Πανεπιστήμιο Πειραιώς – Τμήμα Πληροφορικής

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Πληροφορική»

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Τίτλος Διατριβής	**Απαρίθμηση και κωδικοποίηση τεμαχισμένων κατόψεων**
Ονοματεπώνυμο Φοιτητή	**Γεώργιος Βγενόπουλος**
Πατρώνυμο	**Χρύσανθος**
Αριθμός Μητρώου	**ΜΠΠΛ/08032**
Επιβλέπων	**Παναγιώτης Τσικούρας, Καθηγητής**

Ημερομηνία Παράδοσης **Μάρτιος 2011**

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Αριστείδης Σαπουνάκης Καθηγητής	Παναγιώτης Τσικούρας Καθηγητής	Ευαγγελος Φούντας Καθηγητής

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Η κατασκευή κατόψεων (floorplanning), γίνεται όλο και πιο σημαντική στον σχεδιασμό των VLSI κυκλωμάτων και χρησιμοποιείται ευρέως για να μειωθεί ο χρόνος πολυπλοκότητας της κατασκευής τους. Δυστυχώς, πολλά προβλήματα σχεδιασμού κατόψεων είναι NP, δηλαδή απαιτούν μεγάλο χρόνο επίλυσης.

Η αναπαράσταση κατόψεων είναι μία θεμελιώδης αρχή, επειδή η αποδοτικότητα των βασικών λειτουργιών τους, βασίζεται στην γεωμετρική έκφραση των τεμαχίων τους

Υπάρχουν δύο σημαντικά χαρακτηριστικά, για την αναπαράσταση μίας κάτοψης .Το πρώτο χαρακτηριστικό αφορά τον αριθμό των συνδυασμών αναπαράστασης. Η αναπαράσταση πρέπει να γίνεται από έναν διακεκριμένο κωδικό, όμως είναι πιθανό, δύο διακεκριμένοι κωδικοί να αντιστοιχούν στην ίδια κάτοψη. Αυτή η περίπτωση αναφέρεται και ως πλεονασμός της αναπαράστασης.

Το δεύτερο χαρακτηριστικό, είναι ο χρόνος πολυπλοκότητας της μετατροπής του διακεκριμένου κωδικού αναπαράστασης στην αντίστοιχη κάτοψη. Επειδή αυτή η μετατροπή είναι η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη μετατροπή, θέλουμε ο χρόνος πολυπλοκότητας να είναι όσο μικρός όσο γίνεται.

Η γεωμετρική σχέση μεταξύ των τεμαχίων, καθορίζεται από την ορθογωνική τομή της περιοχής μιας κάτοψης. Η κάτοψη χωρίζεται σε ορθογωνικές έδρες και κάθε έδρα χωρίζεται με ορθογωνικές τομές σε νέες έδρες.

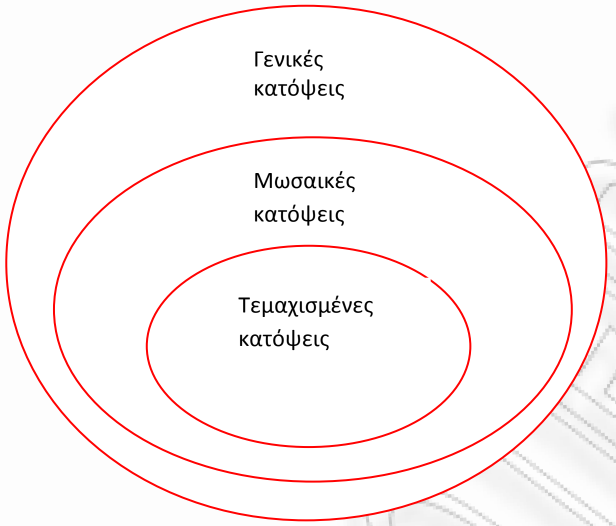
Ανάλογα με τον τρόπο που χωρίζεται μια κάτοψη σε επιμέρους έδρες-κατόψεις, οι κατόψεις χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:

α) Γενικές κατόψεις (General floorplans)

β) Μωσαϊκές κατόψεις (Mosaic floorplans)

γ) Τεμαχισμένες κατόψεις (Slicing floorplans)

Οι τεμαχισμένες κατόψεις είναι μία υποκατηγορία των μωσαϊκών κατόψεων, και οι μωσαϊκές κατόψεις είναι μία υποκατηγορία των γενικών κατόψεων. Η σχέση μεταξύ των τριών αυτών συνόλων φαίνεται παρακάτω:



Στο πρώτο κεφάλαιο ξεκινάμε κάνοντας μία αναφορά στον ορισμό των τεμαχισμένων κατόψεων και στη διάσπασή τους. Στη συνέχεια διατυπώνουμε τα θεωρήματα τα θεωρήματα των γεννητριών συναρτήσεων, ως εργαλείο που θα μας βοηθήσει για την απαρίθμηση των τεμαχισμένων κατόψεων. Κατόπιν, κάνουμε εισαγωγή στους αριθμούς Schröder, ορίζοντας τον αναδρομικό τους τύπου και υπολογίζουμε τον n-οστό τους όρο τόσο με τη βοήθεια των γεννητριών συνάρτησεων, όσο και με τις ασυμπτωτικές προσεγγίσεις.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, κάνουμε εισαγωγή στα μονοπάτια Schröder, δίνοντας τον ορισμό τους και τον συσχετισμό τους με αριθμούς Schröder. Στη συνέχεια ορίζουμε τις λέξεις Schröder, αναφέρουμε τις ιδιότητές τους και τις διασπάσεις τους. Κατόπιν, κάνουμε αναφορά σε μεθόδους κατασκευής μονοπατιών Schröder. Αναλύουμε την αναδρομική και τη λεξικογραφική μέθοδο. Τέλος, ορίζουμε τις αμφινοσήμαντες απεικονίσεις ανάμεσα σε μονοπάτια Schröder και σε τεμαχισμένες κατόψεις.

Στο τρίτο κεφάλαιο ασχολούμαστε με τα v-h δένρα, δίνοντας τον ορισμό τους, τον τρόπο διασπασής τους, καθώς και το πλήθος τους ανά αριθμό εσωτερικών κόμβων. Στη συνέχεια ορίζουμε την αμφιμονοσήμαντη απεικονίση μεταξύ v-h δέντρων και τεμαχισμένων κατόψεων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο μελετάμε τεμαχισμένες κατόψεις με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Στην παρούσα διατριβή έγινε απαρίθμηση τεμαχισμένων κατόψεων ως προς τον αριθμό των τομών και ως προς τον αριθμό των εδρών που βλέπουν στη νότια πλευρά.

Στο πέμπτο κεφάλαιο αναπτύσσουμε αλγόριθμους σε ψευδοκώδικα για την ακατασκευή μονοπατιών Schröder και τεμαχισμένων κατόψεων, με σκοπό την υλοποίησης εφαρμογής στα πλαίσια της διπλωματικής εργασίας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή, **κ Π.Τσικούρα**, για την ανάθεση της διπλωματικής, αλλά και για τη γενική συνεισφορά του, στη δόμηση και την ανάπτυξή της με τις προτάσεις και υποδείξεις του, κατά το διάστημα της συνεργασίας μας. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους καθηγητές **κ Α. Σαπουνάκη** και **κ Ε. Φούντα** για την συνεισφορά τους.

Θα ήθελα, να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον **κ. Ι. Τασούλα** και τον **κ. Κ. Μανέ** για τη συμμετοχή τους στην διαμόρφωση του θέματος και την προσφορά της βοήθειας, που αποδείχθηκε ιδιαίτερα χρήσιμη καθ’ όλη την διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας.

Τέλος, για την ψυχολογική υποστήριξη αλλά και για τη συνολική συμπαράσταση που μου έχουν προσφέρει όλα αυτά τα χρόνια, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, τους φίλους μου και όλους αυτούς που είναι δίπλα μου.

Κεφάλαιο 1ο

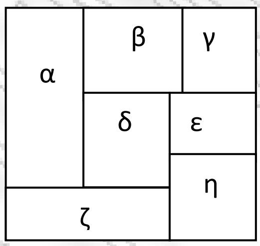
Τεμαχισμένες κατόψεις

1.1 Κατόψεις

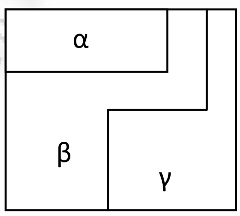
Κάτοψη (**floorplan**) ονομάζεται η διαμέριση ενός ορθογωνίου σε μικρότερα ορθογώνια, τα οποία ονομάζονται **έδρες,** με την ιδιότητα ότι δεν υπάρχει σημείο της που να ανήκει σε 4 έδρες.

Παράδειγμα

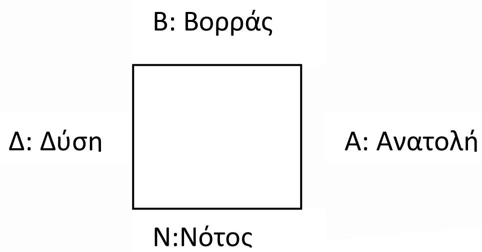
Η επόμενη διαμέριση είναι κάτοψη με 7 έδρες,



ενώ η επόμενη διαμέριση δεν είναι κάτοψη, διότι αποτελείται από μη ορθογώνιες περιοχές.



Θεωρούμε ότι κάθε κάτοψη είναι προσανατολισμένη, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα:

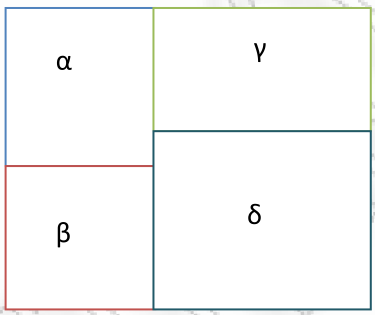


1.2 Τεμαχισμένες κατόψεις

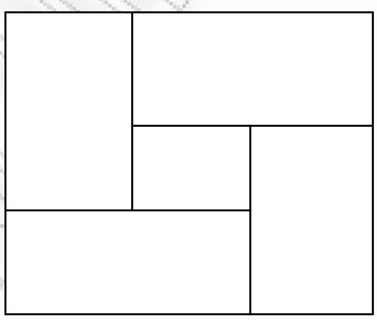
Τεμαχισμένη κάτοψη (**slicing floorplan**) ονομάζεται μια κάτοψη οι έδρες της οποίας προκύπτουν με διαδοχικές υποδιαιρέσεις της μονοεδρικής κάτοψης και των εδρών που προκύπτουν κάθε φορά. Το σύνολο των τεμαχισμένων κατόψεων με n έδρες συμβολίζεται με K_n, και $\mathrm{K} = \bigcup_{n \in N^*} K_n$. Η κάτοψη με μόνο μία έδρα ονομάζεται **κενή** ή **μονοεδρική** κάτοψη και θεωρείται και αυτή τεμαχισμένη.

Παράδειγμα

Η επόμενη κάτοψη είναι τεμαχισμένη



ενω η επόμενη κάτοψη δεν είναι τεμαχισμένη, διότι δεν μπορεί να προκύψει με διαδοχικές διχοτομήσεις της μονοεδρικής κάτοψης.



Τομή μίας κάτοψης ονομάζεται κάθε ευθύγραμμο τημήμα που διασχίζει την κάτοψη από την ανατολική, μέχρι τη δυτική πλευρά του (οπότε ονομάζεται **οριζόντια τομή**), ή από τη βόρεια μέχρι τη νότια πλευρά του (οπότε ονομάζεται **κάθετη τομή**).

Παρατήρηση

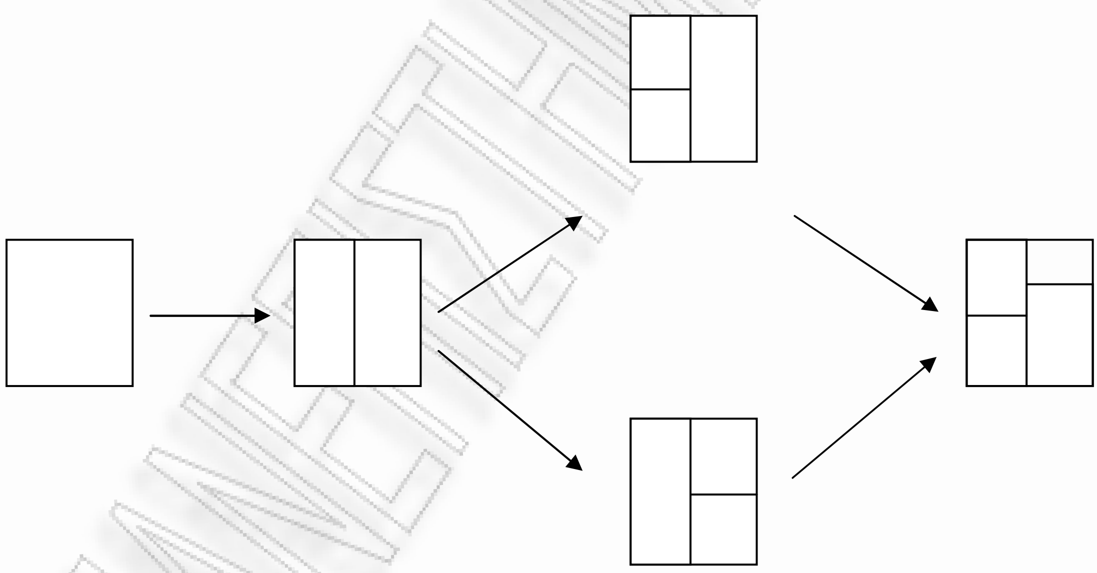
Κάθε τεμαχισμένη κάτοψη πλην της μονοεδρικής, έχει τουλάχιστον μία τομή. Επιπλέον, όλες οι τομές είναι μόνο οριζόντιες ή μόνο κάθετες.

Το σύνολο των τεμαχισμένων κατόψεων με οριζόντιες (αντ. κάθετες) τομές συμβολίζεται με *H* (αντ *V*). Αν $a \in H$ (αντ. $a \in V$) τότε λέμε ότι η κάτοψη α είναι τύπου *H* (αντ. τύπου *V*).

Παρατήρηση

Είναι προφανές ότι μια τεμαχισμένη κάτοψη μπορεί να προκύψει με περισσότερους από έναν τρόπους, ανάλογα με τη σειρά που θα γίνουν οι υποδιαιρέσεις.

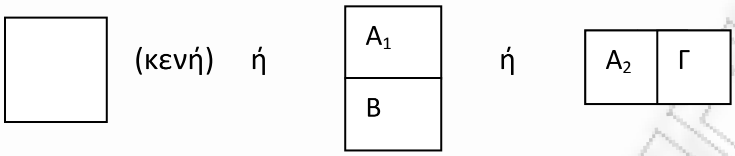
Παράδειγμα



1.3 Μορφές τεμαχισμένων κατόψεων

Πρόταση 1

Μία τεμαχισμένη κάτοψη διασπάται κατά μοναδικό τρόπο με μία από τις παρακάτω μορφές,



όπου οι A_1, A_2 είναι τεμαχισμένες κατόψεις, η Β είναι τύπου V ή είναι κενή,
και η Γ είναι τύπου Η ή είναι κενή

1.4 Απαρίθμηση τεμαχισμένων κατόψεων

1.4.1 Γεννήτριες συναρτήσεις

Οι γεννήτριες συναρτήσεις αποτελούν ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία για την επίλυση προβλημάτων απαρίθμησης. Στην παράγραφο αυτή, δίδονται ορισμένα βασικά στοιχεία για τις συνήθεις γεννήτριες, ή απλά γεννήτριες.

Υπάρχουν δύο ισοδύναμοι τρόποι ορισμού των γεννητριών συναρτήσεων: στην πρώτη προσέγγιση ξεκινάμε με βάση μια ακολουθία (a_n), ενώ στη δεύτερη δίδεται ένα σύνολο και μια παράμετρός του.

Έστω S ένα σύνολο συνδυαστικών αντικειμένων. Κάθε απεικόνιση $p: S \to N$ ονομάζεται **παράμετρος**.

(1η προσέγγιση) **Γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας** (a_n), *ονομάζεται το άθροισμα*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

(2η προσέγγιση) **Γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου** S ως προς την παράμετρο p ονομάζεται άθροισμα

$$F(x) = \sum_{a \in S}^{\infty} x^{p(a)}.$$

Παρατήρηση.

Η παράμετρος p διαμερίζει το σύνολο S σε κλάσεις ισοδυναμίας $S_n,, n \in N,$ όπου

$$S_{n=}\{\alpha \in S : p(\alpha) = n\},$$

οπότε

$$\sum_{a \in S}^{\infty} x^{p(a)} = \sum_{n \in N} \sum_{\alpha \in S_n} x^{p(\alpha)} = \sum_{n \in N} x^n \sum_{\alpha \in S_n} 1 = \sum_{n \in N} |S_n| x^n.$$

Οι παραπάνω δύο προσεγγίσεις είναι ισοδύναμες, αρκεί να τεθεί $a_n = |S_n|,\ n \in N.$

Με άλλα λόγια, μία συνήθης γεννήτρια συνάρτηση είναι μία δυναμοσειρά του $x,$ στην οποία ο συντελεστής του $x^n,$ ισούται με το πλήθος των στοιχείων του S που έχουν τιμή της παραμέτρου p ίση με $n.$

Στην βιβλιογραφία χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $[x^n]F$ για τον συντελεστή του x^n της γεννήτριας συνάρτησης $F(x).$

Γεννήτρια συνάρτηση δύο μεταβλητών της ακολουθίας $(\alpha_{n,k})$ ονομάζεται το διπλό άθροισμα

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n,k} x^n y^k.$$

Γεννήτρια συνάρτηση δύο μεταβλητών του συνόλου S ως προς τις παραμέτρους $p, q : S \to N,$ όπου τα x, y μετρούν τα p, q αντίστοιχα, ονομάζεται το άθροισμα

$$F(x, y) = \sum_{\alpha \in S} x^{\rho(\alpha)} y^{q(\alpha)}.$$

Ο συντελεστής του $x^n y^k$ στην $F(x, y)$ συμβολίζεται με $[x^n y^k]F.$

Ανάλογα, ορίζονται γεννήτριες συναρτήσεις τριών ή περισσοτέρων μεταβλητών.

Ένα σημαντικό εργαλείο επίλυσης συναρτησιακών εξισώσεων που αφορούν γεννήτριες συναρτήσεις, είναι το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange. Παρακάτω δίδεται μια ειδική μορφή του.

Θεώρημα 1

Αν η γεννήτρια συνάρτηση $F(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$F(x) = 1 + xH(F(x)),$$

όπου $H(\lambda)$ είναι ένα πολυώνυμο του λ, τότε ισχύει ότι

$$\left[x^n\right]F(x)=\frac{1}{n}\left[\lambda^{n-1}\right](H(1+\lambda))^n.$$

1.4.2 Αριθμοί Schröder

Οι (μεγάλοι) **αριθμοί Schröder** ορίζονται από τον παρακάτω αναδρομικό τύπο

$$S(n)=S(n-1)+\sum_{k=0}^{n-1}S(k)S(n-1-k),\quad n\geq 1,\quad S(0)=1, \tag{1.1}$$

Στον παρακάτω πίνακα δίδονται οι αντίστοιχοι αριθμοί Schröder, για $n=0,1,\ldots,9.$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$S(n)$	1	2	6	22	90	394	1806	8558	41586	206098

Οι αριθμοί Schröder απαριθμούν πολλά συνδυαστικά αντικείμενα. Στην εργασία αυτή θα χρησιμοποιηθούν τα μονοπάτια Schröder και οι λέξεις Schröder. Για μια λίστα από άλλα συνδυαστικά αντικείμενα που απαριθμούνται από τους αριθμούς Schröder βλέπε το λήμμα A006318 στην Online Encyclopedia of Integer Sequences [Sloane2010].

