



Πανεπιστήμιο Πειραιώς
Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Διδακτική της Τεχνολογίας και Ψηφιακά Συστήματα»

«ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ»

Φουρλάς Δημήτριος

«Η εργασία υποβάλλεται για τη μερική κάλυψη των απαιτήσεων με στόχο την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Σπουδών στη Διδακτική της Τεχνολογίας και τα Ψηφιακά Συστήματα»

ΜΑΙΟΣ 2011

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΔΑΛΗ

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

ΓΑΛΕΡΙΟ ΤΕΡΑΙΑ

Ευχαριστίες

Θερμές ευχαριστίες εκφράζω στον Επίκουρο Καθηγητή κο Χρήστο Ξενάκη για τη βοήθεια και την καθοδήγηση που μου παρείχε για την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου, αλλά κυρίως για το κίνητρο που δεν ήταν άλλο από την επιθυμία συγγραφής μιας εργασίας -επέκταση κάποιο τρόπο- στη Θεωρία της Πληροφορίας, η οποία θα ήταν ευανάγνωστη, απλή και κατανοητή, ελκυστική αλλά και «παραπεμπτική» σε περαιτέρω εμβάθυνση για όλους τους φοιτητές, νεοεισερχόμενους στα Ψηφιακά Συστήματα.

Πολλές ευχαριστίες επίσης σε συναδέλφους και φίλους συμφοιτητές για την παροχή κάθε είδους βοήθειας όπως παροχή πληροφοριών, συγγραμμάτων, συμβουλών, προτάσεων αλλά κυρίως γόνιμης κριτικής, η οποία μπορεί μεν να μην ήταν ευχάριστη τις περισσότερες φορές, συνετέλεσε δε με τον καλύτερο τρόπο στην προσπάθεια ολοκλήρωσης της εργασίας αυτής.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ	7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΣΗΜΑΤΑ	10
1.1 ΕΙΔΗ/ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΣΗΜΑΤΩΝ	10
1.2 ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΣΗΜΑΤΑ	14
1.3 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΣΗΜΑΤΩΝ	21
1.4 ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ	24
1.4.1 Η διαμόρφωση (modulation)	25
1.4.2 Η μετατροπή αναλογικού σήματος σε ψηφιακό (Analog-to-Digital Conversion -A/D-)	34
1.4.3 Η Πολυπλεξία	38
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	42
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΗΜΑΤΩΝ	44
2.1 ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ (ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ FOURIER)	47
2.2 ΟΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ FOURIER	50
2.3 ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ) ΣΗΜΑΤΩΝ. ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ (ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ) FOURIER	52
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	67
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ	69
3.1 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ	70
3.1.1 Συστήματα με ή χωρίς μνήμη	72
3.1.2 Αιτιοκρατικά συστήματα	72
3.1.3 Ευσταθή συστήματα	73
3.1.4 Χρονικά αμετάβλητα συστήματα	74
3.1.5 Γραμμικά Συστήματα	74
3.1.6 Διασύνδεση Συστημάτων	75
3.1.7 Γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα	76
3.2 ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ	77
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ	79
4.1 ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ	80
4.1.1 Σήματα περιορισμένου εύρους ζώνης	81
4.1.2 Διαδικασία δειγματοληψίας	81
4.1.3 Παράδειγμα	84
4.2 ΦΥΣΙΚΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ	91
4.3 ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ	92
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	94
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	95

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΕΙΚΟΝΩΝ

ΕΙΚΟΝΑ 1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ	8
ΕΙΚΟΝΑ 2. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΡΤΙΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ	12
ΕΙΚΟΝΑ 3. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΕΡΙΤΤΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ	12
ΕΙΚΟΝΑ 4. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ	13
ΕΙΚΟΝΑ 5. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ	13
ΕΙΚΟΝΑ 6. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΟΝΑΔΙΑΙΑΣ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ	14
ΕΙΚΟΝΑ 7. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΟΝΑΔΙΑΙΑΣ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ	15
ΕΙΚΟΝΑ 8. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΟΝΑΔΙΑΙΑΣ ΑΝΑΡΡΙΧΗΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ	15
ΕΙΚΟΝΑ 9. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΗΜΙΑΝΟΡΘΩΜΕΝΟΥ ΗΜΙΤΟΝΙΚΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ	16
ΕΙΚΟΝΑ 10. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΛΗΡΩΣ ΑΝΟΡΘΩΜΕΝΟΥ ΗΜΙΤΟΝΙΚΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ	17
ΕΙΚΟΝΑ 11. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΕΚΘΕΤΙΚΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ ΜΕ S ΑΡΝΗΤΙΚΟ ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ	18
ΕΙΚΟΝΑ 12. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΕΚΘΕΤΙΚΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ ΜΕ S ΘΕΤΙΚΟ ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ	18
ΕΙΚΟΝΑ 13. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΠΑΛΜΟΥ	19
ΕΙΚΟΝΑ 14. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΘΕΤΙΚΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΠΑΛΜΟΥ	19
ΕΙΚΟΝΑ 15. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ	21
ΕΙΚΟΝΑ 16. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΡΙΟΝΩΤΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ	21
ΕΙΚΟΝΑ 17. ΣΧΗΜΑΤΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΚΑΙ ΑΠΟΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΣΗΜΑΤΩΝ	26
ΕΙΚΟΝΑ 18. ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΠΛΑΤΟΥΣ	28
ΕΙΚΟΝΑ 19. ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ AM	29
ΕΙΚΟΝΑ 20. ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ FM	30
ΕΙΚΟΝΑ 21. ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΦΑΣΗΣ	34
ΕΙΚΟΝΑ 22. ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ	37
ΕΙΚΟΝΑ 23. ΠΟΛΥΠΛΕΞΙΑ	38
ΕΙΚΟΝΑ 24. FDM	40
ΕΙΚΟΝΑ 25. TDM	41
ΕΙΚΟΝΑ 26. ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ $m(t)$, ΠΕΡΙΟΔΟΥ T ΩΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΑΠΕΙΡΩΝ ΜΗΓΑΔΙΚΩΝ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΡΩΝ (ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΣΕΙΡΑ FOURIER)	46
ΕΙΚΟΝΑ 27. ΜΕΤΑΠΤΩΣΗ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΣΤΗΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ	47
ΕΙΚΟΝΑ 28. ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΨΗΦΙΑΚΟ	79
ΕΙΚΟΝΑ 29. ΡΟΛΟΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ	80
ΕΙΚΟΝΑ 29. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ FS ΣΕ ΣΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ FB... ..	82
ΕΙΚΟΝΑ 30. ΣΥΣΤΗΜΑ ΙΔΑΝΙΚΗΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ	84
ΕΙΚΟΝΑ 31. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ	92
ΕΙΚΟΝΑ 32. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ ΜΕ ΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ	93

Εισαγωγή

Σε πολλές βιβλιογραφίες γίνονται πολλές αναφορές σε θέματα πληροφορίας, ποσότητας πληροφορίας, μεταφορά πληροφορίας κτλ. Τί είναι όμως πραγματικά πληροφορία και πώς αυτή μεταφέρεται;

Τα απλά γνωστά σε εμάς σήματα είναι γενικά φορείς πρωτογενούς πληροφορίας, περιέχουν τις μεταβολές αυτής της πληροφορίας συναρτήσει του χρόνου και η μελέτη τους (αυτών των μεταβολών) χαρακτηρίζει κάποιο φυσικό μέγεθος, που με τη σειρά του χαρακτηρίζει κάποιο σύστημα κατά τη διάρκεια του φαινομένου που εξελίσσεται, όπως π.χ. φωνής, εικόνας. Για παράδειγμα, το μικρόφωνο του μικροτηλεφώνου μετατρέπει τα ηχητικά κύματα της φωνής σε ένα ηλεκτρικό σήμα (που μεταδίδεται μέσω της γραμμής), ένας εικονολήπτης μετατρέπει τις φυσικές εικόνες σε ένα σύνθετο ηλεκτρικό σήμα που εμπεριέχει την πληροφορία για τη φωτεινότητα και τη χρωματικότητα των εικόνων αυτών κτλ. Οι μεταβολές αυτού του μεγέθους συναρτήσει π.χ. του χρόνου, αντιπροσωπεύουν συνήθως κάποιες πληροφορίες.

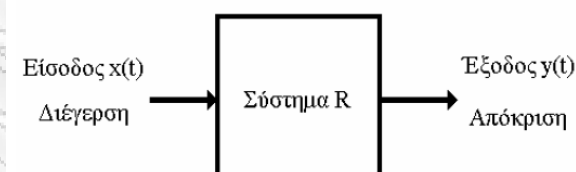
Με αυτή την ευρεία έννοια, σήματα μπορεί να είναι ένα ηλεκτρικό ρεύμα, μια απογραφή πληθυσμού, μια ακουστική πίεση, μια στατιστική έρευνα, οι μηνιαίες τιμές του πληθωρισμού, ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα, κλπ. Άρα, τα σήματα γενικά είναι φορείς πληροφοριών - μέσω των τιμών των μεταβολών ενός φυσικού μεγέθους, που χαρακτηρίζει το σύστημα από το οποίο παράγονται, οπότε τελικά θα μπορούσαμε να δώσουμε τον εξής απλό και περιεκτικό ορισμό: **Σήμα ονομάζουμε, το σύνολο των τιμών που μπορεί να πάρει ένα φυσικό μέγεθος.**

Παρακάτω γίνεται μια κατηγοριοποίηση των σημάτων σε χρονοσυνεχή (μεταβλητή ο χρόνος t) και σε χρονοδιακριτά (διακριτή μεταβλητή χρόνου n), η οποία συνεχίζεται λαμβάνοντας υπόψη διάφορες ιδιότητες των σημάτων (αυτή η κατηγοριοποίηση αναφέρεται σε ηλεκτρικά σήματα που υπακούουν σε κάποιο καθορισμένο μαθηματικό τύπο οπότε και μπορούν να μελετηθούν καλύτερα μέσω των μαθηματικών μοντέλων και λογικών). Αυτά είναι τα λεγόμενα αιτιοκρατικά ή ντετερμινιστικά σήματα. Κατόπιν, παρουσιάζονται τα κυριότερα

αναλογικά σήματα που χρησιμοποιούνται στις επικοινωνίες απεικονίζοντας τη μεταβολή τους συναρτήσει του χρόνου $x(t)$. Στη συνέχεια, δίνονται και οι βασικότερες χαρακτηριστικές τιμές αναλογικών και ψηφιακών σημάτων (μέση και ενεργός τιμή, ενέργεια και ισχύς).

Για να γίνει όμως η μελέτη των αιτιοκρατικών σημάτων, θα πρέπει να δουλέψουμε είτε στο πεδίο του χρόνου, κάτι το οποίο έχει μεγάλη δυσκολία στην έκταση και υλοποίηση των υπολογισμών είτε στο πεδίο της συχνότητας, που από μαθηματικής απόψεως είναι πολύ απλούστερο. Έτσι, η δημιουργία και η σπουδαιότητα της φασματικής αναπαράστασης έγκειται στο γεγονός ότι η $M(f)$ (Φασματική συνάρτηση) παρέχει πληροφορίες για το συχνотικό περιεχόμενο του σήματος και συνεπώς διευκολύνει τη μελέτη της διέλευσης και επεξεργασίας του από τηλεπικοινωνιακές διατάξεις και συστήματα. Τα δύο βασικά εργαλεία για τη μετάβαση και μετατροπή από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας είναι οι σειρές Fourier και ο μετασχηματισμός Fourier.

Σήματα σαν τα προαναφερθέντα εμφανίζονται συνήθως σε συνδυασμό με κάποιο σύστημα, όπου ως σύστημα ορίζεται ο παράγοντας που «κανονίζει» το είδος της μεταβολής και με τη βοήθεια του οποίου συνδέεται η έξοδος του (απόκριση) με την είσοδό του (διέγερση). Στην πιο απλή μορφή ένα σύστημα είναι όπως αυτό του παρακάτω σχήματος (Εικόνα 1), όπου το σήμα εισόδου $x(t)$ μπορεί να αντιπροσωπεύει κάποιο μήνυμα, το σύστημα να είναι η συσκευή μέτρησης/δημιουργίας της μεταβολής και το $y(t)$ να είναι η μέτρηση/απεικόνιση της μεταβολής του $x(t)$.



Εικόνα 1. Παράδειγμα συστήματος.

Κατόπιν, γίνεται μια μικρή ανάλυση της διαδικασίας της Δειγματοληψίας, η οποία δεν είναι τίποτα άλλο από τη διαδικασία μετατροπής ενός αναλογικού σήματος σε ψηφιακό. Αναφέρονται οι βασικές προϋποθέσεις για τη σωστή δειγματοληψία και

η εφαρμογή τους, καθώς η σωστή δειγματοληψία προηγείται της σωστής κωδικοποίησης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΑΙΑ

Κεφάλαιο 1 Σήματα

1.1 Είδη/Κατηγορίες σημάτων

Οι δύο βασικές κατηγορίες σύμφωνα με τη σύγχρονη διεθνή βιβλιογραφία, στις οποίες μπορούμε να χωρίσουμε τα είδη σημάτων-συναρτήσεων σε σχέση μόνο με το είδος της ανεξάρτητης μεταβλητής και λαμβάνοντάς τες υπόψη ως συναρτήσεις του χρόνου, αφορούν τα 2 βασικά είδη σημάτων:

α) Τα χρονο-συνεχή σήματα (continuous time signals), όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι συνεχής και συμβολίζονται $x(t)$

και

β) Τα χρονο-διακριτά σήματα (discrete time signals), όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι διακριτή και συμβολίζονται $x(n)$.

Αυτά χωρίζονται με τη σειρά τους σε υποκατηγορίες.

Σημείωση: Αν επίσης τα σήματα παράγονται από πολλαπλές πηγές και μπορούν να αναπαρασταθούν με τη μορφή διανύσματος τότε καλούνται και πολυδιαυλικά σήματα και αν κάθε συνιστώσα του διανύσματος είναι συνάρτηση περισσότερων της μιας ανεξάρτητων μεταβλητών τότε καλείται και πολυδιάστατο.

A. Χρονοσυνεχή σήματα (ανεξάρτητη μεταβλητή συνεχής)

Αναλογικά Σήματα (Analog signal) ή **Σήματα συνεχούς χρόνου** (continuous time signal) λέγονται αυτά που εκφράζονται από συναρτήσεις $f(t)$, όπου τόσο η ανεξάρτητη μεταβλητή t όσο και η εξαρτημένη μεταβλητή $f(t)$, παίρνουν συνεχείς τιμές, δηλαδή όπου τόσο το πεδίο ορισμού όσο και το πεδίο τιμών είναι συνεχή διαστήματα, είναι ένα αναλογικό σήμα, όπως επίσης αναλογικά σήματα είναι η έξοδος ενός μικροφώνου, η έξοδος μιας κοινής πρίζας ή ενός τροφοδοτικού.

Σήματα συνεχούς χρόνου-διακριτού πλάτους είναι αυτά που εκφράζονται από συναρτήσεις με συνεχή ανεξάρτητη μεταβλητή και διακριτή εξαρτημένη, (δηλαδή ο χρόνος μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή, ενώ το πλάτος μόνο συγκεκριμένες τιμές), όπως π.χ. τα σήματα των σύγχρονων ηλεκτρονικών ψηφιακών κατασκευών.

B. Τα χρονοδιακριτά σήματα, (ανεξάρτητη μεταβλητή διακριτή)

Ψηφιακά Σήματα (Digital signals) λέγονται αυτά που εκφράζονται μαθηματικά από ακολουθίες $x(n)$, όπου τόσο η ανεξάρτητη μεταβλητή (n) όσο και η εξαρτημένη μεταβλητή $x(n)$, παίρνουν μόνο διακριτές τιμές, δηλαδή τόσο το πεδίο ορισμού όσο και το πεδίο τιμών είναι διακριτά σύνολα (συνήθως σύνολα ακέραιων αριθμών) π.χ. παλμοί τάσεων από παλμοτροφοδοτικό.

Τα ψηφιακά σήματα είναι και τα πιο ενδιαφέροντα σήμερα στις εφαρμογές, όπου συνήθως παράγονται από δειγματοληψία (sampling) ενός αναλογικού σήματος μέσω Η/Υ.

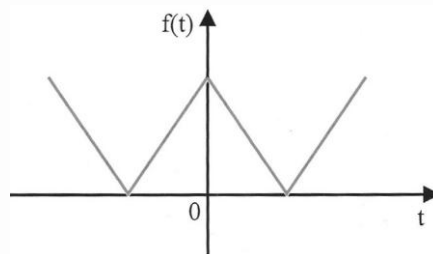
Δηλαδή, σε αναγκαστικά περιορισμένο αριθμό τιμών του χρόνου (δειγματοληψία ανά χρονικές τιμές-συνήθως ακεραίων (n)), αποθηκεύονται στη συγκεκριμένη χωρητικότητας μνήμη του Η/Υ, οι αντίστοιχες ακέραιες τιμές $x(n)$ του σήματος εκφρασμένες σε περιορισμένο αριθμό ψηφίων στο δυαδικό σύστημα - κβαντισμένες τιμές).

Σήματα διακριτού χρόνου (discrete time signals) είναι αυτά που εκφράζονται από ακολουθίες $x(n)$, όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή (n) παίρνει διακριτές τιμές, ενώ η εξαρτημένη $x(n)$ παίρνει συνεχείς τιμές.

(Και τα σήματα διακριτού χρόνου προκύπτουν συχνά από χρονο-συνεχή αναλογικά σήματα μέσω της δειγματοληπτικής διαδικασίας σε Η/Υ, όπως π.χ. στα ραντάρ, σε δείκτες της οικονομετρίας ή της δημογραφίας, κλπ.).

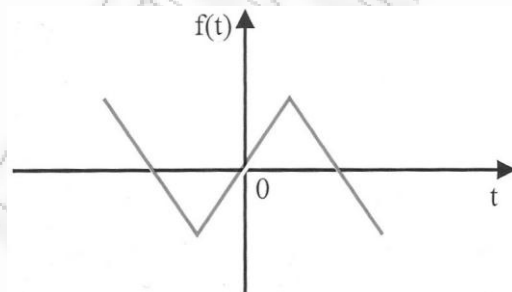
Ως προς τη συμμετρία τους τα διακρίνουμε επίσης ως:

Άρτια σήματα είναι τα σήματα που περιγράφονται με άρτιες συναρτήσεις του χρόνου και ισχύει $f(t)=f(-t) \forall t$. Είναι εύκολο να διακρίνουμε ότι αυτά τα σήματα έχουν ως άξονα συμμετρίας τον κατακόρυφο άξονα y .



Εικόνα 2. Γραφική παράσταση άρτιου σήματος

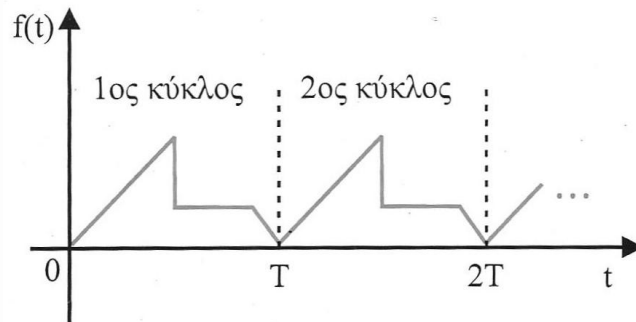
Περιττά σήματα είναι τα σήματα που περιγράφονται με περιττές συναρτήσεις του χρόνου και ισχύει $f(t)=-f(-t) \forall t$. Είναι εύκολο να διακρίνουμε ότι αυτά τα σήματα έχουν ως κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.



Εικόνα 3. Γραφική παράσταση περιττού σήματος

Ως προς την περιοδικότητά τους τα διακρίνουμε ως:

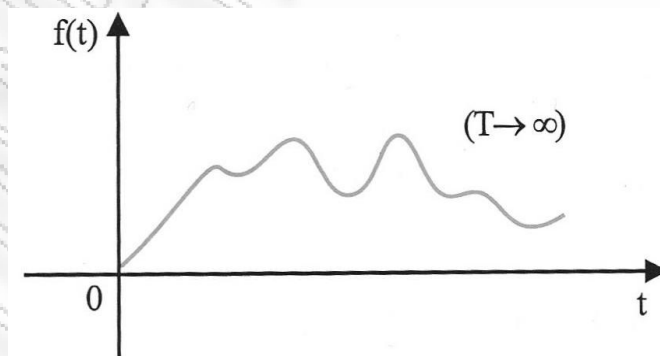
Περιοδικά σήματα είναι τα σήματα που περιγράφονται με περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου όπου ισχύει $f(t)=f(t+T) \forall t$ και $T>0$, όπου T το χρονικό διάστημα στο οποίο το σήμα παίρνει όλες τις τιμές του και το T ονομάζεται περίοδος.



