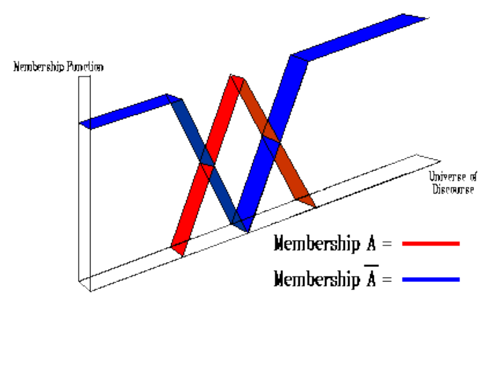
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Π.Μ.Σ. στην ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Επιβλέπων Καθηγητής Γ. Πιτσέλης

ΑΣΑΦΗΣ ΛΟΓΙΚΗ (FUZZY LOGIC) ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΑΣΦΑΛΙΣΗ



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΚΑΡΑΜΠΕΛΑ ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ

ΜΑΕ 08027

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία αυτή επικεντρώνεται στην Ασαφή Λογική και τις εφαρμογές της στις ασφαλίσεις. Η Ασφαλιστική Αγορά έχει πολλά πεδία στα οποία μπορούν πιθανώς να εφαρμοσθούν οι μέθοδοι της Ασαφούς Λογικής.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες, οι οποίες είναι απαραίτητες για την κατανόηση των επόμενων κεφαλαίων. Παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της Ασαφούς Λογικής, βασικές έννοιες της Ασαφούς Θεωρίας Συνόλων, ορίζονται οι Ασαφείς αριθμοί καθώς και οι βασικές συναρτήσεις συμμετοχής. Επίσης παρουσιάζεται η βασική διαδικασία της Ασαφούς συλλογιστικής.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η διαδικασία της ταξινόμησης των κινδύνων, το οποίο αποτελεί το πρώτο βήμα για τη διαδικασία της ασφάλισης, υπό το πρίσμα των μεθόδων της Ασαφούς Λογικής.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η διαδικασία της ανάληψης των κινδύνων από τον ασφαλιστή (underwriting) και εξετάζεται το πώς μπορεί να εφαρμοσθεί σε αυτό το κομμάτι της διαδικασίας της ασφάλισης, η Ασαφής Λογική.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι εφαρμογές της Ασαφούς Λογικής στα χρηματοοικονομικά. Ορίζονται έννοιες όπως αυτές του ασαφούς επιτοκίου, των ασαφών παρουσών και μελλοντικών αξιών, των ασαφών ραντών καθώς επίσης περιγράφονται εφαρμογές της Ασαφούς Λογικής στην αξιολόγηση επενδύσεων.

Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο, γίνεται μελέτη της παλινδρόμησης και παρουσιάζονται οι τρόποι με τους οποίους η Ασαφής Λογική μπορεί να εφαρμοσθεί ώστε να δώσει λύση σε κλασικά προβλήματα της κλασικής στατιστικής παλινδρόμησης.

Τα σχήματα της παρούσας εργασίας έγιναν με χρήση του προγράμματος MATLAB και του προγράμματος COREL DRAW.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την τριμελή επιτροπή, τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου, κ. Γ. Πιτσέλη, για την καθοδήγηση και τη βοήθεια του καθ' όλη τη διάρκεια της δημιουργίας της παρούσας εργασίας, τον κ. Ε. Κοφίδη για την πολύτιμη καθοδήγηση του σε θέματα σχετικά με την Ασαφή Λογική καθώς και τον κ. Μ. Μπούτσικα.

Η δημιουργία της παρούσας εργασίας θα ήταν αδύνατη χωρίς την υποστήριξη και κατανόηση των κ.κ. Β. Ζαγκλαρά, Ε. Κρουστάλλη, Ρ. Ρενιέρη και Μ. Μαρίνου, τους οποίους ευχαριστώ θερμά.

Η εργασία αυτή αφιερώνεται στον κ. Β. Παπακωνσταντίνου, ο οποίος ενέπνευσε την ενασχόληση μου με τον κλάδο των Ασφαλιστικών Μαθηματικών και στους γονείς μου που έχουν στηρίξει με κάθε τρόπο το κάθε μου βήμα.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΑΣΑΦΗΣ ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΑΣΑΦΗ ΣΥΝΟΛΑ

Τις τελευταίες δεκαετίες, οι εφαρμογές της ασαφούς λογικής και της ασαφούς θεωρίας συνόλων έχουν γνωρίσει μεγάλη ανάπτυξη, αφού ενέχουν τη δυνατότητα να μιμηθούν την ανθρώπινη κρίση για να εφαρμόσουν αποτελεσματικά τρόπους συλλογιστικής σε πεδία του πραγματικού κόσμου, που εμπεριέχουν ασάφεια ή αβεβαιότητα. Η κλασική θεωρία συνόλων βασίζεται στη θεμελιώδη αρχή ότι ένα στοιχείο είτε ανήκει σε ένα σύνολο είτε δεν ανήκει. Υπάρχει, δηλαδή, μία σαφής διάκριση μεταξύ ενός στοιχείου που ανήκει σε ένα σύνολο και ενός στοιχείου που δεν ανήκει στο ίδιο σύνολο. Στο ερώτημα αν ένα στοιχείο ανήκει σε ένα σύνολο η απάντηση ακολουθεί τη δίτιμη λογική, είτε είναι αληθές το γεγονός ότι ανήκει στο σύνολο, είτε είναι ψευδές. Η ασαφής λογική, όμως, επεκτείνει την απάντηση σε αυτό το ερώτημα, αφού δέχεται ότι ένα στοιχείο έχει τη δυνατότητα και να ανήκει σε ένα σύνολο και να μην ανήκει στο ίδιο σύνολο, ανάλογα με το βαθμό συμμετοχής του σε αυτό. Επομένως, η ασαφής λογική αποτελεί μία πλειότιμη επέκταση της κλασικής δίτιμης λογικής.

1.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΣΑΦΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

Στην κλασική θεωρία συνόλων, μία οποιαδήποτε συλλογή αντικειμένων ονομάζεται σύνολο και τα αντικείμενα που το αποτελούν ονομάζονται στοιχεία του. Πιό αναλυτικά, έστω X ένα σύνολο αναφοράς ,το οποίο αποτελείται από m στοιχεία, δηλαδή $X = \{ x_1, x_2, \ldots, x_m \}$. Ένα υποσύνολο A του X είναι μια συλλογή από στοιχεία του X που ορίζονται μέσω μίας χαρακτηριστικής συνάρτησης $I_A : X \rightarrow \{ 0, 1 \}$. Δηλαδή, το σύνολο A ορίζεται ως εξής:

$$I_A (x) = \begin{cases} 1, \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ x \in A \\ 0, \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ x \notin A \end{cases} \qquad (1.1)$$

Επομένως, στην κλασική συνολοθεωρία κάθε κλασικό σύνολο Α χωρίζει τα στοιχεία του συνόλου αναφοράς, σε δύο κατηγορίες, πλήρως διακεκριμμένες μεταξύ τους. Οι δύο αυτές κατηγορίες έχουν σαφή και βέβαια όρια.

Αυτή η προσέγγιση του στοιχείου ενός συνόλου, σύμφωνα με την κλασική θεωρία συνόλων, είναι περιορίστική όσον αφορά σε λεκτικές έννοιες, που συναντούμε στον πραγματικό κόσμο. Έννοιες όπως το «περίπου» δε μπορούν να περιγραφούν από τη δίτιμη λογική, αφού δεν έχουν σαφή και βέβαια όρια. Με στόχο να αναπαρασταθεί μία λεκτική αλλά ασαφής και προσεγγιστική έννοια πρέπει να επεκτείνουμε τον ορισμό του κλασικού συνόλου στο ασαφές σύνολο (fuzzy set). Δηλαδή, κατασκευάζουμε ένα σύνολο, όπου η μετάβαση των στοιχείων του Χ από την κατηγορία «ανήκει στο σύνολο Α» στη κατηγορία «δεν ανήκει στο σύνολο Α», δεν είναι σαφής και απότομη αλλά είναι βαθμιαία ασαφής.

Έχουμε, λοιπόν, σύμφωνα με την ασαφή θεωρία συνόλων, ότι ένα ασαφές υποσύνολο $\bar{A}$ (ή Α εάν δεν προκαλείται σύγχιση) του υπερσυνόλου αναφοράς (universe of discourse) Χ, ορίζεται από μία συνάρτηση συμμετοχής (membership function) μ_A ως εξής:

$$\mu_A\,(\,x\,)\colon x \in X \rightarrow \mu_A\,(\,x\,)\ \in [\,0,1\,] \qquad (1.2)$$

Το πεδίο ορισμού Χ της συνάρτησης συμμετοχής $\mu_A\,(\,x\,)$ καλείται υπερσύνολο αναφοράς του ασαφούς συνόλου $\bar{A}$. Ο αριθμός $\mu_A\,(\,x\,)\ \in [\,0,1\,]$, δηλώνει το βαθμό συμμετοχής σύμφωνα με τον οποίο ένα στοιχείο x ανήκει (συμμετέχει) στο ασαφές υποσύνολο $\bar{A}$ του υπερσυνόλου αναφοράς Χ. Δηλαδή, εάν $\mu_A\,(\,x\,) = 1$, τότε το στοιχείο x ανήκει σαφώς στο σύνολο $\bar{A}$, εάν $\mu_A\,(\,x\,) = 0$, τότε το στοιχείο x δεν ανήκει καθόλου στο σύνολο $\bar{A}$, ενώ εάν $0 < \mu_A\,(\,x\,) < 1$, τότε το στοιχείο x ανήκει κατά κάποιο βαθμό στο σύνολο $\bar{A}$ **[4]**.

Παρατηρούμε ότι η έννοια του ασαφούς υποσυνόλου εμπεριέχει την έννοια του κλασικού υποσυνόλου, αφού όταν η συνάρτηση συμμετοχής περιλαμβάνει μόνο τις δύο ακραίες τιμές 0 και 1, το ασαφές υποσύνολο $\bar{A}$ και το κλασικό υποσύνολο Α ταυτίζονται.

Έστω ένα ασαφές σύνολο $\bar{A}$, που ορίζεται στο υπερσύνολο αναφοράς X, με συνάρτηση συμμετοχής μ_A και έστω αριθμός α ∈ [0, 1]. Ορίζουμε την α-τομή του ασαφούς συνόλου $\bar{A}$, ως το κλασικό σύνολο A_α των στοιχείων x τα οποία ανήκουν στο ασαφές σύνολο $\bar{A}$ τουλάχιστον κατά τον α βαθμό **[7]**. Δηλαδή:

$$A_\alpha = \{ x \mid x \in X, \mu_A (x) \geq \alpha \}, \text{ όπου } \alpha \in [0, 1] \quad (1.3)$$

Αντίστοιχα ορίζουμε την ισχυρή α-τομή ενός ασαφούς υποσυνόλου, ως το κλασικό εκείνο σύνολο όπου:

$$A_{\alpha^+} = \{ x \mid x \in X, \mu_A (x) > \alpha \}, \alpha \in [0, 1] \quad (1.4)$$

Μέσω της ισχυρής α-τομής ενός ασαφούς συνόλου $\bar{A}$, μπορούμε να ορίσουμε το Στήριγμα (support) του ασαφούς συνόλου $\bar{A}$, ως προς το υπερσύνολο αναφοράς X. Το Στήριγμα του $\bar{A}$ σε σχέση με το X είναι το κλασικό σύνολο που περιλαμβάνει όλα τα στοιχεία του X, τα οποία έχουν μη-μηδενική συνάρτηση συμμετοχής στο $\bar{A}$. Δηλαδή το Στήριγμα ενός ασαφούς συνόλου ορίζεται ως το κλασικό σύνολο:

$$\text{Supp} (A) = \{ x \in X \mid \bar{A} (x) > 0 \} \quad (1.5)$$

Το ύψος (height), ενός ασαφούς συνόλου $\bar{A}$, h ($\bar{A}$) είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης συμμετοχής στο X, όλων των στοιχείων του X. Δηλαδή:

$$h(\bar{A}) = \sup_{x \in X} \bar{A}(x) \qquad (1.6)$$

Εάν h ($\bar{A}$) = 1, τότε το ασαφές σύνολο $\bar{A}$ ονομάζεται κανονικό (normal) ή κανονικοποιημένο (normalized), ενώ εάν h ($\bar{A}$) < 1 τότε το $\bar{A}$ λέγεται υποκανονικό (subnormal).

Κυρτό ασαφές σύνολο (convex fuzzy set) ονομάζουμε εκείνο το ασαφές σύνολο, το οποίο έχει μονότονα αύξουσα ή μονότονα φθίνουσα συνάρτηση συμμετοχής. Η συνάρτηση συμμετοχής ενός ασαφούς συνόλου πρέπει να έχει δύο ιδιότητες προκειμένου να αναπαριστά ένα ασαφές σύνολο. Πρώτον, το πεδίο τιμών της πρέπει να είναι το σύνολο [0, 1] και δεύτερον πρέπει να είναι κυρτή. Υπό το πρίσμα της ασαφούς λογικής όμως, η συνάρτηση συμμετοχής θεωρείται κυρτή ακόμα και όταν είναι γνησίως αύξουσα μέχρι τη μέγιστη τιμή της και στη συνέχεια, γνησίως φθίνουσα μέχρι το τέλος του πεδίου ορισμού της **[4]**.

1.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΑ ΑΣΑΦΗ ΣΥΝΟΛΑ

Θεωρούμε δύο ασαφή σύνολα Α και Β του υπερσυνόλου αναφοράς Χ. Έχουμε ότι:

$$A = \{ (x, \mu_A(x)) \}, \mu_A (x) \in [0, 1] \qquad (1.7)$$

$$B = \{ (x, \mu_B(x)) \}, \mu_B (x) \in [0, 1] \qquad (1.8)$$

Οι πράξεις επί των ασαφών συνόλων Α και Β περιγράφονται με βάση τις πράξεις επί των συναρτήσεων συμμετοχής τους μ_A (x) και μ_B (x).

<u>Ισότητα</u>

Δύο ασαφή σύνολα A και B είναι ίσα και συμβολίζονται A = B αν και μόνον αν για κάθε x ∈ X, ισχύει ότι:

$$\mu_A (x) = \mu_B (x) \quad (1.9)$$

<u>Συμπλήρωμα</u>

Τα ασαφή σύνολα A και $\bar{A}$ καλούνται συμπληρωματικά εάν:

$$\mu_{\bar{A}} (x) = 1 - \mu_A (x) \quad ή \quad \mu_A (x) + \mu_{\bar{A}} (x) = 1 \quad (1.10)$$

<u>Ένωση</u>

Η ένωση των ασαφών συνόλων A και B, η οποία συμβολίζεται A ∪ B ορίζεται ως εξής:

$$\mu_{A \cup B} (x) = \max (\mu_A (x), \mu_B (x)), x \in X \quad (1.11)$$

<u>Τομή</u>

Η τομή των ασαφών συνόλων A και B συμβολίζεται A ∩ B και ορίζεται ως εξής:

$$\mu_{A \cap B} (x) = \min (\mu_A (x), \mu_B (x)), x \in X \quad (1.12)$$

Οι ορισμοί των βασικών τελεστών μεταξύ συνόλων υπό το πρίσμα της ασαφούς θεωρίας συνόλων, αποτελούν ουσιαστικά επεκτάσεις των αντίστοιχων εννοιών της κλασικής θεωρίας συνόλων. Η διαφορά τους έγκειται στο γεγονός ότι ενώ στην κλασική θεωρία συνόλων ο βαθμός συμμετοχής περιορίζεται στο σύνολο { 0, 1 }, στην ασαφή θεωρία συνόλων μπορεί να παίρνει τιμές από το διάστημα [0, 1] **[19]**. Μία ακόμη αξιοσημείωτη διαφορά είναι ότι ενώ στην κλασική θεωρία συνόλων οι τρεις βασικές πράξεις (συμπλήρωμα, τομή, ένωση) είναι μοναδικές, στην ασαφή συνολοθεωρία για κάθε έναν από αυτούς τους τελεστές, υπάρχει μία κλάση συναρτήσεων που θεωρούνται ασαφείς γενικεύσεις των τελεστών των κλασικών συνόλων **[7]**.

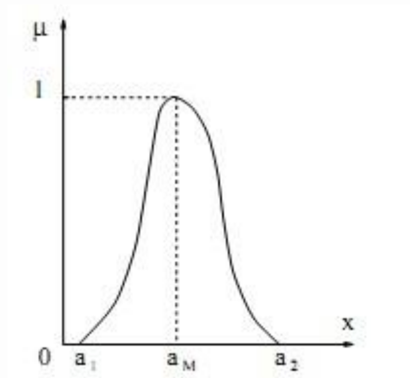
1.3 ΑΣΑΦΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

Οι ασαφείς αριθμοί αποτελούν μία ειδική περίπτωση των ασαφών συνόλων και χρησιμοποιούνται για το χαρακτηρισμό διαφόρων ασαφών καταστάσεων, με τον ίδιο τρόπο που οι κλασικοί αριθμοί χρησιμοποιούνται στα κλασικά Μαθηματικά.

Ένας ασαφής αριθμός ορίζεται σε ένα υπερσύνολο αναφοράς X ως ένα κυρτό και κανονικοποιημένο ασαφές σύνολο όπου το Στήριγμα Supp είναι φραγμένο, δηλαδή:

$$\text{Supp}\,(A) = \{ x \in X \mid A(x) > 0 \} \qquad (1.13)$$

Το διάστημα [a_1, a_2], όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα, καλείται διάστημα υποστήριξης (supporting interval) για τον ασαφή αριθμό, ενώ στο σημείο $x = a_M$ ο ασαφής αριθμός παρουσιάζει το μέγιστο ύψος 1 **[19]**.



Σχήμα 1.1 Ασαφής αριθμός

Οι ασαφείς αριθμοί λόγω του ότι ουσιαστικά είναι ασαφή σύνολα συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ ή A, B, C εάν δεν προκαλείται σύγχιση. Αντίστοιχα, οι συναρτήσεις συμμετοχής των ασαφών αριθμών συμβολίζονται με μ_A (x), μ_B (x) κ.ο.κ.

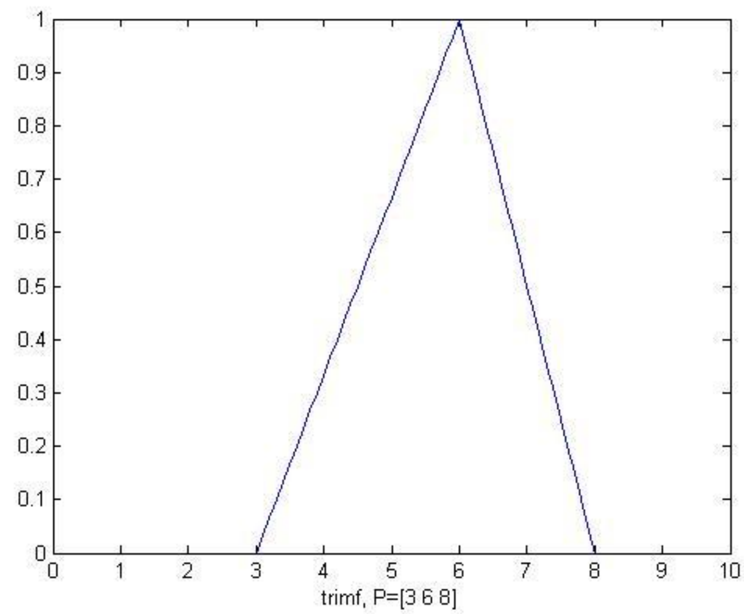
1.4 ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗΣ

Εφόσον ένα ασαφές σύνολο περιγράφεται πλήρως από τη συνάρτηση συμμετοχής του, μέσω των πιο συχνά χρησιμοποιούμενων συναρτήσεων συμμετοχής, θα ορίσουμε και τους αντίστοιχους ασαφείς αριθμούς.

1. <u>Τριγωνική συνάρτηση συμμετοχής</u>

Η τριγωνική συνάρτηση συμμετοχής ορίζεται μέσω τριών παραμέτρων { a, b, c } ως εξής:

$$\mu_A (x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \le x \le c \\ 0, & x \ge c \end{cases} \qquad (1.14)$$



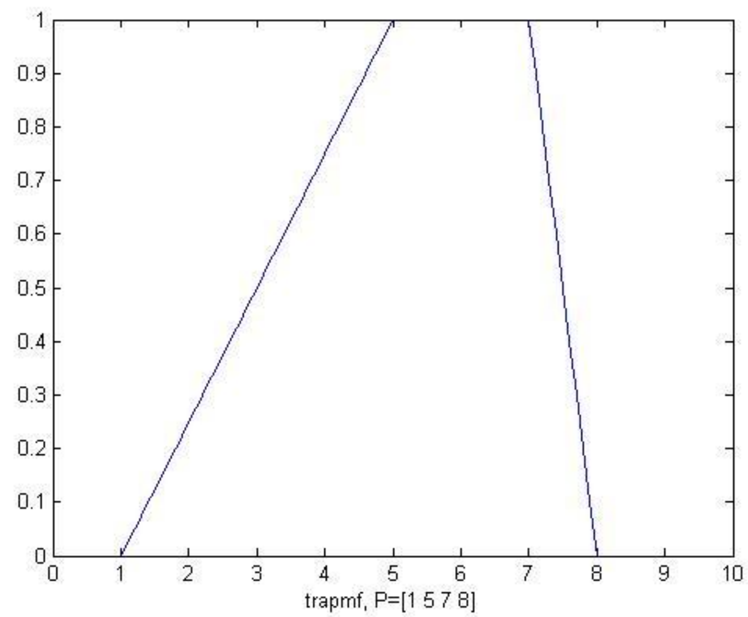
Σχήμα 1.2 Παράδειγμα τριγωνικής συνάρτησης συμμετοχής (x; 3, 6, 8)

Συχνά, στις περισσότερες εφαρμογές της ασαφούς θεωρίας συνόλων, χρησιμοποιούνται τριγωνικοί ασαφείς αριθμοί που έχουν το μέγιστο ύψος στο κέντρο του διααστήματος υποστήριξης, οι οποίοι, σε αυτή την περίπτωση, καλούνται συμμετρικοί ασαφείς αριθμοί.

2. <u>Τραπεζοειδής συνάρτηση συμμετοχής</u>

Η τραπεζοειδής συνάρτηση συμμετοχής ορίζεται μέσω τεσσάρων παραμέτρων { a, b, c, d } ως εξής:

$$\mu_A(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & b \le x \le c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \le x \le d \\ 0, & x \ge d \end{cases} \qquad (1.15)$$



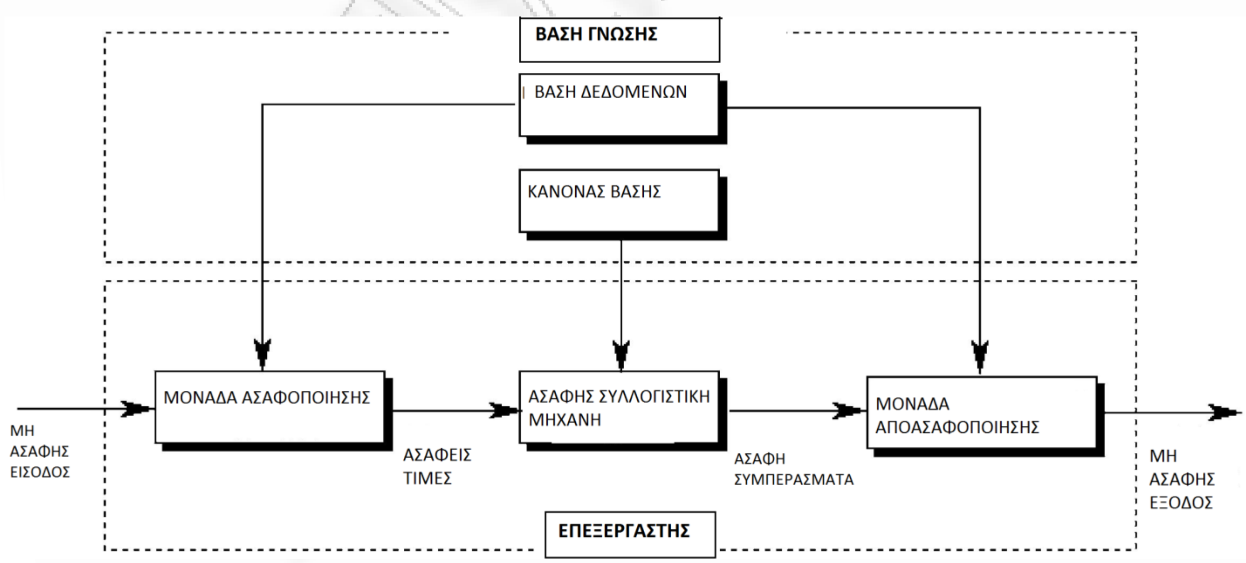
Σχήμα 1.3 Παράδειγμα τραπεζοειδούς συνάρτησης συμμετοχής με παραμέτρους (x ; 1, 5, 7, 8)

1.5 ΑΣΑΦΗΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΤΙΚΗ

Η ασαφής συλλογιστική ή ασαφής συμπερασματολογία αποτελεί μία διαδικασία, μέσω της οποίας εξάγονται ασαφή συμπεράσματα. Ουσιαστικά πρόκειται για ένα υπολογιστικό σύστημα, το οποίο μέσω διαδικασιών της ασαφούς λογικής, είναι σε θέση να αξιολογεί ασαφείς κανόνες της μορφής «εάν x είναι A τότε y είναι B».

Ένα Σύστημα Ασαφούς Συμπερασματολογίας (Fuzzy Inference System-FIS) ή Ασαφές Έμπειρο Σύστημα (Fuzzy Expert System-FES) αποτελεί μία από τις πιό ευρέως διαδεδομένες εφαρμογές τις ασαφούς λογικής. Ένα τέτοιο σύστημα αποτελείται από δύο μέρη, τη Βάση Γνώσης και το στάδιο της επεξεργασίας **[26]**.