Στην συνέχεια, θα υπολογισθεί ένας κλειστός τύπος για την ακολουθία $S(n)$ με τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων και του θεωρήματος αντιστροφής του Lagrange.

Έστω $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}S(n)x^n$, η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $S(n)$.

Από τη σχέση (1.1) προκύπτει ότι

$$S(n)x^n=S(n-1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}S(n)s(n-1-k)x^n,\ \ n\geq 1.$$

Αθροίζοντας για κάθε $n\geq 1$, προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}S(n)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}S(n-1)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}S(k)S(n-1-k)x^n\Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}S(n)x^n-S(0)=\sum_{n=0}^{\infty}S(n)x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}S(k)S(n-k)x^{n+1}\Rightarrow$$

$$S(x)-1=xS(x)+x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}S(k)x^{k}S(n-k)x^{n-k}\Rightarrow$$

$$S(x)-1=xS(x)+x\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}S(k)x^{k}S(n-k)x^{n-k}\Rightarrow$$

$$S(x)-1=xS(x)+x\sum_{n=0}^{\infty}S(k)x^{k}\sum_{n=k}^{\infty}S(n-k)x^{n-k}\Rightarrow$$

$$S(x)-1=xS(x)+x\sum_{k=0}^{\infty}S(k)x^{k}\sum_{n=0}^{\infty}S(n)x^{n}\Rightarrow$$

$$S(x)-1=xS(x)+xS^{2}(x).$$

Άρα,

$$S(x)=1+xS(x)+xS^{2}(x) \quad n\geq 1 \tag{1.2}$$

και

$$S(x)=\frac{1-x-\sqrt{x^{2}-6x+1}}{2x}. \tag{1.3}$$

Αν τεθεί $H(\lambda)=\lambda(1+\lambda),$ από το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange προκύπτει ότι

$$[x^{n}]S(x)=\frac{1}{n}[\lambda^{n-1}](H(1+\lambda))^{n}$$

$$=\frac{1}{n}[\lambda^{n-1}]((\lambda+1)(\lambda+1+1))^{n}$$

$$=\frac{1}{n}[\lambda^{n-1}]\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(\lambda+1)^{n+i}$$

$$=\frac{1}{n}[\lambda^{n-1}]\sum_{j=0}^{2n}\sum_{i=\max\{0,j-n\}}^{n}\binom{n}{i}\binom{n+i}{j}\lambda^{j}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n+i}{n-1}.$$

Επομένως,

$$S(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n+i}{n-1})x^{n},$$

οπότε

$$S(n)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n+i}{n-1}. \tag{1.4}$$

Η έκφραση $S(n)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n+i}{n-1}$ για τους αριθμούς Schröder, δεν επιτρέπει να υπολογισθεί άμεσα πόσο γρήγορα αυξάνουν οι αριθμοί αυτοί. Για το σκοπό αυτό, θα δοθεί μία ασυμπτωτική έκφραση των συντελεστών S(n).

1.4.3 Ασυμπτωτικές προσεγγίσεις

Μία δυναμοσειρά $F(x)$ παρουσιάζει **ιδιομορφία στο σημείο** $x=r$ αν δεν ορίζεται η παράγωγος της F στο σημείο αυτό. Στις εφαρμογές που θα συναντήσουμε, τα πιο συνηθισμένα σημεία ιδιομορφίας είναι τα σημεία μηδενισμού υπόρριζων εκφράσεων. Στην επόμενη πρόταση δίδεται ένα αποτέλεσμα για τη συσχέτιση των συντελεστών μιας δυναμοσειράς με τα σημεία ιδιομορφίας της.

Πρόταση 2

Έστω ότι η σειρά $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ *συγκλίνει για κάποιο* $x>0$*, όπου* a_n *είναι μία ακολουθία θετικών ακέραιων. Επίσης, εστω ότι*

$$F(x)=f(x)g(x)+h(x),$$

όπου

1) $f(x)=\left(-\ln(1-\dfrac{x}{r})\right)^{b}\left(1-\dfrac{x}{r}\right)^{c}$, *όπου c δεν είναι θετικός ακέραιος και δεν ισχύει ότι b=c=0.*

2) Η $F(x)$ *δεν έχει ιδιομορφία για* $-r\le x\le r$.

3) Το όριο $L=\lim_{x\to r} g(x)$ *υπάρχει, και είναι μη μηδενικό.*

4) Η $h(x)$ *δεν έχει ιδιομορφία στο* $x=r$.

Τότε, ισχύει ότι

$$a_n \sim \begin{cases} \dfrac{L(\ln n)^{b}(1/r)^{n}}{n^{c+1}\Gamma(-c)}, & \text{εάν } c\neq 0,\\[2ex] \dfrac{bL(\ln n)^{b-1}(1/r)^{n}}{n}, & \text{εάν } c=0. \end{cases}$$

οπου Γ είναι η συνάρτηση Γάμμα.

Για τη γεννήτρια συνάρτηση $S(x)=\frac{1-x-\sqrt{x^2-6x+1}}{2x}$, τα υποψήφια σημεία ιδιομορφίας της είναι το σημείο 0 και τα σημεία μηδενισμού της υπόρριζης ποσότητας x^2-6x+1. Εύκολα προκύπτει, χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hospital ότι το 0 δεν είναι σημείο ιδιομορφίας της $S(x)$.

Επίσης,

$$x^2-6x+1=(1-\frac{x}{\rho 1})(1-\frac{\chi}{\rho 2})$$

όπου

$$\rho_1=3-2\sqrt{2} \text{ και, } \rho_2=3+2\sqrt{2},$$

οπότε η γεννήτρια συνάρτηση $S(x)$ δεν έχει σημείο ιδιομορφίας στο διάστημα $[-(3-2\sqrt{2}),(3-2\sqrt{2})]$.

Αν τεθεί

$$f(x)=(1-\frac{x}{3-2\sqrt{2}})^{1/2},\ \ h(x)=\frac{1-x}{2x} \text{ και } g(x)=\frac{-(1-\frac{x}{3+2\sqrt{2}})^{1/2}}{2x},$$

τότε, είναι

$$S(x)=f(x)g(x)+h(x).$$

Επιπλέον,

$$L=\lim_{x\to 3-2\sqrt{2}} g(x)=-\frac{\sqrt{1-\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}}{2(3-2\sqrt{2})}=-\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})}}=-\sqrt{(3\sqrt{2}+4)}\neq 0,$$

Επιπρόσθετα η $h(x)$ δεν έχει ιδιομορφία για $x=3-2\sqrt{2}$, επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις της προηγούμενης πρότασης, για $b=0$, $c=\frac{1}{2}$ και $r=3-2\sqrt{2}$, προκύπτει η προσέγγιση:

$$[x^n]S(x)\sim\frac{L(\frac{1}{3-2\sqrt{2}})^n}{n^{3/2}\Gamma(-\frac{1}{2})}=\frac{-\sqrt{(3\sqrt{2}+4)}(3+2\sqrt{2})^n}{n^{3/2}(-2\sqrt{n})}=0.809894\frac{(5.82843)^n}{n\sqrt{n}} \qquad (1.5)$$

Παρακάτω δίδονται, για σύγκριση, οι πραγματικές τιμές των αριθμών Schröder, η προσέγγιση που υπολογίσαμε και ο λόγος των δύο τιμών για ορισμένες τιμές του n.

n	Αριθμοί Schroder	Προσέγγιση	Λόγος
2	6	9.72	1.62
4	90	111.82	1.30
8	41586	47665.51	1.14
16	20927156706	$2.44\text{x}10^{10}$	1.07
32	13582228561421	$1.56\text{x}10^{46}$	1.04

Πρόταση 3
Ο αριθμός των τεμαχισμένων κατόψεων με n έδρες ισούται με το (n-1)-οστό αριθμό Schröder.

Απόδειξη
Έστω $F(x)$ η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου των τεμαχισμένων κατόψεων K, ως προς την παράμετρο αριθμού εδρών $\rho(\alpha)$ τεμαχισμένης κάτοψης α. Έστω $F_V(x)$ και $F_H(x)$ οι γεννήτριες συναρτήσεις των συνόλων V και H, ως προς την παράμετρο $\rho(\alpha)$. Από την προηγούμενη πρόταση, για κάθε $\alpha \in K$ διασπάται κατά μοναδικό τρόπο, υπό τη μορφή:

$$\alpha = \square, \text{ ή } \alpha \in H, \text{ ή } \alpha = V.$$

Επομένως ισχύει ότι

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{\alpha \in K} x^{\rho(\alpha)} \\ &= \sum_{\alpha = \square} x^{\rho(\alpha)} + \sum_{\alpha \in H} x^{\rho(\alpha)} + \sum_{\alpha \in V} x^{\rho(\alpha)} \\ &= x + F_H(x) + F_V(x). \end{aligned}$$

Άρα,

$$F(x) = x + F_H(x) + F_V(x). \tag{1.6}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} F_H(x) &= \sum_{\alpha \in H} x^{\rho(\alpha)} \\ &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathrm{K} \\ \beta_1 \in \{\square\} \bigcup V}} x^{\rho(\alpha) + \rho(\beta_1)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{\alpha \in VH} x^{\rho(\alpha)} \sum_{\beta_1 \in \{\square\} \bigcup V} x^{\rho(\beta_1)}$$

$$= F(x)(\sum_{\beta_1 = \square} x^{\rho(\beta_1)} + \sum_{\beta_1 \in V} x^{\rho(\beta_1)})$$

Άρα,

$$F_H(x) = F(x)(x + F_V(x)) \tag{1.7}$$

Επίσης

$$F_V(x) = \sum_{\alpha \in V} x^{\rho(\alpha)}$$

$$= \sum_{\substack{\alpha \in VH \\ \beta_1 \in \{\square\} \bigcup H}} x^{\rho(\alpha)+\rho(\beta_1)}$$

$$= \sum_{\alpha \in VH} x^{\rho(\alpha)} \sum_{\beta_1 \in \{\square\} \bigcup H} x^{\rho(\beta_1)}$$

$$= F(x)(\sum_{\beta_1 = \square} x^{\rho(\beta_1)} + \sum_{\beta_1 \in H} x^{\rho(\beta_1)})$$

Άρα,

$$F_V(x) = F(x)(x + F_H(x)). \tag{1.8}$$

Από τις εξισώσεις (1.6), (1.7) και (1.8) έχουμε:

$$F(x) = F^2(x) + xF(x) + x,$$

οπότε

$$F(x) = \frac{1 - x - \sqrt{x^2 - 6x + 1}}{2} = xS(x),$$

όπου $S(x)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Schröder. Επομένως, ο αριθμός των τεμαχισμένων κατόψεων με n έδρες ισούται με το (n-1)-οστό αριθμό Schröder .

Πόρισμα 1

Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει ότι, ο αριθμός των τεμαχισμένων κατόψεων τύπου H με n έδρες ισούται με τον αριθμό των τεμαχισμένων κατόψεων τύπου V με n έδρες. Πράγματι από τις (1.7) και (1.8) προκύπτει ότι

$$F_V(x) = F_H(x).$$

Επομένως από την (1.6) έχουμε ότι

$$F(x) = x + 2F_H(x),$$

δηλαδή

$$F_H(x) = \frac{F(x) - x}{2} = \frac{1 - 3x + \sqrt{x^2 - 6x + 1}}{4}.$$

Άρα,

$$F_V(x) = F_H(x) = \frac{F(x) - x}{2} = \frac{1 - 3x + \sqrt{x^2 - 6x + 1}}{4}.$$

Κεφάλαιο 2ο

Μονοπάτια και λέξεις Schröder

2.1 Μονοπάτια Schröder

Μονοπάτι Schröder μήκους $2n$ ονομάζεται μια ακολουθία από ευθύγραμμα τμήματα (τα οποία ονομάζονται **βήματα**), η οποία έχει αρχή το σημείο $(0,0)$, πέρας το σημείο $(2n,0)$ και αποτελείται από τριών ειδών βήματα:

α. **ανοδικό** βήμα: Βήμα με αρχή το σημείο (x,y) και πέρας το σημείο $(x+1,y+1)$,

β. **καθοδικό** βήμα: Βήμα με αρχή το σημείο (x,y) και πέρας το σημείο $(x-1,y-1)$,

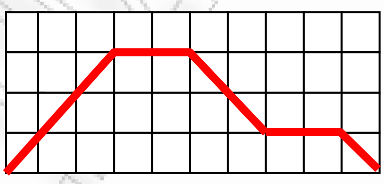
γ. **οριζόντιο** βήμα: Βήμα με αρχή το σημείο (x,y) και πέρας το σημείο $(x+2,y)$,

έτσι ώστε η αρχή κάθε βήματος να είναι πέρας του προηγούμενου και όλες οι συντεταγμένες να είναι μη αρνητικές.

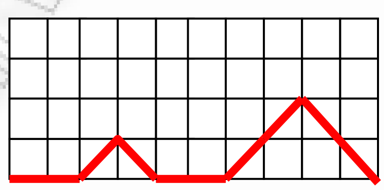
Ο αριθμός n καλείται **ημιμήκος** του μονοπατιού αυτού.

Παράδειγμα

Στα επόμενα σχήματα παρουσιάζονται δύο μονοπάτια Schröder μήκους 10.



Σχήμα 2.1



Σχήμα 2.2

Το κενό μονοπάτι ε, δηλαδή το μονοπάτι χωρίς κανένα βήμα, θεωρείται και αυτό ότι είναι μονοπάτι Schröder, μήκους 0.

2.2 Λέξεις Schröder

Λέξη Schröder ονομάζεται μια λέξη α που περιέχει τρία είδη γραμμάτων u, d και h, η οποία ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

i) $|\alpha|_u = |\alpha|_d$,

ii) αν $\alpha = \beta\gamma$, όπου β,γ τυχαίες λέξεις με γράμματα u, d και h, τότε ισχύει ότι $|\beta|_u \geq |\beta|_d$, όπου $|\alpha|_u, |\beta|_u$, (αντ. $|\alpha|_d, |\beta|_d$) είναι ο αριθμός των εμφανίσεων των u (αντ. d) στις α, β.

Δηλαδή, σε μια λέξη Schröder ο αριθμός των εμφανίσεων του u ισούται με τον αριθμό των εμφανίσεων του d, και σε κάθε αρχικό τμήμα της λέξης το πλήθος των u είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το πλήθος των d.

Θεωρούμε ότι και η κενή λέξη ε, δηλαδή η λέξη χωρίς κανένα γράμμα, είναι λέξη Schröder.

Παραδείγματα

Η λέξη $\alpha = uudhdhhuduududd$ είναι μια λέξη Schröder μήκους 18, ενώ η λέξη $\alpha = uudhddhhuuududd$ δεν είναι λέξη Schröder, διότι στο αρχικό τμήμα $\beta = uudhdd$ είναι $|\beta|_u = 2$ και $|\beta|_d = 3,$ όποτε υπάρχουν περισσότερα d από ότι u.

Το σύνολο όλων των μονοπατιών Schröder ημιμήκους n συμβολίζεται με S_n και $S = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$.

2.2.1 Διασπάσεις των λέξεων Schröder και των μονοπατιών Schröder

Πρόταση 4

Κάθε μη κενή λέξη Schröder α *διασπάται κατά μοναδικό τρόπο σε μια από τις μορφές*

$$\alpha = h\beta, \ \alpha = u\beta d\gamma$$

όπου β*,* γ *είναι επίσης λέξεις Schröder.*

Απόδειξη

Έστω α μία μη κενή λέξη Schröder. Το πρώτο της γράμμα θα είναι h ή u.

Στην πρώτη περίπτωση, θα είναι

$$\alpha = h\alpha'$$

όπου a' μία λέξη με γράμματα από το σύνολο $\{u, h, d\}$.

Επειδή $\alpha \in S$, έπεται ότι

$$|\alpha|_u = |\alpha|_d \Rightarrow |h\alpha'|_u = |h\alpha'|_d \Rightarrow |\alpha'|_u = |\alpha'|_d$$

Επιπλέον, έστω ότι

$$\alpha' = \delta\zeta$$

όπου δ,ζ τυχαίες λέξεις.

Τότε

$$|\delta|_u = |h\delta|_u \text{ και } |\delta|_d = |h\delta|_d \ .$$

Αφού

$$\alpha = h\delta\zeta,$$

ισχύει ότι

$$|h\delta|_u \geq |h\delta|_d$$

και επομένως,

$$|\delta|_u = |h\delta|_u \geq |h\delta|_d = |\delta|_d \ .$$

Άρα,

$$\alpha' \in S.$$

Στη δεύτερη περίπτωση, επιλέγουμε λέξη ρ με το ελάχιστο δυνατό μήκος τέτοια ώστε

$$\alpha = u\rho\gamma \text{ και } |u\rho|_u = |u\rho|_d .$$

(Πάντα υπάρχει μία λέξη που ικανοποιεί τις δύο τελευταίες ισότητες, για παράδειγμα η ρ για την οποία $u\rho = \alpha$.)

Προφανώς $\rho \neq \varepsilon$, αλλιώς θα ήταν

$$|u|_u = |u|_d \Rightarrow 1 = 0, \text{ άτοπο.}$$

Αν $\rho = \beta' u$, τότε $\alpha = u\beta' u\gamma$, οπότε $|u\beta'|_u \geq |u\beta'|_d$. Τότε,

$|u\beta'|_u \geq |u\beta'|_d \Rightarrow 1 + |u\beta'|_u \geq 1 + |u\beta'|_d \Rightarrow |u\beta' u|_u \geq 1 + |u\beta' u|_d \Rightarrow |u\beta' u|_u > |u\beta' u|_d \Rightarrow$

$|u\rho|_u > |u\rho|_d$, άτοπο.

Αν $\rho = \beta' h$, τότε

$$|u\beta' h|_u = |u\beta' h|_d \Rightarrow |u\beta'|_u = |u\beta'|_d ,$$

άτοπο, λόγω της επιλογής της λέξης ρ ως ελαχίστου μήκους.

Επομένως, ισχύει ότι

$$\rho = \beta d \text{ και άρα } \alpha = u\beta d\gamma .$$

Για τη λέξη β ισχύει ότι

$$|u\rho|_u = |u\rho|_d \Rightarrow |u\beta d|_u = |u\beta d|_d \Rightarrow 1 + |\beta|_u = 1 + |\beta|_d \Rightarrow |\beta|_u = |\beta|_d .$$

Επίσης, αν $\beta = \beta'\beta''$, τότε $\alpha = u\beta'\beta'' d\gamma$, από την επιλογή της ρ ως ελάχιστης και επειδή υβ’ είναι πρόθεμα της ρ ισχύει ότι

$$|u\beta'|_u > |u\beta'|_d \Rightarrow |\beta'|_u + 1 > |\beta'|_d \Rightarrow |\beta'|_u \geq |\beta'|_d$$

οπότε, $\beta \in S$.

Για την λέξη γ ισχύει ότι

$$|a|_u = |a|_d \Rightarrow |u\beta d\gamma|_u = |u\beta d\gamma|_d \Rightarrow |\gamma|_u = |\gamma|_d .$$

Επίσης, αν $\gamma = \gamma'\gamma''$, τότε $\alpha = u\beta d\gamma'\gamma''$ και ισχύει ότι

$$|u\beta d\gamma'|_u \geq |u\beta d\gamma'|_d \Rightarrow |\gamma'|_u \geq |\gamma'|_d ,$$

οπότε, $\gamma \in S$.

