είναι η παρακάτω

$$R_G(n;k)=\sum_{i=1}^{n-k+1}(\prod_{j=i}^{i+k-1}p_j)-\sum_{i=1}^{n-k}(\prod_{j=i}^{i+k}p_j).$$

Για τη βέλτιστη μετάθεση σε ένα γραμμικό συνεχόμενο-k-από-τα-n:G σύστημα με $k<n\le 2k$, ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα (Zuo and Kuo (2003)).

Θεώρημα 3.2. *Σε ένα γραμμικό συνεχόμενο-k-από-τα-n:G σύστημα με $k<n\le 2k$, η μετάθεση:*

L_n=(1, 3, 5, …, 2min[k,n-k+1]-1,(*οποιαδήποτε τοποθέτηση*), 2min[k,n-k+1], …, 6, 4, 2) *είναι η βέλτιστη μετάθεση*

Το Θεώρημα 3.2 προκύπτει μέσω των ακόλουθων παρατηρήσεων:

- ***n* < 2*k***

Στην περίπτωση που $n<2k$, οι $2k-n$ μεσαίες μονάδες βρίσκονται σε κάθε ελάχιστο διάνυσμα λειτουργίας του συστήματος. Γίνεται λοιπόν εμφανές ότι αυτές οι μονάδες πρέπει να λειτουργήσουν για να λειτουργήσει το σύστημα. Άρα οι $2k-n$ πιο αξιόπιστες μονάδες πρέπει να τοποθετηθούν σε αυτές τις θέσεις. Σημειώνεται ότι οι υπόλοιπες μονάδες μας δημιουργούν ένα γραμμικό Con/(n-k)/n:G σύστημα.

- ***n* = 2*k***

Στην περίπτωση που $n=2k$, το σύστημα που έχουμε να μελετήσουμε είναι το γραμμικό Con/k/2k:G σύστημα. Η ύπαρξη ενός αναλλοίωτου βέλτιστου συστήματος σε αυτή την περίπτωση προϋποθέτει την ικανοποίηση των παρακάτω σχέσεων (βλέπε Shen and Zuo (1994α)):

1) $p_i<p_j$, για $1\le i<j\le k$

2) $p_i>p_j$, για $k+1\le i<j\le 2k$

3) $(p_i-p_j)(p_{i-1}-p_{j+1})>0$, για $1<i\le k$, $j=2k-i+1$

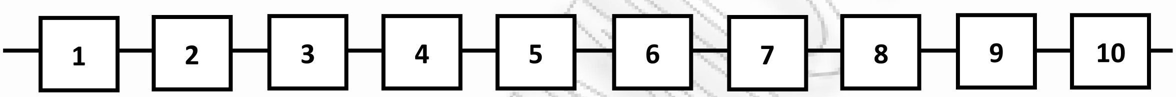
4) $(p_i-p_j)(p_{i-1}-p_{j+1})<0$, για $1<i\le k$, $j=2k-i+1$

Η μετάθεση που προτείνεται από το Θεώρημα 3.2 είναι και η μοναδική μετάθεση που ικανοποιεί τις παραπάνω σχέσεις.

Ως ειδική περίπτωση της παραπάνω αναφέρεται και η περίπτωση ενός γραμμικού συνεχόμενου-k-από-τα-n:G συστήματος, με $\frac{n}{2} \leq k \leq n$-2. Τότε ως βέλτιστη τοποθέτηση έχουμε την:

(1, 3, 5, …, 2(n-k)-1, (οποιαδήποτε τοποθέτηση), 2(n-k), …, 6, 4, 2)

Θα παρουσιάσουμε παρακάτω μια εφαρμογή στην οποία δημιουργούμε έναν αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό για γραμμικό συνεχόμενο-k-από-τα-n:G σύστημα.
Έστω ότι έχουμε το γραμμικό συνεχόμενο-4-από-τα-10:G σύστημα, για το οποίο θέλουμε να βρούμε την τοποθέτηση η οποία θα παρέχει στο σύστημα μέγιστη αξιοπιστία.



Σχήμα 3.1: Γραμμικό συνεχόμενο-4-από-τα-10:G σύστημα

Γνωρίζουμε ότι για τις μονάδες του συστήματος ισχύει η σχέση

$$0<p_1 \leq p_2 \leq p_3 \ldots \leq p_{10}<1$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημά μας ανήκει στην περίπτωση του $k<n \leq 2k$. Άρα με βάση τα όσα έχουν ειπωθεί παραπάνω η ιδανική μετάθεση θα είναι της μορφής:

(1, 3, 5, …, 2min[k,n-k+1]-1,(οποιαδήποτε τοποθέτηση), 2min[k,n-k+1], …, 6, 4, 2)

Άρα η μετάθεση που μεγιστοποιεί την αξιοπιστία στο γραμμικό σύστημα συνεχόμενο-6-από-τα-10:G είναι η 1-3-5-7-9-10-8-6-4-2.

Θέλοντας να επιβεβαιώσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα, επιλέγουμε να δώσουμε τιμές στις αξιοπιστίες των μονάδων μας.

Έστω ότι έχουμε τις ακόλουθες αξιοπιστίες για τις μονάδες μας p_1=0,03, p_2=0,14, p_3=0,22, p_4=0,36, p_5=0,47, p_6=0,56, p_7=0,69, p_8=0,76, p_9=0,83 και p_{10}=0,91.

Σύμφωνα με τη θεωρία που γνωρίζουμε, το γραμμικό συνεχόμενο-6-από-τα-10:G σύστημα θα έχει τα ακόλουθα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας:

P_1={1,2,3,4,5,6}, P_2={2,3,4,5,6,7}, P_3={3,4,5,6,7,8} , P_4={4,5,6,7,8,9} και

P_5={5,6,7,8,9,10},

από τα οποία προκύπτει η συνάρτηση δομής:

$\varphi(\mathbf{x})$ = $1-\prod_{j=1}^{5}(1-\prod_{i\in P_j} x_i)$

= $1-(1-x_1x_2x_3x_4x_5x_6)(1-x_2x_3x_4x_5x_6x_7)(1-x_3x_4x_5x_6x_7x_8)(1-x_4x_5x_6x_7x_8x_9)(1-x_5x_6x_7x_8x_9x_{10})$.

Η βέλτιστη μετάθεση σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2 γνωρίζουμε ότι είναι η 1-3-5-7-9-10-8-6-4-2. Με βάση τα δεδομένα που έχουμε βρίσκουμε ότι η αξιοπιστία του συστήματος για αυτή τη μετάθεση είναι ίση με 0,169999.

Έστω ότι επιλέγουμε στην τύχη δύο άλλες μεταθέσεις των οποίων την αξιοπιστία θέλουμε να συγκρίνουμε με τη βέλτιστη μετάθεση. Έστω ότι επιλέγουμε τις μεταθέσεις 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10 και 7-3-8-1-5-9-6-4-10-2. Οι μεταθέσεις αυτές μας δίνουν αξιοπιστία συστήματος 0,110329 και 0,0133224 αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι και οι δύο τυχαίες μεταθέσεις δίνουν αξιοπιστία μικρότερη από τη βέλτιστη που δόθηκε παραπάνω.

Με βάση το θεώρημα 3.2, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι από όλες τις 10! μεταθέσεις του γραμμικού συνεχόμενου-6-από-τα-10:*G* συστήματος, μόνο η 1-3-5-7-9-10-8-6-4-2 παράγει μέγιστη δυνατή αξιοπιστία στο σύστημά μας.

3.6.2. Σύνθετο συνεχόμενο-*k*-από-τα-*n*:*G* σε σειρά σύστημα

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε το σύνθετο συνεχόμενο-*k*-από-τα-*n*:*G* σε σειρά σύστημα. Το σύστημα αυτό αποτελεί από γραμμικά συνεχόμενα-*k*-από-τα-*n*:*G* υποσυστήματα συνδεδεμένα σε σειρά μεταξύ τους. Το σύστημα λειτουργεί αν και μόνο αν όλα τα υποσυστήματα του λειτουργούν.

Το σύνθετο συνεχόμενο-*k*-από-τα-*n*:*G* σε σειρά σύστημα έχει αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό, όταν ισχύει $k<n\leq 2k$ οπότε όλα τα Con/*k*/*n*:*G* υποσυστήματα που το αποτελούν έχουν αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό.

Έστω $k<n<2k$ και έστω οι μεταθέσεις $X=(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $X^1=(p_{n-k+1}, p_{n-k+2}, \ldots, p_k)$ και $X^2=(p_1, \ldots, p_{n-k}, p_{k+1}, \ldots, p_n)$. Έστω ότι X_s^1 υποδηλώνει το σειριακό υποσύστημα *s* που ακολουθεί τη μετάθεση X^1 και X_G το συνεχόμενο-*k*-από-τα-*n:G* σύστημα της μετάθεσης *X*. Τότε σύμφωνα με τους Shen and Zuo (1994β) η αξιοπιστία του συνεχόμενου-*k*-από-τα-*n*:*G* συστήματος θα είναι ίση με την αξιοπιστία που θα προκύψει από το σειριακό υποσύστημα *s* που ακολουθεί τη μετάθεση X^1 και ένα συνεχόμενο-(n-k)-από-τα-2(n-k):*G* υποσύστημα που ακολουθεί τη μετάθεση X^2.

Το παραπάνω συμπέρασμα υποδηλώνει ότι ένα Con/k/n:G σύστημα με $k<n<2k$ είναι ισοδύναμο με ένα σειριακό υποσύστημα και ένα Con/(n-k)/2(n-k):G υποσύστημα, ενωμένα σε σειρά.

Επιπλέον σύμφωνα με τους Shen and Zuo (1994β) αν έχουμε ένα σύστημα (έστω X) που αποτελείται από μία μονάδα αξιοπιστίας p και ένα Con/k/2k:G υποσύστημα ενωμένα σε σειρά, τότε για τη δημιουργία ενός βέλτιστου σχεδιασμού η μονάδα αξιοπιστίας p πρέπει να είναι η μονάδα με τη μεγαλύτερη αξιοπιστία.

Τα δύο παραπάνω αποτελέσματα υποδηλώνουν ότι ο βέλτιστος σχεδιασμός ενός γραμμικού συνεχόμενου-k-από-τα-n:G συστήματος, με $k<n<2k$, επιτυγχάνεται όταν οι $2k$-n πιο αξιόπιστες μονάδες τοποθετηθούν στις $2k$-n μεσαίες θέσεις. Τα αποτελέσματα αυτά αποτελούν τους βασικούς άξονες της απόδειξης του Θεωρήματος 3.2.

Σύμφωνα με τους Shen and Zuo (1994β) έχουμε τα ακόλουθα δύο Θεωρήματα.

Θεώρημα 3.3. *Ο βέλτιστος σχεδιασμός ενός συστήματος που αποτελείται από δύο* Con/k/2$κ$:G *υποσυστήματα ενωμένα σε σειρά, επιτυγχάνεται όταν στη θέση i του πρώτου υποσυστήματος βρίσκεται μονάδα λιγότερο αξιόπιστη (περισσότερο αξιόπιστη) από τη μονάδα στη θέση i του δεύτερου υποσυστήματος για* $1 \leq i \leq k$ *(για* $k+1 \leq i \leq 2k$*).*

Έστω ότι έχουμε στην διάθεσή μας δύο συστήματα, το $X=(p_1, p_2, \ldots, p_{2k})$ και το $Y=(q_1, q_2, \ldots, q_{2k})$. Με βάση τα δύο αυτά συστήματα θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα σύνθετο το οποίο θα έχει για πρώτο υποσύστημα το X και για δεύτερο υποσύστημα το Y.

Για να έχει το σύνθετο σύστημα $X_G(k,2k) \cap Y_G(k,2k)$ βέλτιστο σχεδιασμό θα πρέπει και τα δύο υποσυστήματα X και Y που το αποτελούν να έχουν βέλτιστο σχεδιασμό και επιπλέον να ισχύουν οι σχέσεις:

$$p_i < q_i, \text{ για } 1 \leq i \leq k \quad \text{και} \quad p_i > q_i, \text{ για } k+1 \leq i \leq 2k,$$

όπου p_i είναι η αξιοπιστία της μονάδος i του πρώτου υποσυστήματος και q_i είναι η αξιοπιστία της μονάδος i του δεύτερου υποσυστήματος.

Για την εύρεση βέλτιστης αξιοπιστίας για το σύνθετο σύστημα $X_G(k,2k) \cap Y_G(k,2k)$ ακολουθούμε την παρακάτω μεθοδολογία:

1) Τοποθετούμε την καλύτερη μονάδα από αυτές που απέμειναν στο υποσύστημα X και την αμέσως καλύτερη μονάδα στο υποσύστημα Y.

2) Τοποθετούμε την καλύτερη μονάδα από όσες απέμειναν στο υποσύστημα Y και την αμέσως καλύτερη μονάδα στο υποσύστημα X.

3) Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1, 2 της μεθόδου μέχρι να τοποθετηθούν όλες οι μονάδες.

Για την εύρεση βέλτιστης αξιοπιστίας για το σύστημα $X_G(k,2k) \cap Y_G((k\text{-}1),2(k\text{-}1))$ ακολουθούμε την παρακάτω μεθοδολογία:

1) Τοποθετούμε την καλύτερη και τη χειρότερη μονάδα στο υποσύστημα X.

2) Τοποθετούμε την καλύτερη από τις υπόλοιπες μονάδες στο υποσύστημα X και την αμέσως καλύτερη μονάδα στο υποσύστημα Y.

3) Τοποθετούμε την καλύτερη από τις υπόλοιπες μονάδες στο υποσύστημα Y και την αμέσως καλύτερη μονάδα στο υποσύστημα X.

4) Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2, 3 μέχρι να τοποθετηθούν όλες οι μονάδες.

Θεώρημα 3.4. *Έστω το σύνθετο Con/k/n:G σύστημα* X_M, *το οποίο αποτελείται από* m *Con/k/2k:G υποσυστήματα ως εξής:*

$$X_M = X_s^1(k,2k) \cap X_G^2(k,2k) \cap \ldots \cap X_G^m(k,2k).$$

Εάν έχουμε $2mk$ *μονάδες για τις αξιοπιστίες των οποίων ισχύει* $p_1<p_2<\ldots<p_{2mk-1}<p_{2mk}$, *τότε η βέλτιστη τοποθέτηση για το σύστημα* X_M *βρίσκεται με βάση τον ακόλουθο αλγόριθμο:*

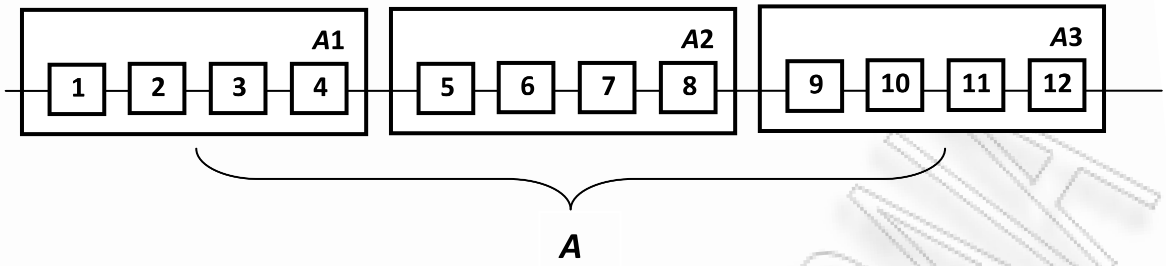
1) Θέτουμε $i=1$.