Η Βάση Γνώσης (Knowledge Base) περιλαμβάνει τις συναρτήσεις συμμετοχής καθώς και τους ασαφείς κανόνες που θα χρησιμοποιηθούν στη διαδικασία. Στο στάδιο της επεξεργασίας εισάγονται στο σύστημα μεταβλητές που εκφράζονται από κλασικούς αριθμούς. Αυτές οι μεταβλητές περνούν από τη διαδικασία της ασαφοποίησης, μέσω ενός Ασαφοποιητή (Fuzzifier), ο οποίος μεταφράζει τα κλασικά (crisp) δεδομένα σε ασαφείς ποσότητες. Οι ασαφείς αυτές ποσότητες έχουν τη μορφή γλωσσικών μεταβλητών, δηλαδή μεταβλητών οι οποίες παίρνουν τιμές που εκφράζονται με λέξεις από τη φυσική γλώσσα. Οι τιμές των γλωσσικών μεταβλητών παρίστανται με τη χρήση ασαφών συνόλων και για αυτό ονομάζονται ασαφείς μεταβλητές. Στη συνέχεια, αυτές οι ασαφείς μεταβλητές εισάγονται στη Μηχανή Συμπερασματολογίας, όπου μέσω των ασαφών λογικών κανόνων που έχουν τεθεί από το στάδιο της Βάσης Γνώσης, παράγονται τα ασαφή συμπεράσματα. Αυτά τα συμπεράσματα έχουν τη μορφή γλωσσικών μεταβλητών και στο τελευταίο στάδιο της διαδικασίας, με τη μέθοδο της αποασαφοποίησης, μεταφράζονται σε κλασικούς αριθμούς.



Σχήμα 1.4 Διαδικασία Σχήματος Ασαφούς Συμπερασματολογίας

Οι βασικότερες μέθοδοι αποασαφοποίησης είναι οι ακόλουθες:

- Μέθοδος Κέντρου Βάρους

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, η οποία είναι γνωστή και ως COG (Center Of Gravity), η αποασαφοποίηση πραγματοποιείται ορίζοντας το κέντρο βαρύτητας της μέσης τιμής της τομής των συναρτήσεων συμμετοχής, δηλαδή:

$$w_0 = \frac{\sum_{\iota} w_i \mu_B(w_i)}{\sum_{\iota} \mu_B(w_i)} \qquad (1.16)$$

- Μέθοδος Μέσης τιμής Μεγίστων

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, υπολογίζεται η τιμή w_0 ως εξής:

$$w_0 = \frac{\sum_{\iota} w_i}{m} \qquad (1.17)$$

όπου m είναι ο αριθμός των ασαφών αποτελεσμάτων, τα οποία παρουσιάζουν μέγιστο στις συναρτήσεις συμμετοχής τους και w_i είναι η τιμή που αντιστοιχεί στο i μέγιστο της συνάρτησης συμμετοχής. Η μέθοδος αυτή ουσιαστικά διαχωρίζει τα ασαφή αποτελέσματα που οι τιμές της συνάρτησης συμμετοχής τους είναι μικρότερη από το μέγιστο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΚΙΝΔΥΝΩΝ ΥΠΟ ΤΟ ΠΡΙΣΜΑ ΤΗΣ ΑΣΑΦΟΥΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Η ταξινόμηση (classification), η οποία έχει ως στόχο την κατηγοριοποίηση των κινδύνων, ανάλογα με την πιθανότητα δημιουργίας απαιτήσεων και τη σφοδρότητα που αυτές έχουν, αποτελεί ένα θεμελιώδες βήμα για τη διαδικασία της ασφάλισης. Οι κίνδυνοι πρέπει να ταξινομούνται και να διαχωρίζονται σωστά ώστε να είμαστε σε θέση να επιτύχουμε μια ορθή τιμολόγηση.

2.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΔΟΣΙΑΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗΣ

Ο σκοπός της ταξινόμησης των κινδύνων στις ασφαλίσεις ζωής είναι να αποφασίσει ο ασφαλιστής τους όρους υπό τους οποίους θα αποδεχθεί να αναλάβει την ασφαλιστική κάλυψη ενός υποψηφίου για ασφάλιση και πώς θα τον τιμολογήσει. Οι περισσότερες ασφαλιστικές εταιρίες για τις ασφαλίσεις ζωής χρησιμοποιούν το αριθμητικό σύστημα αξιολόγησης (numerical rating system), για την εκπλήρωση αυτού του σκοπού.

Η βασική αρχή αυτού του συστήματος είναι η υπόθεση οτι το μέσο ρίσκο που αποδέχεται ο ασφαλιστής έχει την ποσοστιαία τιμή 100. Διάφοροι παράγοντες κινδύνου, όπως η κατάσταση της υγείας ή η επικινδυνότητα του επαγγέλματος του υποψήφιου ασφαλισμένου, προσθέτουν ή αφαιρούν μονάδες σε αυτό το ποσοστό. Για παράδειγμα, έστω άτομο ηλικίας 30 ετών, το οποίο έχει ύψος 1.75cm, ζυγίζει 100kg και επιθυμεί πρόσκαιρη ασφάλιση 25 ετών. Ο μέσος όρος τριών μετρήσεων της αρτηριακής του πίεσης είναι 170mm Hg. Το αριθμητικό σύστημα αξιολόγησης σε αυτή την περίπτωση έχει ώς εξής:

Βασική θνησιμότητα: 100%

Υπέρβαρος: +50%

Υψηλή αρτηριακή πίεση: +100%

Συμβόλαιο μικρής διάρκειας: -50%

Συνολική θνησιμότητα: 200%

Αν αφαιρέσουμε τη βασική θνησιμότητα, παρατηρούμε ότι υπάρχει μια επιπλέον θνησιμότητα 100 ποσοστιαίων μονάδων, το οποίο σημαίνει ότι η αναμενόμενη θνησιμότητα αυτού του ατόμου είναι 100 μονάδες περισσότερη από το μέσο όρο **[15]**.

Ένα σημαντικό πρόβλημα με το αριθμητικό σύστημα αξιολόγησης είναι ότι οι τιμές της αξιολόγησης στις κατηγορίες, με βάση τις οποίες γίνεται η αξιολόγηση, θεμελιώνονται θεωρώντας τους κινδύνους ομογενείς. Στην πραγματικότητα όμως, οι κίνδυνοι είναι ετερογενείς και όταν οι τιμές για αυτές τις κατηγορίες βασίζονται σε περιορισμένους παράγοντες, πολλά ειδικά χαρακτηριστικά του κάθε κινδύνου αγνοούνται. Μια καλύτερη αντιστοιχία, μεταξύ κινδύνων και κατηγοριών αξιολόγησης, επιτυγχάνεται αν ο ασφαλιστής περιλάβει πολλαπλούς παράγοντες κινδύνου στη διαδικασία της ταξινόμησης. Με αυτό τον τρόπο όμως, μια αύξηση στον αριθμό των παραγόντων κινδύνου, αυξάνει και τον αριθμό των κλάσεων αξιολόγησης.

Όσο αυξάνει ο αριθμός των κλάσεων αξιολόγησης έπεται οτι μειώνεται ο αριθμός των ασφαλισμένων σε κάθε κλάση, με αποτέλεσμα να χάνει την ισχύ του ο Νόμος των Μεγάλων Αριθμών. Επίσης, η τιμή του κινδύνου μιας παραμέτρου συνηθίζεται να αυξομειώνεται συνεχώς με την πάροδο του χρόνου, το οποίο έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία υποομάδων για κάθε παράμετρο κινδύνου, αυξάνοντας έτσι ακόμα περισσότερο τον αριθμό των κλάσεων αξιολόγησης.

Το βασικό πρόβλημα του αριθμητικού συστήματος αξιολόγησης οφείλεται στην υπόθεση ότι ισχύει η Boolean, δίτιμη λογική. Ο περιορισμός της δίτιμης λογικής οφείλεται στα σαφή της σύνορα, υπό την έννοια οτι ένα στοιχείο είτε ανήκει είτε δεν ανήκει σε ένα σύνολο. Όταν όμως ένα στοιχείο στερείται ακρίβειας, δημιουργείται αναγκαστικά μια ασαφής μεταβλητή (fuzzy variable). Σε αντίθεση με κάποια χαρακτηριστικά των εν δυνάμει ασφαλισμένων, όπως η οικογενειακή τους κατάσταση ή το φύλο τους, που είναι εύκολο να χωριστούν με ακρίβεια σε κλάσεις, άλλες μεταβλητές, όπως η κατάσταση της υγείας, δε μπορεί να χωριστεί σαφώς σε κατηγορίες με βάση τη δίτιμη λογική (ανήκει/ δεν ανήκει).

Η αξιολόγηση της υγείας ενός ατόμου δε μπορεί να περιγραφεί πλήρως από τις κατηγορίες «ασθενής» και «υγειής». Η αντίληψη μας για την υγεία ενός ατόμου περιγράφεται πληρέστερα με όρους όπως το «περισσότερο» και «λιγότερο», αφού τα χαρακτηριστικά της δεν είναι απόλυτα. Για παράδειγμα, όταν ένας γιατρός θεωρεί οτι η συστολική αρτηριακή πίεση της τάξης των 160mm Hg ενός ατόμου αποτελεί παράγοντα αυξημένου κινδύνου για την υγεία του, δεν υπονοεί οτι αν η τιμή της ήταν 159mm Hg, δε θα αποτελούσε παράγοντα αυξημένου κινδύνου.

Η λεκτική μεταβλητή (linguistic variable) «επικίνδυνη αρτηριακή πίεση» απλώς εκφράζει ένα ασαφές σύνολο, όπου τα 160mm Hg αποτελούν ένα ασαφές όριο, το οποίο έχει τη μορφή ενός διαστήματος, που κυμαίνεται μεταξύ των τιμών «λιγότερο επικίνδυνη» και «περισσότερο επικίνδυνη» τιμή αρτηριακής πίεσης. Πάραυτα, λόγω της ισχύουσας δίτιμης λογικής, το αριθμητικό σύστημα αξιολόγησης θεωρεί σαφείς κατηγοριοποιήσεις, με αποτέλεσμα μια τιμή της τάξεως των 160mm Hg να εμπίπτει στην κατηγορία του υψηλού ρίσκου, ενώ μια τιμή της τάξεως των 159mm Hg να ανήκει σε διαφορετική κατηγορία **[15]**.

Η ταξινόμηση των κινδύνων στις ασφαλίσεις συχνά πραγματοποιείται μέσω αόριστων και αβέβαιων μεθόδων ή μεθόδων που χαρακτηρίζονται από υπερβολική ακρίβεια, όπως για παράδειγμα συμβαίνει στην περίπτωση όπου ένας υποψήφιος ασφαλιζόμενος αποτυγχάνει να ταξινομηθεί σας προτιμώμενος κίνδυνος, επειδή ξεπερνάει το όριο βάρους, που έχει θέσει ο ασφαλιστής, κατά μισό κιλό **[21]**. Οι Ostaszewski, Karwowski και Ebanks, μελέτησαν το πώς τα ασαφή μέτρα (measures of fuzziness) μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε να ταξινομηθούν οι κίνδυνοι για τις ασφαλίσεις ζωής. Σε πολλές περιπτώσεις γνωρίζουμε εκ των προτέρων τι χαρακτηριστικά έχει ένας προτιμώμενος κίνδυνος (preferred risk). Κάθε υποψήφιος για ασφάλιση μπορεί να συγκριθεί, με βάση τη μέτρηση αυτών των χαρακτηριστικών, με τον ιδανικό προτιμώμενο κίνδυνο και έπειτα με την ανάθεση ενός βαθμού συμμετοχής στο κάθε χαρακτηριστικό, δημιουργείται ένα διάνυσμα, το οποίο περιγράφει τον υποψήφιο. Τα μέτρα ασάφειας προσδιορίζουν το βαθμό ασάφειας σε ένα ασαφές σύνολο. Μετρώντας, λοιπόν, την ασάφεια του υποψηφίου με το διάνυσμα αυτό δημιουργείται μία νέα ταξινόμηση **[22]**.

Παρατηρούμε ότι μια επαρκής ταξινόμηση των κινδύνων παρουσιάζει τρία τουλάχιστον θεμελιώδη προβλήματα. Πρώτον, οι ασθένειες που επηρρεάζουν τον κίνδυνο θνησιμότητας, σε γενικές γραμμές, χαρακτηρίζονται από πολλές παραμέτρους. Η πρόβλεψη για αυξημένη θνησιμότητα, λόγω κάποιας ειδικής ασθένειας, έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός περίπλοκου συστήματος με δεσμευμένες μεταβλητές. Δεύτερον, η δημιουργία περισσότερων κατηγοριών ταξινόμησης κινδύνων, με βάση την παραδοσιακή μέθοδο, οδηγεί σε κατηγορίες που αποτελούνται από μικρό αριθμό ασφαλισμένων. Τρίτον, πολλοί από τους παράγοντες κινδύνου είναι εκ φύσεως ασαφείς. Μία ακριβής ταξινόμηση των επιπέδων κινδύνου έχει ως αποτέλεσμα μη φυσιολογικές τιμές για τα όρια που διαχωρίζουν τις κατηγορίες και δεν είναι από την ιατρική σκοπιά αποδεκτές.

Συνυπολογίζοντας τα τρία παραπάνω προβλήματα, δε θα πρέπει να μας προκαλεί εντύπωση το γεγονός πως στην πράξη ο αριθμός των κατηγοριών ταξινόμησης είναι πολύ μικρός. Για παράδειγμα στη Γερμανία, οι περισσότερες αιτήσεις ασφάλισης, γίνονται αποδεκτές και τιμολογούνται σε κανονικά επίπεδα. Μόλις το 0.5-1% των αιτήσεων απορρίπτονται, το 2-5% γίνονται αποδεκτές με μία προσαύξηση κινδύνου, ενώ το υπόλοιπο 94-97% γίνονται αποδεκτές με το μέσο ασφάλιστρο **[15]**.

Ο λόγος ύπαρξης, λοιπόν, του μικρού βαθμού διάκρισης μεταξύ των υποψηφίων, πρέπει να αναζητηθεί στις μεθόδους που ακολουθεί το αριθμητικό σύστημα αξιολόγησης. Το κύριο πρόβλημα που διαπιστώνεται είναι πως οι ασφαλιστές δε διαθέτουν τα απαραίτητα εργαλεία ώστε να εκτιμήσουν τους πολλαπλούς και ασαφείς παράγοντες κινδύνου. Για να ενσωματωθούν αυτοί οι παράγοντες στην εκτίμηση και την αξιολόγηση των κινδύνων, θα πρέπει να εφαρμοσθεί η μέθοδος της ασαφούς συμπερασματολογίας (fuzzy inference) στην ταξινόμηση και στη συνέχεια στην ανάληψη των κινδύνων.

2.2 ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΣΑΦΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑ

Η Στατιστική Συμπερασματολογία (Statistical Inference) είναι μια αρκετά διαδεδομένη διαδικασία όπου συμπεράσματα που αφορούν σε πληθυσμούς, προκύπτουν μέσα από τη μελέτη ενός δείγματος. Υπό αυτό το πρίσμα, ένα ενδεχόμενο ω ορίζεται σαν ένα υποσύνολο ενός δειγματικού χώρου Ω. Θεωρώντας, για παράδειγμα, μια κληρωτίδα, η οποία περιέχει λευκά και μαύρα σφαιρίδια, η πιθανότητα να τραβήξουμε ένα λευκό σφαιρίδιο, $\mathrm{pr}(\omega_{\lambda\varepsilon\upsilon\kappa\acute{o}}) \in [0,1]$, είναι ο λόγος των εμφανίσεων λευκών σφαιριδίων σε μια σειρά δοκιμών προς τον αριθμό των δοκιμών, σε μια σειρά πολλών πειραμάτων. Όσο τα χρώματα των σφαιριδίων μπορούν να χωριστούν με ακρίβεια σε δύο κατηγορίες (λευκά και μαύρα), αυτή η μέθοδος συμπερασματολογίας είναι επαρκής. Όμως, αν τα χρώματα των σφαιριδίων μπορούν να μεταβάλλονται από λευκά σε μαύρα και αντιστρόφως, η ανάθεση συμμετοχής των σφαιριδίων σε μια από τις δύο κατηγορίες γίνεται ελλιπής και συνεπώς προβληματική.

Είναι προφανές πως η διχοτόμηση των λευκών και μαύρων σφαιριδίων σε δύο κατηγορίες, δε λειτουργεί σε ένα δειγματικό χώρο όπου το χρώμα των σφαιριδίων σταδιακά μεταβάλλεται από λευκό σε μαύρο και αντιστρόφως.

Οι περιπτώσεις όπου η θεωρία πιθανοτήτων είναι εφαρμόσιμη, είναι περιορισμένες σε αυτές τις περιπτώσεις, όπου ένα ενδεχόμενο μπορεί να ανήκει ακριβώς σε μια ορισμένη κατηγορία ή σε περιπτώσεις όπου ένα ενδεχόμενο μπορεί να είναι ξεκάθαρα σωστό ή λανθασμένο (True/False). Όταν αυτή η ιδιότητα σαφήνειας του ενδεχομένου δεν ισχύει, τότε η ανάθεση ενός ενδεχομένου σε ένα crisp σύνολο δε μπορεί να ισχύει. Υπό αυτή την έννοια, μία αριθμητική πιθανότητα ενδέχεται να μην αντικατοπτρίζει την ελλιπή γνώση ενός παρατηρητή σχετικά με την πραγματική κατάσταση του ενδεχομένου.

Ουσιαστικά η ασάφεια μιας ιδιότητας, όπως στο παραδειγμά μας το χρώμα των σφαιριδίων, εντοπίζεται στην έλλειψη σαφώς ορισμένων ορίων μεταξύ των υποσυνόλων που πληρούν την ιδιότητα αυτή, εντός του δειγματικού χώρου. Η ασάφεια μπορεί να οφείλεται είτε σε υποκειμενικότητα είτε στο πλαίσιο μέσω του οποίου ορίζεται ένα ενδεχόμενο.

Για παράδειγμα, η πρόταση «Οι Φινλανδοί είναι συνήθως ξανθοί» περιέχει έναν παράγοντα ασαφούς ανακρίβειας, τη λέξη «ξανθοί», όπως επίσης και μία πιθανοτική αβεβαιότητα, που εκφράζεται με τη λέξη «συνήθως». Παρόλο που η ιδιότητα «ξανθοί» είναι αόριστη και στερείται ακρίβειας, προσδίδει κάποια πληροφορία. Όμως η λέξη αυτή αντιλαμβάνεται διαφορετικά στη Φινλανδία απ'οτι για παράδειγμα στην Ελλάδα. Άρα το χαρακτηριστικό «ξανθοί» είναι υποκειμενικό και εξαρτάται από το πλαίσιο στο οποίο γίνεται η αναφορά του. Με παρόμοιο τρόπο, η ιδιότητα «συνήθως», μας δίνει μια πληροφορία για τη συχνότητα που παρουσιάζεται η ιδιότητα «ξανθοί» στον πληθυσμό της Φινλανδίας, αλλά δεν είναι κατάλληλη για να αναλυθεί με βάση τα γνωστά μέτρα πιθανότητας. Σε κάθε «Έμπειρο Σύστημα» (Expert System), όπου οι νέες ιδιότητες και πληροφορίες δε μπορούν να αναλυθούν με βάση τη θεωρία πιθανοτήτων, η ασαφής συμπερασματολογία φαίνεται πως μπορεί να παρέχει λύσεις.

Με τον όρο ασαφής συμπερασματολογία θεωρούμε κάθε συλλογιστική διαδικασία, η οποία εμπεριέχει ασαφείς έννοιες. Εκφράζει μια γενικευμένη επαγωγική διαδικασία, όπου ασαφή συμπεράσματα έχουν προκύψει, μέσω κάποιων ασαφών δεδομένων. Ένα ασαφές σύστημα συμπερασματολογίας υποδηλώνει ένα σύστημα που αντιστοιχίζει ένα αποτέλεσμα y με ένα δεδομένο x με κάποιο συγκεκριμένο τρόπο. Συγκεκριμένα, η απεικόνιση $x \rightarrow y$ εξαρτάται από τρείς παραμέτρους:

- Την ανάθεση συναρτήσεων συμμετοχής
- Τους ασαφείς λογικούς συνδέσμους
- Τις διαδικασίες αποασαφοποίησης (defuzzification)

Επειδή οι τρεις αυτές παράμετροι καθορίζουν την απεικόνιση, αναφέρονται με τον όρο «Μεθοδολογία Ασαφούς Συμπερασματολογίας». Όλα τα μέρη της είναι «περισσότερο» ή «λιγότερο» υποκειμενικά. Ο προσδιορισμός της συνάρτησης συμμετοχής, η επιλογή των ασαφών λογικών συνδέσμων, καθώς επίσης και η επιλογή των στρατηγικών αποασαφοποίησης, μπορούν να διαφέρουν σημαντικά αναλόγως με την κρίση του κάθε ατόμου. Αυτή η υποκειμενικότητα προκύπτει από την αόριστη φύση των αφηρημένων εννοιών, που το σύστημα επιχειρεί να απεικονίσει. Ενώ η θεωρία πιθανοτήτων παρέχει σημαντικά εργαλεία για την αντικειμενική μεταχείρηση τυχαίων ενδεχομένων, η ασαφής λογική παρέχει τη δυνατότητα να ενσωματώσει τόσο στοχαστικά όσο και μη στοχαστικά ενδεχόμενα, αντικειμενικές και υποκειμενικές ιδιότητες σε μοντέλα λήψης αποφάσεων (Decision-making Model).

Μια επαρκής αξιολόγηση των κινδύνων πρέπει να γίνεται με βάση τη νοσηρότητα και τη φύση της ασθένειας και όχι να οικοδομείται με βάση μονοδιάστατες μεταβλητές. Σύμφωνα με τον Παγκόσμιο Οργανισμό Υγείας (WHO), περίπου το 35% όλων των θανάτων οφείλονται σε καρδιαγγειακά νοσήματα. Η συσχέτιση μεταξύ των καρδιαγγειακών νοσημάτων και της θνησιμότητας είναι γνωστό οτι είναι ισχυρή. Παρόλο που η αξιολόγηση των κινδύνων για μια καρδιαγγειακή πάθηση είναι δύσκολο να συνοψισθεί, λόγω της εξαιρετικά πολύπλοκης αιτιολογίας, κάποιοι από τους πιό αξιόπιστους παράγοντες πρόβλεψης είναι η αυξημένη αρτηριακή πίεση, η παχυσαρκία και τα υψηλά επίπεδα χοληστερόλης.

Αυτά τα τρία στοιχεία συνιστούν ένα πολύπλοκο σύστημα, πολλαπλών και αλληλεπιδρώντων μεταβλητών. Όπως προαναφέρθηκε, το βασικό πρόβλημα της παραδοσιακής ταξινόμησης κινδύνων είναι το ότι αυξάνοντας τα επίπεδα διαφοροποίησης, αυξάνεται και ο αριθμός των κατηγοριών της αξιολόγησης. Αυτό σημαίνει πρακτικά ότι για δεδομένες τιμές των παραπάνω ιδιοτήτων, η κατηγορία που σχηματίζεται θα έχει μικρό αριθμό ατόμων, γεγονός που συνεπάγεται υψηλότερο ρίσκο για τον ασφαλισμένο.

Χρησιμοποιώντας τη στατιστική συμπερασματολογία, εισαγάγεται ένα νέο θεωρητικό πλαίσιο, για τον τρόπο με τον οποίο ένας ασφαλιστής ζωής μπορεί να διαχωρίσει τους ασφαλισμένους, υπό το πρίσμα των καρδιαγγειακών νοσημάτων. Θεωρούμε, για παράδειγμα, μία ασφάλιση ζωής, η οποία τιμολογείται σε δύο επίπεδα. Στο πρώτο επίπεδο θεωρούμε μία συνηθισμένη τιμή για την κατηγορία που μας ενδιαφέρει, όπου η ταξινόμηση γίνεται με βάση τα σαφή όρια μεταξύ των κατηγοριών και στο δεύτερο επίπεδο θεωρούμε μια αναλογική προσαρμογή του κινδύνου σύμφωνα με τις ασαφείς μεταβλητές **[15]**.

Ο προσδιορισμός των ασφαλίστρων χρησιμοποιώντας τα σαφή όρια μεταξύ των κατηγοριών ταξινόμησης, υπολογίζονται με βάση την ηλικία, το φύλο και το αν και πόσο καπνίζει το άτομο που επιθυμεί να ασφαλιστεί. Για να επιτευχθεί περαιτέρω διαχωρισμός μεταξύ των υποψηφίων ασφαλισμένων, οι ασφαλισμένοι πρέπει να πληρώσουν μια επιβάρυνση κινδύνου (risk loading) λ, πέρα από το καθαρό ασφάλιστρο της κατηγορίας στην οποία κατατάσσονται. Δηλαδή, άτομα που θεωρούνται υψηλού ρίσκου ως προς κάποιο καρδιαγγειακό νόσημα, πρέπει να πληρώσουν επιβάρυνση κινδύνου $\lambda > 0$, ενώ άτομα που θεωρούνται χαμηλού ρίσκου για την εκδήλωση μιας τέτοιας πάθησης έχουν αρνητική επιβάρυνση κινδύνου, $\lambda < 0$, δηλαδή το ασφαλιστρό τους είναι

, τελικά, μειωμένο. Η επιβάρυνση κινδύνου είναι αναλογική του ασφαλίστρου της κατηγορίας που ανήκει ο υποψήφιος ασφαλιζόμενος και το μικτό ασφάλιστρο υπολογίζεται ως εξής:

$$\Pr(n \mid i, j, k) = C_{ijk} + \frac{\lambda(n)}{100} C_{ijk}, \quad i= \text{ηλικία}, \ j= \text{φύλο}, \ k= \text{συνήθειες καπνίσματος} \qquad (2.1)$$

όπου Pr (n | i, j, k) εκφράζει το μικτό ασφάλιστρο για το n-οστό άτομο ηλικίας i, φύλου j και k=1, αν είναι καπνιστής και k=0 αν δεν είναι καπνιστής. Η τιμή C_{ijk} παριστά το καθαρό ασφάλιστρο, που έχει τιμολογηθεί σύμφωνα με την κατηγορία στην οποία ανήκει αυτό το άτομο και η τιμή λ (n) παριστά την επιβάρυνση κινδύνου, εκφρασμένη σε ποσοστό.

