

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ  
ΤΜΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ**

**ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΥΤΤΑΡΩΝ  
ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ**

**ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ**

**ΚΙΜΩΝ Σ. ΣΠΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ**

**ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2000**

**Στον πατέρα μου**

## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Στέρησα μεγάλο μέρος του χρόνου μου από τους ανθρώπους μου και θα ήθελα να τους ευχαριστήσω για την υπομονή τους, ιδίως τη σύζυγό μου και τη μητέρα μου. Η ίδια η εργασία δεν θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί χωρίς την καθοδήγηση, συμβουλή και ενθάρρυνση της φίλης και καθηγήτριάς μου Στέλλας Σοφianoπούλου που μου έδωσε και την ευκαιρία να πραγματοποιήσω το παλιό μου όνειρο. Οι συνάδελφοί μου στην ICAP με υποστήριξαν και τους ευχαριστώ και αυτούς. Τέλος, θερμές ευχαριστίες σε όλους εκείνους με τους οποίους αντάλλαξα απόψεις για το θέμα της διατριβής.

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ .....	i
ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
1. Η ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΜΕ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΑ ΚΥΤΤΑΡΑ .....	4
2. Ο ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΥΤΤΑΡΩΝ – ΠΑΡΟΥΣΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ....	13
2.1. Τα δεδομένα στο Σχεδιασμό Βιομηχανικών Κυττάρων.....	14
2.2. Ταξινόμηση και κριτική των μεθόδων Σχεδιασμού Βιομηχανικών Κυττάρων.....	17
2.2.1. Αλγόριθμοι ταυτόχρονης ομαδοποίησης.....	18
2.2.2. Αλγόριθμοι σειριακής ομαδοποίησης.....	24
2.3. Μερικά συμπεράσματα .....	29
3. ΜΙΑ ΠΡΟΤΑΣΗ ΓΙΑ ΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΕΝΑ ΕΝΙΑΙΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΔΙΑΤΥΠΩΣΕΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ .....	32
3.1. Η προτεινόμενη κατά στάδια προσέγγιση: βασικό μοντέλο, γραφοθεωρητική μορφοποίηση και ο συνυπολογισμός άλλων παραμέτρων και δυνατοτήτων.....	33
3.2. Η διάσπαση του ΠΣΒΚ σε υποπροβλήματα Διαμερισμού Γράφου .....	40
3.3. Το ΠΣΒΚ ως πρόβλημα 0-1 Ακεραίου Προγραμματισμού: Ο υπολογισμός των στοιχείων κόστους και μέθοδοι επίλυσης.....	46
3.3.1. Άμεσες μέθοδοι χαλάρωσης.....	48
3.3.2. Μέθοδος Τεμνόντων Επιπέδων (Cutting Planes) .....	52
3.3.3. b-Matching και Χαλάρωση Lagrange (Lagrangian Relaxation) ....	53
3.4. Το ΠΣΒΚ ως Πρόβλημα Διαμερισμού Συνόλου (Set Partitioning) .....	57
3.5. Μορφοποιήσεις 0-1 Τετραγωνικού Προγραμματισμού και Βέλτιστης Προσέγγισης Μητρώου (Best Matrix Approximation) .....	61

3.6. Άλλες προσεγγίσεις .....	72
4. ΕΝΑΣ ΑΚΡΙΒΗΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΥΤΤΑΡΩΝ .....	77
4.1. Γενική περιγραφή – τα δομικά στοιχεία της δένδροειδούς αναζήτησης .....	78
4.1.1. Το όριο Gilmore-Lawler .....	79
4.1.2. Το όριο Rendl-Wolkowicz της περίπτωσης ισοκατανομής .....	84
4.1.3. Ο ευρετικός αλγόριθμος συνένωσης και ανταλλαγής.....	88
4.2. Η εφαρμογή της δένδροειδούς αναζήτησης.....	91
4.3. Υπολογιστικές απόψεις και αποτελέσματα .....	95
5. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ: ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΕΥΡΕΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ TABU SEARCH.....	104
5.1. Ορισμοί – Τα βασικά δομικά στοιχεία του πλαισίου Tabu Search.....	106
5.1.1. Η μορφή μίας λύσης.....	107
5.1.2. Ορισμός των «κινήσεων» της αναζήτησης .....	107
5.1.3. Βραχυπρόθεσμη μνήμη: οι απαγορευμένες (Tabu) κινήσεις.....	108
5.1.4. Βραχυπρόθεσμη μνήμη: τα κριτήρια άρσης απαγόρευσης .....	110
5.1.5. Οι μακροπρόθεσμες μνήμες .....	113
5.2. Η στρατηγική της αναζήτησης.....	116
5.2.1. Κανονικές και προγραμματισμένες επαναλήψεις .....	116
5.2.2. Ο τρόπος εφαρμογής της στρατηγικής – η πορεία της αναζήτησης .....	118
5.3. Υπολογιστικά αποτελέσματα .....	123
6. ΒΕΛΤΙΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ: Ο ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΥΤΤΑΡΩΝ .....	128
6.1. Η σκοπιμότητα της απαλοιφής των στοιχείων εξαίρεσης και μερικές όψεις του προβλήματος.....	129
6.2. Μέθοδοι απαλοιφής των στοιχείων εξαίρεσης.....	135
7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ .....	140
7.1. Συμπεράσματα.....	140
7.2. Προτάσεις για μελλοντική έρευνα .....	145

7.2.1. Προτάσεις για περαιτέρω μελέτη του Προβλήματος	
Σχεδιασμού Βιομηχανικών Κυττάρων .....	145
7.2.2. Προτάσεις για τη βελτίωση του ακριβούς αλγορίθμου.....	146
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	148
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	160
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ .....	169

## **ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ**

ΓΠΑ	Γραμμικό Πρόβλημα Αντιστοίχισης
ΓΠΜ	Γραμμικό Πρόβλημα Μεταφοράς
ΠΔΓ	Πρόβλημα Διαμερισμού Γράφου
ΠΣΒΚ	Πρόβλημα Σχεδιασμού Βιομηχανικών Κυττάρων
ΤΠΑ	Τετραγωνικό Πρόβλημα Αντιστοίχισης
ΤΠΜ	Τετραγωνικό Πρόβλημα Μεταφοράς
GL	Φράγμα Gilmore-Lawler
RW	Φράγμα Rendl-Wolkowicz
TS	Tabu Search

## **ΕΙΣΑΓΩΓΗ**

Η αποκέντρωση της παραγωγής σε βιομηχανικά “κτύπαρα” είναι η λύση στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν σήμερα τα παραδοσιακά σχήματα job shop και flow shop και επίσης το ενδιάμεσο βήμα για τη μετάβαση σε προηγμένες τεχνολογίες πλήρως αυτοματοποιημένης παραγωγής ή/και σχήματα τύπου Just-in-Time. Το πρώτο και βασικό στάδιο για τη μελέτη μίας τέτοιας αναδιοργάνωσης είναι η ομαδοποίηση μηχανών και επεξεργαζομένων κομματιών, δηλαδή ο σχηματισμός των βιομηχανικών κυττάρων. Ο προγραμματισμός της παραγωγής, η εισαγωγή αυτοματισμών και ο έλεγχος είναι επόμενα στάδια της μελέτης και προϋποθέτουν την ομαδοποίηση αυτή.

Ο σχεδιασμός των βιομηχανικών κυττάρων ανάγεται σε «δύσκολο» (NP-hard) πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης και αποτελεί το αντικείμενο της διατριβής. Η έμφαση δίνεται σε μορφοποιήσεις και μεθόδους Μαθηματικού Προγραμματισμού, εξετάζονται όμως και ορισμένες πρακτικές όψεις και συμπληρωματικές ευρετικές τεχνικές, για λόγους πληρότητας και μεγαλύτερης προσαρμογής σε πραγματικές βιομηχανικές καταστάσεις.

Στο Κεφάλαιο 1 δίνεται μία συνοπτική εικόνα του σχήματος παραγωγής με βιομηχανικά κτύπαρα και των πλεονεκτημάτων έναντι παλαιότερων μεθόδων.

Στο Κεφάλαιο 2 περιγράφεται η παρούσα κατάσταση στο σχεδιασμό βιομηχανικών κυττάρων. Σκοπός είναι να εξεταστούν οι τεχνικές και οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται και να προσδιοριστούν οι τυχόν αδυναμίες τους. Καταδεικνύεται ότι το πρόβλημα είναι εξαιρετικά πολυπαραμετρικό με αποτέλεσμα η σχετική έρευνα να κινείται σε πολλές και διαφορετικές



κατευθύνσεις. Σε αντίθεση με πολλές άλλες ερευνητικές περιοχές, δεν υπάρχει κάποια κοινά αποδεκτή διατύπωση που να έχει συγκεντρώσει εστιασμένη προσπάθεια και αυτό έχει παρεμποδίσει τόσο την εξεύρεση μεθόδων για την ακριβή επίλυση προβλημάτων πρακτικού μεγέθους όσο και τη δημιουργία βάσης αξιολόγησης για ευρετικούς αλγορίθμους.

Στο Κεφάλαιο 3 δίνεται μία ολοκληρωμένη σχεδιαστική πρόταση και απομονώνεται η μορφοποίηση 0-1 Ακεραίου Προγραμματισμού που συλλαμβάνει το μεγαλύτερο μέρος της πολυπλοκότητας του προβλήματος. Για τη μορφοποίηση αυτή περιγράφονται μέθοδοι επίλυσης και σχέσεις με άλλες μορφοποιήσεις 0-1 Τετραγωνικού Προγραμματισμού και Βέλτιστης Προσέγγισης Μητρώου που οδηγούν σε καλύτερες μεθόδους. Με τα παρατιθέμενα, μεταφέρονται στο χώρο του σχεδιασμού βιομηχανικών κυττάρων οι νεότερες εξελίξεις σε μαθηματικά «συγγενείς» περιοχές και συντίθεται ένα ενιαίο πλαίσιο διατυπώσεων Μαθηματικού Προγραμματισμού.

Τα νεότερα αυτά αποτελέσματα αποτελούν τη βάση για τον ακριβή αλγόριθμο που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 4 και επιλύει σε μικρούς χρόνους προβλήματα αρκετά μεγαλύτερα από αυτά που συναντά κανείς στη βιβλιογραφία σε μεθόδους παρόμοιας πολυπλοκότητας. Ο αλγόριθμος είναι τύπου κλάδων και ορίων και χρησιμοποιεί αναλόγως του ερευνώμενου σημείου δύο φράγματα, ένα για το Τετραγωνικό Πρόβλημα Αντιστοίχισης και ένα για το Τετραγωνικό Πρόβλημα Μεταφοράς. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνονται αποδόσεις πολύ καλύτερες από ότι αν η επίλυση βασιζόταν στη μία μόνο από τις μορφοποιήσεις αυτές.

Στο Κεφάλαιο 5 περιγράφεται μία πρωτότυπη εφαρμογή της προσεγγιστικής μεθόδου Tabu Search στο ίδιο “πρωτεύον” μοντέλο του σχεδιασμού. Ο συνδυασμός κατάλληλων δομών βραχυπρόθεσμης – μακροπρόθεσμης μνήμης και στρατηγικής αναζήτησης οδηγεί σε απόλυτο ποσοστό επιτυχίας στις διαστάσεις του προβλήματος που αντιμετωπίζει ο ακριβής αλγόριθμος, σε αμελητέους χρόνους. Για ακόμα μεγαλύτερα προβλήματα δεν υπάρχει βάση

σύγκρισης για την αξιολόγηση του προσεγγιστικού αλγορίθμου. Ορισμένες πάντως δοκιμές με “μαθηματικά παρεμφερή” (αν και κάπως πιο “εύκολα”) δεδομένα από άλλον ερευνητικό χώρο σε διαστάσεις τριπλάσιες από αυτές που συναντά κανείς στο σχεδιασμό βιομηχανικών κυττάρων, έδωσαν παντού βέλτιστες λύσεις σε μικρούς χρόνους, και αυτό είναι μία ένδειξη για την απόδοση του αλγορίθμου στα μεγαλύτερα προβλήματα της πράξης.

Στο Κεφάλαιο 6 περιγράφονται πρακτικές απόψεις του προβλήματος και ευρετικές τεχνικές που συμπληρώνουν τον πυρήνα Μαθηματικού Προγραμματισμού, στα πλαίσια της όλης σχεδιαστικής πρότασης. Τέλος, στο Κεφάλαιο 7 παρουσιάζονται συμπεράσματα και δίνονται προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

### Η ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΜΕ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΑ ΚΥΤΤΑΡΑ

Οι βιομηχανικές επιχειρήσεις αντιλαμβάνονται σχετικά εύκολα τις αλλαγές στην αγορά και προσαρμόζουν ανάλογα τη συμπεριφορά τους προς την πελατεία με διάφορους τρόπους, πολλές φορές όμως με βραδύτητα και υψηλό κόστος. Η επιχείρηση βέβαια που επιδιώκει την ανάπτυξη δεν μπορεί να αρκεστεί σε μία τέτοια «παθητική» αντιμετώπιση. Οι ανάγκες της πελατείας έχουν ήδη αλλάξει ριζικά τις ίδιες τις απαιτήσεις της παραγωγής, και αυτό αποτελεί πρόκληση και επενδυτική ευκαιρία για τη βιομηχανική επιχείρηση που θέλει να αποκτήσει προβάδισμα. Ο στόχος είναι ο ανασχεδιασμός της παραγωγής για ανταπόκριση στις νέες απαιτήσεις με ταχύτητα, ευελιξία και οικονομία. Σκοπός του παρόντος Κεφαλαίου είναι να περιγραφεί συνοπτικά το αποδεδειγμένα αποτελεσματικό σχήμα Παραγωγής με Βιομηχανικά Κύτταρα που συνιστά διαφορετική φιλοσοφία στην παραγωγή και πλεονεκτεί έναντι των παραδοσιακών μεθόδων.

Ξεκινώντας από το συμβατικό περιβάλλον παραγωγής, αυτό απαντάται σε δύο αντιδιαμετρικά αντίθετα σχήματα:

Το **σχήμα παραγωγής προσανατολισμένης στην παραγγελία** (job shop), με κύριο χαρακτηριστικό την ευελιξία, για την αντιμετώπιση μεγάλης ποικιλίας εργασιών μικρών ποσοτήτων. Στο σχήμα αυτό η χωροταξία της παραγωγής καθορίζεται από τη διεργασία (process layout). Κλασικό παράδειγμα είναι οι ναυπηγοεπισκευαστικές εργασίες, όπου συναντά κανείς χυτήριο, τμήμα πρέσσας, συγκολλητήριο, κ.λπ. Η έμφαση είναι στην ευκολία

προσαρμογής σε συνεχώς μεταβαλλόμενες ανάγκες, εις βάρος του ρυθμού και του κόστους παραγωγής. Οι μηχανές έχουν κατά κανόνα πολλαπλές χρήσεις για λόγους ευελιξίας, πράγμα που οδηγεί σε συχνές ρυθμίσεις και αλλαγές εργαλείων. Επίσης, τα διακινούμενα μέρη της παραγγελίας (τα “κομμάτια”) αναλώνουν αρκετό χρόνο σε μετακινήσεις μεταξύ τμημάτων διεργασιών ή σε αναμονές, επειδή η χωροταξία δεν είναι δυνατόν να ταιριάζει στη σειρά επεξεργασίας της κάθε παραγγελίας.

Στο άλλο άκρο συναντά κανείς το **σχήμα παραγωγής προσανατολισμένης στο προϊόν** που χαρακτηρίζεται από συνεχή και σχεδόν αδιάλειπτη ροή τμημάτων προϊόντος - κομματιών (flow shop). Εδώ ο στόχος είναι η μαζική παραγωγή μικρής ποικιλίας προϊόντων, με χαρακτηριστικό παράδειγμα την κλασική χωροταξία στις αυτοκινητοβιομηχανίες, όπου τα τμήματα καθορίζονται από το προϊόν (product layout), για παράδειγμα τμήματα κινητήρα, αμαξώματος κ.λπ. Ο σχεδιασμός αυτός προβλέπει μηχανές μοναδικής χρήσης (dedicated) και βασίζεται στη σταθερή σειρά επεξεργασίας, με τελικό αποτέλεσμα οικονομία και υψηλούς ρυθμούς παραγωγής. Σε αντίθεση όμως με το προηγούμενο σχήμα, η προσέγγιση αυτή είναι τελείως δυσκίνητη και κάθε αλλαγή στο πλάνο επεξεργασίας (όπως για την παραγωγή νέων προϊόντων με νέες τεχνολογίες) επάγει υψηλότατο κόστος.

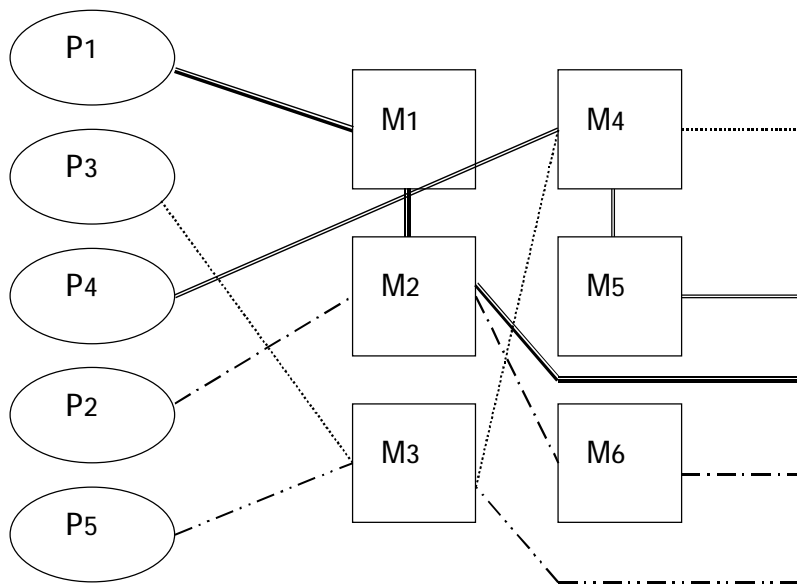
Τα σχήματα αυτά λειτουργούσαν χωρίς προβλήματα όσο η αγορά δεν ήταν έντονα ανταγωνιστική. Στις σύγχρονες όμως αγορές, το βάρος έχει μεταφερθεί στην πρόβλεψη και ταχύτατη ανταπόκριση στις ανάγκες του πελάτη, ο οποίος πλέον είναι απαιτητικός, θεωρεί δεδομένο το χαμηλό κόστος, και επιλέγει προμηθευτές με κριτήρια την ποιότητα και ποικιλία των προϊόντων και την ποιότητα και ταχύτητα της εξυπηρέτησης. Με άλλα λόγια, ο πελάτης είναι αυτός που καθοδηγεί την παραγωγή.

Οι τάσεις αυτές φέρνουν και τα δύο προαναφερθέντα σχήματα σε μειονεκτική θέση. Αντί της μαζικής παραγωγής έχουμε πλέον μαζική διαρκή προσαρμογή προϊόντων όπου το ζητούμενο είναι η οικονομική και ταχεία παραγωγή

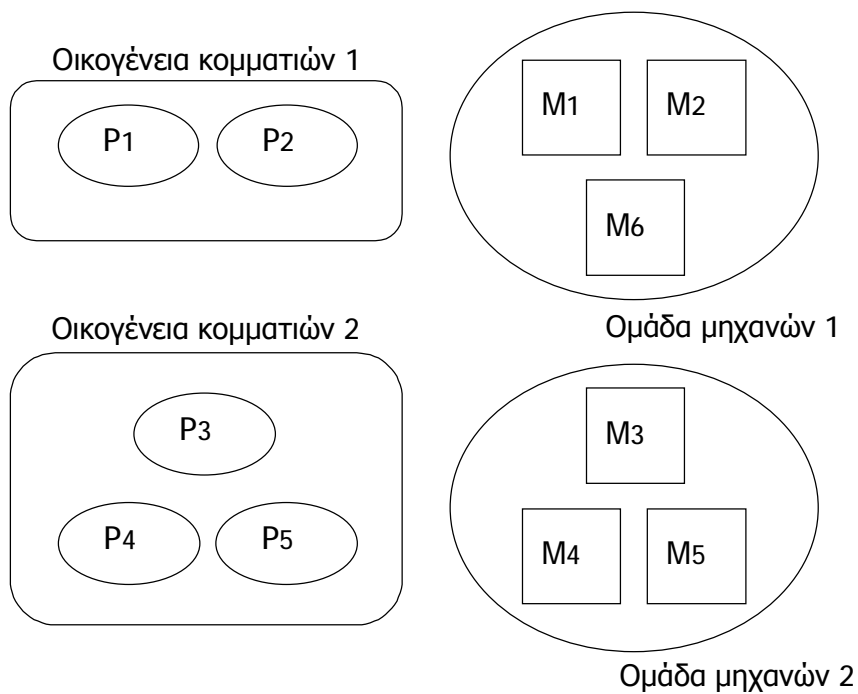
μεγάλης ποικιλίας παρτίδων παραγωγής (batches), η κάθε μία μικρού όγκου. Στις συνθήκες αυτές, ο μεν προσανατολισμός στην παραγγελία είναι οικονομικά ασύμφορος, ο δε προσανατολισμός στο προϊόν δεν είναι ευέλικτος.

Σε ένα τέτοιο περιβάλλον, λύση μπορεί να αποτελέσει ένα ενδιάμεσο σχήμα που συνδυάζει τους ρυθμούς παραγωγής του flow shop με την ευελιξία του job shop. Αυτή ακριβώς είναι η φιλοσοφία της Τεχνολογίας Ομαδοποίησης της Παραγωγής (Group Technology) που στην πραγματικότητα απευθύνεται σε όλες τις λειτουργίες μίας επιχείρησης. Σύμφωνα με τον Ranson [1972], η Τεχνολογία Ομαδοποίησης της Παραγωγής αφορά την αναδιοργάνωση της λειτουργίας μίας επιχείρησης με σκοπό να επιτυγχάνονται τα οφέλη της μαζικής παραγωγής σε περιβάλλον ζήτησης μικρών έως και μεσαίων όγκων μεγάλης ποικιλίας προϊόντων.

Η εφαρμογή της φιλοσοφίας αυτής στη βιομηχανική παραγωγή είναι η Παραγωγή με Βιομηχανικά Κύτταρα (Cellular Manufacturing). Η κεντρική ιδέα είναι η ομαδοποίηση, αφ' ενός των μηχανών σε ομάδες (machine groups) και αφ' ετέρου των διακινουμένων κομματιών σε ομοειδείς ως προς διάφορα κριτήρια οικογένειες (part families) οι οποίες αντιστοιχίζονται στις ομάδες μηχανών και μαζί σχηματίζουν τα βιομηχανικά κύτταρα (manufacturing cells). Με τον τρόπο αυτό η παραγωγή αποκεντρώνεται και τα προβλήματα και οι αποφάσεις αντιμετωπίζονται στο επίπεδο του (ιδανικά) τελείως αυτόνομου βιομηχανικού κυττάρου. Στην ουσία, η όλη παραγωγή είναι τύπου job shop, αποτελείται όμως από “νησίδες” flow shop. Τα σχήματα που ακολουθούν δίνουν μία εικόνα της εφαρμογής αυτής.



**Σχήμα 1.1(A).** Μηχανές και κομμάτια πριν την ομαδοποίηση.



**Σχήμα 1.1(B).** Ομαδοποιημένες μηχανές και κομμάτια.

Τα οφέλη στο σχήμα Παραγωγής με Βιομηχανικά Κύτταρα είναι τα εξής (βλ. και Hyer [1984]):

- Μείωση των χρόνων ρύθμισης (setup) μηχανών και αλλαγών εργαλείων και καλύτερη εκμετάλλευση των μηχανών. Τα κομμάτια μίας οικογένειας κομματιών που αντιστοιχίζεται σε ένα βιομηχανικό κύτταρο είναι παρόμοια ως προς τις απαιτήσεις επεξεργασίας. Αυτό επιτρέπει το σχεδιασμό εξαρτημάτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν είτε ως έχουν για την επεξεργασία όλων των κομματιών μιας οικογένειας είτε με κάποιες αλλαγές για λίγες μόνο ειδικές περιπτώσεις.
- Μείωση των χρόνων διακίνησης υλικών. Κάθε βασικό στάδιο επεξεργασίας ενός κομματιού ολοκληρώνεται μέσα στο ίδιο κύτταρο, οπότε και το ίδιο το κομμάτι έχει λιγότερες μετακινήσεις αλλά και τα βοηθητικά υλικά χρησιμοποιούνται τοπικά μέσα στο κύτταρο. Το πλεονέκτημα βέβαια αυτό υπάρχει όταν οι αποστάσεις δεν είναι αμελητέες, τα δε κύτταρα έχουν σύνηθες (και όχι πολύ μεγάλο) μέγεθος.
- Μείωση των χρόνων επεξεργασίας των κομματιών. Οι μηχανές σε ένα βιομηχανικό κύτταρο επεξεργάζονται συνεχώς την ίδια συγκεκριμένη οικογένεια κομματιών και για το λόγο αυτό δεν χρειάζεται να διαθέτουν παρά μόνο τις απαραίτητες λειτουργίες. Αυτό, σε συνδυασμό με τις μικρότερες απαιτήσεις σε ρυθμίσεις και αλλαγές εργαλείων, οδηγεί σε ταχύτερη επεξεργασία των κομματιών, όπως στο flow shop.
- Μείωση του χρόνου παραγωγής (throughput time). Επειδή οι μηχανές σε ένα βιομηχανικό κύτταρο είναι κοντά η μία στην άλλη, μία παρτίδα κομματιών δεν περιμένει την ολοκλήρωση μίας επεξεργασίας για να μεταβεί ως μία μονάδα στην επόμενη (όπως στο κλασικό job shop). Τα κομμάτια υφίστανται επεξεργασία σειριακά μέσα στο κύτταρο, όπως δηλαδή στο flow shop, με αποτέλεσμα σημαντικό κέρδος χρόνου. Η παρτίδα επανασυντίθεται μόνο για τη μετακίνηση σε άλλο κύτταρο.
- Μείωση των αποθεμάτων πρώτων υλών και ημιτελών προϊόντων και εξοικονόμηση χώρου. Στο σχήμα Παραγωγής με Βιομηχανικά Κύτταρα το οικονομικό μέγεθος παρτίδας (economic batch size) είναι μικρό και αυτό διότι δεν υπάρχει μεγάλο σταθερό κόστος ρυθμίσεων μηχανών και αλλαγών εργαλείων. Επειδή μάλιστα αυτό ισχύει για όλες τις μηχανές, δεν

υπάρχουν κρίσιμες θέσεις που να απαιτούν αποθέματα ασφαλείας. Το αποτέλεσμα είναι εξομάλυνση της ροής της παραγωγής.

- Απλοποίηση του συνολικού σχεδίου επεξεργασίας και του προγραμματισμού παραγωγής και αποτελεσματικότερος ποιοτικός έλεγχος. Τα όποια προβλήματα παρουσιάζονται αντιμετωπίζονται σε επίπεδο βιομηχανικού κυττάρου και δεν διαχέονται σε όλη την παραγωγή.
- Αύξηση της ικανοποίησης του εργαζομένου. Η καλύτερη εκμετάλλευση των μηχανών με τη μείωση των χρόνων ρύθμισης και αλλαγών εργαλείων, οδηγεί σε κάποια περίσσεια χρόνου στις μηχανές που δεν είναι μειονέκτημα, αλλά «έξυπνη» χρήση (Singh και Rajamani [1996]). Αυτό με τη σειρά του επιτρέπει την ανάθεση του χειρισμού περισσότερων από μίας μηχανής σε κάθε εργαζόμενο και την εκ περιτροπής εργασία (rotation). Η εργασία σε ένα βιομηχανικό κύτταρο είναι ομαδική, η κάθε δε ομάδα έχει την ικανοποίηση του ορατού αποτελέσματος, καθώς διεκπεραιώνει αυτοτελή στάδια επεξεργασίας.

Μειονεκτήματα αναφέρονται μόνο σε περιπτώσεις ατελούς ή λανθασμένου σχεδιασμού, για παράδειγμα η δυσκολία στις επεξεργασίες κομματιών που για οποιοδήποτε λόγο παραμένουν εκτός βιομηχανικών κυττάρων ή η ανισορροπία στην κατανομή του φόρτου επεξεργασίας στα κύτταρα (Wemmerlton και Hyer, [1989]). Ειδικά το τελευταίο, σε συνδυασμό με την εξειδίκευση των μηχανών μέσα σε κάθε βιομηχανικό κύτταρο, οδηγεί σε συσσώρευση αποθεμάτων και μεγάλους χρόνους αναμονής.

Κάτι που αρχικά θεωρήθηκε ως μειονέκτημα, αλλά δεν είναι, είναι οι αυξημένες απαιτήσεις προληπτικής συντήρησης των μηχανών. Κάθε παρτίδα κομματιών υφίσταται επεξεργασία σε μία κατάλληλα ρυθμισμένη και εφοδιασμένη με εξαρτήματα μηχανή. Αν η μηχανή αυτή τεθεί εκτός λειτουργίας για σχετικά μεγάλο χρονικό διάστημα το κόστος για την προσωρινή κάλυψη του κενού είναι μεγάλο (πολλές φορές η μόνη λύση είναι η ενοικίαση εξοπλισμού), επειδή όπως και στο flow shop δεν υπάρχει ευελιξία στην μεταφορά της επεξεργασίας σε παρόμοιες μηχανές. Τελικά βέβαια, η



συστηματική προληπτική συντήρηση έχει μακροπρόθεσμο όφελος για την επιχείρηση, συμβάλλει δε επίσης στην αύξηση της ικανοποίησης του εργαζομένου. Εκτός από την ακόμα μεγαλύτερη ποικιλία στην εργασία, η ομάδα σε ένα βιομηχανικό κύτταρο είναι υπεύθυνη για την κατάσταση των μηχανών σε αυτό και δημιουργείται έτσι κλίμα υγιούς ανταγωνισμού μεταξύ ομάδων.

Για να υπάρχουν όλα τα προαναφερθέντα οφέλη, η χωροταξία της ομαδοποίησης των μηχανών πρέπει να είναι «φυσική» (physical machine layout). Η «λογική» χωροθέτηση (logical machine layout) είναι βεβαίως μία δυνατή ενδιάμεση και οικονομικότερη ως προς την επένδυση λύση, αλλά δεν συνιστά πλήρη εφαρμογή της φιλοσοφίας Ομαδοποίησης της Παραγωγής.

Τα προαναφερθέντα άμεσα οφέλη διευκολύνουν τη διαχείριση της παραγωγής και έχουν με τη σειρά τους θετικές επιπτώσεις στην όλη οργάνωση, για ταχεία ανταπόκριση στις παραγγελίες, έμφαση στην ποιότητα και καλύτερη εξυπηρέτηση του πελάτη. Στην πραγματικότητα, είναι δύσκολο να βρει κανείς λειτουργίες της επιχείρησης που δεν επωφελούνται από αυτό το σχήμα παραγωγής. Τα βιομηχανικά κύτταρα αποτελούν πλέον κέντρα κόστους, πράγμα που οδηγεί σε ακρίβεια κοστολόγησης και καλύτερη πληροφόρηση των τμημάτων πωλήσεων και μάρκετινγκ. Η «κωδικοποίηση» της παραγωγής απλοποιεί τις διαδικασίες προμηθειών και σε συνδυασμό με τη μεγαλύτερη ακρίβεια στην πρόβλεψη της ζήτησης οδηγεί σε οικονομίες κλίμακας. Η τυποποίηση της παραγωγής, και ειδικότερα η ομαδοποίηση των κομματιών, μειώνει το κόστος σχεδιασμού και δοκιμής νέων κομματιών.

Ο τρόπος ομαδοποίησης μηχανών και κομματιών, ο σχηματισμός δηλαδή των βιομηχανικών κυττάρων, είναι το θέμα που μελετάται στην παρούσα διατριβή και βασικός άξονας - προαπαιτήση στην έρευνα για την εφαρμογή της Τεχνολογίας Ομαδοποίησης της Παραγωγής. Τα πεδία μελέτης βέβαια δεν περιορίζονται εδώ. Το επόμενο φυσιολογικό βήμα μετά τη μορφοποίηση των κυττάρων είναι η προσαρμογή τεχνολογιών αυτοματοποίησης της παραγωγής

(CAM, διαχείριση υλικών με AGVs και συστήματα ρομποτικής, CIM κ.α.) σε αυτό το σχήμα παραγωγής και τα ανακλύπτοντα θέματα προγραμματισμού και ελέγχου. Τα ζητήματα αυτά παρουσιάζουν ομοίως έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον για έναν πρόσθετο λόγο. Σήμερα δεν εννοείται μετάβαση σε τέτοιες τεχνολογίες χωρίς να έχει προηγηθεί ο ανασχεδιασμός σε βιομηχανικά κύτταρα. Και αν αρχικά η υιοθέτηση του σχήματος αυτού είχε θεωρηθεί απλώς σκόπιμη, για λόγους εξομάλυνσης των αλλαγών στην παραγωγή, μείωσης του κόστους της επένδυσης, ταχύτερης απόσβεσης και μείωσης των κινδύνων ανεπιθύμητων αποτελεσμάτων (Suresh και Meredith [1985]), πολύ σύντομα η πράξη έδειξε ότι η Παραγωγή με Βιομηχανικά Κύτταρα όχι μόνο υποστηρίζει μία τέτοια μετάβαση, αλλά επιβάλλεται πριν από αυτή (Singh και Rajamani [1996], Wemmerlov και Hyer [1987a]).

Από την έρευνα σε τέτοια θέματα έχει προκύψει και η διάκριση των βιομηχανικών κυττάρων σε στελεχωμένα (manned) και μη στελεχωμένα (unmanned), αναλόγως του βαθμού αυτοματοποίησης σε αυτά. Τα τελευταία είναι πλήρως αυτοματοποιημένα και μελετητικά εμπίπτουν συγχρόνως στην περιοχή των Ευέλικτων Βιομηχανικών Συστημάτων (Flexible Manufacturing Systems), για το λόγο δε αυτό αποκαλούνται Ευέλικτα Κυψελιδωτά Βιομηχανικά Συστήματα (Cellular Flexible Manufacturing Systems).

Θεωρητικά αλλά και πρακτικά, η εφαρμογή της Τεχνολογίας Ομαδοποίησης Παραγωγής είναι επίσης το πρώτο βήμα για την υιοθέτηση του σχήματος παραγωγής Just-in-Time, όπου πράγματι, μερικά από τα επιδιωκόμενα εφαρμόζονται σε ακραίο βαθμό, για παράδειγμα (ιδανικά) με τη μείωση του οικονομικού μεγέθους παρτίδας στο ένα κομμάτι και την πλήρη απαλοιφή των αποθεμάτων.

Ο όρος «Τεχνολογία Ομαδοποίηση Παραγωγής» χρησιμοποιείται πολύ συχνά για την αναφορά στο πλαίσιο σχεδιασμού παρά σε αυτό καθ' εαυτό το αποτέλεσμα, δηλαδή το σχήμα παραγωγής με βιομηχανικά κύτταρα. Με αυτή την έννοια, πρέπει να αναφερθεί εδώ η Γενικευμένη Τεχνολογία

Ομαδοποίησης της Παραγωγής (Generalized Group Technology), που αποτελεί επέκταση του σχεδιαστικού πλαισίου, βλ. Kusiak [1987]. Η ειδοποιός διαφορά στις βιομηχανικές εφαρμογές είναι η ύπαρξη εναλλακτικών πλάνων επεξεργασίας κομματιών που λαμβάνονται υπόψη στο σχεδιασμό. Το πρόβλημα στις περιπτώσεις αυτές είναι τελείως διαφορετικό και δεν εξετάζεται στα πλαίσια της παρούσας διατριβής.

Ιστορικά, η Παραγωγή με Βιομηχανικά Κύτταρα θεωρείται ότι παρουσιάστηκε ολοκληρωμένα στη βιβλιογραφία από τον Burbidge [1975]. Αξίζει να σημειωθεί πάντως ότι προηγήθηκε μία περιορισμένη εφαρμογή στην πρώην ΕΣΣΔ στα τέλη της δεκαετίας του 1960, από τον Mitrofanov, με ομαδοποίηση κομματιών σε μία μηχανή. Γενικά η νέα φιλοσοφία υιοθετήθηκε πολύ νωρίτερα στην Ευρώπη από ότι στις ΗΠΑ (όπου άρχισε να εφαρμόζεται σε μεγάλη κλίμακα μόλις την τελευταία δεκαετία). Αυτό πιθανόν οφείλεται στις διαφορετικές «ταχύτητες» με τις οποίες κινήθηκαν αρχικά οι επιχειρήσεις προς τα πλέον προηγμένα σχήματα πλήρως αυτοματοποιημένης παραγωγής και Just-in-Time. Οι Ευρωπαϊκές επιχειρήσεις προτίμησαν και μελέτησαν μία πιο συντηρητική και οικονομική στρατηγική ανάπτυξης. Αντιθέτως, πολλές επιχειρήσεις στις ΗΠΑ δοκίμασαν να αντιγράψουν άμεσα τις Ιαπωνικές μεθόδους, με μάλλον πτωχά αποτελέσματα, εξ ου και επικράτησε τελικά η Τεχνολογία Ομαδοποίησης της Παραγωγής ως ενδιάμεσο βήμα και στις ΗΠΑ. Εννοείται ότι οι εμπειρίες αυτές δείχνουν και την κατεύθυνση που πρέπει να ακολουθήσουν και οι βιομηχανίες στη χώρα μας.

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2**

### **Ο ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΥΤΤΑΡΩΝ – ΠΑΡΟΥΣΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ**

Στο παρόν Κεφάλαιο δίνεται μία συνοπτική εικόνα και μία ταξινόμηση των μεθόδων που κυρίως χρησιμοποιούνται στο σχεδιασμό βιομηχανικών κυττάρων. Η ταξινόμηση είναι απαραίτητη επειδή, για λόγους που εξηγούνται στη συνέχεια, το πεδίο χαρακτηρίζεται από μεγάλη ποικιλία ως προς τις παραμέτρους που λαμβάνονται υπόψη, τις μαθηματικές τεχνικές και γενικά την όλη αντιμετώπιση.

Τα δεδομένα του προβλήματος σχεδιασμού βιομηχανικών κυττάρων περιγράφονται στην ενότητα 2.1. Ο κριτικός σχολιασμός και η ταξινόμηση των μεθόδων που απαντώνται στη βιβλιογραφία και αποτελούν το κύριο θέμα του παρόντος Κεφαλαίου παρουσιάζονται στην ενότητα 2.2. Τα συμπεράσματα στην ενότητα 2.3 είναι μία περίληψη της παρούσας κατάστασης. Διαφαίνεται η σκοπιμότητα της τυποποίησης του προβλήματος και της σύνδεσης μεθόδων Μαθηματικού Προγραμματισμού σε ένα ενιαίο πλαίσιο που να διευκολύνει την έρευνα τόσο για ακριβείς αλγορίθμους, όσο και για ευρετικούς, θέματα που αντιμετωπίζονται στο επόμενο Κεφάλαιο 3.

## 2.1. Τα δεδομένα στο Σχεδιασμό Βιομηχανικών Κυττάρων

Κοινό χαρακτηριστικό των περισσότερων και πιο διαδεδομένων μεθόδων είναι η χρήση μίας 0-1 μήτρας αντιστοίχισης μηχανών - κομματιών (machine-part incidence matrix)  $A$ , διαστάσεων  $n \times P$  όπου  $n$  είναι ο αριθμός των μηχανών και  $P$  ο αριθμός των κομματιών. Στη μήτρα αυτή, ένα στοιχείο  $a_{ij}$  είναι 1 αν η μηχανή  $i$  επεξεργάζεται το κομμάτι  $j$  ειδάλλως είναι 0. Ένα απλό παράδειγμα δίνεται στο παρακάτω σχήμα 2.1 (A).

		κομμάτια							κομμάτια				
		1	2	3	4	5			1	2	4	3	5
μηχανές	1	1	0	0	1	1	μηχανές	1	1	0	1	0	1
	2	0	0	1	0	1		4	1	1	1	0	0
	3	0	0	1	0	0		2	0	0	0	1	1
	4	1	1	0	1	0		3	0	0	0	1	0
	5	0	0	1	0	1		5	0	0	0	1	1
(A)						(B)							

**Σχήμα 2.1.** Απλό παράδειγμα μήτρας αντιστοίχισης μηχανών-κομματιών.

A: Αρχική μορφή. B: Σχηματισμός δύο βιομηχανικών κυττάρων.

Στο παράδειγμα, με εναλλαγές γραμμών και στηλών σχηματίζονται στο σχήμα 2.1(B), δύο βιομηχανικά κύτταρα: ένα με τις μηχανές 1,4 και τα κομμάτια 1,2,4 και ένα με τις μηχανές 2,3,5 και τα κομμάτια 3,5. Η μηχανή 1 επεξεργάζεται επίσης και το κομμάτι 5, εκτός του «οικείου» κυττάρου της. Η μηχανή αυτή αποκαλείται **μηχανή στένωσης** (bottleneck machine) και το αντίστοιχο κομμάτι, **κομμάτι εξαιρεσης** (exceptional part). Η επεξεργασία (1,5) λέγεται και **στοιχείο εξαιρεσης** (exceptional element). Από μία δυαδική σκοπιά, το πρώτο βιομηχανικό κύτταρο έχει ένα **κενό** (void) για τη μηχανή 1 και το κομμάτι 2, όπως και το δεύτερο κύτταρο, για τη μηχανή 3 και το κομμάτι 5. Με αυτήν την αναπαράσταση, ο σχεδιασμός ανάγεται σε πρόβλημα αναδιάταξης γραμμών και στηλών ώστε η τελική μήτρα να έχει

σχεδόν διαγώνια μορφή, με τις περισσότερες μονάδες στις διαγώνιες υπομήτρες. Αυτό μεταφράζεται σε ελαχιστοποίηση της κυκλοφορίας κομματιών εκτός κυττάρων. Πλήρης απαλοιφή της με μόνο αυτή τη μέθοδο δεν είναι δυνατή στην πράξη, επειδή οι περιπτώσεις που δυνητικά έχουν κάποιο τελικό σχηματισμό με τελείως αυτόνομα κύτταρα είναι εξαιρετικά σπάνιες (Wemmerlon και Hyer [1989]). Το παράδειγμα του σχήματος 2.1 είναι η τυπική περίπτωση για την οποία δεν υπάρχει λύση χωρίς στοιχεία εξαίρεσης.

Η μήτρα αντιστοίχισης μηχανών – κομματιών βεβαίως αποτυπώνει ένα μόνο μέρος των παραμέτρων του προβλήματος και στην πραγματικότητα δεν επαρκεί καν για την απεικόνιση της επεξεργασίας των κομματιών στις μηχανές, διότι «κρύβει» τη σειρά επεξεργασίας των κομματιών καθώς και την ενδεχόμενη επανεπεξεργασία ενός κομματιού στην ίδια μηχανή. Αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί με τη χρήση μήτρας αντιστοίχισης μηχανών - επεξεργασιών, πράγμα που δεν συνηθίζεται όμως διότι αυξάνονται υπερβολικά οι διαστάσεις του προβλήματος. Η τάση αυτή είναι βέβαια ασυνεπής με την όλη φιλοσοφία της οργάνωσης της παραγωγής με βιομηχανικά κύτταρα η οποία είναι προσανατολισμένη στην αντιμετώπιση μεγάλης ποικιλίας προϊόντων, άρα και κομματιών, και αποτελεί παράδειγμα μελέτης που παρασύρεται από τη μοντελοποίηση εις βάρος της εφαρμογής. Αξίζει να σημειωθεί ότι ενώ ήδη από το 1975 ο Burbidge δημοσίευσε ένα κλασικό πρόβλημα με 43 κομμάτια σε 16 μηχανές, είναι πολύ συνηθισμένο οι πρόσφατοι ακριβείς αλγόριθμοι να δοκιμάζονται με προβλήματα που έχουν πολύ λιγότερα κομμάτια, παρά το ότι οι απαιτήσεις της πράξης έχουν πλέον αλλάξει ριζικά και η παραγωγή χαρακτηρίζεται από πολύ μεγαλύτερη ποικιλία κομματιών. Για τη σημασία του συνυπολογισμού της σειράς επεξεργασίας των κομματιών στα προβλήματα σχεδιασμού βιομηχανικών κυττάρων, βλ. για παράδειγμα Harhalakis, Nagi και Proth [1990].

Ενδεικτικά αναφέρονται μερικές από τις παραμέτρους που απαντώνται συχνότερα σε αλγορίθμους σχεδιασμού βιομηχανικών κυττάρων:

- η ζήτηση των κομματιών και οι ικανότητες επεξεργασίας των μηχανών
- το κόστος χειρισμού υλικού (material handling)
- το κόστος αλλαγής εργαλείων και ρυθμίσεων/ επανεκκινήσεων μηχανών
- η ύπαρξη εναλλακτικών πλάνων παραγωγής για ορισμένα κομμάτια (alternate process plans)
- οι χρόνοι επεξεργασίας των κομματιών στις διάφορες μηχανές
- ειδικές απαιτήσεις επεξεργασίας κομματιών που επιβάλλουν περιορισμούς ως προς την τοποθέτησή τους σε κύτταρα.

Για τη δημιουργία εντελώς αυτόνομων κυττάρων, δηλαδή την απαλοιφή όλων των στοιχείων εξαίρεσης, υπάρχουν επίσης διάφορες δυνατότητες:

- αγορά μηχανών - αντιγράφων των μηχανών στένωσης (machine duplication)
- ανάθεση της παραγωγής κομματιών εξαίρεσης σε υπεργολάβους
- αλλαγές στη σειρά επεξεργασίας κομματιών, ενδεχομένως με τροποποιήσεις στο σχεδιασμό τους
- δημιουργία ενός κυττάρου «υπολοίπων» (remainder cell), το οποίο σε αντίθεση με τα κανονικά βιομηχανικά κύτταρα είναι "νησίδα" job shop.

Οι δυνατότητες αυτές επάγουν βεβαίως κόστος και αυτό είναι μία άλλη παράμετρος που συνυπολογίζεται συχνά, ιδίως για τις δύο πρώτες περιπτώσεις που το κόστος αυτό είναι εύκολα μετρήσιμο.

Εννοείται ότι όλα τα προαναφερθέντα αλληλοσυσχετίζονται και μάλιστα χωρίς να υπάρχουν "εξηρητημένες μεταβλητές" που να μπορούν να απαλειφθούν. Το ιδανικό μοντέλο θα ήταν πολυκριτηριακό και θα περιλάμβανε όλες τις δυνατές παραμέτρους που κυρίως επηρεάζουν τη σχέση του αποτελέσματος του σχεδιασμού με το πρακτικό όφελος. Αυτό όμως είναι από κάθε άποψη αδύνατο. Για το λόγο αυτό οι ερευνητές στο πεδίο έχουν ακολουθήσει πολλούς διαφορετικούς και σε μεγάλο βαθμό υποκειμενικούς τρόπους προσέγγισης στο πρόβλημα, διασπώντας το σε στάδια, επιλέγοντας

διαφορετικές αντικειμενικές συναρτήσεις και απομονώνοντας κύριες και δευτερεύουσες παραμέτρους, ακολουθώντας ταυτόχρονα τις εξελίξεις στις τεχνικές βελτιστοποίησης που αντίστροφα “υπαγορεύουν” τη δομή του μοντέλου και άρα τον αριθμό των παραμέτρων που μπορούν να ληφθούν υπόψη. Αυτό εξηγεί και την παρατηρούμενη μεγάλη ποικιλία στην αντιμετώπιση που αναφέρθηκε στην αρχή του Κεφαλαίου.

## **2.2. Ταξινόμηση και κριτική των μεθόδων Σχεδιασμού Βιομηχανικών Κυττάρων**

Οι αλγόριθμοι που αναφέρονται στην παρούσα ενότητα δεν συνιστούν πλήρη καταγραφή. Παρουσιάζουν όμως τα τυπικά χαρακτηριστικά της εκάστοτε προσέγγισης και οι τελευταίες είναι που ενδιαφέρουν περισσότερο. Ο ενδιαφερόμενος μπορεί επίσης να ανατρέξει στις βιβλιογραφικές έρευνες που περιέχονται στις εργασίες των Cheng [1992], Kandiller [1994], Sofianopoulou [1997] και Cheng, Goh και Lee [1996]. Εκτενής βιβλιογραφία δίνεται και από τον Boctor [1996].

Σε πρώτο επίπεδο, μία βασική διάκριση αφορά στο αν το πρόβλημα αντιμετωπίζεται σε στάδια ή όχι. Μπορεί κανείς να επιδιώξει το σχηματισμό βιομηχανικών κυττάρων σε **ένα στάδιο (ταυτόχρονη ομαδοποίηση κομματιών και μηχανών)** ή σε **δύο (σειριακή ομαδοποίηση)**, για παράδειγμα πρώτα ομαδοποιώντας τα κομμάτια σε οικογένειες και στη συνέχεια, βάσει του αποτελέσματος, τις μηχανές σε ομάδες.

Σε δεύτερο επίπεδο, διακρίνει κανείς:

- Απλούς ευρετικούς αλγορίθμους (στην ταυτόχρονη ομαδοποίηση) ή μεθόδους ανάλυσης στιβάδων – cluster analysis (στο ένα ή και τα δύο στάδια της σειριακής ομαδοποίησης) που αντιμετωπίζουν το πρόβλημα με λίγες μόνο από τις παραμέτρους που αναφέρθηκαν στην ενότητα 2.1



- Μορφοποιήσεις Μαθηματικού Προγραμματισμού οι οποίες ενσωματώνουν και άλλες παραμέτρους και δυνατότητες και επιλύονται ακριβώς μέχρι κάποια διάσταση
- Γενικές ή ειδικές μεθόδους για την προσεγγιστική επίλυση προβλημάτων μεγάλης διάστασης ή ακόμα πιο σύνθετων μοντέλων (Μαθηματικού Προγραμματισμού ή άλλων). Η υποκατηγορία αυτή περιλαμβάνει ως επι το πλείστον:
  - εφαρμογές βασισμένες σε μορφοποιήσεις Μαθηματικού Προγραμματισμού
  - γραφοθεωρητικές προσεγγιστικές μεθόδους (μέθοδοι διάσπασης γράφου).

### 2.2.1. Αλγόριθμοι ταυτόχρονης ομαδοποίησης.

Η ταυτόχρονη ομαδοποίηση ιστορικά ξεκίνησε ως συνέχεια και προσαρμογή της γενικότερης (και παλαιότερης) μεθοδολογίας Ανάλυσης Ροής Παραγωγής (Production Flow Analysis) του Burbidge [1963] που αφορά την αναδιοργάνωση του συνόλου ενός οργανισμού και επηρέασε αρκετά τη μεταγενέστερη έρευνα. Στην πραγματικότητα, η μήτρα αντιστοίχισης μηχανών - κομματιών που περιγράφηκε στην ενότητα 2.1 παρουσιάστηκε στην εργασία αυτή, σχεδόν δε όλες οι μέθοδοι ταυτόχρονης ομαδοποίησης βασίζονται σε αυτή τη μήτρα.

Οι **απλοί ευρετικοί αλγόριθμοι** ταυτόχρονης ομαδοποίησης προτάθηκαν αρχικά από τον Kusiak [1985], [1987] και βασίζονται σε επαναληπτικές τεχνικές μετακίνησης γραμμών ή/και στηλών στη μήτρα αντιστοίχισης μηχανών - κομματιών που επιχειρούν να απομακρύνουν τις μονάδες από την αντιδιαγώνιο. Εδώ ανήκουν οι αλγόριθμοι:

- Bond Energy Algorithm (BEA) των McCormick κ.α. [1972] που εφαρμόστηκε αρχικά για τον εντοπισμό «φυσικών» ομάδων μεταβλητών σε σύνθετα δεδομένα (data recognition)

- τύπου Rank Order Clustering (ROC) που ξεκίνησαν με τις μελέτες του King [1980] ήδη από την εποχή της Ανάλυσης Ροής Παραγωγής, και βελτιώνουν ο καθένας τους προηγούμενους: ROC 2 των King και Nakornchai [1982] και MODROC (MODified Rank Order Clustering) των Chandrasekharan και Rajagopalan [1986]
- Direct Clustering Algorithm (DCA) των Chan και Milner [1982]
- Cluster Identification Algorithm (CIA) των Kusiak και Chow [1987] και η τροποποίησή του (modified CIA) από τον Boctor [1991].

Στις απλές αυτές μεθόδους κατατάσσεται επίσης και η μέθοδος των Srinivasan, Narendran και Mahadevan [1990] η οποία προσεγγίζει το πρόβλημα χρησιμοποιώντας δύο μορφοποιήσεις Γραμμικού Προβλήματος Αντιστοίχισης (Linear Assignment Problem) – ΓΠΑ, μία για την ομαδοποίηση των μηχανών και μία για αυτή των κομματιών, και ευρετική μεταξύ τους σύνδεση. Η μέθοδος αυτή αναφέρεται γιατί αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα υπεραπλούστευσης του προβλήματος ελαχιστοποίησης των αλληλεπιδράσεων μεταξύ κυττάρων, το οποίο και μόνο ως πρόβλημα αναδιάταξης της μήτρας αντιστοίχισης μηχανών – κομματιών (χωρίς δηλαδή πρόσθετες παραμέτρους), είναι αποδεδειγμένα ένα δύσκολο συνδυαστικό πρόβλημα βελτιστοποίησης και μάλιστα στην κατηγορία NP-hard (βλ. Garey και Johnson [1979]). Ένα ενδιαφέρον πάντως χαρακτηριστικό της μεθόδου είναι η χρήση συντελεστών «ομοιότητας» που χρησιμοποιούνται κυρίως στη σειριακή ομαδοποίηση όπως θα φανεί στη συνέχεια.

Η απόδοση των απλών αυτών αλγορίθμων δεν είναι ικανοποιητική. Οι BEA, ROC, DCA αλλά και η τελευταία με τα δύο μοντέλα ΓΠΑ δεν δίνουν καλά αποτελέσματα αν δεν υπάρχει αλληλεπίδραση με το χρήστη, η δε CIA επιλύει μόνο προβλήματα στα οποία υπάρχει λύση χωρίς στοιχεία εξαιρέσης (πράγμα εξαιρετικά σπάνιο όπως προαναφέρθηκε), βλ. Cheng [1992]. Γενικά το αποτέλεσμα με τις μεθόδους αυτές εξαρτάται πολύ από τη δομή της μήτρας αντιστοίχισης μηχανών - κομματιών και τον αρχικό σχηματισμό.

