

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ

«ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ»

Μελέτη και εκτίμηση υποδειγμάτων με στοχαστική αβεβαιότητα

Αθανάσιος Δ. Ψωμάς

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς

Μάιος 2011

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική. Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Καθηγητής Αγιακλόγλου Χρήστος (Επιβλέπων)
- Καθηγητής Κούτρας Μάρκος
- Λέκτορας Σεβρόγλου Βασίλειος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE
SCIENCE POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS**

By

Athanassios D. Psomas

**Design and evaluation models
with stochastic volatility**

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the
University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of
Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece

May 2011

РАМЕТЪМО РЕПАА

Ευχαριστίες

Ευχαριστίες οφείλω στον επιβλέποντα καθηγητή του Τμήματος Οικονομικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, κ. Χ. Αγιακλόγλου, η καθοδήγηση του οποίου ήταν πολύτιμη σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης της μελέτης. Αισθάνομαι επίσης υποχρέωση να ευχαριστήσω τη μητέρα μου και τη μνηστή μου Μαρία και γενικότερα όλους τους «δικούς μου ανθρώπους», χωρίς την υποστήριξη των οποίων δεν θα τα είχα καταφέρει.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Διευθυντή του προγράμματος καθηγητή κ. Μ. Κούτρα και όλους του διδάσκοντες που αυτά τα δύο χρόνια πέραν από τις σημαντικές τους γνώσεις μας εμφύσησαν τις αξίες και τα ιδανικά τους και κατάφεραν να μας καλλιεργήσουν ευαισθησίες συμβάλλοντας έτσι ακόμη περισσότερο στη βελτίωση της προσωπικότητάς μας.

РАМЕТЪМО РЕПАА

Περίληψη

Η παραβίαση της υπόθεσης της ομοσκεδαστικότητας στην οικονομετρική ανάλυση για δεδομένα που προέρχονται από χρονοσειρές, αντιμετωπίζεται με υποδείγματα GARCH, στα οποία η διακύμανση ακολουθεί ένα συγκεκριμένο τρόπο εξέλιξης. Μία εναλλακτική θεώρηση των εν λόγω υποδειγμάτων είναι η χρήση υποδειγμάτων στοχαστικής αβεβαιότητας (SV – models), τα οποία συμπεριλαμβάνουν μια μεταβλητή ευαίσθητη σε μεταβολές που η συμπεριφορά της είναι στοχαστική. Στην παρούσα εργασία περιγράφονται τα GARCH και SV υποδείγματα και γίνεται εφαρμογή των παραπάνω στις λογαριθμικές αποδόσεις των μετοχών Ευρωπαϊκών Τηλεπικοινωνιακών Εταιρειών.

РАМЕТЪМО РЕПАА

Abstract

The violation of homoscedasticity in econometric analysis for time series data is usually confronted by the aid of GARCH models, where the variance follows a certain pattern of development. An alternative approach for handling this problem is by exploiting stochastic models of volatility (SV - models), which include a variable sensitive to changes which is stochastic. This thesis describes the GARCH and SV models and illustrates how these methods can be applied to log equity returns of European Telecommunication Companies.

РАМЕТЪМО РЕПАА

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη	vii
Abstract	ix
Κατάλογος Πινάκων	xiii
Κατάλογος Διαγραμμάτων	xv
1. Αποτίμηση του κινδύνου	1
1.1 Εισαγωγή	1
1.2 Η έννοια του κινδύνου και τα είδη του	1
1.3 Διαχείριση των κινδύνων	5
1.4 Τεχνικές μέτρησης του κινδύνου	6
1.5 Μεθοδολογίες για τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο	9
1.5.1 Ιστορική προσομοίωση	10
1.5.2 Προσομοίωση Monte Carlo	11
1.5.3 Μέθοδος της Συνδιακύμανσης	12
1.5.4 Επανέλεγχος	14
1.5.5 Έλεγχος Πίεσης	15
1.5.6 Θεωρία Ακραίων Τιμών	15
1.6 Ειδικές μέθοδοι εκτίμησης VaR χαρτοφυλακίου	17
1.7 Ανακεφαλαίωση	19
2. Αυτοπαλίνδρομα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας υποδείγματα	21

2.1 Εισαγωγή	21
2.2 Το γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης και οι προϋποθέσεις του	21
2.3 Βασικές έννοιες χρονοσειρών	24
2.4 Αυτοπαλίνδρομη διαδικασία και διαδικασία κινητού μέσου	26
2.4.1 Αποσύνθεση κατά Wold	26
2.4.2 Αυτοπαλίνδρομη διαδικασία	29
2.4.3 Διαδικασία κινητού μέσου	32
2.5 Αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας	35
2.5.1 Αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας τάξης 1	35
2.5.2 Εκτίμηση υποδείματος	39
2.6 Γενικευμένο αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας τάξης (1,1)	41
2.7 Ανακεφαλαίωση	43
3. Επεκτάσεις των υποδειγμάτων GARCH και υποδειγμάτων με στοχαστική αβεβαιότητα	45
3.1 Εισαγωγή	45
3.2 Επεκτάσεις των υποδειγμάτων GARCH	45
3.3 Στοχαστική μεταβλητότητα	49

3.4 Εκτίμηση των στοχαστικών μοντέλων μεταβλητότητας	52
3.5 Υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητα του μέσου υποδείγματα	59
3.6 Τρόποι σύγκρισης δύο υποδειγμάτων	62
3.7 Ανακεφαλαίωση	63
4. Εκτίμηση της μεταβλητότητας των αποδόσεων μετοχών Ευρωπαϊκών τηλεπικοινωνιακών εταιριών	65
4.1 Εισαγωγή	65
4.2 Περιγραφή δεδομένων	65
4.3 Προσδιορισμός GARCH και SV υποδειγμάτων	69
4.4 Ανακεφαλαίωση	72
Βιβλιογραφία	75

РАМЕТЪМО РЕПАА

Κατάλογος Πινάκων

4.1 Περιγραφικά στατιστικά στοιχεία λογαριθμικών αποδόσεων	66
4.2 Έλεγχος στασιμότητας	69
4.3 Επιλογή GARCH υποδειγμάτων με βάση το κριτήριο BIC	71
4.4 Επιλογή SV και GARCH υποδειγμάτων με βάση το LR test	72

РАМЕТЪМО РЕПАА

Κατάλογος Διαγραμμάτων

1.1 Παραδείγματα οδηγών βασικών κινδύνων	2
1.2 Η διεργασία διαχείρισης των κινδύνων	6
1.3 Γραφική απεικόνιση του VaR	7
1.4 Οι ημερήσιες απώλειες ενός προϊόντος	16
1.5 Block Maxima Μέθοδο	16
1.6 Peakover Theshold Μέθοδο	17
3.1 Τιμές από πιθανή δειγματοληψία κατά Gibbs	57
4.1 Διαγράμματα χρονοσειρών λογαριθμικών αποδόσεων	67
4.2 Ιστογράμματα λογαριθμικών αποδόσεων	68

РАМЕТЪМО РЕПАА

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Αποτίμηση του κινδύνου

1.1 Εισαγωγή

Κύριος στόχος κάθε εταιρίας ανεξάρτητα από τον κλάδο στον οποίο δραστηριοποιείται είναι τα κέρδη τόσο βραχυπρόθεσμα όσο και μακροπρόθεσμα. Αν μάλιστα πρόκειται για Ανώνυμη Εταιρία, τότε μέρος των κερδών αποδίδεται σε μορφή μερίσματος στους εκάστοτε μετόχους. Για να επιτευχθεί αυτό, κάθε εταιρία επενδύει σε εξοπλισμό και στοχεύει στην αύξηση του μεριδίου αγοράς της.

Τα τελευταία χρόνια, λόγω της παγκοσμιοποίησης της οικονομίας, παρατηρείται να υπάρχει σκληρός ανταγωνισμός για όλες σχεδόν τις εταιρίες. Έτσι, εκτός από την αύξηση των κερδών, πολλές εταιρίες προσανατολίζονται και στην πρόβλεψη των κινδύνων που καλούνται να αντιμετωπίσουν. Μία σωστή εκτίμηση ενός κινδύνου, μπορεί να καθορίσει ακόμα και την βιωσιμότητα μιας επιχείρησης. Με άλλα λόγια το πόσο θα στοιχίσει κάποιο γεγονός.

Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζεται η έννοια του κινδύνου, καθώς και η έννοια της διαχείρισης κινδύνου. Κατόπιν, ορίζεται το VaR (αξία σε κίνδυνο) και παρουσιάζονται αρκετές από τις μεθοδολογίες που χρησιμοποιούνται στα χρηματοοικονομικά προϊόντα και στα χαρτοφυλάκια. Τέλος, παρουσιάζονται κάποιες πιο σύνθετες μέθοδοι για καλύτερη εκτίμηση στην μέτρηση του κινδύνου του χαρτοφυλακίου.

1.2 Η έννοια του κινδύνου και τα είδη του

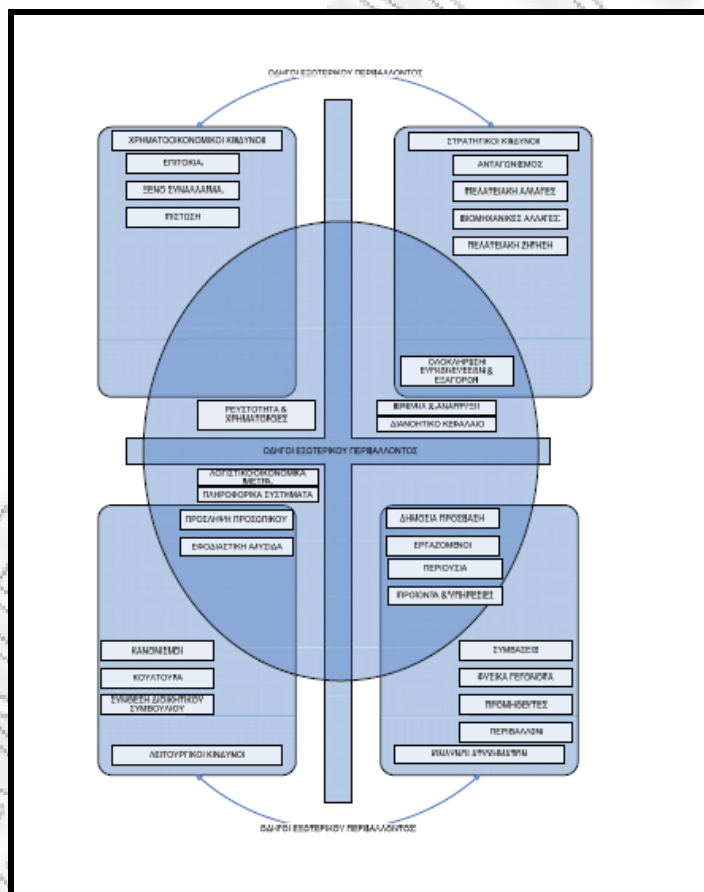
Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η έννοια του κινδύνου και γίνεται ταξινόμηση όλων των ειδών αυτών. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται αναλυτικά μερικά από αυτά τα βασικά είδη κινδύνου.

Ορισμός

Ως κίνδυνος ορίζεται η έκθεση σε μία αβέβαιη κατάσταση η οποία παρουσιάζει αυξημένη πιθανότητα εμφάνισης απωλειών-ζημιών ή οποιοδήποτε άλλο αναπάντεχο γεγονός κατά κανόνα δυσάρεστο.

Όπως γίνεται αντιληπτό, ο κίνδυνος μπορεί να οριστεί ως ο συνδυασμός της πιθανότητας ενός γεγονότος και των συνεπειών του. Σε κίνδυνο μπορεί να υπόκεινται μία επιχείρηση, ένα κράτος, ένα χαρτοφυλάκιο. Σύμφωνα με μια ομάδα εργασίας που προέρχεται από τους μεγαλύτερους οργανισμούς διαχείρισης κινδύνου, οι κίνδυνοι που αντιμετωπίζει ένας οργανισμός και οι λειτουργίες του μπορεί να είναι αποτέλεσμα παραγόντων αμφότερα εξωτερικών και εσωτερικών του οργανισμού.

Το Διάγραμμα 1.1 συνοψίζει παραδείγματα βασικών κινδύνων σε αυτές τις περιοχές και δείχνει ότι κάποιος ειδικός κίνδυνος μπορεί να έχουν αμφότερους εξωτερικούς και εσωτερικούς οδηγούς (*drivers*) και επομένως επικαλύπτουν τις δύο περιοχές. Μπορούν να κατηγοριοποιηθούν περαιτέρω σε διάφορους τύπους κινδύνου όπως, στρατηγικούς, χρηματοοικονομικούς, λειτουργικούς, ατυχημάτων φυσικού και ανθρώπινου περιβάλλοντος (*hazard risks*) κ.α.



Πηγή: IRM

Διάγραμμα 1.1

Παραδείγματα οδηγών βασικών κινδύνων

Στη συνέχεια παρουσιάζονται μερικά από τα βασικά είδη κινδύνου αλλά και υποπεριπτώσεις ευρέως γνωστές.

Κίνδυνος της αγοράς

Ένας κλάδος κινδύνου είναι ο κίνδυνος της αγοράς (*Market Risk*). Πρόκειται για τον κίνδυνο απώλειας λόγω των αλλαγών στις τιμές της αγοράς. Με την μέτρηση αυτού του κινδύνου ασχολείται κυρίως ο διαχειριστής ενός χαρτοφυλακίου (χρηματοοικονομικών προϊόντων). Τα χρεόγραφα που έχει στην κατοχή του (ομόλογα, μετοχές, παράγωγα, swaps, future contracts) διατρέχουν κίνδυνο εξαιτίας της μεταβολής των επιτοκίων, των συναλλαγματικών ισοτιμιών, των τιμών των μετοχών κτλ.

Πιστωτικός Κίνδυνος

Ο πιστωτικός κίνδυνος (*Credit Risk*) σχετίζεται με τη χρηματοοικονομική απώλεια που προκύπτει όταν μία επιχείρηση (ή ιδιώτης) αθετεί κάποιο συμβόλαιο που συνάπτει. Στην αρχή το credit risk σχετιζόταν με την αθέτηση κάποιου συμβολαίου που είχε μια επιχείρηση με κάποια τράπεζα. Τα τελευταία χρόνια, πολλές εταιρίες έχουν αναπτύξει credit risk (Credit Scoring) στην πελατειακή τους βάση.

Επιχειρηματικός Κίνδυνος

Ο Επιχειρηματικός κίνδυνος (*Enterprise Risk*) συνδέεται με το να μην πετύχει μία επιχείρηση τους στρατηγικούς της στόχους.

Επιχειρησιακός Κίνδυνος

Ο επιχειρησιακός κίνδυνος (*Operational Risk*) είναι μια ευρεία κατηγορία κινδύνου. Μερικές υποκατηγορίες είναι οι ακόλουθες:

Κίνδυνος Ρευστότητας

Ο κίνδυνος ρευστότητας (*Liquidity Risk*) αφορά όλες τις εταιρίες ανεξαρτήτου μεγέθους και κλάδου. Είναι ο κίνδυνος μια εταιρία να μην έχει τα απαραίτητα διαθέσιμα ώστε να καλύψει τις υποχρεώσεις της.

Κίνδυνος συστημάτων

Ο κίνδυνος συστημάτων (*Systems Risk*) σχετίζεται με το αν κάποια συστήματα που αποτυγχάνουν δεν λειτουργούν σωστά ή όταν κάποια projects καθυστερούν να ολοκληρωθούν.

Κίνδυνος χρηματικών μεταφορών

Ο κίνδυνος αυτός (*Money Transfer Risk*) σχετίζεται με την απώλεια λόγω λανθασμένων ή αποτυχημένων διακανονισμών.

Κίνδυνος υποδειγμάτων

Ο κίνδυνος αυτός (*Model Risk*) σχετίζεται με τις απώλειες εξαιτίας της ανεπάρκειας μιας εταιρία να αξιολογήσει τα χρηματοοικονομικά του όργανα και μοντέλα ορθά.

Περιβαλλοντικός Κίνδυνος

Είναι ο κίνδυνος (*Environmental Risk*) όπου μία επιχείρηση μπορεί να υποστεί απώλεια από περιβαλλοντικές ζημιές που προκλήθηκαν είτε από την ίδια την επιχείρηση είτε από εξωτερικούς παράγοντες.