Αυτή η τεχνική τιμολόγησης χρησιμοποιεί τα θετικά στοιχεία τόσο της στατιστικής συμπερασματολογίας όσο και της ασαφούς συμπερασματολογίας. Από τη μία πλευρά η στατιστική δημιουργεί σταθερές κατηγορίες τιμολόγησης με μικρή διασπορά για έναν περιορισμένο αριθμό παραγόντων κινδύνου, με αποτέλεσμα να ταξινομούμε τους υποψήφιους ασφαλιζόμενους, στο πρώτο επίπεδο, με βάση σημαντικά χαρακτηριστικά, όπως το φύλο, την ηλικία και το αν το άτομο καπνίζει. Από την άλλη πλευρά, προσαρμόζουμε τα ασφάλιστρα στις κατηγορίες που έχουν δημιουργηθεί ως προς τον κίνδυνο, με βάση τους ασαφείς παράγοντες κινδύνου, που περιγράφουν την τάση των ατόμων για καρδιαγγειακά νοσήματα. Για να αξιολογήσουμε τους ασαφείς παράγοντες κινδύνου και να καθορίσουμε την επιβάρυνση κινδύνου λ, χρησιμοποιούμε ένα ασαφές σύστημα συμπερασματολογίας.

2.3 ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗΝ ΑΣΑΦΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑ

Η βασική ιδέα της ασαφούς συμπερασματολογίας είναι να χρησιμοποιηθεί η ασαφής λογική για τον καθορισμό ενός αποτελέσματος συναρτήσει διάφορων μετρήσιμων δεδομένων. Γενικότερα, ένα σύστημα ασαφούς συμπερασματολογίας αποτελείται από τρία βήματα. Στο πρώτο βήμα, τα δεδομένα θα πρέπει να τροποποιηθούν σε λεκτικές μεταβλητές. Αυτή η διαδικασία καλείται «ασαφοποίηση» (Fuzzification), διότι τα εισαγόμενα στοιχεία μετασχηματίζονται σε ένα βαθμό συμμετοχής, ο οποίος κυμαίνεται από το μηδέν μέχρι το ένα. Το δεύτερο βήμα είναι η ασαφής συμπερασματολογία (Fuzzy Inference). Τα εξαγόμενα στοιχεία από τη διαδικασία της ασαφούς συλλογιστικής αποτελούν ένα ασαφές σύνολο. Ένα σύστημα ανάλυσης του κινδύνου πρέπει να παράγει crisp αποτελέσματα, έτσι ώστε ο αναλυτής εκτιμώντας αυτά τα στοιχεία να μπορεί να πάρει άμεσα μια ορθή απόφαση. Συνεπώς, στο τρίτο βήμα, τα εξαγόμενα στοιχεία από την ασαφή διαδικασία θα πρέπει να αποκωδικοποιούνται σε έναν crisp αριθμό, μέσω μιας διαδικασίας που ονομάζεται «αποασαφοποίηση» (Defuzzification).

Βασιζόμενοι σε τρείς παράγοντες κινδύνου που σχετίζονται με καρδιαγγειακές παθήσεις, όπως η συστολική αρτηριακή πίεση, τα επίπεδα της χοληστερόλης στο αίμα και το βάρος χρειαζόμαστε κανόνες (συμπεράσματα), με τους οποίους ο κίνδυνος θνησιμότητας μπορεί να προβλεφθεί. Από εμπειρική γνώση που αφορά σε ασφαλίσεις υγείας, μπορούν να κατασκευαστούν δύο τέτοιοι κανόνες **[15]**.

Κανόνας 1 : Εάν η αρτηριακή πίεση είναι αυξημένη και το επίπεδο της χοληστερόλης είναι σε μέτρια επίπεδα, τότε η επιβάρυνση του κινδύνου, είναι της τάξης του 30%.

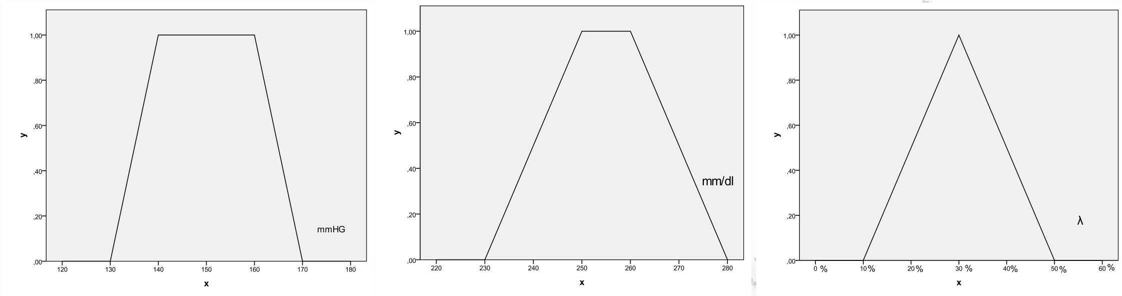
Κανόνας 2 : Εάν η αρτηριακή πίεση είναι πολύ υψηλή (υπέρταση), τα επίπεδα της χοληστερόλης είναι αυξημένα, εντός των επιτρεπόμενων ορίων και ο υποψήφιος είναι υπέρβαρος, τότε η επιβάρυνση του κινδύνου, είναι της τάξης του 60%.

Η συστολική αρτηριακή πίεση μετριέται σε mm της στήλης υδραργύρου και τα επίπεδα της χοληστερόλης στο αίμα σε mg/dl. Το βάρος υπολογίζεται με βάση τον δείκτη μάζας σώματος (Body Mass Index- BMI) όπου το βάρος του σώματος συσχετίζεται με το ύψος του ατόμου: βάρος/(ύψος)^2 = Kg/m^2. Για κάθε μία από αυτές τις τρεις λεκτικές μεταβλητές (συστολική αρτηριακή πίεση, χοληστερόλη, βάρος), ορίζονται τα ασαφή διαστήματα για τα οποία η αυξημένη αρτηριακή πίεση, η μέτρια αυξημένη χοληστερόλη και το φυσιολογικό βάρος έχουν αποδεκτές τιμές. Αρχικά, ένας ιατρός ορίζει τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες η συνάρτηση συμμετοχής παίρνει την τιμή μηδέν και για ποιές τιμές η συνάρτηση συμμετοχής έχει την τιμή ένα. Στη συνέχεια, αφού έχουν ορισθεί οι ακραίες τιμές, πρέπει να ορισθεί η συνάρτηση μέσω της οποίας κινούνται οι τιμές μεταξύ του μηδενός και του ένα. Η ανάθεση συνάρτησης όμως δεν είναι τετριμμένη αλλά υποκειμενική. Η ανάθεση, λοιπόν, γίνεται με κριτήρια τα οποία βασίζονται στη λογική και στην εμπειρία. Έστω για παράδειγμα οτι βασιζόμαστε στην εμπειρική γνώση, μέσω των ασφαλίσεων υγείας, για να εφαρμόσουμε ένα τέτοιο σύστημα. Η συνάρτηση που θα χρησιμοποιήσουμε έχει ακραίες τιμές το μηδέν και το ένα και είναι γραμμική. Αυτό σημαίνει οτι η συνάρτηση συμμετοχής θα μπορούσε να είναι η τριγωνική ή η τραπεζοειδής.

Τα ασαφή σύνολα που περιγράφησαν, μέσω των κανόνων 1 και 2, φαίνονται στο Σχήμα 2.1. Κάθε λεκτική μεταβλητή (συστολική αρτηριακή πίεση, χοληστερόλη, βάρος), έχει μετασχηματιστεί σε μια λεκτική τιμή (αυξημένη αρτηριακή πίεση, αυξημένη αλλά εντός των ορίων χοληστερόλη κ.λ.π.), και έχουν ορισθεί ως ασαφή σύνολα.

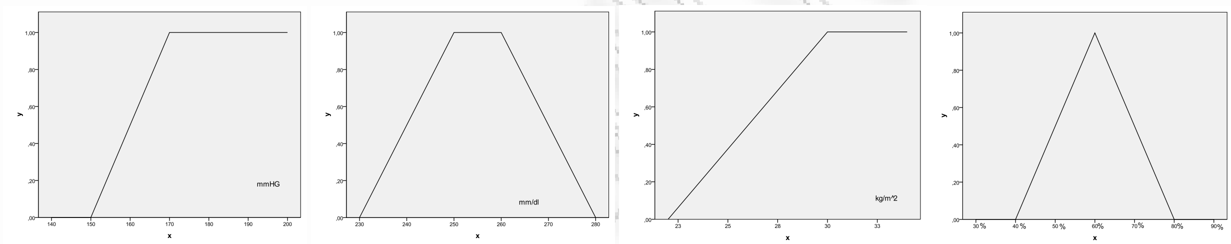
Το επόμενο βήμα είναι η ασαφοποίηση των δεδομένων, με βάση τα ασαφή λεκτικά σύνολα. Για παράδειγμα, η συστολική αρτηριακή πίεση των 140mm Hg ανήκει στο σύνολο αυξημένης αρτηριακής πίεσης με βαθμό της συνάρτησης συμμετοχής, μ= 0.8. Κατά τον ίδιο τρόπο, όλα τα δεδομένα ασαφοποιούνται με κάθε μία εκ των συναρτήσεων συμμετοχής σύμφωνα με τον κάθε κανόνα.

Κανόνας 1



Αν η πίεση είναι υψηλή ΚΑΙ τα επίπεδα χοληστερόλης μέτρια, τότε η επιβάρυνση κινδύνου είναι της τάξεως του 30%.

Κανόνας 2



Αν η πίεση είναι αρκετά υψηλή ΚΑΙ τα επίπεδα χοληστερόλης είναι ελαφρώς αυξημένα ΚΑΙ ο υποψήφιος προς ασφάλιση είναι υπέρβαρος, τότε η επιβάρυνση κινδύνου είναι της τάξεως του 60%

Σχήμα 2.1 Ασαφή Σύνολα μέσω των Κανόνων 1 και 2

Τα ασαφή σύνολα συνδέονται μεταξύ τους με το λογικό τελεστή ΚΑΙ. Ένας λεκτικός τελεστής ΚΑΙ υποδηλώνει οτι όλες οι προυποθέσεις πρέπει να ικανοποιούνται. Όμως, αυτό θα σήμαινε πως ένα άτομο χαμηλού βάρους, με υψηλή αρτηριακή πίεση και υψηλή χοληστερίνη δε θα ενέπιπτε στην κατηγορία με την επιβάρυνση κινδύνου της τάξεως του 60%. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την ιατρική άποψη, αφού ιατρικά θεωρείται πως ανήκει στην κατηγορία υψηλού κινδύνου. Μία πιό σωστή θεώρηση, λοιπόν, θα ήταν να εφαρμόσουμε τον τελεστή ΚΑΙ με προσεγγιστικό τρόπο, αφού θα ήταν παράλογο με μοναδικό παράγοντα το βάρος να αποκλίσουμε έναν τέτοιο υποψήφιο από την κατηγορία με την επιβάρυνση κινδύνου στο επίπεδο του 60%. Αυτή η προσέγγιση, δηλαδή, θα πρέπει να τροποποιεί ένα λεκτικό τελεστή ΚΑΙ σε ένα βαθμό προς τον λεκτικό τελεστή Ή. Προς αυτή την κατεύθυνση οι Zimmerman και Zysno **[35]**, πραγματοποίησαν πειράματα με πραγματικά δεδομένα και έτσι ανέπτυξαν έναν παραμετρικοποιημένο τελεστή που λύνει τέτοιου είδους προβλήματα. Πρόκειται για τον Γάμμα τελεστή, ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$\forall x; \gamma \in [0,1]: G_{\gamma} = [\min(\mu_A(x), \mu_B(x))]^{1-\gamma}[\max(\mu_A(x), \mu_B(x))]^{\gamma} \quad (2.2)$$

Όπου το x είναι το στοιχείο ενδιαφέροντος, $\mu_A(x)$ και $\mu_B(x)$ είναι οι συναρτήσεις συμμετοχής του x στα υποσύνολα A και B αντιστοίχως και το x ορίζεται στο υπερσύνολο αναφοράς X.

Με τον τελεστή Γάμμα, οι ασαφείς λογικοί σύνδεσμοι μπορούν εύκολα να προσαρμοσθούν ανάλογα με τις απαιτήσεις μας. Εάν επιλέξουμε τιμές του γ κοντά στο μηδέν, τότε ο βαθμός τροποποίησης μας δίνει αποτελέσματα που τείνουν προς τον τελεστή ΚΑΙ, ενώ εάν επιλέξουμε μεγαλύτερες τιμές του γ, τότε θα τείνει προς τον τελεστή Ή. Το ουσιαστικό πλεονέκτημα του τελεστή Γάμμα είναι το οτι συνδέει έννοιες πιο ελεύθερα από ότι οι σύνδεσμοι minimum και maximum. Μας δίνεται έτσι η δυνατότητα για μία πιο ευέλικτη ερμηνεία στις ιδιότητες που θέλουμε να μελετήσουμε. Εφόσον ο τελεστής Ή δημιουργεί υψηλότερη επιβάρυνση κινδύνου, για τις τιμές του γ που πλησιάζουν τη μονάδα, τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε παρέχουν καλύτερη προστασία από τα ενδεχόμενα κινδύνου. Έτσι, μία ιδανική τιμή του γ, με την έννοια οτι παρέχει καλύτερη κάλυψη έναντι των κινδύνων που προβλέπουμε, θα πρέπει να κυμαίνεται από 0.55-0.65 **[15]**.

Για την καλύτερη κατανόηση της λειτουργίας της ασαφούς συμπερασματολογίας ακολουθεί ένα αριθμητικό παράδειγμα. Έστω Ν ένα σύνολο με στοιχεία n υποψήφιους ασφαλιζόμενους και n∈N. Ο αυξημένος κίνδυνος θνησιμότητας, λόγω καρδιαγγειακών ασθενειών, εκτιμάται από τις μεταβλητές v_k , n=(v_1, v_2, v_3), όπου η μεταβλητή v_1 εκφράζει τη συστολική αρτηριακή πίεση, η v_2 εκφράζει τη χοληστερόλη και η μεταβλητή v_3εκφράζει το βάρος του ατόμου. Μελετώντας τα επίπεδα κινδύνου αυτών των δεδομένων, ένα σύστημα ασαφούς συμπερασματολογίας συνάγει το βαθμό της επιβάρυνσης κινδύνου που πρέπει να επωμισθεί ο κάθε υποψήφιος. Έστω λ το ποσοστό της επιβάρυνσης κινδύνου. Έστωσαν A_1, B_1 τα ασαφή σύνολα που περιλαμβάνουν τις τιμές της αρτηριακής πίεσης και της χοληστερόλης αντιστοίχως, σύμφωνα με τον κανόνα 1 και έστωσαν A_2, B_2, C_2, τα ασαφή σύνολα του Κανόνα 2, που περιλαμβάνουν τις τιμές της αρτηριακής πίεσης, της χοληστερόλης και του βάρους αντιστοίχως. Τότε οι Κανόνες 1 και 2 γίνονται:

Κανόνας 1: Αν το v_1 ανήκει στο A_1 και το v_2 ανήκει στο B_1, τότε το λ είναι D_1.

Κανόνας 2: Αν το v_1 ανήκει στο A_2 και το v_2 ανήκει στο B_2 και το v_3 ανήκει στο C_2, τότε το λ είναι D_2.

Οι συναρτήσεις συμμετοχής που χρησιμοποιούνται είναι αυτές που αναφέρθηκαν νωρίτερα. Έτσι έχουμε ότι:

Σύμφωνα με τον Κανόνα 1:

$$\mu_{A_1} = \begin{cases} \frac{v_1-130}{10}, 130 \le v_1 \le 140 \\ 1 \quad, 140 < v_1 \le 160 \\ \frac{170-v_1}{10}, 160 < v_1 \le 170 \end{cases} \qquad (2.3)$$

$$\mu_{B_1} = \begin{cases} \frac{v_2-200}{20}, 200 < v_2 \le 220 \\ 1, \quad 220 < v_2 \le 230 \\ \frac{250-v_2}{20}, 230 < v_2 \le 250 \end{cases} \qquad (2.4)$$

$$\mu_{D_1} = \begin{cases} \frac{\lambda-10}{20}, 10 < \lambda \le 30 \\ \frac{50-\lambda}{20}, 30 < \lambda \le 50 \end{cases} \qquad (2.5)$$

Σύμφωνα με τον Κανόνα 2:

$$\mu_{A_2} = \begin{cases} \frac{v_1-150}{20}, 150 \leq v_1 \leq 170 \\ 1, \quad 170 < v_1 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\mu_{B_2} = \begin{cases} \frac{v_2-230}{20}, 230 < v_2 \leq 250 \\ 1, \quad 250 < v_2 \leq 260 \\ \frac{260-v_2}{20}, 260 < v_2 \leq 280 \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\mu_{C_2} = \begin{cases} \frac{v_3-22}{8}, \; 22 \leq v_3 \leq 30 \\ 1, \quad 30 < v_3 \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\mu_{D_2} = \begin{cases} \frac{\lambda-40}{20}, \; 40 \leq \lambda \leq 60 \\ \frac{80-\lambda}{20}, \; 60 < \lambda \leq 80 \end{cases} \quad (2.9)$$

Έστω ένας υποψήφιος ασφαλιζόμενος, του οποίου η υγεία διαθέτει τις ακόλουθες ιδιότητες:

v_1= 160 mm Hg,

v_2= 240 mg/ dl,

v_3= 27 kg/ m^2

Αρχικά, εξετάζονται τα δεδομένα ως προς τα ασαφή σύνολα A_1 και B_1. Η διαδικασία ασαφοποίησης, μέσω των συναρτήσεων συμμετοχής, δίνει τα εξής αποτελέσματα:

$$\mu_{A_1} = 1 \text{ και } \mu_{B_1} = 0.5$$

Ακολουθείται η ίδια διαδικασία για τα δεδομένα μέσω των συνόλων A_2, B_2 και C_2. Τα αποτελέσματα της διαδικασίας ασαφοποίησης είναι τα ακόλουθα:

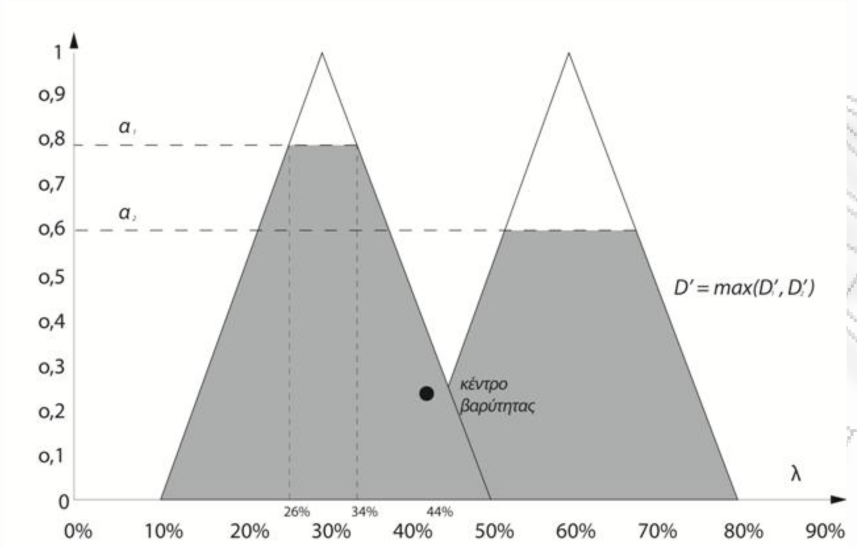
$$\mu_{A_2} = 0.5 \ , \ \mu_{B_2} = 0.5 \text{ και } \mu_{C_2} = 0.625$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τον τελεστή Γάμμα, τροποποιούμε τον τελεστή ΚΑΙ. Η τιμή του γ που επιλέγουμε ειναι η τιμή 0.6, που μας παρέχει την επιθυμητή κάλυψη έναντι των κινδύνων για την πρόβλεψη που εκτελούμε, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό $G_{0.6}$ ώστε να υποδηλώσουμε την τιμή που επιλέξαμε. Έτσι έχουμε:

$$\alpha_1 = 0.5^{0.4} * 1^{0.6} = 0.5^{0.4} \approx 0.8$$

$$\alpha_2 = G_{0.6} \, [\, 0.5^{0.4} * 0.5^{0.6} \,] \, \mu_{C_2} = 0.5^{0.4} * 0.625^{0.6} \approx 0.6$$

Εφαρμόζοντας τις τιμές α_1 και α_2 στα αποτελέσματα που είχαμε από τις συναρτήσεις συμμετοχής, λαμβάνουμε τα αποτελέσματα D'_1 και D'_2. Αθροίζοντας τα αποτελέσματα αυτά, για τον κάθε κανόνα, μέσω του τελεστή maximum, προκύπτει η συνάρτηση συμμετοχής, D' = max (D'_1 , D'_2), η οποία εμπεριέχει το σύνολο των ιδιοτήτων των δεδομένων μας. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται στο Σχήμα 2.2.



Σχήμα 2. 2 Συνάρτηση Συμμετοχής D'

Το αποτέλεσμα D' αποτελεί επίσης ένα ασαφές σύνολο και για αυτό το λόγο, όπως προειπώθηκε, είναι δύσκολο να λάβει κανείς αποφάσεις από αυτό. Έτσι θεωρείται αναγκαίο το βήμα της αποασαφοποίησης, το οποίο παράγει έναν crisp αριθμό, διευκολύνοντας έτσι τη διαδικασία της λήψης αποφάσεων **[15]**.

Για τη διαδικασία της αποασαφοποίησης, στη διεθνή βιβλιογραφία, έχουν προταθεί διάφορες μέθοδοι, όμως οι πιο σημαντικές θεωρούνται η μέθοδος του κέντρου της περιοχής, ο σταθμικός ασαφής μέσος και ο μέσος του maximum. Η πιο διαδεδομένη μέθοδος από τις προαναφερθείσες, είναι η μέθοδος του κέντρου της περιοχής (center of area), η οποία θα περιγραφεί στη συνέχεια.

Έστω Z το αποτέλεσμα μιας οιασδήποτε ασαφούς διαδικασίας. Το κέντρο της περιοχής μπορεί να περιγραφεί ως το κέντρο της κατανομής του αποτελέσματος, σύμφωνα με τη σχέση:

$$Z_{coa}=\frac{\sum_{j=1}^{q} z_j \mu_{C'}(z_j)}{\sum_{j=1}^{q} \mu_{C'}(z_j)} \qquad (2.10)$$

όπου το q εκφράζει τον αριθμό των αριθμητικών κλάσεων του αποτελέσματος, z_j είναι το ποσό του αποτελέσματος που περιέχεται στο σημείο j και $\mu_{C'}(z_j)$ είναι η τιμή της συμμετοχής του αποτελέσματος στο ασαφές σύνολο C.

Η μέθοδος του μέσου του maximum διακρίνει τα μέρη ενός ασαφούς αποτελέσματος για τα οποία οι τιμές συμμετοχής είναι μικρότερες από το maximum. Για ένα διακριτό υπερσύνολο, ο μέσος του maximum υπολογίζεται ως εξής:

$$Z_{mom}=\sum_{j=1}^{l}\frac{z_j}{l} \qquad (2.11)$$

όπου l είναι ο αριθμός των αριθμητικών κλάσεων του αποτελέσματος που ικανοποιούν το maximum βαθμό συμμετοχής. Ο μέσος της συμμετοχής παρέχει έναν τρόπο ώστε η αποασαφοποίηση να τείνει προς τη μέγιστη τιμή του αποτελέσματος.

Συνεχίζοντας το παράδειγμα, για την αποασαφοποίηση του ασαφούς συνόλου D' θα χρησιμοποιηθούν αυτές οι δύο μέθοδοι. Η μέθοδος του κέντρου της περιοχής μας υπολογίζει το κέντρο βάρους της κατανομής των αποτελεσμάτων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2. Έχουμε ότι:

$$\lambda_{coa} = \frac{20 * 0.5 + 30 * 0.8 + 40 * 0.5 + 50 * 0.5 + 60 * 0.6 + 70 * 0.5}{0.5 + 0.8 + 0.5 + 0.5 + 0.6 + 0.5} \approx 44$$

Με βάση το αποτέλεσμα αυτής της μεθόδου αποασαφοποίησης, παρατηρούμε οτι ο υποψήφιος ασφαλιζόμενος θα πρέπει να επωμισθεί μια επιβάρυνση κινδύνου της τάξεως του 44%. Αυτή η μέθοδος δεν διακρίνει τις ακραίες τιμές στο αθροιστικό αποτέλεσμα και επειδή συνυπολογίζει όλες τις τιμές του αποτελέσματος είναι η πιό διαδεδομένη μέθοδος.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο του μέσου του maximum, ο ασφαλιστής διακρίνει εκείνες τις τιμές που λαμβάνουν τη μέγιστη τιμή συμμετοχής. Στο παράδειγμα αυτό, η υψηλότερη τιμή συμμετοχής προκύπτει από τον Κανόνα 1 ($\alpha_1 = 0.8$). Η μέθοδος του μέσου του maximum υπολογίζει τη μέση τιμή του συνόλου των λ, για τα οποία η συναρτήσεις συμμετοχής παίρνουν την τιμή $\mu_{D_1} = 0.8$. Επομένως πρέπει να υπολογίσουμε το μέσο όλων των λ μεταξύ των τιμών 26 και 34%. Επειδή η συνάρτηση συμμετοχής, μ_{D_1}, είναι συμμετρική, ο μέσος του maximum προκύπτει πως είναι:

$$\lambda_{mom} = \frac{26 + 34}{1 + 1} = 30$$

Παρατηρούμε πως η τιμή του λ_{mom} είναι μικρότερη απο την τιμή του λ_{coa}. Με τις τιμές του λ που υπολογίσθηκαν, μπορούμε να υπολογίσουμε το ασφάλιστρο ως εξής:

$$\Pr(n \mid i, j, k) = C_{ijk} + \frac{44}{100} C_{ijk} \quad (2.12)$$

στην περίπτωση που ο ασφαλιστής επιλέξει τη μέθοδο του κέντρου της περιοχής ή

$$\Pr(n \mid i, j, k) = C_{ijk} + \frac{30}{100} C_{ijk} \quad (2.13)$$

στην περίπτωση που επιλέξει τη μέθοδο του μέσου του maximum.

