Πανεπιστήμιο Πειραιώς – Τμήμα Πληροφορικής
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Προηγμένα Συστήματα Πληροφορικής»

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Τίτλος Διατριβής	**Μαθηματικά Μοντέλα Αποφάσεων**
Ονοματεπώνυμο Φοιτητή	**Αδαμίδου Αγγελική του Νικολάου**
Αριθμός Μητρώου	**ΜΠΣΠ 06068**
Κατεύθυνση	**Συστήματα Υποστήριξης Απόφασης (ΣΥΑ)**
Επιβλέπων	**Ευάγγελος, Φούντας, Καθηγητής**

31-5- 2010

Μάιος 2010

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

(υπογραφή)	(υπογραφή)	(υπογραφή)
Όνομα Επώνυμο Βαθμίδα	Όνομα Επώνυμο Βαθμίδα	Όνομα Επώνυμο Βαθμίδα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ένα μαθηματικό μοντέλο βοηθάει αρχικά τον οικονομολόγο να καθορίσει τους ακριβείς όρους. Ο οικονομολόγος πρέπει να δηλώσει τις ελλοχεύουσες υποθέσεις σαφώς πριν αρχίσει τις σύνθετες σκέψεις. Ευθύς εξαρχής, στην ακριβής φύση της αφαίρεσης ο οικονομολόγος λειτουργεί ώστε να είναι σαφής όχι μόνο στο μυαλό των οικονομολόγων, αλλά στο μυαλό κάθε προσώπου που διαβάζει την εργασία. Κατά συνέπεια, η συζήτηση για τον πραγματικό κόσμο σχετίζεται με μοντέλα που είναι πιθανό να μεταβληθούν αισθητά. Μπορεί ακόμη και να είναι δυνατό να μεταφραστεί ένα θεωρητικό μοντέλο σε μια στατιστική φόρμα, έτσι ώστε η ισχύς του να μπορεί να εξεταστεί με στοιχεία από το πραγματικό κόσμο.

Στο 1^{o} κεφάλαιο παρουσιάζουμε το μοντέλο επιλογής του καταναλωτή, στην ουσία την προτίμηση του καταναλωτή για να περιγράψουμε τις επιλογές του. Περιγράφουμε ένα πολύ απλό πρόβλημα μαθηματικού μοντέλου της επιλογής του καταναλωτή. Το μοντέλο αυτό αφαιρεί πολλές επιλογές, αγνοώντας αρκετές πτυχές των επιλογών αυτών, που υπό άλλες προϋποθέσεις θα μπορούσαν να θεωρηθούν πολύ σημαντικές.

Στο 2^{o} κεφάλαιο αναλύουμε τη βασική ιδέα της οικονομικής θεωρίας οι οποία είναι να εκφραστούν και να κατανοηθούν οι σχέσεις μεταξύ οικονομικών μεταβλητών. Επίσης μελετάμε τη συμπεριφορά μεταβλητών όπου η μεταβολή μίας μεταβλητής επηρεάζει την τιμή της άλλης.

Στο 3^{o} κεφάλαιο εξετάζουμε την χρήση της παραγωγού σε κάποιες οικονομικές σχέσεις, όπως τη μεγιστοποίηση ή την ελαχιστοποίηση κάποιων οικονομικών οντοτήτων. Αυτό σημαίνει ότι μελετάμε τις πιο βασικές πληροφορίες σχετικά με μια συνάρτηση όπως την πρώτη, την δεύτερη παράγωγο και την πληροφορία που κρύβεται πίσω από αυτές.

Στο 4^{o} κεφάλαιο μελετάμε τον κανόνα της αλυσίδας (Chain Rule), ο οποίος περιγράφει την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης όσον αφορά τις παραγώγους της σχετικής συνάρτησης. Στο τέλος αυτού του κεφαλαίου, θα χρησιμοποιήσουμε σύνθετους μαθηματικούς τύπους για να υπολογίσουμε τη παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = x^{m/n}$. Η συνάρτηση αυτή χρησιμοποιείται σε πολλά οικονομικά μοντέλα, όπως τις συναρτήσεις παραγωγής.

Το 5^{o} και τελευταίο κεφάλαιο, εστιάζει στις εκθετικές συναρτήσεις και τις παραγώγους τους. Περιγράφει επίσης την αντίστροφη συνάρτηση μιας εκθετικής συνάρτησης – το λογάριθμο, ο οποίος μπορεί να μετατρέψει πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ των οικονομικών μεταβλητών σε πρόσθετες σχέσεις με τις οποίες μπορούμε να δουλέψουμε πιο εύκολα.

Abstract

A mathematic model helps initially the economist to determine the precise terms. The economist should declare the underlying assumptions before embarking on complex thoughts. Immediately from the start, in precise nature of abstraction the economist is working so that it is explicit not only in the mind of economists, but in the mind of each person that reads the work. Accordingly, the discussion on the real world is related with models that it is likely to be altered. It even can be possible to translate a theoretical model in to statistics formulas, so that its validity can be tested with elements from the real world.

In the 1st chapter we present the model of choice of consumer. In the substance, the preference of consumer in order to describe his choices. We describe a very simple problem of mathematic model of choice of consumer. This model removes a lot of choices, ignoring enough aspects of these choices, which under other circumstances could be considered very important.

In the 2nd chapter we analyze the basic idea of economic theory which is the comprehension and expression of the relation between economic variables. Also, we study the behaviour of variables where the change of variable influences the price of the other.

In the 3rd chapter we examine the use of derivatives in certain economic relations. For example, we study the maximisation or the minimisation of certain economic entities. This means that we study the basic information with regard to a function like the first, the second derivative and information that is hidden upon them.

In the 4th chapter we go over the Chain Rule, which describes the derivative of complex function with regard to derivatives of relative function. In the end of this chapter, we use complex mathematic types in order to calculate the derivative of function $f(x) = x^{m/n}$. This function is used in a lot of economic models, as the functions of production.

The 5th and last chapter focuses in the exponent functions and their derivatives. It also describes the reverse function of exponent function - the logarithm, which changes multiplicative relations into additional relations between the economic variables in order to be able to work more easily.

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

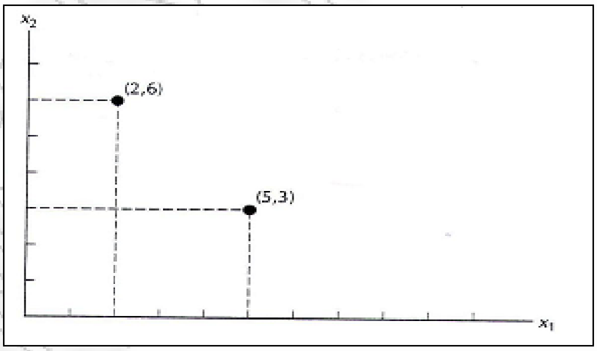
Στην πραγματικότητα εάν σκεφτόμαστε ένα μοντέλο απλά ως μείωση και οργάνωση του περιεχομένου για τη μελέτη, είναι σαφές ότι τα μοντέλα δεν είναι μοναδικά στη μαθηματική ανάλυση. Ακόμα και επιστήμες όπως η κοινωνιολογία και η ανθρωπολογία που είναι πιο θεωρητικές, στηρίζονται σε μεγάλο ποσοστό σε μοντέλα τέτοιου είδους, για την εξερεύνηση και την παρουσίαση του υλικού τους. Ταυτόχρονα πολλοί είναι οι λόγοι που τα μαθηματικά μοντέλα είναι ιδιαίτερα χρήσιμα στην οικονομική επιστήμη.

Τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται, όχι μόνο στην οργάνωση γεγονότων άλλα για να παράγουν και να εξερευνούν θεωρητικές ιδέες. Συχνά οι οικονομολόγοι χρησιμοποιούν μαθηματικές τεχνικές όπως η λογική αφαίρεση για να παράγουν τα θεωρήματα που ισχύουν για μια ευρεία ποικιλία οικονομικών καταστάσεων. Για παράδειγμα, η δήλωση «οι κατανομές ανταγωνιστικών αγορών των πόρων είναι το Παρέτο βέλτιστες» ένα θεώρημα πολύ σημαντικό που επισημαίνεται συνεχώς στις περισσότερες συνδιαλέξεις της μικροοικονομικής θεωρίας. Με απλουστευμένη μορφή, αυτό το θεώρημα βεβαιώνει ότι σε ένα σύστημα ανταγωνιστικών αγορών όταν οι αγορές καθαρίζουν έτσι ώστε οι ισορροπίες ανεφοδιασμού να απαιτούν οποιαδήποτε εφικτή αλλαγή στην κατανάλωση ή την παραγωγή που βελτιώνουν την κατάσταση μερικών ανθρώπων θα καταστήσει μερικούς άλλους χειρότερα.

1.1 Μοντέλα της επιλογής των καταναλωτών

Όταν μελετάμε τα κλασικά μοντέλα της επιλογής των καταναλωτών σε μάθημα μικροοικονομικής θεωρίας, συνήθως υποθέτουμε ότι ο καταναλωτής έχει δύο καλές επιλογές. Για το σκοπό της συζήτησης , υποθέτουμε ότι η δυο επιλογές είναι gadgets και widgets. Έστω x_1 η μεταβλητή που αντιπροσωπεύει το ποσό των gadgets από τις αγορές του καταναλωτή μας, και x_2 η μεταβλητή που σχετίζεται με την αγορά του καταναλωτή των widgets.

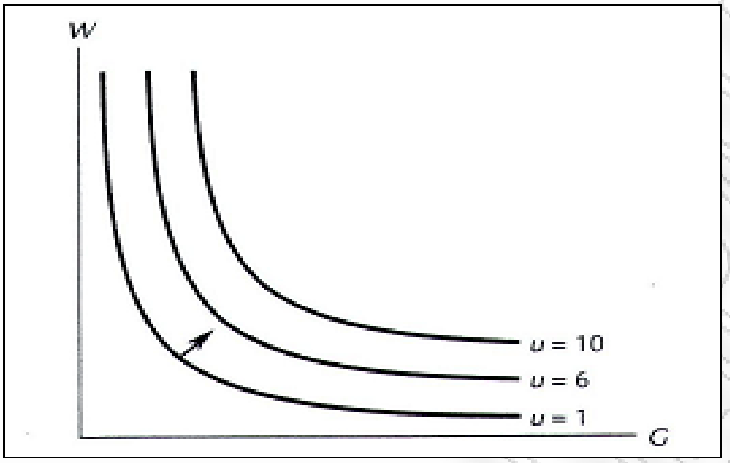
Το ζευγάρι (x_1,x_2) αντιπροσωπεύει την επιλογή των καλών αγαθών και καλείται "δέσμη προϊόντων". Αν υποθέσουμε ότι x_1 και x_2 μπορεί να είναι οποιοιδήποτε μη αρνητικοί αριθμοί, τότε το σύνολο όλων των δεσμών προϊόντων μπορεί να παρασταθεί γεωμετρικά σε μη αρνητικό τεταρτημόριο στο σχεδιάγραμμα. Το τεταρτημόριο αυτό θα το ονομάσουμε ' χώρο προϊόντων " . Στο σχήμα 1.1 ο αριθμός των gadgets στη δέσμη προϊόντων μετριέται στον οριζόντιο άξονα και ο αριθμός των widgets στον κατακόρυφο άξονα.



Σχήμα1.1: Δύο δέσμες προϊόντων στον χώρο προϊόντων.

Οι καταναλωτές έχουν προτιμήσεις στις δέσμες στον χώρο των προϊόντων:

Δοθέντος δύο οποιονδήποτε δεσμών προϊόντων, ο καταναλωτής διαλέγει μια από τις δύο ή απορρίπτει και τις δύο. Εάν οι προτιμήσεις των καταναλωτών ικανοποιούν μερικές υποθέσεις συνέπειας, μπορούν να αντιπροσωπευθούν από μια συνάρτηση χρησιμότητας. Η συνάρτηση χρησιμότητας ορίζει τους πραγματικούς αριθμούς κάθε δέσμης προϊόντων. Αν ο καταναλωτής προτιμά μια δέσμη (x_1,x_2) από μία άλλη (y_1,y_2), τότε η συνάρτηση χρησιμότητας ορίζει ένα μεγαλύτερο αριθμό στο (x_1,x_2) από το (y_1,y_2). Αναπαριστούμε με $U(x_1,x_2)$ τον αριθμό που όρισε η συνάρτηση χρησιμότητας για τη δέσμη (x_1,x_2). Συνήθως απεικονίζεται η κατάσταση αυτή με το σχεδιασμό μιας δειγματοληψίας των καταναλωτών των καμπυλών αδιαφορίας στο διάστημα προϊόντων, όπως φαίνεται στην παρακάτω Σχήμα1.2. Η συνάρτηση χρησιμότητας προτείνει τους ίδιους αριθμούς σε όλες τις δέσμες σε οποιαδήποτε δεδομένη καμπύλη αδιαφορίας. Με άλλα λόγια, οι καταναλωτές αδιαφορούν μεταξύ οποιωνδήποτε δύο δεσμών στην ίδια αδιάφορη καμπύλη.



Σχήμα1.2: καμπύλες αδιαφορίας στον ίδιο χώρο προϊόντων

Το βέλος στο σχήμα 1.2 δείχνει την κατεύθυνση της προτίμησης. Οι δέσμες προϊόντων που βρίσκονται καμπύλες αδιαφορίας μακριά από την προέλευση προτιμώνται από τις δέσμες που καμπύλες αδιαφορίας τους είναι κοντά στην προέλευση για να δείξουν ότι αυτός ο καταναλωτής προτιμά 'περισσότερο' από 'λιγότερο' .

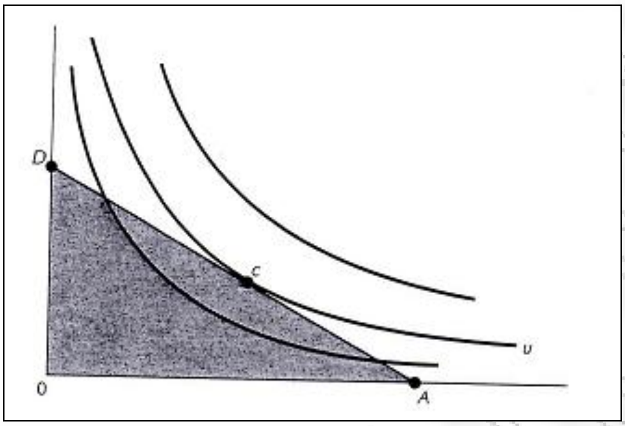
Παρουσιάζουμε αυτή την προτίμηση του καταναλωτή για να περιγράψουμε τις επιλογές του. Υποθέτουμε ότι ο καταναλωτής είναι αντιμέτωπος με ένα σύνολο *B* που αποτελείται από δέσμες προϊόντων και πρέπει να διαλέξει μεταξύ αυτών. Ο καταναλωτής θα επιλέξει έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση χρησιμότητας στο καθορισμένο σύνολο *B*. Το πρόβλημα της μεγιστοποίησης μιας δεδομένης συνάρτησης ενός συνόλου είναι μαθηματικό πρόβλημα.

Περιγράψαμε ένα πολύ απλό πρόβλημα μαθηματικού μοντέλου της επιλογής του καταναλωτή. Το μοντέλο αυτό έχει αφαιρέσει πολλές επιλογές, αγνοώντας αρκετές πτυχές των επιλογών αυτών, που υπό άλλες προϋποθέσεις θα μπορούσαν να θεωρηθούν πολύ σημαντικές. Για παράδειγμα, πώς συλλέγει ο καταναλωτής αρκετές πληροφορίες έτσι ώστε να φτιάξει μία ενημερωμένη επιλογή; Πώς χρησιμοποιεί ο καταναλωτής τις πληροφορίες αυτές για να δημιουργήσει μία επιλογή; Πιο γενικά, πώς προκύπτουν οι προτιμήσεις του καταναλωτή και πώς επηρεάζουν αυτές το περιβάλλον στο οποίο η απόφαση λαμβάνεται; Είναι κάποιες δραστηριότητες των επιλογών συνηθισμένες; Όπως, για παράδειγμα η απόφαση να ανάψει το τσιγάρο. Δεν έχουμε αναφερθεί καθόλου σε σύνηθες σχηματισμούς στο μοντέλο μας. Μερικές επιλογές ρυθμίζονται από την κοινωνική συνήθεια, όπως η απόφαση που λαμβάνεται από έναν διοικητικό συνεργάτη για το γεγονός ότι όλοι η εργαζόμενοι πρέπει να φορούν κουστούμι. Επαναλαμβάνουμε, ότι ο ρόλος της κοινωνικής συνήθειας δεν είναι σαφής στο μοντέλο μας. Αγνοώντας αυτά και άλλες πτυχές των επιλογών έχουμε δημιουργήσει ένα απλό και κατανοητό μοντέλο επιλογής . Εντούτοις το γεγονός ότι ενδεχομένως οι σημαντικοί παράγοντες έχουν αγνοηθεί, μπορεί να περιορίσει τη μη χρησιμότητα αυτού του απλού μοντέλου. Για πιο πολύπλοκες εφαρμογές, μπορεί να απαιτείται ένα πιο εξελιγμένο μοντέλο.

Ευτυχώς, δεν μας αφορά η χρήση τέτοιων μοντέλων για να εξηγήσουμε την συμπεριφορά της επιλογής. Ενδιαφερόμαστε μόνο για τις επιλογές που προκύπτουν στις αγορές. Περιγράφουμε την κατάσταση επιλογής ακολούθως: Συνδεδεμένη με κάθε προϊόν είναι η τιμή: p_1 η τιμή των gadgets και p_2 η τιμή των widgets. Ο καταναλωτής μας έχει *M* δολάρια να διαθέσει, για να διαιρέσει ανάμεσα στα δύο καλύτερα προϊόντα. Ο καταναλωτής δεν μπορεί να ξοδέψει παραπάνω χρήματα από αυτά που διαθέτει. Το κόστος της δέσμης προϊόντων (x_1, x_2) είναι $p_1 x_1 + p_2 x_2$ το οποίο δεν μπορεί να ξεπεράσει το *M*. Η θεωρία μας είναι ανάγκη να ισχύει για επιλογές συνόλων της μορφής:

$$B=\{(x_1,x_2): x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq M\}$$

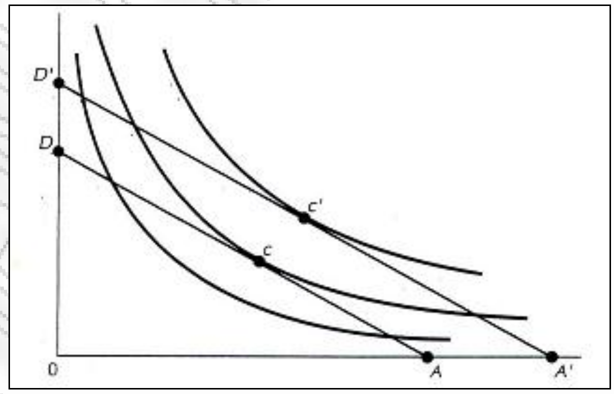
Αυτά είναι όλα τα υπολογισμένα σύνολα που ο καταναλωτής θα μπορούσε πιθανόν να επιλέξει. Τα σύνολα αυτά είναι εύκολο να απεικονιστούν. Στο χώρο τον προϊόντων σύροντας το τμήμα γραμμών από την εξίσωση p1 x1 + p2 x2 = M. Οτιδήποτε πάνω στην ευθεία ή στο τμήμα κάτω από αυτήν είναι προτεινόμενο. Αυτά είναι τα σημεία στο τρίγωνο *OAD* που φαίνονται στην Σχήμα1.3.



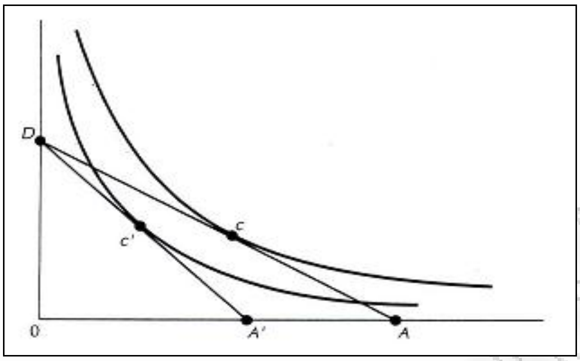
Σχήμα 1.3 προϋπολογισμένα σύνολα *OAD* και αδιάφορες καμπύλη.

Το πρόβλημα της μεγιστοποίησης μπορεί επίσης να απεικονισθεί. Ο καταναλωτής θα επιλέξει από τα προϋπολογισμένα σύνολα έτσι ώστε να είναι στην όσο το δυνατόν υψηλότερη αδιάφορη καμπύλη. Στο σχήμα 1.3 η καλύτερη δέσμη προϊόντων και κατά συνέπεια η προτεινόμενη είναι η δέσμη *c* στο τρίγωνο *OAD.* Η βέλτιστη δέσμη *c,* (μερικές φορές καλείτε η απαιτούμενη δέσμη των καταναλωτών σε τιμή p_1 και p_2) μπορεί να χαρακτηριστεί από το γεγονός, ότι η αδιάφορη καμπύλη *u*, στην οποία η δέσμη *c* ανήκει, βρίσκεται εντελώς έξω από το σύνολο προϋπολογισμών εκτός από σημείο *c* , που εφάπτεται στην ευθεία *AD* του τριγώνου μας *OAD*. Αυτό συνήθως δηλώνεται ως εξής: στο ,*c* το καταναλωτικό οριακό ποσοστό (η κλήση της αδιάφορης καμπύλης μέσω του *c*) αντικατάστασης είναι ίσο με την αναλογία τιμών (η κλήση της ευθείας του προϋπολογισμού *AD*).

Σε αυτές τις δισδιάστατες ρυθμίσεις, διάφορα μέσω των πειραμάτων μπορούν να εκτελεστούν: Τι γίνεται με την απαιτούμενη δέσμη των gadgets όταν η τιμή των gadgets αυξηθεί; Όταν η τιμή των widgets αυξηθεί; Όταν ύπαρξη γενικότερη αύξηση της οικονομίας; Αυτά τα προβλήματα αναφέρονται ως συγκριτικά στατιστικά προβλήματα. Το πείραμα της αύξησης του καταναλωτικού εισοδήματος *M* και της τιμής του gadget απεικονίζονται στα παρακάτω σχήματα 1.4 και 1.5.



Σχήμα 1.5: Η επίδραση της αύξησης του *M*.



Σχήμα 1.6: Η επίδραση της αύξησης του p_1

Στα μαθήματα μικροοικονομίας, καταγράφουμε τα αποτελέσματα των πειραμάτων αυτών σε γραφήματα, όπως την καμπύλη απαίτησης και την καμπύλη Engels. Σε αυτό το σημείο θα δούμε τα όρια αυτής της γεωμετρικής προσέγγισης. Ακόμα και σε αυτήν την απλή των δύο καλύτερων περιπτώσεων, η προσέγγιση για κάθε μία εξαρτάται από τα εξής τρία πράγματα: την τιμή της μίας καλής επιλογής, την τιμή της άλλης καλής επιλογής και το εισόδημα. Δεν είναι δυνατόν να παρασταθεί αυτές οι σχέσεις ταυτόχρονα σε δισδιάστατη εικόνα. Κατά συνέπεια αφηνόμαστε στη μάλλον ανεπαρκή μέθοδο της ολίσθησης των καμπυλών απαίτησης όταν θέλουμε να μιλήσουμε για αλλαγές στο εισόδημα ή για αλλαγές στην τιμή της άλλης επιλογής. Επίσης δεν έχουμε κατάλληλο τρόπο να μιλήσουμε αυστηρά για το πώς η απαίτηση επηρεάζεται από τη μορφή των καμπυλών αδιαφορίας. Στην ενδιάμεση μικροοικονομική θεωρία χαρακτηριστικά εξετάζονται δύο περιπτώσεις: ευθείες γραμμές (τέλειο υποκατάστατο) αδιάφορες καμπύλες και δεξιές γωνίες (τέλειο συμπλήρωμα)αδιάφορες καμπύλες. Αυτές όμως είναι σπάνιες περιπτώσεις. Επιπλέον πρέπει να γνωρίζουμε πόσα αποτέλεσμα θα ανακαλύψουμε σε αυτές τις ρυθμίσεις επηρεασμένοι από την υπόθεση ότι οι δύο επιλογές είναι μόνο καλές.

Πολυδιάστατα μοντέλα της επιλογής του καταναλωτή

Καμία από τις ερωτήσεις δεν μπορεί να απαντηθεί στο δικό μας γεωμετρικό πλαίσιο. Πρέπει να στραφούμε σε άλλες μαθηματικές τεχνικές, όπως είναι ο υπολογισμός πολλών μεταβλητών και άλγεβρα μητρών (πινάκων). Για να συμβεί αυτό πρέπει να θέσουμε το πρόβλημα πιο αναλυτικά. Υποθέτουμε ότι το οικονομικό μοντέλο μας έχει n καλές επιλογές. Οι δέσμες προϊόντων είναι πλέον λίστες(x1,x2,x3,…..,xn) και μια λειτουργία χρησιμότητας ορίζει έναν αριθμό U(x1,…..,xn) σε κάθε τέτοια λίστα (x1,x2,x3,…..,xn). Το πρόβλημα μεγιστοποίησης των καταναλωτών μπορεί πλέον να δηλωθεί ως εξής:

$$\text{Maximize } U(x_1,\ldots,x_n)$$

υπό τον όρο των περιορισμών:

$$p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n \le M$$

$$x_1 \ge 0,\ldots,\ x_n \ge 0.$$

Το σύστημα των μαθηματικών εξισώσεων που μία χρησιμοποιείται για να περιγράψει τον εφαπτόμενο όρο όταν υπάρχουν n άγνωστοι τότε με 2 αγνώστους το σύστημα γίνεται πολύπλοκο. Είναι απαραίτητες 2n+1 διαφορετικές εξισώσεις και 2n+1 άγνωστοι. Η μελέτη των ερωτημάτων των προηγούμενων παραγράφων μειώνει τη μελέτη αυτού του συστήματος των εξισώσεων. Αυτές οι ερωτήσεις εμφανίστηκαν στην μαθηματική ανάλυση, σαν ερωτήσεις για την ύπαρξη λύσεων στο σύστημα εξισώσεων και ερωτήσεις για το πώς οι λύσεις του συστήματος αλλάζουν με τις μεταβολές των παραμέτρων, όπως οι τιμές και το εισόδημα. Σε αυτό το κείμενο θα συζητήσουμε για τεχνικές υπολογισμού πολλών μεταβλητών και γραμμικής άλγεβρας, που παρέχουν αιχμηρές απαντήσει σε αυτά τα ερωτήματα.

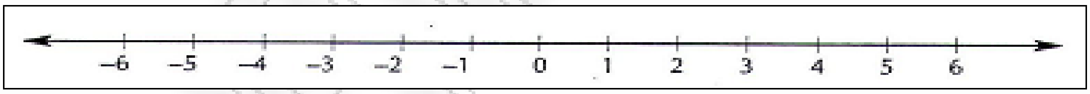
Κεφάλαιο 2: Υπολογισμός μιας μεταβλητής: Θεμέλια

Η βασική ιδέα της οικονομικής θεωρίας είναι να εκφράσει και να κατανοήσει τη σχέση μεταξύ οικονομικών μεταβλητών. Αυτή η σχέση περιγράφεται μαθηματικά με συναρτήσεις. Αν ενδιαφερόμαστε για την επίδραση μίας οικονομικής μεταβλητής, όπως κυβερνητικά έξοδα, πάνω σε μια άλλη οικονομική μεταβλητή, όπως το ακαθάριστο εθνικό προϊόν, οδηγούμαστε στη μελέτη συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

Η βασική πληροφορία για τις σχέσεις οικονομικών μεταβλητών ανησυχεί για το πως μία αλλαγή στη μία μεταβλητή, μπορεί να επηρεάσει την άλλη. Πώς μια αλλαγή στη προσφορά χρήματος έχει επιπτώσεις στα επιτόκια; Μπορεί μια αύξηση της τάξης του ενός εκατομμυρίου στα κρατικά έξοδα να μειώσει ή να αυξήσει το ακαθάριστο προϊόν; Κατά πόσο; Όταν τέτοιες σχέσεις εκφράζονται σε επίπεδο γραμμικών συναρτήσεων, η επίδραση της αλλαγής μίας μεταβλητής στην άλλη, λαμβάνεται από την «κλίση» της συνάρτησης. Γενικότερα για μη γραμμικές συναρτήσεις η επίδραση της αλλαγής αυτής, λαμβάνεται με παράγωγα της συνάρτησης. Το παράγωγο είναι απλά η γενικευμένη μορφή της μη γραμμικής συνάρτησης. Σε αυτή την ενότητα θα καθορίσουμε το παράγωγο συνάρτησης μιας-μεταβλητής και θα μάθουμε να υπολογίζουμε αυτό.

2.1 Συναρτήσεις στο R^1

Τα βασικά στοιχεία των μαθηματικών είναι οι αριθμοί και οι συναρτήσεις. Δουλεύοντας με αριθμούς θα βρούμε τα κατάλληλα σημεία πάνω σε έναν άξονα αριθμών, ώστε να μπορέσουμε να παραστήσουμε τους αριθμούς αυτούς γεωμετρικά. Ο άξονας αριθμών είναι ένας άξονας που εκτείνεται απείρως δεξιά και αριστερά από ένα σημείο που καλείται αρχή. Η αρχή ταυτίζεται με το μηδέν. Οι αριθμοί που εκτείνονται δεξιά του μηδενός είναι θετικοί ενώ ο αριθμοί που εκτείνονται αριστερά αυτού είναι αρνητικοί. Ένα βασικό κομμάτι του μήκους του άξονα επιλέγεται, και διαδοχικά διαστήματα του μήκους αυτού χαρακτηρίζονται μακριά από την αρχή του άξονα. Οι αριθμοί από δεξιά είναι αριθμημένοι +1,+2,+3, κτλ και οι αριθμοί από αριστερά -1, -2, -3, κτλ. Κάποιος μπορεί τώρα να αντιπροσωπεύσει οποιοδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό στον άξονα κοντά στον αριθμό, βρίσκοντας το σημείο δεξιά της αρχής που η απόσταση του από την αρχή στο συγκεκριμένο διάστημα είναι αυτός ο αριθμός. Με τους αρνητικούς αριθμούς συμβαίνει ακριβώς το ίδιο αλλά από την αριστερή μεριά. Συνεπώς, κάθε πραγματικός αριθμός αντιπροσωπεύεται ακριβώς από ένα σημείο πάνω στον άξονα και κάθε σημείο του άξονα αντιπροσωπεύει ένα και μόνο αριθμό. Βλέπε σχήμα 2.1. Όπου R1 το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών.



Σχήμα2.1: Ο πραγματικός άξονας

Μία συνάρτηση είναι ένας κανόνας που ορίζει έναν αριθμό στο R1 για κάθε αριθμό στο R1. Για παράδειγμα, είναι μία συνάρτηση που ορίζει σε κάθε αριθμό, έναν αριθμό μεγαλύτερο. Αυτή η συνάρτηση γράφεται ως εξής: f(x)=x+1. Ο αριθμός 2 ορίζει τον αριθμό 3 και π.χ. για x=-3/2 η συνάρτηση μας ισούται με το -1/2. Γράφουμε τις παρακάτω συναρτήσεις ως εξής:

f (2)=3 και f(-2/3)=-1/2

Η συνάρτηση που ορίζει σε κάθε αριθμό το διπλάσιό του είναι η g(x)=2x. Γράφουμε g(4)=8 και g(-3)=-6 για να δείξουμε ότι το 8 ορίζεται από τη συνάρτηση με χ=4 και -6 με χ=-3. Πολλές φορές χρησιμοποιούμε δύο μεταβλητές για μία y για την έξοδο της συνάρτησης και μία x για την είσοδο της συνάρτησης, οπότε τις δύο παραπάνω συναρτήσεις f και g θα μπορούσαμε να τις γράψουμε και ως:

y= x+1 και y=2x

Η μεταβλητή εισόδου x καλείται ανεξάρτητη μεταβλητή ή σε οικονομική εφαρμογή εξωγενής μεταβλητή, ενώ η μεταβλητή y ονομάζεται εξαρτημένη μεταβλητή ή ενδογενής.