Κίνδυνος Φήμης

Ο κίνδυνος αυτός σχετίζεται με τη φήμη μιας εταιρίας. Αν για παράδειγμα δημοσιοποιηθεί κάτι που πλήττει την εικόνα μιας εταιρίας, τότε κλονίζεται η εμπιστοσύνη των πελατών της. Όπως είναι αναμενόμενο, η εν λόγω εταιρία θα σημειώσει απώλειες. Ο κίνδυνος υπόληψης ή φήμης σχετίζεται με αυτές τις απώλειες.

Πολιτικός Κίνδυνος

Είναι ο κίνδυνος που σχετίζεται με αλλαγή στην πολιτική κατάσταση μίας χώρας.

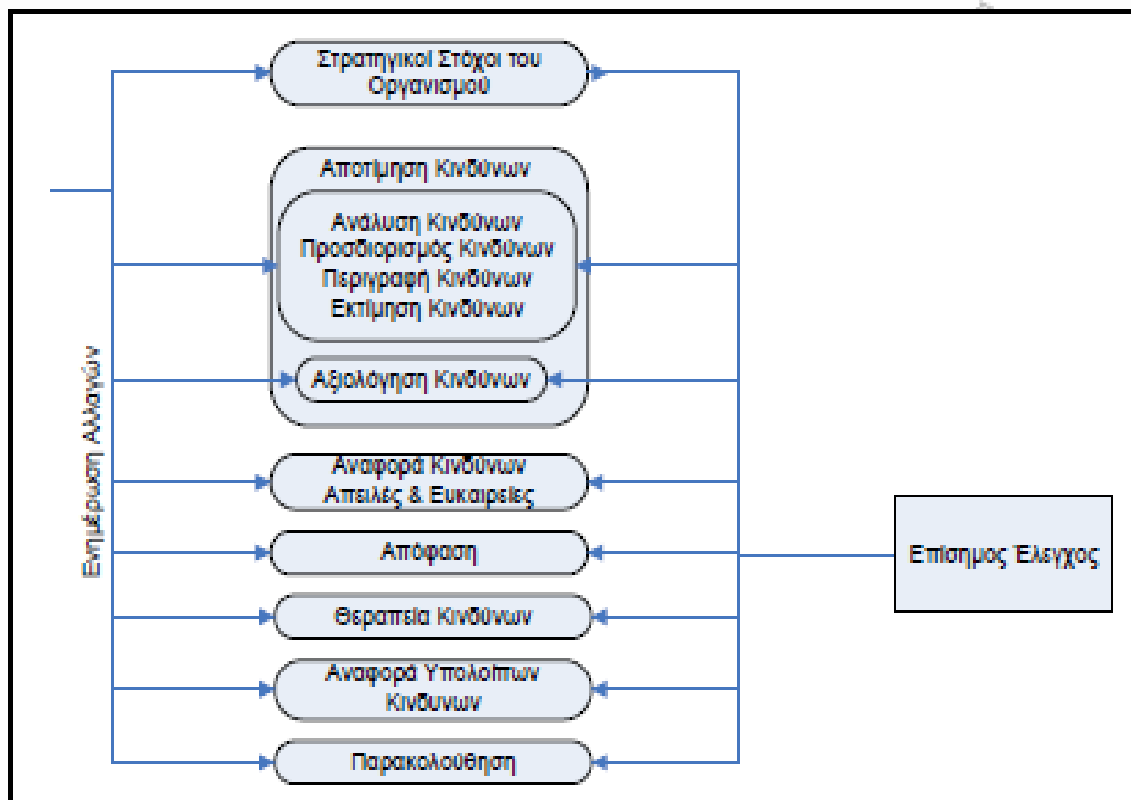
Κίνδυνος Χώρας

Παρουσιάζεται όταν μία χώρα διακόπτει τις πληρωμές σε συνάλλαγμα λόγω της έλλειψης του ξένου νομίσματος.

1.3 Διαχείριση των κινδύνων

Η διαχείριση κινδύνου είναι ο πυρήνας της διαχείρισης στρατηγικής κάθε οργανισμού. Πρόκειται για τη διεργασία με την οποία οι οργανισμοί προσεγγίζουν μεθοδικά τους κινδύνους που σχετίζονται με τις δραστηριότητές τους, με σκοπό την επίτευξη όφελους σε κάθε δραστηριότητα και επί του χαρτοφυλακίου όλων των δραστηριοτήτων. Σωστή διαχείριση κινδύνου είναι η αναγνώριση και ο χειρισμός αυτών των κινδύνων. Ο στόχος είναι να προσθέσει την μέγιστη αξία σε όλες τις δραστηριότητες του οργανισμού. Από κάθε δραστηριότητα, συνήθως υπάρχουν δύο ενδεχόμενα: το ενδεχόμενο για γεγονότα και συνέπειες που συνιστούν ευκαιρίες προς όφελος (*upside*) ή το ενδεχόμενο για απειλές της επιτυχίας (*downside*). Έτσι, η διαχείριση κινδύνου οφείλει να κατανοεί τα πιθανά οφέλη (*upside*) και τις πιθανές απειλές (*downside*) από όλους εκείνους τους παράγοντες που μπορούν να επηρεάσουν τον οργανισμό. Με άλλα λόγια, αυξάνει την πιθανότητα επιτυχίας, και μειώνει την πιθανότητα αποτυχίας και την αβεβαιότητα επίτευξης των συνολικών στόχων του οργανισμού.

Στο Διάγραμμα 1.2 απεικονίζονται συνοπτικά τα βήματα που πρέπει να ακολουθούνται σχετικά με τη διεργασία διαχείρισης των κινδύνων. Καταρχάς, η διαχείριση κινδύνου θα πρέπει να είναι μία συνεχής και αναπτυσσόμενη διεργασία, η οποία διατρέχει τη στρατηγική του οργανισμού και την υλοποίηση αυτής της στρατηγικής. Κατόπιν, θα πρέπει να προσεγγίζει μεθοδικά όλους τους κινδύνους που περιβάλλουν τις παλαιότερες, τρέχουσες και ιδιαίτερες τις μελλοντικές δραστηριότητες του οργανισμού. Με άλλα λόγια, οι κίνδυνοι θα πρέπει να αναγνωρίζονται, να αναλύονται και να αποτιμούνται. Σχετικά με την αναγνώριση κινδύνου θα έλεγε κανείς ότι είναι μία διαδικασία που σκοπό έχει την ταυτοποίηση της έκθεσης του οργανισμού στην αβεβαιότητα. Η αναγνώριση κινδύνου θα πρέπει να προσεγγισθεί με ένα μεθοδικό τρόπο για να διασφαλίσει ότι όλες οι σημαντικές δραστηριότητες εντός του οργανισμού έχουν αναγνωρισθεί και ότι όλοι οι κίνδυνοι που απορρέουν από αυτές τις δραστηριότητες έχουν προσδιορισθεί. Στο σημείο αυτό να σημειωθεί ότι θα πρέπει να είναι ενσωματωμένη στην κουλτούρα του οργανισμού μαζί με μία αποτελεσματική πολιτική και ένα πρόγραμμα με επικεφαλής την πιο ανώτερη διοίκηση. Εκτός αυτού, για μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα, θα πρέπει κανείς να μεταφράζει τη στρατηγική σε τακτικούς και επιχειρησιακούς στόχους.



Πηγή: IRM

Διάγραμμα 1.2

Η διεργασία διαχείρισης των κινδύνων

Το επόμενο βήμα είναι η απόφαση που θα παρθεί για την αντιμετώπισή του. Κατόπιν, είναι η παρακολούθηση των κινδύνων. Αυτό που θα πρέπει να σημειωθεί είναι ότι η διαχείριση κινδύνου θα πρέπει να είναι μία συνεχής διεργασία. Μετά από κάθε αλλαγή σχετικά με ένα κίνδυνο θα πρέπει να γίνονται όλα τα παρακάτω βήματα, δηλαδή αναθεώρηση της στρατηγικής του οργανισμού, επαναξιολόγηση των κινδύνων, αποφάσεις σχετικά με αυτούς, υλοποίηση και παρακολούθηση των αποφάσεων.

1.4 Τεχνικές μέτρησης του κινδύνου

Το επόμενο ερώτημα που τίθεται είναι να βρεθεί ένας τρόπος μέτρησης- αποτίμησης του κινδύνου. Ειδικότερα αυτό που θα ενδιέφερε είναι να υπολογισθεί η μέγιστη απώλεια από τον κίνδυνο. Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται διάφορες τεχνικές αποτίμησης του.

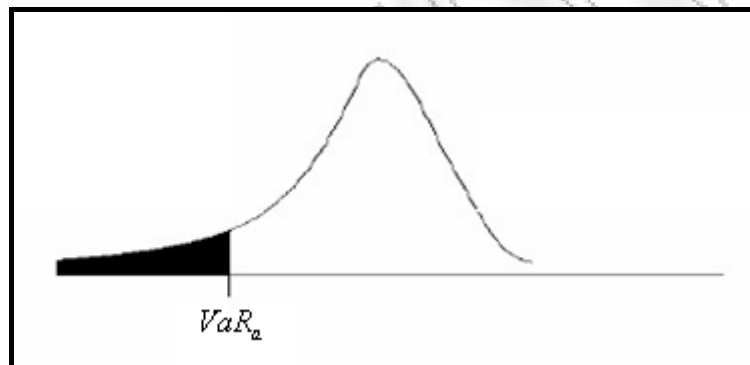
Ορισμός

Σαν αξία σε κίνδυνο (Value at Risk-VaR) ορίζεται η μέγιστη απώλεια κατά τη διάρκεια μίας συγκεκριμένης περιόδου για μία δεδομένη πιθανότητα. Ο μαθηματικός ορισμός είναι ο ακόλουθος:

$$VaR_a = \inf \{l \in \mathcal{R} : \Pr(L > l) \leq 1 - a\} = \inf \{l \in \mathcal{R} : F_L(l) \geq a\}$$

Όπου L η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει την απώλεια, $F_L(l)$ η κατανομή της απώλειας και a το επίπεδο σημαντικότητας με $a \in (0,1)$.

Στο Διάγραμμα 1.3 απεικονίζεται γραφικά η αξία σε κίνδυνο. Είναι φανερό ότι δεν είναι επιθυμητά τα σημεία που βρίσκονται αριστερά του σημείου VaR.



Διάγραμμα 1.3

Γραφική απεικόνιση του VaR

Μέχρι στιγμής γίνεται αντιληπτό ότι τόσο ο κίνδυνος όσο και η αξία σε κίνδυνο (VaR) είναι αρκετά γενικές έννοιες. Αν επικεντρωθεί κανείς στους κινδύνους χρηματοοικονομικών προϊόντων, η αξία σε κίνδυνο (VaR) έχει τέσσερις κύριες παραμέτρους:

- Τον χρονικό ορίζοντα (περίοδο) τον οποίο αναλύει κανείς (δηλαδή τη διάρκεια κατά την οποία σκοπεύει να διακρατήσει τα περιουσιακά στοιχεία στο χαρτοφυλάκιο - την περίοδο διακράτησης). Η τυπική περίοδος διακράτησης είναι 1 ημέρα, αν και συχνά μπορεί να είναι 10 ημέρες. Για παράδειγμα, να υπολογίσει κανείς τις κεφαλαιακές ανάγκες υπό την Ευρωπαϊκή Οδηγία Κεφαλαιακής Επάρκειας (European Capital Adequacy Directive ή CAD). Σε άλλες περιπτώσεις, μπορεί η κατάλληλης περιόδου διακράτησης να αναφέρεται σε 1 έτος.

- Το συντελεστή εμπιστοσύνης στο οποίο θα γίνει η εκτίμηση. Συνήθως αυτά είναι 99% ή 95%.
- Τη νομισματική μονάδα που θα χρησιμοποιηθεί για να επονομαστεί η αξία σε κίνδυνο (VaR).
- Η κατανομή απώλειας.

Ένας ισοδύναμος μαθηματικός ορισμός που σχετίζει πιο έμμεσα το χρόνο είναι ο ακόλουθος:

$$\Pr(V_1 - V_0 < -VaR_{1-a}) = a$$

όπου V_0 και V_1 είναι η αξία του μεγέθους που υπόκειται σε κίνδυνο (π.χ. χαρτοφυλάκιο) τη χρονική στιγμή t_0 και t_1 αντίστοιχα.

Όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω η εκτίμηση κινδύνου είναι αρκετά σημαντικό για μια επιχείρηση, για μια επένδυση. Επίσης χρησιμοποιείται και από το 1996 και για ρυθμιστικούς λόγους (*regulatory purposes*) από την Επιτροπή Εποπτείας του Τραπεζικού Συστήματος Basel.

Ακολουθεί παράδειγμα για την καλύτερη κατανόηση του ορισμού. Έστω η αξία σε κίνδυνο 1-ημέρας ενός χαρτοφυλακίου είναι ίση με €1 εκατομμύριο σε 95% διάστημα εμπιστοσύνης. Αυτό σημαίνει ότι η τράπεζα αναμένει, με πιθανότητα 95%, η αξία του χαρτοφυλακίου να μειωθεί κατά €1 εκατομμύριο ή λιγότερα κατά τη διάρκεια 1 ημέρας.

Ένας από τους κανόνες της Βασιλείας είναι ο κανόνας της τετραγωνικής ρίζας. Αν ζητείται να εκτιμηθεί αξία σε κίνδυνο (*VaR*) ενός χρεογράφου T ημερών, αυτό είναι ίσο με:

$$VaR = DEAR \cdot \sqrt{T}$$

$$DEAR = V_0 \cdot \sigma \cdot \alpha - V_0 \cdot \mu$$

όπου το DEAR προκύπτει από τα αρχικά των λέξεων Daily Earnings at Risk, μ ο μέσος όρος της μέσης απόδοσης του χρεογράφου και σ η τυπική απόκλιση των αποτελεσμάτων ή αλλιώς της αστάθειας-μεταβλητότητας (*volatility*), $1-a$ ο συντελεστής του διαστήματος εμπιστοσύνης και V_0 η αξία του προϊόντος τη χρονική στιγμή t_0 .

1.5 Μεθοδολογίες για τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο

Για να προσδιορίσει κανείς το VaR χρησιμοποιώντας τους παραπάνω ορισμούς, θα έπρεπε να προσδιορίσει την κατανομή του L , κάτι που είναι αρκετά δύσκολο (ή την κατανομή της V_1 , εξίσου δύσκολο). Έτσι, αναπτύχθηκαν αρκετές μέθοδοι αποτίμησης του VaR οι οποίες παρουσιάζονται αναλυτικά σε αυτή την ενότητα.

Στο σημείο αυτό να σημειωθεί ότι όλες οι μεθοδολογίες προσπαθούν να μοντελοποιήσουν χρηματοοικονομικά δεδομένα, τα χαρακτηριστικά των οποίων είναι:

1. Οι κατανομές για τις χρηματοοικονομικές αποδόσεις είναι λεπτόκυρτες, δηλαδή έχουν βαρύτερες ουρές και υψηλότερες κεντρικές τιμές από ότι η κανονική κατανομή, κάτι που αντικατοπτρίζεται στον υψηλότερο συντελεστή κύρτωσης από αυτόν της κανονικής κατανομή.
2. Οι αποδόσεις των μετοχών είναι κατά κανόνα αρνητικά ασύμμετρες.
3. Τα τετράγωνα των καταλοίπων έχουν σημαντική αυτοσυσχέτιση, δηλαδή οι μεταβλητότητες των παραγόντων της αγοράς τείνουν να ομαδοποιούνται (cluster).

Όπως θα περίμενε κανείς λόγω της σπουδαιότητας του VaR στα χρηματοοικονομικά προϊόντα, έχουν αναπτυχθεί αρκετές μέθοδοι. Παρόλα αυτά, σχεδόν όλες ακολουθούν τα ίδια βήματα:

Βήμα 1. Αποτίμηση ενός χαρτοφυλακίου βάσει της αγοράς (*Mark-To-Market the portfolio*).

Βήμα 2. Εκτίμηση της κατανομής απόδοσης του χαρτοφυλακίου.

Βήμα 3. Υπολογισμός του VaR.

Η διαφορετικότητα των μεθόδων είναι στο βήμα 2, δηλαδή στο πως εκτιμούν την κατανομή απόδοσης. Έτσι οι μεθοδολογίες για τον υπολογισμό του VaR μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις υποκατηγορίες:

- παραμετρικές (Risk Metrics και GARCH)
- μη παραμετρικές (ιστορική προσομοίωση και υβριδικό μοντέλο)
- ημιπαραμετρικές (Extreme Value Theory, CAViaR και quasi-maximum likelihood GARCH)

Όσον αφορά τις παραμετρικές μεθοδολογίες για τον υπολογισμό του VaR, η κατηγορία αυτή, θα παρουσιαστεί σε επόμενο κεφάλαιο. Συνοπτικά για αυτή την κατηγορία, όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς, ορίζεται πλήρως η κατανομή απόδοσης ενός

χρηματοοικονομικού προϊόντος ή και χαρτοφυλακίου. Συνήθως το VaR υποεκτιμάται, εξαιτίας της υπόθεσης ότι τα τυποποιημένα κατάλοιπα ακολουθούν κανονική κατανομή.