Το σημαντικό πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου διαφοροποίησης, που επιτυγχάνεται μέσω της ασαφούς συμπερασματολογίας, είναι οτι οι κατηγορίες C_{ijk} παραμένουν ίδιες με την κλασσική ταξινόμηση. Οι ασφαλιζόμενοι ταξινομούνται με βάση το φύλο, i, την ηλικία, j και το αν ή οχι καπνίζουν, k. Πέρα από την τιμολόγηση της κατηγορίας στην οποία ανήκουν, τα ασφάλιστρα προσαρμόζονται ανάλογα με το ποσοστό κινδύνου που προκύπτει από τυχούσα αυξημένη πιθανότητα θνησιμότητας λόγω καρδιαγγειακών παθήσεων. Έχει, λοιπόν, επιτευχθεί μία αυξημένη διαφοροποίηση χωρίς όμως αυτό να συνεπάγεται τη μείωση του αριθμού των ασφαλισμένων σε κάθε κατηγορία.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα παρατηρούμε οτι οι τιμές της επιβάρυνσης κινδύνου, αναλόγως με τη μέθοδο αποασαφοποίησης που θα επιλεχθεί, έχουν μεγάλη διασπορά. Η επιλογή της μεθόδου αποασαφοποίησης, δηλαδή, καθορίζει την ποιότητα του ασαφούς συστήματος συμπερασματολογίας. Εφ’όσον δεν υπάρχει κάποιο σαφές κριτήριο με βάση το οποίο μπορεί να γίνεται επιλογή μεθόδου αποασαφοποίησης, η μέθοδος που εφαρμόζεται επιλέγεται αυθαίρετα. Για να επιτευχθεί μία σωστή και επαρκής μέθοδος αποασαφοποίησης, πρέπει να ελεγθεί το κατά πόσο τα αποτελέσματα της είναι τα επιθυμητά και κατά πόσο οι υποψήφιοι ασφαλιζόμενοι θα προτιμήσουν ένα συμβόλαιο που έχει τιμολογηθεί με αυτή τη μέθοδο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΝΑΛΗΨΗ ΤΩΝ ΚΙΝΔΥΝΩΝ ΥΠΟ ΤΟ ΠΡΙΣΜΑ ΤΗΣ ΑΣΑΦΟΥΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Η ανάληψη των κινδύνων αποτελεί, μαζί με την ταξινόμηση, τα σημαντικότερα βήματα για την πραγματοποίηση μίας ασφάλισης. Η ανάληψη των κινδύνων είναι η διαδικασία μέσω της οποίας ο ασφαλιστής καθορίζει το ποιούς κινδύνους είναι σε θέση να αποδεχτεί, υπό ποιές συνθήκες καθώς και τα ποσά των αποδεχόμενων κινδύνων. Ο σκοπός της ανάληψης των κινδύνων είναι συνεπώς, η δημιουργία ενός ασφαλούς αλλά παράλληλα επικερδούς διαχωρισμού των κινδύνων. Παρά το γεγονός οτι οι διάφοροι τύποι ασφαλίσεων έχουν ως κοινό χαρακτηριστικό το οτι ομαδοποιούν διαφορετικά είδη κινδύνων, υπάρχουν βασικές διαφορές μεταξύ τους ανάλογα με το είδος του κινδύνου που καλύπτουν. Για παράδειγμα, στις γενικές ασφαλίσεις υπάρχει η πιθανότητα να μην επέλθει ένας κίνδυνος, ενώ στις ασφαλίσεις ζωής, ο υπό ασφάλιση κίνδυνος (θάνατος) θεωρείται βέβαιο ενδεχόμενο. Για αυτό το λόγο θα πρέπει να συσσωρεύεται, μέσω των ασφαλίστρων, ικανό ποσό ώστε να καλύπτεται η αποζημίωση όταν επέλθει ο κίνδυνος.

3.1 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΑΝΑΛΗΨΗΣ ΤΩΝ ΚΙΝΔΥΝΩΝ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΚΛΑΣΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Η ανάληψη ενός κινδύνου προκύπτει, λοιπόν, από τον επιμερισμό των κινδύνων και τη συγκέντρωση κεφαλαίων ώστε να καλύπτονται οι απαιτήσεις. Ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο βασίζεται σε όσο το δυνατόν ακριβέστερη εκτίμηση των ασφαλίστρων για τον κάθε κίνδυνο που αναλαμβάνεται αλλά και σε άλλα κριτήρια, όπως την πρακτική που ακολουθεί η κάθε ασφαλιστική εταιρία, με βάση την εμπειρία που έχει αναπτύξει. Σε αυτά τα κριτήρια θα εξετάσουμε πώς μπορεί να εφαρμοσθεί η θεωρία ασαφών συνόλων.

Επί σειρά ετών, ο υπολογισμός των βέλτιστων ασφαλίστρων υπήρξε ένα από τα βασικότερα πεδία έρευνας των ασφαλιστικών μαθηματικών. Ένα μοντέλο κινδύνου περιγράφεται από ένα μαθηματικό μοντέλο, με σκοπό τον υπολογισμό του ασφαλίστρου για τον κάθε ασφαλιζόμενο, σε αντιστοιχία με την κατηγορία κινδύνου στην οποία ανήκει. Για το λόγο αυτό ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων χωρίζεται σε ομογενείς κινδύνους, με βάση τις πρακτικές ανάληψης των κινδύνων της κάθε ασφαλίστικής εταιρίας, κατά την οποία καθορίζονται οι παράγοντες που θα σχηματίσουν στη συνέχεια τις κατηγορίες (κλάσεις) κινδύνου. Η δυσκολία σε αυτό το μοντέλο έγκειται στο ότι οι παράγοντες αυτοί πρέπει να είναι αφ'ενός διαθέσιμοι και αφ'εταίρου μετρήσιμοι.

Ο πρώτος που εισήγαγε την Ασαφή Λογική στη διαδικασία της ανάληψης κινδύνων ήταν ο DeWit (1982) **[11]**, ο οποίος έδειξε ότι η διαδικασία της ανάληψης κινδύνων, δηλαδή η επιλογή και η αξιολόγηση των υπό ασφάλιση κινδύνων, παρουσιάζει αβεβαιότητα και για αυτό το λόγο δεν μπορεί να καλυφθεί από την κλασική θεωρία πιθανοτήτων.

Στις ασφαλίσεις ζωής οι κατηγορίες καθορίζονται από δύο παράγοντες, την ηλικία του ασφαλιζόμενου (x) και το φύλο του (y), μέσω των πινάκων θνησιμότητας. Στις γενικές ασφαλίσεις είναι δύσκολο να δημιουργηθούν ομογενείς κατηγορίες κινδύνου, αφού οι παράγοντες που χαρακτηρίζουν τις κατηγορίες αυτές μπορούν να αξιολογηθούν μόνο με βάση τις παρατηρήσεις και την εμπειρία του ασφαλιστή, αφού η συλλογή και η ανάλυση των δεδομένων δεν είναι πάντα εφικτές. Από την άλλη, οι παρατηρήσεις και η εμπειρία του ασφαλιστή ενδέχεται να μη μπορούν να εκφρασθούν με αριθμούς, με αποτέλεσμα οι παράγοντες που επηρρεάζουν την απόφαση για την ανάληψη ενός κινδύνου να μην είναι επακριβώς μετρήσιμοι. Σε αυτά τα προβλήματα επιχειρεί να δώσει λύση η ασαφής λογική.

Έστω, για παράδειγμα, μια ασφάλιση αυτοκινήτου. Οι παράγοντες που λαμβάνονται συνήθως υπ'όψη για τον υπολογισμό των ασφαλίστρων είναι οι ιδιότητες του ασφαλιζόμενου οχήματος, όπως τα κυβικά, η ιπποδύναμη, το βάρος (x_1), η ηλικία του οδηγού (x_2), ο τόπος κατοικίας του οδηγού (x_3), τα κατά μέσο όρο ετήσια χιλιόμετρα που διανύει (x_4) και το ιστορικό ατυχημάτων που έχει (x_5). Επομένως η κάθε κλάση ταξινόμησης προκύπτει από το διάνυσμα (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), όταν στη θέση των μεταβλητών θέσουμε τις τιμές που αντιστοιχούν στον κάθε υποψήφιο ασφαλιζόμενο. Οι πέντε αυτοί παράγοντες είναι όλοι μετρήσιμοι και υποθέτουμε πως έχουν δηλωθεί σωστά από τον υποψήφιο προς ασφάλιση. Το ερώτημα που τίθεται είναι το κατά πόσο αυτοί οι παράγοντες είναι οι κατάλληλοι που πρέπει να λάβουμε υπ'όψη μας προκειμένου να υπολογίσουμε σωστά τα ασφάλιστρα.

Το ασφάλιστρο καθορίζεται από μετρήσιμους και διαθέσιμους παράγοντες, οι οποίοι χρησιμοποιούνται με τέτοιο τρόπο ώστε η πιθανότητα να επέλθει ένας κίνδυνος να είναι η ίδια για όλα τα ασφαλιζόμενα άτομα που ανήκουν στην ίδια κατηγορία, η οποία καθορίζεται από τον ίδιο συνδυασμό των υπό εξέταση παραγόντων x_i. Αν δεν υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ της αναμενόμενης μέσης τιμής του κινδύνου και της παρατηρηθείσας μέσης τιμής, τα ασφάλιστρα θεωρούμε ότι έχουν υπολογιστεί λανθασμένα και θα πρέπει να προχωρήσουμε σε μία εκ νέου διαμέριση των ασφαλισμένων, με νέα κριτήρια, με σκοπό την επίτευξη ενός ομογενούς χαρτοφυλακίου κινδύνων. Στην αντίθετη περίπτωση, αν δηλαδή οι παρατηρηθείσες και οι αναμενόμενες μέσες τιμές του κινδύνου συμπίπτουν, θεωρούμε ότι τα ασφάλιστρα που έχουμε υπολογίσει είναι σωστά.

Μια από τις βασικές αρχές της τιμολόγησης των ασφαλίστρων είναι το μη υπερβολικό ασφάλιστρο. Τα ασφάλιστρα, δηλαδή, μιας ασφάλισης δε θα πρέπει να είναι υπερβολικά σε σχέση με της παρεχόμενες καλύψεις. Το κόστος μίας ασφάλισης διαφέρει από εταιρία σε εταιρία και αν δεν υπάρχει νομικός περιορισμός στην τιμολόγηση, διαμορφώνεται με βάση τους κανόνες της προσφοράς και της ζήτησης. Ο υποψήφιος ασφαλιζόμενος θα δεχθεί να ασφαλιστεί εάν θεωρεί ότι η σχέση μεταξύ καλύψεων και ασφαλίστρων είναι προς όφελος του, ενώ ο ασφαλιστής θα υπολογίσει τα ασφάλιστρα, με βάση τις διαθέσιμες πληροφορίες, ώστε να καλύπτονται οι αναμενόμενοι κίνδυνοι.

Μια τέτοια ανάλυση των κινδύνων για τον υπολογισμό των ασφαλίστρων, με σκοπό τη δημιουργία κατηγοριών ομογενών κινδύνων, δεν είναι εφικτή για όλες τις ασφαλιστικές εταιρίες. Ένα τέτοιο σύστημα αξιολόγησης δεν είναι διαθέσιμο πάντα και έτσι ο ασφαλιστής θα πρέπει να τιμολογήσει τους κινδύνους με βάση την κρίση του. Ακόμη, όμως, και όταν ένα τέτοιο σύστημα είναι διαθέσιμο, ο ασφαλιστής θα το εφαρμόσει ενσωματώνοντας και τη δική του κρίση ή την πολιτική της εταιρίας στις επιλογές που θα κάνει, όπως για παράδειγμα, μπορεί να αποδεχθεί κάποιους κινδύνους μεταβάλλοντας κάποιους από τους όρους του συμβολαίου ενός υποψήφιου ασφαλιζόμενου.

Η υλοποίηση μιας ασφαλιστικής κάλυψης εξαρτάται τόσο από παράγοντες που είναι μετρήσιμοι αλλά και από ασαφείς πληροφορίες (fuzzy information). Αυτό ουσιαστικά σημαίνει πως σε κάθε ασφαλιστική κάλυψη, ο ανθρώπινος παράγοντας διαδραματίζει σημαντικό ρόλο είτε άμεσα, όπως σε μια ασφάλιση ζωής είτε έμμεσα, όπως σε μία ασφάλιση αυτοκινήτου. Η ανθρώπινη συμπεριφορά είναι εκ φύσεως πολύπλοκη και δε μπορεί να περιγραφεί από ακριβής όρους, οι οποίοι με τη σειρά τους αποτελούν το εργαλείο για την κλασική μαθηματική ανάλυση ενός προβλήματος.

3.2 Η ΑΝΑΛΗΨΗ ΤΩΝ ΚΙΝΔΥΝΩΝ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΑΣΑΦΟΥΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Η ανθρώπινη συμπεριφορά δεν ακολουθεί προκαθορισμένες ατραπούς αλλά συχνά ακολουθεί τη διαίσθηση και δε λειτουργεί μόνο με ολοκληρωμένες πληροφορίες. Πέρα από τις πληροφορίες σχετικά με την υγεία ενός υποψήφιου ασφαλιζόμενου, για παράδειγμα, ο ασφαλιστής θα έπρεπε να συνυπολογίζει και τις συνήθειες που έχει το υπο ασφάλιση άτομο. Ο στόχος της χρήσης της ασαφούς λογικής στην ανάληψη των κινδύνων είναι, λοιπόν, ο συνδυασμός των ακριβών πληροφοριών ενός συστήματος αξιολόγησης με άλλους πιο ασαφείς παράγοντες, της ασαφούς πληροφόρησης, ώστε να δημιουργηθεί ένα πιό αξιόπιστο σύστημα.

Έστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να εφαρμόσουμε αυτό το συνδυασμό στην τιμολόγηση μίας ασφάλισης ζωής. Κατά βάση, τα ασφάλιστρα υπολογίζονται με βάση δύο παράγοντες, την ηλικία (x) και το φύλο (y). Στη συνέχεια ο ασφαλιστής συνυπολογίζει διάφορες άλλες παραμέτρους για να προκύψει το τελικό ασφάλιστρο. Πολλές φορές οι εξετάσεις υγείας του υποψήφιου ασφαλιζόμενου αποτελούν προϋπόθεση που θέτει ο ασφαλιστής για τη συνέχιση της διαδικασίας της τιμολόγησης. Σε αυτή την περίπτωση ο υπεύθυνος ιατρός μπορεί να προτείνει στον ασφαλιστή για τον υπολογισμό των ασφαλίστρων να θεωρήσει τη μεταβλητή x μεγαλύτερη της πραγματικής ηλικίας του υποψηφίου.

Αυτή η προσαύξηση στη μεταβλητή που εκφράζει την ηλικία του ατόμου μερικές φορές καθορίζεται από μετρήσιμους παράγοντες, όπως λόγου χάρη, η συστολική αρτηριακή πίεση του ατόμου ή χρησιμοποιώντας άλλους εμπειρικούς κανόνες. Άλλες φορές αυτή η προσαύξηση μπορεί να αποτελεί απλώς την προσωπική άποψη του ιατρού, χωρίς να συνδέεται με μετρήσιμους παράγοντες. Σε αυτή, τη δεύτερη περίπτωση, ουσιαστικά χρησιμοποιούνται ασαφείς πληροφορίες (fuzzy information). Ο ιατρός, επίσης, μπορεί να θεωρήσει ακόμα και ότι ο ασφαλιστής δε θα πρέπει να αναλάβει τον κίνδυνο της ασφάλισης του υποψηφίου προς ασφάλιση.

Ένα ακόμα σημείο στο οποίο υπεισέρχεται η ασαφής πληροφόρηση, είναι το ότι μπορεί μεν εμπορικά κάποιοι κίνδυνοι να διαφέρουν μεταξύ τους, αλλά λόγω του ανταγωνισμού, ο ασφαλιστής μπορεί να αποφασίσει να μην επιβαρύνει το ασφάλιστρο του υποψηφίου ασφαλιζόμενου. Αυτά τα ασαφή στοιχεία είναι πολύ σημαντικά για τον τελικό υπολογισμό του ασφαλίστρου καθώς καθορίζουν το αν θα αποδεχθεί ή όχι ο ασφαλιστής να αναλάβει έναν κίνδυνο και υπό ποιές προϋποθέσεις.

Έστω ότι ένας κίνδυνος έχει εξεταστεί από πέντε σκοπιές, τα τεχνικά χαρακτηριστικά του, τα χαρακτηριστικά της υγείας του υποψηφίου ασφαλιζόμενου, το επάγγελμα και τις δραστηριότητες του ατόμου, από εμπορική σκοπιά και τέλος, από άλλες εντυπώσεις. Με γνώμωνα αυτές τις πέντε παραμέτρους θα προσπαθήσουμε να καταλήξουμε σε μία τελική απόφαση για το αν ή όχι ο ασφαλιστής θα πρέπει να αποδεχθεί τον κίνδυνο, υπό ποιές συνθήκες και τελικά πώς θα γίνει ο υπολογισμός των ασφαλίστρων.

1.Τεχνικά Χαρακτηριστικά

Για να κρίνουμε σωστά αυτό το χαρακτηριστικό του κινδύνου θα πρέπει να λάβουμε υπ'όψη μας πολλούς παράγοντες, όπως τη διάρκεια του συμβολαίου ασφάλισης ζωής, την ασφαλιστική αξία, το μέσο ασφάλιστρο καθώς επίσης δημοσιονομικές και νομικές παραμέτρους. Για παράδειγμα, εάν η διάρκεια μίας ασφάλισης είναι αρκετά μικρή ή το ασφαλιζόμενο ποσό είναι μικρό, ο ασφαλιστής μπορεί να μην επιθυμεί να αποδεχθεί την ασφάλιση λόγω των αυξημένων διαχειριστικών εξόδων της ασφάλισης.

Έτσι η τιμή της συνάρτησης συμμετοχής μ για τα τεχνικά χαρακτηριστικά μπορεί να πάρει τις εξής τιμές:

$$\mu_t = \begin{cases} 1, \textit{καλά χαρακτηριστικά} \\ 0.5, \textit{μέτρια χαρακτηριστικά} \\ 0.2, \textit{κακά χαρακτηριστικά} \\ 0, \textit{αδύνατο να ασφαλιστεί} \end{cases}$$

Για παράδειγμα, ένα καλό τεχνικό χαρακτηριστικό μπορεί να θεωρηθεί το να έχουμε ένα επικερδές συμβόλαιο, ένα μέτριο τεχνικό χαρακτηριστικό το να έχει μικρή διάρκεια το ασφαλιστήριο συμβόλαιο, ένα κακό χαρακτηριστικό μπορεί να θεωρηθεί το ότι το ασφαλίσιμο ποσό μπορεί να είναι σε δυσαναλογία ως προς τον πλούτο του ασφαλισμένου.

<u>2.Χαρακτηριστικά υγείας</u>

Υποθέτουμε ότι ο υποψήφιος ασφαλιζόμενος έχει υποβληθεί στις ιατρικές εξετάσεις που του υπέδειξε ο ασφαλιστής και ότι ο υπεύθυνος ιατρός έχει ενημερώσει τον ασφαλιστή για τη γνώμη του σχετικά με την κατάσταση της υγείας του υποψηφίου ασφαλιζόμενου. Η γνώμη του ιατρού εκφράζεται με την ακόλουθη συνάρτηση συμμετοχής:

$$\mu_h = \begin{cases} 1, & \textit{καλή} \\ 0.9, & \textit{αν χρειάζεται μια προσαύξηση στην πραγματική του ηλικία} \\ 0, & \textit{αδύνατο να ασφαλιστεί} \end{cases}$$

Ο υπεύθυνος ιατρός δε δίνει κάποια επιπλέον πληροφορία εκτός από αυτή τη συνάρτηση συμμετοχής. Συνήθως, ο ασφαλιστής απλά εφαρμόζει αυτές τις πληροφορίες που έλαβε από τον ιατρό και σε ορισμένες περιπτώσεις, για εμπορικούς λόγους, μπορεί να μη συμπεριλάβει στον υπολογισμό των ασφαλίστρων την τεχνητή αύξηση της ηλικίας του υποψηφίου, αλλά να υπολογίσει τα ασφάλιστρα με βάση την πραγματική του ηλικία. Παρ' αυτά, υποθέτουμε στο παράδειγμά μας, πώς ο ασφαλιστής ακολουθεί την αξιολόγηση του ιατρού για τον υπολογισμό των ασφαλίστρων.

3.Επάγγελμα

Ένα επικίνδυνο επάγγελμα ή μία επικίνδυνη ενασχόληση μπορούν να αυξήσουν τον κίνδυνο θανάτου. Έτσι, για την έκφραση αυτού του παράγοντα, χρησιμοποιούμε την ακόλουθη συνάρτηση συμμετοχής:

$$\mu_p = \begin{cases} 1, & \text{χαμηλής επικινδυνότητας επάγγελμα} \\ 0.5, & \text{μέτριας επικινδυνότητας επάγγελμα} \\ 0.2, & \text{επικίνδυνο επάγγελμα} \\ 0, & \text{αδύνατο να ασφαλιστεί} \end{cases}$$

Για παράδειγμα, ένα χαμηλής επικινδυνότητας επάγγελμα θα μπορούσε να θεωρείται ένα επάγγελμα όπως ο υπάλληλος γραφείου, ένα επάγγελμα μέτριας επικινδυνότητας θεωρείται το επάγγελμα του αστυνομικού, ενώ ως επικίνδυνο επάγγελμα λογίζεται ο επισκευαστής στεγών και ως επάγγελμα που δε μπορεί ο ασφαλιστής να αποδεχθεί τον κίνδυνο μπορεί να θεωρηθεί το επάγγελμα του κασκαντέρ.

4.Εμπορικά Χαρακτηριστικά

Σε ορισμένες περιπτώσεις ο ασφαλιστής είναι διατεθιμένος να αποδεχθεί έναν κίνδυνο για εμπορικούς λόγους, τον οποίο με βάση τους κλασικούς κανόνες της ανάληψης κινδύνων δε θα έπρεπε να αναλάβει. Αυτός ο παράγοντας περιγράφεται από την ακόλουθη συνάρτηση συμμετοχής:

$$\mu_c = \begin{cases} 1, & \text{επιθυμητός κίνδυνος} \\ 0.8, & \text{μέτριος κίνδυνος} \\ 0.5, & \text{φυσιολογικός κίνδυνος} \\ 0.3, & \text{κακός κίνδυνος} \\ 0, & \text{μη αποδεκτός κίνδυνος} \end{cases}$$

Για παράδειγμα, έναν επιθυμητό κίνδυνο θα μπορούσε να αποτελεί η περίπτωση όπου ένας διευθυντής μίας εταιρίας, που έχει ασφαλίσει όλους τους υπαλλήλους της, ζητά να ασφαλιστεί, ένας μέτριος κίνδυνος θα μπορούσε να είναι ένας ασφαλιστικός πράκτορας, με καλό ιστορικό επιλογών, που προτείνει στον ασφαλιστή έναν υποψήφιο, ένας κακός κίνδυνος θα μπορούσε να είναι ένας ασφαλιστικός πράκτορας, ο οποίος κάνει λανθασμένες επιλογές όταν προτείνει στον ασφαλιστή άτομα για ασφάλιση και ένας μη αποδεκτός κίνδυνος θα μπορούσε να είναι η περίπτωση όπου ο υποψήφιος ασφαλιζόμενος είναι γνωστό ότι δεν πληρώνει τα ασφάλιστρα του.

5.Άλλες Εντυπώσεις

Μία συνέντευξη του υποψηφίου ασφαλιζόμενου με τον υπεύθυνο ιατρό ή τον ασφαλιστή μπορεί να δώσει στους τελευταίους σημαντικές επιπλέον πληροφορίες για τον υποψήφιο. Η συνάρτηση συμμετοχής που περιγράφει αυτό το χαρακτηριστικό είναι η ακόλουθη:

$$\mu_o = \begin{cases} 1, & καλή \\ 0.5, & αμφίβολη \\ 0.2, & κακή \end{cases}$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση συμμετοχής παίρνει την τιμή 1 όταν δεν υπάρχει κάτι αξιοσημείωτο που θα έπρεπε να συνυπολογίσει επιπλέον ο ασφαλιστής, το οποίο θα προέκυπτε από τη συνέντευξη, μια αμφίβολη εντύπωση θα μπορούσε να δώσει στη συνάρτηση συμμετοχής την τιμή 0.5, όπως αν ο υποψήφιος ασφαλιζόμενος δεν έδινε την εντύπωση του αξιόπιστου ατόμου κατά τη διάρκεια της συνέντευξης και η συνάρτηση συμμετοχής θα μπορούσε να πάρει την τιμή 0, αν ο υποψήφιος ασφαλιζόμενος είχε προβεί στο παρελθόν σε αξιόποινες πράξεις.

