Το Κλασικό Μοντέλο της Θεωρίας Χρεοκοπίας με Εξαρτήσεις

μεταξύ Μεγεθών και Χρόνων Εμφάνισης των Ζημιών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΚΟΥΡΑΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Χατζηκωνσταντινίδης Ε.
Αν. Καθηγητής

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ:

Η εύρυθμη λειτουργία ενός ασφαλιστικού οργανισμού εξαρτάται κυρίως από τον σχηματισμό επαρκών αποθεματικών προκειμένου να είναι σε θέση να καλύψει τις υποχρεώσεις του έναντι τρίτων (επιχειρηματικά ρίσκα) και κυρίως των ασφαλισμένων του (ασφαλιστικά ρίσκα). Στην ασφαλιστική ορολογία, τα εν λόγω αποθεματικά (ή ακριβέστερα η διαφορά ανάμεσα στο ενεργητικό της ασφαλιστικής επιχείρησης και στην καλύτερη δυνατή αναλογιστική εκτίμηση των συνολικών της υποχρεώσεων – αποζημιώσεων) χαρακτηρίζονται με τον όρο πλεόνασμα. Βασικό πρόβλημα της (κλασικής) θεωρίας κινδύνου είναι ο προσδιορισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας, δηλαδή της πιθανότητας τα αποθεματικά να μην είναι επαρκή για την κάλυψη των συνολικών αποζημιώσεων.

Η αρχή της (μαθηματικής) θεωρίας κινδύνου προσδιορίζεται στις αρχές του 20^{ου} αιώνα όταν ο Σουηδός *Filip Lundberg (1903)* με την περίφημη διατριβή του (*Approximerad fremställning au sannolikheets funktionen, Upsalla)* έθεσε τα θεμέλια της. Βασιζόμενος σε αυτή, ο *Harald Cramér (1930)*, με μία σειρά από εργασίες, ενσωμάτωσε τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών στη θεωρία κινδύνου. Το βασικό μοντέλο που προέκυψε από τις παραπάνω συνεισφορές ονομάζεται, κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ή μοντέλο *Cramér – Lundberg*. Κύριο χαρακτηριστικό του συγκεκριμένου μοντέλου είναι ότι ο αριθμός των ζημιών σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων περιγράφεται από την κατανομή *Poisson*. Η γενίκευση του κλασικού μοντέλου έγινε το 1957 όταν ο Νορβηγός *Sparre Andersen* παρουσίασε, στο 15^{ο} αναλογιστικό συνέδριο στη Νέα Υόρκη, την εργασία *΄΄On the collective theory of risk in case of contagion between the claims΄΄*. Κύριο χαρακτηριστικό στο μοντέλο *Sparre Andersen* ή ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου είναι ότι ο αριθμός των ζημιών σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων περιγράφεται από μία ανανεωτική διαδικασία. Επομένως, είναι φανερό ότι τα μοντέλα που εισήχθησαν για την μοντελοποίηση του προβλήματος της χρεοκοπίας εξαρτώνται άμεσα από τη (στοχαστική) διαδικασία που επιλέγεται για την περιγραφή του αριθμού των κινδύνων.

1.1 Η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των κινδύνων

Ένα πρώτο βήμα για να μοντελοποιήσουμε το πλεόνασμα ενός ασφαλιστικού οργανισμού είναι ο προσδιορισμός του αριθμού των κινδύνων. Έστω $N(t)\ _{t=0}^{\infty}$ μία στοχαστική διαδικασία η οποία παριστά τον αριθμό των κινδύνων στο χρονικό διάστημα $[\ 0\ ,\ t\ ]$. Τότε η $N(t)\ _{t=0}^{\infty}$ ονομάζεται απαριθμήτρια και ορίζεται ως εξής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1 Μια στοχαστική διαδικασία $N(t)\ _{t=0}^{\infty}$ ονομάζεται απαριθμήτρια διαδικασία αν και μόνο αν

i. $N(t) > 0$, με $N\ \ 0\ \ = 0$,
ii. $N(t)$ είναι διακριτή,
iii. αν $s \leq t$ τότε $N(s) \leq N(t)$

Μια από τις γενικές «οικογένειες» στοχαστικών διαδικασιών, ευρέως χρησιμοποιούμενη τόσο στη θεωρία ουρών όσο και στη θεωρία κινδύνου, είναι η οικογένεια των ανανεωτικών στοχαστικών διαδικασιών. Ο ορισμός μία ανανεωτικής διαδικασίας βασίζεται στους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των γεγονότων (ενδεχομένων) που απαριθμεί η $N(t)\ _{t=0}^{\infty}$. Έστω, λοιπόν, $W_i\ _{i=0}^{\infty}$ μία ακολουθία μη αρνητικών ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με σ.κ. $F_W(t)$, σ.π.π. $f_W(t)$, μετασχηματισμό *Laplace* $f_W\ \ s\ \ = \ _0^{\infty} f_W(t)dt$ και μέση τιμή $E(W) < \infty$, όπου W_i είναι ο ενδιάμεσος χρόνος άφιξης της i −ζημιάς (ενδεχομένου). Τότε η ανανεωτική διαδικασία $N(t)\ _{t=0}^{\infty}$ ορίζεται ακολούθως.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2 Έστω $\{W_i\}_{i=0}^{\infty}$ μία ακολουθία μη αρνητικών ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. Η ακολουθία $\{\sigma_n\}_{n\in N}$, $\sigma_0 = 0$, με $\sigma_n = W_1+W_2+\cdots+W_n$ ονομάζεται ακολουθία ανανεώσεων. Τότε η απαριθμήτρια διαδικασία $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ με $N(0) = 0$ που δίνεται από τη σχέση

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{\sigma_n \leq t\}} \tag{1.1}$$

και παριστά τον αριθμό των ανανεώσεων στο χρονικό διάστημα *[0 , t]*, ονομάζεται ανανεωτική στοχαστική διαδικασία.

Από τον *ΟΡΙΣΜΟ 1.1* βλέπουμε ότι για κάθε ανανεωτική ανέλιξη ισχύει ότι,

$$N(t) = n \text{ αν και μόνο αν } \sigma_n \leq t \leq \sigma_{n+1} \,. \tag{1.2}$$

Η σχέση (1.2) ερμηνεύεται ως εξής: το ενδεχόμενο $N(t) = n$ σημαίνει ότι έχουμε ακριβώς n γεγονότα έως τον χρόνο t. Από την άλλη, το ενδεχόμενο $\sigma_n \leq t \leq \sigma_{n+1}$ σημαίνει ότι ο χρόνος αναμονής μέχρι να συμβούν n γεγονότα (ανανεώσεις) είναι t. Επειδή οι παραπάνω αποτελούν 2 διαφορετικές εκφράσεις του ίδιου ενδεχομένου, η (1.2) είναι αληθής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1 *Έστω* $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *μία ανανεωτική στοχαστική ανέλιξη. Τότε με πιθανότητα 1 ισχύει ότι,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{E(W_1)}. \tag{1.3}$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό της $N(t)$, οι ανισότητες $\sigma_n \leq t \leq \sigma_{n+1}$ ισχύουν με πιθανότητα 1 (σχεδόν βέβαια). Διαιρώντας τις παραπάνω ανισότητες με $N(t)$ και χρησιμοποιώντας το νόμο των μεγάλων αριθμών έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} E(W_1) &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n}{n} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sigma_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \\ &\leq \lim_{t\to\infty} \frac{\sigma_{N(t)+1}}{N(t)+1} \frac{N(t)+1}{N(t)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_{n+1}}{n+1} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = E(W_1)\,, \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2 (Elementary Renewal Theorem) *Έστω* $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *μία ανανεωτική στοχαστική ανέλιξη. Τότε ισχύει ότι,*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E(N(t))}{t}=\frac{1}{E(W_1)}. \tag{1.4}$$

Απόδειξη: Rolski, Schmidt και *Teugels (1996)* σελ.211.

Από τον *ΟΡΙΣΜΟ 1.2* της ανανεωτικής διαδικασίας, προκύπτει ότι η διαδικασία Poisson είναι μία ειδική περίπτωση μία ανανεωτικής ανέλιξης, όταν υποθέσουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3 *Έστω* $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *μία ανανεωτική ανέλιξη με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης εκθετικά κατανεμημένους με παράμετρο λ. Τότε η* $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *είναι μία (ομογενής) διαδικασία Poisson με ένταση λ. Σε αυτήν την περίπτωση οι ακόλουθες εκφράσεις είναι ισοδύναμες:*

i. *η* $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις, και σε ένα απειροστικό διάστημα [0 , dt] ισχύει ότι,*

$$\mathbb{P}(N(dt)=1)=\lambda dt+o(dt),\ \mathbb{P}(N(dt)=0)=1-\lambda dt+o(dt), \tag{1.5}$$

ii. *η* $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις, και για κάθε* t*, η τ.μ* $N(t)$ *ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt.*

Απόδειξη: Από την υπόθεση ότι οι τ.μ $\{W_i\}_{i=0}^{\infty}$ είναι εκθετικά κατανεμημένες με παράμετρο λ, συνεπάγεται ότι το άθροισμα n ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ $\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}W_i$, ακολουθεί την κατανομή *Erlang* με παραμέτρους n και λ. Τότε, $\mathbb{P}(N(t)=0)=\mathbb{P}(\sigma_n>t)=e^{-\lambda t}$ και για $n\geq 1$,

$$\mathbb{P}(N(t)=n)=\mathbb{P}(N(t)\geq n)-\mathbb{P}(N(t)\geq n+1)$$

$$= \mathbb{P}(\sigma_n \le t) - \mathbb{P}(\sigma_{n+1} \le t)$$

$$= \int_0^t \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx - \int_0^t \frac{\lambda^{n+1} x^n}{n!} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \int_0^t \frac{d}{dx}\left(\frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x}\right) dx = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \tag{1.6}$$

από όπου φαίνεται ότι η $N(t)$ ακολουθεί την κατανομή *Poisson* με παράμετρο λt. Επιπλέον, για να δείξουμε ότι $(i) \Rightarrow (ii)$, για κάθε $n \in N$ και $t \ge 0$, ορίζουμε $p_n(t) := \mathbb{P}(N(t) = n)$. Τότε για $dt > 0$,

$$p_0(t+h) = \mathbb{P}(N(t) = 0, N(t+dt) - N(t) = 0) = \mathbb{P}(N(t) = 0)\mathbb{P}(N(dt) = 0)$$
$$= p_0(t)(1 - \lambda dt + o(dt)), \tag{1.7}$$

από την οποία έπεται ότι,

$$\frac{p_0(t+dt) - p_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \frac{o(dt)}{dt}. \tag{1.8}$$

Για $dt \to 0$ και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του *Taylor*

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t). \tag{1.9}$$

Έχοντας $p_0(0) = 1$, τότε η μοναδική λύση της διαφορικής εξίσωσης (1.9) είναι η

$$p_0(t) = \mathbb{P}(N(0) = 0) = e^{-\lambda t}. \tag{1.10}$$

Τώρα χρησιμοποιώντας το παραπάνω, θα δείξουμε ότι το (ii) είναι αληθές επαγωγικά. Έτσι θεωρούμε ότι το (ii) είναι αληθές για $n-1$ (και για κάθε $t \ge 0$) και δείχνουμε ότι είναι αληθές για n. Έτσι,

$$p_n(t+dt) = \mathbb{P}(N(t) = n)\mathbb{P}(N(dt) = 0) + \mathbb{P}(N(t) = n-1)\mathbb{P}(N(dt) = 1)$$
$$= p_n(t)p_0(t) + p_{n-1}(t)p_1(dt)$$
$$= p_n(t)(1 - \lambda dt) + p_{n-1}(t)\lambda dt + o(dt) \tag{1.11}$$

από όπου παίρνουμε ότι,

$$\frac{p_n(t+dt)-p_n(t)}{dt}=-\lambda p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t)+\frac{o(dt)}{dt}. \tag{1.12}$$

Για $dt \to 0$ και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του $Taylor$, έχουμε

$$p_n'(t)=-\lambda p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t)=-\lambda p_n(t)+\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{1.13}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}p_n(t)\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{(\lambda t)^n}{n!}\right). \tag{1.14}$$

Χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες $p_n(0)=0 \;\; \forall\; n \geq 1$, συμπεραίνουμε ότι η μοναδική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι η,

$$p_n(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},\;\; t \geq 0, n \in N, \tag{1.15}$$

από όπου προκύπτει το ii.

1.2 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος — Το κλασικό μοντέλο

Έχοντας μοντελοποιήσει τον αριθμό των κινδύνων, το επόμενο βήμα είναι να μοντελοποιήσουμε τα αποθεματικά ενός ασφαλιστικού οργανισμού. Έτσι θεωρούμε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων όπου το πλεόνασμα του χαρτοφυλακίου περιγράφεται από τη διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t), t \geq 0\}$ και ορίζεται ακολούθως.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3 (surplus process) Ως διαδικασία πλεονάσματος $\underline{U} = \{U(t),\ t \geq 0\}$, γνωστό και ως κλασικό μοντέλο όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι W_i ακολουθούν εκθετική κατανομή, ορίζεται η στοχαστική διαδικασία

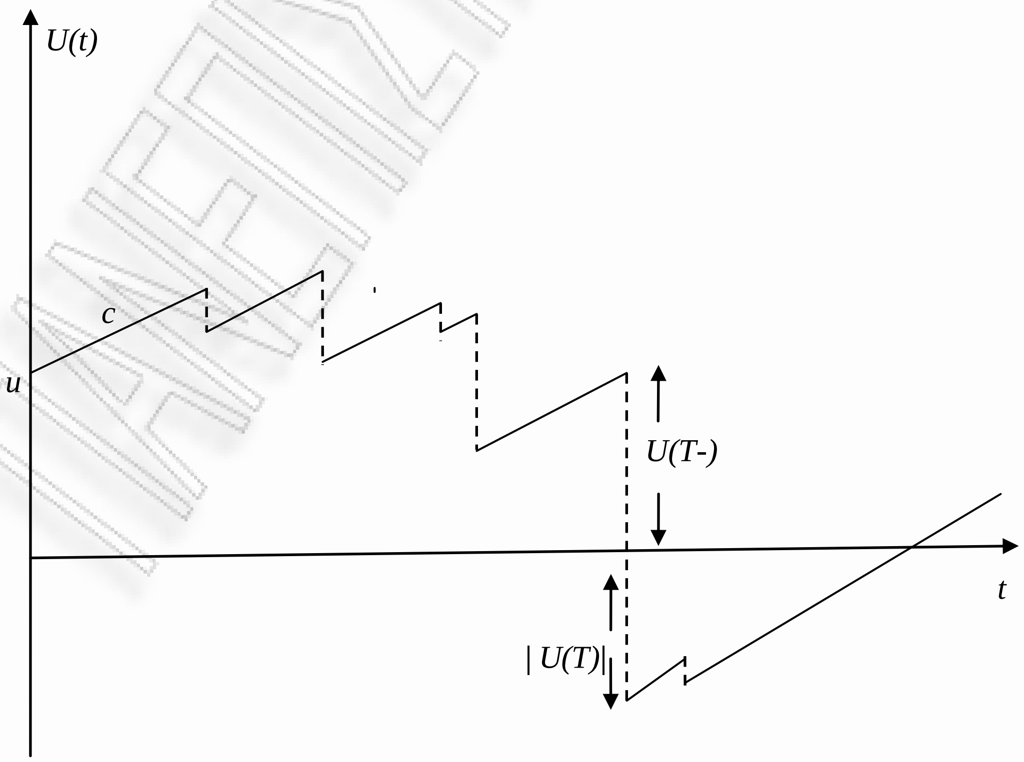
$$U(t) = u + ct - S(t), \tag{1.16}$$

όπου $U(0) = u\ (\geq 0)$, το αρχικό απόθεμα, $c\ (c \geq 0)$ ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρων ανά μονάδα χρόνου και $S(t)$ οι συνολικές αποζημιώσεις στο χρονικό διάστημα $[\ 0\ ,\ t\ ]$ με

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N(t)} X_j, & N(t) > 0 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases} \tag{1.17}$$

όπου $\{X_j\ ,\ j \in \mathbb{N}^+\}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ., με X_j να περιγράφει το μέγεθος της j-οστής ζημιάς. Θεωρούμε ότι η τ.μ. X_j έχει σ.π.π. $f(x)$, σ.κ. $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ και μέση τιμή $m = \mathbb{E}(X) < \infty$. Βασική υπόθεση του μοντέλου είναι ότι οι ακολουθίες $\underline{N} = \{\ N(t), t \geq 0\ \}$ και $\{X_j, j \in \mathbb{N}^+\}$ είναι ανεξάρτητες.

Σχήμα 1.1:Η διαδικασία πλεονάσματος U(t)



1.3 Μέτρα χρεοκοπίας και η συνάρτηση των *Gerber - Shiu*

Από τον ορισμό του μοντέλου (1.3) είναι φανερό ότι η διαδικασία πλεονάσματος κατά τις χρονικές στιγμές W_j μπορεί να γίνει αρνητική. Στην αναλογιστική ορολογία το ενδεχόμενο αυτό ονομάζεται χρεοκοπία και η πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου πιθανότητα χρεοκοπίας. Προκειμένου να ορίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας χρειαζόμαστε αρχικά τον ορισμό του χρόνου κατά τον οποίο εμφανίζεται η χρεοκοπία.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4 (time to ruin) Για $t \geq 0$, ορίζουμε

$$T = inf\ \{t \geq 0\ ,U(t) < 0\} \text{ με } inf\,\emptyset = \infty$$

να είναι ο χρόνος κατά τον οποίο για πρώτη φορά η διαδικασία πλεονάσματος γίνεται αρνητική.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται παρακάτω.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5 Για $u \geq 0$ η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως

$$\psi(u)= \mathbb{P}(T < \infty \,\big|\, U(0) = u\,).$$

Αξίζει να επισημανθεί ότι στην πράξη, η διαδικασία πλεονάσματος δεν είναι ο μοναδικός 'πόρος' της ασφαλιστικής επιχείρησης και η καταβολή της αποζημίωσης δεν είναι στιγμιαίο γεγονός (απαιτείται κάποιο χρονικό διάστημα, που συνεπάγεται εισροή ασφαλίστρου πέρα από το καταβεβλημένο μέχρι την χρονική στιγμή *T).* Έτσι η 'μαθηματική χρεοκοπία' που ορίζουμε δεν ταυτίζεται με την πραγματική χρεοκοπία, αλλά είναι ένα πολύ σημαντικό μέτρο κινδύνου από το οποίο η επιχείρηση μπορεί να βγάλει χρήσιμα συμπεράσματα. Έτσι, με βάση αυτό το μέτρο κινδύνου, αν η επιχείρηση έχει ενδείξεις ότι οι υποχρεώσεις της θα είναι εξαιρετικά αυξημένες μπορεί να προχωρήσει σε αύξηση των ασφαλίστρων, σύναψη δανείου, αύξηση μετοχικού κεφαλαίου κ.ο.κ. Από μαθηματικής άποψης είναι φανερό ότι υπολογίζοντας την πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί κανείς να προσδιορίσει κατάλληλα το αρχικό απόθεμα u και το ασφάλιστρο c έτσι ώστε να αποφύγει (ή σε κάθε περίπτωση να επιμηκύνει) το ενδεχόμενο, η διαδικασία πλεονάσματος να γίνει αρνητική.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας, αν και είναι ένα πολύ σημαντικό μέτρο κινδύνου, δεν είναι το μοναδικό. Δύο άλλες τυχαίες μεταβλητές, που σχετίζονται με την τυχαία μεταβλητή T, είναι η $|U(T)|$ που συμβολίζει το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας και $U(T-)$ που συμβολίζει το πλεόνασμα λίγο πριν την χρεοκοπία (με $T-$ το αριστερό όριο της T)(βλ. Σχήμα 1.1).Είναι φανερό ότι η μελέτη των παραπάνω ποσοτήτων δίνουν πολύ περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την συμπεριφορά της διαδικασίας πλεονάσματος $U(t)$,απ'ότι μόνο η μελέτη της T .

Οι *Gerber* και *Shiu* το 1998 κατάφεραν να μοντελοποιήσουν τις τυχαίες μεταβλητές T, $|U(T)|$, $U(T-)$ σε μία μόνο συνάρτηση, την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής *(discounted penalty function)* .

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6 Για $u \geq 0$, $\delta \geq 0$ η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των *Gerber-Shiu* ορίζεται ως εξής ,

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} w(U(T-)\ ,|U(T)|)1_{\{T<\infty\}} \mid U(0) = u\ ], \quad u \geq 0 \qquad (1.18)$$

όπου δ η ένταση ανατοκισμού, $w: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ μία διδιάστατη συνάρτηση στο $\mathbb{R}^2$ που ονομάζεται συνάρτηση πονής,1_A η δείκτρια συνάρτηση του A γεγονότος, $|U(T)|$ το έλλειμμα την στιγμή της χρεοκοπίας και $U(T-)$ το πλεόνασμα λίγο πριν την χρεοκοπία.

Διαισθητικά η συνάρτηση των *Gerber-Shiu* μπορεί να ερμηνευτεί ως η προεξοφλημένη ποινή η οποία επιβάλλεται όταν συμβεί η χρεοκοπία. Από τον ορισμό της $m_\delta(u)$ και για διάφορες μορφές της συνάρτησης ποινής προκύπτουν διάφορα μέτρα κινδύνου.

Ειδικές περιπτώσεις

- για $\delta = 0$, $w(x, y) = 1$, παίρνουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας,

$$\psi(u)= E(1_{\{T<\infty\}} \mid U(0) = u)=P(T < \infty \mid U(0) = u),$$

- για $\delta > 0$, $w(x,y) = 1$, παίρνουμε τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας,

$$\upsilon_\delta(u)= E[e^{-\delta T}1_{\{T<\infty\}}|U(0) = u],$$

- για $\delta > 0$, $w(x,y) = 1_{(x=x_1)}1_{(y=x_2)}$, παίρνουμε την προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. του τυχαίου διανύσματος $(U(T-),|U(T)|)$,

$$f(x_1,x_2|u) = E[e^{-\delta T}1_{(|U(T)|=x_2,\ U(T-)=x_1)}1_{(T<\infty)}|\ U(0) = u],$$

- για $\delta > 0$, $w(x,y) = 1_{(x=x_1)}$, παίρνουμε την προεξοφλημένη σ.π.π. της τ.μ. $U(T-)$,

$$h(x_1|u)=E[e^{-\delta T}1_{(U(T-)=x_1)}1_{(T<\infty)}|\ U(0) = u],$$

- για $\delta > 0$, $w(x,y) = 1_{(y=x_2)}$, παίρνουμε την προεξοφλημένη σ.π.π. της τ.μ. $|U(T)|$,

$$g(x_2|u)= E[e^{-\delta T}1_{(|U(T)|=x_2)}1_{(T<\infty)}|\ U(0) = u],$$

- για $\delta > 0$, $w(x,y) = x_1^k (w(x,y) = x_2^k)$, παίρνουμε την προεξοφλημένη ροπή τάξης k του ελλείμματος κατά την χρεοκοπία (του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία),

$$E[e^{-\delta T}|U(T)|^k 1_{\{T<\infty\}}|\ U(0) = u]= E[e^{-\delta T}\ U(T-)^k 1_{\{T<\infty\}}|\ U(0) = u].$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.1 *Η συνάρτηση των Gerber-Shiu* m_δ *για το κλασικό μοντέλο ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληροδιαφορική εξίσωση,*

$$cm_\delta'(u) = (\lambda+\delta)m_\delta(u) - \lambda\int_0^u m_\delta(u-x)f(x)dx - \lambda\gamma(u), \quad u \geq 0. \quad (1.19)$$

Απόδειξη: Έστω το διάστημα *[0 , dt]*. Τότε υπάρχουν 2 δυνατά ενδεχόμενα:

- δεν εμφανίζεται κίνδυνος, με πιθανότητα $1 - \lambda dt$,

- εμφανίζεται ένας ακριβώς κίνδυνος, με πιθανότητα λdt και τα υπόλοιπα ενδεχόμενα έχουν (μηδενική) πιθανότητα $0(dt)$.

Τότε,

$$m_\delta(u) = e^{-\delta dt}\Big[(1-\lambda dt)\, m_\delta(u+cdt) + \lambda dt \int_0^{u+cdt} m_\delta(u+cdt-x) f(x)\, dx +$$

$$\int_{u+cdt}^{\infty} w(u+cdt, x-u-cdt) f(x)\, dx + \Big] + 0(dt). \quad (1.20)$$

Ισχύει ότι,

$$e^{-\delta dt}(1-\lambda dt) = (1-\delta dt)(1-\lambda dt) + 0(dt) = 1-(\lambda+\delta)dt + 0(dt) \quad (1.21)$$

και

$$e^{-\delta dt}\lambda dt = (1-\delta dt)\lambda dt + 0(dt) = \lambda dt + 0(dt). \quad (1.22)$$

Τότε,

$$m_\delta(u) = \big(1-(\lambda+\delta)dt\big) m_\delta(u+cdt)$$

$$+\lambda dt \int_0^{u+cdt} m_\delta(u+cdt-x) f(x)\, dx + \lambda dt \gamma(u+cdt). \quad (1.23)$$

Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με c,

$$\frac{cm_\delta(u) - cm_\delta(u+cdt)}{cdt} = -(\lambda+\delta) m_\delta(u+cdt) + \lambda \int_0^{u+cdt} m_\delta(u+cdt-x) f(x)\, dx$$

$$+\lambda\gamma(u+cdt). \quad (1.24)$$

Οπότε παίρνοντας $dt \to 0$, βρίσκουμε ότι,

$$-cm'_\delta(u) = -(\lambda+\delta) m_\delta(u) + \lambda \int_0^{u} m_\delta(u-x) f(x)\, dx + \lambda\gamma(u)$$

$$\Rightarrow cm_\delta'(u) = (\lambda+\delta)\, m_\delta(u) - \lambda \int_0^u m_\delta(u-x)\, f(x)dx - \lambda\gamma(u).$$

Η συνάρτηση των *Gerber-Shiu* είναι ένα πανίσχυρο εργαλείο που εκτός από τη χρήση της στα αναλογιστικά μαθηματικά, έχει και εφαρμογές στη θεωρία των χρηματοοικονομικών μαθηματικών. Παραδείγματος χάρη, όταν $w(x,y) = max(0, K-x)$, η $m_\delta(u)$ χρησιμοποιείται για την τιμολόγηση ενός *put option* με τιμή άσκησης K (για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. *Gerber-Shiu (1999)*, *Gerber* και *Landry (1998)*).