Εικόνα 4. Γραφική παράσταση περιοδικού σήματος

Το τμήμα του περιοδικού σήματος που ολοκληρώνεται κι επαναλαμβάνεται ονομάζεται κύκλος και ο χρόνος που απαιτείται για να γίνει αυτό δεν είναι άλλος από τον T . Η συχνότητα f δεν είναι άλλη από το πλήθος των κύκλων στη μονάδα του χρόνου.

Απεριοδικά σήματα είναι τα σήματα τα οποία περιγράφονται με μη περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου.



Εικόνα 5. Γραφική παράσταση μη περιοδικού σήματος

Ως προς το πεδίο τιμών τους τα διακρίνουμε επίσης ως:

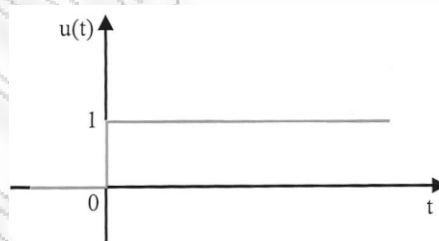
Αιτιοκρατικά ή ντετερμινιστικά σήματα είναι τα σήματα που υπακούουν σε κάποιο καθορισμένο μαθηματικό τύπο (μαθηματικοποίηση των σημάτων οπότε μπορούν να μελετηθούν καλύτερα μέσω των μαθηματικών μοντέλων και λογικών) και εκφράζονται ως μια συνάρτηση ή ακολουθία, μιας ή περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών, έτσι ώστε σε κάθε τιμή του χρόνου να αντιστοιχεί και μοναδική τιμή του σήματος.

Στατιστικά ή στοχαστικά ή τυχαία σήματα είναι τα σήματα των οποίων η μεταβολή γίνεται κατά τυχαίο τρόπο και δεν υπακούει σε κάποιο μαθηματικό τύπο και έτσι η τιμή τους κάθε χρονική στιγμή είναι τυχαία.

1.2 Στοιχειώδη σήματα

Μοναδιαία βηματική συνάρτηση (unit step function) $u(t)$

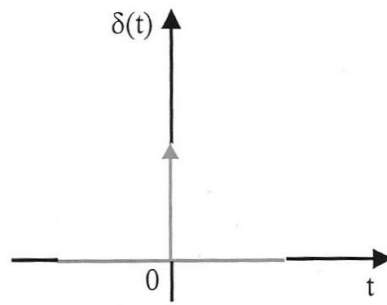
$$u(t) = \begin{cases} 0 & \dots \alpha \nu \dots t \leq 0 \\ 1 & \dots \alpha \nu \dots t \geq 0 \end{cases}$$



Εικόνα 6. Γραφική παράσταση μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης

Μοναδιαία κρουστική συνάρτηση (unit impulse function) $\delta(t)$

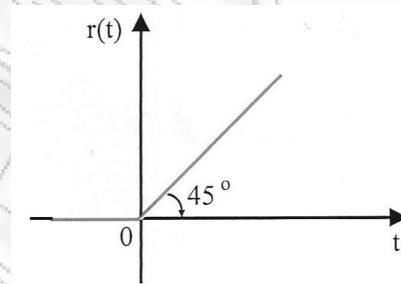
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty \dots \alpha \nu \dots t = 0 \\ 0 \dots \alpha \nu \dots t \neq 0 \end{cases}$$



Εικόνα 7. Γραφική παράσταση μοναδιαίας κρουστικής συνάρτησης

Μοναδιαία αναρριχητική συνάρτηση (unit ramp function) $r(t)$

$$r(t) = \begin{cases} 0 \dots \alpha \nu \dots t \leq 0 \\ t \dots \alpha \nu \dots t \geq 0 \end{cases}$$



Εικόνα 8. Γραφική παράσταση μοναδιαίας αναρριχητικής συνάρτησης

Παρατήρηση: Μεταξύ των παραπάνω συναρτήσεων ισχύει:

$$[r(t)]' = u(t)$$

$$\text{Και } [u(t)]' = \delta(t)$$

Αρμονικό σήμα (ή τριγωνομετρικό σήμα)

Μία άλλη κατηγορία σημάτων που έχουν ιδιαίτερη σημασία στην ανάλυση τηλεπικοινωνιακών συστημάτων είναι τα αρμονικά σήματα. Ένα σήμα της κατηγορίας αυτής είναι κάθε σήμα της μορφής:

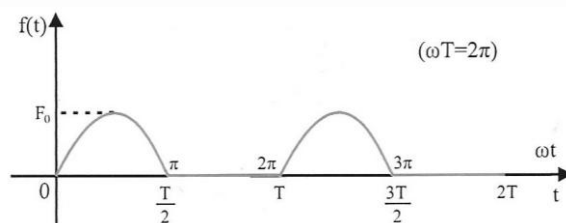
$$f(t) = e^{j(2\pi f_0 t + \theta)} = \cos 2\pi f_0 t + \theta + j \sin 2\pi f_0 t + \theta \quad (1.1)$$

Επειδή η συνάρτηση $f(t)$ είναι μιγαδική, σημαντικό ρόλο παίζουν τόσο το πραγματικό όσο και το φανταστικό της μέρος.

Τόσο τα αρμονικά σήματα όσο και το πραγματικό-φανταστικό τους μέρος είναι περιοδικά σήματα με περίοδο $T = \frac{1}{f_0}$.

Ημιανορθωμένο ημιτονικό σήμα

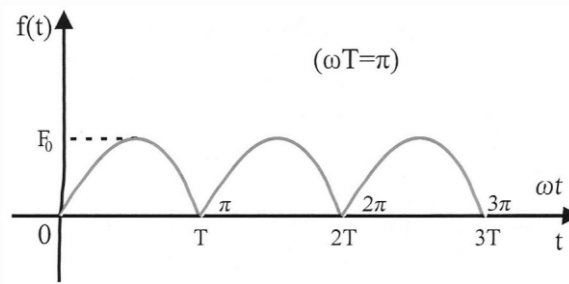
$$f(t) = \begin{cases} F_0 \sin \omega t \dots, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 \dots, & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$



Εικόνα 9. Γραφική παράσταση ημιανορθωμένου ημιτονικού σήματος

Πλήρως ανορθωμένο ημιτονικό σήμα

$$f(t) = F_0 \sin \omega t, \dots 0 \leq t \leq T$$



Εικόνα 10. Γραφική παράσταση πλήρως ανορθωμένου ημιτονικού σήματος

Εκθετικά σήματα

Τα σήματα αυτά αποτελούν μια πολύ σημαντική κατηγορία σημάτων και έχουν γενικά τη μορφή:

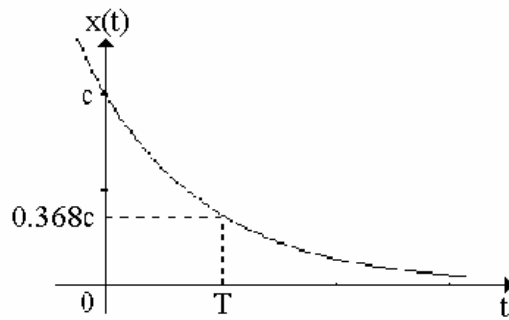
$$x(t) = ce^{st} \quad (1.2)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η σταθερά s μπορεί να έχει τιμές πραγματικές (θετικές ή αρνητικές) ή μιγαδικές, διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

α) s αρνητικός και πραγματικός

$$\text{Αν } s = \frac{-1}{T} \quad (T > 0), \quad \text{τότε } x(t) = ce^{-\frac{t}{T}} \quad (1.3)$$

και το σήμα έχει τη μορφή που φαίνεται και στην Εικόνα 11. Η σταθερά T ονομάζεται σταθερά χρόνου και δίνει το ρυθμό ελάττωσης του σήματος. Συγκεκριμένα, $x(T) = 0.368c$, ενώ $x(5T) = 0.0067c$, οπότε κάποιος μπορεί να εκτιμήσει ότι μετά από χρόνο $t = 5T$, το σήμα είναι αμελητέο.

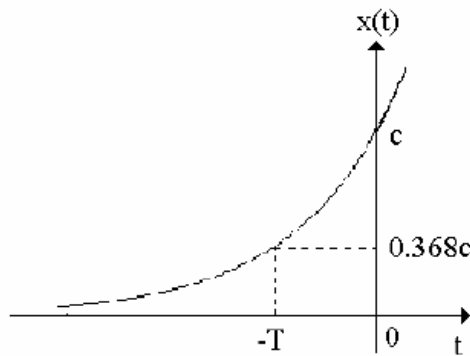


Εικόνα 11. Γραφική παράσταση εκθετικού σήματος με s αρνητικό και πραγματικό

β) s θετικός και πραγματικός

Αν $s = \frac{1}{T}$, τότε $x(t) = ce^{\frac{t}{T}}$ (1.4)

και το σήμα έχει τη μορφή που φαίνεται στην Εικόνα 22. Τα συμπεράσματα είναι ανάλογα με αυτά της προηγούμενης περίπτωσης.



Εικόνα 12. Γραφική παράσταση εκθετικού σήματος με s θετικό και πραγματικό

γ) s μιγαδικός

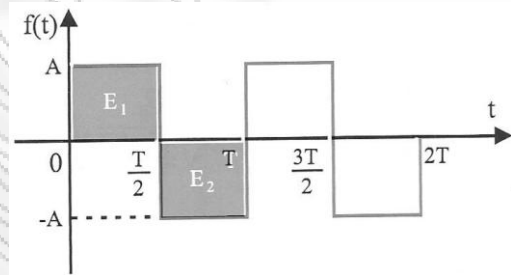
Αν $s = i\omega$, τότε $x(t) = ce^{i\omega t} = c(\cos\omega t + i\sin\omega t)$ (1.5)

και το σήμα αυτό είναι στην ουσία ένα «μιγαδικό ημιτονοειδές σήμα» με περίοδο

$T = \frac{2\pi}{\omega}$. Είναι προφανές ότι το μέτρο του $x(t)$ είναι ίσο με $|c|$.

Τετραγωνικός παλμός

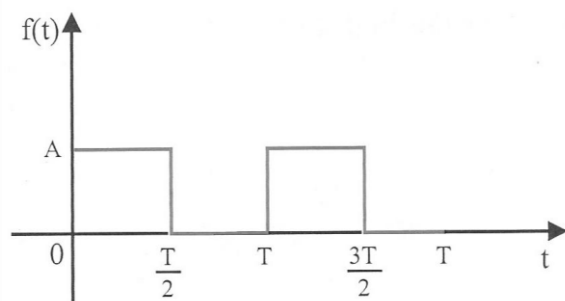
$$f(t) = \begin{cases} A \dots\dots, 0 \leq t \leq \left(\frac{T}{2}\right)^- \\ -A \dots\dots, \left(\frac{T}{2}\right)^+ \leq t \leq T^- \end{cases}$$



Εικόνα 13. Γραφική παράσταση τετραγωνικού παλμού

Θετικός τετραγωνικός παλμός

$$f(t) = \begin{cases} A \dots\dots, 0^+ \leq t \leq \left(\frac{T}{2}\right)^- \\ 0 \dots\dots, \left(\frac{T}{2}\right)^- \leq t \leq T^- \end{cases}$$



Εικόνα 14. Γραφική παράσταση θετικού τετραγωνικού παλμού

Η συνάρτηση δειγματοληψίας

Μια συνάρτηση με ιδιαίτερα πρακτικό ενδιαφέρον είναι η συνάρτηση δειγματοληψίας, η οποία συνήθως συμβολίζεται με $Sa(t)$ και ορίζεται από τη σχέση:

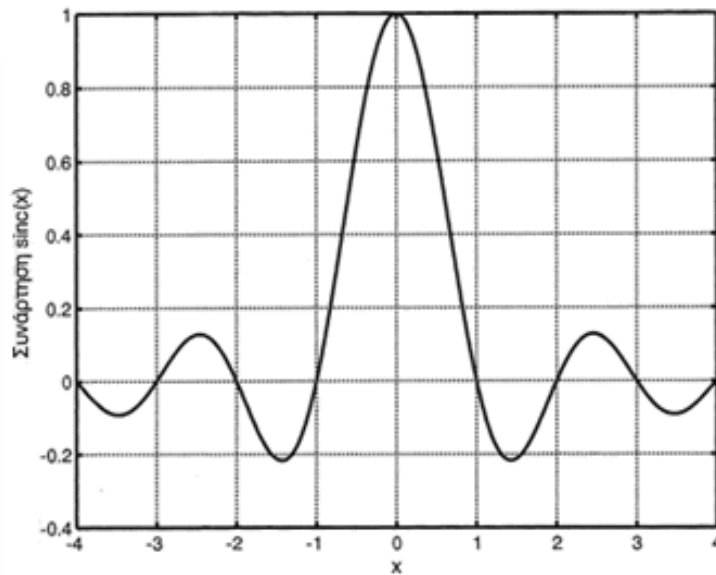
$$Sa(t) = \frac{\sin t}{t} \quad (1.6)$$

ή πιο γενικά $Sa(at) = \frac{\sin at}{at} \quad (1.7)$

και η μορφή της δίνεται στην Εικόνα 15. Η συνάρτηση δειγματοληψίας $Sa(t)$ είναι άρτια συνάρτηση, με απόλυτη μέγιστη τιμή στο μηδέν $Sa(0) = 1$, ενώ μηδενίζεται στα σημεία $t = \pm n\pi (n = 1, 2, \dots)$. Τέλος, τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης δειγματοληψίας παρουσιάζονται στο μέσο περίπου των αποστάσεων μεταξύ των σημείων μηδενισμού, δηλαδή στα σημεία

$t_n = \pm(n + \frac{1}{2})\pi$, για τα οποία ισχύει $|\sin t_n| = 1$. Η προσέγγιση αυτή γίνεται ακριβέστερη καθώς το t_n απομακρύνεται από το μηδέν, ενώ οι τιμές της συνάρτησης στις θέσεις των τοπικών ακρότατων δίνονται προσεγγιστικά από τη σχέση:

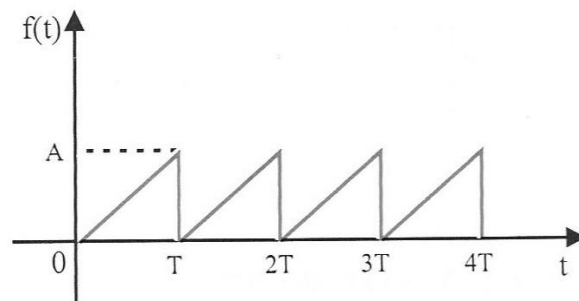
$$Sa\left[\pm(n + \frac{1}{2})\pi\right] = \frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi} \quad (1.8)$$



Εικόνα 15. Γραφική παράσταση συνάρτησης δειγματοληψίας

Πριονωτό σήμα

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t \dots 0 \leq t \leq T$$



Εικόνα 16. Γραφική παράσταση πριονωτού σήματος

1.3 Χαρακτηριστικές τιμές σημάτων

Μέση τιμή

Σε αναλογικά σήματα η μέση τιμή ορίζεται ως:

$$f_{av} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \quad (1.9)$$

Επειδή το ολοκλήρωμα αντιστοιχεί με το εμβαδό του σήματος στο συγκεκριμένο διάστημα, η μέση τιμή ορίζεται επίσης και ως:

$$f_{av} = \frac{\text{Εμβαδό...σήματος...στο...διάστημα..}[a,b]}{b-a} \quad (1.10)$$

Λαμβάνοντας θετικές τις τιμές που βρίσκονται επάνω από τον άξονα του t και αρνητικές τις τιμές που βρίσκονται κάτω από αυτόν.

Αν τώρα το σήμα είναι αναλογικό περιοδικό, οι παραπάνω σχέσεις γίνονται :

$$f_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (1.11)$$

Ή ισοδύναμα $f_{av} = \frac{\text{Εμβαδό περιόδου}}{T} \quad (1.12)$

Σε ψηφιακά σήματα η μέση τιμή ορίζεται ως εξής:

$$f_{av} = \frac{\sum_{k=1}^n f_k}{n} \quad (1.13)$$

Όπου $f_k = f(t_k)$ για $K=1,2,3,\dots,n$ είναι οι τιμές του σήματος στις συγκεκριμένες χρονικές στιγμές t_k .

Ενεργός τιμή

Στην περίπτωση του αναλογικού σήματος η ενεργός τιμή του ορίζεται από τη σχέση (1.14):

$$f_{rms} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(t) dt} \quad (1.14)$$

Στο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα $[a, b]$.

Στην περίπτωση που το σήμα είναι αναλογικό περιοδικό, η αντίστοιχη σχέση είναι:

$$f_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} \quad (1.15)$$

Στην περίπτωση του ψηφιακού σήματος η ενεργός τιμή του ορίζεται από τη σχέση (1.16):

$$f_{rms} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k^2} \quad (1.16)$$

Όπου $f_k = f(t_k)$ για $k=1, 2, 3, \dots, n$ είναι οι τιμές του σήματος στις συγκεκριμένες χρονικές στιγμές t_k .

Ενέργεια και ισχύς

Στην περίπτωση του αναλογικού σήματος η ενέργεια ορίζεται από τη σχέση (1.17):

$$E_\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (1.17)$$

Και η μέση ισχύς ορίζεται από τη σχέση (1.18):

$$P_\sigma = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (1.18)$$

Στην περίπτωση του ψηφιακού σήματος η ενέργεια ορίζεται από τη σχέση (1.19)

$$E_{\delta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 \quad (1.19)$$

Και η μέση ισχύς από τη σχέση (1.20):

$$P_{\delta} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (1.20)$$

Σήμα ενέργειας → πεπερασμένη ενέργεια ($0 < E < \infty$)

Σήμα ισχύος → πεπερασμένη ισχύ ($0 < P < \infty$)

Ένα σήμα ενέργειας έχει μηδενική ισχύ, ενώ ένα σήμα ισχύος έχει άπειρη ενέργεια.

1.4 Τεχνικές μετάδοσης

Τα σήματα όπως είδαμε προηγουμένως διακρίνονται σε αναλογικά, όπως η φωνή και σε ψηφιακά, όπως τα data των υπολογιστών. Ένα από τα σπουδαιότερα θέματα των τηλεπικοινωνιών είναι οι τεχνικές μετάδοσης αυτών των σημάτων πληροφορίας μέσα από τα διατιθέμενα κανάλια μετάδοσης. Τα κανάλια μετάδοσης είναι τέτοια που δεν επιτρέπουν την αυτούσια μετάδοση των σημάτων πληροφορίας χωρίς κάποια ιδιαίτερη επεξεργασία. Αυτή η επεξεργασία του σήματος πληροφορίας που το καθιστά κατάλληλο για διέλευση από το κανάλι, ονομάζεται διαμόρφωση.

Η σκοπιμότητα της χρήσης τεχνικών μετάδοσης είναι αφενός η βέλτιστη χρήση των δυνατοτήτων μιας τηλεπικοινωνιακής ζεύξης (ιδιαίτερα του διαθέσιμου εύρους ζώνης του καναλιού) και αφετέρου η προστασία των μεταδιδόμενων

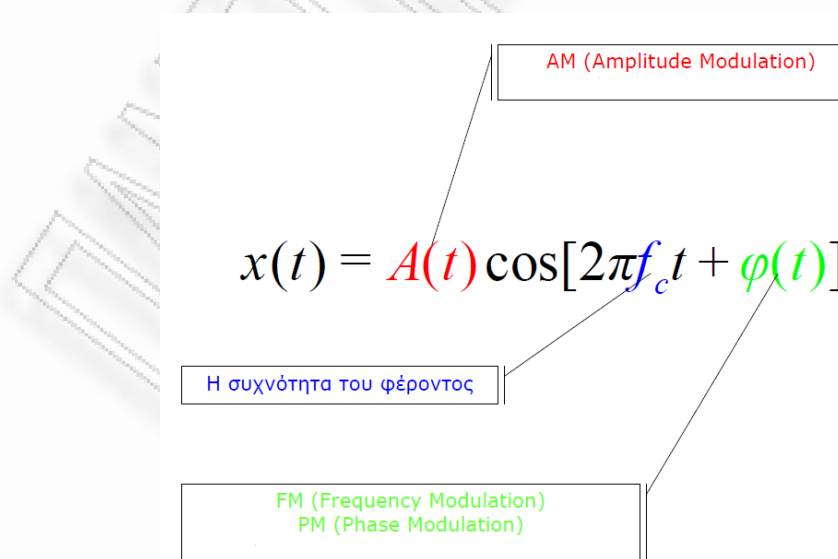
σημάτων έναντι των επιδράσεων του θορύβου.