Πολυώνυμα

Οι πιο απλές συναρτήσεις είναι οι μονώνυμες. Τέτοιες συναρτήσεις μπορούν να γραφούν f(x)=axk για κάποιο a και κάποιο θετικό ακέραιο k. Για παράδειγμα,

f1(x)=3x4, f2(x)=-x7 και f3(x)=-10x2 (1)

Ο θετικός ακέραιος εκθέτης ονομάζεται βαθμός του μονώνυμου και ο αριθμός a καλείται συντελεστής. Η συνάρτηση που προσθέτει δύο μονώνυμα ονομάζεται πολυώνυμο. Για παράδειγμα, εάν προσθέσουμε τα τρία παραπάνω μονώνυμα (1) προκύπτει το παρακάτω πολυώνυμο:

h(x)=-x7+3x4-10x2.

Γράφουμε τους όρους του πολυωνύμου δηλαδή τα μονώνυμα, κατά σειρά ανάλογα με το βαθμό τους. Ο βαθμός του πολυωνύμου είναι ο μεγαλύτερος βαθμός του μονωνύμου που περιέχεται σε αυτό. Για παράδειγμα στο πολυώνυμο h ο βαθμός του είναι το 7.

Υπάρχουν πολυπλοκότερες συναρτήσεις, όπως είναι οι ρητές συναρτήσεις, που είναι στην ουσία το πηλίκο δύο πολυωνύμων, όπως παρακάτω:

- $y= (x^2+1)/x-1$,
- $y=(x^5+7x)/5$,
- $y= (x-1)/x^3+3x+2$ και (2)
- $y=(x^2-1)/x^2+1$.

Επίσης υπάρχουν και εκθετικές συναρτήσεις στις οποίες η μεταβλητή x εμφανίζεται ως εκθέτης, π.χ. y=10x, όπως και οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις όπως, y= cosx και y= sinx κ.ο.κ..

Γράφοι

Συνήθως, η ουσιαστική πληροφορία μιας συνάρτησης περιέχεται στον γράφο της συνάρτησης. Ο γράφος μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής αποτελείται από σημεία του καρτεσιανού επιπέδου, που οι συντεταγμένες του (x,y) ικανοποιούν την ισότητα y=f(x). Στο σχήμα 2.2 φαίνονται οι γράφοι πέντε συναρτήσεων.

Αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις

Οι βασικές γεωμετρικές ιδιότητες των συναρτήσεων είναι είτε αύξουσα, είτε φθίνουσα μια συνάρτηση και γενικότερα μία συνάρτηση χαρακτηρίζεται minima ή maxima. Σε μια αύξουσα συνάρτηση, η γραφική της παράσταση εκτείνεται ανοδικά από αριστερά προς τα δεξιά. Συγκεκριμένα, μια συνάρτηση f είναι αύξουσα όταν:

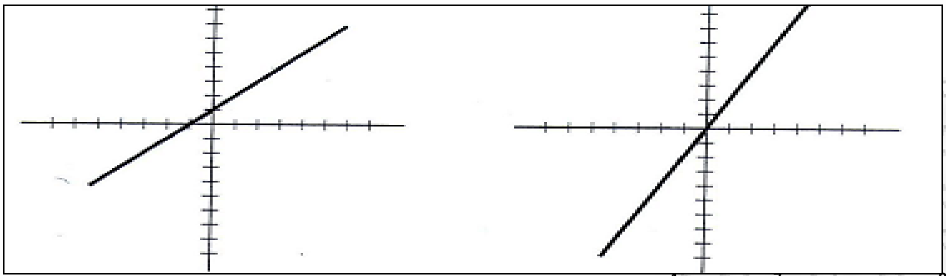
$x_1>x_2$ και κατά συνέπεια $f(x_1)> f(x_2)$.

Οι συναρτήσεις στις πρώτες δύο γραφικές παραστάσεις στο Σχήμα 2.2 είναι αύξουσες. Μία συνάρτηση ονομάζεται φθίνουσα όταν η γραφική της παράσταση κινείται προς τα κάτω από αριστερά προς τα δεξιά και όταν ισχύουν τα εξής:

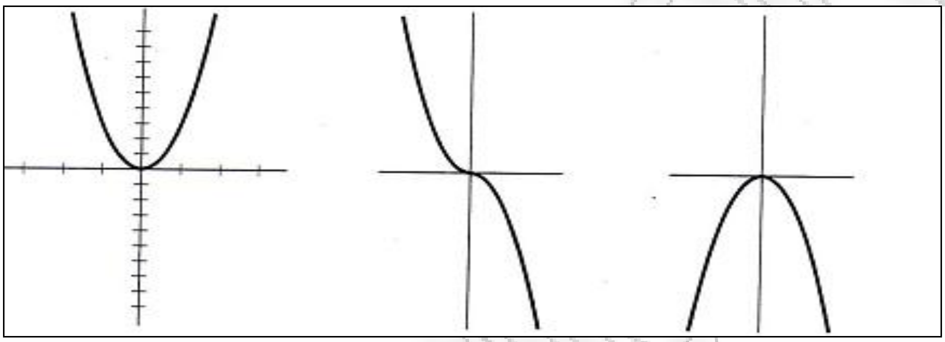
$x_1< x_2$ και κατά συνέπεια $f(x_1) < f(x_2)$.

Η τέταρτη συνάρτηση στο Σχήμα 2.2, $f_2(x)=-x^7$, είναι μία φθίνουσα συνάρτηση.

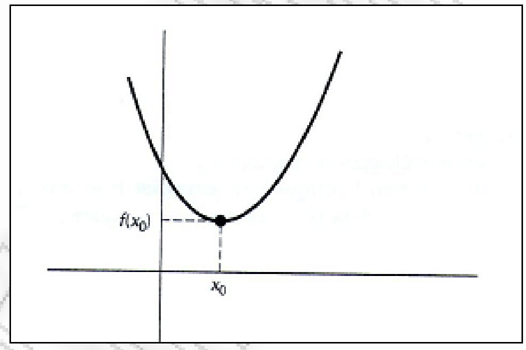
Το σημείο όπου μία συνάρτηση από αύξουσα γίνεται φθίνουσα και αντίστροφα είναι πολύ σημαντικό. Εάν μία συνάρτηση f αλλάζει από φθίνουσα γίνεται αύξουσα στο σημείο x0, ο γράφος της παίρνει ανοδική πορεία στο σημείο (x0, f(x0)), όπως στο Σχήμα 2.3. Αυτό σημαίνει ότι ο γράφος της f βρίσκεται γύρω και πάνω από το σημείο (x0, f(x0)) . Ένα τέτοιο σημείο ονομάζεται τοπικό ή σχετικό ελάχιστο της συνάρτησης f. Όταν ο γράφος ποτέ δεν βρίσκεται κάτω από το σημείο (x0, f(x0)) και f(x)≥ f(x0) για κάθε x, τότε το σημείο (x0, f(x0)) ονομάζεται καθολικό ή απόλυτο ελάχιστο. Το σημείο (0,0) είναι το απόλυτο ελάχιστο της συνάρτησης f1(x)=3x4 στο Σχήμα 2.2.



Σχήμα2.2 : Οι γράφοι των συναρτήσεων *f*(x)= x+1, g(x)=2x, $f_1(x)=3x^4$, $f_2(x)=-x^7$ και $f_3(x)=-10x^2$.

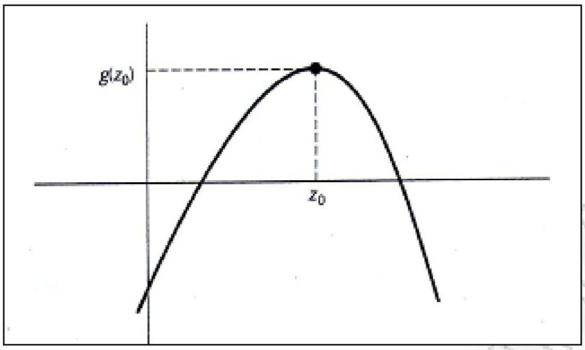


Σχήμα2.2 : Οι γράφοι των συναρτήσεων *f*(x)= x+1, g(x)=2x, $f_1(x)=3x^4$, $f_2(x)=-x^7$ και $f_3(x)=-10x^2$.



Σχήμα2.3: το ελάχιστο της συνάρτησης *f* στο σημείο x_0.

Ομοίως, αν η συνάρτηση g αλλάζει και από αύξουσα γίνεται φθίνουσα στο σημείο z0, η γραφική παράσταση της g εκτείνεται κάτω από το σημείο (z0,g(z0)), όπως φαίνεται στην σχήμα 2.4, και το σημείο (z0,g(z0)) ονομάζεται τοπικό ή σχετικό μέγιστο της g. Πιο αναλυτικά, ισχύει ότι g(x)≤ g(z0), για όλα τα x κοντά στο z0. Αν ισχύει g(x)≤ g(z0) για όλα τα x, τότε το σημείο (z0,g(z0)) είναι το καθολικό ή απόλυτο μέγιστο της συνάρτησης g. Η συνάρτηση f3(x)=-10x2 του σχήματος 2.2 έχει τοπικό και απόλυτο μέγιστο στο σημείο (0,0).



Σχήμα 2.4 : Η συνάρτηση g έχει μέγιστο στο σημείο z_0.

Πεδίο ορισμού

Μερικές συναρτήσεις ορίζονται μόνα σε συγκεκριμένα υποσύνολα του R^1. Έστω μία συνάρτηση *f,* το σύνολο των αριθμών x στο οποίο η συνάρτηση f(x) ορίζεται ονομάζεται πεδίο ορισμού της f.Για κάθε μία από της συναρτήσεις του σχήματος 2.2, το πεδίο ορισμού τους είναι R^1. Σε μία ρητή συνάρτηση για την οποία για x=0 η συνάρτηση δεν ορίζεται όπως f(x)=1/x, αλλά ορίζεται για οποιοδήποτε άλλο x, η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού R^1-{0}.υπάρχουν δύο λόγοι για τους οποίους το πεδίο συνάρτησης μπορεί να έχει περιορισμούς: βάση μαθηματικών και βάση εφαρμογής. Ο πιο σύνηθες μαθηματικός λόγος για τον οποίο μπορεί να υπάρξουν περιορισμοί στο πεδίο ορισμού είναι ότι, στις ρητές συναρτήσεις δεν γίνεται ο παρονομαστής να είναι 0 όπως και δεν μπορούμε να έχουμε τετραγωνική ρίζα ή λογάριθμο αρνητικού αριθμού. Για παράδειγμα, στη συνάρτηση $h_1(x)=1/(x^2-1)$ είναι όλα τα x αποδεκτά εκτός των {-1,1} και ο περιορισμός της συνάρτησης $h_2(x)=\sqrt{x}-7$ είναι x≥7.

Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης μπορεί να έχει περιορισμούς που να προκύπτουν από την ίδια την εφαρμογή. Για παράδειγμα, αν C(x) είναι το κόστος τη παραγωγής x αυτοκινήτων, τότε είναι φυσικά ένας θετικός αριθμός. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης C θα είναι το σύνολο των θετικών ακεραίων. Αν επαναπροσδιορίσουμε το κόστος της συνάρτησης C, έτσι ώστε F(x) είναι το κόστος της παραγωγής x τόνων αυτοκινήτων, το πεδίο ορισμού της F θα είναι όλοι οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί:

$$R_+ \equiv \{x \, E \, R^1 : x \geq 0\}.$$

Οι θετικοί αριθμοί R_+ είναι πεδίο ορισμού για συναρτήσεις που ο περιορισμός του προκύπτει από την εφαρμογή. Εάν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης y=f(x) είναι το σύνολο $D \subset R^1$, είτε για μαθηματικούς λόγους είτε για λόγους εφαρμογής το πεδίο ορισμού γράφεται:

$$f : D \rightarrow R^1.$$

Μιλώντας για σύνολα πάνω στον άξονα ας επανέλθουμε στα διαστήματα R1. Δεδομένων δύο αριθμών a και b, το σύνολο όλων των αριθμών μεταξύ a και b ονομάζεται διάστημα. Αν τα σημεία a και b αποκλείονται του διαστήματος, τότε αυτό καλείται ανοιχτό διάστημα και γράφεται ως εξής:

$$(a,b) \equiv \{x \in R^1 : a<x<b\}.$$

Αν και τα δύο σημεία εμπεριέχονται στο διάστημα τότε αυτό ονομάζεται κλειστό και γράφεται ακολούθως:

$$[a,b] \equiv \{x \in R^1 : a<x<b\}.$$

Εάν μόνο το ένα σημείο ανήκει στο διάστημα, το διάστημα αυτό ονομάζεται ημιανοιχτό ή ημίκλειστο αντίστοιχα και γράφεται (a,b] ή [a,b). Υπάρχουν και πέντε ειδών άπειρα διαστήματα που τα συμβολίζουμε όπως φαίνεται παρακάτω:

- (a,∞)={ x Є R^1: x>a}.
- [a,∞)={ x Є R^1: x≥a},
- (-∞,a)={ x Є R^1:x<a},
- (-∞,a]={ x Є R^1: x≤a},
- (-∞,+∞)=R^1.

2.2 Γραμμικές συναρτήσεις

Οι πιο απλές πιθανές συναρτήσεις είναι οι πολυωνυμικές με βαθμό μηδέν, όπως η σταθερή συνάρτηση f(x)=b. Μια τέτοια συνάρτηση ορίζει τον ίδιο αριθμό b για κάθε πραγματικό αριθμό x, που είναι πολύ απλές για να έχουν ενδιαφέρον. Οι πιο απλές συναρτήσεις που αξίζει να ασχοληθούμε είναι οι πολυωνυμίες πρώτου βαθμού, που είναι της μορφής:

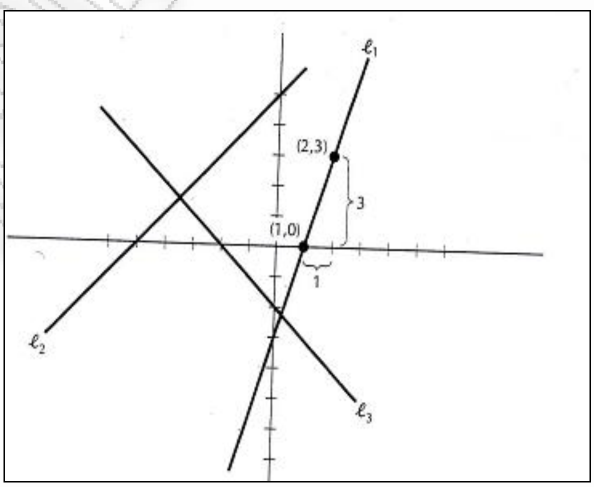
$$f(x)= mx + b$$

Τέτοιες συναρτήσεις ονομάζονται γραμμικές συναρτήσεις, επειδή η γραφική παράστασή τους είναι μία ευθεία γραμμή όπως θα αναπαραστήσουμε παρακάτω.

Η κλίση μίας ευθείας στο επίπεδο

Πρωτίστως, ας ασχοληθούμε με τη γεωμετρία των ευθειών στο καρτεσιανό επίπεδο. Το κύριο χαρακτηριστικό που διακρίνει μία ευθεία από μία άλλη είναι η κλίση της. Ένας φυσικός τρόπος για να μετρήσουμε την κλίση της κάθε ευθείας, είναι να ξεκινήσουμε από κάποιο σημείο (x0, y0) πάνω στην ευθεία και να κινηθούμε έτσι ώστε η συντεταγμένη x να αυξηθεί κατά μία μονάδα. Η αντίστοιχη αλλαγή στην συντεταγμένη y καλείτε κλίση της ευθείας.

Παράδειγμα: Εάν η αρχή βρίσκεται στο σημείο (1,0) της ευθείας l_1 του σχήματος 2.5 και κινείται πάνω στην ευθεία έως η συντεταγμένη x να πάρει τον αριθμό 2 δηλαδή μία μονάδα επιπλέον. Βρισκόμαστε πλέον στο σημείο (2,3). Επειδή το y αυξήθηκε κατά 3 μονάδες στη διαδικασία αυτή η κλίση της ευθείας l_1 είναι 3 όπως φαίνεται και παρακάτω στο σχήμα 2.5. η διαγώνια ευθεία l_2 σχηματίζει γωνία 45^o με τον οριζόντιο άξονα. Η κλίση της ευθείας αυτής είναι +1, γιατί αυξάνοντας το x κατά μία μονάδα αυξάνεται και το y αντίστοιχα στο y=1. η κλίση της l_3 που σχηματίζει γωνία -45^o με τον οριζόντιο άξονα, είναι -1. Ευθείες πιο απότομες από την l_2 έχουν κλίση μεταξύ +1 και +∞. Ευθείες στις οποίες η κλίση εκτείνεται προς τα πάνω αλλά είναι πιο επίπεδες από την l_2 έχουν κλίση μεταξύ 0 και +1. Η οριζόντιες ευθείες έχουν κλίση μηδέν. Ευθείες στης οποίες οι κλίση είναι στην κάτω πλευρά από αριστερά προς τα δεξιά, όπως η l_3 έχουν αρνητική κλίση.



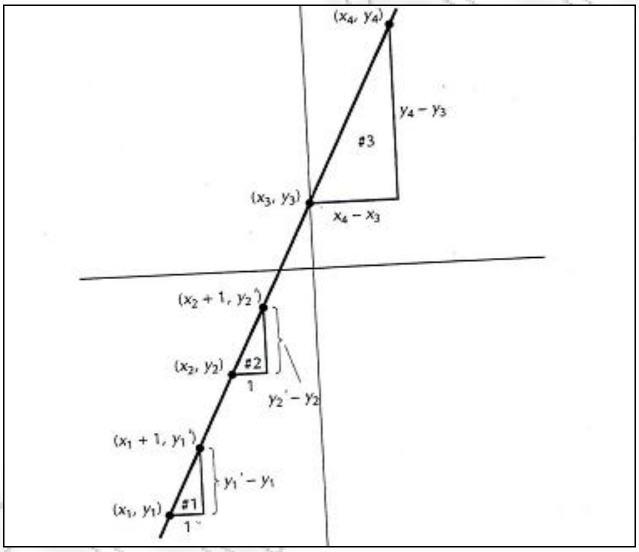
Σχήμα 2.5: Κάποιες κλίσεις ευθειών στο επίπεδο.

Πρέπει να πείσουμε τους εαυτούς μας ότι η κλίση μίας ευθείας είναι ανεξάρτητη του αρχικού σημείου στον υπολογισμό της κλίσης. Για να υπολογίσουμε την κλίση της ευθείας του σχήματος 2.6, μπορούμε να ξεκινήσουμε από το σημείο (x1, y1) και να κινηθούμε προς το σημείο (x1+1,y1') στο τρίγωνο #1. Σε αυτή τη περίπτωση υπολογίζουμε την κλίση ως y1'- y1, ο αριθμός αυτός αναλογεί στην μεγαλύτερη κάθετη ευθεία του τριγώνου #1. Εάν ξεκινήσουμε από άλλο αρχικό σημείο (x2, y2) και κινηθούμε στο (x2+1, y2'), υπολογίζουμε την κλίση της ευθείας με την αφαίρεση y2'-y2. Σημειώνουμε στο σημείο αυτό ότι τα τρίγωνα #1 και #2 είναι παράλληλα. Τα τρίγωνα #1 και #2 είναι παρόμοια γι' αυτό οι αναλογίες τους στις αντίστοιχες πλευρές της ισότητας είναι:

$$(y_2'-y_2)/1 = (y_1'- y_1)/1$$

Αυτό αποδεικνύει ότι ο υπολογισμός κάποιων κλίσεων ευθειών δεν εξαρτάται από το αρχικό σημείο. Κοιτάζοντας το τρίγωνο #3 του σχήματος 2.6 το οποίο δημιουργήθηκε από τη μετακίνηση του σημείου (x_3,y_3) σε (x_4,y_4), συμπεράνουμε ότι το x_4 δεν είναι απαραίτητα x_3+1. Με την ίδια γεωμετρική ανάλυση όπως παραπάνω το τρίγωνο #3 είναι παρόμοιο με το #2 και #1, για το λόγο αυτό ισχύει η ισότητα:

$$(y_4-y_3)/(x_4- x_3)= (y_2'-y_2)/1 = (y_1'- y_1)/1= \text{κλίση της ευθείας l.}$$



Σχήμα 2.6: Υπολογισμός της κλίσης της ευθείας l.

Η χρήση αυθαίρετων σημείων της ευθείας για υπολογισμό της κλίσης, ακολουθεί το πιο γενικό καθορισμό της κλίσης που περιγράφεται παρακάτω.

Έστω (x_0,y_0) και (x_1,y_1) τα αυθαίρετα σημεία της ευθείας l. Η αναλογία

$$m=(y_1- y_0)/(x_1- x_0)$$

καλείτε κλίση της l. Η ανάλυση του σχήματος 2.6 δείχνει ότι η κλίση της l δεν εξαρτάτε από τα σημεία που επιλέχθηκαν. Από την ίδια ανάλυση συμπεραίνουμε ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες όταν και μόνο όταν έχουν την ίδια κλίση.

Παράδειγμα 2.2: Η κλίση της ευθείας που περνάει από τα σημεία (4,6) και (0,7) είναι

$$m= 7-6 / 0-4 = -1/4.$$

Η κλίση της ευθείας που περνά από τα σημεία (4,0) και (0,1) είναι επίσης -1/4, το οποίο σημαίνει ότι οι δύο ευθείες είναι παράλληλες.

Η εξίσωση της ευθείας

Στη συνέχεια θα βρούμε τις εξισώσεις που τα σημεία σε μια συγκεκριμένη ευθεία πρέπει να ικανοποιούν. Αρχικά υποθέτουμε ότι η ευθεία l έχει κλίση m και η ευθεία τέμνει τον y άξονα στο σημείο (0,b). Έστω (x,y) ένα αυθαίρετο σημείο της ευθείας. Χρησιμοποιώντας το (x,y) και το σημείο (0,b) υπολογίζουμε την κλίση της ευθείας.

$$y-b / x-0=m \text{ ή αλλιώς}$$
$$y-b=mx \text{ και } y=mx+b$$

Θεώρημα 2.1: Για την ευθεία που έχει κλίση m και τέμνει τον άξονα y στο σημείο (0,b) ισχύει ότι $y=mx+b$.

2.3 Η κλίση των μη-γραμμικών συναρτήσεων

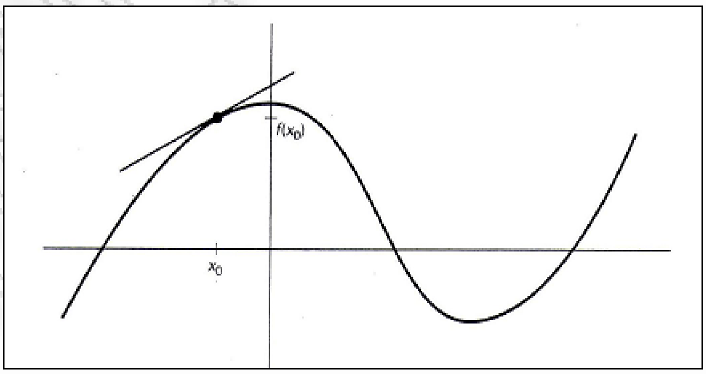
Είδαμε νωρίτερα ότι η μέτρηση της κλίσης γραμμικών συναρτήσεων είναι μία εφαρμογή των συναρτήσεων αυτών που χρησιμοποιούνται ευρέως στην μικροοικονομική θεωρία. Όλες οι συναρτήσεις που ορίζονται στην εφαρμογές είναι μη-γραμμικές. Πώς όμως μπορούμε να μετρήσουμε τα οριακά αποτελέσματα των μη-γραμμικών συναρτήσεων;

Υποθέτουμε ότι εξετάζουμε τη μη-γραμμική συνάρτηση $y=f(x)$ και ότι βρισκόμαστε στο σημείο $(x_0,f(x_0))$ του γράφου f του σχήματος 2.8.Θέλουμε να μετρήσουμε το ποσοστό μεταβολής της f όταν $x=x_0$. Μία φυσική λύση είναι να χαράξουμε την εφαπτομένη του γράφου μας στο σημείο x_0, όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Εάν η εφαπτομένη προσεγγίζει πολύ κοντά το γράφημα f που βρίσκεται γύρω από το σημείο $(x_0,f(x_0))$, είναι μία καλή προσέγγιση του εαυτού του. Η κλίση της (εφαπτομένης) που ξέρουμε πλέον να την υπολογίζουμε, είναι η κλίση της μη-γραμμικής συνάρτησης στο x_0. Σημειώνουμε ότι για τις μη-γραμμικές συναρτήσεις σε αντίθεση με τις γραμμικές, η κλίση της εφαπτομένης ποικίλει από σημείο σε σημείο.

Χρησιμοποιούμε την έννοια της προσέγγισης της εφαπτόμενης ευθείας καθημερινά στη ζωή μας. Για παράδειγμα, κατασκευαστές που σχεδιάζουν να χτίσουν ένα μεγάλο εμπορικό κέντρο ή γαιοκτήμονες που επιθυμούν να χωρίσουν μεγάλα κομμάτια της γης, υποθέτοντας ότι εργάζονται μάλλον σε επίπεδο έδαφος ή ακόμα και θεωρώντας ότι δουλεύουν σε καμπυλωτό έδαφος. Στην πραγματικότητα, χρησιμοποιούν την εφαπτόμενης ευθείας της γης και υπολογίζουν με ακρίβεια 10 ή 20 δεκαδικές θέσεις, πολύ κοντά και αρκετά ικανοποιητικά για την υπόθεσή τους.

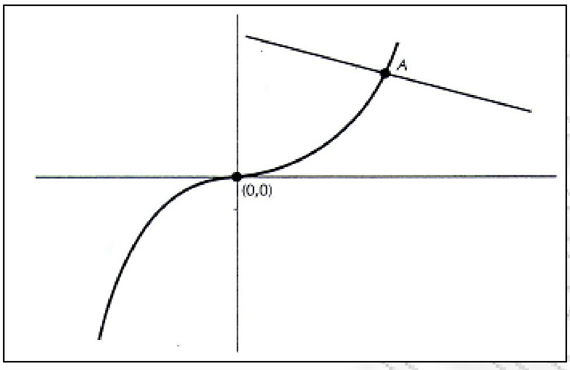
Έτσι, καθορίζουμε την κλίση μη-γραμμικών συναρτήσεων f στο σημείο (x0,f(x0)) του γραφήματος, ως την κλίση της εφαπτομένης ευθείας στο γράφο f στο σημείο αυτό. Η κλίση της εφαπτομένης ονομάζεται παράγωγος της f στο x0 και γράφεται:

$$f'(x0) \text{ ή } df/dx\ (x0)$$



Σχήμα 2.8:Γράφημα μη-γραμμικών συναρτήσεων

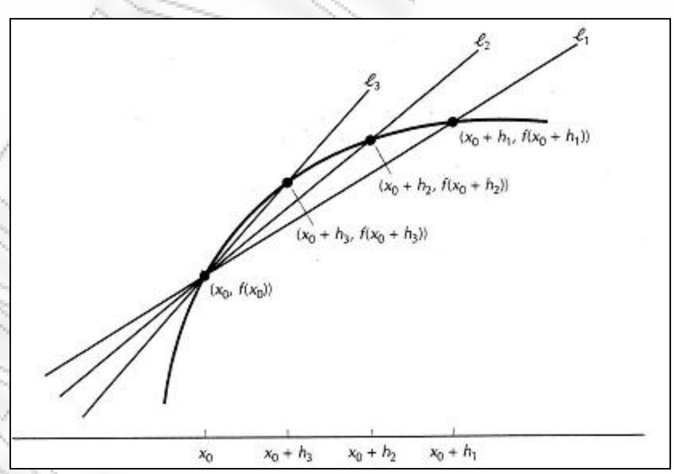
Σημειώνουμε ότι στην ουσία η κλίση είναι η μεταβολή (διαφορά) της f διαιρούμενη με την μεταβολή του x και συμβολίζεται ως Δf/Δx. Η διαίρεση αυτή είναι ένα θέμα που πρέπει να αναλυθεί λίγο παραπάνω, ώστε να μπορούμε να εργαζόμαστε με αυτήν. Το πρώτο βήμα είναι να καθορίσουμε την εφαπτομένη του γράφου στο συγκεκριμένο σημείο. Η εφαπτομένη δεν είναι ευθεία που συναντά το γράφο σε ένα μοναδικό σημείο, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα 2.9. Η πραγματική εφαπτομένη του γράφου του σχήματός μας $y= x^3$ στο σημείο (0,0) είναι ο άξονας x.



Σχήμα 2.9: Η εφαπτομένη ευθεία (άξονας x) και η μη εφαπτόμενη του γραφήματος στο x^3

Για να λυθεί το πρόβλημα θα εισάγουμε την έννοια της τέμνουσας ευθείας δηλαδή, την ευθεία που συναντά το γράφο σε δύο σημεία. Πηγαίνουμε λίγο πίσω από το σημείο (x0,f(x0)) που βρισκόμαστε στο γράφο, στο σημείο (x0 + h1,f(x0 + h1)) όπου h1 ένας πολύ μικρός αριθμός. Περιστρέφοντας την ευθεία l1 στο γράφο συναντάμε τα δύο αυτά σημεία. Η ευθεία l1 είναι μία καλή προσέγγιση της εφαπτομένης. Επιλέγοντας κάποιο πιο κοντινά σημεία, έχουμε και καλύτερες προσεγγίσεις. Έτσι, επιλέγουμε πολλά τέτοια σημεία hn που τείνουν στο 0. Για κάθε n, υπάρχει και η αντίστοιχη ευθεία ln. Οι κλίσεις των ευθειών αυτών προσεγγίζουν την κλίση της ζητούμενης εφαπτομένης, δηλαδή:

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{(x_0 + h_n) - x_0} = \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}.$$



Σχήμα 2.10: Προσέγγιση της εφαπτομένης μέσω των l_n ευθειών.

Για το λόγο αυτό η κλίση της εφαπτομένης είναι το όριο της διαδικασίας h_n που τείνει στο 0.

Ορισμός: Έστω $(x_0,f(x_0))$ ένα σημείο του γράφου f(x)=y η παράγωγος του f στο x_0 γράφεται:

$$f'(x_0) \quad \text{or} \quad \frac{df}{dx}(x_0) \quad \text{or} \quad \frac{dy}{dx}(x_0),$$

που είναι η κλίση της εφαπτομένης του γράφου f στο σημείο $(x_0,f(x_0))$. Αναλυτικότερα:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad (4)$$

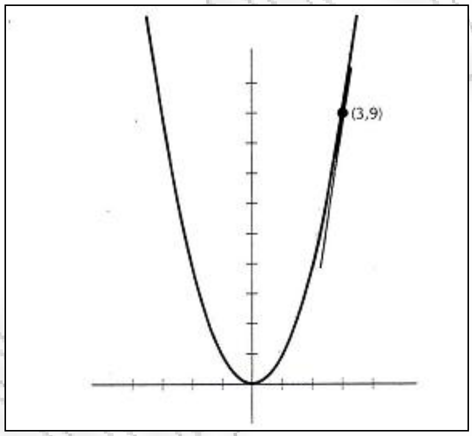
εάν το όριο αυτό υπάρχει. Αν το όριο αυτό δεν υπάρχει λέμε ότι η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο x_0 με παράγωγο $f΄(x_0)$.