Για να διασφαλίσουμε τη μη επέλευση χρεοκοπίας, ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρων c είναι τέτοιος ώστε

$$E[cW_j - X_j] > 0, \tag{1.25}$$

παρέχοντας έτσι ένα θετικό περιθώριο ασφαλείας.

Στο συγκεκριμένο μοντέλο κινδύνου είναι ξεκάθαρο ότι οι αυξήσεις $\{ (X_j - cW_j),\ j \in \mathbb{N}^+\}$ της διαδικασίας πλεονάσματος είναι ακόμα ανεξάρτητες. Αυτό μας επιτρέπει με έναν ισχυρισμό *martingale* να βρούμε ένα εκθετικό άνω όριο της πιθανότητας χρεοκοπίας

$$\psi(u) \le e^{\rho u}, \tag{1.26}$$

όπου $\rho < 0$ (αν υπάρχει) είναι η αρνητική ρίζα της $E[e^{-r(X_1 - cW_1)}]=1$. Η ποσότητα ρ καλείται συντελεστής προσαρμογής *Lundberg*. Ο συντελεστής προσαρμογής *Lundberg* είναι ένα μέτρο κινδύνου το οποίο μας πληροφορεί ότι πρέπει να αναπροσαρμόσουμε το αρχικό μας αποθεματικό δηλ. να αυξήσουμε ή να μειώσουμε το περιθώριο ασφαλείας έτσι ώστε να ασκηθεί καλύτερα η ασφαλιστική πολιτική της εταιρίας. Επιπλέον, με την παραδοχή της ανεξαρτησίας ανάμεσα στις αυξήσεις της διαδικασίας πλεονάσματος προκύπτει ότι η άπειρου χρόνου πιθανότητα χρεοκοπίας είναι μία σύνθετη γεωμετρική ουρά.

Ολοκληρώνοντας την ενότητα μας, αξίζει να σημειώσουμε ότι σε αντίθεση με κλασικό μοντέλο όπου οι τ.μ. W_j και X_j θεωρούνται ανεξάρτητες η εργασία μας στηρίζεται στην υπόθεση ότι ενώ τα διδιάστατα τυχαία διανύσματα $(X_j\ , W_j\ )$ για $j \in \mathbb{N}^+$ είναι αμοιβαίως ανεξάρτητα οι τ.μ X_j και W_j δεν είναι πια ανεξάρτητες.

1.4 Σύντομη ανάλυση της διαδικασίας των συνολικών αποζημιώσεων

Σε αυτήν την ενότητα, βρίσκουμε την πρώτη ροπή των συνολικών αποζημιώσεων τ.μ. $S(t)$ καθώς επίσης και έναν τύπο για την δεύτερη ροπή τους .Βασιζόμενοι στην ιδιότητα των διατεταγμένων παρατηρήσεων (*order statistics property*) της διαδικασίας *Poisson*, το τυχαίο διάνυσμα των χρόνων εμφάνισης της ζημιάς $(T_1,..\ T_n)$ δοθέντος ότι $N(t)= n$ έχει την ίδια κατανομή με τις διατεταγμένες παρατηρήσεις των n ανεξάρτητων $(0,t)$ ομοιόμορφα κατανεμημένων τ.μ. Συνεπώς, $f_{W_1,\ldots\ldots,W_n|N(t)=n}(w_1,\ldots\ldots,w_n) = \frac{n!}{t^n}$ στο $D= \{(w_1,\ldots\ldots,w_n) : 0 \le w_1 \le t\ , 0 \le w_n \le t - w_1 - \ldots - w_{n-1}\}$ που σημαίνει ότι

$$f_{W_i|N(t)=n}(w_i) = \frac{n(t-w_i)^{n-1}}{t^n}, \quad 0 \le w_1 \le t. \tag{1.27}$$

Οπότε, συμπεραίνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
E[S(t)|N(t) = n] &= \int_D E[S(t)|\underline{W} = \underline{w}, N(t) = n]\, f_{\underline{W}|N(t)=n}(\underline{w})\, d\underline{w} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_D E[X_i|W_i = w_i]\, \frac{n!}{t^n} d\underline{w} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_0^t E[X_i|W_i = w_i]\, \frac{n(t-w_i)^{n-1}}{t^n} dw_i \\
&= n \int_0^t \mu^{(1)}(w) \frac{n(t-w_i)^{n-1}}{t^n} dw
\end{aligned} \tag{1.28}
$$

όπου $\mu^{(k)}(w) = E[X_1^k|W_1 = w]$ για $k \in \mathbb{N}$. Τελικά , από (1.28) έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
E[S(t)] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{(n-1)!} \int_0^t \mu^{(1)}(w) \frac{n}{t^n}(t - w_i)^{n-1} dw \\
&= \int_0^t \mu^{(1)}(w)\, \lambda e^{-\lambda t} e^{\lambda(t-w)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{(\lambda(t-w))^n}{n!} e^{-\lambda(t-w)}\right) dw \\
&= \lambda t \int_0^t \mu^{(1)}(w) \left(\lambda\left(1 - \frac{w}{t}\right) + \frac{1}{t}\right) e^{-\lambda w} dw \\
&= \lambda t \left(\mu^{(1)}(0) + \int_0^t e^{-\lambda w}\left(1 - \frac{w}{t}\right) d\mu^{(1)}(w)\right).
\end{aligned} \tag{1.29}
$$

Στην περίπτωση που οι τ.μ. του μεγέθους της ζημιάς είναι ανεξάρτητες από τον χρόνο που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών ζημιών (δηλ. $\mu^{(1)}(w) = \mu^{(1)}$ για όλα τα $w \geq 0$), η (1.29) γίνεται

$$E[S(t)] = \lambda t \mu^{(1)}$$

που αντιστοιχεί στη πρώτη ροπή μίας σύνθετης *Poisson*. Σημειώνουμε επίσης ότι για την δική μας δομή εξάρτησης, το *Θεώρημα 6.1.12 του Rolski et al.(1999)* επαληθεύεται, δηλ.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} E[S(t)] = \lambda \lim_{t\to\infty} \int_0^t \mu^{(1)}(w)\left(1 - \frac{w}{t}\right) \lambda e^{-\lambda w} dw + \lim_{t\to\infty} \frac{E[\min(X,t)]}{t}$$

$$= \lambda \int_0^\infty \lim_{t\to\infty} \left(1 - \frac{w}{t}\right) \mu^{(1)}(w) \lambda e^{-\lambda w} 1_{\{w \leq t\}} dw$$

$$= \lambda \int_0^\infty \mu^{(1)}(w) \lambda e^{-\lambda w} dw$$

$$= \lambda E[X_1],$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης (*dominated convergence theorem*). Μία παρόμοια διαδικασία μας οδηγεί σε έναν τύπο για την δεύτερη ροπή της τυχαίας μεταβλητής $S(t)$.

$$E[S(t)^2] = \int_0^t \mu^{(2)}(w) \lambda e^{-\lambda w}(1 + \lambda(t - w))dw + \int_0^t \int_0^{t-w} \lambda^2 \mu^{(1)}(w) \mu^{(1)}(y) e^{-\lambda(w+y)} (2 + 4\lambda(t - w - y) + (\lambda(t - w - y))^2) dy dw. \quad (1.30)$$

Όπως αναμενόταν, αν $\mu^{(k)}(w) = \mu^{(k)}$ για όλα τα $w \geq 0$ και k =1,2 , η (1.30) γίνεται $E[S(t)^2] = \lambda t \mu^{(2)} + (\lambda t \mu^{(1)})^2$ που αντιστοιχεί στο αναμενόμενο ποσό της συνολικής αποζημίωσης αν η $S(t)$ είναι σύνθετη *Poisson*.

Στα κεφάλαια που θα ακολουθήσουν παρουσιάζουμε διάφορα αποτελέσματα για τις δύο δομές εξάρτησης μεταξύ των μεγεθών των ζημιών και των ενδιάμεσων χρόνων ζημιών. Τόσο για την δεσμευμένη κατανομή του μεγέθους της ζημιάς δοθείσης της κατανομής του ενδιάμεσου χρόνου εμφάνισης της ζημιάς όσο και για την σύζευξη των *Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM)* υπάρχει εκτενής ανάλυση της εκάστοτε δομής εξάρτησης. Ασχολούμαστε ιδιαίτερα με την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των *Gerber-Shiu* $m_\delta(u)$ βρίσκοντας τον μετασχηματισμό *Laplace* της συνάρτησης και την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (*defective renewal equation)* που να ικανοποιεί την συνάρτηση ποινής $m_\delta(u)$. Επίσης, αναλύουμε την εξίσωση *Lundberg* για κάθε μοντέλο ενώ οι υπόλοιπες ενότητες περιέχουν περαιτέρω αποτελέσματα για τις διάφορες περιπτώσεις των δύο δομών εξάρτησης. Τέλος, με την βοήθεια αριθμητικών παραδειγμάτων επιχειρούμε να αποτυπώσουμε στην πράξη τον τρόπο λειτουργίας των δύο διαφορετικών δομών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

<u>1</u>

1^{O} ΜΟΝΤΕΛΟ:

Η δεσμευμένη κατανομή του μεγέθους της ζημιάς δοθείσης της κατανομής του ενδιάμεσου χρόνου εμφάνισης της ζημιάς η οποία θεωρείται να είναι μείξη δύο κατανομών

2.1.Δομή εξάρτησης

Θεωρούμε μία δομή εξάρτησης ανάμεσα στις τυχαίες μεταβλητές X_k και W_k του ποσού της αποζημίωσης και του ενδιάμεσου χρόνου. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι η δεσμευμένη πυκνότητα των $X_k\,|W_k$ ορίζεται ως μία μείξη δύο συναρτήσεων πυκνότητας f_1 και f_2 (με αντίστοιχους μέσους μ_1 και μ_2),

$$f_{X_k|W_k} = e^{-\beta w_k} f_1(x) + (1 - e^{-\beta w_k}) f_2(x), \quad x \geq 0, \tag{2.1}$$

για $k = 1,2\ldots$

Ισχύει ότι η από κοινού σ.π.π δίνεται από τον τύπο,

$$f_{X_k,W_k} = f_{X_k|W_k} f_{W_k}\ t\ . \tag{2.2}$$

Από (2.1), (2.2) προκύπτει ότι: $f_{X_k,W_k} = \lambda\, e^{-\lambda w_k}\ [\ e^{-\beta w_k} f_1(x) + (1 - e^{-\beta w_k}) f_2(x)\ ]$

Για διευκόλυνση θεωρούμε Y_1 (Y_2) τυχαίες μεταβλητές με πυκνότητα f_1 f_2 .

Από (2.1) το βάρος που ορίζεται στη συσσωρευμένη συνάρτηση κατανομής F_1 είναι μία φθίνουσα συνάρτηση (με ρυθμό β) του παρερχόμενου χρόνου από την τελευταία αποζημίωση W_k .Ως αποτέλεσμα η περιθώρια κατανομή της X_k ισούται με

$$f\,x_k\,(x)=M_W(-\beta)\,f_1\,(x)+(1-\,M_W(-\beta))\,f_2\,(x)=\frac{\lambda}{\lambda+\beta}\,f_1\,(x)+\frac{\beta}{\lambda+\beta}\,f_2\,(x)$$

για $k = 1,2...$Γι'αυτή την δομή εξάρτησης ισχύει ότι,

$$E[cW_j – X_j\,]= \quad \frac{c}{\lambda}-\frac{\lambda\mu_1+\beta\mu_2}{\beta+\lambda} > 0. \tag{2.3}$$

Επίσης , η συνδιακύμανση ανάμεσα σε W και X δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} Cov(W,X) &= E[Cov(X,W\,|W)]+ Cov(E[X \mid W],E[W\,|W]) \\ &= Cov(\,e^{-\beta W}\mu_1 + (\,1\text{-}\,e^{-\beta W})\,\mu_2\,,W) \\ &= -Cov(\,e^{-\beta W}\,,\,W)(\,\mu_2 - \mu_1) \\ &= \frac{\beta}{(\lambda+\beta)^2}(\mu_2 - \mu_1) \end{aligned}$$

και συνεπώς συμπεραίνουμε ότι $Cov(W,X) > \ < 0$ όταν $E\,[Y_2\,] > \ < E[Y_1\,]$.

Το μοντέλο κινδύνου με μεγέθη αποζημίωσης εξαρτώμενα από τον ενδιάμεσο χρόνο και με δομή εξάρτησης $f_{X_k|W_k} = e^{-\beta w_k} f_1(x) + (1 - e^{-\beta w_k}) f_2(x), \quad x \geq 0,$ μπορεί να χαρακτηριστεί πιο ρεαλιστικό μοντέλο (από το κλασικό μοντέλο της σύνθετης *Poisson*) να προσεγγίσει την συμπεριφορά της διαδικασίας της συνολικής αποζημίωσης στα πλαίσια μίας φυσικής καταστροφής. Πράγματι, θεωρώντας W_j τον χρόνο που μεσολαβεί ανάμεσα στην $(\,j - 1\,)$ και j καταστροφή και για ένα τέτοιο γεγονός να υπάρχουν δύο πιθανές εντάσεις $I_j = 1$ (κανονική), 2 (σοβαρή), καταλήγουμε ότι,

$$Pr(\,I_j = 1|W_j = w) = e^{-\beta w} = 1\text{-}\,Pr(I_j = 2|W_j = w)$$

και $Pr(\,X_j \leq x|\,I_j = i\,) = F_i\,(x)$ για $i = 1,2$. Για παράδειγμα στα πλαίσια ενός κινδύνου από σεισμό κάποιος μπορεί να περιμένει ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο χρόνος ανάμεσα στα δύο συμβάντα τόσο μεγαλύτερο είναι το ποσό της αποζημίωσης στο επόμενο καταστροφικό γεγονός. Έτσι περισσότερο βάρος πρέπει να αποδοθεί στην κατανομή F_2 που επιλέγεται με βαρύτερη ουρά από την F_1 .

2.2 Ο μετασχηματισμός *Laplace* της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των *Gerber-Shiu* $m_\delta(u)$

Δεσμεύοντας την $m_\delta(u)$ ως προς τον χρόνο και το ποσό της πρώτης αποζημίωσης έχουμε ότι ,

$$m_\delta(u)=\int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)t}\int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-y)\left(e^{-\beta t}f_1(y)+\left(1-e^{-\beta t}\right)f_2(y)\right)dydt$$

$$+\int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)t}\int_{u+ct}^\infty w(u+ct,y-(u+ct))(e^{-\beta t}f_1(y)+(1-e^{-\beta t})f_2(y))\,dydt$$

$$=\int_u^\infty \frac{\lambda}{c}e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}(t-u)}\int_0^t m_\delta(t-y)\left(e^{-\frac{\beta}{c}(t-u)}f_1(y)+\left(1-e^{-\frac{\beta}{c}(t-u)}\right)f_2(y)\right)dydt$$

$$+\int_u^\infty \frac{\lambda}{c}e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}(t-u)}\int_t^\infty w(t,y-t)\left(e^{-\frac{\beta}{c}(t-u)}f_1(y)+\left(1-e^{-\frac{\beta}{c}(t-u)}\right)f_2(y)\right)dydt$$

$$=\frac{\lambda}{c}\left(\int_u^\infty e^{-\frac{\lambda+\delta+\beta}{c}(t-u)}(\sigma_{1,\delta}(t)-\sigma_{2,\delta}(t))+\int_u^\infty e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}(t-u)}\sigma_{2,\delta}(t)\,dt\right)$$

όπου $\gamma_i(t)=\int_t^\infty w(t,y-t)f_i(y)\,dy$ και

$$\sigma_{i,\delta}(t)=\int_0^t m_\delta(t-y)f_i(y)\,dy+\gamma_i(t), \tag{2.4}$$

Σε αυτό το σημείο για να απλοποιήσουμε τις πράξεις μας και να διευκολύνουμε την χρήση των αποτελεσμάτων τους εισάγουμε τον τελεστή T_r ορίζοντας τον και παρουσιάζοντας τις ιδιότητες του.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1 (T_r operator) Έστω $f(x)$ μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε για *R(r)*≥ 0 και $x\geq 0$ ορίζουμε τον τελεστή T_r να δίνεται από την σχέση,

$$T_rf(x)=\int_x^\infty e^{-r(u-x)}f(u)\,du=\int_0^\infty e^{-ru}f(u+x)\,du \tag{2.5}$$

Για έναν πιο αυστηρό ορισμό του τελεστή T_r παραπέμπουμε στους *Butzer* και *Hubert (1967)* παράγραφος 1.3.3 ή στον *Feller (1996)* Κεφάλαιο *3*. Στη θεωρία κινδύνου ο τελεστής T_r εισήχθηκε από τους *Dickson και Hipp(2001)*. Ο τελεστής T_r έχει κάποιες χρήσιμες ιδιότητες, όπως δίνονται ακολούθως.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1 **(Ιδιότητες των τελεστών T_r)** Έστω $T_rf(x)$ να είναι ο τελεστής μία ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f(x)$. Ο τελεστής $T_rf(x)$ ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις :

i. $T_rf(0) = \int_u^\infty e^{-ru} f(u)\, du = f(r)$

ii. $T_{r_1}T_{r_2}f(x) = T_{r_2}T_{r_1}f(x) = \frac{T_{r_1}f(x) - T_{r_2}f(x)}{r_2 - r_1}$, $r_2 \neq r_1 \in C$,

iii. $\frac{d}{dx}T_rf(x) = rT_rf(x) - f(x)$, $\frac{d}{dr}T_{r_1}T_{r_2}f(x) = -\sum_{k=1}^{2}\frac{r_k T_{r_k}f(x)}{\tau_2(r_k)}$, $\tau_2(s) = (s - r_1)(s - r_2)$,

iv. $T_rf(s) = \frac{f(s) - f(r)}{r - s}$, $r \neq s \in C$,

v. $T_rf(s) = T_rf(s) = T_sT_rf(0)$,

vi. $sf(s) - rf(r) = (s - r)\left(-sT_rf(s) - f(r)\right)$,

vii. $f_1(s)f_2(s) - f_1(r)f_2(r) = -(s - r)\left(f_1(s)T_{r_2}f_2(s) + T_{r_1}f_1(r)f_2(s)\right)$, για κάθε $s \neq r$ και για f_1, f_2 δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις,

viii. αν $r_1, r_2, \dots, r_k$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους πραγματικοί αριθμοί ή μιγαδικοί αριθμοί, τότε,

$$T_{r_1}T_{r_2}\dots T_{r_k} = (-1)^{k-1}\sum_{j=1}^{k}\frac{T_{r_j}f(x)}{\tau_k(r_j)},\quad \tau(s) = \prod_{j=1}^{k}(s - r_j),$$

και

$$T_s\, T_{r_1}T_{r_2}\dots T_{r_k}f(0) = (-1)^k\left(\frac{f(s)}{\tau_k(s)} - \sum_{j=1}^{k}\frac{f(r_j)}{(s - r_j)\tau_k(r_j)}\right),$$

Επιπλέον αν η $f(x)$ είναι σ.π.π. της τ.μ. X με σ.κ. $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, τότε ισχύουν τα παρακάτω,

ix. $T_0T_rf(x) = \int_x^\infty T_rf(u)\, du = \frac{\bar{F}(x) - T_rf(x)}{r} = T_rF(x)$,

x. $\int_0^u T_rf(x + y)\, dx = T_rF(y) - T_rF(y + u)$,

xi. $\int_0^u T_{r_1}T_{r_2}f(x)\, dx = \frac{1}{r_2 - r_1}\left(\frac{1 - f(r_1)}{r_1} - \frac{1 - f(r_2)}{r_2}\right)$,

xii. $\int_0^u (T_{r_1}f * T_{r_2}f)(x)\, dx = \frac{(1 - f(r_1))(1 - f(r_2))}{r_1 r_2}$.

Συνεπώς για i=1,2 και χρησιμοποιώντας τον τελεστή T_r των *Dickson-Hipp* η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των *Gerber-Shiu* ισούται με,

$$m_\delta(u) = \frac{\lambda}{c}\left[T_{\frac{\lambda+\delta+\beta}{c}}\sigma_{1,\delta}(u) - T_{\frac{\lambda+\delta+\beta}{c}}\sigma_{2,\delta}(u) + T_{\frac{\lambda+\delta}{c}}\sigma_{2,\delta}(u)\right]. \tag{2.6}$$

Επίσης ο μετασχηματισμός *Laplace* της (2.6) βρίσκουμε ότι είναι ίσος με,

$$m_\delta(s) = \frac{\lambda}{c}\left[\frac{\sigma_{1,\delta}\left(\frac{\lambda+\delta+\beta}{c}\right) - \sigma_1(s)}{s-\frac{\lambda+\delta+\beta}{c}} - \frac{\sigma_{2,\delta}\left(\frac{\lambda+\delta+\beta}{c}\right) - \sigma_2(s)}{s-\frac{\lambda+\delta+\beta}{c}} + \frac{\sigma_{2,\delta}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right) - \sigma_2(s)}{s-\frac{\lambda+\delta}{c}}\right]$$

$$= \frac{\lambda}{c}\,\frac{\left(s-\frac{\lambda+\delta}{c}\right)\left(\sigma_{1,\delta}\left(\frac{\lambda+\delta+\beta}{c}\right) - \sigma_{1,\delta}(s) + \frac{\beta}{c}\sigma_{2,\delta}(s)\,\right) + \left(s-\frac{\lambda+\delta+\beta}{c}\right)\sigma_{2,\delta}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right) - \left(s-\frac{\lambda+\delta}{c}\right)\sigma_{2,\delta}\left(\frac{\lambda+\delta+\beta}{c}\right)}{\left(s-\frac{\lambda+\delta+\beta}{c}\right)\left(s-\frac{\lambda+\delta}{c}\right)}$$

$$= \frac{\frac{\lambda}{c}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}-s\right)\left(\sigma_{1,\delta}(s) + \frac{\beta}{c}\sigma_{2,\delta}(s)\right) + \alpha_\delta(s)}{\left(s-\frac{\lambda+\delta+\beta}{c}\right)\left(s-\frac{\lambda+\delta}{c}\right)}, \tag{2.7}$$

όπου,

$$\alpha_\delta(s) = \frac{\lambda}{c}\left[\left(s-\frac{\lambda+\delta}{c}\right)\left(\sigma_{1,\delta}\left(\frac{\lambda+\delta+\beta}{c}\right) - \sigma_{2,\delta}\left(\frac{\lambda+\delta+\beta}{c}\right)\right) + \left(s-\left(\frac{\lambda+\delta+\beta}{c}\right)\sigma_{2,\delta}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)\right]. \tag{2.8}$$

Επίσης από (2.4) ,γνωρίζουμε πως , $\sigma_{1,\delta}(s) = m_\delta(s) f_i(s) + \gamma_i(s)$ που σημαίνει ότι η (2.7) μπορεί να γραφτεί :

$$m_\delta(s) = \frac{\frac{\lambda}{c}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}-s\right)\left(m_\delta(s) f_1(s) + \gamma_1(s) + \frac{\beta}{c}\left(m_\delta(s) f_2(s) + \gamma_2(s)\right)\right) + \alpha_\delta(s)}{\left(s-\frac{\lambda+\delta+\beta}{c}\right)\left(s-\frac{\lambda+\delta}{c}\right)}. \tag{2.9}$$

Με απλές τροποποιήσεις στην (2.9) προκύπτει πως ,

$$m_\delta(s) = \frac{\beta_\delta(s) + \alpha_\delta(s)}{h_{1,\delta}(s) - h_{2,\delta}(s)}, \tag{2.10}$$

όπου για $s \geq 0$

$$h_{1,\delta}(s) = \left(s - \frac{\lambda+\delta+\beta}{c}\right)\left(s - \frac{\lambda+\delta}{c}\right) \tag{2.11}$$

$$h_{2,\delta}(s) = \frac{\lambda}{c}\left(\frac{\lambda+\delta}{c} - s\right)\left(f_1(s) + \frac{\beta}{c} f_1(s)\right), \tag{2.12}$$

και

$$\beta_\delta(s) = \frac{\lambda}{c}\left[\left(\frac{\lambda+\delta}{c} - s\right)\gamma_1(s) + \frac{\beta}{c}\gamma_1(s)\right]. \qquad (2.13)$$

2.3 Ανάλυση της εξίσωσης *Lundberg*

Οι ρίζες του παρονομαστή του μετασχηματισμού *Laplace* της προεξοφλημένης συνάρτηση ποινής των *Gerber-Shiu* ($m_\delta(s)$) $h_{1,\delta}(s) - h_{2,\delta}(s)$ αποτελούν λύσεις της γενικευμένης εξίσωσης *Lundberg* .

$$E\left[e^{-\delta W}e^{-s(X-cW)}\right] = 1, \qquad (2.14)$$

με δομή εξάρτησης την (2.1) ανάμεσα στις (X_k , W_k).Πράγματι χρησιμοποιώντας την (2.1), το αριστερό μέρος της (2.14) μπορεί να γραφτεί :

$$E\left[e^{-\delta W}e^{-s(X-cW)}\right] = E\left[e^{-(\delta-cs)W}E\left[e^{-sX}|W\right]\right]$$

$$= E\left[e^{-(\delta-cs)W}(e^{-\beta W}f_1(s) + (1-e^{-\beta W})f_2(s))\right]$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+\delta+\beta-cs}f_1(s) + \left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs} - \frac{\lambda}{\lambda+\delta+\beta-cs}\right)f_2(s)$$

$$= \frac{\lambda(\lambda+\delta-cs)f_1(s) + \lambda\beta f_2(s)}{(\lambda+\delta+\beta-cs)(\lambda+\delta-cs)},$$

για $s \leq \frac{\lambda+\delta}{c}$. Έτσι, η (2.14) γίνεται

$$\frac{\lambda(\lambda+\delta-cs)f_1(s) + \lambda\beta f_2(s)}{(\lambda+\delta+\beta-cs)(\lambda+\delta-cs)} = 1,$$

το οποίο είναι ίσο με την εξίσωση $h_{1,\delta}(s) - h_{2,\delta}(s) = 0$.