Η προσπάθεια ενσωμάτωσης και άλλων παραμέτρων για να ξεπεραστούν τα προβλήματα των απλών ευρετικών αλγορίθμων οδήγησε στην εισαγωγή μεθόδων βελτιστοποίησης. Τυπικοί **ακριβείς αλγόριθμοι Μαθηματικού Προγραμματισμού** είναι:

- το μοντέλο 0-1 Ακεραίου Προγραμματισμού των Wei και Gaither [1990a] για την ελαχιστοποίηση του κόστους παραγωγής στοιχείων εξαίρεσης (τα οποία παράγονται από τρίτους ή σε κύτταρο «υπολοίπων»), με δεδομένα μεταξύ άλλων τις ικανότητες επεξεργασίας των μηχανών
- το μοντέλο Μικτού Ακεραίου Προγραμματισμού του Boctor [1991] το οποίο ελαχιστοποιεί τα στοιχεία εξαίρεσης θέτοντας ταυτόχρονα όριο στο μέγιστο αριθμό μηχανών ανά κύτταρο
- το πολυκριτηριακό μοντέλο των Wei και Gaither [1990b] στο οποίο συνυπολογίζονται οι παραγωγικές ικανότητες των μηχανών, η σειρά επεξεργασίας των κομματιών και τα σχετικά κόστη.

Στα μοντέλα αυτά δεν μπορούν να εφαρμοστούν ικανοποιητικές τεχνικές επίλυσης και κατά συνέπεια αυτά δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αντιμετώπιση προβλημάτων πραγματικών διαστάσεων σε λογικούς χρόνους. Έτσι, στο μεν πρώτο μοντέλο δεν υπάρχει ικανοποιητική μέθοδος επίλυσης αν ο αριθμός των κομματιών είναι σχετικά μεγάλος, στο δε μοντέλο του Boctor ακριβείς λύσεις αναφέρονται για προβλήματα το πολύ με 16 μηχανές. Τέλος, το δεύτερο μοντέλο των Wei και Gaither λύνεται μόνο προσεγγιστικά με επέκταση του αλγορίθμου Cut-Node (CNA) των Vannelli και Kumar [1986] που αναφέρεται σε επόμενο σημείο.

Στις **προσεγγιστικές μεθόδους ταυτόχρονης ομαδοποίησης**, υπάγεται κατ' αρχήν η εφαρμογή γενικών προσεγγιστικών μεθόδων στις προηγούμενες μορφοποιήσεις, όπως για παράδειγμα η εφαρμογή Προσομοίωσης Ανόπτησης (Simulated Annealing - SA) στο μοντέλο του Boctor [1991], ο γενετικός αλγόριθμος των Venugopal και Narendran [1992] για την προσεγγιστική επίλυση πολυκριτηριακού μοντέλου, η εφαρμογή νευρωνικών δικτύων του

Chu [1993] κ.α. Οι ίδιες αδυναμίες παρατηρούνται και εδώ, επειδή η πολυπλοκότητα των διατυπώσεων δεν επιτρέπει ούτε την εκμετάλλευση «δομής», ούτε την προσαρμογή των τεχνικών με βάση αποτελέσματα από καλύτερα μελετημένα πεδία. Το χαμηλό ποσοστό επιτυχίας (64%) της εφαρμογής SA του Boctor είναι τυπικό, θεωρείται όμως πολύ μικρό για προβλήματα τέτοιας διάστασης. Για όλες δε τις μεθόδους αυτές, και για μεγαλύτερα προβλήματα, δεν υπάρχει καν βάση αξιολόγησης.

Η πιο ενδιαφέρουσα ομάδα αλγορίθμων στην υποκατηγορία αυτή της ταυτόχρονης ομαδοποίησης είναι οι μέθοδοι διάσπασης γράφου (graph decomposition). Η πληροφορία της μήτρας αντιστοίχισης μηχανών – κομματιών μπορεί εναλλακτικά να παρασταθεί γραφοθεωρητικά (με διάφορους τύπους γράφων), με πιο συνηθισμένο το διμερή (bipartite) γράφο, όπου η μία ομάδα κόμβων αντιστοιχεί στις μηχανές, η άλλη στα κομμάτια και οι κλάδοι (edges) που υπάρχουν μεταξύ των δύο ομάδων κόμβων απεικονίζουν τις επεξεργασίες, βλ. για παράδειγμα Kusiak [1990]. Με αυτήν την αναπαράσταση, το πρόβλημα ταυτόχρονης ομαδοποίησης ανάγεται πλέον σε πρόβλημα αποκοπής κλάδων για τη δημιουργία αυτόνομων υπο-γράφων. Καθοριστικό ρόλο εδώ έπαιξαν:

- ο αλγόριθμος Cut-Node (CNA) των Vannelli και Kumar [1986]
- η εργασία των Kumar, Kusiak και Vannelli [1986].

Και στις δύο αυτές εργασίες καταδεικνύονται οι δυνατότητες εισαγωγής και άλλων παραμέτρων στο μοντέλο ταυτόχρονης ομαδοποίησης, στη δε δεύτερη χρησιμοποιούνται για πρώτη φορά μέθοδοι επίλυσης βασισμένες σε ιδιοτιμές.

Η ομάδα των αλγορίθμων αυτών έχει συγκεντρώσει αρκετό ενδιαφέρον στην προσπάθεια για ένα «πλήρες μοντέλο» ταυτόχρονης ομαδοποίησης. Για παράδειγμα, στον αλγόριθμο των Vannelli και Hall [1993] στόχος είναι η δημιουργία τελείως αυτόνομων κυττάρων με την αγορά μηχανών – αντιγράφων και την υπεργολαβική ανάθεση κομματιών, τίθενται δε και

περιορισμοί ως προς το μέγιστο μέγεθος τόσο των οικογενειών κομματιών όσο και των ομάδων μηχανών. Ο αλγόριθμος αυτός βελτιώθηκε τα τελευταία χρόνια από τον Hadley [1996] στο σκέλος του υπολογισμού των βαρών των κλάδων στο γράφο.

Οι αλγόριθμοι διάσπασης γράφου δεν μπορούν μεν να οδηγήσουν σε βέλτιστες λύσεις λόγω του μεγάλου πλήθους κόμβων, δίνουν όμως γενικά πιο αξιόπιστες λύσεις σε σχέση με τους απλούς ευρετικούς αλγορίθμους και την εφαρμογή γενικών προσεγγιστικών μεθόδων σε μοντέλα Μαθηματικού Προγραμματισμού. Αυτό οφείλεται στο μαθηματικό υπόβαθρο των μεθόδων ιδιοτιμών που δίνει κάποια φράγματα, «χαλαρά» μεν, αλλά πάντως εγγυημένα. Το μαθηματικό αυτό υπόβαθρο έχει διερευνηθεί ακόμα περισσότερο από μελετητές σε καθαρά μαθηματικούς χώρους, τα δε αποτελέσματα που ενδιαφέρουν παρουσιάζονται στο επόμενο Κεφάλαιο και χρησιμοποιούνται με τρόπο που επιτρέπει την ακριβή επίλυση. Οι αλγόριθμοι αυτοί παράγουν επίσης βιομηχανικά κύτταρα χωρίς μεγάλες αποκλίσεις στον αριθμό των μηχανών που περιέχουν, πράγμα που κατά μερικούς είναι επιθυμητό.

Πιο πρόσφατα, έχουν προταθεί μορφοποιήσεις «υψηλής πολυπλοκότητας» που βασίζονται σε ακόμα πιο σύνθετα μοντέλα, για τα οποία δεν επιχειρείται καν η ακριβής επίλυσή τους. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν:

- Ο αλγόριθμος AAA (Assignment Allocation Model) των Adil, Rajamani και Strong [1993] για την προσεγγιστική (με κάποια εκμετάλλευση της δομής) επίλυση μη γραμμικού μοντέλου στο οποίο μπορεί κανείς να ορίσει μεταξύ άλλων προτιμήσεις για την επεξεργασία κομματιών σε ορισμένες μηχανές
- Η μορφοποίηση Extended Nonlinear Model πάλι των Adil, Rajamani και Strong [1996] με την επί πλέον δυνατότητα συνυπολογισμού εναλλακτικών πλάνων παραγωγής. Η μορφοποίηση αυτή επιλύεται εδώ μόνο προσεγγιστικά, με εφαρμογή της μεθόδου Προσομοίωσης Ανόπτησης (Simulated Annealing)

- Η εφαρμογή της μεθοδολογίας Tabu Search των Lozano, Adenso-Diaz κ.α. [1999] σε μη γραμμικό μοντέλο το οποίο ελαχιστοποιεί το (σταθμισμένο) άθροισμα κενών και στοιχείων εξαίρεσης, με εκατέρωθεν φραγμένα μεγέθη ομάδων μηχανών και οικογενειών κομματιών.

Πρέπει να σημειωθεί ότι για προσεγγιστικούς αλγορίθμους όπως οι παραπάνω δεν υπάρχει μαθηματικά αυστηρή βάση αξιολόγησης. Οι αλγόριθμοι αυτοί κρίνονται μόνο από τη σύγκριση με άλλους παρόμοιους ή με βάση διάφορους εμπειρικούς δείκτες που έχουν προταθεί, βλ. για παράδειγμα Singh και Rajamani [1996].

Παρά τα παραπάνω, που οφείλονται στην εκ των προτέρων καταδικασμένη σε αποτυχία προσπάθεια να ενσωματωθούν πάρα πολλές παράμετροι και δυνατότητες σε ένα μοντέλο, η ταυτόχρονη ομαδοποίηση εξακολουθεί έως και σήμερα ακόμα να φαίνεται ελκυστική ως ιδέα και αυτό αποδεικνύεται και από τον όγκο της σχετικής βιβλιογραφίας. Ως επιχείρημα αναφέρεται συχνά ότι επειδή τα βιομηχανικά κύτταρα αποτελούν ολοκληρωμένες «οντότητες» και δεν μπορεί κανείς να επέμβει για παράδειγμα στις μηχανές αγνοώντας έστω προσωρινά τα κομμάτια ή τους χειριστές, η ίδια φιλοσοφία πρέπει να διέπει και το σχεδιασμό τους. Οι αλληλεξαρτήσεις όμως είναι ο κανόνας στα περισσότερα επιστημονικά πεδία και η διάσπαση ενός προβλήματος συνηθέστατη και αποτελεσματική πρακτική όταν αποδεδειγμένα δεν υπάρχει άλλη λύση. Στην πραγματικότητα, η ταυτόχρονη ομαδοποίηση έρχεται σε πλήρη αντίθεση με τη διαπιστωμένη από τον ίδιο τον Burbidge [1993] ανάγκη για σταδιακή προσέγγιση των προβλημάτων στην περιοχή της Τεχνολογίας Ομαδοποίησης της Παραγωγής.

Σημαντικό μειονέκτημα τέλος της ταυτόχρονης ομαδοποίησης αποτελεί το γεγονός ότι ο μελετητής υποχρεώνεται εκ των πραγμάτων να επιλέξει με υποκειμενικό τρόπο τις παραμέτρους και δυνατότητες που ενσωματώνει στο μοντέλο. Το αποτέλεσμα είναι να αγνοείται πάντα ένας ή περισσότεροι

κρίσιμοι παράγοντες και ιδίως αυτοί που «περιπλέκουν» τη μορφοποίηση (όπως η σειρά επεξεργασίας των κομματιών), εις βάρος βέβαια της ουσίας.

### 2.2.2. Αλγόριθμοι σειριακής ομαδοποίησης.

Η **σειριακή ομαδοποίηση** ιστορικά ξεκίνησε από την ομαδοποίηση κομματιών σε οικογένειες, θέμα που ήταν υπο μελέτη πριν ακόμα διαμορφωθεί η θεωρητική βάση της Τεχνολογίας Ομαδοποίησης Παραγωγής. Το πρόβλημα αυτό είναι αρκετά απλούστερο από αυτό της ομαδοποίησης μηχανών, επειδή ανάγεται σε πρόβλημα κατάλληλης κωδικοποίησης/ταξινόμησης των κομματιών. Για το τελευταίο μάλιστα είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν ως βάση εκκίνησης τα διάφορα συστήματα τυποποίησης που χρησιμοποιούν εσωτερικά οι βιομηχανίες καθώς επίσης και οι κώδικες που ακολουθούνται ανά βιομηχανικό κλάδο, βλ. για παράδειγμα Hyer και Wemmerlton [1984], [1985] για τα συστήματα που χρησιμοποιούνται στις ΗΠΑ.

Η κωδικοποίηση των κομματιών αφορά μία ποικιλία χαρακτηριστικών:

- ως προς την ομοιότητα (σχήμα, μέγεθος, επιφάνεια, υλικό, κατάσταση πρώτης ύλης κ.λπ)
- ως προς την επεξεργασία (είδος επεξεργασίας, σειρά, μέγεθος παρτίδας, μηχανή, απαιτούμενα εργαλεία, χρόνος επεξεργασίας, ζητούμενοι όγκοι κ.α)

και οδηγεί σε συντελεστές ομοιότητας μεταξύ κομματιών, βάσει μετρικών σε πολυδιάστατους χώρους (Minkowski, Minkowski με στάθμιση, Hamming κ.α.), βλ. για παράδειγμα Singh και Rajamani [1996].

Αν εξαιρέσει κανείς τις αρχικές αυτές μελέτες που αφορούσαν μόνο το σκέλος της ομαδοποίησης κομματιών, η τυπική προσέγγιση στη σειριακή ομαδοποίηση είναι να θεωρείται πρωτεύον το πρόβλημα της ομαδοποίησης

μηχανών, η δε ομαδοποίηση των κομματιών ως δευτερεύον. Το πρωτεύον πρόβλημα φέρει και το μεγαλύτερο μέρος της πολυπλοκότητας.

Η επεξεργασία των κομματιών στις διάφορες μηχανές είναι μέρος των δεδομένων του πρωτεύοντος προβλήματος (συνήθως μέσω της μήτρας αντιστοίχισης μηχανών – κομματιών), η δε ομαδοποίησή τους προκύπτει με την εφαρμογή απλών ευρετικών μεθόδων μετά τη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος. Οι τάσεις αυτές είναι σε συμφωνία με τη διαπίστωση ότι η ομαδοποίηση των κομματιών είναι, ως απομονωμένο πρόβλημα, ευκολότερη από την ομαδοποίηση μηχανών.

Οι **απλές τεχνικές ανάλυσης στιβάδων** (cluster analysis) εφαρμόστηκαν αρχικά για τη μελέτη του απομονωμένου προβλήματος ομαδοποίησης κομματιών, με τους συντελεστές ομοιότητας που προαναφέρθηκαν. Οι τεχνικές αυτές ενδείκνυνται εκ φύσεως για προβλήματα ταξινόμησης και μάλιστα σε αυτή τη περίπτωση εφαρμόζονται αρκετά ικανοποιητικά. Πρωτοπόρος αυτής της προσέγγισης ήταν ο McAuley [1972].

Οι τεχνικές αυτές «καθοδήγησαν» μεγάλο μέρος της έρευνας για μεθόδους στις οποίες πρώτα ομαδοποιούνται οι μηχανές σε ομάδες και στη συνέχεια τα κομμάτια αντιστοιχίζονται σε αυτές. Εδώ οι συντελεστές ομοιότητας αφορούν πλέον τις μηχανές και υπολογίζονται κατά κανόνα από τα δεδομένα της μήτρας αντιστοίχισης μηχανών – κομματιών. Οι πολυάριθμοι αλγόριθμοι στην κατηγορία αυτοί ταξινομούνται με βάση τους κανόνες δημιουργίας στιβάδων (τα κριτήρια συνένωσης στην ιεραρχική δημιουργία στιβάδων):

- Οι πρώτες έρευνες έγιναν με βάση την προαναφερθείσα εργασία του McAuley, με την εφαρμογή του κανόνα SLC (Single Linkage Clustering) που όμως εμφάνισε το πρόβλημα «αλυσιδωτής σύνδεσης» μηχανών (machine chaining problem) με αποτέλεσμα να μην δίνει ικανοποιητικές λύσεις όταν υπάρχουν μηχανές στένωσης. Το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται όταν συνενώνονται δύο ομάδες μηχανών μόνο και μόνο επειδή δύο μηχανές, μία σε κάθε ομάδα, «ομοιάζουν» πολύ.



- Η εφαρμογή του «αντίθετου» κανόνα CLC (Complete Linkage Clustering) οδήγησε επίσης σε ακραία αποτελέσματα.
- Σχετικά πιο αξιόπιστη μέθοδος θεωρείται (βλ. Cheng [1992]) η εφαρμογή του ενδιάμεσου κανόνα ALC (Average Linkage Clustering).

Παρεμφερής είναι και η μέθοδος LCC (Linear Cell Clustering) των Wei και Kern [1989] που στην ουσία είναι ευρετική τροποποίηση κλασικής μεθόδου ανάλυσης στιβάδων και δεν αφορά κάποιο γραμμικό μοντέλο όπως υποδηλώνει ο τίτλος.

Στις μεθόδους αυτές, μετά την ομαδοποίηση των μηχανών, η αντιστοίχιση των κομματιών στις ομάδες μηχανών γίνεται με αλγορίθμους τύπου Rank Order Clustering (με μετακινήσεις στηλών μόνο) ή πάλι με τεχνικές ανάλυσης στιβάδων, αλλά με συντελεστές ομοιότητας κομματιών βάσει των αποτελεσμάτων της ομαδοποίησης μηχανών.

Σε αντίθεση με την ομαδοποίηση κομματιών, οι τεχνικές ανάλυσης στιβάδων έχουν εγγενείς αδυναμίες στην ικανοποιητική ομαδοποίηση μηχανών, επειδή η συνένωση δύο ομάδων σε κάθε βήμα είναι «τυφλή» και δεν λαμβάνει υπόψη τις αλληλεπιδράσεις με τις υπόλοιπες ομάδες. Μία απόπειρα μερικής επίλυσης του προβλήματος αποτελεί ο αλγόριθμος του Chow [1992] ο οποίος βασίζεται στη μέθοδο LCC αλλά αναπροσαρμόζει σε κάθε βήμα τη μήτρα αντιστοίχισης μηχανών – κομματιών, δημιουργώντας έτσι διαδοχικές μήτρες αντιστοίχισης «ενδιάμεσων κυττάρων» – κομματιών.

Η πληρέστερη μελέτη και αξιολόγηση των συντελεστών ομοιότητας κομματιών και μηχανών που έχουν χρησιμοποιηθεί στο σχεδιασμό βιομηχανικών κυττάρων είναι αυτή των Shafer και Rogers [1993a], [1993b]. Μία αξιολόγηση αλγορίθμων που βασίζονται σε τεχνικές ανάλυσης στιβάδων παρουσιάζεται από τον Cheng [1992].

Για την εισαγωγή περισσότερων παραμέτρων, κατ'αναλογία με την ταυτόχρονη ομαδοποίηση, εισήχθησαν μέθοδοι **ακριβούς επίλυσης με μεθόδους Μαθηματικού Προγραμματισμού**. Τυπικοί αλγόριθμοι είναι:

- Η μορφοποίηση  $p$ -median, με αφετηρία τις έρευνες του Kusiak [1985], [1987], που εφαρμόστηκε αρχικά στην ομαδοποίηση κομματιών και στη συνέχεια στην ομαδοποίηση μηχανών.
- Τα δύο μοντέλα 0-1 Ακεραίου Προγραμματισμού των Gunasingh και Lashkari [1989], όπου συνυπολογίζονται ο αριθμός διαθέσιμων μηχανών κάθε τύπου και το μέγιστο μέγεθος κυττάρου (πλήθος μηχανών).
- Η μορφοποίηση 0-1 Ακεραίου Προγραμματισμού της Sofianoroulou [1994], [1997], για την ομαδοποίηση μηχανών με άνω φράγμα στο μέγεθος των παραγόμενων βιομηχανικών κυττάρων, από τις ελάχιστες που λαμβάνουν υπόψη τη σειρά επεξεργασίας των κομματιών στις διάφορες μηχανές. Στη δεύτερη εργασία, μετά την επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος ομαδοποίησης μηχανών, το κάθε κομμάτι αντιστοιχίζεται στο βιομηχανικό κύτταρο με το μεγαλύτερο αριθμό μηχανών που χρησιμοποιούνται διαδοχικά από το κομμάτι αυτό. Με τον τρόπο αυτό προκύπτουν και οι οικογένειες κομματιών. Η πρόταση για το σχεδιασμό βιομηχανικών κυττάρων που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 3 αποτελεί επέκταση της μεθόδου που παρουσιάζεται στις δύο αυτές εργασίες.

Σε σχέση με την αντίστοιχη ομάδα αλγορίθμων ταυτόχρονης ομαδοποίησης η απόδοση των μεθόδων αυτών είναι σαφώς καλύτερη, επειδή δεν υπάρχει η πολυπλοκότητα της ταυτόχρονης αντιστοίχισης μηχανών και κομματιών σε βιομηχανικά κύτταρα. Η αρκετά διαδεδομένη προσέγγιση  $p$ -median αποτελεί πάντως περίπτωση υπεραπλούστευσης του προβλήματος, κατ' αντιστοιχία με τις μορφοποιήσεις ΓΠΑ στην ταυτόχρονη ομαδοποίηση, επειδή δεν λαμβάνει υπόψη τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ ομάδων. Από την άποψη αυτή δεν διαφέρει ιδιαίτερα από τις απλές μεθόδους ανάλυσης σιβάδων (αν ληφθεί μάλιστα υπόψη ότι, όπως και σε αυτές, ο αριθμός των ομάδων ορίζεται αυθαίρετα). Παρ' όλα αυτά, έχουν προταθεί και ακόμα απλούστερες μορφοποιήσεις που αφαιρούν σχεδόν όλη την πολυπλοκότητα του

προβλήματος και φυσικά δεν αντικατοπτρίζουν την πραγματικότητα, βλ. για παράδειγμα τα μοντέλα ροής δικτύου (network flow) των Lee και Garcia-Diaz [1993], Vohra κ.α. [1990], Wu και Salvendy [1993] και τη μορφοποίηση ελαχίστου συνδετηρίου δένδρου (minimum spanning tree) του Srinivasan [1994] (στην τελευταία εργασία κάπως καλύτερη λύση είναι ο συνδυασμός της μορφοποίησης minimum spanning tree με ανάλυση στιβάδων).

Στις **προσεγγιστικές μεθόδους** υπάρχει επίσης αναλογία με τα αναφερθέντα στην ταυτόχρονη ομαδοποίηση. Έχουμε συνεπώς και εδώ κατ' αρχήν την εφαρμογή γενικών προσεγγιστικών μεθόδων σε μορφοποιήσεις Μαθηματικού Προγραμματισμού, βλ. για παράδειγμα την εφαρμογή Προσομοίωσης Ανόπτησης (Simulated Annealing – SA) των Harhalakis, Proth και Xie [1990], την εφαρμογή νευρωνικών δικτύων του Moon [1990] και την εφαρμογή SA στο προαναφερθέν πληρέστερο μοντέλο 0-1 Ακεραίου Προγραμματισμού της Sofianoroulou [1997]. Τα αποτελέσματα στην τελευταία εργασία επαληθεύουν τη μεγαλύτερη αξιοπιστία της προσέγγισης σειριακής ομαδοποίησης (πάνω από 85% ποσοστό επιτυχίας και μέση απόκλιση από το βέλτιστο 3%). Στην εφαρμογή του Moon, σε αντίθεση με τη γενική τάση, θεωρείται πρωτεύον πρόβλημα η ομαδοποίηση των κομματιών όπου συνυπολογίζονται σειρές επεξεργασίας, εναλλακτικά πλάνα επεξεργασίας και μεγέθη παρτίδων.

Ενδιαφέρον τέλος παρουσιάζουν τα μοντέλα διάσπασης γράφου στη σειριακή ομαδοποίηση, που επιλύονται προσεγγιστικά με τις ίδιες μεθόδους ιδιοτιμών που αναφέρθηκαν στην ταυτόχρονη ομαδοποίηση. Τυπικός τέτοιος αλγόριθμος είναι η μέθοδος ομαδοποίησης κομματιών των Kusiak, Vannelli και Kumar [1986] που στην ουσία αποτυπώνει γραφοθεωρητικά μία μορφοποίηση 0-1 Τετραγωνικού Προγραμματισμού και στην οποία προκαθορίζονται ο αριθμός και τα μέγιστα μεγέθη των οικογενειών κομματιών (πρόκειται για το ίδιο πρόβλημα που αντιμετώπισαν οι ίδιοι ερευνητές στη μελέτη της ταυτόχρονης ομαδοποίησης).

Όπως και στην ταυτόχρονη ομαδοποίηση, οι μέθοδοι αυτές έχουν από τη μία το πλεονέκτημα ότι δίνουν κάποια φράγματα, «χαλαρά» μεν αλλά εγγυημένα, και από την άλλη το μειονέκτημα της διάστασης των γράφων που δεν επιτρέπει την ακριβή επίλυση του προβλήματος.

Τέλος, να αναφερθεί ότι η σειριακή αντιμετώπιση ταιριάζει περισσότερο στη διαπιστωμένη ανάγκη για σταδιακή προσέγγιση των προβλημάτων στην περιοχή της Τεχνολογίας Ομαδοποίησης της Παραγωγής (Burbidge [1993]).

### **2.3. Μερικά συμπεράσματα**

Τα γενικά συμπεράσματα από την εικόνα που περιγράφηκε είναι τα ακόλουθα:

Η έρευνα για την επίλυση του προβλήματος χαρακτηρίζεται από την έλλειψη ενός τυποποιημένου και ενοποιημένου πλαισίου αναφοράς που να επιτρέπει συγκρίσεις. Χαρακτηριστική είναι και η θέση του Cheng [1992] ο οποίος στη μελέτη των αλγορίθμων Μαθηματικού Προγραμματισμού διαπιστώνει ότι είναι αδύνατη η σύγκριση, εξ αιτίας της μεγάλης ποικιλίας των χρησιμοποιούμενων παραδοχών, παραμέτρων, περιορισμών και αντικειμενικών συναρτήσεων και περιορίζεται απλά στην παράθεση των χαρακτηριστικών αυτών.

Ο κυριότερος λόγος για την ποικιλία αυτή είναι η τάση να εισάγονται πολλές παράμετροι ευθύς εξ αρχής, είτε στο ένα μοντέλο ταυτόχρονης ομαδοποίησης, είτε στο πρωτεύον μοντέλο της σειριακής. Η τάση αυτή έχει δημιουργηθεί σε μεγάλο βαθμό από την έρευνα για ευρετικές λύσεις με τη χρήση στατιστικών τεχνικών ανάλυσης στιβάδων (cluster analysis) οι οποίες σχεδόν “ενθαρρύνουν” την εισαγωγή πολλών μεταβλητών σε βαθμό κατάχρησης (και βεβαίως, παρουσία αλληλεξαρτήσεων, δηλαδή στην ομαδοποίηση μηχανών, έχουν εγγενείς αδυναμίες ως προς την αξιοπιστία των λύσεων), βλ. για παράδειγμα (Shafer και Rogers [1993]). Σημαντικός λόγος είναι επίσης το γεγονός ότι για ένα αρκετά μεγάλο διάστημα, η έρευνα ειδικά

στις μεθόδους Μαθηματικού Προγραμματισμού είχε επικεντρωθεί στη μοντελοποίηση, χωρίς μέριμνα για το αν τα προτεινόμενα μοντέλα είναι επιλύσιμα (Cheng [1992]).

Το αποτέλεσμα της τάσης αυτής απεικονίζεται πολύ χαρακτηριστικά στην τυπική εξέλιξη των μεθόδων: κάποια απλή ευρετική μέθοδος δίνει το έναυσμα για μορφοποιήσεις Μαθηματικού Προγραμματισμού οι οποίες εμπλουτίζονται με ολοένα και περισσότερες παραμέτρους, μέχρις ότου η ακριβής επίλυση του προβλήματος είναι πλέον ανέφικτη. Από το σημείο αυτό η έρευνα πλέον είτε περιορίζεται σε προσεγγιστικές λύσεις, χωρίς μάλιστα δυνατότητα αξιολόγησής τους, είτε επιστρέφει στην ουσία στις απλές μεθόδους με υπεραπλούστευση της μορφοποίησης.

Οι περισσότεροι αλγόριθμοι είναι ευρετικοί. Οι ακριβείς αλγόριθμοι που έχουν προταθεί είτε βασίζονται σε απλά μοντέλα (π.χ. ροών δικτύου, τύπου  $p$ -median, ελάχιστου συνδετηρίου δένδρου - minimum spanning tree) που υπεραπλοποιούν το πρόβλημα και δεν έχουν εφαρμογή στην πράξη είτε (οι περισσότεροι) βασίζονται σε μορφοποιήσεις Μικτού Ακεραίου Προγραμματισμού, που για τους προαναφερθέντες λόγους έχουν μεγάλο αριθμό μεταβλητών, χαρακτηρίζονται από δυσκολία στον υπολογισμό ικανοποιητικών («σφικτών») φραγμάτων για χρήση τεχνικών κλάδων και ορίων (branch-and-bound) και δεν μπορούν να αντιμετωπίσουν διαστάσεις της πράξης με λογική χρήση υπολογιστικών πόρων. Αυτό ισχύει και για μη τυπικούς αλγορίθμους, όπως είναι η (εξαιρετικά δυσεπίλυτη) μέθοδος των Johnson, Mehrotra και Nemhauser [1993] για την πολυεδρική αντιμετώπιση ενός γενικότερου προβλήματος και η προσέγγιση  $A^*$  των Cheng, Goh and Lee [1996] όπου η λύση απαιτεί την κατασκευή απαγορευτικά μεγάλων δένδρων αναζήτησης. Η ανομοιομορφία στις διάφορες προσεγγίσεις δεν έχει επιτρέψει γενικά εμβάθυνση στο πρόβλημα για την αναζήτηση νέων μεθόδων επίλυσης και την αύξηση του μεγέθους ακριβώς επιλύσιμων προβλημάτων που παραμένει στα επίπεδα των 15-16 μηχανών στα μοντέλα που «συλλαμβάνουν» την πολυπλοκότητα του προβλήματος.

Ελλείπει πλαισίου αναφοράς, δεν υπάρχει επίσης μεγάλο έδαφος για τη δοκιμή και αξιολόγηση ευρετικών μεθόδων οι οποίες γενικά αναπτύσσονται «τυφλά» και αξιολογούνται εμπειρικά. Κάπως περισσότερες εγγυήσεις δίνουν εκ φύσεως τα νεότερα μοντέλα που βασίζονται σε διάσπαση γράφων με μεθόδους ιδιοτιμών που δίνουν σχετικά καλές ευρετικές λύσεις χωρίς όμως να εγγυώνται βέλτιστο και αυτό επειδή οι γράφοι περιλαμβάνουν και κόμβους – κομμάτια και έχουν συνεπώς μεγάλες διαστάσεις.

Το πρόβλημα της διάστασης είναι γενικό και οφείλεται στην εμμονή στη χρήση των δεδομένων της μήτρας αντιστοίχισης μηχανών – κομματιών απ' ευθείας στη μορφοποίηση. Η προσπάθεια για ακριβή επίλυση τέτοιων διατυπώσεων έχει σε μεγάλο βαθμό «παραπλανήσει» την έρευνα και την έχει οδηγήσει μακριά από τον εξ' ορισμού στόχο και την πράξη που κατά κανόνα πλέον χαρακτηρίζεται από μεγάλη ποικιλία παραγόμενων κομματιών.

Η ταυτόχρονη ομαδοποίηση δεν είναι ρεαλιστικός τρόπος αντιμετώπισης του εξαιρετικά πολυπαραμετρικού προβλήματος σχεδιασμού βιομηχανικών κυττάρων. Η βάση εκκίνησης για την ουσιαστική εμπάθυνση στο πρόβλημα και τη συστηματική του επίλυση πρέπει να είναι η σειριακή ομαδοποίηση με βάρος στην ομαδοποίηση μηχανών. Η ομαδοποίηση των κομματιών σε οικογένειες αντιμετωπίζεται αρκετά ικανοποιητικά με τις κλασικές μεθόδους ιεραρχικής ανάλυσης στιβάδων (hierarchical clustering) δεδομένης μάλιστα της ύπαρξης μίας σχετικής τυποποίησης στην κωδικοποίηση των κομματιών. Το πρωτεύον πρόβλημα της ομαδοποίησης μηχανών πάντως δεν μπορεί να λαμβάνει υπόψη συγχρόνως και τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ ομάδων και το σύνολο των κυρίων παραμέτρων και δυνατοτήτων του σχεδιασμού. Είναι σαφές ότι απαιτείται μία κάπως μεγαλύτερη διάσπαση του προβλήματος σε στάδια και ακριβώς μία τέτοια προσέγγιση περιγράφεται στο επόμενο Κεφάλαιο.

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3**

### **ΜΙΑ ΠΡΟΤΑΣΗ ΓΙΑ ΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΕΝΑ ΕΝΙΑΙΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΔΙΑΤΥΠΩΣΕΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ**

Εκτός από την έλλειψη τυποποίησης ως προς τις χρησιμοποιούμενες παραμέτρους που φάνηκε από την ταξινόμηση των μεθόδων στο Κεφάλαιο 2, η έρευνα στο σχεδιασμό βιομηχανικών κυττάρων χαρακτηρίζεται επίσης από την έλλειψη ενός ενιαίου μαθηματικού πλαισίου αντιμετώπισης που να δείχνει τις σχέσεις μεταξύ των διαφόρων τεχνικών, να επιτρέπει συγκρίσεις και εμπάθυνση στις μαθηματικές όψεις, και άρα να προτείνει νέες προσεγγίσεις για την ακριβή επίλυση προβλημάτων μεγέθους της πράξης. Οι πρακτικά χρήσιμοι ακριβείς αλγόριθμοι στην περιοχή σπανίζουν, με αποτέλεσμα να μην υπάρχει βάση αντικειμενικής αξιολόγησης ευρετικών μεθόδων. Πέραν αυτού, ακριβείς αλγόριθμοι σε συνδυασμό (π.χ. για εκκίνηση - initialization) με καλούς ευρετικούς, μπορούν να έχουν αξιόπιστα αποτελέσματα σε λογικούς χρόνους. Στο παρόν Κεφάλαιο δίνονται ακριβώς μία πρόταση για τυποποίηση της λύσης του σχεδιασμού βιομηχανικών κυττάρων και ένα ενοποιημένο πλαίσιο μορφοποιήσεων Μαθηματικού Προγραμματισμού. Στο τελευταίο παρουσιάζονται μερικές νέες μορφοποιήσεις, αναλύονται θέματα υπολογιστικής πολυπλοκότητας και παρουσιάζεται το υπόβαθρο για έναν ακριβή αλγόριθμο που προτείνεται στο Κεφάλαιο 4.

Η όλη προσέγγιση περιγράφεται στην ενότητα 3.1, όπου ορίζεται και το βασικό (πρωτεύον) μοντέλο σχεδιασμού βιομηχανικών κυττάρων, η επίλυση του οποίου αποτελεί κεντρικό θέμα της διατριβής. Στην ενότητα 3.2

εξετάζεται το πρόβλημα Διαμερισμού Γράφου και αποδεικνύεται ότι η επίλυση του βασικού μοντέλου μπορεί να βασιστεί στην επίλυση του προβλήματος αυτού. Στις ενότητες 3.3 και 3.4 εξετάζονται μέθοδοι 0-1 Ακεραίου Προγραμματισμού. Η έμφαση είναι στην ενότητα 3.5, στις περισσότερο υποσχόμενες περιοχές 0-1 Τετραγωνικού Προγραμματισμού και Βέλτιστης Προσέγγισης Μητρώου (Best Matrix Approximation). Στην τελευταία ενότητα 3.5 αναφέρονται άλλες πιθανές προσεγγίσεις, για λόγους πληρότητας, ιδίως μία μορφοποίηση Ολικής Βελτιστοποίησης.

### **3.1. Η προτεινόμενη κατά στάδια προσέγγιση: βασικό μοντέλο, γραφοθεωρητική μορφοποίηση και ο συνυπολογισμός άλλων παραμέτρων και δυνατοτήτων**

Η προτεινόμενη προσέγγιση για το σχεδιασμό βιομηχανικών κυττάρων αποτελεί μία διαδικασία 3 σταδίων:

- A. Πρώτη ομαδοποίηση των κομματιών
- B. Επίλυση ενός βασικού (πρωτεύοντος) μοντέλου ομαδοποίησης μηχανών που φέρει το μεγαλύτερο υπολογιστικό «βάρος». Μετά την ομαδοποίηση των μηχανών, προκύπτουν στο στάδιο αυτό και οι οικογένειες κομματιών
- Γ. Βελτιώσεις της λύσης για απαλοιφή της εναπομένουσας αλληλεπίδρασης μεταξύ κυττάρων.

#### Στάδιο A

Το πρώτο στάδιο αφορά μία **πρώτη ομαδοποίηση των κομματιών**, με κριτήρια καθαρά ομοιότητας (σχήμα, μέγεθος, επιφάνεια, υλικό, κατάσταση πρώτης ύλης κ.λπ) και όχι επεξεργασίας, και τη χρήση απλών μεθόδων ιεραρχικής ανάλυσης στιβάδων (hierarchical clustering) που όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 2 επαρκούν για το σκοπό αυτό, δεδομένης και της ύπαρξης των συστημάτων ταξινόμησης/ κωδικοποίησης κομματιών. Η πρώτη αυτή ιεραρχική ταξινόμηση δεν έχει μεγάλο «βάθος» αλλά αντιθέτως διακόπτεται



όσο ο συντελεστής «συνάφειας» σε κάθε ομάδα είναι ακόμα υψηλός και οι ομάδες πολλές και συνεκτικές. Συνεπώς, σε κάθε παραγόμενη στιβάδα (cluster) τα κομμάτια ομοιάζουν πολύ μεταξύ τους και υπάρχει μία «κυρίαρχη» σειρά επεξεργασίας που απαντάται συχνότερα. Για τα δεδομένα του επομένου σταδίου Β όπου λαμβάνονται υπόψη οι μηχανές και το είδος της επεξεργασίας, τα κομμάτια σε κάθε στιβάδα θεωρούνται ότι είναι ίδια και έχουν την κυρίαρχη σειρά επεξεργασίας της στιβάδας. Τυχόν διαφορές:

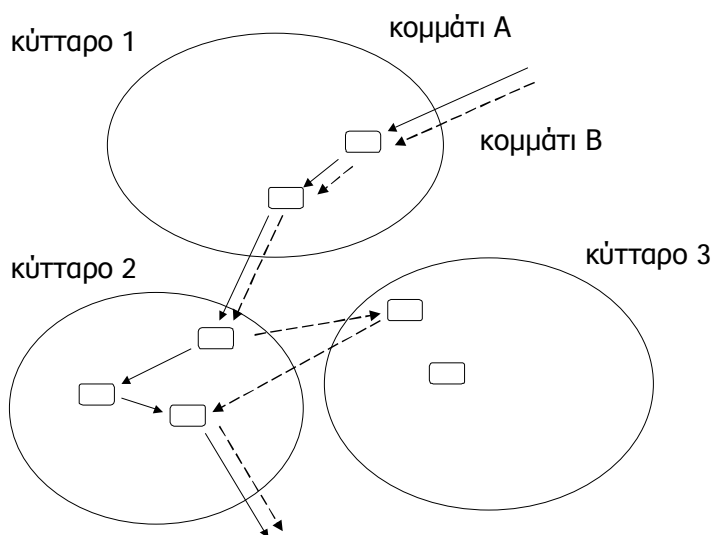
- κατά κανόνα αντιμετωπίζονται με μικρές τροποποιήσεις στα επί μέρους πλάνα παραγωγής των κομματιών (με ανάλογη προσθήκη ή μείωση εξοπλισμού όπου υπερβαίνεται ή περισσεύει παραγωγική ικανότητα κάποιας μηχανής)
- σε περιπτώσεις όπου η σειρά επεξεργασίας ενός κομματιού διαφέρει σημαντικά από την κυρίαρχη (παρά τη μεγάλη ομοιότητα με τα άλλα κομμάτια της στιβάδας) και η προηγούμενη τροποποίηση του πλάνου παραγωγής δεν είναι δυνατή, το κομμάτι αυτό εξαιρείται και δεν συνενώνεται με τα άλλα της στιβάδας.

Ο στόχος σε αυτό το στάδιο δεν είναι τόσο η μείωση των δεδομένων (απαιτήσεων επεξεργασίας) μια και όπως περιγράφεται στο επόμενο στάδιο Β δεν υπάρχει περιορισμός στον αριθμό των κομματιών στο βασικό (πρωτεύον) μοντέλο ομαδοποίησης μηχανών. Τα επιδιωκόμενα είναι αφ' ενός μία πρώτη κωδικοποίηση της παραγωγής για την απαλοιφή περιττών διαφοροποιήσεων στα επί μέρους πλάνα επεξεργασίας των κομματιών, και αφ' ετέρου να εξασφαλιστεί η ομοιογένεια σε κάθε οικογένεια κομματιών που παράγεται στο επόμενο στάδιο Β, ή αλλιώς, να μειωθεί όσο είναι δυνατόν ο «κίνδυνος» κομμάτια που ομοιάζουν πολύ μεταξύ τους να αντιστοιχιστούν τελικά σε διαφορετικά κύτταρα.

Η πρώτη κωδικοποίηση της παραγωγής είναι απαραίτητη για την αντιμετώπιση προβλημάτων της πράξης και αποτελεί ένα βασικό πλεονέκτημα της όλης προσέγγισης. Κύρια υπόθεση είναι ότι η παραγωγή χαρακτηρίζεται από μεγάλη ποικιλία κομματιών, φυσιολογικό επακόλουθο της μεγάλης ποικιλίας

προϊόντων που αντιμετωπίζει η Τεχνολογία Ομαδοποίησης της Παραγωγής. Όπως αναφέρθηκε ήδη στο Κεφάλαιο 2, οι αλγόριθμοι που συνήθως χρησιμοποιούνται, στην πλειονότητά τους, δεν έχουν προσαρμοστεί στην αντιμετώπιση προβλημάτων που χαρακτηρίζονται από μεγάλη ποικιλία κομματιών και επομένως ή επιλύουν προβλήματα με λίγα κομμάτια (άρα δεν είναι εφαρμόσιμοι στην πράξη) ή δίνουν υπέρμετρο «βάθος» στην ομαδοποίηση των κομματιών για να αντιμετωπίσουν τα προβλήματα διάστασης της μήτρας αντιστοίχισης μηχανών – κομματιών με αποτέλεσμα να σχηματίζονται πολυμελείς και ανομοιογενείς οικογένειες κομματιών.

Η διασφάλιση της ομοιογένειας σε κάθε οικογένεια κομματιών εξηγείται καλύτερα με ένα παράδειγμα. Στο σχήμα που ακολουθεί, τα παρόμοια κομμάτια A και B διαφέρουν μόνο ως προς μία επεξεργασία. Αν δεν συνενωθούν, στο στάδιο B, το μεν κομμάτι A θα τοποθετηθεί στο κύτταρο 2, το δε κομμάτι B στο κύτταρο 1.



**Σχήμα 3.1.** Κομμάτια με ελαφρά διαφορετική σειρά επεξεργασίας.

#### Στάδιο B

Το **βασικό (πρωτεύον) μοντέλο για το Πρόβλημα Σχεδιασμού Βιομηχανικών Κυττάρων (ΠΣΒΚ)** αποτελεί το κεντρικό θέμα στην παρούσα διατριβή και αντιμετωπίζει το πρόβλημα της **δημιουργίας ομάδων**

**μηχανών** με τη μικρότερη δυνατή αλληλεπίδραση μεταξύ τους με την έννοια της ελαχιστοποίησης της κυκλοφορίας κομματιών εκτός κυττάρων. Τα δεδομένα στο ΠΣΒΚ είναι η αρχική ομαδοποίηση κομματιών του σταδίου A, το αντίστοιχο κόστος της μετακίνησης των ομαδοποιημένων κομματιών από τη μία μηχανή στην άλλη («απόσταση» μεταξύ των δύο μηχανών) και το μέγιστο μέγεθος κυττάρου. Όπως περιγράφεται αναλυτικά στην ενότητα 3.3, οι αποστάσεις μεταξύ των μηχανών υπολογίζονται με βάση τη σειρά επεξεργασίας των κομματιών σε αυτές. Αυτό αποτελεί το δεύτερο βασικό πλεονέκτημα της όλης μεθόδου, μια και όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 2, ο σημαντικός παράγων της σειράς επεξεργασίας δεν λαμβάνεται υπόψη όσο θα έπρεπε στη βιβλιογραφία (βλ. και Harhalakis, Nagi και Proth [1990]), για λόγους διατήρησης της μήτρας αντιστοίχισης μηχανών – κομματιών που συνήθως χρησιμοποιείται σε χαμηλές διαστάσεις.

Η παραπάνω μορφοποίηση του βασικού μοντέλου εκφράζει με συμπαγή τρόπο το κεντρικό στόχο που είναι ο σχηματισμός βιομηχανικών κυττάρων φραγμένου μεγέθους με ελάχιστες αλληλεπιδράσεις και επίσης συνδυάζει την απλότητα με μερικές από τις κυριότερες παραμέτρους που ενδιαφέρουν στην πράξη. Εκτός από τη σειρά επεξεργασίας των κομματιών στις μηχανές, επιβάλλεται άνω φράγμα στο μέγεθος των κυττάρων για λόγους περιορισμών της πράξης (διαθέσιμοι χώροι, χωροταξικοί λόγοι) και επίσης για να αποφευχθεί ο σχηματισμός πολύ μεγάλων κυττάρων με προφανή μειονεκτήματα. Η παράμετρος αυτή θεωρείται «προτεραιότητας», βλ. για παράδειγμα Boctor [1991].

Αντιθέτως, η επιβολή κάτω φράγματος δεν είναι απαραίτητη καθώς δύο ή περισσότερα μικρά κύτταρα αποκλείονται αυτομάτως με τη μορφοποίηση αυτή. Πράγματι, στη βέλτιστη λύση, εξ ορισμού δεν υπάρχουν δύο κύτταρα τα οποία να μπορούν να συνενωθούν δηλαδή να έχουν συνολικό μέγεθος μικρότερο ή ίσο του μεγίστου (ειδάλλως θα υπήρχε καλύτερη λύση). Απομένει η περίπτωση ενός κυττάρου με λίγες μηχανές που δεν υπάρχει λόγος να αποκλειστεί εξ' αρχής σε αυτό το στάδιο. Και αν ακόμα η λύση τύχει να έχει

αυτή τη μορφή, το κύτταρο μπορεί εύκολα να απαλειφεί στο στάδιο Γ, ή ακόμα να παραμείνει ως κύτταρο «υπολοίπων». Ο ακριβής αλγόριθμος που προτείνεται στο Κεφάλαιο 4 δίνει πάντως και τη δυνατότητα εξ'αρχής αποκλεισμού της περίπτωσης αυτής.

Ως προς την επιλογή του βελτιστοποιούμενου κριτηρίου, η προτεινόμενη αντικειμενική συνάρτηση είναι η προτιμότερη στα πλαίσια μονοκριτηριακής μορφοποίησης (Boctor [1991]). Το άλλο ευρέως χρησιμοποιούμενο κριτήριο είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους αγοράς μηχανών – αντιγράφων που όμως απεικονίζει περισσότερο βελτιστοποίηση στις διορθώσεις του σχεδιασμού και επι πλέον δεν αποτελεί τη μόνη τέτοια δυνατότητα (υπενθυμίζονται οι δυνατότητες υπεργολαβικής ανάθεσης της παραγωγής κομματιών, μερικού ανασχεδιασμού κομματιών ή/και πλάνων επεξεργασίας κ.α.).

Ένα άλλο πλεονέκτημα της προτεινόμενης μορφοποίησης του πρωτεύοντος μοντέλου είναι ότι τα απαραίτητα δεδομένα είναι άμεσα διαθέσιμα. Η μόνη εξαίρεση όπου δεν ενδείκνυται το μοντέλο αυτό είναι στην περίπτωση που υπάρχουν εκ των προτέρων εναλλακτικές πορείες επεξεργασίας κομματιών. Οι περιπτώσεις αυτές υπάγονται στην περιοχή της Γενικευμένης Τεχνολογίας Ομαδοποίησης Παραγωγής (Generalized Group Technology – GGT) και αντιμετωπίζονται καλύτερα με ειδικά μοντέλα, βλ. για παράδειγμα Rajamani και Aneja [1990], Sofianopoulou [1996], [1999] και Lozano, Guerrero κ.α [1999].

Στο στάδιο αυτό προκύπτει επίσης και η ομαδοποίηση των κομματιών, με τη γραμμική μέθοδο που περιγράφεται από τη Sofianopoulou [1999]. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, κάθε κομμάτι τοποθετείται στο κύτταρο που έχει τις περισσότερες μηχανές που χρησιμοποιούνται διαδοχικά από το κομμάτι αυτό. Η «έξοδος» του σταδίου Β είναι μία καλή πρώτη λύση – «είσοδος» στο στάδιο Γ.

### Στάδιο Γ

Για την πιστή απεικόνιση πραγματικών βιομηχανικών καταστάσεων και ταυτόχρονα την απαλοιφή της εναπομένουσας αλληλεπίδρασης μεταξύ κυττάρων, ο σχεδιασμός βελτιώνεται στο στάδιο αυτό με τη διερεύνηση των δυνατοτήτων υπεργολαβικής ανάθεσης της παραγωγής κομματιών εξαίρεσης, της αγοράς αντιγράφων των μηχανών στένωσης και των αλλαγών σε πλάνα επεξεργασίας, με την χρήση απλών μεθόδων της βιβλιογραφίας, βλ. για παράδειγμα Kern και Wei [1991] και Seifoddini [1989]. Οι δυνατότητες αυτές δεν συνυπολογίζονται συνεπώς ευθύς εξ αρχής σε ένα ενιαίο μοντέλο, πρακτική που έχει οδηγήσει σε πολύπλοκα και πρακτικά μη επιλύσιμα μοντέλα όπως αυτά που απαντώνται συχνά στη βιβλιογραφία της περιοχής της Τεχνολογίας Ομαδοποίησης της Παραγωγής, που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2. Το τελευταίο αυτό στάδιο περιγράφεται αναλυτικά στο Κεφάλαιο 6 της διατριβής.

Η όλη αντιμετώπιση του προβλήματος είναι συμβατή με τη γενικότερη πρόταση του Burbidge [1993] για την κατά στάδια μελέτη θεμάτων ομαδοποίησης/ ταξινόμησης στην περιοχή της Τεχνολογίας Ομαδοποίησης της Παραγωγής. Εννοείται ότι όλα τα στάδια επιδέχονται αυτοματοποίησης και εδώ είναι ένα ακόμα πλεονέκτημα έναντι πολλών δημοσιευμένων μεθόδων που είναι αλληλεπιδραστικές. Σε σχέση με την ταξινόμηση που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2, τα στάδια Α και Β συνθέτουν μία μέθοδο σειριακής αντιμετώπισης, με τη διαφορά ότι ένα μέρος της πολυπλοκότητας του όλου προβλήματος αφαιρείται από αυτά και συγκροτεί ένα τρίτο τελικό στάδιο.

Η προτεινόμενη προσέγγιση περιγράφεται συνοπτικά στο Σχήμα 3.2.



**Σχήμα 3.2.** Η προτεινόμενη σταδιακή προσέγγιση.

Στη συνέχεια, και μέχρι τη συζήτηση μεθόδων βελτίωσης της λύσης στο Κεφάλαιο 6 (για το στάδιο Γ), η διατριβή εστιάζεται στο βασικό μοντέλο ΠΣΒΚ.

Το μοντέλο αυτό μπορεί να διατυπωθεί γραφοθεωρητικά αν θεωρήσουμε τις μηχανές ως κορυφές (vertices) ενός μη προσανατολισμένου γράφου όπου οι κλάδοι (edges) συμβολίζουν την κίνηση των κομματιών μεταξύ των μηχανών και έχουν βάρος που σχετίζεται με το κόστος αυτής της κίνησης.

(ΠΣΒΚ)

«Σε ένα μη προσανατολισμένο πλήρη γράφο  $G=(V,E)$ , όπου  $V$  είναι το σύνολο των  $n$  κορυφών,  $E$  είναι το σύνολο των κλάδων και  $W_i, i=1,\dots,|E|$  είναι τα βάρη των κλάδων, να διαχωριστεί το σύνολο  $V$  σε ξένα μεταξύ τους υποσύνολα μεγίστου μεγέθους  $M$  έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό βάρος κλάδων που συνδέουν κορυφές σε διαφορετικά υποσύνολα, ή ισοδύναμα, να μεγιστοποιείται το συνολικό βάρος κλάδων που συνδέουν κορυφές στο ίδιο υποσύνολο».

Από πλευράς υπολογιστικής πολυπλοκότητας, το ΠΣΒΚ ανήκει στην κατηγορία NP-hard, βλ. Garey και Johnson [1979].

### **3.2. Η διάσπαση του ΠΣΒΚ σε υποπροβλήματα**

#### **Διαμερισμού Γράφου**

Στο παρόν Κεφάλαιο και στα επόμενα γίνεται συχνή αναφορά σε ένα παρεμφερές πρόβλημα, το Πρόβλημα Διαμερισμού Γράφου (Graph Partitioning Problem) - ΠΔΓ:

(ΠΔΓ)

«Σε ένα μη προσανατολισμένο πλήρη γράφο  $G=(V,E)$ , όπου  $V$  είναι το σύνολο των  $n$  κορυφών,  $E$  είναι το σύνολο των κλάδων και  $W_i, i=1,\dots,|E|$  είναι τα βάρη των κλάδων, να διαχωριστεί το σύνολο  $V$  σε ακριβώς  $k$  ξένα μεταξύ τους υποσύνολα μεγεθών  $m_1, m_2, \dots, m_k$  ( $m_1+m_2+\dots+m_k=n$ ), έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό βάρος κλάδων που συνδέουν κορυφές σε διαφορετικά υποσύνολα, ή ισοδύναμα, να μεγιστοποιείται το συνολικό βάρος κλάδων που συνδέουν κορυφές στο ίδιο υποσύνολο».