1.5.1 Ιστορική Προσομοίωση

Η ιστορική προσομοίωση είναι ίσως η πιο δημοφιλής μέθοδος των μη παραμετρικών μεθοδολογιών για τον υπολογισμό του VaR. Βασίζεται στην υπόθεση ότι το εγγύς μέλλον συμπεριφέρεται όπως το εγγύς παρελθόν. Τα βήματα που ακολουθούνται είναι τα ακόλουθα:

Βήμα 1. Απόκτηση των αποδόσεων για κάθε στοιχείο του χαρτοφυλακίου κατά τη διάρκεια μιας συγκεκριμένης περιόδου (παράθυρο επεξεργασίας δεδομένων)

Βήμα 2. Υπολογισμός των καθημερινών αποδόσεων του χαρτοφυλακίου

Βήμα 3. Ταξινόμηση των αποδόσεων από τη χαμηλότερη στην μεγαλύτερη

Βήμα 4. Εύρεση της τιμής από τις ταξινομημένες που αντιστοιχεί στο αντίστοιχο ποσοστημόριο του προεπιλεγμένου επιπέδου εμπιστοσύνης ή χαμηλότερη που αντιστοιχεί.

Ένα απλό παράδειγμα της μεθόδου είναι το ακόλουθο: έστω ότι κάποιος αναλυτής διαθέτει κάποιο ποσό (αρχική θέση) σε ευρώ και θέλει να το μετατρέψει σε δολάριο. Θέλει να διερευνήσει τον «κίνδυνο» ή πιο σωστά την αξία σε κίνδυνο από την ισοτιμία ευρώ/δολαρίου. Βάσει της ιστορικής προσομοίωσης, υπολογίζει τις ημερήσιες αποδόσεις ευρώ/δολαρίου, έστω από 8/1/2000 μέχρι και 30/4/2009. Για αυτή τη χρονική περίοδο συγκεντρώνει 3.400 παρατηρήσεις. Το επόμενο βήμα είναι να τις ταξινομήσει από την χειρότερη προς την καλύτερη. Το 5% των παρατηρήσεων είναι η 170^η. Άρα η τιμή της 171^{ης} παρατήρησης πολλαπλασιασμένη με την αρχική θέση είναι το $VaR_{0.05}$.

Το βασικότερο πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι η απλότητα. Μπορεί εύκολα να χρησιμοποιηθεί και τα συμπεράσματα να γίνουν κατανοητά και σε μη ειδικούς. Αντίθετα, ένα μειονέκτημα είναι ότι δεν εξετάζει αν στα δεδομένα υπάρχουν ασυνήθιστα γεγονότα (*extreme unusual events*). Επίσης όπως αναφέρθηκε και πιο πριν, στη συγκεκριμένη μέθοδο δεν υπάρχει κάποια υπόθεση για την κατανομή των αποδόσεων. Εντούτοις, όπως αναφέρουν οι Engle και Manganelli (2001), η κατανομή της χρονοσειράς παραμένει αμετάβλητη σε όλο το εύρος του χρονικού παραθύρου επεξεργασίας των δεδομένων, αφού η μεταφορά του παραθύρου κατά μία ημέρα απαιτεί τη νέα ημέρα να έχει την ίδια κατανομή με την ημέρα που αφαιρέθηκε.

Κάτι άλλο το οποίο είναι αρκετά σημαντικό στην εν λόγω μέθοδο είναι το παράθυρο επεξεργασίας δεδομένων. Θεωρητικά ο εμπειρικός ποσοτικός εκτιμητής είναι συνεπής μόνο αν το μέγεθος του παραθύρου τείνει προς το άπειρο. Άρα, το μέγεθος του παραθύρου πρέπει να είναι αρκετά μεγάλο για να έχει κανείς σημαντική στατιστική συμπερασματολογία και από την άλλη όχι υπερβολικά μεγάλο, ώστε να αποφύγει κανείς να πάρει παρατηρήσεις έξω από την τρέχουσα ομαδοποιημένη μεταβλητότητα (*volatility cluster*).

Η μέθοδος της ιστορικής προσομοίωσης μπορεί να θεωρηθεί ειδική περίπτωση της ανάλυσης υπό συνθήκη αυτοπαλίνδρομης αξίας σε κίνδυνο (*Conditional Autoregressive Value at Risk* ή *CAViaR*). Η βασική φιλοσοφία του είναι ότι δεν μοντελοποιείται η κατανομή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου, αλλά η εξέλιξη του ποσοστημορίου διαχρονικά. Το βασικό πλεονέκτημα αυτής της μεθοδολογίας είναι πως δεν απαιτείται καμία υπόθεση για την κατανομή των διαταρακτικών όρων, ώστε να ελαχιστοποιείται ο κίνδυνος λάθους εξειδίκευσης. Έτσι προκύπτουν καλύτερες εκτιμήσεις για γενετικές διαδικασίες δεδομένων (*Data Generating Processes* ή *DGPs*) οι οποίες δίνουν παρατηρήσεις με βαριές ουρές στις κατανομές, χαρακτηριστικό στα χρηματοοικονομικά δεδομένα.

1.5.2 Προσομοίωση Monte Carlo

Μία άλλη μέθοδος των μη παραμετρικών μεθοδολογιών είναι η προσομοίωση Monte Carlo, η οποία καλύπτει το κενό που υπάρχει στην μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης. Η πιο γνωστή εφαρμογή είναι στην αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης (*option*). Ας υποθέσει κανείς ότι η μεταβολή ενός προϊόντος, για παράδειγμα μιας μετοχής, περιγράφεται από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dS}{S} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dW \quad (1.1)$$

για πολύ μικρό χρονικό διάστημα Δt η (1.1) γίνεται:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \Delta W \quad (1.2)$$

$$\Delta W = \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t} \quad (1.3)$$

S η τιμή του προϊόντος και ε να ακολουθούν τυποποιημένη κανονική κατανομή.

Η σχέση (1.2) λόγω της (1.3) γίνεται:

$$\Delta S = S \cdot \mu \cdot \Delta t + S \cdot \sigma \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t} . \quad (1.4)$$

Άρα για στοιχειώδη μεταβολή του χρόνου η στοιχειώδης μεταβολή της υποκείμενης αξίας δίνεται από τη σχέση (1.4). Αν κάθε φορά, για ένα αρκετά μικρό Δt , επιλέγεται τυχαία ένας αριθμός ε που ακολουθεί την κανονική κατανομή, τότε υπολογίζεται η στοιχειώδης μεταβολή της S , ΔS . Αθροίζοντας την τιμή της S με το ΔS θα μπορεί να έχει κανείς μια πιθανή τιμή της S μετά από Δt .

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία για πεπερασμένο πλήθος βημάτων, έστω για n , θα καταλήξει κανείς ότι μία πιθανή πορεία της S μετά από το συνολικό χρόνο των n βημάτων θα είναι το άθροισμα της αρχικής τιμής S με τα αντίστοιχα ΔS των n βημάτων, έστω $S_{final.1}$.

Αν η εκτέλεση των n βημάτων επαναληφθεί, τότε λαμβάνεται μια άλλη τελική τιμή, έστω $S_{final.2}$. Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία των n βημάτων, N φορές τότε λαμβάνονται οι $S_{final.1}, \dots, S_{final.N}$.

Αν η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή $T = n \cdot \sqrt{\Delta t}$ είναι η τυχαία μεταβλητή $S_T = S_{n \cdot \sqrt{\Delta t}}$ τότε από τη θεωρία της στατιστικής ισχύει ότι:

$$E(S_T) \rightarrow \frac{S_{final.1} + \dots + S_{final.N}}{N}$$

Στην παραπάνω διαδικασία χρησιμοποιήθηκε η σχέση (1.4), ο οποίος καλείται και σχήμα Euler. Οι προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν ώστε η διαδικασία να υπολογίζει το ζητούμενο βρίσκονται στο βιβλίο των Bouleau-Lepingle (1994).

Όπως κάθε αριθμητική διαδικασία, έτσι και η παραπάνω που χρησιμοποιεί το σχήμα Euler για να υπολογίσει την τιμή της υποκείμενης αξίας, υπολογίζει το ζητούμενο κατά προσέγγιση, με αποτέλεσμα να υπάρχει κάποιο σφάλμα στη τιμή του αποτελέσματος οφειλόμενο από τη διαδικασία.

1.5.3 Μέθοδος της Συνδιακύμανσης

Στη βιβλιογραφία οι Best & Philip (1998) στην κατηγορία των μη παραμετρικών μεθοδολογιών εκτός από την μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης και της προσομοίωσης Monte Carlo, συναντά κανείς και την μέθοδο της συνδιακύμανσης, μια πολύ απλοϊκή μέθοδο

του VaR (the VaR variance-covariance approach). Καταρχάς, υποθέτει κανείς ότι η κατανομή της απόδοσης (*return distribution*) είναι η τυπική κανονική κατανομή:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι:

$$\Pr(\mu - \kappa\sigma < x < \mu + \kappa\sigma) = \int_{\mu - \kappa\sigma}^{\mu + \kappa\sigma} f(x) dx$$

Με άλλα λόγια η μέθοδος της συνδιακύμανσης στηρίζεται στον τύπο:

$$VaR = \sigma \cdot z_a \cdot \text{αξία θέσης}$$

όπου σ η τυπική απόκλιση της απόδοσης του προϊόντος, z_a το άνω όριο της κανονικής κατανομής (καθορίζεται από το συντελεστή εμπιστοσύνης που θέτει ο αναλυτής).

Ας υποθεθεί ότι ένας επιχειρηματίας κατέχει μια θέση με την καθημερινή μεταβλητότητα ίση με 2% και μέση ημερήσια απόδοση ίση με 0,05%. Ο επιχειρηματίας θέλει να εκτιμήσει την μέγιστη δυνητική ζημία για το 90% των πιθανών περιπτώσεων. Το 95% των πιθανών περιπτώσεων βρίσκεται στο διάστημα:

$$\begin{aligned} (\mu - 1.645\sigma, \mu + 1.645\sigma) &= (0.05 - 1.645 \cdot 0.02, 0.05 + 1.645 \cdot 0.02) = \\ &= (-3.24\%, 3.34\%) \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, υπάρχει 5% πιθανότητα ο επιχειρηματίας να αντιμετωπίσει ζημιά χαμηλότερη από -3,24%. Ως εκ τούτου, η τιμή VaR για 95% διάστημα εμπιστοσύνης είναι το 3,24%.

Η παραπάνω μέθοδος δεν είναι ικανοποιητική για παράγωγα προϊόντα. Συνεπώς δεν είναι ικανοποιητική για χαρτοφυλάκια αφού τις περισσότερες φορές υπάρχουν και παράγωγα προϊόντα.

1.5.4 Επανελέγχος

Ο επανελέγχος (*Backtesting*) είναι μια διαδικασία όπου τα πραγματικά κέρδη και οι ζημιές συγκρίνονται με την προβλεπόμενη VaR εκτίμηση. Ο Jorion (2001) αναφέρει ότι επανελέγχος είναι «έλεγχος πραγματικότητας». Πιο αναλυτικά, τη χρονική στιγμή t_0 εκτιμούνται οι απώλειες για τη t_1 . Τη χρονική στιγμή t_1 θα είναι διαθέσιμες δύο πληροφορίες: η εκτιμώμενη και η πραγματική. Αυτό που γίνεται, ελέγχεται εάν οι πραγματικές απώλειες συμφωνούν με τις εκτιμηθείσες, Αυτός ο έλεγχος βοηθά να έχουμε στο μέλλον πιο αξιόπιστα μοντέλα. Αν η VaR εκτίμηση δεν είναι ακριβής, αυτό πιθανότατα έχει συμβεί είτε λόγω κακής παραδοχής, είτε λόγω λάθους στις παραμέτρους.

Για το επανελέγχο, έχουν προταθεί διάφορες μέθοδοι. Καταρχήν σαν ένα πρώτο έλεγχο, είναι να ελεγχθεί ο ρυθμός αποτυχίας (*failure rate*) του μοντέλου. Στην πραγματικότητα, αυτός ο ρυθμός εκφράζει το πόσες φορές πραγματικές αποδόσεις είναι χαμηλότερες από τις εκτιμημένες.

Αν T είναι ο αριθμός των συνολικών ημερών, p ο συντελεστής εμπιστοσύνης, N ο αριθμός υπερβάσεων και X είναι η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό των υπερβάσεων τότε:

$$P(X = x) = \binom{T}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{T-x}$$

Δηλαδή η X ακολουθεί διωνυμική κατανομή με $E(X) = p \cdot T$ και $Var(X) = p \cdot (1-p) \cdot T$.

Όταν T αρκετά μεγάλο και ταυτόχρονα p μικρό, τότε η διωνυμική κατανομή προσεγγίζεται από τυποποιημένη κανονική κατανομή.

Ο ισοδύναμος έλεγχος που πρέπει να γίνει είναι:

H_0 : ο συντελεστής εμπιστοσύνης που έχει επιλεγεί (για το μέτρο κινδύνου) είναι ίσος με την πραγματική πιθανότητα

Στη βιβλιογραφία έχει προταθεί από τον Kupiec (1995) η στατιστική συνάρτηση:

$$LRUC = -2 \cdot \ln \left[(1-p)^{T-N} \cdot p^N \right] + 2 \cdot \ln \left\{ \left[1 - (N/T)^{T-N} \cdot (N/T)^N \right] \right\}$$

η οποία ακολουθεί ασυμπτωτικά την κατανομή X_1^2 .

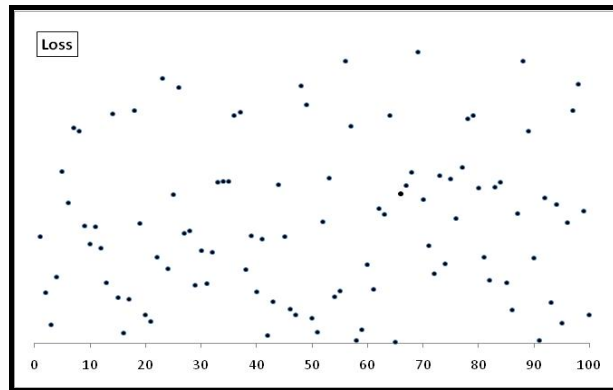
1.5.5 Έλεγχος Πίεσης

Τα VaR μοντέλα δεν μπορούν να ενσωματώσουν όλα τα πιθανά αποτελέσματα των κινδύνων. Η ιστορική εμπειρία έχει δείξει ότι δεν μπορούν να υπολογίσουν ξαφνικές και δραματικές αλλαγές των συνθηκών της αγοράς. Για να καλυφθεί αυτό το κενό, οι διαχειριστές των κινδύνων ανέπτυξαν «προσομοιώσεις ακραίων καταστάσεων», το οποίο είναι ένα εργαλείο διαχείρισης κινδύνου που χρησιμοποιούνται για την αξιολόγηση των δυνητικών επιπτώσεων στις αξίες του χαρτοφυλακίου. Έτσι, ο έλεγχος πίεσης (stress testing) όπως παρουσιάστηκε από τον Best & Philip (1998), αποτελείται από την εφαρμογή προκαθορισμένων ακραίων τιμών στα περιουσιακά στοιχεία που αποτελούν το χαρτοφυλάκιο και ανάλυση στις αλλαγές της αξίας του χαρτοφυλακίου λόγω αυτών των τιμών. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται όλο και περισσότερο ως συμπλήρωμα των πιο τυποποιημένων στατιστικών μοντέλων για την ανάλυση VaR.

1.5.6 Θεωρία Ακραίων Τιμών

Οι πιο πρόσφατες εναλλακτικές μέθοδοι που προτάθηκαν για την εκτίμηση του VaR είναι οι ημιπαραμετρικές μέθοδοι (Extreme Value Theory (EVT), regression quantile quasi maximum likelihood GARCH). Η πιο δημοφιλής είναι η EVT που παρουσιάζεται αναλυτικά παρακάτω.