Επίσης , μπορεί να αποδειχτεί πως, όταν Y_1 και Y_2 είναι ισόνομες, η (2.10) ικανοποιεί την εξίσωση 2.59 για $w(x,y) = 1, \varphi(\xi) = \frac{h(\xi)}{1-g(\xi)} = \frac{\lambda\rho(1-p(\xi)) + \xi(\delta-c\rho)}{\xi(\lambda(1-p(\xi)) + \delta - c\xi)}$ των *Gerber-Shiu (1998)* που είναι ο μετασχηματισμός *Laplace* της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής στο κλασικό μοντέλο κινδύνου σύνθετης *Poisson* .

Για να μπορέσουμε να βρούμε παρακάτω την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση *(defective renewal equation)* για την $m_\delta(u)$, αρχικά εξετάζουμε τον παρονομαστή του δεξιού μέρους της εξίσωσης (2.10) . Πιο συγκεκριμένα, στόχος μας είναι να βρούμε τις ρίζες της $h_{1,\delta}(s) - h_{2,\delta}(s)$ χρησιμοποιώντας το θεώρημα του *Rouché* σε ένα συγκεκριμένο χωρίο. Θεωρούμε ξεχωριστή περίπτωση όταν $\delta > 0$ και ξεχωριστή για $\delta = 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2 *Για* $\delta > 0$ *,ο παρονομαστής* $h_{1,\delta}(s) - h_{2,\delta}(s)$ *της (2.10) έχει ακριβώς 2 ρίζες ,έστω τις* $s_1(\delta)$ *και* $s_2(\delta)$ *, μέσα στο χωρίο* $C_\delta = \{s : |z_\delta(s)| = 1\}$ *όπου*

$$z_\delta(s) = \frac{\lambda+\beta+\delta-cs}{\lambda+\beta}.$$

Απόδειξη: Αρχικά, ξαναγράφουμε την (2.11) και την (2.12) σε όρους $z_\delta(s)$

$$h_{1,\delta}(s) = \frac{\lambda+\beta}{c} z_\delta(s) \left(\frac{\lambda+\beta}{c} z_\delta(s) - \frac{\beta}{c}\right) \tag{2.15}$$

και

$$h_{2,\delta}(s) = \frac{\lambda}{c}\left(\frac{\lambda+\beta}{c} z_\delta(s) - \frac{\beta}{c}\right) f_1\left(\frac{\delta}{c} + \frac{\lambda+\beta}{c}\left(1 - z_\delta(s)\right)\right)$$

$$+ \frac{\beta}{c} f_2\left(\frac{\delta}{c} + \frac{\lambda+\beta}{c}\left(1 - z_\delta(s)\right)\right). \tag{2.16}$$

Ας εφαρμόσουμε το θεώρημα του *Rouché* μέσα στο χωρίο C_δ. Προφανώς οι $h_{1,\delta}(s)$ και $h_{2,\delta}(s)$ βρίσκονται στο C_δ. Για να εφαρμόσουμε το θεώρημα του *Rouché,* μένει να δείξουμε ότι $|h_{2,\delta}(s)| < |h_{1,\delta}(s)|$ στο C_δ .

Για να γίνει αυτό , γνωρίζουμε πως $Re\left(\frac{\lambda+\beta}{c}\left(1 - z_\delta(s)\right)\right) \geq 0$ στο C_δ που σημαίνει πως,

$$|h_{2,\delta}(s)| \leq \frac{\lambda}{c}\left|\frac{\lambda+\beta}{c} z_\delta(s) - \frac{\beta}{c}\right| \left|f_1\left(\frac{\delta}{c} + \frac{\lambda+\beta}{c}\left(1 - z_\delta(s)\right)\right)\right|$$

$$+ \frac{\beta}{c}\left|f_2\left(\frac{\delta}{c} + \frac{\lambda+\beta}{c}\left(1 - z_\delta(s)\right)\right)\right|$$

$$\leq \frac{\lambda}{c}\left|\frac{\lambda+\beta}{c} z_\delta(s) - \frac{\beta}{c}\right| f_1\left(\frac{\delta}{c}\right) + \frac{\beta}{c} f_2\left(\frac{\delta}{c}\right)$$

$$\leq \frac{\lambda}{c}\left|\frac{\lambda+\beta}{c} z_\delta(s) - \frac{\beta}{c}\right| + \frac{\lambda}{c}\frac{\beta}{c}. \tag{2.17}$$

Επειδή $s \in$ C$_\delta$, ισχύει $\frac{\lambda+\beta}{c} z_\delta\ s\ \ -\frac{\beta}{c}\ \geq \frac{\lambda+\beta}{c}\ z_\delta\ s\ \ \frac{\beta}{c} = \frac{\lambda}{c}$.

Οπότε από την (2.17) παίρνουμε,

$$|h_{2,\delta}\ s\ | < \frac{\lambda}{c}\ \ \frac{\lambda+\beta}{c} z_\delta\ s\ \ -\frac{\beta}{c}\ + \frac{\beta}{c}\ \ \frac{\lambda+\beta}{c} z_\delta\ s\ \ -\frac{\beta}{c}\ = \frac{\lambda+\beta}{c}\ \ \frac{\lambda+\beta}{c} z_\delta\ s\ \ -\frac{\beta}{c}\ . \qquad (2.18)$$

Επίσης γνωρίζουμε

$$|h_{1,\delta}\ s\ | = \frac{\lambda+\beta}{c}\ z_\delta\ s\ \ \ \ \frac{\lambda+\beta}{c} z_\delta\ s\ \ -\frac{\beta}{c}\ = \frac{\lambda+\beta}{c}\ \ \frac{\lambda+\beta}{c} z_\delta\ s\ \ -\frac{\beta}{c}\ . \qquad (2.19)$$

Επομένως, συνδυάζοντας (2.18) και (2.19) έχουμε ότι $|h_{2,\delta}\ s\ | < |h_{1,\delta}\ s\ |$ στο C$_\delta$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $h_{1,\delta}\ s$ και $h_{1,\delta}\ s\ \ - h_{2,\delta}\ s$ έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών μέσα στο C$_\delta$. Επομένως αν $h_{1,\delta}\ s$ έχει ακριβώς δύο ρίζες μέσα στο χωρίο C$_\delta$ τότε και $h_{1,\delta}\ s\ \ - h_{2,\delta}\ s$ πρέπει να έχουν δύο ρίζες ,ας πούμε $s_1(\delta)$ και $s_1(\delta)$, στο C$_\delta$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.3 *Για $\delta = 0$,ο παρονομαστής $h_{1,\delta}\ s\ \ - h_{2,\delta}\ s$ της (2.10) έχει ακριβώς 1 ρίζα ,ας πούμε $s_1(0)$, μέσα στο χωρίο $C_0 = \{s{:}|z_0(s)|=1\}$ και μία δεύτερη ρίζα $s_2(0)=0$ στο C_0 .*

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε (2.15) και (2.16) με $\delta = 0$. Προφανώς οι $h_{1,0}\ s$ και $h_{2,0}\ s$ βρίσκονται στο μοναδιαίο χωρίο C$_0$ και είναι συνεχείς στο C$_0$. Χρησιμοποιώντας έναν παρόμοιο ισχυρισμό με αυτόν που εφαρμόστηκε για να αποδείξουμε την *ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2* συμπεραίνουμε πως $|h_{2,0}\ s\ | < |h_{1,0}\ s\ |$ στο C$_0$ εκτός από το *s=0 (δηλ.z_0=1)* όπου $h_{1,0}\ s\ = h_{2,0}\ s\ = \frac{\lambda+\beta}{c}\frac{\lambda}{c} > 0.$ Οπότε, οι συνθήκες του θεωρήματος του *Rouché* δεν ικανοποιούνται και πρέπει να στηριχτούμε σε μία ΄΄επέκταση΄΄ του θεωρήματος του *Rouché*, γνωστό ως *Θεώρημα 1* του *Klimenok (2001)*. Πράγματι ,έχουμε

$$\frac{\frac{d}{dz_0}h_{1,0}\ s\ \ \ _{z_0=1} - \frac{d}{dz_0}h_{1,0}\ s\ \ _{z_0=1}}{h_{1,0}\ 0} = \frac{\frac{\lambda+\beta}{c}\frac{\lambda}{c} + \ \frac{\lambda+\beta}{c}\ ^2 - \frac{\lambda}{c}\frac{\lambda+\beta}{c}\ 1 + \frac{\lambda}{c}\mu_1 + \frac{\beta}{c}\mu_1}{\frac{\lambda+\beta}{c}\frac{\lambda}{c}}$$

$$= \frac{\frac{\lambda+\beta}{c} - \frac{\lambda\ \lambda\mu_1+\beta\mu_2}{c}}{\frac{\lambda}{c}} > 0,$$

χρησιμοποιώντας την $\frac{c}{\lambda} - \frac{\lambda\mu_1+\beta\mu_2}{\beta+\lambda} > 0$. Από *Θεώρημα 1* του *Klimenok* , συμπεραίνουμε πως ο αριθμός των ριζών του $h_{1,0}(s) - h_{2,0}(s)$ στο C_0 είναι ίδιος με τον αριθμό των ριζών του $h_{1,0}(s)$ στο C_0 μείον 1. Δοθέντος πως $h_{1,0}(s)$ έχει δύο ρίζες μέσα στο C_0, $h_{1,0}(s) - h_{2,0}(s)$ έχει 1 ρίζα, ας πούμε $s_1(0)$, μέσα στο χωρίο C_0.Τέλος, για $\delta = 0$, και από (2.11),(2.12) καταλήγουμε πως μία τετριμμένη λύση του $h_{1,0}(s) - h_{2,0}(s)$ που είναι η $s_2(0)=0$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 2.1 *Σημειώνουμε ότι , εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rouché (ή την επέκταση του) σε ένα διαφορετικό χωρίο, με μία απλή ανάλυση των συναρτήσεων* $h_{1,\delta}(s)$ *και* $h_{2,\delta}(s)$ *(δηλαδή των πρώτων και δεύτερων παραγώγων),μπορεί να αποδειχτεί ότι* $s_1(\delta)$ *και* $s_2(\delta)$ *είναι οι μόνες δύο θετικές και πραγματικές ρίζες του παρονομαστή* $h_{1,\delta}(s) - h_{2,\delta}(s)$ *της (2.10). Επιπρόσθετα, οι δύο ρίζες* $s_1(\delta)$ *και* $s_2(\delta)$ *είναι διακριτές.*

2.4 Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (*defective renewal equation*)

Λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης

Οι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως στην ανάλυση της διαδικασίας πλεονάσματος στο κλασικό μοντέλο κινδύνου. Αρχικά, παρουσιάζουμε μία προσέγγιση για την λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης μέσω της σύνθετης γεωμετρικής.

Θεωρούμε την ακόλουθη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση,

$$\varphi(u) = \frac{1}{1+\beta}\int_0^u \varphi(u-x)\,dG(x) + \frac{1}{1+\beta}H(u), \qquad (2.20)$$

όπου $\beta > 0$, $G(x) = 1 - G(x)$ σ.κ που αντιπροσωπεύει την σ.κ. του μέγεθος της αποζημίωσης στην θεωρία κινδύνου με $G(0) = 0$, και $H(u)$ διαφορίσιμη συνάρτηση για $\boldsymbol{u} > \boldsymbol{0}$.

Για να λύσουμε την (2.20) ορίζουμε την συσχετισμένη σύνθετη γεωμετρική κατανομή. Έστω,

$$K(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n G^{*n}(u), \ u > \boldsymbol{0}, \qquad (2.21)$$

όπου $G^{*n}(u)$ είναι η ουρά της n-οστής συνέλιξης της $G(u)$.

Η $\boldsymbol{K(u)}$ είναι η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης,

$$K(u) = \frac{1}{1+\beta}\int_0^u K(u-x)\,dG(x) + \frac{1}{1+\beta}G(u). \tag{2.22}$$

Με τον ορισμό της $K(u)$ η λύση της (2.20) μέσω της $K(u)$ δίνεται παρακάτω.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1 *Η λύση της $\varphi(u)$ στην (6.1) μπορεί να γραφτεί ως*

$$\varphi(u) = \frac{1}{\beta}\int_0^u H(u-x)\,dK(x) + \frac{1}{1+\beta}H(u), \tag{2.23}$$

ή

$$\varphi(u) = -\frac{1}{\beta}\int_0^u K(u-x)\,dH(x) - \frac{H(0)}{\beta}K(u) + \frac{1}{\beta}H(u). \tag{2.24}$$

Εάν η $H(u)$ είναι διαφορίσιμη, η $\varphi(u)$ ισούται με,

$$\boldsymbol{\varphi}(u) = -\frac{1}{\beta}\int_0^u K(u-x)\,H'(x)d(x) - \frac{H(0)}{\beta}K(u) + \frac{1}{\beta}H(u),\ u \geq 0. \tag{2.25}$$

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε ότι,

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-su}dG(u) \tag{2.26}$$

ο μετασχηματισμός *Laplace* της $G(x)$. Οπότε, ο μετασχηματισμός *Laplace* της $K(x)$ δίνεται από τον τύπο,

$$k(s) = K(0) + \int_0^\infty e^{-su}dK(u) = \frac{\beta}{1+\beta-g(s)}. \tag{2.27}$$

Επίσης, υποθέτουμε ότι,

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-su}\varphi(u)du \tag{2.28}$$

και

$$H(s) = \int_0^\infty e^{-su}H(u)du. \tag{2.29}$$

Επομένως από την (2.20) βρίσκουμε ότι,

$$\varphi(s) = \frac{H(s)}{1+\beta-g(s)} = \frac{1}{\beta} H(s)k(s). \tag{2.30}$$

Παίρνοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς *Laplace* στην εξίσωση (2.30) καταλήγουμε στην (2.23). Η λύση της (2.24) επιτυγχάνεται αν ολοκληρώσουμε κατά παράγοντες την (2.23).

$$\int_0^u H(u-x)\,dK(x) = -\int_0^u H(u-x)\,dK(x) = -H(u-x)K(x)\Big|_0^u + \int_0^u K(x)\,dH(u-x)$$

$$= -H(0)K(u) + H(u)K(0) - \int_0^u K(x)\,dH(x).$$

Σημειώνοντας ότι $K(0) = \frac{1}{1+\beta}$, βρίσκουμε αντίστοιχα τις (2.24), (2.25).

Μέχρι τώρα, στο μοντέλο μας οι ρίζες s_1 και s_2 γράφονταν ως μία συνάρτηση του δ για να δείξουν την εξάρτηση τους από τον ρυθμό του επιτοκίου. Για λόγους ευκολίας γράφουμε s_i αντί για $s_i(\delta)$ για $i = 1,2$. Σκοπός μας τώρα είναι να χρησιμοποιήσουμε τις ρίζες της (2.10) που θα μας οδηγήσουν τελικά στην ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (*defective renewal equation)* για την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των *Gerber-Shiu* .Ένα ενδιάμεσο αποτέλεσμα παρουσιάζεται πρώτο .

ΛΗΜΜΑ 2.1 *Ο μετασχηματισμός Laplace* $m_\delta(s)$ *της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber-Shiu ικανοποιεί την εξίσωση*

$$m_\delta(s) = m_\delta(s)\, T_s T_{s_2} T_{s_1} h_{2,\delta}(0) + T_s T_{s_2} T_{s_1} \beta(0). \tag{2.31}$$

Απόδειξη: Με $m_\delta(s)$ αναλυτικό για $Re\ s \geq 0$,οι ρίζες του παρονομαστή της (2.10) είναι επίσης λύσεις του αριθμητή της (2.10). Οπότε προκύπτει πως $\alpha_\delta(s_i) = -\beta_\delta(s_i)$ για $i = 1,2$. Από (2.8), $\alpha(s)$ είναι ένα πολυώνυμο της s πρώτου βαθμού. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της παρεμβολής του *Lagrange* συμπεραίνουμε ότι

$$\alpha(s) = \alpha_\delta(s_1)\left(\frac{s-s_2}{s_1-s_2}\right) + \alpha_\delta(s_2)\left(\frac{s-s_1}{s_2-s_1}\right) = -\frac{\beta_\delta(s_1)(s-s_2) - \beta_\delta(s_2)(s-s_1)}{s_1-s_2}$$

που σημαίνει ότι,

$$\beta_\delta(s) + \alpha_\delta(s) = \frac{(s-s_2)-(s-s_1)}{s_1-s_2}\beta_\delta(s) - \frac{\beta_\delta(s_1)(s-s_2) - \beta_\delta(s_2)(s-s_1)}{s_1-s_2}$$

$$= \frac{s-s_2 \quad \beta_\delta \ s - \beta_\delta \ s_1 \quad - \ s-s_1 \quad \beta_\delta \ s - \beta_\delta \ s_1}{s_1 - s_2}$$

$$= \ s - s_1 \quad s - s_2 \ \frac{T_s T_{s_2} \beta_\delta \ 0 \ - T_s T_{s_1} \beta_\delta \ 0}{s_1 - s_2}$$

$$= \ s - s_1 \quad s - s_2 \ T_s T_{s_2} T_{s_1} \beta_\delta \ 0 \ . \tag{2.32}$$

Μία παρόμοια διαδικασία χρησιμοποιείται για να βρεθεί μία εναλλακτική έκφραση του παρονομαστή $h_{1,\delta} \ s \ - h_{2,\delta} \ s$ της (2.10). Από *ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ 2*.2 και 2.3, γνωρίζουμε πως $h_{1,\delta} \ s_i \ = h_{2,\delta} \ s_i$ για $i \ =1,2$. Από (2.11), $h_{1,\delta} \ s$ είναι ένα πολυώνυμο της *s* δευτέρου βαθμού. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της παρεμβολής του *Lagrange* βρίσκουμε ότι,

$$h_{1,\delta} \ s \ = h_{1,\delta} \ 0 \ \frac{s-s_1 \quad s-s_2}{s_1 s_2} + s \ \frac{h_{1,\delta} \ s_1}{s_1} \frac{s-s_2}{s_1-s_2} + \frac{h_{1,\delta} \ s_2}{s_2} \frac{s-s_1}{s_2-s_1}$$

$$= h_{1,\delta} \ 0 \ \frac{s-s_1 \quad s-s_2}{s_1 s_2} + s \ \frac{h_{2,\delta} \ s_1}{s_1} \frac{s-s_2}{s_1-s_2} + \frac{h_{2,\delta} \ s_2}{s_2} \frac{s-s_1}{s_2-s_1}$$

$$= \ h_{1,\delta} \ 0 \ \frac{s-s_1 \quad s-s_2}{s_1 s_2} + \ s-s_1 \quad s-s_2 \quad \frac{h_{2,\delta} \ s_1}{s_1} \frac{1}{s_1-s_2} + \frac{h_{2,\delta} \ s_2}{s_2} \frac{1}{s_2-s_1}$$

$$+ h_{2,\delta} \ s_1 \ \frac{s-s_2}{s_1-s_2} + h_{2,\delta} \ s_2 \ \frac{s-s_1}{s_2-s_1}.$$

Οπότε, χρησιμοποιώντας την *ΙΔΙΟΤΗΤΑ 6* των *Dickson-Hipp* σελ.394 των *Li* και *Garrido(2004)*, η $h_{1,\delta} \ s \ - h_{2,\delta} \ s$ στο δεξιό μέρος της (2.10) γίνεται

$$h_{1,\delta} \ s \ - h_{2,\delta} \ s \ = h_{1,\delta} \ 0 \ \frac{s-s_1 \quad s-s_2}{s_1 s_2}$$

$$+ \ s-s_1 \quad s-s_2 \quad \frac{h_{2,\delta} \ s_1}{s_1} \frac{1}{s_1-s_2} + \frac{h_{2,\delta} \ s_2}{s_2} \frac{1}{s_2-s_1}$$

$$- \ h_{2,\delta} \ s \ - h_{2,\delta} \ s_1 \ \frac{s-s_2}{s_1-s_2} - h_{2,\delta} \ s_2 \ \frac{s-s_1}{s_2-s_1}$$

$$= \ s-s_1 \quad s-s_2 \quad T_0 T_{s_2} T_{s_1} h_{1,\delta} \ 0 \ - T_s T_{s_2} T_{s_1} h_{2,\delta} \ 0 \ \ . \tag{2.33}$$

Επίσης είναι εύκολο να αποδειχτεί πως $T_0T_{s_2}T_{s_1}h_{1,\delta}(0) = 1$ που σημαίνει ότι η (2.33) γίνεται

$$h_{1,\delta}(s) - h_{2,\delta}(s) = (s-s_1)(s-s_2)\left(1 - T_sT_{s_2}T_{s_1}h_{2,\delta}(0)\right). \quad (2.34)$$

Έτσι συνδυάζοντας (2.32) και (2.34) με την (2.10) καταλήγουμε πως,

$$m_\delta(s) = \frac{T_sT_{s_2}T_{s_1}\beta(0)}{1-T_sT_{s_2}T_{s_1}h_{2,\delta}(0)}$$ που ισούται με την (2.31).

Χρησιμοποιώντας το *ΛΗΜΜΑ 2.1*, μπορούμε τώρα να βρούμε την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση *(defective renewal equation)* για την $m_\delta(u)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2 Έστω ,

$$\kappa_\delta = \frac{\lambda}{c}\left(\left(\frac{\lambda+\delta}{c} - s_2\right)T_0T_{s_2}T_{s_1}f_1(0) + \frac{\beta}{c}T_0T_{s_2}T_{s_1}f_2(0) + T_0T_{s_1}f_1(0)\right), \quad (2.35)$$

$$q_{1,\delta} = \frac{\frac{\lambda}{c}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}-s_2\right)T_0T_{s_2}T_{s_1}f_1(0)}{\kappa_\delta}, \quad (2.36)$$

και

$$q_{2,\delta} = \frac{\frac{\lambda}{c}\frac{\beta}{c}T_0T_{s_2}T_{s_1}f_2(0)}{\kappa_\delta}. \quad (2.37)$$

Τότε ,$0 \le q_{1,\delta}, q_{2,\delta} \le 1$ με $0 \le q_{1,\delta} + q_{2,\delta} \le 1$ και $m_\delta(u)$ ικανοποιεί την ακόλουθη *defective renewal equation*

$$m_\delta(u) = \kappa_\delta \int_0^u m_\delta(u-y)\, g_\delta(y)\, dy + \xi_\delta(u), \quad (2.38)$$

όπου

$$g_\delta(y) = q_{1,\delta}\frac{T_{s_2}T_{s_1}f_1(y)}{T_0T_{s_2}T_{s_1}f_1(0)} + q_{2,\delta}\frac{T_{s_2}T_{s_1}f_2(y)}{T_0T_{s_2}T_{s_1}f_2(0)} + \left(1 - q_{1,\delta} - q_{2,\delta}\right)\frac{T_{s_1}f_1(y)}{T_0T_{s_1}f_1(0)},$$

και

$$\xi_\delta\ u\ \ =\frac{\lambda}{c}\quad \frac{\lambda+\delta}{c}-s_2\ \ T_{s_2}T_{s_1}\gamma_1\ u\ \ +\frac{\beta}{c}T_{s_2}T_{s_1}\gamma_2\ u\ \ +T_{s_1}\gamma_1\ u\quad .$$

Απόδειξη: Αρχικά χρησιμοποιούμε (2.12) και (2.13) για να ξαναγράψουμε την (2.31).Από τον ορισμό του τελεστή T_r των *Dickson-Hipp* προκύπτει πως

$$T_sT_{s_2}T_{s_1}h_{2,\delta}\ 0\ \ =\frac{\lambda}{c}\quad \frac{\lambda+\delta}{c}T_sT_{s_2}T_{s_1}f_1\ 0\ \ +\frac{\beta}{c}T_sT_{s_2}T_{s_1}f_2\ 0\ \ +\frac{\frac{sf_1\ s\ \ -s_2f_1\ s_2}{s-s_2}-\frac{sf_1\ s\ \ -s_1f_1\ s_1}{s-s_1}}{s_1-s_2}$$

$$=\frac{\lambda}{c}\quad \frac{\lambda+\delta}{c}T_sT_{s_2}T_{s_1}f_1\ \ 0\ \ +\frac{\beta}{c}T_sT_{s_2}T_{s_1}f_2\ \ 0\ \ +\frac{f_1\ s\ -s_2T_sT_{s_2}f_1\ 0}{s_1-s_2}\ \ -\frac{f_1\ s\ -s_1T_sT_{s_1}f_1\ 0}{s_1-s_2}$$

$$=\frac{\lambda}{c}\quad \frac{\lambda+\delta}{c}T_sT_{s_2}T_{s_1}f_1\ \ 0\ \ +\frac{\beta}{c}T_sT_{s_2}T_{s_1}f_2\ \ 0\ \ +\frac{s_1T_sT_{s_1}f_1\ \ 0\ \ -s_2T_sT_{s_2}f_1\ \ 0}{s_1-s_2}$$

$$=\frac{\lambda}{c}\quad \frac{\lambda+\delta}{c}T_sT_{s_2}T_{s_1}f_1\ \ 0\ \ +\frac{\beta}{c}T_sT_{s_2}T_{s_1}f_2\ \ 0\ \ +T_sT_{s_1}f_1\ \ 0\ \ -s_2T_sT_{s_2}T_{s_1}f_1\ \ 0$$

$$=\frac{\lambda}{c}\quad \frac{\lambda+\delta}{c}-s_2\ \ T_sT_{s_2}T_{s_1}f_1\ \ 0\ \ +\frac{\beta}{c}T_sT_{s_2}T_{s_1}f_2\ \ 0\ \ +T_sT_{s_1}f_1\ \ 0\quad . \tag{2.39}$$

Συγκρίνοντας $h_{2,\delta}\ s$ και β στις (2.12) και (2.13) αντίστοιχα, καταλήγουμε πως αν χρησιμοποιήσουμε την (2.39) τότε,

$$T_sT_{s_2}T_{s_1}h_{2,\delta}\ \ 0\ \ =\frac{\lambda}{c}\quad \frac{\lambda+\delta}{c}-s_2\ \ T_sT_{s_2}T_{s_1}\gamma_1\ \ 0\ \ +\frac{\beta}{c}T_sT_{s_2}T_{s_1}\gamma_2\ \ 0\ \ +T_sT_{s_1}\gamma_1\ \ 0$$

$$=T_s\xi_\delta\ \ 0\quad . \tag{2.40}$$

Οπότε ,αντικαθιστώντας (2.39) και (2.40) στην (2.31),έχουμε

$$m_\delta\ \ s\ \ =\frac{\lambda}{c}m_\delta\ \ s\quad \frac{\lambda+\delta}{c}-s_2\ \ T_sT_{s_2}T_{s_1}f_1\ \ 0\ \ +\frac{\beta}{c}T_sT_{s_2}T_{s_1}f_2\ \ 0\ \ +T_sT_{s_1}f_1\ \ 0\quad + \\ T_s\xi_\delta\ \ 0\ . \tag{2.41}$$

Παίρνοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς *Laplace* στην (2.41),βρίσκουμε ότι

$$m_\delta\ \ u\ \ =\frac{\lambda}{c}\int_0^u m_\delta\ \ u-y\quad \frac{\lambda+\delta}{c}-s_2\ \ T_{s_2}T_{s_1}f_1\ \ y\ \ +\frac{\beta}{c}T_{s_2}T_{s_1}f_2\ \ y\ \ +T_{s_1}f_1\ \ y\quad dy+\xi_\delta\ \ u$$

$$=\frac{\lambda}{c}\int_0^u m_\delta\ \ u-y\quad \frac{\lambda+\delta}{c}-s_2\ \ T_0T_{s_2}T_{s_1}f_1\ \ 0\ \ \frac{T_{s_2}T_{s_1}f_1\ \ y}{T_0T_{s_2}T_{s_1}f_1\ \ 0}+\frac{\beta}{c}T_0T_{s_2}T_{s_1}f_2\ \ 0\ \ \frac{T_{s_2}T_{s_1}f_2\ \ y}{T_0T_{s_2}T_{s_1}f_2\ \ 0} \\ +\ \ T_0T_{s_1}f_1\ \ 0\ \ \frac{T_{s_1}f_1\ \ y}{T_0T_{s_1}f_1\ \ 0}\quad dy+\xi_\delta\ \ u\ . \tag{2.42}$$

Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις (2.35), (2.36) και (2.37) στην (2.42) και έχουμε ότι

$$m_\delta \; u \; = \kappa_\delta \; u \quad {}_0^u m_\delta \; u - y \quad q_{1,\delta}\frac{T_{s_2}T_{s_1}f_1 \; y}{T_0T_{s_2}T_{s_1}f_1 \; 0} + q_{2,\delta}\frac{T_{s_2}T_{s_1}f_2 \; y}{T_0T_{s_2}T_{s_1}f_2 \; 0} + (1 - q_{1,\delta} - q_{2,\delta})\frac{T_{s_1}f_1 \; y}{T_0T_{s_1}f_1 \; 0} \quad dy + \xi_\delta \; u \; ,$$

που αντιστοιχεί στην (2.38) .

