Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΚΑΙ ΥΠΟΧΡΕΩΣΕΩΝ ΣΥΝΤΑΞΙΟΔΟΤΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΘΟΡΙΣΜΕΝΗΣ ΠΑΡΟΧΗΣ

Ανδρέας Ι. Κουτσοχέρας

Διπλωματική Εργασία
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς
Ιούνιος 2011

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. ……..συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Βρόντος Σπυρίδων (Επιβλέπων)
- Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος
- Νεκτάριος Μιλτιάδης

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN
ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

ASSET/LIABILITY MANAGEMENT
OF DEFINED BENEFIT
PENSION SCHEMES

By

Andrew J. Koutsocheras

MSc Dissertation
submitted to the Department of Statistics and Insurance
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of
the requirements for the degree of Master of Science in
Actuarial Science and Risk Management

Piraeus
June 2011

Περίληψη

Οι χρηματιστηριακοί δείκτες και οι δείκτες κρατικών ομολόγων αποτελούν ένα σημαντικό επενδυτικό εργαλείο για την επένδυση των περιουσιακών στοιχείων των συνταξιοδοτικών ταμείων με σκοπό να καλύψουν τις υποχρεώσεις που έχουν αναλάβει.

Στην παρούσα διατριβή θα μελετήσουμε τις μεθόδους που έχουν προταθεί στη διεθνή βιβλιογραφία για την από κοινού διαχείριση των περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων συνταξιοδοτικών σχημάτων καθορισμένης παροχής. Δίνεται έμφαση στην μοντελοποίηση του κίνδυνου που αντιμετωπίζει ένα συνταξιοδοτικό σχήμα καθορισμένης παροχής να μην είναι σε θέση να καλύψει τις υποχρεώσεις που έχει εγγυηθεί, χρησιμοποιώντας τα σημαντικότερα μέτρα κίνδυνου που έχουν προταθεί στην βιβλιογραφία. Εξετάζεται η βέλτιστη επενδυτική στρατηγική που θα πρέπει να ακολουθήσουν τα συνταξιοδοτικά σχήματα καθορισμένης παροχής, όταν επενδύουν σε ομολογιακούς και μετοχικούς δείκτες.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος Διαγραμμάτων

Δομή της διπλωματικής εργασίας

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε το υπόδειγμα του κύκλου ζωής ενός εργαζομένου και τις πήγες αβεβαιότητας που αντιμετωπίζει κατά την διάρκεια της ζωής του. Δίνεται μια ιστορική αναδρομή της εξέλιξης των συνταξιοδοτικών ταμείων καθώς και αναφέρονται τα συνταξιοδοτικά ταμεία της χώρας μας. Διαχωρίζονται τα συνταξιοδοτικά συστήματα και οι τρόποι χρηματοδότησης τους. Ακόμα αναπτύσσονται οι τρεις πυλώνες ασφάλισης και αναφέρονται ενδεικτικά οι παράγοντες που δημιουργούν προβλήματα στην βιωσιμότητα των συνταξιοδοτικών ταμείων της Ελλάδας. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά οι τύποι των συνταξιοδοτικών σχημάτων καθώς και διαφορές που έχουν στο τρόπο χρηματοδότησης τους και στις παροχές που εγγυώνται. Στο τρίτο κεφάλαιο αναφέρονται ο ορισμός και οι σημαντικότερες ιδιότητες της κίνησης Brown και της γεωμετρικής κίνησης Brown. Ακόμα παρουσιάζεται το μοντέλο της κίνησης Brown για ένα και για περισσότερα από ένα χρεόγραφα καθώς και η μοντελοποίηση των τιμών ενός χαρτοφυλακίου. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται ενδεικτικά μοντέλα αποτίμησης των υποχρεώσεων συνταξιοδοτικών σχημάτων καθορισμένης παροχής που έχουν προταθεί στη διεθνή βιβλιογραφία. Στο πέμπτο κεφάλαιο αναφερόμαστε στα διάφορα μοντέλα διαχείρισης περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων ενός συνταξιοδοτικού ταμείου. Τέλος στο έκτο και τελευταίο κεφάλαιο έχοντας ως δεδομένα τις μηνιαίες αποδόσεις δέκα χρηματιστηριακών δεικτών τιμών μετοχών και κρατικών ομολόγων και χρησιμοποιώντας τα μοντέλα που αναλύσαμε στο πέμπτο κεφάλαιο δημιουργούμε χαρτοφυλάκια στα οποία θα μπορούσε να επενδύσει ένα συνταξιοδοτικό ταμείο καθορισμένης παροχής ώστε να έχει τη δυνατότητα να καλύψει τις μελλοντικές υποχρεώσεις του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Τι είναι Σύνταξη

Ένα από τα βασικά αγαθά στη ζωή είναι το εισόδημα. Αποτελεί το μέσο για να καλύπτουμε τις βασικές μας ανάγκες, αλλά και να πραγματοποιούμε τις επιθυμίες και τα όνειρα μας. Οι πηγές του εισοδήματος σε έναν άνθρωπο είναι τρεις α) η εργασία, β) τα κεφάλαια και γ) η φιλανθρωπία. Κατά την παραγωγική μας περίοδο, δηλαδή στα 35-40 έτη, όταν όλα πάνε καλά, συνήθως οι περισσότεροι διαβιούμε μέσω του πρώτου παράγοντα, δηλαδή μέσω της εργασίας. Οι κοινωνίες γενικά αποτελούνται από δυο κατηγορίες πληθυσμιακές : α) τον **ενεργό** εργασιακά πληθυσμό και β) τον **μη ενεργό** πληθυσμό, που αποτελείται κατά κύριο λόγο από ανήλικους και υπερήλικους.

Η πρώτη κατηγορία είναι υποχρεωμένη κατά την παραγωγική της περίοδο να καλύψει τις δικές τις εισοδηματικές ανάγκες, αλλά και να καλύψει τις εισοδηματικές ανάγκες του μη ενεργού πληθυσμού. Για τα ανήλικα τέκνα αποτελεί ατομική υποχρέωση, αν και εφόσον υπάρχουν, για τους δε υπερήλικες, οι περισσότεροι εκ των οποίων απλά προηγήθηκαν στην κατηγορία του ενεργού πληθυσμού, αποτελεί κοινωνική υποχρέωση.

Έτσι με την ανάπτυξη του πληθυσμού, κυρίως μεταπολεμικά, όπου υπήρξε και μεγάλη οικονομική ανάπτυξη, άρα και πολλές θέσεις εργασίας, αναπτύχθηκαν από τα κράτη τα **Συστήματα Κοινωνικής Ασφάλισης.** Στηρίχτηκαν στην αρχή της διαδοχής των γενεών και χαρακτηρίζονται ως αναδιανεμητικά. Αυτό πολύ απλά σημαίνει ότι οι σημερινοί εργαζόμενοι συνεισφέρουν ένα μέρος του εισοδήματος τους προκειμένου να καλυφθούν οι εισοδηματικές ανάγκες των υπερηλίκων, που ανήκουν στον μη ενεργό πληθυσμό, δηλαδή σε αυτούς που δεν εργάζονται.

Σύμφωνα με τον Νεκτάριο[1] (2008) η μηνιαία σύνταξη είναι ένα από τα πιο πολύπλοκα χρηματοοικονομικά προϊόντα στις σύγχρονες κοινωνίες καθώς αποτελεί μια ισόβια ροή εισοδήματος κατά την περίοδο της συνταξιοδότησης, η οποία εξασφαλίζει ένα επίπεδο διαβίωσης παρόμοιο με αυτό που είχε ο συνταξιούχος όταν εργαζόταν, η οποία αναπροσαρμόζεται ετησίως ώστε να έχει σταθερή αγοραστική αξία και να μην διευρύνεται η διαφορά των επιπέδων διαβίωσης των συνταξιούχων και εργαζομένων.

1.2 Το υπόδειγμα του κύκλου ζωής[2]

Σύμφωνα με την υπόθεση του κύκλου ζωής τα άτομα προγραμματίζουν την καταναλωτική και αποταμιευτική τους συμπεριφορά για μακροχρόνιο ορίζοντα, ώστε να πετύχουν την καλύτερη διαχρονικά κατανομή της κατανάλωσης τους για όσα χρόνια ελπίζουν να ζήσουν. Βασίζεται στην υπόθεση ότι οι καταναλωτές δρουν ορθολογικά και για την τρέχουσα κατανάλωση τους λαμβάνουν υπόψη, έκτος από το τρέχον εισόδημα, και τα προβλεπόμενα μελλοντικά εισοδήματα τα οποία κατανέμουν μεταξύ κατανάλωσης και αποταμίευσης. Αναλύοντας την έννοια της σύνταξης με βάση το υπόδειγμα του κύκλου ζωής ένα μέρος του εισοδήματος του ενεργού εργασιακά πληθυσμού αποταμιεύεται κατά την διάρκεια των ετών εργασίας έτσι ώστε να έχει την δυνατότητα κατανάλωσης κατά την διάρκεια της συνταξιοδότησης του και μέχρι να αποβιώσει. Επομένως κάθε εργαζόμενος αποταμιεύει ένα μέρος του μισθού του μέσω των εισφορών στο ταμείο ασφάλισης του καθώς και μέσω προσωπικής αποταμίευσης με σκοπό το επίπεδο κατανάλωσης του αφού συνταξιοδοτηθεί να είναι ισοδύναμο με αυτό κατά την διάρκεια της εργασίας του.
Επομένως ισχύει :

$$'Ετη\ εργασίας \times (Εισόδημα - Κατανάλωση) = 'Ετη\ συνταξιοδότησης \times Κατανάλωση$$

ή

$$'Ετη\ εργασίας \times Εισόδημα = Κατανάλωση \times\ 'Ετη\ εργασίας + 'Ετη\ συνταξιοδότησης$$

Ανάλογα λοιπόν με το επίπεδο κατανάλωσης που προσδοκά κάθε εργαζόμενος να έχει μετά την συνταξιοδότηση του προκύπτει και το ποσό που πρέπει να αποταμιεύει κατά την διάρκεια της εργασίας του. Για παράδειγμα για κάποιον που θέλει να έχει ίδιο επίπεδο

[1] Νεκτάριος Μ. (2008) Ασφαλιστική Μεταρρύθμιση με Συναίνεση και Διαφάνεια, Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα 2008.
[2] Modigliani F.(2005) The collective papers of Franco Modigliani, Volume 6, Massachusetts Institute of Technology.

κατανάλωσης τόσο κατά την διάρκεια της εργασίας του όσο και μετά την συνταξιοδότηση του το ποσό που πρέπει να αποταμιεύει κάθε έτος είναι όσο με :

$$S = E - \frac{A \times E}{T} = \frac{T - A}{T} \times E$$

Όπου E είναι το εισόδημα , A τα έτη εργασίας και T είναι το άθροισμα των ετών που προσδοκά ότι θα επιζήσει μετά την συνταξιοδότηση και των ετών εργασίας.

1.3 Πηγές αβεβαιότητας[3]

Κάθε εργαζόμενος που αποστρέφεται τον κίνδυνο θα ήθελε να διασφαλίσει το εισόδημα του μετά την συνταξιοδότηση του και στην ουσία την σύνταξη που θα λαμβάνει καθώς υπάρχουν πολλές πηγές αβεβαιότητας που μπορούν να την μειώσουν. Ενδεικτικά αναφέρουμε μερικές από αυτές.:

Κίνδυνος Πληθωρισμού (Inflation Risk): Είναι ο κίνδυνος που προκύπτει από την άνοδο του Δείκτη Τιμών Καταναλωτή και μπορεί να επηρεάσει σημαντικά την αγοραστική δύναμη της ασφαλιστικής παροχής καθώς δεν μπορεί να προσδιοριστεί επακριβώς μακροπρόθεσμα.

Κίνδυνος Μακροβιότητας (Longevity Risk**)** : Ο κίνδυνος μακροβιότητας εμφανίζεται τόσο σε ατομικό όσο και σε συνολικό επίπεδο. Για το άτομο ο κίνδυνος συνίσταται στο να επιβιώσει περισσότερο από όσο του επιτρέπει ο συσσωρευμένος πλούτος του για να διατηρήσει το επίπεδο ζωής που απολαμβάνει. Εργαλεία για τη διαχείριση του ατομικού κινδύνου μακροβιότητας έχουν αναπτυχθεί από καιρό. Σ' αυτά περιλαμβάνονται τα κρατικά συστήματα κοινωνικής ασφάλισης, τα προγράμματα καθορισμένων παροχών που παρέχονται από τις επιχειρήσεις μέσω των συνταξιοδοτικών προγραμμάτων και οι ισόβιες πρόσοδοι που παρέχονται από τις ασφαλιστικές εταιρείες.

Κίνδυνος Ποσοστού Αντικατάστασης (Replacement Rate Risk): είναι ο κίνδυνος να μην μπορέσει ο εργαζόμενος να διατηρήσει το ίδιο επίπεδο διαβίωσης μετά την συνταξιοδότηση του και μέχρι το τέλος της ζωής του. Ένας λόγος είναι η μη

[3] Συριόπουλος Κ. (2010) Διαχείριση Κεφαλαίων Ασφαλιστικών Οργανισμών, Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων, Πανεπιστήμιο Πατρών.

αποτελεσματική επένδυση του εισοδήματος του καθώς δεν είναι σίγουρο ότι έχει τις κατάλληλες γνώσεις για αυτό ούτε μπορεί να προβλέψει τις μελλοντικές του ανάγκες.

Κίνδυνος Αγοράς (Investment Risk) : είναι ο κίνδυνος μείωσης της αξίας μιας επένδυσης εξαιτίας αλλαγών στους παράγοντες που διαμορφώνουν την αξία της αγοράς. Οι κυριότεροι παράγοντες είναι ο κίνδυνος επιτοκίου, ο χρηματιστηριακός κίνδυνος και ο νομισματικός κίνδυνος.

Κίνδυνος Χώρας (Country Risk) : τον τελευταίο καιρό έχει κάνει την εμφάνιση του ο κίνδυνος χώρας που αφορά τον κίνδυνο μη πληρωμής των συντάξεων λόγω χρεοκοπίας.

1.4 Ιστορική εξέλιξη των Συνταξιοδοτικών ταμείων

Σύμφωνα με τον Blake[4] (2006) η έννοια της σύνταξης δεν είναι σημερινή επινόηση αλλά επινόηση των αναπτυσσόμενων χωρών τα τέλη του 19ου αιώνα και στις αρχές του 20ου αιώνα. Πριν από αυτό οι άνθρωποι στις λεγόμενες αναπτυγμένες χώρες δεν συνταξιοδοτούνταν αλλά δούλευαν μέχρι να καταλήξουν. Ο Bismarck δημιούργησε το πρώτο εθνικό σύστημα συνταξιοδότησης στην Γερμανία το 1880. Κατά τη διάρκεια του 20ου αιώνα ακολούθησαν και οι άλλες χώρες της Ευρώπης όπως και οι ΗΠΑ και η Αυστραλία. Παρολαυτά ακόμα και σήμερα για χώρες της Αφρικής, της Ασίας και της Λατινικής Αμερικής η συνταξιοδότηση εξακολουθεί να είναι όνειρο.

Στις ανεπτυγμένες χώρες το όλο οικοδόμημα βασίζεται σε 3 πυλώνες. Ο πρώτος πυλώνας διασφαλίζεται από το κράτος ως μέρους του κοινωνικού χαρακτήρα και της προστασίας των πολιτών. Υπάρχουν 2 κύρια είδη κοινωνικής ασφάλισης τα Beveridgean και τα Bismarckian. Το Beveridgean εξασφαλίζει μόνο μια επαρκή σύνταξη για την υποστήριξη των πολιτών πάνω από τα όρια της φτώχειας. Αν θέλουν ένα υψηλότερο επίπεδο διαβίωσης χρειάζεται να βρουν από μόνοι τους τις εναλλακτικές λύσεις για να το επιτύχουν. Οι ΗΠΑ και το Ηνωμένο Βασίλειο ως σύστημα κοινωνικής ασφάλισης έχουν το Beveridgean. Αντίθετα με την Γερμανία, την Ιταλία και τη Γαλλία που ακολουθούν το Bismarckian σύστημα κοινωνικής ασφάλισης το οποίο εξασφαλίζει πολύ πιο γενναιόδωρη σύνταξη σε σημείο που δεν απαιτείται περεταίρω εξοικονόμηση χρημάτων. Ο πρώτος πυλώνας χρηματοδοτείται από τους φόρους των εργαζομένων και πληρώνεται απευθείας στους συνταξιούχους. Με άλλα λόγια είναι γνωστό ως ένα μη χρηματοδοτούμενο σύστημα

[4] Blake D. (2006) Pension Economics , John Wiley & Sons Ltd, Chichester

καθώς δεν συσσωρεύονται κεφάλαια από περιουσιακά στοιχεία για το σκοπό της συνταξιοδότησης Οι λόγοι που δημιουργήθηκε η ανάγκη για μια τέτοια κάλυψη δεν είναι μόνο ανθρωπιστικοί. Η μη αντιμετώπιση των κινδύνων που απειλούν την οικονομική ευημερία θέτει σε κίνδυνο την κοινωνική συνοχή. Η ύπαρξη και λειτουργία ασφαλιστικών ταμείων συντελεί στη μείωση της οικονομικής ανασφάλειας και αβεβαιότητας των ατόμων επομένως συμβάλει στην κοινωνική σταθερότητα. Αν αναλογιστούμε την οικονομική εξαθλίωση που θα αντιμετώπιζε μια οικογένεια λόγω της αδυναμίας εργασίας είτε λόγω ασθένειας ή γηρατειών ή ακόμα και θανάτου ενός μέλους της, γίνεται πιο σαφής ο λόγος που συστάθηκαν και λειτουργούν τα συνταξιοδοτικά ή ασφαλιστικά ταμεία.

1.5 Συνταξιοδοτικά Ταμεία στην Ελλάδα

Με τον όρο ασφαλιστικά ταμεία εννοούμε τους φορείς που υλοποιούν το σύνολο ή ένα μέρος της κοινωνικής ασφάλισης, στηρίζονται κατά κύριο λόγο στην καταβολή ασφαλιστικών εισφορών εργαζομένων και εργοδοτών και εν μέρη στην κρατική χρηματοδότηση.
Η οργάνωση και η δομή των ασφαλιστικών ταμείων θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να επιτρέπει την επιμέριση και την διασπορά του κίνδυνου μείωσης του εισοδήματος των πιο ηλικιωμένων ανθρώπων με άλλους ανθρώπους ίδιας ηλικίας ή μικρότερης (βλέπε για παράδειγμα Shiller[5])
Τα συνταξιοδοτικά ταμεία στην Ελλάδα είναι Νομικά Πρόσωπα Ιδιωτικού Δικαίου και υπάγονται στην εποπτεία του κράτους (Υπουργείο Απασχόλησης και Κοινωνικής Προστασίας[6])
Μερικά από τα κυριότερα στη χώρα μας είναι ονομαστικά και ενδεικτικά τα έξης:

Ι.Κ.Α., Ο.Γ.Α., Ο.Α.Ε.Ε., Ταμείο Νομικών, ΤΣΑΥ, ΤΣΜΕΔΕ, Τ.Σ.Π.Ε.Α.Θ., ΤΑΙΣΥΤ, ΤΑΤΤΑ, ΤΣΕΥΠ, ΤΑΠ-ΟΤΕ, Ταμείο Ασφαλίσεως Προσωπικού ΕΤΒΑ,
Ταμείο Ασφαλίσεως Προσωπικού της Ασφ. Εταιρείας "Η Εθνική",
Ταμείο Συντάξεων του Προσ. της Εθνικής Τραπέζης της Ελλάδος,
Ταμείο Ασφαλίσεως Προσωπικού Ιονικής και Λαϊκής Τράπεζας,
Ταμείο Συντάξεων Πρόνοιας Προσωπικού Α.Τ.Ε, Ταμείο Προνοίας Ξενοδόχων,

[5] Robert J.Shiller (1993) "Macromarkets" Creating Institutions for Managing Society's Largest Economic Risks, Oxford University press

[6] www.ypakp.gr Ιστοσελίδα του Υπουργείου Απασχόλησης και Κοινωνικής Ασφάλισης

Οργανισμός Ασφάλισης Προσωπικού Δ.Ε.Η.,

Ταμ. Συντ. & Επικ. Ασφαλ. Προσ. Γεωργ. Συνετ/κών Οργαν/σεων,

Ταμείο Ασφάλισης Ναυτ. Πρακτόρων και Υπαλλήλων,

Ταμείο Συντάξεων Προσωπικού ΗΣΑΠ,

Ταμείο Συντάξεων Προσωπικού της Τραπέζης της Ελλάδος και Κτηματικής,

Ταμείο Συντάξεων Εφημεριδοπωλών και Υπαλλήλων Πρακτορείων Θεσσαλονίκης.

Βασικός στόχος[7] ενός συνταξιοδοτικού πλάνου είναι η παροχή εισοδήματος στους εργαζόμενους όταν αποχωρούν από την ενεργό υπηρεσία. Ειδικότερα η παροχή σύνταξης με επιπλέον

- παροχή κατά την ηλικία συνταξιοδότησης σύνταξης που θεμελιώθηκε σε προγενέστερο χρόνο μετά την συμπλήρωση συγκεκριμένου αριθμού ετών υπηρεσίας
- παροχή στην περίπτωση μετάβασης σε κατάσταση ανικανότητας
- παροχή στο θάνατο

1.6 Συνταξιοδοτικά Συστήματα

Η ιστορική ανάπτυξη των συνταξιοδοτικών συστημάτων ανέδειξε μια βασική διάκριση ως προς τη μέθοδο χρηματοδότησης τους ανάμεσα σε διανεμητικά (Pay-As-You-Go systems) και κεφαλαιοποιητικά (Funded systems).

Σε ομιλία του ο Παλαιολόγος[8] (1996) αναφέρεται στο διανεμητικό σύστημα ως ένα σύστημα στο οποίο οι εισφορές εισπράττονται από τους εργαζόμενους και καταβάλλονται στους συνταξιούχους. Για αυτό το λόγο και στη θεωρία το διανεμητικό σύστημα περιγράφεται ως «συμβόλαιο των γενεών», αφού οι σημερινοί εργαζόμενοι που χρηματοδοτούν τις συντάξεις αυτών που συνταξιοδοτούνται προσδοκούν ότι η επόμενη γενιά θα χρηματοδοτήσει τις δικές τους συντάξεις όταν γίνουν πλέον απόμαχοι του εργασιακού βίου. Ο χαρακτήρας του διανεμητικού συστήματος είναι δημόσιος και για την

[7] Οικονόμου Μ. Σημειώσεις μαθήματος «Συνταξιοδοτικά Σχήματα», Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών-Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

[8] Παλαιολόγος Δ. (1996) Ομιλία με θέμα «Κοινωνική Ασφάλιση και Ασφάλεια Ζωής» στο Ελληνικό Ινστιτούτο Ασφαλιστικών Σπουδών.

ομαλή λειτουργιά του απαιτείται επαρκής αριθμός εργαζομένων που να ξεπερνά σε μεγάλο βαθμό τον αριθμό των συνταξιούχων.

Αντίθετα, στο κεφαλαιοποιητικό σύστημα οι εισφορές αποθεματοποιούνται, και από το κεφάλαιο και τους τόκους πληρώνονται οι συντάξεις. Η αποδοτικότητα του κεφαλοποιητικού συστήματος δεν εξαρτάται από τις κοινωνικές συνθήκες, αλλά από την επέκταση και την κερδοφορία των εγχώριων και διεθνών χρηματαγορών, αφού η λογική τους συνίσταται στη επένδυση των αποθεματικών σε χρηματοοικονομικά προϊόντα με σκοπό την υψηλή κερδοφορία. Το κεφαλαιοποιητικό σύστημα εφαρμόζεται κυρίως στις ΗΠΑ και το ύψος της σύνταξης εξαρτάται από το ύψος των εισφορών που πληρωνόντουσαν από τον κάθε εργαζόμενο κατά τη διάρκεια του εργασιακού βίου του και από την απόδοση του επενδεδυμένου κεφαλαίου.

Ένας άλλος διαχωρισμός των συνταξιοδοτικών σχημάτων είναι σε αναδιανεμητικά και ανταποδοτικά, ανάλογα με το αν πληρώνουν τις συντάξεις συμφώνα με τις εισφορές ή αν προχωρούν πέρα από αυτή την αναλογία. Επίσης χαρακτηρίζονται και από τον τρόπο χρηματοδότησης. Αν τα χρήματα προέρχονται από τις εισφορές τότε μιλάμε για Κοινωνική Ασφάλιση, ενώ εάν προκύπτουν από κρατική επιχορήγηση τότε μιλάμε για Κρατική Πρόνοια.

Παρότι το κεφαλαιοποιητικό σύστημα θεωρήθηκε πιο αποτελεσματικό και ανεξάρτητο από τις δημογραφικές μεταβολές και υιοθετήθηκε στις ΗΠΑ και το Ηνωμένο Βασίλειο, αυτό δεν επαληθεύτηκε στην πράξη, ενώ γενικά αλλά και ειδικά για την Ευρώπη, η κοινωνική αλληλεγγύη δεν μπορεί να μην συνυπολογίζεται λόγω του παρελθόντος της κοινωνικής πολιτικής αλλά και του παρόντος, καθώς οι μεταβολές δεν είναι δεδομένες και αμετάβλητες αλλά ούτε και υπάρχει ομοιομορφία στους ρυθμούς μεταβολής σε όλες τις χώρες.

1.7 Χρηματοδότηση Συνταξιοδοτικών Συστημάτων

Σε άρθρο του για το Invesment Research & Analysis Journal ο Ασημακόπουλος[9] (2004) αναφέρει ότι είναι έκδηλη τα τελευταία χρόνια η αγωνία των περισσοτέρων κυβερνήσεων σε παγκόσμιο επίπεδο σχετικά με τις προοπτικές των ασφαλιστικών συστημάτων. Το

[9] Ασημακόπουλος Ι. (2004) Άρθρο με θέμα «Η Χρηματοδότηση ενός Ασφαλιστικού Συστήματος : Ανταποδοτικός ή Κεφαλαιοποιητικός Χαρακτήρας».

γεγονός ότι το επίπεδο των συνταξιοδοτικών παροχών θα πρέπει να διατηρεί το βιοτικό επίπεδο των συνταξιούχων πάνω από ένα ελάχιστο ανεκτό όριο αποτελεί ζήτημα σημαντικής οικονομικής πολιτικής.

Το πρόβλημα σε ένα συνταξιοδοτικό σύστημα δημιουργείται όταν ο ρυθμός αύξησης των συνταξιούχων είναι μεγαλύτερος από αυτόν τον εργαζομένων. Η αντιμετώπιση του προβλήματος ουσιαστικά επιβάλει συντονισμένη παρέμβαση ώστε να βρεθεί η άριστη επιλογή μεταξύ αύξησης της παραγωγικότητας, μείωση της ανεργίας, επιμήκυνσης του χρόνου παραμονής στην εργασία, μείωσης της πραγματικής συντάξιμης παροχής, και τέλος, αλλαγή της σχέσης μεταξύ της φορολογικής επιβάρυνσης σε σχέση με το ύψος της αποταμίευσης. Για την επίλυση αυτού του προβλήματος έχει αναπτυχθεί ένας διάλογος σχετικά με τον τρόπο χρηματοδότησης των συστημάτων, αν θα βασίζεται στα συστήματα ανταποδοτικών παροχών ή αν θα πρέπει να αναπτυχθούν συστήματα βασισμένα στο κεφαλαιοποιητικό σύστημα.

Με δεδομένο ότι η απολαβή συνταξιοδοτικής παροχής, που να εξασφαλίζει τουλάχιστον ένα ελάχιστο επίπεδο διαβίωσης, αποτελεί μία αναφαίρετη κοινωνική κατάκτηση, η βέλτιστη λύση φαίνεται να είναι ο συνδυασμός των δύο συστημάτων όπου μέσω της ανταποδοτικής παροχής θα επιτελείται ο κοινωνικός ρόλος του κράτους, ενώ μέσω της κεφαλαιοποιητικής παροχής θα δημιουργούνται οι προϋποθέσεις ενίσχυσης του επιπέδου διαβίωσης μετά την ηλικία συνταξιοδότησης.

Τα συστήματα ανταποδοτικού χαρακτήρα έχουν το σημαντικό πλεονέκτημα ότι μπορούν να καλύπτουν το σύνολο σχεδόν των μελών της κοινωνίας καθώς δεν είναι απαραίτητο για όλους τους πολίτες να καταφεύγουν σε επιπλέον αποταμίευση. Επίσης, η διαδικασία λειτουργίας ενός τέτοιου συστήματος είναι σχετικά απλή, ενώ και το κόστος λειτουργίας του συστήματος δεν είναι ιδιαίτερα υψηλό.

Όσο αναφορά τα μειονεκτήματα των ανταποδοτικών συστημάτων μπορούμε να αναφέρουμε τη σημαντική επιβάρυνση των κρατικών προϋπολογισμών, τη μη δυνατότητα επιλογής κάποιου διαφορετικού σχήματος από τον εργαζόμενο, καθώς η συνεισφορά και η απολαβή του καθορίζεται κεντρικά. Επίσης, η εγγύηση που παρέχουν ενισχύει την αναβλητικότητα των πολιτών, οι οποίοι δεν αντιλαμβάνονται τις πραγματικές ανάγκες που θα δημιουργηθούν κατά την περίοδο συνταξιοδότησης. Ως εκ τούτου, οι πολίτες δεν κατανοούν την αναγκαιότητα δημιουργίας συμπληρωματικών κεφαλαίων μέσω της αύξησης της αποταμίευσης.

Στον αντίποδα, τα συστήματα κεφαλαιοποιητικού χαρακτήρα προσφέρουν τη δυνατότητα στο συμμετέχοντα να επιλέξει τον τρόπο με τον οποίο αυτός επιθυμεί να γίνει η επαγγελματική διαχείριση των αποταμιεύσεών του με σκοπό τη δημιουργία υπεραξίας. Επίσης, καλλιεργείται η κουλτούρα της αποταμίευσης και της επένδυσης με συνήθως ευεργετικά αποτελέσματα τόσο για το άτομο όσο και για το σύνολο της οικονομίας. Να σημειωθεί ότι σε οικονομίες όπου το κεφαλαιοποιητικό σύστημα λειτουργεί επικουρικά, με την αποτελεσματική και παραγωγική εκμετάλλευση των αποταμιεύσεων επωφελείται ο ρυθμός ανάπτυξης της οικονομίας με θετικά αποτελέσματα για τις πηγές εσόδων του κρατικού προϋπολογισμού και εξ ορισμού και για το ανταποδοτικό σύστημα.

Σχετικά με τα μειονεκτήματα των συστημάτων κεφαλαιοποιητικού χαρακτήρα, επισημαίνεται ότι τα συστήματα αυτά δεν είναι σε θέση να καλύψουν τις ανάγκες όλων των πολιτών, ενώ πάντα υπάρχει και η πιθανότητα της μη δημιουργίας αναμενόμενης υπεραξίας. Είναι σαφές ότι ούτε οι αποδόσεις των επενδύσεων μπορούν να είναι εγγυημένες, αλλά ούτε και μπορεί να προβλεφθεί με ακρίβεια το ύψος των επιτοκίων κατά τη συνταξιοδότηση, ένας παράγοντας ιδιαίτερα κρίσιμος στην περίπτωση αγοράς μίας ράντας πληρωμών. Βέβαια, οι κίνδυνοι αυτοί είναι δυνατόν να ελαχιστοποιηθούν με τη χρήση εξειδικευμένων χρηματοοικονομικών εργαλείων σε συνδυασμό με μία συνετή διαχειριστική πολιτική.

1.8 Οι τρεις Πυλώνες Ασφάλισης[10]

Γενικά τα συστήματα συνταξιοδότησης κατηγοριοποιούνται σε τρεις πυλώνες. Στον πρώτο πυλώνα ανήκουν τα κρατικά διαχειριζόμενα συνταξιοδοτικά συστήματα με υποχρεωτική συμμετοχή και βασικότερο στόχο την ικανοποιητική διαβίωση των συνταξιούχων. Στον δεύτερο πυλώνα ανήκουν τα ιδιωτικά υποχρεωτικά συνταξιοδοτικά συστήματα και στον τρίτο πυλώνα τα συστήματα των προαιρετικών αποταμιεύσεων. Στον πρώτο πυλώνα προσετέθη και η έννοια του «μηδενικού πυλώνα» δηλαδή προγράμματα χωρίς ασφαλιστικές εισφορές, που αποσκοπούν στο να μετριάσουν τη φτώχεια ανάμεσα στους ηλικιωμένους.

[10] Blake D. (2006) Pension Economics, John Wiley & Sons Ltd, Chichester

1.8.1 Ο πρώτος Πυλώνας

Τα περισσότερα σχήματα του πρώτου πυλώνα είναι στην ουσία καθορισμένης παροχής. Πρόσφατα, χώρες όπως η Σουηδία και η Πολωνία πειραματίζονται με υποθετικά σχήματα καθορισμένης παροχής για τον πρώτο πυλώνα. Αυτά κυρίως είναι μη χρηματοδοτούμενα σχήματα στα οποία τα μέλη έχουν ατομικούς καθορισμένης εισφοράς λογαριασμούς στους οποίους οι αποδόσεις που πιστώνονται στις εισφορές δεν σχετίζονται με τις αποδόσεις των κεφαλαίων αλλά με μια μη-οικονομική μεταβλητή, όπως ο ρυθμός ανάπτυξης της χώρας ή ο ρυθμός ανάπτυξης των εθνικών μέσων κερδών της. Το ποσοστό εισφοράς είναι σταθερό και ανάλογο των κερδών. Στην συνταξιοδότηση το υποθετικό κεφάλαιο του λογαριασμού των μελών μετατρέπεται σε μια ράντα ζωής χρησιμοποιώντας έναν παράγοντα μετατροπής, ο οποίος αντανακλά τόσο στο προσδόκιμο ζωής του μέλους όσο και στο επιτόκιο απόδοσης του σχήματος ως το αναμενόμενο τέλος της ράντας.

Το σύστημα κρατείται σε οικονομική ισορροπία για να διασφαλίσει ότι η παρούσα αξία των κεφαλαίων (το αυξανόμενο υποθετικό κεφάλαιο) πάντα ισούται με την παρούσα αξία των υποχρεώσεων του συστήματος (αναμενόμενες πληρωμές συντάξεων). Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση ενός προσαρμοσμένου επιτοκίου απόδοσης g+p όπου

$$p = \frac{PV\ A}{PV\ L} - 1$$

Οι επιπτώσεις των δημογραφικών και οικονομικών διαταραχών είναι συνεπώς ενδογενώς εξομαλυμένα με το πλάνο καθώς η αποδιδόμενη απόδοση του πλάνου g+p προσαρμόζει τον υποθετικό λογαριασμό του πλάνου κατά την διάρκεια και της ενδεικτικής αύξησης και των επίπεδων πληρωμών και η ράντα που πληρώνεται κατά την συνταξιοδότηση εκφράζει τις τυχόν αλλαγές του από γεννήσεως προσδόκιμου ζωής .

1.8.2 Ο δεύτερος Πυλώνας

Ο δεύτερος πυλώνας εξασφαλίζεται από τις εταιρείες στην μορφή των επαγγελματικών συνταξιοδοτικών πλάνων τα οποία οι εταιρείες έχουν αναλάβει να χρηματοδοτούν. Τυπικά, η χρηματοδότηση επαγγελματικών συνταξιοδοτικών πλάνων γίνεται ως εξής, δημιουργείται ένα απόθεμα από τα συνταξιοδοτικά κεφάλαια που συσσωρεύονται, λόγω των εισφορών ή των ασφαλίστρων από τον εργοδότη και από τον ασφαλισμένο καθώς και από τους τόκους της επένδυσης αυτών των εισφορών. Η σύνταξη καταβάλλεται από το συσσωρευμένο κεφάλαιο όταν ο ασφαλισμένος συνταξιοδοτηθεί. Κάποιες φορές, συνήθως στις μικρές επιχειρήσεις και όχι στις μεγάλες, το συσσωρευμένο κεφάλαιο δίνεται σε μια ασφαλιστική εταιρεία ζωής όπου αυτή στη συνέχεια εξασφαλίζει στον συνταξιούχο μια ράντα ζωής.

1.8.3 Ο τρίτος Πυλώνας

Ο τρίτος πυλώνας αφορά κάθε επιπρόσθετη ατομική αποταμίευση που κάνει κάθε εργαζόμενος επιπλέον από αυτή που προσφέρει το κράτος ή η εταιρεία στην όποια εργάζεται. Συνήθως, οι αποταμιεύσεις αυτές τοποθετούνται σε αποταμιευτικούς λογαριασμούς τραπεζών ή επενδύονται σε αμοιβαία κεφάλαια συνδεδεμένα με μετοχές ή ομολόγα. Εάν ο εργαζόμενος επιλέξει να το κάνει αυτό μέσω ενός τυπικού συνταξιοδοτικού πλάνου τότε είναι σχεδόν σίγουρο ότι θα είναι πλάνο τύπου καθορισμένης εισφοράς, γνωστά ως ιδιωτικά συνταξιοδοτικά σχήματα (personal pension schemes) ή ατομικοί λογαριασμοί συνταξιοδότησης (individual retirement accounts). Υπάρχουν και άλλου είδους κεφάλαια που προσφέρουν ένα εισόδημα κατά την συνταξιοδότηση. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η ιδιωτική κατοικία την οποία κατά την συνταξιοδότηση πολλά άτομα την πωλούν για να αγοράσουν μια μικρότερη με σκοπό να επωφεληθούν από την εξοικονόμηση χρημάτων και να έχουν μεγαλύτερη ρευστότητα.

Τα τελευταία χρόνια με αυξητικούς ρυθμούς έχει δημιουργηθεί και ένα τέταρτος πυλώνας για την υποστήριξη των γηρατειών. Ο τέταρτος πυλώνας αφορά την εργασία μετά την συνταξιοδότηση. Κάποιες φορές είναι από επιλογή άλλες δεν υπάρχει εναλλακτική επιλογή παρά μια part-time εργασία ως ένα συμπλήρωμα στο υπάρχον εισόδημα. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις συνταξιούχων που δεν τους αρέσει η ιδέα από τη μια μέρα να είναι εργαζόμενοι πλήρους απασχόλησης και την επόμενη να μη έχουν εργασία για αυτό το λόγο επιλέγουν μια σταδιακή είσοδο στον συνταξιοδοτικό βίο.

Η σύνταξη δεν είναι το μόνο ζήτημα που απασχολεί τα άτομα μεγάλης ηλικίας, προβλήματα υγείας, νοσήλια ή έξοδα για ιατρούς και η πιθανότητα για ιατρική φροντίδα μακράς διάρκειας είναι ζητήματα που έχουν να αντιμετωπίσουν πολλοί άνθρωποι καθώς μεγαλώνουν. Στη Μεγάλη Βρετανία το 20% των ηλικιωμένων χρειάζονται ιατρική φροντίδα για πάνω από δυο έτη πριν αποβιώσουν και το μέσο ετήσιο κόστος είναι ίσο με τον μέσο ετήσιο μισθό στη Βρετανία. Το μεγαλύτερο κόστος για νοσήλια κατά την διάρκεια της ζωής ενός συνηθισμένου ατόμου απαιτείται τους τελευταίους 6 μήνες τις ζωής του. Ένα συνταξιοδοτικό πλάνο δεν είναι σχεδιασμένο ούτε έχει ως σκοπό να καλύψει αυτού του είδους τα έξοδα. Οι περισσότεροι είτε βασίζονται στο κράτος να καλύψει αυτά τα έξοδα είτε αναγκάζονται να πουλήσουν το σπίτι ή άλλου είδους περιουσιακά στοιχεία για να καλύψουν τα έξοδα μιας μακροχρόνιας ιατρικής φροντίδας. Παρόλο που αρκετές ασφαλιστικές εταιρείες διαθέτουν προϊόντα για την κάλυψη αυτών των αναγκών πολλοί λίγοι τα επιλέγουν.