Οι κυριότερες τεχνικές μετάδοσης είναι:

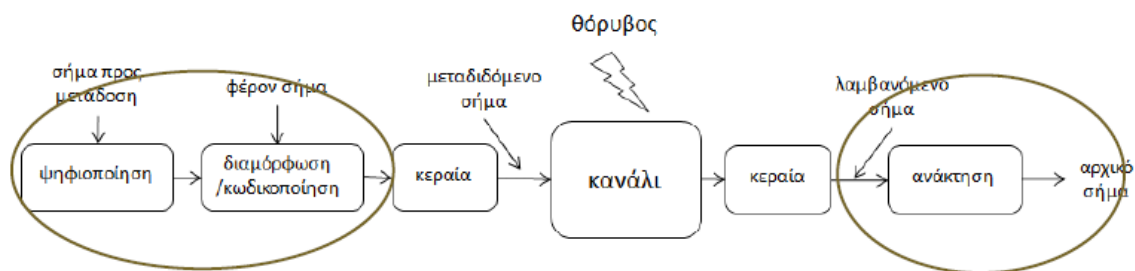
- Η διαμόρφωση (modulation)
- Η μετατροπή αναλογικού σήματος σε ψηφιακό (Analog-to-Digital Conversion - A7D-)
- Η Πολυπλεξία

1.4.1 Η διαμόρφωση (modulation)

Στα περισσότερα τηλεπικοινωνιακά συστήματα, το αναλογικό ή το ψηφιακό σήμα πληροφορίας $x(t)$ ή $m(t)$ δε διοχετεύεται «αυτούσιο» στο μέσο μετάδοσης, αλλά διαμορφώνει (με τη βοήθεια ενός διαμορφωτή) το πλάτος A_c , τη συχνότητα f_c ή τη φάση φ_c ενός υψίσυχνου ημιτονοειδούς «φέροντος» (που παρέχει ο διαμορφωτής) της μορφής : $x(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \varphi_c]$



Αντίστοιχα η διαμόρφωση χαρακτηρίζεται ως διαμόρφωση πλάτους, συχνότητας ή φάσης. Έτσι, το σήμα που τελικά μεταδίδεται δεν είναι το $m(t)$ αυτό καθαυτό, αλλά ένα σύνθετο (διαμορφωμένο) σήμα $s(t)$, στο οποίο εμπεριέχεται η αρχική πληροφορία. Ο δέκτης λαμβάνει το σύνθετο αυτό σήμα και μέσω του αποδιαμορφωτή εξάγει το αρχικό (αναλογικό ή ψηφιακό) σήμα πληροφορίας $m(t)$.



Εικόνα 17. Σχηματικό διάγραμμα διαμόρφωσης και αποδιαμόρφωσης σημάτων

Παρ' όλο που συνήθως το «σύνθετο» σήμα $s(t)$ καταλαμβάνει μεγαλύτερο εύρος ζώνης από ότι το (αρχικό) σήμα πληροφορίας $m(t)$, η διαμόρφωση διευκολύνει την υλοποίηση των τηλεπικοινωνιακών συστημάτων (π.χ. η κατασκευή κεραιών για την απευθείας μετάδοση ηλεκτρικών σημάτων είναι εξαιρετικά δύσκολη ως αδύνατη) και καθιστά δυνατή την «ταυτόχρονη» μετάδοση σημάτων μέσω της τεχνικής της πολυπλεξίας.

Η χρήση της διαμόρφωσης είναι υποχρεωτική για τις ραδιοζεύξεις και τις ζεύξεις οπτικών ινών, ενώ στα καλωδιακά συστήματα χρησιμοποιείται σπανιότερα.

Διαμόρφωση Πλάτους AM

Η διαμόρφωση πλάτους AM (Amplitude Modulation) υπήρξε η παλαιότερη και απλούστερη μέθοδος για τη μετάδοση αναλογικών σημάτων. Η ραδιοφωνία και η τηλεόραση στηρίχτηκαν στη διαμόρφωση AM. Ας θεωρήσουμε ένα περιοδικό

σήμα φορέα που περιγράφεται από τη σχέση :

$$S_t = A \sin \omega t + \varphi$$

όπου:

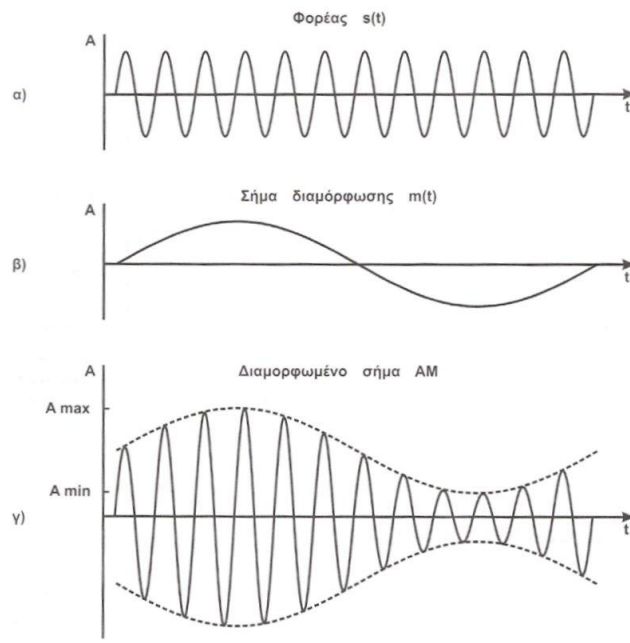
A : το πλάτος του σήματος

ω : η συχνότητα

φ : η φάση

m_t : το προς μετάδοση σήμα πληροφορίας.

Ως διαμόρφωση πλάτους ορίζεται η διαδικασία κατά την οποία το πλάτος A του φορέα μεταβάλλεται γραμμικά με το σήμα m_t γύρω από μια μέση τιμή. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 18), ο φορέας S_t που είναι συνήθως ένα σήμα υψηλής συχνότητας, διαμορφώνεται από το μικρότερης συχνότητας σήμα m_t και το τελικά διαμορφωμένο AM σήμα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 18). Σαν παράδειγμα, το σήμα m_t μπορεί να είναι η φωνή του εκφωνητή ενός ραδιοφωνικού σταθμού, ενώ το S_t η ραδιοσυχνότητα στην περιοχή των μακρών, μεσαίων ή βραχέων κυμάτων.

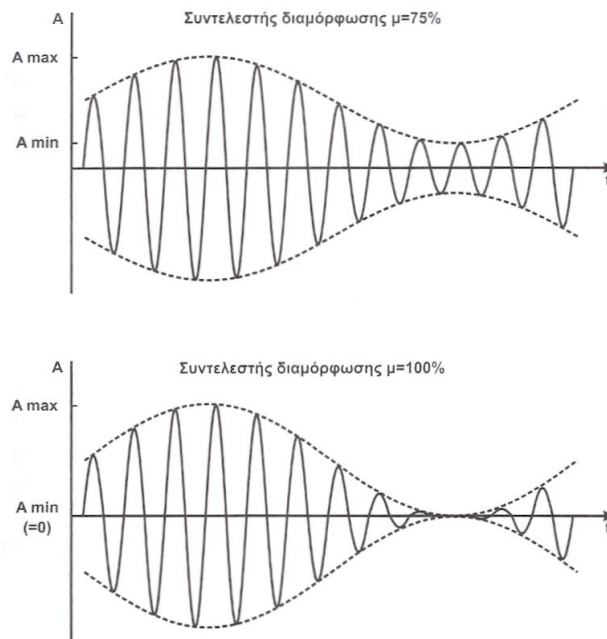


Εικόνα 18. Διαμόρφωση πλάτους

Αν ονομάσουμε A_{\min} και A_{\max} το μικρότερο και μεγαλύτερο πλάτος αντίστοιχα του διαμορφωμένου σήματος όπως φαίνεται στο σχήμα γ της Εικόνας 18, τότε ο λόγος

$$\mu = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}$$

ονομάζεται συντελεστής διαμόρφωσης (modulation factor) και εκφράζεται σε ποσοστό % ή σαν καθαρός αριθμός. Ο συντελεστής διαμόρφωσης στη ραδιοφωνία είναι συνήθως μικρότερος της μονάδας. Στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 19α) ο συντελεστής διαμόρφωσης είναι 75% ενώ στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 19β) είναι 100%.



Εικόνα 19. Συντελεστής διαμόρφωσης AM

Στο πεδίο συχνότητας, το AM σήμα αποτελείται από τη συχνότητα του φορέα και τις συχνότητες του σήματος πληροφορίας, μετατοπισμένες σε δύο πλευρικές περιοχές συχνοτήτων πάνω και κάτω από το φορέα. Οι περιοχές αυτές ονομάζονται πάνω και κάτω πλευρική ζώνη USB - LSB (Upper-Lower Side Band). Το εύρος ζώνης BW (Bandwidth) του AM διαμορφωμένου σήματος είναι

$$BW = 2f_m$$

όπου

f_m : η μέγιστη συχνότητα του σήματος πληροφορίας $m(t)$

Διαμόρφωση Συχνότητας FM

Η διαμόρφωση συχνότητας (frequency modulation) αναπτύχθηκε από τον Edward Armstrong τη δεκαετία 1930-1940. Λόγω της καλύτερης συμπεριφοράς στο θόρυβο και της μεγαλύτερης πιστότητας στη μετάδοση από την AM, χρησιμοποιείται σήμερα για εκπομπές ποιότητας στη ραδιοφωνία FM και για

μετάδοση ήχου στην τηλεόραση.

Έστω ο φορέας που περιγράφεται από την σχέση :

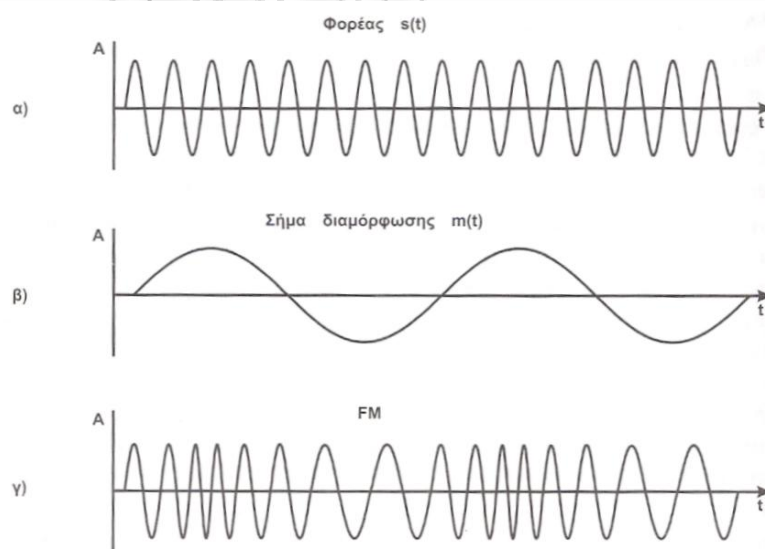
$$S(t) = A \sin \omega t + \varphi$$

όπου:

A : το πλάτος του σήματος, ω η συχνότητα, φ η φάση και

$m(t)$: το προς μετάδοση σήμα πληροφορίας.

Διαμόρφωση συχνότητας ορίζεται η διαδικασία κατά την οποία η συχνότητα ω του φορέα μεταβάλλεται γραμμικά με το πλάτος του σήματος $m(t)$ γύρω από μια μέση τιμή. Στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 20) φαίνεται ο φορέας $S(t)$ που είναι συνήθως ένα σήμα υψηλής συχνότητας και το προς μετάδοση σήμα πληροφορίας $m(t)$ χαμηλότερης συχνότητας που διαμορφώνει το φορέα. Το κατά συχνότητα διαμορφωμένο σήμα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 20).



Εικόνα 20. Διαμόρφωση FM

Το $m(t)$ μπορεί παραδείγματος χάριν να είναι η φωνή ή η μουσική μιας ραδιοφωνικής εκπομπής και το $S(t)$ το αντίστοιχο ραδιοφωνικό σήμα FM. Η συχνότητα του φορέα $f_s = \omega / 2\pi$ μεταβάλλεται ανάλογα με το πλάτος του σήματος $m(t)$.

Ονομάζουμε απόκλιση συχνότητας Δf_s (frequency deviation) του σήματος FM, τη μέγιστη μεταβολή συχνότητας του φορέα. Για τη ραδιοφωνία FM έχει καθιερωθεί μέγιστη απόκλιση συχνότητας Δf_s τα 75 KHz. Για το σήμα FM που μεταφέρει τον ήχο σε ένα τηλεοπτικό κανάλι η απόκλιση είναι 50 KHz.

Αν υποθέσουμε ότι f_m είναι η μέγιστη συχνότητα του σήματος διαμόρφωσης $m(t)$, τότε το πηλίκο

$$B = \Delta f_s / f_m$$

ονομάζεται δείκτης διαμόρφωσης (modulation index) του σήματος FM.

Στη μαθηματική ανάλυση που είναι αρκετά σύνθετη και δεν είναι του παρόντος, γίνεται χρήση ανάλυσης Fourier. Η ουσία της ανάλυσης είναι ότι το διαμορφωμένο σήμα $S(t)$ αποτελείται από άπειρες αρμονικές συνιστώσες το πλάτος των οποίων φθίνει όσο απομακρυνόμαστε από το φορέα. Το πλάτος των αρμονικών καθίσταται αμελητέο σε συχνότητες που απέχουν πολύ από τη συχνότητα του φορέα.

Ένας πρακτικός τύπος που μας δίνει το εύρος συχνοτήτων BW (bandwidth) του σήματος FM στο οποίο είναι συγκεντρωμένη περισσότερο απ το 95% της ολικής ενέργειας του σήματος, είναι:

$$BW = 2 \Delta f_s + f_m$$

Όπου:

BW : εύρος συχνοτήτων (Hz).

Δf_s : απόκλιση συχνότητας του φορέα.

f_m : μέγιστη συχνότητα του σήματος πληροφορίας.

Ισοδύναμα αν γνωρίζουμε το δείκτη διαμόρφωσης β τότε το εύρος συχνοτήτων είναι: $BW = 2f_s (1 + 1/\beta)$

Για παράδειγμα ας υπολογίσουμε το εύρος συχνοτήτων (BW) του σήματος FM που εκπέμπεται από το Β' Πρόγραμμα της Ελληνικής Ραδιοφωνίας (ΕΡΑ2) στα 93,6 MHz, όταν εκπέμπει μουσική εκπομπή με φάσμα 15 KHz.

Στη ραδιοφωνία χρησιμοποιείται απόκλιση συχνότητας $\Delta f = 75 \text{ KHz}$, οπότε έχουμε $BW = 2 \cdot 75 + 15 = 180 \text{ KHz}$. Συνεπώς το φάσμα του σήματος FM βρίσκεται στην περιοχή 93,510 έως 93,690 MHz. Παρατηρούμε ότι το BW ενός σήματος FM είναι πολύ μεγαλύτερο από το αντίστοιχο ενός σήματος AM, που στο παράδειγμα μας θα ήταν 30KHz έναντι των 180 KHz του FM. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τον περιορισμό του αριθμού καναλιών FM που μπορούν να λειτουργούν ταυτόχρονα σε μια περιοχή συχνοτήτων.

Αντισταθμιστικός παράγοντας του γεγονότος αυτού στην πράξη είναι ότι επειδή οι σταθμοί FM χρησιμοποιούν φορείς με υψηλές συχνότητες, κοντά στα 100 MHz. η εμβέλειά τους είναι μικρή, της τάξης των 100 χλμ. και έτσι δύο σταθμοί σε διαφορετικά γεωγραφικά σημεία μπορούν να χρησιμοποιούν την ίδια συχνότητα χωρίς πρόβλημα παρεμβολών.

Διαμόρφωση Φάσης PM

Μια παραλλαγή της διαμόρφωσης συχνότητας είναι η διαμόρφωση φάσης PM (Phase Modulation). Την ονομάζουμε παραλλαγή επειδή έχει εξαιρετικές ομοιότητες με τη διαμόρφωση συχνότητας.

Έστω $S(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ το σήμα-φορέας που πρόκειται να διαμορφωθεί, όπου:

A : το πλάτος του.

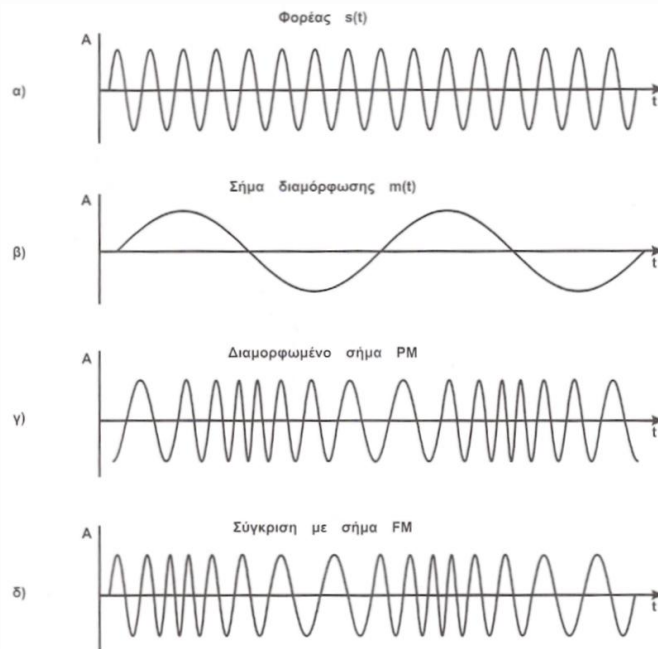
ω : η συχνότητα

φ : η φάση του

$m(t)$: το προς μετάδοση σήμα πληροφορίας.

Ορίζεται ως διαμόρφωση φάσης η διαδικασία κατά την οποία η φάση φ του φορέα μεταβάλλεται γραμμικά με το πλάτος του σήματος $m(t)$ γύρω από μια μέση τιμή.

Η ομοιότητα με τη διαμόρφωση συχνότητας ευρίσκεται στο ότι είτε μεταβάλλουμε την γωνιακή συχνότητα ω είτε τη φάση φ , αυτό που τελικά αλλάζει είναι η συνολική γωνία $\omega t + \varphi$ της σχέσης. Το κατά φάση διαμορφωμένο σήμα PM που δημιουργείται από το φορέα $S(t)$ και το σήμα $m(t)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 21).



Εικόνα 21. Διαμόρφωση Φάσης

Αποδεικνύεται ότι ένα σήμα FM μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σήμα PM του οποίου το σήμα διαμόρφωσης είναι όχι το $m(t)$ αλλά το ολοκλήρωμα του $m(t)$. Στην πράξη για να δημιουργήσουμε το ολοκλήρωμα του $m(t)$ αρκεί να το περάσουμε μέσα ένα κατωδιαβατό φίλτρο (Low pass filter).

1.4.2 Η μετατροπή αναλογικού σήματος σε ψηφιακό (Analog-to-Digital Conversion -A/D-)

Μέσω της μετατροπής αυτής (που γίνεται από ειδική μονάδα του πομπού), το αρχικό αναλογικό σήμα πληροφορίας $m(t)$ μετατρέπεται σε ψηφιακή

παλμοσειρά $m_D(t)$. Βασικό πλεονέκτημα της ψηφιακοποίησης των σημάτων είναι η αυξημένη ατρωσία τους έναντι των επιδράσεων του θορύβου και η ευκολία επεξεργασίας τους. Η τεχνική ψηφιακοποίησης που σχεδόν κατ' αποκλειστικότητα χρησιμοποιείται στα τηλεπικοινωνιακά συστήματα είναι η παλμοκωδική διαμόρφωση (Pulse Code Modulation ή PCM).

Παλμοκωδική διαμόρφωση (PCM)

Είναι γνωστή ως PCM (Pulse Code Modulation). Τα βασικά στάδια της PCM είναι η δειγματοληψία (sampling), η κβάντιση (quantisation) και η κωδικοποίηση (encoding). Πέραν αυτών, κατά την παλμοκωδική διαμόρφωση ενός αναλογικού σήματος, μπορεί να εφαρμοστεί η διεργασία της "συμπίεσης" (companding), προκειμένου να βελτιστοποιηθεί η κβάντιση του σήματος καθώς και η "κωδικοποίηση γραμμής" (line coding) για την προσαρμογή του σήματος PCM στις απαιτήσεις του μέσου μετάδοσης. Τέλος, ένας αριθμός σημάτων PCM μπορούν να πολυπλεχθούν (και να μεταδοθούν ταυτόχρονα) μέσω της τεχνικής "πολυπλεξίας διαίρεσης χρόνου" (συντομογραφικά TDM).

Μετά τη δειγματοληψία που υφίσταται το αναλογικό σήμα, για κάθε δείγμα μεταδίδεται μια ακολουθία παλι (bit) που περιέχει κωδικοποιημένο το πλάτος του αναλογικού σήματος. Ο αριθμός των bit που μεταδίδεται για κάθε δείγμα είναι σταθερός (συνήθως 8), η δυαδική τιμή όμως της σειράς των bit αυτών μας δίνει την τιμή του πλάτους του ανάλογικού σήματος τη στιγμή της δειγματοληψίας.

Πριν προχωρήσουμε στην Κωδικοποίηση της πηγής θα γίνει μια μικρή αναφορά στη δειγματοληψία (μεγαλύτερη ανάλυση γίνεται στο κεφάλαιο 8) αφού πρώτα αναφερθούμε στο σημαντικό θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon, ο οποίος θεωρείται πατέρας της Θεωρίας Πληροφοριών.

