ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ

ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ &

ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Δυναμικές Μέθοδοι Εκτίμησης Αποθεματικών Γενικών Ασφαλίσεων

Τσατσαρώνη Α. Δήμητρα

Τριμελής Επιτροπή :

Γ. Πιτσέλης

Κ. Βρόντος

Κ. Πολίτης

Πειραιάς,
ΜΑΪΟΣ 2010

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στον Καθηγητή μου κ. Γεώργιο Πιτσέλη για τη βοήθειά του, τα πολύτιμα σχόλια, την καθοδήγησή αλλά και την επίβλεψη κατά την σύνταξη της παρούσας διπλωματικής.

Επίσης, θα ήθελα πολύ να ευχαριστήσω τους κ.Βρόντο και κ.Πολίτη της επιτροπής επίβλεψης της διπλωματικής μου αλλά και όλους τους καθηγητές μου, για τις πολύτιμες γνώσεις που μου προσέφεραν, τόσο κατά τις σπουδές μου στο τμήμα "Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης" όσο και στο πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών στην "Αναλογιστική Επιστήμη & Διοικητική Κινδύνου".

Τελειώνοντας, θέλω να δώσω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένεια μου που με υποστήριξε οικονομικά και συναισθηματικά καθ'όλη την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας αλλά και κατά την διάρκεια σπουδών μου στο Πανεπιστήμιο Πειραιά.

Π Ε Ρ Ι Λ Η Ψ Η

Η εκτίμηση του αποθέματος ζημιών (*loss reserving*) αποτελεί μια ενδιαφέρουσα διαδικασία και ταυτόχρονα ένα απαραίτητο εργαλείο στα χέρια κάθε αναλογιστή. Η παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώνεται στην ανάλυση των βασικών μεθόδων εκτίμησης αποθεμάτων ζημιών στον κλάδο των Γενικών Ασφαλίσεων. Κύριος σκοπός είναι η κατανόηση της διαδικασίας που ακολουθείται σε κάθε μια από τις μεθόδους, η γνώση των ιδιομορφιών τους αλλά και τα σημεία που υπερτερεί / μειονεκτεί η κάθε μία από αυτές σε σχέση με τις υπόλοιπες. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στο μοντέλο της Chain Ladder, η οποία είναι και από τις πιο συχνά εφαρμοσμένες κατά την εκτίμηση των αποθεμάτων ζημιών, και στο μοντέλο εφαρμογής πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης στους λογαρίθμους των αποζημιώσεων. Τελειώνοντας, αναλύεται και η διαδικασία που ακολουθείται κατά την εμφάνιση αρνητικών αποζημιώσεων στο τρίγωνο ζημιών. Είναι απαραίτητο όμως να τονιστεί ότι οποιοδήποτε μοντέλο και αν εφαρμοστεί, είτε αυτό είναι βασισμένο σε κάποια απλή μέθοδο είτε αποτελεί πιο πολύπλοκο στατιστικό μοντέλο, απαιτεί την γνώση, την κρίση αλλά και την εμπειρία του αναλυτή.

A B S T R A C T

Loss reserving is an intersting proccess, as well as an essential tool on the hands of any actuary. The present MSc thesis focuses on the basic reserving methodologies in non-life insurance. Its main objective is to analyse the reserving process of each method in order to assess several discrepancies and recognise the advantages / disadvantages of each one. Particular empasis is given to the Chain Ladder method, that actuaries most frequently use in order to estimate loss reserves, and also to the regression model based on log-incremental payments. Thus, there is also an adequate analysis of the procedure used when the claims run-off triangle contains negative-incremental claims.

It is important to note that, all actuarial methods require a fair amount of skill and experience on the part of the analyst.

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Αποθέματα Για Αποπληρωμη Αποζημιώσεων – Loss Reserving

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Μέθοδοι Εκτίμησης Αποθέματος Ζημιών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Εφαρμογή της Βασικής Μεθόδου Chain Ladder & Του Λογαριθμικού Μοντέλου σε δεδομένα Εταιρείας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Αρνητικές Αποζημιώσεις Στο Τρίγωνο Ζημιών

Κεφάλαιο 1

Αποθέματα Για Αποπληρωμή Αποζημιώσεων - Loss Reserving

1.1 Εισαγωγή

Η αποθεματοποίηση για την αποπληρωμή αποζημιώσεων (*loss reserving*) στον χώρο των Γενικών Ασφαλίσεων είναι μια διαδικασία η οποία είναι ιδιαίτερα σημαντική για την καλή λειτουργία αλλά και ανάπτυξη μιας Ασφαλιστικής Εταιρείας. Ένας από τους λόγους δημιουργίας αποθέματος ζημιών είναι το γεγονός ότι η ημερομηνία είσπραξης των ασφαλίστρων και η ημερομηνία πληρωμής μιας αποζημίωσης δεν συμπίπτουν. Επιπροσθέτως, υπάρχει μια καθυστέρηση μεταξύ της ημερομηνίας πραγματοποίησης μιας ζημιάς και της ημερομηνίας διακανονισμού και πληρωμής της. Για το λόγο αυτό, κύρια υποχρέωση μιας Ασφαλιστικής Εταιρείας είναι η εκτίμηση των μελλοντικών αποζημιώσεων.

Η συνεισφορά του αναλογιστικού επαγγέλματος είναι, και θα συνεχίσει να είναι, απαραίτητη για την διενέργεια της εκτίμησης αυτής. Η αποθεματοποίηση μπορεί να θεωρηθεί ως μια μεγάλη πρόκληση για τον αναλογιστή γιατί η διαδικασία της εκτίμησης δεν περιλαμβάνει μόνο πολύπλοκες μεθόδους αλλά απαιτεί και την κρίση του. Κανένας μαθηματικός τύπος δεν μπορεί να δώσει την σωστή απάντηση. Οι συνήθεις μέθοδοι αποθεματοποίησης υποθέτουν ότι η εμπειρία του παρελθόντος μιας ασφαλιστικής εταιρείας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση του μέλλοντος. Η υπόθεση όμως αυτή δεν είναι εντελώς ορθή καθώς ο τρόπος λειτουργίας και η πολιτική μιας Εταιρείας αλλάζουν συνεχώς. Ο αναλυτής, κατά την εκτίμηση, θα πρέπει να αντιλαμβάνεται και να κρίνει αυτές τις αλλαγές.

Η σημαντικότητα της αποθεματοποίησης συνδέεται άμεσα με την φερεγγυότητα της Ασφαλιστικής Εταιρείας, την προστασία των ασφαλισμένων προσώπων αλλά και την βιωσιμότητά της. Συνέπειες ανεπαρκούς αποθεματοποίησης είναι η ανικανότητα πληρωμής ζημιών, η διατήρηση χαμηλών ασφαλίστρων και στην χειρότερη περίπτωση η χρεοκοπία.

Σταδιακά απαιτείται όλο και μεγαλύτερη κεφαλαιακή επάρκεια των Ασφαλιστικών Εταιρειών για να μπορούν να ανταποκριθούν στις υποχρεώσεις τους απέναντι στο Δημόσιο αλλά και προς τους ασφαλισμένους τους και να είναι σε θέση να σχηματίσουν τα απαραίτητα τεχνικά αποθέματα, σε μια περίοδο που η εποπτεία έχει γίνει σαφώς αυστηρότερη.

Η ΕΠ.Ε.Ι.Α. (Επιτροπή Εποπτείας Ιδιωτικής Ασφάλισης) η οποία έχει αναλάβει την εποπτεία των ασφαλιστικών επιχειρήσεων που δραστηριοποιούνται στην Ελλάδα, κάτω από τον έλεγχο που ασκεί, αποσκοπεί στην διασφάλιση των συμφερόντων των ασφαλισμένων και δικαιούχων αποζημίωσης από την ασφάλιση, στην τήρηση των διατάξεων της νομοθεσίας περί τεχνικών αποθεμάτων και περιθωρίου φερεγγυότητας και στην αξιολόγηση της οικονομικής κατάστασης, των συστημάτων εσωτερικού ελέγχου, της διαχείρισης των κινδύνων και των προοπτικών βιωσιμότητας των εποπτευόμενων Ασφαλιστικών Επιχειρήσεων.

Όλα αυτά λογικά αναμένεται να οδηγήσουν σε μια αναβάθμιση του κλάδου, μέσω της δημιουργίας ισχυρότερων (κεφαλαιακά και επιχειρηματικά) σχημάτων καθώς και στην διαμόρφωση ενός πλαισίου λειτουργίας που θα χαρακτηρίζεται από διαφάνεια, υγιή ανταγωνισμό και αποτελεσματική εποπτεία.

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής είναι οι μέθοδοι που εφαρμόζονται για την εκτίμηση των αποθεμάτων. Το περιεχόμενό της αναπτύσεται σε τέσσερα κεφάλαια. Το παρών κεφάλαιο είναι εισαγωγικό. Στην αρχή του κεφαλαίου έγινε αναφορά στην έννοια της αποθεματοποίησης και κυρίως στην συμβολή της για την καλή λειτουργία και ανάπτυξη μιας Ασφαλιστικής Εταιρείας, και στη συνέχεια θα ακολουθήσει ανάλυση των βασικών βημάτων της διαδικασίας αποθεματοποίησης, κατά την εφαρμογή των μεθόδων αποθεματοποίησης στα δεδομένα μιας Εταιρείας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά οι βασικότερες μέθοδοι εκτίμησης μελλοντικών αποζημιώσεων. Αναλυτικά, γίνεται παρουσίαση των κάτωθι μεθόδων : Μέθοδος του Αναμενόμενου Δείκτη Ζημιών, Βασική Μέθοδος Chain Ladder, Μέθοδος Bornheutter - Ferguson, Μέθοδος Benktander Hovinen, Μέθοδος Διαχωρισμού (Separation Method), Λογαριθμικό Μοντέλο πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στα πλεονεκτήματα – μειονεκτήματα κάθε μίας από αυτές.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται εφαρμογή της Βασικής Μεθόδου Chain Ladder και του Λογαριθμικού Μοντέλου σε δεδομένα Ασφαλιστικής Εταιρείας Γενικών Ασφαλίσεων. Παρουσιάζονται δύο διαφορετικές προσεγγίσεις του λογαριθμικού μοντέλου, με βάση τον αριθμό παραμέτρων προς εκτίμηση. Μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας εκτίμησης γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων των τριών μοντέλων. Το κεφάλαιο κλείνει με την παρουσίαση του στατιστικού πακέτου R και την εφαρμογή, με την βοήθεια αυτού, της μεθόδου Chain Ladder.

Τελειώνοντας, στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στην μη συνήθη, αλλά πιθανή περίπτωση ύπαρξης αρνητικών τιμών αποζημιώσεων στο τρίγωνο ζημιών και στην τεχνική που εφαρμόζεται για την εκτίμηση των μελλοντικών αποζημιώσεων.

Οι υπολογισμοί κατά την αριθμητική εφαρμογή της Μεθόδου Chain Ladder και του Λογαριθμικού Μοντέλου στα δεδομένα της Ασφαλιστικής Εταιρείας, καθώς επίσης και οι πίνακες / γραφήματα που περιέχονται στην διπλωματική, έγιναν με την βοήθεια του προγράμματος Excel του Microsoft Office και του στατιστικού πακέτου R.

1.2 Διαδικασία Εκτίμησης Αποθέματος Ζημιών

Σε γενικές γραμμές, η διαδικασία εκτίμησης αποθέματος ζημιών αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος περιλαμβάνει την ανάλυση των διαθέσιμων δεδομένων και την εφαρμογή κατάλληλων μοντέλων. Το δεύτερο μέρος βασίζεται στην χρήση των αποτελεσμάτων από την εφαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα προκειμένου να προβούμε στην εκτίμηση των μελλοντικών ζημιών.

Πιο συγκεκριμένα, το πρώτο βήμα στην διαδικασία αποθεματοποίησης είναι η συλλογή δεδομένων. Τα δεδομένα θα πρέπει να είναι πραγματικά και λεπτομερή προκειμένου να καταλήξουμε σε αξιόπιστες εκτιμήσεις αποθεμάτων. Ο αναλογιστής θα πρέπει να εξετάσει λεπτομερώς τα δεδομένα του έτσι ώστε να είναι σε θέση να εντοπίσει αν υπάρχουν τυχόν ανωμαλίες και να αναγνωρίσει τα βασικά χαρακτηριστικά τους. Το δεύτερο βήμα είναι η εφαρμογή της κατάλληλης τεχνικής εκτίμησης του αποθέματος, μέσα από τις επιλεγμένες τεχνικές που κατά την κρίση του είναι καταλληλότερες για τα δεδομένα του. Στη συνέχεια, ο αναλογιστής θα πρέπει να συγκρίνει τα αποτελέσματα που δεν συμφωνούν από την εφαρμογή των διαφόρων μεθόδων εκτίμησης αποθέματος και να τα εξηγήσει ή να τα συμβιβάσει.

Αναλυτικότερα, πριν την εφαρμογή κάποιας μεθόδου εκτίμησης, κύριο μέλημα του αναλογιστή είναι να κατανοήσει τις τάσεις και τις αλλαγές που επηρεάζουν την βάση δεδομένων και να τα ταξινομήσει ή να τα συνδυάσει έτσι ώστε να πετύχει την μέγιστη δυνατή ***ομοιογένεια*** στα δεδομένα του. Αν τα επίπεδα των ζημιών είναι αρκετά όμοια τότε η αξιοπιστία και η ομοιογένεια των δεδομένων είναι υψηλή. Είναι βασικό να υπάρχει πλήρης γνώση των κύριων παροχών που προσφέρουν τα συμβόλαια καθώς και των διάφορων μεταβολών στα ασφαλιστήρια συμβόλαια έτσι ώστε να υπάρξει παρακολούθηση της εξέλιξης της ζημιάς και πώς αυτή μπορεί να διαφοροποιηθεί στο μέλλον. Ο αριθμός των δεδομένων θα πρέπει να επιτρέπει τον καθορισμό προτύπων. Για μια καλή αξιοπιστία, τα δεδομένα εξαρτώνται συνήθως από το μέσο όρο και από τη μεταβολή των μεγεθών των ζημιών. Ο αναλογιστής κατά την εκτίμηση του θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη του τυχόν αλλαγές στη λειτουργία και την στρατηγική της επιχείρησης και να καταγράψει τις προηγούμενες δραστηριότητες της επιχείρησης.

Τέλος, ο αναλογιστής θα πρέπει να λάβει υπόψη του αλλαγές στην νομοθεσία ή προηγούμενες δικαστικές αποφάσεις για την τελική αξιολόγηση των εκτιμούμενων αποθεμάτων.

Κεφάλαιο 2

Μέθοδοι Εκτίμησης Αποθέματος Ζημιών

2.1 Μέθοδος Αναμενόμενου Δείκτη Ζημιών

Η μέθοδος του Αναμενόμενου Δείκτη Ζημιών στηρίζεται στην εκτίμηση του τελικού αναμενόμενου δείκτη ζημιών για κάθε κλάδο και χρόνο ασφάλισης. Ως δείκτης ζημιών ορίζεται το κλάσμα των συνολικών αποζημιώσεων (*paid losses*) προς τα συνολικά δεδουλευμένα ασφάλιστρα (*earned premiums*).

Το «κλειδί» κατά την εφαρμογή αυτής της μεθόδου είναι ο τρόπος εκτίμησης του δείκτη ζημιών για ένα συγκεκριμένο κλάδο ασφάλισης. Υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός πηγών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν :

α) Δεδομένα από το παρελθόν για τον συγκεκριμένο κλάδο

β) Παραδοχές που λαμβάνουν χώρα κατά την διαδικασία τιμολόγησης

γ) Γνώσεις και εμπειρία των εκτιμητών ζημιών του συγκεκριμένου κλάδου

δ) Στατιστικά στοιχεία από την αγορά για τον συγκεκριμένο κλάδο

Σημαντικός είναι και ο ρόλος του παρελθόντος κατά την εκτίμηση. Αν ο δείκτης ζημιών κυμαίνεται γύρω από ένα σταθερό ποσοστό κατά τα τελευταία πέντε χρόνια τότε αυτό είναι ενθαρρυντικό και τα αποτελέσματα της μεθόδου θα είναι πιο ακριβή. Παρόλα αυτά όμως δεν είναι βέβαιο ότι ο δείκτης θα παραμείνει σε αυτό το ποσοστό στα μελλοντικά χρόνια, γεγονός που οφείλεται κυρίως σε οικονομικές επιρροές και σε αλλαγές που λαμβάνουν χώρα στην Εταιρεία.

Για το λόγο αυτό, στην εκτίμηση, είναι απαραίτητο να λαμβάνονται υπόψη όλοι οι παράγοντες που επηρεάζουν τις αποζημιώσεις καθώς και οι μεταβολές αυτών (στρατηγική εταιρείας, κανόνες αποτίμησης με τη μέθοδο φάκελο προς φάκελο, κανόνες ανάληψης κινδύνων, πολιτική πληρωμών, έκτακτα φαινόμενα κ.λ.π.).

2.1.1 Περιγραφή Διαδικασίας

Ο αναμενόμενος δείκτης ζημιών πολλαπλασιαζόμενος με το κατάλληλο δεδουλευμένο ασφάλιστρο θα μας δώσει τις εκτιμώμενες τελικές ζημιές. Το απόθεμα ζημιών που θα λάβουμε θα είναι οι εκτιμώμενες τελικές ζημιές μείον τις ζημιές που έχουν εξοφληθεί μέχρι σήμερα.

Αναλυτικά έχουμε :

$$\text{(Εκτιμώμενες Τελικές Ζημιές)}_{i,j} = \text{(Αναμενόμενος Δείκτης Ζημιών)}_{i,j} \times \text{(Δεδουλευμένο Ασφάλιστρο)}_{i,j}$$

όπου i δηλώνει τον κλάδο ασφάλισης και j δηλώνει την περίοδο ασφάλισης.

Αυτό συνεπάγεται ότι :

$$\text{(Εκτιμώμενο Απόθεμα Ζημιών)}_{i,j} = \text{(Εκτιμώμενες Τελικές Ζημιές)}_{i,j} - \text{(Ζημιές που έχουν πληρωθεί μέχρι σήμερα)}_{i,j}$$

από το οποίο προκύπτει ότι :

$$\text{Συνολικό Εκτιμώμενο Απόθεμα Ζημιών} = \sum_{i,j} \text{(Εκτιμώμενο Απόθεμα Ζημιών)}_{i,j}$$

2.1.2 Πλεονεκτήματα - Μειονεκτήματα

Η μέθοδος αυτή χαρακτηρίζεται ως εξαιρετικά υποκειμενική και εξαρτάται από την ποιότητα των πληροφοριών που προέρχεται από εξωτερικούς παράγοντες (τμήμα ανάληψης κινδύνων, τμήμα αποζημιώσεων). Μεγάλο μειονέκτημά της είναι ότι αν ο αναμενόμενος δείκτης ζημιών τροποποιηθεί από τη διαχείριση της Εταιρείας θα έχουμε σαν αποτέλεσμα ανεπαρκή αποθέματα. Για την καλύτερη κατανόηση του παραπάνω θα παραθέσουμε ένα παράδειγμα. Έστω ότι μια Ασφαλιστική Εταιρεία για πολλά έτη και για συγκεκριμένο κλάδο ασφάλισης εμφανίζει δείκτη ζημιών 65% και το τελευταίο έτος μείωσε το ασφάλιστρο για τον συγκεκριμένο κλάδο. Η εφαρμογή του δείκτη ζημιών 65% σε ένα μικρότερο δεδουλευμένο ασφάλιστρο, βάση της μεθόδου Αναμενόμενου Δείκτη Ζημιών, θα μας οδηγήσει σε μια αρκετή μείωση των αποθεμάτων του συγκεκριμένου κλάδου. Αν η μείωση του ασφαλίστρου οφείλεται στον ανταγωνισμό της αγοράς και όχι στην μείωση των ζημιών, αυτό δεν σημαίνει ότι πρέπει και να μειωθούν τα αποθέματα. Επομένως τα αποθέματα που εκτιμώνται από αυτή τη μέθοδο μπορεί να είναι λανθασμένα εάν αυτή εφαρμόζεται χωρίς προσεκτική σκέψη.

Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις όπου η μέθοδος του Αναμενόμενου Δείκτη Ζημιών είναι η μόνη κατάλληλη μέθοδος που μπορεί να εφαρμοστεί για την εκτίμηση του αποθέματος ζημιών. Αυτό συμβαίνει στις νεοϊδρυόμενες Ασφαλιστικές Εταιρείες όπου στα πρώτα έτη δεν έχουμε επαρκή εμπειρία ζημιών ή και στην περίπτωση λειτουργίας ενός νέου κλάδου ζημιών.

2.2 Η Βασική Μέθοδος Chain Ladder

Η μέθοδος Chain Ladder είναι από τις πιο συνηθισμένες μεθόδους εκτίμησης αποθέματος ζημιών λόγω της ευκολίας εφαρμογής της στα δεδομένα μιας Εταιρείας. Στην αναλογιστική βιβλιογραφία υπάρχουν πολλές διατριβές πάνω στην συγκεκριμένη μέθοδο όπως αυτές των *Kremer* (1982), *Taylor & Ashe* (1983), *Renshaw* (1989), *Verrall* (1989, 1990, 1991a, 1991b, 1994, 1996, 2000), *Mack* (1993, 1994a, 1994b), *Murphy* (1994), *Schmidt & Schnaus* (1996), *Renshaw & Verrall* (1998), *Barnett & Zehnwirth* (1998), *Mack & Venter* (2000) και *England & Verrall* (1999, 2001).

2.2.1 Παρουσίαση Μεθόδου

Η βασική τεχνική της μεθόδου στηρίζεται στην ανάλυση της ιστορικής εξέλιξης των αποζημιώσεων. Με βάση αυτή την ιστορικότητα προσδιορίζονται κατάλληλοι δείκτες που εφαρμόζονται στις σωρευτικές αποζημιώσεις προκειμένου να γίνει εκτίμηση των πληρωμών στο μέλλον. Η κύρια υπόθεση στην οποία βασίζεται η συγκεκριμένη μέθοδος είναι ότι οι σχέσεις αναλογίας που ίσχυσαν κατά το πρόσφατο παρελθόν μεταξύ των ποσών των σωρευτικών ζημιών (εκκρεμών και πληρωθεισών), θα επαναληφθούν και στο μέλλον. Δηλαδή στα μελλοντικά έτη θα επαναληφθεί ακριβώς η ίδια διαδικασία στο διακανονισμό ζημιών, στην επάρκεια των αποθεμάτων εκκρεμών ζημιών και στις εργασίες που θα αναληφθούν και θα γραφούν στα βιβλία της Εταιρείας.

Στη μέθοδο αυτή τα δεδομένα μας εισάγονται σε ένα τρίγωνο εξέλιξης ζημιών. Κάθε γραμμή του τριγώνου παριστάνει το έτος ατυχήματος (*accident year*) και κάθε στήλη την περίοδο εξέλιξης (έτος, τετράμηνο, εξάμηνο κ.λ.π.). Ως περίοδος εξέλιξης συνήθως λαμβάνεται το έτος (*development year*). Οι γραμμές του τριγώνου, εκτός από το έτος ατυχήματος, μπορούν εναλλακτικά να παριστάνουν και το έτος σύναψης συμβολαίου (*policy year*) ή το έτος αναγγελίας ζημιάς (*reporting year*). Στην περίπτωση που η περίοδος εξέλιξης είναι το έτος τότε κάθε διαγώνιος του τριγώνου παριστάνει ένα ημερολογιακό έτος (*calendar year*).

Τα δεδομένα που εισάγονται στο τρίγωνο είναι είτε ποσά ζημιών είτε αριθμός (πλήθος) ζημιών. Επί προσθέτως, οι ζημιές μπορεί να είναι ατομικές (*incremental*) ή σωρευτικές (*cumulative*), πληρωθείσες (*paid*) ή επισυμβάσες (*incurred*). Η επιλογή του είδους ζημιών για εισαγωγή στο τρίγωνο ζημιών εξαρτάται από το είδος των πληροφοριών και συμπερασμάτων που θέλουμε να αντλήσουμε αλλά και από την κρίση του αναλυτή.

Η μορφή ενός τέτοιου τριγώνου ζημιών είναι η παρακάτω :

Έτος Ατυχήματος (Accident Year)	Έτος Εξέλιξης (Development Year)							
	1	2	…	k-1	k	…	I - 1	I
1	$P_{1\,1}$	$P_{1\,2}$	…	$P_{1\,k-1}$	$P_{1\,k}$	…	$P_{1\,I-1}$	$P_{1\,I}$
2	$P_{2\,1}$	$P_{2\,2}$	…	$P_{2\,k-1}$	$P_{2\,k}$	…	$P_{2\,I-1}$	
…	…	…	…	…	…	…		
i-1	$P_{i-1\,1}$	$P_{i-1\,2}$	…	$P_{i-1\,k-1}$	$P_{i-1\,k}$			
i	$P_{i\,1}$	$P_{i\,2}$	…	$P_{i\,k-1}$				
…	…	…	…					
I - 1	$P_{I-1\,1}$	$P_{I-1\,2}$						
I	$P_{I\,1}$							

Πίνακας 2.1 *Τρίγωνο Ζημιών*

Το μοντέλο κάτω από την μέθοδο Chain Ladder έχει την μορφή :

$$P_{ik} = S_i R_k + E_{ik}$$

όπου,

P_{ik} *παριστάνει τις ζημιές για το έτος ατυχήματος* i *και για το έτος εξέλιξης* j

S_i *παριστάνει τις τελικές ζημιές για το έτος ατυχήματος* i

R_k *είναι το ποσοστό των τελικών ζημιών που έχουν πραγματοποιηθεί κατά το τέλος του έτους εξέλιξης* k

E_{ik} *παριστάνει κάποιο σφάλμα*

Έστω ότι C_{ik} παριστάνουν τις σωρευτικές ζημιές οι οποίες υπολογίζονται από την σχέση :

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{k} P_{ij}$$

Οι τιμές των C_{ik} για $i+k \le I+1$ είναι γνωστές σε εμάς, και θέλουμε να εκτιμήσουμε τις τιμές των C_{ik} για $i+k > I+1$ και συγκεκριμένα τις τελικές αποζημιώσεις C_{iI} για κάθε έτος ατυχήματος i = 2, ….. , I .

Στη συνέχεια οι τιμές των $M_i = C_{iI} - C_{i,I+1-i}$ μας δίνουν το απόθεμα των εκκρεμών αποζημιώσεων για το έτος ατυχήματος i καθώς οι αποζημιώσεις $C_{i,I+1-i}$ έχουν ήδη πληρωθεί.

Οι εκτιμώμενες τελικές σωρευτικές αποζημιώσεις που προκύπτουν από την Chain Ladder είναι ίσες με :

$$\hat{C}_{i\ I} = C_{i,I+1-i}\,\hat{f}_{I+1-i}\ldots\ldots\hat{f}_{I-1}$$

όπου

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}},\ \text{για}\ 1 \le k \le I-1$$

είναι οι συντελεστές εξέλιξης (*development factors ή link ratios), βλέπε Mack (1994) "Measuring the variability of Chain Ladder Reserve Estimates"*, οι οποίοι πολλαπλασιαζόμενοι με τις σωρευτικές αποζημιώσεις μας δίνουν τις μελλοντικές εκτιμώμενες αποζημιώσεις. Υπάρχουν και άλλοι τρόποι υπολογισμού των συντελεστών εξέλιξης οι οποίοι αναλύονται παρακάτω στην περιγραφή της διαδικασίας.

2.2.2 *Περιγραφή Διαδικασίας Εκτίμησης*

Θεωρούμε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο ζημιών που αφορά τον κλάδο αυτοκινήτων. Τα βήματα που θα ακολουθήσουμε κατά την εφαρμογή της μεθόδου είναι τα εξής :

- ***1^{o} Βήμα : Συγκέντρωση Στοιχείων***

Συγκεντρώνουμε τις αποζημιώσεις για κάθε έτος ατυχήματος και ανά έτος εξέλιξης και τις εισάγουμε σε ένα πίνακα (*Πίνακας 2.2*) που έχει τη μορφή τριγώνου. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τις αποζημιώσεις για τα διαδοχικά έτη 2004 – 2008 και προσπαθούμε να εκτιμήσουμε τα ποσά των αποζημιώσεων της ασφαλιστικής εταιρείας για τα έτη 2009, 2010, 2011, 2012.

