Πανεπιστήμιο Πειραιώς – Τμήμα Πληροφορικής

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Πληροφορική»

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Τίτλος Διατριβής	**Θεωρία γραφημάτων: Επίπεδα γραφήματα – Ειδικές μορφές γραφημάτων - Χρωματισμός γραφημάτων**
Ονοματεπώνυμο Φοιτητή	**Χαράλαμπος Κοντός**
Πατρώνυμο	**Άγγελος**
Αριθμός Μητρώου	**ΜΠΠΛ/ 06010**
Επιβλέπων	**Φούντας Ευάγγελος, Καθηγητής**

Ημερομηνία Παράδοσης **Μάρτιος 2011**

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

(υπογραφή)	(υπογραφή)	(υπογραφή)
Φούντας Ευάγγελος Καθηγητής	Τσικούρας Παναγιώτης Καθηγητής	Αποστόλου Δημήτριος Επίκουρος Καθηγητής

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Εκφράζω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ευάγγελο Φούντα ο οποίος στάθηκε πολύτιμος σύμβουλος σε αυτή μου την προσπάθεια. Η συμβολή του υπήρξε καθοριστική, όχι μόνο για τις επιστημονικές του υποδείξεις και συμβουλές αλλά με τη συνολικότερη στάση του, την ενθάρρυνσή του και την αμέριστη εμπιστοσύνη που επέδειξε στο πρόσωπό μου, διαμόρφωσε ένα πλαίσιο ουσιαστικής και γόνιμης επικοινωνίας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα δύο μέλη της επιτροπής : κ. Τσικούρα Παναγιώτη και κ. Αποστόλου Δημήτριο για τη συμμετοχή τους στην εξεταστική επιτροπή αλλά και για το χρόνο που διέθεσαν για την παρουσίαση αυτής της εργασίας.

Περίληψη

Η εργασία που ακολουθεί επιχειρεί μια εισαγωγή στη Θεωρία Γραφημάτων. Πρόκειται για μια ανασκόπηση στα σημαντικότερα μέρη της. Φιλοδοξία είναι να προσφέρει στον αναγνώστη τις βασικές γνώσεις και υποδομή που χρειάζεται για την περαιτέρω ενασχόλησή του με το αντικείμενο της Θεωρίας γραφημάτων.

Στο πρώτο κεφάλαιο δίνονται οι απαραίτητοι ορισμοί που θα διευκολύνουν τον αναγνώστη στη μελέτη της εργασίας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα δέντρα και μερικές εφαρμογές τους.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα γραφήματα των Euler και Hamilton καθώς και το πρόβλημα του Königsberg.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται ο τύπος του Euler και το θεώρημα του Kuratowski.

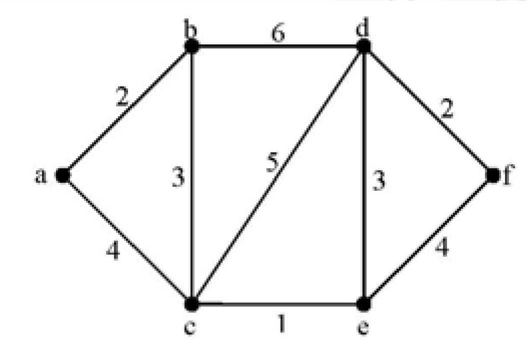
Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται μερικά ειδικά γραφήματα και οι αριθμοί Ramsey.

Στο έκτο και τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζεται ο χρωματισμός γραφημάτων και έναν αλγόριθμοι για την επίτευξη αυτού.

1° ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

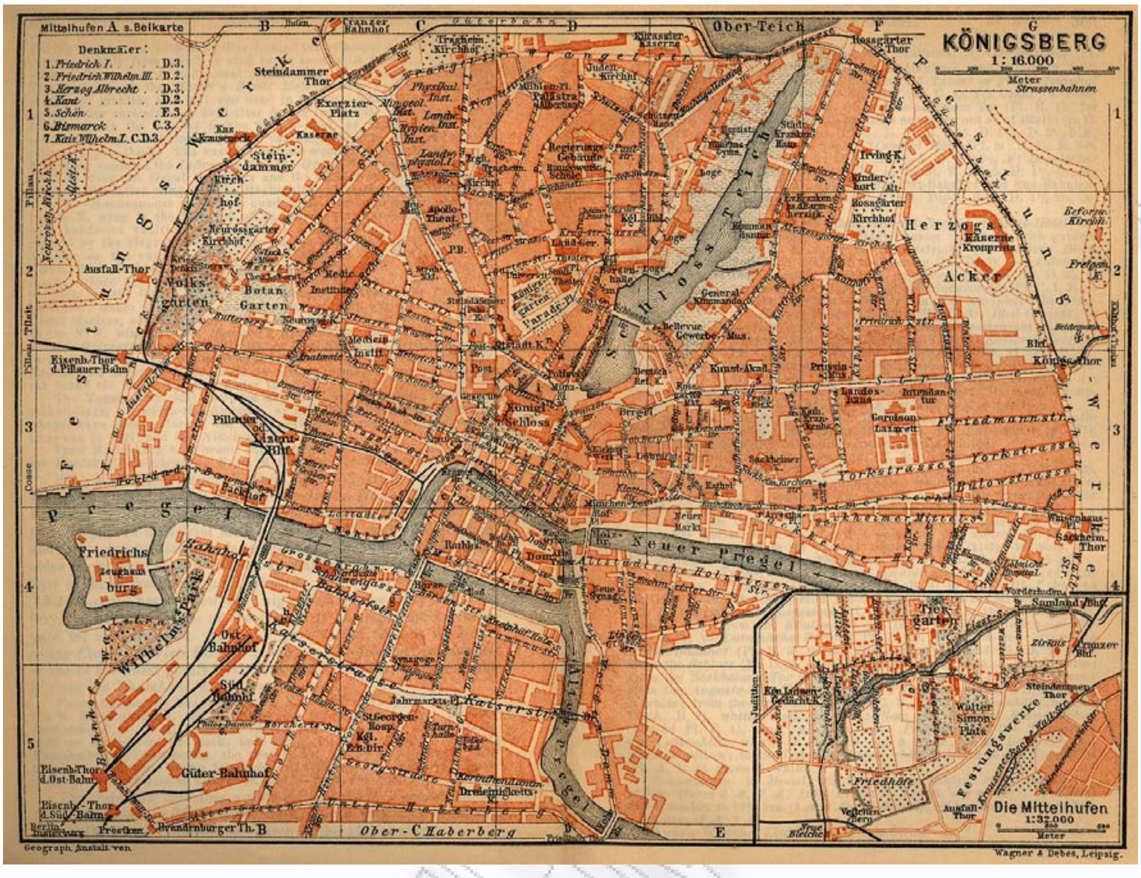
1.1 Η ιστορία της Θεωρίας Γραφημάτων

Η θεωρία γραφημάτων αποτελεί έναν από τους πιο γοητευτικούς κλάδους των διακριτών μαθηματικών. Μπορεί να αντιμετωπίσει με απλότητα πολλά προβλήματα με αποτέλεσμα να γίνεται ελκυστική σε μαθηματικούς και μη. Για παράδειγμα αν θέλαμε να απεικονίσουμε με γραφικό τρόπο τα κυριότερα σημεία ενδιαφέροντος για την πόλη μας με τις μεταξύ τους αποστάσεις θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το σχήμα 1.1.

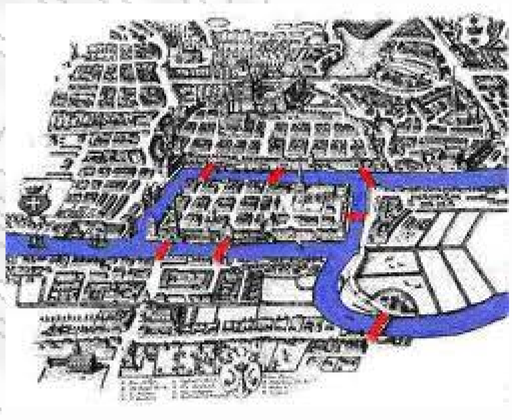


Σχήμα 1.1

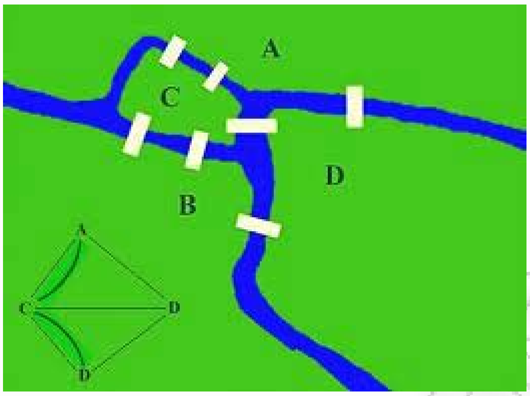
Λέγεται ότι η θεωρία της γεννήθηκε με το πρόβλημα του Euler για τις γέφυρες του Königsberg (σχήμα1.2) που τον 18^{o} αιώνα ανήκε στην Πρωσία. Λέγεται ότι η θεωρία της γεννήθηκε με το πρόβλημα του Euler για τις γέφυρες του Königsberg που τον 18^{o} αιώνα ανήκε στην Πρωσία. Η πόλη, την οποία διέσχιζε ο ποταμός Pregel, είχε δύο νησάκια και εφτά γέφυρες οι οποίες συνέδεαν τα διάφορα μέρη της πόλης. Οι κάτοικοι της συγκεκριμένης πόλης κατά τον περίπατό τους , ως παιχνίδι, προσπαθούσαν να διασχίσουν και τις εφτά γέφυρες αλλά μόνο μία φορά την καθεμία από αυτές.(σχήματα 1.3 , 1.4 , 1.5).Οι προσπάθειές τους αποτύγχαναν και απευθύνθηκαν στο δήμαρχο της πόλης ο οποίος κάλεσε τον Ελβετό μαθηματικό Euler,καθηγητή την εποχή εκείνη (1736) στο πανεπιστήμιο της Αγίας Πετρούπολης και του ανέθεσε το πρόβλημα. Ο Euler παρέστησε το παραπάνω πρόβλημα με ένα γράφημα το οποίο αποτελείτε από τα σημεία A,B,C,D τα οποία παριστάνουν τα σημεία της στεριάς και από τα ευθύγραμμα ή καμπυλωτά τμήματα τα οποία αντιστοιχούν στις εφτά γέφυρες (σχήμα 1.6). Με τον τρόπο αυτό απέδειξε ότι δεν υπάρχει τέτοια διαδρομή.



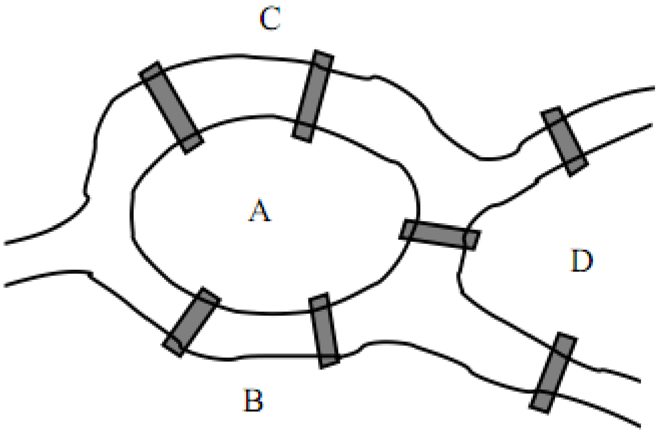
Σχήμα 1.2 – Χάρτης του Königsberg της εποχής



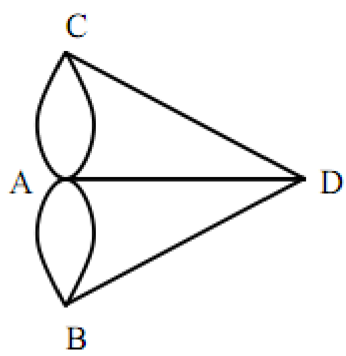
Σχήμα 1.3



Σχήμα 1.4

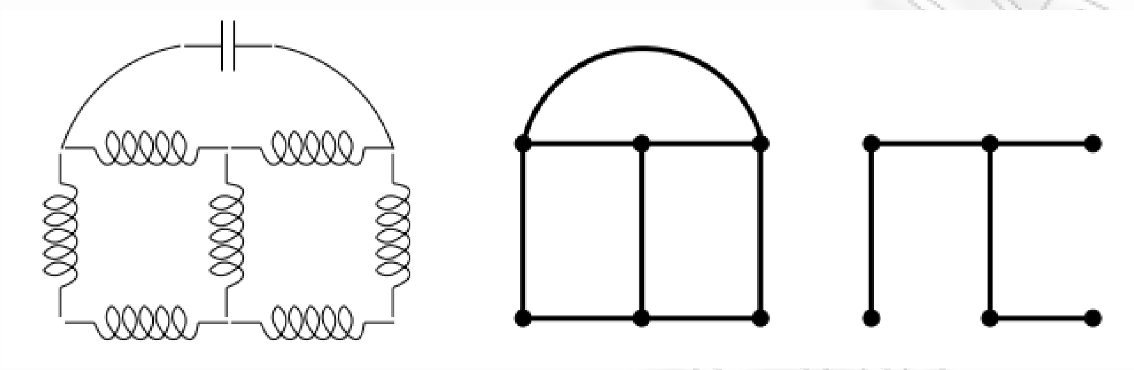


Σχήμα 1.5



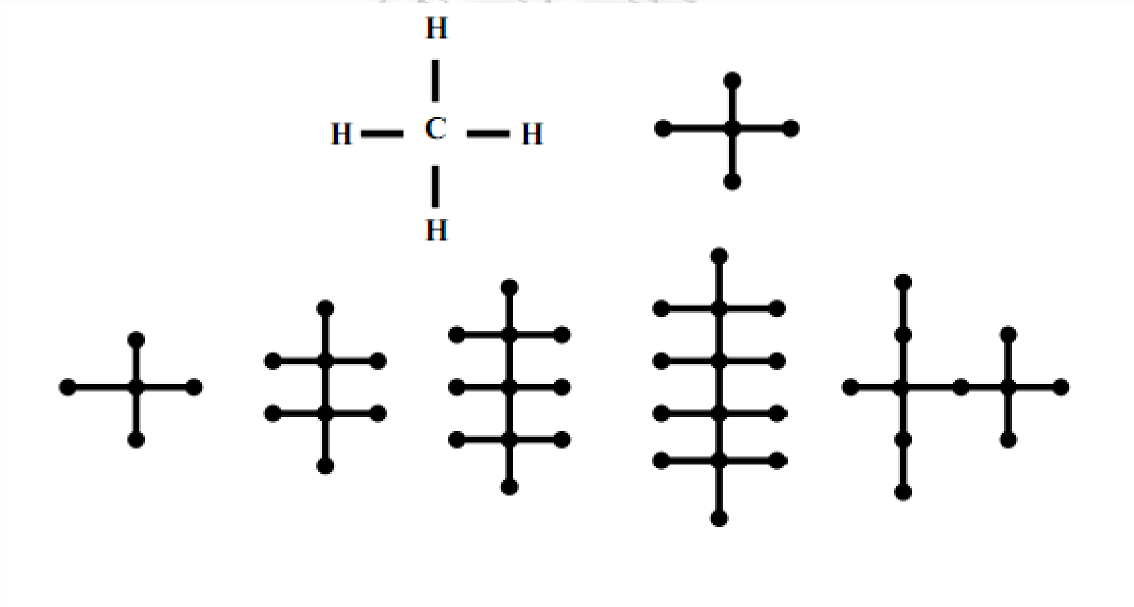
Σχήμα 1.6

Μια άλλη ιστορική στιγμή ήταν όταν το 1847 ο φυσικός G.Kirchhoff ανέπτυξε μια θεωρία για τα ηλεκτρικά κυκλώματα (σχήμα 1.7)



Σχήμα 1.7

Περίπου δέκα χρόνια αργότερα ο A.Cayley θα μελετήσει τα δέντρα προσπαθώντας να βρει το πλήθος των κορεσμένων υδρογονανθράκων C_nH_{2n+2} (σχήμα 1.8)



Σχήμα 1.8

Το 1840 ο A.Mobius παρουσιάζει μια διάλεξη για το πρόβλημα των τεσσάρων χρωμάτων. Το πρόβλημα ήταν αν αρκούν τέσσερα χρώματα για να χρωματιστεί ο πολιτικός χάρτης ενός άτλαντος, έτσι ώστε οι χώρες που συνορεύουν να έχουν διαφορετικά χρώματα.Το συγκεκριμένο πρόβλημα θα γίνει ευρέως γνωστό μετά το 1879,ύστερα από μια δημοσίευση του Mobius και θα παραμείνει άλυτο έως το 1976.

Επίσης μια άλλη εξέλιξη μπορεί να θεωρηθεί και αυτή του Sir W.R.Hamilton ο οποίος επινόησε ένα παιχνίδι (παρόμοιο με το μεταγενέστερο κύβο του Ρούμπιν).Ήταν ένα ξύλινο κανονικό πολύεδρο από 12 ακμές και 20 γωνίες. Κάθε έδρα του ήταν ένα κανονικό πεντάγωνο και ανά τρείς ακμές συναντιόνταν σε μια γωνία .Στις γωνίες ήταν σημειωμένες 20 μεγάλες πόλεις όπως Λονδίνο ,Παρίσι ,Νέα Υόρκη κ.α..Σκοπός του παιχνιδιού ήταν να βρεθεί μια διαδρομή ανάμεσα στις ακμές η οποία να περνά από κάθε πόλη μία μόνο φορά.

Από το 1920 και μετά αρχίζει η νεότερη ιστορία της θεωρίας γραφημάτων και ειδικά από το 1936 και μετά όταν εμφανίζεται το πρώτο βιβλίο γραμμένο από τον D.Koning.

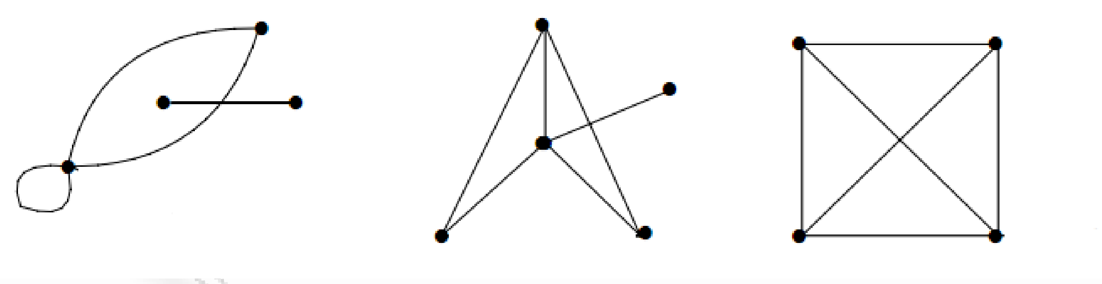
1.2 Βασικές Έννοιες

Ορισμός 1.1: Μη κατευθυνόμενος γράφος

Ένας κατευθυνόμενος γράφος G είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος G=<V(G),E(G)> όπου

V(G)={$v_1,\ldots,v_n$} το σύνολο κορυφών του G και

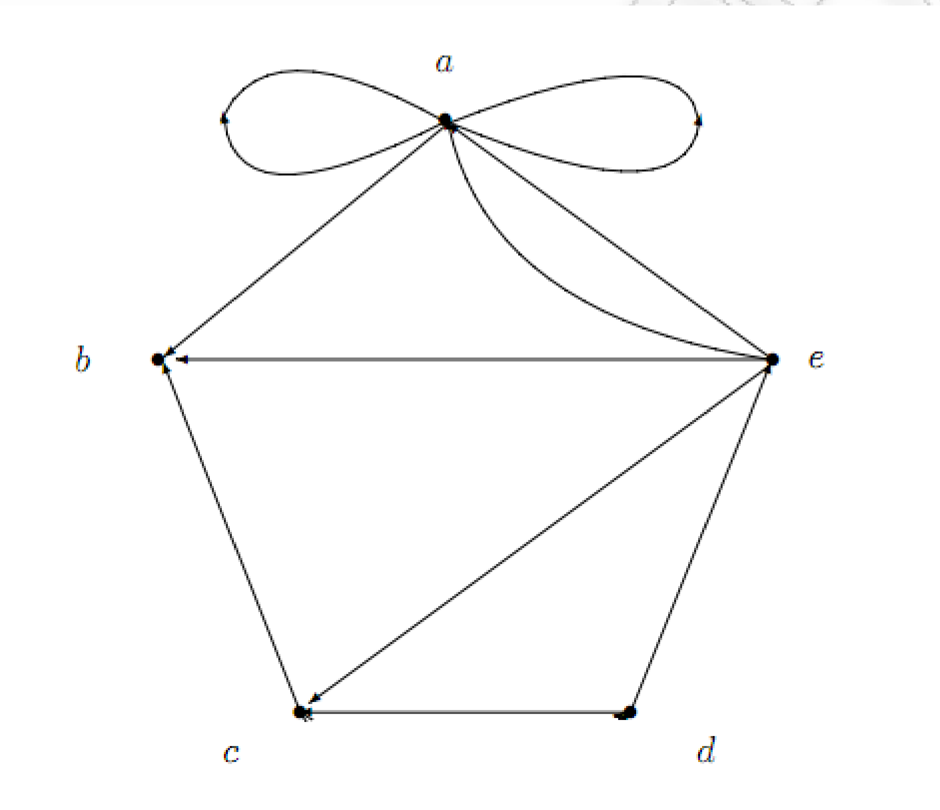
E(G)={$e_1,\ldots,e_n$} το σύνολο ακμών του G