Το ΠΔΓ και οι διάφορες εκδοχές του (διχοτόμηση, διαμερισμός σε ισομεγέθη υποσύνολα κ.λπ.) απαντώνται στην έρευνα της παράλληλης επεξεργασίας, το σχεδιασμό κυκλωμάτων (ιδίως VLSI), το σχεδιασμό μεταγλωττιστών, τη λύση

συστημάτων διαφορικών εξισώσεων και γραμμικών συστημάτων με αραιά μητρώα, το σχεδιασμό της χωροταξίας στη χημική τεχνολογία κ.α. Για το λόγο αυτό, το ΠΔΓ έχει τύχει «μαθηματικά» πολύ μεγαλύτερης προσοχής από το ΠΣΒΚ. Ενδεικτικά έχει μελετηθεί από τους Brunetta, Rinaldi και Sassano [1994], Holm και Sorensen [1993] και Johnson κ.α. [1989], μεταξύ άλλων. Ιδιαίτερης σημασίας για την παρούσα διατριβή είναι η χαλάρωση που παρουσιάζεται από τους Rendl και Wolkowicz [1995] και η συμπληρωματική υπολογιστική μελέτη από τους Falkner κ.α. [1994].

Η πολυπλοκότητα του ΠΔΓ είναι η ίδια με αυτήν του ΠΣΒΚ, δηλ. ανήκει και αυτό στην κατηγορία NP-hard. Στην πραγματικότητα, και όπως θα φανεί αργότερα στην ενότητα 3.5, το ΠΔΓ μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα ως Τετραγωνικό Πρόβλημα Αντιστοίχισης (Quadratic Assignment Problem), ως Τετραγωνικό Πρόβλημα Μεταφοράς (Quadratic Transportation Problem) και ως πρόβλημα Ελαχιστοποίησης Νόρμας Μητρώου.

Είναι προφανές ότι ο χώρος λύσεων του ΠΣΒΚ είναι η ένωση των χώρων λύσεων ξένων μεταξύ τους προβλημάτων ΠΔΓ. Θα μπορούσε κάλλιστα να αναφερθεί κανείς στο ΠΣΒΚ ως το «Πρόβλημα Διαμερισμού Γράφου με Φραγμένο Μέγεθος Υποσυνόλου».

Ως προς τη λύση του ΠΣΒΚ, αρκεί να εξετάσει κανείς όλες τις επιτρεπόμενες «μορφές» της κατανομής  $n$  μηχανών σε  $k$  βιομηχανικά κύτταρα μεγεθών  $m_1, m_2, \dots, m_k$  και να επιλύσει ένα υποπρόβλημα ΠΔΓ για κάθε τέτοια μορφή. Ο αριθμός των υποπροβλημάτων αυτών, δηλ. των επιτρεπομένων μορφών περιορίζεται από τη μορφοποίηση του βασικού μοντέλου ΠΣΒΚ. Πράγματι, αν  $M$  είναι το μέγιστο μέγεθος κυττάρου, ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$m_i \leq M \quad i = 1, \dots, k \quad (3.1)$$

$$m_i + m_j > M \quad i, j = 1, \dots, k \quad i \neq j \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^k m_i = n \quad (3.3)$$



Ο περιορισμός (3.1) θέτει το άνω φράγμα για τα μεγέθη των κύτταρων. Ο περιορισμός (3.2) είναι αυτός που παρεμποδίζει την υπερβολική αύξηση του αριθμού των επιτρεπόμενων μορφών κατανομής και εκφράζει το ότι σε μία βέλτιστη λύση δεν υπάρχουν δύο κύτταρα τα οποία να μπορούν να συνενωθούν. Ο περιορισμός (3.3) εξασφαλίζει απλά ότι ο συνολικός αριθμός των μηχανών σε όλα τα κύτταρα είναι ίσος με  $n$ .

Ο αριθμός των επιτρεπομένων μορφών – υποπροβλημάτων ΠΔΓ είναι μάλλον απίθανο να εκφράζεται κλειστά συναρτήσει του αριθμού μηχανών  $n$  και του μεγίστου μεγέθους κυττάρου  $M$ . Τέτοιες σειρές ακεραίων απαντώνται στην Αθροιστική Θεωρία Αριθμών και διατυπώνονται, στις απλούστερες περιπτώσεις, με αναδρομικές σχέσεις. Ο αριθμός όλων των δυνατών κατανομών  $n$  μηχανών σε οσαδήποτε κύτταρα οποιουδήποτε μεγέθους δίνεται από μία βασική συνάρτηση της θεωρίας αυτής, τη συνάρτηση διαμερισμού χωρίς περιορισμούς (unrestricted partition function)  $p(n)$ . Η συνάρτηση αυτή δίνει τον αριθμό των μορφών που ικανοποιούν μόνο τη σχέση (3.3) και οι τιμές της υπολογίζονται από την αναδρομική σχέση:

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) \mathbf{L}$$

$$p(0) = 1, p(n) = 0 \text{ για } n < 0$$

όπου 1,2,5,7,12,15... είναι οι λεγόμενοι πενταγωνικοί αριθμοί.

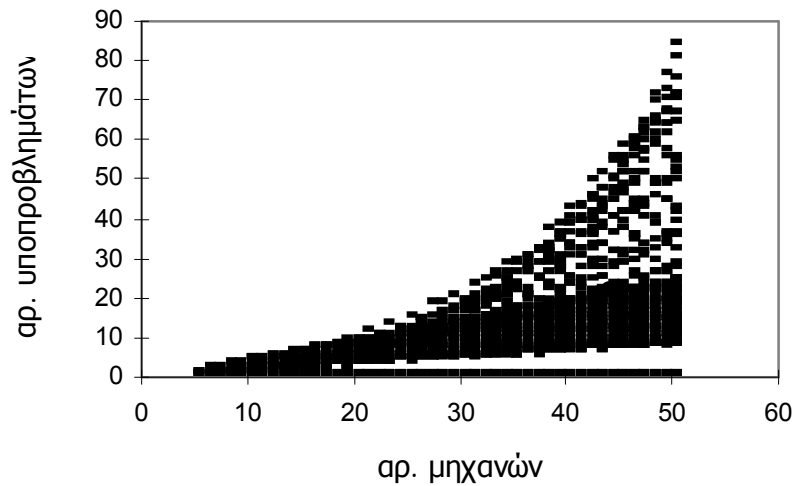
Από τη συνάρτηση  $p(n)$  και εφαρμόζοντας την αρχή της «εισαγωγής και αποκλεισμού» (inclusion and exclusion – Cohen [1978]), μπορεί κανείς να υπολογίσει τον ζητούμενο αριθμό επιτρεπομένων μορφών – υποπροβλημάτων ΠΔΓ. Ξεκινώντας με όλες τις δυνατές κατανομές των  $n$  μηχανών,  $p(n)$ , και με δεδομένα τα μεγέθη και αθροίσματα μεγεθών που αποκλείονται  $s_1, s_2, \dots, s_r$ , αφαιρούνται πρώτα οι κατανομές εκείνες που περιέχουν κύτταρα με κάποια από τα μεγέθη ή αθροίσματα αυτά. Στη συνέχεια επανεισάγονται οι κατανομές αυτές που αποκλείστηκαν περισσότερες από μία φορές (διότι πληρούσαν

περισσότερες από μία συνθήκες «αποκλεισμού») κ.ο.κ. Επειδή για κάθε κατανομή από τις  $p(n)$  που περιέχει τουλάχιστον ένα κύτταρο μεγέθους  $s$  (ή περισσότερα, με συνολικό μέγεθος  $s$ ) υπάρχουν εξ' ορισμού  $p(n-s)$  τρόποι να κατανεμηθούν οι υπόλοιπες μηχανές, τα παραπάνω καταλήγουν στην ακόλουθη σχέση για τον αριθμό των εφικτών κατανομών που δεν έχουν καμία από τις ανεπιθύμητες ιδιότητες:

$$\begin{aligned}
 & p(n) - p(n - s_1) - p(n - s_2) - \mathbf{L} - p(n - s_r) \\
 & + p(n - s_1 - s_2) + p(n - s_1 - s_3) + \mathbf{L} + p(n - s_{r-1} - s_r) \\
 & - p(n - s_1 - s_2 - s_3) - \mathbf{L} - p(n - s_{r-2} - s_{r-1} - s_r) \\
 & \mathbf{L} \\
 & \pm p(n - s_1 - s_2 - \mathbf{K} - s_r)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Για παράδειγμα, αν έχουμε  $n=10$  μηχανές που πρέπει να ομαδοποιηθούν σε κύτταρα μεγίστου μεγέθους  $M=3$ , ο συνολικός αριθμός δυνατών κατανομών (αγνοώντας τους περιορισμούς (3.1) και (3.2)) είναι  $p(10)=42$ . Εφαρμόζοντας τη σχέση (3.4) με  $s_1=4, s_2=5, \dots, s_7=10$  (για να αποκλειστούν κύτταρα με μέγεθος μεγαλύτερο του 3) και  $s_8=1+1, s_9=1+2$  (για να αποκλειστούν κύτταρα με συνδυασμένο μέγεθος μικρότερο ή ίσο του 3) λαμβάνεται ως αποτέλεσμα 3. Συνεπώς, από ένα σύνολο 42 κατανομών, μόνο 3 από αυτές είναι οι εφικτές και υποψήφιες για εξέταση.

Ως δεύτερο παράδειγμα, στην περίπτωση  $n=25$  μηχανών και μεγίστου μεγέθους κυττάρου  $M=5$ , ο αριθμός εφικτών κατανομών είναι 9 επί συνόλου 1958 δυνατών κατανομών.



**Σχήμα 3.3.** Το εύρος του αριθμού υποπροβλημάτων ΠΔΓ συναρτήσει του αριθμού των μηχανών.

Στο Σχήμα 3.3 φαίνεται το εύρος του αριθμού επιτρεπόμενων μορφών κατανομής  $n$  μηχανών σε  $k$  βιομηχανικά κύτταρα, για τιμές του  $n$  στο διάστημα  $[5,50]$ . Ο μέγιστος αριθμός φράσσεται από την ευθεία  $f(n)=n$  για τιμές του  $n$  έως και 39 και είναι ακριβώς  $\lfloor n/2 \rfloor$  για τιμές του  $n$  έως και 18. Το ακριβές πλήθος των υποπροβλημάτων που πρέπει να επιλυθούν εξαρτάται φυσικά και από το μέγιστο μέγεθος κυττάρου  $M$  και είναι συνήθως μικρότερο από τις τιμές αυτές. Αυτό συμβαίνει διότι για προβλήματα μεσαίου και μεγάλου μεγέθους και σταθερό  $n$ , ο αριθμός των υποπροβλημάτων μεγιστοποιείται στις περιοχές του  $M$  περί την διχοτόμηση που δεν είναι επιθυμητή στην πράξη. Στο επόμενο διάγραμμα φαίνεται για παράδειγμα η σχετική συνάρτηση στην περίπτωση  $n=25$  μηχανών.



**Σχήμα 3.4.** Ο αριθμός υποπροβλημάτων ΠΔΓ συναρτήσει του μεγίστου μεγέθους κυττάρου για  $n=25$  μηχανές.

Συμπερασματικά, είναι δυνατό να χρησιμοποιήσει κανείς τη διάσπαση σε υποπροβλήματα ΠΔΓ για την ακριβή επίλυση προβλημάτων ΠΣΒΚ μεσαίου μεγέθους.

Όπως εξηγείται στην επόμενη ενότητα, τα υποπροβλήματα αυτά πρέπει να διερευνηθούν όλα. Αν για παράδειγμα απομονώσει κανείς τις κατανομές με το μέγιστο αριθμό κυττάρων μεγέθους  $M$  ή τις κατανομές με το μέγιστο αριθμό συνδέσεων μέσα στα κύτταρα, το βέλτιστο παύει να είναι εγγυημένο. Για να λειτουργήσει ικανοποιητικά ένας ακριβής αλγόριθμος πρέπει να αποκλείει γρήγορα τις «ασθενείς» κατανομές και να αναλώνει τον περισσότερο χρόνο στις «ανταγωνιστικές», δηλαδή αυτές που είναι εξ' αρχής πιο πιθανό να περιέχουν τη βέλτιστη λύση. Ένας τέτοιος αλγόριθμος δενδροειδούς αναζήτησης παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 4.

Ας σημειωθεί ότι είναι αυτή η διάσπαση του ΠΣΒΚ σε υποπροβλήματα ΠΔΓ που δίνει τη δυνατότητα που αναφέρθηκε στην ενότητα 3.1 να αποκλείσει κανείς εξ αρχής λύσεις που περιέχουν ένα κύτταρο με μία μόνο μηχανή και γενικά ανεπιθύμητους σχηματισμούς.

**3.3. Το ΠΣΒΚ ως πρόβλημα 0-1 Ακεραίου Προγραμματισμού:  
Ο υπολογισμός των στοιχείων κόστους και μέθοδοι  
επίλυσης**

Η παρακάτω μορφοποίηση 0-1 Ακεραίου Προγραμματισμού για το ΠΣΒΚ έχει δοθεί από τη Sofianopoulou [1994], [1997]:

$$\min z = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n c_{ij} (1 - x_{ij}) \quad (3.5)$$

με τους περιορισμούς:

$$\sum_{i=1}^{k-1} x_{ik} + \sum_{j=k+1}^n x_{kj} \leq M - 1 \quad k = 1, \dots, n \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} x_{ij} + x_{ik} - x_{jk} &\leq 1 \\ x_{ij} - x_{ik} + x_{jk} &\leq 1 \quad i = 1, \dots, n-2, \quad j = i+1, \dots, n-1, \quad k = j+1, \dots, n \\ -x_{ij} + x_{ik} + x_{jk} &\leq 1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν οι μηχανές } i, j \text{ ανήκουν στο ίδιο κύτταρο,} \\ 0, & \text{αν όχι} \end{cases} \quad (3.8)$$

$$i = 1, \dots, n-1 \quad j = i+1, \dots, n$$

Στο μοντέλο αυτό, οι  $n$  μηχανές κατανέμονται σε κύτταρα μεγίστου μεγέθους  $M$ . Δύο μηχανές θεωρούνται «συνδεδεμένες» αν ανήκουν στο ίδιο βιομηχανικό κύτταρο. Ο περιορισμός (3.6) εξασφαλίζει ότι η μηχανή  $k$  συνδέεται το πολύ με  $M-1$  άλλες, και οι «τριγωνικοί» περιορισμοί (3.7), επιβάλλουν την μεταβατική ιδιότητα για τις συνδέσεις και οδηγούν στο σχηματισμό κυττάρων στα οποία κάθε μηχανή συνδέεται με όλες τις άλλες στο ίδιο κύτταρο.

Στα επόμενα υπενθυμίζεται ότι υπάρχουν κομμάτια που έχουν τις ίδιες απαιτήσεις επεξεργασίας, όπως έχει προκύψει από το στάδιο Α της προτεινόμενης προσέγγισης (βλ. ενότητα 3.1), ενδεχομένως με αλλαγές στα επί μέρους πλάνα παραγωγής μερικών από αυτά.

Τα στοιχεία της μήτρας κόστους C υπολογίζονται από τα δεδομένα κυκλοφορίας των P κομματιών στις n μηχανές. Ξεκινώντας από μία Pxn μήτρα επεξεργασίας κομματιών σε μηχανές (part-machine incidence matrix)  $A=(a_{pi})$   $p=1,\dots,P$ ,  $i=1,\dots,n$  η οποία περιγράφει τη σειρά επεξεργασίας κάθε κομματιού:

$$a_{pi} = \begin{cases} t, & \text{αν το κομμάτι } p \text{ επισκέπτεται τη μηχανή } i \\ & \text{στο βήμα } t \text{ (} 1 \leq t \leq n \text{)}, \\ 0, & \text{αν όχι} \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\text{τίθεται } c_{ij} = \sum_{p=1}^P \delta_{ijp} \quad i = 1, \dots, n-1, \quad j = i+1, \dots, n \quad (3.10)$$

$$\text{όπου } \delta_{ijp} = \begin{cases} 1, & \text{αν } a_{pi}a_{pj} \neq 0 \text{ και } |a_{pi} - a_{pj}| = 1 \\ 0, & \text{αν όχι} \end{cases} \quad (3.11)$$

Συνεπώς, το στοιχείο  $\delta_{ijp}$  δείχνει αν το κομμάτι p επισκέπτεται τις μηχανές i,j σε δύο διαδοχικά βήματα ή όχι, και το στοιχείο  $c_{ij}$  συλλέγει την πληροφορία αυτή από όλα τα κομμάτια σε ένα συνολικό κόστος κυκλοφορίας μεταξύ των μηχανών i και j. Η μήτρα επεξεργασίας που χρησιμοποιείται δεν είναι η τυπικά απαντώμενη στη βιβλιογραφία μήτρα αντιστοίχισης μηχανών - κομματιών, η οποία «κρύβει» το σημαντικό παράγοντα της σειράς επεξεργασίας των κομματιών.

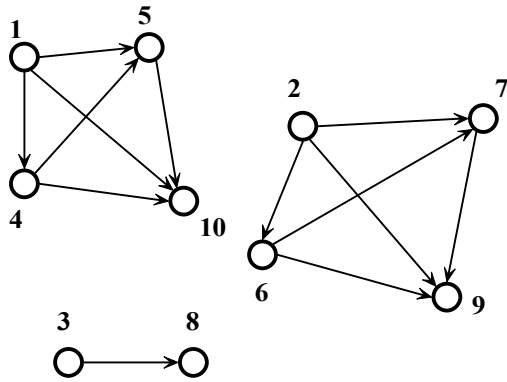
Ένα εύλογο ερώτημα αφορά την περίπτωση που κάποιο κομμάτι επισκέπτεται μία μηχανή περισσότερο από μία φορά. Η προσαρμογή της μήτρας επεξεργασίας είναι εύκολη: αντί μίας μοναδικής τιμής, κάθε στοιχείο  $a_{pi}$

$p=1, \dots, P$ ,  $i=1, \dots, n$  έχει πολλαπλές τιμές και συγκεκριμένα ένα σύνολο με τα βήματα στα οποία το κομμάτι  $p$  επισκέπτεται τη μηχανή  $i$ . Η εξίσωση (3.11) προσαρμόζεται ανάλογα ώστε να υπολογίζονται όλα τα ζεύγη τιμών, ένα από το σύνολο  $a_{pi}$  και το άλλο από το σύνολο  $a_{pj}$ .

### 3.3.1. Άμεσες μέθοδοι χαλάρωσης

Το μοντέλο αυτό 0-1 Ακεραίου Προγραμματισμού δεν είναι πρακτικά επιλύσιμο με τη μέθοδο κλάδων και ορίων (branch-and-bound) σε μεσαίες και μεγάλες διαστάσεις (πάνω από 15-20 μηχανές), και αυτό εξ αιτίας της δυσκολίας εξεύρεσης «σφικτών» φραγμάτων. Η συνεχής χαλάρωση  $0 \leq x_{ij} \leq 1, x_{ij} \in \mathcal{R}^{n \times n}$  δίνει ένα πολύ «χαλαρό» φράγμα και επι πλέον ο υπολογισμός του είναι εξαιρετικά χρονοβόρος, επειδή οι συμμετρικοί τριγωνικοί περιορισμοί (3.7) προκαλούν μαζικό εκφυλισμό στο πρόβλημα. Σημειωτέον ότι, αντίθετα με ότι διαισθητικά αναμένει κανείς, η βέλτιστη λύση δεν έχει απαραίτητα τον ελάχιστο αριθμό κυττάρων. Ακόμα, η βέλτιστη λύση δεν περιέχει πάντα τα περισσότερα κύτταρα μεγίστου μεγέθους (εκτεταμένος πειραματισμός πάντως έχει δείξει ότι ο σχηματισμός αυτός είναι ο πιθανότερος). Η βελτιστότητα τέλος δεν συνεπάγεται μέγιστο αριθμό συνδέσεων. Το συμπέρασμα από τις παρατηρήσεις αυτές είναι ότι δεν είναι δυνατή η διαταραχή της ανεπιθύμητης συμμετρίας του προβλήματος με την προσθήκη τέτοιων περιορισμών.

Οι μεταβλητές  $x_{ij}$  στη μορφοποίηση (3.5) - (3.8) αντιστοιχούν σε διατεταγμένα ζεύγη μηχανών  $(i,j)$ . Το γεγονός αυτό επιτρέπει μία πολύ χρήσιμη και συνοπτική γραφική αναπαράσταση μίας λύσης, υπό μορφή συλλογής ασύνδετων πλήρων μεταβατικών υπο-γράφων τύπου «διαγωνισμού» (transitive tournaments) (Gould [1988]). Το επόμενο σχήμα δίνει ένα παράδειγμα.



**Σχήμα 3.5.** Υπο-γράφοι τύπου «διαγωνισμού» για την αναπαράσταση λύσης σε πρόβλημα με 10 μηχανές και μέγιστο μέγεθος κυττάρου 4.

Ο «δείκτης» ενός κόμβου σε ένα τέτοιο υπο-γράφο είναι ο βαθμός εξόδου (outdegree) του κόμβου, δηλ. ο δεύτερος όρος του αθροίσματος (3.6). Για παράδειγμα, στο σχήμα 3.4, οι κόμβοι 1 και 2 έχουν δείκτη 3 ενώ οι κόμβοι 9 και 10 έχουν δείκτη 0. Ο (συνολικός) βαθμός ενός κόμβου είναι το άθροισμα των βαθμών εξόδου και εισόδου, δηλ. όλο το αριστερό μέρος του περιορισμού (3.6). Οι μεταβατικοί υπο-γράφοι τύπου «διαγωνισμού» έχουν ορισμένες ενδιαφέρουσες ιδιότητες που μπορούν να αξιοποιηθούν όπως περιγράφεται αργότερα.

Στην προσπάθεια επίλυσης του μοντέλου αυτού με τη μέθοδο κλάδων και ορίων, ένας τρόπος υπολογισμού φράγματος είναι να απορρίψει κανείς τους τριγωνικούς περιορισμούς και να επιχειρήσει να τους προσεγγίσει με λιγότερους. Για παράδειγμα, αν  $d_i, i=1, \dots, n$  είναι οι (συνολικοί) βαθμοί των κόμβων στη λύση, αναγκαία (αλλά όχι και ικανή) συνθήκη για εφικτότητα είναι να ισχύει  $d_i = d_j$  για κάθε ζεύγος  $(i, j)$  συνδεδεμένων κόμβων. Αυτό επιβάλλεται με τους περιορισμούς:



$$|d_i - d_j| \leq (1 - x_{ij})(M - 1)$$

ή:

$$d_i \leq d_j + (1 - x_{ij})(M - 1)$$

$$d_i \geq d_j - (1 - x_{ij})(M - 1) \quad i = 1, \dots, n-1 \quad j = i+1, \dots, n$$

Στη συνεχή χαλάρωση της προσεγγιστικής αυτής μορφοποίησης περιπεύουν επίσης οι περιορισμοί  $x_{ij} \leq 1$  (αυτό ισχύει και για τη συνεχή χαλάρωση του αρχικού προβλήματος (3.5)-(3.8)).

Όπως προαναφέρθηκε, μπορεί κανείς να εκμεταλλευτεί ορισμένες ιδιότητες των μεταβατικών υπο-γράφων τύπου «διαγωνισμού», ιδιαίτερα εκείνες που αναφέρονται στις «σειρές» των δεικτών των κόμβων, δηλ. των βαθμών εξόδου. Αν για παράδειγμα οι δείκτες  $S_i, S_j$  δύο κόμβων  $i, j$  είναι ίδιοι, αυτό σημαίνει ότι οι κόμβοι ανήκουν σε διαφορετικά κύτταρα, και αυτό εκφράζεται με τον περιορισμό  $x_{ij} \leq |S_i - S_j|$ . Επίσης, επειδή οι δείκτες σε έναν υπο-γράφο μεγέθους  $m$  είναι ακριβώς  $0, 1, \dots, m-1$  (και συνεπώς το άθροισμά τους ισούται με  $\binom{m}{2}$ ), μπορεί κανείς πρώτα να διασπάσει το πρόβλημα σε μία

επιλεγμένη μικρή ομάδα υποπροβλημάτων ΠΔΓ, το καθένα εξ ορισμού με καθορισμένο αριθμό και μεγέθη κυττάρων έστω  $k$  και  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , αντίστοιχα, και στη συνέχεια να εφαρμόσει τον περιορισμό

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_{ij} = \binom{m_1}{2} + \binom{m_2}{2} + \dots + \binom{m_k}{2}$$

σε κάθε υποπρόβλημα. Η καλύτερη λύση από όλα τα υποπροβλήματα δίνει ένα κάτω φράγμα για τη λύση στο ΠΣΒΚ.

Οι μέθοδοι αυτές πάντως δεν «συλλαμβάνουν» την πολυπλοκότητα του ΠΣΒΚ που απεικονίζεται καλύτερα στις μορφοποιήσεις 0-1 Τετραγωνικού Προγραμματισμού/ Βέλτιστης Προσέγγισης Μητρώου που εξετάζονται στην ενότητα 3.5. Εν ολίγοις, η απαλοιφή της μεταβατικής ιδιότητας των συνδέσεων (με χαλάρωση των τριγωνικών περιορισμών) αποδυναμώνει πολύ

το μοντέλο και δεν οδηγεί σε χρήσιμα όρια. Ο λόγος είναι ότι οι τριγωνικοί περιορισμοί (3.7) ορίζουν έδρες (facets) του πολυτόπου ΠΣΒΚ, όπως έχει αποδειχθεί από τη μελέτη παρεμφερών προβλημάτων σε άλλες ερευνητικές περιοχές, βλ. Sorensen [1995]. Η απαλοιφή της ιδιότητας αυτής οδηγεί κατά κανόνα σε ένα συνδεδεμένο γράφο αντί της συλλογής ασύνδετων υπογράφων τύπου «διαγωνισμού» που περιγράφηκε (ή η λύση περιέχει υπογράφους που πρέπει να διασπαστούν περαιτέρω). Αξίζει να σημειωθεί εδώ η αναλογία με τη γνωστή χαλάρωση Προβλήματος Αντιστοίχισης (Assignment Problem) στο Πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή (Travelling Salesman Problem), όπου αντιστρόφως, το αποτέλεσμα της χαλάρωσης είναι κατά κανόνα ασύνδετες διαδρομές και πρέπει να επιβληθούν επι πλέον περιορισμοί για να προκύψει τελικά μία μοναδική διαδρομή που να διέρχεται από όλους τους κόμβους.

Εδώ πρέπει να αναφερθεί ότι υπάρχουν και άλλοι τρόποι να διατυπώσει κανείς τη μεταβατική ιδιότητα των συνδέσεων. Για παράδειγμα, οι περιορισμοί (3.7) γράφονται ισοδύναμα:

$x_{ij} + x_{ik} + x_{jk} = 0, 1 \text{ ή } 3$  για κάθε τριάδα μηχανών  $(i,j,k)$ , ή με τη χρήση πρόσθετων βοηθητικών 0-1 μεταβλητών  $\delta_{ijk}^1, \delta_{ijk}^2, \delta_{ijk}^3$  :

$$x_{ij} + x_{ik} + x_{jk} = 0\delta_{ijk}^1 + 1\delta_{ijk}^2 + 3\delta_{ijk}^3$$

$$\delta_{ijk}^1 + \delta_{ijk}^2 + \delta_{ijk}^3 = 1$$

Αυτό μειώνει κατά 1/3 τον αριθμό των περιορισμών, χωρίς όμως κανένα όφελος στο χρόνο υπολογισμού της συνεχούς χαλάρωσης επειδή η ανεπιθύμητη συμμετρία παραμένει.

### 3.3.2. Μέθοδος Τεμνόντων Επιπέδων (Cutting Planes)

Μία λογική ιδέα είναι να προσπαθήσει κανείς να επιβάλει τους τριγωνικούς περιορισμούς έμμεσα, με τέμνοντα επίπεδα. Για λόγους πειραματισμού δοκιμάστηκε το παρακάτω σχήμα:

- α. Επιλογή οποιουδήποτε τρόπου χαλάρωσης των τριγωνικών περιορισμών (3.7), από αυτούς που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα .
- β. Εύρεση της συνεχούς λύσης ( $0 \leq x_{ij} \leq 1, x_{ij} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ) .
- γ. Αν η λύση είναι ακέραια, μετάβαση στο βήμα (δ).  
Ειδάλλως, προσθήκη κλασματικών τομών Gomory μέχρις επίτευξης ακεραίας λύσης.
- δ. Αν δεν παραβιάζονται τριγωνικοί περιορισμοί, τέλος.  
Ειδάλλως, προσθήκη αυτών που παραβιάζονται και επιστροφή στο βήμα (β).

Οι τομές που προστίθενται στο βήμα (δ), δηλαδή οι τριγωνικοί περιορισμοί που παραβιάζονται, μπορούν να προστεθούν ένας ή περισσότεροι κάθε φορά. Στις δοκιμές προτιμήθηκε το πρώτο, για να μην υπάρχουν μεγάλες αποκλίσεις από την εφικτότητα (εις βάρος βεβαίως του υπολογιστικού χρόνου).

Ο μαζικός εκφυλισμός που αναφέρθηκε στην αρχή του παρόντος Κεφαλαίου οδήγησε σε σταδιακά όλο και πιο «ασθενείς» τομές και κυκλικότητα (cycling), ακόμα και σε μικρά προβλήματα (λιγότερες από 15 μηχανές). Τα αποτελέσματα αυτά θεωρήθηκαν αποθαρρυντικά ως προς τη σκοπιμότητα περαιτέρω διερεύνησης αυτής της προσέγγισης, για παράδειγμα με καλύτερες τομές ή/και την χρήση πολυεδρικών αποτελεσμάτων σε πλαίσιο πλέον καθαρά τεμνόντων επιπέδων. Δεν υπάρχει πράγματι αρκετό έδαφος για εφαρμογή τέτοιων μεθόδων από μόνων τους. Μία πληρέστερη παρεμφερής προσέγγιση στο πρόβλημα (χωρίς πάντως ικανοποιητικούς χρόνους επίλυσης) αναφέρεται από τον Sorensen [1997], ο οποίος εξετάζει διάφορες εκδοχές του ΠΔΓ και

χρησιμοποιεί έναν αλγόριθμο κλάδων και τομών (branch-and-cut) συνδυάζοντας τέμνοντα επίπεδα με απαρίθμηση τύπου κλάδων και ορίων.

### 3.3.3. b-Matching και Χαλάρωση Lagrange (Lagrangean Relaxation)

Με τη δυαδικοποίηση των τριγωνικών περιορισμών (3.7), δηλαδή τη μεταφορά τους στην αντικειμενική συνάρτηση κατά τη μέθοδο της χαλάρωσης Lagrange, απομένουν μόνο οι περιορισμοί «βαθμού» (3.6) και ακεραιότητας (3.8). Το νέο πρόβλημα αποτελεί:

- γενίκευση του κλασικού Σταθμισμένου Προβλήματος Αντιστοίχισης (Weighted Matching Problem),
- ειδική περίπτωση του Σταθμισμένου Προβλήματος b-Αντιστοίχισης (Weighted b-Matching Problem) στο οποίο ο μέγιστος αριθμός συνδέσεων μπορεί να διαφέρει για κάθε κόμβο, ενώ στην περίπτωση που εξετάζεται εδώ ο μέγιστος αυτός αριθμός είναι  $M-1$  για όλες τις μηχανές – κόμβους.

Το δεύτερο πρόβλημα, άρα και η χαλάρωση που εξετάζεται, είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο με μεθόδους που είναι φυσιολογικές επεκτάσεις του εξαιρετικά αποτελεσματικού αλγορίθμου του Edmond για το πρώτο, βλ. για παράδειγμα Gondran και Minoux [1986].

Αυτός είναι και ο μοναδικός τρόπος υπολογισμού φράγματος με τη μέθοδο της χαλάρωσης Lagrange. Πράγματι, η άλλη εναλλακτική λύση, δηλαδή η δυαδικοποίηση των περιορισμών βαθμού (3.6), οδηγεί στο πρόβλημα διαμερισμού σε πλήρεις υπο-γράφους (κλίκες) - clique partitioning, που έχει μελετηθεί σε βάθος από τους Grötschel και Wakabayashi [1989]. Το πρόβλημα clique partitioning έχει μεν μόνο τριγωνικούς περιορισμούς, αλλά οι τιμές στη μήτρα κόστους μπορούν να έχουν και αρνητικές τιμές (αν δεν συνέβαινε αυτό θα είχαμε την τετριμμένη λύση ενός κυττάρου), παραμένει δε στην κατηγορία NP-hard και εξαιρετικά δύσκολο να επιλυθεί.

Επιστρέφοντας στο Σταθμισμένο Πρόβλημα b-Αντιστοίχισης, το δυαδικό πρόβλημα που δίνει κάτω φράγμα για τη μορφοποίηση ΠΣΒΚ (3.5)-(3.8) είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης:

$$\max_{\mathbf{u} \geq 0} \left\{ \min_{\mathbf{x} \in S} [L(\mathbf{x}, \mathbf{u})] \right\} \quad (3.12)$$

όπου:

- $\mathbf{u}$  είναι το διάνυσμα-γραμμή με τους πολλαπλασιαστές Lagrange που αντιστοιχούν στους τριγωνικούς περιορισμούς (3.7),

- $L(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  είναι η επηυξημένη αντικειμενική συνάρτηση,

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n c_{ij}(1 - x_{ij}) + \mathbf{u}(\mathbf{A}_{TR}\mathbf{x} - \mathbf{1}), \text{ όπου } \mathbf{A}_{TR} \text{ είναι η μήτρα με}$$

τους συντελεστές των τριγωνικών περιορισμών (3.7) και  $\mathbf{1}$  είναι διάνυσμα με όλα τα στοιχεία μονάδες,

- $S$  είναι το σύνολο των περιορισμών που απομένουν, δηλαδή οι περιορισμοί βαθμού (3.6) και δυαδικότητας των μεταβλητών (3.8).

Η μεγιστοποίηση (3.12) επιτυγχάνεται με επαναληπτική μέθοδο «ανάβασης κατά υποπαράγωγο» (subgradient ascent). Σε αυτήν, τα στοιχεία του διανύσματος  $\mathbf{u}$  στην επανάληψη  $j+1$  υπολογίζονται από αυτά της προηγούμενης επανάληψης  $j$ , με βάση την κατεύθυνση αύξησης που δίνει οποιαδήποτε υποπαράγωγος (subgradient) της επηυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης  $L(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ . Ο πλέον διαδεδομένος και αποδεδειγμένα αποτελεσματικός τρόπος είναι ο ακόλουθος, βλ. για παράδειγμα Fisher [1981]:

$$\mathbf{u}^{j+1} \leftarrow \mathbf{u}^j + \lambda^j \gamma(\mathbf{u}^j)$$

όπου:

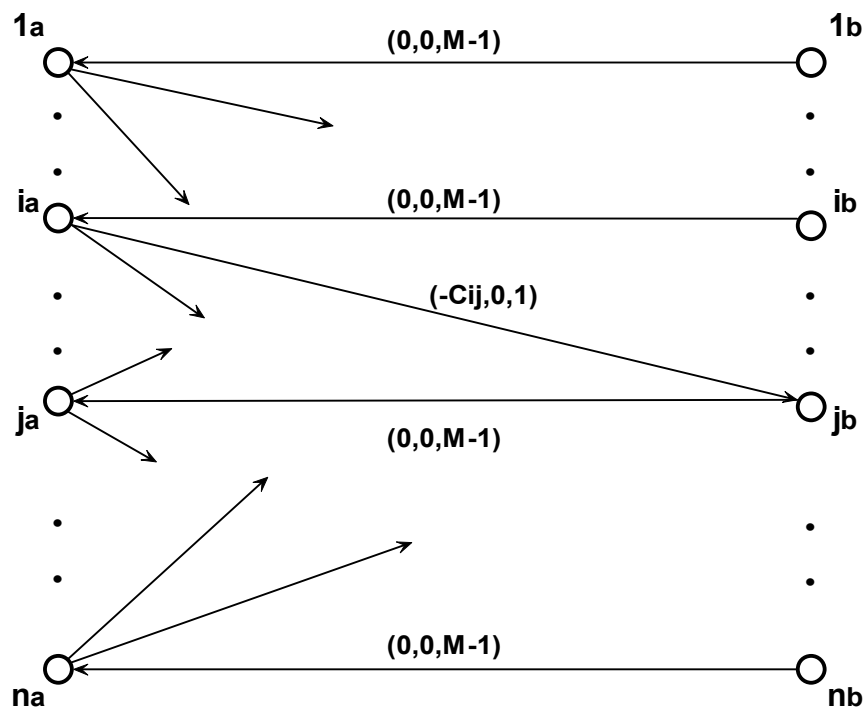
- $\gamma(\mathbf{u}^j) = \mathbf{A}_{TR} \mathbf{x}^j - \mathbf{1}$  είναι υποπαράγωγος της επηυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης στο «σημείο»  $\mathbf{u}^j$ ,  $\mathbf{x}^j$  είναι η βέλτιστη λύση της χαλάρωσης  $\min_{\mathbf{x} \in S} [L(\mathbf{x}, \mathbf{u})]$  στην επανάληψη  $j$ ,
- $\lambda^j = \rho^j \frac{(z' - z(\mathbf{u}^j))}{\|\gamma(\mathbf{u}^j)\|^2}$ , όπου  $z'$  είναι οποιοδήποτε άνω φράγμα για τη λύση

της πλήρους μορφοποίησης ΠΣΒΚ (3.5)-(3.8),  $z(\omega^j)$  η τιμή της επηυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης στην επανάληψη  $j$ , η δε διαδοχή  $\rho^j$  ορίζεται θέτοντας  $\rho^0 = 2$  και στη συνέχεια διαιρώντας δια 2 όποτε διαπιστώνεται ότι έχουν παρέλθει 5 επαναλήψεις χωρίς βελτίωση (αύξηση) του φράγματος.

Για τις δοκιμές αυτής της μεθόδου, το άνω φράγμα  $z'$  υπολογίστηκε με ένα νέο αρκετά αποτελεσματικό ευρετικό αλγόριθμο, ο οποίος έχει ενσωματωθεί στον ακριβή αλγόριθμο του Κεφαλαίου 4 και περιγράφεται εκεί.

Μειονέκτημα της μεθόδου ήταν η βραδεία σύγκλιση προς ένα καλής ποιότητας φράγμα, εξ αιτίας της μεγάλης διάστασης του διανύσματος των πολλαπλασιαστών Lagrange  $\mathbf{u}$  που είναι  $3 \binom{n}{3}$ .

Από μία άλλη σκοπιά, η μορφοποίηση Σταθμισμένου Προβλήματος b-Αντιστοίχισης αφαιρεί πολύ μεγάλο μέρος της πολυπλοκότητας του αρχικού προβλήματος για να είναι χρήσιμη, δηλαδή να δώσει ένα ικανοποιητικό φράγμα σε λογικούς χρόνους. Αυτό μπορεί να φανεί και από το γεγονός ότι στη θέση του Σταθμισμένου Προβλήματος b-Αντιστοίχισης μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει μία πολύ απλούστερη μορφοποίηση Ροής Ελαχίστου Κόστους (Minimal Cost Flow), χωρίς ιδιαίτερη επιδείνωση στην ποιότητα του φράγματος, τουλάχιστον για προβλήματα μικρής έως μεσαίας διάστασης.



**Σχήμα 3.6.** Χαλάρωση Ροής Ελαχίστου Κόστους.

Στο διμερή γράφο του σχήματος 3.6, για κάθε μηχανή  $i$  κατασκευάζονται δύο κόμβοι  $ia, ib$ , ένας σε κάθε πλευρά. Από έναν κόμβο στην αριστερή πλευρά εκκινούν τόξα προς όλους τους κόμβους της δεξιάς, εκτός από τον «αντίστοιχο» κόμβο. Τα τόξα που εκκινούν από τη δεξιά πλευρά συνδέουν τους «αντίστοιχους» κόμβους. Οι αριθμοί στα τόξα παριστάνουν το κόστος μοναδιαίας ροής, την ελάχιστη ροή και τη μέγιστη, με τη συγκεκριμένη σειρά.

Μπορεί εύκολα να επαληθεύσει κανείς ότι το μοντέλο αυτό διαφέρει από το μοντέλο Σταθμισμένου Προβλήματος  $b$ -Αντιστοίχισης στο ότι οι περιορισμοί δυαδικότητας των μεταβλητών χαλαρώνονται σε  $0 \leq x_{ij} \leq 1$ . Παρά τη σημαντική αυτή διαφορά, τα δύο φράγματα που παρήχθησαν στις δοκιμές με αρκετά προβλήματα μεσαίου μεγέθους ήταν κατά κανόνα τα ίδια, και μάλιστα η εφαρμογή της ταχύτερης μεθόδου επίλυσης out-of-kilter για το μοντέλο Ροής Ελαχίστου Κόστους (βλ. για παράδειγμα Bazaraa κ.α. [1990]) επέτρεψε καλύτερους χρόνους υπολογισμού. Τα παραπάνω αποδεικνύουν για μία ακόμα

φορά ότι σχεδόν όλη η πολυπλοκότητα του μοντέλου αυτού έγκειται στους τριγωνικούς περιορισμούς.

Σε αντίθεση πάντως με τα αναφερθέντα για την προσέγγιση Τεμνόντων Επιπέδων, εδώ υπάρχει κάποιο έδαφος για βελτίωση. Μία πιθανή μέθοδος εφαρμογής της προσέγγισης b-matching είναι μέσω της μορφοποίησης Ροής Ελαχίστου Κόστους που περιγράφηκε, σε συνδυασμό με εξελιγμένες τεχνικές ανάβασης κατά υποπαράγωγο, από την ερευνητική περιοχή της μη Διαφορίσιμης (μη Ομαλής) Βελτιστοποίησης, βλ. για παράδειγμα Schramm και Zowe [1992] για τις μοντέρνες μεθόδους "bundle". Αυτό διότι η περιγραφείσα διαδεδομένη μέθοδος του Fisher δεν είναι παρά ένας αρκετά «μυωπικός» ευρετικός αλγόριθμος. Η αποτελεσματικότητά του είναι μεν αποδεδειγμένα πολύ καλή για κίνηση σε χώρους σχετικά λίγων διαστάσεων, φθίνει όμως απότομα από μία διάσταση και πάνω.

### **3.4. Το ΠΣΒΚ ως Πρόβλημα Διαμερισμού Συνόλου (Set Partitioning)**

Στα πλαίσια του 0-1 Ακεραίου Προγραμματισμού, το ΠΣΒΚ μπορεί να αντιμετωπιστεί ειδικότερα ως κλασικό Πρόβλημα Διαμερισμού Συνόλου (ΠΔΣ), με τη λογική ότι πρέπει να «καλυφθούν ακριβώς» οι μηχανές - κόμβοι, από ομάδες κόμβων. Αυτό δεν θα ήταν εφικτό αν χρειαζόταν να ληφθούν υπόψη όλες οι δυνατές ομάδες (συνδυασμοί) κόμβων. Ο περιορισμός όμως στα μεγέθη των κυττάρων σε συνδυασμό με το ότι στη βέλτιστη λύση δεν υπάρχουν κύτταρα που να μπορούν να συνενωθούν μειώνουν σημαντικά τις δυνατές ομάδες. Για παράδειγμα, σε ένα πρόβλημα με 7 μηχανές και μέγιστο μέγεθος κυττάρου 3, υπάρχουν μόνο 2 εφικτοί διαμερισμοί (προβλήματα ΠΔΓ), σε κύτταρα με μεγέθη 1,3,3 και 2,2,3. Συνεπώς, επιλύονται δύο προβλήματα ΠΔΣ, ένα με ομάδες 1 και 3 κόμβων και ένα δεύτερο με ομάδες 2 και 3 κόμβων. Όπως δε έχει ήδη αναφερθεί, ο αριθμός των υποπροβλημάτων



ΠΔΓ αυξάνεται σχετικά αργά για προβλήματα μεσαίας τάξης που ενδιαφέρουν στην πράξη (για ακριβή επίλυση).

Για τη λύση κάθε υποπροβλήματος ΠΔΓ ως προβλήματος ΠΔΣ, τα δεδομένα είναι συνεπώς οι εφικτές ομάδες κόμβων με μεγέθη στο διάστημα  $[m_{\min}, \dots, m_{\max}]$ . Συμβολίζονται με  $S$  το σύνολο όλων αυτών των εφικτών ομάδων, με  $|S|$  ο πληθικός αριθμός του  $S$  και με  $S_j, j=1, \dots, |S|$  τα μέλη του  $S$ . Επίσης, ορίζεται μία 0-1 μήτρα  $A=(a_{ij})$  τάξης  $n \times |S|$  με στοιχεία:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν η μηχανή } i \text{ ανήκει στην ομάδα } S_j \\ 0, & \text{ειδώλλως} \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, |S|$$

Με το προηγούμενο παράδειγμα, στο πρώτο υποπρόβλημα η μήτρα  $A$  έχει διαστάσεις  $7 \times 42$  και έχει ως ακολούθως:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Η μορφοποίηση ΠΔΣ είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης και έχει ως εξής:

$$z = \max \sum_{j=1}^{|S|} b_j x_j \tag{3.13}$$

με τους περιορισμούς:

$$\sum_{j=1}^{|S|} a_{ij} x_j = 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (3.14)$$

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{αν η ομάδα } S_j \text{ χρησιμοποιείται στην κάλυψη} \\ 0, & \text{ειδάλλως} \end{cases} \quad (3.15)$$

$$j = 1, \dots, |S|$$

Στα παραπάνω, η αντικειμενική συνάρτηση (3.13) εκφράζει την κυκλοφορία κομματιών εντός κυττάρων, ο δε περιορισμός (3.14) εξασφαλίζει ότι κάθε μηχανή ανήκει ακριβώς σε μία από τις ομάδες που επιλέγονται. Οι συντελεστές «κέρδους»  $b_j$  στην αντικειμενική συνάρτηση προκύπτουν από τη μήτρα κόστους  $C$  της μορφοποίησης 0-1 Ακεραίου Προγραμματισμού:

$$b_j = \frac{1}{2} \sum_{i, k \in S_j} c_{ik}$$

Η μορφοποίηση (3.13)-(3.15) είναι ισοδύναμη με την (3.5)-(3.8) επειδή η μεγιστοποίηση της κυκλοφορίας κομματιών εντός κυττάρων και η ελαχιστοποίηση της κυκλοφορίας κομματιών εκτός κυττάρων αποτελούν όψεις του ίδιου προβλήματος.

Η συνήθης μορφή που χρησιμοποιείται στους αλγορίθμους επίλυσης του ΠΔΣ είναι η ελαχιστοποίηση με μη αρνητικούς συντελεστές κόστους. Το πρόβλημα μετατρέπεται σε αυτή τη μορφή ως εξής:

Υπολογίζουμε τους τροποποιημένους συντελεστές  $b'_j = d_j - b_j$ ,  $j = 1, \dots, |S|$

όπου  $d_j = k |S_j| = k \sum_{i=1}^n a_{ij}$ , και  $k$  οποιοσδήποτε ακέραιος  $\geq \max_{S_j \in S} \left\{ \frac{b_j}{|S_j|} \right\}$ .

Πράγματι:

$$z = \max \sum_{j=1}^{|S|} b_j x_j = \min \sum_{j=1}^{|S|} (-b_j) x_j \quad ,$$

$$\sum_{j=1}^{|S|} (-b_j) x_j = \sum_{j=1}^{|S|} b'_j x_j - \sum_{j=1}^{|S|} d_j x_j = \sum_{j=1}^{|S|} b'_j x_j - k \sum_{j=1}^{|S|} \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{|S|} b'_j x_j - kn$$

$$\text{και } b'_j = k |S_j| - b_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, |S|$$

συνεπώς οι τροποποιημένοι αυτοί συντελεστές είναι συντελεστές κόστους για το ίδιο πρόβλημα στη συνήθη μορφή επίλυσης του ΠΔΣ.

Το πλεονέκτημα της προσέγγισης αυτής έγκειται στη δυνατότητα των αλγορίθμων ΠΔΣ να αντιμετωπίσουν προβλήματα με χιλιάδες μεταβλητές. Το μειονέκτημα είναι ο εκθετικά αυξανόμενος αριθμός στηλών (μεταβλητών) με τη διάσταση του προβλήματος. Ο αριθμός αυτός είναι

$$\binom{n}{m_{\min}} + \dots + \binom{n}{m_{\max}}$$

όπου  $m_{\min}, \dots, m_{\max}$  είναι τα επιτρεπόμενα μεγέθη

κυττάρων.

Η εγγενής συμμετρία του προβλήματος δεν επιτρέπει την εφαρμογή καμίας από τις γνωστές δοκιμασίες μείωσης (reduction tests). Επιπλέον, δεν φαίνεται να υπάρχει τρόπος να απομονώσει κανείς στήλες που αποκλείεται να ανήκουν στη βέλτιστη λύση. Τα μεγαλύτερα προβλήματα που λύθηκαν με αυτό το τρόπο σε λογικούς χρόνους (σε τυπικό μικροϋπολογιστή) ήταν μεγέθους 16, από τη διάσταση δε αυτή και πέρα οι χρόνοι δεν ήταν ικανοποιητικοί. Ο μόνος τρόπος εφαρμογής της προσέγγισης αυτής θα ήταν μία τεχνική παραγωγής στηλών (column generation). Μία παρόμοια προσπάθεια έχει ξεκινήσει ο M. Sorensen [προσωπική επικοινωνία] ο οποίος μελετά τις πολυεδρικές απόψεις διαφόρων εκδοχών του ΠΔΓ. Ο M. Sorensen επιχειρεί να βελτιώσει έναν αλγόριθμο των Johnson, Mehrotra και Nemhauser [1993] για την επίλυση ενός γενικότερου προβλήματος, παρουσίασε δε πολύ πρόσφατα μερικά πρώτα αποτελέσματα (Sorensen [2000]).

Στην επόμενη ενότητα, η έμφαση δίνεται σε μεθόδους που συλλαμβάνουν σωστά την πολυπλοκότητα του προβλήματος. Ορισμένα από τα αποτελέσματα που περιγράφονται και σχολιάζονται χρησιμοποιήθηκαν στο σχεδιασμό του ακριβούς αλγορίθμου δένδροειδούς αναζήτησης του Κεφαλαίου 4. Διατυπώνονται επίσης οι σχέσεις μεταξύ των διαφόρων μοντέλων, συμπεριλαμβανομένης της μορφοποίησης 0-1 Ακεραίου Προγραμματισμού που ήταν μέχρι τώρα η βάση, με αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός ενιαίου πλαισίου διατυπώσεων Μαθηματικού Προγραμματισμού για τη μελέτη του ΠΣΒΚ.

### **3.5. Μορφοποιήσεις 0-1 Τετραγωνικού Προγραμματισμού και Βέλτιστης Προσέγγισης Μητρώου (Best Matrix Approximation)**

Η παρακάτω αντικειμενική συνάρτηση μεγιστοποίησης κυκλοφορίας κομματιών εντός κυττάρων είναι ισοδύναμη με την (3.5) και είναι το σημείο εκκίνησης για ναδειχθεί η σχέση μεταξύ της μορφοποίησης 0-1 Ακεραίου Προγραμματισμού και των μορφοποιήσεων που αναφέρονται στην παρούσα ενότητα:

$$\max z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \quad (3.16)$$

Στη συνάρτηση αυτή,  $\mathbf{C}$  είναι η μήτρα αποστάσεων μεταξύ μηχανών,  $\mathbf{X}=(x_{ij})$  είναι η  $n \times n$  μήτρα με τις μεταβλητές και ο τελεστής  $\text{tr}(\cdot)$  συμβολίζει το ίχνος μίας τετραγωνικής μήτρας. Στο εξής, οι μεταβλητές  $x_{ij}$  αντιστοιχούν σε μη διατεταγμένα ζεύγη, δηλαδή  $x_{ij}=x_{ji}$  για κάθε  $(i,j)$  και  $x_{ii}=0$  για κάθε  $i$ .

Αν αγνοήσουμε τους περιορισμούς βαθμού (3.6), απομένουν οι τριγωνικοί περιορισμοί (3.7) και η δυαδικότητα των μεταβλητών (3.8). Κάθε μήτρα  $\mathbf{X}$  που ικανοποιεί τους περιορισμούς αυτούς ονομάζεται **μήτρα διαμερισμού** (partition matrix). Για να εξηγηθεί ο λόγος, αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι σε κάθε λύση του ΠΣΒΚ, δηλαδή σε κάθε εφικτό διαμερισμό – λύση του ΠΔΓ

με  $k$  κύτταρα μεγεθών  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , μπορούν πάντα να αναδιαταχθούν οι μηχανές με τρόπο ώστε οι τιμές των μεταβλητών  $x_{ij}$  να είναι τα στοιχεία της παρακάτω σύνθετης διαγώνιας μήτρας:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1}_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1}_k \end{bmatrix}$$

όπου  $\mathbf{1}_i$ ,  $i=1, \dots, k$  είναι τετραγωνικές υπο-μήτρες τάξεων  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , με όλα τους τα στοιχεία μονάδες. Η αναδιάταξη αυτή των μηχανών ισοδυναμεί με ορθογώνιο μετασχηματισμό της μήτρας  $\mathbf{X}$ . Αντίστροφα, η παραπάνω μήτρα  $\mathbf{B}$  είναι η γεννήτρια όλων των εφικτών (και μη) διαμερισμών, με τον ορθογώνιο μετασχηματισμό:

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^t \quad (3.17)$$

όπου  $\mathbf{P}$  είναι μήτρα μετάθεσης (permutation), δηλαδή μήτρα που προκύπτει από τη μοναδιαία με μετάθεση στηλών, και  $t$  είναι ο τελεστής αναστροφής πίνακα. Το μοντέλο συνεπώς, με αγνώστους πλέον τα στοιχεία της μήτρας  $\mathbf{P}$ , είναι:

$$\max z = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^t) \quad (3.18)$$

με τον περιορισμό η  $\mathbf{P}$  να είναι μήτρα μετάθεσης.

Αν είναι σταθερή η μήτρα  $\mathbf{B}$ , δηλαδή ο αριθμός των κυττάρων και τα μεγέθη τους είναι προκαθορισμένα, το μοντέλο (3.18) είναι ακριβώς η κλασική μορφοποίηση ίχνους (trace formulation) του **Τετραγωνικού Προβλήματος Αντιστοίχισης** (Quadratic Assignment Problem) – **ΤΠΑ** και για την ακρίβεια η «καθαρή» του μορφή, χωρίς γραμμικό όρο. Η συνήθης στη βιβλιογραφία μορφή ελαχιστοποίησης παράγεται αν ανταλλάξουν θέσεις τα μηδενικά και οι

μονάδες στη μήτρα  $B$ . Στη μορφοποίηση ΤΠΑ οι περιορισμοί «αντιστοιχισής» εμπεριέχονται στον ορισμό της μήτρας  $\Pi$  η οποία ως μήτρα μετάθεσης έχει άθροισμα γραμμών και στηλών ίσο με 1.