Για να είναι η (2.38) μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση *(defective renewal equation)*, μένει να δείξω πως $\kappa_\delta < 1$. Ας υποθέσουμε αρχικά πως $\delta > 0$. Συνδυάζοντας την (2.40) για *s=0* με την (2.35), ισχύει $\kappa_\delta = T_0T_{s_2}T_{s_1}h_{2,\delta} \; 0$. Από (2.34) για *s=0*,

$$T_0T_{s_2}T_{s_1}h_{2,\delta} \; 0 \; = 1 - \frac{h_{1,\delta}(0) - h_{2,\delta}(0)}{s_1s_2} = 1 - \frac{\frac{\lambda+\beta+\delta}{c}\frac{\delta}{c}}{s_1s_2} < 1,$$

δοθέντος ότι $s_1(\delta) > 0$ και $s_2(\delta) > 0$.

Για *δ =0*,γνωρίζουμε από (2.35) ότι,

$$\kappa_0 = \frac{\lambda}{c} \quad \frac{\lambda}{c}T_0T_0T_{s_1}f_1 \; 0 \; + \frac{\beta}{c}T_0T_0T_{s_1}f_2 \; 0 \; + T_0T_{s_1}f_1 \; 0 \quad ,$$

όπου

$$T_0T_0T_{s_1}f_i \; 0 \; = \frac{T_0T_0f_i \; 0 \; - T_0T_{s_1}f_i \; 0}{s_1} = \frac{\mu_i - \frac{T_0f_i \; 0 \; - T_{s_1}f_i \; 0}{s_1}}{s_1} = \frac{\mu_i - \frac{1 - f_i \; s_1}{s_1}}{s_1}.$$

Ακολουθεί ότι

$$\kappa_0 = \frac{\lambda}{c}\frac{1}{s_1} \quad \frac{\lambda}{c} \quad \mu_1 - \frac{1 - f_1 \; s_1}{s_1} \quad + \frac{\beta}{c} \quad \mu_2 - \frac{1 - f_2 \; s_1}{s_1} \quad + 1 - f_1 \; s_1$$

$$= \frac{\lambda}{c}\frac{1}{s_1}\frac{\lambda\mu_1 + \beta\mu_2}{c} + \frac{\lambda}{c}\frac{1}{s_1^2} \quad s_1 - \frac{\lambda+\beta}{c} + \frac{\lambda}{c}f_1 \; s_1 \; + \frac{\beta}{c}f_2 \; s_1 \; - s_1f_1 \; s_1 \quad . \qquad (2.43)$$

Αφού $h_{1,\delta} \; s_1 \; - h_{2,\delta} \; s_1 \; = 0$, η (2.43) γίνεται

$$\kappa_0 = \frac{\lambda}{c}\frac{1}{s_1}\frac{\lambda\mu_1+\beta\mu_2}{c} + \frac{\lambda}{c}\frac{1}{s_1^2}\left(s_1^2 - \frac{\lambda+\beta}{c}s_1\right) = 1 - \frac{1}{s_1}\left(\frac{\lambda+\beta}{c} - \frac{\lambda}{c} - \frac{\lambda\mu_1+\beta\mu_2}{c}\right)$$
$$< 1,$$

όπου η ανισότητα αποδεικνύεται μέσω της (2.3) .

2.5 Ανάλυση της προεξοφλημένη συνάρτησης ποινής των Gerber-Shiu όταν $u = 0$

Σε αυτήν την ενότητα ,θα ασχοληθούμε με μερικά μεγέθη που σχετίζονται με την χρεοκοπία όταν *u = 0*. Έστω *h(x,y,t|0)* η από κοινού ελλειμματική πυκνότητα του πλεονάσματος λίγο πριν την χρεοκοπία *(x)*, του ελλείμματος την στιγμή της χρεοκοπίας *(y)*, και του χρόνου της χρεοκοπίας *(t)* δοθέντος ότι *U(0)=0*.Η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος λίγο πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος την στιγμή της χρεοκοπίας $g_{3,\delta}(x,y|0)$ δίνεται από τον τύπο,

$$g_{3,\delta}(x,y|0) = \int_0^\infty e^{-\delta t} h(x,y,t|0)dt \qquad (2.44)$$

Έστω $g_{1,\delta}(x|0) = \int_0^\infty g_{3,\delta}(x,y|0)\,dy$ η προεξοφλημένη σ.π.π. του πλεονάσματος λίγο πριν την χρεοκοπία και $g_{2,\delta}(y|0) = \int_0^\infty g_{3,\delta}(x,y|0)\,dx$ η προεξοφλημένη σ.π.π. ελλείμματος την στιγμή της χρεοκοπίας. Στόχος μας είναι να βρούμε την μορφή των $g_{1,\delta}(x|0)$, $g_{2,\delta}(y|0)$, $g_{3,\delta}(x,y|0)$ στο συγκεκριμένο μοντέλο.

Από την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (2.38) για την $m_\delta(u)$ και υποθέτοντας ότι $u \to 0$ γνωρίζουμε ότι

$$m_\delta(0) = \xi_\delta(0) = \frac{\lambda}{c}\left(\frac{\lambda+\delta}{c} - s_2\right)T_{s_2}T_{s_1}\gamma_1(0) + \frac{\beta}{c}T_{s_2}T_{s_1}\gamma_2(0) + T_{s_1}\gamma_1(0) \quad . \qquad (2.45)$$

Γνωρίζουμε ότι για $\gamma_i(u) = \int_u^\infty w(u,y-u)f_i(y)\,dy$, η (2.45) μπορεί να ξαναγραφτεί ως ,

$$m_\delta(0) = \frac{\lambda}{c}\left(\frac{\lambda+\delta}{c} - s_2\right)\int_0^\infty e^{-s_2 u}\int_u^\infty e^{-s_1(x-u)}\int_x^\infty w(x,y-x)f_1(y)\,dydxdu$$
$$+\frac{\beta}{c}\int_0^\infty e^{-s_2 u}\int_u^\infty e^{-s_1(x-u)}\int_x^\infty w(x,y-x)f_2(y)\,dydxdu$$
$$+\int_0^\infty e^{-s_1 x}\int_x^\infty w(x,y-x)f_1(y)\,dydx$$

$$= \frac{\lambda}{c}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}-s_2\right)\int_0^\infty\int_0^x e^{-s_2u}e^{-s_1(x-u)}\int_0^\infty w(x,y)f_1(x+y)\,dydxdu$$

$$+\frac{\beta}{c}\int_0^\infty\int_0^x e^{-s_2u}e^{-s_1(x-u)}\int_0^\infty w(x,y)f_2(x+y)\,dydxdu$$

$$+\int_0^\infty e^{-s_1x}\int_0^\infty w(x,y-x)f_1(x+y)\,dydx$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty w(x,y)\left\{\frac{\lambda}{c}\left[\left(\frac{\lambda+\delta}{c}-s_2\right)\int_0^x e^{-s_2u}e^{-s_1(x-u)}f_1(x+y)\,du+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\beta}{c}\int_0^x e^{-s_2u}e^{-s_1(x-u)}f_2(x+y)\,du\right]+e^{-s_1x}f_1(x+y)\right\}dydx$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty w(x,y)\left\{\frac{\lambda}{c}\,\frac{e^{-s_1x}-e^{-s_2x}}{s_2-s_1}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}-s_2\right)f_1(x+y)\\ +\frac{\beta}{c}f_2(x+y)\end{array}\right]+e^{-s_1x}f_1(x+y)\right\}dydx \quad (2.46)$$

Χρησιμοποιώντας ένα ανάλογο αποτέλεσμα των Gerber-Shiu (2005), συμπεραίνουμε ότι,

$$m_\delta(0) = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\delta t}w(x,y)h(x,y,t|0)\,dtdydx$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty w(x,y)g_{3,\delta}(x,y|0)\,dydx$$

το οποίο μαζί με την (2.46) έχει ως αποτέλεσμα,

$$g_{3,\delta}(x,y|0) = \frac{\lambda}{c}\,\frac{e^{-s_1x}-e^{-s_2x}}{s_2-s_1}\left[\left(\frac{\lambda+\delta}{c}-s_2\right)f_1(x+y)+\frac{\beta}{c}f_2(x+y)\right]+e^{-s_1x}f_1(x+y)\,. \quad (2.47)$$

Επιπλέον , μπορούμε να βρούμε τις μορφές των $g_{1,\delta}$, $g_{2,\delta}$ συνδυάζοντας την (2.47) με τους αντίστοιχους ορισμούς τους .

$$g_{1,\delta}(x|0) = \frac{\lambda}{c}\,\frac{e^{-s_1x}-e^{-s_2x}}{s_2-s_1}\left[\left(\frac{\lambda+\delta}{c}-s_2\right)T_0f_1(x)+\frac{\beta}{c}T_0f_2(x)\right]+e^{-s_1x}T_0f_1(x) \quad (2.48)$$

και

$$g_{2,\delta}(y|0) = \frac{\lambda}{c}\left[\left(\frac{\lambda+\delta}{c}-s_2\right)T_{s_2}T_{s_1}f_1(y)+\frac{\beta}{c}T_{s_2}T_{s_1}f_2(y)\right]+T_{s_1}f_1(y)\,. \quad (2.49)$$

Έτσι μπορούμε να βρούμε αντίστοιχα την από κοινού σ.κ. του πλεονάσματος λίγο πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος την στιγμή της χρεοκοπίας, την σ.κ. του πλεονάσματος λίγο πριν την χρεοκοπία και την σ.κ. του ελλείμματος την στιγμή της χρεοκοπίας απλά αντικαθιστώντας $s_2 = 0$ και $\delta = 0$ στις (2.47), (2.48), (2.49) αντίστοιχα,

$$g_{3,0}\;x,y\;0\;\;=\frac{\lambda}{c}\;\;\frac{1-e^{-s_1 x}}{s_1}\;\;\frac{\lambda}{c}f_1\;\;x+y\;\;+\frac{\beta}{c}f_2\;\;x+y\;\;\;+e^{-s_1 x}f_1\;\;x+y\;\;\;, \tag{2.50}$$

$$g_{1,0}\;x\;0\;\;=\frac{\lambda}{c}\;\;\frac{1-e^{-s_1 x}}{s_1}\;\;\frac{\lambda}{c}T_0 f_1\;\;x\;\;+\frac{\beta}{c}T_0 f_2\;\;x\;\;\;+e^{-s_1 x}T_0 f_1\;\;x\;\;\;, \tag{2.51}$$

και

$$g_{2,0}\;y\;0\;\;=\frac{\lambda}{c}\;\;\frac{\lambda}{c}T_0 T_{s_1} f_1\;\;y\;\;+\frac{\beta}{c}T_0 T_{s_1} f_2\;\;y\;\;+T_{s_1} f_1\;\;y\;\;\;. \tag{2.52}$$

Τέλος, για το προτεινόμενο μοντέλο η κατανομή των κλιμακωτών υψών του αντίστοιχου τυχαίου βηματισμού δίνεται από τον τύπο,

$$\frac{g_{2,0}\;y\;0}{\psi(u)}=\frac{\frac{\lambda}{c}T_0 T_{s_1} f_1\;\;y\;\;+\frac{\beta}{c}T_0 T_{s_1} f_2\;\;y\;\;+T_{s_1} f_1\;\;y}{\frac{\lambda}{c}T_0 T_{s_1} T_0 f_1\;\;y\;\;+\frac{\beta}{c}T_0 T_{s_1} T_0 f_2\;\;y\;\;+T_0 T_{s_1} f_1\;\;y}. \tag{2.53}$$

2.6 Ο μετασχηματισμός *Laplace* του χρόνου της χρεοκοπίας και η πιθανότητα χρεοκοπίας

Σε αυτήν την ενότητα, επικεντρωνόμαστε στην προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu με $w(x,y)=1$ για όλα τα $x,y \geq 0$. Έστω $\upsilon_\delta(u)= E[e^{-\delta\tau}1_{\{\tau < \infty\}} |U(0) = u]$ ο μετασχηματισμός *Laplace* του χρόνου της χρεοκοπίας. Για $w(x,y)=1$ για όλα τα $x,y \geq 0$, συμπεραίνουμε ότι $\frac{\lambda}{c}T_s T_{s_2} T_{s_1}\beta\;\;0\;\;=T_s T_{s_2} T_{s_1} h_{2,\delta}\;\;0$ από το οποίο η (2.31) γίνεται

$$\upsilon_\delta\;\;s\;\;=\frac{T_s T_0 T_{s_2} T_{s_1} h_{2,\delta}\;\;0}{1-T_s T_{s_2} T_{s_1} h_{2,\delta}\;\;0}=\frac{1}{s}\frac{T_0 T_{s_2} T_{s_1} h_{2,\delta}\;\;0\;\;-T_s T_{s_2} T_{s_1} h_{2,\delta}\;\;0}{1-T_s T_{s_2} T_{s_1} h_{2,\delta}\;\;0}. \tag{2.54}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.35), η (2.54) μπορεί να γραφτεί

$$sv_{\delta}\ s\ = 1 - \frac{1-\kappa_{\delta}}{1-T_sT_{s_2}T_{s_1}h_{2,\delta}\ 0} = 1 - \frac{1-\kappa_{\delta}}{1-\kappa_{\delta}\frac{T_sT_{s_2}T_{s_1}h_{2,\delta}\ 0}{T_0T_{s_2}T_{s_1}h_{2,\delta}\ 0}}\ , \qquad (2.55)$$

που υπονοεί ότι $\upsilon_{\delta}\ \ u, u \geq 0$ είναι μία σύνθετη γεωμετρική ουρά.

Για να βρούμε μία ρητή έκφραση για τον μετασχηματισμό *Laplace* της υ_{δ},υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας του μεγέθους της αποζημίωσης f_1 και f_2 είναι κατανεμημένες με την κατανομή *Cox* με σειρά n_1 και n_2 (n_1 ,n_2 θετικοί ακέραιοι), δηλαδή

$$f_j\ \ s\ = \frac{\lambda_j^* + s\beta_j(s)}{\begin{smallmatrix} n_j \\ k=1 \end{smallmatrix}\ s+\lambda_{j,k}},\ \mathrm{s} \in \mathbb{C}, \qquad (2.56)$$

όπου $\beta_j(s)$ είναι ένα πολυώνυμο $n_j - 2$ βαθμού (ή μικρότερου) και $\lambda_j^* = \ {}_{k=1}^{n_j} \lambda_{j,k}$. Σημειώνουμε επίσης ότι τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας ισχύουν και στην πιο γενική περίπτωση όπου και οι δύο μετασχηματισμοί *Laplace* $f_1(s)$ και $f_2(s)$ είναι ρητά κατανεμημένα.

Η (2.10) μέσω της (2.56) μπορεί να ξαναγραφτεί,

$$\upsilon_{\delta}\ \ s\ = \frac{\frac{\lambda}{c}\ \ \frac{\lambda+\delta}{c} - s\ \ T_0T_sf_1\ \ 0\ + \frac{\beta}{c}T_0T_sf_2\ \ 0\ \ + a_{\delta}\ \ s}{s - \frac{\lambda+\delta+\beta}{c}\ \ s - \frac{\lambda+\delta}{c}\ \ - \frac{\lambda}{c}\ \ \frac{\lambda+\delta}{c} - s\ \ \frac{\lambda_1^*+s\beta_1(s)}{\begin{smallmatrix} n_1 \\ k=1 \end{smallmatrix}\ s+\lambda_{1,k}} + \frac{\beta}{c}\frac{\lambda_2^*+s\beta_2(s)}{\begin{smallmatrix} n_2 \\ k=1 \end{smallmatrix}\ s+\lambda_{2,k}}}$$

$$= \frac{\chi\ s\ -l_{2,\delta}\ s}{s\ \ l_{1,\delta}\ s\ -l_{2,\delta}\ s}, \qquad (2.57)$$

όπου

$$\chi\ \ s\ = \prod_{k=1}^{n_1} s+\lambda_{1,k}\ \ \prod_{k=1}^{n_2} s+\lambda_{2,k}\ \ \ \frac{\lambda}{c}\ \ \frac{\lambda+\delta}{c} - s\ \ f_1\ \ 0\ + \frac{\beta}{c}f_2\ \ 0\ \ + sa_{\delta}\ \ s\ \ ,$$

$$l_{1,\delta}\ \ s\ = \ s - \frac{\lambda+\delta+\beta}{c}\ \ s - \frac{\lambda+\delta}{c}\ \ \ {}_{k=1}^{n_1}\ s+\lambda_{1,k}\ \ \ {}_{k=1}^{n_2}\ s+\lambda_{2,k}\ \ , \qquad 2.58$$

και

$$l_{2,\delta}\ \ s\ = \frac{\lambda}{c}\ \ \frac{\lambda+\delta}{c} - s\ \ \lambda_1^* + s\beta_1(s)\ \ \ {}_{k=1}^{n_2}\ s+\lambda_{2,k}\ \ + \frac{\beta}{c}\ \lambda_2^* + s\beta_2(s)\ \ \ {}_{k=1}^{n_1}\ s+\lambda_{1,k}\ \ . \qquad (2.59)$$

Συγκρίνοντας (2.54) και (2.57), συμπεραίνουμε ότι $\chi\ \ s\ = \kappa_{\delta} l_{1,\delta}\ \ s$ και

$$sv_\delta\ \ s\ \ = \frac{\kappa_\delta l_{1,\delta}\ s\ - l_{2,\delta}\ s}{l_{1,\delta}\ s\ - l_{2,\delta}\ s}\ . \tag{2.60}$$

Για να μπορέσουμε να παραγωγίσουμε απόλυτα την $v_\delta\ u), u \geq 0$,αρχικά εξετάζουμε τον παρονομαστή στο δεξιό μέρος της (2.60). Πιο συγκεκριμένα ,σκοπός μας είναι να βρούμε τις ρίζες της $l_{1,\delta}\ s\ - l_{2,\delta}\ s$ στο αριστερό μισό του μιγαδικού επιπέδου χρησιμοποιώντας το θεώρημα του *Rouché*. Για να γίνει αυτό ,υποθέτουμε ότι το περίγραμμα D_r αποτελείται από τον φανταστικό άξονα ($-ir$ μέχρι $+ir$) και ένα ημικύκλιο στο αριστερό ημι-επίπεδο με ακτίνα r και αρχή O. Έστω D το οριακό περίγραμμα ,δηλ. D_r με $r \to \infty$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3 Ο παρονομαστής $l_{1,\delta}\ s\ - l_{2,\delta}\ s$ στην (2.60) έχει ακριβώς $n_1 + n_2$ ρίζες ,ας πούμε $R_i(\delta)$ για $i = 1, \ldots, n_1 + n_2$, μέσα στο περίγραμμα D.

Απόδειξη: Από (2.58) και (2.59), προκύπτει πως $l_{1,\delta}\ s$ και $l_{2,\delta}\ s$ είναι πολυώνυμα $(n_1 + n_2 + 2)$ και $(n_1 + n_2 + 1)$-βαθμού αντίστοιχα, και αποδεικνύεται πως $l_{2,\delta}\ s\ < \ l_{1,\delta}\ s$ στο D. Οπότε, από το θεώρημα του *Rouché*, καταλήγουμε ότι $l_{1,\delta}\ s$ έχει τον ίδιο αριθμό ριζών με την διαφορά $l_{1,\delta}\ s\ - l_{2,\delta}\ s$ στο $s \in \mathbb{C}$: $Re(s) < 0$. Προφανώς $l_{1,\delta}\ s$ έχει $n_1 + n_2$ ρίζες στο D και καταλήγουμε ότι $l_{1,\delta}\ s\ - l_{2,\delta}\ s$ έχει επίσης τον ίδιο αριθμό ριζών, ας πούμε $-R_i(\delta)$, με $Re(R_i\ \ \delta\ ) < 0$ για $i = 1, \ldots, n_1 + n_2$.

Σημειώνουμε επίσης ότι η διαφορά $l_{1,\delta}\ s\ - l_{2,\delta}\ s$ έχει επίσης δύο ρίζες, s_1 και s_2, με $s_1, s_2 \geq 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4 Υποθέτοντας ότι οι ρίζες $-R_{i,\delta}, I = 1, \ldots\ldots, n_1 + n_2$ είναι διακριτές μία έκφραση για την $v_\delta\ u), u \geq 0$ δίνεται από τον τύπο ,

$$v_\delta\ u\ = \ {}_{i=1}^{n_1+n_2} \alpha_i e^{-Ru}, \tag{2.61}$$

όπου $\alpha_i = \frac{\kappa_\delta l_{1,\delta}\ -R_i\ - l_{2,\delta}\ -R_i}{l_{1,\delta}\ 0\ - l_{2,\delta}\ 0} \frac{1}{s_1 + R_i} \frac{1}{s_2 + R_i}\ {}_{k=1, k \neq i}^{n_1+n_2} \frac{R_k}{R_k - R_i}$.

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της παρεμβολής στον παρονομαστή και τον αριθμητή της (2.60) βρίσκουμε,

$$l_{1,\delta}(s) - l_{2,\delta}(s) = \left(l_{1,\delta}(0) - l_{2,\delta}(0)\right)\frac{s-s_1}{s_1}\frac{s-s_2}{s_2}\prod_{i=1}^{n_1+n_2}\frac{s+R_i}{R_i}, \tag{2.62}$$

και χρησιμοποιώντας την (2.55) στο *s=0* και $\lim_{s\to 0} s\upsilon_\delta(s) = 0$,

$$\kappa_\delta l_{1,\delta}(s) - l_{2,\delta}(s) = \sum_{i=1}^{n_1+n_2}\left(\kappa_\delta l_{1,\delta}(-R_i) - l_{2,\delta}(-R_i)\right)\frac{s}{-R_i}\frac{s-s_1}{s_1+R_i}\frac{s-s_2}{s_2+R_i}\prod_{k=1,k\neq=1}^{n_1+n_2}\frac{s+R_k}{R_k-R_i}. \tag{2.63}$$

Συνδυάζοντας (2.62) και (2.63) στην εξίσωση (2.60), έχουμε

$$\upsilon_\delta(s) = \sum_{i=1}^{n_1+n_2}\alpha_i\frac{1}{s+R_i}. \tag{2.64}$$

Με αντίστροφους μετασχηματισμούς *Laplace* στην (2.64) καταλήγουμε στην (2.61).

Η πιθανότητα χρεοκοπίας *ψ(u)* είναι ένα μέτρο κινδύνου για να αξιολογήσουμε τον κίνδυνο που συνδέεται με την εξίσωση πλεονάσματος U. Στην πραγματικότητα, η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι μία ειδική περίπτωση της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber-Shiu με *δ=0* και *w(x,y)=1*, για όλα τα *x,y* ≥ 0, δηλ. *ψ(u)*= $\upsilon_\delta(0)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1 *Στο παράδειγμά μας θα συγκρίνουμε 3 μοντέλα με ταυτιζόμενες περιθώριες κατανομές για τις τ.μ* W_j και X_j *αλλά διαφορετικές δομές εξάρτησης:*

- *Μοντέλο Α: Μοντέλο κινδύνου εξαρτώμενο στην αποζημίωση με* $Y_1 \sim Exp(2.5)$, $Y_2 \sim Exp(0.5)$ *και* $\beta = \frac{1}{3}$.
- *Μοντέλο Β: Μοντέλο κινδύνου εξαρτώμενο στην αποζημίωση με* $Y_1 \sim Exp(0.5)$, $Y_2 \sim Exp(2.5)$ *και* $\beta = 3$.
- *Μοντέλο Γ: Το κλασικό μοντέλο σύνθετης Poisson: (X,cW) είναι ανεξάρτητες.*

Γα τα 3 μοντέλα, ισχύει ότι $W \sim Exp(1)$, *η περιθώρια συνάρτηση της X είναι μείξη 2 εκθετικών,*

$$f_X(x) = \frac{3}{4}\left(1-e^{-2.5x}\right)\ \frac{1}{4}\left(1-e^{-0.5x}\right),$$

και c = 1. Από την εξίσωση (2.61) μπορούμε να βρούμε,

$$\psi_A(u) = 0.69047e^{-0.16677u} + 0.0847e^{-1.68614u},$$

και

$$\psi_B(u) = 0.78455e^{-0.11092u} + 0.02669e^{-2,12729u}.$$

Στο Μοντέλο Γ, γνωρίζουμε από Panjer και Willmot (1992) ότι,

$$\psi_\Gamma(u) = 0.74640e^{-0.13398u} + 0.05360e^{-1.86605u}.$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η μορφή των $\psi_A(u)$ και $\psi_B(u)$ είναι ίδια με αυτήν της $\psi_\Gamma(u)$. Εμείς θέλουμε να διαπιστώσουμε αν μία σχέση εξάρτησης ανάμεσα στους ενδιάμεσους χρόνους και τα μεγέθη των ζημιών θα μας οδηγήσει σε μία αύξηση ή μείωση στην τιμή των συντελεστών προσαρμογής που χρησιμοποιείται από κοινού στο εκθετικό άνω όριο ($e^{\rho u}$) για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Οι Albrecher και Teugels (2006) διατύπωσαν ένα παρόμοιο προβληματισμό σε ένα πιο γενικό σύνολο. Παρόμοιες μελέτες για την επίδραση διάφορων δομών εξάρτησης της διαδικασίας κινδύνων στον συντελεστή προσαρμογής του Lundberg έχουν γίνει από τους Cossette και Marceau (2000), Muller και Pflug (2001), Denuit et al.(2002), Juri(2002) και Maccit et al. (2005).

