ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΑΠΟΤΥΧΙΑΣ

Κλειώ Ι. Υφαντή

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Σεπτέμβριος 2011

Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο   Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

Τ Μ Η Μ Α   Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ
Κ Α Ι   Α Σ Φ Α Λ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ   Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Η Σ

Μ Ε Τ Α Π Τ Υ Χ Ι Α Κ Ο   Π Ρ Ο Γ Ρ Α Μ Μ Α   Σ Π Ο Υ Δ Ω Ν
Σ Τ Η Ν   Ε Φ Α Ρ Μ Ο Σ Μ Ε Ν Η   Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΑΠΟΤΥΧΙΑΣ

Κλειώ Ι. Υφαντή

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Σεπτέμβριος 2011

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ’ αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Κούτρας Μάρκος, Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Αντζουλάκος Δημήτριος, Αναπληρωτής Καθηγητής
- Μπούτσικας Μιχαήλ, Επίκουρος Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN APPLIED STATISTICS

SYSTEMS WITH MULTIPLE FAILURE MODES

By

Kleio I. Ifanti

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece
September 2011

Στους γονείς μου

Ιωάννη και Στέλλα

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την ουσιαστική υποστήριξη και συμπαράσταση που επέδειξαν μέχρι και σήμερα σε όλες μου τις αποφάσεις. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Κούτρα Μάρκο, για την υπομονή, τη συνεργασία του και τις σημαντικές του επεμβάσεις στο κείμενο της παρούσας διπλωματικής, η οποία χωρίς τη βοήθειά του, δεν θα είχε φτάσει στην ολοκλήρωσή της, όπως και τα μέλη της τριμελούς επιτροπής Αναπληρωτή καθηγητή Αντζουλάκο Δημήτριο και Επίκουρο καθηγητή Μπούτσικα Μιχαήλ, για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή της παρούσας διπλωματικής.

Περίληψη

Το αντικείμενο αυτής της διπλωματικής είναι τα συστήματα αξιοπιστίας με πολλαπλά επίπεδα αποτυχίας. Στόχος μας είναι να παρουσιάσουμε μία κατηγορία συστημάτων, τα οποία έχουν από δύο και άνω επίπεδα αποτυχίας και είναι γνωστά με την ονομασία multiple failure mode systems. Τα επίπεδα αποτυχίας καθορίζουν το πότε ένα σύστημα θα «αποτύχει», δηλαδή ποιές είναι οι καταστάσεις αποτυχίας που θα πρέπει να βρεθεί έτσι ώστε να μην είναι σε λειτουργία. Στα πλαίσια της διπλωματικής αυτής δίνουμε μεθόδους υπολογισμού της αξιοπιστίας συστημάτων με πολλαπλά επίπεδα αποτυχίας και παρουσιάζουμε τρόπους προσδιορισμού της βέλτιστης δομής των συστημάτων η οποία μας δίνει την μέγιστη αξιοπιστία στο σύστημά μας. Τέλος το ζήτημα της βελτιστοποίησης επεκτείνεται και σε προβλήματα ελαχιστοποίησης του κόστους ενός συστήματος ή μεγιστοποίησης του κέρδους του με σκοπό πάλι να επιτυγχάνει το σύστημα την μέγιστη αξιοπιστία. Στη διπλωματική εργασία αναφέρονται επίσης διάφοροι τρόποι εκτίμησης της αξιοπιστίας για κάποιες συγκεκριμένες δομές συστημάτων και αναλύονται θέματα βελτιστοποίησης για την αξιοπιστία τους.

Abstract

The subject of this dissertation is reliability systems with multiple failure modes. (two or more failure modes). The failure modes of a system determine when a system is going to «fail», which means that specific combinations of the failure modes of the system turn the system to its non-functional state. In this thesis we present methods for the evaluation of system's reliability as well as techniques that lead to the determination of the optimal structure of the systems, i.e. the one that provides the maximum system reliability. Also the optimization problem is extended to problems of minimization of system cost or maximization of system profit aiming again at the maximization of system's reliability. In the present dissertation we also present estimation problems of system's reliability for some specific classes of structures and investigate optimization problems for these classes.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Συντομογραφιών και Συμβολισμών

iid	*identically, independently distributed*
DFM	Dual Failure Mode
MFM	Multiple Failure Mode
R	Αξιοπιστία του συστήματος
x_i	Τυχαία μεταβλητή που εκφράζει την κατάσταση της i μονάδας
$\phi(x)$	Συνάρτηση δομής του συστήματος
$\phi^D(x)$	Συνάρτηση δομής του δυϊκού συστήματος
p_i	Αξιοπιστία της i μονάδας, δηλαδή πιθανότητα λειτουργίας της i μονάδας
q_i	Αναξιοπιστία της i μονάδας, δηλαδή πιθανότητα αποτυχίας της μονάδας $(1\text{-}p_i)$
q_o	Πιθανότητα αποτυχίας τύπου I της μονάδας
q_s	Πιθανότητα αποτυχίας τύπου II της μονάδας
F_o	Πιθανότητα αποτυχίας τύπου I του συστήματος
F_s	Πιθανότητα αποτυχίας τύπου II του συστήματος
ε.σ.δ. (ε.σ.λ.)	Ελάχιστα σύνολα διακοπής (λειτουργίας)
ε.δ.δ. (ε.δ.λ.)	Ελάχιστα διανύσματα διακοπής (λειτουργίας)
s	Μεταβλητή που εκφράζει τα επίπεδα αποτυχίας του συστήματος και των μονάδων
m	Πλήθος των επιπέδων αποτυχίας $s=1,2,\ldots,m$
n	Πλήθος των μονάδων
I	Σύνολο όπου ανήκουν οι μονάδες του συστήματος $I=\{1,2,\ldots,n\}$
S	Σύνολο όπου ανήκουν τα επίπεδα αποτυχίας $S=\{1,2,\ldots,m\}$
τ.μ	Τυχαία μεταβλητή
τ.δ	Τυχαίο διάνυσμα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΘΕΩΡΙΑ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ

Η «Θεωρία Αξιοπιστίας» ασχολείται με θέματα πιθανοτήτων και στατιστικής τα οποία αφορούν, κατανομές χρόνων ζωής μονάδων ή συστημάτων όπως και την περιγραφή της λειτουργίας τους αντίστοιχα. Επίσης δύναται να χρησιμοποιηθεί σε προβλήματα βελτιστοποίησης της αξιοπιστίας των συστημάτων. Το στατιστικό τμήμα της «Θεωρίας Αξιοπιστίας» έχει ως στόχο του την εκτίμηση των χρόνων ζωής και των πιθανοτήτων λειτουργίας των μονάδων ή των συστημάτων.

Σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο, παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της «Θεωρίας Αξιοπιστίας», οι μέθοδοι υπολογισμού της αξιοπιστίας ενός συστήματος, όπως και η μελέτη κάποιων κλασσικών συστημάτων. Τις έννοιες αυτές θα χρησιμοποιήσουμε στην ανάλυσή μας, για την εκτίμηση και βελτιστοποίηση της αξιοπιστίας όπως και των υπόλοιπων χαρακτηριστικών των συστημάτων. Μέσω της επιστήμης αυτής, έχουμε τη δυνατότητα να μαθηματικοποιήσουμε την αξιοπιστία όπως επίσης και να κάνουμε συγκρίσεις που αφορούν την αξιοπιστία μεταξύ δύο ή περισσοτέρων συστημάτων. Έτσι αναπτύχθηκαν τρεις βασικές κατηγορίες αξιοπιστίας:

α) Αξιοπιστία Συστημάτων (Hardware Reliability)
β) Αξιοπιστία Λογισμικού (Software Reliability)
γ) Ανθρώπινη Αξιοπιστία (Human Reliability)

Για μία εκτενέστερη αναφορά στις συγκεκριμένες έννοιες και μεθόδους ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει το κλασικό σύγγραμμα πάνω στη «Θεωρία Αξιοπιστίας», των *Barlow & Proschan* (1975).

Σύστημα ονομάζεται ένα σύνολο μονάδων τοποθετημένων και συνδεδεμένων με κάποια δομή. Στα κλασσικά συστήματα αξιοπιστίας υποθέτουμε ότι έχουμε n το πλήθος μονάδες ανεξάρτητες μεταξύ τους, όπου κάθε μία μονάδα βρίσκεται σε μία από τις εξής δύο καταστάσεις:

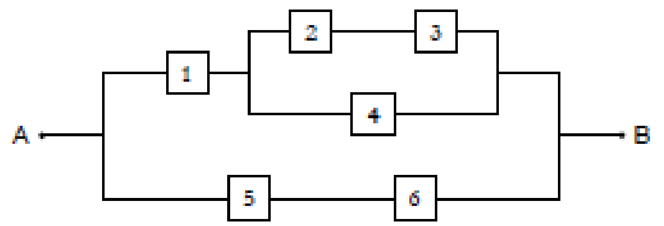
α) μη λειτουργία (failed, off)
β) λειτουργία (functioning, on).

Το σύστημα ανάλογα με το ποιες μονάδες του λειτουργούν και ποιες όχι, μπορεί και αυτό να βρεθεί σε μία από τις δύο καταστάσεις: λειτουργίας ή μη λειτουργίας.

Γενικά η έννοια της αξιοπιστίας για ένα σύστημα μπορεί να ορισθεί ως εξής:
«Αξιοπιστία» ενός συστήματος, ονομάζεται η πιθανότητα το σύστημα να λειτουργεί ικανοποιητικά, για ένα δοσμένο χρονικό διάστημα.

Στο Σχήμα 1.1 παρουσιάζεται ένα σύστημα αξιοπιστίας, το οποίο αποτυγχάνει αν δεν υπάρχει διαδρομή με μονάδες που να λειτουργούν από το σημείο Α προς το σημείο Β.
.

Σχήμα 1.1
Σύστημα Αξιοπιστίας



1.1 Η έννοια της συνάρτησης δομής

Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα με n το πλήθος μονάδες, συνδεδεμένες μεταξύ τους με ένα συγκεκριμένο τρόπο. Για να περιγράψουμε την κατάσταση της i μονάδας κάποια συγκεκριμένη στιγμή, θα χρησιμοποιήσουμε τη δίτιμη μεταβλητή

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{αν η } i\text{-μονάδα λειτουργεί} \\ 0 & \text{αν η } i\text{-μονάδα δεν λειτουργεί} \end{cases} \tag{1.1.1}$$

για $i = 1,2,\ldots,n$.

Θεωρούμε τώρα ένα τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{x}$, με συντεταγμένες τις καταστάσεις των n μονάδων του συστήματος. Αυτό λέγεται **διάνυσμα κατάστασης** και έχει τη μορφή $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$. Με τη βοήθεια αυτού μπορούμε να δούμε την κατάσταση λειτουργίας όλων των μονάδων τη στιγμή που θέλουμε.

Το σύστημα σύμφωνα με το ποιές μονάδες λειτουργούν και ποιές όχι δύναται να βρεθεί σε δύο καταστάσεις : λειτουργίας ή μη λειτουργίας. Για να περιγράψουμε την κατάσταση ενός συστήματος θα χρησιμοποιήσουμε την δείκτρια συνάρτηση που ορίζεται ως

$$\varphi(\mathbf{x})=\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{cases} 1 & \text{αν το σύστημα λειτουργεί} \\ 0 & \text{αν το σύστημα δεν λειτουργεί.} \end{cases} \tag{1.1.2}$$

Η κατάσταση ενός συστήματος μια συγκεκριμένη στιγμή εκφράζεται από τη συνάρτηση δομής $\varphi(\mathbf{x})$. Αυτό σημαίνει ότι καθορίζεται από τις καταστάσεις των μονάδων που το αποτελούν. Η συνάρτηση δομής $\varphi(\mathbf{x})$ εκφράζεται συναρτήσει του διανύσματος κατάστασης $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$. Θα μπορούσαμε λοιπόν να ορίσουμε τυπικά τη συνάρτηση δομής ως εξής:

Ορισμός 1.1.1. *Μία συνάρτηση $\varphi:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ η οποία σε κάθε ένα διάνυσμα κατάστασης $\mathbf{x}$ των μονάδων του συστήματος απεικονίζει την κατάσταση $\varphi(\mathbf{x})$ του συστήματος λέγεται **συνάρτηση δομής** (structure function) του συστήματος.*

Αν τώρα εισάγουμε στο μοντέλο μας την έννοια του χρόνου αυτά που έχουμε ήδη ορίσει παίρνουν την παρακάτω μορφή. Η κατάσταση της i-μονάδας τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή t θα περιγράφεται από τη δίτιμη τυχαία μεταβλητή (τ.μ)

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{αν η } i\text{-μονάδα λειτουργεί τη χρονική στιγμή } t \\ 0 & \text{αν η } i\text{-μονάδα δεν λειτουργεί τη χρονική στιγμή } t\,. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

Θεωρούμε ως διάνυσμα κατάστασης των μονάδων το $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_{\mathrm{n}})$.
Ομοίως η συνάρτηση δομής του συστήματος θα εκφράζεται από την παρακάτω συνάρτηση

$$\varphi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{αν το σύστημα λειτουργεί τη χρονική στιγμή } t \\ 0 & \text{αν το σύστημα δεν λειτουργεί τη χρονική στιγμή } t\,. \end{cases} \tag{1.1.4}$$

1.2 Μονότονα συστήματα

Αν θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα σύστημα το οποίο περιέχει και χαλασμένες μονάδες, τότε αν αντικαταστήσουμε τις μονάδες αυτές με άλλες που λειτουργούν, το αποτέλεσμα που περιμένουμε να έχουμε είναι, ένα σύστημα βελτιωμένο ή τουλάχιστον να έχει παραμείνει στην ίδια κατάσταση. Για το λόγο αυτό η μελέτη μας θα περιοριστεί σε συστήματα με αυτή την ιδιότητα. Τέτοια συστήματα ονομάζονται «μονότονα συστήματα» και έχουν ορισμένες ιδιότητες οι οποίες διευκολύνουν την μελέτη τους.

Ορισμός 1.2.1. *Ένα σύστημα ονομάζεται* ***μονότονο*** (*coherent structure*) *αν ισχύουν τα εξής:*
(*α*) *Η συνάρτησης δομής του $\varphi(\mathbf{x})$ είναι αύξουσα , που σημαίνει ότι*

$$\text{αν } x_i \le y_i \text{ τότε } \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1,\ldots,x_n) \le \varphi(y_1,\ldots,y_n) = \varphi(\mathbf{y})$$

για $i=1,\ldots,n$.
(Η σχέση $x_i < y_i$ σημαίνει ότι η κατάσταση x_{i} της μονάδας είναι χειρότερη από την y_i)
(*β*) *Κάθε μονάδα του επηρεάζει το σύστημα, δηλαδή η $\varphi(\mathbf{x})$ δεν είναι σταθερή ως προς κάποια συντεταγμένη.*

Αν για τα διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{0,1\}^n$ ισχύει $x_i \le y_i$ για κάθε $i=1,2,\ldots,n$ θα γράφουμε $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$.
Αν ισχύει $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$ και $\mathbf{x} \ne \mathbf{y}$ θα γράφουμε $\mathbf{x} < \mathbf{y}$.

Η πρώτη συνθήκη του Ορισμού 1.2.1 γράφεται στη μορφή $\mathbf{x} \le \mathbf{y} \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}) \le \varphi(\mathbf{y})$. Η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με το ότι η συνάρτηση φ είναι αύξουσα κατά συντεταγμένες δηλαδή για όλα τα $i=1,2,\ldots,n$ θα ισχύει $\varphi(0_i,\mathbf{x}) \le \varphi(1_i,\mathbf{x})$ για κάθε **x.**
(Οι συναρτήσεις δομής αυτές είναι της μορφής $\varphi(0_i,\mathbf{x}) = \varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)$ $\varphi(1_i,\mathbf{x}) = \varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)$ και η σημασία τους αντίστοιχα είναι ότι η i-μονάδα δεν λειτουργεί ενώ η i-μονάδα λειτουργεί).
Προφανώς, αν η φ είναι αύξουσα κατά συντεταγμένες, τότε για κάθε $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$ θα ισχύει $\varphi(\mathbf{x}) \le \varphi(y_1,x_2,\ldots,x_n) \le \varphi(y_1,y_2,x_3,\ldots,x_n) \le \ldots \le \varphi(\mathbf{y})$.

Για κάθε μονότονο σύστημα ισχύουν οι ισότητες $\varphi(\mathbf{0})=0$, $\varphi(\mathbf{1})=1$. Πράγματι αν θεωρήσουμε ότι $\varphi(\mathbf{0})=1$ τότε αφού η φ είναι μονότονη θα ισχύει ότι $1=\varphi(\mathbf{0})\leq\varphi(\mathbf{x})\leq 1$ για κάθε $\mathbf{x}$. Επομένως θα ισχύει $\varphi(\mathbf{x})=1$ για κάθε $\mathbf{x}$, το οποίο είναι άτοπο λόγω της συνθήκης (β) .Ομοίως μπορούμε να αποδείξουμε και την σχέση $\varphi(\mathbf{1})=1$.

1.3 Ελάχιστα σύνολα λειτουργίας και ελάχιστα σύνολα διακοπής

Η μελέτη των μονότονων συστημάτων γίνεται πιο εύκολη και ενδιαφέρουσα με την χρήση των ελάχιστων συνόλων λειτουργίας και των ελάχιστων συνόλων διακοπής. Τα σύνολα λειτουργίας ενός μονότονου συστήματος είναι σύνολα μονάδων του συστήματος των οποίων η λειτουργία είναι προϋπόθεση για τη λειτουργία του συστήματος. Αναλόγως τα σύνολα διακοπής ενός μονότονου συστήματος είναι σύνολα μονάδων των οποίων η μη λειτουργία έχει ως αποτέλεσμα την μη λειτουργία του συστήματος.

Ορισμός 1.3.1. *Θεωρούμε ως συνάρτηση δομής ενός μονότονου συστήματος με n το πλήθος μονάδες, τη* $\varphi(\mathbf{x})$. Τότε

- *Ένα διάνυσμα κατάστασης* $x\in\{0,1\}^n$ *θα ονομάζεται* ***διάνυσμα λειτουργίας*** *(δ.λ, path vector) αν* $\varphi(\mathbf{x})=1$.
- *Ένα διάνυσμα κατάστασης* $x\in\{0,1\}^n$ *θα λέγεται* ***ελάχιστο διάνυσμα λειτουργίας*** *(ε.δ.λ, minimal path vector) αν* $\varphi(\mathbf{x})=1$ *και* $\varphi(\mathbf{y})=0$ *για κάθε* $\mathbf{y} < \mathbf{x}$.
- *Ένα διάνυσμα κατάστασης* $x\in\{0,1\}^n$ *θα ονομάζεται* ***διάνυσμα διακοπής*** *(δ.δ, cut vector) αν* $\varphi(\mathbf{x})=0$.
- *Ένα διάνυσμα κατάστασης* $x\in\{0,1\}^n$ *θα λέγεται* ***ελάχιστο διάνυσμα διακοπής*** *(ε.δ.δ, minimal cut vector) αν* $\varphi(\mathbf{x})=0$ *και* $\varphi(\mathbf{y})=1$ *για κάθε* $\mathbf{y} > \mathbf{x}$.

Ορισμός 1.3.2. *Έστω φ μία μονότονη συνάρτηση δομής.*

- *Αν το* $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ *είναι ένα διάνυσμα λειτουργίας του συστήματος, τότε το σύνολο* $P_{\mathbf{x}}=\{i: x_i=1\}$, *ονομάζεται* ***σύνολο λειτουργίας*** (*σ.λ, path set*). *Αντίστοιχα αν το* $\mathbf{x}$ *είναι ελάχιστο διάνυσμα λειτουργίας, τότε το* $P_{\mathbf{x}}$ *θα ονομάζεται* ***ελάχιστο σύνολο λειτουργίας*** (*ε.σ.λ, minimal path set*).
- *Αν τώρα το* $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ *είναι ένα διάνυσμα διακοπής, τότε το σύνολο* $C_{\mathbf{x}}=\{i: x_i=0\}$, *θα ονομάζεται* ***σύνολο διακοπής*** (*σ.δ,* cut *set*), *ενώ αν το* $\mathbf{x}$ *είναι ελάχιστο διάνυσμα διακοπής, το* $C_{\mathbf{x}}$ *θα ονομάζεται* ***ελάχιστο σύνολο διακοπής*** (*ε.σ.δ, minimal cut set*).

Συμβολίζουμε το σύνολο όλων των ελάχιστων συνόλων λειτουργίας (ε.σ.λ.) με **P** και το σύνολο όλων των ελάχιστων συνόλων διακοπής (ε.σ.δ.) με **C**. Αν ένα $\mathbf{x}$ είναι διάνυσμα λειτουργίας τότε και κάθε $\mathbf{y}\geq\mathbf{x}$ είναι επίσης διάνυσμα λειτουργίας. Ομοίως αν $\mathbf{x}$ είναι ένα διάνυσμα διακοπής τότε και κάθε $\mathbf{y}\leq\mathbf{x}$ είναι διάνυσμα διακοπής. Για κάθε σ.λ., υπάρχει ένα ε.σ.λ το οποίο είναι υποσύνολό του.

Από τον ορισμό των ε.σ.λ και των ε.σ.δ έχουμε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη λειτουργία ενός μονότονου συστήματος ($\varphi(\mathbf{x})=1$) είναι η λειτουργία όλων των μονάδων κάποιου ε.σ.λ. Όμοια, αν υπάρχει ένα ε.σ.δ. με όλες τις μονάδες χαλασμένες, αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για την αποτυχία του συστήματος ($\varphi(\mathbf{x})=0$). Δηλαδή μία πιο απλή επεξήγηση των παραπάνω είναι ότι, ένα μονότονο σύστημα λειτουργεί αν και μόνο αν λειτουργούν όλες οι μονάδες κάποιου ε.σ.λ και χαλάει αν και μόνο αν χαλάσουν όλες οι μονάδες κάποιου ε.σ.δ. Οποιοδήποτε υπερσύνολο ενός συνόλου λειτουργίας (διακοπής) είναι και αυτό σύνολο λειτουργίας (διακοπής). Τέλος κάθε υποσύνολο ενός ε.σ.λ. (ε.σ.δ.) είναι σύνολο διακοπής (λειτουργίας).

1.4 Δυικά συστήματα

Είναι γνωστό ότι για κάθε συνάρτηση φ: $\{0,1\}^n \to \varphi$ $\{0,1\}$, η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες ενός μονότονου συστήματος με σύνολο μονάδων $\{1,2,\ldots,n\} \equiv \mathrm{I}_n$, υπάρχει ένα μονότονο σύστημα με συνάρτηση δομής τη φ. Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση φ^D η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$\phi_D(\mathbf{x}) = 1 - \phi(\mathbf{1} - \mathbf{x}) \qquad (1.3.1)$$

όπου $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ και $\mathbf{1}\text{-}\mathbf{x} = (1\text{-}x_1,\ldots,1\text{-}x_n)$. Τότε η ϕ_D είναι συνάρτηση δομής ενός μονότονου συστήματος με το ίδιο σύνολο μονάδων. Το σύστημα αυτό ονομάζεται **δυϊκό** (dual) του αρχικού (πρωτεύον).

Αφού εξ'ορισμού είναι $\phi_D(\mathbf{x}) = 1 - \phi(\mathbf{1} - \mathbf{x})$, θα ισχύει και η σχέση $\phi_D(\mathbf{1} - \mathbf{x}) = 1 - \phi(\mathbf{x})$, οπότε θα έχω ότι $\varphi(\mathbf{x})=0 \Leftrightarrow \phi_D(\mathbf{1} - \mathbf{x}) = 1$ και $\phi_D(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \phi(\mathbf{1} - \mathbf{x}) = 1$.

Τα παραπάνω έχουν ως αποτέλεσμα τα εξής:

- το **x** είναι ε.δ.λ (ή δ.λ.) του πρωτεύοντος αν και μόνο αν το **1-x** είναι ε.δ.δ (ή δ.δ.) του δυϊκού.
- το **x** είναι ε.δ.δ (ή δ.δ.) του πρωτεύοντος αν και μόνο αν το **1-x** είναι ε.δ.λ (ή δ.λ.) του δυϊκού.

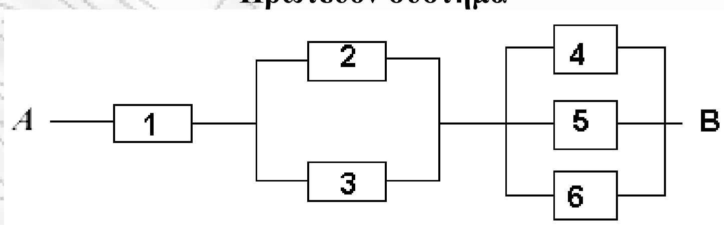
Επίσης

- κάθε ε.σ.λ (ή σ.λ.) του πρωτεύοντος είναι ε.σ.δ (ή σ.δ.) του δυϊκού
- κάθε ε.σ.δ (ή σ.δ.) του πρωτεύοντος είναι ε.σ.λ (ή σ.λ.) του δυϊκού.

Τέλος θα ισχύει ότι : $(\phi^D)^D = \phi$, δηλαδή το δυικό του δυϊκού είναι το πρωτεύον.

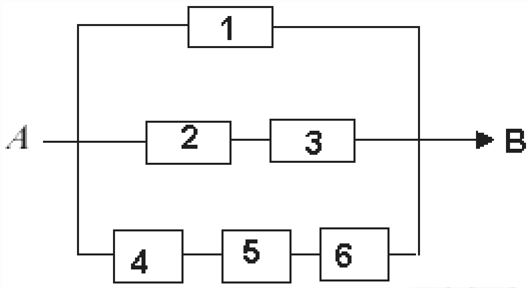
Παράδειγμα 1.4.1. Ας θεωρήσουμε ως πρωτεύον σύστημα αυτό το οποίο απεικονίζεται στο Σχήμα 1.4.1.

Σχήμα 1.4.1
Πρωτεύον σύστημα



Σε αυτό το σύστημα τα ε.σ.δ, δηλαδή τα ελάχιστα σύνολα των μονάδων τα οποία αν χαλάσουν, θα επακολουθήσει η αποτυχία του συστήματος, δηλαδή δεν θα υπάρχει διαδρομή με μονάδες σε λειτουργία από το Α προς το Β, είναι τα $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2,3\}$, $C_3 = \{4,5,6\}$. Επομένως τα ε.σ.λ του δυϊκού του είναι τα $P_1^D = \{1\}, P_2^D = \{2,3\}$, $P_3^D = \{4,5,6\}$. Έτσι το δυϊκό σύστημα μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά ως εξής:

Σχήμα 1.4.2
Δυϊκό σύστημα



1.5 Υπολογισμός της Αξιοπιστίας Συστημάτων

Το βασικό αντικείμενο της επιστήμης της Θεωρίας Αξιοπιστίας είναι ο υπολογισμός της αξιοπιστίας ενός συστήματος. Στη συνέχεια θα δώσουμε τις πλέον συνήθεις τεχνικές που υπάρχουν στη σχετική βιβλιογραφία και χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας, οποιουδήποτε μονότονου συστήματος.

Υποθέτουμε ότι οι καταστάσεις κάθε μονάδας του συστήματος που θα μελετήσουμε είναι τυχαίες μεταβλητές και ότι σύμφωνα με κάποια στατιστική μελέτη έχουν εκτιμηθεί οι πιθανότητες λειτουργίας όλων των μονάδων σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Η κάθε μονάδα βρίσκεται σε κάποια κατάσταση X_i συνοδευόμενη από μία πιθανότητα. Η πιθανότητα λειτουργίας της i-μονάδας είναι p_i (i=1,2,…,n) και ονομάζεται **αξιοπιστία της *i*-μονάδας**. Αυτή εκφράζεται από τον τύπο

$$p_i = E(X_i) = P(X_i = 1)\ . \qquad (1.5.1)$$

Επίσης η πιθανότητα αποτυχίας της μονάδας, δηλαδή η πιθανότητα μη λειτουργίας της είναι η εξής:

$$q_i = P(X_i = 0) = 1 - p_i\ . \qquad (1.5.2)$$

Στην ανάλυσή μας οι μονάδες του συστήματος θα θεωρούνται ότι λειτουργούν ανεξάρτητα επομένως οι τυχαίες μεταβλητές X_i θεωρούνται στοχαστικά ανεξάρτητες Αν οι μονάδες του συστήματος είναι όμοιες, δηλαδή ισχύει $p_i=p$, για i=1,2,…,n τότε θα λέμε ότι το σύστημα είναι i.i.d (identically independently distributed).

Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα με συνάρτηση δομής την $\varphi(\mathbf{X})$. Τότε η **αξιοπιστία *R*** (Reliability) εκφράζεται με τη βοήθεια της συνάρτησης δομής ως εξής:

$$P(\varphi(\mathbf{X})=1) = R = E(\varphi(\mathbf{X}))\ . \qquad (1.5.3)$$

Η πιθανότητα λειτουργίας ενός συστήματος λέγεται αξιοπιστία. Από την άλλη, η πιθανότητα να μην λειτουργεί ένα σύστημα, δηλαδή η πιθανότητα αποτυχίας του δίνεται από τον εξής τύπο:

$$F = P(\varphi(\mathbf{X})=0) = 1 - R = 1 - E(\varphi(\mathbf{X})) \qquad (1.5.4)$$

και λέγεται **αναξιοπιστία** του συστήματος.

Η αξιοπιστία R, όταν έχουμε ανεξάρτητες μονάδες, γράφεται συναρτήσει των πιθανοτήτων λειτουργίας της κάθε μονάδας p_i ως: R=R (**p**), όπου **p**= (p_1, p_2,…,p_n). Ουσιαστικά η διαδικασία που ακολουθούμε είναι να βρούμε τη συνάρτηση δομής του συστήματος μέσω κάποιας από τις μεθόδους που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια και έπειτα να υπολογίσουμε την μέση τιμή της .

Μερικές ιδιότητες της συνάρτησης αξιοπιστίας ενός συστήματος είναι οι παρακάτω:

- Η R(**p**) είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού ως προς κάθε μία από τις n μεταβλητές $p_1,p_2,\ldots,p_n$.
- Στην περίπτωση που έχουμε iid μονάδες η R(**p**) είναι πολυώνυμο το πολύ n βαθμού ως προς p.
- Ισχύει ότι $R(\mathbf{0})=0, R(\mathbf{1})=1$.
- Η συνάρτηση αξιοπιστίας του δυϊκού συστήματος εκφράζεται μέσω της συνάρτησης αξιοπιστίας του πρωτεύοντος από την σχέση $R^D(p)=1-R(\mathbf{1-p})$.

Πρόταση 1.5.1.

- *Η αξιοπιστία R(**p**) ενός μονότονου συστήματος είναι αύξουσα συνάρτηση για κάθε p_i, $i=1,2,\ldots,n$. Επίσης αν ισχύει ότι $0<p_i<1$ τότε η R(**p**) είναι γνησίως αύξουσα .*
- *Η αξιοπιστία ενός i.i.d συστήματος, ($p_i=p$) είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση του p και ισχύει $p^n \le R(p) \le 1-(1-p)^n$. Επίσης αν ισχύει ότι $0<p<1$ τότε η R(**p**) είναι γνησίως αύξουσα.*

Επομένως η αξιοπιστία ενός μονότονου συστήματος αυξάνεται αν αυξάνεται και η πιθανότητα να λειτουργήσει κάποια μονάδα του. Όταν όλες οι μονάδες του συστήματος λειτουργούν τότε το σύστημα θα λειτουργήσει ενώ αν όλες οι μονάδες χαλάσουν το σύστημα θα χαλάσει.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση δομής ενός συστήματος και μέσω αυτών των τρόπων θα μπορέσουμε να υπολογίσουμε την αξιοπιστία.

I. Υπολογισμός της αξιοπιστίας μέσω των ε.σ.λ και ε.σ.δ

Ένας τρόπος να υπολογίσουμε τη συνάρτηση δομής ενός συστήματος είναι μέσω των ε.σ.λ και ε.σ.δ. Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι η παρακάτω :
Έστω ότι έχουμε ένα μονότονο σύστημα αξιοπιστίας με οικογένειες ε.σ.λ και ε.σ.δ τις **P**=$\{P_1,\ldots,P_M\}$ και **C**=$\{C_1,\ldots,C_N\}$ αντίστοιχα, όπου M είναι το πλήθος των ε.σ.λ και N το πλήθος των ε.σ.δ.

Πρόταση 1.5.2. *Η συνάρτηση δομής του συστήματος δίνεται από τη σχέση:*

$$\phi(x) = \max_{j\in\{1,2,\ldots,M\}} \prod_{i\in P_j} x_i = \coprod_{j=1}^{M} \prod_{i\in P_j} x_i = 1-\prod_{j=1}^{M}(1-\prod_{i\in P_j} x_i) . \tag{1.5.5}$$

Πρόταση 1.5.3. *Η συνάρτηση δομής του συστήματος θα δίνεται από τη σχέση:*

$$\phi(x) = \min_{j\in\{1,2,\ldots,N\}} (1-\prod_{i\in C_j}(1-x_i)) = \prod_{j=1}^{N}(1-\prod_{i\in C_j}(1-x_i)) = \prod_{j=1}^{N}\coprod_{i\in C_j} x_i . \tag{1.5.6}$$

Εν συνεχεία εφαρμόζοντας τον τύπο $R=E(\varphi(\mathbf{X}))$ μπορούμε να υπολογίσουμε την αξιοπιστία του συστήματος που θέλουμε.

II. Υπολογισμός της αξιοπιστίας μέσω της μεθόδου «διάσπαση σε υποσυστήματα»

Ένας άλλος τρόπος να υπολογίσουμε τη συνάρτηση δομής ενός συστήματος είναι, να χωρίσουμε το σύστημα σε μικρότερα υποσυστήματα (modules), καθένα από τα οποία θα αποτελείται από διαφορετικές μονάδες. Υπολογίζοντας τη συνάρτηση δομής των υποσυστημάτων και εν συνεχεία θεωρώντας τα υποσυστήματα ως μονάδες υπολογίζουμε και τη συνάρτηση δομής ολόκληρου του συστήματος . Η διαδικασία αυτή λέγεται **διάσπαση σε υποσυστήματα** (modular decomposition).

Ορισμός 1.5.1 *Έστω ένα μονότονο σύστημα με σύνολο μονάδων* $\{1,2,\ldots,n\} \equiv I_n$ *και συνάρτηση δομής τη φ. Υποθέτουμε ότι το σύνολο των μονάδων του χωρίζεται σε* M_i *υποσύνολα,* $i=1,2,\ldots,r$, *δηλαδή τα* M_i *είναι υποσύνολα του* I_n *για τα οποία θα ισχύει* :

$$M_i \cap M_j = \varnothing \ \text{ για } i \neq j \text{ και } \bigcup_{i=1}^{r} M_i = I_n$$

(το $\{ M_i, i=1,2,\ldots,r \}$ *είναι μία διαμέριση του συνόλου των μονάδων* I_n *)*
Αν θεωρήσω τις $\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_r$ *ως συναρτήσεις δομής που αντιστοιχούν στα σύνολα* $M_1,M_2,\ldots,M_r$ *αντίστοιχα , τότε η συνάρτηση δομής φ του συστήματος παίρνει την εξής μορφή*

$$\phi(\mathbf{x}) = \xi(\psi_1(x^{M_1}), \psi_2(x^{M_2}), \ldots, \psi_r(x^{M_r})) \qquad (1.5.7)$$

όπου $\xi = \xi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r)$ *είναι μία συνάρτηση δομής, στην οποία οι καταστάσεις των μονάδων χαρακτηρίζονται από το διάνυσμα* $\mathbf{y} = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r)$. *Αν ισχύουν τα παραπάνω θα λέμε ότι έχουμε διάσπαση σε modules (modular decomposotion) του αρχικού συστήματος.*

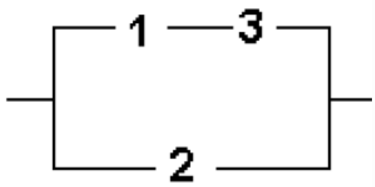
Με τη βοήθεια του τύπου της αξιοπιστίας που παρουσιάσαμε πιο πάνω, έχουμε τη δυνατότητα να υπολογίσουμε την αξιοπιστία του συστήματος. Επομένως θα ισχύει:

$$R = E(\phi(X)) = E(\xi(\psi_1(x^{M_1}), \psi_2(x^{M_2}), \ldots, \psi_r(x^{M_r}))) = R_\xi(R_{\psi_1}, R_{\psi_2}, \ldots, R_{\psi_r}) .$$

Τα R_{ψ_i} είναι οι αξιοπιστίες των modules και το R_ξ είναι η αξιοπιστία του συστήματος με συνάρτησης δομής την ξ.
Στην i.i.d περίπτωση ο τύπος απλουστεύεται ως εξής: $R(p) = R_\xi(R_\psi(p))$.
Η μέθοδος modular decomposition είναι χρήσιμη κυρίως σε μεγάλα συστήματα. Αρχικά υπολογίζουμε την αξιοπιστία των modules, των υποσυστημάτων, τα οποία αντιμετωπίζουμε ως μονάδες και στη συνέχεια υπολογίζουμε την αξιοπιστία ολόκληρου του συστήματος που αποτελείται από τα modules (του αρχικού).

Παράδειγμα 1.5.1. Ας θεωρήσουμε το σύστημα που απεικονίζεται στο Σχήμα 1.5.1. Θα χρησιμοποιήσουμε τα ε.σ.λ για να κάνουμε την διάσπαση σε modules.

Σχήμα 1.5.1
Σύστημα διασπόμενο σε modules



Το σύστημα του Σχήματος 1.5.1 διασπάται σε δύο υποσυστήματα, ένα αποτελούμενο από την μονάδα 2 και το άλλο αποτελούμενο από τις μονάδες 1,3. Επομένως μία διαμέριση των μονάδων είναι η M_1={1,3} και M_2={2}, με

$$\psi_1(x^{M_1}) = x_1 x_3,\ \psi_2(x^{M_2}) = x_2 \text{ και } \xi(\psi_1,\psi_2) = 1-(1-\psi_1)(1-\psi_2).$$

Άρα η συνάρτηση δομής του συστήματος είναι η

$$\phi(\mathbf{x}) = \xi(\psi_1(x^{M_1}),\psi_2(x^{M_2})) = \prod_{i=1}^{2}\psi_i(x^{Mi}) \Rightarrow \phi(\mathbf{x}) = (1-(1-x_1x_3)(1-x_2)).$$

Γενικά, εάν ένα σύστημα έχει ε.σ.δ. (ή ε.σ.λ.) ξένα ανά δυο, τότε μπορεί να διασπαστεί σε modules.

∎

III. Υπολογισμός της αξιοπιστίας μέσω της μεθόδου «διάσπαση με οδηγό στοιχείο»

Η τεχνική αυτή μας βοηθάει να αναλύσουμε και να βρούμε τη δομή του συστήματος (που σημαίνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση δομής του), επομένως να εκτιμήσουμε και την αξιοπιστία ενός συστήματος, δεσμεύοντας ως προς το αν λειτουργεί ή όχι ένα στοιχείο του (μονάδα ή πλήθος μονάδων). Χρησιμοποιούμε το στοιχείο αυτό σαν οδηγό για την εύρεση της αξιοπιστίας του συστήματος. Αρχικά υπολογίζουμε την αξιοπιστία για την περίπτωση που λειτουργεί και για την περίπτωση που δεν λειτουργεί το στοιχείο που έχουμε θεωρήσει ως οδηγό. Τέλος συνδυάζουμε αυτές τις δύο ποσότητες για να βρούμε τη συνολική αξιοπιστία του συστήματος. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **διάσπαση με οδηγό στοιχείο** (pivotal decomposition).

Πρόταση 1.5.4 *Αν φ είναι η συνάρτηση δομής ενός συστήματος με n μονάδες τότε για κάθε* $\mathbf{x} = (x_1,\ldots\ldots,x_n) \in \{0,1\}^n$ *ισχύει*

1) $\varphi(\mathbf{x}) = x_i\,\varphi(1_i,x) + (1-x_i)\,\varphi(0_i,x)$ για $i=1,2,\ldots,n$ (1.5.8)

2) $\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{y\in\{0,1\}^n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{y_i}(1-x_i)^{1-y_i}\right)\phi(y)$ (1.5.9)

όπου η $\varphi(1_i,\mathbf{x}) = \varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1}, 1, x_{i+1},\ldots,x_n)$ είναι η συνάρτηση δομής όταν η i μονάδα λειτουργεί και η $\varphi(0_i,\mathbf{x}) = \varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1}, 0, x_{i+1},\ldots,x_n)$ είναι η συνάρτηση δομής όταν η i μονάδα δεν λειτουργεί.

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω τύπους προκύπτει η αξιοπιστία του συστήματος που εκφράζεται αντίστοιχα ως

1) $R(\mathbf{p}) = p_i\,R(1_i,\mathbf{p}) + (1-p_i)\,R(0_i,\mathbf{p})$ για $i=1,2,\ldots,n$

2) $R(\mathbf{p}) = \sum_{y\in\{0,1\}^n} \left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{y_i}(1-p_i)^{1-y_i}\right)\phi(\mathbf{y})$

όπου $(1_i,\mathbf{p}) = (p_1,p_2,\ldots,p_{i-1}, 1, p_{i+1},\ldots,p_n)$ και $(0_i,\mathbf{p}) = (p_1,p_2,\ldots,p_{i-1},0, p_{i+1},\ldots,p_n)$.

IV. Υπολογισμός της αξιοπιστίας μέσω της μεθόδου Εγκλεισμού –Αποκλεισμού

Ένας διαδεδομένος τρόπος υπολογισμού της αξιοπιστίας R ενός μονότονου συστήματος είναι μέσω της **μεθόδου εγκλεισμού-αποκλεισμού** (Inclusion-Exclusion method), στην οποία χρησιμοποιούμε επίσης τα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας και ελάχιστα σύνολα διακοπής. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται στην εύρεση φραγμάτων αξιοπιστίας και στον υπολογισμό αξιοπιστίας μεγάλων συστημάτων.

Έστω ότι τα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας και διακοπής ενός μονότονου συστήματος είναι τα εξής : $\mathbf{P}=\{P_1,P_2,\ldots,P_M\}$ και $\mathbf{C}=\{C_1,C_2,\ldots,C_N\}$. Ορίζουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα:
A_j: λειτουργούν όλες οι μονάδες του j-οστού ε.σ.λ P_j, $j=1,2,\ldots,M$
B_j : έχουν αποτύχει όλες οι μονάδες του j-οστού ε.σ.δ. C_j, $j=1,2,\ldots,N$.

Το σύστημα βρίσκεται σε λειτουργία αν και μόνο αν λειτουργούν όλες οι μονάδες ενός ε.σ.λ., άρα $R = P(\phi(\mathbf{X})=1) = P(A_1 \cup A_1 \ldots.. \cup A_M)$.
Ομοίως το σύστημα αποτυγχάνει αν και μόνο αν αποτύχουν όλες οι μονάδες ενός ε.σ.δ., επομένως $1-R = P(\phi(\mathbf{X})=0) = P(B_1 \cup B_1 \ldots.. \cup B_N)$.
Θα κάνουμε χρήση του τύπου Poincare, ο οποίος αναφέρεται στην πιθανότητα ένωσης ενδεχομένων. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.5.5. *Αν $E_1,E_2,\ldots,E_n$ οποιαδήποτε ενδεχόμενα τότε*

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots..E_n) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} S_r = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots... + (-1)^{n-1} S_n$$

όπου $S_r = S_{n,r} = \sum_{\substack{\{a_1,a_2,\ldots.a_r\} \\ \subseteq \{1,2,\ldots.n\}}} P(E_{a_1} \cap E_{a_2} \cap \ldots. \cap E_{a_r})$.

Με τη χρήση των παραπάνω αποτελεσμάτων προκύπτει η επόμενη πρόταση πιο κάτω για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας οποιουδήποτε μονότονου συστήματος με γνωστά ε.σ.λ και ε.σ.δ.

Πρόταση 1.5.6. *Έστω ένα μονότονο σύστημα με ε.σ.λ* $\mathbf{P}=\{P_1,P_2,\ldots,P_M\}$ *και ε.σ.δ* $\mathbf{C}=\{C_1,C_2,\ldots,C_N\}$ *αντίστοιχα. Τότε η αξιοπιστία του συστήματος θα δίνεται από τους τύπους*

- $$R = P\left(\bigcup_{i=1}^{M} Ai\right) = \sum_{r=1}^{M} (-1)^{r-1} S_r \qquad (1.5.10)$$

όπου

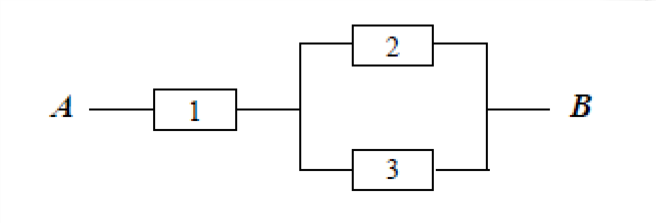
$$S_r = \sum_{\substack{\{a_1,a_1,\ldots.a_r\} \\ \subseteq \{1,2\ldots..M\}}} P\left(\bigcap_{j=1}^{r} A_{a_j}\right) \quad \text{και} \quad P\left(\bigcap_{j=1}^{r} A_{a_j}\right) = P\left(X_i = 1, i \in \bigcup_{j=1}^{r} P_{a_j}\right) = \prod_{i \in \bigcup_{j=1}^{r} P_{a_j}} p_i .$$

- $$R = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) = 1 - \sum_{r=1}^{N} (-1)^{r-1} S_r \qquad (1.5.11)$$

όπου

$$S_r = \sum_{\substack{\{a_1,a_1,\ldots,a_r\} \\ \subseteq\{1,2,\ldots,N\}}} P(\bigcap_{j=1}^{r} B_{a_j}) \quad \text{και} \quad P(\bigcap_{j=1}^{r} B_{a_j}) = \prod_{i \in \bigcup_{j=1}^{r} C_{a_j}} (1-p_i)\,.$$

Παράδειγμα 1.5.2. Έστω ότι έχουμε το σύστημα του επόμενου σχήματος



Τα ε.σ.λ είναι τα $P_1=\{1,2\}$, $P_2=\{1,3\}$. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

A_1: να λειτουργούν όλες οι μονάδες του ε.σ.λ P_1, δηλαδή οι μονάδες 1 και 2

A_2: να λειτουργούν όλες οι μονάδες του ε.σ.λ P_2, δηλαδή οι μονάδες 1 και 3.

Η αξιοπιστία θα λαμβάνεται από τον τύπο

$$R = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) =$$
$$P(X_1=1, X_2=1) + P(X_1=1, X_3=1) - P((X_1=1, X_2=1)(X_1=1, X_3=1) =$$
$$P(X_1=1)P(X_2=1) + P(X_1=1)P(X_3=1) - P(X_1=1)P(X_2=1)P(X_3=1) =$$
$$p_1p_2 + p_1p_3 - p_1p_2p_3.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τα ε.σ.δ που είναι τα $C_1=\{1\}$, $C_2=\{2,3\}$ θα ορίσουμε τα ενδεχόμενα

B_1 : έχουν αποτύχει όλες οι μονάδες του ε.σ.δ C_1, δηλαδή οι μονάδα 1

B_2 : έχουν αποτύχει όλες οι μονάδες του ε.σ.δ C_2, δηλαδή οι μονάδες 2 και 3.

Άρα ο τύπος της αξιοπιστίας θα είναι

$$R = 1 - P(B_1 \cup B_2) = 1 - P(B_1) - P(B_2) + P(B_1B_2) =$$
$$1 - P(X_1=0) - P(X_2=0, X_3=0) + P(X_1=0, X_2=0 X_3=0) =$$
$$1-(1-p_1)-(1-p_2)(1-p_3)+(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) =$$
$$p_1p_2 + p_1p_3 - p_1p_2p_3.$$

■

V. Συστήματα εμφυτευμένα σε Μαρκοβιανές αλυσίδες και ο υπολογισμός της αξιοπιστίας τους

Οι μέθοδοι οι οποίοι έχουμε αναφέρει έως τώρα μπορούν να εφαρμοστούν εύκολα σε συστήματα «μικρά», δηλαδή με μικρό αριθμό μονάδων. Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε μία μέθοδο που διευκολύνει τον υπολογισμό της αξιοπιστίας για «μεγάλα» και περίπλοκα συστήματα, και είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στις περιπτώσεις που δεν είναι δυνατόν να γίνουν υπολογισμοί με βάση τις προηγούμενες μεθόδους. Η τεχνική αυτή ονομάζεται **εμφύτευση των συστημάτων αξιοπιστίας σε Μαρκοβιανές αλυσίδες** (Markov Chain Imbeddable Systems, MIS).

Μία πρώτη δημοσίευση που αφορούσε το θέμα αυτό έγινε από τον *Fu* (1986), αργότερα ακολούθησαν και άλλες δημοσιεύσεις από τους *Chao and Fu* (1989, 1991) και τους *Fu and Lou* (1991) και *Koutras* (1996).

Θεωρούμε μία δομή αξιοπιστίας αποτελούμενη από *n* μονάδες, οι οποίες είναι τοποθετημένες γραμμικά και συμβολίζονται με τους αριθμούς 1,2,…,*n*. Επίσης υποθέτουμε ότι η αρχή λειτουργίας του συστήματος έχει νόημα για κάθε υποσύστημα 1,2,…,*t* όπου $t \le n$. Συνήθως η αποτυχία μίας μονότονης δομής προκύπτει από μεταβάσεις μέσα από διάφορα στάδια «χειροτέρευσης». Έστω ότι αυτά είναι τα στάδια είναι τα: 0,1,2,…,*m* (*m* σε πλήθος), το επίπεδο 0 δηλώνει την «τέλεια» κατάσταση του συστήματος (δεν υπάρχει καμία ελαττωματική μονάδα) και το *m* θα σημαίνει ότι το σύστημα βρίσκεται στην «χειρότερη» κατάσταση, είναι δηλαδή εκτός λειτουργίας.

Πρόταση 1.5.7 *Ένα σύστημα αξιοπιστίας ονομάζεται σύστημα εμφυτευμένο σε Μαρκοβιανή αλυσίδα* (*MIS*) *αν ισχύουν τα παρακάτω:*

- *Υπάρχει ένας πεπερασμένος χώρος καταστάσεων έστω* $S = \{s_0, s_1, ..., s_N\}$ *ο οποίος έχει τη δυνατότητα να διασπαστεί ως εξής* $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$ *όπου* $S_i \cap S_j = \varnothing$ *για κάθε* $i \ne j$.
- *Υπάρχει μία Μαρκοβιανή αλυσίδα* {Y_t, *t* =0,1,…} *ορισμένη στο S, έτσι ώστε*
  - i) $Y_t \in S_t$, *αν και μόνο αν το σύστημα αποτελούμενο από τις μονάδες* 1,2,…,*t* *έχει φτάσει σε i-οστό επίπεδο χειροτέρευσης* (*i*=0,1,…,*m*-1) και
  - ii) $Y_t \in S_m$, *αν και μόνο αν το σύστημα αποτελούμενο από τις μονάδες* 1,2,…,*t* *έχει χαλάσει* (*να έχει σταματήσει η λειτουργία του*).

Τώρα μπορούμε να ταξινομήσουμε το χώρο καταστάσεων *S*, έτσι ώστε $S_i = \{s_{j_i}, s_{j_i+1}, ..., s_{j_{i+1}-1}\}$, *i*=0,1,…,*m*-1 ($j_0 = 0$, j_m=*N*) και S_m ={ s_N }. Έστω ότι οι πιθανότητες μετάβασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι οι

$$p_{ij}(t) = \mathrm{P}[Y_t = s_j \mid Y_{t-1} = s_i],\ t \ge 1$$

και ο αντίστοιχος πίνακας μετάβασης $(N+1)\times(N+1)$ είναι ο $\Lambda_t=(p_{ij}(t))$. Αφού το σύνολο S_m ={ s_N } περιγράφει την αποτυχία του συστήματος, το επίπεδο s_N θα αντιστοιχεί σε μία κατάσταση απορρόφησης, επομένως

$$p_{Ni} = \begin{cases} 0, & i \ne N \\ 1, & i = N \end{cases}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η τελευταία σειρά του πίνακα Λ_t θα ισούται με (0,0,…,0,1).

Ήρθε η ώρα να ορίσουμε κάποια στοιχεία που θα μας βοηθήσουν να εξάγουμε κάποια συμπεράσματα, πριν μπούμε στη διαδικασία να υπολογίσουμε την αξιοπιστία του συστήματος.

Έστω $\mathbf{e}_j = (0,...,1,...,0)'$ τα μοναδιαία διανύσματα (στήλες) του χώρου.

Θα ισχύει

$$\mathbf{1} = \sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{e}_j = (1,1,...,1)' \text{ και } \mathbf{u}=\mathbf{1}-\mathbf{e}_{N+1} = (1,...,1,0)'.$$

Ας συμβολίσουμε με $\boldsymbol{\pi}_0$ το διάνυσμα αρχικών πιθανοτήτων της μαρκοβιανής αλυσίδας $\{Y_t\ ,t \ge 0\}$, όπου $\boldsymbol{\pi}_0 = (\mathrm{P}(Y_0 = s_0), \mathrm{P}(Y_0 = s_1), ..., \mathrm{P}(Y_0 = s_N))'$ και με R_t, F_t

την αξιοπιστία, αναξιοπιστία του υποσυστήματος 1,2,..,t $(1 \le t \le n)$ αντίστοιχα. Οι επόμενες προτάσεις μας δίνουν τύπους υπολογισμού της αξιοπιστίας και αναξιοπιστίας ενός MIS συστήματος. Οι τύποι αυτοί είναι κατάλληλοι για iid και μη-iid συστήματα.

Πρόταση 1.5.8. *Η αξιοπιστία και η αναξιοπιστία ενός MIS συστήματος δίνονται από τους τύπους*

$$R_n = \boldsymbol{\pi}_0' \left(\prod_{t=1}^{n} \Lambda_t \right) \mathbf{u}, \quad F_n = \boldsymbol{\pi}_0' \left(\prod_{t=1}^{n} \Lambda_t \right) \mathbf{e}_{N+1} .$$

Πρόταση 1.5.9. *Έστω* $\boldsymbol{\alpha}(t) = (a_0(t), a_1(t), ..., a_N(t))'$, t=1,2,…,n, *το διάνυσμα το οποίο δημιουργείται από τις αναδρομικές σχέσεις*

$$a_j(t) = \sum_{i=0}^{N} a_i(t-1)\, p_{ij}(t), \quad j=0,1,\ldots,N,$$

με αρχικές συνθήκες $\boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{\pi}_0$. *Τότε*

$$R_n = \sum_{j=0}^{N-1} a_j(n), \quad F_n = a_N(n) .$$

1.6 Φράγματα αξιοπιστίας

Η αξιοπιστία ενός συστήματος είναι από τα βασικά χαρακτηριστικά της στοχαστικής συμπεριφοράς του. Όπως έχουμε αναφέρει υπάρχουν πολλοί τρόποι υπολογισμού της αξιοπιστίας, όμως μερικές φορές δεν είναι εφικτό να χρησιμοποιηθούν επιτυχώς. Όταν τα συστήματα που έχουμε υπό μελέτη γίνονται μεγαλύτερα, αυξάνεται και ο αριθμός των πράξεων που απαιτούνται. Έτσι δημιουργήθηκε η ανάγκη να προσδιοριστούν κάποιες προσεγγιστικές τιμές. Ένας τρόπος εύρεσης προσεγγιστικών λύσεων για την αξιοπιστία των συστημάτων με μεγάλο αριθμό μονάδων είναι μέσω των φραγμάτων αξιοπιστίας. Με την βοήθεια των φραγμάτων αυτών έχουμε την δυνατότητα να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε θεωρητικά αποτελέσματα για την αξιοπιστία των μεγάλων συστημάτων (ασυμπτωτική συμπεριφορά αξιοπιστίας). Η αξιοπιστία φράσσεται από δύο ποσότητες, το άνω και το κάτω φράγμα. Με αυτόν τον τρόπο θα προσδιορίσουμε προσεγγιστικά την τιμή της .

Θα αναφερθούμε τώρα σε διάφορα φράγματα αξιοπιστίας τα οποία υπό συγκεκριμένες συνθήκες αποτελούν μία ικανοποιητική προσέγγιση για την ακριβή τιμή. Ο αναγνώστης μπορεί να βρει αναλυτικές πληροφορίες σε βιβλία αξιοπιστίας, όπως των *Barlow & Proschan* (1975).

- **Πολλαπλασιαστικά φράγματα**

Πρόταση 1.6.1. *Για κάθε μονότονο σύστημα με* n *μονάδες ισχύει*

$$LB_1 = \prod_{i=1}^{n} p_i \le R(\mathbf{p}) \le 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i) = UB_1$$

όπου **p**=(p_1,p_2,…,p_n) *οι αξιοπιστίες των μονάδων. Στην i.i.d περίπτωση έχουμε ότι* $LB_1 = p^n$ *και* $UB_1 = 1-(1-p)^n$.

Τα παραπάνω φράγματα είναι χρήσιμα στην περίπτωση που τα ε.σ.λ. και ε.σ.δ. δεν είναι γνωστά. Ωστόσο οι τιμές τους είναι συνήθως μακριά από την ακριβή τιμή της αξιοπιστίας, έτσι η ποιότητα τους δεν είναι πολύ καλή. Αυτό προκύπτει από το ότι δεν συνεκτιμάται πουθενά η δομή του εκάστοτε συστήματος. Επίσης όταν αυξάνεται ο αριθμός των μονάδων σε ένα σύστημα, οι πληροφορίες που παίρνουμε από αυτό είναι πολύ λίγες, μιας και το κάτω φράγμα πλησιάζει το μηδέν ενώ το άνω την μονάδα.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι έχουμε ένα μονότονο σύστημα με n ανεξάρτητες μονάδες, με συνάρτηση δομής τη φ και με γνωστά τα ε.σ.λ.και ε.σ.δ που τα συμβολίζουμε αντίστοιχα με **P**={P_1,P_2,…,P_M} *και* **C**= {C_1,C_2,…,C_N}.

Πρόταση 1.6.2. *Θεωρούμε ότι έχουμε ένα μονότονο σύστημα με συνάρτηση αξιοπιστίας την R = E(φ (**X**)). Τότε θα ισχύει*

$$LB_m(\mathbf{p}) = \max_{j=1,2....M} \prod_{i\in P_j} p_i \le R(\mathbf{p}) \le \min_{j=1,2....N} \{1-\prod_{i\in C_j}(1-p_i)\} = UB_m(\mathbf{p}) \ .$$

Επίσης για την i.i.d περίπτωση θα ισχύει

$$LB_m(\mathbf{p}) = p^{\min_j |P_j|} \le R(\mathbf{p}) \le 1-(1-p)^{\min_j |C_j|} = UB_m(\mathbf{p}) .$$

όπου τα $|C_i|$, $|P_i|$ *είναι ο πληθάριθμος των ε.σ.δ και ε.σ.λ. Αυτά λέγονται minimax φράγματα.*

Για τον υπολογισμό του άνω φράγματος LB_m θα χρησιμοποιήσουμε τα ε.σ.λ , ενώ για αυτόν του κάτω φράγματος UB_m τα ε.σ.δ .

Πρόταση 1.6.3 *Για την συνάρτηση αξιοπιστίας R* = Ε(*φ*(**X**)) *κάθε μονότονου συστήματος ισχύει*

$$LB_{EP}(\mathbf{p}) = \prod_{j=1}^{N}(1-(1-p)^{|C_j|}) \le R(\mathbf{p}) \le 1-\prod_{j=1}^{M}(1-p^{|P_j|}) = UB_{EP}(\mathbf{p})$$

όπου N, M το πλήθος των ε.σ.δ και ε.σ.λ αντίστοιχα.
Ειδικά για τα i.i.d συστήματα (p_i=p) *έχουμε*:

$$LB_{EP}(\mathbf{p}) = \prod_{j=1}^{N}(1-(1-p)^{|C_j|}) \le R(\mathbf{p}) \le 1-\prod_{j=1}^{M}(1-p^{|P_j|}) = UB_{EP}(\mathbf{p}) .$$

Τα φράγματα αυτά είναι ίσως τα πιο γνωστά πολλαπλασιαστικά φράγματα. Είναι αυτά που πρότειναν οι *Esary & Proschan* (1963) και θα λέγονται φράγματα *EP*.

Αντίθετα με τα φράγματα minimax, στα φράγματα *EP*, ο υπολογισμός του κάτω φράγματος LB_{EP} βασίζεται στα ε.σ.δ ενώ ο υπολογισμός του άνω φράγματος UB_{EP} προϋποθέτει να γνωρίζουμε τα ε.σ.λ.

Τα κάτω φράγματα LB_{EP} (**p**) είναι συνήθως καλά, (αυτό σημαίνει ότι δίνουν τιμές κοντά στην πραγματική τιμή της αξιοπιστίας R(**p**)), όταν οι αξιοπιστίες των μονάδων είναι κοντά στο 1. Αντιθέτως τα άνω φράγματα UB_{EP} (**p**) δίνουν μία καλή προσέγγιση όταν οι αξιοπιστίες των μονάδων είναι κοντά στο 0, δηλαδή μας είναι πιο χρήσιμα αν θέλουμε να έχουμε μία εκτίμηση για την αξιοπιστία σε αναξιόπιστα συστήματα.

Συνολικά μπορούμε να πούμε ότι τα φράγματα LB_m, UB_m είναι πάντα καλύτερα από τα LB_1, UB_1 (η ποιότητα των τελευταίων δεν είναι πολύ καλή αφού η προσεγγιστική τιμή που δίνουν δεν είναι πολύ κοντά στην ακριβή τιμή της αξιοπιστίας του συστήματος), όμως δεν είναι πάντα καλύτερα από τα LB_{EP}, UB_{EP}. Επίσης τα LB_{EP}, UB_{EP} είναι καλύτερα από τα LB_1, UB_1. Τέλος αν είναι εύκολο να βρεθούν όλα τα ε.σ.λ και ε.σ.δ του συστήματος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως κάτω και άνω φράγματα τις παρακάτω ποσότητες αντίστοιχα :

$$L = \max\{ LB_m , LB_{EP}\} \text{ και } U = \min\{ UB_m , UB_{EP} \}.$$

- **Τροποποιημένα πολλαπλασιαστικά φράγματα**

Σε αυτή το σημείο του κεφαλαίου θα αναφερθούμε στα τροποποιημένα πολλαπλασιαστικά φράγματα (ΤΠΦ) για την αξιοπιστία ενός συστήματος τα οποία κατασκεύασαν οι *Fu & Koutras* (1995) με αφορμή το γεγονός ότι το LB_{EP} επιτυγχάνει καλές προσεγγίσεις όταν οι μονάδες έχουν υψηλές αξιοπιστίες, ενώ το UB_{EP} όταν έχουν χαμηλές αξιοπιστίες. Ήθελαν να κατασκευάσουν φράγματα με τις αντίστροφες ιδιότητες, έτσι ώστε ο συνδυασμός αυτών με τα *Esary & Proschan* φράγματα να προσφέρει καλές πάντα καλές προσεγγίσεις.

Πιο συγκεκριμένα για την κατασκευή αυτών των φραγμάτων θα χρησιμοποιήσουμε ε.σ.δ και ε.σ.λ. Έστω I το σύνολο όλων των μονάδων του συστήματος, οι οποίες λειτουργούν ανεξάρτητα. Για την δημιουργία του άνω φράγματος, U_{FK}, ενός συστήματος με ε.σ.δ $\mathbf{C} = \{C_1, C_2, ..., C_N\}$ αρχικά ορίζουμε τα σύνολα $L_1^* = \varnothing$, $L_j^* = \{i : C_i \cap C_j \neq \varnothing,\ i = 1, 2, ..., j-1\}$ για $j = 2, ..., N$.

Το L_j^* περιέχει όλους τους δείκτες των C_i που έχουν κοινές μονάδες με το C_j και ταυτόχρονα είναι $i < j$. Με την βοήθεια των L_j^* εισάγουμε στη συνέχεια τα σύνολα $L_j \subseteq I$ τα οποία ικανοποιούν τις ιδιότητες,

- $L_j \cap C_i \neq \varnothing$ για κάθε $i \in L_j^*$
- $L_j \cap C_j = \varnothing$, αν $L_j^* = \varnothing$ τότε $L_j = \varnothing$.

Για κάθε μονότονο σύστημα μπορούν πάντα να οριστούν σύνολα L_j με τις παραπάνω ιδιότητες. Για παράδειγμα το σύνολο $L_j = \bigcup_{i=1}^{j-1} (C_i \cap C_j^{'})$, $j = 2, ..., N$ που είναι πάντα μία ασφαλής επιλογή (όχι όμως η καλύτερη δυνατή).

Θεώρημα 1.6.1. *Έστω δ_j η συνάρτηση δομής των παράλληλων υποσυστημάτων που παράγονται από τα ε.σ.δ C_j, $j = 1, 2, ..., N$. Τότε για κάθε μονότονο σύστημα με ανεξάρτητες μονάδες και ε.σ.δ τα $\mathbf{C} = \{C_1, C_2, ..., C_N\}$ ισχύει*

$$\prod_{j=1}^{N} [1 - P(\delta_j = 0)] \leq R \leq \prod_{j=1}^{N} \left[1 - \left(\prod_{i \in L_j} p_i \right) P(\delta_j = 0) \right]$$

(*το κάτω φράγμα που δίνεται είναι το γνωστό LB_{EP} φράγμα*).
Αν οι μονάδες του συστήματος είναι ανεξάρτητες το άνω φράγμα θα δίνεται από τον τύπο

$$U_{FK} = \prod_{j=1}^{N} (1 - \prod_{i \in L_j} (1 - q_i) \prod_{i \in C_j} q_i) .$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι το LB_{Ep} δεν εξαρτάται από την διάταξη των ε.σ.δ, ενώ το U_{FK} εξαρτάται.

Παρατηρούμε ότι ο συνδυασμός των LB_{EP} και U_{FK} μας δίνει μία αρκετά ακριβή εκτίμηση της αξιοπιστίας, ειδικά στην περίπτωση που οι αξιοπιστίες των μονάδων είναι υψηλές.