	Πληρωμές Ζημιών ανά Έτος Εξέλιξης				
Έτος ατυχήματος	1	2	3	4	5
2004	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}
2005	P_{21}	P_{22}	P_{23}	P_{24}	
2006	P_{31}	P_{32}	P_{33}		
2007	P_{41}	P_{42}			
2008	P_{51}				

Πίνακας 2.2 *Πίνακας Ατομικών Πληρωθεισών Ζημιών*

- ***<u>2</u>***

▪ ***2^{o} Βήμα : Δημιουργία Πίνακα Σωρευτικών Πληρωθεισών Ζημιών***

Με βάση τον *Πίνακα 2.2 «Πίνακας Ατομικών Πληρωθεισών Ζημιών»* δημιουργούμε τον *Πίνακα 2.3 «Πίνακας Σωρευτικών Πληρωθεισών Ζημιών»* που περιέχει τα αθροιστικά ποσά αποζημιώσεων προσθέτοντας στο κάθε έτος εξέλιξης ζημιών τις αποζημιώσεις των προηγούμενων ετών.

Για παράδειγμα $C_{15} = P_{11} + P_{12} + P_{13} + P_{14} + P_{15}$

	Αθροιστικές Πληρωμές Ζημιών ανά Έτος Εξέλιξης				
Έτος ατυχήματος	1	2	3	4	5
2004	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}
2005	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	
2006	C_{31}	C_{32}	C_{33}		
2007	C_{41}	C_{42}			
2008	C_{51}				

Πίνακας 2.3 *Πίνακας Σωρευτικών Πληρωθεισών Ζημιών*

▪ ***3^{o} Βήμα : Υπολογισμός Συντελεστών Εξέλιξης***

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τους συντελεστές εξέλιξης (*development factors*) ως το πηλίκο δύο διαδοχικών ποσών αποζημιώσεων :

$$w_{ij} = \frac{C_{i\,j+1}}{C_{i\,j}}$$

	Συντελεστής εξέλιξης ζημιών ανά έτος			
Έτος ατυχήματος	2/1	3/2	4/3	5/4
2004	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}
2005	w_{21}	w_{22}	w_{23}	
2006	w_{31}	w_{32}		
2007	w_{41}			

Πίνακας 2.4 *Πίνακας Συντελεστών Εξέλιξης*

Στον παραπάνω πίνακα $w_{11} = \dfrac{C_{12}}{C_{11}}$, $w_{12} = \dfrac{C_{13}}{C_{12}}$ κ.ο.κ.

Έχοντας υπολογίσει τους συντελεστές εξέλιξης μπορούμε εν συνεχεία να χρησιμοποιήσουμε είτε τον μέσο όρο αυτών (*Πίνακας 2.5*) είτε εναλλακτικά τον μέσο όρο των τελευταίων τριών ετών (*Πίνακας 2.6*) .

Μέσος όρος	$(w_{11}+w_{21}+w_{31}+w_{41})$ /4	$(w_{12}+w_{22}+w_{32})$ /3	$(w_{13}+w_{23})$ /2	w_{14}

Πίνακας 2.5 *Μέσος όρος συντελεστών εξέλιξης*

Μέσος όρος 3 τελευτ.ετών	$(w_{21}+w_{31}+w_{41})$ /3	$(w_{12}+w_{22}+w_{32})$ /3	$(w_{13}+w_{23})$ /2	w_{14}

Πίνακας 2.6 *Μέσος όρος συντελεστών εξέλιξης 3 τελευταίων ετών*

Εναλλακτικά, μπορούμε να αθροίσουμε τις σωρευτικές αποζημιώσεις ενός έτους εξέλιξης και να τις διαιρέσουμε με το άθροισμα των σωρευτικών αποζημιώσεων του προηγούμενου έτους εξέλιξης, βάση του τύπου :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{m-j} C_{i\,j+1}}{\sum_{i=1}^{m-j} C_{i\,j}}$$

Μέση Τιμή	f_1	f_2	f_3	f_4

Πίνακας 2.7 *Σταθμισμένοι Συντελεστές Εξέλιξης*

Στον παραπάνω πίνακα : $f_1 = (C_{12} + C_{22} + C_{32} + C_{42}) \;/\; (C_{11} + C_{21} + C_{31} + C_{41})$

$f_2 = (C_{13} + C_{23} + C_{33}) \;/\; (C_{12} + C_{22} + C_{32})$

$f_1 = (C_{14} + C_{24}) \;/\; (C_{13} + C_{23})$

$f_4 = (C_{15}) \;/\; (C_{14})$

Στην πραγματικότητα παίρνοντας το άθροισμα της δεύτερης στήλης και διαιρώντας το με το άθροισμα της πρώτης στήλης καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με το να σταθμίζαμε την πρώτη στήλη με τα w_{ij} και παίρνοντας εν συνεχεία την μέση τιμή.

Για παράδειγμα :

$$f_1 = \frac{C_{11}w_{11} + C_{21}w_{21} + C_{31}w_{31} + C_{41}w_{41}}{C_{11} + C_{21} + C_{31} + C_{41}}$$

- ***<u>4^o Βήμα : Εκτίμηση Αποθέματος Ζημιών</u>***

	Εκτιμήσεις Αθροιστικών Πληρωμών Ζημιών στα Έτη Εξέλιξης						
Έτος Ατυχήματος	1	2	3	4	Εκτιμήσεις Τελικών Ζημιών	Πληρωθείσες Ζημιές	Εκτίμηση Αποθέματος Ζημιών
2004					C_{15}	C_{15}	$\hat{Y}_1$
2005				C_{24}	$\hat{C}_{25}$	C_{24}	$\hat{Y}_2$
2006			C_{33}	$\hat{C}_{34}$	$\hat{C}_{35}$	C_{33}	$\hat{Y}_3$
2007		C_{42}	$\hat{C}_{43}$	$\hat{C}_{44}$	$\hat{C}_{45}$	C_{42}	$\hat{Y}_4$
2008	C_{51}	$\hat{C}_{52}$	$\hat{C}_{53}$	$\hat{C}_{54}$	$\hat{C}_{55}$	C_{51}	$\hat{Y}_5$
Σύνολο							

Πίνακας 2.8 *Πίνακας εκτιμώμενων ζημιών*

Προκειμένου να εκτιμήσουμε τις αθροιστικές πληρωμές ζημιών στα έτη εξέλιξης πολλαπλασιάζουμε τις σωρευτικές πληρωμές ζημιών με τους αντίστοιχους συντελεστές εξέλιξης. Για παράδειγμα για να βρούμε τις αθροιστικές πληρωμές ζημιών του έτους 2009 που συνέβησαν το 2005 πολλαπλασιάζουμε τις αθροιστικές πληρωμές ζημιών του έτους 2008 που συνέβησαν το 2005 επί τον συντελεστή εξέλιξης w_{14} (περίπτωση μέσου όρου), ή επί τον συντελεστή εξέλιξης $(w_{21}+w_{31}+w_{41})/3$ (περίπτωση μέσου όρου τριών τελευταίων ετών), ή τέλος επί τον συντελεστή εξέλιξης f_4 (περίπτωση μέσης τιμής).

Παρακάτω παραθέτουμε αναλυτικά τα αποτελέσματα για την περίπτωση της μέσης τιμής :

$\hat{C}_{52} = C_{51} * f_1$

$\hat{C}_{43} = C_{42} * f_2$, $\hat{C}_{53} = \hat{C}_{52} * f_2$

$\hat{C}_{34} = C_{32} * f_3$, $\hat{C}_{44} = \hat{C}_{43} * f_3$, $\hat{C}_{54} = \hat{C}_{53} * f_3$

$\hat{C}_{25} = C_{24} * f_4$, $\hat{C}_{35} = \hat{C}_{34} * f_4$, $\hat{C}_{45} = \hat{C}_{44} * f_4$, $\hat{C}_{55} = \hat{C}_{54} * f_4$

Αντίστοιχα εργαζόμαστε και στις δύο άλλες περιπτώσεις συντελεστών εξέλιξης.

Τέλος για να υπολογίσουμε το απόθεμα ζημιών ανά έτος ατυχήματος που πρέπει να έχουμε αφαιρούμε από τις εκτιμήσεις τελικών ζημιών τις πληρωθείσες ζημιές.

Αναλυτικά έχουμε :

$\hat{Y}_1 = C_{15}$, $\hat{Y}_2 = \hat{C}_{25} - C_{24}$, $\hat{Y}_3 = \hat{C}_{35} - C_{33}$, $\hat{Y}_4 = \hat{C}_{45} - C_{42}$, $\hat{Y}_5 = \hat{C}_{55} - C_{51}$

Το σύνολο των εκτιμούμενων αποθεματικών ανά έτος ατυχήματος μας δίνει το συνολικό απόθεμα που θα πρέπει να έχει η Ασφαλιστική Εταιρεία για να μπορέσει να καλύψει τις μελλοντικές αποζημιώσεις.

2.2.3 Υποθέσεις Μεθόδου

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου Chain Ladder γίνονται οι εξής τρείς υποθέσεις :

1. $E(C_{i,k+1} \mid C_{i1},....,C_{ik}) = C_{ik} f_k, \quad 1 \le i \le I, \ 1 \le k \le I-1$
2. Τα $\{C_{i1},....,C_{iI}\}$ και $\{C_{j1},....,C_{jI}\}$ για διαφορετικά έτη ατυχήματος $i \neq j$ είναι ανεξάρτητα

3. $Var\left[C_{i\,k+1} | C_{i1}, C_{i2}, ..., C_{ik}\right] = C_{ik} * \sigma_k^2$

Αναλυτικότερα, σύμφωνα με την πρώτη υπόθεση, επακόλουθοι συντελεστές εξέλιξης $C_{ik} / C_{i,k-1}$ και $C_{i,k+1} / C_{ik}$ είναι ασυσχέτιστοι, έτσι ώστε δοθέντος τις τιμές των $C_{i1},...,C_{ik}$ η πραγματική τιμή του $C_{i,k+1}$ θα είναι κοντά στο $C_{ik} f_k$.

Ειδικότερα μετά από μια υψηλή τιμή του $C_{ik} / C_{i,k-1}$ η αναμενόμενη τιμή του επόμενου συντελεστή εξέλιξης $C_{i,k+1} / C_{ik}$ είναι η ίδια όπως και μετά από μια χαμηλή τιμή του $C_{ik} / C_{i,k-1}$. Είναι κατανοητό επομένως ότι δεν θα ήταν ορθό να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Chain Ladder σε μια Εταιρεία στην οποία συνήθως παρατηρούμε μια σχετικά μικρή αύξηση του $C_{i,k+1} / C_{ik}$ εάν $C_{ik} / C_{i,k-1}$ είναι υψηλότερος από ότι στα άλλα έτη ατυχήματος και το αντίθετο.

Ένα τεστ το οποίο μπορούμε να εφαρμόσουμε σε ένα δεδομένο τρίγωνο ζημιών προκειμένου να ελέγξουμε εάν οι συντελεστές εξέλιξης είναι ασυσχέτιστοι είναι το Spearman’s τεστ, το οποίο αναλύεται παρακάτω (*βλέπε Mack “Measuring the variability of Chain Ladder Reserve Estimates”).*

- ***Έλεγχος Συσχέτισης Μεταξύ Των Συντελεστών Εξέλιξης (Spearman’s test)***

Πρώτο βήμα για τον έλεγχο είναι να θεωρήσουμε ένα συγκεκριμένο έτος εξέλιξης k και να ταξινομήσουμε τους συντελεστές εξέλιξης $C_{i,k+1} / C_{ik}$ που υπολογίσαμε έως αυτό το έτος ξεκινώντας από τον μικρότερο.

Ορίζουμε ως r_{ik}, $1 \le i \le I-k$, την θέση του $C_{i,k+1} / C_{ik}$ συντελεστή εξέλιξης στην ταξινόμηση. Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για τους συντελεστές εξέλιξης $C_{ik} / C_{i,k-1}$, $1 \le i \le I-k$, αφήνοντας έξω τον συντελεστή εξέλιξης $C_{I+1-k,k} / C_{I+1-k,k-1}$, για τον οποίο ο ακόλουθος συντελεστής εξέλιξης δεν έχει ακόμη παρατηρηθεί.

Ας ορίσουμε ως s_{ik}, $1 \le i \le I-k$ την θέση των συντελεστών εξέλιξης στην ταξινόμηση σε αυτή την δεύτερη επανάληψη της παραπάνω διαδικασίας.

Ο συντελεστής συσχέτισης T_k του Spearman δίνεται από την σχέση :

$$T_k = 1 - 6\sum_{i=1}^{I-k}(r_{ik} - s_{ik})^2 / ((I-k)^3 - I + k)$$

Έχει αποδειχθεί ότι :

$$-1 \leq T_k \leq +1$$

καθώς επίσης και ότι :

$$E(T_k) = 0 \quad \text{και} \quad Var(T_k) = 1/(I-k-1)$$

Μια τιμή του T_k κοντά στο 0 δηλώνει ότι οι συντελεστές εξέλιξης μεταξύ των ετών εξέλιξης $k-1$ και k και αυτών μεταξύ των ετών k και $k+1$ είναι ασυσχέτιστοι. Κάθε άλλη τιμή του T_k δηλώνει ότι οι συντελεστές εξέλιξης είναι θετικά ή αρνητικά συσχετισμένοι.

Είναι κατανοητό ότι δεν μπορούμε να πάρουμε τιμή για το T_1 γιατί δεν υπάρχουν συντελεστές εξέλιξης πριν από το έτος εξέλιξης $k=1$ και παρομοίως δεν υπάρχει τιμή για το T_I .

Επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε την τιμή της μεταβλητής T η οποία αποτελεί τον σταθμισμένο μέσο των T_k, βάζοντας σε καθένα από αυτά κάποιο βάρος.

Έχουμε :

$$T = \sum_{k=2}^{I-2}(I-k-1)T_k / \sum_{k=2}^{I-2}(I-k-1)$$

$$= \sum_{k=2}^{I-2}\frac{I-k-1}{(I-2)(I-3)/2}T_k$$

Η μέση τιμή της μεταβλητής T είναι ίση με :

$$E(T) = \sum_{k=2}^{I-2}E(T_k) = 0$$

Η διακύμανση δίνεται από την σχέση :

$$Var(T) = \sum_{k=2}^{I-2}(I-k-1)^2 Var(T_k) / (\sum_{k=2}^{I-2}(I-k-1))^2$$

$$= \sum_{k=2}^{I-2}(I-k-1) / (\sum_{k=2}^{I-2}(I-k-1))^2$$

$$= \frac{1}{(I-2)(I-3)/2}$$

Επειδή η κατανομή ενός μόνο T_k με $I-k\geq 10$ είναι κατά προσέγγιση η κανονική και επειδή η μεταβλητή T είναι συνάθροιση ασυσχέτιστων T_k (τα οποία είναι συμμετρικά κατανεμημένα γύρω από τον μέσο τους 0) μπορούμε να υποθέσουμε ότι η μεταβλητή T έχει κανονική κατανομή, και να δημιουργήσουμε έτσι ένα τεστ σημαντικότητας.

Συνήθως, όταν εφαρμόζουμε ένα τεστ σημαντικότητας απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση όταν είναι σχεδόν απίθανο να είναι πραγματική, για παράδειγμα εάν η τιμή της μεταβλητής είναι έξω από ένα 50% διάστημα εμπιστοσύνης.

Επομένως, επειδή η πιθανότητα για μια τυπική κανονική μεταβλητή να βρίσκεται εντός του διαστήματος (-0,67 , 0,67) είναι 50% δεν απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση να έχουμε ασυσχέτιστους συντελεστές εξέλιξης, εάν είναι αληθής η παρακάτω σχέση :

$$-\frac{0.67}{\sqrt{((I-2)(I-3)/2)}}\leq T\leq +\frac{0.67}{\sqrt{((I-2)(I-3)/2)}}$$

Εάν η μεταβλητή T είναι έξω από αυτό το διάστημα τότε θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί κατά την εφαρμογή της Chain Ladder.

Η δεύτερη υπόθεση της μεθόδου Chain Ladder είναι η ανεξαρτησία μεταξύ των ετών ατυχήματος, δηλαδή οι τιμές των $\left\{C_{i1},....,C_{iI}\right\}$ και $\left\{C_{j1},....,C_{jI}\right\}$ για διαφορετικά έτη ατυχήματος $i\neq j$ είναι ανεξάρτητες.

Η υπόθεση αυτή δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύει στην περίπτωση όπου κάποιες αλλαγές σε ένα ημερολογιακό έτος όπως μια ουσιώδης αλλαγή στον τρόπο χειρισμού των ζημιών ή μια μεγάλη αλλαγή στον πληθωρισμό μπορεί να επηρεάσει πολλά έτη ατυχήματος με τον ίδιο τρόπο.

Ο τρόπος με τον οποίο μπορούμε να συμπεράνουμε εάν επαληθεύεται η υπόθεση της ανεξαρτησίας των ετών ατυχήματος περιγράφεται λεπτομερώς παρακάτω (*βλέπε Mack (1994) "Measuring the variability of Chain Ladder Reserve Estimates").*

➢ *Έλεγχος Ανεξαρτησίας Ετών Ατυχήματος*

Η επίδραση ενός ημερολογιακού έτους επηρεάζει μία από τις διαγώνιους :

$$D_j = \left\{ C_{j1}, C_{j-1,2}, \ldots\ldots, C_{2,j-1}, C_{1j} \right\},\ 1 \le j \le I$$

και ακολούθως επηρεάζει επίσης τους παρακείμενους συντελεστές εξέλιξης

$$A_j = \left\{ C_{j2} / C_{j1}, C_{j-1,3} / C_{j-1,2}, \ldots\ldots, C_{1,j+1} / C_{1j} \right\}$$

και

$$A_{j-1} = \left\{ C_{j-1,2} / C_{j-1,1}, C_{j-2,3} / C_{j-2,2}, \ldots\ldots, C_{1,j} / C_{1,j-1} \right\}$$

στους οποίους τα στοιχεία του D_j αποτελούν είτε τον αριθμητή είτε τον παρονομαστή.

Επομένως, εάν εξαιτίας της επίδρασης κάποιου ημερολογιακού έτους τα στοιχεία του D_j είναι μεγαλύτερα (μικρότερα) από το συνηθισμένο, τότε και τα στοιχεία του A_{j-1} θα είναι επίσης μεγαλύτερα (μικρότερα) από το συνηθισμένο και τα στοιχεία του A_j θα είναι μικρότερα (μεγαλύτερα) από το συνηθισμένο.

Προκειμένου να ελέγξουμε την ύπαρξη μιας τέτοιας επίδρασης ενός ημερολογιακού έτους θα πρέπει να διαχωρίσουμε τους συντελεστές εξέλιξης σε "μικρούς" και "μεγάλους" και εν συνεχεία να εξετάσουμε εάν οι "μεγάλοι" ή "μικροί" συντελεστές εξέλιξης εμφανίζονται σε διαγώνιους.

Πρώτο βήμα κατά την διαδικασία αυτή είναι ο υπολογισμός για κάθε k, $1 \le k \le I-1$ των τιμών του

$$F_k = \left\{ C_{i,k+1} / C_{ik} \middle| 1 \le i \le I-k \right\}$$

δηλαδή, τις τιμές των συντελεστών εξέλιξης κάθε μιας στήλης μεταξύ των ετών εξέλιξης k και $k+1$ και στη συνέχεια να τους διασπάσουμε σε δύο ομάδες, εκ των οποίων η μία θα περιέχει τους μεγαλύτερους συντελεστές εξέλιξης (LF_k) σε σύγκριση με τη διάμεσο του F_k, και η άλλη ομάδα θα περιέχει τους μικρότερους συντελεστές εξέλιξης (SF_k) σε σύγκριση πάλι με τη διάμεσο του F_k.

Η διάμεσος ενός συνόλου αριθμών είναι ο αριθμός που χωρίζει αυτό το σύνολο σε δύο μέρη, με ίσο αριθμό στοιχείων. Εάν ο αριθμός $I-k$ των στοιχείων του F_k είναι μονός τότε υπάρχει ένα στοιχείο το οποίο είναι ίσο με τη διάμεσο και το οποίο δεν λαμβάνεται υπόψη σε κανένα από τα σύνολα LF_k και SF_k.

Έχοντας ολοκληρώσει το παραπάνω βήμα για καθένα από τα F_k, $1 \le k \le I-1$, κάθε συντελεστής εξέλιξης που θα έχει υπολογιστεί θα αντιστοιχεί είτε στο σύνολο $L = LF_1 + ... + LF_{I-2}$ των μεγάλων συντελεστών εξέλιξης είτε στο σύνολο $S = SF_1 + ... + SF_{I-2}$ των μικρών συντελεστών εξέλιξης είτε δεν θα λαμβάνεται υπόψη γιατί θα αποτελεί διάμεσο. Επομένως, καθένας από τους συντελεστές εξέλιξης θα έχει 50% πιθανότητα να ανήκει είτε στο σύνολο L είτε στο σύνολο S.

Δεύτερο βήμα είναι να καταγράψουμε τον αριθμό των μεγάλων συντελεστών εξέλιξης και των μικρών συντελεστών εξέλιξης για κάθε μία διαγώνιο A_j, $1 \le j \le I-1$.

Λογικά, εάν δεν υπάρχει κάποια ουσιώδης αλλαγή από το ημερολογιακό έτος j στο ημερολογιακό έτος $j+1$, τα A_j θα πρέπει να έχουν τον ίδιο αριθμό μεγάλων και μικρών συντελεστών εξέλιξης, δηλαδή, τα L_j και S_j θα πρέπει να έχουν το ίδιο μέγεθος. Στην περίπτωση που τα L_j είναι πολύ μεγαλύτερα ή μικρότερα από τα S_j ή, όμοια , εάν η τιμή της μεταβλητής $Z_j = \min(L_j, S_j)$ είναι σημαντικά μικρότερη από $(L_j + S_j)/2$, τότε υπάρχει επίδραση κάποιου ημερολογιακού έτους.

Είναι αυτονόητο ότι κάθε μία από τις μεταβλητές L_j και S_j ακολουθούν την Διωνυμική Κατανομή (*Binomial Distribution*) με n = $L_j + S_j$ και p = 0.5.

Άρα,

$$prob(L_j = m) = \binom{n}{m} \frac{1}{2^n} \ , \ m = 0,1,...,n$$

Μετά από υπολογισμούς τους οποίους δεν θα αναλύσουμε στο παρών καταλήγουμε στο παρακάτω αποτέλεσμα :

Εάν n = $L_j + S_j$ και $m = [(n-1)/2]$ τότε :

$$E(Z_j) = \frac{n}{2} - \binom{n-1}{m} \frac{n}{2^n}$$

και

$$Var(Z_j) = \frac{n(n-1)}{4} - \binom{n-1}{m} \frac{n(n-1)}{2^n} + E\left(Z_j\right) - \left(E\left(Z_j\right)\right)^2$$

Στη συνέχεια παίρνουμε την μεταβλητή $Z = Z_2 + \ldots + Z_{I-1}$ στην οποία δεν έχουμε λάβει υπόψη την μεταβλητή Z_1 επειδή το A_1 περιέχει μόνο ένα στοιχείο και επομένως η Z_1 δεν είναι μια τυχαία μεταβλητή αλλά είναι ίση πάντα με 0.

Ομοίως, θα πρέπει να μην λάβουμε υπόψη και κάθε άλλο Z_j για το οποίο $L_j + S_j \leq 1$. Επειδή κάτω από την μηδενική υπόθεση ισχύει ότι διαφορετικά Z_j είναι ασυσχέτιστα και έτσι έχουμε:

$$E\left(Z\right) = E\left(Z_2\right) + \ldots + E\left(Z_{I-1}\right)$$

$$Var\left(Z\right) = Var\left(Z_2\right) + \ldots + Var\left(Z_{I-1}\right)$$

μπορούμε να υποθέσουμε ότι η Z ακολουθεί την κανονική κατανομή. Αυτό σημαίνει ότι απορρίπτουμε (με πιθανότητα λάθους 5%) την υπόθεση του να μην υπάρχει σημαντική επίδραση ενός ημερολογιακού έτους μόνο όταν δεν επαληθεύεται το παρακάτω :

$$E\left(Z\right) - 2\sqrt{Var\left(Z\right)} \leq Z \leq E\left(Z\right) + 2\sqrt{Var\left(Z\right)}$$

2.2.4 *Πλεονεκτήματα - Μειονεκτήματα*

Το μεγαλύτερο πλεονέκτημα της μεθόδου *Chain Ladder* είναι η εύκολη εφαρμογή της στα δεδομένα μιας Εταιρείας καθώς επίσης και ο αντικειμενικός της χαρακτήρας. Ιδιαίτερης σημασίας είναι το γεγονός ότι όσο οι ζημιές εξελίσσονται και ο χρόνος περνάει, η εκτίμηση πλησιάζει όλο και πιο κοντά στην πραγματικότητα. Επίσης, η μέθοδος *Chain Ladder* υπερτερεί σε σχέση άλλων μεθόδων γιατί έχει λιγότερες παραμέτρους προς εκτίμηση και επομένως είναι λιγότερο υποκείμενη σε σφάλμα εκτίμησης.

Από την άλλη μεριά όμως υπάρχουν και διάφορα μειονεκτήματα κατά την εφαρμογή αυτής της μεθόδου. Όπως προαναφέραμε βασική υπόθεση της μεθόδου είναι ότι οι σχέσεις αναλογίας που ίσχυσαν κατά το πρόσφατο παρελθόν μεταξύ των ποσών των σωρευτικών ζημιών (εκκρεμών και πληρωθεισών), θα επαναληφθούν και στο μέλλον. Η συγκεκριμένη υπόθεση όμως μπορεί να αποδειχθεί μη αληθής λόγω του ότι μπορεί να υπάρξουν γεγονότα που θα διαταράξουν αυτή τη σχέση (παρελθόντος και μέλλοντος).

Τέτοια γεγονότα είναι :

- αλλαγή της φιλοσοφίας της Εταιρείας, όσον αφορά τον διακανονισμό των απαιτήσεων
- αλλαγή πολιτικής πληρωμών (ταχύτερη πληρωμή αποζημιώσεων)
- αλλαγή στρατηγικής της Εταιρείας
- αλλαγή κανόνων ανάληψης κινδύνων
- έκτακτα ακραία φαινόμενα
- αλλαγή της πρακτικής των δικαστηρίων, δηλαδή ταχύτερη ή βραδύτερη έκδοση αποφάσεων που αφορά τις αποζημιώσεις
- αύξηση του πληθωρισμού
- εμφάνιση μιας πολύ μεγάλης απαίτησης σε ένα συγκεκριμένο έτος

Όλοι οι παραπάνω παράγοντες μεταβολής μπορεί να επηρεάσουν σημαντικά το επίπεδο της εκτίμησης για το ύψος των αποθεμάτων.

Για το λόγο αυτό, πολλές φορές οι αναλογιστές προκειμένου να πετύχουν όσο το δυνατόν καλύτερη εκτίμηση, επεμβαίνουν στο μοντέλο εξέλιξης ζημιών, θέτοντας βάρη στους συντελεστές των τελευταίων δεδομένων ή παραμερίζοντας τους υψηλότερους ή χαμηλότερους συντελεστές εξέλιξης ζημιών. Βασική βέβαια αρχή είναι ότι οποιαδήποτε μέθοδος και αν χρησιμοποιηθεί θα πρέπει να είναι καλά τεκμηριωμένη.

2.2.5 *Chain Ladder & Πληθωρισμός (Inflation-adjusted CL)*

Όπως προαναφέραμε, η βασική μέθοδος Chain Ladder δεν λαμβάνει υπόψη κανένα παράγοντα που μπορεί να επηρεάσει τις αποζημιώσεις, όπως είναι για παράδειγμα ο πληθωρισμός. Οι συντελεστές εξέλιξης που υπολογίζονται βασίζονται στις αποζημιώσεις πολλών διαφορετικών ημερολογιακών περιόδων. Ο πληθωρισμός των προηγούμενων ετών περιέχεται στους υπολογιζόμενους συντελεστές, αλλά δεν είναι φανερό τί υπόθεση γίνεται για την μελλοντική τιμή του πληθωρισμού. Εάν η εκτίμηση για τον μελλοντικό πληθωρισμό είναι σημαντικά διαφορετική από την τιμή του πληθωρισμού του παρελθόντος τότε η μέθοδος δεν θα μας οδηγήσει σε ορθούς υπολογισμούς των μελλοντικών αποζημιώσεων.