Τα χαρακτηριστικά που περιγράψαμε περιγράφονται από μία συνάρτηση συμμετοχής, όπου αν λάβει την τιμή 1, δεν υπάρχει κάποια ένσταση του ασφαλιστή για να αποδεχθεί να ασφαλίσει τον υποψήφιο, Εάν η τιμή της συνάρτησης συμμετοχής είναι μικρότερη του 1, τότε αρχίζουν να δημιουργούνται προβλήματα, υπό την έννοια ότι όσο μικραίνει η τιμή της συνάρτησης συμμετοχής τόσο πιθανότερο είναι ο ασφαλιστής να αρνηθεί να ασφαλίσει τον υποψήφιο.

Για την αξιολόγηση των χαρακτηριστικών που περιγράψαμε, θα χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή του γινομένου (product operator), ώστε να μπορέσουμε να συνυπολογίσουμε όλες τις υπό εξέταση παραμέτρους. Ο τελεστής του γινομένου υπολογίζει το βαθμό εκπλήρωσης του κανόνα, ως το αριθμητικό γινόμενο των βαθμών συμμετοχής των ασαφοποιημένων τιμών (τιμή της συνάρτησης συμμετοχής). Οι τέσσερις παράγοντες (τεχνικά χαρακτηριστικά, χαρακτηριστικά υγείας, επικινδυνότητα επαγγέλματος και άλλες εντυπώσεις μέσω συνέντευξης), δεν έχουν όλοι την ίδια βαρύτητα για την λήψη της απόφασης του ασφαλιστή και γι’αυτό το λόγο ο απλός πολλαπλασιασμός των τιμών της συνάρτησης συμμετοχής δεν ενδείκνυται. Αντί για αυτό θα προσθέσουμε ή θα αφαιρέσουμε βάρος για κάθε μία από τις τιμές αυτές ανάλογα με το πόσο σημαντική είναι η καθεμία από αυτές στη διαμόρφωση της απόφασης του ασφαλιστή.

Έστω μ_t, μ_h, μ_p και μ_o οι ασαφείς τιμές που προέκυψαν από τις συναρτήσεις συμμετοχής των τεχνικών χαρακτηριστικών, των χαρακτηριστικών υγείας, της επικινδυνότητας του επαγγέλματος και των άλλων εντυπώσεων μέσω της συνέντευξης αντίστοιχα. Δημιουργούμε το γινόμενο **[11]**:

$$I(\mu_t) \cdot \ \mu_h \cdot \sqrt{\mu_p} \cdot {\mu_o}^2 \qquad (3.1)$$

$$\text{όπου } I(\mu_t) = \begin{cases} 2 \cdot {\mu_t}^2, & \gamma\iota\alpha\ \mu < 0.5 \\ 1 - 2 \cdot (1 - \mu_t)^2, & \gamma\iota\alpha\ \mu \geq 0.5 \end{cases} \qquad (3.2)$$

Η διαδικασία αυτή εντείνει τις επιδράσεις των τεχνικών χαρακτηριστικών στο τελικό αποτέλεσμα, αφού για παράδειγμα:

$$I(0.5)=0.5$$

$$I(\mu_t) > \mu_t \text{ , για } \mu_t > 0.5$$

$$I(\mu_t) < \mu_t \text{ , για } \mu_t < 0.5$$

Επομένως, μέσω της διαδικασίας αυτής, τα τεχνικά χαρακτηριστικά αποκτούν αυξημένη βαρύτητα σε σχέση με τις υπόλοιπες παραμέτρους.

Η ποσότητα μ_h, η οποία περιγράφει τα χαρακτηριστικά της υγείας του υποψήφιου ασφαλιζόμενου χρησιμοποιείται στον τελεστή γινομένου χωρίς να υποστεί κάποια αλλαγή. Αυτό συμβαίνει διότι είχαμε εξ'αρχής υποθέσει ότι ακολουθείται η γνώμη του υπεύθυνου ιατρού στο ακέραιο και έτσι έχει προεξοφληθεί η σημαντικότητα της κατάστασης της υγείας του υποψήφιου ασφαλιζόμενου.

Η ποσότητα μ_P, η οποία περιγράφει την επικινδυνότητα του επαγγέλματος ή των δραστηριοτήτων του υποψηφίου ασφαλιζόμενου, χρησιμοποιείται ουσιαστικά με μειωμένο βάρος, αφού στον τελεστή γινομένου χρησιμοποιείται η τετραγωνική της ρίζα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι αυτός ο παράγοντας δε μπορεί να θεωρηθεί τόσο σημαντικός για τη λήψη της απόφασης του ασφαλιστή όσο τα χαρακτηριστικά της υγείας του υποψηφίου ή τα τεχνικά χαρακτηριστικά της ασφάλισης.

Η ποσότητα μ_o, η οποία περιγράφει τις εντυπώσεις που αποκομίζει ο ασφαλιστής για τον υποψήφιο ασφαλιζόμενο, μέσω μίας προσωπικής συνέντευξης, θεωρείται σημαντική πληροφορία για τον τελικό υπολογισμό των ασφαλίστρων και για αυτό το λόγο χρησιμοποιείται το τετράγωνο της τιμής της συνάρτησης συμμετοχής στον τελεστή του γινομένου.

Ο παράγοντας των εμπορικών χαρακτηριστικών μας ενδιαφέρει μόνο στην περίπτωση όπου ένας κίνδυνος που ζητείται να ασφαλίστει είναι πιό επικίνδυνος από το φυσιολογικό, όπως για παράδειγμα αν η τιμή της συνάρτησης συμμετοχής έχει τιμή μικρότερη από 0.5 ($\mu_C < 0.5$). Ο παράγοντας αυτός δε θεωρείται ιδιαίτερα σημαντικός για την διαμόρφωση της τελικής απόφασης του ασφαλιστή και για αυτό το λόγο, στον τελεστή γινομένου, χρησιμοποιείται η ποσότητα:

$$\sqrt{2 \cdot \min \cdot (\tfrac{1}{2}, \mu_C)} \qquad (3.3)$$

Εάν η τιμή της συνάρτησης συμμετοχής είναι $\mu_C > 0.5$, τότε ο υποψήφιος ασφαλιζόμενος θεωρείται εμπορικά σημαντικός και για αυτό το λόγο ο ασφαλιστής θα επιθυμεί να αποδεχθεί τον κίνδυνο, ακόμα και εάν δεν πληροί τις συνήθεις προϋποθέσεις. Έτσι, για να ενσωματωθεί στον τελεστή του γινομένου αυτή η πληροφορία θα υψώσουμε τον τελεστή στη δύναμη:

$$1\text{-}max\,((\,0, \mu_C - \tfrac{1}{2}\,) \qquad (3.4)$$

Η ποσότητα αυτή είναι μικρότερη της μονάδας εάν $\mu_C > \frac{1}{2}$ και ίση με τη μονάδα, εάν $\mu_C \leq \frac{1}{2}$.

Η τελική μορφή του τελεστή γινομένου, σύμφωνα με την οποία ο ασφαλιστής θα λάβει την απόφασή του, υπό το πρίσμα της ασαφούς λογικής, έχει τη μορφή:

$$W = \left[I(\mu_t) \cdot \mu_h \cdot \sqrt{\mu_p} \cdot {\mu_o}^2 \cdot \sqrt{2 \cdot \min \cdot (\tfrac{1}{2}, \mu_C)} \right]^{1-max(0, \mu_C - \frac{1}{2})} \qquad (3.5)$$

Έστω, για παράδειγμα, ότι έχουμε ένα δείγμα 15 υποψηφίων ασφαλιζόμενων. Ο ασφαλιστής συνυπολογίζοντας τα χαρακτηριστικά που προαναφέραμε είναι σε θέση να λάβει μία απόφαση για το κάθε άτομο ξεχωριστά. Δηλαδή, όπως φαίνεται από τον παρακάτω πίνακα, μετρώντας το κάθε χαρακτηριστικό για το κάθε άτομο ξεχωριστά, καταλήγει σε μία απόφαση, η οποία μπορεί να λάβει τις τιμές:

- 0, εάν δεν αποδέχεται να ασφαλίσει τον υποψήφιο,
- 0^+, εάν επιθυμεί να βελτιώσει τους όρους της ασφάλισης και αν δεν τα καταφέρει να μην αποδεχθεί τον κίνδυνο,

- 1^-, εάν επιθυμεί να βελτιώσει τους όρους της ασφάλισης και αν δεν τα καταφέρει να αποδεχθεί τελικά τον κίνδυνο,
- 1, εάν αποδέχεται να ασφαλίσει τον υποψήφιο χωρίς κάποια αλλαγή στους όρους.

# Ασφαλιζόμενου	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Τεχνικά Χαρακτηριστικά															
Καλά	x	x		x	x					x	x	x	x		x
Μέτρια							x								
Κακά			x			x		x	x						
Αδύνατο να ασφαλιστεί														x	
Χαρακτηριστικά Υγείας															
Καλά	x		x		x	x		x	x	x			x	x	x
Προσαύξηση ηλικίας		x					x				x	x			
Αδύνατο να ασφαλιστεί				x											
Επάγγελμα															
Καλό		x		x					x	x		x		x	
Μέτριο	x		x		x	x		x			x				
Κακό							x						x		
Αδύνατο να ασφαλιστεί															x
Εμπορικά Χαρακτηριστικά															
Πολύ καλά													x		
Καλά			x	x		x	x	x	x		x			x	

Φυσιολογικά	x	x									x				
Κακά					x					x					x
Αδύνατο να ασφαλιστεί															
Άλλες Εντυπώσεις															
Καλές	x	x	x	x	x	x			x	x		x		x	
Υπό Αμφισβήτηση							x				x		x		
Κακές								x							x
Απόφαση Ασφαλιστή	1	1	0^+	0	1	0^+	0^+	0	0^+	1^-	0^+	1	1^-	0	0

Χρησιμοποιώντας, στη συνέχεια τον τελεστή γνομένου, μπορούμε να αναπαράγουμε την απόφαση του ασφαλιστή, ως εξής:

Εάν $0 \leq W \leq 0.1$, τότε έχουμε την απόφαση του ασφαλιστή 0,

Εάν $0.1 \leq W \leq 0.3$, τότε έχουμε την απόφαση του ασφαλιστή 0^+,

Εάν $0.3 \leq W \leq 0.7$, τότε έχουμε την απόφαση του ασφαλιστή 1^-,

Εάν $0.7 \leq W \leq 1$, τότε έχουμε την απόφαση του ασφαλιστή 1

Συγκρίνοντας τις δύο μεθόδους, σχηματίζεται ο πίνακας 2:

# Ασφαλιζόμενου	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Απόφαση Ασφαλιστή	1	1	0^{+}	0	1	0^{+}	0^{+}	0	0^{+}	1^{-}	0^{+}	1	1^{-}	0	0
Τιμή του τελεστή W	0.71	0.9	0.13	0	0.55	0.13	0.13	0.05	0.17	0.77	0.27	0.9	0.37	0	0
Απόφαση Σύμφωνα με την τιμή του W του Ασαφούς Μοντέλου	1	1	0^{+}	0	1^{-}	0^{+}	0^{+}	0	0^{+}	1	0^{+}	1	1^{-}	0	0

3.3 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΧΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΑΣΑΦΟΥΣ ΛΟΓΙΚΗΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΗΨΗ ΤΩΝ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα, διαπιστώνουμε ότι οι μόνες αποκλίσεις στα αποτελέσματα της απόφασης του ασφαλιστή και στην απόφαση που προκύπτει μέσω του ασαφούς μοντέλου παρατηρούνται στις περιπτώσεις 5 και 10. Οι δύο αυτές περιπτώσεις διαφέρουν μόνο στα χαρακτηριστικά του επαγγέλματος. Στην περίπτωση 5, ο υποψήφιος ασφαλιζόμενος θεωρήθηκε ότι έχει μία απασχόληση που ενέχει μέτριο κίνδυνο, ενώ στην περίπτωση 10, ο υποψήφιος ασφαλιζόμενος αξιολογήθηκε ότι έχει ένα καλό επάγγελμα, που ενέχει μικρό ή καθόλου κίνδυνο. Καταλήγουμε, λοιπόν, στο συμπέρασμα πώς η κρίση του ασφαλιστή σε αυτές τις δύο περιπτώσεις ήταν υποκειμενική, αφού τα χαρακτηριστικά του επαγγέλματος στην περίπτωση 5 είναι χειρότερα από αυτά του υποψηφίου στην περίπτωση 10.

Το μοντέλο της ασαφούς λογικής δε θα πρέπει να αντικαθιστά τον ασφαλιστή αλλά ο σκοπός του είναι να λειτουργεί βοηθητικά ως εργαλείο επαλήθευσης της κρίσης του ασφαλιστή. Το μοντέλο αυτό μπορεί να βοηθήσει ώστε να γίνουν περισσότερο κατανοητές οι διαδικασίες μέσω των οποίων καταλήγουμε σε μία απόφαση αποδοχής ή όχι ενός κινδύνου και συνεπώς να μπορούμε να κρίνουμε με περισσότερη προσοχή τις παραμέτρους που αποδεικνύονται, μέσω του μοντέλου, σημαντικές στη λήψη της τελικής απόφασης.

Μία πρακτική εφαρμογή της διαδικασίας της ανάληψης κινδύνου πραγματοποιήθηκε το 1987, όπου συνεχίζοντας το έργο του DeWit, οι Erdbach, Douglas, Holmes και Purdy, στα πλαίσια της εργασίας τους σε μία καναδική ασφαλιστική εταιρία κατασκεύασαν το «Zeno», μία υπολογιστική εφαρμογή που πραγματοποιούσε τη διαδικασία της ανάληψης κινδύνων αυτόματα, χρησιμοποιώντας τεχνικές της Ασαφούς Λογικής. Το πρόγραμμα «Zeno» είχε ως στόχο να πραγματοποιεί την τελική διαδικασία της ανάληψης κινδύνων για τις ατομικές ασφαλίσεις ζωής. Παρόλο που το πρόγραμμα αυτό υλοποιήθηκε και έδινε ικανοποιητικά αποτελέσματα τελικά εγκαταλήφθηκε και η εταιρία επέστρεψε στην παραδοσιακή διαδικασία αξιολόγησης των κινδύνων και στην εφαρμογή της από το ανθρώπινο δυναμικό της και όχι από μια αυτοματοποιημένη διαδικασία.

Οι λόγοι για τους οποίους εγκαταλήφθηκε αυτό το πρόγραμμα δεν είναι σαφείς, εικάζεται όμως ότι οφείλονται είτε σε κάποια αδυναμία της μεθοδολογίας του προγράμματος – και συνεπώς στα αποτελέσματα που αυτό παρήγαγε στις ατομικές ασφαλισεις ζωής- είτε σε έλλειψη ενδιαφέροντος από την πλευρά της εταιρίας ή των ασφαλιστικών εταιριών γενικότερα για νεωτερισμούς και καινοτομίες **[34]**.

Συνεχιστής του έργου του DeWit **[11]**, υπήρξε ο Lemaire **[20]**, ο οποίος πρότεινε μία γενική μεθοδοδολογία για τη διαδικασία της ανάληψης κινδύνου, η οποία έχει ως βάση την ασαφή λογική καθώς επίσης επέκτεινε την εφαρμογή της ασαφούς λογικής και σε τομείς όπως ο υπολογισμός των ασφαλίστρων και των αποθεματικών μίας ασφαλιστικής εταιρίας. Στη συνέχεια η Young **[32]** εμβάθυνε στο έργο του DeWit, δημιουργώντας έναν αλγόριθμο, ο οποίος επέτρεπε την αυτοματοποίηση της διαδικασίας της ανάληψης των κινδύνων και εξειδικευόταν στις ομαδικές ασφαλίσεις υγείας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΑΣΑΦΟΥΣ ΛΟΓΙΚΗΣ ΣΤΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

4.1 ΑΣΑΦΕΙΣ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΟΥΣΕΣ ΑΞΙΕΣ

Η ασαφής λογική δύναται να εφαρμοσθεί στον υπολογισμό των μελλοντικών αξιών (FV) και των παρουσών αξιών (PV). Θεωρούμε μία ασαφή μελλοντική αξία και μία ασαφή παρούσα αξία, ενός ασαφούς χρηματικού ποσού, χρησιμοποιώντας ένα ασαφές επιτόκιο για έναν ασαφή αριθμό περιόδων. Το χρηματικό ποσό, το επιτόκιο και οι χρονικές περίοδοι μπορούν να είναι ασαφή σύνολα.

Έστω ότι ένα ποσό A επενδύεται σήμερα με επιτόκιο περιόδου r και για n αριθμό περιόδων. Αν S_n είναι το ποσό μετά την πάροδο n περιόδων, τότε:

$$S_n = A \cdot (1 + r)^n \quad (4.1)$$

Εν συνεχεία υποθέτουμε ότι ένα ασαφές ποσό $\bar{A}$, το οποίο είναι ένας θετικός ασαφής αριθμός, επενδύεται σήμερα με ένα ασαφές επιτόκιο περιόδου $\bar{r}$, το οποίο είναι επίσης ένας ασαφής θετικός αριθμός, για n αριθμό περιόδων. Αν $\overline{S_n}$ είναι το ποσό μετά την πάροδο n περιόδων, τότε έχουμε ότι:

$$\overline{S_n} = \bar{A} \odot (1 \oplus \bar{r})^n \quad (4.2)$$

Οι τελεστές $\oplus$ και $\odot$ αποτελούν επέκταση των εννοιών και των υπολογιστικών τεχνικών της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού των κλασικών μαθηματικών, σύμφωνα με την αρχή της επέκτασης. Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο **[12],** σελ. 46.

Στο τέλος της πρώτης περιόδου, παρατηρούμε ότι:

$$\overline{S_1} = \bar{A} \oplus (\bar{A} \odot \bar{r}) = \bar{A} \odot (1 \oplus \bar{r}) \qquad (4.3)$$

Στο τέλος της δεύτερης περιόδου έχουμε ότι:

$$\overline{S_2} = \overline{S_1} \oplus (\overline{S_1} \odot \bar{r}) = \bar{A} \odot (1 \oplus \bar{r})^2 \qquad (4.4)$$

Επαγωγικά, λοιπόν, καταλήγουμε στη σχέση:

$$\overline{S_n} = \bar{A} \odot (1 \oplus \bar{r})^n \qquad (4.5)$$

Η συνάρτηση συμμετοχής για το $\overline{S_n}$ είναι η εξής:

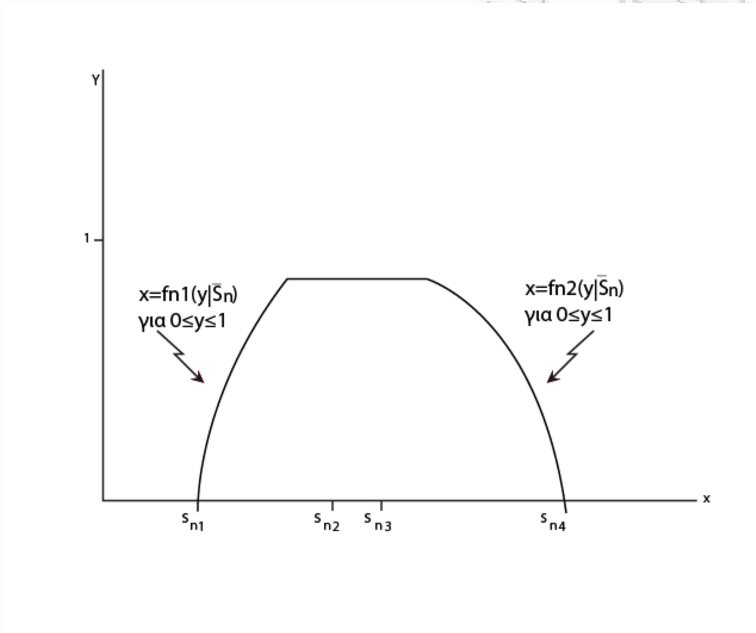
$$\mu\,(x \mid \overline{S_n}) = (s_{n1},\ f_{n1}\,(y \mid \overline{S_n}) \,/\, s_{n2},\ s_{n3} / \ f_{n2}\,(y \mid \overline{S_n}),\ s_{n4}) \qquad (4.6)$$

$$\text{όπου } f_{ni}\,(y \mid \overline{S_n}) = f_i\,(y \mid \overline{A}) \cdot (1 + f_i\,(y \mid \overline{r}))^n \qquad (4.7)$$

για i=1, 2 και $f_{n1}\,(0 \mid \overline{S_n}) = s_{n1},\ f_{n1}\,(1 \mid \overline{S_n}) = s_{n2},\ f_{n2}\,(0 \mid \overline{S_n}) = s_{n4},\ f_{n2}\,(1 \mid \overline{S_n}) = s_{n3}$.

Ουσιαστικά, η συνάρτηση συμμετοχής ξεκινάει από το σημείο s_{n1} και μέσω της f_{n1} παίρνει τη μέγιστη τιμή στο σημείο s_{n2} και στη συνέχεια από το σημείο s_{n3} μέσω της f_{n2} μειώνεται μέχρι το σημείο s_{n4}.

Ας εξετάσουμε το ασαφές μελλοντικό ποσό $\overline{S_n}$ πιό αναλυτικά. Ένα γράφημα αυτού του ασαφούς αριθμού παρίσταται στο Σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1 Ασαφής Αριθμός $\overline{S_n}$

Το αυξανόμενο μέρος της συνάρτησης συμμετοχής μ (x | $\overline{S_n}$), το οποίο δίδεται από τη σχέση x = f_{n1} (y | $\overline{S_n}$) , για 0 ≤y ≤ 1, προκύπτει από τις σχέσεις:

$$x = f_1 (y \mid \bar{A}) \quad \text{και} \quad x = f_1 (y \mid \overline{r}) \qquad (4.8)$$

των συναρτήσεων συμμετοχής μ (x | $\bar{A}$) και μ (x | $\bar{r}$) αντιστοίχως. Το μειούμενο μέρος της συνάρτησης συμμετοχής μ (x | $\overline{S_n}$), το οποίο δίδεται από τη σχέση x = f_{n2} (y | $\overline{S_n}$) , για 0≤y≤1, κατασκευάζεται στη σχέση μ (x | $\overline{S_n}$) = (s_{n1}, f_{n1} (y | $\overline{S_n}$) / s_{n2}, s_{n3}/ f_{n2} (y | $\overline{S_n}$), s_{n4}), από τις σχέσεις:

$$x = f_2 (y \mid \bar{A}) \quad \text{και} \quad x = f_2 (y \mid \bar{r}) \qquad (4.9)$$

των συναρτήσεων συμμετοχής μ (x | $\bar{A}$) και μ (x | $\bar{r}$) αντιστοίχως.

Ας υποθέσουμε εν συνεχεία ότι ο αριθμός των περιόδων ανατοκισμού, $\bar{n}$ είναι ένας ασαφής αριθμός. Εάν $\bar{S}$ είναι το τελικό χρηματικό ποσό, τότε η συνάρτηση συμμετοχής του ορίζεται ως εξής:

$$\mu(x \mid \bar{S}) = \sup_{\Gamma(x)}(\theta) \qquad (4.10)$$

όπου:

$$\theta = \min (\mu (u \mid \bar{A}), \mu (v \mid \bar{r}), \mu (w \mid \bar{n}))$$

$$\Gamma(x) = \{(u, v, w) \mid u\cdot (1 + v)^{w} = x\}$$

Ο ορισμός του $\bar{S}$ αποτελεί απλή εφαρμογή της αρχής της επέκτασης του S, στη σχέση $S = A \cdot (1 + r)^n$. Εάν ο αριθμός των περιόδων δεν είναι ασαφής ($\bar{n} = n$) τότε έχουμε ότι:

$$\text{Εάν } \bar{n} = n \;\Rightarrow\; \mu(x \mid \bar{S}) = \mu (x \mid \overline{S_n}) \qquad (4.11)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$\mu(x \mid \bar{S}) = \max_{1\le i\le K}(\min(\mu(x \mid \overline{S_{n_i}}), \lambda_i)) \quad (4.12)$$

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι αρχικά υπολογίζουμε από την εξίσωση (4.5) την ποσότητα $\overline{S_{n_i}}$, μέχρι το ύψος λ_i και στη συνέχεια παίρνουμε το maximum των δύο αυτών ασαφών συνόλων. Επομένως, το $\bar{S}$ μπορεί να μην είναι ασαφής αριθμός **[6]**.