Παράδειγμα

Η λέξη Schröder

$$\alpha = uuddud$$

διασπάται κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή

$$\alpha = u\beta d\gamma,$$

όπου

$$\beta = ud,$$

και

$$\gamma = ud,$$

ενώ η λέξη Schröder

$$\alpha = huudd$$

διασπάται κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή

$$\alpha = h\beta,$$

όπου

$$\beta = uudd.$$

Πρόταση 5

Κάθε μονοπάτι Schröder P μήκους $2n$ κωδικοποιείται από μια λέξη Schröder $W(P)$ για την οποία ισχύει ότι $|W(P)|_u + |W(P)|_h = n$.

Απόδειξη

Για κάθε μονοπάτι Schröder P ορίζεται μία λέξη W(P) ως εξής: κάθε ανοδικό βήμα κωδικοποιείται από το γράμμα u, κάθε καθοδικό βήμα κωδικοποιείται από το γράμμα d, κάθε οριζόντιο βήμα από το γράμμα h και W(P) είναι η λέξη που προκύπτει από την παράθεση των γραμμάτων u, h, d που αντιστοιχούν στα διαδοχικά βήματα του P από την αρχή προς το τέλος του. Η λέξη W(P) όμως είναι Schröder. Πράγματι, επειδή το μονοπάτι P αρχίζει και τελειώνει στον οριζόντιο άξονα, ο αριθμός των ανοδικών βημάτων του ισούται με τον αριθμό των καθοδικών βημάτων του P. Επομένως ισχύει $|W(P)|_u = |W(P)|_d$. Επίσης, αν $W(P) = \beta\gamma$, τότε η λέξη β αντιστοιχεί σε ένα τμήμα Q του μονοπατιού P, το οποίο έχει την ίδια αρχή με το P, αποτελείται από διαδοχικά βήματα και $W(Q)=\beta$. Επειδή όλες οι συντεταγμένες των βημάτων του P είναι μη αρνητικές το ίδιο θα ισχύει και για το μονοπάτι Q, επομένως πρέπει ο αριθμός των ανοδικών βημάτων του Q να είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον αριθμό των καθοδικών βημάτων του Q. Επομένως, $|W(Q)|_d \le |W(Q)|_u \Rightarrow |\beta|_d \le |\beta|_u$, άρα η λέξη W(P) είναι λέξη Schröder και προφανώς η κωδικοποίηση αυτή είναι μοναδική για κάθε μονοπάτι Schröder P.

Εάν το μονοπάτι P έχει μήκος 2n πρέπει να ισχύει ότι

$$|W(P)|_u + 2|W(P)|_h + |W(P)|_d = 2n \Rightarrow 2|W(P)|_u + 2|W(P)|_h = 2n \Rightarrow |W(P)|_u + |W(P)|_h = n.$$

Παράδειγμα

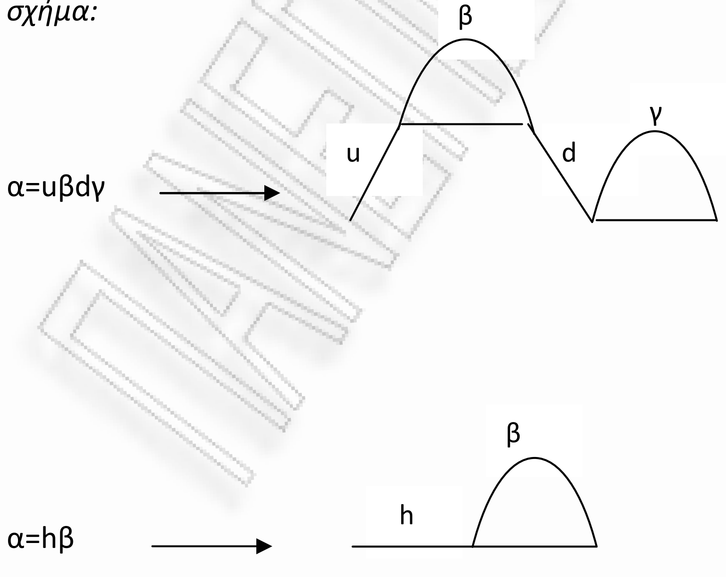
Για παράδειγμα το μονοπάτι Schröder του Σχήματος 2.1 κωδικοποιείται από την λέξη $\alpha = uuuhddhd$.

Πόρισμα 2

Κάθε μη κενό μονοπάτι Schröder διασπάται κατά μοναδικό τρόπο σε μία από τις μορφές

$$\alpha = h\beta, ή\ \alpha = u\beta d\gamma$$

όπου β, γ είναι επίσης μονοπάτια Schröder, όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα:



Σχήμα 2.2

Παράδειγμα

Για παράδειγμα το μονοπάτι Schröder του Σχήματος 2.1 διασπάται υπό τη μορφή

$$\alpha = u\beta d\gamma,$$

όπου

$$\beta = uuhddh$$

και

$$\gamma = \varepsilon.$$

Ομοίως, το μονοπάτι Schröder του Σχήματος 2.2 διασπάται υπό τη μορφή

$$\alpha = h\beta,$$

όπου

$$\beta = hudhuudd$$

2.2.2 Απαρίθμηση των λέξεων Schröder και των μονοπατιών Schröder

Πρόταση 6

Το πλήθος των μονοπατιών Schröder ημιμήκους n ισούται με τον n-οστό αριθμό Schröder.

Απόδειξη (1ος τρόπος)

Έστω S(x) η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου των μονοπατιών Schröder S ως προς την παράμετρο ημιμήκος $v(\alpha)$ του μονοπατιού α, δηλαδή: $S(x) = \sum_{a \in S} x^{v(\alpha)}$.

Από το προηγούμενο πόρισμα κάθε μονοπάτι Schröder γράφεται κατά μοναδικό τρόπο υπό την μορφή

$$\alpha = \varepsilon, \text{ή } \alpha = h\beta, \text{ή } \alpha = u\beta d\gamma$$

όπου β, γ είναι μονοπάτια Schröder.

Για την παράμετρο ημιμήκος του α ισχύει ότι

$$v(h\beta) = v(\beta) + 1,\ v(u\beta d\gamma) = v(\beta) + v(\gamma) + 1,\ v(\varepsilon) = 0.$$

Επομένως, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{\alpha\in S} x^{v(\alpha)} \\
&= \sum_{\alpha=\varepsilon} x^{v(\varepsilon)} + \sum_{\substack{a=h\beta \\ \beta\in S}} x^{v(h\beta)} + \sum_{\substack{\alpha=u\beta d\gamma \\ \beta,\gamma\in S}} x^{v(u\beta d\gamma)} \\
&= 1 + \sum_{\substack{a=h\beta \\ \beta\in S}} x^{1+v(\beta)} + \sum_{\beta,\gamma\in S} x^{1+v(\beta)+v(\gamma)} \\
&= 1 + x\sum_{\substack{a=h\beta \\ \beta\in S}} x^{v(\beta)} + x\sum_{\beta\in S} x^{v(\beta)} \sum_{\gamma\in S} x^{v(\gamma)} \\
&= 1 + xS(x) + xS^2(x).
\end{aligned}$$

Άρα,

$$S(x) = 1 + xS(x) + xS^2(x).$$

Επομένως, η $S(x)$ *είναι η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών* Schröder

$$\alpha_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n+i}{n-1}.$$

Άρα, ο αριθμός a_n των μονοπατιών Schröder ημιμήκους n ισούται με το n*-οστό* αριθμό Schröder $S(n)$.

Απόδειξη (2^{ος} τρόπος)

Έστω a_n ο αριθμός των μονοπατιών Schröder ημιμήκους n. Από το προηγούμενο πόρισμα κάθε μονοπάτι Schröder α γράφεται κατά μοναδικό τρόπο υπό την μορφή

$$\alpha = \varepsilon, \text{ή } \alpha = h\beta, \text{ή } \alpha = u\beta d\gamma$$

όπου β,γ μονοπάτια Schröder.

Υπάρχει ένα μονοπάτι Schröder ημιμήκους 0, το κενό μονοπάτι, οπότε $\alpha_0 = 1.$

Υπάρχουν δύο μονοπάτια Schröder ημιμήκους 1 τα h και ud, άρα $a_1 = 2.$

Έστω α ένα μονοπάτι Schröder μήκους n με $n \geq 2.$

Διακρίνουμε τότε δύο περιπτώσεις:

1) Αν $\alpha = h\beta,$ τότε $\beta \in S_{n-1}.$

Επομένως, ισχύει ότι

$$|\{\alpha \in S_n\} : \alpha = h\beta| = |\{\beta : \beta \in S_{n-1}\}| = a_{n-1}.$$

2) Αν $\alpha = u\beta d\gamma$, τότε $\beta \in S_\kappa$ και $\gamma \in S_{n-1-\kappa}$ για $0 \le \kappa \le n-1$.

Επομένως, ισχύει ότι

$$|\{\alpha \in S_n : \alpha = u\beta d\gamma, \beta \in S_\kappa, \gamma \in S_{n-1-\kappa}\}| = |\{\beta : \beta \in S_\kappa\}|\,|\{\gamma : \gamma \in S_{n-1-\kappa}\}| = \alpha_\kappa \alpha_{n-1-k}.$$

Άρα,

$$|\{\alpha \in S_n : \alpha = u\beta d\gamma\}| = \sum_{\kappa=0}^{n} \left|\{\alpha \in S_n : \alpha = u\beta d\gamma, \beta \in S_\kappa, \gamma \in S_{n-1-\kappa}\}\right| = \sum_{\kappa=0}^{n-1} \alpha_\kappa \alpha_{n-1-\kappa}.$$

Επομένως, οι δύο περιπτώσεις μαζί δίνουν

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \sum_{\kappa=0}^{n-1} \alpha_\kappa \alpha_{n-1-\kappa},$$

δηλαδή, οι αριθμοί α_n ικανοποιούν τον αναδρομικό ορισμό των αριθμών Schröder, οπότε

$$\alpha_n = S(n).$$

Άρα,

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n+i}{n-1}.$$

Παράδειγμα

Για $n = 3$ υπάρχουν 22 *μονοπάτια* Schröder μήκους 6, διότι

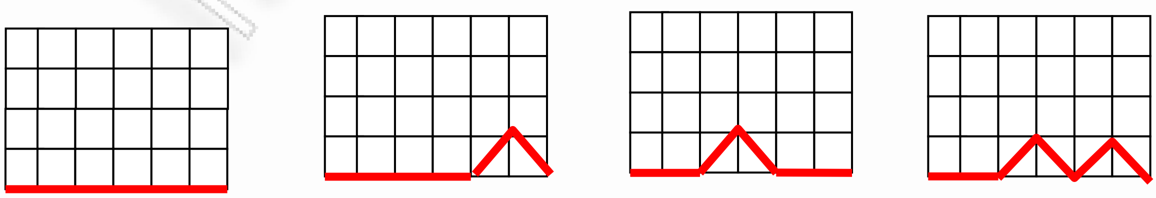
$$\alpha_3 = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} \binom{3+i}{2} = \frac{1}{3}\left[\binom{3}{0}\binom{3}{2} + \binom{3}{1}\binom{4}{2} + \binom{3}{2}\binom{5}{2} + \binom{3}{3}\binom{6}{2}\right]$$

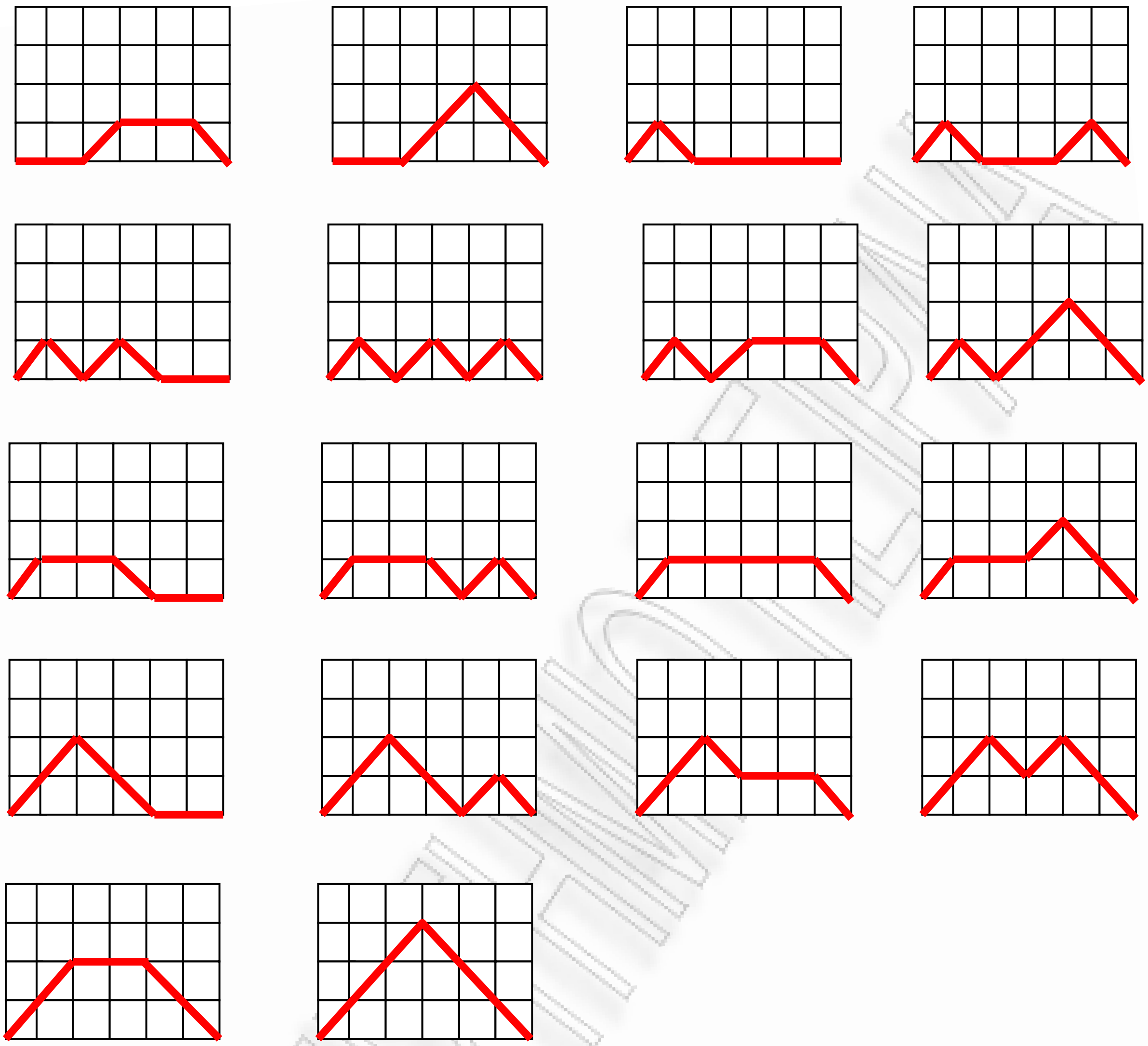
$$= \frac{1}{3}[1*3 + 3*6 + 3*10 + 1*15] = 1 + 6 + 10 + 5 = 22.$$

Πράγματι,τα μονοπάτια Schröder ημιμήκους 3 είναι τα εξής:

hhh, hhud, hudh, hudud, huhd, huudd, udhh, udhud, ududh, ududud, uduhd, uduudd, uhdh, uhdud, uhhd, uhudd, uuddh, uuddud, uudhd, uududd,uuhdd, uuuddd,

και εικονίζονται παρακάτω:





Σχήμα 2.3

2.3 Κατασκευή μονοπατιών Schröder

2.3.1 Αναδρομική κατασκευή μονοπατιών Schröder

Προκειμένου να κατασκευασθούν όλα τα στοιχεία του συνόλου S_{n+1} από τα στοιχεία του S_n, αρκεί για κάθε $a \in S_n$ να ορισθεί ένα σύνολο $R(a) \subseteq S_{n+1}$ τέτοιο ώστε:

$$\text{(α)} \quad \bigcup_{\alpha \in S_n} R(\alpha) = S_{n+1}$$

και

$$\text{(β)} \quad R(\alpha) \cap R(\beta) = \varnothing$$

για κάθε $\alpha, \beta \in S_n$.

Το R(α) ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$R(\varepsilon) = \{h, ud\},$$

$$R(h\beta) = \{hh\beta, udh\beta\}$$

και

$$R(u\beta d\gamma) = \{hu\beta d\gamma, udu\beta d\gamma\} \bigcup \{u\delta d\gamma : \delta \in R(\beta)\}.$$

Αποδεικνύουμε τώρα ότι το $R(\alpha)$ ικανοποιεί τις (α) και (β):

Απόδειξη της (α)

Θα αποδειχτεί ότι ισχύει $\bigcup_{\alpha \in S_n} R(\alpha) = S_{n+1}$, για κάθε $a \in S_n$. Θα χρησιμοποιηθεί επαγωγή ως προς το ημιμήκος κ των μονοπατιών Schröder.

Για κ=0, είναι:

$$S_0 = \{\varepsilon\}, \text{ με } R(\varepsilon) = \{h, ud\} = S_1.$$

Έστω ότι ισχύει για κάθε $\kappa \le n$ $\mu\varepsilon$ $n \ge 1$, θα αποδειχθεί ότι ισχύει και $\kappa = n+1$.

Πράγματι, αν υπάρχει $a' \in S_{n+1}$ τέτοιο ώστε $a' \notin R(a)$ για κάθε $a \in S_n$, τότε υπάρχουν τρεις περιπτώσεις:

1. Αν $\alpha' = hh\beta'$, τότε $h\beta' \in S_n$ και $hh\beta' \in R(h\beta')$, άτοπο.

2. Αν $\alpha' = hu\beta' d\gamma'$, τότε $u\beta' d\gamma' \in S_n$ και $hu\beta' d\gamma' \in R(u\beta' d\gamma')$, άτοπο.

3. Αν $\alpha' = u\beta' d\gamma'$, τότε $\beta' \in S_\lambda$, $\lambda \le n$. Από την υπόθεση της επαγωγής, υπάρχει $\beta \in S_{\lambda-1}$ τέτοιο ώστε $\beta' \in R(\beta)$. Το μονοπάτι $u\beta d\gamma'$ ανήκει στο S_n και από τον ορισμό του $R(u\beta d\gamma')$ θα είχαμε ότι $u\beta' d\gamma' \in R(u\beta d\gamma')$, το οποίο είναι άτοπο.

Απόδειξη της (β)

Θα αποδειχθεί ότι ισχύει $R(\alpha) \cap R(\beta) = \varnothing$ *για κάθε* $\alpha, \beta \in S_n$, με την μέθοδο της επαγωγής ως προς το ημιμήκος κ των λέξεων Schröder.

Για κ=1 είναι $S_1 = \{h, ud\}$ με

$$R(h) = \{hh, udh\}$$

και

$$R(ud) = \{hud, udud\} \bigcup \{u\delta d : \delta \in R(\varepsilon)\}$$
$$= \{hud, udud\} \bigcup \{u\delta d : \delta \in \{h, ud\}\}$$
$$= \{hud, udud\} \bigcup \{uhd, uudd\}$$
$$= \{hud, udud, uhd, uudd\},$$

οπότε

$$R(ud) \cap R(h) = \varnothing.$$

Έστω ότι ισχύει για κάθε $\kappa \le n$. Θα αποδειχθεί ότι ισχύει και $\kappa = n+1$.