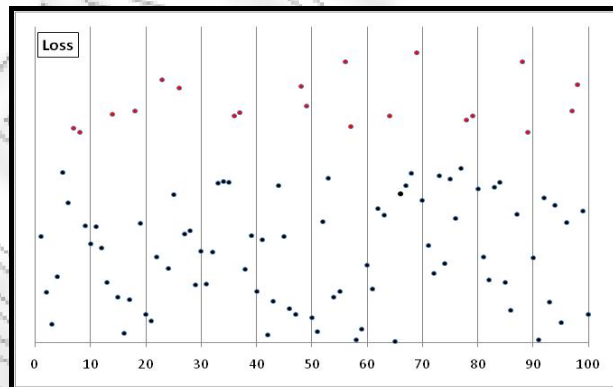
Είναι γνωστό ότι κάποιος μπορεί να αντλήσει πληροφορία για μια κατανομή αν υπολογίσει τις ροπές της. Υπάρχουν και αποδόσεις προϊόντων που έχουν παχιές ουρές. Οπότε δεν είναι αρκετός ο υπολογισμός των ροπών για να γνωρίζει κανείς επαρκώς την κατανομή. Θα πρέπει να εστιάσει και στην ουρά της κατανομής. Για αυτό το λόγο υπάρχουν δύο μέθοδοι οι οποίες επιλέγουν τις ακραίες τιμές και με βάση αυτές προσπαθούν κάνουν πρόβλεψη για την ουρά της κατανομής. Στο Διάγραμμα 1.4 απεικονίζονται οι απώλειες 100 ημερών ενός προϊόντος.



Διάγραμμα 1.4

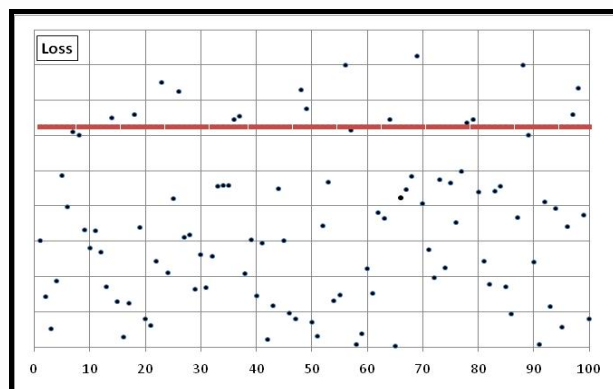
Οι ημερήσιες απώλειες ενός προϊόντος

Η επιλογή των ακραίων τιμών μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Σύμφωνα με την Block Maxima μέθοδο διαμερίζεται το χρονικό διάστημα σε ίσα τμήματα και από κάθε τμήμα επιλέγονται οι ακραίες τιμές. Στο Διάγραμμα 1.5 οι απώλειες 100 ημερών ενός προϊόντος έχουν διαμεριστεί σε δεκαήμερα. Από το κάθε δεκαήμερο οι παρατηρήσεις με κόκκινο χρώμα θεωρούνται σαν ακραίες τιμές.



Διάγραμμα 1.5

Block Maxima Μέθοδο



Διάγραμμα 1.6

Peakover Theshold Μέθοδο

Σύμφωνα με την άλλη μέθοδο (Peakover Theshold) επιλέγεται κάποια τιμή όπου όλες οι παρατηρήσεις πάνω από αυτήν θεωρούνται σαν ακραίες. Στο Διάγραμμα 1.6 οι παρατηρήσεις που βρίσκονται πάνω από την κόκκινη γραμμή θεωρούνται σαν ακραίες.

1.6 Ειδικές μέθοδοι εκτίμησης VaR χαρτοφυλακίου

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται διάφορες μεθοδολογίες σχετικά με το VaR χαρτοφυλακίου. Το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από περιουσιακά στοιχεία. Το VaR χαρτοφυλακίου είναι παρόμοιο με το VaR περιουσιακού στοιχείου, έχει κάποια ιδιαιτερότητα (*Covariance, Dependence, Portfolio weights*).

Αν κάποιο χαρτοφυλάκιο αποτελείται από δύο περιουσιακά στοιχεία περιουσιακά στοιχεία X και Y, τότε η διακύμανση του χαρτοφυλακίου είναι ίση με:

$$(VaR_p) = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2 \cdot Cov(X, Y)} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2 \cdot \rho \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

όπου σ_X^2 και σ_Y^2 η διασπορά της απόδοσης του X και Y αντίστοιχα.

Αν κάποιο χαρτοφυλάκιο διαθέτει n περιουσιακά στοιχεία, τότε υπάρχουν και $n \cdot (n - 1) / 2$ συντελεστές συσχέτισης που θα πρέπει να εκτιμηθούν. Για παράδειγμα για n = 10, υπάρχουν 45 συσχετίσεις. Όταν το χαρτοφυλάκιο έχει μεγάλη διαφοροποίηση, το πλήθος των συντελεστών συσχετίσεων που θα πρέπει να εκτιμηθούν είναι πάρα πολύ μεγάλος. Για n=100

ή 500 διαφορετικά περιουσιακά στοιχεία, ο αριθμός των συσχετισμών θα γινόταν 4.950 και 124.750 αντίστοιχα.

Με αυτό τον τρόπο (*Diversified VaR*), λαμβάνονται υπ' όψιν όλες οι συσχετίσεις μεταξύ των περιουσιακών στοιχείων. Όταν η συσχέτιση είναι μηδενική, η τιμή VaR χαρτοφυλακίου μειώνεται σε:

$$(VaR_p | \rho_{12} = 0) = \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2}$$

Μία άλλη μέθοδος είναι το “Portfolio mapping”. Το πρώτο βήμα είναι όλα τα περιουσιακά στοιχεία ενός χαρτοφυλακίου να κατηγοριοποιηθούν π.χ. όλες οι μετοχές που σε μία κατηγορία, τα ομόλογα σε μία άλλη κλπ. Για την κάθε κατηγορία η αποτίμηση του κινδύνου γίνεται βάσει κάποιου δείκτη της αγοράς. Για την κατηγορία των μετοχών, η αποτίμηση του κινδύνου θα γίνει βάσει του Γενικού Δείκτη Μετοχών του χρηματιστηρίου. Η αποτίμηση του κινδύνου γίνεται έμμεσα, βάσει άλλων δεικτών (δείκτες μετοχών, συναλλαγματικές ισοτιμίες, επιτόκια. Με αυτή την μέθοδο ο υπολογισμός του VaR είναι αρκετά εύκολος. Το βασικό μειονέκτημα είναι ότι το VaR του χαρτοφυλακίου επηρεάζεται αποκλειστικά από το συστηματικό κίνδυνο.

Μία άλλη μέθοδος που συναντά κανείς στη βιβλιογραφία είναι η Αποσύνθεση VaR χαρτοφυλακίου (*Decomposing Portfolio VaR*). Εκτός από το συνολικό χαρτοφυλάκιο της VaR, υπάρχει αυξανόμενη ανάγκη για πληροφορίες σχετικά με την μικρή συνεισφορά των επιμέρους στοιχείων του χαρτοφυλακίου, την αναλογία των διαφοροποιημένων VaR χαρτοφυλακίου που μπορεί να αποδοθεί σε κάθε ένα από τα επιμέρους στοιχεία που αποτελούν το χαρτοφυλάκιο, τη στοιχειώδη επίδραση στην VaR για την προσθήκη ενός νέου προϊόντος στο ήδη υπάρχον χαρτοφυλάκιο. Η απάντηση σε αυτό είναι εξαιρετικά σημαντική, γιατί γνωρίζοντας τις θέσεις που αποτελούν μεγάλο κίνδυνο θα πρέπει να γίνουν και οι αντίστοιχες κινήσεις αντιστάθμισης.

Κάποια άλλα μεγέθη που χρησιμοποιούνται στην αποτίμηση κινδύνου χαρτοφυλακίου είναι το “Marginal VaR” ή “M-VaR” και το “Incremental VaR” ή αλλιώς “I-VaR”. Όσο αφορά το M-VaR, είναι η αλλαγή στην απόδοση VaR που προκύπτει από μια οριακή μεταβολή της σχετικής θέσης του περιουσιακού στοιχείου. Αν x_i είναι το επενδυμένο ποσό στο i -στο προϊόν (στοιχείο) του χαρτοφυλακίου, τότε:

$$M\text{-VaR} = \frac{\partial \text{VaR}}{\partial x_i}$$

Για να μετρηθεί η επίδραση του κινδύνου του χαρτοφυλακίου από αλλαγή των θέσεων των στοιχείων του, θα πρέπει να εκτιμηθεί η *συμβολή* του κάθε στοιχείου στον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου και όχι η μέτρηση του κινδύνου του κάθε στοιχείου ξεχωριστά.

Ανακεφαλαιώνοντας, οι μεθοδολογίες εκτίμησης VaR χαρτοφυλακίου μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε κάποιες πιο σύνθετες μεθόδους για καλύτερη εκτίμηση (π.χ. “Portfolio mapping” μέθοδο, “Decomposing Portfolio VaR”). Επίσης εκτός από το δείκτη VaR υπάρχουν και κάποιοι άλλοι δείκτες άμεσα εξαρτώμενοι από αυτόν που χρησιμοποιούνται όπως στο πόσο συμβάλλει κάθε στοιχείο του χαρτοφυλακίου στον κίνδυνο.

1.7 Ανακεφαλαίωση

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάστηκαν αρχικά η έννοια του κινδύνου, οι προϋποθέσεις και η διεργασία διαχείρισης του σε έναν οργανισμό. Ο κίνδυνος μπορεί να ορισθεί ως ο συνδυασμός της πιθανότητας ενός γεγονότος και των συνεπειών του. Η έννοια της συνέπειας συνήθως έχει αρνητική έννοια, αν και σε όλους τους τύπους των δραστηριοτήτων, υπάρχει το ενδεχόμενο για γεγονότα και συνέπειες που συνιστούν ευκαιρίες προς όφελος (*upside*) ή απειλές της επιτυχίας (*downside*). Επίσης παρουσιάστηκε ταξινόμηση των κινδύνων σε έναν οργανισμό. Αξίζει να αναφερθεί ότι σε κίνδυνο μπορεί να υπόκεινται μία επιχείρηση, ένα κράτος, ένα χαρτοφυλάκιο.

Ένα σημαντικό μέρος διαχείρισης των κινδύνων είναι η αποτίμησή τους. Τα τελευταία χρόνια, η αξία σε κίνδυνο, κοινώς γνωστή ως VaR, έχει καταστεί μία από τις πιο δημοφιλείς τεχνικές μέτρησης των κινδύνων στα χρηματοοικονομικά. Το VaR είναι μια μέθοδος η οποία αποσκοπεί στο να συλλάβει τον κίνδυνο αγοράς του χαρτοφυλακίου των περιουσιακών στοιχείων. Ορίζεται σαν η μέγιστη απώλεια της αξίας ενός χαρτοφυλακίου σε μια συγκεκριμένη περίοδο του χρόνου για μια δεδομένη διάστημα εμπιστοσύνης. Πιο συγκεκριμένα, όταν πρόκειται για χρηματοοικονομικά προϊόντα, οι παράγοντες από τους οποίους εξαρτάται είναι η περίοδος διακράτησης, η νομισματική μονάδα με την οποία υπολογίζεται, η κατανομή απώλειας και το διάστημα εμπιστοσύνης. Παρά την ευρεία χρήση και την κοινή αποδοχή του VaR ως εργαλείο διαχείρισης κινδύνου, κατά την εφαρμογή του VaR, υπάρχουν πολλές απλοποιήσεις και παραδοχές που εμπλέκονται. Επιπλέον, κάθε

μοντέλο VaR επιχειρεί να προβλέψει μελλοντικές τιμές περιουσιακών στοιχείων χρησιμοποιώντας ιστορικά δεδομένα της αγοράς. Αυτό δε σημαίνει ότι πάντα το περιβάλλον της αγοράς στο μέλλον θα αντικατοπτρίζεται από το παρελθόν. Ο περιορισμός αυτός αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα μειονεκτήματα της VaR. Έτσι, για να επαληθευθούν τα αποτελέσματα που αποκτήθηκαν από την εκτίμηση του VaR θα πρέπει να χρησιμοποιούνται ταυτόχρονα και άλλες μέθοδοι, όπως τον επανέλεγχο (*backtesting*).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας

2.1 Εισαγωγή

Όπως διαπιστώθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, το VaR μοντέλο επιχειρεί να προβλέψει το χειρότερο σενάριο για τις αποδόσεις περιουσιακών στοιχείων χρησιμοποιώντας ιστορικά δεδομένα της αγοράς. Για να επιτευχθεί αυτό, λαμβάνονται οι παρελθοντικές τιμές του ίδιου του περιουσιακού στοιχείου που έχουν καταγραφεί κατά τη διάρκεια ίσων χρονικών περιόδων. Όπως είναι γνωστό, το σύνολο των τεχνικών για τέτοιου είδους αναλύσεις δεδομένων είναι η ανάλυση χρονοσειρών (*Time Series Analysis*).

Καταρχάς, στην ανάλυση χρονοσειρών, οι μέθοδοι μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες τις αιτιοκρατικές και τις στοχαστικές. Στην πρώτη κατηγορία συναντά κανείς:

1. την μέθοδο εξομάλυνσης (*Smoothing Methods*)
2. την μέθοδο διάσπασης χρονοσειρών (*Time Series Decomposition*).

Στη δεύτερη κατηγορία η πιο γνωστή είναι η ανάλυση κατά Box και Jenkins ή ανάλυση ARIMA.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται συνοπτικά οι προϋποθέσεις του γραμμικού μοντέλου παλινδρόμησης, βασικές έννοιες χρονοσειρών και κατόπιν τα ARCH και GARCH υποδείγματα.

2.2 Το γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης και οι προϋποθέσεις του

Μία από τις γνωστότερες στατιστικές μεθόδους, αν όχι η πιο γνωστή, είναι η γραμμική παλινδρόμηση η οποία και εν συντομία περιγράφεται στην ενότητα αυτή για την καλύτερη κατανόηση της ανάλυσης χρονοσειρών.

Αυτό που προσπαθεί ο αναλυτής μέσα από την ανάλυση παλινδρόμησης είναι να διερευνήσει τη σχέση μεταξύ μιας εξαρτημένης μεταβλητής Y και μιας ανεξάρτητης μεταβλητής X . Η πιο απλή σχέση από τα μαθηματικά είναι η γραμμική. Έτσι, ένα υπόδειγμα

που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί είναι:

$$Y_t = b_0 + b_1 X_{1t} + \varepsilon_t \text{ για } t = 1, 2, \dots, T$$

Μια γενίκευση του είναι, αν ο αναλυτής διερευνήσει τη σχέση μεταξύ μιας εξαρτημένης μεταβλητής Y και περισσότερων από μιας ανεξάρτητης μεταβλητής X , έστω X_{1t}, \dots, X_{kt} . Σε αυτή την περίπτωση το υπόδειγμα θα είναι:

$$Y_t = b_0 + b_1 X_{1t} + \dots + b_k X_{kt} + \varepsilon_t \text{ για } t = 1, 2, \dots, T$$

Για μεγαλύτερη ευκολία, με τη χρήση γραμμικής άλγεβρας (θεωρία πινάκων), το υπόδειγμα γίνεται:

$$Y = Xb + \varepsilon$$

όπου Y είναι το διάνυσμα των παρατηρήσεων της εξαρτημένης μεταβλητής, b το διάνυσμα των συντελεστών του υποδείματος, X ο πίνακας των παρατηρήσεων των ανεξαρτήτων μεταβλητών έχοντας στη πρώτη στήλη μονάδες που χρειάζονται για την εκτίμηση του σταθερού όρου και ε είναι το διάνυσμα των τυχαίων σφαλμάτων που αντιπροσωπεύουν όλους τους παράγοντες που επηρεάζουν την Y και δε μπορούν να συμπεριληφθούν στις ανεξάρτητες μεταβλητές.

Για την εκτίμηση του παραπάνω υποδείματος ισχύουν θα πρέπει αν ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις:

1. $E(\varepsilon) = 0$, δηλαδή τα σφάλματα έχουν μηδενικό μέσο όρο
2. $E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 \cdot I$, δηλαδή τα σφάλματα έχουν σταθερή διακύμανση και είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους
3. $E(X'\varepsilon) = 0$, τα σφάλματα δεν συσχετίζονται με τις ανεξάρτητες μεταβλητές
4. $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$
5. $r(X) = k \Rightarrow |X'X| \neq 0$, δηλαδή ο X είναι πλήρους τάξεως, που σημαίνει ότι οι ανεξάρτητες μεταβλητές δε συσχετίζονται γραμμικά μεταξύ τους.