Ας εξετάσουμε ένα παράδειγμα. Έστω ένα ασαφές χρηματικό ποσό $\bar{A}$ = (90/100, 100/110), το οποίο επενδύεται με ασαφές επιτόκιο $\bar{r}$ = (0.08/0.10, 0.10/0.12) για $\bar{n}$ ασαφείς περιόδους, όπου η συνάρτηση συμμετοχής μ ($n_i \mid \bar{n}$) δίδεται στον ακόλουθο πίνακα **[6]**:

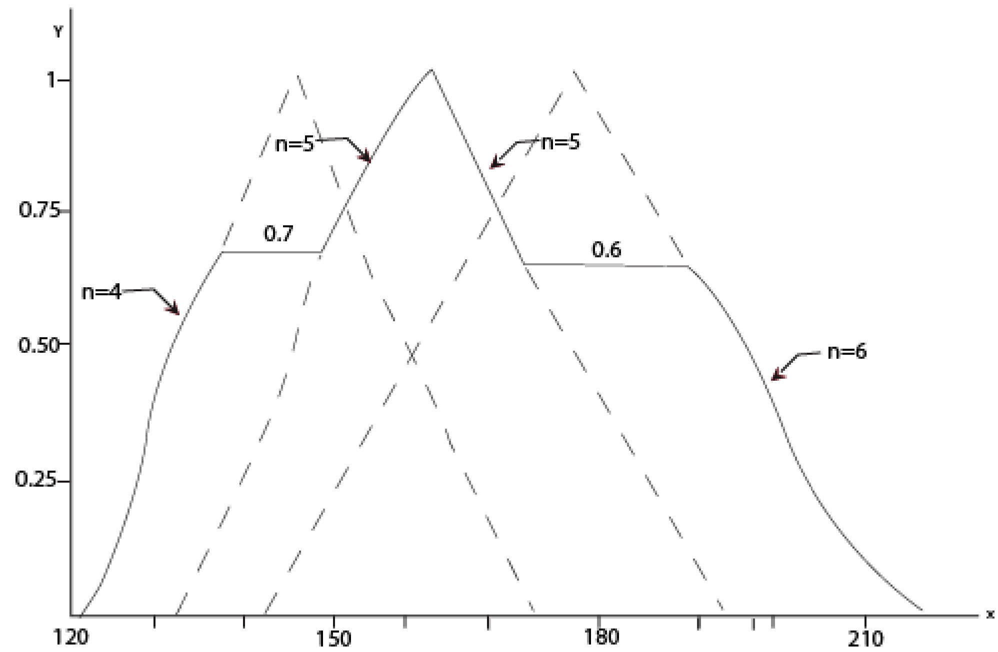
n_1	4	5	6
μ ($n_i \mid \bar{n}$)	0.7	1.0	0.6

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση συμμετοχής μ (x | $\overline{S_i}$), για i=4, 5, 6 από τη σχέση

$f_{ni}(y \mid \overline{S_n}) = f_i(y \mid \overline{A}) \cdot (1 + f_i(y \mid \overline{r}))^n$. Εφαρμόζοντας στη συνέχεια την εξίσωση:

$$\mu(x \mid \bar{S}) = \max_{1\le i\le K}(\min(\mu(x \mid \overline{S_{n_i}}), \lambda_i))$$

προκύπτει το $\bar{S}$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2.



Σχήμα 4.2 Υπολογισμός της ποσότητας $\bar{S}$

Η παρούσα αξία είναι το ποσό εκείνο, το οποίο αν επενδυθεί σήμερα με ένα επιτόκιο r, μετά από n περιόδους θα αποδώσει το χρηματικό ποσό S. Επομένως:

$$PV(S) \cdot (1+r)^n = S \quad (4.13)$$

το οποίο συνεπάγεται ότι:

$$PV(S) = S(1+r)^{-n} \quad (4.14)$$

Στη συνέχεια ορίζουμε την ασαφή παρούσα αξία, PV $(\bar{S}, n)$ ενός ασαφούς ποσού $\bar{S}$, για n περιόδους ανατοκισμού και με ασαφές επιτόκιο $\bar{r}$ ανά περίοδο, όπου το ποσό $\bar{S}$ είναι ένας ασαφής αριθμός και το επιτόκιο $\bar{r}$ είναι ένας ασαφής θετικός αριθμός. Επομένως διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, μία για το θετικό ασαφές ποσό $\bar{S}$ και μία για το αρνητικό ασαφές ποσό $\bar{S}$.

1. Η παρούσα αξία PV_1 $(\bar{S}, n) = \bar{A}$ αν και μόνον αν το ποσό $\bar{A}$ είναι ένας ασαφής αριθμός και $\bar{A} \odot (1 \oplus \bar{r})^n = \bar{S}$.

2. Η παρούσα αξία PV_2 $(\bar{S}, n) = \bar{A}$ αν και μόνον αν το ποσό $\bar{A}$ είναι ένας ασαφής αριθμός και $\bar{A} = \bar{S} \odot (1 \oplus \bar{r})^{-n}$.

Παρατηρούμε ότι αν το χρηματικό ποσό PV_1 $(\bar{S}, n)$ επενδυθεί σήμερα, με επιτόκιο $\bar{r}$, σε n περιόδους θα έχει γίνει ίσο με το ποσό $\bar{S}$, διότι PV_1 $(\bar{S}, n) \odot (1 \oplus \bar{r})^n = \bar{S}$ ενώ η παρούσα αξία PV_2 $(\bar{S}, n) \odot (1 \oplus \bar{r})^n \cong \bar{S}$.

Έστω $\mu_1 (x \mid \bar{S}, n)$ και $\mu_2 (x \mid \bar{S}, n)$ οι συναρτήσεις συμμετοχής των ασαφών παρουσών αξιών PV_1 $(\bar{S}, n)$ και PV_2 $(\bar{S}, n)$ αντίστοιχα. Για να γίνουν κατανοητοί οι λόγοι για τους οποίους απαιτείται οι παρούσες αξίες να είναι ασαφείς αριθμοί, πρέπει πρώτα να αναλυθεί η συνάρτηση συμμετοχής $\mu_i (x \mid \bar{S}, n), i = 1, 2$. Η συνάρτηση συμμετοχής $\mu_1 (x \mid \bar{S}, n)$, ορίζεται από τη σχέση:

$$f_i (y \mid \bar{A}) = f_i (y \mid \bar{S}) \cdot (1 + f_i (y \mid \bar{r}))^{-n}, \text{ για } i = 1, 2 \text{ και}$$

$$\alpha_1 = f_1 (0 \mid \bar{A}),\ \alpha_2 = f_1 (1 \mid \bar{A}),\ \alpha_3 = f_2 (1 \mid \bar{A}),\ \alpha_4 = f_2 (0 \mid \bar{A}).$$

Τότε το ποσό $\bar{A}$ θα είναι ένας ασαφής αριθμός αν και μόνον αν οι ποσότητα $f_1 (y \mid \bar{A})$ είναι αύξουσα και η ποσότητα $f_2 (y \mid \bar{A})$ είναι φθίνουσα και $\alpha_2 \leq \alpha_3$. Εάν κάποια από αυτές τις προϋποθέσεις δεν τηρείται, τότε η ασαφής παρούσα αξία PV_1 $(\bar{S}, n)$ δεν ορίζεται.

Η συνάρτηση συμμετοχής $\mu_2 (x \mid \bar{S}, n)$, ορίζεται από τη σχέση:

$$f_i (y \mid \bar{A}) = f_i (y \mid \bar{S}) \cdot (1 + f_{3-i} (y \mid \bar{r}))^{-n}, \text{ για } i = 1, 2 \text{ και}$$

$$\alpha_1 = f_1(0 \mid \bar{A}),\ \alpha_2 = f_1(1 \mid \bar{A}),\ \alpha_3 = f_2(1 \mid \bar{A}),\ \alpha_4 = f_2(0 \mid \bar{A})$$

Για να ορίζεται η παρούσα αξία $PV_2(\bar{S}, n)$, πρέπει η $f_1(y \mid \bar{A})$ να είναι αύξουσα, η $f_2(y \mid \bar{A})$ να είναι φθίνουσα και να ισχύει ότι $\alpha_2 \leq \alpha_3$.

Εάν το χρηματικό ποσό $\overline{S}$ είναι αρνητικό τότε η παρούσα αξία $PV_1(\bar{S}, n)$ ορίζεται, ενώ σε διαφορετική περίπτωση ενδέχεται να μην υπάρχει. Υποθέτουμε πώς το ποσό $\bar{S}$ είναι ένας αρνητικός ασαφής αριθμός. Τότε έχουμε ότι η συνάρτηση:

$$- f_1(y \mid \overline{S}) \cdot (1 + f_1(y \mid \overline{r}))^{-n}$$

είναι μία φθίνουσα συνάρτηση του y, διότι η συνάρτηση $f_1(y \mid \overline{r})$ είναι αύξουσα και η συνάρτηση $- f_1(y \mid \overline{S})$ είναι φθίνουσα. Επομένως, η συνάρτηση αυτή, για αρνητικές τιμές, ισούται με τη συνάρτηση $f_1(y \mid \overline{A})$ και είναι μία αύξουσα συνάρτηση. Αντίστοιχα, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f_2(y \mid \overline{A})$ είναι μία φθίνουσα συνάρτηση του y. Αφού $s_1 < s_2 \leq s_3 < s_4 \leq 0$ και $0 < (1 + r_4)^{-n} < (1 + r_3)^{-n} \leq (1 + r_2)^{-n} < (1 + r_1)^{-n}$, συνεπάγεται ότι:

$$\alpha_1 < \alpha_2 \leq \alpha_3 < \alpha_4 \leq 0$$

Αντίστοιχα, όταν το ποσό $\overline{S}$ είναι θετικό, τότε η παρούσα αξία $PV_2(\bar{S}, n)$ ορίζεται, ενώ σε αντίθετη περίπτωση ενδέχεται να μην υπάρχει. Εάν το χρηματικό ποσό $\overline{S}$ είναι θετικό, τότε η συνάρτηση $f_1(y \mid \overline{A})$ είναι αύξουσα, αφού η συνάρτηση $f_1(y \mid \overline{S})$ είναι αύξουσα και η συνάρτηση $f_2(y \mid \overline{r})$ είναι φθίνουσα. Με παρόμοιο τρόπο παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f_2(y \mid \overline{A})$ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του y.

Αφού $0 \leq s_1 < s_2 \leq s_3 < s_4$ και $0 < (1 + r_4)^{-n} < (1 + r_3)^{-n} \leq (1 + r_2)^{-n} < (1 + r_1)^{-n}$, συνεπάγεται ότι:

$$0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \alpha_3 < \alpha_4$$

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τις παραπάνω προτάσεις παρουσιάζονται στη συνέχεια δύο αριθμητικά παραδείγματα.

Έστω $\overline{S}$ = (190/200, 200/210), ασαφές επιτόκιο $\bar{r}$ = (0.09/0.10, 0.10/0.11) και έστω n = 10 περίοδοι ανατοκισμού. Τότε $\alpha_2 = 77.1 < 80.3 = \alpha_1$, η $f_1(y \mid \bar{A})$ είναι φθίνουσα, $\alpha_4 = 73.96 < 77.1 = \alpha_3$ και η $f_2(y \mid \bar{A})$ είναι αύξουσα. Συνεπώς, η παρούσα αξία $PV_1(\bar{S}, 10)$, δεν ορίζεται.

Έστω $\overline{S}$ = (-210/-200, -200/-190), ασαφές επιτόκιο $\bar{r}$ = (0.09/0.10, 0.10/0.11) και έστω n = 10 περίοδοι ανατοκισμού. Τότε $\alpha_2 = -77.1 < -73.96 = \alpha_1$, η $f_1(y \mid \bar{A})$ είναι φθίνουσα, $\alpha_4 = -80.26 < -77.1 = \alpha_3$ και η $f_2(y \mid \bar{A})$ είναι αύξουσα. Συνεπώς, η παρούσα αξία $PV_2(\bar{S}, 10)$, δεν ορίζεται.

Στο εξής, όταν το $\bar{S}$ είναι θετικός ασαφής αριθμός, θα θεωρούμε ως παρούσα αξία την $PV_2(\bar{S}, n)$, ενώ εάν το $\bar{S}$ είναι αρνητικός ασαφής αριθμός θα θεωρούμε ως παρούσα αξία την $PV_1(\bar{S}, n)$.

Εάν ο αριθμός των περιόδων ανατοκισμού είναι ασαφής αριθμός ($\bar{n}$) και εάν η παρούσα αξία του $\bar{S}$ είναι η $PV_2(\bar{S}, n)$, με συνάρτηση συμμετοχής $\mu_2(x \mid \bar{S})$, τότε:

$$\mu_2(x \mid \bar{S}) = \sup_{\Gamma(x)}(\theta)$$

όπου:

$$\theta = \min(\mu(u \mid \bar{S}), \mu(v \mid \bar{r}), \mu(w \mid \bar{n}))$$

$$\Gamma(x) = \{(u, v, w) \mid u \cdot (1+v)^{-w} = x\}$$

Εάν ο αριθμός των περιόδων ανατοκισμού δεν είναι ασαφής αριθμός, δηλαδή $\bar{n}$ = n, τότε:

$$\mu_2(\, x \mid \bar{S}) = \mu_2(\, x \mid \bar{S}, n)$$

Η παραπάνω σχέση συνεπάγεται ότι:

$$\mu_2(\, x \mid \bar{S}) = \max_{1\le i\le K}(\min(\mu_2(\, x \mid \bar{S}, n_i), \lambda_i)) \qquad (4.15)$$

Επομένως, η παρούσα αξία PV_2 $(\bar{S}, n)$ μπορεί να μην είναι ασαφής αριθμός, όταν ο αριθμός των περιόδων ανατοκισμού, $\bar{n}$ είναι ασαφής αριθμός.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε μελλοντικό ποσό $\bar{S}$ = (130/160, 160/190) και ασαφές επιτόκιο $\bar{r}$ = (0.08/0.10, 0.10/0.12), ενώ ο αριθμός των περιόδων ανατοκισμού $\bar{n}$, δίδεται από τον ακόλουθο πίνακα **[6]**:

n_1	*4*	*5*	*6*
μ ($n_i \mid \bar{n}$)	*0.7*	*1.0*	*0.6*

Για να υπολογίσουμε την $\mu_2(\, x \mid \bar{S})$, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τη συνάρτηση συμμετοχής $\mu_2(\, x \mid \bar{S}, n_i)$, για n_i = 4, 5, 6. Τα αύξοντα και φθίνοντα μέρη της συνάρτησης συμμετοχής $\mu_2(\, x \mid \bar{S}, n_i)$, που δίδονται από τις συναρτήσεις f_1 (y | $\bar{A}$) και f_2 (y | $\bar{A}$) αντίστοιχα, προκύπτουν από την εξίσωση $f_i (y \mid \bar{A}) = f_i (y \mid \bar{S}) \cdot (1 + f_{3-i} (y \mid \bar{r}))^{-n}$. Έχουμε ότι:

$$f_1 (y \mid \bar{A}) = (30y + 130)\, [1.12 - 0.02y\,]^{-n}$$

$$f_2(y \mid \bar{A}) = (190 - 30y)\, [\, 1.08 + 0.02y\,]^{-n}$$

για n= 4, 5, 6 και $0 \leq y \leq 1$. Τελικά, η συνάρτηση συμμετοχής $\mu_2(x \mid \bar{S})$, προκύπτει από αυτές τις συναρτήσεις, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2.

4.2 ΑΣΑΦΕΙΣ ΡΑΝΤΕΣ

Μια σειρά από περιοδικές πληρωμές σταθερού ποσού P, σε σταθερά χρονικά διαστήματα (συνολικά n τω αριθμώ διαστήματα), μεταξύ των πληρωμών ονομάζεται ράντα. Εάν το επιτόκιο για την κάθε περίοδο είναι r, ενώ S_n είναι το χρηματικό ποσό στο πέρας των n περιόδων, τότε έχουμε ότι:

$$S_n = P \cdot \beta (n, r) \quad (4.16)$$

όπου:

$$\beta (n, r) = ((1 + r)^n - 1) / r \quad (4.17)$$

Υποθέτουμε στη συνέχεια πώς ένα ασαφές χρηματικό ποσό $\bar{P}$ καταβάλλεται στο τέλος της κάθε περιόδου ανατοκισμού, για n περιόδους, με ασαφές επιτόκιο $\bar{r}$ ανά περίοδο. Οι αριθμοί $\bar{P}$ και $\bar{r}$ είναι θετικοί ασαφείς αριθμοί. Το χρηματικό ποσό $\overline{S_n}$ που έχει συσσωρευθεί, μετά από n περιόδους είναι το εξής:

$$\overline{S_n} = \bar{P} \oplus (\bar{P} \odot (1 \oplus \bar{r})) \oplus \ldots \oplus (\bar{P} \odot (1 \oplus \bar{r})^{n-1}) \quad (4.18)$$

Η συνάρτηση συμμετοχής, μ (x | $\overline{S_n}$), για το $\overline{S_n}$, ορίζεται από τη σχέση:

$$f_{ni} (y \mid \overline{S_n}) = f_i (y \mid \bar{P}) \, \beta (n, f_i (y \mid \bar{r})) \quad (4.19)$$

για i = 1, 2, όπου $s_{n1} = f_{n1} (0 \mid \overline{S_n})$, . . . , $s_{n4} = f_{n2} (0 \mid \overline{S_n})$. Η συνάρτηση β (n, r) είναι μια αύξουσα συνάρτηση του r, η συνάρτηση $f_{n1} (y \mid \overline{S_n})$, είναι μία αύξουσα συνάρτηση,

η $f_{n2} (y \mid \overline{S_n})$, είναι φθίνουσα και $s_{n2} \leq s_{n3}$.

Εάν ο αριθμός των περιόδων ανατοκισμού $\bar{n}$ είναι ένας ασαφής αριθμός, έστω $\bar{S}$ η μελλοντική αξία της ράντας, με συνάρτηση συμμετοχής μ (x | $\bar{S}$). Τότε έχουμε ότι:

$$\mu(x \mid \bar{S}) = \sup_{\Gamma(x)}(\theta)$$

όπου:

$$\theta = \min (\mu (u \mid \bar{P}), \mu (v \mid \bar{r}), \mu (w \mid \bar{n}))$$

$$\Gamma(x) = \{(u, v, w) \mid u \cdot \beta(w, v) = x\}$$

Στην περίπτωση όπου ο αριθμός των περιόδων ανατοκισμού δεν είναι ασαφής αριθμός, δηλαδή $\bar{n}$ = n, έχουμε ότι $\mu(x \mid \bar{S}) = \mu(x \mid \overline{S_n})$. Αυτό συνεπάγεται ότι:

$$\mu (x \mid \bar{S}) = \max_{1 \leq i \leq K}(\min(\mu(x \mid \overline{S_{n_i}}), \lambda_i)) \quad (4.20)$$

Ας εξετάσουμε ένα παράδειγμα για να γίνουν πιό κατανοητές οι προαναφερθείσες έννοιες.

Έστω οι περιοδικές πληρωμές $\bar{P}$ = (150/190, 200/220), με ασαφές επιτόκιο $\bar{r}$ = (0.06/0.09, 0.10/0.11) για $\bar{n}$ περιόδους ανατοκισμού με τη συνάρτηση συμμετοχής μ (n_i | $\bar{n}$), που δίδεται στον ακόλουθο πίνακα:

n_i	10	12	14
μ (n_i | $\bar{n}$)	0.8	1.0	0.6

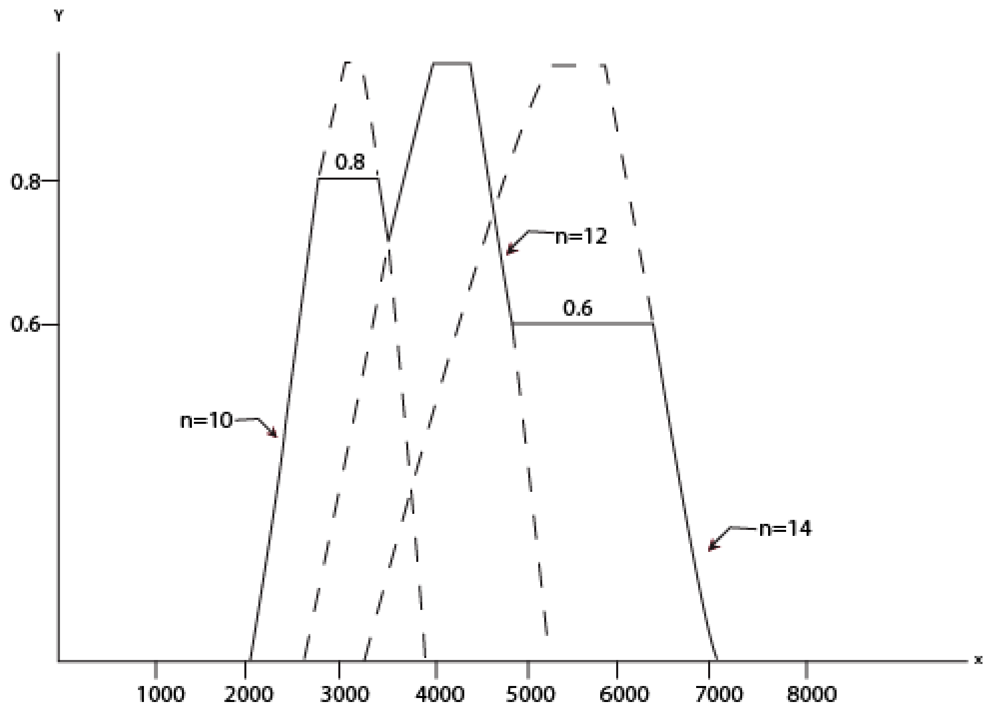
Υπολογίζουμε τη συνάρτηση συμμετοχής μ (x | $\overline{S_{n_i}}$), για n_i = 10, 12, 14, από τη σχέση:

$$f_{ni} (y \mid \overline{S_n}) = f_i (y \mid \bar{P}) \, \beta (n, f_i (y \mid \bar{r}))$$

οπότε, συνδυάζοντας αυτά τα αποτελέσματα με τη σχέση:

$$\mu (x \mid \bar{S}) = \max_{1 \le i \le K} (\min\left(\mu(x \mid \overline{S_{n_i}}), \lambda_i \right))$$

μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση συμμετοχής μ (x | $\bar{S}$), όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.3.



Σχήμα 4.3 Συνάρτηση Συμμετοχής μ (x | $\bar{S}$)

Στη συνέχεια θα δούμε πώς υπολογίζεται η παρούσα αξία μίας ράντας. Έστω P περιοδικές πληρωμές, οι οποίες καταβάλλονται στο τέλος της κάθε περιόδου ανατοκισμού, για n περιόδους, όπου το επιτόκιο ανατοκισμού για κάθε περίοδο είναι r. Εάν A_n είναι η παρούσα αξία αυτής της μελλοντικής χρηματοροής, τότε A_n = P·γ (n, r), όπου η συνάρτηση γ είναι η εξής:

$$\gamma (n, r) = (1- (1 + r)^{-n}) / r$$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $\bar{P}$ περιοδικές ασαφείς πληρωμές καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου, για n το πλήθος περιόδους, με ένα ασαφές επιτόκιο $\bar{r}$. Θεωρούμε ότι οι πληρωμές $\bar{P}$

και το επιτόκιο $\bar{r}$ είναι θετικοί ασαφείς αριθμοί. Εάν $\overline{A_n}$ είναι η ασαφής παρούσα αξία αυτής της ασαφούς χρηματοροής, τότε έχουμε ότι:

$$\overline{A_n} = \sum_{i-1}^{n} PV_2\ (\bar{P}\ , i\ ) \quad (4.21)$$

όπου το σύμβολο του αθροίσματος παριστά ένα ασαφές άθροισμα. Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η συνάρτηση συμμετοχής $\mu\ (\ x \mid \overline{A_n}\ )$, για την ασαφή παρούσα αξία $\overline{A_n}$, ορίζεται από τη σχέση:

$$f_{ni}\ (\ y \mid \overline{A_n}\ ) = f_i\ (\ y \mid \bar{P}\ )\ \gamma\ (\ n, f_{3-i}\ (\ y \mid \bar{r}\ )) \quad (4.22)$$

για $i = 1, 2$ και $\alpha_{n1} = f_{n1}\ (\ 0 \mid \overline{A_n}\ ), \ldots, \alpha_{n4} = f_{n2}\ (\ 1 \mid \overline{A_n}\ )$. Γνωρίζουμε πώς η συνάρτηση $\gamma\ (\ n, r\ )$ είναι μία φθίνουσα συνάρτηση του επιτοκίου r. Επομένως η συνάρτηση $f_{n1}\ (\ y \mid \overline{A_n}\ )$ είναι αύξουσα, αφού η συνάρτηση $f_1(\ y \mid \bar{P}\ )$ είναι αύξουσα, ενώ η συνάρτηση $f_2\ (\ y \mid \bar{r}\ )$ είναι φθίνουσα. Παρόμοια, βρίσκουμε ότι η συνάρτηση $f_{n2}\ (\ y \mid \overline{A_n}\ )$ είναι φθίνουσα και ότι $\alpha_{n2} \leq \alpha_{n3}$, επομένως δείξαμε ότι η παρούσα αξία $\overline{A_n}$ είναι ένας ασαφής αριθμός.

Εάν ο αριθμός των περιόδων ανατοκισμού $\bar{n}$ είναι ασαφής, τότε έστω $\bar{A}$ η παρούσα αξία της ράντας με συνάρτηση συμμετοχής $\mu\ (\ x \mid \bar{A})$. Τότε έχουμε ότι:

$$\mu(\ x \mid \bar{A}) = \sup_{\Gamma(x)}(\theta)$$

όπου:

$$\theta = \min (\mu (u \mid \bar{P}), \mu (v \mid \bar{r}), \mu (w \mid \bar{n}))$$

$$\Gamma(x) = \{(u, v, w) \mid u\cdot \gamma(w, v) = x\}$$

Στην περίπτωση όπου ο αριθμός των περιόδων ανατοκισμού δεν είναι ασαφής αριθμός, δηλαδή $\bar{n}$ = n, έχουμε ότι $\mu (x \mid \bar{A}) = \mu (x \mid \overline{A_n})$. Αυτό συνεπάγεται ότι:

$$\mu (x \mid \bar{A}) = \max_{1\leq i\leq K} (\min \left(\mu (x \mid \overline{A_{n_i}}), \lambda_i \right)) \quad (4.23)$$

Ας εξετάσουμε ένα παράδειγμα για να γίνουν περισσότερο κατανοητά τα όσα αναφέρθηκαν. Υποθέτουμε ότι οι περιοδικές πληρωμές είναι $\bar{P}$ = (90/100, 100/110) με επιτόκιο

$\bar{r}$ = (0.08/0.10, 0.10/0.12), όπου ο αριθμός των περιόδων $\bar{n}$ δίδεται τον ακόλουθο πίνακα:

n_1	4	5	6
$\mu (n_i \mid \bar{n})$	0.7	1.0	0.6

Πρώτα υπολογίζουμε τη συνάρτηση συμμετοχής $\mu (x \mid \overline{A_{n_i}})$, για i = 4, 5, 6. Αυτές οι συναρτήσεις συμμετοχής ορίζονται από τις συναρτήσεις $f_{n1} (y \mid \overline{A_n})$ και $f_{n2} (y \mid \overline{A_n})$. Παρατηρούμε ότι:

$$f_{n1} (y \mid \overline{A_n}) = (10y + 90) \gamma_1$$

όπου:

$$\gamma_1 = \frac{1-[\,1.12-0.02y\,]^{-n}}{0.12-0.02y}$$

και

$$f_{n2}\,(\,y \mid \overline{A_n}\,) = (\,110 - 10y\,)\,\gamma_2$$

όπου:

$$\gamma_2 = \frac{1-[\,1.08+0.02y\,]^{-n}}{0.08+0.02y}$$

για n = 4, 5, 6 και $0 \leq y \leq 1$. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε αυτά τα αποτελέσματα για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση συμμετοχής μ (x | $\bar{A}$), όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2 και 4.3.