Για την εύρεση του κάτω φράγματος L_{FK} θα χρησιμοποιήσουμε τα ε.σ.λ P_j αφού πρώτα ορίσουμε τα σύνολα K_j. Θεωρούμε $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, ..., P_M\}$ το σύνολο των ε.σ.λ και ορίζουμε τα ακόλουθα: $K_1^* = \varnothing$, $K_j^* = \{i : P_i \cap P_j \neq \varnothing,\ i = 1, 2, ..., j-1\}$ για $j = 2, ..., N$. Με την βοήθεια των K_j^* εισάγουμε στη συνέχεια τα σύνολα $K_j \subseteq I$ για τα οποία ισχύουν οι ιδιότητες:

- $K_j \cap P_i \neq \varnothing$ για κάθε $i \in K_j^*$
- $K_j \cap P_j = \varnothing$, αν $K_j^* = \varnothing$ τότε $K_j = \varnothing$.

Θεώρημα 1.6.2. *Έστω γ_j η συνάρτηση δομής των σειριακών υποσυστημάτων που παράγονται από τα ε.σ.λ P_j, $j = 1, 2, ..., M$. Τότε για κάθε μονότονο σύστημα με ανεξάρτητες μονάδες και ε.σ.λ τα $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, ..., P_M\}$ ισχύει*

$$1 - \prod_{j=1}^{M} \left[1 - \left(\prod_{i \in K_j} q_i \right) P(\gamma_j = 1) \right] \leq R \leq \prod_{j=1}^{M} [1 - P(\gamma_j = 1)] .$$

Αν οι μονάδες μου είναι ανεξάρτητες τότε το άνω φράγμα θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$L_{FK} = 1 - \prod_{j=1}^{M} (1 - \prod_{i \in K_j} q_i \prod_{i \in P_j} (1 - q_i)) .$$

Αν οι μονάδες δεν είναι αρκετά αξιόπιστες τότε τα φράγματα L_{FK}, UB_{EP}, είναι αρκετά κοντά στην τιμή της αξιοπιστίας.

Στη συνέχεια θα δώσουμε κάποιους ορισμούς που θα μας βοηθήσουν να καταλήξουμε στην ασυμπτωτική τιμή της αξιοπιστίας.

Θέτουμε

$$a_j(n) = \prod_{i \in C_j} q_{in} ,\ b_j(n) = a_j(n) \prod_{i \in L_j} p_{in} ,\ LB_n = \prod_{j=1}^{N_n} (1 - a_j(n)) ,$$

$$UB_n^* = \prod_{j=1}^{N_n} (1 - b_j(n)) ,\ q(n) = \sup_{i \in I_n} q_{in} ,\ l_n = \sup_{1 \leq j \leq N_n} |L_j| ,\ j = 1, 2, ..., N_n .$$

Οι *Fu & Koutras* (1995) απέδειξαν τα επόμενα αποτελέσματα.

Θεώρημα 1.6.3. *Αν* $L_j^* = \varnothing$ για $j = 1, 2, ..., N$ *και ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{N_n} a_j(n) = \lambda \text{, και } \lim_{n\to\infty} \sup_{1\le j\le N_n} a_j(n) = 0,$$

τότε η αξιοπιστία R_n *του συστήματος όταν το* $n \to \infty$ *πλησιάζει την τιμή* $e^{-\lambda}$.

Θεώρημα 1.6.4. *Αν* $L_j^* = \varnothing$ *για τουλάχιστον ένα* $j \in \{1, 2, ...N\}$ *και*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{N_n} a_j(n) = \lambda, \ \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{N_n} b_j(n) = \lambda, \ \lim_{n\to\infty} \sup_{1\le j\le N_n} a_j(n) = 0$$

τότε η αξιοπιστία R_n *του συστήματος όταν το* $n \to \infty$ *πλησιάζει την τιμή* $e^{-\lambda}$.

Θεώρημα 1.6.5. *Αν* $L_j^* = \varnothing$ *για τουλάχιστον ένα* $j \in \{1, 2, ...N\}$ *και*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{N_n} a_j(n) = \lambda, \ \lim_{n\to\infty} [l_n q(n)] = 0 \text{, τότε } \lim_{n\to\infty} R_n = e^{-\lambda}.$$

Πόρισμα 1.6.1. *Έστω ότι τα ε.σ.δ* C_j, $j = 1, 2, ..., N_n$ *έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων έτσι ώστε* $|C_j| = k_n$ *και* $\lim_{n\to\infty} N_n q^{k_n}(n) = \lambda$, $\lim_{n\to\infty}[l_n q(n)] = 0$ *τότε*

$$\lim_{n\to\infty} R_n = e^{-\lambda}.$$

Πόρισμα 1.6.2. *Έστω ότι τα ε.σ.δ* C_j, $j = 1, 2, ..., N_n$ *έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων έτσι ώστε* $|C_j| = k_n$, *ότι οι ακολουθίες* k_n, l_n *είναι άνω φραγμένες και ισχύει* $\lim_{n\to\infty} N_n q^{k_n}(n) = \lambda$. *Τότε η αξιοπιστία του συστήματος θα καθώς το n αυξάνεται θα βρίσκεται κοντά στην τιμή* $e^{-\lambda}$, *δηλαδή*

$$\lim_{n\to\infty} R_n = e^{-\lambda}.$$

- **Φράγματα Bonferroni**

Πρόταση 1.6.4 *Θεωρούμε τις ποσότητες*

$$S_r = \sum_{\{a_1,....a_r\}} \prod_{i \in \bigcup_{j=1}^{r} P_{aj}} p_i \quad \text{για } r=1,2,\ldots,M \quad \text{και} \quad S_r' = \sum_{\{a_1,....a_r\}} \prod_{i \in \bigcup_{j=1}^{r} C_{aj}} (1 - p_i) \quad \text{για } r=1,2,\ldots,N$$

Για κάθε μονότονο σύστημα με συνάρτηση αξιοπιστίας R θα ισχύουν οι ανισότητες:

$$R \le S_1 \qquad\qquad 1 - S_1' \le R$$

$$S_1 - S_2 \le R \qquad \text{και} \qquad 1 - S_1' + S_2' - S_3' \le R$$

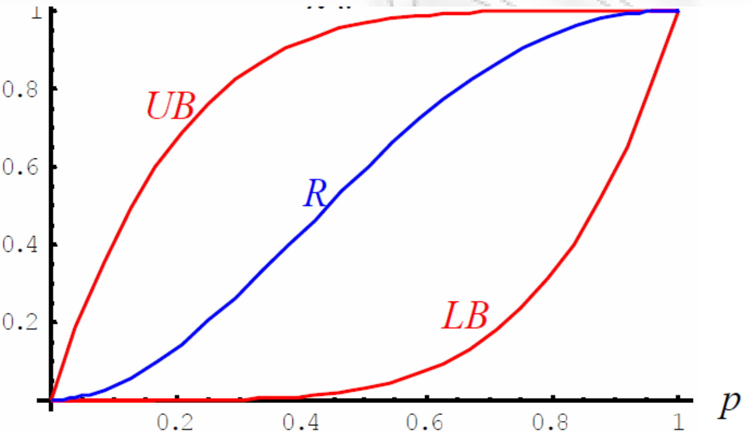
$$R \le 1 - S_1 - S_2 + S_3 \qquad\qquad 1 - S_1' + S_2' - S_3' \le R \qquad \text{κ.ο.κ}$$

Τα φράγματα Bonferroni μπορούν να πάρουν αρνητικές τιμές ,αλλά και τιμές πιο μεγάλες από τη μονάδα. Αντιθέτως όλα τα άλλα φράγματα που αναφέραμε παίρνουν τιμές στο διάστημα [0,1].

Η Πρόταση 1.6.4 μας δίνει μία ακολουθία από άνω και κάτω φράγματα τα οποία βασίζονται μόνο στα ε.σ.λ (για φράγματα που χρησιμοποιούν τα S_j, j=1,2,…,M) ή μόνο στα ε.σ.δ (για φράγματα που χρησιμοποιούν τα S_j', j=1,2,…,N). Καθώς αυξάνεται το πλήθος των S_j (ή S_j') τα φράγματα Bonferroni βελτιώνονται, όμως αυξάνεται η δυσκολία στον υπολογισμό τους. Αν χρησιμοποιήσουμε όλα τα S_j, j=1,2,…,M ή όλα τα S_j', j=1,2,…,N θα έχουμε την ακριβή τιμή της αξιοπιστίας $R(\mathbf{p})$.

Η αξιοπιστία του συστήματος και τα άνω και κάτω φράγματα αυτής έχουν συνήθως τη μορφή που απεικονίζεται πιο κάτω στο Σχήμα 1.6.1.

Σχήμα 1.6.1
Γραφική αναπαράσταση των φραγμάτων αξιοπιστίας



1.7 Συνάρτηση αξιοπιστίας και χρόνος ζωής – Υπολειπόμενος χρόνος ζωής

Ορίζουμε ως **χρόνο ζωής** T μιας μονάδας ή ενός συστήματος, τον χρόνο έως την πρώτη αποτυχία. Αυτός είναι μία μη αρνητική συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ και συνάρτηση κατανομής

$$F_T(x) = \int_0^x f(z)dz\,, \quad x > 0.$$

Η πιθανότητα να μην αποτύχει έως την χρονική στιγμή t, δηλαδή η πιθανότητα να λειτουργεί στο διάστημα [0,t], μία μονάδα (ή ένα σύστημα), σημαίνει ότι ο χρόνος ζωής του διαρκεί περισσότερο από τον χρόνο t.

Η πιθανότητα αυτή εκφράζεται από την ποσότητα

$$R(t) = P[\ T > t\ ] = 1 - F(t) = \int_t^\infty f(z)dz \qquad (1.7.1)$$

και ονομάζεται **αξιοπιστία** της μονάδας (ή συστήματος).

Από την άλλη, η πιθανότητα να αποτύχει μία μονάδα (ή ένα σύστημα) έως την χρονική στιγμή t, δίνεται από τη σχέση

$$F(t)=1- R(t) =1- P[\ T > t\ ] = P[\ T \leq t\ ] \qquad (1.7.2)$$

και ονομάζεται **αναξιοπιστία** της μονάδας (ή συστήματος). Προφανώς αυτή συμπίπτει με την συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής T.

Τώρα θα υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο ζωής μιας μονάδας ή ενός συστήματος. Ο **μέσος χρόνος ζωής** $E(T)$ μιας μονάδας (ή ενός συστήματος) είναι ο μέσος χρόνος έως την πρώτη αποτυχία, δηλαδή ο αναμενόμενος χρόνος λειτουργίας ενός στοιχείου. Αυτός θα συμβολίζεται με MTTF (Mean Time To Failure) και θα εκφράζεται από την σχέση

$$MTTF = E(T) = -\int_0^{\infty} tR'(t)dt = \int_0^{\infty} R(t)dt \ . \qquad (1.7.3)$$

Η πιθανότητα λειτουργίας της i-μονάδας, συμβολίζεται με

$$p_i = R_i(t) = P[\ T_i \geq t\ ]$$

όπου $R_i(t)$ είναι η αξιοπιστία της i μονάδας και T_i ο χρόνος ζωής της i μονάδας.
Για ένα σύστημά η σχέση που μας δίνει την αξιοπιστία του είναι η εξής

$$R_s(\mathbf{p}) = R(p_1, p_2, ..., p_n) .$$

Θεωρούμε τώρα ότι έχουμε μια μονάδα (ή ένα σύστημα) ηλικίας t >0, με χρόνο ζωής που περιγράφεται από τη συνεχή τυχαία μεταβλητή T. Ο χρόνος που μένει έως την καταστροφή της μονάδας εκφράζεται από την ποσότητα T-t. Έτσι με τον όρο **υπολειπόμενο χρόνο ζωής** μίας μονάδας με ηλικία t (η μονάδα έχει λειτουργήσει για χρονικό διάστημα t) θα ορίζουμε την δεσμευμένη τυχαία μεταβλητή T-t| T>t. Η αξιοπιστία μίας μονάδας με ηλικία t θα είναι η εξής

$$R(x\,|\,t) = P[T - t > x\,|\,T > t] = \frac{P[T > t + x]}{P[T > t]} = \frac{R(t+x)}{R(t)} \ . \qquad (1.7.4)$$

Με αυτό τον τρόπο ορίζεται η πιθανότητα να λειτουργήσει το στοιχείο για επιπλέον χρόνο x, δεδομένου ότι έχει επιβιώσει έως τη χρονική στιγμή t.

Ο **μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής** (Mean Residual Life, MRL) μίας μονάδας με ηλικία t θα ισούται με

$$MRL = E(T - t\,|\,T > t) = \int_0^{\infty} R(x\,|\,t)dx = \int_0^{\infty} \frac{R(t+x)}{R(t)}dx = \frac{1}{R(t)}\int_x^{\infty} R(z)dz \ . \qquad (1.7.5)$$

1.8 Βαθμίδα αποτυχίας - Συνάρτηση Κινδύνου

Ας υποθέσουμε ότι μία μονάδα (ή ένα σύστημα) έχει λειτουργήσει χωρίς να έχει αποτύχει στο χρονικό διάστημα [0,t], $t \geq 0$. Τότε η πιθανότητα να μην αποτύχει η μονάδα (ή το σύστημα) για x επιπλέον χρονικές στιγμές μετά τη στιγμή t, δηλαδή η πιθανότητα να λειτουργήσει στο διάστημα (t,t+x] με $x \geq 0$, (ενώ έχει ήδη λειτουργήσει για χρόνο t) θα ισούται με

$$P[T > t + x \mid T > t] = \frac{P[T > t + x]}{P[T > t]} = \frac{R(t+x)}{R(t)}$$

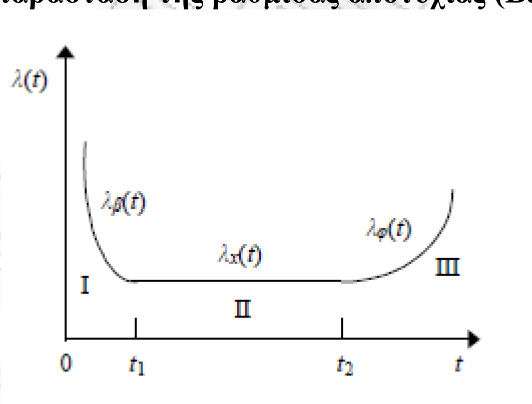
όπου $R(t) > 0$.

Ορίζουμε ως **βαθμίδα αποτυχίας** (hazard rate ή instantaneous failure rate) το λόγο που εκφράζει τον δεσμευμένο ρυθμό αποτυχίας της μονάδας στο διάστημα $(t, t+x]$ όταν $x \to 0$ δεδομένου ότι $T > t$. Αυτή δίνεται μέσω του τύπου :

$$\lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} = \lim_{x \to 0} \frac{P[T \le t + x \mid T > t]}{x} = (-\ln R(t))' = \frac{f(t)}{R(t)} \quad , \quad t \ge 0 \quad (1.8.1)$$

όπου f είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ T και $R'(t)$ η παράγωγος της συνάρτησης αξιοπιστίας για την οποία ισχύει η σχέση $R'(t) = (1 - F(t))' = -F'(t) = -f(t)$. Επίσης η $f(t)$ συμβολίζεται και με $\theta(t)$ και ονομάζεται συνάρτηση θνησιμότητας. Η βαθμίδα αποτυχίας μας δείχνει ποια είναι η πιθανότητα να αποτύχει μία μονάδα (ή σύστημα) σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα x το οποίο ακολουθεί της χρονικής στιγμής t, δεδομένου ότι έχει λειτουργήσει για χρόνο t.
Έστω ότι μία μονάδα τίθεται σε λειτουργία τη χρονική στιγμή t=0. Η βαθμίδα αποτυχίας της ως συνάρτηση του χρόνου έχει συνήθως την μορφή του Σχήματος 1.8.1.

Σχήμα 1.8.1
Γραφική αναπαράσταση της βαθμίδας αποτυχίας (Bathtub Curve)



Η παραπάνω καμπύλη ονομάζεται Bathtub Curve . Σύμφωνα με αυτή ο χρόνος ζωής χωρίζεται σε τρεις περιόδους.

- Η πρώτη περίοδος είναι η $[0, t_1]$, ονομάζεται βρεφική περίοδος (early life period) και η βαθμίδα αποτυχίας είναι φθίνουσα (DFR, decreasing failure rate). Οι αποτυχίες που παρουσιάζονται σε αυτό το χρονικό διάστημα μπορούν να οφείλονται σε αδυναμίες σχεδιασμού ή κατασκευής των μονάδων.
- Η δεύτερη περίοδος είναι η $[t_1, t_2]$ και ονομάζεται χρήσιμη περίοδος (useful period). Εδώ η βαθμίδα αποτυχίας είναι σταθερή και οι αποτυχίες που συμβαίνουν στο διάστημα αυτό λέγονται τυχαίες ή καταστροφικές.
- Η τρίτη περίοδος είναι η $[t_2, \infty]$ και καλείται περίοδος φθοράς (wear-out period). Σε αυτό το διάστημα η βαθμίδα αποτυχίας είναι αύξουσα (IFR, increasing failure rate). Οι αποτυχίες που συμβαίνουν εδώ οφείλονται στην φθορά των μονάδων, δηλαδή στην ηλικία τους.

Γνωρίζοντας ότι ισχύει η σχέση $\lambda(t)=(-\ln R(t))'$ στο διάστημα $[a,t]$ με $t\geq a$, ολοκληρώνουμε και έχουμε ότι

$$\int_a^t \lambda(s)ds = -\ln R(s)\Big|_a^t = -\ln\frac{R(t)}{R(a)} \quad \Rightarrow \quad R(t)=R(a)e^{-\int_a^t \lambda(s)ds}.$$

Για a=0 παίρνουμε

$$R(t)=e^{-\int_0^t \lambda(s)ds}, \; t\geq 0.$$

Ως **συνάρτηση κινδύνου** (hazard function) ορίζουμε την ποσότητα $\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(z)dz$
Τέλος μπορούμε να διακρίνουμε ότι ισχύει $\Lambda'(t)=\lambda(t)$, $t\geq 0$

Αφού ισχύει ότι

$$R(x|t)=\frac{R(t+x)}{R(t)}=e^{\Lambda(t)-\Lambda(t+x)}$$

μπορούμε να ολοκληρώσουμε ως προς t και θα πάρουμε την σχέση

$$\frac{d}{dt}R(x\,|\,t)=R(x\,|\,t)[\lambda(t)-\lambda(t+x)].$$

Επομένως

$$\frac{d}{dt}R(x\,|\,t)\geq 0 \;\text{ για κάθε }\; t,x>0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(t+x)\leq\lambda(t) \;\text{ για κάθε }\; t,x>0\;.$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση αξιοπιστίας $R(x|t)$ μιας μονάδας (ή συστήματος) ηλικίας t είναι:
1) αύξουσα συνάρτηση ως προς t για κάθε x>0 αν και μόνο αν η βαθμίδα αποτυχίας είναι φθίνουσα συνάρτηση. Εδώ λέμε ότι ο χρόνος ζωής T είναι DFR.
2) φθίνουσα συνάρτηση ως προς t για κάθε x>0 αν και μόνο αν η βαθμίδα αποτυχίας είναι αύξουσα συνάρτηση. Θα λέμε τώρα ότι ο χρόνος ζωής T είναι IFR.
3) σταθερή συνάρτηση ως προς t για κάθε x>0 αν και μόνο αν η βαθμίδα αποτυχίας είναι σταθερή συνάρτηση. Αυτό μπορεί να συμβεί στην χρήσιμη περίοδο, όπου η μονάδα όσο περνάει ο χρόνος δεν χαλάει ούτε φτιάχνει.

Ορισμός 1.8.1 *Θα λέμε ότι μία τυχαία μεταβλητή T είναι IFR αν η βαθμίδα αποτυχίας λ(t) είναι αύξουσα συνάρτηση του t. Αντίστοιχα μία τυχαία μεταβλητή T θα λέγεται DFR αν η βαθμίδα αποτυχίας λ(t) είναι φθίνουσα συνάρτηση του t.*

Στην πρώτη περίπτωση η βαθμίδα αποτυχίας (η μονάδα ή το σύστημα γίνονται χειρότερα) θα χειροτερεύει όσο αυξάνεται η ηλικία του, ενώ στην δεύτερη η βαθμίδα αποτυχίας μιας μονάδας ή ενός συστήματος βελτιώνεται (η μονάδα ή το σύστημα γίνονται καλύτερα) όσο αυξάνεται η ηλικία του. Τέλος μία τυχαία μεταβλητή T με σταθερή βαθμίδα αποτυχίας είναι και IFR και DFR.
Αν γνωρίζουμε μία από τις πέντε ποσότητες $F(t)$, $R(t)$, $\lambda(t)$, $f(t)$, $\Lambda(t)$ μπορούμε να υπολογίσουμε τις υπόλοιπες τέσσερις, με την βοήθεια του Πίνακα 1.8.1. Οι ποσότητες της πρώτης στήλης παρουσιάζονται συναρτήσει των ποσοτήτων της πρώτης γραμμής.

Πίνακας 1.8.1
Σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων $F(t)$, $R(t)$, $\lambda(t)$, $f(t)$, $\Lambda(t)$

	$F(t)$	$f(t)$	$R(t)$	$\lambda(t)$	$\Lambda(t)$
$F(t)$		$\int_0^t f(z)dz$	$1-R(t)$	$1-\exp\left\{-\int_0^t \lambda(z)dz\right\}$	$1-\exp\{-\Lambda(t)\}$
$f(t)$	$\frac{d}{dt}F(t)$		$-\frac{d}{dt}R(t)$	$\lambda(t)\cdot\exp\left\{-\int_0^t \lambda(z)dz\right\}$	$\frac{d}{dt}\Lambda(t)\cdot\exp\{-\Lambda(t)\}$
$R(t)$	$1-F(t)$	$\int_t^\infty f(z)dz$		$\exp\left\{-\int_0^t \lambda(z)dz\right\}$	$\exp\{-\Lambda(t)\}$
$\lambda(t)$	$\frac{1}{1-F(t)}\cdot\frac{d}{dt}F(t)$	$\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(z)dz}$	$-\frac{d}{dt}\ln R(t)$		$\frac{d}{dt}\Lambda(t)$
$\Lambda(t)$	$-\ln(1-F(t))$	$\int_0^t \frac{f(u)}{\int_t^\infty f(z)dz}du$	$-\ln R(t)$	$\int_0^t \lambda(z)dz$	

1.9 Μελέτη Ειδικών Συστημάτων Αξιοπιστίας

Σε αυτή την παράγραφο θα εισάγουμε τις έννοιες από διάφορα συστήματα αξιοπιστίας με χαρακτηριστική συνδεσμολογία, τα οποία μπορεί να είναι αυτοτελή ή και να είναι μέρος πιο πολύπλοκων συστημάτων. Θα επικεντρωθούμε στις ιδιότητές τους και στην εύρεση της αξιοπιστίας τους. Τα πιο συνήθη είναι τα παρακάτω:

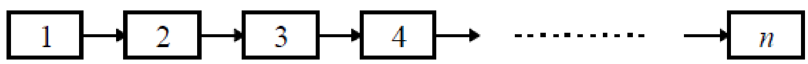
1) Σειριακό σύστημα

Ένα σύστημα θα λέγεται **σειριακό** (series system, SS) αν αποτελείται από μονάδες τοποθετημένες σε σειρά. Το σύστημα λειτουργεί, αν όλες οι μονάδες του λειτουργούν και αντίστοιχα αποτυγχάνει αν τουλάχιστον μία μονάδα του αποτύχει.
Η συνάρτηση δομής του σειριακού συστήματος είναι η

$$\phi(x)=\prod_{i=1}^{n} x_i=\min\{x_1, x_2,\ldots,x_n\} \tag{1.9.1}$$

Μία γραφική αναπαράσταση του συστήματος είναι η εξής:

Σχήμα 1.9.1
Σειριακό σύστημα



Το σειριακό σύστημα έχει ως ε.σ.λ του το $\{1,2,\ldots,n\}$, ενώ τα ε.σ.δ του είναι τα μονοσύνολα $\{1\},\{2\},\ldots,\{n\}$. Χρησιμοποιώντας τις έννοιες που εισήχθησαν στην Παράγραφο 1.5, οι οικογένειες ε.σ.λ και ε.σ.δ θα είναι αντίστοιχα **P**=$\{\{1,2,\ldots,n\}\}$ και **C**=$\{\{1\}, \{2\},\ldots,\{n\}\}$, επομένως η συνάρτηση δομής με βάση τα ε.σ.λ θα είναι η

$$\varphi(x) = 1 - \prod_{j=1}^{1}(1 - \prod_{i \in P_j} x_i) = 1 - (1 - x_1 x_2 \cdots x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$$

ενώ με βάση τα ε.σ.δ θα είναι η εξής

$$\varphi(x) = \prod_{j=1}^{n}(1 - \prod_{i \in C_j}(1 - x_i)) = (1-(1-x_1))(1-(1-x_2))\cdots(1-(1-x_n)) = x_1 x_2 \cdots x_n .$$

Η αξιοπιστία του σειριακού συστήματος δίνεται από τον τύπο

$$R(\mathbf{p}) = E(\phi(\mathbf{X})) = E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i) = p_1 p_2 \cdots p_n = R_{SS} . \qquad (1.9.2)$$

Όταν οι μονάδες είναι iid, ο τύπος της αξιοπιστίας μετατρέπεται σε $R(\mathbf{p}) = R_{SS} = p^n$. Επίσης αν λάβουμε υπόψη μας και τον χρόνο στις παραπάνω σχέσεις θα ισχύει για την αξιοπιστία του συστήματος ότι

$$R_{SS}(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) \le R_j(t), \quad j=1,2,\ldots n.$$

Η ανισότητα αυτή μας δείχνει ότι η αξιοπιστία ενός συστήματος αποτελούμενου από *n* μονάδες σε σειρά, είναι μικρότερη ή ίση από την αξιοπιστία οποιασδήποτε από τις μονάδες που το αποτελούν. Στην iid περίπτωση, όπου $R_i(t) = R(t)$, $i=1,2,\ldots,n$ θα είναι

$$R_{SS}(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) = \prod_{i=1}^{n} R(t) = [R(t)]^n$$

Για το χρόνο ζωής του συστήματος θα ισχύει η σχέση $T_{SS}(t) = \min_{1 \le i \le n} T_i$, δηλαδή ο χρόνος ζωής ενός σειριακού συστήματος ισούται με τον ελάχιστο χρόνο ζωής των μονάδων του, αφού το σύστημα χαλάει όταν χαλάσει η μία τουλάχιστον μονάδα.

Τέλος η βαθμίδα αποτυχίας του συστήματος εκφράζεται από την σχέση

$$\lambda_{SS}(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \qquad (1.9.3)$$

όπου $\lambda_i(t)$ είναι η βαθμίδα αποτυχίας της *i* μονάδας σε χρόνο *t*. Δηλαδή, η βαθμίδα αποτυχίας ενός σειριακού συστήματος *n* μονάδων είναι ίση με το άθροισμα των βαθμίδων αποτυχίας των μονάδων. Αν είναι $\lambda_i(t)=\lambda(t)$, $i=1,2,\ldots,n$, και οι χρόνοι ζωής των μονάδων είναι ισόνομες τ.μ. τότε θα έχουμε ότι $\lambda_{SS}(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(t) = n\lambda(t)$.

Μπορούμε να συμπεράνουμε πως αν οι $\lambda_i(t)$ είναι αύξουσες (ή φθίνουσες) τότε και η συνάρτηση $\lambda_{SS}(t)$ θα είναι αύξουσα (ή φθίνουσα). Άρα αν ο χρόνος ζωής μίας μονάδας T_i είναι IFR, τότε και ο χρόνος ζωής του συστήματος T_{SS} θα είναι IFR. Όμοια συμπεράσματα έχουμε και για την περίπτωση που ο χρόνος ζωής είναι DFR.

Μπορούμε επίσης να εξετάσουμε και έναν άλλον τρόπο προσδιορισμού της αξιοπιστίας μέσω της μεθόδου των εμφυτευμένων συστημάτων σε Μαρκοβιανές αλυσίδες (MIS) την οποία έχουμε αναλύσει πιο πριν. Αν θέλουμε να αντιμετωπίσουμε μία τέτοια δομή ως σύστημα εμφυτευμένο σε Μαρκοβιανές αλυσίδες, θεωρούμε: την αξιοπιστία των μονάδων ίση με p_i, $i=1,2,\ldots,n$, τον χώρο καταστάσεων $S=\{0,1\}=\{s_0, s_1\}$, τη διαμέριση $S_0=\{s_0\}$, $S_1=\{s_1\}$ ($N=m=1$) και την Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{Y_t,\ t\geq 0\}$ που ορίζεται από τις σχέσεις

i) $Y_t=0$, αν οι μονάδες $1,2,\ldots,t$ λειτουργούν ($1\leq t\leq n$)
ii) $Y_t=1$, αν τουλάχιστον μία μονάδα από τις $1,2,\ldots,t$ δε λειτουργεί ($1\leq t\leq n$).

Άρα ο πίνακας μετάβασης είναι ο

$$\Lambda_t=\begin{pmatrix} p_t & q_t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο της Πρότασης 1.5.8 παίρνουμε, $R_n=\boldsymbol{\pi}_0'\left(\prod_{t=1}^{n}\Lambda_t\right)\mathbf{u}$ και έτσι λαμβάνουμε την αξιοπιστία του συστήματος, που είναι και το ζητούμενο.

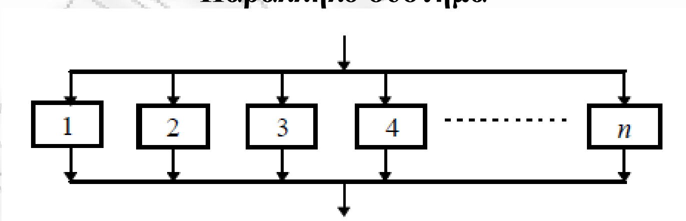
2) Παράλληλο σύστημα

Ένα σύστημα λέγεται **παράλληλο** (parallel system, PS) αν οι μονάδες που το αποτελούν είναι συνδεδεμένες παράλληλα η μία προς την άλλη. Το σύστημα αποτυγχάνει αν όλες οι μονάδες του αποτύχουν ή αντίστοιχα λειτουργεί αν τουλάχιστον μία μονάδα του είναι σε λειτουργία .
Η συνάρτηση δομής του παράλληλου συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$\phi(x)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)=\max\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}=\coprod_{i=1}^{n}x_i \tag{1.9.4}$$

Μια γραφική απεικόνιση του συστήματος είναι η εξής

Σχήμα 1.9.2
Παράλληλο σύστημα



Το παράλληλο σύστημα έχει ως ε.σ.δ μόνο το $\{1,2,\ldots,n\}$, ενώ τα ε.σ.λ είναι τα μονοσύνολα $\{1\},\{2\},\ldots,\{n\}$. Με την χρήση των εννοιών της παραγράφου 1.5., οι οικογένειες ε.σ.λ και ε.σ.δ θα είναι αντίστοιχα $\mathbf{P}=\{\{1,2,\ldots,n\}\}$ και $\mathbf{C}=\{\{1\},\{2\},\ldots,\{n\}\}$, έτσι η συνάρτηση δομής με βάση τα ε.σ.λ και τα ε.σ.δ αντίστοιχα θα είναι η

$$\varphi(x)=1-\prod_{j=1}^{m}(1-\prod_{i\in P_j}x_i)=\prod_{j=1}^{1}(1-\prod_{i\in C_j}(1-x_i))=1-(1-x_1)\cdots(1-x_n).$$

Ο υπολογισμός της αξιοπιστίας ενός παράλληλου συστήματος γίνεται με τον τύπο:

$$\begin{aligned}R(\mathbf{p})&=E(\phi(\mathbf{X}))=E(1-\prod_{i=1}^{n}(1-X_i))=1-\prod_{i=1}^{n}E(1-X_i)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-E(X_i))\\&=1-(1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n)=R_{PS}.\end{aligned} \tag{1.9.5}$$

Για iid μονάδες παίρνουμε: $R(\mathbf{p}) = R_{PS} = 1-(1-p)^n$.

Αν θεωρήσουμε τον χρόνο t στις παραπάνω σχέσεις, αυτές θα γίνουν

$$R_{PS}(t) = 1-\prod_{i=1}^{n}(1-R_i(t))$$

και θα ισχύει πάντα η ανισότητα

$$1-R_{PS}(t) = \prod_{i=1}^{n}(1-R_i(t)) \le 1-R_j(t) \;\Rightarrow\; R_{PS}(t) \ge R_j(t), \quad j=1,2,..n.$$

Αυτό ερμηνεύεται ως εξής: η αξιοπιστία ενός παράλληλου συστήματος n μονάδων σε κάθε χρονική στιγμή, είναι μεγαλύτερη ή ίση από την αξιοπιστία οποιασδήποτε από τις μονάδες που αποτελούν το σύστημα τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Στην περίπτωση που έχουμε iid μονάδες και οι χρόνοι ζωής των n μονάδων είναι ισόνομες με $R_i(t) = R(t)$, i=1,2,…,n, η αξιοπιστία του συστήματος θα δίνεται από τον τύπο

$$R_{PS}(t) = 1-\prod_{i=1}^{n}(1-R_i(t)) = 1-\prod_{i=1}^{n}(1-R(t)) = 1-(1-R(t))^n.$$

Ακόμη για το παράλληλο σύστημα θα ισχύει $T_{PS}(t) = \max_{1\le i\le n} T_i$, έτσι ο χρόνος ζωής του συστήματος θα ισούται με τον μέγιστο χρόνο ζωής των μονάδων του, αφού το σύστημα χαλάει αν χαλάσει και η τελευταία μονάδα του συστήματος.

Η βαθμίδα αποτυχίας του παράλληλου συστήματος δίνεται από τον τύπο

$$\lambda_{PS}(t) = \frac{n(1-R(t))^{n-1}\theta(t)}{1-(1-R(t))^n} \tag{1.9.6}$$

όπου $R(t)$ να είναι η αξιοπιστία του συστήματος και $\theta(t)$ η συνάρτηση θνησιμότητας η οποία είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ T. Τέλος αν έχουμε ένα παράλληλο σύστημα με μονάδες που έχουν σταθερές βαθμίδες αποτυχίας μπορούμε μέσα από πράξεις (παραγωγίζοντας την βαθμίδα αποτυχίας του συστήματος) να καταλήξουμε πως ο χρόνος ζωής του συστήματος δεν είναι ούτε IFR, ούτε DFR.

Παρατηρούμε ότι ισχύει η σχέση $\phi_{PS}(\mathbf{x}) = 1-\phi_{SS}(\mathbf{1}-\mathbf{x})$. Αν θεωρήσουμε ως συνάρτηση δομής του σειριακού συστήματος την $\phi_{SS}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i$ και του παράλληλου την τότε $\phi_{PS}(\mathbf{x}) = 1-\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) = 1-\phi_{SS}(\mathbf{1}-\mathbf{x})$. Επομένως το σειριακό σύστημα είναι δυϊκό του παράλληλου και αντίστροφα το παράλληλο είναι δυϊκό του σειριακού.
Σύμφωνα με την πρόταση 1.6.1 για κάθε μονότονο σύστημα με n μονάδες ισχύει

$$R_{SS}(\mathbf{p}) = \prod_{i=1}^{n} p_i \le R \le 1-\prod_{i=1}^{n}(1-p_i) = R_{PS}(\mathbf{p}).$$

Η ερμηνεία της πρότασης αυτής είναι ότι η αξιοπιστία κάθε μονότονου συστήματος είναι μεγαλύτερη από αυτή ενός σειριακού συστήματος με τις ίδιες μονάδες και μικρότερη από αυτή του αντίστοιχου παράλληλου.

Ανακαλώντας την Πρόταση 1.6.2 μπορούμε να πούμε ότι για τα φράγματα αξιοπιστίας για τα δύο συστήματα που αναφέραμε θα έχουμε τα εξής συμπεράσματα ως προς την αξιοπιστία $R(\mathbf{p})$ ενός μονότονου συστήματος

- Η $R(\mathbf{p})$ φράσσεται από κάτω από την αξιοπιστία του καλύτερου σειριακού συστήματος με μονάδες του τις μονάδες ενός ε.σ.λ P_j.
- Η $R(\mathbf{p})$ φράσσεται από πάνω από την αξιοπιστία του χειρότερου παράλληλου συστήματος που έχει ως μονάδες του αυτές ενός ε.σ.δ C_j.

Για την εύρεση της αξιοπιστίας θα ήταν ενδιαφέρον να θεωρήσουμε ότι ένα παράλληλο σύστημα είναι εμφυτευμένο σε Μαρκοβιανές αλυσίδες (MIS). Υποθέτουμε ότι: οι μονάδες έχουν αξιοπιστία p_i, i=1,2,…,n, ο χώρος των καταστάσεων είναι ο $S=\{0,1,\ldots,n\}=\{s_0, s_1,\ldots,s_n\}$ και θεωρούμε τη διαμέριση $S_i=\{s_i\}$, $i=0,1,\ldots,n$ $(N=m=n)$. Χρησιμοποιώντας την Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{Y_t, t\geq 0\}$ που ορίζεται από τη σχέση $Y_t=i$, αν ακριβώς i από τις μονάδες $1,2,\ldots,t$ δε λειτουργούν $(1\leq i\leq n)$, παίρνουμε τον επόμενο πίνακα μετάβασης:

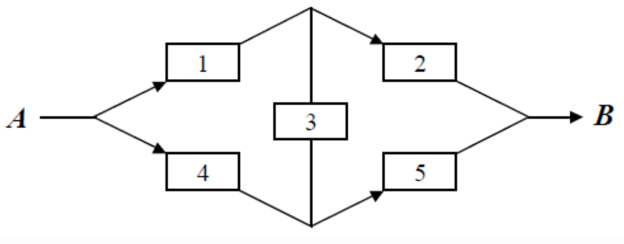
$$\Lambda_t = \left[\begin{array}{cccccc|c} p_t & q_t & & & & & \\ & p_t & q_t & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & p_t & q_t & \\ & & & & & p_t & q_t \\ \hline & & & & & & 1 \end{array}\right]_{(n+1)\times(n+1)}$$

Αντικαθιστώντας τον πίνακα αυτόν στον τύπο της Πρότασης 1.5.8, παίρνουμε $R_n=\boldsymbol{\pi}_0'\left(\prod_{t=1}^{n}\Lambda_t\right)\mathbf{u}$ από τον οποίο μπορεί εύκολα να προκύψει η αξιοπιστία του συστήματος.

3) Γέφυρα

Ένα σύστημα με την μορφή του παρακάτω σχήματος ονομάζεται **γέφυρα** (bridge structure, BS) και είναι από τα πιο γνωστά στην Θεωρία Αξιοπιστίας. Αποτελείται από n=5 μονάδες και λειτουργεί αν υπάρχει συνεχής διαδρομή από την θέση Α στην Β, μέσα από μονάδες που βρίσκονται σε λειτουργία. Επομένως για να λειτουργήσει το σύστημα αρκεί να δουλεύουν οι μονάδες 1 και 2, ή οι 4 και 5, ή οι 1, 3 και η 5, ή 4, 3 και η 2.

Σχήμα 1.9.3
Γέφυρα



Σύμφωνα με τον ορισμό τα ε.σ.λ του είναι τα {1,2}, {4,5}, {1,3,5}, {4,3,2}, ενώ τα ε.σ.δ είναι τα {1,4}, {2,5}, {1,3,5}, {4,3,2}. Άρα οι οικογένειες των ε.σ.λ και ε.σ.δ είναι οι **P=** {{1,2},{4,5},{1,3,5},{4,3,2}} και **C**= {{1,4},{2,5},{1,3,5},{4,3,2}}

Η συνάρτηση δομής βασιζόμενη στα ε.σ.λ είναι η

$$\phi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{j=1}^{4}(1 - \prod_{i \in P_j} x_i) = 1-(1-x_1x_4)(1-x_2x_5)(1-x_1x_3x_5)(1-x_2x_3x_4) =$$

$$x_1x_2 + x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3x_4 + x_1x_3x_5 - x_1x_2x_3x_5 + x_4x_5 - x_1x_2x_4x_5 - x_1x_3x_4x_5 - x_2x_3x_4x_5 + 2x_1x_2x_3x_4x_5$$

ή αλλιώς αν χρησιμοποιήσουμε τα ε.σ.δ θα έχουμε

$$\phi(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{4}(1 - \prod_{i \in C_j}(1-x_i)) = x_1x_2 + x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3x_4 + x_1x_3x_5 - x_1x_2x_3x_5$$

$$+x_4x_5 - x_1x_2x_4x_5 - x_1x_3x_4x_5 - x_2x_3x_4x_5 + 2x_1x_2x_3x_4x_5.$$

Για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας εφαρμόζουμε τον τύπο $R=E(\varphi(\mathbf{X}))$ και προκύπτει

$$R = E(\phi(\mathbf{X})) = p_1p_2 + p_2p_3p_4 - p_1p_2p_3p_4 + p_1p_3p_5 - p_1p_2p_3p_5 + p_4p_5$$

$$-p_1p_2p_4p_5 - p_1p_3p_4p_5 - p_2p_3p_4p_5 + 2p_1p_2p_3p_4p_5.$$

Στην iid περίπτωση ($p_i=p$) προκύπτει ότι $R = 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5$.

Θα προσδιορίσουμε την αξιοπιστία με έναν ακόμη τρόπο, μέσα από τα φράγματα αξιοπιστίας που αναφέραμε και πιο πάνω. Από τους τύπους των minimax φραγμάτων προκύπτει ότι το κάτω φράγμα είναι

$$LB_m(\mathbf{p}) = \max_{j=1,2,\ldots M} \prod_{i \in P_j} p_i = \max(p_1p_2, p_4p_5, p_1p_3p_5, p_4p_3p_2)$$

ενώ το άνω

$$UB_m(\mathbf{p}) = \min_{j=1,2,\ldots N}\{1 - \prod_{i \in C_j}(1-p_i)\} = \min\{1-(1-p_1)(1-p_4), 1-(1-p_2)(1-p_5),$$

$$1-(1-p_1)(1-p_3)(1-p_5), 1-(1-p_4)(1-p_3)(1-p_2)\}.$$

Όταν οι μονάδες είναι όμοιες ($p_i=p$) οι τύποι γίνονται αντίστοιχα

$$LB_m(p) = p^{\min_j|P_j|} = p^2 \geq p^5 = LB_1$$

$$UB_m(p) = 1-(1-p)^{\min_j|C_j|} = 1-(1-p)^2 \leq 1-(1-p^5)UB_1.$$

Τα άνω και κάτω φράγματα των *Esary & Proschan* ενός τέτοιου συστήματος είναι αντίστοιχα

$$UB_{EP}(\mathbf{p}) = 1 - \prod_{j=1}^{4}(1 - \prod_{i \in P_j} p_i) = 1-(1-p_1p_2)(1-p_4p_5)(1-p_1p_3p_5)(1-p_4p_3p_2)$$

$$LB_{EP}(\mathbf{p}) = \prod_{j=1}^{4}(1 - \prod_{i \in C_j}(1-p_i)) = (1-(1-p_1)(1-p_4))(1-(1-p_2)(1-p_5))$$

$$(1-(1-p_1)(1-p_3)(1-p_5))(1-(1-p_4)(1-p_3)(1-p_2))$$

και για iid μονάδες προκύπτουν τα εξής

$$LB_{EP}(p) = \prod_{j=1}^{N}(1-(1-p)^{|C_j|}) \quad \text{και} \quad UB_{EP}(p) = 1 - \prod_{j=1}^{M}(1-p^{|P_j|}).$$

4) *k* –από-τα- *n* σύστημα

i) *k* –από-τα- *n*:*F* σύστημα

Το σύστημα ***k*-από-τα-*n* :*F*** (*k*-out-of –*n*:*F* system) αποτυγχάνει αν και μόνο αν αποτύχουν τουλάχιστον *k* από τις *n* μονάδες του. Έτσι τα ε.σ.δ του θα είναι όλα τα υποσύνολα του {1,2,…,*n*} με *k* το πλήθος στοιχεία, ενώ τα ε.σ.λ θα είναι όλα τα υποσύνολα του {1,2,…,*n*} με *n*-*k*+1 το πλήθος στοιχεία.
Η συνάρτηση δομής δίνεται από τον τύπο

$$\phi(\mathbf{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{για } \sum_{i=1}^{n} x_i \geq n-k+1 \\ 0, & \text{για } \sum_{i=1}^{n} x_i < n-k+1 \end{array} \right\} \qquad (1.9.7)$$

μιας και ισχύει
[πλήθος χαλασμένων μονάδων]≥*k* ⇔ *n*-[πλήθος μονάδων που λειτουργούν] ≥ *k* ⇔ [πλήθος μονάδων σε λειτουργία]≤ *n*-*k* .

Ένας επιπλέον τρόπος για να βρούμε την αξιοπιστία του *k*-από-τα-*n*:*F* συστήματος είναι να θεωρήσουμε ότι αυτό είναι εμφυτευμένο σε Μαρκοβιανές αλυσίδες. Θα υποθέσουμε ότι οι μονάδες έχουν αξιοπιστία p_i ,*i*=1,2,…*n*. Ο χώρος των καταστάσεων είναι ο $S=\{0,1,\ldots,k\}=\{s_0,s_1,\ldots,s_k\}$ και θεωρούμε τη διαμέριση $S_i=\{s_i\}$, *i*=0,1,…,*k* (*N*=*m*=*k*). Επίσης υπάρχει και η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{Y_t,\ t\geq 0\}$ που ορίζεται από τις σχέσεις
i) $Y_t=i$, αν ακριβώς *i* από τις μονάδες 1,2,…,*t* δε λειτουργούν ($1\leq i\leq k$)
ii) $Y_t=k$, αν τουλάχιστον *k* από τις μονάδες 1,2,…,*t* δε λειτουργούν.

Ο αντίστοιχος πίνακας μετάβασης είναι ο

$$\Lambda_t = \left[\begin{array}{cccccc|c} p_t & q_t & & & & & \\ & p_t & q_t & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & p_t & q_t & \\ & & & & & p_t & q_t \\ \hline & & & & & & 1 \end{array} \right]_{(k+1)\times(k+1)}$$

Αντικαθιστώντας τον πίνακα αυτόν στον τύπο της Πρότασης 1.5.8, η αξιοπιστία του *k*-από-τα-*n* :*F* συστήματος μπορεί να βρεθεί μέσω του τύπου $R_n = \boldsymbol{\pi}_0' \left(\prod_{t=1}^{n} \Lambda_t \right) \mathbf{u}$.

Επίσης οι αναδρομικές σχέσεις του *k*-από τα-*n*:*F* συστήματος δίνονται από τους τύπους

$$\alpha_0(t) = p_t \alpha_0(t-1)$$
$$\alpha_k(t) = q_t \alpha_{k-1}(t-1) + \alpha_k(t-1)$$
$$\alpha_r(t) = q_t \alpha_{r-1}(t-1) + p_t \alpha_r(t-1), \quad r = 1,\ldots,k-1.$$

Με τη βοήθεια της Πρότασης 1.5.9 και αξιοποιώντας τις αναδρομικές σχέσεις μπορεί να προκύψει η αξιοπιστία του συστήματος.

ii) *k*-από-τα-*n* :*G* σύστημα

Ένα ***k*-από-τα-*n*:*G*** σύστημα (*k*-out-of–*n*:*G* system) λειτουργεί αν και μόνο αν λειτουργούν τουλάχιστον *k* από τις *n* μονάδες του. Τα ε.σ.λ του θα είναι όλα τα υποσύνολα του {1,2*m*,…,*mn*} με *k* στοιχεία, ενώ τα ε.σ.δ θα είναι όλα τα υποσύνολα του {1,2,…,*n*} με *n*-*k*+1 στοιχεία. Άρα θα είναι **P**= {*Δ*: *Δ*$\subseteq${1,2,…,*n*} με |*Δ* |=*k*} και **C**={ *Δ*: *Δ*$\subseteq${1,2,…,*n*} με |*Δ*|=*N*-*k*+1} και η συνάρτηση δομής του έχει τη μορφή

$$\phi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{\substack{\{\delta_1,\delta_2,\ldots\delta_k\} \\ \subseteq\{1,2,\ldots n\}}} (1 - \prod_{i=1}^{n} x_{\delta_i}) = \prod_{\substack{\{\delta_1,\delta_2,\ldots\delta_{n-k+1}\} \\ \subseteq\{1,2\ldots n\}}} (1 - \prod_{i=1}^{n-k+1} (1 - x_{\delta_i}))$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \\ 0, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n} x_i < k \end{cases} \tag{1.9.8}$$

Η αξιοπιστία του συστήματος δίνεται από τον τύπο *R*=*E*(*φ*(**X**)) αλλά είναι ιδιαίτερα δύσκολος ο υπολογισμός της, ειδικά αν έχουμε μεγάλα *n* και *k*. Όμως στην iid περίπτωση μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα γενικό τύπο, αφού ισχύει

$$R = E(\phi(\mathbf{X})) = P(\phi(\mathbf{X}) = 1) = P(\sum_{j=1}^{n} X_j \geq k) = P(Y = i) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}. \tag{1.9.9}$$

Ο τύπος αυτός προκύπτει λόγω του γεγονότος ότι η μεταβλητή $Y = \sum_{j=1}^{n} X_j$ ακολουθεί την διωνυμική κατανομή B(*n*,*p*).

Θα παρουσιάσουμε τώρα κάτω και άνω όρια αξιοπιστίας αντίστοιχα για το *k*-από-τα-*n* :*G* σύστημα:

$$LB_{ER}(\mathbf{p}) = \prod_{j=1}^{N} (1 - \prod_{i \in C_j} (1 - p_i)) = \prod_{\substack{\{\delta_1,\ldots\delta n-k+1\} \\ \subseteq\{1,2,\ldots n\}}} (1 - \prod_{i=1}^{n-k+1} (1 - p_{\delta_i}))$$

$$UB_{ER}(\mathbf{p}) = 1 - \prod_{j=1}^{M} (1 - \prod_{i \in P_j} p_i) = 1 - \prod_{\substack{\{\delta_1,\ldots\delta_k\} \\ \subseteq\{1,2,\ldots n\}}} (1 - \prod_{i=1}^{k} p_{\delta_i}).$$

Για την iid περίπτωση παίρνουμε

$$LB_{ER}(p) = \prod_{j=1}^{N} (1 - (1-p)^{|C_j|}) = (1 - q^{n-k+1})^{\binom{n}{n-k+1}}$$

$$UB_{ER}(p) = 1 - \prod_{j=1}^{M} (1 - p^{|P_j|}) = 1 - (1 - p^k)^{\binom{n}{k}}.$$

Αν λάβουμε υπόψη μας τον χρόνο ζωής των μονάδων, απλά θα αντικαταστήσουμε στον τύπο της αξιοπιστίας την πιθανότητα λειτουργίας των μονάδων p με την αξιοπιστία τους $R(t)$. Ο χρόνος ζωής του συστήματος T είναι ίσος με την n-k+1 διατεταγμένη παρατήρηση του διατεταγμένου δείγματος $T_{(1)} \le T_{(2)} \le ... \le T_{(n)}$.

Η βαθμίδα αποτυχίας ενός k-από-τα-n:G συστήματος με όμοιες μονάδες $R_i(t) = R(t)$, i=1,2,…,n δίνεται από τον τύπο

$$\lambda_s(t) = \frac{-R_s'(t)}{R_s(t)} = -\frac{[\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}R(t)^i(1-R(t))^{n-i}]'}{\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}R(t)^i(1-R(t))^{n-i}}. \tag{1.9.10}$$

Ένα σύστημα k-από-τα-n:G ισοδυναμεί με ένα (n-k+1)-από-τα-n:F σύστημα και αντίστροφα ένα k-από-τα-n:F ισοδυναμεί με ένα (n-k+1)-από-τα-n:G . Το δυϊκό του k-από-τα-n:F συστήματος είναι το k-από-τα-n:G σύστημα και αντίστροφα. Κάποιες από τις παραπάνω διατυπώσεις μπορούν να εφαρμοστούν κατάλληλα και στο k-από-τα-n:F σύστημα.

Όπως αναφέραμε και στο k-από-τα-n:F σύστημα έτσι και εδώ μπορούμε να έχουμε έναν άλλον τρόπο υπολογισμού της αξιοπιστίας, μέσω των MIS συστημάτων. Αν αντικαταστήσουμε το k με n-k+1, το k-από-τα-n:G σύστημα αντιμετωπίζεται σαν σύστημα εμφυτευμένο σε Μαρκοβιανή αλυσίδα. Δουλεύουμε ομοίως με το k-από-τα-n:F σύστημα.

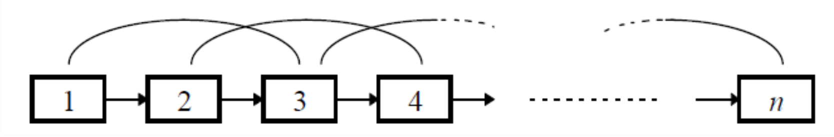
5) Συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*:*F* και κυκλικό συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*:*F* σύστημα

Ένα **συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*:*F*** σύστημα (consecutive *k*-out-of–*n*:*F* system) αποτυγχάνει αν και μόνο αν αποτύχουν k συνεχόμενες μονάδες του από τις n. Τα ε.σ.δ είναι τα {1,2,…,k}, {2,3,…,k+1},…,{n-k+1,n-k+2,…,n}, όμως τα ε.σ.λ τους είναι δύσκολο να περιγραφούν. Το σύνολο των ε.σ.δ περιγράφεται ως εξής **C**={{j, j+1,…, j+k-1}, j=1,2,…,n-k+1}, οπότε η συνάρτηση δομής του είναι η

$$\phi(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{n-k+1}(1-\prod_{i=j}^{j+k-1}(1-x_i))\,. \tag{1.9.11}$$

Μια απεικόνιση της δομής του παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.9.4

Σχήμα 1.9.4
Συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*:*F* σύστημα



Η αξιοπιστία του συστήματος δεν είναι εύκολο να υπολογιστεί με τον τύπο $R=E(\varphi(\mathbf{X}))$, μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε για αυτό τον σκοπό έναν αναδρομικό τύπο της μορφής (*Chiang & Niu* 1981).

$$R(k,n:F)=\begin{cases}1 & 0\le n<k\\ 1-(1-p)^n & n=k\\ p^{n-k+1}+\sum_{r=1}^{n-k+1}\sum_{m=r+1}^{r+k-1}R(k,n-m)p^r(1-p)^{m-r} & n>k\end{cases} \qquad (1.9.12)$$

όπου $R(k,n\text{-}m)$ είναι η αξιοπιστία του συνεχόμενου k-από-τα-m:F συστήματος, το οποίο αποτελείται από τις $n\text{-}m$ μονάδες του αρχικού ($R(k,n\text{-}m)=0$ για $n\text{-}m<0$).

Ένα συνεχόμενο k-από-τα-n:F σύστημα με $k=1$ είναι ένα σειριακό σύστημα, ενώ με $k=n$ είναι ένα παράλληλο.

Σύμφωνα με τους *Esary & Proschan* ένα κάτω φράγμα της αξιοπιστίας είναι το

$$LB_{ER}(\mathbf{p})=\prod_{j=1}^{N}(1-\prod_{i\in C_j}(1-p_i))=\prod_{j=1}^{n-k+1}(1-\prod_{i=j}^{j+k-1}(1-p_i))=\prod_{j=1}^{n-k+1}(1-\prod_{i=j}^{j+k-1}q_i)\,.$$

Ενώ όταν έχουμε όμοιες μονάδες το φράγμα γίνεται

$$LB_{ER}(p)=\prod_{j=1}^{N}(1-(1-p)^{|C_j|})=(1-q^k)^{n-k+1}\ge p^n=LB_1\,.$$

Για να εργασθούμε με την διαδικασία της εμφύτευσης σε Μαρκοβιανές αλυσίδες, θα υποθέσουμε ότι οι μονάδες έχουν αξιοπιστία p_i ,$i=1,2,\ldots n$, ο χώρος των καταστάσεων είναι ο $S=\{0,1,\ldots,k\}=\{s_0,s_1,\ldots,s_k\}$ και θα θεωρήσουμε τη διαμέριση $S_i=\{s_i\}$, $i=0,1,\ldots k$ ($N=m=k$).
Ορίζουμε την μαρκοβιανή αλυσίδα $\{Y_t\ ,t\ge 0\}$ ως εξής:
i) $Y_t=i$, αν το πλήθος των τελευταίων συνεχόμενων χαλασμένων μονάδων είναι i $(1\le i\le k)$
ii) $Y_t=n$, αν το πλήθος των τελευταίων συνεχόμενων χαλασμένων μονάδων είναι ίσο ή μεγαλύτερο από k.
Ο πίνακας μετάβασης είναι ο παρακάτω

$$\Lambda_t=\left[\begin{array}{ccccc|c} p_t & q_t & & & & \\ p_t & & q_t & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ p_t & & & & q_t & \\ p_t & & & & & q_t \\ \hline & & & & & 1\end{array}\right]_{(k+1)\times(k+1)}$$

Αντικαθιστώντας τον πίνακα αυτόν στον τύπο της Πρότασης 1.5.8, η αξιοπιστία του k-από-τα-n :F συστήματος μπορεί να βρεθεί μέσω του τύπου $R_n=\boldsymbol{\pi}_0'\left(\prod_{t=1}^{n}\Lambda_t\right)\mathbf{u}$.

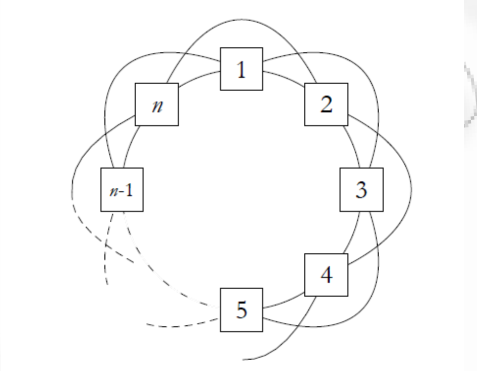
Ένα σύνολο αναδρομικών σχέσεων για ένα συνεχόμενο k-από-τα-n:F σύστημα δίνεται από τους τύπους

$$\alpha_0(t) = p_t \sum_{r=0}^{k-1} \alpha_0(t-1) = p_t(1-\alpha_k(t-1))$$
$$\alpha_k(t) = q_t \alpha_{k-1}(t-1) + \alpha_k(t-1)$$
$$\alpha_r(t) = q_t \alpha_{r-1}(t-1), \quad r = 1,...k-1$$

Με τη βοήθεια της Πρότασης 1.5.9 και αξιοποιώντας τις αναδρομικές σχέσεις μπορεί να προκύψει η αξιοπιστία του συστήματος.

Μια ειδική περίπτωση του συνεχόμενου k-από-τα-n:F συστήματος είναι ένα σύστημα όπου η οι μονάδες του είναι συνδεδεμένες κυκλικά (δηλαδή, η πρώτη είναι δίπλα στην n-οστή). Αυτό το σύστημα ονομάζεται **κυκλικό συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*:*F*** (circular consecutive k-out-of-n:F system). Η δομή ενός τέτοιου συστήματος απεικονίζεται στο Σχήμα 1.9.5.

Σχήμα 1.9.5
Κυκλικό συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*:*F* σύστημα



6) Σταθμισμένο *k*-από-τα –*n*:*F* και συνεχόμενο σταθμισμένο *k*-από-τα–*n*:*F* σύστημα

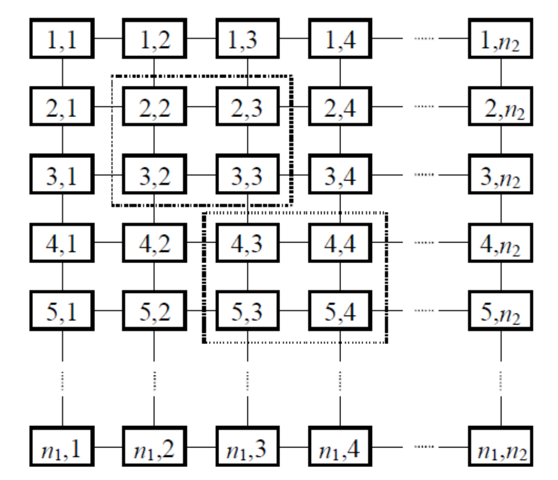
Ένα σύστημα ονομάζεται **σταθμισμένο *k*-από-τα–*n*:*F*** (weighted k-out-of-n:F system) όταν αντιστοιχίσουμε κάποια βάρη w_i σε κάθε μία από τις n μονάδες του. Θεωρούμε ότι αποτυγχάνει αν το συνολικό βάρος των μονάδων που απέτυχαν είναι τουλάχιστον k.

7) Διδιάστατο συνεχόμενο k_1×k_2 -από-τα- n_1×n_2:*F* σύστημα

Το **διδιάστατο συνεχόμενο k_1×k_2 – από-τα – n_1×n_2:*F*** (two-dimensional consecutive k_1×k_2-out-of-n_1×n_2:F system) είναι ένα σύστημα που αποτελείται από n_1n_2 το πλήθος μονάδες τοποθετημένες σε ένα ορθογώνιο διάστασης n_1×n_2. Αποτυγχάνει αν αποτύχουν όλες οι μονάδες τουλάχιστον ενός ορθογωνίου διάστασης k_1×k_2. Επομένως τα ε.σ.δ. είναι όλα τα σύνολα των μονάδων με k_1k_2 το πλήθος στοιχεία που βρίσκονται στο εσωτερικό ενός ορθογωνίου με διάσταση k_1×k_2. Θεωρούμε ότι όταν μία μονάδα βρίσκεται στην i-γραμμή και j-στήλη (συμβολισμός (i,j)) τότε το σύνολο των ε.σ.δ έχει τη μορφή $\{(I,J)$: $I=\{i,i+1,\ldots,i+k_1-1\}$ και $J=\{j,j+1,\ldots, j+k_2-1\}\}$ όπου $i=1,2,\ldots,n_1-k_1+1$ και $j=1,2,\ldots,n_2-k_2+1$.

Ένα τέτοιο σύστημα απεικονίζεται στο Σχήμα 1.9.6

Σχήμα 1.9.6
Διδιάστατο συνεχόμενο $k_1 \times k_2$ -από-τα- $n_1 \times n_2$:F σύστημα



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΑ ΑΠΟΤΥΧΙΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την έννοια της αξιοπιστίας συστημάτων που αποτελούνται από μονάδες που παρουσιάζουν πάνω από ένα είδη αποτυχίας. Τα συστήματα αυτά είναι γενίκευση των συστημάτων αξιοπιστίας τα οποία αποτελούνται από μονάδες με ένα επίπεδο αποτυχίας. Σε αυτά οι μονάδες έχουν τη δυνατότητα να βρεθούν μόνο σε δύο καταστάσεις (επιτυχία, αποτυχία) και λέγονται **συστήματα με μία κατάσταση αποτυχίας** (SFM, Single Failure Mode System). Το συγκεκριμένο μοντέλο είναι λογικό να μην μπορεί να περιγράψει ικανοποιητικά συστήματα με περισσότερες από δύο καταστάσεις μονάδων.

Η πιο απλή γενίκευση των SFM συστημάτων, είναι τα **συστήματα με μονάδες που έχουν δύο επίπεδα αποτυχίας** (DFM, Dual Failure Mode Systems). Σε ένα DFM σύστημα οι μονάδες είναι δυνατόν να βρεθούν σε τρείς καταστάσεις (επιτυχία, αποτυχία τύπου I, αποτυχία τύπου II), με πιθανότητες αντίστοιχα p_i, q_{1i} και q_{2i}, για τις οποίες θα ισχύει $p_i + q_{1i} + q_{2i} =1$.

Για την ανάλυση των DFM συστημάτων θα πρέπει να γνωρίζουμε την συνάρτηση δομής τους, την οποία βρίσκω με την βοήθεια των ε.σ.δ (ή ε.σ.λ). Η δομή των DFM συστημάτων θα καθορίζεται από δύο διαφορετικές οικογένειες ε.σ.δ, (ή ε.σ.λ) μιας και οι μονάδες εμπίπτουν σε δύο διαφορετικά είδη αποτυχίας.
Οι πιο συνήθεις καταστάσεις αποτυχίας των μονάδων ενός DFM συστήματος είναι δύο:

- οι μονάδες είναι ανοιχτές, οπότε το σύστημα παραμένει κολλημένο ανοιχτό (αποτυχία τύπου I, open mode)
- οι μονάδες είναι κλειστές, οπότε το σύστημα παραμένει κολλημένο κλειστό (αποτυχία τύπου II, short mode).

Η προηγούμενη γενίκευση είναι αρκετά χρήσιμη αν σκεφτεί κανείς ότι οι εφαρμογές των DFM συστημάτων στην πραγματική μας ζωή είναι πάρα πολλές.

Εδώ θα παρουσιάσουμε κάποια από τα συστήματα που μπορούν να περιγραφούν μέσω αυτού του μοντέλου, όπως: ηλεκτρικές ή ηλεκτρονικές συσκευές (κολλημένες ανοιχτές - κλειστές δίοδοι ή διακόπτες, failed open - failed short modes), συστήματα ελέγχου ροής υγρών (κολλημένες ανοικτές - κλειστές βαλβίδες, stuck open - stuck closed valves), συστήματα ασφαλείας (αδυναμία σήμανσης συναγερμού - εσφαλμένος συναγερμός, failure to detect breakdown - false alarm), πυρηνική βιομηχανία, ψηφιακά συστήματα επικοινωνίας, συστήματα εντοπισμού στόχου, δίκτυα συσκευών, συστήματα παραγωγής ενέργειας, σταθμισμένα εκλογικά συστήματα και πολλά άλλα.

Ένα DFM σύστημα αποτελείται από *n* μονάδες, κάθε μία από τις οποίες μπορεί να βρεθεί σε τρείς καταστάσεις: μία λειτουργίας (οι μονάδες λειτουργούν σε ικανοποιητικό βαθμό) και δύο μη λειτουργίας (οι μονάδες είναι χαλασμένες ή δυσλειτουργούν). Θεωρούμε ότι οι καταστάσεις των μονάδων του συστήματος είναι ανεξάρτητες. Το σύστημα μπορεί να αποτύχει για μία μόνο από τις δύο καταστάσεις αποτυχίας, μιας και είναι αμοιβαία αποκλειόμενες η μία με την άλλη. Μία μονάδα μπορεί να αποτύχει είτε όταν βρίσκεται σε ανοιχτή είτε σε κλειστή κατάσταση. Η μορφή που μπορεί να έχουν οι μονάδες διαφοροποιείται ανάλογα με το είδος του συστήματος, έτσι έχουμε: διακόπτες σε δίκτυα, διόδους σε κυκλώματα, βαλβίδες σε σύστημα ελέγχου ροής υγρών και πολλά άλλα.