2) Τοποθετούμε τις μονάδες $p_{2(i-1)m+1}$, $p_{2(i-1)m+2}$, …, $p_{2(i-1)m+m}$ *στα υποσυστήματα* X^1, X^2,…, X^m *αντιστοίχως.*

3) Τοποθετούμε τις μονάδες $p_{(2i-1)m+1}$, $p_{(2i-1)m+2}$, …, p_{2im} *στα υποσυστήματα* X^m, X^{m-1},…, X^1 *αντιστοίχως.*

4) Αυξάνουμε το i *κατά ένα και επαναλαμβάνουμε τα βήματα* 2, 3, *έως ότου τοποθετηθούν όλες οι μονάδες που διαθέτουμε.*

Θέλοντας να γίνουν καλύτερα αντιληπτά τα παραπάνω θεωρήματα επιλέγουμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα 12 μονάδων, το οποίο ονομάζουμε A. Το σύστημα A αποτελείται από τρία γραμμικά συνεχόμενα-2-από-τα-4:G υποσυστήματα, τα οποία για χάρη ευκολίας ονομάζουμε A_1, A_2 και A_3, συνδεδεμένα σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3.2: Σύνθετο γραμμικό συνεχόμενο-2-από-τα-3:G σύστημα

Μας δίνονται οι αξιοπιστίες δώδεκα μονάδων, έστω p_1=0,05, p_2=0,11, p_3=0,18, p_4=0,29, p_5=0,36, p_6=0,49, p_7=0,58, p_8=0,65, p_9=0,71, p_{10}=0,77, p_{11}=0,86 και p_{12}=0,91. Μας ζητείται να τοποθετήσουμε τις μονάδες στο σύστημα με σκοπό να επιτύχουμε τη μέγιστη δυνατή αξιοπιστία.

Σύμφωνα με την μεθοδολογία του Θεωρήματος 3.4, αφού για τις αξιοπιστίες των μονάδων ισχύει $p_1<p_2<\ldots<p_{11}<p_{12}$, επιλέγουμε να τοποθετήσουμε τη μονάδα p_1 στο υποσύστημα A_1, τη μονάδα p_2 στο υποσύστημα A_2, τη μονάδα p_3 στο υποσύστημα A_3, τη μονάδα p_4 στο υποσύστημα A_1, κ.ο.κ.

Σύμφωνα με αυτή την τοποθέτηση στο υποσύστημα A_1 έχουμε τοποθετήσει τις μονάδες p_1, p_4, p_7, p_{10}, στο υποσύστημα A_2 έχουμε τοποθετήσει τις μονάδες p_2, p_5, p_8, p_{11} και στο υποσύστημα A_3 έχουμε τοποθετήσει τις μονάδες p_3, p_6, p_9, p_{12}.

Με βάση το Θεώρημα 3.2 σε ένα γραμμικό συνεχόμενο-k-από-τα-n:G σύστημα με $k<n\leq 2k$, η μετάθεση:

$$L_n=(1, 3, 5, \ldots, 2\min[k,n-k+1]-1, (\text{οποιαδήποτε τοποθέτηση}), 2\min[k,n-k+1], \ldots, 6, 4, 2)$$

κρίνεται ως η μετάθεση που δίνει αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό. Άρα στο υποσύστημα A_1 η μετάθεση που μεγιστοποιεί την αξιοπιστία του είναι η 1-7-10-4 (η αρίθμηση γίνεται με βάση τις αρχικές μονάδες που μας δόθηκαν), στο υποσύστημα A_2 η μετάθεση που μεγιστοποιεί την αξιοπιστία του είναι η 2-8-11-5 και στο υποσύστημα A_3 η μετάθεση που μεγιστοποιεί την αξιοπιστία του είναι η 3-9-12-6.

Πραγματοποιώντας τις παραπάνω βέλτιστες μεταθέσεις, προκύπτει ότι το υποσύστημα A_1 έχει μέγιστη δυνατή αξιοπιστία ίση με R_1=0,547056, το υποσύστημα A_2 έχει μέγιστη δυνατή αξιοπιστία ίση με R_2=0,67737 και το υποσύστημα A_3 έχει μέγιστη δυνατή αξιοπιστία ίση με R_3=0,786913.

Καταλήγουμε λοιπόν το βασικό μας σύστημα A να αποτελείται ουσιαστικά από τρεις μονάδες των οποίων οι αξιοπιστίες είναι ίσες με R_1, R_2 και R_3. Ουσιαστικά το σύστημα A είναι πλέον ένα γραμμικό συνεχόμενο-2-από-τα-3:G σύστημα. Με βάση το θεώρημα 3.2 σαν βέλτιστη μετάθεση ορίζεται η 1-3-2, δηλαδή η μετάθεση η οποία τοποθετεί πρώτα το υποσύστημα A_1, έπειτα το υποσύστημα A_2 και τέλος το υποσύστημα A_3.

Με βάση τις αξιοπιστίες των υποσυστημάτων που υπολογίσαμε, η βέλτιστη αυτή μετάθεση παρέχει στο βασικό σύστημα A αξιοπιστία ίση με 0,671919. Η τιμή αυτή αποτελεί τη μέγιστη δυνατή αξιοπιστία για το σύστημα A του Σχήματος 3.2.

Παρακάτω επιλέγουμε να δημιουργήσουμε μία τυχαία τοποθέτηση των μονάδων στα τρία υποσυστήματα, με σκοπό να συγκρίνουμε τα αποτελέσματά μας με τη βέλτιστη τοποθέτηση που προέκυψε με βάση το Θεώρημα 3.4.

Αυθαίρετα αποφασίζουμε να τοποθετήσουμε στο υποσύστημα A_1 τις πρώτες τέσσερις μονάδες που μας δίνονται (μονάδες με αξιοπιστίες p_1, p_2, p_3, p_4), στο υποσύστημα A_2 τις επόμενες τέσσερις μονάδες που μας δίνονται (μονάδες με αξιοπιστίες p_5, p_6, p_7, p_8) και τέλος στο υποσύστημα A_3 τις τέσσερις τελευταίες μονάδες που μας δίνονται (μονάδες με αξιοπιστίες p_9, p_{10}, p_{11}, p_{12}). Με βάση το Θεώρημα 3.2 οι μεταθέσεις που κρίνονται βέλτιστες για κάθε υποσύστημα είναι οι 1-3-4-2, 5-7-8-6 και 9-11-12-10, οι οποίες παρέχουν αξιοπιστίες R_1=0,084748, R_2=0,58385 και R_3=0,935652.

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα για τα υποσυστήματα μας, προκύπτει ότι η αξιοπιστία του συστήματος A είναι ίση με:

$$R_A = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 = 0{,}084748 \cdot 0{,}58385 \cdot 0{,}935652 = 0{,}0462961$$

Η τιμή αυτή είναι προφανώς πολύ μικρότερη από την αξιοπιστία που προέκυψε με εφαρμογή του Θεωρήματος 3.4.

3.6.3. Κυκλικό συνεχόμενο-*k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα

Σε αντιστοιχία με τη μελέτη του γραμμικού συνεχόμενου-k-από-τα-n:G συστήματος, για την εύρεση ενός αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού για το κυκλικό συνεχόμενο-k-από-τα-n:G σύστημα θα πρέπει να εξεταστεί κάθε περίπτωση για τις τιμές του k ξεχωριστά.

- **$k = 1$**

Για την τιμή k=1, το σύστημα που προκύπτει είναι το κυκλικό Con/1/n:G. Το σύστημα αυτό αποτελεί ένα σύστημα του οποίου οι μονάδες είναι συνδεδεμένες κυκλικά και λειτουργεί αν έστω και μία εξ αυτών των μονάδων λειτουργεί.

Παρατηρούμε ότι, ένα σύστημα με αυτά τα χαρακτηριστικά λειτουργίας, αντιστοιχεί σε ένα παράλληλο σύστημα. Για το παράλληλο σύστημα γνωρίζουμε ότι οποιαδήποτε μετάθεση και αν πραγματοποιηθεί, δεν αλλάζει η τιμή της αξιοπιστίας του συστήματος.

Άρα όταν ισχύει k=1, ο αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός επιτυγχάνεται για οποιαδήποτε μετάθεση και αν επιλεγεί.

- **$k = n$**

Για την τιμή k=n, το σύστημα που παράγεται είναι το κυκλικό Con/n/n:G. Για να λειτουργεί το σύστημα αυτό θα πρέπει όλες οι μονάδες να βρίσκονται σε κατάσταση λειτουργίας.

Το σύστημά μας αντιστοιχεί λοιπόν σε ένα σειριακό σύστημα, για το οποίο γνωρίζουμε ότι η αξιοπιστία του είναι ανεξάρτητη των μεταθέσεων των μονάδων του.

Άρα όταν ισχύει k=n, ο αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός επιτυγχάνεται για οποιαδήποτε μετάθεση και αν επιλεγεί.

- **$2 \leq k < (n\text{-}1)/2$**

Σύμφωνα με τους Zuo and Kuo (1990) ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.5. *Δεν υπάρχει αναλλοίωτη βέλτιστη μετάθεση για το κυκλικό συνεχόμενο-k-από-τα-n:G σύστημα, όταν ισχύει* $2 \leq k <(n\text{-}1)/2$**.**

Το παραπάνω θεώρημα γίνεται εύκολα αντιληπτό, αν επιλέξουμε την αξιοπιστία μίας μονάδος ίση με μηδέν, έστω p_1=0. Τότε το κυκλικό Con/k/n:G σύστημα είναι ισοδύναμο με ένα γραμμικό Con/k/n-1:G σύστημα, για το οποίο ισχύει $2 \leq k <(n\text{-}1)/2$.

Το γραμμικό σύστημα που δημιουργήθηκε όμως, γνωρίζουμε με βάση το Θεώρημα 3.1, ότι δεν έχει αναλλοίωτη βέλτιστη μετάθεση. Άρα αφού ισχύει η ισοδυναμία των δύο συστημάτων (του κυκλικού και του γραμμικού), προκύπτει ότι ούτε για το κυκλικό Con/k/n:G σύστημα με p_1=0, θα υπάρχει αναλλοίωτη βέλτιστη μετάθεση.

Γενικεύοντας το παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει ότι δεν υπάρχει αναλλοίωτη βέλτιστη μετάθεση για το κυκλικό Con/k/n:G, όταν $2 \leq k < (n-1)/2$.

- **$k < n \leq 2k+1$**

Σύμφωνα με τους Zuo and Kuo (1990) η αξιοπιστία ενός κυκλικού συνεχόμενου-k-από-τα-n:G συστήματος με $n \leq 2k+1$, είναι ίση με:

$$R_{CG}(n;k) = \sum_{i=1}^{n} (q_{i+k} \prod_{j=i}^{i+k-1} p_j) + \prod_{i=1}^{n} p_i$$

ή αντίστοιχα ίση με:

$$R_{CG}(n;k) = \sum_{i=1}^{n} (\prod_{j=i}^{i+k-1} p_j) - \sum_{i=1}^{n} (\prod_{j=i}^{i+k} p_j) + \prod_{i=1}^{n} p_i \, ,$$

όπου $p_j=p_{j-n}$ αν $j>n$ και p_i, q_i είναι η αξιοπιστία και η αναξιοπιστία της i μονάδος αντίστοιχα.

Για την ύπαρξη ενός αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού για το κυκλικό συνεχόμενο-k-από-τα-n:G σύστημα, όταν $k < n \leq 2k+1$, θα πρέπει να ισχύει η ακόλουθη συνθήκη:

$$(p_i-p_j)(p_{i-1}-p_{j+1})>0, \; 1 \leq i, \; j \leq n,$$

όπου p_i η αξιοπιστία της μονάδος στη θέση i και $p_j=p_{j-n}$ για $j>n$.

Σύμφωνα με αυτή την αναγκαία συνθήκη παρατηρούμε ότι για να ικανοποιηθεί θα πρέπει η μονάδα 1 να είναι γειτονική με τις μονάδες 2 και 3. Ας υποθέσουμε ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει και ας θεωρήσουμε ότι η μονάδα 1 είναι γειτονική με κάποια μονάδα i (προφανώς με i>3). Επιπλέον ας συμβολίσουμε με j τη μονάδα που ακολουθεί την μονάδα 2 στην σειρά 1, i, …, 2, j.

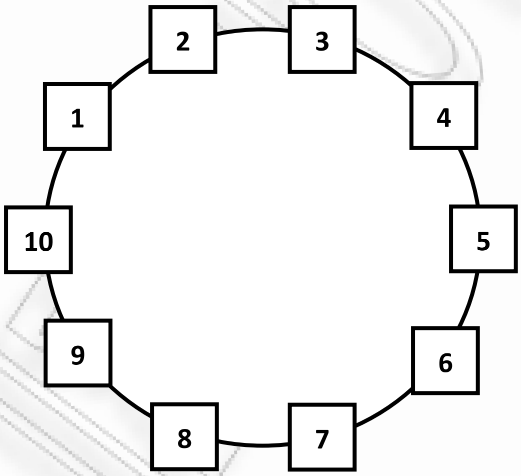
Σε αυτή την περίπτωση η παραπάνω συνθήκη παραβιάζεται, αφού ισχύει $p_1<p_j$ και $p_i>p_2$. Άρα δεν είναι αποδεκτή η τοποθέτηση οποιαδήποτε μονάδων πλην των μονάδων 2 και 3 σαν γειτονικές της μονάδας 1.

Με όμοιο τρόπο γενικεύουμε το συμπέρασμα και στις υπόλοιπες μονάδες. Έτσι η μονάδα 2 θα πρέπει να είναι γειτονική με τις μονάδες 1 και 4, η μονάδα 3 θα πρέπει να είναι γειτονική με τις μονάδες 1 και 5 κοκ. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα με βάση την εργασία των Zuo and Kuo (1990):

Θεώρημα 3.6. *Για το κυκλικό συνεχόμενο-k-από-τα-n:G σύστημα, με $k < n \leq 2k+1$, η μοναδική μετάθεση που δημιουργεί αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό στο σύστημα είναι η:*

$$C_n = (1, 3, 5, 7, \ldots, 8, 6, 4, 2, 1)$$

Επιλέγουμε να εφαρμόσουμε το παραπάνω θεώρημα σε ένα κυκλικό συνεχόμενο-6-από-τα-10:G σύστημα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ως τιμές των αξιοπιστιών των δέκα μονάδων θεωρούμε τις p_1=0,07, p_2=0,19, p_3=0,25, p_4=0,38, p_5=0,43, p_6=0,51, p_7=0,62, p_8=0,77, p_9=0,86 και p_{10}=0,94.



Σχήμα 3.3: Κυκλικό συνεχόμενο-6-από-τα-10:G σύστημα

Το κυκλικό συνεχόμενο-6-από-τα-10:G σύστημα έχει τα ακόλουθα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας:

P_1={1,2,3,4,5,6}, P_2={2,3,4,5,6,7}, P_3={3,4,5,6,7,8} , P_4={4,5,6,7,8,9} , P_5={5,6,7,8,9,10}, P_6={6,7,8,9,10,1}, P_7={7,8,9,10,1,2}, P_8={8,9,10,1,2,3}, P_9={9,10,1,2,3,4} και P_{10}={10,1,2,3,4,5},

και επιπλέον αφού ισχύει η ανισότητα $n \leq 2k+1$ για το σύστημά μας, σύμφωνα με τους Zuo and Kuo (1990) η αξιοπιστία του συστήματός μας θα είναι ίση με:

$$R_{CG}(10;6) = \sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=i}^{i+6-1} p_j\right) - \sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=i}^{i+6} p_j\right) + \prod_{i=1}^{10} p_i$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.6 η μοναδική μετάθεση που δημιουργεί αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό στο σύστημα είναι η 1-3-5-7-9-10-8-6-4-2-1, η οποία παρέχει στο σύστημα αξιοπιστία ίση με 0,157556.

Επιλέγουμε τυχαία δύο μεταθέσεις από τις 10! συνολικά που υπάρχουν για το σύστημά μας. Έστω ότι επιλέγουμε τις μεταθέσεις 2-3-5-9-1-4-7-8-10-6-2 και 4-10-1-6-8-2-5-7-9-3-4. Η πρώτη μετάθεση δίνει στο σύστημα αξιοπιστία ίση με 0,0387437, ενώ η δεύτερη δίνει αξιοπιστία ίση με 0,0437385.