Οι εκτιμητές των συντελεστών b με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων είναι οι:

$$\hat{b} = (X'X)^{-1} X'Y$$

Κάθε αναλυτής οφείλει να ελέγχει αν παραβιάζονται οι παραπάνω υποθέσεις από το εκτιμηθέν μοντέλο. Πιο συγκεκριμένα, ο έλεγχος των καταλοίπων αν ακολουθούν κανονική κατανομή, μπορεί να γίνει με X^2 έλεγχο καλής προσαρμογής είτε με το ή με το Jarque–Bera test ή με το Shapiro–Wilks test το οποίο είναι κατάλληλο για μικρά δείγματα (μέγεθος δείγματος κάτω από 50). Επίσης είτε με το K-S test, είτε γραφικά (το οποίο θα είναι απλώς ένδειξη). Αν συμβαίνει κάτι τέτοιο, ο ερευνητής θα πρέπει να μειώσει το πλάτος των τιμών των παρατηρήσεων όλων των μεταβλητών χρησιμοποιώντας λογαριθμικό μετασχηματισμό. Το γεγονός ότι τα σφάλματα ακολουθούν κανονική κατανομή χρησιμοποιείται έμμεσα σε όλα τα συμπεράσματα του αναλυτή (π.χ. διάστημα εμπιστοσύνης των παραμέτρων ή στους ελέγχους υποθέσεων).

Όταν παραβιάζεται η υπόθεση της σταθερής διακύμανσης των σφαλμάτων προκύπτει το πρόβλημα της ετεροσκεδαστικότητας. Το πρόβλημα που έχει ο αναλυτής είναι ότι δε λαμβάνονται οι εκτιμητές των συντελεστών ενός υποδείγματος με την μικρότερη διακύμανση. Αν συμβαίνει κάτι τέτοιο, ο ερευνητής θα πρέπει να μετασχηματίσει τα δεδομένα (ο πιο γνωστός της κατηγορίας είναι Box–Cox Transformation).

Στην περίπτωση που παραβιάζεται η υπόθεση της ανεξαρτησίας των σφαλμάτων τότε προκύπτει το πρόβλημα της αυτοσυσχέτισης. Το πρόβλημα μπορεί να έχει προκύψει είτε επειδή ο αναλυτής δεν έχει χρησιμοποιήσει τις κατάλληλες ανεξάρτητες μεταβλητές, είτε στην ύπαρξη χρονικών υστερήσεων. Ο έλεγχος για την ανεξαρτησία των σφαλμάτων θα γίνει είτε με τον έλεγχο ροών (*runs test*) είτε με τον έλεγχο των Durbin-Watson.

Όταν υπάρχει γραμμική εξάρτηση των ανεξαρτήτων μεταβλητών υπάρχει το πρόβλημα της πολυσυγραμμικότητας. Αν αυτό συμβαίνει, τότε επηρεάζεται το εύρος των τιμών του διαστήματος εμπιστοσύνης των παραμέτρων του μοντέλου ή ισοδύναμα η αξιοπιστία των στατιστικών ελέγχων που διενεργούνται για τις παραμέτρους. Στην περίπτωση όπου ο αναλυτής έχει τα παραπάνω προβλήματα, προκύπτει πρόβλημα και στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

2.3 Βασικές έννοιες χρονοσειρών

Στις χρονοσειρές τα δεδομένα είναι αυστηρά χρονικά ιεραρχημένα σε αντίθεση με διαστρωματικά στοιχεία αφού αυτά αφορούν τη συμπεριφορά των μεταβλητών κατά τη διάρκεια μιας συγκεκριμένης χρονικής περιόδου. Επιπλέον, η έλλειψη παρατηρήσεων από κάποιο δείγμα μπορεί να αγνοηθεί και να αντικατασταθεί με άλλη παρατήρηση που θα προκύψει είτε με τη χρήση παλινδρόμησης ή με άλλους μεθόδους. Όμως, όταν πρόκειται για χρονοσειρές, το πρόβλημα αυτό δεν είναι εύκολο να αντιμετωπιστεί.

Όταν το δείγμα είναι χρονοσειρά η ανάλυση παλινδρόμησης είναι περίπλοκη. Έτσι, εκτός από τις υποθέσεις της ανάλυσης παλινδρόμησης, ο ερευνητής θα πρέπει να ελέγξει και άλλες ιδιότητες. Ο κύριος σκοπός αυτής της ενότητας είναι να εξηγήσει τις έννοιες που αφορούν το χώρο των χρονοσειρών.

Ορισμός

Μια χρονοσειρά (ή μια στοχαστική διαδικασία γενικότερα) ορίζεται να είναι *αυστηρά στάσιμη* εάν η από κοινού κατανομή πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών της είναι αμετάβλητη διαχρονικά, δηλαδή εάν:

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_{1+k}, \dots, X_{n+k}}(x_{1+k}, \dots, x_{n+k}) \quad \forall n, k$$

ή

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_{1+k}, \dots, X_{n+k}}(x_{1+k}, \dots, x_{n+k}) \quad \forall n, k$$

Όπως αναφέρθηκε και στο πρώτο κεφάλαιο, ο προσδιορισμός μιας κατανομής είναι δύσκολος. Πόσο μάλλον όταν βάσει του παραπάνω ορισμού πρέπει να προσδιοριστεί η από κοινού κατανομή πιθανότητας μιας στοχαστικής διαδικασίας. Παρακάτω ορίζεται η ασθενώς στάσιμη χρονοσειρά.

Ορισμός

Μια χρονοσειρά $\{X_t, t \in T\}$ ορίζεται σαν *ασθενώς στάσιμη* όταν ισχύουν:

- 1) $E(X_t) = \mu, \forall t \in T$
- 2) $Var(X_t) = E((X_t - \mu)^2) = \sigma^2 < \infty, \forall t \in T$

$$3) \text{Cov}(X_{t+k}, X_{t+s}) = E((X_{t+k} - \mu)(X_{t+s} - \mu)) = \gamma_{t,s}, \forall t \in T$$

Με άλλα λόγια μια χρονοσειρά (ή μια στοχαστική διαδικασία γενικότερα) είναι ασθενώς στάσιμη όταν σε κάθε χρονική στιγμή έχει σταθερό μέσο όρο, έχει σταθερή πεπερασμένη διακύμανση και οι αυτοσυνδιακυμάνσεις της για δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές εξαρτώνται μόνο από την μεταξύ τους απόσταση.

Ορισμός

Η (θεωρητική) συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μιας στάσιμης στοχαστικής διαδικασίας $\{X_t, t \in T\}$ ορίζεται από τη σχέση:

$$\rho_k = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{\text{Var}(X_t)} \cdot \sqrt{\text{Var}(X_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

όπου

$$\gamma_0 = E((X_t - \mu)(X_t - \mu)) = \text{Var}(X_t)$$

$$\gamma_k = \text{Cov}(X_t, X_{t-k})$$

Στην περίπτωση που η στοχαστική διαδικασία είναι ασθενώς στάσιμη θα πρέπει για τις αυτοσυσχετίσεις της να ισχύει:

$$\rho_k = \rho_{-k}$$

Όπως είναι ήδη γνωστό, ο στόχος στην ανάλυση χρονοσειρών είναι να εξηγήσει τι θα συμβεί στο μέλλον, όσον αφορά το τι είναι ήδη γνωστό. Υπό αυτή την έννοια, η μέση τιμή και η διακύμανση των χρονοσειρών έχουν περιορισμένη αξία. Οι πιο σχετικές πληροφορίες είναι πιθανό να προέρχονται από τις αυτοσυνδιακυμάνσεις γ_k και από τις αυτοσυσχετίσεις ρ_k γιατί βάσει των αυτοσυσχετίσεων «μετράτε» το πόσο η τιμή μιας χρονοσειράς συσχετίζεται με προηγούμενες τιμές της και αποτελούν κατά κάποιο τρόπο την μνήμη της διαδικασίας.

Η στασιμότητα είναι ίσως η πιο σημαντική ιδιότητα που πρέπει να έχει μια χρονοσειρά. Ο ερευνητής οφείλει να ελέγχει αν μια χρονοσειρά είναι στάσιμη ή μη. Αν δεν είναι στάσιμη η χρονοσειρά, τότε ο ερευνητής θα πρέπει με κατάλληλο μετασχηματισμό να δημιουργήσει μια

στάσιμη από την αρχική χρονοσειρά. Η κατασκευή του μοντέλου σε αυτή την περίπτωση θα γίνει αρχικά στη στάσιμη και κάνοντας χρήση τον μετασχηματισμό να δώσει πρόβλεψη για την αρχική χρονοσειρά. Η εμπειρία έχει δείξει ότι όταν το δείγμα προέρχεται από χρονοσειρές, τότε αυξάνει η πιθανότητα να υπάρχει το πρόβλημα της αυτοσυσχέτισης.

Τέλος, ειδικά όταν πρόκειται να γίνει πρόβλεψη της απόδοσης κάποιου περιουσιακού στοιχείου με την ανάλυση χρονοσειρών είναι σημαντικό το πώς ο κάθε ερευνητής ορίζει την απόδοση. Στη βιβλιογραφία συναντά κανείς και τη λογαριθμοκανονική απόδοση:

$$z_t = \log \frac{x_t}{x_{t-1}}$$

η οποία είναι προσέγγιση της:

$$z_t = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}}$$

Η επικρατέστερη είναι η λογαριθμοκανονική απόδοση, πιθανότητα επειδή βοηθά και στην εξομάλυνση της ετεροσκεδαστικότητας.

2.4 Αυτοπαλίνδρομη διαδικασία και διαδικασία κινητού μέσου

Πέρα από την μελέτη της αλληλεπίδρασης μεταξύ μεταβλητών, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η μελέτη κάθε μεταβλητής μεμονωμένα όπως αυτές εξελίσσονται στο χρόνο. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι η μεθοδολογία των Box και Jenkins, η οποία έχει τα παρακάτω βήματα: το πρώτο βήμα περιλαμβάνει τεχνικές καλύτερης προσαρμογής στα δεδομένα δηλαδή ποιο υπόδειγμα έχει την καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα κάνοντας χρήση των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης αντίστοιχα. Στη συνέχεια, ακολουθεί η εκτίμηση του υποδείγματος με τη χρήση της συνάρτησης πιθανοφάνειας. Στο τελευταίο βήμα περιλαμβάνονται όλοι οι διαγνωστικοί έλεγχοι οι οποίοι εξετάζουν την επάρκεια του υποδείγματος να ερμηνεύσει τη μεταβλητότητα των δεδομένων. Η σωστή κατασκευή του υποδείγματος είναι βασική προϋπόθεση για σωστές προβλέψεις.

2.4.1 Αποσύνθεση κατά Wold

Ένα θεμελιώδες θεώρημα στην ανάλυση χρονοσειρών, γνωστή ως αποσύνθεση του Wold (*Wold's Decomposition*), αναφέρει ότι κάθε ασθενώς στάσιμη καθαρά μη ντετερμινιστική

στοχαστική διαδικασία $X_t - \mu$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός από μια ακολουθία από ασυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές. Με τον όρο καθαρά μη ντετερμινιστική εννοείται ότι κάθε γραμμικά ντετερμινιστικός παράγοντας έχει αφαιρεθεί από την $X_t - \mu$.

Έτσι, η $X_t - \mu$ μπορεί κάλλιστα να προβλεφθεί από τις προηγούμενες τιμές της ίδιας. Η αποσύνθεση του Wold βρίσκεται σε κάθε θεωρητικό μοντέλο χρονοσειρών που θα ακολουθήσει.

Βάσει του θεωρήματος γίνεται:

$$X_t - \mu = \varepsilon_t + \psi_1 \cdot \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \cdot \varepsilon_{t-2} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \cdot \varepsilon_{t-j}, \text{ με } \psi_j \in \mathbb{R} \text{ και } \psi_0 = 1 \quad (2.1)$$

Η $\{\varepsilon_t : t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ είναι ακολουθία από ασυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές με τις ιδιότητες:

- 1) $E(\varepsilon_t) = 0, \forall t \in \{t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$
- 2) $Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 < \infty, \forall t \in \{t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$
- 3) $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = E(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-k}) = 0, \forall k \neq 0, \forall t \in \{t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

Η $\{\varepsilon_t : t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ με τις παραπάνω ιδιότητες καλείται και λευκός θόρυβος και συμβολίζεται με: $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$

Προκύπτει άμεσα ότι:

$$E(X_t) = \mu$$

ενώ για τη γ_0 αποδεικνύεται ότι:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= Var(X_t) = E\left((X_t - \mu)^2\right) = E\left((\varepsilon_t + \psi_1 \cdot \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \cdot \varepsilon_{t-2} + \dots)^2\right) = \\ &= E\left(\varepsilon_t^2\right) + \psi_1^2 \cdot E\left(\varepsilon_{t-1}^2\right) + \psi_2^2 \cdot E\left(\varepsilon_{t-2}^2\right) + \dots = \sigma^2 + \psi_1^2 \cdot \sigma^2 + \psi_2^2 \cdot \sigma^2 + \dots = \\ &= \sigma^2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 \end{aligned}$$

Αφού ισχύει:

$$\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = E(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-k}) = 0, \forall k \neq 0, \forall t \in \{t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

έπεται ότι:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E((X_t - \mu) \cdot (X_{t-k} - \mu)) = \\ &= E((\varepsilon_t + \psi_1 \cdot \varepsilon_{t-1} + \dots + \psi_k \cdot \varepsilon_{t-k} + \dots) \cdot (\varepsilon_{t-k} + \psi_1 \cdot \varepsilon_{t-k-1} + \dots)) = \\ &= \sigma^2 \cdot (1 \cdot \psi_1 + \psi_1 \cdot \psi_{k+1} + \psi_2 \cdot \psi_{k+2}) = \sigma^2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \cdot \psi_{j+k} \end{aligned}$$

Συνεπώς:

$$\rho_k = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \cdot \psi_{j+k}}{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2}$$

Εάν ο αριθμός των βαρών ψ_j στη σχέση (2.1) είναι άπειρος, πρέπει να υποθεθεί ότι η σειρά συγκλίνει. Αποδεικνύεται ότι η προϋπόθεση αυτή είναι ισοδύναμη με την παραδοχή ότι η X_t είναι στάσιμη. Αν είναι στάσιμη τότε εξασφαλίζεται ότι όλες οι ροπές υπάρχουν και είναι ανεξάρτητες του χρόνου καθώς και ότι οι διασπορές X_t, γ_0 είναι πεπερασμένες. Το θεώρημα Wold είναι θεμελιώδες, διότι επιτρέπει να παρουσιάζεται οποιαδήποτε γραμμική διαδικασία σαν μια στοχαστική εξίσωση με άπειρες υστερήσεις. Στην πράξη αυτή η αποσύνθεση κατά Wold μπορεί να μην φαίνεται πολύ χρήσιμη, δεδομένου ότι απαιτούνται εκτιμήσεις για άπειρο αριθμό βαρών.

2.4.2 Αυτοπαλίνδρομη διαδικασία

Παρά το ότι η σχέση (2.1) φαίνεται πολύπλοκη πολλά μοντέλα προέρχονται από αυτή με κατάλληλη επιλογή των βαρών ψ_j .

Αν θεωρηθεί ότι $\mu = 0$ (χωρίς βλάβης της γενικότητας) και αν $\psi_j = \varphi^j$, η (2.1) γίνεται:

$$X_t = \varepsilon_t + \varphi \cdot \varepsilon_{t-1} + \varphi^2 \cdot \varepsilon_{t-2} + \dots = \varepsilon_t + \varphi \cdot (\varepsilon_{t-1} + \varphi \cdot \varepsilon_{t-2} + \dots) = \varepsilon_t + \varphi \cdot X_{t-1}$$

ή

$$X_t - \varphi \cdot X_{t-1} = \varepsilon_t$$

Αυτό το υπόδειγμα καλείται διαδικασία αυτοπαλινδρόμησης τάξης 1 (*AutoRegressive Process First Order*) και συμβολίζεται με $AR(1)$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι:

$$X_t = \varphi^n X_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \varphi^i \varepsilon_{t-i} \quad (2.2)$$

Αν $|\varphi| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n = 0$ και τότε η (2.2) γίνεται:

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i \varepsilon_{t-i}$$

Δηλαδή μακροχρόνια οι τιμές της X_t εξαρτώνται αποκλειστικά από τις τιμές του λευκού θορύβου.