Μία άλλη ποσότητα που σχετίζεται με την αξιοπιστία είναι η πλεονασματικότητα των μονάδων (Rendundancy). Αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αυξήσει την αξιοπιστία ενός συστήματος, χωρίς όμως να υπάρχει κάποια αλλαγή στην αξιοπιστία των μονάδων που αποτελούν το σύστημα.

Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε την αξιοπιστία των συστημάτων με δύο επίπεδα αποτυχίας. Θα παρουσιάσουμε μερικά παραδείγματα όπου διακρίνονται οι καταστάσεις των μονάδων αλλά και οι επίδρασή τους στα συστήματα .

Έστω ότι έχουμε ένα δίκτυο (για παράδειγμα ηλεκτρικό) με *n* διακόπτες συνδεδεμένους σε σειρά με την ιδιότητα ότι μία αποτυχία τύπου Ι οποιουδήποτε από τους διακόπτες, μπορεί να προκαλέσει αποτυχία τύπου Ι όπως επίσης και αποτυχία τύπου ΙΙ στο σύστημα. Από την άλλη, αν οι *n* διακόπτες είναι συνδεδεμένοι παράλληλα, η αποτυχία τύπου ΙΙ ενός διακόπτη, έχει ως συνέπεια την αποτυχία τύπου ΙΙ του συστήματος, ενώ μία αποτυχία τύπου Ι σε όλους τους διακόπτες του συστήματος θα προκαλέσει αποτυχία τύπου Ι στο σύστημα. Με την αύξηση του πλήθους των μονάδων στο σύστημα μπορεί να έχω ως αποτέλεσμα την μείωση της αξιοπιστίας του συστήματος.

Σε αντίθεση, αν έχουμε ένα ηλεκτρικό σύστημα με μονάδες συνδεδεμένες σε σειρά, αν συμβεί ένα βραχυκύκλωμα σε μία από τις μονάδες του τότε αυτή η μονάδα δεν θα λειτουργεί αλλά θα επιτρέπει να υπάρχει ροή ρεύματος μέσα από τις υπόλοιπες μονάδες, οπότε αυτές συνεχίζουν να είναι σε λειτουργία. Ωστόσο μία αποτυχία του κυκλώματος όταν μία μονάδα παραμείνει κολλημένη ανοιχτή, μπορεί να προκαλέσει αποτυχία τύπου Ι στο σύστημα.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να θεωρήσουμε για τα συστήματα αξιοπιστίας με δύο επίπεδα αποτυχίας, ότι κάθε μονάδα, θα είναι είτε ανοιχτή είτε κλειστή, όπως επίσης ότι τα επίπεδα (καταστάσεις) αποτυχίας της θα είναι δύο, θα αποτυγχάνει είτε όταν παραμένει ανοιχτή (αποτυχία τύπου Ι) είτε όταν παραμένει κλειστή (αποτυχία τύπου ΙΙ). Όλα τα παραπάνω οδηγούν σε αποτυχία του συστήματος συνολικά σε αυτά τα δύο επίπεδα (αποτυχία συστήματος τύπου Ι ή αποτυχία συστήματος τύπου ΙΙ).

Για την καλύτερη κατανόηση συστημάτων με δύο επίπεδα αποτυχίας όπου υπάρχει πρακτική εφαρμογή (π.χ. ένα ηλεκτρικό κύκλωμα), ορίζουμε τα εξής επίπεδα αποτυχίας:

- **Αποτυχία τύπου I** είναι η κατάσταση στην οποία το σύστημα λειτουργεί ως ανοικτός διακόπτης, οπότε δεν μεταφέρει την ενέργεια στο υπόλοιπο σύστημα.
- **Αποτυχία τύπου II** είναι η κατάσταση στην οποία το σύστημα λειτουργεί ως κλειστός διακόπτης (ουσιαστικά σαν βραχυκύκλωμα), οπότε αλλοιώνεται η συμπεριφορά του συνολικού συστήματος.

Θεωρούμε τα παρακάτω ενδεχόμενα για το σύστημα:

Α= το σύστημα να λειτουργεί και στις δύο καταστάσεις
Β= το σύστημα να λειτουργεί όταν οι μονάδες είναι ανοιχτές
Γ= το σύστημα να μην λειτουργεί όταν οι μονάδες είναι κλειστές, δηλαδή το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση αποτυχίας τύπου II
Δ= το σύστημα να μην λειτουργεί και στις δύο καταστάσεις
Ε= το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση αποτυχίας τύπου I, δηλαδή το σύστημα να χαλάει όταν οι μονάδες του παραμένουν ανοιχτές.

Επομένως η αξιοπιστία των συστημάτων με δύο επίπεδα αποτυχίας, την οποία θα συμβολίζουμε από εδώ και στο εξής με R θα εκφράζεται με βάση τα παραπάνω ενδεχόμενα ως εξής

$$R = P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{B}) - P(\Gamma) + P(\Delta).$$

Οι καταστάσεις αποτυχίας είναι αμοιβαία αποκλειόμενες, αυτό σημαίνει ότι η μονάδα δεν μπορεί να βρεθεί και στις δύο ταυτόχρονα επομένως η μονάδα χαλάει όταν είναι είτε ανοιχτή, είτε κλειστή. Η πιθανότητα του συστήματος να αποτυγχάνει και στα δύο επίπεδα ταυτόχρονα είναι μηδενική, έτσι θα ισχύει ότι $P(\Delta)=0$ οπότε η παραπάνω σχέση παίρνει την μορφή

$$R = 1 - P(\mathrm{E}) - P(\Gamma).$$

Θα παρουσιάσουμε τις πιθανότητες αποτυχίας των μονάδων για κάθε κατάσταση:

q_o: πιθανότητα αποτυχίας της μονάδας όταν είναι ανοιχτή, δηλαδή πιθανότητα αποτυχίας τύπου I της μονάδας
q_s: πιθανότητα αποτυχίας της μονάδας όταν είναι κλειστή, δηλαδή πιθανότητα αποτυχίας τύπου II της μονάδας.

Αυτές έχουν πιθανότητες λειτουργίας τις p_o ($p_o = 1 - q_o$) και p_s ($p_s = 1 - q_s$) αντίστοιχα.

Επίσης οι πιθανότητες αποτυχίας του συστήματος θα είναι

F_o: πιθανότητα αποτυχίας του συστήματος όταν οι μονάδες του είναι ανοιχτές, είναι η πιθανότητα αποτυχίας τύπου I του συστήματος
F_s: πιθανότητα αποτυχίας του συστήματος όταν οι μονάδες του είναι κλειστές, είναι η πιθανότητα αποτυχίας τύπου II του συστήματος.

Έτσι η σχέση που συνδέει την αξιοπιστία και τις πιθανότητες αποτυχίας του συστήματος έχει τη μορφή

$$R = 1 - F_o - F_s .$$

Τώρα θα ακολουθήσει μία πιο λεπτομερειακή ανάλυση των συστημάτων αξιοπιστίας με δύο επίπεδα αποτυχίας (DFM), όπου θα παρουσιάσουμε μία εκτίμηση για την αξιοπιστία και ορισμένες ιδιότητες του κάθε συστήματος.

Ο *Pham* (2003) ασχολήθηκε με τρόπους εκτίμησης της αξιοπιστίας για διάφορα συστήματα, όπως το σειριακό, το παράλληλο, το σειριακό-παράλληλο, το παράλληλο-σειριακό και το *k*-από-τα-*n*. Έτσι από εκεί θα αντλήσουμε το υλικό μας στις επόμενες παραγράφους (2.1, 2.2, 2.3, 2.4 και 2.5).

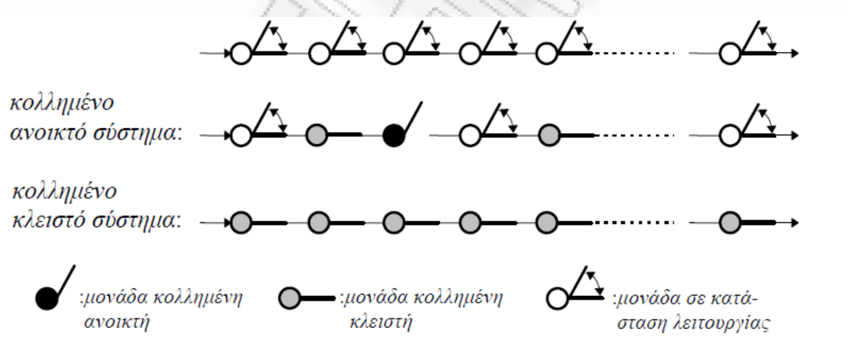
2.1 Σειριακό σύστημα

Ένα DFM σύστημα ονομάζεται **σειριακό** (series:DFM system), αν οι n το πλήθος μονάδες που το αποτελούν βρίσκονται συνδεδεμένες σε σειρά. Ένα σειριακό DFM σύστημα αποτυγχάνει

- όταν τουλάχιστον μία μονάδα του δεν κλείνει (το σύστημα μένει κολλημένο ανοικτό, αποτυχία τύπου Ι).
- όταν όλες οι μονάδες του δυσλειτουργούν παραμένοντας κολλημένες κλειστές (το σύστημα μένει κολλημένο κλειστό, αποτυχία τύπου ΙΙ).

Μία απεικόνιση του συστήματος και των καταστάσεων είναι η παρακάτω

Σχήμα 2.1.1
Σειριακό σύστημα κολλημένο ανοιχτό και κολλημένο κλειστό (Boutsikas (1998))



Συμβολίζουμε με q_o την πιθανότητα αποτυχίας τύπου Ι της μονάδας και με q_s την πιθανότητα αποτυχίας τύπου ΙΙ της μονάδας. Επίσης θα συμβολίζουμε με p_o (p_o = 1- q_o) και p_s (p_s = 1- q_s) τις πιθανότητες λειτουργίας τους αντίστοιχα.

Η πιθανότητα αποτυχίας τύπου Ι του συστήματος τώρα θα συμβολίζεται με F_o και θα δίνεται από την σχέση

$$F_o(n) = 1-(1-q_o)^n \ . \tag{2.1.1}$$

Η πιθανότητα αυτή έχει την εξής ερμηνεία:

$$F_o(n) = 1-P(\mathrm{B}) = 1-p_o^{\,n} = 1-(1-q_o)^n$$

όπου $p_o^{\,n}$ είναι η αξιοπιστία του συστήματος όταν υπάρχουν μονάδες που παραμένουν ανοιχτές.

Η πιθανότητα αποτυχίας τύπου ΙΙ του συστήματος θα συμβολίζεται με F_s και θα δίνεται από την σχέση (Η ανάλυση είναι όμοια με αυτή της σχέσης για την $F_o(n)$).

$$F_s(n) = q_s^{\,n}. \tag{2.1.2}$$

Αφού $R = 1 - F_o - F_s$, η αξιοπιστία του σειριακού συστήματος με δύο επίπεδα αποτυχίας θα εκφράζεται, μέσω του τύπου

$$R_s(n) = (1 - q_o)^n - q_s^{\,n}. \tag{2.1.3}$$

Παρατηρούμε ότι σε μία σειριακή διάταξη, η αύξηση του αριθμού n των μονάδων του συστήματος οδηγεί σε:

- αύξηση της αξιοπιστίας του συστήματος όσον αφορά την αποτυχία τύπου ΙΙ (αυτό συμβαίνει γιατί για να αποτύχει το σύστημα πρέπει να είναι κλειστές όλες οι μονάδες).
- μείωση της αξιοπιστίας του συστήματος όσον αφορά την αποτυχία τύπου Ι (αυτό συμβαίνει γιατί για να αποτύχει το σύστημα πρέπει τουλάχιστον μία μονάδα να παραμείνει ανοιχτή).

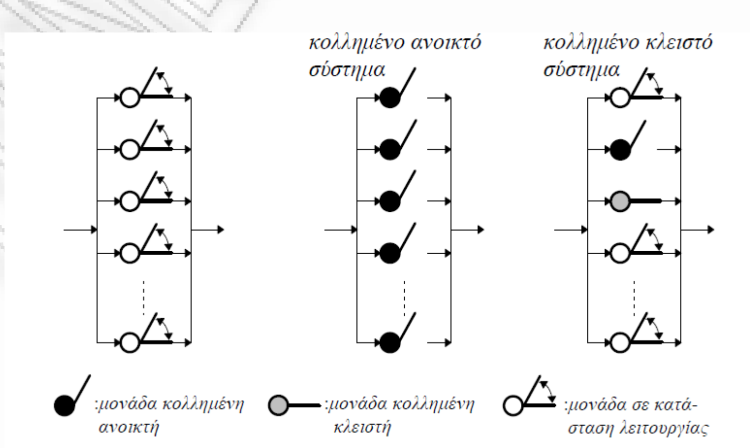
2.2 Παράλληλο σύστημα

Ένα DFM σύστημα ονομάζεται **παράλληλο** (parallel:DFM system), αν οι μονάδες από τις οποίες αποτελείται είναι συνδεδεμένες παράλληλα. Υποθέτουμε ότι το σύστημα αποτελείται από n το πλήθος μονάδες. Το σύστημα αποτυγχάνει τελείως:

- όταν όλες οι μονάδες του είναι ανοιχτές, έτσι το σύστημα μένει κολλημένο ανοιχτό (αποτυχία τύπου Ι)
- όταν τουλάχιστον μία μονάδα δυσλειτουργεί μένοντας κλειστή, οπότε το σύστημα μένει κολλημένο κλειστό (αποτυχία τύπου ΙΙ).

Μία απεικόνιση του συστήματος στις δύο καταστάσεις δίνεται στο Σχήμα 2.2.1

Σχήμα 2.2.1
Παράλληλο σύστημα κολλημένο ανοιχτό και κολλημένο κλειστό (Boutsikas (1998))



Η πιθανότητα αποτυχίας τύπου Ι του συστήματος τώρα θα συμβολίζεται με F_o και θα δίνεται από τον τύπο

$$F_o(n) = q_o^{\,n} \tag{2.2.1}$$

ενώ η πιθανότητα αποτυχίας τύπου ΙΙ του συστήματος θα συμβολίζεται με F_s και θα δίνεται από τον τύπο

$$F_s(n) = (1 - q_s)^n . \tag{2.2.2}$$

Επομένως η αξιοπιστία του παράλληλου συστήματος είναι η ακόλουθη

$$R_p(n) = (1 - q_s)^n - q_o^{\,n} . \tag{2.2.3}$$

Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι η ποσότητα $(1- q_s)^n$ αντιπροσωπεύει την πιθανότητα ότι καμία μονάδα δεν αποτυγχάνει όταν είναι κλειστή και η ποσότητα q_o^n εκφράζει την πιθανότητα ότι όλες οι μονάδες αποτυγχάνουν όταν παραμένουν ανοιχτές.

2.3 Παράλληλο-σειριακό σύστημα

Θεωρούμε ένα σύστημα το οποίο αποτελείται από m το πλήθος υποσυστήματα συνδεδεμένα παράλληλα, όπου κάθε ένα από τα υποσυστήματα αυτά αποτελείται από n ταυτόσημες μονάδες συνδεδεμένες σε σειρά. Ένα DFM σύστημα με μία τέτοιου είδους διάταξη ονομάζεται **παράλληλο-σειριακό σύστημα** (parallel-series:DFM system). Το παράλληλο-σειριακό σύστημα έχει δύο επίπεδα αποτυχίας τα οποία είναι

- αποτυχία μίας μονάδας σε κάθε υποσύστημα σε ανοιχτό κύκλωμα, η οποία καθιστά το σύστημα μη λειτουργικό (αποτυχία τύπου Ι)
- αποτυχία όλων των μονάδων σε οποιοδήποτε υποσύστημα σε κλειστό κύκλωμα, η οποία καθιστά πάλι ολόκληρο το σύστημα μη λειτουργικό. (αποτυχία τύπου ΙΙ)

Μία εξήγηση των καταστάσεων αποτυχίας είναι η εξής:

- Αν τουλάχιστον μία μονάδα σε κάθε υποσύστημα, τα οποία είναι σειριακά συστήματα, είναι κολλημένη ανοιχτή τότε κάθε σειριακό υποσύστημα χαλάει. Δεδομένου ότι όλα τα υποσυστήματα του παράλληλου συστήματος χαλάνε όταν οι μονάδες τους είναι κολλημένες ανοιχτές, αποτυγχάνει και το ίδιο το παράλληλο σύστημα, άρα και το παράλληλο-σειριακό σύστημα.
- Αν όλες οι μονάδες σε οποιοδήποτε υποσύστημα, το οποίο είναι σειριακό σύστημα, είναι κολλημένες κλειστές τότε το σειριακό υποσύστημα αποτυγχάνει. Έτσι γνωρίζοντας ότι ένα από τα υποσυστήματα του παράλληλου συστήματος είναι χαλασμένο όταν οι μονάδες του είναι κολλημένες κλειστές, αποτυγχάνει και το παράλληλο σύστημα οπότε και το παράλληλο-σειριακό σύστημα.

Οι μονάδες που το αποτελούν μπορεί να είναι βαλβίδες σε συστήματα ελέγχου ροής υγρών ή δίοδοι ηλεκτρονικών κυκλωμάτων με την προϋπόθεση ότι εμπίπτουν σε δύο επίπεδα αποτυχίας: αποτυχία όταν οι μονάδες είναι ανοιχτές και αποτυχία όταν οι μονάδες είναι κλειστές.

Εφαρμογές ενός παράλληλου-σειριακού συστήματος μπορούμε να συναντήσουμε στο χώρο των τηλεπικοινωνιών, των δικτύων αλλά και των συστημάτων παραγωγής πυρηνικής ενέργειας. Ένα παράδειγμα εφαρμογής του είναι το εξής: θεωρούμε μία μονάδα ψηφιακού ηλεκτρικού κυκλώματος, σχεδιασμένη έτσι ώστε να επεξεργάζεται κάθε εισερχόμενο μήνυμα σε ένα σύστημα επικοινωνίας. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν το πολύ *m* τρόποι για να λάβουμε ένα μήνυμα μέσω αυτού του συστήματος και αυτό εξαρτάται από το ποιές από τις διακλαδώσεις του αποτελούμενες με *n* μονάδες, μπορούν να είναι λειτουργικές.

Εισάγουμε τους ακόλουθους συμβολισμούς:

m: αριθμός των υποσυστημάτων σε ένα σύστημα (ή μέγεθος του υποσυστήματος),

n: αριθμός των μονάδων σε κάθε υποσύστημα,

$F_o(m)$: η πιθανότητα αποτυχίας του συστήματος όταν οι μονάδες του συστήματος είναι ανοιχτές, πιθανότητα αποτυχίας τύπου Ι για το σύστημα,

$F_s(m)$: η πιθανότητα αποτυχίας του συστήματος όταν οι μονάδες του συστήματος είναι κλειστές, πιθανότητα αποτυχίας τύπου ΙΙ για το σύστημα.

Ορισμένες ιδιότητες του παράλληλου-σειριακού συστήματος είναι οι εξής:

1) Το σύστημα αποτελείται από *m* το πλήθος υποσυστήματα, όπου το καθένα από αυτά περιέχει *n* ταυτόσημες και ανεξάρτητες (iid) μονάδες .

2) Μία μονάδα μπορεί να βρίσκεται σε λειτουργία (καλή), είτε να είναι χαλασμένη μένοντας κολλημένη ανοιχτή, είτε μένοντας κολλημένη κλειστή. Μονάδες που αποτυγχάνουν δεν μπορούν ποτέ να τεθούν ξανά σε λειτουργία. Επίσης δεν μπορούν να συμβούν μεταβάσεις μεταξύ των δύο καταστάσεων αποτυχίας.

3) Το σύστημα μπορεί να είναι σε λειτουργία, είτε να είναι κολλημένο ανοιχτό όπου τουλάχιστον μία μονάδα σε κάθε υποσύστημα είναι κολλημένη ανοιχτή, είτε να είναι κολλημένο κλειστό όπου όλες οι μονάδες σε οποιοδήποτε από τα υποσυστήματα είναι κολλημένες κλειστές.

4) Οι μη δεσμευμένες πιθανότητες αποτυχίας των μονάδων για τις καταστάσεις όπου οι μονάδες είναι ανοιχτές και κλειστές, θεωρούνται γνωστές και υπόκεινται στους εξής περιορισμούς : $q_o, q_s > 0$, $q_o + q_s < 1$.

Οι πιθανότητες αποτυχίας τύπου Ι και τύπου ΙΙ του συστήματος δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους

$$F_o(m) = [1-(1-q_o)^n]^m \quad \text{και} \quad F_s(m) = 1-(1-q_s{}^n)^m . \tag{2.3.1}$$

Επομένως η συνάρτηση αξιοπιστίας του συστήματος δίνεται από την σχέση

$$R_{ps}(n,m) = (1-q_s{}^n)^m - [1-(1-q_o)^n]^m \tag{2.3.2}$$

όπου *m* είναι ο αριθμός των ταυτόσημων υποσυστημάτων που είναι συνδεδεμένα παράλληλα και *n* ο αριθμός των όμοιων μονάδων σε κάθε σειριακό υποσύστημα.

Ο όρος $(1-q_s{}^n)^m$ αντιπροσωπεύει την πιθανότητα ότι κανένα από τα υποσυστήματα δεν έχει αποτύχει όταν οι μονάδες του μένουν κολλημένες κλειστές που σημαίνει ότι κανένα δεν έχει βρεθεί στην κατάσταση αποτυχίας τύπου ΙΙ. Επίσης ο όρος $[1-(1-q_o)^n]^m$ εκφράζει την πιθανότητα ότι όλα τα υποσυστήματα έχουν αποτύχει όταν οι μονάδες τους είναι κολλημένες ανοιχτές το οποίο σημαίνει ότι όλα έχουν βρεθεί στην κατάσταση αποτυχίας τύπου Ι.

2.4 Σειριακό- παράλληλο σύστημα

Το **σειριακό-παράλληλο:DFM** (series-parallel:DFM system) σύστημα είναι το δυϊκό του παράλληλου-σειριακού DFM συστήματος στο οποίο αναφερθήκαμε προηγουμένως. Είναι ένα σύστημα αποτελούμενο από m υποσυστήματα συνδεδεμένα σε σειρά όπου κάθε ένα από αυτά απαρτίζεται από n ταυτόσημες μονάδες σε παράλληλη διάταξη. Ένα σειριακό-παράλληλο DFM σύστημα αποτυγχάνει αν

- αποτυγχάνουν όλες οι μονάδες σε οποιοδήποτε υποσύστημα όταν είναι κολλημένες ανοιχτές (αποτυχία τύπου I).
- αποτυχία μίας μονάδας σε κάθε υποσύστημα όταν είναι κολλημένη κλειστή (αποτυχία τύπου II).

Εφαρμογές ενός τέτοιου συστήματος μπορούμε να συναντήσουμε στο χώρο της επικοινωνίας, των δικτύων όπως και των συστημάτων παραγωγής πυρηνικής ενέργειας. Ένα παράδειγμα που βρίσκει εφαρμογή στην καθημερινότητα για το σύστημα αυτό είναι ένα ψηφιακό σύστημα επικοινωνίας που αποτελείται από m υποσταθμούς (υποσυστήματα) σε σειριακή διάταξη. Ένα μήνυμα στέλνεται αρχικά στον υποσταθμό 1, μετά αναμεταδίδεται στον υποσταθμό 2 κ.ο.κ έως το μήνυμα να περάσει μέσα από τον υποσταθμό m και έτσι να γίνει η λήψη του. Το μήνυμα αποτελείται από μία ακολουθία ψηφίων 0 ή 1 και κάθε ψηφίο μεταβιβάζεται χωριστά μέσω της συστοιχίας των m υποσυστημάτων. Ένα μειονέκτημα των υποσταθμών είναι ότι μπορούν να έχουν ως παραγόμενο αποτέλεσμα, διαφορετικό ψηφίο από αυτό που δέχθηκαν ως εισαγόμενο. Έτσι λάθη που συναντούμε στην ψηφιακή μετάδοση ενός μηνύματος είναι τα εξής: η μονάδα να εμφανίζεται αντί του μηδενικού ή το μηδενικό να εμφανίζεται στη θέση της μονάδας.

Ορίζουμε τα εξής

m: αριθμός των υποσυστημάτων σε ένα σύστημα που είναι συνδεδεμένα σε σειρά

n: αριθμός των μονάδων σε κάθε υποσύστημα που βρίσκονται σε παράλληλη σύνδεση

$F_o(m)$: η πιθανότητα αποτυχίας τύπου I για το σύστημα,

$F_s(m)$: η πιθανότητα αποτυχίας τύπου II για το σύστημα.

Σύμφωνα με τη συνδεσμολογία των υποσυστημάτων και των μονάδων σε αυτά, προκύπτουν οι τύποι που μας δίνουν τις πιθανότητες αποτυχίας τύπου I και τύπου II αντίστοιχα.

$$F_o(m) = 1-(1-q_o{}^n)^m \quad \text{και} \quad F_s(m) = [1-(1-q_s)^n]^m . \tag{2.4.1}$$

Με τη βοήθεια του τύπου R = 1- F_o - F_s , η συνάρτηση αξιοπιστίας του συστήματος είναι η ακόλουθη

$$R_{sp}(n,m) = (1-q_o{}^n)^m - [1-(1-q_s)^n]^m \tag{2.4.2}$$

όπου m είναι ο αριθμός των ταυτόσημων υποσυστημάτων που είναι συνδεδεμένα σε σειρά και n ο αριθμός των όμοιων μονάδων σε κάθε παράλληλο υποσύστημα.

2.5 *k*-από-τα-*n* σύστημα

Σε αυτή την παράγραφο, θα ασχοληθούμε με τα ***k*-από-τα-*n*:DFM** συστήματα (*k*-out-of-*n*:DFM system) τα οποία αποτελούνται από *n* πανομοιότυπες και ανεξάρτητες μονάδες. Οι μονάδες μπορεί είτε να λειτουργούν είτε να αποτυγχάνουν (όταν είναι ανοιχτές είτε όταν είναι κλειστές).
Ένα *k*-από-τα-*n* DFM σύστημα αποτυγχάνει σε δύο περιπτώσεις:

- τουλάχιστον *k* μονάδες είναι κολλημένες κλειστές (αποτυχία τύπου II)
- τουλάχιστον *n*-*k*+1 μονάδες είναι κολλημένες ανοιχτές (αποτυχία τύπου I).

Τα επίπεδα αυτά αποτυχίας είναι αμοιβαία αποκλειόμενα, που σημαίνει ότι θα έχω αποτυχία είτε στο ένα είτε στο άλλο επίπεδο. Οι μονάδες δεν είναι ούτε απόλυτα αξιόπιστες ούτε αναξιόπιστες, άρα για τις πιθανότητες αποτυχίας θα ισχύουν

$$q_0 > 0,\ q_s > 0,\ q_0 + q_s < 1.$$

Ορισμένες εφαρμογές αυτών των συστημάτων συναντάμε σε τομείς όπως αυτοί της επικοινωνίας, ανίχνευσης στόχων, συστημάτων ασφαλείας και ιδιαίτερα λήψης αποφάσεων. Θέλοντας να κάνουμε μία πιο αναλυτική αναφορά πάνω σε αυτά τα συστήματα, αναπτύσσουμε μία εφαρμογή ενός *k*-από-τα-*n* συστήματος: θεωρούμε μία επιτροπή αποτελούμενη από *n* μέλη, τα οποία πρέπει να πάρουν μία απόφαση για το αν θα αποδεχθούν ή αν θα απορρίψουν κάποιο project. Τα projects μπορεί να είναι επιτυχή και μη επιτυχή. Κάνουμε λοιπόν την υπόθεση ότι η επικοινωνία μεταξύ των μελών είναι περιορισμένη και ότι κάθε μέλος έχει την δυνατότητα να πάρει μία θετική ή μία αρνητική απόφαση για το κάθε project. Η επιτροπή θα αποδεχθεί ένα project αν τουλάχιστον *k* από τα μέλη της το αποδεχθούν και θα το απορρίψει αν τουλάχιστον *n*-*k*+1 μέλη της το απορρίψουν.

Κατά τη διάρκεια της λήψης μιας απόφασης υπάρχει το ενδεχόμενο να γίνουν δύο σφάλματα όπως

- να γίνει αποδεκτό ένα «κακό» project (συμβαίνει όταν τουλάχιστον *k* από τα μέλη αποδέχονται ένα λανθασμένο project)
- να μην γίνει αποδεκτό ένα «καλό» project (συμβαίνει αν τουλάχιστον *n*-*k*+1 μέλη της απορρίψουν ένα επιτυχές project).

Άλλα παραδείγματα όπου βρίσκουν εφαρμογή τα *k*-από-τα-*n* συστήματα είναι τα ηλεκτρικά κυκλώματα με διακόπτες και τα συστήματα ασφαλείας. Αρχικά υποθέτουμε ότι έχουμε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα με διακόπτες. Αν ένας διακόπτης ενεργοποιηθεί, δηλαδή δεχθεί εντολή για να κλείσει, η πιθανότητα αποτυχίας του είναι ίση με p_1. Η αποτυχία ενδέχεται να συμβεί για πολλαπλούς λόγους, όπως για παράδειγμα η ύπαρξη σκόνης που μπορεί να εμποδίζει το κλείσιμό του. Στην περίπτωση όμως που ο διακόπτης δεν έχει ενεργοποιηθεί, δηλαδή έχει εντολή για να μείνει ανοιχτός, η πιθανότητα αποτυχίας του είναι ίση με p_2 και αυτό έχει ως αποτέλεσμα το κύκλωμα να παραμένει κλειστό.

Τέλος μία ακόμη εφαρμογή είναι σε συστήματα συναγερμού, στα οποία μπορούν να συμβούν δύο πιθανά λάθη

- αποτυχία ανίχνευσης μίας διάρρηξης λόγω ηλεκτρικής ή μηχανικής βλάβης
- ενεργοποίηση ενός λάθους συναγερμού η οποία να οφείλεται σε έναν εξωγενή παράγοντα.

Ορίζουμε τα εξής

q_o: πιθανότητα αποτυχίας της μονάδας όταν αυτή είναι ανοιχτή, δηλαδή η πιθανότητα αποτυχίας τύπου Ι για τη μονάδα,

p_o: πιθανότητα να λειτουργεί όταν μένει ανοιχτή (1- q_o),

q_s: πιθανότητα αποτυχίας της μονάδας όταν αυτή είναι κλειστή, δηλαδή η πιθανότητα αποτυχία τύπου ΙΙ για την μονάδα,

p_s: πιθανότητα λειτουργίας όταν η μονάδα θα μένει κλειστή (1- q_s),

F_o: πιθανότητα αποτυχίας τύπου Ι του συστήματος,

F_s: πιθανότητα αποτυχίας τύπου ΙΙ του συστήματος,

n: αριθμός των μονάδων του συστήματος,

k: μία οριακή τιμή ($1 \le k \le n$) για τις μονάδες του συστήματος από την οποία κρίνεται η επιτυχία ή η αποτυχία του,

R: αξιοπιστία του συστήματος,

$\lfloor x \rfloor$: ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός ο οποίος θα είναι μικρότερος ή ίσος του x.

Για να ορίσουμε τις πιθανότητες αποτυχίας του k-από-τα-n συστήματος, θεωρούμε ότι το σύστημα αποτυγχάνει, αν και μόνο αν χαλάσουν τουλάχιστον k από τις n μονάδες του, μένοντας κολλημένες κλειστές (αποτυχία τύπου ΙΙ), άρα και το k-από-τα-n σύστημα μένει κλειστό. Ο τύπος της πιθανότητας αποτυχίας στην περίπτωση που έχουμε αποτυχία τύπου ΙΙ, δίνεται από την σχέση:

$$F_s(k,n) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} q_s^{\,i} p_s^{\,n-i} = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} q_s^{\,i} p_s^{\,n-i} \qquad (2.5.1)$$

Επίσης το σύστημα αποτυγχάνει με αποτυχία τύπου Ι, αν και μόνο αν τουλάχιστον n-k+1 από τις n μονάδες του συστήματος χαλάσουν μένοντας κολλημένες ανοιχτές, οπότε το k-από-τα-n σύστημα είναι ανοιχτό. Ο τύπος της πιθανότητας αποτυχίας τύπου Ι είναι ο εξής

$$F_o(k,n) = \sum_{i=n-k+1}^{n} \binom{n}{i} q_o^{\,i} p_o^{\,n-i} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} p_o^{\,i} q_o^{\,n-i} . \qquad (2.5.2)$$

Αφού ισχύει ότι R = 1- F_o - F_s, τότε χρησιμοποιώντας τους τύπους (2.5.1) και (2.5.2) η αξιοπιστία του συστήματος εκφράζεται από τον τύπο

$$R(k,n) = 1 - F_o(k,n) - F_s(k,n) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} q_s^{\,i} p_s^{\,n-i} - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} p_o^{\,i} q_o^{\,n-i} . \qquad (2.5.3)$$

Ο πρώτος όρος του τύπου (2.5.3) εκφράζει την πιθανότητα το πολύ k-1 μονάδες να υποστούν αποτυχία τύπου ΙΙ, δηλαδή είναι η πιθανότητα το σύστημα να λειτουργεί όταν οι μονάδες του είναι κλειστές. Ο δεύτερος όρος εκφράζει την πιθανότητα το πολύ k-1 μονάδες να λειτουργούν όταν είναι ανοιχτές, δηλαδή είναι η πιθανότητα το σύστημα να υποστεί αποτυχία τύπου Ι.

Τέλος αν ορίσουμε τις ποσότητες:

$$b(k,p,n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{και} \quad bsum(k,p,n) = \sum_{i=0}^{k} b(i,p,n)$$

οι παραπάνω σχέσεις αναδιατυπώνονται με τον ακόλουθο τρόπο

$$F_s(k,n) = 1 - bsum(k-1, q_s, n)$$

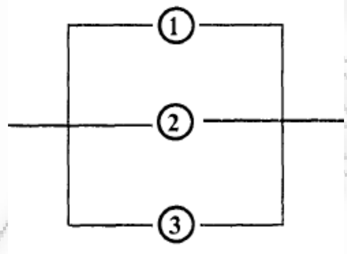
$$F_o(k,n) = bsum(k-1, p_o, n)$$

$$R(k,n) = 1 - bsum(k-1, q_s, n) - bsum(k-1, p_o, n)\,.$$

Παράδειγμα 2.5.1

Ο *Ben-Dov* (1980) ασχολήθηκε με συστήματα τα οποία αποτελούνται από τρείς μονάδες (n=3) και η συνδεσμολογία τους ποικίλει ανάλογα με την τιμή του k. Συνεπώς θα ασχοληθούμε με συστήματα που η παράμετρός τους k είναι ίση με 1,2,3, άρα τα συστήματά μας θα είναι τα: 1-από-τα-3 σύστημα, 2-από-τα-3 σύστημα και 3-από-τα-3 σύστημα. Συμβολίζουμε την αξιοπιστία της κάθε μονάδας με $r = 1-p_2 - p_1$ και την αναλογία της αποτυχίας, όταν είναι κλειστές οι μονάδες, ως προς το συνολικό αριθμό των αποτυχιών με $s=p_1/(p_1 + p_2)$. Οι συναρτήσεις αξιοπιστίας μπορούν να εκφραστούν είτε συναρτήσει των όρων p_1 και p_2 είτε μέσω των r και s.

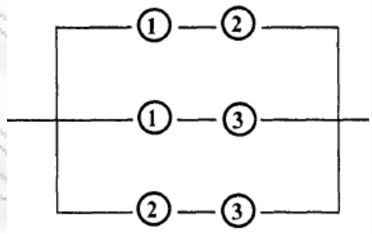
- Το 1-από-τα-3 σύστημα στην ουσία είναι ένα παράλληλο σύστημα, άρα μια απεικόνισή του είναι και η παρακάτω:



Η συνάρτηση αξιοπιστίας του εκφράζεται από την σχέση $R_1 = (1-p_2)^3 - p_1^3$, όμως λύνοντας τις εξισώσεις που εκφράζουν τα r και s ως προς p_1 και p_2 και αντικαθιστώντας τις ποσότητες αυτές στην εξίσωση της αξιοπιστίας, θα έχουμε ότι

$$R_1 = r^3 + 3r^2(1-r)s + 3r(1-r)^2s^2.$$

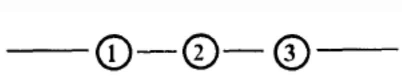
- Το 2-από-τα-3 σύστημα έχει την μορφή:



Η αξιοπιστία του εκφράζεται από την σχέση $R_2 = [1- (3p_2^2 - 2p_2^3)] - (3p_1^2 - 2p_1^3)$. Όπως και πριν, λύνοντας τις εξισώσεις που εκφράζουν τα r και s ως προς p_1 και p_2 και αντικαθιστώντας τις ποσότητες αυτές στον τύπο της αξιοπιστίας, παίρνουμε τελικώς ότι

$$R_2 = 3r^2 - 2r^3 + 6r(1-r)^2s - 6r(1-r)^2s^2.$$

- Το 3-από-τα-3 σύστημα είναι ένα σειριακό σύστημα, επομένως θα έχει την μορφή



Για να υπολογίσουμε την αξιοπιστία αυτού του συστήματος θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση R_3=(1-p_2^3)-[1-(1-p_1)^3] και κάνοντας την ίδια διαδικασία με πριν καταλήγουμε στον τύπο

$$R_3 = 3r - 3r^2 + r^3 - 3r(1-r)(2-r)s + 3r(1-r)^2 s.$$

■

2.6 Συνεχόμενο (*k*, *r*)-από-τα-*n* σύστημα

Ο *Koutras* (1997) στο άρθρο του ασχολήθηκε με το συνεχόμενο (k,r)-από-τα–n σύστημα και τους τρόπους εκτίμησης της αξιοπιστίας του. Θεωρούμε ένα σύστημα αποτελούμενο από n μονάδες οι οποίες συνδέονται γραμμικά. Κάθε μονάδα του συστήματος είτε θα λειτουργεί είτε θα δυσλειτουργεί. Όταν οι μονάδες δυσλειτουργούν θα βρίσκονται σε μία από τις δύο αμοιβαία αποκλειόμενες καταστάσεις, αποτυχία τύπου I ή αποτυχία τύπου II. Ένα DFM σύστημα θα το ονομάζουμε **συνεχόμενο (*k*,*r*)-από-τα–*n* σύστημα** (consecutive (k,r)-out-of-n:DFM system:DFM), με $1 \le k, r \le n$, αν και μόνο αν αυτό αποτυγχάνει

- όταν τουλάχιστον k συνεχόμενες μονάδες αποτύχουν όταν είναι ανοιχτές (αποτυχία τύπου I)
- όταν τουλάχιστον r συνεχόμενες μονάδες αποτύχουν όταν είναι κλειστές (αποτυχία τύπου II).

Οι μονάδες του συστήματος είναι ανεξάρτητες αλλά όχι απαραίτητα όμοιες .

Αν οι παράμετροι k, r του συστήματος πάρουν τις τιμές k=1 και r=n θα έχουμε ένα σειριακό σύστημα με δύο επίπεδα αποτυχίας ενώ αν πάρουν τις τιμές k=n και r=1, σημαίνει ότι έχω ένα συνεχόμενο (n,1)-από-τα-n:DFM σύστημα, το οποίο θα συμπίπτει με ένα παράλληλο σύστημα. Εφαρμογές ενός συνεχόμενου (k,r)-από-τα-n συστήματος μπορεί να συναντήσουμε σε συστήματα ελέγχου ροής υγρών, δίκτυα τηλεπικοινωνιών όπως επίσης και σε συστήματα συναγερμών.

Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα λειτουργίας της i-οστής μονάδας θα συμβολίζεται με p_i, οι πιθανότητες να αποτύχει (να χαλάσει) η i-οστή μονάδα όταν αυτή είναι ανοιχτή ή κλειστή θα είναι αντίστοιχα q_{i1}, q_{i2}, i=1,…,n. Οι τρείς καταστάσεις λειτουργίας (επαρκής λειτουργία, κολλημένη ανοιχτή, κολλημένη κλειστή) της κάθε μονάδας θεωρείται πως είναι αμοιβαία αποκλειόμενες, επομένως θα ισχύει

$$p_i + q_{i1} + q_{i2} = 1, \quad i=1,\ldots,n.$$

Αν οι n μονάδες είναι ίδιες τότε θα αναφερόμαστε στην περίπτωση ενός iid μοντέλου και θα συμβολίζουμε με p, q_1, q_2 τις κοινές πιθανότητες λειτουργίας και αποτυχίας των μονάδων, δηλαδή $p_i = p$, $q_{i1} = q_1$, $q_{i2} = q_2$, i=1,…,n.

Η αξιοπιστία του συστήματος θα συμβολίζεται με R_n. Ακόμη με R_i, $1 \le i \le n$, μπορούμε να συμβολίσουμε την αξιοπιστία του συνεχόμενου (k,r)-από-τα-i συστήματος με δύο επίπεδα αποτυχίας το οποίο αποτελείται από τις μονάδες 1,2,…,i.

Τέλος με R_{i1}, R_{i2} θα συμβολίζουμε την δεσμευμένη πιθανότητα ότι το συνεχόμενο (k,r)-από-τα-i σύστημα με δύο επίπεδα αποτυχίας (που αποτελείται από τις πρώτες i μονάδες) δουλεύει, δεδομένου ότι η i-οστή μονάδα βρίσκεται στο επίπεδο αποτυχίας τύπου I (αποτυχία όταν είναι ανοιχτή η μονάδα) και τύπου II (αποτυχία όταν είναι κλειστή η μονάδα) αντίστοιχα.

Για την καλύτερη δόμηση των αποτελεσμάτων μας θα κάνουμε τις εξής συμβάσεις

$$p_o = q_{o1} = q_{o2} = 1, \quad R_o = R_{o1} = R_{o2} = 1, \quad p_i = q_{i1} = q_{i2} = 0, \quad R_i = R_{i1} = R_{i2} = 0$$

για όλα τα i<0.

Για την εκτίμηση της αξιοπιστίας ενός συνεχόμενου (k,r)-από τα-n συστήματος με δύο επίπεδα αποτυχίας και μονάδες ανεξάρτητες αλλά όχι απαραίτητα ίδιες, παρέχεται στο επόμενο θεώρημα ένας επαναληπτικός αλγόριθμος .

Θεώρημα 2.6.1. *Η αξιοπιστία R_n ενός συνεχόμενου (k,r)-από-τα-n συστήματος με δύο επίπεδα αποτυχίας θα ακολουθεί το παρακάτω σύνολο αναδρομικών σχέσεων*

$$R_n = p_n R_{n-1} + q_{n1} R_{n1} + q_{n2} R_{n2}$$

$$R_{n1} = R_{n-1} - (p_{n-k} R_{n-k-1} + q_{n-k,2} R_{n-k,2}) \prod_{j=n-k+1}^{n-1} q_{j1}$$

$$R_{n2} = R_{n-1} - (p_{n-r} R_{n-r-1} + q_{n-r,1} R_{n-r,1}) \prod_{j=n-r+1}^{n-1} q_{j2} \quad \text{με} \quad n \geq \min(k,r) \quad (2.6.1)$$

με αρχικές συνθήκες

$$R_n = R_{n1} = R_{n2} = 1 \quad \text{για} \quad 0<n< \min(k,r).$$

Απόδειξη

Ας συμβολίσουμε με C_i το γεγονός ότι το συνεχόμενο (k,r)-από-τα–i :*DFM* σύστημα αποτελούμενο από τις i-πρώτες μονάδες λειτουργεί και με X_i την τυχαία μεταβλητή η οποία παίρνει τις εξής τιμές

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{αν η } i\text{-μονάδα λειτουργεί} \\ 1 & \text{αν η } i\text{-μονάδα χαλάει όταν είναι ανοιχτή} \\ 2 & \text{αν η } i\text{-μονάδα χαλάει όταν είναι κλειστή.} \end{cases}$$

Υποθέτουμε αρχικά ότι $n > k, r$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας παίρνουμε ότι η αξιοπιστία του συστήματος εκφράζεται από την σχέση

$$R_n = P\{ C_n \} = P\{ C_n \mid X_n = 0\} p_n + P\{ C_n \mid X_n = 1\} q_{n1} + P\{ C_n \mid X_n = 2\} q_{n2}$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την

$$R_n = p_n R_{n-1} + q_{n1} R_{n1} + q_{n2} R_{n2} .$$

Από την άλλη, ισχύει ότι

$$C_n \cap \{X_n = 1\} = C_{n-1} \cap \{X_{n-k+1} = ... = X_n = 1\} \cap \{X_n = 1\}$$

και επομένως έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

$$\mathrm{P}\{C_n \mid X_n = 1\} = \mathrm{P}\{C_{n-1}\} - \mathrm{P}\{C_{n-1} \cap \{X_{n-k+1} = ... = X_{n-1} = 1\}\} .$$

Δεσμεύοντας πάνω στις καταστάσεις των n-k μονάδων, καταλήγουμε στην σχέση

$$R_{n1} = R_{n-1} - \begin{bmatrix} \mathrm{P}\{C_{n-1} \cap \{X_{n-k+1} = ... = X_{n-1} = 1\} \mid X_{n-k} = 0\} \mathrm{P}\{X_{n-k} = 0\} + \\ \mathrm{P}\{C_{n-1} \cap \{X_{n-k+1} = ... = X_{n-1} = 1 \mid X_{n-k} = 2\}\} \mathrm{P}\{X_{n-k} = 2\} \end{bmatrix}.$$

Η δεύτερη ισότητα των εξισώσεων (2.6.1), προκύπτει άμεσα παρατηρώντας ότι οι δεσμευμένες πιθανότητες στα άγκιστρα μπορούν να εκφραστούν ως

$$R_{n-k-1} \prod_{j=n-k+1}^{n-1} q_{j1} \quad \text{και} \quad R_{n-k,2} \prod_{j=n-k+1}^{n-1} q_{j1}$$

αντίστοιχα. Όσο για το τρίτο μέρος των επαναληπτικών σχέσεων (2.6.1) μπορούμε να καταλήξουμε σε αυτό με παρόμοιο συλλογισμό.

Όταν για το n ισχύει η ανισότητα $\min(k,r) \leq n \leq \max(k,r)$, κάποιοι από τους όρους που χρησιμοποιήθηκαν στην απόδειξή μας μηδενίζονται και μπορούν να αγνοηθούν.

∎

Είναι φανερό πως στην περίπτωση που η πιθανότητα αποτυχίας της i-οστής μονάδας όταν αυτή είναι κλειστή q_{i2}, παίρνει την τιμή 0, i=1,2,…,n οι προαναφερθείσες επαναληπτικές σχέσεις ανάγονται στις εξής

$$R_n = R_{n-1} - p_{n-k} R_{n-k-1} \prod_{j=n-k+1}^{n-1} q_{j1} \quad n>k, \text{ όπου } R_k = 1 - \prod_{j=1}^{k} q_{j1}.$$

Παρατηρούμε ότι το συνεχόμενο (1,n)-από-τα–n σύστημα συμπίπτει με το σύνηθες σειριακό σύστημα με δύο επίπεδα αποτυχίας. Σε αυτή την περίπτωση η δεσμευμένη πιθανότητα ότι το συνεχόμενο (k,r)-από-τα–i σύστημα με δύο επίπεδα αποτυχίας (που αποτελείται από τις πρώτες i μονάδες) δουλεύει, δεδομένου ότι η i-οστή μονάδα είναι ανοιχτή, παίρνει την τιμή μηδέν (R_{i1} =0 για $1 \le i \le n$) και με βάση το Θεώρημα 2.6.1, η αξιοπιστία του συστήματος εκφράζεται με τον τύπο

$$R_n = (p_n + q_{n2})R_{n-1} - \prod_{j=1}^{n} q_{j2}. \qquad (2.6.2)$$

Αν λάβουμε υπόψη μας την ισότητα $R_{n-1} = \prod_{j=1}^{n-1}(p_j + q_{j2})$ και την αντικαταστήσουμε στην σχέση (2.6.2) προκύπτει ότι η αξιοπιστία R_n του συστήματος έχει τη μορφή

$$R_n = \prod_{j=1}^{n}(p_j + q_{j2}) - \prod_{j=1}^{n} q_{j2}. \qquad (2.6.3)$$

Μια τέτοια παρόμοια έκφραση μπορεί να παραχθεί εύκολα για τα συνήθη παράλληλα συστήματα με δύο επίπεδα αποτυχίας, εφαρμόζοντας τα συμπεράσματα του Θεωρήματος 2.6.1 για τη ειδική περίπτωση όπου k=n και r=1.

Στην iid περίπτωση είναι γνωστό ότι ισχύουν οι σχέσεις $p_i = p$, $q_{i1}=q$, $q_{i2}=q_2$ για i=1,2,…,n. Επομένως οι αναδρομικές σχέσεις (2.6.1) μετασχηματίζονται ως εξής

$$R_n = pR_{n-1} + q_1 R_{n1} + q_2 R_{n2}$$

$$R_{n1} = R_{n-1} - (p R_{n-k-1} + q_2 R_{n-k,2})\, q_1^{k-1} \qquad , n \neq k$$

$$R_{k1} = R_{k-1} - q_1^{k-1}$$

$$R_{n2} = R_{n-1} - (pR_{n-r-1} + q_1 R_{n-r,1})\, q_2^{r-1} \qquad , \quad n \neq r$$

$$R_{r2} = R_{r-1} - q_2^{r-1}$$

για $n \ge \min(k,r)$, με αρχικές συνθήκες τις

$$R_n = R_{n1} = R_{n2} = 1 \text{ για } 0<n< \min(k,r). \qquad (2.6.5)$$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να αποφύγουμε την αξιολόγηση των βοηθητικών ποσοτήτων R_{i1}, R_{i2} (δεσμευμένες αξιοπιστίες) και να προχωρήσουμε στον υπολογισμό της (μη δεσμευμένης) αξιοπιστίας του συστήματος R_n με την βοήθεια της επόμενης πιο αποτελεσματικής αναδρομικής σχέσης που παρουσιάζεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.6.2. *Η αξιοπιστία R_n ενός iid συνεχόμενου (k,r)-από-τα-n συστήματος με δύο επίπεδα αποτυχίας ικανοποιεί την επόμενη αναδρομική σχέση*

$$R_n - R_{n-1} + (p+q_2)q_1^k R_{n-k+1} + (p+q_1)q_2^r R_{n-r-1} - q_1^k q_2^r R_{n-k-r} - pq_1^k q_2^r R_{n-k-r-1}$$
$$= \delta_{n0} - q_1^k \delta_{nk} - q_2^r \delta_{nr} + q_1^k q_2^r \delta_{n,k+r}$$

(2.6.6)

για $n \ge \min(k,r)$, *με αρχικές συνθήκες τις*

$$R_n = R_{n1} = R_{n2} = 1 \text{ για } 0<n< \min(k,r)$$

(Η ποσότητα δ_{ij} δηλώνει την συνάρτηση δέλτα του Kronecker, δηλαδή δ_{ii} =1 και δ_{ij} =0 για $i \neq j$).

Απόδειξη
Θεωρούμε τις γεννήτριες συναρτήσεις των μη δεσμευμένων και δεσμευμένων αξιοπιστιών R_n και R_{n1}, R_{n2} αντίστοιχα

$$G(z)=\sum_{n=0}^{\infty}R_n z^n \ , \quad G_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}R_{n1}z^n \ , \ G_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}R_{n2}z^n$$

Μετά από κάποιους χειρισμούς στις αναδρομικές σχέσεις (2.6.4) και στις αρχικές συνθήκες (2.6.5) μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ισχύουν οι επόμενες τρείς ισότητες

$$q_1G_1(z)+q_2G_2(z)+(pz-1)G(z)=-p$$

$$G_1(z)+q_2z(q_1z)^{k-1}G_2(z)+z\left[pz(q_1z)^{k-1}-1\right]G(z)=1-z(p+q_1)(q_1z)^{k-1}$$

$$q_1z(q_2z)^{r-1}G_1(z)+G_2(z)+z\left[pz(q_2z)^{r-1}-1\right]G(z)=1-z(p+q_2)(q_2z)^{r-1}$$

Λύνοντας το σύστημα των δύο τελευταίων εξισώσεων ως προς $G_1(z)$ και $G_2(z)$ και αντικαθιστώντας στην πρώτη λαμβάνουμε την έκφραση

$$G(z)=\frac{(1-(q_1z)^k)(1-(q_2z)^r)}{1-z+(1-q_1)z(q_1z)^k+(1-q_2)z(q_2z)^r-(1+pz)(q_1z)^k(q_2z)^r}=\frac{A(z)}{B(z)}\,.$$

Η σχέση (2.6.6) προκύπτει αν θεωρήσουμε την ταυτότητα $B(z)G(z)=A(z)$ και εξισώνουμε τους n-οστούς όρους των αναπτυγμάτων των δυναμοσειρών και από τις δύο πλευρές .

∎

Σημειώνουμε ότι, αν ισχύει η ανισότητα $k\le n<r$, οι αξιοπιστίες μπορούν να εκφραστούν μόνο μέσω του q_1. Αυτό συμβαίνει γιατί το συνεχόμενο (k,r)-από-τα–n σύστημα με δύο επίπεδα αποτυχίας είναι ισοδύναμο με ένα σύνηθες συνεχόμενο k-από-τα-n :F σύστημα με πιθανότητες αποτυχίας τις q_1 ($1-q_1=p+q_2$)

Παρά το γεγονός ότι έχουμε δώσει μία καλή εκτίμηση για την αξιοπιστία ενός συνεχόμενου (k,r)-από-τα–n:DFM συστήματος μέσω των αναδρομικών σχέσεων που αναπτύξαμε προηγουμένως θα ήταν καλό να ορίσουμε ένα άνω και ένα κάτω φράγμα αξιοπιστίας, τα οποία παρέχουν αρκετά καλές εκτιμήσεις για την ακριβή αξιοπιστία, ειδικά για συστήματα με χαμηλές πιθανότητες αποτυχίας (αρκετά αξιόπιστα συστήματα).

Θεώρημα 2.6.3. *Η αξιοπιστία ενός συνεχόμενου* (k,r)*-από-τα-n:DFM συστήματος φράσσεται από πάνω με την ποσότητα*

$$R_n\le\prod_{i=\min(k,r)}^{n}(1-p_{i-k}\prod_{j=i-k+1}^{i}q_{j1}-p_{i-r}\prod_{j=i-r+1}^{i}q_{j2}) \qquad (2.6.7)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $q_{i2}=0$, $i=1,2,\ldots,n$, έχω ένα σύνηθες συνεχόμενο k-από-τα-n:F σύστημα και η ανισότητα (2.6.7) διαμορφώνεται ως εξής

$$R_n\le\prod_{i=k}^{n}(1-p_{i-k}\prod_{j=i-k+1}^{i}q_{j1})\,. \qquad (2.6.8)$$

Αυτό είναι ένα άνω φράγμα αξιοπιστίας το οποίο έχει δοθεί από τους *Παπασταυρίδης & Κούτρας* (1993). Η αξιοπιστία ενός τέτοιου συστήματος φράσσεται από κάτω από την ποσότητα

$$R_n \geq \prod_{i=k}^{n}(1-\prod_{j=i-k+1}^{i} q_{j1}) \qquad (2.6.9)$$

Θεώρημα 2.6.4. *Η αξιοπιστία ενός συνεχόμενου* (k,r)*-από-τα–n:DFM συστήματος φράσσεται από κάτω από την ποσότητα*

$$R_n \geq \prod_{i=k}^{n}(1-\prod_{j=i-k+1}^{i} q_{j1})+\prod_{i=r}^{n}(1-\prod_{j=i-r+1}^{i} q_{j2})-1 \qquad (2.6.10)$$

Σημειώνουμε ότι για $k \leq n < r$ ή για $r \leq n < k$ είναι καλό να αποφύγουμε να χρησιμοποιήσουμε το κάτω όριο της σχέσης (2.6.10) γιατί δεν μας δίνει μια καλή προσέγγιση, αντιθέτως είναι προτιμότερο να κάνουμε χρήση της ανισότητας (2.6.9) αν $k \leq n < r$ ή της σχέσης $R_n \geq (1-\prod_{j=i-r+1}^{i} q_{j2})$ αν $r \leq n < k$, οι οποίες μας προσφέρουν καλές προσεγγίσεις για τις αξιοπιστίες του συνεχόμενου k-από-τα-n:F και του συνεχόμενου r-από-τα-n :F συστήματος αντίστοιχα.

Παράδειγμα 2.6.1. Θεωρούμε τα συνεχόμενα (k,r)-από-τα-n:*DFM* συστήματα, για διάφορες τιμές των k, r και n. Εφαρμόζοντας τους τύπους των φραγμάτων και της αξιοπιστίας R_n που δόθηκαν προηγουμένως, προκύπτουν οι αντίστοιχες αριθμητικές τιμές που φαίνονται στον Πίνακα 2.6.1. Στον ίδιο πίνακα δίνεται και το σχετικό σφάλμα της προσέγγισης (είναι η διαφορά της τιμής της αξιοπιστίας με τον προσεγγιστικό μέσο του διαστήματος που δημιουργούν τα φράγματα, διαιρεμένο με την τιμή της αξιοπιστίας). Για τους υπολογισμούς υποθέσαμε ότι οι πιθανότητες αποτυχίας είναι οι $q_{i1}=\dfrac{1}{i+1}$ και $q_{i2}=\dfrac{1}{i+2}$, i=1,2,…n (οι μονάδες δεν είναι iid).

Πινάκας 2.6.1

Αξιοπιστία συνεχόμενου (*k*,*r*)-από-τα-*n*:DFM συστήματος με και q_{i1}=1/(*i*+1) και q_{i2}=1/(*i*+2) , *i*=1,2,…,*n* (Koutras (1997))

k	r	n	Κάτω όριο	Τιμή αξιοπιστίας R_n	Άνω όριο	Σχετικό σφάλμα (%)
2	2	2	0.7500	0.7500	07500	0.00
		5	0.5233	0.5955	0.6856	1.50
		10	0.4239	0.5264	0.6228	0.58
2	3	3	0.7472	0.7750	0.8079	0.33
		5	0.6720	0.7131	0.7739	1.40
		10	0.6125	0.6618	0.7297	1.40
3	3	3	0.9417	0.9417	0.9417	0.00
		5	0.9050	0.9187	0.9326	0.02
		10	0.8859	0.9032	0.9207	0.01
5	5	5	0.9982	0.9982	0.9982	0.00
		10	0.9973	0.9976	0.9979	0.00

		20	0.9972	0.9976	0.9979	0.00
5	10	10	0.9979	0.9982	0.9984	0.00
		15	0.9979	0.9982	0.9984	0.00
		20	0.9979	0.9982	0.9984	0.00

Οι τιμές στον Πίνακα 2.6.1 δείχνουν ότι τα άνω και κάτω φράγματα των Θεωρημάτων 2.6.3 και 2.6.4 είναι επαρκή για καλές προσεγγίσεις της τιμής της αξιοπιστίας.

2.7 *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα με ή χωρίς επιδιόρθωση

Ο *Moustafa* (1996) παρουσίασε έναν τρόπο εκτίμησης της αξιοπιστίας των ***k*-από-τα-*n*:*G*** συστημάτων με ή χωρίς επιδιόρθωση με δύο επίπεδα αποτυχίας (*k*-out-of-*n*:*G* system with and without repair with two failure modes). Για αυτό το λόγο θα ορίσουμε ένα σύνολο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Θα αναλύσουμε δύο είδη συστημάτων όπου το καθένα θα επιδέχεται επιδιόρθωση ή όχι.

Ένας τρόπος για να αυξήσουμε την αξιοπιστία ενός συστήματος είναι να προσθέσουμε πλεονάζουσες μονάδες. Μία κοινή μορφή πλεονασματικότητας είναι τα *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματα στα οποία τουλάχιστον *k* από τις *n* μονάδες πρέπει να είναι σε λειτουργία για να βρίσκεται και το σύστημα σε λειτουργία. Τόσο οι μονάδες, όσο και τα συστήματα έχουν δύο καταστάσεις αποτυχίας, στις οποίες δεν μπορούν να αποτύχουν ταυτόχρονα, αλλά σε μία κάθε φορά.

Για τα συστήματα θα υποθέσουμε τα εξής:

- Το σύστημα αποτελείται από *n* όμοιες και ανεξάρτητες μονάδες
- Κάθε μονάδα είναι είτε καλή (σε λειτουργία), είτε έχει αποτύχει σε επίπεδο *s* με σταθερό βαθμό αποτυχίας λ_s, $s = 1, 2$.
- Το σύστημα είναι πλήρως καθορισμένο για το λόγο ότι υπάρχουν ακριβείς πληροφορίες έτσι ώστε να μπορούμε να καθορίσουμε στιγμιαία το επίπεδο αποτυχίας.
- Υπάρχει ευχέρεια μίας μόνο επιδιόρθωσης. Ο χρόνος για την επιδιόρθωση της αποτυχίας *s* είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή ίση με $1/\mu_s$, $s = 1, 2$. Η επιδιόρθωση είναι τέλεια, δηλαδή η επιδιορθωμένη μονάδα είναι τόσο καλή σαν να είναι καινούργια.
- Το σύστημα είναι σε λειτουργία αν τουλάχιστον *k* μονάδες του είναι σε λειτουργία.
- Το σύστημα δεν μπορεί να επιστρέψει στην κατάσταση λειτουργίας όταν αποτύχουν *n*-*k*+1 μονάδες.

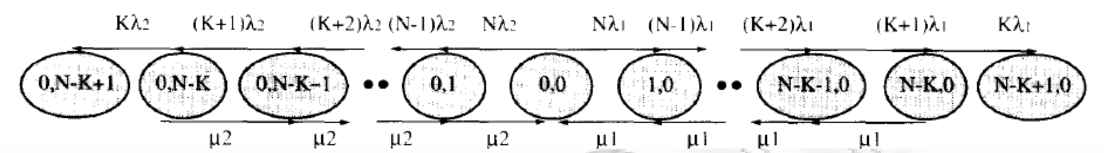
- **Σύστημα χωρίς μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων αποτυχίας**

Στο σύστημα αυτό θεωρούμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις που αναφέραμε προηγουμένως (1-6), επιπλέον δεν υπάρχουν μεταβάσεις μεταξύ των δύο επιπέδων αποτυχίας (είναι αμοιβαία αποκλειόμενα) δηλαδή αν υπάρξει μία κατάσταση αποτυχίας μπορεί μόνο να χαρακτηριστεί από το ίδιο επίπεδο αποτυχίας.

α) Σύστημα το οποίο επιδέχεται επιδιόρθωση

Το σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί με τη βοήθεια μίας Μαρκοβιανής διαδικασίας σε συνεχή χρόνο. Έστω ότι (i, j) είναι η κατάσταση του συστήματος, όπου i και j αντιπροσωπεύουν τον αριθμό των αποτυχημένων μονάδων σύμφωνα με την αποτυχία τύπου I και τύπου II αντίστοιχα. Θεωρούμε $P_t(i, j)$ την πιθανότητα να βρισκόμαστε στην κατάσταση (i, j) σε χρόνο t. Στο επόμενο σχήμα αναπαρίσταται ο ρυθμός μετάβασης των καταστάσεων του k-από-τα-n:G συστήματος.

Σχήμα 2.7.1
Διάγραμμα ρυθμού μετάβασης καταστάσεων για σύστημα χωρίς μεταβάσεις μεταξύ των επιπέδων αποτυχίας (Moustafa (1996))



Η ομάδα των διαφορικών εξισώσεων βασιζόμενες στο Σχήμα 2.7.1 είναι η ακόλουθη:

- Αν $i = j = 0$ προκύπτει ότι

$$dP_t(0,0)/dt = -n(\lambda_1+\lambda_2)P_t(0,0)+\mu_1 P_t(1,0)+\mu_2 P_t(0,1) \qquad (2.7.1)$$

- Αν $j=0$ και $1 \le i \le n-k-1$ θα ισχύει

$$dP_t(i,0)/dt = -[(n-i)\lambda_1+\mu_1]P_t(i,0)+[n-(i-1)]\times\lambda_1 P_t(i-1,0)+\mu_1 P_t(i+1,0) \qquad (2.7.2)$$

- Αν $j=0$ και $i=n-k$ θα έχουμε

$$dP_t(n-k,0)/dt = -[k\lambda_1+\mu_1]P_t(n-k,0)+[k+1]\lambda_1 P_t(n-k-1,0) \qquad (2.7.3)$$

- Αν $j=0$ και $i=n-k+1$ θα ισχύει

$$dP_t(n-k+1,0)/dt = k\lambda_1 P_t(n-k,0) \qquad (2.7.4)$$

- Αν $i=0$ και $1 \le j \le n-k-1$ προκύπτει ότι

$$dP_t(0,j)/dt = -[(n-j)\lambda_2+\mu_2]P_t(0,j)+[n-(j-1)]\times\lambda_2 P_t(0,j-1)+\mu_2 P_t(0,j+1) \qquad (2.7.5)$$

- Αν $i=0$ και $j=n-k$ θα έχουμε

$$dP_t(0,n-k)/dt = -[k\lambda_2+\mu_2]P_t(0,n-k)+[k+1]\lambda_2 P_t(0,n-k-1) \qquad (2.7.6)$$

- Αν $i=0$ και $j=n-k+1$ θα ισχύει

$$dP_t(0,n-k+1)/dt = k\lambda_2 P_t(0,n-k)\ . \qquad (2.7.7)$$

Οι εξισώσεις (2.7.1)-(2.7.7) σχηματίζουν μία ομάδα πρωτοβάθμιων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές για τις οποίες ισχύουν οι ακόλουθες αρχικές συνθήκες:

$$P_0(0,0)=1 \text{ και } P_0(i,j)=0 \text{ για } i,j>0$$

Η ακριβής τιμή της αξιοπιστίας του συστήματος θα παράγεται από τον καθορισμό των ιδιοτιμών του πίνακα του ρυθμού μετάβασης του μοντέλου.