1.9 Παράγοντες που δημιουργούν προβλήματα στη βιωσιμότητα των συνταξιοδοτικών ταμείων της Ελλάδας[11].

Η βιωσιμότητα των συνταξιοδοτικών ταμείων εξαρτάται από διάφορους παράγοντες που την επηρεάζουν. Στο σημείο αυτό θα αναφέρουμε ονομαστικά μερικούς από αυτούς :

- Το δημογραφικό πρόβλημα.
- Η γήρανση του πληθυσμού.
- Το χαμηλό ποσοστό απασχόλησης, το οποίο είναι από τα χαμηλότερα στην Ε.Ε.
- Η εισφοροδιαφυγή.
- Το υψηλό ποσοστό αναπλήρωσης.
- Η ανεργία.
- Οι διάφοροι περιορισμοί στην επένδυση των περιουσιακών στοιχείων.

[11] Νεκτάριος Μ. (2008) Ασφαλιστική Μεταρρύθμιση με Συναίνεση και Διαφάνεια, Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα 2008.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Συνταξιοδοτικά Σχήματα

2.1 Τύποι Συνταξιοδοτικών σχημάτων[12]

Παρόλο που τα περισσότερα συνταξιοδοτικά σχήματα χρηματοδοτούνται, ο υπολογισμός των συνταξιοδοτικών παροχών ενδέχεται να διαφέρει ανάλογα με τον τύπο του συνταξιοδοτικού σχήματος.

Εξετάζοντας ένα συνταξιοδοτικό σχήμα ανάλογα προς τη διαδικασία καθορισμού της παροχής διακρίνεται σε:

Καθορισμένης εισφοράς[13] : δεν υπόσχεται ένα συγκεκριμένο ποσό σύνταξης, αλλά μπορούμε να το δούμε σαν ένα είδος αποταμιευτικού λογαριασμού στον οποίο ο εργοδότης και ο εργαζόμενος εισφέρουν ένα συγκεκριμένο ποσό εισφοράς, συνήθως ως ποσοστό επί του μισθού, που πληρώνεται ετησίως για κάθε συμμετέχοντα στο σχήμα. Οι εισφορές επενδύονται και οι αποδόσεις μαζί με το κεφάλαιο συσσωρεύονται στο τέλος του εργασιακού βίου. Ο εργοδότης πέραν από το ποσοστό εισφοράς δεν αναλαμβάνει κανένα οικονομικό κίνδυνο πχ. επενδύσεων ή μακροζωίας.

Καθορισμένης παροχής : καθορίζεται εξ' αρχής η εγγυημένη παροχή, είτε με τη μορφή ετήσιας απόδοσης ή με τη μορφή ενός ποσού στην ηλικία συνταξιοδότησης. Πάντοτε υπάρχει ένας μαθηματικός τύπος που συνδέει το ποσό της σύνταξης με τα χρόνια εργασίας και τους μισθούς. Στην περίπτωση των σχημάτων καθορισμένης παροχής ο οικονομικός κίνδυνος βαρύνει τον εγγυητή (κράτος ή εργοδότης).

Υβριδικά σχήματα : είναι στην ουσία μια μίξη σχημάτων καθορισμένης παροχής και καθορισμένης εισφοράς

Συνήθως και σχετικά με την παροχή συνταξιοδότησης, οι κανόνες που πρέπει να πληρούνται σχετίζονται με τις προϋποθέσεις ένταξης στο πλάνο πχ. έτη προϋπηρεσίας, ηλικία, μισθός και με αυτές της συνταξιοδότησης κάτω από το συγκεκριμένο πλάνο όταν

---

[12] Οικονόμου Μ.(2008) Σημειώσεις μαθήματος «Συνταξιοδοτικά Σχήματα», Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών-Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

[13] Φράγκος Ν., Γιαννακόπουλος Α., Βρόντος Σπ. (2009) Σημειώσεις Μαθήματος «Τα Οικονομικά-Μαθηματικά της Σύνταξης». Τμήμα Στατιστικής, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθήνας.

το μέλος αποχωρεί από την ενεργό εργασία πχ. ηλικία κανονικής, πρόωρης συνταξιοδότησης.

Ο πλέον συνήθης τύπος του υπολογισμού που χρησιμοποιείται στα συνταξιοδοτικά σχήματα είναι ο τύπος που παρέχει μια μονάδα παροχής για κάθε έτος υπηρεσίας. Υπάρχουν 3 τύποι παροχών :

- Σταθερό ποσό παροχής πχ.15€ το μήνα για κάθε έτος υπηρεσίας αναπροσαρμοσμένο συνήθως με τον πληθωρισμό,
- μέσος μισθός συνολικής προϋπηρεσίας. Η παροχή συνήθως ορίζεται ως ποσοστό του μέσου μισθού κατά την διάρκεια του εργάσιμου βίου,
- μέσος μισθός τελευταίων ετών προϋπηρεσίας. Η παροχή ορίζεται ως ποσοστό του μέσου μισθού των τελευταίων 3 ή 5 ετών προϋπηρεσίας

Όπως και 3 ειδών μέλη συνταξιοδοτικών σχημάτων, το ενεργό μέλος που εξακολουθεί να εργάζεται στην εταιρεία και συνεχίζει να καταβάλλει τις εισφορές του, το μέλος που έχει συνταξιοδοτηθεί και εισπράττει της σύνταξη του και το μέλος το οποίο δεν εργάζεται πλέον στην εταιρεία αλλά δεν έχει ακόμα συνταξιοδοτηθεί, έχει όμως συσσωρευμένα δικαιώματα για σύνταξη από την εταιρεία λόγω της πρότερης εργασίας του σε αυτήν και ως πρώην μέλος του συνταξιοδοτικού σχήματος. Η σύνταξη θα καταβληθεί σε αυτό το μέλος όταν συνταξιοδοτηθεί από την υπάρχουσα εργασία του.

2.2 Σχήματα καθορισμένης εισφοράς[14]

Το απλούστερο είδος ενός χρηματοδοτούμενου συνταξιοδοτικού ταμείου είναι το συνταξιοδοτικό ταμείο καθορισμένης παροχής. Τα περισσότερα σχήματα καθορισμένης παροχής παραδοσιακά ήταν σχεδιασμένα σε ατομική βάση, τον τελευταίο καιρό κερδίζουν ολοένα και περισσότερο έδαφος από την πλευρά των εργαζομένων σε σχέση με τα σχήματα καθορισμένης παροχής. Η σύνταξη σε ένα ταμείο καθορισμένης εισφοράς βασίζεται στην αξία του εφάπαξ ποσού που συσσωρεύεται κατά την διάρκεια του εργασιακού βίου κάθε μέλους από τις εισφορές που πληρώνει και από τις αποδόσεις της

[14] Blake D. (2006) Pension Finance, John Wiley & Sons Ltd, Chichester

επένδυσης των κεφαλαίων αυτών. Οι εισφορές μπορούν να πληρώνονται είτε από τον συμμετέχοντα εξ' ολοκλήρου είτε από τον εργοδότη είτε και από τους δυο μαζί.

Εάν ο εργοδότης συμφωνήσει να πληρώσει μέρος των εισφορών, τότε όταν αυτές θα έχουν πληρωθεί δεν θα έχει καμιά επιπλέον υποχρέωση προς τον εργαζόμενο ως αναφορά την σύνταξη. Τα σχήματα καθορισμένης εισφοράς έχουν πολύ καλή μεταφερσιμότητα κάνοντας τα εύκολα μεταβιβάσιμα σε περίπτωση αλλαγής επαγγέλματος ή εργοδότη. Παρολαυτά, αυτού του είδους τα σχήματα αντιμετωπίζουν υψηλές χρεώσεις και μικρή διάρκεια, στοιχεία τα όποια οδηγούν σε σημαντικές απώλειες του συμμετέχοντα στο σχήμα.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα σχήματος καθορισμένης εισφοράς είναι τα NDC (Notional Defined Contribution schemes) σχήματα τα οποία έχουν τις εξής ιδιότητες :

- κάθε στιγμή η παρούσα αξία των παροχών κατά τη διάρκεια ζωής του ασφαλισμένου ισούται με το υπόλοιπο του λογαριασμού του,
- για να διατηρηθεί ένα σταθερός δείκτης εισφορών, τα συνολικά κεφάλαια των NDC σχημάτων πρέπει να είναι ίσα ή μεγαλύτερα των συνολικών υποχρεώσεων,
- η παροχή των NDC σχημάτων σχεδιάζεται ως ράντα ζωής εκφράζοντας το προσδόκιμο ζωής στην συνταξιοδότηση,
- η οικονομική ισορροπία απαιτεί ο λογαριασμοί να αποτιμώνται με επιτόκιο g+p.

Τα NDC σχήματα μπορούν να ερμηνευτούν ως εκδήλωση της δικαιοσύνης μεταξύ γενεών, αφού κάθε γενεά πληρώνει τον ίδιο δείκτη εισφοράς ως ποσοστό του μισθού και λαμβάνει σύνταξη βασισμένη στην δικιά της οικονομική απόδοση του κύκλου ζωής της και του δείκτη θνησιμότητας.

Η επιλογή ενός σχήματος καθορισμένης εισφοράς έκτος του ότι έχει πολύ καλή μεταφερσιμότητα εμπεριέχει αρκετούς κίνδυνους και άλλου είδους προβλήματα στους συμμετέχοντες. Κάθε μέλος τους σχήματος έχει να αντιμετωπίσει τον κίνδυνο ανεπαρκών εισφορών, παραδείγματος χάριν ο δείκτης εισφοράς να μην είναι αρκετά υψηλός ή λόγω του παράγοντα τη ανεργίας να μην μπορούν να καλυφτούν διαφορές παροχές υγείας και τέκνων. Επίσης εμπεριέχεται ο κίνδυνος της αξίας των περιουσιακών στοιχείων, δηλαδή ο κίνδυνος απωλειών στα κεφάλαια του σχήματος λόγω ενδεχόμενης πτώσης των αποδόσεων των επενδύσεων. Οι συνέπειες είναι μεγαλύτερες ιδιαίτερα την περίοδο λίγο πριν την συνταξιοδότηση.

Έναν άλλο κίνδυνο που αντιμετωπίζουν τα σχήματα καθορισμένης εισφοράς είναι ο κίνδυνος επιτοκίου, δηλαδή ο κίνδυνος τα επιτόκια να είναι χαμηλά την περίοδο της συνταξιοδότησης με αποτέλεσμα και η συνταξιοδοτική ράντα να είναι χαμηλή. Επιπλέον κίνδυνοι μετά την συνταξιοδότηση είναι ο κίνδυνος πληθωρισμού ειδικά στην περίπτωση μια αναπάντεχης αύξησης του πληθωρισμού, ο κίνδυνος εισοδήματος αν η ράντα της σύνταξης εξαρτάται από τις επενδύσεις τότε οι πληρωμές ενδέχεται να μην είναι σταθερές και να αυξομειώνονται. Τέλος, υπάρχει και ο κίνδυνος δυσαρεστών αλλαγών στις ρυθμιστικές αρχές που ενδέχεται να επηρεάσουν το ύψος της σύνταξης όπως παραδείγματος χάριν, η επιβολή επαχθών περιορισμών στις επενδύσεις των συνταξιοδοτικών ταμείων.

2.3 Σχήματα καθορισμένης παροχής[15]

Μέχρι πρόσφατα, το πιο σύνηθες είδος συνταξιοδοτικού σχήματος ήταν τα καθορισμένης παροχής. Σε αυτού του είδους τα σχήματα η παροχή είναι καθορισμένη και τα πλάνο παρέχει σύνταξη βασισμένη στην συγκεκριμένη παροχή ανεξαρτήτως του ύψους του αποθέματος. Το απλούστερο σχήμα καθορισμένης παροχής προσφέρει συγκεκριμένου ύψους σύνταξη, ανεξαρτήτως του μισθού και του μετέπειτα πληθωρισμού. Τέτοια σχήματα είναι συνήθη στη Γερμανία και στις ΗΠΑ όπου είναι γνωστά και ως σταθερής παροχής (fixed benefit) ή σταθερού ποσού σχήματα (fixed amount plans).

Παρολαυτά, το πιο γνωστό σχήμα καθορισμένης παροχής είναι αυτό που είναι άμεσα συσχετιζόμενο με το μισθό του ασφαλισμένου και συνήθως αυτά που χρησιμοποιούνται ευρέως είναι αυτά που η παροχή εξαρτάται από τον τελικό μισθό, δηλαδή το ποσό της σύνταξης εξαρτάται από το ύψος του μισθού τον τελευταίο χρόνο του μέλους του συγκεκριμένου σχήματος. Υπάρχουν βέβαια και παραλλαγές όπου λαμβάνεται υπόψη αντί για τον τελευταίο μισθό ο μέσος μισθός των τελευταίων 3 ή 5 ετών. Η ακριβής σύνταξη υπολογίζεται ως το αποτέλεσμα του δείκτη συσσώρευσης και των ετών εργασίας.

Η παρούσα αξία των παροχών που συσσωρεύεται κάθε χρόνο είναι μεγαλύτερη τα τελευταία χρόνια εργασίας από ότι τα προηγούμενα έτη. Η επιβάρυνση των προηγούμενων ετών εργασίας οφείλεται σε 2 κυρίως παράγοντες, την χρονική αξία του χρήματος και τον

[15] Blake D. (2006) Pension Finance, John Wiley & Sons Ltd, Chichester

πληθωρισμό. Για έναν εργαζόμενο που πλησιάζει την συνταξιοδότηση, η παρούσα αξία μιας επιπρόσθετης μονάδας συνταξιοδοτικής παροχής είναι μεγαλύτερη από ότι σε έναν νεότερο εργαζόμενο.

Ο πληθωρισμός αυξάνει αυτή την απομείωση για 2 λόγους. Πρώτον, αυξάνοντας το ονομαστικό επιτόκιο, το οποίο μεγεθύνει την επίδραση του χρόνου στην αξία των χρημάτων. Δεύτερον, αυξάνοντας τους ονομαστικούς μισθούς, με τον τρόπο αυτό μεγαλώνει η συνιστώσα των παροχών που συσσωρεύονται κάθε χρόνο. Για κάθε επιπρόσθετο έτος εργασίας ένα επιπρόσθετο έτος παροχής συσσωρεύεται και ο ονομαστικός μισθός είναι μεγαλύτερος.

Πρόσφατα έχουν αρχίσει να κάνουν την εμφάνιση τους και τα σχήματα που βασίζονται στον μέσο μισθό. Η σύνταξη υπολογίζεται βάση του μέσου μισθού του εργαζομένου κατά την διάρκεια της καριέρας του. Πολλά συνταξιοδοτικά σχήματα των βιομηχανικών μονάδων της Ολλανδίας παραδείγματος χάριν έχουν μεταβεί από τα σχήματα που βασίζονται στον τελικό μισθό σε αυτά που λαμβάνουν υπόψη τον μέσο μισθό.

2.4 Διαφορές σχημάτων καθορισμένης παροχής-καθορισμένης εισφοράς.

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε τις διαφορές μεταξύ των συνταξιοδοτικών σχημάτων καθορισμένης παροχής και των συνταξιοδοτικών καθορισμένης εισφοράς ανάλογα με το κόστος του αλλά και τι οφέλη έχει το καθένα από αυτά. Στα σχήματα καθορισμένης παροχής (DB) το εισόδημα μετά τη σύνταξη είναι καθορισμένο, έτσι κάθε εργαζόμενος έχει τη δυνατότητα να διατηρήσει το ίδιο επίπεδο διαβίωσης, όπως και πριν τη συνταξιοδότησή του, ρυθμίζοντας την κατανάλωση και την αποταμίευση του χωρίς να εξαρτάται από την απόδοση της επένδυσης των εισφορών και των περιουσιακών στοιχείων του σχήματος. Για να συμβεί όμως αυτό πρέπει ο εργαζόμενος να παραμείνει στον ίδιο εργοδότη καθ΄ όλη τη διάρκεια του εργασιακού του βίου, αλλιώς ενδεχομένως να έχει απώλειες. Στις αναπτυγμένες χώρες ή σε χώρες όπου ο δημόσιος τομέας είναι περιορισμένος το ποσοστό παραμονής σε έναν μόνο εργοδότη είναι πολύ μικρό. Σε αντίθεση με τα συνταξιοδοτικά σχήματα καθορισμένης εισφοράς, όπου το ύψος της σύνταξης εξαρτάται από την επένδυση των εισφορών των εργαζομένων, ο εργαζόμενος έχει την δυνατότητα να διατηρήσει αυτό το προνόμιο όσους εργοδότες και αν αλλάξει κατά την διάρκεια του εργασιακού του βίου. Το μειονέκτημα των σχημάτων καθορισμένης εισφοράς είναι ότι έχουν υψηλά διαχειριστικά και λειτουργικά έξοδα σε αντίθεση με τα σχήματα καθορισμένης παροχής.

Σύμφωνα με τον Blake[16] (2006) η θεωρία δικαιωμάτων προαίρεσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξηγήσει τις διαφορές ανάμεσα στα συνταξιοδοτικά σχήματα καθορισμένης παροχής και καθορισμένης εισφοράς. Η σύνταξη ενός σχήματος καθορισμένης παροχής μπορεί να αντικατασταθεί από ένα δικαίωμα πώλησης (long put option (P)) και ένα δικαίωμα αγοράς (short call option (-C)) των υποκείμενων περιουσιακών στοιχείων του σχήματος με την ίδια τιμή εξάσκησης (L), που ισούται με την παρούσα αξία της συνταξιοδοτικής παροχής στην ηλικία της συνταξιοδότησης. Εκδότης του δικαιώματος πώλησης είναι το συνταξιοδοτικό σχήμα και κάτοχος το μέλος, ενώ το αντίστροφο ισχύει για το δικαίωμα αγοράς. Την ημέρα της συνταξιοδότησης του μέλους, που συμπίπτει με τη ληκτότητα των δικαιωμάτων, κάποιο από τα δικαιώματα θα εξασκηθεί ενώ το άλλο θα είναι χωρίς αξία.

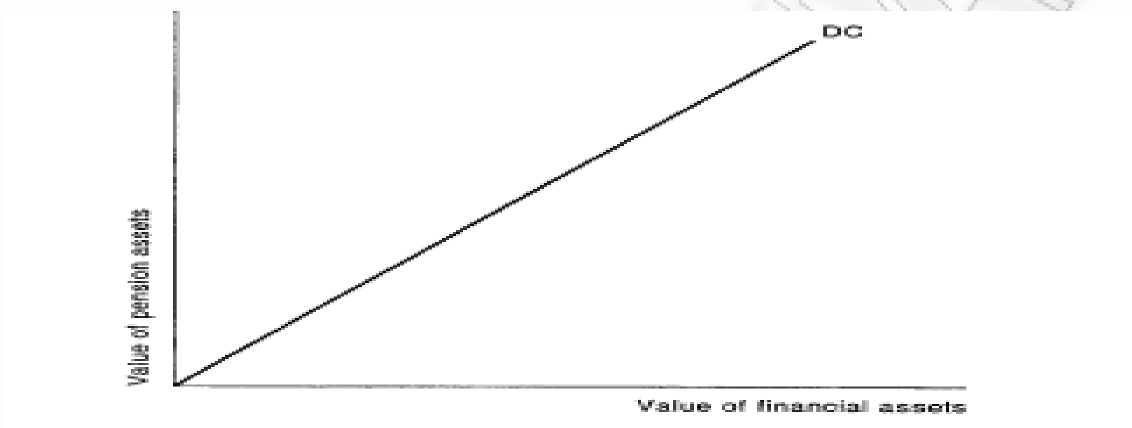
Εάν η αξία των περιουσιακών στοιχείων[17] του σχήματος είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης το συνταξιοδοτικό σχήμα παρουσιάζει έλλειμμα, τότε το μέλος θα εξασκήσει το δικαίωμα πώλησης και θα λάβει από τον εκδότη του αξία ίση με (L-A), όπου A είναι η αξία των περιουσιακών στοιχείων του σχήματος. Σε αντίθετη περίπτωση, όπου η αξία των περιουσιακών στοιχείων του σχήματος είναι υψηλότερη της τιμής εξάσκησης, δηλαδή το σχήμα παρουσιάζει πλεόνασμα, το συνταξιοδοτικό σχήμα θα εξασκήσει το δικαίωμα αγοράς και θα ανακτήσει το πλεόνασμα που είναι ίσο με (A-L). Επομένως ένα μέλος ενός συνταξιοδοτικού σχήματος καθορισμένης παροχής δεν αντιμετωπίζει τον κίνδυνο αγοράς (market risk).

Οι διαφορές ανάμεσα στα συνταξιοδοτικά σχήματα την στιγμή της συνταξιοδότησης φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα. Το διάγραμμα 2.4.1 μας δείχνει ότι η παρούσα αξία των υποχρεώσεων ενός συνταξιοδοτικού σχήματος καθορισμένης εισφοράς την ημερομηνία συνταξιοδότησης εξαρτάται από την αξία των περιουσιακών στοιχείων του ταμείου την στιγμή εκείνη. Το διάγραμμα 2.4.2 μας δείχνει ότι η παρούσα αξία των υποχρεώσεων ενός συνταξιοδοτικού σχήματος καθορισμένης παροχής είναι ανεξάρτητη από την αξία των περιουσιακών στοιχείων ενώ στο διάγραμμα 2.4.3 παρατηρούμε ότι στα

[16] Blake D. (2006) Pension Finance, John Wiley & Sons Ltd, Chichester

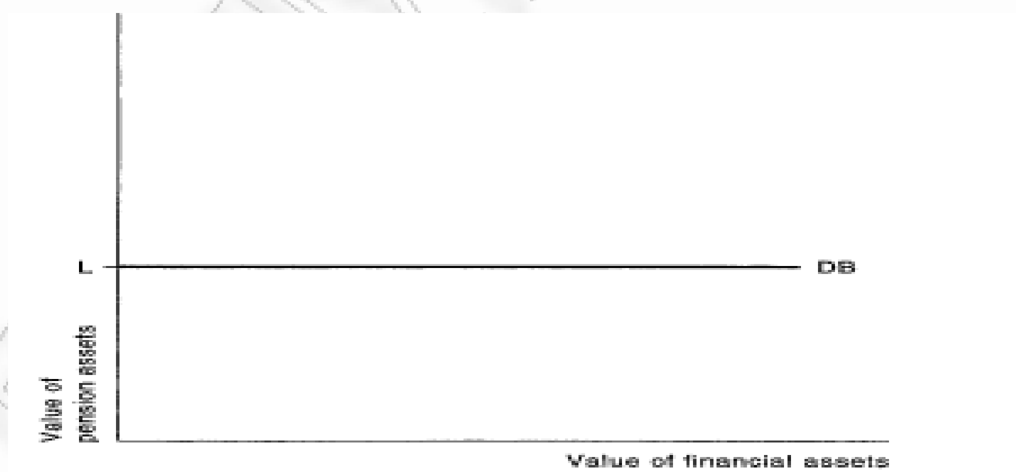
[17] Blake D.(1998) Pension schemes as options on pension fund assets: implications for pension fund management. Insurance: Mathematics and Economics 23(1998): 263-286.

σχήματα TMP[18] (Targeted Money Purchase schemes) η παρούσα αξία των υποχρεώσεων ξεκινά από ένα ελάχιστο όριο το οποίο όμως μπορεί να αυξηθεί ανάλογα με το αν η αξία των κεφαλαίων ξεπεράσει την άξια των υποχρεώσεων.



Διάγραμμα 2.4.1 Παρούσα αξία Υποχρεώσεων σχήματος καθορισμένης εισφοράς.

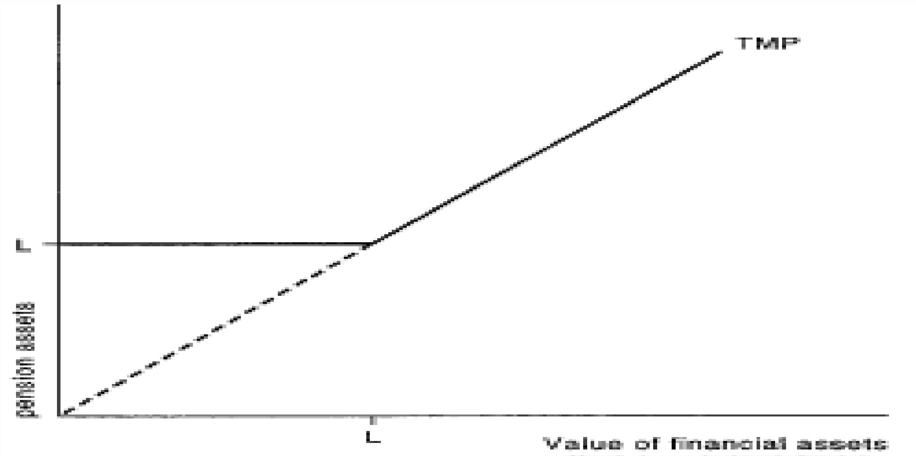
Blake D. (2006) Pension Finance, John Wiley & Sons Ltd, Chichester



Διάγραμμα 2.4.2 Παρούσα αξία υποχρεώσεων σχήματος καθορισμένης παροχής.

Blake D. (2006) Pension Finance, John Wiley & Sons Ltd, Chichester

[18] Blake D.(1998) Pension schemes as options on pension fund assets: implications for pension fund management. Insurance: Mathematics and Economics 23(1998): 263-286.



Διάγραμμα 2.4.3 Παρούσα αξία υποχρεώσεων σχήματος TMP.

Blake D. (2006) Pension Finance, John Wiley & Sons Ltd, Chichester

2.5 Υβριδικά συνταξιοδοτικά σχήματα[19]

Τα υβριδικά σχήματα είναι μια μίξη συνταξιοδοτικών σχημάτων καθορισμένης παροχής και καθορισμένης εισφοράς. Μερικά χαρακτηριστικά υβριδικά σχήματα είναι τα εξής :

- Sequential hybrid schemes: Τα σχήματα αυτά έχουν έναν παράγοντα καθορισμένης εισφοράς για τα άτομα κάτω από μια συγκεκριμένη ηλικία πχ. 45 ετών και έναν παράγοντα καθορισμένης παροχής για άτομα πάνω από την ηλικία των 45 ετών. Ένα τέτοιου είδους σχήμα προσφέρει μια ελκυστική μεταφερσιμότητα για τους νέους εργαζόμενους καθώς και μια πιο προβλέψιμη σύνταξη για τους παλιότερους εργαζόμενους.
- Combination hybrid schemes: Προσφέρουν μια καθορισμένης παροχής σύνταξη σε σχέση με το μισθό μέχρι ένα όριο το οποίο μπορεί να είναι ο βασικός μισθός καθώς και μια καθορισμένη εισφορά σε σχέση με το μισθό πάνω από αυτό το όριο.
- Underpinning arrangements: Τα σχήματα αυτά εξασφαλίζουν μια ελάχιστη σύνταξη στην περίπτωση που η απόδοση των επενδύσεων είναι χαμηλή.
- Cash balance schemes: Είναι σχήματα καθορισμένης παροχής στα οποία η παροχή καθορίζεται ως ένας ατομικός λογαριασμός. Το σχήμα αυτό προσδιορίζει τον δείκτη εισφοράς και τον δείκτη απόδοσης των επενδύσεων ανεξάρτητα από την

[19] Blake D. (2006) Pension Finance, John Wiley & Sons Ltd, Chichester

απόδοση των υποκείμενων κεφαλαίων του σχήματος συνδεδεμένα όμως με την απόδοση των μετοχών του ταμείου και πιστώνονται στο λογαριασμό του μέλους.

- Targeted benefit schemes : Είναι σχήματα καθορισμένης εισφοράς, σκοπός όμως είναι η διανομή μιας καθορισμένης παροχής για αυτό οι εισφορές θα πρέπει να έχουν προσαρμοστεί στην διάρκεια του χρόνου του ταμείου αν το ταμείο αποτύχει από τους στόχους του ή τους ξεπεράσει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Κίνηση Brown και Γεωμετρική κίνηση Brown

3.1 Γενικά

Ακολουθώντας τον Γιαννακόπουλο[20] (2004) στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτύξουμε τις στοχαστικές διαδικασίες της κίνησης Brown και της Γεωμετρικής κίνησης Brown. Μια από τις πιο σημαντικές στοχαστικές διαδικασίες είναι η κίνηση Brown, την οποία μπορεί κανείς να τη συναντήσει και ως διαδικασία Wiener, παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον τόσο από θεωρητικής όσο και από πλευράς εφαρμογών. Η στοχαστική αυτή διαδικασία παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στη θεωρία στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και αποτελεί έναν από τους ακρογωνιαίους λίθους των χρηματοοικονομικών μαθηματικών όσον αφορά τα μοντέλα σε συνεχή χρόνο.

Η κίνηση Brown[21] πήρε το όνομα του Άγγλου βοτανολόγου Robert Brown, ο οποίος πρώτος περιέγραψε την ακανόνιστη κίνηση ενός μικρού σώματος μέσα σε ένα υγρό ή αέριο. Ο πρώτος που ασχολήθηκε με τη χρήση αυτής της διαδικασίας στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά ήταν ο Bachelier το 1900, ο οποίος μελέτησε τις στοχαστικές διαδικασίες πάνω στη χρηματοοικονομική ως θέμα της διδακτορικής του διατριβής, η οποία είχε τίτλο « Theorie de la Speculation ». Το μέρος της εργασίας του που αφορούσε τα χρηματοοικονομικά επανεμφανίστηκε μετά από 64 χρόνια όταν ο Paul Samuelson ένας οικονομολόγος δημοσίευσε το 1964 δυο μελέτες για το πώς μοντελοποιούνται οι τιμές των μετοχών και αυτό έχοντας λάβει υπόψη τον Bachelier.

Το 1923 ο Wiener έκανε ένα εξίσου σημαντικό βήμα στις στοχαστικές διαδικασίες αποδεικνύοντας δυο σημαντικές ιδιότητες της κίνησης Brown που την συσχετίζουν με τη στοχαστική ολοκλήρωση. Η πρώτη σημαντική ιδιότητα είναι ότι οι τροχιές της κίνησης Brown έχουν μη μηδενική πεπερασμένη τετραγωνική μεταβολή έτσι ώστε σε ένα χρονικό

---

[20] Γιαννακόπουλος Α.Ν (2003) Σημειώσεις Μαθήματος «Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική», Τόμος Ι, Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

[21] Μπούτσικας Μ. (2005-07) Σημειώσεις Μαθήματος «Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα», Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

διάστημα (s,t) η τετραγωνική μεταβολή είναι (t-s). Η δεύτερη σημαντική ιδιότητα είναι ότι οι τροχιές της έχουν άπειρη μεταβολή σε συνεχή χρόνο (infinite variation).

3.2 Η κίνηση Brown

Στο σημείο αυτό θα δώσουμε τον ορισμό της κίνησης Brown[22]

Ορισμός : Η κίνηση Brown είναι μια στοχαστική διαδικασία B_t η όποια παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}$ και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες :

i) Αν $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ τότε οι τυχαίες μεταβλητές $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ είναι ανεξάρτητες (έχουμε δηλαδή ανεξάρτητες μεταβολές).

ii) Αν $s, t \geq 0$ τότε ισχύει $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$, δηλαδή οι μεταβολές της κίνησης Brown είναι κανονικά κατανεμημένες.

iii) Οι τροχιές της κίνησης Brown είναι συνεχείς με πιθανότητα 1, δηλαδή η $t \to B_t$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Οι τρεις αυτές ιδιότητες ορίζουν μια και μοναδική στοχαστική διαδικασία. Αποδεικνύεται μαθηματικά η ύπαρξη μιας στοχαστικής διαδικασίας με τις παραπάνω ιδιότητες.
Η κατανομή του B_t εξαρτάται από το αρχικό σημείο στο οποίο ξεκινάμε την διαδικασία. Αν $B_0 = x$ τότε η συνάρτηση κατανομής θα συμβολίζεται $P_x(B_t \in A)$ για κάποιο σύνολο Borel A. Το σημείο που θα ξεκινάει η κίνηση Brown θα γίνεται σαφές από το μέτρο πιθανότητας που θα χρησιμοποιείται και αν δεν αναφέρεται τίποτα θα εννοείται ότι ξεκινάμε από το 0. Η κίνηση Brown που ξεκινάει από το 0 αναφέρεται στην βιβλιογραφία και σαν τυπική (standard) κίνηση Brown.

Πρόταση : Αν B_t είναι μια μονοδιάστατη κίνηση Brown τέτοια ώστε $B_0 = x$ τότε

$$E_x[f(B_t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) dx$$

Στην τυπική κίνηση Brown ισχύει :

[22] Γιαννακόπουλος Α.Ν (2003) Σημειώσεις Μαθήματος «Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική», Τόμος Ι: Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση, Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

$$E[f(B_t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right)dy$$

.

Συμφώνα με την ιδιότητα (ii) του ορισμού της κίνησης Brown ότι δηλαδή οι μεταβολές της κίνησης Brown είναι κανονικά κατανεμημένες μπορούμε να δείξουμε ότι

$$P(B_t - B_s < a) = \int_{-\infty}^{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right)dx$$

Συνεπώς, η πυκνότητα πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $X = B_t - B_s$

Άρα,

$$E[f(B_t - B_s)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right)dx$$

Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

$$E[B_t - B_s] = 0$$

$$E[(B_t - B_s)^2] = t - s$$

3.3 Ιδιότητες της κίνησης Brown

3.3.1 Η ιδιότητα Markov[23]

Δυο πολύ χρήσιμες ιδιότητες στους υπολογισμούς με την κίνηση Brown είναι ότι έχει την ιδιότητα Markov και την ισχυρή ιδιότητα Markov. Η χρήση της ιδιότητας Markov διευκολύνει σημαντικά τον υπολογισμό των υπό συνθήκη μέσων ορισμένων συναρτήσεων της κίνησης Brown ως προς συγκεκριμένες σ-άλγεβρες που σχετίζονται με την ιστορία της κίνησης Brown. Οι υπολογισμοί αυτοί έχουν εφαρμογή στον υπολογισμό των τιμών ορισμένων παραγώγων συμβολαίων. Μια εξίσου σημαντική εφαρμογή είναι στην αρχή της ανάκλασης για τον υπολογισμό των τιμών εξωτικών παραγώγων. Διαισθητικά το ότι η κίνηση Brown έχει την ιδιότητα Markov σημαίνει ότι αν πάρουμε κάποιο $s \geq 0$ τότε η $B_{t+s} - B_s$ είναι μια κίνηση Brown η οποία είναι ανεξάρτητη από το τι συνέβη πριν τη

[23] Γιαννακόπουλος Α.Ν (2003) Σημειώσεις Μαθήματος «Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική», Τόμος Ι: Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση, Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

χρονική στιγμή s. Έτσι η κίνηση Brown «ξεχνάει» το παρελθόν της και ότι συμβαίνει από την χρονική στιγμή s και μετά εξαρτάται μόνο από την τελική τιμή της κίνησης Brown δηλαδή από το B_s. Επίσης η $B_{t+s} - B_s$ είναι και αυτή μια κίνηση Brown η οποία έχει μέση τιμή 0 και διασπορά $(t+s)-s=t$, παρακολουθώντας της διαδικασία $B_{t+s} - B_s$ είναι σαν να παρακολουθούμε μια διαδικασία Brown η οποία ξεκινάει από το σημείο 0 και τρέχει για χρόνο t.

Για να το δούμε αυτό πιο μαθηματικά χρησιμοποιώντας την έννοια της υπό συνθήκη μέσης τιμής θα έχουμε:

$$E_x\left[f(B_{t+s})|F_s\right] = E_{B_s}\left[f(B_t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\frac{1}{\sqrt{2t}}\exp\left(-\frac{(y-B_s)^2}{2t}\right)dy$$

Είναι φανερό ότι μια ισοδύναμη μορφή της ιδιότητας Markov είναι η

$$E_x\left[f(B_t)|F_s\right] = E_{B_s}\left[f(B_{t-s})\right], s \le t$$

Η παραπάνω έκφραση μας λέει ότι αν πάρουμε την υπό συνθήκη μέση τιμή κάποιας συνάρτησης της κίνησης Brown τη χρονική στιγμή t έχοντας υπόψη την ιστορία της κίνησης Brown μέχρι τη χρονική στιγμή s αρκεί να υπολογίσουμε την ίδια ποσότητα πάνω σε μια καινούργια κίνηση Brown που ξεκινά από τη θέση που είχε φτάσει η αρχική κίνηση Brown την χρονική στιγμή s δηλαδή την B_s και τρέχει για χρονική διάρκεια t-s. Άρα όλη η ιστορία της αρχικής κίνησης Brown πριν τη χρονική στιγμή s είναι άχρηστη.

3.3.2 Η ισχυρή ιδιότητα Markov[24]

Η ισχυρή ιδιότητα Markov είναι ότι και η ιδιότητα Markov ισχύει όχι μόνο για αιτιοκρατικούς χρόνους αλλά και για μια συγκεκριμένη κατηγορία τυχαίων χρονών τους χρόνους στάσης.

Πριν συνεχίσουμε θα δώσουμε τον ορισμό του χρόνου στάσης

Ορισμός : Έστω $(F_t)_{t\in I}$ μια διήθηση σε ένα σύνολο Ω, όπου I είναι ένα σύνολο δεικτών (όχι απαραίτητα διακριτό). Ένα χρόνος στάσης σχετικά με τη διήθηση αυτή είναι μια απεικόνιση $T:\Omega \to \mathrm{I}$ τέτοια ώστε $\{T \le t\} \in F_t, \forall t \in I$

[24] Γιαννακόπουλος Α.Ν (2003) Σημειώσεις Μαθήματος «Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική», Τόμος Ι: Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση, Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Θεώρημα : Έστω B_t μια κίνηση Brown και T ένα πεπερασμένος χρόνος στάσης για την B_t τότε ισχύει ότι $\{B_{t+T} - B_T\}$ είναι μια κίνηση Brown ανεξάρτητη της άλγεβρας F_T

Με βάση το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να δείξουμε ότι αποτελέσματα ανάλογα με την ιδιότητα Markov για αιτιοκρατικούς χρόνους ισχύουν και για κατάλληλα επιλεγμένους τυχαίους χρόνους

Πιο συγκεκριμένα έχουμε

Θεώρημα : Έστω θ_s ο τελεστής μετατόπισης, Y μια φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση και T ένας χρόνος στάσης τότε

$$E_x\left[f(Y \circ \theta_{\mathrm{T}}) \middle| F_T\right] = E_{B_T}\left[Y\right]$$

Όπου f είναι μια φραγμένη συνάρτηση. Η παραπάνω ιδιότητα μας λέει ότι η υπό συνθήκη μέση τιμή της συνάρτησης f υπολογισμένης στη θέση που έφτασε η κίνηση Brown τη χρονική στιγμή t+T δεδομένης της πληροφορίας για την κίνηση Brown ως το χρόνο στάσης T, είναι η μέση τιμή της ίδιας ποσότητας πάνω σε μια κίνηση Brown η οποία ξεκινά στο σημείο B_T που έφτασε η αρχική κίνηση Brown την χρονική στιγμή T και που τρέχει για χρόνο t. Αν σαν f επιλέξουμε την δείκτρια συνάρτηση ενός συνόλου τότε η ιδιότητα Markov μπορεί και να γραφεί σαν μια σχέση πιθανοτήτων

$$P_x\left[B_{t+T} \in A \middle| F_T\right] = P_{B_T}(B_t)$$

3.3.3 Ιδιότητες martingale της κίνησης Brown[25]

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε ότι η κίνηση Brown είναι martingale και πολλές από τις ιδιότητες της μπορεί να συναχθούν από την ιδιότητα αυτή. Ειδικότερα ισχύει το εξής :

Θεώρημα : Έστω B_t μία κίνηση Brown και $F_s = \sigma(B_u, u \leq s)$ η φυσική της διήθηση. Οι παρακάτω στοχαστικές διαδικασίες είναι martingales ως προς τη διήθηση F_s

(i) B_t

(ii) $(B_t)^2 - t$

[25] Γιαννακόπουλος Α.Ν (2003) Σημειώσεις Μαθήματος «Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική», Τόμος Ι: Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση, Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής της κίνησης Brown είναι η $< B >_t = t$. Αυτό μπορεί να φανεί από το (ii) του παραπάνω θεωρήματος (για την απόδειξη βλέπε Παράρτημα) καθώς και από τον ορισμό της διαδικασίας τετραγωνικής μεταβολής για μια martingale. Μπορεί όμως και να δειχθεί και από τον ορισμό της τετραγωνικής μεταβολής ως

$$< B >_t = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2$$

Όπου $\{t_i\}$ είναι μια διαμέριση του $[0, t]$, $\Delta = \sup_i |t_{i+1} - t_i|$ και όριο λαμβάνεται κατά πιθανότητα.