Παρατηρούμε ότι και οι δύο τυχαίες μεταθέσεις που επιλέξαμε παρέχουν στο σύστημα αξιοπιστία πολύ μικρότερη από την αξιοπιστία που δημιουργήθηκε με βάση τη μετάθεση του Θεωρήματος 3.6.

Παρακάτω δίνεται ένας συγκεντρωτικός πίνακας όλων των αποτελεσμάτων που παρουσιάστηκαν για το συνεχόμενο-*k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα:

Συγκεντρωτικός πίνακας για τον αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό στο Con/*k*/*n*:*G* σύστημα			
k	**Γραμμικό Con/*k*/*n*:*G***	***k***	**Κυκλικό Con/*k*/*n*:*G***
$k = 1$	Οποιαδήποτε τοποθέτηση	$k = 1$	Οποιαδήποτε τοποθέτηση
$2 \le k < \frac{1}{2}n$	Δεν υπάρχει	$2 \le k < (n-1)/2$	Δεν υπάρχει
$k < n \le 2k$	(1, 3, 5, …, 2min[k,n-k+1]-1, οποιαδήποτε τοποθέτηση, 2min[k,n-k+1], ..., 6, 4, 2)	$k < n \le 2k+1$	(1, 3, 5, 7, …, 8, 6, 4, 2, 1)
$k = n$	Οποιαδήποτε τοποθέτηση	$k = n$	Οποιαδήποτε τοποθέτηση

Πίνακας 3.1: Συγκεντρωτικός πίνακας για τον αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό στο συνεχόμενο-*k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα

3.7 Αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός για το συνεχόμενο-*k*-από-τα-*n*:*F* σύστημα

Η κατηγορία συστημάτων συνεχόμενο-*k*-από-τα-*n*:*F* (consecutive-*k*-out-of-*n*:*F* σε συντομογραφία Con/*k*/*n*:*F*) περιλαμβάνει συστήματα τα οποία αποτυγχάνουν αν αποτύχουν τουλάχιστον *k* συνεχόμενες μονάδες τους. Σε αντιστοιχία με τα Con/*k*/*n*/:*G* συστήματα που παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 3.6, τα συστήματα Con/*k*/*n*/:*F* χωρίζονται και αυτά σε δύο μεγάλες κατηγορίες, ανάλογα με τη συνδεσμολογία των μονάδων τους. Υπάρχουν τα γραμμικά συνεχόμενα-*k*-από-τα-*n*:*F* και τα κυκλικά συνεχόμενα-*k*-από-τα-*n*:*F* συστήματα.

3.7.1. Γραμμικό συνεχόμενο-*k*-από-τα-*n*:*F* σύστημα

Η αντιμετώπιση της εύρεσης ενός αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού για το γραμμικό Con/*k*/*n*:*F* σύστημα θα γίνει με παρόμοιο τρόπο, όπως για το γραμμικό Con/*k*/*n*:*G* σύστημα. Θα εξεταστούν δηλαδή όλες οι υποπεριπτώσεις που προκύπτουν για τις διάφορες τιμές του *k*.

- **$k = 1$**

Για *k*=1 προκύπτει το γραμμικό Con/1/*n*:*F* σύστημα. Το σύστημα αυτό αποτυγχάνει αν έστω και μία μονάδα του αποτύχει. Παρατηρούμε ότι το σύστημα αντιστοιχεί σε ένα σειριακό σύστημα, άρα ο αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός του δεν θα επηρεάζεται από τη μετάθεση που θα εφαρμόσουμε στις μονάδες του.

- **$k = n$**

Για την τιμή *k*=*n*, το σύστημα που παράγεται είναι το γραμμικό Con/*n*/*n*:*F* σύστημα. Το σύστημα αυτό αποτυγχάνει μόνο αν αποτύχουν όλες οι μονάδες που το αποτελούν. Επομένως είναι ένα είδος παράλληλου συστήματος και ως εκ τούτου η αξιοπιστία του δεν επηρεάζεται από τη μετάθεση που θα εφαρμόσουμε στις μονάδες του.

- **$k = 2$**

Για την τιμή k=2, το σύστημα που παράγεται είναι το γραμμικό Con/2/n:F σύστημα. Σύμφωνα με τον ορισμό του συστήματος, αυτό αποτυγχάνει όταν αποτύχουν δύο συνεχόμενες μονάδες του.

Από τον ορισμό διαφαίνεται ότι για τη δημιουργία ενός αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού, θα πρέπει να αποφύγουμε να τοποθετήσουμε τις μονάδες με τις χαμηλότερες αξιοπιστίες (δηλαδή τις μονάδες p_1 και p_2) γειτονικά. Ομοίως θα πρέπει να αποφευχθεί η γειτονική τοποθέτηση και για τις μονάδες p_2 και p_3 κοκ. Θα πρέπει δηλαδή να αποφευχθούν όλες οι γειτονικές τοποθετήσεις των μονάδων ανά δύο.

Σύμφωνα λοιπόν με την παραπάνω παρατήρηση, η μετάθεση που μας παρέχει αναλλοίωτο βέλτιστο σύστημα, θα είναι της μορφής:

$$(1, n, 3, n\text{-}2, \dots, n\text{-}3, 4, n\text{-}1, 2)$$

- **$2 < k < n$**

Η συγκεκριμένη περίπτωση θα πρέπει να εξεταστεί κάτω από το πρίσμα των διαφορετικών τιμών του n. Έτσι έχουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις $n \geq 2k$ και $n<2k$

I. Όταν $n \geq 2k$ δεν υπάρχει μετάθεση, η οποία να μας παρέχει αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό. Αυτό γίνεται εύκολα εμφανές αν εξετάσουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) Έστω $p_1 = p_2 = \dots = p_{k-1} \cong 0$ και $p_k = p_{k+1} = \dots = p_{n-1} = p$, όπου $0<p<1$ και p_n=1.

Σε αυτή την περίπτωση η ιδανική μετάθεση θα δημιουργείται όταν τοποθετήσουμε τις χειρότερες k-1 μονάδες σε ένα από τα δύο άκρα του συστήματος. Άρα η βέλτιστη μετάθεση είναι της μορφής:

$$(0, 0, \dots, 0, 1, p, \dots, p)$$

β) Έστω τώρα $p_1 = p_2 = \dots = p_{k-1} = p$ και και $p_k = p_{k+1} = \dots = p_n = r$, όπου $0<p<r<1$. Τότε η τοποθέτηση των k-1 χειρότερων μονάδων σε ένα άκρο θα μας δώσει τη μετάθεση:

$$(\underbrace{p, p, \dots, p}_{k-1}, \underbrace{r, r, \dots, r}_{n-k+1})$$

Παρατηρούμε όμως ότι η μετάθεση:

$$(\underbrace{p, p, \ldots, p}_{k-2}, \underbrace{r, r, \ldots, r}_{n-k+1}, p)$$

δίνει μεγαλύτερη αξιοπιστία στο σύστημα.

Άρα στην συγκεκριμένη περίπτωση (όταν $n \geq 2k$) δεν υπάρχει αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός.

II. Στην περίπτωση $n<2k$ το σύστημα θα λειτουργεί όταν οι $2k$-n κεντρικές μονάδες του λειτουργούν. Γίνεται λοιπόν αντιληπτό ότι οι καλύτερες μονάδες πρέπει να τοποθετηθούν σε αυτές τις κεντρικές θέσεις. Οι υπόλοιπες $2(n$-$k)$ μονάδες δημιουργούν ένα γραμμικό Con/(n-k)/n:F υποσύστημα.

Άρα για την εύρεση του αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού σε αυτή την περίπτωση, αρκεί να βρούμε το αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό για γραμμικό Con/(n-k)/n:F υποσύστημα.

Ένα γραμμικό Con/(n-k)/n:F υποσύστημα όμως δεν έχει αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό όταν n-k>2. Αντιθέτως παρουσιάζει αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό όταν $k = n$-2 ή $k = n$-1.

Όταν $k = n$-1, τοποθετώντας τις n-2 καλύτερες μονάδες στο κέντρο του υποσυστήματος δημιουργούμε την βέλτιστη μετάθεση:

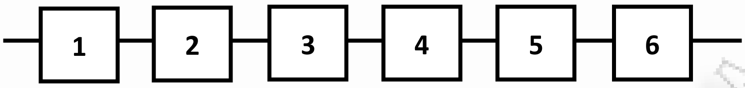
(1, οποιαδήποτε τοποθέτηση, 2)

Όταν $k = n$-2, η βέλτιστη μετάθεση δημιουργείται αν στο κέντρο τοποθετηθούν οι n-4 καλύτερες μονάδες, ενώ οι τέσσερις χειρότερες μονάδες τοποθετηθούν εναλλάξ στα δύο άκρα του συστήματος. Σε αυτή την περίπτωση η βέλτιστη τοποθέτηση είναι της μορφής:

(1, 4, οποιαδήποτε τοποθέτηση, 3, 2)

Συγκεντρώνοντας όλες τις παραπάνω περιπτώσεις καταλήγουμε ότι το γραμμικό συνεχόμενο-k-από-τα-n:F σύστημα, αποκτά αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό μόνο όταν $k \in \{1, 2, n\text{-}2, n\text{-}1, n\}$.

Ως εφαρμογή ας θεωρήσουμε ότι έχουμε το παρακάτω γραμμικό συνεχόμενο-4-από-τα-6:F σύστημα. Το οποίο αποτελείται από έξι μονάδες με αξιοπιστίες p_1=0,01, p_2=0,14, p_3=0,31, p_4=0,53, p_5=0,71 και p_6=0,84.



Σχήμα 3.4: Γραμμικό συνεχόμενο-4-από-τα-6:*F* σύστημα

Το σύστημα έχει τα ακόλουθα ελάχιστα σύνολα διακοπής:

$$C_1=\{1,2,3,4\},\ C_2=\{2,3,4,5\} \text{ και } C_3=\{3,4,5,6\},$$

άρα η συνάρτηση δομής του και η συνάρτηση αξιοπιστίας θα είναι ίσες με:

$$\varphi(\mathbf{x}) = [1-(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)]\cdot[1-(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)(1-x_5)]\cdot[1-(1-x_3)(1-x_4)(1-x_5)(1-x_6)]$$

και

$$R(\mathbf{p}) = [1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)]\cdot[1-(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)(1-p_5)]\cdot[1-(1-p_3)(1-p_4)(1-p_5)(1-p_6)].$$

Παρατηρούμε επίσης ότι ισχύει $k=n-2$, οπότε σύμφωνα με τη θεωρία που αναπτύξαμε παραπάνω, η βέλτιστη τοποθέτηση είναι της μορφής:

(1, 4, οποιαδήποτε τοποθέτηση, 3, 2).

Άρα οι μεταθέσεις που μας δίνουν τη μέγιστη αξιοπιστία στο παρόν σύστημα είναι οι 1-4-5-6-3-2 και 1-4-6-5-3-2. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα μας βρίσκουμε ότι οι μεταθέσεις αυτές παρέχουν στο σύστημα αξιοπιστία ίση με 0,963667.

Επιλέγουμε τυχαία δύο άλλες μεταθέσεις από τις υπόλοιπες (6!)-2=718. Έστω ότι επιλέχθηκαν οι μεταθέσεις 1-2-3-4-5-6 και 4-3-6-1-5-2. Η πρώτη μετάθεση παρέχει στο σύστημα αξιοπιστία ίση με 0,720976, ενώ η δεύτερη μετάθεση παρέχει αξιοπιστία ίση με 0,919586.

Παρατηρούμε ότι οι τυχαίες μεταθέσεις που επιλέχθηκαν, όπως ήταν αναμενόμενο, δίνουν μικρότερη αξιοπιστία στο σύστημα σε σχέση με τη μετάθεση που θεωρείται βέλτιστη.

3.7.2. Κυκλικό συνεχόμενο-*k*-από-τα-*n*:*F* σύστημα

Η μελέτη της παρούσας περίπτωσης βρίσκεται σε αντιστοιχία με τη μελέτη εύρεσης ενός αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού για το κυκλικό Con/*k*/*n*:*G* σύστημα. Θα εξεταστούν λοιπόν όλες οι δυνατές περιπτώσεις που δημιουργούνται για τις διαφορετικές τιμές του *k*.

- $\boldsymbol{k = 1}$

Το σύστημα στην παρούσα περίπτωση αντιστοιχεί σε ένα σειριακό σύστημα. Επομένως οποιαδήποτε μετάθεση και να επιλεγεί για την τοποθέτηση των μονάδων του, το σύστημα θα έχει τη μέγιστη δυνατή αξιοπιστία.

- $\boldsymbol{k = n}$

Στην περίπτωση που k=n, προκύπτει ένα παράλληλο σύστημα. Επομένως και σε αυτή την περίπτωση, οποιαδήποτε μετάθεση και αν επιλεγεί δεν επηρεάζεται η τιμή της αξιοπιστίας του συστήματος.

- $\boldsymbol{k = 2}$ **και** $\boldsymbol{k = n\text{-}2}$

Οι Zuo and Kuo (2003) απέδειξαν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Θεώρημα 3.7. *Απαραίτητη προϋπόθεση για την ύπαρξη βέλτιστης μετάθεσης σε κυκλικό Con/2/n:F και κυκλικό Con/(n-2)/n:F σύστημα είναι η:*

$$(p_i\text{-}p_j)(p_{i\text{-}1}\text{-}p_{j+1})<0 \text{ με } 1 \le i, j \le n,$$

όπου p_i είναι η αξιοπιστία της μονάδος στην θέση i, με $1 \le i \le n$ και $p_i = p_{i\text{-}n}$ για $i > n$.

Με εφαρμογή του Θεωρήματος 3.7, για τη βέλτιστη μετάθεση των συστημάτων για k = 2 και k = n-2, προκύπτει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.8. *Η μόνη δυνατή μετάθεση για τα κυκλικά Con/2/n:F και κυκλικά Con/(n-2)/n:F συστήματα η οποία ικανοποιεί το Θεώρημα 3.7 είναι η ακόλουθη:*

$$(n, 1, n\text{-}1, 3, n\text{-}3, \ldots, n\text{-}4, 4, n\text{-}2, 2, n)$$

Το Θεώρημα 3.8 αποδεικνύεται άμεσα αν παρατηρήσουμε ότι για να ισχύει η αναγκαία συνθήκη του Θεωρήματος 3.7, θα πρέπει η μονάδα 1 να γειτονεύει με τις μονάδες n και n-1. Πράγματι έστω ότι η μονάδα 1 δεν γειτόνευε με την μονάδα n-1, αλλά με μία μονάδα i με $i < n$-1. Έστω j η μονάδα μετά την n-1 μονάδα στη σειρά τοποθέτησης (1, i, …, n-1, j). Η σειρά τοποθέτησης αυτή παραβιάζει τη συνθήκη $(p_1\text{-}p_j)(p_i\text{-}p_{n\text{-}1}) < 0$. Άρα δεν μπορεί να υπάρξει αυτή η τοποθέτηση για τη δημιουργία του αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού.

Όμοια πράττοντας και για τις υπόλοιπες μονάδες, προκύπτει ότι η βέλτιστη μετάθεση είναι αυτή που παρουσιάζεται στο Θεώρημα 3.8.

- **$2 < k < n$-2**

Ένα κυκλικό συνεχόμενο-k-από-τα-n:F σύστημα με $2 < k < n$-2, δεν έχει αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό. Ο παραπάνω ισχυρισμός γίνεται αντιληπτός αν αποφασίσουμε να αφαιρέσουμε μία μονάδα από το σύστημά μας. Τότε το σύστημα που προκύπτει είναι το γραμμικό Con/k/(n-1):F σύστημα με $2 < k < n$-3. Για το σύστημα αυτό γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχει μετάθεση που να δίνει μέγιστη αξιοπιστία. Επομένως και κυκλικό Con/k/n:F σύστημα με $2 < k < n$-3, δεν έχει αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό.