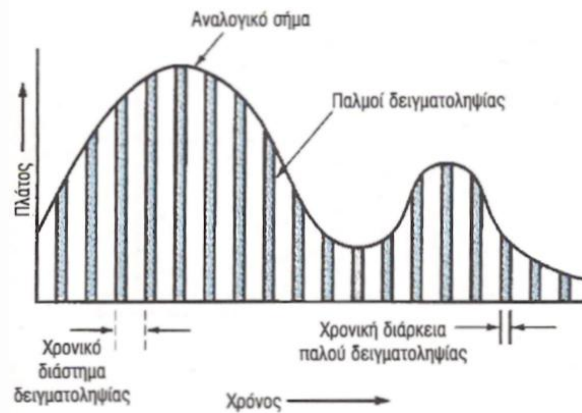
Θεώρημα Δειγματοληψίας

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα αναλογικό σήμα πληροφορίας S^t περιορισμένης ζώνης συχνοτήτων και ότι f_{\max} είναι η μεγαλύτερη συχνότητα που υπάρχει στο φάσμα του.

Το θεώρημα λέει ότι αν πάρουμε δείγματα πλάτους του σήματος σε κανονικά χρονικά διαστήματα, με ρυθμό δειγματοληψίας μεγαλύτερο από $2 f_{\max}$, τα δείγματα περιέχουν όλη την πληροφορία του αρχικού σήματος S^t . Κατά συνέπεια μπορούμε να ξαναδημιουργήσουμε το αρχικό σήμα S^t αν επεξεργασθούμε κατάλληλα τα δείγματα αυτά. Έτσι έχουμε τη δυνατότητα αντί να μεταδίδουμε ολόκληρο το σήμα S^t από ένα επικοινωνιακό κανάλι, να μεταδώσουμε μόνο τα δείγματα που προέκυψαν από τη διαδικασία της δειγματοληψίας και να ανασυνθέσουμε το σήμα S^t στην πλευρά του δέκτη. Η ανασύνθεση γίνεται στην πράξη με το να περάσουμε το σήμα της δειγματοληψίας από ένα κατωδιαβατό φίλτρο (low pass filter).

Παράδειγμα για το θεώρημα αυτό του Shannon: η απαραίτητη συχνότητα δειγματοληψίας σήματος φωνής με υψηλότερη συχνότητα 4 KHz είναι τα 8 KHz ενώ σήματος video με μέγιστη συχνότητα 4,6 MHz είναι τα 9,2 MHz.

Το σήμα της δειγματοληψίας είναι πολύ στενοί παλμοί των οποίων το πλάτος είναι ανάλογο με αυτό του αναλογικού σήματος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 22).



Εικόνα 22. Δειγματοληψία

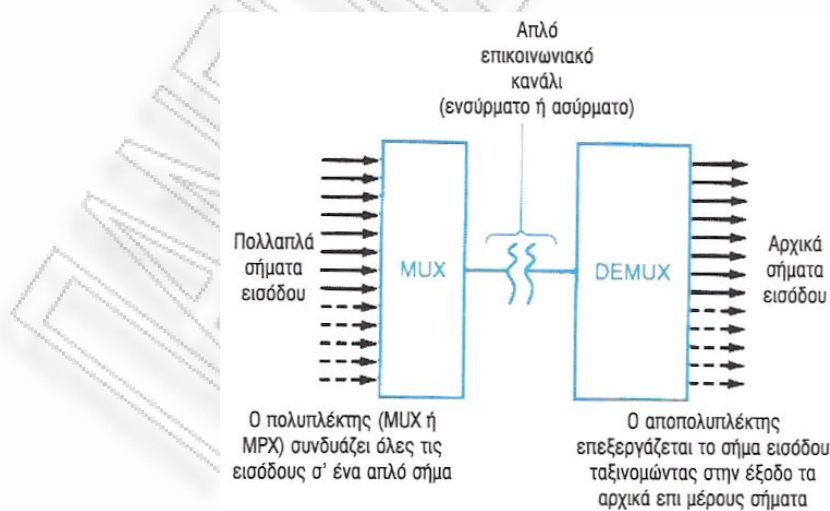
Κάτι που είναι πολύ σημαντικό στη διαδικασία της δειγματοληψίας και πρέπει να τονίσουμε, είναι ότι το αναλογικό σήμα πληροφορίας $S(t)$ πρέπει να είναι περιορισμένου εύρους ζώνης συχνοτήτων. Αν δεν είναι, πριν γίνει η δειγματοληψία πρέπει να περάσει από κατωδιαβατό φίλτρο, ώστε να μην υπάρχουν στο φάσμα του συχνότητες μεγαλύτερες από το $1/2$ της συχνότητας δειγματοληψίας. Το φίλτρο αυτό είναι γνωστό σαν φίλτρο προστασίας αναδίπλωσης συχνοτήτων (antialiasing filter).

Αν αυτή η διαδικασία φιλτραρίσματος στον πομπό δεν ακολουθηθεί, τότε αποδεικνύεται ότι κατά την ανασύνθεση του σήματος στο δέκτη, οι συχνότητες του φάσματος που ήταν μεγαλύτερες από το $1/2$ της συχνότητας δειγματοληψίας αναδιπλώνονται και εμφανίζονται μέσα στη χρήσιμη περιοχή του φάσματος του αναλογικού σήματος. Το εξαγόμενο σήμα παραμορφώνεται και η παραμόρφωση αυτή είναι γνωστή σαν παραμόρφωση αναδίπλωσης (aliasing ή Foldover distortion).

1.4.3 Η Πολυπλεξία

Ο όρος "πολυπλεξία" (multiplexing) αναφέρεται στην ταυτόχρονη μετάδοση περισσοτέρων από ένα σημάτων μέσα από το ίδιο τηλεπικοινωνιακό μέσο (χάλκινο καλώδιο, οπτικό καλώδιο κλπ.).

Στην πράξη, αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση διαφόρων τεχνικών για την πολυπλεξία σημάτων όπως η "πολυπλεξία διαίρεσης συχνότητας" (Frequency-Division Multiplexing, συντομογραφικά FDM) και η "πολυπλεξία διαίρεσης χρόνου" (Time-Division Multiplexing, συντομογραφικά TDM). Η πρώτη (FDM) αφορά την αναλογική μετάδοση και συνίσταται στην εκχώρηση, σε κάθε ένα από τα μεταδιδόμενα σήματα, μιας ιδιαίτερης ζώνης συχνοτήτων (μέσω της διαμόρφωσης διαφορετικού φέροντος από κάθε αναλογικό σήμα) ενώ η δεύτερη (TDM) αφορά την ψηφιακή μετάδοση και συνίσταται στη διάθεση, σε κάθε ένα από τα αρχικά αναλογικά σήματα πληροφορίας, μιας ιδιαίτερης "χρονοθυρίδας" που χρησιμοποιείται για τη δειγματοληψία του. Τόσο η πολυπλεξία διαίρεσης συχνότητας, όσο και η πολυπλεξία διαίρεσης χρόνου γίνονται κατά οργανωμένο και τυποποιημένο τρόπο, προκειμένου να εξασφαλίζεται η μέγιστη δυνατή συμβατότητα μεταξύ διατάξεων από διαφορετικούς κατασκευαστές.

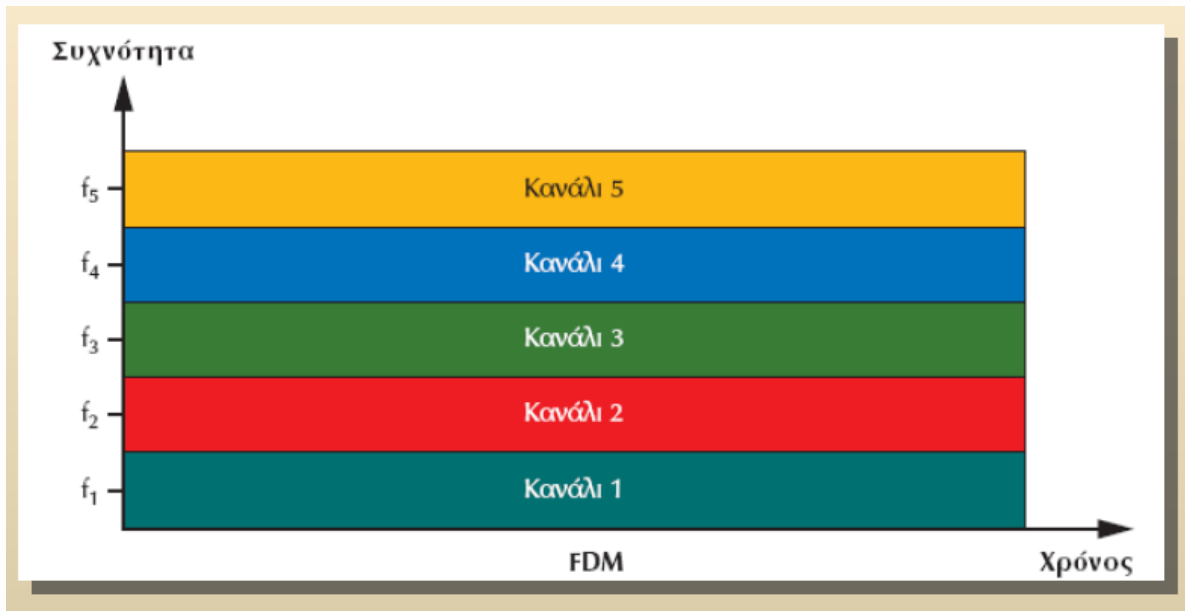


Εικόνα 23. Πολυπλεξία

Για παράδειγμα στα αναλογικά τηλεφωνικά δίκτυα, για να αυξηθεί η χωρητικότητά τους, χρησιμοποιήθηκαν τα λεγόμενα "φερέσυχνα" συστήματα, μέσω των οποίων ήταν δυνατή η ταυτόχρονη μετάδοση τηλεφωνικών σημάτων με πολυπλεξία διαίρεσης συχνότητας. Έτσι, για τη μετάδοση 12 τηλεφωνικών σημάτων, κάθε ένα από αυτά διαμόρφωνε ένα ξεχωριστό φέρον (συχνότητες φερόντων: 60, 64, ... 104 kHz) με αποτέλεσμα τα 12 αρχικά σήματα (εύρους ζώνης 0-4 kHz το καθένα) να μεταδίδονται ταυτόχρονα και μέσω του ίδιου καλωδίου, το καθένα σε διαφορετική ζώνη συχνοτήτων (60-64 kHz, 64-68 kHz, ... 104-108 kHz).

Πολυπλεξία διαίρεσης συχνότητας (FDM)

Η πολυπλεξία διαίρεσης συχνότητας (FDM) αφορά την αναλογική μετάδοση και συνίσταται στην εκχώρηση μιας ιδιαίτερης ζώνης συχνοτήτων, σε κάθε ένα από τα μεταδιδόμενα σήματα. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της διαμόρφωσης από κάθε αναλογικό σήμα διαφορετικού φέροντος (με τεχνική SSB), που "μεταθέτει" τη ζώνη συχνοτήτων μετάδοσης, από τη "βασική ζώνη" (π.χ. 0-4 kHz, για τηλεφωνικό σήμα πληροφορίας) στη ζώνη της συχνότητας του φέροντος (π.χ. 60 - 64 kHz, για φέρον 60 kHz).



Εικόνα 24. FDM

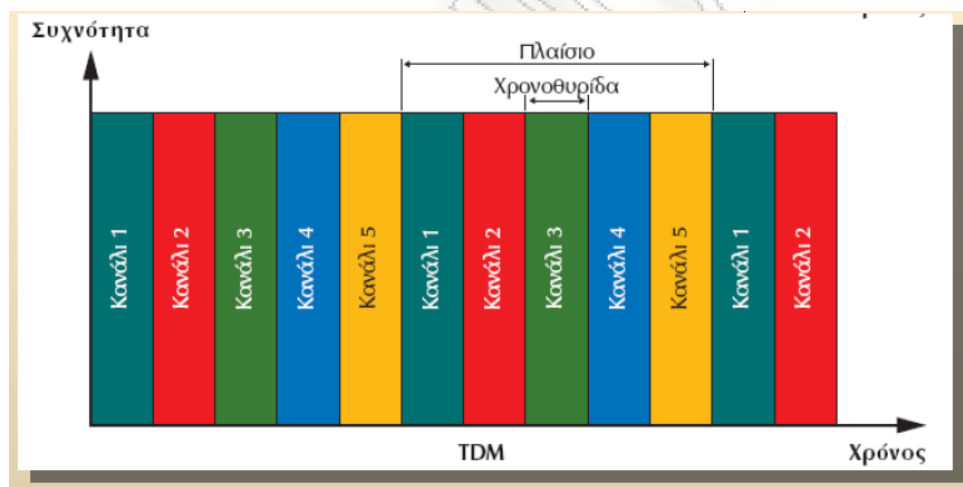
Η πολυπλεξία διαίρεσης συχνότητας εφαρμόστηκε κυρίως στην (αναλογική) τηλεφωνία για την ταυτόχρονη μετάδοση σημάτων μεταξύ των τηλεφωνικών κέντρων (μέσω καλωδιακών ή ραδιοηλεκτρικών ζεύξεων). Λόγω του αναλογικού της χαρακτήρα, η χρήση της σήμερα είναι περιορισμένη και διαρκώς φθίνουσα.

Πολυπλεξία διαίρεσης χρόνου (TDM)

Η πολυπλεξία διαίρεσης χρόνου (TDM), συνίσταται στη διάθεση, σε κάθε ένα από τα αρχικά αναλογικά σήματα πληροφορίας, μιας ιδιαίτερης "χρονοθυρίδας" που χρησιμοποιείται για τη δειγματοληψία του. Π.χ., για ένα τηλεφωνικό σήμα 0,3-3,4 kHz, η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_s = 8000 \text{ δείγματα/s}$, ο χρόνος μεταξύ δύο δειγματοληψιών είναι $T_s = 1/f_s = 125 \mu\text{s}$, οπότε, αν για τη λήψη του

δείγματος, ο δειγματολήπτης απαιτεί μια "χρονοθυρίδα" 4 μ s, τότε απομένουν (μέχρι τη λήψη του 2ου δείγματος) 121 μ s για τη λήψη δειγμάτων και από άλλα σήματα. Από το παράδειγμα αυτό φαίνεται ότι ο αριθμός των πολυπλεγμένων σημάτων εξαρτάται από τη διάρκεια της χρονοθυρίδας (δειγματοληψίας) η οποία πρέπει να είναι όσο το δυνατόν συντομότερη. Συνεπώς είναι σημαντικό να υπάρχουν διατάξεις με πολύ σύντομους χρόνους δειγματοληψίας καθώς και ταχείες επιλογείς για τη μετάβαση από το ένα αναλογικό σήμα στο άλλο.

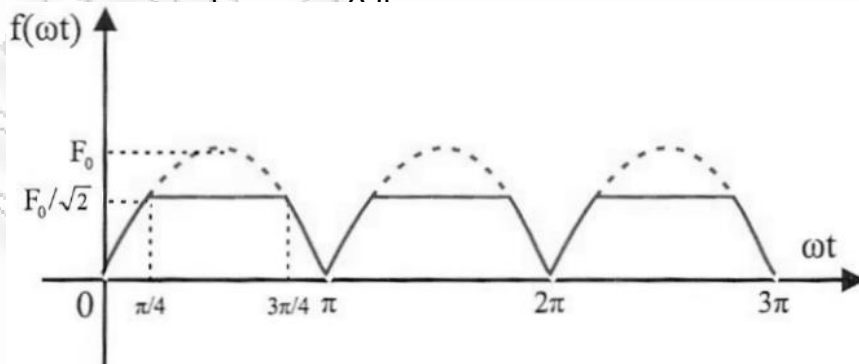
Η παραπάνω τεχνική πολυπλεξίας χαρακτηρίζεται ως πολυπλεξία διαίρεσης χρόνου (TDM). Η TDM είναι οργανωμένη σε ιεραρχικά επίπεδα (διαφορετικά στην Ευρώπη από ότι στις ΗΠΑ) που ονομάζονται τάξεις πολυπλεξίας.



Εικόνα 25. TDM

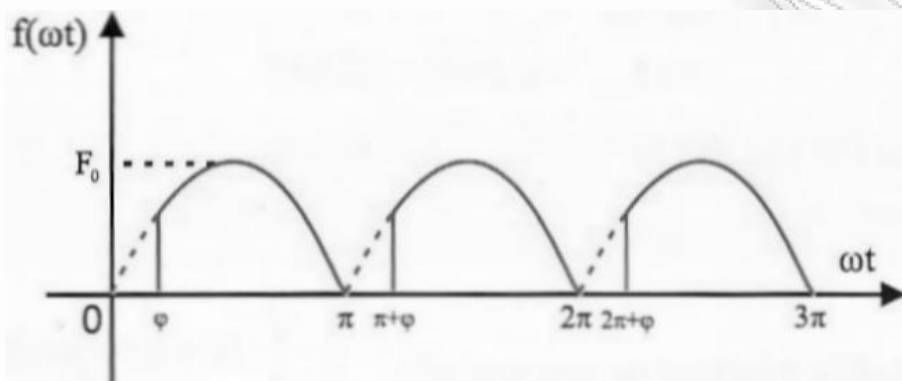
Ασκήσεις

1. Υπολογίστε την ενέργεια και την ισχύ του σήματος $x(t)=5$.
2. Υπολογίστε την ενέργεια και την ισχύ του σήματος $x(t)=t$.
3. Υπολογίστε την ενέργεια και την ισχύ του σήματος $x(t)=A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$.
4. Υπολογίστε τη μέση και την ενεργό τιμή ενός αρμονικού σήματος
5. Υπολογίστε τη μέση και την ενεργό τιμή ενός ημιανορθωμένου ημιτονικού σήματος
6. Υπολογίστε τη μέση και την ενεργό τιμή ενός πλήρως ανορθωμένου ημιτονικού σήματος
7. Υπολογίστε τη μέση και την ενεργό τιμή ενός τετραγωνικού παλμού
8. Υπολογίστε τη μέση και την ενεργό τιμή ενός θετικού τετραγωνικού παλμού
9. Υπολογίστε τη μέση και την ενεργό τιμή ενός πριονωτού σήματος
10. Ένα ανορθωμένο ημιτονικό σήμα κόβεται στο 0.707 της μέγιστης τιμής του όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

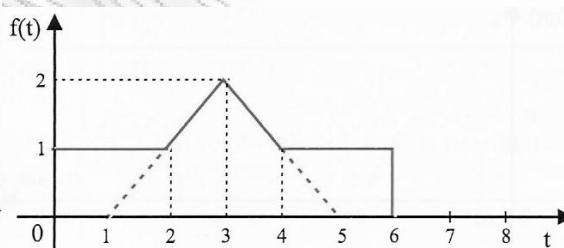
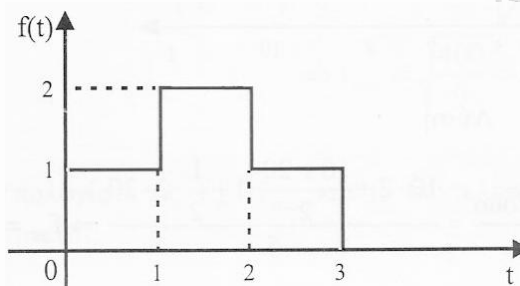


Να βρεθούν η μέση και η ενεργός τιμή του σήματος καθώς και ο συντελεστής μορφής.

11. Ένα ανορθωμένο ημιτονικό σήμα με καθυστέρηση κόβεται έτσι ώστε να έχει μέση τιμή ίση με το μισό της μέγιστης τιμής του. Ζητείται η γωνία φ .



12. Να εκφραστούν αναλυτικά με τη βοήθεια στοιχειωδών ανωμάτων σημάτων τα παρακάτω σήματα.



Κεφάλαιο 2. Φασματική ανάλυση σημάτων

Γενικά

Τα σήματα και συστήματα που περιγράφηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο μπορούν επίσης να περιγραφούν στο πεδίο της συχνότητας. Η περιγραφή του φάσματός τους οδηγεί σε έναν απλό τρόπο χαρακτηρισμού ενός συστήματος με χρήση της ονομαζόμενης συνάρτησης μεταφοράς. Η σειρά Fourier και ο μετασχηματισμός Fourier αποτελούν χρήσιμα εργαλεία στην κατεύθυνση αυτή.

Ένα σήμα μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν από τους παρακάτω ισοδύναμους τρόπους:

Στο πεδίο του χρόνου t : Ως κυματομορφή (χρονικά μεταβαλλόμενη τάση) $m(t)$

Στο πεδίο της συχνότητας f : Ως φασματική συνάρτηση $M(f)$.

Η σπουδαιότητα της φασματικής αναπαράστασης έγκειται στο γεγονός ότι η $M(f)$ παρέχει πληροφορίες για το συχνотικό περιεχόμενο του σήματος και συνεπώς, διευκολύνει τη μελέτη της διέλευσης και επεξεργασίας του από τηλεπικοινωνιακές διατάξεις και συστήματα. Επιπλέον, η μελέτη των σημάτων στο πεδίο της συχνότητας είναι μαθηματικά απλούστερη από ότι στο πεδίο του χρόνου.