3.4 Γεωμετρική κίνηση Brown

3.4.1 Ορισμός της Γεωμετρικής κίνησης Brown[26]

Όπως έχουμε αναφέρει ο πρώτος που χρησιμοποίησε την κίνηση Brown για να περιγράψει την εξέλιξη των τιμών διαφόρων αγαθών ή μετοχών ήταν ο Bachelier παρολαυτά η στοχαστική αυτή διαδικασία δεν είναι κατάλληλη για την περιγραφή τέτοιου είδους φαινομένων διότι :

(i) η αύξηση ή η μείωση των τιμών ενός αγαθού σύμφωνα με αυτό το μοντέλο είναι ανεξάρτητη από την ίδια την τιμή, δηλαδή το ενδεχόμενο η τιμή μια μετοχής από το 1000 να πάει στο 1100 έχει ίδια πιθανότητα με το ενδεχόμενο η τιμή να πάει από το 100 στο 200, το οποίο δεν είναι λογικό σύμφωνα με τα πραγματικά δεδομένα.

(ii) οι τιμές των μετοχών μπορούν να λάβουν και αρνητικές τιμές κάτι το οποίο δεν ισχύει στην πραγματικότητα.

Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό της γεωμετρικής κίνησης Brown

Ορισμός : Μια στοχαστική διαδικασία B_t, $t \geq 0$ καλείται γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους $\mu \in R$ και $\sigma > 0$ (συμβ. $GMB(\mu, \sigma^2)$) αν ισχύει ότι για κάθε $y \geq 0$, $t > 0$

(i) η τυχαία μεταβλητή

[26] Μπούτσικας Μ. (2005-07) Σημειώσεις Μαθήματος «Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα», Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

$$\ln \frac{B_{t+y}}{B_y} \sim N(t\mu, t\sigma^2)\,,\ (S_0 = 1)$$

(ii) η τυχαία μεταβλητή $\frac{B_{t+y}}{B_y}$ είναι ανεξάρτητη από τις B_u, $0 \leq u \leq y$

όπως και η κίνηση Brown έτσι και η γεωμετρική κίνηση Brown αλλάζει κάθε απειροστό χρονικό διάστημα απειροστά τιμή συνεπώς οι τροχιά της γεωμετρικής κίνησης Brown είναι μια συνεχής συνάρτηση του t η οποία δεν είναι πουθενά διαφορίσιμη σ.β.

Αν $X_t \sim BM(\mu, \sigma^2)$, $t \geq 0$ τότε η $e^{X_t} \sim GMB(\mu, \sigma^2)$. Επομένως αν $B_t \sim GMB(\mu, \sigma^2)$ Τότε η B_t ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή, δηλαδή ο λογάριθμος της B_t ακολουθεί την κανονική κατανομή

$$\ln B_t \sim N(t\mu, t\sigma^2)$$

Και αν $Z \sim N(0,1)$ οι ροπές k τάξης της τ.μ B_t θα είναι $E(B_t^k) = e^{kt\mu + \frac{1}{2}k^2 t\sigma^2}$ από όπου προκύπτει

$$E(B_t) = e^{t(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)}$$

3.4.2 Γεωμετρική κίνηση Brown για ένα χρεόγραφο[27]

Γνωρίζουμε ότι οι τιμές των μετοχών μεταβάλλονται συνεχώς στο χρόνο και παρουσιάζουν αυξομειώσεις στις τιμές ανάλογα με την προσφορά και την ζήτηση. Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε το μοντέλο της γεωμετρικής κίνησης για μια μετοχή. Έστω S_t η τιμή μια μετοχής την χρονική στιγμή t, θέλουμε να προβλέψουμε την τιμή της μετοχής μετά από χρονικό διάστημα Δt. Σύμφωνα με το μοντέλο της γεωμετρικής κίνησης Brown η ποσοστιαία απόδοση της μετοχής της χρονική περίοδο t ως t+Δt ακολουθεί τον πιθανοθεωρητικό νόμο

[27] Φράγκος Ν., Γιαννακόπουλος Α., Βρόντος Σπ. (2009) Σημειώσεις Μαθήματος «Τα Οικονομικά-Μαθηματικά της Σύνταξης». Τμήμα Στατιστικής, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθήνας.

$$\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{S(t)} \sim \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\xi \text{ όπου } \xi \sim N(0,1)$$

Η βάση αυτού του μοντέλου είναι ότι οι μεταβολές των τιμών μια μετοχής οφείλονται στην μεταβολή τυχαίων παραγόντων της οικονομίας, η μεταβολή των οποίων κατά τη διάρκεια του χρόνου θεωρούμε ότι μπορεί να περιγραφεί από την κίνηση Brown.

Έστω $\Delta t \to 0$ τότε το μοντέλο απλοποιείται ως εξής :

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(t_0)}\right) \sim N\left(\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-t_0),\sigma^2(t-t_0)\right)$$

Άρα η τιμή μια μετοχής την χρονική στιγμή t ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή η οποία έχει πυκνότητα πιθανότητας

$$P(x \le S(t) \le x+dx) = f(x;\mu',\sigma'^2) = \frac{1}{x\sigma'\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\ln(x)-\mu')^2}{2\sigma'^2}\right) \text{, x>0}$$

Όπου $\mu' = \left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2(t-t_0)\right)$ και $\sigma' = \sigma(t-t_0)$ είναι συναρτήσεις του χρόνου t.

Αυτό μας εξασφαλίζει ότι η τ.μ $U=\ln(X)$ είναι κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή μ΄ και διασπορά σ'^2

Κάνοντας υπολογισμούς μπορούμε να υπολογίσουμε τις ροπές της S(t) ως εξής :

$$\begin{aligned} E[S(t)] &= S_0\exp(\mu t) \\ E[S(t)^2] &= S_0\exp((\mu+\sigma^2)t) \end{aligned} \qquad \text{όπου } t_0 = 0 \text{ και } S(0)=S_0$$

Η επιλογή του μοντέλου της γεωμετρικής κίνησης Brown μας εξασφαλίζει ότι οι τιμές των μετοχών θα είναι πάντοτε θετικές κάτι που το μοντέλο της κίνησης Brown δεν μπορούσε να εξασφαλίσει ακόμα και αν συμπεριλαμβάναμε κάποια ντετερμινιστική τάση. Άρα η υπόθεση ότι οι τιμές μια μετοχής ακολουθούν την λογαριθμοκανονική κατανομή και όχι την κανονική κατανομή είναι μια αρκετά καλή βάση για την μοντελοποίηση αν και για μικρά χρονικά διαστήματα ή για μικρές μεταβολές μπορεί να θεωρηθεί ότι η λογαριθμοκανονική κατανομή προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή.

Ένα εξίσου σημαντικό στοιχείο στο οποίο θα έπρεπε να σταθούμε είναι η ιδιότητα Markov η οποία απλοποιεί τη χρήση του μοντέλου αυτού. Σύμφωνα με την ιδιότητα Markov η πιθανότητα να πάρει μια μετοχή την χρονική στιγμή t μια συγκεκριμένη τιμή δεδομένης της ιστορίας της αγοράς σε ένα χρονικό διάστημα [0, u] εξαρτάται μόνο από την τελική τιμή S(u) που πήρε η μετοχή την χρονική στιγμή u και όχι από ολόκληρη την ιστορία της. Επομένως το βασικό μέγεθος που μας είναι απαραίτητο είναι η πυκνότητα της πιθανότητας μετάβασης

$$P\left(S(t) = y \middle| S(u) = x\right) =: p_S\left(u, x; t, y\right)$$

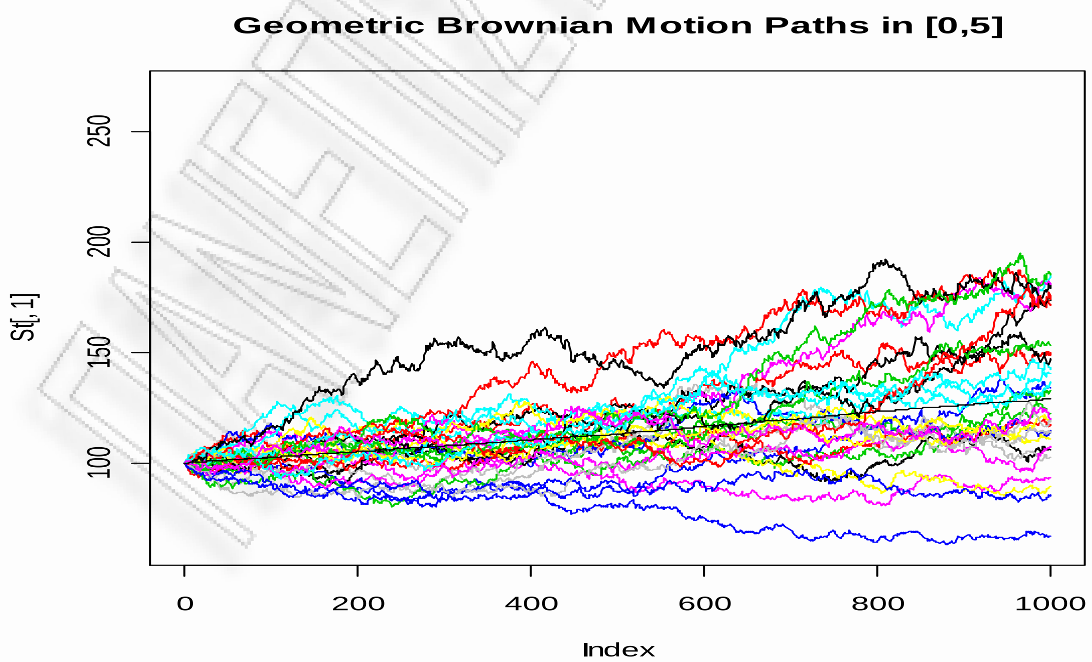
Δηλαδή η πιθανότητα να πάρει τιμές μια μετοχή σε μια γειτονιά του x την χρονική στιγμή u , u<t. Η πυκνότητα της πιθανότητας μετάβασης ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή αλλά όπου x πρέπει να τοποθετήσουμε την ποσότητα $\frac{y}{x}$

Η εξέλιξη των τιμών μια μετοχής δεν μπορεί να προβλεφθεί ικανοποιητικά από ένα σενάριο μόνο, για αυτό είναι καλό να μπορούμε να κάνουμε προσομοιώσεις του μοντέλου της γεωμετρικής κίνησης Brown ώστε να παράγουμε διαφορετικά σενάρια για την εξέλιξη των τιμών.

Η προσομοίωση των σεναρίων μπορεί να γίνει με έναν πολύ απλό τύπο

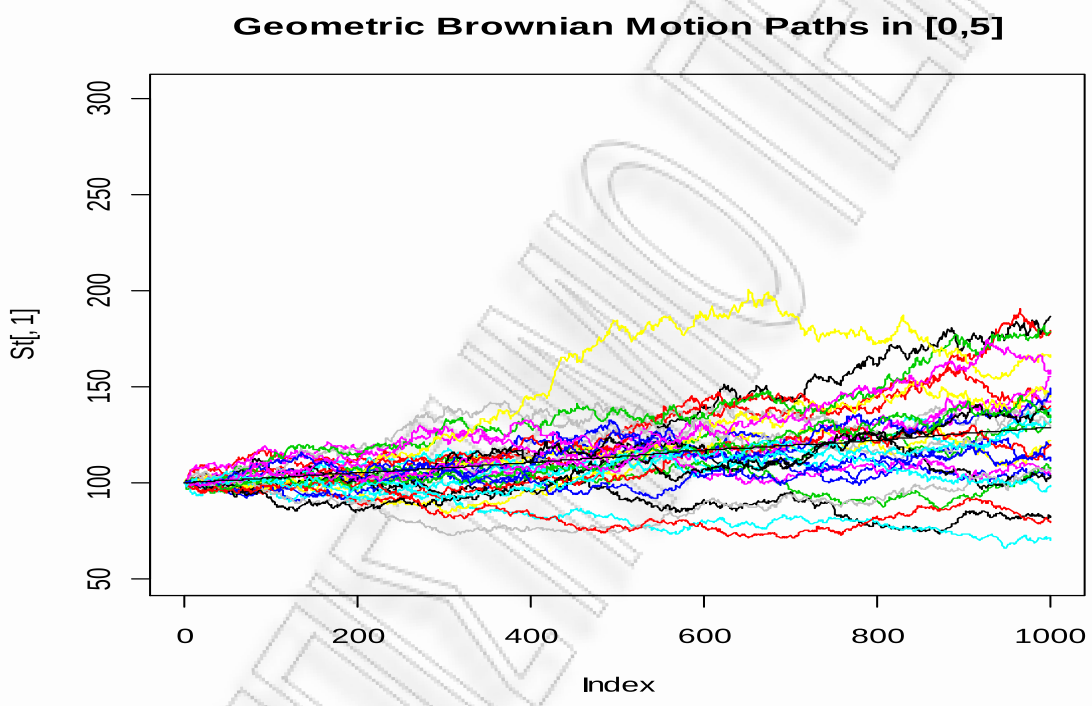
$$S\left(t_{i+1}\right) = S(t_i)\exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(t_{i+1} - t_i\right) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i}\,\xi_i\right)$$

Όπου $t_0 < t_1 < ..... < t_n$ είναι διακριτές χρονικές στιγμές και ξ_i είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές, $\xi_i \sim N(0,1)$.



Σχήμα 3.1 Πραγματοποιήσεις τιμών μιας μετοχής που ακολουθεί το μοντέλο της γεωμετρικής κίνησης Brown.

Για να πάρουμε ένα σενάριο για την εξέλιξη των τιμών μιας μετοχής από τη χρονική στιγμή t_0 μέχρι τη χρονική στιγμή t_n ξεκινάμε από τη σημερινή τιμή της μετοχής $S(t_0)$ και παράγοντας τις τυχαίες μεταβλητές $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ επαναλαμβάνουμε χρονικά την παραπάνω εξίσωση για να πάρουμε τις διαφορετικές πιθανές τιμές της μετοχής $S(t_1), S(t_2), ...$ Αυτό είναι ένα πιθανό σενάριο για την πιθανή εξέλιξη της τιμής μια μετοχής. Ανάλογα με το πόσα σενάρια χρειαζόμαστε επαναλαμβάνουμε όσες φορές χρειάζεται την παραπάνω διαδικασία.



Σχήμα 3.2 Πραγματοποιήσεις τιμών μιας μετοχής που ακολουθεί το μοντέλο της γεωμετρικής κίνησης Brown

Στα σχήματα 3.1 και 3.2 παρουσιάζουμε ορισμένα τυχαία σενάρια σχετικά με την χρονική εξέλιξη μιας μετοχής, στην οποία θα μπορούσε να επενδύσει ένα συνταξιοδοτικό ταμείο, για το μοντέλο της γεωμετρικής κίνησης Brown όπου μ=0.05 και σ=0.10.

Πολλές φορές είναι απαραίτητο να προσαρμόσουμε το μοντέλο της γεωμετρικής κίνησης Brown για να μοντελοποιήσουμε της εξέλιξη συγκεκριμένων μετοχών που μας ενδιαφέρουν έχοντας ιστορικά στοιχεία της εξέλιξης των τιμών αυτών των μετοχών. Αυτό που θέλουμε είναι να βρούμε τις τιμές των παραμέτρων μ και σ του μοντέλου της γεωμετρικής κίνησης Brown για τις οποίες το μοντέλο θα αναπαράγει την εξέλιξη των τιμών που έχουμε ήδη παρατηρήσει από τα ιστορικά στοιχεία ελπίζοντας ότι με αυτό τον τρόπο θα προβλέψουμε τις μελλοντικές τιμές που θα πραγματοποιηθούν.

Μια εκτίμηση αυτών των παραμέτρων μπορεί να γίνει με τις εκτιμήτριες :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \quad \text{και} \quad \hat{\sigma} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \left(X_i - \hat{\mu}\right)^2$$

Όπου $X_i = \ln\left(\dfrac{S(t_{i+1})}{S(t_i)}\right)$

3.4.3 Γεωμετρική κίνηση Brown για περισσότερα από ένα χρεόγραφα[28]

Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο το μοντέλο της γεωμετρικής κίνησης Brown για την τιμή μια μετοχής. Τώρα θα ασχοληθούμε με την κατασκευή μοντέλων για τις τιμές των μετοχών μια χρηματιστηριακής αγοράς δηλαδή για τις τιμές μετοχών περισσότερων από μια.

Έστω d ανεξάρτητες κινήσεις Brown. Τότε η στοχαστική διαδικασία (βλέπε Παράρτημα)

$$\boldsymbol{B(t) = \left(B_1(t), B_2(t), \ldots, B_d(t)\right) \in R^d}$$

Καλείται d-διάστατη κίνηση Brown και ισχύει $E\left[B_i(t)B_j(t)\right] = \delta_{ij}t$.

Από την διαδικασία αυτή μπορούμε να κατασκευάσουμε πιο πολύπλοκες στοχαστικές διαδικασίες όπως :

$$X_j(t) = \sum_{k=1}^{d} \rho_{jk} B_k(t) \;, \text{ j=1,2,….., m}$$

Για αυτή την διαδικασία μπορεί να δειχθεί ότι ισχύει:

$$E\left[X_j(t)\right] = 0 \quad \text{και} \quad E\left[X_i(t)X_j(t)\right] = \sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d} \rho_{ik}\rho_{jl} E\left[B_i(t)B_j(t)\right] = t\sum_{k=1}^{d} \rho_{ik}\rho_{jk}$$

Ο πίνακας $\Sigma = (\Sigma_{ij})$, i,j=1,2,…..,m τα στοιχεία του οποίου ορίζονται ως $\Sigma_{ij} = t\sum_{k=1}^{d} \rho_{ik}\rho_{jk}$

Είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων των διαδικασιών $X_j(t)$, j=1,2,….,t

---

[28] Φράγκος Ν., Γιαννακόπουλος Α., Βρόντος Σπ. (2009) Σημειώσεις Μαθήματος «Τα Οικονομικά-Μαθηματικά της Σύνταξης». Τμήμα Στατιστικής, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθήνας.

Τώρα μπορούμε να κατασκευάσουμε μη γραμμικές συναρτήσεις των στοχαστικών αυτών διαδικασιών οι οποίες θα αποτελέσουν μοντέλα για τιμές μετοχών περισσότερων από μιας. Θα χρειαστούμε τόσες στοχαστικές διαδικασίες όσες και ο αριθμός των μετοχών που θέλουμε να περιγράψουμε.

Έστω n ο αριθμός των μετοχών και n στοχαστικές διαδικασίες $\{S_i(t)\}$, $i = 1,2,....,n$.

Με $S_i(t)$ συμβολίζουμε την τιμή της μετοχής i την χρονική στιγμή t η οποία επηρεάζεται από τους m παράγοντες της οικονομίας. Η γενίκευση της γεωμετρικής κίνησης Brown εκφράζεται ως εξής :

$$S_i(t) = \exp\left(v_i t + \sum_{j=1}^{m} \sigma_j X_j(t) \right) \quad \text{ή}$$

$$S_i(t) = \exp\left(v_i t + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} B_j(t) \right)$$

Όπου οι συντελεστές σ_j προσδιορίζουν τον τρόπο που οι διαφορετικοί παράγοντες της οικονομίας επηρεάζουν την εξέλιξη των τιμών των μετοχών.

3.5 Μοντελοποίηση τιμών χαρτοφυλακίου[29]

Ένα θεμελιώδες στοιχείο της ανάλυσης του Markowitz[30] είναι ότι οι επενδυτές κεφαλαίων δεν πρέπει να έχουν ως κύριο μέλημα μόνο τις αποδόσεις που επιτυγχάνουν αλλά και τον κίνδυνο της θέσης τους, ο οποίος αποτυπώνεται στην τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου. Ο Markowitz προτείνει να μετριέται ο κίνδυνος της απόδοσης R ενός χαρτοφυλακίου από την τυπική απόκλιση $\sigma(R)$ και να ορίζεται η ελάχιστη $\sigma(R)$ για κάθε σταθερή αναμενόμενη απόδοση $E(R)$. Το διπλό αυτό κριτήριο μπορεί να διατυπωθεί και ως : Μεγιστοποίηση της αναμενόμενης απόδοσης για κάθε σταθερή τιμή της τυπικής απόκλισης .

---

[29] Prigent Jean-Luc (2007) Portfolio Optimization and Performance Analysis, Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series.

[30] Markowitz H.M. (1952) : Portfolio Selection, Journal of Finance, 7, 77-91.

Έστω ένας επενδυτής επενδύει ένα αρχικό ποσό V_0 σε δοθέντα οικονομικά κεφάλαια. Ο επενδυτικός ορίζοντας είναι σταθερός και έχει μια buy-and-hold στρατηγική. Για να ερμηνεύσουμε την επιρροή της διαφοροποίησης θεωρούμε την ακόλουθη γενική περίπτωση.

Έστω ότι έχουμε n χρεόγραφα ή μετοχές στα όποια μπορεί να επενδύσει κάποιος .

$w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ είναι ο πίνακας των βαρών του χαρτοφυλακίου,

$R = (R_1, R_2, ..., R_n)$ είναι ο πίνακας των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου,

$\bar{R} = (\bar{R}_1, \bar{R}_2, ..., \bar{R}_n)$ είναι ο πίνακας των αναμενόμενων αποδόσεων του χαρτοφυλακίου,

$e = (1,1,...,1)$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας,

$V = (\sigma_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ είναι ο $n \times n$ πίνακας διασπορών-συνδιασπορών του χαρτοφυλακίου.

Για κάθε αναμενόμενη απόδοση έχουμε να προσδιορίσουμε το χαρτοφυλάκιο με την ελάχιστη διασπορά. Η αναμενόμενη απόδοση για κάθε χαρτοφυλάκιο P με βάρη w δίνεται από :

$$E(R_P) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(R_i) = w \cdot \bar{R}'$$

Η διασπορά της απόδοσης του χαρτοφυλακίου P είναι ίση με

$$\sigma^2(R_P) = w'Vw = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij.} = 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} + \sum_{i=1}^{n} w_i^{\,2}\sigma_i^{\,2}$$

Η παραπάνω σχέση μας δείχνει την σύνθεση της διασποράς των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου από δυο συνιστώσες. Η σχέση αυτή αποδεικνύει ότι η οριακή συμβολή ενός χρεογράφου στον συνολικό κίνδυνο του χαρτοφυλακίου δεν περιορίζεται μόνο στης διασπορά του χρεογράφου αλλά λαμβάνει υπόψη και ενδεχόμενες συσχετίσεις με τα αλλά χρεόγραφα. Η ιδιότητα αυτή αναπαριστά την επίδραση της διαφοροποίησης.

Η μερική παραγωγός ως προς τα βάρη w_i είναι

$$\frac{\partial \sigma^2(R_P)}{\partial w_i} = 2\sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{ij}$$

Θέτοντας ως σ_{iP} τον συντελεστή συσχέτισης του χρεογράφου i και του χαρτοφυλακίου P τότε:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{ij} = \sum_{j=1}^{n} w_j Cov(R_i, R_j) = Cov\left(R_i, \sum_{j=1}^{n} w_j R_j \right) = Cov(R_i, R_P) = \sigma_{iP}$$

Επομένως

$$\frac{\partial \sigma^2 (R_P)}{\partial w_i} = 2\sigma_{iP}$$

Άρα, η οριακή συμβολή του χρεογράφου i στον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου είναι ίση με 2 φορές τον συντελεστή συσχέτισης του με το χαρτοφυλάκιο.

Υποθέτοντας τώρα ότι τα βάρη του χαρτοφυλακίου είναι ίσα με $\frac{1}{n}$. Τότε η διασπορά είναι:

$$\sigma^2 (R_P) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} \right)^2 \sigma_i^{\,2} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left(\frac{1}{n} \right)^2 \sigma_{ij}$$

Το οποίο μπορεί να γραφεί και ως :

$$\sigma^2 (R_P) = \left(\frac{1}{n} \right) \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} \right) \sigma_i^{\,2} + \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \sigma_{ij}$$

Ο πρώτος όρος τείνει στο 0 όταν το $n \to \infty$. Επομένως η συμβολή κάθε χρεογράφου στο συνολικό κίνδυνο του χαρτοφυλακίου είναι αμελητέα για μεγάλα χαρτοφυλάκια. Αν οι αποδόσεις των χρεογράφων είναι ανεξάρτητες τότε ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου τείνει στο 0 και η διαφοροποίηση εξαλείφει τον κίνδυνο. Ο δεύτερος όρος περιέχει $\frac{n(n-1)}{2}$ συνδιακυμάνσεις για αυτό και ο όρος αυτός δεν τείνει στο 0 αν οι συνδιακυμάνσεις θεωρηθεί ότι παίρνουν απόλυτες τιμές σε ένα δοθέν διάστημα $[c_{\min}, c_{\max}]$ όπου $c_{\min} > 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Μοντελοποίηση των υποχρεώσεων συνταξιοδοτικού ταμείου καθορισμένης παροχής

4.1 Γενικά

Σε αντίθεση με τα αμοιβαία κεφάλαια, τα συνταξιοδοτικά σχήματα καθορισμένης παροχής έχουν να αντιμετωπίσουν και τις διάφορες ανάγκες χρηματοδότησης των υποχρεώσεων. Επομένως, η μεγιστοποίηση μόνο των περιουσιακών στοιχείων ενός συνταξιοδοτικού σχήματος καθορισμένης παροχής δεν είναι από μόνη της αρκετή. Η μελέτη των υποχρεώσεων του σχήματος είναι απαραίτητη για την κατανομή των κεφαλαίων. Αυτό που μελετάμε είναι η επίδραση των υποχρεώσεων του συνταξιοδοτικού σχήματος στην κατανομή των περιουσιακών στοιχείων.

Συνεπώς, η διαφορά των συνταξιοδοτικών σχημάτων καθορισμένης παροχής σε σχέση με τους υπόλοιπους θεσμικούς επενδυτές είναι ο ρόλος κλειδί των υποχρεώσεων του σχήματος. Οι υποχρεώσεις ενός συνταξιοδοτικού ταμείου καθορισμένης παροχής παραπέμπουν στην μακροπρόθεσμη «υπόσχεση» του ταμείου να δώσει την ενδεχόμενη παροχή την στιγμή της συνταξιοδότησης. Μετά την θεσμοθέτηση της ERISA (Employee Retirement Income Security Act) τα ταμεία πρέπει να εγγυηθούν την φερεγγυότητα και τον τρόπο χρηματοδότησης των σχημάτων τους. Επομένως οι διαχειριστές των συνταξιοδοτικών σχημάτων καθορισμένης παροχής πρέπει να λάβουν υπόψη όχι μόνο τις αποδόσεις των κεφαλαίων του σχήματος αλλά και τις υποχρεώσεις του. Αγνοώντας τις υποχρεώσεις στην κατανομή των κεφαλαίων ίσως οδηγήσει σε εσφαλμένες επενδυτικές αποφάσεις.

Η υποχρέωση ενός DB επηρεάζεται από 2 κατηγορίες παραγόντων, τους δημογραφικούς και οικονομικούς. Οι δημογραφικοί περιλαμβάνουν την θνησιμότητα, την διακοπή, την ανικανότητα καθώς και την συνταξιοδότηση, οι οποίοι επηρεάζουν τις υποχρεώσεις του σχήματος. Οι οικονομικοί παράγοντες, όπως ο πληθωρισμός, η αύξηση της παραγωγικότητας και η απόδοση της αγοράς κεφαλαίων επίσης επηρεάζουν τις υποχρεώσεις του σχήματος λόγω της αύξησης των αποδοχών ή των προεξοφλητικών επιτοκίων.

4.2 Μοντέλα αποτίμησης των υποχρεώσεων συνταξιοδοτικών ταμείων καθορισμένης παροχής

Στην παγκόσμια βιβλιογραφία έχουν αναφερθεί διάφορα μοντέλα αποτίμησης των υποχρεώσεων ενός συνταξιοδοτικού ταμείου καθορισμένης παροχής. Στις επόμενες παραγράφους θα αναφέρουμε ενδεικτικά μερικά από αυτά.

4.2.1 Το απλουστευμένο μοντέλο[31]

Οι υποχρεώσεις ενός συνταξιοδοτικού ταμείου καθορισμένης παροχής προκύπτουν από τον αριθμό των μελών του ταμείου και το κόστος αγοράς των ραντών ζωής για την συνταξιοδότηση των μελών που ισχύουν τώρα καθώς και από τις μελλοντικές συντάξεις των μελών του ταμείου. Το ποσό των ραντών ζωής που πρέπει να αγοραστούν εξαρτάται από τον τελικό μισθό του ασφαλισμένου καθώς επίσης από το επιτόκιο και το επίπεδο του πληθωρισμού. Το απλουστευμένο μοντέλο που θα παρουσιάσουμε βασίζεται στο μοντέλο του Cairns (2004)[32]. Οι τεχνικές που θα χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό του κινδύνου θνησιμότητας είναι ενσωματωμένες στο πλαίσιο DSP[33] .Σε αυτό που θα δώσουμε προσοχή σε αυτή την παράγραφο είναι η μοντελοποίηση των υποχρεώσεων του μοντέλου.

Σύμφωνα με τις απαιτήσεις του UK FRS17 (UK Financial Reporting Standard 17) οι συνολικές υποχρεώσεις ενός συνταξιοδοτικού ταμείου μπορούν να υπολογιστούν ως η παρούσα αξία όλων των μελλοντικών πληρωμών, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις πληρωμές για υπηρεσίες μέχρι την ημερομηνία που μας δίνεται αλλά υπολογίζοντας τις παροχές με βάση τον αναμενόμενο τελικό μισθό προσαρμοσμένο λόγω πληθωρισμού.

---

[31] Dempster M.A.H, Germano M., Medova E.A, Murphy J.K, Ryan D & SandrinI F (2009) Risk profiling defined benefit pension schemes. Journal Portfolio Management, Summer 2009: 1-27.

[32] Cairns A.J.K (2004). Pension-fund Mathematics, Encyclopedia of Actuarial Science, Wiley.

[33] βλέπε Medova E.A., Murphy J.K., Owen A.P. & Rehman K. (2008). Individual asset liability management. Quantitative Finance, 8.6, 547-560.

Με βάση τον παραπάνω κανόνα η υποχρέωση για ένα μέλος του σχήματος τον χρόνο t και στην ηλικία x_i στην οποία έχει κατοχυρώσει i χρόνια υπηρεσίας και έχει $n-i$ χρόνια μέχρι τη συνταξιοδότηση είναι:

$$\frac{x_i - x_0}{65} \cdot F_{x_i}^t \cdot v(t, t+n-i)\, \ddot{a}_n (t+n-i)$$

Όπου $F_{x_i}^t = E_t\left(c(t, t+n-i)\right) S_{x_i}^t \frac{S_{x_n}^0}{S_{x_i}^0}$ είναι ο αναμενόμενος τελικός μισθός με $c(t, t+n-i)$ να είναι ο πληθωρισμός από τον χρόνο t στον $t+n-i$, $v(t, t+n-i)$ είναι η αξία στον χρόνο t της χρηματοροής που επέρχεται στον χρόνο $t+n-i$ και $\ddot{a}_n (t+n-i)$ μια προκαταβλητέα ράντα μη συνδεδεμένη με τον πληθωρισμό για $t+n-i$ έτη .

Ο πρώτος όρος μας δίνει την αναμενόμενη υποχρέωση βασισμένη στα έτη υπηρεσίας ενώ ο δεύτερος όρος την τρέχουσα αξία μια μελλοντικής ράντας.

Άρα η συνολική υποχρέωση του σχήματος είναι το άθροισμα των υποχρεώσεων προς όλα τα μελή είναι :

$$L_t = \sum_{i=0}^{n-1} M_{x_i}^t \frac{x_i - x_0}{65} \cdot F_{x_i}^t \cdot v(t, t+n-i)\, \ddot{a}_n (t+n-i)$$

Με $M_{x_i}^t$ δηλώνουμε τον αριθμό των μελών του ταμείου την χρονική στιγμή t.

4.2.2 Το μοντέλο του Blake

Μια αντίστοιχη μοντελοποίηση συναντάμε και από τον Blake[34] (1998) όπου η αναμενόμενη παρούσα αξία των υποχρεώσεων για κάθε χρονική στιγμή t ενός συνταξιοδοτικού ταμείου καθορισμένης παροχής υπολογίζεται ως εξής :

$$L_t = \sum_{t=1}^{\infty} p_{T+t} Z \left[\frac{1+g_z}{1+r_B}\right]^t \left[\frac{1}{\prod_{j=t+1}^{T} (1+r_{F_j})}\right], \text{ t=1,..,T}$$

[34] Blake D.(1998) Pension schemes as options on pension fund assets: implications for pension fund management. Insurance: Mathematics and Economics 23(1998): 263-286.

Όπου με Z συμβολίζει την αναμενόμενη σύνταξη, με g_z τον αναμενόμενο ρυθμό μεταβολής της σύνταξης, με p_{T+t} την πιθανότητα επιβίωσης για ένα χρόνο t έτη μετά την συνταξιοδότηση και r_{F_j} με την αναμενόμενη απόδοση της επένδυσης των περιουσιακών στοιχείων του ταμείου στο χρόνο t.

4.2.3 Το μοντέλο του Milevsky

Σύμφωνα με τον Milevsky[35] (2006) η ετήσια σύνταξη ενός σχήματος καθορισμένης παροχής θα είναι :

$$\mathrm{I}^{DB} = aT\beta\int_0^{\mathrm{T}} e^{-\beta(T-s)}w(s)ds$$

Το οποίο γράφεται και ως :

$$\mathrm{I}^{DB} = aT\omega(T)$$

Όπου a είναι ο συντελεστής συσσώρευσης, T είναι τα χρόνια εργασίας και $\omega(T)$ είναι ο μέσος μισθός που λαμβάνεται υπόψη στον υπολογισμό της σύνταξης.
Γενικά ισχύει :

$$\omega(T) = \beta\int_0^{T} e^{-\beta(T-s)}w(s)ds$$

Ο τύπος αυτός μας δίνει την δυνατότητα να συνδέσουμε την σύνταξη με τους μισθούς κατά την διάρκεια του εργασιακού βίου.

Στην προηγούμενη περίπτωση μελετήσαμε τα οικονομικά του μετά-εργασιακού βίου, δηλαδή τη σύνταξη. Αν πάμε μερικά χρόνια πίσω και υποθέσουμε ότι ένα μέλος ενός συνταξιοδοτικού σχήματος καθορισμένης παροχής είναι ηλικίας y ετών και έχει εργαστεί για τ έτη, όπου $0 < \tau < T$.
Σύμφωνα με το καταστατικό του σχήματος μπορεί να συνταξιοδοτηθεί στην ηλικία των x χρόνων. Έτσι $x - y = T - \tau$ και όποια σύνταξη δικαιούται θα την πάρει στην ηλικία x.
Έστω με Y δηλώνουμε την σημερινή υποχρέωση του σχήματος προς το συγκεκριμένο μέλος. Υπάρχουν 3 μέτρα που μπορεί να μετρηθεί η σημερινή υποχρέωση. Το πρώτο

[35] Milevsky Mosce A.(2006) The Calculus of retirement income. Cambridge University Press.

ονομάζεται Υποχρέωση Οφειλών Αποχώρησης (Retirement Benefit Obligation : RBO), το δεύτερο Προβεβλημένη Υποχρέωση Οφειλών (Projected Benefit Obligation : PBO) και το τρίτο Συσσωρευμένη Υποχρέωση Οφειλών (Accumulated Benefit Obligation : ABO)

$$Y_y^{RBO} = e^{-r(x-y)} aT\omega(T)\bar{a}_x$$
$$Y_y^{PBO} = e^{-r(x-y)} a\tau\omega(T)\bar{a}_x$$
$$Y_y^{ABO} = e^{-r(x-y)} a\tau\omega(\tau)\bar{a}_x$$

Παρατηρήσεις :

- Και τα 3 μέτρα προεξοφλούν, με επιτόκιο i, την όποια σύνταξη στην ηλικία x για αυτό και ο εκθέτης $-i(x-y)$
- Στο τέλος του εργασιακού βίου δηλαδή μετά από Τ χρόνια στην ηλικία x και οι 3 εκφράσεις συμπίπτουν με την $aT\omega(T)\bar{a}_x$. Αυτή είναι η εφάπαξ αξία της σύνταξης τη στιγμή της συνταξιοδότησης.

Πριν τη συνταξιοδότηση υπάρχουν τα 3 αυτά μέτρα για να μετρήσει κανείς την υποχρέωση του σχήματος προς τον ασφαλισμένο. Η RBO είναι η παρούσα αξία της πλήρους σύνταξης. Η ABO από την άλλη είναι η παρούσα αξία της σύνταξης που έχει θεμελιωθεί μέχρι αυτή τη στιγμή δηλαδή την ηλικία y. Σε αυτή την περίπτωση φαίνεται ότι ο ασφαλισμένος παύει να είναι μέλος του σχήματος το οποίο γενικά δεν είναι αληθές. Έτσι έχουμε το τρίτο μέτρο που υιοθετεί την άποψη ότι το μέλος του σχήματος έχει εργαστεί για τ χρόνια αλλά ο μισθός που θα ληφθεί υπόψη για τον υπολογισμό της σύνταξης είναι S_T και όχι S_y.

4.2.4 Το μοντέλο του Yang

Αντίστοιχα στο υποθετικό συνταξιοδοτικό πλάνο καθορισμένης παροχής ο Yang[36] (2003) υποθέτει ότι ο μέσος αριθμός ετών εργασίας των ενεργών υπαλλήλων είναι $\bar{T}_0$ και η μέση παροχή των υπαλλήλων που έχουν συνταξιοδοτηθεί σε ηλικία r είναι B_r. Σε αυτή

[36] Tonguan Yang (2003), Defined Benefit pension plan liabilities and international asset allocation. Fifth Annual Joint Conference of the Retirement Research Consortium : 1-20.

τη μοντελοποίηση των υποχρεώσεων οι δημογραφικοί παράγοντες θεωρούνται σταθεροί, επομένως όλοι οι συνταξιούχοι και οι ενεργοί υπάλληλοι του πλάνου θα βρίσκονται εν ζωή και το επόμενο έτος με πιθανότητα 1. Η παροχή στην συνταξιοδότηση είναι $\tilde{B} = k \cdot \tilde{W} \cdot T$, όπου k είναι ένα σταθερό ποσοστό πληρωμής, έστω 2%, W είναι ο τελευταίος μισθός των συμμετεχόντων και T τα χρόνια του εργασιακού βίου.