Σχήμα 1.9

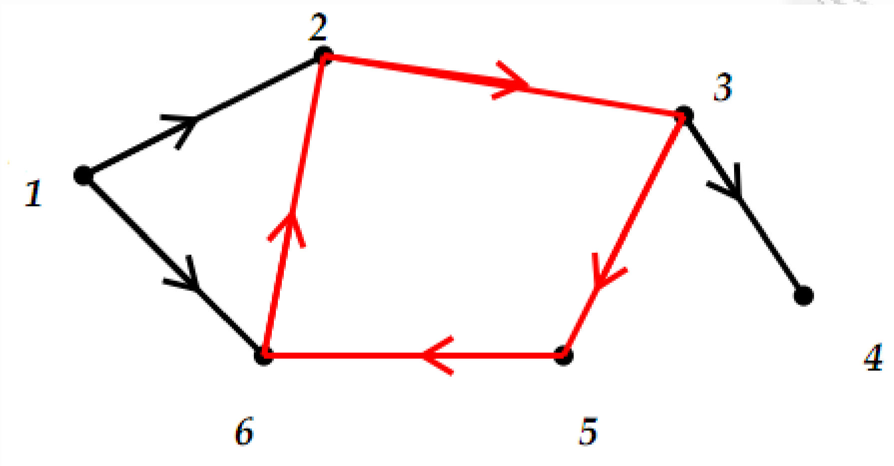
Ορισμός 1.2: Κατευθυνόμενος γράφος

Ένας κατευθυνόμενος γράφος G είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος G=(V(G),E(G)) όπου
$V(G)=\{v_1,\ldots,v_n\}$ το σύνολο κορυφών του G και
$E(G)=\{e_1,\ldots,e_n\}$ το σύνολο ακμών του G
Κάθε ακμή είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος από κορυφές



Σχήμα 1.10

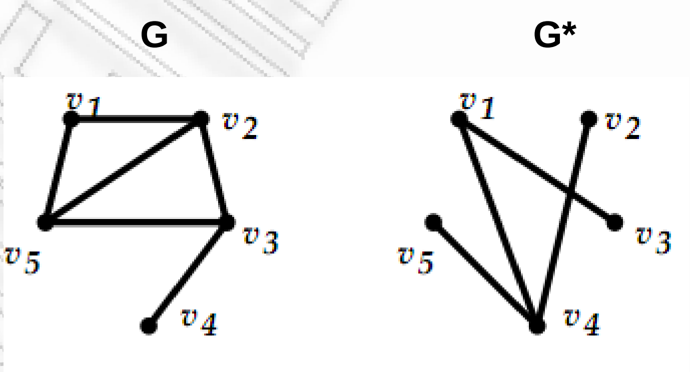
Μπορούν ορισμένες φορές τα γραφήματα να χρωματιστούν .Για παράδειγμα σε ένα χάρτη μπορούν να σημειωθούν με διαφορετικό χρώμα οι δρόμοι με την μεγαλύτερη επικινδυνότητα.



Σχήμα 1.11

Ορισμός 1.2: Συμπλήρωμα γράφου

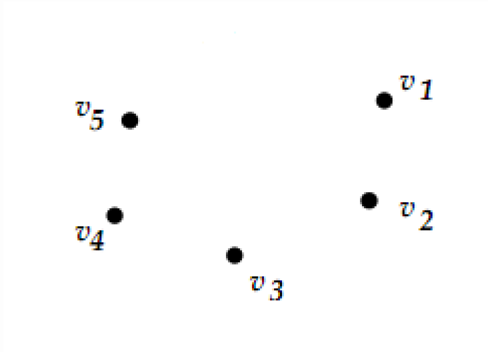
Το συμπλήρωμα G* ενός γράφου G είναι ο γράφος G*=(V(G*),E(G*)) όπου
V(G) = V(G*) και uv $\in$ E(G*) αν και μόνον αν uv $\notin$ E(G)



Σχήμα 1.12 – Το G και το συμπλήρωμά του

Ορισμός 1.3: Μηδενικό γράφημα

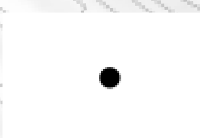
$G=(V,E)$ με $E=\varnothing$



Σχήμα 1.13

Ορισμός 1.4: Τετριμμένο γράφημα

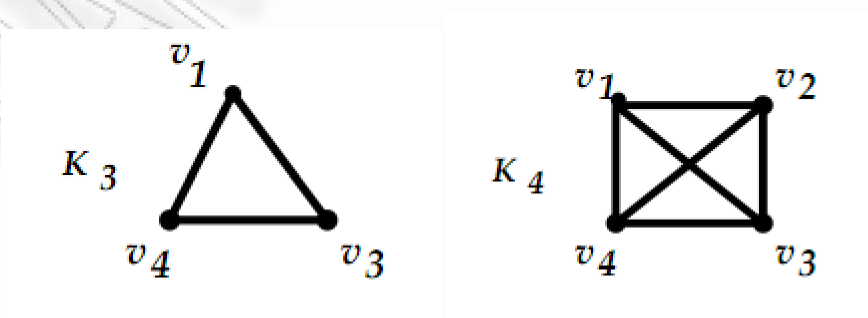
$G=(V,E)$ με $V=|1|$



Σχήμα 1.14

Ορισμός 1.5: Πλήρες γράφημα

$G=(V,E)$ τέτοιο ώστε $\forall$ x,y $\in$ V με x $\neq$ y ισχύει ότι x,y $\in$ E
(Το πλήρες γράφημα με n κόμβους ονομάζεται Kn)



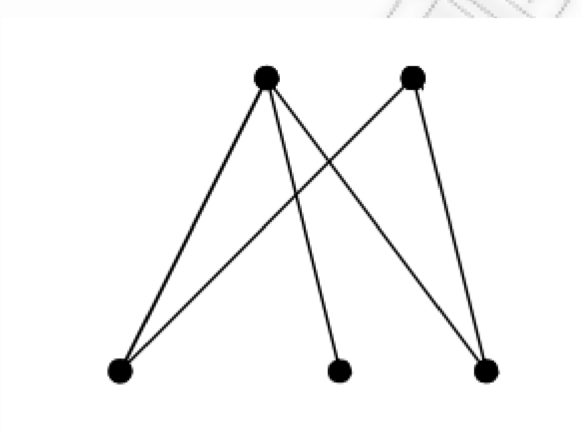
Σχήμα 1.15

Ορισμός 1.6: Σύνολο ανεξαρτησίας

Ένα σύνολο ανεξαρτησίας σε ένα γράφο G είναι υποσύνολο κορυφών Q $\subseteq$V οι οποίες δεν συνδέονται μεταξύ τους με ακμή.

Ορισμός 1.7: Διμερές γράφημα

Ένα γράφημα είναι διμερές όταν το σύνολο κορυφών του είναι η ένωση δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων τέτοιων ώστε κάθε ακμή του G να περιέχει ακριβώς μία κορυφή από καθένα από αυτά τα σύνολα.



Σχήμα 1.16

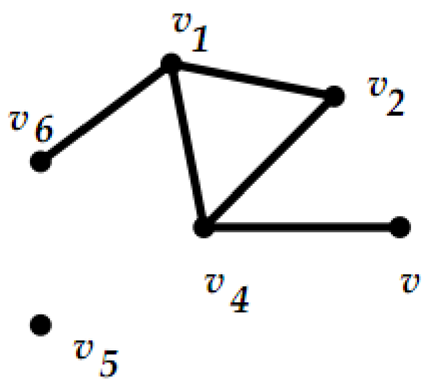
Ορισμός 1.8: κ-μερές γράφημα

Ένα γράφημα G είναι κ-μερές αν το σύνολο κορυφών του V(G) είναι η ένωση κ ανεξάρτητων συνόλων.

Ορισμός 1.9: Βαθμός κορυφής

Βαθμός μιας κορυφής υ, ονομάζεται το πλήθος των δεσμών του G, των οποίων η κορυφή υ είναι άκρο.

Συμβολίζεται με d(υ)



Σχήμα 1.17

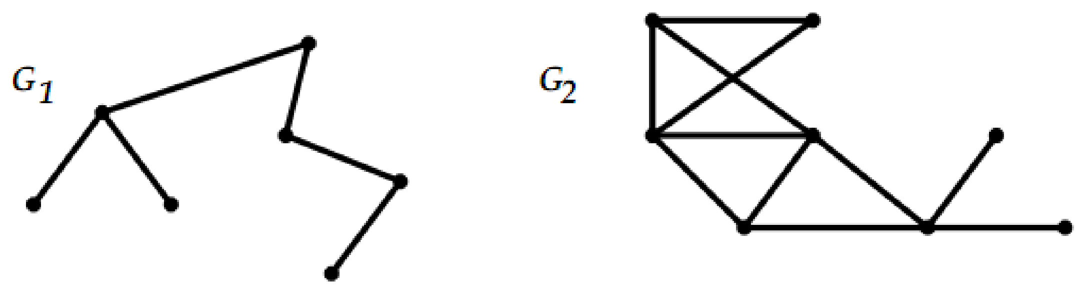
Στο παραπάνω σχήμα $d(υ_1)= d(υ_4)=3$, $d(υ_2)=2$, $d(υ_3)= d(υ_6)=1$, $d(υ_5)=0$
Κάθε κόμβος βαθμού μηδέν λέγεται μεμονωμένος.

Ορισμός 1.10: d-κανονικό γράφημα.

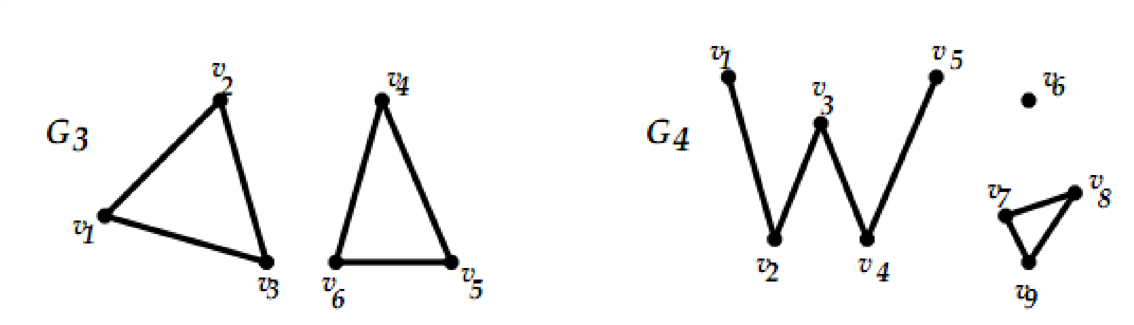
Ένα γράφημα ονομάζεται d-κανονικό όταν $d(υ)=d \quad \forall \; υ \in V$

Ορισμός 1.11: Συνεκτικό γράφημα

Ένα γράφημα ονομάζεται συνεκτικό αν για κάθε ζεύγος κορυφών μπορούμε να βρούμε μονοπάτι το οποίο να τις ενώνει. Αν αυτό δεν συμβαίνει το γράφημα λέγεται μη συνεκτικό.



Σχήμα 1.18 – Συνεκτικά γραφήματα



Σχήμα 1.19 – Μη συνεκτικά γραφήματα

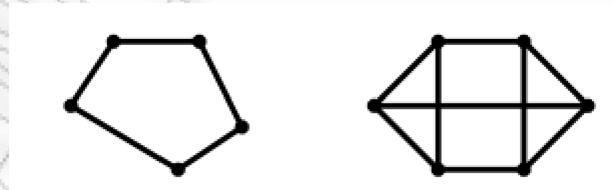
Ορισμός 1.12: Ένωση γραφημάτων

Ένωση δύο γραφημάτων G και P ονομάζουμε το γράφημα που έχει σύνολο κορυφών και σύνολό ακμών τις ενώσεις των συνόλων κορυφών (V(G) ∪ V(P)) και συνόλων ακμών (E(G) ∪ E(P)) των γραφημάτων G και P αντίστοιχα.

1.3 Μονοπάτια και κυκλώματα

Ορισμός 1.13: Κύκλος και κυκλικό γράφημα.

Στις ειδικές περιπτώσεις όπου d(u)=2ή3 τότε τα γραφήματα ονομάζονται Κύκλος και κυκλικό γράφημα αντίστοιχα.



Σχήμα 1.19 – Κύκλος και κυκλικό γράφημα αντίστοιχα

Ορισμός 1.14: Κύκλωμα

Ένα κύκλωμα είναι ένα μονοπάτι (e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{ik}) στο οποίο η τερματική κορυφή της e_{ik} συμπίπτει με την αρχική κορυφή της e_{i1}

Ορισμός 1.15: Μονοπάτι

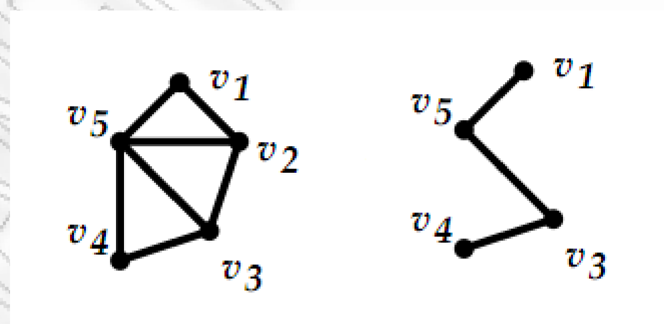
Σε ένα γράφημα ονομάζουμε μονοπάτι μια ακολουθία ακμών $e_1,e_2,\dots e_n$ έτσι ώστε η τελική κορυφή της ακμής e_i να συμπίπτει με την e_{i+1} δηλαδή οι e_i και e_{i+1} είναι προσκείμενες.

Απλό ονομάζεται ένα μονοπάτι στο οποίο δεν συναντούμε την ίδια ακμή δύο φορές.
Στοιχειώδες ονομάζεται ένα μονοπάτι στο οποίο δεν συναντούμε την ίδια κορυφή δύο φορές.

1.4 Υπογραφήματα

Ορισμός 1.16: Υπογράφημα

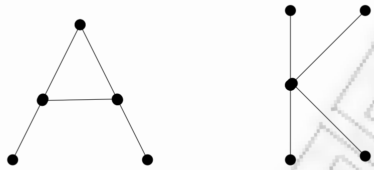
Ένα γράφημα W είναι υπογράφημα του G αν $V_W \subseteq V_G$ και $E_W \subseteq E_G$. Συμβολίζουμε $W \subseteq G$



Σχήμα 1.20 – Ένα γράφημα και ένα υπογράφημά του αντίστοιχα

1.5 Ισομορφισμός γραφημάτων

Λέμε ότι τα γραφήματα G(V,E) και G'(V',E') είναι ισόμορφα αν υπάρχει αντιστοιχία ένα προς ένα f:V→V έτσι ώστε το {u,v} να είναι ακμή του G αν και μόνον αν (f(u),f(v)) να είναι ακμή του G'.

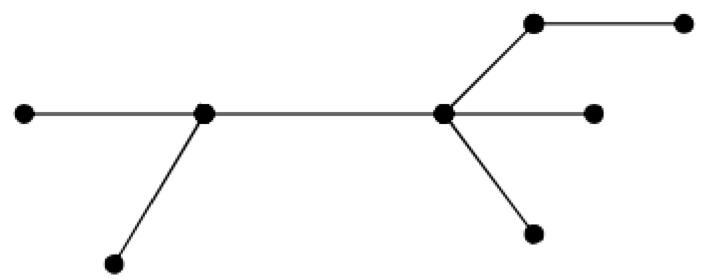


Σχήμα 1.20 – Ισόμορφα γραφήματα

2° ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΕΝΔΡΑ

2.1 Γενικά

Ορισμός 2.1: Δένδρο ονομάζεται ένα συνεκτικό γράφημα το οποίο δεν περιέχει κύκλους.



Σχήμα 2.1

Ορισμός 2.1: Δάσος

Δάσος ονομάζεται ένα μη συνεκτικό γράφημα το οποίο δεν περιέχει κύκλους.

Πρόταση 2.1: Σε κάθε γράφημα το πλήθος των κορυφών βαθμού περιττού είναι άρτιος αριθμός.

Απόδειξη: Έστω το γράφημα G και K_1 και K_2 τα σύνολα κορυφών άρτιου και περιττού βαθμού αντίστοιχα.

$$\sum_{x \in K_1} \beta(x) + \sum_{x \in K_2} \beta(x) = \sum_{x \in K} \beta(x)$$

Το δεύτερο μέλος είναι άρτιος αριθμός. Αφού το δεύτερο σκέλος του αθροίσματος είναι άρτιος ,έπεται ότι και το δεύτερο σκέλος του αθροίσματος είναι άρτιο. Άρα $|K_2|$ άρτιος. □

Πρόταση 2.2: Αν ένα συνεκτικό γράφημα, με δύο τουλάχιστον κορυφές, έχει ακμές λιγότερες από τις κορυφές του, τότε το γράφημα έχει κορυφή βαθμού ένα.

Απόδειξη: Έστω ότι το γράφημα έχει $v \geq 2$ κορυφές. Αφού το γράφημα είναι συνεκτικό δεν περιέχει απομονωμένη κορυφή. Αν δεν έχει κορυφή βαθμού ένα τότε κάθε κορυφή θα έχει βαθμό τουλάχιστον δύο και το άθροισμα των βαθμών του γραφήματος θα ξεπερνά ή θα ισούται με 2ν που σημαίνει από την Πρόταση 2.1 ότι οι ακμές είναι τουλάχιστον ν, άτοπο. □

Πρόταση 2.3: ένα συνεκτικό γράφημα με ν κορυφές έχει τουλάχιστον ω-1 ακμές.

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά. Η Πρόταση είναι προφανής για ν=1.Για $v \geq 1$ ότι όλα τα συνεκτικά γραφήματα με ν κορυφές έχουν τουλάχιστον ν-1 ακμές. Έστω ότι το γράφημά μας έχει ν+1 κορυφές. Αν το γράφημα δεν έχει ν+1 ακμές τότε από την Πρόταση 2.2 έχει μία κορυφή με βαθμό ένα. Αν παραλείψουμε αυτή την κορυφή μαζί με την ακμή που καταλήγει σε αυτή έχουμε ένα συνεκτικό γράφημα με ν κορυφές και ν-1 ακμές. Αν επαναφέρουμε την ακμή που παραλείψαμε προηγουμένως καταλήγουμε σε ν ακμές για το γράφημά μας. □

Πρόταση 2.4: Αν αφαιρέσουμε μια ακμή από κύκλο ενός συνεκτικού γραφήματος, τότε παράγουμε επίσης ένα συνεκτικό γράφημα.

Απόδειξη: Αν αυτή η ακμή που θα αφαιρέσουμε είναι βρόγχος τότε προφανώς η συνεκτικότητα του γραφήματος δεν αλλάζει. Έστω ότι έχουμε την ακμή (u,v) με $u \neq v$, τότε επειδή πρόκειται για ακμή σε κύκλο, υπάρχει και άλλος δρόμος, εκτός από την ακμή (u,v) που συνδέει τις κορυφές u και v. □

Πρόταση 2.5: Τα συνεκτικά γραφήματα με ν κορυφές και ν-1 ακμές είναι δένδρα.

Απόδειξη: Έστω ένα συνεκτικό γράφημα με ν κορυφές και ν-1 ακμές δεν περιέχει κύκλο. Αν περιείχε ένα κύκλο τότε θα μπορούσαμε να φέρουμε μια ακμή από τον κύκλο και το γράφημα να παραμένει συνεκτικό. Αν αυτό συνέβαινε θα είχαμε συνεκτικό γράφημα με ν κορυφές και ν-2 ακμές, σε αντίθεση με την Πρόταση 2.4. □

2.2 **Δυαδικά δένδρα**

Ορισμός 2.2: Δένδρο με ρίζα

Δένδρο T με ρίζα είναι ένα δένδρο με ειδικά επιλεγμένο κόμβο (τη ρίζα του δένδρου).

Ορισμός 2.3: Επίπεδο, γονέας, παιδί, απόγονος, πρόγονος, φύλλο, ύψος ενός δένδρου.