Το μαθηματικό εργαλείο με τη βοήθεια του οποίου μια κυματομορφή $m(t)$ παριστάνεται ως συνάρτηση $M(f)$ (συνάρτηση της συχνότητας) είναι η ανάλυση Fourier ή φασματική ανάλυση. Η ανάλυση αυτή στηρίζεται στο γνωστό θεώρημα Fourier, σύμφωνα με το οποίο μια περιοδική κυματομορφή $m(t)$ (με περίοδο T) μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα άπειρων ημιτονικών και συνημιτονικών

όρων, οι συχνότητες των οποίων είναι ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους

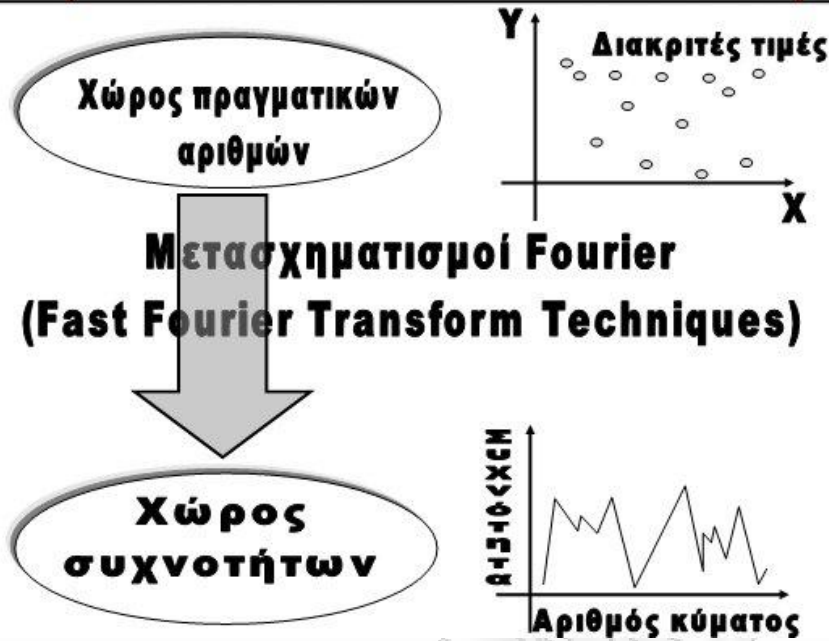
συχνότητας $f = \frac{1}{T}$.

Στην πράξη, αντί για τους ημιτονικούς ή συνημιτονικούς όρους, χρησιμοποιούνται ισοδύναμοι μιγαδικοί εκθετικοί όροι. Επίσης, αν και το θεώρημα Fourier ουσιαστικά εφαρμόζεται μόνο στις περιοδικές κυματομορφές, η βασική του ιδέα μπορεί να επεκταθεί ώστε να καλύψει και τα μη περιοδικά σήματα.

Συνοψίζοντας, οι βασικές δυνατότητες της φασματικής ανάλυσης είναι οι παρακάτω:

Ένα περιοδικό σήμα $m(t)$, περιόδου T μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα άπειρων μιγαδικών εκθετικών όρων (μιγαδική σειρά Fourier) καθένας από τους οποίους αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη συχνότητα (αρμονική) που είναι πολλαπλάσιο της θεμελιώδους συχνότητας $f_1 = \frac{1}{T}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 26)

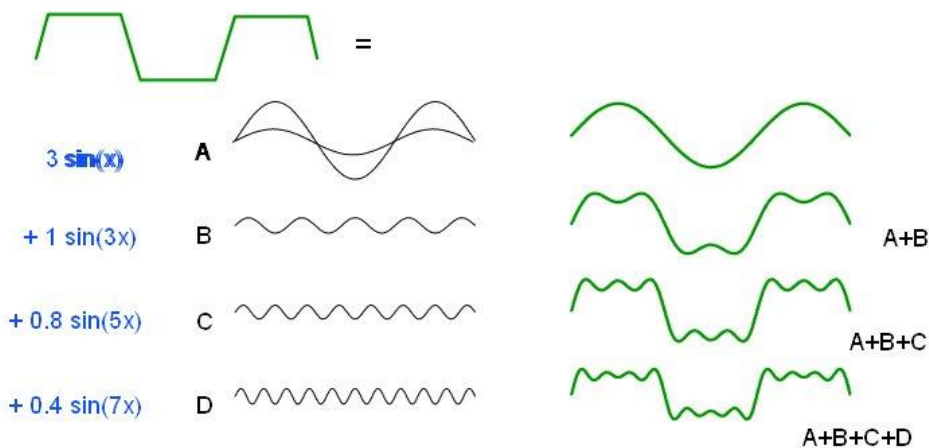
**ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ – ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ
(SPACE DOMAIN – FREQUENCY DOMAIN)**



Εικόνα 26. Αναπαράσταση περιοδικού σήματος $m(t)$, περιόδου T ως άθροισμα άπειρων μιγαδικών εκθετικών όρων (μιγαδική σειρά Fourier)

Οποιοδήποτε σήμα (περιοδικό ή μη περιοδικό) μπορεί να παρασταθεί ως ολοκλήρωμα (μετασχηματισμός) Fourier. Στην περίπτωση των περιοδικών σημάτων, το ολοκλήρωμα Fourier εκπίπτει σε μία σειρά που, αν και η μορφή της δεν είναι εκθετική, η φυσική της σημασία είναι ισοδύναμη με αυτήν της εκθετικής σειράς.

Πώς μεταπίπτω από την αναπαράσταση του σήματος στο πεδίο του χρόνου, στην αναπαράσταση του σήματος στο πεδίο της συχνότητας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 27).



Εικόνα 27. Μετάπτωση από την αναπαράσταση του σήματος στο πεδίο του χρόνου στην αναπαράσταση του σήματος στο πεδίο της συχνότητας.

2.1 Φασματική ανάλυση περιοδικών σημάτων (μικαδικές σειρές Fourier)

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, ένα περιοδικό σήμα $m(t)$, περιόδου T , μπορεί να αναλυθεί σε ένα άθροισμα άπειρων ημιτονικών-συνημιτονικών όρων (αρμονικών), κάθε ένας από τους οποίους έχει συχνότητα nf_1 ($n = 0, 1, 2, \dots$)

πολλαπλάσια της βασικής συχνότητας $f_1 = \frac{1}{T}$. Το άθροισμα αυτό είναι η τριγωνομετρική σειρά Fourier και δίνεται από τη σχέση (2.1).

$$m(t) = \sum_{n=0, \infty} a_n \cos(2\pi n f_1 t) + b_n \sin(2\pi n f_1 t) \quad (2.1)$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι τριγωνομετρικοί συντελεστές Fourier a_n , b_n δίνονται από τους τύπους:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T m(t) dt \quad (\text{DC συνιστώσα})$$

$$b_0 = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T m(t) \cos(2\pi f_1 t) dt \quad (n > 0)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T m(t) \sin(2\pi f_1 t) dt \quad (n < 0)$$

από τους οποίους πιστοποιείται ότι οι εν λόγω συντελεστές ουσιαστικά καθορίζονται από το ίδιο το σήμα $m(t)$.

Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες

$$\cos x = \frac{(e^{jx} + e^{-jx})}{2} \quad \text{και} \quad \sin x = \frac{(e^{jx} - e^{-jx})}{2j}$$

η παραπάνω τριγωνομετρική σειρά μπορεί να γραφεί στη συνεκτικότερη και βολικότερη εκθετική μορφή

$$\begin{aligned} m(t) &= \sum_{[0, \infty)} a_n \cos(2\pi f_1 t) + b_n \sin(2\pi f_1 t) = \\ &= \sum_{[0, \infty)} a_n \left(\frac{e^{j2\pi f_1 t} + e^{-j2\pi f_1 t}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{j2\pi f_1 t} - e^{-j2\pi f_1 t}}{2j} \right) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{[0,\infty)} a_n \left(\frac{e^{j2\pi n f_1 t} + e^{-j2\pi n f_1 t}}{2} \right) - j b_n \left(\frac{e^{j2\pi n f_1 t} - e^{-j2\pi n f_1 t}}{2} \right) =$$

$$= \sum_{[0,\infty)} \left[\frac{(a_n - j b_n)}{2} \right] e^{j2\pi n f_1 t} + \left[\frac{(a_n + j b_n)}{2} \right] e^{-j2\pi n f_1 t} =$$

$$= \sum_{[0,\infty)} c_n e^{j2\pi n f_1 t} + c_n' e^{-j2\pi n f_1 t} \Rightarrow$$

$$m(t) = c_{0+} + \sum_{[1,\infty)} c_n e^{j2\pi n f_1 t} + c_{0-} + \sum_{[1,\infty)} c_n e^{-j2\pi n f_1 t} \quad (2.2)$$

Όπου

$$c_{n+} = \frac{(a_n - j b_n)}{2}$$

$$c_{0+} = \frac{a_0}{2} \quad (b_0=0)$$

$$c_{n-} = \frac{(a_n + j b_n)}{2}$$

$$c_{0-} = \frac{a_0}{2} \quad (b_0=0)$$

Η νέα (εκθετική) σειρά μπορεί να γραφεί σε μια πιο συνεκτική μορφή, θεωρώντας ότι ο δείκτης n μεταβάλλεται στο διάστημα $(-\infty, -1]$ (αντί για το $[1,\infty)$), οπότε απαλείφεται το "-" στον εκθέτη (οι δείκτες n είναι πλέον εξ ορισμού αρνητικοί) και η δεύτερη σειρά γίνεται "κατοπτρική" της πρώτης. Παρατηρώντας επιπλέον ότι

$c_{0-} + c_{0+} = a_0$, προκύπτει ότι:

$$m(t) = a_0 + \sum_{[1, \infty)} c_n e^{j2\pi f_n t} + \sum_{(-\infty, -1]} c'_n e^{j2\pi f'_n t}$$

οπότε η (περιοδική) κυματομορφή $m(t)$ μπορεί να γραφεί, συνοπτικά, ως σειρά μιγαδικών εκθετικών όρων

$$m(t) = \sum_{(-\infty, +\infty)} c_n e^{j2\pi f_n t} \quad (2.3)$$

Όπου

$$c_{n^+} = \frac{(a_n - jb_n)}{2} \quad (n > 0)$$

$$c_0 = a_0 \quad (n=0, \text{DC συνιστώσα})$$

$$c_{n^-} = \frac{(a_n + jb_n)}{2} \quad (n < 0)$$

2.2 Οι μιγαδικοί συντελεστές Fourier

Οι μιγαδικοί συντελεστές είναι σκόπιμο για τη διευκόλυνση των υπολογισμών να γραφούν σε μορφή που να περιέχει το περιοδικό σήμα $m(t)$. Αυτό επιτυγχάνεται, αντικαθιστώντας τους συντελεστές a_n , b_n με τους αντίστοιχους τύπους που έχουμε δει νωρίτερα. Έτσι,

$$\begin{aligned}
 c_{n^+} &= \frac{(a_n - jb_n)}{2} = \frac{\left[\left(\frac{2}{T} \right) \int_T m(t) \cos(2\pi f_1 t) dt - j \left(\frac{2}{T} \right) \int_T m(t) \sin(2\pi f_1 t) dt \right]}{2} = \\
 &= \left(\frac{1}{T} \right) \int_T m(t) [\cos(2\pi f_1 t) - j \sin(2\pi f_1 t)] dt = \\
 &= \left(\frac{1}{T} \right) \int_T m(t) e^{-j2\pi f_1 t} dt
 \end{aligned}$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο έχω:

$$c_{n^-} = \frac{(a_n + jb_n)}{2} = \left(\frac{1}{T} \right) \int_T m(t) e^{j2\pi f_1 t} dt$$

και αντικαθιστώντας σε όποιον από τους δύο τύπους για $n=0$ έχω:

$$c_0 = a_0 = \left(\frac{1}{T} \right) \int_T m(t) dt$$

Οι παραπάνω τύποι μπορούν να συμπυκνωθούν στον ενιαίο τύπο (2.4).

$$c_n = \left(\frac{1}{T} \right) \int_T m(t) e^{-j2\pi f_1 t} dt \quad \text{για } (-\infty < n < \infty) \quad (2.4)$$

2.3 Φασματική ανάλυση (περιοδικών και μη περιοδικών) σημάτων. Το ολοκλήρωμα (μετασχηματισμός) Fourier

Μέσω του ολοκληρώματος (μετασχηματισμού) Fourier, είναι δυνατή η φασματική αναπαράσταση οποιουδήποτε σήματος, περιοδικού ή μη. Ο υπολογισμός του εν λόγω ολοκληρώματος, για ένα σήμα $m(t)$ οδηγεί σε μια συνάρτηση $M(f)$, η οποία καταδεικνύει το «συχνотικό περιεχόμενο» του συγκεκριμένου σήματος.

Ο μετασχηματισμός Fourier $M(f)$, είναι (γενικά) μιγαδική συνάρτηση της συχνότητας f και, ως τέτοια, χαρακτηρίζεται από το μέτρο της $|M(f)|$ και τη φάση της $\varphi(f)$. Ειδικότερα, το μέτρο $|M(f)|$ απεικονίζει την κατανομή της ισχύος του σήματος $m(t)$ στο εύρος συχνοτήτων που καταλαμβάνει το σήμα.

Για περιοδικά σήματα, ο μετασχηματισμός Fourier $M(f)$ είναι διακριτή μιγαδική συνάρτηση της συχνότητας. Για ένα περιοδικό σήμα $m(t)$, οι γραφικές παραστάσεις $|M(f)|$ και $\varphi(f)$ είναι παρόμοιες με αυτές των c_n και φ_n της μιγαδικής σειράς Fourier για το ίδιο σήμα.

Για μη περιοδικά σήματα, ο μετασχηματισμός Fourier $M(f)$ είναι μια συνεχής μιγαδική συνάρτηση της συχνότητας.

Ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να προκύψει από τη μιγαδική σειρά Fourier, θεωρώντας ότι ένα μη περιοδικό σήμα $m(t)$ μπορεί να εκληφθεί ως περιοδικό με περίοδο $T \rightarrow \infty$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα εξής:

Η απόσταση $f_1 \equiv \frac{1}{T}$ μεταξύ των αρμονικών τείνει στο 0.

Ως άμεση συνέπεια του παραπάνω, οι (διακριτοί) μιγαδικοί συντελεστές Fourier c_n "πυκνώνουν" και ουσιαστικά μετεξελίσσονται, σε μια συνεχή μιγαδική συνάρτηση $M(f)$.

Η μιγαδική σειρά Fourier μετεξελίσσεται σε ολοκλήρωμα. Ουσιαστικά, οι συντελεστές C_n της σειράς Fourier υποκαθίστανται από τον όρο $M(f) * df$.

Με βάση τους παραπάνω συλλογισμούς, ένα μη περιοδικό σήμα $m(t)$ εκφράζεται ως

$$m(t) = \int M(f) e^{j2\pi ft} df \quad (2.5)$$

Η μιγαδική συνάρτηση $M(f)$ αποτελεί το ολοκλήρωμα (ή μετασχηματισμό) Fourier του σήματος $m(t)$, αποδεικνύεται δε ότι μπορεί να γραφεί ως

$$M(f) = \int m(t) e^{j2\pi ft} dt \quad (2.6)$$

Η "σύνδεση" μεταξύ των πεδίων χρόνου και συχνότητας γίνεται μέσω του θεωρήματος Parseval που γενικά (για περιοδικά και μη) σήματα, εκφράζεται ως:

Αν $m(t)$ και $M(f)$ ($\omega=2\pi f$) είναι ένα ζεύγος Fourier, τότε αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα Parseval

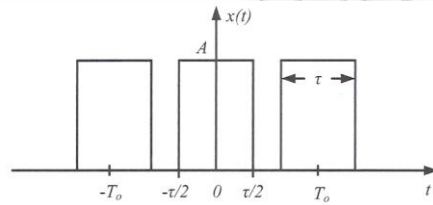
$$\int m^2(t) dt = \int |M(f)|^2 df \quad (2.7)$$

Το θεώρημα Parseval υπονοεί ότι η ενέργεια ενός σήματος μπορεί να υπολογισθεί είτε υπολογίζοντας την ενέργεια στη μονάδα του χρόνου και ολοκληρώνοντας σε όλο το χρονικό διάστημα είτε υπολογίζοντας την ενέργεια στη μονάδα της συχνότητας και ολοκληρώνοντας σε όλη την περιοχή

συχνοτήτων. Η ποσότητα $|X(f)|^2$ αναφέρεται και ως φάσμα πυκνότητας ενέργειας και έχει διαστάσεις Joule/Hz.

Παράδειγμα 2.1

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το παρακάτω σήμα (Περιοδική παλμοσειρά):



$$x(t) = \begin{cases} A \dots \frac{-\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 \dots \dots \dots \text{αλλού} \end{cases}$$

Λύση:

Υπολογίζουμε τους μιγαδικούς συντελεστές Fourier x_n ακολουθώντας τον ορισμό.

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j\frac{2\pi n t}{T_0}} dt = \frac{A}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\frac{2\pi n t}{T_0}} dt = \\ &= \frac{A}{T_0} \left(\frac{-T_0}{j2\pi n} \right) \left[e^{-j\frac{2\pi n t}{T_0}} \right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{T_0} \left(\frac{-T_0}{j2\pi n} \right) \left(e^{-j\frac{\pi n \tau}{T_0}} - e^{j\frac{\pi n \tau}{T_0}} \right) = \\ &= \frac{A}{\pi n} \sin \left(\frac{\pi n \tau}{T_0} \right) \end{aligned}$$

..... $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Ορίζουμε τη συνάρτηση δειγματοληψίας (sampling function) ως εξής:

$$Sa(z) = \frac{\sin(z)}{z}$$

Επομένως

$$x_n = \frac{A\tau T_o}{T_o \pi n \tau} \sin\left(\frac{\pi n \tau}{T_o}\right) = \frac{A\tau}{T_o} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_o}\right) = \frac{A\tau}{T_o} Sa\left(\frac{\pi n \tau}{T_o}\right)$$

Όπου υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση $\operatorname{sinc}(z)$ παίρνει μηδενικές τιμές για ακέραιες τιμές του ορίσματος z . Άρα, οι μηδενισμοί των x_n είναι για

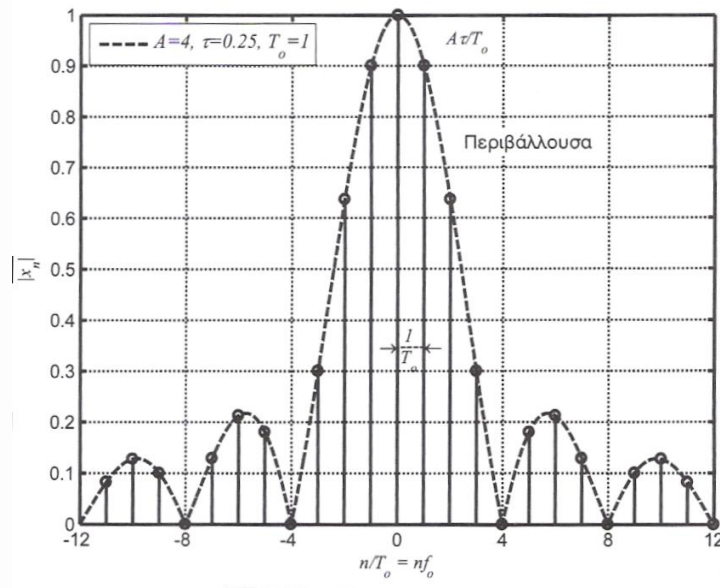
$\frac{n\tau}{T_o} = \pm 1, \pm 2, \dots$. Ο λόγος $\left(\frac{\tau}{T_o}\right)$ του θετικού μετώπου του παλμού προς την περίοδο

του σήματος, καλείται κύκλος λειτουργίας (duty cycle). Άρα, οι μηδενισμοί των

μιγαδικών συντελεστών Fourier προκύπτουν για $n = \pm \frac{T_o}{\tau}, \pm 2 \frac{T_o}{\tau}, \pm 3 \frac{T_o}{\tau}, \dots$ ή αν

απεικονίσουμε σε οριζόντιο άξονα $\frac{n}{T_o} = \pm \frac{1}{\tau}, \frac{2}{\tau}, \dots$. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται

το μέτρο των x_n για $\operatorname{dutycycle} = \frac{\tau}{T} = 0,25$.



Παρατηρούμε ότι:

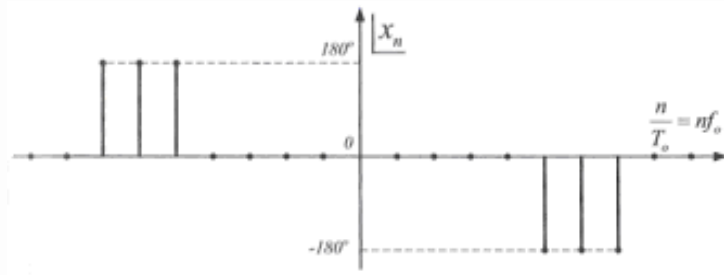
Το μέγιστο πλάτος είναι $\frac{A\tau}{T_0}$ και αντιστοιχεί σε μηδενική συχνότητα, δηλαδή πρόκειται για την DC συνιστώσα.