Για το λόγο αυτό, εάν προβλέπουμε ότι η τιμή του πληθωρισμού θα είναι πολύ διαφορετική στο μέλλον σε σχέση με το παρελθόν, τότε είναι απαραίτητο να προσαρμόσουμε τα δεδομένα μας βάση του πληθωρισμού. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι κατά την εφαρμογή του μοντέλου είναι ιδιαίτερα σημαντικό να μην πάρουμε τις σωρευτικές αποζημιώσεις έτσι ώστε η επιρροή καθενός ημερολογιακού έτους να λαμβάνεται ορθά υπόψη.

Το μοντέλο μας θα έχει τώρα την μορφή :

$$c_{ik} = S_i r_k \lambda_{i+k-1} + E_{ik}$$

όπου,

c_{ik} *παριστάνει την ζημιά για το έτος ατυχήματος i και το έτος εξέλιξης k*

S_i *παριστάνει την τελική ζημιά για το έτος ατυχήματος i*

r_k *είναι το ποσοστό της τελικής ζημιάς S_i κατά το έτος εξέλιξης k*

λ_{i+k-1} *παριστάνει τον πληθωρισμό για το ημερολογιακό έτος*

E_{ik} *παριστάνει το σφάλμα*

Προκειμένου να εκτιμήσουμε τις τελικές αποζημιώσεις θα πρέπει αρχικά να βρούμε τα ποσοστά πληθωρισμού του παρελθόντος έτσι ώστε να προσαρμόσουμε τις αποζημιώσεις του παρελθόντος στις τωρινές νομισματικές τιμές και εν συνεχεία να κάνουμε υποθέσεις για τον μελλοντικό πληθωρισμό τον οποίο θα συμπεριλάβουμε στις μελλοντικές εκτιμώμενες αποζημιώσεις.

Για την καλύτερη κατανόηση, θα παραθέσουμε το παρακάτω απλό παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι οι ατομικές αποζημιώσεις (*incremental*) μιας Ασφαλιστικής Εταιρείας απεικονίζονται στο παρακάτω τρίγωνο :

	Έτος Εξέλιξης		
Έτος ατυχήματος	1	2	3
2004	100	60	40
2005	165	82	
2006	150		

Πίνακας 2.9 *Πίνακας Ζημιών*

Έστω ότι ο πληθωρισμός τα προηγούμενα χρόνια ήταν σταθερός και ίσος με 10%. Οι αποζημιώσεις του παραπάνω τριγώνου, προσαρμοσμένες βάση του πληθωρισμού, είναι οι παρακάτω :

	Έτος Εξέλιξης		
Έτος ατυχήματος	1	2	3
2004	121	66	40
2005	181	82	
2006	150		

Πίνακας 2.10 *Πίνακας Προσαρμοσμένων Ζημιών Βάση Πληθωρισμού*

Όπου :

$$C_{2004,1} = 100 \times (1{,}10)^2 = 121$$
$$C_{2004,2} = 60 \times (1{,}10) = 66$$
$$C_{2005,1} = 165 \times (1{,}10) = 181$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε τις μελλοντικές αποζημιώσεις παίρνουμε τις σωρευτικές ζημιές του παραπάνω τριγώνου:

	Έτος Εξέλιξης		
Έτος ατυχήματος	1	2	3
2004	121	187	227
2005	181	263	
2006	150		

Πίνακας 2.11 *Σωρευτικές Προσαρμοσμένες Ζημιές Βάση Πληθωρισμού*

Επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός των συντελεστών εξέλιξης και η εκτίμηση μέσω αυτών των μελλοντικών αποζημιώσεων σε τωρινές νομισματικές τιμές. Οι υπολογιζόμενοι σταθμισμένοι συντελεστές εξέλιξης είναι οι εξής :

- f_1 = 187+263 / 121+181 = 1,49 (για το έτος εξέλιξης 1 προς 2) και
- f_2 = 227/187 = 1,214 (για το έτος εξέλιξης 2 προς 3)

Επομένως οι σωρευτικές εκτιμώμενες μελλοντικές αποζημιώσεις δίνονται παρακάτω :

	Έτος Εξέλιξης		
Έτος ατυχήματος	1	2	3
2004	121	187	227
2005	181	263	319
2006	150	224	271

Πίνακας 2.12 *Συμπληρωμένο Τρίγωνο Σωρευτικών Ζημιών*

Μετατρέποντας τις παραπάνω ζημιές σε μη σωρευτικές παίρνουμε :

	Έτος Εξέλιξης		
Έτος ατυχήματος	1	2	3
2004	121	66	40
2005	181	82	56
2006	150	74	47

Πίνακας 2.13 *Τρίγωνο Μη Σωρευτικών Ζημιών πριν την εφαρμογή του πληθωρισμού*

Υποθέτουμε τώρα ότι ο πληθωρισμός για τα μελλοντικά έτη θα κυμανθεί γύρω από την τιμή 8 %. Οι εκτιμώμενες μελλοντικές αποζημιώσεις υπολογιζόμενες σε τωρινές νομισματικές μονάδες θα πάρουν τώρα τις τιμές :

	Έτος Εξέλιξης		
Έτος ατυχήματος	1	2	3
2004			
2005			60
2006		80	55

Πίνακας 2.14 *Τρίγωνο Μη Σωρευτικών Ζημιών σε τωρινές νομισματικές μονάδες*

Όπου :

$$60 = 56 \times (1,08)$$

$$80 = 74 \times (1,08)$$

$$55 = 47 \times (1,08)^2$$

Καταλήγοντας, οι εκτιμώμενες τελικές σωρευτικές αποζημιώσεις είναι οι εξής :

	Έτος Εξέλιξης		
Έτος ατυχήματος	1	2	3
2004	121	187	227
2005	181	263	323
2006	150	230	285

Πίνακας 2.15 *Τρίγωνο Σωρευτικών Ζημιών σε τωρινές νομισματικές μονάδες*

Επομένως το απόθεμα που θα πρέπει να σχηματίσει η Ασφαλιστική Εταιρεία είναι ίσο με : $(323-263)+(285-150)=195$

2.3 Μέθοδος Bornhuetter-Ferguson

Η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson (*Bornhuetter & Ferguson, 1972*) αποτελεί συνδυασμό των μεθόδων Αναμενόμενου Δείκτη Ζημιών και Chain Ladder. Η μέθοδος αυτή αποδείχτηκε ως η πλέον κατάλληλη στην περίπτωση που δεν υπάρχει σταθερότητα στο ποσοστό των τελικών πληρωθεισών ζημιών στα αρχικά έτη εξέλιξης, γεγονός το οποίο καθιστά την μέθοδο Chain Ladder ακατάλληλη για την εκτίμηση των μελλοντικών πληρωθεισών ζημιών, αν αυτή εφαρμοστεί μηχανικά. Επιπρόσθετα δεν γίνεται αποδεκτό ότι η εμπειρία του παρελθόντος είναι πλήρως αντιπροσωπευτική, ώστε να στηριχτούν προβλέψεις για την πορεία των αποζημιώσεων στο μέλλον. Η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson πλεονεκτεί της μεθόδου Chain Ladder, επειδή είναι πιο ισορροπημένη και επιπλέον επιτρέπει τη χρήση δεδομένων από άλλες πηγές, πλην των ιστορικών στοιχείων, προκειμένου να προσδιοριστεί ο αναμενόμενος δείκτης ζημιάς. Η χρήση όμως αυτών των δεδομένων από εξωτερικούς παράγοντες αποτελεί συγχρόνως και μειονέκτημά της.

2.3.1 Περιγραφή Διαδικασίας Εκτίμησης

Όπως και στην μέθοδο Chain Ladder έτσι και εδώ κατασκευάζουμε το τρίγωνο ζημιών προκειμένου να μεταβούμε στους απαραίτητους υπολογισμούς για την εκτίμηση των αποθεμάτων. Σε κάθε σειρά, για κάθε έτος ατυχήματος του τριγώνου ανάπτυξης, εκτιμούμε τον αναμενόμενο δείκτη ζημιών για αυτό το έτος λαμβάνοντας υπόψη όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες που αφορούν τις εξοφλημένες ζημιές και τα δεδομένα που έχουν χρησιμοποιηθεί κατά την τιμολόγηση του ασφαλίστρου.

Χρησιμοποιώντας τον εκτιμώμενο δείκτη ζημιών και το δεδουλευμένο ασφάλιστρο για το συγκεκριμένο έτος υπολογίζουμε τον εκτιμώμενο τελικό δείκτη ζημιών για αυτό το έτος.

Βάση της μεθόδου του Αναμενόμενου Δείκτη Ζημιών έχουμε ότι :

(Εκτιμώμενες Τελικές Ζημιές) = (Αναμενόμενος Δείκτης Ζημιών) x
(Δεδουλευμένο Ασφάλιστρο)

και

(Εκτιμώμενο Απόθεμα Ζημιών) = (Εκτιμώμενες Τελικές Ζημιές) −
(Ζημιές που έχουν πληρωθεί μέχρι σήμερα)

Επιπρόσθετα βάση της μεθόδου Chain Ladder έχουμε :

(Εκτιμώμενες Τελικές Ζημιές) = (Ζημιές που έχουν αποπληρωθεί μέχρι σήμερα) x

$$\prod_j f_j$$

όπου f_j είναι ο συντελεστής εξέλιξης ζημιών σύμφωνα με τη μέθοδο Chain Ladder.

Επομένως :

(Εκτιμώμενο Απόθεμα Ζημιών) = (Εκτιμώμενες Τελικές Ζημιές) –
(Ζημιές που έχουν αποπληρωθεί μέχρι σήμερα)
= (Ζημιές που έχουν αποπληρωθεί μέχρι σήμερα) $\left(f_{ult}-1\right)$

όπου $f_{ult}=\left(\prod_j f_j\right)$

Διαιρώντας και πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με f_{ult} καταλήγουμε στην σχέση :

Εκτιμώμενο Απόθεμα ζημιών = (Εκτιμώμενες Τελικές Ζημιές) x ($1-\frac{1}{f_{ult}}$ ***).***

Συνοψίζοντας, κατά την εφαρμογή της μεθόδου Bornhuetter – Ferguson ακολουθούμε τα εξής βήματα για τον υπολογισμό του εκτιμώμενου αποθέματος ζημιών.

1ο Βήμα :

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του εκτιμώμενου δείκτη Ζημιών για να υπολογίσουμε τις εκτιμώμενες τελικές ζημιές βάση της σχέσης :

(Εκτιμώμενες Τελικές Ζημιές) = (Αναμενόμενος Δείκτης Ζημιών) x (Δεδουλευμένο Ασφάλιστρο)

2ο Βήμα :

Λαμβάνοντας υπόψη τις εκτιμώμενες τελικές ζημιές βάση της μεθόδου του αναμενόμενου δείκτη ζημιών και σε συνδυασμό με τους συντελεστές εξέλιξης της μεθόδου Chain Ladder υπολογίζουμε το εκτιμώμενο απόθεμα ζημιών μέσω της παρακάτω σχέσης :

Εκτιμώμενο Απόθεμα Ζημιών = (Εκτιμώμενες Τελικές Ζημιές) x $\left(1-\frac{1}{f_{ult}}\right)$

2.3.2 Πλεονεκτήματα - Μειονεκτήματα

Πλεονέκτημα της μεθόδου Bornhuetter – Ferguson είναι ότι αποτελεί συνδυασμό των μεθόδων Chain Ladder και της μεθόδου Αναμενόμενου Δείκτη Ζημιών.

Μειονέκτημα της μεθόδου είναι το γεγονός ότι επηρεάζεται από αλλαγές που γίνονται στην στρατηγική πληρωμών (το προσωπικό πληρωμών ξεκινά να αποζημιώνει ταχύτερα).

2.4 Μέθοδος Benktander Hovinen

Η μέθοδος Benktander Hovinen συνδυάζει τα εκτιμώμενα αποθέματα των μεθόδων Chain Ladder και Bornhuetter – Ferguson, δίνοντας βάρη σε καθένα από αυτά. Η μέθοδος αυτή πήρε το όνομά της από τους *Gunnar Benktander (Benktander 1976)* και *Esa Hovinen (Hovinen 1981)*.

Ένα πλεονέκτημα της μεθόδου Bornhuetter – Ferguson συγκρινόμενη με την μέθοδο Chain Ladder είναι ότι δεν επιτρέπει στις ζημιές των αρχικών ετών να προσδιορίσουν το απόθεμα. Εάν ένα έτος εξελίχθηκε λίγο διαφορετικά από το αρχικά αναμενόμενο, δεν θα ήταν ορθό να παραλείψουμε το γεγονός ότι αυτή η απόκλιση έχει κάποια επίδραση στην εκτίμηση των αποθεμάτων. Η εμπειρία εξάλλου έχει δείξει ότι τα πράγματα γίνονται όλο και πιο σταθερά καθώς περνάει ο χρόνος και τα έτη ατυχημάτων τείνουν να εξελίσσονται πιο όμοια, γεγονός το οποίο είναι και η βασικότερη παραδοχή στη μέθοδο Chain Ladder. Επομένως λογικό είναι να σταθμίσουμε τις δύο μεθόδους με βάρη.

2.4.1 Περιγραφή Διαδικασίας

Αρχικό βήμα κατά την εφαρμογή αυτής της μεθόδου είναι ο υπολογισμός αρχικά των εκτιμώμενων αποθεματικών βάση των μεθόδων Chain Ladder και Bornhuetter – Ferguson με τον τρόπο που έχουμε δείξει παραπάνω. Ολοκληρώνοντας τους υπολογισμούς εισάγουμε τα αποτελέσματα στην παρακάτω σχέση η οποία μας δίνει το εκτιμώμενο απόθεμα ζημιών βάση της μεθόδου Benktander Hovinen.

$$R_w = w * R_{CL} + (1 - w) * R_{BF}$$

όπου

R_w *παριστάνει το εκτιμώμενο απόθεμα βάση της μεθόδου Benktander Hovinen*

R_{CL} *παριστάνει το εκτιμώμενο απόθεμα βάση της μεθόδου Chain Ladder*

R_{BF} *παριστάνει το εκτιμώμενο απόθεμα βάση της μεθόδου Bornhuetter – Ferguson*

w *παριστάνει κάποιο βάρος*

Βασική μας επιδίωξη είναι το βάρος w να αυξάνεται με τον χρόνο.

2.5 Μέθοδος Διαχωρισμού – Separation Method

Η Μέθοδος Διαχωρισμού (*Separation Method*) βασίζεται στην υπόθεση ότι οι αποζημιώσεις (*incremental claims*) είναι προϊόντα παραγόντων που εξαρτώνται από το έτος ατυχήματος, το έτος εξέλιξης και το ημερολογιακό έτος. Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε από τον *Greg Taylor* το 1977.

2.5.1 Περιγραφή Διαδικασίας Εκτίμησης

Ας υποθέσουμε ότι :

c *παριστάνει το μέσο ποσό ζημιάς*

i *παριστάνει το έτος ατυχήματος*

j *παριστάνει το έτος εξέλιξης*

r_j *παριστάνει το αναμενόμενο ποσοστό ζημιάς του έτους εξέλιξης* j *εφόσον δεν υπάρχει καμιά επίδραση παραγόντων ημερολογιακού έτους. Επομένως τα* r_j *θα αθροίζουν στην μονάδα.*

λ_{i+j} *παριστάνει την επίδραση κάποιου παράγοντα του ημερολογιακού έτους (για παράδειγμα του πληθωρισμού)*

n_i *παριστάνει τον αριθμό των ζημιών του έτους ατυχήματος* i.

Έτσι έχουμε :

$$E\left(P_{ij}\right) = c * n_i * r_j * \lambda_{i+j}$$

$$\frac{E\left(P_{ij}\right)}{n_i} = c * r_j * \lambda_{i+j}$$

όπου το P_{ij} παριστάνει το ποσό των μη σωρευτικών ζημιών για το έτος ατυχήματος i και το έτος εξέλιξης j. Το αποτέλεσμα της παραπάνω σχέσης μπορεί να θεωρηθεί και ως μια τιμή δεδομένου (i, j) ενός πίνακα τριγώνου, όπως φαίνεται παρακάτω :

	Έτος Εξέλιξης					
Έτος ατυχήματος	0	1	2	…	$k-1$	k
0	$cr_0\lambda_0$	$cr_1\lambda_1$	$cr_2\lambda_2$	…	$cr_{k-1}\lambda_{k-1}$	$cr_k\lambda_k$
1	$cr_0\lambda_1$	$cr_1\lambda_2$	$cr_2\lambda_3$	…	$cr_{k-1}\lambda_k$	
2	$cr_0\lambda_2$	$cr_1\lambda_3$	$cr_2\lambda_4$	…		
…	…	…	…			
$k-1$	$cr_0\lambda_{k-1}$	$cr_1\lambda_k$				
k	$cr_0\lambda_k$					

Τα αθροίσματα των τιμών των διαγωνίων, λαμβάνοντας υπόψη ότι τα r_j αθροίζουν στην μονάδα, είναι :

$$d_0 = c * r_0 * \lambda_0$$

$$d_1 = c * r_0 * \lambda_1 + c * r_1 * \lambda_1$$

$$= c * \left(r_0 + r_1 \right) * \lambda_1$$

$$d_2 = c * r_0 * \lambda_2 + c * r_1 * \lambda_2 + c * r_2 * \lambda_2$$

$$= c * \left(r_0 + r_1 + r_2 \right) * \lambda_2$$

…

$$d_{k-1} = c * \left(r_0 + r_1 + \ldots + r_{k-1} \right) * \lambda_{k-1}$$

$$= c * \left(1 - r_k \right) * \lambda_{\kappa-1}$$

$$d_k = c * \left(r_0 + r_1 + \ldots + r_k \right) * \lambda_k$$

$$= c * \lambda_\kappa$$

Έστω ότι έχουμε ένα τρίγωνο ζημιών με παρατηρημένες τιμές P_{ij} και διαιρούμε κάθε γραμμή με μια εκτιμώμενη τιμή του $\hat{n}_i$. Ορίζουμε $B_{ij} = P_{ij} / \hat{n}_i$.

Ξεκινώντας από την τελευταία ισότητα έχουμε :

$$c * \hat{\lambda}_k = \hat{d}_k$$

Από την αρχική *σχέση* $\dfrac{E\left(P_{ij}\right)}{n_i} = c * r_j * \lambda_{i+j} \Rightarrow r_j = B_{ij} / \left(c * \lambda_{i+j} \right)$, για $i = 0$ και $j = k$ έχουμε :

$$\hat{r}_k = B_{0k} / \left(c * \hat{\lambda}_k \right)$$

Όμοια λαμβάνουμε :

$$c*\hat{\lambda}_{k-1} = \hat{d}_{k-1} \big/ \left(1-\hat{r}_k\right)$$

$$\hat{r}_{k-1} = \left(B_{0k-1} + B_{1k-1}\right) \big/ \left(c*\hat{\lambda}_k + c*\hat{\lambda}_{\kappa-1}\right)$$

$$c*\hat{\lambda}_{\kappa-2} = \hat{d}_{k-2} \big/ \left(1-\hat{r}_k - \hat{r}_{k-1}\right)$$

$$\hat{r}_{k-2} = \left(B_{0k-2} + B_{1k-2} + B_{2k-2}\right) \big/ \left(c*\hat{\lambda}_k + c*\hat{\lambda}_{k-1} + c*\hat{\lambda}_{k-2}\right)$$

...

Για την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου ας υποθέσουμε ότι έχουμε το παρακάτω τρίγωνο μη σωρευτικών ζημιών :

	Έτος Εξέλιξης		
Έτος ατυχήματος	0	1	2
2004	100	60	40
2005	165	82	
2006	150		

Ας υποθέσουμε επίσης ότι το εκτιμώμενο πλήθος των τελικών ζημιών (n_i) ανά έτος ατυχήματος παρουσιάζεται παρακάτω :

Έτος Ατυχήματος	***Εκτιμώμενο πλήθος ζημιών***
2004	12
2005	20
2006	25

Διαιρώντας τις ζημιές του τριγώνου με το εκτιμώμενο πλήθος τελικών ζημιών ($\frac{E\left(P_{ij}\right)}{n_i}$), παίρνουμε το τρίγωνο με τις τιμές των $c*r_j*\lambda_{i+j}$:

	Έτος Εξέλιξης		
Έτος ατυχήματος	0	1	2
2004	8,33	5,00	3,33
2005	8,25	4,10	
2006	6,00		
Σύνολο :	**22,58**	**9,10**	**3,33**

Αθροίζοντας τις διαγώνιους έχουμε :

$d_0 = 8,33$

$d_1 = 8,25 + 5 = 13,25$

$d_2 = 6 + 4,10 + 3,33 = 13,43$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $r_0 + r_1 + r_2 = 1$, έχουμε :

$d_2 = c\hat{\lambda}_2 = 13,43$

$c\hat{r}_2\hat{\lambda}_2 = 3,33 \Rightarrow \hat{r}_2 = 3,33 / c\hat{\lambda}_2 = 3,33/13,43 = 0,2479$

$d_1 = c\hat{\lambda}_1 (r_0 + r_1) \Rightarrow c\hat{\lambda}_1 = 13,25 / (1 - 0,2479) = 17,61$

$\hat{r}_1 = 9,10/13,43 + 17,61 = 0,2931$

$c\hat{\lambda}_0 = 8,33 / (1 - 0,2479 - 0,2931) = 8,33/0,459 = 18,14$

$\hat{r}_0 = 22,58 / (c\lambda_0 + c\lambda_1 + c\lambda_2) = 22,58 / 49,18 = 0,459$

Επόμενο βήμα είναι η εκτίμηση των μελλοντικών αποζημιώσεων. Ξεκινώντας υπολογίσουμε τις τιμές των $c\hat{\lambda}_3$ και $c\hat{\lambda}_4$.

$c\hat{\lambda}_3 = c\hat{\lambda}_2 * \left(c\hat{\lambda}_2 / c\hat{\lambda}_1 \right) = 13,43 * (13,43/17,61) = 10,24$

$c\hat{\lambda}_4 = c\hat{\lambda}_2 * \left(c\hat{\lambda}_2 / c\hat{\lambda}_1 \right)^2 = 13,43 * (13,43/17,61)^2 = 7,81$

Καταλήγοντας, οι εκτιμώμενες μελλοντικές αποζημιώσεις είναι :

$\hat{D}_{12} = \hat{n}_1 * \hat{r}_2 * c\hat{\lambda}_3 = 20 * 0,2479 * 10,24 = 50,76$

$\hat{D}_{21} = \hat{n}_2 * \hat{r}_1 * c\hat{\lambda}_3 = 25 * 0,2931 * 10,24 = 75,03$

$\hat{D}_{22} = \hat{n}_2 * \hat{r}_2 * c\hat{\lambda}_4 = 25 * 0,2479 * 7,81 = 48,40$

Άρα το εκτιμώμενο απόθεμα μελλοντικών ζημιών είναι ίσο με :

50,76 + 75,03 + 48,40 = 174,19

2.6 Λογαριθμικό Μοντέλο Γραμμικής Παλινδρόμησης

2.6.1 *Εισαγωγή*

Σχεδόν όλες οι αναλογιστικές μέθοδοι εκτίμησης αποθέματος ζημιών στηρίζονται σε ένα στατιστικό μοντέλο. Τις περισσότερες όμως φορές η διαδικασία με την οποία διενεργείται η εκτίμηση των αποθεμάτων δεν ακολουθεί πιστά ένα στατιστικό μοντέλο με αποτέλεσμα η μελέτη να καταλήγει σε αποτελέσματα που δεν είναι στατιστικά ορθά. Μοντέλα σαν αυτό της βασικής μεθόδου Chain Ladder οδηγούν σε εκτιμήσεις οι οποίες είναι πάρα πολύ κοντά στα πραγματικά καταγεγραμμένα δεδομένα. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε μεγάλο βαθμό αστάθειας κατά την εκτίμηση των αποθεμάτων αφού αυτή είναι στενά συσχετισμένη με τις παρατηρημένες τιμές και επομένως πολύ ευαίσθητη σε μικρές αλλαγές αυτών. Μια μικρή αλλαγή σε μια παρατηρημένη τιμή μπορεί να επηρεάσει σε μεγάλο βαθμό την εκτιμώμενη τιμή.

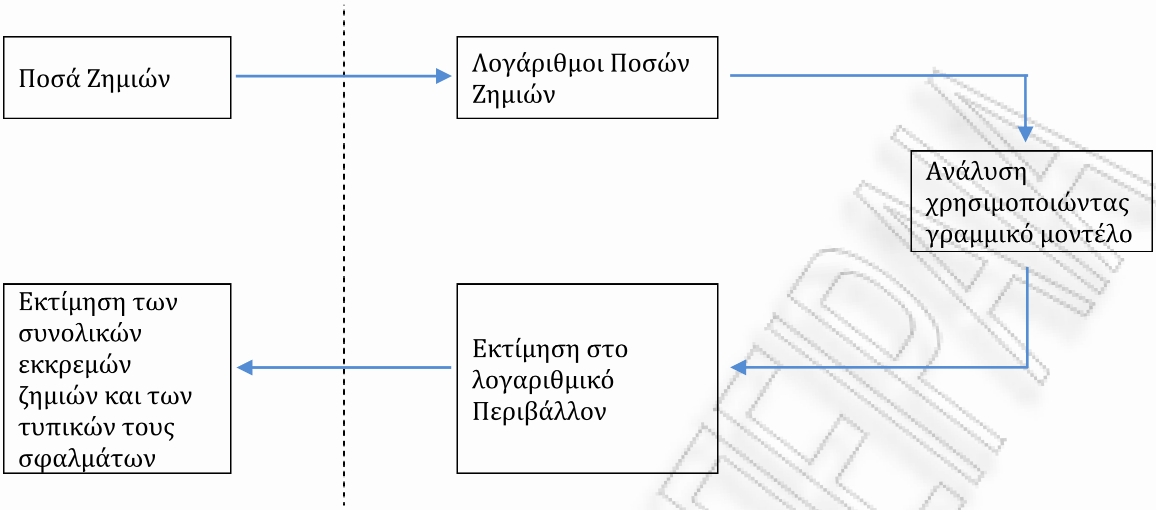
Για τον λόγο αυτό είναι προτιμότερο να χρησιμοποιηθεί ένα πιο προσεγμένο στατιστικό μοντέλο προκειμένου να κατανοηθούν καλύτερα τα δεδομένα, να ελεγχθεί η ομαλότητά τους και να καταλήξουμε έτσι σε πιο ορθές εκτιμήσεις.

Βέβαια, θα πρέπει να σημειωθεί ότι όλα τα μοντέλα, είτε αυτά είναι βασισμένα στις κλασικές αναλογιστικές μεθόδους όπως είναι η Chain Ladder είτε αυτά αποτελούν πιο εξειδικευμένα στατιστικά μοντέλα, απαιτούν και την ικανότητα αλλά και την εμπειρία του ατόμου που τα εφαρμόζει. Σκοπός της εφαρμογής των παραπάνω μοντέλων είναι να περιγράψουν και να αναλύσουν το πολύ πολύπλοκο κύκλωμα των ζημιών με απλούς όρους και συχνά βασισμένα σε λίγα δεδομένα. Το πλεονέκτημα των πιο εξειδικευμένων μοντέλων είναι ότι ελέγχουν την καταλληλότητα των δεδομένων για την εφαρμογή του μοντέλου και έτσι οι εκτιμήσεις που λαμβάνονται είναι πιο σωστές.

Ένα μοντέλο το οποίο θα μπορούσε να προσαρμοστεί στα δεδομένα κάποιας Εταιρείας είναι το λογαριθμικό μοντέλο (*log-linear model*). Οι παράμετροι του μοντέλου αυτού εκτιμούνται με την εφαρμογή πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης. Η θεωρία εφαρμογής ενός λογαριθμικού μοντέλου στην αποθεματοποίηση ζημιών παρουσιάστηκε από τον *Verrall* το 1991 (“*On the Unbiased Estimation of Reserves from Loglinear Models*”).