Με τον προκαθορισμό αυτό του αριθμού και των μεγεθών των κυττάρων,  $k$  και  $m_1, m_2, \dots, m_k$  αντίστοιχα, απαντάται και πάλι το Πρόβλημα Διαμερισμού Γράφου (ΠΔΓ) που περιγράφηκε στην ενότητα 3.2. Όπως εξηγήθηκε εκεί, το αρχικό πρόβλημα μπορεί να θεωρηθεί ως η ένωση υποπροβλημάτων ΠΔΓ, πράγμα που δεν δημιουργεί ιδιαίτερες δυσκολίες για προβλήματα μεσαίου μεγέθους, καθώς τα περισσότερα υποπροβλήματα αφορούν κατανομές που αποκλείονται επειδή υπάρχουν κύτταρα που μπορούν να συνενωθούν. Για παράδειγμα, για  $n=25$  μηχανές και αν αποκλείσει κανείς εξ αρχής τις «ανεπιθύμητες» κατανομές που περιέχουν ένα μικρό κύτταρο, στην πράξη επιλύονται περί τα 10 υποπροβλήματα το πολύ.

Η μορφοποίηση ΤΠΑ (3.18) δεν είναι πάντως η πλέον κατάλληλη για την επίλυση προβλημάτων μεσαίου μεγέθους και ο λόγος είναι ότι η πραγματική διάσταση του ΠΔΓ είναι  $n \times k$  και όχι  $n \times n$ . Πράγματι, σε κάθε υποπρόβλημα ΠΔΓ αντιστοιχίζονται  $n$  μηχανές σε  $k$  κύτταρα, ενώ με τη μορφοποίηση ΤΠΑ στην ουσία πρώτα καθορίζεται για κάθε μηχανή μία συγκεκριμένη θέση στη διάταξη  $\{1, 2, \dots, n\}$  και στη συνέχεια βρίσκεται το αντίστοιχο κύτταρο μέσω της μήτρας  $B$  η οποία απεικονίζει τις θέσεις αυτές σε κύτταρα.

Το ότι η μορφοποίηση ΤΠΑ δεν επαρκεί για την επίλυση προβλημάτων διαστάσεων που ενδιαφέρουν επαληθεύτηκε από την αποτυχία της άμεσης εφαρμογής μεθόδων ΤΠΑ να επιλύσουν προβλήματα μεγέθους μεγαλύτερου του 15, ακόμα και με τη χρήση προχωρημένων τεχνικών υπολογισμού φράγματος σε δοκιμές κλάδων και ορίων. Συγκεκριμένα, δοκιμάστηκαν τα φράγματα που προτείνονται από τους Assad και Xu [1985], Carraresi και Malucelli [1992] και Hadley κ.α. [1992]. Τα φράγματα ήταν ως επί το πλείστον καλύτερα από το κλασικό φράγμα των Gilmore-Lawler (βλ. Finke, Burkard και Rendl [1987] για λεπτομερή συζήτηση του φράγματος αυτού και Gilmore

[1962] για την αρχική δημοσίευση) αλλά πάντως «χαλαρά». Υπήρξαν μάλιστα και περιπτώσεις χωρίς σημαντική διαφορά από το φράγμα των Gilmore-Lawler, για παράδειγμα εφαρμόζοντας τη μέθοδο των Assad και Xu σε ισοκατανομές ( $m_1=m_2=\dots=m_k=n/k$ ).

Καταλληλότερη προσέγγιση, δεδομένης της διάστασης  $n \times k$  του προβλήματος, είναι η μορφοποίηση του ΠΔΓ ως («καθαρού») **Τετραγωνικού Προβλήματος Μεταφοράς** (*Quadratic Transportation Problem*) - **ΤΠΜ**, με τη χρήση μεταβλητών «μεταφοράς»:

$$y_{ic} = \begin{cases} 1, & \text{αν η μηχανή } i \text{ τοποθετείται στο κύτταρο } c, \\ 0, & \text{ειδάλλως} \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, n \quad c = 1, \dots, k$$

για την κατανομή των  $n$  μηχανών στα  $k$  κύτταρα. Αν  $Y=(y_{ic})$  είναι η  $n \times k$  μήτρα που περιέχει αυτές τις μεταβλητές, ισχύει  $x_{ij} = \sum_{c=1}^k y_{ic}y_{jc}$  ή αλλιώς

$X=YY^t$ , οπότε η αντικειμενική συνάρτηση (3.16) γίνεται:

$$\max z = \frac{1}{2} \text{tr}(Y^t C Y) \quad (3.19)$$

με τους περιορισμούς μεταφοράς, δηλαδή:

$$\sum_{c=1}^k y_{ic} = 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (3.20)$$

(κάθε μηχανή ανήκει ακριβώς σε ένα κύτταρο)

$$\sum_{i=1}^n y_{ic} = m_c \quad c = 1, \dots, k \quad (3.21)$$

(κάθε κύτταρο  $c$  έχει ακριβώς  $m_c$  μηχανές)

$$y_{ic} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n \quad c = 1, \dots, k \quad (3.22)$$

όπου  $m_1, m_2, \dots, m_k$  είναι τα προκαθορισμένα μεγέθη των  $k$  κυττάρων.

Η παραπάνω μορφοποίηση ΤΠΜ για το ΠΔΓ παρουσιάστηκε από τους Rendl και Wolkowicz [1995], στα πλαίσια μελέτης προσανατολισμένης σε εφαρμογές τυπικές για το ΠΔΓ (σχεδιασμός ηλεκτρονικών κυκλωμάτων, τμηματοποίηση υπολογιστικού κώδικα κ.λπ.)

Εστιάζοντας πλέον το ενδιαφέρον σε αυτή τη μορφοποίηση, σημειώνεται πρώτα ότι, σε αντίθεση με τη μορφοποίηση ΤΠΑ, η συνεχής λύση, με την χαλάρωση των περιορισμών (3.22) σε  $0 \leq y_{ic} \leq 1$ , υπολογίζεται εύκολα. Μάλιστα, για προβλήματα μεσαίου μεγέθους η λύση αυτή είναι πολύ κοντά στο βέλτιστο του προβλήματος ΤΠΜ. Ο τρόπος όμως αυτός δίνει μόνο τοπικό βέλτιστο και δεν οδηγεί σε εγγυημένο φράγμα για τη λύση, επειδή η τετραγωνική μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης (3.19) είναι αόριστη. Πράγματι, η Hessian μήτρα, έστω  $D$ , είναι:

$$D = \begin{pmatrix} C & 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & C & & 0 & 0 \\ M & & O & & M \\ 0 & 0 & & C & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 & C \end{pmatrix}$$

δηλαδή μία  $(n+k) \times (n+k)$  σύνθετη διαγώνια μήτρα που έχει τη μήτρα κόστους  $k$  φορές στη διαγώνιο. Η μήτρα  $D$  έχει  $k$  φορές τις ιδιοτιμές της μήτρας κόστους  $C$ , η δε τελευταία έχει ίχνος άρα και άθροισμα ιδιοτιμών  $0$ , συνεπώς η  $D$  είναι αόριστη.

Θεωρητικά, το πρόβλημα αντιμετωπίζεται με διατάραξη (perturbation) της Hessian μήτρας  $D$  ώστε να γίνει αυτή αρνητικά ημιορισμένη (για και η μορφοποίηση ΤΠΜ αφορά μεγιστοποίηση) διατηρώντας ισοδύναμη την αντικειμενική συνάρτηση και άρα τη βέλτιστη λύση. Οι εγγενείς δυσκολίες αυτής της προσέγγισης φαίνονται στο παράδειγμα που ακολουθεί.



Η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως  $\max z = \frac{1}{2} \mathbf{y}^t \mathbf{D} \mathbf{y}$  με τη χρήση μεταβλητών απλού δείκτη:  $\mathbf{y}^t = (y_{11}, y_{21}, \dots, y_{n1}, y_{12}, \dots, y_{nk})$ . Από τους περιορισμούς (3.20)-(3.22) έπεται εύκολα ότι:

$$\mathbf{y}^t \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \sum_{c=1}^k y_{ic}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{c=1}^k y_{ic} = n$$

Το ολικό βέλτιστο στο συνεχές πρόβλημα και συνεπώς ένα άνω φράγμα στη λύση ΤΠΑ θα ήταν δυνατό να βρεθεί με τη μετατόπιση των ιδιοτιμών της Hessian μήτρας  $\mathbf{D}$  προς αρνητικές τιμές:

$$\max z = \frac{1}{2} \mathbf{y}^t (\mathbf{D} - \text{diag}(h)) \mathbf{y} + \frac{1}{2} h \mathbf{y}^t \mathbf{y}$$

Η απόπειρα αυτή όμως αποτυγχάνει επειδή ο όρος  $\mathbf{y}^t \mathbf{y}$  είναι σταθερός μόνο όταν ισχύει η δυαδικότητα των μεταβλητών. Στην πραγματικότητα, η μεγιστοποίηση της διαγώνια «διαταραγμένης» αυτής αντικειμενικής συνάρτησης έχει ως αποτέλεσμα μεγάλες τιμές στον όρο  $\mathbf{y}^t \mathbf{y}$ , μακριά από την τιμή  $n$  που πρέπει να έχει. Φυσικά ο τρόπος αυτός διαταραχής δεν είναι ούτε ο μοναδικός ούτε ο καταλληλότερος (για παράδειγμα, η Hessian μήτρα δεν είναι απαραίτητο να είναι παντού αρνητικά ημιορισμένη, αλλά μόνο στο χώρο εφικτότητας), η αναζήτηση όμως καλύτερης διαταραχής οδηγεί στην ουσία στο ίδιο «αδιέξοδο» που παρατηρείται στην έρευνα για την εξεύρεση ικανοποιητικών φραγμάτων για το ΤΠΑ.

Μία παρόμοια προσπάθεια προσαρμογής της μεθόδου του White για το ΓΠΑ [1993] έδωσε πολύ «χαλαρά» όρια. Τεχνικές γραμμικοποίησης όπως η προτεινόμενη από τους Adams και Sherali [1986] για το ΤΠΑ δεν είχε νόημα να δοκιμαστούν, αφ' ενός επειδή αυτές δεν εκμεταλλεύονται την αρκετά ειδική μορφή του ΤΠΑ που εξετάζεται, και αφ' ετέρου επειδή οδηγούν σε γραμμικά μοντέλα πολύ μεγαλύτερα από τη συνεχή χαλάρωση η οποία ήδη είναι εξαιρετικά δυσεπίλυτη, όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 3.3.1.

Το σημείο εκκίνησης για επιτυχείς προσπάθειες στην επίλυση του ΠΔΓ προέρχεται από μία άλλη μορφοποίηση ισοδύναμη με όλες τις προηγούμενες.

Αυτή είναι η μορφοποίηση **Βέλτιστης Προσέγγισης Μητρώου** (Best Matrix Approximation Problem) - **ΒΠΜ** που εισήγαγε πρώτος ο Barnes [1982] στα πλαίσια γραφοθεωρητικής μελέτης του ΠΔΓ:

$$\min \|C - X\|^2, \text{ με συνθήκη: } X \text{ είναι μήτρα διαμερισμού} \quad (3.23)$$

όπου  $C$  είναι η  $n \times n$  μήτρα κόστους και ο τελεστής  $\|\cdot\|^2$  είναι το τετράγωνο της Ευκλείδειας (Frobenius) νόρμας μίας μήτρας, δηλαδή το άθροισμα των τετραγώνων των στοιχείων της.

Η ισοδυναμία αποδεικνύεται εύκολα:

$$\|C - X\|^2 = \|C\|^2 + \|X\|^2 - 2 \operatorname{tr}(CX)$$

και από την (3.17),

$\|X\|^2 = \|PBP^t\|^2 = \|B\|^2 =$  σταθερά, δεδομένου ότι η  $P$  ως μήτρα μετάθεσης είναι ορθογώνια (όπως και η  $P^t$ ), ο δε πολλαπλασιασμός με ορθογώνια μήτρα δεν μεταβάλλει την Ευκλείδεια νόρμα. Υπενθυμίζεται ότι εξετάζονται οι μορφοποιήσεις ΠΔΓ όπου η μήτρα  $B$  θεωρείται σταθερή.

Άρα η μορφοποίηση:  $\min \{ \|C - X\|^2 : X \text{ είναι μήτρα διαμερισμού} \}$  είναι ισοδύναμη με την  $\max \{ \operatorname{tr}(CX) : X \text{ είναι μήτρα διαμερισμού} \}$ , δηλ. το υποπρόβλημα ΠΔΓ της μορφοποίησης 0-1 Ακεραίου Προγραμματισμού (3.16) και μέσω αυτού με τα μοντέλα ΤΠΑ και ΤΠΜ.

Η βασική παρατήρηση εδώ είναι ότι με τη μορφοποίηση αυτή, αν και οι διαστάσεις του προβλήματος αυξάνονται πάλι σε  $n \times n$ , λαμβάνεται άμεσα ένα κάτω φράγμα με την εφαρμογή της κλασικής ανισότητας των Hoffman-Wielandt:

αν  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  είναι πραγματικές τετραγωνικές συμμετρικές μήτρες τάξης  $n$ , με ιδιοτιμές  $\lambda_1(\mathbf{A}) \geq \dots \geq \lambda_n(\mathbf{A})$  και  $\lambda_1(\mathbf{B}) \geq \dots \geq \lambda_n(\mathbf{B})$ , αντίστοιχα:

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|^2 \geq \sum_{i=1}^n (\lambda_i(\mathbf{A}) - \lambda_i(\mathbf{B}))^2$$

Στα πλαίσια του ΠΔΓ, η ανισότητα αυτή πρωτοχρησιμοποιήθηκε από τον Barnes [1982] για την κατασκευή ενός ευρετικού αλγορίθμου. Η εισαγωγή μεθόδων ιδιοτιμών στο ΠΣΒΚ ξεκίνησε από τους Kumar, Kusiak και Vannelli [1986] που βασίστηκαν στον αλγόριθμο του Barnes και σε ένα φράγμα για το ΠΔΓ από τους Donath και Hoffman [1973]. Το τελευταίο αρχικά δεν είχε συνδεθεί με την ανισότητα των Hoffman – Wielandt, αποδεικνύεται όμως από τους Rendl και Wolkowicz [1995] ότι μπορεί να προκύψει από την κατάλληλη, στα πλαίσια του ΠΔΓ, γενίκευση της ανισότητας αυτής όπως εξηγείται στη συνέχεια.

Αν  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  είναι πραγματικές τετραγωνικές συμμετρικές μήτρες τάξης  $n$  και  $k$  αντίστοιχα ( $k \leq n$ ), με ιδιοτιμές  $\lambda_1(\mathbf{A}) \geq \dots \geq \lambda_n(\mathbf{A})$  και  $\lambda_1(\mathbf{B}) \geq \dots \geq \lambda_n(\mathbf{B})$  αντίστοιχα, και η  $\mathbf{B}$  είναι θετικά ημιορισμένη:

$$\max \left\{ \text{tr } \mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{B} \mathbf{X}^t : \mathbf{X}^t \mathbf{X} = \mathbf{I}_k \right\} = \sum_{i=1}^k \lambda_i(\mathbf{A}) \lambda_i(\mathbf{B}) \quad (3.24)$$

Στη σχέση αυτή, η μήτρα  $\mathbf{X}$  ανήκει στο σύνολο των πραγματικών με διαστάσεις  $n \times k$  και  $\mathbf{I}_k$  είναι η μοναδιαία μήτρα τάξης  $k$ .

Οι περιορισμοί στη μορφοποίηση ΤΠΜ είναι οι περιορισμοί μεταφοράς (3.20)-(3.21) και οι περιορισμοί δυαδικότητας (3.22). Αποδεικνύεται εύκολα ότι οι τελευταίοι μπορούν να αντικατασταθούν από τους περιορισμούς  $\mathbf{Y} \geq \mathbf{0}$  και  $\mathbf{Y}^t \mathbf{Y} = \mathbf{K}$ , όπου  $\mathbf{K} = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_k)$ , δηλαδή μία διαγώνια μήτρα  $k \times k$  με τα μεγέθη των κυττάρων στη διαγώνιο και όλα τα άλλα στοιχεία ίσα με μηδέν.

Άρα, αν εξαιρεθούν οι περιορισμοί μεταφοράς (3.20)-(3.21) και μη αρνητικότητας  $Y \geq 0$  και αφεθούν μόνο οι περιορισμοί  $Y^t Y = K$ , λαμβάνεται ένα άνω φράγμα για τη λύση του ΤΠΜ μέσω της μορφοποίησης:

$$\max \left\{ \frac{1}{2} \text{tr } Y^t C Y : Y^t Y = K \right\}$$

ή, θέτοντας  $Y = ZK^{1/2}$

$$\max \left\{ \frac{1}{2} \text{tr } K Z^t C Z : Z^t Z = I_k \right\} = \max \left\{ \frac{1}{2} \text{tr } C Z K Z^t : Z^t Z = I_k \right\}$$

στην οποία εφαρμόζεται άμεσα η γενίκευση της ανισότητας Hoffman – Wielandt (3.24), επειδή η μήτρα  $K$  είναι θετικά ημιορισμένη. Το αποτέλεσμα είναι το φράγμα των Donath-Hoffman:

$$z \leq \max \left\{ \frac{1}{2} \text{tr } C Z K Z^t : Z^t Z = I_k \right\} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k m_i \lambda_i (C)$$

δεδομένου ότι η  $K$  έχει  $k$  μη μηδενικές ιδιοτιμές ίσες με  $m_1, \dots, m_k$ .

Τα αποτελέσματα αυτά αποτελούν το ειδικότερο σημείο εκκίνησης για επιτυχείς προσπάθειες στην επίλυση του ΠΔΓ που προαναφέρθηκε. Ως προς το ΠΣΒΚ όμως η έρευνα έχει παραμείνει σε αυτά και μάλιστα με τρόπο που δεν επιδέχεται ακριβούς επίλυσης. Η προσέγγιση των Kumar, Kusiak και Vannelli [1986] αλλά και οι μεταγενέστεροι σχετικοί αλγόριθμοι (Vannelli και Hall [1993], Hadley [1996] κ.α.) βασίζονται στην αναπαράσταση των δεδομένων της μήτρας αντιστοίχισης μηχανών – κομματιών με διμερή γράφο όπου οι κόμβοι αντιστοιχούν στις μηχανές και τα κομμάτια. Το κατά κανόνα μεγάλο πλήθος κομματιών καθιστά ανέφικτη κάθε προσπάθεια ακριβούς επίλυσης η οποία συνεπώς ούτε καν επιχειρείται. Όλες αυτές οι μέθοδοι έχουν έναν ευρετικό «σκελετό» στον οποίο χρησιμοποιείται ο ήδη ευρετικός

αλγόριθμος του Barnes [1982], ενδεχομένως σε συνδυασμό με αλγορίθμους βελτίωσης της κατανομής των κόμβων (τυπικά, κάποια παραλλαγή της μεθόδου των Kernighan και Lin [1970]).

Μέρος της συνεισφοράς της παρούσας διατριβής είναι η μεταφορά στη μελέτη του ΠΣΒΚ των εξελίξεων των μεθόδων ιδιοτιμών και μάλιστα σε πλαίσιο που επιτρέπει ακριβή επίλυση. Στην παρούσα διατριβή χρησιμοποιείται γράφος με κόμβους που αντιστοιχούν στις μηχανές μόνο, και νεότερα αποτελέσματα από την προαναφερθείσα εργασία των Rendl και Wolkowicz [1995]. Στην εργασία αυτοί οι συγγραφείς βελτιώνουν το φράγμα των Donath και Hoffman προβάλλοντας την περιοχή εφικτότητας του προβλήματος στο γραμμικό τόπο που ορίζεται από τους περιορισμούς μεταφοράς (3.20)-(3.21), εξαιρώντας δηλαδή μόνο τους περιορισμούς μη αρνητικότητας  $Y \geq 0$ . Το τελευταίο αυτό αποτέλεσμα χρησιμοποιείται στον ακριβή αλγόριθμο (Κεφάλαιο 4) και περιγράφεται εκεί.

Να σημειωθεί ότι όλες οι μέθοδοι αυτού του τύπου που βασίζονται στον υπολογισμό ιδιοτιμών αποτελούν γενίκευση των γραφοθεωρητικών μεθόδων ανάλυσης φάσματος (spectral graph methods) οι οποίες χρησιμοποιούνται στην ευρετική επίλυση ειδικών μορφών ΠΔΓ (διαχωρισμός σε 2,4 ή 8 «σχεδόν ίσες» ομάδες, ή σε 2 ομάδες ανεξαρτήτως μεγέθους) σε προβλήματα πολύ μεγάλων διαστάσεων όπως αυτά που απαντώνται σε θέματα σχεδιασμού VLSI, βελτιστοποίησης της μαζικής παράλληλης επεξεργασίας κ.α. Οι μέθοδοι ανάλυσης φάσματος βασίζονται στις ιδιότητες της μήτρας Laplace ενός γράφου, βλ. για παράδειγμα Mohar [1991] και Pothen [1994].

Εξαντλητικός πειραματισμός με το φράγμα Rendl-Wolkowicz οδήγησε στο συμπέρασμα ότι η ποιότητα («σφικτό» φράγμα) είναι εγγυημένη μόνο στην περίπτωση της ισοκατανομής ( $m_1=m_2=\dots=m_k=n/k$ ), και ακόμα περισσότερο στη διχοτόμηση ( $m_1=m_2=n/2$ ). Αυτά λαμβάνονται υπόψη στον ακριβή αλγόριθμο δένδροειδούς αναζήτησης που περιγράφεται στο επόμενο Κεφάλαιο. Στον αλγόριθμο αυτό ακολουθείται μία μικτή προσέγγιση ΤΠΑ/ΤΠΜ

και χρησιμοποιείται η μεν μορφοποίηση ΤΠΜ και το φράγμα των Rendl-Wolkowicz στους κόμβους ισοκατανομής, η δε μορφοποίηση ΤΠΑ και το κλασικό φράγμα Gilmore-Lawler στους υπόλοιπους, με προτεραιότητα στους πρώτους και ακόμα μεγαλύτερη στους κόμβους διχοτόμησης. Όπως περιγράφεται αναλυτικά στο Κεφάλαιο αυτό, ο σχεδιασμός αυτός, σε συνδυασμό με τεχνικές αποθήκευσης βοηθητικών δεδομένων για την αποφυγή περιττών επαναλήψεων σε χρονοβόρους υπολογισμούς ιδιοτιμών και την εκμετάλλευση συμμετριών στο πρόβλημα, επέτρεψε την επίλυση προβλημάτων 25 μηχανών με μικρό υπολογιστικό κόστος. Για το σκέλος ΤΠΑ προτιμήθηκε το φράγμα Gilmore-Lawler που υπολογίζεται γρήγορα, για λόγους υπολογιστικής απόδοσης. Ο λόγος είναι ότι, σε τέτοιες διαστάσεις (στην πραγματικότητα σε πολύ μικρότερες, της τάξης του 15), τα πιο εξελιγμένα φράγματα για το ΤΠΑ απαιτούν απαγορευτικά υψηλούς χρόνους υπολογισμού.

Βασικό ερώτημα είναι το κατά πόσον υπάρχει ακόμα καλύτερο σημείο εκκίνησης από το φράγμα των Donath και Hoffman, ή αλλιώς από την ανισότητα Hoffman-Wielandt. Το ενδιαφέρον εστιάζεται για παράδειγμα στις διάφορες άλλες εκδοχές και γενικεύσεις της ανισότητας αυτής, βλ. ενδεικτικά Overton και Womersley [1992] και γενικά, σχετικά θέματα από τις ερευνητικές περιοχές Ανάλυσης Μητρώων (Matrix Analysis) και Φασματικής Ανάλυσης Γράφων.

Οι ιδιότητες των μητρώων διαμερισμού αποτελούν επίσης ενδιαφέροντα σημεία. Οι μήτρες αυτές ανήκουν στο σύνολο  $\{YY^t: Y^tY = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_k) = K\}$  το οποίο είναι φυσική επέκταση του συνόλου  $\{YY^t: Y^tY = I_k\}$ . Για το τελευταίο υπάρχουν ενδιαφέρουσες αναλογίες με το πολύ καλά μελετημένο σύνολο των μητρώων μετάθεσης (permutation matrices), βλ. την παραπάνω δημοσίευση για λεπτομέρειες.

Τα ζητήματα αυτά παραμένουν ανοικτά. Από την όλη συζήτηση πάντως προκύπτει ότι υπάρχει μεγάλο έδαφος εκμετάλλευσης αποτελεσμάτων από

καθαρά μαθηματικούς χώρους ανάλυσης. Η ανισότητα Hoffman - Wielandt έχει οδηγήσει ήδη σε μία αρκετά επιτυχημένη ομάδα ευρετικών αλγορίθμων για το πρόβλημα σχεδιασμού βιομηχανικών κυττάρων, όπως προαναφέρθηκε, και είναι συγχρόνως αφετηρία για τη μελέτη μοντέρνων μεθόδων επίλυσης τετραγωνικών προβλημάτων, όπως το ΤΠΑ και το ΤΠΜ. Οι τελευταίες αυτές μέθοδοι εισάγονται με την παρούσα διατριβή στο σχεδιασμό βιομηχανικών κυττάρων, για τα επόμενα βήματα όμως είναι οπωσδήποτε σκόπιμο να παρακολουθήσει κανείς τις εξελίξεις στους καθαρά μαθηματικούς αυτούς χώρους.

Τα αναφερόμενα σε αυτή την ενότητα, ιδίως ως προς την επιτυχία των μεθόδων να αντιμετωπίσουν το ΠΣΒΚ δεν αποκλείουν τις μεθόδους που περιγράφηκαν στις ενότητες 3.3 και 3.4. Στην πραγματικότητα, ο συνδυασμός των μεθόδων αυτών με τεχνικές που βασίζονται σε ιδιοτιμές μπορεί να δώσει και άλλους τρόπους επίλυσης.

Κλείνοντας την ενότητα αυτή, σημειώνεται απλώς ότι η ίδια η μήτρα κόστους, εκ κατασκευής έχει ορισμένες ενδιαφέρουσες ιδιότητες ως προς τις ιδιοτιμές της, πράγμα που προφανώς ενδιαφέρει στο όλο πλαίσιο αντιμετώπισης. Η μελέτη όμως του θέματος δεν οδήγησε σε κάποια εναλλακτική μέθοδο προσέγγισης, οπότε η παράθεση των ιδιοτήτων αυτών δεν θα εξυπηρετούσε κανένα σκοπό.

### **3.6. Άλλες προσεγγίσεις**

Για λόγους πληρότητας, αναφέρονται εδώ ορισμένοι άλλοι τρόποι επίλυσης του βασικού μοντέλου ΠΣΒΚ που χρήζουν προσοχής.

Η παρατήρηση ότι η συνεχής λύση της μορφοποίησης ΤΠΜ είναι αρκετά κοντά στο ολικό βέλτιστο (χωρίς πάντως να εγγυάται φράγμα), οδηγεί φυσιολογικά στην πολύ πλούσια σε μεθόδους ερευνητική περιοχή της Ολικής

Βελτιστοποίησης (Global Optimisation). Παρά τη συνάφεια με τις μορφοποιήσεις Μαθηματικού Προγραμματισμού που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα δεν υπάρχει καμία εφαρμογή στο σχεδιασμό βιομηχανικών κυττάρων και αυτό διότι οι τεχνικές Ολικής Βελτιστοποίησης προϋποθέτουν κάποια «ωρίμανση» της μελέτης με πιο κλασικές μεθόδους. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο βιβλίο των Horst και Tuy [1996].

Εδώ σημειώνεται μόνο μία προσέγγιση που διερευνήθηκε, χωρίς ιδιαίτερη επιτυχία, αυτό όμως μάλλον επειδή δεν μελετήθηκε εξαντλητικά.

Αν  $k$  είναι ένα άνω όριο για τον αριθμό των κυττάρων, η μορφοποίηση ΤΠΜ (3.19)-(3.22) μπορεί να προσαρμοστεί ώστε να λύνει συνολικά το ΠΣΒΚ και όχι μόνο ένα υποπρόβλημα ΠΔΓ:

$$\min z = \sum_{c=1}^k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-c_{ij}) y_{ic} y_{jc} \quad (3.25)$$

$$\sum_{c=1}^k y_{ic} = 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (3.26)$$

$$\sum_{i=1}^n y_{ic} \leq M \quad c = 1, \dots, k \quad (3.27)$$

$$\mathbf{y}^t \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \sum_{c=1}^k y_{ic}^2 = n \quad (3.28)$$

$$y_{ic} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad c = 1, \dots, k \quad (3.29)$$

Στη μορφοποίηση αυτή,  $M$  είναι το μέγιστο μέγεθος κυττάρου και η λύση μπορεί να έχει «αχρησιμοποίητα» κύτταρα στα οποία η μεταβλητή  $y_{ic}$  έχει τιμή 0 για όλες τις μηχανές και ένα ή περισσότερα κύτταρα  $c$ . Ο περιορισμός (3.28) εκφράζεται με διάνυσμα απλού δείκτη και απαντήθηκε στην ενότητα



3.5. Ο περιορισμός αυτός, σε συνδυασμό με τους (3.26) και (3.29) επιβάλλει στις μεταβλητές τιμές 0 ή 1.

Χαλαρώνοντας τη μορφοποίηση αυτή και μετατρέποντας συγχρόνως το πρόβλημα σε κυρτό (ώστε κάθε τοπικό ελάχιστο να είναι και ολικό), μπορούμε να υπολογίσουμε ένα κάτω φράγμα στο ΠΣΒΚ με οποιαδήποτε μέθοδο μη γραμμικής βελτιστοποίησης. Για το σκοπό αυτό αρκεί:

- α. να προσεγγίσουμε την αντικειμενική συνάρτηση (3.25) «από κάτω» με μία κυρτή συνάρτηση (lower convex underestimator)
- β. να αντικαταστήσουμε τον τετραγωνικό περιορισμό (3.28) με γραμμικούς.

Το (β) είναι το απλούστερο. Σε κάθε όρο  $y_{ic}^2$  μπορούν να αντιστοιχιστούν μία συνεχής μεταβλητή  $w_{ic}$  και οι περιορισμοί:

$$w_{ic} \geq 2y_{ic}-1$$

$$w_{ic} \leq y_{ic}$$

$$w_{ic} \geq 0$$

Αυτό δεν αυξάνει ιδιαίτερα τις διαστάσεις του προβλήματος, επειδή το πλήθος των αρχικών μεταβλητών είναι μόνο  $n \times k$ . Εναλλακτικά, ο περιορισμός (3.28) πρώτα αντικαθίσταται από τους δύο περιορισμούς  $\mathbf{y}^t \mathbf{y} \leq n$  και  $\mathbf{y}^t \mathbf{y} \geq n$ , και οι νέες μεταβλητές  $w_{ic}$  με τους αντίστοιχους περιορισμούς εφαρμόζονται μόνο για τον δεύτερο από αυτούς (ο πρώτος περιορισμός είναι κυρτός και μπορεί να παραμείνει ως έχει).

Το δυσκολότερο είναι το (α) και από αυτό εξαρτάται η ποιότητα του φράγματος. Μία λύση είναι η παρακάτω:

Αν  $\mathbf{y}$  είναι το διάνυσμα απλού δείκτη που περιέχει τις μεταβλητές,  $f(\mathbf{y})$  η αρχική αντικειμενική συνάρτηση (3.25) και  $\mathbf{r}^t = (r_{11}, r_{21}, \dots, r_{n1}, r_{12}, \dots, r_{nk})$  πραγματικό διάνυσμα τάξης  $n \times k$  με μη αρνητικές τιμές, η συνάρτηση:

$$L(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) + \sum_{i=1}^{nk} r_i y_i^2 - \sum_{i=1}^{nk} r_i y_i \quad (3.30)$$

- προσεγγίζει την αντικειμενική συνάρτηση (3.25) «από κάτω» (επειδή  $y_i^2 \leq y_i$ )
- είναι κυρτή αν και μόνο εαν η μήτρα της Hessian είναι θετικά ημιορισμένη.

Το πρόβλημα είναι η κατάλληλη επιλογή τιμών για το διάνυσμα  $\mathbf{r}$ . Με την απλή αντιμετώπιση όπου όλα τα στοιχεία είναι ίσα (uniform diagonal shift), το εύρος των ιδιοτιμών της μήτρας Hessian της συνάρτησης (3.30) παραμένει το ίδιο, με αποτέλεσμα να υπάρχουν αριθμητικές αστάθειες.

Η νέα μήτρα Hessian είναι  $\mathbf{D} + 2\mathbf{R}$ , όπου  $\mathbf{D}$  η μήτρα Hessian της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης  $f(\mathbf{y})$  (σύνθετη διαγώνια με τη μήτρα  $-\mathbf{C}$   $k$  φορές στη διαγώνιο) και  $\mathbf{R}$  η διαγώνια μήτρα με τα στοιχεία του διανύσματος  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{R} = \text{diag}(\mathbf{r})$ . Οι ιδιοτιμές της μήτρας  $\mathbf{D} + 2\mathbf{R}$  πρέπει αφ' ενός να είναι όλες μεγαλύτερες ή ίσες από 0 ώστε η νέα αντικειμενική να είναι κυρτή και αφ' ετέρου το εύρος τους να είναι «αρκετά» μικρότερο από αυτό της  $\mathbf{D}$ . Αυτό επιτυγχάνεται όταν τα στοιχεία  $r_{11}, r_{21}, \dots, r_{n1}, r_{12}, \dots, r_{nk}$  δεν είναι απαραίτητα ίσα μεταξύ τους (non-uniform diagonal shift). Στην ουσία συνεπώς αναζητείται μία καλή ευρετική λύση στο πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της μέγιστης ιδιοτιμής της  $\mathbf{D} + 2\mathbf{R}$ , με τη συνθήκη η μήτρα αυτή να είναι θετικά ημιορισμένη και με δεδομένη την ειδική μορφή της μήτρας  $\mathbf{D}$ . Στο σημείο αυτό ήταν που απέτυχαν οι δοκιμές, καθώς οι λύσεις που βρέθηκαν έχρηζαν επαναληπτικής βελτίωσης και δεν υπήρχε υπολογιστικό περιθώριο για κάτι τέτοιο.

Για την επίλυση προβλημάτων τύπου ΠΔΓ, αξιοσημείωτη είναι η έντονη ερευνητική δραστηριότητα στην περιοχή του Ημιορισμένου Προγραμματισμού (Semidefinite Programming), βλ. για παράδειγμα Kruk και Wolkowicz [1997]. Οι σύγχρονες αυτές μέθοδοι, και στην πραγματικότητα όλη η περιοχή του Ημιορισμένου Προγραμματισμού – γενίκευση της χαλάρωσης Γραμμικού Προγραμματισμού – αρχικά είχαν μόνο θεωρητικό ενδιαφέρον, με την εξέλιξη όμως των αλγορίθμων εσωτερικού σημείου (interior point) και την επιτυχή ενσωμάτωσή τους στους υπολογισμούς έχουν πλέον καταστεί γόνιμος χώρος εφαρμοσμένης έρευνας.

Πρέπει τέλος να αναφερθούν οι δυνατότητες μορφοποίησης Δυναμικού Προγραμματισμού, επίσης ανεκμετάλλευτες, οι οποίες είναι επι της αρχής εφαρμόσιμες, καθώς η διαγραφή ενός κυττάρου από τη βέλτιστη λύση στο ΠΣΒΚ δίνει αμέσως τη βέλτιστη λύση στο ίδιο πρόβλημα χωρίς τις μηχανές που περιείχε το κύτταρο αυτό. Μία πρόσφατη εργασία που μελετά μεταξύ άλλων την εφαρμογή Δυναμικού Προγραμματισμού σε προβλήματα ανάλυσης στιβάδων είναι αυτή των Hansen και Jaumard [1997].

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4**

### **ΕΝΑΣ ΑΚΡΙΒΗΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΥΤΤΑΡΩΝ**

Στο παρόν Κεφάλαιο παρουσιάζεται μία νέα μέθοδος ακριβούς επίλυσης του πρωτεύοντος μοντέλου ΠΣΒΚ. Όπως εξηγήθηκε στο Κεφάλαιο 3, το πρωτεύον αυτό μοντέλο είναι αρκετά περιεκτικό για μία αρχική καλή λύση. Τα δεδομένα που λαμβάνονται υπόψη είναι αυτά που περιγράφηκαν στο Κεφάλαιο 3, δηλαδή μία μήτρα  $C$  με τις «αποστάσεις» μεταξύ των  $n$  μηχανών όπως υπολογίζονται με βάση τη σειρά επεξεργασίας των κομματιών σε αυτές, και το μέγιστο μέγεθος κυττάρου  $M$ . Η μήτρα  $C$  βεβαίως μπορεί να δημιουργηθεί και με οποιαδήποτε άλλη μέθοδο υπολογισμού συντελεστών ομοιότητας συναντάται στη βιβλιογραφία, αυτό όμως δεν συνιστά κανονική εφαρμογή της όλης προσέγγισης που προτείνεται στην παρούσα διατριβή.

Ο προτεινόμενος αλγόριθμος είναι τύπου δένδροειδούς αναζήτησης βελτίστου και χρησιμοποιεί δύο διαφορετικά φράγματα, αναλόγως του σημείου-κόμβου που εξετάζεται. Το ένα είναι το κλασικό φράγμα των Gilmore και Lawler για το Τετραγωνικό Πρόβλημα Αντιστοίχισης και το άλλο είναι ένα φράγμα για το Τετραγωνικό Πρόβλημα Μεταφοράς που προτάθηκε σχετικά πρόσφατα από τους Rendl και Wolkowicz. Η αναζήτηση υποβοηθάται επίσης από ένα νέο ευρετικό αλγόριθμο για το ΠΣΒΚ.

Η δένδροειδής αναζήτηση περιλαμβάνει ειδικά χαρακτηριστικά για τη μείωση του συνολικού μεγέθους του δένδρου, την ελαχιστοποίηση του χρόνου που

αναλώνεται στους πιο χρονοβόρους υπολογισμούς και την εκμετάλλευση συμμετριών στο πρόβλημα. Οι υπολογιστικές δοκιμές υποδεικνύουν ότι ο προτεινόμενος αλγόριθμος είναι αποτελεσματικός και παράγει βέλτιστες λύσεις για προβλήματα μέχρι 25 μηχανών με χαμηλό υπολογιστικό κόστος, όταν ο κανόνας στη βιβλιογραφία με «σωστές» μορφοποιήσεις που συλλαμβάνουν την πολυπλοκότητα του προβλήματος είναι το πολύ 16 μηχανές.

Η βασική δομή και τα «δομικά στοιχεία» της αναζήτησης (τα φράγματα και ο ευρετικός αλγόριθμος) παρουσιάζονται στην ενότητα 4.1. Στην ενότητα 4.2 επεξηγείται ο τρόπος διεξαγωγής της αναζήτησης και τα ειδικά χαρακτηριστικά που προαναφέρθηκαν. Τέλος, στην ενότητα 4.3 αναλύονται ορισμένα υπολογιστικά θέματα και δίνονται αποτελέσματα.

Όσα παρατίθενται στο παρόν Κεφάλαιο βασίζονται (αλλά δεν περιορίζονται) σε εργασία που δημοσιεύτηκε πρόσφατα (Spiliopoulos και Sofianopoulou [1998]).

#### **4.1. Γενική περιγραφή – τα δομικά στοιχεία της δένδροειδούς αναζήτησης**

Η επίλυση του προβλήματος βασίζεται στη διάσπαση του ΠΣΒΚ σε υποπροβλήματα ΠΔΓ, όπως περιγράφηκε σε προηγούμενα Κεφάλαια, συνεπώς το υψηλότερο επίπεδο της αναζήτησης είναι τα υποπροβλήματα αυτά. Τα χρησιμοποιούμενα φράγματα σε κάθε υποδένδρο ΠΔΓ βασίζονται σε δύο διαφορετικές μορφοποιήσεις για το πρόβλημα αυτό, αυτήν του Τετραγωνικού Προβλήματος Αντιστοίχισης (ΤΠΑ) και αυτήν του Τετραγωνικού Προβλήματος Μεταφοράς (ΤΠΜ) που περιγράφηκαν στην ενότητα 3.5. Ορισμένα σημεία μεταφέρονται και εδώ για λόγους ροής κειμένου.

Οι πραγματικές μεταβλητές της αναζήτησης πάντως δεν βασίζονται σε καμία από τις δύο αυτές μορφοποιήσεις, δεν είναι δηλαδή ούτε οι 0-1 μεταβλητές

αντιστοίχισης σε «θέσεις»  $x_{ij}$ , ούτε οι 0-1 μεταβλητές τοποθέτησης στα κύτταρα  $y_{ij}$  που χρησιμοποιήθηκαν στο προηγούμενο Κεφάλαιο. Η αναζήτηση είναι «προτεραιότητας βάθους» (depth-first) και για λόγους περιορισμού του βάθους του δένδρου, σε κάθε κόμβο, οι επόμενοι κόμβοι (children nodes) παράγονται τοποθετώντας μία επιλεγμένη μηχανή στα κύτταρα που είναι διαθέσιμα (έχουν ελεύθερες θέσεις). Άρα, κάθε υποδένδρο ΠΔΓ έχει ακριβώς  $n$  επίπεδα αναζήτησης, όπου  $n$  ο αριθμός των μηχανών.

Η σειρά με την οποία επιλέγονται οι μηχανές είναι σταθερή και καθορίζεται εξ αρχής. Αυτό είναι σημαντικό διότι επιτρέπει την εκμετάλλευση προηγούμενης πληροφορίας και την αποφυγή επανυπολογισμών στα πιο απαιτητικά από υπολογιστική άποψη τμήματα. Η εκμετάλλευση συμμετριών του προβλήματος αφορά την αποφυγή παραγωγής «διδύμων» κόμβων και οδηγεί στην περικοπή μεγάλων τμημάτων του δένδρου.

Τονίζεται ότι ο αλγόριθμος δεν επιλύει όλα τα υποπροβλήματα ΠΔΓ, τα οποία δεν είναι παρά το πρώτο επίπεδο της αναζήτησης και συνεπώς οι επί μέρους λύσεις τους δεν ενδιαφέρουν. Όπως θα φανεί στη συνέχεια, ο αλγόριθμος εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από έναν ευρετικό αλγόριθμο για το ΠΣΒΚ ο οποίος τυπικά αποκόπτει ολόκληρα υποπροβλήματα ΠΔΓ. Υποπροβλήματα που αντιστοιχούν σε ανεπιθύμητους σχηματισμούς (όπως η περίπτωση όπου όλα τα κύτταρα είναι «πολυμελή» εκτός από ένα που έχει 1-2 μηχανές) μπορούν προαιρετικά να μην εξετάζονται καν.

#### 4.1.1. Το όριο Gilmore-Lawler

Όπως περιγράφηκε στην ενότητα 3.5, το ΠΔΓ μπορεί να διατυπωθεί ως Τετραγωνικό Πρόβλημα Αντιστοίχισης (ΤΠΑ) χωρίς γραμμικό όρο. Σε σχέση με τη μορφοποίηση (3.18) και για να χρησιμοποιηθεί η καθιερωμένη ορολογία και μορφή (ελαχιστοποίησης) στη βιβλιογραφία του ΤΠΑ, η  $n \times n$  μήτρα  $C$  είναι η κλασική μήτρα κόστους και η  $n \times n$  μήτρα  $B$  είναι η μήτρα «ροής» που συνδέει τις δυνατές θέσεις των μηχανών με το κόστος. Στη μορφή αυτή

ελαχιστοποίησης, η μήτρα  $B$  έχει  $k$  διαγώνιες μηδενικές υπο-μήτρες ( $k$  είναι ο αριθμός των κυττάρων) τάξης  $m_1, m_2, \dots, m_k$  και όλα τα άλλα στοιχεία ίσα με 1. Τίθεται δηλαδή ροή ίση με 0/1 για κάθε ζεύγος μηχανών που είναι σε ίδια/ διαφορετικά κύτταρα και επιδιώκεται η ελαχιστοποίηση του συνόλου των αποστάσεων μεταξύ μηχανών που βρίσκονται σε διαφορετικά κύτταρα.

Το παρακάτω τετραγωνικό πρόβλημα είναι ακριβώς η μορφοποίηση ΤΠΑ (3.18), σε μορφή ελαχιστοποίησης και λύνει το ΠΔΓ:

(ΤΠΑ1)

$$z_{\text{ΤΠΑ1}} = \min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_{ij} b_{kl} x_{ik} x_{jl} \quad (4.1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.3)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν η μηχανή } i \text{ τοποθετείται στη θέση } j, \\ 0, & \text{ειδώλλως} \end{cases} \quad (4.4)$$

$$i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, n$$

Η κλασική τεχνική των Gilmore και Lawler μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό ενός κάτω φράγματος για το πρόβλημα ΤΠΑ1, βλ. για παράδειγμα Finke, Burkard και Rendl [1987] για μία λεπτομερή ανάλυση ή Gilmore [1962] για την αρχική δημοσίευση. Κατασκευάζεται πρώτα μία μήτρα  $L$ :

$$L = (l_{ij}), \quad l_{ij} = c_{ij} b_{jj} + \langle c'_i b'_j \rangle = \langle c'_i b'_j \rangle \quad (4.5)$$

όπου  $\langle c'_i b'_j \rangle$  είναι η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το εσωτερικό γινόμενο των παρακάτω διανυσμάτων με αναδιάταξη των στοιχείων τους:

$$c'_i = (c_{i1}, c_{i2}, \mathbf{K}, c_{i, i-1}, c_{i, i+1}, \mathbf{K}, c_{in})^t \text{ και}$$

$$b'_j = (b_{j1}, b_{j2}, \mathbf{K}, b_{j, j-1}, b_{j, j+1}, \mathbf{K}, b_{jn})^t$$

Η ελάχιστη αυτή τιμή ονομάζεται ελάχιστο βαθμωτό γινόμενο και αποδεικνύεται εύκολα ότι υπολογίζεται αν διατάξει κανείς τα στοιχεία του ενός διανύσματος με αύξουσα σειρά και του άλλου με φθίνουσα.

Στη συνέχεια, επιλύεται ένα Γραμμικό Πρόβλημα Αντιστοίχισης (ΓΠΑ) με μήτρα κόστους  $L$  και το αποτέλεσμα είναι το ζητούμενο κάτω φράγμα για το πρόβλημα ΤΠΑ1.

Η περίπτωση που κυρίως ενδιαφέρει είναι η «μερική τοποθέτηση», όπου κάποιες μηχανές έχουν ήδη τοποθετηθεί σε συγκεκριμένες θέσεις στα κύτταρα. Το πρόβλημα είναι και πάλι Τετραγωνικό Πρόβλημα Αντιστοίχισης, αυτή τη φορά όμως με γραμμικό όρο.

Αν οι μηχανές σε ένα υποσύνολο  $M_1$  του  $\{1, 2, \dots, n\}$  έχουν ήδη αντιστοιχιστεί στις θέσεις ενός υποσυνόλου  $P_1$  του  $\{1, 2, \dots, n\}$  ( $|P_1| = |M_1|$ ) σύμφωνα με ένα διάνυσμα αντιστοίχισης  $\pi$ :

$$\begin{aligned} x_{i\pi(i)} &= 1, & i \in M_1 \\ x_{ik} &= 0, & i \in M_1, \quad k \neq \pi(i) \end{aligned}$$

ενώ οι μηχανές στο  $M_2 = \{1, 2, \dots, n\} - M_1$  και οι θέσεις στο  $P_2 = \{1, 2, \dots, n\} - P_1$  παραμένουν ελεύθερες ( $|P_2| = |M_2|$ ), το πρόβλημα γίνεται:



(ΤΠΑ2)

$$\begin{aligned}
 z_{\text{ΤΠΑ2}} = \min & \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \in M_1}}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in M_1}}^n c_{ij} b_{\pi(i)\pi(j)} \\
 & + \sum_{\substack{j=1 \\ j \in M_2}}^n \sum_{l \in P_2} \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \in M_1}}^n c_{ij} b_{\pi(i)l} \right) x_{jl} \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \in M_2}}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in M_2}}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \in P_2}}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \in P_2}}^n c_{ij} b_{kl} x_{ik} x_{jl}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \in P_2}}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n \quad i \in M_2 \tag{4.7}$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \in M_2}}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n \quad j \in P_2 \tag{4.8}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν η μηχανή } i \text{ τοποθετείται στη θέση } j, \\ 0, & \text{ειδώλλως} \end{cases} \tag{4.9}$$

$$i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, n \quad i \in M_2 \quad j \in P_2$$

Ο πρώτος όρος στην αντικειμενική συνάρτηση (4.6) είναι σταθερός και είναι το άθροισμα των εκτός κυττάρων (between-cells) αποστάσεων, αν λάβει κανείς υπόψη μόνο τις μηχανές που είναι ήδη τοποθετημένες σε θέσεις στα κύτταρα.

Ο δεύτερος όρος αν απομονωθεί για ελαχιστοποίηση είναι ένα σύνηθες Γραμμικό Πρόβλημα Αντιστοίχισης (ΓΠΑ) με μήτρα κόστους:

$$E = (e_{jl}), e_{jl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \in M_1}}^n c_{ij} b_{\pi(i)l} \quad j = 1, \dots, n \quad j \in M_2 \quad (4.10)$$

$$l = 1, \dots, n \quad l \in P_2$$

και αποτελεί το γραμμικό όρο του τετραγωνικού προβλήματος ΤΠΑ2.

Ο τρίτος όρος, το άθροισμα των εκτός κυττάρων αποστάσεων για τις ελεύθερες μηχανές είναι το καθαρά τετραγωνικό μέρος, αντίστοιχο του προβλήματος ΤΠΑ1.

Το πρόβλημα ΤΠΑ2 έχει  $|M_2| \times |M_2|$  μεταβλητές. Ένα κάτω φράγμα μπορεί να υπολογιστεί με την ίδια διαδικασία, με τη μόνη διαφορά ότι στη μήτρα L (4.5) προστίθενται και οι συντελεστές του γραμμικού όρου (4.10):

$$l_{ij} = e_{ij} + \langle c'_i b'_j \rangle \quad (4.11)$$

Από μόνο του το φράγμα Gilmore-Lawler δεν είναι αρκετά «σφικτό» για να επιτρέψει την επίλυση προβλημάτων μεγέθους της πράξης. Μία ένδειξη για αυτό είναι η απόδοσή του στην έρευνα για την επίλυση προβλημάτων ΤΠΑ (συνήθως σε συνδυασμό με τεχνικές βελτίωσής του), τα οποία γενικά θεωρούνται εξαιρετικά δύσκολα για η μεγαλύτερο από περίπου 15, βλ. για παράδειγμα Pardalos και Wolkowicz [1994]. Σε σχέση με άλλα φράγματα πάντως υπολογίζεται γρήγορα. Μεγάλο μέρος της επιτυχίας της προτεινόμενης μεθόδου οφείλεται στο φράγμα που περιγράφεται στη συνέχεια και αποτελεί ισχυρότερη εναλλακτική λύση όταν ο κόμβος είναι ισοκατανομή, δηλαδή όταν οι εναπομένουσες μηχανές πρέπει να διανεμηθούν ομοιόμορφα στα διαθέσιμα (μη κορεσμένα) κύτταρα.

Η λύση του ΓΠΑ σε ένα κόμβο δίνει επίσης μία ευρετική ολοκλήρωση (heuristic completion) της αντιστοίχισης των μηχανών σε θέσεις, που αποτελεί άνω φράγμα για το μέρος του δένδρου από τον κόμβο αυτό και κάτω.

4.1.2. Το όριο Rendl-Wolkowicz της περίπτωσης ισοκατανομής

Το υποπρόβλημα ΠΔΓ μπορεί επίσης να διατυπωθεί ως Τετραγωνικό Πρόβλημα Μεταφοράς (ΤΠΜ), αυτή τη φορά χρησιμοποιώντας δυαδικές μεταβλητές  $y_{ic}$  που απεικονίζουν την κατανομή των μηχανών σε κύτταρα, όπως περιγράφηκε στην ενότητα 3.5:

$$y_{ic} = \begin{cases} 1, & \text{αν η μηχανή } i \text{ τοποθετείται στο κύτταρο } c, \\ 0, & \text{ειδάλλως} \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, n \quad c = 1, \dots, k$$

Η παρακάτω μορφοποίηση είναι ακριβώς ίδια με την (3.19)-(3.22):

(ΤΠΜ1)

$$z_{\text{ΤΠΜ1}} = \max \frac{1}{2} \sum_{c=1}^k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} y_{ic} y_{jc} \quad (4.12)$$

$$\sum_{c=1}^k y_{ic} = 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (4.13)$$

$$\sum_{i=1}^n y_{ic} = m_c \quad c = 1, \dots, k \quad (4.14)$$

$$y_{ic} = \begin{cases} 1, & \text{αν η μηχανή } i \text{ τοποθετείται στο κύτταρο } c, \\ 0, & \text{ειδάλλως} \end{cases} \quad (4.15)$$

$$i = 1, \dots, n \quad c = 1, \dots, k$$

Η αντικειμενική συνάρτηση (4.12) είναι το άθροισμα των εντός κυττάρων (within-cells) αποστάσεων και σχετίζεται με τη συνάρτηση ΤΠΑ1 (4.1) της προηγούμενης ενότητας με την απλή σχέση:

$$z_{\text{ΤΠΑ1}} + z_{\text{ΤΠΜ1}} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n c_{ij} \quad (4.16)$$

δεδομένου ότι το άθροισμα των αποστάσεων εντός και εκτός κυττάρων ισούται με το συνολικό άθροισμα των αποστάσεων μεταξύ μηχανών.

Το παρακάτω φράγμα για το πρόβλημα ΤΠΜ1 και την ειδική περίπτωση ισομεγέθων κυττάρων ( $m_1=m_2=\dots=m_k=n/k$ ) δίνεται από τους Rendl and Wolkowicz [1995]:

$$z_{\text{ΤΠΜ1}} \leq \frac{1}{2} k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} + \min \left\{ \frac{n}{2k} \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j \left( \mathbf{C} + \mathbf{V}^t \text{diag}(\mathbf{d}) \mathbf{V} \right) : \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n d_i = 0 \right\}$$

(4.17)

και είναι ακριβώς η βελτίωση του φράγματος Donath-Hoffman που αναφέρθηκε (χωρίς να περιγραφεί) στην ενότητα 3.5.