Έστω ότι ισχύει $k = n$-3. Αν $p_n = 1$, τότε οι υπόλοιπες n-1 μονάδες θα πρέπει να τοποθετηθούν σύμφωνα με τη διάταξη που υπαγορεύεται από τη βέλτιστη τοποθέτηση σε ένα γραμμικό Con/(n-3)/(n-1):F σύστημα.

Έστω r, p τέτοια ώστε $0 < r < p < 1$ και $p_1 = p_2 = r$, $p_3 = p_4 = \ldots = p_{n\text{-}1} = p$. Τότε η βέλτιστη μετάθεση θα πρέπει να είναι αυτή η οποία τοποθετεί τις δύο χειρότερες μονάδες γειτονικά, δηλαδή η:

$$(1, r, \underbrace{p, \ldots, p}_{n-3}, r, 1)$$

Έστω τώρα p, με $0 < p < 1$ και $p_1 = p_2 \cong 0$, $p_3 = p_4 = \ldots = p_n = p$. Τότε, σύμφωνα με τα παραπάνω συμπεράσματα, η ακόλουθη μετάθεση είναι βέλτιστη:

$$C_1 = (p, 0, \underbrace{p, \ldots, p}_{n-3}, 0, p)$$

Παρατηρούμε όμως ότι η μετάθεση:

$$C_2 = (p, p, 0, \underbrace{p, \ldots, p}_{n-4}, 0, p)$$

παρέχει μεγαλύτερη αξιοπιστία στο σύστημα.

Άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για το συνεχόμενο-k-από-τα-n:F σύστημα, όταν $2 < k < n$-2, δεν υπάρχει μετάθεση που να μεγιστοποιεί την αξιοπιστία του συστήματος.

Δίνεται στη συνέχεια ένας συγκεντρωτικός πίνακας όλων των αποτελεσμάτων που παρουσιάστηκαν για το σύστημα Con/k/n:F:

Συγκεντρωτικός πίνακας για τον αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό στο Con/*k*/*n*:*F* σύστημα			
k	**Γραμμικό Con/*k*/*n*:*F***	***k***	**Κυκλικό Con/*k*/*n*: *F***
$k = 1$	Οποιαδήποτε τοποθέτηση	$k = 1$	Οποιαδήποτε τοποθέτηση
$k = 2$	$(1, n, 3, n\text{-}2, \ldots, n\text{-}3, 4, n\text{-}1, 2)$	$k = 2$	$(n, 1, n\text{-}1, 3, n\text{-}3, \ldots, n\text{-}4, 4, n\text{-}2, 2, n)$
$2 < k < n\text{-}2$	Δεν υπάρχει	$2 < k < n\text{-}2$	Δεν υπάρχει
$k = n\text{-}2$	(1, 4, οποιαδήποτε τοποθέτηση, 3, 2)	$k = n\text{-}2$	$(n, 1, n\text{-}1, 3, n\text{-}3, \ldots, n\text{-}4, 4, n\text{-}2, 2, n)$
$k = n\text{-}1$	(1, οποιαδήποτε τοποθέτηση, 2)	$k = n\text{-}1$	Οποιαδήποτε τοποθέτηση
$k = n$	Οποιαδήποτε τοποθέτηση	$k = n$	Οποιαδήποτε τοποθέτηση

Πίνακας 3.2: Συγκεντρωτικός πίνακας για τον αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό στο συνεχόμενο-*k*-από-τα-*n*:*F* σύστημα

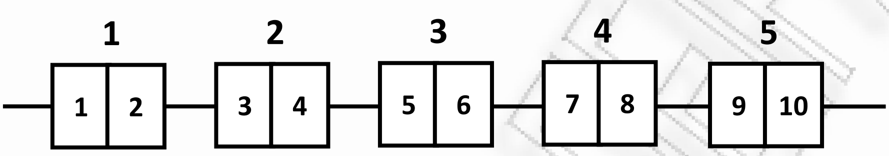
Τέλος προτού κλείσουμε την παρούσα ενότητα κρίνεται χρήσιμο να αναφερθούμε και στην ύπαρξη πιο σύνθετων συστημάτων από τα συνεχόμενα-*k*-από-τα-*n*:*F*. Τέτοια συστήματα είναι τα γραμμικά και κυκλικά συνεχόμενα-*k*-από-τα-*n*:*F* συστήματα, στα οποία κάθε μονάδα αποτελείται από *r* υπομονάδες συνδεδεμένες σε σειρά. Τα συστήματα αυτού του τύπου συμβολίζονται $S(k,n,r)$.

Στην περίπτωση του συστήματος $S(k,n,1)$, δηλαδή όταν η κάθε μονάδα αποτελείται από μία υπομονάδα (r=1) μόνο, το σύστημα είναι το κλασσικό Con/*k*/*n*:*F*. Το σύστημα αυτό έχει αναφερθεί ότι έχει αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό για k=2, k=n-2 ή k=n-1, ενώ δεν έχει βέλτιστη λύση όταν $2<k<n\text{-}2$.

Στην περίπτωση όπου r>1, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα που δόθηκε από τους Duan, Wu, and Zuo (2005).

Θεώρημα 3.9. *Το σύστημα S(k,n,r) με r>1 έχει αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό για k=2, k=n-2 και k=n-1. Ο αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμό του συστήματος δημιουργείται όταν τοποθετηθούν οι nr διαθέσιμες υπομονάδες σε αύξουσα σειρά αξιοπιστίας, χωρίζοντας τη* *διάταξη σε ισοπληθή n σύνολα και τέλος αντιστοιχώντας τα n αυτά σύνολα των υπομονάδων στις n θέσεις των μονάδων σύμφωνα με το αναλλοίωτο βέλτιστο σύστημα του $S(k,n,1)$.*

Για να γίνει καλύτερα αντιληπτή η χρήση του παραπάνω θεωρήματος θα παρουσιάσουμε το ακόλουθο παράδειγμα. Έστω ότι έχουμε το γραμμικό σύστημα $S(2,5,2)$,όπως παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3.5: Γραμμικό $S(2,5,2)$ σύστημα

Το σύστημα αυτό αποτελείται από πέντε μονάδες, οι οποίες αποτελούνται από δύο υπομονάδες η καθεμία. Το σύστημα αποτυγχάνει όταν αποτύχουν δύο συνεχόμενες από τις πέντε μονάδες του.

Έστω ότι για το σύστημα αυτό έχουμε τις ακόλουθες υπομονάδες να τοποθετήσουμε: p_1=0,03, p_2=0,16, p_3=0,24, p_4=0,37, p_5=0,44, p_6=0,57, p_7=0,63, p_8=0,74, p_9=0,81 και p_{10}=0,95.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.9 τοποθετούμε τις παραπάνω δέκα υπομονάδες σε αύξουσα σειρά αξιοπιστίας, χωρίζουμε τη διάταξη αυτή σε πέντε ισοπληθή σύνολα (αφού n=5) και τοποθετούμε κάθε ένα από τα σύνολα αυτά στις θέσεις των πέντε μονάδων του συστήματος. Με τον τρόπο αυτό δημιουργούμε ουσιαστικά ένα γραμμικό συνεχόμενο-2-από-τα-5:F σύστημα, του οποίου κάθε μονάδα αποτελείται από δύο υπομονάδες.

Προκύπτει λοιπόν ότι:

- η μονάδα 1 αποτελείται από τις συνεχόμενες υπομονάδες 1 και 2 και έχει αξιοπιστία 0,0048 (η οποία ορίζεται ως το γινόμενο των αξιοπιστιών των υπομονάδων 1 και 2),
- η μονάδα 2 αποτελείται από τις συνεχόμενες υπομονάδες 3 και 4 και έχει αξιοπιστία 0,0888,
- η μονάδα 3 αποτελείται από τις συνεχόμενες υπομονάδες 5 και 6 και έχει αξιοπιστία 0,2508,

- η μονάδα 4 αποτελείται από τις συνεχόμενες υπομονάδες 6 και 7 και έχει αξιοπιστία 0,4662 και τέλος
- η μονάδα 5 αποτελείται από τις συνεχόμενες υπομονάδες 8 και 9 και έχει αξιοπιστία 0,7695.

Για το σύστημά μας ισχύει k=2, άρα σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Πίνακα 3.2, η βέλτιστη μετάθεση θα είναι η 1-5-3-4-2. Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα η μετάθεση αυτή μας δίνει μέγιστη δυνατή αξιοπιστία, η οποία ισούται με 0,368031.

Έστω p_i η αξιοπιστία της i λιγότερης αξιόπιστης υπομονάδος με $p_1<p_2<\ldots<p_{nr}$. Σύνολο i είναι το σύνολο στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.9, η μονάδα με αξιοπιστία $p_{[(i-1)r+j]}$, για $1\leq j\leq r$.

Έστω P_i η αξιοπιστία όλων των μονάδων του υποσυστήματος στην ομάδα i, δηλαδή

$$P_i = \prod_{j=1}^{r} p_{[(i-1)r+j]}$$

Τότε θα ισχύει $P_1<P_2<\ldots<P_n$.

Τα παραπάνω P_i τοποθετούνται σε ένα συνεχόμενο-k-από-τα-n:F σύστημα, ακολουθώντας τους κανόνες βέλτιστης τοποθέτησης ενός κλασσικού συνεχόμενου-k-από-τα-n:F συστήματος, όπως περιγράφτηκαν στους Πίνακες 3.1 και 3.2.

Με βάση τα παραπάνω δημιουργείται ο ακόλουθος συνοπτικός πίνακας με αναλλοίωτες βέλτιστες λύσεις για κάποια συστήματα (υπενθυμίζουμε ότι ο συμβολισμός L δηλώνει το γραμμικό, ενώ ο συμβολισμός C δηλώνει το κυκλικό σύστημα):

Σύστημα	**Βέλτιστη μετάθεση για την δημιουργία αναλλοίωτου σχεδιασμού συστήματος**
$L(2, n, r)$	$P_1\ P_n\ P_3\ P_{n-2} \ldots P_{n-3}\ P_4\ P_{n-1}\ P_2$
$C(2, n, r)$	$P_n\ P_1\ P_{n-1}\ P_3\ P_{n-3} \ldots P_{n-4}\ P_4\ P_{n-2}\ P_2\ P_n$
$L(n-2, n, r)$	$P_1\ P_4$ *οποιαδήποτε τοποθέτηση* $P_3\ P_2$
$C(\text{n}-2, n, r)$	$P_n\ P_1\ P_{n-1}\ P_3\ P_{n-3} \ldots P_{n-4}\ P_4\ P_{n-2}\ P_2\ P_n$
$L(n-1, n, r)$	P_1 *οποιαδήποτε τοποθέτηση* P_2
$C(n-1, n, r)$	*οποιαδήποτε τοποθέτηση*

Πίνακας 3.3: Αναλλοίωτες βέλτιστες λύσεις κάποιων συστημάτων

3.8 Αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός για το σειριακό-παράλληλο σύστημα

Στην παρούσα ενότητα θα ασχοληθούμε με την εύρεση μιας ιδανικής μετάθεσης για το σειριακό-παράλληλο σύστημα. Σε αυτού του είδους τα συστήματα δεν είναι πάντοτε εφικτή η εύρεση μιας βέλτιστης μετάθεσης. Αυτό συμβαίνει αφού υπάρχουν περιπτώσεις για τις οποίες η βέλτιστη τοποθέτηση επηρεάζεται από τις τιμές των αξιοπιστιών των μονάδων και όχι μόνο από τη διάταξή τους.

Θα παρουσιαστούν αρχικά κάποιες βασικές αρχές, με χρήση των οποίων το σύστημα οδηγείται σε μεγαλύτερη αξιοπιστία. Η αξιοπιστία αυτή δεν είναι απαραίτητα η μέγιστη δυνατή για το σύστημα.

Έστω λοιπόν ένα σειριακό-παράλληλο σύστημα με ελάχιστα σύνολα διακοπής C_1, C_2, …, C_k, μεγέθους n_1, n_2, …,n_k το καθένα αντίστοιχα. Έχουμε συνολικά $n = n_1+n_2+\ldots+n_k$ ανεξάρτητες μονάδες με αξιοπιστίες p_1, p_2, …, p_n αντίστοιχα, τις οποίες θέλουμε και να τοποθετήσουμε.

Η συνάρτηση δομής του συστήματος σε αυτή την περίπτωση είναι η:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{k}\{1-\prod_{i\in C_j}(1-x_i)\},$$

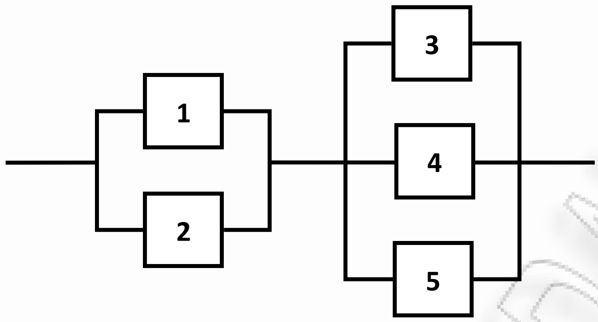
ενώ η συνάρτηση αξιοπιστίας που προκύπτει μέσω μιας μετάθεσης **π** των μονάδων της, θα δίνεται από τον τύπο:

$$\mathrm{h}(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{p})) = \prod_{j=1}^{k}[1-\prod_{i\in C_j}(1-p_{\pi_i})]$$

Σύμφωνα με τους El-Neweihi, Proschan and Sethuraman (1986) ισχύει το ακόλουθο συμπέρασμα.

Θεώρημα 3.10. *Η αξιοπιστία ενός σειριακού-παράλληλου συστήματος ελαχιστοποιείται, αν οι* n_k *καλύτερες μονάδες τοποθετηθούν στο ελάχιστο σύνολο διακοπής* C_k*, οι* n_{k-1} *αμέσως καλύτερες μονάδες τοποθετηθούν στο* C_{k-1} *κοκ, τέλος οι* n_1 *χειρότερες μονάδες τοποθετηθούν στο* C_1.

Έστω ότι έχουμε το ακόλουθο σειρακό-παράλληλο σύστημα πέντε μονάδων.



Σχήμα 3.6: Σειριακό-Παράλληλο σύστημα πέντε μονάδων

Για το σύστημα μας δίνονται πέντε μονάδες με τις εξής αξιοπιστίες: p_1=0,34, p_2=0,52, p_3=0,68, p_4=0,91 και p_5=0,23.

Το σύστημα αυτό έχει ελάχιστα σύνολα διακοπής τα

$$C_1=\{1,2\} \text{ και } C_2=\{3,4,5\},$$

με βάση τα οποία προκύπτει ότι η συνάρτηση δομής για το σύστημα είναι η:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{k}\{1-\prod_{i\in C_j}(1-x_i)\} = [1-(1-x_1)(1-x_2)]\cdot[1-(1-x_3)(1-x_4)(1-x_5)]$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.10 για να ελαχιστοποιηθεί η αξιοπιστία του συστήματος θα πρέπει να τοποθετήσουμε τις τρεις πιο αξιόπιστες μονάδες μας (δηλαδή τις μονάδες 4, 3 και 2) στο ελάχιστο σύνολο διακοπής C_2 και τις υπόλοιπες μονάδες (δηλαδή τις μονάδες 1 και 5) στο ελάχιστο σύνολο διακοπής C_1. Σύμφωνα με αυτή τη τοποθέτηση η αξιοπιστία του συστήματος προκύπτει ίση με 0,485001.