Η αξιοπιστία του συστήματος με επιδιόρθωση R_t και ο μέσος χρόνος μεταξύ των αποτυχιών του συστήματος (MTBF) δίνονται από τους τύπους:

$$R_t = \sum_{m=0}^{n-k} \sum_{\substack{(i,j) \\ i+j-m}} P_t(i,j) \qquad (2.7.8)$$

$$MTBF = \int_0^{\infty} R_t dt \qquad (2.7.9)$$

β) Σύστημα το οποίο δεν επιδέχεται επιδιόρθωση

Θεωρούμε ότι $\mu_1 = \mu_2 = 0$ και παίρνοντας το μετασχηματισμό *Laplace* των εξισώσεων (2.7.1)-(2.7.3) όπως και των (2.7.5), (2.7.6) προκύπτει ο επόμενος επαναληπτικός αλγόριθμος. Ορίζουμε με n^* τον αριθμό μονάδων που βρίσκονται στην κατάσταση αποτυχίας τύπου Ι ή τύπου ΙΙ ανάλογα με όσα απαιτεί ο τύπος κάθε φορά, έτσι $n^* = 1,\ldots,i$ ή $n^* = 1,\ldots,j$.

Για $i = j = 0$ προκύπτει

$$P_{s_1}(0,0) = 1/[s + n(\lambda_1 + \lambda_2)] \qquad (2.7.10)$$

Για $1 \le i \le n-k$ και $j = 0$ θα έχουμε

$$P_{s_1}(i,0) = \prod_{n^*=1}^{i} [(n - n^* + 1)\lambda_1]/[s + n(\lambda_1 + \lambda_2)] \times \prod_{n^*=1}^{i} [s + (n - n^*)\lambda_1] \qquad (2.7.11)$$

Για $i = 0$ και $1 \le j \le n-k$

$$P_{s_1}(0,j) = \prod_{n^*=1}^{j} [(n - n^* + 1)\lambda_2]/[s + n(\lambda_1 + \lambda_2)] \times \prod_{n^*=1}^{j} [s + (n - n^*)\lambda_2] \qquad (2.7.12)$$

Για την επίλυση των παραπάνω εξισώσεων χρησιμοποιούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό *Laplace* τους και καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις από όπου θα προκύψει και ο τύπος της ζητούμενης αξιοπιστίας.

$$\begin{aligned} P_t(i,0) &= (-1)^i [n!/(n-i)!][\lambda_1^i e^{-n(\lambda_1+\lambda_2)t} / \prod_{n^*=1}^{i} (n^*\lambda_1 + n\lambda_2)] \\ &+ \binom{n}{i} \sum_{n^*=1}^{i} (-1)^{i-n^*} \binom{i}{n^*} \times [n^*\lambda_1 / (n^*\lambda_1 + n\lambda_2)] e^{(n-n^*)\lambda_1 t} \end{aligned} \qquad (2.7.13)$$

$$\begin{aligned} P_t(0,j) &= (-1)^j [n!/(n-j)!][\lambda_2^j e^{-n(\lambda_1+\lambda_2)t} / \prod_{n^*=1}^{j} (n^*\lambda_1 + n\lambda_2)] \\ &+ \binom{n}{j} \sum_{n^*=1}^{j} (-1)^{j-n^*} \binom{j}{n^*} \times [n^*\lambda_2 / (n^*\lambda_1 + n\lambda_2)] e^{(n-n^*)\lambda_2 t} \end{aligned} \qquad (2.7.14)$$

$$P_t(0,0) = e^{-n(\lambda_1+\lambda_2)t} \qquad (2.7.15)$$

Με τη βοήθεια των εξισώσεων (2.7.13)-(2.7.15) θα υπολογίσουμε την αξιοπιστία του συστήματος χωρίς επιδιόρθωση R_t και τον μέσο χρόνο έως την αποτυχία (MTTF) του συστήματος, τα οποία θα δίνονται από τους τύπους

$$R_t = \sum_{m=0}^{n-k} \sum_{\substack{(i,j) \\ i+j=m}} P_t(i, j)$$

(2.7.16)

$$MTTF = \int_0^\infty R_t dt. \qquad (2.7.17)$$

Αν θεωρήσουμε $\lambda_1 = \lambda$ και $\lambda_2 = 0$, τότε η εξίσωση (2.7.16) θα δώσει την (2.7.18) η οποία είναι η συνάρτηση αξιοπιστίας ενός *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματος με ένα επίπεδο αποτυχίας.

$$R(t) = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i} [1-e^{-\lambda t}]^i e^{-(n-i)\lambda t} \qquad (2.7.18)$$

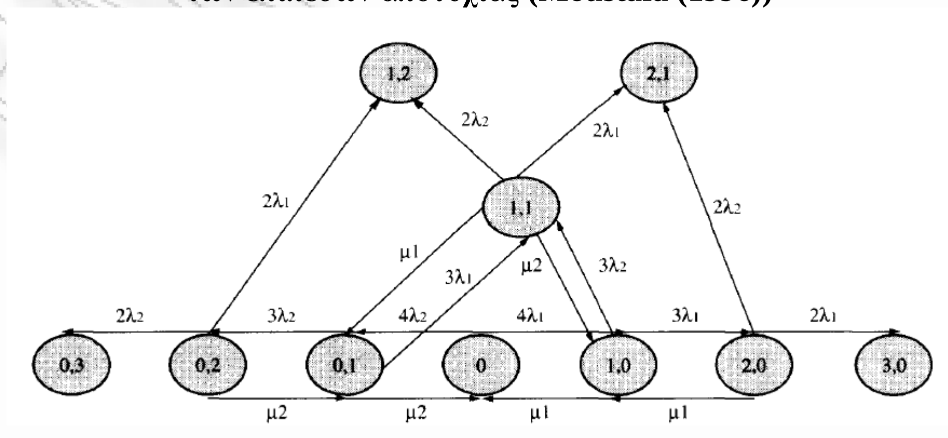
- **Σύστημα με μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων αποτυχίας**

Στο σύστημα αυτό θεωρούμε πάλι ότι ισχύουν οι υποθέσεις που αναφέραμε και πριν (1-6), αλλά επίσης θεωρούμε ότι υπάρχουν μεταβάσεις μεταξύ των δύο επιπέδων αποτυχίας.

α) Σύστημα το οποίο επιδέχεται επιδιόρθωση

Το σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί με τη βοήθεια μίας Μαρκοβιανής διαδικασίας σε συνεχή χρόνο. (Εργαζόμαστε με τους ίδιους συμβολισμούς όπως και στο προηγούμενο σύστημα). Στο διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζεται ένα 2-από-τα-4 σύστημα με δύο επίπεδα αποτυχίας και ο ρυθμός μετάβασης των καταστάσεών του.

Σχήμα 2.7.2
Διάγραμμα ρυθμού μετάβασης καταστάσεων για σύστημα με μεταβάσεις μεταξύ των επιπέδων αποτυχίας (Moustafa (1996))



Η ομάδα των διαφορικών εξισώσεων βασιζόμενες στο Σχήμα 2.7.2 η οποία περιγράφει ένα γενικό *k*-από-τα-*n* σύστημα με δύο επίπεδα αποτυχίας θα είναι η εξής:

- Αν $i = j = 0$ προκύπτει ότι
$$dP_t(0,0)/dt = -n(\lambda_1 + \lambda_2)P_t(0,0) + \mu_1 P_t(1,0) + \mu_2 P_t(0,1) \tag{2.7.19}$$
- Αν $j = 0$ και $1 \le i \le n-k-1$ θα ισχύει
$$\begin{aligned} dP_t(i,0)/dt = &-[(n-i)(\lambda_1+\lambda_2)+\mu_1]P_t(i,0) + \mu_1 P_t(i+1,0) + \mu_2 P_t(i,1) \\ &+[n-(i-1)] \times \lambda_1 P_t(i-1,0) \end{aligned} \tag{2.7.20}$$
- Αν $j = 0$ και $i = n-k$ θα ισχύει
$$dP_t(n-k,0)/dt = -[k(\lambda_1+\lambda_2)+\mu_1]P_t(n-k,0) + [k+1]\lambda_1 P_t(n-k-1,0) \tag{2.7.21}$$
- Αν $j = 0$ και $i = n-k+1$ θα ισχύει
$$dP_t(n-k+1,0)/dt = k\lambda_1 P_t(n-k,0) \tag{2.7.22}$$
- Αν $i = 0$ και $1 \le j \le n-k-1$ θα έχουμε ότι
$$\begin{aligned} dP_t(0,j)/dt = &-[(n-j)(\lambda_1+\lambda_2)+\mu_2]P_t(0,j) + \mu_1 P_t(i,0) + \mu_2 P_t(i,1) \\ &+[n-(j-1)] \times \lambda_2 P_t(0,j-1) \end{aligned} \tag{2.7.23}$$
- Για $i = 0$ και $j = n-k$ θα έχουμε
$$\begin{aligned} dP_t(0,n-k)/dt = &-[k(\lambda_1+\lambda_2)+\mu_2]P_t(0,n-k) \\ &+[k+1]\lambda_2 P_t(0,n-k-1) \end{aligned} \tag{2.7.24}$$
- Για $i = 0$ και $j = n-k+1$ θα ισχύει
$$dP_t(0,n-k+1)/dt = k\lambda_2 P_t(0,n-k) \tag{2.7.25}$$
- Για $1 \le (i,j) \le n-k-2$, με $i + j \le n-k-1$ τότε
$$\begin{aligned} dP_t(i,j)/dt = &-\{[n-(i+j)](\lambda_1+\lambda_2)+\mu_1+\mu_2\} \times P_t(i,j) + \mu_1 P_t(i+1,j) \\ &+\mu_2 P_t(i,j+1) + [n-(i+j-1)] \times [\lambda_1 P_t(i-1,j) + \lambda_2 P_t(i,j-1) \end{aligned} \tag{2.7.26}$$
- Για $1 \le (i,j) \le n-k-1$ με $i + j = n-k$ τότε
$$\begin{aligned} dP_t(i,j)/dt = &-\{[N-(i+j)](\lambda_1+\lambda_2)+\mu_1+\mu_2\} \times P_t(i,j) \\ &+[N-(i+j-1)] \times [\lambda_1 P_t(i-1,j) + \lambda_2 P_t(i,j-1) \end{aligned} \tag{2.7.27}$$
- Για $1 < (i,j) < n-k$ με $i + j = n-k+1$ η εξίσωση θα είναι
$$dP_t(i,j)/dt = [n-(i+j-1)][\lambda_1 P_t(i-1,j) + \lambda_2 P_t(i,j-1)] \tag{2.7.28}$$

Είναι σημαντικό να πούμε ότι ισχύουν οι ίδιες αρχικές συνθήκες που ορίσαμε και στο προηγούμενο σύστημα. Η πιθανότητα $P_t(i,j)$ να βρισκόμαστε στην κατάσταση (i,j) σε χρόνο t καθορίζεται ολοκληρώνοντας αριθμητικά τις εξισώσεις (2.7.19)-(2.7.28). Η αξιοπιστία του συστήματος με επιδιόρθωση και ο μέσος χρόνος μεταξύ των αποτυχιών (MTBF) λαμβάνονται από τους ίδιους τύπους που είχαμε και στο προηγούμενο σύστημα

$$R_t = \sum_{m=0}^{n-k} \sum_{\substack{(i,j) \\ i+j-m}} P_t(i,j) \quad \text{και} \quad MTBF = \int_0^{\infty} R_t dt$$

αντίστοιχα.

β) Σύστημα το οποίο δεν επιδέχεται επιδιόρθωση

Θεωρούμε ότι $\mu_1 = \mu_2 = 0$ και παίρνοντας το μετασχηματισμό *Laplace* των εξισώσεων (2.7.19)-(2.7.21) όπως επίσης και των (2.7.23), (2.7.24) λαμβάνουμε τις επόμενες εξισώσεις (οι συμβολισμοί που θέσαμε και πριν θα ισχύουν και εδώ).

- Για $i = j = 0$ προκύπτει ότι

$$P_{s_1}(0,0) = 1/[s + n(\lambda_1 + \lambda_2)] \quad (2.7.29)$$

- Για $1 \le i \le n-k$ και $j = 0$ θα έχουμε

$$P_{s_1}(i,0) = \prod_{n^*=1}^{i}[(n-n^*+1)\lambda_1] / \prod_{n^*=0}^{i}[s + (n-n^*)\times(\lambda_1+\lambda_2)] \quad (2.7.30)$$

- Αν $i = 0$ και $1 \le j \le n-k$ τότε

$$P_{s_1}(0,j) = \prod_{n^*=1}^{j}[(n-n^*+1)\lambda_2] / \prod_{n^*=0}^{j}[s + (n-n^*)\times(\lambda_1+\lambda_2)] \quad (2.7.31)$$

- Για $1 \le (i,j) \le n-k-1$ και $i + j < n-k$ τότε

$$P_{s_1}(i,j) = \binom{i+j}{i,j}\lambda_1^i \lambda_2^j \left\{ n!/\left[n-(i+j)\right]! \times \prod_{n=0}^{i+j}[s+(n-n^*)(\lambda_1+\lambda_2)] \right\} \quad (2.7.32)$$

Με την ίδια διαδικασία την οποία ακολουθήσαμε και πριν, με τους αντίστροφους μετασχηματισμούς *Laplace* στις παραπάνω εξισώσεις δίνονται οι τύποι

Για $i = j = 0$ τότε $P_t(0,0) = e^{-n(\lambda_1+\lambda_2)t}$ (2.7.33)

Εάν $1 \le i \le n-k$ τότε $P_t(i,0) = \binom{n}{i}\left[\lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2)\right]^i \left[1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\right]^i \times e^{-(n-i)(\lambda_1+\lambda_2)t}$ (2.7.34)

Εάν $1 \le j \le n-k$ τότε $P_t(0,j) = \binom{n}{j}\left[\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)\right]^j \left[1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\right]^j \times e^{-(n-j)(\lambda_1+\lambda_2)t}$

(2.7.35)

Εάν $1 \le (i,j) \le n-k-1$ με $i + j \le n-k$

$$P_t(i,j) = \binom{n}{1+j}\binom{i+j}{i,j}\left[\lambda_1^i \lambda_2^j (\lambda_1+\lambda_2)^{i+j}\right] \times \left[1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\right]^{i+j} e^{-(n-(i+j))(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

(2.7.36)

Ο τύπος (2.7.36) ισχύει και για τις τιμές $0 \le (i,j) \le n-k-1$ με $i + j \le n-k$.

Η αξιοπιστία του συστήματος χωρίς επιδιόρθωση και ο μέσος χρόνος έως την αποτυχία (MTTF), χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.7.36), μπορούν να υπολογιστούν όπως και στο προηγούμενο σύστημα, επομένως θα δίνονται από τους τύπους

$$R_t = \sum_{m=0}^{n-k} \sum_{\substack{(i,j) \\ i+j=m}} P_t(i,j) \quad \text{και} \quad MTTF = \int_0^\infty R_t dt .$$

2.8 Ψηφιακό τηλεπικοινωνιακό σύστημα με ατελείς συσκευές απόφασης

Ο *Pham* (1997) μελέτησε το πρόβλημα της βέλτιστης πλεονασματικότητας για τα ψηφιακά τηλεπικοινωνιακά συστήματα και πώς μπορεί αυτή να επιτευχθεί, με την παραδοχή ότι τα στοιχεία τους (κανάλια, συσκευές απόφασης) μπορούν να αποτύχουν σε μία μόνο από τις δύο καταστάσεις στις οποίες θα παρουσιάζουν σφάλμα. Η αξιοπιστία του συστήματος ορίζεται ως η πιθανότητα να ληφθεί η σωστή απόφαση όταν ένα ψηφίο εισέρχεται στο σύστημα.

Σε ένα σύστημα στο οποίο οι πληροφορίες μεταδίδονται ψηφιακά, θα ορίσουμε μια συγκεκριμένη ακολουθία ψηφίων, έτσι κάθε ένας χαρακτήρας που μεταβιβάζεται θα είναι είτε μηδέν είτε μονάδα. Εάν ένα ψηφιακό σύστημα είναι δυαδικό τότε κάθε εισαγόμενη πληροφορία αλλά και η έξοδος θα είναι είτε 0 είτε 1.

Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε ένα σύστημα αποτελούμενο από τέσσερα κυκλώματα με την ίδια εισαγόμενη πληροφορία (0 ή 1). Τα αποτελέσματα που παράγονται από αυτά τα κυκλώματα λαμβάνονται από μία συσκευή απόφασης (voter), και διέπονται από τον κανόνα της πλειοψηφίας.

Αν όλα τα κυκλώματα λειτουργούν σωστά και όλα τα αποτελέσματα συμφωνούν, τότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το αποτέλεσμα του συστήματος είναι σωστό.

Αν ένα κύκλωμα έχει αποτύχει, τότε παράγει ένα λανθασμένο αποτέλεσμα, όμως το αποτέλεσμα του συστήματος που παράγεται εξακολουθεί να είναι σωστό δεδομένου ότι η συσκευή απόφασης θα κάνει την επιλογή του αποτελέσματος του συστήματος βασιζόμενη στην πλειοψηφία των άλλων τριών σωστών κυκλωμάτων. Αν τρία στοιχεία έχουν αποτύχει, η συσκευή απόφασης θα συμφωνήσει με την πλειοψηφία των τριών αποτυχημένων κυκλωμάτων και το αποτέλεσμα του συστήματος θα είναι εσφαλμένο.

Τέλος αν δύο παραγόμενα αποτελέσματα έχουν την τιμή 1 και τα άλλα δύο την τιμή 0, σαφώς δύο από τα τέσσερα κυκλώματα θα είναι λάθος, επομένως δεν μπορούμε να πούμε με σιγουριά ποιά θα είναι τα σωστά. Το αποτέλεσμα του συστήματος θα είναι επίσης λανθασμένο όταν και τα τέσσερα κυκλώματα έχουν αποτύχει. Όλα τα παραπάνω προϋποθέτουν ότι ένα κύκλωμα αποτυγχάνει με τέτοιο τρόπο ώστε να παράγει πάντα το συμπλήρωμα της σωστής πληροφορίας που εισάγεται, και ότι η συσκευή απόφασης είναι απολύτως αξιόπιστη.

Στη συνέχεια θα κάνουμε μία προσπάθεια να δημιουργήσουμε ένα μοντέλο που να αντιπροσωπεύει τα ψηφιακά τηλεπικοινωνιακά συστήματα. Έστω ένα ψηφιακό σύστημα το οποίο αποτελείται από n κανάλια, καθένα από τα οποία μεταβιβάζει ένα ληφθέν ψηφίο. Αυτά λειτουργούν σύμφωνα με μία ορισμένη στρατηγική ή μία διαδικασία απόφασης, που καταγράφει τη μεταβίβαση του κάθε καναλιού. Στη συνέχεια λαμβάνεται μια απόφαση της μορφής: ποιό θα πρέπει να είναι το σωστό ψηφίο που θα μεταβιβαστεί. Η συσκευή απόφασης λειτουργεί με γνώμονα την πλειοψηφική ψήφο ή εναλλακτικά με ένα «κατώφλι» σύμφωνα με το οποίο εάν τουλάχιστον k κανάλια μεταβιβάζουν το ψηφίο 1 τότε η απόφαση είναι να μεταβιβαστεί το ψηφίο 1, ενώ αν είναι λιγότερα από k τα κανάλια που μεταβιβάζουν το ψηφίο 1, η απόφαση θα είναι να μεταβιβαστεί το ψηφίο 0.

Σφάλματα στην ψηφιακή μετάδοση συμβαίνουν με τέτοιο τρόπο ώστε να εμφανίζεται η μονάδα, αντί για το μηδέν αλλά και το αντίστροφο. Αυτά συμβαίνουν λόγω της συσκευής απόφασης που υλοποιεί αυτή την δοκιμασία. Μια τέτοια συσκευή την αποκαλούμε ατελή συσκευή απόφασης αποτελέσματος.

Υποθέτουμε ότι τα ψηφία φτάνουν με τυχαίο τρόπο πριν μεταδοθούν και ότι τα κανάλια συμπεριφέρονται ανεξάρτητα.

Μια εφαρμογή όλων αυτών είναι ένα πρόβλημα που αναφέρεται στην υποθαλάσσια επικοινωνία και στα συστήματα λήψης αποφάσεων. Ένα απλουστευμένο σύστημα φαίνεται στο Σχήμα 2.8.1. Το σύστημα αποτελείται από n ηλεκτρονικούς αισθητήρες, όπου ο καθένας σαρώνει την υποθαλάσσια περιοχή για τυχόν εχθρικό στόχο. Ας υποθέσουμε ότι ένα σύστημα προειδοποίησης σημάτων έχει δηλώσει ότι ένας εχθρικός στόχος μπορεί να πλησιάζει. Κατανοούμε ότι ορισμένοι ηλεκτρονικοί αισθητήρες θα μπορούσαν ψευδώς να ανιχνεύσουν ένα στόχο, ενώ στην πραγματικότητα δεν έχει πλησιάσει.

Ως εκ τούτου, είναι σημαντικό να καθοριστεί ένα όριο, ας πούμε k_n, τέτοιο ώστε αν $k \geq k_n$, τότε θα υποστηρίζουμε ότι ένας εχθρικός στόχος πλησιάζει. Από την άλλη, αν $k < k_n$, τότε θα υποστηρίζουμε ότι ο εχθρικός στόχος δεν είναι ορατός.

Θέλουμε λοιπόν να επιλέξουμε ένα k_n, έτσι ώστε η πιθανότητα να πάρουμε τη σωστή απόφαση να είναι μέγιστη. Ένα σύστημα όπου δύναται να εξυπηρετήσει αυτό το σκοπό είναι το k-από-τα-n σύστημα.

Ένα πρώτο βήμα για την παρουσίαση του συστήματος είναι ο ορισμός τα επόμενων γεγονότων

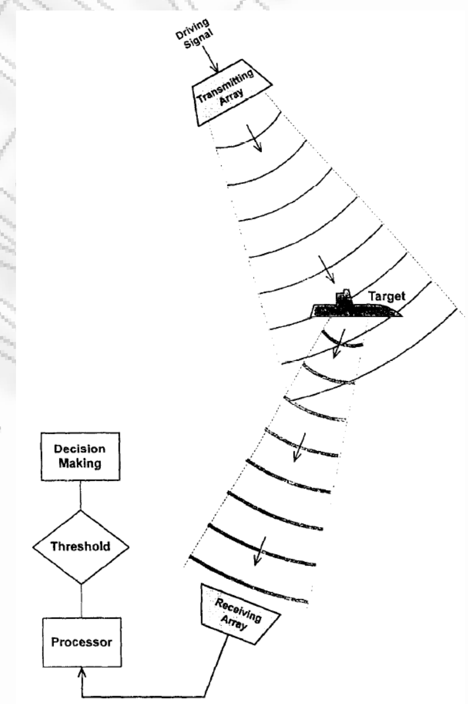
A_0 ={λιγότερα από k κανάλια μεταβιβάζουν το ψηφίο 1}

A_1 ={τουλάχιστον k κανάλια εκπέμπουν ψηφίο 1}

B_i ={το ψηφίο i εισέρχεται στα πολλαπλά κανάλια}

C_i ={μία συσκευή απόφασης μεταδίδει το ψηφίο i}, i=1,0

Σχήμα 2.8.1
Υποθαλάσσιες επικοινωνίες και συστήματα λήψης αποφάσεων (Pham (1997))



Οι υποθέσεις που κάνουμε σε αυτό το μοντέλο είναι οι παρακάτω:

- Το σύστημα είναι δίτιμο, που σημαίνει ότι το αποτέλεσμα είναι είτε 1 είτε 0.
- Τα κανάλια αποτυγχάνουν είτε όταν μεταβιβάζουν λανθασμένα το ψηφίο 0 (stuck-at-0) είτε όταν μεταβιβάζουν λανθασμένα το ψηφίο 1 (stuck-at-1).
- Όλα τα κανάλια είναι ανεξάρτητα και έχουν τις ίδιες κατανομές.
- Υποθέτουμε ότι η συσκευή απόφασης δεν είναι τέλεια αφού αποτυγχάνει όταν λανθασμένα παράγει ως αποτέλεσμα του συστήματος το ψηφίο 0 (stuck-at-0) είτε όταν λανθασμένα πάλι παράγει το ψηφίο 1 (stuck-at-1).
- Τα κανάλια και η συσκευή απόφασης συμπεριφέρονται ανεξάρτητα.
- Για τις πιθανότητες λειτουργίας ισχύουν $0 < p_{ij} < 1$ και $p_{oj} + p_{1j} = 1$ για $i, j = 0$ ή 1.

Επίσης εισάγουμε τους ακόλουθους συμβολισμούς

n	αριθμός καναλιών (μονάδες, υποσυστήματα)
k	τιμή κατώφλι, $1 \le k \le n$
β_i	πιθανότητα ότι το ψηφίο i εισέρχεται στο πολύπλοκο σύστημα, $\beta_1 + \beta_0 = 1$
p_{ij}	πιθανότητα ότι ένα κανάλι μεταβιβάζει το ψηφίο i δεδομένου πως το ψηφίο j εισέρχεται στα κανάλια
r_0	πιθανότητα ότι η συσκευή απόφασης μεταβιβάζει το 0 δεδομένου ότι λιγότερο από k κανάλια μεταβιβάζουν το 1 $r_0 = P(C_0 \mid A_o B_0), (1 - r_0) = P(C_1 \mid A_0 B_0)$
r_1	πιθανότητα ότι η συσκευή απόφασης μεταβιβάζει το 1 δεδομένου ότι τουλάχιστον k κανάλια μεταβιβάζουν το 1 $r_0 = P(C_1 \mid A_1 B_1), (1 - r_1) = P(C_0 \mid A_1 B_1)$
$R(k,n)$	αξιοπιστία συστήματος

Η αξιοπιστία του συστήματος $R(k,n)$ είναι η πιθανότητα το ψηφίο που εισάγεται στο σύστημα να είναι ίδιο με το ψηφίο που επιλέγει η συσκευή απόφασης, που σημαίνει πως ότι ψηφίο εισέρχεται στο σύστημα το ίδιο εξέρχεται ως αποτέλεσμα. Επομένως

$$R(k,n) = P(B_0 A_0 C_0) + P(B_0 A_1 C_0) + P(B_1 A_0 C_1) + P(B_1 A_1 C_1) \qquad (2.8.1)$$

Θα ισχύουν οι εξής σχέσεις για τις πιθανότητες

$$P(B_0 A_0 C_0) = P(B_0) P(A_0 \mid B_0) P(C_0 \mid B_0 A_0) = \beta_0 r_0 \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} p_{10}^{i} p_{00}^{n-i} .$$

$$P(B_0 A_1 C_0) = P(B_0) P(A_1 \mid B_0) P(C_0 \mid B_0 A_1) = \beta_0 (1 - r_1) \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p_{10}^{i} p_{00}^{n-i} .$$

$$P(B_1 A_0 C_1) = P(B_1) P(A_0 \mid B_1) P(C_1 \mid B_1 A_0) = \beta_1 (1 - r_0) \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} p_{11}^{i} p_{01}^{n-i} .$$

$$P(B_1 A_1 C_1) = P(B_1) P(A_1 \mid B_1) P(C_1 \mid B_1 A_1) = \beta_1 r_1 \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p_{11}^{i} p_{01}^{n-i} .$$

Έτσι λοιπόν για ένα ψηφιακό σύστημα που αποτελείται από n κανάλια και μία συσκευή απόφασης, η αξιοπιστία του συστήματος θα δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} R(k,n) &= \sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}\left[\beta_0 r_0 p_{10}^{i} p_{00}^{n-i} + \beta_1(1-r_0)\, p_{11}^{i} p_{01}^{n-i}\right] \\ &+\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\left[\beta_0(1-r_1)\, p_{10}^{i} p_{00}^{n-i} + \beta_1 r_1 p_{11}^{i} p_{01}^{n-i}\right]. \end{aligned} \tag{2.8.2}$$

Όταν $r_0 = 1$ και $r_1 = 1$ τότε έχουμε ένα σύστημα με τέλεια συσκευή απόφασης. Επομένως η αξιοπιστία ενός συστήματος με τέλεια συσκευή απόφασης θα εκφράζεται από την σχέση

$$R(k,n) = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}\left[\beta_0 p_{10}^{i} p_{00}^{n-i} - \beta_1 p_{11}^{i} p_{01}^{n-i}\right] + \beta_1. \tag{2.8.3}$$

Μία άλλη μορφή εκτίμησης της αξιοπιστίας είναι ο υπολογισμός φραγμάτων για αυτήν. Στο επόμενο θεώρημα παρουσιάζονται ένα άνω και ένα κάτω φράγμα της αξιοπιστίας, τα οποία δόθηκαν από τον *Pham* (1997)

Θεώρημα 2.8.1. *Για* $1 \le k \le n$

$$R(k,n) \le \min\left\{1, \left[1 + |\, p\right.\right.$$

$$R(k,n) \ge \left[1 - |\, p_{11} - p_{10}\,|\right]^{n}\left[\min\left\{\beta_0 r_0, \beta_1 r_1\right\} + \min\left\{\beta_0(1-r_1), \beta_1(1-r_0)\right\}\right]$$

2.9 Σύνθετο σύστημα αποτελούμενο από μονάδες-υποσυστήματα με συγκεκριμένη συνδεσμολογία

Οι *Dhillon* & *Rayapati* (1986) μελέτησαν ένα σύστημα αποτελούμενο από ανεξάρτητες μονάδες τριών καταστάσεων (συσκευές), όπου κάθε μία θεωρούμε ότι είναι ένα υποσύστημα με συγκεκριμένη συνδεσμολογία (σειριακή, παράλληλη, γέφυρα κ.α.). Για την εκτίμηση της αξιοπιστίας εργάστηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να φέρουν το σύστημα στην πιο απλή μορφή του. Σύμφωνα με το άρθρο τους από το οποίο αντλήθηκαν όλα τα στοιχεία της παραγράφου αυτής, μία μονάδα (συσκευή, υποσύστημα) έχει τη δυνατότητα να βρεθεί στις εξής τρεις καταστάσεις: λειτουργία, αποτυχία τύπου Ι (ανοιχτή κατάσταση, open mode) και αποτυχία τύπου ΙΙ (κλειστή κατάσταση, short mode). Βασικά παραδείγματα συσκευών με τρείς καταστάσεις είναι οι βαλβίδες ελέγχου ροής υγρών, οι ηλεκτρονικές δίοδοι όπως και οι ηλεκτρικοί διακόπτες.

Τα υποσυστήματα αυτά βρίσκονται σε σειριακή ή παράλληλη ή σειριακή-παράλληλη ή παράλληλη-σειριακή ή σε σχηματισμό γέφυρας σύνδεση (ή και οποιονδήποτε συνδυασμό τους) και είναι τοποθετημένα σε ένα σύνθετο σύστημα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ο υπολογισμός της αξιοπιστίας του να γίνεται ιδιαίτερα δύσκολος.

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε μια τεχνική απλοποίησης των δικτύων αυτών με στόχο την εκτίμηση της αξιοπιστίας του συστήματος. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιεί τη διαδοχική αναγωγή των παράλληλων και σειριακών (ή και πιο πολύπλοκων) σχηματισμών σε υποθετικές ισοδύναμες μονάδες έως το σημείο όπου όλο το δίκτυο του συστήματος να αναχθεί σε μια και μοναδική υποθετική μονάδα. Οι πιο σύνθετοι σχηματισμοί, όπως για παράδειγμα η γέφυρα, μπορεί να απλοποιηθούν σε σειριακά και παράλληλα ισοδύναμα συστήματα με τη διαδικασία της διάσπασης. Θα παρουσιάσουμε κάποιους τύπους για τα υποσυστήματα τα οποία αποτελούν το σύνθετο σύστημα και τους οποίους θα χρησιμοποιήσουμε στην περαιτέρω ανάλυσή μας.

- <u>Σειριακό σύστημα</u>

Σε έναν σειριακό σχηματισμό, η αποτυχία του συστήματος προκαλείται αν μία μονάδα παρουσιάζει αποτυχία τύπου I, ή αν όλες οι μονάδες παρουσιάσουν αποτυχία τύπου II. Η πιθανότητα αποτυχίας τύπου I, k μη ταυτόσημων και ανεξάρτητων μονάδων σε ένα σειριακό σχηματισμό δίνεται από τον τύπο

$$Q_{o(s)} = 1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - q_{oi}) \tag{2.9.1}$$

όπου q_{oi} είναι πιθανότητα αποτυχίας τύπου I της i-μονάδας.

Η πιθανότητα αποτυχίας τύπου II, k μη ταυτόσημων και ανεξάρτητων μονάδων θα είναι η παρακάτω

$$Q_{s(s)} = 1 - \prod_{i=1}^{k} q_{si} \tag{2.9.2}$$

με q_{si} την πιθανότητα αποτυχίας τύπου II της i-μονάδας.

- <u>Παράλληλο σύστημα</u>

Ομοίως σε έναν παράλληλο σχηματισμό, η αποτυχία του συστήματος προκαλείται αν όλες οι μονάδες βρίσκονται στην κατάσταση αποτυχίας τύπου I, ή κάποια από τις μονάδες βρεθεί σε κατάσταση αποτυχίας τα ύπου II. Η πιθανότητα αποτυχίας τύπου I, k μη ταυτόσημων και ανεξάρτητων μονάδων θα είναι η εξής

$$Q_{o(p)} = \prod_{i=1}^{k} q_{oi} \tag{2.9.3}$$

με q_{oi} πιθανότητα αποτυχίας τύπου I της i-μονάδας.

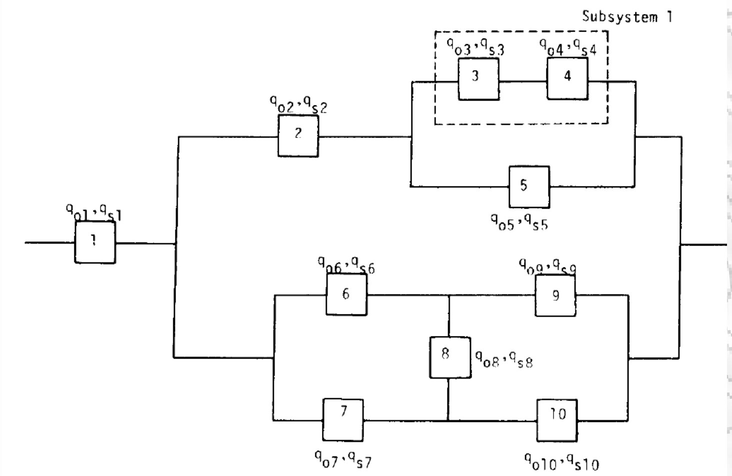
Ακόμη η πιθανότητα αποτυχίας τύπου II, για k μη ταυτόσημες και ανεξάρτητες μονάδες, θα εκφράζεται με τον ακόλουθο τύπο

$$Q_{s(p)} = 1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - q_{si}) \tag{2.9.4}$$

όπου q_{si} είναι πιθανότητα αποτυχίας τύπου II της i-μονάδας.

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σύνθετο σύστημα σαν αυτό που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.9.1, στο οποίο οι μονάδες είναι τριών καταστάσεων. Με q_{oi} και q_{si} θα συμβολίζουμε τις πιθανότητες αποτυχίας τύπου I και τύπου II για την i-ανεξάρτητη μονάδα αντίστοιχα, $i = 1, 2, ..., 10$.

Σχήμα 2.9.1
Σύνθετο σύστημα (Dhillon & Rayapati (1986))



Το εργαλείο της ανάλυσής μας θα είναι η μέθοδος απλοποίησης που αναφέραμε και πιο πάνω η οποία εμπεριέχει τη αναγωγή των παράλληλων, σειριακών σχηματισμών και των σχηματισμών γέφυρας σε ισοδύναμες υποθετικές μονάδες έως τη στιγμή που όλο το δίκτυο να «συγχωνευθεί» σε μια υποθετική μονάδα.

Στο Σχήμα 2.9.1 θα επιλέξουμε για την απλοποίηση το σειριακό υποσύστημα 1 (μέσα στις διακεκομμένες γραμμές). Στόχος μας είναι να ανάγουμε το υποσύστημα των δύο μονάδων σε μια υποθετική ισοδύναμη μονάδα.

Υποσύστημα 1

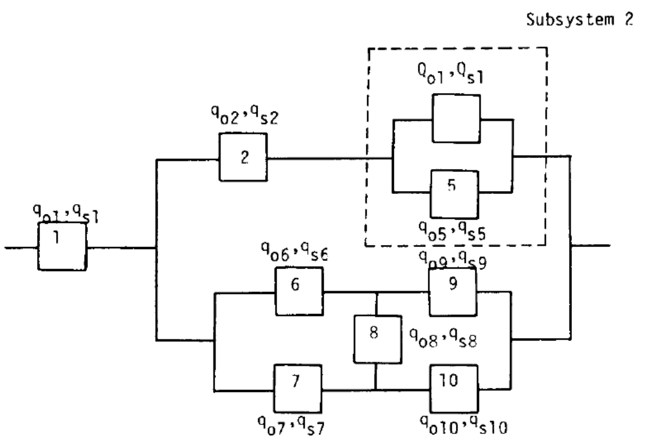
Αφού το υποσύστημα 1 είναι σειριακό χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.9.1) και (2.9.2), οι πιθανότητες αποτυχίας τύπου I και τύπου II για αυτό, θα είναι αντίστοιχα

$$Q_{o1} = 1-(1-q_{o3})(1-q_{o4}) \quad \text{και} \quad Q_{s1} = q_{s3}q_{s4}.$$

Αντικαθιστώντας το υποσύστημα 1 με μια υποθετική μονάδα, της οποίας οι πιθανότητες αποτυχίας τύπου I και τύπου II είναι Q_{o1} και Q_{s1} αντίστοιχα έχουμε το συγχωνευμένο δίκτυο που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.9.2.

Το υποσύστημα 2 (αποτελούμενο από δύο παράλληλες μονάδες) επιλέγεται για την αναγωγή αυτή τη φορά. Στόχος μας είναι να μειωθεί το υποσύστημα 2 σε μία υποθετική ισοδύναμη μονάδα.

Σχήμα 2.9.2
Συγχωνευμένο σύνθετο σύστημα (Dhillon & Rayapati (1986))



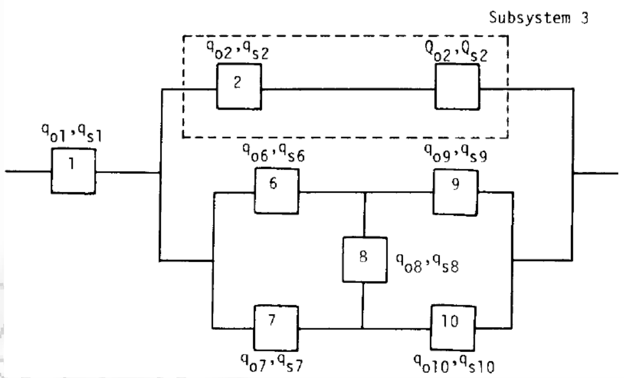
<u>Υποσύστημα 2</u>

Αφού το υποσύστημα 2 είναι παράλληλο, θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις (2.9.3) και (2.9.4) όπου οι πιθανότητες αποτυχίας τύπου I και τύπου II για το σύστημα θα είναι αντίστοιχα

$$Q_{o2} = Q_{o1} q_{o5} \quad \text{και} \quad Q_{s2} = 1-(1-Q_{s1})(1-q_{s5}) .$$

Έτσι αντικαθιστώντας το υποσύστημα 2 με μια υποθετική μονάδα, της οποίας οι πιθανότητες αποτυχίας τύπου I και τύπου II είναι αντίστοιχα Q_{o2} και Q_{s2}, προκύπτει το συγχωνευμένο δίκτυο του Σχήματος 2.9.3.

Σχήμα 2.9.3
Συγχωνευμένο σύνθετο σύστημα (Dhillon & Rayapati (1986))



Επιλέγουμε το υποσύστημα 3 για την αναγωγή του σε μία υποθετική μονάδα.

<u>Υποσύστημα 3</u>

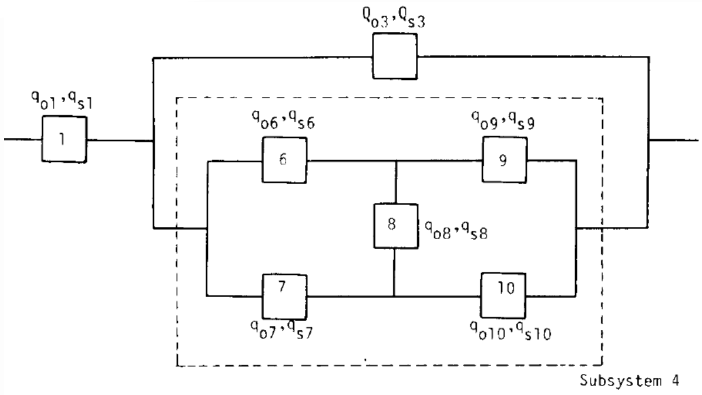
Με τη χρήση των εξισώσεων (2.9.1) και (2.9.2) για το σειριακό σύστημα, οι πιθανότητες αποτυχίας τύπου I και τύπου II του υποσυστήματος 3, είναι αντίστοιχα

$$Q_{o3} = 1-(1-q_{o2})(1-Q_{o2}) = 1-(1-q_{o2})[1-q_{o5}(q_{o3}+q_{o4}-q_{o3}q_{o4})]$$

$$Q_{s3} = q_{s2} Q_{s2} = q_{s2}(q_{s3}q_{s4}+q_{s5}-q_{s3}q_{s4}q_{s5}) .$$

Αντικαθιστώντας το υποσύστημα 3 με μια υποθετική μονάδα, για την οποία έχουμε πιθανότητες αποτυχίας τύπου II και II αντίστοιχα τις Q_{o3} και Q_{s3}, προκύπτει το νέο συγχωνευμένο δίκτυο που φαίνεται στο Σχήμα 2.9.4.

Σχήμα 2.9.4
Συγχωνευμένο σύνθετο σύστημα (Dhillon & Rayapati (1986))



Θα εργασθούμε πάνω στο υποσύστημα 4 που βρίσκεται εντός των διακεκομμένων γραμμών.

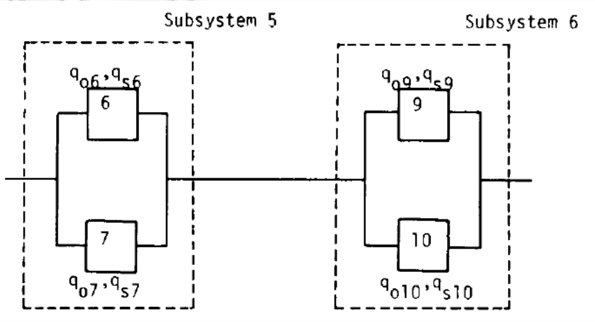
Υποσύστημα 4

Είναι ένας σχηματισμός γέφυρας πέντε μονάδων. Ένας τέτοιος σχηματισμός μπορεί να αναλυθεί με την βοήθεια της διαδικασίας της διάσπασης. Για να υπολογίσουμε τις πιθανότητες αποτυχίας τύπου I και τύπου II ακολουθούμε την επόμενη διαδικασία. Η μονάδα 8 επιλέγεται ως το στοιχείο-κλειδί (γνωστός και ως κρίσιμος παράγοντας). Θα ισχύουν οι εξής υποθέσεις:

1) Το στοιχείο-κλειδί αντικαθιστάται από ένα άλλο στοιχείο το οποίο δεν αποτυγχάνει ποτέ (δηλαδή το στοιχείο κλειδί λειτουργεί πάντα)
2) Το στοιχείο-κλειδί αφαιρείται τελείως από το σύστημα (δηλαδή το στοιχείο-κλειδί είναι πάντα σε κατάσταση αποτυχίας).

Στην πρώτη περίπτωση όταν το στοιχείο-κλειδί αντικαθίσταται από ένα άλλο στοιχείο που δεν αποτυγχάνει ποτέ, ο σχηματισμός γέφυρας που φαίνεται στο υποσύστημα 4 μετατρέπεται σε ένα σειριακό-παράλληλο σχηματισμό (είναι δύο παράλληλα υποσυστήματα σε σειρά) όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.9.5. Αυτή τη φορά τα υποσυστήματα 5 και 6 επιλέγονται για να συγχωνευθούν σε μία μονάδα το καθένα.

Σχήμα 2.9.5
Συγχωνευμένος σχηματισμός γέφυρας με στοιχείο-κλειδί που λειτουργεί (Dhillon & Rayapati (1986))



Υποσύστημα 5

Με τη χρήση των εξισώσεων (2.9.3) και (2.9.4) οι πιθανότητες αποτυχίας τύπου I και τύπου II για το υποσύστημα 5 είναι οι

$$Q_{o5} = q_{o6}q_{o7} \text{ και } Q_{s5} = 1-(1-q_{s6})(1-q_{s7}).$$

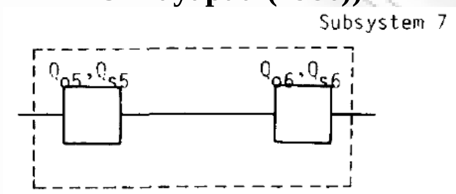
Υποσύστημα 6

Όσο τώρα για το υποσύστημα 6, με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε στις παρακάτω πιθανότητες αποτυχίας τύπου I και τύπου II , οι οποίες είναι αντίστοιχα

$$Q_{o6} = q_{o9}q_{o10} \text{ και } Q_{s6} = 1-(1-q_{s9})(1-q_{s10}).$$

Αντικαθιστώντας το υποσύστημα 5 με μια υποθετική μονάδα, της οποίας οι πιθανότητες αποτυχίας τύπου I και τύπου II είναι αντίστοιχα Q_{o5} και Q_{s5}, όπως επίσης αντικαθιστώντας και το υποσύστημα 6 με μια υποθετική μονάδα με πιθανότητες αποτυχίας τύπου I και τύπου II αντίστοιχα τις Q_{o6} και Q_{s6} θα προκύψει το συγχωνευμένο δίκτυο, δηλαδή το υποσύστημα 7 που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.9.6.

Σχήμα 2.9.6
Συγχωνευμένος σχηματισμός γέφυρας με στοιχείο-κλειδί που λειτουργεί (Dhillon & Rayapati (1986))



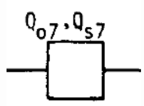
Υποσύστημα 7

Το υποσύστημα 7 είναι ένα σειριακό σύστημα οπότε με βάση τις εξισώσεις (2.9.1), (2.9.2) θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες αποτυχίας τύπου I και τύπου II. Αυτές είναι

$$Q_{o7} = 1-(1-Q_{o5})(1-Q_{o6}) \text{ και } Q_{s7} = Q_{s5}Q_{s6}.$$

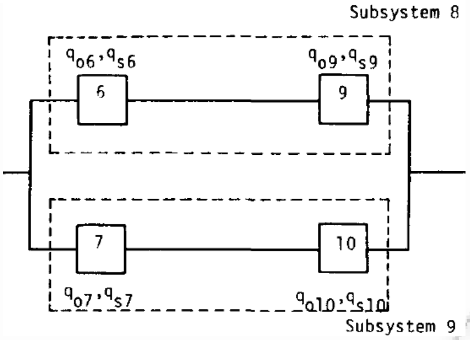
Άρα αντικαθιστώντας το υποσύστημα 7 με μία μονάδα, όπου έχει πιθανότητες αποτυχίας τις Q_{o7} και Q_{s7}, καταλήγουμε στο Σχήμα 2.9.7. Συνεπώς το παράλληλο-σειριακό σύστημα που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.9.5 απλοποιείται σε αυτό του Σχήματος 2.9.7.

Σχήμα 2.9.7
Απλοποιημένος σχηματισμός γέφυρας με στοιχείο-κλειδί που λειτουργεί (Dhillon & Rayapati (1986))



Στη δεύτερη περίπτωση, όπου το στοιχείο-κλειδί είναι πάντα σε κατάσταση αποτυχίας, το υποσύστημα 4 του Σχήματος 2.9.4 ανάγεται στο παράλληλο-σειριακό σύστημα του Σχήματος 2.9.8.

Σχήμα 2.9.8
Συγχωνευμένος σχηματισμός γέφυρας με στοιχείο-κλειδί που αποτυγχάνει (Dhillon & Rayapati (1986))



Υποσύστημα 8

Συνεχίζοντας θα βρούμε τις πιθανότητες αποτυχίας τύπου I και τύπου II για το υποσύστημα 8, το οποίο είναι σειριακό και έτσι θα κάνουμε χρήση των σχέσεων (2.9.1), (2.9.2) που παρουσιάσαμε στην αρχή. Επομένως θα έχουμε αντίστοιχα τις εξής πιθανότητες

$$Q_{o8} = 1-(1-q_{o6})(1-q_{o9}) \text{ και } Q_{s8} = q_{s6}q_{s9}.$$

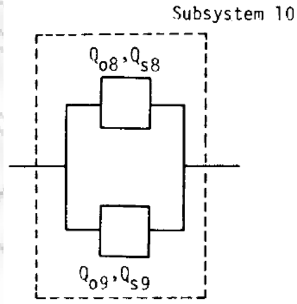
Υποσύστημα 9

Ομοίως για το υποσύστημα 9 θα έχουμε ότι οι πιθανότητες αποτυχίας τύπου I και τύπου II αντίστοιχα θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$Q_{o9} = 1-(1-q_{o7})(1-q_{o10}) \text{ και } Q_{s9} = q_{s7}q_{s10}.$$

Με το να αντικαταστήσουμε το υποσύστημα 8 με μια υποθετική μονάδα, η οποία έχει πιθανότητες αποτυχίας τύπου I και τύπου II αντίστοιχα τις Q_{o8} και Q_{s8}, όπως επίσης και το υποσύστημα 9 με μία μονάδα με αντίστοιχες πιθανότητες αποτυχίας τις Q_{o9} και Q_{s9}, θα προκύψει το συγχωνευμένο δίκτυο του Σχήματος 2.9.9.

Σχήμα 2.9.9
Συγχωνευμένος σχηματισμός γέφυρας με στοιχείο-κλειδί που αποτυγχάνει (Dhillon & Rayapati, 1986)



Εδώ θα συγχωνεύσουμε σε μία μονάδα το υποσύστημα 10 το οποίο είναι ένα παράλληλο σύστημα δύο μονάδων.

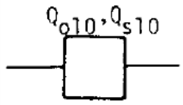
Υποσύστημα 10

Αφού το υποσύστημα 10 είναι ένας παράλληλος σχηματισμός θα δουλέψουμε με βάση τις εξισώσεις (2.9.3) και (2.9.4), συνεπώς οι πιθανότητες αποτυχίας τύπου I και τύπου II θα εκφράζονται από τους επόμενους τύπους

$$Q_{o10} = Q_{o8}Q_{o9} \text{ και } Q_{s10} = 1-(1-Q_{s8})(1-Q_{s9}).$$

Αντικαθιστώντας το υποσύστημα 10 με μια μονάδα η οποία θα έχει πιθανότητες αποτυχίας αντίστοιχα για κάθε κατάσταση αποτυχίας τις Q_{o10} και Q_{s10}, έχουμε το συγχωνευμένο δίκτυο που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.9.10. Έτσι το παράλληλο-σειριακό δίκτυο που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.9.8 ανάγεται στη μονάδα του Σχήματος 2.9.10.

Σχήμα 2.9.10
Συγχωνευμένος σχηματισμός γέφυρας με στοιχείο-κλειδί που αποτυγχάνει
(Dhillon & Rayapati (1986))



Επομένως μετά από όλη αυτή τη διαδικασία λαμβάνουμε τις πιθανότητες αποτυχίας τύπου I και τύπου II για τον σχηματισμό γέφυρας (υποσύστημα 4) βασιζόμενοι στις εξισώσεις που παρουσιάσαμε από το υποσύστημα 5 έως και τώρα. Για να εκφράσουμε τις πιθανότητες αυτές θα ορίσουμε κάθε φορά κάποια γεγονότα.

Έστω τα ενδεχόμενα

Α: το στοιχείο-κλειδί βρίσκεται σε κατάσταση αποτυχίας τύπου Ι

Β: το στοιχείο-κλειδί μην βρίσκεται σε κατάσταση αποτυχίας τύπου Ι

Γ: ο σχηματισμός γέφυρας βρίσκεται στην κατάσταση αποτυχίας τύπου Ι.

Η πιθανότητα αποτυχίας τύπου Ι για το υποσύστημα 4 είναι ίση με

$$Q_{o4} = P(\mathrm{A}) \times P(\Gamma \mid \mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) \times P(\Gamma \mid \mathrm{B})$$

Αν τώρα αντικαταστήσουμε σε αυτή, τις πιθανότητες αποτυχίας για κάθε μία μονάδα ή υποσύστημα από το οποίο αποτελείται βρίσκουμε τον εξής τύπο:

$$Q_{o4} = q_{o8}Q_{o10} + (1-q_{o8})Q_{o7} = 2q_{o6}q_{o7}q_{o8}q_{o9}q_{o10} - q_{o6}q_{o7}q_{o8}q_{o9} - q_{o6}q_{o7}q_{o8}q_{o10}$$
$$-q_{o6}q_{o7}q_{o9}q_{o10} - q_{o6}q_{o8}q_{o9}q_{o10} - q_{o7}q_{o8}q_{o9}q_{o10} + q_{o6}q_{o8}q_{o10} + q_{o7}q_{o8}q_{o9} + q_{o6}q_{o7} + q_{o9}q_{o10}.$$

Με παρόμοιο τρόπο θα δουλέψουμε και για την πιθανότητα αποτυχίας τύπου ΙΙ. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

Δ: το στοιχείο-κλειδί βρίσκεται σε κατάσταση αποτυχίας τύπου ΙΙ

Ε: το στοιχείο-κλειδί δεν βρίσκεται σε κατάσταση αποτυχίας τύπου ΙΙ

Ζ: ο σχηματισμός γέφυρας βρίσκεται στην κατάσταση αποτυχίας τύπου ΙΙ.

Ομοίως με πριν προκύπτει η σχέση

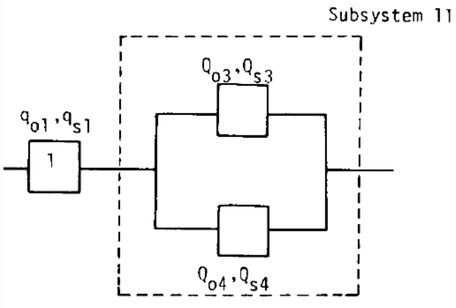
$$Q_{s4} = P(\Delta) \times P(\mathrm{Z} \mid \Delta) + P(\mathrm{E}) \times P(\mathrm{Z} \mid \mathrm{E})$$

και προκύπτει ο τύπος:

$$Q_{s4} = q_{o8}Q_{s7} + (1-q_{s8})Q_{o10}$$
$$= 2q_{s6}q_{s7}q_{s8}q_{s9}q_{s10} - q_{s6}q_{s7}q_{s8}q_{s9} - q_{s6}q_{s7}q_{s8}q_{s10} - q_{s6}q_{s7}q_{s9}q_{s10} - q_{s6}q_{s8}q_{s9}q_{s10} - q_{s7}q_{s8}q_{s9}q_{s10}$$
$$+q_{s6}q_{s8}q_{s10} + q_{s7}q_{s8}q_{s9} + q_{s6}q_{s9} + q_{s7}q_{s10}.$$

Έτσι φτάνουμε στο σημείο να αντικαταστήσουμε το υποσύστημα 4 με μία υποθετική μονάδα που έχει πιθανότητες αποτυχίας τύπου Ι και τύπου Ι αντίστοιχα τις Q_{o4} και Q_{s4}. Τότε θα έχουμε ως αποτέλεσμα την διαμόρφωση του συστήματος που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.9.11.

Σχήμα 2.9.11
Συγχωνευμένο σύνθετο σύστημα (Dhillon & Rayapati (1986))



Θα ασχοληθούμε με το υποσύστημα 11, το οποίο είναι ένας παράλληλος σχηματισμός.

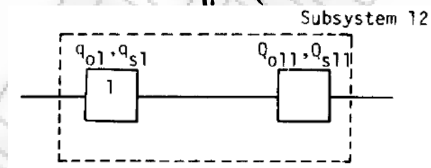
<u>Υποσύστημα 11</u>

Με τον γνωστό τρόπο βρίσκουμε ότι οι πιθανότητες αποτυχίας τύπου I και τύπου II θα δίνονται από τις σχέσεις

$$Q_{o11} = Q_{o3}Q_{o4} \text{ και } Q_{s11} = 1-(1-Q_{s3})(1-Q_{s4}).$$

Βάζοντας την θέση του υποσυστήματος 11 μία μονάδα με τις πιθανότητες αποτυχίας που μόλις αναφέραμε, οδηγούμαστε στο απλοποιημένο δίκτυο που εμφανίζεται στο Σχήμα 2.9.12. Αυτό είναι ένας σειριακός σχηματισμός, τον οποίο ονομάζουμε υποσύστημα 12.

Σχήμα 2.9.12
Συγχωνευμένο σύνθετο σύστημα (Dhillon & Rayapati (1986))



<u>Υποσύστημα 12</u>

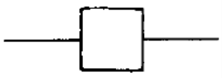
Με την χρήση των εξισώσεων (2.9.1) και (2.9.2) θα προκύψουν οι πιθανότητες αποτυχίας τύπου I και τύπου II για το υποσύστημα 12 από όπου θα έχουμε και την τελική μορφή του αρχικού συστήματος.

Συνεπώς θα έχουμε

$$Q_{o12} = 1-(1-q_{o1})(1-Q_{o11}) \text{ και } Q_{s12} = q_{s1}Q_{s11}.$$

Τέλος με την αντικατάσταση του υποσυστήματος 12 από μία υποθετική μονάδα, η οποία θα έχει ως πιθανότητες αποτυχίας τις Q_{o12} και Q_{s12} η τελευταία μορφή στο Σχήμα 2.9.12 θα μετατραπεί σε μία και μοναδική μονάδα που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.9.13.

Σχήμα 2.9.13
Απλοποιημένο σύνθετο σύστημα (Dhillon & Rayapati (1986))



Συμπεραίνουμε ότι η αρχική μορφή του σύνθετου συστήματος που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.9.1 καταλήγει να έχει την μορφή μίας και μόνο μονάδας , αυτής που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.9.13. Επομένως το αρχικό σύνθετο σύστημα θα έχει πιθανότητες αποτυχίας τύπου I και τύπου II τις Q_{o12} και Q_{s12}. Άρα η πιθανότητα αποτυχίας τύπου I για το σύνθετο σύστημα είναι η εξής

$$Q_o = Q_{o12} = 1-(1-q_{o1})(1-Q_{o3}Q_{o4}) \tag{2.10.5}$$

όπου οι Q_{o3} και Q_{o4} έχουν οριστεί προηγουμένως.

Ομοίως η πιθανότητα αποτυχίας τύπου II για το σύνθετο σύστημα θα εκφράζεται μέσα από την σχέση

$$Q_s = Q_{s12} = q_{s1}[1-(1-Q_{s3})(1-Q_{s4})] \tag{2.10.6}$$

με τις Q_{s3} και Q_{s4} να έχουν οριστεί πιο πριν.

Συνολικά η αξιοπιστία του σύνθετου συστήματος θα δίνεται από τον τύπο

$$R_c = 1-Q_o-Q_s\,. \tag{2.10.7}$$

Κλείνοντας την παράγραφο αυτή ας εξετάσουμε την αξιοπιστία του σχηματισμού γέφυρας του Σχήματος 2.9.4 με όμοιες μονάδες, οπότε θα έχουμε $q_{oi} = q_o$, $q_{si} = q_s$ για $i = 6,7,8,9,10$.

Οι πιθανότητες αποτυχίας τύπου I και τύπου II αυτού του σχηματισμού θα είναι αντίστοιχα οι εξής

$$Q_{ob} = 2q_o^5 - 5q_o^4 + 2q_o^3 + 2q_o^2$$

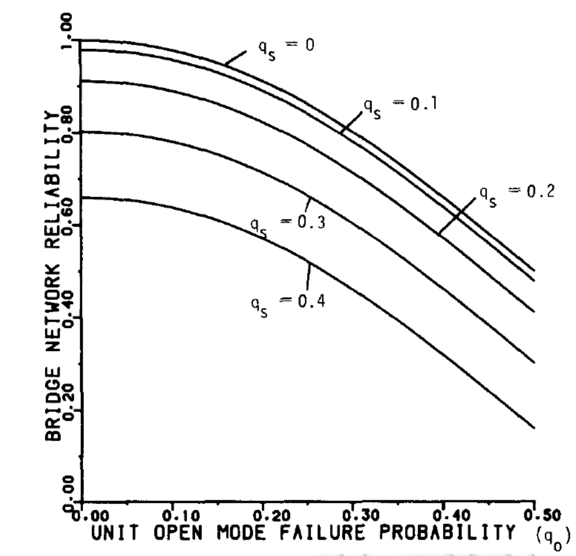
$$Q_{sb} = 2q_s^5 - 5q_s^4 + 2q_s^3 + 2q_s^2$$

με q_o την πιθανότητα αποτυχίας τύπου I και q_s την πιθανότητα αποτυχίας τύπου II για κάθε μονάδα. Συνεπώς η ζητούμενη αξιοπιστία είναι η εξής:

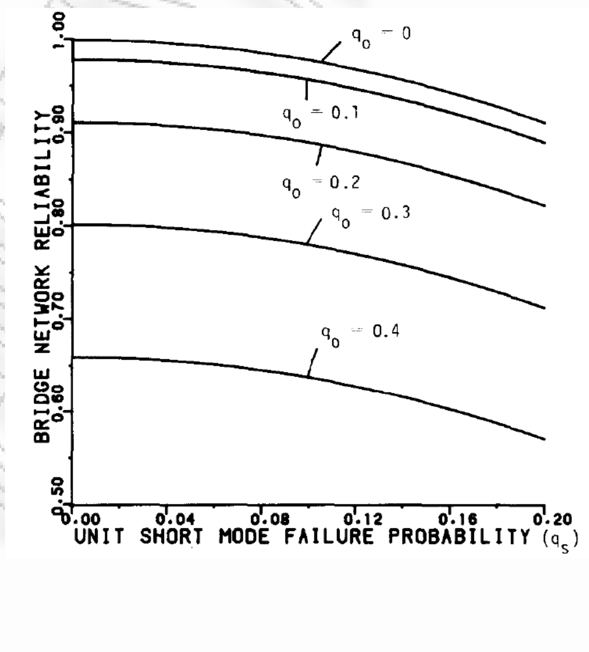
$$R_b = 1-Q_{ob}-Q_{sb}\,.$$

Στα διαγράμματα 2.9.1 και 2.9.2, που ακολουθούν παρουσιάζεται η επίδραση των πιθανοτήτων αποτυχίας τύπου I και τύπου II αντίστοιχα στην αξιοπιστία του σχηματισμού γέφυρας. Από αυτά προκύπτει ότι η αξιοπιστία ενός σχηματισμού γέφυρας με πανομοιότυπες μονάδες μειώνεται καθώς οι αντίστοιχες πιθανότητες αποτυχίας τύπου I (q_o) και τύπου II (q_s) αυξάνονται.

Σχήμα 2.9.14
Διάγραμμα αξιοπιστίας για τον σχηματισμό γέφυρας με μονάδες σε κατάσταση αποτυχίας τύπου I (Dhillon & Rayapati (1986))



Σχήμα 2.9.15
Διάγραμμα αξιοπιστίας για τον σχηματισμό γέφυρας με μονάδες σε κατάσταση αποτυχίας τύπου ΙΙ (Dhillon & Rayapati (1986))



2.10 Παράλληλο σύστημα στο οποίο δύο ή περισσότερες αποτυχίες προκαλούνται από μία κοινή αιτία

Οι *Dhillon, Sambhi & Khan* (1979) ασχολήθηκαν με μία παραλλαγή της κλασσικής θεωρίας του παράλληλου συστήματος. Τα συστήματα αυτά επηρεάζονται από αποτυχίες που προκαλούνται από κοινή αιτία, δηλαδή είναι συστήματα στα οποία μπορούν να συμβούν δύο ή και περισσότερα γεγονότα λόγω της ίδιας αιτίας και αυτό οδηγεί το σύστημα σε αποτυχία. Κάθε συσκευή (μονάδα) θεωρείται ότι μπορεί να μεταβεί σε τρείς καταστάσεις, οπότε λειτουργεί ικανοποιητικά στην φυσιολογική της κατάσταση, όμως αποτυγχάνει σε μία από τις δύο αμοιβαία αποκλειόμενες καταστάσεις αποτυχίας. Τέτοιου είδους συσκευές μπορούν να θεωρηθούν για παράδειγμα: οι βαλβίδες σε συστήματα ελέγχου ροής υγρών, οι ηλεκτρικοί διακόπτες, οι ηλεκτρονικές διόδοι κυκλωμάτων, τα μοτέρ κ.α.

Σημειώνουμε ότι η πλεονασματικότητα των μονάδων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αυξήσει την αξιοπιστία ενός συστήματος, χωρίς να υπάρξει κάποια αλλαγή στην αξιοπιστία κάθε μίας μονάδας. Όμως σε συστήματα όπως αυτής της ενότητας, η πλεονασματικότητα μπορεί είτε να αυξήσει είτε να μειώσει την αξιοπιστία ενός συστήματος, πράγμα το οποίο εξαρτάται από την κύρια κατάσταση αποτυχίας των μονάδων, τη διαμόρφωση του συστήματος και τον αριθμό των πλεοναζόντων μονάδων.

Για να εκτιμήσουμε σωστά την αξιοπιστία ενός συστήματος θα πρέπει να ενσωματώσουμε αυτό το είδος της αποτυχίας στην ανάλυσή μας.

Υποθέτουμε τα παρακάτω

α) Το είδος της αποτυχίας που προκαλείται από γεγονότα που έχουν κοινή αιτία όπως και οι υπόλοιπες καταστάσεις αποτυχίας (αποτυχία τύπου Ι, αποτυχία τύπου ΙΙ) είναι στατιστικά ανεξάρτητες.

β) Το είδος της αποτυχίας που προκαλείται από γεγονότα που έχουν κοινή αιτία συμβαίνει σε παράλληλα συστήματα που περιλαμβάνουν δύο ή και περισσότερες μονάδες με τρείς καταστάσεις.