2.6.2 Περιγραφή Διαδικασίας

Η διαδικασία που ακολουθείται κατά την εφαρμογή ενός λογαριθμικού μοντέλου παρουσιάζεται συνοπτικά στο παρακάτω σχήμα :



Κατά την εφαρμογή του λογαριθμικού μοντέλου παίρνουμε τους λογαρίθμους των ζημιών P_{ij} και έτσι το μοντέλο έχει την μορφή :

$$\ln P_{ij} = X_{ij}\beta + e_{ij}$$

όπου β είναι ένα διάνυσμα παραμέτρων, X_{ij} είναι μια σειρά από ένα πίνακα σχεδιασμού και e_{ij} είναι το σφάλμα με μέσο μηδέν. Συνήθως γίνεται η υπόθεση ότι τα e_{ij}, e_{kl} είναι ανεξάρτητα και όμοια κατανεμημένα και ακολουθούν κανονική κατανομή με διακύμανση σ^2.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η μεταστροφή από τους λογαρίθμους των P_{ij} στις κανονικές τιμές των P_{ij}. Είναι ιδιαίτερα σημαντικό οι εκτιμήσεις να είναι αμερόληπτες έτσι ώστε να μην οδηγηθούμε σε τιμές που είναι υπό ή υπερεκτιμημένες.

Πριν την εφαρμογή του λογαριθμικού μοντέλου στα δεδομένα της Εταιρείας θα παραθέσουμε την μαθηματική απεικόνιση του μοντέλου. Η διαδικασία εκτίμησης ανεξάρτητων και όμοια κατανεμημένων δεδομένων παρουσιάζεται στο ***Παράρτημα 1***.

Ας υποθέσουμε ότι :

$$E\left(P_{ij}\right) = \theta_{ij}$$

Σκοπός μας είναι να εκτιμήσουμε τα θ_{ij} και τα τυπικά τους σφάλματα, καθώς οι εκτιμήσεις των θ_{ij} για $i = 2,\ldots,t \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \gamma\iota\alpha \;\; j = t-1+2,\ldots,t$ δεν είναι παρά μόνο οι εκτιμήσεις των μελλοντικών ζημιών. Η υπόθεση που κάνουμε είναι ότι τα P_{ij} είναι ανεξάρτητα και λογαριθμοκανονικά κατανεμημένα.

Έστω ότι :

$$Y_{ij} = \ln P_{ij} = X_{ij}\beta + e_{ij}$$

Επομένως τα Y_{ij} είναι ανεξάρτητα και ακολουθούν κανονική κατανομή. Έχουμε :

$$E\left(Y_{ij}\right) = X_{ij}\beta \quad \text{και} \quad Var\left(Y_{ij}\right) = \sigma^2$$

όπου X_{ij} είναι διάνυσμα σειρά των επεξηγηματικών μεταβλητών και β είναι ένα διάνυσμα στήλη των παραμέτρων. Και τα δύο διανύσματα είναι μεγέθους p.

Το γραμμικό μοντέλο για ολόκληρο το τρίγωνο αναπαρίσταται από την σχέση :

$$E\left(Y\right) = X\beta$$

όπου X είναι ένας $\left(n \times p\right)$ πίνακας του οποίου οι γραμμές είναι τα X_{ij}, Y είναι το διάνυσμα των παρατηρημένων τιμών και n είναι ο αριθμός των παρατηρημένων τιμών ($n = \frac{1}{2}t\left(t+1\right)$).

Η αναμενόμενη τιμή των λογαριθμοκανονικά κατανεμημένων τιμών P_{ij}, δηλαδή των θ_{ij} είναι ίση με :

$$\theta_{ij} = \exp\left(X_{ij}\beta + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$$

Ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας των θ_{ij} είναι :

$$\hat{\theta}_{ij} = \exp\left(X_{ij}\hat{\beta} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)$$

όπου $\hat{\beta} = \left(\mathrm{X}^T\mathrm{X}\right)^{-1}\mathrm{X}^T y$ και $\hat{\sigma}^2 = \left(1/n\right)\left(y - X\hat{\beta}\right)^T\left(y - X\hat{\beta}\right)$.

Την γενική θεωρία της εκτίμησης για τα γραμμικά μοντέλα όταν τα δεδομένα είναι λογαριθμοκανονικά κατανεμημένα την εισήγαγαν οι Bradu και Mundlak (1970).

Μπορεί να αποδειχθεί ότι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του $\exp(Z\beta+\alpha\sigma^2)$ είναι η :

$$\exp\left(Z\hat{\beta}\right)g_m\left[\left(a-\frac{1}{2}Z\left(X^T X\right)^{-1}Z^T\right)s^2\right],$$

όπου το s^2 είναι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ^2, m είναι οι βαθμοί ελευθερίας που συσχετίζονται με το s^2 και g_m είναι μια μεταβλητή που εισήγαγε ο Finney προκειμένου να διορθώσει την μεροληψία $\left(g_m(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m^k\left(m+2k\right)}{m(m+2)....(m+2k)}\frac{t^k}{k!}\right)$, βλέπε *Παράρτημα 1*.

Αναλυτικότερα :

$$s^2=\left[n/\left(n-p\right)\right]\hat{\sigma}^2=\left[1/\left(n-p\right)\right]\left(y-X\hat{\beta}\right)^T\left(y-X\hat{\beta}\right)$$

και

$$m=n-p$$

Επομένως μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του θ_{ij}, είναι η :

$$\tilde{\theta}_{ij}=\exp\left(X_{ij}\hat{\beta}\right)g_m\left[\frac{1}{2}\left(1-X_{ij}\left(X^T X\right)^{-1}X_{ij}^T\right)s^2\right]$$

Η διακύμανση του διανύσματος $\hat{\beta}$ δίνεται από την σχέση :

$$Var\left(\hat{\beta}\right)=\left(\mathrm{X}^T\mathrm{X}\right)^{-1}\sigma^2$$

και επομένως

$$Var\left(X_{ij}\hat{\beta}\right)=\mathrm{X}_{ij}\left(X^T X\right)^{-1}X_{ij}^T\sigma^2$$

Μπορεί έτσι να δειχθεί ότι το $\mathrm{X}_{ij}\left(X^T X\right)^{-1}X_{ij}^T s^2$ είναι μια εκτίμηση της διακύμανσης $Var\left(X_{ij}\hat{\beta}\right)$.

Η διακύμανση των αμερόληπτων εκτιμητριών των θ_{ij}, $\tilde{\theta}_{ij}$ είναι η τ_{ij}^2 η οποία ισούται με :

$$\tau_{ij}^2=Var\left(\tilde{\theta}_{ij}\right)=E\left(\tilde{\theta}_{ij}^2\right)-\left(E\left(\tilde{\theta}_{ij}\right)\right)^2$$

Μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του $E\left(\tilde{\theta}_{ij}^{2}\right)$ είναι η $\tilde{\theta}_{ij}^{2}$ και $\left(E\left(\tilde{\theta}_{ij}\right)\right)^{2}=\theta_{ij}^{2}=\exp\left(2X_{ij}\beta+\sigma^{2}\right)$.

Επομένως, μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της διακύμανσης τ_{ij}^{2} είναι η :

$$\tilde{\tau}_{ij}^{2}=\exp\left(2X_{ij}\hat{\beta}\right)\times\left[\left(g_{m}\left(\frac{1}{2}\left(1-X_{ij}\left(X^{T}X\right)^{-1}X_{ij}^{T}\right)s^{2}\right)\right)^{2}-g_{m}\left(\left(1-2X_{ij}\left(X^{T}X\right)^{-1}X_{ij}^{T}\right)s^{2}\right)\right]$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι R_i είναι οι αναμενόμενες τελικές ζημιές για κάθε έτος ατυχήματος. Μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της μεταβλητής R_i είναι η :

$$\tilde{R}_i=\sum_{j=t-i+2}^{t}\tilde{\theta}_{ij}$$

Η διακύμανση της $\tilde{R}_i$ μπορεί να υπολογιστεί ως ακολούθως :

$$Var\left(\tilde{R}_i\right)=Var\left[\sum_{j=t-i+2}^{t}\tilde{\theta}_{ij}\right]=\sum_{j=t-i+2}^{t}\left[Var\left(\tilde{\theta}_{ij}\right)+2\sum_{k=j+1}^{t}Cov\left(\tilde{\theta}_{ij},\tilde{\theta}_{ik}\right)\right]$$

Έχουμε :

$$Cov\left(\tilde{\theta}_{ij},\tilde{\theta}_{ik}\right)=E\left(\tilde{\theta}_{ij}\tilde{\theta}_{ik}\right)-E\left(\tilde{\theta}_{ij}\right)E\left(\tilde{\theta}_{ik}\right)$$

Μπορεί να δειχθεί ότι εάν :

$$\tau_{i\,jk}=Cov\left(\tilde{\theta}_{ij},\tilde{\theta}_{ik}\right)$$

τότε μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του $\tau_{i\,jk}$ είναι η $\tilde{\tau}_{i\,jk}$ όπου :

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_{i\,jk}=\exp\left(\left(X_{ij}+X_{ik}\right)\hat{\beta}\right)\times\Big[g_{m}&\left(\frac{1}{2}\left(1-X_{ij}\left(X^{T}X\right)^{-1}X_{ij}^{T}\right)s^{2}\right)\\ &\times g_{m}\left(\frac{1}{2}\left(1-X_{ik}\left(X^{T}X\right)^{-1}X_{ik}^{T}\right)s^{2}\right)\\ &-g_{m}\left(\left(1-\frac{1}{2}\left(X_{ij}+X_{ik}\right)\left(X^{T}X\right)^{-1}\left(X_{ij}+X_{ik}\right)\right)s^{2}\right)\Big]\end{aligned}$$

Επομένως μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της $Var\left(\tilde{R}_i\right)$ είναι η :

$$\sum_{j=t-i+2}^{t}\left[\tilde{\tau}_{ij}^{2}+2\sum_{k=j+1}^{t}\tilde{\tau}_{i\,jk}\right]$$

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης $\tilde{\theta}_{ij}$ είναι :

$$Var\left(\tilde{\theta}_{ij}\right)+Var\left(P_{ij}\right)$$

Λόγω ανεξαρτησίας το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτιμώμενης τιμής της R_i είναι :

$$Var\left(\tilde{R}_i\right)+\sum_{j=t-i+2}^{t}Var\left(P_{ij}\right)$$

Μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της $Var\left(P_{ij}\right)$ είναι η :

$$\exp\left(2X_{ij}\hat{\beta}\right)\left[g_m\left(2\left(1-X_{ij}\left(X^TX\right)^{-1}X_{ij}^T\right)s^2\right)-g_m\left(\left(1-2X_{ij}\left(X^TX\right)^{-1}X_{ij}^T\right)s^2\right)\right]$$

Κεφάλαιο 3

Εφαρμογή της Βασικής Μεθόδου Chain Ladder & του Λογαριθμικού Μοντέλου σε δεδομένα Εταιρείας

3.1 Παρουσίαση Δεδομένων Εταιρείας

Τα δεδομένα που θα χρησιμοποιήσουμε για την εφαρμογή των δύο μοντέλων προέρχονται από Ασφαλιστική Εταιρεία που δραστηριοποιείται στην Ελλάδα, στον χώρο των Γενικών Ασφαλίσεων, και αφορούν τα τελευταία έξι χρόνια λειτουργίας της.

Οι ατομικές ζημιές $\left(P_{ij}\right)$ ανά έτος ατυχήματος και ανά έτος εξέλιξης της Ασφαλιστικής Εταιρείας απεικονίζονται στον *Πίνακα 3.1* (τρίγωνο ζημιών). Τα ποσά των ζημιών αναφέρονται σε χιλιάδες ευρώ και αποτελούν στρογγυλοποίηση των πραγματικών τιμών.

Έτος Ατυχήματος	Έτος Εξέλιξης 0	1	2	3	4	5
0	595	395	246	226	151	207
1	2.381	1.911	778	304	501	
2	3.552	1.644	780	590		
3	4.817	2.601	1.150			
4	4.821	2.880				
5	5.392					

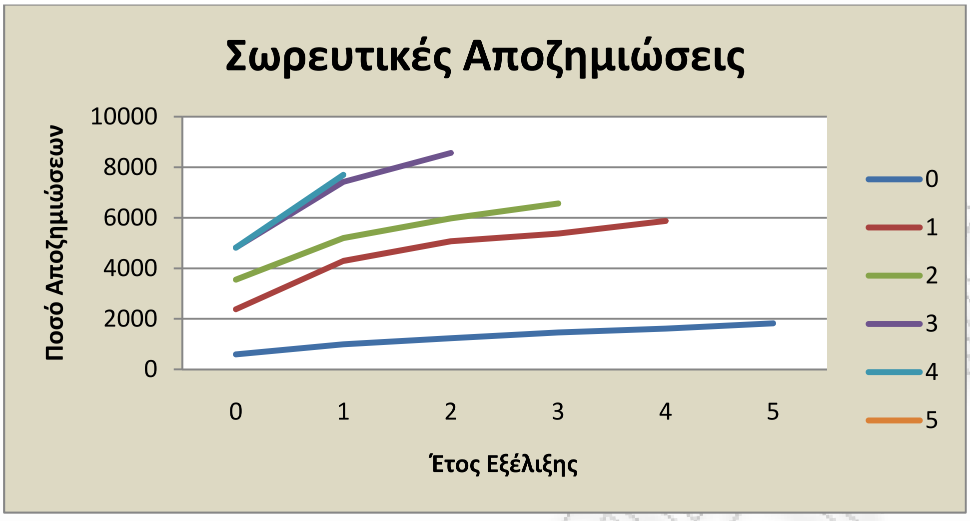
Πίνακας 3.1 *Ατομικές Αποζημιώσεις (Incremental)*

Οι σωρευτικές αποζημιώσεις $\left(C_{ij}\right)$ της Ασφαλιστικής Εταιρείας, οι οποίες υπολογίζονται μέσω του τύπου $C_{ik}=\sum_{j=1}^{k}P_{ij}$ (*Κεφάλαιο 2*), δίνονται παρακάτω:

Έτος Ατυχήματος	Έτος Εξέλιξης 0	1	2	3	4	5
0	595	990	1.236	1.462	1.613	1.820
1	2.381	4.292	5.070	5.374	5.875	
2	3.552	5.196	5.976	6.566		
3	4.817	7.418	8.568			
4	4.821	7.701				
5	5.392					

Πίνακας 3.2 *Σωρευτικές Αποζημιώσεις (Cumulative)*

Η καλύτερη τεχνική για να πάρουμε μια εικόνα του τρόπου με τον οποίο εξελίσσονται οι ζημιές στον χρόνο είναι η δημιουργία του γραφήματος των ζημιών. Η γραφική απεικόνιση των σωρευτικών αποζημιώσεων δίνεται στο παρακάτω *Γράφημα 3.1* το οποίο δείχνει πώς εξελίσσονται οι αποζημιώσεις κάθε έτους ατυχήματος κατά τα έτη εξέλιξης.



Γράφημα 3.1 *Σωρευτικές Αποζημιώσεις*

3.2 Εφαρμογή Βασικής Μεθόδου Chain Ladder

3.2.1 Υπολογισμός Συντελεστών Εξέλιξης

Πρώτο βήμα κατά την εφαρμογή της μεθόδου είναι ο υπολογισμός των συντελεστών εξέλιξης. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει στο Κεφάλαιο 2 κατά την παρουσίαση της μεθόδου Chain Ladder, οι σταθμισμένοι συντελεστές εξέλιξης (*weighted development factors*) υπολογίζονται μέσω της σχέσης :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{m-j} C_{i\ j+1}}{\sum_{i=1}^{m-j} C_{i\ j}}$$

Οι τιμές των συντελεστών εξέλιξης δίνονται παρακάτω :

0 - 1	1 -2	2 - 3	3 - 4	4 -5
1,583385	**1,165065**	**1,091190**	**1,095377**	**1,128332**

Ενδεικτικά θα παραθέσουμε τον υπολογισμό του πρώτου συντελεστή εξέλιξης :

1,583385 = (990+4.292+5.196+7.418+7.701) / (595+2.381+3.552+4.817+4.821)

*Άθροισμα ποσών δεύτερης στήλης τριγώνου ζημιών (**Πίνακας 3.2** - έτος εξέλιξης 1)*

*Άθροισμα ποσών πρώτης στήλης τριγώνου ζημιών (**Πίνακας 3.2 -** έτος εξέλιξης 0)*

Όμοια γίνονται οι υπολογισμοί και για τους υπόλοιπους συντελεστές εξέλιξης.

3.2.2 Εκτίμηση Μελλοντικών Ζημιών – Υπολογισμός Αποθέματος

Έχοντας υπολογίσει τους συντελεστές εξέλιξης μπορούμε να εκτιμήσουμε τις μελλοντικές αποζημιώσεις. Πολλαπλασιάζοντας τις πληρωθείσες ζημιές με τους παραπάνω συντελεστές εξέλιξης, υπολογίζουμε τις εκτιμώμενες αποζημιώσεις των υπολοίπων ετών εξέλιξης και το τρίγωνο ζημιών συμπληρώνεται όπως παρακάτω :

	Έτος Εξέλιξης					
Έτος Ατυχήματος	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
0	595	990	1.236	1.462	1.613	1.820
1	2.381	4.292	5.070	5.374	5.875	6.629
2	3.552	5.196	5.976	6.566	7.192	8.115
3	4.817	7.418	8.568	9.349	10.241	11.555
4	4.821	7.701	8.972	9.790	10.724	12.100
5	5.392	8.538	9.947	10.854	11.889	13.415

Πίνακας 3.3 *Σωρευτικές Αποζημιώσεις (Επισυμβάσες & Μελλοντικές)*

Υποθέτουμε ότι δεν θα υπάρξουν πληρωμές μετά το πέμπτο έτος εξέλιξης και αυτό συνεπάγεται ότι οι ζημιές του έτους ατυχήματος 0 έχουν ολοκληρωθεί.

Το απόθεμα ζημιών ανά έτος ατυχήματος έχει ως εξής :

Έτος Ατυχήματος	Απόθεμα		
1	754	→	6.629 – 5.875
2	1.549	→	8.115 – 6.566
3	2.987	→	11.555 – 8.568
4	4.399	→	12.100 – 7.701
5	8.023	→	13.415 – 5.392
Σύνολο :	**17.712**		

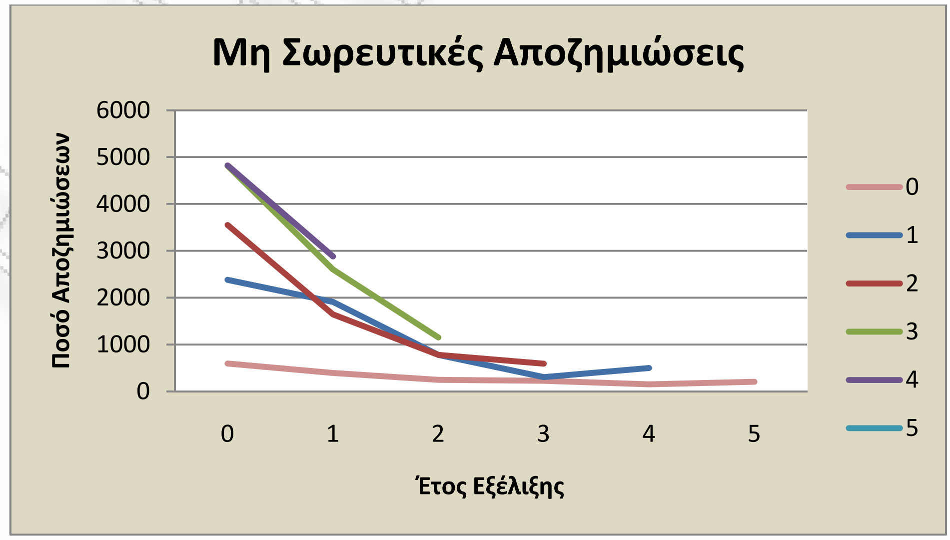
Επομένως το συνολικό εκτιμώμενο απόθεμα ζημιών που θα πρέπει να έχει η Εταιρεία είναι 17.712 χιλιάδες ευρώ.

Για μια καλύτερη εικόνα των εκτιμώμενων ποσών ζημιών που θα πληρωθούν στο μέλλον παίρνουμε τον πίνακα των μη σωρευτικών, πληρωθεισών ζημιών (*incremental paid claims*).

	Έτος Εξέλιξης					
Έτος Ατυχήματος	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
0	595	395	246	226	151	207
1	2.381	1.911	778	304	501	754
2	3.552	1.644	780	590	626	923
3	4.817	2.601	1.150	781	892	1.314
4	4.821	2.880	1.271	818	934	1.376
5	5.392	3.146	1.409	907	1.035	1.526

Πίνακας 3.4 *Μη Σωρευτικές Αποζημιώσεις*

Η γραφική απεικόνιση των μη σωρευτικών αποζημιώσεων είναι η εξής:



Γράφημα 3.2 *Μη Σωρευτικές Αποζημιώσεις*

Εάν τώρα λάβουμε υπόψη τις παραπάνω ζημιές (παρατηρηθείσες και εκτιμώμενες) ανά έτος ατυχήματος και τις διαιρέσουμε με το σύνολο των πληρωθεισών ζημιών ανά έτος ατυχήματος (παρατηρηθεισών και εκτιμώμενων) θα πάρουμε τον παρακάτω πίνακα :

		Έτος Εξέλιξης					
Έτος Ατυχήματος	***Τελικές***	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***
0	1.820	32,69	21,70	13,52	12,42	8,30	11,37
1	6.629	35,92	28,83	11,74	4,59	7,56	11,37
2	8.115	43,77	20,26	9,61	7,27	7,72	11,37
3	11.555	41,69	22,51	9,95	6,76	7,72	11,37
4	12.100	39,84	23,80	10,51	6,76	7,72	11,37
5	13.415	40,19	23,45	10,51	6,76	7,72	11,37

40,19 % των ζημιών που αφορούν το πέμπτο έτος ατυχήματος πληρώθηκαν το έτος εξέλιξης 0.

Πίνακας 3.5 *Ποσοστά Πληρωθεισών Ζημιών*

Οι τιμές κάθε γραμμής του παραπάνω πίνακα, οι οποίες αντιστοιχούν σε κάποιο έτος ατυχήματος, φανερώνουν τί ποσοστό ζημιών επί του συνόλου των ζημιών του συγκεκριμένου έτους ατυχήματος έχουν πληρωθεί ανά έτος εξέλιξης.

Υποθέτοντας ότι :

A_i ***: οι τελικές σωρευτικές ζημιές του έτους ατυχήματος*** i

B_j ***: το ποσοστό των τελικών πληρωθεισών ζημιών κατά το έτος εξέλιξης*** j

P_{ij} ***:οι μη σωρευτικές ζημιές κατά το έτος ατυχήματος*** i ***και έτος εξέλιξης*** j

το βασικό μοντέλο της Chain Ladder μπορεί επίσης να περιγραφεί από τις παρακάτω ισότητες :

$P_{ij} = A_i \times B_j$ για i και j από το 0 έως το 5 ***(3.1)***

υπό την υπόθεση ότι :

$\sum B_j = 1$ για j από 0 έως 5 ***(3.2)***

3.3 Εφαρμογή του Λογαριθμικού Μοντέλου

3.3.1 Υπολογισμός Λογαρίθμων Αποζημιώσεων

Όπως έχουμε ήδη προαναφέρει στο *Κεφάλαιο 2*, κατά την εφαρμογή του λογαριθμικού μοντέλου παίρνουμε τους λογαρίθμους των ζημιών P_{ij} και η σχέση ***3.1*** μας δίνει :

$$\ln(P_{ij}) = \ln(A_i \times B_j) = \ln A_i + \ln B_j$$

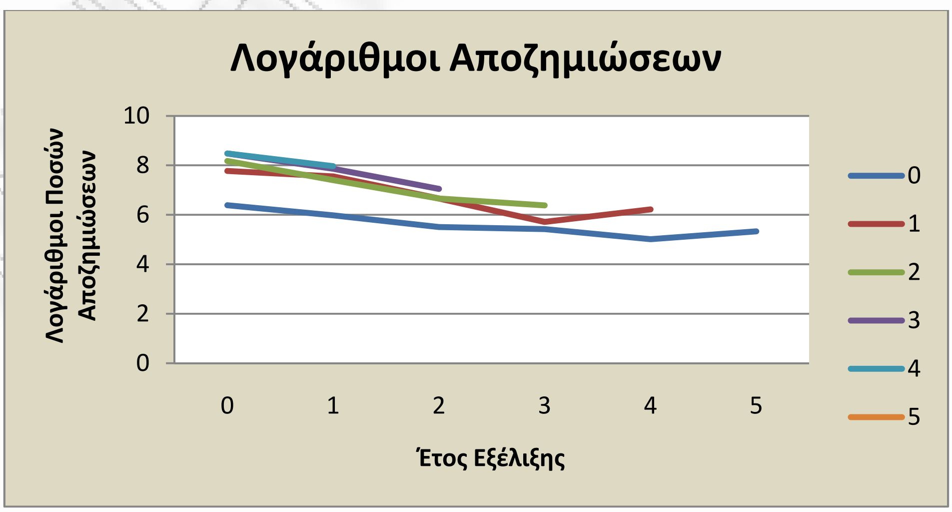
η οποία είναι μια γραμμική εξίσωση.

Το τρίγωνο ζημιών που περιέχει τους λογαρίθμους των ατομικών αποζημιώσεων δίνεται στον *Πίνακα 3.6* :

	Έτος Εξέλιξης					
Έτος Ατυχήματος	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***
0	6,389	5,979	5,505	5,421	5,017	5,333
1	7,775	7,555	6,657	5,717	6,217	
2	8,175	7,405	6,659	6,380		
3	8,480	7,864	7,048			
4	8,481	7,966				
5	8,593					

Πίνακας 3.6 *Λογάριθμοι Αποζημιώσεων*

Η απεικόνιση των λογαρίθμων των αποζημιώσεων είναι η εξής :



Γράφημα 3.3 *Λογάριθμοι Αποζημιώσεων*

Παίρνοντας όμως λογαρίθμους στην ***Σχέση 3.2*** δεν οδηγούμαστε σε γραμμική σχέση αφού

$$\ln(\sum B_j) \neq \sum(\ln B_j)$$

Επομένως δεν θα λάβουμε καθόλου υπόψη την δεύτερη σχέση και θα προσπαθήσουμε αρχικά να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους μας από τις υπόλοιπες γραμμικές σχέσεις. Μη λαμβάνοντας όμως υπόψη την δεύτερη σχέση θα πρέπει να αναπροσδιορίσουμε το μοντέλο μας προκειμένου να πάρουμε σωστές εκτιμήσεις.

Ας υποθέσουμε ότι $a_i = \ln(A_i)$ και $b_j = \ln(B_j)$.

Έτσι θα έχουμε :

$$\ln(P_{ij}) = Y_{ij} = a_i + b_j + e_{ij}$$

όπου e_{ij} είναι κάποιο σφάλμα το οποίο υποθέτουμε ότι ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο 0.

Παρακάτω θα εφαρμόσουμε δύο διαφορετικές προσεγγίσεις του λογαριθμικού μοντέλου (βλέπε Christofides (1990) *"Regression models based on log-incremental claims")*. Η μόνη διαφορά τους είναι το πλήθος των εκτιμώμενων παραμέτρων. Στο πρώτο λογαριθμικό μοντέλο θα χρησιμοποιήσουμε λιγότερες παραμέτρους από αυτές που θα εκτιμήσουμε στο δεύτερο.

3.3.2 Εφαρμογή Λογαριθμικού Μοντέλου Με Οκτώ Παραμέτρους (Βάση των δεδομένων)

Κατά την εφαρμογή του πρώτου λογαριθμικού μοντέλου ***υποθέτουμε*** ότι οι παράμετροι για τα έτη εξέλιξης 0 έως 5 ακολουθούν γραμμική τάση (ίσια γραμμή) με την ίδια κλίση ή παράμετρο s.

Έτσι το μοντέλο μας γίνεται :

$$Y_{ij} = a_i + d_j + e_{ij}$$

για i, j από 0 έως 5, $d_0 = d$ και $d_j = s \times j$ για $j > 0$

Οι παράμετροι του μοντέλου που θα πρέπει να εκτιμήσουμε είναι οκτώ

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, d, s)$$

Προκειμένου να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του μοντέλου μας θα χρησιμοποιήσουμε πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση (*Multiple Linear Regression*) μεταξύ των ετών εξέλιξης με τη βοήθεια πινάκων (*matrices*). Οι υπολογισμοί γίνονται με την βοήθεια του προγράμματος *Microsoft Office Excel*. Για την καλύτερη κατανόηση η μελέτη χωρίζεται σε βήματα.

➢ ***1^{o} Βήμα : Δημιουργία πίνακα σχεδιασμού***

Ο πίνακας σχεδιασμού X περιλαμβάνει τις παραμέτρους του μοντέλου μας $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, d, s)$ και καθορίζει σε ποιες περιπτώσεις θα έχουν αυτές τιμές.