Στη σχέση αυτή:

$\mathbf{d}$  είναι το άγνωστο πραγματικό διάνυσμα που οδηγεί τον προς ελαχιστοποίηση όρο,  $\text{diag}(\mathbf{d})$  είναι η διαγώνια  $n \times n$  μήτρα που σχηματίζεται από τα στοιχεία του,

ο τελεστής  $\lambda_j(\cdot)$  συμβολίζει την  $j$  αλγεβρικά μεγαλύτερη ιδιοτιμή μίας μήτρας,

$\mathbf{V}$  είναι οποιαδήποτε μήτρα  $n \times n-1$  με αθροίσματα στηλών ίσα με 0 που ικανοποιεί τη σχέση  $\mathbf{V}^t \mathbf{V} = \mathbf{I}_{n-1}$ ,  $\mathbf{V}^t$  είναι η ανάστροφη μήτρα της  $\mathbf{V}$  και  $\mathbf{I}_{n-1}$  είναι η μοναδιαία μήτρα τάξης  $n-1$ .

Στο εξής και για λόγους συντομίας, το φράγμα αυτό αναφέρεται μερικές φορές ως «φράγμα RW» ή «τιμή RW».

Η θεωρητική τεκμηρίωση δίνεται από τους Rendl και Wolkowicz [1995]. Υπολογιστικά θέματα μελετώνται επίσης στην εργασία των Falkner, Rendl και Wolkowicz [1994], μαζί με μία από τις δυνατές μορφές για τη μήτρα  $V$ :

$$\begin{pmatrix} y & y & y & \mathbf{L} & y \\ 1+x & x & x & & x \\ x & 1+x & x & & x \\ x & x & 1+x & & x \\ \mathbf{M} & & & \mathbf{O} & \\ x & x & x & & 1+x \end{pmatrix}$$

όπου  $x = -1/(n+\sqrt{n})$ ,  $y = -1/\sqrt{n}$ .

Σημειώνεται μόνο εδώ ότι η συνάρτηση που ελαχιστοποιείται στον όρο (4.17), δεν είναι μεν διαφορίσιμη αλλά είναι κυρτή και επί πλέον μπορούν να βρεθούν υποπαράγωγοί της (subgradients). Συνεπώς μπορούν να εφαρμοστούν τεχνικές από την περιοχή της Μη Ομαλής Βελτιστοποίησης.

Το όριο αυτό είναι πολύ πιο αποτελεσματικό από το αντίστοιχο όριο των Gilmore-Lawler, ιδίως στην περίπτωση της διχοτόμησης,  $k=2$ . Αυτό λαμβάνεται υπόψη στα κριτήρια επιλογής κόμβου, βλ. ενότητα 4.2.

Στην περίπτωση «μερικής τοποθέτησης», όπου κάποιες μηχανές έχουν ήδη τοποθετηθεί σε κύτταρα, μπορούμε και πάλι να χρησιμοποιήσουμε το φράγμα αυτό, με το επί πλέον κόστος μίας ακόμα χαλάρωσης όταν υπάρχουν «μερικώς κατειλημμένα» κύτταρα, όπως θα φανεί στη συνέχεια.

Αν οι μηχανές σε ένα υποσύνολο  $M_1$  του  $\{1,2,\dots,n\}$  έχουν ήδη τοποθετηθεί σε κύτταρα σύμφωνα με ένα διάνυσμα τοποθέτησης  $\mathbf{n}$ :

$$\begin{aligned} y_{i\pi(i)} &= 1, & i \in M_1 \\ y_{ic} &= 0, & i \in M_1, \quad c \neq \pi(i) \end{aligned}$$

ενώ οι μηχανές στο  $M_2 = \{1, 2, \dots, n\} - M_1$  παραμένουν ελεύθερες, το πρόβλημα γίνεται:

(ΤΠΜ2)

$$\begin{aligned}
 z_{\text{ΤΠΜ2}} = \max & \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \in M_1}}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in M_1 \\ \pi(i)=\pi(j)}}^n C_{ij} \\
 & + \sum_{c=1}^k \sum_{j \in M_2}^n \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \in M_1 \\ \pi(i)=c}}^n C_{ij} \right) y_{jc} \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{c=1}^k \sum_{\substack{i=1 \\ i \in M_2}}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in M_2}}^n C_{ij} y_{ic} y_{jc}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \in M_2}}^n y_{ic} = m'_c \quad c = 1, \dots, k \tag{4.19}$$

$$\sum_{c=1}^k y_{ic} = 1 \quad i = 1, \dots, n \quad i \in M_2 \tag{4.20}$$

$$y_{ic} = \begin{cases} 1, & \text{αν η μηχανή } i \text{ τοποθετείται στο κύτταρο } c, \\ 0, & \text{ειδάλλως} \end{cases} \tag{4.21}$$

$i = 1, \dots, n \quad i \in M_2 \quad c = 1, \dots, k$

όπου  $m'_c, c = 1, \dots, k$  είναι οι αριθμοί ελεύθερων θέσεων στα  $k$  κύτταρα.

Ο πρώτος όρος στην αντικειμενική συνάρτηση (4.18) είναι σταθερός και είναι το άθροισμα των εντός κυττάρων (within-cells) αποστάσεων, αν λάβει κανείς υπόψη μόνο τις μηχανές που είναι ήδη τοποθετημένες σε κύτταρα.

Ο δεύτερος όρος εμφανίζεται στις περιπτώσεις που εκτός από άδεια και κορεσμένα κύτταρα, υπάρχουν και κύτταρα μερικώς κατειλημμένα ( $0 < m'_c < m_c$ ) και είναι από μόνος του ένα συνηθισμένο Γραμμικό Πρόβλημα Μεταφοράς (ΓΠΜ). Σε αυτό, οι ελεύθερες μηχανές είναι οι «αφετηρίες», τα μερικώς κατειλημμένα κύτταρα είναι οι «προορισμοί», το δε μοναδιαίο κόστος μεταφοράς από την ελεύθερη μηχανή  $j$  στο κύτταρο  $c$  είναι ίσο με το άθροισμα των αποστάσεων από τη μηχανή  $j$  προς όλες τις μηχανές που είναι ήδη τοποθετημένες στο κύτταρο  $c$ .

Ο τρίτος όρος, το άθροισμα των εντός κυττάρων αποστάσεων για τις ελεύθερες μηχανές είναι το καθαρά τετραγωνικό μέρος, αντίστοιχο του προβλήματος ΤΠΜ1, και είναι αυτός στον οποίο εφαρμόζεται το φράγμα RW.

Το πρόβλημα ΤΠΜ2 έχει  $|M2| \times k$  μεταβλητές. Παρουσία του δευτέρου όρου, όταν δηλαδή υπάρχουν μερικώς κατειλημμένα κύτταρα, ένα άνω φράγμα για την αντικειμενική συνάρτηση (4.18) προκύπτει αν προσθέσει κανείς τη βέλτιστη τιμή του Γραμμικού Προβλήματος Μεταφοράς (ΓΠΜ) στην τιμή RW του τρίτου όρου, υπερεκτιμώντας όμως έτσι τη βέλτιστη τιμή του αθροίσματος των δύο αντιστοιχών όρων.

Αυτό σημαίνει ότι είναι συμφέρον να οδηγείται η αναζήτηση προς «καθαρές περιπτώσεις» και αυτό επιτυγχάνεται δίνοντας προτεραιότητα σε κόμβους με άδεια κύτταρα, όπως εξηγείται στην ενότητα 4.2.

Η λύση του ΓΠΜ σε ένα κόμβο δίνει μία ευρετική ολοκλήρωση (heuristic completion) της τοποθέτησης των μηχανών σε κύτταρα, που είναι κάτω φράγμα για το μέρος του δένδρου από τον κόμβο αυτό και κάτω.

#### 4.1.3. Ο ευρετικός αλγόριθμος συνένωσης και ανταλλαγής

Ο νέος αυτός απλός ευρετικός αλγόριθμος αποδείχθηκε αρκετά αποτελεσματικός στην απαλοιφή «ασθενών» υποπροβλημάτων ΠΔΓ και την

απόδοση αρχικής τιμής στους υπολογισμούς τιμών  $RW$ , βλ. ενότητα 4.2 για την απόδοσή του. Η διαδικασία είναι 2 σταδίων: στο πρώτο στάδιο κατασκευάζεται μία πρώτη κατανομή των μηχανών σε κύτταρα. Η κατανομή αυτή βελτιώνεται στο δεύτερο στάδιο με ανταλλαγή θέσεων μηχανών που ανήκουν σε διαφορετικά κύτταρα. Τα στάδια έχουν ως εξής:

#### Στάδιο 1 - Κατασκευή.

Η εκκίνηση γίνεται με  $n$  κύτταρα που το καθένα περιέχει μία από τις  $n$  μηχανές ενώ κάθε δυνατή συνένωση επιτρέπεται. Ως αρχικές τιμές των αποστάσεων μεταξύ των  $n$  κυττάρων λαμβάνονται οι αποστάσεις μεταξύ των αντίστοιχων μηχανών.

Στη συνέχεια επαναλαμβάνονται τα παρακάτω βήματα, έως ότου δεν υπάρχουν επιτρεπτές συνενώσεις:

- Εύρεση των δύο κυττάρων που επιτρέπεται και συμφέρει περισσότερο να συνενωθούν, δηλαδή αυτών που η μεταξύ τους απόσταση είναι η μεγαλύτερη
- Συνένωση των δύο κυττάρων. Οι αποστάσεις του νέου κυττάρου προς όλα τα άλλα ισούται με το άθροισμα των αντιστοίχων αποστάσεων των αρχικών κυττάρων
- Αν το άθροισμα των μεγεθών δύο κυττάρων υπερβαίνει το μέγιστο ( $M$ ), απαγορεύεται πλέον η συνένωσή τους.

#### Στάδιο 2 - Βελτίωση.

Στο στάδιο αυτό επαναλαμβάνονται τα παρακάτω βήματα, έως ότου δεν είναι δυνατή καμία περαιτέρω βελτίωση:

- Εντοπισμός δύο μηχανών που ανήκουν σε διαφορετικά κύτταρα και όταν αλλάξουν θέσεις, το άθροισμα των εκτός κυττάρων (between-cells) αποστάσεων μειώνεται περισσότερο
- Ανταλλαγή θέσεων στις δύο αυτές μηχανές.



Η απλή αυτή μέθοδος προτιμήθηκε για λόγους οικονομίας υπολογιστικού χρόνου και όπως φάνηκε στην πράξη αποδίδει αρκετά ικανοποιητικά. Για τους λόγους αυτούς δεν διερευνήθηκε η προφανής βελτίωση όπου στο στάδιο 2 εφαρμόζεται για κάθε ζεύγος κυττάρων η αποτελεσματικότερη ευρετική μέθοδος των Kernighan και Lin [1970] η οποία περιγράφεται και σε πολλά βιβλία Συνδυαστικής Βελτιστοποίησης, βλ. για παράδειγμα Papadimitriou και Steiglitz [1982]. Ο αλγόριθμος Kernighan-Lin παράγει πολύ καλές διχοτομήσεις (κατανομές σε δύο ισομεγέθεις ομάδες), μπορεί όμως να εφαρμοστεί και σε περιπτώσεις ανισοκατανομής (όπως εδώ) ορίζοντας εικονικές μηχανές.

Αξίζει να σημειωθεί, στην περίπτωση που ενδιαφέρει η παραπάνω διερεύνηση, ότι η αρχική έκδοση της μεθόδου Kernighan-Lin απαιτεί χρόνο  $O(|n|^3)$  για κάθε «μείζονα» επανάληψη, η δε σύγκλιση τυπικά επιτυγχάνεται το πολύ σε 10 μείζονες επαναλήψεις για μεγέθη γράφων που ενδιαφέρουν. Ο χρόνος αυτός έχει βελτιωθεί σε  $O(|E|)$  – όπου  $E$  είναι το σύνολο όλων των κλάδων (edges) του γράφου, με την υλοποίηση που προτείνεται από τους Fiduccia και Mattheyses [1982], μία σημαντική οικονομία, ιδίως σε αραιά μητρώα. Στο ΠΣΒΚ αραιά μητρώα σημαίνουν πολλά μηδενικά στοιχεία στη μήτρα αποστάσεων  $C$ , δηλαδή πολλές μηχανές που δεν έχουν κυκλοφορία κομματιών μεταξύ τους.

Από τις βελτιώσεις αυτές πάντως είναι προτιμότερη η αντικατάσταση του ευρετικού αλγορίθμου με τον αλγόριθμο Tabu Search που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 5. Η παράθεση τέτοιων αποτελεσμάτων όμως εδώ θα ήταν πρωθύστερη και θα παρεμπόδιζε την αντικειμενική αξιολόγηση του προτεινόμενου ακριβούς αλγορίθμου.

## 4.2. Η εφαρμογή της δένδροειδούς αναζήτησης

Έχοντας ορίσει τις αποστάσεις μεταξύ μηχανών, μπορούν να υπολογιστούν για κάθε μία το άθροισμα των αποστάσεων προς όλες τις άλλες. Πριν εκκινήσει η αναζήτηση, αναδιατάσσονται οι μηχανές με φθίνουσα σειρά του αθροίσματος αυτού, για να δοθεί προτεραιότητα στις πλέον σημαντικές μεταβλητές.

Στη συνέχεια υπολογίζεται μία ευρετική λύση στο ΠΣΒΚ με τον αλγόριθμο συνένωσης και ανταλλαγής. Η λύση αυτή χρησιμοποιείται για τη μείωση του χρόνου αναζήτησης σε υποδένδρα ΠΔΓ που είναι αρκετά «αδύνατα» για να περιέχουν βέλτιστη λύση. Όπως αποδείχθηκε, για τα προβλήματα που εξετάζονται, τα υποδένδρα αυτά απαλείφονται με τον τρόπο αυτό γρήγορα και ο περισσότερος χρόνος δαπανάται στα «ανταγωνιστικά» υποδένδρα.

Ακολουθεί η δημιουργία των μορφών κατανομής κάθε εφικτού υποδένδρου ΠΔΓ, δηλαδή για το καθένα προσδιορίζονται ο αριθμός των κυττάρων και τα μεγέθη τους, και ξεκινά πλέον η αναζήτηση με την εξέταση κάθε υποδένδρου. Στο σημείο αυτό μπορούν προαιρετικά να απαλειφθούν ανεπιθύμητοι σχηματισμοί, όπως μορφές που έχουν ένα «μικρό» κύτταρο.

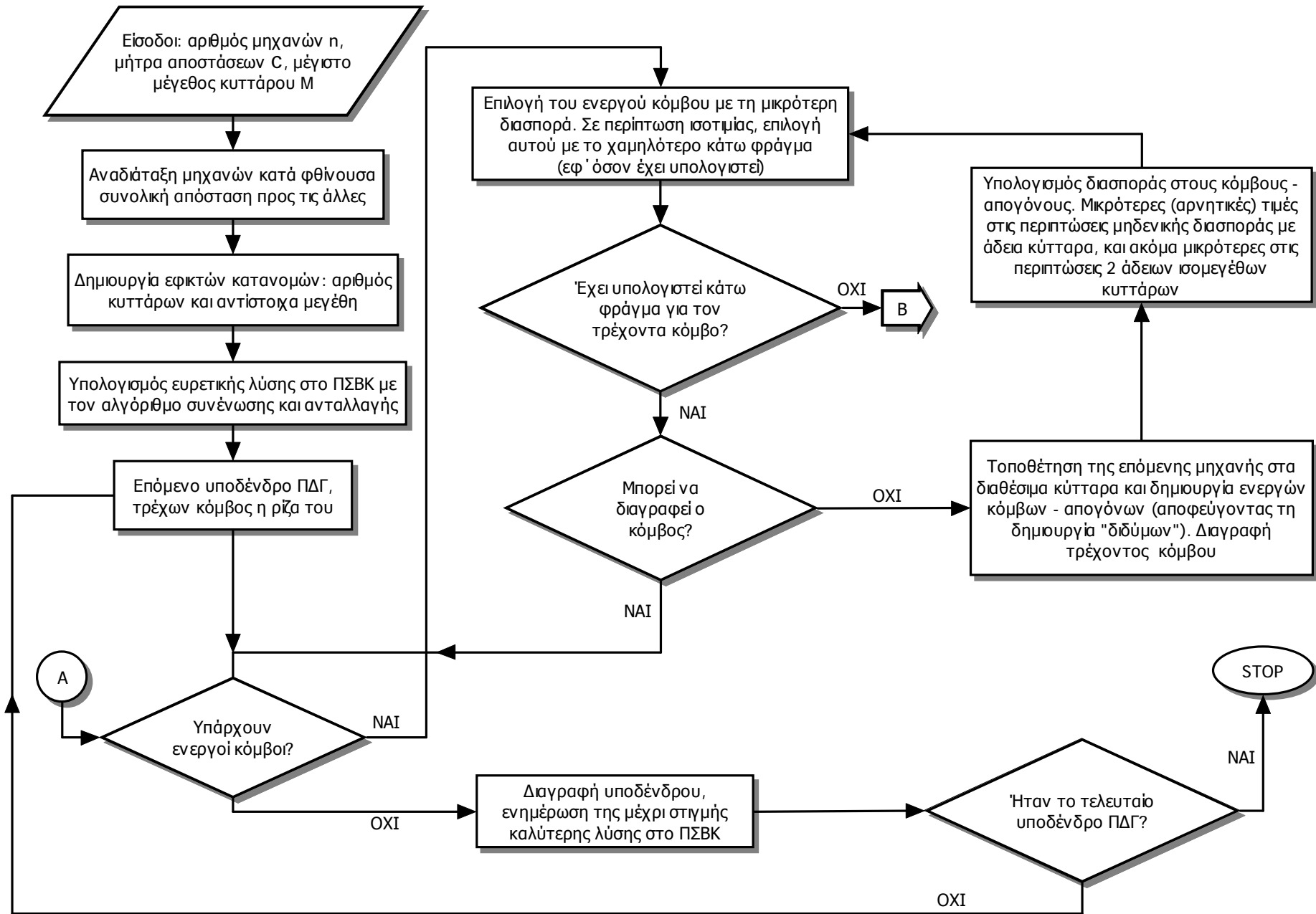
Σε κάθε κόμβο ενός υποδένδρου ΠΔΓ, εφαρμόζεται ή το φράγμα Gilmore-Lawler ή το φράγμα Rendl-Wolkowicz, ανάλογα με το αν ο κόμβος είναι κόμβος ισοκατανομής ή όχι. Η αναζήτηση καθοδηγείται προς τις πιο ευνοϊκές περιπτώσεις της ισοκατανομής όπου εφαρμόζεται το φράγμα Rendl-Wolkowicz, με τον υπολογισμό μίας «διασποράς» για κάθε υποψήφιο κόμβο. Η διασπορά αυτή είναι η στατιστική διασπορά των διαθέσιμων θέσεων στα μη κορεσμένα κύτταρα. Επιλέγεται συνεπώς ο κόμβος με την ελάχιστη διασπορά (που στην περίπτωση της ισοκατανομής είναι μηδενική). Επι πλέον, για να αποφευχθεί κατά το δυνατόν ο δεύτερος όρος στην αντικειμενική συνάρτηση (4.18) και η επί πλέον χαλάρωση που συνεπάγεται (βλ. ενότητα 4.1.2), δίνεται μεγαλύτερη προτεραιότητα σε κόμβους μηδενικής διασποράς με εντελώς

άδεια κύτταρα (ισομεγέθη άδεια κύτταρα). Ακόμα μεγαλύτερη προτεραιότητα δίνεται σε κόμβους δύο ισομεγέθων άδειων κυττάρων, επειδή όπως αναφέρθηκε επίσης στην ενότητα 4.1.2, στην περίπτωση αυτή της καθαρής διχοτόμησης το φράγμα Rendl-Wolkowicz είναι αρκετά «σφικτό». Σε περιπτώσεις ισοβαθμίας, επιλέγεται ο κόμβος που έχει το καλύτερο φράγμα (ή ο πρώτος στη λίστα ισόβαθμων κόμβων αν σε κανέναν από αυτούς δεν έχει υπολογιστεί φράγμα).

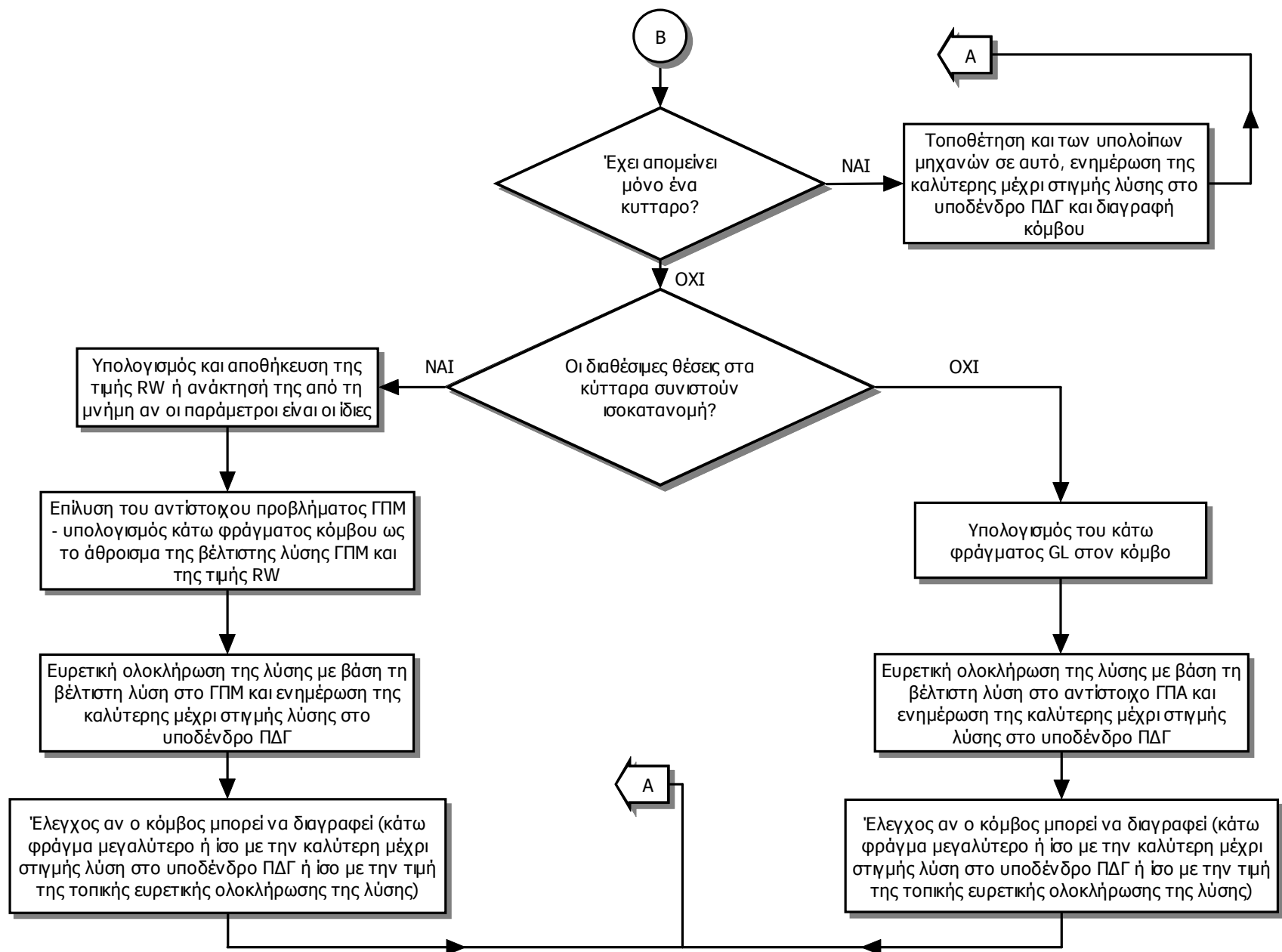
Ένα σημαντικό σημείο είναι ότι, καθώς στο ίδιο βάθος του δένδρου τοποθετούνται οι ίδιες μηχανές, το υπολογιστικά χρονοβόρο φράγμα Rendl-Wolkowicz (για τον τρίτο όρο στην αντικειμενική συνάρτηση (4.18)) στο βάθος αυτό εξαρτάται μόνο από τον αριθμό των διαθέσιμων κυττάρων. Πράγματι, στη σχέση (4.17) σε κάθε τιμή του  $n$  αντιστοιχεί ακριβώς η ίδια μήτρα αποστάσεων  $C$  και ο μόνος όρος που μπορεί να διαφέρει είναι το  $k$ , δηλαδή ο αριθμός των διαθέσιμων κυττάρων. Συνεπώς, κάθε φορά που απαντώνται οι ίδιες παράμετροι απλώς ανακαλείται η αντίστοιχη τιμή  $RW$  από τη μνήμη. Η οικονομία είναι πολύ μεγάλη επειδή οι δυνατοί συνδυασμοί των παραμέτρων αυτών στην πράξη είναι λίγοι.

Για να αποφευχθεί η αναζήτηση σε όμοιες συμμετρικές περιοχές, παρατηρείται ότι, όταν παράγεται ένας κόμβος με την τοποθέτηση μίας μηχανής σε ένα άδειο κύτταρο, αν συγχρόνως παραχθεί ένας δεύτερος κόμβος τοποθετώντας την ίδια μηχανή σε ένα άλλο άδειο κύτταρο του ίδιου μεγέθους, στην ουσία παράγονται «δίδυμοι» κόμβοι. Η μείωση της αναζήτησης είναι ιδιαίτερα σημαντική, επειδή τα άδεια κύτταρα απαντώνται στα υψηλότερα επίπεδα του δένδρου και συνεπώς αποκόπονται μεγάλα τμήματα. Επίσης, η επίσκεψη κόμβων που έχουν δύο ή περισσότερα ισομεγέθη κύτταρα είναι πολύ συχνή.

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζονται συνοπτικά τα κυριότερα σημεία της όλης διαδικασίας υπό μορφή διαγράμματος ροής.



**Σχήμα 4.1.** Συνοπτικό διάγραμμα ροής της δενδροειδούς αναζήτησης (συνέχεια στην επόμενη σελίδα)



Σχήμα 4.1 (συνέχεια)

### **4.3. Υπολογιστικές απόψεις και αποτελέσματα**

Η ελαχιστοποίηση της μη διαφορίσιμης συνάρτησης στη σχέση (4.17) έγινε με την ίδια μέθοδο που χρησιμοποίησαν οι Rendl και Wolkowicz [1995], δηλαδή με τη μέθοδο Bundle Trust (BT) που προτείνουν οι Schramm και Jowe [1992]. Η μόνη παρέμβαση στις ρουτίνες αυτές ήταν η ρύθμιση των παραμέτρων για να είναι καλύτερη η απόδοση στις διαστάσεις που ενδιαφέρουν. Για την αρχική εκτίμηση του φράγματος που απαιτεί η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε ο ευρετικός αλγόριθμος συνένωσης και ανταλλαγής (ενότητα 4.1.3).

Για τον υπολογισμό ιδιοτιμών και ιδιοανυσμάτων πραγματικών συμμετρικών μητρώων, χρησιμοποιήθηκε η ρουτίνα F02ABF της βιβλιοθήκης NAG Fortran Library. Η ρουτίνα πρώτα μετασχηματίζει τη μήτρα σε τριδιαγώνια μορφή με παραγοντοποίηση Householder και στη συνέχεια εφαρμόζει τη μέθοδο QL (βλ. για παράδειγμα Strang [1980]). Το ότι υπολογίζονται όλες οι ιδιοτιμές και όχι μόνο αυτές που χρειάζονται, στην πραγματικότητα συμφέρει για τις διαστάσεις μητρώων που εξετάζονται, επειδή οι υπολογισμοί είναι απλούστεροι. Δοκιμές με μεθόδους Lanczos που παράγουν τις λίγες αλγεβρικά μεγαλύτερες ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα έδειξαν ότι υπολογιστικό κέρδος υπάρχει μόνο σε περιπτώσεις μεγάλων αραιών μητρώων και πολλών κλήσεων σε τέτοιες ρουτίνες. Ενώ είναι αλήθεια ότι από μόνος του ο υπολογισμός του φράγματος ισοκατανομής απαιτεί πολλούς τέτοιους υπολογισμούς, όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα, το υπολογιστικά «βαρύ» μέρος του υπολογισμού των τιμών RW μπορεί πολύ συχνά να αποφευχθεί με την αποθήκευση ενδιάμεσων αποτελεσμάτων στη μνήμη. Οι απαιτήσεις μνήμης για αυτό είναι αμελητέες, καθώς η σχετική μήτρα έχει διαστάσεις (μέγιστος αριθμός μηχανών)  $\times$  (μέγιστος αριθμός κυττάρων). Από κάθε άποψη συνεπώς η επιλογή της ρουτίνας F02ABF ήταν κατάλληλη.

Για τη λύση των Γραμμικών Προβλημάτων Αντιστοίχισης και Μεταφοράς, χρησιμοποιήθηκε η κλασική Ουγγρική μέθοδος. Δεν χρειάστηκε η εφαρμογή

κάποιας σύγχρονης μεθόδου επειδή ο χρόνος που δαπανάται στα προβλήματα αυτά είναι μικρό κλάσμα του συνολικού χρόνου επίλυσης. Στην πραγματικότητα, ο περισσότερος χρόνος δαπανάται στην επιλογή του επόμενου προς εξέταση κόμβου, και στους υπολογισμούς (4.5) και (4.11) που ανήκουν σε μεγάλο «βάθος» βρόχου (loop).

Σε σχέση με τον αρχικό αλγόριθμο που δημοσιεύτηκε από τους Spiliopoulos και Sofianopoulou [1998], η απόδοση βελτιώθηκε αρκετά με δύο τροποποιήσεις:

- Τον περιορισμό των κόμβων που εξετάζονται για να επιλεγεί ο καταλληλότερος. Αντί του συνόλου των ενεργών κόμβων, διερευνάται ένα σταθερού μεγέθους «πρόσφατο» τμήμα της λίστας αναμονής (queue). Η επιλογή δεν είναι πλέον εγγυημένα η καλύτερη δυνατή, αλλά μακροπρόθεσμα ο χρόνος επίλυσης είναι μικρότερος.
- Την εκμετάλλευση της ειδικής μορφής της μήτρας «ροής» **B** για τον άμεσο υπολογισμό της, χωρίς αναδιατάξεις στοιχείων διανυσμάτων. Σε κάθε κόμβο όπου υπολογίζεται το φράγμα Gilmore-Lawler, η μήτρα αυτή είναι εκ των προτέρων γνωστή, από τον αριθμό των διαθέσιμων (μη κορεσμένων) κυττάρων και τις ελεύθερες θέσεις στο καθένα, κατ' αναλογία με την πλήρη μορφή της στη μορφοποίηση ΤΠΑ1 (ενότητα 4.1.1).

Ο αλγόριθμος υλοποιήθηκε σε Fortran 77 και δοκιμάστηκε σε ένα μικροϋπολογιστή Pentium III 64MB/450 MHz. Η **πρώτη σειρά** δοκιμών ήταν τα 10 προβλήματα 16 μηχανών που δίνονται από τη Sofianopoulou [1994], [1997], με μέγιστο μέγεθος κυττάρου 5-12. Αποτελέσματα δεν παρατίθενται διότι οι χρόνοι ήταν αμελητέοι. Αναφέρεται μόνο για την απόδοση του ευρετικού αλγορίθμου συνένωσης και ανταλλαγής, ότι η μεν βέλτιστη λύση βρέθηκε στα 58 από τα 80 προβλήματα, η δε μέγιστη απόκλιση από τη βέλτιστη τιμή στα υπόλοιπα 22 προβλήματα ήταν 11%.

Η **δεύτερη σειρά** δοκιμών ήταν με προβλήματα διάστασης 20 μηχανών και μέγιστο μέγεθος κυττάρου  $6 \leq M \leq 10$ . Οι μήτρες αποστάσεων παρήχθησαν από τυχαίες μήτρες επεξεργασίας κομματιών σε μηχανές (βλ. ενότητα 3.3), με βάση 20 μηχανές, 100 κομμάτια και το κάθε κομμάτι να επισκέπτεται με ίδια πιθανότητα από 6 έως 10 μηχανές, βλ. τελικά δεδομένα στο Παράρτημα. Στη διάσταση αυτή η μοναδική σύγκριση που είναι δυνατή (ελλείψει δημοσιευμένων λύσεων για προβλήματα με πάνω από 16 μηχανές), είναι η σύγκριση με τα αποτελέσματα εμπορικού πακέτου. Η απόδοση του εμπορικού πακέτου ενδιαφέρει επίσης για να φανεί η δυσκολία της συνεχούς χαλάρωσης που αναφέρθηκε στην ενότητα 3.3.1.

Στους Πίνακες 4.1(A) – 4.1(Γ) παρουσιάζονται η βέλτιστη λύση, η ευρετική λύση - τιμή εκκίνησης και οι χρόνοι επεξεργασίας (CPU time) σε δευτερόλεπτα, του προτεινόμενου αλγορίθμου και ενός πολύ καλού εμπορικού πακέτου επίλυσης προβλημάτων Ακεραίου Προγραμματισμού (XPRESS-MP Extended Integer Barrier Optimizer, Rel. 8.25). Για τις δοκιμές με το εμπορικό πακέτο χρησιμοποιήθηκε η μορφοποίηση 0-1 Ακεραίου Προγραμματισμού που δόθηκε από τη Sofianorouliou [1994], [1997] και περιγράφηκε στην ενότητα 3.3. Όπου δεν αναγράφεται χρόνος, το εμπορικό πακέτο δεν ολοκλήρωσε την αναζήτηση σε 4 ώρες.



Πρόβλημα	M=6 (αρ. υποπροβλημάτων: 7)				M=7 (αρ. υποπροβλημάτων: 9)			
	Βέλτιστη λύση	Ευρετική λύση	Χρόνος (secs)	Χρόνος εμπ. πακέτου (secs)	Βέλτιστη λύση	Ευρετική λύση	Χρόνος (secs)	Χρόνος εμπ. πακέτου (secs)
1	472	480	40	4334	433	436	11	976
2	495	495	8	564	457	457	7	758
3	481	484	72	-	442	445	23	3766
4	461	461	33	9833	418	418	9	546
5	452	456	17	2932	416	417	8	390
6	476	477	44	6806	439	439	19	1806
7	456	457	23	2814	419	424	13	812
8	479	480	36	9906	437	439	14	1048
9	486	486	17	9213	444	444	7	697
10	480	484	40	9406	438	446	12	632

**Πίνακας 4.1(A).** Δοκιμές με προβλήματα 20 μηχανών και μέγιστο μέγεθος κυττάρου M=6,7. Σύγκριση με το πακέτο XPRESS-MP Extended Integer Barrier Optimizer, Rel. 8.25.

Πρόβλημα	M=8 (αρ. υποπροβλημάτων: 6)				M=9 (αρ. υποπροβλημάτων: 9)			
	Βέλτιστη λύση	Ευρετική λύση	Χρόνος (secs)	Χρόνος εμπ. πακέτου (secs)	Βέλτιστη λύση	Ευρετική λύση	Χρόνος (secs)	Χρόνος εμπ. πακέτου (secs)
1	413	415	12	-	372	372	4	2803
2	434	435	8	12229	394	394	4	3367
3	424	425	28	-	386	386	9	-
4	402	403	15	-	365	367	6	5553
5	393	393	6	3420	359	374	8	1838
6	415	415	15	11463	375	378	7	4317
7	401	408	25	12767	366	369	8	-
8	416	416	11	12364	374	376	4	2852
9	422	423	7	9291	383	385	4	4016
10	420	425	20	-	380	385	6	6790

**Πίνακας 4.1(B).** Δοκιμές με προβλήματα 20 μηχανών και μέγιστο μέγεθος κυττάρου M=8,9. Σύγκριση με το πακέτο XPRESS-MP Extended Integer Barrier Optimizer, Rel. 8.25.

M=10 (αρ. υποπροβλημάτων: 9)				
Πρόβλημα	Βέλτιστη λύση	Ευρετική λύση	Χρόνος (secs)	Χρόνος εμπ. πακέτου (secs)
1	318	319		
2	336	351		
3	326	332		
4	311	311		
5	308	308	αμελητέος	αμελητέος
6	325	330		
7	314	315		
8	316	321		
9	324	326		
10	326	329		

**Πίνακας 4.1(Γ).** Δοκιμές με προβλήματα 20 μηχανών και μέγιστο μέγεθος κυττάρου M=10. Σύγκριση με το πακέτο XPRESS-MP Extended Integer Barrier Optimizer, Rel. 8.25.

Με εξαίρεση την περίπτωση της διχοτόμησης (που πάντως εξετάζεται περισσότερο για λόγους ανάλυσης της απόδοσης και δεν είναι επιθυμητή στην πράξη), οι χρόνοι του προτεινόμενου αλγορίθμου και του εμπορικού πακέτου δεν επιδέχονται σύγκρισης. Διαφορές μεταξύ προσαρμοσμένων αλγορίθμων και πακέτων γενικής χρήσης υπάρχουν βεβαίως πάντοτε, εδώ όμως είναι πολύ μεγάλες και αυτό οφείλεται εν μέρει στην κακή ποιότητα της συνεχούς χαλάρωσης που χρησιμοποιεί το εμπορικό πακέτο (βλ. ενότητα 3.3.1). Στην περίπτωση της διχοτόμησης η συνεχής χαλάρωση δίνει αισθητά καλύτερο φράγμα και φαινομενικά δεν υπάρχει διαφορά. Αυτή φαίνεται καλύτερα στην αρχική δημοσίευση του προτεινόμενου αλγορίθμου (Spiliopoulos και Sofianopoulou [1998]), όπου στην πρώτη σειρά προβλημάτων 16 μηχανών και χωρίς μάλιστα τις βελτιώσεις που αναφέρθηκαν στην αρχή της παρούσας ενότητας, οι χρόνοι για μέγιστο μέγεθος κυττάρου M=8 ήταν κατά μέσο όρο 14% των χρόνων του εμπορικού πακέτου.

Ως προς την επίδραση του μεγίστου μεγέθους κυττάρου  $M$ , είναι προφανές ότι το πρόβλημα γίνεται ευκολότερο όσο πλησιάζει τη διχοτόμηση. Αυτό δεν ισχύει για το εμπορικό πακέτο, όπου για παράδειγμα η περίπτωση  $M=8$  είναι πολύ δυσκολότερη από την  $M=7$ .

Στον προτεινόμενο αλγόριθμο ο χρόνος αναλώνεται στα ανταγωνιστικά («ισχυρά») υποπροβλήματα ΠΔΓ των οποίων ο αριθμός εξαρτάται από το μέγιστο μέγεθος κυττάρου και όχι από το συνολικό αριθμό υποπροβλημάτων. Για παράδειγμα, για μέγιστο μέγεθος κυττάρου  $M=6$ , αν και η κατανομή  $(2,6,6,6)$  ήταν παντού η βέλτιστη, ο αριθμός των «ισχυρών» υποπροβλημάτων ΠΔΓ (αριθμός διερευνημένων κόμβων μεγαλύτερος του 5% του συνόλου) ήταν 3 ή 4 από τα 7. Για μέγιστο μέγεθος κυττάρου  $M=7$  από την άλλη, δεν υπάρχει κατανομή «ανταγωνιστική» της  $(6,7,7)$ .

Συμπληρωματικά στη δεύτερη σειρά δοκιμών λύθηκε και το πρόβλημα 20 κόμβων που δίνεται από τους Rendl και Wolkowicz [1995], για λόγους καθαρά αριθμητικής δοκιμής περισσότερο, επειδή το πρόβλημα αυτό δεν έχει σχέση με τυπικά δεδομένα ΠΣΒΚ (τα στοιχεία της μήτρας κόστους είναι 0 ή 1). Το πρόβλημα λύθηκε για μέγιστο μέγεθος κυττάρου 5 έως 10 και τα αποτελέσματα δίνονται στον επόμενο Πίνακα 4.2. Ειδικά σε αυτό το πίνακα, οι βέλτιστες και ευρετικές τιμές αναφέρονται στη μορφοποίηση μεγιστοποίησης, δηλαδή στο άθροισμα των εντός κυττάρων (within-cells) αποστάσεων.

Μέγιστο μέγεθος κυττάρου M	Βέλτιστη λύση	Ευρετική λύση	Χρόνος (secs)	Αρ. υποπροβλημάτων	Αρ. ανταγωνιστικών υποπροβλημάτων *
5	24	24	36	7	4
6	28	27	19	7	4
7	30	30	8	9	7
8	32	32	< 5	6	5
9	35	35	< 5	9	7
10	38	38	< 5	9	8

**Πίνακας 4.2.** Δοκιμές με πρόβλημα 20 κόμβων και μέγιστο μέγεθος κυττάρου M=5 έως 10.

(\*) Διαγραφέντες κόμβοι περισσότεροι από 5% του συνόλου των διαγραφέντων κόμβων σε όλα τα υποπροβλήματα.

Ο ευρετικός αλγόριθμος συνένωσης και ανταλλαγής αποδείχθηκε ιδιαίτερα αποτελεσματικός σε αυτές τις δοκιμές. Η βέλτιστη τιμή βρέθηκε εξ' αρχής στις 5 από τις 6 περιπτώσεις και ο περισσότερος χρόνος αναλώθηκε στην απόδειξη της βελτιστότητας.

Η **τρίτη σειρά** δοκιμών αφορούσε ακόμα μεγαλύτερα προβλήματα διάστασης 25 μηχανών, με βάση 7 τυχαίες μήτρες επεξεργασίας κομματιών (βλ. Παράρτημα). Τα προβλήματα αυτά δεν ήταν πλέον δυνατό να επιλυθούν με το εμπορικό πακέτο. Τα αποτελέσματα δίνονται στους επόμενους πίνακες 4.3(A)-4.3(Γ). Κάθε πρόβλημα λύθηκε για μέγιστο μέγεθος κυττάρου  $8 \leq M \leq 12$ . Στους πίνακες αυτούς, σε κάθε τιμή του M παρουσιάζονται η βέλτιστη λύση, η ευρετική λύση - τιμή εκκίνησης και ο χρόνος επεξεργασίας (CPU time) σε δευτερόλεπτα.

Πρό-βλημα	Κωδ.	M=8 (αρ. υποπροβλημάτων: 13)			M=9 (αρ. υποπροβλημάτων: 12)		
		Βέλτιστη λύση	Ευρετική λύση	Χρόνος (secs)	Βέλτιστη λύση	Ευρετική λύση	Χρόνος (secs)
1	d25may29	1207	1227	1034	1154	1169	578
2	d25aug6a	913	914	847	871	877	913
3	d25aug6b	878	880	868	836	836	609
4	d25aug6c	928	934	1021	888	903	1277
5	d25aug7a	769	769	1196	736	737	1414
6	d25aug7b	870	870	494	832	835	717
7	d25aug7c	859	859	502	816	817	394

**Πίνακας 4.3(A).** Δοκιμές με προβλήματα 25 μηχανών και μέγιστο μέγεθος κυττάρου M=8,9.

Πρό-βλημα	Κωδ.	M=10 (αρ. υποπροβλημάτων: 9)			M=11 (αρ. υποπροβλημάτων: 11)		
		Βέλτιστη λύση	Ευρετική λύση	Χρόνος (secs)	Βέλτιστη λύση	Ευρετική λύση	Χρόνος (secs)
1	d25may29	1118	1118	423	1040	1040	132
2	d25aug6a	837	845	652	779	783	157
3	d25aug6b	805	807	465	753	755	195
4	d25aug6c	853	859	614	792	806	200
5	d25aug7a	706	714	1326	658	664	399
6	d25aug7b	793	812	666	735	735	61
7	d25aug7c	783	788	253	726	726	55

**Πίνακας 4.3(B).** Δοκιμές με προβλήματα 25 μηχανών και μέγιστο μέγεθος κυττάρου M=10,11.

		M=12 (αρ. υποπροβλημάτων: 16)		
Πρόβλημα	Κωδ.	Βέλτιστη λύση	Ευρετική λύση	Χρόνος (secs)
1	d25may29	930	938	29
2	d25aug6a	697	698	29
3	d25aug6b	676	676	42
4	d25aug6c	708	725	49
5	d25aug7a	585	589	51
6	d25aug7b	665	665	25
7	d25aug7c	643	643	9

**Πίνακας 4.3(Γ).** Δοκιμές με προβλήματα 25 μηχανών και μέγιστο μέγεθος κυττάρου M=12.

Η τρίτη σειρά δοκιμών στατιστικά προσφέρεται περισσότερο για την εξαγωγή συμπερασμάτων επειδή οι χρόνοι υπολογισμού είναι μεγαλύτεροι. Η υπολογιστική προσπάθεια καθορίζεται πρωτευόντως από το μέγιστο μέγεθος κυττάρου M και δευτερευόντως από την ποιότητα της ευρετικής λύσης.

Για ακόμα μεγαλύτερα προβλήματα διάστασης 30, οι υπολογιστικοί χρόνοι δεν ήταν πάντα ικανοποιητικοί. Δοκιμές με μερικά προβλήματα στον ίδιο μικροϋπολογιστή έδειξαν ότι συχνά ο απαιτούμενος χρόνος υπερβαίνει τις 2 ώρες.

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5**

### **ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ:**

#### **ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΕΥΡΕΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ**

##### **TABU SEARCH**

Η πρόταση για την τυποποίηση του ΠΣΒΚ με πυρήνα το πρωτεύον μοντέλο που περιγράφηκε στην ενότητα 3.1 δεν θα ήταν πλήρης αν δεν δινόταν και μία προσεγγιστική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων πολύ μεγάλων διαστάσεων, τα οποία όπως αναφέρθηκε δεν μπορεί να αντιμετωπίσει ο ακριβής αλγόριθμος του Κεφαλαίου 4.

Για την προσεγγιστική αυτή επίλυση του προβλήματος παρουσιάζεται στο παρόν Κεφάλαιο ένας αλγόριθμος βασισμένος στην μέθοδο Tabu Search (TS). Η μέθοδος TS δεν είναι μία τυποποιημένη ευρετική μέθοδος, αλλά μία πλατφόρμα ανάπτυξης ευρετικών αλγορίθμων (meta-heuristic) όπου το ζητούμενο είναι η στρατηγική προσαρμογή της κεντρικής ιδέας της μεθόδου και των βασικών δομικών στοιχείων της.

Το προτεινόμενο σχήμα ενοποιεί σε μία κατάλληλη ολική στρατηγική αναζήτησης ειδικές δομές βραχυπρόθεσμης και μακροπρόθεσμης μνήμης και επιτυγχάνει το στόχο μίας «έξυπνης» αναζήτησης, δηλαδή την πλήρη αλληλεπίδραση μνήμης και πορείας αναζήτησης. Η μνήμη ενημερώνεται από το ιστορικό της πορείας της αναζήτησης που με τη σειρά της καθοδηγείται από την επεξεργασία πληροφοριών μνήμης.

Στο στάδιο της ανάπτυξης του κώδικα ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στη συσχέτιση της ποιότητας των αποτελεσμάτων με το εύρος των χρησιμοποιούμενων παραμέτρων, για την ενίσχυση της «εξερευνητικής» ικανότητας του αλγορίθμου. Αυτό επιτεύχθηκε με «κωδικοποίηση» των σημείων που εξετάζονται με συνάρτηση hash και στατιστικές συσχετίσεις. Το σημείο αυτό αποτελεί εξ όσων γνωρίζουμε καινοτομία και συνιστά αυτόνομη πρόταση για περαιτέρω διερεύνηση στο γενικότερο πλαίσιο της ανάπτυξης προσεγγιστικών αλγορίθμων.

Ως αποτέλεσμα των προηγούμενων, ο αλγόριθμος που παρουσιάζεται είναι «στιβαρός» και παράγει πολλά υποσχόμενα αποτελέσματα στις διαστάσεις προβλημάτων που είναι επιλύσιμα ακριβώς με τον αλγόριθμο του Κεφαλαίου 4 (μέχρι 30 μηχανές), σε αμελητέο υπολογιστικό χρόνο. Για μεγαλύτερα προβλήματα δεν υπάρχει μεν βάση αξιολόγησης, αλλά οι ενδείξεις από δοκιμές με «μαθηματικά παρεμφερή» δεδομένα είναι εξ ίσου ενθαρρυντικές. Σε κάθε περίπτωση, υπάρχει αρκετό έδαφος για ακόμα λεπτότερη προσαρμογή αν απαιτηθεί, καθώς μερικές στατικές παράμετροι της αναζήτησης μπορούν εύκολα να γίνουν δυναμικές, πράγμα που δεν χρειάστηκε να γίνει με τις διαστάσεις που δοκιμάστηκαν.

Ο προτεινόμενος αλγόριθμος είναι πρωτότυπος. Άλλες «συγγενείς» εφαρμογές TS είτε έχουν διαφορετικό προσανατολισμό είτε βασίζονται σε τελείως διαφορετικές μορφοποιήσεις και στρατηγικές. Στην πρώτη περίπτωση ανήκει η ίσως πιο γνωστή εφαρμογή στο χώρο του σχεδιασμού παραγωγής (αναφέρεται στο [Glover και Laguna, 1997]) των Skorin-Karpon και Vakharia [1993] που όμως αφορά τον εσωτερικό προγραμματισμό εργασιών σε ένα βιομηχανικό κύτταρο. Στη δεύτερη περίπτωση ανήκει η εφαρμογή των Lozano, Adenso-Diaz κ.α. [1999] που αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 2.

Στην ενότητα 5.1 δίνονται μερικοί ορισμοί και περιγράφονται τα βασικά δομικά στοιχεία της εφαρμογής TS, δηλαδή οι δομές και μέθοδοι βραχυπρόθεσμης και μακροπρόθεσμης μνήμης. Τα στοιχεία αυτά συντίθενται



σε μία συνολική στρατηγική αναζήτησης στην ενότητα 5.2, όπου και περιγράφεται ο τρόπος εφαρμογής της στρατηγικής αυτής. Υπολογιστικά αποτελέσματα δίνονται στην ενότητα 5.3.

Οι βασικές ιδέες της μεθόδου TS επεξηγούνται συνοπτικά και επί της συγκεκριμένης εφαρμογής, για λόγους οικονομίας χώρου. Για την καλύτερη κατανόηση των εκτιθέμενων στο παρόν Κεφάλαιο θα ήταν σκόπιμη μία βασική εξοικείωση με τη μέθοδο και την ορολογία της. Ο ενδιαφερόμενος παραπέμπεται στους Glover [1990], Glover και Laguna [1995] για μία πρώτη μελέτη και στους Glover και Laguna [1997] για εμπάθυνση. Ειδικά σε ότι αφορά την ορολογία, η αυτολεξεί μετάφραση στην Ελληνική θα ήταν τελείως αδόκιμη, οπότε καταβλήθηκε προσπάθεια για την απόδοση περισσότερο της ουσίας των όρων.

Όσα παρατίθενται στο παρόν Κεφάλαιο βασίζονται (αλλά δεν περιορίζονται) σε εργασία που παρουσιάστηκε πρόσφατα (Spiliopoulos και Sofianopoulou [1999]) και έχει γίνει επίσης δεκτή για δημοσίευση σε ειδική έκδοση των Kluwer Academic Publishers με τίτλο «*Analysis and Modelling of Manufacturing Systems*». Ο αλγόριθμος που προτείνεται εδώ μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί και στον ακριβή αλγόριθμο του Κεφαλαίου 4, αντικαθιστώντας τον ευρετικό αλγόριθμο συνένωσης και ανταλλαγής.

### **5.1. Ορισμοί – Τα βασικά δομικά στοιχεία του πλαισίου *Tabu Search***

Η μορφοποίηση που χρησιμοποιείται είναι το πρωτεύον μοντέλο του ΠΣΒΚ (βλ. ενότητα 3.1), όπως και στον ακριβή αλγόριθμο του Κεφαλαίου 4. Συνεπώς τα δεδομένα είναι και πάλι η μήτρα C με τις αποστάσεις μεταξύ των n μηχανών, όπως υπολογίζονται με βάση τη σειρά επεξεργασίας των κομματιών σε αυτές, και το μέγιστο μέγεθος κυττάρου M. Όπως αναφέρθηκε και για τον ακριβή αλγόριθμο του Κεφαλαίου 4, και εδώ μπορεί να εφαρμοστεί

κανείς οποιαδήποτε μέθοδο για τον υπολογισμό των αποστάσεων μεταξύ μηχανών, η συνιστώμενη όμως προσέγγιση είναι αυτή που περιγράφηκε στην ενότητα 3.3. Η αντικειμενική συνάρτηση είναι προς ελαχιστοποίηση, δηλαδή είναι το άθροισμα των αποστάσεων των μηχανών που ανήκουν σε διαφορετικά κύτταρα.

#### 5.1.1. Η μορφή μίας λύσης

Ως *μορφή* μίας λύσης, δηλαδή μίας κατανομής των μηχανών σε κύτταρα ορίζεται ο αριθμός των κυττάρων και τα μεγέθη τους. Για παράδειγμα, η μορφή {4,5,5,6} είναι μία από τις *εφικτές* για προβλήματα με  $n=20$  μηχανές και μέγιστο μέγεθος κυττάρου  $M=6$ . Στη διάρκεια της αναζήτησης απαντώνται και *μη εφικτές* μορφές που παραβιάζουν τον έμμεσο περιορισμό "στη βέλτιστη λύση δεν υπάρχουν δύο κύτταρα που να μπορούν να συνενωθούν". Εκτεταμένος πειραματισμός με τον ακριβή αλγόριθμο του Κεφαλαίου 4 έδειξε ότι η πιο πιθανή μορφή στη βέλτιστη λύση είναι αυτή με τα περισσότερα κύτταρα μεγίστου μεγέθους  $M$ , όπως η {2,6,6,6} στο προηγούμενο παράδειγμα. Η μορφή αυτή πάντως δεν εγγυάται βέλτιστο και είναι εύκολο να βρει κανείς αντιπαραδείγματα.

#### 5.1.2. Ορισμός των «κινήσεων» της αναζήτησης

Κάθε λύση που απαντάται στη διάρκεια της αναζήτησης έχει μία «γειτονιά», δηλαδή άλλες λύσεις στις οποίες μπορεί να μεταβεί κανείς με ένα βήμα. Το βήμα για τη μετάβαση αυτή ονομάζεται *κίνηση*. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος χρησιμοποιεί κινήσεις δύο ειδών:

- *απλή μετακίνηση* μίας μηχανής από ένα κύτταρο σε ένα άλλο
- *ανταλλαγή θέσεων* δύο μηχανών που βρίσκονται σε διαφορετικά κύτταρα.