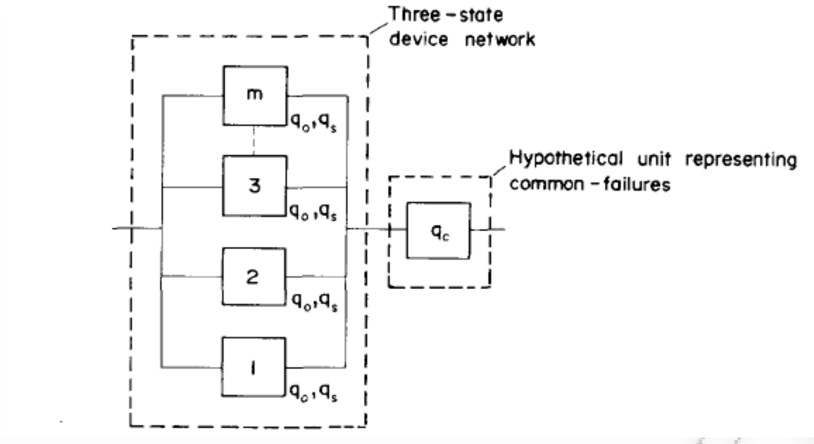
γ) Οι μονάδες του συστήματος είναι ίδιες.

δ) Η βαθμίδα αποτυχίας που αναφέρεται σε αποτυχίες που προκαλούνται από γεγονότα που έχουν κοινή αιτία, όπως και των υπόλοιπων καταστάσεων αποτυχίας (αποτυχία τύπου Ι, αποτυχία τύπου Ι) είναι σταθερή.

Για να έχουμε μία καλύτερη εικόνα της ενσωμάτωσης των αποτυχιών που προκαλούνται από γεγονότα που έχουν κοινή αιτία, όπως και του ίδιου του συστήματος, παρουσιάζουμε το παρακάτω διάγραμμα, το οποίο αποτελείται από *m* μονάδες παράλληλες, κάθε μία από τις οποίες έχει τρείς καταστάσεις και τοποθετούμε μια υποθετική μονάδα η οποία είναι συνδεδεμένη σε σειρά στο παράλληλο σύστημα.

Σχήμα 2.10.1

Παράλληλο σύστημα όπου υπάρχουν αποτυχίες προκαλούμενες από κοινή αιτία (Dhillon, Sambhi & Khan (1979))



Στην ανάλυσή μας θα χρησιμοποιήσουμε τους επόμενους συμβολισμούς

λ_o: βαθμίδα αποτυχίας όταν οι μονάδες είναι ανοιχτές (σταθερή βαθμίδα αποτυχίας τύπου Ι),

λ_s: βαθμίδα αποτυχίας όταν οι μονάδες είναι κλειστές (σταθερή βαθμίδα αποτυχίας τύπου ΙΙ),

λ_c: βαθμίδα αποτυχίας για αποτυχίες που προκαλούνται από γεγονότα με κοινή αιτία,

q_o: είναι η πιθανότητα αποτυχίας τύπου Ι,

q_s: είναι η πιθανότητα αποτυχίας τύπου ΙΙ,

q_c: είναι η πιθανότητα αποτυχίας όπου η αποτυχία προκαλείται από γεγονότα με κοινή αιτία,

n: είναι ο λόγος της βαθμίδας αποτυχίας τύπου ΙΙ προς τη βαθμίδα αποτυχίας τύπου Ι,

k: είναι ο λόγος της βαθμίδας αποτυχίας, που προκαλείται από γεγονότα με κοινή αιτία προς το άθροισμα των βαθμίδων αποτυχίας τύπου Ι και τύπου ΙΙ,

m: είναι ο αριθμός των μονάδων οι οποίες βρίσκονται σε παράλληλη σύνδεση,

λ: είναι η σταθερή βαθμίδα αποτυχίας της μονάδας,

t: είναι ο χρόνος,

$R(t)$:είναι η αξιοπιστία του συστήματος συναρτήσει του χρόνου.

Το επόμενο βήμα που κάνουμε είναι να διαμορφώσουμε ένα μαθηματικό μοντέλο για να εκφράσουμε όλα τα παραπάνω. Για το σκοπό αυτό ορίζουμε τις επόμενες ποσότητες:

$$\lambda = \lambda_o + \lambda_s + \lambda_c \qquad (2.10.1)$$

$$n= \lambda_s / \lambda_o \quad \text{με } \lambda_o \neq 0 \text{ και } n \geq 0 \qquad (2.10.2)$$

$$k= \lambda_c \,/(\lambda_o + \lambda_s) = \lambda_c \,/ \,(1+n)\, \lambda_o \quad \text{με} \quad (1+n)\, \lambda_o \neq 0 \quad \text{και} \quad 0\leq k \leq 1. \qquad (2.10.3)$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.10.1), (2.10.2), (2.10.3) και λύνοντας ως προς λ_o, λ_s, λ_c προκύπτουν οι επόμενοι τύποι που εκφράζουν τις βαθμίδες αποτυχίας

$$\lambda_o = \lambda/[(1+n)(1+k)] \qquad (2.10.4)$$

$$\lambda_s = n\lambda/[(1+n)(1+k)] \qquad (2.10.5)$$

$$\lambda_c =k\lambda/(1+k). \qquad (2.10.6)$$

Χρησιμοποιούμε στη συνέχεια τη μέθοδο εκτίμησης της αξιοπιστίας μέσω της απλοποίησης των συστημάτων, σύμφωνα με την οποία, κάθε σύνολο μονάδων που έχει την μορφή ενός γνωστού μας συστήματος, το ανάγουμε σε μονάδα, δηλαδή βρίσκουμε την αξιοπιστία του συγκεκριμένου συστήματος την οποία θεωρούμε μετά ως αξιοπιστία μίας μονάδας. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η αξιοπιστία του συστήματός μας

$$R = \{ (1- q_s)^m - q_o^m \} (1- q_c). \qquad (2.10.7)$$

Στην ειδική περίπτωση που η πιθανότητα αποτυχίας μεταβάλλεται με το χρόνο, οι εξισώσεις που τις εκφράζουν είναι οι παρακάτω

$$q_s = \frac{\lambda_s}{\lambda_s + \lambda_o}(1- e^{-(\lambda o + \lambda s)t}) \qquad (2.10.8)$$

$$q_o = \frac{\lambda_o}{\lambda_s + \lambda_o}(1- e^{-(\lambda o + \lambda s)t}) \qquad (2.10.9)$$

$$q_c = 1- e^{-\lambda ct} \;. \qquad (2.10.10)$$

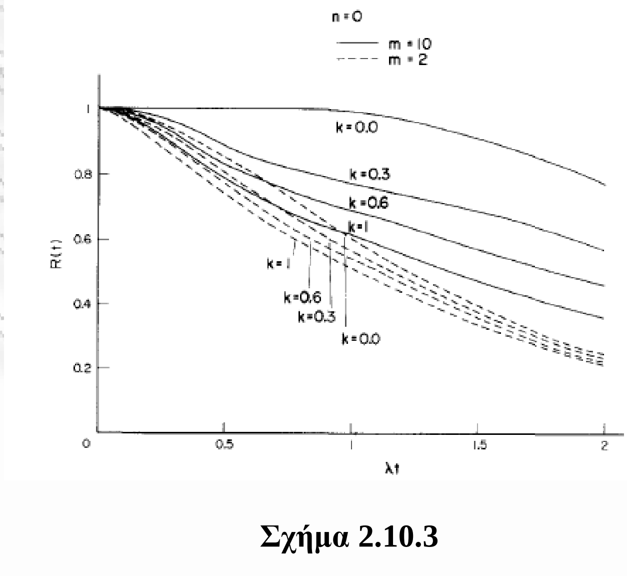
Κάνοντας τις απαραίτητες αντικαταστάσεις μεταξύ των εξισώσεων (2.10.4)-(2.10.6) και (2.10.8)-(2.10.10) και εν συνεχεία αντικαθιστώντας αυτές στην εξίσωση της αξιοπιστίας του συστήματος (2.10.7), έχουμε ως αποτέλεσμα τον τύπο της αξιοπιστίας συναρτήσει του χρόνου.

$$R(t) = \left[\left\{ 1 - \frac{n}{n+1}(1 - e^{\frac{\lambda}{(k+1)}t}) \right\}^m - \left\{ \frac{1}{n+1}(1 - e^{-\frac{\lambda}{(k+1)}t}) \right\}^m \right] e^{-\frac{k\lambda}{(k+1)}t} \qquad (2.10.11)$$

Παραθέτοντας κάποια διαγράμματα μπορούμε να έχουμε μία καλύτερη εικόνα της αξιοπιστίας $R(t)$.

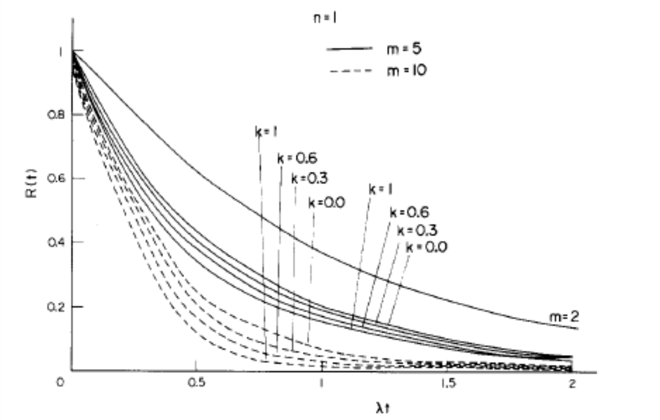
Σχήμα 2.10.2

Διάγραμμα της αξιοπιστίας του συστήματος με *m*=2, *m*=10 και *n*=0 (Dhillon, Sambhi & Khan (1979))



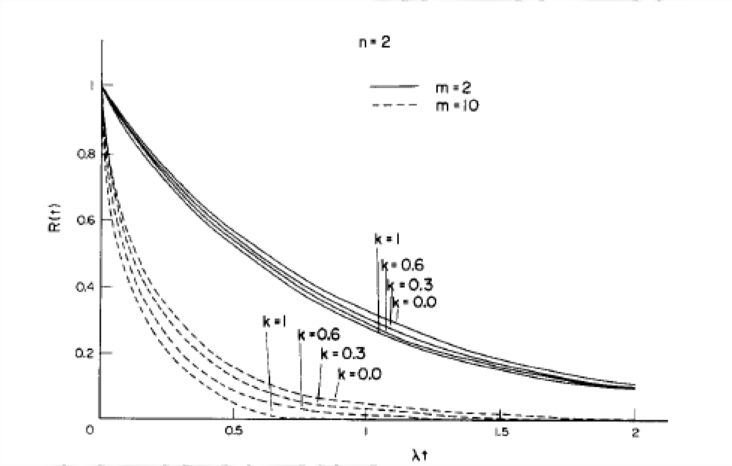
Σχήμα 2.10.3

Διάγραμμα της αξιοπιστίας του συστήματος με *m*=5, *m*=10 και *n*=1 (Dhillon, Sambhi & Khan (1979))



Σχήμα 2.10.4

Διάγραμμα της αξιοπιστίας του συστήματος με *m*=2, *m*=10 και *n*=2 (Dhillon, Sambhi & Khan (1979))



Από τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε ότι όσο η τιμή του *k* αυξάνεται , η αξιοπιστία του συστήματος μειώνεται. Επίσης από το Σχήμα 2.10.3, μπορούμε να σημειώσουμε ότι για ένα σύστημα αποτελούμενο από δύο μονάδες (*m*=2) με την ίδια βαθμίδα αποτυχίας όταν οι μονάδες είναι ανοιχτές και κλειστές αντίστοιχα (*n*=1), η αξιοπιστία του συστήματος δεν επηρεάζεται από την ύπαρξη της αποτυχιών που προκαλούνται από μία κοινή αιτία.

Αυτό είναι εύκολο να το δείξουμε και με μαθηματικό τρόπο αν θέσουμε για τις ποσότητες *m*, *n* τις τιμές *m*=2, *n*=1 στην εξίσωση αξιοπιστίας (2.10.11), οπότε θα πάρουμε την ακόλουθη εξίσωση

$$R(t) = \left[\left\{1-\frac{1}{2}(1-e^{\lambda/(k+1)t})\right\}^2 - \left\{\frac{1}{2}(1-e^{-\lambda/(k+1)t})\right\}^2\right]e^{-k/(k+1)t} = e^{-\lambda t}. \quad (2.10.12)$$

Διαπιστώνουμε ότι αυτή η συνάρτηση είναι ανεξάρτητη από το *k.* Επιπλέον αποδεικνύει ότι ένα σύστημα με δύο μονάδες, συμπεριφέρεται σαν μία μονάδα.

Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ δίνεται από την σχέση

$$\lambda(t) = -\frac{1}{R(t)}\frac{R(t)}{dt} \qquad (2.10.13)$$

και αν αντικαταστήσουμε την αξιοπιστία $R(t)$ του τύπου (2.10.11) στον (2.10.13) παίρνουμε ότι

$$\lambda(t) = \lambda\left(\frac{k}{k+1}\right)\left(1+\frac{m}{k}e^{-a}\right) \qquad (2.11.14)$$

όπου

$$a = \lambda t/(k+1)\frac{\left[\frac{n}{n+1}\left\{1-\frac{n}{n+1}(1-e^{-\lambda t/(k+1)})\right\}^{m-1}+\frac{1}{n+1}\left\{\frac{1}{n+1}(1-e^{-\lambda t/(k+1)})\right\}^{m-1}\right]}{\left[\left\{1-\frac{n}{n+1}(1-e^{-\lambda t/(k+1)})\right\}^{m}+\left\{\frac{1}{n+1}(1-e^{-\lambda t/(k+1)})\right\}^{m}\right]}.$$

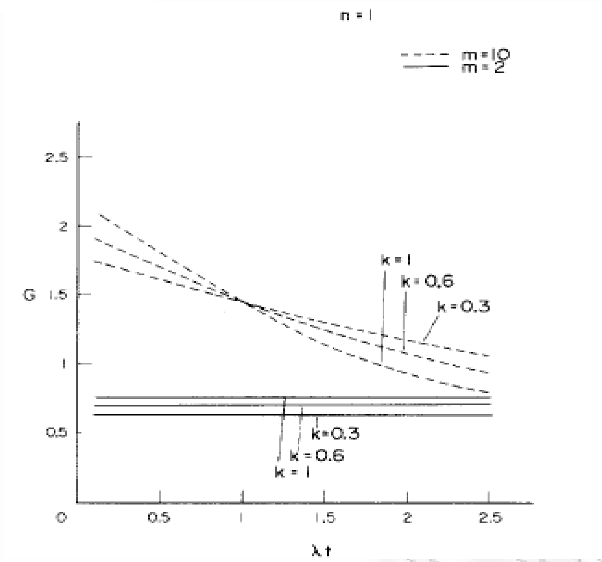
Η αύξηση (κέρδος) G της βαθμίδας αποτυχίας, υπολογίζεται από τον λόγο της βαθμίδας αποτυχίας του συστήματος προς την βαθμίδα αποτυχίας της μονάδας, οπότε προκύπτει η σχέση

$$G = \lambda(t)/\lambda. \qquad (2.10.15)$$

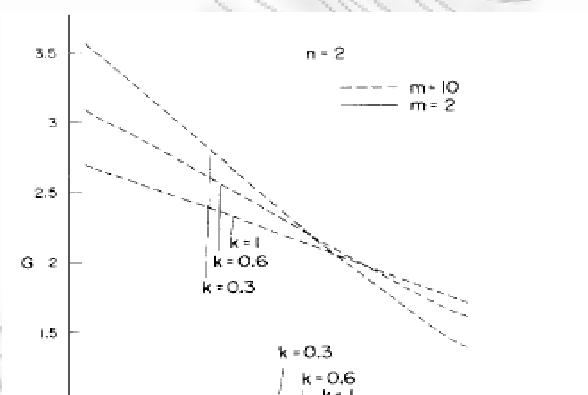
Στη συνέχεια παραθέτουμε κάποια διαγράμματα για το κέρδος της βαθμίδας αποτυχίας για διάφορες επιλογές των παραμέτρων m και n.

Σχήμα 2.10.5

Διάγραμμα κέρδους βαθμίδας αποτυχίας με *m*=2, *m*=10 και *n*=1 (Dhillon, Sambhi & Khan (1979))



Σχήμα 2.10.6
Διάγραμμα κέρδους βαθμίδας αποτυχίας με *m*=2, *m*=10 και *n*=2 (Dhillon, Sambhi & Khan (1979))



Στο Σχήμα 2.10.5 απεικονίζεται η αύξηση της βαθμίδας αποτυχίας συναρτήσει του χρόνου λt για παραμέτρους με τιμές n=1, m=2, m=10. Από το σχήμα αυτό διαπιστώνουμε ότι για ένα σύστημα δύο μονάδων (m=2) και ίδια βαθμίδα αποτυχίας, όταν οι μονάδες είναι ανοιχτές και κλειστές η αύξηση της βαθμίδας αποτυχίας είναι σχετικά σταθερή όταν αυξάνεται το λt.

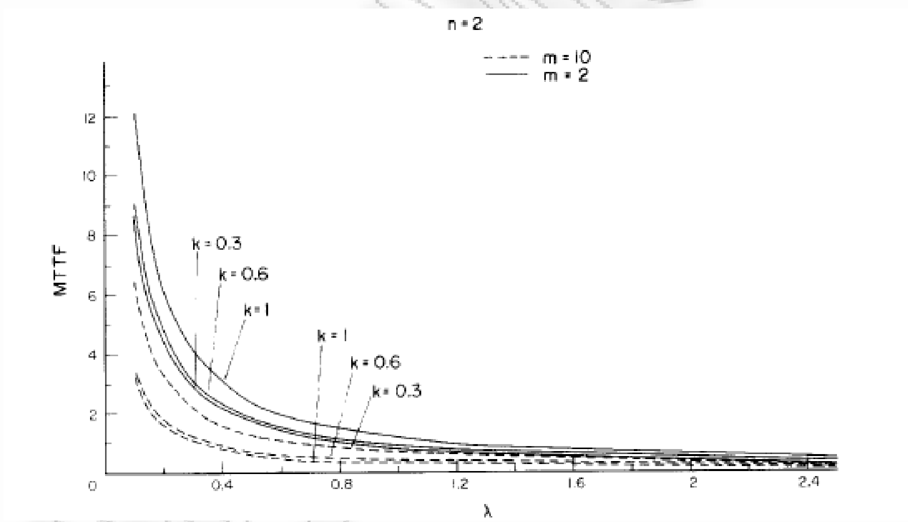
Ομοίως το Σχήμα 2.10.6 απεικονίζει την αύξηση της βαθμίδας αποτυχίας για τιμές n=2, m=2, m=10. Αυτό σημαίνει ότι τώρα έχουμε ένα σύστημα στο οποίο η βαθμίδα αποτυχίας όταν οι μονάδες είναι κλειστές είναι διπλάσια από την αντίστοιχη όταν οι μονάδες είναι ανοιχτές. Στα δύο προηγούμενα διαγράμματα φαίνεται η επίδραση των αποτυχιών που προκαλούνται από κοινή αιτία στην αύξηση της βαθμίδας αποτυχίας του συστήματος.

Ο μέσος χρόνος ενός παράλληλου συστήματος (με πλεονάζουσες μονάδες) έως την πρώτη αποτυχία, δηλαδή ο μέσος χρόνος ζωής του MTTF, εκφράζεται από την σχέση

$$\text{MTTF} = \int_0^\infty R(t)dt \,. \tag{2.10.16}$$

Μία προσεγγιστική απεικόνιση του μέσου χρόνου ζωής του συστήματος MTTF, φαίνεται στο Σχήμα 2.10.7, (για n=2, m=2, m=10) για διάφορες τιμές του λ και του k. Μπορούμε να παρατηρήσουμε την επίδραση των αποτυχιών που προκαλούνται από κοινή αιτία στο μέσο χρόνο ζωής του συστήματος. Έτσι όσο αυξάνεται η σταθερή βαθμίδα αποτυχίας, τόσο μειώνεται ο μέσος χρόνος ζωής του συστήματος. Όλα αυτά που προαναφέραμε συμβαίνουν για ένα σύστημα στο οποίο η βαθμίδα αποτυχίας, όταν οι μονάδες είναι κλειστές, είναι διπλάσια από την αντίστοιχη όταν οι μονάδες είναι ανοιχτές.

Σχήμα 2.10.7
Διάγραμμα μέσου χρόνου ζωής του συστήματος με *m*=2, *m*=10 και *n*=2 (Dhillon, Sambhi & Khan (1979))



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΑΠΟΤΥΧΙΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την αξιοπιστία συστημάτων με μονάδες οι οποίες παρουσιάζουν πολλά είδη αποτυχίας και συγκεκριμένα περισσότερα από δύο είδη. Αυτά ονομάζονται **συστήματα αξιοπιστίας με πολλαπλά είδη αποτυχίας** (MFM, Multiple Failure Mode Systems). Τέτοια συστήματα αποτελούν μία γενίκευση των συνήθων απλών συστημάτων (SFM, Single Failure Mode systems) όπως επίσης και των συστημάτων με δύο επίπεδα αποτυχίας (DFM, Dual Failure Mode Systems) τα οποία έχουν αναλυθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο. Τα SFM όπως και τα DFM συστήματα, αν και είναι κατάλληλα για την περιγραφή διαφόρων συστημάτων, προϋποθέτουν μόνο δύο και τρείς αντίστοιχα δυνατές καταστάσεις στις οποίες μπορούν να βρεθούν οι μονάδες του συστήματος, έτσι είναι φανερό ότι δεν μπορούν να περιγραφούν τα συστήματα με πιο πολλές καταστάσεις αποτυχίας.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα αναφερθούμε στους τρόπους εκτίμησης της αξιοπιστίας για τα συστήματα MFM μέσω διαφόρων μεθόδων (γενίκευση της συνάρτησης δομής των απλών συστημάτων, ειδικός μετασχηματισμός αυτών σε απλά συστήματα, διαδικασία εμφύτευσης σε Μαρκοβιανή αλυσίδα). Επίσης θα παρουσιάσουμε άνω και κάτω φράγματα για την αξιοπιστία των MFM συστημάτων, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για μία αποτελεσματική εκτίμηση της αξιοπιστίας. Οι εφαρμογές των DFM συστημάτων για παράδειγμα σε ηλεκτρικά συστήματα, συστήματα ασφαλείας, συστήματα ελέγχου ροής υγρών, τηλεπικοινωνίες κ.τ.λ ισχύουν και για τα MFM συστήματα.

Θεωρώντας τα MFM συστήματα ως μία επέκταση των SFM ή DFM συστημάτων, τα επίπεδα (είδη) αποτυχίας που σχετίζονται με τις μονάδες και το σύστημα θα είναι περισσότερα απο δύο, $m\geq 2$. Αυτό μας οδηγεί στο να συμπεράνουμε ότι θα έχουμε και m διαφορετικά είδη ε.σ.δ.

Το υλικό αυτού του κεφαλαίου προέρχεται κυρίως από τη διπλωματική εργασία *Μπούτσικας* (1998), από το άρθρο *Boutsikas* & *Koutras* (2002) και από το άρθρο *Milienos & Koutras* (2008).

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα σύνολο από n το πλήθος μονάδες ανεξάρτητες μεταξύ τους, η καθεμία από τις οποίες έχει τη δυνατότητα να βρεθεί σε μία από τις $m+1$ ($m\geq 2$) συνολικά διαφορετικές καταστάσεις: επιτυχία (λειτουργία της μονάδας) ή αποτυχία τύπου s (μη λειτουργία της μονάδας), $s=1,2,\ldots,m$. Ειδικότερα, η i-μονάδα θα βρίσκεται είτε στην κατάσταση λειτουργίας με πιθανότητα p_i, είτε σε μία από τις m καταστάσεις αποτυχίας με πιθανότητες q_{si} αντίστοιχα, με $s=1,2,\ldots,m$. Θα ισχύει η εξής σχέση για τις πιθανότητες

$$p_i+q_{1i}+q_{2i}+\ldots+q_{mi}=1, \text{ με } i=1,2,\ldots,n.$$

Επίσης θεωρούμε τις οικογένειες ελαχίστων συνόλων διακοπής (ε.σ.δ) $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2,\ldots,\mathbf{C}_m$, οι οποίες είναι *m* το πλήθος (δηλαδή για κάθε τύπο αποτυχίας έχουμε και μία οικογένεια ε.σ.δ.). Το σύνολο των *n* μονάδων του συστήματος σε συνδυασμό με την δομή των $\mathbf{C}_\mathbf{s} = \{C_{s1}, C_{s2}, ..., C_{sN_s}\}$, s=1,2,…,m θα ονομάζεται MFM σύστημα, με την προϋπόθεση ότι αποτυγχάνει αν και μόνο αν υπάρχει $s \in \{1,2,\ldots,m\}$ και $j \in \{1,2,\ldots\ N_s\}$, τέτοια ώστε όλες οι μονάδες που περιέχονται στο σύνολο Cs_j να αποτυγχάνουν σε επίπεδο *s*.

Τα σύνολα $C_{s1}, C_{s2}, ..., C_{sN_s}$, με s=1,2,…,m, θα ονομάζονται ελάχιστα σύνολα διακοπής τύπου *s*, του MFM συστήματος. Επίσης ένα MFM σύστημα θα θεωρείται ότι βρίσκεται στην κατάσταση αποτυχίας τύπου Ι, όταν όλες οι μονάδες ενός ε.σ.δ C_{1i} (i=1,2,…,N_1) αποτύχουν σε επίπεδο 1, στην κατάσταση αποτυχίας τύπου ΙΙ, όταν όλες οι μονάδες ενός ε.σ.δ C_{2i} (i=1,2,…,N_2) αποτύχουν σε επίπεδο 2 και συνεχίζοντας για όλα τα είδη αποτυχίας $s \in \{1,2,\ldots,m\}$, τέλος θα βρίσκεται στην κατάσταση αποτυχίας τύπου *m*, όταν όλες οι μονάδες ενός ε.σ.δ C_{mi} (i=1,2,…,N_m), αποτύχουν σε επίπεδο *m*.

Με βάση τα παραπάνω, ένα MFM σύστημα θεωρείται ότι αποτυγχάνει αν και μόνο αν αποτύχει τουλάχιστον σε ένα από τα *m* είδη αποτυχίας. Σε όσα αναφέραμε πιο πάνω θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και ε.σ.λ., οπότε θα είχαμε ανάλογα συμπεράσματα και γι’αυτά. Όμως για πρακτικούς λόγους τα αποτελέσματα μας θα παρουσιάζονται χρησιμοποιώντας τα ε.σ.δ.

Παράδειγμα 3.1

α) Ένα *k*-από-τα-*n*: MFM σύστημα, με $k=(k_1,k_2,\ldots,k_m)$ αποτυγχάνει σε επίπεδο *s*, όταν αποτύχουν τουλάχιστον k_s μονάδες από τις *n* σε επίπεδο *s*, s=1,2,…,m. Ως ε.σ.δ. τύπου *s* θα παίρνουμε όλα τα υποσύνολα του {1,2,…,*n*} με k_s το πλήθος στοιχεία.

β) Ενα συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*:MFM σύστημα, αποτυγχάνει όταν αποτύχουν τουλάχιστον k_s συνεχόμενες μονάδες από τις *n* σε επίπεδο *s*, με s =1,2,…,m. Ως ε.σ.δ. τύπου *s* θα έχουμε τα $\{1, 2,\ldots,k_s\}$, $\{2, 3,\ldots,k_s+1\}$,…,$\{n-k_s+1, n-k_s+2,\ldots, n\}$.

Μία παραλλαγή του συστήματος είναι το κυκλικό συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*: MFM σύστημα, το οποίο λειτουργεί με τον ίδιο τρόπο με το συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*:MFM σύστημα με την μόνη διαφορά ότι οι μονάδες συνδέονται κυκλικά (η πρώτη είναι δίπλα με την τελευταία). Επομένως ως ε.σ.δ τύπου *s* θα περιλαμβάνει αυτά του συνεχόμενου *k*-από-τα-*n*: MFM συστήματος και επιπλέον τα $\{n-k_s+2,\ldots,n,1\}$, $\{n-k_s+3,\ldots,n,1,2\}$,…,$\{n,1,\ldots,k_s-1\}$, όπου s=1,2,…,m.

3.1 Εκτίμηση της αξιοπιστίας μέσω της συνάρτησης δομής

Ένας τρόπος για να υπολογίσουμε την αξιοπιστία ενός MFM συστήματος είναι να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση δομής του. Ας θεωρήσουμε το τυχαίο διάνυσμα (τ.δ) $\mathbf{X}_{.i} = (X_{1,i}, X_{2,i}, ..., X_{m,i})'$ το οποίο αντιπροσωπεύει την κατάσταση της *i*-μονάδας, δηλαδή τα $X_{1,i}, X_{2,i}, ..., X_{m,i}$ θα παίρνουν τις τιμές 0 ή 1 ανάλογα με το σε ποιά κατάσταση θα βρίσκεται η μονάδα. Επομένως θα παίρνει την τιμή 0 αν η μονάδα βρίσκεται στην θέση *s* που σημαίνει ότι είναι στο επίπεδο αποτυχίας τύπου *s*, ενώ θα παίρνει την τιμή 1 αν η μονάδα είναι σε λειτουργία, όπου i=1,2,…,n. Για την επίτευξη του στόχου μας δημιουργούμε τον πίνακα

$$\mathbf{X}=(\mathbf{X}_{\cdot 1}, \mathbf{X}_{\cdot 2}, \ldots, \mathbf{X}_{\cdot n})$$

με διαστάσεις $m\times n$ ώστε να περιγράψουμε τις καταστάσεις των μονάδων. Αυτός θα έχει τη μορφή

$$\mathbf{X}= (X_{si})_{m\times n} = \begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1} & \cdots & X_{mn} \end{pmatrix}$$

όπου τα $X_{s,i}$ θα παίρνουν τις τιμές 0 με πιθανότητα q_{si}, αν η μονάδα βρίσκεται στο επίπεδο αποτυχίας s, ενώ θα παίρνουν τις τιμές 1 με πιθανότητα 1-q_{si}, αν η μονάδα λειτουργεί.

Τα τ.δ. $\mathbf{X}_{\cdot 1}$, $\mathbf{X}_{\cdot 2}$,…,$\mathbf{X}_{\cdot n}$ είναι οι στήλες του πίνακα που μόλις ορίσαμε και αναφέρονται σε όλες τις καταστάσεις που μπορεί να βρεθεί κάθε μία από τις μονάδες 1,2,…,n αντίστοιχα. Τα τ.δ. $\mathbf{X}_{1\cdot}$, $\mathbf{X}_{2\cdot}$,…, $\mathbf{X}_{n\cdot}$ αντιπροσωπεύουν τις γραμμές του πίνακα και αφού θεωρούμε ότι οι μονάδες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, έχουμε ως αποτέλεσμα ότι αυτά τα τ.δ θα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Για συγκεκριμένο όμως $i\in\{1,2,...,n\}$, οι τ.μ. X_{1i}, X_{2i},…, X_{mi} είναι στοχαστικά εξαρτημένες και μάλιστα από τις υποθέσεις του μοντέλου θα ισχύει ότι το τ.δ. $\mathbf{1}-\mathbf{X}_{\cdot i}=(1-X_{1,i},1-X_{2,i},...,1-X_{m,i})'$, ακολουθεί την πολυωνυμική κατανομή με παραμέτρους (q_{1i}, q_{2i},...,q_{mi}, p_i) και 1 (πολυδιάστατη *Bernoulli*). Ειδικότερα θα ισχύει:

$$P\Big(\big(X_{i,j},...,X_{m,i}\big)=\big(x_1,...,x_m\big)\Big)=\begin{cases} p_i, & \text{αν } (x_1,...,x_m)=(1,...,1) \text{ (λειτουργία μονάδας)} \\ q_{si}, & \text{αν } (x_1,...,x_m)=(1,...,1,0_{s-\theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta},1,...,1) \text{ (αποτυχία τύπου } s) \\ 0, & \text{διαφορετικά (αδύνατες καταστάσεις).} \end{cases}$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις δομής $\phi_s:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$, s=1,2,…,m ως εξής:

$$\phi_s(\mathbf{X_s}\cdot)=\prod_{j=1}^{N_s}(1-\prod_{i\in C_{sj}}(1-X_{si})).$$

Η $\phi_s(\mathbf{X}_s\cdot)$ θα είναι ίση με 0 ή 1 ανάλογα με το αν το MFM σύστημα έχει αποτύχει σε επίπεδο s ή όχι. Επομένως οι $R_s=E(\phi_s(\mathbf{X}_s\cdot))$ είναι οι πιθανότητες λειτουργίας του συστήματος σε επίπεδο s και η κάθε μία R_s θα ονομάζεται αξιοπιστία τύπου s του MFM συστήματος, στην ουσία όμως είναι η αξιοπιστία ενός SFM συστήματος με ε.σ.δ. τα $C_{s1},C_{s2},...,C_{sN_s}$, και πιθανότητες αποτυχίας των μονάδων τις q_{s1}, q_{s2},...,q_{sn}, όπου s=1,2,…,m. Συνεχίζοντας θα προσδιορίσουμε την αξιοπιστία τους βασιζόμενοι στις συναρτήσεις δομής που μόλις ορίσαμε.

Πρόταση 3.1.1. *Η αξιοπιστία ενός MFM συστήματος n μονάδων με σύνολο ε.σ.δ. τύπου s το* $\mathbf{C_s}=\{C_{s1},C_{s2},...,C_{sN_s}\}$, *s*=1,2,...,*m και* q_{si} *πιθανότητα αποτυχίας τύπου s της i-μονάδας, s*=1,2,...,*m, i*=1,2,...,*n, ισούται με*

$$R_{MFM} = P(\phi_{MFM}(\mathbf{X})) = E(\phi_{MFM}(\mathbf{X})) = E(\prod_{s=1}^{m} \phi_s(\mathbf{X_s}.))$$
$$= E(\prod_{s=1}^{m}\prod_{j=1}^{N_s}(1-\prod_{i\in C_{sj}}(1-X_{s,i}))) \qquad (3.1.1)$$

όπου τα τ.δ. $\mathbf{X}_{.i}^{'}$ *(είναι οι στήλες του πίνακα* **X***) είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους για* i=1,2,…,n.

Οι παρατηρήσεις που ακολουθούν είναι χρήσιμες για την ανάλυση των συστημάτων DFM.

α) Για μεγαλύτερη ευκολία στους υπολογισμούς μας ορίζουμε ότι

$$X_{s,i}^{*} = 1 - X_{s,i},\ s=1,2,...,m,\ i=1,2,...,n$$

οπότε η παραπάνω σχέση θα είναι ισοδύναμη με την

$$R_{MFM} = E(\prod_{s=1}^{m}\prod_{j=1}^{N_s}(1-\prod_{i\in C_{sj}} X_{s,i}^{*})).$$

Αφού τα X_{si}^{*} είναι δίτιμες ισχύει $(X_{s,i}^{*})^k = X_{s,i}^{*}$, για k=1,2,…

Παρατηρούμε ότι για το σύνολο $A \subseteq \{(s,i), s=1,2,...,m,\ i=1,2,...,n\}$ θα ισχύει ότι

$$E(\prod_{(s,i)\in A} X_{s,i}^{*}) = 0$$

αν υπάρχουν δύο ή περισσότεροι όροι του γινομένου οι οποίοι να περιέχονται στην ίδια στήλη του πίνακα **X**. Αυτοί θα αναφέρονται στην ίδια μονάδα και έτσι δεν θα μπορούν να είναι ταυτόχρονα ίσοι με τη μονάδα. Επίσης θα ισχύει ότι

$$E(\prod_{(s,i)\in A} X_{s,i}^{*}) = \prod_{(s,i)\in A} E(X_{s,i}^{*}) = \prod_{(s,i)\in A} q_{si}$$

όταν όλοι οι όροι βρίσκονται σε διαφορετικές στήλες του πίνακα **X**. Αυτοί θα αφορούν διαφορετικές μονάδες οπότε θα είναι ανεξάρτητοι. Εφαρμόζοντας όλη αυτή την διαδικασία μπορούμε να βρούμε μία έκφραση της αξιοπιστίας για τα MFM συστήματα συναρτήσει των q_{si} και C_{sj}, η οποία είναι πιο αποτελεσματική για συστήματα με μικρό αριθμό μονάδων.

β) Έστω ότι έχουμε ένα DFM σύστημα. Η πιθανότητα να αποτύχει το σύστημα ταυτόχρονα και στα δύο επίπεδα είναι $F_{12} = 1 - R_1 - R_2 + R_{DFM}$, άρα η αξιοπιστία του DFM συστήματος θα είναι η $R_{DFM} = R_1 + R_2 - 1 + F_{12} \geq R_1 + R_2 - 1$. Στην περίπτωση που το DFM σύστημα δεν μπορεί να βρεθεί στην κατάσταση αποτυχίας τύπου I και τύπου II ταυτόχρονα η αξιοπιστία του θα είναι $R_{DFM} = R_1 + R_2 - 1$. Γενικεύοντας το στην περίπτωση των m επιπέδων αποτυχίας, αν ένα MFM σύστημα δεν μπορεί να αποτύχει σε περισσότερα από ένα επίπεδα αποτυχίας ταυτόχρονα, (θα ορίσουμε ως D_s το ενδεχόμενο αποτυχίας του συστήματος σε επίπεδο s), τότε η αξιοπιστία του θα εκφράζεται ως εξής

$$R_{MFM} = 1 - P(\bigcup_{s=1}^{m} D_s) = P\left(\prod_{s=1}^{m} \phi_s(\mathbf{X}_s.) = 1\right) = 1 - P\left(\bigcup_{s=1}^{m} \phi_s(\mathbf{X}_s.) = 0\right) = 1 - \sum_{s=1}^{m} P(\phi_s(\mathbf{X}_s.) = 0)$$

$$= 1 - \sum_{s=1}^{m} (1 - R_s) = \sum_{s=1}^{m} R_s - m + 1 . \quad (3.1.2)$$

γ) Αν θεωρήσουμε το C ένα υποσύνολο του συνόλου $\{1,2,...,m\}$ των διαφορετικών επιπέδων αποτυχίας τότε η πιθανότητα να μην αποτύχει το σύστημα ταυτόχρονα σε όλα τα επίπεδα του C θα είναι

$$R_C = E(1 - \prod_{s \in C} (1 - \phi_s(\mathbf{X}_s))) .$$

Γενικεύοντας θεωρούμε το υποσύνολο $\mathbf{C}=\{C_1,C_2, ...,C_N\}$ οπότε η πιθανότητα το σύστημα να μην αποτυγχάνει ταυτόχρονα σε όλα τα επίπεδα ενός $C\in\mathbf{C}$ θα δίνεται από τη σχέση

$$R_C = E(\psi_{\mathbf{c}}(\phi_1(\mathbf{X}_1),...,\phi_m(\mathbf{X}_m))) ,$$

όπου η $\psi_C : \{0,1\}^m \to \{0,1\}$ έχει τύπο

$$\psi_{\mathbf{C}}(\mathbf{y}) = \prod\nolimits_{C \in \mathbf{C}} (1 - \prod\nolimits_{s \in C} (1 - y_s)) .$$

Η συνάρτηση $\psi_{\mathbf{C}}$ μπορεί να θεωρηθεί σαν μία συνάρτηση δομής που εφαρμόζεται στις τ.μ. $\varphi_1(\mathbf{X}_1.),...,\varphi_m(\mathbf{X}_m.)$ οι οποίες όμως δεν είναι ανεξάρτητες και άρα δεν μπορούν να εφαρμοστούν τα αποτελέσματα που αφορούν συναρτήσεις δομής με ανεξάρτητες μονάδες. Είναι φανερό πως αν το υποσύνολο είναι το $\mathbf{C}=\{\{1\},\{2\},... ,\{m\}\}$ τότε $\psi_C(\boldsymbol{y})=y_1y_2\ldots y_m$ και σε αυτή την περίπτωση θα ισχύει ότι $R_C = R_{MFM}$.

Παράδειγμα 3.1.1. Έστω ότι έχουμε ένα συνεχόμενο 2,2-από-τα-4 σύστημα με τρία επίπεδα αποτυχίας, το οποίο αποτυγχάνει αν και μόνο αν δύο συνεχόμενες μονάδες του είναι στο ίδιο επίπεδο αποτυχίας. Τότε m=3, n=4 και οι οικογένειες ε.σ.δ είναι οι $C_1 = C_2 = C_3 = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\}\}$.

Εφαρμόζοντας τον τύπο (4.1.1) για να υπολογίσουμε την αξιοπιστία του συστήματος προκύπτει ότι

$$R_{MFM} = E\left(\prod_{s=1}^{3} \phi_s(\mathbf{X_s}.)\right) = E(\phi_1(\mathbf{X_1}.)\phi_2(\mathbf{X_2}.)\phi_3(\mathbf{X_3}.)) = E\left(\prod_{s=1}^{3}\prod_{j=1}^{3}\left(1 - \prod_{i \in C_{sj}} (1 - X_{s,i})\right)\right)$$

$$= E\left(\prod_{s=1}^{3}\prod_{j=1}^{3} (1 - (1 - X_{s,i})(1 - X_{s,i+1}))\right).$$

Για μεγαλύτερη ευκολία στους υπολογισμούς μας θα θέσουμε $X^*_{s,i} = 1 - X_{s,i}$ οπότε

$(X^*_{s,i})^k = X^*_{s,i}$, s=1,2,...,m, i=1,2,...,n και $E(\prod\nolimits_{(s,i)\in A} X^*_{s,i}) = 0$

με $A \subseteq \{(s,i), s = 1,2,...,m,\ i = 1,2,...,n\}$ που σημαίνει ότι το γινόμενο στοιχείων που ανήκουν στην ίδια στήλη του πίνακα $\mathbf{X}$ (διαφορετικό επίπεδο αποτυχίας, ίδια μονάδα) θα είναι μηδενικό.

Επομένως

$$R_{MFM} = E\left(\prod_{s=1}^{3}\prod_{j=1}^{3}(1 - X_{s,i}^* X_{s,i+1}^*)\right) = E((1 - X_{11}^* X_{12}^*)(1 - X_{12}^* X_{13}^*)(1 - X_{13}^* X_{14}^*)$$

$$(1 - X_{21}^* X_{22}^*)(1 - X_{22}^* X_{23}^*)(1 - X_{23}^* X_{24}^*)(1 - X_{31}^* X_{32}^*)(1 - X_{32}^* X_{33}^*)(1 - X_{33}^* X_{34}^*)).$$

Κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στο επόμενο αποτέλεσμα

$$\begin{aligned}R_{MFM} &= E(1 - X_{33}^* X_{34}^* - X_{32}^* X_{33}^* + X_{32}^* X_{33}^* X_{34}^* - X_{31}^* X_{2}^* + X_{31}^* X_{32}^* X_{33}^* - X_{23}^* X_{24}^* \\ &+ X_{23}^* X_{24}^* X_{31}^* X_{32}^* - X_{22}^* X_{3}^* + X_{22}^* X_{23}^* X_{24}^* - X_{21}^* X_{22}^* + X_{21}^* X_{22}^* X_{33}^* X_{34}^* + X_{21}^* X_{22}^* X_{23}^* \\ &- X_{13}^* X_{14}^* - X_{13}^* X_{14}^* X_{31}^* X_{32}^* + X_{13}^* X_{14}^* X_{21}^* X_{22}^* - X_{12}^* X_{13}^* + X_{12}^* X_{13}^* X_{14}^* - X_{11}^* X_{12}^* \\ &+ X_{11}^* X_{12}^* X_{33}^* X_{34}^* + X_{11}^* X_{12}^* X_{23}^* X_{24}^* + X_{11}^* X_{12}^* X_{13}^*).\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση $E(X_{s,i}^*) = q_{si}$ και αντικαθιστώντας στην προηγούμενη η αξιοπιστία του συστήματος εκφράζεται με τον εξής τρόπο

$$\begin{aligned}R_{MFM} &= 1 - q_{33}q_{34} - q_{32}q_{33} + q_{32}q_{33}q_{34} - q_{31}q_{32} + q_{31}q_{32}q_{33} - q_{23}q_{24} + q_{23}q_{24}q_{31}q_{32} - q_{22}q_{23} + q_{22}q_{23}q_{24} \\ &- q_{21}q_{22} + q_{21}q_{22}q_{33}q_{34} + q_{21}q_{22}q_{23} - q_{13}q_{14} - q_{13}q_{14}q_{31}q_{32} + q_{13}q_{14}q_{21}q_{22} - q_{12}q_{13} + q_{12}q_{13}q_{14} - q_{11}q_{12} \\ &+ q_{11}q_{12}q_{33}q_{34} + q_{11}q_{12}q_{23}q_{24} + q_{11}q_{12}q_{13}.\end{aligned}$$

Επίσης στην iid περίπτωση ($q_{1i} = q_1,\ q_{2i} = q_2,\ q_{3i} = q_3$, i=1,2,3,4) η αξιοπιστία θα δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$R_{MFM} = 1 - 3q_3^{\,2} - 3q_2^{\,2} + 2q_2^{\,3} + 2q_2^{\,2}q_3^{\,2} - 3q_1^{\,2} + 2q_1^{\,2}q_2^{\,2} + 2q_1^{\,3}.$$

∎

3.2 Υπολογισμός της αξιοπιστίας με την βοήθεια SFM συστημάτων– μετασχηματισμός MFM συστήματος σε SFM

Εδώ θα παρουσιάσουμε έναν διαφορετικό τρόπο υπολογισμού της αξιοπιστίας ενός MFM συστήματος. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι για κάθε MFM σύστημα αποτελούμενο από *n* μονάδες υπάρχει ένα κατάλληλο SFM σύστημα *mn* μονάδων (οι οποίες είναι ανεξάρτητες) τέτοιο ώστε η αξιοπιστία του όταν διαιρείται με μία ποσότητα *r* να ισούται με την αξιοπιστία του MFM συστήματος.

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω ένα MFM σύστημα n μονάδων με ε.σ.δ τύπου s, τα* C_{sj} *και με πιθανότητες αποτυχίας* q_{si}, *όπου* $j = 1,2,\ldots,N_s,\ i = 1,2,\ldots,n,\ s = 1,2,\ldots,m$. *Θεωρούμε ένα SFM σύστημα που αποτελείται από mn το πλήθος μονάδες* $\{(s,i),\ s = 1,2,\ldots,m,\ i = 1,2,\ldots,n\}$ με *σύνολο ε.σ.δ το*

$$\mathbf{C} = \{\{s\}\times C_{sj},\ j = 1,2,\ldots,N_s,\ s = 1,2,\ldots,m\} \cup \{\{(a,i),(b,i)\},\ \forall\{a,b\}\subseteq\{1,2,\ldots,m\},$$
$$i = 1,2,\ldots,n\}.$$

όπου $\{s\}\times C_{sj} = \{(s,i),\ i \in C_{sj}\}$ *και η πιθανότητα αποτυχίας της* (s,i) *μονάδας είναι ίση με*

$$Q_{si} = \frac{q_{si}}{(q_{si} + p_i)},\ s\text{=}1,2,\ldots,m,\ i\text{=}1,2,\ldots,n$$

όπου $1-\sum_s q_{si} = p_i > 0$, *i*=1,2,…,*n*. *Τότε η αξιοπιστία* R_{MFM} *του MFM συστήματος θα εκφράζεται από τον τύπο*

$$R_{MFM} = R_{SFM}(mn)\cdot r^{-1},\ \textit{όπου}\ r^{-1} = \prod_{i=1}^{n} p_i^{1-m} \prod_{s=1}^{m} (p_i + q_{si}), \tag{3.2.1}$$

όπου με R_{SFM} *συμβολίζουμε την αξιοπιστία του SFM συστήματος που αποτελείται από mn το πλήθος μονάδες.*

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό την αξιοπιστίας ενός συνεχόμενου 2,2-από-τα-4:DFM συστήματος, αφού αυτό αποτελείται από 4 μονάδες σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.1 θα υπολογίσουμε την αξιοπιστία ενός SFM συστήματος αποτελούμενου από 8 μονάδες.

3.3 Εύρεση της αξιοπιστίας μέσω της μεθόδου εμφύτευσης σε Μαρκοβιανή αλυσίδα

Μία εναλλακτική μέθοδος για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας MFM συστημάτων είναι η μέθοδος εμφύτευσης σε Μαρκοβιανή αλυσίδα. Η ίδια μέθοδος έχει εφαρμογή σε SFM συστήματα και είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική. Στη περίπτωση των MFM συστημάτων οι πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης θα είναι μεγαλύτεροι σε μέγεθος από αυτούς της SFM περίπτωσης, το οποίο είναι αναμενόμενο.

Ορισμός 3.3.1. *Έστω ένα σύνολο μονάδων I*={1,2,…} *και έστω μία ακολουθία MFM συστημάτων* $(J_t, (C_{s,t},\ s=1,2,...,m))$, *t*=1,2,…, *όπου* $J_n \subset I$ *είναι το σύνολο μονάδων και* $\mathbf{C}_{sn}$ *το σύνολο των ε.σ.δ. τύπου s του n-οστού συστήματος με* $J_t \subset J_{t+1}$, $\mathbf{C}_{s,t} \subset \mathbf{C}_{s,t+1}$, $s=1,2,...m,\ t=1,2,...$. *Η ακολουθία των παραπάνω συστημάτων θα καλείται εμφυτεύσιμη σε Μαρκοβιανή αλυσίδα (Μ.Α.) αν υπάρχει μία Μαρκοβιανή αλυσίδα* $\{Y_t,\ t=0,1,...\}$ *με χώρο καταστάσεων* $S=\{s_0, s_1, ..., s_N\}$ *για την οποία ισχύει ότι η τ.μ* Y_t *εξαρτάται μόνο από τα t πρώτα συστήματα, ενώ είναι* $Y_t = s_N$ *αν και μόνο αν το t-οστό σύστημα έχει αποτύχει t*=1,2,… .

Έστω ότι ο $\mathbf{\Lambda}_t = [p_{ij}(t-1,t)]_{i,j=0,1,...,N} = [P(Y_t = s_j \mid Y_{t-1} = s_i)]_{i,j=0,1,...N}$ είναι ο $(N+1)\times(N+1)$ πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης πρώτης τάξης της Μ.Α. $\{\{Y_t,\ t=0,1,...\},S\}$. Η s_N όπως και στα SFM συστήματα είναι η κατάσταση απορρόφησης της Μ.Α. Οι αναδρομικές σχέσεις και τα ασυμπτωτικά αποτελέσματα, όπως επίσης και όποια άλλα αποτελέσματα είχαμε στην περίπτωση των SFM συστημάτων συνεχίζουν να ισχύουν και εδώ και μπορούν να αποδειχθούν μέσω της μελέτης της Μαρκοβιανής αλυσίδας με την βοήθεια γνωστών τεχνικών.

Παράδειγμα 3.3.1. Θεωρούμε ότι έχουμε μία ακολουθία συνεχόμενων **k**-από-τα-*n*:MFM συστημάτων $(C(n; k_1, k_2, ..., k_m))$ για *n*=1,2,… και k_i σταθερά.
Ορίζουμε την στοχαστική διαδικασία

$$\{\{Y_t,\ t=0,1,...\},\ S=\{0\}\cup\{(s,i),\ s=1,2,...,m,\ i=1,2,...,k_s-1\}\cup\{F\}\}$$

τέτοια ώστε

- $Y_t = F$ αν το t-οστό σύστημα έχει αποτύχει.
- $Y_t = 0$ αν το t-οστό σύστημα λειτουργεί και η t-οστή μονάδα του συστήματος λειτουργεί.
- $Y_t = (s,i)$ αν το t-οστό σύστημα λειτουργεί, έχουν χαλάσει οι i τελευταίες μονάδες του t-οστού συστήματος $(t, t-1, \dots, t-i+1)$ σε επίπεδο s και η $t-i$ μονάδα δεν έχει χαλάσει σε επίπεδο s.

Η συγκεκριμένη στοχαστική διαδικασία $\{Y_t,\ t = 0,1,\dots\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης της παρακάτω μορφής.

Πίνακας 3.3.1
Πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης για το MFM σύστημα (Boutsikas (1998))

$$
\Lambda_t = \begin{array}{c|c|cccc|cccc|c|cccc|c|}
 & 0 & (1,1) & (1,2) & & (1,k_1-1) & (2,1) & (2,2) & & (2,k_2-1) & & (m,1) & (m,2) & & (m,k_m-1) & F \\
\hline
0 & p_t & q_{1t} & & & & q_{2t} & & & & \cdots & q_{mt} & & & & \\
\hline
(1,1) & p_t & & q_{1t} & & & q_{2t} & & & & & q_{mt} & & & & \\
(1,2) & p_t & & & \ddots & & q_{2t} & & & & \cdots & q_{mt} & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & q_{1t} & \vdots & & & & & \vdots & & & & \\
(1,k_1-1) & p_t & & & & & q_{2t} & & & & & q_{mt} & & & & q_{1t} \\
\hline
(2,1) & p_t & q_{1t} & & & & & q_{2t} & & & & q_{mt} & & & & \\
(2,2) & p_t & q_{1t} & & & & & & \ddots & & \cdots & q_{mt} & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & q_{2t} & & \vdots & & & & \\
(2,k_2-1) & p_t & q_{1t} & & & & & & & & & q_{mt} & & & & q_{2t} \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots & & & & \cdots & \vdots & & & & \vdots \\
\hline
(m,1) & p_t & q_{1t} & & & & q_{2t} & & & & & & q_{mt} & & & \\
(m,2) & p_t & q_{1t} & & & & q_{2t} & & & & \cdots & & & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots & & & & & & & & q_{mt} & \\
(m,k_m-1) & p_t & q_{1t} & & & & q_{2t} & & & & & & & & & q_{mt} \\
\hline
F & 0 & 0 & & & & 0 & & & & \cdots & & & & & 1
\end{array}
$$

3.4 Φράγματα αξιοπιστίας για τα MFM συστήματα

Ένας αρκετά αποτελεσματικός τρόπος για την εκτίμηση της αξιοπιστίας, ιδιαίτερα σε συστήματα που αποτελούνται από μεγάλο αριθμό μονάδων είναι η εύρεση των φραγμάτων αξιοπιστίας.

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω ένα MFM σύστημα n μονάδων με ε.σ.δ. τύπου s τα C_{sj}, $j = 1,2,\dots,N_s$ και με πιθανότητες αποτυχίας τύπου s τις q_{si}, $s = 1,2,\dots,m$, $i = 1,2,\dots,n$. Για την αξιοπιστία του συστήματος ισχύει*

$$\sum_{s=1}^{m} R_s(\mathbf{q}_s.) - m + 1 \le R_{DFM}(q) \le \prod_{s=1}^{m} R_s(\mathbf{q}_s.) \qquad (3.4.1)$$

όπου $\mathbf{q}=(q_{si})_{s,i}$, $\mathbf{q}_s.=(q_{s1},...,q_{sn})$ *και* $R_s(\mathbf{q}_s.)$ *είναι η αξιοπιστία του SFM συστήματος με ε.σ.δ.* $C_{s1},C_{s2},...,C_{sN_s}$ *και διάνυσμα πιθανοτήτων αποτυχίας το* $\mathbf{q}_s.$, $s=1,2,...,m$.

Απόδειξη

Το κάτω φράγμα παράγεται από την παρακάτω σχέση που είναι συνέπεια της ανισότητας Bonferroni.

$$R_{MFM}=1-P\left(\bigcup_{s=1}^{m}\phi_s(\mathbf{X}_s.)=0\right)\geq 1-\sum_{s=1}^{m}(1-R_s(\mathbf{q}_s.))=\sum_{s=1}^{m}R_s(\mathbf{q}_s.)-m+1.$$

Για το άνω φράγμα ορίζουμε ως πίνακα καταστάσεων των μονάδων τον $\mathbf{X}=(X_{s,i})_{s,i}$ οπότε θα ισχύει

$$R_{MFM}=E(\phi_{MFM}(\mathbf{X}))=E(\prod_{s=1}^{m}\phi_s(\mathbf{X}_s.))=E(\prod_{s=1}^{m}\prod_{j=1}^{N_s}(1-\prod_{i\in C_{sj}}(1-X_{s,i}))).$$

Οι συναρτήσεις ϕ_s, $s=1,2,...,m$ είναι αύξουσες και ορίζονται σε ξένα υποσύνολα του **X** οπότε προκύπτει ότι

$$R_{MFM}=E(\prod_{s=1}^{m}\phi_s(\mathbf{X}_s.))\leq\prod_{s=1}^{m}E(\phi_s(\mathbf{X}_s.))=\prod_{s=1}^{m}R_s.$$

∎

Συνεχίζοντας την ανάλυσή μας πάνω στα φράγματα αξιοπιστίας ακολουθούν ορισμένες σημαντικές παρατηρήσεις

α) Στην περίπτωση που το MFM σύστημα δεν είναι δυνατόν να αποτύχει σε περισσότερα από ένα επίπεδα αποτυχίας ταυτόχρονα, τότε η αξιοπιστία του είναι ίση με το κάτω φράγμα.

β) Η διαφορά του άνω και κάτω φράγματος του Θεωρήματος 3.4.1 φράσσεται ως ακολούθως

$$d=\prod_{s=1}^{m}R_s-\left(1-\sum_{s=1}^{m}(1-R_s)\right)\leq\sum_{r<s}(1-R_r)(1-R_s)\leq\binom{m}{2}(1-\min_s R_s)^2$$
$$\leq\binom{m}{2}(1-R_{MFM})^2.$$

Η πρώτη ανισότητα προκύπτει εύκολα από την κλασσική ανισότητα Bonferroni θεωρώντας ανεξάρτητα ενδεχόμενα $A_1,A_1,...,A_m$ με πιθανότητες $P(A_i)=1-R_i$. Έτσι η σχέση που χρησιμοποιήσαμε για το πρώτο αποτέλεσμα είναι η

$$1-\prod_{s=1}^{m}P(A_s)=P\left(\bigcup_{s=1}^{m}A_s^c\right)\geq\sum_{s=1}^{m}P(A_s^c)-\sum_{r<s}P(A_r^c)P(A_s^c)$$

ενώ η δεύτερη και η τρίτη ανισότητα εύκολα προκύπτει αφού ισχύει ότι

$$R_{MFM}\leq R_1R_2...R_m\leq\min_s R_s\leq R_i,\ i=1,2,...,m.$$

Για αρκετά αξιόπιστα συστήματα (R_{MFM} κοντά στο 1) και για μικρό αριθμό επιπέδων αποτυχίας m, η παραπάνω ανισότητα μας παρέχει μία ακριβή εκτίμηση της αξιοπιστίας του συστήματος. Για παράδειγμα, αν $m(1-R_{MFM}) < 0.2$ τότε θα έχουμε ένα σφάλμα μικρότερο του 2%, αφού $\frac{1}{2}(m(1-R_{MFM}))^2 = 2\%$.

γ) Ένα άλλο ζεύγος φραγμάτων αξιοπιστίας είναι και το

$$L = U - \sum_{s<t} c_{st}$$

όπου

$$U = \prod_{s=1}^{m} R_s(\mathbf{q}_s\cdot)$$

και

$$c_{st} = \sum_{C \in \mathbf{C_s}} \sum_{\substack{D \in \mathbf{C_t}: \\ D \cap C \neq \varnothing}} \prod_{i \in C} q_{si} \prod_{j \in D} q_{tj} .$$

Ένα επιπλέον κάτω φράγμα που μπορούμε να παράγουμε είναι το

$$L^* = \prod_{s=1}^{m} R_s(\mathbf{q_s}) - \sum_{s<t} (R_s(\mathbf{q_s}) R_t(\mathbf{q_t}) - E(\phi_s(\mathbf{X_s})\phi_t(\mathbf{X_t}))) \leq R_{MFM} .$$

Το τελευταίο είναι καλύτερο από το L αλλά πιο πολύπλοκο στον υπολογισμό του λόγω της ύπαρξης του όρου $E(\phi_s(\mathbf{X_s})\phi_t(\mathbf{X_t}))$. Για περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης παραπέμπεται στην εργασία *Μπούτσικας* (1998).

δ) Στην περίπτωση που τα φράγματα του Θεωρήματος 3.4.1 είναι δύσκολο να υπολογισθούν, αυτό που κάνουμε είναι να τα αντικαταστήσουμε με γνωστά φράγματα SFM συστημάτων. Έτσι αν είναι γνωστά μόνο τα ε.σ.δ τύπου s, $s=1,2,\ldots,m$, μπορούμε να δημιουργήσουμε τα εξής φράγματα:

$$\sum_{s=1}^{m} LB_{EP_s}(\mathbf{q}_s\cdot) - m + 1 \leq R_{MFM}(\mathbf{q}) \leq \prod_{s=1}^{m} U_{FK_s}(\mathbf{q}_s\cdot)$$

όπου LB_{EP}, U_{FK} είναι τα φράγματα *Esary* & *Proschan* και *Fu* & *Koutras* αντίστοιχα, τα οποία εκφράζονται από τους παρακάτω τύπους:

$$LB_{EP_s}(\mathbf{q}_s\cdot) = \prod_{j=1}^{N_s} (1 - \prod_{i \in C_{sj}} q_{si}),$$

$$U_{FK_s}(\mathbf{q}_s\cdot) = \prod_{j=1}^{N_s} (1 - \prod_{i \in L_{sj}} (1-q_{si}) \prod_{i \in C_{sj}} q_{si}),\ s = 1, 2, \ldots, m .$$

Ο συνδυασμός αυτών των δύο φραγμάτων μας δίνει μία αρκετά ακριβή εκτίμηση της αξιοπιστίας, ιδιαίτερα αν οι αξιοπιστίες των μονάδων είναι υψηλές. Τέλος σημειώνουμε ότι αν οι μονάδες δεν είναι αρκετά αξιόπιστες τότε τα φράγματα L_{FK}, UB_{EP}, όπου

$$L_{FK_s}(\mathbf{q}_s\cdot) = 1 - \prod_{j=1}^{M_s} (1 - \prod_{i \in K_{sj}} q_{si} \prod_{i \in P_{sj}} (1-q_{si}))$$

θα δίνουν μία καλή εκτίμηση για την τιμή της αξιοπιστίας. Στην τελευταία περίπτωση κάναμε χρήση των ε.σ.λ που είναι M_s σε πλήθος. (Τα

$L_{sj}(n), K_{sj}(n)$ είναι ακολουθίες συνόλων για την *n*-οστή οικογένεια ε.σ.δ και ε.σ.λ τύπου *s* αντίστοιχα, όπως και τα C_{sj}, P_{sj} τα οποία με την σειρά τους είναι ε.σ.δ και ε.σ.λ τύπου *s* αντίστοιχα).

Οι *Boutsikas & Koutras* (2002), *Milienos & Koutras* (2008) όπως και ο *Μπούτσικας* (1998) στην διπλωματική του εργασία, ασχολήθηκαν με την εύρεση φραγμάτων για την αξιοπιστία των MFM συστημάτων, έτσι έχουμε τα επόμενα αποτελέσματα.

Θεώρημα 3.4.2. *Έστω ένα MFM σύστημα με n μονάδες, με ε.σ.δ τύπου s τα* C_{sj}, $j = 1, 2, ..., N_s$, *πιθανότητες αποτυχίας των μονάδων τις* q_{si}, $i = 1, 2, ..., n$, $s = 1, 2, ..., m$, *και* $1 - \sum_s q_{si} = p_i > 0$. *Ένα φράγμα για την αξιοπιστία του συστήματος είναι το*

$$L_{SFM} = \prod_{s=1}^{m} R_s(\mathbf{Q}_s.) \leq R_{MFM}(\mathbf{q}) \tag{3.4.2}$$

όπου $R_s(\mathbf{Q}_s.)$ *είναι η αξιοπιστία ενός SFM συστήματος με n μονάδες, ε.σ.δ τύπου s τα* C_{sj}, $j = 1, 2, ..., N_s$ *και πιθανότητες αποτυχίας των μονάδων τις*

$$Q_{si} = \frac{q_{si}}{(q_{si} + p_i)}, \; i = 1, 2, ..., n.$$

($\mathbf{Q}_s. = (Q_{s1}, ..., Q_{sn}),\; s = 1, 2, ..., m$).

Πόρισμα 3.4.1. *Για την αξιοπιστία ενός MFM συστήματος ισχύει*

$$\prod_{s=1}^{m} L_{EP_s}(\mathbf{Q}_s.) = \prod_{s=1}^{m}\prod_{j=1}^{N_s}\Big(1 - \prod_{i \in C_{sj}} \frac{q_{si}}{q_{si} + p_i}\Big) \leq R_{MFM}(\mathbf{q}). \tag{3.4.3}$$

Σημειώνουμε ότι αν $|C_{sj}| = c_s$ και $q_{si} = q_s$, για όλα τα *j* και *i*, τότε το κάτω φράγμα που αναφέραμε πριν θα παίρνει την μορφή

$$\prod_{s=1}^{m}\left\{1 - \left(\frac{q_s}{q_s + p}\right)^{c_s}\right\}^{N_s} \leq R_{MFM}(\mathbf{q}).$$

Θεώρημα 3.4.3. *Θεωρούμε ένα MFM σύστημα με n ανεξάρτητες μονάδες που υπόκεινται σε m διαφορετικά είδη αποτυχίας. Για* $i \in I = \{1, 2, ..., n\}, s \in S = \{1, 2, ..., m\}$, *εισάγουμε τις ποσότητες*

$$Q'_{si} = \begin{cases} q_{1i} & \text{αν } s = 1 \\ \dfrac{q_{si}}{1 - \sum_{j=1}^{s-1} q_{ji}} & \text{αν } s \geq 2 \end{cases}$$

και δηλώνουμε με $R_s = R_s(Q'_{s1}, Q'_{s2}, ..., Q'_{sn})$ *τη συνάρτηση αξιοπιστίας ενός SFM συστήματος με πιθανότητες αποτυχίας των μονάδων τις* Q'_{si}, $i \in I$ *και ε.σ.δ όλα τα* $C \in C_s$. *Τότε η αξιοπιστία του MFM συστήματος* $R = R(\mathbf{q})$, $\mathbf{q} = (q_{si})_{m \times n}$ *είναι φραγμένη από κάτω με την ποσότητα*

$$R(\mathbf{q}) \geq \prod_{s=1}^{m} R_s(Q'_{s1}, Q'_{s2}, ..., Q'_{sn}) = L'(\mathbf{q}).$$

Βασιζόμενοι στην μονοτονική ιδιότητα της συνάρτησης αξιοπιστίας των SFM συστημάτων και παρατηρώντας ότι $Q_{si} \geq Q_{si}^{'}$, $s=1,2,...,m$ $i=1,2,..,n$ εξακριβώνουμε ότι το κάτω όριο $L^{'}(\mathbf{q})$ είναι καλύτερο από το L_{SFM} που ορίσαμε προηγουμένως, δηλαδή $L^{'}(\mathbf{q}) \geq L_{SFM}$. Επίσης είναι σημαντικό να διατυπωθεί ότι το κάτω φράγμα L_{SFM} εξαρτάται από την διάταξη των m οικογενειών ε.σ.δ C_s, $s=1,2,...,m$.