Πίνακας Σχεδιασμού X

Έτος Ατυχήματος	Έτος Εξέλιξης	Pij	ln(Pij)
0	0	595	6,389
0	1	395	5,979
0	2	246	5,505
0	3	226	5,421
0	4	151	5,017
0	5	207	5,333
1	0	2381	7,775
1	1	1911	7,555
1	2	778	6,657
1	3	304	5,717
1	4	501	6,217
2	0	3552	8,175
2	1	1644	7,405
2	2	780	6,659
2	3	590	6,380
3	0	4817	8,480
3	1	2601	7,864
3	2	1150	7,048
4	0	4821	8,481
4	1	2880	7,966
5	0	5392	8,593

0	1	2	3	4	5	0	
a0	a1	a2	a3	a4	a5	d	s
1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	2
1	0	0	0	0	0	0	3
1	0	0	0	0	0	0	4
1	0	0	0	0	0	0	5
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	2
0	1	0	0	0	0	0	3
0	1	0	0	0	0	0	4
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	2
0	0	1	0	0	0	0	3
0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	2
0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	1	1	0

Πίνακας 3.7 *Πίνακας Σχεδιασμού X 1^{ου} Λογαριθμικού Μοντέλου*

Κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε μια τιμή του τρίγωνου ζημιών καθώς και στην αναπαράστασή της στο μοντέλο με την χρήση των παραμέτρων από τον πίνακα σχεδιασμού X. Για παράδειγμα η προτελευταία γραμμή αναπαριστά την τιμή του έτους ατυχήματος 4 και του έτους εξέλιξης 1 ως άθροισμα των παραμέτρων α_4 και s ($Y_{41} = a_4 + s$).

- **2^{o} Βήμα : Εκτίμηση παραμέτρων**

Οι τιμές των $\ln(P_{ij})$ είναι οι εξαρτημένες μεταβλητές και κάθε στήλη του πίνακα σχεδιασμού X είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές. Γνωρίζουμε από την πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση ότι το παραπάνω σύστημα εξισώσεων με τις οκτώ παραμέτρους έχει μοναδική λύση όταν υπάρχει ο αντίστροφος του $X^T X$ και σε αυτή την περίπτωση οι εκτιμήτριες μεγίστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων μας δίνονται από :

$$\left(X^T X\right)^{-1} X^T Y$$

όπου Y είναι ο πίνακας των $\ln(P_{ij})$

Εκτελώντας τους παραπάνω υπολογισμούς στο πρόγραμμα Excel καταλήγουμε στα παρακάτω αποτελέσματα :

Παράμετροι	Εκτίμηση	Τυπικό Σφάλμα (s.e) Παραμέτρων	T-Ratios
a0	6,318	0,284	22,261
a1	7,326	0,264	27,774
a2	7,522	0,255	29,540
a3	7,976	0,263	30,277
a4	8,181	0,306	26,729
a5	8,197	0,451	18,166
d	0,396	0,263	1,504
s	-0,311	0,084	-3,707

Πίνακας 3.8 *Πίνακας Τιμών παραμέτρων, τυπικών σφαλμάτων παραμέτρων & T-Ratios*

Η εκτίμηση για παράδειγμα του μοντέλου για την παράμετρο a_0 είναι 6,318, για την παράμετρο a_1 είναι 7,326 και για την παράμετρο s είναι -0,311. Επομένως οι καινούργιες μας προσαρμοσμένες τιμές (*fitted*) για τα $\ln(P_{ij})$ δεν θα είναι παρά ο πολλαπλασιασμός του πίνακα σχεδιασμού Χ με τον πίνακα των εκτιμήσεων των παραμέτρων. Ο πολλαπλασιασμός αυτός μας δίνει τα παρακάτω αποτελέσματα και οι διαφορές μεταξύ των αρχικών παρατηρημένων τιμών των $\ln(P_{ij})$ και των προσαρμοσμένων (εκτιμώμενων) τιμών των $\ln(P_{ij})$ μας δίνουν το μέγεθος του σφάλματος (*residuals*).

Έτος Ατυχήματος	*Έτος Εξέλιξης*	*ln(Pij)*	*Fitted*	*Residuals*
0	0	6,389	6,713	-0,325
0	1	5,979	6,007	-0,028
0	2	5,505	5,697	-0,191
0	3	5,421	5,386	0,035
0	4	5,017	5,075	-0,058
0	5	5,333	4,765	0,568
1	0	7,775	7,722	0,054
1	1	7,555	7,016	0,540
1	2	6,657	6,705	-0,048
1	3	5,717	6,395	-0,678
1	4	6,217	6,084	0,133
2	0	8,175	7,917	0,258
2	1	7,405	7,211	0,194
2	2	6,659	6,901	-0,241
2	3	6,380	6,590	-0,210
3	0	8,480	8,371	0,109
3	1	7,864	7,665	0,198
3	2	7,048	7,355	-0,307
4	0	8,481	8,576	-0,095
4	1	7,966	7,870	0,095
5	0	8,593	8,593	0,000

Πίνακας 3.9 *Πίνακας Τιμών $ln(P_{ij})$,προσαρμοσμένων τιμών $ln(P_{ij})$ & residuals*

3^o Βήμα : Υπολογισμός τυπικού σφάλματος residuals

Τα δεδομένα πάνω στα οποία εφαρμόζεται το μοντέλο μας παρατηρώντας το τρίγωνο ζημιών είναι εικοσιένα (21) και οι παράμετροι που έχουμε να εκτιμήσουμε είναι οκτώ (8). Αυτό συνεπάγεται ότι οι βαθμοί ελευθερίας είναι δεκατρείς (13) αφού το μοντέλο περιέχει οκτώ παραμέτρους και χρησιμοποιεί είκοσι μία τιμές δεδομένων για να τις εκτιμήσει.

Δεδομένα (Data points)	***21***
Παράμετροι (Parameters)	***8***
Βαθμοί Ελευθερίας(Deg of Freedom)	***13***
Συντελ.Προσδιορισμού(R-squared)	***0,93917***
s.e. of Y's (sigma)	***0,35225***

Το τυπικό σφάλμα των residuals είναι η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης (σ^2) του εκτιμώμενου μοντέλου. Με άλλα λόγια είναι η εκτίμηση της τυπικής απόκλισης του υποτιθέμενου σφάλματος. Η τιμή του δίνεται από την τετραγωνική ρίζα της σχέσης :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}(Y - X\hat{b})^T (Y - X\hat{b})$$

όπου Y είναι οι τιμές των $\ln(P_{ij})$ και $X\hat{b}$ είναι οι προσαρμοσμένες τιμές (*fitted*) των Y. Στην περίπτωση μας η τιμή του τυπικού σφάλματος των *residuals* είναι 0,35225.

Ιδιαίτερη σημασία θα πρέπει να δώσουμε στον συντελεστή προσδιορισμού $\left(R^2\right)$ ο οποίος φανερώνει κατά πόσο τα δεδομένα μας μπορούν να ερμηνευτούν από το μοντέλο μας. Παρατηρούμε ότι η τιμή του στην περίπτωσή μας είναι 0,93917 το οποίο σημαίνει ποσοστό 93,91 % των δεδομένων μας επεξηγούνται από το μοντέλο μας.

- ### 4^o Βήμα : Δημιουργία μελλοντικού πίνακα σχεδιασμού

Επόμενο βήμα της μελέτης μας είναι η δημιουργία του μελλοντικού πίνακα σχεδιασμού προκειμένου να εκτιμήσουμε τις μελλοντικές τιμές των ζημιών του τριγώνου. Σε αυτό το σημείο σημαντικό ρόλο παίζει η εμπειρία προκειμένου να προσδιορίσουμε τον αριθμό των ετών μέσα στα οποία κλείνει μια ζημιά (πραγματοποιείται αποζημίωση). Αυτή η υπόθεση έχει ιδιαίτερη σημασία γιατί πάνω σε αυτή θα στηριχτούμε για την δημιουργία του μελλοντικού πίνακα ζημιών. Στην Ελλάδα, όπως ορίζεται στο άρθρο 7 του Νόμου 3557/2007 (ΦΕΚ Α.100), η υποχρέωση για αποζημίωση παραγράφεται μετά την πάροδο ***πέντε ετών*** από το έτος ατυχήματος. Για το λόγο αυτό, δεδομένου ότι η Εταιρεία δραστηριοποιείται στον χώρο της Ελλάδας, θα λάβουμε υπόψη την πενταετία για την εκτίμηση των μελλοντικών ζημιών, θα υποθέσουμε δηλαδή ότι για κάθε έτος ατυχήματος δεν θα υπάρξουν ζημιές μετά την πάροδο πέντε ετών.

Ο μελλοντικός πίνακας ζημιών είναι ο εξής :

Έτος	*Έτος*	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**0**	
Ατυχήματος	***Εξέλιξης***	**a0**	**a1**	**a2**	**a3**	**a4**	**a5**	**d**	**S**
1	5	0	1	0	0	0	0	0	5
2	4	0	0	1	0	0	0	0	4
2	5	0	0	1	0	0	0	0	5
3	3	0	0	0	1	0	0	0	3
3	4	0	0	0	1	0	0	0	4
3	5	0	0	0	1	0	0	0	5
4	2	0	0	0	0	1	0	0	2
4	3	0	0	0	0	1	0	0	3
4	4	0	0	0	0	1	0	0	4
4	5	0	0	0	0	1	0	0	5
5	1	0	0	0	0	0	1	0	1
5	2	0	0	0	0	0	1	0	2
5	3	0	0	0	0	0	1	0	3
5	4	0	0	0	0	0	1	0	4
5	5	0	0	0	0	0	1	0	5

Πίνακας 3.10 *Μελλοντικός Πίνακας Σχεδιασμού*

➢ 5^o ***Βήμα : Εκτίμηση των μελλοντικών τιμών των*** $\ln(P_{ij})$

Η εκτίμηση των μελλοντικών τιμών των $\ln(P_{ij})$ υπολογίζεται από τον πολλαπλασιασμό του πίνακα τιμών των παραμέτρων και του μελλοντικού πίνακα σχεδιασμού. Οι εκτιμώμενες τιμές δίνονται παρακάτω :

Έτος Ατυχήματος	*Έτος εξέλιξης*	*Yij = ln(Pij)*
1	5	5,773
2	4	6,280
2	5	5,969
3	3	7,044
3	4	6,734
3	5	6,423
4	2	7,560
4	3	7,249
4	4	6,938
4	5	6,628
5	1	7,887
5	2	7,576
5	3	7,265
5	4	6,955
5	5	6,644

Πίνακας 3.11 *Πίνακας Μελλοντικών Τιμών ln(P_{ij})*

➢ 6^o ***Βήμα : Εκτίμηση των τιμών των*** P_{ij} ***και των τυπικών τους σφαλμάτων***

Επόμενο βήμα είναι η εκτίμηση των πραγματικών τιμών P_{ij} . Μέχρι τώρα στο μοντέλο μας εργαζόμασταν με λογαρίθμους, επομένως τώρα θα πρέπει να βρούμε τρόπο να εκτιμήσουμε τις τιμές των P_{ij} από τις υπολογισμένες τιμές των $\ln(P_{ij})$.

Στο μοντέλο μας θα χρησιμοποιήσουμε την πιο εύκολη προσέγγιση για την εκτίμηση αυτή, η οποία χρησιμοποιείται και από τους *Zehnwirth* και *Renshaw*, καθώς αυτή του *Verrall (1991b) “On the Unbiased Estimation of Reserves from Loglinear Models”*), οδηγεί σε πιο πολύπλοκους υπολογισμούς. Οι εκτιμήσεις που προκύπτουν από την προσέγγιση αυτή δεν είναι απαραιτήτως αμερόληπτες κυρίως στις περιπτώσεις όπου ένας μικρός αριθμός δεδομένων χρησιμοποιούνται.

Οι μελλοντικές τιμές των $\hat{P}_{ij}$ βάση των εκτιμώμενων τιμών των $\hat{Y}_{ij}$ υπολογίζονται από την σχέση :

$$\hat{P}_{ij} = \exp\left(\hat{Y}_{ij} + 0.5\, Var(\hat{Y}_{ij})\right)$$

Τα τυπικά σφάλματα δίνονται από την σχέση :

$$s.e.\left(P_{ij}\right) = P_{ij} sqrt\left(\exp\left(Var(Y_{ij})\right)^{-1}\right)$$

Επομένως στο σημείο αυτό θα πρέπει να υπολογίσουμε τις διακυμάνσεις των $\hat{Y}_{ij}$. Για να το κάνουμε όμως αυτό είναι απαραίτητο να φτιάξουμε αρχικά τον πίνακα διακύμανσης – συνδιακύμανσης (*variance – covariance matrix*) ο οποίος δίνεται από τον τύπο :

$$\sigma^2 X_f \left(X^T X\right)^{-1} X_f^{\,T}$$

όπου :

σ^2 *είναι η διακύμανση του μοντέλου*

X_f *είναι ο μελλοντικός πίνακας σχεδιασμού που δημιουργήσαμε παραπάνω*

$X_f^{\,T}$ *είναι ο ανάστροφος του μελλοντικού πίνακα σχεδιασμού και*

$\left(X^T X\right)^{-1}$ *είναι ο πίνακας σχεδιασμού του μοντέλου, με* X *τον αρχικό πίνακα σχεδιασμού και* X^T *ο ανάστροφός του.*

Επομένως, δεν έχουμε παρά να σχεδιάσουμε τον πίνακα $X_f \left(X^T X\right)^{-1} X_f^{\,T}$ και να τον πολλαπλασιάσουμε με την διακύμανση σ^2.

Ο πίνακας $X_f \left(X^T X\right)^{-1} X_f^{\,T}$ απεικονίζεται στο ***Παράρτημα 2 (Πίνακας 3.12)***.

Ο πίνακας διακύμανσης – συνδιακύμανσης των μελλοντικών τιμών υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας τον *Πίνακα 3.12* με την διακύμανση του μοντέλου σ^2 που στην περίπτωσή μας είναι :

$$\sigma^2 = 0{,}35225^2 = 0{,}12408$$

Οι διακυμάνσεις των μελλοντικών τιμών του μοντέλου μας Y_{ij} είναι το άθροισμα του πολλαπλασιασμού των διαγωνίων του *Πίνακα 3.12* με τη διακύμανση

σ^2 συν τη διακύμανση του μοντέλου σ^2. Για παράδειγμα η διακύμανση για την πρώτη μελλοντική τιμή Y_{15} είναι :

$$Var(Y_{15}) = 0,558088 \times 0,35225^2 + 0,35225^2$$
$$= 0,1933$$

Όμοια οι τιμές των διακυμάνσεων για τα υπόλοιπα Y_{ij} φαίνονται στον παρακάτω πίνακα στον οποίο τώρα απεικονίζονται και οι υπολογισμένες τιμές των P_{ij} και $s.e.\left(P_{ij}\right)$.

Έτος Ατυχ.	*Έτος Εξέλιξης*	*Yij*	*Var(Yij)*	*Pij*	*Var(Pij)*	*se(Pij)*
1	5	5,773	0,1933	354	26.772	164
2	4	6,280	0,1825	585	68.405	262
2	5	5,969	0,2145	435	45.360	213
3	3	7,044	0,1802	1.254	310.558	557
3	4	6,734	0,2035	930	195.192	442
3	5	6,423	0,2397	694	130.546	361
4	2	7,560	0,1961	2.117	970.851	985
4	3	7,249	0,2084	1.561	564.590	751
4	4	6,938	0,2335	1.159	353.308	594
4	5	6,628	0,2717	866	234.046	484
5	1	7,887	0,2911	3.078	3.202.334	1790
5	2	7,576	0,2832	2.248	1.653.767	1286
5	3	7,265	0,2882	1.652	911.358	955
5	4	6,955	0,3062	1.222	534.723	731
5	5	6,644	0,3371	910	331.661	576

Πίνακας 3.13 *Πίνακας τιμών* Y_{ij}, $Var(Y_{ij})$, P_{ij}, $Var(P_{ij})$, $s.e.\left(P_{ij}\right)$

Το άθροισμα των διακυμάνσεων των P_{ij} , το οποίο θα μας χρειαστεί στους παρακάτω υπολογισμούς, είναι ίσο με 9.533.471. Μετά και τον υπολογισμό των μελλοντικών εκτιμώμενων ζημιών P_{ij} το τρίγωνο ζημιών συμπληρώνεται ως εξής :

	Έτος Εξέλιξης					
Έτος Ατυχήματος	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	595	395	246	226	151	207
1	2381	1911	778	304	501	354
2	3552	1644	780	590	585	435
3	4817	2601	1150	1.254	930	694
4	4821	2880	2.117	1.561	1.159	866
5	5392	3.078	2.248	1.652	1.222	910

Πίνακας 3.14 *Συμπληρωμένο τρίγωνο ζημιών*

7ο Βήμα : Υπολογισμός τυπικού σφάλματος για κάθε έτος ατυχήματος και συνολικού τυπικού σφάλματος εκτίμησης

Ο υπολογισμός των διακυμάνσεων ή των τυπικών σφαλμάτων για κάθε έτος ατυχήματος αλλά και επί του συνόλου απαιτεί ένα βήμα παραπάνω περιλαμβάνοντας τις συνδιακυμάνσεις.

Γνωρίζουμε ότι η διακύμανση δύο τιμών A και B δίνεται από την σχέση :

$$Var\left(A+B\right)=Var(A)+Var(B)+2Cov(A,B)$$

και αυτή επεκτείνεται σε άθροισμα περισσοτέρων από δύο τιμών περιλαμβάνοντας όλα τα ζευγάρια συνδιακυμάνσεων. Ας θυμηθούμε ότι $Cov(A,B)=Cov(B,A)$.

Στην περίπτωση λογαριθμογραμμικών μοντέλων οι διακυμάνσεις μπορούν να υπολογιστούν από την παρακάτω σχέση :

$$Cov\left(\hat{P}_{ij},\hat{P}_{kl}\right)=E\left(\hat{Y}_{ij}\right)E\left(\hat{Y}_{kl}\right)\left(\exp\left(Cov\left(\hat{Y}_{ij},\hat{Y}_{kl}\right)\right)-1\right)$$

(βλέπε *Renshaw “Chain Ladder And Interactive Modelling”*)

Για την καλύτερη κατανόηση των παραπάνω σχέσεων θα υπολογίσουμε το τυπικό σφάλμα του δεύτερου έτους ατυχήματος. Οι τιμές που έχουμε εκτιμήσει για αυτό το έτος ατυχήματος είναι οι $\hat{P}_{24}$ και $\hat{P}_{25}$ οι οποίες είναι αντιστοίχως 585 και 435 (*Πίνακας 3.13*). Το τυπικό σφάλμα των τιμών αυτών είναι 262 και 213 αντίστοιχα. Η συνδιακύμανση των $\hat{Y}_{24}$ και $\hat{Y}_{25}$ είναι :

0,57352 x 0,12408 = 0,071162577

Επομένως η συνδιακύμανση των $\hat{P}_{24}$ και $\hat{P}_{25}$ είναι :

$$Cov(P_{24}, P_{25}) = 585 \times 435 \times (\exp(0{,}071162577) - 1)$$
$$= 18774{,}2$$

Έτσι, η διακύμανση του αθροίσματος είναι ίση με :

$$Var(P_{24} + P_{25}) = 262^2 + 213^2 + 2 \times 18774{,}2$$
$$= 151561{,}4$$

Άρα το τυπικό σφάλμα για το σύνολο των εκτιμώμενων εκκρεμών ζημιών του δεύτερου έτους ατυχήματος θα είναι ίσο με την τετραγωνική ρίζα του $Var(P_{24} + P_{25})$ δηλαδή $\sqrt{151561{,}4} = 389{,}30$. Στο *Παράρτημα 4* παραθέτουμε τον πίνακα συνδιακυμάνσεων (*Πίνακας 3.15*) όλων των μελλοντικών τιμών, ο οποίος θα μας βοηθήσει στους υπολογισμούς του τυπικού σφάλματος των υπόλοιπων ετών.

Εργαζόμενοι όμοια και για τα άλλα έτη ατυχήματος λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα :

Έτος Ατυχήματος	*Μελλοντικές Πληρωμές*	*Τυπικό Σφάλμα (s.e.)*	*% SE*
0	-	-	-
1	354	164	46,2%
2	1.020	389	38,1%
3	2.878	1.025	35,6%
4	5.703	2.064	36,2%
5	9.109	4.174	45,8%
Σύνολο :	19.065	5.288	27,7%

Πίνακας 3.16 *Πίνακας τελικών αποτελεσμάτων*

Το συνολικό εκτιμώμενο απόθεμα ζημιών είναι το άθροισμα όλων των εκτιμώμενων μελλοντικών ζημιών και έτσι και ο υπολογισμός της διακύμανσής τους θα λαμβάνει υπόψη όλους τους πιθανούς συνδυασμούς των συνδιακυμάνσεων των εκτιμώμενων τιμών. Προσθέτοντας έτσι τα στοιχεία όλου του πίνακα παίρνουμε το σύνολο των διακυμάνσεων όλων των ζευγαριών τιμών. Το άθροισμα αυτό είναι ίσο με 23.093.748. Από το σύνολο αυτό θα αφαιρέσουμε τα ποσά των διαγωνίων, τα οποία αποτελούν τις διακυμάνσεις των μελλοντικών εκτιμώμενων ζημιών βάση της σχέσης $Cov(X, X) = Var(X)$, και τις οποίες τις έχουμε υπολογίσει παραπάνω, το σύνολο των οποίων είναι 9.533.471.

Επομένως η συνολική διακύμανση είναι ίση με :

23.093.748 – 4.667.864 + 9.533.471 = 27.959.355

Άρα το συνολικό τυπικό σφάλμα της εκτίμησης μας είναι η τετραγωνική ρίζα της συνολικής διακύμανσης, δηλαδή $\sqrt{27.959.355} = 5.288$ και ως ποσοστό επί του συνόλου της εκτίμησης των μελλοντικών ζημιών είναι 27,7 %.

3.3.3 Εφαρμογή Λογαριθμικού Μοντέλου Με Έντεκα Παραμέτρους (Βάση των δεδομένων)

Κατά την εφαρμογή του δεύτερου λογαριθμικού μοντέλου η τεχνική που ακολουθούμε για την εκτίμηση των αποθεμάτων ζημιών είναι ακριβώς η ίδια με αυτήν του πρώτου. Η μόνη διαφορά, όπως αναφέραμε και παραπάνω, είναι ο αριθμός των παραμέτρων που έχουμε να εκτιμήσουμε.

Στο μοντέλο που αναπτύξαμε παραπάνω υποθέσαμε ότι οι παράμετροι για τα έτη εξέλιξης 0 έως 5 ακολουθούν γραμμική τάση (ίσια γραμμή) με την ίδια κλίση s.

Στο μοντέλο αυτό θα επιστρέψουμε στην αρχική σχέση :

$$\ln(P_{ij}) = Y_{ij} = a_i + b_j + e_{ij}$$

όπου :

$$a_i = \ln(A_i) \text{ και } b_j = \ln(B_j)$$

Η μόνη υπόθεση που θα κάνουμε θα είναι ότι $b_0 = 0$.

Παρατηρώντας το μοντέλο, συμπεραίνουμε ότι οι παράμετροι που θα πρέπει να εκτιμήσουμε είναι ***έντεκα*** :

$$\left(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\right)$$

Ο πίνακας σχεδιασμού (*Πίνακας 3.17*) σε αυτή την περίπτωση, λόγω των περισσότερων παραμέτρων, θα έχει παραπάνω στήλες σε σχέση με αυτόν του πρώτου λογαριθμικού μοντέλου.

Πίνακας Σχεδιασμού Χ

0	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
a0	**a1**	**a2**	**a3**	**a4**	**a5**	**b1**	**b2**	**b3**	**b4**	**b5**
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Πίνακας 3.17 *Πίνακας σχεδιασμού Χ $2^{ου}$ Λογαριθμικού Μοντέλου*

Ακολουθώντας ακριβώς τα ίδια βήματα με πριν καταλήγουμε στα εξής αποτελέσματα :

Δεδομένα (Data points)	***21***
Παράμετροι (Parameters)	***11***
Βαθμοί Ελευθερίας(Degrees of Freedom)	***10***
R-squared	***0,97682***
s.e. of Y's (sigma)	***0,24794***
σ^2	***0,06148***

Παράμετροι	*Συντελεστές*	*s.e. Συντελεστών*	*T-Ratios*
a0	6,660	0,156	42,772
a1	7,783	0,156	49,978
a2	8,002	0,161	49,830
a3	8,379	0,171	49,031
a4	8,476	0,192	44,134
a5	8,593	0,248	34,656
b1	-0,506	0,157	-3,229
b2	-1,239	0,171	-7,248
b3	-1,642	0,190	-8,652
b4	-1,605	0,221	-7,261
b5	-1,328	0,293	-4,535

Πίνακας 3.18 *Πίνακας Τιμών παραμέτρων, τυπικών σφαλμάτων παραμέτρων & T-Ratios 2ου Λογαριθμικού Μοντέλου*

Παρατηρούμε ότι η τιμή του συντελεστή προσδιορισμού (R^2) είναι 0,97682 γεγονός το οποίο είναι ιδιαίτερα σημαντικό αφού μας ενημερώνει για το πόσο καλά τα δεδομένα μας ερμηνεύονται από το μοντέλο. Η τιμή του στην περίπτωση αυτή είναι λίγο μεγαλύτερη από αυτήν του πρώτου λογαριθμικού μοντέλου η οποία ήταν 0,93917.

Ένα άλλο συμπέρασμα που μπορεί κανείς να βγάλει από τα παραπάνω αποτελέσματα προσέχοντας τα T-Ratios είναι ότι οι παράμετροι μας είναι σημαντικά διαφορετικοί από το 0 αφού οι τιμές των T-Ratios είναι έξω από το 95% διάστημα εμπιστοσύνης το οποίο κυμαίνεται από -2 έως 2.