Αν $\alpha, \alpha' \in S_{n+1}$, τότε διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

1 Αν $a = h\beta$ και $\alpha' = h\beta'$, όπου $\beta, \beta' \in S_n$ και $\beta \ne \beta' \ne \varepsilon \ne \beta$, τότε

$$R(\alpha) = \{hh\beta, udh\beta\}$$

και

$$R(\alpha') = \{hh\beta', udh\beta'\}.$$

Επομένως,

$$R(\alpha) \cap R(\alpha') = \varnothing.$$

2 Αν $a = h\beta$ και $\alpha' = u\beta' d\gamma'$, όπου $\beta \in S_n$, $\beta' \in S_\kappa$, $\gamma' \in S_{n-\kappa}$, $0 \le \kappa \le n$, τότε

$$R(\alpha) = \{hh\beta, udh\beta\}$$

και

$$R(\alpha') = \{hu\beta' d\gamma', udu\beta' d\gamma'\} \bigcup \{u\delta d\gamma : \delta \in R(\beta)\}.$$

Προφανώς,

$$hh\beta \notin R(\alpha').$$

Επίσης

$$udh\beta \notin R(\alpha'),$$

διότι τα μονοπάτια $u\delta d\gamma'$ *του* $R(\alpha')$ έχουν $\delta \neq \varepsilon, αφού\ \varepsilon \notin R(\alpha)$ για κάθε $\alpha \in S_n$.

Επομένως,

$$R(\alpha) \cap R(\alpha') = \varnothing.$$

3 Αν $a = u\beta d\gamma$ *και* $a' = u\beta' d\gamma'$, όπου $\beta \in S_\kappa$, $\gamma \in S_{n-k}$, $\beta' \in S_\lambda$ και $\gamma' \in S_{n-\lambda}$, με $\beta \neq \beta'$ ή/και $\gamma \neq \gamma'$, τότε

$$R(\alpha) = \{hu\beta d\gamma, udu\beta d\gamma\} \bigcup \{u\delta d\gamma : \delta \in R(\beta)\}$$

και

$$R(\alpha') = \{hu\beta' d\gamma', udu\beta' d\gamma'\} \bigcup \{u\delta' d\gamma' : \delta \in R(\beta')\}.$$

Προφανώς,

$$hu\beta d\gamma \notin R(\alpha') \text{ και } udu\beta d\gamma \notin R(\alpha'),$$

διότι, όπως και προηγουμένως, $\delta \neq \varepsilon$. Επομένως, αρκεί να εξετάσουμε αν τα στοιχεία $u\delta d\gamma$ του $R(\alpha)$ ανήκουν στο $R(\alpha')$.

Αν $\gamma \neq \gamma'$, από την μοναδικότητα της διάσπασης των μονοπατιών, έπεται ότι $u\delta d\gamma \neq u\delta' d\gamma'$ για κάθε $\delta \in R(\beta)$ και $\delta' \in R(\beta')$. Επομένως,

$$R(\alpha) \cap R(a') = \varnothing.$$

Αν $\gamma = \gamma'$ τότε $\beta \neq \beta'$ και άρα

$$R(\beta') \cap R(\beta) = \varnothing.$$

Επομένως, $u\delta d\gamma \neq u\delta' d\gamma'$ για κάθε $\delta \in R(\beta)$ και $\delta' \in R(\beta')$, οπότε

$$R(\alpha) \cap R(\alpha') = \varnothing.$$

Παράδειγμα

Από τα προηγούμενα προκύπτουν οι επόμενες αναδρομικές κατασκευές των συνόλων S_1 και S_2.

Από το S_0, παράγεται το S_1 ως εξής:

$$R(\varepsilon) = \{h, ud\}$$

Από το S_1, παράγεται το S_2 ως εξής:

$$R(h) = \{hh, udh\},$$

$$R(ud) = \{hud, udud\} \bigcup \{u\delta d : \delta \in R(\varepsilon)\} \text{ όπου } \delta = \{ud, h\},$$

δηλαδή

$$R(ud) = \{hud, udud, uudd, uhd\}.$$

Έτσι, είναι:

$$S_2 = \bigcup_{\alpha \in S_1} R(\alpha) = R(h) \bigcup R(ud) = \{hh, udh, hud, udud, uudd, uhd\}.$$

2.3.2 Λεξικογραφική κατασκευή λέξεων Schröder

Στην παράγραφο αυτή, θα δοθεί μία μέθοδος για τη λεξικογραφική κατασκευή των λέξεων Schröder.

Θεωρούμε την ολική διάταξη $d < h < u$, *στο αλφάβητο* $\{d, h, u\}$. Στο σύνολο των λέξεων Schröder ημιμήκους n, το ελάχιστο στοιχείο είναι η λέξη h^n και το μέγιστο η λέξη $u^n d^n$. Έστω α μία λέξη Schröder, ημιμήκους n, όπου $a \neq u^n d^n$. Τότε, η λέξη Schröder α, είτε τελειώνει με $hu^k d^\lambda$, είτε τελειώνει με $du^{k+1} d^{\lambda+1}$, όπου $k, \lambda \in N$. Διακρίνουμε τις δύο αυτές περιπτώσεις:

1) Αν $\alpha = \beta hu^k d^\lambda$, όπου $|\beta|_u + k = |\beta|_d + \lambda$, με $k, \lambda \in N$, *τότε η* επόμενη λέξη της α είναι η λέξη

$$\alpha' = \beta udd^{\lambda - k} h^k = \beta ud^{\lambda - \kappa + 1} h^\kappa.$$

Αρκεί να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει λέξη ω με $\alpha < \omega < \alpha'$.

Πράγματι, αν υπάρχει τέτοια λέξη ω, τότε

$$\text{είτε } \omega = \beta h\delta, \text{ είτε } \omega = \beta u\theta.$$

Εάν $\omega = \beta h\delta$, τότε $\delta > u^k d^\lambda$, άρα η δ αρχίζει με u^{k+1}, ή $u^k h$, ή $u^k d^{\lambda'} h$ *με* $\lambda' < \lambda$, δηλαδή

$$|\delta|_u + |\delta|_h \geq \kappa + 1.$$

Επειδή $\alpha, \omega \in S_n$, έπεται ότι

$$\begin{aligned} n &= |\omega|_u + |\omega|_h \\ &= |\beta|_u + |\beta|_h + 1 + |\delta|_u + |\delta|_h \end{aligned}$$

$$= n - \left|hu^k d^{\lambda}\right|_u - \left|hu^k d^{\lambda}\right|_h + 1 + |\delta|_u + |\delta|_h$$

$$= n - k - 1 + 1 + |\delta|_u + |\delta|_h$$

$$\geq n - k + k + 1 > n, \text{ άτοπο.}$$

Εάν $\omega = \beta u\theta,$ τότε $\theta < d^{\lambda-k+1}h^k,$ άρα η θ αρχίζει από $d^{\lambda-k+2},$ ή $d^{\lambda-\kappa+1}h^{k'}d,$ με $\kappa' < \kappa.$ Επομένως, επειδή

$$\left|\beta u d^{\lambda-k+1}h^k\right|_u = \left|\beta u d^{\lambda-k+1}h^k\right|_d,$$

ισχύει ότι

$$\left|\beta u d^{\lambda-k+2}\right|_u = \left|\beta u d^{\lambda-k+1}\right|_u$$

$$= \left|\beta u d^{\lambda-k+1}\right|_d$$

$$= \left|\beta u d^{\lambda-k+2}\right|_d - 1 < \left|\beta u d^{\lambda-k+2}\right|_d, \text{ άτοπο.}$$

2) Αν $\alpha = \beta d u^{k+1} d^{\lambda+1},$ όπου $|\beta|_u + k = |\beta|_d + \lambda,$ με $k, \lambda \in N,$ τότε η επόμενη λέξη της α είναι η λέξη

$$\alpha' = \beta h d^{\lambda-k+1}h^k.$$

Αρκεί να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει λέξη ω με $\alpha < \omega < \alpha'.$

Εάν $\omega = \beta d\delta,$ με $\delta > u^{k+1}d^{\lambda+1},$ τότε η λέξη δ αρχίζει με $u^{k+2},$ ή με $u^{k+1}h,$ ή $u^{\kappa+1}d^{\lambda'}h,$ με $\lambda' < \lambda + 1$ δηλαδή

$$|\delta|_u + |\delta|_h \geq k + 2.$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$n = |\omega|_u + |\omega|_h$$

$$= |\beta|_u + |\beta|_h + |\delta|_u + |\delta|_h$$

$$= n - (\left|du^{k+1}d^{\lambda+1}\right|_u + \left|du^{k+1}d^{\lambda+1}\right|_h) + |\delta|_u + |\delta|_h$$

$$= n - (\kappa + 1 + 0) + |\delta|_u + |\delta|_h > n - (\kappa + 1) + (\kappa + 2) = n + 1 > n,$$

οπότε η θ δεν είναι λέξη Schröder, άτοπο.

Αν $\omega = \beta h\theta,$ θα είναι $\theta < d^{\lambda-k+1}h^k,$ οπότε η λέξη θ αρχίζει από $d^{\lambda-k+2},$ ή $d^{\lambda-\kappa+1}h^{\kappa'},$ με $\kappa' < \kappa - 1.$ Επομένως, επειδή

$$\left|\beta h d^{\lambda-k+1} h^k\right|_u = \left|\beta h d^{\lambda-k+1} h^k\right|_d ,$$

ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\left|\beta h d^{\lambda-k+2} h^k\right|_u &= \left|\beta h d^{\lambda-k+1} h^k\right|_u \\ &= \left|\beta h d^{\lambda-k+1} h^k\right|_d \\ &= \left|\beta h d^{\lambda-k+2} h^k\right|_d - 1 < \left|\beta h d^{\lambda-k+2} h^k\right|_d ,\end{aligned}$$

οπότε η ω δεν είναι λέξη Schröder, άτοπο.

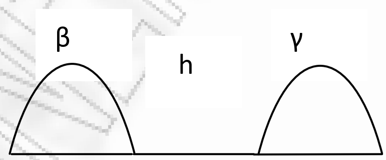
2.3.3 Αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση ανάμεσα σε μονοπάτια Schröder και σε τεμαχισμένες κατόψεις

Όπως είδαμε, ο πληθάριθμος του συνόλου όλων των μονοπατιών Schröder ημιμήκους n ισούται με τον πληθάριθμο του συνόλου K_{n+1}. Κάθε μονοπάτι Schröder α είτε έχει οριζόντια βήματα σε ύψος 0 είτε όχι.

1) Στην πρώτη περίπτωση, όπου έχουμε οριζόντιο βήμα σε ύψος 0, το μονοπάτι γράφεται

α=βhγ,

όπου β, γ μονοπάτια Schröder**,** και το β δεν περιέχει οριζόντια βήματα σε ύψος 0**.**

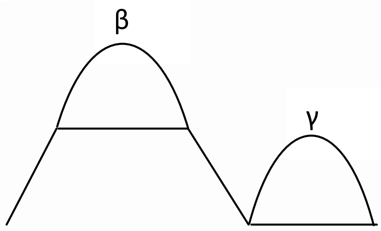
Μονοπάτι α ⇨ 

⇨ βhγ.

2) Στην δεύτερη περίπτωση, όπου δεν έχει βήμα σε ύψος 0, το μονοπάτι γράφεται κατά μοναδικό τρόπο υπό την μορφή

α=uβdγ,

όπου β, γ μονοπάτια Schröder και το γ δεν περιέχει οριζόντια βήματα σε ύψος 0**.**

Μονοπάτι α ⇨ 

⇨ uβdγ.

Για κάθε μονοπάτι Schröder , ορίζουμε δύο απεικονίσες φ,ψ: $S \to \mathrm{K}$ ως εξής:

φ(ε)= ψ(ε) = $\boxed{}$

Αν α=βhγ, τότε φ(α) =

ψ(γ)
φ(β)

Αν α=uβdγ, τότε φ(α) =

φ(β)	ψ(γ)

Αν α=βhγ, τότε ψ(α) =

ψ(β)	φ(γ)

Αν α=uβdγ, τότε ψ(α) =

φ(γ)
ψ(β)

Παρατηρήσεις

1) Εάν το μονοπάτι α δεν έχει οριζόντια βήματα σε ύψος 0 τότε η κάτοψη φ(α) είναι τύπου V και η κάτοψη ψ(α) είναι τύπου H.

2) Εάν το μονοπάτι α έχει οριζόντια βήματα σε ύψος 0 τότε η κάτοψη φ(α) είναι τύπου H και η κάτοψη ψ(α) τύπου V.

Πρόταση 7

Οι απεικονίσεις φ, ψ είναι αμφιμονοσήμαντες.

Απόδειξη

Έστω $\rho : K \to N$ η παράμετρος που απεικονίζει κάθε κάτοψη στον αριθμό των εδρων της και $l : S \to N$ η παράμετρος που απεικονίζει κάθε μονοπάτι Schröder στο ημιμήκος του.

Θ' αποδειχθεί πρώτα ότι οι απεικονίσεις φ,ψ στέλνουν τα μονοπάτια Schröder με ημιμήκος n, σε κατόψεις με n+1 έδρες, δηλαδή

$$\rho(\varphi(\alpha)) = \rho(\psi(\alpha)) = l(\alpha) + 1$$

Για n=0, έχουμε

$$\rho(\varphi(\varepsilon)) = \rho(\psi(\varepsilon)) = l(\varepsilon) + 1 = 1$$

Έστω ότι οι απεικονίσεις φ,ψ στέλνουν κάθε μονοπάτι με ημιμήκος το πολύ n σε σε μία κάτοψη με n+1 έδρες, θα αποδειχθεί ότι το ίδιο ισχύει και για μονοπάτια με ημιμήκος n+1.

Έστω α ένα μονοπάτι με ημιμήκος n+1. Από την προηγούμενη πρόταση το α γράφεται μονοσήμαντα με μία από της παρακάτω μορφές:

$$\alpha = \beta h \gamma \text{ ή } \alpha = u \beta d \gamma .$$

Αν $\alpha = \beta h \gamma$, όπου β δεν περιέχει οριζόντια βήματα σε ύψος 0, τότε το ημιμήκος των β και γ θα είναι μικρότερο ή ίσο του n, οπότε

$$\rho(\varphi(\alpha))=\rho(\varphi(\beta h\gamma))=\rho\left(\begin{array}{|c|}\hline \psi(\gamma) \\ \hline \varphi(\beta) \\ \hline \end{array}\right) = \rho(\psi(\gamma))+\rho(\varphi(\beta))=l(\gamma)+1+l(\beta)+1=n+2$$

και

$$\rho(\psi(\alpha))=\rho(\psi(\beta h\gamma))=\rho\left(\begin{array}{|c|c|}\hline \psi(\beta) & \varphi(\gamma) \\ \hline \end{array}\right) = \rho(\psi(\beta))+\rho(\varphi(\gamma))=l(\beta)+1+l(\gamma)+1=n+2.$$

Αν $\alpha = u \beta d \gamma$ όπου β, γ μονοπάτια Schröder και το γ δεν περιέχει οριζόντια βήματα σε ύψος 0, τότε

$$\rho(\varphi(\alpha))=\rho(\varphi(u\beta d\gamma))=\rho\left(\begin{array}{|c|c|}\hline \varphi(\beta) & \psi(\gamma) \\ \hline \end{array}\right)=\rho(\varphi(\beta))+\rho(\psi(\gamma))=l(\beta)+1+l(\gamma)+1=n+2$$

και

$$\rho(\psi(\alpha))=\rho(\psi(u\beta d\gamma))=\rho\left(\begin{array}{|c|}\hline \phi(\gamma)\\ \hline \psi(\beta)\\ \hline\end{array}\right)=\rho(\phi(\gamma))+\rho(\psi(\beta))=l(\gamma)+1+l(\beta)+1=n+2.$$

Επομένως, οι απεικονίσεις ϕ,ψ στέλνουν τα μονοπάτια Schröder με ημιμήκος n, σε κατόψεις με n+1 έδρες. Έτσι, επειδή ο αριθμός Schröder ημιμήκους n ισούται με τον n-οστό αριθμός Schröder και ο αριθμός των κατόψεων με n+1 έδρες ισούται επίσης με τον n-οστό αριθμό Schröder, αρκεί να αποδειχθεί ότι οι απεικονίσεις ϕ,ψ είναι 1-1.

Θα αποδειχθεί με επαγωγή ως προς τον αριθμό n των βημάτων του μονοπατιού.
Για n=0, προφανώς ισχύει.
Έστω ότι οι απεικονίσεις ϕ, ψ είναι 1-1 για κάθε μονοπάτι με n, το πολύ βήματα, θα αποδειχθεί ότι ισχύει και για μονοπάτια με n+1 βήματα.
Έστω ότι υπάρχουν δύο μονοπάτια α_1, α_2 με n+1 βήματα για τα οποία ισχύει ότι

$$\phi(\alpha_1)=\phi(\alpha_2) \text{ και } \psi(\alpha_1)=\psi(\alpha_2).$$

Τότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

A) Αν το α_1 έχει τουλάχιστον ένα οριζόντιο βήμα σε ύψος 0, τότε σύμφωνα με τις προηγούμενες παρατηρήσεις, πρέπει και το α_2 να έχει τουλάχιστον ένα οριζόντιο βήμα σε ύψος 0.

Έστω $\alpha_1=\beta_1 h\gamma_1$ και $\alpha_2=\beta_2 h\gamma_2$, όπου β_1, β_2 μονοπάτια Schröder που δεν περιέχουν οριζόντια βήματα σε ύψος 0. Τότε, αφού $\phi(\alpha_1)=\phi(\alpha_2)$ και $\psi(\alpha_1)=\psi(\alpha_2)$, έχουμε

$$\begin{array}{|c|}\hline \psi(\gamma_1)\\ \hline \phi(\beta_1)\\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \psi(\gamma_2)\\ \hline \phi(\beta_2)\\ \hline\end{array}$$

και

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \psi(\beta_1) & \phi(\gamma_1)\\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline \psi(\beta_2) & \phi(\gamma_2)\\ \hline\end{array}$$

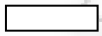
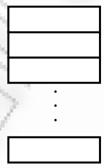
Για να είναι ίσες οι παραπάνω απεικονίσεις θα πρέπει να ισχύει μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

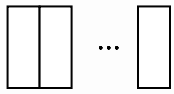
1) Από την πρώτη ισότητα

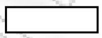
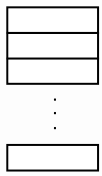
$$\psi(\gamma_1)=\psi(\gamma_2) \text{ και } \phi(\beta_1)=\phi(\beta_2).$$

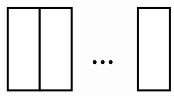
Από τη δεύτερη ισότητα

$$\psi(\beta_1)=\psi(\beta_2) \text{ και } \phi(\gamma_1)=\phi(\gamma_2).$$

2) Από την πρώτη ισότητα $\psi(\gamma_1)=\phi(\beta_2)=$  και $\phi(\beta_1)=\psi(\gamma_2)=$ 

Από την δεύτερη ισότητα $\psi(\beta_1)=\phi(\gamma_2)=$  και $\phi(\gamma_1)=\psi(\beta_2)=$ 

3) Από την πρώτη ισότητα $\phi(\beta_1)=\psi(\gamma_2)=$  και $\psi(\gamma_1)=\phi(\beta_2)=$ 

Από τη δεύτερη ισότητα $\phi(\gamma_1)=\psi(\beta_2)=$  και $\psi(\beta_1)=\phi(\gamma_2)=$ 

Επειδή όμως τα μονοπάτια β_1,β_2 δεν περιέχουν κανένα οριζόντιο βήμα σε ύψος 0, οι κατόψεις $\phi(\beta_1)$ και $\phi(\beta_2)$ θα είναι τύπου V, ενώ οι κατόψεις $\psi(\beta_1)$ και $\psi(\beta_2)$, θα είναι τύπου H. Επομένως, οι περιπτώσεις 2 και 3 είναι αδύνατες και ισχύει η περίπτωση 1.