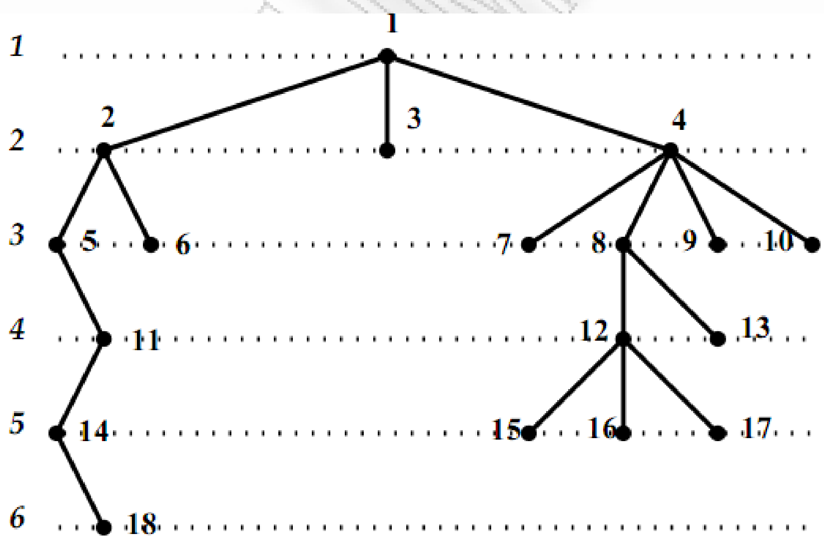
Ορίζουμε το επίπεδο l(υ) ενός κόμβου υ του G ως εξής : l(r)=1 και αν στο (μοναδικό) r-υ μονοπάτι (r,…..u,υ) έχουμε l(u)=i τότε (υ)=i+1.

Στην περίπτωση αυτή του u λέγεται γονέας υ Και το υ παιδί του u. Παιδία του ίδιου γονέα λέγονται αδέρφια.

Αν υπάρχει διαδρομή στο δένδρο από ένα κόμβο α σε ένα κόμβο β, η οποία χρησιμοποιεί κόμβους σε επίπεδα που συνεχώς αυξάνουν τότε λέμε ότι το α είναι πρόγονος του β και το β ότι είναι απόγονος του α.

Ένας κόμβος χωρίς παιδία λέγεται φύλλο. Αλλιώς λέγεται ενδιάμεσος κόμβος

Ύψος ή βάθος ενός δένδρου λέγεται το μεγαλύτερο από τα επίπεδα των κόμβων του.



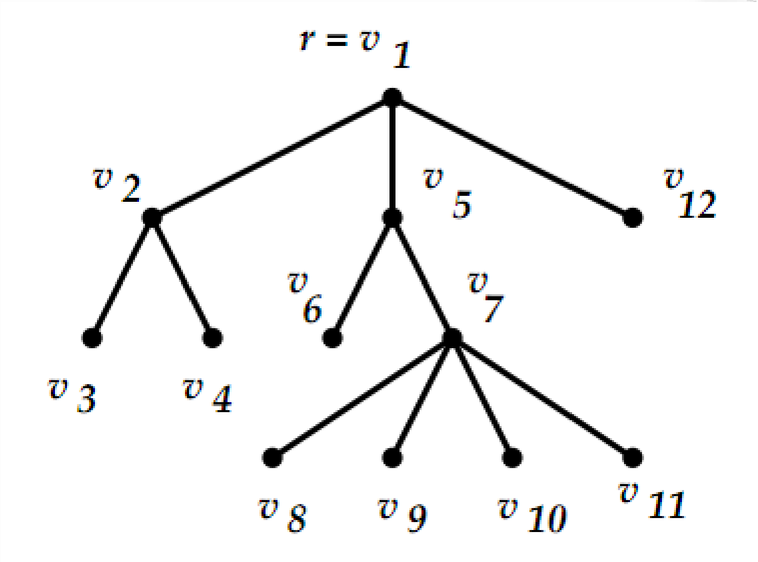
1 : ρίζα
5, 6 : παιδιά του 2
7, 8, 9, 10 : παιδιά του 4
2 : πρόγονος των 5,6, 11,14,18
3, 6, 7, 9, 10, 13, 15, 16, 17, 18 : φύλλα
11 : ενδιάμεσος κόμβος

2 : γονέας των 5, 6
4 : γονέας του 7
15, 16, 17 : αδέλφια
15 : απόγονος των 1, 4, 8, 12
Ύψος του δένδρου = 6.

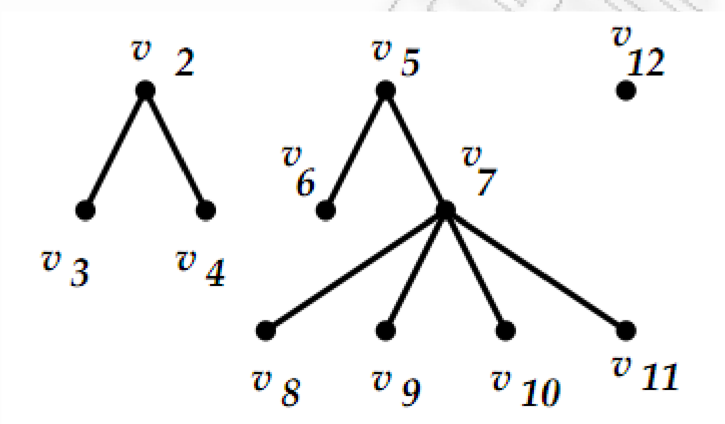
Σχήμα 2.2

Ορισμός 2.4: Υποδένδρα

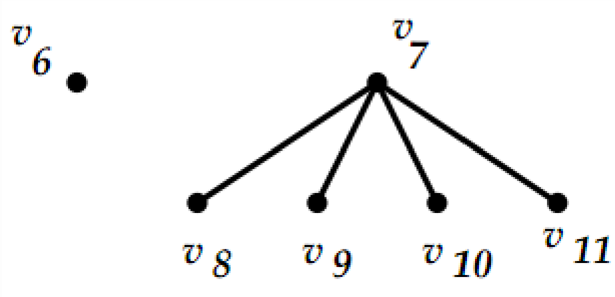
Έστω r η ρίζα ενός δένδρου T. Τα δένδρα του δάσους T-r λέγονται υποδένδρα της ρίζας r.



Σχήμα 2.2 - Δένδρο T



Σχήμα 2.3 - Υποδένδρα της ρίζας r



Σχήμα 2.4 - Υποδένδρα του κόμβου υ_5

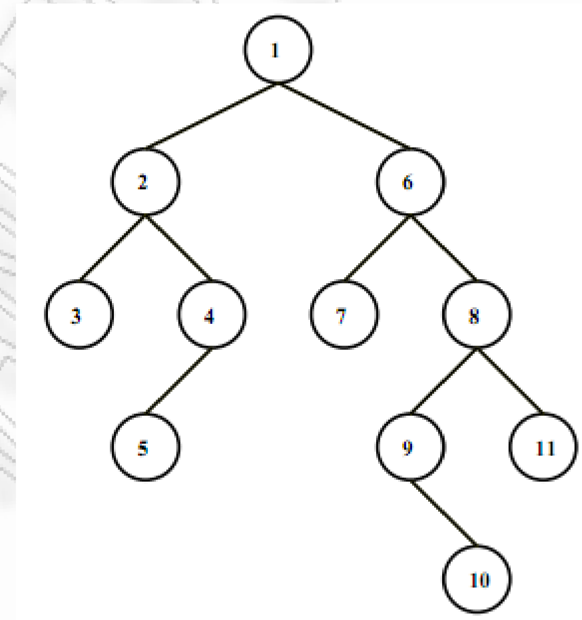
Ορισμός 2.5: Δυαδικό δένδρο

Δυαδικό δένδρο ονομάζεται ένα δένδρο με ρίζα αν κάθε κόμβος που δεν είναι φύλλο έχει είτε ένα αριστερό, είτε ένα δεξί παιδί, είτε δύο παιδιά (ένα αριστερό και ένα δεξί).

2.3 Διάσχιση δυαδικών δένδρων

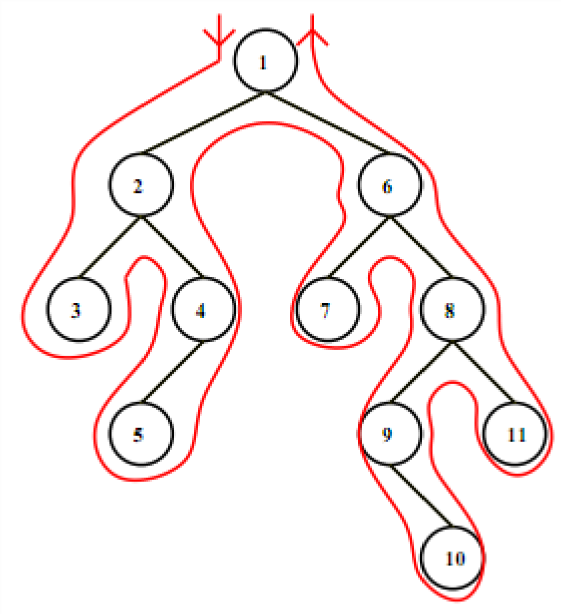
2.3.1 Προδιάταξη

Επισκεπτόμαστε κάθε κόμβο πριν επισκεφτούμε σε προδιάταξη το αριστερό και το δεξί υποδένδρο του. Έστω ότι θέλουμε να επισκεφθούμε με προδιάταξη τους κόμβους του παρακάτω δένδρου.



Σχήμα 2.5

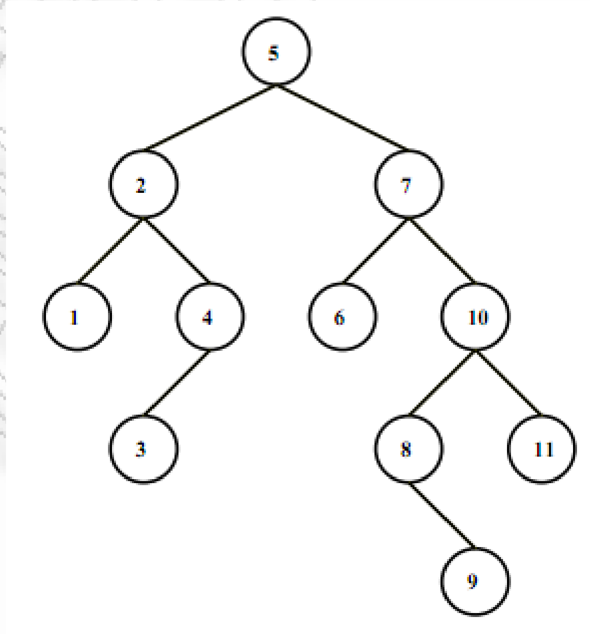
Ένας πρακτικός τρόπος για να το θυμόμαστε είναι ο ακόλουθος.



Σχήμα 2.6

2.3.2 Ενδοδιάταξη

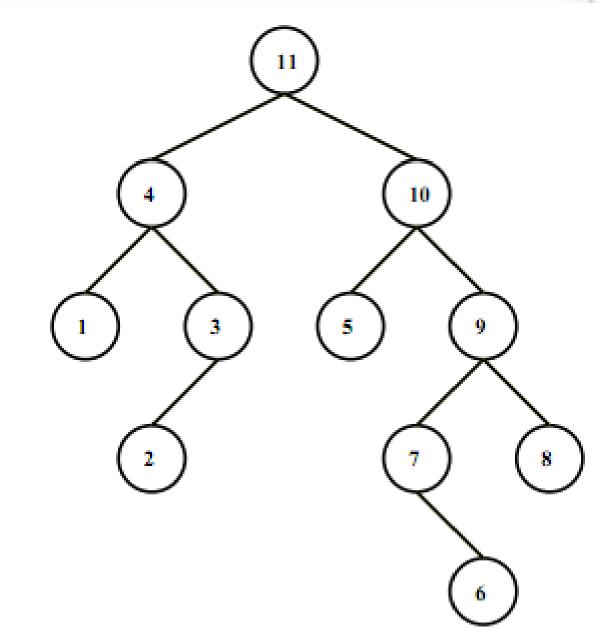
Επισκεπτόμαστε κάθε κόμβο μετά την επίσκεψη σε ενδοδιάταξη του αριστερού και πριν την επίσκεψη σε ενδοδιάταξη του αριστερού υποδένδρου του. Ένα παράδειγμα είναι το ακόλουθο.



Σχήμα 2.7

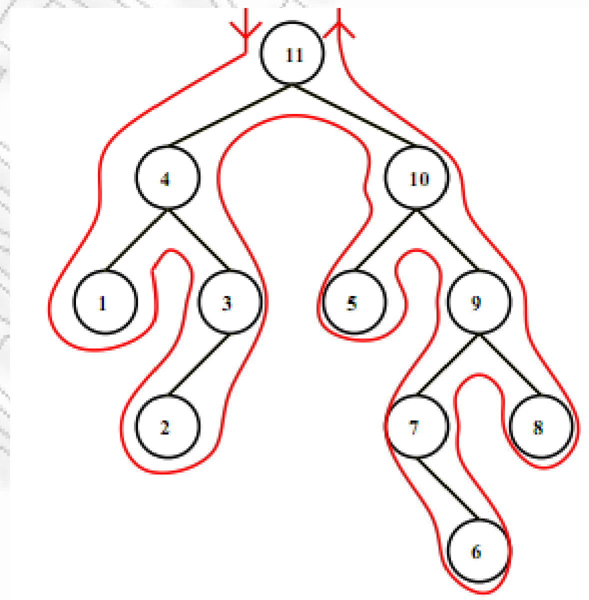
2.3.3 **Μεταδιάταξη**

Επισκεπτόμαστε κάθε κόμβο αφού έχουμε επισκεφθεί σε μεταδιάταξη και το αριστερό και το δεξί υποδένδρο του.



Σχήμα 2.8

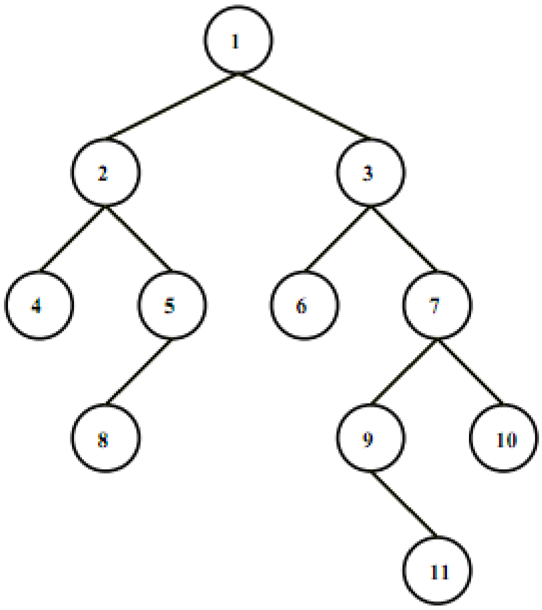
Ένας πρακτικός τρόπος για να το θυμόμαστε είναι ο ακόλουθος. Αριθμούμε τον κάθε κόμβο την τελευταία φορά που τον συναντάμε καθώς κινούμαστε όπως δείχνει το σχήμα.



Σχήμα 2.9

2.3.4 **Διάσχιση κατά σειρά επιπέδων**

Επισκεπτόμαστε τις κορυφές από το μικρότερο στο μεγαλύτερο επίπεδο, όπου σε κάθε επίπεδο επισκεπτόμαστε τις κορυφές από τα αριστερά προς τα δεξιά.



Σχήμα 2.10

2.4 **Ελάχιστη διαδρομή σε βεβαρημένο γράφημα**

Ορισμός 2.4: Κόστος διαδρομής

Κόστος μιας διαδρομής σε ένα γράφημα G είναι το κόστος του υπογραφήματος που σχηματίζεται από τη διαδρομή.

Ορισμός 2.5: Βεβαρημένο γράφημα

Έστω ένα γράφημα G, Σε κάθε ακμή του e αντιστοιχούμε ένα αριθμό τον οποίο ονομάζουμε βάρος ή κόστος. Το γράφημα μαζί με τα βάρη των ακμών του θα ονομάζεται βεβαρημένο.

Πρόβλημα ελάχιστης διαδρομής: Έστω ένα σύνολο κόμβων, κάποιοι από τους οποίους είναι μεταξύ τους συνδεδεμένοι με θετικά 'μήκη' συνδέσεων. Θέλουμε να βρούμε τη συντομότερη απόσταση από τον κόμβο 1 προς οποιονδήποτε άλλον κόμβο (όπου η συντομότερη απόσταση είναι εκείνη που ελαχιστοποιεί το άθροισμα των μηκών κατά μήκος κάποιου δρόμου, που ονομάζεται 'συντομότερος δρόμος').

Ο αλγόριθμος για την επίλυση του ανωτέρου προβλήματος που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια οφείλεται στο Δανό επιστήμονα Edsger Wybe Dijkstra (May 11, 1930 – August 6, 2002).

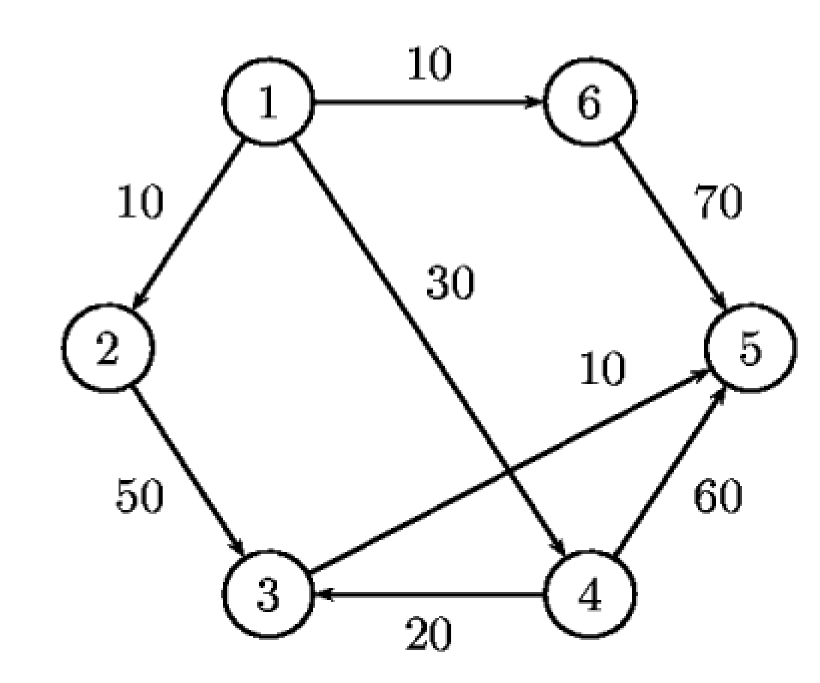
Η ιδέα είναι να δημιουργήσουμε ελάχιστες αποστάσεις από το κόμβο 1 επαναλαμβάνοντας τα παρακάτω βήματα n-1 φορές.

- Σε κάθε επανάληψη επιλέγεται ο κόμβος v με την ελάχιστη απόσταση από τον κόμβο 1 (Θεωρούμε μόνο διαδρομές που περνούν από κόμβους του ήδη σχηματισμένου δένδρου) και προστίθεται στο δένδρο.
- Ενημερώνονται οι αποστάσεις που επηρεάζονται λόγω της προσθήκης του v

Αλγόριθμος:

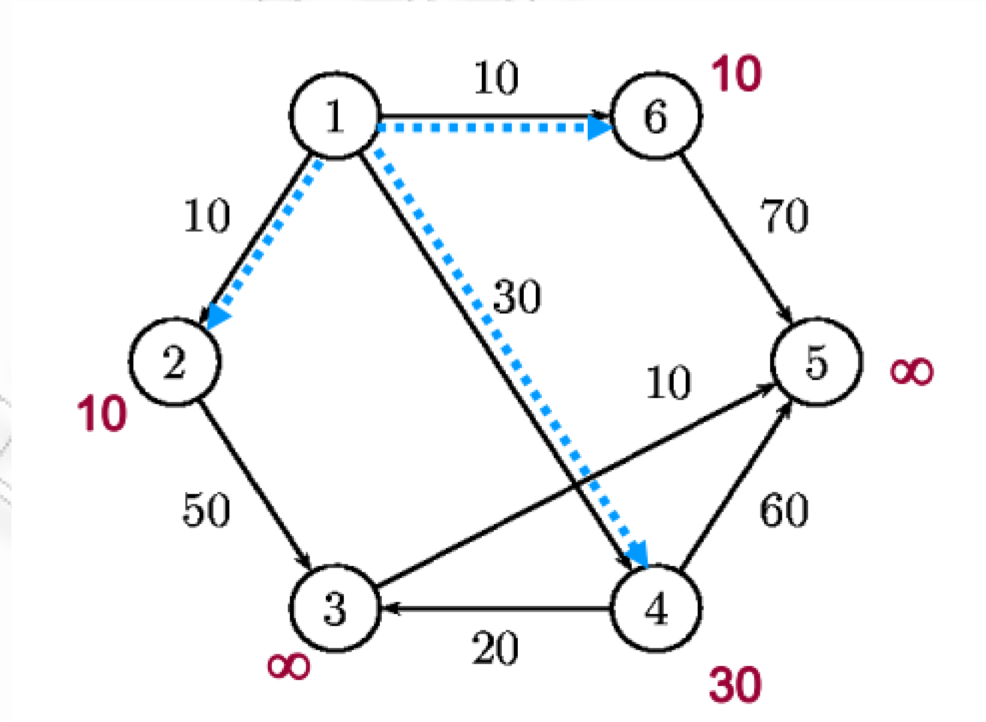
```
procedure Dijkstra;
begin (* Αρχικοποίηση *)
  S := {1};
  for i:=2 to n do begin D[i]:=cost[1,i]; P[i]:=1 end;
  for i:=2 to n−1 do
  begin
    Select w from V − S such that D[w] is minimum;
    S := S + {w};
    for all v in V − S do
    begin
      if D[v] > D[w] + C[w,v] then
      begin
        P[v] := w; D[v] := D[w] + C[w,v]
      end
    end
  end
end
```

Παράδειγμα: Να λυθεί το πρόβλημα ελάχιστης διαδρομής αρχής 1 για το παρακάτω γράφημα χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Dijkstra.