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν συνολικά 12 συμμετρικές μεταθέσεις οι οποίες μας δίνουν την ελάχιστη αυτή αξιοπιστία και προκύπτουν μέσω ζευγαρωτών αναδιατάξεων των μονάδων σε κάθε ελάχιστο σύνολο διακοπής.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το Θεώρημα 3.10 μας βοηθά στο να εξαλείψουμε κάποιες από τις δυνατές μεταθέσεις ενός σειριακού-παράλληλου συστήματος, ως μεταθέσεις που μας παρέχουν ελάχιστη αξιοπιστία.

Για να ισχυροποιήσουμε το αποτέλεσμά μας, δοκιμάζουμε να τοποθετήσουμε στο ελάχιστο σύνολο διακοπής C_2 τις μονάδες 2, 5, 3, ενώ στο ελάχιστο σύνολο διακοπής C_1 τις μονάδες 1, 4. Δημιουργούμε έτσι τη μετάθεση 1-4-2-5-3, η οποία παρέχει στο σύστημα αξιοπιστία ίση με 0,829353 που είναι σχεδόν διπλάσια από την ελάχιστη αξιοπιστία που πήραμε με βάση το Θεώρημα 3.10.

3.9 Αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός για το παράλληλο-σειριακό σύστημα

Το παράλληλο-σειριακό σύστημα αποτελείται από σειριακά υποσυστήματα συνδεδεμένα παράλληλα. Έστω P_1, P_2, …, P_k τα k ελάχιστα σύνολα λειτουργίας του συστήματος, με μέγεθος n_1, n_2, …,n_k το καθένα αντίστοιχα και $n = n_1+n_2+\ldots+n_k$. Το σύστημα λειτουργεί αν και μόνο αν έστω ένα εκ των k ελάχιστων συνόλων λειτουργίας, λειτουργεί. Ένα ελάχιστο σύνολο λειτουργίας, λειτουργεί, αν λειτουργούν όλες οι μονάδες που το αποτελούν.

Το σύστημα αυτό έχει συνάρτηση δομής την ακόλουθη:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{r=1}^{k}(1-\prod_{i\in P_r} x_i)\,.$$

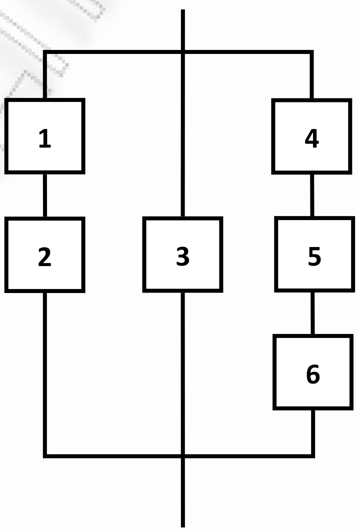
Επιπλέον για μία μετάθεση **π** των μονάδων του, το σύστημα αποκτά αξιοπιστία ίση με:

$$h(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{p})) = 1 - \prod_{r=1}^{k}(1-\prod_{i\in P_r} p_{\pi_i})\,.$$

Σύμφωνα με τους El-Neweihi, Proschan and Sethuraman (1986) ισχύει το ακόλουθο συμπέρασμα.

Θεώρημα 3.11. *Η βέλτιστη μετάθεση των μονάδων σε ένα παράλληλο-σειριακό σύστημα, επιτυγχάνεται αν τοποθετηθούν οι* n_1 *πιο αξιόπιστες μονάδες στο ελάχιστο σύνολο λειτουργίας* P_1, *οι* n_2 *αμέσως καλύτερες μονάδες τοποθετηθούν στο* P_2 *κοκ, τέλος οι* n_k *χειρότερες μονάδες τοποθετηθούν στο*P_k.

Έστω ότι έχουμε το ακόλουθο παράλληλο-σειριακό σύστημα έξι μονάδων.



Σχήμα 3.7: Παράλληλο-Σειριακό σύστημα έξι μονάδων

Για το σύστημα μας δίνονται έξι μονάδες με τις εξής αξιοπιστίες: p_1=0,64, p_2=0,81, p_3=0,32, p_4=0,14, p_5=0,98 και p_6=0,52.

Το σύστημα αυτό έχει ελάχιστα σύνολα λειτουργίας τα

$$P_1=\{1,2\},\ P_2=\{3\} \text{ και } P_3=\{4,5,6\}$$

με βάση τα οποία προκύπτει ότι η συνάρτηση δομής για το σύστημα είναι η:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{r=1}^{k}(1-\prod_{i\in P_r} x_i) = 1-(1-x_1x_2)(1-x_3)(1-x_4x_5x_6)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.11 η βέλτιστη μετάθεση επιτυγχάνεται αν τοποθετήσουμε στο ελάχιστο σύνολο λειτουργίας P_2 την πιο αξιόπιστη μονάδα (τη μονάδα 5), στο P_1 τις επόμενες δύο πιο αξιόπιστες μονάδες (δηλαδή τις μονάδες 2 και 1) και τέλος στο P_3 τις υπόλοιπες μονάδες (δηλαδή τις μονάδες 4, 3 και 6), δημιουργώντας έτσι τη μετάθεση 5-2-1-4-3-6. Με βάση την παραπάνω τοποθέτηση η αξιοπιστία του συστήματος γίνεται ίση με 0,927497. Αναφέρουμε ότι όλες οι συμμετρικές μεταθέσεις μας παρέχουν την ίδια αξιοπιστία.

Θέλοντας να αποδεχτούμε ότι η μετάθεση που προέκυψε με βάση το Θεώρημα 3.11 είναι βέλτιστη, τη συγκρίνουμε με τις τυχαίες μετάθεση 3-4-6-1-2-5 και 2-1-4-5-6-3. Η μετάθεση 3-4-6-1-2-5 παρέχει στο σύστημα αξιοπιστία ίση με 0,75542, ενώ η μετάθεση 2-1-4-5-6-3 δίνει αξιοπιστία ίση με 0,653365. Σύμφωνα με τα αποτελέσματά μας και οι δύο τυχαίες μεταθέσεις δίνουν αξιοπιστία μικρότερη από την αξιοπιστία που πήραμε με το Θεώρημα 3.11, άρα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η μετάθεση που προέκυψε με βάση αυτό (και όλες οι συμμετρικές της) αποτελεί βέλτιστη μετάθεση για το σύστημα.

3.10 Αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός για το δισδιάστατο συνεχόμενο $k_1\times k_2$-από-τα-$n_1\times n_2$:F ή G σύστημα

Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιάσουμε την εύρεση ενός αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού για ένα δισδιάστατο συνεχόμενο $k_1\times k_2$-από-τα-$n_1\times n_2$ σύστημα. Τα συστήματα αυτού του τύπου αποτελούνται από n_1, n_2 μονάδες τοποθετημένες σε ορθογώνιο διάστασης $n_1\times n_2$, και αποτυγχάνουν όταν αποτυγχάνουν όλες οι μονάδες ενός τουλάχιστον ορθογωνίου διάστασης $k_1\times k_2$ (συστήματα $k_1\times k_2$-από-τα-$n_1\times$n$_2$:F), ή λειτουργούν όταν λειτουργούν οι μονάδες ενός ορθογωνίου διάστασης $k_1\times k_2$ (συστήματα $k_1\times k_2$-από-τα-$n_1\times n_2$:G). Τα συστήματα αυτά χωρίζονται επίσης σε δύο βασικές κατηγορίες, ορθογώνια και κυλινδρικά, αναλόγως με τη τοποθέτηση των μονάδων στο χώρο.

Η μελέτη συστημάτων αυτής της κατηγορίας θα παρουσιαστεί μέσω του απλούστερου συστήματος $k_1 \times k_2$-από-τα-$k_1 \times n$ και θα μελετηθούν οι διάφορες αρχές που διέπουν τα ορθογώνια και κυλινδρικά συστήματα.

Σύμφωνα με τον Zuo (1993) σε ένα σύστημα $k_1 \times k_2$-από-τα-$k_1 \times n$ η ζευγαρωτή αναδιάταξη των μονάδων της ίδιας στήλης, δεν αλλάζει την αξιοπιστία του συστήματος. Το συμπέρασμα αυτό ισχύει ανεξάρτητα των τιμών αξιοπιστίας των μονάδων.

Δεδομένου του παραπάνω αποτελέσματος, το οποίο ισχύει για όλες τις περιπτώσεις, θα χωρίσουμε την περαιτέρω ανάλυσή μας με βάση το είδος συστήματος που μελετάται κάθε φορά.

- **Ορθογώνια δισδιάστατα συστήματα**

Ο Zuo (1993) απέδειξε τα ακόλουθα αποτελέσματα.

Θεώρημα 3.12. *Για ορθογώνιο $k_1 \times k_2$-από-τα-$k_1 \times n$:F ή G σύστημα, οι προϋποθέσεις για την ύπαρξη βέλτιστου συστήματος είναι οι ακόλουθες:*

1. $p_{i_1 j_1} < p_{i_2 j_2}$ *, για* $i_1, i_2 = 1, 2, \ldots, k_1$ *με* $1 \leq j_1 < j_2 \leq min(k_2, n-k_2+1)$

$p_{i_1 j_1} > p_{i_2 j_2}$ *, για* $i_1, i_2 = 1, 2, \ldots, k_1$ *με* $max(k_2, n-k_2+1) \leq j_1 < j_2 \leq n$

2. Αν $k_2 < n < 2k_2$*, οι* $(2k_2-n)k_1$ *πιο αξιόπιστες μονάδες θα πρέπει να τοποθετηθούν στις στήλες* $n-k_2+1, n-k_2+2, \ldots, k_2$ *με οποιαδήποτε σειρά.*

Άρα σε ένα ορθογώνιο $k_1 \times k_2$-από-τα-$k_1 \times n$: F ή G σύστημα με $k_2 < n < 2k_2$, για την επίτευξη του αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού, θα πρέπει να τοποθετήσουμε τις $2k_1$ λιγότερο αξιόπιστες μονάδες στις στήλες 1 και n, τις αμέσως καλύτερες $2k_1$ μονάδες στις στήλες 2 και n-1 κοκ. Οι $(2k_2-n)k_1$ πιο αξιόπιστες μονάδες θα πρέπει να τοποθετηθούν στις $2k_2-n$ κεντρικές στήλες.

Θεώρημα 3.13. *Οι απαραίτητες προϋποθέσεις για την ύπαρξη ενός αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού σε ένα ορθογώνιο* $2{\times}k_2$*-από-τα-*$2{\times}2k_2$*:*G *σύστημα είναι:*

1. $p_{i_1 j_1} < p_{i_2 j_2}$, $1 \leq j_1 < j_2 \leq k_2$

2. $p_{i_1 j_1} > p_{i_2 j_2}$, $k_2+1 \leq j_1 < j_2 \leq n$

3. $p_{i_1 j_1} < p_{i_2 j_2}$, $j_1 \leq k_2$, $j_2 = n - j_1 + 1$

4. $p_{i_1 j_1} > p_{i_2 j_2}$, $j_1 \leq k_2$, $j_2 = n - j_1 + 2$

όπου $i_1, i_2 = 1, 2$

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, προκύπτει ότι η μοναδική μετάθεση που μπορεί να οδηγήσει σε αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό για το ορθογώνιο $2{\times}k_2$-από-τα-$2{\times}2k_2$:G σύστημα είναι η:

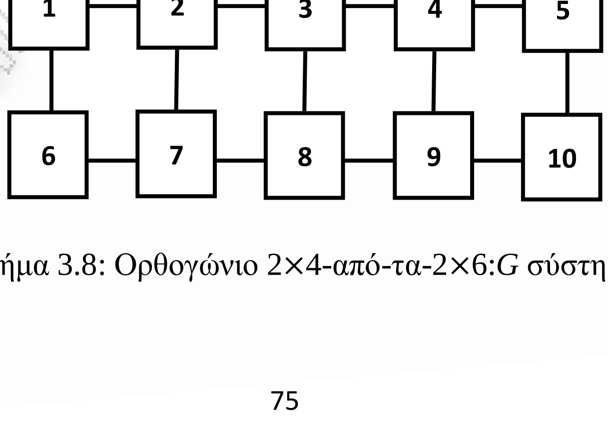
$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 5 & 9 & \ldots & 4k_2\text{-}3 & 4k_2\text{-}1 & \ldots & 15 & 11 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 10 & \ldots & 4k_2\text{-}2 & 4k_2 & \ldots & 16 & 12 & 8 & 4 \end{array}$$

Με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα μπορούμε να γενικεύσουμε το συμπέρασμα μας και στο ορθογώνιο $2{\times}k_2$-από-τα-$2{\times}n$:G σύστημα, όπως φαίνεται στο παρακάτω Πόρισμα.

Πόρισμα 3.1. *Η αναλλοίωτη βέλτιστη τοποθέτηση σε ένα ορθογώνιο* $2{\times}k_2$*-από-τα-*$2{\times}n$*:*G *σύστημα, με* $k_2<n<2k_2$ *πραγματοποιείται όταν χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω βέλτιστη μετάθεση:*

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 5 & 9 & \ldots & 4(n\text{-}k_2)\text{-}3 & \textit{οποιαδήποτε μετάθεση} & 4(n\text{-}k_2)\text{-}1 & \ldots & 15 & 11 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 10 & \ldots & 4(n\text{-}k_2)\text{-}2 & \textit{οποιαδήποτε μετάθεση} & 4(n\text{-}k_2) & \ldots & 16 & 12 & 8 & 4. \end{array}$$

Ως εφαρμογή των προηγούμενων, ας θεωρήσουμε ότι μας δίνεται το ακόλουθο 2×4-από-τα-2×6:G σύστημα.



Σχήμα 3.8: Ορθογώνιο 2×4-από-τα-2×6:G σύστημα

Το σύστημα αυτό γνωρίζουμε ότι λειτουργεί όταν λειτουργεί έστω ένα ορθογώνιο διάστασης 2×4. Έστω ότι διαθέτουμε δώδεκα μονάδες με αξιοπιστίες p_1=0,06, p_2=0,11, p_3=0,28, p_4=0,30, p_5=0,37, p_6=0,44, p_7=0,50, p_8=0,56, p_9=0,61, p_{10}=0,72, p_{11}=0,87 και p_{12}=0,90. Μας ζητείται να τοποθετήσουμε τις μονάδες με τέτοιο τρόπο ώστε να μεγιστοποιείται η αξιοπιστία του συστήματος.

Παρατηρούμε αρχικά ότι το σύστημα έχει τρία ελάχιστα σύνολα λειτουργίας. Καθένα από τα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας αποτελείται από τέσσερις μονάδες οι οποίες δημιουργούν ένα ορθογώνιο διάστασης 2×4. Πιο συγκεκριμένα, αν οι μονάδες τοποθετηθούν με βάση την ακόλουθη μετάθεση:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}$$

τότε το σύστημα θα έχει τα εξής ελάχιστα σύνολα διακοπής:

P_1={1,2,3,4,7,8,9,10}, P_2={2,3,4,5,8,9,10,11} και P_3={3,4,5,6,9,10,11,12}.

Χρησιμοποιώντας τη μετάθεση αυτή το σύστημα αποκτά αξιοπιστία ίση με 0,0051909.

Ας δοκιμάσουμε μία τυχαία μετάθεση, με την οποία ελπίζουμε να βελτιωθεί η αξιοπιστία του συστήματος. Έστω ότι επιλέχθηκε η ακόλουθη μετάθεση:

$$\begin{array}{cccccc} 3 & 9 & 2 & 11 & 7 & 6 \\ 5 & 12 & 8 & 10 & 4 & 1 \end{array}$$

Η μετάθεση αυτή οδηγεί το σύστημα σε αξιοπιστία 0,00511194, η οποία είναι μικρότερη από την αξιοπιστία που βρήκαμε με την πρώτη μετάθεσή μας.