Έστω ρ και ρ_Γ οι αντίστοιχες αρνητικές λύσεις (αν υπάρχουν) για την,

$$E\left[e^{-r(X-cW)}\right] = 1$$

και

$$E\left[e^{-r(X_\Gamma-cW_\Gamma)}\right] = E\left[e^{-rX_\Gamma}\right]E\left[e^{rcW_\Gamma}\right] = 1.$$

Σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε την διάταξη των ρ και ρ_Γ υπό κάποιους όρους. Για αυτό τον λόγο θα υπενθυμίσουμε κάποια αποτελέσματα από την στοχαστική διάταξη. Πρώτον, μία τ.μ Z_1 λέγεται στοχαστικά αύξουσα (φθίνουσα) στην Z_2 αν η $\Pr(Z_1 > z_1 | Z_2 = z_2)$ αυξάνεται (μειώνεται) κατα z_2 για όλα τα z_1. Αν η Z_1 είναι στοχαστικά αύξουσα (φθίνουσα) στην Z_2 τότε (Z_1, Z_2) είναι θετικά (αρνητικά) συσχετισμένα και έχουμε ότι,

$$E\ g_1(X_1)g_2(X_2)\ \geq (\leq) E\ g_1(X_1)\ E\ g_2(X_2)$$

για όλες τις πραγματικές συναρτήσεις g_1 *και* g_2 *που είναι αύξουσες (και στις 2 συνιστώσες).*

Από την εξίσωση (2.1) και με $F_{Y_1}\ x\ \geq (\leq) F_{Y_2}\ x$ *για όλα τα* $x \geq 0$, *συμπεραίνουμε ότι η X είναι στοχαστικά αύξουσα (φθίνουσα) στην W. Αυτό σημαίνει ότι (X, W) είναι θετικά (αρνητικά) συσχετισμένες ή ισοδύναμα, ότι (-X, W) είναι αρνητικά (θετικά) συσχετισμένες. Αφού η εκθετική συνάρτηση είναι αύξουσα και αν* $X_\Gamma \sim X$ *και* $W_\Gamma \sim W$, *έχουμε ότι,*

$$E\ e^{-r\ X-cW}\ \ \leq\ \geq E\ e^{-rX_\Gamma}\ E\ e^{rcW_\Gamma}\ . \qquad (2.65)$$

Οπότε από (2.65) βρίσκουμε ότι,

$$\rho \leq\ \geq \rho_\Gamma, \qquad (2.66)$$

(αν υπάρχουν) ή ισοδύναμα ότι το άνω όριο για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι χαμηλότερο (ψηλότερο) στο εξαρτώμενο σύνολο από ότι στην εξαρτώμενη περίπτωση.

Στο παράδειγμα μας, (X,cW) είναι θετικά συσχετισμένες στο μοντέλο A, αρνητικά συσχετισμένες στο μοντέλο B και ανεξάρτητες στο μοντέλο Γ. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.66) βρίσκουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα όσο αφορά τους συντελεστές προσαρμογής του Lundberg,

$$\rho_A \leq \rho_\Gamma \leq \rho_B$$

$$-0.16677 \leq -0.13398 \leq -0.11092$$

που σημαίνει ότι,

$$e^{\rho_A u} \leq e^{\rho_\Gamma u} \leq e^{\rho_B u}\ \text{για}\ u \geq 0.$$

Στην πραγματικότητα όταν (-X, W) είναι αρνητικά (θετικά) συσχετισμένες οι αυξήσεις της διαδικασίας πλεονάσματος (cW_j , $-X_j$) *για* $j \in N^+$ *είναι περισσότερο (λιγότερο) σκεδαστικές από ότι στην περίπτωση ανεξαρτησίας. Οπότε, όσο περισσότερο (λιγότερο) ΄΄άστατη΄΄ είναι η συμπεριφορά της διαδικασίας πλεονάσματος, τόσο περισσότερο (λιγότερο) πιθανό είναι να περάσει στο επίπεδο του 0 που είναι στην ίδια γραμμή με την (2.66).*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

<u>2^{O} ΜΟΝΤΕΛΟ:</u>

<u>Η σύζευξη των Farlie-Gumbel-Morgensten</u>

3.1 Εισαγωγή στην σύζευξη των *Farlie-Gumbel-Morgensten*

Οι συζεύξεις εκφράζουν στην περίπτωση των διδιάστατων κατανομών, τη συναρτησιακή σχέση της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής μιας διδιάστατης κατανομής με τις αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής των μονοδιάστατων περιθώριων κατανομών, όπου οι τελευταίες μας είναι πάντοτε γνωστές.

Σκοπός της δημιουργίας αυτών των οικογενειών, ήταν να βρεθεί ένας απλός τρόπος για να εισαχθεί η συσχέτιση ανάμεσα στις τυχαίες περιθώριες κατανομές. Αναδεικνύεται δε, στις μελέτες και στην εισαγωγή τέτοιων οικογενειών, σε επίμαχο θέμα η εύρεση κλάσεων διδιάστατων κατανομών με το επιθυμητό εύρος του συντελεστή συσχέτισης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1 Μια n-διάστατη σύζευξη (copula) αποτελεί μια n-διάστατη συνάρτηση κατανομής, περιορισμένη στο $0,1\ ,^{n}$ με περιθώριες ομοιόμορφες κατανομές στο (0,1) .

Για μία δοσμένη copula C και περιθώριες $F_1,\ldots,F_n$, έχουμε ότι η,

$$F\ \ x_1, \ldots, x_n\ \ = C(F_1\ \ x_1), \ldots, F_n(x_n\ \ ) \qquad (3.1)$$

είναι μια από κοινού συνάρτηση κατανομής με αυτές τις περιθώριες. Αντίστροφα, για δοσμένη από κοινού συνάρτηση κατανομής F με περιθώριες $F_1,\ldots, F_n$, υπάρχει πάντα μία σύζευξη (copula) που να ικανοποιεί την (3.1). Αυτή η σύζευξη (copula) δεν είναι απαραίτητα μοναδική, εκτός εάν $F_1,\ldots, F_n$ είναι συνεχείς. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι,

$$C\ \ u_1, \ldots, u_n\ \ = F(F_1^{-1}\ \ u_1\ \ , \ldots, F_n^{-1}\ \ u_n\ \ ) . \qquad (3.2)$$

Τα αποτελέσματα αυτά είναι γνωστά ως *Θεώρημα του Sklar* και αποτελούν τον λόγο που η σύζευξη (copula) καλείται δομή εξάρτησης. Στην ουσία, η εξίσωση (3.1) υποδηλώνει ότι η σύζευξη (copula) C διαχωρίζει την συμπεριφορά των περιθώριων συναρτήσεων $F_1,\ldots, F_n$, από την εξάρτηση που περιέχεται στην από κοινού συνάρτηση κατανομής τους F.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, σύζευξη καλείται μία δομή εξάρτησης η οποία παρουσιάζεται με τη μορφή ενός συναρτησιακού. Οι διαφορετικές μορφές αυτού του συναρτησιακού οδηγούν σε μία ποικιλία μοντέλων οικογενειών κατανομών.

Ποικίλες τέτοιες δομές κατασκευής διδιάστατων κατανομών με συγκεκριμένες περιθώριες έχουν ερευνηθεί από τους *Plackett (1965), Mardia (1970), Genest (1987), Marshall* και *Olkin (1988)* και άλλους.

Μία από τις πιο εύκολες σε εφαρμογή δομή, εμφανίζεται στην κλάση των διδιάστατων κατανομών που εισήχθη αρχικά από τον *Morgenstern (1956),* χρησιμοποιώντας *Cauchy* περιθώριες. Το 1960 ο *Gumbel* ερεύνησε την οικογένεια κατανομών με εκθετικές περιθώριες, ενώ ο *Farlie* σε συνδυασμό με τις έρευνές του για το συντελεστή συσχέτισης, πρότεινε μία γενίκευση της διδιάστατης δομής που είχε μελετηθεί από τους *Morgenstern* και *Gumbel.*

Οι *Jonhson* και *Kotz* (1975,1977) μελέτησαν την πολυδιάστατη περίπτωση και εισήγαγαν τον όρο οικογένεια κατανομών *Farlie- Gumbel- Morgenstern,* ενώ περαιτέρω μελέτες διεξήχθησαν από τους *Schucany (1978), Jonhson* και *Kotz (1977)* και *Huang* και *Kotz (1984)* μεταξύ άλλων. Στην απλούστερή της μορφή, η διδιάστατη οικογένεια *Farlie- Gumbel- Morgenstern* έχει μόνο μία παράμετρο σε συνδυασμό με τις διαφορετικές περιθώριες.

Αυτή όμως η μορφή έχει κάποια μειονεκτήματα, όπως το γεγονός ότι η δομή εξάρτησης δεν είναι εύκαμπτη και το εύρος του συντελεστή συσχέτισης ρ είναι περιορισμένο.
Ακολουθεί μια συνοπτική παρουσίαση κάποιων από τις βασικότερες οικογένειες συζεύξεων που χρησιμοποιούνται σήμερα.

➢Η οικογένεια των κανονικών συζεύξεων

$$C_p(u,v) = N_p\left(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)\right), \tag{3.3}$$

όπου με $N_p(x,y)$ συμβολίζουμε μια διδιάστατη συνάρτηση κατανομής με συντελεστή συσχέτισης ρ και με Φ την τυπική κανονική κατανομή.

➢Η *Farlie-Gumbel-Mongerstern* οικογένεια συζεύξεων

$$C_\theta(u,v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v), \ \theta \in [-1,1] \tag{3.4}$$

τα μέλη της οποίας είναι συμμετρικά, δηλαδή ισχύει $C_\theta(u,v) = C_\theta(v,u)$ για όλα τα $(u,v) \in [0,1] \times [0,1]$.

➢Η οικογένεια των κυβικών συζεύξεων

$$C(u,v) = uv + uv(1-u)(1-v)\,[auv + \beta u(1-v) + \gamma v(1-u) + \delta(1-u)(1-v)\,], \tag{3.5}$$

με α,β,γ,δ πραγματικές σταθερές που έχουν επιλεγεί έτσι ώστε τα σημεία (α,β),(α,γ),(δ,β) και (δ,γ) να βρίσκονται στο σύνολο: $[-2,1] \times [-1,2] \cup \{(x,y) | x^2 - xy + y^2 - 3x + 3y \leq 0\}$.
Στην περίπτωση που α=β=γ=δ το C είναι δευτέρου βαθμού και οι συζεύξεις είναι μέλη της *Farlie-Gumbel-Mongerstern* οικογένειας. Σε αντίθεση με τις συζεύξεις *Farlie-Gumbel-Mongerstern*, οι κυβικές συζεύξεις μπορεί να μην είναι συμμετρικές.

➢Η οικογένεια των Quandras-Auge συζεύξεων

$$C_{\alpha,\beta}(u,v) = \min(u^{1-\alpha}v, uv^{1-\beta}), \ \alpha,\beta \in [0,1]. \tag{3.6}$$

➢Η **Frechet οικογένεια συζεύξεων**

$$C_{\alpha,\beta}\ \ u,v\ \ = aM\ \ u,v\ \ +\ \ 1-\alpha-\beta\ \ \Pi(u,v)\ +\beta W(u,v)\ \ (3.7)$$

όπου W, Π και M n-διάστατες συζεύξεις που συμβολίζονται με $W^{\,n}$, $\Pi^{\,n}$ και $M^{\,n}$ αντίστοιχα και δίνονται από τις σχέσεις:

$$W^{\,n}\ \ u\ \ = max\,(u_1+u_2+\cdots+u_n-n+1{,}0)$$

$$\Pi^{\,n}\ \ u\ \ = u_1\cdot u_2\ldots\ u_n$$

$$M^{\,n}\ \ u\ \ = min\,(u_1,u_2,\ldots,u_n\,)$$

Επίσης, $\alpha,\beta \in\ \ 0{,}1\ $ και $\alpha+\beta\leq 1$.

➢ **Αρχιμήδειες συζεύξεις**

Οι Αρχιμήδειες Συζεύξεις αποτελούν μια από τις πιο γνωστές κλάσεις συζεύξεων, κάτι το οποίο οφείλεται στην ευκολία με την οποία μπορούν να κατασκευαστούν και στο μεγάλο πλήθος οικογενειών συζεύξεων που ανήκουν σε αυτή.
Έστω φ_Θ μιας συνεχής και αυστηρά φθίνουσα συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο $\ 0{,}1\ $ και πεδίο τιμών το $[0,\infty)$, έτσι ώστε $\varphi_\Theta\ \ 1\ \ = 0$ και φ_Θ κυρτή. Επίσης, έστω $\varphi_\Theta{}^{-1}$ ψευδοαντίστροφη συνάρτηση της φ_Θ. Τότε, η συνάρτηση C: $\ 0{,}1\ \times\ \ 0{,}1\ \rightarrow\ \ 0{,}1\ $ η οποία ορίζεται ως:

$$C(u,v)=\varphi_\theta^{-1}\,(\,\varphi_\Theta\ \ u\ \ +\varphi_\Theta\ \ v\ \ )\ ,\ \theta\epsilon R \qquad (3.8)$$

ονομάζεται Αρχιμήδεια Σύζευξη. Σημαντικές οικογένειες Αρχιμήδειων Συζεύξεων είναι η *Clayton*, η *Gumbel* και η *Frank*.

3.2 Δομή εξάρτησης βασιζόμενη στην σύζευξη των *Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM)*

Η μοντελοποίηση της δομή εξάρτησης ανάμεσα στις τυχαίες μεταβλητές χρησιμοποιώντας συζεύξεις είναι αρκετά διαδεδομένη στην αναλογιστική επιστήμη και την διοικητική κινδύνου. Μελέτες για τις εφαρμογές των συζεύξεων στην αναλογιστική επιστήμη και την διοικητική κινδύνου έχουν γίνει από τους *Frees & Valdez(1998), Wang (1998), Bouye et al. (2000), Denuit et al.(2005)*, και *McNeil et al. (2005).*

Θεωρούμε ένα διδιάστατο τυχαίο διάνυσμα *(U,V)* με συνεχείς ομοιόμορφες συναρτήσεις και δομή εξάρτησης ορισμένη από την σύζευξη $F_{U,V}(u,v) = C(u,v)$ με $(u,v) \in [0,1] \times [0,1]$. Σημαντικές συζεύξεις είναι η σύζευξη ανεξαρτησίας με $C^{\perp}(u,v) = uv$, η συμμονότονη σύζευξη με $C^{+}(u,v) = \min(uv)$ και η *countermonotic* σύζευξη $C^{-}(u,v) = \max(u+v-1;0)$. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι όλες συζεύξεις ικανοποιούν τις ανισότητες $C^{-}(u,v) \leq C(u,v) \leq C^{+}(u,v)$, για $(u,v) \in [0,1] \times [0,1]$.

Η από κοινού σ.π.π προσαρτημένη σε μία σύζευξη *C* ισούται με,

$$c(u_1,u_2) = \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C(u_1,u_2). \tag{3.9}$$

Έστω η διδιάστατη σ.κ. $F_{X,W}$ των *(X,W)* με περιθώριες F_X και F_W να ισούται με $F_{X,W}(x,t) = C(F_X(x), F_W(t))$ για $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Η από κοινού σ.π.π. των *(X,W)* δίνεται από τον τύπο,

$$f_{X,W}(x,t) = c(F_X(x), F_W(t)) f_X(x) f_W(t), \tag{3.10}$$

για $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Η σύζευξη των *FGM* ισούται με,

$$C_\theta^{FGM}(u_1,u_2) = u_1 u_2 + \theta u_1 u_2 (1-u_1)(1-u_2), \tag{3.11}$$

$-1 \leq \theta \leq 1$, όπου $C_0^{FGM} = C^{\perp}$. Μπορεί να έχει αρνητική και θετική εξάρτηση, περιλαμβάνει την σύζευξη ανεξαρτησίας ($\theta = 0$), αλλά δεν περιέχει τις συμμονότονες και *countermonotic* συζεύξεις σαν περιπτώσεις ορίων. Η σύζευξη των *FGM* είναι μία διαταραχή της σύζευξης ανεξαρτησίας αλλά όχι Αρχιμήδεια. Επίσης είναι μία πρώτης τάξης προσέγγιση της σύζευξης *Placket* (Nelsen 2006,σελ.100) και της σύζευξης *Frank* (σελ.133). Αυτή η σύζευξη είναι ελκυστική εξαιτίας της απλότητάς της και της προσαρμοστικότητάς της. Ωστόσο, η σύζευξη των *FGM* είναι περιοριστική επειδή μπορεί να εφαρμοστεί μόνο όταν η εξάρτηση μεταξύ των δύο περιθώριων κατανομών έχει μετρήσιμο μέγεθος. Για την σύζευξη των *FGM* ισχύει ότι *Kendall's tau* και *Spearman's rho* είναι $\tau = \frac{2\theta}{9}$ και $\rho = \frac{\theta}{3}$ αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι $-\frac{2}{9} \leq \tau \leq \frac{2}{9}$ και $-\frac{1}{3} \leq \rho \leq \frac{1}{3}$.Επίσης έχει αποδειχτεί ότι ο συντελεστής συσχέτισης του *Pearson* παίρνει τιμές από $-\frac{1}{3}$ μέχρι $\frac{1}{3}$.

Ανάμεσα στις πρόσφατες εφαρμογές της σύζευξης των *FGM*, αξίζει να αναφέρουμε τον *Prieger (2002)* που την χρησιμοποίησε στην επιλογή μοντέλων για ασφαλιστικά προγράμματα υγείας. Επίσης η σύζευξη των *FGM* (η πολυμεταβλητή της μορφή) είναι εφαρμόσιμη στο πλαίσιο των αθροισμάτων των ανεξάρτητων τ.μ. *(Gelk & Tang (2008))* και στην ανάλυση της συμπεριφοράς των μοντέλων κινδύνου διακριτού χρόνου με εξαρτημένους οικονομικούς κινδύνους *(Tang &Vernik (2007))*. Οι *Gebizlioglou & Yagci (2008)* εφάρμοσαν την σύζευξη των *FGM* για να βρουν διαστήματα ανοχής ποσοστιαίων διδιάστατων κινδύνων στο πλαίσιο της μέτρησης των κινδύνων. Η απλότητα της σύζευξης των *FGM* αποτελεί τον λόγο που διάφοροι συγγραφείς ασχολήθηκαν με αρκετές επεκτάσεις της (βλ. *Drouet-Mari & Kotz (2001)* για μία ανασκόπηση της σύζευξης των *FGM* και διάφορες επεκτάσεις της).

Για την σύζευξη των *FGM*, η μορφή της εξίσωσης (3.9) δίνεται από τον τύπο,

$$C_\theta^{FGM}(u_1, u_2) = 1 + \theta(1 - 2u_1)(1 - 2u_2). \tag{3.12}$$

Η διδιάστατη σ.κ. $F_{X,W}$ των *(X,W)* με περιθώριες F_X και F_W και ορισμένη από την σύζευξη των *FGM* ισούται με,

$$F_{X,W}(x,t) = F_X(x)F_W(t) + \theta F_X(x)F_W(t)\left(1 - F_X(x)\right)\left(1 - F_W(t)\right), \tag{3.13}$$

για $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.10) και (3.12), έχουμε τον τύπο της από κοινού σ.π.π. των *(X,W)*.

$$f_{X,W}(x,t) = f_X(x)f_W(t) + \theta f_X(x)f_W(t)\left(1 - 2F_X(x)\right)\left(1 - 2F_W(t)\right). \tag{3.14}$$

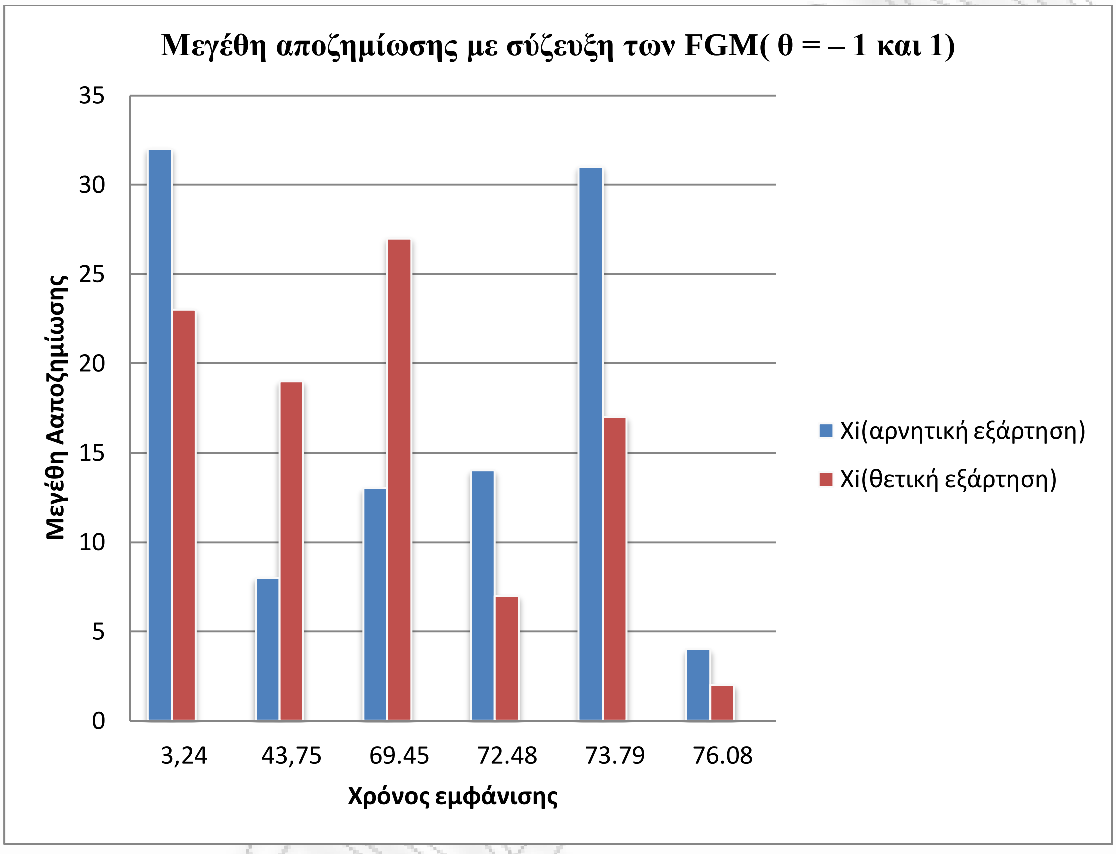
και μέσω της εξίσωσης $f_W(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ έχουμε ότι,

$$f_{X,W}(x,t) = f_X(x)\lambda e^{-\lambda t} + \theta f_X(x)\lambda e^{-\lambda t}\left(1 - 2F_X(x)\right)\left(2e^{-\lambda t} - 1\right). \tag{3.15}$$

Ορίζοντας $h_X(x) = \left(1 - 2F_X(x)\right)f_X(x)$ και συμβολίζοντας $h_X^*(s)$ τον μετασχηματισμό *Laplace*, η (3.15) μπορεί να γραφτεί,

$$f_{X,W}(x,t) = f_X(x)\lambda e^{-\lambda t} + \theta h_X(x)\left(2\lambda e^{-2\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t}\right). \tag{3.16}$$

Στο παρακάτω γράφημα παρουσιάζουμε μία απεικόνιση της σχέσης εξάρτησης ανάμεσα στην τυχαία μεταβλητή του μεγέθους της αποζημίωσης X και στην τυχαία μεταβλητή ενδιάμεσου χρόνου W. Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή του μεγέθους της αποζημίωσης X και η τυχαία μεταβλητή ενδιάμεσου χρόνου W ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέση τιμή 9 και 12 αντίστοιχα.



Γράφημα 1.Απεικόνιση των χρόνων εμφάνισης και των μεγεθών αποζημίωσης με σύζευξη FGM για θ = -1και θ = 1 .

Ολοκληρώνουμε την ενότητα μας με το ακόλουθο αποτέλεσμα που έχει αποδειχτεί στο *Rolski et al.* (1999, Θεώρημα 6.1.12):

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{E\ S(t)}{t} = \frac{E\ X}{E\ W} \quad \text{(με πιθανότητα 1)},$$

που ισχύει για οποιαδήποτε δομή εξάρτησης ανάμεσα στις τ.μ. X και W. Ωστόσο, η συνδυασμένη επίδραση του χρόνου της αποζημίωσης και του μεγέθους της έχει σημαντικό αντίκτυπο στο πλεόνασμα του χαρτοφυλακίου της ασφάλισης (όπως φαίνεται στο Γράφημα 1), επομένως και στην συμπεριφορά των μέτρων κινδύνου.