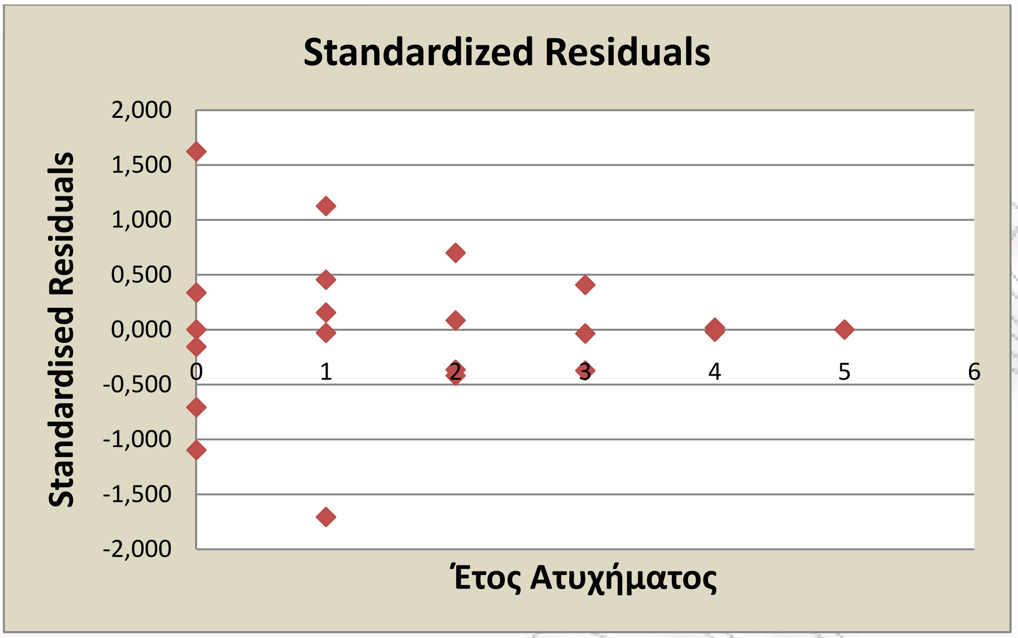
Έχοντας εκτιμήσει τις τιμές των παραμέτρων μπορούμε τώρα να εκτιμήσουμε και τις προσαρμοσμένες τιμές (*fitted*) των $\ln(P_{ij})$ και να υπολογίσουμε στην συνέχεια τα σφάλματα της εκτίμησής μας (*residuals*). Οι υπολογισμοί αυτοί απεικονίζονται στον παρακάτω πίνακα :

Έτος Ατυχήματος	Έτος Εξέλιξης	Fitted	Residuals	st Residuals
0	0	6,660	-0,272	-1,097
0	1	6,154	-0,175	-0,707
0	2	5,422	0,083	0,337
0	3	5,018	0,402	1,623
0	4	5,056	-0,039	-0,156
0	5	5,333	0,000	0,000
1	0	7,783	-0,007	-0,029
1	1	7,276	0,279	1,126
1	2	6,544	0,113	0,455
1	3	6,140	-0,423	-1,707
1	4	6,178	0,039	0,156
2	0	8,002	0,174	0,700
2	1	7,495	-0,091	-0,365
2	2	6,763	-0,104	-0,419
2	3	6,359	0,021	0,084
3	0	8,379	0,101	0,408
3	1	7,872	-0,009	-0,035
3	2	7,140	-0,093	-0,373
4	0	8,476	0,004	0,018
4	1	7,970	-0,004	-0,018
5	0	8,593	0,000	0,000

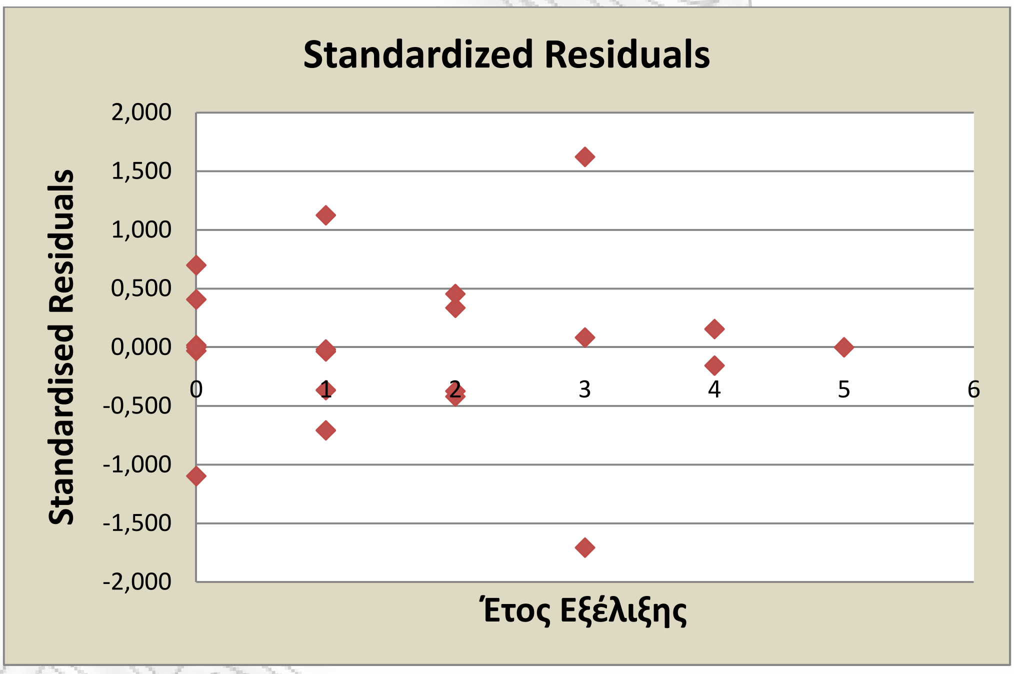
Πίνακας 3.19 *Πίνακας Τιμών $ln(P_{ij})$,προσαρμοσμένων τιμών $ln(P_{ij})$, residuals & standardized residuals*

Ο παραπάνω πίνακας περιέχει μια παραπάνω στήλη, σε σχέση με αυτόν του πρώτου λογαριθμικού μοντέλου, που περιέχει τις τιμές των *standardized residuals,* τα οποία ορίζονται ως η διαφορά μεταξύ των παρατηρημένων τιμών και των προσαρμοσμένων (*fitted*) τιμών δια το τυπικό σφάλμα του μοντέλου (0,24794).

Σκοπός υπολογισμού των *standardized residuals* είναι ότι αποτελούν μια τεχνική ελέγχου του μοντέλου. Οι τιμές τους θα πρέπει να ακολουθούν κάποιο βαθμό τυχαιότητας. Παρακάτω απεικονίζονται οι τιμές των *standardized residuals* έναντι του έτους ατυχήματος και του έτους εξέλιξης.



Γράφημα 3.5 *Standardized Residuals ανά έτος ατυχήματος*



Γράφημα 3.6 *Standardized Residuals ανά έτος εξέλιξης*

Στα παραπάνω γραφήματα των residuals αναμένουμε οι τιμές τους, σε ποσοστό τουλάχιστον 95% των περιπτώσεων, να είναι ανάμεσα στο διάστημα -2 έως 2, το οποίο παρατηρούμε ότι ικανοποιείται.

Συνεχίζοντας την μελέτη, ο μελλοντικός πίνακας σχεδιασμού είναι ο ακόλουθος :

Έτος Ατυχήματος	*Έτος Εξέλιξης*	**0 a0**	**1 a1**	**2 a2**	**3 a3**	**4 a4**	**5 a5**	**1 b1**	**2 b2**	**3 b3**	**4 b4**	**5 b5**
1	5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
2	5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
3	3	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
3	4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
3	5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
4	2	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
4	3	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
4	4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
4	5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
5	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
5	2	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
5	3	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
5	4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
5	5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1

Πίνακας 3.20 *Μελλοντικός Πίνακας Σχεδιασμού 2^{ου} Λογαριθμικού Μοντέλου*

Ο πίνακας $X_f\left(X^TX\right)^{-1}X_f^{\,T}$ που θα μας οδηγήσει στους τελικούς υπολογισμούς μας φαίνεται στο ***Παράρτημα 2*** (*Πίνακας 3.21*).

Μετά τους κατάλληλους υπολογισμούς, όπως ήδη αναλύσαμε παραπάνω, οι εκτιμώμενες μελλοντικές τιμές και τα τυπικά σφάλματά τους δίνονται στον παρακάτω πίνακα :

Έτος Ατυχήματος	Έτος Εξέλιξης	Yij	Var(Yij)	Pij	Var(Pij)	se(Pij)	% se
1	5	6,455	0,1475	684	74.473	273	39,9%
2	4	6,397	0,1153	636	49.375	222	35,0%
2	5	6,674	0,1522	854	119.875	346	40,5%
3	3	6,736	0,1093	890	91.426	302	34,0%
3	4	6,774	0,1221	930	112.306	335	36,0%
3	5	7,051	0,1590	1.249	268.970	519	41,5%
4	2	7,238	0,1153	1.473	265.195	515	35,0%
4	3	6,834	0,1221	987	126.584	356	36,0%
4	4	6,872	0,1349	1.032	153.784	392	38,0%
4	5	7,149	0,1718	1.386	360.212	600	43,3%
5	1	8,086	0,1475	3.499	1.946.164	1395	39,9%
5	2	7,354	0,1522	1.686	467.136	683	40,5%
5	3	6,950	0,1590	1.130	219.956	469	41,5%
5	4	6,988	0,1718	1.181	261.344	511	43,3%
5	5	7,265	0,2087	1.586	583.996	764	48,2%

Πίνακας 3.22 *Πίνακας τιμών* Y_{ij}, $Var(Y_{ij})$, P_{ij}, $Var(P_{ij})$, $s.e.\left(P_{ij}\right)$ *2ου Λογαριθμικού Μοντέλου*

Το άθροισμα των διακυμάνσεων των P_{ij} είναι ίσο με 5.100.798. Το τρίγωνο ζημιών συμπληρώνεται ως εξής :

	Έτος Εξέλιξης					
Έτος Ατυχήματος	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	595	395	246	226	151	207
1	2381	1911	778	304	501	684
2	3552	1644	780	590	636	854
3	4817	2601	1150	890	930	1.249
4	4821	2880	1.473	987	1.032	1.386
5	5392	3.499	1.686	1.130	1.181	1.586

Πίνακας 3.23 *Συμπληρωμένο τρίγωνο ζημιών 2ου Λογαριθμικού Μοντέλου*

Μετά και τον υπολογισμό των μελλοντικών τιμών ζημιών σειρά έχει η εκτίμηση των τυπικών σφαλμάτων κάθε έτους ατυχήματος αλλά και του συνολικού τυπικού σφάλματος. Απαραίτητο σε αυτό το σημείο είναι ο υπολογισμός του πίνακα που θα περιέχει τις τιμές των

$$Cov\left(\hat{P}_{ij},\hat{P}_{kl}\right)=E\left(\hat{Y}_{ij}\right)E\left(\hat{Y}_{kl}\right)\left(\exp\left(Cov\left(\hat{Y}_{ij},\hat{Y}_{kl}\right)\right)-1\right)$$

Ο πίνακας αυτός παρουσιάζεται στο ***Παράρτημα 2*** (*Πίνακας 3.24*).

Έτσι καταλήγουμε στα παρακάτω τελικά αποτελέσματα :

Έτος Ατυχήματος	*Μελλοντικές Πληρωμές*	*Τυπικό Σφάλμα (s.e.)*	*% SE*
0	-	-	-
1	684	273	39,9%
2	1.490	441	29,6%
3	3.069	807	26,3%
4	4.879	1.272	26,1%
5	9.082	2.882	31,7%
Σύνολο :	19.204	3.781	19,7%

Πίνακας 3.25 *Πίνακας τελικών αποτελεσμάτων 2^{ου} Λογαριθμικού Μοντέλου*

Παρατηρώντας τον παραπάνω πίνακα, η Ασφαλιστική Εταιρεία θα πρέπει να έχει απόθεμα ίσο με 19.204 χιλιάδες ευρώ με ποσοστό τυπικού σφάλματος της εκτίμησής μας αυτής ίσο με 19,7 %.

3.4 Σύγκριση Αποτελεσμάτων της Βασικής Μεθόδου Chain Ladder & των δύο Λογαριθμικών Μοντέλων

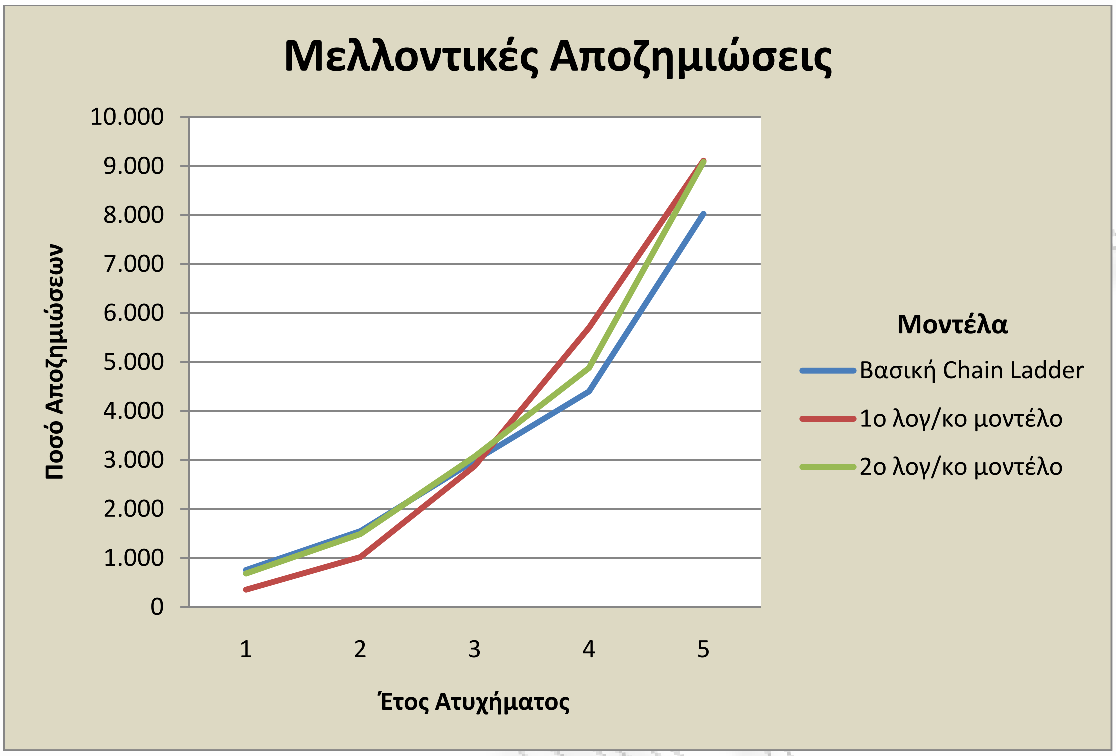
Για την διεξαγωγή συμπερασμάτων θα παραθέσουμε τον ***Πίνακα 3.26*** που περιλαμβάνει τα τελικά αποτελέσματα της βασικής μεθόδου Chain Ladder, του 1^{ου} Λογαριθμικού Μοντέλου (οκτώ παραμέτρων) και του 2^{ου} Λογαριθμικού Μοντέλου (έντεκα παραμέτρων), που εφαρμόσαμε παραπάνω. Ο πίνακας αυτός περιέχει τις εκτιμήσεις των μελλοντικών αποζημιώσεων ανά έτος ατυχήματος καθώς και τα τυπικά σφάλματα των εκτιμήσεων αυτών.

Έτος Ατυχήματος	***Μελλοντικές Πληρωμές (Βασική Chain Ladder)***	***Μελλοντικές Πληρωμές (1ο λογ/μικό Μοντέλο)***	***Μελλοντικές Πληρωμές (2ο λογ/μικό Μοντέλο)***	***Τυπικό Σφάλμα (s.e.) (1ο λογ/μικό Μοντέλο)***	***Τυπικό Σφάλμα (s.e.) (2ο λογ/μικό Μοντέλο)***	***% SE (1ο λογ/μικό Μοντέλο)***	***% SE (2ο λογ/μικό Μοντέλο)***
0	-	-	-	-	-	-	-
1	754	354	684	164	273	46,2%	39,9%
2	1.549	1.020	1.490	389	441	38,1%	29,6%
3	2.987	2.878	3.069	1.025	807	35,6%	26,3%
4	4.399	5.703	4.879	2.064	1.272	36,2%	26,1%
5	8.023	9.109	9.082	4.174	2.882	45,8%	31,7%
Σύνολο :	***17.712***	***19.065***	***19.204***	***5.288***	***3.781***	***27,7%***	***19,7%***

Πίνακας 3.26 *Πίνακας τελικών αποτελεσμάτων ανά μοντέλο*

Παρατηρούμε ότι το συνολικό απόθεμα εκκρεμών ζημιών που θα πρέπει να σχηματίσει η Εταιρεία βάση του 2ου λογαριθμικού μοντέλου είναι 19.204 χιλιάδες ευρώ, το οποίο είναι μεγαλύτερο και από το εκτιμώμενο απόθεμα της βασικής μεθόδου Chain Ladder το οποίο υπολογίστηκε 17.712 χιλιάδες ευρώ αλλά και από την πρώτη εφαρμογή του λογαριθμικού μοντέλου όπου καταλήξαμε σε 19.065 χιλιάδες ευρώ.

Μια προσεκτική ματιά στις μελλοντικές πληρωμές ανά έτος μας οδηγεί στο ότι στα δύο πρώτα έτη συμβάντος η εκτίμηση των μελλοντικών ζημιών κατά την εφαρμογή των δύο λογαριθμικών μοντέλων είναι μικρότερη από την εκτίμηση της βασικής μεθόδου Chain Ladder (για το πρώτο λογαριθμικό μοντέλο και στο τρίτο έτος συμβάντος) ενώ στα επόμενα έτη είναι μεγαλύτερη. Για την καλύτερη σύγκριση των αποτελεσμάτων των τριών μοντέλων παίρνουμε το παρακάτω γράφημα :



Γράφημα 3.7 *Εκτιμώμενες Μελλοντικές Αποζημιώσεις ανά μοντέλο*

Παρατηρώντας το γράφημα των μελλοντικών πληρωθεισών ζημιών συμπεραίνουμε ότι το 2^{o} λογαριθμικό μοντέλο (πράσινη γραμμή) βρίσκεται πιο κοντά στις εκτιμήσεις της βασικής μεθόδου Chain Ladder (μπλε γραμμή) αφού οι δύο γραμμές βρίσκονται κοντά η μία στην άλλη ενώ το πρώτο λογαριθμικό μοντέλο (κόκκινη γραμμή) στην αρχή μέχρι και το τρίτο έτος βρίσκεται πιο κάτω από την βασική Chain Ladder και στα επόμενα έτη βρίσκεται πολύ πιο ψηλά.

Η διαφορά του συνολικού εκτιμώμενου αποθέματος μεταξύ των δυο λογαριθμικών μοντέλων δεν είναι μεγάλη (μόλις 0,72%), αλλά παρατηρώντας τα συνολικά τυπικά σφάλματα των δύο μοντέλων βλέπουμε ότι ενώ το πρώτο μοντέλο μας δίνει ποσοστό συνολικού τυπικού σφάλματος επί του συνολικού εκτιμώμενου αποθέματος 27,7%, το δεύτερο μοντέλο μας δίνει ποσοστό τυπικού σφάλματος 17,7% δηλαδή 10% λιγότερο.

Στην τελική απόφαση για την επιλογή της πιο κατάλληλης μεθόδου για την εκτίμηση των μελλοντικών αποζημιώσεων βάση των δεδομένων της Εταιρείας ιδιαίτερη σημασία θα πρέπει να δώσουμε στο γεγονός ότι οι εκτιμήσεις βάση της εφαρμογής του λογαριθμικού μοντέλου είναι στατιστικές εκτιμήσεις με υπολογισμό και του τυπικού σφάλματος ενώ οι εκτιμήσεις βάση της βασικής μεθόδου Chain Ladder δεν είναι παρά απλές τιμές. Όλες οι πληροφορίες που μπορούμε να αντλήσουμε από την βασική μέθοδο Chain Ladder μπορούν να αντληθούν και από την εφαρμογή του λογαριθμικού μοντέλου περιλαμβανομένων και των εκτιμήσεων των συντελεστών εξέλιξης. Η στοχαστική προσέγγιση όπως περιγράφηκε παραπάνω μπορεί να εξάγει και συμπληρωματικές πληροφορίες, βασισμένες στις υποθέσεις του μοντέλου, όπως είναι τα τυπικά σφάλματα των παραμέτρων αλλά και των εκτιμήσεων των εκκρεμών ζημιών τα οποία όμως η βασική μέθοδος Chain Ladder δεν μπορεί να προσφέρει.

3.5 Χρήση του Στατιστικού Πακέτου R για την εφαρμογή της Μεθόδου Chain Ladder

3.5.1 Εισαγωγή

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι εφαρμογής των παραπάνω μεθόδων στα δεδομένα κάποιας Εταιρείας, ανάλογα με τα προγράμματα που διαθέτει η κάθε Εταιρεία. Η εφαρμογή τους μπορεί να γίνει είτε μέσω του προγράμματος Excel είτε μέσω στατιστικών προγραμμάτων όπως είναι το R. Η χρήση του Excel για την εφαρμογή των μεθόδων αποθεματοποίησης θεωρείται ως η πιο συνήθης λόγω της ευρείας γνώσης του προγράμματος αυτού από τους περισσότερους ενώ η χρήση άλλων στατιστικών προγραμμάτων όπως το R θεωρείται πιο πολύπλοκη για κάποιο άτομο που δεν έχει γνώση στατιστικών προγραμμάτων.

3.5.2 Σύντομη αναφορά στο Στατιστικό Πακέτο R

Το R (ή η R) είναι ένα στατιστικό πακέτο που χρησιμεύει για την ανάλυση δεδομένων και εφαρμογή διάφορων στατιστικών τεχνικών. Το R βασίζεται στη γλώσσα προγραμματισμού S που δημιουργήθηκε από τον *John Chambers* και τους συνεργάτες του στα εργαστήρια *Bell* της *AT&T*. Το R ως περιβάλλον στατιστικού προγραμματισμού είναι προϊόν των *Robert Gentleman* και *Ross Ihaka*. Το R έρχεται με μια σειρά πακέτων (*packages*) που προσφέρουν βασικές στατιστικές λειτουργίες.

Τα πακέτα αυτά τα καλεί ο χρήστης από τη γραμμή εντολών του προγράμματος και στη συνέχεια έχει πρόσβαση στα στοιχεία του κάθε πακέτου.

3.5.3 Εφαρμογή της Μεθόδου Chain Ladder μέσω του R

Η εισαγωγή δεδομένων στο στατιστικό πακέτο R μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους.

Θα χρησιμοποιήσουμε το Excel για την καταγραφή των δεδομένων μας, που στην περίπτωση μας είναι τα ποσά των αποζημιώσεων, τα οποία στη συνέχεια θα εισάγουμε στο R για την περαιτέρω ανάλυση. Οι αποζημιώσεις της Ασφαλιστικής Εταιρείας στο σημείο αυτό παρουσιάζονται στα πραγματικά τους μεγέθη και όχι στρογγυλοποιημένες. Οι εντολές που πληκτρολογούνται στο R εμφανίζονται με κόκκινο και τα αποτελέσματα των εντολών αυτών με μαύρο.

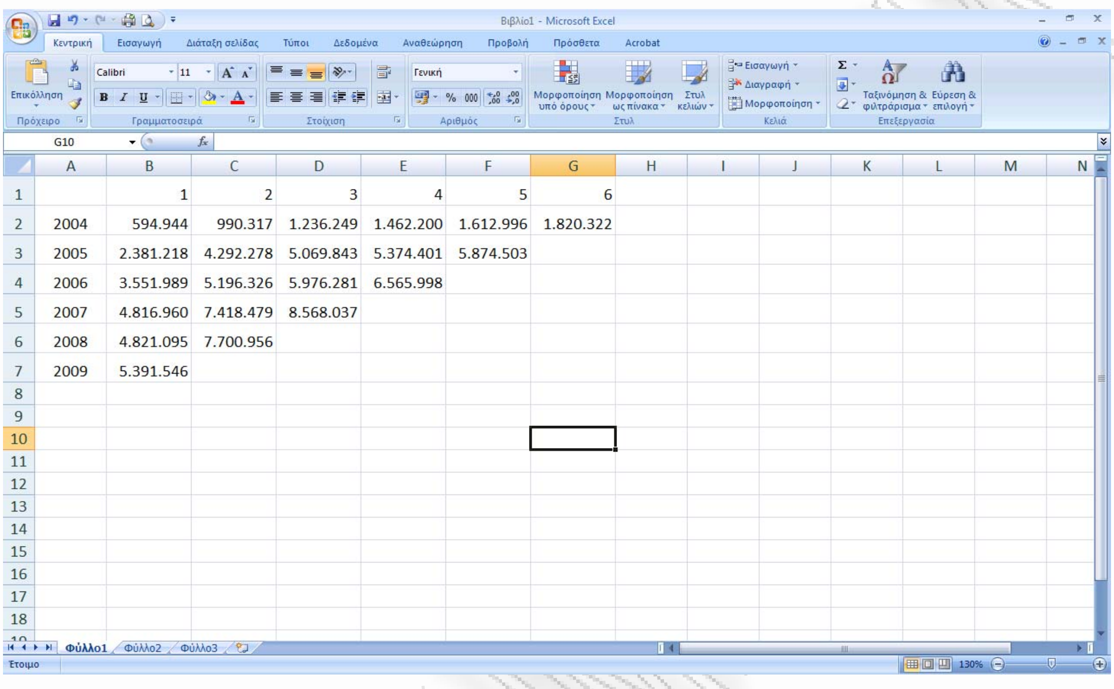
Για την εισαγωγή των δεδομένων μας από το Excel στο πρόγραμμα R χρειάζεται το RExcel. Το RExcel θεωρείται ως πρόσθετο στο πρόγραμμα Excel του Microsoft Office. Το μόνο που χρειάζεται για να μπορέσουμε να το χρησιμοποιήσουμε είναι να το κατεβάσουμε (*download*) από το Internet (http://sunsite.univie.ac.at/rcom/) και να το εγκαταστήσουμε (*install*). Αυτό που μένει στη συνέχεια είναι να ανοίξουμε το πρόγραμμα Excel και να το προσθέσουμε στα πρόσθετα.

Το τρίγωνο εξέλιξης αποζημιώσεων της Εταιρείας που περιέχει τα ποσά των σωρευτικών αποζημιώσεων ανά έτος ατυχήματος και έτος εξέλιξης εμφανίζεται στον *Πίνακα 3.27.* :

	Έτος Εξέλιξης					
Έτος Ατυχήματος	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***
2004	594.944	990.317	1.236.249	1.462.200	1.612.996	1.820.322
2005	2.381.218	4.292.278	5.069.843	5.374.401	5.874.503	
2006	3.551.989	5.196.326	5.976.281	6.565.998		
2007	4.816.960	7.418.479	8.568.037			
2008	4.821.095	7.700.956				
2009	5.391.546					

Πίνακας 3.27 *Πίνακας σωρευτικών αποζημιώσεων*

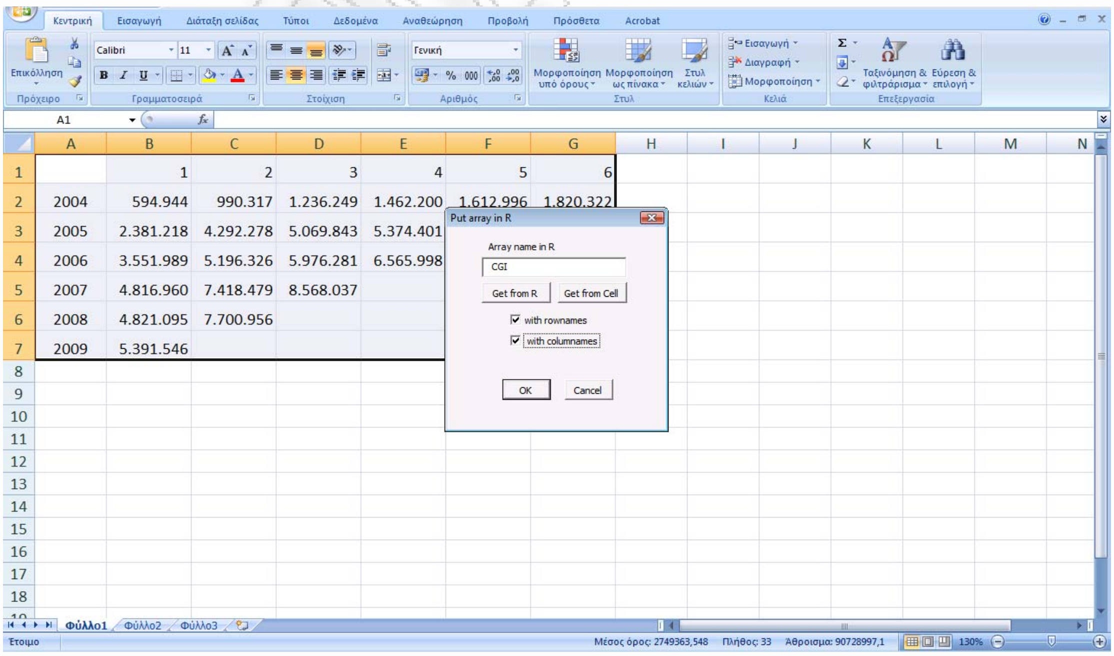
Στην συνέχεια παραθέτουμε το παραπάνω τρίγωνο όπως αυτό έχει δημιουργηθεί στο Excel:



	1	2	3	4	5	6
2004	594.944	990.317	1.236.249	1.462.200	1.612.996	1.820.322
2005	2.381.218	4.292.278	5.069.843	5.374.401	5.874.503	
2006	3.551.989	5.196.326	5.976.281	6.565.998		
2007	4.816.960	7.418.479	8.568.037			
2008	4.821.095	7.700.956				
2009	5.391.546					

Εικόνα 3.1 *Δεδομένα σωρευτικών ζημιών εισηγμένα στο RExcel*

Επιλέγουμε τα δεδομένα μας από το Excel και με δεξί κλικ επιλέγουμε “Put R Var”, εισάγουμε ένα όνομα στο αρχείο και στη συνέχεια επιλέγουμε τα κελιά “with rownames” και “with columnnames” (***Εικόνα 3.2***).