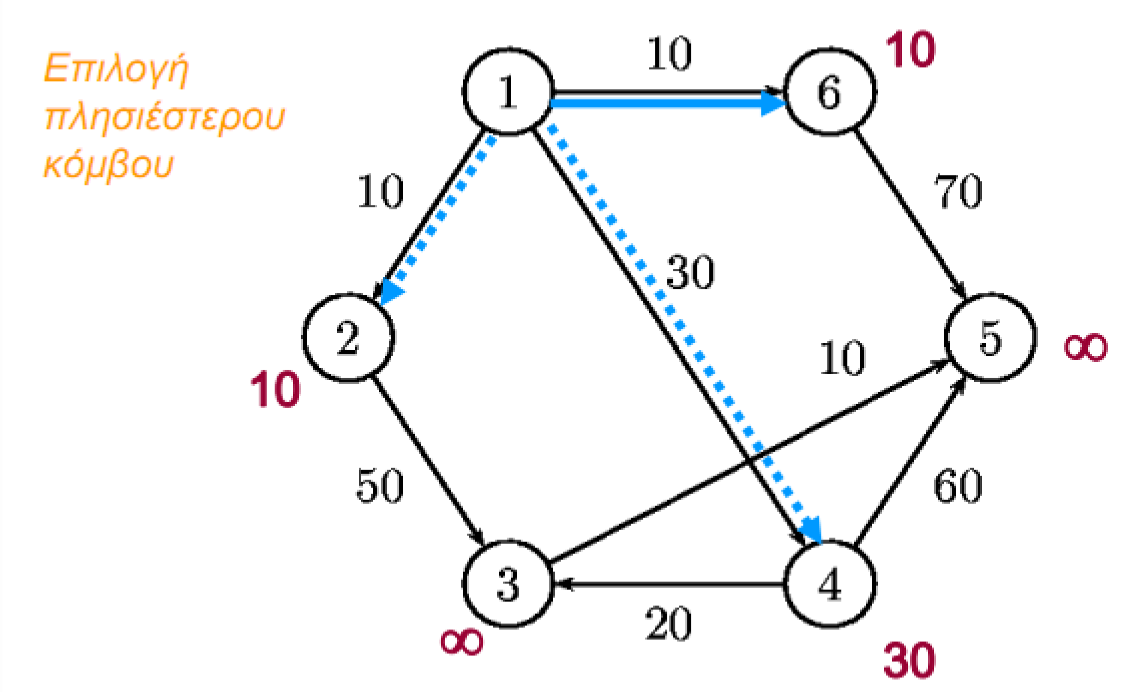


Σχήμα 2.11

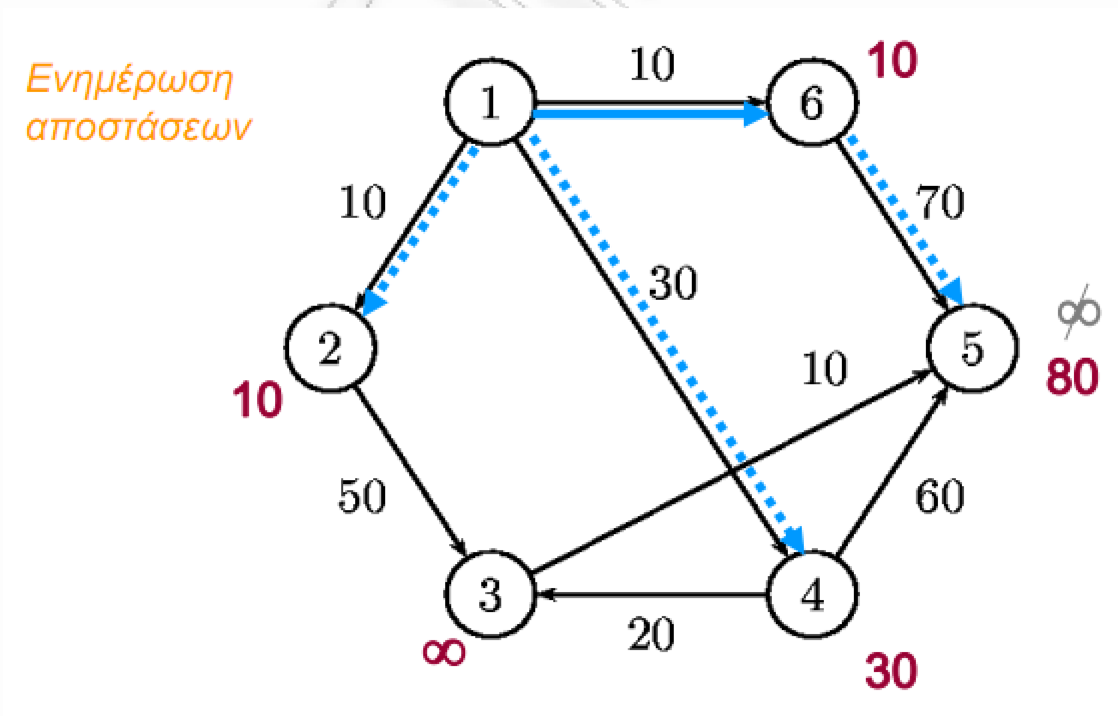
Λύση:



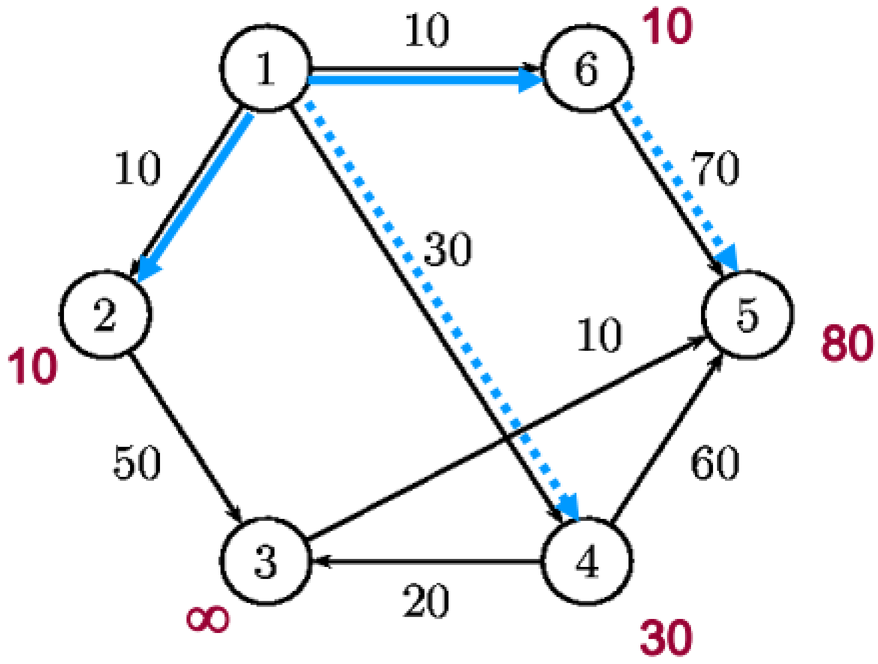
Σχήμα 2.12



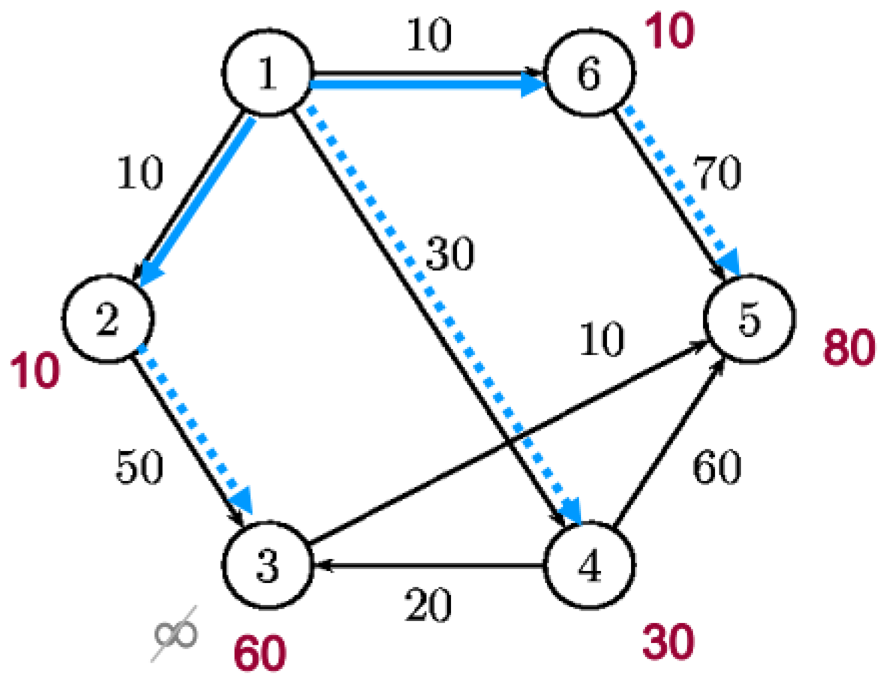
Σχήμα 2.13



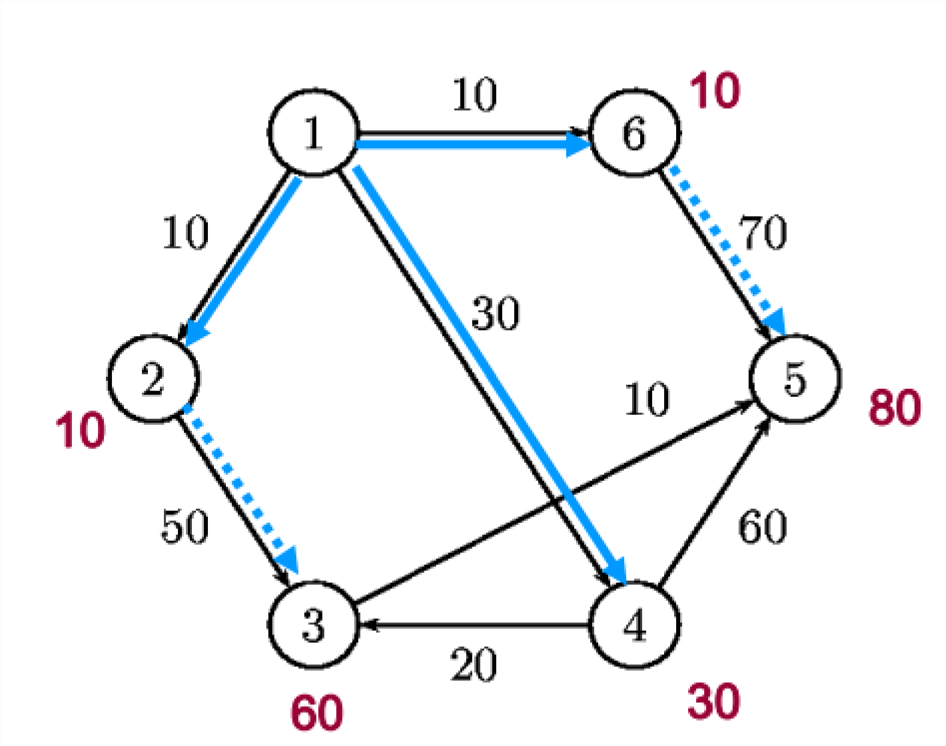
Σχήμα 2.14



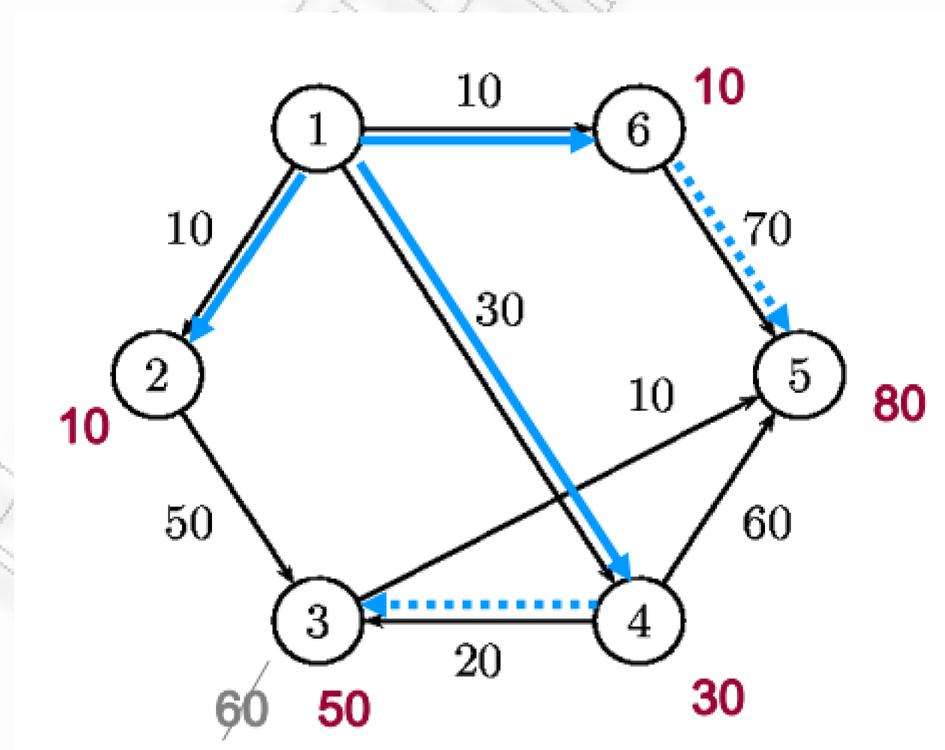
Σχήμα 2.15



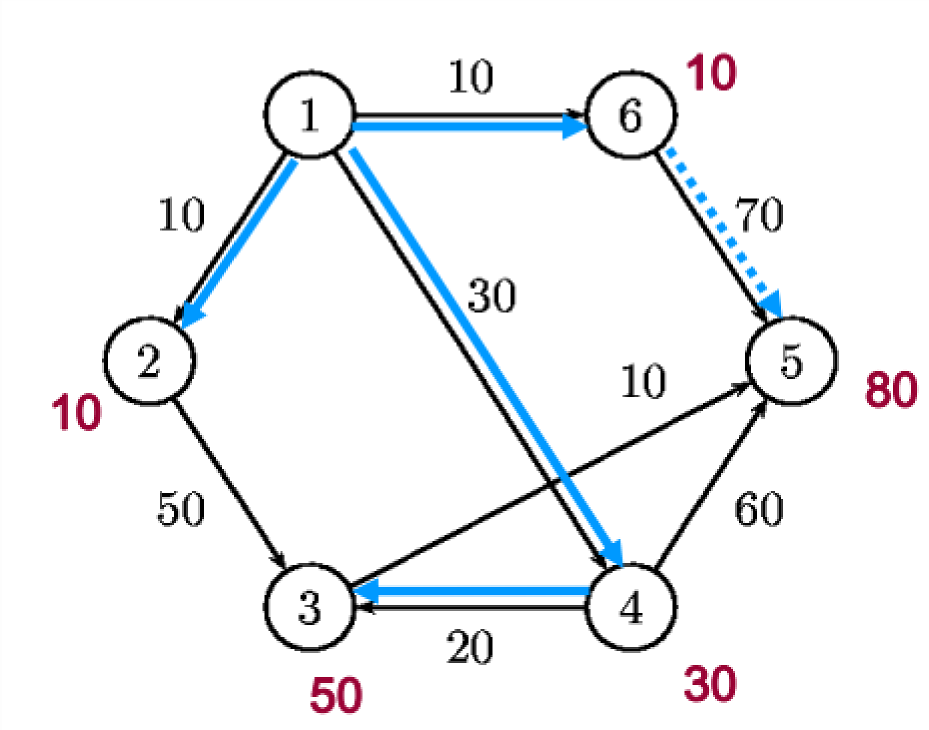
Σχήμα 2.16



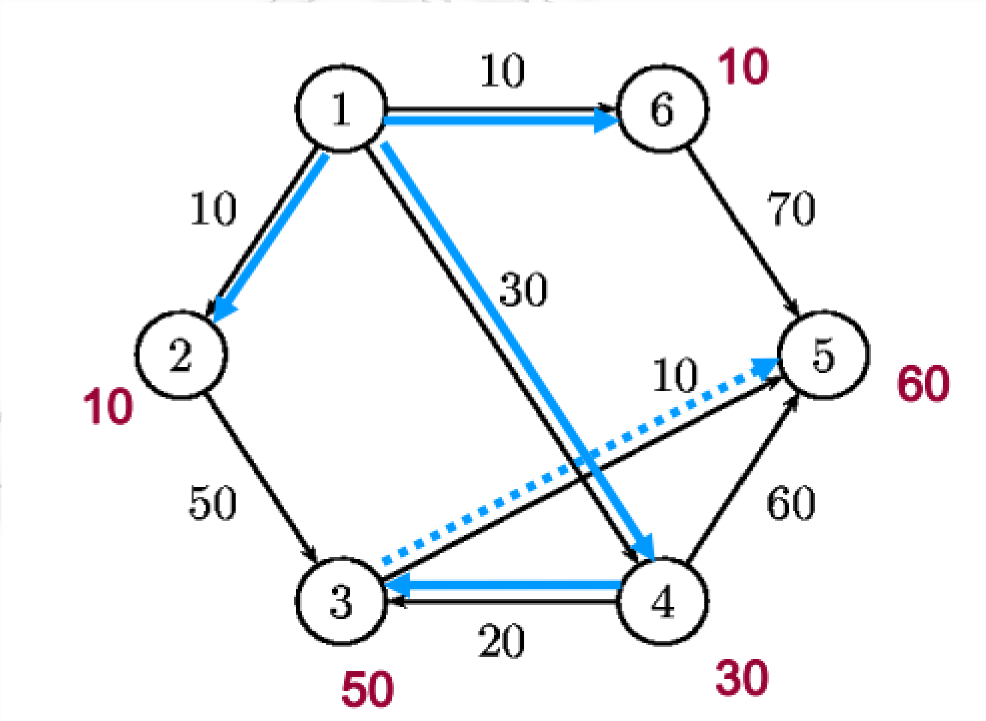
Σχήμα 2.17



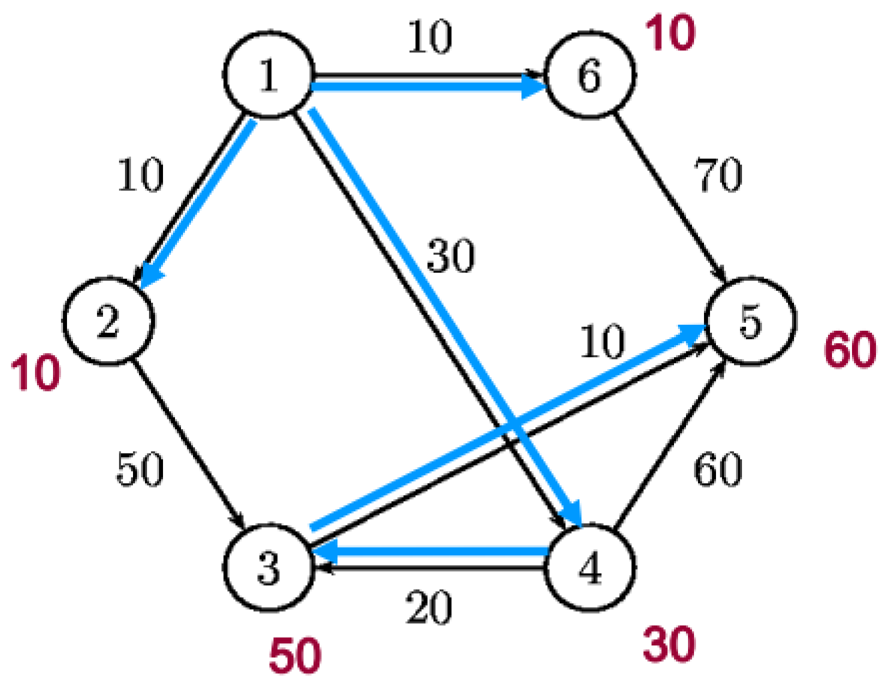
Σχήμα 2.18



Σχήμα 2.19



Σχήμα 2.20

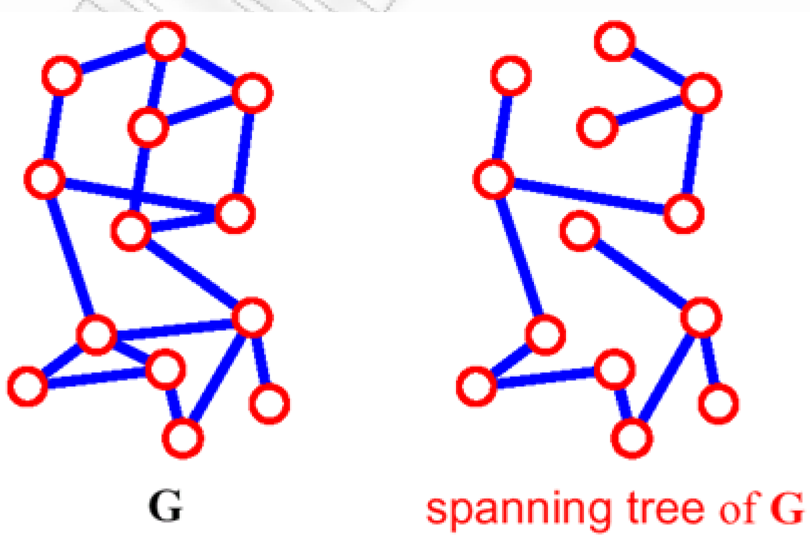


Σχήμα 2.21

2.5 Ελάχιστο γεννητικό δένδρο

Ορισμός 2.6: Γεννητικό δένδρο (Spanning tree)

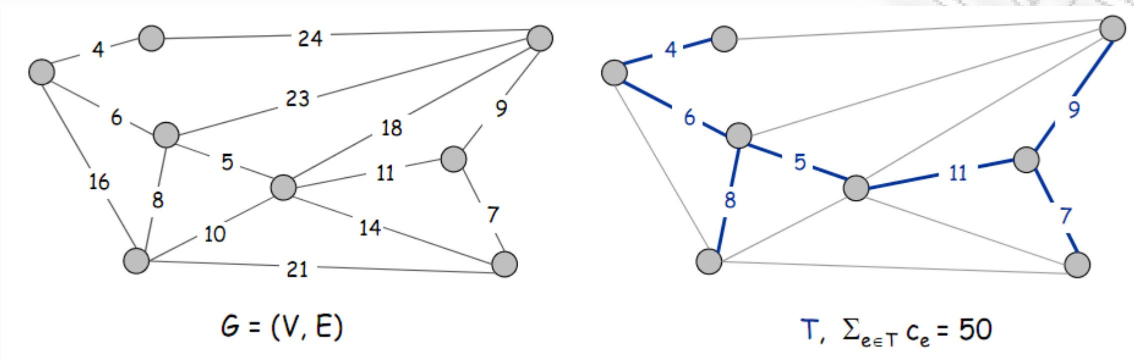
Γεννητικό δένδρο ενός γραφήματος G είναι ένα υπογράφημα του G το οποίο είναι δένδρο και περιέχει όλους τους κόμβους του G



Σχήμα 2.22

Πρόβλημα ελάχιστου γεννητικού δένδρου (Minimum Spanning Tree):

Δεδομένου ενός συνεκτικού γραφήματος G(V,E) με βάρη ακμών πραγματικούς αριθμούς c_e ένα ελάχιστο γεννητικό δένδρο (MST) είναι ένα υποσύνολο ακμών $T \subseteq E$ τέτοιο ώστε το T να είναι γεννητικό δένδρο και το άθροισμα των βαρών των ακμών του να είναι ελάχιστο.