Γίνεται γρήγορα αντιληπτό ότι είναι αδύνατο να δοκιμαστούν και οι 12!=479001600 δυνατές μεταθέσεις για να βρεθεί η βέλτιστη μετάθεση.

Παρατηρούμε ότι για το σύστημα που μας δόθηκε ισχύει η προϋπόθεση του Πορίσματος 3.1, αφού $k_2=4<n=6<2k_2=2\cdot 4$. Άρα σύμφωνα με το πόρισμα αυτό βέλτιστη μετάθεση για το σύστημα αποτελεί η:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 5 & 9 & 11 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 10 & 12 & 8 & 4 \end{array}$$

Τοποθετώντας τις μονάδες που μας δόθηκαν με βάση την παραπάνω μετάθεση, το σύστημα αποκτά αξιοπιστία ίση με 0,0227137. Η αξιοπιστία αυτή είναι η μέγιστη αξιοπιστία που δύναται να αποκτήσει το δοθέν σύστημα, για τις συγκεκριμένες τιμές αξιοπιστιών των μονάδων που μας δόθηκαν.

Παραπάνω εξετάστηκε η περίπτωση των ορθογώνιων $k_1 \times k_2$-από-τα-$k_1 \times n$:G συστημάτων, για τα οποία σύμφωνα με τα αποτελέσματα που παραθέσαμε έχουμε αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό όταν τηρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3.13.

Αντιθέτως για την περίπτωση των ορθογωνίων $k_1 \times k_2$-από-τα-$k_1 \times n$:F συστημάτων έχουμε μόνο το παρακάτω αποτέλεσμα για την ύπαρξη αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού (βλέπε Hwang and Shi (1987))

Θεώρημα 3.14. *Για $k_1 \geq 2$, σε ένα γραμμικό ή κυκλικό $k_1 \times k_2$-από-τα-$k_1 \times n$:F σύστημα, δεν υπάρχει βέλτιστη μετάθεση, παρά μόνο όταν ισχύει $k_2 = n-1$ και $k_1=2$. Σε αυτή την περίπτωση ως βέλτιστη μετάθεση έχουμε την ακόλουθη:*

1 *οποιαδήποτε μετάθεση των καλύτερων* $2n$-4 *μονάδων* 2

4 *οποιαδήποτε μετάθεση των καλύτερων* $2n$-4 *μονάδων* 3

- **Κυλινδρικά δισδιάστατα συστήματα**

Ο Zuo (1993) απέδειξε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.15. *Απαραίτητη συνθήκη για την ύπαρξη βέλτιστης μετάθεσης σε ένα κυλινδρικό $2 \times k_2$-από-τα-$2 \times n$:G σύστημα, με $k_2 < n \leq 2k_2+1$ είναι η:*

$$(p_{1j_1} - p_{i_2 j_2})(p_{2j_1} - p_{i_3 j_2}) > 0$$

όπου i_2, i_3= 1,2 και $j_2 > j_1$. Για $j>n$ θέτουμε $p_{i_1 j} = p_{i_1 (j-n)}$.

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι για την αναλλοίωτη βέλτιστη τοποθέτηση του κυλινδρικού $2 \times k_2$-από-τα-$2 \times n$:G συστήματος με $k_2 < n \leq 2k_2+1$ θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η παρακάτω μετάθεση:

1	3	7	11	15	…	$2n$-1	…	17	13	9	5	1
2	4	8	12	16	…	$2n$	…	18	14	10	6	2

Αναφέρουμε τέλος και το παρακάτω θεώρημα, το οποίο περιλαμβάνει ένα γενικό συμπέρασμα για τα ορθογώνια και τα κυλινδρικά δισδιάστατα συστήματα που μελετήσαμε (βλέπε Zuo (1993)).

Θεώρημα 3.16. *Για το ορθογώνιο* $k_1 \times k_2$*-από-τα-*$k_1 \times n$*:G σύστημα με* $2 \leq k_2 < \frac{n}{2}$ *και* $k_1 \geq 2$*, καθώς και για το κυλινδρικό* $k_1 \times k_2$*-από-τα-*$k_1 \times n$*:G σύστημα με* $2 \leq k_2 < (n-1)/2$ *και* $k_1 \geq 2$*, δεν υπάρχει μετάθεση η οποία να οδηγεί σε αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Μελέτη μη αναλλοίωτων βέλτιστων σχεδιασμών

4.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστούν διάφορες τεχνικές που βοηθούν τη μελέτη συστημάτων, για τα οποία δεν υπάρχουν αναλλοίωτοι σχεδιασμοί. Θα παρουσιαστούν κάποιες γενικές μέθοδοι, οι οποίες μπορούν να εφαρμοστούν για την εύρεση ενός μη αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού.

Οι μέθοδοι αυτοί δεν εγγυώνται την εύρεση μέγιστης αξιοπιστίας στο σύστημά μας. Μας εξασφαλίζουν όμως ότι η αξιοπιστία που θα προκύψει μέσω συγκρίσεων, θα αποτελεί μια αξιοπιστία ικανοποιητικά μεγάλη. Βασικό κριτήριο επιλογής της καλύτερης μεθόδου αποτελεί το πλήθος των πράξεων που έχει να εκτελέσει κάθε φορά εκείνος που τις υλοποιεί. Η βέλτιστη μέθοδος μπορεί να αλλάζει ανάλογα με τα δεδομένα που διαθέτουμε και το πρόβλημα που μελετάμε.

Τέλος θα παρουσιαστεί ένα παράδειγμα ξεχωριστά για κάθε μέθοδο καθώς και ένα κοινό παράδειγμα, με σκοπό να γίνουν καλύτερα αντιληπτές οι μεθοδολογίες που παρατίθενται.

Όλοι οι μέθοδοι που θα παρουσιαστούν στην παρούσα ενότητα προέρχονται από την εργασία των Zuo and Kuo (1990).

4.2 Μέθοδοι επίλυσης του μη αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού

Όπως έχει ήδη αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο, υπάρχουν περιπτώσεις συστημάτων για τα οποία δεν είναι δυνατή η εύρεση αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού (όπως για παράδειγμα στην περίπτωση του γραμμικού ή κυκλικού συνεχόμενου-k-από-τα-n:F συστήματος για το οποίο ισχύει $2<k<n-2$). Στα συστήματα αυτά λοιπόν δεν αρκεί η γνώση της διάταξης των αξιοπιστιών των μονάδων του συστήματος, για να βρεθεί η μέγιστη δυνατή αξιοπιστία για το σύστημα. Αντιθέτως είναι απαραίτητη η γνώση των πραγματικών τιμών των αξιοπιστιών των μονάδων.

Για την εύρεση του συστήματος σε αυτές τις περιπτώσεις βασικό κριτήριο αποτελεί η σημαντικότητα αξιοπιστίας κατά Birnbaum. Με βάση την ποσότητα αυτή αναπτύχθηκαν τρεις βασικές μέθοδοι για την εύρεση ενός μη αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού: η ευρετική μέθοδος, η μέθοδος τυχαιοποίησης και η μέθοδος της δυαδικής αναζήτησης.

Προτού παρουσιαστούν ξεχωριστά οι μέθοδοι αυτοί, κρίνεται αναγκαίο να διευκρινιστεί ότι όλα τα συστήματα έχουν μη αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό. Το βασικό πρόβλημα που αντιμετωπίζεται για την εύρεση της μέγιστης τιμής της αξιοπιστίας, είναι να εντοπιστεί αυτή με όσο το δυνατόν λιγότερες πράξεις. Στους αναλλοίωτους σχεδιασμούς λοιπόν δίνεται ένας τύπος με τον οποίο ο αναγνώστης μπορεί να αποφύγει την πληθώρα πράξεων και να επιτύχει μέγιστη αξιοπιστία, ανεξάρτητα από το αν γνωρίζει ή όχι τις τιμές των αξιοπιστιών των μονάδων του συστήματος. Στους μη αναλλοίωτους σχεδιασμούς αντιθέτως παρουσιάζονται μέθοδοι οι οποίοι βοηθούν τον αναγνώστη να δημιουργήσει μια διάταξη μονάδων η οποία θα δίνει μια μεγάλη αξιοπιστία με λίγες πράξεις (αλλά όχι απαραίτητα τη μέγιστη δυνατή αξιοπιστία). Μια διάταξη η οποία μπορεί να μεταβληθεί αν αλλαχθούν οι τιμές των αξιοπιστιών των μονάδων του συστήματος.

Γίνεται αντιληπτό ως γενικό συμπέρασμα, ότι στα συστήματα στα οποία μπορούμε να έχουμε αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό, προτιμάμε να εφαρμόσουμε τη θεωρία του αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού, αντί της θεωρίας του μη αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού.

4.2.1 Η ευρετική μέθοδος

Μία εκ των μεθόδων, για την εύρεση του μη αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού, αποτελεί η ευρετική μέθοδος (Heuristic Method). Βασικό κριτήριο της μεθόδου αποτελεί η σημαντικότητα κατά Birnbaum. Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι ότι η μονάδα με τη μεγαλύτερη αξιοπιστία θα πρέπει να τοποθετείται στη θέση με τη μεγαλύτερη σημαντικότητα κατά Birnbaum.

Έστω ότι έχουμε n μονάδες με γνωστές αξιοπιστίες και ότι διαθέτουμε n δυνατές θέσεις τοποθέτησης των μονάδων αυτών. Αρχικά σε κάθε μία από τις n δυνατές θέσεις τοποθετούμε μία μονάδα (η τοποθέτηση αυτού του είδους ονομάζεται αρχικό σχέδιο). Έπειτα υπολογίζουμε τη σημαντικότητα κατά Birnbaum, για κάθε μονάδα μας.

Εάν μία θέση έχει μια πιο αξιόπιστη μονάδα, αλλά όχι σημαντικότερη, από μία άλλη θέση, τότε οι μονάδες αυτών των θέσεων εναλλάσσονται μεταξύ τους στο σύστημά μας.

Η παραπάνω λογική επεκτείνεται για όλο το σύστημα, έως ότου εξισωθεί το κριτήριο της σημαντικότητας με το κριτήριο της αξιοπιστίας ή έως ότου η αξιοπιστία του συστήματος να μην βελτιώνεται με την αμοιβαία ανταλλαγή δύο μονάδων του.

Γενικά η ευρετική μέθοδος αντιμετωπίζει δύο προβλήματα. Το πρώτο πρόβλημα αναφέρεται στο πως θα αναθέσουμε τις μονάδες μας στην αρχή (τι αρχικό σχέδιο θα ακολουθήσουμε) και το δεύτερο αναφέρεται στο πως θα βελτιώσουμε την αξιοπιστία του.

Μερικά βέλτιστα αρχικά σχέδια για τη μέθοδο είναι τα παρακάτω:

Αρχικό Σχέδιο 1: $(1, n\text{-}1, 3, n\text{-}3, \ldots, n\text{-}2, 4, n, 2)$ για συνεχόμενο-2-από-τα-n σύστημα i.i.d. μονάδων.

Αρχικό Σχέδιο 2: $(1, 3, 5, \ldots, n, \ldots, 6, 4, 2)$ βέλτιστο σχέδιο σε πολλές περιπτώσεις.

Αρχικό Σχέδιο 3: $(1, n, 3, n\text{-}2, \ldots, n\text{-}3, 4, n\text{-}1, 2)$ βέλτιστο σχέδιο για συνεχόμενο-2-από-τα-n:F σύστημα.

Αρχικό Σχέδιο 4: $(1, 2, 3, 4, \ldots, n)$, μοτίβο των φυσικών αριθμών.

Λαμβάνοντας υπόψη μας το αρχικό σχέδιο, η ευρετική μέθοδος έχει τις ακόλουθες δύο μεθοδολογίες:

i) Ξεκινώντας από την μονάδα με τη μικρότερη αξιοπιστία, συγκρίνουμε τη σημαντικότητα κατά Birnbaum της μονάδος με τη σημαντικότητα κατά Birnbaum της επόμενης πιο αξιόπιστης μονάδος. Εάν η σημαντικότητα της λιγότερο αξιόπιστης μονάδος είναι μεγαλύτερη της σημαντικότητας της πιο αξιόπιστης μονάδας, τότε οι δύο μονάδες ανταλλάσουν θέσεις στο σύστημα. Εάν η αξιοπιστία του συστήματος βελτιωθεί με την αλλαγή, τότε κρατάμε το νέο σύστημα. Αλλιώς, απορρίπτουμε την ανταλλαγή και πηγαίνουμε στην αμέσως πιο αξιόπιστη μονάδα. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται από την αρχή για την επόμενη πιο αξιόπιστη μονάδα.

ii) Ξεκινώντας από τη μονάδα με τη μικρότερη αξιοπιστία, συγκρίνουμε τη σημαντικότητα αξιοπιστίας της μονάδος με όλες τις σημαντικότητες των μονάδων με μεγαλύτερες αξιοπιστίες. Εάν προκύψει ότι η μονάδα μας δεν είναι η λιγότερο σημαντική, τότε η μονάδα μας αλλάζει θέση με τη μονάδα που είναι η λιγότερο σημαντική. Εάν η ανταλλαγή βελτιώνει την αξιοπιστία του συστήματος, τότε η ανταλλαγή γίνεται αποδεκτή, αλλιώς απορρίπτεται και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για την επόμενη πιο αξιόπιστη μονάδα.

Θέλοντας να αποσαφηνίσουμε την παραπάνω μέθοδο θα την εφαρμόσουμε σε ένα γραμμικό συνεχόμενο-3-από-τα-6:*G* σύστημα, για το οποίο γνωρίζουμε ότι οι τιμές των αξιοπιστιών των μονάδων του είναι οι ακόλουθες: p_1=0,24, p_2=0,35, p_3=0,47, p_4=0,53, p_5=0,69 και p_6=0,91.

Σύμφωνα με τη μέθοδο θα πρέπει να επιλέξουμε πρώτα ένα αρχικό σχέδιο. Έστω ότι για την παρούσα εφαρμογή επιλέξαμε το αρχικό σχέδιο 4, δηλαδή το (1, 2, 3, 4, …, *n*).

Έχοντας τοποθετήσει πλέον τις μονάδες μας στο σύστημα σύμφωνα με το αρχικό μας σχέδιο (1, 2, 3, 4, 5, 6) θα πρέπει να υπολογίζουμε τη σημαντικότητα κατά Birnbaum για κάθε μια από αυτές. Υπενθυμίζουμε ότι σύμφωνα με τον ορισμό της σημαντικότητας κατά Birnbaum, η σημαντικότητα μιας μονάδος *i* ισούται με την αξιοπιστία του συστήματος δεδομένου ότι λειτουργεί η μονάδα *i* μείον την αξιοπιστία του συστήματος δεδομένου ότι δεν λειτουργεί η μονάδα *i*. Έτσι προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Έχουμε ένα γραμμικό συνεχόμενο-3-από-τα-6:*G* σύστημα, το οποίο λειτουργεί όταν λειτουργούν τρεις συνεχόμενες από τις έξι μονάδες που το αποτελούν. Ως εκ τούτου συμπεραίνουμε ότι τα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας του είναι τα:

$$P_1=\{1,2,3\},\ P_2=\{2,3,4\},\ P_3=\{3,4,5\} \text{ και } P_4=\{4,5,6\}$$

Άρα κατά τα γνωστά η συνάρτηση δομής του συστήματος θα είναι ίση

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1-\prod_{j=1}^{4}\left(1-\prod_{i\in P_j} x_i\right) = 1-(1-x_1x_2x_3)(1-x_2x_3x_4)(1-x_3x_4x_5)(1-x_4x_5x_6)=$$

$$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4-x_1x_2x_3x_4+x_3x_4x_5-x_2x_3x_4x_5+x_4x_5x_6-x_3x_4x_5x_6$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα μας για τις αξιοπιστίες των μονάδων προκύπτει ότι η αξιοπιστία του συστήματος είναι ίση με 0,393839.