Ακολουθεί η γενίκευση της διαδικασίας αυτοπαλινδρόμησης τάξης μεγαλύτερης από 1.

Ορισμός

Έστω $\{\varepsilon_t, t \in T\}$ μια διαδικασία λευκού θορύβου με μηδενικό μέσο όρο και σταθερή διακύμανση σ^2 . Η διαδικασία που παράγεται από το υπόδειγμα:

$$X_t = \varphi_1 \cdot X_{t-1} + \varphi_2 \cdot X_{t-2} + \dots + \varphi_p \cdot X_{t-p} + \varepsilon_t, t \in T$$

ονομάζεται αυτοπαλίνδρομη διαδικασία (*Autoregressive Process*) p τάξης και συμβολίζεται με $AR(p)$.

Ορίζοντας τον τελεστή χρονικής υστέρησης B (*Backshift Operator*) σαν $B^k x_t = x_{t-k}$ προκύπτει ότι:

$$X_t = \varphi_1 \cdot B^1 X_t + \varphi_2 \cdot B^2 X_t + \dots + \varphi_p \cdot B^p X_t + \varepsilon_t$$

ή

$$X_t - \varphi_1 \cdot B^1 X_t - \varphi_2 \cdot B^2 X_t - \dots - \varphi_p \cdot B^p X_t = \varepsilon_t$$

ή

$$(1 - \varphi_1 \cdot B^1 - \varphi_2 \cdot B^2 - \dots - \varphi_p \cdot B^p) \cdot X_t = \varepsilon_t$$

ή

$$\Phi(B) \cdot X_t = \varepsilon_t$$

Μια σημαντική πρόταση είναι ότι για να υπάρχει στασιμότητα, θα πρέπει οι ρίζες του πολυωνύμου $\Phi(B)$ να βρίσκονται **εκτός** του μοναδιαίου κύκλου.

Αναγκαία προϋπόθεση είναι $|\varphi_p| < 1$.

Επίσης αφού

$$(1 - \varphi_1 \cdot B^1 - \varphi_2 \cdot B^2 - \dots - \varphi_p \cdot B^p) \cdot X_t = \varepsilon_t$$

έπεται ότι:

$$X_t = \frac{1}{(1 - \varphi_1 \cdot B^1 - \varphi_2 \cdot B^2 - \dots - \varphi_p \cdot B^p)} \cdot \varepsilon_t = \frac{1}{1 - (\varphi_1 \cdot B^1 + \varphi_2 \cdot B^2 + \dots + \varphi_p \cdot B^p)} \cdot \varepsilon_t \quad (2.3)$$

Αν $|\varphi_1 \cdot B^1 + \varphi_2 \cdot B^2 + \dots + \varphi_p \cdot B^p| < 1$

τότε:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 - (\varphi_1 \cdot B^1 + \varphi_2 \cdot B^2 + \dots + \varphi_p \cdot B^p)} = \\ & = \left[1 + (\varphi_1 \cdot B^1 + \varphi_2 \cdot B^2 + \dots + \varphi_p \cdot B^p) + \right. \\ & \quad + (\varphi_1 \cdot B^1 + \varphi_2 \cdot B^2 + \dots + \varphi_p \cdot B^p)^2 + \\ & \quad \left. + (\varphi_1 \cdot B^1 + \varphi_2 \cdot B^2 + \dots + \varphi_p \cdot B^p)^3 + \dots \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Η σχέση (2.3) λόγω (2.4) γίνεται:

$$X_t = f(B) \cdot \varepsilon_t$$

Δηλαδή μακροχρόνια οι τιμές της X_t εξαρτώνται αποκλειστικά από τις τιμές του λευκού θορύβου. Αποδεικνύεται ότι η αυτοπαλίνδρομη διαδικασία p τάξης έχει διακύμανση που δίνεται από τη σχέση:

$$\gamma_0 = \varphi_1 \cdot \gamma_1 + \varphi_2 \cdot \gamma_2 + \dots + \varphi_p \cdot \gamma_p + \sigma^2$$

ενώ για τις αυτοσυνδιακυμάνσεις της και τις αυτοσυσχετίσεις της ισχύουν αντίστοιχα:

$$\gamma_k = \varphi_1 \cdot \gamma_{k-1} + \varphi_2 \cdot \gamma_{k-2} + \dots + \varphi_p \cdot \gamma_{k-p}$$

$$\rho_k = \varphi_1 \cdot \rho_{k-1} + \varphi_2 \cdot \rho_{k-2} + \dots + \varphi_p \cdot \rho_{k-p}$$

Ένα σημαντικό ερώτημα που καλείται να απαντήσει ο αναλυτής είναι η εύρεση της σωστής τάξης μιας αυτοπαλίνδρομης διαδικασίας. Η απάντηση θα δοθεί με τη βοήθεια των μερικών αυτοσυσχετίσεων. Η k μερική αυτοσυσχέτιση είναι ο συντελεστής φ_{kk} στην εξίσωση:

$$X_t = \varphi_{k1} \cdot X_{t-1} + \varphi_{k2} \cdot X_{t-2} + \dots + \varphi_{kk} \cdot X_{t-k} + \varepsilon_t$$

$$\varphi_{kk} = \frac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j} \rho_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j} \rho_j}$$

Η μερική αυτοσυσχέτιση μετράει τη συσχέτιση μεταξύ των τιμών της χρονοσειράς, X_t και

X_{t-k} έχοντας πρώτα αφαιρεθεί η ταυτόχρονη γραμμική επιρροή όλων των X_2, \dots, X_{k-1} ενδιάμεσων τιμών της χρονοσειράς στις τιμές X_t και X_{t-k} . Η αυτοπαλίνδρομη διαδικασία p τάξης έχει αυτοσυσχετίσεις άπειρες στον αριθμό που φθίνουν στο μηδέν εκθετικά αν είναι όλες θετικές ή με ημιτονοειδή μορφή αν παίρνουν και αρνητικές τιμές και μερικές αυτοσυσχετίσεις που μηδενίζονται για βαθμό χρονικών υστερήσεων μεγαλύτερο από p .

2.4.3 Διαδικασία κινητού μέσου

Αν θεωρηθεί ότι $\mu = 0$ (χωρίς βλάβης της γενικότητας) και αν $\psi_1 = -\theta$, $\psi_j = 0$, $j \leq 2$, η σχέση (2.1) γίνεται:

$$X_t = \varepsilon_t - \theta \cdot \varepsilon_{t-1}.$$

Αυτό το υπόδειγμα καλείται διαδικασία κινητού μέσου τάξης 1 (*Moving Average Process First Order*) και συμβολίζεται με $MA(1)$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι:

$$\gamma_0 = (1 + \theta^2) \cdot \sigma^2$$

$$\gamma_1 = -\theta^2 \cdot \sigma^2$$

$$\gamma_k = 0, \forall k \geq 2.$$

Επίσης:

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = -\theta / (1 + \theta^2)$$

$$\rho_k = 0, \forall k \geq 2.$$

Ακολουθεί γενίκευση της διαδικασίας κινητού μέσου τάξης μεγαλύτερης από 1.

Ορισμός

Έστω $\{\varepsilon_t, t \in T\}$ μια διαδικασία λευκού θορύβου με μηδενικό μέσο όρο και σταθερή διακύμανση σ^2 . Η διαδικασία που παράγεται από το υπόδειγμα:

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \cdot \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \cdot \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \cdot \varepsilon_{t-q}, \quad t \in T$$

ονομάζεται διαδικασία κινητού μέσου (*Moving Average Process*) τάξης q και συμβολίζεται με $MA(q)$. Χρησιμοποιώντας και πάλι τον τελεστή χρονικής υστέρησης B (*Backshift Operator*) σαν $B^k x_t = x_{t-k}$ προκύπτει ότι:

$$X_t = (1 - \theta_1 \cdot B - \theta_2 \cdot B^2 - \dots - \theta_q \cdot B^q) \cdot \varepsilon_t = \Theta(B) \cdot \varepsilon_t$$

Οπότε:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{(1 - \theta_1 \cdot B - \theta_2 \cdot B^2 - \dots - \theta_q \cdot B^q)} \cdot X_t = \frac{1}{\Theta(B)} \cdot X_t$$

Τα υποδείγματα κινητού μέσου είναι όλα στάσιμα, αφού αποτελούνται από πεπερασμένο αριθμό όρων λευκού θορύβου που είναι πάντα στάσιμος. Αναγκαία προϋπόθεση είναι πάντα $|\theta_q| < 1$.

Αν τώρα $|\theta_1 \cdot B^1 + \theta_2 \cdot B^2 + \dots + \theta_q \cdot B^q| < 1$, τότε η $\frac{1}{1 - (\theta_1 \cdot B^1 + \theta_2 \cdot B^2 + \dots + \theta_q \cdot B^q)}$

θα είναι ίση με:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1 - (\theta_1 \cdot B^1 + \theta_2 \cdot B^2 + \dots + \theta_q \cdot B^q)} = \\
& = \left[1 + (\theta_1 \cdot B^1 + \theta_2 \cdot B^2 + \dots + \theta_q \cdot B^q) + \right. \\
& \quad \left. + (\theta_1 \cdot B^1 + \theta_2 \cdot B^2 + \dots + \theta_q \cdot B^q)^2 + \right. \\
& \quad \left. + (\theta_1 \cdot B^1 + \theta_2 \cdot B^2 + \dots + \theta_q \cdot B^q)^3 + \dots \right] \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Δηλαδή η (2.5) για να συγκλίνει θα πρέπει οι ρίζες του πολυωνύμου να βρίσκονται **εκτός** του μοναδιαίου κύκλου. Στην περίπτωση που ισχύουν οι προηγούμενοι περιορισμοί η διαδικασία κινητού μέσου καλείται αντιστρέψιμη (*Invertible*) και γράφεται ισοδύναμα ως:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t &= \frac{1}{(1 - \theta_1 \cdot B - \theta_2 \cdot B^2 - \dots - \theta_q \cdot B^q)} \cdot X_t = \\
&= \left[1 + (\theta_1 \cdot B^1 + \theta_2 \cdot B^2 + \dots + \theta_q \cdot B^q) + \right. \\
& \quad \left. + (\theta_1 \cdot B^1 + \theta_2 \cdot B^2 + \dots + \theta_q \cdot B^q)^2 + \right. \\
& \quad \left. + (\theta_1 \cdot B^1 + \theta_2 \cdot B^2 + \dots + \theta_q \cdot B^q)^3 + \dots \right] \cdot X_t
\end{aligned}$$

Στην περίπτωση που ισχύει η αντιστρεψιμότητα η διαδικασία κινητού μέσου q τάξης μπορεί να παρουσιαστεί μακροχρόνια από μία αυτοπαλίνδρομη διαδικασία απείρων όρων $AR(\infty)$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι:

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \cdot \sigma^2 \\
\gamma_k &= \begin{cases} \sigma^2 \cdot \sum_{i=0}^{q-k} \theta_i^2 \theta_{i+k}^2, & \theta_0 = -1, k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & , k > q \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\gamma_k = 0, \forall k \geq 2$$

Επίσης:

$$\rho_k = \frac{\sum_{i=0}^{q-k} \theta_i^2 \theta_{i+k}^2}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2}, \theta_0 = -1, k = 1, 2, \dots, q$$

όπου για $k > q$ παρατηρεί κανείς ότι $\rho_k = 0$.

2.5 Αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται τα αυτοπαλίνδρομα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας υποδειγμάτων ή όπως είναι γνωστά σαν ARCH. Όπως είναι ήδη γνωστό τα υποδείγματα ARCH εισήχθησαν στην επιστημονική κοινότητα το 1983. Παρά το σύντομο χρονικό διάστημα που πέρασε από τότε, γνώρισε μεγάλη ανάπτυξη εξαιτίας των πολλών εφαρμογών τους. Από τα πολύ σημαντικά άρθρα ξεχωρίζουν αυτά του Engle (1982), του Bollerslev (1986) και των Bollerslev, Chou, Krouer (1992).

2.5.1 Αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας

τάξης 1

Το αυτοσυσχετιστικό υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας υπόδειγμα τάξης 1 ορίζεται από τις σχέσεις (Engle 1982):

$$X_t = \mu + u_t$$

με

$$u_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

και

$$\sigma_t^2 = c + au_{t-1}^2$$

όπου X_t είναι η παρατηρούμενη τιμή τη χρονική στιγμή t και I_{t-1} το πληροφοριακό σύνολο μέχρι και τη χρονική στιγμή $t-1$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι ο αναλυτής γνωρίζει τις

τιμές $\{X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\}$. Για αυτό σε αρκετά συγγράμματα το πληροφοριακό σύνολο ορίζεται σαν $I_{t-1} = \{X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\}$.

Πρακτικά, η $E(u_t | I_{t-1})$ είναι η δεσμευμένη προσδοκώμενη τιμή της u_t δεδομένης της ιστορίας I_{t-1} δηλαδή δεδομένης της «ιστορίας» μέχρι και τη $t-1$. Όσο αυξάνεται το t τόση περισσότερη πληροφορία έχει κανείς (*the longer you live, the wiser you become*). Από μαθηματικής άποψης, η $E(u_t | I_{t-1})$ δεν είναι αριθμός αλλά τυχαία μεταβλητή. Μερικές από τις ιδιότητες που χρειάζονται παρακάτω είναι οι ακόλουθες:

1. αν ξ, ζ τυχαίες μεταβλητές $\alpha, \beta \in R$ και G, H πληροφοριακά σύνολα τότε:

$$E(\alpha\xi + \beta\zeta | G) = \alpha E(\xi | G) + \beta E(\zeta | G) \quad (2.6)$$

2. Αν ξ ανεξάρτητη της G τότε:

$$E(\xi | G) = E(\xi) \quad (2.7)$$

Παρατηρεί κανείς ότι αν είναι γνωστές οι παρατηρήσεις μέχρι και τη χρονική στιγμή $t-1$ τότε η σ_t^2 είναι γνωστή. Σε αντίθετη περίπτωση είναι στοχαστική.

Είναι γνωστό ότι $\sigma_t^2 = c + au_{t-1}^2$ προσθέτοντας κατά μέλη τη u_t^2 προκύπτει ότι:

$$u_t^2 + \sigma_t^2 = u_t^2 + c + au_{t-1}^2$$

ή

$$u_t^2 = u_t^2 + c + au_{t-1}^2 - \sigma_t^2$$

ή

$$u_t^2 = c + au_{t-1}^2 + u_t^2 - \sigma_t^2 \quad (2.8)$$

Αν $v_t = u_t^2 - \sigma_t^2$ τότε η (2.8) γίνεται:

$$u_t^2 = c + au_{t-1}^2 + v_t \quad (2.9)$$

Σχετικά με την νέα ορισθείσα ποσότητα προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} E(v_t) &= E(u_t^2 - \sigma_t^2) = E(E(u_t^2 - \sigma_t^2) | I_{t-1}) \\ &= E[E(u_t^2 | I_{t-1}) - \sigma_t^2] = E(\sigma_t^2 - \sigma_t^2) = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} E(v_t v_{t-k}) &= E[(u_t^2 - \sigma_t^2)(u_{t-k}^2 - \sigma_{t-k}^2)] = E(E(u_t^2 - \sigma_t^2)(u_{t-k}^2 - \sigma_{t-k}^2) | I_{t-1}) \\ &= E[E(u_t^2 | I_{t-1})(u_{t-k}^2 - \sigma_{t-k}^2) - \sigma_t^2((u_{t-k}^2 - \sigma_{t-k}^2))] = \\ &= E(\sigma_t^2(u_{t-k}^2 - \sigma_{t-k}^2) - \sigma_t^2(u_{t-k}^2 - \sigma_{t-k}^2)) = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Επιπλέον:

$$\begin{aligned} E(u_{t-1}^2 v_t) &= E[u_{t-1}^2 (u_t^2 - \sigma_t^2)] = E[u_{t-1}^2 E(u_t^2 | I_{t-1}) - u_{t-1}^2 \sigma_t^2] = \\ &= E(u_{t-1}^2 \sigma_t^2 - u_{t-1}^2 \sigma_t^2) = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Βάσει των σχέσεων (2.10), (2.11), (2.12) προκύπτει ότι η σχέση (2.9) περιγράφει ένα $AR(1)$ υπόδειγμα. Αυτό σημαίνει ότι η u_t^2 είναι στάσιμη πρώτη τάξης αν $|a| < 1$.