2.4 Υπολογισμός των παραγώγων

Παράδειγμα 2.4 Ας χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (4) που αναφέραμε παραπάνω για να υπολογίσουμε την παράγωγο μιας απλής μη-γραμμικής συνάρτησης, $f(x)=x^2$, στο σημείο $\chi_0=3$. Δεδομένου ότι η γραφική παράσταση του x^2 είναι αρκετά απότομη στο σημείο (3,9) όπως φαίνεται στο σχήμα 2.11, περιμένουμε ότι η παράγωγος f΄(3) θα είναι μεγαλύτερη του 1. Για την ακολουθία των h_n που συγκλίνουν προς το 0, επιλέχθηκε η παρακάτω ακολουθία:

$$\{h_n\}=0.1,\ 0.01,\ 0.001,\ldots,(0.1)^n,\ldots \qquad (5)$$

Είναι αναγκαίο να κατασκευάσουμε ένα πίνακα που θα συνοψίζει όλους τους απαραίτητους υπολογισμούς.



Σχήμα 2.11: Η εφαπτόμενη ευθεία του γραφήματος $f(x)=x^2$ στο $\chi_0=3$.

Έστω $h_n\to 0$, το πηλίκο στην τελευταία στήλη του Πίνακα 2.1 προσεγγίζει το 6. Για το λόγο αυτό η κλίση της εφαπτομένης ευθείας του γράφου $f(x)=x^2$ στο σημείο (3,9) είναι το 6, το οποίο είναι f΄(3)=6.

h_n	x_0+h_n	$f(x_0+h_n)$	$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}$
0.1	3.1	9.61	6.1
0.01	3.01	9.0601	6.01
0.001	3.001	9.006001	6.001
0.0001	3.0001	9.00060001	6.0001

Πίνακας 2.1

Παράδειγμα 2.5: Για να αποδείξουμε ότι f΄(3)=6, χρειάζεται να δείξουμε ότι:

$$\frac{(3+h_n)^2-3^2}{h_n} \to 6, \quad \text{as} \quad h_n \to 0,$$

Για κάθε ακολουθία $\{h_n\}$ που τείνει στο μηδέν, όχι μόνο για την ακολουθία (5). Θα αποδείξουμε την σχέση (6) αναλυτικότερα. Για κάθε h

$$\frac{(3+h)^2-3^2}{h}=\frac{9+6h+h^2-9}{h}=\frac{h(6+h)}{h}=6+h,$$

Το οποίο προσεγγίζει το 6 για $h\to 0$. Τώρα γνωρίζουμε ότι $f'(3)=6$.

Παράδειγμα 2.6: Τώρα προσθέτουμε ένα βαθμό γενικότητας και υπολογίζουμε την παράγωγο του $f(x)=x^2$ στο αυθαίρετο σημείο x_0. Έστω $\{h_n\}$ μία αυθαίρετη ακολουθία η οποία συγκλίνει στο 0 για $n\to\infty$, τότε:

$$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\frac{(x_0+h_n)^2-x_0^2}{h_n}=\frac{x_0^2+2h_nx_0+h_n^2-x_0^2}{h_n}$$
$$=\frac{h_n(2x_0+h_n)}{h_n}=2x_0+h_n,$$

Που τείνει στο $2x_0$ για $h\to 0$. αυτός ο υπολογισμός αποδεικνύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.2: Η παράγωγος του $f(x)=x^2$ στο x_0 είναι $f'(x_0)=2x_0$.

Το θεώρημα 2.2 μπορεί να συνοψιστούν στη δήλωση ότι η παράγωγος x^k είναι kx^{k-1} για k=1,2,3,4. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι αυτό ισχύει για κάθε k θετικό ακέραιο. Έπειτα θα δούμε ότι αυτό ισχύει για κάθε πραγματικό k περιλαμβάνοντας και τους αρνητικούς. Στην απόδειξη του θεωρήματος 2.2 χρησιμοποιούμε ρητό τύπο για $(x+h)^k$ για μικρούς ακέραιους k. Για να αποδείξουμε πιο γενικά αποτελέσματα χρειαζόμαστε πιο γενικούς τύπους για $(x+h)^k$ για κάθε θετικό ακέραιο k, ο τύπος αυτό φαίνεται στο παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 2.1: Για κάθε θετικό ακέραιο k,

$$(x+h)^k=x^k+a_1x^{k-1}h^1+\cdots+a_{k-1}x^1h^{k-1}+a_kh^k, \qquad (7)$$

όπου

$$a_j=\frac{k!}{j!\,(k-j)!}, \quad \text{για } j=1,\ldots,k.$$

μερικά ειδιαίτερα παραδείγματα, $a_1=k$, $a_2=k(k-1)/2$, and $a_k=1$.

Θεώρημα 2.3: Για κάθε πιθανό ακέραιο k, η παράγωγός του $f(x)=x^k$ στο x_0 είναι $f'(x_0)=kx_0^{k-1}$.

Απόδειξη

$$\frac{(x_0+h)^k-x_0^k}{h}=\frac{x_0^k+kx_0^{k-1}h^1+\frac{1}{2}k(k-1)x_0^{k-2}h^2+\cdots+a_kh^k-x_0^k}{h}$$
$$=\frac{h(kx_0^{k-1}+\frac{1}{2}k(k-1)x_0^{k-2}h+\cdots+a_kh^{k-1})}{h}$$
$$=kx_0^{k-1}+\frac{1}{2}k(k-1)x_0^{k-2}h+\cdots+a_kh^{k-1},$$

Που προσεγγίζει το kx_0^{k-1} για h→0.

Κανόνες για τον υπολογισμό παραγώγων

Τα μονώνυμα xk είναι τα θεμέλια κλασικών συναρτήσεων, συμπεριλαμβανομένων και των πολυωνύμων και των ρητών συναρτήσεων. Για να υπολογίσουμε τις παραγώγους αυτών των συναρτήσεων, πρέπει να γνωρίζουμε βρίσκουμε τις παραγώγους του αθροίσματος, της αφαίρεσης και απλών πράξεων. Για παράδειγμα θα πάρουμε τις συναρτήσεις f(x)=x3 και g(x)=6x2.

$$(f+g)(x) \equiv f(x)+g(x) = x^3+6x^2,$$
$$(f\cdot g)(x) \equiv f(x)\cdot g(x) = x^3\cdot 6x^2 = 6x^5,$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \equiv \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3}{6x^2} = \frac{1}{6}x.$$

Οι κανόνες αυτοί μαζί με το θεώρημα 2.3 θα μας επιτρέψουν να βρούμε παραγώγους πιο σύνθετων συναρτήσεων ακόμα και πολυωνύμων και ρητών συναρτήσεων. Στο θεώρημα 2.3 ο τρίτος κανόνας ονομάζεται κανόνας γινομένου, ο τέταρτος κανόνας πηλίκου και ο πέμπτος κανόνας επιτάχυνσης . Η απόδειξη του κάθε κανόνα του θεωρήματος 2.4 απαιτεί έναν μάλλον απλό χειρισμό του καθορισμού της σχέσης (4) των παραγώγων. Ο πρώτος και ο δεύτερος κανόνας αποδεικνύονται σε επεξηγηματικές ασκήσεις, ενώ οι αποδείξεις του τρίτου, τέταρτου και πέμπτου κανόνα είναι πιο λεπτομερής. Η απόδειξη του έκτου κανόνα έχει καταχωρηθεί σαν άσκηση που αφορά αρνητικούς ακέραιους και θα αναλυθεί στην ενότητα 4.2.

Θεώρημα 2.4: Υποθέτουμε ότι k είναι ένας αυθαίρετος σταθερός και f και g είναι διαφορετικές συναρτήσεις σε $x=x_0$, τότε:

$$a)\quad (f\pm g)'(x_0) = f'(x_0)\pm g'(x_0),$$
$$b)\quad (kf)'(x_0) = k(f'(x_0)),$$
$$c)\quad (f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0),$$
$$d)\quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2},$$
$$e)\quad ((f(x))^n)' = n(f(x))^{n-1}\cdot f'(x),$$
$$f)\quad (x^k)' = kx^{k-1}.$$

Παράδειγμα 2.7: Χρησιμοποιούμε τα θεωρήματα 2.3 και 2.4 για να υπολογίσουμε τις παραγώγους μερικών απλών συναρτήσεων.

$$a)\quad (x^7+3x^6-4x^2+5)' = 7x^6+18x^5-8x,$$
$$b)\quad ((x^2+3x-1)(x^4-8x))' = (2x+3)(x^4-8x)+(x^2+3x-1)(4x^3-8)$$
$$= 6x^5+15x^4-4x^3-24x^2-48x+8,$$
$$c)\quad \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{(2x)(x^2+1)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2},$$

$$e)\quad ((x^3-4x^2+1)^5)' = 5(x^3-4x^2+1)^4\cdot(3x^2-8x),$$

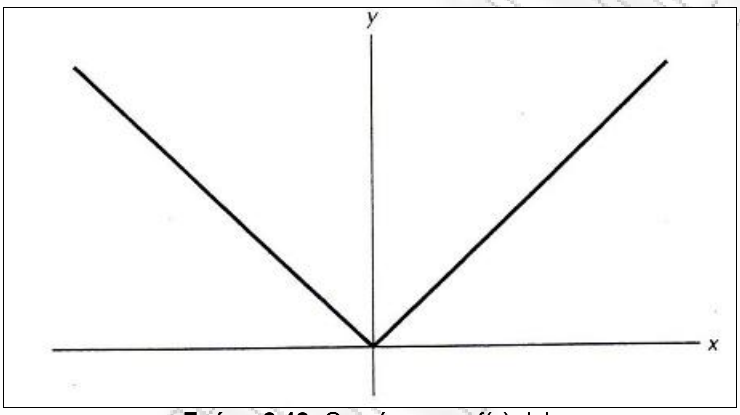
$$f)\quad (3x^{2/3}+3x^{-1})' = 2x^{-1/3}-3x^{-2}.$$

Διαφορισιμότητα και Συνοχή

Όπως είδαμε και στην ενότητα 2.3 η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο x0 αν, γεωμετρικά, ο γράφος έχει εφαπτομένη ευθεία στο (x0, f (x0)) η αν υπάρχει το παρακάτω όριο:

$$\lim_{h_n\to 0}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} \qquad (8)$$

Και είναι το ίδιο για κάθε ακολουθία $\{h_n\}$ η οποία τείνει στο 0. Αν η συνάρτηση είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο x_0 στο χώρο του D, λέμε ότι η συνάρτηση είναι διαφορίσιμη. Μόνο συναρτήσεις που οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ομαλές καμπύλες έχουν παντού εφαπτόμενες ευθείες. Στην μαθηματική κοινότητα ο όρος ομαλός χρησιμοποιείται αντί του όρου διαφορισμός.

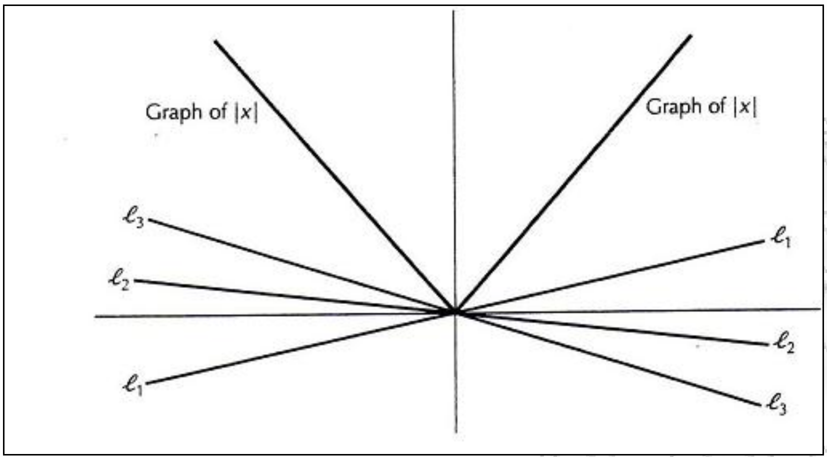


Σχήμα 2.12: Ο γράφος της f(x)=|x|.

Μη Διαφορίσιμες Συναρτήσεις

Ως παράδειγμα μιας μη διαφορίσιμης συνάρτησης σε όλα τα σημεία έχουμε τη συνάρτηση f(x)=|x| του σχήματος 2.12. Αυτός ο γράφος έχει απότομες γωνίες στο σημείο της αρχής. Δεν υπάρχει φυσική εφαπτομένη στο γράφο στο σημείο (0,0). Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα 2.13 υπάρχουν πολλές ευθείες που περνούν από το σημείο (0,0) που βρίσκονται στην μία μεριά του γράφου. Αφού η γραφική παράσταση του |x| δεν έχει καλά ορισμένη εφαπτομένη στο x=0, άρα και η συνάρτηση |x| δεν είναι διαφορίσιμη.

Βλέπουμε ότι η σχέση (8) δεν ισχύει για τη συνάρτηση |x|, υποκαθιστούμε στην (8) κάθε μία από της παρακάτω ακολουθίες που τείνουν στο μηδέν.



Σχήμα 2.13: Υποψήφιες εφαπτόμενες ευθείες του γράφου |x|.

Αντικαθιστώντας τις ακολουθίες αυτές στη σχέση (8) της παραγώγου έχουμε τα εξής:

$$\frac{f(0+h_n)-f(0)}{h_n} = \frac{h_n - 0}{h_n} = +1 \text{ για όλα } n,$$

$$\frac{f(0+k_n)-f(0)}{k_n} = \frac{-k_n - 0}{k_n} = -1 \text{ για όλα } n.$$

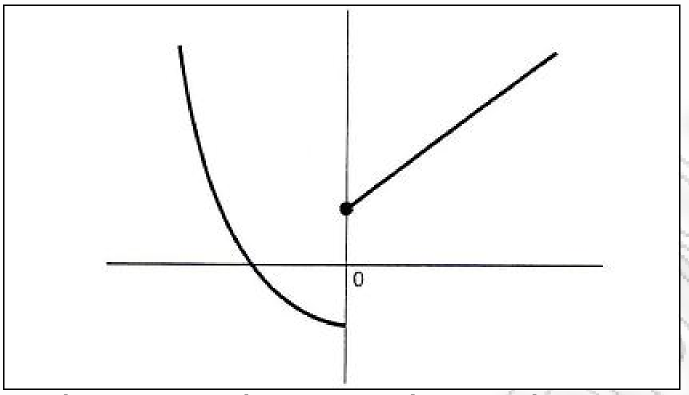
Η πρώτη ακολουθία είναι {1,1,.....,1} που συγκλίνει στο +1, η δεύτερη ακολουθία είναι {-1,-1,.....,-1} που συγκλίνει στο -1. Έχουμε διαφορετικές ακολουθίες που συγκλίνουν στο 0 παράγουν διαφορετικά όρια στη σχέση (8), άρα η συνάρτηση |x| δεν είναι παραγωγίσιμη στο x=0.

Συνεχής συναρτήσεις

Μία πιθανή μορφή συνάρτησης είναι η συνεχής. Από γεωμετρικής άποψης, μία συνάρτηση είναι συνεχής αν ο γράφος της δεν διακόπτεται σε κανένα σημείο. Ακόμα και αν η συνάρτησή μας f((x)=|x| δεν είναι διαφορίσιμη στο x=0, είναι συνεχής. Από την άλλη η συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0, \\ x^2 - 1, & x < 0, \end{cases} \qquad (9)$$

δεν είναι συνεχής στο x=0 όπως φαίνεται και στο παρακάτω γράφημα 2.14. Σε αυτή την περίπτωση ονομάζουμε το σημείο x=0 μη συνεχές του g. Είναι ξεκάθαρο ότι το γράφημα της συνάρτησης δεν μπορεί να έχει εφαπτομένη ευθεία στο μη συνεχές σημείο. Με άλλα λόγια για να είναι μία συνάρτηση διαφορίσιμη πρέπει τουλάχιστον να είναι συνεχής. Για συναρτήσεις που περιγράφονται με συγκεκριμένους τύπους, όταν αυτές είναι μη-συνεχείς καθορίζουν πότε μία συνάρτηση ορίζεται με διαφορετικούς τύπους σε διαφορετικά σημεία του άξονα αριθμών και πότε η μεταβλητή των δύο αυτών τύπων είναι διαφορετική στο συγκεκριμένο σημείο όπου ο τύπος αλλάζει. Για παράδειγμα στο σημείο x=0 της σχέσης (9).



Σχήμα 2.14: Η συνάρτηση g δεν είναι συνεχής στο x=0.

Ορισμός: Μία συνάρτηση f :$D \rightarrow R^1$ είναι συνεχής στο x_0 Ε D αν για κάθε ακολουθία $\{x_n\}$ η οποία συγκλίνει στο x_0 στο D, η $f(x_n)$ συγκλίνει $f(x_0)$. Μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σύνολο U ⊂ D εάν είναι συνεχής σε κάθε x Ε U. Τελικά λέμε ότι μία συνάρτηση είναι συνεχής εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Η συνάρτηση g δεν πληρεί τις υποθέσεις του παραπάνω ορισμού για χ=0 γιατί:

$$\lim_{n \to \infty} f((-.1)^n) = -1, \quad \text{but} \quad f(0) = +1.$$

Συνεχείς και διαφορίσιμες συναρτήσεις

Εάν η f είναι μία διαφορίσιμη συνάρτηση, η παράγωγός της f΄(x) είναι μία άλλη συνάρτηση του χ. Είναι η συνάρτηση που ορίζει σε κάθε σημείο χ την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας του γράφου της f στο (x,f(x)). Μπορούμε να ρωτήσουμε κατά πόσο η συνάρτηση είναι συνεχής. Γεωμετρικά η συνάρτηση f΄ είναι συνεχής, εάν η εφαπτομένη ευθεία του γράφου f στο (x,f(x)) αλλάζει ομαλά σε κάθε αλλαγή του χ. Αν η f΄(x) είναι συνεχής στο χ, τότε η αρχική μας συνάρτηση f είναι συνεχής και διαφορίσιμη.

Παράδειγμα 2.8: Κάθε πολυώνυμο είναι μία συνεχής συνάρτηση. Αφού η παράγωγος του πολυωνύμου είναι πολυώνυμο ενός βαθμού μικρότερου, που είναι επίσης συνεχές. Για το λόγο αυτό κάθε πολυώνυμο είναι C^1 (συνεχής και διαφορίσιμη).

Μεγαλύτερου Βαθμού Παράγωγοι

Έστω f είναι C^1 είναι μία συνάρτηση στο R^1. Αφού παραγωγίζουμε τότε η f΄(x) είναι μία συνεχής συνάρτηση στο R^1. Διερωτόμαστε εάν η συνάρτηση f΄ έχει παράγωγο στο σημείο χ_0. Η παράγωγος του f΄ στο χ_0 ονομάζεται δεύτερη παράγωγος της f στο χ_0 και γράφεται:

$$f''(x_0) \text{ ή } \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)(x_0) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0).$$

Παράδειγμα 2.9: Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ είναι η $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3.$ Η δεύτερη παράγωγος της f είναι $f''(x) = 6x + 6.$

Παράδειγμα 2.10: Εξετάζουμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} +\frac{1}{2}x^2, & x \geq 0, \\ -\frac{1}{2}x^2, & x < 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Αν και οι δύο εξισώσεις της συναρτήσεις είναι ίσες με 0 στο σημείο μετάβασης χ=0, η f είναι συνεχής. Το ίδιο επιχείρημα ισχύει και για την f΄ ότι είναι συνεχής, αφού η f΄ μπορεί να γραφτεί ως:

$$f'(x) = \begin{cases} +x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

Από τη στιγμή που η f΄ είναι συνεχής η f είναι διαφορίσιμη. Η f΄=|x| δεν είναι διαφορίσιμη στο χ=0 και για το λόγο αυτό η f΄΄ δεν υπάρχει στο σημείο χ=0. Η δεύτερη παράγωγος δεν υπάρχει για όλα τα σημεία.

Εάν η συνάρτηση f έχει δεύτερη παράγωγο παντού, τότε η f'' είναι μια σαφώς καθορισμένη συνάρτηση του x. Αργότερα, θα δούμε ότι η δεύτερη παράγωγος έχει μια πλούσια γεωμετρική έννοια όσον αφορά το σχήμα της καμπύλης της f. Εάν η f'' είναι και η ίδια μια συνεχή συνάρτηση του x, τότε λέμε ότι η f είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη, ή C^2 για συντομία. Κάθε πολυώνυμο είναι μια συνάρτηση C^2.

Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται. Αν η f είναι C^2, έτσι ώστε $x \longrightarrow f''(x)$ είναι μια συνεχή συνάρτηση, μπορούμε να αναρωτηθούμε εάν η f'' έχει παράγωγο στο x_0. Αν συμβεί αυτό, γράφουμε αυτή την παράγωγο ως:

$$f'''(x_0) \text{ ή } f^{[3]}(x_0) \text{ ή } \frac{d^3 f}{dx^3}(x_0).$$

Για παράδειγμα, για το κυβικό πολυώνυμο $f(x)$ στο Παράδειγμα 2.9, η $f'''(x)$ = 6. Αν η $f'''(x)$ υπάρχει για όλα τα x και αν η $f'''(x)$ είναι μια συνεχή συνάρτηση του x, τότε λέμε ότι η αρχική λειτουργία f είναι C^3.

Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται για όλους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς. Εάν η $f(x)$ έχει παράγωγες τάξεως 1, 2, ..., k και αν η οστή παράγωγος της f

$$f^{[k]}(x) = \frac{d^f f}{dx^k}(x);$$

είναι και η ίδια μια συνεχή συνάρτηση, τότε λέμε ότι η f είναι C^k. Αν η f έχει συνεχή παράγωγο κάθε τάξεως, ώστε η f είναι C^k για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό k, τότε λέμε ότι η f είναι C^∞ ή "άπειρα διαφορίσιμη". Όλα τα πολυώνυμα είναι συναρτήσεις.

2.5 Προσέγγιση από τις Αποκλίσεις

Έτσι ολοκληρώνεται η αγωγή μας για τις θεμελιώδεις έννοιες και τους υπολογισμούς του λογισμού. Γυρνάμε τώρα στην χρήση της παραγώγου σχετικά με τις συναρτήσεις. Στο επόμενο κεφάλαιο, η παράγωγο θα χρησιμοποιηθεί για να καταλάβουμε τις συναρτήσεις πληρέστερα, να ζωγραφίζουμε τις συναρτήσεις πιο αποτελεσματικά, να επιλύσουμε διάφορα προβλήματα βελτιστοποίησης, καθώς και να χαρακτηρίσουμε τον Μεγιστοποιητή ή Ελαχιστοποιητή μιας συνάρτησης ιδίως στις οικονομικές ρυθμίσεις. Αρχίζουμε τη συζήτησή μας σχετικά με την χρήση του λογισμού δείχνοντας πως ο ορισμός της παραγώγου οδηγεί φυσικά στην γραμμική προσέγγιση μιας συνάρτησης. Δεδομένου ότι η ύλη αυτή είναι η ουσία του λογισμού περιλαμβάνεται στο κεφάλαιο αυτό μαζί με τις θεμελιώδεις έννοιες του λογισμού.

Υπενθυμίζουμε ότι για μια γραμμική συνάρτηση $f(x) = mx + b$ η παράγωγο $f'(x) = m$ μας δίνει την κλίση της καμπύλης της f και μετράει την τάξη μεταβολής ή την οριακή μεταβολή της f: η αύξηση της τιμής της f για κάθε μονάδα αύξησης της τιμής του x.

Ας περάσουμε από την οριακή ανάλυση αυτή στις μη γραμμικές συναρτήσεις. Ουσιαστικά, αυτός ήταν ένας από τους κύριους λόγους για τον καθορισμό των παραγώγων μιας τέτοιας συνάρτησης f. Κατά τη διαμόρφωση του αναλυτικού ορισμού της παραγώγου της f, χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η κλίση της εφαπτόμενης γραμμής στο γράφημα στο $(x_0, f(x_0))$ προσεγγίζει την κλίση της τέμνουσας γραμμής μέσω του $(x_0, f(x_0))$ και κοντά στο $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ στο γράφημα. Σε σύμβολα,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \approx f'(x_0) \quad (11)$$

για μικρή τιμή του h όπου το σύμβολο $\approx$ σημαίνει «κατά προσεγγίσει» ή «η τιμή είναι κοντά".

Αν θέσουμε $h = 1$ στην (11), στη συνέχεια η (11) γίνεται:

$$f(x_0 + 1) - f(x_0) \approx f'(x_0) \quad (12)$$

η παράγωγος της f στο x_0 είναι μια καλή προσέγγιση για την οριακή μεταβολή της f στο x_0. Φυσικά, όσο μικρότερη η καμπύλη του γραφήματος της f στο x_0, τόσο καλύτερη είναι η προσέγγιση της (12).

Παράδειγμα 2.11: Σκεφτείτε την παραγωγική συνάρτηση $F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. Ας υποθέσουμε ότι η επιχείρηση χρησιμοποιεί 100 μονάδες εργασίας x, έτσι ώστε η παραγωγή της να είναι 5 μονάδες. Η παράγωγος της συνάρτησης παραγωγής F στο x = 100

$$F'(100) = \frac{1}{4}100^{-1/2} = \frac{1}{40} = 0.025$$

είναι ένα καλό μέτρο της πρόσθετης παραγωγής που μπορεί να επιτευχθεί με την χρήση μιας επιπλέον μονάδας εργασίας, το οριακό προϊόν της εργασίας. Η πραγματική αύξηση της παραγωγής είναι $F(101) - F(100) = 0.02494$...., δηλαδή πολύ κοντά στο 0,025.

Ακόμα κι αν δεν είναι ακριβώς η αύξηση στην $y = F(x)$ ου y = F (x) που οφείλεται στην αύξηση κατά μία μονάδα στη x, οι οικονομολόγοι θα χρησιμοποιούν ακόμα την $F'(x)$ ως την οριακή μεταβολή στην F διότι είναι πιο εύκολο να συνεργαστεί με την $F'(x)$ παρά με την διαφορά και επειδή χρησιμοποιώντας την απλή $F'(x)$ αποφεύγεται το ερώτημα σχετικά με τι μονάδα πρέπει να χρησιμοποιηθεί για να μετρήσουμε την αύξηση κατά μία μονάδα στο x.

Τι θα συμβεί αν η μεταβολή της τιμής εισόδου x δεν είναι ακριβώς μία μονάδα; Επιστρέφουμε λοιπόν στην (11) και αντικαθιστούμε το h με τη Δx, την ακριβή μεταβολή του x. Πολλαπλασιάζοντας την (11) έχουμε:

$$\Delta_y \equiv f(x_0 + \Delta_x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta_x \quad (13)$$

ή

$$\equiv f(x_0+\Delta_x) \approx f'(x_0) + f'(x_0)\Delta_x, \quad (14)$$

όπου γράφουμε Δ_y για την ακριβή μεταβολή στην $y = f(x)$ όταν το x αλλάζει κατά Δ_x. Για άλλη μια φορά, όσο λιγότερο κυρτή η καμπύλη και/ή όσο μικρότερη η μεταβολή Δ_x στο x, τόσο καλύτερη είναι η προσέγγιση των (13) και (14).

Παράδειγμα 2.12 Σκεφτείτε ξανά μία εταιρεία με την συνάρτηση παραγωγής $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. Ας υποθέσουμε ότι μειώνει τον αριθμό των μονάδων εργασίας από 900 σε 896 μονάδες. Ας εκτιμήσουμε την μεταβολή της παραγωγής Δ_y και την νέα παραγωγή y στο x = 896. Εμείς αντικαθιστούμε:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^{1/2}, \qquad x_0 = 900 \quad \text{και} \quad \Delta_x = -4$$

στις (13) και (14) και υπολογίζουμε ότι:

$$F'(x) = \frac{1}{4}x^{1/2} \quad \text{και} \quad F'(900) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{30} = \frac{1}{120}.$$

Μέσω της (13), η παραγωγή θα μειωθεί κατά περίπου:

$$F'(X_0)\Delta_x = \frac{1}{120}\cdot 4 = \frac{1}{30}\,\mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma$$

Μέσω της (14), η νέα παραγωγή θα είναι περίπου:

$$F(900) + F'(900)(-4) = 15 - \frac{1}{30} = 14\frac{29}{30} = 14.9666...$$

Η πραγματική νέα παραγωγή είναι F (896) = 14,9663..... Για μια ακόμη φορά η προσέγγιση με τις παράγωγες είναι καλή.

Από μια μαθηματική άποψη, μπορούμε να θεωρήσουμε την (14) ως ένα αποτελεσματικό τρόπο προσέγγισης της $f(x)$ για x κοντά σε μερικά x_0, όπου η $f(x_0)$ και η $f'(x)$ υπολογίζονται εύκολα. Για παράδειγμα, στο Παράδειγμα 2.12, υπολογίσαμε $\frac{1}{2}\sqrt{896}$ χρησιμοποιώντας την εξοικείωση μας με την $\frac{1}{2}\sqrt{900} = 15$.