Για την μονάδα 1

Όταν δε λειτουργεί η μονάδα 1, το σύστημα έχει τα ακόλουθα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας:

$$P_1=\{2,3,4\},\ P_2=\{3,4,5\} \text{ και } P_3=\{4,5,6\}$$

Άρα κατά τα γνωστά η συνάρτηση δομής του συστήματος θα είναι ίση

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1-\prod_{j=1}^{3}(1-\prod_{i\in P_j} x_i) = 1-(1-x_2x_3x_4)(1-x_3x_4x_5)(1-x_4x_5x_6)=$$

$$x_2x_3x_4+x_3x_4x_5-x_2x_3x_4x_5+x_4x_5x_6-x_3x_4x_5x_6$$

και προκύπτει ότι η αξιοπιστία του συστήματος όταν δεν λειτουργεί η μονάδα 1 είναι ίση με 0,375283.

Συνεπώς η σημαντικότητα κατά Birnbaum για τη μονάδα 1 είναι ίση με $I(1)$=0,393839-0,375283=0,018556.

Για την μονάδα 2

Όταν δε λειτουργεί η μονάδα 2, το σύστημα έχει τα ακόλουθα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας:

$$P_1=\{3,4,5\} \text{ και } P_2=\{4,5,6\}$$

Άρα η συνάρτηση δομής του συστήματος θα είναι ίση

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1-\prod_{j=1}^{2}(1-\prod_{i\in P_j} x_i) = 1-(1-x_3x_4x_5)(1-x_4x_5x_6)=$$

$$x_3x_4x_5+x_4x_5x_6-x_3x_4x_5x_6$$

και προκύπτει ότι η αξιοπιστία του συστήματος όταν δεν λειτουργεί η μονάδα 2 είναι ίση με 0,348256.

Συνεπώς προκύπτει ότι η σημαντικότητα κατά Birnbaum για τη μονάδα 2 είναι ίση με $I(2)$=0,393839-0, 348256=0,045583.

Για την μονάδα 3

Όταν δε λειτουργεί η μονάδα 3, το σύστημα έχει μόνο ένα ελάχιστο σύνολο λειτουργίας:

$$P_1=\{4,5,6\}$$

Οπότε η συνάρτηση δομής του συστήματος θα είναι ίση

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1-(1-\prod_{i\in P_j} x_i) = 1-(1-x_4x_5x_6)=x_4x_5x_6.$$

Άρα η αξιοπιστία του συστήματος όταν δεν λειτουργεί η μονάδα 3 είναι ίση με 0,332787.

Συνεπώς προκύπτει ότι η σημαντικότητα κατά Birnbaum για τη μονάδα 3 είναι ίση με $I(3)$=0,393839-0,332787=0,061052.

Για την μονάδα 4

Όταν δε λειτουργεί η μονάδα 4, το σύστημα έχει μόνο ένα ελάχιστο σύνολο λειτουργίας:

$$P_1=\{1,2,3\}$$

Άρα η συνάρτηση δομής του συστήματος θα είναι ίση

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1\text{-}(1-\prod_{i\in P_j} x_i) = 1\text{-}(1\text{-}x_1x_2x_3)=x_1x_2x_3.$$

και προκύπτει ότι η αξιοπιστία του συστήματος όταν δεν λειτουργεί η μονάδα 3 είναι ίση με 0,03948.

Συνεπώς η σημαντικότητα κατά Birnbaum για τη μονάδα 3 είναι ίση με $I(4)$=0,393839-0,03948=0,354359.

Για την μονάδα 5

Όταν δε λειτουργεί η μονάδα 5, το σύστημα έχει τα ακόλουθα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας:

$$P_1=\{1,2,3\} \text{ και } P_2=\{2,3,4\}$$

Άρα η συνάρτηση δομής του συστήματος θα είναι ίση

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1\text{-}\prod_{j=1}^{2}(1-\prod_{i\in P_j} x_i) = 1\text{-}(1\text{-}\ x_1x_2x_3)(1\text{-}x_2x_3x_4)=$$

$$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4-x_1x_2x_3x_4$$

και προκύπτει ότι η αξιοπιστία του συστήματος όταν δεν λειτουργεί η μονάδα 5 είναι ίση με 0,105741.

Συνεπώς η σημαντικότητα κατά Birnbaum για τη μονάδα 5 είναι ίση με $I(5)$=0,393839-0,105741=0,288098.

Για την μονάδα 6

Όταν δε λειτουργεί η μονάδα 6, το σύστημα έχει τα ακόλουθα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας:

$$P_1=\{1,2,3\},\ P_2=\{2,3,4\} \text{ και } P_3=\{3,4,5\}$$

Άρα κατά τα γνωστά η συνάρτηση δομής του συστήματος θα είναι ίση

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1\text{-}\prod_{j=1}^{3}(1-\prod_{i\in P_j} x_i) = 1\text{-}(1\text{-}\ x_1x_2x_3)(1\text{-}\ x_2x_3x_4)(1\text{-}x_3x_4x_5)=$$

$$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4-x_1x_2x_3x_4+x_3x_4x_5-x_2x_3x_4x_5$$

Έτσι προκύπτει ότι η αξιοπιστία του συστήματος όταν δεν λειτουργεί η μονάδα 6 είναι ίση με 0,217462.

Συνεπώς η σημαντικότητα κατά Birnbaum για τη μονάδα 6 είναι ίση με $I(6)$=0,393839-0,217462=0,176377.

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω παίρνουμε τον ακόλουθο συγκεντρωτικό πίνακα:

Μονάδα	Αξιοπιστία Μονάδος	Σημαντικότητα μονάδος κατά Birnbaum
1	0,24	0,018556
2	0,35	0,045583
3	0,47	0,061052
4	0,53	0,354359
5	0,69	0,288098
6	0,91	0,176377

Πίνακας 4.1: Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων

Παρατηρούμε ότι τη μεγαλύτερη σημαντικότητα κατά Birnbaum έχει η μονάδα 4 και ακολουθούν με φθίνουσα σειρά σημαντικότητας οι μονάδες 5, 6, 3, 2 και τελευταία η μονάδα 1.

Έχοντας πλέον υπολογίσει τη σημαντικότητα κατά Birnbaum για όλες τις μονάδες μας, αποφασίζουμε να επιλέξουμε την πρώτη μεθοδολογία της ευρετικής μεθόδου για να βρούμε την τοποθέτηση που θα αυξήσει την αξιοπιστία του συστήματός μας.

Ξεκινώντας λοιπόν από την μονάδα 1 (μονάδα με τη μικρότερη αξιοπιστία) παρατηρούμε ότι έχει και τη μικρότερη σημαντικότητα μονάδος, άρα η θέση της στο σύστημα δεν θα πρέπει να αλλαχθεί. Ομοίως πράττουμε και για τις μονάδες 2 και 3 που έχουν τις αμέσως μεγαλύτερες αξιοπιστίες και σημαντικότητες.

Παρατηρούμε ότι η μονάδα 4 έχει τη μεγαλύτερη σημαντικότητα, άρα σύμφωνα με την μέθοδό μας, θα πρέπει να αλλαχθεί με μονάδα που έχει μεγαλύτερη αξιοπιστία από αυτή και μικρότερη σημαντικότητα. Επιλέγουμε να αλλάξουμε λοιπόν θέσεις ανάμεσα στις μονάδες 4 και 6. Προκύπτει έτσι ότι η μονάδα 6 που έχει τη μεγαλύτερη αξιοπιστία θα έχει και τη μεγαλύτερη σημαντικότητα κατά Birnbaum.

Η μονάδα 5 κάνοντας την παραπάνω αλλαγή ανάμεσα στις μονάδες 4 και 6, σύμφωνα με τη μέθοδό μας, παραμένει στη θέση που ξεκίνησε στο σύστημά μας.

Σύμφωνα λοιπόν με την παραπάνω μέθοδο θα πρέπει να τοποθετήσουμε τις μονάδες μας ως εξής: 1-2-3-6-5-4. Η μετάθεση αυτή εξασφαλίζει στο σύστημα μέγιστη δυνατή αξιοπιστία.

4.2.2 Η μέθοδος τυχαιοποίησης

Η τυχαιοποίηση (Randomization Method) αποτελεί μια μέθοδο κατά την οποία συγκρίνεται ένας μικρός αριθμός συστημάτων και επιλέγεται ο βέλτιστος εξ αυτών. Τα βήματα της μεθόδου είναι τα ακόλουθα:

Βήμα 1

Τοποθετούμε τις μονάδες κατά αύξουσα αξιοπιστία.

Βήμα 2

Παράγουμε μια τυχαία μετάθεση από ακέραιους αριθμούς από το 1 μέχρι το n.

Βήμα 3

Αναδιατάσσουμε τους k αριστερά αριθμούς σε αύξουσα σειρά και τους k δεξιά αριθμούς σε φθίνουσα σειρά.

Βήμα 4

Υπολογίζουμε την αξιοπιστία του συστήματος σύμφωνα με τη διάταξη του βήματος 3.

Βήμα 5

Αν προκύψει διάταξη καλύτερης αξιοπιστίας, επιλέγουμε να την κρατήσουμε. Αν η αξιοπιστία του συστήματος δεν βελτιωθεί η διάταξη απορρίπτεται.

Βήμα 6

Όταν παραχθούν αρκετές μεταθέσεις σταματάμε τη διεργασία, αλλιώς επιστρέφουμε στο βήμα 2 της μεθόδου.

Έστω ότι επιθυμούμε να δοκιμάσουμε τη μέθοδο της τυχαιοποίησης για το σύστημα συνεχόμενο-4-από-τα-11:G. Παρατηρούμε ότι για το συγκεκριμένο σύστημα ισχύει $2 \leq k < n/2$, άρα σύμφωνα με τα αποτελέσματα του 3^{ου} Κεφαλαίου δεν υπάρχει μη αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός.

Γνωρίζουμε ότι το σύστημά μας λειτουργεί όταν λειτουργούν τέσσερεις συνεχόμενες από τις έντεκα μονάδες που το αποτελούν. Ως εκ τούτου συμπεραίνουμε ότι τα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας του είναι τα:

P_1={1,2,3,4}, P_2={2,3,4,5}, P_3={3,4,5,6}, P_4={4,5,6,7}, P_5={5,6,7,8}, P_6={6,7,8,9}, P_7={7,8,9,10} και P_8={8,9,10,11}.

Άρα η συνάρτηση δομής του συστήματος θα είναι η ακόλουθη:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1-\prod_{j=1}^{8}\left(1-\prod_{i\in P_j} x_i\right) = 1-(1-x_1x_2x_3x_4)(1-x_2x_3x_4x_5)(1-x_3x_4x_5x_6)(1-x_4x_5x_6x_7)$$
$$(1-x_5x_6x_7x_8)(1-x_6x_7x_8x_9)(1-x_7x_8x_9x_{10})(1-x_8x_9x_{10}x_{11})$$

Γνωρίζοντας πλέον τη συνάρτηση δομής μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση αξιοπιστίας για το σύστημα σε κάθε διαφορετική μετάθεση. Ζητούμενο είναι να βρούμε με όσο το δυνατόν λιγότερες μεταθέσεις τη βέλτιστη μετάθεση που θα μας μεγιστοποιεί την αξιοπιστία για το σύστημα.

Έστω ότι για τις έντεκα μονάδες που αποτελούν το σύστημα μας έχουν δοθεί οι παρακάτω τιμές αξιοπιστίας:

p_1= 0,11, p_2= 0,23, p_3= 0,37, p_4= 0,41, p_5= 0,55, p_6= 0,63, p_7= 0,67, p_8= 0,72, p_9= 0,76, p_{10}= 0,84 και p_{11}= 0,91

Μετάθεση 1-7-3-8-9-4-2-6-10-5-11

Δοκιμάζοντας να τοποθετήσουμε τις δοθείσες μονάδες μας με βάση τη μετάθεση 1-7-3-8-9-4-2-6-10-5-11 (η οποία είναι μία τυχαίως επιλεγμένη μετάθεση), προκύπτει ότι η αξιοπιστία του συστήματος έχει την τιμή $R(\mathbf{p})$= 0,428334.

Θέλοντας να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της τυχαιοποίησης, επιλέγουμε να τοποθετήσουμε τις μονάδες μας κατά αύξουσα σειρά και κρατώντας την παραπάνω τυχαία μετάθεση να αναδιατάξουμε τις τέσσερεις αριστερά μονάδες κατά αύξουσα σειρά αξιοπιστίας και τις τέσσερις δεξιά μονάδες κατά φθίνουσα σειρά. Για τις τρεις μονάδες στο κέντρο έχουμε 3!=6 διατάξεις. Σκοπός μας είναι να δοκιμάσουμε και τις έξι δυνατές διατάξεις και να δούμε ποια μετάθεση είναι βέλτιστη.

Μετάθεση 1-3-7-8-2-4-9-11-10-6-5

Για την παρούσα μετάθεση προκύπτει ότι η αξιοπιστία είναι ίση με $R(\mathbf{p})$= 0,561904. Η παρούσα μετάθεση μας δίνει μεγαλύτερη αξιοπιστία από την αρχική τυχαία μετάθεσή μας, άρα θα απορρίψουμε την αρχική μας μετάθεση και θα κρατήσουμε την παρούσα μετάθεση για τις περαιτέρω συγκρίσεις μας.

Μετάθεση 1-3-7-8-2-9-4-11-10-6-5

Η παρούσα μετάθεση μας δίνει τιμή αξιοπιστίας $R(\mathbf{p})$= 0,508302. Η παρούσα μετάθεση μας δίνει χαμηλότερη τιμή από την μετάθεση που επιλέξαμε να κρατήσουμε, άρα απορρίπτεται σαν μη επαρκής.

Μετάθεση 1-3-7-8-4-2-9-11-10-6-5

Η αξιοπιστία της μετάθεσης είναι ίση με $R(\mathbf{p})$= 0,540284, άρα και αυτή η μετάθεση απορρίπτεται.

Μετάθεση 1-3-7-8-4-9-2-11-10-6-5

Στην παρούσα μετάθεση έχουμε $R(\mathbf{p})$= 0,483713, άρα την απορρίπτουμε.

Μετάθεση 1-3-7-8-9-2-4-11-10-6-5

Στην παρούσα μετάθεση έχουμε $R(\mathbf{p})$= 0,502463, άρα την απορρίπτουμε.

Μετάθεση 1-3-7-8-9-4-2-11-10-6-5

Στην παρούσα μετάθεση έχουμε $R(\mathbf{p})$= 0,499494, άρα την απορρίπτουμε.

Εδώ ολοκληρώνεται η μέθοδο τυχαιοποίησης. Μέσω αυτής καταφέραμε να βρούμε μια μετάθεση (στη συγκεκριμένη περίπτωση τη μετάθεση 1-3-7-8-2-4-9-11-10-6-5) η οποία μας δίνει βέλτιστη αξιοπιστία. Η βέλτιστη αξιοπιστία παράχθηκε για την τυχαία μετάθεση που επιλέξαμε στην αρχή και ως εκ τούτου δεν μας εγγυάται ότι είναι η μοναδική ή ότι δεν υπάρχει καλύτερη από αυτήν. Εμείς απλά καταφέραμε να βρούμε μία βέλτιστη μετάθεση μέσω 3! διατάξεων, αντί να επιχειρήσουμε να βρούμε τη βέλτιστη μετάθεση κάνοντας τις 11! δυνατές διατάξεις του συστήματος. Γίνεται λοιπόν εύκολα αντιληπτό ότι η μέθοδος χάνει σε ακρίβεια, αφού ενδέχεται να υπάρχουν και μεταθέσεις με καλύτερη αξιοπιστία (όπως για παράδειγμα η μετάθεση 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11 η οποία δίνει αξιοπιστία ίση με 0,564637), αλλά κερδίζει σε ταχύτητα πράξεων. Άρα η μέθοδος προτιμάται σε προβλήματα που θέλουμε μία βέλτιστη μετάθεση σε γρήγορο χρόνο.