3.3. Ανάλυση της εξίσωσης *Lundberg*

Ένα σημαντικό βήμα για την ανάλυση των μέτρων κινδύνου είναι η παραγώγιση της γενικευμένης εξίσωσης *Lundberg* και η μελέτη των ιδιοτήτων της. Η ανάλυση της γενικευμένης εξίσωσης *Lundberg* απαιτείται για να βρούμε την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (*defective renewal equation)* για $m_\delta(u)$. Πιο συγκεκριμένα, πρέπει να βρούμε τον αριθμό των ριζών της γενικευμένης εξίσωσης *Lundberg* στο δεξιό μισό μιγαδικό επίπεδο, δηλ. *Re(s)* ≥ 0. Αυτές οι ρίζες είναι χρήσιμες για να βρούμε την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (*defective renewal equation)* για $m_\delta(u)$.

Για να βρούμε την γενικευμένη εξίσωση *Lundberg*, θεωρούμε την διακριτού χρόνου διαδικασία ενσωματωμένη στην συνεχούς χρόνου διαδικασία πλεονάσματος $\underline{U}$. Ορίζουμε την διακριτού χρόνου διαδικασία $\underline{U} = \{\tilde{U}_k, k = 0,1,2,\ldots\}$, όπου $\tilde{U}_0 = u$ και $\tilde{U}_k = U(T_k)$ συμβολίζει το πλεόνασμα μετά την k-ιοστη αποζημίωση, δηλ.

$$\tilde{U}_k = u + \sum_{j=1}^{k}(cW_j - X_j), \qquad \text{για κάθε } k \in N^+. \tag{3.17}$$

Η διαδικασία $\underline{V} = \left\{ e^{-\delta \sum_{j=1}^{k} W_j + s\tilde{U}_k}, k = 0,1\ldots \right\}$, για $s > 0$ είναι *martingale* αν και μόνο αν

$$E\left[e^{-\delta W} e^{s(X-cW)}\right] = 1, \tag{3.18}$$

που αντιστοιχεί στην γενικευμένη εξίσωση *Lundberg*.

Δοθέντος της εξίσωσης (3.16), το αριστερό μέρος της (3.18) μπορεί να γραφτεί

$$\begin{aligned} E\left[e^{-\delta W} e^{s(X-cW)}\right] &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{t(sc-\delta)} e^{-sx} f_{X,W}(x,t)\, dxdt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{t(sc-\delta)} e^{-sx} f_X(x)\, \lambda e^{-\lambda t} dxdt \\ &+ \theta \int_0^\infty \int_0^\infty e^{t(sc-\delta)} e^{-sx} h_X(x) \left(2\lambda e^{-2\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t}\right) dxdt. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.18) και (3.19), έχουμε

$$f_X^*(s)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta-sc}\right) + \theta h_X^*(s)\left(\frac{\lambda(\delta-sc)}{(2\lambda+\delta-sc)(\lambda+\delta-sc)}\right) = 1. \tag{3.20}$$

Στην ακόλουθη πρόταση, χρησιμοποιούμε το θεώρημα του *Rouché* για να δείξουμε τις λύσεις της γενικευμένης εξίσωσης *Lundberg*.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1 *Για* $\delta > 0$ *και* $\theta \neq 0$, *η εξίσωση Lundberg στην εξίσωση (3.20) έχει ακριβώς 2 ρίζες, ας πούμε* ρ_1, ρ_2, *που έχουν θετικό πραγματικό μέρος Re(*ρ_j*)* ≥ 0, *j*$=1{,}2$.

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το θεώρημα του *Rouché* στο κλειστό χωρίο *C*, αποτελούμενο από τον φανταστικό άξονα (*–ir* μέχρι *+ir)* και ένα ημικύκλιο στο αριστερό ημι-επίπεδο με ακτίνα *r* κινούμενο με την φορά των δεικτών του ρολογιού από *–ir* μέχρι *+ir*. Υποθέτουμε ότι *r*→ ∞.

Θέλουμε να δείξουμε ότι,

$$f_X^*\ s\ \frac{\lambda}{\lambda+\delta-sc} + \theta h_X^*\ s\ \ \frac{\lambda(\delta-sc)}{2\lambda+\delta-sc\ (\lambda+\delta-sc)}\ < 1. \tag{3.21}$$

Οι 2 όροι στο αριστερό μέρος της (3.21)

$$\frac{\lambda}{\lambda+\delta-sc}$$

και

$$\frac{\lambda(\delta-sc)}{2\lambda+\delta-sc\ (\lambda+\delta-sc)}$$

είναι πηλίκα πολυωνύμων με αυστηρά μεγαλύτερο βαθμό στον παρονομαστή που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι,

$$f_X^*\ s\ \frac{\lambda}{\lambda+\delta-sc} + \theta h_X^*\ s\ \ \frac{\lambda\ \delta-sc}{2\lambda+\delta-sc\ \ \lambda+\delta-sc}\ \ \to 0 \tag{3.22}$$

Στο *C* (αποκλείοντας *Re s = 0).*

Για *Re s = 0*, παρατηρούμε ότι,

$$\frac{\lambda}{\lambda+\delta-sc} > 0$$

και

$$\frac{\lambda(\delta-sc)}{2\lambda+\delta-sc\ \ (\lambda+\delta-sc)} > 0.$$

Επίσης, στο *Re s = 0* και για $\delta > 0$, ισχύει

$$\frac{\lambda}{\lambda+\delta}+\frac{\theta\lambda\delta}{2\lambda+\delta\ \ (\lambda+\delta)}=\frac{2\lambda+\delta\ \ \lambda+\theta\lambda\delta}{2\lambda+\delta\ \ (\lambda+\delta)}<1,$$

αφού $2\lambda+\delta\ \ \lambda+\theta\lambda\delta < \ 2\lambda+\delta\ \ (\lambda+\delta)$.

Τελικά έχουμε,

$$f_X^*\ s\ \frac{\lambda}{\lambda+\delta-sc}+\theta h_X^*\ s\ \ \frac{\lambda\ \ \delta-sc}{2\lambda+\delta-sc\ \ \ \lambda+\delta-sc}$$

$$< \ f_X^*\ s\ \frac{\lambda}{\lambda+\delta-sc}\ +\ \theta h_X^*\ s\ \ \frac{\lambda\ \ \delta-sc}{2\lambda+\delta-sc\ \ \lambda+\delta-sc}$$

$$= \ f_X^*\ s\ \ \frac{\lambda}{\lambda+\delta-sc}\ +\ \theta h_X^*\ s\ \ \frac{\lambda\ \ \delta-sc}{2\lambda+\delta-sc\ \ \lambda+\delta-sc}$$

$$\leq \frac{\lambda}{\lambda+\delta-sc}\ +\ \frac{\theta\lambda\ \ \delta-sc}{2\lambda+\delta-sc\ \ \lambda+\delta-sc}$$

$$\leq \frac{\lambda}{\lambda+\delta}+\frac{\theta\lambda\delta}{2\lambda+\delta\ \ (\lambda+\delta)}=\frac{2\lambda+\delta\ \ \lambda+\theta\lambda\delta}{2\lambda+\delta\ \ (\lambda+\delta)}<1. \tag{3.23}$$

Για $\delta\ =0$, οι όροι του θεωρήματος του *Rouché* δεν ισχύουν (αφού $f_X^*\ s\ \frac{\lambda}{\lambda+\delta-sc}+\theta h_X^*\ s\ \ \frac{\lambda(\delta-sc)}{2\lambda+\delta-sc\ \ (\lambda+\delta-sc)}\ <1$ για *Re s = 0*). Εφαρμόζουμε μία επέκταση του θεωρήματος του *Rouché*, χάρη στον *Klimenok (2001)* για να βρούμε τον αριθμό των ριζών της γενικευμένης εξίσωσης *Lundberg* με θετικό πραγματικό μέρος.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2 *Για $\delta = 0$ και $\theta \neq 0$, η εξίσωση Lundberg στην εξίσωση (3.20) έχει 1 ρίζα, ας πούμε $\rho_1(0)$,με Re(ρ_i 0) ≥ 0 μία δεύτερη ρίζα ρ_2 0 $= 0$.*

Απόδειξη: Ορίζουμε το χωρίο D_k *={s:|z|=1}*, όπου $z=\frac{\kappa-s}{\kappa}$. Σε όρους *s*, το χωρίο D_k είναι ένας κύκλος με ακτίνα κ και αρχή κ. Όπως και στην *ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1*, υποθέτουμε ότι $\kappa \to \infty$ και συμβολίζουμε με *D* το οριοθετημένο χωρίο. Χρησιμοποιούμε τις ίδιες υποθέσεις (για $\delta\ = 0$) όπως παρουσιάστηκαν για την *ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1* και έχουμε ότι,

$$f_X^* \ s \ \lambda \ 2\lambda - sc \ + \theta\lambda \ -sc \ h_X^* \ s \quad \leq \quad \lambda - sc \quad 2\lambda - sc \quad , \tag{3.24}$$

στο *D* (αποκλείοντας *s = 0* ή ισοδύναμα *z = 1)*. Επίσης, πρέπει να σημειώσουμε ότι οι συναρτήσεις

$$f_X^* \ s \ \lambda \ 2\lambda - sc \ + \theta\lambda \ -sc \ h_X^* \ s$$

και

$$\lambda - sc \quad 2\lambda - sc$$

είναι συνεχείς στο *D*.

Μένει να αποδειχτεί ότι,

$$\frac{d}{dz}(1 - \ f_X^*(\ \kappa - \kappa z \ )\frac{\lambda}{\lambda - \ \kappa - \kappa z \ c} - \theta h_X^* \ (\kappa - \kappa z)$$

$$\frac{\lambda(- \ \kappa - \kappa z \ c)}{2\lambda - \ \kappa - \kappa z \ c \ (\lambda(- \ \kappa - \kappa z \ c)} \ )_{z=1} > 0, \tag{3.25}$$

έτσι ώστε να εφαρμόσουμε το *Θεώρημα 1* του *Klimenok (2001)*. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (3.25) είναι ίση με την

$$\frac{d}{dz} \ 1 - E \ e^{- \ \kappa - \kappa z \ (X - cW)} \quad {}_{z=1} = -\kappa E \ X - cW \ , \tag{3.26}$$

όπου $E \ X - cW \ < 0$, δοθέντος της συνθήκης επιλυσιμότητας $E[cW_j - X_j] > 0$, $j = 1,2, \ldots$.Βασιζόμενοι στον *Klimenok (2001)* καταλήγουμε ότι ο αριθμός των ριζών της εξίσωσης (3.18) μέσα στο *D* είναι ίσος με 1. Επιπλέον, μία τετριμμένη ρίζα της γενικευμένης εξίσωσης *Lundberg* στην εξίσωση (3.18) (με $\delta =$ 0) είναι η $\rho_2 \ 0 \ = 0$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 3.1 *Στην ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1 (όπου* $\delta = 0$*), έχουμε δείξει ότι υπάρχουν ακριβώς 2 ρίζες. Μπορούμε επίσης να αποδείξουμε ότι είναι πραγματικές και διακεκριμένες. Ας πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (3.20) με*

$$2\lambda + \delta - sc \ (\lambda + \delta - sc)$$

και έχουμε ότι,

$$2\lambda + \delta - sc \quad \lambda + \delta - sc \ = \ 2\lambda + \delta - sc \quad \lambda + \delta - sc \ E \ e^{-\delta W} e^{s(X - cW)}$$

$$= \lambda \ 2\lambda + \delta - sc \ \ f_X^* \ s \ \ + \theta\lambda \ \delta - sc \ \ h_X^* \ s \ . \qquad (3.27)$$

Ορίζουμε,

$$h_1 \ s \ = \ 2\lambda + \delta - sc \ (\lambda + \delta - sc) \qquad (3.28)$$

και

$$h_2 \ s \ = \ 2\lambda + \delta - sc \ \ \lambda + \delta - sc \ E \ e^{-\delta W} e^{s(X - cW)}$$

$$= \lambda \ 2\lambda + \delta - sc \ \ f_X^* \ s \ \ + \theta\lambda \ \delta - sc \ \ h_X^* \ s \ , \qquad (3.29)$$

όπου $h_1 \ s$ *είναι μία κυρτή συνάρτηση με 2 ρίζες* $\frac{\lambda+\delta}{c}$ *και* $\frac{2\lambda+\delta}{c}$. *Για* $\frac{\lambda+\delta}{c} < s < \frac{2\lambda+\delta}{c}$, *η* $h_1 \ s$ *είναι αρνητική. Αφού* $\delta > 0$, *έχουμε*

$$h_2 \ 0 \ = \ 2\lambda + \delta \ \ \lambda + \delta \ E \ e^{-\delta W} \ < \ h_1 \ 0 \ = \ 2\lambda + \delta \ \ \lambda + \delta \ . \qquad (3.30)$$

Στο $s = \frac{\delta}{c}$, *έχουμε*

$$h_2 \ \frac{\delta}{c} \ = \ 2\lambda + \delta - \frac{\delta}{c} c \ \ \lambda + \delta - \frac{\delta}{c} c \ \ E \ \ e^{-\delta W} e^{\frac{\delta}{c}(cW - X)}$$

$$= \ 2\lambda \ \lambda E \ \ e^{-\frac{\delta}{c} X} \ < h_1 \ \frac{\delta}{c} \ . \qquad (3.31)$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι,

$$h_2 \ \frac{\lambda+\delta}{c} \ = \lambda^2 f_X^* \ \frac{\lambda+\delta}{c} \ - \theta\lambda^2 h_X^* \ \frac{\lambda+\delta}{c} \ > 0 = h_1 \ \frac{\lambda+\delta}{c} \qquad (3.32)$$

και

$$h_2 \ \frac{2\lambda+\delta}{c} \ = -2\theta\lambda h_X^* \ \frac{2\lambda+\delta}{c} \ . \qquad (3.33)$$

Από την εξίσωση (3.33) γνωρίζουμε ότι $h_2\left(\frac{2\lambda+\delta}{c}\right) < 0$ *αν* $\theta > 0$ *και ότι* $h_2\left(\frac{2\lambda+\delta}{c}\right) > 0$ *αν* $\theta < 0$. *Συνεπώς, για* $s > 0$, *η* $h_2(s)$ *τέμνει την* $h_1(s)$ *σε 2 διακριτά σημεία* ρ_1 *και* ρ_2, *με*

$$\rho_1 < \frac{\lambda+\delta}{c} \quad \text{και} \quad \rho_2 > \frac{2\lambda+\delta}{c}, \ \text{αν}\ \theta < 0 \tag{3.34}$$

και

$$\rho_1 < \frac{\lambda+\delta}{c} < \rho_2 < \frac{2\lambda+\delta}{c}, \ \text{αν}\ \theta > 0. \tag{3.35}$$

3.4 Η ολοκληροδιαφορική εξίσωση

Σε αυτήν την ενότητα κύριος στόχος μας είναι να βρούμε μία ολοκληροδιαφορική εξίσωση για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu $m_\delta(u)$.

Συμβολίζουμε με I τον ταυτοτικό τελεστή και με $\mathcal{D}$ τον τελεστή παραγώγισης .

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.3 *Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής* $m_\delta(u)$ *ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση για* $u \geq 0$.

$$\left(\frac{2\lambda+\delta}{c}I-\mathcal{D}\right)\left(\frac{\lambda+\delta}{c}I-\mathcal{D}\right)m_\delta(u) = \frac{\lambda}{c}\left(\frac{2\lambda+\delta}{c}I-\mathcal{D}\right)\sigma_1(u)$$

$$+\lambda\frac{\theta}{c}\left(\frac{\delta}{c}I-\mathcal{D}\right)\sigma_2(u), \quad -1 \leq \theta \leq 1, \tag{3.36}$$

όπου

$$\sigma_1(u) = \int_0^u m_\delta(u-x) f_X(x)\,dx + w_1(u), \tag{3.37}$$

$$\sigma_2(u) = \int_0^u m_\delta(u-x) h_X(x)\,dx + w_2(u), \tag{3.38}$$

$$w_1(u) = \int_u^\infty w(u, x-u) f_X(x)\,dx, \tag{3.39}$$

$$w_2(u) = \int_u^\infty w(u, x-u) h_X(x)\,dx. \tag{3.40}$$

Απόδειξη: Δεσμεύοντας ως προς τον χρόνο και το ποσό της πρώτης αποζημίωσης, έχουμε,

$$m_\delta \ u \ = \lambda \int_0^\infty \int_0^{u+ct} e^{-\delta t} m_\delta \ u + ct - x \ f_{X,W} \ x, t \ dx dt$$

$$+\lambda \int_0^\infty \int_{u+ct}^\infty e^{-\delta t} w \ u + ct, x - u - ct \ f_{X,W} \ x, t \ dx dt \tag{3.41}$$

Δοθέντος της εξίσωσης (3.16) η (3.41) γίνεται

$$m_\delta \ u \ = \lambda \int_0^\infty \int_0^{u+ct} e^{-\delta t} m_\delta \ u + ct - x \ f_X \ x \ e^{-\lambda t} dx dt$$

$$+\lambda \int_0^\infty \int_{u+ct}^\infty e^{-\delta t} w \ u + ct, x - u - ct \ f_X \ x \ e^{-\lambda t} dx dt$$

$$+\lambda\theta \int_0^\infty \int_0^{u+ct} e^{-\delta t} m_\delta \ u + ct - x \ h_X \ x \ (2e^{-2\lambda t} - e^{-\lambda t}) dx dt$$

$$+\lambda\theta \int_0^\infty \int_{u+ct}^\infty e^{-\delta t} w \ u + ct, x - u - ct \ h_X \ x \ (2e^{-2\lambda t} - e^{-\lambda t}) dx dt \tag{3.42}$$

Η εξίσωση (3.42) μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$m_\delta \ u \ = \lambda \int_0^\infty e^{-\delta t} \sigma_1 \ u + ct \ e^{-\lambda t} dt + 2\lambda\theta \int_0^\infty e^{-\delta t} \sigma_2 \ u + ct \ e^{-2\lambda t} dt$$

$$-\lambda\theta \int_0^\infty e^{-\delta t} \sigma_2 \ u + ct \ e^{-\lambda t} dt, \tag{3.43}$$

όπου οι συναρτήσεις $\sigma_1 \ u$ και $\sigma_2 \ u$ δίνονται από τις εξισώσεις (3.37) και (3.38) αντίστοιχα.

Αντικαθιστούμε $u + ct = s$ στην (3.43), η οποία γίνεται

$$m_\delta \ u \ = \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty e^{-(\delta+\lambda) \ \frac{s-u}{c}} \ \sigma_1 \ s \ ds - \frac{\theta}{c} \lambda \int_u^\infty e^{-(\delta+\lambda) \ \frac{s-u}{c}} \ \sigma_2 \ s \ ds$$

$$+2\lambda \frac{\theta}{c} \int_u^\infty e^{-(\delta+2\lambda) \ \frac{s-u}{c}} \ \sigma_2 \ s \ ds. \tag{3.44}$$

Παραγωγίζοντας την (3.44) ως προς u έχουμε

$$m'_\delta(u) = \frac{\lambda}{c} \ \frac{\lambda + \delta}{c} \int_u^\infty e^{-(\delta+\lambda) \ \frac{s-u}{c}} \ \sigma_1 \ s \ ds - \lambda \frac{\theta}{c} \ \frac{\lambda + \delta}{c} \int_u^\infty e^{-(\delta+\lambda) \ \frac{s-u}{c}} \ \sigma_2 \ s \ ds$$

$$+2\lambda\frac{\theta}{c}\ \frac{\lambda+\delta}{c}\ {}_u^{\infty} e^{-(\delta+2\lambda)\ \frac{s-u}{c}}\ \sigma_2\ s\ ds\text{-}\ \lambda\frac{\theta}{c}\sigma_2\ u\ -\frac{\lambda}{c}\sigma_1\ u\ . \qquad (3.45)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (3.44) με $\frac{\lambda+\delta}{c}$, αφαιρώντας την (3.45) στο αποτέλεσμα και χρησιμοποιώντας τον ταυτοτικό τελεστή και τον τελεστή παραγώγισης έχουμε,

$$\frac{\lambda+\delta}{c}I-\square\ \ m_\delta\ u\ =\frac{\lambda}{c}\sigma_1\ u\ -\theta\frac{2\lambda^2}{c^2}\ {}_u^{\infty} e^{-(\delta+2\lambda)\ \frac{s-u}{c}}\ \sigma_2\ s\ ds+\theta\frac{\lambda}{c}\sigma_2\ u\ . \qquad (3.46)$$

Ορίζουμε

$$g_\delta\ u\ =\ \frac{\lambda+\delta}{c}I-\square\ \ m_\delta\ u\ . \qquad (3.47)$$

Παραγωγίζοντας την (3.47) ως προς u και χρησιμοποιώντας την (3.46), βρίσκουμε ότι,

$$g_\delta^{\square}\ u\ =\frac{\lambda}{c}\sigma_1^{\square}\ u\ -\theta\frac{2\lambda^2(2\lambda+\delta)}{c^3}\ {}_u^{\infty} e^{-(\delta+2\lambda)\ \frac{s-u}{c}}\ \sigma_2\ s\ ds+\theta\frac{\lambda}{c}\sigma_2^{\square}\ u\ +\theta\frac{2\lambda^2}{c^2}\sigma_2\ u\ .$$
(3.48)

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (3.47) με $\frac{2\lambda+\delta}{c}$, αφαιρώντας την (3.48) στο αποτέλεσμα και χρησιμοποιώντας τον ταυτοτικό τελεστή και τον τελεστή παραγώγισης έχουμε,

$$\frac{2\lambda+\delta}{c}I-\square\ \ g_\delta\ u\ =\frac{\lambda}{c}\ \frac{2\lambda+\delta}{c}I-\square\ \ \sigma_1\ u\ +\lambda\frac{\theta}{c}\ \frac{\delta}{c}I-\square\ \ \sigma_2\ u\ 0,$$

που είναι ίσο με την εξίσωση (3.36).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 3.2 *Αν $\theta=0$, η εξίσωση (3.36) ισοδυναμεί με την ολοκληροδιαφορική εξίσωση $m_\delta(u)$ όπου Χ και W είναι ανεξάρτητες όπως και στο κλασικό μοντέλο κινδύνου σύνθετης Poisson.*

3.5 Ο μετασχηματισμός *Laplace* της $m_\delta(u)$

Χρησιμοποιούμε την ολοκληροδιαφορική εξίσωση (3.36) για να βρούμε τον μετασχηματισμό *Laplace* της $m_\delta(u)$ στηριζόμενοι στην παρακάτω πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.4 *Ο μετασχηματισμός Laplace της $m_\delta(u)$ δίνεται από τον τύπο*

$$m_\delta^*(s) = \frac{\beta_{1,\delta}^*(s) + \beta_{2,\delta}^*(s)}{h_{1,\delta}^*(s) - h_{2,\delta}^*(s)}, \tag{3.49}$$

όπου $\beta_{2,\delta}^*(s)$ είναι ένα πολυώνυμο 1^ου^ βαθμού, με

$$\beta_{2,\delta}^*(s) = -\sum_{j=1}^{2} \beta_{1,\delta}^*(\rho_j) \prod_{k=1,k\neq j}^{2} \frac{s-\rho_k}{\rho_j-\rho_k}, \tag{3.50}$$

και

$$\beta_{1,\delta}^*(s) = \frac{\lambda}{c}\left(\frac{2\lambda+\delta}{c} - s\right) w_1^*(s) + \theta\frac{\lambda}{c}\left(\frac{\delta}{c} - s\right) w_2^*(s). \tag{3.51}$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι,

$$h_{1,\delta}^*(s) = \left(\frac{\delta+\lambda}{c} - s\right)\left(\frac{\delta+2\lambda}{c} - s\right), \tag{3.52}$$

και

$$h_{2,\delta}^*(s) = \frac{\lambda}{c}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c} - s\right) f_X^*(s) + \theta\frac{\lambda}{c}\left(\frac{\delta}{c} - s\right) h_X^*(s). \tag{3.53}$$

Απόδειξη: Ορίζουμε

$$d(u) = \left(\frac{2\lambda+\delta}{c}I - □\right)\left(\frac{\lambda+\delta}{c}I - □\right) m_\delta(u)$$

$$-\frac{\lambda}{c}\left(\frac{2\lambda+\delta}{c}I - □\right)\sigma_1(u) - \theta\frac{\lambda}{c}\left(\frac{\delta}{c}I - □\right)\sigma_2(u). \tag{3.54}$$

Έπειτα παίρνουμε τον μετασχηματισμό *Laplace* και στις 2 πλευρές της (3.54) και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.37) - (3.40) βρίσκουμε ότι,

$$d^*(s) = \left(\frac{2\lambda+\delta}{c} - s\right)\left[\left(\frac{\lambda+\delta}{c} - s\right)m^*_\delta(s) - s m_\delta(0) - m_\delta^{□}(0)\right]$$

$$+\frac{3\lambda+2\delta}{c} m_\delta\ 0\ -\frac{\lambda}{c}\ \frac{2\lambda+\delta}{c} - s\ \ m^*{}_\delta\ s\ f_X^*\ s\ \ -\frac{\lambda}{c}\ \frac{2\lambda+\delta}{c} - s\ \ w_1^*\ s$$

$$-\frac{\lambda}{c} w_1\ 0\ \ -\theta\frac{\lambda}{c}\ \frac{\delta}{c} - s\ \ m^*{}_\delta\ s\ h_X^*\ s\ \ -\theta\frac{\lambda}{c}\ \frac{\delta}{c} - s\ \ w_2^*\ s\ \ -\theta\frac{\lambda}{c} w_2\ 0\ , \quad (3.55)$$

όπου $w_i^*\ s$ είναι ο μετασχηματισμός *Laplace* της $w_i\ x$ για $i = 1{,}2$. Υποθέτοντας ότι η εξίσωση (3.55) ισούται με 0, απομονώνουμε την $m^*{}_\delta\ s$

$$m_\delta^*\ s\ = \frac{\beta_{1,\delta}^*\ s\ + \beta_{2,\delta}^*\ s}{h_{1,\delta}^*\ s\ - h_{2,\delta}^*\ s}, \quad (3.56)$$

όπου $\beta_{1,\delta}^*\ s$, $h_{1,\delta}^*\ s$, $h_{2,\delta}^*\ s$ δίνονται από τις εξισώσεις (3.51),(3.52),(3.53) αντίστοιχα. Ο όρος

$$\beta_{2,\delta}^*\ s\ = \ s - \frac{3\lambda+2\delta}{c}\ \ m_\delta\ 0\ + m_\delta^{\square}\ 0\ + \frac{\lambda}{c} w_1\ 0\ + \theta\frac{\lambda}{c} w_2\ 0$$

(3.57)

στην (3.56) είναι ένα πολυώνυμο 1[ου] βαθμού ή μικρότερου. Μέσω των *ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ 3.1* και *3.2*, ο παρονομαστής της (3.56) έχει δύο ρίζες ρ_j, *j*= 1,2. Αυτές οι ρίζες πρέπει να είναι και ρίζες του αριθμητή της (3.56). Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της παρεμβολής του *Lagrange* η εξίσωση (3.57) μπορεί να ξαναγραφτεί,

$$\beta_{2,\delta}^*\ s\ = - \ {}_{j=1}^{2} \beta_{1,\delta}^*\ \rho_j \quad {}_{k=1,k\neq j}^{2} \frac{s-\rho_k}{\rho_j-\rho_k}.$$

Στο επόμενο πόρισμα, παραθέτουμε μία άμεση έκφραση της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής όταν το αρχικό πλεόνασμα είναι 0.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.1 *Μπορούμε να ξαναγράψουμε την $m_\delta(u)$ σε όρους w_1^* και w_2^*,*

$$m_\delta\ 0\ = \frac{\lambda}{c}\ \frac{\frac{2\lambda+\delta}{c} - \rho_1\ w_1^*(\rho_1) - \frac{2\lambda+\delta}{c} - \rho_2\ w_1^*(\rho_2)}{\rho_2 - \rho_1} + \theta\,\frac{\frac{\delta}{c} - \rho_1\ w_2^*\ \rho_1\ - \frac{\delta}{c} - \rho_2\ w_2^*\ \rho_2}{\rho_2 - \rho_1}\ . \quad (3.58)$$

Απόδειξη: Αφού ρ_1 και ρ_2 είναι οι ρίζες του παρονομαστή της (3.49), πρέπει να είναι και ρίζες του αριθμητή. Βρίσκουμε τις 2 ακόλουθες γραμμικές εξισώσεις για $m_\delta\ \mathrm{u}\ , m_\delta^{\square}\ u$,

$$-\frac{\lambda}{c}\ \frac{2\lambda+\delta}{c} - \rho_i\ \ w_1^*\ \rho_i\ \ -\theta\frac{\lambda}{c}\ \frac{\delta}{c} - \rho_i\ \ w_2^*\ \rho_i$$

$=$

$$\rho_i - \frac{3\lambda+2\delta}{c}\ m_\delta\ 0\ +\ m_\delta^{\square}\ 0\ +\frac{\lambda}{c}w_1\ 0\ +\theta\frac{\lambda}{c}w_2\ 0\ . \qquad (3.59)$$

για $i = 1{,}2$. Λύνοντας τις 2 γραμμικές εξισώσεις στην (3.59) οδηγούμαστε στην (3.58).