Επειδή δεν είναι δυνατόν να υπολογιστεί η απαιτουμένη συνδιασπορά απευθείας, ο Yang (2003) μοντελοποιεί το ποσοστό αύξησης των υποχρεώσεων του ταμείου και χρησιμοποιεί κατάλληλες μεταβλητές για την ανάλυση ευαισθησίας. Το μέτρο υπολογισμού των υποχρεώσεων που χρησιμοποιείται είναι η Συσσωρευμένη Υποχρέωση Οφειλών (ABO).

Η ABO το χρόνο 0, δηλαδή την χρονιά που υπολογίζεται μπορεί να προβληθεί στο χρόνο 1, δηλαδή την επομένη χρονιά από την παρακάτω εξίσωση[37] :

$$(ABO)_1 \approx \left[(ABO)_0 + h(ABO)_0\right]\cdot(1+\tilde{r}) - E(B)_1$$

Όπου

$(ABO)_0$: είναι η ABO το χρόνο 0,

r : είναι το επιτόκιο προεξόφλησης,

$E(B)_1$: είναι η αναμενόμενη ετήσια παροχή, η οποία ισούται με B_r

h: είναι το κλάσμα της ABO για τα έτη εργασίας προς την ABO με την αύξηση των αποδοχών

Ο συντελεστής h μπορεί να ορισθεί ως :

$$h = \frac{B_1 - B_0}{B_0} = \frac{k\tilde{W}_1\bar{T}_1 - k\tilde{W}_0\bar{T}_0}{k\tilde{W}_0\bar{T}_0} = \frac{kW_0(1+\tilde{R}_W)(\bar{T}_0+1) - kW_0\bar{T}_0}{kW_0\bar{T}_0} = \tilde{R}_W + \frac{1}{\bar{T}_0}(1+\tilde{R}_W)$$

Άρα, το ποσοστό αύξησης των υποχρεώσεων $\tilde{R}_L$ μπορεί να εκφραστεί ως εξής :

$$\tilde{R}_L = \frac{(ABO)_1 - (ABO)_0}{(ABO)_0} = \frac{1}{\bar{T}_0} + \left(1 + \frac{1}{\bar{T}_0}\right)\cdot(\tilde{R}_W + \tilde{r} + \tilde{R}_W\tilde{r}) - \frac{B_r}{L_0}$$

Το ποσοστό αύξησης των υποχρεώσεων $\tilde{R}_L$ θα εξαρτάται από 3 στοχαστικούς όρους, το ποσοστό αύξησης των αποδοχών $\tilde{R}_W$, το επιτόκιο προεξόφλησης r και το γινόμενο αυτών των δυο $\tilde{R}_W\tilde{r}$.

[37] Για περισσότερα βλέπε Winklevoss H. (1993), Pension Mathematics with Numerical Illustrations, Second Edition, Philadelphia : University of Pennsylvania Press.

4.2.5 Το μοντέλο των Oba και Kasuga

Μια από τις πιο σημαντικές αποφάσεις στην διαχείριση των συνταξιοδοτικών ταμείων είναι η κατανομή των κεφαλαίων που επενδύονται καθώς σχεδόν το 90% των αποδόσεων ενός συνταξιοδοτικού ταμείου είναι συνάρτηση της κατανομής των κεφαλαίων. Ένα σύνηθες ποσοτικό μοντέλο για τον καθορισμό της καταλληλότερης κατανομής κεφαλαίων είναι η μέθοδος του αποτελεσματικού συνόρου (efficient-frontier approach). Η παραδοσιακή μέθοδος του αποτελεσματικού συνόρου απαιτεί τον προσδιορισμό της κατανομής των κεφαλαίων για μια προκαθορισμένη περίοδο κατά την οποία η κατανομή δεν αλλάζει. Ωστόσο, μακροπρόθεσμα δεν μπορούν να αγνοηθούν οι αλλαγές στην δομή των υποχρεώσεων ενός συνταξιοδοτικού ταμείου.

Τα δυναμικά μοντέλα για την επένδυση των περιουσιακών στοιχείων ενός συνταξιοδοτικού ταμείου τα οποία μελετώνται στην Ιαπωνία, λαμβάνουν υπόψη τις μεταβολές των υποχρεώσεων του ταμείου. Το μοντέλο Sundaresan των Oba και Kasuga[38] προσπαθεί να εφαρμόσει μια δυναμική προσέγγιση για την κατανομή των κεφαλαίων έτσι ώστε να ερευνήσει την βέλτιστη κατανομή για τα κεφάλαια των συνταξιοδοτικών ταμείων. Σύμφωνα με το μοντέλο Sundaresan κατασκευάζονται 2 χαρτοφυλάκια. Το πρώτο ονομάζεται πλεονάζον χαρτοφυλάκιο (surplus portfolio) το οποίο αποτελείται από τα πλεονάζοντα κεφάλαια του συνταξιοδοτικού ταμείου τα οποία είναι κατανεμημένα με το βέλτιστο δυνατό τρόπο. Επειδή το χαρτοφυλάκιο αυτό δεν επηρεάζεται από τις υποχρεώσεις του ταμείου η κατανομή του σε χρεόγραφα καθορίζεται από τον βαθμό κινδύνου που προτίθεται να αναλάβει το ταμείο. Το δεύτερο χαρτοφυλάκιο καλείται ισοσταθμικό και στην ουσία ισοσταθμίζει τις αλλαγές που μπορεί να προκύψουν όσο αναφορά τις υποχρεώσεις του ταμείου. Το χαρτοφυλάκιο αυτό διατηρεί στην κατοχή του και ομόλογα και μετοχές για να εξασφαλίσει ότι τα κεφάλαια του ταμείου δεν θα είναι λιγότερα από τις υποχρεώσεις .

Όπως προαναφέραμε το μοντέλο Sundaresan είναι ένα δυναμικό μοντέλο που ερευνά την βέλτιστη κατανομή των περιουσιακών στοιχείων ενός συνταξιοδοτικού σχήματος καθορισμένης παροχής βασισμένο στις αλλαγές των υποχρεώσεων του σχήματος μακροπρόθεσμα. Οι υποθέσεις που λαμβάνονται υπόψη είναι οι εξής :

---

[38] Oba Akihike and Syunsuke Kasuga .Dynamic models for investment of pension fund assets: The Sundaresan-model approach, Financial Research Center of the Nomura Securities Co.Ltd :375-386.

- Οι εργαζόμενοι συμμετέχουν στο συνταξιοδοτικό σχήμα όταν προσλαμβάνονται και μετά την συνταξιοδότηση τους λαμβάνουν εφάπαξ την σύνταξη τους. Το ποσό της σύνταξης εξαρτάται από το ύψος της αμοιβής τους. Η υπόθεση είναι ότι οι εργαζόμενοι όταν προληφθούν συμμετέχουν στο ταμείο εν συνεχεία ο εργοδότης πληρώνει σε παρούσα αξία όλο το ποσό της παροχής του εργαζομένου το οποίο επενδύεται και όταν ο εργαζόμενος συνταξιοδοτηθεί οι παροχές του πληρώνονται από αυτά τα κεφάλαια.
- Τα κεφάλαια του ταμείου επενδύονται μόνο σε μετοχές και ομόλογα.
- Το μοντέλο υποθέτει ότι μεταξύ των μισθών και των αποδόσεων των χρεογράφων υπάρχει θετική συσχέτιση. Στην πραγματικότητα αυτό δεν ισχύει για αυτό και το χαρτοφυλάκιο που δημιουργείται δεν είναι εγγυημένα το βέλτιστο δυνατόν. Οι αποδοχές και αποδόσεις θεωρούνται τυχαίες μεταβλητές μια κίνησης Brown και έχουν συντελεστή συσχέτισης μονάδα.

Τα 2 μέτρα που χρησιμοποιούνται σε αυτό το μοντέλο για τον υπολογισμό των υποχρεώσεων του συνταξιοδοτικού ταμείου είναι η Συσσωρευμένη Υποχρέωση Οφειλών (ABO) καθώς και η Προβεβλημένη Υποχρέωση Οφειλών (PBO) όπου η ABO βασίζεται στις τρέχουσες αποδοχές ενώ η PBO σε μια εκτίμηση των αποδοχών αυξανόμενη μέχρι την συνταξιοδότηση.

Το μοντέλο Sundaresan για την δομή των υποχρεώσεων του ταμείου βασίζεται στην PBO. Οι αλλαγές στις τιμές των μετοχών όπως και των αποδοχών είναι τυχαίες, άρα η παρούσα αξία των υποχρεώσεων του συνταξιοδοτικού ταμείου μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την θεωρία δικαιωμάτων προαίρεσης πώλησης ή αγοράς (option pricing theory).

Έστω $P(t)$ η αξία της υποχρέωσης ενός εργαζομένου στην ηλικία t τότε

$$P(t) = PBO(t) = ABO(t) + incrementalPBO(t)$$

Ο πρώτος όρος στα δεξιά της συνάρτησης αντιστοιχεί στην ABO η οποία είναι ανεξάρτητη των μεταβολών στις αποδοχές. Ο δεύτερος όρος αφορά την διαφορά της ABO με την PBO και είναι το μερίδιο που αφορά τις μεταβολές των μελλοντικών υποχρεώσεων παροχών που οφείλονται στις μελλοντικές αυξήσεις των αποδοχών.

4.2.6 Το μοντέλο των Chiu και Li

Στο μοντέλο τους οι Chiu και Li[39] (2006) θεωρούν μια χρηματοοικονομική αγορά με n_1+1 χρηματοοικονομικά προϊόντα τα οποία διαπραγματεύονται συνεχώς σε ένα χρονικό ορίζοντα $[0,T]$. Έστω $P_{i,t}$ όπου $i=0,1,2,....,n_1$ είναι η εξέλιξη των τιμών των προϊόντων αυτών και $P_{0,t}$ είναι η εξέλιξη των τιμών του προϊόντος χωρίς κίνδυνο τότε η $P_{0,t}$ ικανοποιεί την παρακάτω διαφορική εξίσωση

$$\begin{cases} dP_0 = P_{0,t}\cdot a_{0,t}dt \\ P_{0,t} = p_0 > 0 \end{cases}$$

Όπου $a_{0,t}$ είναι η αξία χωρίς κίνδυνο. Όλα τα αλλά κεφάλαια εμπεριέχουν κίνδυνο και η εξέλιξη των τιμών τους $P_{1,t},....,P_{n_1,t}$ ικανοποιούν τις ακόλουθες στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις :

$$\begin{cases} dP_{i,t} = P_{i,t}\left\{a_{i,t}dt + \sum_{j=1}^{n} c_{i,t}^{j}dW_t^{j}, t\in [0,T]\right. \\ P_{i,0} = p_i > 0, i = 1,2,3,...., n_1 \end{cases}$$

Όπου $W_t = (W_t^1, W_t^2, ..., W_t^n)'$ είναι μια n-διάστατη διαδικασία Wiener η οποία είναι ορισμένη σε έναν σταθερό και πλήρη χώρο πιθανότητας $(\Omega, F, P, F_{t>0})$ με $n\geq n_1$, W_t^i και W_t^j είναι ανεξάρτητες για όλα τα $i\neq j$, a_t είναι η εκτιμώμενη αξία του κεφαλαίου i και $c_{i,t} = (c_{i,t}^1, c_{i,t}^2, ..., c_{i,t}^n)$ είναι η μεταβλητότητα του κεφαλαίου i.

Εν συνεχεία ορίζουμε τον πίνακα συνδιασποράς των κεφαλαίων ως $\sigma_{A,t} = (c_{i,t}^j)$ ο οποίος ανήκει σε ένα χώρο Banach $R^{n_1\times n}$ όπου παίρνει τιμές από μια συνεχή συνάρτηση στο $[0,T]$. Όπως έχει υιοθετηθεί ευρύτερα στην διεθνή βιβλιογραφία υποθέτουμε την μη εκφυλισμένη συνθήκη $\sigma_{A,t}\sigma_{A,t}' \geq \delta_A I_{n_1}$ για όλα τα $t\in[0,T]$ και για κάποια $\delta_A > 0$.

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι όλες οι συναρτήσεις είναι μετρήσιμες και ομοιόμορφα καθορισμένες στο $[0,T]$. Θεωρώντας ότι ένας επενδυτής επενδύει τον αρχικό πλούτο στην

[39] Mei Choi Chiu and Duan Li (2006) Asset and Liability management under a continuous-time mean-variance optimization framework. Insurance: Mathematics and Economics 39: 330-355.

χρηματοοικονομική αγορά και υπό τον όρο ότι οι υποχρεώσεις έχουν μια αρχική τιμή l_0. Τότε η εξέλιξη των τιμών των υποχρεώσεων είναι

$$dl_t = l_t \beta_t dt + \sum_{j=1}^{n} l_t d_t^j dW_t^j$$
$$l(0) = l_0$$

Όπου β_t είναι μια εκτίμηση της αξίας των υποχρεώσεων και $(d_t^1, d_t^2, ..., d_t^n) = \sigma_{L,t}$ είναι η μεταβλητότητα, η οποία ανήκει στο $C([0,T]; R^{n\times 1})$ ένα χώρο Banach στον $R^{n\times 1}$ που παίρνει τιμές από μια συνεχή συνάρτηση στο $[0,T]$ και ικανοποιεί την παραπάνω μη εκφυλισμένη συνθήκη.

4.2.7 Το μοντέλο του Martellini

Ο Martellini[40] (2006) στην μελέτη του με τίτλο «Managing Pension Assets from Surplus Optimization to Liability-Driven Investment» παρουσιάζει ένα γενικό μοντέλο για την αγορά λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς των υποχρεώσεων.
Θεωρεί n περιουσιακά στοιχεία που εμπεριέχουν κίνδυνο και η τιμές τους δίνονται από

$$dP_t^i = P_t^i \left(\mu_t dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} dW_t^j \right), i = 1,2,....., n$$

Το 0^{th} είναι το ακίνδυνο περιουσιακό στοιχείο, το όποιο διαπραγματεύεται στην αγορά και η απόδοση του δίνεται από $dP_t^0 = dP_t^0 rdt$ όπου r το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο. Υποθέτουμε ότι r, μ και σ είναι μετρήσιμες και ομοιόμορφα καθορισμένες διαδικασίες. Επίσης εισάγουμε μια αυτόνομη διαδικασία η οποία αναπαριστά την δυναμική της παρούσας αξίας των υποχρεώσεων

$$dL_t = L_t \left(\mu_L dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{L,j} dW_t^j + \sigma_{L,\varepsilon} dW_t^{\varepsilon} \right)$$

Όπου (W_t^{ε}) είναι μια τυπική κίνηση Brown μη συσχετισμένη με τη W η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως το προβεβλημένο υπόλοιπο του κινδύνου των υποχρεώσεων πάνω στον κίνδυνο της αξίας των περιουσιακών στοιχείων και εκφράζει την πηγή της αβεβαιότητας,

[40] Martellini Lionel (2006) Managing Pension Assets: from Surplus Optimization to Liability-Driven Investment. EDHEC Risk and Management Research Centre: 1-18.

η οποία είναι συγκεκριμένη στον κίνδυνο που εμπεριέχουν οι υποχρεώσεις και είναι απόρροια των διαφόρων παραγόντων που τις επηρεάζουν όπως η αύξηση του εργατικού δυναμικού, η αβεβαιότητα, η θνησιμότητα κ.α.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Μοντέλα διαχείρισης Περιουσιακών στοιχείων και Υποχρεώσεων

5.1 Εισαγωγή

Αναλύοντας τις επενδυτικές στρατηγικές των συνταξιοδοτικών ταμείων, το μεγαλύτερο μέρος της βιβλιογραφίας χρησιμοποιεί τον μέσο και την διασπορά των αποδόσεων των επενδύσεων ώστε να μετρήσει την αποδοτικότητα τους. Για παράδειγμα οι Randall και Satchell[41] (1997) για τα περιουσιακά στοιχειά των συνταξιοδοτικών ταμείων δημιουργούν χαρτοφυλάκια διαφορετικά μεταξύ τους και συγκρίνουν την αποδοτικότητα αυτών των χαρτοφυλακίων δίνοντας προσοχή στη μέση τιμή και την διασπορά των αποδόσεων.

Αυτού του είδους η ανάλυση έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να χρησιμοποιήσει όλα τα εργαλεία της mean-variance ανάλυσης όπως εξελίχθηκε από τον Markowitz[42] (1952). Το μειονέκτημα ωστόσο είναι ότι δεν λαμβάνει υπόψη την περίπτωση όπου τα συνταξιοδοτικά ταμεία υποστούν μια σημαντική απώλεια όταν οι αποδόσεις είναι πολύ χαμηλές. Οι Owadally και Haberman[43] (2004) ελαχιστοποιούν ένα τετραγωνικό μέτρο της μεταβλητότητας των εισφορών και της αγοραίας αξίας των περιουσιακών στοιχείων των συνταξιοδοτικών ταμείων. Οι Randall και Satchell (1997) παρατήρησαν ότι τα συνταξιοδοτικά ταμεία δεν μπορούν να αντιμετωπίσουν το κόστος μιας μεγάλης απώλειας χρημάτων ακόμα και αν συχνά κερδίζουν μικρά ποσά κατά την διάρκεια του χρονικού ορίζοντα του ταμείου. Αυτή η ασυμμετρία δεν μπορεί να ερμηνευτεί από ένα μοντέλο που καθορίζεται μονό από την μέση τιμή και την διασπορά.

Ένα παρόμοιο πρόβλημα αναφέρεται στη βιβλιογραφία όσο αναφορά την χρηματοδότηση των ταμείων που χρησιμοποιούν θεωρία στοχαστικών ελέγχων για την μελέτη των καταλληλότερων στρατηγικών εισφοράς/επένδυσης των συνταξιοδοτικών ταμείων (για

[41] Randall, J. and S. Satchell (1997) An analysis of the hedging approach to modelling pension fund liabilities. Pensions Institute Discussion Paper PI-9714, Birkbeck College, University of London.

[42] Markowitz H.M. (1952) : Portfolio Selection, Journal of Finance, 7, 77-91.

[43] Owadally, M. I. and S. Haberman (2004) Efficient amortization of actuarial gains/losses and optimal funding in pension plans. North American Actuarial Journal, 8(1) : 21–36.

περισσότερα βλέπε Boulier, Trussant and Frorens[44] (1995) ή Haberman and Sung[45] (1994)).

Η χρήση της θεωρίας στοχαστικών ελέγχων είναι αποδεκτή εξαιτίας της μακροπρόθεσμης και δυναμικής φύσης της διαχείρισης των συνταξιοδοτικών ταμείων. Ωστόσο, η χρήση της παραδοσιακής συνάρτησης ωφελιμότητας όσο αναφορά το πλεόνασμα ή μια δευτέρου βαθμού συνάρτησης ποινής στον δείκτη εισφοράς, δεν είναι σε συμφωνία με τους διαχειριστές συνταξιοδοτικών ταμείων οι οποίοι ενδιαφέρονται περισσότερο για τις αρνητικές συνέπειες μιας ελλιπούς χρηματοδότησης του ταμείου σε σχέση με μιας πλήρους χρηματοδότησης του ταμείου. Θεωρώντας τον δείκτη χρηματοδότησης ως το πηλίκο της αξίας των περιουσιακών στοιχείων προς την παρούσα αξία των υποχρεώσεων, τα ελλιπούς χρηματοδότησης ταμεία έχουν ένα δείκτη μικρότερο του 100%. Η ελλιπής χρηματοδότηση είναι ενδεχομένως ή σαφώς συνδεδεμένη με τα διαφορά κόστη και ποινές που έχουν να αντιμετωπίσουν τα συνταξιοδοτικά ταμεία. Τα ενδεχόμενα κόστη ποικίλουν ανάλογα με την έλλειψη εμπιστοσύνης όσο αναφορά το κατώτερο όριο επένδυσης σε μετοχές ενώ τα σαφή κόστη διακυμαίνονται ανάμεσα σε υψηλές εισφορές και σε αναμφίβολες ποινές.

Λαμβάνοντας υπόψη τα δεδομένα αυτά και χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο για τα συνταξιοδοτικά ταμεία καθορισμένης παροχής το οποίο ενσωματώνει μια συγκεκριμένη ποινή σε περίπτωση ελλιπούς χρηματοδότησης ο Siegmann[46] (2007) του οποίου το μοντέλο θα αναλύσουμε παρακάτω κατέληξε στο συμπέρασμα ότι τα αποτελέσματα της στρατηγικής της βέλτιστης επένδυσης διαφέρουν σημαντικά από αυτά της παραδοσιακής προσέγγισης.

Το ότι τα συνταξιοδοτικά ταμεία έχουν μεγαλύτερη ευαισθησία στις περιπτώσεις ελλιπούς χρηματοδότησης παρά σε περιπτώσεις υπερχρηματοδότησης είναι αποδεκτό και στην πράξη από τις εφαρμογές της διαχείρισης περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων. Πολλά συνταξιοδοτικά ταμεία καθορισμένης παροχής βασίζονται στις στρατηγικές επένδυσης των λεγόμενων άρχων διαχείρισης περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων

44 Boulier, J.-F., E. Trussant, and D. Florens (1995) A dynamic model for pension funds management. In Proceedings of the 5th AFIR International Colloquium, pp. 361–384.

45 Haberman S. and J.-H. Sung (1994) Dynamic approaches to pension funding. Insurance : Mathematics and Economics, 15(1) : 151–162.

46 Siegmann A. H (2007) Optimal Investment policies for defined benefit pension funds. Cambridge University Press: 1-20.

(ALM studies). Οι ALM[47] studies χρησιμοποιούν στρατηγικές που έχουν ως στόχο την βελτιστοποίηση της πολιτικής επένδυσης και χρηματοδότησης των σχημάτων σε περιβάλλον αβεβαιότητας.

Οι Ziemba και Mulvey[48] (1998) μελετούν τις στρατηγικές διαχείρισης οι όποιες βελτιστοποιούν τις αποδόσεις των επενδύσεων και αντιμετωπίζουν με τον καλύτερο δυνατό τρόπο τις μελλοντικές υποχρεώσεις. Κάνουν μια εκτενή αναφορά για την χρήση των στρατηγικών διαχείρισης περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων καθώς και για διάφορες εφαρμογές τους, γνωρίζοντας ότι η κατανομή των περιουσιακών στοιχείων είναι η κάρδια τους συστήματος των στρατηγικών διαχείρισης του κίνδυνου και οι παράμετροι όπως οι φόροι, ο πληθωρισμός και άλλοι είναι σημαντικοί παράγοντες που επηρεάζουν στην πραγματικότητα τον οικονομικό σχεδιασμό των συνταξιοδοτικών ταμείων, των τραπεζών, των ασφαλιστικών εταιρειών και άλλων μακροπροθέσμων επενδυτών.

Σχετικό με το πνεύμα της εργασίας του Siegmann (2007) είναι ότι τα μέτρα κίνδυνου που χρησιμοποιούνται από τις αρχές διαχείρισης είναι συνήθως μέτρα κίνδυνου απώλειας τα οποία μετρούν ακριβώς τον καθορισμένο κίνδυνο σε σχέση με την απώλεια που προκύπτει στα πιθανά αποτελέσματα. Για περισσότερες διαφωτιστικές πληροφορίες όσο αναφορά την χρήση των μέτρων κίνδυνου απώλειας μπορούμε να βρούμε στους Sortino και Van der Meer[49] (1991).

Το μεγαλύτερο μέρος της βιβλιογραφίας εστιάζει στο υπολογιστικό κομμάτι των προβλημάτων διαχείρισης περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων. Εξαιρετική ανάπτυξη παρουσίασε την δεκαετία του 70 η δημιουργία τεχνικών ανοσοποίησης των χαρτοφυλακίων των τραπεζών, των ασφαλιστικών εταιρειών και των ασφαλιστικών ταμείων. Αυτές οι τακτικές εξυπηρετούσαν την οικονομική κοινότητα μέχρι την δεκαετία του 90. Ωστόσο, η αυξανομένη μεταβλητότητα των επιτοκίων, η εμφάνιση συνθετών επιτοκίων αλλά και κατάλληλων ομολόγων για την ασφάλεια των περιουσιακών στοιχείων την ίδια περίοδο έφεραν στο φως τις αδυναμίες της μεθόδου ανοσοποίησης. Ο Zenios[50] (1995) περιγραφεί μια σειρά μοντέλων βελτιστοποίησης με τα οποία αντιμετωπίζει τα

[47] Βλέπε Ziemba and Mulvey (1998) για μια συνοπτική περίληψη των αρχών διαχείρισης περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων.

[48] Ziemba, W. T. and J. M. Mulvey (eds) (1998) Worldwide Asset and Liability Modeling. Cambridge University Press

[49] Sortino, F. A. and R. Van der Meer (1991) Downside risk : capturing what’s at stake in investment situations. Journal of Portfolio Management (Summer): 27–31.

[50] Zenios S. A. (1995) Asset/liability management under uncertainty for fixed-income securities. Annals of Operations Research, 59: 77–97.

προβλήματα της διαχείρισης των περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων χρησιμοποιώντας πιθανές τιμές επιτοκίων. Χαρτοφυλάκια που περιείχαν ενυπόθηκα ομόλογα ή μετοχές είναι ένα τυπικό παράδειγμα της πολυπλοκότητας που αντιμετώπιζαν οι διαχειριστές σε έναν ασταθή οικονομικό κόσμο. Χρησιμοποιώντας αυτά τα εργαλεία ο Zenios[51] (1998) αναπτύσσει δυναμικά μοντέλα πολλαπλών περιόδων για την διαχείριση χαρτοφυλακίων σταθερού εισοδήματος σε περιβάλλον αβεβαιότητας. Με σκοπό την κατασκευή στοχαστικών επιτοκίων χρησιμοποίησε μεθόδους στοχαστικού προγραμματισμού καθώς και μεθόδους προσομοίωσης Monte Carlo και έδειξε την αποτελεσματικότητα των μοντέλων αντιστάθμισης ενάντια στη αβεβαιότητα καθώς και να αποτιμήσει την απόδοση των μοντέλων μιας περιόδου. Παρόμοιο μοντέλα βρίσκουμε και στους Hiller και Eckstein[52] (1993) , Maranas et al[53] (1997).

Η παραδοσιακή αναλογιστική αποτίμηση των συνταξιοδοτικών σχημάτων καθορισμένης παροχής κινείται στη βάση μια σειράς ντετερμινιστικών υπολογισμών συνδυασμένων με την απαραίτητη αναλογιστική πρακτική. Αυτό είχε διαδραματίσει σημαντικό ρολό όσο αναφορά τις αποφάσεις χρηματοδότησης ανάλογα με το επίπεδο κίνδυνου που είχε καθοριστεί. Η προσέγγιση του Haberman[54] (2003) μοιάζει με αυτή των αρχών διαχείρισης περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων. Στην μελέτη του αμφισβητεί ότι οι στοχαστικές μέθοδοι μπορούν να αποτιμήσουν επακριβώς κρίσιμα πεδία της διαχείρισης και πιο συγκεκριμένα την διαχείριση του οικονομικού κίνδυνου των συνταξιοδοτικών σχημάτων. Η παραδοσιακή μέθοδος διαχείρισης του κίνδυνου ενσωματώνει κάποια όρια στην εκτίμηση των διαφόρων υποθέσεων εντούτοις η στοχαστική προσέγγιση επιτρέπει στον χρηστή να αποτιμήσει συγκεκριμένο και ποσοτικοποιημένο ρίσκο καθώς επίσης και μέτρα απόδοσης σε σχέση με εναλλακτικές στρατηγικές επένδυσης και χρηματοδότησης.

---

[51] Zenios S. A., M. R. Holmer, R. McKendall, and C. Vassiadou-Zeniou (1998) Dynamic models for fixed-income portfolio management under uncertainty. Journal of Economic Dynamics and Control, 22: 1517–1541.

[52] Hiller R. S. and J. Eckstein (1993) Stochastic dedication: designing fixed income portfolios using massively parallel benders decomposition. Management Science, 39(11): 1422–1438.

[53] Maranas C. D., I. P. Androulakis, C. A. Floudas, A. J. Berger, and J. M. Mulvey (1997) Solving long-term financial planning problems via global optimization. Journal of Economics Dynamics and Control, 21: 1405–1425.

[54] Haberman, S., C. Day, D. Fogarty, M. Z. Khorasanee, N. Nash, B. Ngwira, I. D. Wright, and Y. Yakoubov (2003a) A stochastic approach to risk management and decision making in defined benefit pension schemes. British Actuarial Journal, 9(3) : 493–568 και

Haberman S., M. Z. Khorasanee, B. Ngwira, and I. D. Wright (2003b) Risk measurement and management of defined benefit pension schemes: a stochastic approach. IMA Journal of Management Mathematics, 14(2) : 111–128.

Ο Haberman (2003) εισάγει ένα πλαίσιο, όπου μετρά τους ενυπάρχοντες κίνδυνους στην κατανομή των κεφαλαίων επένδυσης και στη επιλογή του δείκτη εισφοράς, επιτρέποντας έτσι οι αποφάσεις επένδυσης να είναι καλύτερα πληροφορημένες. Για να επιτευχθεί αυτό προτείνει και χρησιμοποιεί μέτρα κινδύνου όπως ο κίνδυνος φερεγγυότητας του σχήματος καθώς και διάφορα μέτρα απόδοσης σταθμισμένα με βάση τον κίνδυνο. Χρησιμοποιώντας μια mean-shortfall βελτιστοποίηση καθώς και αποτελεσματικά σύνορα οδηγείται σε στρατηγικές που για το ίδιο επίπεδο κίνδυνου αναμένονται καλύτερες αποδόσεις.

Ο Siegmann (2003) στην μελέτη του χρησιμοποιεί ένα μέτρο κίνδυνου απώλειας από το χώρο των αρχών διαχείρισης περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων εστιάζει όμως την ανάλυση του στο ποιοτικό αποτέλεσμα σε σχέση με την βέλτιστη πολιτική επένδυσης. Η καινοτομία της προσέγγισης του Siegmann δεν είναι στο μέτρο κίνδυνου ή στο αντικείμενο της ανάλυσης αλλά στα συγκριτικά στατιστικά τα οποία δεν έχουν αναλυθεί σε αυτό το πλαίσιο ποτέ άλλοτε στο παρελθόν.

Ένας τελευταίος λόγος για την χρήση του μέτρου κίνδυνου απώλειας είναι ότι απεικονίζει την έννοια της αποστροφής στην απώλεια. Σύμφωνα με τους Kahneman και Tversky[55] (1979) η αποστροφή στην απώλεια είναι ένα τρόπος συμπεριφοράς που βασίζεται στη ιδέα ότι οι άνθρωποι είναι περισσότερο ευαίσθητοι σε περιπτώσεις απώλειας παρά σε περιπτώσεις κέρδους και επειδή η διαμάχη για τον ορθολογισμό αυτής της άποψης συνεχίζεται είναι ένας επιπλέον λόγος για την μελέτη της χρηματοδότησης των συνταξιοδοτικών σχημάτων υπό το πλαίσιο του κίνδυνου απώλειας.

5.2 Μοντέλα Βελτιστοποίησης Χαρτοφυλακίων

5.2.1 Μοντέλο βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου χωρίς κανένα ακίνδυνο χρεόγραφο[56]

Ακολουθώντας την προσέγγιση του Markowitz[57] πρέπει να προσδιορίσουμε εκείνα τα

[55] Kahneman D. and A. Tversky (1979) Prospect theory: an analysis of decision under risk. Econometrica, 47: 263–291.

[56] Prigent Jean-Luc (2007) Portfolio Optimization and Performance Analysis, Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series.

[57] Markowitz H.M. (1952) : Portfolio Selection, Journal of Finance, 7, 77-91.

χαρτοφυλάκια τα όποια ελαχιστοποιούν την διακύμανση για δοθέντες αναμενόμενες αποδόσεις $E(R_P)$. Αυτό οδηγεί στο παρακάτω δευτέρου βαθμού πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\begin{aligned} &\min_{w} w'Vw \\ &\mu\varepsilon \;\; w'\overline{R} = E(R_P) \\ &w'e = 1 \end{aligned}$$

Ο πρώτος περιορισμός άφορα το δοθέν ύψος των αναμενόμενων αποδόσεων. Ο δεύτερος περιορισμός υποδηλώνει ότι το w είναι ο πίνακας των βαρών του χαρτοφυλακίου. Για να επιλύσουμε το παραπάνω πρόβλημα θεωρούμε την ακόλουθη συνάρτηση Lagrange

$$L(w,\lambda,\delta) = w'Vw + \lambda\left(E(R_P) - w'\overline{R}\right) + \delta(1 - w'e)$$

Όπου λ και δ είναι οι συνήθεις πολλαπλασιαστές Lagrange οι οποίοι είναι σταθεροί. Τότε το πρόβλημα γίνεται:

$$\min_{\{w,\lambda,\delta\}} L(w,\lambda,\delta) = w'Vw + \lambda\left(E(R_P) - w'\overline{R}\right) + \delta(1 - w'e)$$

Οι πρώτης τάξης συνθήκες είναι οι εξής :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(w,\lambda,\delta)}{\partial w} &= 2Vw - \lambda\overline{R} - \delta e = 0 \\ \frac{\partial L(w,\lambda,\delta)}{\partial \lambda} &= E(R_P) - w'\overline{R} = 0 \\ \frac{\partial L(w,\lambda,\delta)}{\partial \delta} &= 1 - w'e = 0 \end{aligned}$$

Επιπλέον ο πίνακας διασπορών-συνδιασπορών είναι αντιστρέψιμος. Λόγω αυτού οι παραπάνω συνθήκες είναι απαραίτητες για να προσδιορίσουμε την μοναδική λύση του αλγεβρικού συστήματος.

Ορίζουμε τώρα τις παρακάτω μεταβλητές A,B,C,D ως εξής :

$$A = e'V^{-1}\overline{R},\; B = \overline{R}'V^{-1}\overline{R},\; C = e'V^{-1}e \text{ και } D = BC - A^2$$

Τότε τα βέλτιστα βάρη ενός χαρτοφυλακίου δοθέντος την αναμενόμενης απόδοσης $E(R_P)$ δίνονται ως εξής:

$$w = \frac{1}{D}\left(BV^{-1}e - AV^{-1}\overline{R}\right) + E(R_P)\frac{1}{D}\left(CV^{-1}\overline{R} - AV^{-1}e\right)$$

5.2.2 Μοντέλο βελτιστοποίησης Χαρτοφυλακίου με ένα ακίνδυνο χρεόγραφο[58]

Μια αντίστοιχη ανάλυση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όταν στο χαρτοφυλάκιο μας έχουμε ένα χρεόγραφο χωρίς κίνδυνο. Έστω w είναι ο πίνακας των βαρών των n χρεογράφων με κίνδυνο και R ο πίνακας των αποδόσεων. Το χωρίς κίνδυνο χρεόγραφο έχει απόδοση R_f. Το ποσοστό του πλούτου που επενδύεται στο χρεόγραφο χωρίς κίνδυνο είναι w_0. Άρα $w'e + w_0 = 1 \Leftrightarrow w_0 = 1 - w'e$

Επομένως το καινούργιο πρόβλημα βελτιστοποίησης γίνεται :

$$\min_{w} w'Vw$$
$$\mu\varepsilon \;\; w'\overline{R} + (1 - w'e)R_f = E(R_P)$$

Και η συνάρτηση Lagrange είναι η ακόλουθη:

$$L(w,\lambda) = w'Vw + \lambda\left(E(R_P) - w'\overline{R} - (1 - w'e)R_f\right)$$

Άρα το πρόβλημα που έχουμε να επιλύσουμε είναι:

$$\min_{\{w,\lambda\}} L(w,\lambda)$$

Και οι αντίστοιχες συνθήκες είναι

$$\frac{\partial L(w,\lambda)}{\partial w} = 2Vw - \lambda(\overline{R} - eR_f) = 0$$
$$\frac{\partial L(w,\lambda)}{\partial \lambda} = E(R_P) - w'\overline{R} - (1 - w'e)R_f = 0$$

Συνεπώς το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο για αναμενόμενη απόδοση $E(R_P)$ έχει βάρη που προκύπτουν από :

$$w = V^{-1}(\overline{R} - eR_f)\frac{E(R_P) - R_f}{(\overline{R} - eR_f)'V^{-1}(\overline{R} - eR_f)}$$

[58] Prigent Jean-Luc (2007) Portfolio Optimization and Performance Analysis, Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series.

5.2.3 Χαρτοφυλάκιο Mean-Variance χωρίς διαφοροποίηση

Στη μελέτη των χαρτοφυλακίων χωρίς διαφοροποίηση το πρόβλημα βελτιστοποίησης που έχουμε να επιλύσουμε για να βρούμε τα κατάλληλα βάρη έτσι ώστε να επιτύχουμε την μεγαλύτερη απόδοση των χαρτοφυλακίων μας με την μικρότερη διασπορά είναι το εξής

$$
\begin{aligned}
&\max_{w}(1-\lambda)E(R_\pi) - \lambda Var(R_\pi) \\
&\sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \\
&s.t \;\; 0 \le w_i \le L \\
&E(R_\pi) \ge r_G \\
&L \le 1
\end{aligned}
$$

Όπου $E(R_\pi)$ είναι η μέση τιμή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου, $Var(R_\pi)$ είναι η διασπορά του χαρτοφυλακίου και λ είναι ο βαθμός αποστροφής του κινδύνου. Στην περίπτωση που λ=0, όπου ένα συνταξιοδοτικό ταμείο έχει την μέγιστη αποστροφή στο κίνδυνο, τότε το πρόβλημα βελτιστοποίησης μετατρέπεται σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης της απόδοσης του χαρτοφυλακίου ενώ για λ=1, όπου ένα συνταξιοδοτικό ταμείο δεν έχει αποστροφή στον κίνδυνο, τότε το πρόβλημα βελτιστοποίησης μετατρέπεται σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης της διασποράς. Με r_G συμβολίζουμε την ελάχιστη απόδοση έχει ως στόχο ένα συνταξιοδοτικό ταμείο για να καλύψει τις υποχρεώσεις του. Τέλος ο αριθμός L συμβολίζει το μέγιστο ποσοστό των περιουσιακών στοιχείων ενός συνταξιοδοτικού ταμείου που έχει την δυνατότητα να επενδύσει σε ένα χρηματοοικονομικό προϊόν. Στην περίπτωση που το L είναι ίσο με 1 τότε ένα συνταξιοδοτικό ταμείο έχει τη δυνατότητα μια χρονιά να επενδύσει όλο τον πλούτο του σε ένα μόνο χρηματοοικονομικό προϊόν.