4.2.3 Η μέθοδος της δυαδικής αναζήτησης

Σε αντίθεση με την ευρετική μέθοδο και τη μέθοδο τυχαιοποίησης που εφαρμόζονται μεν σε γραμμικό συνεχόμενο-k-από-τα-n συστήματα, αλλά δεν εγγυώνται τη βέλτιστη λύση, η μέθοδος της δυαδικής αναζήτησης (Binary Search Method) μπορεί να εξασφαλίσει βέλτιστη λύση για ένα γραμμικό συνεχόμενο-k-από-τα-n:F σύστημα με $n/2 \leq k \leq n$.

Η πολυπλοκότητα της μεθόδου ανάγεται σε $n!$ πράξεις και μας δίνει το μη αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό.

Ο μη αναλλοίωτος βέλτιστος σχεδιασμός μέσω της μεθόδου επιτυγχάνεται βασιζόμενος στις παρακάτω αναγκαίες προϋποθέσεις:

α) Οι μονάδες από τη θέση 1 έως τη θέση που προκύπτει ως το ελάχιστο των k, n-k+1 (δηλαδή min{k, (n-k+1)}) τοποθετούνται σε αύξουσα σειρά αξιοπιστίας.

β) Οι μονάδες από τη θέση που προκύπτει ως το μέγιστο των k, n-k+1 (δηλαδή max{k, (n-k+1)}) έως τη θέση n τοποθετούνται σε φθίνουσα σειρά αξιοπιστίας.

γ) Οι 2k-n μονάδες με την καλύτερη αξιοπιστία τοποθετούνται από τη θέση n-k+1 έως τη θέση k, με οποιαδήποτε σειρά αν n<2k.

Στα συνεχόμενα-k-από-τα-n:F συστήματα, για τα οποία ισχύει η ισότητα (k-$n/2$)=n, θα πρέπει τουλάχιστον σε μια εκ των θέσεων k και k+1 να τοποθετηθεί η μονάδα με τη μεγαλύτερη αξιοπιστία

Έστω ότι μας ζητείται να εφαρμόσουμε την παραπάνω μέθοδο σε ένα γραμμικό συνεχόμενο-4-από-τα-10:G σύστημα για το οποίο μας δίνονται οι παρακάτω τιμές των αξιοπιστιών δέκα μονάδων:

p_1= 0,18, p_2= 0,23, p_3= 0,29, p_4= 0,34, p_5= 0,42, p_6= 0,53, p_7= 0,57, p_8= 0,74, p_9= 0,89 και p_{10}= 0,92.

Γνωρίζουμε ότι το σύστημα λειτουργεί όταν λειτουργούν τέσσερεις συνεχόμενες από τις δέκα μονάδες που το αποτελούν. Ως εκ τούτου συμπεραίνουμε ότι τα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας του είναι τα:

P_1={1,2,3,4}, P_2={2,3,4,5}, P_3={3,4,5,6}, P_4={4,5,6,7}, P_5={5,6,7,8}, P_6={6,7,8,9} και P_7={7,8,9,10}.

Άρα η συνάρτηση δομής του συστήματος θα είναι της ακόλουθης μορφής:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1-\prod_{j=1}^{7}(1-\prod_{i\in P_j} x_i) = 1-(1-x_1x_2x_3x_4)(1-x_2x_3x_4x_5)(1-x_3x_4x_5x_6)(1-x_4x_5x_6x_7)(1-x_5x_6x_7x_8)(1-x_6x_7x_8x_9)(1-x_7x_8x_9x_{10}).$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο της δυαδικής αναζήτησης οι μονάδες από τη θέση 1 έως τη θέση min{k, (n-k+1)}= min{4, (10-4+1)}=min{4, 7}=4, πρέπει να τοποθετηθούν σε αύξουσα σειρά αξιοπιστίας, ενώ οι μονάδες από τη θέση max{k, (n-k+1)}=max{4, 7}=7 έως τη θέση 10, πρέπει να τοποθετηθούν σε φθίνουσα σειρά αξιοπιστίας. Για τις υπόλοιπες θέσεις του συστήματος (δηλαδή για τις θέσεις 5 και 6) επιλέγεται οποιαδήποτε από τις δύο δυνατές τοποθετήσεις των μονάδων που περισσεύουν.

Έστω ότι επιλέγουμε λοιπόν να εφαρμόσουμε τη μετάθεση 1-2-3-4-5-6-10-9-8-7. Για τη μετάθεση αυτή εύκολα, σύμφωνα και με τα παραπάνω, υπολογίζουμε ότι η αξιοπιστία του συστήματος είναι ίση με 0,544415.

Για να συγκρίνουμε τα αποτελέσματά μας, δημιουργούμε την τυχαία μετάθεση 1-2-3-4-6-5-7-8-9-10. Κάνοντας του απαραίτητους υπολογισμούς προκύπτει ότι η αξιοπιστία του συστήματος σε αυτή την περίπτωση είναι ίση με 0,394761.

Άρα προκύπτει ότι με τη χρήση της μεθόδου της δυαδικής αναζήτησης το σύστημα οδηγήθηκε σε αύξηση της αξιοπιστίας του.

4.3 Σύγκριση των μεθόδων επίλυσης του μη αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού

Έστω ότι μας δίνεται το γραμμικό συνεχόμενο-3-από-τα-7:G σύστημα, για το οποίο γνωρίζουμε ότι οι τιμές των αξιοπιστιών των μονάδων του είναι οι ακόλουθες: p_1=0,20, p_2=0,36, p_3=0,48, p_4=0,51, p_5=0,65, p_6=0,83 και p_7=0,92. Για το δοθέν σύστημα θα δοκιμάσουμε να βρούμε μια βέλτιστη αξιοπιστία σύμφωνα με όλες τις μεθόδους που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες υποενότητες.

- Ευρετική Μέθοδος

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο σύμφωνα με τα όσα έχουν ειπωθεί, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

Μονάδα	Αξιοπιστία Μονάδος	Σημαντικότητα μονάδος κατά Birnbaum
1	0,20	0,008529
2	0,36	0,039374
3	0,48	0,066424
4	0,51	0,07103
5	0,65	0,479714
6	0,83	0,377877
7	0,92	0,234801

Πίνακας 4.2: Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων

Άρα σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή η ζητούμενη μετάθεση που πρέπει να ακολουθήσουμε είναι η 1-2-3-4-7-6-5. Η μετάθεση αυτή δίνει αξιοπιστία στο σύστημα ίση με 0,584776.

- Μέθοδος Τυχαιοποίησης

Σύμφωνα με τη μέθοδο, δημιουργούμε μια τυχαία μετάθεση έστω 1-5-2-3-7-6-4, σύμφωνα με την οποία υπολογίζουμε την αξιοπιστία του συστήματος. Η αξιοπιστία σε αυτή την περίπτωση είναι ίση με 0,619905.

Αναδιατάσσουμε τους τρεις (αφού k=3) αριστερά αριθμούς σε αύξουσα σειρά και τους τρεις δεξιά αριθμούς σε φθίνουσα σειρά. Έτσι προκύπτει η μετάθεση 1-2-5-3-7-6-4, η οποία δίνει στο σύστημα αξιοπιστία 0,641676.

Εφόσον προέκυψε διάταξη καλύτερης αξιοπιστίας, επιλέγουμε να την κρατήσουμε.

- Μέθοδος Δυαδικής Αναζήτησης

Ακολουθώντας τη μέθοδο, τοποθετούμε τις μονάδες από τη θέση 1 έως τη θέση min{3, (7-3+1)}= min{3, 5}=3 κατά αύξουσα σειρά αξιοπιστίας. Αντίστοιχα οι μονάδες από τη θέση max{3, (7-3+1)}=max{3, 5}=5 έως τη θέση 7 τοποθετούνται σε φθίνουσα σειρά αξιοπιστίας. Άρα σύμφωνα με τη μέθοδο μια επιτρεπτή μετάθεση είναι η 1-2-3-4-7-6-5 για την οποία γνωρίζουμε (σύμφωνα με παραπάνω) ότι δίνει αξιοπιστία ίση με 0,584776.

Επιτρεπτή μετάθεση (σύμφωνα με τη μέθοδο) ήταν και η 7-6-5-4-1-2-3, η οποία όμως παρείχε στο σύστημα αξιοπιστία ίση με 0,551004. Η μετάθεση απορρίφθηκε, αφού η αξιοπιστία της είναι μικρότερη από την αξιοπιστία της παραπάνω μετάθεσης.

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, παρατηρούμε ότι στο συγκεκριμένο παράδειγμα καλύτερη αξιοπιστία μας έδωσε η μέθοδος της τυχαιοποίησης.

Το συμπέρασμα αυτό δεν είναι καθολικό, αφού η καλύτερη μέθοδος εξαρτάται από τα δεδομένα και το είδος του προβλήματος. Μια μέθοδος που κρίνεται ικανοποιητική σε ένα πρόβλημα, μπορεί να κρίνεται απορριπτέα σε ένα άλλο.

4.4 Γενικά συμπεράσματα

Σύμφωνα με τα όσα ειπώθηκαν στις παραπάνω ενότητες, προκύπτουν κάποια γενικά συμπεράσματα για το μη αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό. Υπενθυμίζουμε ότι κάθε σύστημα έχει μη αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό, αλλά δεν έχουν όλα τα συστήματα απαραίτητα αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό. Όπως θα έχει γίνει ήδη αντιληπτό στον αναγνώστη, η εύρεση ενός μη αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού απαιτεί συνήθως την εκτέλεση μεγάλου πλήθους πράξεων. Άρα κρίνεται απαραίτητο στα συστήματα για τα οποία μπορούμε να υπολογίσουμε τον αναλλοίωτο βέλτιστο σχεδιασμό μέσω έτοιμου τύπου, να προτιμούμε αυτή τη λύση.

Αντιθέτως όταν καλούμαστε να βρούμε υποχρεωτικά λύση μη αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού, όπως έχουμε αναφέρει έχουμε διάφορες μεθόδους. Βασικό κριτήριο επιλογής της μεθόδου που θα μας οδηγήσει γρηγορότερα σε επιθυμητό αποτέλεσμα αποτελεί το πλήθος πράξεων. Επιλέγουμε δηλαδή τη μέθοδο η οποία έχει όσο το δυνατόν λιγότερους υπολογισμούς, αφού σε πρακτικό επίπεδο, μικρό πλήθος πράξεων ισοδυναμεί με μικρό κόστος εντοπισμού του ζητούμενου συστήματος. Ο αναγνώστης θα πρέπει κάθε φορά να μελετά το πρόβλημα και να επιλέγει τη μέθοδο, με την οποία θα κάνει τις λιγότερες πράξεις.

Τέλος πρέπει να αναφέρουμε ότι υπάρχουν προβλήματα στα οποία δε ζητείται η βέλτιστη αξιοπιστία, αλλά ζητείται μια καλύτερη αξιοπιστία από την παρούσα. Σε αυτού του είδους τα προβλήματα οι μέθοδοι μη αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού που δόθηκαν παραπάνω πιθανόν να υπερτερούν έναντι των μεθόδων αναλλοίωτου βέλτιστου σχεδιασμού. Στο συμπέρασμα αυτό καταλήγουμε αν λάβουμε υπόψη μας ότι σε πολλά συστήματα η επανατοποθέτηση όλων των μονάδων μπορεί να μην είναι εφικτή (για τη δημιουργία του αναλλοίωτου, αν υπάρχει, βέλτιστου σχεδιασμού), αλλά ο χρήστης έχει δυνατότητα αλλαγής μόνο ορισμένων μονάδων. Σε αυτή την περίπτωση η γνώση των παραπάνω μεθόδων κρίνεται απαραίτητη, αφού ο χρήστης μπορεί να αυξήσει την αξιοπιστία του συστήματος σε ένα αποδεκτό επίπεδο, χωρίς αυτή η αξιοπιστία να αποτελεί τη μέγιστη δυνατή αξιοπιστία για το σύστημα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

Κούτρας, Μάρκος Β. (2008). *Στατιστική Θεωρία αξιοπιστίας και έλεγχοι χρόνων ζωής*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, ΠΜΣ «Εφαρμοσμένη Στατιστική».

Ξένη

Bhattacharya, D. and Samaniego, F. J. (2007). On the Optimal Allocation of Components within Coherent Systems, *Statistics & Probability Letters*, **78**, 938-943.

Boland, P. J., Proschan, F. and Tong, Y. L. (1989). Optimal Arrangement of Components via Pairwise Rearrangements, *Naval Research Logistics*, **36**, 807-815.

Derman, C., Lieberman, G. J. and Ross, S. M. (1972). On Optimal Assembly of Systems, *Naval Research Logistics Quarterly*, **19**, 569-574.

Derman, C., Lieberman, G. J. and Ross, S. M. (1974). Assembly of Systems Having Maximum Reliability, *Naval Research Logistics Quarterly*, **21**, 1-12.

Duan, J., Wu, S. and Zuo, M. J. (2005). Optimal Design of two k-out-of-n systems Connected in Series, *Proceedings of the Second CDEN Design Conference*.

El-Neweihi, E., Proschan, F. and Sethuraman, J. (1986). Optimal Allocation of Components in Parallel-Series and Series-Parallel systems, *Journal of Applied Probability*, **23**, 770-777.

Hwang, F. K. and Shi, D. (1987). Redundant Consecutive-*k*-out-of-*n*:*F* Systems. *Operations Research Letters*, **6**, 293-296.

Jalali, A., Hawkes, A. G., Cui, L. R. and Hwang, F. K. (2005). The Optimal Consecutive-*k*-out-of-*n*:*G* Line for $n \leq 2k$, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **128**, 281-287.

Koutras, M. V., Papadopoulos, G. K. and Papastavridis, S. G. (1994). Pairwise Rearrangements in Reliability Structures, *Naval Research Logistics*, **41**, 683-687.

Kuo, W. and Zuo, M. J. (2003). *Optimal Reliability Modeling, Principles and Applications*, John Wiley & Sons INC.

Lin, F. H. and Kuo, W. (2002). Reliability Importance and Invariant Optimal Allocation, *Journal of Heuristics*, **8**, 155-171.

Meng, F. C. (2004). Comparing Birnbaum Importance Measure of System Components, *Probability in Engineering and Informational Sciences*, **18**, 237-245.

Pham, H. (1992). Optimal Design of *k*-out-of-*n* Redundant Systems, *Microelectronics and Reliability*, **32**, 119-126.

Sfakianakis M. (1993). Optimal Arrangement of Components in a Consecutive *k*-out-of-*r*-from *n*:*F* System, *Microelectronics and Reliability*, **33**, 1573-1578.

Shen, J. and Zuo, M. J. (1994α). A Necessary Condition for Optimal Consecutive-*k*-out-of-*n*:*G* System Design, *Microelectronics and Reliability*, **34**, 485-493.

Shen, J. and Zuo, M. J. (1994β). Optimal Design of Series Consecutive-*k*-out-of-*n*:*G* systems, *Reliability Engineering and System Safety*, **45**, 277-283.

Tillman, F. A., Hwang, C. L. and Kuo, W. (1977). Optimization Techniques for System Reliability with Redundancy-A Review, *IEEE Transactions on Reliability*, **26**, 148-155.

Zuo, M. J. (1993). Reliability and Design of 2-dimensional Consecutive-*k*-out-of-*n* Systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **42**, 488-490.

Zuo, M. J. (1993). Reliability of Linear & Circular Consecutively-Connected Systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **42**, 484-487.

Zuo, M. J. and Kuo, W. (1990). Design and Performance Analysis of Consecutive-*k*-out-of-*n* Structure, *Naval Research Logistics*, **37**, 203-230.