Οι δύο πρώτες ροπές δίνονται X_t είναι:

$$E(X_t) = E(\mu + u_t) = \mu + E(u_t) = \mu + E(E(u_t) | I_{t-1}) = \mu + E(0) = 0$$

και

$$Var(X_t) = Var(\mu + u_t) = Var(u_t) = E(u_t^2) = \frac{c}{1-a}$$

Όσο αφορά την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της u_t αφού πρόκειται για $AR(1)$ υπόδειγμα δίνεται από τη σχέση:

$$\rho_k = a^k$$

Επίσης παρατηρείται ότι $Var(X_t) > 0$ ή ισοδύναμα:

$$\frac{c}{1-a} > 0$$

ή αλλιώς

$$c > 0 \text{ και } 1-a \geq 0$$

Από το γεγονός ότι $|a| < 1$ έπεται ότι $0 \leq a < 1$

Λόγω της (2.6) και (2.7) προκύπτει:

$$E(X_t | I_{t-1}) = E(\mu + u_t | I_{t-1}) = E(\mu | I_{t-1}) + E(u_t | I_{t-1}) = \mu + 0 = \mu \quad (2.13)$$

Σχετικά με την υπό συνθήκη διασπορά της X_t ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} Var(X_t | I_{t-1}) &= E\left[(X_t - E(X_t | I_{t-1}))^2\right] = E\left[\left((X_t | I_{t-1}) - E(X_t | I_{t-1})\right)^2\right] = \\ &= E\left((\mu + u_t - \mu)^2 | \Psi_{t-1}\right) = E\left(u_t^2 | \Psi_{t-1}\right) = E\left((u_t - 0)^2 | \Psi_{t-1}\right) = \\ &= E\left((u_t - E(u_t))^2 | I_{t-1}\right) = Var(u_t^2 | I_{t-1}) = \sigma_t^2 \end{aligned}$$

Συνεπώς στο ARCH(1,1) υπόδειγμα όπου $u_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$ έπεται ότι:

$$X_t | I_{t-1} \sim N(\mu, \sigma_t^2) \quad (2.14)$$

Στην αρχή αυτής της παραγράφου αναφέρθηκε ότι σε σύντομο χρονικό διάστημα τα εν λόγω μοντέλα γνώρισαν μεγάλη ανάπτυξη εξαιτίας των πολλών εφαρμογών τους. Μία από αυτές σχετίζεται με όσα αναφέρθηκαν στο πρώτο κεφάλαιο. Αυτό που πρακτικά ενδιαφέρει κάποιον επενδυτή είναι η απόδοση και το ρίσκο που αναλαμβάνει από κάποια επένδυση. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι ένα επενδυτής σχεδιάζει να αγοράσει κάποιο περιουσιακό στοιχείο τη χρονική περίοδο $t-1$ του οποίου η τιμή είναι x_{t-1} και να το πουλήσει κατά την αμέσως επόμενη t με τιμή X_t . Αυτό που τον ενδιαφέρει είναι η υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή

$E(X_t | I_{t-1})$ και η υπό συνθήκη διακύμανση $Var(X_t | I_{t-1})$. Αν το περιουσιακό στοιχείο περιγράφεται από κάποιο ARCH(1,1) τότε τα ζητούμενα προκύπτουν από τη (2.14).

2.5.2 Εκτίμηση υποδείγματος

Με τον όρο «εκτίμηση υποδείγματος» εννοεί κανείς τον προσδιορισμό των τιμών των παραμέτρων του αντίστοιχου υποδείγματος. Η πιο δημοφιλής μέθοδος για την εκτίμηση ARCH και GARCH υποδειγμάτων είναι η μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας (*Maximum Likelihood Estimator*). Για το παραπάνω υπόδειγμα όπου $X_t | I_{t-1} \sim N(\mu, \sigma_t^2)$ με $\sigma_t^2 = c + au_{t-1}^2$ και $u_0 = 0$ δηλαδή με την υπόθεση παραδοχή ότι οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής X_t ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέσο όρο μ και διακύμανση σ^2 ισχύει:

$$f(x_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t}} e^{-\frac{1}{2\sigma_t^2}(x_t - \mu)^2}$$

Δεδομένου ότι οι επιμέρους κατανομές x_t είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανοτήτων όλων των κατανομών είναι:

$$L(\mu, c, a | u_0) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n) = \prod_{t=1}^n \left(\frac{1}{2\pi\sigma_t^2} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_t^2}(x_t - \mu)^2}$$

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανοτήτων, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ καλείται συνάρτηση πιθανοφάνειας (*likelihood function*) και συνήθως συμβολίζεται με το λατινικό κεφαλαίο γράμμα L. Η λογαριθμική μορφή της είναι:

$$\begin{aligned} \ln L &= \ln L(\mu, c, a | u_0) = \ln f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln \prod_{t=1}^n \left(\frac{1}{2\pi\sigma_t^2} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_t^2}(x_t - \mu)^2} = \\ &= \sum_{t=1}^n \left[-\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma_t^2) - \frac{1}{2\sigma_t^2}(x_t - \mu)^2 \right] = -\frac{1}{2} n \ln(2\pi\sigma_t^2) - \frac{1}{2\sigma_t^2} \sum_{t=1}^n (x_t - \mu)^2 = \\ &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{(x_t - \mu)^2}{\sigma_t^2} \end{aligned}$$

Οι εκτιμητές βάσει της μεθόδου μεγίστης πιθανοφάνειας δίνονται από τη σχέση:

$$\max \ln L$$

Λόγω της πολυπλοκότητάς των πράξεων η λύση θα βρεθεί με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο πρώτο κεφάλαιο, οι κατανομές που αφορούν χρηματοοικονομικές αποδόσεις είναι λεπτόκυρτες, δηλαδή έχουν βαρύτερες ουρές και υψηλότερες κεντρικές τιμές από ότι η κανονική κατανομή, κάτι που αντικατοπτρίζεται στον υψηλότερο συντελεστή κύρτωσης από αυτόν της κανονικής κατανομής. Για αυτό το λόγο, στον προσδιορισμό των τιμών των παραμέτρων ενός τέτοιου υποδείγματος με την MLE μέθοδο, μπορεί να θεωρηθεί ότι οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής, X_i ακολουθούν την κατανομή Student ή την Skewed Student-t. Στην περίπτωση της κατανομής Student (Fernandez and Steel (1998)) η λογαριθμική μορφή της συνάρτησης πιθανοφάνειας είναι:

$$\begin{aligned} \ln L = & \ln \left[\Gamma \left(\frac{u+1}{2} \right) \right] - \ln \left[\Gamma \left(\frac{u}{2} \right) \right] - \ln [\pi(u-2)] - \\ & - 0.5 \sum_{i=1}^n \left[\ln \sigma_i^2 + (1+u) \ln \left(1 + \frac{z_i^2}{u-2} \right) \right] \end{aligned}$$

όπου u είναι οι βαθμοί ελευθερίας, $2 < u \leq \infty$ και $\Gamma(\square)$ είναι η Γάμμα κατανομή. Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς, όταν $u \rightarrow \infty$ η παραπάνω λογαριθμική μορφή της συνάρτησης πιθανοφάνειας είναι ίδια με την περίπτωση όπου x_i ακολουθούν κανονική κατανομή. Επίσης όσο το μικραίνει τόσο η κατανομή των x_i έχει παχιές ουρές.

Στην περίπτωση όπου θεωρηθεί ότι οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής X_i ακολουθούν Skewed Student-t κατανομή (Lambert and Laurent (2001a)) , η λογαριθμική μορφή της συνάρτησης πιθανοφάνειας είναι:

$$\begin{aligned} \ln L = & \ln \left[\Gamma \left(\frac{u+1}{2} \right) \right] - \ln \left[\Gamma \left(\frac{u}{2} \right) \right] - 0.5 \ln [\pi(u-2)] + \ln \left(\frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}} \right) + \ln(s) - \\ & - 0.5 \sum_{i=1}^n \left[\ln \sigma_i^2 + (1+u) \ln \left(1 + \frac{s z_i + m}{u-2} \xi^{-l_i} \right) \right] \end{aligned}$$

όπου ξ είναι παράμετρος (asymmetry parameter), όπου u είναι οι βαθμοί ελευθερίας, $\Gamma(\square)$ είναι η Γάμμα κατανομή. Τέλος,

$$I^t = \begin{cases} 1, & z_t \geq -\frac{m}{s} \\ -1, & z_t < -\frac{m}{s} \end{cases}$$

όπου

$$m = \frac{\Gamma\left(\frac{u+1}{2}\right)\sqrt{u-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)}$$

και

$$s = \sqrt{\left(\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} - 1\right) - m^2}$$

2.6 Γενικευμένο αυτοπαλίνδρομο υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας υπόδειγμα τάξης (1,1)

Όπως αναμένεται και από τον τίτλο της παραγράφου, πρόκειται για γενίκευση των ARCH υποδειγμάτων που μελετήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο (*Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity Model*). Το γενικευμένο αυτοσυσχετιστικό υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας υπόδειγμα τάξης (1,1) ορίζεται από τις σχέσεις:

$$X_t = \mu + u_t$$

με

$$u_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

και

$$\sigma_t^2 = c + a u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

όπου X_t είναι η παρατηρούμενη τιμή τη χρονική στιγμή t και I_{t-1} το πληροφοριακό σύνολο μέχρι και τη χρονική στιγμή $t-1$. Παρατηρεί κανείς όπως και στην προηγούμενη παράγραφο

ότι αν είναι γνωστές οι παρατηρήσεις μέχρι και τη χρονική στιγμή $t-1$ τότε η σ_t^2 είναι γνωστή. Σε αντίθετη περίπτωση είναι στοχαστική.

Είναι γνωστό ότι $\sigma_t^2 = c + \alpha u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$. Προσθέτοντας κατά μέλη την ποσότητα $u_t^2 + \beta u_{t-1}^2$ προκύπτει ότι:

$$u_t^2 = c + (\alpha + \beta)u_{t-1}^2 + \beta(\sigma_{t-1}^2 - u_{t-1}^2) + u_t^2 - \sigma_t^2$$

ή

$$u_t^2 = c + (\alpha + \beta)u_{t-1}^2 + v_t - \beta v_{t-1} \quad (2.14)$$

όπου

$$v_t = u_t^2 - \sigma_t^2$$

Σχετικά με την νέα ορισθείσα ποσότητα προκύπτει:

$$\begin{aligned} E(v_t) &= E(u_t^2 - \sigma_t^2) = E(E(u_t^2 - \sigma_t^2) | I_{t-1}) \\ &= E[E(u_t^2 | I_{t-1}) - \sigma_t^2] = E(\sigma_t^2 - \sigma_t^2) = 0 \end{aligned}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} E(v_t v_{t-k}) &= E[(u_t^2 - \sigma_t^2)(u_{t-k}^2 - \sigma_{t-k}^2)] = E(E(u_t^2 - \sigma_t^2)(u_{t-k}^2 - \sigma_{t-k}^2) | I_{t-1}) \\ &= E[E(u_t^2 | I_{t-1})(u_{t-k}^2 - \sigma_{t-k}^2) - \sigma_t^2((u_{t-k}^2 - \sigma_{t-k}^2))] = \\ &= E(\sigma_t^2(u_{t-k}^2 - \sigma_{t-k}^2) - \sigma_t^2(u_{t-k}^2 - \sigma_{t-k}^2)) = 0 \end{aligned}$$

Οι δύο πρώτες ροπές δίνονται X_t είναι:

$$E(X_t) = E(\mu + u_t) = \mu + E(u_t) = \mu + E(E(u_t) | I_{t-1}) = \mu + E(0) = \mu$$

και

$$Var(X_t) = Var(\mu + u_t) = Var(u_t) = E(u_t^2) = \frac{c}{1 - \alpha - \beta}$$

Για να είναι στάσιμο το ARMA(1,1) υπόδειγμα που περιγράφεται στην (2.14) πρέπει:

$$|a + \beta| < 1$$

Όσο αφορά την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της u_t^2 αφού πρόκειται για ARMA(1,1) υπόδειγμα δίνεται από τη σχέση:

$$\rho_\kappa = \begin{cases} \frac{\alpha[1 - (\alpha + \beta)\beta]}{1 - 2\alpha\beta - \beta^2}, & \kappa = 1 \\ (\alpha + \beta)^{\kappa-1} \rho_1, & \kappa \geq 2 \end{cases}$$

Λόγω των σχέσεων (2.6) και (2.7) προκύπτει:

$$E(X_t | I_{t-1}) = E(\mu + u_t | I_{t-1}) = E(\mu | I_{t-1}) + E(u_t | I_{t-1}) = \mu + 0 = \mu \quad (2.13)$$

Σχετικά με την υπό συνθήκη διακύμανση της X_t ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} Var(X_t | I_{t-1}) &= E\left[(X_t - E(X_t | I_{t-1}))^2\right] = E\left[\left((X_t | I_{t-1}) - E(X_t | I_{t-1})\right)^2\right] = \\ &= E\left((\mu + u_t - \mu)^2 | \Psi_{t-1}\right) = E\left((u_t)^2 | \Psi_{t-1}\right) = E\left((u_t - 0)^2 | \Psi_{t-1}\right) = \\ &= E\left((u_t - E(u_t))^2 | I_{t-1}\right) = Var(u_t^2 | I_{t-1}) = \sigma_t^2 \end{aligned}$$

Τέλος θα πρέπει:

$$c > 0, \beta \geq 0 \text{ και } a \geq 0$$

αφού σ_t^2 είναι η υπό συνθήκη διακύμανση και κατά συνέπεια, αυτές θα πρέπει να είναι θετικές.

2.7 Ανακεφαλαίωση

Στην αρχή αυτού του κεφαλαίου παρουσιάστηκαν περιληπτικά το γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης εστιασμένο στις προϋποθέσεις του, η έννοια της χρονοσειράς, τα AR(p) MA(q) και τα ARMA(p,q) υποδείγματα. Στην συνέχεια παρουσιάστηκαν τα αυτοπαλίνδρομα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας υποδείγματα ή αλλιώς ARCH υποδείγματα και τα

γενικευμένα αυτοπαλίνδρομα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητα υποδείγματα ή αλλιώς GARCH υποδείγματα. Αυτό που συμπεραίνει κανείς είναι η χρησιμότητα των ARCH/GARCH υποδειγμάτων ειδικά στα χρηματοοικονομικά. Και τούτο διότι, η χρήση τέτοιων υποδειγμάτων μπορεί να “αιχμαλωτίσει” την ομαδοποιημένη μεταβλητότητα (*volatility clustering*) το οποίο είναι ένα από τα χαρακτηριστικά των χρηματοοικονομικών δεδομένων.

Επιπλέον ένα άλλο πλεονέκτημα είναι ο συντελεστής κύρτωσης σφαλμάτων, ο οποίος είναι υψηλότερος από αυτόν της κανονικής κατανομής. Αυτό που πρακτικά ενδιαφέρει κάποιον επενδυτή είναι η απόδοση και το ρίσκο που αναλαμβάνει από κάποια επένδυση. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι ένα επενδυτής σχεδιάζει να αγοράσει κάποιο περιουσιακό στοιχείο τη χρονική περίοδο $t-1$ του οποίου η τιμή είναι x_{t-1} και να το πουλήσει κατά την αμέσως επόμενη t με τιμή X_t . Αυτό που τον ενδιαφέρει είναι η υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή $E(X_t | \Psi_{t-1})$ και η υπό συνθήκη διακύμανση $Var(X_t | \Psi_{t-1})$. Στα συγκεκριμένα μοντέλα διαπιστώνεται ότι η υπό συνθήκη διακύμανση του τυχαίου σφάλματος ε_t τη χρονική στιγμή t είναι πλήρως ορισμένη από την τιμή των καταλοίπων της χρονικής στιγμής $t-1$. Και πιο συγκεκριμένα, αν το ε_{t-1} είναι μεγάλο κατά απόλυτη τιμή, τότε αναμένεται να είναι μεγάλο και το σφάλμα της επόμενης χρονικής στιγμής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Επεκτάσεις των υποδειγμάτων GARCH και υποδειγμάτων με στοχαστική αβεβαιότητα

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται αρχικά κάποιες από τις επεκτάσεις των GARCH υποδειγμάτων. Στη συνέχεια, τα υποδείγματα με στοχαστική αβεβαιότητα (*SV model*) και αμέσως μετά αναλύεται ο τρόπος με τον οποίο εκτιμάται ένα υπόδειγμα στοχαστικής αβεβαιότητας αφού είναι τελείως διαφορετικός από εκείνο που χρησιμοποιείται για τα GARCH υποδείγματα. Τέλος, περιγράφονται τα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας του μέσου υποδείγματα (*conditional heteroskedasticity mean model*).