Σχήμα 2.23

Για την εύρεση του ελάχιστου γεννητικού δένδρου θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια δύο αλγορίθμους

2.5.1 **Αλγόριθμος** Prim

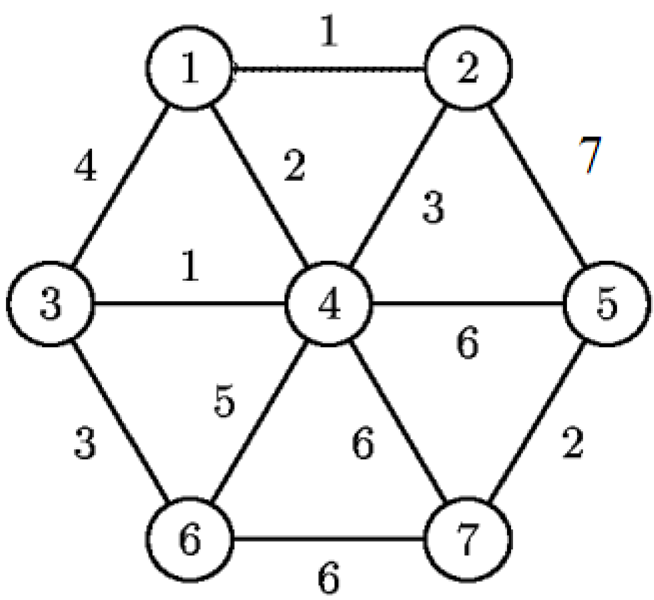
Στον αλγόριθμο του Prim το κριτήριο για την κατασκευή του γραφήματος είναι να επιλέγουμε πλευρές ελαχίστου κόστους ώστε το υπογράφημα να παραμένει δένδρο.

Αλγόριθμος:

```
procedure Prim (E: set of edges;
                cost: array[1..n,1..n] of real;
                var tree: array[1..n−1] of edges;
                var mincost : real);
  var DistFromTree:array[1..n] of real;
      Edge:array[1..n] of edges; i,j,k,l : integer;
  (* Το DistFromTree[i] περιέχει το ελάχιστο από τα κόστη των πλευρών
     που συνδέουν τον κόμβο i με το μέχρι στιγμής κατασκευασμένο
     συνδετικό δέντρο και το Edge[i] περιέχει την πλευρά με αυτό
     το κόστος *)
```

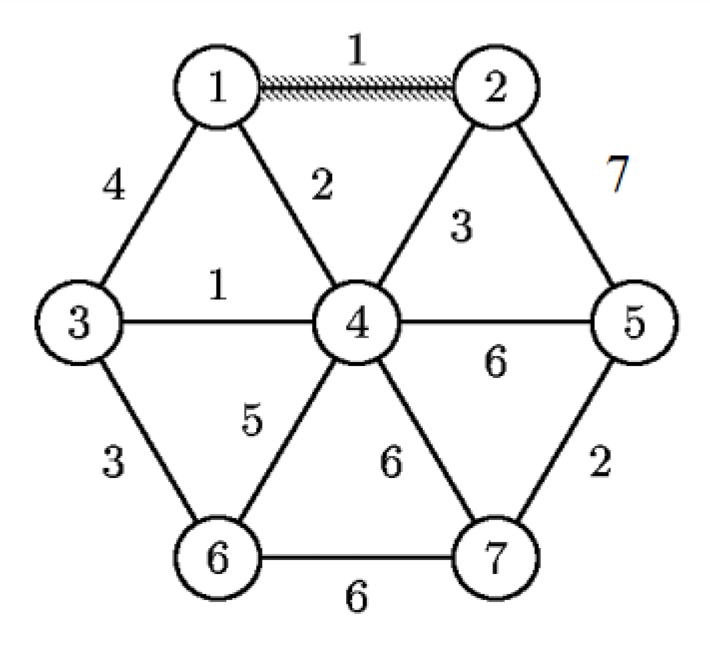
```
begin
  tree[1]:=(k,l); mincost:=cost[k,l]; (* (k,l)= edge with minimum cost *)
  for i:=1 to n do
  begin DistFromTree[i]:=min(cost[k,i],cost[l,i]); update Edge[i] end;
  for i:=2 to n−1 do
  begin
    select j such that DistFromTree[j] is minimum but<>0;
    tree[i]:=Edge[j]; mincost:=mincost+DistFromTree[j];
    DistFromTree[j]:=0;
    for k:=1 to n do begin update DistFromTree[k]; update Edge[k] end
  end
end
```

Παράδειγμα: Να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος Prim στο σχήμα 2.24

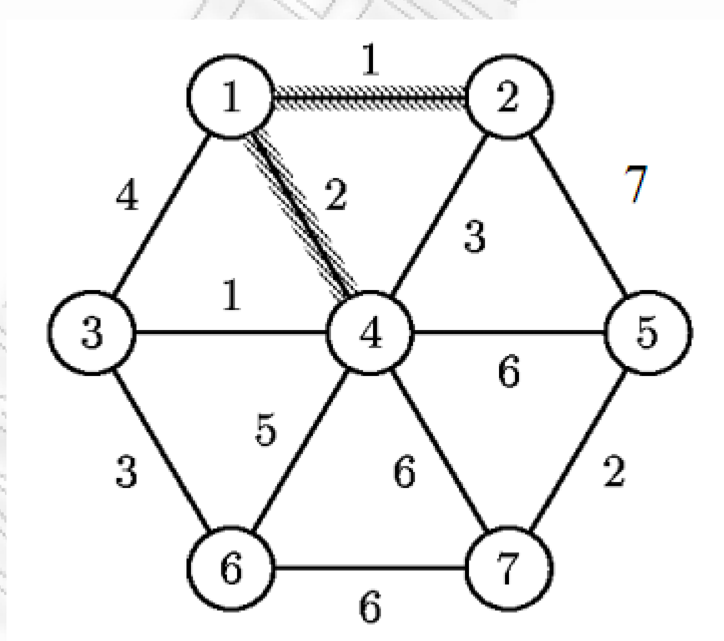


Σχήμα 2.24

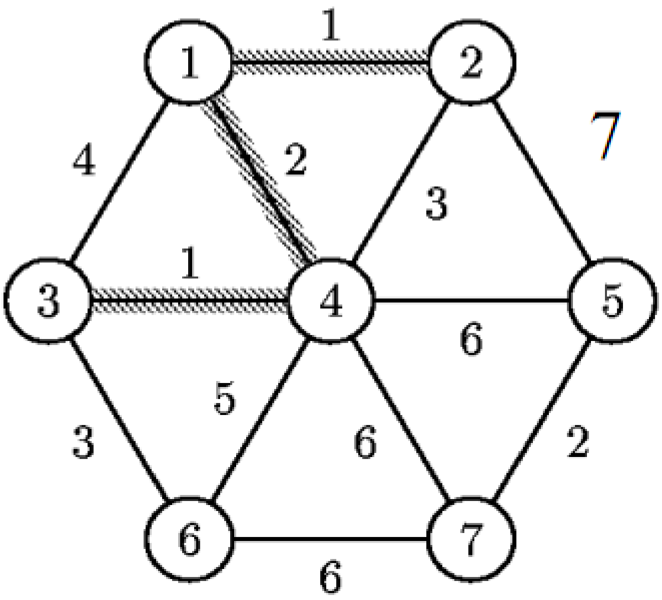
Λύση:



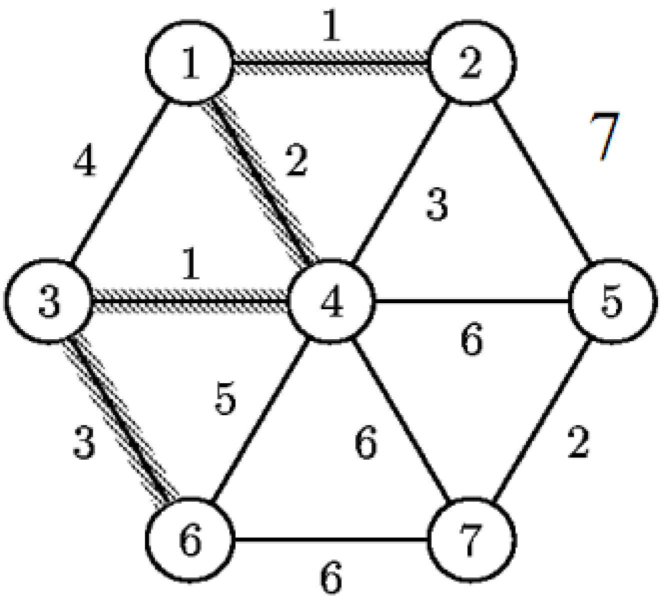
Σχήμα 2.25



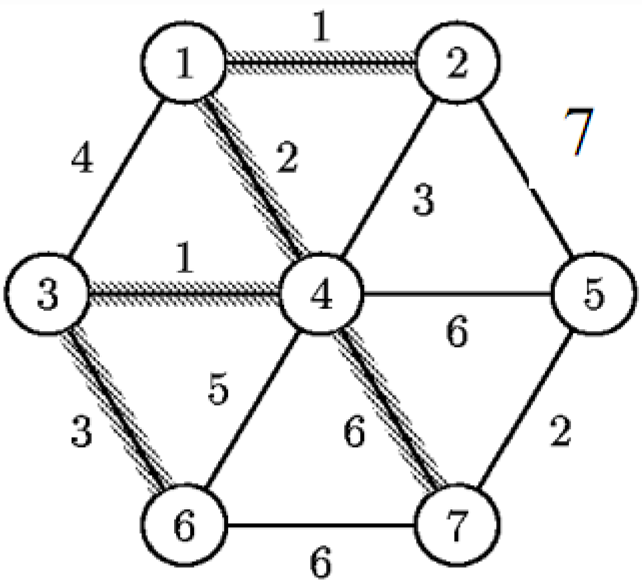
Σχήμα 2.26



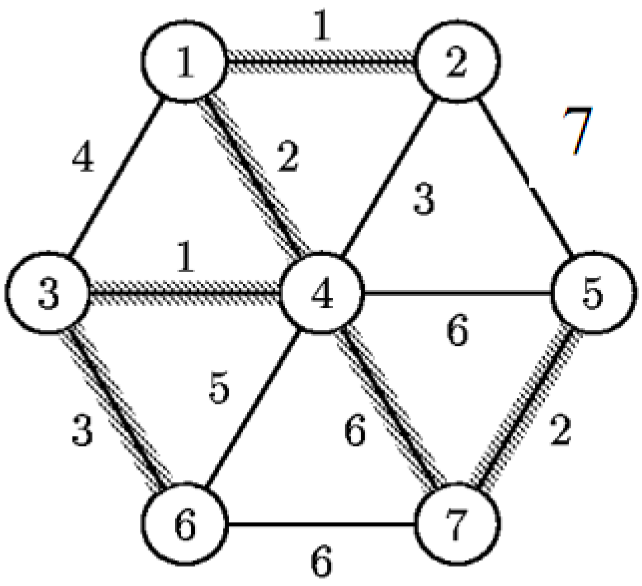
Σχήμα 2.27



Σχήμα 2.28



Σχήμα 2.29



Σχήμα 2.30

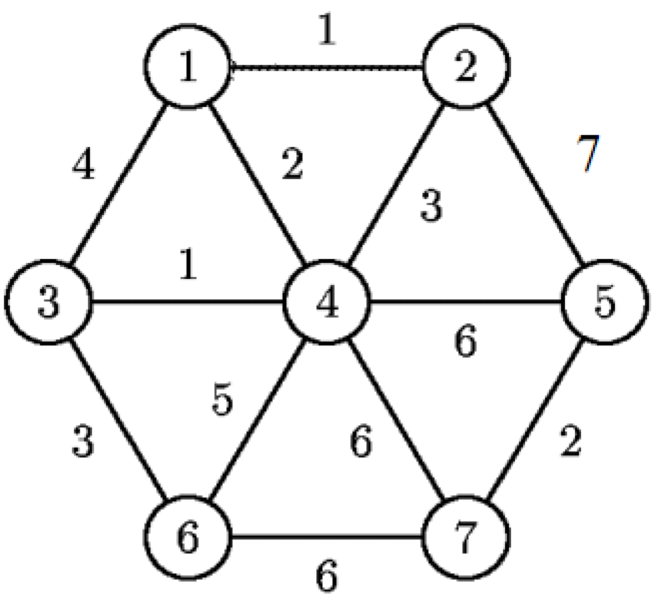
2.5.2 **Αλγόριθμος** Kruskal

Στον αλγόριθμο του Kruskal το κριτήριο για την κατασκευή του γραφήματος είναι να επιλέγουμε πλευρές ελαχίστου κόστους ώστε το υπογράφημα να παραμένει άκυκλο.

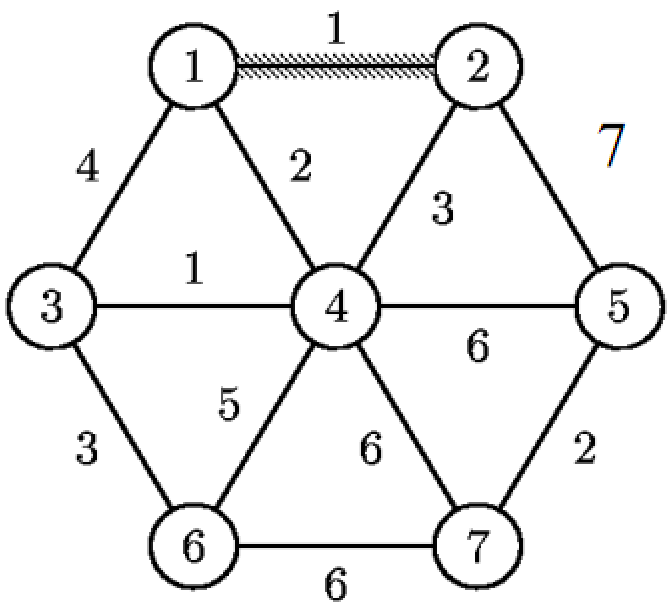
Αλγόριθμος:

```
procedure Kruskal (...);
(*θεωρεί ακμές ταξινομημένες κατά βάρος, αρκεί όμως να είναι σε heap*)
begin
  forest:=empty;
  while |forest| < n−1 do
  begin
    select Min_Cost edge (u,w) and delete it from E;
    if (u,w) does not create a cycle in forest then
      add it to forest
    else discard it
  end
end
```

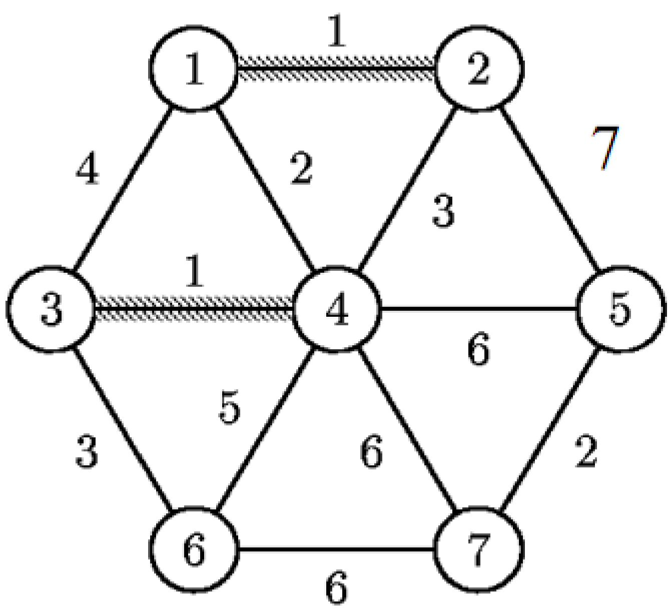
Παράδειγμα: Να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος Kruskal στο σχήμα 2.31