5.2.4 Χαρτοφυλάκιο Mean-Variance με διαφοροποίηση

Μέχρι τώρα δεν είχαμε κανένα περιορισμό όσο αναφορά το ποσοστό επένδυσης σε ένα χρηματοοικονομικό προϊόν, δηλαδή υπήρχε η επιλογή να δημιουργήσουμε χαρτοφυλάκια όπου μπορούσαμε να επενδύσουμε το 100% των κεφαλαίων σε ένα μόνο προϊόν. Στα χαρτοφυλάκια με διαφοροποίηση έχουμε έναν περιορισμό ως προς το μέγιστο ποσοστό επένδυσης w_i σε ένα προϊόν, παραδείγματος χάριν να είναι μικρότερο ίσο του 40% άρα το πρόβλημα βελτιστοποίησης που έχουμε να επιλύσουμε για να βρούμε τα κατάλληλα βάρη έτσι ώστε να επιτύχουμε την μεγαλύτερη απόδοση των χαρτοφυλακίων με διαφοροποίηση με την μικρότερη διασπορά είναι το εξής :

$$
\begin{aligned}
&\max_{\{w\}} (1-\lambda)E(R_\pi) - \lambda Var(R_\pi) \\
&\sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \\
&s.t \;\; 0 \le w_i \le L \\
&E(R_\pi) \ge r_G \\
&L \le 0.4
\end{aligned}
$$

Όπου $E(R_\pi)$ είναι η μέση τιμή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου, $Var(R_\pi)$ είναι η διασπορά του χαρτοφυλακίου, λ είναι ο βαθμός αποστροφής του κινδύνου και r_G η ελάχιστη απόδοση που έχει θέσει ως στόχο ένα συνταξιοδοτικό ταμείο για να μπορεί να καλύψει τις υποχρεώσεις του.

5.2.5 Το μοντέλο του Siegmann

Πριν αναλύσουμε το μοντέλο είναι καλό να παρουσιάσουμε τις θεμελιώδεις ιδιότητες ενός συνταξιοδοτικού ταμείου καθορισμένης παροχής, πάνω στις όποιες έχει βασιστεί η δομή του. Ένα ταμείο καθορισμένης παροχής έχεις τα εξής 3 βασικά χαρακτηριστικά:

- κάθε συμμετέχων πληρώνει το ίδιο ποσοστό του μισθού του για να κατοχυρώσει τα συνταξιοδοτικά του δικαιώματα ως ποσοστό του τωρινού ή του τελικού του μισθού
- το ταμείο επιβλέπεται από έναν ανεξάρτητο ελεγκτή,
- υπάρχει μια σταθερή πολιτική επένδυσης και χρηματοδότησης.

Το πρώτο χαρακτηριστικό υποδηλώνει ότι ένα συνταξιοδοτικό ταμείο καθορισμένης παροχής εμπεριέχει μια ισχυρή μορφή αλληλεγγύης, κατά το ότι η σχέση μεταξύ των εισφορών που πληρώνονται και των συνταξιοδοτικών δικαιωμάτων που κατοχυρώνονται είναι έμμεση και όχι άμεση. Μιας και η εισφορά είναι ένα σταθερό κλάσμα του μισθού και είναι το ίδιο για όλους τους συμμετέχοντες χωρίς να εξαρτάται από την ηλικία. Στην πραγματικότητα οι νέοι εργαζόμενοι πληρώνουν εν μέρει τους παλαιότερους εργαζόμενους. Οι πιο παλιοί εργαζόμενοι είναι πιο κοντά στην συνταξιοδότηση, έτσι δοθέντος ότι έχουν τον ίδιο μισθό, ένα παραπάνω ευρώ έχει μεγαλύτερη αναλογιστική αξία για τους παλαιότερους εργαζόμενους από ότι για τους νεότερους. Άρα αφού οι εισφορές είναι ίδιες για όλους οι νεότερες γενεές χρηματοδοτούν εν μέρει τα συνταξιοδοτικά δικαιώματα των παλιότερων γενεών. Μια άλλη άποψη η οποία κάνει πιο σύνθετη την σχέση εισφορών και συνταξιοδοτικών δικαιωμάτων είναι ότι οι εισφορές μπορεί να ποικίλουν ανάλογα με την οικονομική κατάσταση του ταμείου. Αν ένα συνταξιοδοτικό ταμείο είναι υπο-χρηματοδοτούμενο τότε θα χρειαστούν επιπλέον εισφορές χωρίς να υπάρξει καμιά αλλαγή στις παροχές.

Όσο αναφορά τον ελεγκτή, που αναφέρεται ως δεύτερο χαρακτηριστικό ενός συνταξιοδοτικού ταμείου καθορισμένης παροχής, ελέγχει την οικονομική κατάσταση του ταμείου, την ποιότητα της διαχείρισης και λειτούργει ως προστάτης των δικαιωμάτων των ενεργών συμμετεχόντων και των συνταξιούχων. Η οικονομική κατάσταση ενός ταμείου μπορεί να συνοψιστεί από τον δείκτη χρηματοδότησης, ο οποίος είναι ο λόγος των περιουσιακών στοιχείων προς την παρούσα αξία των υποχρεώσεων.

Το τρίτο χαρακτηριστικό προκύπτει από την αρχή της αλληλεγγύης των συμμετεχόντων που εμπεριέχεται στην δομή του ταμείου. Όλοι οι εργαζόμενοι συνεισφέρουν την ίδια αναλόγια του μισθού τους, η οποία καθορίζεται μια φόρα το χρόνο. Η αλληλεγγύη μεταξύ εργαζομένων και γενεών σημαίνει ότι οι αποφάσεις επένδυσης πρέπει να παίρνονται για το καλό του συνόλου.

Στην μελέτη αυτή ο Siegmann[59] (2003) αναλύει το πρόβλημα επένδυσης που αντιμετωπίζει ένα συνταξιοδοτικό ταμείο καθορισμένης παροχής. Θεωρεί ένα συνταξιοδοτικό ταμείο την χρονική στιγμή 0 (σήμερα) με συνολικό πλούτο W_0. Στη χρονική στιγμή T το ταμείο πρέπει να έχει την δυνατότητα να καλύψει υποχρεώσεις W^B. Η απόφαση που πρέπει να παρθεί είναι το ποσό X_0 του πλούτου που πρέπει να επενδυθεί σε ένα προϊόν με κίνδυνο με συνολική απόδοση u_t για κάθε χρόνο. Τα υπόλοιπα $(W_0 - X_0)$ κεφάλαια επενδύονται σε ένα προϊόν χωρίς κίνδυνο έχοντας μια συνολική απόδοση r_f για κάθε χρόνο. Τελικά ο σκοπός του ταμείου είναι να ευνοεί την ύπαρξη περισσότερου πλούτου από όσο χρειάζεται για να καλύψει τις υποχρεώσεις του καθώς και να επιβάλλει ποινή για τυχόν έλλειμμα κάτω από το επίπεδο W^B που έχει τεθεί ως σημείο αναφοράς. Η δομή του προβλήματος βελτιστοποίησης δίνεται παρακάτω:

[59] Siegmann A. H (2007) Optimal Investment policies for defined benefit pension funds. Cambridge University Press: 1-20.

$$\max_{X_0} E\left(W_T\right) - \lambda E\left[\left(W^B - W_T\right)^+\right] \quad (1)$$

$$s.t \quad W_T = \left(W_0 - X_0\right) \cdot r_f^T + X_0 \cdot \prod_{t=1}^{T} u_t \quad (2)$$

Όπου το θετικό μέρος είναι το μέγιστο μεταξύ του 0 και $\left(W^B - W_T\right)$ και λ είναι η αποστροφή σε περίπτωση ελλείμματος. Οι συμβολισμοί r_f και u_t αφορούν τις αποδόσεις των διαφόρων κατηγοριών επένδυσης του ταμείου.

Στην πράξη, τα συνταξιοδοτικά ταμεία επενδύουν σε περισσότερες από μια κατηγορίες, μπορούμε όμως να θεωρήσουμε την μεταβλητή απόδοση u_t ως την απόδοση ενός χαρτοφυλακίου με διαφορά προϊόντα με κίνδυνο. Η W_T είναι η συνολική αξία των περιουσιακών στοιχείων του ταμείου την χρονική στιγμή T. Επομένως η απόφαση να επενδυθεί ένα ποσό X_0^* είναι μια αρχική τιμή η οποία αποτελεί την βέλτιστη αρχική τιμή μια στρατηγικής buy-and-hold επένδυσης για όλη την περίοδο του σχήματος. Το στατικό μοντέλο είναι πιο ακριβές στην ανάλυση του και η λύση του είναι αντιπροσωπευτική της λύσης του πολλαπλών πεδίων μοντέλου. Για περισσότερα μπορούμε να δούμε στους Siegmann και Lucas[60] (2005).

Στη συνεχεία θα αναφερόμαστε στο μοντέλο (1) και (2) ως το mean-shortfall model. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό του είναι ότι παρουσιάζει την έννοια της αποστροφής στην απώλεια. Η μελέτη των Kahneman και Tversky[61] (1979) έγινε η αφετηρία για την βιβλιογραφία την έννοια της αποστροφής στον κίνδυνο. Για μια επιπλέον σύνοψη μπορούμε επίσης να δούμε τις μελέτες των Hirshleifer[62] (2001) ή Shleifer[63] (2000)

Η αντικειμενική συνάρτηση του μοντέλου του Siegmann (2003) είναι όμως λίγο διαφορετική από τις υπάρχουσες που αναφέρονται στην βιβλιογραφία για την βελτιστοποίηση της χρηματοδότησης των συνταξιοδοτικών ταμείων. Οι Boulier, Trussant ,

60 Siegmann A. H. and A. Lucas (2005) Discrete-time financial planning models under loss averse preferences. Operations Research, 53(3) : 15–32.

61 Kahneman D. and A. Tversky (1979) Prospect theory: an analysis of decision under risk. Econometrica, 47: 263–291.

62 Hirshleifer D. (2001) Investor psychology and asset pricing. Journal of Finance, 56(4) : 1533–1597.

63 Shleifer A. (2000) Inefficient Markets: An Introduction to Behavioral Finance. Oxford: Oxford University Press.

Florens[64] (1995), Boulier, Michel και Wisnia[65] (1996), ο Cairns[66] (2000) και οι Owadally και Haberman[67] (2004) ελαχιστοποιούν μια δευτέρου βαθμού συνάρτηση ποινής του δείκτη εισφοράς. Ενώ οι Haberman και Sung[68] (1994, 2002) ελαχιστοποιούν μια δευτέρου βαθμού συνάρτηση ποινής σε σχέση με την απόκλιση της χρηματοδότησης και των τιμών φερεγγυότητας από τους αντίστοιχους στόχους που έχουν τεθεί, τιμωρώντας τα μη ευνοϊκά αποτελέσματα επιπρόσθετα από τα ευνοϊκά αποτελέσματα.

Ένας περιορισμός της αντικειμενικής συνάρτησης (1) είναι ότι είναι μονοδιάστατη, δηλαδή είναι καθορισμένη σε σχέση με την ανεξάρτητη μεταβλητή W_T. Ο πραγματικός αντικειμενικός σκοπός ενός συνταξιοδοτικού ταμείου καθορισμένης παροχής ωστόσο αποτελείται από ποικίλους ανταγωνιστικούς στόχους όπως η ελάχιστη εισφορά, ο μέγιστος λόγος χρηματοδότησης, ο ελάχιστος κίνδυνος σε σχέση με την χρηματοδότηση. Όσο αναφορά το τελευταίο, ο δείκτης κλειδί που μέτρα την οικονομική πληρότητα ενός ταμείου είναι ο αναλογιστικός δείκτης χρηματοδότησης που στην ουσία είναι η αξία των περιουσιακών στοιχείων προς την παρούσα αξία των υποχρεώσεων, $\frac{W_0}{W_0{}^B}$. Ένα άλλο μέτρο είναι το πλεόνασμα που ορίζεται ως $W_0 - W_0{}^B$. Τώρα αν το πλεόνασμα είναι υψηλό τότε ο κίνδυνος υποχρηματοδότησης είναι χαμηλός και ο δείκτης εισφοράς μπορεί να μειωθεί.

Για αυτό το λόγο στο απλό μοντέλο επένδυσης ενός συνταξιοδοτικού ταμείου χρησιμοποιούνται αντικειμενικές συναρτήσεις-στόχοι από τον τομέα της διαχείρισης περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων, τα οποία είναι μοναδικά καθορισμένα σε σχέση με το πλεόνασμα του ταμείου το οποίο έχει μια σχέση ένα προς ένα με τον δείκτη χρηματοδότησης.

---

64 Boulier J.-F., E. Trussant, and D. Florens (1995) A dynamic model for pension funds management. In Proceedings of the 5th AFIR International Colloquium, pp. 361–384.

65 Boulier J.-F., S. Michel, and V. Wisnia (1996) Optimizing investment and contribution policies of a defined benefit pension fund. In Proceedings of the 6th AFIR International Colloquium,Volume 1, pp. 593–607.

66 Cairns A. J. G. (2000) Some notes on the dynamics and optimal control of stochastic pension fund models in continuous time. Astin Bulleting, 30(1) : 19–55.

67 Owadally M. I. and S. Haberman (2004) Efficient amortization of actuarial gains/losses and optimal funding in pension plans. North American Actuarial Journal, 8(1) : 21–36.

68 Haberman S. and J.-H. Sung (1994) Dynamic approaches to pension funding. Insurance: Mathematics and Economics, 15(1) : 151–162 και Haberman, S. and J.-H. Sung (2002) Dynamic programming approach to pension funding: the case of incomplete state information. Astin Bulletin, 32(1) : 129–142.

Εμείς στην παρούσα διατριβή θα αναλύσουμε το πρόβλημα επένδυσης που αντιμετωπίζει ένα συνταξιοδοτικό ταμείο καθορισμένης παροχής θεωρώντας ότι τη χρονική στιγμή 0 (σήμερα) έχει συνολικό πλούτο W_0 . Το ταμείο τις χρονικές στιγμές T πρέπει να έχει τη δυνατότητα να καλύψει υποχρεώσεις του. Η απόφαση που πρέπει να πάρει το συνταξιοδοτικό ταμείο είναι το ποσό x του πλούτου που πρέπει να επενδύσει στα N περιουσιακά στοιχεία για κάθε χρόνο. Σκοπός του ταμείου είναι να επιβραβεύει την ύπαρξη παραπάνω πλούτου από όσο χρειάζεται για να καλυφθούν οι υποχρεώσεις του και η επιβολή ποινής για τυχόν έλλειμμα. Το πρόβλημα βελτιστοποίησης που θα εξετάσουμε στην παρούσα εργασία είναι το εξής :

$$\begin{aligned}
&\max_{\{x\}} \sum_{i=1}^{N} E(r_i)\, x_i - \lambda \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)\, y^-(\omega) \\
&s.t\ \ y^-(\omega) \geq (1 + r_G(\omega))\, W_0 - \sum_{i=1}^{N} E[r_i]\, x_i \\
&\sum_{i=1}^{N} x_i = W_0 \\
&x_i \leq x_u
\end{aligned}$$

Όπου το $\sum_{i=1}^{N} E(r_i)\, x_i$ είναι η αναμενόμενη συνολική αξία των περιουσιακών στοιχείων του ταμείου, λ είναι η αποστροφή σε περίπτωση ελλείμματος, r_G είναι η ελάχιστη απόδοση που έχει θέσει ως στόχο το ταμείο για μπορέσει να καλύψει τις υποχρεώσεις του, x_u είναι το ποσοστό επένδυσης για κάθε χρόνο του πλούτου του ταμείου στα N περιουσιακά στοιχεία, είναι $y^-(\omega)$ το τυχόν έλλειμμα/πλεόνασμα και $p(\omega)$ είναι η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο ω, δηλαδή η πιθανότητα εμφάνισης ελλείμματος/πλεονάσματος. .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Εφαρμογή

6.1 Εισαγωγή

Το ζητούμενο γενικά στις τεχνικές διαχείρισης χαρτοφυλακίου είναι να βρεθεί η βέλτιστη κατανομή κεφαλαίων για κάποια επόμενη περίοδο με βάση τα στοιχεία που υπάρχουν για τις αποδόσεις προηγουμένων περιόδων. Σκοπός μας είναι να επιλέξουμε το κατάλληλο ποσοστό επένδυσης σε δείκτες, ομόλογα, μετοχές ή άλλου είδους επενδύσεις έτσι ώστε να προβλέψουμε την απόδοση του χαρτοφυλακίου μας την επόμενη περίοδο. Αυτού του είδους η ανάλυση, με την οποία βασιζόμενοι στις αποδόσεις προηγουμένων ετών προβλέπουμε την απόδοση επομένων ετών είναι γνωστή και ως out-of-sample.

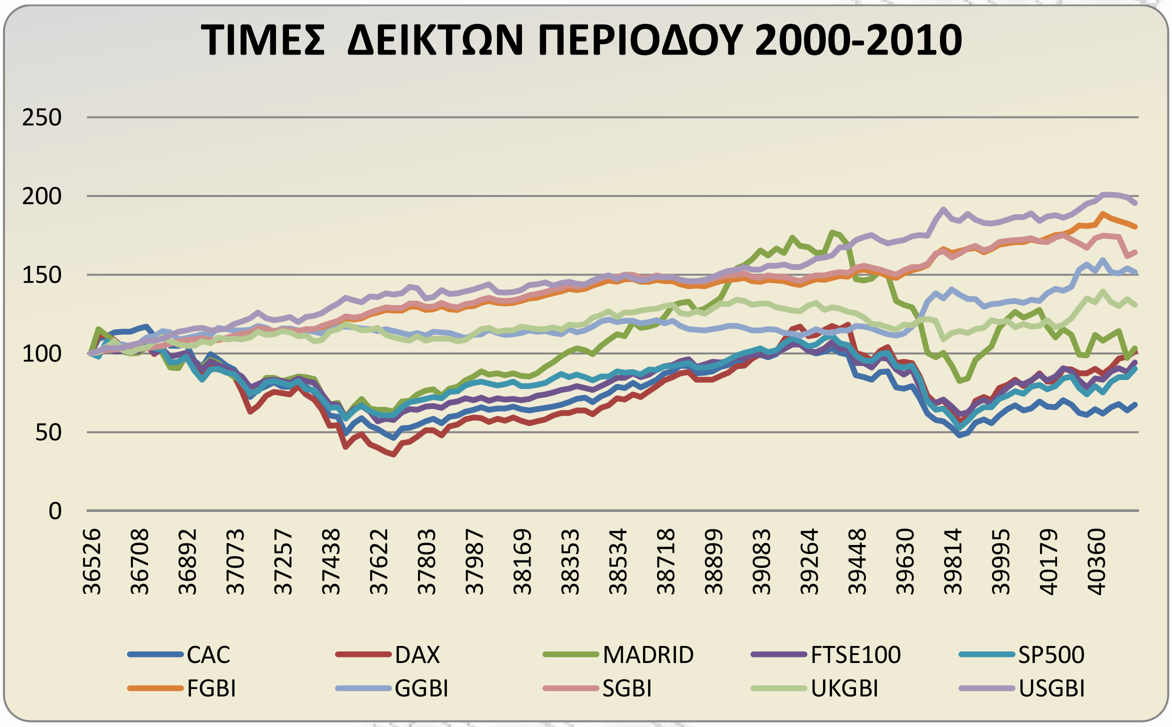
Έστω ότι η ελάχιστη απόδοση που πρέπει να επιτύχει το συνταξιοδοτικό ταμείο για να καλύψει τις υποχρεώσεις του είναι 3% ετησίως.

Στην προσπάθεια μας αυτή έχουμε ως δεδομένα τις μηνιαίες αποδόσεις από την 31-1-2000 έως την 31-12-2010 των παρακάτω χρηματιστηριακών δεικτών από τους οποίους θα αποτελούνται τα χαρτοφυλάκια που θα μελετήσουμε. Οι δείκτες είναι οι εξής:

CAC	Γαλλικός χρηματιστηριακός δείκτης τιμών μετοχών
DAX	Γερμανικός χρηματιστηριακός δείκτης τιμών μετοχών
MADRID	Ισπανικός χρηματιστηριακός δείκτης τιμών μετοχών
FTSE100	Βρετανικός χρηματιστηριακός δείκτης τιμών μετοχών
SP500	Αμερικανικός χρηματιστηριακός δείκτης τιμών μετοχών
SGBI	Ισπανικός δείκτης κρατικών ομολόγων (όλες οι λήξεις)
GGBI	Γερμανικός δείκτης κρατικών ομολόγων (όλες οι λήξεις)
FGBI	Γαλλικός δείκτης κρατικών ομολόγων (όλες οι λήξεις)
UKGBI	Βρετανικός δείκτης κρατικών ομολόγων (όλες οι λήξεις)
USGBI	Αμερικανικός δείκτης κρατικών ομολόγων (όλες οι λήξεις)

Πίνακας 6.1.1 Χρηματιστηριακοί δείκτες μετοχών και κρατικών ομολόγων

Πριν ξεκινήσουμε παραθέτουμε παρακάτω σε ένα διάγραμμα την εξέλιξη των μηνιαίων τιμών των παραπάνω χρηματιστηριακών δεικτών προσαρμοσμένες σε κλίμακα με βάση το 100 ώστε να είναι συγκρίσιμες



Διάγραμμα 6.1.1 Διάγραμμα μηνιαίων τιμών μετοχών και κρατικών ομολόγων περιόδου 2000-2010

6.2 Χαρτοφυλάκια χωρίς διαφοροποίηση

Στη μελέτη των χαρτοφυλακίων χωρίς διαφοροποίηση το πρόβλημα βελτιστοποίησης που έχουμε να επιλύσουμε για να βρούμε τα κατάλληλα βάρη έτσι ώστε να επιτύχουμε την μεγαλύτερη απόδοση των χαρτοφυλακίων μας με την μικρότερη διασπορά είναι το εξής

$$\begin{aligned}
&\max_{\{w\}} (1-\lambda)E(R_\pi) - \lambda Var(R_\pi) \\
&\sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \\
&s.t \;\; 0 \le w_i \le L \\
&E(R_\pi) \ge r_G \\
&L \le 1
\end{aligned}$$

Όπου $E(R_\pi)$ είναι η μέση τιμή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου, $Var(R_\pi)$ είναι η διασπορά του χαρτοφυλακίου και λ είναι ο βαθμός αποστροφής του κινδύνου. Στην προκειμένη περίπτωση θα βελτιστοποιήσουμε το παραπάνω πρόβλημα για συγκεκριμένη τιμή της ελάχιστης απόδοσης που θέλουμε να επιτύχουμε, η οποία είναι $r_G = 3\%$ και για τιμές του λ=0, λ=0.25, λ=0.50, λ=0.75 και λ=1. Ο αριθμός L είναι μικρότερος ίσος με 1, δηλαδή θα βρούμε τα βέλτιστα χαρτοφυλάκια στα οποία ένα ταμείο έχει την δυνατότητα κάποια χρονιά να επενδύσει το 100% των κεφαλαίων του σε ένα μόνο δείκτη.
Έχοντας τώρα τα δεδομένα των μηνιαίων τιμών των χρηματιστηριακών δεικτών που έχει σκοπό να επενδύσει ένα συνταξιοδοτικό ταμείο και χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο κώδικα από την βιβλιοθήκη Finlib της GAMS (General Algebraic Modeling System), ένα πρόγραμμα για την λύση προβλημάτων μαθηματικού προγραμματισμού και βελτιστοποίησης, θα υπολογίσουμε τα κατάλληλα ποσοστά επένδυσης σε κάθε δείκτη ή αλλιώς «βάρη» έτσι ώστε να δημιουργήσουμε χαρτοφυλάκια με τη βέλτιστη απόδοση.

Ο στόχος μας είναι να επιτύχουμε την βέλτιστη απόδοση της επένδυσης μας την περίοδο 1/1/2006-31/12/2010 λαμβάνοντας υπόψη τις πραγματικές αποδόσεις που πραγματοποιήθηκαν τα προηγούμενα 10 έτη. Έτσι λοιπόν την πρώτη φορά έχοντας ως δεδομένα τις αποδόσεις των δεικτών μέχρι την χρονική στιγμή πριν από 6 έτη δηλαδή από 31-1-2000 έως 31-12-2005 κατασκευάζουμε το χαρτοφυλάκιο της επόμενης χρονιάς (1/1/2006-31/12/2006). Στη συνέχεια κάνουμε ακριβώς το ίδιο έχοντας ως δεδομένα τις αποδόσεις για μια χρονιά επιπλέον, δηλαδή ως την 31-12-2006, κατασκευάζουμε το χαρτοφυλάκιο για την επόμενη χρονιά (1/1/2007-31/12/2007). Συνεχίζοντας για άλλες 3 φορές με τον ίδιο τρόπο και παίρνοντας ως δεδομένα τις αποδόσεις μέχρι την 31-12-2009 έχουμε καταφέρει να δημιουργήσουμε το χαρτοφυλάκιο για την χρονιά στόχο, δηλαδή την περίοδο 1/1/2010-31/12/2010.

Βέβαια κάθε συνταξιοδοτικό ταμείο έχει τον δικό του βαθμό αποστροφής του κίνδυνου ανάλογα με το πόσο ριψοκίνδυνος είναι ο διαχειριστής του έτσι για τις διαφορές τιμές του λ δηλαδή της παραμέτρου αποστροφής κίνδυνου έχουμε και διαφορετικά βάρη και κατ' επέκταση και διαφορετικά χαρτοφυλάκια. Άρα για λ=0 η κατανομή των κεφαλαίων είναι η εξής:

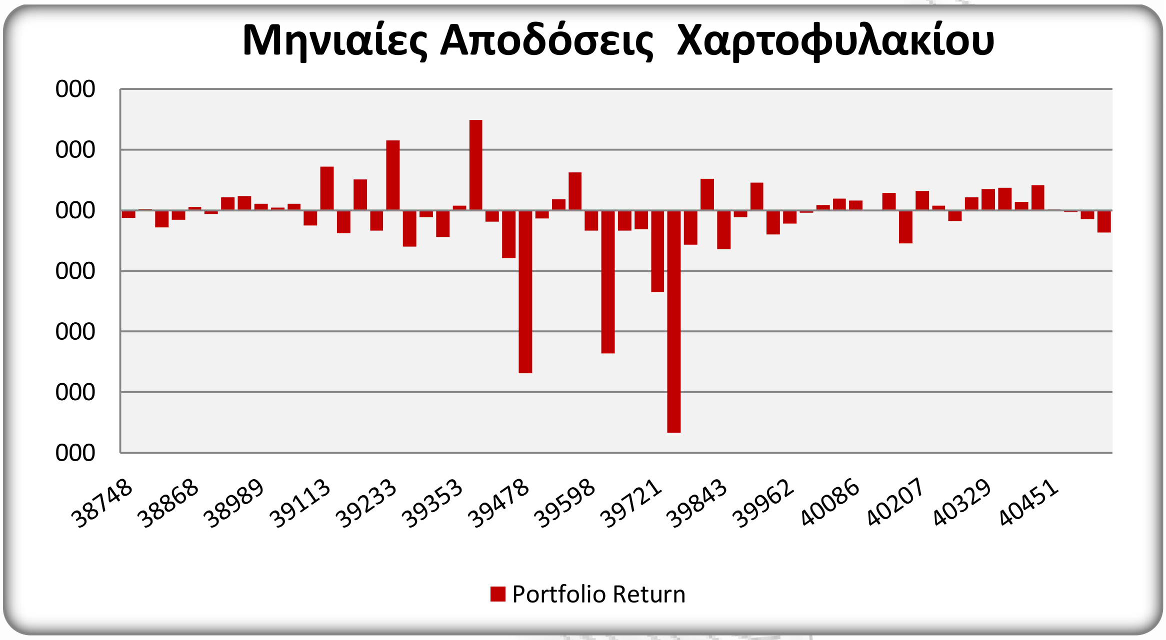
Δείκτες /Βάρη		2006	2007	2008	2009	2010
CAC	w_1	0	0	0	0	0
DAX	w_2	0	0	0	0	0
MADRID	w_3	0	1	1	0	0
FTSE100	w_4	0	0	0	0	0
SP500	w_5	0	0	0	0	0
SGBI	w_6	0	0	0	0	0
GGBI	w_7	0	0	0	0	0
FGBI	w_8	1	0	0	0	0
UKGBI	w_9	0	0	0	0	0
USGBI	w_{10}	0	0	0	1	1

Πίνακας 6.2.1 Πίνακας των βαρών του χαρτοφυλακίου χωρίς διαφοροποίηση για $\lambda = 0$

Όπως παρατηρούμε στον παραπάνω πινάκα για ένα συνταξιοδοτικό ταμείο με παράμετρο αποστροφής στον κίνδυνο λ=0 την πρώτη χρονιά η καταλληλότερη επιλογή είναι να τοποθετηθούν όλα τα κεφάλαια στο δείκτη FGBI αντίστοιχα τις επόμενες 2 χρονιές ο καταλληλότερος δείκτης είναι ο ισπανικός MADRID ενώ τις επόμενες 2 χρονιές είναι ο αμερικανικός δείκτης κρατικών ομολόγων USGBI. Παραθέτουμε τώρα το διάγραμμα της αξίας του χαρτοφυλακίου στην διάρκεια των 5 ετών.

Διάγραμμα 6.2.1 Εξέλιξη της αξίας του χαρτοφυλακίου χωρίς διαφοροποίηση για $\lambda = 0$

Καθώς και το ιστόγραμμα των αποδόσεων την ίδια χρονική περίοδο.



Διάγραμμα 6.2.2 Ιστόγραμμα των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου χωρίς διαφοροποίηση για $\lambda = 0$

Επισημαίνουμε την περίοδο αυτή σημειώθηκε η παγκόσμια χρηματοπιστωτική κρίση του 2008 για αυτό και υπάρχουν μεγάλες απώλειες, βλέπε διαγράμματα 6.2.1 και 6.2.2, της τάξεως του 36.1% στην συνολική αξία του χαρτοφυλακίου. Για να έχουμε μια καλύτερη εικόνα του χαρτοφυλακίου που δημιουργήθηκε με βάση τα παραπάνω βάρη παραθέτουμε ένα πίνακα με τα κυριότερα μέτρα κινδύνου και απόδοσης όπως η μέση μηνιαία απόδοση, η συσσωρευμένη απόδοση , η μεταβλητότητα, ο δείκτης Sharpe καθώς και τα VaR (Value at Risk), CVaR (Conditional Value at Risk) με 99% και 95% επίπεδο εμπιστοσύνης αντίστοιχα.

Ο πίνακας των μέτρων κινδύνου και απόδοσης του χαρτοφυλακίου την περίοδο 1/1/2006-31/12/2006 είναι

Monthly Mean Return	Cumulative Return	Volatility	Sharpe Ratio	VaR 0.05	VaR 0.01	CVaR 0.05	CVaR 0.01
-0.00748	-0.44888	0.03922	-0.19074	-0.06983	-0.15464	-0.14544	-0.04933

Πίνακας 6.2.2 . Μέτρα κινδύνου και απόδοσης του χαρτοφυλακίου χωρίς διαφοροποίηση για $\lambda = 0$

Η μέση μηνιαία απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι αρνητική όπως και η συνολική απόδοση του. Όπως έχουμε πει στην αρχή του κεφαλαίου η ελάχιστη απόδοση που πρέπει να επιτύχει το ταμείο είναι 3% ετησίως. Στην προκειμένη περίπτωση η συνολική απόδοση απέχει πολύ από την ελάχιστη που θα έπρεπε να είχαμε καθώς είναι -44.88% ενώ ως ελάχιστη έχουμε θέσει $(.03) = 1.1592$ δηλαδή συνολική απόδοση 15.92%. Ένα τρόπος να μετρηθεί ο επενδυτικός κίνδυνος είναι η διακύμανση. Σημαντικές διακυμάνσεις στην αξία μιας επένδυσης συνεπάγεται την ανάληψη σημαντικού επενδυτικού κινδύνου. Στο συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο η συνολική διακύμανση των αποδόσεων και στην ουσία της αξίας του χαρτοφυλακίου είναι 0.03922. Όσο αναφορά το μετρό κινδύνου VaR(Value at Risk) για επίπεδο εμπιστοσύνης 5% και 1% είναι αντίστοιχα -0.06883 και -0.15464. Το VaR αντιπροσωπεύει το μέγιστο ποσό που μπορεί να απολεσθεί κατά την διάρκεια του χρόνου επένδυσης ενός ταμείου δεδομένου ενός επίπεδου εμπιστοσύνης ,που σημαίνει ότι υπάρχει (κατά μέσο όρο) πιθανότητα 95% και 99% αντίστοιχα να υπάρξει κάποια απώλεια στο χαρτοφυλάκιο μικρότερη της υπολογισμένης VaR. Αντίστοιχα το CVaR είναι η αναμενόμενη απόδοση περάν από το VaR, δεδομένου ενός επίπεδου εμπιστοσύνης 5% και 1% αντίστοιχα. Στο συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο για επίπεδο εμπιστοσύνης 5% είναι -0.14544 και για 1% είναι -0.04933.

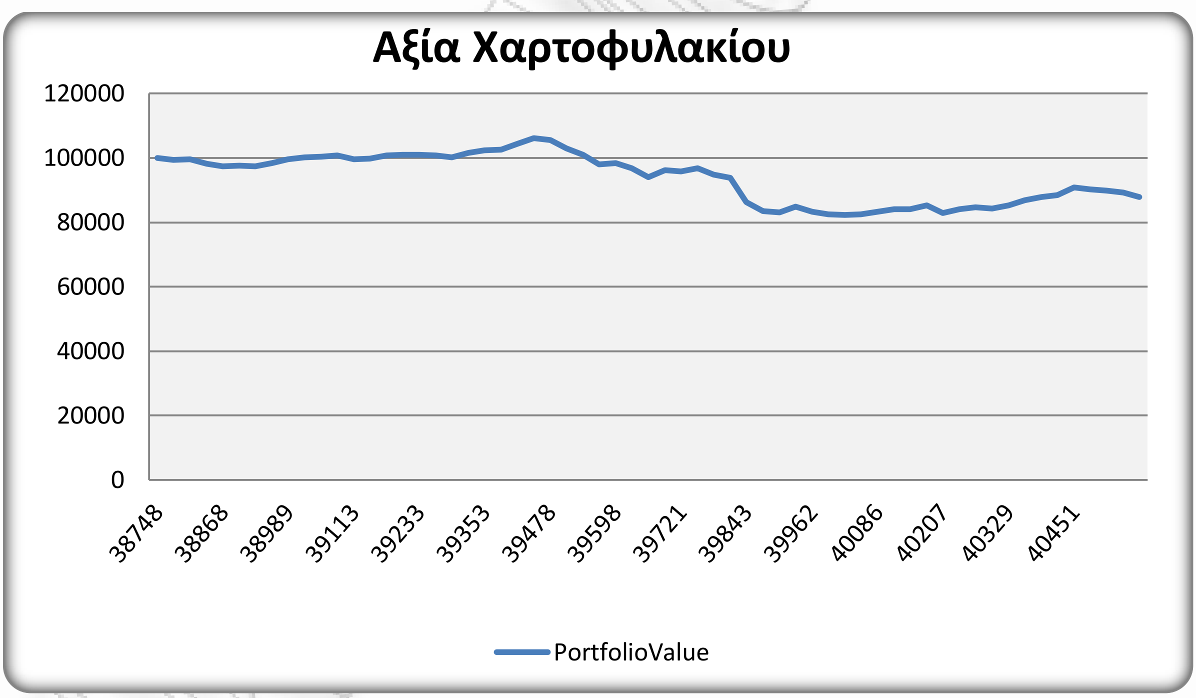
Για ένα ταμείο με λ=0.25 τα αντίστοιχα βάρη είναι τα εξής

Δείκτες /Βάρη		**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**
CAC	w_1	0	0	0	0	0
DAX	w_2	0	0	0	0	0
MADRID	w_3	0	0.138382	0.148144	0	0.000475
FTSE100	w_4	0	0	0	0	0
SP500	w_5	0	0	0	0	0
SGBI	w_6	0	0	0	0	0
GGBI	w_7	0	0	0	0	0
FGBI	w_8	1	0.358049	0	0	0
UKGBI	w_9	0	0	0.851856	0	0
USGBI	w_{10}	0	0.503569	0	1	0.618464

Πίνακας 6.2.3 Πίνακας των βαρών του χαρτοφυλακίου χωρίς διαφοροποίηση για $\lambda = 0.25$

Παρατηρούμε ότι και για λ=0.25 ο FGBI παραμένει ο καταλληλότερος δείκτης για επένδυση την πρώτη χρονιά, αντίθετα με την επόμενη που όπως παρατηρούμε τα κεφάλαια μοιράζονται στους δείκτες MADRID, FGBI και USGBI με ποσοστά 13.8%, 38.8% και 50.36% αντίστοιχα. Την τρίτη χρονιά το 85.2% επενδύεται στον βρετανικό δείκτη κρατικών ομολόγων UKSGBI και το υπόλοιπο 14.8% στον ισπανικό MADRID. Την τέταρτη χρονιά όλα τα κεφάλαια κατανέμονται στον αμερικανικό δείκτη κρατικών ομολόγων USGBI ενώ την τελευταία χρονιά τα κεφάλαια μοιράζονται στον USGBI και στον γαλλικό δείκτη κρατικών ομολόγων FGBI με ποσοστά 61.84% και 28.1 % ενώ ένα πολύ μικρό ποσοστό της τάξεως του 0.47% στον MADRID.

Το διάγραμμα της αξίας του χαρτοφυλακίου είναι το παρακάτω όπου παρατηρούμε ότι έχουμε μικρότερη απώλεια για μικρότερη αποστροφή στον κίνδυνο.



Διάγραμμα 6.2.3.Εξέλιξη της αξίας του χαρτοφυλακίου χωρίς διαφοροποίηση για $\lambda = 0.25$

Το αντίστοιχο ιστόγραμμα των αποδόσεων είναι

Διάγραμμα 6.2.4. Ιστόγραμμα των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου χωρίς διαφοροποίηση για $\lambda = 0.25$

Ενώ ο πίνακας των μέτρων κινδύνου και απόδοσης είναι

Monthly Mean Return	Cumulative Return	Volatility	Sharpe Ratio	VaR 0.05	VaR 0.01	CVaR 0.05	CVaR 0.01
-0.00217	-0.13039	0.01743	-0.12469	-0.02939	-0.05325	-0.04849	-0.08413

Πινάκας 6.2.4 Μέτρα κινδύνου και απόδοσης του χαρτοφυλακίου χωρίς διαφοροποίηση για $\lambda = 0.25$

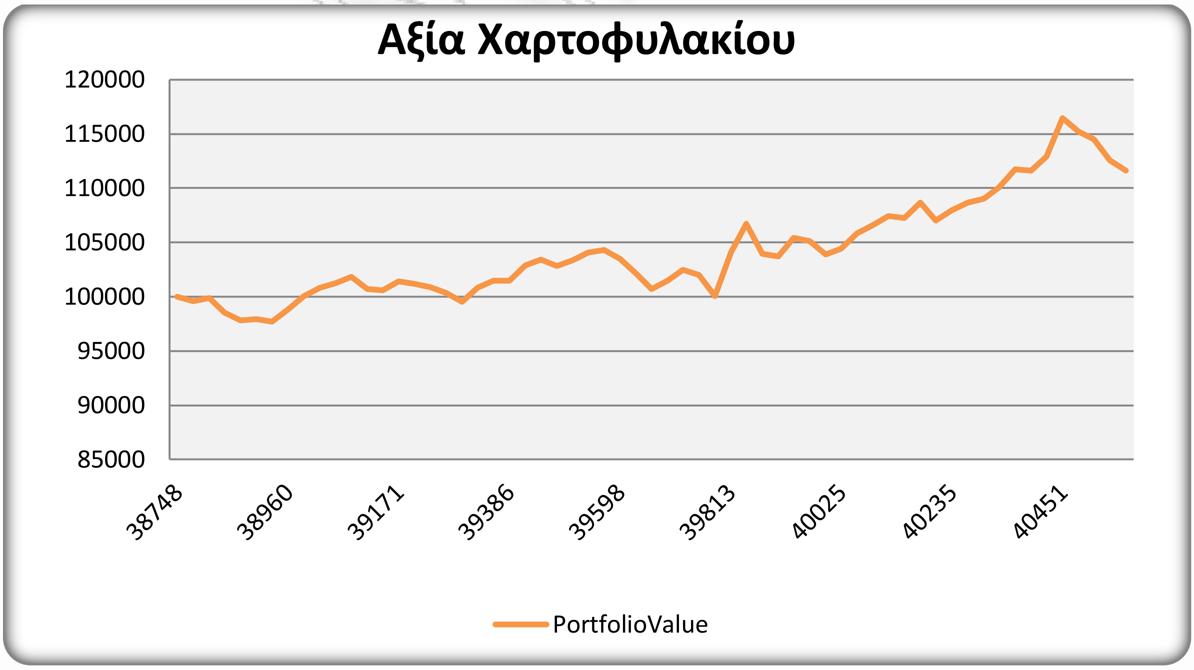
Παρόλο, που η μέση μηνιαία απόδοση έχει μεγαλώσει σε σχέση με το χαρτοφυλάκιο για $\lambda = 0$, παραμένει όμως αρνητική όπως και η συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου η οποία είναι στο -13.039% που είναι και πάλι πολύ μικρότερη από το 15.92% που είναι η ελάχιστη απόδοση που πρέπει να επιτύχει το συνταξιοδοτικό ταμείο. Η διακύμανση έχει μειωθεί σημαντικά ενώ ο δείκτης Sharpe που μετρά την απόδοση μια επένδυσης πάνω από ένα όριο βάσης ανά μονάδα συνολικού κινδύνου είναι -0.12469. Μείωση επίσης έχουν σημειώσει και όλοι οι υπόλοιποι δείκτες.