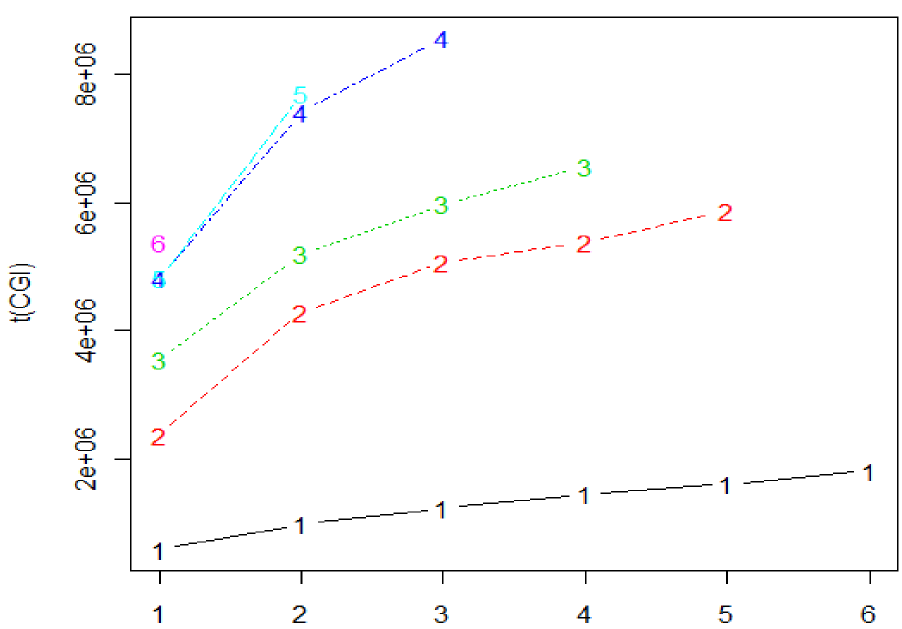
Εικόνα 3.2 *Εισαγωγή ονόματος στο τρίγωνο ζημιών*

Έστω ότι το όνομα που δώσαμε στο τρίγωνο ζημιών είναι “CGI”. Επιλέγοντας CGI στο R εμφανίζεται το τρίγωνό που είχαμε δημιουργήσει στο Excel.

```
> CGI
           1       2       3       4       5       6
2004  594944  990317 1236249 1462200 1612996 1820322
2005 2381218 4292278 5069843 5374401 5874503      NA
2006 3551989 5196326 5976281 6565998      NA      NA
2007 4816960 7418479 8568037      NA      NA      NA
2008 4821095 7700956      NA      NA      NA      NA
2009 5391546      NA      NA      NA      NA      NA
```

Με αυτόν τον τρόπο έχουμε τώρα εισάγει τα δεδομένα μας στο πρόγραμμα R και μπορούμε έτσι να ξεκινήσουμε την ανάλυση μας εκτελώντας τις κατάλληλες εντολές. Προκειμένου να έχουμε μια καλύτερη εικόνα του τρόπου με τον οποίο εξελίχθηκαν οι ζημιές κατά την διάρκεια των ετών παίρνουμε γράφημα των παραπάνω ζημιών γράφοντας στο R την παρακάτω εντολή :

```
> matplot(t(CGI),t="b")
```



Ο οριζόντιος άξονας αναπαριστά το έτος εξέλιξης και ο κάθετος τις πληρωθείσες ζημιές.

Η εκτίμηση των συντελεστών εξέλιξης της μεθόδου Chain Ladder θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί και εφαρμόζοντας πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση μεταξύ των ετών εξέλιξης. Είναι πολύ σημαντικό να βεβαιωθούμε ότι οι παρατηρήσεις μας προσαρμόζονται ικανοποιητικά στο γραμμικό μοντέλο ώστε τα συμπεράσματα που προκύπτουν να είναι αξιόπιστα. Διαφορετικά, θα πρέπει να τροποποιήσουμε κατάλληλα το μοντέλο. Με τις παρακάτω εντολές βρίσκουμε τον συντελεστή εξέλιξης του πρώτου έτους εξέλιξης και εν συνεχεία παίρνουμε κάποια στατιστικά όπως είναι το τυπικό σφάλμα του συντελεστή εξέλιξης, ο συντελεστής προσδιορισμού R^2, η P-value και το τυπικό σφάλμα των residuals. Για την μελέτη μας στο R θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση “lm” η οποία πραγματοποιεί την γραμμική παλινδρόμηση, και θα θέσουμε και κάποιο βάρος.

```
> x<-CGI[,1]#development period 1
> y<-CGI[,2]#development period 2
> model<-lm(y~x+0,weights=1/x)
> model

Call:
lm(formula = y ~ x + 0, weights = 1/x)

Coefficients:
    x
1.583
```

Συντελεστής εξέλιξης της Chain Ladder

```
> summary(model)

Call:
lm(formula = y ~ x + 0, weights = 1/x)

Residuals:
   2004    2005    2006    2007    2008
  62.56  338.11 -227.13  -95.19   30.51

Coefficients:
  Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
```

```
x  1.58345    0.05273   30.03 7.33e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 212 on 4 degrees of freedom
  (1 observation deleted due to missingness)
Multiple R-squared: 0.9956,     Adjusted R-squared: 0.9945
F-statistic: 901.7 on 1 and 4 DF,  p-value: 7.325e-06
```

Παρατηρώντας στη συνέχεια και τα άλλα στατιστικά αποτελέσματα βλέπουμε ότι ο συντελεστής προσδιορισμού R^2 είναι ίσος με 0,9956 το οποίο δείχνει ότι υπάρχει γραμμικότητα, αφού γνωρίζουμε ότι μια μικρή τιμή του R^2 σημαίνει έλλειψη γραμμικότητας στο μοντέλο μας.

Την ίδια διαδικασία μπορούμε να ακολουθήσουμε για να υπολογίσουμε και τους υπόλοιπους συντελεστές εξέλιξης. Τα αποτελέσματα από την εκτέλεση των εντολών καθώς και οι εντολές για την εκτίμηση των υπόλοιπων συντελεστών εξέλιξης παρουσιάζονται στο ***Παράρτημα 3.*** Στο παρόν απλώς παραθέτουμε πίνακα που περιέχει τα αποτελέσματα των εντολών.

Έτος Εξέλιξης	Συντελεστής Εξέλιξης	Συντελεστής Προσδιορισμού R^2	Τυπικό Σφάλμα Εκτίμησης (s.e.)
1	1.583	0.9956	0.05273
2	1.165	0.9996	0.01358
3	1.091	0.9989	0.02521
4	1.095	1	0.00413
5	1.129	1	0.00104

Με αυτόν τον τρόπο ολοκληρώσαμε την εκτίμηση των συντελεστών εξέλιξης για τα έτη εξέλιξης και επί προσθέτως πληροφορηθήκαμε και για το τυπικό σφάλμα αυτών των συντελεστών.

Για την αποφυγή όμως όλων των παραπάνω εντολών που μπορεί να είναι χρονοβόρες υπάρχουν εναλλακτικά και κάποιες άλλες εντολές στο R οι οποίες μας δίνουν συνολικά τους συντελεστές εξέλιξης μέσω της μεθόδου MackChainLadder καθώς επίσης και τα υπόλοιπα στατιστικά. Απαραίτητο για την εκτέλεση των εντολών που θα ακολουθήσουν είναι η φόρτωση του πακέτου της Chain Ladder στο

R (load package - Chain Ladder). Οι εντολές αυτές φαίνονται παρακάτω. Ως MCL ονομάζουμε την MackChainLadder την οποία και θα εφαρμόσουμε στα δεδομένα μας.

```
> MCL<-MackChainLadder(CGI,est.sigma="Mack")
> MCL

MackChainLadder(Triangle = CGI, est.sigma = "Mack")

        Latest Dev.To.Date   Ultimate      IBNR  Mack.S.E CV(IBNR)
2004 1,820,322       1.000  1,820,322         0         0      NaN
2005 5,874,503       0.886  6,629,581   755,078     6,899  0.00914
2006 6,565,998       0.809  8,115,443 1,549,445    44,520  0.02873
2007 8,568,037       0.741 11,555,787 2,987,750   420,566  0.14076
2008 7,700,956       0.636 12,100,060 4,399,104   504,914  0.11478
2009 5,391,546       0.402 13,414,057 8,022,511 1,045,276  0.13029
```

Τελικές επισυμβάσες αποζημιώσεις ανά έτος ατυχήματος

Τελικές εκτιμώμενες αποζημιώσεις

Εκτιμώμενο Απόθεμα Εκκρεμών Ζημιών (Διαφορά τελικών εκτιμώμενων και τελικών επισυμβασών αποζημιώσεων)

```
                   Totals
Latest:     35,921,362.00
Ultimate:   53,635,249.43
IBNR:       17,713,887.43
Mack S.E.:   1,442,892.98
CV(IBNR):            0.08
```

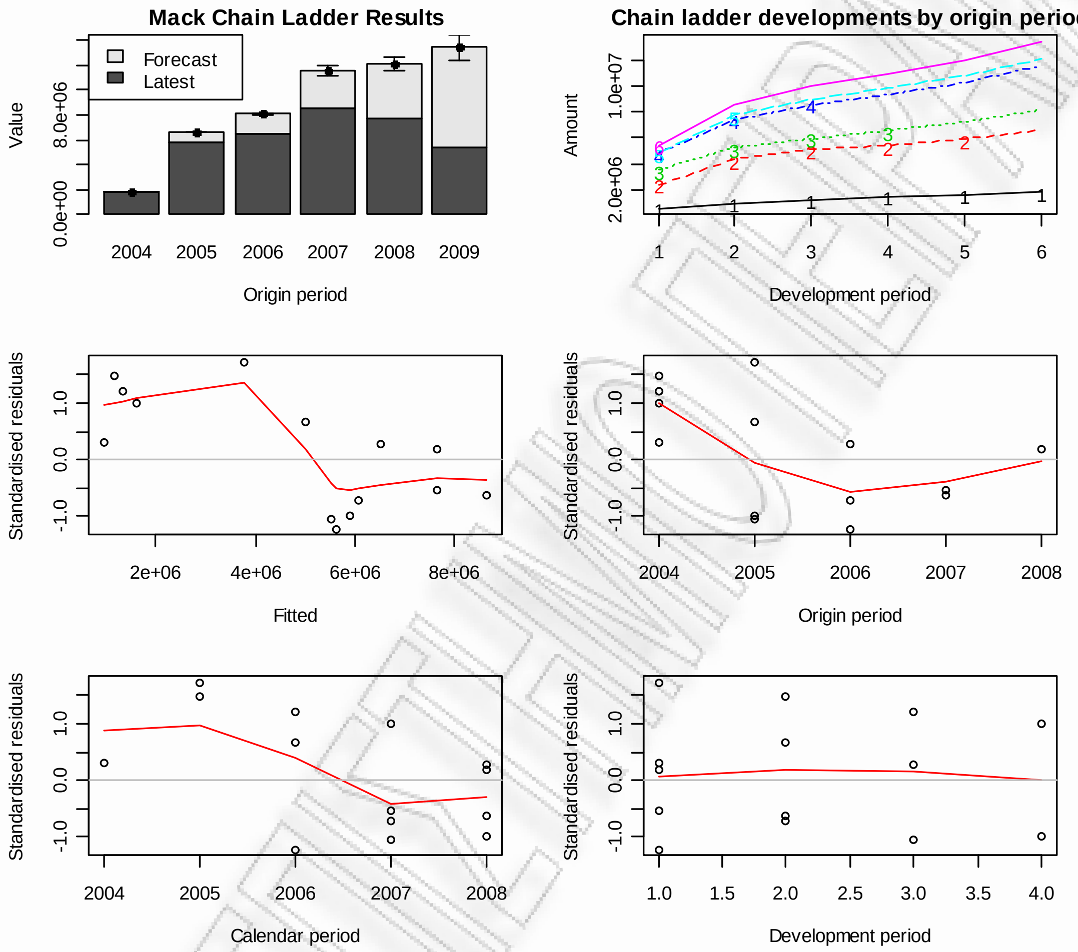
Τελικό συνολικό εκτιμώμενο απόθεμα (IBNR)

```
> MCL$f # Συντελεστές εξέλιξης
[1] 1.583449 1.164997 1.091206 1.095208 1.128535 1.000000

> MCL$f.se # Τυπικό σφάλμα συντελεστών εξέλιξης
[1]  0.052732169  0.013578753  0.025210565  0.004131962  0.001040190
0.000000000
```

Ιδιαίτερα πληροφοριακό είναι και το γράφημα της μεθόδου το οποίο μπορούμε να πάρουμε με την παρακάτω εντολή :

```
> plot(MCL)
```



Το πρώτο γράφημα από τα αριστερά εμφανίζει τις ζημιές ανά έτος ατυχήματος (πραγματοποιηθείσες και μελλοντικές). Με σκούρο χρώμα απεικονίζονται οι τελικές σωρευτικές αποζημιώσεις μέχρι και το έτος 2009 και με ανοιχτό χρώμα απεικονίζονται οι τελικές εκτιμώμενες αποζημιώσεις. Το επόμενο γράφημα στα δεξιά, απεικονίζει το πώς εξελίσσονται οι ζημιές ανά έτος ατυχήματος κατά τα έτη εξέλιξης. Τα υπόλοιπα γραφήματα απεικονίζουν τα residuals (προσαρμοσμένα, κατά έτος ατυχήματος, κατά ημερολογιακό έτος και κατά έτος εξέλιξης).

Τελειώνοντας η παρακάτω εντολή μας εμφανίζει την εξέλιξη ολόκληρου του τριγώνου ζημιών.

```
> predict(MCL)
      dev
origin       1       2       3        4        5        6
  2004  594944  990317 1236249  1462200  1612996  1820322
  2005 2381218 4292278 5069843  5374401  5874503  6629581
  2006 3551989 5196326 5976281  6565998  7191132  8115443
  2007 4816960 7418479 8568037  9349493 10239638 11555787
  2008 4821095 7700956 8971587  9789850 10721920 12100060
  2009 5391546 8537236 9945851 10852972 11886260 13414057
```

Κεφάλαιο 4

Αρνητικές Αποζημιώσεις Στο Τρίγωνο Ζημιών

4.1 Εισαγωγή

Κατά την εφαρμογή μεθόδων αποθεματοποίησης στα δεδομένα μιας Εταιρείας, είναι πιθανό να υπάρξουν και περιπτώσεις όπου στο τρίγωνο ζημιών να παρατηρηθούν και αρνητικές ζημιές. Η συνηθισμένη τεχνική που χρησιμοποιείται κατά την εμφάνιση τέτοιων ζημιών είναι η πρόσθεση μιας πολύ μεγάλης σταθεράς στις ζημιές προτού πάρουμε τους λογαρίθμους τους και η αφαίρεσή της μετά την διενέργεια των προβλέψεων. Η σταθερά που θα χρησιμοποιηθεί μπορεί είτε να επιλεγεί αυθαίρετα είτε να εκτιμηθεί μέσω εφαρμογής μεγίστης πιθανοφάνειας (βλέπε *Verrall, 1993, "Negative Incremental Claims : Chain Ladder & Linear Models"*).

4.2 Ανάλυση Τεχνικής

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το παρακάτω τρίγωνο ατομικών ζημιών :

	Πληρωμές Ζημιών ανά Έτος Εξέλιξης				
Έτος ατυχήματος	1	2	..	..	n
1	P_{11}	P_{12}	..	..	P_{1n}
2	P_{21}	P_{22}	..	P_{2n-1}	
..	..	..	..		
..	..	..			
n	P_{n1}				

Πίνακας 4.1 *Πίνακας Ατομικών Ζημιών*

όπου P_{ij} είναι οι αποζημιώσεις για τα έτος ατυχήματος i και για το έτος εξέλιξης j.

Όπως αναλύσαμε και στο ***Κεφάλαιο 2***, κατά την παρουσίαση του λογαριθμικού μοντέλου, παίρνοντας τους λογαρίθμους των ζημιών $Y_{ij} = \ln\left(P_{ij}\right)$ το γραμμικό μας μοντέλο έχει την μορφή :

$$Y_{ij} = X_{ij}\beta + e_{ij}$$

Εάν το τρίγωνο ζημιών $\left\{Y_{ij}; i = 1,...,n;\ j = 1,...,n-i+1\right\}$ θεωρηθεί ως διάνυσμα, τότε το μοντέλο μας μπορεί να γραφεί με την παρακάτω μορφή :

$$Y = X\beta + e$$

Οι εκτιμητές των παραμέτρων μπορούν να υπολογιστούν μέσω της μεγίστης πιθανοφάνειας και οι τιμές τους δίνονται από την σχέση :

$$X^T X\hat{\beta} = X^T y$$

Ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας της αναμενόμενης τιμής της P_{ij}, θ_{ij}, δίνεται από την :

$$\theta_{ij} = e^{X_{ij}\hat{\beta} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2}$$

Η Chain Ladder είναι μια μέθοδος η οποία μπορεί να πάρει την παραπάνω μορφή μέσω της σχέσης :

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij}$$

όπου :

μ *είναι ο συνολικός μέσος*

α_i *είναι παράμετρος συσχετισμένη με το έτος ατυχήματος και*

β_j *είναι παράμετρος συσχετισμένη με το έτος εξέλιξης*

Υποθέτουμε ότι $a_1 = \beta_1 = 0$.

Η σχέση μεταξύ αυτού του γραμμικού μοντέλου και της μεθόδου Chain Ladder παρουσιάστηκε αρχικά από τον Kremer το 1982.

Για την ανάλυση μας ας χρησιμοποιήσουμε ένα τρίγωνο ζημιών τριών ετών ατυχήματος.

	Πληρωμές Ζημιών ανά Έτος Εξέλιξης		
Έτος ατυχήματος	1	2	3
1	P_{11}	P_{12}	P_{13}
2	P_{21}	P_{22}	
3	P_{31}		

Πίνακας 4.2 *Πίνακας Ατομικών Ζημιών Τριετούς Εξέλιξης*

Παίρνοντας τους λογαρίθμους των ζημιών του παραπάνω τριγώνου υπολογίζουμε τα Y_{ij} και το μοντέλο μας παίρνει την παρακάτω μορφή :

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{13} \\ y_{22} \\ y_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0\,1 \\ 1\,1\,0\,1\,0 \\ 1\,0\,1\,0\,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{21} \\ e_{13} \\ e_{22} \\ e_{31} \end{bmatrix}$$

Επόμενο βήμα είναι η επιλογή μιας μεγάλης σταθεράς έστω τ την οποία την προσθέτουμε σε όλες τις ζημιές του τριγώνου έτσι ώστε όλες να αποκτήσουν θετική τιμή.

Στην συνέχεια εφαρμόζουμε το γραμμικό μοντέλο στα $\ln\left(P_{ij} + \tau\right)$ προκειμένου να εκτιμήσουμε το απόθεμα των εκκρεμών ζημιών. Η διαδικασία εκτίμησης των παραμέτρων της παραπάνω σχέσης, και εν συνεχεία των εκκρεμών ζημιών, είναι ίδια με αυτή που αναλύσαμε στο *Κεφάλαιο 3* κατά την εφαρμογή του λογαριθμικού μοντέλου στα δεδομένα της Εταιρείας.

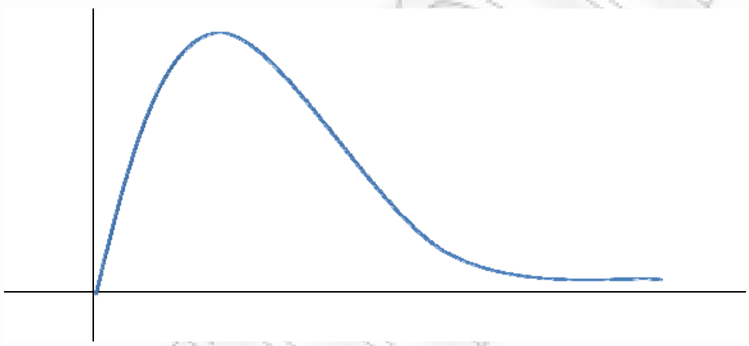
Τελευταίο βήμα μετά και την εκτίμηση των μελλοντικών ζημιών είναι η αφαίρεση της σταθεράς τ από τις εκτιμώμενες τιμές.

Η παραπάνω τεχνική μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ισοδύναμη με την εφαρμογή λογαριθμοκανονικής κατανομής με τρείς παραμέτρους, θεωρώντας την σταθερά τ ως την τρίτη παράμετρο. Η σταθερά τ μπορεί να εκτιμηθεί μέσω εφαρμογής μεγίστης πιθανοφάνειας.

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της λογαριθμοκανονικής κατανομής με δύο παραμέτρους δίνεται από την σχέση :

$$f(p) = \frac{1}{p\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\ln p - \mu)^2 \right\}$$

Το γράφημα 4.1 μας δίνει την γραφική απεικόνιση της πυκνότητας πιθανότητας μιας τυπικής λογαριθμοκανονικής κατανομής.



Γράφημα 4.1 *Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας λογαριθμοκανονικής κατανομής*

Ας υποθέσουμε ότι τα $P_1,\ldots,P_n$ αποτελούν δείγμα ανεξάρτητων και λογαριθμοκανονικά κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(p)$. Οι εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων μ και σ δίνονται από τις σχέσεις :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln p_i$$

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\ln p_i - \hat{\mu})^2$$

Μπορεί να δειχθεί ότι :

$$\hat{\mu} = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} p_i \right)^{\frac{1}{n}}$$

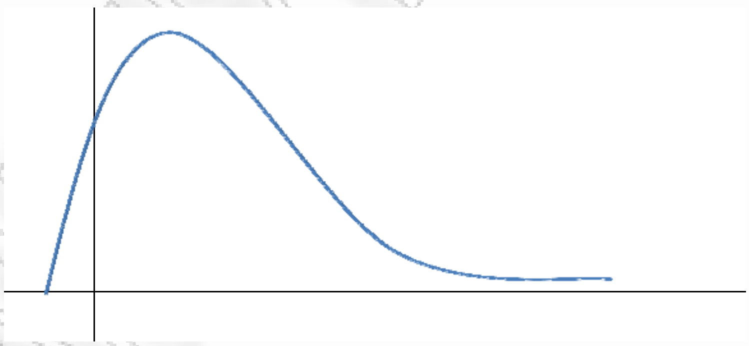
Είναι όμως γνωστό ότι η λογαριθμοκανονική κατανομή ορίζεται μόνο για θετικές τιμές των P. Η εμφάνιση αρνητικών τιμών στο δείγμα μας μπορεί να οδηγήσει σε δυσκολία κατά τον υπολογισμό του γινομένου $\left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right)^{\frac{1}{n}}$.

Για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος υπάρχουν δύο εναλλακτικές. Η πρώτη είναι να αντικαταστήσουμε τον γεωμετρικό μέσο $\left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right)^{\frac{1}{n}}$ από τον αριθμητικό μέσο $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να προσθέσουμε μια σταθερά σε όλες τις τιμές του δείγματος έτσι ώστε να μην υπάρχει καμία αρνητική τιμή. Με αυτόν τον τρόπο οδηγούμαστε σε μια λογαριθμοκανονική κατανομή με τρείς παραμέτρους η οποία έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας :

$$f(p) = \frac{1}{(p+\tau)\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\ln(p+\tau)-\mu\right]^2\right)$$

Η γραφική απεικόνιση της παραπάνω λογαριθμοκανονικής κατανομής αποτυπώνεται στο *Γράφημα 4.2*.



Γράφημα 4.2 *Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας λογαριθμοκανονικής κατανομής τριών παραμέτρων*

Λαμβάνοντας τώρα υπόψη τις ζημιές P_{ij} από το τρίγωνο ζημιών στην αρχή του κεφαλαίου και το λογαριθμικό μοντέλο $Y = X\beta + e$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των P_{ij} δίνεται από την σχέση :

$$f\left(p_{ij}\right)=\frac{1}{\left(p_{ij}+\tau\right)\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\ln\left(p_{ij}+\tau\right)-X_{ij}\beta\right]^2\right)$$

Επαναπροσδιορίζοντας τα y_{ij} έχουμε :

$$y_{ij}=\ln\left(p_{ij}+\tau\right)$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L=\prod_{i,j} f\left(p_{ij}\right)$ του τριγώνου ζημιών είναι η εξής :

$$\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{N/2}\prod_{i,j}\left(p_{ij}+\tau\right)}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y-X\beta\right)^T\left(y-X\beta\right)\right\}$$

όπου $N=n\left(n+1\right)/2$ είναι ο αριθμός των παρατηρημένων τιμών στο τρίγωνο ζημιών.

Λαμβάνοντας υπόψη στη συνέχεια τον λογάριθμο της συνάρτησης πιθανοφάνειας L έχουμε :

$$l=\ln(L)=-\frac{N}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right)-\sum_{i,j}\ln\left(p_{ij}+\tau\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y-X\beta\right)^T\left(y-X\beta\right)$$

Μεγιστοποιώντας την συνάρτηση πιθανοφάνειας ως προς β και εν συνεχεία ως προς σ^2, λύνοντας δηλαδή τα συστήματα $\frac{\partial l}{\partial\beta}=0$ και $\frac{\partial l}{\sigma^2}=0$, παίρνουμε τους εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας των β και σ^2 αντίστοιχα.

$$X^T X\hat{\beta}=X^T y$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{N}\left(y-X\hat{\beta}\right)^T\left(y-X\hat{\beta}\right)$$

Παρομοίως, μεγιστοποιώντας προς τ , ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας δίνεται από την σχέση :

$$\hat{\sigma}^2\sum_{i,j}\frac{1}{\left(p_{ij}+\hat{\tau}\right)}-\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\sum_{i,j}\frac{y_{ij}-X_{ij}\hat{\beta}}{\left(p_{ij}+\hat{\tau}\right)}=0$$

Ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας της $\hat{\theta}_{ij}$ είναι ο εξής :

$$\hat{\theta}_{ij}=\exp\left(X_{ij}\hat{\beta}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)-\hat{\tau}$$

Συμπεράσματα

Η παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώθηκε στην παρουσίαση των βασικότερων μεθόδων εκτίμησης του αποθέματος ζημιών, στον χώρο των Γενικών Ασφαλίσεων. Απώτερος σκοπός, είναι να αποτελέσει ένα εύχρηστο εργαλείο εκμάθησης αλλά και βοήθημα στα χέρια κάθε αναλυτή.

Κατά την ανάλυση των μεθόδων, έγινε λεπτομερής περιγραφή της διαδικασίας που ακολουθείται κατά την εκτίμηση των μελλοντικών αποζημιώσεων και δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στα πλεονεκτήματα αλλά και τα μειονεκτήματα που περιέχει κάθε μία από τις μεθόδους αυτές. Αναλυτικότερα, ασχοληθήκαμε με την Μέθοδο του Αναμενόμενου Δείκτη Ζημιών, τη Βασική Μέθοδο Chain Ladder, τη Μέθοδο Bornhueter – Ferguson, τη Μέθοδο Bentander – Hovinen, τη Μέθοδο Διαχωρισμού και με το Λογαριθμικό Μοντέλο Γραμμικής Παλινδρόμησης.

Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου για εφαρμογή στα δεδομένα μίας Εταιρείας είναι από τα πιο δύσκολα κομμάτια κατά την διαδικασία της εκτίμησης. Είναι σαφές ότι δεν υπάρχει μια συγκεκριμένη απάντηση στο ερώτημα ποια μέθοδος αποτελεί την πιο κατάλληλη για την εκτίμηση των μελλοντικών αποζημιώσεων. Σε κάθε περίπτωση, τα δεδομένα θα πρέπει να ελέγχονται λεπτομερώς προκειμένου να οδηγηθούμε στην πιο κατάλληλη μέθοδο προς εφαρμογή. Είναι μεγάλο λάθος να χρησιμοποιούμε την ίδια μέθοδο σε όλες τις περιπτώσεις.