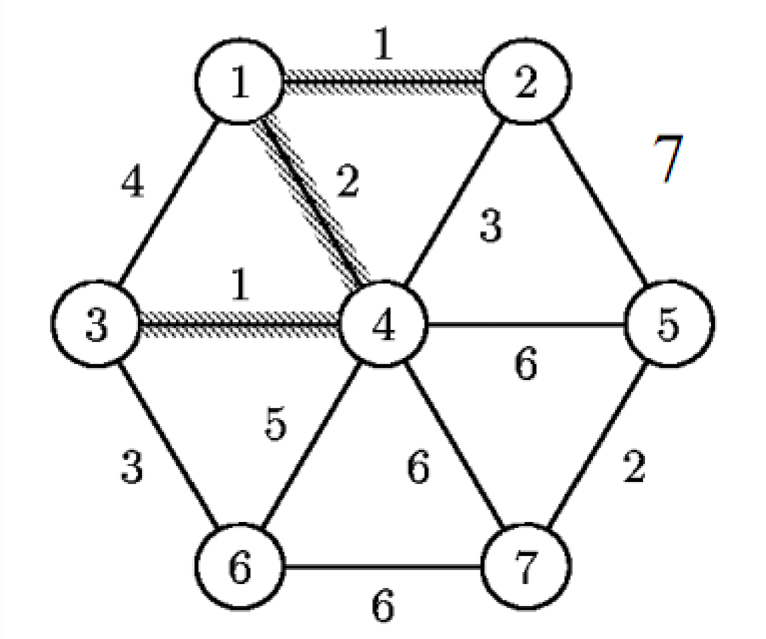
Σχήμα 2.31



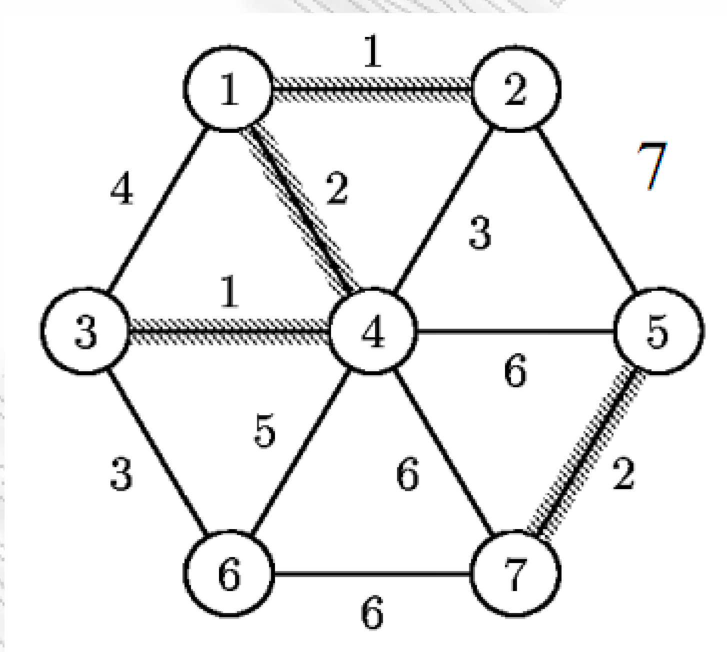
Σχήμα 2.32



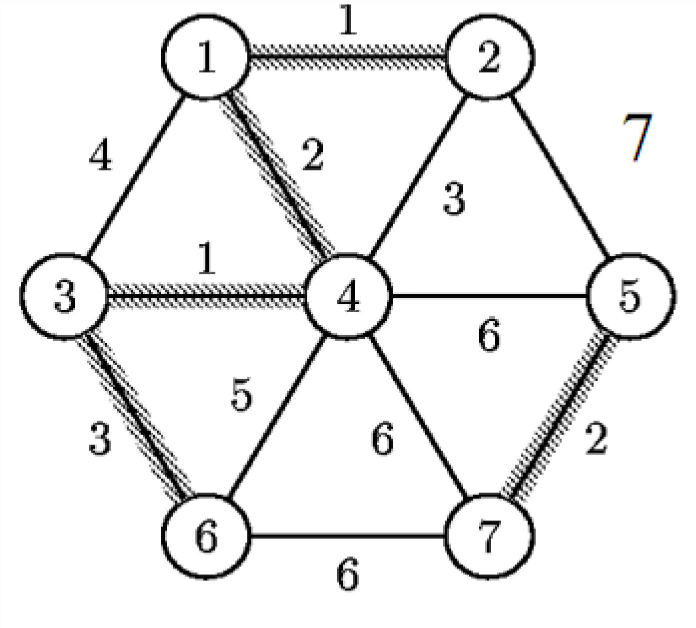
Σχήμα 2.33



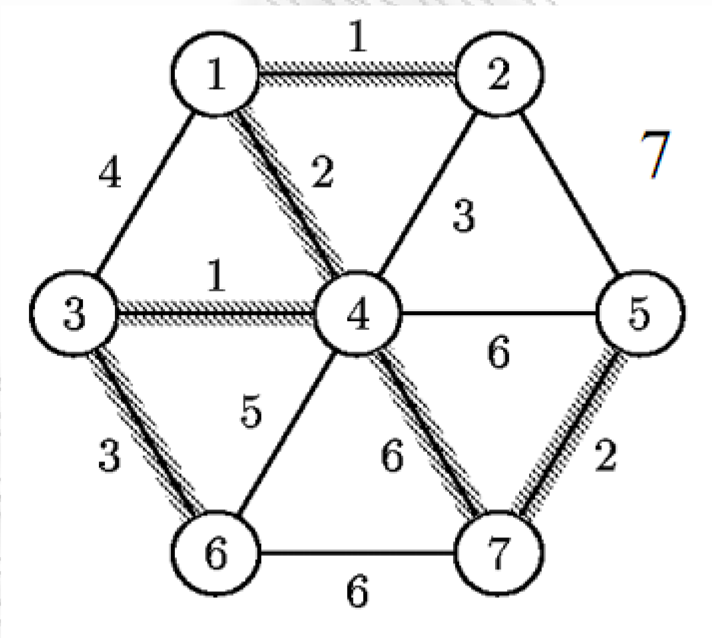
Σχήμα 2.34



Σχήμα 2.35



Σχήμα 2.36



Σχήμα 2.37

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : Διαδρομές Euler και Hamilton

3.1 Μονοπάτια και κυκλώματα Euler – Οι γέφυρες του Königsberg

Ορισμός 3.1: Μονοπάτι Euler

Μονοπάτι Euler ονομάζεται ένα μονοπάτι που διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.

Ορισμός 3.2: Κύκλωμα Euler

Κύκλωμα Euler ονομάζεται ένα κύκλωμα που διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.

Θεώρημα 3.1: Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα έχει ένα μονοπάτι Euler αν και μόνον αν δεν έχει καμία κορυφή βαθμού περιττού ή έχει ακριβώς δύο κορυφές βαθμού περιττού.

Απόδειξη: Έστω ένα γράφημα G το οποίο έχει ένα μονοπάτι του Euler. Προφανώς αυτό το γράφημα είναι συνεκτικό. Κάθε φορά που ένα μονοπάτι Euler συναντά μια κορυφή κινείται μεταξύ δύο ακμών που είναι προσκείμενες με την κορυφή και δεν έχουν γραφεί. Ο βαθμός κάθε κορυφής στο γράφημα είναι άρτιος εκτός των δύο τελικών κορυφών του γραφήματος. Αν οι δύο τελικές κορυφές του μονοπατιού είναι διαφορετικές τότε ο βαθμός τους είναι περιττός ενώ αν οι δύο τελικές κορυφές συμπίπτουν τότε ο βαθμός τους είναι άρτιος.

Αντιστρόφως: Κατασκευάζουμε ένα μονοπάτι Euler αρχίζοντας από μια κορυφή περιττού βαθμού αν υπάρχει και προχωράμε κατά μήκος των κορυφών του γραφήματος με τρόπο ώστε καμία ακμή του γραφήματος να μην σχεδιάζεται περισσότερο από μία φορά. Όταν το μονοπάτι «φθάνει» σε μια κορυφή άρτιου βαθμού, μέσω μιας ακμής ,μπορεί και να «εγκαταλείψει» την κορυφή αυτή μέσω μιας άλλης ακμής η οποία έχει σχεδιαστεί προηγουμένως. Με τον τρόπο αυτό όταν θα τελειώσουμε την κατασκευή θα έχουμε επιστρέψει στην ίδια κορυφή. Αν έχουμε κατασκευάσει με αυτό τον τρόπο όλες τις ακμές του γραφήματος τότε έχουμε ένα μονοπάτι του Euler. Σε αντίθετη περίπτωση αφαιρούμε αυτές που δεν έχουμε διασχίσει και προκύπτει ένα υπογράφημα το οποίο σχηματίζεται από τις υπόλοιπες ακμές. Οι βαθμοί των κορυφών στο γράφημα αυτό είναι άρτιοι. Επιπροσθέτως το υπογράφημα αυτό πρέπει να τέμνει το μονοπάτι που έχουμε ήδη κατασκευάσει σε μια ή περισσότερες κορυφές μιας και το αρχικό γράφημα ήταν συνεκτικό. Αρχίζουμε πάλι από τις κορυφές αυτές και επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία προσπαθώντας το μονοπάτι να επιστρέφει στην κορυφή από την οποία αρχίζει. Συνδέουμε το νέο μονοπάτι με το προηγούμενο μονοπάτι και παίρνουμε το μονοπάτι που θέλουμε. Αν χρειαστεί επαναλαμβάνουμε το ίδιο εγχείρημα μέχρι να πάρουμε ένα μονοπάτι του Euler. □

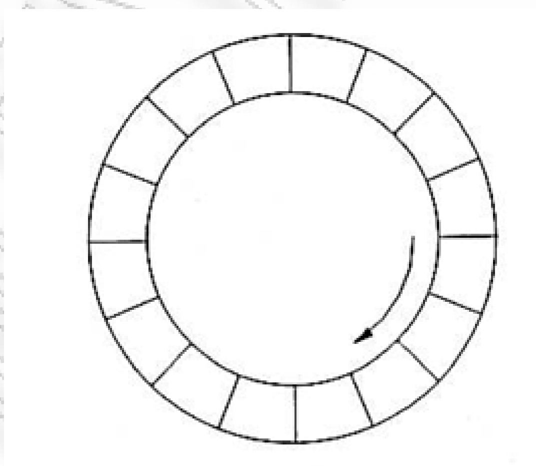
Θεώρημα 3.2: Ένα συνεκτικό γράφημα έχει ένα κύκλωμα Euler αν και μόνον αν όλες οι κορυφές του είναι άρτιου βαθμού.

Εφαρμογή 3.1: Το πρόβλημα των γεφυρών του Königsberg Μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: ”Υπάρχει μονοπάτι Euler για το γράφημα του σχήματος 1.6; ”

Απάντηση: Το γράφημα του σχήματος 1.6 τέσσερις κορυφές περιττού βαθμού. Άρα δεν υπάρχει μονοπάτι του Euler δηλαδή οι κάτοικοι στο Königsberg μάταια προσπαθούσαν να βρουν διαδρομή που να περνά και από τις εφτά γέφυρες ακριβώς μία φορά.

Εφαρμογή 3.2: Πρόβλημα μετατροπής αναλογικού υπολογισμού σε ψηφιακό.

Απάντηση: Η επιφάνεια ενός περιστρεφόμενου τυμπάνου διαιρείται σε 16 τομείς όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1.

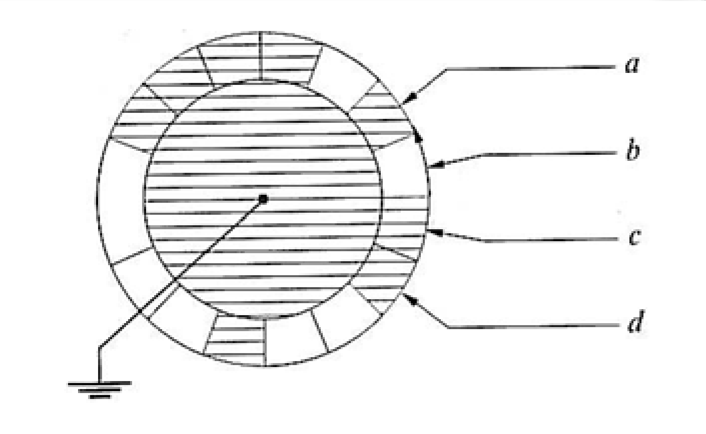


Σχήμα 3.1

Η πληροφορία για τη θέση του τυμπάνου θα αναπαρασταθεί από τα ψηφιακά δυαδικά σήματα *a*, *b*, *c* και *d*, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2 όπου

- αγώγιμα (γραμμοσκιασμένη περιοχή) και

- μη αγώγιμα (λευκή περιοχή) υλικά χρησιμοποιούνται για να δημιουργηθούν οι τομείς



Σχήμα 3.2

Ανάλογα με την θέση του τυμπάνου, οι ακροδέκτες ***a, b, c*** και ***d*** θα είναι είτε γειωμένοι είτε μονωμένοι.

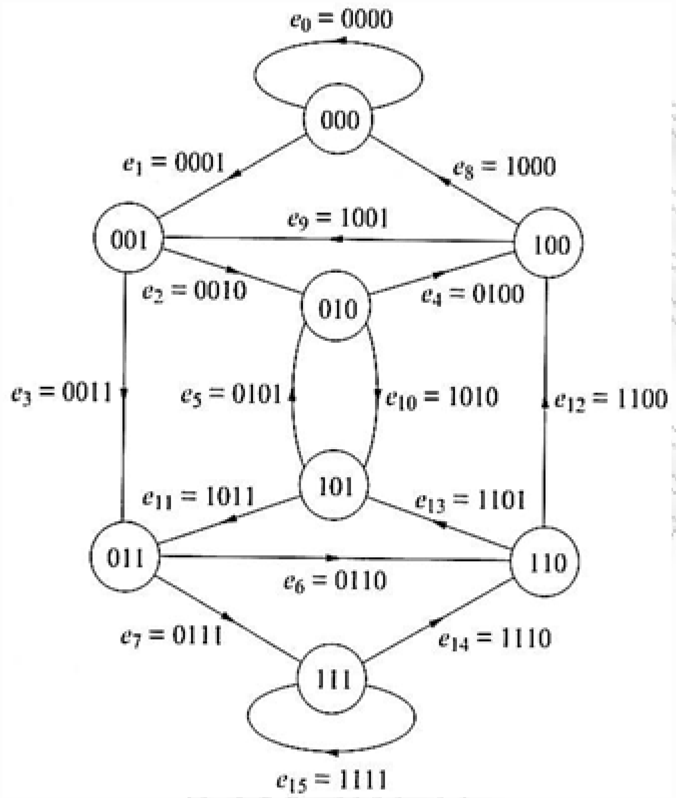
Οι 16 διαφορετικές θέσεις του τυμπάνου αναπαρίστανται με διαφορετικό τρόπο από τα δυαδικά σήματα στους ακροδέκτες.

Οι τομείς θα πρέπει να κατασκευαστούν με τέτοιο τρόπο ώστε να μην υπάρχουν δύο ίδιες διατάξεις από τέσσερις διαδοχικούς αγώγιμους και μη αγώγιμους τομείς.

Το πρόβλημα είναι να καθοριστεί αν υπάρχει μια τέτοια διάταξη από διαδοχικούς αγώγιμους και μη αγώγιμους τομείς, και αν υπάρχει, να προσδιοριστεί ποια διάταξη είναι.

Θέτοντας το δυαδικό ψηφίο 0 ως σύμβολο ενός αγώγιμου τομέα και το δυαδικό σύμβολο 1 ως σύμβολο ενός μη αγώγιμου τομέα, αναδιατυπώνουμε το πρόβλημα ως εξής:

- Τοποθετήστε 16 δυαδικά ψηφία σε κυκλική διάταξη έτσι ώστε οι 16 ακολουθίες τεσσάρων διαδοχικών ψηφίων να είναι όλες διαφορετικές
- Κατασκευάζουμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα με οκτώ κορυφές, οι οποίες σημαδεύονται με τους οκτώ διαφορετικούς τριψήφιους δυαδικούς αριθμούς {000, 001, …, 111}



- Από μία κορυφή που είναι σημαδεμένη με $e_1 e_2 e_3$, υπάρχει μία ακμή προς την κορυφή που είναι σημαδεμένη με $e_2 e_3 0$ και μία ακμή προς την κορυφή που είναι σημαδεμένη με $e_2 e_3 1$

Σημαδεύουμε κάθε ακμή του γραφήματος με έναν τετραψήφιο δυαδικό αριθμό ως εξής:

η ακμή από την κορυφή $e_1 e_2 e_3$ προς την κορυφή $e_2 e_3 e_0$ σημαδεύεται με $e_1 e_2 e_3$.

Οι κορυφές είναι σημαδεμένες με τους οκτώ διαφορετικούς τριψήφιους δυαδικούς αριθμούς.

Οι ακμές θα σημαδευτούν με τους 16 διαφορετικούς τετραψήφιους δυαδικούς αριθμούς.

Σε ένα μονοπάτι στο γράφημα, τα σημάδια για δύο διαδοχικές ακμές θα πρέπει να είναι της μορφής:

$e_1 e_2 e_3 e_4$ και $e_2 e_3 e_4 e_5$

δηλαδή τα τρία τελευταία ψηφία από το σημάδι της πρώτης ακμής θα πρέπει να είναι ίδια με τα τρία πρώτα ψηφία από το σημάδι της δεύτερης ακμής.

Οι 16 ακμές στο γράφημα είναι σημαδεμένες με διαφορετικούς τρόπους.

Υπάρει μία κυκλική διάταξη των 16 δυαδικών ψηφίων η οποία αντιστοιχεί σε ένα κύκλωμα Euler του γραφήματος, στην οποία όλες οι ακολουθίες τεσσάρων διαδοχικών ψηφίων είναι διαφορετικές.

π.χ. η ακολουθία των 16 δυαδικών ψηφίων που αντιστοιχεί στο κύκλωμα Euler

$(e_0, e_1, e_2, e_5, e_{10}, e_4, e_9, e_3, e_6, e_{13}, e_{11}, e_7, e_{15}, e_{14}, e_{12}, e_8)$ είναι η

0000101001101111 (η κυκλική διάταξη δημιουργείται αν κλείσουμε τα δύο άκρα της ακολουθίας)

Σύμφωνα με το αποτέλεσμά μας παραπάνω, η ύπαρξη ενός κυκλώματος Euler στο γράφημα είναι προφανής, γιατί καθεμία από τις κορυφές έχει

- εισερχόμενο βαθμό ίσο με 2 και
- εξερχόμενο βαθμό ίσο με 2

3.2 **Μονοπάτια και κυκλώματα** Hamilton

Ορισμός 3.3: Μονοπάτι Hamilton

Μονοπάτι Hamilton ονομάζεται ένα μονοπάτι που διασχίζει κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.

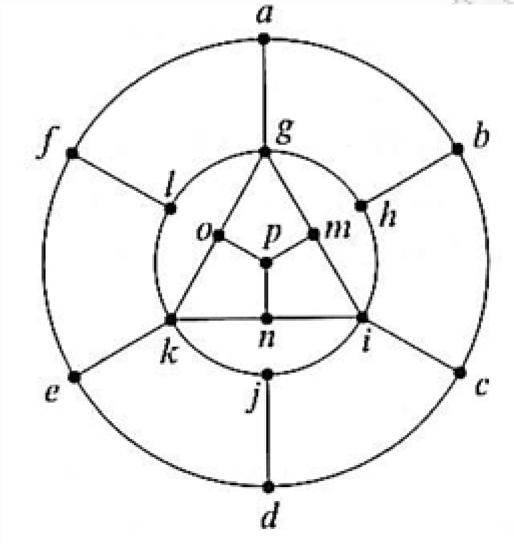
Ορισμός 3.4: Κύκλωμα Hamilton

Κύκλωμα Hamilton ονομάζεται ένα κύκλωμα που διασχίζει κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.

Θεώρημα 3.3: Θεωρούμε ένα γράφημα n κορυφών. Αν το άθροισμα των βαθμών για κάθε ζεύγος μη γειτονικών κορυφών είναι τουλάχιστον n-1 τότε υπάρχει ένα μονοπάτι Hamilton στο G.

Θεώρημα 3.4(Dirac): Θεωρούμε ένα γράφημα $n \geq 3$ κορυφών. Αν κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον $\frac{n}{2}$ τότε το γράφημα έχει ένα κύκλο Hamilton.

Εφαρμογή 3.3: Δείξτε ότι το γράφημα του σχήματος σχήματος 3.2 δεν έχει μονοπάτι Hamilton.



Σχήμα 3.2

Απάντηση: Σημαδεύουμε την κορυφή α με Α και σημαδεύουμε όλες τις κορυφές που είναι γειτονικές με αυτή με Β.

Συνεχίζοντας, σημαδεύουμε όλες τις κορυφές που είναι γειτονικές με μια κορυφή Β με Α και

Σημαδεύουμε όλες τις κορυφές που είναι γειτονικές με μια κορυφή Α με Β,

Μέχρι να σημαδευτούν όλες οι κορυφές

Αν υπάρχει μονοπάτι Hamilton στο γράφημα τότε θα πρέπει να περνά εναλλάξ από τις κορυφές Α και Β

Αυτό όμως είναι αδύνατο γιατί συνολικά υπάρχουν εννέα κορυφές Α και επτά κορυφές Β

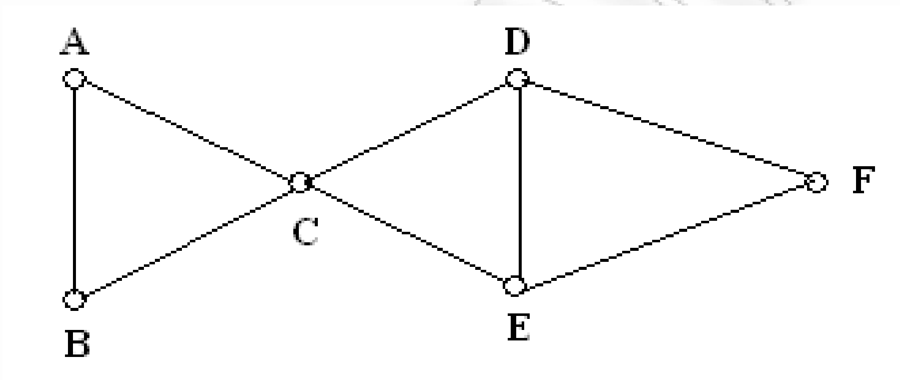
Συνεπώς δεν μπορεί να υπάρχει μονοπάτι Hamilton

Εφαρμογή 3.4: Σχεδιάστε ένα γράφημα G, το οποίο δεν έχει ούτε κύκλωμα Hamilton ούτε κύκλωμα Euler.

Απάντηση: Έστω G ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα n κορυφών. Για να μην έχουμε κύκλωμα Hamilton, θα πρέπει το άθροισμα των βαθμών τουλάχιστον ενός ζεύγους κορυφών στο G να είναι μικρότερο του n.

Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα δεν περιέχει κύκλωμα Euler, αν τουλάχιστον μία κορυφή του είναι περιττού βαθμού.