Μεγαλώνοντας το λ σε 0.50 η κατανομή των κεφαλαίων γίνεται

Δείκτες /Βάρη		2006	2007	2008	2009	2010
CAC	w_1	0	0	0	0	0
DAX	w_2	0	0	0	0.02685	0
MADRID	w_3	0.03558	0.09169	0.12173	0.00828	0.04366
FTSE100	w_4	0	0	0	0	0
SP500	w_5	0	0	0	0	0
SGBI	w_6	0	0	0	0.47470	0.84690
GGBI	w_7	0	0	0	0	0
FGBI	w_8	0.96441	0.89078	0.36761	0	0
UKGBI	w_9	0	0	0	0	0
USGBI	w_{10}	0	0.01752	0.51065	0.49015	0.10943

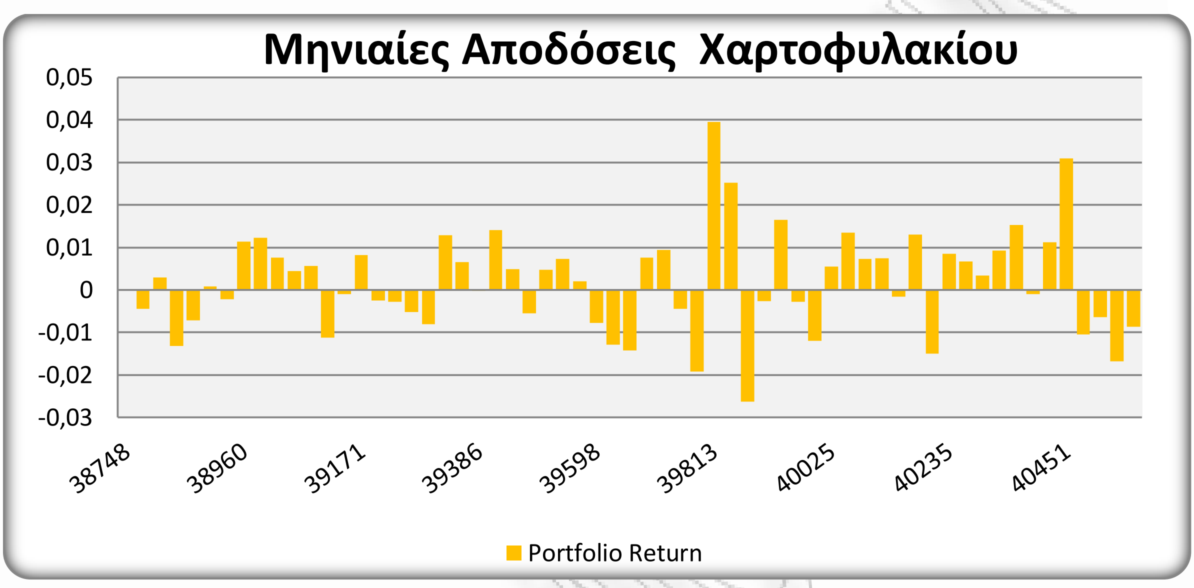
Πινάκας 6.2.5 Πίνακας των βαρών του χαρτοφυλακίου χωρίς διαφοροποίηση που προκύπτει για $\lambda = 0.50$

Όσο μεγαλώνει το λ παρατηρούμε ότι τα κεφάλαια του ταμείου κατανέμονται σε περισσότερους δείκτες, όπου ξεκινάμε με ποσοστό 96.4% στον δείκτη FGBI και 3.6% στον MADRID με κορύφωση την τέταρτη χρονιά όπου τα κεφάλαια κατανέμονται σε 4 διαφορετικούς δείκτες DAX, MADRID, SGBI και USGBI με ποσοστά 2.7%, 0.8%, 47.5% και 49% αντίστοιχα. Το διάγραμμα της αξίας του χαρτοφυλακίου είναι πλέον



Διάγραμμα 6.2.5 Εξέλιξη της αξίας του χαρτοφυλακίου χωρίς διαφοροποίηση για $\lambda = 0.50$

Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ένα κέρδος της τάξεως του 11.6% στο χαρτοφυλάκιο μας όπως βλέπουμε στο διάγραμμα 6.2.5 ενώ το ιστόγραμμα των αποδόσεων είναι



Διάγραμμα 6.2.6. Ιστόγραμμα των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου χωρίς διαφοροποίηση για $\lambda = 0.50$

Ενώ ο πίνακας των μέτρων κινδύνου και απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι

Monthly Mean Return	Cumulative Return	Volatility	Sharpe Ratio	VaR 0.05	VaR 0.01	CVaR 0.05	CVaR 0.01
0.00183	0.10987	0.01187	0.15426	-0.01510	-0.02204	-0.02073	-0.02623

Πινάκας 6.2.6 Μέτρα κινδύνου και απόδοσης του χαρτοφυλακίου χωρίς διαφοροποίηση για $\lambda = 0.50$

Το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο πετυχαίνει για πρώτη φορά θετική μέση μηνιαία απόδοση όπως και η συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι θετική. Παρατηρούμε επίσης ότι όσο το λ μεγαλώνει, που σημαίνει ότι το συνταξιοδοτικό ταμείο αποστρέφεται όλο και λιγότερο τον κίνδυνο, η συνολική απόδοση πλησιάζει την απόδοση στόχο που πρέπει να επιτύχει το ταμείο για να καλύψει τις υποχρεώσεις του. Παρόλο που ακόμα απέχει 5% από τη συνολική απόδοση που έχει τεθεί. Στο χαρτοφυλάκιο αυτό σε σχέση με τα δυο προηγούμενα υπάρχει μια σημαντική βελτίωση στην απόδοση της τάξης του 23% περίπου. Η διακύμανση των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου είναι επίσης θετική όπως και ο δείκτης Sharpe ενώ η μεγίστη απώλεια για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% και 99% είναι -0.01510 και -0.02204 αντίστοιχα.

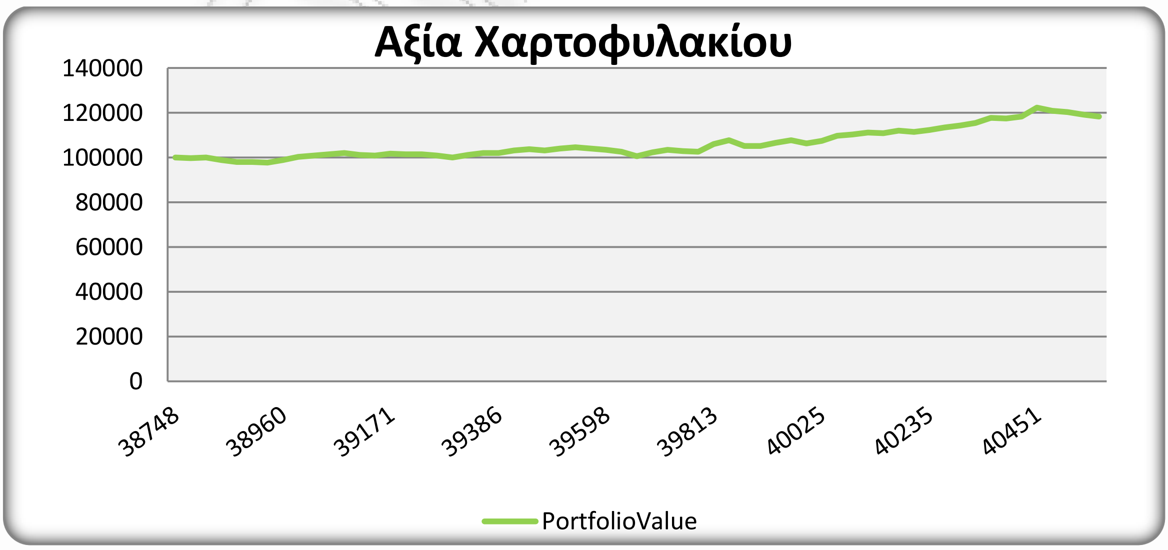
Πλησιάζοντας το λ στο 1,δηλαδή για $\lambda = 0.75$ η κατανομή των κεφαλαίων γίνεται

Δείκτες /Βάρη		2006	2007	2008	2009	2010
CAC	w_1	0	0	0	0	0
DAX	w_2	0.021901	0.009018	0.046229	0.059442	0.053929
MAD	w_3	0.035789	0.072198	0.035705	0	0
FTSE1	w_4	0	0	0	0	0
SP500	w_5	0	0	0	0	0
SGBI	w_6	0	0	0	0.693244	0.929663
GGBI	w_7	0	0	0	0	0
FGBI	w_8	0.94231	0.918784	0.836413	0.145772	0
UKGB	w_9	0	0	0	0	0.016408
USGB	w_{10}	0	0	0.081652	0.101542	0

Πίνακας 6.2.7 Πίνακας των βαρών του χαρτοφυλακίου χωρίς διαφοροποίηση για $\lambda = 0.75$

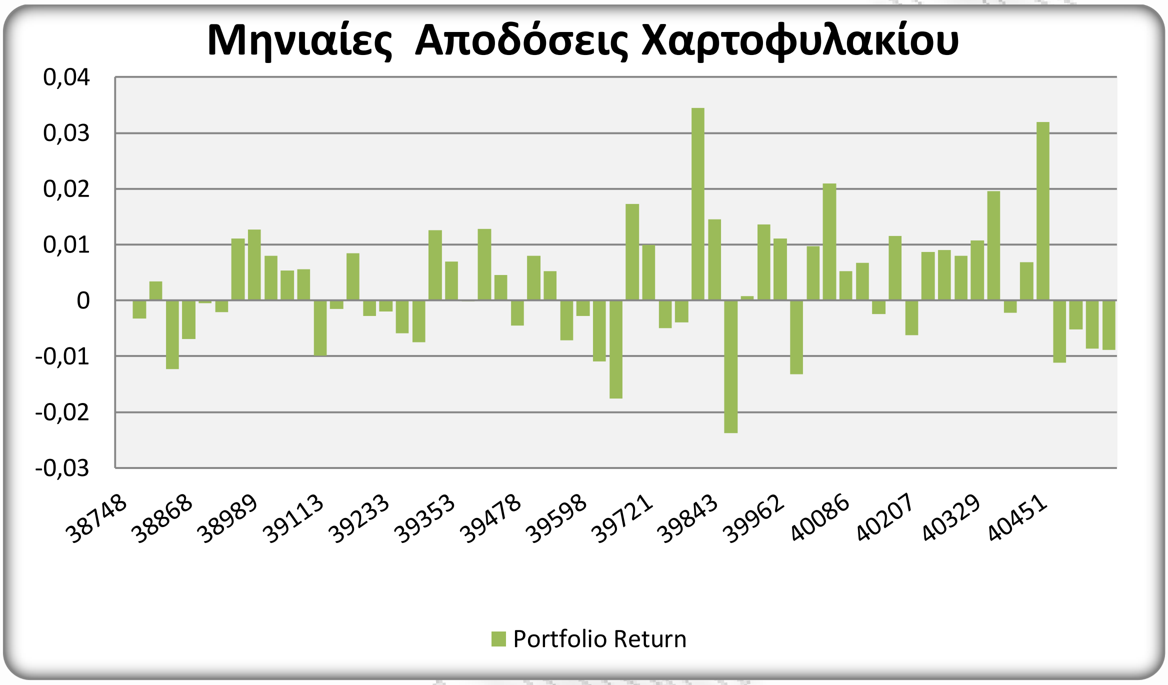
Καθ' όλη την διάρκεια τα κεφάλαια κατανέμονται στους δείκτες DAX, MADRID και FGBI με ποσοστά από 0.9%-4.6%, 3.58%-7.2% και 83.64%-94.2% αντίστοιχα έκτος από την τρίτη και τέταρτη χρονιά όπου ένα ποσοστό κατανέμεται και στο δείκτη USGBI και πιο συγκεκριμένα την τέταρτη χρονιά αντί για τον ισπανικό δείκτη τιμών μετοχών επενδύουμε στον ισπανικό δείκτη κρατικών ομολόγων SGBI. Καταλήγοντας την τελευταία χρονιά με ένα υψηλό ποσοστό κοντά στο 93% στον δείκτη SGBI.

Το διάγραμμα των της αξίας του χαρτοφυλακίου χωρίς διαφοροποίηση για $\lambda = 0.75$ είναι



Διάγραμμα 6.2.7 Εξέλιξη της αξίας του χαρτοφυλακίου χωρίς διαφοροποίηση για $\lambda = 0.75$

Όπου έχουμε ένα κέρδος κοντά στο 18% και το αντίστοιχο ιστόγραμμα των αποδόσεων είναι



Διάγραμμα 6.2.8 Ιστόγραμμα των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου με $\lambda = 0.75$

Ο πίνακας των μέτρων κινδύνου και απόδοσης είναι

Monthly Mean Return	Cumulative Return	Volatility	Sharpe Ratio	VaR 0.05	VaR 0.01	CVaR 0.05	CVaR 0.01
0.00279	0.16738	0.01106	0.25230	-0.01232	-0.02015	-0.01822	-0.02381

Πίνακας 6.2.8 Μέτρα κινδύνου και απόδοσης του χαρτοφυλακίου χωρίς διαφοροποίηση για $\lambda = 0.75$

Όσο μεγαλώνει το λ παρατηρούμε αντίστοιχα και μια βελτίωση στα μετρά κινδύνου και απόδοσης όπως φαίνεται και στον παραπάνω πίνακα. Η μέση μηνιαία απόδοση εξακολουθεί να είναι θετική ενώ παρατηρούμε ότι η συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου έχει ξεπεράσει την ελάχιστη απόδοση που έχουμε θέσει ως στόχο και είναι 16.738%.

Τέλος για λ=1 τα βάρη γίνονται

Δείκτες /Βάρη		2006	2007	2008	2009	2010
CAC	w_1	0.00302	0.01677	0.00148	0	0
DAX	w_2	0.03632	0.02204	0.0359	0.03307	0.02410
MADRID	w_3	0	0	0	0	0
FTSE100	w_4	0.01907	0.04958	0.05324	0.03604	0.06533
SP500	w_5	0.02246	0.1095	0.01146	0.04121	0.01310
SGBI	w_6	0.81107	0.81673	0.81753	0.76574	0.73611
GGBI	w_7	0.10802	0.07801	0.08036	0.06478	0.05853
FGBI	w_8	0	0	0	0	0
UKGBI	w_9	0	0.00588	0	0.05913	0.10282
USGBI	w_{10}	0	0	0	0	0

Πίνακας 6.2.9 Πίνακας των βαρών του χαρτοφυλακίου χωρίς διαφοροποίηση που προκύπτει για $\lambda = 1$

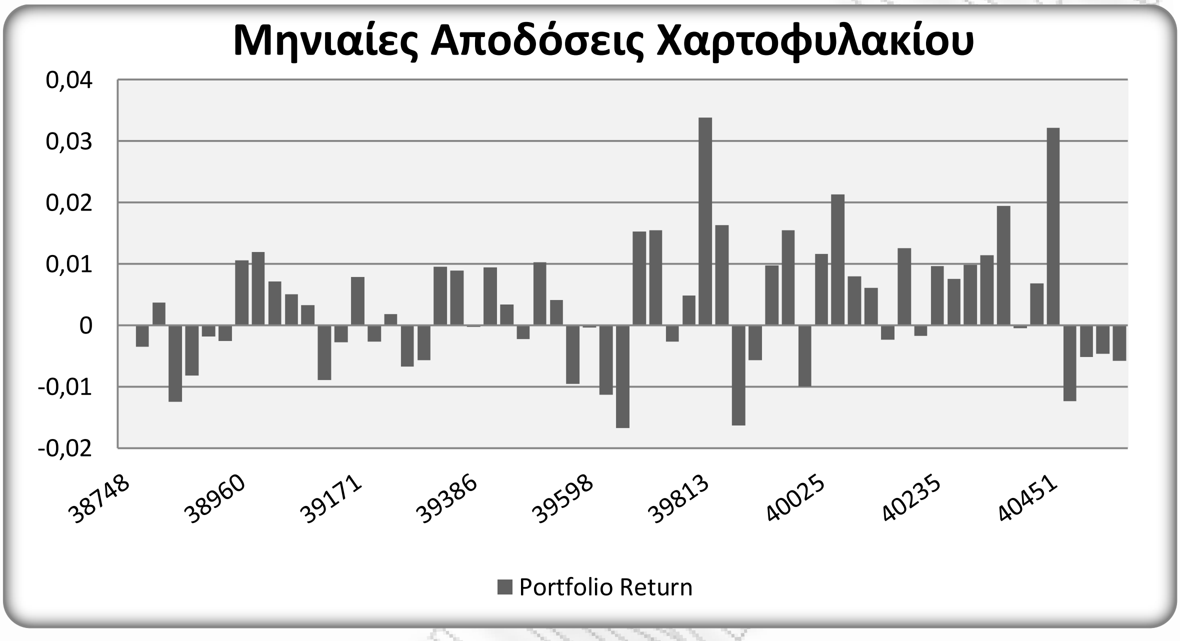
Εδώ παρατηρούμε ότι τα κεφάλαια του ταμείου κατανέμονται σε 5 και 6 δείκτες με μεγαλύτερο ποσοστό που κυμαίνεται από 73% μέχρι 82% στο δείκτη SGBI. Είναι αξιοσημείωτο ότι για τους ριψοκίνδυνους επενδυτές οι δείκτες MADRID, FGBI και USGBI δεν είναι μέσα στις βέλτιστες επιλογές.

Η εξέλιξη της αξίας του χαρτοφυλακίου φαίνεται στο διάγραμμα

Διάγραμμα 6.2.9 Εξέλιξη της αξίας του χαρτοφυλακίου χωρίς διαφοροποίηση για $\lambda = 1$

Παρατηρούμε ότι για λ=1 έχουμε το την μεγαλύτερη απόδοση που είναι της τάξεως του 22%.

Ενώ το ιστόγραμμα των αποδόσεων είναι



Διάγραμμα 6.2.10 Ιστόγραμμα των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου χωρίς διαφοροποίηση για $\lambda = 1$

Ο πίνακας των μέτρων κινδύνου και απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι

Monthly Mean Return	Cumulative Return	Volatility	Sharpe Ratio	VaR 0.05	VaR 0.01	CVaR 0.05	CVaR 0.01
0.00335	0.20120	0.01060	0.31622	-0.01236	-0.01651	-0.01518	-0.01679

Πίνακας 6.2.10 Μέτρα κινδύνου και απόδοσης του χαρτοφυλακίου χωρίς διαφοροποίηση για $\lambda = 1$

Για λ=1 επιτυγχάνεται η μεγαλύτερη απόδοση από όλα τα χαρτοφυλάκια χωρίς διαφοροποίηση καθώς και η μικρότερη διασπορά, δηλαδή ο επενδυτικός κίνδυνος που αντιμετωπίζει το χαρτοφυλάκιο είναι ο μικρότερος για τις διαφορές τιμές του λ. Όσο αναφορά τις υποχρεώσεις του ταμείου αυτές μπορούν να καλυφτούν επαρκώς καθώς η συνολική απόδοση είναι σχεδόν 4% μεγαλύτερη από την ελάχιστη απόδοση που έχουμε εξαρχής θέσει.

6.3 Χαρτοφυλάκια με διαφοροποίηση

Μέχρι τώρα δεν είχαμε κανένα περιορισμό όσο αναφορά το ποσοστό επένδυσης σε κάθε δείκτη, δηλαδή υπήρχε η επιλογή να δημιουργήσουμε χαρτοφυλάκια όπου μπορούσαμε να επενδύσουμε το 100% των κεφαλαίων σε ένα μόνο δείκτη. Σε αυτή τη φάση θα επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία έχοντας ως περιορισμό το μέγιστο ποσοστό επένδυσης w_i σε ένα δείκτη να είναι μικρότερο ίσο του 40% άρα το πρόβλημα βελτιστοποίησης που έχουμε να επιλύσουμε για να βρούμε τα κατάλληλα βάρη έτσι ώστε να επιτύχουμε την μεγαλύτερη απόδοση των χαρτοφυλακίων με διαφοροποίηση με την μικρότερη διασπορά είναι το εξής

$$\begin{aligned}
&\max_{\{w\}}(1-\lambda)E(R_\pi)-\lambda Var(R_\pi)\\
&\sum_{i=1}^{N} w_i = 1\\
&s.t\ \ 0 \le w_i \le L\\
&E(R_\pi) \ge r_G\\
&L \le 0.4
\end{aligned}$$

Όπου $E(R_\pi)$ είναι η μέση τιμή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου, $Var(R_\pi)$ είναι η διασπορά του χαρτοφυλακίου, λ είναι ο βαθμός αποστροφής του κινδύνου και η ελάχιστη απόδοση που θέλουμε να επιτύχουμε είναι $r_G = 3\%$.

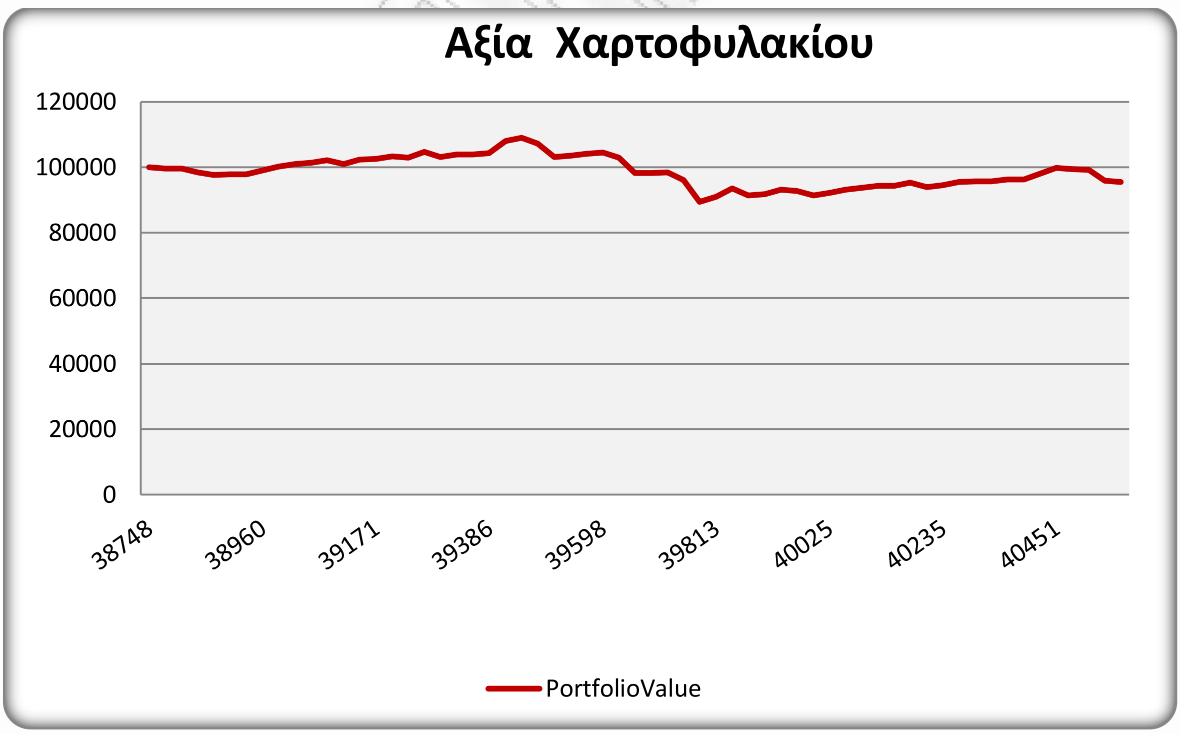
Έτσι την πρώτη φορά έχοντας τα ίδια δεδομένα που χρησιμοποιήσαμε για τα χαρτοφυλάκια χωρίς διαφοροποίηση για τις μηνιαίες αποδόσεις των χρηματιστηριακών δεικτών που μπορεί να επενδύσει ένα συνταξιοδοτικό ταμείο και για τιμές του λ=0, λ=0.25, λ=0.50, λ=0.75 και λ=1 κατασκευάζουμε το αντίστοιχο χαρτοφυλάκιο για την επομένη χρονιά (1/1/2006-31/12/2006). Στη συνέχεια κάνουμε ακριβώς το ίδιο έχοντας ως δεδομένα τις αποδόσεις για μια χρονιά επιπλέον, δηλαδή ως την 31-12-2006, κατασκευάζουμε το χαρτοφυλάκιο για την επόμενη χρονιά (1/1/2007-31/12/2007). Συνεχίζοντας για άλλες 3 φορές με τον ίδιο τρόπο και παίρνοντας ως δεδομένα τις αποδόσεις μέχρι την 31-12-2009 έχουμε καταφέρει να δημιουργήσουμε το χαρτοφυλάκιο για την χρονιά στόχο, δηλαδή την περίοδο 1/1/2010-31/12/2010.

Άρα για λ=0 τα κεφάλαια ενός συνταξιοδοτικού σχήματος κατανέμονται ως εξής

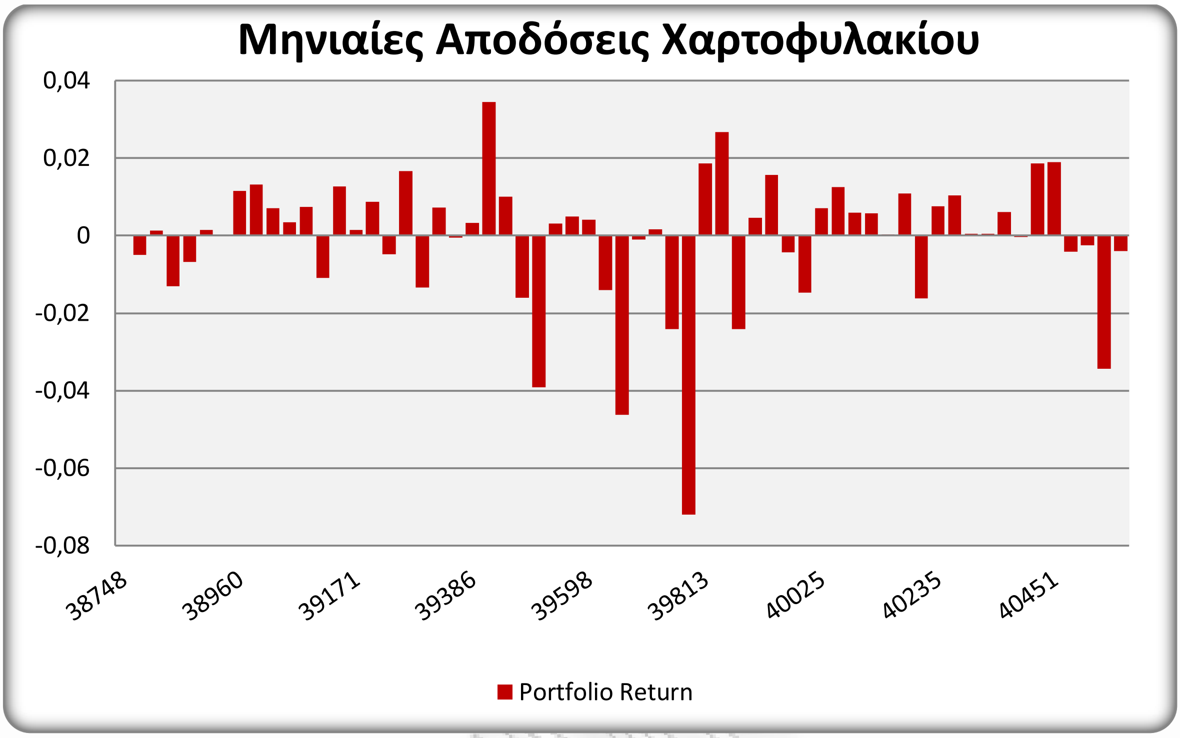
Δείκτες /Βάρη		2006	2007	2008	2009	2010
CAC	w_1	0	0	0	0	0
DAX	w_2	0	0	0	0	0
MADRID	w_3	0	0.4	0.4	0	0
FTSE100	w_4	0	0	0	0	0
SP500	w_5	0	0	0	0	0
SGBI	w_6	0.2	0	0	0.4	0.2
GGBI	w_7	0	0	0	0	0
FGBI	w_8	0.4	0.2	0.2	0.2	0.4
UKGBI	w_9	0	0	0	0	0
USGBI	w_{10}	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4

Πίνακας 6.3.1 Πίνακας των βαρών του χαρτοφυλακίου με διαφοροποίηση που προκύπτει για $\lambda = 0$

Και τα αντίστοιχα διαγράμματα της αξίας του χαρτοφυλακίου και των αποδόσεων είναι



Διάγραμμα 6.3.1. Εξέλιξη της αξίας του χαρτοφυλακίου με διαφοροποίηση για $\lambda = 0$



Διάγραμμα 6.3.2 Ιστόγραμμα των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου με διαφοροποίηση για $\lambda = 0$

Όπως και ο πίνακας μέτρων κινδύνου και απόδοσης είναι

Monthly Mean Return	Cumulative Return	Volatility	Sharpe Ratio	VaR 0.05	VaR 0.01	CVaR 0.05	CVaR 0.01
-0.00077	-0.04629	0.01733	-0.04452	-0.03461	-0.05675	-0.05244	-0.07194

Πίνακας 6.3.2 Μέτρα κινδύνου και απόδοσης του χαρτοφυλακίου με διαφοροποίηση για $\lambda = 0$

Σε σχέση με το αντίστοιχο χαρτοφυλάκιο χωρίς διαφοροποίηση η μέση μηνιαία απόδοση είναι μεγαλύτερη παραμένει όμως αρνητική όπως και η συνολική απόδοση η οποία είναι -4.69% και απέχει πολύ από την ελάχιστη που πρέπει να πετύχει ένα συνταξιοδοτικό ταμείο. Παρατηρούμε επίσης ότι όλοι οι δείκτες είναι βελτιωμένοι σε σχέση με τους αντίστοιχους δείκτες για το ίδιο λ στο χαρτοφυλάκιο χωρίς διαφοροποίηση.

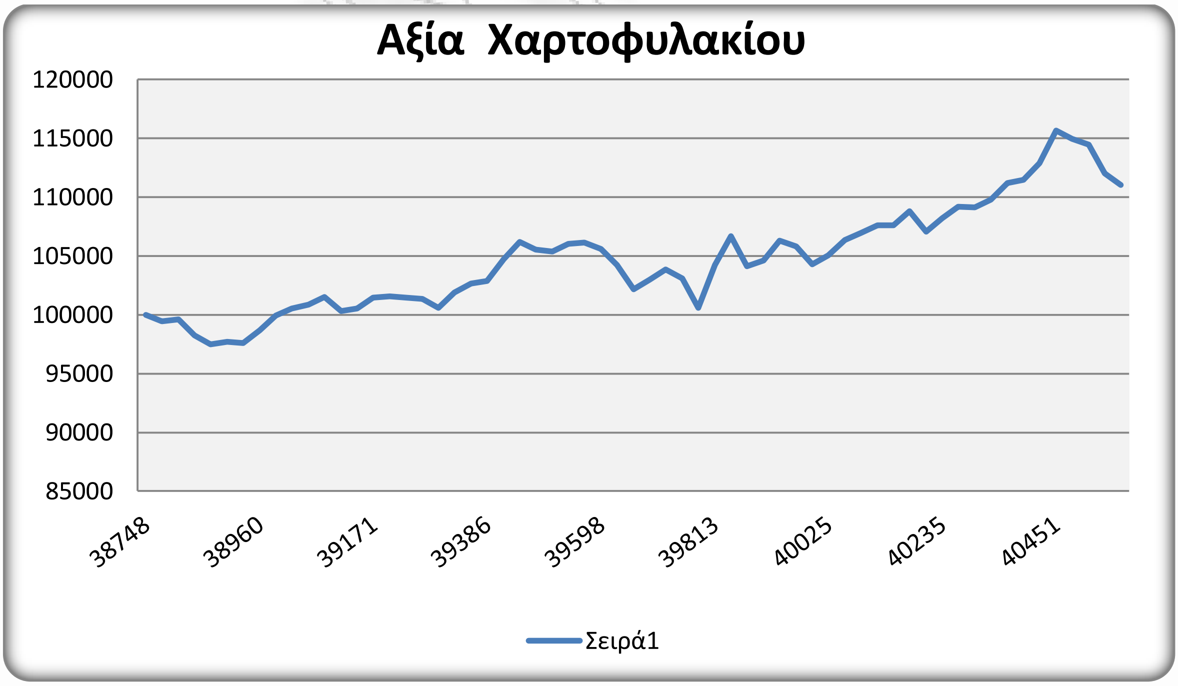
Όταν θέσουμε λ=0.25 ο πίνακας των βαρών του χαρτοφυλακίου μας γίνεται

Δείκτες /Βάρη		2006	2007	2008	2009	2010
CAC	w_1	0	0	0	0	0
DAX	w_2	0	0	0	0	0
MADRID	w_3	0	0.142	0.157916	0	0
FTSE100	w_4	0	0	0	0	0
SP500	w_5	0	0	0	0	0
SGBI	w_6	0.4	0.058	0.042084	0.4	0.4
GGBI	w_7	0	0	0	0	0
FGBI	w_8	0.4	0.4	0.4	0.2	0.2
UKGBI	w_9	0	0	0	0	0
USGBI	w_{10}	0.2	0.4	0.4	0.4	0.4

Πίνακας 6.3.3 Πίνακας των βαρών του χαρτοφυλακίου με διαφοροποίηση για $\lambda = 0.25$

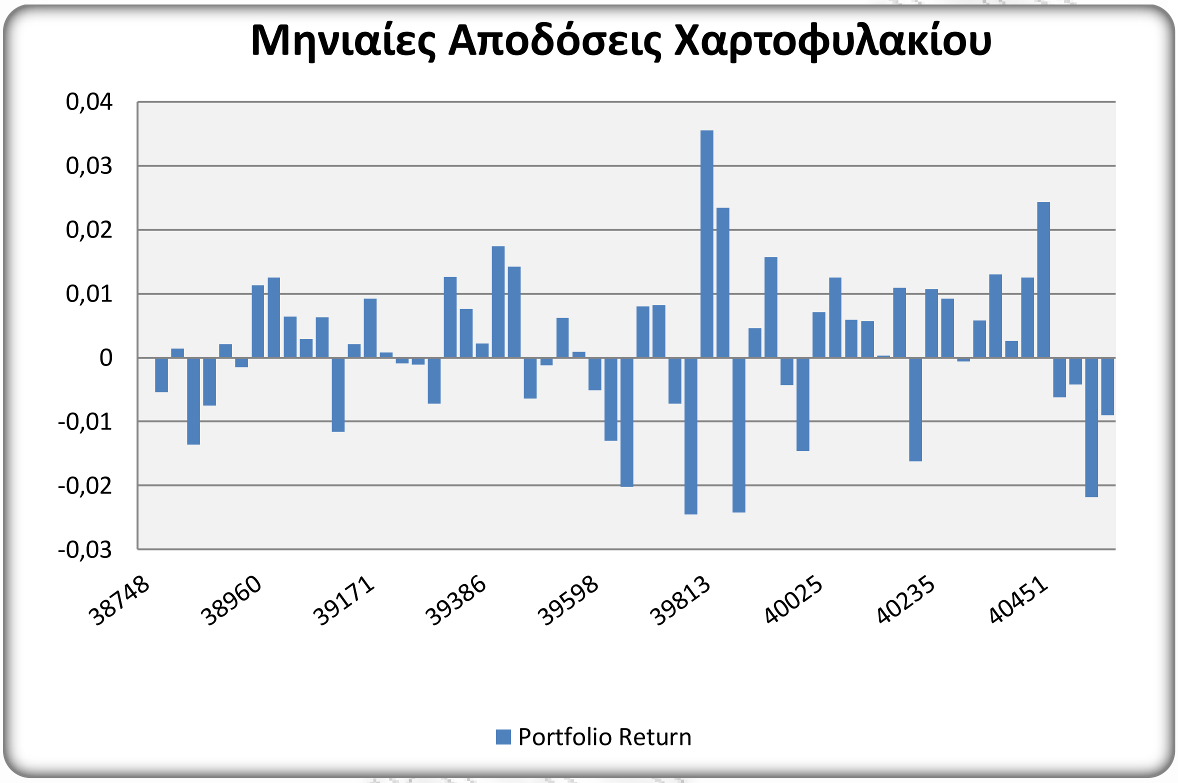
Έχουμε μια εναλλαγή στα βάρη σε σχέση με το χαρτοφυλάκιο με $\lambda = 0$ τον πρώτο χρόνο οπού αντί για το 40% των κεφαλαίων του ταμείου στον δείκτη USGBI επενδύεται το 20% ενώ το αντίστροφο ισχύει για τον δείκτη SGBI. Το 2007 και 2008 τα κεφάλαια μοιράζονται και στον SGBI με ένα ποσοστό λίγο πάνω και λίγο κάτω από το 0.5% αντίστοιχα.

Το διάγραμμα της άξιας του χαρτοφυλακίου είναι



Διάγραμμα 6.3.3 Εξέλιξη της αξίας του χαρτοφυλακίου με διαφοροποίηση για $\lambda = 0.25$

Ενώ το ιστόγραμμα των μηνιαίων αποδόσεων είναι



Διάγραμμα 6.3.4 Ιστόγραμμα των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου με διαφοροποίηση για $\lambda = 0.25$

Και ο αντίστοιχος πίνακας των μέτρων κινδύνου και απόδοσης είναι

Monthly Mean Return	Cumulative Return	Volatility	Sharpe Ratio	VaR 0.05	VaR 0.01	CVaR 0.05	CVaR 0.01
0.00174	0.10453	0.01184	0.14718	-0.02028	-0.02432	-0.02349	-0.02452

Πίνακας 6.3.4 Μέτρα κινδύνου και απόδοσης του χαρτοφυλακίου με διαφοροποίηση για $\lambda = 0.25$

Έχουμε μια μικρή βελτίωση της απόδοσης και της διασποράς του χαρτοφυλακίου σε σχέση με το χαρτοφυλάκιο που είχε προκύψει για $\lambda = 0$ καθώς και μείωση της αξίας σε κίνδυνο για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% και 99% αντίστοιχα. Η συνολική απόδοση είναι 10.45% πολύ μεγαλύτερη από το αντίστοιχο χαρτοφυλάκιο χωρίς διαφοροποίηση αλλά μικρότερη από την ελάχιστη που χρειάζεται για να καλυφθούν οι υποχρεώσεις του ταμείου.