3.6 Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (*defective renewal equation*)

Με την βοήθεια του τελεστή T_r των *Dickson-Hipp* όπως έχει οριστεί στο προηγούμενο κεφάλαιο συνεχίζουμε βρίσκοντας την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των *Gerber-Shiu* $m_\delta(u)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.5 *Ο μετασχηματισμός Laplace της $m_\delta(u)$ δίνεται από τον τύπο,*

$$m_\delta^*\ s\ = \frac{T_s T_{\rho_1} T_{\rho_2}\beta_{1,\delta}(0)}{1 - T_s T_{\rho_1} T_{\rho_2} h_{2,\delta}(0)}. \qquad (3.60)$$

Απόδειξη: Σημειώνουμε ότι ρ_j, $j = 1{,}2$ είναι οι λύσεις του παρονομαστή της εξίσωσης (3.49), ενώ αποτελούν λύσεις και του αριθμητή της. Μέσω του θεωρήματος της παρεμβολής του *Lagrange* και χρησιμοποιώντας τον τελεστή T_r βρίσκουμε μία εναλλακτική έκφραση για τον αριθμητή $\beta_{1,\delta}^*\ s\ + \beta_{2,\delta}^*\ s$ της (3.49),

$$\beta_{1,\delta}^*\ s\ + \beta_{2,\delta}^*\ s\ = \tau\ s\ \ \frac{\beta_{1,\delta}^*\ s}{\tau\ s} - \sum_{j=1}^{2} \frac{\beta_{1,\delta}^*\ \rho_j}{s-\rho_j\ \tau\ \rho_j}\ = \tau\ s\ T_s T_{\rho_1} T_{\rho_2}\beta_{1,\delta}(0), \qquad (3.61)$$

όπου $\tau\ s\ =\ s-\rho_1\ \ s-\rho_2\ .$

Παρομοίως, βρίσκουμε μία εναλλακτική έκφραση για τον παρονομαστή $h_{1,\delta}^*\ s\ - h_{2,\delta}^*\ s$ της (3.49). Γνωρίζουμε ότι,

$$h_{1,\delta}^*\ \rho_j\ = h_{2,\delta}^*\ \rho_j\ ,$$

για $j = 1{,}2$. Από την εξίσωση (3.52), $h_{1,\delta}^*$ είναι ένα πολυώνυμο 2ου βαθμού στην s. Χρησιμοποιώντας πάλι το θεώρημα της παρεμβολής του *Lagrange* έχουμε,

$$h^*_{1,\delta}(s) = h^*_{1,\delta}(0)\prod_{k=1}^{2}\frac{(s-\rho_k)}{(-\rho_k)} + s\sum_{j=1}^{2}\frac{h^*_{1,\delta}(\rho_j)}{\rho_j}\prod_{k=1,k\neq j}^{2}\frac{s-\rho_k}{\rho_j-\rho_k}, \tag{3.62}$$

που σημαίνει ότι χρησιμοποιώντας τον τελεστή T_r των *Dickson-Hipp* και την 8^{η} ιδιότητά του, έχουμε ότι,

$$h^*_{1,\delta}(s) - h^*_{2,\delta}(s) = h^*_{1,\delta}(0)\frac{\tau(0)}{\tau(s)} + s\sum_{j=1}^{2}\frac{h^*_{2,\delta}(\rho_j)\,\tau(s)}{\rho_j(s-\rho_j)\tau(\rho_j)} - h^*_{2,\delta}(s)$$

$$= \tau(s)\left[\frac{h^*_{1,\delta}(0)}{\tau(0)} + \sum_{j=1}^{2}\frac{(s-\rho_j+\rho_j)\,h^*_{2,\delta}(\rho_j)}{\rho_j(s-\rho_j)\tau(\rho_j)} - \frac{h^*_{2,\delta}(s)}{\tau(s)}\right]$$

$$= \tau(s)\left[\frac{h^*_{1,\delta}(0)}{\tau(0)} - \sum_{j=1}^{2}\frac{h^*_{1,\delta}(\rho_j)}{(-\rho_j)\tau(\rho_j)} + \sum_{j=1}^{2}\frac{h^*_{2,\delta}(\rho_j)}{(s-\rho_j)\tau(\rho_j)} - \frac{h^*_{2,\delta}(s)}{\tau(s)}\right]$$

$$= \tau(s)\left[\frac{h^*_{1,\delta}(0)}{\tau(0)} - \sum_{j=1}^{2}\frac{h^*_{1,\delta}(\rho_j)}{(-\rho_j)\tau(\rho_j)} + T_sT_{\rho_1}T_{\rho_2}h_{2,\delta}(0)\right]. \tag{3.63}$$

Επίσης ισχύει,

$$\frac{h^*_{1,\delta}(0)}{\tau(0)} + \sum_{j=1}^{2}\frac{h^*_{1,\delta}(\rho_j)}{\rho_j\tau(\rho_j)} = \frac{\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)\left(\frac{2\lambda+\delta}{c}\right)}{\rho_1\rho_2} + \sum_{j=1}^{2}\frac{\left(\frac{\lambda+\delta}{c}-\rho_j\right)\left(\frac{2\lambda+\delta}{c}-\rho_j\right)}{\rho_j\tau(\rho_j)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)\left(\frac{2\lambda+\delta}{c}\right)}{\rho_1\rho_2} + \frac{\rho_1\left(\frac{\lambda+\delta}{c}-\rho_2\right)\left(\frac{2\lambda+\delta}{c}-\rho_2\right) - \rho_2\left(\frac{\lambda+\delta}{c}-\rho_1\right)\left(\frac{2\lambda+\delta}{c}-\rho_1\right)}{\rho_1\rho_2(\rho_2-\rho_1)} \tag{3.64}$$

$$= 1.$$

Αντικαθιστώντας την (3.64) στην εξίσωση (3.63) βρίσκουμε ότι,

$$h^*_{1,\delta}(s) - h^*_{2,\delta}(s) = \tau(s)\left[1 - T_sT_{\rho_1}T_{\rho_2}h_{2,\delta}(0)\right]. \tag{3.65}$$

Ολοκληρώνοντας, αντικαθιστούμε τις (3.61) και (3.65) στην εξίσωση (3.49) και βρίσκουμε την (3.60).

Στην επόμενη πρόταση παρουσιάζουμε την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των *Gerber-Shiu* $m_\delta(u)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.6 *Η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu* $m_\delta(u)$ *ικανοποιεί την ακόλουθη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.*

$$m_\delta(u) = \int_0^u m_\delta(u-y)\,\mu_\delta(y)\,dy + \eta_\delta(u), \tag{3.66}$$

όπου,

$$\mu_\delta(y) = T_{\rho_1}T_{\rho_2}h_{2,\delta}(u), \tag{3.67}$$

$$\eta_\delta(u) = T_{\rho_1}T_{\rho_2}\beta_{1,\delta}(u). \tag{3.68}$$

Η (3.66) μπορεί να γραφτεί και

$$m_\delta(u) = \frac{1}{1+\kappa_\delta}\int_0^u m_\delta(u-y)\,\theta_\delta(y)\,dy + \frac{1}{1+\kappa_\delta}G_\delta(u), \tag{3.69}$$

όπου η κ_δ *ορίζεται ως εξής,*

$$\frac{1}{1+\kappa_\delta} = T_0T_{\rho_1}T_{\rho_2}h_{2,\delta}(0) = 1 - \frac{\delta}{c}\frac{\frac{\lambda+\delta}{c}}{\rho_1\rho_2} < 1.$$

Επίσης ισχύει ότι,

$$G_\delta(u) = (1+\kappa_\delta)\,\eta_\delta(u), \tag{3.70}$$

και

$$\theta_\delta(y) = (1+\kappa_\delta)\,\mu_\delta(y) \tag{3.71}$$

που αποτελεί μία γνήσια συνάρτηση πυκνότητας.

Απόδειξη: Ορίζοντας τις $\mu_\delta(y)$ και $\eta_\delta(u)$ στις εξισώσεις (3.67) και (3.68) αντίστοιχα, βρίσκουμε την (3.66) μέσω της (3.60). Οπότε βρίσκουμε ότι,

$$\int_0^u \mu_\delta(y)\,dy = T_0T_{\rho_1}T_{\rho_2}h_{2,\delta}(0) = \frac{h^*_{2,\delta}(0)}{\rho_1\rho_2} + \sum_{j=1}^{2}\frac{h^*_{1,\delta}(\rho_j)}{\rho_j\tau(\rho_j)}. \tag{3.72}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.64), έχουμε

$$\int_0^u \mu_\delta(y)\,dy = 1 - \frac{h^*_{1,\delta}(0)}{\tau(0)} + \frac{h^*_{2,\delta}(0)}{\rho_1\rho_2}. \tag{3.73}$$

Αφού $\tau(0) = \rho_1\rho_2$. Η (3.73) γίνεται.

$$\int_0^u \mu_\delta(y)\,dy = 1 - \frac{h^*_{1,\delta}(0) - h^*_{2,\delta}(0)}{\rho_1\rho_2} = 1 - \frac{\delta}{c}\frac{\frac{2\lambda+\delta}{c}}{\rho_1\rho_2}. \tag{3.74}$$

Αφού $\frac{\delta}{c}\frac{\frac{2\lambda+\delta}{c}}{\rho_1\rho_2} > 0$, βρίσκουμε ότι,

$$\frac{1}{1+\kappa_\delta} < \int_0^u \mu_\delta(y)\,dy < 1.$$

Άρα η $\theta_\delta(y)$ όπως ορίστηκε στην (3.71) αποτελεί μία γνήσια συνάρτηση πυκνότητας.

Στην ακόλουθη πρόταση θεωρούμε την περίπτωση όπου $w(x_1, x_2) = 1$. Πιο συγκεκριμένα, βρίσκουμε την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου της χρεοκοπίας $\boldsymbol{\varphi_T}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.7 *Ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου της χρεοκοπίας* $\boldsymbol{\varphi_T}$ *ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση,*

$$\boldsymbol{\varphi_T}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{1+\kappa_\delta}\int_0^u \boldsymbol{\varphi_T}(u-y)\,\theta_\delta(y)\,dy + \frac{1}{1+\kappa_\delta}\int_u^\infty \theta_\delta(y)\,dy, \tag{3.75}$$

και παίρνει την ακόλουθη μορφή για την σύνθετη γεωμετρική κατανομή:

$$\boldsymbol{\varphi_T}(\boldsymbol{u}) = \frac{\kappa_\delta}{1+\kappa_\delta}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\kappa_\delta}\right)^j \overline{V_\delta^{*j}}(u), \quad u \geq 0, \tag{3.76}$$

όπου V_δ^{*j} *είναι η συνάρτηση επιβίωσης της* $\boldsymbol{j}$*-οστής συνέλιξης της σ.π.π.* θ_δ.

Απόδειξη: Αν $w(x_1, x_2) = 1$, τότε οι μετασχηματισμοί *Laplace* των $\boldsymbol{w_1}$ και $\boldsymbol{w_2}$ (ορισμένες στις εξισώσεις (3.39) και (3.40) αντίστοιχα) δίνονται από τους τύπους,

$$w_1^*(s) = \frac{1 - f_X^*(s)}{s} \tag{3.77}$$

και

$$w_2^*(s) = \frac{-h_X^*(s)}{s}. \tag{3.78}$$

Αντικαθιστώντας τις (3.77) και (3.78) στην εξίσωση (3.51) βρίσκουμε ότι,

$$\beta_{1,\delta}^*(s) = \frac{\frac{\lambda}{c}\left(\frac{2\lambda+\delta}{c} - s\right) - h_{2,\delta}^*(s)}{s}. \tag{3.79}$$

Από την εξίσωση (3.68) και χρησιμοποιώντας την 8η ιδιότητά του τελεστή T_r των *Dickson-Hipp*, έχουμε ότι,

$$s\eta_\delta^*(s) = sT_{\rho_1}T_{\rho_2}\beta_{1,\delta}(0) = s\left(\frac{\beta_{1,\delta}^*(s)}{\tau(s)} - \sum_{j=1}^{2}\frac{\beta_{1,\delta}^*(\rho_j)}{(s-\rho_j)\tau(\rho_j)}\right). \tag{3.80}$$

Δοθέντος της εξίσωσης (3.79), η (3.80) ξαναγράφεται

$$\begin{aligned} s\eta_\delta^*(s) &= \frac{\frac{\lambda}{c}\left(\frac{2\lambda+\delta}{c} - s\right)}{\tau(s)} - \frac{h_{2,\delta}^*(s)}{\tau(s)} - s\sum_{j=1}^{2}\frac{\frac{\lambda}{c}\left(\frac{2\lambda+\delta}{c} - \rho_j\right) - h_{2,\delta}^*(\rho_j)}{\rho_j(s-\rho_j)\tau(\rho_j)} \\ &= \frac{\frac{\lambda}{c}\left(\frac{2\lambda+\delta}{c} - s\right)}{\tau(s)} - s\sum_{j=1}^{2}\frac{\frac{\lambda}{c}\left(\frac{2\lambda+\delta}{c} - \rho_j\right)}{\rho_j(s-\rho_j)\tau(\rho_j)} + \sum_{j=1}^{2}\frac{h_{2,\delta}^*(\rho_j)}{\rho_j\tau(\rho_j)} - sT_{\rho_1}T_{\rho_2}h_{1,\delta}(0). \end{aligned} \tag{3.81}$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα προκύπτει από την χρησιμοποίηση της 8ης ιδιότητά του τελεστή T_r των *Dickson-Hipp*.

Ο 2ος όρος της εξίσωσης (3.81) δοθέντος ότι $\frac{s}{\rho_j(s-\rho_j)} = \frac{1}{s-\rho_j} - \frac{1}{\rho_j}$ ισούται με,

$$s\sum_{j=1}^{2}\frac{\frac{\lambda}{c}\left(\frac{2\lambda+\delta}{c}-\rho_j\right)}{\rho_j\,(s-\rho_j)\,\tau(\rho_j)}=\frac{\lambda}{c}\left[\sum_{j=1}^{2}\frac{\frac{2\lambda+\delta}{c}-\rho_j}{\rho_j\tau(\rho_j)}+\sum_{j=1}^{2}\frac{\frac{2\lambda+\delta}{c}-\rho_j}{(s-\rho_j)\,\tau(\rho_j)}\right]$$

$$=\frac{\lambda}{c}\left[\begin{array}{c}\frac{2\lambda+\delta}{c}\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\rho_j\tau(\rho_j)}-\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\tau(\rho_j)}\\ +\frac{2\lambda+\delta}{c}\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{(s-\rho_j)\,\tau(\rho_j)}\\ +\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\tau(\rho_j)}\\ -s\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{(s-\rho_j)\,\tau(\rho_j)}\end{array}\right], \tag{3.82}$$

Χρησιμοποιώντας το *ΛΗΜΜΑ 1* για τον τελεστή των *Dickson-Hipp* στη σελ.395 των *Li & Garrido (2004)*, και κάνοντας απλοποιήσεις η (3.82) γίνεται,

$$s\sum_{j=1}^{2}\frac{\frac{\lambda}{c}\left(\frac{2\lambda+\delta}{c}-\rho_j\right)}{\rho_j\,(s-\rho_j)\,\tau(\rho_j)}=\frac{\lambda}{c}\left(-\frac{2\lambda+\delta}{c}\frac{1}{\tau(0)}+\frac{2\lambda+\delta}{c}\frac{1}{\tau(s)}-\frac{s}{\tau(s)}\right). \tag{3.83}$$

Εισάγοντας την εξίσωση (3.83) στην (3.81) και δοθέντος της (3.74), βρίσκουμε ότι,

$$s\eta_\delta^*(s)=1-\frac{\delta}{c}\frac{\frac{2\lambda+\delta}{c}}{\rho_1\rho_2}-\mu_\delta^*(s)=\frac{1}{1+\kappa_\delta}-\mu_\delta^*(s). \tag{3.84}$$

Ο μετασχηματισμός *Laplace* της εξίσωσης (3.70) δίνεται από τον τύπο,

$$G_\delta^*(s)=(1+\kappa_\delta)\,\eta_\delta^*(s). \tag{3.85}$$

Αντικαθιστούμε την (3.84) στην εξίσωση (3.85) και βρίσκουμε ότι,

$$sG_\delta^*(s)=(1+\kappa_\delta)\left(\frac{1}{1+\kappa_\delta}-\mu_\delta^*(s)\right)=1-(1+\kappa_\delta)\,\mu_\delta^*(s)=1-\theta_\delta^*(s). \tag{3.86}$$

Από την εξίσωση (3.66), έχουμε

$$\varphi_T^*(s)=\frac{G_\delta^*(s)}{1+\kappa_\delta-\theta_\delta^*(s)}. \tag{3.87}$$

Εισάγοντας την εξίσωση (3.86) στην (3.87) βρίσκουμε ότι,

$$\varphi_T^*(s) = \frac{\frac{1-\theta_\delta^*(s)}{s}}{1+\kappa_\delta-\theta_\delta^*(s)}, \tag{3.88}$$

συνεχίζουμε κάνοντας τροποποιήσεις στην (3.88),

$$(1+\kappa_\delta)\varphi_T^*(s) = \theta_\delta^*(s)\varphi_T^*(s) + \frac{1-\theta_\delta^*(s)}{s\left(1+\kappa_\delta-\theta_\delta^*(s)\right)}, \tag{3.89}$$

και παίρνοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς *Laplace* στην (3.89) καταλήγουμε στην εξίσωση (3.75).

Στο παρακάτω πόρισμα παρουσιάζουμε έναν τύπο για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου της χρεοκοπίας δοθέντος ότι το αρχικό πλεόνασμα είναι μηδενικό.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.2 *Ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου της χρεοκοπίας για μηδενικό αρχικό πλεόνασμα* $\boldsymbol{\varphi_T(0)}$ *δίνεται από τον τύπο,*

$$\boldsymbol{\varphi_T(0) = 1 - \frac{\delta}{c}\frac{\frac{2\lambda+\delta}{c}}{\rho_1\rho_2}}. \tag{3.90}$$

Απόδειξη: Ορίζοντας $\boldsymbol{u=0}$ στην εξίσωση (3.75) επιτυγχάνουμε το παραπάνω αποτέλεσμα.

3.7 Εκθετικά κατανεμημένες αποζημιώσεις

Σε αυτή την ενότητα βρίσκουμε έναν τύπο για την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu $m_\delta(u)$ υποθέτοντας ότι η συνάρτηση ποινής $w(x,y)$ είναι ίση με την συνάρτηση $w(y)$ του ελλείμματος την στιγμή της χρεοκοπίας. Για παράδειγμα, όταν $w(y)=y$ και $\delta>0$, η $m_\delta(u)$ αντιστοιχεί στην αναμενόμενη παρούσα αξία του ελλείμματος την στιγμή της χρεοκοπίας. Επίσης, θεωρούμε ότι η τα ατομικά μεγέθη ζημιάς είναι εκθετικά κατανεμημένα, με

- σ.κ. $F_X(x) = 1-e^{-\alpha x}$,
- σ.π.π. $f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x}$,
- και μετασχηματισμό *Laplace της* $f_X(x)$, $f_X^*(s) = \alpha(\alpha+s)^{-1}$.

Επίσης ισχύει ότι,

$$h_X(x) = 2\alpha e^{-2\alpha x} - \alpha e^{-\alpha x}, \qquad x \geq 0, \tag{3.91}$$

και

$$h_X^*(s) = \frac{2\alpha}{s+2\alpha} - \frac{\alpha}{s+\alpha}. \tag{3.92}$$

Επομένως οι εξισώσεις (3.39) και (3.40) γίνονται αντίστοιχα

$$w_1(u) = \alpha \int_u^{\infty} w(x-u)\, e^{-\alpha x} dx = \alpha e^{-\alpha u} \int_0^{\infty} w(v)\, e^{-\alpha v} dv = \alpha e^{-\alpha u} w^{\star}(\alpha) \tag{3.93}$$

και

$$w_2(u) = \alpha \int_u^{\infty} w(x-u)\left(2e^{-2\alpha x} - e^{-\alpha x}\right) dx = \alpha \int_0^{\infty} w(v)\left(2e^{-2\alpha(u+v)} - e^{-\alpha(u+v)}\right) dv$$

$$= 2\alpha e^{-2\alpha u} w^{\star}(2\alpha) - \alpha e^{-\alpha u} w^{\star}(\alpha), \tag{3.94}$$

όπου $w^*(s) = \int_0^{\infty} w(v)\, e^{-\alpha v} dv$, ο μετασχηματισμός *Laplace* της συνάρτησης $w(u)$.

Παίρνουμε τους μετασχηματισμούς *Laplace* στις εξισώσεις (3.93) και (3.94) και βρίσκουμε ότι,

$$w_1^{\star}(s) = \frac{\alpha}{\alpha+s} w^{\star}(\alpha) \tag{3.95}$$

και

$$w_2^{\star}(s) = \frac{2\alpha}{2\alpha+s} w^{\star}(2\alpha) - \frac{\alpha}{\alpha+s} w^{\star}(\alpha). \tag{3.96}$$

Γνωρίζουμε ότι ο παρονομαστής της εξίσωσης (3.49) έχει 2 ρίζες, ρ_1 και ρ_2, με θετικά πραγματικά μέρη. Δοθέντος της παραδοχής για την κατανομή της X, ο αριθμητής της (3.49) έχει επίσης 2 ρίζες $-R_1$ και $-R_2$ όπου $Re(-R_1)$, $Re(-R_2) > 0$.

Στην επόμενη πρόταση βρίσκουμε έναν τύπο για την $m_\delta(u)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.8 *Υποθέτοντας ότι οι ρίζες* $-R_j(\delta)$, $j = 1,2$ *είναι διακριτές και για* $w(x,y) = w(y)$, *μία κλειστή μορφή της* $m_\delta(u)$, $u \geq 0$, *δίνεται από τον τύπο,*

$$m_\delta(u) = \varsigma_1 e^{-R_1 u} + \varsigma_2 e^{-R_2 u}, \tag{3.97}$$

όπου

$$\varsigma_j = \frac{\xi_{1,\delta}(-R_j) + \xi_{2,\delta}(-R_j)}{l_{1,\delta}(0) - l_{2,\delta}(0)} \frac{\prod_{i=1}^{2} R_i}{\prod_{i=1,i\neq 1}^{2}(R_i - R_j)} \prod_{i=1}^{2} \frac{\rho_i}{R_j + \rho_i}, \quad j = 1,2 \tag{3.98}$$

με

$$\xi_{1,\delta}(s) = \frac{\alpha\lambda}{c}(2\alpha + s)\left(\frac{2\lambda+\delta}{c} - s\right)\left(w^\star(\alpha) + \theta\frac{\lambda}{c}\left(\frac{\delta}{c} - s\right)\right)\left(2\alpha w^\star(2\alpha)(\alpha + s) - \alpha w^\star(\alpha)(2\alpha + s)\right), \tag{3.99}$$

$$\xi_{2,\delta}(s) = (\alpha + s)(2\alpha + s)\beta_2(s), \tag{3.100}$$

$$l_{1,\delta}(s) = (\alpha + s)(2\alpha + s)\left(\frac{\lambda+\delta}{c} - s\right)\left(\frac{2\lambda+\delta}{c} - s\right), \tag{3.101}$$

και

$$l_{2,\delta}(s) = \frac{\alpha\lambda}{c}\left(\frac{2\lambda+\delta}{c} - s\right)(2\alpha + s)\left(\theta\frac{\lambda\alpha}{c}s\left(\frac{\delta}{c} - s\right)\right). \tag{3.102}$$

Απόδειξη: Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.95) και (3.96) στην (3.49) και πολλαπλασιάζοντας τον παρονομαστή και τον αριθμητή της (3.49) με $(\alpha + s)(2\alpha + s)$ βρίσκουμε ότι,

$$m_\delta^\star(s) = \frac{\xi_{1,\delta}(s) + \xi_{2,\delta}(s)}{l_{1,\delta}(s) - l_{2,\delta}(s)}, \tag{3.103}$$

όπου $\xi_{1,\delta}(s)$, $\xi_{2,\delta}(s)$, $l_{1,\delta}(s)$, $l_{2,\delta}(s)$ ορίζονται στην πρόταση.