Η απλή μετακίνηση αλλάζει τη μορφή της λύσης, πράγμα που είναι εξαιρετικά επιθυμητό επειδή η αναζήτηση δυνητικά μπορεί να επισκεφθεί έτσι

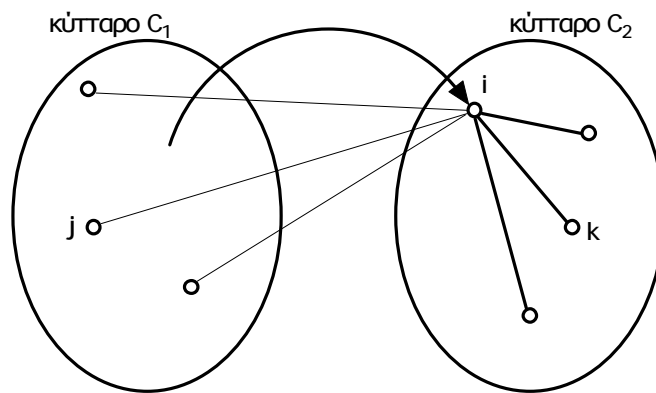
οποιοδήποτε σημείο στο χώρο εφικτότητας. Μάλιστα, οι απλές μετακινήσεις μπορούν να οδηγήσουν την αναζήτηση προσωρινά και εκτός του ορίου εφικτότητας, σε κάποια μη εφικτή μορφή, και αυτό εξυπηρετεί την όλη στρατηγική διαφοροποίησης (diversification) της αναζήτησης. Αυτό συμβαίνει διότι μία μη εφικτή μορφή είναι αρκετά κακή, συναντάται μόνο για πολύ «τοπικούς» λόγους και δεν μπορεί να διατηρηθεί για πολύ. Όταν συναντάται μία τέτοια μορφή, η αναζήτηση επιστρέφει αυτόματα στην περιοχή εφικτότητας μέσα σε λίγες επαναλήψεις. Ας σημειωθεί ότι η «διαφοροποίηση» είναι ο γενικός στόχος της μεθόδου TS για την καθοδήγηση της αναζήτησης σε ανεξερεύνητες περιοχές του χώρου των λύσεων. Η «ταλάντωση» εντός και εκτός της περιοχής εφικτότητας αυξάνει κατά πολύ το βαθμό επίτευξης αυτού του στόχου και στην πραγματικότητα, αρκετή έρευνα έχει αφιερωθεί στο σχεδιασμό αλγορίθμων που βασίζονται σχεδόν αποκλειστικά σε αυτό το στοιχείο, βλ. για παράδειγμα Glover και Laguna [1997].

### 5.1.3. Βραχυπρόθεσμη μνήμη: οι απαγορευμένες (Tabu) κινήσεις

Στα επόμενα, οι μηχανές ονομάζονται «συνδεδεμένες» αν ανήκουν στο ίδιο κύτταρο. Κάθε κίνηση, απλή μετακίνηση ή ανταλλαγή θέσεων, έχει ως αποτέλεσμα κατάργηση συνδέσεων και δημιουργία νέων. Για παράδειγμα, η μετακίνηση μίας μηχανής  $i$  από ένα κύτταρο  $c_1$  σε ένα άλλο  $c_2$ :

- καταργεί τις συνδέσεις  $(j,i)$ , όπου  $j$  κάθε μηχανή που παραμένει στο κύτταρο  $c_1$
- δημιουργεί τις συνδέσεις  $(i,k)$ , όπου  $k$  κάθε μηχανή που βρίσκεται ήδη στο κύτταρο  $c_2$ .

όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



**Σχήμα 5.1.** Απλή μετακίνηση μηχανής – κατάργηση και δημιουργία συνδέσεων.

Μία από τις βασικές ιδέες της μεθόδου TS είναι η αποφυγή της κυκλικότητας με το χαρακτηρισμό ορισμένων κινήσεων ως απαγορευμένων (tabu). Ως ακραίο παράδειγμα, η δημιουργία συνδέσεων που μόλις καταργήθηκαν είναι ακριβώς η αντιστροφή μίας κίνησης. Για τον έλεγχο αυτό, χρησιμοποιείται μία συμμετρική μήτρα  $T=(t_{ij})$   $i,j=1,\dots,n$ , της οποίας κάθε στοιχείο  $(i,j)$  δείχνει αν η σύνδεση των μηχανών  $i,j$  έχει καταργηθεί πρόσφατα και πόσο. Έτσι, αμέσως μόλις εκτελεστεί απλή μετακίνηση μίας μηχανής  $i$  από το κύτταρο  $c_1$  στο  $c_2$ :

- για κάθε μηχανή  $j$  που παραμένει στο κύτταρο  $c_1$ , όλα τα στοιχεία  $t_{ji}$  και  $t_{ij}$  παίρνουν μία σταθερή θετική τιμή, τη διάρκεια tabu (tabu tenure)
- οι μη μηδενικές τιμές σε όλα τα άλλα στοιχεία της μήτρας  $T$  μειώνονται κατά μία μονάδα.

Η μνήμη αυτή είναι η βραχυπρόθεσμη μνήμη που χρησιμοποιείται και βασίζεται συνεπώς στο ιστορικό των πρόσφατων κινήσεων (μνήμη recency).

Βάσει των τιμών της μήτρας  $T$ , απαγορεύεται η απλή μετακίνηση μίας μηχανής  $i$  σε ένα κύτταρο  $c$  όταν:

- είτε όλες οι συνδέσεις που δημιουργούνται αντιστοιχούν σε θετικές τιμές στη μήτρα  $T$ , δηλαδή  $t_{ij} > 0$  για κάθε μηχανή  $j$  στο κύτταρο  $c$ ,

- είτε η μέση τιμή των μη μηδενικών στοιχείων που αντιστοιχούν στις συνδέσεις που δημιουργούνται είναι μεγαλύτερη από ένα προκαθορισμένο κάτω όριο (το οποίο τίθεται στο ήμισυ της τιμής διάρκειας tabu).

Η πρώτη συνθήκη είναι η κλασική προσέγγιση TS στη χρήση της βραχυπρόθεσμης μνήμης. Η δεύτερη αποτελεί βελτίωση για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Η κλασική προσέγγιση είναι αρκετά περιοριστική για το πρωτεύον μοντέλο ΠΣΒΚ και επι πλέον έχει ως συνέπεια συχνές επιστροφές σε λύσεις που έχουν ήδη διερευνηθεί, με τελικό αποτέλεσμα την επανάληψη ολόκληρων σειρών λύσεων. Ένα παράδειγμα είναι η περίπτωση που μία απλή μετακίνηση δημιουργεί νέες συνδέσεις που όλες έχουν τιμή στη μήτρα T κοντά στο μέγιστο (τη διάρκεια tabu) εκτός από μία που έχει τιμή μηδέν. Αυτή η κίνηση επιτρέπεται με την κλασική προσέγγιση TS, παρόλο που είναι «σχεδόν αντιστροφή» και με μεγάλη πιθανότητα οδηγεί σε κυκλικότητα.

Ανάλογοι κανόνες εφαρμόζονται και στις ανταλλαγές θέσεων. Μία ανταλλαγή θεωρείται απαγορευμένη (tabu) αν είτε όλες οι νέες συνδέσεις έχουν θετικές τιμές στη μήτρα T είτε η μέση τιμή των μη μηδενικών στοιχείων είναι μεγαλύτερη από το ίδιο κάτω όριο.

#### 5.1.4. Βραχυπρόθεσμη μνήμη: τα κριτήρια άρσης απαγόρευσης

Υπάρχουν περιπτώσεις που είναι επιθυμητή η άρση των περιορισμών των απαγορευμένων (tabu) κινήσεων, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση μίας κίνησης που είναι μεν απαγορευμένη αλλά είναι «ολικά» βελτιωτική, δηλαδή καλύτερη από κάθε λύση που έχει προηγηθεί. Γενικά, κάτω από ορισμένες συνθήκες οι υποψήφιος κινήσεις σε μία επανάληψη περιέχουν και απαγορευμένες. Οι συνθήκες αυτές σύμφωνα με την πρότυπη ορολογία TS ονομάζονται κριτήρια άρσης απαγόρευσης (aspiration criteria). Πρέπει να τονιστεί ότι η χρήση τέτοιων κριτηρίων στον προτεινόμενο αλγόριθμο δεν οδηγεί οπωσδήποτε στην εκτέλεση μίας απαγορευμένης κίνησης, αλλά απλά την καθιστά υποψήφια. Η τελική επιλογή για την επόμενη κίνηση εξαρτάται

από τη γενική στρατηγική της αναζήτησης που περιγράφεται στις ενότητες 5.2 και 5.3.

Το **πρώτο κριτήριο** άρσης απαγόρευσης ομοιάζει με την τυπική και πολύ διαδεδομένη προσέγγιση της άρσης βάσει της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης (ολικής μορφής) - aspiration by objective/ global form, όπου η κατάσταση απαγόρευσης (tabu) αίρεται αν η κίνηση βελτιώνει την καλύτερη τιμή που έχει βρεθεί, όπως στο παράδειγμα που προαναφέρθηκε. Για την κατηγορία προβλημάτων στην οποία ανήκει και το ΠΣΒΚ το κριτήριο αυτό δεν επαρκεί ως έχει, και τροποποιείται με την παρακολούθηση της καλύτερης ενδιάμεσης τιμής μεταξύ δύο διαδοχικών ολικών βελτιώσεων. Με εξαίρεση τα αρχικά στάδια της αναζήτησης, η διαδοχή των κινήσεων μεταξύ δύο τέτοιων ολικών βελτιώσεων μπορεί να είναι πολύ μεγάλη. Για να αποφευχθεί συνεπώς ακραία επιδείνωση τιμών μέσα στη διαδοχή αυτή (από όπου θα ήταν δύσκολη μία απότομη «πτώση» σε ολικό βέλτιστο), θεωρούνται ως υποψήφιες κινήσεις και εκείνες που είναι μεν απαγορευμένες αλλά βελτιώνουν αυτή την ενδιάμεση τιμή. Χρησιμοποιώντας και πάλι την καθιερωμένη ορολογία TS, ο κανόνας αυτός μπορεί να θεωρηθεί παραλλαγή της άρσης βάσει της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης (τοπικής μορφής) - aspiration by objective/ regional form.

Το **δεύτερο κριτήριο** που χρησιμοποιείται είναι η τυποποιημένη άρση βάσει της κατεύθυνσης της αναζήτησης (μονόδρομα) - aspiration by search direction (one-way), όπου η κατάσταση απαγόρευσης (tabu) αίρεται αν:

- η κίνηση οδηγεί σε καλύτερη λύση από αυτήν της προηγούμενης επανάληψης (είναι «τοπικά» βελτιωτική), και
- όλες οι συνδέσεις που επιβάλλουν την απαγόρευση πήραν την κατάσταση tabu, δηλαδή θετικές τιμές στη μήτρα T, σε μία επανάληψη που επίσης ήταν τοπικά βελτιωτική.

Το κριτήριο αυτό κατά μία έννοια ελέγχει αν οι συνθήκες που επέβαλαν την κατάσταση tabu έχουν «ανατραπεί απότομα» μια και φυσιολογικά περιμένει

κανείς ότι η επιστροφή σε πρόσφατα καταργημένες συνδέσεις αντιστρέφει την πορεία της αντικειμενικής συνάρτησης.

Το **τρίτο κριτήριο** εξυπηρετεί το στόχο της «άρσης βάσει επίδρασης» (aspiration by influence). Η λογική της «επίδρασης» είναι η διαταραχή της αναζήτησης για να αποκαλυφθούν λύσεις που είναι δύσκολο να βρεθούν φυσιολογικά όπως κινείται η αναζήτηση σε κάποιο στάδιο, επειδή είναι δομικά διαφορετικές. Κινήσεις επίδρασης εκτελούνται επίσης και στα πλαίσια της εφαρμογής της μακροπρόθεσμης μνήμης (βλ. επόμενη ενότητα), εισάγονται όμως και εδώ για λόγους ενίσχυσης του στρατηγικού αυτού στοιχείου.

Για το σκοπό αυτό ορίζονται ως «ισχυρές» μηχανές αυτές που έχουν το μεγαλύτερο συνολικό κόστος σύνδεσης προς όλες τις άλλες, και συνεπώς η μετακίνησή τους επηρεάζει περισσότερο. Για την ακρίβεια, θεωρούνται ως ισχυρές μηχανές οι πρώτες  $n/4$  που έχουν το μεγαλύτερο τέτοιο κόστος. Η συνθήκη για την άρση απαγόρευσης είναι:

- η απαγορευμένη κίνηση είναι τοπικά βελτιωτική, δηλαδή καλύτερη από την προηγούμενη και από κάθε άλλη υποψήφια
- η μηχανή που μετακινείται είναι ισχυρή (στην περίπτωση ανταλλαγής θέσεων τουλάχιστον η μία μηχανή είναι ισχυρή)
- η ολική βελτίωση καθυστερεί για ορισμένο αριθμό επαναλήψεων, και
- η μέση τιμή των μη μηδενικών στοιχείων που αντιστοιχούν στις συνδέσεις που δημιουργούνται είναι μικρότερη ή ίση από ένα προκαθορισμένο άνω όριο (το οποίο είναι το ήμισυ της τιμής διάρκειας tabu).

Η τελευταία συνθήκη είναι ακριβώς η άρνηση της δεύτερης συνθήκης που περιγράφηκε στο χαρακτηρισμό μίας κίνησης ως απαγορευμένης. Το αποτέλεσμα βέβαια είναι το ίδιο (μια και εδώ εξετάζεται η άρση απαγόρευσης), δηλαδή να μην εκτελούνται κινήσεις που είναι «σχεδόν αντιστροφές» προηγούμενων.

### 5.1.5. Οι μακροπρόθεσμες μνήμες

Στη μέθοδο TS, η μακροπρόθεσμη μνήμη εισάγει τα εξής στρατηγικά στοιχεία που συμπληρώνουν το ένα το άλλο:

- διαφοροποίηση (diversification) της αναζήτησης, δηλαδή καθοδήγησή της προς ανεξερεύνητες περιοχές του χώρου λύσεων
- «εντατικοποίηση» (intensification) της αναζήτησης, δηλαδή εστίασή της σε καλές ή υποσχόμενες περιοχές, με την εισαγωγή χαρακτηριστικών (attributes) προηγούμενων “επίλεκτων” (elite) λύσεων και κινήσεων επίδρασης.

Η **πρώτη μακροπρόθεσμη μνήμη** που χρησιμοποιείται είναι μνήμη «παραμονής» (residence) και βασίζεται σε όλο το ιστορικό της αναζήτησης. Στην πρότυπη ορολογία TS, οι συχνότητες παραμονής αποτυπώνουν τις φορές που μία μεταβλητή παραμένει σε μία τιμή, σε αντίθεση με τις συχνότητες «αλλαγής» (transition frequencies) που αποτυπώνουν τις φορές που μία μεταβλητή έχει αλλάξει τιμή. Η μνήμη αυτή εξυπηρετεί και τα δύο προαναφερθέντα στρατηγικά στοιχεία (πλην της εισαγωγής χαρακτηριστικών “επίλεκτων” λύσεων), κυρίως όμως το στοιχείο της διαφοροποίησης. Η εντατικοποίηση όπως εξηγείται στη συνέχεια εξυπηρετείται δευτερευόντως με τη χρήση «ισχυρών» συνδέσεων (άρα συνδέσεων επίδρασης), κατ’ αναλογία με τις ισχυρές μηχανές.

Για το σκοπό αυτό, τηρείται μία συμμετρική μήτρα  $S=(s_{ij})$   $i,j=1,\dots,n$  αρχικά με όλα τα στοιχεία μηδέν. Στο τέλος κάθε επανάληψης, για κάθε ζεύγος μηχανών  $(i,j)$  που ανήκουν στο ίδιο κύτταρο αυξάνεται η τιμή του αντίστοιχου στοιχείου της μήτρας  $S$  κατά μία μονάδα. Οι τιμές της μήτρας αυτής είναι πάντα ανηγμένες ώστε να είναι συγκρίσιμες με αυτές της μήτρας κόστους  $C$ .



Συνεπώς, σε κάθε στάδιο της αναζήτησης, τιμές στη μήτρα  $S$  που είναι σημαντικά μικρότερες από τις αντίστοιχες στη μήτρα  $C$  υποδεικνύουν συνδέσεις που θα περίμενε κανείς να εμφανίζονται πιο συχνά (ως “ισχυρές” συνδέσεις, με επίδραση λόγω μεγάλου κόστους), αλλά αυτό δεν έχει συμβεί, δηλαδή οι συνδέσεις αυτές δεν έχουν διερευνηθεί επαρκώς.

Επομένως, το ενδιαφέρον εστιάζεται στις τιμές της μήτρας  $C-S$ . Αν επιλεγεί κίνηση με βάση τα κόστη από αυτή τη μήτρα και όχι μόνο τη μήτρα  $C$ , δίνεται περισσότερη βαρύτητα σε συνδέσεις μεγάλου κόστους – μικρής συχνότητας παραμονής και λιγότερη σε συνδέσεις μικρού κόστους – μεγάλης συχνότητας παραμονής. Οι κινήσεις που οδηγούν στις συνδέσεις αυτές έχουν προτεραιότητα ή αποφεύγονται, αντίστοιχα. Η πρακτική αυτή είναι σε συμφωνία με τη χρήση της μακροπρόθεσμης μνήμης για κίνητρα/ αντικίνητρα (incentives/ penalties) στην αναζήτηση και στην πραγματικότητα αυτά είναι ακριβώς ο όρος  $-S$ .

Η **δεύτερη μακροπρόθεσμη μνήμη** βασίζεται σε καταγεγραμμένες καλές λύσεις, τις επονομαζόμενες «επίλεκτες» (elite). Η μνήμη αυτή εξυπηρετεί το στόχο εντατικοποίησης ο οποίος πλέον καλύπτεται πλήρως.

Για το σκοπό αυτό τηρείται μία συμμετρική μήτρα  $B=(b_{ij})$ , αρχικά με όλα τα στοιχεία μηδέν. Για να ληφθεί υπόψη μία λύση στην ενημέρωση της μήτρας αυτής, πρέπει να ισχύουν οι εξής συνθήκες:

- η λύση να είναι ένα τοπικό βέλτιστο TS (όχι απαραίτητα τοπικό βέλτιστο με την αυστηρή έννοια, επειδή η αναζήτηση περιορίζεται από τις απαγορεύσεις)
- η τιμή της λύσης να μην υπερβαίνει το προκαθορισμένο άνω όριο: τιμή ευρετικής λύσης  $\times 1,05$ .

Με άλλα λόγια, καταγράφονται μόνο τα καλά τοπικά βέλτιστα TS.

Μετά από κάθε επανάληψη, και εφ' όσον η τρέχουσα λύση ικανοποιεί τις παραπάνω συθήκες, για κάθε ζεύγος μηχανών  $(i,j)$  που ανήκουν στο ίδιο κύτταρο αυξάνεται κατά μία μονάδα η τιμή του αντίστοιχου στοιχείου της μήτρας **B**. Όπως και με την πρώτη μακροπρόθεσμη μνήμη, οι τιμές της μήτρας αυτής είναι πάντοτε ανηγμένες ώστε να είναι συγκρίσιμες με αυτές της μήτρας κόστους **C**.

Για την ευρετική λύση χρησιμοποιείται ο ευρετικός αλγόριθμος που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 4, δηλαδή ο αλγόριθμος συνένωσης και ανταλλαγής. Σημειωτέον ότι επιτρέπεται η πολλαπλή καταγραφή της ίδιας λύσης με τη λογική ότι αν η αναζήτηση επιμένει σε κάποιες περιοχές, αυτό πρέπει να ληφθεί υπόψη.

Αν επιλεγεί μία κίνηση με βάση τα κόστη από τη μήτρα **B** (και όχι βάσει της μήτρας κόστους **C**), δίνεται βάρος σε χαρακτηριστικά (συνδέσεις) λύσεων καλής ποιότητας που έχουν προηγηθεί. Η εισαγωγή των χαρακτηριστικών αυτών επιτρέπει την εστίαση της αναζήτησης σε καλές ή υποσχόμενες περιοχές και άρα εξυπηρετεί το στόχο εντατικοποίησης.

Μία σημαντική λεπτομέρεια είναι ότι στην επιλογή δεν χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές της μήτρας **B**. Χρήσιμη πληροφορία φέρουν κυρίως οι συνδέσεις που εμφανίζονται συστηματικά στις «επίλεκτες» λύσεις, και για το λόγο αυτό δεν λαμβάνονται υπόψη συχνότητες εμφάνισης που είναι μικρότερες από 0,8 της μέγιστης. Η τιμή αυτή αποδείχτηκε καλή στην πράξη. Μικρότερες τιμές επιτρέπουν να συνυπολογίζονται και σχετικά αδύναμα τοπικά βέλτιστα **TS** που συναντήθηκαν μόνο λίγες φορές. Από την άλλη, μία υψηλότερη τιμή κοντά στη μονάδα έχει ως αποτέλεσμα να εκφυλίζεται η διαδικασία στην καταγραφή μόνο πολύ λίγων επίλεκτων λύσεων, ιδίως στα προχωρημένα στάδια της αναζήτησης που η πορεία έχει διαφοροποιηθεί αρκετά.

## 5.2. Η στρατηγική της αναζήτησης

### 5.2.1. Κανονικές και προγραμματισμένες επαναλήψεις

Η εφαρμογή της μακροπρόθεσμης μνήμης γίνεται βάσει σχεδίου. Κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις που θα εξηγηθούν στην επόμενη ενότητα, ξεκινά η επόμενη ακολουθία *προγραμματισμένων επαναλήψεων*:

- Το πολύ 10 επαναλήψεις κυρίως για *διαφοροποίηση*, στη διάρκεια των οποίων η επιλογή κίνησης γίνεται με βάση την πρώτη μακροπρόθεσμη μνήμη συχνοτήτων παραμονής, δηλαδή τις τιμές της μήτρας C-S. Στη διάρκεια των επαναλήψεων αυτών αγνοούνται όλοι οι περιορισμοί βραχυπρόθεσμης μνήμης (οι απαγορεύσεις tabu). Οι επαναλήψεις διακόπτονται όταν η αντίστοιχη τιμή δεν μπορεί πλέον να βελτιωθεί, δηλαδή όταν η αναζήτηση έχει επισκεφθεί αρκετά όλες τις υποψήφιες κινήσεις υψηλού πραγματικού κόστους και δεν μπορεί να επιτευχθεί περαιτέρω διαφοροποίηση. Η τακτική αυτή επίσης παρεμποδίζει την κυκλικότητα (ελλείπει απαγορεύσεων tabu).
- 5 επαναλήψεις *σταθεροποίησης* στις οποίες εφαρμόζονται κανονικά η βραχυπρόθεσμη μνήμη παραμονής και τα κριτήρια άρσης απαγόρευσης.
- Το πολύ 10 επαναλήψεις για λόγους *εντατικοποίησης* της αναζήτησης, στη διάρκεια των οποίων η επιλογή κίνησης γίνεται με βάση τη δεύτερη μακροπρόθεσμη μνήμη επίλεκτων λύσεων, δηλαδή τις τιμές της μήτρας B. Και σε αυτές τις επαναλήψεις αγνοούνται όλοι οι περιορισμοί βραχυπρόθεσμης μνήμης. Κατ' αναλογία με τη φάση διαφοροποίησης, οι επαναλήψεις αυτές διακόπτονται όταν η αντίστοιχη τιμή δεν μπορεί πλέον να βελτιωθεί, δηλαδή όταν οι υποψήφιες κινήσεις δεν εμπεριέχουν πλέον αρκετά χαρακτηριστικά (συνδέσεις) καλών προηγούμενων λύσεων και δεν μπορεί να επιτευχθεί περαιτέρω εστίαση

της αναζήτησης. Ανάλογα ισχύουν ως προς την αποφυγή της κυκλικότητας.

Το τελευταίο στάδιο της εντατικοποίησης δεν εφαρμόζεται αν δεν έχει εξεταστεί προηγουμένως ένας ελάχιστος αριθμός επίλεκτων λύσεων, για λόγους στατιστικής αξιοπιστίας των συχνοτήτων που συλλέγονται. Καθυστέρηση στη συλλογή ικανοποιητικού δείγματος μπορεί να σημειωθεί σε ορισμένα προβλήματα, ανάλογα με την ποιότητα της ευρετικής λύσης και την πορεία της αναζήτησης. Στην περίπτωση αυτή, η μεν εφαρμογή του σταδίου αυτού αναβάλλεται για την επόμενη φορά που θα εκκινήσει η όλη ακολουθία επαναλήψεων, το δε άνω όριο για την ένταξη μίας λύσης στο σετ των επίλεκτων λύσεων αυξάνεται.

Η λογική της εφαρμογής της όλης ακολουθίας έχει ως εξής: μετά την εκτέλεση ενός ορισμένου αριθμού επαναλήψεων και εφ' όσον η ολική βελτίωση καθυστερεί σημαντικά, διαταράσσεται πρώτα η αναζήτηση για να οδηγηθεί προς ανεξερεύνητες περιοχές, στη συνέχεια επιβάλλεται μία φάση σταθεροποίησης και τέλος εισάγονται χαρακτηριστικά υψηλής ποιότητας λύσεων για να εστιαστεί σωστά η αναζήτηση στις νέες περιοχές. Η ακολουθία αυτή δεν εκτελείται βέβαια συνεχώς. Όπως εξηγείται στην επόμενη ενότητα, μία από τις προϋποθέσεις για την εκκίνηση της όλης ακολουθίας είναι η καθυστέρηση στην ολική βελτίωση και, τεχνικά, ο μετρητής καθυστέρησης μηδενίζεται στο τέλος κάθε τέτοιας ακολουθίας.

Όπως αναφέρθηκε, οι επαναλήψεις αυτές ονομάζονται *προγραμματισμένες*. Κάθε άλλη επανάληψη, συμπεριλαμβανομένης αυτής που δίνει την εκκίνηση της ακολουθίας προγραμματισμένων επαναλήψεων, ονομάζεται *κανονική επανάληψη*.

### 5.2.2. Ο τρόπος εφαρμογής της στρατηγικής – η πορεία της αναζήτησης

Ο αλγόριθμος ξεκινά με την πιο πιθανή (για βέλτιστη) μορφή, δηλαδή αυτήν με το μέγιστο αριθμό κυττάρων οριακού μεγέθους  $M$ . Οι μηχανές κατανέμονται τυχαία στα κύτταρα.

Στη συνέχεια ακολουθούν 1000 κανονικές (μη προγραμματισμένες) επαναλήψεις. Οι δυνατές περιπτώσεις στη διάρκεια των επαναλήψεων αυτών είναι:

1. Η καλύτερη απλή μετακίνηση οδηγεί σε λύση τουλάχιστον ισότιμη με αυτήν της προηγούμενης επανάληψης  $\Rightarrow$  επιλέγεται αυτή η απλή μετακίνηση
2. Η καλύτερη ανταλλαγή θέσεων οδηγεί σε λύση τουλάχιστον ισότιμη με αυτήν της προηγούμενης επανάληψης και:
  - είτε δεν υπάρχουν υποψήφια απλές μετακινήσεις (όλα τα κύτταρα έχουν το οριακό μέγεθος  $M$  ή όλες οι απλές μετακινήσεις είναι σε κατάσταση tabu και δεν εφαρμόζεται κανένα κριτήριο άρσης απαγόρευσης)
  - είτε η καλύτερη απλή μετακίνηση οδηγεί σε λύση κατώτερη από αυτήν της προηγούμενης επανάληψης  
 $\Rightarrow$  επιλέγεται αυτή η ανταλλαγή θέσεων
3. Τόσο η καλύτερη απλή μετακίνηση όσο και η καλύτερη ανταλλαγή θέσεων οδηγούν σε λύσεις κατώτερες από αυτήν της προηγούμενης επανάληψης  $\Rightarrow$  η καλύτερη απλή μετακίνηση καθίσταται υποψήφια (προτιμάται από την ανταλλαγή θέσεων για λόγους διαφοροποίησης), αλλά δεν εκτελείται ακόμα. Προηγείται έλεγχος για το αν η επανάληψη αυτή σηματοδοτεί την έναρξη της ακολουθίας προγραμματισμένων επαναλήψεων
4. Η καλύτερη ανταλλαγή θέσεων οδηγεί σε λύση κατώτερη από αυτήν της προηγούμενης επανάληψης και δεν υπάρχουν υποψήφια απλές μετακινήσεις  $\Rightarrow$  η κίνηση αυτή καθίσταται υποψήφια, αλλά όπως στην περίπτωση (3) δεν εκτελείται ακόμα.

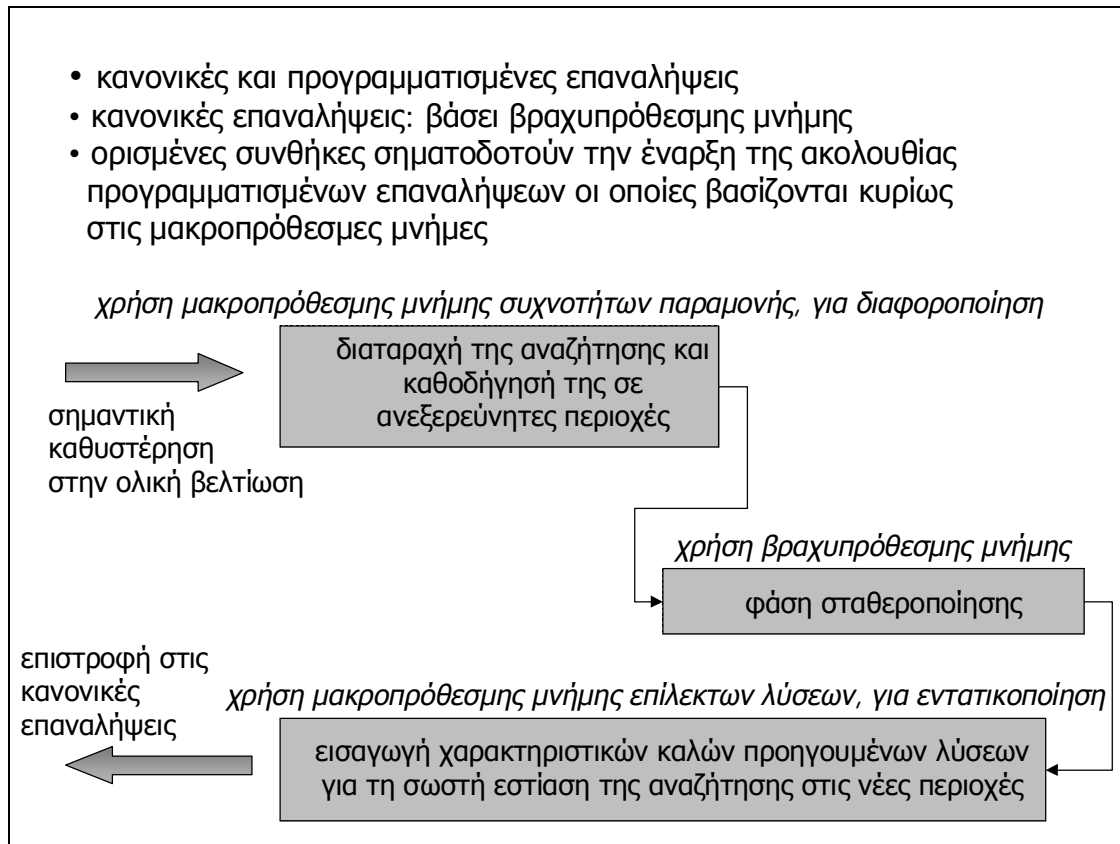
Στα παραπάνω, σε κάθε περίπτωση που πρέπει να βρεθεί η καλύτερη ανταλλαγή θέσεων αλλά δεν υπάρχει ούτε μία επιτρεπόμενη, μειώνονται όλα τα μη μηδενικά στοιχεία της μήτρας  $\text{tabu } T$ , μέχρι να βρεθεί μία.

Στις περιπτώσεις (3) και (4) σηματοδοτείται η έναρξη της ακολουθίας προγραμματισμένων επαναλήψεων αν:

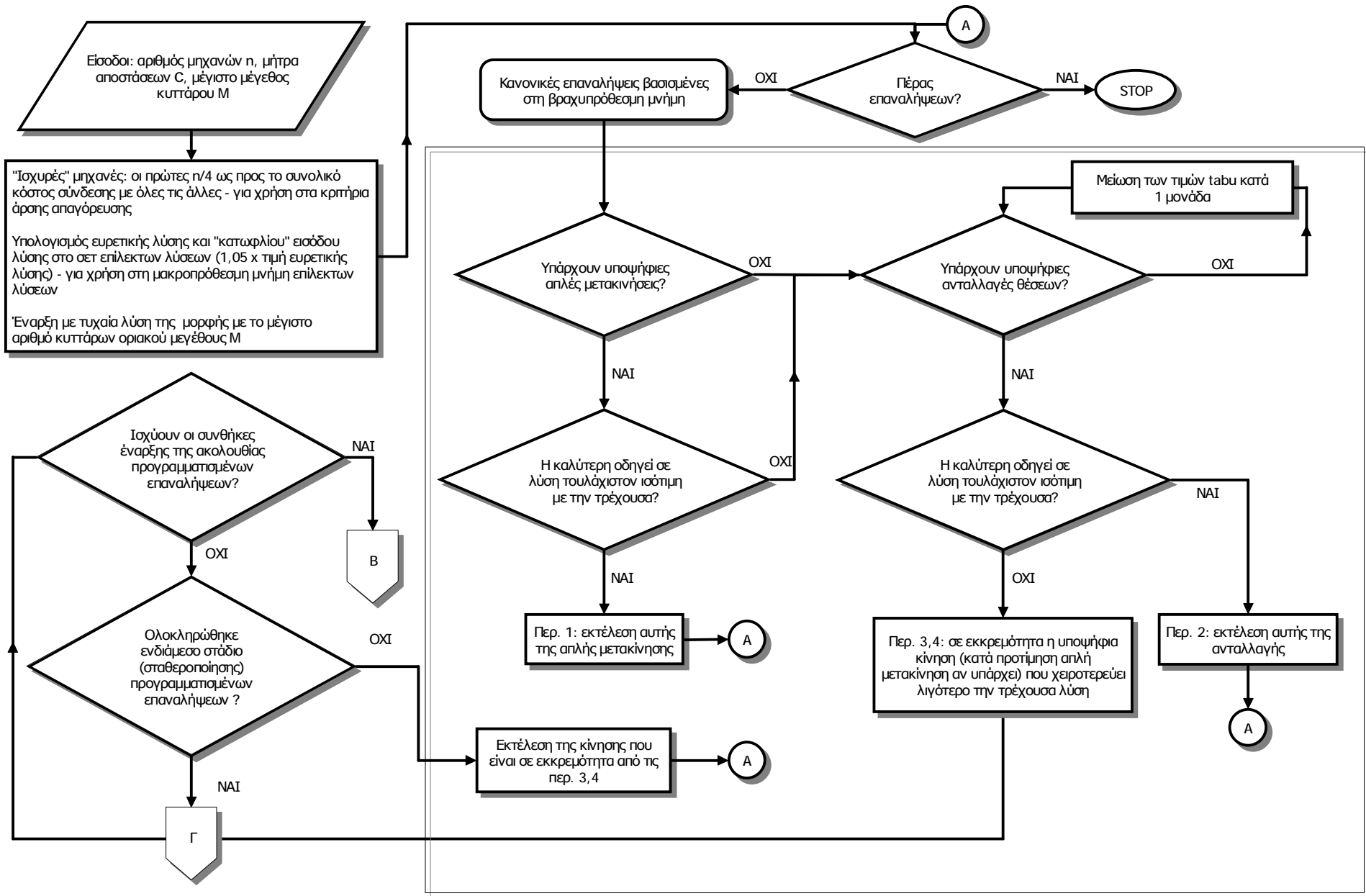
- έχουν εκτελεστεί τουλάχιστον 100 επαναλήψεις
- από την τελευταία ολική βελτίωση ή την τελευταία ακολουθία προγραμματισμένων επαναλήψεων έχουν παρέλθει τουλάχιστον 50 επαναλήψεις

Οι προγραμματισμένες επαναλήψεις είναι πάντοτε απλές μετακινήσεις (εκτός αν δεν υπάρχουν τέτοιες επειδή όλα τα κύτταρα είναι στο οριακό μέγεθος  $M$ ). Με το πέρας των προγραμματισμένων επαναλήψεων, η αναζήτηση επιστρέφει στις κανονικές.

Η στρατηγική της αναζήτησης συνοψίζεται στο επόμενο σχήμα 5.2 και στο διάγραμμα ροής του σχήματος 5.3. Το τελευταίο δεν δείχνει τις λεπτομέρειες της εφαρμογής της βραχυπρόθεσμης και των μακροπρόθεσμων μνημών, που περιγράφηκαν στις ενότητες 5.1.4 και 5.1.5. Επίσης, για λόγους απλότητας, δεν φαίνεται η λεπτομέρεια της αναβολής του σταδίου εντατικοποίησης όταν δεν έχει συλλεγεί ικανοποιητικό δείγμα επιλέκτων λύσεων (βλ. ενότητα 5.2.1).

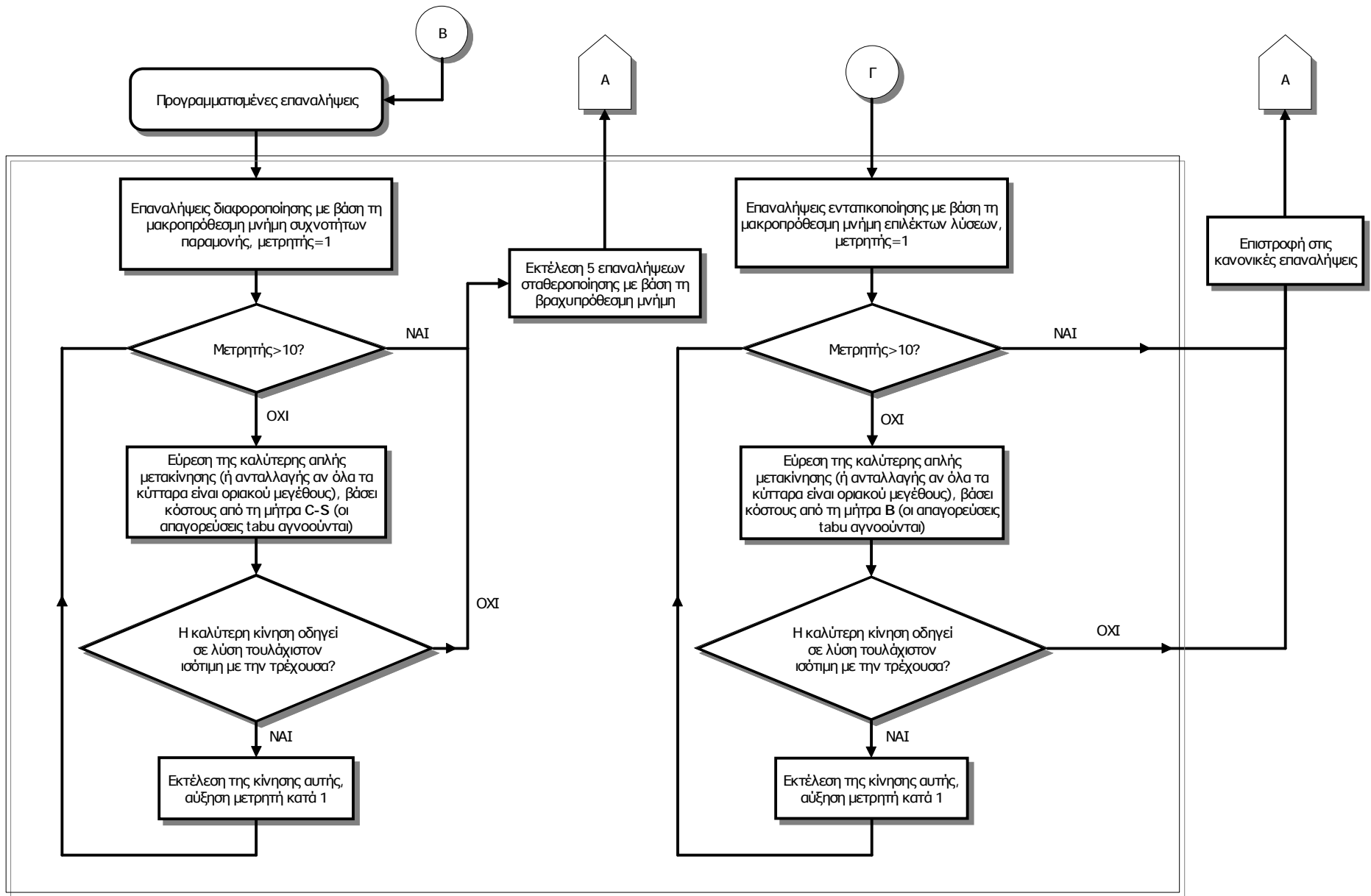


**Σχήμα 5.2.** Ο πυρήνας της στρατηγικής της αναζήτησης.



Σχήμα 5.3. Συνοπτικό διάγραμμα ροής της αναζήτησης TS (συνέχεια στην επόμενη σελίδα)





Σχήμα 5.3 (συνέχεια)

### **5.3. Υπολογιστικά αποτελέσματα**

Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε αναπτύχθηκε σε γλώσσα Fortran 77 και ο αλγόριθμος δοκιμάστηκε σε μία σειρά προβλημάτων με γνωστές βέλτιστες λύσεις. Στο στάδιο της ανάπτυξης, ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στο να αποφεύγεται όσο το δυνατόν η έστω και περιστασιακή (πέραν δηλαδή της κυκλικότητας) επίσκεψη προηγούμενων λύσεων, ιδίως των μη «επιλέκτων». Για την παρακολούθηση του ανεπιθύμητου αυτού φαινομένου και επειδή βέβαια ήταν ασύμφορη υπολογιστικά η ακριβής σύγκριση κάθε λύσης με τις προηγούμενες, χρησιμοποιήθηκε συνάρτηση hash για την «σχεδόν» μονοσήμαντη κωδικοποίηση των λύσεων με λίγα δυαδικά ψηφία. Με τον τρόπο αυτό η σύγκριση καθίσταται υπολογιστικά εφικτή, με κάποιο αντίτιμο βέβαια, και συγκεκριμένα τη μικρή πιθανότητα δύο διαφορετικές λύσεις να έχουν την ίδια κωδικοποίηση - τιμή της συνάρτησης αυτής.

Η μέθοδος αυτή αποδείχθηκε ιδιαίτερα αποτελεσματική στη βελτίωση της απόδοσης του αλγορίθμου, διότι επέτρεψε τη στατιστική συσχέτιση του βαθμού διαφοροποίησης της αναζήτησης (της συχνότητας επίσκεψης προηγούμενων λύσεων) με τις τιμές των διαφόρων παραμέτρων αλλά και την ύπαρξη η μη ολόκληρων στοιχείων «τακτικής». Το αποτέλεσμα ήταν η ρύθμιση του αλγορίθμου χωρίς «τυφλές» δοκιμές, και αυτό ενδείκνυται γενικά για κάθε προσεγγιστική μέθοδο που έχει ποικιλία παραμέτρων οι οποίες εκ των πραγμάτων αλληλεπιδρούν, όπως για παράδειγμα η Προσομοίωση Ανόπτησης (Simulated Annealing). Το ζητούμενο είναι μόνο η επιλογή κατάλληλης “εξηρημένης μεταβλητής”, όπως είναι ο βαθμός διαφοροποίησης της αναζήτησης στον αλγόριθμο που περιγράφεται.

Τα αποτελέσματα ήταν παραπάνω από ενθαρρυντικά, καθώς ο προτεινόμενος αλγόριθμος έδωσε βέλτιστη λύση σε όλα τα προβλήματα μέχρι 30 μηχανών σε αμελητέους χρόνους (σε ένα μικροϋπολογιστή Pentium III 64MB/450 MHz), χωρίς καν να χρειαστεί να αυξηθεί ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων που είναι

αρκετά λίγες στο επίπεδο των 1000. Παρόμοια καλά ήταν τα αποτελέσματα με “μαθηματικά παρεμφερή” δεδομένα μεγαλύτερης διάστασης (έως και 50) όπου υπήρξε μόνο μία αστοχία σε σχέση με τις βέλτιστες ή καλύτερες γνωστές λύσεις, και μάλιστα σε 4 περιπτώσεις βελτιώθηκε η καλύτερη γνωστή λύση. Όλα τα υπολογιστικά αποτελέσματα συνοψίζονται στον πίνακα 5.1 στο τέλος του παρόντος Κεφαλαίου.

Όσον αφορά τα προβλήματα ΠΣΒΚ, δοκιμάστηκαν τα παρακάτω:

- Το σετ 10 μητρώων αποστάσεων 16 μηχανών που δημοσιεύτηκε από τη Sofianoπούλου [1994], [1997] με μέγιστο μέγεθος κυττάρου 5 έως 12, δηλαδή συνολικά 80 προβλήματα. Η σειρά αυτή είναι ακριβώς η ίδια με αυτήν που δοκιμάστηκε πρώτη στην ενότητα 4.3 στον ακριβή αλγόριθμο. Ο αλγόριθμος TS έδωσε παντού τη βέλτιστη λύση, ο δε συνολικός χρόνος ήταν 66 δευτερόλεπτα.
- Το σετ 10 τυχαίων μητρώων αποστάσεων 20 μηχανών που περιγράφηκε στην ενότητα 4.3 (η δεύτερη σειρά δοκιμών του ακριβούς αλγορίθμου), με μέγιστο μέγεθος κυττάρου 6 έως 10, δηλαδή συνολικά 50 προβλήματα. Και εδώ βρέθηκε παντού η βέλτιστη λύση, σε συνολικό χρόνο 62 δευτερολέπτων.
- Το σετ 7 τυχαίων μητρώων αποστάσεων 25 μηχανών που περιγράφηκε επίσης στην ενότητα 4.3 (η τρίτη σειρά δοκιμών του ακριβούς αλγορίθμου), με μέγιστο μέγεθος κυττάρου 8 έως 12, δηλαδή συνολικά 35 προβλήματα. Η λύση ήταν και πάλι παντού βέλτιστη, ο δε συνολικός χρόνος ήταν 73 δευτερόλεπτα.
- Ένα σετ 9 τυχαίων μητρώων αποστάσεων 30 μηχανών, με μέγιστο μέγεθος κυττάρου 8 έως 12, δηλαδή συνολικά 45 προβλήματα. Οι μήτρες παράχθηκαν συνδυάζοντας 3 διαφορετικούς αριθμούς κομματιών με 3 διαφορετικές κατανομές πιθανότητας για τον αριθμό των μηχανών που

επισκέπτεται κάθε κομμάτι και παρατίθενται στο Παράρτημα. Η ακριβής επίλυση των προβλημάτων αυτών αρχικά δεν ήταν δυνατή με τον αλγόριθμο του Κεφαλαίου 4, οπότε η σύγκριση έγινε με “πιθανές βέλτιστες” λύσεις που έδωσε ο ίδιος ο αλγόριθμος TS με 10.000 επαναλήψεις (με μηδενισμό των τιμών tabu κάθε 1000), σε συνολικό χρόνο 25 λεπτών.

Στα παραπάνω προβλήματα των 30 μηχανών, και με μέγιστο αριθμό επαναλήψεων 1000, η “πιθανή βέλτιστη” λύση βρέθηκε παντού, σε συνολικό χρόνο 145 δευτερολέπτων. Οι πιθανές βέλτιστες λύσεις αποδείχθηκαν ότι είναι βέλτιστες από τον M. Sorensen [προσωπική επικοινωνία] ο οποίος μελετά – εκτός χώρου ΠΣΒΚ - τις πολυεδρικές απόψεις διαφόρων εκδοχών του ΠΔΓ και χρησιμοποίησε τον ακριβή αλγόριθμο branch-and-cut που έχει δημοσιευτεί στο [Sorensen, 1995]. Αργότερα οι λύσεις αυτές επιβεβαιώθηκαν και με τον ακριβή αλγόριθμο του Κεφαλαίου 4 (με τις αδημοσίευτες βελτιώσεις που αναφέρονται εκεί).

Αξιοσημείωτη είναι η απόδοση του προτεινομένου αλγορίθμου με ακόμα λιγότερες (500) επαναλήψεις. Οι παραγόμενες λύσεις εξακολουθούν να είναι βέλτιστες σε όλα τα προβλήματα 16, 20 και 25 μηχανών, στα δε προβλήματα 30 μηχανών ο αλγόριθμος δίνει βέλτιστη λύση στα 42 από τα 45 προβλήματα, στα δε υπόλοιπα 3, η μέση και η μέγιστη απόκλιση από τη βέλτιστη λύση είναι 0,05% και 0,08% αντίστοιχα.

Ο μόνος λόγος που δεν επέτρεψε τη στατιστικά σημαντική δοκιμή του αλγορίθμου με πολλά προβλήματα ακόμα μεγαλύτερων διαστάσεων ήταν η έλλειψη βέλτιστων λύσεων. Στα πλαίσια της συνεργασίας με τον M. Sorensen πάντως δοκιμάστηκαν και τα μεγαλύτερα προβλήματα που έχει κατασκευάσει ο ίδιος. Πρόκειται για γράφους με 35, 40 και 50 κόμβους (5 γράφοι σε κάθε ομάδα, που διαφέρουν ως προς την «πυκνότητά» τους σε κλάδους). Τα προβλήματα αυτά για την ακρίβεια δεν μπορούν να απεικονίζουν δεδομένα σχεδιασμού βιομηχανικών κυττάρων και είναι κατά μία έννοια πιο «εύκολα»

(οι τιμές στις μήτρες κόστους έχουν πολύ μεγάλη διασπορά, οπότε υπάρχει φυσική προτεραιότητα στις μεταβλητές). Επίσης, οι γνωστές λύσεις δεν ήταν παντού αποδεδειγμένα βέλτιστα. Παρ' όλα αυτά, τα αποτελέσματα δίνουν μία ένδειξη για τις δυνατότητες του προτεινομένου αλγορίθμου σε μεγαλύτερες διαστάσεις:

- Στους 10 συνδυασμούς γράφων 35 και 40 κόμβων με μέγιστο μέγεθος υπο-γράφου  $M=5$ , οι βέλτιστες λύσεις ήταν γνωστές. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος βρήκε παντού τις λύσεις αυτές και μάλιστα στις περισσότερες περιπτώσεις (9) με λιγότερες από 1000 επαναλήψεις. Στη μία εξαίρεση χρειάστηκαν 2404 επαναλήψεις
- Στους 30 συνδυασμούς των ίδιων γράφων με μέγιστο μέγεθος υπο-γράφου  $M=4, 7$  και 10, υπήρχαν μόνο γνωστές καλύτερες λύσεις. Ο αλγόριθμος Tabu Search τις βελτίωσε με 5000 επαναλήψεις σε 4 περιπτώσεις
- Στα 15 προβλήματα 50 κόμβων με μέγιστο μέγεθος υπο-γράφου  $M=4, 7$  και 10:
  - οι βέλτιστες λύσεις ήταν γνωστές σε 5 περιπτώσεις και ο προτεινόμενος αλγόριθμος τις βρήκε όλες εκτός από μία, με λιγότερες από 5000 επαναλήψεις
  - στα υπόλοιπα 10 προβλήματα για τα οποία οι λύσεις ήταν οι καλύτερες γνωστές, ο προτεινόμενος αλγόριθμος βρήκε τις ίδιες λύσεις, 8 στις 10 φορές με 5000 επαναλήψεις και τις άλλες 2 με 10.000 επαναλήψεις.

Να σημειωθεί ότι οι χρόνοι παραμένουν μικροί και στις διαστάσεις αυτές, επειδή ο αλγόριθμος δεν έχει εκθετική συμπεριφορά. Ο μεγαλύτερος χρόνος που καταγράφηκε για την επίλυση προβλήματος 50 μηχανών με 5000 επαναλήψεις ήταν 72 δευτερόλεπτα.

Διάσταση (αρ. μηχανών)	Πλήθος προβλημάτων	Γνωστές βέλτιστες λύσεις	Αποτελέσματα	Μέσος χρόνος επίλυσης (δευτερόλεπτα)	Όριο επαναλήψεων
16	80	ναι	βέλτιστες λύσεις	< 1	1000
20	50	ναι	βέλτιστες λύσεις	1	1000
25	35	ναι	βέλτιστες λύσεις	2	1000
30	45	ναι	βέλτιστες λύσεις	3	1000
35-40	10	ναι	βέλτιστες λύσεις	6	1000 (*)
35-40	30	όχι	γνωστές λύσεις, βελτίωση σε 4 περιπτώσεις	27	5000
50	5	ναι	1 υποβέλτιστη λύση	53	5000
50	10	όχι	γνωστές λύσεις	59	5000 (**)

\* εκτός από ένα πρόβλημα στο οποίο η βέλτιστη λύση βρέθηκε στην επανάληψη 2404

\*\* εκτός από δύο προβλήματα στα οποία οι γνωστές λύσεις βρέθηκαν με όριο 10.000 επαναλήψεων

**Πίνακας 5.1.** Απόδοση του αλγορίθμου TS.

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6**

### **ΒΕΛΤΙΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ: Ο ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΥΤΤΑΡΩΝ**

Οι αλγόριθμοι που περιγράφηκαν στα Κεφάλαια 4 και 5 δεν οδηγούν απαραίτητα σε λύσεις με πλήρως αυτόνομα βιομηχανικά κύτταρα (χωρίς στοιχεία εξαίρεσης) και αυτό όχι λόγω αδυναμιών, αλλά επειδή τα δεδομένα του σχεδιασμού σπάνια επιτρέπουν κάτι τέτοιο, όποια και αν είναι τα κριτήρια βελτιστοποίησης. Σύμφωνα με τη προσέγγιση 3 σταδίων που περιγράφηκε στην ενότητα 3.1, η απαλοιφή της εναπομένουσας αλληλεπίδρασης μεταξύ κυττάρων επιτυγχάνεται στο 3ο στάδιο (στάδιο Γ) με την εξέταση των δυνατοτήτων υπερβολικής ανάθεσης της παραγωγής κομματιών εξαίρεσης, αγοράς αντιγράφων των μηχανών στένωσης, και αλλαγών σε πλάνα επεξεργασίας κομματιών. Με τον τρόπο αυτό ολοκληρώνεται επίσης η πλήρης προσαρμογή σε πραγματικές καταστάσεις.