Παράδειγμα 2.13: Ας χρησιμοποιήσουμε την (14) για την εκτίμηση της κυβικής ρίζας του 1001.5. Γνωρίζουμε ότι η κυβική ρίζα του 1000 είναι 10. Επιλέγουμε $f(x) = x^{1/3}, x_0 = 1000$ και $\Delta_x = +1.5.$

Τότε,

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \quad \text{και} \quad f'(1000) = \frac{1}{3}(1000)^{-2/3} = \frac{1}{300}.$$

Ως εκ τούτου,

$$f(1001.5) \approx f(1000) + f'(1000)\cdot 1.5 = 10 + \frac{1.5}{300} = 10.005,$$

Κοντά στην πραγματική τιμή 10.004998... της $\sqrt[3]{1001.5}$

Οι εξισώσεις (13) και (14) είναι απλώς αναλυτικές παραστάσεις του γεωμετρικού γεγονός ότι η εφαπτομένη γραμμή ℓ του γραφήματος $y = f(x)$ y = f (x) στο $(x_0, f(x_0)$ είναι μια καλή προσέγγιση της καμπύλης για x και x_0. Όπως δείχνεται στην εικόνα 2.15, η αριστερή πλευρά της (13) και (14) αφορά την κίνηση κατά μήκος στο γράφημα της συνάρτησης f , ενώ τα πλάγια δεξιά αφορούν την κίνηση κατά μήκος της εφαπτομένης γραμμές ℓ, επειδή η εξίσωση της εφαπτομένης γραμμής, δηλαδή η γραμμή που διέρχεται από το σημείο $(x_0, f(x_0))$ με κλίση $f'(x_0)$,

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta_x.$$

Συνεχίζουμε να γράψουμε Δ_y για την πραγματική μεταβολή στην f όπως στην Εικόνα 2.15 που παρουσιάζεται παρακάτω. Γράφουμε dy για την αλλαγή στην y κατά μήκος της εφαπτομένης γραμμής ℓ καθώς το x αλλάζει κατά Δ_x. Στη συνέχεια, η (13) γράφεται ως

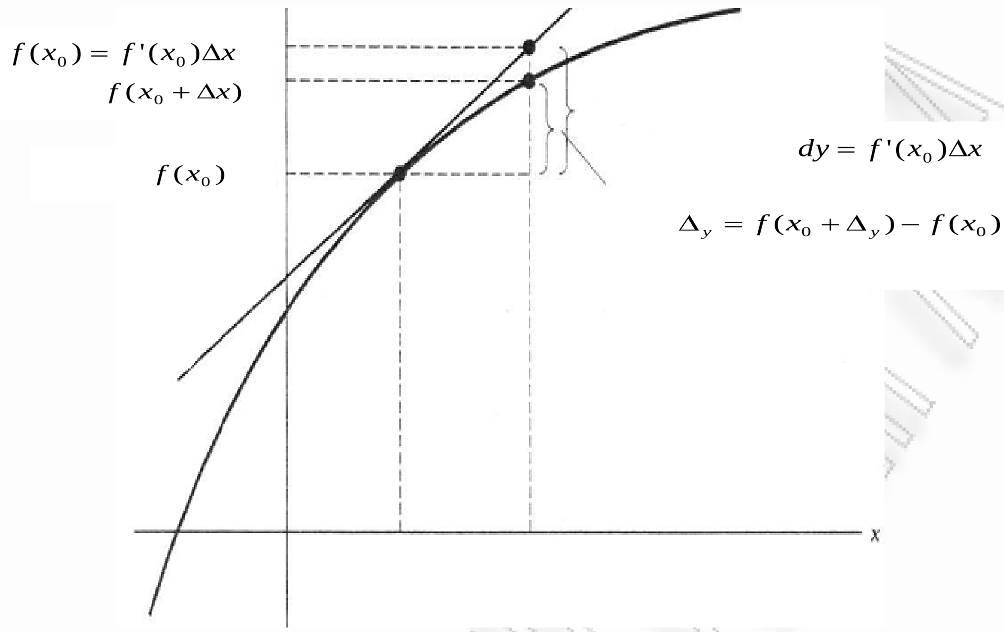
$$\Delta_y \approx dy = f'(x_0)\Delta_x.$$

Συνήθως γράφουμε dx αντί για Δ_x όταν δουλεύουμε με τις αλλαγές κατά μήκος της εφαπτομένης γραμμής, αν και Δ_x ισούται με dx. Οι προσαυξήσεις dy και dx κατά μήκος της εφαπτομένης γραμμής ℓ ονομάζονται διαφορικές εξισώσεις. Η διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφτεί και df αντί για d_y

$$df = f'(x_0)dx \quad \text{ή} \quad dy = f'(x_0)dx$$

για τη διακύμανση κατά μήκος της εφαπτόμενης γραμμής στο γράφημα της f δίνει βάρος στην $\frac{df}{dx}$ για την παράγωγο $f'(x)$. f '(x).

ως στην $\frac{df}{dx}$ για την παράγωγο $f'(x)$. f '(x).



Σχήμα 2.15: Συγκρίνοντας Δy και dy

Κεφάλαιο 3: Απειροστικός Λογισμός σε μια Μεταβλητή: Εφαρμογές

Τώρα που μάθαμε για τις παραγώγους και τον τρόπο υπολογισμού τους όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2, ας δούμε την χρήση της παραγωγού σε κάποιες οικονομικές σχέσεις. Το πρώτο βήμα στη μελέτη των σχέσεων μεταξύ των δύο μεταβλητών είναι να δημιουργηθεί το σχετικό γράφημα. Για τις μη γραμμικές συναρτήσεις, αυτό μπορεί να είναι δύσκολο. Στις Ενότητες 3.1 και 3.4 δείχνουμε πώς η παράγωγος μπορεί να μας βοηθήσει να δημιουργήσουμε γραφήματα αποτελεσματικά και με μεγάλη ακρίβεια. Επιπλέον, πολλά οικονομικά προβλήματα που αφορούν τη μεγιστοποίηση ή την ελαχιστοποίηση κάποιων οικονομικών οντοτήτων, για παράδειγμα, η μεγιστοποίηση των κερδών ή τη χρησιμότητα και την ελαχιστοποίηση του κόστους ή κινδύνου. Η Ενότητα 3.5 παρουσιάζει τον τρόπο χρήσης των παραγώγων σε συνάρτηση τόσο για την επίλυση αυτών των προβλημάτων βελτιστοποίησης όσο και για να προκύψουν οι οικονομικές αρχές πίσω από αυτές τις λύσεις. Το κεφάλαιο αυτό κλείνει με μια περιγραφή στην Ενότητα 3.6 με την χρήση του απειροστικού λογισμού στην μικροοικονομία σχετικά με την μελέτη της παραγωγής, του κόστους, του κέρδους και τις συναρτήσεις της ζήτησης.

3.1 Η χρήση της πρώτης παραγώγου για την δημιουργία γραφημάτων

Η παράγωγος μιας συνάρτησης μεταφέρει πολλές πληροφορίες σχετικά με τις ρυθμίσεις των συναρτήσεων. Σε αυτή την ενότητα, θα δούμε ότι με το να γνωρίζουμε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο και την θέση μερικών τιμών στο γράφημα μας δίνει την δυνατότητα να δημιουργήσουμε με ακρίβεια το γράφο της συνάρτησης.

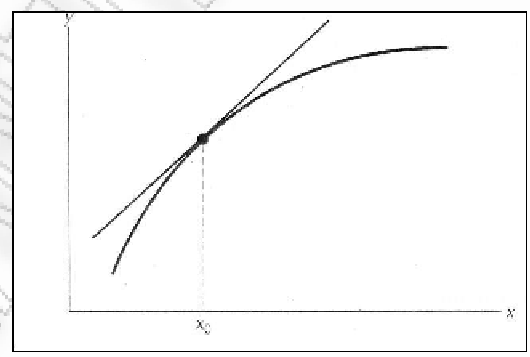
Οι Θετικές Παράγωγοι Συνεπάγονται με αύξουσες συναρτήσεις

Όπως συζητήθηκε κατά την έναρξη του προηγούμενου κεφαλαίου, οι πιο βασικές πληροφορίες σχετικά με μια συνάρτηση είναι κατά πόσο αυξάνεται ή μειώνεται και πότε αλλάζει. Ακριβώς αυτήν την πληροφορία αποκτούμε από την πρώτο παράγωγο της συνάρτησης.

Θεώρημα 3.1: Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση *f* είναι συνεχής και διαφορίσιμη στην τιμή x_0. Στη συνέχεια:

α. εάν στη συνάρτηση $f'(xo) > 0$, υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει την τιμή *xo* όπου η συνάρτηση *f* αυξάνεται, και

β. εάν η συνάρτηση $f'(xo) < 0$ υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει την τιμή *xo* όπου η συνάρτηση *f* μειώνεται.



Σχήμα 3.1: Εάν η συνάρτηση $f'(xo) > 0$

Απόδειξη θεωρήματος 3.1: Θα αναλύσουμε και θα σχεδιάσουμε την απόδειξη του μέρους α). Η απόδειξη για το β είναι ανάλογη του α. Στο σχήμα 3.1 φαίνεται η πιο απλή μορφή του θεωρήματος. Εφόσον η f'(xo) είναι η κλίση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση f στο x_0, $f'(x_0) > 0$ σημαίνει ότι η ευθεία της εφαπτομένης κλίνει προς τα πάνω και επομένως η γραφική παράσταση στην οποία ανήκει κλίνει τα πάνω επίσης. Αναλυτικότερα αφού η f είναι διαφορίσιμη στο x_0,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) > 0.$$

η ανισότητα σημαίνει ότι αν το h πολύ μικρό και θετικό τότε και $f(x_0+h) - f(x_0)$ θα είναι θετικό. Εάν αντί για x_0 γράψουμε χ_1 τότε θα έχουμε:

$$x_1 > x_0 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_0).$$

Αυτό σημαίνει ότι η f είναι μια αύξουσα συνάρτηση κοντά στο x_0.

Το ακόλουθο θεώρημα είναι μία γενική έκδοση του θεωρήματος 3.1. Οι αποδείξεις από τις δύο πρώτες δηλώσεις απορρέουν από την απλή παρατήρηση ότι, αν μια συνάρτηση αυξάνεται σε κάθε σημείο κάποιου διαστήματος, τότε η συνάρτηση αυτή είναι αύξουσα σε ολόκληρο το διάστημα. Οι δύο τελευταίες δηλώσεις απορρέουν απευθείας από τις πρώτες δύο.

Θεώρημα 3.2: Ας είναι η συνάρτησης f μια διαφορίσιμη συνεχής συνάρτηση D στο R[1].
Εάν η f' > 0 στο διάστημα (a, b) C D. τότε η f είναι αύξουσα στο (a, b).
Εάν η f' < 0 στο διάστημα (a, b) C D. τότε η f είναι φθίνουσα στο (a, b).
Εάν η f' είναι αύξουσα στο (a, b), τότε η f' ≥ 0 στο (a, b).
Εάν η f' είναι φθίνουσα στο (a, b), τότε η f' ≤ 0 στο (a, b)

Τα θεωρήματα 3.1 και 3.2 είναι χρήσιμα σε εφαρμογές όπου υπάρχουν κάποιες πληροφορίες για τις παραγώγους της συνάρτησης f και πρέπει να μάθουμε κατά πόσο η f αυξάνεται ή όχι. Θα παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα αυτού του φαινομένου στην Ενότητα 3.6 όπου αποδεικνύουμε ότι αν το οριακό κόστος είναι μεγαλύτερο από το μέσο κόστος, τότε το μέσο κόστος αυξάνεται.

Η χρήση της πρώτης παραγώγου για τη δημιουργία γράφου

Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 3.2 για την δημιουργία του γραφήματος μιας γνωστής συνάρτησης f θα πρέπει να βρούμε διαστήματα όπου η συνάρτηση f' >0 και τα διαστήματα όπου η συνάρτηση f'< 0. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να:

- Βρίσκουμε πρώτα τα σημεία όπου η συνάρτηση f'(x) = 0 ή η συνάρτηση f δεν ορίζεται. Τα σημεία αυτά ονομάζονται κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f. Η συνάρτηση υπό εξέταση έχει πολλά κρίσιμα σημεία $X_1, X_2, ..., X_\kappa$.
- Αξιολογούμε την συνάρτηση σε καθεμία από αυτά τα κρίσιμα σημεία $X_1, X_2, ..., X_\kappa$ και σημειώνουμε τα αντίστοιχα σημεία στο γράφημα.
- Μετά, ελέγχουμε την συνάρτηση f σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,x_1)(x_1,x_2)\ldots(x_\kappa,+\infty)$

  σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά, η συνάρτηση f΄ ορίζεται μη μηδενική. Δεδομένου ότι η συνάρτηση f'(x) = 0 μόνο όταν $X = X_1, X_2, ..., X_\kappa$ και εφόσον η συνάρτηση f ΄είναι συνεχής, η f΄ δεν μπορεί να αλλάξει σε κανένα σημείο των διαστημάτων αυτών. Η συνάρτηση f΄ θα πρέπει να είναι πάντοτε αρνητική ή θετική στο κάθε διάστημα. Για να δούμε εάν η συνάρτηση f' είναι θετική ή αρνητική σε κάθε διάστημα, θα πρέπει να ελέγξουμε το κατάλληλο σημείο της στο συγκεκριμένο διάστημα.
- Εάν η συνάρτηση f΄> 0 στο διάστημα I, σχεδιάζουμε το γράφημα της συνάρτησης f΄ ως αύξουσα.
- Εάν η συνάρτηση f΄ < 0 στο διάστημα I, σχεδιάζουμε το γράφημα της συνάρτησης I ως φθίνουσα.

Παράδειγμα 3.1: Εξετάζουμε την συνάρτηση $f(x) = x^3 — 3x$. Μπορεί να υπολογιστεί εύκολα ότι

$$f'(x) = 3x^2 – 3 = 3(x-1)(x+1)$$

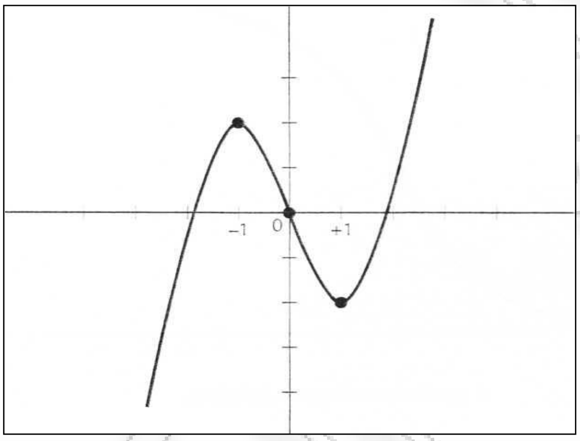
το οποίο ισούται με μηδέν μόνο στην τιμή x = - 1, +1. Οι τιμές αυτές αποτελούν τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f. Τα αντίστοιχα σημεία του γραφήματος της συνάρτησης f είναι (-1, 2) και (1, -2). Στη συνέχεια ελέγχουμε τα σημεία της συνάρτησης f σε 3 διαστήματα αφού σβήσουμε τα κρίσιμα σημεία από το R^1:

$$J_1= (-\infty,-1),\ J_2=(-1, +1),\ J_3=(+1, +\infty)$$

Επιλέγοντας ένα σημείο από κάθε διάστημα, παρατηρούμε ότι:

(a) f'(-2) = 9 > 0; ώστε f'>0 στο J_1 και η f αύξουσα στο J_1
(b) f'(0) = -3 < 0, ώστε f'<0 στο J_2 και η f μειώνεται στο J_2 και
(c) f'(+ 2) = 9 > 0, ώστε f'>0 στο J_3 και η f αυξάνεται στο J_3.

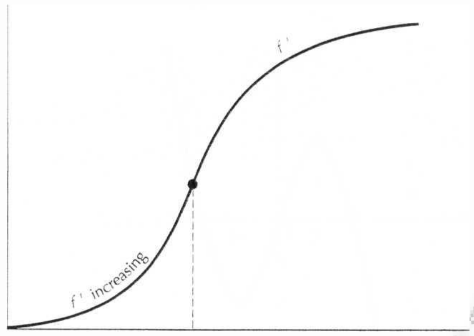
Δεδομένου ότι είναι εύκολο να υπολογιστεί, θα πρέπει να περιλαμβάνουμε την τομή y-τομής (0, f(0)) στο γράφημα της συνάρτησης f καθώς το σχεδιάζουμε. Η τομή y για την συνάρτηση του Παραδείγματος 3.1. είναι η αρχή (0,0). Περιστασιακά, είναι εύκολο να υπολογιστεί η τομή x της συνάρτησης f, στα σημεία όπου η f(x)=0. Όταν ο υπολογισμός είναι απλός, σημειώνουμε και τα σημεία αυτά στο γράφημα. Για την τετραγωνική συνάρτηση του Παραδείγματος 3.1, οι τομές x είναι οι λύσεις της συνάρτησης $f(x) = x\,(x^2 - 3) = 0$, δηλαδή $x=-\sqrt{3},0,+\sqrt{3}$.



Σχήμα 3.3: Το γράφημα της $f(x) = x\,(x^2 - 3)$

3.2 Δεύτερη παράγωγος και κυρτότητα

Συχνά, χρειάζεται να γνωρίζουμε περισσότερα σχετικά με το σχήμα της καμπύλης απ 'όσο όταν αυξάνεται και όταν μειώνεται. Σκεφτείτε, για παράδειγμα, μια συνάρτηση παραγωγής y - f (x), αυτό είναι ένα καλό παράδειγμα για μια αύξουσα συνάρτηση. Το ποσοστό αύξησης για μια συνάρτηση παραγωγής ποικίλει ανάλογα με τον αριθμό x των εργαζομένων. Ωστόσο, εφόσον τα κέρδη λόγω εξειδίκευσης επιτυγχάνονται, τα επιπλέον αποτελέσματα ανά νέο εργαζόμενο μειώνεται καθώς οι εργαζόμενοι ανταγωνίζονται για περιορισμό χώρου και πόρων. Στο σχήμα 3.4 δείχνει το διάγραμμα μιας τέτοιας συνάρτησης παραγωγής. Σημειώστε ότι η συνάρτησης αυτή αυξάνεται για όλα τα x. Ωστόσο, για x μεταξύ 0 και α, η κλίση (το οριακό προϊόν της εργασίας), αυξάνεται πάρα πολύ. Για x μεγαλύτερο από α, η κλίση μειώνεται καθώς το x αυξάνεται.

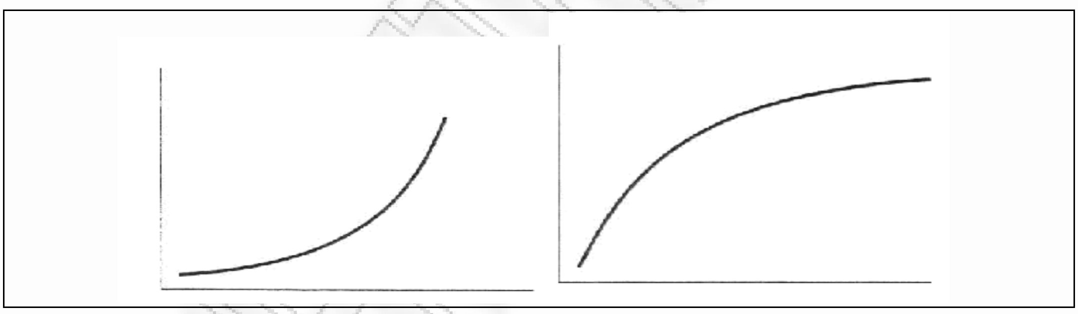


Σχήμα 3.4: Αύξουσα συνάρτηση παραγωγής.

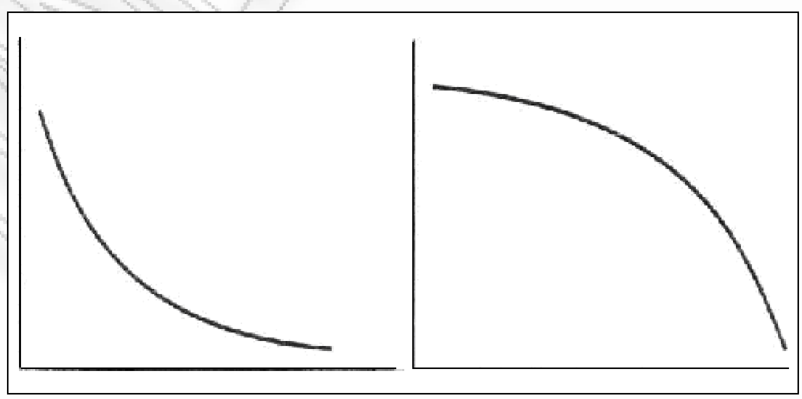
Η μάθηση των καμπυλών, οι οποίες αφορούν το χρονικό διάστημα που μεσολάβησε, συχνά σχετίζονται με το σχεδιασμό γραφημάτων όπως αυτό στο Σχήμα 3.4. Η ποσότητα ανά μονάδα χρόνου - η κλίση της καμπύλης - είναι υψηλή στην αρχή και στη συνέχεια μειώνεται. Ωστόσο, δεδομένου ότι η εργασία μαθαίνεται ή καθώς η ικανότητες του εκπαιδευόμενου βελτιώνονται, το ποσοστό της μάθησης αρχίζει να μειώνεται.

Για x ανήκει (0, a) στο σχήμα 3.4, η κλίση της f'(x) είναι μια αύξουσα συνάρτηση. Με το θεώρημα 3.2, η παράγωγος της f'(x), f''(x) είναι μη αρνητική : $f''(x) \geq 0$, στο (0, α). Για $x > a$ στο σχήμα 3.4, f' είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του x. Με αυτό τον τρόπο η $f''(x) \leq 0$ στο (a, ∞). Μια διαφορίσιμη συνάρτηση f για την οποία η $f''(x) > 0$ για ένα διάστημα I (έτσι ώστε η f' αυξάνεται στο I) ονομάζεται κοίλη προς τα πάνω στο διάστημα I. Μια διαφορίσιμη συνάρτηση f για την οποία $f''(x) < 0$ για ένα διάστημα I (ώστε η f είναι φθίνουσα στο I) ονομάζεται κοίλη προς τα κάτω στο διάστημα I.

Μια αύξουσα συνάρτηση μπορεί να είναι κοίλη προς τα πάνω ή προς τα κάτω στο διάστημα αύξησης της. Οι δύο περιπτώσεις αυτές παρουσιάζονται στο σχήμα 3.5.



Σχήμα 3.5: Μια αύξουσα συνάρτηση μπορεί να είναι κοίλη προς τα πάνω ή προς τα κάτω.



Σχήμα 3.6: Μια φθίνουσα συνάρτηση μπορεί να είναι κοίλη προς τα πάνω ή προς τα κάτω.

Σημειώστε ότι η κλίση της f είναι αύξουσα συνάρτηση του x για μια συνάρτηση που είναι κοίλη προς τα πάνω και είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του x για συναρτήσεις που είναι κοίλη προς τα κάτω.

Υπάρχει επίσης μια έννοια μη υπολογισιμότητας του κοίλου προς τα κάτω και προς τα πάνω. Αυτός ο ορισμός προκύπτει από την παρατήρηση ότι για μια συνάρτηση η οποία είναι κοίλη προς τα πάνω, η τέμνουσα γραμμή που ενώνει τα δύο σημεία στο γράφημα βρίσκεται πάνω από το γράφημα, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.7. Για οποιαδήποτε από τα δύο σημεία α και β, το σύνολο των σημείων μεταξύ τους (α και b) δίνεται από το σύνολο I_{ab} = [a, b] για το συνόλο των κυρτών συνδυασμών των α και β:

$$I_{ab} = \{(1 - t)a + tb : 0 \le t \le 1\}.$$

Το γράφημα της συνάρτησης f πάνω από το I_{ab} είναι το σύνολο των σημείων:

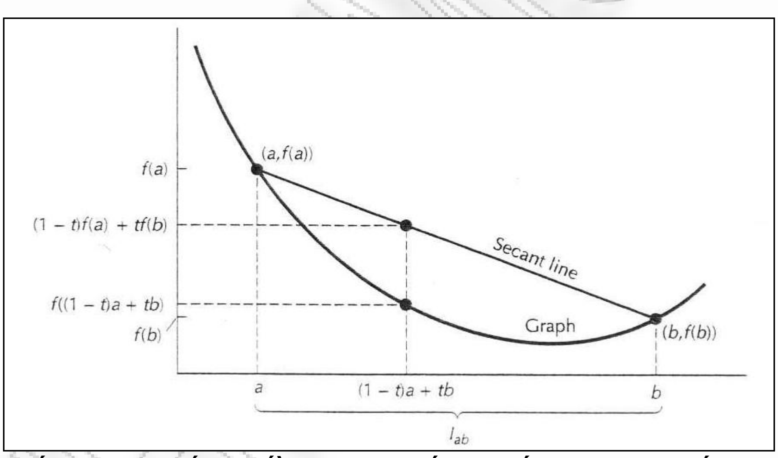
$$\{((1 - t)a + tb, f((1 - t)a + tb)) : 0 \le t \le 1\}.$$

Από την άλλη όμως, η τέμνουσα ευθεία που ενώνει τα σημεία (α, f(α)) και (b, f(b)) σχετικά με το γράφημα της f δίνεται από:

$$(1 – t)(a, f(a)) + t(b, f(b)) =((1 - t)a + tb, (1 - t)f(a) + tf(b))$$

για t μεταξύ [0, 1]. Ως εκ τούτου, η δήλωση ότι οι τέμνουσα ευθεία βρίσκεται πάνω από το γράφημα της f για x Ε I_{ab} μπορεί να γραφτεί ως:

$$(1 - t)f(a) + tf(b) \ge f((1 - t)a + tb) \text{ για } 0 \le t \le 1. \quad (1)$$



Σχήμα 3.7 Μία συνάρτηση που είναι κοίλη προς τα πάνω, η τέμνουσα γραμμή που ενώνει τα δύο σημεία στο γράφημα βρίσκεται πάνω από το γράφημα.

Αυτός ο χαρακτηρισμός της κοίλης συνάρτησης προς τα πάνω είναι πολύ πιο ευρύς από το κριτήριο ότι f΄΄≥ 0 δεδομένου ότι ισχύει και για τις μη διαφορίσιμες συναρτήσεις. Ως εκ τούτου, θα το χρησιμοποιούμε ως τον ορισμό μας, για την κοίλη προς τα πάνω. Στην πραγματικότητα, ο όρος (1) ισοδυναμεί με f "(x) ≥ 0 για $I_{\alpha\beta}$ για μια συνάρτηση C^2.

Ορισμός: Μια συνάρτηση f ονομάζεται κοίλη προς τα πάνω ή απλά κυρτή σε ένα διάστημα *I* εάν και μόνο εάν ισχύει:

$$f((1 - t)a + tb) \le (1 - t)f(a) + tf(b) \quad (2)$$

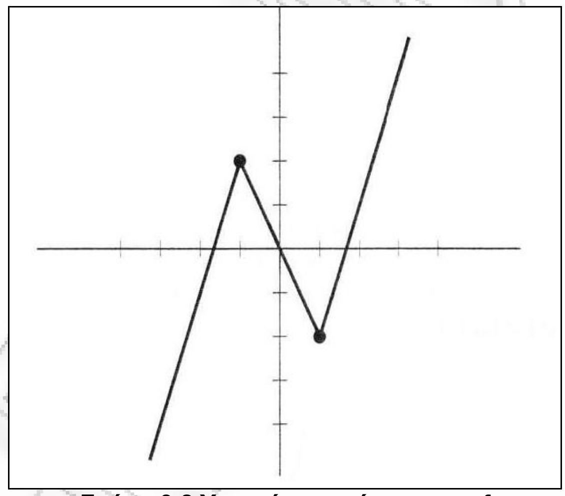
για κάθε a, b ανήκει στο I και t Ε [0,1]. Μια συνάρτηση f ονομάζεται κοίλη προς τα κάτω ή απλά κοίλη στο διάστημα I αν και μόνο αν ισχύει:

$$f((I - t)a + tb) \ge (1 - t)f(a) + tf(b) \quad (3)$$

Στα βιβλία λογισμού χρησιμοποιούνται οι όροι "κοίλο προς τα πάνω" και "κοίλο προς τα κάτω" αντί για τους όρους «κυρτό» και «κοίλο». Ωστόσο, οι συναρτήσεις πολλών μεταβλητών που πληρούν τον όρο (2) ή (3) διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο στην οικονομική θεωρία, όταν οι όροι "κυρτό" και "κοίλο" είναι πρότυποι.

Γνωρίζοντας όμως τα σημεία όπου η συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη χρησιμεύουν στην δημιουργία του γραφήματος. Για αυτό το λόγο το μόνο που χρειάζεται να ξέρουμε είναι τα σημεία όπου f" > 0 και f" < 0. Ο τρόπος για να δούμε εάν μια συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη είναι παρόμοιο με τον τρόπο ορισμού εάν μια συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα με την μόνη διαφορά ότι χρησιμοποιούμε την δεύτερη παράγωγο αντί για την πρώτη. Πρώτα, βρίσκουμε τα σημεία όπου η f"{x)= 0 λύνοντας αυτή την εξίσωση για το χ. Τα σημεία αυτά ονομάζονται κρίσιμα σημεία δεύτερης τάξης της συνάρτησης f, σε περίπτωση που η δεύτερη παράγωγο αλλάζει από αρνητική σε θετική και αντίστροφα, τα σημεία αυτά ονομάζονται σημεία καμπής της f. Τα σημεία αυτά χωρίζουν την γραμμή της συνάρτησης f σε διαστήματα στο καθένα από τα οποία f" είναι πάντοτε θετικής ή αρνητικής αξίας. Σε κάθε διάστημα από τα παραπάνω χρειάζεται να αξιολογήσουμε την f" σε ένα σημείο του διαστήματος αυτού, έτσι ώστε να καθορίσουμε το πρόσημο της σε όλο το διάστημα.

Παράδειγμα 3.2: Ας επιστρέψουμε στο παράδειγμα 3.1, $f(x) = x^3 - 3x$. Χρησιμοποιώντας την πρώτη παράγωγο, καθορίσαμε ότι η f είναι μια αύξουσα συνάρτηση από το $-\infty$ στο χ = -1, φθίνουσα από το χ = -1 στο χ = +1, και αύξουσα ξανά από το χ = +1 στο $+\infty$. Χρησιμοποιώντας μόνο την πρώτη παράγωγο θα δούμε ότι το γράφημα f μπορεί να αποτελείται από τρία ευθύγραμμα τμήματα όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 3.8.



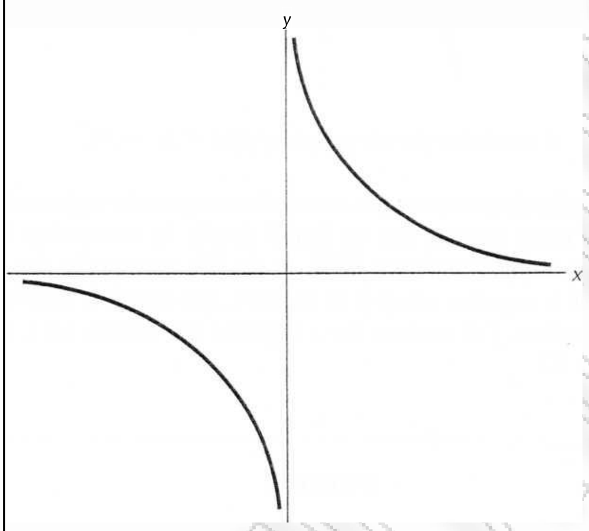
Σχήμα 3.8 Υποψήφιο γράφημα της f

Για να είμαστε πιο ακριβείς, θα πρέπει να υπολογίσουμε τα περιφερικά σημεία της κοιλότητας και κυρτότητας. Αυτά τα σημεία μπορούν να βρεθούν απλά με υπολογισμό της δεύτερης παραγώγου της αρχικής συνάρτησης: f"(x) = 6x. Επισημαίνουμε ότι f" είναι 0 μόνο στο σημείο 0, έχει πρόσημο αρνητικού αριθμού, όπου το χ είναι αρνητικό, και έχει πρόσημο θετικού αριθμού όπου το χ είναι θετικό. Ως εκ τούτου, η f είναι κοίλη για αρνητικό χ και η f είναι κυρτή για θετικό χ, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 3.3.

3.3 Το γράφημα των ρητών συναρτήσεων

Θα ολοκληρώσουμε την εισήγηση σχετικά με χρήση των παραγώγων για την γραφική παράσταση των συναρτήσεων μέσω, των ρητών συναρτήσεων. Επειδή οι ρητές συναρτήσεις έχουν η ορθολογική λειτουργία έχουν παρονομαστές, αυτό κάνει την γραφική τις παράσταση πιο δύσκολη. Επιπλέον, συνήθως είναι ευκολότερο να απεικονιστεί η γραφική παράσταση ενός πολυωνύμου πάρα αυτής της ρητής συνάρτησης.

Η πιο εύκολη ρητή συνάρτηση είναι f(x) =1/x, η γραφική παράσταση της οποίας παρουσιάζεται στο σχήμα 3.9. Δεδομένου ότι ο παρονομαστής ενός κλάσματος δεν μπορεί να είναι 0, η συνάρτηση αυτή δεν ορίζεται στο σημείο όπου το χ = 0. Επιπλέον, όσο πιο πολύ το χ πλησιάζει το 0 από τους αρνητικούς αριθμούς, η τιμή της f(x) πηγαίνει προς — ∞, και όσο πιο πολύ το χ πλησιάζει το 0 από τη θετική πλευρά, η τιμή της f(x) πηγαίνει προς + ∞. Και στις δυο περιπτώσεις το γράφημα της f αυξάνεται ως προς την κάθετη κατεύθυνση έως το σημείο x = 0,



The graph of f(x) = 1/x.