Άρα,

$\phi(\beta_1)=\phi(\beta_2)$ και $\psi(\beta_1)=\psi(\beta_2)$,

και

$\phi(\gamma_1)=\phi(\gamma_2)$ και $\psi(\gamma_1)=\psi(\gamma_2)$.

Επειδή όμως τα μονοπάτια β_1, β_2, γ_1, γ_2 έχουν το πολύ n βήματα, τότε με βάση την επαγωγική υπόθεση ισχύει $\beta_1=\beta_2$ και $\gamma_1=\gamma_2$, άρα και $\alpha_1=\alpha_2$.

Β) Αν το α_1 δεν έχει κανένα οριζόντιο βήμα σε ύψος 0, τότε ούτε και το α_2 έχει οριζόντιο βήμα σε ύψος 0.

Έστω $\alpha_1=u\beta_1 d\gamma_1$ και $\alpha_2=u\beta_2 d\gamma_2$, όπου γ_1, γ_2 μονοπάτια Schröder τα οποία δεν περιέχουν οριζόντια βήματα σε ύψος 0. Τότε, αφού $\phi(\alpha_1)=\phi(\alpha_2)$ και $\psi(\alpha_1)=\psi(\alpha_2)$, έχουμε

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \phi(\beta_1) & \psi(\gamma_1) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline \phi(\beta_2) & \psi(\gamma_2) \\ \hline \end{array}$$

και

$$\begin{array}{|c|}\hline \phi(\gamma_1) \\ \hline \psi(\beta_1) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \phi(\gamma_2) \\ \hline \psi(\beta_2) \\ \hline \end{array}$$

Για να είναι ίσες οι παραπάνω απεικονίσεις θα πρέπει να ισχύει μία από τις παρακάτω περιπτώσεις

1) Από την πρώτη ισότητα

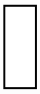
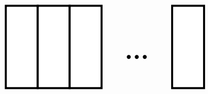
$$\phi(\beta_1)=\phi(\beta_2) \text{ και } \psi(\gamma_1)=\psi(\gamma_2).$$

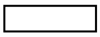
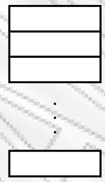
Από τη δεύτερη ισότητα

$$\phi(\gamma_1)=\phi(\gamma_2) \text{ και } \psi(\beta_1)=\psi(\beta_2).$$

2) Από την πρώτη ισότητα $\phi(\beta_1)=\psi(\gamma_2)=\begin{array}{|c|}\hline \\ \\ \hline \end{array}$ και $\psi(\gamma_1)=\phi(\beta_2)=\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ & \\ \hline \end{array} \cdots \begin{array}{|c|}\hline \\ \\ \hline \end{array}$

Από τη δεύτερη ισότητα $\phi(\gamma_1)=\psi(\beta_2)=\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \end{array}$ και $\psi(\beta_1)=\phi(\gamma_2)=\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \; \vdots \; \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \end{array}$

3) Από την πρώτη ισότητα $\psi(\gamma_1)=\phi(\beta_2)$ =  και $\phi(\beta_1)=\psi(\gamma_2)$ = 

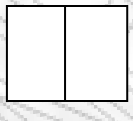
Από τη δεύτερη ισότητα $\psi(\beta_1)=\phi(\gamma_2)$=  και $\phi(\gamma_1)=\psi(\beta_2)$ = 

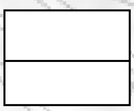
Επειδή όμως τα μονοπάτια γ_1,γ_2 δεν περιέχουν κανένα οριζόντιο βήμα σε ύψος 0, οι κατόψεις $\psi(\gamma_1)$ και $\psi(\gamma_2)$ θα είναι τύπου Η, ενώ οι κατόψεις $\phi(\gamma_1)$ και $\phi(\gamma_2)$ θα είναι τύπου V. Επομένως, οι περιπτώσεις 2 και 3, είναι αδύνατες και ισχύει η περίπτωση 1. Άρα,

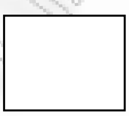
$\psi(\gamma_1)=\psi(\gamma_2)$ και $\phi(\beta_1)=\phi(\beta_2)$,
και
$\psi(\beta_1)=\psi(\beta_2)$ και $\phi(\gamma_1)=\phi(\gamma_2)$.

Επειδή όμως τα μονοπάτια β_1, β_2, γ_1, γ_2 έχουν το πολύ n βήματα, τότε με βάση την επαγωγική υπόθεση θα ισχύει $\beta_1=\beta_2$ και $\gamma_1=\gamma_2$ και άρα $\alpha_1=\alpha_2$.

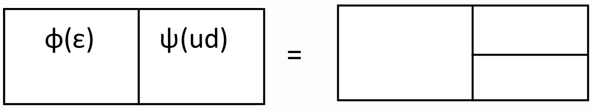
Παραδείγματα
Έστω μονοπάτι α, με $\rho(\alpha)=2$, τότε έχουμε:

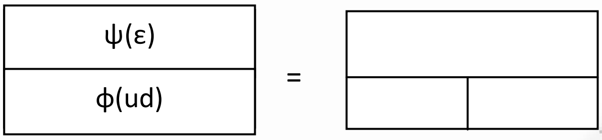
$\phi(ud)=\psi(h)$ = 

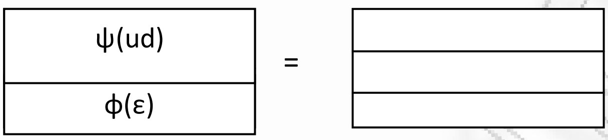
$\phi(h)=\psi(ud)$ = 

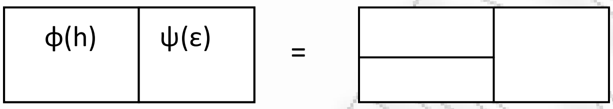
και $\phi(\varepsilon)=\psi(\varepsilon)$= 

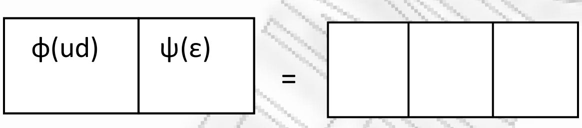
Ομοίως για $\rho(\alpha)=4$, έχουμε:

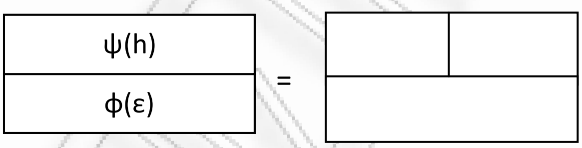
$\phi(udud) =$ 

$\phi(udh) =$ 

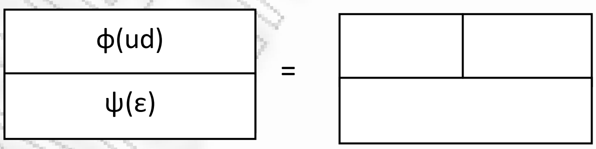
$\phi(hud) =$ 

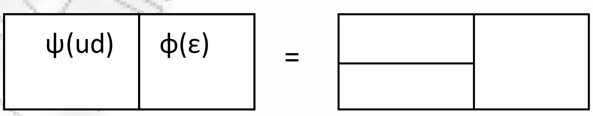
$\phi(uhd) =$ 

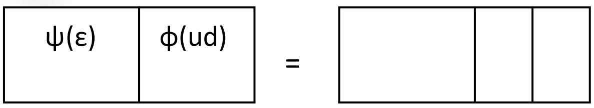
$\phi(uudd) =$ 

$\phi(hh) =$ 

Ομοίως για την ψ απεικόνιση έχουμε

$\psi(udud) =$ 

$\psi(udh) =$ 

$\psi(hud) =$ 

$$\psi(uhd) = \begin{array}{|c|}\hline \phi(\varepsilon) \\ \hline \psi(h) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline \multicolumn{2}{|c|}{\quad\quad} \\ \hline \quad & \quad \\ \hline \end{array}$$

$$\psi(uudd) = \begin{array}{|c|}\hline \phi(\varepsilon) \\ \hline \psi(ud) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \quad\quad \\ \hline \quad\quad \\ \hline \quad\quad \\ \hline \end{array}$$

$$\psi(hh) = \begin{array}{|c|c|}\hline \psi(\varepsilon) & \phi(h) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline \quad & \quad \\ \cline{2-2} \quad & \quad \\ \hline \end{array}$$

Κεφάλαιο 3ο

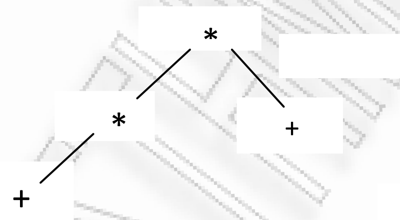
v-h Δέντρα

v-h δέντρο ονομάζεται ένα δυαδικό δέντρο του οποίου οι εσωτερικοί κόμβοι έχουν ετικέτα τα σύμβολα * ή + και δεν υπάρχουν δύο κόμβοι με την ίδια ετικέτα, οι οποίοι συνδέονται με δεξί δεσμό.

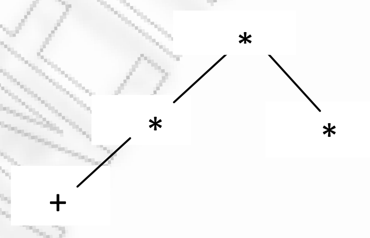
Έστω VH (αντ. VH_n) το σύνολο των v-h δέντρων (αντ. με n εσωτερικούς κόμβους). Συμβολίζουμε με VH_+ (αντ. VH_*) το σύνολο των v-h δέντρων στα οποία η ρίζα έχει ετικέτα + (αντ. *).

Παράδειγμα

Το επόμενο δυαδικό δέντρο είναι v-h δέντρο

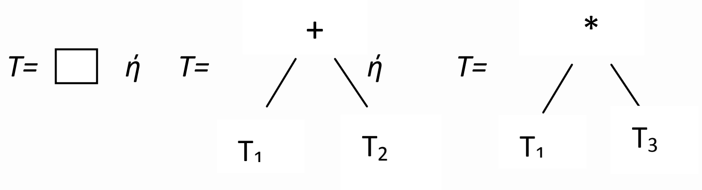


ενώ, το επόμενο δυαδικό δέντρο δεν είναι v-h δέντρο, διότι περιέχει δύο κόμβους με ετικέτα * που συνδέονται με δεξί δεσμό.



Πρόταση 8

Κάθε v-h δέντρο T διασπάται κατά μοναδικό τρόπο υπό την μορφή:



όπου $T_1 \in VH$, $T_2 \in \{\square\} \bigcup VH_*$ και $T_3 \in \{\square\} \bigcup VH_+$.

Απόδειξη

Έστω T ένα μη κενό v-h δένδρο. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Αν η ρίζα του T έχει ετικέτα +, το αριστερό υποδέντρο T_1 δεν έχει κανένα περιορισμό, ενώ η ρίζα του δεξιού του υποδέντρου T_2 πρέπει να έχει ετικέτα *, ή το δένδρο να είναι κενό, δηλαδή $T_2 \in \{\square\} \bigcup VH_*$.

Ομοίως, αν η ρίζα του T έχει ετικέτα *, το αριστερό υποδέντρο T_1 δεν έχει κανένα περιορισμό, ενώ η ρίζα του δεξιού του υποδέντρου T_3 πρέπει να έχει ετικέτα +, ή το δένδρο να είναι κενό, δηλαδή $T_3 \in \{\square\} \bigcup VH_+$.

Πρόταση 9

Ο αριθμός των v-h δέντρων με n εσωτερικούς κόμβους ισούται με τον n-οστό αριθμό Schröder.

Απόδειξη

Έστω $T(x)$ η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου VH ως προς την παράμετρο $s(T)$ “αριθμός εσωτερικών κόμβων του T”. Έστω $T_+(x)$ και $T_*(x)$ οι γεννήτριες συναρτήσεις των συνόλων VH_+ και VH_* αντίστοιχα ως προς την παράμετρο “αριθμός εσωτερικών κόμβων $s(T)$”. Για κάθε μη κενό δένδρο $T \in VH$, ισχύει ότι $T \in VH_+$, ή $T \in VH_*$, οπότε:

$$
\begin{aligned}
T(x) &= \sum_{T \in VH} x^{s(T)} \\
&= \sum_{T=\square} x^{s(\square)} + \sum_{T \in VH_+} x^{s(T)} + \sum_{T \in VH_*} x^{s(T)} \\
&= 1 + T_+(x) + T_*(x).
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$T(x) = 1 + T_+(x) + T_*(x). \tag{3.1}$$

Επίσης, από την προηγούμενη πρόταση ισχύει ότι

$$
\begin{aligned}
T_+(x) &= \sum_{T \in VH_+} x^{s(T)} \\
&= \sum_{\substack{T_1 \in VH \\ T_2 \in \{\square\} \bigcup VH_*}} x^{1+s(T_1)+s(T_2)} \\
&= x \sum_{T_1 \in VH} x^{s(T_1)} \Big(\sum_{T_2 = \square} x^{s(\square)} + \sum_{T_2 \in VH_*} x^{s(T_2)} \Big)
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$T_+(x) = xT(x)(1 + T_*(x)). \tag{3.2}$$

Ομοίως, έχουμε και για το $T_*(x)$ ότι

$$
\begin{aligned}
T_*(x) &= \sum_{T \in VH_*} x^{s(T)} \\
&= \sum_{\substack{T_1 \in VH \\ T_3 \in \{\square\} \bigcup VH_+}} x^{1+s(T_1)+s(T_3)} \\
&= x \sum_{T_1 \in VH} x^{s(T_1)} \Big(\sum_{T_3 = \square} x^{s(\square)} + \sum_{T_3 \in VH_+} x^{s(T_3)} \Big).
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$T_*(x) = xT(x)(1 + T_+(x)). \tag{3.3}$$

Έτσι, διαμορφώνεται το παρακάτω σύστημα:

$$T(x) = 1 + T_+(x) + T_*(x)$$

$$T_+(x) = xT(x)(1 + T_*(x))$$

και

$$T_*(x) = xT(x)(1 + T_+(x))$$

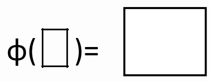
απ' το οποίο προκύπτει ότι

$$T(x) = 1 + xT(x) + xT^2(x). \tag{3.4}$$

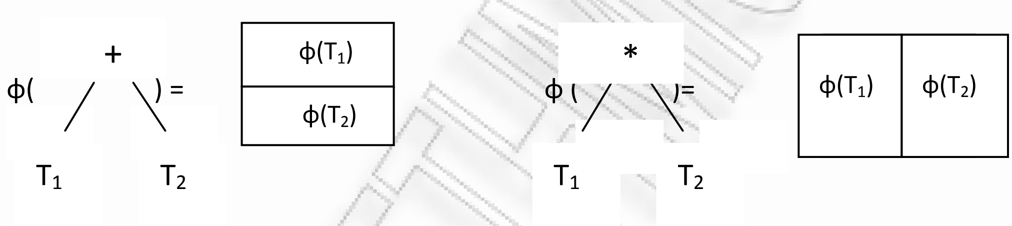
Δηλαδή, η $T(x)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Schröder και επομένως, ο αριθμός των v-h δένδρων με n εσωτερικούς κόμβους ισούται με τον n-οστό αριθμό Schröder $\alpha_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n+i}{n-1}$.

Αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση ανάμεσα σε v-h δέντρα και σε τεμαχισμένες κατόψεις

Ορίζουμε αναδρομικά μία απεικόνιση $\varphi : VH \to K$, ως εξής:



και



για κάθε $T_1 \in VH,\ T_2 \in VH_* \bigcup \{\square\}$ και $T_3 \in VH_+ \bigcup \{\square\}$

Πρόταση

Η απεικόνιση φ είναι 1-1 και επί.

Απόδειξη

Θα αποδειχθεί με επαγωγή ως προς τον αριθμό n των εσωτερικών κόμβων.

Για $n=0$ προφανώς ισχύει.

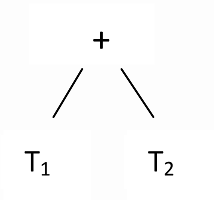
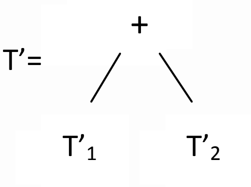
Έστω ότι η απεικόνιση ϕ είναι αμφιμονοσήμαντη για κάθε v-h δέντρο με n, το πολύ, εσωτερικούς κόμβους. Θα αποδειχθεί ότι ισχύει και για v-h δέντρα με n+1 εσωτερικούς κόμβους.

Αρχικά θα αποδειχθεί ότι η φ είναι 1-1.

Πράγματι, έστω $T, T' \in VH_{n+1}$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

1) Αν $T \in VH_{+}$ και $T' \in VH_{*}$, τότε η κάτοψη $\varphi(\mathrm{T})$ είναι τύπου H, ενώ η κάτοψη $\varphi(\mathrm{T}')$ είναι τύπου V, άρα $\varphi(\mathrm{T}) \neq \varphi(T')$

2) Αν $T,\, T' \in VH_{+}$, τότε είναι

T=  και T'= 

όπου: $T_1, T_1' \in VH_{*}$ και $T_2, T'_2 \in \{\square\} \bigcup VH_{*}$, με $s(T_1),\, s(T'_1),\, s(T_2),\, s(T'_2) \leq n$, οπότε είναι

$$\phi(\mathrm{T}) = \begin{array}{|c|} \hline \phi(\mathrm{T}_1) \\ \hline \phi(\mathrm{T}_2) \\ \hline \end{array} \qquad \phi(\mathrm{T}') = \begin{array}{|c|} \hline \phi(\mathrm{T}'_1) \\ \hline \phi(\mathrm{T}'_2) \\ \hline \end{array}$$

Αν *φ(T)=φ(T')*, από τη διάσπαση των τεμαχισμένων κατόψεων, ισχύει ότι

$\varphi(T_1)=\varphi(T'_1)$ και $\varphi(T_2)=\varphi(T'_2)$,

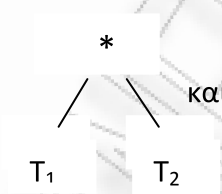
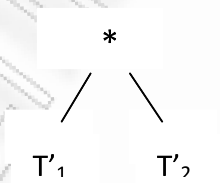
οπότε, από την υπόθεση της επαγωγής για την *φ*, έχουμε

$T_1=T'_1$ και $T_2=T'_2$

δηλαδή

T=T'.