4.3 ΑΣΑΦΕΙΣ ΧΡΗΜΑΤΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΚΑΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ

Δύο συνήθεις μέθοδοι σύγκρισης (αλληλοαποκλειόμενων) εναλλακτικών επενδύσεων, είναι η καθαρή παρούσα αξία NPV (Net Present Value) και η εσωτερική απόδοση IRR (Internal Rate of Return) **[6]**. Έστω ότι η $\mathscr{A}$ = $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι μία δοθείσα ή εκτιμηθείσα καθαρή χρηματοροή ενός επενδυτικού σχεδίου πού έχει προταθεί για n χρονικές περιόδους. Εάν κάποιο από τα $A_i < 0$ τότε $-A_i$ είναι η καθαρή επένδυση (ολική απόδοση μείον την ολική επένδυση) του επενδυτικού σχεδίου, στο τέλος της i- οστής περιόδου. Υποθέτουμε ότι $A_0 < 0$ επειδή πρόκειται περί ενός επενδυτικού σχεδίου που ξεκινά πάντα με μία αρχική επένδυση. Επίσης υποθέτουμε ότι τα χρονικά διαστήματα είναι ίσα με τις περιόδους ανατοκισμού.

Ακολουθώντας τη μέθοδο της καθαρής παρούσας αξίας (NPV) βρίσκουμε την παρούσα αξία όλων των μελλοντικών καθαρών αποδόσεων, με προεξοφλητικό επιτόκιο r_0, αφαιρώντας οποιαδήποτε αρχική καταβολή μετρητών. Επομένως, η καθαρή παρούσα αξία της χρηματοροής $\mathscr{A} = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι η εξής:

$$\text{NPV}(\mathscr{A}, n) = \sum_{i=0}^{n} A_i (1 + r_0)^{-i} \quad (4.24)$$

Ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε έναν αριθμό διαθέσιμων επενδυτικών προτάσεων με χρηματικές ροές $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \ldots$ Υποθέτουμε επίσης ότι γίνεται μία αξιολόγηση αυτών των προτάσεων, όπου NPV > 0, έτσι ώστε να δημιουργηθεί μία κατάταξη των επενδυτικών προτάσεων, με φθίνουσα διάταξη ως προς την καθαρή παρούσα αξία και με βάση τη σειρά αυτής της κατάταξης ακολουθούμε τα επενδυτικά προγράμματα έως ότου να εξαντληθούν τα κεφαλαιακά αποθέματα της επιχείρησης. Με μία πρόχειρη αξιολόγηση μπορεί αυτή η στρατηγική να φαίνεται ισχυρή, όμως για να μπορέσουμε να καταλήξουμε σε ένα ισχυρό συμπέρασμα θα πρέπει πρώτα να εκτιμηθεί τόσο το προεξοφλητικό επιτόκιο όσο και οι χρηματοροές.

Υποθέτουμε, λοιπόν, μία ασαφή χρηματοροή $\bar{A} = \overline{A_0}, \overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}$, με ασαφές επιτόκιο $\overline{r_0}$, το οποίο αντιπροσωπεύει το κόστος του κεφαλαίου μίας εταιρίας. Η συνάρτηση συμμετοχής $\mu(x \mid \bar{A_\iota})$ για τους ασαφείς αριθμούς $\bar{A_\iota}$, ορίζεται από τη σχέση:

$$\mu(x \mid \bar{A_\iota}) = (\alpha_{i1}, f_{i1}(y \mid \bar{A_\iota}) / \alpha_{i2}, \alpha_{i3} / f_{i2}(y \mid \bar{A_\iota}), \alpha_{i4}) \quad (4.25)$$

για $i = 0, 1, \ldots, n$. Ο αριθμός $\overline{A_0}$ είναι ένας αρνητικός ασαφής αριθμός, ενώ οι υπόλοιποι ασαφείς αριθμοί $\bar{A_\iota}$, είναι είτε αρνητικοί είτε θετικοί. Το επιτόκιο $\overline{r_0}$, είναι ένας θετικός ασαφής αριθμός, ενώ η ασαφής καθαρή παρούσα αξία της ασαφούς χρηματοροής $\bar{A}$ είναι η εξής:

$$\text{NPV}(\bar{A}, n) = \overline{A_0} \oplus \sum_{i=1}^{n} PV_{k(i)}(\overline{A_\iota}, i) \quad (4.26)$$

όπου ο τελεστής του αθροίσματος παριστά ασαφές άθροισμα και k (i) = 1, όταν το ποσό $\bar{A}_i$ είναι αρνητικό, ενώ k (i) = 2, όταν το ποσό $\bar{A}_i$ είναι θετικό. Η συνάρτηση συμμετοχής $\mu (x \mid \bar{A}, n)$ για την καθαρή παρούσα αξία NPV ($\bar{A}, n$) ορίζεται ως εξής:

$$\mu (x \mid \bar{A}, n) = (\alpha_{n1}, f_{n1} (y \mid \bar{A}) / \alpha_{n2}, \alpha_{n3} / f_{n2} (y \mid \bar{A}), \alpha_{n4}) \quad (4.27)$$

όπου:

$$f_{ni} (y \mid \bar{A}) = \sum_{j=0}^{n} f_{ij} (y \mid \bar{A}_j) [1 + f_{k(j)} (y \mid \bar{r}_0)]^{-j}$$

για i = 1, 2, όπου k (j) = i για αρνητικό $\bar{A}_j$ και k(j) = 3 – i , για θετικό $\bar{A}_j$. Επίσης, $\alpha_{n1} = f_{n1} (0 \mid \bar{A})$, ..., $\alpha_{n4} = f_{n2} (0 \mid \bar{A})$.

Συνοπτικά, η μέθοδος της αξιολόγησης επενδυτικών προτάσεων, με χρήση της ασαφούς θεωρίας συνόλων, είναι η ακόλουθη. Υποθέτουμε ότι έχουμε τις ασαφείς χρηματοροές $\bar{A}$, $\bar{B}$, … και ότι πρέπει να τις αξιολογήσουμε. Αρχικά υπολογίζουμε τους ασαφείς αριθμούς NPV ($\bar{A}$, n_a), NPV ($\bar{B}$, n_b) κ.ο.κ και τους κατατάσσουμε με φθίνουσα σειρά. Αυτό που προκύπτει, ουσιαστικά, είναι μία διαμέριση του ασαφούς συνόλου των επενδυτικών προτάσεων, σε ασαφή σύνολα H_1, H_2,...., H_n, όπου όλες οι επενδυτικές προτάσεις αντιστοιχίζονται σε ένα από τα υποσύνολα αυτά, με βάση την κατάταξη των καθαρών παρουσών αξιών της κάθε πρότασης, που υπολογίστηκαν στην αρχή της διαδικασίας. Δηλαδή, οι επενδυτικές προτάσεις που αξιολογούνται ως καλύτερες, αντιστοιχίζονται στο σύνολο H_1 και οι χειρότερες στο H_n.

Θα πρέπει να τονιστεί το γεγονός ότι εάν κάποια επενδυτική πρόταση έχει καθαρή παρούσα αξία μικρότερη του ασαφούς μηδενός, τότε απορρίπτεται εξ'αρχής. Με τον όρο ασαφές μηδέν ($\bar{0}$), εννοούμε τον ασαφή αριθμό μηδέν, ορισμένος όπως αρμόζει ανά περίπτωση. Δηλαδή, για παράδειγμα, εάν τα χρηματικά ποσά στα οποία αναφερόμαστε είναι της τάξης των εκατομμυρίων (10^6), τότε ο ασαφής αριθμός μηδέν θα μπορούσε να θεωρηθεί ο εξής:

$$\bar{0} = (-10.000/ 0, 0 / 10.000)$$

Ας εξετάσουμε στη συνέχεια ένα παράδειγμα για να κατανοηθούν καλύτερα οι έννοιες που περιγράψαμε. Θεωρούμε ασαφές επιτόκιο $\overline{r_0}$ = (0.08/ 0.10, 0.10 / 0.12) και δύο ασαφείς καθαρές χρηματοροές, οι οποίες δίδονται στον παρακάτω πίνακα:

Επενδυτική Πρόταση $\bar{A}$	Επενδυτική Πρόταση $\bar{B}$
$\overline{A_0}$ = (-1100 / -1000, -1000 / -900)	$\overline{B_0}$ = (-1100 / -1000, -1000 / -900)
$\overline{A_1}$ = (450 / 500, 500 / 550)	$\overline{B_1}$ = (50 / 100, 100 / 150)
$\overline{A_2}$ = (350 / 400, 400 / 450)	$\overline{B_2}$ = (150 / 200, 200 / 250)
$\overline{A_3}$ = (250 / 300, 300 / 350)	$\overline{B_3}$ = (250 / 300, 300 / 350)
$\overline{A_4}$ = (150 / 200, 200 / 250)	$\overline{B_4}$ = (350 / 400, 400 / 450)
$\overline{A_5}$ = (50 / 100, 100 / 150)	$\overline{B_5}$ = (450 / 500, 500 / 550)
	$\overline{B_6}$ = (550 / 600, 600 / 650)

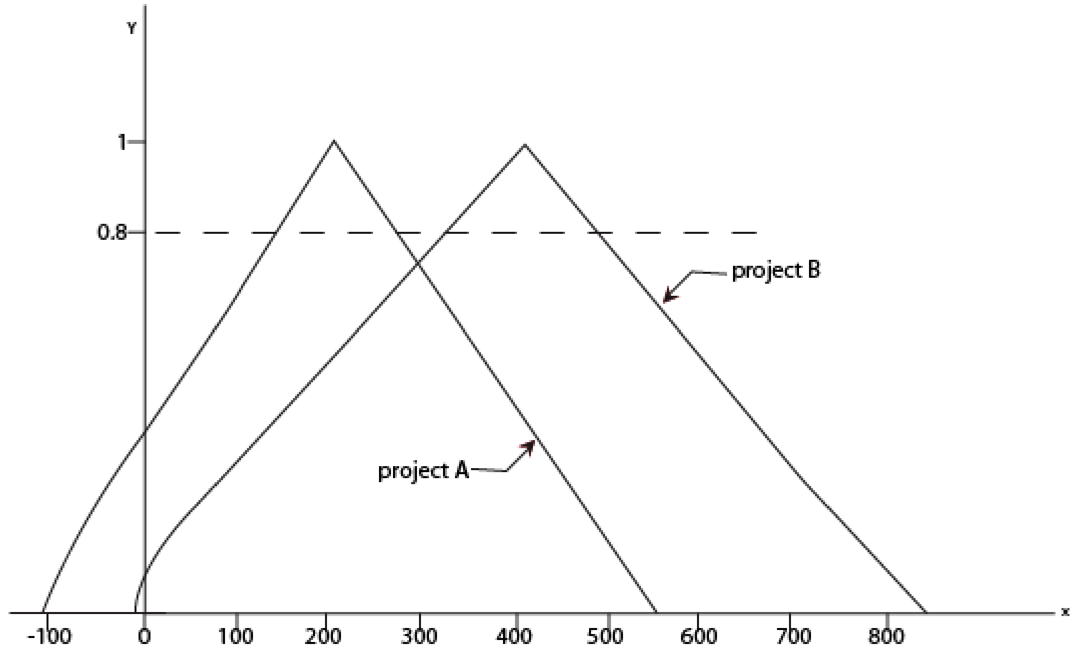
Οι συναρτήσεις συμμετοχής για τις καθαρές παρούσες αξίες NPV ($\bar{A}$, 5) και NPV ($\bar{B}$, 6) υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\mu (x \mid \bar{X}, n) = (\alpha_{n1}, f_{n1} (y \mid \bar{X}) / \alpha_{n2}, \alpha_{n3} / f_{n2} (y \mid \bar{X}), \alpha_{n4}) \quad (4.28)$$

όπου:

$$f_{ni} (y \mid \bar{X}) = \sum_{j=0}^{n} f_{ij} (y \mid \overline{X_j}) [1 + f_{k(j)} (y \mid \overline{r_0})]^{-j}$$

για i = 1, 2, όπου $\overline{X} = \overline{A}, \overline{B}$, k (j) = i για αρνητικό $\overline{X_j}$ και k(j) = 3 – i , για θετικό $\overline{X_j}$. Επίσης, $\alpha_{n1} = f_{n1}(0 \mid \bar{X})$, ..., $\alpha_{n4} = f_{n2}(0 \mid \bar{X})$. Τα γραφήματα αυτών των συναρτήσεων συμμετοχής φαίνονται στο Σχήμα 4, όπου παρατηρούμε ότι και οι δύο καθαρές παρούσες αξίες υπερβαίνουν τον ασαφή αριθμό μηδέν. Εάν συγκρίνουμε τις δύο αυτές συναρτήσεις συμμετοχής στο ύψος 0.8, παρατηρούμε ότι η επενδυτική πρόταση $\overline{B}$ κρίνεται καλύτερη από την επενδυτική πρόταση $\overline{A}$.



Σχήμα 4.4 Σύγκριση επενδυτικών προτάσεων A και B

Η μέθοδος της καθαρής παρούσας αξίας επεκτείνεται και σε περιπτώσεις όπου οι επενδυτικές προτάσεις έχουν αβέβαιη ημερομηνία λήξεως **[6]**. Δηλαδή, έστω ότι ο ασαφής αριθμός $\bar{n}$ παριστά το πέρας της επενδυτικής πρότασης $\overline{A} = \overline{A_0}, \overline{A_1}, \ldots$ Εάν ο όρος NPV ($\overline{A}$), είναι η καθαρή παρούσα αξία αυτής της επενδυτικής πρότασης, τότε η συνάρτηση συμμετοχής της ορίζεται ως εξής:

$$\mu(x \mid \bar{A}) = \sup_{\Gamma(x)}(\theta)$$

όπου:

$$\theta = \min (\mu (u_0 \mid \overline{A_0}), \dots , (\mu (u_w \mid \overline{A_w}), \mu (v \mid \bar{r}), \mu (w \mid \bar{n}))$$

$$\Gamma(x) = \{(u_0,\dots, u_w, v, w) \mid \textstyle\sum_{i=0}^{w} u_i (1 + v)^{-i} = x\}$$

Στην περίπτωση όπου ο αριθμός των περιόδων ανατοκισμού δεν είναι ασαφής αριθμός, δηλαδή $\bar{n}$ = n και $\bar{A}_\iota$ είναι θετικός ασαφής αριθμός για $1 \le i \le n$, έχουμε ότι:

$$\mu (x \mid \bar{A}) = \mu (x \mid \bar{A}, n)$$

Η πιό συνηθισμένη περίπτωση χρηματοροής είναι εκείνη όπου υπάρχει μία αρχική επένδυση $\overline{A_0} < 0$, η οποία ακολουθείται από μία σειρά ποσών $\overline{A_\iota} > 0$, με $1 \le i \le n$. Για μία ασαφή χρηματοροή, στην οποία όλοι οι παράγοντες $\overline{A_\iota} > 0$, για $i \ge 1$, μέσω της συνάρτησης συμμετοχής $\mu (x \mid \bar{A}) = \mu (x \mid \bar{A}, n)$, για $\bar{n}$ = n, υπολογίζεται η καθαρή παρούσα αξία NPV ($\bar{A}$), αφού σε αυτή την περίπτωση,

$$\mu (x \mid \bar{A}) = \max_{1 \le i \le K} (\min (\mu (x \mid \overline{A_n} , n_i), \lambda_i))$$

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη μέθοδο του συντελεστή εσωτερικής απόδοσης IRR (Internal Rate of Return). Δοθείσας, οποιασδήποτε χρηματοροής $A=A_{0}, \ A_{1}, \ldots, A_{n}$, ο συντελεστής εσωτερικής απόδοσης IRR (A, n) είναι κάθε λύση του r > -1, σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \ (1+r)^{-1} = -A_0 \qquad (4.29)$$

Υποθέτουμε ότι $A_0 < 0$, δεδομένου ότι είναι η αρχική χρηματική επένδυση, επομένως η ποσότητα - A_0 είναι θετική ποσότητα. Εάν η χρηματοροή έχει μία και μόνο μία αλλαγή προσήμου, τότε η παραπάνω σχέση έχει μοναδική λύση για r > -1. Σε αντίθετη περίπτωση, η εξίσωση μπορεί να μην έχει λύση ή μπορεί να έχει πολλαπλές λύσεις. Αυτό όμως δημιουργεί πρόβλημα διότι όταν μία χρηματοροή έχει πολλαπλούς συντελεστές εσωτερικής απόδοσης, τότε η μέθοδος IRR δε μπορεί να εφαρμοσθεί για την αξιολόγηση των επενδύσεων.

Έστω ότι όλες οι επενδυτικές προτάσεις έχουν έναν και μοναδικό συντελεστή εσωτερικής απόδοσης IRR. Τότε αυτές οι προτάσεις, οι οποίες έχουν IRR > r_0 ταξινομούνται ξεκινώντας από εκείνη με το μεγαλύτερο συντελεστή, με φθίνουσα σειρά. Μία εταιρία αποδέχεται αυτές τις επενδυτικές προτάσεις, ξεκινώντας από αυτή με το μεγαλύτερο συντελεστή εσωτερικής απόδοσης έως ότου εξαντλήσει το διαθέσιμο κεφάλαιό της.

Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι η χρηματοροή $\bar{A} = \overline{A_0}, \overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}$ είναι μία ασαφής χρηματοροή, με $\overline{A_0}$ αρνητικό ασαφή αριθμό, ενώ τα $\overline{A_\iota}$ μπορούν να είναι είτε αρνητικοί είτε θετικοί ασαφείς αριθμοί. Ο ασαφής συντελεστής εσωτερικής απόδοσης IRR ($\bar{A}$, n) είναι ένα ασαφές επιτόκιο $\bar{r}$ το οποίο εξισώνει τις παρούσες αξίες όλων των μελλοντικών ποσών με το αρχικό ποσό επένδυσης. Δηλαδή, ο ασαφής αριθμός $\bar{r}$, ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\sum_{i=1}^{n} PV_{k(i)} \ (\overline{A_\iota}, i) = -\overline{A_0} \qquad (4.30)$$

όπου ο τελεστής του αθροίσματος παριστά ασαφές άθροισμα και k (i) = 1, όταν το ποσό $\overline{A_\iota}$ είναι αρνητικό, ενώ k (i) = 2, όταν το ποσό $\overline{A_\iota}$ είναι θετικό. Απαιτούμε το επιτόκιο $\bar{r}$ να είναι ασαφής αριθμός με $\overline{r_1}$ > -1. Ο ασαφής αυτός αριθμός προκύπτει από τις εξισώσεις:

$$-f_{02}\,(\,y\,|\,\overline{A_0}\,) = \sum_{i=1}^{n} f_{i1}\,(\,y\,|\,\overline{A_\iota}\,)\,[\,1 + f_{k(i)}\,(\,y\,|\,\bar{r}\,)\,]^{-i}$$

$$-f_{01}\,(\,y\,|\,\overline{A_0}\,) = \sum_{i=1}^{n} f_{i2}\,(\,y\,|\,\overline{A_\iota}\,)\,[\,1 + f_{k(i)}\,(\,y\,|\,\bar{r}\,)\,]^{-i}$$

όπου k (i) = 1, όταν το ποσό $\overline{A_\iota}$ είναι αρνητικό, ενώ k (i) = 2, όταν το ποσό $\overline{A_\iota}$ είναι θετικό. Στις παραπάνω εξισώσεις θεωρούμε τις συναρτήσεις f_{ij} (y | $\overline{A_\iota}$) γνωστές, για i = 0, 1, …, n και j = 1, 2, οπότε λύνοντας ως προς f_1 (y | $\bar{r}$) και f_2 (y | $\bar{r}$), βρίσκουμε τον ασαφή αριθμό $\bar{r}$.

Για να είναι το $\bar{r}$ ασαφής αριθμός πρέπει η συνάρτηση f_1 (y | $\bar{r}$) να είναι αύξουσα, η συνάρτηση f_2 (y | $\bar{r}$) φθίνουσα, ενώ πρέπει να ισχύει ότι $r_2 \le r_3$, όπου $r_1 = f_1$ (0 | $\bar{r}$), ..., $r_4 = f_2$ (0 | $\bar{r}$). Εάν κάποια από αυτές τς συνθήκες δεν ικανοποιείται, τότε η χρηματοροή $\bar{A}$ δεν έχει ασαφή συντελεστή εσωτερικής απόδοσης IRR.

Η πιό απλή αλλά και η πιό σημαντική περίπτωση χρηματοροής είναι όταν το ποσό $A_i > 0$, για $1 \le i \le n$, διότι σε αυτή την περίπτωση προκύπτει μοναδικός συντελεστής εσωτερικής απόδοσης. Όμως για αυτή την περίπτωση, αν επεκταθούμε στα ασαφή σύνολα παρατηρούμε ότι οι ασαφείς χρηματοροές ενδέχεται να μην έχουν μοναδικό ασαφή συντελεστή εσωτερικής απόδοσης. Επομένως, η μέθοδος αυτή δε μπορεί να εφαρμοσθεί σε ασαφείς χρηματοροές **[6]**.

Ας μελετήσουμε ένα παράδειγμα. Έστω - $\overline{A_0}$ = (100 / 110, 110 / 120), $\overline{A_1}$ = (190 /200, 300 / 310) και $\overline{A_2}$ = (190 / 200, 300 / 310). Υπολογίζουμε τα r_2 και r_3 από τις εξισώσεις:

$$300\,(\,1 + r_2\,)^{-2} + 300\,(\,1 + r_2\,)^{-1} = 110$$

$$200\,(\,1 + r_3\,)^{-2} + 200\,(1 + r_3\,)^{-1} = 110$$

από τις οποίες προκύπτει ότι r_3 = 1.535 < r_2 = 2.505. Επομένως η ασαφής αυτή χρηματοροή δεν έχει συντελεστή εσωτερικής απόδοσης IRR.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκαν εφαρμογές της ασαφούς θεωρίας συνόλων σε βασικές χρηματοοικονομικές έννοιες, όπως τα επιτόκια, οι μελλοντικές και οι παρούσες αξίες, οι χρηματοροές και η αξιολόγηση των επενδύσεων. Συχνά έννοιες όπως τα μελλοντικά επιτόκια, τα μελλοντικά ποσά και το χρονικό διάστημα μίας επένδυσης εκτιμώνται και περιγράφονται με φράσεις όπως «περίπου 5% » ή «μεταξύ 8 και 10%». Η θεωρία ασαφών συνόλων, όταν εφαρμοσθεί σε αυτές τις χρηματοοικονομικές έννοιες είναι σε θέση να μεταφράσει αυτές τις φράσεις σε ασαφή σύνολα και να τις μετατρέψει σε εργαλεία πολύ χρήσιμα για τις εκτιμήσεις μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΑΣΑΦΗΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ

5.1 ΚΛΑΣΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ

Η ανάλυση παλινδρόμησης (regression analysis) αποτελεί μία μεθοδολογία, βάσει της οποίας εξετάζουμε τη σχέση μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών, με σκοπό να προβλέψουμε την τιμή μίας μεταβλητής μέσω των τιμών των υπολοίπων μεταβλητών. Αυτή η δυνατότητα πρόβλεψης καθιστά την παλινδρόμηση ιδιαίτερα σημαντική μέθοδο με πολλές εφαρμογές σε πλήθος επιστημονικών πεδίων, όπως η βιολογία, η μηχανική, τα οικονομικά κ.α.

Στην κλασική στατιστική, το γραμμικό μοντέλο είναι το μοντέλο που χρησιμοποιείται συχνότερα και έχει τη μορφή:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_{i,}\ i = 1,\ldots, m \quad (5.1)$$

, όπου y_i η εξαρτημένη μεταβλητή, x_{ij} οι ανεξάρτητες μεταβλητές, β_j οι παράμετροι και το ε_i είναι το τυχαίο σφάλμα, ενώ παράλληλα υποθέτουμε πως $E(\varepsilon_i) = 0$, η διασπορά $\sigma^2(\varepsilon_i) = \sigma^2$ και η συνδιασπορά $\sigma(\varepsilon_i,\varepsilon_j) = 0$, $\forall$ i, j με $i \neq j$.

Η κλασική παλινδρόμηση αν και έχει πολλές εφαρμογές, σε ορισμένες περιπτώσεις, παρουσιάζονται σημαντικά προβλήματα. Τέτοιες περιπτώσεις έχουμε όταν:

- είναι ανεπαρκής ο αριθμός των παρατηρήσεων
- υπάρχουν δυσκολίες επαλήθευσης όταν έχουμε υποθέσει κάποια κατανομή
- υπάρχει αοριστία στη σχέση μεταξύ των input και output μεταβλητών
- υπάρχει ασάφεια στο αν συμβαίνουν κάποια γεγονότα ή σε τι βαθμό αυτά συμβαίνουν
- υπάρχει ανακρίβεια λόγω γραμμικοποίησης

Τέτοιου είδους προβλήματα οδήγησαν στην εισαγωγή της ασαφούς παλινδρόμησης.