Σχήμα 3.9:Ο γράφος της f(x)=1/x

όπου η συνάρτηση δεν ορίζεται. Αυτή η κάθετη γραμμή ονομάζεται κάθετη ασύμπτωτη της f.

Γενικώς, εάν η f είναι μια ρητή συνάρτηση ο παρονομαστής της οποίας είναι 0 στο σημείο χ0 (και ο παρονομαστής της οποίας δεν είναι 0 στο σημείο χ0), τότε η κάθετη {χ = χ0} είναι κάθετη ασύμπτωτη της f. Και στις 2 πλευρές αυτής της κάθετης ασύμπτωτης, το γράφημα της f πηγαίνει προς το +∞ ή προς το - ∞..

Στην γραφική παράσταση του γραφήματος μίας ρητής συνάρτησης, θα πρέπει να αντιμετωπίζουμε τα μηδενικά (0) του παρονομαστή της ρητής συνάρτησης ως κρίσιμα σημεία πρώτης και δεύτερης τάξης τα οποία εμφανίζονται κατά την διάρκεια της λύσης της f΄ ή της f'', διότι οι f΄ και f'' μπορούν να αλλάξουν πρόσημο καθώς έχει σχεδιαστεί η κάθετη ασύμπτωτη. Με άλλα λόγια τα χρησιμοποιούμε τα για να χωρίσουμε την γραμμή σε διαστήματα όπου η f΄ ή f'' έχουν σταθερό πρόσημο.

Εάν η f έχει πρόσημο αρνητικού αριθμού στο διάστημα στην αριστερή πλευρά της κάθετης ασύμπτωτης, τότε η f πηγαίνει προς - ∞ αριστερά της κάθετης ασύμπτωτης, δεδομένου ότι η f μειώνεται στο σημείο αυτό, όπως βλέπουμε στο σχήμα 3.9 για την 1/χ. Παρομοίως, η f έχει πρόσημο θετικού αριθμού στο διάστημα στην αριστερή πλευρά της κάθετης ασύμπτωτης, τότε η f πηγαίνει προς + ∞ αριστερά της κάθετης ασύμπτωτης. Ίδια ανάλυση ισχύει για σημεία δεξιά της κάθετης ασύμπτωτης.

Σχηματισμός γραφικών παραστάσεων

Να θυμάστε ότι για να βρείτε την τομή χ ρητής συνάρτησης, θα πρέπει ο αριθμητής να ισούται με μηδέν. Εάν δεν υπάρχει κάποια τομή χ σε ένα συγκεκριμένο διάστημα μεταξύ των κρίσιμων σημείων και ή ασύμπτωτων, το γράφημα δεν διαπερνά τον άξονα x σε αυτό το διάστημα - μια παρατήρηση που μπορεί να αποδειχθεί πολύ χρήσιμη στην γραφική παράσταση.

Μετά την συνάρτηση, η πρώτη και η δεύτερη παράγωγός της, παρέχει όλες τις πληροφορίες σχετικά με κάθε συνάρτηση του γραφήματος, αποφεύγουν την χρήση της λέξης "αυτή" παραπέμποντας σε οποιαδήποτε συνάρτηση. Εάν παρακολουθείτε προσεκτικά κάθε παράγωγο της συνάρτησης με την οποία δουλεύετε, θα σας είναι πιο εύκολο να ολοκληρώσετε την εργασία σας.

3.4 Ουρές και Οριζόντιες Ασύμπτωτες

Για να ολοκληρώσουμε τον οδηγό ως προς την γραφική παράσταση των πολυώνυμων και ρητών συναρτήσεων, θα στρέψουμε την προσοχή μας σε "ουρές" του γραφήματος — το σχήμα της καμπύλης για μεγάλες θετικές και μεγάλες αρνητικές τιμές του x.

Ουρές των Πολυώνυμων

Για τα πολυώνυμα, ο κύριος όρος - το μονώνυμο του υψηλότερου βαθμού - καθορίζει το σχήμα της ουράς του γραφήματος. Για να δείξουμε ότι αυτό αληθεύει θα δώσουμε ένα παράδειγμα. Έστω $x^3 — 4x^2 + 5x — 6$. Αν x είναι πολύ μεγάλο, δηλαδή $x = 10^{10}$, τότε $χ^3$ θα είναι 10^{30} ένας αριθμός με 31 ψηφία. Από την άλλη, $- 4χ^2$ θα είναι $-4 \cdot 10^{20}$ ένας αριθμός με μόνο 21 ψηφία. Για $x = 10^{10}$, προσθέτοντας $- 4χ^2$ στο $χ^3$ δεν θα επηρεάσουν τα 10 αριστερά ψηφία του $χ^3$. Μια αριθμομηχανή η οποία εμφανίζει μόνο τα πρώτα 10 σημαντικά ψηφία, δεν θα εμφανίσει το αποτέλεσμα της προσθήκης αυτής καθόλου. Συνοψίζοντας, για | x | με πολύ μεγάλη τιμή , το γράφημα ενός πολυωνύμου

$$f(x) = a_0 x^κ + a_1 x^{κ-1} + \cdot \cdot * + a_{κ-1} x + a_κ$$

καθορίζεται πλήρως από την κορυφαία τιμή της a_0x^k. Για την γραφική παράσταση της ουράς του γενικού πολυώνυμου, αρκεί να γνωρίζουμε πώς να παρουσιάσουμε γραφικά ένα γενικό μονώνυμο. Το γράφημα του μονώνυμου a_0x^k καθορίζεται από το πρόσημο της a_0 και του k. Αν το k είναι ζυγός αριθμός, τότε και οι δύο ουρές πηγαίνουν προς + ∞ καθώς το |x| → ∞, εάν το $a_0 > 0$ και οι δύο ουρές πηγαίνουν προς το - ∞, καθώς το |x| → ∞ εάν το a0 < 0. Σκεφτείτε τα διαγράμματα των $χ^2$ και του $-χ^2$ ως παραδείγματα. Αν το k είναι μονός αριθμός, μια ουρά του γραφήματος πηγαίνει προς το + ∞ και η άλλη προς το - ∞ καθώς το | x | → ∞, αναλόγως με το πρόσημο του a_0. Σκεφτείτε τα διαγράμματα των $χ^3$ και $-χ^3$ ως παραδείγματα αυτού του φαινομένου.

Οριζόντιες Ασύμπτωτες Ρητών Συναρτήσεων

Στη συνέχεια, λαμβάνουν υπόψη μια γενική ορθολογική λειτουργία:

$$g(x) = \frac{a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}, \quad a_0, b_0 \neq 0.$$

Για |x| μεγάλης τιμής, η συμπεριφορά του αριθμητικού πολυώνυμου καθορίζεται από την τιμή a0xk και η συμπεριφορά του παρονομαστή πολυωνύμου καθορίζεται από την τιμή b0xm. Με άλλα λόγια, για |x| μεγάλης τιμής, η ρητή συνάρτηση g ορίζει την συμπεριφορά του μονωνύμου

$$\ell(x) = \frac{a_0x^k}{b_0x^m} = \frac{a_0}{b_0}x^{k-m}.$$

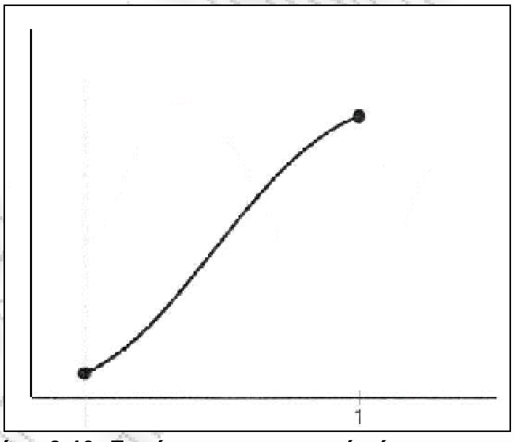
Ειδικά εάν k > m, τότε l (x) είναι ένα θετικό μονώνυμο και οι ουρές της ρητής συνάρτησης πηγαίνουν προς ± ∞, όπως εκείνες ενός πολυωνύμου. Από την άλλη, εάν k < m, τότε l (x) → 0 όπως |x| → ∞, όπως 1/χ στο σχήμα 3.9. Σε αυτή την περίπτωση, και οι δυο ουρές της g είναι ασύμπτωτες στον άξονα χ καθώς |x| → ∞. Διαφορετικά ο άξονας χ είναι οριζόντια ασύμπτωτη για το γράφημα της g. Τέλος, εάν k = m, τότε l (x) της g είναι μη μηδενικό $α_ο/β_0$. Ενώ |x| → ∞, g(x) → $α_ο/β_0$. Το γράφημα είναι ασύμπτωτη της οριζόντιας γραμμής $y = α_ο/β_0$. Αυτή η οριζόντια γραμμή ονομάζεται επίσης οριζόντια ασύμπτωτη του γραφήματος της g.

3.5 Μέγιστη και ελάχιστη τιμή

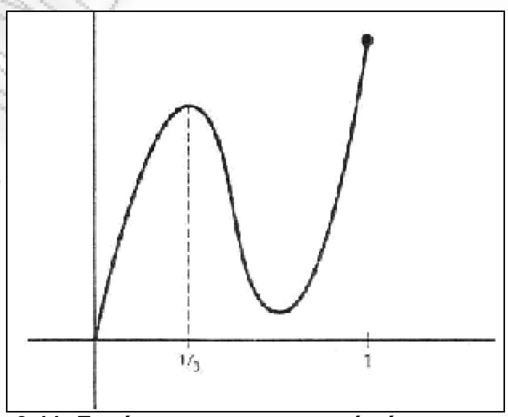
Μια από τις σημαντικότερες χρήσεις του υπολογισμού στα μαθηματικά μοντέλα είναι να βρει και να χαρακτηρίζει τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές των συναρτήσεων. Για παράδειγμα, οι οικονομολόγοι ενδιαφέρονται για τη μεγιστοποίηση της χρησιμότητας και των κερδών και για την ελαχιστοποίηση του κόστους. Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση *f* έχει ολικό ή τοπικό μέγιστο στο x_0 εάν η $f(x) \leq f(xo)$ για όλες τις τιμές του χ σε ορισμένα διαστήματα της *f*. Η συνάρτηση f έχει σχετικό ή απόλυτο ελάχιστο στο *xo* εάν η $f(x) \geq f(x_0)$ για όλες τις τιμές του χ στην *f*. Εάν η *f* έχει ένα τοπικό μέγιστο (ελάχιστο) στο x_0, μπορούμε να πούμε ότι το x_0 είναι μια μέγιστη (ελάχιστη) τιμή της συνάρτησης *f*. Εάν θέλουμε να τονίσουμε ότι η *f* έχει ολικό μέγιστο (ελάχιστο) στο x_0, τότε αυτό σημαίνει ότι το x_0 είναι ολική μέγιστη (ελάχιστη) τιμή της συνάρτησης *f*.

Τοπικές μέγιστες και ελάχιστες τιμές , οριακές και εσωτερικές

Η μέγιστη ή ελάχιστη τιμή μίας συνάρτησης μπορεί να βρεθεί στο τελικό σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης ή σε οποιοδήποτε άλλο σημείο στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού αυτού. Και οι 2 περιπτώσεις παρουσιάζονται στα σχήματα 3.10 και 3.11 για συναρτήσεις τα πεδία ορισμού των οποίων είναι κλειστά διαστήματα [0,1]. Στην στο σχήμα 3.10, η συνάρτηση *f* είναι αύξουσα στο [0,1] και η μέγιστη τιμή της βρίσκεται στο οριακό εξωτερικό σημείο $x = 1$ του [0, 1]. Στο σχήμα 3.11, η μέγιστη τιμή της συνάρτησης *f* βρίσκεται στο οριακό εσωτερικό σημείο $x = 1/3$ του πεδίου ορισμού [0, 1]. Η μέγιστη ή ελάχιστη τιμή οι οποίες βρίσκονται σε κάποιο οριακό σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης *f* ονομάζεται **Οριακή Μέγιστη Τιμή (ή ελάχιστη τιμή).** Η μέγιστη ή ελάχιστη τιμή οι οποίες βρίσκονται σε κάποιο εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης *f* ονομάζεται **Εσωτερική Μέγιστη Τιμή (ή ελάχιστη τιμή).** Εάν η συνάρτηση *f* ανήκει σε όλο το R^1 ή σε ένα ανοικτό διάστημα, τότε κάθε μέγιστη τιμή θα είναι εσωτερική. Το κριτήριο υπολογισμού μιας εσωτερικής τιμής της συνάρτησης *f* είναι εύκολο να κατανοηθεί.



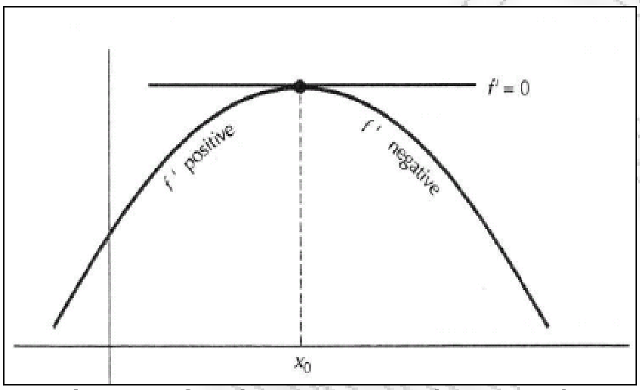
Σχήμα 3.10: Συνάρτηση με οριακό μέγιστο στο χ=1



Σχήμα 3.11: Συνάρτηση με εσωτερικό μέγιστο στο χ=1/3

Θεώρημα 3.3: Εάν το Χο είναι μια εσωτερική μέγιστη ή ελάχιστη τιμή της συνάρτησης *f* , τότε το Χο είναι ένα κρίσιμο σημείο της *f* .

Απόδειξη: Από μια αναλυτική όψη, μια συνάρτηση δεν είναι ούτε αύξουσα ούτε φθίνουσα σε ένα διάστημα για μια εσωτερική μέγιστη ή ελάχιστη τιμή. Με βάση το Θεώρημα 3.1, η πρώτη παράγωγος της δεν μπορεί να είναι θετική ή αρνητική στο σημείο αυτό. Δηλαδή, η $f'(x_o)$ πρέπει να είναι μηδέν ή να μην ορίζεται στο x_o ,δηλαδή το x_o είναι ένα κρίσιμο σημείο της συνάρτησης *f*. Από την γεωμετρική άποψη, αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης *f* έχει εφαπτομένη ευθεία στην μέγιστη ή ελάχιστη τιμή, ότι η εφαπτομένη πρέπει να είναι μία οριζόντια ευθεία δεδομένου ότι το γράφημα σχηματίζει μία καμπύλη στο σημείο αυτό, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.12 . Με άλλα λόγια, η f '(x_0) πρέπει να είναι μηδέν.



Σχήμα 3.12: Ο γράφος της *f* στη μέγιστη τιμή x_0

Παράδειγμα 3.3: Για την συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x$, του σχήματος 3.3, η τοπική μέγιστη και ελάχιστη τιμή είναι τα κρίσιμα σημεία x = - 1 και x = + 1, αντίστοιχα.

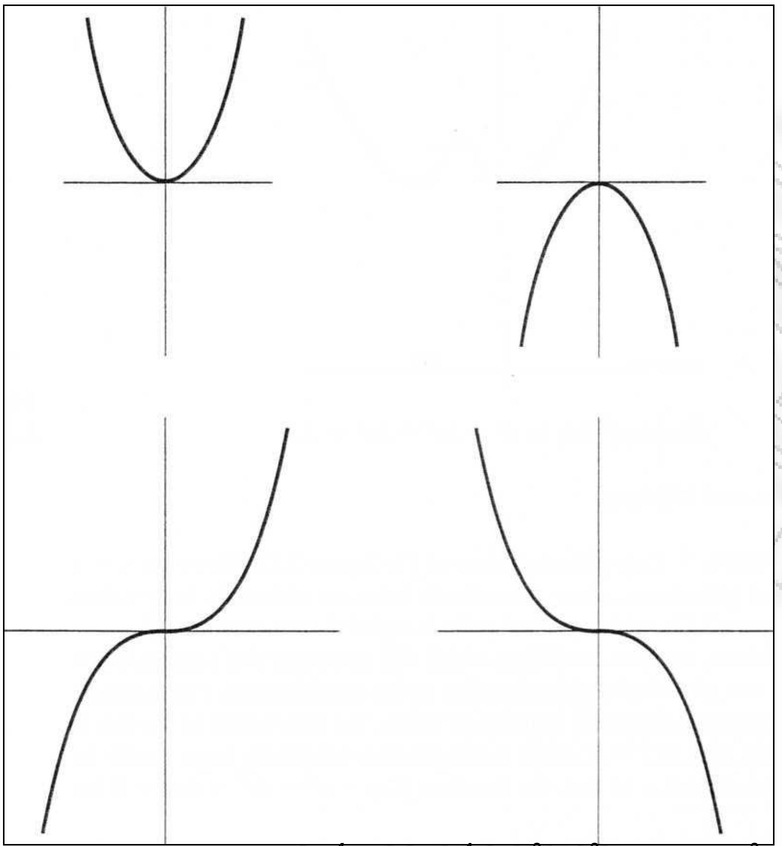
Παράδειγμα 3.4: Όπως φαίνεται στο σχήμα 3.10, η παράγωγος της f σε μια οριακή μέγιστη ή ελάχιστη τιμή δεν πρέπει απαραίτητα να είναι μηδέν. Η συνάρτησης παραγωγής όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 3.4 έχει πεδίο ορισμού [0, ∞). Δεδομένου ότι η συνάρτησης αυτή είναι αύξουσα, η ολική ελάχιστη τιμή της βρίσκεται στο οριακό σημείο x = 0, όπου η παράγωγο της συνάρτησης f δεν είναι απαραίτητα μηδέν.

Όροι δεύτερης τάξη

Εάν x_o είναι ένα κρίσιμο σημείο μιας συνάρτησης f, πως μπορούμε να αποφασίσουμε εάν το κρίσιμο σημείο x_o είναι μέγιστη τιμή, ελάχιστη τιμή, ή κανένα από τα δυο; Ή απάντηση σε αυτή την ερώτηση βρίσκεται στην δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_o.

Θεώρημα 3.4:
→Εάν η $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$, τότε x_0 είναι μέγιστη τιμή της *f*
→Εάν η $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$, τότε x_0 είναι ελάχιστη τιμή της *f*. και
→Εάν η $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) = 0$, τότε x_0 μπορεί να είναι μέγιστη ή ελάχιστη τιμή ή τίποτα από τα δύο.

Παρατήρηση: Το κρίσιμο σημείο συνάρτησης f κατά την οποία η δεύτερη παράγωγο f'' είναι μηδέν ονομάζεται ένα εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f. Στο τρίτο μέρος του θεωρήματος 3.4 φαίνεται ότι για να καθοριστεί αν κάποιο γνωστό κρίσιμο σημείο αποτελεί μέγιστη ή ελάχιστη τιμή, χρειαζόμαστε περισσότερες πληροφορίες για τη λειτουργία της δεύτερης παραγώγου - στοιχεία όπως το πρόσημο της συνάρτησης f΄ σε ένα ολόκληρο διάστημα σχετικά με το κρίσιμο σημείο.



Σχήμα 3.13: $f_1(x) = x^4$, $f_2(x) = -x^4$, $f_3(x^3) = x^3$ και $f_4(x) = -x^3$.

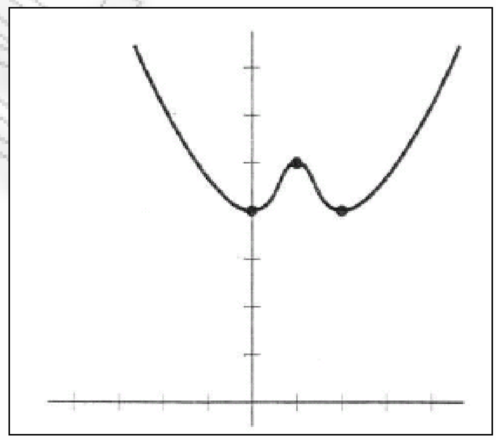
Παράδειγμα 3.5: Ας χρησιμοποιήσουμε *το* Θεώρημα 3.4 για να βρούμε την οριακή μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4$. Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης αυτής είναι η λύση της παρακάτω συνάρτησης:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x - 4x(x - 1)(x - 2) = 0,$$

τα οποία είναι x = 0,1, 2. Αυτά τα τρία σημεία είναι οι μοναδικές λύσεις για μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης μας. Ας δούμε την δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 12x^2 - 24x + 8$, σε αυτά τα τρία σημεία:

$$f''(0) = 8 > 0, \quad f''(1) = -4 < 0, \quad \text{και} \quad f''(2) = 8 > 0.$$

Με βάση το Θεώρημα 3.4, το x = 0 και το x = 2 αποτελούν τις τοπικέ ελάχιστες τιμές και το x = 1 είναι η τοπική μέγιστη τιμή. Το γράφημα παρουσιάζεται στο σχήμα 3.14.



Σχήμα 3.14: Ο γράφος της συνάρτησης $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4$

Ολικές Μέγιστες και Ελάχιστες Τιμές

Σημειώνουμε ότι x = 0 και x = 2 είναι ολικές ελάχιστες τιμές της συνάρτησης f όπως βλέπουμε στο σχήμα 3.14. Ωστόσο, x = 1 δεν είναι σίγουρα μια ολική μέγιστη τιμή διότι η συνάρτηση f παίρνει τελικά μεγάλες τιμές καθώς το x → ∞ . στο Σχήμα 3.11, κανένα από τα κρίσιμα σημεία δεν είναι ούτε ολική μέγιστη ούτε ολική ελάχιστη τιμή της συνάρτησης. Σε ορισμένα προβλήματα, χρειάζονται συνθήκες που εγγυώνται ότι ένα κρίσιμο σημείο είναι μια ολική μέγιστη ή ελάχιστη τιμή της συνάρτησης. Για παράδειγμα, αν η Σχήμα 3,14 παρουσιάζει την συνάρτηση κέρδους μίας εταιρείας, θα ήταν ανόητο η εταιρεία να ορίσει ως οριακή μέγιστη τιμή στο σημείο x = 1, δεδομένου ότι μπορεί να αποφέρει μεγάλα κέρδη επιλέγοντας μια μεγαλύτερη τιμή από το χ. Στην πραγματικότητα, η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4$ δεν έχει ολικές μέγιστες τιμές.

Σε γενικές γραμμές, είναι δύσκολο να βρεθεί μια ολική μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης ή ακόμα και να αποδειχθεί ότι μια συγκεκριμένη τοπική μέγιστη τιμή είναι μια ολική μέγιστη τιμή. Υπάρχουν, ωστόσο, τρεις περιπτώσεις για τις οποίες αυτό το πρόβλημα γίνεται πιο εύκολο:

- όταν η συνάρτηση έχει μόνο ένα κρίσιμο σημείο στο πεδίο ορισμού της,
- όταν f ''> 0 ή f '' <0 σε όλο το πεδίο ορισμού της, και
- όταν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης ένα κλειστό διάστημα.

Θα εξετάσουμε κάθε μία περίπτωση από τις παραπάνω.

Συναρτήσεις με μόνο ένα κρίσιμο σημείο

Θεώρημα 3.5 Υποθέτουμε ότι: το πεδίο της συνάρτησης είναι ένα διάστημα **I** (πεπερασμένο ή στο R^1), X_o είναι μια μέγιστη τιμή της συνάρτησης, και X_o είναι το μόνο κρίσιμο σημείο της συνάρτησης στο **I**.

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε ότι αν το χ_0 δεν είναι ολικό μέγιστο της f,τότε θα πρέπει να υπάρχει κάποιο άλλο κρίσιμο σημείο στο συγκεκριμένο διάστημα. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα σημείο y_0 στο διάστημα I για το οποίο ισχύει $f(y_0) > f(x_0)$ και επίσης ότι $y_0 > x_0$. Αφού η f είναι φθίνουσα μόνο στην δεξιά πλευρά του x_0, και πιθανότατα αύξουσα στα αριστερά του σημείου y_0, κάπου γίνεται αυτή η μεταβολή ανάμεσα στα δύο σημεία και έστω ότι το σημείο αυτό είναι το z_0. Τότε το σημείο z_0 θα είναι ένα εσωτερικό ελάχιστο της συνάρτησης συνεπώς θα είναι και ένα καινούριο κρίσιμο σημείο αυτής, πέραν του x_0. Για το λόγο αυτό το x_0, είναι το ολικό μέγιστο της συνάρτησής μας.

Συναρτήσεις με δεύτερες παραγώγους παντού μη μηδενικές

Θεώρημα 3.6 Εάν η συνάρτηση **f** είναι μια συνάρτηση C^2 το πεδίο ορισμού της οποίας είναι ένα διάστημα **I** και εάν *f''´* δεν ισούται ποτέ με μηδέν, τότε η συνάρτηση f έχει μέγιστο αριθμό κρίσιμων σημείων που ισούται με το 1. Το κρίσιμο σημείο αυτό είναι η ολική ελάχιστη τιμή εάν *f''* > 0 και ολική μέγιστη τιμή εάν *f''* < 0.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f έχει πάντα πρόσημο θετικού αριθμού στο πεδίο ορισμού της. Με βάση το Θεώρημα 3.2, η f'' είναι μια αύξουσα συνάρτηση στο I. Αυτό σημαίνει ότι f'' μπορεί να γίνει μηδέν σε τουλάχιστον ένα σημείο. Εάν υπάρχει ένα σημείο όπου $f'(x_0) = 0$, τότε x_0 είναι μια τοπική ελάχιστη τιμή της f εφόσον $f''(x_0) > 0$. Με βάση το Θεώρημα 3.5, x_0 είναι η ολική ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f. Όπως προκύπτει από το Θεώρημα 3.6, το γεγονός ότι μια συνάρτηση f είναι κυρτή αν και μόνο η -f είναι κοίλη, ότι εάν η συνάρτηση f είναι μια κυρτή συνάρτηση στο C^2, τότε ένα κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f ορισμένο σε ένα διάστημα R^1 είναι αναγκαστικά μια ολική ελάχιστη τιμή του πεδίου ορισμού της. Κάθε τοπική μέγιστη τιμή της συνάρτησης πρέπει να βρίσκεται σε ένα οριακό σημείο του πεδίου ορισμού της. Ομοίως, ένα κρίσιμο σημείο μιας κοίλης συνάρτησης C² είναι αναγκαστικά μια ολική μέγιστη τιμή χ. Κάθε τοπική ελάχιστη τιμή πρέπει να βρίσκεται σε ένα οριακό σημείο του πεδίου ορισμού της.

Συναρτήσεις το πεδίο ορισμού των οποίων είναι κλειστά διαστήματα

Ωστόσο, το διάσημο Θεώρημα του Weierstrass αναφέρει ότι η συνεχής συναρτήσεις το πεδίο ορισμού των οποίων είναι κλειστά διαστήματα [a, b] πρέπει να έχουν τόσο ολικές μέγιστες τιμές όσο και ολικές ελάχιστες τιμές στο εν λόγω πεδίο ορισμού. Επιπλέον, όπως θα δούμε στην συνέχεια, υπάρχει μια φυσική μέθοδο για τον υπολογισμό αυτών των ολικών τιμών.

Όπως προκύπτει από το Θεώρημα 3.3, μια εσωτερική μέγιστη ή ελάχιστη τιμή οποιασδήποτε συνάρτησης πρέπει να είναι ένα κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f. Τα σημεία κατάλληλα για μέγιστη ή ελάχιστη τιμή είναι: x = a και x = b. Οπότε, εάν δούμε για την ολική μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης C^1 στο πεδίο ορισμού [a, b], χρειαζόμαστε μόνο να:

- υπολογίσουμε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης λύνοντας f'(χ) = 0 για x ανήκει στο {a, b),
- αξιολογήσουμε την συνάρτηση στα κρίσιμα σημεία αυτά και στα οριακά σημεία a και b του πεδίου ορισμού της, και να
- επιλέγουμε το σημείο με το μεγαλύτερη τιμή της συνάρτησης στο βήμα 2.

Παράδειγμα 3.6: Υποθέτουμε ότι x χρόνια μετά την ίδρυση της το 1960, ο Οργανισμός των Ικανών Στατιστικών έχει μια ένταξη που παρουσιάζεται από την συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 45x^2 + 300x + 500$. Στην περίοδο μεταξύ το 1960 και το 1980, ποια ήταν η μεγαλύτερη και μικρότερη τιμή σύνταξης και πότε δόθηκαν αυτές οι δυο τιμές; Μαθηματικά, το πρόβλημα σχετίζεται με την μεγιστοποίηση $f(x) = 2x^3 - 45x^2 + 300x - 500$ για x στο κλειστό διάστημα [0,20]. Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης είναι:

$$x = 5{,}100 = f'(x) = 6x^2 - 90x + 300$$
$$= 6(x^2 - 15χ + 50)$$
$$= 6(x - 5)(x - 10),$$

Για την λύση του προβλήματος, χρειάζεται να αξιολογήσουμε την συνάρτηση στα κρίσιμα σημεία $x = 5{,}10$ και στις οριακές τιμές $x = 0{,}20$:

$$f(0) = 500, \quad f(5) -=1125, \quad f(10) = 1000, \quad f(20) -=10375.$$

Ως εκ τούτου, η ολική μέγιστη τιμή βρίσκεται στο σημείο $x = 20$ ενώ η ολική ελάχιστη τιμή βρίσκεται στο $x = 0$.

3.6 Εφαρμογές στην Οικονομική Επιστήμη

Σε αυτήν την ενότητα θα αναλύσουμε μερικούς τρόπους βάση των οποίων οι ορισμοί και οι μέθοδοι του υπολογισμού οδηγούν στην καλύτερη κατανόηση των αρχών της οικονομίας. Μέχρι στιγμής σε αυτό το κεφάλαιο, έχουμε χρησιμοποιήσει την μαθηματική ανάλυση για τη μελέτη των ιδιοτήτων συγκεκριμένων συναρτήσεων, όπως:

$$X^3 - 3x \quad \text{και} \quad x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4$$

στα Παραδείγματα 3.1 και 3.5, αντίστοιχα. Τώρα πρέπει να προχωρήσουμε στην εξέταση των γενικών τύπων συναρτήσεων που διακρίνονται, ιδιαίτερα όχι από τις εξισώσεις τις αλλά από τις ιδιότητές τους.

Συναρτήσεις Παραγωγής

Σκεφτείτε, για παράδειγμα, μια συνάρτηση παραγωγής $y = f(q)$, η οποία αφορά το ποσό εισροών q, δηλαδή η εισροή εργασίας, στην τιμή εξόδου που μπορεί να παραχθούν με την χρήση των q μονάδων. Επειδή χρειαζόμαστε μια ευρύτερη θεωρία κατά τη μοντελοποίηση της παραγωγικής διαδικασίας, θεωρούμε ότι μόνο η λειτουργία της παραγωγής που χρησιμοποιούμε έχει τις ιδιότητες που απεικονίζονται στο σχήμα 3.4, και όχι επειδή έχει μια συγκεκριμένη λειτουργική μορφή, όπως η $f(q) = \sqrt{q}$. Όταν πρέπει να κάνουμε υποθέσεις σχετικά με μια συνάρτηση παραγωγής, $y = f(q)$, θα θεωρήσουμε απλώς ότι:

- η συνάρτηση αυτή είναι συνεχή ή C^2,
- είναι αύξουσα, και
- υπάρχει ένα τέτοιο επίπεδο τιμών εισόδου ώστε η συνάρτηση παραγωγής να είναι κοίλη προς τα πάνω για $0 \leq q < a$, κοίλη προς τα κάτω για $q > a$.