3) Αν $T, T' \in VH_{*}$, τότε είναι

T=  και T'= 

όπου $T_1, T_1' \in VH$ και $T_2, T_2' \in \{\square\} \bigcup VH_{+}$ με $s(T_1), s(T'_1), s(T_2), s(T'_2) \leq n$, οπότε είναι

$$\phi(\mathrm{T}) = \begin{array}{|c|c|} \hline \phi(\mathrm{T}_1) & \phi(\mathrm{T}_2) \\ \hline \end{array} \qquad \phi(\mathrm{T}') = \begin{array}{|c|c|} \hline \phi(\mathrm{T}'_1) & \phi(\mathrm{T}'_2) \\ \hline \end{array}$$

Αν *φ(T)=φ(T')*, από τη διάσπαση των τεμαχισμένων κατόψεων, ισχύει ότι

$\phi(\mathrm{T}_1)=\phi(\mathrm{T}'_1)$ και $\phi(\mathrm{T}_2)=\phi(\mathrm{T}'_2)$, οπότε, από την υπόθεση της επαγωγής για την φ, έχουμε

$$T_1=T'_1 \text{ και } T_2=T'_2$$

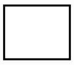
δηλαδή

$$T=T'.$$

Επίσης, θα αποδειχθεί ότι η φ είναι επί, δηλαδή κάθε τεμαχισμένη κάτοψη είναι, μέσω της απεικόνισης φ, εικόνα ενός v-h δέντρου.

Θα χρησιμοποιηθεί επαγωγή ως προς τον αριθμό k των εδρών της κάτοψης.

Για κ=1 έδρες έχουμε

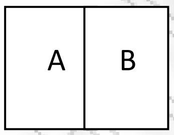
 =φ(□),

οπότε η πρόταση ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για κάθε $k \leq n.$ Θα αποδειχθεί ότι ισχύει και για $k = n+1.$

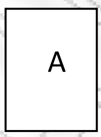
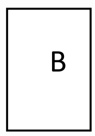
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Έστω ότι έχουμε μια τεμαχισμένη κάτοψη μορφής V

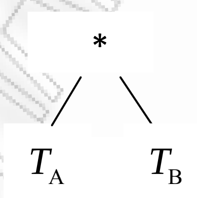


όπου A,B είναι τεμαχισμένες κατόψεις, κάθε μία από τις οποίες έχει αριθμό εδρών $\leq n.$

Από την υπόθεση της επαγωγής, υπάρχουν δέντρα T_A, T_B για τα οποία ισχύει ότι

φ(T_A) =  και φ(T_B) = 

Επομένως, για το δένδρο



ισχύει ότι

A	B

$$= \phi\left(\begin{array}{c} * \\ \diagup \quad \diagdown \\ T_{\mathrm{A}} \qquad T_{\mathrm{B}} \end{array} \right).$$

2. Έστω ότι έχουμε μια τεμαχισμένη κάτοψη μορφής H

A
B

όπου A,B είναι τεμαχισμένες κατόψεις, κάθε μία από τις οποίες έχει αριθμό εδρών $\leq n$.

Από την υπόθεση της επαγωγής, υπάρχουν δέντρα $T_{\mathrm{A}}, T_{\mathrm{B}}$ για τα οποία ισχύει ότι

$\phi(T_{\mathrm{A}}) = \boxed{\quad \mathrm{A} \quad}$ και $\phi(T_{\mathrm{B}}) = \boxed{\quad \mathrm{B} \quad}$

Επομένως, για το δένδρο

$$\begin{array}{c} + \\ \diagup \quad \diagdown \\ T_{\mathrm{A}} \qquad T_{\mathrm{B}} \end{array}$$

ισχύει ότι

A
B

$$= \phi\left(\begin{array}{c} + \\ \diagup \quad \diagdown \\ T_{\mathrm{A}} \qquad T_{\mathrm{B}} \end{array} \right)$$

Κεφάλαιο 4ο

Τεμαχισμένες κατόψεις με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά

4.1 Απαρίθμηση τεμαχισμένων κατόψεων ως προς τον αριθμό των τομών

Θεωρούμε δύο παραμέτρους, την q(α) “αριθμός των διαχωριστικών γραμμών” και τη ρ(α) “αριθμός των εδρών”, τεμαχισμένης κάτοψης α.

Κάθε τεμαχισμένη κάτοψη διασπάται κατά μοναδικό τρόπο υπό την μορφή:

$\alpha = \boxed{}$ ή $\alpha = \begin{array}{|c|c|}\hline \beta & \gamma \\ \hline \end{array}$ ή $\alpha = \begin{array}{|c|}\hline \beta \\ \hline \delta \\ \hline \end{array}$

όπου $\beta \in \mathrm{K}$, $\gamma \in \square \cup H$ και $\delta \in \square \cup V$.

Θεωρούμε τις γεννήτριες συναρτήσεις:

$$F(x,y) = \sum_{a \in K} x^{\rho(\alpha)} y^{q(a)},$$

$$F_H(x,y) = \sum_{a \in H} x^{\rho(\alpha)} y^{q(a)}$$

και

$$F_V(x,y) = \sum_{a \in V} x^{\rho(\alpha)} y^{q(a)}.$$

Στα επόμενα θα συμβολίζουμε με $\alpha = \beta \otimes \gamma$ την διάσπαση α = $\begin{array}{|c|c|}\hline \beta & \gamma \\ \hline \end{array}$

και με $\alpha = \beta \oplus \delta$ την διάσπαση α = $\begin{array}{|c|}\hline \beta \\ \hline \delta \\ \hline \end{array}$

Επομένως, για την παράμετρο ρ έχουμε ότι

ρ($\square$)=1,

ρ($\beta \otimes \gamma$) =ρ(β)+ρ(γ)

ρ($\beta \oplus \gamma$) =ρ(β)+ρ(γ)

και για την παράμετρο q έχουμε ότι

q($\square$)=0

q($\beta \otimes \gamma$)=1+q(β) [$\beta \in V$]

q($\beta \oplus \gamma$)= 1+q(β) [$\beta \in H$]

Άρα,

$$F(x, y) = \sum_{a \in K} x^{\rho(\alpha)} y^{q(a)}$$

$$= x + \sum_{a \in V} x^{\rho(\alpha)} y^{q(a)} + \sum_{a \in H} x^{\rho(\alpha)} y^{q(a)}$$

$$= x + F_V(x, y) + F_H(x, y).$$

Άρα,

$$F(x, y) = x + F_V(x, y) + F_H(x, y). \tag{4.1}$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$F_H(x, y) = \sum_{\substack{a = \beta \oplus \gamma \\ \beta \in \{\square\} \cup V \cup H \\ \gamma \in \{\square\} \cup H}} x^{\rho(\alpha)} y^{q(a)}$$

$$= \sum_{\substack{a=\beta\oplus\gamma \\ \beta\in\{\square\}\cup V\cup H \\ \gamma\in\{\square\}\cup V}} x^{\rho(\beta)+\rho(\gamma)} y^{1+q(\beta)[\beta\in H]}$$

$$= y \sum_{\beta\in\{\square\}\cup V\cup H} x^{\rho(\beta)} y^{q(\beta)[\beta\in H]} \sum_{\gamma\in\{\square\}\cup V} x^{\rho(\gamma)}$$

$$= y\Big(\sum_{\beta\in\{\square\}\cup V} x^{\rho(\beta)} + \sum_{\beta\in H} x^{\rho(\beta)} y^{q(\beta)}\Big)\Big(x+\sum_{\delta\in V} x^{\rho(\delta)}\Big)$$

$$= y(x+F_V(x)+F_H(x,y))(x+F_V(x)).$$

Άρα,

$$F_H(x,y) = y(x+F_V(x)+F_H(x,y))(x+F_V(x)). \qquad (4.2)$$

Ομοίως,

$$F_V(x,y) = \sum_{\substack{a=\beta\otimes\gamma \\ \beta\in\{\square\}\cup V\cup H \\ \gamma\in\{\square\}\cup H}} x^{\rho(\alpha)} y^{q(a)}$$

$$= \sum_{\substack{a=\beta\otimes\gamma \\ \beta\in\{\square\}\cup V\cup H \\ \gamma\in\{\square\}\cup H}} x^{\rho(\beta)+\rho(\gamma)} y^{1+q(\beta)[\beta\in V]}$$

$$= y \sum_{\beta\in\{\square\}\cup V\cup H} x^{\rho(\beta)} y^{q(\beta)[\beta\in V]} \sum_{\gamma\in\{\square\}\cup H} x^{\rho(\gamma)}$$

$$= y\Big(\sum_{\beta\in\{\square\}\cup H} x^{\rho(\beta)} + \sum_{\beta\in V} x^{\rho(\beta)} y^{q(\beta)}\Big)\Big(x+\sum_{\gamma\in H} x^{\rho(\gamma)}\Big)$$

$$= y(x+F_H(x)+F_V(x,y))(x+F_H(x))$$

Άρα,

$$F_V(x,y) = y(x+F_H(x)+F_V(x,y))(x+F_H(x)). \qquad (4.3)$$

Από τη σχέση (4.2) έχουμε ότι

$$F_H(x,y) = y(x+F_V(x))(x+F_V(x)) + y(x+F_V(x))F_H(x,y)$$

δηλαδή

$$F_H(x,y)(1-y(x+F_V(x))) = y(x+F_V(x))^2.$$

Άρα,

$$F_H(x,y) = \frac{y(x+F_V(x))^2}{1-y(x+F_V(x))}. \tag{4.4}$$

Ομοίως, από τη σχέση (4.3) έχουμε ότι

$$F_V(x,y) = y(x+F_H(x))(x+F_H(x)) + y(x+F_H(x))F_V(x,y),$$

δηλαδή

$$F_V(x,y)(1-y(x+F_H(x))) = y(x+F_H(x))^2.$$

Άρα,

$$F_V(x,y) = \frac{y(x+F_H(x))^2}{1-y(x+F_H(x))}. \tag{4.5}$$

Επειδή όμως είναι

$$F_H(x) = F_V(x) = \frac{S(x)-x}{2} = \frac{1-3x+\sqrt{x^2-6x+1}}{4},$$

συμπαιρένουμε ότι

$$F_V(x,y) = F_H(x,y) = \frac{y(x+S_V(x))^2}{1-y(x+S_V(x))} = \frac{y(x+S_H(x))^2}{1-y(x+S_H(x))}.$$

Έτσι, από τη σχέση (4.1) έχουμε ότι

$$F(x,y) = x + 2\frac{y(x+S_H(x))^2}{1-y(x+S_H(x))}. \tag{4.6}$$

4.2 Απαρίθμηση τεμαχισμένων κατόψεων ως προς τον αριθμό των εδρών που βλέπουν στη νότια πλευρά

Για τον υπολογισμό των αριθμών των εδρών χρησιμοποιούμε 2 παραμέτρους, την q(α): “αριθμός των εδρών που βλέπουν το κάτω σύνορο” και την παράμετρο ρ(α) “αριθμός των εδρών μίας τεμαχισμένης κάτοψης α.”
Κάθε τεμαχισμένη κάτοψη διασπάται κατά μοναδικό τρόπο υπό την μορφή:

$$\alpha = \boxed{} \quad \text{ή} \quad \alpha = \begin{array}{|c|c|}\hline \beta & \gamma \\ \hline \end{array} \quad \text{ή} \quad \alpha = \begin{array}{|c|}\hline \beta \\ \hline \delta \\ \hline \end{array}$$

όπου $\beta \in \mathrm{K}$, $\gamma \in \square \cup H$ και $\delta \in \square \cup V$.

Θεωρούμε τις γεννήτριες συναρτήσεις:

$$F(x,y) = \sum_{a \in \square \cup V \cup H} x^{\rho(\alpha)} y^{q(a)},$$

$$F_H(x,y) = \sum_{a \in H} x^{\rho(\alpha)} y^{q(a)}$$

και

$$F_V(x,y) = \sum_{a \in V} x^{\rho(\alpha)} y^{q(a)}.$$

Για την παράμετρο q έχουμε ότι

q($\square$)=1,

q($\beta \otimes \gamma$)=q(β)+q(γ),

q($\beta \oplus \delta$)=q(δ)

και για την παράμετρο ρ έχουμε ότι

ρ($\square$)=1,

ρ($\beta \otimes \gamma$)=q(β)+q(γ),

ρ($\beta \oplus \delta$)=ρ(β)+ρ(δ).

Άρα,

$$F(x,y) = \sum_{a \in \square \cup V \cup H} x^{\rho(\alpha)} y^{q(a)}$$

$$= \sum_{a = \square} x^{\rho(\alpha)} y^{q(a)} + \sum_{a \in V} x^{\rho(\alpha)} y^{q(a)} + \sum_{a \in H} x^{\rho(\alpha)} y^{q(a)}$$

$$= xy + F_V(x,y) + F_H(x,y).$$

Άρα,

$$F(x,y) = xy + F_V(x,y) + F_H(x,y) \qquad (4.7)$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$F_H(x,y) = \sum_{\substack{\alpha=\beta\oplus\delta \\ \beta\in\square\cup V\cup H \\ \delta\in\square\cup V}} x^{\rho(\alpha)} y^{q(a)}$$

$$= \sum_{\substack{\beta\in\square\cup V\cup H \\ \delta\in\square\cup V}} x^{\rho(\beta)+\rho(\delta)} y^{q(\delta)}$$

$$= \sum_{\beta\in\square\cup V\cup H} x^{\rho(\beta)} \sum_{\delta\in\square\cup V} x^{\rho(\delta)} y^{q(\delta)}$$

$$= S(x)(xy + F_V(x,y)).$$

Άρα,

$$F_H(x,y) = S(x)(xy + F_V(x,y)). \qquad (4.8)$$

Ομοίως,

$$F_V(x,y) = \sum_{\substack{\alpha=\beta\otimes\gamma \\ \beta\in\square\cup V\cup H \\ \gamma\in\square\cup H}} x^{\rho(\alpha)} y^{q(a)}$$

$$= \sum_{\substack{\beta\in\square\cup V\cup H \\ \gamma\in\square\cup \mathrm{H}}} x^{\rho(\beta)+\rho(\gamma)} y^{q(\beta)+q(\gamma)}$$

$$= \sum_{\beta\in\square\cup V\cup H} x^{\rho(\beta)} y^{q(\beta)} \sum_{\gamma\in\square\cup \mathrm{H}} x^{\rho(\gamma)} y^{q(\gamma)}$$

$$= F(x,y)(xy + F_H(x,y)).$$

Άρα,

$$F_V(x,y) = F(x,y)(xy + F_H(x,y)). \qquad (4.9)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (4.3) την $F_H(x,y)$ από τη σχέση (4.8), έχουμε:

$$F_V(x,y) = F(x,y)(xy + S(x)(xy + F_V(x,y))),$$

δηλαδή

$$F_V(x,y)(1 - F(x,y)S(x)) = F(x,y)(xy(S(x)+1)).$$

Άρα,

$$F_V(x,y)=\frac{F(x,y)(xy(S(x)+1))}{1-F(x,y)S(x)}. \quad (4.10)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (4.7) την $V_H(x,y)$ από την σχέση (4.8) έχουμε:

$$F(x,y)=xy+F_V(x,y)+S(x)(xy+F_V(x,y)),$$

δηλαδή

$$F(x,y)=(1+S(x))(xy+F_V(x,y)). \quad (4.11)$$

Από τις σχέσεις (4.10) και (4.11), παίρνουμε τις παρακάτω ισοδύναμες σχέσεις:

$$F(x,y)=(1+S(x))(xy+\frac{F(x,y)(xy(S(x)+1))}{1-F(x,y)S(x)})$$

$$F(x,y)(1-F(x,y)S(x))=(1+S(x))((1-F(x,y)S(x))xy+F(x,y)xy(1+S(x)))$$

$$F(x,y)-F^2(x,y)S(x)=(1+S(x))(xy-F(x,y)S(x)xy+F(x,y)xy+F(x,y)S(x)xy)$$

$$F(x,y)-F^2(x,y)S(x)=(1+S(x))(xy+F(x,y)xy)=(1+S(x))(F(x,y)+1)xy.$$

Άρα,

$$S(x)F^2(x,y)+((1+S(x))xy-1)F+(1+S(x))xy=0. \quad (4.12)$$

Κεφάλαιο 5°

Αλγόριθμοι κατασκευής

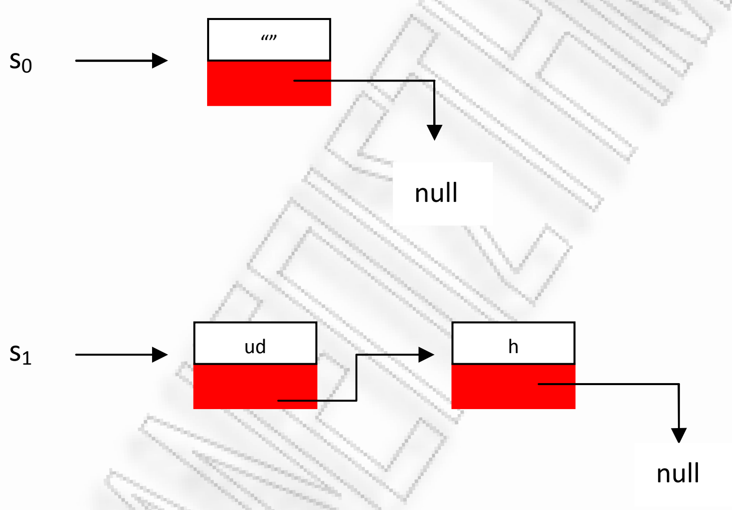
5.1 Κατασκευή μονοπατιών Schröder

Στα πλαίσια της διπλωματικής εργασίας αναπτύχθηκαν αλγόριθμοι κατασκευής αριθμών Schröder, τόσο αναδρομικά όσο και λεξικογραφικά:

5.1.1 Αναδρομική κατασκευή μονοπατιών Schröder

Βήμα 1° Υλοποίηση λιστών

Υλοποίηση συνδεδεμένων λιστών για τα σύνολα $s_0 = \{""\}$ και $s_1 = \{h, ud\}$ αριθμών Schröder.



Βήμα 2° Ανάπτυξη ψευδοκώδικα

Λίστα συνόλου λέξεων Schröder s_n

{

//Ανάθεση διεύθυνσης συνδεδεμένης λίστας λέξεων Schröder s_{n-1}, σε προσωρινή διεύθυνση

Προσωρινή διεύθυνση ← s_{n-l}

//Ανάθεση κενής διεύθυνσης null στην λίστα s_n .

$s_n \leftarrow$ null.

//Ανάθεση 0 στον δείκτη συμβολοσειράς n.

n $\leftarrow$ 0.

Ενόσω(προσωρινή διεύθυνση ≠ null**)**

{

λέξη _Schröder $\leftarrow$ ”ud”+ “συμβολοσειρά του τρέχοντα κόμβου”.

δημιουργία νέου κόμβου.

προσθήκη λέξης _Schröder στον κόμβο.

τοποθέτηση κόμβου στην αρχή της συνδεδεμένης λίστας s_n.

Λέξη _Schröder $\leftarrow$ ”h”+ “συμβολοσειρά του τρέχοντα κόμβου”.

δημιουργία νέου κόμβου.

προσθήκη αριθμού Schröder στον κόμβο.

τοποθέτηση κόμβου στην αρχή της συνδεδεμένης λίστας s_n.

Ενόσω(n-οστός χαρακτήρας του λέξης Schröder του τρέχοντα κόμβου ≠ ‘h’ &&

n-οστός χαρακτήρας του λέξης_Schröder του τρέχοντα κόμβου ≠‘d’)

{

διάσπαση λέξης Schröder σε δύο συμβολοσειρές.

συμβολοσειρά 1 $\leftarrow$ χαρακτήρες από 0 έως i+1.

συμβολοσειρά 2 $\leftarrow$ χαρακτήρες από i+1 έως τελευταίο γράμμα λέξης Schröder .

λέξη Schröder $\leftarrow$ συμβολοσειρά 1+”ud”+ συμβολοσειρά 2.

δημιουργία νέου κόμβου.

προσθήκη λέξης _Schröder στον κόμβο.

τοποθέτηση κόμβου στην αρχή της συνδεδεμένης λίστας s_n.