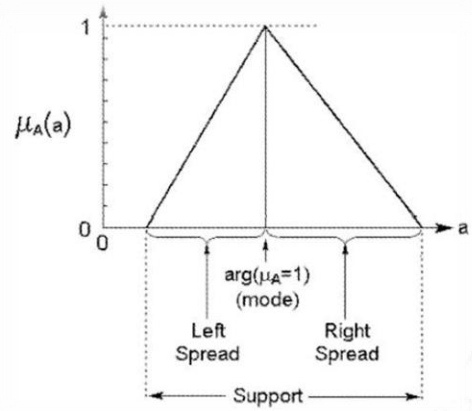
5.2 ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΑΣΑΦΟΥΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ

Ο πρώτος που εισήγαγε την ασαφή γραμμική παλινδρόμηση ήταν ο Tanaka **[28]**, ο οποίος χρησιμοποίησε την ασαφή λογική για να δημιουργήσει ένα μοντέλο το οποίο να μπορεί να λειτουργεί σε περιπτώσεις όπου παρουσιάζονται προβλήματα μέτρησης της εξαρτημένης μεταβλητής. Στην κλασική παλινδρόμηση, οι αποκλίσεις των παρατηρούμενων και των εκτιμώμενων τιμών θεωρούνται τυχαία σφάλματα παρόλο που πολλές φορές οφείλονται είτε σε ανακριβείς μετρήσεις είτε σε ανακρίβεια στη δομή του μοντέλου. Η αβεβαιότητα αυτού του τύπου στο μοντέλο παλινδρόμησης είναι επομένως ασαφής και όχι τυχαία.

Το μοντέλο που πρότεινε ο Tanaka έχει τη γενική μορφή:

$$\tilde{Y} = \widetilde{A_0} + \widetilde{A_1}x_1 + \ldots + \widetilde{A_n}x_n \qquad (5.2)$$

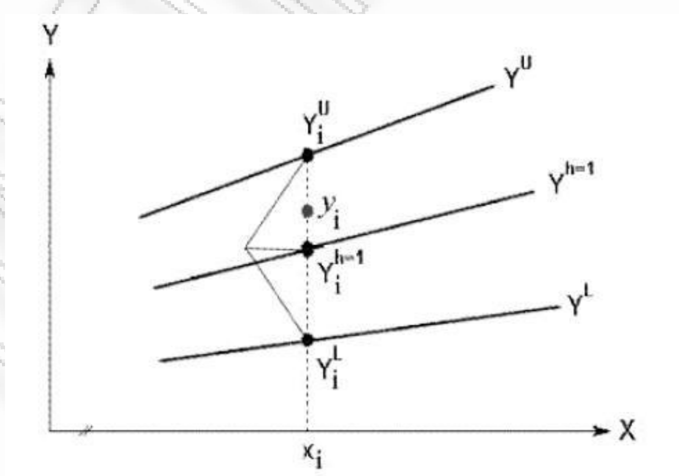
όπου $\tilde{Y}$ είναι η ασαφής εξαρτημένη μεταβλητή ή αλλιώς το fuzzy output, $\widetilde{A_j}$, j = 1, 2, … , n είναι οι ασαφείς παράμετροι και **x** = (x_1, … , x_n) είναι ένα n-διάστατο κλασικό (crisp) input διάνυσμα. Τα ασαφή στοιχεία αυτού του μοντέλου θεωρούνται τριγωνικοί ασαφείς αριθμοί (triangular fuzzy numbers). Έτσι λοιπόν, οι παράμετροι μπορούν να χαρακτηρισθούν από μια συνάρτηση συμμετοχής $\mu_A(\alpha)$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.1. Τα χαρακτηριστικά στοιχεία ενός τριγωνικού ασαφούς αριθμού είναι ο μέσος του, το αριστερό και δεξί spread και το supporting διάστημα. Όταν τα δύο spread είναι ίσα τότε έχουμε ένα τριγωνικό ασαφή αριθμό (symmetrical triangular fuzzy number). Η βασική ιδέα της προσέγγισης της ασαφούς παλινδρόμησης του Tanaka, η οποία συχνά αναφέρεται και σαν πιθανοτική παλινδρόμηση (possibilistic regression), ήταν η ελαχιστοποίηση της ασάφειας του μοντέλου, μέσω της ελαχιστοποίησης του ολικού spread των ασαφών παραμέτρων.



Σχήμα 5.1:Ασαφής παράμετρος

Υπάρχουν δύο βασικοί τρόποι ανάπτυξης ενός ασαφούς μοντέλου παλινδρόμησης. Ο πρώτος είναι αναπτύσσοντας μοντέλα όπου οι σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών είναι ασαφείς και ο δεύτερος αναπτύσσοντας μοντέλα όπου οι μεταβλητές είναι ασαφείς.

Για κάθε δοθέν ζεύγος δεδομένων (x_i, y_i), το διάστημα της ασαφούς παλινδρόμησης (fuzzy regression interval) [Y_i^L, Y_i^U], έχει τη μορφή του Σχήματος 5.2.



Σχήμα 5.2. Διάστημα ασαφούς παλινδρόμησης.

Βρίσκοντας τα σημεία στα οποία αντιστοιχούν τα ζεύγη (x_i,y_i) των δεδομένων μας, δημιουργούμε μια ευθεία γραμμή, η οποία διέρχεται τουλάχιστον από δύο σημεία με τέτοιο τρόπο ώστε όλα τα δοθέντα σημεία να περιορίζονται κάτω από την ευθεία αυτή ή να βρίσκονται επάνω της. Την ευθεία αυτή την ονομάζουμε Y^U. Στη συνέχεια δημιουργούμε μια άλλη ευθεία, με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή να διέρχεται από τουλάχιστον δύο σημεία των δοθέντων ζευγών αλλά αυτή τη φορά να περιορίζει τα σημεία πάνω από αυτή την ευθεία, την οποία ονομάζουμε Y^L.

Παρατηρούμε ότι το $Y_i^{h=1}$ είναι το μέσο της συνάρτησης συμμετοχής και στην περίπτωση που έχουμε υποθέσει συμμετρικούς τριγωνικούς ασαφείς αριθμούς έχουμε ότι:

$$Y_i^{h=1}=\overline{Y}_i=\left(\frac{Y_i^U+Y_i^L}{2}\right) \quad (5.3)$$

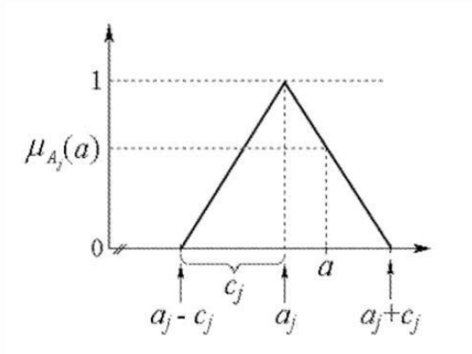
Δεδομένων των παραμέτρων (Y^U,Y^L,$Y^{h=1}$), οι οποίες χαρακτηρίζουν το μοντέλο της ασαφούς παλινδρόμησης, προφανώς το i-στο ζεύγος τιμών (x_i,y_i) αντιστοιχεί στις παραμέτρους ($Y_i^U, Y_i^L, Y_i^{h=1}$) . Σε αντιστοιχία με το κλασσικό μοντέλο παλινδρόμησης παρατηρούμε ότι τα $Y_i^U - y_i$ και $y_i - Y_i^L$ είναι στοιχεία του SST, τα $y_i - Y_i^{h=1}$ είναι στοιχεία του SSE και τα $Y_i^U - Y_i^{h=1}$ κα ι $Y_i^{h=1} - Y_i^L$ είναι στοιχεία του SSR.

ΟΙ ΑΣΑΦΕΙΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ

Συνδυάζοντας την εξίσωση 2 με το σχήμα 1 και θεωρώντας συμμετρικούς τριγωνικούς ασαφείς αριθμούς, η συνάρτηση συμμετοχής της j-στης παραμέτρου μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$\mu_{A_j}(\alpha) = \max\left\{1 - \frac{|\alpha - a_j|}{c_j}, 0\right\} \qquad (5.4)$$

όπου α_j είναι το μέσο και c_j είναι το spread και έχει τη μορφή του Σχήματος 5.3.



Σχήμα 5.3. Συμμετρικές ασαφείς παράμετροι

Ορίζοντας:

$$\widetilde{A_j} = \{a_j, c_j\}_L = \{\widetilde{A_j}: a_j - c_j \le \widetilde{A_j} \le a_j + c_j\}_L, \text{ j = 0, 1,…, n} \qquad (5.5)$$

Και περιορίζοντας την υπόθεση στο ότι μόνο οι παράμετροι είναι ασαφείς, μπορούμε να γράψουμε:

$$\widetilde{Y_l} = \widetilde{A_0} + \sum_{j=1}^{n} \widetilde{A_1}\, x_{ij} = (a_o, c_o)_L + \sum_{j=1}^{n} (a_0, c_0)_L x_{ij} \qquad (5.6)$$

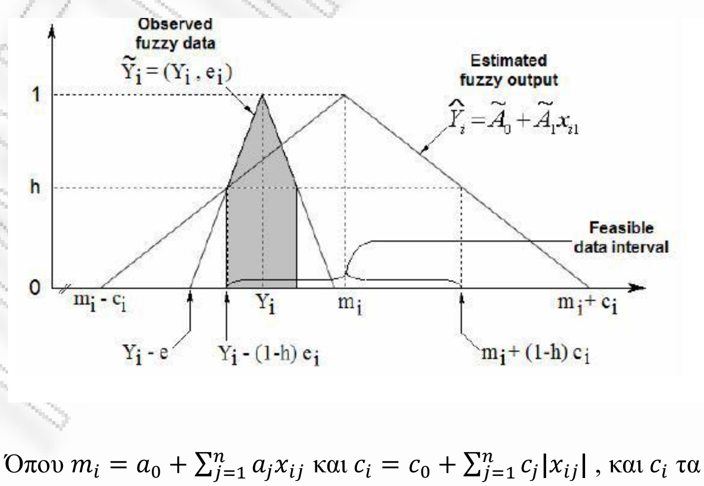
Δεδομένων των όσων αναφέρθηκαν προηγουμένως, υπάρχουν δύο τρόποι με τους οποίους αναπτύσσεται ένα μοντέλο ασαφούς παλινδρόμησης. Ο πρώτος είναι με τη μέθοδο του Tanaka, η οποία ονομάζεται και πιθανοτικό μοντέλο (possibilistic model), όπου ελαχιστοποιώντας το ολικό spread των ασαφών παραμέτρων του μοντέλου ελαχιστοποιούμε την ασάφεια του μοντέλου. Ο δεύτερος είναι με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων (least squares model), όπου ελαχιστοποιούμε την απόσταση μεταξύ των output του μοντέλου και των παρατηρηθέντων output. Στη συνέχεια θα αναλύσουμε αυτά τα δύο μοντέλα.

5.3 ΤΟ ΠΙΘΑΝΟΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ (POSSIBILISTIC REGRESSION MODEL)

Το μοντέλο πιθανοτικής παλινδρόμησης βελτιστοποιείται ελαχιστοποιώντας το spread, με τέτοιο τρόπο ώστε να περιλαμβάνει επαρκή δεδομένα. Η ελαχιστοποίηση του spread παίρνει τη μορφή:

$$\mathrm{Min}\left[c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j \,|x_{ij}|\right],\ c_j \geq 0 \qquad (5.7)$$

Στη συνέχεια συνδυάζουμε την απαίτηση να περιλαμβάνονται επαρκή δεδομένα στο spread με τα παρατηρηθέντα ασαφή outputs και προκύπτει το Σχήμα 5.4, το οποίο παριστά μια απεικόνιση του πώς τα εκτιμώμενα ασαφή output μπορούν να προσαρμοστούν στα παρατηρηθέντα δεδομένα.



Όπου $m_i = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij}$ και $c_i = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j |x_{ij}|$, και c_i τα spread.

Σχήμα 5.4.Προσαρμογή εκτιμηθέντων output στα παρατηρηθέντα output

Η ουσιαστική διαφορά των συναρτήσεων συμμετοχής που απεικονίζονται στο σχήμα 4 από αυτές του σχήματος 3 είναι ότι περιλαμβάνουν ένα σημείο h στον άξονα y, το οποίο ονομάζεται h-certain factor. Αυτός ο παράγοντας επεκτείνει το διάστημα support της συνάρτησης συμμετοχής ελέγχοντας το μέγεθος του διαστήματος επιτρεπτών (feasible) δεδομένων. Πιο συγκεκριμένα όσο ο παράγοντας h αυξάνει, τόσο αυξάνουν και τα spread c_i.

Ο h-certain παράγοντας μπορεί να εφαρμοστεί και στο παρατηρηθέν output. Έτσι, το i-στο output δεδομένο μπορεί να παρασταθεί από ένα συμμετρικό ασαφή αριθμό $\widetilde{Y_l} = (y_i, e_i)$, όπου y_i είναι το μέσο και e_i είναι το spread. Σε αυτή την περίπτωση, τα σημεία των δεδομένων βρίσκονται μέσα στο διάστημα $y_i \pm (1 - h)\, e_i$, τη βάση της γραμμοσκιασμένης περιοχής του σχήματος.

Τα παρατηρηθέντα ασαφή δεδομένα, προσαρμοσμένα για τον h-certain παράγοντα, περιέχονται στα εκτιμηθέντα ασαφή output που είναι και αυτά προσαρμοσμένα για τον h-certain παράγοντα. Δηλαδή:

$$a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} + (1-h) \left[c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j |x_{ij}|\right] > y_i + (1-h)e_i$$

$$a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} - (1-h) \left[c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j |x_{ij}|\right] < y_i - (1-h)e_i \qquad (5.8)$$

$$c_j > 0,\ i = 0, 1, \dots, m,\ j = 0, 1, \dots, n$$

5.4 ΚΡΙΤΙΚΗ ΤΟΥ ΠΙΘΑΝΟΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ

Το πιθανοτικό μοντέλο παλινδρόμησης έχει δεχθεί έντονη κριτική. Οι βασικές απόψεις που έχουν κατά καιρούς διατυπωθεί είναι οι εξής:

- Το αρχικό μοντέλο του Tanaka ήταν εξαιρετικά ευαίσθητο στις ακραίες τιμές (outliers) **[23]**

- Δεν υπάρχει κατάλληλη διερμηνεία σχετικά με το διάστημα της ασαφούς παλινδρόμησης **[30]**
- O Tanaka χρησιμοποίησε τεχνικές γραμμικού προγραμματισμού για να αναπτύξει ένα μοντέλο που μοιάζει επιφανειακά με τη γραμμική παλινδρόμηση, χωρίς να είναι ξεκάθαρο ποία είναι η σχέση με την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων **[25]**
- Το θέμα της πρόβλεψης πρέπει να διερευνηθεί **[24]**
- Η ασαφής γραμμική παλινδρόμηση ενδεχομένως να είναι πολλαπλά συσχετισμένη (multicollinear) καθώς αυξάνονται οι ανεξάρτητες μεταβλητές. **[18]**

5.5 ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΑΣΑΦΟΥΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ (THE FUZZY LEAST-SQUARES REGRESSION MODEL)

Στην κλασσική γραμμική παλινδρόμηση, το μοντέλο περιγράφεται από τη σχέση:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i,\ i= 1,\ldots, m$$

όπως αναφέρθηκε στην Ενότητα 5.1. Για την εκτίμηση των παραμέτρων αν και έχουν προταθεί αρκετές μέθοδοι, η πιο διαδεδομένη είναι αυτή των ελαχίστων τετραγώνων. Αυτό οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι οι εκτιμητές είναι αμερόληπτοι και οι διασπορές είναι οι μικρότερες καθώς. Στο συμβατικό μοντέλο, υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις ακολουθούν κάποια κατανομή και συνήθως την κανονική κατανομή. Στην πραγματικότητα όμως, υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι παρατηρήσεις είναι ασαφείς (fuzzy) από τη φύση τους και δε μπορούν να περιγραφούν με μια κλασσική συνάρτηση κατανομής (probability distribution). Έτσι σε μια προσπάθεια ανάπτυξης ενός μοντέλου χωρίς τα προβλήματα της μεθόδου του Tanaka αλλά και πιο κοντά σε αντιστοιχία με το κλασσικό μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης, προέκυψε η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων ασαφούς παλινδρόμησης.

Στην περίπτωση της μίας ανεξάρτητης μεταβλητής, το κλασσικό γραμμικό μοντέλο είναι:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i,\ \mathrm{i} = 1, 2,.., \mathrm{m} \qquad (5.9)$$

Έτσι ένα ασαφές μοντέλο σε αντιστοιχία με το κλασσικό, μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\widetilde{Y_i} = \beta_0 + \beta_1 \widetilde{X_i} + \widetilde{\varepsilon_i}\ ,\ \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{m} \qquad (5.10)$$

,όπου β_0 και β_1 είναι οι παράμετροι της παλινδρόμησης, οι οποίες είναι crisp αριθμοί, $\widetilde{Y_i}$ και $\widetilde{X_i}$ είναι ασαφείς παρατηρήσεις με συναρτήσεις συμμετοχής $\mu_{\widetilde{Y_i}}$ και $\mu_{\widetilde{X_i}}$ αντίστοιχα και $\widetilde{\varepsilon_i}$ είναι το ασαφές σφάλμα που σχετίζεται με το μοντέλο παλινδρόμησης. Σημειώνεται ότι b_0 και b_1 είναι οι εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων των β_0 και β_1 αντίστοιχα, όπως στο κλασσικό γραμμικό μοντέλο. Είναι δηλαδή εκτιμητές που ελαχιστοποιούν το άθροισμα των τετραγωνικών σφαλμάτων:

$$\mathrm{S}\ (\ \mathrm{X}\ ,\ \mathrm{Y}\ ) = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - b_0 - b_1 X_i\right) \qquad (5.11)$$

Από τη σχέση (9) προκύπτει ότι:

$$\widetilde{\varepsilon_i} = \widetilde{Y_i} - \beta_0 - \beta_1 \widetilde{X_i},\ \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{m} \qquad (5.12)$$

,ο οποίος είναι ένας ασαφής αριθμός. Παρόμοια με την περίπτωση του κλασσικού μοντέλου, το άθροισμα των τετραγωνικών σφαλμάτων μπορεί να ελαχιστοποιηθεί χρησιμοποιώντας τα b_0 και b_1. Έτσι έχουμε ότι:

$$\min \tilde{S} = \sum_{i=1}^{n} \left(\ \widetilde{Y_i} - b_0 - b_1 \widetilde{X_i}\ \right)^2 \qquad (5.13)$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Ο σκοπός αυτής της εργασίας ήταν η παρουσίαση των βασικών αρχών της Ασαφούς Λογικής και των πιθανών εφαρμογών της στην Ασφάλιση. Προκύπτει από τα όσα παρουσιάστηκαν ότι έχουν ήδη ερευνηθεί πολλές πιθανές εφαρμογές των πεδίων της Ασαφούς Λογικής στην Ασφάλιση, όπως η Ασαφής Θεωρία Συνόλων, η Ασαφής Συμπερασματολογία και η Ασαφής Παλινδρόμηση. Οι τομείς της Ασφάλισης στους οποίους βρίσκει εφαρμογές η Ασαφής Λογική είναι μεταξύ άλλων η ταξινόμηση, η ανάληψη των κινδύνων, οι παρούσες και οι μελλοντικές αξίες, οι ράντες, οι επενδύσεις και οι χρηματοροές.

Παράλληλα με τους ήδη υπάρχοντες τομείς στους οποίους μπορεί να εφαρμοσθεί η Ασαφής Λογική, υπάρχει η δυνατότητα για μία περαιτέρω διερεύνηση των εφαρμογών της στην Ασφάλιση, ώστε να επιλυθούν προβλήματα που δε μπορούν εκ φύσεως να επιλυθούν με τη χρήση των κλασικών Μαθηματικών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Aggour, K. S. and P. P. Bonissone and W. E. Cheetham and R. P. Messmer (2006): "Automating the Underwriting of Insurance Applications", *AI Magazine Volume 27 Number 3, p: 36-50.*

[2] Andres-Sanchez, J. (2007): "Claim Reserving with Fuzzy Regression and Taylor's Geometric Separation Method", *Insurance: Mathematics and Economics 40, p:145-163.*

[3] Baser, F. and A. Apaydin (2010): "Calculating Insurance Claim Reserves with Hybrid Fuzzy Least Squares Regresision Analysis", *Gazi University Journal of Science, GU J Sci, 23(2), p: 163-170*.

[4] Bojadziev, G. and M. Bojadziev (1997): "Fuzzy Logic for Business, Finance, and Management 2nd edition", Advances in Fuzzy Systems-Applications and Theory, Vol 23, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

[5] Buckley, J. J. (1985): "Ranking Alternatives Using Fuzzy Numbers", *Fuzzy Sets and Systems 15, p: 21-31*.

[6] Buckley, J. J. (1987): "The Fuzzy Mathematics of Finance", *Fuzzy Sets and Systems 21, p: 257-273*.

[7] Chen, G. and T. T. Pham (2001): "Introduction to Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Control Systems", *CRC Press*.

[8] Cox, E. : "The Fuzzy Systems Handbook, a Practitioner's Guide to Building, Using, and Maintaining Fuzzy Systems", *Ap Professional*.

[9] Derrig, R. A. and K. M. Ostaszewski: "Fuzzy Techniques of Pattern Recognition", *4th Afir International Colloquium, p: 141-171*.

[10] Derrig R. A. and K. M. Ostaszewski (1995): "Fuzzy techniques of Pattern Recogintion in Risk and Claim Classification", *The journal of Risk and Insurance, Vol. 62, No. 3, p: 447-482*.

[11] DeWit, G. W. (1982): "Underwriting and Uncertainty", *Insurance: Mathematics and Economics 1 (1982), p: 277-285*.

[12] Dubois, D. and H. Prade : "Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications".

[13] Ebanks, B. and W. Karwowski and K. Ostaszewski (1992): "Application of Measures of Fuzziness to Risk Classification in Insurance", *1992 IEEE, p: 290-291*.

[14] Gutierrez, I. (1989): "Fuzzy Numbers and Net Present value", *Scand. J. Mgmt. Vol. 5, No.2, p: 149-159.*

[15] Horgby, P. J. (1998): "Risk Classification by Fuzzy Inference", *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory, 23, p: 63-82*.

[16] Hosler, V. (1992): "The Application of Fuzzy Sets to Group Health Underwriting", *Actuarial Research Clearing House, Vol. 2*.

[17] Kahraman, G. and A. Beskese and F. T. Bozbura (2006): "Fuzzy Regression Approaches and Applications", *Springer-Verlag Berlin Heidelberg, C. Kahraman et al, p: 590-615*.

[18] Kim K.J., Moskowitz H., Koksalan (1996): "Fuzzy Vesrus Statistical Linear Regression", *European Journal of Operational Research 92, p:417-434.*

[19] Klir, G. J. and b. Yuan (1995): "Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Theory and Applications", *Prentice Hall P. T. R*.

[20] Lemaire, J. : "Fuzzy Insurance", *Wharton School, University of Pennsylvania*.

[21] Ostaszewski, K. M.(1993)**:** "An Investigation Into Possible Applications of Fuzzy Sets Methods in Actuarial Science", *Society of Actuaries, Schaumburg, Illinois.*

[22] Ostaszewski, Ebanks, Karwowski, Bruce, Waldemar (1992): "Application of Measures of Fuziness to Risk Classification in Insurance", *Computing and Information, IEEE Computrer Society Press, Los Alamitos, California, p. 290-291.*

[23] Peters G. (1994): "Fuzzy Linear Regression with Fuzzy Intervals", *Fuzzy Sets and Systems 63, p: 44-55.*

[24] Savic D., Pedrycz W. (1991): "Evaluation of Fuzzy Linear Regression Models", *Fuzzy Sets and Systems 39, p: 51-63.*

[25] Shapiro, A. F. : "Fuzzy regression and the Term Structure of Interest Rates Revisited", *Penn State University, Smeanl College of Business*.

[26] Shapiro, A. F. (2004): "Fuzzy Logic in Insurance: the First 20 Years", *Smeal College f Business, Penn State University*.

[27] Shapiro, A. F. and L. C. Jain (2003): "Intelligent and Other Computational Techniques in Insurance, Theory and Applications", *Series on Innovative Intelligence Vol 6, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd*.

[28] Tanaka S.(1982): "Linear Regression Analysis with Fuzzy Model", *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics 12, p: 903-907*

[29] Verrall, R. J. and Y. H. Yahoubov (1998) : "A Fuzzy Approach to Grouping by Policyholder Age in General Insurance", *Acturarial research Paper No. 104, Department of Actuarial Science and Statistics*.

[30] Wang, H. F., Tsaur R. C. (2000): "Insight of a Fuzzy Regression Model", *Fuzzy Sets and Systems, 112 (3,) p: 355- 369*

[31] Young, V. R. : “Adjusting Indicated Insurance Rates: Fuzzy Rules that Consider both Experience and Auxiliary Data”, *p: 734-765*.

[32] Young, V. R. (1993): “The Application of Fuzzy Sets to Group Health Underwriting”, *Transactions of Society of Actuaries, vol. 45, p: 551-590.*

[33] Young, V. R. (1996): “Insurance rate Changing: a Fuzzy Logic Approach”, *The Journal of Risk and Insurance, vol. 63, no. 3, p: 461-484*.

[34] Zimmerman H. J. (1999): “Practical Applications of Fuzzy Technologies”, *Springer*

[35] Zimmerman H. J., Zysno P. (1980): “Latent Connectives in Human Decision Making”, aking”, *Fuzzy Sets and Systems, 4, p. 37-51*