Η απόσταση των αρμονικών είναι $f_0 = \frac{1}{T_0}$

Οι μηδενισμοί συμβαίνουν σε n που είναι ακέραια πολλαπλάσια του αντιστρόφου duty cycle.

Η φάση παίρνει τιμές 0^0 και 180^0 , ανάλογα με την πολικότητα της συνάρτησης $\sin c\left(\frac{n\tau}{T_0}\right)$, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα. Να υπενθυμίσουμε ότι όταν

$$\frac{n\pi\tau}{T_0} > \pi \quad \text{τότε} \quad \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_0}\right) < 0 \quad \text{και} \quad \angle x_n = -180.$$



Διακριτό φάσμα φάσης περιοδικής παλμοσειράς

Τελικά για την περιοδική παλμοσειρά γράφουμε

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A\tau}{T_0} \text{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right) e^{j\frac{2\pi n t}{T_0}}$$

Παράδειγμα 2.2

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το σήμα $x(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$

Λύση:

Οι μιγαδικοί συντελεστές Fourier είναι:

$$x_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A_0 \cos(2\pi f_0 t + \phi_0) e^{-j2\pi f_0 t} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A_o \left[\frac{e^{j(2\pi f_o t + \phi_o)} + e^{-j(2\pi f_o t + \phi_o)}}{2} \right] e^{-j2\pi f_o t} dt = \\
&= \frac{A_o}{2T_0} \left[e^{j\phi_o} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi f_o t} e^{-j2\pi f_o t} dt + e^{-j\phi_o} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-j2\pi f_o t} e^{-j2\pi f_o t} dt \right] = \\
&= \frac{A_o}{2T_0} \left[e^{j\phi_o} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi(n-1)f_o t} dt + e^{-j\phi_o} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-j2\pi(n+1)f_o t} dt \right] = \\
&= \frac{A_o}{2T_0} e^{j\phi_o} \left[\frac{e^{j2\pi(n-1)f_o t}}{-j2\pi(n-1)f_o} \right]_{-T_0/2}^{T_0/2} + \frac{A_o}{2T_0} e^{j\phi_o} \left[\frac{e^{j2\pi(n+1)f_o t}}{-j2\pi(n+1)f_o} \right]_{-T_0/2}^{T_0/2} = \\
&= \frac{A_o}{2T_0} e^{j\phi_o} \frac{e^{-j\pi(n-1)} - e^{j\pi(n-1)}}{-j2\pi(n-1)f_o} + \frac{A_o}{2T_0} e^{j\phi_o} \frac{e^{-j\pi(n+1)} - e^{j\pi(n+1)}}{-j2\pi(n+1)f_o} = \\
&= \frac{A_o}{2} e^{j\phi_o} \frac{1}{\pi(n-1)} \frac{e^{j\pi(n-1)} - e^{-j\pi(n-1)}}{2j} + \frac{A_o}{2} e^{j\phi_o} \frac{1}{\pi(n+1)} \frac{e^{j\pi(n+1)} - e^{-j\pi(n+1)}}{2j} = \\
&= \frac{A_o e^{j\phi_o}}{2\pi(n-1)} \sin \left[\frac{\pi}{2}(n-1) \right] + \frac{A_o e^{j\phi_o}}{2\pi(n+1)} \sin \left[\frac{\pi}{2}(n+1) \right] = \\
&= \frac{A_o e^{j\phi_o}}{2} \text{sinc}(n-1) + \frac{A_o e^{-j\phi_o}}{2} \text{sinc}(n+1)
\end{aligned}$$

Για $n = 0$, προκύπτει $\text{sinc}(n-1) = \text{sinc}(n+1) = 0$

Για $n = 1$, προκύπτει $\text{sinc}(n-1) = 1$ και $\text{sinc}(n+1) = 0$

Για $n = 2$, προκύπτει $\text{sinc}(n-1) = \text{sinc}(n+1) = 0$

Για όλες τις τιμές $n \geq 2$ προκύπτει $\text{sinc}(n-1) = \text{sinc}(n+1) = 0$

Για $n = -1$ προκύπτει $\text{sinc}(n-1) = 0$ και $\text{sinc}(n+1) = 1$

Όμοια για $n \leq -2$ προκύπτει $\text{sinc}(n-1) = \text{sinc}(n+1) = 0$

Επομένως:

$$x_1 = \frac{A_0}{2} e^{j\varphi_0} \quad \text{και} \quad x_{-1} = \frac{A_0}{2} e^{-j\varphi_0}$$

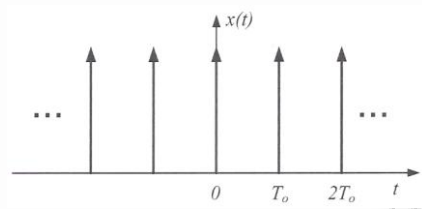
Και η επαλήθευση:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j\frac{2\pi n t}{T_0}} = x_{-1} e^{-j2\pi f_0 t} + x_1 e^{j2\pi f_0 t} = \frac{A_0}{2} e^{-j\varphi_0} e^{-j2\pi f_0 t} + \frac{A_0}{2} e^{j\varphi_0} e^{j2\pi f_0 t} = \\ &= A_0 \frac{e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi_0)} + e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_0)}}{2} = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.3

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier την κρουστική παλμοσειρά που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και η οποία γράφεται

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$



Λύση:

Οι μιγαδικοί συντελεστές Fourier είναι:

$$x_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi n t}{T_0}} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-j\frac{2\pi n t}{T_0}} dt = \frac{1}{T_0} \text{ δηλαδή σταθεροί!}$$

Επομένως,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi n t}{T_0}}$$

Από την έκφραση των μιγαδικών συντελεστών Fourier εύκολα συμπεραίνουμε ότι το φάσμα της κρουστικής παλμοσειράς είναι διακριτό και αποτελείται από

κρουστικές πλάτους $\frac{1}{T_0}$ σε συχνότητες ακέραια πολλαπλάσια της βασικής

$f_0 = \frac{1}{T_0}$, δηλαδή nf_0 ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$). Πρόκειται δηλαδή για μια κρουστική

παλμοσειρά στο πεδίο της συχνότητας.

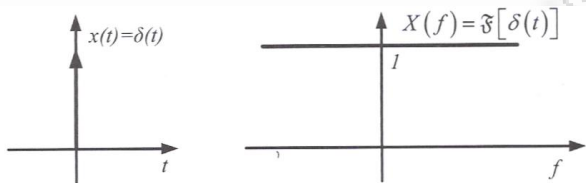
Παράδειγμα 2.4

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier της μοναδιαίας κρουστικής συνάρτησης $x(t)=\delta(t)$.

Λύση:

$$\mathfrak{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = 1$$

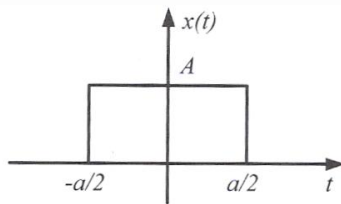
δηλαδή το φάσμα της μοναδιαίας κρουστικής περιέχει όλες τις συχνότητες με μοναδιαίο πλάτος και μηδενική φάση, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Έχοντας υπολογίσει το φάσμα της μοναδιαίας κρουστικής συνάρτησης μπορούμε να συμπεράνουμε τη μεγάλη χρησιμότητα της συνάρτησης αυτής στις τηλεπικοινωνίες. Πρόκειται για μια εξιδανικευμένη πηγή που περιέχει όλες τις συχνότητες με ίδιο πλάτος. Συνεπώς, η απόκριση ενός συστήματος στη συνάρτηση αυτή παρέχει τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, δηλαδή τον τρόπο που επιδρά το σύστημα στις φασματικές συνιστώσες του σήματος εισόδου.

Παράδειγμα 2.5

Υπολογίστε το φάσμα του τετραγωνικού παλμού $x(t) = A\Pi_{\frac{a}{2}}(t)$



Λύση:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} A\Pi_{\frac{a}{2}}(t)e^{-j2\pi ft} dt = A \int_{-a/2}^{a/2} e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$= \frac{A}{-j2\pi f} \left[e^{-j2\pi f \frac{a}{2}} - e^{-j2\pi f \left(-\frac{a}{2}\right)} \right] = \frac{A}{-j2\pi f} \left(e^{-j\alpha\pi f} - e^{j\alpha\pi f} \right) =$$

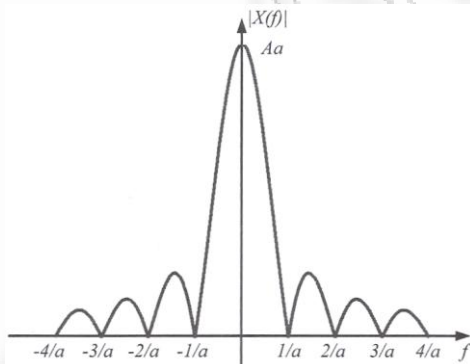
$$= \frac{A}{\pi f} \frac{e^{j\alpha\pi f} - e^{-j\alpha\pi f}}{2j} = \frac{A}{\pi f} \sin(\alpha\pi f) =$$

$$= Aa \frac{\sin(\alpha\pi f)}{a\pi f} = A\alpha \operatorname{sinc}(\alpha f)$$

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε απεικονίσει το πλάτος του φάσματος $|X(f)|$.

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος μηδενισμός του φάσματος συμβαίνει για $f = \pm 1/\alpha$

Όσο μειώνεται δηλαδή η διάρκεια a του παλμού, τόσο αυξάνεται η συχνότητα του πρώτου μηδενισμού και αντίστροφα. Είναι χαρακτηριστική η σχέση με τη μοναδιαία κρουστική συνάρτηση, που όπως είχαμε αναφέρει μπορεί να προσεγγιστεί από ένα τετραγωνικό παλμό με απείρως μικρή διάρκεια. Στην περίπτωση αυτή, όπως είδαμε και προηγουμένως, το φάσμα της $\delta(t)$ περιλαμβάνει όλες τις συχνότητες. Αντίστροφα αν αυξήσουμε τη διάρκεια του παλμού αφήνοντας $a \rightarrow \infty$, τότε το φάσμα πλησιάζει και πάλι στη μοναδιαία κρουστική η οποία τώρα προσεγγίζεται από την $\text{sinc}(af)$. Γενικά, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχει μια αντίστροφη σχέση των μεγεθών στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο της συχνότητας.

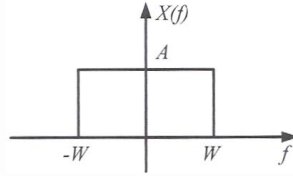


Παράδειγμα 2.6

Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier του φάσματος που δίνεται από τη σχέση:

$$X(f) = \begin{cases} A \dots\dots\dots |f| < W \\ 0 \dots\dots\dots |f| > W \end{cases}$$

Λύση:



$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-W}^W A e^{j2\pi ft} df = \\
 &= \frac{A}{j2\pi} \left[e^{j2\pi ft} \right]_{-W}^W = \frac{A}{j2\pi} \left(e^{j2\pi Wt} - e^{-j2\pi Wt} \right) \\
 &= \frac{A}{\pi} \sin(2\pi Wt) = 2AW \frac{\sin(2\pi Wt)}{2\pi Wt} = \\
 &= 2AW \operatorname{sinc}(2Wt)
 \end{aligned}$$

Από τα δύο προηγούμενα παραδείγματα παρατηρούμε μια ενδιαφέρουσα σχέση μεταξύ των συναρτήσεων στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας στην οποία στο εξής θα την καλούμε δυαδικότητα (duality). Ουσιαστικά μια συνάρτηση στο πεδίο του χρόνου έχει συγκεκριμένο φάσμα το οποίο αν θεωρηθεί ως χρονική συνάρτηση θα έχει φάσμα την αρχική συνάρτηση.

Παράδειγμα 2.7

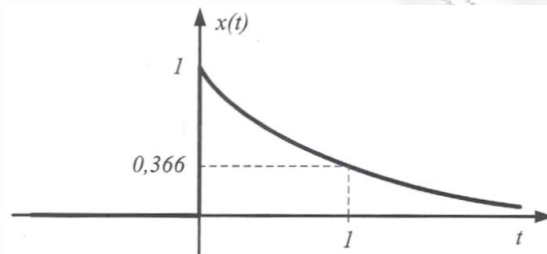
Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier του φθίνοντος εκθετικού παλμού

$$x(t) = e^{-t}u(t) \text{ όπου } u(t) \text{ η μοναδιαία βηματική συνάρτηση.}$$

Λύση:

Ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$ είναι:

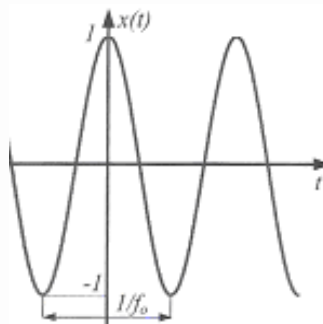
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} u(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(1+j2\pi f)} dt = \frac{-1}{1+j2\pi f} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1+j2\pi f}$$



Παράδειγμα 2.8

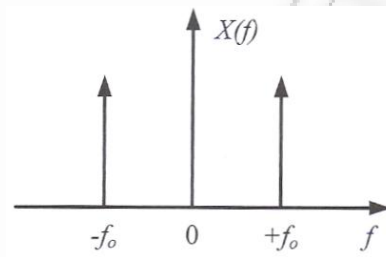
Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier του $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$.

Λύση :



Αναπτύσσοντας το συνήμιτονο σε άθροισμα μιγαδικών εκθετικών και σύμφωνα με την ιδιότητα της ολίσθησης στη συχνότητα έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} &= \mathcal{F}\left[\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{j2\pi f_0 t}\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{-j2\pi f_0 t}\} \\ &= \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)\end{aligned}$$



Ασκήσεις

1. Βασισμένοι στο παράδειγμα 2.1 παίξτε με τις τιμές των T και T ξεχωριστά και μελετήστε την επίδρασή τους στο διακριτό φάσμα της περιοδικής παλμοσειράς.

2. Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier του αύξοντος εκθετικού παλμού

$$x(t) = e^t u(-t) \text{ όπου } u(t) \text{ η μοναδιαία βηματική συνάρτηση.}$$

3. Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier του $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$.

4. Να αναπτυχθεί κατά σειρά Fourier η συνάρτηση $f(x) = x$ για $x \in]-\pi, \pi[$

5. Να αναπτυχθεί κατά σειρά Fourier η συνάρτηση $f(x) = x^2$ για $x \in]-\pi, \pi[$

6. Όμοια να αναπτυχθεί κατά σειρά Fourier η συνάρτηση $f(x) = x^2$, όταν όμως $x \in]-2, 2[$

7. Να αναλυθεί σε σειρά Fourier η μη ημιτονοειδής συνάρτηση

$$f(x) = |\eta\mu x|, \dots x \in \mathbb{R} \dots \text{καθώς... και...} f(x) = |\sigma\upsilon\nu x|, \dots x \in \mathbb{R}.$$

8. Να αναλυθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση

$$f(x) = \pi + x, \dots x \in]-\pi, \pi[$$

9. Να βρεθεί η σειρά Fourier της

$$f(x) = \pi^2 - x^2, \dots x \in]-\pi, \pi[$$

10. Να αναλυθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση

$$f(x) = e^x, \dots x \in]-\pi, \pi[$$

11. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \dots \text{όταν} \dots |t| < a \\ 0, & \dots \text{όταν} \dots |t| > a \end{cases}$$

Και να γίνουν τα γραφήματα της $f(t)$ και $F\{f(t)\}$, για $a=1$

12. Έστω η συνάρτηση $f(t)$, (με $a>0$, σταθερά):

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & \dots t \geq 0 \\ 0, & \dots t < 0 \end{cases}$$

Ή αλλιώς

$$f(t) = e^{-at} u(t)$$

$$\text{όπου} \dots u(t) = \begin{cases} 1, & \dots t \geq 0 \\ 0, & \dots t < 0 \end{cases} \dots \text{η} \dots \text{μοναδιαία} \dots \text{βηματική} \dots \text{συνάρτηση}$$

α) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης.

β) Να δοθούν τα γραφήματα του φάσματος «μέτρου-πλάτους» $|\Phi(\omega)|$ και του φάσματος «ορίσματος-φάσης» $\arg \Phi(\omega)$ ως προς ω .

13. Να υπολογιστεί ο MF της $f(t) = e^{-a|t|} \dots \left(\left. \begin{matrix} e^{-a|t|} \\ a > 0 \end{matrix} \right\} \right)$ και να γίνουν τα γραφήματα της $f(t)$ και της $F \left\{ \begin{matrix} f(t) \\ \Phi(\omega) \end{matrix} \right\}$.

Κεφάλαιο 3. Συστήματα

Η έννοια του συστήματος είναι γενικά μια ευρεία έννοια, είναι άμεσα συνδεδεμένη με την έννοια του σήματος και χρησιμοποιείται σε διάφορους τομείς. Έτσι μιλάμε, για το οικολογικό σύστημα, το ηλεκτρικό ή μηχανικό σύστημα, το οικονομικό σύστημα, το ηλεκτρονικό σύστημα, κλπ. Το αυτοκίνητο, το αεροπλάνο, η τηλεόραση, το ραδιόφωνο, ο Η/Υ, κλπ. είναι μερικά συγκεκριμένα παραδείγματα συστημάτων από τον τομέα της τεχνολογίας.

Ένα σύστημα, λοιπόν, μπορούμε να πούμε ότι είναι μια εξελικτική διαδικασία (process), που στην είσοδο (input) εισάγει κάποια σήματα $x(t)$ και αφού τα «μετασχηματίζει», εξάγει στην έξοδο (output) κάποια άλλα σήματα $y(t)$.

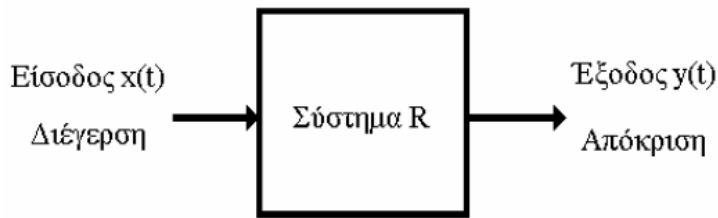
Άρα:

«Σύστημα, ονομάζουμε τη διαδικασία, που μετατρέπει ένα σήμα σε ένα άλλο».

Ή αλλιώς

«Ως σύστημα ορίζεται ένας νόμος μέσω του οποίου συνδέεται η έξοδος (απόκριση του συστήματος) $y(t)$ με την είσοδο (διέγερση του συστήματος) $x(t)$ του συστήματος».

Στην Εικόνα 28 φαίνεται το σχηματικό διάγραμμα ενός συστήματος συνεχούς χρόνου μιας εισόδου και μιας εξόδου.



Εικόνα 28. Σύστημα συνεχούς χρόνου.

Ένα σύστημα συνεχούς χρόνου μετασχηματίζει το σήμα εισόδου $x(t)$ στο σήμα εξόδου $y(t)$ ως εξής:

$$y(t) = \Gamma(x(t)) \quad (3.1)$$

Ομοίως ένα σύστημα διακριτού χρόνου μετασχηματίζει το σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$ (διέγερση) στο σήμα διακριτού χρόνου $y(n)$ (απόκριση) ως εξής:

$$y(n) = \Gamma x n \quad (3.2)$$

3.1 Ταξινόμηση συστημάτων

Τα συστήματα διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες ανάλογα με την αντίστοιχη κατηγορία των σημάτων εισόδου και εξόδου του συστήματος σε χρονοσυνεχή (Αναλογικά) ή χρονοδιακριτά (Ψηφιακά). Ακόμη μιλάμε για τα υβριδικά συστήματα, όπου τα σήματα εισόδου και εξόδου ανήκουν σε διαφορετικά είδη.

Τα χρονοσυνεχή (αναλογικά) συστήματα, κατά τη μελέτη τους, συνήθως καταλήγουν να εκφράζονται Μαθηματικά από «Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις

με σταθερούς συντελεστές», που λύνονται καλύτερα για τις Τεχνολογικές Εφαρμογές όχι μέσω των κλασικών μαθηματικών μεθόδων, όπως των προσδιοριστέων συντελεστών ή του Lagrange, αλλά μέσω των Μετασχηματισμών Laplace και Fourier.

Αντίθετα, τα χρονοδιακριτά (ψηφιακά) συστήματα καταλήγουν να εκφράζονται μαθηματικά από «Γραμμικές εξισώσεις Διαφορών με σταθερούς συντελεστές», που οι λύσεις τους αντιμετωπίζονται καλύτερα μέσω του αντίστοιχου Μετασχηματισμού Z (Ζήτα).