Παράδειγμα 3.4.1. Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα συνεχόμενο $k_1,k_2,...,k_m$-από-τα-n:MFM ($C(n;k_1,\ldots,k_m)$) σύστημα. Αυτό αποτελείται από n μονάδες συνδεδεμένες γραμμικά και εμπίπτει σε αποτυχία τύπου s όταν τουλάχιστον k_s συνεχόμενες μονάδες αποτυγχάνουν σε επίπεδο s, $s=1,2,...,m$.
Έστω $I(n)$ το σύνολο των μονάδων του συστήματος και ας συμβολίσουμε με

$$C_s = \{\{i,i+1,...,i+k_s-1\},\ i=1,2,...,n-k_s+1,\ s=1,2,...,m\}$$

τα ε.σ.δ τύπου s.

Οι μονάδες του συστήματος υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητες και όμοιες (iid) άρα θα ισχύει $p_i = q_{0i} = p,\ q_{si} = q_s\ s=1,2,...,m$.
Το ζητούμενό μας είναι να βρούμε φράγματα αξιοπιστίας για αυτό το σύστημα. Τα φράγματα που παρουσιάσαμε πιο πάνω παίρνουν την μορφή

$$L_{Bonf} = \sum_{s=1}^{m} R_s(q_s) - m + 1, \quad U = \prod_{s=1}^{m} R_s(q_s),$$

$$L_{SFM} = \prod_{s=1}^{m} R_s(Q_s), \quad L = \prod_{s=1}^{m} R_s(q_s) - \sum_{s<t} c_{st}$$

όπου $c_{st} \leq (n-k_s+1)(k_s+k_t-1)q_s^{k_s}q_t^{k_t}$
και

$$R(\mathbf{q}) \geq \prod_{s=1}^{m} R_s(Q_{s1},Q_{s2},...,Q_{sn}) = L^{'}(\mathbf{q}),$$

με

$$Q_s = \frac{q_s}{(q_s+p)}, \quad Q_{si}^{'} = \begin{cases} q_{1i} & \text{αν } s=1 \\ \dfrac{q_{si}}{1-\sum_{j=1}^{s-1} q_{ji}} & \text{αν } s \geq 2 \end{cases}.$$

Η ποσότητα $R_s(q)$ είναι η αξιοπιστία ενός συνήθους iid συνεχόμενου k_s-από-τα-n:SFM συστήματος.
Για τα παραπάνω ισχύει ότι

$$L_{SFM}(\mathbf{q}) \leq L^{'}(\mathbf{q}) \leq R(\mathbf{q}) \leq U(\mathbf{q}).$$

Επομένως με βάση αυτά που έχουμε προαναφέρει στα Θεωρήματα 3.4.2, 3.4.3 και την Παρατήρηση δ) για το συνεχόμενο $k_1,k_2,...,k_m$-από-τα-n:MFM σύστημα θα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\sum_{s=1}^{m} L_{EP_{C(n,k_s)}}(\mathbf{q}_s.) - m + 1 \leq \sum_{s=1}^{m} R_{C(n,k_s)}(\mathbf{q}_s.) - m + 1 \leq R_{MFM_{C(n,\mathbf{k})}}(\mathbf{q}) \leq \prod_{s=1}^{m} R_{C(n,k_s)}(\mathbf{q}_s.) \leq \prod_{s=1}^{m} U_{FK_{C(n,k_s)}}(\mathbf{q}_s.)$$

$$\prod_{s=1}^{m} L_{EP_{C(n,k_s)}}(\mathbf{Q_S}) \leq \prod_{s=1}^{m} R_{C(n,k_s)}(\mathbf{Q_S}) \leq R_{MFM_{C(n,\mathbf{k})}}(\mathbf{q})$$

όπου $C(n,k)$ είναι το συνεχόμενο-k-από-τα-n:F SFM σύστημα.
Στην iid ($q_{si} = q_s$) περίπτωση, εκμεταλλευόμενοι τα φράγματα αξιοπιστίας *Esary* & *Proschan* και τα *Fu* & *Koutras* προκύπτουν τα εξής:

$$\prod_{s=1}^{m} U_{FK_{C(n,k_s)}}(\mathbf{q}_s.) = \prod_{s=1}^{m} (1-q_s^{k_s})(1-(1-q_s)q_s^{k_s})^{n-k_s} = U'$$

$$\sum_{s=1}^{m} L_{EP_{C(n,k_s)}}(\mathbf{q}_s.) - m + 1 = \sum_{s=1}^{m} (1-q_s^{k_s})^{n-k_s+1} - m + 1 = L'_{Bonf}$$

$$\prod_{s=1}^{m} L_{EP_{C(n,k_s)}}(Q_s) = \prod_{s=1}^{m} \left(1 - \left(\frac{q_s}{p_s+q_s}\right)^{k_s}\right)^{n-k_s+1} = L'_{SFM}$$

$$L' = \prod_{s=1}^{m} (1-q_s^{k_s})^{n-k_s+1} - \sum_{1\le s<t\le m} (n-k_s+1)(k_s+k_t-1) q_s^{k_s} q_t^{k_t} .$$

Στους Πίνακες 3.4.1 και 3.4.2 πραγματοποιούνται υπολογισμοί και συγκρίσεις τιμών που αφορούν τα προαναφερθέντα φράγματα για ποικίλες επιλογές των μεταβλητών m, n, k_s, q_s, $s = 1, 2, \ldots, m$.

Είναι φανερό πως για συστήματα αρκετά αξιόπιστα η ομάδα των απλούστερων φραγμάτων $L'_{Bonf}, U', L'_{SFM}, L'$, η οποία συγκρίνεται με τα L_{Bonf}, U, L_{SFM}, L μας δίνει μία καλή εκτίμηση για την αξιοπιστία του συστήματος. Παρατηρούμε επίσης πως το φράγμα L'_{SFM} είναι καλύτερο από τα L_{Bonf} και L.

Πίνακας 3.4.1
Φράγματα αξιοπιστίας για το συνεχόμενο 4,3,2-από-τα-30:MFM σύστημα (Boutsikas & Koutras (2001))

p	q_1	q_2	q_3	L'_{SFM}	L'	L'_{Bonf}	L_{Bonf}	L	L_{SFM}	U'	U
0.3	0.35	0.2333	0.1167	0.0007	0.2345	0.0359	0.2048	0.3183	0.0073	0.4068	0.3961
0.4	0.3	0.2	0.1	0.0421	0.4487	0.3486	0.4491	0.5119	0.0934	0.5485	0.5423
0.5	0.25	0.1667	0.0833	0.2530	0.6353	0.5949	0.6463	0.6741	0.3285	0.6873	0.6843
0.6	0.2	0.1333	0.0667	0.5678	0.7848	0.7722	0.7943	0.8037	0.6126	0.8076	0.8065
0.7	0.15	0.1	0.05	0.8105	0.8915	0.8888	0.8963	0.8985	0.8253	0.8993	0.8990
0.8	0.1	0.0667	0.0333	0.9387	0.9576	0.9573	0.9590	0.9593	0.9415	0.9594	0.9594
0.9	0.05	0.0333	0.0167	0.9890	0.9908	0.9908	0.9909	0.9909	0.9892	0.9909	0.9909

Πίνακας 3.4.2
Φράγματα αξιοπιστίας για το συνεχόμενο 5,4,3-από-τα-1000:MFM σύστημα (Boutsikas & Koutras (2001))

p	q_1	q_2	q_3	L'_{SFM}	L'	L'_{Bonf}	L_{Bonf}	L	L_{SFM}	U'	U
0.5	0.25	0.1667	0.0833	0.0020	0.0856	−0.597	−0.405	0.1360	0.0002	0.1494	0.1486
0.55	0.225	0.15	0.075	0.0027	0.2177	−0.177	−0.032	0.2766	0.0094	0.2825	0.2819
0.6	0.2	0.1333	0.0667	0.0468	0.3927	0.2007	0.2939	0.4450	0.0797	0.4474	0.4470
0.65	0.175	0.1167	0.0583	0.2187	0.5784	0.5008	0.5528	0.6150	0.2713	0.6159	0.6157
0.7	0.15	0.1	0.05	0.4918	0.7405	0.7150	0.7400	0.7611	0.5326	0.7614	0.7613
0.75	0.125	0.0833	0.0416	0.7375	0.8601	0.8535	0.8638	0.8694	0.7569	0.8695	0.8694
0.8	0.1	0.0667	0.0333	0.8908	0.9355	0.9343	0.9378	0.9389	0.8971	0.9389	0.9389
0.85	0.075	0.05	0.025	0.9644	0.9761	0.976	0.9768	0.9770	0.9658	0.9770	0.9770
0.9	0.05	0.0333	0.0166	0.992	0.9939	0.9938	0.9940	0.9940	0.9922	0.9940	0.9940

Κλείνοντας σημειώνουμε ότι τα φράγματα $L^{'}(\mathbf{q})$ και $L^{'}_{SFM}$ παίρνουν μόνο μη αρνητικές τιμές ,σε αντίθεση με τα L_{Bonf}, L που μπορούν να πάρουν και αρνητικές τιμές για συγκεκριμένες τιμές παραμέτρων. Σε αυτές τις περιπτώσεις το κάτω φράγμα της αξιοπιστίας θα λαμβάνεται ίσο με το μηδέν.

■

Παράδειγμα 3.4.2. Θεωρούμε ότι έχουμε ένα $k_1, k_2, ..., k_m$ -από-τα-n:MFM ($S(n;k_1,\dots,k_m)= S(n;\mathbf{k})$) σύστημα, που αποτελείται από n μονάδες και αποτυγχάνει στο επίπεδο αποτυχίας s, όταν τουλάχιστον k_s μονάδες αποτυγχάνουν σε επίπεδο s, $s=1,2,...,m$. Τα ε.σ.δ τύπου s του δίνονται από τον τύπο

$$\mathbf{C_s} = \{C \subset I : |C| = k_s\}, \, s = 1,2,...,m.$$

Τα φράγματα αξιοπιστίας για το συγκεκριμένο σύστημα είναι τα εξής:

$$L_{Bonf} = \sum_{s=1}^{m} R_s(q_s) - m + 1, \quad U = \prod_{s=1}^{m} R_s(q_s)$$

$$L_{SFM} = \prod_{s=1}^{m} R_s(Q_s), \quad L = \prod_{s=1}^{m} R_s(q_s) - \sum_{s<t} c_{st}$$

$$L^{*} = \prod_{s=1}^{m} R_s(q_s) - \sum_{s<t} \left(R_s(q_s) R_t(q_t) - \sum_{i=0}^{k_s-1} \sum_{i=0}^{k_t-1} \binom{n}{i,j} q_s^i q_t^j (1-q_s-q_t)^{n-i-j} \right)$$

$$R(\mathbf{q}) \geq \prod_{s=1}^{m} R_s(Q_{s1}, Q_{s2}, ..., Q_{sn}) = L^{'}(\mathbf{q})$$

με

$$Q_s = \frac{q_s}{(q_s+p)}, \quad c_{st} = q_s^{k_s} q_t^{k_t} \binom{n}{k_s} \left(\binom{n}{k_t} - \binom{n-k_s}{k_t} \right), \quad Q_{si}^{i} = \begin{cases} q_{1i} & \text{αν } s=1 \\ \dfrac{q_{si}}{1-\sum_{j=1}^{s-1} q_{ji}} & \text{αν } s \geq 2 \end{cases}$$

και

$$R_s(q) = \sum_{i=0}^{k_{s-1}} \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i}$$

την αξιοπιστία ενός συνήθους iid συνεχόμενου k_s -από-τα-n:SFM συστήματος.

Οι σχέσεις που δημιουργούνται βασιζόμενοι στα Θεωρήματα 3.4.2, 3.4.3 και την Παρατήρηση 4, είναι οι:

$$\sum_{s=1}^{m} L_{EP_{S(n,k_s)}}(\mathbf{q}_s.) - m + 1 \leq \sum_{s=1}^{m} R_{S(n,k_s)}(\mathbf{q}_s.) - m + 1 \leq R_{MFM_{S(n,\mathbf{k})}}(\mathbf{q}) \leq \prod_{s=1}^{m} R_{S(n,k_s)}(\mathbf{q}_s.) \leq \prod_{s=1}^{m} U_{FK_{S(n,k_s)}}(\mathbf{q}_s.)$$

$$\prod_{s=1}^{m} L_{EP_{S(n,k_s)}}(\mathbf{Q}_S) \leq \prod_{s=1}^{m} R_{S(n,k_s)}(\mathbf{Q}_S) \leq R_{MFM_{S(n,\mathbf{k})}}(\mathbf{q})$$

όπου $S(n,k)$ το γνωστό k-από-τα-n:F SFM σύστημα.

Αν οι μονάδες του συστήματος είναι όμοιες τότε

$$R_{s(n,k_s)}(q_s) = \sum_{i=0}^{k_s-1} \binom{n}{i} q_s^i (1-q_s)^{n-i} \quad \text{και} \quad R_{s(n,k_s)}(Q_s) = \sum_{i=0}^{k_s-1} \binom{n}{i} Q_s^i (1-Q_s)^{n-i}$$

με $Q_s = \dfrac{q_s}{(q_s + p_s)}$.

Αντικαθιστώντας αυτές τις συναρτήσεις αξιοπιστίας στις παραπάνω ανισότητες λαμβάνουμε τα φράγματα αξιοπιστίας για την εκάστοτε περίπτωση. Στον Πίνακα 3.4.3 γίνεται σύγκριση μεταξύ των παραπάνω φραγμάτων για διάφορες τιμές του q_s και για m=20 επίπεδα αποτυχίας.

Πίνακας 3.4.3
Φράγματα αξιοπιστίας για το 5,5,5,…,5-από-τα-100:MFM σύστημα, *m*=20 (Boutsikas & Koutras (2001))

q_s	L_{SFM}	L^*	L	L_{Bonf}	U
0.02	0.0066	0.2942	−2.189	−0.016	0.3523
0.0175	0.0724	0.5019	−0.142	0.3688	0.5266
0.015	0.2906	0.6912	0.5567	0.6461	0.6997
0.0125	0.6054	0.8387	0.8178	0.8275	0.8409
0.01	0.8481	0.9332	0.9311	0.9314	0.9335
0.0075	0.9620	0.9804	0.9802	0.9802	0.9804
0.005	0.9950	0.9968	0.9968	0.9968	0.9968

∎

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΑΠΟΔΟΣΗΣ

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάσαμε συστήματα με πολλαπλά επίπεδα αποτυχίας, στα οποία όμως δεν υπήρχε καμία διαβάθμιση σχετικά με την απόδοση του κάθε επιπέδου. Τώρα θα επικεντρωθούμε σε συστήματα με πολλαπλά επίπεδα απόδοσης. Αυτά ταξινομούνται σύμφωνα με τη διαβάθμιση που παρουσιάζουν στην απόδοση που έχει το κάθε επίπεδο αποτυχίας τους. Πιο συγκεκριμένα το κάθε επίπεδο επηρεάζει σε διαφορετικό βαθμό την λειτουργία του συστήματος.

4.1 *k*-από-τα-*n* συστήματα με πολλαπλά επίπεδα απόδοσης

Οι *Tian, Zuo & Yam* (2009) μελέτησαν την αξιοπιστία των ***k*-από-τα-*n* συστημάτων με πολλαπλά επίπεδα απόδοσης**, όπου τόσο το σύστημα όσο και οι μονάδες του εμφανίζουν διαφορετικά επίπεδα απόδοσης. Ένα *k*-από-τα-*n* σύστημα με πολλαπλά επίπεδα απόδοσης θεωρείται ότι είναι ένα σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις (multi-state *k*-out-of-*n* systems) όπου κάθε φορά ο αριθμός *k* των μονάδων στα διάφορα επίπεδα είναι διαφορετικός.

Οι πολλαπλές καταστάσεις ενός μοντέλου μπορούν να ερμηνευθούν με δύο τρόπους: ως πολλαπλά επίπεδα ικανότητας ή ως πολλαπλά επίπεδα αποτυχίας. Τα *k*-από-τα-*n* συστήματα, μαζί με τις μονάδες που τα αποτελούν, μπορούν να βρεθούν σε m+1 πιθανές καταστάσεις (ή επίπεδα απόδοσης), όπου με m θα συμβολίζουμε την κατάσταση με την μεγαλύτερη απόδοση ή λειτουργικότητα. Για παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε ως σύστημα με πολλαπλά επίπεδα απόδοσης, ένα σύστημα παραγωγής ισχύος αποτελούμενο από διάφορες γεννήτριες παραγωγής, στο οποίο η δυνατότητά του να ικανοποιεί τις απαιτήσεις των φορτίων υψηλής, κανονικής και χαμηλής ισχύος αντιστοιχεί στις διαφορετικές καταστάσεις στο σύστημα. Από την άλλη μία μονάδα με πολλαπλά επίπεδα αποτυχίας, μπορεί να θεωρηθεί και ως μονάδα με πολλαπλές καταστάσεις, που σημαίνει ότι έχει μία κατάσταση λειτουργίας και αρκετές καταστάσεις αποτυχίας όπου κάθε μία έχει διαφορετική επίδραση στα επίπεδα του συστήματος. Ένα *k*-από-τα-*n* σύστημα έχει ευρεία εφαρμογή στα βιομηχανικά αλλά και στα στρατιωτικά συστήματα.

Θα μελετήσουμε ένα *k*-από-τα-*n* σύστημα πολλαπλών καταστάσεων, στο οποίο υπάρχουν διαφορετικές τιμές του k για τις διαφορετικές καταστάσεις του συστήματος. Οι εφαρμογές των συστημάτων αυτών είναι δύο ειδών:

- οι πολλαπλές καταστάσεις ερμηνεύονται ως πολλαπλά επίπεδα ικανότητας. Η ανάγκη για τον αριθμό των μονάδων είναι διαφορετική για τα διαφορετικά επίπεδα του συστήματος.
- οι πολλαπλές καταστάσεις ερμηνεύονται ως πολλαπλά επίπεδα αποτυχίας. Σε αυτό το είδος ισχύει ότι η κατάσταση λειτουργίας μιας μονάδας έχει θετική συνολική επίδραση στο σύστημα, άλλες καταστάσεις αποτυχίας δεν έχουν καμία επίδραση, ενώ άλλες έχουν αρνητική συνολική επίδραση στο σύστημα.

Οι υποθέσεις του συστήματος θα είναι

- Ο χώρος καταστάσεων για κάθε μονάδα αλλά και το σύστημα είναι $\{0,1,2,...,m\}$.
- Η κατάσταση του συστήματος καθορίζεται απόλυτα από τις καταστάσεις των μονάδων του.

Επίσης θα πρέπει να ορίσουμε ορισμένες ποσότητες και μεταβλητές για να κάνουμε την μαθηματική ανάλυση των συστημάτων.

n	Ο αριθμός των μονάδων του συστήματος.
m	Το μέγιστο επίπεδο κατάστασης ενός συστήματος πολλαπλών καταστάσεων και των μονάδων του.
x_i	Κατάσταση της μονάδας i, $x_i = j$ εάν η μονάδα i βρίσκεται στην κατάσταση j, $0 \le j \le m$, $1 \le i \le n$.
$\mathbf{x}$	Το *n*-διάστατο διάνυσμα που αντιπροσωπεύει τις καταστάσεις όλων των μονάδων, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.
$\phi(\mathbf{x})$	Η κατάσταση του συστήματος, $0 \le \phi(\mathbf{x}) \le m$.
k_j	Η τιμή k που αντιστοιχεί στο επίπεδο j ενός γενικευμένου *k*-από-τα-*n* συστήματος πολλαπλών καταστάσεων.
$\mathbf{v}_j$	Το ελάχιστο διάνυσμα διακοπής στο επίπεδο j ενός αύξοντος *k*-από-τα-*n*: *F* συστήματος πολλαπλών καταστάσεων.
$P_{s,j}$	$P(\phi(\mathbf{x}) \ge j)$.
$Q_{s,j}$	$P(\phi(\mathbf{x}) < j)$, είναι το $1 - P_{s,j}$.
$r_{s,j}$	$P(\phi(\mathbf{x}) = j)$.
$P(\cdot)$	Η αναδρομική συνάρτηση, $P = P(n, \mathbf{k}, \mathbf{P})$.
$\mathbf{k}$	Το διάνυσμα $\mathbf{k}$ ενός *k*-από-τα-*n* συστήματος πολλαπλών καταστάσεων, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, ..., k_m)$.
$\mathbf{P}$	Ο πίνακας κατανομής καταστάσεων των μονάδων για ένα ονομαστικό *k*-από-τα-*n* σύστημα πολλαπλών καταστάσεων.
$p_{n.j}$	Η πιθανότητα της μονάδας n να βρίσκεται στην κατάσταση j.

$\mathbf{k}^j$	Το παραγόμενο διάνυσμα $\mathbf{k}$ όταν η μονάδα n βρίσκεται στην κατάσταση j.
$\mathbf{P}^j$	Ο παραγόμενος πίνακας $\mathbf{P}$ όταν η μονάδα n βρίσκεται στην κατάσταση j.

Ορισμός 4.1.1. *Ένα σύστημα με n μονάδες θα λέγεται k-από-τα-n:G σύστημα εάν $\phi(\mathbf{x}) \geq j$, $1 \leq j \leq M$ όταν τουλάχιστον k_l μονάδες βρίσκονται στην κατάσταση l ή και πάνω από αυτή, για όλα τα l τέτοια ώστε $1 \leq l \leq j$.*

Για να βρίσκεται στην κατάσταση *l* ή και πάνω από αυτή, το σύστημα του Ορισμού 4.1.1 θα πρέπει να ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις για τον αριθμό των μονάδων για τις καταστάσεις από την 1 έως τη *j*.

Το σύστημα του Ορισμού 4.1.1 είναι μονότονο σύστημα πολλαπλών καταστάσεων, επομένως θα ισχύουν:

- η κατάσταση του συστήματος είναι μη-φθίνουσα καθώς βελτιώνονται οι καταστάσεις των μονάδων.
- το σύστημα είναι στην κατάσταση 0 αν όλες οι μονάδες είναι στην κατάσταση 0.
- το σύστημα είναι στην κατάσταση *m* αν όλες οι μονάδες είναι στην κατάσταση *m*.

Ορισμός 4.1.2. *Ένα k-από-τα-n:G σύστημα πολλαπλών καταστάσεων θα λέγεται φθίνον k-από-τα-n:G σύστημα εάν ισχύει $k_1 > k_2 > \ldots > k_m$.*

Η εκτίμηση της αξιοπιστίας για την γενική περίπτωση ενός *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματος πολλαπλών καταστάσεων μπορεί να γίνει με τη βοήθεια ενός φθίνοντος *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματος πολλαπλών καταστάσεων.

Ορισμός 4.1.3. *Ένα σύστημα με n μονάδες αποκαλείται k-από-τα-n:F σύστημα εάν $\phi(\mathbf{x}) < j$, $1 \leq j \leq m$ όταν υπάρχει μια ακέραια τιμή l ($1 \leq l \leq j$) τέτοια ώστε τουλάχιστον k_l μονάδες να βρίσκονται σε καταστάσεις χειρότερες από την l.*

Κάθε *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα έχει ένα ισοδύναμο *k*-από-τα-*n*:*F* σύστημα και αντίστροφα. Έτσι ένα *k*-από-τα-*n*: *F* σύστημα πολλαπλών καταστάσεων μπορεί να εκτιμηθεί μέσω του ισοδύναμού του *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματος. Για το λόγο αυτό από εδώ και στο εξής θα εστιάσουμε μόνο στα *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματα πολλαπλών καταστάσεων.

Πριν προχωρήσουμε στην μελέτη της αξιοπιστίας των *k*-από-τα-*n*:*G* συστημάτων με πολλαπλά επίπεδα ικανότητας (ή αποτυχίας) θα παρουσιάσουμε κάποιες εφαρμογές τους.

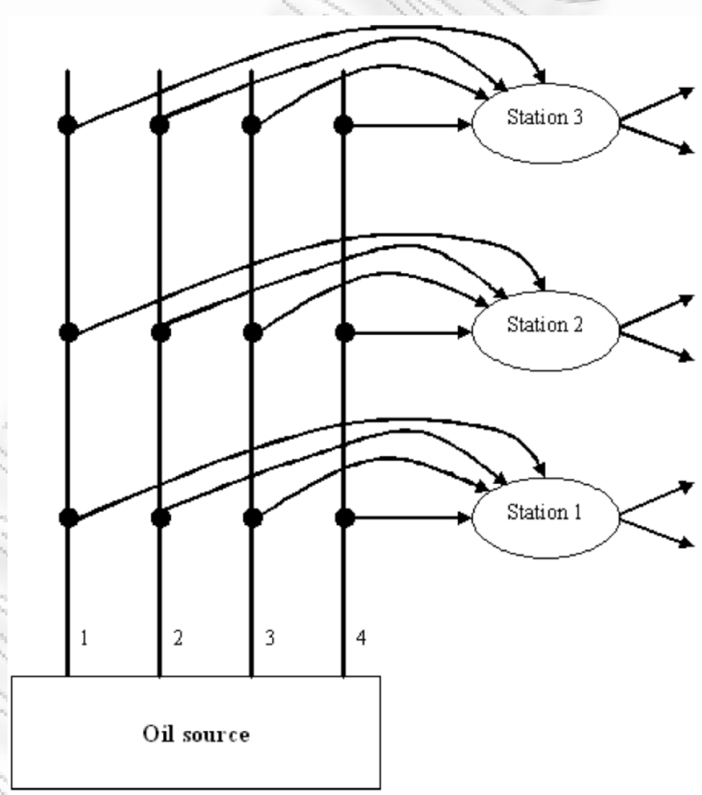
I. Τα πολλαπλά επίπεδα ικανότητας ως ερμηνεία των πολλαπλών καταστάσεων

Στην εφαρμογή αυτή οι πολλαπλές καταστάσεις ερμηνεύονται ως πολλαπλά επίπεδα ικανότητας. Ας θεωρήσουμε ένα μηχανολογικό σύστημα με τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- Το σύστημα ικανοποιεί διαφορετικές κατηγορίες απαιτήσεων όσον αφορά τον αριθμό των μονάδων.
- Μία μονάδα έχει διαφορετικά επίπεδα ικανότητας, έτσι ένα υψηλότερο επίπεδο ικανότητας σημαίνει ότι η μονάδα μπορεί να συνεισφέρει στο να ικανοποιηθούν επιπλέον κατηγορίες απαιτήσεων των μονάδων σε ένα επίπεδο του συστήματος.
- Κάθε κατηγορία απαίτησης στα επίπεδα του συστήματος χρειάζεται τουλάχιστον ένα συγκεκριμένο αριθμό μονάδων για να ικανοποιηθεί η ζήτηση.

Για παράδειγμα έστω ότι έχουμε ένα σύστημα παροχής πετρελαίου. Το πετρέλαιο διανέμεται από την πηγή πετρελαίου σε τρεις σταθμούς μέσω τεσσάρων σωλήνων πετρελαίου. Ένας σωλήνας θεωρείται ότι είναι μία μονάδα πολλαπλών καταστάσεων (οπότε $n = 4$). Ένα τέτοιο σύστημα παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.1.1.

Σχήμα 4.1.1
Σύστημα παροχής πετρελαίου (Tian, Zuo & Yam (2009))



Η αποτυχία μπορεί να συμβεί σε οποιοδήποτε σημείο του σωλήνα. Ας πάρουμε για παράδειγμα το σωλήνα 1, αν υπάρχει αποτυχία στο τμήμα του σωλήνα 1 μεταξύ της πηγής πετρελαίου και του σταθμού 1, στο τμήμα S_{01}^{1}, τότε το πετρέλαιο δε θα μπορέσει να φθάσει σε κανέναν σταθμό μέσω του σωλήνα 1. Εάν δεν υπάρχει

αποτυχία στο τμήμα S_{o1}^{1}, αλλά υπάρχει στο τμήμα του σωλήνα 1 μεταξύ του σταθμού 1 και του σταθμού 2, στο τμήμα S_{12}^{1}, το πετρέλαιο θα μπορέσει να φθάσει στον σταθμό 1 αλλά δεν θα μπορέσει να φθάσει στον σταθμό 2 ή και πιο πέρα.
Ομοίως, εάν δεν υπάρχουν αποτυχίες στο τμήμα S_{o1}^{1} ή στο τμήμα S_{12}^{1}, αλλά υπάρχει αποτυχία στο τμήμα S_{23}^{1}, το πετρέλαιο θα μπορέσει να φθάσει στους σταθμούς 1 και 2, αλλά δεν θα μπορέσει να φθάσει στον σταθμό 3.

Βασισμένοι στις πιθανές αποτυχίες στα διάφορα τμήματα του σωλήνα, οι καταστάσεις ενός σωλήνα που μπορούν να οριστούν είναι οι εξής:

- Κατάσταση 0: Το πετρέλαιο δεν μπορεί να φθάσει σε κανένα σταθμό.
- Κατάσταση 1: Το πετρέλαιο μπορεί να φθάσει στον σταθμό 1.
- Κατάσταση 2: Το πετρέλαιο μπορεί να φθάσει στον σταθμό 2.
- Κατάσταση 3: Το πετρέλαιο μπορεί να φθάσει στον σταθμό 3.

Κάθε σταθμός έχει διαφορετική ζήτηση σε πετρέλαιο, επομένως

- Σταθμός 1: χρειάζεται τουλάχιστον τέσσερεις σωλήνες σε λειτουργία για να καλύψει τις ανάγκες του.
- Σταθμός 2: χρειάζεται τουλάχιστον δύο σωλήνες σε λειτουργία για να καλύψει τις ανάγκες του.
- Σταθμός 3: χρειάζεται τουλάχιστον 3 σωλήνες σε λειτουργία για να καλύψει τις ανάγκες του.

Σε επίπεδο συστήματος τώρα ενδιαφερόμαστε να γνωρίζουμε αν μπορεί να ικανοποιηθεί η ζήτηση του πετρελαίου μέχρι κάποιο συγκεκριμένο σταθμό. Για αυτό οι καταστάσεις του συστήματος παροχής πετρελαίου μπορούν να οριστούν ως ακολούθως:

- Κατάσταση συστήματος 0: Δεν μπορεί να καλυφθεί η ζήτηση του πετρελαίου για τον σταθμό 1.
- Κατάσταση συστήματος 1. Μπορεί να καλυφθεί η ζήτηση του πετρελαίου μέχρι τον σταθμό 1, δηλαδή το σύστημα μπορεί να καλύψει τις ανάγκες του σταθμού 1, αλλά δεν μπορεί να καλύψει αυτές του σταθμού 2.
- Κατάσταση συστήματος 2. Μπορεί να καλυφθεί η ζήτηση του πετρελαίου μέχρι τον σταθμό 2, δηλαδή το σύστημα μπορεί να καλύψει τις ανάγκες των σταθμών 1 και 2, αλλά δεν μπορεί να καλύψει τις ανάγκες του σταθμού 3.
- Κατάσταση συστήματος 3. Μπορεί να καλυφθεί η ζήτηση του πετρελαίου μέχρι τον σταθμό 3, δηλαδή το σύστημα μπορεί να καλύψει τις ανάγκες όλων των σταθμών 1,2 και 3.

Στην πράξη ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες να βρεθεί το σύστημα παροχής πετρελαίου στις καταστάσεις 0,1,2 και 3. Με βάση τις παραπάνω περιγραφές, ένα σύστημα παροχής πετρελαίου μπορεί να θεωρηθεί ως ένα *k*-από-*n*: *G* σύστημα πολλαπλών καταστάσεων (Ορισμός 4.1.1) με παραμέτρους $n=4$ και $k_1=4, k_2=2, k_3=3$.

Παρόμοιες εφαρμογές μπορούν να βρεθούν σε συστήματα παροχής ενέργειας όπως επίσης και σε τηλεπικοινωνιακά συστήματα.

II. Τα πολλαπλά επίπεδα αποτυχίας ως ερμηνεία των πολλαπλών καταστάσεων

Σε αυτό το είδος των εφαρμογών των *k*-από-τα-*n*:*G* συστημάτων με πολλαπλές καταστάσεις, αυτές ερμηνεύονται ως πολλαπλά επίπεδα αποτυχίας. Μία μονάδα ενός *k*-από-τα-*n* συστήματος έχει μια κατάσταση λειτουργίας και αρκετές καταστάσεις αποτυχίας. Μία μονάδα πολλαπλών καταστάσεων μπορεί να έχει αρνητικές αλλά και θετικές επιδράσεις στο σύστημα. Η κατάσταση λειτουργίας μιας μονάδας έχει θετική συνολική συμβολή στο σύστημα, κάποιες καταστάσεις αποτυχίας δεν επηρεάζουν το σύστημα καθόλου ενώ κάποιες άλλες καταστάσεις αποτυχίας το επηρεάζουν αρνητικά. Όταν υπάρχουν πάνω από μία μονάδες σε κατάσταση αποτυχίας οι οποίες επηρεάζουν αρνητικά το σύστημα, τότε αυτό αποτυγχάνει λόγω του ότι δεν μπορεί να αντέξει τις αρνητικές επιπτώσεις, παρόλο που υπάρχουν αρκετές μονάδες οι οποίες έχουν θετική συμβολή στο σύστημα.

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα σύστημα φωτισμού με *n* μονάδες φωτισμού. Κάθε μονάδα μπορεί να βρεθεί σε τρείς δυνατές καταστάσεις (μια λειτουργική και δύο καταστάσεις αποτυχίας). Άρα καταλήγουμε στις εξής καταστάσεις για τις μονάδες:

- Κατάσταση 0: κατάσταση αποτυχίας Ι (π.χ βραχυκύκλωμα).
- Κατάσταση 1: κατάσταση αποτυχίας ΙΙ (π.χ μη διαθέσιμο λόγω ανοικτού κυκλώματος).
- Κατάσταση 3: η φυσιολογική κατάσταση λειτουργίας.

Σε επίπεδο συστήματος τώρα, υπάρχουν τρείς καταστάσεις:

- Κατάσταση συστήματος 0: το σύστημα είναι κατεστραμμένο λόγω υπερθέρμανσης ή καψίματος.
- Κατάσταση συστήματος 1: το σύστημα δεν είναι κατεστραμμένο, αλλά δεν μπορεί να καλύψει τη ζήτηση για τον φωτισμό.
- Κατάσταση συστήματος 2: το σύστημα λειτουργεί κανονικά.

Για την προστασία του συστήματος από την υπερθέρμανση, θα πρέπει τουλάχιστον k_1 σε πλήθος μονάδες φωτισμού να βρίσκονται στην κατάσταση 1 ή και σε «καλύτερη» κατάσταση από αυτή. Επίσης για την παροχή αρκετού φωτισμού, απαιτούνται τουλάχιστον k_2 σε πλήθος μονάδες φωτισμού να βρίσκονται στην κατάσταση 2, και τουλάχιστον k_1 μονάδες στην κατάσταση 1 ή και σε «καλύτερη» από αυτή για να αποφευχθεί η καταστροφή του συστήματος. Επομένως βασιζόμενοι στις προηγούμενες περιγραφές, το σύστημα φωτισμού μπορεί να θεωρηθεί ως ένα *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα πολλαπλών καταστάσεων με παραμέτρους τις k_1 και k_2.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε το *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα πολλαπλών καταστάσεων με τις τιμές του *k* να είναι σταθερές. Αυτό το σύστημα είναι μία ειδική περίπτωση του *k*-από-τα-*n* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις. Ως εφαρμογή του συστήματος με σταθερές τιμές του *k* μπορούμε να αναφέρουμε το *k*-από-τα-*n* σύστημα επείγουσας διακοπής λειτουργίας σε ένα εργοστάσιο παραγωγής ενέργειας.

Σε αυτό υπάρχουν *n* κανάλια, τα οποία ανιχνεύουν αν κάποιες παράμετροι που βρίσκονται σε λειτουργία κυμαίνονται σε ασφαλή όρια ή όχι. Εάν *k* κανάλια προειδοποιούν ότι οι παράμετροι λειτουργίας είναι εκτός των ορίων ασφαλείας, τότε το εργοστάσιο ενέργειας θα κλείσει. Ένας αγωγός θεωρείται ότι έχει τρεις καταστάσεις:

- Κατάσταση 0: μη διαθέσιμος, δηλαδή δεν προειδοποιεί ενώ θα έπρεπε.
- Κατάσταση 1: προειδοποιεί κανονικά.
- Κατάσταση 2: προειδοποιεί λανθασμένα, δηλαδή προειδοποιεί ενώ στην πραγματικότητα όλα λειτουργούν φυσιολογικά.

Υποθέτουμε ότι όταν ένα κανάλι βρίσκεται στην κατάσταση 2, μπορεί επίσης να προειδοποιεί όταν χρειαστεί.
Το *k*-από-τα-*n* σύστημα επείγουσας διακοπής λειτουργίας έχει τρεις καταστάσεις:

- Κατάσταση συστήματος 0: μη διαθέσιμο, δηλαδή δεν προειδοποιεί ενώ θα έπρεπε.
- Κατάσταση 1: προειδοποιεί κανονικά.
- Κατάσταση 2: προειδοποιεί λανθασμένα, δηλαδή προειδοποιεί ενώ το σύστημα λειτουργεί κανονικά.

Η βασική λογική για το σύστημα επείγουσας διακοπής λειτουργίας είναι ότι αν *k* κανάλια στέλνουν σήμα προειδοποίησης, το εργοστάσιο ενέργειας θα σταματήσει την λειτουργία του. Οπότε εάν τουλάχιστον *k* κανάλια βρίσκονται στις καταστάσεις 1 ή 2 το σύστημα θα κλείσει. Παρόλα αυτά, αν τουλάχιστον *k* κανάλια βρίσκονται στην κατάσταση 2, το σύστημα θα σταματήσει να λειτουργεί, ενώ δεν θα έπρεπε. Έτσι το σύστημα επείγουσας διακοπής λειτουργίας σε ένα εργοστάσιο παραγωγής ενέργειας είναι ένα παράδειγμα ενός *k*-από-*n* συστήματος πολλαπλών καταστάσεων με τις τιμές του *k* να είναι σταθερές.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε έναν τρόπο για την εκτίμηση της αξιοπιστίας ενός συστήματος με πολλαπλά επίπεδα απόδοσης χρησιμοποιώντας τα ε.σ.λ (ή ε.σ.δ).

Ορισμός 4.1.4. *Για δύο διανύσματα* $\mathbf{x}$ *και* $\mathbf{y}$ *θα γράφουμε,* $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ *αν ισχύει* $x_i \geq y_i$ *για όλα τα* i. *Επίσης θα γράφουμε* $\mathbf{x}>\mathbf{y}$ *αν* $x_i \geq y_i$ *για όλα τα* i *και* $x_i > y_i$ *για τουλάχιστον ένα* i. *Τέλος* $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ *σημαίνει ότι* $x_i \leq y_i$ *για όλα τα* i.

Ορισμός 4.1.5. *Ένα διάνυσμα* $\mathbf{x}$ *λέγεται ελάχιστο διάνυσμα λειτουργίας στο επίπεδο* j *αν* $\phi(\mathbf{x}) \geq j$ *και* $\phi(\mathbf{y}) < j$ *για* $\mathbf{y} < \mathbf{x}$.

Θα εξετάσουμε τα ε.δ.λ ενός αυστηρά φθίνοντος *k*-από-τα-*n* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις, όπου $k_1 > k_2 > ... > k_m$. Ένα ε.δ.λ για την κατάσταση 1 ενός φθίνοντος *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματος έχει την ακόλουθη μορφή:

$$(1,1,\ldots,1,0,0,\ldots,0)$$

και αποτελείται συνολικά από *n* το πλήθος μονάδες, ενώ τα στοιχεία του που βρίσκονται στην κατάσταση 1 είναι k_1 το πλήθος ($k_1 < n$).

Θα χρησιμοποιήσουμε το $\mathbf{v}$ για να συμβολίσουμε αυτό το διάνυσμα. Γνωρίζουμε ότι, από τον ορισμό ενός *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις, ισχύει ότι $\phi(\mathbf{v}) \geq 1$ αφού υπάρχουν k_1 μονάδες στην κατάσταση 1 και πάνω από αυτή. Αν οποιαδήποτε κατάσταση του συστήματος ελαττωθεί, τότε θα υπάρχουν λιγότερες από k_1 μονάδες στην κατάσταση 1 και πάνω από αυτή, άρα θα ισχύει $\phi(\mathbf{v})<1$. Συνεπώς το **v** είναι ένα ε.δ.λ για την κατάσταση 1 του συστήματος.

Υποθέτουμε ότι όλες οι μονάδες είναι ανεξάρτητες, έτσι και όλες οι μεταθέσεις των στοιχείων αυτού του ε.δ.λ είναι ε.δ.λ της κατάστασης 1 του συστήματος. Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο * για να δηλώσουμε όλες τις μεταθέσεις των στοιχείων.

Γενικότερα ένα ε.δ.λ για την κατάσταση j του συστήματος έχει την ακόλουθη μορφή:

$$(j,j,\ldots,j,j\text{-}1,\ldots,j\text{-}1,\ldots,1,\ldots,1,0,\ldots,0).$$

Αυτό έχει συνολικά *n* το πλήθος στοιχεία, από τα οποία k_j τον αριθμό βρίσκονται στην κατάσταση j, k_{j-1} τον αριθμό βρίσκονται στις καταστάσεις j και j-1, συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο, τέλος προκύπτει ότι k_1 το πλήθος βρίσκονται στις καταστάσεις j, j-1, … έως και την 1 και όλα τα υπόλοιπα βρίσκονται στην κατάσταση 0 ($k_j, k_{j-1}, \ldots, k_1 < n$ με $k_j < k_{j-1} < \ldots < k_1 < n$).

Οι μεταθέσεις των στοιχείων των ε.δ.λ για την κατάσταση j, είναι και αυτά ε.δ.λ., έτσι καταλήγουμε στη μορφή

$$(j,j,\ldots,j,j\text{-}1,\ldots,j\text{-}1,\ldots,1,\ldots,1,0,\ldots,0)^*$$

που αντιπροσωπεύει όλα τα ε.δ.λ για την κατάσταση j, όπου $i \le j \le m$.

Για ένα γενικό *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις, οι τιμές για τα k_j δεν είναι απαραίτητα σε μονότονη διάταξη. Η μορφή του ε.δ.λ ενός *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις είναι παρόμοια με αυτή του φθίνοντος *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις όπου οι τιμές για τα k είναι σε αυστηρά φθίνουσα διάταξη.

Λαμβάνοντας υπόψη τη γενική περίπτωση, θα προσπαθήσουμε να βρούμε τα ε.δ.λ για την κατάσταση j για ένα *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις και με τιμές τις $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Πρώτα πρέπει να βρούμε τις τιμές k_l ($1 \le l \le j$) οι οποίες είναι αυστηρά σε αύξουσα σειρά, αρχίζοντας με k_j, για l από j έως 1, αγνοώντας τα k_l που δεν ακολουθούν αυτή τη σειρά.

Για παράδειγμα, αν διαπιστώσουμε ότι $k_b > k_a > k_j$ ($1 \le b < a < j$), αυτό σημαίνει ότι $k_l \le k_j$ ($a < l < j$), $k_l \le k_a$ ($b < l < a$) και $k_l \le k_b$ ($1 \le l \le b$).

Έτσι, το ε.δ.λ για την κατάσταση j έχει την επόμενη μορφή και κάθε μετάθεση των στοιχείων του είναι και αυτή ε.δ.λ:

$$(j,j,\ldots,j,a,\ldots,a,b,\ldots,b,0,\ldots,0).$$

Παρατηρούμε ότι αποτελείται από *n* το πλήθος στοιχεία, από τα οποία k_j βρίσκονται στην κατάσταση j, k_a βρίσκονται στις καταστάσεις j και a, k_b το πλήθος βρίσκονται στις καταστάσεις j, a και b και όλα τα υπόλοιπα βρίσκονται στην κατάσταση 0. ($k_j, k_a, k_b < n$ με $k_j < k_a < k_b < n$).

Θα ορίσουμε στη συνέχεια το ονομαστικό φθίνον k-από-τα-n:G σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις.

Ορισμός 4.1.6. *Ένα ονομαστικό φθίνον k-από-τα-n:G σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις είναι το ίδιο με ένα φθίνον k-από-τα-n:G σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις χωρίς όμως να είναι απαραίτητο να είναι λιγότερο από 1 η πιθανότητα μία μονάδα να βρεθεί σε οποιαδήποτε κατάσταση.*

Ένα ονομαστικό φθίνον k-από-τα-n:G σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις είναι αποτέλεσμα της εξέτασης μέρους των καταστάσεων των μονάδων ή του συνδυασμού πολλών διπλανών καταστάσεων μαζί. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα γενικό k-από-τα-n:G σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις και με ε.δ.λ για την κατάσταση j αυτό που δόθηκε παραπάνω. Για να υπολογιστεί η πιθανότητα του συστήματος να βρεθεί στην κατάσταση j ή και πάνω από αυτή, έστω $P_{s,j}$, θα πρέπει να παράγουμε ένα ονομαστικό φθίνον k-από-τα-n: G σύστημα με τέσσερις ονομαστικές καταστάσεις. Οι καταστάσεις 0 έως b-1 του αρχικού συστήματος συνδυάζονται στην ονομαστική κατάσταση «0», οι καταστάσεις b έως α-1 συνδυάζονται στην ονομαστική κατάσταση «1», οι καταστάσεις α έως j-1 συνδυάζονται στην ονομαστική κατάσταση «2» και οι καταστάσεις j έως m συνδυάζονται στην ονομαστική κατάσταση «3». Η πιθανότητα της μονάδας να βρεθεί στην ονομαστική κατάσταση «0» είναι ίση με το άθροισμα των πιθανοτήτων να βρεθεί η μονάδα στις καταστάσεις 0 έως και b-1 του αρχικού συστήματος. Έτσι συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία. Επίσης παρατηρούμε ότι ο αριθμός των τιμών k_l που χρησιμοποιούνται στο ε.δ.λ (οι k_j, k_a, k_b) είναι ίσος με τον αριθμό των ονομαστικών καταστάσεων μείον ένα.

Ένα ονομαστικό φθίνον k-από-τα-n:G σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις παίζει σημαντικό ρόλο στην εκτίμηση ενός k-από-τα-n:G συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις. Η πιθανότητα $P_{s,j}$ για οποιαδήποτε κατάσταση j ενός γενικού k-από-τα-n:G συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις μπορεί να εκτιμηθεί μετασχηματίζοντας το γενικό k-από-τα-n:G σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις σε ένα ονομαστικό φθίνον k-από-τα-n:G σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις και υπολογίζοντας την πιθανότητα στη μέγιστη ονομαστική κατάσταση.

Θα εκτιμήσουμε την αξιοπιστία για ένα k-από-τα-n:G σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις σε τρία στάδια.

I. Εκτίμηση της αξιοπιστίας για ένα φθίνον *k-από-τα-n*:*G* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις και iid μονάδες

Για να γίνει η εκτίμηση της κατανομής των καταστάσεων, δηλαδή της πιθανότητας η μονάδα να βρίσκεται σε διαφορετικές καταστάσεις, ενός φθίνοντος k-από-τα-n:G συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις πρέπει να υπολογίσουμε τις $P_{s1}, P_{s2}, ..., P_{sm}$. Η πιθανότητα $P_{s,j}$ του συστήματος να βρίσκεται στην κατάσταση j ή και σε πιο πάνω από αυτή, ισούται με την πιθανότητα ότι υπάρχει ένα ε.δ.λ του συστήματος τέτοιο ώστε κάθε κατάσταση της μονάδας να μην είναι μικρότερη από το αντίστοιχο στοιχείο του ε.δ.λ.

Με βάση τη μορφή του ε.δ.λ για τα φθίνοντα k-από-τα-n:G συστήματα με πολλαπλές καταστάσεις για οποιαδήποτε κατάσταση j έχουμε:

$$P_{s,j} = P(\mathbf{x} \geq (j, j, ...j, j-1, ..., j-1, ..., 1, ...1, 0, ..., 0)^*) . \qquad (4.1.1)$$

Ο αριθμός των στοιχείων, όπου συνολικά είναι *n* το πλήθος, για κάθε μία κατάσταση περιγράφεται ως εξής: k_j το πλήθος στοιχεία βρίσκονται στην κατάσταση *j*, k_{j-1} τον αριθμό βρίσκονται στις καταστάσεις *j* και *j*-1, συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο, τέλος προκύπτει ότι k_1 το πλήθος στοιχεία βρίσκονται στις καταστάσεις *j*, *j*-1, … έως και την 1 και όλα τα υπόλοιπα βρίσκονται στην κατάσταση 0 ($k_j, k_{j-1}, ..., k_1 < n$ με $k_j < k_{j-1} < ... < k_1 < n$).

Επιπλέον υπάρχει ένας αποδοτικός αλγόριθμος για την εκτίμηση της αξιοπιστίας των *k*-από-τα-*n*:*G* συστημάτων με πολλαπλές καταστάσεις με βάση τον ορισμό των ελάχιστων διανυσμάτων διακοπής. Στον αλγόριθμο αυτό η πιθανότητα $Q_{s,j}$ ενός συστήματος σε καταστάσεις κάτω από τη j, ισούται με την πιθανότητα να υπάρχει ένα ε.δ.δ. του συστήματος τέτοιο ώστε κάθε κατάσταση της μονάδας να μην είναι μεγαλύτερη από το αντίστοιχο στοιχείο του ε.δ.δ. Επομένως θα ισχύει ότι

$$Q_{s,j} = P(\mathbf{x} \le (j-1, j-1, ... j-1, j, ..., j, ..., m-1, ... m-1, m, ..., m)^*) \ . \quad (4.1.2)$$

Θα θεωρούμε ότι: k_j το πλήθος στοιχεία βρίσκονται στην κατάσταση *j*-1, k_{j+1} βρίσκονται στις καταστάσεις *j*-1 και *j*, συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία, έτσι τέλος προκύπτει ότι k_m το πλήθος στοιχεία βρίσκονται στις καταστάσεις *j*-1, *j*, … έως και την *m*-1 και όλα τα υπόλοιπα βρίσκονται στην κατάσταση *m* ($k_j, k_{j+1}, ..., k_m < n$ με $k_j < k_{j+1} < ... < k_m < n$).

Ο τύπος για την πιθανότητα $P_{s,j}$ μπορεί να οριστεί και με εναλλακτικό τρόπο, αν θέσουμε $p_j = p_{m-j}$ οπότε θα έχουμε

$$P_{s,j} = P(\mathbf{x} \le (m-j, m-j, ... m-j, m-j+1, ..., m-j+1, ..., m-1, ... m-1, m, ..., m)^*) \ .$$

Θα ισχύει ότι: k_j το πλήθος στοιχεία βρίσκονται στην κατάσταση *m-j*, k_{j-1} τον αριθμό βρίσκονται στις καταστάσεις *m-j* και *m-j*+1, συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία, οπότε θα τελικώς θα έχουμε ότι k_1 το πλήθος στοιχεία βρίσκονται στις καταστάσεις *m-j* και *m-j*+1 έως και την *m*-1 και όλα τα υπόλοιπα βρίσκονται στην κατάσταση *m* ($k_j, k_{j-1}, ..., k_1 < n$ με $k_j < k_{j-1} < ... < k_1 < n$).

II. Εκτίμηση της αξιοπιστίας για ένα γενικό *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις και iid μονάδες

Η ακόλουθη διαδικασία χρησιμοποιείται για να υπολογίσουμε την τιμή της πιθανότητας $P_{s,j}$ για οποιαδήποτε κατάσταση *j* ενός γενικού *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις:

- **Βήμα 1** Βρίσκουμε το ε.δ.λ για την κατάσταση j χρησιμοποιώντας την τεχνική που δώσαμε για το γενικό *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις.
- **Βήμα 2** Παράγουμε ένα ονομαστικό φθίνον *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις, στην κατάσταση j, και προσδιορίζουμε τον αριθμό

των ονομαστικών καταστάσεων, το διάνυσμα **k** και το διάνυσμα πιθανοτήτων **p**. Για παράδειγμα για το ε.δ.λ στη γενική μορφή που δόθηκε προηγουμένως, το ονομαστικό σύστημα έχει τέσσερεις πιθανές καταστάσεις, άρα *m*=3. Ο αριθμός των μονάδων στο ονομαστικό σύστημα είναι ίδιος με αυτόν στο *k*-από-τα-*n*:*G* με πολλαπλές καταστάσεις, το διάνυσμα **k** είναι το $\mathbf{k}=(k_b,k_a,k_j)$ και το διάνυσμα πιθανοτήτων είναι το

$$\mathbf{p}=\left(\sum_{i=0}^{b-1}p_i,\sum_{i=b}^{a-1}p_i,\sum_{i=a}^{j-1}p_i,\sum_{i=j}^{m}p_i\right).$$

- **<u>Βήμα 3</u>** Χρησιμοποιούμε την εκτίμηση αξιοπιστίας ενός φθίνοντος *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις (στάδιο **I**) για τον υπολογισμό της τιμής P_s στη μέγιστη ονομαστική κατάσταση. Η τιμή αυτή ισούται με την τιμή $P_{s,j}$ του γενικού *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις.

III. Προτεινόμενος αλγόριθμος για την εκτίμησης της αξιοπιστίας για το *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις και ανεξάρτητες μονάδες

Η πιθανότητα $P_{s,j}$ ότι το σύστημα με ανεξάρτητες μονάδες είναι στη κατάσταση *j* ή και πάνω από αυτή, υπολογίζεται από την εξίσωση (4.1.1). Η δυσκολία στην εκτίμηση των *k*-από-τα-*n*:*G* συστημάτων με πολλαπλές καταστάσεις με ανεξάρτητες μονάδες έγκειται στο ότι οι διαφορετικές μονάδες τυπικά έχουν διαφορετικές κατανομές καταστάσεων σε ένα τέτοιο σύστημα.

Η πιθανότητα $P_{s,j}$ για οποιαδήποτε κατάσταση *j* ενός *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις μπορεί να εκτιμηθεί με τη μετατροπή ενός *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις σε ένα ονομαστικό φθίνον *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις. Στη συνέχεια υπολογίζουμε την πιθανότητα αυτού του ονομαστικού φθίνοντος συστήματος στη μέγιστη ονομαστική κατάσταση.

Θα παρουσιάσουμε έναν αλγόριθμο με αναδρομικές σχέσεις για τον υπολογισμό της πιθανότητας ενός ονομαστικού φθίνοντος *k*-απ-τα-*n*:*G* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις και ανεξάρτητες μονάδες στη μέγιστη ονομαστική κατάσταση. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε μία συνάρτηση $P(n,\mathbf{k},\mathbf{P})$ όπου:

n= ο αριθμός των μονάδων του ονομαστικού φθίνοντος *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις .
k= το διάνυσμα **k** του ονομαστικού φθίνοντος *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις, $\mathbf{k}=(k_1,k_2,...,k_m)$ όπου *m* είναι ο αριθμός των πιθανών καταστάσεων ενός ονομαστικού φθίνοντος *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις μείον ένα.
P= ο πίνακας κατανομής καταστάσεων των μονάδων για ένα ονομαστικό φθίνον *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις. Αυτός αποτελείται από τις πιθανότητες της κάθε μονάδας να βρίσκονται σε κάθε μία από τις *m*+1 καταστάσεις (*n* γραμμές, *m*+1 στήλες), επομένως θα έχει την μορφή

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} p_{1,0} & p_{1,1} & \cdots & p_{1,m} \\ p_{2,0} & p_{2,1} & \cdots & p_{2,m} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ p_{n,0} & p_{n,1} & \cdots & p_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Η συνάρτηση $P(n,\mathbf{k},\mathbf{P})$ θα αντιπροσωπεύει την πιθανότητα λειτουργίας στη μέγιστη ονομαστική κατάσταση ενός ονομαστικού φθίνοντος *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις με *n* ανεξάρτητες μονάδες με διάνυσμα **k** και πίνακα πιθανοτήτων **P**.

Για την εκτίμηση της $P_{s,j}$ της εξίσωσης (4.1.1), οι καταστάσεις *j* και άνω συνδυάζονται στη μέγιστη ονομαστική κατάσταση του παραγόμενου ονομαστικού φθίνοντος *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις, διάνυσμα **k** και πίνακα πιθανοτήτων **P**, οπότε θα έχουμε

$$P_{s,j}=P(n,\mathbf{k},\mathbf{P}). \tag{4.1.3}$$

Ο αλγόριθμος με τις αναδρομικές σχέσεις είναι ο ακόλουθος

$$P(n,\mathbf{k},\mathbf{P})=\sum_{j=0}^{m} p_{n,j}\cdot P(n-1,\mathbf{k}^{j},\mathbf{P}^{j}). \tag{4.1.4}$$

Η βασική ιδέα του αλγορίθμου αυτού είναι παρόμοια με αυτή του αλγορίθμου για τα δυαδικά *k*-από-τα-*n* συστήματα με πολλαπλές καταστάσεις. Απαριθμούμε τις περιπτώσεις όπου η μονάδα *n* είναι σε διαφορετικές πιθανές καταστάσεις και έτσι εκτιμούμε την αξιοπιστία ενός συστήματος με *n* μονάδες μέσω της αξιοπιστίας διάφορων συστημάτων με *n*-1 μονάδες. Για κάθε συγκεκριμένο *j* στη δεξιά πλευρά την εξίσωσης (4.1.4) πρέπει να αναδιοργανώσουμε τα **k** και **P** για να παραχθούν τα $\mathbf{k}^{j}$ και $\mathbf{P}^{j}$.

Αρχικά για $0<j<m$:

$$\begin{aligned} k_l^j &= k_l \text{ για } l>j \\ k_l^j &= k_l-1 \text{ για } l\le j. \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Η ιδέα είναι πως αν η μονάδα *n* είναι στη κατάσταση *j*, ο απαιτούμενος αριθμός των μονάδων για οποιαδήποτε κατάσταση ίση ή χαμηλότερη του *j* θα πρέπει να μειωθεί κατά ένα. Για $j=m$ έχουμε $k_l^j=k_l-1$ για $1\le l\le m$. Για $j=0$ έχουμε $k_l^j=k_l$ για $1\le l\le m$. Ο $\mathbf{P}^{j}$ λαμβάνεται με τη διαγραφή της *n*-οστής σειράς από τον πίνακα **P**, οπότε ο $\mathbf{P}^{j}$ είναι ένας $n-1$ επί $m+1$ πίνακας.

Υπάρχει μια ειδική περίπτωση όταν παράγονται τα $\mathbf{k}^{j}$ και $\mathbf{P}^{j}$, υπό την οποία μία συγκεκριμένη κατάσταση απορροφάται από τη γειτονική άνω κατάσταση, επομένως θα πρέπει να κάνουμε επιπλέον μετατροπές στους $\mathbf{k}^{j}$ και $\mathbf{P}^{j}$. Αυτή η ειδική περίπτωση είναι όταν $k_h^j=k_{h-1}^j$ για μία κατάσταση *h* ($1\le h\le m$). Σε αυτήν τη περίπτωση, η κατάσταση $h-1$ απορροφάται από την κατάσταση h. Το k_{h-1}^j

διαγράφεται από το $\mathbf{k}^j$, θα είναι επίσης $p_{i,h}^j = p_{i,h}^j + p_{i,h-1}^j$ για $1 \le i \le n-1$ και τότε η στήλη $h-1$ διαγράφεται από τον $\mathbf{P}^j$. Έτσι ο αριθμός των πιθανών καταστάσεων μειώνεται από το $m+1$ σε m. Αυτός είναι στη πραγματικότητα ο κύριος λόγος που ο χρόνος υπολογισμού χρησιμοποιώντας αυτόν τον αλγόριθμο δε θα αυξηθεί εκθετικά με την αύξηση στο n. Παράγοντας τα $\mathbf{k}^j$ και $\mathbf{P}^j$ με αυτόν τον τρόπο, το $\mathbf{k}^j$ θα είναι πάντα ένα αυστηρά αύξον διάνυσμα.

Οι αρχικές συνθήκες για τον αλγόριθμο είναι οι ακόλουθες:
1η : $k_1 > n$. Σε αυτήν τη περίπτωση $P(n,\mathbf{k},\mathbf{P}) = 0$.
2η : $m = 1$. Σε αυτήν τη περίπτωση ένα φθίνον *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις ανάγεται σε ένα δυαδικό *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα με ανεξάρτητες μονάδες.

Οι προσεγγίσεις για την εκτίμηση άλλων τύπων *k*-από-τα-*n*:*G* συστημάτων με πολλαπλές καταστάσεις και ανεξάρτητες μονάδες είναι οι επόμενες:

- **<u>Βήμα 1</u>** Η πιθανότητα $P_{s,j}$ για οποιαδήποτε κατάσταση j ενός γενικού *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις μπορεί να εκτιμηθεί με τη μετατροπή αυτού του συστήματος σε ένα ονομαστικό φθίνον *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις και υπολογίζοντας την πιθανότητα αυτού του ονομαστικού φθίνοντος στη μέγιστη ονομαστική κατάσταση «*m*».
- **<u>Βήμα 2</u>** Ένα αύξον *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις αποτελεί μια ειδική περίπτωση ενός γενικού *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις. Ένα αύξον *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις μπορεί επίσης να μετατραπεί σε ένα ονομαστικό φθίνον *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις. Σε οποιαδήποτε κατάσταση j, το παραγόμενο ονομαστικό φθίνον *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα είναι στην πραγματικότητα ένα δυαδικό *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα με $k = k_j$. Η πιθανότητα της i μονάδας να βρίσκεται στην ονομαστική κατάσταση «1» είναι $\sum_{l=j}^{m} p_{i,l}$. Τέλος η δεύτερη αρχική συνθήκη του προτεινόμενου αλγορίθμου θα ενεργοποιηθεί, και οι δυαδικοί *k*-από-τα-*n*:*G* αλγόριθμοι θα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση της αξιοπιστίας.

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε κάποια παραδείγματα για να δείξουμε την ακρίβεια και την αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου με τις αναδρομικές σχέσεις για την εκτίμηση της αξιοπιστίας ενός *k*-από-*n*:*G* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις και με ανεξάρτητες μονάδες.

Παράδειγμα 4.1.1. Σε αυτό το παράδειγμα θα εκτιμήσουμε την αξιοπιστία του συστήματος παροχής πετρελαίου που παρουσιάσαμε πιο πριν. Υπάρχουν τέσσερις σωλήνες ($n = 4$), η πηγή του πετρελαίου και τρείς σταθμοί. Κάθε σωλήνας χωρίζεται σε τρία τμήματα σύμφωνα με την πηγή πετρελαίου και τους σταθμούς. Για παράδειγμα, ο σωλήνας 1 έχει τρία τμήματα, τα: S_{01}^1, S_{12}^1 και S_{23}^1. Έστω ότι οι πιθανότητες αποτυχίας των τμημάτων των σωλήνων είναι αυτές που απεικονίζονται στον Πίνακα 4.1.1.

Πίνακας 4.1.1
Πιθανότητες αποτυχίας των τμημάτων των σωλήνων (Tian, Zuo & Yam (2009))

Σωλήνας i	Τμήμα S_{o1}^{i}	Τμήμα S_{12}^{i}	Τμήμα S_{23}^{i}
1	0.05	0.10	0.08
2	0.05	0.10	0.08
3	0.03	0.08	0.05
4	0.03	0.08	0.05

Υποθέτουμε ότι οι σωλήνες 1 και 2 έχουν την ίδια κατανομή καταστάσεων, ομοίως και οι σωλήνες 3 και 4. Η κατανομή καταστάσεων ενός σωλήνα καθορίζεται από τις πιθανότητες αποτυχίας των τμημάτων των σωλήνων. Για παράδειγμα, η πιθανότητα του σωλήνα 1 να βρεθεί στην κατάσταση 0 είναι 0.05, δηλαδή $p_{10}=0.05$, αφού η πιθανότητα αποτυχίας του τμήματος S_{o1}^{1} του σωλήνα 1 είναι 0.05 όπως φαίνεται από τον πίνακα 4.1.1. Ακόμη, η πιθανότητα του σωλήνα 1 να βρεθεί στην κατάσταση 1 και άνω είναι

$$P_{11}=p_{11}+p_{12}+p_{13}=1-p_{10}=1-q(S_{o1}^{1})=0.95,$$

όπου το $q(S_{o1}^{1})$ αποτελεί τη πιθανότητα αποτυχίας του τμήματος S_{o1}^{1} που δίνεται επίσης από τον πίνακα 4.1.1. Η πιθανότητα του σωλήνα 1 στην κατάσταση 2 ή και πάνω από αυτή είναι:

$$P_{12}=p_{12}+p_{13}=P_{11}(1-q(S_{12}^{1}))=0.95(1-0.1)=0.855$$

όπου το $q(S_{12}^{1})$ αποτελεί την πιθανότητα αποτυχίας του τμήματος S_{12}^{1} που δίνεται πάλι από τον παραπάνω πίνακα.
Τέλος η πιθανότητα του σωλήνα 1 να βρεθεί στην κατάσταση 3 ή και πιο πάνω από αυτή είναι:

$$P_{13}=p_{13}=P_{12}(1-q(S_{13}^{1}))=0.855(1-0.08)=0.7866$$

όπου το $q(S_{13}^{1})$ αποτελεί τη πιθανότητα αποτυχίας του τμήματος S_{13}^{1}.
Βασιζόμενοι στα προηγούμενα αποτελέσματα μπορούμε να λάβουμε την κατανομή των καταστάσεων για το σωλήνα 1, η οποία είναι

$$\mathbf{P}_1=(p_{10},p_{11},p_{12},p_{13})=(0.05,0.095,0.0684,0.7866).$$

Ομοίως υπολογίζουμε τις κατανομές των σωλήνων 2,3 και 4. Οι κατανομές των καταστάσεων των σωλήνων συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0.0500 & 0.0950 & 0.0684 & 0.7866\\ 0.0500 & 0.0950 & 0.0684 & 0.7866\\ 0.0300 & 0.0776 & 0.0446 & 0.8478\\ 0.0300 & 0.0776 & 0.0446 & 0.8478\end{pmatrix}$$

όπου η σειρά i αντιπροσωπεύει την κατανομή κατάστασης του σωλήνα $i\,(i=1,2,3,4)$.