Εάν η f είναι C^2, οι υποθέσεις αυτές μεταφράζονται στις παρακάτω υποθέσεις για τις παραγώγους της f:

- $f'(q) > 0$ για όλες τις τιμές q, *και*
- για κάποιες τιμές $a \geq 0$, $f''(q) > 0$ για q Ε [0, a) και $f''(g) < 0$ για $q > a$.

Οι συναρτήσεις κόστους

Μια συνάρτηση κόστους C (x), αναθέτει σε κάθε επίπεδο των τιμών εξόδου παραγωγής x, το συνολικό κόστος παραγωγής. Όπως και οι συναρτήσεις παραγωγής, οι συναρτήσεις κόστους είναι αύξουσες συναρτήσεις του x. Ωστόσο, η ανεξάρτητη μεταβλητή για μια συνάρτηση κόστους είναι το επίπεδο της παραγωγής, ενώ η ανεξάρτητη μεταβλητή για μια συνάρτηση παραγωγής είναι το επίπεδο της εισόδου.

Η παράγωγος $C'(x)$ της συνάρτησης κόστους ονομάζεται οριακό κόστος και γράφεται MC(x). Όπως αναφέραμε στην ενότητα 2.7, η MC(x) μετράει το επιπλέον κόστος που προκύπτει από την παραγωγή μιας η παραπάνω τιμών εξόδου όταν η τιμή είναι ίση με x. Η συνάρτηση μέσου κόστους παίζει επίσης σημαντικό ρόλο στην οικονομική θεωρία. Η συνάρτηση της είναι:

$$AC(x) = C(x)/\,x$$

Η οποία μετράει το κόστος ανά μονάδα. Κάνοντας υπολογισμούς μπορούμε να έχουμε κάποιες χρήσιμες σχέσεις μεταξύ του οριακού κόστους και των συναρτήσεων του μέσου κόστους.

Θεώρημα 3.7 : Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση κόστους $C(x)$ είναι μια συνάρτηση $\mathbf{C^1}$. Τότε,

(a) εάν $MC > AC$, *AC είναι αύξουσα*,
(b) εάν $MC < AC$. *AC είναι φθίνουσα*, και
(c) σε ένα εσωτερικό ελάχιστο των **AC, AC =*MC*.**

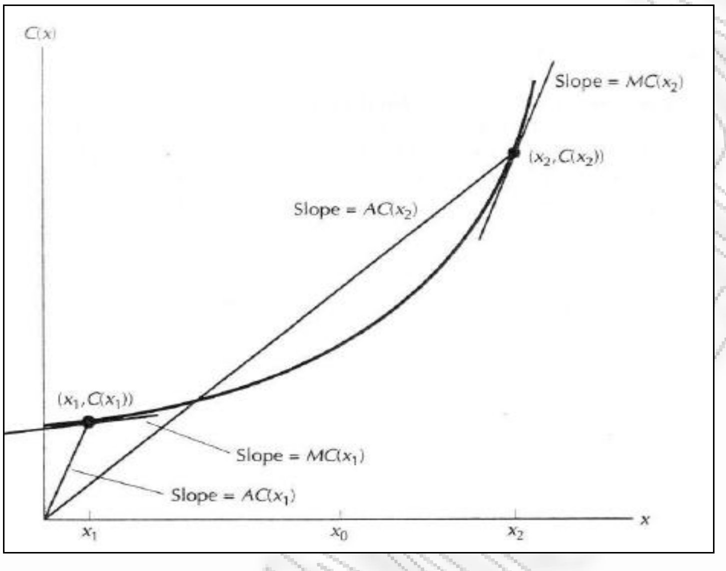
Απόδειξη: Για να δούμε εάν μια συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα αρκεί να υπολογίσουμε το πρόσημό της πρώτης παραγώγου της. Έτσι χρησιμοποιώντας το Κανόνα Πηλίκου υπολογίζουμε ότι η πρώτη παράγωγος της AC (x) είναι:

$$\begin{aligned} AC'(x) &= d(C(x)/x)\,/\,dx \\ &= (C'(x)x-1C(x))\,/\,x^2 \\ &= (C'(x)-(C'(x)/x))\,/\,x \\ &= MC-AC\,/\,x \end{aligned}$$

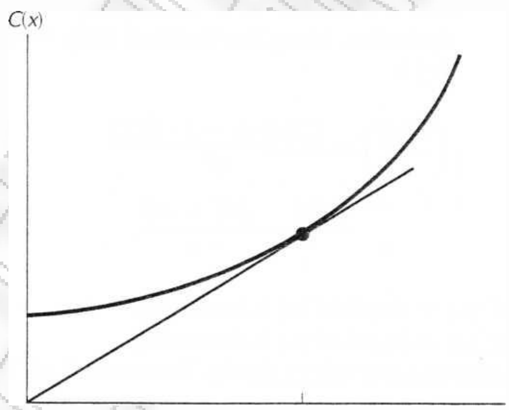
(a) εάν $MC > AC$, $AC'(x) > 0$ και AC(x) είναι αύξουσα.
(b) εάν $MC < AC$, $AC'(x) < 0$ και AC(x) είναι φθίνουσα.
(c) Εάν ***Xo*** είναι μια εσωτερική ελάχιστη τιμή της $AC(x)$, τότε βάση το θεώρημα 3.3, η $AC'(xo) = 0$ και η $MC(x_0) = AC(x_0)$.

Το Θεώρημα 3.7 υποστηρίζει ότι εάν κάποια μέρα η παραγωγή αυξηθεί πάνω από το μέσο όρο, τότε ο μέσος όρος αυξάνεται την συγκεκριμένη μέρα. Στις ημέρες που η παραγωγή μειώνεται , ο μέσος όρος μειώνεται επίσης.

Από μια γεωμετρική άποψη, ας εξετάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης κόστους $y = C(x)$ όπως απεικονίζεται στα σχήματα 3.15 και 3.16. Το γράφημα αυτό ονομάζεται **καμπύλη κόστους**.



Σχήμα 3.15: Στο χ_1 *MC > AC* , η AC(x) είναι φθίνουσα. Στο χ_2 MC < *AC η* AC(x) είναι αύξουσα.

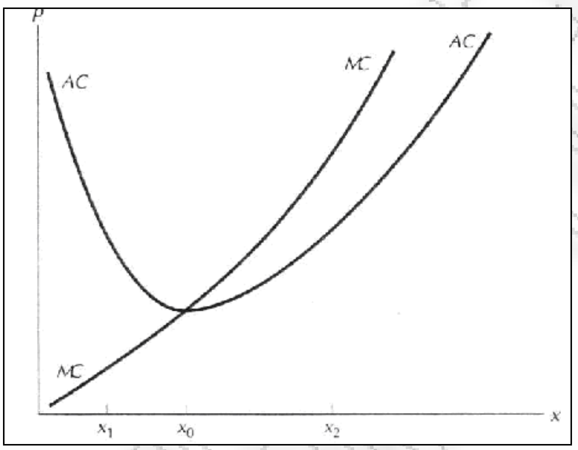


Σχήμα 3.16: Στο Xo, η AC έχει ελάχιστο και AC = MC.

Το οριακό κόστος στο σημείο x, MC(x), μπορεί να θεωρηθεί ως η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στην εν λόγω καμπύλη στο σημείο (x, C(x)). Το μέσο κόστος στο x, μπορεί να θεωρηθεί ως η κλίση της γραμμής από το σημείο (x, C(x)) στο (0, 0). Η καμπύλη του κόστους C όπως απεικονίζεται στα σχήματα 3.15 και 3.16 είναι μια αύξουσα συνάρτηση, και C (0)> 0 σημαίνει ότι υπάρχουν ορισμένα σταθερά κόστη - δαπάνες ανεξάρτητα από την ποσότητα που παράγεται. Στα σημεία $(x_1, C(x_1))$ και $(x_2, C(x_2))$ σχετικά με την καμπύλη του κόστους του σχήματος 3.15, έχουμε σχεδιάσει την εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα, οι κλίσεις της οποίας αντιπροσωπεύουν την $MC(x_i)$, και η γραμμή του σημείου διατομής αντιπροσωπεύει την $AC(x_i)$. Σημειώνουμε ότι η $AC(x_1) > MC(x_1)$ και η AC (x) μειώνεται όσο αυξάνεται από το x_1. Από την άλλη, στο σημείο $(x_2, C(x_2))$, $MC(x_2) > AC(x_2)$ *και η* AC(x) αυξάνεται καθώς το x αυξάνεται από το x_2 το οποίο είναι συμβατό με το θεώρημα 3.7.

Στο σχήμα 3.15, έχουμε συγκεντρώσει τη προσοχή μας στο σημείο (x0,C(x0)) του γραφήματος όπου η κλίση της γραμμής προς το σημείο διατομής έχει την ελάχιστη τιμή. Στο σημείο *(x0,* C(xo)) η ευθεία τείναι εφαπτόμενη στο γράφημα: AC (xo) = *MC(x0)* όπως ορίζει το Θεώρημα 3.7.

Καθώς το x αυξάνεται από το 0 έως το ∞ όπως απεικονίζεται στο σχήμα 3.15 και 3.16, η κλίση της ευθείας από το *(x,* C(x)) στο σημείο διατομής ξεκινά με μια μεγάλη τιμή η οποία μειώνεται καθώς το x προσπερνά το x2 και αυξάνεται εκ νέου. Εάν σχεδιάσουμε τη γραμμή αυτή, δηλαδή τη συνάρτηση του μέσου κόστους AC(x) έναντι του x, θα έχουμε μια καμπύλη σχήματος U όπως απεικονίζεται στο σχήμα 3.17. Έχουμε σχεδιάσει επίσης την καμπύλη του οριακού κόστους *MC* στο σχήμα 3.17. Η κρίσιμη ιδιότητα της καμπύλης αυτής είναι ότι για $x < x_0$, η καμπύλη MC βρίσκεται κάτω από την καμπύλη AC, ενώ η AC μειώνεται. Για $x > x_0$, η καμπύλη MC βρίσκεται πάνω από την καμπύλη AC καθώς η καμπύλη AC αυξάνεται. Το σχήμα 3,17 παίζει μεγάλο ρόλο στη μελέτη της επιχείρησης όπως και σε πολλά μαθήματα μικροοικονομίας.



Σχήμα 3.17: Η καμπύλες AC και MC

Συναρτήσεις Εσόδων - Κερδών

Ας συνεχίσουμε να θεωρούμε την C(x) ως την συνάρτηση κόστους μιας επιχείρησης σε σχέση με την τιμή εξόδου x. Ας θεωρήσουμε την R(x) την **συνάρτηση των εσόδων** της επιχείρησης, η οποία δείχνει το χρηματικό ποσό, το οποίο μια επιχείρηση λαμβάνει από την πώληση των χ μονάδων παραγωγής της. Όμοια με την *C(x), η R(x)* πρέπει να είναι μια αύξουσα συνάρτηση του x. Σημειώνουμε λοιπόν την *MR(x)* ως την οριακή συνάρτηση της *R'(x).* Εάν η *p(x)*είναι η τιμή ανά μονάδα όταν η οι τιμές εξόδου της επιχείρησης είναι x μονάδες, τότε η R(x) είναι ίση με *p(x)x*. Σε ένα μοντέλο **τέλειου ανταγωνισμού**, το οποίο είναι ένα μοντέλο που χαρακτηρίζεται από τις υποθέσεις ότι υπάρχουν πολλές επιχειρήσεις στην αγορά και ότι καμία μεμονωμένη επιχείρηση δεν μπορεί να ελέγξει την τιμή εξόδου από τις παραγωγικές δραστηριότητες της, η τιμή εξόδου κάθε επιχείρησης είναι σταθερή p(x) = p, ανεξάρτητα από το ύψος x που παράγει. Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση των εσόδων της εταιρείας είναι απλά η γραμμική συνάρτηση $R(x) = p \cdot x$, και:

$$MR = AR = p;$$

όπου το οριακό έσοδο είναι ίσον με το μέσο έσοδο. Η **συνάρτηση κέρδους** μιας εταιρείας είναι απλώς η διαφορά:

$$\Pi(x) = R(x) - C(x)$$

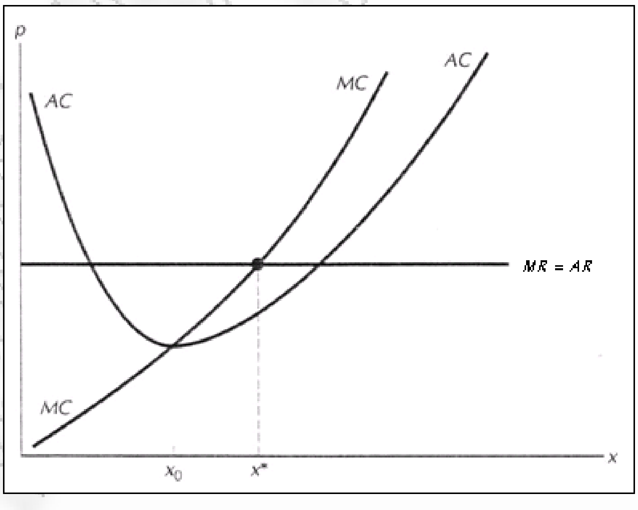
μεταξύ εσόδων και δαπανών του σε οποιοδήποτε επίπεδο των τιμών εξόδου x. Οι οικονομολόγοι χρησιμοποιούν συχνά τον ελληνικό κεφαλαίο γράμμα «πι», Π, για να ορίσουν το κέρδος. Τα Π, R και C είναι γενικά ο μισός άξονας αριθμών [0,∞**)**. Εάν υποθέσουμε ότι ο στόχος της επιχείρησης είναι να επιλέξει το επίπεδο τιμών εξόδου x* το οποίο μεγιστοποιεί τα κέρδη της, τότε βάση του Θεωρήματος 3.3, το βέλτιστο επίπεδο τιμής εξόδου είναι:

Το x* I αν δεν είναι μηδέν ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\frac{d\Pi}{dx}(x^*) = \frac{dR}{dx}(x^*) - \frac{dC}{dx}(x^*) = MR(x^*) - MC(x^*) = 0,$$
$$MR(x^*) = MC(x^*).$$

Ο ορισμός αυτός, ο οποίος υποστηρίζει ότι το οριακό κόστος ισούται με το οριακό κόστος κατά τη βέλτιστη τιμή εξόδου, αποτελεί έναν από τους ακρογωνιαίους λίθους της οικονομικής θεωρίας. Μια επιχείρηση θα πρέπει να συνεχίσει να παράγει μέχρι το κόστος της παραγωγής μιας επιπλέον μονάδας (MC) αντισταθμίζεται μόνο από τα έσοδα που θα φέρει στην (MR). Σε περίπτωση που η επιχείρηση θα έχει περισσότερα έσοδα την επόμενη μονάδα από τη μονάδα αυτή, η συγκεκριμένη θα προστεθεί στο κόστος της (MR> MC), και στην συνέχεια η παραγωγή αυτής της μονάδας θα αυξήσει τα κέρδη της επιχείρησης και θα πρέπει να πραγματοποιήσει την παραγωγή. Εάν το κόστος παραγωγής μίας επιπλέον μονάδας είναι μεγαλύτερο από τα έσοδα που θα φέρει στην αγορά (MC > MR), τότε η παραγωγή της επιπλέον μονάδας θα αφαιρεθεί από τα κέρδη της επιχείρησης. Η επιχείρηση έπρεπε να είχε σταματήσει την παραγωγή νωρίτερα.

Ας εξετάσουμε πιο προσεκτικά την περίπτωση της απόλυτης ανταγωνιστικότητας όπου η συνάρτηση των εσόδων είναι R (x) = px. Στο σχήμα 3.18, ορίσαμε ένα τυπικό μέσο κόστος (AC) και την καμπύλη οριακού κόστους (MC) όπως απεικονίζεται στο σχήμα 3.17. Έχουμε προσθέσει μια οριζόντια ευθεία στο σημείο y = p για να παρουσιάσουμε το οριακό έσοδο μιας επιχείρησης (MR), σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση. Το βέλτιστο σημείο εξόδου x * όπου *MR = MC* έχει σκούρο χρώμα. Στο σχήμα 3.18 στο σημείο διατομής των καμπύλων *MR και* MC. Εάν η τιμή εξόδου p αυξηθεί, η MR y = p στο σχήμα 3.18, θα ανεβεί και η αντίστοιχη βέλτιστη τιμή εξόδου θα αυξηθεί επίσης. Σε κάθε επίπεδο, η τιμή p και η αντίστοιχη βέλτιστη τιμή εξόδου x σχετίζονται με την εξίσωση p = MC(x) και η βέλτιστη τιμή εξόδου εκπροσωπείται από ένα σημείο της καμπύλης οριακού κόστους.



Σχήμα3.18: Οι καμπύλες AC, MC.AR και MR για μια ανταγωνιστική εταιρία

Ένας άλλος τρόπος να αναφερθεί το γεγονός ότι για κάθε τιμή, η βέλτιστη ποσότητα παραγωγής μιας επιχείρησης βρίσκεται στο σημείο όπου η οριζόντια γραμμή διασχίζει την καμπύλη MC που σημαίνει ότι η καμπύλη MC δίνει το ενεργητικό της σχέσης τιμή - βέλτιστη τιμή εξόδου. Στη γλώσσα της οικονομίας, η καμπύλη MC είναι η καμπύλη παραγωγής της επιχείρησης, σχετίζει την τιμή αγοράς με την ποσότητα παραγωγής.

Τέλος, σημειώνουμε τον κανόνα δεύτερης παραγώγου ότι η βέλτιστη τιμή εξόδου x* πρέπει να πληροί:

$$\Pi'(x) = p - C'(x),\ \Pi''(x) = 0 - C(x).$$

Στην εσωτερική μεγιστοποίηση Π´´(x*) < 0 με βάση το Θεώρημα 3.4. Αυτό σημαίνει ότι η $C''(x) > 0$ και οδηγεί στο συμπέρασμα ότι στην βέλτιστη τιμή εξόδου της, η εταιρεία θα πρέπει να αντιμετωπίσει το αυξημένο οριακό κόστος.

Συνάρτηση ζήτησης και ελαστικότητα

Η συνάρτηση εσόδων μιας εταιρείας R (x) μπορεί να γραφτεί ως το γινόμενο της ποσότητας που έχει πουληθεί με την μοναδιαία τιμή πώλησης. Στα απλά μοντέλα, υποθέτουμε ότι το ποσό που πωλήθηκε ισούται με το ποσό X που παράχθηκε. Στο μοντέλο του τέλειου ανταγωνισμού όπως αναλύεται στο σχήμα 3.18, θεωρήθηκε ότι η τιμή πώλησης είναι μια μονοδιάστατη p ανεξάρτητη από την ποσότητα της παραγωγής. Ωστόσο, στα μοντέλα του μονοπωλίου (ενός κλάδου με μία και μόνο επιχείρηση) και ολιγοπωλίου (ένα κλάδος με ελάχιστες επιχειρήσεις), υπάρχει συνήθως μια σχέση μεταξύ του ποσού x του προϊόντος στην αγορά και την τιμή στην οποία το προϊόν πωλείται. Εάν η σχέση αυτή αντιπροσωπεύεται από μια συνάρτηση x = F(p), η οποία εκφράζει το ποσό x που έχει καταναλωθεί από άποψης επιπέδου τιμής p, τότε η F ονομάζεται **συνάρτηση ζήτησης**. Εάν η σχέση αυτή εκφράζεται από μια συνάρτηση p = G (x) που εκφράζει την τιμή p από την άποψη της ποσότητας x που καταναλώνονται, τότε η G ονομάζεται **αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης**. Σε ένα μονοπώλιο, η αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης είναι ο φυσικός παράγοντας της συνάρτησης εσόδων, δεδομένου ότι μπορεί να γραφτεί ως:

$$R(x) = p \cdot x = G(x) \cdot x.$$

Εφόσον η $G(x) = R(x)/x$, *η* αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης είναι επίσης και η συνάρτηση μέσων εσόδων. Οι οικονομολόγοι, βέβαια, ενδιαφέρονται για το πώς οι αλλαγές των τιμών επηρεάζουν τις αλλαγές της ζήτησης. Το φυσικό μέτρο αυτής του παραμέτρου ευαισθησίας είναι η κλίση της συνάρτησης ζήτησης $F'(p)$ ή $\Delta x/\Delta p$. Όπως γνωρίζουμε καλά, η οριακή ζήτηση περιγράφει την επίδραση της αύξησης της τιμής μονάδας για την αγοραστική συμπεριφορά των καταναλωτών. Ωστόσο, ο δείκτης αυτός έχει ένα σημαντικό μειονέκτημα: εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τις μονάδες που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση της ποσότητας και τιμής. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα, ότι η αύξηση ενός 10-λεπτού στην τιμή θα οδηγήσει στην μείωση της κατανάλωσης των καυσίμων κατά ένα εκατομμύριο γαλόνια. Η οριακή ζήτηση είναι περιθωριακή:

$$\Delta x/\Delta p=-10^6/10=-10^5$$

εάν μετράμε x σε γαλόνια και p σε λεπτά. Ωστόσο, εάν μετρήσουμε x σε γαλόνια και p σε δολάρια, τότε η οριακή ζήτηση αλλάζει βάση ενός συντελεστή του 100

$$\Delta x/\Delta p=-10^6/10^{-1}=-10^7 \qquad (6)$$

Τέλος, αν χρησιμοποιήσουμε ένα εκατομμύριο γαλόνια ως μονάδα μέτρησης κατανάλωσης καυσίμων και τα λεπτά ως μονάδα μέτρησης της τιμής, τότε η οριακή ζήτηση καθίσταται:

$$\Delta x/\Delta p=-1/10=-0.1$$

100 εκατομμύρια φορές μικρότερη από το σχετικό μέτρο στην τις παραπάνω εξίσωσης. Οι οικονομολόγοι θα ήθελαν μια μονάδα μέτρησης για την ευαισθησία της ζήτησης από τις αλλαγές των τιμών που δεν μπορεί να χειραγωγηθεί από την επιλογή των μονάδων η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να συγκρίνει τις συνήθειες κατανάλωσης σε διάφορες χώρες με διαφορετικά νομίσματα και διάφορα μέτρα του βάρους ή όγκου.

Η λύση του προβλήματος αυτού είναι να χρησιμοποιήσουμε το ποσοστό τοις εκατό της αλλαγής αντί της πραγματικής αλλαγής. Για οποιαδήποτε ποσότητα, το ποσοστό τοις εκατό της αλλαγής είναι η πραγματική αλλαγή διά το αρχικό ποσό:

$$q_1\text{-}q_0 \;/\; q_0=\Delta q/q_0 \quad (7)$$

Δεδομένου ότι ο αριθμητής και ο παρονομαστής μετρώνται στις ίδιες μονάδες, οι μονάδες ακυρώνονται σε αυτή τη διαδικασία διαίρεσης. Για παράδειγμα, αν η τιμή αλλάζει από $1,25 σε $1,50 δολάρια, το ποσοστό τοις εκατό της αλλαγής της τιμής είναι:

$$1.50 - 1.25 \;/\; 1.25 \; =20$$

20 τοις εκατό ανεξάρτητα από εάν επιλέξουμε δολάρια, σεντς, γαλλικό φράγκο ισοδύναμα ως μονάδα νομίσματος.

Για να διατηρήσετε το μέτρο ευαισθησίας χωρίς την επιπλοκή των μονάδων, θα μετρήσουμε τόσο την αλλαγή στην ποσότητα όσο και την αλλαγή των τιμών σε ποσοστιαίες μονάδες. Το μέτρο ευαισθησίας μας καθίσταται από την ποσοστιαία αλλαγή στην ζητούμενη ποσότητα διά το ποσοστό της αλλαγής της τιμής, με άλλα λόγια, η ποσοστιαία αλλαγή στη ζήτηση, αυξάνει την τιμή κατά 1 τοις εκατό. Το μέτρο αυτό ονομάζεται ελαστικότητα της τιμής ζήτησης και συνήθως αντιπροσωπεύεται από το ελληνικό γράμμα, ε. Ξαναγράφουμε το διπλό πηλίκο ως ένα ενιαίο πηλίκο:

$$\varepsilon= \Delta x/x \;/\; \Delta p/p= \Delta x/x \;\; p/\Delta p= \Delta x/\Delta p \; p/x= \Delta x/\Delta p \;/\; x/p. \; (8)$$

Ο συντελεστής $\Delta x/\Delta p$ είναι ακριβώς η οριακή ζήτηση ενώ x/p είναι απλά ο μέσος όρος της ζήτησης. Έτσι, η ελαστικότητα μπορεί να θεωρηθεί ως η διαίρεση της οριακής ζήτησης με το μέσο όρο της ζήτησης.

Η οριακή ζήτηση μπορεί, βεβαίως, να παρουσιάζεται από την καμπύλη *F'(p)* της συνάρτησης ζήτησης x = F (p). Αντικαθιστώντας το *F'(p) με* $\Delta x/\Delta p$ και το F(p) για x στην παραπάνω σχέση θα έχουμε την υπολογίσιμη μορφή της ελαστικότητας της τιμής:

$$\varepsilon= F'(p)p \;/\; F'(p) \quad (9)$$

Σημείωμα: Η διακριτική έκδοση (8) της ελαστικότητας της τιμής ονομάζεται ελαστικότητα τόξου και συνήθως χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του ε όταν γνωρίζουμε μόνο ένα πεπερασμένο αριθμό συνδυασμών τιμής – ποσότητας. Η διαφορίσιμη έκδοση (9) της ελαστικότητας της τιμής ονομάζεται σημείο ελαστικότητας και χρησιμοποιείται όταν μια συνεχή καμπύλη ζήτησης έχει υπολογιστεί ή για να αποδειχθούν θεωρήματα για την ελαστικότητα της τιμής.

Σύντομα θα χρησιμοποιήσουμε τον (9) για να αποδείξουμε την σχέση μεταξύ της ελαστικότητας και το σύνολο των εσόδων ή των δαπανών. Πρώτον, θα δούμε πιο προσεκτικά την ελαστικότητα και στο πλαίσιο της διαδικασίας θα παρουσιάσουμε περισσότερους ορισμούς. Μια βασική παραδοχή σχετικά με τις συναρτήσεις ζήτησης είναι ότι η αύξηση της τιμής ενός εμπορεύματος συνήθως μειώνει το ποσό κατανάλωσης. Μαθητικά, η ζήτηση είναι μια φθίνουσα συνάρτηση της τιμής. (Αγνοούμαι το σπάνιο φαινόμενο ενός προϊόν Giffen, για το οποίο οι χαμηλότερες τιμές οδηγούν σε μείωση της κατανάλωσης.) Αυτό σημαίνει ότι η υπόθεση *Δx/Δp* στην (8) και *F'(p) στην* (9) είναι αρνητικοί αριθμοί, όπως είδαμε στην (6), και ως συνέπεια η ελαστικότητα τιμής του προϊόν είναι ένας αρνητικός αριθμός. (Μερικά βιβλία οικονομίας ορίζουν την ελαστικότητα της τιμής ως την απόλυτη τιμή της έκφρασης στην (8) ή (9) για να αποφευχθεί η αντιμετώπιση των αρνητικών αριθμών. Εμείς δεν θα κάνουμε το ίδιο).

Ένα προϊόν το οποίο επηρεάζεται εύκολα από τις αλλαγές της τιμής θα έχει μια ελαστικότητα τιμής κοντά στο μηδέν. Οι ανάγκες, όπως το καύσιμα και η ιατρική περίθαλψη αποτελούν καλά παραδείγματα αυτού του φαινομένου. Από την άλλη πλευρά, ένας προϊόν για το οποίο οι μικρές αυξήσεις της τιμής οδηγούν σε αύξηση κατανάλωσης – από ποσοστιαίας άποψης - η ελαστικότητα της τιμής τού θα είναι ένας μεγάλος αρνητικός αριθμός. Τα είδη πολυτελείας, όπως η Lamborghini και τα ερμίνα ενδύματα ή τα είδη που περιέχουν πολλά υποκατάστατα όπως τα δημητριακά Froot Loops ή Cap'n Crunch, αποτελούν παραδείγματα αυτού του φαινομένου. Οι ακόλουθοι ορισμοί προσθέτουν περαιτέρω διευκρινίσεις στις έννοιες αυτές.

Ορισμός: Σε ένα προϊόν η ελαστικότητα τιμής η οποία κυμαίνεται μεταξύ 0 και -1 ονομάζεται μη ελαστική. Σε ένα προϊόν η ελαστικότητα τιμής η οποία κυμαίνεται μεταξύ -1 και ∞ ονομάζεται ελαστική. Ένα προϊόν η ελαστικότητα τιμής της οποίας ισούται με 1 ονομάζεται μοναδιαία ελαστικότητα.
Εάν η τιμή ενός αγαθού αυξάνεται, η μεταβολή των συνολικών δαπανών εκ πρώτης όψεως είναι αόριστη, δεδομένου ότι δαπάνες ισούται με την τιμή επί την ποσότητα, και οι δυο κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις. Όπως προκύπτει από το επόμενο θεώρημα, η ελαστικότητα του αγαθού επιλύει αυτή η ασάφεια.

Θεώρημα 3.8: Για ένα μη ελαστικό αγαθό, η αύξηση της τιμής οδηγεί σε αύξηση των συνολικών δαπανών. Για ένα ελαστικό αγαθό, η αύξηση των τιμών οδηγεί σε μείωση των συνολικών δαπανών.

Απόδειξη: Ας είναι η $x = F(p)$ η συνάρτηση της ζήτησης για ένα προϊόν υπό μελέτη. Η συνολική δαπάνη στην τιμή p είναι:

$$E(p) = p \cdot x = p \cdot F(p).$$

Για να δούμε εάν η $E(p)$Ι είναι αύξουσα ή φθίνουσα, θα πρέπει να ελέγξουμε μόνο το πρόσημο της πρώτης παράγωγου. Βάση το Κανόνα Παραγωγής:

$$E'(p) = p \cdot F'(p) + 1 \cdot F(p).$$

Διαιρούμε και τις 2 κατά την $F(p)$:

$$E'(p)/ F(p)= p \cdot F'(p)/ F(p)+1=\varepsilon+1 \quad (10)$$

Εάν το αγαθό είναι μη ελαστικό, τότε $-1 < \varepsilon < 0$ και $\varepsilon+1 > 0$. Σε αυτή την περίπτωση, η (10) έχει πρόσημο θετικού αριθμού, Ε΄(p) έχει πρόσημο θετικού αριθμού, και ως συνέπεια η Ε(p) είναι μια αύξουσα συνάρτηση της p. Με τον ίδιο τρόπο, εάν το αγαθό είναι ελαστικό, $\varepsilon < -1$ και $\varepsilon + 1 < 0$. Εάν η Ε'(p) έχει πρόσημο αρνητικού αριθμού, τότε η Ε(p) είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του p.