Ο σκοπός της χρήσης ενός μετασχηματισμού γενικά στις τεχνολογικές εφαρμογές, όπως είδαμε διεξοδικά στα προηγούμενα, είναι να δημιουργηθεί ένα νέο πεδίο, όπου εκεί είναι ευκολότερο να μελετηθεί το εξεταζόμενο πρόβλημα απ' ό,τι στο αρχικό πεδίο (συνήθως από το αρχικό πεδίο σημάτων ως προς τον χρόνο t , πάμε στο νέο πεδίο σημάτων ως προς τη συχνότητα s ή ω). Οπότε, παίρνοντας τα μετασχηματισμένα αποτελέσματα, μπορούμε μέσω του Αντίστροφου Μετασχηματισμού, να έχουμε τα επιθυμητά αποτελέσματα στο αρχικό πεδίο και αμφίδρομα.

Επίσης, ένα σύστημα μπορεί να δέχεται στην είσοδο την εισαγωγή ενός σήματος ή και περισσότερων και να εξάγει ένα ή περισσότερα σήματα στην έξοδο. Εμείς θα αναφερθούμε σε συστήματα μιας εισόδου-μιας εξόδου (συστήματα SISO, Single Input - Single Output).

Συστήματα με πολλές εισόδους και μια έξοδο (αθροιστής), αναφέρονται ως MISO (Multi Input - Single Output), ενώ αυτά με πολλές εισόδους και πολλές εξόδους ως MIMO (Multi Input - Multi Output). Βέβαια, στην πράξη έχουμε διασύνδεση πολλών συστημάτων μεταξύ τους, όπως π.χ. σ' ένα ηχητικό σύστημα, όπου διασυνδέονται τα υποσυστήματα ενός ραδιοφώνου, ενός cd player ή ενός μαγνητοφώνου με ενισχυτή και διάφορα μεγάφωνα.

3.1.1 Συστήματα με ή χωρίς μνήμη

Ένα σύστημα ανήκει στην κατηγορία των συστημάτων χωρίς μνήμη όταν η έξοδος του σε κάθε χρονική στιγμή t εξαρτάται από την τιμή της εισόδου στην ίδια χρονική στιγμή.

Ένα σύστημα του οποίου η έξοδος εξαρτάται και από τις προηγούμενες τιμές της εισόδου ονομάζεται σύστημα με μνήμη ή δυναμικό σύστημα. Για παράδειγμα το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$y(t) = ax^2(t) + \beta x(t) \quad (3.3)$$

είναι ένα σύστημα χωρίς μνήμη, ενώ το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^n a_i x(i) \quad (3.4)$$

είναι ένα δυναμικό σύστημα διακριτού χρόνου.

3.1.2 Αιτιοκρατικά συστήματα

Ένα σύστημα ονομάζεται αιτιοκρατικό αν η έξοδος του σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται μόνον από παρούσες ή προηγούμενες τιμές της εισόδου του. Έτσι, το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση:

$$y(t) = ax^2(t) + bx(t-1) \quad (3.5)$$

είναι αιτιοκρατικό, ενώ το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση

$$y(t) = ax(t+1) + bx(t+2) \quad (3.6)$$

χαρακτηρίζεται ως μη αιτιοκρατικό, διότι η έξοδος του εξαρτάται από επόμενες τιμές της εισόδου του.

3.1.3 Ευσταθή συστήματα

Ένα σύστημα είναι ευσταθές όταν για κάθε απολύτως φραγμένη είσοδο του παρουσιάζει επίσης απολύτως φραγμένη έξοδο. Δηλαδή όταν:

$$|x(t)| < k_x \quad \text{είναι και} \quad |y(t)| < k_y$$

Για παράδειγμα, το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση (7.9).

$$|y(t)| = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (3.9)$$

είναι ασταθές, διότι για τη φραγμένη είσοδο του $x(t) = u(t)$ (βηματική συνάρτηση) παρουσιάζει τη μη φραγμένη έξοδο $y(t) = t$ για $t > 0$.

Το σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από τη σχέση (3.10).

$$y(n) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m a_i x(n-1) \dots \dots \dots \text{όπου} \dots \dots a_i \in \mathfrak{R} \quad (3.10)$$

είναι ευσταθές, διότι αν $x(i)$ είναι φραγμένη, τότε και η έξοδος του είναι φραγμένη ως γραμμικός συνδυασμός φραγμένων συναρτήσεων.

3.1.4 Χρονικά αμετάβλητα συστήματα

Ένα σύστημα ονομάζεται χρονικά αμετάβλητο αν για κάθε χρονική στιγμή t , η οποιαδήποτε χρονική ολίσθηση t_0 στο σήμα εισόδου προκαλεί την ίδια χρονική ολίσθηση στο σήμα εξόδου.

$$\Gamma \{x(t-t_0)\} = y(t-t_0) \quad (3.11)$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι αυτή η κατηγορία συστημάτων υπάρχει και για τα συστήματα διακριτού χρόνου.

$$\Gamma \{x[n-n_0]\} = y[n-n_0] \quad (3.12)$$

3.1.5 Γραμμικά Συστήματα

Η κατηγορία αυτή συστημάτων υπάρχει τόσο για συστήματα συνεχούς χρόνου όσο και για συστήματα διακριτού χρόνου. Ένα σύστημα ονομάζεται γραμμικό όταν ικανοποιεί τη παρακάτω σχέση

$$\Gamma \{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) \quad (3.13)$$

Όπου $y_1(t) = \Gamma \{x_1(t)\}$, $y_2(t) = \Gamma \{x_2(t)\}$

Παράδειγμα

Τα παρακάτω συστήματα χαρακτηρίζονται ως εξής:

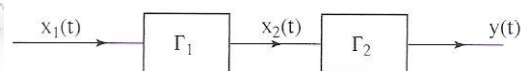
$$y(n) = ax(n - m) \quad \text{γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο.}$$

$$y(t) = t^2 x(t) \quad \text{γραμμικό, χρονικά μεταβαλλόμενο.}$$

$$y(t) = |x(t)| \quad \text{μη γραμμικό.}$$

3.1.6 Διασύνδεση Συστημάτων

Κάθε σύστημα το οποίο περιλαμβάνει επί μέρους υποσυστήματα είναι δυνατόν να παρασταθεί με ένα σχηματικό διάγραμμα ροής σήματος. Στην Εικόνα 26 φαίνεται η σειριακή διασύνδεση δύο υποσυστημάτων (ή σύνδεση σε διαδοχή).



Εικόνα 26. Σειριακή διασύνδεση δύο υποσυστημάτων.

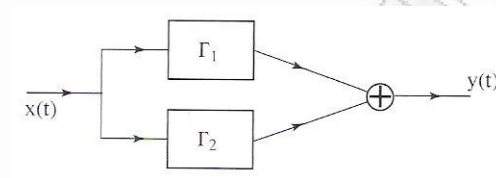
Προφανώς:

$$x_2(t) = \Gamma_1 \{ x_1(t) \} \quad (3.14)$$

και

$$y(t) = \Gamma_2 \left\{ \Gamma_1 \left\{ x(t) \right\} \right\} + \Gamma_1 \left\{ \Gamma_2 \left\{ x(t) \right\} \right\} \quad (3.15)$$

Αντίστοιχα στην Εικόνα 27 φαίνεται η παράλληλη διασύνδεση δύο υποσυστημάτων.



Εικόνα 27. Παράλληλη διασύνδεση δύο υποσυστημάτων.

Προφανώς:

$$y(t) = \Gamma_1 \left\{ \Gamma_2 \left\{ x(t) \right\} \right\} + \Gamma_2 \left\{ \Gamma_1 \left\{ x(t) \right\} \right\} \quad (3.16)$$

3.1.7 Γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα

Η γραμμικότητα και η χρονική σταθερότητα των συστημάτων παίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάλυση τηλεπικοινωνιακών συστημάτων. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι πολλές φυσικές διαδικασίες είναι δυνατό να προτυποποιηθούν χρησιμοποιώντας γραμμικά - χρονικά αμετάβλητα συστήματα. Για το λόγο αυτό, τα συστήματα αυτά θα εξετασθούν με λίγο περισσότερες λεπτομέρειες.

3.2 Κρουστική απόκριση

α. Συστήματα συνεχούς χρόνου

Η απόκριση ενός συστήματος όταν στην είσοδο του εφαρμόζεται η συνάρτηση $\delta(t)$ ορίζεται ως η κρουστική απόκριση του συστήματος:

$$h(t) = \Gamma(\delta(t)) \quad (3.17)$$

Για τα γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα συστήματα ισχύει:

$$h(t - \tau) = \Gamma(\delta(t - \tau)) \quad (3.18)$$

β. Συστήματα διακριτού χρόνου

Η κρουστική απόκριση ορίζεται μέσω της σχέσης (3.19).

$$h[n] = \Gamma(\delta[n]) \quad (3.19)$$

Το συνελκτικό ολοκλήρωμα – άθροισμα

Η απόκριση ενός γραμμικού - χρονικά αμετάβλητου συστήματος Γ σε κάθε σήμα εισόδου $X(t)$ δίδεται από τη σχέση (3.20).

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (3.20)$$

ή συμβολικά

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (3.21)$$

όπου $h(t)$ η κρουστική απόκριση και $(*)$ συμβολίζει τη συνέλιξη δύο συναρτήσεων. Ισχύουν οι παρακάτω βασικές ιδιότητες της συνέλιξης:

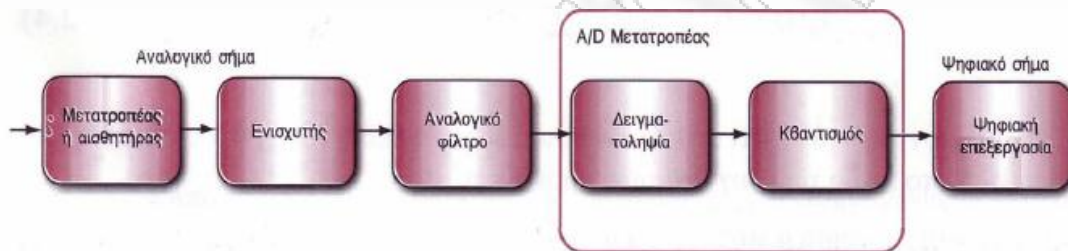
$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)$$

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

Κεφάλαιο 4. Δειγματοληψία

Δειγματοληψία είναι η μια εκ των τριών (Δειγματοληψία (Sampling), Κβαντοποίηση (Quantization) και Κωδικοποίηση (Encoding)) βασικών διαδικασιών επεξεργασίας στην παλμοκωδική διαμόρφωση PCM, η οποία με τη σειρά της αποτελεί μια εκ των δύο διαδικασιών μετατροπής αναλογικών σημάτων σε ψηφιακά (η άλλη είναι η διαμόρφωση Δ).

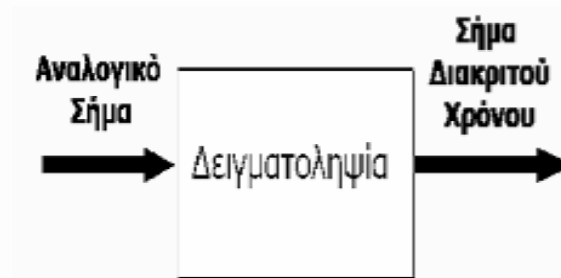


Εικόνα 28. Διαδικασία μετατροπής αναλογικού σήματος σε ψηφιακό

Δειγματοληψία λοιπόν είναι η επεξεργασία κατά την οποία ένα σήμα συνεχές στο πεδίο του χρόνου δειγματοληπτείται μετρώντας το πλάτος του επιλεκτικά σε διακριτές τιμές του χρόνου. Όταν αυτές οι χρονικές στιγμές επιλεγούν μάλιστα να ισαπέχουν μεταξύ τους, τότε έχουμε τη λεγόμενη «ομοιόμορφη δειγματοληψία». Η παρουσίαση των τιμών πλάτους με ένα πεπερασμένο πλήθος σταθμών πλάτους, λέγεται κβαντοποίηση. Η αντιστοιχία κάθε στάθμης πλάτους με ένα κώδικα λέγεται κωδικοποίηση και θα την δούμε αναλυτικά σε επόμενο κεφάλαιο.

Δηλαδή, η δειγματοληψία μετατρέπει ένα σήμα συνεχούς χρόνου σε σήμα διακριτού χρόνου. Η κβαντοποίηση μετατρέπει συνεχές πλάτος σε διακριτές τιμές

πλάτους.



Εικόνα 29. Ρόλος δειγματοληψίας.

4.1 Δειγματοληψία αναλυτικά

Η διαδικασία της δειγματοληψίας για να είναι αξιόπιστη και αποτελεσματική απαιτεί προϋποθέσεις που εκφράζονται συνήθως μέσω μαθηματικών σχέσεων (πχ Θεώρημα Shannon, η συχνότητα αποκοπής Nyquist) και που αποτελούν κυρίως το αντικείμενο της ψηφιακής επεξεργασίας σημάτων. Η χρήση του διακριτού σήματος αντί του αναλογικού είναι δυνατή γιατί, υπό ορισμένες παραδοχές, το διακριτό σήμα είναι απόλυτα αντιπροσωπευτικό του αντίστοιχου συνεχούς, αυτού δηλαδή από το οποίο υπολογίσθηκε.

Θα πρέπει επίσης να υπάρχει η δυνατότητα ακριβούς αναπαράστασης και ανακατασκευής του αναλογικού σήματος από τα δείγματα του ψηφιακού σήματος.

4.1.1 Σήματα περιορισμένου εύρους ζώνης

Ένα σήμα $m(t)$ λέγεται περιορισμένου εύρους ζώνης όταν έχει μία μέγιστη συχνότητα f_m . Δηλαδή, όλες οι φασματικές συνιστώσες του σήματος έχουν συχνότητα μικρότερη από f_m . Αν $M(f)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του $m(t)$ τότε για ένα σήμα περιορισμένου εύρους ισχύει:

$$M(f) = 0 \text{ για } f > f_m \quad (4.1)$$

4.1.2 Διαδικασία δειγματοληψίας

Για να μπορέσουμε να καταλάβουμε το θεώρημα της δειγματοληψίας, ας θεωρήσουμε ένα συνεχές σήμα $x(t)$ με μέγιστη συχνότητα f_0 , του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier $X(f)$ φαίνεται στην Εικόνα 29 και ας υποθέσουμε ότι το δειγματοληπτούμε ομοιόμορφα.

Η διαδικασία της δειγματοληψίας μπορεί να μοντελοποιηθεί με τον πολλαπλασιασμό του σήματος επί την παρακάτω συνάρτηση:

$$i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

όπου $\delta(t)$ είναι η συνάρτηση Dirac, k ένας ακέραιος και T_s η περίοδος δειγματοληψίας. Το διακριτό σήμα προκύπτει ως εξής:

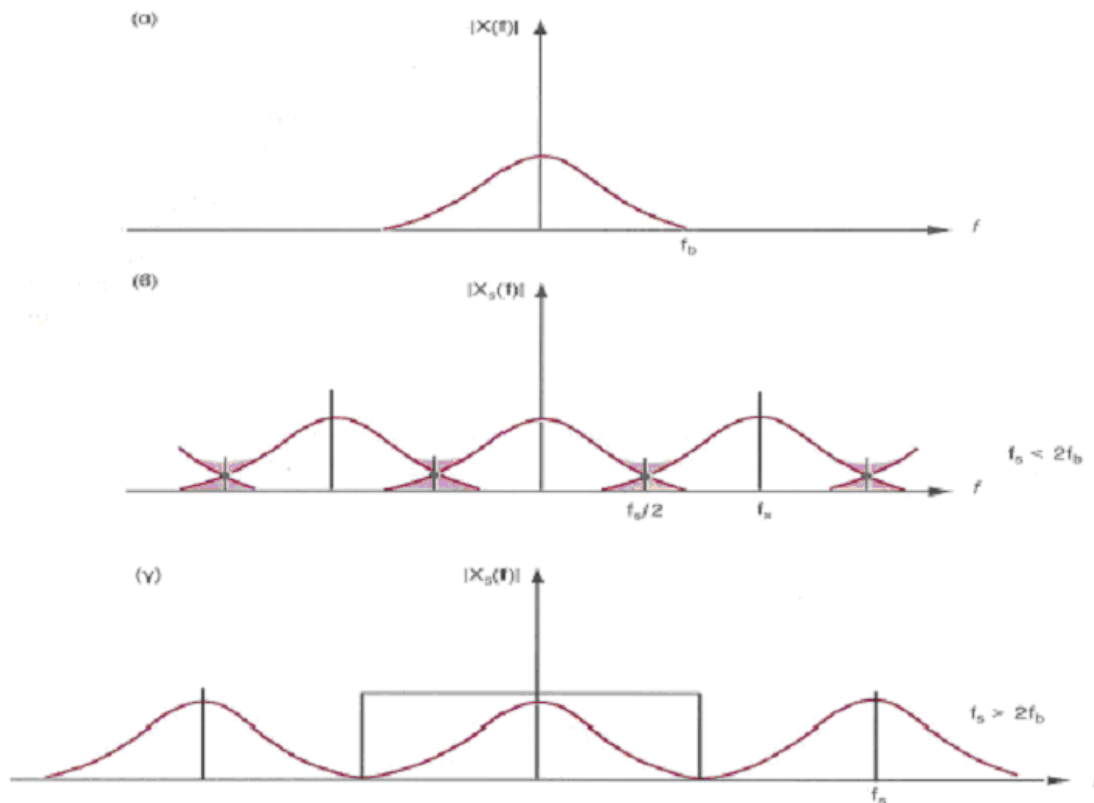
$$x_s(t) = x(t)i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - kT_s)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο πολλαπλασιασμός στο πεδίο του χρόνου συνεπάγεται

συνέλιξη στο πεδίο των συχνοτήτων, προκύπτει:

$$X_s(f) = X(f) * I(f) = X(f) * \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kfs) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kfs) \quad (4.2)$$

όπου $f_s = \frac{1}{T_s}$ είναι η συχνότητα δειγματοληψίας.



(α) Μετασχηματισμός Fourier του αρχικού σήματος, (β) Μετασχηματισμός Fourier του διακριτού σήματος όταν $fs < 2fb$ (γ) Μετασχηματισμός Fourier του διακριτού σήματος όταν $fs > 2fb$. Οι σκούρες περιοχές στο (β) υποδηλώνουν τις αναδιπλούμενες συχνότητες.

Εικόνα 30. Αποτέλεσμα της συχνότητας δειγματοληψίας f_s σε σήμα μέγιστης συχνότητας f_b .

Έτσι, όπως φαίνεται και στην Εικόνα 29, στις περιπτώσεις β, γ, ο

μετασχηματισμός Fourier του διακριτού σήματος $X_s(f)$ είναι και αυτός περιοδικός και αποτελείται από μια σειρά πανομοιότυπων επαναλήψεων του $X(f)$ που έχουν ως κέντρο πολλαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας.

Πρέπει να τονίσουμε ότι οι αρμονικές συχνότητες του $X(f)$ που είναι μεγαλύτερες από την $f_s/2$ εμφανίζονται, όταν $f_s < 2f_b$ διπλωμένες στις χαμηλότερες αρμονικές.

Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται επικάλυψη και όταν συμβαίνει, η αρχική πληροφορία δεν μπορεί να ανακατασκευαστεί, γιατί οι αρμονικές του αρχικού σήματος είναι ανεπανόρθωτα αλλοιωμένες από τις επικαλύψεις των μετατοπισμένων εκδόσεων του $X(f)$.

Μπορούμε να αποφύγουμε αυτό το φαινόμενο, όταν το αρχικό σήμα έχει πεπερασμένο εύρος συχνοτήτων.

($X(f)=0$ για $f > f_b$) και η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_s > 2f_b$.

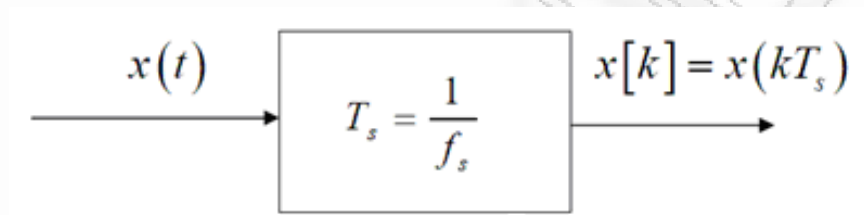
Σε αυτή την περίπτωση (όπως φαίνεται και στην περίπτωση (γ)) δε συμβαίνει επικάλυψη και η αρχική κυματομορφή μπορεί να ανακατασκευαστεί από το διακριτό σήμα με χρήση βαθυπερατών φίλτρων.

Η υπόθεση του πεπερασμένου εύρους συχνοτήτων του σήματος συνήθως δεν ισχύει στην πράξη, λόγω των χαρακτηριστικών του σήματος και της επίδρασης θορύβου μεγάλου εύρους.

Είναι πάντα ανάγκη πριν από τη δειγματοληψία το σήμα να φιλτράρεται, ακόμα και όταν υποθέτουμε ότι το σήμα μας είναι ήδη πεπερασμένης συχνότητας.