Από πριν γνωρίζουμε ότι οι τιμές του k για το σύστημα παροχής πετρελαίου είναι: $k_1=4$, $k_2=2$ και $k_3=3$. Το σύστημα είναι ένα γενικό k-από-τα-n:G με πολλαπλές καταστάσεις αφού οι τιμές του k δεν είναι ούτε μονότονα αύξουσες ούτε μονότονα φθίνουσες.

Θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες του συστήματος στις καταστάσεις 0,1,2, και 3. Για να υπολογιστεί η πιθανότητα P_{s3}, δηλαδή η πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση 3 ή και σε πιο πάνω κατάσταση από αυτή, πρέπει να μετατρέψουμε το σύστημα σε ένα ονομαστικό φθίνον *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα με πολλαπλές κατατάσσεις. Ακολουθώντας τη διαδικασία που έχουμε παρουσιάσει για το γενικό *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις, όπου οι τιμές για τα k_j δεν είναι απαραίτητα σε μονότονη διάταξη μπορούμε να δούμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{k}$ είναι $\mathbf{k}^{N3}=(4,3)$, όπου ο συμβολισμός *N*3 υποδεικνύει πως το διάνυσμα $\mathbf{k}$ αντιστοιχεί στο ονομαστικό φθίνον *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις με βάση την κατάσταση 3. Ο πίνακας κατανομής καταστάσεων των μονάδων για το ονομαστικό φθίνον *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις με βάση την κατάσταση 3 είναι

$$\mathbf{P}^{N3}=\begin{pmatrix}0.0500 & 0.1634 & 0.7866\\ 0.0500 & 0.1634 & 0.7866\\ 0.0300 & 0.1222 & 0.8478\\ 0.0300 & 0.1222 & 0.8478\end{pmatrix}.$$

Χρησιμοποιώντας τον προτεινόμενο αλγόριθμο λαμβάνουμε ότι η πιθανότητα του συστήματος στην κατάσταση 3 και άνω είναι $P_{s3}=0.7577$.

Με όμοιο τρόπο θα υπολογίσουμε και την πιθανότητα P_{s2} του συστήματος στην κατάσταση 2 και άνω, επομένως κάνουμε τις ίδιες κινήσεις με πριν.

Μετασχηματίζουμε το σύστημα σε ένα ονομαστικό φθίνον *k*-από-τα-*n*:*G* με πολλαπλές καταστάσεις με βάση την κατάσταση 2. Το διάνυσμα $\mathbf{k}$ είναι $\mathbf{k}^{N2}=(4,2)$ και ο πίνακας κατανομής των καταστάσεων των μονάδων θα είναι ο:

$$\mathbf{P}^{N2}=\begin{pmatrix}0.0500 & 0.0950 & 0.8550\\ 0.0500 & 0.0950 & 0.8550\\ 0.0300 & 0.0776 & 0.8924\\ 0.0300 & 0.0776 & 0.8924\end{pmatrix}.$$

Χρησιμοποιώντας τον προτεινόμενο αλγόριθμο έχουμε ότι $P_{s2}=0.8469$.

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα P_{s1}, που είναι η πιθανότητα του συστήματος στην κατάσταση 1 ή και άνω, θα μετασχηματίσουμε το σύστημα σε ένα ονομαστικό φθίνον *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις με βάση την κατάσταση 1. Το διάνυσμα $\mathbf{k}$ που προκύπτει είναι το $\mathbf{k}^{N1}=4$ και ο πίνακας κατανομής για τις μονάδες θα είναι:

$$\mathbf{P}^{N1}=\begin{pmatrix}0.0500 & 0.0950\\ 0.0500 & 0.0950\\ 0.0300 & 0.9700\\ 0.0300 & 0.9700\end{pmatrix}.$$

Ανακεφαλαιώνοντας τα αποτελέσματά μας έχουμε:

$$\mathbf{P}_s=(0.8492, 0.8469, 0.7577).$$

Η κατανομή των καταστάσεων του συστήματος λαμβάνεται με βάση τον $\mathbf{P}_s$ και το αποτέλεσμα είναι αυτό που ακολουθεί:

$$\mathbf{r}_s=(0.1508, 0.0023, 0.0892, 0.7577).$$

Αυτό το διάνυσμα μας δείχνει ότι οι πιθανότητες να βρεθεί το σύστημα στις καταστάσεις 0,1,2 και 3 είναι 0.1508,0.0023,0.0892 και 0.7577, αντίστοιχα. Οι *Tian, Zuo* & *Yam* (2009) χρησιμοποίησαν τη μέθοδο της απαρίθμησης για να αξιολογήσουν το σύστημα παροχής πετρελαίου και τα αποτελέσματα που έλαβαν συμφωνούν με τα αποτελέσματα που λήφθηκαν με τον αναδρομικό αλγόριθμο.

∎

4.2 Συνεχόμενο *k*-από-τα-*n* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις

Οι *Huang, Zuo* & *Fang* (2003) εισήγαγαν και μελέτησαν το **συνεχόμενο *k*-από-τα-*n* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις** (multistate consecutive-*k*-out-of-*n* systems) στο οποίο τόσο οι μονάδες όσο και το σύστημα εμφανίζουν διάφορα επίπεδα απόδοσης.

Υπενθυμίζουμε ότι όταν βρισκόμαστε σε δυαδικό περιβάλλον ένα σύστημα με *n* μονάδες σε σειρά ονομάζεται συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*:*F* (ή *G*) σύστημα αν το σύστημα αποτυγχάνει (ή λειτουργεί) όταν τουλάχιστον *k* συνεχόμενες μονάδες του αποτυγχάνουν (ή λειτουργούν). Ένα συνεχόμενο *n*-από-τα-*n*:*F* (ή *G*) σύστημα είναι ένα παράλληλο (ή σειριακό) σύστημα. Ένα συνεχόμενο 1-από-τα-*n*:*F* (ή *G*) σύστημα είναι ένα σειριακό (ή παράλληλο) σύστημα.

Ένα σύστημα πολλαπλών καταστάσεων όσο και οι μονάδες που το αποτελούν μπορούν να βρεθούν σε μία από τις *m*+1 πιθανές καταστάσεις, οι οποίες είναι οι: 0,1,…,*m*. Με *m* θα συμβολίζουμε την κατάσταση της τέλειας λειτουργίας ενώ με 0 την κατάσταση της απόλυτης αποτυχίας. Με x_i θα συμβολίζουμε την κατάσταση ή το επίπεδο απόδοσης της *i*-μονάδας, *i*=1,2,…,*n*.

Το διάνυσμα $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ περιγράφει τις καταστάσεις όλων των μονάδων του συστήματος, οι οποίες είναι *n* σε πλήθος. Η κατάσταση του συστήματος θα εκφράζεται από την συνάρτηση δομής φ η οποία θα είναι μία συνάρτηση των καταστάσεων των μονάδων $x_1, x_2, ..., x_n$. Ισχύει ότι η $\phi = \phi(\mathbf{x})$ θα παίρνει τιμές στο S={0,1,2…,*m*} και το **x** θα παίρνει τιμές στο S^n.

Για παράδειγμα, σε ένα πρόβλημα ποιοτικού ελέγχου, μία παρτίδα προϊόντων μπορεί να χαρακτηριστεί ότι ανήκει σε μία από τις τρείς επόμενες κατηγορίες σύμφωνα με το επίπεδο της ποιότητάς της: επίπεδο Α, επίπεδο Β, απορρίπτεται. Με την ακόλουθη διαδικασία δειγματοληψίας έχουμε σκοπό να ταξινομήσουμε τα τεμάχια της κάθε παρτίδας. Αν τα συνεχόμενα 3-από-τα-10 τεμάχια ενός δείγματος δεν εκπληρώνουν τα κριτήρια για το επίπεδο Α τότε ο ακόλουθος έλεγχος διεξάγεται υπό τα κριτήρια του επιπέδου Β, αλλιώς θα ανήκει στο επίπεδο Α. Αν τα συνεχόμενα 5-από-τα-10 τεμάχια ενός δείγματος κρίνεται ότι ανήκουν σε κατηγορία χειρότερη από αυτή του επιπέδου Β τότε η παρτίδα θα απορρίπτεται, αλλιώς θα ανήκουν στο επίπεδο Β. Έτσι για ένα τέτοιο πρόβλημα μπορούμε να ορίσουμε ένα συνεχόμενο *k*-από-τα-*n* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις θεωρώντας την κατηγορία όπου ανήκει κάθε παρτίδα σαν την κατάσταση που μπορεί να βρεθεί το σύστημα και τα τεμάχια του δείγματος ως μονάδες. Τόσο το σύστημα όσο και οι μονάδες του έχουν τρείς πιθανές καταστάσεις στις οποίες μπορούν να βρεθούν: κατάσταση 2 (επίπεδο Α), κατάσταση 1 (επίπεδο Β), κατάσταση 0 (απορρίπτεται). Στην κατάσταση 2 του συστήματος έχουμε μία συνεχόμενη 3-από-τα-10:*F* δομή, στην κατάσταση 1 του συστήματος έχουμε μία συνεχόμενη 5-από-τα-10:*F* δομή.

Προκειμένου να μελετήσουμε το συνεχόμενο *k*-από-τα-*n* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις θα χρησιμοποιήσουμε τους επόμενους συμβολισμούς.

n	Ο αριθμός των μονάδων του συστήματος
$m+1$	Ο αριθμός των καταστάσεων του συστήματος ή των μονάδων του.
x_i	Κατάσταση της μονάδας i, $x_i = j$ εάν η μονάδα i βρίσκεται στην κατάσταση j, $0 \le j \le m$, $1 \le i \le n$.
$\mathbf{x}$	Το *n*-διάστατο διάνυσμα που αντιπροσωπεύει τις καταστάσεις όλων των μονάδων, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.
$\phi(\mathbf{x})$	Η συνάρτηση δομής του συστήματος η οποία αντιπροσωπεύει την κατάσταση του συστήματος, $0 \le \phi(\mathbf{x}) \le m$.
$\phi^D(\mathbf{x})$	Η δυική συνάρτηση δομής της φ
k_j	Ο ελάχιστος αριθμός των συνεχόμενων μονάδων οι οποίες βρίσκονται σε καταστάσεις χειρότερες από την j
P_{ij}	$P(x_i \ge j)$, η αξιοπιστία της μονάδας i με βάση την κατάσταση j, δηλαδή είναι η πιθανότητα η μονάδα i να βρίσκεται σε κατάσταση καλύτερη από την j.
P_j	$P_j = P_{ij}$ όταν οι μονάδες είναι iid
p_{ij}	Η πιθανότητα η μονάδα i να βρίσκεται ακριβώς στην κατάσταση j.
p_j	$p_j = p_{ij}$ όταν οι μονάδες είναι iid
Q_{ij}	Η πιθανότητα η μονάδα i να βρίσκεται σε κατάσταση χειρότερη της j, δηλαδή πιθανότητα αποτυχίας με βάση την κατάσταση j
Q_j	$Q_j = Q_{ij}$ όταν οι μονάδες είναι iid
$F_j(n,k_j)$	Η πιθανότητα ότι τουλάχιστον k_j συνεχόμενες μονάδες είναι σε καταστάσεις χειρότερες από την j για ένα σύστημα αποτελούμενο από n το πλήθος μονάδες.
$R_j(n,k_j)$	$1 - F_j(n,k_j)$
R_{sj}	Η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται σε κατάσταση καλύτερη από την j, δηλαδή είναι η αξιοπιστία του συστήματος με βάση την κατάσταση j
F_{sj}	$1 - R_{sj}$
$r_{s,j}$	$P(\phi = j)$, είναι η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται ακριβώς στην κατάσταση j.

Θα υιοθετήσουμε και εδώ τους ορισμούς 4.1.4 και 4.1.5 που δόθηκαν στην Παράγραφο 4.1 Έτσι ένα ε.δ.λ πολλαπλών καταστάσεων, $\mathbf{y} \in \mathbf{S}^n$ θα λέγεται ε.δ.λ για την κατάσταση j του συστήματος, αν και μόνο αν $\phi(\mathbf{y}) \ge j$ και $\phi(\mathbf{x}) < j$ για όλα τα $\mathbf{x} < \mathbf{y}$. Ένα ε.δ.δ πολλαπλών καταστάσεων, $\mathbf{y} \in \mathbf{S}^n$ θα λέγεται ε.δ.δ για την κατάσταση j του συστήματος, αν και μόνο αν $\phi(\mathbf{y}) < j$ και $\phi(\mathbf{x}) \ge j$ για όλα τα $\mathbf{x} > \mathbf{y}$.

Στη συνέχεια θα υποθέτουμε ότι το σύστημα είναι μονότονο με πολλαπλές καταστάσεις οπότε η $\phi(\mathbf{x})$ είναι μη-φθίνουσα για κάθε όρισμα και ισχύει $\phi(\mathbf{j}) = j$, όπου $\mathbf{j} = (j, j, ..., j)$ για $j = 0,1,...,m$. Επίσης υποθέτουμε ότι οι μονάδες λειτουργούν ανεξάρτητα η μία από την άλλη.

Θα εξετάσουμε χωριστά το συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*:*F* και το συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα.

I. Συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*:*F* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις

Ορισμός 4.2.1. *Ένα σύστημα λέγεται συνεχόμενο k-από-τα-n με πολλαπλές καταστάσεις αν έχει την εξής ιδιότητα:* $\phi(\mathbf{x}) < j$, $j = 1,...,m$, *δηλαδή αν και μόνο αν τουλάχιστον* k_l *συνεχόμενες μονάδες βρίσκονται σε καταστάσεις χειρότερες από την* l *για όλα τα* $j \le l \le m$.

Τα k_j δεν είναι απαραίτητο να είναι τα ίδια για διαφορετικές καταστάσεις *j*, $j = 1,...,m$, δηλαδή η δομή του συστήματος μπορεί να είναι διαφορετική για διαφορετικές καταστάσεις.

Αν $k_1 \ge k_1 \ge ... \ge k_m$ τότε το σύστημα θα λέγεται φθίνον συνεχόμενο *k*-από-τα-*n* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις. Έτσι όταν το σύστημα δεν θα βρίσκεται σε τόσο καλή κατάσταση *j* τότε ο αριθμός των συνεχόμενων μονάδων που θα πρέπει να είναι σε κατάσταση χειρότερη από την *j* μειώνεται. Αυτό σημαίνει πως όταν η κατάσταση *j* βελτιώνεται, μειώνεται και το πλήθος των συνεχόμενων μονάδων που θα πρέπει να είναι σε κατάσταση χειρότερη της *j*, έτσι ώστε το σύστημα να βρίσκεται σε κατάσταση χειρότερη της *j*.

Αν $k_1 \le k_1 \le ... \le k_m$ τότε το σύστημα θα λέγεται αύξον συνεχόμενο *k*-από-τα-*n* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις. Σε αυτή την περίπτωση όταν το σύστημα δεν βρίσκεται σε τόσο καλή κατάσταση *j* τότε ο αριθμός των συνεχόμενων μονάδων που θα πρέπει να είναι σε κατάσταση χειρότερη από την *j* αυξάνεται. Αυτό σημαίνει πως όταν η κατάσταση *j* βελτιώνεται, αυξάνεται και το πλήθος των συνεχόμενων μονάδων που θα πρέπει να είναι σε κατάσταση χειρότερη από την *j*, έτσι ώστε το σύστημα να βρίσκεται σε κατάσταση χειρότερη της *j*.

Όταν το k_j είναι σταθερό, δηλαδή $k_1 = k_1 = ... = k_m = k$ η δομή του συστήματος είναι η ίδια για όλες τις καταστάσεις του συστήματος. Ένα σύστημα με την παραπάνω ιδιότητα το αποκαλούμε σταθερό συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*:*F* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις. Θα θεωρούμε ότι αυτό είναι μία ειδική περίπτωση του φθίνοντος συνεχόμενου *k*-από-τα-*n*:*F* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις

Παράδειγμα 4.2.1. Έστω ότι έχουμε ένα αύξον συνεχόμενο *k*-από-τα-*n* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις, το οποίο περιλαμβάνει τρείς μονάδες ($n = 3$) και ότι $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3$. Οι μονάδες όπως επίσης και το σύστημα μπορούν να βρεθούν σε τέσσερις πιθανές καταστάσεις τις: κατάσταση 1, κατάσταση 2, κατάσταση 3, κατάσταση 4. Ο Πίνακας 4.2.1 παρουσιάζει τη σχέση μεταξύ των καταστάσεων του συστήματος και των μονάδων. (Το $(\mathbf{x})^+$ συμβολίζει τις μεταθέσεις των στοιχείων του διανύσματος των καταστάσεων των μονάδων).

Πίνακας 4.2.1
Συνάρτηση δομής του συστήματος για διάφορα διανύσματα x (Huang, Zuo & Fang (2003))

$\phi(\boldsymbol{x})$	0	1	2	3
x	(0, 0, 0)	(1, 1, 1)	(0, 2, 0)	$(3, 0, 0)^+$
	$(1, 0, 0)^+$	(2, 1, 1)	(1, 2, 0)	$(3, 1, 0)^+$
	$(1, 1, 0)^+$	(1, 1, 2)	(0, 2, 1)	$(3, 1, 1)^+$
	(2, 0, 0)		$(2, 2, 0)^+$	$(3, 2, 0)^+$
	(0, 0, 2)		$(2, 2, 1)^+$	$(3, 2, 1)^+$
	(2, 1, 0)		(2, 2, 2)	$(3, 2, 2)^+$
	(2, 0, 1)			$(3, 3, 0)^+$
	(1, 0, 2)			$(3, 3, 1)^+$
	(0, 1, 2)			$(3, 3, 2)^+$
				(3, 3, 3)

Το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση χειρότερη από την 3 αν και μόνο αν τουλάχιστον τρείς συνεχόμενες μονάδες είναι σε χειρότερη κατάσταση από την 3. Το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση χειρότερη από την 2 αν και μόνο αν τουλάχιστον δύο συνεχόμενες μονάδες είναι σε χειρότερη κατάσταση από την 2 και τουλάχιστον τρείς συνεχόμενες μονάδες είναι σε χειρότερη κατάσταση από την 3. Το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση χειρότερη από την 1 αν και μόνο αν τουλάχιστον μία μονάδα είναι σε χειρότερη κατάσταση από την 1, αν τουλάχιστον δύο συνεχόμενες μονάδες είναι σε κατάσταση χειρότερη από την 2 και αν τουλάχιστον τρείς συνεχόμενες μονάδες είναι σε κατάσταση χειρότερη από την 3. Παρατηρούμε ότι το σύστημα θα έχει την δομή ενός παράλληλου συστήματος όταν θα βρίσκεται στην κατάσταση 3 (3-από-τα-3:*F*), θα είναι ένα 2-από-τα-3:*F* σύστημα όταν βρίσκεται στην κατάσταση 2 και τέλος θα είναι ένα σειριακό σύστημα όταν βρίσκεται στην κατάσταση 1 (1-από-τα-3:*F*).

Ας θεωρήσουμε ένα περιβάλλον πολλαπλών καταστάσεων όπου υποθέτουμε ότι πιθανότητες να βρίσκονται σε διαφορετικές καταστάσεις οι μονάδες είναι γνωστές. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να προσδιορίσουμε τις πιθανότητες του συστήματος να βρίσκεται σε διαφορετικές καταστάσεις. Με τον όρο «κατανομή των καταστάσεων της μονάδας» θα υποδηλώνουμε την πιθανότητα η μονάδα να βρίσκεται σε διαφορετικές καταστάσεις. Ακόμη με τον όρο « κατανομή των καταστάσεων του συστήματος» θα υποδηλώνουμε την πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται σε διαφορετικές καταστάσεις.

Επεκτείνοντας τα αποτελέσματα από τα κλασσικά δυαδικά συστήματα, ένα σύστημα πολλαπλών καταστάσεων μπορεί να χαρακτηριστεί ως «λειτουργικό» (functioning) με βάση την κατάσταση j αν $\phi(\mathbf{x}) \geq j$ και ως «μη- λειτουργικό» (αποτυχημένο-failed) σε κάθε άλλη περίπτωση. Ομοίως και για την μονάδα i θα ισχύει ότι: είναι «λειτουργική» (functioning) με βάση την κατάσταση j αν $x_i \geq j$ και ότι είναι «μη- λειτουργική» (αποτυχημένη- failed) σε κάθε άλλη περίπτωση. Αυτή όμως η προσέγγιση μπορεί να εφαρμοστεί σε ορισμένα μόνο συστήματα με πολλαπλές καταστάσεις. Στη συνέχει θα παρουσιάσουμε τρόπους εκτίμησης της κατανομής των καταστάσεων των συστημάτων.

- **Φθίνον συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*:*F* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις,** με $k_1 \ge k_1 \ge \ldots \ge k_m$. Σε ένα συνεχόμενο *k*-από-τα-*n* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις θα ισχύει $\phi(\mathbf{x}) < j$ αν και μόνο αν για τουλάχιστον k_j συνεχόμενες μονάδες ισχύει ότι $x_i < j$, $j = 1,\ldots,m$. Οι μονάδες για τις οποίες ισχύει αυτό θεωρούνται αποτυχημένες με βάση την κατάσταση *j*. Το σύστημα θεωρείται αποτυχημένο με βάση την κατάσταση *j*, αν $\phi(\mathbf{x}) < j$.

Για την εκτίμηση της αξιοπιστίας, αρχικά θα υπολογίσουμε την πιθανότητα το σύστημα να είναι σε κατάσταση χειρότερη της *j*, $\mathrm{P}(\phi < j)$, για $j = 1,\ldots,m$. Μετά εύκολα μπορούμε να βρούμε την πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται ακριβώς στην κατάσταση *j*, την $\mathrm{P}(\phi = j)$. Χρησιμοποιώντας το γνωστό αναδρομικό τύπο για τα κλασσικά συνεχόμενα *k*-από-τα-*n*:*F* συστήματα, μπορούμε να γράψουμε

$$F_j(n,k_j) = F_j(n-1,k_j) + (1 - F_j(n-k_j-1,k_j)) \times P_{(n-k_j)j} \prod_{m=n-k_{jq}-1}^{n} Q_{mj} \qquad (4.2.1)$$

όπου $F_j(a,b)$ είναι η πιθανότητα τουλάχιστον *b* συνεχόμενες μονάδες να βρίσκονται σε κατάσταση χειρότερη της *j* σε ένα σύστημα αποτελούμενο από *α* μονάδες, $j = 1,\ldots,m$.

Σε συνδυασμό με τις αρχικές συνθήκες

$$F_j(a,b) = 0 \text{ για } b > a > 0,\ j = 1,\ldots,m$$
$$P_{0j} = 1,\ j = 1,\ldots,m \qquad (4.2.2)$$

μπορούμε να εφαρμόσουμε επανειλημμένως την εξίσωση (4.2.1) και να βρούμε την πιθανότητα του συστήματος να βρίσκεται σε κατάσταση χειρότερη της *j*. Στη συνέχεια υπολογίζουμε την πιθανότητα το σύστημα να είναι στην κατάσταση *j* με την βοήθεια των παρακάτω εξισώσεων

$$P(\phi < j) = F_j(n,k_j),\ j = 1,\ldots,m$$
$$P(\phi = 0) = P(\phi < 1)$$
$$P(\phi = m) = 1 - P(\phi < m)$$
$$P(\phi = j) = P(\phi < j+1) - P(\phi < j),\ j = 1,\ldots,m-1\,. \qquad (4.2.3)$$

- **Αύξον συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*:*F* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις,** όπου $k_1 \le k_1 \le \ldots \le k_m$. Δεδομένου του ορισμού των ε.δ.λ, ένα ε.δ.λ για την κατάσταση *j*, μπορεί να είναι και ένα ε.δ.λ για την κατάσταση *j*+1 ή και ακόμα καλύτερες καταστάσεις. Για παράδειγμα παίρνοντας υπόψη τον Πίνακα 4.2.1 έχουμε ότι: ένα ε.δ.λ για την κατάσταση 1 είναι το (0,2,0) αφού ισχύει ότι

$\phi(0,2,0)>1$ και $\phi(\mathbf{x})<1$ για όλα τα $\mathbf{x}<(0,2,0)$. Ταυτόχρονα αυτό είναι και ε.δ.λ για την κατάσταση 2. Για το λόγο αυτό δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε τον δυαδικό τρόπο εκτίμησης για την αξιοπιστία του συστήματος.

II. Συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις

Ορισμός 4.2.2. *Ένα σύστημα λέγεται συνεχόμενο k-από-τα-n:G με πολλαπλές καταστάσεις αν* $\phi(\mathbf{x})\geq j,\ j=1,...,m$ *όταν και μόνο όταν τουλάχιστον* k_l *συνεχόμενες μονάδες βρίσκονται στην κατάσταση l ή και σε καλύτερη από αυτή για όλα τα* $1\leq l\leq j$.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό η σχέση $\phi(\mathbf{x})\geq j$ δηλώνει ότι τουλάχιστον k_j συνεχόμενες μονάδες βρίσκονται στην κατάσταση j ή και σε καλύτερη από αυτή, τουλάχιστον k_{j-1} συνεχόμενες μονάδες βρίσκονται στην κατάσταση $j-1$ ή και σε καλύτερη από αυτή,…, τουλάχιστον k_1 συνεχόμενες μονάδες βρίσκονται στην κατάσταση 1 ή και σε καλύτερη από αυτή.

Αφού το συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*:*G* είναι δυϊκό του συνεχόμενου *k*-από-τα-*n*:*F* θα ισχύει ότι: $p_{ij}=p^{D}_{i(m-j)},\ i=1,2,...,n,\ j=0,1,2,...,m$. Επομένως η πιθανότητα το αρχικό σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση *j* είναι ίδια με την πιθανότητα το δυϊκό του να βρίσκεται στην κατάσταση *m-j*, $j=0,...,m$. Έτσι το δυϊκό ενός αύξοντος συνεχόμενου *k*-από-τα-*n*:*F* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις είναι το φθίνον συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις. Αυτή τη δυϊκή σχέση θα τη χρησιμοποιήσουμε για την εκτίμηση της αξιοπιστίας ενός αύξοντος συνεχόμενου *k*-από-τα-*n*:*F* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις.

Για την εκτίμηση της αξιοπιστίας ενός αύξοντος συνεχόμενου *k*-από-τα-*n*:*F* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις θα στηριχθούμε στο δυϊκό του το οποίο είναι ένα φθίνον συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις. Αυτό έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- Για τον αριθμό των μονάδων σε κάθε κατάσταση θα ισχύει $n=k_0\geq k_1\geq k_1\geq ...\geq k_m$.
- Ως μονότονο σύστημα, για τη συνάρτηση δομής του και με δύο διανύσματα κατανομής καταστάσεων των μονάδων του τα **x**,**y** θα ισχύει η ανισότητα $\phi(\mathbf{y})>\phi(\mathbf{x})$ η οποία δηλώνει είτε ότι $\mathbf{y}>\mathbf{x}$ είτε ότι $\mathbf{y}>\mathbf{z},\ \mathbf{x}\leftrightarrow\mathbf{z},\ \mathbf{x}\neq\mathbf{z}$ (όπου $\mathbf{x}\leftrightarrow\mathbf{z}$, σημαίνει ότι το **x** είναι ισοδύναμο του **z,** δηλαδή $\phi(\mathbf{x})=\phi(\mathbf{z})$).
- Τα ε.δ.λ για την κατάσταση *j* του συστήματος δηλώνουν ότι το σύστημα είναι στην κατάσταση *j*.
- Ένα ε.δ.λ για την κατάσταση *j* έχει την μορφή

  $$(j,\ldots,j,j\text{-}1,\ldots,j\text{-}1,j\text{-}2,\ldots,j\text{-}2,\ldots,1,\ldots,1,0,\ldots,0)$$

  όπου ο αριθμός των στοιχείων που παίρνουν την τιμή *i* είναι ίσος με $k_i-k_{i+1}\geq 0,\ i=1,...,j-1$.

  Αυτό έχει συνολικά *n* το πλήθος στοιχεία, από τα οποία k_j τον αριθμό βρίσκονται στην κατάσταση *j*, k_{j-1} βρίσκονται στις καταστάσεις *j* και *j*-1, k_1 το πλήθος βρίσκονται στις καταστάσεις *j*, *j*-1 και την *j*-2 και όλα τα υπόλοιπα βρίσκονται στην κατάσταση 0 ($k_j, k_{j-1}, k_1 < n$ με $k_j < k_{j-1} < k_1 < n$). Τέλος όλες οι μεταθέσεις των ε.δ.λ είναι και αυτές ε.δ.λ.

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα με n=5 μονάδες και ένα ε.σ.λ για την κατάσταση 3 το (3,3,2,1,0). Αυτό δηλώνει ότι για να βρίσκεται το σύστημα στην κατάσταση 3 ή και σε καλύτερη από αυτή, θα πρέπει τουλάχιστον δύο συνεχόμενες μονάδες να βρίσκονται στην κατάσταση 3 ή και σε καλύτερη από αυτή, τουλάχιστον τρείς μονάδες να βρίσκονται στην κατάσταση 2 ή και σε καλύτερη από αυτή, τουλάχιστον τέσσερις μονάδες να βρίσκονται στην κατάσταση 1 ή και σε καλύτερη από αυτή. Τέλος στο σύνολό τους οι πέντε μονάδες να βρίσκονται στην κατάσταση 0 και σε καλύτερη από αυτή.

Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία που αποτελούν ένα ε.δ.λ μπορεί να έχουν πάνω από δύο διαφορετικές τιμές. Για παράδειγμα στο ε.δ.λ (3,3,2,1,0) έχουμε τέσσερις διαφορετικές τιμές.

Αν το πλήθος των διαφορετικών τιμών σε ένα ε.δ.λ για κατάσταση j του συστήματος είναι μικρότερο ή ίσο του δύο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους δυαδικούς αλγόριθμους εκτίμησης της αξιοπιστίας για να βρούμε την ακριβή τιμή της πιθανότητας του συστήματος να βρίσκεται στην κατάσταση j ή και σε καλύτερη από αυτή. Ωστόσο αν το πλήθος είναι μεγαλύτερο του δύο τότε δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους προαναφερθέντες αλγόριθμους και για το λόγο αυτό στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μία μέθοδο που εξυπηρετεί αυτό τον σκοπό. Στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε την πιθανότητα $P(\phi \geq j)$, να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση j ή και πάνω από αυτή.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ε.δ.λ $\mathbf{y}$ για την κατάσταση j του συστήματος. Με $\mathbf{y}_j^*$ θα συμβολίζουμε όλα τα ε.δ.λ της κατάστασης j του συστήματος, οπότε

$$P(\phi \geq j) = P(\mathbf{x} \geq \mathbf{y}_j^*) \tag{4.2.4}$$

όπου το $\mathbf{x}$ αντιπροσωπεύει όλα τα πιθανά διανύσματα των καταστάσεων των μονάδων.

Έτσι αν τα στοιχεία του $\mathbf{y}$ δεν έχουν πάνω από δύο διαφορετικές τιμές μπορούμε να εκτιμήσουμε την πιθανότητα $P(\mathbf{x} \geq \mathbf{y}_j^*)$ με βάση τον δυαδικό αλγόριθμο. Αν όμως έχουν πάνω από δύο διαφορετικές τιμές, τότε ορίζουμε τις ποσότητες

$$s = \min\{i \mid i \in \mathbf{y},\ i < j\} \quad \text{και} \quad t = \max\{i \mid i \in \mathbf{y},\ i < j\}, \text{ για } 0 \leq s \leq t < j.$$

Με βάση τα παραπάνω ορίζουμε τα διανύσματα $\mathbf{L}$,$\mathbf{U}$ διάστασης n (n το πλήθος στοιχεία)

$$\mathbf{L} = (j, ..., j, s, ..., s)\ ,\ \mathbf{U} = (j, ..., j, t, ..., t)$$

όπου τα j είναι k_j το πλήθος. Προφανώς θα ισχύει ότι $\mathbf{L} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{U}$.

Θα συμβολίζουμε με $\mathbf{L}_j^*$ όλα τα διανύσματα των καταστάσεων των μονάδων τα οποία έχουν ακριβώς k_j συνεχόμενα στοιχεία που παίρνουν την τιμή j και όλα τα υπόλοιπα παίρνουν την τιμή s. Ακόμη θα συμβολίζουμε με $\mathbf{U}_j^*$ όλα τα διανύσματα των καταστάσεων των μονάδων τα οποία έχουν ακριβώς k_j συνεχόμενα στοιχεία που παίρνουν την τιμή j και όλα τα υπόλοιπα παίρνουν την τιμή t.

Έτσι για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε ένα άνω και κάτω φράγμα για την πιθανότητα $\mathrm{P}(\phi \geq j)$ του συστήματος να βρίσκεται στην κατάσταση j ή και σε καλύτερη από αυτή (πάνω από αυτή), με βάση τα παραπάνω στοιχεία θα χρησιμοποιήσουμε την εξής ανισότητα

$$P(\mathbf{x} \geq \mathbf{U}_j^*) \leq \mathrm{P}(\phi \geq j) = P(\mathbf{x} \geq \mathbf{y}_j^*) \leq \mathrm{P}(\mathbf{x} \geq \mathbf{L}_j^*) . \qquad (4.2.5)$$

Όταν $s = t$ τα δύο φράγματα ταυτίζονται και είναι ίσα με την ακριβή τιμή της πιθανότητας $P(\phi \geq j)$.

Προκειμένου να εκτιμήσουμε τα δύο αυτά φράγματα, ξεκινώντας από τον ορισμό του φθίνοντος συνεχόμενου *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματος με πολλαπλές καταστάσεις προκύπτουν οι εξής ερμηνείες:
το γεγονός $\{\mathbf{x} \geq \mathbf{U}_j^*\}$ δηλώνει ότι τουλάχιστον k_j συνεχόμενες μονάδες βρίσκονται στην κατάσταση j ή και σε καλύτερη από αυτή και ταυτόχρονα ότι όλες οι μονάδες βρίσκονται στην κατάσταση *t* ή και σε καλύτερη από αυτή, όταν έχουμε ένα σύστημα αποτελούμενο από *n* το πλήθος μονάδες. Με άλλα λόγια αντιπροσωπεύει το γεγονός ότι τουλάχιστον k_j συνεχόμενες μονάδες βρίσκονται στην κατάσταση j ή και σε καλύτερη από αυτή και ταυτόχρονα ότι όλες οι υπόλοιπες μονάδες βρίσκονται στην κατάσταση *t* ή και σε καλύτερη από αυτή αλλά σε χειρότερη από την *j*.

Ομοίως το γεγονός $\{\mathbf{x} \geq \mathbf{L}_j^*\}$ δηλώνει τουλάχιστον k_j συνεχόμενες μονάδες βρίσκονται στην κατάσταση j ή και σε καλύτερη από αυτή και ταυτόχρονα ότι όλες οι υπόλοιπες μονάδες βρίσκονται στην κατάσταση *s* ή και σε καλύτερη από αυτή αλλά σε χειρότερη από την *j*.

Στη συνέχεια θέλοντας να υπολογίσουμε την πιθανότητα των παραπάνω γεγονότων για να βρούμε τα ζητούμενα φράγματα, θα εργασθούμε για iid και για ανεξάρτητες μονάδες.

- **1η περίπτωση:** Οι μονάδες είναι iid

Το πλήθος των πιθανών τρόπων να υπάρχουν ακριβώς *k* συνεχόμενες μονάδες σε μία συγκεκριμένη κατάσταση ή και σε κάποια καλύτερή της σε ένα σύστημα με *n* μονάδες είναι ίσο με ($n-k+1$). Όταν όλες οι μονάδες είναι iid για να βρούμε την πιθανότητα των δύο γεγονότων παίρνουμε τους τύπους

$$P(\mathbf{x} \geq \mathbf{U}_j^*) = \sum_{k=k_j}^{n} (n-k+1) P_j^k (1 - P_J - Q_t)^{n-k} \qquad (4.2.6)$$

$$P(\mathbf{x} \geq \mathbf{L}_j^*) = \sum_{k=k_j}^{n} (n-k+1) P_j^k (1 - P_J - Q_S)^{n-k} \ . \qquad (4.2.7)$$

- **2η περίπτωση:** Οι μονάδες είναι ανεξάρτητες

Οι *Hwang* (1982) και *Kuo et al* (1990) έδωσαν μεθόδους εκτίμησης της αξιοπιστίας για δυαδικά σύστημα με ανεξάρτητες μονάδες. Με u_i, v_i θα συμβολίζουμε τις πιθανότητες λειτουργίας και αποτυχίας αντίστοιχα για την *i*-μονάδα σε ένα δυαδικό σύστημα.
Για κάθε μονάδα *i* θα ισχύει η συνθήκη

$$u_i + v_i = 1 , \ i = 1, 2, ..., n ,$$

όμως για είναι χρήσιμη στην ανάλυσή μας μπορούμε να την προσαρμόσουμε στην

$$0 \le u_i + v_i \le 1,\ i = 1, 2, ..., n. \tag{4.2.8}$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε την πιθανότητα, σε ένα σύστημα n μονάδων, τουλάχιστον k συνεχόμενες μονάδες να λειτουργούν και όλες οι υπόλοιπες να έχουν αποτύχει (υπό την συνθήκη (4.2.8)), θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση

$$R(n,k) = v_n R(n-1,k) + u_n \left[\left(\prod_{j=n-k+1}^{n-1} u_i \right) R^*(n-k) + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} \left(v_i \prod_{j=i+1}^{n-1} R(i-1,k) \right) \right] \tag{4.2.9}$$

όπου $R^*(i) = \prod_{j=1}^{i} u_j + v_j,\ i \ge 1$.

Από τον τύπο (4.2.9) προκύπτει ότι ο πρώτος όρος, $v_n R(n-1,k)$ είναι η πιθανότητα η n-ιοστή μονάδα να έχει αποτύχει και ταυτόχρονα τουλάχιστον k συνεχόμενες μονάδες από τις υπόλοιπες $n-1$ να λειτουργούν. Ο δεύτερος όρος $u_n(\cdot)$ αντιπροσωπεύει την πιθανότητα ότι η n-οστή μονάδα λειτουργεί και επίσης ότι το σύστημα λειτουργεί. Όσο για τις ποσότητες μέσα στην αγκύλη, αυτές αντιπροσωπεύουν τα εξής: ο πρώτος όρος δηλώνει την περίπτωση όπου οι μονάδες $(n-1),(n-2),...,(n-k+1)$ λειτουργούν και οι υπόλοιπες $n-k$ είτε λειτουργούν είτε έχουν αποτύχει, ενώ ο δεύτερος όρος εκφράζει την πιθανότητα ότι η i-οστή μονάδα $(n-k+1 \le i \le n-1)$ είναι η πρώτη που αποτυγχάνει ξεκινώντας από την $n-1$ και προς τα κάτω και ότι το υποσύστημα της μονάδας $i-1$ που περιέχει τις μονάδες 1 έως $i-1$ λειτουργεί.

Αφού η εξίσωση (4.2.9) είναι ένας επαναληπτικός αλγόριθμος είναι αναγκαίο να υπάρχουν οι ακόλουθες αρχικές συνθήκες

$$R(k,k) = u_1 u_2 ... u_k$$

$$R(a,b) = 0,\ \ b > a > 0\ .$$

Αν τα ε.δ.λ έχουν το πολύ δύο διαφορετικά στοιχεία ο τύπος (4.2.9) παρέχει την ακριβή τιμή της πιθανότητας του συστήματος να βρίσκεται στην κατάσταση j ή σε καλύτερη από αυτή. Αν όμως ο αριθμός αυτών είναι μεγαλύτερος του δύο, ο τύπος (4.2.9) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθούν τα άνω και κάτω φράγματα για την πιθανότητα $P(\phi \ge j)$, $j = 1,...,m$ για ένα συνεχόμενο k-από-τα-n:G σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις.

Για κατάσταση j του συστήματος, θέτουμε

$$u_i = P_{ij}\ . \tag{4.3.9}$$

Για τον υπολογισμό του κάτω φράγματος της πιθανότητας $\mathrm{P}(\phi \ge j)$ από τον τύπο (4.2.9) θέτουμε

$$v_i = 1 - u_i - Q_{is}$$

με $s = \min\{i \mid i \in \mathbf{y},\ i < j\}$.

Για τον υπολογισμό του άνω φράγματος της πιθανότητας $\mathrm{P}(\phi \ge j)$ από τον τύπο (4.2.9) θέτουμε

$$v_i = 1 - u_i - Q_{it}$$

με $t = \max\{i \mid i \in \mathbf{y},\ i < j\}$.

Παράδειγμα 4.2.2. Θεωρούμε ότι έχουμε ένα συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα με πολλαπλές καταστάσεις. Τα δεδομένα μας είναι τα εξής

$n=3, k_1=3, k_2=2, k_3=1$

$p_{10}=0.1, p_{11}=0.2, p_{12}=0.3, p_{13}=0.4$, $p_{20}=0.2, p_{21}=0.2, p_{22}=0.3, p_{23}=0.3$

$p_{30}=0.1, p_{31}=0.1, p_{32}=0.2, p_{33}=0.6$ $P_{10}=1, P_{11}=0.9, P_{12}=0.7, P_{13}=0.4$

$P_{20}=1, P_{21}=0.8, P_{22}=0.6, P_{23}=0.3$ $P_{30}=1, P_{31}=0.9, P_{32}=0.8, P_{33}=0.6$

Για το επίπεδο κατάστασης 1 το μοναδικό ε.δ.λ είναι το (1,1,1). Οπότε θέτουμε $u_i=P_{i1}$ και $v_i=p_{i0}$, $i=1,2,3$. Με την βοήθεια της σχέσης (4.2.9) (ή τον τύπο της αξιοπιστίας για ένα σειριακό σύστημα) θα έχουμε

$$R_{s1}=P_{11}\times P_{21}\times P_{31}=0.9\times 0.8\times 0.9=0.648\,.$$

Αυτή είναι η ακριβής τιμή της αξιοπιστίας του συστήματος όταν αυτό βρίσκεται στην κατάσταση 1 ή και σε καλύτερη από αυτή.

Για το επίπεδο κατάστασης 2 τα μοναδικά ε.δ.λ είναι τα (2,2,1) και (1,2,2). Αφού αυτά τα ε.δ.λ έχουν μόνο δύο διαφορετικές τιμές στα στοιχεία τους η σχέση (4.2.9) μας δίνει την ακριβή τιμή της αξιοπιστίας R_{s2} του συστήματος όταν αυτό είναι στην κατάσταση 2 ή και σε πιο βελτιωμένη από αυτή. Επομένως θέτουμε $u_i=P_{i2}$ και $v_i=p_{i1}$, $i=1,2,3$.

Προκύπτει ότι

$$R_{s2}=R(3,2)=v_3R(2,2)+u_3[u_2R^*(1)+0]=p_{31}P_{22}P_{12}+P_{32}P_{22}(p_{11}+P_{12})$$
$$=0.1\times 0.7\times 0.6\times 0.8\times 0.6(0.2+0.7)=0.474\,.$$

Για το επίπεδο κατάστασης 3 τα ε.δ.λ είναι τα (3,2,1), (2,3,1) και (1,3,2). Αφού τα στοιχεία των ε.δ.λ έχουν πάνω από δύο διαφορετικές τιμές θα υπολογίσουμε το άνω και κάτω φράγμα για την πιθανότητα $\mathrm{P}(\phi\geq j)$.

Σύμφωνα με την διαδικασία που αναφέραμε επιλέγουμε τα διανύσματα $\mathbf{L}=(3,1,1)$ με $s=1$ και $\mathbf{U}=(3,2,2)$ με $t=2$.

Για τον υπολογισμό του άνω φράγματος, θέτουμε $u_i=P_{i3}$ και $v_i=p_{i1}+p_{i2}$, $i=1,2,3$. Τότε από την σχέση (4.2.9) προκύπτει ότι το άνω φράγμα για την αξιοπιστία θα είναι το εξής

Άνω φράγμα =

$$R(3,1)=v_3R(2,1)+u_3[R^*(2)+0]=v_3[v_2R(1,1)+u_2R^*(1)]+u_3R^*(2)$$
$$=(p_{31}+p_{32})[(p_{21}+p_{22})R(1,1)+P_{23}R^*(1)]+P_{33}R^*(2)$$
$$=0.3\times[0.5\times 0.4\times 0.3\times 0.9]+0.6\times 0.9\times 0.8=0.573\,.$$

Θέτοντας $u_i=P_{i3}$ και $v_i=p_{i2}$, από την σχέση (4.2.9) προκύπτει ότι το κάτω φράγμα για την αξιοπιστία θα είναι το εξής

Κάτω φράγμα =

$$R(3,1)=v_3R(2,1)+u_3[R^*(2)+0]=v_3[v_2R(1,1)+u_2R^*(1)]+u_3R^*(2)$$
$$=p_{32})[p_{22})R(1,1)+P_{23}R^*(1)]+P_{33}R^*(2)$$
$$=0.2\times[0.3\times 0.4\times 0.3\times 0.7]+0.6\times 0.7\times 0.6=0.318\,.$$

Επομένως δημιουργείται η ανισότητα

$$0.318 \le R_{s3} \le 0.573$$

οπότε αν χρησιμοποιήσουμε τον μέσο όρο αυτών των δύο τιμών για να προσεγγίσουμε την αξιοπιστία τότε θα προκύψει ότι $R_{s3} \approx 0.4455$. ∎

4.3 *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα με ή χωρίς επιδιόρθωση

Ο *Moustafa* (1998) παρουσιάζει μία μέθοδο εκτίμησης της αξιοπιστίας για τα *k*-από-τα-*n*:*G* συστήματα με ή χωρίς επιδιόρθωση, με *m* επίπεδα αποτυχίας (*k*-out-of-*n*:*G* systems with and without repair with *m* failure modes). Αυτό γίνεται με τη βοήθεια γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Θα αναλύσουμε δύο είδη συστημάτων, το ένα θα επιδέχεται ενώ το άλλο δεν θα επιδέχεται επιδιόρθωση.

Για τα δύο αυτά είδη των *k*-από-τα-*n*:*G* συστημάτων θέτουμε τις εξής προϋποθέσεις

1) Το σύστημα αποτελείται από *n* όμοιες και ανεξάρτητες μονάδες.

2) Κάθε μονάδα είτε λειτουργεί, είτε έχει αποτυγχάνει σε επίπεδο-*s* με συνεχή βαθμίδα αποτυχίας λ_s, $s = 1, ..., m$.

3) Το σύστημα είναι πλήρως καθορισμένο (completely observable), για το λόγο ότι υπάρχει αρκετή πληροφορία για να καθοριστεί στιγμιαία το επίπεδο αποτυχίας.

4) Υπάρχει ευχέρεια πολλαπλών επιδιορθώσεων. Ο χρόνος έως την επιδιόρθωση j αποτυχημένων μονάδων που βρέθηκαν στο επίπεδο αποτυχίας *s* είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή ίση με $1/\,j\mu_s$. Η επιδιόρθωση είναι τέλεια, δηλαδή η επιδιορθωμένη μονάδα είναι τόσο καλό σαν καινούργια.

5) Το σύστημα είναι σε λειτουργία αν τουλάχιστον *k* μονάδες είναι σε λειτουργία.

6) Στο σύστημα δεν μπορεί να γίνει επαναφορά στις καταστάσεις λειτουργίας αν αποτύχουν $n-k+1$ μονάδες.

Θα εξετάσουμε αρχικά το σύστημα χωρίς μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων αποτυχίας. Στο σύστημα αυτό θεωρούμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις που αναφέραμε μόλις πριν (1-6) και επιπλέον δεν υπάρχουν μεταβάσεις μεταξύ των δύο επιπέδων αποτυχίας (είναι αμοιβαία αποκλειόμενα), δηλαδή αν υπάρξει μία κατάσταση αποτυχίας μπορεί μόνο να χαρακτηριστεί από το ίδιο το επίπεδο αποτυχίας.

α) Σύστημα το οποίο επιδέχεται επιδιόρθωση

Το σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί με μία Μαρκοβιανή διαδικασία σε συνεχή χρόνο. Έστω ότι $(j\mathbf{e}_s)$ είναι η κατάσταση του συστήματος που αντιπροσωπεύει τον αριθμό των μονάδων που αποτυγχάνουν στο επίπεδο αποτυχίας *s* $(j = 0,1,...,n-k+1)$, όπου $\mathbf{e}_s$ είναι μια γραμμή, διάστασης *m*, η οποία έχει τη μονάδα στη θέση *s* και το μηδέν οπουδήποτε αλλού. Έστω ότι $P_t(j\mathbf{e}_s)$ είναι η πιθανότητα να βρίσκεται το σύστημα σε αυτήν την κατάσταση στο χρόνο t όταν αυτό ξεκινά σε χρόνο $t = 0$ από την κατάσταση (**0**). Θεωρούμε την εξής ομάδα εξισώσεων Kolmogorov:

Για τη κατάσταση **0**:

$$dP_t(\mathbf{0})/dt = -N\lambda P_t(\mathbf{0}) + \sum_{s=1}^{m} \mu_s P_t(\mathbf{e}_s) \qquad (4.3.1)$$

όπου $\lambda = \sum_{s=1}^{m} \lambda_s$. (4.3.2)

Για τις καταστάσεις ($j\mathbf{e}_s$):

- Αν $1 \le j \le k-1$ τότε προκύπτει ο τύπος
$$\begin{aligned} dP_t(j\mathbf{e}_s)/dt = &-[(n-j)\lambda_s + j\mu_s]P_t(j\mathbf{e}_s) + [n-(j-1)]\lambda_s P_t((j-1)\mathbf{e}_s) \\ &+(j-1)\mu_s P((j+1)\mathbf{e}_s). \end{aligned} \qquad (4.3.3)$$
- Αν $j = n-k$ τότε
$$dP_t((n-k)\mathbf{e}_s)/dt = -[k\lambda_s + (n-k)\mu_s]P_t((n-k)\mathbf{e}_s) + [k+1]\lambda_s P_t((n-k-1)\mathbf{e}_s). \qquad (4.3.4)$$

- Αν $j = n-k+1$ τότε
$$dP_t((n-k+1)\mathbf{e}_s)/dt = k\lambda_s P_t((n-k)\mathbf{e}_s). \qquad (4.3.5)$$

Οι εξισώσεις (4.3.1)-(4.3.5) αποτελούν μία ομάδα πρωτοβάθμιων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές, για τις οποίες ισχύουν οι ακόλουθες αρχικές συνθήκες

$$P_0(0) = 1,$$
$$P_0(j\mathrm{e}_s) = 0 \text{ για } j > 0.$$

Η αξιοπιστία του συστήματος με επιδιόρθωση R_t, όπως και ο μέσος χρόνος μεταξύ των αποτυχιών του συστήματος (MTBF) θα δίνονται από τους τύπους

$$R_t = P_t(0) + \sum_{j=1}^{n-k}\sum_{s=1}^{m} P_t(j\mathbf{e}_s) \qquad (4.3.6)$$

$$MTBF = \int_0^{\infty} R_t dt. \qquad (4.3.7)$$

β) Σύστημα το οποίο δεν επιδέχεται επιδιόρθωση

Αφού το σύστημα δεν επιδέχεται επιδιόρθωσης, χρόνος έως την επιδιόρθωση δεν θα υφίσταται επομένως θα θεωρούμε ότι $\mu_s = 0$. Παίρνουμε τους μετασχηματισμούς Laplace για τις εξισώσεις (4.3.1) –(4.3.3). Έτσι προκύπτει ο επόμενος αλγόριθμος με αναδρομικές σχέσεις:

Για $j = 0$

$$P_{s_1}(\mathbf{0}) = 1/[s_1 + n\lambda]. \qquad (4.3.8)$$

Για $1 \le j \le n-k$ τότε

$$P_{s_1}(j\mathbf{e}_s) = \prod_{i=1}^{j} \frac{(n-i+1)\lambda_s}{s_1 + n\lambda} \prod_{i=1}^{j} [s_1 + (n-i)\lambda_s]. \qquad (4.3.9)$$

Για να λυθεί η εξίσωση (4.3.9) θα χρησιμοποιήσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, οπότε θα έχουμε ότι

$$P_t(j\mathbf{e}_s) = m_j\left\{e^{-n\lambda t} / \prod_{i=1}^{j}[(n-i)\lambda_s - n\lambda] + \sum_{i=1}^{j}\frac{e^{-[(n-i)\lambda_s]t}}{n\lambda-(n-i)\lambda_s}\prod_{\substack{p=1\\p\neq i}}^{j}[(n-p)\lambda_s-(n-i)\lambda_s\right\}$$

(4.3.10)

όπου

$$m_j = \prod_{i=1}^{j}[n-i+1]\lambda_s = \frac{n!\lambda_s^j}{(n-j)!} \quad \text{και} \quad \prod_{\substack{p=1\\p\neq i}}^{j}[i-p]\lambda_s = (-1)^{j-i}\frac{j!\lambda_s^{j-1}}{i},\ i\leq j\ .$$

(4.3.11)

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace με τη βοήθεια των σχέσεων (4.3.11) παίρνει τη μορφή

$$P_t(j\mathbf{e}_s) = \frac{n!}{(n-j)!}\left[\lambda_s^j e^{-n\lambda t} / \prod_{i=1}^{j}((n-i)\lambda_s - n\lambda)\right] + \binom{n}{j}\sum_{i=1}^{j}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}\times\left[\frac{i\lambda_s}{n\lambda-(n-i)\lambda_s}\right]e^{-(n-i)\lambda_s t}$$

(4.3.12)

ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace για την εξίσωση (4.3.8) είναι ο

$$P_t(\mathbf{0}) = e^{n\lambda t}. \qquad (4.3.13)$$

Η αξιοπιστία του συστήματος χωρίς επιδιόρθωση R_t, αλλά και ο μέσος χρόνος έως την αποτυχία (MTTF) θα δίνονται από τους τύπους

$$R_t = P_t(0) + \sum_{j=1}^{n-k}\sum_{s=1}^{m}P_t(j\mathbf{e}_s) \qquad (4.3.14)$$

και

$$MTTF = \int_0^\infty R_t dt = \lim_{s\to 0}[P_s(0) + \sum_{j=1}^{n-k}\sum_{s=1}^{m}P_s(j\mathrm{e}_s)]$$
$$= 1/n\lambda + m\sum_{j=1}^{n-k}\frac{1}{\lambda(n-j)}\ . \qquad (4.3.15)$$

Αν λοιπόν υπάρχει μόνο ένα επίπεδο αποτυχίας για τις βαθμίδες αποτυχίας θα θεωρούμε ότι $\lambda_1 = \lambda,\ \lambda_s = 0$ για $s = 2,3,...,m$, έτσι οι τύποι της αξιοπιστίας και του μέσου χρόνου έως την αποτυχία δίνονται ως εξής

$$R(t) = \sum_{g=0}^{n-k}\binom{n}{g}[1-e^{-\lambda t}]^g e^{-(n-g)\lambda t} \quad \text{και} \quad MTTF = \sum_{j=0}^{n-k}\frac{1}{\lambda(n-j)}\ .$$

Θα εξετάσουμε στη συνέχεια το σύστημα *k*-από-τα-*n*:*G* με μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων αποτυχίας. Στο σύστημα αυτό θεωρούμε και πάλι ότι ισχύουν οι υποθέσεις που αναφέραμε και πριν (1-6) αλλά επιτρέπονται μεταβάσεις μεταξύ των επιπέδων αποτυχίας. Με βάση αυτή την υπόθεση το σύστημα έχει μεγαλύτερο ενδιαφέρον από εκείνο στο οποίο δεν υπήρχαν μεταβάσεις.

α) Σύστημα το οποίο επιδέχεται επιδιόρθωση

Το σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί με μία Μαρκοβιανή διαδικασία σε συνεχή χρόνο. Έστω ότι $\sum_{s=1}^{m} j_s \mathbf{e}_s = \mathbf{J}$ είναι η κατάσταση του συστήματος που αντιπροσωπεύει τον αριθμό των αποτυχημένων μονάδων στο επίπεδο αποτυχίας s και $P_t(\mathbf{J})$ είναι η πιθανότητα να βρίσκεται το σύστημα σε αυτήν την κατάσταση σε χρόνο t όταν αυτό ξεκινά σε χρόνο $t=0$ από την κατάσταση (**0**).

Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν ένα γενικό k-από-τα-n:G σύστημα με m επίπεδα αποτυχίας είναι οι παρακάτω

Για τις καταστάσεις $\sum_{s=1}^{m} j_s \mathbf{e}_s = \mathbf{J}$:

- Αν $0 \le j_s \le n-k$ και $0 \le \sum_{s=1}^{m} j_s = J \le n-k$ τότε

$$\frac{dP_t(\mathbf{J})}{dt} = -\left[(n-j)\lambda \sum_{s=1}^{m} j_s \mu_s\right] P_t(\mathbf{J}) + [n-(j-1)]\sum_{s=1}^{m} \lambda_s \delta(j_s) P_t(\mathbf{J}\text{-}\mathbf{e}_s)$$
$$+\sigma \sum_{s=1}^{m} (j_s+1)\mu_s P(\mathbf{J}+\mathbf{e}_s) \tag{4.3.16}$$

με

$$\delta(j_s) = \begin{cases} 0 & j_s = 0 \\ 1 & j_s > 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad \sigma = \begin{cases} 0 & j = n-k \\ 1 & j < n-k \end{cases}.$$

- Αν $0 \le j_s \le n-k+1$ και $0 \le \sum_{s=1}^{m} j_s = J \le n-k+1$ τότε

$$\frac{dP_t(\mathbf{J})}{dt} = [n-(j-1)]\sum_{s=1}^{m} \lambda_s \delta(j_s) P_t(\mathbf{J}\text{-}\mathbf{e}_s). \tag{4.3.17}$$

Επίσης θα ισχύουν οι αρχικές συνθήκες $P_0(0)=1,\ P_0(j\mathrm{e}_s)=0$ για $j>0$.

Το $P_t(\mathbf{J})$ μπορεί να υπολογισθεί ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις (4.3.16) και (4.3.17).

Η αξιοπιστία του συστήματος εκφράζεται από την σχέση

$$R_t = \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{j_m} P_t\left(\sum_{s=1}^{m} j_m \mathbf{e}_m\right) \tag{4.3.18}$$

ενώ ο μέσος χρόνος μεταξύ των αποτυχιών του συστήματος (MTBF) θα είναι ο εξής

$$MTBF = \int_0^\infty R_t dt \ . \tag{4.3.19}$$

β) Σύστημα το οποίο δεν επιδέχεται επιδιόρθωση

Ομοίως με πριν θεωρούμε ότι $\mu_s = 0$, $s=1,\ldots,m$. Παίρνουμε τους μετασχηματισμούς Laplace για τις εξισώσεις (4.3.16), προκύπτουν οι επόμενες σχέσεις

Αν $0 \le j_s \le n-k$ και $0 \le \sum_{s=1}^{m} j_s = J \le n-k$ τότε προκύπτει ο τύπος

$$P_{s_1}(\mathbf{J}) = \binom{j}{j_1,\dots,j_m} \lambda_1^{j_1} \dots \lambda_s^{j_s} \left[\frac{n!}{(n-j)!} \right] / \prod_{i=0}^{j} [s_1 + (n-i)\lambda] \,. \qquad (4.3.20)$$

Με τις ίδιες διαδικασίες που δουλέψαμε και στο σύστημα που δεν υπάρχουν μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων αποτυχίας, προκύπτει ο τύπος

$$P_t(\mathbf{J}) = \binom{j}{n} \binom{j}{j_1 \dots j_s} \left[\frac{\lambda_1^{j_1} \dots \lambda_s^{j_s}}{\lambda^j} \right] \times [1 - e^{-\lambda t}]^j \, e^{-(n-j)\lambda t} \,. \qquad (4.3.21)$$

Η αξιοπιστία του συστήματος χωρίς επιδιόρθωση λαμβάνεται χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.3.18) και (4.3.21).
Ο μέσος χρόνος έως την αποτυχία δίνεται από την έκφραση

$$MTTF = \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{j_s} \binom{J}{j_1, j_2, \dots, j_s} \left[\frac{\lambda_1^{j_1} \dots \lambda_s^{j_s}}{(n-j)\lambda^{j+1}} \right] \,. \qquad (4.3.22)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΘΕΜΑΤΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΓΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΑΠΟΤΥΧΙΑΣ

Το κεφάλαιο αυτό αναφέρεται σε θέματα βελτιστοποίησης και πιο συγκεκριμένα στις προσπάθειες που έχουν γίνει, μέσα από διάφορες διαδικασίες, ώστε να επιτευχθεί ο υπολογισμός της μέγιστης δυνατής τιμής της αξιοπιστίας για ένα σύστημα. Η συνδεσμολογία του συστήματος είναι ένας παράγοντας που διαφοροποιεί το αποτέλεσμα κάθε φορά. Αναζητάμε την «βέλτιστη» αξιοπιστία, δηλαδή κάθε φορά θα προσδιορίζουμε την δομή ενός συστήματος για την οποία θα έχουμε την μέγιστη τιμή της αξιοπιστίας. Επίσης θα θέσουμε προβλήματα βελτιστοποίησης του κόστους και του κέρδους για τα συστήματα αξιοπιστίας.

Ο *Pham* (2003) ασχολήθηκε με συστήματα αξιοπιστίας με πολλαπλά επίπεδα αποτυχίας, όπως επίσης και με θέματα βελτιστοποίησης που τα αφορούν. Συγκεκριμένα αυτά τα θέματα βελτιστοποίησης για τα σειριακά, τα παράλληλα, τα παράλληλα-σειριακά, τα σειριακά-παράλληλα, και τα k-από-τα-n συστήματα θα τα παρουσιάσουμε στις επόμενες παραγράφους. Οι παρακάτω συμβολισμοί θα μας είναι χρήσιμοι στην πορεία της ανάλυσής μας.

$\lfloor x \rfloor$= ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός που δεν υπερβαίνει το x

$\lceil x \rceil$= ο μικρότερος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το x

 * = θα υποδηλώνει την βέλτιστη τιμή.

5.1 Βέλτιστος αριθμός μονάδων για το σειριακό DFM σύστημα

Με δεδομένα όλα όσα αναφέραμε στο δεύτερο κεφάλαιο για το σειριακό DFM σύστημα γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση αξιοπιστίας του είναι η

$$R_s(n) = (1- q_o)^n - q_s^{\,n}$$

όπου n είναι ο αριθμός των μονάδων του συστήματος.

Αυτό που θα πρέπει να αναρωτηθούμε τώρα είναι το ποια είναι η κατάλληλη τιμή του n για την οποία επιτυγχάνεται η μέγιστη αξιοπιστία του συστήματος. Η τιμή αυτή υπολογίζεται ως εξής: αν ορίσουμε την ποσότητα

$$n_0 = \frac{\log\left(\dfrac{q_o}{1-q_s}\right)}{\log\left(\dfrac{q_s}{1-q_o}\right)}$$

τότε η αξιοπιστία του συστήματος $R_s(n)$ μεγιστοποιείται όταν

$$n^* = \begin{cases} \lfloor n_0 \rfloor + 1 & \text{αν } n_0 \text{ δεν είναι ακέραιος} \\ n_0 \ \text{ ή } \ n_0+1 & \text{αν } n_0 \text{ είναι ακέραιος .} \end{cases} \tag{5.1.1}$$

Παράδειγμα 5.1.1. Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σειριακό σύστημα αποτελούμενο από n το πλήθος μονάδες. Έστω ότι ένας διακόπτης εμπίπτει σε δύο επίπεδα αποτυχίας, δηλαδή χαλάει όταν είναι ανοιχτός (αποτυχία τύπου Ι) ή όταν είναι κλειστός (αποτυχία τύπου ΙΙ). Η πιθανότητα αποτυχίας του διακόπτη όταν είναι ανοιχτός και όταν είναι κλειστός είναι q_o=0.3 και q_s=0.5 αντίστοιχα. Με τη βοήθεια του τύπου (5.1.1) και αντικαθιστώντας τις ποσότητες q_o και q_s στον τύπο του n_0 θα έχω ότι ο βέλτιστος αριθμός των μονάδων που μας δίνει την μέγιστη αξιοπιστία είναι ο παρακάτω

$$n_0 = \frac{\log\left(\dfrac{0.3}{1-0.5}\right)}{\log\left(\dfrac{0.5}{1-0.3}\right)} = 1.57 .$$

Παρατηρούμε ότι το 1.57 δεν είναι ακέραιος οπότε το $n^* = \lfloor 1.57 \rfloor + 1 = 2$. Επομένως για n^*=2 η τιμή της μέγιστης αξιοπιστίας γίνεται $R_s(n)$= 0.77.
Από τον Πίνακα 5.1.1 γίνεται προφανές ότι για την συγκεκριμένη τιμή του n η αξιοπιστία του συστήματος είναι η μέγιστη.

Πίνακας 5.1.1
Τιμές της αξιοπιστίας του σειριακού συστήματος για διάφορες τιμές του *n*

n	$R_s(n)$
1	0.2
2	0.77
3	0.218
4	0.18

∎

5.2 Βελτιστοποίηση για το παράλληλο DFM σύστημα

Σε προηγούμενο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στο παράλληλο DFM σύστημα και στον υπολογισμό της αξιοπιστίας του. Επομένως είναι γνωστό ότι η συνάρτηση της αξιοπιστίας του είναι η

$$R_p(n) = (1\text{-}\ q_s)^n - q_o^n$$

όπου n είναι ο αριθμός των μονάδων του συστήματος. Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με προβλήματα βελτιστοποίησης που αφορούν το παράλληλο DFM σύστημα, τέτοια προβλήματα είναι η εύρεση του βέλτιστου αριθμού των μονάδων του όπως και η βελτιστοποίηση του κόστους του συστήματος. Στόχος των προβλημάτων αυτών είναι να έχουμε την μέγιστη αξιοπιστία για το σύστημα.