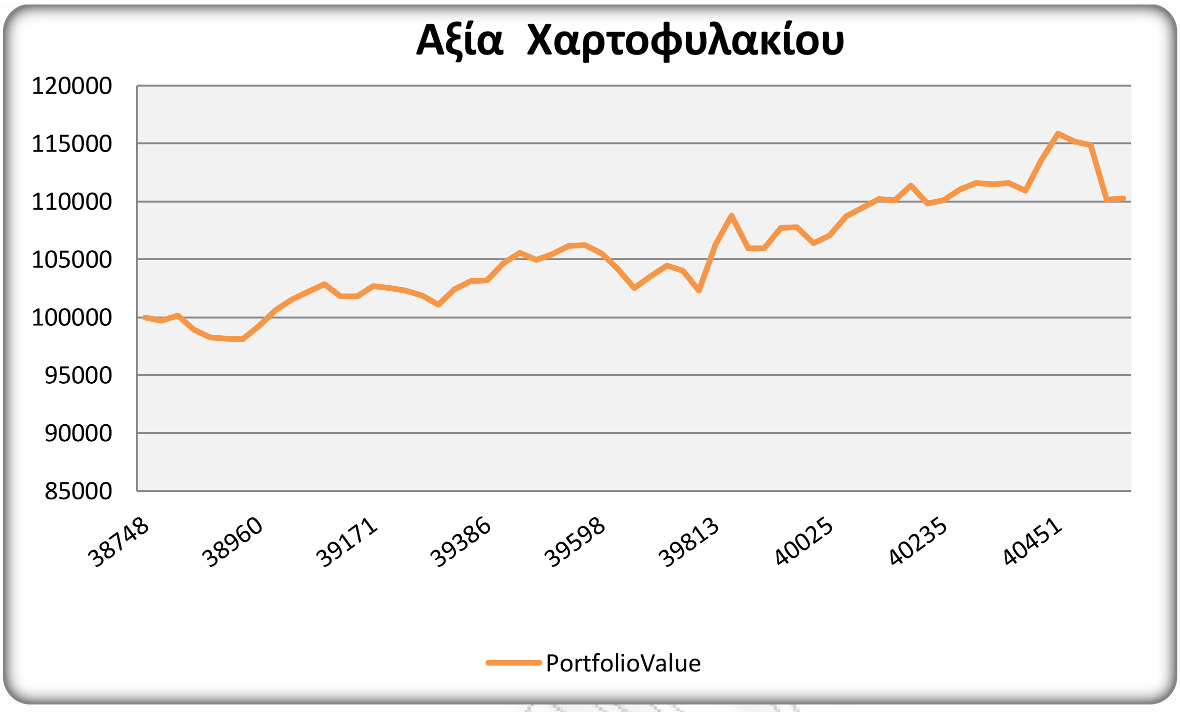
Συνεχίζοντας με το ίδιο τρόπο για τιμές του λ=0.50 η κατανομή του ενεργητικού του ταμείου είναι

Δείκτες /Βάρη		2006	2007	2008	2009	2010
CAC	w_1	0	0	0	0	0
DAX	w_2	0	0	0	0.022969	0
MADRID	w_3	0.055965	0.100008	0.11861	0.009165	0.04357
FTSE100	w_4	0	0	0	0	0
SP500	w_5	0	0	0	0	0
SGBI	w_6	0.4	0.363909	0.081239	0.4	0.4
GGBI	w_7	0	0	0	0	0
FGBI	w_8	0.4	0.4	0.4	0.167867	0.399154
UKGBI	w_9	0	0	0	0	0
USGBI	w_{10}	0.144035	0.136083	0.4	0.4	0.157276

Πίνακας 6.3.5 Πίνακας των βαρών του χαρτοφυλακίου με διαφοροποίηση για $\lambda = 0.50$

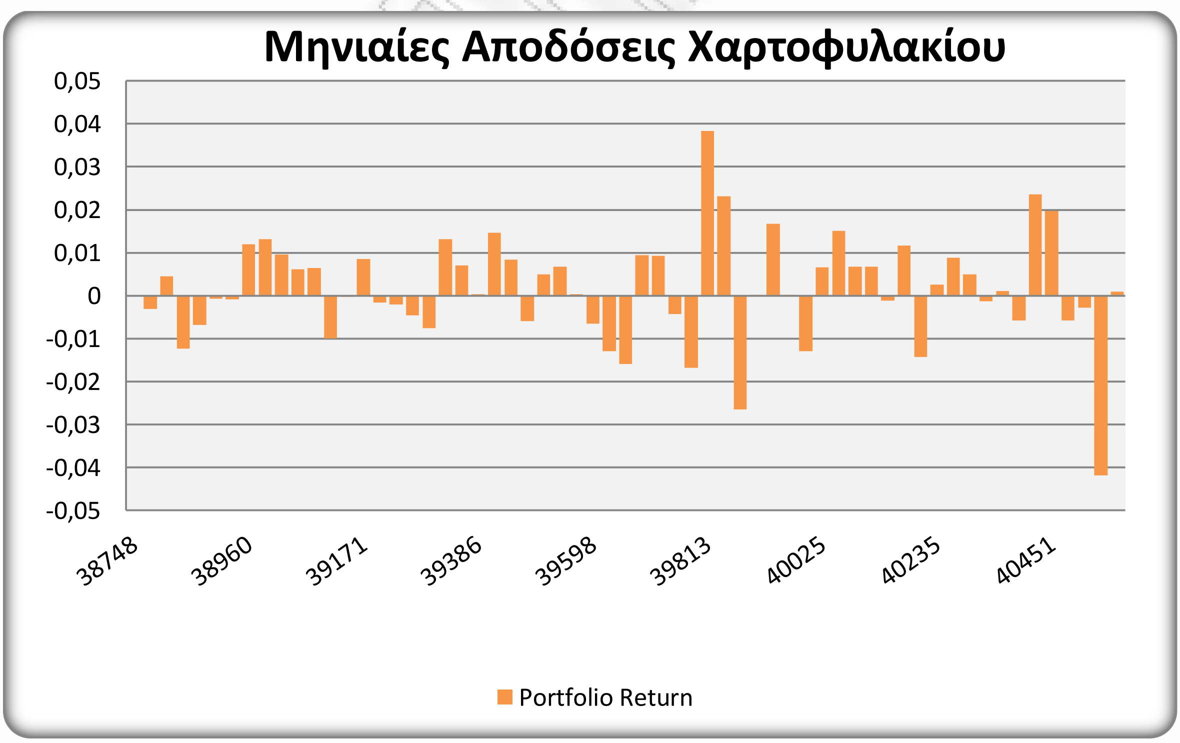
Η διαφορά στην κατανομή των στοιχείων του ενεργητικού του ταμείου στο συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο σε σχέση με το προηγούμενο είναι ότι το ποσοστό επένδυσης στο αμερικανικό δείκτη κρατικών ομολόγων USGBI από 20% τον πρώτο χρόνο γίνεται 14.4% και το υπόλοιπο επενδύεται στον ισπανικό δείκτη τιμών μετοχών MADRID. Τον δεύτερο χρόνο το ποσοστό του ισπανικού δείκτη κρατικών ομολόγων SGBI από 5.8% γίνεται 36.3% ενώ τον τρίτο χρόνο ξαναπέφτει στο 8%. Τον τέταρτο χρόνο ένα πολύ μικρό ποσοστό 2.3% κατανέμεται στον γερμανικό χρηματιστηριακό δείκτη τιμών μετοχών DAX ενώ τον πέμπτο χρόνο παρατηρούμε ότι το ποσοστό επένδυσης στον γαλλικό δείκτη κρατικών ομολόγων FGBI διπλασιάζεται σε σχέση με το χαρτοφυλάκιο με διαφοροποίηση για $\lambda = 0.25$

Το διάγραμμα της αξίας του χαρτοφυλάκιο με διαφοροποίηση για $\lambda = 0.50$ είναι



Διάγραμμα 6.3.5 Εξέλιξη της αξίας του χαρτοφυλακίου με διαφοροποίηση για $\lambda = 0.50$

Ενώ το ιστόγραμμα των μηνιαίων αποδόσεων του χαρτοφυλακίου είναι το παρακάτω



Διάγραμμα 6.3.6 Ιστόγραμμα των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου με διαφοροποίηση για $\lambda = 0.50$

Ο πίνακας των μέτρων κινδύνου και απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι

Monthly Mean Return	Cumulative Return	Volatility	Sharpe Ratio	VaR 0.05	VaR 0.01	CVaR 0.05	CVaR 0.01
0.00163	0.09767	0.01242	0.13112	-0.01597	-0.03274	-0.02833	-0.04178

Πίνακας 6.3.6 Μέτρα κινδύνου και απόδοσης του χαρτοφυλακίου με διαφοροποίηση για $\lambda = 0.50$

Παρόλο που η αποστροφή στον κίνδυνο μεγάλωσε παρατηρούμε μείωση της συνολικής απόδοσης του χαρτοφυλακίου κατά ένα πολύ μικρό ποσοστό που σημαίνει ότι εξακολουθεί να απέχει από την ελάχιστη απόδοση 15.92% που έχει τεθεί στο τέλος του χρονικού ορίζοντα επένδυσης των 5 ετών.

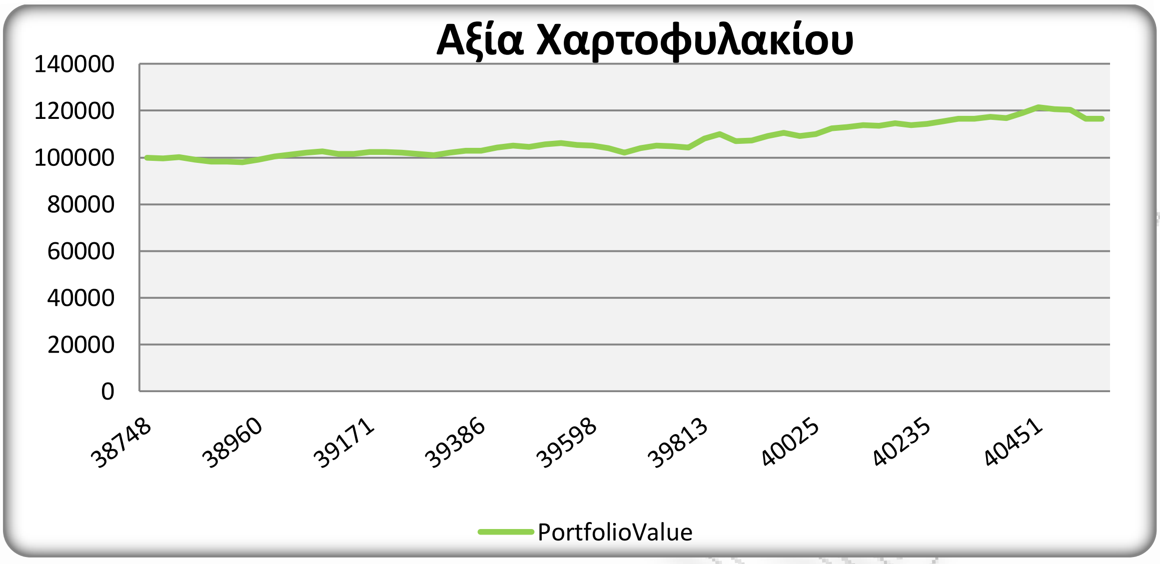
Για τιμές του λ=0.75 η κατανομή των περιουσιακών στοιχείων του ταμείου είναι

Δείκτες /Βάρη		2006	2007	2008	2009	2010
CAC	w_1	0	0	0	0	0
DAX	w_2	0.01764	0.009549	0.046141	0.060389	0.055933
MADRID	w_3	0.051376	0.081605	0.038277	0	0
FTSE100	w_4	0	0	0	0	0
SP500	w_5	0	0	0	0	0
SGBI	w_6	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
GGBI	w_7	0.042522	0	0	0	0.035345
FGBI	w_8	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
UKGBI	w_9	0.016242	0.007145	0	0	0.025902
USGBI	w_{10}	0.07222	0.101701	0.115582	0.139611	0.082821

Πίνακας 6.3.7 Πίνακας των βαρών του χαρτοφυλακίου με διαφοροποίηση για $\lambda = 0.75$

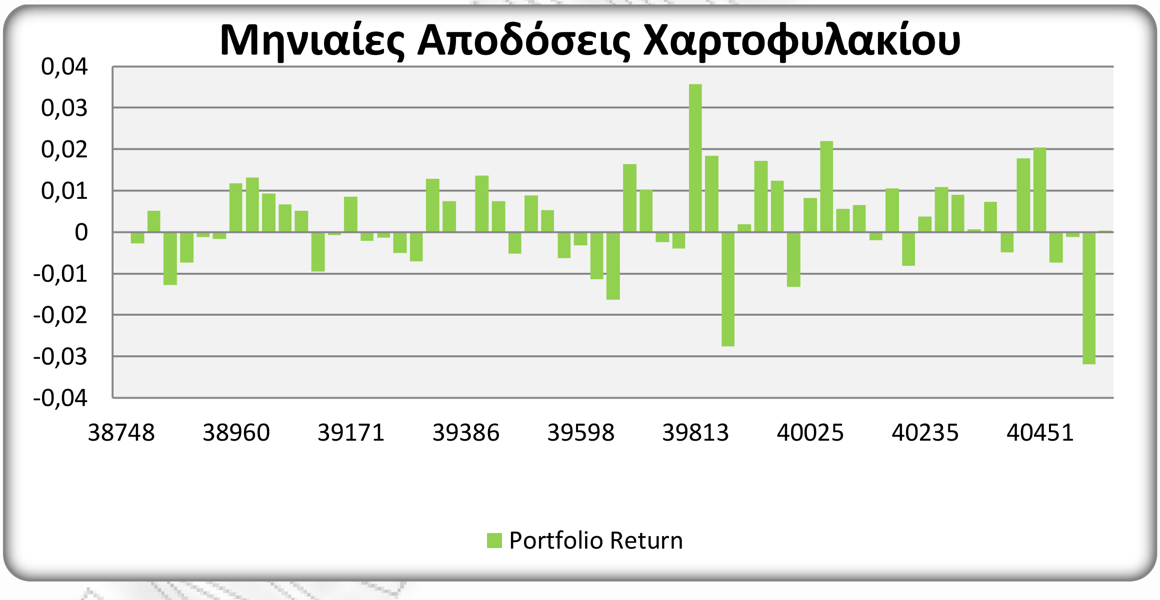
Με βάση των πινάκα 6.3.7 τα περιουσιακά στοιχεία του ταμείου κατανέμονται στους χρηματιστηριακούς δείκτες DAX και MADRID καθώς και σε όλους τους διαθέσιμους δείκτες κρατικών ομολόγων εκτός από την δεύτερη, τρίτη και τέταρτη χρονιά όπου το ποσοστό στον γερμανικό και βρετανικό δείκτη κρατικών ομολόγων είναι μηδενικό. Επίσης ο γαλλικός, ο βρετανικός και ο αμερικανικός χρηματιστηριακός δείκτης τιμών μετοχών δεν είναι στις επιλογές επένδυσης καθ' όλη την διάρκεια.

Το διάγραμμα της αξίας του χαρτοφυλακίου είναι το εξής :



Διάγραμμα 6.3.7 Εξέλιξη της αξίας του χαρτοφυλακίου με διαφοροποίηση για $\lambda = 0.75$

Ενώ το ιστόγραμμα των μηνιαίων αποδόσεων είναι



Διάγραμμα 6.3.8 Ιστόγραμμα των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου με διαφοροποίηση για $\lambda = 0.75$

Και ο πίνακας των μέτρων κινδύνου και απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι

Monthly Mean Return	Cumulative Return	Volatility	Sharpe Ratio	VaR 0.05	VaR 0.01	CVaR 0.05	CVaR 0.01
0.00257	0.15426	0.01159	0.22192	-0.01343	-0.02936	-0.02527	-0.03197

Πίνακας 6.3.8 Μέτρα κινδύνου και απόδοσης του χαρτοφυλακίου με διαφοροποίηση για $\lambda = 0.75$

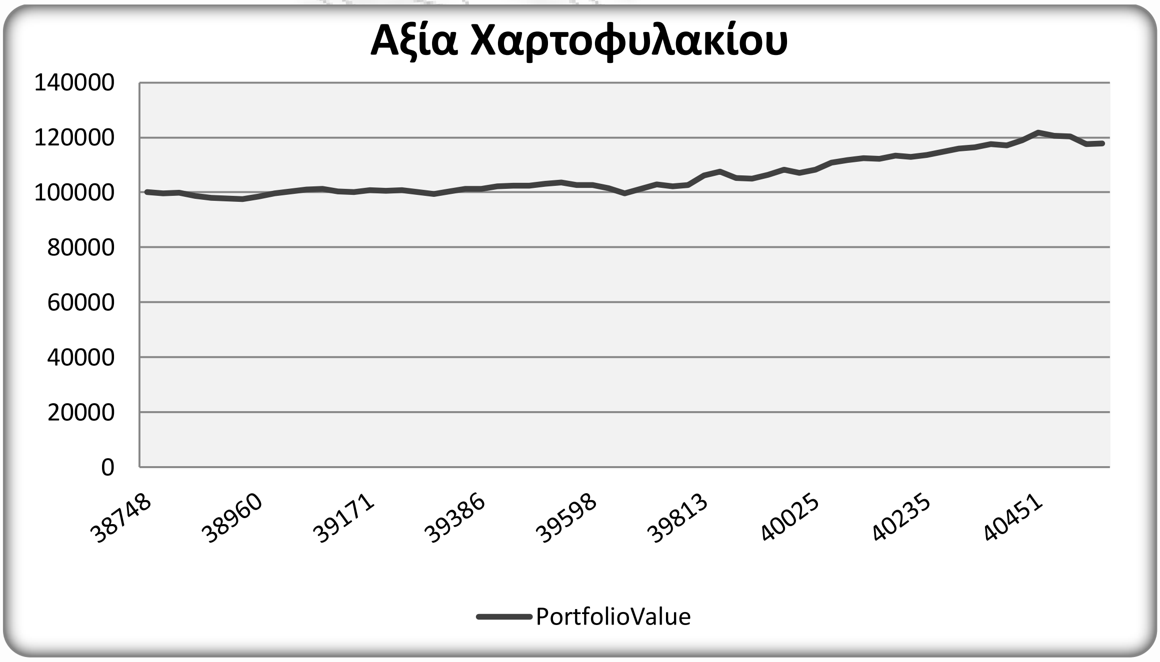
Η συνολική απόδοση ξεπερνά το 15% και είναι πλέον πολύ κοντά στην ελάχιστη συνολική απόδοση που έχει τεθεί ενώ και η διασπορά μειώνεται πάλι στο 0.01159. Μείωση παρατηρούμε επίσης και στη αξία σε κίνδυνο.

Τέλος όταν το λ=1 ο πίνακας των βαρών γίνεται

Δείκτες /Βάρη		2006	2007	2008	2009	2010
CAC	w_1	0.00196	0.015547	0.000882	0	0
DAX	w_2	0.036186	0.021205	0.034991	0.035636	0.021156
MADRID	w_3	0	0	0	0	0
FTSE100	w_4	0.024616	0.056757	0.059208	0.031607	0.069351
SP500	w_5	0.019487	0.008284	0.009118	0.039757	0.013539
SGBI	w_6	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
GGBI	w_7	0.1164	0.086773	0.09132	0.075863	0.091088
FGBI	w_8	0.4	0.4	0.4	0.369554	0.304613
UKGBI	w_9	0.001351	0.011434	0.004481	0.047583	0.100253
USGBI	w_{10}	0	0	0	0	0

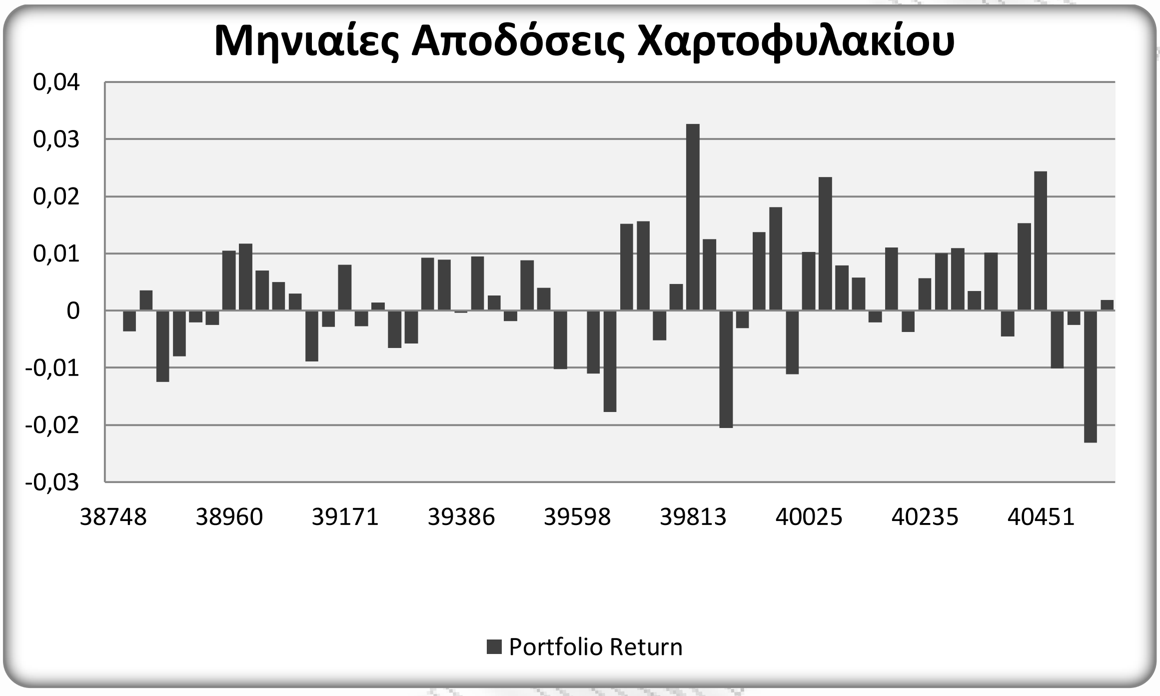
Πίνακας 6.3.9 Πίνακας των βαρών του χαρτοφυλακίου με διαφοροποίηση για $\lambda = 1$

Το διάγραμμα τώρα της αξίας του χαρτοφυλακίου είναι το παρακάτω



Διάγραμμα 6.3.9 Εξέλιξη της αξίας του χαρτοφυλακίου με διαφοροποίηση για $\lambda = 1$

Και οι μηνιαίες αποδόσεις του χαρτοφυλακίου με διαφοροποίηση για λ=1 είναι



Διάγραμμα 6.3.10 Ιστόγραμμα των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου με διαφοροποίηση για $\lambda = 1$

Ενώ ο πίνακας μέτρων κινδύνου και απόδοσης είναι ο παρακάτω

Monthly Mean Return	Cumulative Return	Volatility	Sharpe Ratio	VaR 0.05	VaR 0.01	CVaR 0.05	CVaR 0.01
0.00272	0.16339	0.01077	0.25275	-0.01273	-0.02161	-0.02049	-0.02312

Πίνακας 6.3.10 Μέτρα κινδύνου και απόδοσης του χαρτοφυλακίου με διαφοροποίηση για $\lambda = 1$

Η μέση μηνιαία απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι 0.00272 ενώ η συνολική είναι της τάξεως του 16.33% η οποία είναι μεγαλύτερη από την 15.92% ελάχιστη απόδοση που πρέπει να επιτευχθεί για να καλύψει το ταμείο τις υποχρεώσεις του όπως φαίνεται στον παραπάνω πινάκα των μέτρων κίνδυνου και απόδοσης. Είναι άξιο αναφοράς ότι το χαρτοφυλάκιο με διαφοροποίηση για $\lambda = 1$ έχει μικρότερη συνολική απόδοση σε σχέση με το χαρτοφυλάκιο χωρίς διαφοροποίηση για την ιδία τιμή του λ.

6.4 Χαρτοφυλάκια Siegmann

Στο σημείο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο του Siegmann για να βρούμε τα κατάλληλα βάρη και να επιτύχουμε την μέγιστη απόδοση των χαρτοφυλακίων μας με την ελάχιστη διασπορά. Θα αναλύσουμε το πρόβλημα επένδυσης που αντιμετωπίζει ένα συνταξιοδοτικό ταμείο καθορισμένης παροχής θεωρώντας ότι τη χρονική στιγμή 0 (σήμερα) έχει συνολικό πλούτο W_0 . Το ταμείο τις χρονικές στιγμές T πρέπει να έχει τη δυνατότητα να καλύψει υποχρεώσεις. Η απόφαση που πρέπει να πάρει το συνταξιοδοτικό ταμείο είναι το ποσό x του πλούτου που πρέπει να επενδύσει στα N περιουσιακά στοιχεία για κάθε χρόνο. Το πρόβλημα βελτιστοποίησης που θα εξετάσουμε στην παρούσα εργασία είναι το εξής :

$$\max_{x} \sum_{i=1}^{N} E(r_i) x_i - \lambda \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) y^-(\omega)$$

$$s.t \; y^-(\omega) \geq (1 + r_G(\omega)) W_0 - \sum_{i=1}^{N} E[r_i] x_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = W_0$$

$$x_i \leq x_u$$

Όπου το $\sum_{i=1}^{N} E(r_i) x_i$ είναι η αναμενόμενη συνολική αξία των περιουσιακών στοιχείων του ταμείου, λ είναι η αποστροφή σε περίπτωση ελλείμματος, r_G είναι η ελάχιστη απόδοση που έχει θέσει ως στόχο το ταμείο για μπορέσει να καλύψει τις υποχρεώσεις του, x_u είναι το ποσοστό επένδυσης για κάθε χρόνο του πλούτου του ταμείου στα N περιουσιακά στοιχεία, $y^-(\omega)$ είναι το τυχόν έλλειμμα/πλεόνασμα και $p(\omega)$ είναι η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο ω, δηλαδή η πιθανότητα εμφάνισης ελλείμματος/πλεονάσματος .

Σκοπός του συνταξιοδοτικού ταμείου σύμφωνα με τον Siegmann είναι η μεγιστοποίηση του πλούτου στο τέλος του χρονικού ορίζοντα επένδυσης τιμωρώντας την περίπτωση τυχόν ελλείμματος με ένα ποσό ίσο με τη διαφορά των υποχρεώσεων την χρονική στιγμή T μείον τον πλούτο του ταμείου την ιδία χρονική στιγμή.

Χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο κώδικα από την βιβλιοθήκη της GAMS και έχοντας ως δεδομένα τις ίδιες με τα προηγούμενα χαρτοφυλάκια μηνιαίες αποδόσεις των δεικτών στους οποίους μπορεί να επενδύσει ένα συνταξιοδοτικό ταμείο θα υπολογίσουμε τα κατάλληλα ποσοστά επένδυσης σε κάθε δείκτη έτσι ώστε να δημιουργήσουμε χαρτοφυλάκια με τη βέλτιστη απόδοση.

Όπως και στη δημιουργία των προηγούμενων χαρτοφυλακίων χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο κώδικα από την βιβλιοθήκη Finlib της GAMS θα υπολογίσουμε τα κατάλληλα ποσοστά επένδυσης σε κάθε δείκτη ή αλλιώς «βάρη» έτσι ώστε να δημιουργήσουμε χαρτοφυλάκια με τη βέλτιστη απόδοση με την μόνη διαφορά ότι για να κατασκευάσουμε το χαρτοφυλάκιο της επόμενης χρονιάς θα χρησιμοποιήσουμε τις πραγματικές αποδόσεις μόνο της προηγούμενης χρονιάς. Έτσι λοιπόν την πρώτη φορά έχοντας ως δεδομένα τις πραγματικές αποδόσεις των δεικτών από την 31/1/2005 μέχρι την 31/12/2005 δημιουργούμε το χαρτοφυλάκιο της επόμενης χρονιάς (1/1/2006-31/12/2006). Στην συνέχεια έχοντας αυτή τη φορά ως δεδομένα τις πραγματικές αποδόσεις των δεικτών από την 31-1-2006 έως την 31-12-2006 έτσι έχουμε την βέλτιστη κατανομή επένδυσης των περιουσιακών στοιχείων του ταμείου για την επομένη χρόνια (1/1/2007-31/12/2007. Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία για άλλες 3 φορές έχουμε καταφέρει να δημιουργήσουμε χαρτοφυλάκια για την περίοδο 1/1/2006-31/12/2010 .

Η ελάχιστη απόδοση που πρέπει να επιτύχει το ταμείο και σε αυτό το πρόβλημα βελτιστοποίησης για να καλύψει τις υποχρεώσεις του είναι 3% ετησίως. Για να μπορούμε να συγκρίνουμε τα προηγούμενα χαρτοφυλάκια με αυτά με βάση το μοντέλο του Siegmann έχουμε βρει τα βάρη για τις ίδιες τιμές του λ, δηλαδή για $\lambda = 0$, $\lambda = 0.25$, $\lambda = 0.50$, $\lambda = 0.75$ και $\lambda = 1$

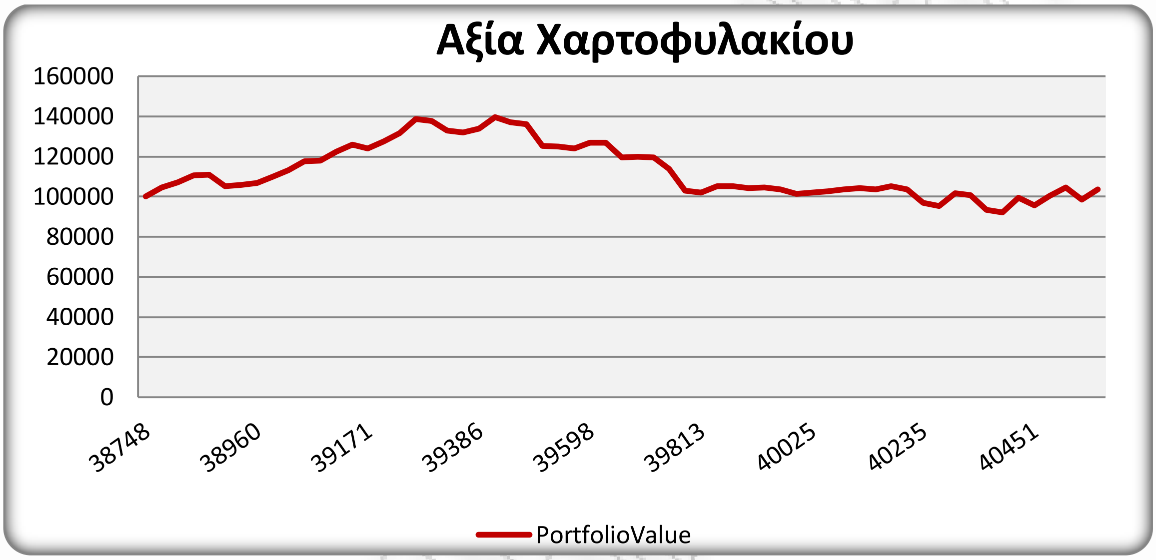
Μελετώντας προσεκτικά το πρόβλημα βελτιστοποίησης του Siegmann παρατηρούμε ότι για $\lambda = 0$ έχουμε την μεγίστη αποστροφή στην περίπτωση ελλείμματος. Τέλος πρέπει να αναφέρουμε ότι για τον υπολογισμό του ποσοστού επένδυσης σε κάθε δείκτη έχουμε θέσει ως μέγιστο ποσοστό επένδυσης σε έναν μόνο δείκτη το 40% των κεφαλαίων όπως και στα χαρτοφυλάκια με διαφοροποίηση.

Έτσι για $\lambda = 0$ ο πινάκας των βαρών του χαρτοφυλακίου είναι

Δείκτες /Βάρη		**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**
CAC	w_1	0.4	0.2	0	0	0
DAX	w_2	0.4	0.4	0.4	0	0.4
MADRID	w_3	0.2	0.4	0.2	0	0.4
FTSE100	w_4	0	0	0	0	0
SP500	w_5	0	0	0	0	0.2
SGBI	w_6	0	0	0	0	0
GGBI	w_7	0	0	0	0.4	0
FGBI	w_8	0	0	0	0.2	0
UKGBI	w_9	0	0	0	0	0
USGBI	w_{10}	0	0	0.4	0.4	0

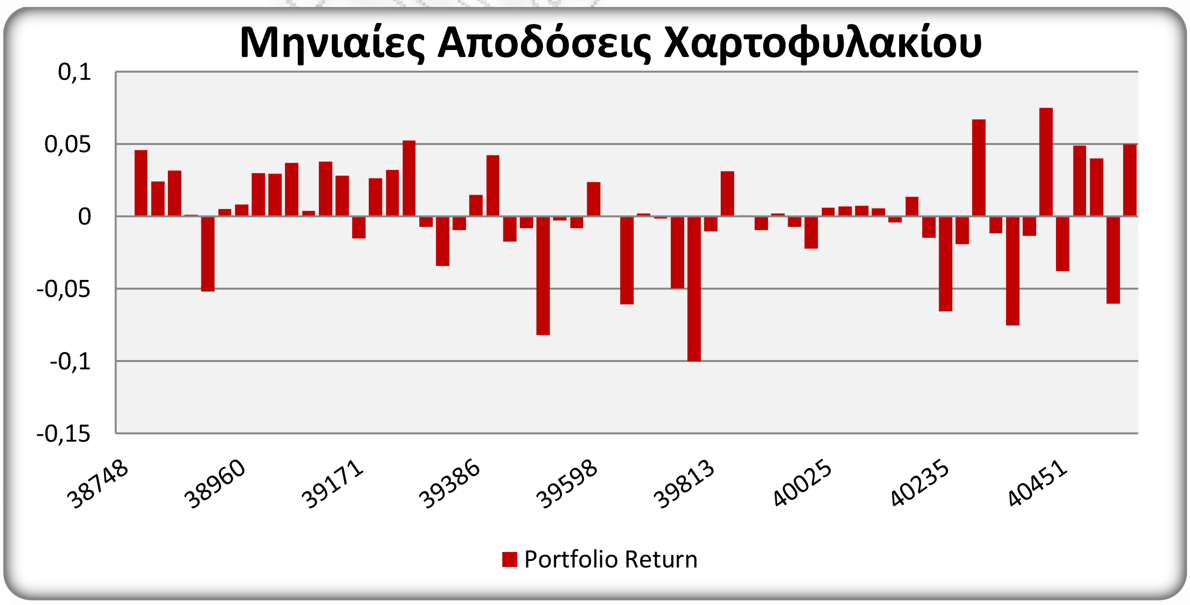
Πίνακας 6.4.1 Πίνακας των βαρών του χαρτοφυλακίου Siegmann για $\lambda = 0$

Όπως παρατηρούμε ο βρετανικός δείκτης τιμών μετοχών FTSE 100 όπως και ο ισπανικός δείκτης κρατικών ομολόγων SGBI και ο βρετανικός πίνακας κρατικών ομολόγων UKGBI δεν είναι ανάμεσα στις βέλτιστες επιλογές επένδυσης του ταμείου κατά την διάρκεια του χρονικού ορίζοντα επένδυσης. Επίσης, τη χρονιά 2009 η βέλτιστη επιλογή είναι να επενδύει το ταμείο τα περιουσιακά του στοιχεία στους δείκτες κρατικών ομολόγων και όχι στους χρηματιστηριακούς δείκτες τιμών μετοχών. Το διάγραμμα της εξέλιξης της αξίας του χαρτοφυλακίου είναι



Διάγραμμα 6.4.1 Εξέλιξη της αξίας του χαρτοφυλακίου Siegmann για $\lambda = 0$

Ενώ το διάγραμμα των μηνιαίων αποδόσεων του χαρτοφυλακίου είναι



Διάγραμμα 6.4.2 Ιστόγραμμα των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου Siegmann για $\lambda = 0$

Ο πίνακας τώρα των μέτρων κίνδυνου και απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι ο παρακάτω

Monthly Mean Return	Cumulative Return	Volatility	Sharpe Ratio	VaR 0.05	VaR 0.01	CVaR 0.05	CvaR 0.01
0.00058	0.03451	0.03646	0.01577	-0.06613	-0.08938	-0.08576	-0.10009

Πίνακας 6.4.2 Μέτρα κινδύνου και απόδοσης του χαρτοφυλακίου Siegmann για $\lambda = 0$

Η μηνιαία απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι θετική όπως και η συνολική του απόδοση, όμως το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο δεν έχει καταφέρει να πετύχει τον στόχο που έχουμε θέσει για απόδοση 3% ετησίως.