4.1.3 Παράδειγμα

Στα παρακάτω παράδειγμα αναφέρουμε αναλυτικά επακριβώς το θεώρημα δειγματοληψίας, τις συνθήκες που αυτό προδιαγράφει, καθώς και τις επιπτώσεις που προκύπτουν με μαθηματική ανάλυση (φαινόμενο επικάλυψης), αν αυτές οι συνθήκες δεν ικανοποιούνται.



Εικόνα 31. Σύστημα ιδανικής δειγματοληψίας.

Η παραπάνω εικόνα δείχνει ένα σύστημα ιδανικής δειγματοληψίας και άρα μετατροπής σημάτων συνεχούς χρόνου σε σήματα διακριτού χρόνου.

Θεωρείστε το σήμα συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{ή} \quad x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

όπου

ω_0 είναι η κυκλική συχνότητα (σε ακτίνια/sec) και

f_0 η συχνότητα (σε Hz) του σήματος.

Το αντίστοιχο σήμα διακριτού χρόνου $X[k]$ προκύπτει από τη δειγματοληψία του $X(t)$ μέσω του συστήματος ιδανικής δειγματοληψίας περιόδου δειγματοληψίας T . Άρα, τα δείγματα θα δίνονται από την:

$$x[k] = x(kTs) = A \cos(\omega_0 kTs + \phi)$$

$$x[k] = A \cos(2\pi f_0 kTs + \phi) = A \cos\left(2\pi k \frac{f_0}{f_s} + \phi\right)$$

Όπου f_s είναι η συχνότητα δειγματοληψίας.

Τα δείγματα $x[k]$ δεν μπορούν πάντα να χρησιμοποιηθούν για την αξιόπιστη ανακατασκευή του αρχικού σήματος $x(t)$. Αυτό συμβαίνει, διότι σε σχέση με τη συχνότητα f_0 ενός σήματος και τη συχνότητα δειγματοληψίας f_s , περισσότερα από ένα σήματα $x(t) \neq y(t)$ συνεχούς χρόνου μπορούν να έχουν τα ίδια δείγματα διακριτού χρόνου $x[k] = y[k]$.

Άρα, για την ανακατασκευή ενός σήματος $x(t)$ από τα δείγματα του $x[k]$ πρώτα από όλα χρειαζόμαστε να γνωρίζουμε την συχνότητα δειγματοληψίας f_s .

Μια άλλη χρήσιμη πληροφορία είναι η επιλογή της συχνότητας δειγματοληψίας. Πόσο συχνά δηλαδή, θα πρέπει να λαμβάνουμε δείγματα ενός σήματος, έτσι ώστε να είναι δυνατή η αξιόπιστη αναπαραγωγή του από τα δείγματα.

Τη συνθήκη που θα πρέπει να ικανοποιεί η συχνότητα δειγματοληψίας f_s μας δίνει το Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon το οποίο λέει ότι :

Ένα σήμα συνεχούς χρόνου $X(t)$, το οποίο περιέχει συχνότητες όχι υψηλότερες

της f_{max} μπορεί να αναπαραχθεί επακριβώς από τα δείγματα του $x[k] = X(kT_s)$, αν τα δείγματα λαμβάνονται με συχνότητα $f_s = \frac{1}{T_s}$ η οποία είναι μεγαλύτερη από $2f_{max}$.

Η συχνότητα $2f_{max}$ ονομάζεται συχνότητα Nyquist.

Άρα, κατά το θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon, για να είναι εφικτή η ανακατασκευή του αρχικού σήματος από τα δείγματα του, η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας πρέπει να είναι μεγαλύτερη από τη συχνότητα Nyquist.

$$f_s > 2f_{max}$$

Ας εξετάσουμε πρώτα τι γίνεται, αν η παραπάνω συνθήκη δεν ισχύει. Τι γίνεται δηλαδή, αν δεν εκτελούμε τις δειγματοληψίες αρκετά γρήγορα. Προσεγγίζουμε αρχικά το πρόβλημα στο πεδίο του χρόνου και στη συνέχεια θα το εξετάσουμε στο πεδίο της συχνότητας για να δούμε την επίδραση της επιλογής της συχνότητας δειγματοληψίας.

Θεωρείστε ένα άλλο συνημιτονικό σήμα συνεχούς χρόνου συχνότητας $f_0 + nf_s$ που είναι το:

$$y(t) = A \cos[2\pi(f_0 + nf_s)t + \varphi]$$

Όπου f_0 είναι η συχνότητα του σήματος και n είναι ακέραιος.

Αν θεωρήσουμε την δειγματοληψία $y[k]$ του σήματος $y(t)$ με συχνότητα δειγματοληψίας f_s ίση με αυτήν του σήματος (1) τότε είναι εύκολο να δούμε ότι

τα δύο δείγματα $x[k]$ και $y[k]$ είναι τα ίδια:

$$\begin{aligned}y[k] &= y(kt_s) \\&= A \cos[2\pi(f_0 + nf_s)kT_s + \varphi] \\&= A \cos[2\pi f_0 kT_s + 2\pi n f_s kT_s + \varphi] \\&= A \cos[2\pi f_0 kT_s + 2\pi n f_s k \frac{1}{f_s} + \varphi] \\&= A \cos[2\pi f_0 kT_s + 2\pi nk + \varphi] \\&= A \cos[2\pi f_0 kT_s + \varphi] \\&= x[k]\end{aligned}$$

Άρα η δειγματοληψία με συχνότητα $f_s=1/T_s$ των συνημιτονικών σημάτων $x(t)$, $y(t)$ όπως τα παραπάνω με συχνότητες

$$f_0, f_0 \pm f_s, f_0 \pm 2f_s, f_0 \pm 3f_s$$

θα δημιουργήσει τα ίδια δείγματα $x[k]$. Το ίδιο θα γίνει με τη δειγματοληψία με συχνότητα $f_s=1/T_s$ συνημιτονικών σημάτων με συχνότητες

$$-f_0, -f_0 \pm f_s, -f_0 \pm 2f_s, -f_0 \pm 3f_s$$

Τα σήματα με συχνότητες $\pm f_0 \pm n f_s$ για $n=1,2,\dots$ τα ονομάζουμε «ψευδώνυμα» (aliases) του αρχικού σήματος $x(t)$ με συχνότητα f .

Σκοπός μας είναι η αναπαραγωγή του αρχικού σήματος $x(t)$ από τα δείγματα $x[k]$ και όχι των ψευδωνύμων.

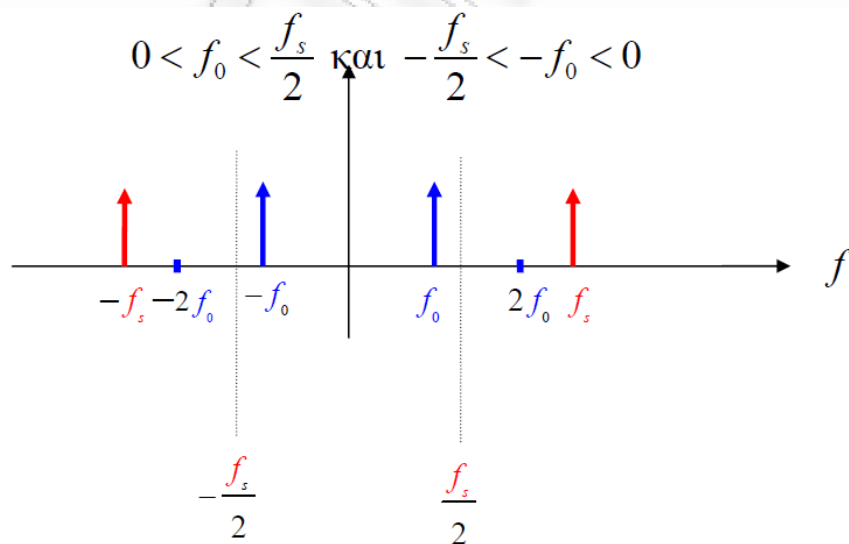
Για την καλύτερη κατανόηση του θεωρήματος δειγματοληψίας του Shannon κάνουμε τώρα χρήση των γραμμικών φασμάτων συχνοτήτων των παραπάνω

σημάτων.

Όπως αναφέρεται στο Θεώρημα του Shannon, αν η συχνότητα δειγματοληψίας f_s είναι μεγαλύτερη από το διπλάσιο της συχνότητας f_0 του σήματος $x(t)$, τα προβλήματα που συνδέονται με τα δείγματα των ψευδωνύμων σημάτων μπορούν να αποφευχθούν.

Έστω λοιπόν ότι η συχνότητα δειγματοληψίας f_s ικανοποιεί τη σχέση

$f_s > 2f_0$, η οποία συνεπάγεται τις σχέσεις:



Τότε τα δείγματα θα είναι:

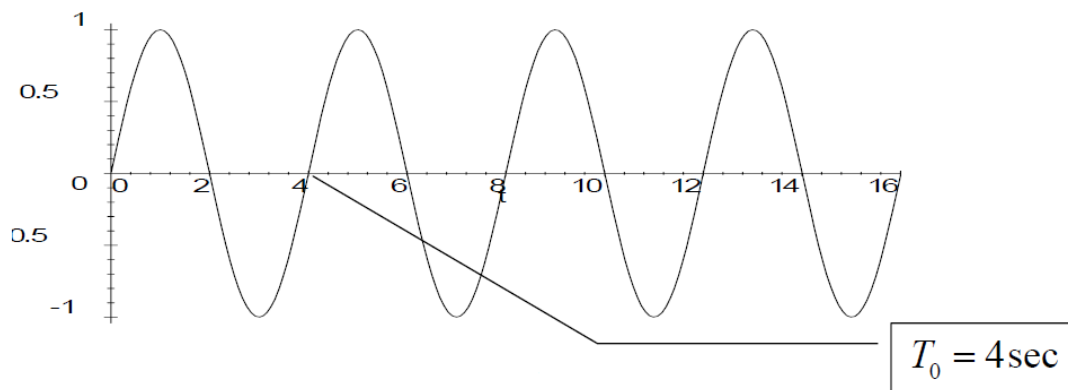
$$x[k] = x(kTs) = A \cos(\omega_0 kTs + \phi)$$

$$x[k] = A \cos(2\pi f_0 kTs + \phi) = A \cos\left(2\pi k \frac{f_0}{f_s} + \phi\right)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω ημιτονικό σήμα $x(t) = \sin \omega_0 t$ με περίοδο $T_0 = 4 \text{ sec}$ (σχήμα), άρα συχνότητα $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{4} \text{ Hz}$ και γωνιακή συχνότητα $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2 \times \pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/sec}$

έτσι ώστε το σήμα να γράφεται $x(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)$.



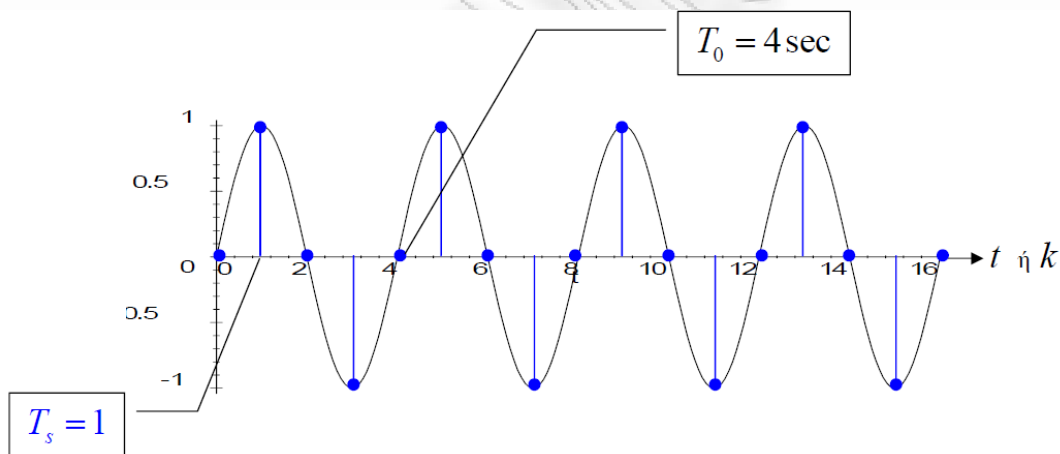
Για το παραπάνω σήμα είναι $2f_0 = 0,5$

Έστω ότι για το παραπάνω σήμα επιλέγουμε συχνότητα δειγματοληψίας f_s , η

οποία ικανοποιεί την απαίτηση του θεωρήματος Shannon και είναι $F_s = 1 > 0,5 = 2f_0$

Η περίοδος δειγματοληψίας που αντιστοιχεί είναι $T_s = \frac{1}{f_s} = 1 \text{ sec}$ και τα δείγματα θα είναι :

$$x[k] = \sin\left(\frac{\pi}{2} k T_s\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} k \frac{1}{f_s}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} k\right)$$



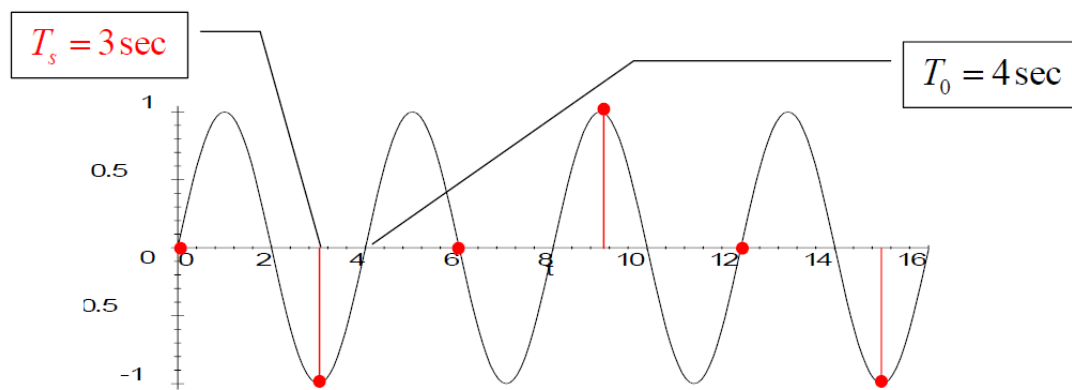
Ημιτονικό σήμα με περίοδο $T_0 = 4 \text{ sec}$ και η δειγματοληψία του με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 1 \text{ sec}$.

Αν όμως επιλέξουμε συχνότητα δειγματοληψίας, η οποία δεν ικανοποιεί την

απαιτήση του θεωρήματος του Shannon, αν δηλαδή επιλέξουμε $F_s = \frac{1}{3} < 0,5 = 2f_0$

τότε η περίοδος δειγματοληψίας θα είναι $T_s = \frac{1}{f_s} = 3\text{sec}$ και τα δείγματα θα είναι όπως στο σχήμα που ακολουθεί.

$$x[k] = x(kT_s) = \sin(\omega_0 k T_s) = \sin(2\pi f_0 k T_s) = \sin\left(2\pi k \frac{f_0}{f_s}\right) = \sin\left(2\pi k \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}\right) = \sin\left(\pi k \frac{3}{2}\right)$$



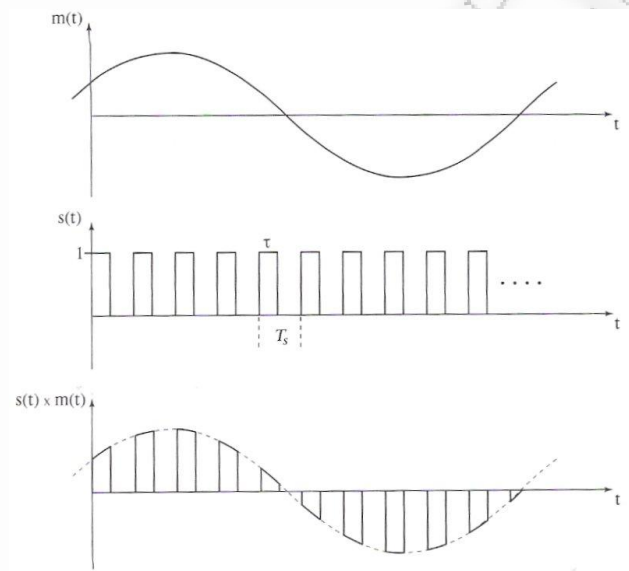
Ημιτονικό σήμα με περίοδο $T_0 = 4\text{sec}$ και η δειγματοληψία του με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 3\text{sec}$.

4.2 Φυσική δειγματοληψία

Επειδή στην πράξη όμως τόσο στενοί παλμοί είναι αδύνατο να πραγματοποιηθούν, η δειγματοληψία γίνεται με πραγματικούς παλμούς, οι οποίοι έχουν κάποιο περιορισμένο χρονικό εύρος τ. Στην περίπτωση αυτή ονομάζεται

φυσική δειγματοληψία (natural sampling).

Στη φυσική δειγματοληψία τα δείγματα $m(nT_s)$ δεν έχουν σταθερό πλάτος, όπως συμβαίνει στην ιδανική δειγματοληψία, αλλά ακολουθούν τη μεταβολή του σήματος $m(t)$ στο χρονικό διάστημα τ . Παράδειγμα φυσικής δειγματοληψίας φαίνεται στην Εικόνα 31.

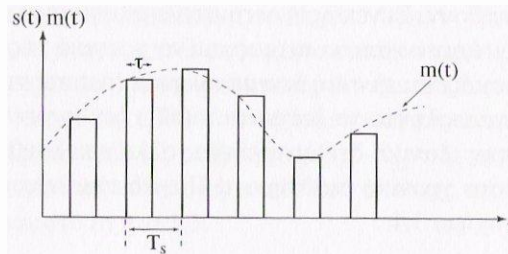


Εικόνα 32. Παράδειγμα φυσικής δειγματοληψίας.

4.3 Δειγματοληψία σταθερού πλάτους

Στη φυσική δειγματοληψία τα δείγματα έχουν πλάτος το οποίο μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια τ . Στην πράξη όμως προτιμώνται δείγματα σταθερού πλάτους.

Για το σκοπό αυτό κατά την έναρξη της δειγματοληψίας διατηρείται η αρχική τιμή του δείγματος σταθερή σε όλη την διάρκεια του παλμού τ . Παράδειγμα φυσικής δειγματοληψίας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 32).



Εικόνα 33. Παράδειγμα φυσικής δειγματοληψίας με δείγματα σταθερού πλάτους.

Ασκήσεις

1. Δίνεται το αναλογικό σήμα $x(t)=2\cos 100\pi t$.

(α) Να προσδιορίσετε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας που απαιτείται, ώστε να αποφύγουμε το φαινόμενο της χαμηλού ρυθμού δειγματοληψίας (aliasing),

(β) Θεωρήστε ότι λαμβάνονται δείγματα του σήματος με ρυθμό $F_s = 200$ Hz. Ποιο το σήμα διακριτού χρόνου το οποίο θα προκύψει μετά τη δειγματοληψία;

(γ) Επαναλάβετε το ερώτημα (β) για ρυθμό δειγματοληψίας $F_s = 75$ Hz.

(δ) Για $F_s = 75$ Hz, ποια η συχνότητα F_0 , όπου $-F_s/2 \leq F_0 \leq F_s / 2$ του ημιτονοειδούς το οποίο δίνει τα ίδια ακριβώς δείγματα με εκείνα που πήραμε στην περίπτωση (γ);

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Μετασχηματισμοί Laplace, Fourier, Ζήτα (Εφαρμογές στα Σήματα-Συστήματα) Ν.ΓΑΓΑΛΗΣ, Ι.ΘΕΟΔΩΡΟΥ, Π.ΚΙΚΙΛΙΑΣ, Φ.ΚΟΜΙΣΟΠΟΥΛΟΣ, Μ.ΛΑΜΠΙΡΗΣ Εκδόσεις Δηρός.
- Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα Εγχειρίδιο για την υποστήριξη των μαθημάτων «Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα Ι και ΙΙ» Γ.Κ.Παγιατάκης.
- Ηλεκτρικά κυκλώματα Γ.Χατζαράκης Εκδόσεις Τζιόλα
- Τηλεπικοινωνιακά συστήματα Taub/Schilling Εκδόσεις Τζιόλα
- Εισαγωγή στις τηλεπικοινωνίες Φ.Κωνσταντίνου, Χ.Καψάλης, Π.Κωπτής Εκδόσεις Παπασωτηρίου
- Εισαγωγή στις τηλεπικοινωνίες Α.Κανάτας
- Σημειώσεις του μαθήματος Εισαγωγή στα συστήματα τηλεπικοινωνιών κεφ. 1 Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής, Τομέας Φυσικήςτων εφαρμογών, εργαστήριο ηλεκτρονικής Ιωάννης Γ. Τίγκελης και Δημήτριος Ι. Φραντζεσκάκης
- Ηλεκτρονικές επικοινωνίεςFrenzel, εκδόσεις Τζιόλα
- Τηλεπικοινωνίες και δίκτυα υπολογιστών, Αλεξόπουλος, Λαγογιάννης