5.2.1 Βέλτιστος αριθμός μονάδων για το παράλληλο DFM σύστημα

Αναζητούμε αρχικά τον αριθμό των μονάδων του συστήματος ο οποίος θα οδηγήσει το σύστημα στο να αποκτήσει την μέγιστη αξιοπιστία του. Αν ορίσουμε την ποσότητα

$$n_0 = \frac{\log\left(\dfrac{q_s}{1-q_o}\right)}{\log\left(\dfrac{q_o}{1-q_s}\right)}$$

τότε η αξιοπιστία του συστήματος $R_p(n)$ λαμβάνει την μέγιστη τιμή όταν

$$n^* = \begin{cases} \lfloor n_0 \rfloor + 1 & \text{αν } n_0 \text{ δεν είναι ακέραιος} \\ n_0 \ \text{ ή } \ n_0+1 & \text{αν } n_0 \text{ είναι ακέραιος .} \end{cases} \tag{5.2.1}$$

Παρατηρούμε ότι για οποιοδήποτε πεδίο τιμών των q_o και q_s, ο βέλτιστος αριθμός των παράλληλων μονάδων που μεγιστοποιεί την αξιοπιστία του συστήματος είναι η μονάδα, αν ισχύει ότι $q_s > q_o$.

Παράδειγμα 5.2.1. Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα παράλληλο σύστημα αποτελούμενο από n το πλήθος μονάδες. Θα υπολογίσουμε τον βέλτιστο αριθμό των μονάδων για δύο ξεχωριστές περιπτώσεις, για $q_s > q_o$ και για $q_o > q_s$.

Στην πρώτη περίπτωση ισχύει ότι $q_s > q_o$, άρα για δεδομένες τιμές των πιθανοτήτων αποτυχίας τύπου Ι και τύπου ΙΙ, οι οποίες είναι $q_o = 0.2$ και $q_s = 0.6$ αντίστοιχα προκύπτει ότι

$$n_0 = \frac{\log\left(\dfrac{0.6}{0.8}\right)}{\log\left(\dfrac{0.2}{0.4}\right)} = 0.4 \ .$$

Η τιμή 0.4 δεν είναι ακέραιος, επομένως ο βέλτιστος αριθμός μονάδων για το παράλληλο DFM σύστημα είναι $n^* = \lfloor 0.4 \rfloor + 1 = 1$.

Στην δεύτερη περίπτωση όπου $q_o > q_s$, για τις τιμές $q_o = 0.5$ και $q_s = 0.1$ θα ισχύει

$$n_0 = \frac{\log\left(\dfrac{0.1}{0.5}\right)}{\log\left(\dfrac{0.5}{0.9}\right)} = 2.76 \ .$$

Αφού το 2.76 δεν είναι ακέραιος τότε θα ισχύει ότι $n^* = \lfloor 2.76 \rfloor + 1 = 3$. Με αυτόν τον τρόπο επιβεβαιώνεται και αυτό που αναφέραμε προηγουμένως ότι αν $q_s > q_o$ ο βέλτιστος αριθμός των παράλληλων μονάδων που μεγιστοποιούν την αξιοπιστία είναι η μονάδα.

∎

5.2.2 Βελτιστοποίηση κόστους για το παράλληλο DFM σύστημα

Θα εξετάσουμε στην συνέχεια το πρόβλημα της βελτιστοποίησης κόστους για το παράλληλο DFM σύστημα. Αυτό θα γίνει σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις: όταν η αποτυχία τύπου Ι και η αποτυχία τύπου ΙΙ έχουν το ίδιο κόστος και όταν αυτές δεν έχουν το ίδιο κόστος.

- **1η περίπτωση: Η αποτυχία τύπου Ι και η αποτυχία τύπου ΙΙ έχουν το ίδιο κόστος**

Υποθέτουμε ότι κάθε μονάδα του παράλληλου συστήματος έχει κόστος *d* δολάρια και η αποτυχία του συστήματος κοστίζει *c* δολάρια. Αυτό που επιθυμούμε είναι να ελαχιστοποιήσουμε το μέσο κόστος του συστήματος, εφόσον είναι γνωστά τα κόστη αποτυχίας τύπου Ι και τύπου ΙΙ (ανοικτού και κλειστού κυκλώματος αντίστοιχα), υπολογίζοντας τη βέλτιστη τιμή του *n* των μονάδων του συστήματος.

Έστω T_n το συνολικό κόστος του παράλληλου DFM συστήματος. Το μέσο κόστος του συστήματος θα υπολογίζεται από τον ακόλουθο τύπο

$$E(T_n) = dn + c[1 - R_p(n)] \tag{5.2.2}$$

όπου $R_p(n)$ είναι η αξιοπιστία του συστήματος όπως αυτή ορίζεται και στην αρχή της παραγράφου. Για συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών q_o, q_s, c και d αναζητούμε τη βέλτιστη τιμή του n^*, με στόχο την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους. Ο *Pham* (2003) έδωσε το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 5.2.1. *Υπάρχει μία μοναδική τιμή* n^* *που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος του συστήματος, η οποία είναι ίση με*

$$n^* = \inf\{n \le n_1 : (1-q_o)q_o^{\,n} - q_s(1-q_s)^n < d/c\} \tag{5.2.3}$$

όπου $n_1 = \lfloor n_0 \rfloor + 1$ *και* n_0 *η τιμή που δίνεται από τον τύπο* (5.2.1).

- **2η περίπτωση: Η αποτυχία τύπου Ι και η αποτυχία τύπου ΙΙ δεν έχουν το ίδιο κόστος**

Υποθέτουμε ότι κάθε μονάδα του παράλληλου συστήματος έχει κόστος *d* δολάρια και ότι η αποτυχία τύπου Ι και αποτυχία τύπου ΙΙ του συστήματος κοστίζουν c_1 και c_2 δολάρια αντίστοιχα. Τότε το μέσο κόστος του συστήματος είναι ίσο με

$$E(T_n) = dn + c_1 q_o^{\,n} + c_2[1-(1-q_s)^n]. \tag{5.2.4}$$

Ερμηνεύοντας την εξίσωση (5.2.4) παρατηρούμε ότι το μέσο κόστος του συστήματος, μεγέθους *n*, είναι το κόστος που υφίσταται όταν το σύστημα αποτυγχάνει είτε όταν οι μονάδες του είναι ανοιχτές είτε όταν είναι κλειστές και επιπλέον το κόστος όλων των μονάδων στο σύστημα. Για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων q_o, q_s, c_1, c_2 και d μπορούμε να υπολογίσουμε τη βέλτιστη ποσότητα n^*, του αριθμού των μονάδων του συστήματος, με στόχο την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους, χρησιμοποιώντας το επόμενο αποτέλεσμα (*Pham* (2003)).

Θεώρημα 5.2.2. *Υπάρχει μία μοναδική τιμή n^* που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος του συστήματος και αυτή βρίσκεται ως εξής:*

$$n^* = \begin{cases} 1 & \text{αν } n_\alpha \leq 0 \\ n_0 & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases} \qquad (5.2.5)$$

όπου

$$n_0 = \inf\left\{ n \leq n_\alpha : h(n) \leq \frac{d}{c_2 q_s} \right\}$$

και *τα* $h(n)$ *και* n_α *δίνονται από τους παρακάτω τύπους:*

$$h(n) = q_o{}^n \left[\frac{1-q_o}{q_s}\frac{c_1}{c_2} - \left(\frac{1-q_s}{q_o}\right)^n \right], \qquad n_\alpha = \frac{\log\left(\frac{1-q_o}{q_s}\frac{c_1}{c_2}\right)}{\log\left(\frac{1-q_s}{q_o}\right)}.$$

Παράδειγμα 5.2.2. Υποθέτοντας ότι έχουμε τις ακόλουθες τιμές $q_o = 0.5,\ q_s = 0.2,\ c_1 = 1200,\ c_2 = 400,\ d{=}8$. Παρατηρούμε ότι η ποσότητα $\frac{d}{c_2 q_s}$ την οποία συναντούμε στον τύπο του n_0 βρίσκεται ίση με 0.1.

Από τον Πινάκα 5.2.1, ο οποίος προκύπτει εφαρμόζοντας τους παραπάνω τύπους, δίνεται η σχέση των τιμών μεταξύ των ποσοτήτων $h(n)$ και n. Με την βοήθεια αυτού θα υπολογίσουμε το βέλτιστο μέγεθος του συστήματος.

Πίνακας 5.2.1

Τιμές της ποσότητας $h(n)$ για διάφορες τιμές του αριθμό των μονάδων n

n	$h(n)$	$R_p(n)$	$E(T_n)$
1	2.95	0.3	688
2	1.235	0.39	460
3	0.46	0.387	369.2
4	0.05	0.34	347
5	-0.08	0.29	348

Παρατηρούμε ότι $h(4){=}0.05{<}0.1$. Συνεπώς χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.2.2 η βέλτιστη τιμή του n είναι $n^*{=}4$. Άρα όταν το μέγεθος του παράλληλου συστήματος με διαφορετικά κόστη για τις καταστάσεις αποτυχίας είναι τέσσερις μονάδες, τότε ελαχιστοποιείται και μέσο κόστος του συστήματος.

∎

5.3 Βελτιστοποίηση για το παράλληλο-σειριακό DFM σύστημα

Το παράλληλο-σειριακό DFM σύστημα αποτελείται από *m* το πλήθος υποσυστήματα συνδεδεμένα παράλληλα, όπου κάθε ένα από αυτά αποτελείται από *n* όμοιες μονάδες συνδεδεμένες σε σειρά.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάσαμε τον τρόπο υπολογισμού της αξιοπιστίας του, έτσι αυτή θα δίνεται από τον τύπο

$$R_{ps}(n,m) = (1-q_s{}^n)^m - [1-(1-q_o)^n]^m .$$

Επίσης οι πιθανότητες αποτυχίας τύπου I και τύπου II για το σύστημα, οι οποίες μας είναι χρήσιμες στην συνέχεια της παραγράφου, είναι αντίστοιχα οι εξής:

$$F_o(m) = [1-(1-q_o)^n]^m ,\ F_s(m) = 1-(1-q_s{}^n)^m .$$

Εδώ θα εξετάσουμε προβλήματα βελτιστοποίησης για το παράλληλο-σειριακό DFM σύστημα. Τέτοια είναι ο υπολογισμός του βέλτιστου αριθμού των υποσυστημάτων του, η βελτιστοποίηση του κέρδους αλλά και του κόστους του συστήματος, με μοναδικό στόχο της μεγιστοποίηση της αξιοπιστίας.

5.3.1 Βέλτιστος αριθμός υποσυστημάτων για το παράλληλο-σειριακό DFM σύστημα

Αυτό που αναζητούμε είναι ο βέλτιστος αριθμός υποσυστημάτων *m* για τον οποίο το σύστημα αποκτά τη μέγιστη αξιοπιστία. Σε ένα σύστημα όπως το παράλληλο-σειριακό δεν υπάρχει ζεύγος για τις παραμέτρους (*m*,*n*) τέτοιο ώστε να μεγιστοποιεί την αξιοπιστία του συστήματος, αφού αυτή μπορεί να βρεθεί αυθαίρετα κοντά στην μονάδα, με κατάλληλη επιλογή των *m*,*n*. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί με τον ακόλουθο τρόπο:

Ορίζουμε

$$a = \frac{\log q_s - \log(1-q_0)}{\log q_s + \log(1-q_0)}, \qquad M_n = q_s^{-n/(1+a)}, \qquad m_n = \lfloor M_n \rfloor .$$

Για δεδομένο *n*, θεωρούμε ότι $m = m_n$ και αναδιατυπώνουμε τον τύπο της αξιοπιστίας ως εξής:

$$R_{ps}(n,m_n) = (1-q_s{}^n)^{m_n} - [1-(1-q_o)^n]^{m_n} .$$

Παίρνοντας το επόμενο όριο επιβεβαιώνεται ο προηγούμενος ισχυρισμός μας.

$$\lim_{n\to\infty} R_{ps}(n,m_n) = \lim_{n\to\infty} \{(1-q_s{}^n)^{m_n} - [1-(1-q_o)^n]^{m_n}\} = 1 .$$

Για δεδομένες τιμές των παραμέτρων *n*, q_o , q_s μπορούμε να ορίσουμε την τιμή του *m* για την οποία θα μεγιστοποιείται η αξιοπιστία. Για το λόγο αυτό παρουσιάζουμε το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 5.3.1. *Για γνωστά n, q_o , q_s , η μέγιστη τιμή της αξιοπιστίας* $R_{ps}(m)$ *επιτυγχάνεται για το* $m^* = \lfloor m_0 \rfloor + 1$, *όπου*

$$m_0 = \frac{n(\log p_0 - \log q_s)}{\log(1-q_s{}^n) - \log(1-p_0{}^n)} . \tag{5.3.1}$$

Αν το m_0 *είναι ακέραιος αριθμός τότε και τα δύο* m_0 *και* m_0+1 *μεγιστοποιούν την αξιοπιστία* $R_{ps}(m)$.

Παράδειγμα 5.3.1. Έστω ότι έχουμε ένα παράλληλο-σειριακό σύστημα με $n = 3$ μονάδες συνδεδεμένες σε σειρά για κάθε υποσύστημα *m* και πιθανότητες αποτυχίας τύπου I και τύπου II τις $q_0 = 0.1\, q_s = 0.3$ αντίστοιχα. Επίσης $p_0 = 1-q_0 = 0.9$. Θα εφαρμόσουμε τον τύπο (5.3.1) για να υπολογίσουμε το βέλτιστο μέγεθος του συστήματος που μεγιστοποιεί την αξιοπιστία του. Αρχικά υπολογίζουμε την ποσότητα

$$m_0 = \frac{3(\log 0.9 - \log 0.3)}{\log(1-0.3^3) - \log(1-0.9^3)} = \frac{1.44}{0.55} = 2.61 \ .$$

Αφού η τιμή 2.61 δεν είναι ακέραιος τότε θα ισχύει ότι $m^* = \lfloor 2.61 \rfloor + 1 = 2 + 1 = 3$. Επομένως η μέγιστη τιμή της αξιοπιστίας επιτυγχάνεται για ένα σύστημα που αποτελείται από τρία παράλληλα υποσυστήματα με τρείς μονάδες σε σειρά το κάθε ένα.

■

5.3.2 Βελτιστοποίηση κέρδους για το παράλληλο-σειριακό DFM σύστημα

Σε αυτή την υποενότητα σκοπός μας είναι να ορίσουμε τον αριθμό των υποσυστημάτων *m* για τον οποίο θα μεγιστοποιείται το μέσο κέρδος του συστήματος. Θα υιοθετήσουμε τους παρακάτω συμβολισμούς

$A(m)$	μέσο κέρδος συστήματος
β	δεσμευμένη πιθανότητα ότι το σύστημα βρίσκεται σε αποτυχία τύπου I (ανοιχτό κύκλωμα), δεδομένου ότι το σύστημα αποτυγχάνει.
1-β	δεσμευμένη πιθανότητα ότι το σύστημα βρίσκεται σε αποτυχία τύπου II (κλειστό κύκλωμα), δεδομένου ότι το σύστημα αποτυγχάνει.
c_1,c_3	κέρδος από την μη αποτυχία τύπου I, II του συστήματος αντίστοιχα.
c_2,c_4	κέρδος από την αποτυχία του συστήματος τύπου I, II αντίστοιχα.

Θεωρούμε ότι $c_1 > c_2$ και $c_3 > c_4$.

Το μέσο κέρδος του συστήματος δίνεται από τον τύπο

$$A(m) = \beta\{c_1[1-F_o(m)] + c_2F_o(m)\} + (1-\beta)\{c_3[1-F_s(m)] + c_4F_s(m)\} \ . \quad (5.3.2)$$

Αν θέσουμε

$$\alpha = \frac{\beta(c_1-c_2)}{(1-\beta)(c_3-c_4)} \quad \text{και} \quad b = \beta c_1 + (1-\beta)c_4$$

ο τύπος (5.3.2) αναδιατυπώνεται ως εξής:

$$A(m) = (1-\beta)(c_3-c_4) \times \{[1-F_s(m)] - \alpha F_o(m)\} + b \ .$$

Όταν έχουμε ίδιο κόστος και για τις δύο καταστάσεις αποτυχίας του συστήματος όπως επίσης και όταν το σύστημα μπορεί με την ίδια πιθανότητα να έχει ανοιχτές και κλειστές μονάδες, τότε το κριτήριο βελτιστοποίησης είναι το ίδιο με αυτό που χρησιμοποιήσαμε για την μεγιστοποίηση της αξιοπιστίας του συστήματος. Για δεδομένη τιμή του *n* θέλουμε να υπολογίσουμε τη βέλτιστη τιμή του *m*, η οποία μεγιστοποιεί το μέσο κέρδος του συστήματος (είναι φυσικό να περιμένουμε ότι θα εξαρτάται από τις παραμέτρους q_0, q_s).

Ορίζουμε την ποσότητα

$$m_0 = \frac{\ln a + n\ln\left(\dfrac{1-q_o}{q_s}\right)}{\ln\left[\dfrac{1-q_s{}^n}{1-(1-q_o)^n}\right]}.$$

Θεώρημα 5.3.2. *Θεωρούμε γνωστά τα* β, n, q_o, q_s *και* c_i *για* i=1,2,3,4. *Η μέγιστη τιμή για το μέσο κέρδος του συστήματος* $A(m)$ *θα λαμβάνεται για το βέλτιστο* m^*.

$$m^* = \begin{cases} 1 & \text{αν } m_0<0 \\ \lfloor m_0 \rfloor + 1 & \text{αν } m_0 \geq 0. \end{cases} \tag{5.3.3}$$

Αν το m_0 *είναι ένας μη-αρνητικός ακέραιος, η χαμηλότερη τιμή θα παρέχει τον πιο οικονομικό βέλτιστο σχηματισμό για το σύστημα.*

Θεώρημα 5.3.3. *Για γνωστές τιμές των παραμέτρων* n, c_1, c_2, c_3, c_4 *οδηγούμαστε στις εξής διαπιστώσεις*

- *Αν* $\alpha \geq 1$, *τότε το βέλτιστο μέγεθος υποσυστήματος* m^* *είναι μία αύξουσα συνάρτηση του* q_o.
- *Αν* $\alpha \leq 1$, *τότε το βέλτιστο μέγεθος υποσυστήματος* m^* *είναι μία φθίνουσα συνάρτηση του* q_s.
- *Το βέλτιστο μέγεθος υποσυστήματος* m^* *είναι μία αύξουσα συνάρτηση του β.*

Αξίζει να σημειώσουμε ότι δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα ζεύγος παραμέτρων (m,n) τέτοιο ώστε να μεγιστοποιεί το μέσο κέρδος του συστήματος, αφού όπως φαίνεται στο επόμενο Θεώρημα το μέσο κέρδος $A(m)$ μπορεί να βρεθεί αυθαίρετα κοντά στην τιμή $\beta c_1 + (1-\beta)c_3$.

Θεώρημα 5.3.4. *Με δεδομένες τις παραμέτρους* q_o, q_s *ισχύει ότι*

$$\lim_{n\to\infty} A(m_n) = \beta c_1 + (1-\beta)c_3.$$

5.3.3 Βελτιστοποίηση κόστους για το παράλληλο-σειριακό DFM σύστημα

Σε αυτή την υποενότητα έχουμε ως στόχο να δημιουργήσουμε ένα σχηματισμό, ο οποίος θα έχει ως αντικείμενό του την ελαχιστοποίηση του μέσου συνολικού κόστους του συστήματος, δεδομένου ότι τα κόστη των καταστάσεων αποτυχίας δεν είναι απαραίτητα τα ίδια. Στην ουσία ψάχνουμε την καλύτερη επιλογή για τον αριθμό m των υποσυστημάτων που θα μας οδηγήσει σε αυτό το αποτέλεσμα.

Υιοθετούμε τους ακόλουθους συμβολισμούς

d	κόστος κάθε μονάδας
c_1	κόστος στην περίπτωση που το σύστημα εμφανίζει αποτυχία τύπου I (ανοιχτό κύκλωμα)

c_2	κόστος στην περίπτωση που το σύστημα εμφανίζει αποτυχία τύπου ΙΙ (κλειστό κύκλωμα)
$T(m)$	συνολικό κόστος συστήματος
$E[T(m)]$	μέσο συνολικό κόστος συστήματος

Το μέσο κόστος του συστήματος είναι το ακόλουθο

$$E[T(m)] = dnm + c_1 F_o(m) + c_2 F_s(m). \tag{5.3.4}$$

Στην ουσία το μέσο κόστος του συστήματος είναι το κόστος όταν το σύστημα αποτυγχάνει είτε όταν οι μονάδες του είναι ανοιχτές είτε όταν είναι κλειστές και επιπλέον το κόστος όλων του μονάδων του συστήματος .

Ορίζουμε τις ποσότητες

$$h(m) = [1-(p_o)^n]^m \left[c_1 p_o^{\,n} - c_2 q_s^{\,n} \left(\frac{1-q_s^{\,n}}{1-p_o^{\,n}} \right)^m \right]$$

$$m_1 = \inf\{m < m_2 : h(m) < dn\}$$

$$m_2 = \left\lfloor \frac{\ln\left[\dfrac{c_1}{c_2} \left(\dfrac{p_o}{q_s} \right)^n \right]}{\ln\left(\dfrac{1-q_s^{\,n}}{1-p_o^{\,n}} \right)} \right\rfloor + 1.$$

Διαπιστώνουμε ότι η $h(m)$ είναι θετική $h(m) > 0$ αν και μόνο αν

$$c_1 p_o^{\,n} > c_2 q_s^{\,n} \left(\frac{1-q_s^{\,n}}{1-p_o^{\,n}} \right)^m$$

ή ισοδύναμα αν $m < m_2$. Συνεπώς η συνάρτηση $h(m)$ μειώνεται ως προς m για όλα τα $m < m_2$. Για γνωστό n, μπορούμε να καθορίσουμε την βέλτιστη τιμή του m , που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος του συστήματος, με χρήση του επόμενου αποτελέσματος.

Θεώρημα 5.3.5. *Θεωρούμε δεδομένες τις παραμέτρους q_o, q_s, c_1, c_2, d. Τότε υπάρχει μοναδική τιμή m^* τέτοια ώστε να ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο κόστος του συστήματος. Πιο συγκεκριμένα*

- *Αν $m_2 > 0$ τότε η βέλτιστη τιμή δίνεται από τον τύπο*

$$m^* = \begin{cases} m_1 & \text{αν } E\left[T(m_1)\right] \le E\left[T(m_2)\right] \\ m_2 & \text{αν } E\left[T(m_1)\right] > E\left[T(m_2)\right]. \end{cases} \tag{5.3.5}$$

- *Αν $m_2 \le 0$ τότε $m^* = 1$.*

Παράδειγμα 5.3.2. Έστω ότι έχουμε τις εξής τιμές για τις παραμέτρους μας n=5, d=10, c_1=500, c_2=700, q_s=0.1, q_o=0.2. Αρχικά θα υπολογίσουμε την παράμετρο m_2 από τον τύπο που ορίσαμε προηγουμένως. Κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις έχουμε ότι m_2=26 και αφού $m_2 > 0$, θα εφαρμόσουμε την σχέση (5.3.5) για να βρούμε την βέλτιστη τιμή. Με τη βοήθεια του Πινάκα 5.3.1 ο οποίος μας δίνει για διάφορες τιμές του m τις τιμές των ποσοτήτων $h(m)$ και του αναμενόμενου κόστους $E[T(m)]$ θα βρούμε το βέλτιστο μέγεθος του συστήματος.

Πίνακας 5.3.1
Τιμές των ποσοτήτων $h(m)$ και $E[T(m)]$ για διάφορες τιμές του m (Pham (2003))

m	$h(m)$	$E[T(m)]$
1	110.146	386.17
2	74.051	326.02
3	49.784	301.97
4	33.469	302.19
5	22.499	318.71
6	15.124	346.22
7	10.166	381.10
8	6.832	420.93

Βρίσκουμε τις τιμές των παραμέτρων m_1 και m_2 από τους τύπους που δόθηκαν προηγουμένως. Έχουμε m_2=26 και με τη βοήθεια του Πίνακα 5.3.1, παρατηρούμε ότι $m_1 = \inf\{m < 26 : h(m) < 50\} = 3$, $E[T(m_1)] = 301.97$. Αφού m_2=26, το $E[T(m_2)] = 1300.20$. Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 5.3.5, συμπεραίνουμε ότι η βέλτιστη τιμή του αριθμού των υποσυστημάτων του συστήματος, η οποία ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο κόστος του είναι το 3 και η τιμή του αναμενόμενου συνολικού κόστους του είναι 301.97. Αυτό σημαίνει ότι ένα παράλληλο-σειριακό DFM σύστημα επιτυγχάνει να ελαχιστοποιήσει το κόστος του, όταν αυτό αποτελείται από τρία υποσυστήματα.

∎

5.4 Βελτιστοποίηση για το σειριακό-παράλληλο DFM σύστημα

Σε προηγούμενα κεφάλαια αναφερθήκαμε στην δομή του σειριακού-παράλληλού DFM συστήματος, όπως επίσης και στον υπολογισμό της αξιοπιστίας του. Επομένως η συνάρτηση της αξιοπιστίας του είναι γνωστή και δίνεται από τον τύπο

$$R_{sp}(n,m) = (1-q_o{}^n)^m - [1-(1-q_s)^n]^m .$$

Ένα ακόμα γνωστό στοιχείο είναι οι πιθανότητες αποτυχίας τύπου I και τύπου II του συστήματος, αυτές δίνονται από τους εξής τύπους

$$F_o(m) = 1-(1-q_o{}^n)^m \quad \text{και} \quad F_s(m) = [1-(1-q_s)^n]^m .$$

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με θέματα βελτιστοποίησης που άπτονται του σειριακού-παράλληλού DFM συστήματος, όπως η εύρεση του βέλτιστου αριθμού των υποσυστημάτων και η βελτιστοποίηση του κέρδους με σκοπό το σύστημα να αποκτήσει την μέγιστη αξιοπιστία.

5.4.1 Βέλτιστος αριθμός υποσυστημάτων για το σειριακό-παράλληλο DFM σύστημα

Στην υποενότητα αυτή, που αφορά τα σειριακά-παράλληλα συστήματα τα οποία αποτελούνται από *m* υποσυστήματα σε σειρά, με το καθένα από αυτά να έχει *n* μονάδες συνδεδεμένες παράλληλα θα καθορίσουμε τον βέλτιστο αριθμό υποσυστημάτων που θα μεγιστοποιεί την αξιοπιστία του συστήματος. Επίσης αξίζει να σημειωθεί ότι όπως έδειξαν οι *Barlow et al* (1963) δεν υπάρχει ζεύγος των παραμέτρων (*m*,*n*) τέτοιο ώστε να μεγιστοποιεί την αξιοπιστία του συστήματος για δεδομένες τιμές των q_0, q_s. Ωστόσο για δεδομένη τιμή του *n* μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό των υποσυστημάτων που οδηγεί το σύστημα στην μέγιστη αξιοπιστία.

Θεώρημα 5.4.1. *Θεωρώντας δεδομένες τιμές για τις παραμέτρους* n, q_o, q_s, *η αξιοπιστία* $R(m)$ *του συστήματος παίρνει την μέγιστη τιμή της για* m^* *το πλήθος υποσυστήματα, με*

$$m^* = \lfloor m_0 \rfloor + 1 \quad \text{και} \quad m_0 = \frac{n(\log p_s - \log q_o)}{\log(1-q_o{}^n) - \log(1-p_s{}^n)} . \qquad (5.4.1)$$

Αν το m_0 *είναι ακέραιος, τότε αμφότερα τα* m_0 *και* m_0+1 *μεγιστοποιούν την αξιοπιστία.*

5.4.2 Βελτιστοποίηση κέρδους για το σειριακό-παράλληλο DFM σύστημα

Το ζήτημα που αντιμετωπίζουμε εδώ είναι ο προσδιορισμός της «καλύτερης» τιμής του *m,* η οποία θα μεγιστοποιεί το αναμενόμενο κέρδος του συστήματος υπό τον περιορισμό ενός σφάλματος σχεδιασμού Τύπου Ι (αποτυχία τύπου Ι) και την επίδραση των υπολοίπων παραγόντων του συστήματος σε αυτό.
Εισάγουμε τις εξής έννοιες

$P(m)$	μέσο κέρδος συστήματος
β	δεσμευμένη πιθανότητα ότι το σύστημα βρίσκεται σε αποτυχία τύπου Ι (ανοικτό κύκλωμα), δεδομένου ότι το σύστημα αποτυγχάνει.
1-β	δεσμευμένη πιθανότητα ότι το σύστημα βρίσκεται σε αποτυχία τύπου ΙΙ (κλειστό κύκλωμα), δεδομένου ότι το σύστημα αποτυγχάνει.
c_1	κέρδος από την μη αποτυχία τύπου Ι του συστήματος.
c_2	κέρδος από την αποτυχία τύπου Ι του συστήματος.
c_3	κέρδος από την μη αποτυχία τύπου ΙΙ του συστήματος.
c_4	κέρδος από την αποτυχία τύπου ΙΙ του συστήματος.

Υποθέτουμε ότι ισχύουν $c_1 > c_2$ και $c_3 > c_4$. Τότε το μέσο κέρδος του συστήματος δίνεται από την σχέση

$$P(m) = \beta\{c_1[1-F_o(m)] + c_2F_o(m)\} + (1-\beta)\{c_3[1-F_s(m)] + c_4F_s(m)\} . \qquad (5.4.2)$$

Αν εισάγουμε τις εξής ποσότητες:

$$\alpha = \frac{\beta(c_1 - c_2)}{(1-\beta)(c_3 - c_4)} \quad \text{και} \quad b = \beta c_1 + (1-\beta)c_4$$

η εξίσωση του μέσου κόστους (5.4.2) θα επαναδιατυπωθεί ως

$$P(m) = (1-\beta)(c_3 - c_4) \times [1 - F_s(m) - \alpha F_o(m)] + b\,.$$

Ορίζοντας

$$m_0 = \frac{n \ln\left(\dfrac{1-q_s}{q_o}\right) - \ln\alpha}{\ln\left[\dfrac{1-q_o{}^n}{1-(1-q_s)^n}\right]}\,.$$

αποδεικνύεται το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 5.4.2. *Για δεδομένες τιμές των παραμέτρων* β, n, q_o, q_s *και* c_i για i=1,2,3,4, *η μέγιστη τιμή του αναμενόμενου κέρδους επιτυγχάνεται για*

$$m^* = \begin{cases} 1 & \text{αν } m_0 < 0 \\ \lfloor m_0 \rfloor + 1 & \text{αν } m_0 \geq 0. \end{cases} \tag{5.4.3}$$

Αν $m_0 \geq 0$ και m_0 *είναι ακέραιος αμφότερα τα* m_0 *και* $m_0 + 1$ *μεγιστοποιούν το μέσο κέρδος του συστήματος. Επίσης αν συμβαίνει αυτό, τότε η μικρότερη τιμή από τις δύο αντιστοιχεί σε μικρότερο κόστος.*

Με βάση την τελευταία παρατήρηση θα είχε νόημα να εξετάσουμε πως επηρεάζεται το m_0 σε σχέση με τις παραμέτρους q_0, q_s.

Θεώρημα 5.4.3. *Ας υποθέσουμε ότι τα δεδομένα μας είναι το πλήθος των μονάδων* n *για κάθε ένα υποσύστημα όπως επίσης και τα κόστη επιτυχίας και αποτυχίας του συστήματος και για τις δύο καταστάσεις αποτυχίας, είναι* c_i *για* i=1,2,3,4.

1) *Αν* $\alpha \geq 1$, *τότε το βέλτιστο μέγεθος υποσυστήματος* m^* *είναι μία φθίνουσα συνάρτηση του* q_o.

2) *Αν* $\alpha \leq 1$, *τότε το βέλτιστο μέγεθος υποσυστήματος* m^* *είναι μία αύξουσα συνάρτηση του* q_s.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.4.3, όταν το q_o αυξάνεται θα πρέπει να μειώσουμε τον αριθμό των υποσυστημάτων *m* όσο το δυνατόν γίνεται πιο κοντά στη μονάδα. Από την άλλη πλευρά όταν το q_s αυξάνεται, το μέσο κέρδος του συστήματος αυξάνεται σύμφωνα με τον αριθμό των υποσυστημάτων.

Επίσης σύμφωνα με το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 5.4.2, αν εφαρμοστεί ο βέλτιστος σχεδιασμός θα οδηγηθούμε σε σφάλμα σχεδιασμού Τύπου Ι (αποτυχία τύπου Ι) που μπορεί να μην είναι αποδεκτό από την πολιτική του σχεδιασμού.
Αξίζει να αναφερθεί ότι, όσο πιο πολλά υποσυστήματα προσθέτουμε στο σύστημα, τόσο αυξάνεται και η πιθανότητα αποτυχίας τύπου Ι. Εντούτοις μειώνουμε την πιθανότητα αποτυχίας τύπου ΙΙ με το να τοποθετούμε επιπλέον υποσυστήματα σε σειρά. Επομένως το ζητούμενό μας είναι να προσδιορίσουμε τον βέλτιστο αριθμό υποσυστημάτων που θα μεγιστοποιεί το αναμενόμενο κέρδος του συστήματος με

τέτοιο τρόπο ώστε η πιθανότητα του σφάλματος Τύπου Ι του συστήματος να είναι το πολύ *α*.

Στην περίπτωση όπου $F_o(m) \le \alpha$ θα ισχύει ο τύπος (5.4.3) για τον βέλτιστο αριθμό υποσυστημάτων. Σε κάθε άλλη περίπτωση χρησιμοποιούμε το παρακάτω πόρισμα για την εύρεση του βέλτιστου *m*.

Πόρισμα 5.4.1. *Θεωρούμε γνωστές τιμές για τις παραμέτρους* β, n, q_o, q_s, c_i, *i*=1,2,3,4. *Η βέλτιστη τιμή του m, η* m^*, *που μεγιστοποιεί το μέσο κέρδος του συστήματος υπό τον περιορισμό ενός σφάλματος σχεδιασμού Τύπου Ι, έστω α, θα δίνεται από τον τύπο*

$$m^* = \begin{cases} 1 & ,\text{αν } \min\{\lfloor m_0 \rfloor, \lfloor m_1 \rfloor\} \\ \min\{\lfloor m_0 \rfloor + 1, \lfloor m_1 \rfloor\} & ,\text{αλλιώς} \end{cases} \tag{5.4.4}$$

όπου $\lfloor m_0 \rfloor + 1$ *είναι η λύση που βρίσκεται μέσω του Θεωρήματος* 5.4.2 *και*

$$m_1 = \frac{\ln(1-\alpha)}{\ln(1-q_o{}^n)}.$$

5.5 Βελτιστοποίηση για το *k*-από-τα-*n*:DFM σύστημα

Βασιζόμενοι στο δεύτερο κεφάλαιο και πιο συγκεκριμένα στην παράγραφο 2.5 όπου παρουσιάζουμε τον τρόπο υπολογισμού της αξιοπιστίας για το *k*-από-τα-*n*:DFM σύστημα, η συνάρτηση αξιοπιστίας του είναι η εξής

$$R(k,n) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} q_s{}^i p_s{}^{n-i} - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} p_o{}^i q_o{}^{n-i}.$$

Επίσης οι πιθανότητες αποτυχίας τύπου Ι και τύπου ΙΙ για το σύστημα είναι αντίστοιχα

$$F_o(k,n) = \sum_{i=n-k+1}^{n} \binom{n}{i} q_o{}^i p_o{}^{n-i} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} p_o{}^i q_o{}^{n-i}$$

$$F_s(k,n) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} q_s{}^i p_s{}^{n-i} = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} q_s{}^i p_s{}^{n-i}.$$

Στην παρούσα παράγραφο θα ασχοληθούμε με τον προσδιορισμό των βέλτιστων τιμών του αριθμό των μονάδων *n*, *k*, όπως επίσης και με την βελτιστοποίηση του μέσου κόστους του συστήματος. Οι συγκεκριμένες βέλτιστες τιμές μεγιστοποιούν την αξιοπιστία του συστήματος.

5.5.1 Βέλτιστες τιμές για τον αριθμό των μονάδων *n* και *k* για το *k*-από-τα-*n* DFM σύστημα

Αρχικά θα προσδιορίσουμε τον βέλτιστο αριθμό μονάδων *n*, για δεδομένη τιμή του *k*, ενώ στη συνέχεια θα εργασθούμε αντίστροφα, που σημαίνει ότι θα υπολογίσουμε τον βέλτιστο αριθμό μονάδων *k*, για δεδομένη τιμή του *n*. Έτσι μέσα από τα Θεωρήματα 5.5.1 και 5.5.2 που παρουσιάζονται παρακάτω θα υπολογίσουμε τις ζητούμενες τιμές για τα *n* και *k* .

Θεώρημα 5.5.1. *Ας θεωρήσουμε γνωστές τις τιμές των k,* q_o, q_s. *Τότε η μέγιστη τιμή της αξιοπιστίας επιτυγχάνεται για* $n^* = \lfloor n_0 \rfloor$, *όπου*

$$n_0 = k\left[1 + \frac{\log\left(\dfrac{1-q_o}{q_s}\right)}{\log\left(\dfrac{1-q_s}{q_o}\right)}\right]. \tag{5.5.1}$$

Αν το n_0 *είναι ακέραιος, τότε και τα δύο* n_0 *και* n_0+1 *μεγιστοποιούν την αξιοπιστία. Σε αυτή την περίπτωση η μικρότερη τιμή θα μας δώσει τον οικονομικότερο βέλτιστο σχεδιασμό για το σύστημα.*

Αν ισχύει ότι $q_o = q_s$, δηλαδή η πιθανότητα αποτυχίας των μονάδων και για τις δύο καταστάσεις (ανοιχτές, κλειστές μονάδες) είναι ίδια, η αξιοπιστία του συστήματός μας θα παίρνει την μέγιστη τιμή της για $n = 2k$ ή $2k-1$.

Θα κάνουμε ορισμένες παρατηρήσεις για το Θεώρημα 5.5.1: Η βέλτιστη τιμή n^* είναι αύξουσα συνάρτηση του q_o και φθίνουσα συνάρτηση του q_s. Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι καθώς το q_s αυξάνεται, είναι θεμιτό να μειώσουμε τον αριθμό των μονάδων του συστήματος όσο το δυνατόν πιο κοντά στην τιμή του *k*. Ακόμη όταν το q_o αυξάνεται, με την αύξηση του αριθμού των μονάδων θα έχουμε αύξηση και στην αξιοπιστία του συστήματος.
Στην περίπτωση που θεωρούμε γνωστό το *n* μπορούμε να προσδιορίσουμε την βέλτιστη τιμή του *k*, η οποία μεγιστοποιεί την αξιοπιστία του συστήματος. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 5.5.2. *Για δεδομένες τιμές των n,* q_o, q_s, *η μέγιστη τιμή της αξιοπιστίας προκύπτει για* $k^* = \lfloor k_0 \rfloor + 1$, *όπου*

$$k_0 = n\frac{\log\left(\dfrac{q_o}{p_s}\right)}{\log\left(\dfrac{q_o q_s}{p_s p_o}\right)}. \tag{5.5.2}$$

Αν το k_0 *είναι ακέραιος, τότε και τα δύο* k_0 *και* k_0+1 *μεγιστοποιούν την αξιοπιστία* $R(k,n)$.

5.5.2 Βελτιστοποίηση μέσου κόστους για το *k*-από-τα-*n*:DFM σύστημα

Για την εύρεση του αριθμού των μονάδων *n*, *k* του συστήματος με στόχο την ελαχιστοποίηση του κόστους θα χρησιμοποιήσουμε τους εξής συμβολισμούς

d	κόστος κάθε μονάδας (εξαρτήματος)
c_1	κόστος όταν υπάρχει αποτυχία τύπου I
c_2	κόστος όταν υπάρχει αποτυχία τύπου II

Το μέσο συνολικό κόστος συστήματος $E[T(k,n)]$ εκφράζεται από την σχέση:

$$E[T(k,n)] = dn + [c_1F_o(k,n) + c_2F_s(k,n)]. \tag{5.5.3}$$

Άρα το μέσο κόστος του συστήματος είναι, το κόστος όλων των μονάδων του συστήματος (dn) όπως επίσης το μέσο κόστος της αποτυχίας τύπου Ι του συστήματος $(c_1F_o(k,n))$ και το μέσο κόστος της αποτυχίας τύπου ΙΙ του συστήματος $(c_2F_s(k,n))$.

Τώρα λοιπόν μπορούμε να μελετήσουμε το πρόβλημα της εύρεσης του βέλτιστου σχεδιασμού του συστήματος, όταν ο στόχος μας είναι να ελαχιστοποιηθεί το μέσο συνολικό κόστος του συστήματος. Επομένως θα πρέπει να προσδιορίσουμε το βέλτιστο k (k^*), το βέλτιστο n (n^*) αλλά και ένα βέλτιστο ζεύγος των k και n (k^*, n^*), έτσι ώστε όλα τα παραπάνω να ελαχιστοποιούν το μέσο κόστος του συστήματος.
Έστω k_0 η επόμενη ποσότητα

$$k_o = \frac{\log\left(\frac{c_2}{c_1}\right) + n\log\left(\frac{p_s}{q_o}\right)}{\log\left(\frac{p_op_s}{q_oq_s}\right)}. \tag{5.5.4}$$

Θεώρημα 5.5.3 *Για συγκεκριμένες τιμές των n, q_o, q_s, c_1, c_2 και d, η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης του μέσου κόστους $E[T(k,n)]$ λαμβάνεται όταν*

$$k^* = \begin{cases} \max\{1, \lfloor k_0 \rfloor + 1\} & \text{αν } k_0 < n \\ n & \text{αν } k_0 \geq n. \end{cases} \tag{5.5.5}$$

Εάν το k_0 είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε και το k_0 και το k_0+1 ελαχιστοποιούν τη συνάρτηση του μέσου κόστους $E[T(k,n)]$.

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι η βέλτιστη τιμή του k (k^*), εξαρτάται από τις πιθανότητες αποτυχίας μιας μονάδας όταν αυτή είναι ανοιχτή, κλειστή (q_o, q_s) αντίστοιχα. Το επόμενο Πόρισμα δείχνει τον τρόπο που μεταβάλλεται η βέλτιστη τιμή k^* συναρτήσει των q_o και q_s.

Πόρισμα 5.5.1. *Έστω μία συγκεκριμένη τιμή για το n*

- *Εάν $c_1 \geq c_2$ τότε η τιμή του k^* μειώνεται ως προς το q_o*
- *Εάν $c_1 \leq c_2$ τότε η τιμή του k^* αυξάνεται ως προς το q_s.*

Αυτό το αποτέλεσμα δηλώνει πως εάν το κόστος της αποτυχίας τύπου Ι του συστήματος είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το κόστος της αποτυχίας τύπου ΙΙ τότε όσο το q_o αυξάνεται τόσο είναι επιθυμητό να μειωθεί το k και να έρθει όσο το δυνατόν πιο κοντά στη μονάδα. Ομοίως εάν το κόστος αποτυχίας τύπου Ι είναι μικρότερο ή ίσο με το κόστος αποτυχίας τύπου ΙΙ τότε όσο το q_s θα αυξάνεται, θα πρέπει να αυξήσουμε την τιμή του k ώστε να βρεθεί όσο το δυνατόν πιο κοντά στο n γίνεται.

Θα εξετάσουμε στην συνέχεια το πρόβλημα της εύρεσης της βέλτιστης τιμής του n για δεδομένη τομή του k.

Ορίζουμε αρχικά τις επόμενες ποσότητες:

$$a=\frac{c_1}{c_2},\quad n_0=\frac{\log\alpha+k\log\left(\dfrac{p_o p_s}{q_o q_s}\right)}{\log\left(\dfrac{p_s}{q_o}\right)}-1,\quad n_1=\left\lceil\frac{k-1}{1-q_o}-1\right\rceil,$$

$$B=\alpha\left(\frac{p_o p_s}{q_o q_s}\right)^k\frac{q_o}{p_s},\quad f(n)=\left(\frac{p_s}{q_o}\right)^n\frac{(n+1)q_s-(k-1)}{(n+1)p_o-(k-1)},\quad n_2=f^{-1}(B)\ \text{για}\ k\le n_2\le n_1$$

$$n_3=\inf\left\{n\in[n_2,n_0]:h(n)<\frac{d}{c_2}\right\},\quad h(n)=\binom{n}{k-1}p_o^k q_o^{n-k+1}\times\left[a-\left(\frac{q_o q_s}{p_s p_o}\right)^k\left(\frac{p_s}{q_o}\right)^{n+1}\right].$$

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση $h(n)$ είναι θετική για όλα τα $k\le n\le n_o$, ότι είναι αύξουσα για $n\in[k,n_2)$ και φθίνουσα για $n\in[n_2,n_0]$. Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει ότι η συνάρτηση $h(n)$ έχει ένα μόνο μέγιστο και η μέγιστη αυτή τιμή επιτυγχάνεται όταν $n=n_2$. Εφόσον ισχύει $n_2\le n_1$, όταν η πιθανότητα αποτυχίας τύπου I της μονάδας q_o είναι σχετικά μικρή, τότε οι ποσότητες n_1,n_2 θα γίνονται περίπου ίσες με k, άρα $n_1\approx k$, $n_2\approx k$. Από την άλλη πλευρά για δεδομένη τιμή του q_o, μπορεί να βρει κανείς μία τιμή n_2 τέτοια ώστε $k\le n_2\le n_1$, με τη χρήση δυαδικής αναζήτησης (binary search).

Θεώρημα 5.5.4 *Θέτουμε συγκεκριμένες τιμές για τα q_o,q_s,k,d,c_1 και c_2. Η βέλτιστη τιμή του n, έστω n^*, τέτοια ώστε το σύστημα να ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο συνολικό κόστος είναι η $n^*=k$, εάν $n_0\le k$. Έστω τώρα ότι $n_0>k$. Τότε η βέλτιστη τιμή του n προσδιορίζεται ως εξής:*

- Αν $h(n_2)<\dfrac{d}{c_2}$, *τότε* $n^*=k$
- Αν $h(n_2)\ge\dfrac{d}{c_2}$ *και* $h(k)\ge\dfrac{d}{c_2}$, *τότε* $n^*=n_3$ (5.5.6)
- Αν $h(n_2)\ge\dfrac{d}{c_2}$ *και* $h(k)<\dfrac{d}{c_2}$, *τότε*

$$n^*=\begin{cases}k & \text{αν } E\left[T(k,k)\right]\le E[T(k,n_3)]\\ n_3 & \text{αν } E\left[T(k,k)\right]>E[T(k,n_3)].\end{cases}$$

Όσον αφορά τις πρακτικές εφαρμογές, η πιθανότητα αποτυχίας τύπου I μιας μονάδας q_o είναι συχνά πολύ μικρή, και έτσι η τιμή του n_1 είναι κοντά στο k. Οπότε ο αριθμός των υπολογισμών για την εύρεση της τιμής του n_2 είναι αρκετά μικρός.

Ως εκ τούτου το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 5.5.3 μπορεί εύκολα να εφαρμοστεί στη πράξη.

Συνεχίζοντας θέλουμε να προσδιορίσουμε ένα βέλτιστο ζεύγος (k^*, n^*), (υποθέτουμε ότι οι παράμετροι αυτοί είναι άγνωστοι) τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος του συστήματος, όταν το κόστος των μονάδων και τα κόστη των αποτυχιών του συστήματος είναι γνωστά.

Ορίζοντας τις ποσότητες *α,β* με τους εξής τύπους

$$\alpha = \frac{\log(p_s / q_o)}{\log(p_o p_s / q_o q_s)} \quad \text{και} \quad \beta = \frac{\log(c_2 / c_1)}{\log(p_o p_s / q_o q_s)}$$

ο *Pham* (2003) απέδειξε το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 5.5.5 *Για συγκεκριμένες τιμές για τις παραμέτρους* q_o, q_s, d, c_1 *και* c_2, *υπάρχει ένα βέλτιστο ζεύγος τιμών* (k_n, n), *έστω* (k_{n^*}, n^*), *τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιείται το μέσο συνολικό κόστος του συστήματος. Για το ζεύγος αυτό ισχύουν οι σχέσεις*

$$k_n^* = \lfloor n^* a \rfloor, \text{ όπου } n^* \leq \frac{\dfrac{(1-q_o-q_s)}{2\pi}\left(\dfrac{c_1}{d}\right)^2 + 1 + \beta}{\alpha(1-\alpha)} \quad . \tag{5.5.7}$$

Με βάση το Θεώρημα 5.5.5 προκύπτει ένα άνω όριο για το βέλτιστο μέγεθος του συστήματος.

5.6 Βελτιστοποίηση για το ψηφιακό τηλεπικοινωνιακό σύστημα με ατελείς συσκευές απόφασης

Στην παράγραφο 2.8 παρουσιάσαμε ψηφιακά τηλεπικοινωνιακά συστήματα με ατελείς συσκευές απόφασης, προσδιορίζοντας την αξιοπιστία του συστήματος. Ένα ψηφιακό σύστημα αποτελείται από *n* κανάλια, όπου καθένα από αυτά μεταδίδει και ένα ληφθέν ψηφίο, αυτό μπορεί να είναι 0 ή 1. Η απόφαση για το ποιό ψηφίο θα είναι το αποτέλεσμα του συστήματος λαμβάνεται από μία συσκευή απόφασης (voter).

Οι συμβολισμοί που ορίσαμε και στο δεύτερο κεφάλαιο ισχύουν και εδώ.

n	αριθμός καναλιών (μονάδες, υποσυστήματα).
k	κατώφλι *k*, $1 \leq k \leq n$, (οριακή τιμή που είναι καθοριστική για την λειτουργία του συστήματος).
β_i	πιθανότητα ότι το ψηφίο *i* εισέρχεται στο σύστημα, $\beta_1 + \beta_0 = 1$.
p_{ij}	πιθανότητα ότι ένα κανάλι μεταβιβάζει το ψηφίο *i* δεδομένου πώς το ψηφίο *j* εισέρχεται σε αυτό.
r_0	πιθανότητα ότι η συσκευή απόφασης μεταβιβάζει το ψηφίο 0 δεδομένου ότι λιγότερο από k κανάλια μεταβιβάζουν το ψηφίο 1, $r_0 = P(C_0 \mid A_0 B_0), (1-r_0) = P(C_1 \mid A_0 B_0)$.

r_1	πιθανότητα ότι η συσκευή απόφασης μεταβιβάζει το ψηφίο 1 δεδομένου ότι τουλάχιστον k κανάλια μεταβιβάζουν το ψηφίο 1, $r_0 = P(C_1 \mid A_1 B_1), (1-r_1) = P(C_0 \mid A_1 B_1)$.
$R(k,n)$	αξιοπιστία του συστήματος.

Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση αξιοπιστίας δίνεται από τον τύπο

$$R(k,n) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \left[\beta_0 p_{10}^{i} p_{00}^{n-i} - \beta_1 p_{11}^{i} p_{01}^{n-i} \right] + \beta_1 .$$

Θα δώσουμε στη συνέχεια ορισμένα αποτελέσματα που απέδειξε ο *Pham* (1997) σχετικά με τον βέλτιστο αριθμό των μονάδων του συστήματος, οποίος μεγιστοποιεί την τιμή της αξιοπιστίας.

Η δομή των ψηφιακών συστημάτων είναι όμοια με αυτή των *k*-από-τα-*n*, επομένως θέλουμε να υπολογίσουμε τις βέλτιστες τιμές για τις παραμέτρους k και n, έτσι ώστε να επιτευχθεί η μέγιστη τιμή της αξιοπιστίας του συστήματος. Είναι αναμενόμενο ότι το βέλτιστο k θα εξαρτάται από τις πιθανότητες λειτουργίας των μονάδων p_{ij}, $i, j = 0,1$. Υποθέτουμε ότι τα κανάλια είναι πιο πιθανό να λειτουργούν κανονικά από ότι να αποτυγχάνουν, δηλαδή θα ισχύουν οι ανισότητες $p_{00} > p_{10}$ και $p_{11} > p_{01}$.

Ορίζουμε το k_0 ως εξής

$$k_0 = \frac{\log\left[(\beta_0 / \beta_1)\left(p_{00} / p_{01} \right)^n \right]}{\log\left(p_{11} p_{00} / p_{10} p_{01} \right)}. \qquad (5.6.1)$$

Θεώρημα 5.6.1. *Για σταθερές τιμές για τα* n, β_i, p_{ij} *και* r_i *για όλα τα* $i, j = 0,1$, *συμβολίζουμε με* k^* *την τιμή του* k *που μεγιστοποιεί την αξιοπιστία του συστήματος. Τότε ισχύουν τα επόμενα:*

- *Αν* $r_0 + r_1 > 1$ *τότε* $k^* = \begin{cases} 0, & \text{άν } \; k_0 \le 0 \\ \lceil k_0 \rceil, & \text{άν } \; 0 < k_0 \le n \\ n, & \text{άν } \; n < k_0 \end{cases}$ (5.6.2)

  Εάν ο k_0 *είναι ακέραιος, τότε αμφότεροι οι* k_0 *και* k_0+1 *μεγιστοποιούν την αξιοπιστία του συστήματος.*

- *Αν* $r_0 + r_1 < 1$ *τότε* $k^* = \begin{cases} n, & \text{αν } \beta_0 < \beta_1 \\ 0, & \text{διαφορετικά}. \end{cases}$ (5.6.3)

- *Αν* $r_0 + r_1 = 1$ *τότε* $R(k,n) = \beta_0 r_0 + \beta_1 r_1$ (5.6.4)

για όλα τα k, έτσι κάθε τιμή για το κατώφλι k είναι βέλτιστη.

Παρατηρούμε ότι αν $k_0 < 0$, τότε η αξιοπιστία $R(k,n)$ μειώνεται για τιμές του k για τις οποίες ισχύει $1 \le k \le n$ και ένα σύστημα που μεταβιβάζει πάντα το ψηφίο 1 είναι καλύτερο από οποιοδήποτε *k*-από-τα-*n* σύστημα για αυτή την τιμή του *n* όταν ισχύει $r_0 + r_1 > 1$. Από την άλλη, αν $k_0 > n$, τότε η $R(k,n)$ αυξάνεται για τιμές $1 \le k \le n$ και ένα σύστημα που πάντα μεταβιβάζει το ψηφίο 0 είναι καλύτερο από οποιοδήποτε *k*-από-τα-*n* σύστημα για την συγκεκριμένη τιμή του *n* όταν ισχύει

$r_0 + r_1 > 1$. Ομοίως εάν $k_0 < 0$, τότε η $R(k,n)$ είναι φθίνουσα για $1 \le k \le n$ και ένα σύστημα που πάντα μεταβιβάζει το ψηφίο 0 είναι καλύτερο από οποιοδήποτε *k*-από-τα-*n* σύστημα για αυτή την τιμή του *n* όταν $r_0 + r_1 < 1$. Τέλος, εάν $k_0 > n$, τότε η $R(k,n)$ είναι αύξουσα για τιμές $1 \le k \le n$ και ένα σύστημα που πάντα μεταβιβάζει το ψηφίο 1 είναι καλύτερο από οποιοδήποτε άλλο *k*-από-τα-*n* σύστημα για αυτή την τιμή του *n* όταν $r_0 + r_1 < 1$.

Πόρισμα 5.6.1. *Έστω ότι έχουμε δεδομένες τις τιμές για τα* n, β_i, p_{ij} *και* r_i *για όλα τα* $i, j = 0{,}1$ *και ότι* $\beta_0 = \beta_1$, $p_{01} = p_{10}$, $r_0 + r_1 > 1$.

- *Εάν το n είναι περιττός, τότε η* $R(k,n)$ *μεγιστοποιείται για* $k = (n+1)/2$.
- *Εάν το n είναι άρτιος, τότε η* $R(k,n)$ *μεγιστοποιείται για* $k = n/2$ ή $k = n/2+1$.

Σε αυτή την περίπτωση, το βέλτιστο κατώφλι *k* δεν εξαρτάται από την τιμή των p_{01} και p_{10} και η καλύτερη επιλογή για μία συσκευή απόφασης (voter) είναι να πάρει μία απόφαση σύμφωνα με τον κανόνα της πλειοψηφίας.

Θεώρημα 5.6.2. *Θέτουμε μία συγκεκριμένη τιμή για το n. Ορίζουμε το* k_0 *όπως στην εξίσωση* (5.6.1) *και* $k^* = \lceil k_0 \rceil$.

- *Εάν* $\beta_1 \ge 1/2$, *τότε η βέλτιστη τιμή* k^* *είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του* p_{01}.
- *Εάν* $\beta_0 \ge 1/2$, *τότε η βέλτιστη τιμή* k^* *είναι μια αύξουσα συνάρτηση του* p_{10}.

Τα αποτελέσματα αυτά δηλώνουν πως όταν το ψηφίο 1 έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να εισέλθει σε ένα κανάλι του συστήματος και όταν η πιθανότητα αποτυχίας του καναλιού, το οποίο μεταβιβάζει το ψηφίο 0 ενώ έχει εισέλθει στο σύστημα το 1 (stuck-at-0) αυξηθεί, είναι επιθυμητό να μειωθεί η τιμή για το *k*. Από την άλλη δεδομένου ότι το ψηφίο 0 έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να εισέλθει σε ένα κανάλι του συστήματος και όταν η πιθανότητα αποτυχίας του καναλιού, το οποίο μεταβιβάζει το ψηφίο 1 ενώ έχει εισέλθει στο σύστημα το 0 (stuck-at-1) αυξηθεί, είναι επιθυμητό να αυξήσουμε την τιμή για το *k*.

Στη συνέχεια, για δεδομένη τιμή του *k*, θα ασχοληθούμε με την εύρεση της βέλτιστης τιμής του *n*, η οποία μεγιστοποιεί την αξιοπιστία του συστήματος. Είναι αναμενόμενο αυτή να βασίζεται πάνω στις τιμές των πιθανοτήτων p_{ij} για όλα τα i, j. Ορίζοντας την ποσότητα

$$n_0 = \frac{\log\left[(\beta_0/\beta_1)(p_{10}p_{01}/p_{00}p_{11})^k \right]}{\log(p_{01}/p_{00})} \qquad (5.6.5)$$

ο *Pham* (1997) έδωσε το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 5.6.3. *Θεωρούμε σταθερές τιμές για τις παραμέτρους* k, β_i, p_{ij} *και* r_i *για όλα τα* $i, j = 0{,}1$. *Έστω* n^* *η τιμή του n που μεγιστοποιεί την αξιοπιστία του συστήματος. Τότε ισχύουν τα παρακάτω*

1) *Εάν* $r_0 + r_1 > 1$ *τότε* $n^* = \min\{k, \lfloor n_0 \rfloor\}$. (5.6.6)

2) *Εάν* $r_0 + r_1 < 1$ *τότε* $n^* = \begin{cases} \infty, & \text{αν } \beta_0(1-p_{10}^k) > \beta_1(1-p_{11}^k) \\ k, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$. (5.6.7)

3) *Εάν* $r_0 + r_1 = 1$ *τότε* $R(n,k) = \beta_0(1-r_1) + \beta_1 r_1$ (5.6.8)

για όλα τα n, οπότε η βέλτιστη τιμή είναι η $n^* = k$.

Τώρα θα ασχοληθούμε με το πως η βέλτιστη τιμή του *n* επηρεάζεται από τις πιθανότητες p_{01} και p_{10} .

Θεώρημα 5.6.4. *Θεωρούμε σταθερές τιμές για τις παραμέτρους* k, β_i, p_{ij} *και* r_i *για όλα τα* $i, j = 0,1$.

- *Εάν* $\beta_1 \geq 1/2$, *το βέλτιστο μέγεθος του συστήματος* n^* *είναι αύξουσα συνάρτηση του* p_{01}.
- *Εάν* $\beta_0 \geq 1/2$, *το βέλτιστο μέγεθος του συστήματος* n^* *είναι φθίνουσα συνάρτηση του* p_{10}.

Τα παραπάνω αποτελέσματα υποδεικνύουν πως όταν το ψηφίο 1 έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να εισέλθει σε ένα κανάλι του συστήματος, και όταν η πιθανότητα αποτυχίας του καναλιού, το οποίο μεταβιβάζει το ψηφίο 0 ενώ έχει εισέλθει στο σύστημα το 1 αυξηθεί, η αξιοπιστία του συστήματος θα βελτιωθεί προσθέτοντας μεγαλύτερο πλήθος καναλιών. Από την άλλη δεδομένου ότι το ψηφίο 0 έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να εισέλθει σε ένα κανάλι του συστήματος, και όταν η πιθανότητα αποτυχίας του καναλιού, το οποίο μεταβιβάζει το ψηφίο 1 ενώ έχει εισέλθει στο σύστημα το 0 αυξηθεί, είναι επιθυμητό να μειωθεί ο αριθμός των μονάδων (καναλιών) στο σύστημα.

Θέτουμε $k = a + bn$, όπου

$$a = \frac{\log(\beta_0/\beta_1)}{\log(p_{11}p_{00}/p_{10}p_{01})} \quad \text{και} \quad b = \frac{\log(p_{00}/p_{01})}{\log(p_{11}p_{00}/p_{01}p_{10})}.$$

Σημειώνουμε ότι, όταν $r_0 + r_1 > 1$ δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα ζεύγος (*k*,*n*) το οποίο να μεγιστοποιεί την αξιοπιστία του συστήματος. Αυτό μπορεί να φανεί από το εξής: έστω η συνάρτηση αξιοπιστίας που ορίσαμε στο δεύτερο κεφάλαιο

$$R(k,n) = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}\left[\beta_0 r_0 p_{10}^i p_{00}^{n-i} + \beta_1(1-r_0)p_{11}^i p_{01}^{n-i}\right] + \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\left[\beta_0(1-r_1)p_{10}^i p_{00}^{n-i} + \beta_1 r_1 p_{11}^i p_{01}^{n-i}\right]$$

Ένα άνω φράγμα για την αξιοπιστία του συστήματος είναι το $\beta_0 r_0 + \beta_1 r_1$, όπως φαίνεται και από την επόμενη ανισότητα

$$R(k,n) \leq \sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}(r_0 + r_1 - 1)\beta_0 p_{10}^i p_{00}^{n-i} + \beta_0(1-r_1) + \beta_1 r_1 \leq \beta_0(r_0 + r_1 - 1) + \beta_0(1-r_1) + \beta_1 r_1$$

$$= \beta_0 r_0 + \beta_1 r_1.$$

Επίσης ορίζοντας το $k_n = \lceil a + bn \rceil$ και αντικαθιστώντας στη συνάρτηση αξιοπιστίας, μπορεί να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} R(k_n, n) \leq \beta_0 r_0 + \beta_1 r_1 .$$

Τέλος σημειώνουμε ότι όταν $r_0 = r_1 = 1$, η $R(k_n, n)$ τείνει στην 1 καθώς το $n \to \infty$. Επομένως αν η συσκευή απόφασης είναι απόλυτα αξιόπιστη, τότε η αξιοπιστία του συστήματος μπορεί να λάβει τιμές αυθαίρετα κοντά στην μονάδα με κατάλληλες επιλογές των k_n και n.

Βιβλιογραφία

Μπούτσικας Μ.Β. (1998). Δομική αξιοπιστία συστημάτων, Διπλωματική εργασία για το ΠΜΣ «Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα », Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Barlow, R. E. and Proschan, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

Ben-Dov, Y. (1980). Optimal reliability design of *k*-out-of-*n* systems subject to two kinds of failure, *The Journal of the Operational Research Society*, **31**, 743-748.

Boutsikas, M.V. and Koutras, M.V. (2002). On a class of multiple failure mode systems, *Naval Research Logistics*, **49**, 167-185.

Chao, M.T. and Fu, J.C. (1989). A limit theorem of certain repairable systems, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **41**, 809 – 818.

Chao, M.T. and Fu, J.C. (1991). The reliability of large series systems under Markov structure, *Adv.Applied Probability*, **23,** 894-908.

Chiang, D.T and Niu, S.C. (1981). Reliability of consecutive-*k*-out-of-*n*, *IEEE Transactions Reliability*, **30**, 87-89.

Dhillon, B.S. and Rayapati, S.N. (1986). A complex system reliability evaluation method, *Reliability Engineering*, **16**, 163-177.

Dhillon, B.S., Sambhi, A. and Khan, M.R. (1979). Common-cause failure analysis of a three-state device system, *Microelectronics Reliability*, **19**, 345-348.

Fu, J.C. (1986). Reliability of consecutive-*k*-out-of-*n*-:*F* systems with (*k*-1) step Markov dependence, *IEEE Transactions Reliability*, **35**, 602-606.

Fu, J.C and Koutras, M.V. (1995). Reliability bounds for coherent structures with independent components, *Statistics and Probability Letters*, **22**, 137-148.

Fu, J.C. and Lou, W.Y. (1991). On reliabilities of certain large linearly connected engineering systems, *Statistics and Probability Letters*, **12**, 291 – 296.

Hwang, F.K. (1982). Fast solutions for consecutive-*k*-out-of-*n*:*F* system, *IEEE Transactions on Reliability*, **31**, 447–448.

Huang, J., Zuo, M. and Fang, Z. (2003). Multi-state consecutive-*k*-out-of-*n* systems, *IIE Transactions*, **35**, 527-534.

Koutras, M.V. (1996). On a Markov chain approach for the study of reliability structures, *Journal of Applied Probability*, **33**, 357 – 367.

Koutras, M.V. (1997). Consecutive-*k*,*r*-out-of-*n*:DFM systems, *Microelectronics & Reliability*, **37**, 597-603.

Kuo, W., Zhang, W. and Zuo, M. (1990). A consecutive-*k*-out-of-*n*:*G* system:the mirror image of a consecutive-*k*-out-of-*n*:*F* system. *IEEE Transactions on Reliability*, **39**, 244–253.

Milienos, F.S. and Koutras, M.V. (2008). A lower bound for the reliability function of multiple failure mode systems, *Statistics & Probability Letters*, **78**, 1639-1648.

Moustafa, M.S. (1996). Transient analysis of reliability with and without repair for *k*-out-of-*n*:*G* systems with two failure modes, *Reliability Engineering and System Safety*, **53**, 31-35.

Moustafa, M.S. (1998). Transient analysis of reliability with and without repair for *k*-out-of-*n*:*G* systems with m failure modes, *Reliability Engineering and System Safety*, **59**, 317-320.

Pham, H. (1997). Reliability analysis of digital communication systems with imperfect voters, *Mathematical & Computer Modelling*, **26**, 103-112.

Pham, H. (2003). Reliability of systems with multiple failure modes, *Handbook of Reliability Engineering*:*Part I*, 19-36.

Tian, Z., Zuo, M.J. and Yam, R.C.M. (2009). Multi-state *k*-out-of-*n* systems and their performance evaluation, *IIE Transactions*, **41**, 32-44.