Ένα γράφημα το οποίο δεν περιέχει ούτε κύκλωμα Hamilton ούτε κύκλωμα Euler είναι το παρακάτω:



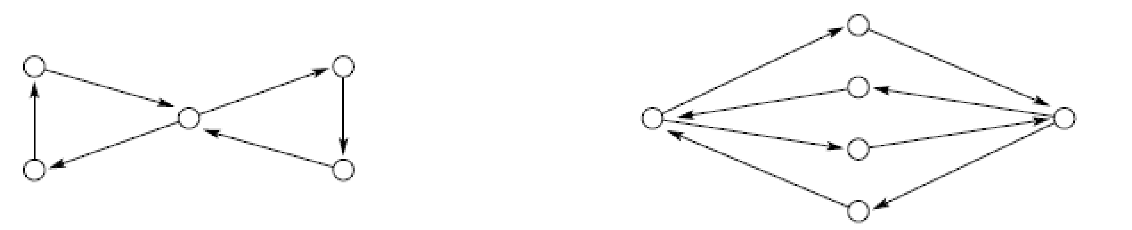
Σχήμα 3.3

Όπως βλέπουμε υπάρχουν ζεύγη κορυφών (π.χ. A και B) το άθροισμα των βαθμών των οποίων είναι μικρότερο του n = 6. Επίσης υπάρχουν κορυφές (D και E) οι οποίες είναι περιττού βαθμού (3 για την ακρίβεια).

Εφαρμογή 3.5: Σχεδιάστε ένα γράφημα G, το οποίο έχει κύκλωμα Euler αλλά δεν έχει κύκλωμα Hamilton.

Απάντηση: Για να έχει κύκλωμα Euler θα πρέπει όλες οι κορυφές να είναι άρτιου βαθμού.

Για να έχει κύκλωμα Hamilton θα πρέπει να μπορούμε να περάσουμε από όλες τις ακμές περνώντας από κάθε κορυφή μία φορά.



Σχήμα 3.4

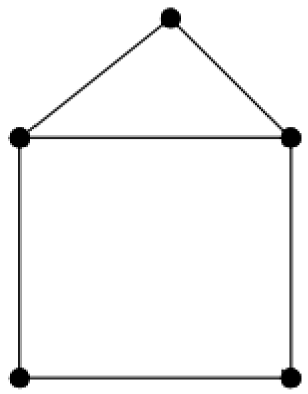
(Αν περάσουμε από όλες τις ακμές τότε αναγκαστικά ξαναπερνάμε από κάποια κορυφή)

4° ΚΕΦΑΛΑΙΟ : Επίπεδα γραφήματα

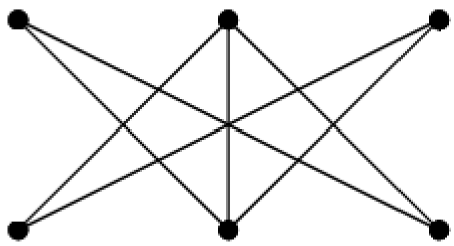
4.1 Γενικά

Ορισμός 4.1: Επίπεδο γράφημα

Επίπεδο ονομάζεται ένα γράφημα, αν μπορεί να παρασταθεί στο επίπεδο, έτσι ώστε οι ακμές του να μην τέμνονται.

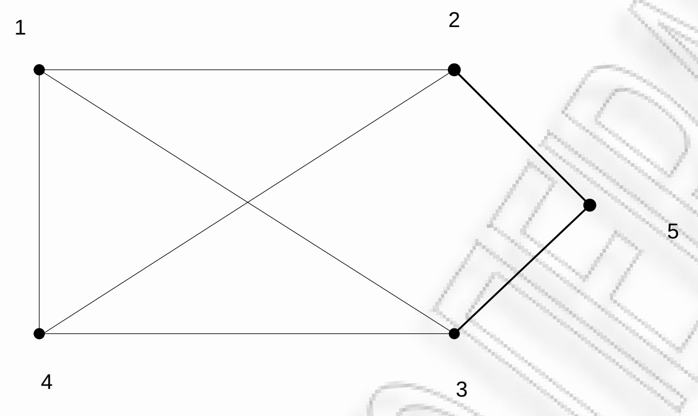


Σχήμα 4.1 – Επίπεδο γράφημα

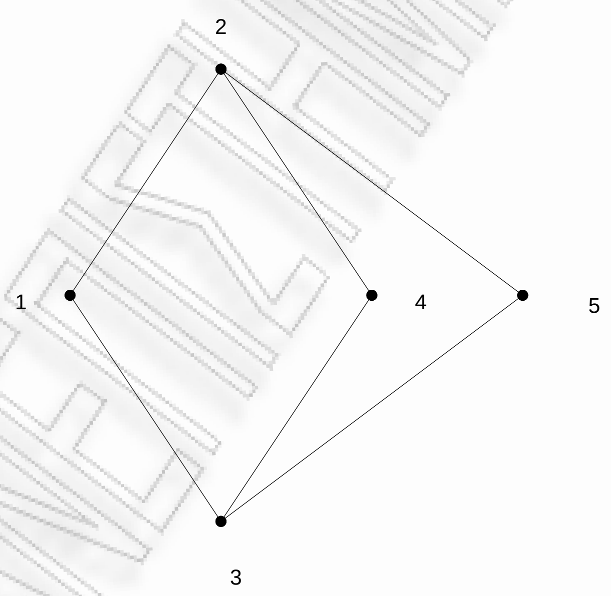


Σχήμα 4.2 – Μη επίπεδο γράφημα

Μπορεί φαινομενικά ένα γράφημα να μην είναι επίπεδο (Σχήμα 4.3) αλλά αν το μετασχηματίσουμε κατάλληλα μπορεί αυτό να γίνει επίπεδο (Σχήμα 4.4).



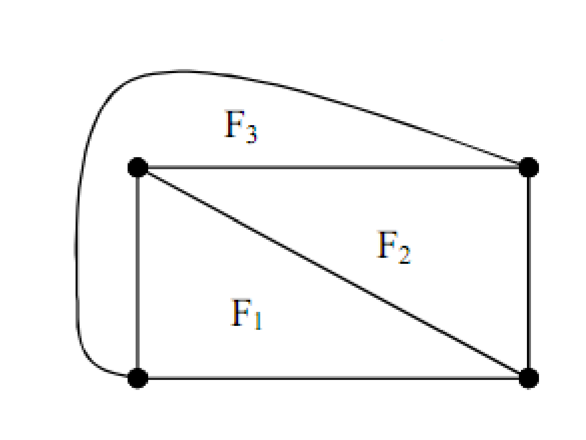
Σχήμα 4.3



Σχήμα 4.4

Ορισμός 4.2: Επιφάνεια

Τα χωρία του επιπέδου που οριοθετούνται από τις ακμές ενός επίπεδου γραφήματος , ονομάζονται επιφάνειες και συμβολίζονται με F.



Σχήμα 4.4

4.2 Τύπος του Euler – Θεώρημα Kuratowski

Θεώρημα 4.1: Αν G ένα επίπεδο γράφημα με p κορυφές, q ακμές και r επιφάνειες, τότε ισχύει:

$$p + q + r = 2$$

Απόδειξη: Θεωρούμε ένα γράφημα. Έστω ότι έχουμε υπολογίσει την παράσταση X= p +q+ r.

Μετασχηματίζουμε το δοθέν γράφημα έτσι ώστε να μειωθούν οι κορυφές και οι ακμές του αλλά το X να παραμείνει αναλλοίωτο.

Για το σκοπό αυτό υπάρχουν τρείς τρόποι:

(α) Διαγράφουμε τις κορυφές βαθμού 1. Έτσι μειώνονται το p και το q κατά 1 άρα

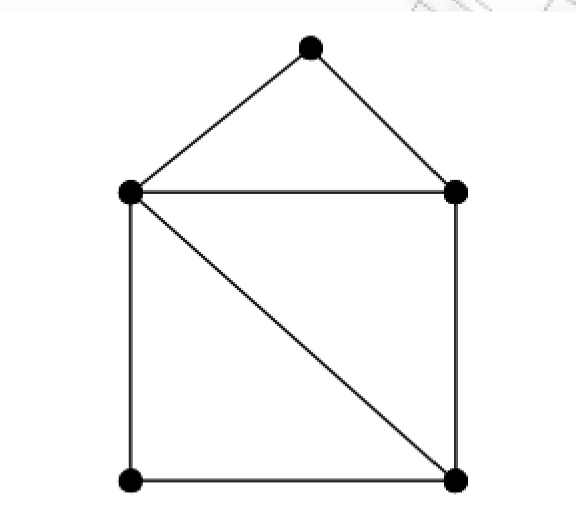
X΄=(p-1)-(q-1)+r=X.

(β) Διαγράφουμε κορυφές βαθμού 2. Έτσι μειώνονται το p κατά 1 το q κατά 2 και το r κατά 1 άρα X΄=(p-1)-(q-2)+(r+1)=X (γ) Διαγράφουμε εξωτερικές ακμές αν οι κορυφές έχουν βαθμό μεγαλύτερο του 2. Τότε το r και το q μειώνονται κατά 1 και το r μένει το ίδιο .Άρα

$X' = p - (q-1) + (r-1) = X$

Μετά από πεπερασμένο πλήθος μετασχηματισμών φτάνουμε στο X_1 το οποίο έχει p=1, q=0, r=1.Άρα η ποσότητα X είναι πάντα ίση με 2. □

Εφαρμογή 4.1: Για το σχήμα 4.5 ισχύει ο τύπος του Euler;



Σχήμα 4.4

Απάντηση: Παρατηρούμε ότι το γράφημα είναι επίπεδο και ότι p=5, q=7, r=4 .

Άρα p +q+ r = 5 – 7 + 2 = 2.

Πρόταση 4.1: Για κάθε επίπεδο γράφημα με $p \geq 3$ ισχύει:

$$q \leq 3p-6$$

Απόδειξη: Βλέπουμε ότι κάθε χωρίο είναι φραγμένο από τρείς τουλάχιστον ακμές. Κάθε ακμή συμμετέχει στο πολύ δύο χωρία. Άρα $3r \leq 2p$. Ααντικαθιστώντας στον τύπο του Euler έχουμε ότι: $3p - 3q + 3r = 6 \Rightarrow 3p - 3q + 3r \geq 6 \Rightarrow q \leq 3p-6$ □

Πρόταση 4.2: Για κάθε επίπεδο γράφημα χωρίς τρίγωνα ισχύει:

$$q \leq 2p-4$$

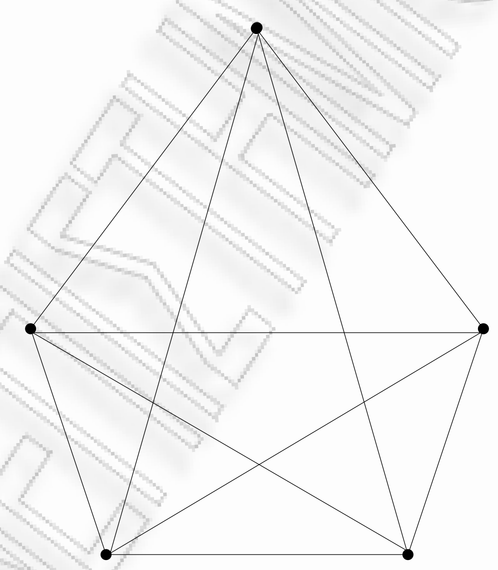
Απόδειξη: Κάθε επιφάνεια έχει ως σύνορο τέσσερις τουλάχιστον ακμές δηλαδή 4r

Κάθε ακμή είναι το σύνορο το πολύ δύο περιοχών άρα: $\sum q \leq 2$.

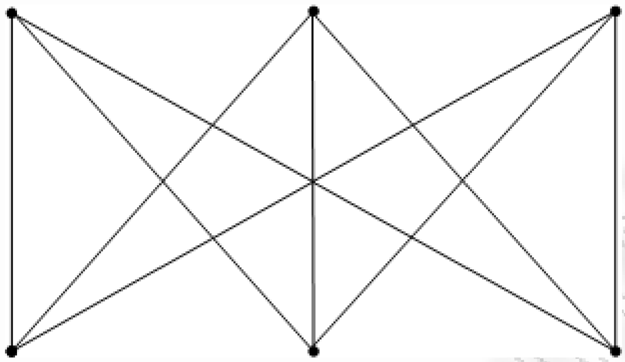
Άρα $2q \geq 4r \Rightarrow \frac{q}{2} \geq 2$. Άρα από τον τύπο του Euler $p - q + \frac{q}{2} \geq 2 \Rightarrow q \leq 2p-4$ □

Ορισμός 4.3: K_5 και $K_{3,3}$

Το πλήρες γράφημα των πέντε κορυφών και το πλήρες διμερές γράφημα των τριών επί τριών κορυφών συμβολίζονται με K_5 (Σχήμα 4.5) και $K_{3,3}$ (Σχήμα 4.6) αντίστοιχα.



Σχήμα 4.5 - K_5



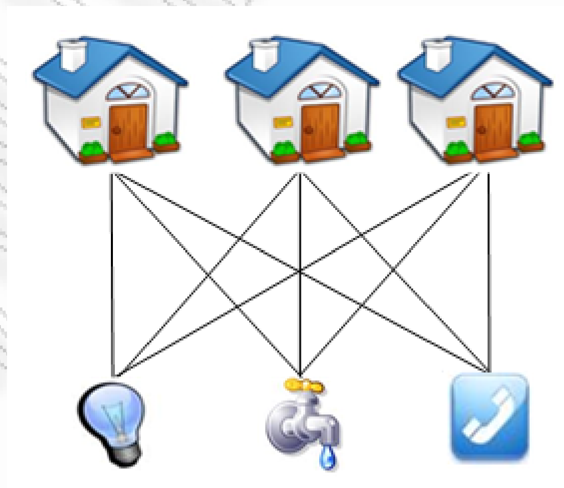
Σχήμα 4.6 - $K_{3,3}$

Πρόταση 4.3: Τα γραφήματα K_5 και $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδα.

Απόδειξη: Το K_5 έχει 10 ακμές ενώ λόγω της Πρότασης 4.1 αν ήταν επίπεδο θα είχε το πολύ 9 ακμές. Όμοια το $K_{3,3}$ είναι γράφημα χωρίς τρίγωνα αφού είναι διγράφημα και έχει 9 ακμές. Αν ήταν επίπεδο λόγω της Πρότασης 4.2 θα είχε το πολύ 8 ακμές. □

Εφαρμογή 4.2: Έστω τρία γειτονικά σπίτια τα οποία θέλουν να συνδεθούν με τρεις παροχές (π.χ. ηλεκτρικό φως, νερό, τηλέφωνο) από τρία σημεία που βρίσκονται ανά ένα απέναντι από κάθε σπίτι. Είναι δυνατόν οι συνδέσεις αυτές να μην τέμνονται;

Απάντηση: Αν υπήρχε μία τέτοια σύνδεση τότε το γράφημα με κορυφές τα σπίτια και τις παροχές θα ήταν επίπεδο. Αλλά το γράφημα $K_{3,3}$ (Σχήμα 4.7) δεν είναι επίπεδο σύμφωνα με την Πρόταση 4.3. Άρα δεν είναι δυνατόν να βρεθούν συνδέσεις οι οποίες δεν θα τέμνονται.



Σχήμα 4.7

Ορισμός 4.4: Ομοιόμορφα γραφήματα

Ομοιόμορφα ονομάζονται δύο γραφήματα όταν μπορούν και τα δύο να προκύψουν από το ίδιο γράφημα με υποδιαίρεση των ακμών του.

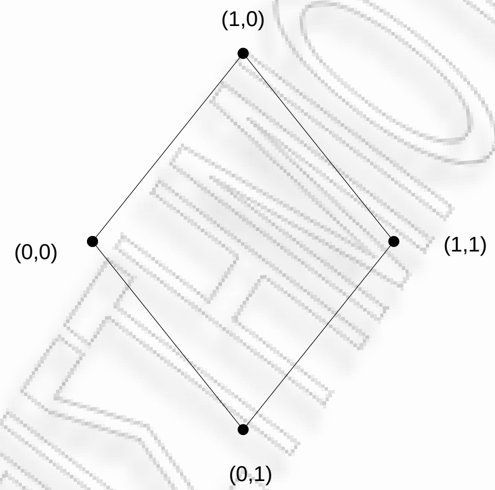
Θεώρημα 4.2 (Kuratowski): Ένα γράφημα είναι επίπεδο αν και μόνον αν δεν περιέχει υπογράφημα ομοιόμορφο με το K_5 ή το $K_{3,3.}$

5° ΚΕΦΑΛΑΙΟ : Ειδικά γραφήματα

5.1 n-**κύβοι**

Ορισμός 5.1: n-κύβος

Ένα γράφημα Q_n θα ονομάζεται n-κύβος αν οι κορυφές του μπορούν να παρασταθούν νε μια διατεταγμένη n-αδα από στοιχεία 0 ή 1 και οι ακμές του συνδέουν μόνο κορυφές των οποίων οι n-αδες που τις συμβολίζουν διαφέρουν σε ακριβώς μία θέση. Οι κορυφές τότε λέγονται γειτονικές.



Σχήμα 5.1 – Q_2

Θεώρημα 5.1: Κάθε κύβος Q_n με n μεγαλύτερο ή ίσο του 2 είναι γράφημα Hamilton.

Απόδειξη: Θα το αποδείξουμε με τη χρήση της μαθηματικής επαγωγής.

Οι 2-κύκλοι είναι Hamilton αφού η διαδρομή (0,0), (0,1), (1,1), (1,0), (0,0) έχει όλες τις διαδοχικές κορυφές γειτονικές είναι κλειστή και διέρχεται μί μόνο φορά από κάθε κορυφή (Σχήμα 5.1). Άρα προφανώς το θεώρημα ισχύει για n=2.

Έστω ότι ισχύει για n. Δηλαδή ότι υπάρχει κύκλος Hamilton ρ_0, $\rho_1,\ldots$, ρ_{2^n-1} όπου $\rho_\kappa=(x_{1,\ldots}, x_n)$ είναι μια διατεταγμένη n-αδα από 0-καπάδες και 1-αδες . έστω $(0,\rho_\kappa)$ την (n+1)-αδα $(0,x_{1,\ldots}, x_n)$ και με τον ίδιο τρόπο την (n+1)-αδα $(1,x_{1,,\ldots}, x_n)$.

Τότε η διαδρομή $(0,\rho_0)$, $(0,\rho_1)$, …$(0, \rho_{2^n-1})$, $(1, \rho_{2^n-1})$,… $(1,\rho_2)$, $(1,\rho_1)$, $(1,\rho_0)$, $(0,\rho_0)$ είναι κύκλος του Hamilton. Άρα το θεώρημα ισχύει και για n μεγαλύτερο ή ίσο του 2.

5.2 Κώδικες Gray

Μια άμεση εφαρμογή τωνn-κύβων είναι οι κώδικες Gray

Έστω οι 16 =2^4 πρώτοι ακέραιοι αριθμοί σε δυαδική μορφή.

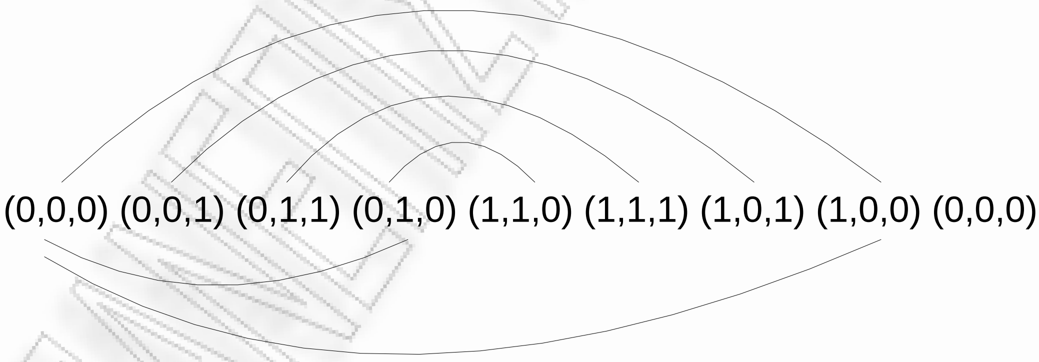
0000,0001,0010,0011,0100,0101,0110,0111,

1000,1001,1010,1011,1100,1101,1110,1111 (5.1)

Πηγαίνοντας από τον πρώτο στον τελευταίο αριθμό οι αλλαγές στα ψηφία είναι:

1,2,1,3,1,2,1,4,2,1,3,1,2,1.

Έστω οι κορυφές του κύκλου του Hamilton για τον 4-κύβο που προκύπτει από τον 3-κύβο του σχήματος 5.2.



Σχήμα 5.2

0000,0001,0011,0010,0110,0111,0101,0100,

1100,1101,1111,1110,1010,1011,1001,1000 (5.2)

Είναι πάλι οι 16 πρώτοι ακέραιοι αριθμοί αλλά κάθε δύο διαδοχικοί αριθμοί διαφέρουν κατά ένα ψηφίο. Η σειρά αυτή ακριβώς είναι ο κώδικας Gray των 16 πρώτων ακεραίων.

Ο τρόπος μετάβασης από τους όρους Gray στους φυσικούς αριθμούς και το αντίστροφο θα δοθεί μέσω της παρακάτω εφαρμογής.

Εφαρμογή 5.1: Να βρεθεί η θέση του 13 στον κώδικα Gray καθώς και ποιος αριθμός είναι στην $6^{η}$ θέση του κώδικα αυτού.