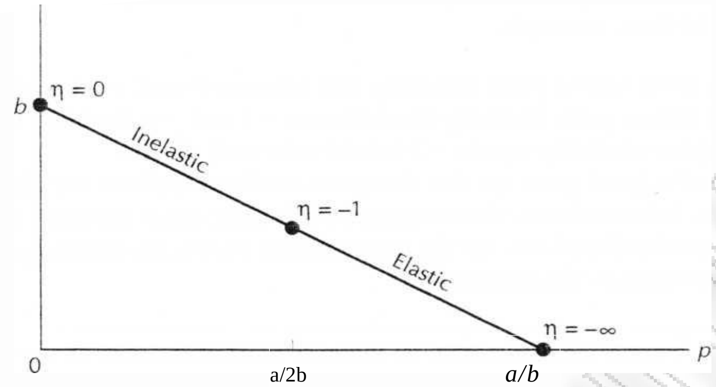
Σε συνεργασία με συγκεκριμένα οικονομικά μοντέλα, οι οικονομολόγοι χρησιμοποιούν ενίοτε ειδικά αντίτυπα συναρτήσεων για τις συναρτήσεις ζήτησης και ειδικά γραμμικής ζήτησης:

$$x = F(p) = a - bp, \quad a,b>0, \quad (11)$$

σταθερή ελαστικότητα ζήτησης

$$x = F(p) = kp^{-r}, \text{ για } k,r>0 \quad (12)$$

Για την (11), η συνάρτηση ζήτησης είναι μια ευθεία γραμμή με αρνητική καμπύλη -b και διατομή x όπως απεικονίζεται στο σχήμα 3.19. Εφόσον η καμπύλη της F διαφέρει από την ελαστικότητα της F, δεν πρέπει να μας εντυπωσιάζει το γεγονός ότι η ελαστικότητα αλλάζει βάση της καμπύλης ζήτησης.



Σχήμα 3.19: Το γράφημα της συνάρτησης γραμμικής ζήτησης x = a - bp.

Κεφάλαιο 4: Υπολογισμός μιας μεταβλητής: Chain Rule

Πολλές οικονομικές καταστάσεις σχετίζονται με μια σειρά σχέσεων μεταξύ των οικονομικών μεταβλητών: η μεταβλητή A επηρεάζει την μεταβλητή B, οι οποίες με τη σειρά τους επηρεάζουν την μεταβλητή C. Για παράδειγμα, σε ένα μοντέλο μιας εταιρείας, η ποσότητα των χρησιμοποιούμενων εισροών καθορίζει την ποσότητα των προϊόντων που παράγει, και η ποσότητα των προϊόντων που παράγονται προσδιορίζει τα έσοδα της εταιρείας. Τα έσοδα είναι μια συνάρτηση η οποία σχετίζεται άμεσα με την παραγωγή και έμμεσα με τις εισροές. Το κεφάλαιο αυτό παρουσιάζει Chain Rule, ο οποίος περιγράφει την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης όσον αφορά τις παραγώγους της σχετικής συνάρτησης, ούτως ώστε, εάν το αποτέλεσμα της μεταβολής των εισροών στην παραγωγή είναι γνωστό και το αποτέλεσμα της μεταβολής της παραγωγής επί των εσόδων είναι επίσης γνωστό, τότε το αποτέλεσμα μιας μεταβολής εισροών επί των εσόδων μπορεί να υπολογιστεί εύκολα.

Η ενότητα 4.2 επικεντρώνεται στις αναστρέψιμες συναρτήσεις. Οι εν λόγω συναρτήσεις αντιστοιχούν στις σχέσεις μεταξύ των οικονομικών μεταβλητών, ας πούμε A και B, σχετικά με τις οποίες μερικές φορές θέλουμε να κατανοήσουμε την επίδραση του A στο B ή και αντίστροφα. Για παράδειγμα, οι οικονομολόγοι συνήθως ανησυχούν για το πώς η αύξηση στην τιμή επηρεάζει τη ζήτηση, αλλά μερικές φορές επικεντρώνονται στο πώς μια αλλαγή στη ζήτηση επηρεάζει τις τιμές. Υπάρχει φυσικά στενή σχέση μεταξύ της παραγώγου μιας συνάρτησης και της παραγώγου της αντίστροφης συνάρτησης: αν γνωρίζουμε ένα από τα δύο, μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε το άλλο. Τους ορισμούς της αντίστροφης συνάρτησης και της παραγώγου της θα τα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, όταν μελετήσουμε την λογαριθμική συνάρτηση ως προς το αντίστροφο της εκθετικής συνάρτησης.

Τέλος, στο τέλος αυτού του κεφαλαίου, θα χρησιμοποιήσουμε αυτά τα μαθηματικά αποτελέσματα για να υπολογίσουμε τη παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = x^{m/n}$. Η συνάρτηση αυτή χρησιμοποιείται σε πολλά οικονομικά μοντέλα, όπως τις συναρτήσεις παραγωγής και χρήσης Cobb-Douglas.

4.1 CHAIN RULE και σύνθετες συναρτήσεις

Στην Ενότητα 2.4 είδαμε τους κανόνες του υπολογισμού των παραγώγων μιας συνάρτησης που αποτελείται από την πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό ή και διαίρεση άλλων 2 συναρτήσεων. Στην Ενότητα αυτή θα δούμε την εξίσωση για την διαφοροποίηση μιας συνάρτησης που αποτελείται από την σύνθεση άλλων συναρτήσεων. Εάν η g και η h είναι δύο συναρτήσεις R^1, η συνάρτηση που σχηματίζεται από την αρχική εφαρμογή της συνάρτησης g για κάθε αριθμό x και στη συνέχεια, εφαρμόζοντας την συνάρτηση h, το αποτέλεσμα g (x) ονομάζεται Σύνθεση Συναρτήσεων g και h και γράφεται

$f(x) = h(g(x))$ ή $f(x) = (h \circ g)(x)$.

Η συνάρτηση f(x) ονομάζεται η σύνθεση των συναρτήσεων h και g, μπορούμε να λέμε ότι "η f αποτελείται από τις συναρτήσεις h και g" και η συνάρτηση "f είναι η συνάρτηση g και h."

Παράδειγμα 4.1: Για το Παράδειγμα, εάν $g(x) = x^2$ και $h(x) = x +4$, τότε $(h \circ g)(x) = x^{2+}4$. Εάν η σειρά σύνθεσης αναστρέφεται, τότε $(g \circ h)(x) = (x + 4)^2$. Σημειώνουμε ότι $h \circ g \neq g \circ h$.

Όταν συνθέτουμε δύο συναρτήσεις, στην ουσία δημιουργούμε μια καινούργια συνάρτηση.

Παράδειγμα 4.2: Οι συναρτήσεις που περιγράφουν τη συμπεριφορά μιας επιχείρησης, όπως η συνάρτηση του κέρδους Π, συνήθως γράφεται ως συνάρτηση της παραγωγής μιας επιχείρησης y. Αν κάποιος θέλει να μελετήσει την εξάρτηση των κορδών μιας εταιρείας για το ποσό των εισροών L που χρησιμοποιεί, πρέπει να συνθέσει τη συνάρτηση κέρδους με την συνάρτηση παραγωγής της επιχείρησης y = f (L), που στην ουσία δεν είναι τίποτε παρά η συνάρτηση που ορίζει την σχέση μεταξύ την παραγωγή y της επιχείρησης με τις μονάδες των εισροών. Το αποτέλεσμα είναι η παρακάτω συνάρτηση:

$$P(L) = \Pi(f(L)) = (\Pi \circ f)(L).$$

Για Παράδειγμα, εάν

$$\Pi(y) = -y^4 + 6y^2 - 5 \text{ και } f(L) = 5L^{2/3} \quad (1)$$

τότε

$$P(L) = \Pi(f(L)) = -(5L^{2/3})^4 + 6(5L^{2/3})^2 - 5 = -625L^{8/3} + 150L^{4/3} - 5. \quad (2)$$

Σημειώνουμε ότι χρησιμοποιείται ένα διαφορετικό γράμμα για το κέρδος ως μια συνάρτηση της *L* παρά για το κέρδος ως συνάρτησης *του* y, διότι μιλάμε για 2 διαφορετικές συναρτήσεις.

Παράδειγμα 4.3 Οι σύνθετες συναρτήσεις προκύπτουν φυσικά σε δυναμικά μοντέλα στα οποία οι μεταβλητές μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου. Για παράδειγμα, ας πάρουμε την συνάρτηση x = F (p) η οποία είναι η συνάρτηση λειτουργίας της ζήτηση της αγοράς για ένα αγαθό σχετικά με την τιμή του. Ας υποθέσουμε ότι, λόγω του πληθωρισμού ή εξωτερικών γεγονότων, η τιμή των προϊόντων αλλάζει σύμφωνα με την συνάρτηση p = p (t). Στη συνέχεια, η ζήτηση για προϊόντα επίσης θα αλλάζει σύμφωνα με τη σύνθετη συνάρτηση.

Όταν δουλεύουμε με μια σύνθετη συνάρτηση f(x) = h(g(x)), είναι φυσικό να ονομάσουμε την πρώτη συνάρτηση (g στην συγκεκριμένη περίπτωση) εσωτερική συνάρτηση ενώ την δεύτερη συνάρτηση (h στην συγκεκριμένη περίπτωση) να την ονομάζουμε εξωτερική συνάρτηση. Για παράδειγμα, στην σύνθετη συνάρτηση $(x^2 + 3x + 2)^7$, η εσωτερική συνάρτηση είναι η $g(x) = x^2 + 3x + 2$ και η εξωτερική συνάρτησης είναι η $h(z) = z^7$.

Διαφορίσιμες σύνθετες συναρτήσεις: The Chain Rule

Στην ενότητα 2.4, παρουσιάσαμε το κανόνα Power, ο οποίος είναι ο κανόνας για τη λήψη της παραγώγου μιας σύνθετης συνάρτησης κατά στην οποία η εξωτερική συνάρτηση είναι $h(z) = z^k$ για κάποιο εκθέτη κ:

$$d(g(x))^k / dx = k(g(x))^{k-1} g'(x) \text{ ή } d(g(x))^k / dx = h'(g(x)) g'(x) \quad (4)$$

Η εξίσωση (4) είναι ακριβώς η διαφορική εξίσωση μιας γενικής σύνθετης συνάρτησης h και g. Σε αυτή τη γενική μορφή, ονομάζεται ο κανόνας αλυσίδα. Συχνά συνοψίζεται ως «εξωτερική παράγωγο επί εσωτερική παράγωγο", αλλά θα πρέπει να θυμόμαστε ότι η παράγωγος εξωτερικής συνάρτησης αξιολογείται στην εσωτερική συνάρτηση.

Παράδειγμα 4: Ας εφαρμόσουμε τον κανόνα της αλυσίδας (4) για να υπολογίσουμε την παράγωγο μίας σύνθετης συνάρτησης P=Π∘f, που αναφέραμε και στο Παράδειγμα 4.2. η Η εξωτερική συνάρτηση είναι

$$\Pi() = -()^4 + 6()^2 - 5$$

παράγωγο της εξωτερικής συνάρτησης

$$\Pi'() = -4()^3 + 12(),$$

και η παράγωγος αξιολογείται ως εσωτερική συνάρτηση $f(L) = 5L^{2/3}$ είναι

$$\Pi'(f(L)) = -4(5L^{2/3})^3 + 12(5Z^{2/3}).$$

Από την άλλη, η παράγωγος εσωτερικής συνάρτησης είναι

$$f'(L) = 10/3\, L^{-1/3}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δυο συναρτήσεις αυτές έχουμε:

$$P'(L)=d(\Pi(f(L))) / dL= \Pi'(f(L))\ \ f'(L)= (-4(5L^{2/3})^3+12(5L^{2/3}))(10/3L^{-1/3})$$

Το οποίο ισούται με

$$(-4 \cdot 125L^2 + 60L^{2/3}) \cdot (10/3L^{-1/3}) = -5000L^{5/3}/3 + 200L^{1/3}$$

Παράδειγμα 4.5: Για να δούμε πως το Chain Rule δουλεύει με πολυώνυμα, σκεφτείτε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις sine x και cosine x, τα οποία συνήθως τα γράφουμε και ως sinx και cosx. Τώρα χρειάζεται να ξέρουμε μόνο ότι η παράγωγος της συνάρτησης sinx είναι η συνάρτηση cosx. Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης

$$f(x) = \sin(x^3 + 4x),$$

σημειώνουμε ότι η συνάρτηση f είναι μα σύνθετη συνάρτηση της $(x^3 + 4x)$ η οποία είναι η εσωτερική συνάρτηση, και της συνάρτησης sinz, η οποία είναι η εξωτερική συνάρτηση. Η παράγωγο της εξωτερικής συνάρτησης είναι

$$d/dz \sin() = \cos().\ dz$$

Η παράγωγο της εξωτερικής συνάρτησης αξιολογήτε στην εσωτερική συνάρτηση, είναι

$$\cos(x^3 + 4x).$$

Η παράγωγος της εσωτερικής συνάρτησης $(x^3 + 4x)$ είναι $(3x^2 + 4)$. Μέσω του Chain Rule, η παράγωγο της sin(x3 + 4x) είναι

$$d/dx\ (\sin(x^3 + 4x)) = \cos(x^3 + 4x) \cdot (3x^2 + 4).$$

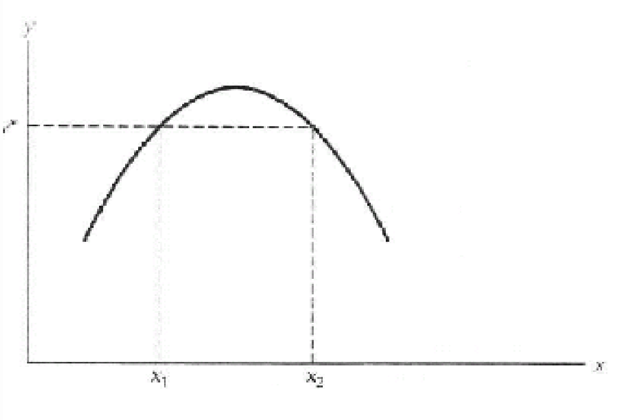
4.2 Η παράγωγος των αναστρέψιμων συναρτήσεων

Συνοπτικά, στην προηγούμενη παράγραφο, για να μπορεί η συνάρτηση να είναι αναστρέψιμη, θα πρέπει να είναι ένα-προς-ένα, να ισχύει δηλαδή ότι

$$\chi_1 \neq \chi_2 \text{ όταν } f(x_1) \neq f(x_2) \text{ και } \chi_1 = \chi_2 \text{ όταν } f(x_1)=f(x_2)$$

Αντιστρόφως, αν μία συνάρτηση είναι ένα-προς-έναν σε μια σειρά Ε, υπάρχει μια σαφώς καθορισμένη λειτουργία g: f (E) -> R^1 η οποία στέλνει κάθε σημείο y στο γράφημα της πίσω στο (μοναδικό) σημείο το οποίο οριστικέ από την συνάρτηση την ίδια. Η συνάρτηση ορίζεται από μια εξίσωση που θα εκφράζει την σχέση y ως προς x, θα δημιουργηθεί μια νέα εξίσωση για την αντίστροφη συνάρτηση g. Εάν η διαδικασία αυτή καθορίζει μια μοναδική x για κάθε y, η νέα συνάρτηση ορίζει το αντίστροφο *g της f.*

Είναι εύκολο να δούμε στο γράφημα μια συνάρτηση η οποία έχει οριστεί σε ένα διάστημα Ε του R1 και να ορίσουμε εάν η συνάρτησης αυτή είναι ένα-προς-έναν ή όχι. Το Σχήμα 4.1 απεικονίζει ότι το γράφημα της συνάρτησης δεν μπορεί να αντιστραφεί. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να έχει τοπικές μέγιστες ή ελάχιστες τιμές. Η συνάρτηση η οποία παρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 4.1 δεν είναι ένα-προς-έναν, λόγω δύο σημείων yo και x2.



Σχήμα 4.1: Συνάρτηση δεν είναι ένα προς ένα στο εσωτερικό διάστημα μεγίστου ή ελαχίστου

Παράδειγμα 4.6: Η συνάρτηση f(x) = x2, ορίζεται σε όλο το R1. Η f δεν είναι ένα προς ένα αφού χ=-2 και χ=2 για y=4. Ωστόσο, εάν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f έτσι ώστε να περιέχει μόνο μη αρνητικούς αριθμούς [0, ∞) , τότε το πεδίο ορισμού f είναι ένα-προς-ένα και συνεπώς έχει μια σαφώς καθορισμένη αντίστροφο g (y) = √y. Το πεδίο ορισμού της g είναι το διάστημα [0, ∞).

Παράδειγμα 4.7 Η συνάρτηση $x^3 - 3x$ το γράφημα της οποίας παρουσιάζεται στο σχήμα 3.2, δεν είναι ένα-προς-ένα στην $\mathbf{R}^1$ αφού η x = √3, 0, +√3 καθορίζεται στο y = 0. Βάση περαιτέρω στοιχείων, η f έχει δύο τοπικές ακρότατα στοιχείο το οποίο κάνει να μην είναι μια μονότονη συνάρτηση. Ωστόσο, επειδή η f είναι μονότονη συνάρτηση για x > 1, ο περιορισμός της στο τον περιορισμό της στο *(0, ∞)* είναι αναστρέψιμη.

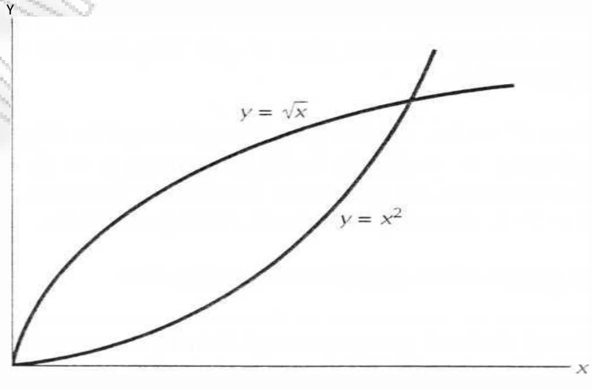
Το ακόλουθο θεώρημα συνοψίζει τη ανάλυση μέχρι στιγμής.

Θεώρημα 4.1 Μια συνάρτηση f ορίζεται για ένα διάστημα *E* στο $\mathbf{R}^1$ έχει μια σαφώς καθορισμένη αντίστροφη στο διάστημα *f*(E), μόνο εάν η f αυξάνεται μονοτονικά σε όλα του τα E ή μειώνεται μονοτονικά επί του συνόλου των E.

Για διαφορίσιμες συναρτήσεις, το Θεώρημα 3.2 δίνει ένα κριτήριο για μια συνάρτηση να είναι μονοτονικά αύξουσα ή φθίνουσα. Ο συνδυασμός του αποτελέσματος αυτού με το θεώρημα 4,1 οδηγεί φυσιολογικά στο εξής θεώρημα.

Θεώρημα 4.2 Μια C^1 συνάρτηση f ορίσμένο σε ένα διάστημα *E* στο $\mathbf{R}^1$ είναι ένα-προς-ένα και συνεπώς είναι αναστρέψιμη στο E εάν η *f'* (E) > 0 για όλα τα χ ∈ E ή η f'(χ)< 0 για όλα τα χ ∈ E.

Από μια γεωμετρική άποψη, εάν η *f* στέλνει εάν το *x_0,στο* $\mathbf{y}_0$ έτσι ώστε το σημείο *(x_0,* $\mathbf{y}_0$*)* να βρίσκεται στο γράφημα της *f*, τότε η f^{-1} στέλνει το $\mathbf{y}_0$ πίσω στο $\mathbf{\chi}_0$ και επομένως, το σημείο *($\mathbf{y}_0$, x_0)* βρίσκεται στο γράφημα της. Για οποιοδήποτε σημείο (a, b) του γραφήματος της *f,* το σημείο (b, a) βρίσκεται στο γράφημα της f^{-1} .



Σχήμα4.2Το γράφημα της συνάρτησης y = x^2 και y = √x

Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι απλώς η αντανάκλαση του γραφήματος της *f* σε όλη την διαγώνια γραμμή {x = y}. Τα 4.2 και 4.3 απεικονίζουν το φαινόμενο αυτό για τα δύο πρώτα ζευγάρια συναρτήσεων στο Παράδειγμα 4.7.

Η παράγωγος της Αντίστροφής Συνάρτησης

Επειδή υπάρχει αυτή η στενή σχέση μεταξύ του γραφήματος μιας αναστρέψιμης συνάρτησης *f* και το διάγραμμα της αντιστρόφης συναρτησης f^{-1}, δεν είναι έκπληξη το γεγονός ότι υπάρχει στενή σχέση μεταξύ των παραγώγων τους. Ειδικότερα, εάν η *f* είναι C^1 ώστε η γραφική της παράσταση να έχει μια ομαλά διαφορετική εφαπτόμένη γραμμή, το διάγραμμα της f^{-1} θα έχει επίσης μια ομαλά διαφορετική εφαπτόμένη γραμμή. Δηλαδή, η f^{-1} θα είναι επίσης C^1. Το ακόλουθο θεώρημα συνδυάζει την παρατήρηση αυτή με το θεώρημα 4,2 ώστε να δώσει μια πλήρη εικόνα για την ύπαρξη και διαφορισιμότητας της αντιστρόφης συνάρτησης της C^1.

Θεώρημα 4.3 (Θεώρημα Αντίστροφής Συνάρτησης)

Ας είναι η C^1 μια συνάρτηση f καθορισμένη σε ένα διάστημα *I* στο $\mathbf{R}^1$. Εάν η *f'* (χ) ≠ 0 για όλα τα χ $\in$ *I*, τότε:

(α) η f είναι αναστρέψιμη στο I.

(β) η αντίστροφη g είναι μια συνάρτηση C^1 στο διάστημα *f(I)*, και

(γ) για όλα τα z στο πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης g,

$$g'(z) = \frac{1}{f'(g(z))}. \qquad (13)$$

Απόδειξη:Η ύπαρξη της f^{-1} προκύπτει από το Θεώρημα 4.1. Δεδομένου ότι το διάγραμμα της f^{-1}είναι η αντανάκλαση του γραφήματος της *f* σε όλη την διαγώνια γραμμή {y = x}, το γράφημα της f^{-1} θα είναι μια σαφώς καθορισμένη εφαπτομένη γραμμή παντού. Δηλαδή, να είναι διαφορίσιμη, εάν το γράφημα της *f* είναι επίσης διαφορίσιμο. Εάν υποθέσουμε ότι g = f^{-1} είναι διαφορίσιμη, τότε θα υπολογίσουμε g' γράφοντας πρώτα την αντίστροφη σχέση όπως στην (10):

$$f(g(z)) = z \qquad (14)$$

Τώρα ας πάρουμε την παράγωγο των δυο ακρότατων της (14) σε σχέση με το z, χρησιμοποιώντας το Κανόνα της Αλυσίδας στο αριστερό ακρότατο:

$$F'(g(z)) \cdot g'(z) = 1,$$

ή

$$g'(z) = \frac{1}{f'(g(z))}.$$

Παράδειγμα 4.10 Η αντίστροφη συνάρτηση της *y = f(x) ≡ mx* είναι *x = g(y) = (1/m)y.* Σημειώνουμε ότι

$$g'(y) = \frac{1}{m} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Παράδειγμα 4.11 Ας δουλέψουμε με την τέταρτη ομάδα συναρτήσεων του Παραδείγματος 4.7. Ξεκινάμε με

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \text{ και } x = 2$$

Εφόσον $f(2) = 1/3$, η αντίστροφη συνάρτηση g της f στέλνει το 1/3 στο 2. Εφόσον η $f'(x) = 2/(x+1)^2$, $f'(2) = 2/9$. Βάση το θεώρημα 4.3,

$$g'(\frac{1}{3}) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2/9} = \frac{9}{2}$$

Μπορούμε να ελέγξουμε την απάντηση αυτή υπολογίζοντας ότι

$$g(y) = \frac{1+y}{1-y}, \quad g'(y) = \frac{2}{(1-y)^2}, \text{και} \quad g'(\frac{1}{3}) = \frac{2}{4/9} = \frac{9}{2}$$

Η παράγωγος της $x^{m/n}$

Στο θεώρημα 2.3, αποδείξαμε ότι η παράγωγο της x^{κ} είναι $\kappa x^{\kappa-1}$ για κάθε ακέραιο αριθμό *κ*. Στο θεώρημα 2.4, είπαμε χωρίς απόδειξη ότι η εξίσωση αυτή ισχύει για κάθε αριθμό *k*. Σ'αυτή την ενότητα, θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 4.3 και το Κανόνα της Αλυσίδας για να δείξουμε ότι αυτή η εξίσωση ισχύει για κάθε *λογικό αριθμό k = m/n.*

Θεώρημα 4.4 Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n,

$$(x^{1/n})' = \frac{1}{n} x^{(1/n)-1}$$

Απόδειξη:Η αντίστροφη της $y = x^{1/n}$ είναι $x = y^n$. Βάση του Θεωρήματος 4.3,

$$(x^{1/n})' = \frac{1}{(y^n)'}, \quad \text{στο σημείο } y = x^{1/n}$$

$$= \frac{1}{ny^{n-1}} \quad \text{στο σημείο } y = x^{1/n}$$

$$= \frac{1}{nx^{(n-1)/n}} = \frac{1}{n} x^{(1/n)-1}$$

Θεώρημα 4.5 Για κάθε θετικούς ακέραιους αριθμούς m και n,

$$(x^{m/n})' = \frac{m}{n} x^{(m/n)-1}$$

Απόδειξη: Εφόσον $x^{m/n} = (x^{1/n})^m$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τον Κανόνα της Αλυσίδας

$$(x^{m/n})' = m(x^{1/n})^{m-1} \cdot (x^{1/n})', \qquad \text{(βάση του Κανόνα της Αλυσίδας)}$$

$$= mx^{(m-1)/n} \cdot \frac{1}{n} x^{(1-n)/n}, \qquad \text{(βάση του Θεωρήματος 4.4)}$$

$$= \frac{m}{x} x^{(m-n)/n} = \frac{m}{n} x^{(m/n)-1},$$

Έχοντας αποδείξει ότι η παράγωγος της x^{κ} είναι $kx^{\kappa-1}$ για όλους τους λογικούς αριθμούς k, μπορούμε να επεκτείνουμε αυτό το αποτέλεσμα σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς k, προσεγγίζοντας κάθε παράλογη εκθέτη από μια ακολουθία λογικών αριθμών, εφαρμόζοντας την εξίσωση σε κάθε λογικό αριθμό στην σειρά, και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας μια διαδικασία περιορισμού.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Κεφάλαιο 5: Εκθέτες και Λογάριθμοι

Στα τρία τελευταία κεφάλαια ασχοληθήκαμε αποκλειστικά με τις σχέσεις που εκφράζονται με τις πολυώνυμές συναρτήσεις ή με τους συντελεστές των πολυωνύμων συναρτήσεων. Ωστόσο, σε πολλά οικονομικά μοντέλα, η συνάρτηση, η οποία φυσικά μοντελοποιεί την αύξηση ενός συγκεκριμένου οικονομικού ή χρηματοοικονομικού δείκτη , έχει μία ανεξάρτητη μεταβλητή η οποία εμφανίζεται ως εκθέτης, για παράδειγμα, η $f(t) = 2^t$. Αυτές οι εκθετικές συναρτήσεις εμφανίζονται φυσιολογικά, για παράδειγμα, ως πρότυπα για το χρηματικό ποσό σε ένα λογαριασμό ταμιευτηρίου ή για το ποσό της οφειλής σε ένα στεγαστικό δάνειο σταθερού επιτοκίου μετά από t *ΕΤΗ.*

Το κεφάλαιο αυτό εστιάζει στις εκθετικές συναρτήσεις και τις παραγώγους τους. Περιγράφει επίσης την αντίστροφη συνάρτηση μιας εκθετικής συνάρτησης – το λογάριθμο, ο οποίος μπορεί να μετατρέψει πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ των οικονομικών μεταβλητών σε πρόσθετες σχέσεις με τις οποίες μπορούμε να δουλέψουμε πιο εύκολα. Το κεφάλαιο αυτό κλείνει με τις εφαρμογές των εκθετικών και λογαρίθμων των προβλημάτων της παρούσας αξίας, ετήσιων εισοδημάτων και το βέλτιστο χρόνο αναμονής.

5.1 Εκθετικές συναρτήσεις

Κατά την αρχική μελέτη του λογισμού, κάποιος μπορεί να δουλέψει με ένα περιορισμένη σειρά μορφών συναρτήσεων: πολυώνυμα και λογικές συναρτήσεις όπως και οι κλασματικές και αρνητικές εκθέτες – όλες τις συναρτήσεις που σχεδιάζονται χρησιμοποιώντας τις συνηθισμένες μαθηματικές πράξεις στους μονώνυμους ax^k. Διευρύνουμε τώρα την κατηγορία των συναρτήσεων υπό εξέταση η οποία συμπεριλαμβανομένων αυτών των συναρτήσεων κατά των οποίον ο μεταβλητής x εμφανίζεται ως εκθέτης. Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται εκθετικές συναρτήσεις.

Ένα απλό παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f(x) = 2^x$ το πεδίο ορισμού της οποίας είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Υπενθυμίζουμε ότι:

(1) εάν ο x είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός, το 2^x σημαίνει "πολλαπλασιάζω το 2 με τον εαυτό του x φορές".

(2) εάν x = 0, 2° = 1 εξ ορισμού.

(3) εάν x = 1/n, $2^{1/n}$ 2^x = $(\sqrt[n]{2})$ η νιοστή ρίζα του 2.

(4) εάν x = m/n, $2^{m/n}$ = $(\sqrt[n]{2})^m$, η νιοστή δύναμη της νιοστής ρίζας του 2, και

(5) εάν το x είναι ένας αρνητικός αριθμός, 2^x σημαίνει $1/2^{|x|}$, ο αντίστοιχος του $2^{|x|}$.

Σε αυτές τις περιπτώσεις, ο αριθμός 2 ονομάζεται η βάση της εκθετικής συνάρτησης.Για να κατανοήσουμε την εκθετική συνάρτηση καλύτερα, ας παρουσιάσουμε την γραφική παράσταση της. Δεδομένου ότι δεν γνωρίζουμε πώς να πάρουμε την παράγωγο της 2^x ακόμα – $(2^{|x|})$ δεν είναι $x2^{x-1}$ -

X	2^x
- 3	*1/8*
- 2	*¼*
- 1	*½*
0	*1*
1	*2*

2	*4*
3	*8*

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.1

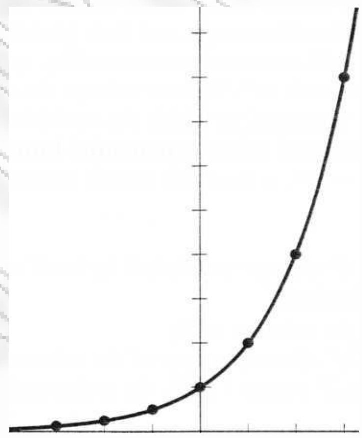
θα πρέπει να ορίσουμε τα σημεία. Έχουμε υπολογίσει τις τιμές της 2^x στον πίνακα 5.1 και ζωγραφίσει το αντίστοιχο γράφημα στο Σχήμα 5.1.

Σημειώνουμε ότι το γράφημα έχει το αρνητικό άξονα x ως οριζόντια ασύμπτωτη, αλλά σε αντίθεση με της λογικές συναρτήσεις, το γράφημα προσεγγίζει αυτή την ασύμπτωτη μόνο προς μία κατεύθυνση. Προς την άλλη κατεύθυνση, το γράφημα αυξάνεται πολύ απότομα. Στην πραγματικότητα, αυξάνει ταχύτερα από κάθε πολυώνυμο - "εκθετικά γρήγορα".