Στην ενότητα 6.1 τεκμηριώνεται η σκοπιμότητα της εφαρμογής του σταδίου αυτού, σχολιάζονται μερικές όψεις του προβλήματος και επισημαίνονται αυτές που σχετίζονται με τη στρατηγική μίας επιχείρησης και πρέπει να λαμβάνονται υπόψη στην επιλογή μοντέλου. Στην ενότητα 6.2 περιγράφεται η τυπική μεθοδολογία απαλοιφής των στοιχείων εξαίρεσης. Ορισμένα από τα παραπάνω θέματα περιγράφονται στην εργασία Σπηλιόπουλος και Σοφianoπούλου [1995] και επίσης παρουσιάστηκαν στο 11ο Εθνικό Συνέδριο της ΕΕΕΕ τον Μάιο 1997.

Με τα αναφερόμενα σε αυτό το Κεφάλαιο ολοκληρώνεται η περιγραφή της μεθοδολογίας σχεδιασμού βιομηχανικών κυττάρων που προτείνεται στην παρούσα διατριβή.

### **6.1. Η σκοπιμότητα της απαλοιφής των στοιχείων εξαίρεσης και μερικές όψεις του προβλήματος**

Όταν τα βιομηχανικά κύτταρα δεν είναι πλήρως αυτόνομα, τα παραγόμενα κομμάτια υποχρεούνται σε μετακινήσεις εκτός του «οικείου» τους κυττάρου. Έτσι δημιουργείται ένα πλέγμα μετακινήσεων μεταξύ βιομηχανικών κυττάρων, το οποίο γίνεται περισσότερο πολύπλοκο ιδιαίτερα στην περίπτωση που ο αριθμός των μηχανών ή/και των κομματιών είναι μεγάλος. Οι μετακινήσεις αυτές συνεπάγονται κόστος, για λόγους που είναι σε πλήρη αντιστοιχία με τα οφέλη της Παραγωγής με Βιομηχανικά Κύτταρα (βλ. Κεφάλαιο 1) τα οποία και μερικώς εξουδετερώνονται. Ως ένα μόνο παράδειγμα, πολλά στοιχεία εξαίρεσης σημαίνουν και πολλά κενά σε τουλάχιστον ένα βιομηχανικό κύτταρο. Ένα τέτοιο κύτταρο είναι μεγαλύτερο από το ιδανικό, με αποτέλεσμα να χάνονται τα οφέλη της πραγματικά αποκεντρωμένης παραγωγής.

Αν επι πλέον ο σχεδιασμός είναι ατελής ή πρόχειρος και οι μετακινήσεις κομματιών μεταξύ κυττάρων είναι υπερβολικά πολλές, δημιουργείται ένα κακό υβριδικό σχήμα παραγωγής, όπου μεγάλο μέρος του κόστους, της διαχείρισης και του ελέγχου δεν επιμερίζεται πλέον στα βιομηχανικά κύτταρα (τις “νησίδες” flow shop). Η παραγωγή είναι τότε τύπου job shop, αλλά με λανθασμένη χωροταξία και εξοπλισμό, συνεπώς ακόμα πιο δαπανηρή από ότι στο «καθαρό» σχήμα job shop.

Σε κάθε περίπτωση, ακόμα και όταν ο σχεδιασμός είναι καλός και υπάρχουν λίγα στοιχεία εξαίρεσης, η απαλοιφή τους είναι σημαντική, για να αξιοποιηθούν πλήρως οι δυνατότητες της Παραγωγής με Βιομηχανικά Κύτταρα.



Οι διαπιστώσεις αυτές οδήγησαν από πολύ νωρίς τους ερευνητές στο χώρο να μελετήσουν κατ' αρχήν την έκταση του προβλήματος. Μία από τις πρώτες έρευνες στις ΗΠΑ σε 14 παραγωγικές μονάδες έδειξε ότι μόνο 36% των βιομηχανικών κυττάρων δεν περιείχαν στοιχεία εξαίρεσης (Pullen [1976]), αργότερα δε οι Wemmerlton και Hyer [1989] έδειξαν ότι οι ιδανικές περιπτώσεις, αυτές δηλαδή που δυνητικά έχουν κάποιο τελικό σχηματισμό με τελειώς αυτόνομα κύτταρα είναι εξαιρετικά σπάνιες.

Οι μελέτες αυτές για την «έκταση του προβλήματος» στην πραγματικότητα απέδειξαν το αυτονόητο, καθώς δεν είχε γίνει εξ' αρχής κατανοητό ότι το πρόβλημα των στοιχείων εξαίρεσης είναι φύσει πρόβλημα βελτιστοποίησης και όχι θέμα «ομαλών ή μη δεδομένων» - έτσι εξηγούνται και οι συχνές αναφορές σε "παθολογικής δομής" (ill-structured) μήτρες αντιστοίχισης μηχανών – κομματιών. Αρκεί να επιλύσει κανείς με οποιαδήποτε μέθοδο το πρόβλημα αναδιάταξης γραμμών και στηλών της μήτρας αντιστοίχισης μηχανών – κομματιών με πραγματικά δεδομένα από σχετικά σύνθετες περιπτώσεις για να διαπιστώσει ότι το σύνηθες είναι η ύπαρξη στοιχείων εξαίρεσης και όχι το αντίθετο. Στην πραγματικότητα οι ιδανικές περιπτώσεις που επιδέχονται πλήρους αυτονομίας στα βιομηχανικά κύτταρα είναι οι πολύ απλές εφαρμογές (και τέτοιες υπήρχαν αρκετές στο δείγμα που μελέτησε ο Pullen, εξ ου και το αρκετά υψηλό ποσοστό του 36%).

Το συμπέρασμα από τα προαναφερθέντα είναι ότι η απαλοιφή των στοιχείων εξαίρεσης είναι επιβεβλημένη, και μάλιστα πρέπει να θεωρείται πάντα (και όχι κατά περίπτωση) μέρος του προβλήματος.

Θεωρώντας συνεπώς δεδομένη μία πρώτη λύση - κατανομή των μηχανών σε βιομηχανικά κύτταρα και των κομματιών σε οικογένειες, το πρόβλημα είναι η επιλογή μίας ή περισσοτέρων από τις παρακάτω λύσεις:

- ανάθεση της παραγωγής των κομματιών εξαίρεσης σε υπεργολάβους (part subcontracting)
- αγορά μηχανών πανομοιότυπων (machine duplication) με τις μηχανές στένωσης και ενσωμάτωσή τους στα βιομηχανικά κύτταρα ώστε να μην χρειάζονται μετακινήσεις κομματιών μεταξύ βιομηχανικών κυττάρων
- σχεδιασμός και αξιοποίηση εναλλακτικών διαδρομών για ορισμένα κομμάτια.

Για την καλύτερη παρουσίαση μερικών όψεων του προβλήματος και των ιδιομορφιών που μπορούν να παρουσιαστούν σε ένα σύστημα παραγωγής, δεν χρησιμοποιείται η κλασική μήτρα αντιστοίχισης μηχανών – κομματιών, αλλά μία τροποποιημένη στην οποία φαίνεται και η σειρά επεξεργασίας των κομματιών. Ας σημειωθεί εδώ ότι είναι αρκετά συνηθισμένο μία μηχανή στη μήτρα αντιστοίχισης μηχανών – κομματιών να αντιπροσωπεύει στην πραγματικότητα μία ομάδα πανομοιότυπων μηχανών. Η τακτική αυτή δεν ενδείκνυται γενικά, διότι υποχρεώνει όλες αυτές τις μηχανές να τοποθετούνται στο ίδιο βιομηχανικό κύτταρο, ανεξάρτητα από ποιά κομμάτια επεξεργάζεται η κάθε μία.

Στο σχήμα 6.1 παρουσιάζεται ο σχηματισμός τριών βιομηχανικών κυττάρων από οκτώ μηχανές στις οποίες υφίστανται επεξεργασία οκτώ κομμάτια. Στο σχήμα αυτό, εάν στη θέση (μηχανή  $\chi$ , κομμάτι  $\psi$ ) υπάρχει κάποιος αριθμός  $\nu$  αυτό σημαίνει ότι η  $\nu$ -οστή φάση κατεργασίας του κομματιού  $\psi$  γίνεται στη μηχανή  $\chi$ . Εάν υπάρχουν δύο αριθμοί  $\mu, \nu$ , το κομμάτι επισκέπτεται τη μηχανή δύο φορές. Αριθμοί έξω από τα κύτταρα της διαγωνίου δηλώνουν στοιχεία εξαίρεσης.

		κομμάτια							
		1	2	3	4	5	6	7	8
μηχανές	1	κύτταρο Α							
	2	1	5		1,3		3,5	2	
	3		1	2					
	4	2							
	5		2,4	1					
	6	3			1,4	4	2	2	
	7				3	2	1		
	8				2	5	4		
				κύτταρο Β					
		6						1	1,3
							κύτταρο Γ		

**Σχήμα 6.1.** Παράδειγμα τροποποιημένης μήτρας αντιστοίχισης μηχανών-κομματιών.

Στο παράδειγμα, η επεξεργασία του κομματιού 2 στη μηχανή 5 (που είναι ενδιάμεση κατεργασία) απαιτεί δύο κινήσεις εκτός του κυττάρου Α. Το ίδιο κομμάτι όμως για την επεξεργασία στη μηχανή 8 κινείται μόνο μία φορά έξω από το κύτταρο Α, γιατί η αντίστοιχη φάση κατεργασίας είναι η τελευταία. Παρομοίως, το κομμάτι 6 κινείται τρεις φορές εκτός του κυττάρου Β, για την τρίτη και την τελευταία φάση κατεργασίας του στη μηχανή 1.

Αν η εξεταζόμενη στρατηγική για τη μείωση των στοιχείων εξαίρεσης είναι η αγορά νέων μηχανών, τότε θα πρέπει να ληφθούν διάφορες αποφάσεις. Για παράδειγμα, αν ο προϋπολογισμός δαπανών επιτρέπει την αγορά μίας μόνο μηχανής τύπου 5, ένα ερώτημα που τίθεται είναι πού θα έπρεπε να τοποθετηθεί αυτή, στο κύτταρο Α (για την τρίτη φάση κατεργασίας του κομματιού 2) ή στο κύτταρο Γ (για τη δεύτερη φάση κατεργασίας του κομματιού 7). Μπορεί πάλι να προταθεί η αγορά δεύτερης μηχανής τύπου 1 και η τοποθέτησή της στο κύτταρο Β για επεξεργασία των κομματιών 5 και 6,

απαλείφοντας έτσι συνολικά έξη κινήσεις εκτός του κύτταρου B. Είναι πιθανό όμως, μία μηχανή τύπου 1 να είναι ακριβότερη από δύο ή και τρεις μηχανές τύπου 5.

Τελείως ανάλογα προβλήματα προκύπτουν και όταν εξετάζεται η ανάθεση της παραγωγής κομματιών σε υπεργολάβους ή ο ανασχεδιασμός της πορείας επεξεργασίας κομματιών.

Στην πρώτη περίπτωση τονίζεται ότι δεν θεωρείται γενικά πρακτική η ανάθεση μέρους μόνο της επεξεργασίας κάποιου κομματιού, για προφανείς λόγους δυσχέρειας στον προγραμματισμό και στη διακίνηση υλικών. Σχετικά με τις αλλαγές στις διαδρομές κομματιών, δεν περιλαμβάνονται εναλλακτικές πορείες επεξεργασίας που υπάρχουν ενδεχομένως εκ των προτέρων. Οι τελευταίες επιβάλλεται να ενσωματωθούν στα δεδομένα ήδη από το στάδιο του προσδιορισμού της αρχικής κατανομής, υπενθυμίζεται δε ότι στις περιπτώσεις αυτές τα κατάλληλα μοντέλα είναι αυτά της Γενικευμένης Τεχνολογίας Ομαδοποίησης της Παραγωγής (Generalized Group Technology). Γενικά, η ύπαρξη εναλλακτικών διαδρομών μπορεί να επηρεάσει σημαντικά την ποιότητα της επιδιωκόμενης ομαδοποίησης (Kusiak, [1987]). Οι αποφάσεις που συζητούνται εδώ αφορούν περισσότερο τον εκ των υστέρων ανασχεδιασμό κομματιών για αλλαγή της πορείας επεξεργασίας τους, που συνεπάγεται κόστος.

Η λύση του προβλήματος εξαρτάται επίσης από το αν δίνει κανείς διαφορετική βαρύτητα στα στοιχεία εξαίρεσης ή όχι. Για παράδειγμα, ενδέχεται να μην είναι δυνατή η τροφοδοσία ενός ειδικού μηχανήματος παρά μόνο με κομμάτια αποκλειστικά κινούμενα στο βιομηχανικό κύτταρο στο οποίο ανήκει το μηχάνημα. Στην περίπτωση αυτή όλα τα στοιχεία εξαίρεσης που αντιστοιχούν στο μηχάνημα αυτό έχουν προτεραιότητα στην απαλοιφή. Κατ' αναλογία, αν η επεξεργασία κάποιου κομματιού πρέπει να ολοκληρωθεί μέσα στο ίδιο κύτταρο (γιατί μεταφέρεται για παράδειγμα δύσκολα), προτεραιότητα έχουν όλα τα στοιχεία εξαίρεσης που σχετίζονται με το κομμάτι αυτό.

Διαφορετικές βαρύτητες μπορεί επίσης να έχουν τα στοιχεία εξαίρεσης σε σχέση με τα κενά των βιομηχανικών κυττάρων, πράγμα που ισοδυναμεί, όπως επισημαίνεται από τους Adil, Rajamani και Strong [1996], με το αν δίνεται προτεραιότητα στη μείωση των στοιχείων εξαίρεσης ή στη μείωση του μεγέθους των κυττάρων, αντίστοιχα.

Τελικά, τα στοιχεία που θα πρέπει να ληφθούν υπ' όψιν είναι το κόστος της παραγωγής του συνόλου των μονάδων ενός κομματιού από τρίτους, το κόστος της επένδυσης για την αγορά μίας ή περισσότερων μηχανών από τις μηχανές στένωσης και το κόστος ανασχεδιασμού κομματιών. Τα τρία αυτά στοιχεία κόστους πρέπει να σταθμιστούν διαφορετικά όσον αφορά τον παράγοντα του χρόνου. Αυτό διότι η μεν υπερβολαβία σε τρίτους αποτελεί κόστος το οποίο θα επωμιστεί η βιομηχανική επιχείρηση βραχυπρόθεσμα για μια σταθερή μικρή χρονική περίοδο, η δε αγορά πρόσθετου μηχανολογικού εξοπλισμού αποτελεί κόστος το οποίο θα επιβαρύνει την επιχείρηση μακροπρόθεσμα (κόστος απόσβεσης και συντήρησης). Ο ανασχεδιασμός κομματιών από την άλλη, επιφέρει και ένα αρχικό κόστος αλλά και ένα μεσοπρόθεσμο, για την προσαρμογή της όλης παραγωγής στις αλλαγές σε μέρη αυτής.

Τέλος, πρέπει να τονιστεί ότι οι αποφάσεις αγοράς νέου εξοπλισμού, ανάθεσης παραγωγής κομματιών σε υπερβολάβους και ανασχεδιασμού κομματιών είναι θέματα που υπάγονται στη γενικότερη στρατηγική μίας επιχείρησης και πρέπει να αντιμετωπίζονται ανάλογα. Μία επιχείρηση που έχει πρόσφατα επενδύσει σε εξοπλισμό και προβλέπει αλλαγές στα παραγόμενα κομμάτια είναι προφανές ότι πρέπει να στραφεί στην ανάθεση μέρους της παραγωγής σε τρίτους και σε μερικό ανασχεδιασμό κομματιών. Αντίθετα, αν η επιχείρηση δεν περιμένει ριζικές αλλαγές στα παραγόμενα προϊόντα αλλά αντιμετωπίζει συχνά προβλήματα με τις μηχανές στένωσης οφείλει να προβεί σε αγορά νέου εξοπλισμού.

## 6.2. Μέθοδοι απαλοιφής των στοιχείων εξαίρεσης

Το πρόβλημα απαλοιφής των στοιχείων εξαίρεσης αντιμετωπίζεται ικανοποιητικά μόνο ως ανεξάρτητο πρόβλημα και όχι ως μέρος ενός συνολικού μοντέλου σχεδιασμού βιομηχανικών κυττάρων, για τους λόγους που έχουν παρατεθεί στο Κεφάλαιο 2. Μία συνήθης πρακτική που πρέπει όμως να αποφεύγεται αποτελεί η ενσωμάτωση μίας μόνο δυνατότητας απαλοιφής στοιχείων εξαίρεσης σε ένα συνολικό μοντέλο σχεδιασμού, βλ. για παράδειγμα McAuley [1972] όπου για κάθε μηχανή στένωσης προτείνεται η αγορά πανομοιότυπης μηχανής προκειμένου να απαλειφούν τα στοιχεία εξαίρεσης ή Wei και Gaither [1990] όπου κάθε κομμάτι εξαίρεσης παράγεται από τρίτους. Οι θεωρήσεις αυτές δεν είναι προφανώς, ρεαλιστικές, για τους λόγους που παρατέθηκαν στην προηγούμενη ενότητα.

Απομονώνοντας συνεπώς το πρόβλημα της απαλοιφής στοιχείων εξαίρεσης, περιγράφεται συνοπτικά μία τυπική μέθοδος για την αντιμετώπισή του και τη λήψη αποφάσεων σχετικά με την αγορά νέων μηχανών ή/και την ανάθεση της παραγωγής κομματιών σε τρίτους. Η μέθοδος αυτή προτείνεται από τους Kern και Wei [1991] και η επέκτασή της για να λαμβάνεται υπόψη και η δυνατότητα ανασχεδιασμού κομματιών και της πορείας τους είναι προφανής. Προϋπόθεση αποτελεί η ύπαρξη μίας κατανομής μηχανών για το σχεδιασμό της οποίας έχουν ληφθεί υπόψη ενδεχομένως και διαθέσιμες εναλλακτικές διαδρομές κομματιών. Η ανάθεση σε τρίτους της παραγωγής κάποιου κομματιού αφορά το σύνολο των επεξεργασιών αυτού, η δε διακίνηση των κομματιών θεωρείται ότι γίνεται σε παρτίδες (batches), όπως συμβαίνει συνήθως στη πράξη, π.χ. σε παλέτες.

Τα βήματα της μεθόδου έχουν ως εξής:

- a. Για κάθε στοιχείο εξαίρεσης, υπολογίζεται ένας λόγος  $A = (\text{κόστος}) / (\text{κινήσεις εκτός κυττάρων που απαλείφονται})$ , αν η παραγωγή του εμπλεκόμενου κομματιού ανατεθεί εξ ολοκλήρου σε τρίτους και ένας

λόγος  $B = (\text{κόστος}) / (\text{κινήσεις εκτός κυττάρων που απαλείφονται})$ , αν αγοραστεί ο απαιτούμενος αριθμός μηχανών του απαιτούμενου τύπου.

- β. Επιλέγεται η ενέργεια που αντιστοιχεί στο μικρότερο λόγο που έχει υπολογιστεί, για όλα τα στοιχεία εξαίρεσης.
- γ. Εάν δεν υπάρχουν άλλα στοιχεία εξαίρεσης ή το διατιθέμενο κονδύλι έχει εξαντληθεί η διαδικασία σταματά, αλλιώς κατασκευάζεται η νέα μήτρα αντιστοίχισης μηχανών-κομματιών και η διαδικασία συνεχίζεται ξανά από το βήμα (α).

Στο παράδειγμα του σχήματος 6.1, μία επιλογή για την απαλοιφή του στοιχείου εξαίρεσης (μηχανή 5, κομμάτι 2) είναι η ανάθεση της παραγωγής του κομματιού 2 σε τρίτους. Με τον τρόπο αυτό απαλείφεται επίσης το στοιχείο εξαίρεσης (μηχανή 8, κομμάτι 2) ήτοι συνολικά 3 κινήσεις εκτός κυττάρων. Αν το κόστος αγοράς μίας παρτίδας κομματιών τύπου 2 είναι 750.000 δρχ., ο λόγος A και για τα δύο στοιχεία εξαίρεσης είναι  $750.000/3 = 250.000$  δρχ. ανά κίνηση εκτός κυττάρων.

Συνεχίζοντας στο ίδιο παράδειγμα με το λόγο B, η άλλη επιλογή για την απαλοιφή του στοιχείου εξαίρεσης (μηχανή 5, κομμάτι 2) είναι η αγορά πρόσθετων μηχανών τύπου 5 και η τοποθέτησή τους στο κύτταρο A. Αν:

- η ετήσια παραγωγή και το μέγεθος παρτίδας του κομματιού 2 είναι 3.000 και 100 μονάδες, αντίστοιχα
- ο χρόνος επεξεργασίας του κομματιού 2 στη μηχανή 5 είναι 1,5 ώρες
- ο χρόνος ρύθμισης κάθε μηχανής τύπου 5 για την επεξεργασία μίας παρτίδας κομματιών 2 είναι 5 ώρες, και
- η δυναμικότητα κάθε μηχανής τύπου 5 είναι 2.000 ώρες το χρόνο,

απαιτούνται  $(3.000 \times 1,5 + (3.000/100) \times 5) / 2.000$  δηλαδή 3 μηχανές και απαλείφονται 2 κινήσεις εκτός κυττάρων. Για να ολοκληρωθεί ο υπολογισμός

του λόγου B πρέπει να προστεθούν και άλλες μηχανές τύπου 5 για την επεξεργασία του κομματιού 7 στο κύτταρο Γ. Αν αντιστοίχως:

- η ετήσια παραγωγή και το μέγεθος παρτίδας του κομματιού 7 είναι 1.500 και 150 μονάδες, αντίστοιχα
- ο χρόνος επεξεργασίας του κομματιού 7 στη μηχανή 5 είναι 2 ώρες
- ο χρόνος ρύθμισης κάθε μηχανής τύπου 5 για την επεξεργασία μίας παρτίδας κομματιών 7 είναι 4 ώρες,

απαιτούνται  $(1.500 \times 2 + (1.500/150) \times 4) / 2.000$  δηλαδή 2 μηχανές και απαλείφεται άλλη μία κίνηση εκτός κυττάρων. Αν συνεπώς κάθε μηχανή τύπου 5 κοστίζει 2.400.000 δρχ., ο αριθμητής στο λόγο B είναι το συνολικό κόστος αγοράς,  $2.400.000 \times 5 = 12.000.000$  δρχ. και ο παρονομαστής το άθροισμα των κινήσεων εκτός κυττάρων που απαλείφονται σε ετήσια βάση (δηλαδή σταθμισμένες με τον αριθμό παρτίδων που παράγονται ετησίως), ήτοι  $2 \times 3.000/100 + 1 \times 1.500/150 = 70$  κινήσεις εκτός κυττάρων. Άρα ο λόγος B τόσο για το στοιχείο εξαίρεσης (μηχανή 5, κομμάτι 2) όσο και για το στοιχείο εξαίρεσης (μηχανή 5, κομμάτι 7) είναι  $12.000.000/70=170.000$  δρχ. ανά κίνηση εκτός κυττάρων.

Επικρατέστερη συνεπώς επιλογή είναι μέχρι στιγμής η αγορά 5 πρόσθετων μηχανών τύπου 5 και η εγκατάστασή τους στα κύτταρα Α και Γ. Απομένει βέβαια ο υπολογισμός των δύο λόγων σε όλα τα στοιχεία εξαίρεσης και η συνέχεια όπως στο βήμα (γ) της μεθόδου.

Η περιγραφείσα μέθοδος, αν εφαρμοστεί σε μία πρώτη λύση στο πρόβλημα, όπου έχουν ήδη κατανεμηθεί οι υπάρχουσες μηχανές σε βιομηχανικά κύτταρα, με κριτήριο την ελαχιστοποίηση της κίνησης κομματιών εκτός των κυττάρων τους (όπως οι λύσεις που δίνουν οι αλγόριθμοι των Κεφαλαίων 4 και 5) μπορεί να δώσει μια πολύ καλή λύση ομαδοποίησης της παραγωγής.



Μία παρόμοια μεθοδολογία περιγράφεται από τον Seiffoddini [1989], με μόνη επιλογή όμως την αγορά επί πλέον μηχανών. Εδώ σε κάθε επανάληψη της διαδικασίας:

- εντοπίζεται η μηχανή στένωσης στην οποία αντιστοιχούν οι περισσότερες κινήσεις κομματιών εκτός κυττάρων (κρίσιμη μηχανή στένωσης)
- βρίσκεται το κύτταρο στο οποίο υπάρχουν τα περισσότερα στοιχεία εξαίρεσης για αυτή τη μηχανή (υποψήφιο κύτταρο), και
- υπολογίζεται ο απαιτούμενος αριθμός νέων μηχανών.

Αν το κόστος αγοράς των νέων μηχανών είναι μικρότερο από το κόστος που αποφεύγεται, δηλαδή το κόστος διαχείρισης υλικών που αναλογεί στις κινήσεις κομματιών εξαίρεσης στην υπάρχουσα κρίσιμη μηχανή στένωσης, λαμβάνεται απόφαση αγοράς και η διαδικασία συνεχίζεται όπως και με την προηγούμενη μέθοδο. Εννοείται ότι δεν τίθεται θέμα απόφασης για τις πανομοιότυπες με τη μηχανή στένωσης μηχανές που υπάρχουν ήδη και μετά τον αρχικό σχεδιασμό πλεονάζουν σε κάποιο κύτταρο άλλο από το υποψήφιο. Το κόστος διαχείρισης υλικών λόγω κυκλοφορίας κομματιών μεταξύ κυττάρων υπολογίζεται με οποιοδήποτε πακέτο σχεδιασμού της χωροταξίας της παραγωγής (plant layout). Οι συγγραφείς χρησιμοποίησαν το CRAFT στη συγκεκριμένη εργασία.

Η δεύτερη αυτή μεθοδολογία είναι βεβαίως κάπως «μυωπική» καθώς δεν επιτρέπει παρά μόνο άμεσα αποσβέσιμες αγορές, μπορεί όμως εύκολα να τροποποιηθεί για να απαλείφονται περισσότερα ή και όλα τα στοιχεία εξαίρεσης, θέτοντας όριο στο κόστος που δεν αντισταθμίζεται από το όφελος μειωμένων απαιτήσεων διαχείρισης υλικών, δηλαδή στην ουσία το επιθυμητό ύψος επένδυσης.

Οι δύο αυτές μέθοδοι είναι τυπικές και περιγράφουν την πλέον συνηθισμένη προσέγγιση του θέματος. Υπάρχουν βέβαια πολλές παραλλαγές αυτών,

δεδομένης της ποικιλίας των παραμέτρων που μπορεί κανείς να επιλέξει, αλλά η κεντρική ιδέα παραμένει πάντοτε η ίδια.

Πρέπει να αναφερθεί, για λόγους πληρότητας η μέθοδος διάσπασης γράφου των Vannelli και Hall [1993] η οποία ενδιαφέρει ως προς τον τρόπο υπολογισμού των προτεραιοτήτων επειδή λαμβάνει υπόψη αρκετά από τα σχετικά τεχνικο-οικονομικά δεδομένα (κόστος ανάθεσης σε τρίτους μέρους της παραγωγής για περιορισμένο χρονικό ορίζοντα, κόστος αγοράς μηχανών και συντήρησής τους για μεγαλύτερο χρονικό ορίζοντα). Αν αγνοήσει συνεπώς κανείς το αλγοριθμικό σκέλος, μπορεί να προσδιορίσει εναλλακτικά τις προτεραιότητες στην απαλοιφή στοιχείων εξαίρεσης με βάση τις «αποστάσεις» μεταξύ μηχανών ή κομματιών που προτείνει η μέθοδος αυτή (για παράδειγμα θεωρώντας ως «βάρος» μίας μηχανής το άθροισμα των βαρών των κλάδων που συνδέονται με τη μηχανή αυτή στον αντίστοιχο γράφο). Βελτιώσεις επί του τρόπου υπολογισμού των αποστάσεων αυτών προτάθηκαν πρόσφατα από τον Hadley [1996].

Ανάλογα ισχύουν και για την πρόσφατα δημοσιευθείσα μέθοδο του Boctor [1996], στην οποία λαμβάνονται υπ' όψη το κόστος αγοράς μηχανών και το πρόσθετο κόστος χειρισμού υλικών που προκύπτει από την κυκλοφορία κομματιών εκτός βιομηχανικών κυττάρων, όχι όμως και το κόστος υπεργολαβίας. Το ενδιαφέρον εδώ έγκειται στο ότι οι παράμετροι του προτεινόμενου μοντέλου περιλαμβάνουν στοιχεία όπως τα κόστη λειτουργίας και απόσβεσης των μηχανών, οι παραγωγικές δυναμικότητές τους, οι χρόνοι επεξεργασίας, η ζήτηση των παραγομένων κομματιών κ.α.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

#### **7.1. Συμπεράσματα**

Το πρόβλημα που αντιμετωπίζει η παρούσα διατριβή είναι αυτό του σχεδιασμού βιομηχανικών κυττάρων, δηλαδή η ομαδοποίηση μηχανών και κομματιών σε αυτόνομα (μεταξύ τους ανεξάρτητα) κύτταρα. Η βιβλιογραφική ανασκόπηση δείχνει ότι το πρόβλημα είναι μεν σαφές, η μαθηματική του όμως διατύπωση ποικίλλει και σίγουρα δεν είναι μονοσήμαντη. Τούτο οφείλεται στην πολυπαραμετρικότητα του προβλήματος από τη μία και στη μάλλον «μη σωστή» χρήση των μεθόδων βελτιστοποίησης από την άλλη. Συχνότερα το πρόβλημα προσαρμόζεται στη μαθηματική διατύπωση παρά το αντίθετο. Για παράδειγμα, το πρόβλημα συχνά υπεραπλουστεύεται. Ακόμα συχνότερα, προκειμένου να προσομοιαστούν πραγματικές βιομηχανικές καταστάσεις, είτε μελετώνται πολύ «ειδικές» όψεις του προβλήματος, είτε κατασκευάζονται εξαιρετικά πολύπλοκοι αλγόριθμοι και τεχνικές επίλυσης. Είναι χαρακτηριστικό ίσως ότι, οι μεν ακριβείς μεθοδολογίες επίλυσης αντιμετωπίζουν «μικρά» μόνο προβλήματα της πράξης που περιορίζονται σε 15-16 μηχανές και λίγα κομμάτια, οι δε προσεγγιστικές μεθοδολογίες που μπορούν να δώσουν λύσεις σε προβλήματα «μεγαλυτέρων» διαστάσεων μπορούν να αξιολογηθούν μόνο εμπειρικά με τη χρήση δεικτών. Ειδικά ο περιορισμός στον αριθμό των κομματιών απορρέει από την εμμονή στη χρήση της κλασικής μήτρας αντιστοίχισης μηχανών – κομματιών και είναι ασύμβατος με τις απαιτήσεις τις

οποιές εξ ορισμού καλύπτει η παραγωγή που βασίζεται στα βιομηχανικά κύτταρα.

Οι παραπάνω πτυχές του προβλήματος του σχεδιασμού βιομηχανικών κυττάρων τεκμηριώνονται με λεπτομέρεια στο Κεφάλαιο 2. Συνοπτικά, η παρούσα διατριβή:

- περιγράφει μία ολοκληρωμένη σταδιακή προσέγγιση του σχεδιασμού βιομηχανικών κυττάρων, που αποτελεί συγχρόνως πρόταση τυποποίησης
- συμπληρώνει την υπάρχουσα βιβλιογραφία προτείνοντας ένα ενοποιημένο θεωρητικό υπόβαθρο μορφοποιήσεων Μαθηματικού Προγραμματισμού για το μοντέλο – πυρήνα
- ειδικότερα συμπληρώνει με νεότερα αποτελέσματα τη βιβλιογραφία στις σύγχρονες μεθόδους ιδιοτιμών και τις βελτιώνει ώστε να είναι δυνατή η ακριβής επίλυση του προβλήματος
- παρουσιάζει έναν πρωτότυπο αλγόριθμο δενδροειδούς αναζήτησης που επιλύει το πρόβλημα ακριβώς
- παρουσιάζει έναν πρωτότυπο αλγόριθμο βασισμένο στη μεθοδολογία Tabu Search για την προσεγγιστική επίλυση του προβλήματος.

Η **σταδιακή προσέγγιση** που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 3 είναι πλήρης, αυτοματοποιήσιμη και προσαρμοσμένη στις απαιτήσεις πραγματικών βιομηχανικών καταστάσεων. Το κυρίως μοντέλο φέρει το βάρος της υπολογιστικής πολυπλοκότητας και είναι αυτό που στη βιβλιογραφία θεωρείται ότι ισορροπεί μεταξύ των δύο συνηθέστερων τάσεων: της εισαγωγής πολλών παραμέτρων με υπεραπλούστευση της μορφοποίησης και της υποκειμενικής εστίασης σε μία μόνο όψη του προβλήματος. Η μορφοποίηση αυτή 0-1 Ακεραίου Προγραμματισμού βασίζεται σε «αποστάσεις» μεταξύ μηχανών,

αποτυπώνει ικανοποιητικά τις αλληλεξαρτήσεις στην ομαδοποίησή τους και περιλαμβάνει τις δύο ίσως σημαντικότερες παραμέτρους του σχεδιασμού, δηλαδή το μέγιστο μέγεθος κυττάρου και τη σειρά επεξεργασίας των κομματιών στις μηχανές.

Το πρωτεύον αυτό μοντέλο συμπληρώνεται και ως προς τις εισόδους και ως προς τις εξόδους του. Ως προς τις εισόδους, προηγείται μία πρώτη ομαδοποίηση κομματιών με κριτήρια ομοιότητας, για λόγους πρώτης κωδικοποίησης και για να διασφαλιστεί η ομοιογένεια των οικογενειών κομματιών που προκύπτουν από τη λύση του πρωτεύοντος μοντέλου. Από την πλευρά των εξόδων, εφαρμόζονται στη λύση απλές μέθοδοι για την απαλοιφή των στοιχείων εξαίρεσης με τις βασικές εναλλακτικές (μη αλληλο-αποκλειόμενες) λύσεις της αγοράς πρόσθετου εξοπλισμού, της υπεργολαβικής ανάθεσης και του ανασχεδιασμού πλάνων επεξεργασίας. Η τυπική μεθοδολογία για το τελευταίο στάδιο περιγράφεται στο Κεφάλαιο 6 μαζί με μερικές πρακτικές απόψεις που πρέπει πάντα να λαμβάνονται υπόψη στο σχεδιασμό.

Στο **ενιαίο πλαίσιο διατυπώσεων Μαθηματικού Προγραμματισμού** που περιγράφεται επίσης στο Κεφάλαιο 3 εντοπίζονται για το πρωτεύον μοντέλο οι σχέσεις μεταξύ μορφοποιήσεων 0-1 Ακεραίου Προγραμματισμού (συμπ. Προβλήματος Διαμερισμού Συνόλου), 0-1 Τετραγωνικού Προγραμματισμού, Βέλτιστης Προσέγγισης Μητρώου και Ολικής Βελτιστοποίησης. Με τη διερεύνηση των σχέσεων αυτών και τη δοκιμή των αντιστοιχών τεχνικών επίλυσης αποκαλύπτονται μερικά δομικά χαρακτηριστικά του προβλήματος και δημιουργείται ένα θεωρητικό υπόβαθρο για εμβάθυνση. Με εξαίρεση την αρχική μορφοποίηση 0-1 Ακεραίου Προγραμματισμού, οι μορφοποιήσεις είναι είτε νέες είτε μεταφερμένες από το χώρο του καλύτερα μελετημένου Προβλήματος Διαμερισμού Γράφου (ΠΔΓ). Η διαπίστωση ότι το πρωτεύον μοντέλο του σχεδιασμού βιομηχανικών κυττάρων μπορεί πρακτικά να αντιμετωπιστεί με τη λύση μικρού αριθμού υποπροβλημάτων ΠΔΓ είναι κεντρικής σημασίας.

Από τις μορφοποιήσεις αυτές θεωρούνται επικρατέστερες αυτές που βασίζονται ισοδύναμα στα προβλήματα Τετραγωνικού Προβλήματος Αντιστοίχισης (ΤΠΑ), Τετραγωνικού Προβλήματος Μεταφοράς (ΤΠΜ) και Βέλτιστης Προσέγγισης Μητρώου και σε αυτές δίνεται βάρος στη συνέχεια. Ειδικά η μελέτη των δύο τελευταίων μορφοποιήσεων οδηγεί στις σύγχρονες μεθόδους ιδιοτιμών. Να σημειωθεί ότι στην ίδια περιοχή (από διαφορετικό όμως σημείο εκκίνησης) έχει κινηθεί και η θεωρούμενη πιο αξιόπιστη ομάδα αλγορίθμων στην υπάρχουσα βιβλιογραφία, που βασίζεται όμως σε παλαιότερα αποτελέσματα και επιτρέπει μόνο την προσεγγιστική επίλυση του προβλήματος.

Ο **ακριβής αλγόριθμος δενδροειδούς αναζήτησης** που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 4 επιλύει προβλήματα 25 μηχανών (σύννηθες μέγεθος μεσαιού προβλήματος της πράξης) σε έναν τυπικό μικροϋπολογιστή σε ικανοποιητικούς χρόνους, μία σημαντική βελτίωση σε σχέση με τις διαστάσεις που συναντά κανείς στη βιβλιογραφία. Ο αλγόριθμος βασίζεται στη διάσπαση του προβλήματος σε υποπροβλήματα ΠΔΓ και μία μικτή αντιμετώπιση ΤΠΑ/ ΤΠΜ αναλόγως του ερευνούμενου σημείου, που αποτελεί πρωτοτυπία. Στο σκέλος ΤΠΑ χρησιμοποιείται το κλασικό φράγμα των Gilmore – Lawler.

Το σκέλος ΤΠΜ είναι αυτό που ουσιαστικά επιταχύνει την αναζήτηση, σε συνδυασμό με τεχνικές για την αποφυγή χρονοβόρων υπολογισμών ιδιοτιμών, την εκμετάλλευση συμμετριών του προβλήματος και έναν απλό αλλά αρκετά αποτελεσματικό ευρετικό αλγόριθμο για το πρωτεύον μοντέλο. Το κυρίως αποτέλεσμα που χρησιμοποιείται είναι το πρόσφατο φράγμα των Rendl-Wolkowicz για το ΠΔΓ.

Ο **αλγόριθμος Tabu Search** που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 5 έδωσε πολύ καλά αποτελέσματα σε αμελητέους χρόνους. Επί συνόλου 265 προβλημάτων διάστασης 16 έως 50 (συμπεριλαμβανομένων δεδομένων από μαθηματικά «συγγενή» χώρο) και χωρίς κατάχρηση επαναλήψεων, μόνο σε μία περίπτωση

δεν έδωσε τη βέλτιστη (ή καλύτερη γνωστή) λύση, σε μερικές δε περιπτώσεις βελτίωσε την καλύτερη γνωστή λύση. Η απόδοση αυτή επιτεύχθηκε επειδή η μεθοδολογία εξ' αρχής θεωρήθηκε ανοικτή πλατφόρμα ανάπτυξης και όχι σύνολο κανόνων που απλώς προσαρμόζονται στο πρόβλημα.

Πέρα από τις δομές βραχυπρόθεσμης και μακροπρόθεσμης μνήμης και τα κριτήρια άρσης απαγόρευσης που είναι κατάλληλα προσαρμοσμένα στο πρόβλημα, η στρατηγική της αναζήτησης εκφράζεται με κανονικές και προγραμματισμένες επαναλήψεις όπου οι τελευταίες βασίζονται κυρίως στις μακροπρόθεσμες μνήμες και έχουν το χαρακτήρα της αλλαγής πορείας όταν η αναζήτηση έχει εξαντλήσει τις περιοχές που έχει επισκεφτεί. Η διαδοχή στις προγραμματισμένες επαναλήψεις είναι: διαταραχή/οδήγηση σε νέες ανεξερεύνητες περιοχές – σταθεροποίηση – εισαγωγή καλών χαρακτηριστικών για σωστή εστίαση στις νέες περιοχές.

Με τον τρόπο αυτό εξυπηρετούνται οι βασικοί στόχοι των στρατηγικών της διαφοροποίησης και της εντατικοποίησης. Ειδικά στην επίτευξη διαφοροποίησης δίνεται κάπως μεγαλύτερο βάρος. Ο λόγος γι' αυτό είναι ότι η μεγαλύτερη δυσκολία δεν είναι τόσο η σωστή εξερεύνηση μίας περιοχής, όσο το να διασφαλιστεί ότι δεν παραμένουν ολόκληρες περιοχές ανεξερεύνητες επειδή είναι δομικά διαφορετικές σε σχέση με το ιστορικό της αναζήτησης. Ο στόχος αυτός ενισχύεται μέσω χαρακτηριστικών τακτικής: την ταλάντωση μεταξύ χώρου εφικτότητας - χώρου μη εφικτότητας και τη χρήση κινήσεων επιρροής στα κριτήρια άρσης απαγόρευσης.

Στο στάδιο της ανάπτυξης του αλγορίθμου ο βαθμός διαφοροποίησης συσχετίστηκε επίσης στατιστικά με τις διάφορες παραμέτρους αλλά και τη χρήση ή μη τακτικών επιλογών. Αυτό αποτελεί επίσης καινοτομία που έλυσε το πρόβλημα της ρύθμισης των τιμών των παραμέτρων.

Το τελικό αποτέλεσμα ήταν ότι ουσιαστικά δεν βρέθηκε η διάσταση - σημείο καμψής της απόδοσης του αλγορίθμου και δεν χρειάστηκε να εφαρμοστεί το

φυσιολογικό επόμενο βήμα που είναι η μετατροπή ορισμένων παραμέτρων από στατικές σε δυναμικές. Οι ενδείξεις είναι ότι η άγνωστη αυτή διάσταση υπερβαίνει τις διαστάσεις των μεγαλύτερων περιπτώσεων στο σχεδιασμό βιομηχανικών κυττάρων.

## **7.2. Προτάσεις για μελλοντική έρευνα**

Οι προτάσεις για μελλοντική έρευνα πρέπει να διαχωριστούν:

- σε προτάσεις για περαιτέρω μελέτη του όλου προβλήματος σχεδιασμού βιομηχανικών κυττάρων και
- σε προτάσεις εστιασμένες στη βελτίωση της μεθόδου ακριβούς επίλυσης του πρωτεύοντος μοντέλου.

Ο λόγος είναι ότι οι τελευταίες αφορούν σε βελτιώσεις του ακριβούς αλγορίθμου που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 4 και προϋποθέτουν την πλήρη ενασχόληση του ερευνητή με τη θεωρητική μελέτη των φραγμάτων ΤΠΑ και ΤΠΜ.

### 7.2.1. Προτάσεις για περαιτέρω μελέτη του Προβλήματος Σχεδιασμού Βιομηχανικών Κυττάρων

Σε σχέση με την **ακριβή επίλυση** του προβλήματος, στην ενότητα 3.3.2 αναφέρθηκε η πολυεδρική προσέγγιση σε προβλήματα τύπου ΠΔΓ που δεν μελετήθηκε στα πλαίσια της παρούσας διατριβής, στη δε ενότητα 3.4 η προσπάθεια που έχει ξεκινήσει ο M. Sorensen για την ενσωμάτωση μεθόδων παραγωγής στηλών στην προσέγγιση αυτή. Οι αλγόριθμοι αυτοί εξαρτώνται αρκετά από την ποιότητα ευρετικών λύσεων, συνεπώς ο συνδυασμός τους με τον αλγόριθμο Tabu Search αξίζει να δοκιμαστεί. Άλλη περιοχή που μπορεί να μελετηθεί στα πλαίσια μελέτης του όλου προβλήματος σχεδιασμού



βιομηχανικών κυττάρων είναι η προσέγγιση Ολικής Βελτιστοποίησης που περιγράφηκε στην ενότητα 3.6.

Το μοντέλο - πυρήνας της προτεινόμενης σταδιακής προσέγγισης δεν καλύπτει τις περιπτώσεις όπου υπάρχουν εκ των προτέρων εναλλακτικά πλάνα επεξεργασίας και οδηγούν στην περιοχή **της Γενικευμένης Τεχνολογίας Ομαδοποίησης της Παραγωγής**. Η προσαρμογή του αλγορίθμου Tabu Search για την επίλυση και αυτών των προβλημάτων, η ενσωμάτωση και αυτών των περιπτώσεων στην προτεινόμενη μεθοδολογία και η πλήρης αυτοματοποίηση της επεκτεταμένης προσέγγισης είναι προφανώς θέματα που ενδιαφέρουν.

Περαιτέρω έρευνας επιδέχονται επίσης τα θέματα που περιγράφονται στο Κεφάλαιο 6 σε σχέση με την **απαλοιφή των στοιχείων εξαιρέσης**. Το ζητούμενο στα πλαίσια της παρούσας διατριβής ήταν μόνο η παράθεση όψεων και μεθόδων επίλυσης, για να περιγραφεί σωστά το τελευταίο στάδιο του σχεδιασμού βιομηχανικών κυττάρων. Δεν προτείνεται πάντως η προσπάθεια εμπλουτισμού των αλγορίθμων για το πρωτεύον μοντέλο με περισσότερες παραμέτρους, καθώς αυτό θα αποτελούσε επιστροφή σε πρακτικές που αποδείχτηκαν λανθασμένες.

#### 7.2.2. Προτάσεις για τη βελτίωση του ακριβούς αλγορίθμου

Στον ακριβή αλγόριθμο που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 4, αντικείμενο περαιτέρω έρευνας είναι η προσπάθεια αντικατάστασης **του φράγματος Gilmore-Lawler** από κάποια εξέλιξή του, από τις αρκετές που αναφέρει η βιβλιογραφία στην έρευνα για την επίλυση του ΤΠΑ, βλ. για παράδειγμα Assad και Xu [1985] και Carraresi και Malucelli [1992]. Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας δεν κατέστη δυνατό να αντισταθμιστεί το υψηλό υπολογιστικό κόστος των μεθόδων αυτών. Τέτοιες όμως βελτιώσεις μπορούν πιθανόν, αν υλοποιηθούν κάπως εναλλακτικά (για παράδειγμα με «χαλάρωση της χαλάρωσης») να οδηγήσουν στην επίλυση προβλημάτων ακόμα μεγαλύτερης

διάστασης σε λογικούς χρόνους. Το φράγμα Gilmore-Lawler δεν είναι συνήθως αρκετά «σφικτό» και η βελτίωσή του μπορεί να έχει δραματικές επιπτώσεις στην ποιότητά του. Το κυρίως πρόβλημα βέβαια είναι στην εξισορρόπηση ποιότητας φράγματος και απαιτούμενου χρόνου.

Άλλη πιθανή περιοχή βελτίωσης είναι στο σκέλος ΤΠΜ, δηλαδή στο **φράγμα Rendl-Wolkowicz**, και ειδικά στην εφαρμογή του στις μη καθарές περιπτώσεις, όπου υπάρχει και γραμμικός όρος. Σε αντίθεση με τα αντίστοιχα επιδιωκόμενα στην έρευνα στο ΤΠΑ όπου για παράδειγμα για τη βελτίωση του φράγματος Gilmore-Lawler επιχειρούνται μετασχηματισμοί για τη μείωση της επίδρασης του τετραγωνικού όρου, εδώ ο στόχος είναι η μείωση της επίδρασης του γραμμικού όρου. Άλλος πιθανός τρόπος προσέγγισης είναι η αναθεώρηση της πορείας που οδηγεί στο αποτέλεσμα αυτό, με μελέτη στην περιοχή Ανάλυσης Μητρώων και τον εντοπισμό καλύτερου σημείου εκκίνησης από την ανισότητα Hoffman-Wielandt.

Και για τα δύο προβλήματα πάντως αξίζει να σημειωθεί ότι οι δρόμοι που σήμερα φαίνεται ότι έχουν τις περισσότερες πιθανότητες να οδηγήσουν σε καλύτερα φράγματα είναι ο Ημιορισμένος Προγραμματισμός και οι μέθοδοι Ολικής Βελτιστοποίησης, και τα δύο ταχέως αναπτυσσόμενα πεδία. Ενδεικτικό είναι ότι οι ίδιοι οι μελετητές του φράγματος Rendl-Wolkowicz έχουν ήδη στραφεί στον Ημιορισμένο Προγραμματισμό.

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

Adams, W.P., and Sherali, H.D. (1986), "A tight linearization and an algorithm for zero-one quadratic problems", *Management Science* 32(10), 1274-1290.

Adil, G.K., Rajamani, D., and Strong, D. (1993), "AAA – an assignment allocation algorithm for cell formation", Univ. Manitoba, Canada, working paper.

Adil, G.K., Rajamani, D. and Strong, D. (1996), «Cell formation considering alternate routeings», *International Journal of Production Research* 34 (5), 1361-1380.

Assad, A.A., and Xu, W. (1985), "On lower bounds for a class of quadratic 0,1 programs", *Operations Research Letters* 4(4), 175-180.

Barnes, E.R. (1982), "An algorithm for partitioning the nodes of a graph", *SIAM J. Alg. Discr. Math.* 3(4), 541-550.

Bazaraa, M.S., Jarvis, J.J., and Sherali, H.D. (1990), *Linear Programming and Network Flows*, John Wiley & Sons, New York.

Boctor, F.F. (1991), "A linear formulation of the machine-part cell formation problem", *International Journal of Production Research* 29(2), 343-356.

Boctor, F.F. (1996), "The minimum-cost, machine-part cell formation problem", *International Journal of Production Research* 34(4), 1045-1063.

Brunetta, Rinaldi and Sassano (1994), "The node capacitated graph partitioning problem: Formulations and valid inequalities", IASI, Rome.

Burbidge, J.L. (1963), "Production Flow Analysis", *Production Engineer* 42(12), 742-752.

Burbidge, J.L. (1975), *The Introduction of Group Technology*, John Wiley & Sons, New York.

Burbidge, J.L. (1993), "Comments on clustering methods for finding GT groups and families", *Journal of Manufacturing Systems* 12(5), 428-429.

Carraresi, P., and Malucelli, F. (1992), "A new lower bound for the quadratic assignment problem", *Operations Research* 40, Supp. No. 1, S22-S27.

Chan, H.M., and Milner, D.A. (1982), "Direct clustering algorithm for group formation in cellular manufacturing", *Journal of Manufacturing Systems* 1(1), 65-74.

Chandrasekharan, M.P., and Rajagopalan, R. (1986), "MODROC: an extension of rank order clustering for group technology", *International Journal of Production Research* 24, 1221-1233.

Cheng, C.H. (1992), "Algorithms for grouping machine groups in group technology", *OMEGA International Journal of Management Science* 20(4), 493-501.

Cheng, C.H., Goh, C.-H., and Lee, A. (1996), "Solving the generalized machine assignment problem in group technology", *Journal of the Operational Research Society* 47, 794-802.

Chu, C.-H. (1993), "Manufacturing cell formation by competitive learning", *International Journal of Production Research* 31(4), 829-843.

Cohen, D. (1978), *Basic Techniques of Combinatorial Theory*, John Wiley & Sons.

Chow, W.S. (1992), "Efficient clustering and knowledge based approach for solving cellular manufacturing problems", Univ. Manitoba, Canada, Ph.D. dissertation.

Donath, W.E, and Hoffman, A.J. (1973), "Lower bounds for the partitioning of graphs", *IBM Journal of Research and Development* 17, 420-425.

Falkner, J., Rendl, F., and Wolkowicz, H. (1994), "A computational study of graph partitioning", *Mathematical Programming* 66, 211-239.

Fiduccia, C., and Mattheyses, R. (1982), "A linear-time heuristic for improving network partitions", Technical Report 82CRD130, General Electric Co., Schenectady, NY.

Finke, G., Burkard, R.E., and Rendl, F. (1987), "Quadratic assignment problems", *Annals of Discrete Mathematics* 31, 61-82.

Fisher, M.L. (1981), "The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems", *Management Science* 27(1), 1-18.

Garey, M.R., and Johnson, D.S. (1979), *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, New York.

Gilmore, P.C. (1962), "Optimal and suboptimal algorithms for the quadratic assignment problem", *SIAM Journal on Applied Mathematics* 10(2), 305-313.

Glover, F. (1990). Tabu Search: A tutorial. *Interfaces* 20(4), 74-94.

Glover, F., and Laguna, M. (1995). Tabu Search. In: Reeves, C.R. (ed) *Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems*, McGraw-Hill, London.

Glover, F., and Laguna, M. (1997), *Tabu Search*, Kluwer, Boston.

Gondran, M., and Minoux, M. (1986), *Graphs and Algorithms*, John Wiley & Sons.

Gould, R. (1988), *Graph Theory*, Benjamin/ Cummings, California.

Grötschel, M., and Wakabayashi, Y. (1989), "A cutting plane algorithm for a clustering problem", *Mathematical Programming* 45, 59-96.

Gunasingh, R.K., and Lashkari, R.S. (1989), "Machine grouping problem in cellular manufacturing systems – An integer programming approach", *International Journal of Production Research* 27(9), 1465-1473.

Hadley, S.W. (1996), "Finding part-machine families using graph partitioning techniques", *International Journal of Production Research* 34(7), 1821-1839.

Hadley, S.W., Rendl, F., and Wolkowicz, H. (1992), "A new lower bound via projection for the quadratic assignment problem", *Mathematics of Operations Research* 17(3), 727-739.

Hansen, P., and Jaumard, B. (1997), "Cluster analysis and mathematical programming", *Mathematical Programming* 79(1-3), 191-215.

Harhalakis, G., Nagi, R., and Proth, J.M. (1990), "An efficient heuristic in manufacturing cell formation for group technology applications", *International Journal of Production Research* 28, 185-198.

Harhalakis, G., Proth, J.M., and Xie, X.L. (1990), "Manufacturing cell design using simulated annealing: an industrial application", *Journal of Intelligent Manufacturing* 1(3), 185-191.

Holm, S., and Sorensen, M. (1993), "The optimal graph partitioning problem. Solution method based on reducing symmetric nature and combinatorial cuts", *Operations Research Spektrum* 15, 1-8.

Horst, R., and Tuy, H. (1996), *Global Optimization - Deterministic Approaches*, Springer-Verlag, Berlin.

Hyer, N.L. (1984), "The potential of group technology for U.S. manufacturing", *Journal of Operations Management* 4(3), 183-202.

Hyer, N.L., and Wemmerlov, U. (1984), "Group technology and productivity", *Harvard Business Review* 62(4), 140-149.

Hyer, N.L., and Wemmerlov, U. (1985), "Group technology oriented coding systems: structures, applications and implementation", *Production and Inventory Management* 26, 55-78.

Johnson et al. (1989), "Optimization by simulated annealing: An experimental evaluation. I: Graph partitioning", *Operations Research* 87, 865-892.