Γνωρίζουμε ότι $l_{1,\delta}(s) - l_{2,\delta}(s)$ είναι ένα πολυώνυμο 4ου βαθμού που έχει 4 ρίζες ρ_j, με $Re(\rho_j) > 0$, για $j = 1,2$ και $-R_j$, $Re(R_j) > 0$, για $j = 1,2$.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της παρεμβολής του *Lagrange* στον παρονομαστή και στον αριθμητή της (3.103) βρίσκουμε ότι,

$$\xi_{1,\delta}(s) + \xi_{2,\delta}(s) = \sum_{j=1}^{2}\left(\xi_{1,\delta}(-R_j) + \xi_{2,\delta}(-R_j)\right)\prod_{k=1}^{2}\frac{s - \rho_k}{R_j + \rho_k}\prod_{k=1,k\neq j}^{2}\frac{s + \rho_k}{-R_j + R_k} \tag{3.104}$$

και

$$l_{1,\delta}(s) - l_{2,\delta}(s) = \left(l_{1,\delta}(0) - l_{2,\delta}(0)\right)\prod_{j=1}^{2}\frac{s - \rho_j}{\rho_j}\prod_{j=1}^{2}\frac{s + R_j}{R_j}. \tag{3.105}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.104) και (3.105) με την (3.103) καταλήγουμε ότι,

$$m_{\delta}^{\star}(s) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\varsigma_j}{s+R_j}, \qquad (3.106)$$

όπου ς_1 και ς_2 ορίζονται στην πρόταση.

Ολοκληρώνοντας, αν υποθέσουμε την ειδική περίπτωση κατά την οποία ,$w(y) = 1$ $\mu\varepsilon\ w^{\star}(s) = \frac{1}{s}$ ο τύπος

$$\boldsymbol{\varphi_T(u)} = E[e^{-\delta T} 1_{\{T<\infty\}} \mid U(0) = u].$$

Μπορεί να βρεθεί από τη εξίσωση (3.97), με

$$\xi_{1,\delta}(s) = \frac{\lambda}{c}(2\alpha + s)\left(\frac{2\lambda+\delta}{c} - s\right) - \theta\alpha\frac{\lambda}{c}\left(\frac{\delta}{c} - s\right). \qquad (3.107)$$

Ακολουθεί αριθμητικό παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1 *Για αριθμητικά αποτελέσματα θεωρούμε ότι τόσο η τ.μ του ποσού της αποζημίωσης όσο και η τ.μ του ενδιάμεσου χρόνου είναι εκθετικά κατανεμημένες με μέσο 1 (δηλ. $X \sim Exp(1)$ και $W \sim Exp(1)$).Ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρων c=1.5 που σημαίνει ότι το σχετικό περιθώριο κινδύνου είναι* 50%. *Παραθέτουμε αναλυτικές εκφράσεις για την πιθανότητα χρεοκοπίας ψ(u)(μέσω του προγράμματος Maple) σε συνάρτηση με το αρχικό πλεόνασμα u (u ≥ 0) και για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου θ.*

- *για* $\theta = -1$,

  $\psi(u) = 0.7201508967e^{-0.2687389645u} - 0.01854637723e^{-2.220708719u}$,

- *για* $\theta = -0.5$,

  $\psi(u) = 0.6957948813e^{-0.2976043940u} - 0.01047590296e^{-2.114760590u}$,

- *για* $\theta = 0$

$$\psi(u) = \frac{2}{3} e^{-\frac{1}{3}u},$$

- $για\ \ \theta = 0.5,$

$$\psi(u) = 0.6311261756e^{-0.3788264025u} + 0.0139964021e^{-1.873562242u},$$

- $για\ \ \theta = 1,$

$$\psi(u) = 0.5865437312e^{-0.4391578659u} + 0.03347620593e^{-1.7304941681u}.$$

είναι εμφανές ότι η παράμετρος εξάρτησης θ έχει επιρροή στις πιθανότητες χρεοκοπίας.

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε την επιρροή της εξάρτησης ανάμεσα στις τ.μ. X και W *ως έπεται. Όταν η σχέση εξάρτησης είναι θετική (αρνητική), η πιθανότητα να υπάρχει μία σημαντική αποζημίωση αυξάνεται καθώς ο χρόνος που παρέρχεται από την τελευταία αποζημίωση αυξάνεται (μειώνεται). Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα η ασφαλιστική εταιρία να έχει επαρκές εισόδημα από τα ασφάλιστρα για να πληρώσει την αποζημίωση είναι μεγαλύτερη (μικρότερη) και η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι μικρότερη όταν υπάρχει θετική (αρνητική) σχέση. Η επιρροή στις πιθανότητες χρεοκοπίας είναι πιο έντονη όταν η θετική (αρνητική) σχέση γίνεται πιο δυνατή.*

Ακολουθούν αναλυτικά αποτελέσματα για την αναμενόμενη προεξοφλημένη αξία του ελλείμματος την στιγμή της χρεοκοπίας,

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T}|U(T)|\, I(T < \infty) \mid U(0) = u\,]$$

υποθέτοντας ότι $\delta = 5\%$ *για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου εξάρτησης θ:*

- $για\ \ \theta = -1,$

$$m_\delta(u) = 0.6997443091e^{-0.3206647526u} + 0.03664826823e^{-2.219872885u},$$

- $για\ \ \theta = -0.5,$

$m_\delta(u) = 0.6599098319e^{-0.3500911630u} + 0.01714786296e^{-2.114343900u}$,

- *για* $\theta = 0$

$$m_\delta(u) = 0.6137092190e^{-0.3862907812u},$$

- *για* $\theta = 0.5$,

$m_\delta(u) = 0.5591165404e^{-0.4321500210u} - 0.01344088192e^{-1.873928948u}$,

- *για* $\theta = 1$,

$m_\delta(u) = 0.4928389831e^{-0.4927941702u} - 0.02070699597e^{-1.731037829u}$.

Η παράμετρος εξάρτησης θ έχει μία παρόμοια επιρροή στην αναμενόμενη προεξοφλημένη αξία του ελλείμματος την στιγμή της χρεοκοπίας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.1 *Στο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1, παρατηρήσαμε ότι για μία συγκεκριμένη τιμή του αρχικού πλεονάσματος u, η πιθανότητα χρεοκοπίας μειώνεται (αυξάνεται) καθώς η παράμετρος εξάρτησης θ αυξάνεται (μειώνεται). Αυτή η συμπεριφορά παρατηρήθηκε επίσης στους Bouldreault et al. (2006) και Marceau (2009).Ωστόσο, οι Albrecher & Teugels (2006) και Bouldreault et al. (2006) εξέτασαν την επιρροή της εξάρτησης ανάμεσα στις τ.μ. X και W στον συντελεστή προσαρμογής Lundberg, και συμπέραναν την ασυμπτωτική συμπεριφορά της πιθανότητας χρεοκοπίας. Αποδεικνύεται από τους Albrecher & Teugels (2006) ότι αν X και W είναι θετικά (αρνητικά) τεταρτημοριακά εξαρτώμενες, τότε ο συντελεστής προσαρμογής Lundberg που σχετίζεται με αυτήν την υπόθεση είναι μεγαλύτερος από το συντελεστή προσαρμογής Lundberg όπου οι τ.μ. X και W ανεξάρτητες. Αυτό το αποτέλεσμα γενικεύεται από τον Bouldreault et al. (2006) για τ.μ. X και W που σχετίζονται θετικά (αρνητικά).*

Βιβλιογραφία

- Albrecher, H. & Boxma, O. J. (2004). A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals. *Insurance:Mathematics and Economics 35, 245-254.*
- Albrecher, H. & Teugels, J. (2006). Exponential behavior in the presence of dependence in risk theory. *Journal of Applied Probability 43 (1), 257-273.*
- Bouldreault, M., Cossette, H., Landriault, D., and Marceau, E. On a risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes. *Scandinavian Actuarial Journal 2006, 5, 265-285.*
- Bouye, E., Nikeghbali, A., Riboulet, G. & Roncalli, T. (2000). *Copulas for finance. A reading guide and some applications.* Crédit Lyonnais: Rapport technique du Groupe de recherche opérationnelle.
- Butzer, Paul L. & Hubert Berens. *Semi-groups of operators and approximation;* Berlin, New York (etc.) Springer-Verlag, (1967).
- Cossette, H., Marceau, E., and Marri, F. Analysis of ruin measures for the classical compound Poisson risk model with dependence. *Scandinavian Actuarial Journal 2010, 3, 221-245.*
- Denuit, M. Genest, C. & Marceau, E. (2002). Criteria for the stochastic ordering of random sums, with actuarial applications. *Scandinavian Actuarial Journal, 3-16.*
- Dickson, D. C. M. & Hipp, C. (2001). On the time to ruin for Erlang(2) risk processes. *Insurance: Mathematics and Economics 29, 333-344.*
- Feller, S. E., & R. W. Pastor (1996). On simulating lipid bilayers with an applied surface tension: periodic boundary conditions and undulations.
- Frees, E., & Valdez E. (1998). Understanding relationships using copulas. *North American Actuarial Journal 2, 1-25.*
- Gebizlioglou, O. L. & Yagcia, B. (2008). Tolerance intervals for quantiles of bivariate risks and risk measurement. *Insurance:Mathematics and Economics 42(3), 1022-1027.*
- Geluk, J. & Tang, T. (2008). Asymptotic tail probabilities of sums of dependent subexponential random variables. *Journal of Theoretical Probability.* In press.
- Genest, C. (1987). Frank’s family of bivariate distributions, *Biometrika, 74,549-555.*

- Gerber H. U. & Landry B. (1998). On the discounted penalty at ruin in a jump-diffusion and the perpetual put option. *Insurance: Mathematics and Economics 22, 263-276.*
- Gerber H. U. & Shiu E.S.W (1998). On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal 1, 48-78.*
- Gerber H. U. & Shiu E.S.W. (1999). From ruin theory to pricing reset guarantees and perpetual put options. *Insurance: Mathematics and Economics 24, 3-14.*
- Huang, J. S. & Kotz, S. (1984). Correlation structure in iterated Farlie—Gumbel--Morgenstern distribution, *Biometrika, 71, 633-637.*
- Jonhson, L. & Kotz, S. (1975). A multivariate hazard rate, *Journal of Multivariate Analysis*, 5, 53-66.
- Jonhson, L. & Kotz, S. (1977). On some generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern distributions, II, *Communications in Statistics – Theory and Methods, 6, 485-496.*
- Juri, A. (2002). Supermodular order and Lundberg exponents. *Scandinavian Actuarial Journal, 17-36.*
- Klimenok, V. (2001). On the modification of Rouche's theorem for the queuing theory problems. *Queuing Systems 38,431-434.*
- Li, S. & Garrido, J. (2004) . On ruin for the Erlang(n) risk process. *Insurance: Mathematics and Economics 34, 391-408.*
- Li, S. & Garrido, J. (2005) . On a general class of renewal risk process: analysis of the Gerber-Shiu function. *Advances in Applied Probability 37, 836-856.*
- Maccit, C., Stabile, G. & Torrisi, G. L. (2005). Lundberg parameters for non standard risk processes. . *Scandinavian Actuarial Journal, 417-432.*
- Mardia, K. V. (1970). Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications.
- Marshall, A. W. & Olkin, I. (1988). Families of multivariate distributions. *Journal of the American Statistical Association 83, 834-841.*
- Muller, A. & Pflug, G. (2001). Asymptotic ruin probabilities for risk processes with dependent increments. *Insurance: Mathematics and Economics 28, 381-392.*
- McNeil, A., Frey, R. & Embretchs, P. (2005). *Quantitative risk management.* Princeton, NJ: Princeton Press.
- Nelsen, R. B. (2006). *An introduction to copulas* (2nd ed). Springer Series in Statistics. New York: Springer-Verlag.
- Plackett, R. L. (1965). A class of bivariate distributions, *Journal of the American Statistical Association 60, 516-522.*

- Prieger, J. E. (2002). A flexible parametric selection model for non-normal data with application to health care usage. *Journal of Applied Econometrics* 17(4), 367-392.
- Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V. & Teugels, J. (1999). *Stohastic Processes for Insurance and Finance.* New York: Wiley.
- Schucany, P. (1978). Minimum distance and robust estimation.
- Tang, Q. & Vernik, R. (2007). The impact on ruin probabilities of the association structure among financial risks. *Statistic and Probability Lettters* 77, 1522-1525.
- Wang, S. (1998). Aggregation of correlated risk portfolios: models and algorithms. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society, Vol. LXXXV, 848-939.*
- Wikipedia. http://en.wikipedia.org/wiki/Rouch%C3%A9's_theorem.
- X. Sheldon Lin, Gordon E. Willmot. Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory.
- http://mathworld.wolfram.com/SklarsTheorem.html.
- http://planetmath.org/encyclopedia/LagrangeInterpolationFormula.html
- http://www.physics.upatras.gr/UploadedFiles/course_107_7274.pdf
- Θεωρία κινδύνου 2.Μάθημα Β’ εξαμήνου μεταπτυχιακού τμήματος ΄΄Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου΄΄. Σημειώσεις Ε. Χατζηκωνσταντινίδη.
- Κ. Ι. Κουτσόπουλος. Αναλογιστικά Μαθηματικά. Μέρος Ι. Θεωρία των κινδύνων.

Παράρτημα

- **Martingales**

Μία *martingale* διακριτού χρόνου είναι μία στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου (δηλ. μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών) $X_{1,}X_{2,}X_{3,}\ldots$που ικανοποιεί για όλα τα n

$$E \quad X_n \quad < \infty$$
$$E \ X_{n+1}|X_1, \ldots, X_n \quad = X_n$$

Δηλ. η υπό όρους αναμενόμενη τιμή της επόμενης παρατήρησης, δοθέντος όλων των προηγούμενων παρατηρήσεων, ισούται με την τελευταία παρατήρηση .

Πιο γενικά , μία ακολουθία $Y_{1,}Y_{2,}Y_{3,}\ldots$ λέγεται μία *martingale* όσον αφορά μία άλλη ακολουθία $X_{1,}X_{2,}X_{3,}\ldots$αν για όλα τα n

$$E \quad Y_n \quad < \infty$$
$$E \ Y_{n+1}|X_1, \ldots, X_n \quad = Y_n$$

Παρομοίως ,μία συνεχής *martingale* όσον αφορά την στοχαστική διαδικασία X_t είναι μία στοχαστική διαδικασία Y_t έτσι ώστε για όλα τα t να ισχύει,

$$E \quad Y_t \quad < \infty$$
$$E \ Y_{n+1}| \ X_\tau, \tau \leq s \quad = Y_s, \forall \text{ s} \leq \text{t.}$$

Έτσι εκφράζεται η ιδιότητα ότι ,η υπό όρους αναμενόμενη τιμή της επόμενης παρατήρησης, δοθέντος όλων των παρατηρήσεων μέχρι τον χρόνο s , ισούται με την παρατήρηση στον χρόνο s (δεδομένου ότι $s \leq t$).

Γενικά , μία στοχαστική διαδικασία $Y : T \times \Omega \rightarrow S$ είναι μία *martingale* όσον αφορά μία *filtration* Σ_*και ένα μέτρο πιθανότητας P εάν

- Σ_* είναι μία *filtration* του θεμελιώδους χώρου πιθανότητας(Ω,Σ,P)
- Υ είναι προσαρμοσμένη στην *filtration* Σ_* δηλ., για κάθε *t* στο σύνολο δεικτών T ,η τυχαία μεταβλητή Υ_t είναι μία Σ_t-μετρήσιμη συνάρτηση ,
- Για κάθε *t*, Υ_t απλώνεται στον L^p χώρο $L^1(\Omega, \Sigma_t, P;S)$, δηλ.

  $E_p \quad \Upsilon_t \quad < +\infty$

  Για κάθε s και t με $s < t$ και για όλα $F \in \Sigma_s$

  $E_p \quad \Upsilon_t - \Upsilon_s \; \chi_F \quad = 0$,

  όπου χ_F συμβολίζει την δείκτρια συνάρτηση του γεγονότος *F*. Στην '*Πιθανότητα και Τυχαίες Διαδικασίες* ' των *Grimmett* και *Stirzaker* η τελευταία συνθήκη αποτυπώνεται από την,

  $\Upsilon_s = E_p \quad \Upsilon_t \; \Sigma_s$ που είναι η γενική μορφή της *υπό όρους αναμενόμενης αξίας*.

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι η ιδιότητα της *martingale* περιλαμβάνει τόσο την *filtration* όσο και το μέτρο πιθανότητας (όσον αφορά εκείνο το οποίο οι προσδοκίες λαμβάνονται υπ'όψιν).Είναι πιθανό η Υ να είναι *martingale* όσον αφορά ένα μέτρο αλλά να μην είναι για κάποιο άλλο. Το θεώρημα του *Girsanov* παρουσιάζει ένα τρόπο για να βρεθεί ένα μέτρο σύμφωνα με το οποίο μία *διαδικασία Ito* να είναι *martingale*.

Martingales και Θεωρία Κινδύνου

Έστω *ξ* ένας αριθμός. Επειδή $U(t) \;_{t \geq \infty}$είναι μία στοχαστική διαδικασία με σταθερές και ανεξάρτητες αυξήσεις, μία διαδικασία της μορφής

$$e^{-\delta t+\xi U(t)} \;_{t \geq \infty} \qquad (\Pi.1)$$

είναι *martingale* αν και μόνο αν, για κάθε $t \geq 0$, η αναμενόμενη τιμή στον χρόνο t είναι ίση με την αρχική του αξία ,που ισχύει αν και μόνο αν

$$E \; e^{-\delta t+\xi U(t)} | U \; 0 \;\; = u \;\; = e^{\xi u} \qquad (\Pi.2)$$

Αφού

$$E \; e^{-\delta t+\xi U(t)} | U \; 0 \;\; = u \;\; = \exp \; -\delta t + \xi u + \xi c t + \lambda t \; p \; \xi \; -1 \;\; ,$$

για να είναι *martingale* πρέπει

$$-\delta t + \xi u + \xi ct + \lambda t \;\; p \;\; \xi \;\; - 1 \;\; = 0,$$

που είναι ίσο με την θεμελιώδη εξίσωση του *Lundberg.* Έτσι ,για να είναι η (Π.1) *martingale* ,ο συντελεστής του $U(t)$ είναι ίσος είτε με $\xi_1 = \rho \;\; \geq 0$ ή με $\xi_2 = -R <$ 0 .

Με αυτές τις τιμές του ξ η (Π.2) ισχύει για κάθε σταθερό $t, t \geq 0$.Ωστόσο , αν αντικαταστήσουμε την t με έναν *χρόνο τερματισμού* ,που είναι μία τυχαία μεταβλητή, τότε δεν είναι βέβαιο πως η (Π.2) ισχύει. Αν ο *χρόνος τερματισμού* συμβολίζεται με *T,* η (Π.1) είναι *martingale* με $\xi = -R$. Για $0 \leq t < T$,

$$\delta t + RU(t) \geq 0 \, ,$$

και ως εκ τούτου

$$0 < \; e^{-\delta t - RU(t)} \leq 1$$

Με $e^{-\delta t - RU(t)}{}_{0 \leq t < T}$ να είναι φραγμένο ,μπορούμε να εφαρμόσουμε το *optional sampling theorem(δηλ. υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις η αναμενόμενη τιμή ενός martingale στον χρόνο τερματισμού είναι ίσο με την αρχική του τιμή)* και έχουμε

$$E \;\; e^{-\delta t - RU(t)} | U \;\; 0 \;\; = u \;\; = e^{-Ru}. \qquad (\Pi.3)$$

Επίσης , επειδή ισχύει ότι $\lim_{t \to \infty} U \;\; t \;\; = \infty$,ακόμα και αν *δ = 0* ,

$$E \;\; e^{-\delta t - RU \;\; t} \; I(T = \infty) | U \;\; 0 \;\; = u \;\; = 0 \, .$$

Συνεπώς ,μπορούμε να ξαναγράψουμε την (Π.3) ως ,

$$e^{-Ru} = \; E \;\; e^{-\delta t - RU \;\; t} \; I(T < \infty) | U \;\; 0 \;\; = u \;\; , \text{ με } \delta \geq 0 \;, u \geq 0 \qquad (\Pi.4)$$

Η παραπάνω διαδικασία είναι μία απόδειξη από την θεωρία των *martingale,* μίας γενίκευσης του Θεωρήματος 13.4.1 των Αναλογιστικών Μαθηματικών.

- ***Θεώρημα παρεμβολής Lagrange***

Αν έχουμε $n+1$ *διακεκριμένα σημεία* $x_0, x_1,, \dots, x_n$ *όχι απαραίτητα να ισαπέχουν, και* f *μια συνάρτηση για την οποία είναι γνωστές οι τιμές της* $f(x_i)$, $i = 0,1 \dots n$, *η συνάρτηση αυτή μπορεί να προσεγγιστεί από ένα πολυώνυμο* $p(x) \in P_n$. *Για το* $p(x)$ *ισχύει ότι,*

$$f(x_i) = p(x_i) \text{ , για } i = 0,1 \dots n .$$

Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε την συνάρτηση ,

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x_i-x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \qquad (Π.5)$$

για $i = 0,1 \dots n$, *όπου στην ουσία είναι ένα πολυώνυμο βαθμού* n *που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:*

$$L_i(x_i) = 1 \quad \text{για } i = j$$

και $(Π.6)$

$$L_i(x_j) = 0 \quad \text{για } i \neq j$$

Έστω τώρα ότι το πολυώνυμο $p(x)$ *είναι της μορφής ,*

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i(x) \qquad (Π.7)$$

Τότε από τις συνθήκες παρεμβολής και τις σχέσεις $(Π.6)$, $(Π.7)$*προκύπτει*

$$p(x_i) = f(x_i) = b_i, \qquad \text{για } i = 0,1 \dots n$$

και η $(Π.7)$ *γίνεται*

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) . \qquad (Π.8)$$

Η σχέση $(Π.8)$ *καλείται πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange και τα πολυώνυμα* $L_i(x)$ *συντελεστές Lagrange.*

➢ *Το Θεώρημα του Sklar*

Το θεώρημα του *Sklar* αποτελεί ένα σημαντικό θεώρημα για τη θεωρία των συζεύξεων, και είναι θεμέλιο για πολλές εφαρμογές αυτής της θεωρίας. Μέσω του θεωρήματος του *Sklar* διευκρινίζεται ο ρόλος των συζεύξεων στη σχέση των πολυδιάστατων συναρτήσεων κατανομών με τις μονοδιάστατες τους περιθώριες συναρτήσεις κατανομών. Στην περίπτωση της διδιάστατης συνάρτησης κατανομής, το θεώρημα είναι ως εξής :

Έστω $H(x,y)$ είναι διδιάστατη συνάρτηση κατανομής με περιθώριες συναρτήσεις $F(x)$ και $G(\,y)$. Τότε υπάρχει μια σύζευξη $C(u,v)$ τέτοια ώστε :

$$H(x,y) \;=\; C(F(x),G(\,y)) \text{ για } x,y \in R.$$

Αντίστροφα, για κάθε συνάρτηση κατανομής $F(x)$ και $G(\,y)$ και κάθε σύζευξη $C(u,v)$, η συνάρτηση $H(x,y)$ που ορίστηκε παραπάνω είναι μια διδιάστατη συνάρτηση κατανομής με περιθώριες συναρτήσεις $F(x)$ και $G(\,y)$.

Παρατηρήσεις:

- *Εάν οι $F(x)$ και $G(\,y)$ είναι συνεχείς, τότε η $C(u,v)$ είναι μοναδική.*
- *Για συνεχείς περιθώριες συναρτήσεις $F(x)$ και $G(\,y)$ η μοναδική σύζευξη $C(u,v)$, για $(u,v) \in\ 0,1\ \times\ 0,1$ έχει την μορφή:*

$$C\ \ u,v\ \ =\ H\ \ F^{-1}\ \ u\ \ ,G^{-1}\ \ v$$

όπου $F-1$ και $G-1$ οι αντίστροφες των συναρτήσεων $F(x)$ και $G(\,y)$ αντίστοιχα.

- *Η σύζευξη $C(u,v)$ είναι μια συνάρτηση που "συνδέει" την από κοινού συνάρτηση κατανομής με τις περιθώριες της.*
- *Όταν $F(x)$ και $G(\,y)$ είναι συνεχείς τότε οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν $H(x,y) = F(x)G(\,y)$ για $x,y \in R$. Ισοδύναμα, οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν $C(u,v) \;=\; uv$ όπου: $(u,v) \in\ 0,1\ \times\ 0,1$.*

- ***Το Θεώρημα του Rouche***

Θεωρούμε δυο συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$, οι οποίες είναι αναλυτικές πάνω σε μια απλή κλειστή καμπύλη C και στο εσωτερικό της. Εάν πάνω στη C ισχύει $|g(z)| < |f(z)|$, τότε οι συναρτήσεις $f(z) + g(z)$ και *$f(z)$ έχουν το ίδιο πλήθος ριζών στο εσωτερικό της C.*

Απόδειξη: Θέτουμε $F(z) = \frac{g(z)}{f(z)} \Longrightarrow g(z) = F(z)f(z)$. Εάν N_1 και N_2 είναι αντίστοιχα το πλήθος των ριζών των $f + g$ και f στο εσωτερικό στο *C*, έχουμε από θεώρημα του ορίσματος ότι,

$$N_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'+g'}{f+g}dz \quad \text{και} \quad N_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'}{f}dz,$$

επειδή οι συναρτήσεις $f + g$ δεν έχουν πόλους. Άρα,

$$N_1 - N_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f' + f'F + fF'}{f + fF}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'}{f}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(1+F) + fF'}{f(1+F)} - \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'}{f}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_c \left(\frac{f'}{f} + \frac{F'}{1+F}\right)dz - \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'}{f}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{F'}{1+F}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_c F'(1 - F + F^2 - F^3 + \cdots)dz = 0.$$

Επειδή $|F| < 1$ πάνω στη *C* συνεπάγεται ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα πάνω στη *C* και μπορεί να ολοκληρωθεί κατά όρους. Άρα $N_1 = N_2$.