λέξη Schröder $\leftarrow$ συμβολοσειρά 1+”h”+ συμβολοσειρά 2.

δημιουργία νέου κόμβου.

προσθήκη λέξης Schröder στον κόμβο.

τοποθέτηση κόμβου στην αρχή της συνδεδεμένης λίστας s_n.

n $\leftarrow$ n+1.

}

// καταχώρηση διεύθυνσης επόμενου κόμβου στην προσωρινή διεύθυνση.

προσωρινή διεύθυνση ← επόμενη διεύθυνση.

}

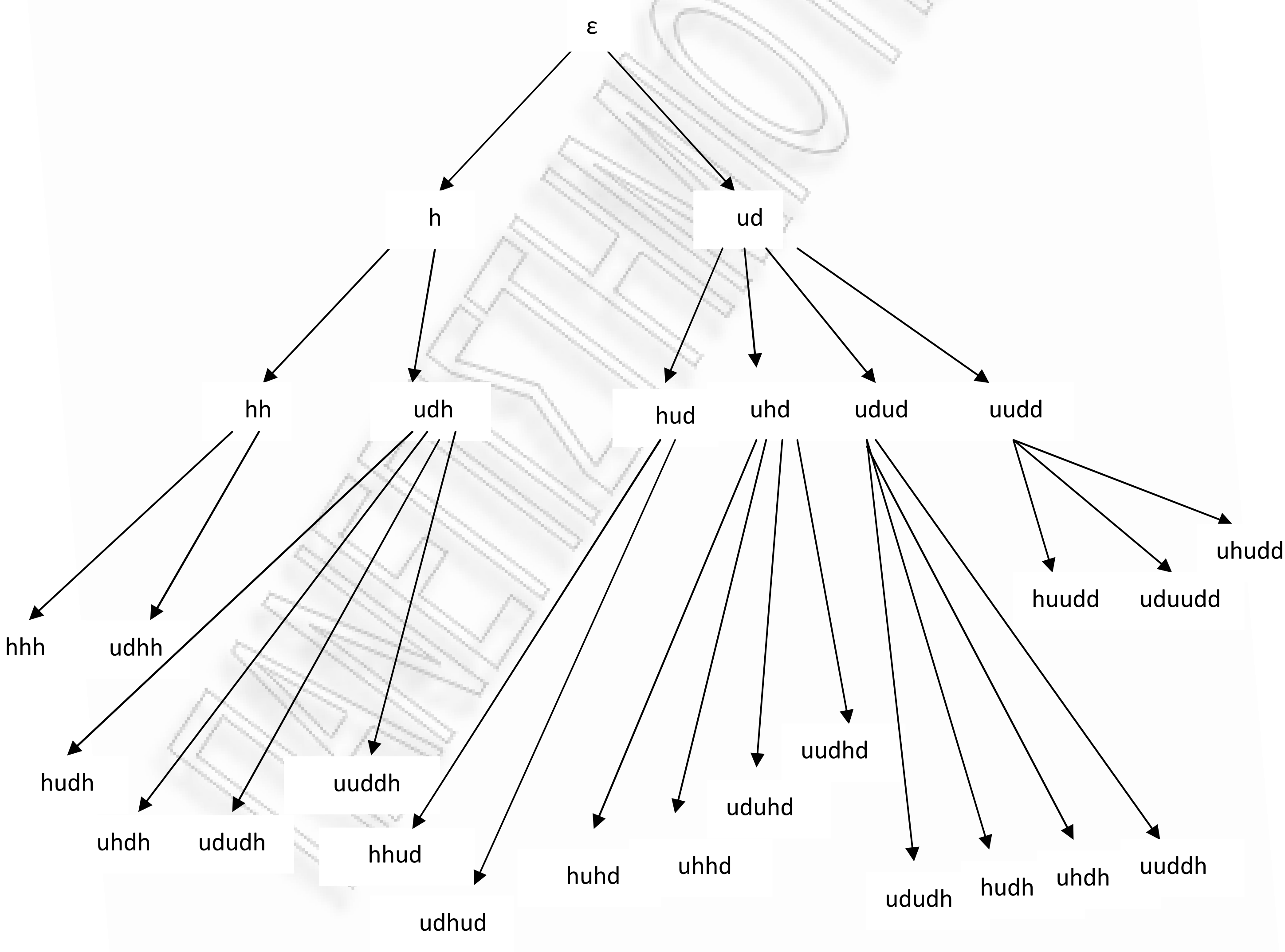
// Επιστροφή διεύθυνσης κεφαλής λίστας συνόλου αριθμών Schröder s_n

επιστροφή διεύθυνσης s_n .

}

5.1.2 Παράδειγμα

Εξετάζοντας το παρακάτω δέντρο μπορούμε να κατανοήσουμε καλύτερα τον προηγούμενο αλγόριθμο.



5.1.3 Λεξικογραφική κατασκευή μονοπατιών Schröder

// Ορισμός μεθόδου, κατασκευής λέξεων **Schröder**, με την βοήθεια διανυσματικού πίνακα Vector.

κατασκευή λέξεων Schröder(<ακέραιος> μήκους n**)**

{

ορισμός διανυσματικού πίνακα v.

<ακέραιος> θέση γράμματος ‘h’ ← -1.

<ακέραιος > θέση γράμματος ‘du’ ← -1.

<συμβολοσειρά> λέξη_Schröder ← ””.

Για (i=0 έως n/2) λέξη_Schröder ← λέξη_Schröder + “h”.

Αποθήκευση λέξη_Schröder στο v.

θέση γράμματος ‘h’ ← θέση τελευταίου h στην συμβολοσειρά “΄λέξη_ Schröder”.

Θέση γράμματος ‘du’ ← θέση τελευταίου ud στην συμβολοσειρά “λέξη_ Schröder”.

Ενόσω(θέση γράμματος ‘h’≠-1 || θέση γράμματος ‘du’≠-1)

{

Εάν(θέση γράμματος ‘h’> θέση γράμματος ‘du’)

λέξη_Schröder ← **μετατροπή_ λέξης_Schröder_με_h**(λέξη_Schröder).

αλλιώς

λέξη_ Schröder ← **μετατροπή_ λέξης_Schröder_με_ud**(λέξη_ Schröder).

Αποθήκευση λέξης_ Schröder στο v.

θέση γράμματος ‘h’ ← θέση τελευταίου h στην συμβολοσειρά “ λέξη_ Schröder”.

Θέση γράμματος ‘du’ ← θέση τελευταίου ud στην συμβολοσειρά “ λέξη_ Schröder”.

}

επιστροφή διανυσματικού πίνακα v.

}

// Ορισμός υπορουτίνας μετατροπή_λέξης_Schröder_με_h

μετατροπή_λέξης_Schröder_με_h(<συμβολοσειρά> “ λέξη_Schröder”)

{

<ακέραιος> θέση γράμματος ‘h’ $\leftarrow$ -1.

< συμβολοσειρά > αριστερή

< συμβολοσειρά > δεξιά

θέση γράμματος ‘h’ $\leftarrow$ θέση τελευταίου h στην συμβολοσειρά “λέξη_ Schröder”.

αριστερή $\leftarrow$ υποσυμβολοσειρά από το γράμμα θέση $\leftarrow$ 0 έως θέση $\leftarrow$ θέση γράμματος ‘h’, της συμβολοσειράς “ λέξη_Schröder”.

δεξιά $\leftarrow d^{\kappa}h^{\lambda}$ όπου $\kappa, \lambda \in \mathrm{N}$, τέτοιοι ώστε |αριστερή|$_u$=|αριστερή|$_d$+κ και |αριστερή|$_h$+|αριστερή|$_u$+1+κ=n, όπου n ημιμήκος λέξης Schröder

επιστροφή αριστερή+”ud”+δεξιά.

}

// Ορισμός υπορουτίνας μετατροπή_λέξης_Schröder_με_ud

μετατροπή_ λέξης_Schröder_με_ud(<συμβολοσειρά> “ λέξη_Schröder”)

{

<ακέραιος> θέση γράμματος ‘ud’ $\leftarrow$ -1.

< συμβολοσειρά> αριστερή

< συμβολοσειρά > δεξιά

θέση γράμματος ‘ud’ $\leftarrow$ θέση τελευταίου ud στην συμβολοσειρά “ λέξη_ Schröder”.

αριστερή $\leftarrow$ υποσυμβολοσειρά από το γράμμα θέση $\leftarrow$ 0 έως θέση $\leftarrow$ θέση γράμματος ‘ud’, της συμβολοσειράς “ λέξη_Schröder”.

δεξιά $\leftarrow d^{\kappa}h^{\lambda}$ όπου $\kappa, \lambda \in \mathrm{N}$, τέτοιοι ώστε |αριστερή|$_u$=|αριστερή|$_d$+κ και |αριστερή|$_h$+|αριστερή|$_u$+1+κ=n, όπου n ημιμήκος λέξης Schröder

επιστροφή αριστερή+”h”+δεξιά.

}

5.1.4 Παράδειγμα

Βάσει του αλγόριθμου που αναπτύχθηκε προηγουμένως, διαβάζουμε την προηγούμενη λέξη από δεξιά προς τα αριστερά. Αν συναντήσουμε **h,** το αντικαθιστούμε με το **ud**, και αντικαθιστούμε το τμήμα της λέξης δεξιά του **h** με τη λέξη $d^k h^m$, με κατάλληλες τιμές των k, m ώστε το αποτέλεσμα να είναι λέξη Schröder. Αν συναντήσουμε **du**, το αντικαθιστούμε με το **h,** και αντικαθιστούμε το τμήμα δεξιά του **du** όπως στην προηγούμενη περίπτωση. Ο αλγόριθμος θα τερματίσει όταν φθάσουμε σε λέξη που δεν έχει ούτε το γράμμα **h,** ούτε το **du**, δηλαδή όταν φθάσουμε σε λέξη της μορφής **uu...u-dd...d**.

Έτσι, για τη λεξικογραφική κατασκευή των αριθμών Schröder μήκους 6 έχουμε:

hh**h**
h**h**ud
hud**h**
hu**du**d
hu**h**d
huudd
udh**h**
ud**h**ud
udud**h**
udu**du**d
udu**h**d
u**du**udd
uhd**h**
uh**du**d
uh**h**d
u**h**udd
uudd**h**
uud**du**d
uud**h**d
uu**du**dd
uu**h**dd
uuuddd

5.2 Κατασκευή V-H δέντρων

5.2.1 Ανάπτυξη ψευδοκώδικα

Στα πλαίσια της εργασίας αναπτύχθηκε ο ακόλουθος αλγόριθμος, ο οποίος υλοποιεί δέντρα τεμαχισμένων κατόψεων στα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1^o

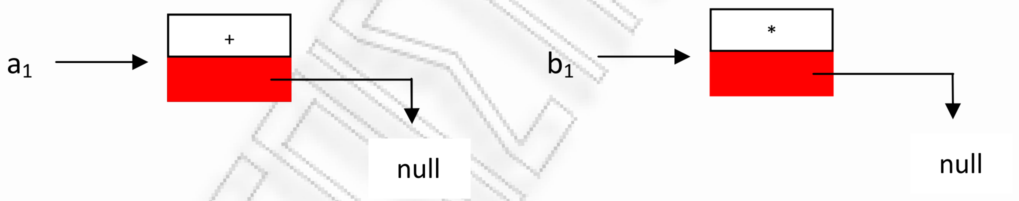
Υλοποίηση συνδεδεμένων λιστών για n=0,1 όπου n αριθμός κορυφών, δέντρου και k=n+1, αριθμός διαμερίσεων τεμαχισμένης κάτοψης. Θεωρούμε a_n, b_n, τις κεφαλές των συνδεδεμένων λιστών για δέντρα n-κορυφών, με κορυφές τα σύμβολα ‘+’ και ‘*’ αντίστοιχα και t_n η κεφαλή της λίστας που προκύπτει από την ένωση των a_n και b_n.

Για n=0

$a_0 \rightarrow$ null $b_0 \rightarrow$ null

και $t_0 \rightarrow a_0 \rightarrow b_0 \rightarrow$ null

Για n=1



και $t_1 \rightarrow b_1 \rightarrow a_1 \rightarrow$ null

Βήμα 2ο

// Δημιουργία συνδεδεμένης λίστας $b_{n,}$ όλων των ριζών δέντρων με n-κόμβους και σύμβολο ρίζας “*”.

Για 1 έως n

{

Ενόσω($t_{n-l} \neq$ null)

{

Ενόσω($a_l \neq$ null)

{

νέα ρίζα δέντρου.

τοποθέτηση συμβόλου “*” στην κορυφή.

κορυφή.αριστερό_παδί← t_{n-l}

κορυφή.δεξί_παιδί← a_i.

νέος κόμβος λίστας.

προσθήκη ρίζας δέντρου στον κόμβο.

προσθήκη κόμβου ρίζας δέντρου στην αρχή της λίστας με κεφαλή b_n.

a_l ← επόμενος κόμβος.

}

a_l ← αρχική διεύθυνση.

}

t_{n-l} ← επόμενος κόμβος.

}

t_{n-l} ← αρχική διεύθυνση.

// Δημιουργία συνδεδεμένης λίστας a_n, όλων των δέντρων με n-κόμβους και σύμβολο ρίζας “+”.

Για 1 έως n

{

Ενόσω($t_{n-l} \neq$ null)

{

Ενόσω($b_l \neq a_i$)

{

νέα κορυφή δέντρου

τοποθέτηση συμβόλου “+” στην κορυφή.

κορυφή.αριστερό_παδί $\leftarrow t_{n-l}$

κορυφή.δεξί_παιδί $\leftarrow b_i$

νέος κόμβος λίστας.

προσθήκη ρίζας δέντρου στον κόμβο.

προσθήκη κόμβου ρίζας δέντρου στην αρχή της λίστας με κεφαλή a_n.

$b_i \leftarrow$ επόμενος κόμβος

}

$b_i \leftarrow$ αρχική διεύθυνση

}

$t_{n-l} \leftarrow$ επόμενος κόμβος

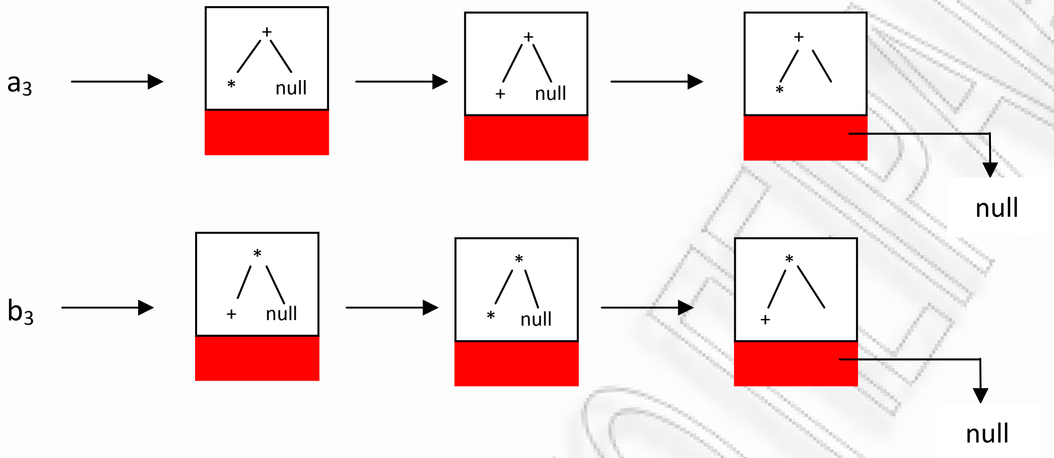
}

// Ένωση λιστών b_n, a_n με αρχή λίστας t_n.

$t_n \longrightarrow b_n \longrightarrow a_n \longrightarrow$ null

5.2.2 Παράδειγμα

Για n=3 κορυφές και k=4 διαμερίσεις έχουμε:



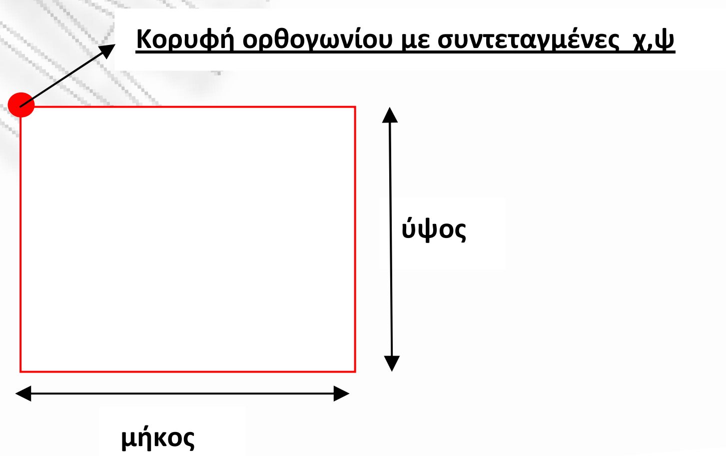
και τελικά:

$t_3 \longrightarrow b_3 \longrightarrow a_3 \longrightarrow$ null

5.3 Κατασκευή τεμαχισμένων κατόψεων

5.3.1 Ανάπτυξη ψευδοκώδικα

Κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σχεδιάζεται σε ένα καμβά σχεδίασης, δίνοντας τις συντεταγμένες της πάνω αριστερής κορυφής του και τις διαστάσεις του (μήκος, ύψος)



Βήμα 1^{o}

Υλοποίηση συνδεδεμένης λίστας.