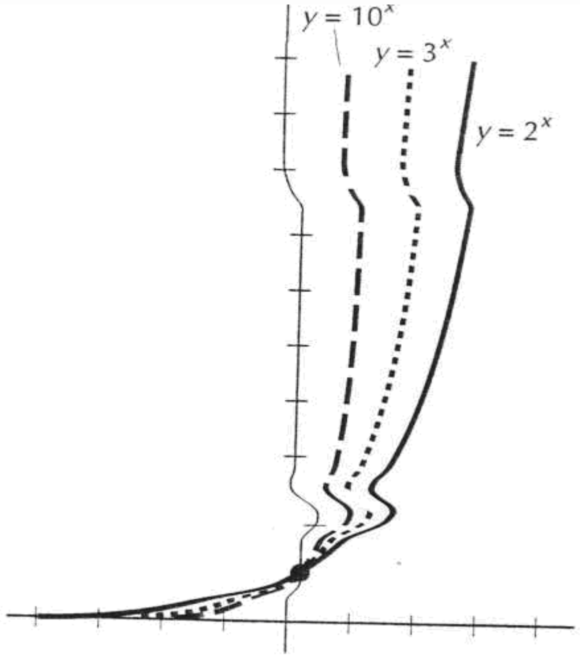
Στο σχήμα 5.2. οι γραφικές παραστάσεις των $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 3^x$ και $f_3(x) = 10^x$ έχουν ζωγραφιστεί. Σημειώνουμε ότι τα διαγράμματα είναι μάλλον παρόμοια: όσο μεγαλύτερη είναι η βάση, τόσο πιο γρήγορα το γράφημα γίνεται συμπωτική προς τον άξονα x σε μία κατεύθυνση και αλλάζει απότομα προς την άλλη κατεύθυνση.

Οι τρεις βάσεις στο Σχήμα 5.2 είναι μεγαλύτερες από 1. Η γραφική παράσταση της $y = b^x$ είναι λίγο διαφορετική, αν η βάση b κυμαίνεται μεταξύ το 0 και το 1. Εξετάζουμε την $h(x) = (1/2)^x$ ως παράδειγμα. Ο Πίνακας 5.2 παρουσιάζει μια λίστα τιμών των (x, y) στο διάγραμμα της h για μικρούς ακέραιους αριθμούς x. Σημειώνουμε ότι οι τιμές στην στήλη y του Πίνακα 5.2 είναι ίδιες με τις εγγραφές στην στήλη y του πίνακα 5.1. αλλά με αντίστροφη σειρά, διότι η $(1/2)^x = 2^{-x}$.

Αυτό σημαίνει ότι το γράφημα της $h(x) = (1/2)^x$ είναι απλώς η αντανάκλαση του γραφήματος της $f(x) = 2^x$ στον άξονα y όπως απεικονίζεται στο σχήμα 5.3.Τα γραφήματα των συναρτήσεων $(1/3)^x$ και $(1/10)^x$ να μοιάζει με εκείνη $(1/2)^x$



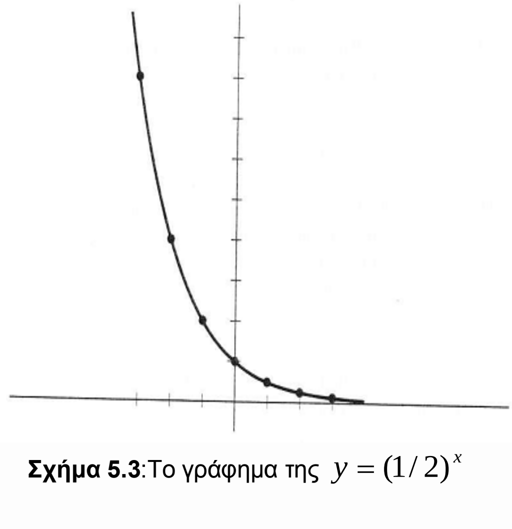
Σχήμα 5.1 *Το γράφημα της* $y = 2^x$



Σχήμα 5.2:Το γράφημα της $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 3^x$ και $f_3(x) = 10^x$

X	$(1/2)^x$
- 3	*8*
- 2	*4*
- 1	*2*
0	*1*
1	*½*
2	*¼*
3	*1/8*

Πίνακας 5.2



Σχήμα 5.3:Το γράφημα της $y = (1/2)^x$

Οι βάσεις με πρόσημο αρνητικού αριθμού δεν επιτρέπονται στις εκθετικές συναρτήσεις. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $k(x) = (-2)^x$ θα μπορούσε να πάρει θετικές τιμές για το x ως ακέραιο ζυγό αριθμό και αρνητικές τιμές για x ως ακέραιο μονό αριθμός. Επιπλέον, δεδομένου ότι δεν μπορείτε να πάρετε την τετραγωνική ρίζα ενός αρνητικού αριθμού, η συνάρτηση $(-2)^x$ δεν ορίζεται καν για x=1/2 ή γενικότερα, όταν το x είναι ένα κλάσμα *p/q* και q είναι ένας ακέραιος ζυγός αριθμός. Έτσι, μπορούμε να συνεργαστούμε μόνο με εκθετικές συναρτήσεις a^x όπου είναι ένας αριθμός μεγαλύτερος από 0.

5.2 Ο αριθμός e

Το Σχήμα 5.2 παρουσιάζει τα γραφήματα της εκθετικής συνάρτησης με βάσεις 2, 3, και 10 αντίστοιχα. Εισάγουμε τώρα έναν αριθμό ο οποίος αποτελεί την πιο σημαντική βάση μιας εκθετικής συνάρτηση, τον άρρητο αριθμό e. Για να παρακινήσουμε τον ορισμό του e, ας εξετάσουμε την πιο βασική οικονομική κατάσταση – τον ρυθμό αύξησης των επενδύσεων σε έναν λογαριασμό ταμιευτηρίου. Ας υποθέσουμε ότι στην αρχή του έτους, θα καταθετεί το ποσό $A σε έναν λογαριασμό ταμιευτηρίου που καταβάλλει έναν απλό ετήσιο επιτόκιο r. Αν δεν κινήσουμε καθόλου τον λογαριασμό χωρις να πραγματοποιήσουμε καταθέσεις ή αναλήψεις, μετά από ένα χρόνο ο λογαριασμός θα αυξηθεί σε *A + rA = A(1* + r) δολάρια. Επιπλέον, το ποσό του λογαριασμού κάθε έτος είναι (1 + r) φορές από αυτό του προηγούμενου έτους. Μετά από δύο χρόνια, θα έχουμε

$$A\,(1+r)(1+r) = A\,(1+r)^2.$$

Μετά από *t έτη, το ποσό θα είναι ίσον με* $A(1+r)^t$

Στη συνέχεια, ας υποθέσουμε ότι η τράπεζα υπολογ΄πιζει τόκους τέσσερις φορές το χρόνο. Στο τέλος κάθε τριμήνου, καταβάλλονται τόκοι στο r/4 φορές. Μετά από έν τέταρτο του έτους, το υπόλοιπο του λογαριασμού θα είναι $A + \frac{r}{4}A$ δολάρια. Μετά από ένα χρόνο, δηλαδή, μετά από τέσσερα τρίμηνα, το υπόλοιπο του λογαριασμού θα είναι $A(1+\frac{r}{4})^4$ δολάρια. Μετά από t χρόνια, ο λογαριασμός θα αυξηθεί κατά $A(1+\frac{r}{4})^{4t}$ δολάρια.

Γενικότερα, αν το επιτόκιο καταβάλλεται 4 φορές το χρόνο, το υπόλοιπο του λογαριασμού θα είναι $A(1+\frac{r}{n})$ δολάρια μετά από το πρώτη περίοδο (τρίμηνο), το υπόλοιπο του λογαριασμού θα είναι $A(1+\frac{r}{n})^n$ δολάρια μετά από το πρώτο χρόνο, και $A(1+\frac{r}{n})^{nt}$ δολάρια μετά από τα έτη.

Πολλές τράπεζες …….. καθημερινά. Άλλες διαφημίζουν ότι …………. συνεχώς. Με βάση ποιο συντελεστή τα χρήματα στις τράπεζες αυξάνονται σε ένα έτος με r επιτόκιο εάν το επιτόκιο αυτό …..τόσο συχνά; Δηλαδή, αν το n είναι πολύ μεγάλο; Μαθηματικά, ρωτάμε «ποιο είναι το όριο της $(1+\frac{r}{n})^n$ όπως n → ∞; Για να απλοποιηθεί ο υπολογισμός, ας αρχίσουμε με 100 τοις εκατό ετήσιο επιτόκιο, το οποίο σημαίνει ότι r = 1. Ορισμένες χώρες, όπως το Ισραήλ, η Αργεντινή και η Ρωσία, έχουν βιώσει τα επιτόκια των 100 τοις εκατό και υψηλότερων τα τελευταία χρόνια.

Έχουμε υπολογίσει $(1+\frac{1}{n})^n$ για διαφορετικές τιμες του n και παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα στον πίνακα 5.3.

n	$(1+\frac{1}{n})^n$
1	2.0
2	2.25
4	2.4414
10	2.59374
100	2.704814
1,000	2.7169239
10,000	2.7181459
100,000	2.71826824
0,000,000	2.718281693

Πίνακας 5.3

Όπως βλέπετε στον πίνακα 5.3, $(1+\frac{1}{n})^n$ είναι μια αύξουσα σειρά με n και συγκλίνει σε έναν αριθμό λίγο μεγαλύτερο από το 2,7. Το όριο αποδεικνύεται ότι είναι ένας άρρητος αριθμός, υπό την έννοια ότι δεν μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα ή ως ένα επαναλαμβανόμενο δεκαδικό. Το γράμμα e προορίζεται για να δηλώσει τον αριθμό αυτό επίσημα,

$$e = \lim_{n->\infty}\underline{(1+\frac{1}{n})^n}$$

Σε επτά δεκαδικά ψηφία, e = 2.7182818 ···
Ο αριθμός e παίζει το ίδιο θεμελιώδη ρόλο στη χρηματοδότηση και στην οικονομία με τον αριθμό π στην γεωμετρία. Ειδικότερα, η συνάρτηση $f(x)=e^x$ f ονομάζεται εκθετική συνάρτηση και συχνά γράφεται ως exp (x). Δεδομένου ότι το 2 <e <3, η γραφική παράσταση του $\exp(x)=e^x$ διαμορφώνεται όπως τα διαγράμματα στο Σχήμα 5.2.

Στη συνέχεια, θα επανεξετάσουμε το γενικό επιτόκιο r και θα ρωτήσουμε: πιο είναι το όριο της ακόλουθης σειράς

$$(1+\frac{r}{n})^n$$

Σε σχέση με την e. Μια απλή αλλαγή των μεταβλητών απαντάει σε αυτην την ερώτηση. ανταποκρίνεται σε αυτό το ζήτημα. Ας ορίσουμε το r > 0 για το υπόλοιπο αυτής της ανάλυσης. Ας έχουμε m ≡ n/r ώστε n = mr. Καθώς το n μεγαλώνει, το ίδιο κάνει και το m. (Θυμηθείτε ΄ότι το r είναι σταθερός0. Εφόσον r/n = 1/m,

$$(1+\frac{r}{n})^n = (1+\frac{1}{m})^{mr} = ((1+\frac{1}{m})^m)^r$$

Αφήνοντας το *n* —► ∞, θα δούμε ότι

$$\lim_{n->\infty}\underline{(1+\frac{r}{n})^n} = \lim_{m->\infty}\underline{((1+\frac{1}{m})^m)^r}$$

$$= (\lim_{m->\infty}\underline{(1+\frac{1}{m})^m)^r}$$

$$= e^r.$$

Στο δεύτερο βήμα, χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το XR είναι μια συνεχής συνάρτηση του x, έτσι ώστε εάν $\{x_m^r\}_m^{\infty} = 1$είναι μια σειρά αριθμών που συγκλίνουν προς το x_0 , τότε η σειρά των …… $\{x_m^r\}$ συγκλίνει προς το x_0^rτο οποίο είναι

$$(\lim_{m->\infty} x_m)^r = \lim_{m->\infty} (x_m^r).$$

Μετά από t έτη θα έχουμε

$$\lim_{n->\infty}(1+\frac{r}{n})^{nt} = \lim_{n->\infty}((1+\frac{r}{n})^n)^t$$

$$= (\lim_{n->\infty}(1+\frac{r}{n})^n)^t$$

$$= (e^r)^t = e^{rt}..$$

Θεώρημα 5.1

Καθώς n → ∞, $(1+\frac{1}{n})^n$ συγκλίνει σε ένα όριο που δηλώνεται με το σύμβολο ε. Επιπλέον,

$$\lim_{n->\infty}(1+\frac{k}{nn})^n = e^k$$

Εάν γίνει μια κατάθεση των Α δολαρίων σε έναν λογαριασμό που πληρώνει ετήσιο επιτόκιο r, μετά από t χρόνια το ποσό του λογαριασμού θα αυξηθεί σε Ae^{rt} δολάρια.

Σημειώνουμε τα πλεονεκτήματα της συχνής ανατοκισμού. Στο r = 1, δηλαδή για επιτόκιο ύψους 100 τοις εκατό, το ποσό των Α δολαρίων θα διπλασιαστεί σε 2Α δολάρια σε ένα έτος. Ωστόσο, εάν ο ανατοκισμός είναι συνεχής, τότε το ποσό Α των δολαρίων θα αυξηθεί σε *eA* δολάρια με το e > 2.7 – δηλαδή το ποσό σχεδόν τριπλασιάζεται.

5.3 Λογάριθμοι

Σκεφτείτε μια γενική εκθετική συνάρτηση $y = a^x$με βάση $a > 1$. Μια τέτοια εκθετική συνάρτηση είναι μια αυστηρά αύξουσα συνάρτηση:

$$y = a^x \text{ με βάση } a > 1 \quad (1)$$

Με άλλα λόγια, όσο πιο πολύ πολλαπλασιάζουμε μια τέτοια συνάρτηση τόσο πιο πολύ αυξάνεται. Όπως επισημάναμε στο Θεώρημα 4.1, οι αυστηρά αύξουσες συναρτήσεις έχουν φυσικές αντίστροφες συναρτήσεις. Υπενθυμίζουμε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της $y = f(x)$ βγαίνει από την επίλυση της συνάρτησης $y = f(x)$ για x εξαρτημένο από το y. Για παράδειγμα, για $a > 0$, η αντίστροφη συνάρτησης της αύξουσας γραμμικής συνάρτηση $f(x) = ax + b$είναι η γραμμική συνάρτηση $g(y) = (1/a)(y - b)$ η οποία υπολογίζεται από την επίλυση της εξίσωσης $y = ax + b$ για χ που εξαρτάται από το y:

$$y = ax + b \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}(y - b) \qquad (2)$$

Κατά μία έννοια, η αντίστροφη συνάρτηση g της συνάρτησης f αναιρεί την συνάρτηση f, ώστε

$$g(f(x)) = x$$

Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την αντίστροφη συνάρτηση της αύξουσας εκθετικής συνάρτησης $y = a^x$ επειδή δεν μπορούμε να επιλύσουμε την εξίσωση $y = ax$ για χ που εξαρτάται από το y όπως κάναμε στην (2). Ωστόσο, αυτή η αντίστροφη συνάρτηση είναι αρκετά σημαντική ώστε να ονομαστεί. Ονομάζεται λογάριθμος με βάση a και γράφεται

$$y = \log_a(z) \Leftrightarrow a^y = z$$

Ο λογάριθμος του z, εξ ορισμού, είναι η δύναμη στην οποία πρέπει κανείς να προβάλει το a για να λυθεί το z. Αμέσως μετά προκύπτει ότι

$$a^{\log_z(z)} = z \text{ και } \log_a(a^z) = z \qquad (3)$$

Συχνά γράφουμε $\log_a(z)$ χωρίς παρενθέσεις, όπως $\log_a z$.

Λογάριθμοι με βάση 10

Ας δούμε πρώτα την βάση $a = 10$. Η λογαριθμική συνάρτηση με βάση 10 είναι ένας λογάριθμος που χρησιμοποιείται συχνά και γράφεται ως $y = Logx$ με κεφαλαίο L:

$$y = Logz \Leftrightarrow 10^y = z$$

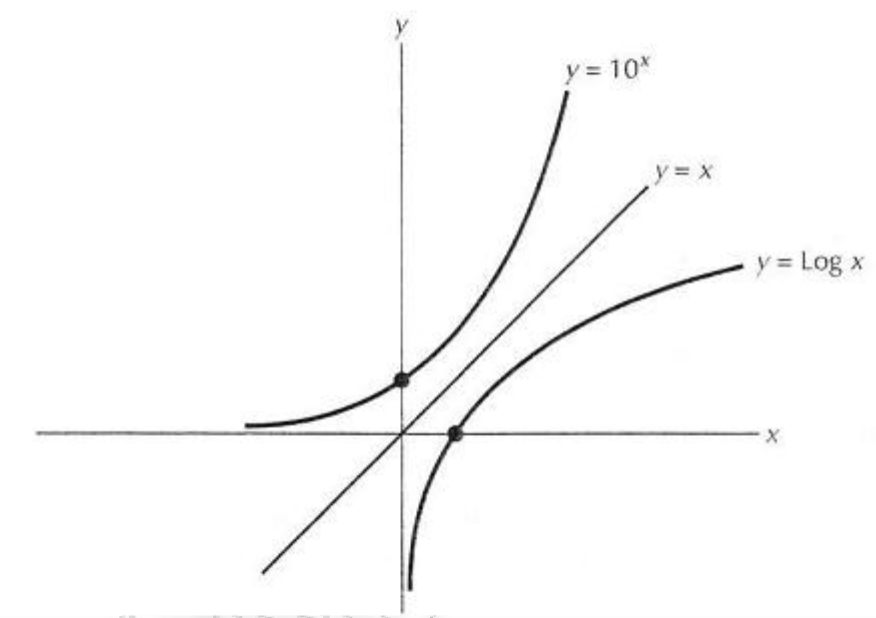
Παράδειγμα 5.1: Για παράδειγμα, Log του 1000 είναι η δύναμη του 10 που θα αποφέρει 1000. Δεδομένου ότι $10^3 = 1000$, Log 1000 = 3. Ο Log του 0.01 είναι -2 εφόσον $10^{-2} = 0{,}01$. Παρακάτω παρουσιάζονται περαιτέρω τιμές του Log z:

$Log10 = 1$		10^1	$= 10,$
$Log100.000 = 5$	εφόσον	10^5	$= 100.000,$
$Log1 = 0$		10^0	$= 1,$
$Log625 = 22.79588....$		$10^{2.79588...}$	$= 625.$

Για περισσότερες τιμές του z., θα πρέπει να χρησιμοποιούμε αριθμομηχανή ή τον πίνακα των λογαρίθμων για να αξιολογήσουμε το Log z.

Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} διαμορφώνεται με την αντιστροφή των ρόλων των οριζόντιων και κάθετων αξόνων στο γράφημα της f. Με άλλα λόγια, το γράφημα της αντίστροφης συνάρτησης $y = f(x)$ είναι η αντανάκλαση του γραφήματος της συνάρτησης f σε όλο το μήκος της διαγώνιας $(x = y)$ διότι (y, z) είναι ένα σημείο στο γράφημα της συνάρτησης f^{-1} μόνο εάν το (z, y) είναι ένα σημείο του γραφήματος της συνάρτησης f. Στο σχήμα 5.4 παρουσιάζουμε το γράφημα της συνάρτησης $y = 10^x$ και αντικατοπτρίζεται στην διαγώνια $(x = y)$ για να επιστήσει την γραφική παράσταση της $y = Logx$ y.

Εφόσον ο αρνητικός άξονας x είναι μια οριζόντια ασύμπτωτη για τη γραφική παράσταση της $y = 10^x$, ο θετικός άξονας y είναι μια οριζόντια ασύμπτωτη για τη γραφική παράσταση της $y = Logx$. Επειδή το 10^x αυξάνεται πολύ γρήγορα, η Log x αυξάνεται πολύ αργά. Στο x = 1000, η Log x είναι απλώς στο y = 3. Στο χ που ισούται με ένα εκατομμύριο, η Log x μόλις ανεβαίνει στο y = 6. Τέλος, εφόσον για κάθε x, το 10^x είναι ένας θετικός αριθμός και η Log x ορίζεται μόνο για x> 0. Το πλαίσιο ορισμού του είναι R++, το σύνολο των αυστηρά θετικών αριθμών.



Σχήμα 5.4: Το γράφημα της συνάρτησης $y = Logx$ είναι η αντανάκλαση του γραφήματος $y = 10^x$ καθ' όλο το μήκος της διαγώνιας $(y = x)$.

Λογάριθμοι με Βάση e

Εφόσον η εκθετική συνάρτηση $\exp(x) = e^x$ έχει όλες τις ιδιότητες του 10^x, αυτό σημαίνει ότι έχει επίσης μια αντίστροφη συνάρτηση. Η αντίστροφη συνάρτηση λειτουργεί με το ίδιο τρόπο της συνάρτησης $Logx$.Βάση του βασικού ρόλου που η βάση e παίζει στις εφαρμογές, η αντίστροφη συνάρτηση της e^x ονομάζεται φυσικός λογάριθμος και γράφεται ως $\ln x$. Επίσημα

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^{y} = x;$$

$\ln x$ είναι η δύναμη στην οποία υψώνεται το *e* για να έχουμε το *x*, όπως είδαμε στην (3), αυτός ο ορισμός μπορεί να συνοψίζεται από τις εξισώσεις

$$e^{\ln x} = x \qquad \text{και} \qquad \ln e_{x} = x \quad (4)$$

Το γράφημα της συνάρτησης e^{x} και τις αντανάκλασης της καθ' όλο το μήκος της διαγώνιας, το γράφημα της $\ln x$ είναι παρόμοιο με τα γραφήματα των 10^{x} και $\ln x$ στο σχήμα 5.4.

Παράδειγμα 5.2: Ας δούμε κάποια παραδείγματα. ο φυσικός λογάριθμος του 10 είναι η δύναμη που υψώνεται το e για να δώσει 10. Εφόσον το e είναι λίγο λιγότερο από 3 και 3^{2} =9, τότε θα πρέπει να υψώσουμε την η e^{2} θα είναι λίγο μικρότερη από 9. Για να έχουμε 10, θα πρέπει να υψώσουμε το *e* σε δύναμη μεγαλύτερη από 2.
Εφόσον 3^{3} = 27, e^{3} θα είναι λίγο μικρότερη από 27. Με αυτό τον τρόπο θα περιμένουμε ότι η $\ln 10$ να είναι κάπου μεταξύ 2 και 3 αλλά πιο κοντά στο 2. Χρησιμοποιώντας αριθμομηχανή, το αποτέλεσμα στα 4 δεκαδικά θα είναι $\ln 10$ = 2.3026.

Παρακάτω βλέπουμε κάποια παραδείγματα. Κρύψτε την δεξιά στήλη του παρακάτω πίνακα και προσπαθήστε να προσεγγίσετε τους αντίστοιχους λογάριθμους.

$$\begin{array}{rcll}
\ln e = 1 & & e^{1} & = e; \\
\ln 1 = 0 & & e^{0} & = 1; \\
\ln 0.1 = -2.3025\ldots & \text{εφόσον} & e^{-2.3025\ldots} & = 0.1; \\
\ln 40 = 3.688\ldots & & e^{3.688\ldots\ldots} & = 40; \\
\ln 20.6931\ldots & & e^{0.6931\ldots} & = 2.
\end{array}$$

5.4 Χαρακτηριστικά του exp και του log

Οι εκθετικές συναρτήσεις έχουν τα παρακάτω τέσσερα βασικά χαρακτηριστικά:

(1) $a^{r} \cdot a^{s} = a^{r+s}$,
(2) $a^{-r} = 1/a^{r}$
(3) $a^{r}/a^{s} = a^{r-s}$
(4) $(a^{r})^{s} = a^{rs}, kai$
(5) $a^{0} = 1$

Τα χαρακτηριστικά 1,3 και 4 είναι ξεκάθαρα όταν το r και το s είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Οι ορισμοί ότι $a^{-n} = 1/a^{n}$, $a_{0} = 1/a^{1/n}$ ισούνται με την νιοστή ρίζα του a και $a^{m/n} = (a^{1/n})^{m}$ είναι ειδικά σχεδιασμένα ώστε οι παραπάνω 5 κανόνες θα ήταν για πραγματικούς αριθμούς r και s.

Τα 5 χαρακτηριστικά των εκθέτων συναρτήσεων αντιστοιχούν σε 5 χαρακτηριστικά των λογαριθμικών συναρτήσεων:

$$\log(r \cdot s) = \log r + \log s.$$
$$\log(1/s) = -\log s.$$
$$\log(r/s) = \log r - \log s.$$
$$\log r^s = s \log r.$$
$$\log 1 = 0.$$

Το 5^o χαρακτηριστικό των $\log s$ προκύπτουν από το 5ο χαρακτηριστικό της a^x και το γεγονός ότι η a^x και η $\log_a$ είναι αντίστροφες συναρτήσεις. Για να αποδείξουμε τα άλλα 4 χαρακτηριστικά, ας έχουμε $u = \log_a r$ και $v = \log_a s$ ώστε $r = a^u$ και $s = a^v$. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\log_a(a^x) = x$ ‘έχουμε:

- *log(rs) = log(a^u a^v)= loga^{u+v}= u + v=logr + logs*
- *log(1/s)= log (1/a^v)=log(a^{-v})=-v=-logs*
- *log(r/s)=log(a^u/a^v)=log(a^{u-v})=u-v=logr+logs*
- *log(r^s)=log($(a^u)^s$)=loga^{us}=us=slogr*

Οι λογάριθμοι είναι ειδικά χρήσιμοι στο να φέρουν μία μεταβλητή x που προκύπτει ως εκθέτης προς την γραμμή βάσης όπου μπορεί να επεξεργαστεί πιο εύκολα.

Παράδειγμα 5.3 : Για την επίλυση της εξίσωσης $2^{5x} = 10$ αναλύουμε τον λογάριθμο

$$Log 2^{5x} = Log 10 \text{ ή } 5x \cdot Log 2 = 1$$

Επομένως, η

$$x = \frac{1}{5Log2} \approx .6644$$

Θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει $\ln$ αντί για Log .

Παράδειγμα 5.4: Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να μάθουμε πόσος χρόνος απαιτείται για το διπλασιασμό του ποσού αξίας A δολαρίων εάν κατατετεί σε λογαριασμό ταμιευτηρίου και το ετήσιο επιτόκιο *r* επιδεινώνεται συνεχώς. Θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση

$$2A = Ae^{rt} \quad (5)$$

για το άγνωστο r. Διαιρούμε πρώτα από τις δύο πλευρές της (5) το A. Αυτό εξαλείφει τον A από τον υπολογισμό - γεγονός το οποίο δείχνει ότι ο διπλασιασμός του χρόνου για το επιτόκιο θα πρέπει να είναι ανεξάρτητο από το ποσό των χρημάτων που εξετάζονται. Για την εφαρμογή της μεταβλητής t, λαμβάνουμε υπόψη μας το φυσικό λογάριθμο των δύο πλευρών της εξίσωσης $2 = e^{rt}$:

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \ln e^{rt} \\ &= rt; \end{aligned} \quad (6)$$

χρησιμοποιώντας την (4). Επιλύνοντας την (6) για t αποδόσεις το γεγονός ότι ο χρόνος διπλασιασμού είναι $t = (\ln 2)/r$.

Εφόσον $\ln 2 \approx 0{,}69$, ο κανόνας αυτός λέει ότι για να εκτιμηθεί ο χρόνος διπλασιασμού για το επιτόκιο r, διαιρείτε το επιτόκιο με 69. Για παράδειγμα, ο χρόνος διπλασιασμού με επιτόκιο 10 τοις εκατό είναι 69/10 = 6.9 έτη: ο χρόνος διπλασιασμού με επιτόκιο 8 τοις εκατό είναι 69/8 = 8,625 χρόνια. Ο υπολογισμός αυτός μας λέει επίσης ότι θα χρειαστούν 8,625 χρόνια για το επίπεδο της τιμής να διπλασιαστεί εάν το ποσοστό πληθωρισμού παραμένει σταθερό στο 8 τοις εκατό.

Όπως συζητήσαμε στο κεφάλαιο 3.6. οι οικονομολόγοι μελετούν τη σχέση μεταξύ της τιμής p και της ποσότητα ζήτησης q ορισμένων προϊόντων, επιλέγουν συχνά να δουλεύουν με την οικογένεια δύο παραμέτρων των **συναρτήσεων ζήτησης σταθερής ελαστικότητας,** $q = kp^{\varepsilon}$, όπου οι k και *ε* είναι οι παράμετροι που εξαρτώνται από το προϊόν υπό μελέτη. Η παράμετρος *ε* είναι το πιο ενδιαφέρον από τα δύο, δεδομένου ότι ισούται με την ελαστικότητα $(p/q)(dq/dp)$. Το $\log$ των δυο πλευρών της $q = kp^{\varepsilon}$ θα μας δώσει:

$$\ln q = \ln kp^{\varepsilon} = \ln k + \varepsilon \ln p. \tag{7}$$

Σε λογαριθμικές συντεταγμένες, η ζήτηση είναι πλέον μια *γραμμική* συνάρτηση η κλίση της οποίας είναι η ελαστικότητα *ε*.

Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα

Τα μαθηματικά δεν μόνο ένα ισχυρό εργαλείο για ιδέες από μοντέλα της οικονομίας, απαιτείται να διευρυνθεί η δυνατότητα εφαρμογής ενός μοντέλου που κατασκευάζεται με μεγάλη λεπτομέρεια για να είναι χρήσιμο. Ο κάθε φοιτητής ή επιστήμονας χρησιμοποιεί μαθηματικά μοντέλα για να μπορεί να επεξεργαστεί ταυτόχρονα περισσότερες πληροφορίες .

Σε όλη τη διαδρομή της έρευνας, της μελέτης αλλά και της ανάλυσης για τη διεκπεραίωση της συγκεκριμένης μεταπτυχιακής διατριβής εμπλουτίσαμε τις γνώσεις μας για μια μεγάλη κατηγορία μοντέλων απόφασης. Κατά τη διάρκεια της μελέτης μας διαπιστώσαμε τη σημαντικότητα της αξιολόγησης διαφόρων παραγόντων για να διασφάλιση της όσο το δυνατό καλύτερης χρηστικότητας και ποιότητας του μοντέλου. Παρουσιάσαμε μια μεγάλη ποικιλία των πιο γνωστών μεθόδων που εφαρμόζονται σήμερα, κατά τον σχεδιασμό και την ανάπτυξη διάφορων εφαρμογών , για την αξιολόγηση τους.

Η συγκεκριμένη μελέτη μας βοήθησε να καταλάβουμε την χρησιμότητα και τους περιορισμούς από την εφαρμογή διαχείρισης γνώσης στις καθημερινές δραστηριότητες των χρηστών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ - ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. Swait J. and Adomowicz W., (2002) “Choice Environment, Market Complexity, and Consumer Behaviour: A Theoretical and Empirical Approach for Incorporating Decision Complexity into Models of Consumer Choice. Advanis Inc. University.
2. Oldham K. and Spanier J., (1974) “The Fractional Calculus”, Department of Mathematics, Claremont Graduate School, California.
3. Alefed G., (1998) “Bounding the Scope of Polynomial Operators and Some Applications”.
4. Curtius E. and Lipsey R., (1973) “The Principle of Minimum Differentiation Reconsidered: Some new Developments in the Theory of Spatial Competition”. Queen’s University.
5. Raczkowski K. and Nedzusiak A., (1991) “Real Exponents and Logarithms”. University Bialystoc.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