Απάντηση: $13=ψ_3ψ_2ψ_1ψ_0=(1101)_2$

$χ_3$=πλήθος μονάδων στο $ψ_3$ =1

$χ_2$=πλήθος μονάδων στο $ψ_2,ψ_3$ =2 = 0Mod2

$χ_1$=πλήθος μονάδων στο $ψ_1,ψ_2,ψ_3$ =2 = 0Mod2

$χ_0$=πλήθος μονάδων στο $ψ_0,ψ_1,ψ_2,ψ_3$ =3 = 1Mod2

Άρα ο 13 εμφανίζεται στη θέση $(1001)_2$ =9 όπου η αρίθμηση αρχίζει από το μηδέν.

Έχουμε $6=χ_2χ_1χ_0=(110)_2$

$Ψ_2=χ_2+χ_3$ 1+0=1

$Ψ_1=χ_1+χ_2$ =1+1=0mod2

$Ψ_0=χ_0+χ_1$ =0+1=1

Άρα στην $6^{η}$ θέση του κώδικα βρίσκεται ο αριθμός $(0101)_2$,ο οποίος είναι ο 5.

5.3 Αριθμοί Ramsey

Το παιχνίδι του Ramsey:

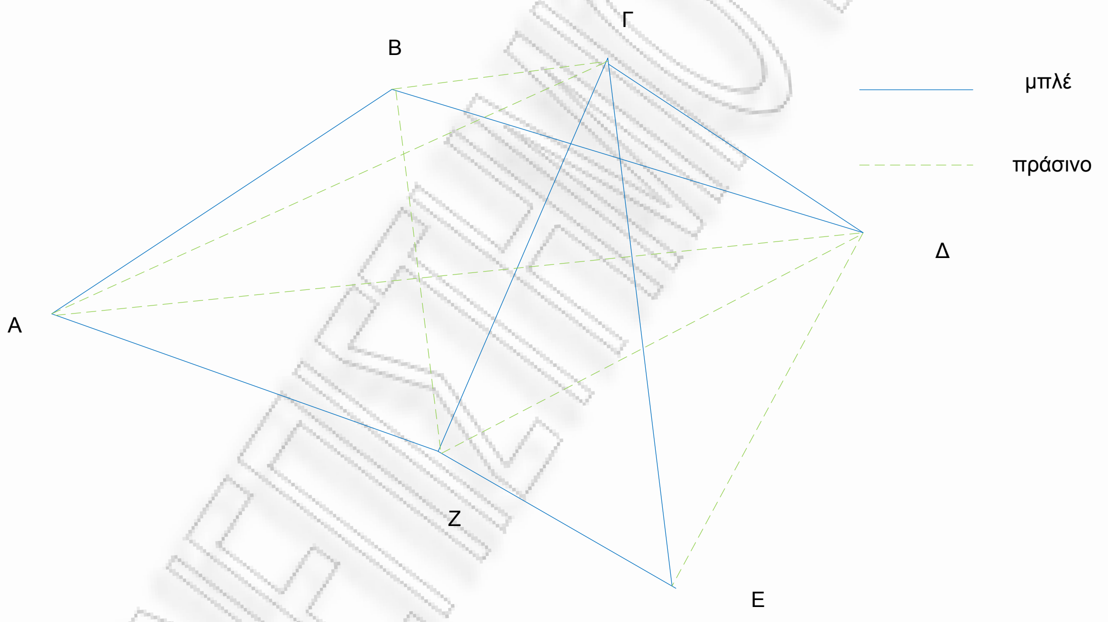
Έστω δύο παίκτες με διαφορετικό χρώμα στυλό (μπλε και πράσινο). Οι παίκτες ενώνουν διαδοχικά σημεία (συνολικά n) τα οποία βρίσκονται σε ένα φύλλο χαρτί με μια γραμμή με το χρώμα που διάλεξαν. Ο πρώτος που θα σχηματίσει ένα τρίγωνο κερδίζει. Για ποια n κερδίζει πάντοτε ένας παίκτης και για ποιο είναι το ελάχιστο n ώστε να συμβαίνει αυτό;

Για n=6 παίρνουμε το σχήμα 5.3 το οποίο παρουσιάζει μια εκτέλεση του παιχνιδιού.

Οι παίκτες έπαιξαν ως εξής:

1ος ΑΒ ΑΖ ΓΖ ΒΔ ΓΔ ΓΕ ΖΕ

2ος ΒΖ ΒΓ ΑΓ ΑΔ ΖΔ ΔΕ



Σχήμα 5.3

Θεώρημα 5.2: Αν ένα γράφημα με 6 κορυφές, τότε το G ή το G* περιέχει τρίγωνο.

Εφαρμογή: Έξι άτομα βρίσκονται σε μια δεξίωση. Υπάρχουν 3 άτομα που γνωρίζονται μεταξύ τους ή υπάρχουν 3 άτομα που κανένα να μην γνωρίζει τα άλλα δύο;

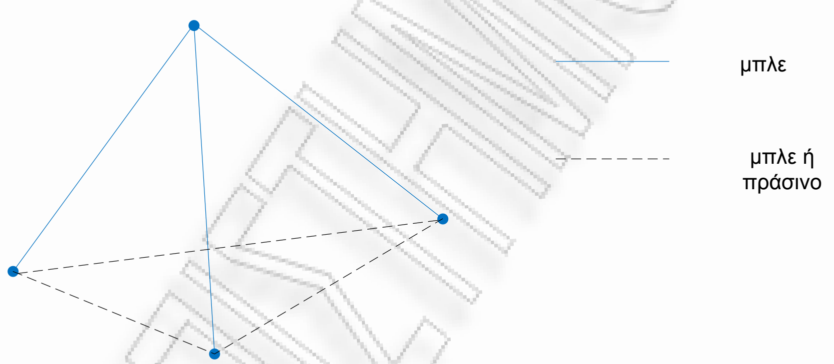
Απάντηση: Επιλέξουμε τυχαία ένα άτομο. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις

(α) το άτομο αυτό να γνωρίζει τρείς από τους υπόλοιπους

(β) το άτομο αυτό να γνωρίζει το πολύ δύο από τους υπόλοιπους

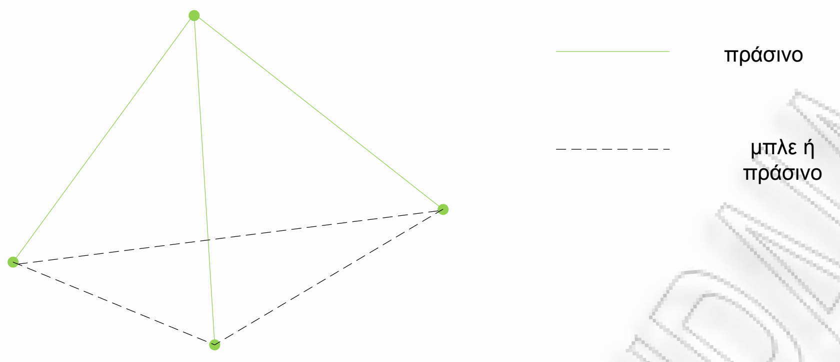
Άρα έχουμε

(α) Αν γνωρίζει τρείς τότε δύο από τους τρείς γνωρίζονται μεταξύ τους (μπλε τρίγωνο σχήμα 5.4). Αν κανείς δεν γνωρίζει τους άλλους δύο τότε έχουμε πράσινο τρίγωνο στο σχήμα 5.4



Σχήμα 5.4

(β) Αν γνωρίζει δύο το πολύ τότε συμπεραίνουμε ότι δεν θα γνωρίζει σίγουρα τρείς.
Αν οποιοιδήποτε δύο από τους τρείς δε γνωρίζονται τότε σχηματίζεται ένα πράσινο τρίγωνο στο σχήμα 5.5. Αν και οι τρείς γνωρίζονται τότε έχουμε ένα μπλε τρίγωνο.



Σχήμα 5.5

Ορισμός 5.2: κ-υποσύνολο

κ-υποσύνολο ενός συνόλου Σ ονομάζεται κάθε υποσύνολο σου Σ με κ στοιχεία.

Θεώρημα 5.3: Έστω σύνολο Σ με 6 στοιχεία. Διαιρούμε το σύνολο σε δυο κλάσεις Χ και Ψ.

Τότε θα ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

(α) Υπάρχει 3-υποσύνολο τους του οποίου όλα τα 2-υποσύνολα ανήκουν στην κλάση Χ

(β) Υπάρχει 3-υποσύνολο τους του οποίου όλα τα 2-υποσύνολα ανήκουν στην κλάση Ψ

Ορισμός 5.3: Έστω ένα σύνολο Σ με Ν στοιχεία και δύο φυσικοί αριθμοί p,q τουλάχιστον 2. Σχηματίζουμε τα 2-υποσύνολα του Σ και τα κατανέμουμε στα Χ και Ψ. Ισχύουν:

(α) υπάρχει p-υποσύνολο του Σ του οποίου όλα τα 2-υποσύνολα ανήκουν στην κλάση Χ

(β) υπάρχει q-υποσύνολο του Σ του οποίου όλα τα 2-υποσύνολα ανήκουν στην κλάση Ψ

Τότε θα λέμε ότι ο αριθμός Ν έχει την ιδιότητα του Ramsey.

Θεώρημα 5.4(Ramsey): Έστω p,q φυσικοί αριθμοί μεγαλύτεροι ή ίσοι του 2. Τότε υπάρχει φυσικός αριθμός Ν που να έχει την (p,q)-ιδιότητα του Ramsey.Ο αριθμός αυτός λέγεται αριθμός Ramsey των p,q και συμβολίζεται με R(p,q).

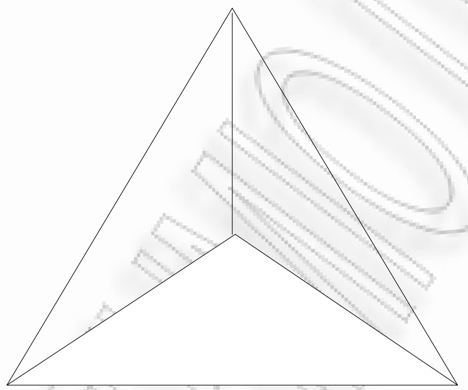
Γνωστοί αριθμοί Ramsey:

p q	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	36	40-43
4	9	18	25	35-41	49-61	55-84	69-115	80-149
5	14	25	43-49	58-87	80-143	95-216	121-316	141-442

6° ΚΕΦΑΛΑΙΟ : Χρωματισμός κορυφών γραφημάτων

6.1 Γενικά

Ένα άλυτο για 100 και πλέον χρόνια για τη θεωρία γραφημάτων ήταν να προσδιοριστεί ο μικρότερος αριθμός χρωμάτων που πρέπει να χρησιμοποιηθούν για να έχουμε ένα γνήσιο χρωματισμό ενός επίπεδου γραφήματος. Τρία χρώματα δεν μπορούμε να χρωματίσουμε το γράφημα του σχήματος 6.1 ενώ πάντα τα πέντε χρώματα είναι αρκετά. Αρκούν όμως τέσσερα χρώματα. Το απέδειξαν το 1976 οι Appel και Haken με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή.



Σχήμα 6.1

Ορισμός 6.1: Χρωματισμός

Χρωματισμός ενός γραφήματος είναι η αντιστοίχηση χρωμάτων στις κορυφές του γραφήματος ώστε συνδεδεμένες κορυφές να έχουν διαφορετικά χρώματα.

Ορισμός 6.2: κ-χρωματισμός

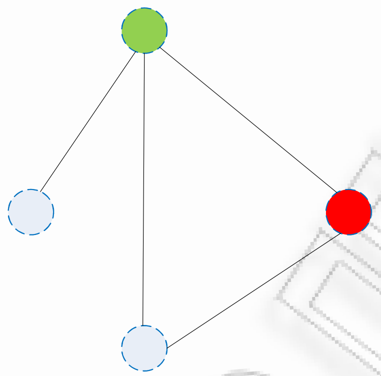
Αν για τον χρωματισμό χρησιμοποιηθούν κ χρώματα τότε έχουμε ένα κ-χρωματισμό.

Ορισμός 6.3: Χρωματικό αριθμός

Ο ελάχιστος αριθμός κ για τον οποίο έχουμε χρωματισμό λέγεται χρωματικός αριθμός. Συμβολίζεται με Χ(G).

Ορισμός 6.4: Χρωματική κλάση

Ονομάζεται το σύνολο των κορυφών με το ίδιο χρώμα.



Σχήμα 6.1 – 3-χρωματισμός

Ορισμός 6.5: Χρωματικά πολυώνυμα

Αν συμβολίσουμε με P(G,x) το πλήθος των χρωματισμών του γραφήματος G με το πολύ x χρώματα, δηλαδή το πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών του γραφήματος. Το P(G,x) εκφράζεται ως πολυώνυμο και ονομάζεται χρωματικό πολυώνυμο.

Θεώρημα 6.1: Κάθε επίπεδο γράφημα είναι 4-χρωματισμένο. Δηλαδή ισχύει $X(G) \leq 4$.

Θεώρημα 6.2: Κάθε επίπεδο γράφημα είναι 5-χρωματισμένο. Δηλαδή ισχύει $X(G) \leq 5$.

Θεώρημα 6.3: Κάθε επίπεδο γράφημα που δεν περιέχει τρίγωνο είναι 3-χρωματισμένο.

6.2 Αλγόριθμος χρωματισμού

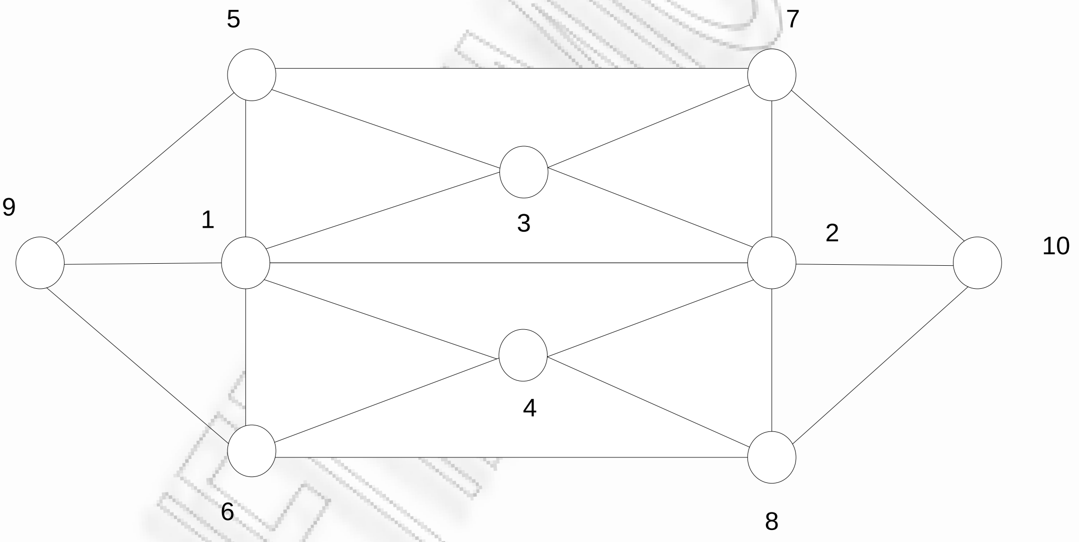
Ο ακόλουθος αλγόριθμος οφείλεται στον ελληνικής καταγωγής ερευνητή Ν. Χριστοφίδη.

Βήμα 1: Διατάσσουμε τις κορυφές σε φθίνουσα σειρά βαθμών

Βήμα 2: Αντιστοιχίζουμε το πρώτο χρώμα στην πρώτη κορυφή

Βήμα 3: Παίρνουμε την επόμενη κορυφή στη σειρά. Ελέγχουμε αν αυτή η κορυφή δεν συνδέεται άμεσα με κάποια κορυφή η οποία έχει εξεταστεί προηγουμένως. Αν συμβαίνει κάτι τέτοιο δίνουμε στην κορυφή το χρώμα αυτό αλλιώς της δίνουμε το επόμενο χρώμα.

Εφαρμογή: Να βρεθεί ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος του σχήματος 6.2 με τον αλγόριθμο Χριστοφίδη.



Σχήμα 6.2

Απάντηση: Οι κορυφές είναι ταξινομημένες άρα δίνουμε το κόκκινο χρώμα στην κορυφή 1.Η κορυφή 2 δεν μπορεί να πάρει το κόκκινο άρα της δίνουμε το πράσινο.

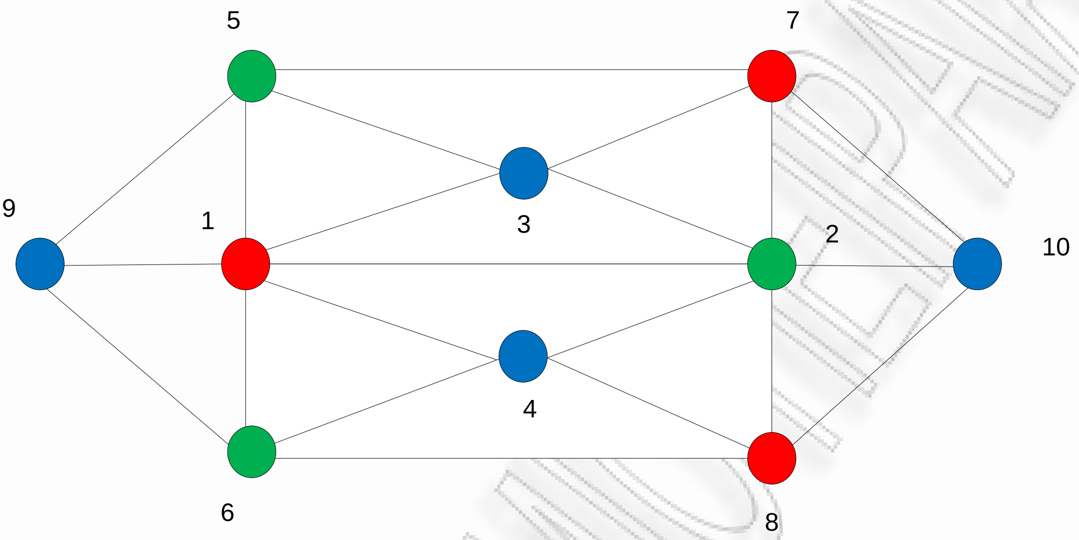
Η κορυφή 3 συνδέεται με τις 1 και 2 άρα θα πάρει το μπλε χρώμα.

Η κορυφή 4 συνδέεται με τις 1 και 2 αλλά όχι με την 3, άρα θα πάρει το μπλε χρώμα.

Η κορυφή 5 συνδέεται με την 1 αλλά όχι με την 2,άρα θα πάρει το πράσινο χρώμα.

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο και παίρνουμε το γράφημα του σχήματος 6.3

Παρατηρούμε ότι ισχύει X(G)=3.



Σχήμα 6.3

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΔΙΕΘΝΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Adams, A. A., Gottliebsen, H., Linton, S.A., And Martin, U., "A verifiable symbolic definite integral table look-up". In *Automated Deduction* – CADE – 16. Proceedings. Berlin: Springler. H. (Gandinger ed.), Lecture Notes Comput. Sci. vol. 1632, pp 112 – 126, 1999.

2. Appel Keneth; Haken Wolfgang; Koch John, "Every Planar Graph is Four Colorable", Illinois Journal of Mathematics 21: 439 – 567, 1997.

3. Boolos, G.; Burgess, J. P.; Jeffrey, R., "Computability and Logic (5^{th} ed.)", Cambridge: Cambridge University Press, ISBN 9780521877527, 2007.

4. Chunk, F. R. K., and Graham, R. L., "Forced convex n – gons in the plane", Discrete Comput. Geom. 19, 3, Special Issue 367 – 371, 1998.

5. Diestel, R., "Graph Theory", Electronic Edition, Springer – Verlag Heidelberg, New York, 2005.

6. Dijkstra, E. W., "A Note on Two Problems in Connexion with Graphs", *Numerische Mathematic*, 1: 269 – 271, 1959.

7. Erdös & Szekeres, "A Combinatorial Problem in Geometry", *Compotio Math.* 2: 463 – 470, 1935.

8. Euler Archive (The), commentary on publication and original text in Latin.

9. Fields, G. E., "Introduction to Graph Theory", Southern Connecticut State University, 2001.

10. Kuratowski, Kazimierz, « Sur le problème des courbes gauches en topologie », Fund. Math. 15 : 271 – 283, 1930.

11. Ramsey, F. P., "On a problem of formal logic", *Proc. London Math. Soc.*, 264 – 286, 1930.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ

1 Σπύρου Π., «Θεωρία Γραφημάτων», Αθήνα 1997

2 Μαυρονικόλας, Μ., «Θεωρία Γράφων», Ε. Α. Π., Πάτρα 2002.

3 Γεοργιακόδη Μ.Α. , «Σημειώσεις Θεωρίας Γραφημάτων», Πειραιάς 1986

4 Θεόδωρος Παπαθεοδώρου , «Αλγόριθμοι», Πάτρα 2007

5 Χρόνης Μωυσίδης, «Συνδιαστική απαρίθμηση», Θεσσαλονίκη 2002