// Ορισμός κλάσης ορθογώνιο

Κλάση ορθογώνιο

{

// κορυφή άνω αριστερού άκρου

<ακέραιος> χ

<ακέραιος> ψ

// μήκος, ύψος

<ακέραιος> μήκος

<ακέραιος> ύψος

// ορισμός κατασκευαστή κλάσης

<ορθογώνιο> επόμενος_κόμβος

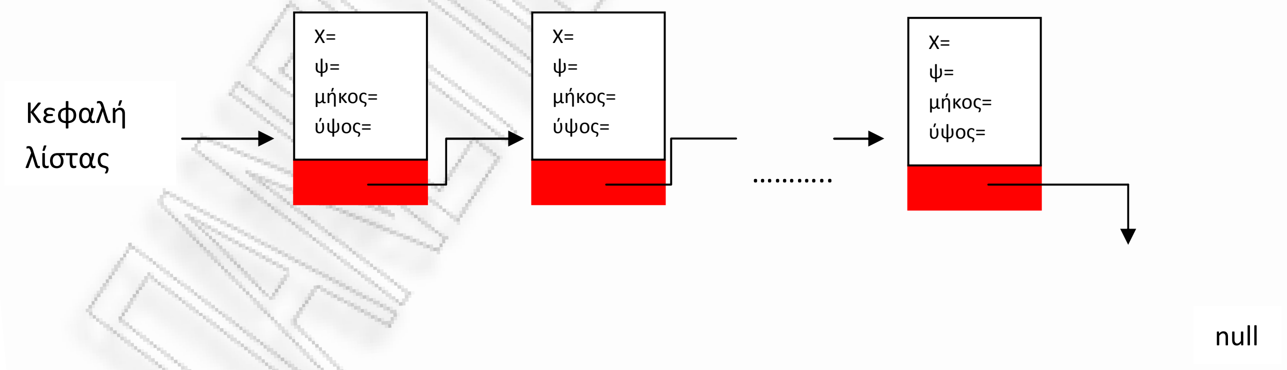
<public> ορθογώνιο()

{

επόμενος_κόμβος=null

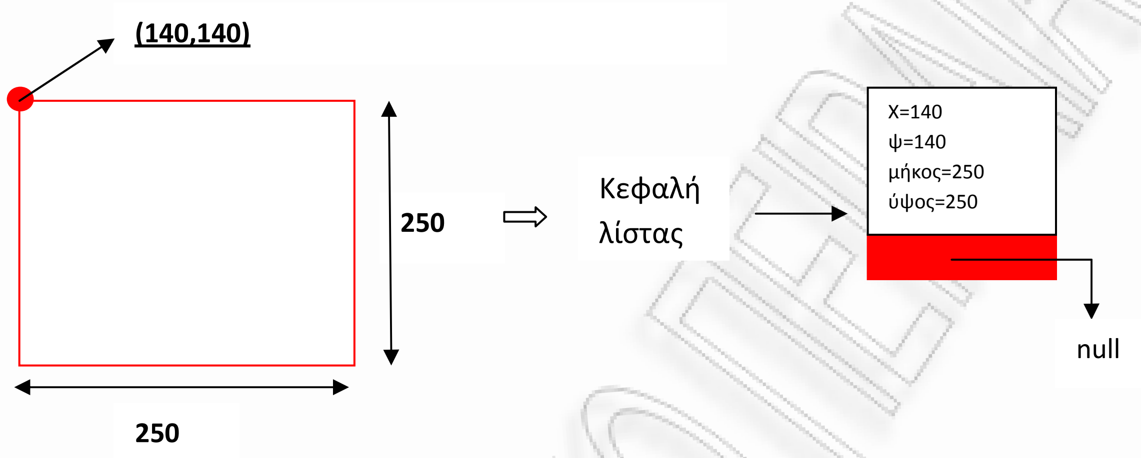
}

}



Βήμα 2ο

// Ορισμός συνάρτησης που παίρνει σαν όρισμα την ρίζα ενός V_H δέντρου, για τον τεμαχισμό ενός ορθογωνίου με τις παρακάτω διαστάσεις.



void τεμαχισμός_κάτοψης(**<ρίζα VH δέντρου>** ρίζα)

{

Εάν(ρίζα=**null) επιστροφή**

<ακέραιος> X // ορισμός τετμημένης χ, άνω αριστεράς κορυφής

<ακέραιος> Ψ // ορισμός τεταγμένης ψ, άνω αριστερά κορυφής

<ακέραιος> L // ορισμός μήκους ορθογωνίου L

<ακέραιος> H // ορισμός πλάτους ορθογωνίου H

ορισμός νέου αντικειμένου κλάσης ορθογώνιο

χ αντικειμένου = χ τελευταίου κόμβου της λίστας

ψ αντικειμένου = ψ τελευταίου κόμβου της λίστας

Εάν(η ρίζα του δέντρου έχει σύμβολο '*' **)**

{

μήκος νέου αντικειμένου=0.25* (**μήκος** τελευταίου αντικειμένου της λίστας)+0.50*(**μήκος** τελευταίου αντικειμένου της λίστας)***random()**

ύψος νέου αντικειμένου= ύψος τελευταίου κόμβου της λίστας

X = χ νέους αντικειμένου + μήκος νέου αντικειμένου.

Ψ = ψ νέου αντικειμένου.

L= **μήκος** τελευταίου αντικειμένου της λίστας-**μήκος** νέου αντικειμένου

H=ύψος τελευταίου αντικειμένου της λίστας

Προσθήκη αντικειμένου στο τέλος της συνδεδεμένης λίστας

}

Εάν(η ρίζα του δέντρου έχει σύμβολο '+' **)**

{

μήκος νέου αντικειμένου= μήκος τελευταίου κόμβου της λίστας

ύψος νέου αντικειμένου=0.25* (ύψος τελευταίου αντικειμένου της λίστας)+0.50*(ύψος τελευταίου αντικειμένου της λίστας)*random()

X = χ νέου αντικειμένου

Ψ = ψ νέου αντικειμένου+ ύψος νέου αντικειμένου..

L= μήκος τελευταίου αντικειμένου της λίστας

H=ύψο**ς** τελευταίου αντικειμένου της λίστας- ύψος νέου αντικειμένου

Προσθήκη αντικειμένου στο τέλος της συνδεδεμένης λίστας

}

τεμαχισμός_κάτοψης(**<ρίζα VH δέντρου>** αριστερό παιδί ρίζας)

ορισμός νέου αντικειμένου κλάσης ορθογώνιο

χ νέου αντικειμένου = X

ψ νέου αντικειμένου = ψ

μήκος νέου αντικειμένου= L

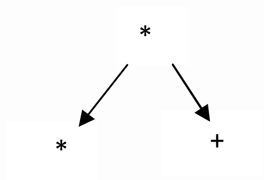
ύψος νέου αντικειμένου= H

τεμαχισμός_κάτοψης(**<ρίζα VH δέντρου>** δεξί παιδί ρίζας)

}

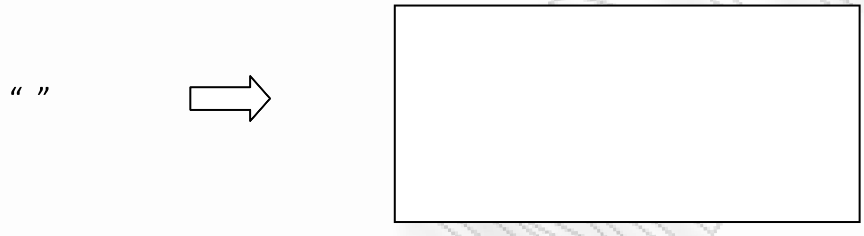
5.3.2 Παράδειγμα

Έστω ότι η συνάρτηση **τεμαχισμός_κάτοψης** παίρνει σαν όρισμα το παρακάτω δέντρο :



Τότε θα σχεδιαστούν 6 παραλληλόγραμμα.

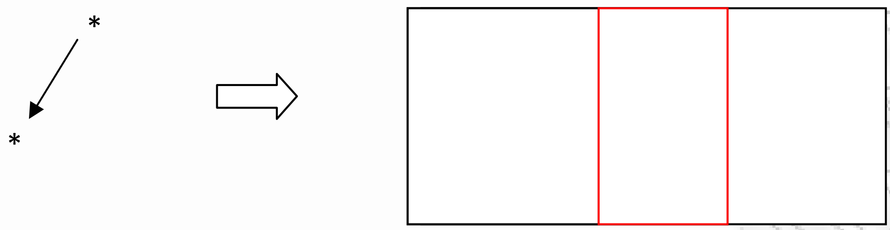
βήμα 1ο



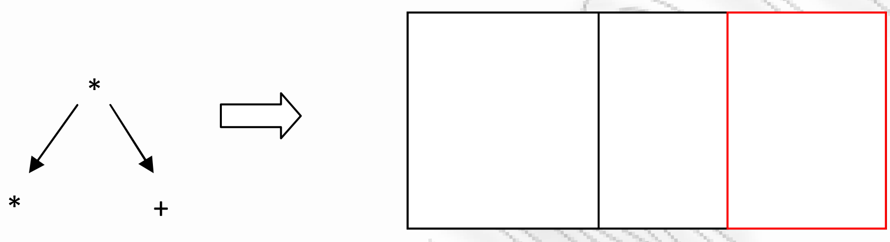
βήμα 2ο

βήμα 3ο

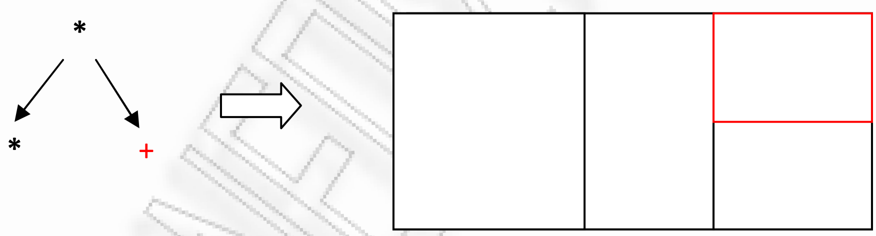
βήμα 4ο



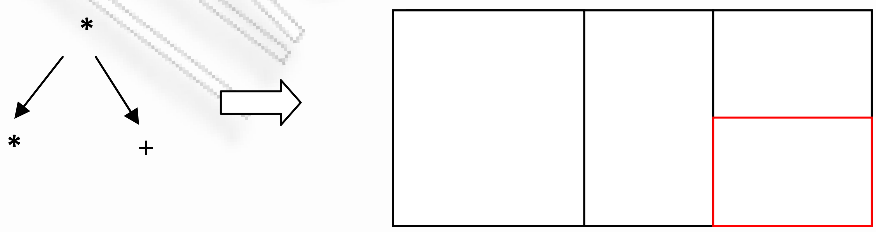
βήμα 5ο



βήμα 6ο



βήμα 7ο

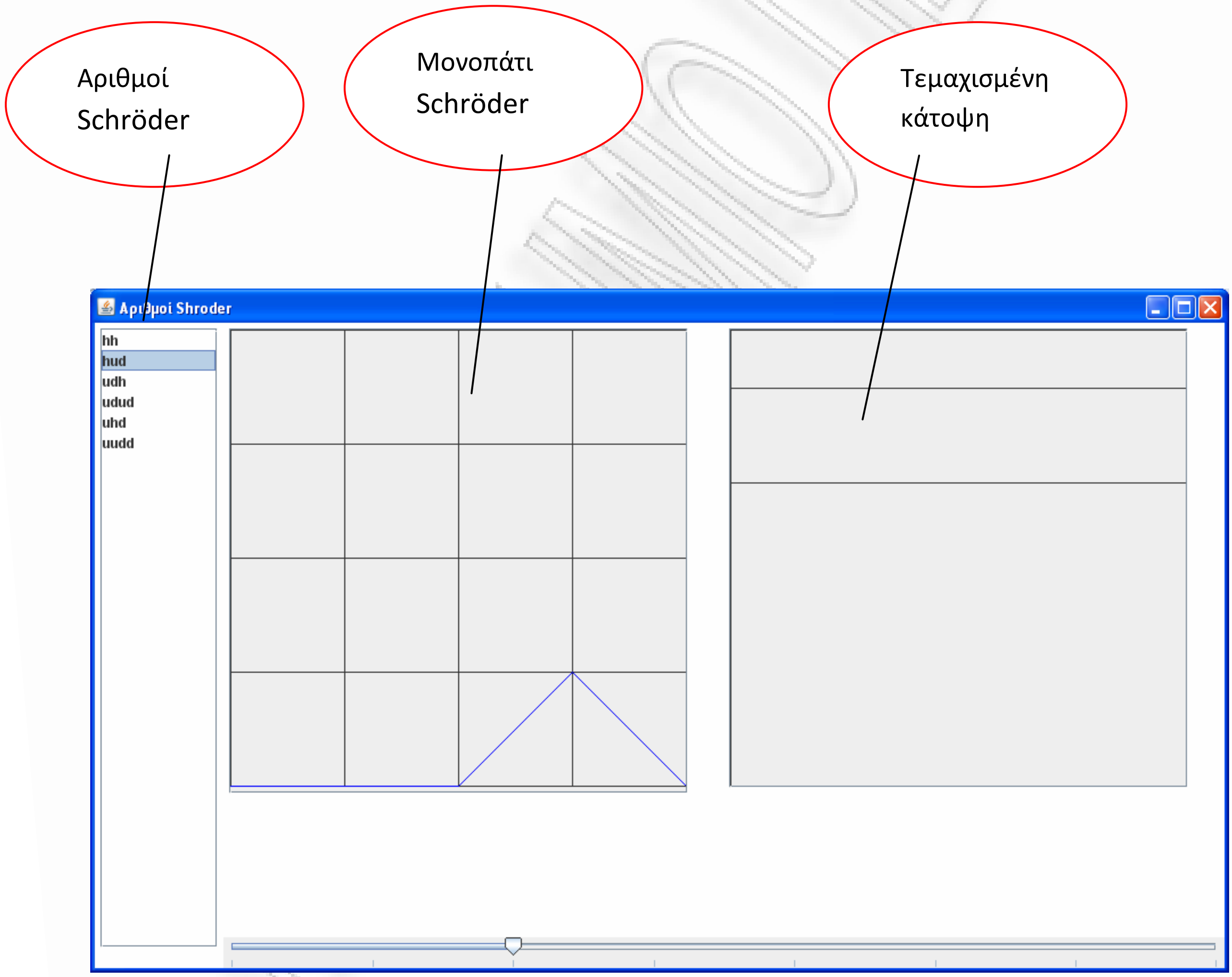


Κεφάλαιο 6ο

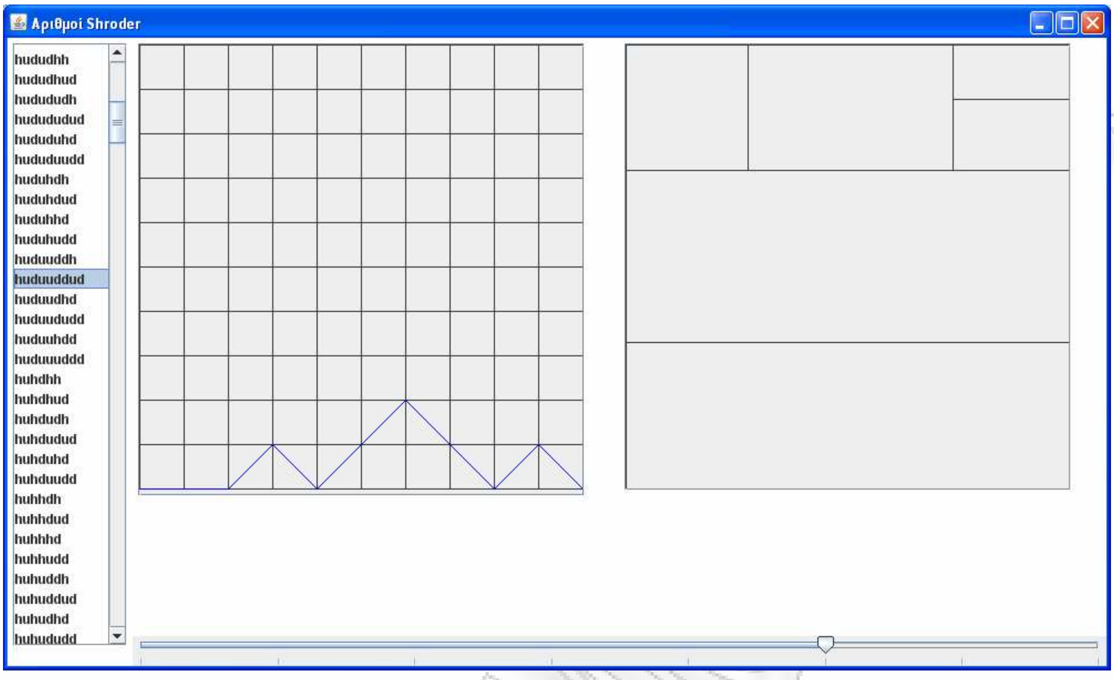
Παράρτημα – Οδηγός χρήσης λογισμικού

Στα πλαίσια της διπλωματικής εργασίας αναπτύχθηκαν 2 εφαρμογές. Η πρώτη απεικονίζει τους αριθμούς Schröder μήκους από 0 έως 14, τα αντίστοιχα μονοπάτια και την αντίστοιχη τεμαχισμένη κάτοψη.

Για αριθμούς ημιμήκους 4, έχουμε:



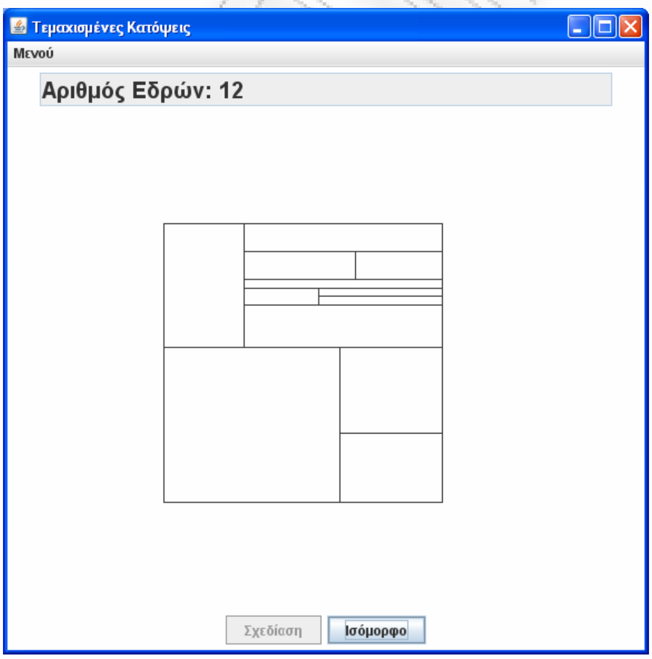
Ομοίως για αριθμό μήκους 10, έχουμε:



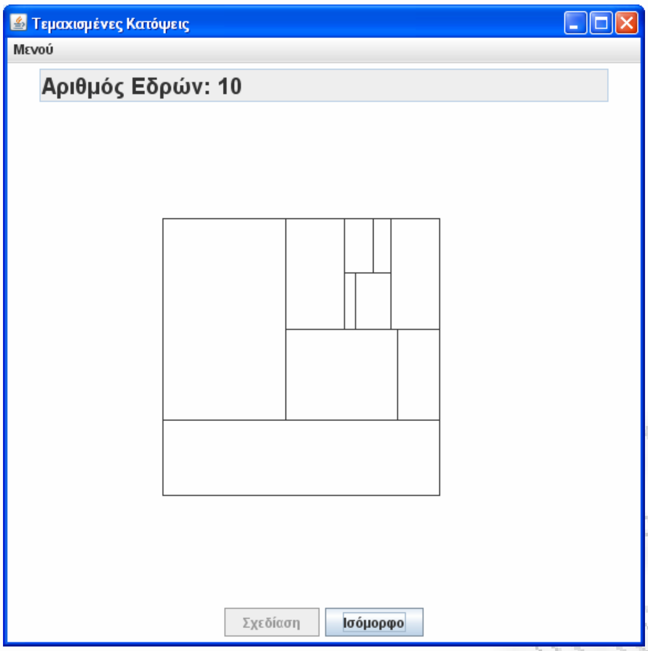
Στην δεύτερη εφαρμογή, μπορούμε να εισάγουμε ένα οποιδήποτε αριθμό Schröder και να εμφανίζεται η αντίστοιχη κάτοψη που αντιστοιχεί σ'αυτόν.

Παράδειγματα

Για τον αριθμό Schröder "**ududhhhuuuhhddudd**" έχουμε την παρακάτω 12-εδρική κάτοψη:



Ομοίως για τον αριθμό Schröder “**hhudhhuudhhd**” έχουμε την παρακάτω 10-εδρική κάτοψη:



Βιβλιογραφία

- E. Bender, S. Williamson, **Foundation of Combinatorics with Applications**, Dover Publications (2006).
- R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, **Concrete Mathematics**, 2nd Edition, Addison-Wesley (1994).
- C. Shen, C. Chu, **Bounds on Number of Slicing, Mosaic, and General Floorplans**, IEEE TCAD, Vol. 22, No. 10 (2003).
- K. Yamanaka, S. Nakano, **Coding Floorplans with Fewer Bits**. IEICE Trans. Fundamentals E89-A(5), 1181–1185 (2006).
- B. Yao, H. Chen, C. Cheng, R. Graham, **Floorplan representations: Complexity and connections**, ACM Transactions on Design Automation of Electronic Systems (TODAES), Vol. 8, No. 1, p.55-80 (2003).
- Θ. Παπαθεοδώρου, **Αλγόριθμοι**, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών (1999).