Η μέθοδος του Αναμενόμενου Δείκτη Ζημιών ενδείκνυται όταν δεν έχουμε επαρκή εμπειρία ζημιών, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση νεοϊδρυθέντων Εταιρειών, όπου οι υπόλοιπες μέθοδοι εκτίμησης κρίνονται ακατάλληλες για εφαρμογή. Όσον αφορά την Μέθοδο Chain Ladder, η οποία είναι και από τις πιο ευρέως χρησιμοποιούμενες κατά την διαδικασία της εκτίμησης, η εφαρμογή της πάνω στα δεδομένα μιας Εταιρείας θέλει ιδιαίτερη προσοχή, αφού όπως έχει προαναφερθεί απαραίτητη προϋπόθεση είναι η επαλήθευση των υποθέσεων πάνω στις οποίες στηρίζεται. Η ακαταλληλότητα της Μεθόδου Chain Ladder στις περιπτώσεις που δεν υπάρχει σταθερότητα στο ποσοστό των τελικών πληρωθεισών ζημιών στα αρχικά έτη εξέλιξης, μπορεί να ξεπεραστεί με την εφαρμογή της Μεθόδου Bornhuetter – Ferguson η οποία αποτελεί συνδυασμό των μεθόδων του Αναμενόμενου Δείκτη Ζημιών και της Μεθόδου Chain Ladder. Μια άλλη μέθοδος που αποτελεί συνδυασμό των προαναφερόμενων μεθόδων είναι η αυτή των Benktander – Hovinen η οποία λαμβάνει υπόψη τα αποτελέσματα των μεθόδων Chain Ladder και Bornhuetter – Ferguson, θέτοντας βάρος σε κάθε μια από αυτές. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η Μέθοδος Διαχωρισμού, που βασίζεται στην υπόθεση ότι οι αποζημιώσεις είναι προϊόντα παραγόντων που εξαρτώνται από το έτος ατυχήματος, το έτος εξέλιξης και το ημερολογιακό έτος και η οποία ενδείκνυται στις περιπτώσεις που οι διακυμάνσεις κάποιου παράγοντα, όπως για παράδειγμα του πληθωρισμού, επηρεάζουν αισθητά τα επίπεδα ζημιών.

Ένα πιο εξειδικευμένο μοντέλο εκτίμησης του αποθέματος ζημιών είναι το λογαριθμικό μοντέλο πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης. Το μοντέλο αυτό υπερτερεί σε σχέση με τις προαναφερθείσες μεθόδους λόγω του ότι ελέγχει την καταλληλότητα των δεδομένων για την περαιτέρω ανάλυση και παρέχει πληροφορίες σχετικά με την διακύμανση των δεδομένων μας και τα τυπικά σφάλματα των εκτιμήσεων μας.

Κατά την εφαρμογή της Βασικής Μεθόδου Chain Ladder αλλά και του λογαριθμικού μοντέλου στα δεδομένα Ασφαλιστικής Εταιρείας παρατηρήσαμε ότι οι εκτιμώμενες μελλοντικές αποζημιώσεις βρίσκονται σχετικά κοντά και στα δύο μοντέλα, με μεγαλύτερο εκτιμώμενο ποσό αυτό του λογαριθμικού μοντέλου. Κατά την τελική μας όμως απόφαση, για το ποια μέθοδο θα λάβουμε υπόψη, ιδιαίτερο ρόλο παίζει το γεγονός ότι η εκτίμηση της μεθόδου Chain Ladder δεν αποτελεί παρά μόνο έναν αριθμό σε αντίθεση με αυτήν του λογαριθμικού μοντέλου όπου έχουμε υπολογίσει και ένα τυπικό σφάλμα εκτίμησης. Θα πρέπει επίσης να μην παραλείψουμε και το γεγονός ότι βασική υπόθεση της μεθόδου Chain Ladder είναι ότι οι σχέσεις αναλογίας που ίσχυσαν κατά το πρόσφατο παρελθόν μεταξύ των ποσών των σωρευτικών ζημιών θα επαναληφθούν και στο μέλλον. Επομένως η ύπαρξη, για παράδειγμα, αλλαγών στην πολιτική πληρωμών της Εταιρείας ή στην αλλαγή κανόνων ανάληψης κινδύνων μπορεί να οδηγήσουν σε διατάραξη της σχέσης παρελθόντος και μέλλοντος και επομένως σε λανθασμένες εκτιμήσεις.

Συμπληρωματικά, θα μπορούσαμε να χωρίσουμε το αρχείο ζημιών της Ασφαλιστικής Εταιρείας σε δύο ομάδες, έχοντας στη μία ζημιές κάτω των 70.000 ευρώ και στη δεύτερη ζημιές άνω των 70.000 ευρώ, και να εφαρμόσουμε εν συνεχεία την μέθοδο Chain Ladder και στις δύο ομάδες. Ως εκτιμώμενο απόθεμα θα παίρναμε το σύνολο των δύο ομάδων. Με αυτόν τον τρόπο θα εξομαλύναμε την επίδραση που μπορεί να είχαν στις εκτιμήσεις μας κάποιες υπερβολικά μεγάλες ζημιές. Θα μπορούσαμε επίσης να κάνουμε μεταβολές και στο λογαριθμικό μοντέλο, όσον αφορά το πλήθος των εκτιμώμενων παραμέτρων, και να συγκρίναμε στο τέλος τα αποτελέσματα όλων των εφαρμοσμένων μοντέλων. Με αυτόν τον τρόπο θα είχαμε μια καλύτερη εικόνα των δεδομένων μας (αποζημιώσεων) και του πως αυτά αντιδρούν στις μεταβολές που κάνουμε, προκειμένου με αυτόν τον τρόπο να καταλήξουμε σε πιο ορθά αποτελέσματα. Τα παραπάνω θα μπορούσαν να αποτελέσουν αντικείμενο μελλοντικής συμπληρωματικής μελέτης στη διαδικασία εκτίμησης του αποθέματος ζημιών.

Υποθέτουμε ότι τα δεδομένα μας αποτελούνται από n ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες παρατηρήσεις $\{P_1,\ldots,P_n\}$ οι οποίες ακολουθούν λογαριθμοκανονική κατανομή ($P_i \sim$ λογαριθμοκανονική κατανομή – lognormal distribution). Ας υποθέσουμε επίσης ότι $E(P_i)=\theta.$ Σκοπός μας είναι να εκτιμήσουμε το θ και το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης μας. Ένας τρόπος εκτίμησης του θ είναι να πάρουμε τους λογαρίθμους των δεδομένων μας και να προχωρήσουμε στην διεξαγωγή αποτελεσμάτων χρησιμοποιώντας κανονική κατανομή. Αύτη είναι μια μέθοδος που μπορεί να εφαρμοστεί σε δεδομένα που δεν είναι όμοια κατανεμημένα και επομένως είναι η πιο κατάλληλη για εφαρμογή σε δεδομένα ζημιών.

Έστω ότι :

$$Y_i = \ln P_i \quad (i=1,\ldots,n)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι τα P_i ακολουθούν λογαριθμοκανονική κατανομή, τα Y_i θα ακολουθούν κανονική κατανομή. Ας υποθέσουμε ότι :

$$Y_i \sim N(\mu,\sigma^2)$$

Τότε :

$$\theta = \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)$$

Οι εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας για τον μέσο μ και την διακύμανση σ^2 είναι :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Y}_i$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{Y}_i - \hat{\mu})^2$$

Όμοια, ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας του θ προκύπτει αντικαθιστώντας τις εκτιμώμενες τιμές $\hat{\mu}$ και $\hat{\sigma}^2$ στην σχέση $\theta = \exp(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2)$.

Τώρα τα $\hat{\mu}$ και $\hat{\sigma}^2$ είναι ανεξάρτητα και :

$$\hat{\mu} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$$

$$n(\hat{\sigma}^2/\sigma^2) \sim \mathrm{X}^2_{n-1}$$

Έχουμε :

$$E\left(\exp(\hat{\mu}t)\right) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}t^2\right)$$

και

$$E\left(\exp(n\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}t)\right) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{(n-1)/2}$$

Επομένως :

$$E\left(\hat{\theta}\right) = \mathrm{E}\left(\exp(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2)\right)$$

$$= \mathrm{E}\left(\exp(\hat{\mu})\right)E\left(\exp(\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2)\right)$$

$$= \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}\right)\left(\frac{1}{1-2\left(\sigma^2/2n\right)}\right)^{(n-1)/2}$$

$$= \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\exp\left(-\frac{(n-1)}{n}\frac{\sigma^2}{2}\right)\times\left(1-\frac{\sigma^2}{n}\right)^{-(n-1)/2}$$

$$> \theta$$

Το αποτέλεσμα αυτό, το οποίο προέρχεται από τον Finney (1941) αποδεικνύει ότι ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας του θ **δεν** είναι αμερόληπτος.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι :

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(-\frac{(n-1)}{n}\frac{\sigma^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)$$

και

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\sigma^2}{n}\right)^{-(n-1)/2} = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)$$

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ότι : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\hat{\theta}\right) = \theta$ και έτσι το $\hat{\theta}$ είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτο καθώς το n τείνει στο άπειρο.

Στην αποθεματοποίηση ζημιών το n δεν είναι συνήθως μεγάλο και επομένως η μεροληψία στην εκτίμηση μεγίστης πιθανοφάνειας είναι σοβαρή. Προκειμένου να διορθώσει την μεροληψία ο Finney εισήγαγε μια μεταβλητή $g_m(t)$ η οποία είναι ίση με :

$$g_m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k (m+2k)}{m(m+2)....(m+2k)} \frac{t^k}{k!}$$

όπου m είναι οι βαθμοί ελευθερίας. Στην περίπτωσή μας $m = n-1$.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του θ είναι η $\tilde{\theta}$ όπου

$$\tilde{\theta} = \exp(\hat{\mu}) g_m \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) s^2 \right)$$

όπου

$s^2 = \left[n/(n-1) \right] \hat{\sigma}^2$ είναι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ^2. Για άλλη μια φορά μπορεί να αποδειχθεί ότι :

$$\exp(\hat{\mu}) g_m \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) s^2 \right) \to \exp\left(\hat{\mu} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \right)$$

καθώς το n τείνει στο άπειρο.

Ένα πλεονέκτημα της χρήσης γραμμικών μοντέλων είναι ότι μπορούμε να πάρουμε εκτιμήσεις των τυπικών σφαλμάτων. Η διακύμανση του $\tilde{\theta}$ είναι τ^2 όπου :

$$\tau^2 = \mathrm{E}\left(\tilde{\theta}^2 \right) - \left(\mathrm{E}\left(\tilde{\theta} \right) \right)^2$$

Μια αμερόληπτη εκτίμηση του $\mathrm{E}\left(\tilde{\theta}^2 \right)$ είναι φανερά το $\tilde{\theta}^2$ και

$$\left(\mathrm{E}\left(\tilde{\theta} \right) \right)^2 = \left(\exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2) \right)^2 = \exp(2\mu + \sigma^2)$$

Σε αναλογία με την αμερόληπτη εκτιμήτρια του θ, μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του $\exp\left(2\mu + \sigma^2 \right)$ είναι η

$$\exp(2\hat{\mu}) g_m \left(\left(1 - \frac{2}{n} \right) s^2 \right)$$

Επομένως μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του τ^2 είναι :

$$\tilde{\tau}^2 = \exp(2\hat{\mu}) \left[\left(g_m \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) s^2 \right) \right)^2 - g_m \left(\left(1 - \frac{2}{n} \right) s^2 \right) \right]$$

Ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας της διακύμανσης του εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας του θ, $\hat{\theta}$ είναι :

$$\exp\left(2\hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}^2}{n} \right) \left[\exp\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{n} \right) \left[1 - \frac{2\hat{\sigma}^2}{n} \right]^{-(n-1)/2} - \left[1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{n} \right]^{-(n-1)} \right]$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0,558	0,279	0,414	0,193	0,328	0,462	0,088	0,222	0,357	0,492	-0,093	0,041	0,176	0,310	0,445
2	0,279	0,471	0,574	0,157	0,260	0,363	0,081	0,184	0,287	0,390	-0,044	0,059	0,162	0,265	0,368
3	0,414	0,574	0,729	0,225	0,380	0,535	0,104	0,259	0,414	0,569	-0,102	0,053	0,208	0,363	0,518
4	0,193	0,157	0,225	0,452	0,520	0,588	0,077	0,145	0,212	0,280	0,019	0,086	0,154	0,222	0,289
5	0,328	0,260	0,380	0,520	0,640	0,760	0,100	0,220	0,340	0,460	-0,039	0,080	0,200	0,320	0,440
6	0,462	0,363	0,535	0,588	0,760	0,932	0,123	0,295	0,467	0,639	-0,098	0,075	0,247	0,419	0,591
7	0,088	0,081	0,104	0,077	0,100	0,123	0,581	0,604	0,627	0,650	0,115	0,138	0,161	0,185	0,208
8	0,222	0,184	0,259	0,145	0,220	0,295	0,604	0,679	0,755	0,830	0,057	0,132	0,208	0,283	0,358
9	0,357	0,287	0,414	0,212	0,340	0,467	0,627	0,755	0,882	1,010	-0,001	0,126	0,254	0,382	0,509
10	0,492	0,390	0,569	0,280	0,460	0,639	0,650	0,830	1,010	1,190	-0,059	0,121	0,300	0,480	0,660
11	-0,093	-0,044	-0,102	0,019	-0,039	-0,098	0,115	0,057	-0,001	-0,059	1,346	1,288	1,230	1,172	1,114
12	0,041	0,059	0,053	0,086	0,080	0,075	0,138	0,132	0,126	0,121	1,288	1,282	1,276	1,271	1,265
13	0,176	0,162	0,208	0,154	0,200	0,247	0,161	0,208	0,254	0,300	1,230	1,276	1,323	1,369	1,415
14	0,310	0,265	0,363	0,222	0,320	0,419	0,185	0,283	0,382	0,480	1,172	1,271	1,369	1,468	1,566
15	0,445	0,368	0,518	0,289	0,440	0,591	0,208	0,358	0,509	0,660	1,114	1,265	1,415	1,566	1,717

Πίνακας 3.12 *Πίνακας* $X_f \left(X^T X\right)^{-1} X_f^{\,T}$ *1ου Λογαριθμικού Μοντέλου*

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		354	585	435	1.254	930	694	2.117	1.561	1.159	866	3.078	2.248	1.652	1.222	910
1	354	9000,2	7306,2	8131,2	10776,5	13674,6	14520,4	8220,9	15477,6	18595,8	19292,9	-12564,0	4078,9	12900,6	16990,5	18287,4
2	585	7306,2	20547,4	18774,2	14408,8	17812,4	18684,0	12480,5	21054,6	24539,2	25077,2	-9823,7	9624,9	19576,4	23847,0	24816,6
3	435	8131,2	18774,2	17941,7	15426,2	19534,7	20740,9	11975,9	22217,4	26621,9	27606,0	-16891,3	6450,1	18812,1	24525,5	26311,6
4	1.254	10776,5	14408,8	15426,2	90788,7	77730,5	65849,5	25470,7	35446,9	38785,9	38376,8	8933,2	30336,8	39942,6	42708,1	41677,9
5	930	13674,6	17812,4	19534,7	77730,5	71471,2	63823,1	24610,1	40177,6	46421,3	47269,9	-13984,2	20956,9	38648,8	46040,5	47464,1
6	694	14520,4	18684,0	20740,9	65849,5	63823,1	59069,1	22652,3	40455,3	48041,1	49640,8	-25711,7	14493,3	35625,8	45222,8	48019,8
7	2.117	8220,9	12480,5	11975,9	25470,7	24610,1	22652,3	334741,3	257107,3	198469,5	153990,3	93702,9	82306,1	70722,4	59904,4	50266,5
8	1.561	15477,6	21054,6	22217,4	35446,9	40177,6	40455,3	257107,3	214308,2	177582,1	146629,7	34100,5	58099,9	67325,8	68186,9	64581,4
9	1.159	18595,8	24539,2	26621,9	38785,9	46421,3	48041,1	198469,5	177582,1	155357,8	133940,1	-488,2	41197,7	61300,8	68656,4	68746,6
10	866	19292,9	25077,2	27606,0	38376,8	47269,9	49640,8	153990,3	146629,7	133940,1	119245,1	-19504,7	29338,9	54310,0	64941,1	67203,3
11	3.078	-12564,0	-9823,7	-16891,3	8933,2	-13984,2	-25711,7	93702,9	34100,5	-488,2	-19504,7	1722888,1	1199235,7	838461,7	588718,2	415029,3
12	2.248	4078,9	9624,9	6450,1	30336,8	20956,9	14493,3	82306,1	58099,9	41197,7	29338,9	1199235,7	871291,9	637128,3	468914,9	347348,3
13	1.652	12900,6	19576,4	18812,1	39942,6	38648,8	35625,8	70722,4	67325,8	61300,8	54310,0	838461,7	637128,3	486645,4	373662,7	288445,6
14	1.222	16990,5	23847,0	24525,5	42708,1	46040,5	45222,8	59904,4	68186,9	68656,4	64941,1	588718,2	468914,9	373662,7	298146,0	238360,9
15	910	18287,4	24816,6	26311,6	41677,9	47464,1	48019,8	50266,5	64581,4	68746,6	67203,3	415029,3	347348,3	288445,6	238360,9	196422,1

Πίνακας 3.15 *Πίνακας συνδιακυμάνσεων μελλοντικών τιμών ζημιών*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1,400	0,000	1,200	0,000	0,000	1,200	0,000	0,000	0,000	1,200	0,000	0,000	0,000	0,000	1,200
2	0,000	0,875	0,375	0,000	0,625	0,125	0,000	0,000	0,625	0,125	0,000	0,000	0,000	0,625	0,125
3	1,200	0,375	1,475	0,000	0,125	1,225	0,000	0,000	0,125	1,225	0,000	0,000	0,000	0,125	1,225
4	0,000	0,000	0,000	0,778	0,444	0,444	0,000	0,444	0,111	0,111	0,000	0,000	0,444	0,111	0,111
5	0,000	0,625	0,125	0,444	0,986	0,486	0,000	0,111	0,653	0,153	0,000	0,000	0,111	0,653	0,153
6	1,200	0,125	1,225	0,444	0,486	1,586	0,000	0,111	0,153	1,253	0,000	0,000	0,111	0,153	1,253
7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,875	0,625	0,625	0,625	0,000	0,375	0,125	0,125	0,125
8	0,000	0,000	0,000	0,444	0,111	0,111	0,625	0,986	0,653	0,653	0,000	0,125	0,486	0,153	0,153
9	0,000	0,625	0,125	0,111	0,653	0,153	0,625	0,653	1,194	0,694	0,000	0,125	0,153	0,694	0,194
10	1,200	0,125	1,225	0,111	0,153	1,253	0,625	0,653	0,694	1,794	0,000	0,125	0,153	0,194	1,294
11	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,400	1,200	1,200	1,200	1,200
12	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,375	0,125	0,125	0,125	1,200	1,475	1,225	1,225	1,225
13	0,000	0,000	0,000	0,444	0,111	0,111	0,125	0,486	0,153	0,153	1,200	1,225	1,586	1,253	1,253
14	0,000	0,625	0,125	0,111	0,653	0,153	0,125	0,153	0,694	0,194	1,200	1,225	1,253	1,794	1,294
15	1,200	0,125	1,225	0,111	0,153	1,253	0,125	0,153	0,194	1,294	1,200	1,225	1,253	1,294	2,394

Πίνακας 3.21 *Πίνακας* $X_f\left(X^T X\right)^{-1} X_f^{\,T}$ *2ου Λογαριθμικού Μοντέλου*

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		684	636	854	890	930	1.249	1.473	987	1.032	1.386	3.499	1.686	1.130	1.181	1.586
1	684	42102,4	0,0	44753,2	0,0	0,0	65465,9	0,0	0,0	0,0	72642,2	0,0	0,0	0,0	0,0	83127,9
2	636	0,0	22334,5	12662,3	0,0	23156,7	6126,8	0,0	0,0	25695,1	6798,4	0,0	0,0	0,0	29404,1	7779,8
3	854	44753,2	12662,3	69235,2	0,0	6126,8	83459,9	0,0	0,0	6798,4	92608,7	0,0	0,0	0,0	7779,8	105976,5
4	890	0,0	0,0	0,0	38772,6	22918,9	30791,1	0,0	24332,3	6292,8	8454,3	0,0	0,0	27844,5	7201,2	9674,6
5	930	0,0	23156,7	6126,8	22918,9	54047,2	35244,2	0,0	6292,8	39291,5	12165,3	0,0	0,0	7201,2	44963,1	13921,3
6	1.249	65465,9	6126,8	83459,9	30791,1	35244,2	159866,1	0,0	8454,3	12165,3	138661,6	0,0	0,0	9674,6	13921,3	158676,9
7	1.473	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	119959,7	56976,2	59549,7	80003,6	0,0	57929,3	12840,5	13420,4	18030,0
8	987	0,0	0,0	0,0	24332,3	6292,8	8454,3	56976,2	60918,4	41714,5	56042,5	0,0	12840,5	33836,9	11001,1	14779,8
9	1.032	0,0	25695,1	6798,4	6292,8	39291,5	12165,3	59549,7	41714,5	81128,4	62392,9	0,0	13420,4	11001,1	53145,0	19685,5
10	1.386	72642,2	6798,4	92608,7	8454,3	12165,3	138661,6	80003,6	56042,5	62392,9	224145,3	0,0	18030,0	14779,8	19685,5	182163,1
11	3.499	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1100238,8	451618,3	302636,0	316305,4	424949,1
12	1.686	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	57929,3	12840,5	13420,4	18030,0	451618,3	269799,1	148987,6	155717,0	209202,3
13	1.130	0,0	0,0	0,0	27844,5	7201,2	9674,6	12840,5	33836,9	11001,1	14779,8	302636,0	148987,6	130733,5	106806,8	143492,4
14	1.181	0,0	29404,1	7779,8	7201,2	44963,1	13921,3	13420,4	11001,1	53145,0	19685,5	316305,4	155717,0	106806,8	162623,9	155162,9
15	1.586	83127,9	7779,8	105976,5	9674,6	13921,3	158676,9	18030,0	14779,8	19685,5	182163,1	424949,1	209202,3	143492,4	155162,9	399117,9

Πίνακας 3.24 *Πίνακας συνδιακυμάνσεων μελλοντικών τιμών ζημιών 2ου Λογαριθμικού Μοντέλου*

Εκτίμηση συντελεστών εξέλιξης για το δεύτερο έως το πέμπτο έτος εξέλιξης.

- ***Δεύτερο έτος εξέλιξης :***

```
> lm(CGI[,3]~CGI[,2]+0,weights=1/CGI[,2])

Call:
lm(formula = CGI[, 3] ~ CGI[, 2] + 0, weights = 1/CGI[, 2])

Coefficients:
CGI[, 2]
   1.165

> summary(lm(CGI[,3]~CGI[,2]+0,weights=1/CGI[,2]))

Call:
lm(formula = CGI[, 3] ~ CGI[, 2] + 0, weights = 1/CGI[, 2])

Residuals:
  2004   2005   2006   2007
 82.94  33.48 -33.96 -27.34

Coefficients:
         Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
CGI[, 2]  1.16500    0.01358    85.8 3.49e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 57.45 on 3 degrees of freedom
  (2 observations deleted due to missingness)
Multiple R-squared: 0.9996,     Adjusted R-squared: 0.9995
F-statistic:  7361 on 1 and 3 DF,  p-value: 3.49e-06
```

- ***Τρίτο έτος εξέλιξης :***

```
> lm(CGI[,4]~CGI[,3]+0,weights=1/CGI[,3])

Call:
lm(formula = CGI[, 4] ~ CGI[, 3] + 0, weights = 1/CGI[, 3])

Coefficients:
CGI[, 3]
   1.091

> summary(lm(CGI[,4]~CGI[,3]+0,weights=1/CGI[,3]))
```

```
Call:
lm(formula = CGI[, 4] ~ CGI[, 3] + 0, weights = 1/CGI[, 3])

Residuals:
  2004    2005    2006
101.81 -70.10  18.26

Coefficients:
         Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
CGI[, 3]  1.09121    0.02521   43.28 0.000533 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 88.35 on 2 degrees of freedom
  (3 observations deleted due to missingness)
Multiple R-squared: 0.9989,     Adjusted R-squared: 0.9984
F-statistic:  1873 on 1 and 2 DF,  p-value: 0.0005333
```

- ***Τέταρτο έτος εξέλιξης :***

```
> lm(CGI[,5]~CGI[,4]+0,weights=1/CGI[,4])

Call:
lm(formula = CGI[, 5] ~ CGI[, 4] + 0, weights = 1/CGI[, 4])

Coefficients:
CGI[, 4]
   1.095

> summary(lm(CGI[,5]~CGI[,4]+0,weights=1/CGI[,4]))

Call:
lm(formula = CGI[, 5] ~ CGI[, 4] + 0, weights = 1/CGI[, 4])

Residuals:
  2004    2005
 9.579 -4.996

Coefficients:
         Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
CGI[, 4] 1.095208   0.004132   265.1   0.0024 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 10.8 on 1 degrees of freedom
  (4 observations deleted due to missingness)
Multiple R-squared:     1,      Adjusted R-squared:     1
F-statistic: 7.026e+04 on 1 and 1 DF,  p-value: 0.002402
```

- ***Πέμπτο έτος εξέλιξης :***

```
> lm(CGI[,6]~CGI[,5]+0,weights=1/CGI[,5])

Call:
lm(formula = CGI[, 6] ~ CGI[, 5] + 0, weights = 1/CGI[, 5])

Coefficients:
CGI[, 5]
   1.129

> summary(lm(CGI[,6]~CGI[,5]+0,weights=1/CGI[,5]))

Call:
lm(formula = CGI[, 6] ~ CGI[, 5] + 0, weights = 1/CGI[, 5])

Residuals:
ALL 1 residuals are 0: no residual degrees of freedom!

Coefficients:
         Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
CGI[, 5]    1.129         NA      NA       NA

Residual standard error: NaN on 0 degrees of freedom
  (5 observations deleted due to missingness)
Multiple R-squared:     1,      Adjusted R-squared:   NaN
F-statistic:   NaN on 1 and 0 DF,  p-value: NA
```

Βιβλιογραφία - Πηγές

1. BENKTANDER G. (1976). *An approach to credibility in calculating IBNR for casualty excess insurance.* The Actuarial Review, Vol.3, No.2.
2. BRADU D. & MUNDLAK Y. (1970). *Estimation in lognormal linear models*. J.Am.Stat.Association, 65, 198-211.
3. BROWN, R.L. (1993). *Introduction To Ratemaking And Reserving For Property And Casualty Insurance*. ACTEX Publications.
4. BROWN, R.L. (1994). *Variability of loss reserves.* Casualty Actuarial Society, 279-298.
5. CHRISTOFIDES, S. (1990). *Regression models based on log-incremental claims.* Claims Reserving Manual, Vol.2. London: Institute of Actuaries.
6. DAHL, P. (2003). *Introduction to Reserving.* Corrected edition.
7. ENGLAND P.D. & VERRALL, R.J. (2002). *Stochastic Claims Reserving In General Insurance.* British Actuarial Journal, 8, 443-544.
8. GLEN BARNETT & BEN ZEHNWIRTH (2000). *Best Estimates For Reserves.* Casualty Actuarial Society, 87, 245-321.
9. HABERMAN, S. & RENSHAW, A.E. (1988). *Generalized Linear Models and Actuarial Science*. The statistician 45, 407-436.
10. HOVINEN E. (1981). *Additive and continuous IBNR.* ASTIN Colloquium Loen/Norway.
11. KREMER, E. (1982). *IBNR-claims and the two-way model of ANOVA*. Scand. Actuarial Journal, 47-55.
12. Mack, T. (1994). *Measuring the Variability of Chain Ladder Reserve Estimates.* Claims Reserving Manual, Vol.2. London: Institute of Actuaries.
13. RENSHAW A.E. (1989). *Chain Ladder And Interactive Modelling (Claims reserving And Glim).* Journal of the Institute of Actuaries, Vol.116, 559-587.
14. TAYLOR, G.C. (1977). *Separation of inflation and other effects from the distribution of non-life insurance claim delays*. ASTIN Bull.9, 219-230.

15. TAYLOR, G.C. (1986). *Claims Reserving in Non-Life Insurance.* Amsterdam – New York : North-Holland.
16. TAYLOR, G.C. (1988). *Regression Models and the Claims Analysis (II)*. William M.M.Campbell. Cook, Knight, Sydney, Australia.
17. VERRALL, R.J. (1991a). *Chain Ladder and Maximum Likelihood.* Journal of the Institute of Actuaries. 118, 489-499.
18. VERRALL, R.J. (1991b). *On the Unbiased Estimation of reserves from Loglinear Models.* Insurance, Mathematics and Economics, 10, 75-80.
19. VERRALL, R.J. & LI Z. (1993). *Negative Incremental Claims : Chain Ladder & Linear Models.* Journal of the Institute of Actuaries, 120, 171-183.
20. WISER R.F. (1996). *Loss reserving*. Foundations of Casualty Actuarial Science. 2nd edition, 143-232.
21. ZEHNWIRTH, B. (1985). *Interactive Claims Reserving Forecasting System*. Benhar Nominees Pty Ltd. Tarramurra NSW Australia.
22. ZEHNWIRTH, B. (1989). *The Chain-Ladder technique – A stochastic model.* Claims Reserving Manual, Vol.2. London: Institute of Actuaries.