Johnson, E.L., Mehrotra, A., and Nemhauser, G.L. (1993), "Min-cut clustering", *Mathematical Programming* 62, 133-151.

Kandiller, L. (1994), "A comparative study of cell formation in cellular manufacturing systems", *International Journal of Production Research* 32(10), 2395-2429.

Kern, G.M. and Wei, J.C. (1991), "The cost of eliminating exceptional elements in group technology cell formation", *International Journal of Production Research* 29(8), 1535-1547.

Kernighan, B.,W., and Lin, S. (1970), "An efficient heuristic procedure for partitioning graphs", *Bell Systems Technical Journal* 49(2), 291-307.

King, J.R. (1980), "Machine-component grouping in production flow analysis: An approach using a rank order clustering algorithm", *International Journal of Production Research* 18(2), 213-232.

King, J.R., and Nakornchai, V. (1982), "Machine-component group formation in group technology: review and extension", *International Journal of Production Research* 20, 117-133.

Kruk, S.G., and Wolkowicz, H. (1997), "SQ<sup>2</sup>P, sequential quadratic constrained quadratic programming", Research Report CORR 97-01, Dept. of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Ontario.

Kumar, K.R., Kusiak, A., and Vannelli, A. (1986), "Grouping of parts and components in flexible manufacturing systems", *European Journal of Operational Research* 24, 387-397.

Kusiak, A. (1985), "The part families problem in flexible manufacturing systems", *Annals of Operations Research* 3, 279-300.

Kusiak, A. (1987), "The generalized group technology concept", *International Journal of Production Research* 25(4), 561-569.

Kusiak, A. (1990), *Intelligent Manufacturing Systems*, Prentice-Hall, New Jersey.



Kusiak, A., and Chow, W.S. (1987), "An algorithm for cluster identification", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-17(4), 696-699.

Kusiak, A., Vannelli, A., and Kumar, K.R. (1986), "Clustering analysis: Models and algorithms", *Control and Cybernetics* 15(2), 139-154.

Lee, H., and Garcia-Diaz, A. (1993), "A network flow approach to solve clustering problems in group technology", *International Journal of Production Research* 31(3), 603-612.

Lozano, S., Guerrero, F., Eguia, I., and Onieva, L. (1999), "Cell design and loading in the presence of alternative routing", *International Journal of Production Research* (to appear).

Lozano, S., Adenso-Diaz, B., Eguia, I., and Onieva, L. (1999). "A one-step tabu search algorithm for manufacturing cell design". *Journal of the Operational Research Society* 50, 509-516.

McAuley, J. (1972), «Machine grouping for efficient production», *The Production Engineer* 51(2), 53-57.

McCormick, W.T., Schweitzer, P.J., and White T.W. (1972), "Problem decomposition and data reorganization by a clustering technique", *Operations Research* 20(5), 993-1009.

Mohar, B. (1991), *The Laplacian Spectrum of Graphs*, J. Wiley, New York.

Moon, Y.B. (1990), "Forming part families for cellular manufacturing: a neural network approach", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 5, 278-291.

Overton, M.L., and Womersley, R.S. (1992), "On the sum of the largest eigenvalues of a symmetric matrix", *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 13(1), 41-45.

Papadimitriou, C.H., and Steiglitz, K. (1982), *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*, Prentice-Hall, New Jersey.

Pardalos, P.M., Rendl, F., and Wolkowicz, H. (1994), "The quadratic assignment problem: A survey and recent developments", in: Pardalos, P.M., and Wolkowicz, H. (eds.), *Quadratic Assignment and Related Problems*, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 16, 1-42.

Pothen, A. (1994), "An analysis of spectral graph partitioning via quadratic assignment problems", in: Keyes, D.E., and Xu, J. (eds.), *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*, AMS, Contemporary Mathematics Vol. 180, 105-110.

Pullen, R.D. (1976), «A survey of cellular manufacturing cells», *The Production Engineer* 56, 451-454.

Rajamani, S.N., and Aneja, Y.P. (1990), "Integrated design of cellular manufacturing systems in the presence of alternative process plans", *International Journal of Production Research* 28(8), 1541-1554.

Ranson, G.M. (1972), *Group Technology: A Foundation for Better Total Company Operation*, McGraw-Hill, London.

Rendl, F., and Wolkowicz, H. (1995), "A projection technique for partitioning the nodes of a graph", *Annals of Operations Research* 58, 155-179.

Schramm, H., and Zowe, J. (1992), "A version of the bundle idea for minimizing a nonsmooth function: Conceptual idea, convergence analysis, numerical results", *SIAM Journal of Optimization* 2(1), 121-152.

Seifoddini, H. (1989), "Duplication process in machine cells formation in group technology", *IIE Transactions* 21(4), 382-388.

Shafer, S.M., and Rogers, D.F. (1993a), "Similarity and distance measures for cellular manufacturing. Part I. A survey", *International Journal of Production Research* 31(5), 1133-1142.

Shafer, S.M., and Rogers, D.F. (1993b), "Similarity and distance measures for cellular manufacturing. Part II. An extension and comparison", *International Journal of Production Research* 31(6), 1315-1326.

Singh, N., and Rajamani, D. (1996), *Cellular Manufacturing Systems. Design, Planning and Control*, Chapman & Hall, London.

Skorin-Kapov, J., and Vakharia, A. (1993). Scheduling a flow-line manufacturing cell: A Tabu Search approach. *International Journal of Production Research* 31(7), 1721-1734.

Sofianopoulou, S. (1994). A mathematical programming approach to the manufacturing systems cell formation problem. Proceedings, *2nd Balkan Conference on OR*, October 1993, Salonica.

Sofianopoulou, S. (1996). "Part and machine partitioning problem in cellular manufacturing: multiple machine environment", *Yugoslav Journal of Operations Research* 6, 183-191.

Sofianopoulou, S. (1997), "Application of simulated annealing to a linear model for the formation of machine cells in group technology", *International Journal of Production Research* 35(2), 501-511.

Sofianopoulou, S. (1999), "Manufacturing cells design with alternative process plans and/or replicate machines", *International Journal of Production Research* 37(3), 707-720.

Sorensen, M. (1995), "A polyhedral approach to graph partitioning ", Ph.D. Thesis, The Aarhus School of Business.

Sorensen, M. (1997), "A branch-and-cut algorithm for the simple graph partitioning problem", Proceedings, *EURO XV/ IFORMS XXXIX*.

Sorensen, M. (2000), «A study of the set partitioning approach to the simple graph partitioning problem», *ECCO XIII*, May 2000, Capri.

Spiliopoulos, K., and Sofianopoulou, S. (1998). «An optimal tree search method for the manufacturing systems cell formation problem», *European Journal of Operational Research* 105, 537-551.

Spiliopoulos, K., and Sofianopoulou, S. (1999), "Designing manufacturing cells using a Tabu Search approach", Proceedings, *2nd Aegean International Conference on Analysis and Modelling of Manufacturing Systems*, May 1999, Tinos.

Σπηλιόπουλος, Κ., και Σοφianoπούλου, Σ. (1995), «Βελτίωση της απόδοσης συγχρόνων παραγωγικών συστημάτων – αγορά νέου κεφαλαιουχικού εξοπλισμού ή παραγωγή με υπεργολαβία;» στο Λαΐος, Λ. (επιστ. επιμέλεια), *Σύγχρονη Διοίκηση Προμηθειών*, Ελληνικό Ινστιτούτο Προμηθειών, Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 208-216.

Srinivasan, G., Narendran, T.T., and Mahadevan, B. (1990), "An assignment model for the part families problem in group technology", *International Journal of Production Research* 28(1), 145-152.

Srinivasan, G. (1994), "A clustering algorithm for machine cell formation in group technology using minimum spanning trees", *International Journal of Production Research* 32(9), 2149-2158.

Strang, G. (1980), *Linear Algebra and its Applications*, 2nd ed., Academic Press, New York.

Suresh, N.C., and Meredith, J.R. (1985), "Achieving factory automation through group technology principles", *Journal of Operations Management* 5(2), 151-167.

Vannelli, A., and Hall, R.G. (1993), "An eigenvector solution methodology for finding part-machine families", *International Journal of Production Research* 31(2), 325-349.

Vannelli, A., and Kumar, K.R. (1986), "A method for finding minimal bottleneck cells for grouping part-machine families", *International Journal of Production Research* 24(2), 387-400.

Venugopal, V., and Narendran, T.T. (1992), "A genetic algorithm approach to the machine component grouping problem with multiple objectives", *Computers and Industrial Engineering* 22(4), 469-480.

Vohra, J., Chen, D.S., Chang, J.C., and Chen, H.C. (1990), "A network approach to cell formation in cellular manufacturing", *International Journal of Production Research* 28, 2075-2084.

Wei, J.C., and Gaither, N. (1990a), "An optimal model for cell formation decisions", *Decision Sciences* 21(2), 416-433.

Wei, J.C., and Gaither, N. (1990b), "A capacity constrained multiobjective cell formation method", *Journal of Manufacturing Systems* 9(3), 222-232.

Wei, J.C., and Kern, G.M. (1989), "Commonality analysis: a linear cell clustering algorithm for group technology", *International Journal of Production Research* 27(12), 2053-2062.

Wemmerlov, U., and Hyer, N.L. (1987a), "Research issues in cellular manufacturing", *International Journal of Production Research* 25(3), 413-431.

Wemmerlov, U., and Hyer, N.L. (1987b), «Cellular manufacturing in the U.S. industry: A survey of users», Proceedings, *Annual Meeting of the Decision Science Institute*, Atlanta.

Wemmerlov, U., and Hyer, N.L. (1989), "Cellular manufacturing in the U.S. industry: A survey of users", *International Journal of Production Research* 27(9), 1511-1530.

White, D.J. (1993), "A convex form of the quadratic assignment problem", *European Journal of Operational Research* 65, 407-416.

Wu, N., and Salvendy, G. (1993), "A modified network approach for the design of cellular manufacturing systems", *International Journal of Production Research* 31(6), 1409-1421.

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

## Μήτρες αποστάσεων προβλημάτων 20 μηχανών

<p>4 7 7 3 6 6 8 4 6 3 5 2 6 3 4 3 3 1 4 3 4 1 3 3 2 2 3 8 4 4 4 10 2 2 4 1 4 6 2 3 0 6 4 4 6 3 3 4 2 6 3 8 6 5 2 2 6 6 3 1 2 3 7 2 4 3 3 3 5 4 7 3 2 10 4 3 2 5 5 5 4 4 4 5 1 2 1 5 2 4 5 7 2 3 5 2 5 5 3 2 5 3 4 5 2 2 3 5 3 5 1 4 2 1 6 2 5 4 6 3 1 1 6 1 5 3 3 1 1 3 8 2 4 6 4 2 1 5 2 6 2 3 4 4 0 5 4 3 4 2 3 8 9 6 6 2 3 3 2 0 5 4 1 3 1 8 3 3 2 4 4 3 0 2 3 3 4 1 5 1 3 4 6 4 5 5 2 6 3 5</p> <p><b>1</b></p>	<p>3 6 0 3 3 1 6 1 3 3 1 3 5 5 4 4 2 3 2 4 2 6 6 3 1 7 5 7 1 5 8 9 4 7 3 1 5 5 5 2 5 6 2 3 3 4 3 6 3 4 4 3 3 6 3 1 4 8 7 4 2 3 3 2 0 6 6 3 3 3 7 3 3 6 4 3 4 3 7 9 5 2 5 3 5 0 5 5 5 6 4 3 2 2 5 6 5 2 2 5 4 6 2 4 0 7 2 3 4 4 4 6 4 3 3 4 9 2 3 3 6 3 2 3 3 2 2 5 7 6 9 7 3 5 4 1 5 4 2 8 3 4 3 2 1 2 2 7 6 1 3 3 4 3 5 1 1 1 3 5 3 2 4 1 5 7 6 4 4 3 6 5 5 3 4 3 5 5 4 5 7 4 2 7 2 5 2 3 4 5</p> <p><b>2</b></p>	<p>2 10 3 7 4 5 5 2 4 3 6 5 3 2 4 6 1 5 1 3 3 1 1 5 2 4 3 4 0 2 3 6 2 5 6 5 6 2 6 3 3 3 3 4 3 3 5 3 5 5 4 3 6 3 4 7 3 2 1 2 3 2 4 4 2 5 1 5 5 3 2 3 5 2 5 6 3 5 3 2 3 2 2 2 4 0 3 4 3 0 3 4 3 4 5 2 1 8 4 2 2 5 1 8 1 2 6 3 4 3 4 2 2 2 2 4 6 5 2 5 7 4 2 6 6 4 4 4 3 4 2 2 4 4 5 3 5 3 2 2 2 8 5 5 4 3 4 2 5 3 1 9 4 3 3 4 5 5 6 5 9 3 6 5 3 2 2 3 7 4 3 2 4 4 5 5 4 6 6 3 3 5 2 4 7 4 3 3 4</p> <p><b>3</b></p>
<p>3 3 4 4 2 2 6 5 4 5 6 6 3 1 5 5 2 5 5 6 4 6 2 3 5 6 5 2 6 3 1 5 4 4 6 4 5 2 5 4 2 4 2 6 2 1 6 4 3 2 3 4 2 5 6 5 3 3 3 1 3 7 1 1 4 4 4 0 4 6 4 4 2 5 3 3 2 7 0 6 3 3 3 6 2 2 2 2 1 5 6 3 3 2 5 4 1 4 3 6 4 1 2 4 2 3 1 2 7 4 10 4 5 2 3 4 1 3 1 3 4 1 1 4 3 2 6 2 5 4 5 5 1 5 5 5 1 2 3 5 4 5 1 1 6 6 1 10 7 3 4 5 8 2 2 5 3 5 2 4 3 3 0 2 3 5 7 3 2 3 5 4 1 6 1 2 2 1 2 1 6 4 5 4 4 6 4 3 4 4</p> <p><b>4</b></p>	<p>4 3 2 2 4 1 4 3 4 2 1 3 5 4 3 3 5 0 1 8 4 8 2 4 3 4 2 2 5 3 5 6 3 4 4 3 8 5 7 6 6 4 3 6 4 2 2 3 4 3 3 4 4 12 3 2 3 4 2 6 0 5 3 1 5 6 4 2 3 4 1 5 7 3 2 3 3 7 2 1 3 1 2 7 2 6 5 8 2 0 6 2 1 0 1 5 3 0 2 3 4 4 3 3 3 2 6 8 3 2 3 6 2 1 5 9 2 1 8 1 6 3 4 5 4 4 3 2 3 2 3 5 5 4 1 4 5 4 4 4 5 4 4 4 4 3 2 8 1 3 3 2 2 1 4 3 2 4 5 7 6 4 6 2 6 3 1 4 0 2 2 4 4 3 2 8 7 7 6 3 3 2 4 2 4 5 3 4 2 2</p> <p><b>5</b></p>	

# Μήτρες αποστάσεων προβλημάτων 20 μηχανών

<p>6 4 5 4 6 6 2 3 2 1 4 0 4 6 5 2 6 1 6            3 2 7 1 6 3 3 4 1 3 3 9 6 7 0 1 1 2            7 6 3 3 3 5 8 2 5 3 6 7 2 5 2 8 5            5 7 5 2 8 4 4 7 1 0 5 5 4 8 3 5            2 1 3 3 5 2 1 5 1 6 3 3 4 2 7            4 3 4 2 3 3 4 6 6 2 3 1 2 5            3 6 2 4 2 6 4 3 5 4 7 4 4            5 3 4 5 3 3 6 2 4 3 9 2            1 2 4 2 4 0 8 2 3 2 0            0 0 1 0 5 8 4 3 4 4            2 3 2 5 3 1 6 3 1            6 2 8 9 2 5 6 6            1 7 3 0 1 2 2            3 1 3 6 3 5            5 3 2 3 3            3 3 6 6            3 5 1            5 7            6</p> <p><b>6</b></p>	<p>7 0 2 3 2 2 5 3 1 3 2 4 2 5 2 7 2 4 3            2 6 5 2 3 5 2 7 6 4 2 4 7 2 3 3 7 2            4 1 4 7 6 1 3 5 2 4 3 2 1 4 0 8 3            7 2 4 5 4 4 4 4 6 3 3 1 2 2 3 4            1 6 6 2 2 7 5 5 1 5 4 4 4 5 3            1 3 2 6 8 4 5 1 1 3 7 1 5 3            3 4 1 1 1 6 6 6 3 2 3 5 5            5 3 6 3 4 3 1 5 4 7 3 3            4 6 4 3 3 2 6 2 3 5 0            2 3 6 2 5 2 8 10 5 6            4 4 1 3 7 5 4 3 3            4 4 1 2 5 3 5 1            3 3 2 4 2 2 1            4 3 3 4 6 1            2 4 8 2 3            1 3 6 2            3 2 3            5 1            2</p> <p><b>7</b></p>	<p>1 3 6 3 2 4 5 5 3 3 3 3 3 8 4 2 8 6 4            4 5 3 5 1 4 3 5 2 1 3 3 2 1 1 5 2 4            4 1 2 5 6 2 4 4 7 2 1 5 5 5 3 7 7            7 1 7 4 0 4 4 6 2 4 0 2 4 2 3 3            3 6 4 1 5 3 2 5 1 4 6 2 5 2 5            10 5 6 4 4 3 0 3 1 3 3 6 5 5            4 3 6 5 3 7 3 6 6 4 3 3 4            10 4 3 8 5 4 6 4 2 4 2 3            5 6 6 1 6 3 3 7 4 6 7            5 0 2 3 4 3 1 6 2 2            4 4 1 5 3 5 4 4 5            2 1 3 2 3 2 4 2            6 1 2 1 5 4 4            3 4 1 6 4 2            7 3 4 3 0            5 4 4 3            1 3 3            3 5            2</p> <p><b>8</b></p>
<p>5 3 2 5 8 4 3 2 4 5 0 5 5 4 5 4 2 8 5            3 6 7 7 5 5 0 2 3 3 7 5 1 0 5 3 4 3            4 3 4 9 3 2 3 2 1 3 4 4 3 4 2 2 5            4 5 3 3 1 2 2 7 3 3 4 4 4 2 3 4            6 2 1 2 5 6 5 5 3 5 7 4 6 6 6            3 2 3 4 5 6 1 2 1 4 4 3 4 3            2 2 3 4 3 4 3 6 4 5 5 5 3            3 4 3 4 3 7 2 3 1 3 3 5            1 9 5 3 3 7 3 2 4 2 6            2 1 3 6 1 2 3 1 3 5            6 4 3 4 6 2 6 10 4            4 3 3 6 3 6 3 5            3 4 2 6 6 8 6            3 2 3 3 4 2            3 3 3 3 3            4 4 5 3            1 4 5            6 3            2</p> <p><b>9</b></p>	<p>3 2 3 2 1 3 4 8 3 6 3 2 2 1 5 2 2 6 4            3 6 3 4 3 1 5 3 2 3 7 7 4 5 5 3 7 5            5 3 5 7 6 5 3 4 4 6 1 3 5 3 6 3 4            6 3 6 1 5 5 7 0 4 1 4 5 5 6 4 6            6 2 3 5 2 2 2 4 2 3 0 5 4 2 5            3 5 5 4 7 4 5 4 3 2 3 4 4 3            6 4 2 2 1 5 7 4 3 4 3 7 6            5 4 2 5 6 5 2 4 5 3 3 2            3 5 3 4 5 3 4 3 2 5 2            3 9 4 6 3 1 3 7 4 3            5 3 6 3 3 2 2 3 1            3 5 3 4 5 2 1 4            4 0 1 3 3 1 3            2 3 4 4 1 4            3 6 2 5 4            4 3 3 1            8 3 3            4 5            0</p> <p><b>10</b></p>	



# Μήτρες αποστάσεων προβλημάτων 25 μηχανών

<p>6 6 6 5 3 10 6 4 6 7 11 3 6 2 3 7 5 5 6 8 10 11 6 9            3 14 6 8 6 10 5 7 12 6 5 4 7 9 9 5 5 5 4 6 4 10 6            6 7 5 5 5 8 3 6 9 6 9 10 8 5 5 6 8 7 5 4 6 8            4 10 6 6 10 10 9 9 5 5 9 1 8 8 5 7 4 10 5 7 4            6 4 7 3 7 8 3 6 7 8 2 7 6 6 6 7 8 7 13 7 6            8 3 5 7 4 9 9 11 8 9 6 4 6 9 3 6 3 6 7            3 4 4 6 5 6 7 6 4 3 4 9 5 6 4 9 7 6            7 3 9 5 3 11 8 5 4 7 7 8 4 4 4 3 4            5 6 6 4 7 2 4 7 4 8 4 11 6 5 8 12            4 7 6 5 4 8 6 2 10 8 9 4 3 7 5            4 5 6 4 5 8 6 3 6 3 5 3 6 7            9 10 4 4 4 3 7 2 7 8 6 7 3            8 5 7 7 8 3 9 5 5 9 8 4            4 8 6 6 6 5 5 6 7 9 7            4 7 8 6 4 10 5 8 5 5            4 7 6 5 5 3 10 11 4            3 4 4 7 2 6 3 6            4 2 3 8 8 3 7            2 6 5 8 6 5            5 7 1 7 5            3 9 6 6            9 3 7            14 7            11</p> <p><b>1 (d25may29)</b></p>	<p>2 6 3 6 5 7 7 5 5 6 5 4 4 6 4 3 6 7 2 2 3 9 7 4            4 6 5 5 4 0 6 6 6 3 3 9 11 4 4 7 2 4 4 7 8 1 3 8 3            3 3 3 10 9 2 5 1 3 3 6 6 2 2 6 3 2 4 4 6 4 5 6 4 6            4 0 4 4 4 4 4 0 3 5 6 4 6 8 3 6 7 3 4 6 4 1            2 4 6 5 3 4 4 4 3 5 2 2 3 7 4 5 2 5 6 1 2 4            8 5 4 4 5 5 4 7 3 7 3 5 9 4 4 7 4 5 5 2 4            2 5 5 7 1 5 6 6 4 4 4 8 8 5 4 6 1 1 8            5 3 6 2 6 7 3 7 7 7 6 8 6 5 3 3 7            5 2 3 4 4 5 5 2 5 4 3 6 4 6 10 7            3 6 3 3 11 6 6 2 5 8 6 2 5 6 5 6            6 8 6 2 5 5 5 2 3 4 5 3 4            2 9 3 6 2 7 2 3 4 8 6 6 7            6 3 6 4 3 4 4 8 1 8 4 6            4 8 3 2 3 5 4 6 3 5 7            4 8 3 4 4 5 4 5 3 2            5 7 4 5 2 6 6 1 5            4 5 3 1 5 4 5 3            3 4 2 2 5 2 6            3 8 6 6 4 9            6 3 4 4 4            6 1 4 5            5 9 3            6 6            5</p> <p><b>2 (d25aug6a)</b></p>
<p>3 5 1 4 10 7 3 2 5 8 4 2 8 7 5 1 5 2 2 3 8 4 3 2 3            6 3 3 7 4 4 6 4 3 3 3 3 2 2 2 2 8 4 4 4 5 7            3 6 3 8 6 4 6 4 4 7 4 1 2 7 4 5 4 6 2 5 4 7            4 5 4 6 4 4 6 3 6 7 5 4 1 3 2 7 2 2 6 6 1 4            1 8 4 2 5 1 5 5 8 4 4 5 3 2 2 4 3 9 5 4 4 4            2 6 3 6 2 5 6 5 5 4 11 4 2 2 1 6 7 1 5 3 4            2 3 3 7 6 4 4 6 6 3 7 5 4 4 3 3 5 3 4            3 1 3 4 10 7 4 4 3 6 3 4 1 5 4 2 2 8            5 6 1 5 0 3 3 4 8 4 4 9 2 7 2 6            5 4 4 3 5 4 1 5 4 4 6 5 6 5 4            3 2 3 5 5 5 6 4 4 3 4 4 2 5 8            6 2 4 7 6 4 4 6 5 9 3 5 5            7 3 9 3 5 9 3 4 4 5 4 3            6 5 5 7 7 2 3 5 7 3 3 4            2 7 2 2 7 6 8 5 5 5            3 5 4 3 4 5 2 4 2            6 4 5 7 5 4 3 4            3 2 4 6 3 3 6            4 3 5 2 9 4            3 1 8 6 1            4 8 7 1            8 7 7            5 6            7</p> <p><b>3 (d25aug6b)</b></p>	<p>3 5 7 8 6 8 3 4 5 4 3 1 8 3 3 3 6 2 4 6 3 6 5 6            6 2 4 4 10 5 6 3 6 2 2 1 4 4 5 5 10 4 7 4 2 3 4 2 6 2 8            8 8 7 7 7 6 2 5 5 10 4 7 4 6 2 3 6 4 2 6 2 8            7 8 6 7 2 7 5 7 6 8 2 3 4 4 2 6 1 6 3 5 3            3 4 3 5 3 2 2 2 7 5 4 4 5 3 5 4 6 5 6 8            5 5 7 5 4 7 7 4 3 3 4 7 4 6 2 1 10 10 6            3 5 2 1 7 3 5 7 4 4 5 2 4 6 3 2 4 3            8 3 5 6 4 6 4 3 2 1 3 7 10 3 7 4 3            1 4 8 4 4 2 4 6 4 7 4 5 1 2 3 6            5 6 3 6 2 8 4 3 6 2 5 5 4 3 7            5 3 10 8 9 5 11 3 4 5 4 8 4 4            2 4 4 2 4 6 2 5 5 5 9 4 6            9 6 2 3 2 7 5 5 2 7 4 2            6 6 5 6 3 3 5 5 8 3 6            6 7 5 3 6 5 6 4 4 5            4 4 5 7 3 5 6 2 6            9 4 6 4 6 6 3 3            3 6 4 5 3 4 8            3 1 6 4 8 2            3 2 3 8 5            5 6 4 4            4 9 5            7 6            3</p> <p><b>4 (d25aug6c)</b></p>

# Μήτρες αποστάσεων προβλημάτων 25 μηχανών

<pre> 7 4 2 5 6 5 5 10 5 3 4 6 4 4 1 4 3 1 6 3 3 3 6 4 6 5 7 1 5 1 5 6 2 4 4 9 3 2 2 1 4 4 2 6 7 2 6 4 5 4 1 9 3 4 5 2 4 4 6 6 6 6 4 7 4 4 4 4 3 3 4 5 3 6 5 4 4 4 6 3 1 6 4 5 7 5 6 7 3 2 3 3 4 2 3 2 2 2 3 2 2 3 2 6 2 2 1 1 5 5 4 4 6 6 1 1 1 5 4 1 2 2 7 0 2 2 3 3 0 0 1 1 5 5 4 4 4 4 2 2 3 8 6 6 6 1 6 1 3 4 2 7 4 5 3 3 5 4 4 11 5 5 3 6 3 4 4 5 2 1 4 4 4 5 1 0 5 3 3 1 1 5 5 3 3 8 3 7 2 2 4 8 4 4 3 2 1 6 3 2 2 8 6 2 8 4 4 4 6 6 6 6 1 7 5 4 3 3 1 3 3 3 1 2 1 5 7 6 9 2 6 6 3 2 5 7 1 6 2 5 3 3 5 0 7 1 6 2 4 6 2 5 4 3 3 3 6 4 3 4 1 7 4 6 5 1 5 8 4 5 2 4 2 2 3 7 7 3 2 2 3 3 1 6 6 1 3 7 8 2 7 2 1 2 5 3 3 2 4 3 7 3 2 4 4 4 2 4 5 9 5 3 4 1 6 2 4 7 4 3 5 7 4 4 </pre> <p><b>5 (d25aug7a)</b></p>	<pre> 1 5 1 3 6 8 3 7 3 7 10 1 4 4 6 7 4 3 0 9 6 4 3 7 4 4 5 4 6 4 7 8 3 5 6 3 1 2 2 5 5 2 4 4 5 6 6 1 3 2 2 5 2 3 2 3 7 3 3 3 3 3 4 1 3 5 4 4 4 7 6 6 6 2 4 6 6 3 3 2 3 4 8 5 3 3 4 5 2 4 3 6 2 8 9 5 4 3 3 1 1 4 4 6 6 4 4 6 1 9 3 7 7 4 7 4 6 5 4 6 6 4 4 4 4 5 5 3 4 6 9 7 5 6 5 1 6 5 5 0 3 3 5 7 7 6 0 4 4 3 4 1 5 7 3 5 8 1 2 2 6 3 5 4 2 4 4 3 3 2 4 5 4 2 4 2 7 5 5 4 4 6 3 6 6 5 4 4 7 4 3 4 5 6 4 4 4 6 8 3 3 8 5 6 5 3 6 3 5 1 4 5 6 5 2 1 3 6 7 10 3 5 5 4 6 2 4 1 8 4 4 3 7 4 3 7 7 4 9 2 2 5 4 5 6 4 2 3 2 4 7 5 5 3 5 1 5 0 4 5 7 0 6 6 1 4 3 6 5 8 6 5 4 1 4 6 3 8 5 6 6 6 8 5 6 5 4 4 4 3 8 3 4 8 5 7 3 6 7 4 6 3 2 5 </pre> <p><b>6 (d25aug7b)</b></p>
<pre> 7 6 6 7 4 4 4 3 4 7 5 4 1 4 6 4 5 5 5 8 3 9 3 5 4 3 4 3 4 4 4 5 4 4 0 6 3 3 2 3 7 6 4 1 6 2 4 4 3 6 3 4 6 8 8 8 3 7 0 6 3 6 4 3 7 7 6 4 1 6 2 7 3 4 6 3 6 2 2 4 8 6 3 3 2 3 7 6 4 1 6 2 4 4 6 6 4 2 3 3 1 2 7 3 1 6 4 4 3 7 5 5 4 4 4 5 7 5 5 2 3 5 4 6 4 3 4 4 4 6 6 6 3 2 9 4 0 5 7 4 1 3 4 4 5 5 3 5 1 3 3 3 2 4 3 2 4 3 7 4 4 5 7 7 6 5 7 4 4 3 8 7 4 5 5 4 4 5 5 4 4 3 4 4 4 4 1 7 4 4 0 5 7 5 5 3 6 2 8 7 4 3 5 5 6 2 7 1 1 3 3 2 8 8 3 3 8 4 4 4 3 6 3 6 2 3 5 4 5 5 7 4 2 5 6 1 5 9 2 5 2 5 4 2 1 3 8 4 6 5 4 2 4 1 1 4 4 5 5 4 4 1 7 3 6 3 3 4 2 6 7 4 5 3 5 3 6 8 4 2 4 6 5 1 8 3 8 4 7 8 5 3 3 5 2 6 3 4 3 4 6 2 7 5 7 5 7 2 </pre> <p><b>7 (d25aug7c)</b></p>	

# Μήτρες αποστάσεων προβλημάτων 30 μηχανών

<pre> 2 1 1 4 5 0 1 4 4 1 2 2 1 1 3 3 2 2 2 2 0 1 2 1 2 2 1 4 2 1 3 0 1 2 1 3 2 2 3 4 2 2 0 4 3 1 1 3 2 2 1 5 4 0 2 2 4 1 1 3 3 2 2 3 1 3 0 1 0 1 2 1 0 0 3 1 1 1 6 1 2 2 0 0 4 3 3 3 3 3 2 1 3 3 1 2 0 2 6 2 1 2 1 2 1 2 2 3 3 1 5 3 2 1 2 2 3 0 1 4 4 3 1 6 2 0 1 2 0 1 1 1 3 1 3 3 0 4 1 1 1 1 2 5 2 4 2 1 1 1 4 0 2 2 2 0 5 0 2 2 3 4 2 1 1 0 2 3 1 1 2 2 3 2 1 0 0 4 2 1 1 4 2 4 0 2 2 2 2 1 2 1 1 1 1 0 1 0 1 2 3 3 1 1 1 2 2 6 1 5 1 3 3 1 1 4 3 1 2 2 2 0 3 1 4 2 2 1 3 0 3 2 2 1 1 1 2 2 2 2 2 1 0 3 1 3 1 2 2 3 1 4 2 0 1 1 4 0 2 4 3 4 1 3 1 2 4 6 0 3 4 2 4 2 4 2 2 1 2 2 2 2 1 1 2 2 2 2 3 3 4 0 1 2 3 3 2 2 2 1 2 1 3 3 2 2 4 2 0 0 1 2 1 2 4 5 5 3 3 1 2 4 2 1 4 3 2 2 2 2 1 2 0 3 0 3 1 1 3 3 2 1 2 1 3 0 1 1 2 4 1 3 1 0 5 1 4 1 2 4 3 4 0 4 1 3 1 1 1 2 2 3 3 1 1 4 3 3 3 3 2 4 1 1 0 0 1 0 1 3 2 3 0 3 2 4 1 2 2 3 2 2 3 3 2 4 2 2 2 3 5 1 2 0 1 1 0 0 2 1 1 2 2 3 0 4 1 2 0 2 2 1 1 2 0 </pre> <p>1 (d301100)</p>	<pre> 1 3 3 2 3 1 5 5 9 2 4 4 3 8 3 7 3 5 4 4 7 3 6 2 4 6 5 6 5 4 2 2 2 6 2 4 2 2 3 2 5 1 3 6 3 5 4 4 1 3 2 3 2 3 4 4 2 7 5 5 4 3 5 8 4 3 2 6 2 6 5 4 6 2 6 4 3 1 6 4 3 3 4 3 4 2 9 9 5 4 8 3 2 6 3 1 6 7 2 5 3 2 1 4 5 4 4 4 4 1 4 8 4 4 2 3 5 1 5 4 0 2 6 4 2 3 4 5 4 5 3 5 0 4 2 1 2 1 5 5 4 5 2 6 5 5 6 6 1 3 10 3 4 4 7 3 5 3 9 4 3 5 2 2 6 4 3 6 3 3 4 4 2 2 3 4 2 0 7 6 7 2 5 2 4 3 3 3 6 6 4 7 2 3 5 5 4 1 6 1 5 3 5 5 1 1 3 1 4 3 6 6 5 5 2 3 1 2 4 2 4 4 5 4 1 0 6 5 4 3 3 0 6 5 7 4 3 1 3 3 3 4 5 4 2 4 1 3 2 5 4 5 7 6 6 4 3 4 4 5 5 1 7 2 2 5 2 3 5 7 3 3 3 4 3 4 4 3 4 6 1 5 3 3 5 7 3 3 6 2 3 4 2 2 3 6 4 1 4 4 2 3 5 1 3 2 0 4 2 4 4 3 2 7 5 5 3 1 1 10 3 2 7 6 0 2 6 3 9 3 2 4 3 3 3 3 3 4 3 3 2 4 6 4 2 1 2 8 5 3 3 4 6 1 2 4 5 3 6 6 1 1 2 5 6 4 10 10 2 4 4 3 2 3 5 4 5 2 3 2 4 5 5 5 6 6 2 5 7 3 6 4 7 3 6 1 5 3 3 3 3 3 6 5 2 3 0 5 5 2 2 6 2 8 2 3 5 4 5 4 3 8 2 2 2 3 3 2 5 2 4 3 2 3 </pre> <p>2 (d301200)</p>
---	---

# Μήτρες αποστάσεων προβλημάτων 30 μηχανών

<p>19 6 7 11 7 11 11 10 10 14 14 7 7 8 12 14 10 11 6 4 14 6 10 8 10 5 6 12 10                      13 10 18 8 18 11 12 10 13 7 9 6 16 10 13 8 8 15 12 11 5 5 10 14 9 8 5 12                      11 7 12 10 9 7 8 5 14 11 10 16 11 12 8 10 12 8 8 8 20 7 6 9 17 10 11                      11 4 6 9 8 8 9 9 11 8 7 8 8 3 4 11 10 6 9 9 13 13 10 11 15 8                      9 7 12 13 9 6 12 7 5 4 8 8 14 8 9 9 10 9 9 6 7 6 12 13 4                      6 5 10 8 10 10 11 8 6 6 5 8 10 7 10 13 10 8 10 12 8 9 10 10                      13 4 8 7 14 12 5 6 7 11 7 13 12 12 8 8 11 5 10 9 13 9 7                      10 13 5 10 11 8 6 14 16 11 12 15 3 11 9 18 7 10 10 9 11 8                      11 8 12 9 13 14 11 12 9 9 5 7 11 13 14 6 11 12 4 9 13                      9 7 5 5 12 13 7 14 4 9 9 12 11 8 12 11 10 6 12 11                      12 7 5 9 13 8 9 10 16 12 6 4 5 5 11 6 13 6 11                      6 8 9 10 13 13 13 7 7 17 11 7 9 13 10 5 11 7                      5 8 10 7 12 9 9 6 10 9 4 4 15 8 6 4 8                      7 12 13 13 7 10 8 9 8 9 10 6 9 8 10 11                      15 12 13 11 4 11 11 5 7 11 16 5 12 7 10                      10 12 11 11 16 5 12 10 6 10 6 6 13 9                      13 8 9 8 11 15 7 8 7 8 15 9 8                      12 10 12 12 3 8 12 10 14 9 11 7                      5 11 7 9 13 14 14 10 13 8 9                      6 7 13 9 4 6 7 3 6 5                      11 8 11 10 5 9 15 11 9                      14 18 11 8 12 4 11 10                      7 8 13 10 9 10 14                      12 9 10 6 5 13                      11 5 8 14 5                      13 12 18 6                      7 13 10                      17 9                      10</p>	<p>3 0 3 2 1 1 4 1 3 1 0 4 1 0 4 1 0 0 1 0 2 0 1 1 3 1 1 1 0                      1 2 3 0 1 1 2 2 1 3 2 2 1 2 1 1 2 0 5 1 1 1 1 2 0 3 0 2                      2 1 1 0 0 0 1 0 2 0 1 3 0 0 0 2 1 0 2 1 4 2 0 1 3 1 2                      2 2 3 0 1 0 1 1 1 0 0 3 2 2 1 0 2 0 1 1 3 0 0 2 1 1                      3 3 0 1 1 3 1 1 1 2 0 5 2 2 0 2 2 0 0 2 3 2 2 1 1                      2 1 2 4 1 1 1 1 1 1 3 0 0 2 1 1 0 4 4 3 1 1 1 0                      2 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 3 1 0 1 0 0 2 1 1 1 1                      1 1 1 2 1 0 1 0 2 3 1 2 2 3 3 0 0 2 1 4 1 0                      1 0 1 0 3 1 1 0 3 2 3 2 3 2 1 1 0 0 0 1 2                      1 1 1 0 0 0 2 0 2 0 0 1 1 1 3 2 1 2 3 2                      2 2 1 0 4 0 2 4 0 1 2 1 1 2 4 0 1 1 1                      2 0 0 1 4 1 2 1 5 1 1 0 1 2 1 2 1 3                      4 0 1 1 1 1 3 0 1 0 2 0 1 2 0 0 2                      0 3 0 4 0 0 0 1 4 0 0 0 3 2 2 0                      1 2 2 0 2 0 2 4 2 0 1 0 1 2 2                      0 1 2 1 1 1 1 2 2 1 2 3 1 0                      1 2 1 4 0 3 5 1 2 2 2 5 1                      1 1 0 1 1 2 1 2 2 1 1 4                      2 2 1 3 0 0 2 1 3 2 1                      1 0 2 1 1 2 2 1 1 0                      0 2 1 2 0 1 2 0 0                      2 0 1 1 2 3 1 2                      0 1 2 2 2 1 0                      2 3 1 3 1 1                      1 1 1 0 0                      0 5 0 2                      1 2 0                      3 0                      1</p>
<p><b>3 (d301500)</b></p>	<p><b>4 (d302100)</b></p>

Μήτρες αποστάσεων προβλημάτων 30 μηχανών

0 2 1 1 2 3 2 2 2 2 4 0 0 0 4 3 2 1 4 5 2 2 1 1 2 5 3 3 1	9 7 8 3 9 4 5 7 10 6 1 4 5 5 8 8 9 11 9 5 7 6 4 4 12 9 8 11 6
4 1 2 3 3 1 2 1 2 1 0 2 2 0 1 2 2 2 1 4 3 0 3 3 5 2 3 2	9 7 3 3 6 4 10 8 10 5 7 5 9 5 10 4 5 11 3 3 5 6 6 3 6 12 2 4
2 2 2 2 1 0 1 5 3 2 4 2 4 1 3 3 1 3 2 3 0 0 1 1 4 3 5	10 2 8 5 6 10 8 7 2 4 10 4 4 4 9 14 9 5 4 6 5 8 13 7 9 4 8
4 2 1 3 2 1 4 3 2 4 1 0 2 0 1 4 1 1 6 1 7 2 2 2 2 4	2 8 5 12 9 13 10 5 9 5 5 8 5 7 9 10 7 1 7 4 5 6 3 3 12 7
1 3 2 1 5 6 2 7 4 5 6 3 4 1 2 5 0 2 1 2 2 3 1 4 2	2 5 3 11 10 3 5 5 4 4 8 7 12 4 11 7 12 8 6 8 3 3 5 6 3
5 3 1 3 4 3 5 4 3 2 3 1 0 1 2 3 5 1 4 3 3 4 4 5	5 2 5 9 4 6 6 4 5 4 3 11 3 5 5 11 2 1 7 5 4 9 5 5
2 3 1 1 3 3 3 2 2 2 1 2 2 1 5 2 2 2 3 4 1 2 3	9 6 4 9 4 8 8 3 6 3 10 7 8 5 6 4 6 4 6 8 3 4 9
2 3 2 1 3 3 2 4 3 1 2 2 4 1 1 2 4 3 3 0 2 0	3 7 4 10 6 8 4 9 8 5 3 6 4 6 7 5 13 9 8 10 2 4
1 2 6 4 4 4 1 0 2 1 3 2 3 5 1 4 2 6 2 4 1	6 11 8 6 4 6 11 6 9 11 5 9 8 4 11 4 10 4 9 7 12
1 1 2 2 3 0 5 3 2 6 2 1 1 0 3 2 1 4 1 1	7 3 11 6 2 6 3 7 5 7 5 12 9 7 5 11 5 9 7 7
1 1 1 3 0 5 3 2 1 3 3 1 3 1 1 3 3 1 1	6 5 8 9 3 11 7 4 6 6 15 2 4 5 0 7 7 2 8
3 5 2 3 5 3 6 5 0 0 2 4 3 2 3 2 2 1	8 9 7 5 9 2 7 8 8 12 4 3 7 7 8 7 10 5
4 2 3 7 2 3 3 1 4 2 2 2 2 0 3 2 2	7 10 4 8 7 8 11 9 10 6 5 7 5 7 11 5 8
2 4 2 3 1 3 2 3 3 0 1 5 5 3 1 3	5 5 4 3 8 6 8 7 5 4 7 5 8 5 2 12
0 1 3 3 3 2 4 1 0 3 1 2 2 1 0	4 9 9 6 4 9 7 4 4 4 4 6 8 4 7
4 4 1 4 2 2 4 2 4 6 3 1 6 2	9 10 7 12 8 7 5 7 10 6 4 10 7 6
4 0 1 0 3 3 0 3 4 1 2 3 4	2 8 4 5 4 6 4 7 10 10 7 6 5
5 1 0 0 4 4 3 5 3 2 1 2	6 5 3 10 2 4 9 6 5 2 9 3
2 1 3 5 1 0 2 3 3 4 6	13 3 9 8 7 7 5 5 12 10 5
0 1 2 3 1 1 5 1 1 6	7 6 4 6 5 8 11 13 3 8
3 3 2 0 4 3 3 1 1	2 2 8 6 4 9 11 12 6
1 2 2 3 1 0 1 3	8 2 5 11 9 5 7 5
1 5 2 2 3 4 5	6 9 8 8 4 2 6
1 1 1 4 2 4	6 9 8 6 4 5
3 1 4 3 6	4 12 11 5 6
3 0 3 2	4 8 5 7
4 3 9	8 7 4
1 4	4 3
1	5
5 (d302200)	6 (d302500)

# Μήτρες αποστάσεων προβλημάτων 30 μηχανών

1 3 2 2 0 5 3 3 0 5 1 2 5 3 5 1 3 1 0 5 3 2 3 0 3 4 2 5 0	2 7 7 5 3 7 6 8 7 5 3 8 3 5 3 6 3 5 5 1 7 3 9 5 6 3 5 9 4
7 3 2 1 1 2 3 1 2 2 3 3 4 3 3 3 1 3 2 3 3 1 1 5 2 2 2 0	6 4 4 10 3 1 5 5 9 3 8 5 9 4 3 7 6 4 3 6 4 8 3 8 6 6 8 6
3 3 2 3 2 5 2 1 3 3 3 0 3 0 1 4 2 2 3 1 2 4 2 3 2 3 3	5 6 5 9 7 4 7 6 11 4 2 7 3 10 6 9 8 6 5 9 6 1 8 2 4 6 5
8 1 7 3 1 4 1 8 2 2 2 2 1 0 0 4 2 4 2 2 2 3 3 1 3 6	5 5 6 5 5 4 4 4 6 3 10 8 4 6 4 7 6 14 8 4 7 5 12 7 6 5
3 1 4 4 4 2 4 2 2 1 6 0 3 3 2 1 2 3 6 3 2 1 1 4 2	5 2 6 9 8 3 8 6 6 12 5 3 7 3 6 4 5 7 4 3 6 3 3 4 8
3 0 2 0 2 2 4 2 1 3 6 1 1 3 3 2 3 4 1 4 2 3 4 2	2 8 4 8 5 4 1 5 5 8 2 6 8 7 3 8 7 7 7 5 8 11 10 8
2 3 2 3 3 0 2 0 2 4 2 2 7 2 3 2 2 1 3 3 2 2 2	7 5 4 6 8 5 8 9 4 4 8 3 6 4 3 6 6 6 3 5 5 9 1
5 5 6 3 5 4 1 4 3 3 3 2 0 4 3 1 1 2 0 3 2 4	9 4 5 2 5 4 4 6 3 7 8 8 9 6 5 11 5 7 4 5 7 3
3 2 6 1 0 2 4 2 4 4 1 1 2 3 0 1 3 1 2 4 3	7 5 5 6 1 6 5 9 4 3 7 2 8 6 3 5 4 2 8 5 5
1 2 4 2 3 0 3 1 4 0 2 2 3 6 3 3 2 1 3 4	7 5 4 3 9 5 7 7 3 5 8 7 4 4 8 3 5 10 5 10
2 4 4 2 6 4 3 2 5 4 3 2 3 1 3 5 5 3 4	5 8 6 6 6 3 6 3 5 9 4 8 3 7 5 3 2 9 7
7 3 1 6 2 4 1 5 3 2 6 7 3 1 2 3 4 2	5 7 9 4 9 7 3 6 9 5 7 8 3 5 4 7 7 5
2 4 2 4 1 1 1 4 3 2 1 4 3 4 3 2 4	2 5 6 7 4 6 8 4 7 4 6 8 3 7 5 8 8
2 4 5 2 1 2 6 3 2 0 2 4 1 2 3 2	7 7 6 7 5 4 4 3 4 5 5 6 6 10 2 7
2 2 3 1 0 5 4 2 2 2 7 5 4 0 4	6 1 7 3 1 6 9 5 5 3 7 5 5 8 11
2 1 4 3 4 1 3 4 2 3 3 3 3 2	7 2 8 13 2 3 5 4 4 2 6 3 5 4
4 1 5 3 4 2 0 1 2 3 7 3 1	6 2 5 6 12 9 6 6 4 3 10 6 4
4 2 0 3 2 5 2 3 1 1 2 2	6 7 6 4 8 4 4 10 5 4 3 8
2 1 1 2 3 3 2 2 1 5 2	7 8 6 4 5 5 3 4 8 4 9
2 4 2 8 2 3 5 4 3 2	4 9 6 6 8 6 9 8 7 5
3 1 3 2 2 3 4 2 3	6 9 2 7 4 3 4 2 7
0 3 1 2 1 2 2 1	2 3 4 3 5 6 2 9
6 1 1 1 3 3 2	10 6 9 7 6 3 4
1 6 2 1 3 1	4 4 8 6 6 6
2 2 2 4 5	7 5 6 3 6
3 5 4 0	5 5 4 11
3 1 1	1 6 6
4 0	5 8
3	5
<b>7 (d303100)</b>	<b>8 (d303200)</b>

## Μήτρες αποστάσεων προβλημάτων 30 μηχανών

12 12 13 19 11 15 11 15 13 15 9 14 11 13 16 20 12 11 18 12 10 15 14 14 19 11 14 16 6  
11 21 19 14 13 22 16 10 18 12 20 14 7 15 12 9 13 20 21 8 6 9 19 10 10 15 14 11  
11 11 10 24 9 19 18 14 4 11 17 12 14 26 15 14 13 16 12 10 12 19 20 15 12 12 16  
11 14 18 8 14 10 17 15 11 15 16 11 16 13 13 15 9 12 9 22 15 20 21 10 15 15  
5 17 9 9 12 14 14 13 12 15 16 13 13 18 9 16 15 11 13 8 14 7 14 9 16  
17 15 12 10 13 11 12 15 9 17 13 11 13 17 9 10 8 11 14 17 15 6 11 16  
16 14 12 11 14 11 15 16 16 14 19 18 10 12 17 14 12 15 17 19 11 20 17  
13 15 8 13 14 16 9 7 20 13 10 24 12 9 18 17 15 16 14 7 13 15  
24 16 13 10 17 11 16 11 10 13 13 12 20 15 9 11 20 14 14 10 9  
7 14 10 20 14 15 12 14 12 15 13 10 12 15 12 15 11 12 13 17  
11 14 12 10 16 15 17 16 10 19 17 22 15 9 8 6 10 14 12  
16 12 16 15 18 14 21 18 5 14 19 13 17 22 13 14 11 18  
10 10 10 10 14 18 9 13 15 16 17 14 19 15 17 11 14  
16 13 18 17 19 12 14 14 8 16 15 12 16 17 10 15  
15 9 14 18 8 8 13 15 23 8 24 16 13 6 16  
17 14 14 13 12 12 17 13 19 14 12 19 11 15  
15 13 10 10 11 14 10 18 21 12 13 14 14  
17 12 12 12 10 12 16 12 10 15 9 14  
13 11 18 7 16 13 15 7 16 13 15  
14 11 14 16 14 9 16 14 12 13  
11 10 11 14 18 8 9 12 20  
10 12 10 19 16 23 13 10  
13 17 17 15 11 11 12  
17 12 26 17 22 16  
13 11 9 15 11  
12 6 13 14  
11 11 16  
11 12  
11

9 (d303500)

## ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

Burbidge, J.L. ....	12, 15, 18, 23, 29, 38, 149
Flow shop.....	5
Job shop .....	4
Just-in-Time .....	11, 12
Kumar, K.R.....	20, 21, 28, 68, 69
Kusiak, A.....	12, 18, 19, 21, 28, 68, 69, 133, 153, 154
Rendl, F. ....	41, 63, 65, 68, 70, 71, 77, 80, 84, 85, 86, 91,92, 95, 100, 143, 147
Sofianopoulou, S.....	17, 27, 28, 37, 46, 78, 96, 97, 99, 106, 124, 128
Vannelli, A. ....	20, 21, 28, 68, 69, 139
Wolkowicz, H. ....	41, 65, 68, 70, 71, 76, 77, 83, 84, 85, 86, 91, 92, 95, 100, 143, 147
Ανάλυση Ροής Παραγωγής.....	18
Ανισότητα Hoffman-Wielandt.....	67, 68, 69, 71, 72, 147
Βιομηχανικά κύτταρα.....	4, 6, 12
μη στελεχωμένα .....	11
οφέλη .....	7
παράμετροι του σχεδιασμού .....	15
σειριακή ομαδοποίηση.....	17, 24
στελεχωμένα .....	11
ταξινόμηση αλγορίθμων .....	17
ταυτόχρονη ομαδοποίηση .....	17, 18
Γενικευμένη Τεχνολογία Ομαδοποίησης της Παραγωγής.....	12, 37, 133
Ευέλικτα Κυψελιδωτά Βιομηχανικά Συστήματα .....	11
Ημιορισμένος Προγραμματισμός.....	76, 147



Μέθοδοι διάσπασης γράφου.....	18, 21, 28
Μέθοδοι ιδιοτιμών .....	21, 22, 28, 31, 68, 70, 141, 143
Μέθοδος Tabu Search .....	104
απαγορευμένες κινήσεις .....	108
κριτήρια άρσης απαγόρευσης.....	110
μακροπρόθεσμες μνήμες .....	113
ορισμός κινήσεων .....	107
στρατηγική της αναζήτησης.....	116
Μήτρα αντιστοίχισης μηχανών – κομματιών .....	14, 18, 47
Μήτρα διαμερισμού .....	61, 67, 71
Πρόβλημα Διαμερισμού Γράφου	
γραφοθεωρητική διατύπωση .....	40
ευρετικός αλγόριθμος Barnes.....	68, 70, 148
μορφοποίηση Βέλτιστης Προσέγγισης Μητρώου .....	67
μορφοποίηση Τετραγωνικού Προβλήματος Αντιστοίχισης .....	62
μορφοποίηση Τετραγωνικού Προβλήματος Μεταφοράς.....	64
φράγμα Donath-Hoffman .....	68, 69, 70, 71, 85
Πρόβλημα Διαμερισμού σε Πλήρεις Υπο-γράφους.....	53
Πρόβλημα Σχεδιασμού Βιομηχανικών Κυττάρων	
βασικό μοντέλο .....	33, 35
γραφοθεωρητική αναπαράσταση λύσης.....	48
γραφοθεωρητική διατύπωση .....	40
διάσπαση σε υποπροβλήματα Διαμερισμού Γράφου.....	40, 45, 78
ευρετικός αλγόριθμος συνένωσης και ανταλλαγής.....	88
μορφοποίηση 0-1 Ακεραίου Προγραμματισμού .....	46
μορφοποίηση Ολικής Βελτιστοποίησης .....	73
μορφοποίηση Προβλήματος Διαμερισμού Συνόλου .....	57
υπολογισμός στοιχείων κόστους .....	47
Σταθμισμένο Πρόβλημα b-Αντιστοίχισης .....	53
Στοιχεία εξαίρεσης.....	14, 129, 130
κομμάτια εξαίρεσης.....	14, 131
μέθοδοι απαλοιφής .....	16, 38, 135

μηχανές στένωσης.....	14, 131
Τετραγωνικό Πρόβλημα Αντιστοίχισης	
φράγμα Gilmore-Lawler.....	63, 71, 77, 79, 83, 91, 146
Τετραγωνικό Πρόβλημα Μεταφοράς	
φράγμα Rendl-Wolkowicz.....	71, 77, 84, 91, 92, 147
Τεχνολογία Ομαδοποίησης της Παραγωγής.....	6, 12, 23, 38
Τεχνολογίες αυτοματοποίησης της παραγωγής.....	10