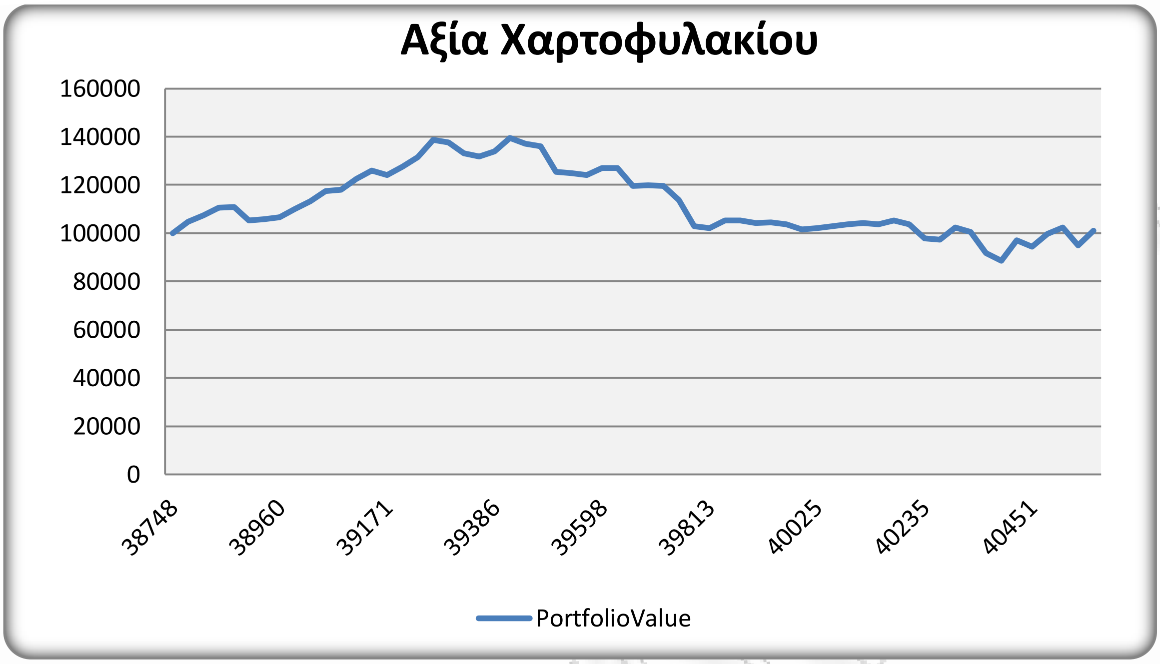
Για τιμές του λ=0.25 και λ=0.50 η βέλτιστη κατανομή των περιουσιακών στοιχείων του ταμείου είναι η ιδία και φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

Δείκτες /Βάρη		2006	2007	2008	2009	2010
CAC	w_1	0.4	0.2	0	0	0
DAX	w_2	0.4	0.4	0.4	0	0
MADRID	w_3	0.029181	0.4	0.2	0	0.4
FTSE100	w_4	0	0	0	0	0.382794
SP500	w_5	0	0	0	0	0.217206
SGBI	w_6	0	0	0	0	0
GGBI	w_7	0	0	0	0.4	0
FGBI	w_8	0	0	0	0.2	0
UKGBI	w_9	0.17089	0	0	0	0
USGBI	w_{10}	0	0	0.4	0.4	0

Πίνακας 6.4.3 Πίνακας των βαρών του χαρτοφυλακίου Siegmann για $\lambda = 0.25$ και $\lambda = 0.50$

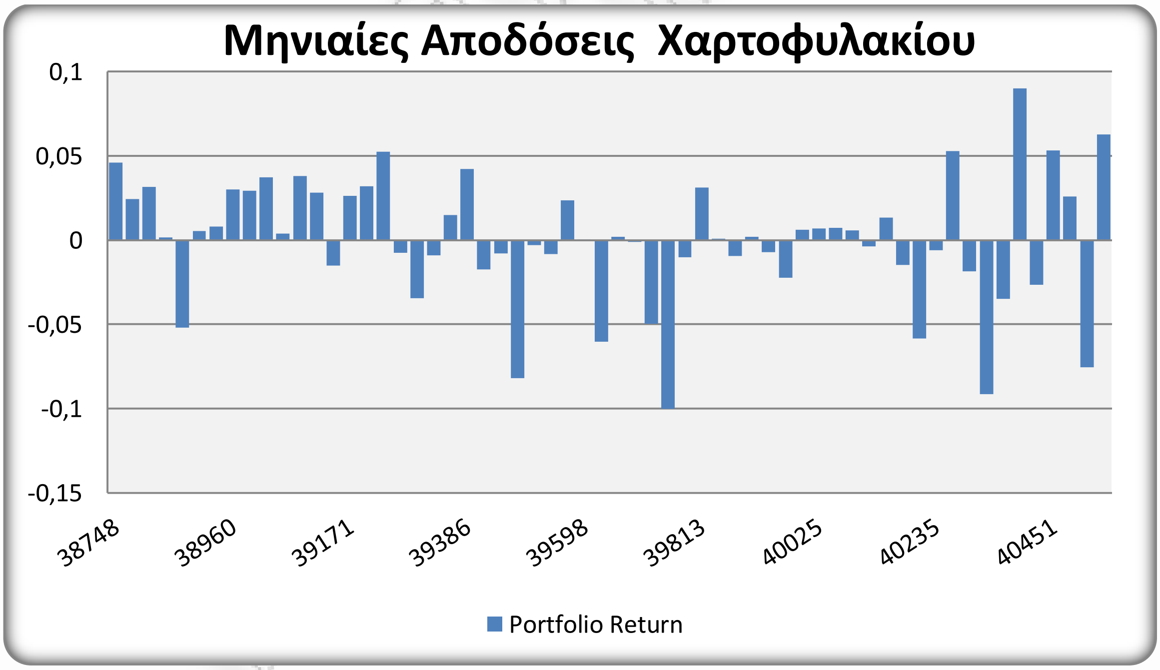
Οπού τον πρώτο χρόνο το 80% των κεφαλαίων επενδύεται στους δείκτες τιμών μετοχών CAC και DAX ενώ το υπόλοιπο ποσοστό μοιράζεται τον ισπανικό δείκτη τιμών μετοχών MADRID και στον βρετανικό δείκτη κρατικών ομολόγων UKGBI με ποσοστά 17.089% και 2.91% αντίστοιχα, καταλήγοντας την χρόνια 2010 στους δείκτες MADRID, FTSE 100 και SP500 με ποσοστά 40% , 38.28% και 21.72% αντίστοιχα.

Η εξέλιξη της αξίας των χαρτοφυλακίων φαίνεται στο διάγραμμα 6.4.3



Διάγραμμα 6.4.3 Εξέλιξη της αξίας του χαρτοφυλακίου Siegmann για λ=0.25 και λ=0.50

Και το αντίστοιχο διάγραμμα των μηνιαίων αποδόσεων των χαρτοφυλακίων είναι



Διάγραμμα 6.4.4 Ιστόγραμμα των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου Siegmann για λ=0.25 και λ=0.50

Ενώ ο πίνακας των μέτρων κίνδυνου και απόδοσης για λ=0.50 και λ=0.25 είναι

Monthly Mean Return	Cumulative Return	Volatility	Sharpe Ratio	VaR 0.05	VaR 0.01	CVaR 0.05	CVaR 0.01
0.00017	0.00999	0.03778	0.00441	-0.07573	-0.09497	-0.09115	-0.10009

Πίνακας 6.4.4 Μέτρα κινδύνου και απόδοσης του χαρτοφυλακίου Siegmann για λ=0.50 και λ=0.25

Η μέση μηνιαία απόδοση των χαρτοφυλακίων είναι θετική καθώς και η συνολική απόδοση τους είναι σχεδόν 1% έχει όμως μειωθεί σε σχέση με το χαρτοφυλάκιο για λ=0. Επίσης, και τα δυο χαρτοφυλάκια δεν έχουν επιτύχει τον στόχο για συνολική απόδοση πάνω από 15.92%.

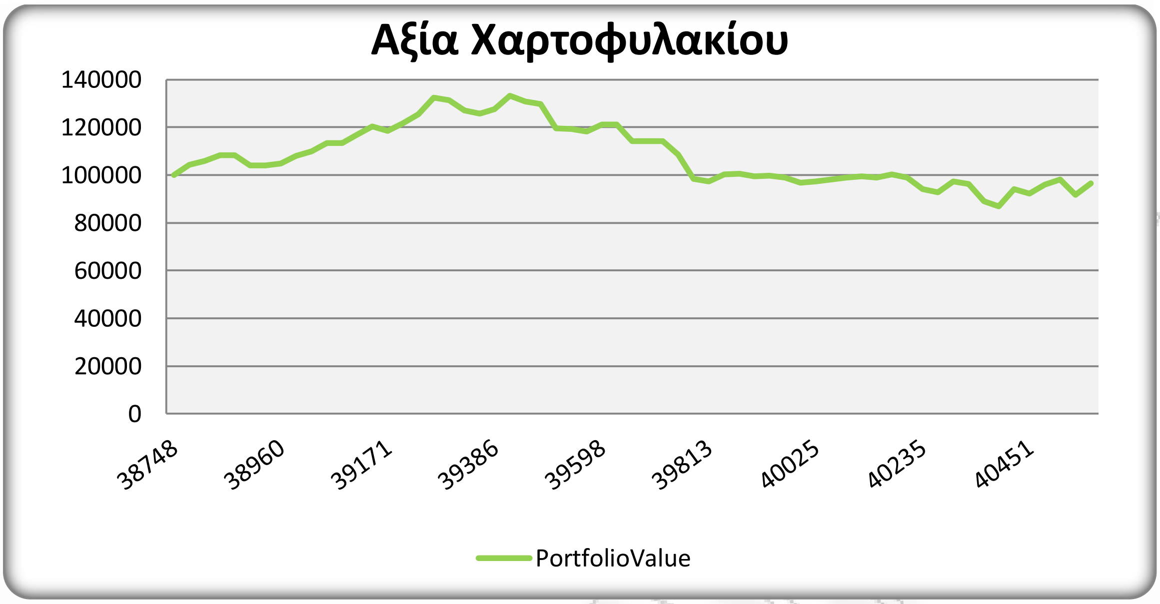
Συνεχίζοντας τώρα με το επόμενο χαρτοφυλάκιο για τιμές του λ=0.75 ο πίνακας των βαρών του χαρτοφυλακίου είναι

Δείκτες /Βάρη		2006	2007	2008	2009	2010
CAC	w_1	0.4	0.2	0	0	0
DAX	w_2	0.4	0.4	0.4	0	0
MADRID	w_3	0.029181	0.4	0.2	0	0.4
FTSE100	w_4	0	0	0	0	0.273634
SP500	w_5	0	0	0	0	0.217976
SGBI	w_6	0	0	0	0	0
GGBI	w_7	0	0	0	0.4	0
FGBI	w_8	0	0	0	0.2	0
UKGBI	w_9	0.17089	0	0	0	0.10839
USGBI	w_{10}	0	0	0.4	0.4	0

Πίνακας 6.4.5 Πίνακας των βαρών του χαρτοφυλακίου Siegmann που προκύπτει για $\lambda = 0.75$

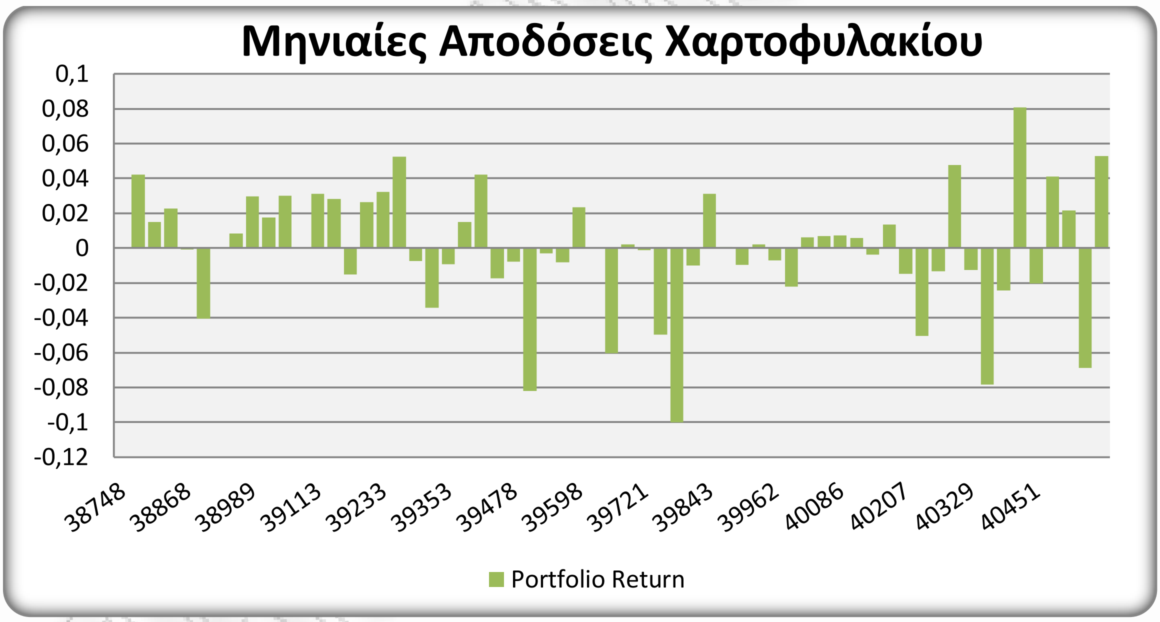
Παρατηρώντας τον πίνακα 6.4.5 και συγκρίνοντας τον με τον αντίστοιχο πίνακα 6.4.3 είναι εμφανές ότι το ποσοστά επένδυσης είναι ακριβώς τα ίδια τις πρώτες 4 χρονιές. Η διαφορά είναι την πέμπτη χρονιά όπου ως βέλτιστη επιλογή είναι οι μετοχικοί δείκτες MADRID, FTSE 100, SP500 και ο βρετανικός δείκτης κρατικών ομολόγων UKGBI με ποσοστά 40%, 26.36%, 21.79% και 10.84% αντίστοιχα.

Τα διάγραμμα της εξέλιξης της αξίας του χαρτοφυλακίου είναι



Διάγραμμα 6.4.5 Εξέλιξη της αξίας του χαρτοφυλακίου Siegmann για $\lambda = 0.75$

Και το αντίστοιχο διάγραμμα των μηνιαίων αποδόσεων του χαρτοφυλακίου είναι



Διάγραμμα 6.4.6 Ιστόγραμμα των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου Siegmann για $\lambda = 0.75$

Ο πίνακας τώρα των μέτρων κίνδυνου και απόδοσης είναι

Monthly Mean Return	Cumulative Return	Volatility	Sharpe Ratio	VaR 0.05	VaR 0.01	CVaR 0.05	CVaR 0.01
-0.00058	-0.03456	0.03466	-0.01662	-0.06943	-0.08938	-0.08682	-0.10009

Πίνακας 6.4.6 Μέτρα κινδύνου και απόδοσης του χαρτοφυλακίου Siegmann για $\lambda = 0.75$

Παρόλο που η αποστροφή στην περίπτωση ελλείμματος μειώθηκε παρατηρούμε μείωση σε σχέση με το χαρτοφυλάκιο για λ=0.50 και λ=0.25. Η συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι αρνητική και απέχει από τη ελάχιστη απόδοση που έχουμε θέσει ως στόχο.

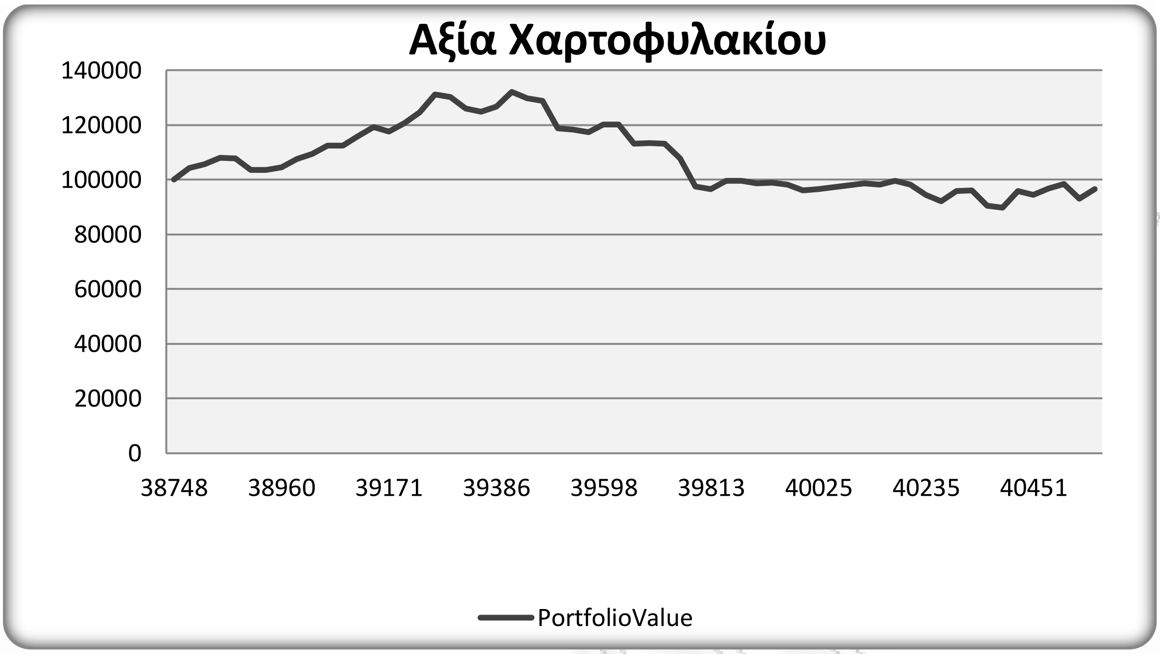
Τέλος για λ=1 έχουμε κατασκευάσει το χαρτοφυλάκιο, που έχει τη δυνατότητα να επενδύσει ένα συνταξιοδοτικό ταμείο για να καλύψει τις υποχρεώσεις του, με τη μεγαλύτερη αποστροφή στην περίπτωση ελλείμματος σε σχέση με τα προηγούμενα χαρτοφυλάκια Siegmann. Ο πίνακας των βαρών του χαρτοφυλακίου είναι ο έξης

Δείκτες /Βάρη		**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**
CAC	w_1	0.4	0.2	0	0	0
DAX	w_2	0.4	0.4	0.4	0	0
MADRID	w_3	0	0.4	0.2	0	0.4
FTSE100	w_4	0	0	0	0	0
SP500	w_5	0	0	0	0	0.326047
SGBI	w_6	0	0	0	0	0
GGBI	w_7	0	0	0	0.4	0
FGBI	w_8	0	0	0	0.2	0
UKGBI	w_9	0.2	0	0	0	0.273953
USGBI	w_{10}	0	0	0.4	0.4	0

Πίνακας 6.4.7 Πίνακας των βαρών του χαρτοφυλακίου Siegmann που προκύπτει για $\lambda = 1$

Μελετώντας τον παραπάνω πινάκα προσεκτικά παρατηρούμε ότι η κατανομή των κεφαλαίων του συνταξιοδοτικού ταμείου τη πρώτη χρόνια τα κεφάλαια κατανέμονται με ποσοστά 40% στον γαλλικό δείκτη τιμών μετοχών CAC , 40% στον γερμανικό DAX και 20% στον βρετανικό δείκτη κρατικών ομολόγων UKGBI, ενώ την τελευταία χρονιά τα ποσοστά επένδυσης σε κάθε δείκτη είναι 40% στον ισπανικό MADRID, 32.6% στον αμερικανικό δείκτη SP500 και 27.4% στον βρετανικό δείκτη κρατικών ομολόγων UKGBI.

Η εξέλιξη της άξιας του χαρτοφυλακίου για λ=1 φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα



Διάγραμμα 6.4.7 Εξέλιξη της αξίας του χαρτοφυλακίου Siegmann για $\lambda = 1$

Ενώ το ιστόγραμμα των μηνιαίων αποδόσεων του χαρτοφυλακίου είναι

Διάγραμμα 6.4.8 Ιστόγραμμα των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου Siegmann για $\lambda = 1$

Και ο πίνακας μέτρων κίνδυνου και απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι ο εξής

Monthly Mean Return	Cumulative Return	Volatility	Sharpe Ratio	VaR 0.05	VaR 0.01	CVaR 0.05	CVaR 0.01
-0.00059	-0.03521	0.03172	-0.01850	-0.06045	-0.08938	-0.08084	-0.10009

Πίνακας 6.4.8 Μέτρα κινδύνου και απόδοσης του χαρτοφυλακίου Siegmann για $\lambda = 1$

Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει η αποστροφή στην περίπτωση ελλείμματος μειώνεται η μηνιαία απόδοση του χαρτοφυλακίου και κατ' επέκταση και η συνολική του απόδοση στο τέλος του χρονικού ορίζοντα. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα το χαρτοφυλάκιο για λ=1 να απέχει από την απόδοση που έχουμε θέσει ως στόχο για να μπορεί το συνταξιοδοτικό ταμείο να καλύψει τις μελλοντικές του υποχρεώσεις .

6.5 Συμπεράσματα

Στην παρούσα διατριβή μελετήσαμε μεθόδους που έχουν προταθεί στη διεθνή βιβλιογραφία για την από κοινού διαχείριση περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων συνταξιοδοτικών σχημάτων καθορισμένης παροχής. Δώσαμε έμφαση στην μοντελοποίηση των περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων ενός συνταξιοδοτικού ταμείου καθορισμένης παροχής και εξετάσαμε επενδυτικές στρατηγικές σε μετοχικούς και ομολογιακούς δείκτες που θα μπορούσε να ακολουθήσει ένα συνταξιοδοτικό ταμείο, έτσι ώστε να είναι σε θέση να καλύψει τις υποχρεώσεις που έχει εγγυηθεί.

Παράρτημα

Π.1 Η κίνηση Brown

Στο σημείο αυτό θα δώσουμε τον ορισμό της κίνησης Brown[69]

Ορισμός : Η κίνηση Brown είναι μια στοχαστική διαδικασία $\mathrm{B_t}$ η όποια παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}$ και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες :

iv) Αν $\mathrm{t_0 < t_1 < \cdots < t_n}$ τότε οι τυχαίες μεταβλητές $\mathrm{B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}}$, ….., $\mathrm{B_{t_n} - B_{t_{n-1}}}$ είναι ανεξάρτητες (έχουμε δηλαδή ανεξάρτητες μεταβολές).

v) Αν $\mathrm{s, t} \geq 0$ τότε ισχύει $\mathrm{B_t - B_s} \sim \mathrm{N(0, t-s)}$ δηλαδή οι μεταβολές της κίνησης Brown είναι κανονικά κατανεμημένες.

vi) Οι τροχιές της κίνησης Brown είναι συνεχείς με πιθανότητα 1, δηλαδή η $\mathrm{t} \rightarrow \mathrm{B_t}$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Οι τρεις αυτές ιδιότητες ορίζουν μια και μοναδική στοχαστική διαδικασία. Αποδεικνύεται μαθηματικά η ύπαρξη μιας στοχαστικής διαδικασίας με τις παραπάνω ιδιότητες.
Η κατανομή του $\mathrm{B_t}$ εξαρτάται από το αρχικό σημείο στο οποίο ξεκινάμε την διαδικασία. Αν $B_0 = x$ τότε η συνάρτηση κατανομής θα συμβολίζεται $P_x(B_t \in A)$ για κάποιο σύνολο Borel A. Το σημείο που θα ξεκινάει η κίνηση Brown θα γίνεται σαφές από το μέτρο πιθανότητας που θα χρησιμοποιείται και αν δεν αναφέρεται τίποτα θα εννοείται ότι ξεκινάμε από το 0. Η κίνηση Brown που ξεκινάει από το 0 αναφέρεται στην βιβλιογραφία και σαν τυπική (standard) κίνηση Brown.

Πρόταση : Αν $\mathrm{B_t}$ είναι μια μονοδιάστατη κίνηση Brown τέτοια ώστε $B_0 = x$ τότε

$$E_x\left[f(B_t)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) dx$$

Στην τυπική κίνηση Brown ισχύει :

---

[69] Γιαννακόπουλος Α.Ν (2003) Σημειώσεις Μαθήματος «Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική», Τόμος Ι: Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση, Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης , Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

$$E\left[f(B_t)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dy$$

.

Συμφώνα με την ιδιότητα (ii) του ορισμού της κίνησης Brown ότι δηλαδή οι μεταβολές της κίνησης Brown είναι κανονικά κατανεμημένες μπορούμε να δείξουμε ότι

$$P(B_t - B_s < a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) dx$$

Συνεπώς η πυκνότητα πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $X = B_t - B_s$

Άρα,

$$E\left[f(B_t - B_s)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) dx$$

Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

$$E\left[B_t - B_s\right] = 0$$

$$E\left[(B_t - B_s)^2\right] = t - s$$

Π.2 Ιδιότητες της κίνησης Brown

Π.2.1 Η ιδιότητα Markov[70]

Δυο πολύ χρήσιμες ιδιότητες στους υπολογισμούς με την κίνηση Brown είναι ότι έχει την ιδιότητα Markov και την ισχυρή ιδιότητα Markov. Η χρήση της ιδιότητας Markov διευκολύνει σημαντικά τον υπολογισμό των υπό συνθήκη μέσων ορισμένων συναρτήσεων της κίνησης Brown ως προς συγκεκριμένες σ-άλγεβρες που σχετίζονται με την ιστορία της κίνησης Brown. Οι υπολογισμοί αυτοί έχουν εφαρμογή στον υπολογισμό των τιμών ορισμένων παραγώγων συμβολαίων. Μια εξίσου σημαντική εφαρμογή είναι στην αρχή της ανάκλασης για τον υπολογισμό των τιμών εξωτικών παραγώγων. Διαισθητικά το ότι η κίνηση Brown έχει την ιδιότητα Markov σημαίνει ότι αν πάρουμε κάποιο $s \geq 0$ τότε η $B_{t+s} - B_s$ είναι μια κίνηση Brown η οποία είναι ανεξάρτητη από το τι συνέβη πριν τη

[70] Γιαννακόπουλος Α.Ν (2003) Σημειώσεις Μαθήματος «Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική», Τόμος Ι: Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση, Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης , Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

χρονική στιγμή s. Έτσι η κίνηση Brown «ξεχνάει» το παρελθόν της και ότι συμβαίνει από την χρονική στιγμή s και μετά εξαρτάται μόνο από την τελική τιμή της κίνησης Brown δηλαδή από το B_s. Επίσης η $B_{t+s} - B_s$ είναι και αυτή μια κίνηση Brown η οποία έχει μέση τιμή 0 και διασπορά $(t+s) - s = t$, παρακολουθώντας της διαδικασία $B_{t+s} - B_s$ είναι σαν να παρακολουθούμε μια διαδικασία Brown η οποία ξεκινάει από το σημείο 0 και τρέχει για χρόνο t.

Για να το δούμε αυτό πιο μαθηματικά χρησιμοποιώντας την έννοια της υπό συνθήκη μέσης τιμής θα έχουμε:

$$E_x\left[f(B_{t+s})\mid F_s\right] = E_{B_s}\left[f(B_t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\frac{1}{\sqrt{2t}}\exp\left(-\frac{(y-B_s)^2}{2t}\right)dy$$

Είναι φανερό ότι μια ισοδύναμη μορφή της ιδιότητας Markov είναι η

$$E_x\left[f(B_t)\mid F_s\right] = E_{B_s}\left[f(B_{t-s})\right], s \le t$$

Η παραπάνω έκφραση μας λέει ότι αν πάρουμε την υπό συνθήκη μέση τιμή κάποιας συνάρτησης της κίνησης Brown τη χρονική στιγμή t έχοντας υπόψη την ιστορία της κίνησης Brown μέχρι τη χρονική στιγμή s αρκεί να υπολογίσουμε την ίδια ποσότητα πάνω σε μια καινούργια κίνηση Brown που ξεκινά από τη θέση που είχε φτάσει η αρχική κίνηση Brown την χρονική στιγμή s δηλαδή την B_s και τρέχει για χρονική διάρκεια t-s. Άρα όλη η ιστορία της αρχικής κίνησης Brown πριν τη χρονική στιγμή s είναι άχρηστη.

Π.2.2 Η ισχυρή ιδιότητα Markov[71]

Η ισχυρή ιδιότητα Markov είναι ότι και η ιδιότητα Markov ισχύει όχι μόνο για αιτιοκρατικούς χρόνους αλλά και για μια συγκεκριμένη κατηγορία τυχαίων χρονών τους χρόνους στάσης.

Πριν συνεχίσουμε θα δώσουμε τον ορισμό του χρόνου στάσης

Ορισμός : Έστω $(F_t)_{t\in I}$ μια διήθηση σε ένα σύνολο Ω, όπου Ι είναι ένα σύνολο δεικτών (όχι απαραίτητα διακριτό). Ένα χρόνος στάσης σχετικά με τη διήθηση αυτή είναι μια απεικόνιση $T : \Omega \rightarrow \mathrm{I}$ τέτοια ώστε $\{T \le t\} \in F_t, \forall t \in I$

[71] Γιαννακόπουλος Α.Ν (2003) Σημειώσεις Μαθήματος «Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική», Τόμος Ι: Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση, Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης , Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Θεώρημα : Έστω B_t μια κίνηση Brown και T ένα πεπερασμένος χρόνος στάσης για την B_t τότε ισχύει ότι $\{B_{t+T} - B_T\}$ είναι μια κίνηση Brown ανεξάρτητη της άλγεβρας F_T

Με βάση το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να δείξουμε ότι αποτελέσματα ανάλογα με την ιδιότητα Markov για αιτιοκρατικούς χρόνους ισχύουν και για κατάλληλα επιλεγμένους τυχαίους χρόνους

Πιο συγκεκριμένα έχουμε

Θεώρημα : Έστω θ_s ο τελεστής μετατόπισης , Y μια φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση και T ένας χρόνος στάσης τότε

$$E_x\left[f(Y \circ \theta_T)|F_T\right] = E_{B_T}\left[Y\right]$$

Όπου f είναι μια φραγμένη συνάρτηση. Η παραπάνω ιδιότητα μας λέει ότι η υπό συνθήκη μέση τιμή της συνάρτησης f υπολογισμένης στη θέση που έφτασε η κίνηση Brown τη χρονική στιγμή t+T δεδομένης της πληροφορίας για την κίνηση Brown ως το χρόνο στάσης T , είναι η μέση τιμή της ίδιας ποσότητας πάνω σε μια κίνηση Brown η οποία ξεκινά στο σημείο B_T που έφτασε η αρχική κίνηση Brown την χρονική στιγμή T και που τρέχει για χρόνο t. Αν σαν f επιλέξουμε την δείκτρια συνάρτηση ενός συνόλου τότε η ιδιότητα Markov μπορεί και να γραφεί σαν μια σχέση πιθανοτήτων

$$P_x\left[B_{t+T} \in A|F_T\right] = P_{B_T}(B_t)$$

Π.2.3 Ιδιότητες martingale της κίνησης Brown[72]

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε ότι η κίνηση Brown είναι martingale και πολλές από τις ιδιότητες της μπορεί να συναχθούν από την ιδιότητα αυτή. Ειδικότερα ισχύει το εξής :

Θεώρημα : Έστω B_t μία κίνηση Brown και $F_s = \sigma(B_u, u \le s)$ η φυσική της διήθηση. Οι παρακάτω στοχαστικές διαδικασίες είναι martingales ως προς τη διήθηση F_s

(i) B_t

(ii) $(B_t)^2 - t$

[72] Γιαννακόπουλος Α.Ν (2003) Σημειώσεις Μαθήματος «Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική», Τόμος Ι: Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση, Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης , Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής της κίνησης Brown είναι η $<B>_t = t$. Αυτό μπορεί να φανεί από το (ii) του παραπάνω θεωρήματος καθώς και από τον ορισμό της διαδικασίας τετραγωνικής μεταβολής για μια martingale. Μπορεί όμως και να δειχθεί και από τον ορισμό της τετραγωνικής μεταβολής ως

$$<B>_t = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2$$

Όπου $\{t_i\}$ είναι μια διαμέριση του $[0,t]$, $\Delta = \sup_i |t_{i+1} - t_i|$ και όριο λαμβάνεται κατά πιθανότητα.

Βιβλιογραφία

Ελληνική βιβλιογραφία

- Ασημακόπουλος Ι. (2004) Άρθρο με θέμα «Η Χρηματοδότηση ενός Ασφαλιστικού Συστήματος : Ανταποδοτικός ή Κεφαλαιοποιητικός Χαρακτήρας».
- Βρόντος Σπ. (2008) Σημειώσεις Μαθήματος «Ειδικά Θέματα Ασφαλίσεων Ζωής», Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- Γιαννακόπουλος Α.Ν (2004) Σημειώσεις Μαθήματος «Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική», Τόμος ΙΙ, Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης , Πανεπιστήμιο Αιγαίου.
- Μπούτσικας Μ. (2005-07) Σημειώσεις Μαθήματος «Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα», Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- Νεκτάριος Μ. (2008) Ασφαλιστική Μεταρρύθμιση με Συναίνεση και Διαφάνεια, Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα 2008.
- Οικονόμου Μ. Σημειώσεις μαθήματος «Συνταξιοδοτικά Σχήματα», Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών-Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.
- Παλαιολόγος Δ. (1996) Ομιλία με θέμα «Κοινωνική Ασφάλιση και Ασφάλεια Ζωής» στο Ελληνικό Ινστιτούτο Ασφαλιστικών Σπουδών.
- Συριόπουλος Κ. (2010) Διαχείριση Κεφαλαίων Ασφαλιστικών Οργανισμών, Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων, Πανεπιστήμιο Πατρών.
- Φράγκος Ν., Γιαννακόπουλος Α., Βρόντος Σπ. Σημειώσεις Μαθήματος (2009) «Τα Οικονομικά-Μαθηματικά της Σύνταξης», Τμήμα Στατιστικής, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθήνας.

Ξένη βιβλιογραφία

- Blake D. (2006) Pension Economics, John Wiley & Sons Ltd, Chichester
- Blake D. (2006) Pension Finance, John Wiley & Sons Ltd, Chichester
- Blake D.(1998) Pension schemes as options on pension fund assets: implications for pension fund management. Insurance: Mathematics and Economics 23(1998): 263-286.
- Benartzi, S. and R. H. Thaler (1995) Myopic loss aversion and the equity premium puzzle. Quarterly Journal of Economics, 110: 73–92.
- Boender, C. G. and M. Vos (2000) Risk-return budgeting at pension plans. In R. Layard-

Lieschling (ed.), Risk Budgeting: A Cutting-Edge Guide to Enhancing Fund Management. New York: The Institutional Investor Inc., pp. 80–88.

- Boender, C. G. E. (1997) A hybrid simulation/optimization scenario model for asset/liability management, European Journal of Operational Research, 99: 126–135.
- Boulier, J.-F., S. Michel, and V. Wisnia (1996) Optimizing investment and contribution policies of a defined benefit pension fund. In Proceedings of the 6th AFIR International Colloquium, Volume 1, pp. 593–607.
- Boulier, J.-F., E. Trussant, and D. Florens (1995) A dynamic model for pension funds management. In Proceedings of the 5th AFIR International Colloquium, pp. 361–384.
- Cairns, A. J. G. and Parker G. (1997) Stochastic pension fund modeling, Insurance: Mathematics and Economics 21(1997): 43-79.
- Cairns, A. J. G. (2000) Some notes on the dynamics and optimal control of stochastic pension fund models in continuous time, Astin Bulleting, 30(1) : 19–55.
- Cairns A.J.K (2004). Pension-fund Mathematics, Encyclopedia of Actuarial Science, Wiley.
- Campbell, J. Y. and L. M. Viceira (2002) Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-Term Investors, Oxford: Oxford University Press.
- Carin˜ o, D. R., T. Kent, D. H. Myers, C. Stacy, M. Sylvanus, A. C. Turner, K. Watanabe, and W. T. Ziemba (1994) The russell-yasuda kasai model: an asset/liability model for a Japanese insurance company using multistage stochastic programming. Interfaces, 24: 29–49.
- Delong Lucasz, Gerrard Russell and Haberman S. (2007) Mean-variance optimization problems for an accumulation phase in a defined benefit plan. Insurance: Mathematics and Economics 42(2008): 107-118.
- Dempster M.A.H, Germano M., Medova E.A, Murphy J.K , Ryan D & SandrinI F (2009) Risk profiling defined benefit pension schemes. Journal Portfolio Management, Summer 2009: 1-27.
- Dert, C. L. (1995) Asset liability management for pension funds: a multistage chance constrained programming approach. Ph.D. thesis, Erasmus University, Rotterdam.
- Fombellida Ricardo-Josa, Juan Pablo Rincon-Zapatero (2006) Optimal investment decisions with a liability: The case of defined benefit pension plans. Insurance: Mathematics and Economics 39(2006): 81-98.
- Fombellida Ricardo-Josa, Juan Pablo Rincon-Zapatero (2007) Mean-variance portfolio and contribution selection in stochastic pension funding. European Journal of Operational Research 187(2008) :120-137.
- Haberman, S., C. Day, D. Fogarty, M. Z. Khorasanee, N. Nash, B. Ngwira, I. D. Wright, and Y. Yakoubov (2003a) A stochastic approach to risk management and decision making in

defined benefit pension schemes. British Actuarial Journal, 9(3) : 493–568.

- Haberman, S., M. Z. Khorasanee, B. Ngwira, and I. D. Wright (2003b) Risk measurement and management of defined benefit pension schemes: a stochastic approach. IMA Journal of Management Mathematics, 14(2) : 111–128.
- Haberman, S. and J.-H. Sung (1994) Dynamic approaches to pension funding. Insurance: Mathematics and Economics, 15(1) : 151–162.
- Haberman, S. and J.-H. Sung (2002) Dynamic programming approach to pension funding: the case of incomplete state information. Astin Bulletin, 32(1) : 129–142.
- Harlow, W. V. (1991) Asset allocation in a downside-risk framework. Financial Analysts Journal (September–October): 28–40.
- Hiller, R. S. and J. Eckstein (1993) Stochastic dedication: designing fixed income portfolios using massively parallel benders decomposition. Management Science, 39(11): 1422–1438.
- Hirshleifer, D. (2001) Investor psychology and asset pricing. Journal of Finance, 56(4) : 1533–1597.
- Huang Hong-Chih and Cairns A.J.G (2005) On the control of defined-benefit pension plans. Insurance: Mathematics and Economics, 38(2006) : 113-131.
- Kahneman, D. and A. Tversky (1979) Prospect theory: an analysis of decision under risk. Econometrica, 47: 263–291.
- Kusy, M. I. and W. T. Ziemba (1986) A bank asset and liability management model. Operations Research, 34(3) : 356–376.
- Leibowitz, M. L., S. Kogelman, and L. N. Bader (1992) Asset performance and surplus control: a dual-shortfall approach. Journal of Portfolio Management (Winter): 28–37.
- Leibowitz, M. L., S. Kogelman, and L. N. Bader (1994) Funding ratio return. Journal of Portfolio Management, 21(1) : 39–47.
- Maranas, C. D., I. P. Androulakis, C. A. Floudas, A. J. Berger, and J. M. Mulvey (1997) Solving long-term financial planning problems via global optimization. Journal of Economics Dynamics and Control, 21: 1405–1425.
- Markowitz, H. M. (1952) Portfolio selection. Journal of Finance, 7(1) : 77–91.
- Martellini Lionel (2006) Managing Pension Assets: from Surplus Optimization to Liability-Driven Investment. EDHEC Risk and Management Research Centre: 1-18.
- Medova E.A., Murphy J.K., Owen A.P. & Rehman K. (2008). Individual asset liability management. Quantitative Finance, 8.6, 547-560.
- Mei Choi Chiu and Duan Li (2006) Asset and Liability management under a continuous-time mean-variance optimization framework. Insurance: Mathematics and Economics 39: 330-355
- Milevsky Mosce A.(2006) The Calculus of retirement income. Cambridge University Press.

- Modigliani F.(2005) The collective papers of Franco Modigliani, Volume 6, Massachusetts Institute of Technology.
- Oba Akihike and Syunsuke Kasuga .Dynamic models for investment of pension fund assets: The Sundaresan-model approach, Financial Research Center of the Nomura Securities Co.Ltd :375-386.
- Owadally, M. I. and S. Haberman (2004) Efficient amortization of actuarial gains/losses and optimal funding in pension plans. North American Actuarial Journal, 8(1) : 21–36.
- Prigent Jean-Luc (2007) Portfolio Optimization and Performance Analysis, Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series.
- Randall, J. and S. Satchell (1997) An analysis of the hedging approach to modelling pension fund liabilities. Pensions Institute Discussion Paper PI-9714, Birkbeck College, University of London.
- Shiller Robert J. (1993) "MACROMARKETS" Creating Institutions for Managing Society's Largest Economic Risks, Oxford University press
- Shleifer, A. (2000) Inefficient Markets: An Introduction to Behavioral Finance. Oxford: Oxford University Press.
- Siegmann, A. H. and A. Lucas (2005) Discrete-time financial planning models under loss averse preferences. Operations Research, 53(3) : 15–32.
- Siegmann, A. H (2007) Optimal Investment policies for defined benefit pension funds. Cambridge University Press: 1-20.
- Sortino, F. A. and R. Van der Meer (1991) Downside risk : capturing what's at stake in investment situations. Journal of Portfolio Management (Summer): 27–31.
- Tonguan Yang (2003) Defined Benefit pension plan liabilities and international asset allocation. Fifth Annual Joint Conference of the Retirement Research Consortium :1-20
- Vigna, E. and S. Haberman (2001) Optimal investment strategy for defined contribution pension schemes. Insurance: Mathematics and Economics, 28(2) : 233–262.
- Winklevoss H. (1993). Pension Mathematics with Numerical Illustrations, Second Edition, Philadelphia : University of Pennsylvania Press.
- Zenios, S. A. (1995) Asset/liability management under uncertainty for fixed-income securities. Annals of Operations Research, 59: 77–97.
- Zenios, S. A. (2007) Scenario optimization asset and liability modeling for individual investors. Annals of Operations Research, 152: 167-191.
- Zenios, S. A., M. R. Holmer, R. McKendall, and C. Vassiadou-Zeniou (1998) Dynamic models for fixed-income portfolio management under uncertainty. Journal of Economic Dynamics and Control, 22: 1517–1541.

- Ziemba, W. T. and J. M. Mulvey (eds) (1998) Worldwide Asset and Liability Modeling. Cambridge University Press

Ιστοσελίδες

- www.ypakp.gr Υπουργείο Απασχόλησης και Κοινωνικής Προστασίας.
- www.investopedia.com
- www.bloomberg.com