3.2 Επεκτάσεις των υποδειγμάτων GARCH

Στο δεύτερο κεφάλαιο ορίστηκε το GARCH υπόδειγμα. Αυτό που παρατηρήθηκε είναι ότι για κάποιες σειρές χρηματοοικονομικών δεδομένων, η μεταβλητότητα περιγράφεται ικανοποιητικότερα από υποδείγματα όπου ο μαθηματικός τρόπος με τον οποίο ορίζεται η μεταβλητότητα είναι πιο περίπλοκος. Τέτοια υποδείγματα στη βιβλιογραφία ονομάζονται και σαν επεκτάσεις GARCH υποδειγμάτων. Παρακάτω περιγράφονται κάποια από αυτά.

GQARCH(1,1)

Το Generalized Quadratic ARCH υπόδειγμα τάξης (1,1) ορίζεται από τις σχέσεις:

$$X_t = \mu + u_t$$

με

$$u_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

και

$$\sigma_t^2 = c + a(u_{t-1} - \gamma)^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

όπου X_t είναι η παρατηρούμενη τιμή τη χρονική στιγμή t και I_{t-1} το πληροφοριακό σύνολο μέχρι και τη χρονική στιγμή $t-1$. Όπως και στα προηγούμενα υποδείγματα, αν είναι γνωστές οι παρατηρήσεις μέχρι και τη χρονική στιγμή $t-1$ τότε η σ_t^2 είναι γνωστή. Σε αντίθετη περίπτωση είναι στοχαστική. Η υπό συνθήκη διακύμανση ισοδύναμα γράφεται:

$$\sigma_t^2 = c + au_{t-1}^2 - 2\alpha\gamma u_{t-1} + \alpha\gamma^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

ή

$$\sigma_t^2 = c + \alpha\gamma^2 + au_{t-1}^2 - 2\alpha\gamma u_{t-1} + \beta\sigma_{t-1}^2$$

ή

$$\sigma_t^2 = \omega + au_{t-1}^2 - \delta u_{t-1} + \beta\sigma_{t-1}^2$$

όπου:

$$\omega = c + \gamma^2$$

και

$$\delta = 2\alpha\gamma$$

Ο εναλλακτικός τρόπος που παρουσιάστηκε στο παραπάνω υπόδειγμα είναι εξαιρετικά χρήσιμος στην εξαγωγή των συμπερασμάτων και στις διάφορες συγκρίσεις υποδειγμάτων που θα ακολουθήσουν.

Προσθέτοντας κατά μέλη την ποσότητα $u_t^2 + \beta u_{t-1}^2$ προκύπτει ότι:

$$u_t^2 + \sigma_t^2 = u_t^2 + \beta u_{t-1}^2 - \beta u_{t-1}^2 + \omega + au_{t-1}^2 - \delta u_{t-1} + \beta\sigma_{t-1}^2$$

ή

$$u_t^2 = \omega + au_{t-1}^2 + \beta u_{t-1}^2 - \delta u_{t-1} + u_t^2 - \sigma_t^2 - \beta u_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

ή

$$u_t^2 = \omega + (\alpha + \beta)u_{t-1}^2 - \delta u_{t-1} + v_t - \beta v_{t-1} \quad (3.1)$$

όπου $v_t = u_t^2 - \sigma_t^2$.

Σχετικά με τη v_t προκύπτει ότι:

$$E(v_t) = 0 \quad (3.2)$$

και

$$E(v_t v_{t-k}) = 0 \quad (3.3)$$

Από τις σχέσεις (3.1) και (3.2) προκύπτει ότι η v_t είναι ARMA(1,1).

Οι δύο πρώτες ροπές της X_t δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$E(X_t) = E(\mu + u_t) = \mu + E(u_t) = \mu + E(E(u_t) | I_{t-1}) = \mu + E(0) = \mu$$

και

$$Var(X_t) = Var(\mu + u_t) = Var(u_t) = E(u_t^2) = \frac{c}{1 - \alpha - \beta}$$

Για να είναι στάσιμο το ARMA(1,1) της (3.1) πρέπει:

$$|\alpha + \beta| < 1$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της v_t^2 αποδεικνύεται ότι είναι ίση με:

$$Cov(v_t^2, v_{t-k}^2) = Cov(\sigma_t^2, \sigma_{t-k}^2) = (\alpha + \beta)^k \left[\frac{2\omega^2 \alpha^2 + 4\alpha^2 \delta^2 \omega (1 - \alpha - \beta)}{(1 - 3\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta)(1 - \alpha - \beta)} \right]$$

και

$$Cov(v_t^2, v_{t-k}^2) = E(\sigma_t^2 v_{t-k}^2) = -2(\alpha + \beta)^{k-1} \frac{\delta \alpha \omega}{1 - \alpha - \beta}$$

Τέλος, υπενθυμίζεται ότι αφού σ_t^2 είναι η υπό συνθήκη διακύμανση, τότε θα πρέπει να είναι θετικές. Αυτό επιτυγχάνεται:

$$c > 0, \beta \geq 0 \text{ και } \alpha \geq 0.$$

E-GARCH(1,1)

Το E-GARCH υπόδειγμα τάξης (1,1) ορίζεται από τις σχέσεις:

$$X_t = \mu + u_t$$

με

$$\begin{aligned} u_t | I_{t-1} &\sim N(0, \sigma_t^2) \\ \ln \sigma_t^2 &= c + \alpha z_{t-1} + \gamma (|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|) + \beta \ln \sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

και

$$z_t = \frac{u_t}{\sqrt{\sigma_t^2}} \sim N(0,1)$$

όπου X_t είναι η παρατηρούμενη τιμή τη χρονική στιγμή t και I_{t-1} το πληροφοριακό σύνολο μέχρι και τη χρονική στιγμή $t-1$. Και για αυτό το υπόδειγμα παρατηρεί κανείς ότι και στην προηγούμενη παράγραφο. Αν είναι γνωστές οι παρατηρήσεις μέχρι και τη χρονική στιγμή $t-1$ τότε η σ_t^2 είναι γνωστή. Σε αντίθετη είναι στοχαστική.

Για τις δύο πρώτες ροπές της X_t αποδεικνύεται ότι:

$$E(X_t) = \mu$$

και

$$Var(X_t) = \exp\left(\frac{c - \gamma \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{1 - \beta}\right) \prod_{i=0}^{\infty} \left[\Phi(\beta^i \gamma^*) \exp\left(\frac{\beta^{2i} (\gamma^*)^2}{2}\right) + \exp\left(\frac{\beta^{2i} \delta^2}{2}\right) \Phi(\beta^i \delta) \right]$$

όπου $\gamma^* = \gamma + \alpha$, $\delta = \gamma - \alpha$ και $\Phi(\kappa)$ η αθροιστική συνάρτηση της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης αποδεικνύεται ότι είναι ίση με:

$$\text{Cov}(u_t^2, u_{t-k}^2) = \exp\left(\frac{c - \gamma \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{1 - \beta}\right) \cdot \left\{ \omega_k \prod_{i=0}^{k-1} \left[\Phi(\beta^i \gamma^*) \exp\left(\frac{\beta^{2i} (\gamma^*)^2}{2}\right) + \exp\left(\frac{\beta^{2i} \delta^2}{2}\right) \Phi(\beta^i \delta) \right] - E(\sigma_t^2) \right\}$$

με

$$\omega_k = \prod_{i=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \exp\left(\frac{[(1 + \beta^k) \beta^i \gamma^*]^2}{2}\right) \Phi[(1 + \beta^k) \beta^i \gamma^*] + \\ + \exp\left(\frac{[(1 + \beta^k) \beta^i \delta]^2}{2}\right) \Phi[(1 + \beta^k) \beta^i \delta] \end{array} \right\}$$

Το μεγάλο πλεονέκτημα του EGARCH υποδείγματος είναι ότι οι παράμετροί του δεν χρειάζονται περιορισμούς στο πρόσημό τους. Αυτό συμβαίνει γιατί από τη στιγμή που η ποσότητα σ_t^2 στο αριστερό μέλος της (3.4) λογαριθμίζεται, η αντιλογαρίθμισή της δεν πρόκειται ποτέ να εξάγει αρνητικό αποτέλεσμα ακόμα και αν το δεξιό μέλος της σχέσης αυτής λάβει κάποτε αρνητική τιμή.

3.3 Στοχαστική μεταβλητότητα

Στη βιβλιογραφία, η έννοια της στοχαστικής μεταβλητότητας έχει δύο διαφορετικές χρήσεις. Η πρώτη χρήση είναι για να δηλώσει ότι το μέγεθος των τιμών της χρονοσειράς εμφανίζει τυχαίες διακυμάνσεις στην πάροδο του χρόνου. Τα υποδείγματα, τα οποία προσπαθούν να περιγράψουν χρηματοοικονομικά δεδομένα, σχεδόν πάντα ενσωματώνουν αυτό τον παράγοντα. Αυτό γίνεται ακόμα εντονότερο όταν τα δεδομένα αφορούν την απόδοση χρηματοοικονομικών προϊόντων γιατί εμφανίζονται ήσυχες και «πολυτάραχες» περιόδους.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί ότι υπάρχουν δύο κατηγορίες τέτοιων μοντέλων. Η μία κατηγορία θεωρεί ότι η μεταβλητότητα της απόδοσης λειτουργεί με ένα εκ των προτέρων

γνωστό ή ντετερμινιστικό τρόπο και η άλλη στην οποία δεν υπάρχει κάποιος *a-priori* γνωστός τρόπος. Η απλούστερη περίπτωση των ντετερμινιστικών υποδειγμάτων είναι η παραδοχή της σταθερής διακύμανσης όπως για παράδειγμα στον τύπο για αποτίμηση παραγώγων των Black and Scholes:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + r \cdot s \cdot \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot s^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = r \cdot f$$

όπου f η ζητούμενη τιμή, s η υποκείμενη αξία, σ η διασπορά της υποκείμενης αξίας και r το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου (risk-free interest rate). Ένα άλλο παράδειγμα της πρώτης κατηγορίας είναι η διακύμανση να μοντελοποιείται αποκλειστικά ως συνάρτηση του χρόνου επιτρέποντας μόνο τις επιπτώσεις από αυτόν (εποχικότητα μηνών, ημερών). Στη δεύτερη κατηγορία η μεταβλητότητα καλείται στοχαστική. Ένα παράδειγμα αυτής της κατηγορίας, είναι το μοντέλο του ενός παράγοντα συνεχούς χρόνου (*One-Factor Continuous-Time*) το οποίο προτάθηκε από τους Cox, Ingersoll & Ross (1985b) που είναι γνωστό και σαν CIR μοντέλο. Και στις δύο κατηγορίες, η μεταβλητότητα είναι γνωστή, για μια δεδομένη χρονική στιγμή, αλλά η τυχαία εξέλιξη της διαδικασίας καθιστά την μεταβλητότητα στοχαστική για οποιοδήποτε χρονικό ορίζοντα πέρα από την τρέχουσα περίοδο.

Η δεύτερη χρήση της έννοιας της στοχαστικής μεταβλητότητας, αναφέρεται σε μοντέλα στα οποία η διασπορά της απόδοσης υπόκειται σε τυχαία σοκ, έτσι ώστε η μεταβλητότητα να είναι κατά κάποιο “κρυμμένη”. Δηλαδή η μεταβλητότητα της τρέχουσας περιόδου δεν είναι γνωστή με βεβαιότητα. Υπό αυτή την έννοια στην παρούσα εργασία, θα θεωρείται ένα υπόδειγμα στοχαστικής μεταβλητότητας. Δεδομένου ότι τα CIR και GARCH μοντέλα έχουν καταστήσει ότι η υπό συνθήκη μεταβλητότητα της τρέχουσας περιόδου είναι γνωστή, τότε αυτά τα μοντέλα δεν μπορούν να χαρακτηρισθούν σαν στοχαστικά.

Επίσης υπάρχουν δύο βασικά πλεονεκτήματα, στα υποδείγματα στοχαστικής μεταβλητότητας μοντέλα. Πρώτον, ένα μεγάλο μέρος θεωρίας αποτίμησης περιουσιακών στοιχείων είναι χτισμένο σε μοντέλα συνεχούς χρόνου. Μέσα σε αυτή την κατηγορία, τα υποδείγματα στοχαστικής μεταβλητότητας μοντέλα τείνουν να ταιριάζουν περισσότερο με ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών, συμπεριλαμβανομένων τις νομισματικές ισοτιμίες, τα δικαιώματα προαίρεσης στην αγορά των παραγώγων, καθώς και τη μοντελοποίηση επιτοκίων. Δεύτερον, η αυξανόμενη χρήση μοντέλων που λάμβαναν πολλές τιμές του ίδιου μεγέθους κατά τη διάρκεια της ίδιας ημέρας με στόχο να ληφθεί υπόψη η λεγόμενη πραγματική μεταβλητότητα (*realized volatility*), έχει αρχίσει να ωθεί τα GARCH μοντέλα

έξω από τα φώτα της δημοσιότητας.

Ένα μειονέκτημα είναι ότι η μεταβλητότητα δεν είναι μετρήσιμη σε σχέση με τις από το παρελθόν πληροφορίες. Ως εκ τούτου, η εκτίμηση της τρέχουσας μεταβλητότητας πρέπει να φιλτράρεται από ένα θορυβώδες περιβάλλον και η εκτίμηση να αλλάζει, καθώς και άλλες μελλοντικές παρατηρήσεις θα είναι διαθέσιμες. Ως εκ τούτου, το δείγμα εκτίμησης περιλαμβάνει τεχνικές εξομάλυνσης και όχι μόνο το φιλτράρισμα. Αντιθέτως, η υπό όρους διακύμανση στα GARCH υποδείγματα είναι παρατηρήσιμη από τις παρελθοντικές πληροφορίες, με την τεχνική μέγιστης πιθανοφάνειας (*maximum likelihood*) ενώ τεχνικές εξομάλυνσης δεν έχουν κανένα ρόλο. Ως εκ τούτου, τα GARCH μοντέλα είναι πιο εύκολο να εκτιμηθούν και οι επαγγελματίες συχνά τα επικαλούνται για την πρόβλεψη της μεταβλητότητας μιας χρονοσειράς. Ωστόσο, η ανάπτυξη ισχυρών μεθόδων προσομοίωσης όπως η MCMC μέθοδος (Markov Chain Monte Carlo) και άλλων, για την εκτίμηση και την πρόβλεψη της SV μοντέλων, τα καταστύβουν ανταγωνιστικά σε σχέση με τα GARCH. Η βιβλιογραφία για τα υποδείγματα στοχαστικής μεταβλητότητας μοντέλα είναι τεράστια και συνεχώς αυξανόμενη (Ghysels et al. (1996), Shephard (2004)). Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τρόποι εκτίμησης των μοντέλων στοχαστικής μεταβλητότητας.

Το Stochastic Volatility (SV) υπόδειγμα τάξης 1, ορίζεται από τις σχέσεις:

$$X_t = \mu + u_t$$

με

$$\ln \sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta \ln \sigma_{t-1}^2 + \eta_{t-1}$$

$$u_t = z_t \sqrt{\sigma_t^2}$$

και

$$\begin{pmatrix} z_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix} \right]$$

Παρατηρεί κανείς, αν είναι γνωστό το πληροφοριακό σύνολο $J_{t-1} = \{X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, \eta_{t-1}, \eta_{t-2}, \dots\}$ τότε η σ_t^2 είναι γνωστή. Από την άλλη, μέχρι και τη χρονική στιγμή t αυτό που είναι γνωστό είναι οι παρατηρούμενες τιμές $I_{t-1} = \{X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\}$ με

$I_{t-1} \subset J_{t-1}$. Συνεπώς η σ_t^2 είναι στοχαστική, σε αντίθεση με τα μοντέλα που περιγράφηκαν στο δεύτερο κεφάλαιο. Στα GARCH υποδείγματα όταν I_{t-1} είναι γνωστό, η υπό συνθήκη διακύμανση δεν είναι στοχαστική.

Για τις δύο πρώτες ροπές της X_t αποδεικνύεται ότι:

$$E(X_t) = \mu$$

και

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_t) &= \text{Var}(\mu + u_t) = \text{Var}(u_t) = E(u_t^2) = E(z_t^2) E(\sigma_t^2) = \\ &= E(\sigma_t^2) = \exp\left(\frac{\alpha_0}{1-\beta} + \frac{\sigma_\eta^2}{2(1-\beta^2)}\right) \end{aligned}$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης u_t^2 αποδεικνύεται ότι είναι ίση με:

$$\rho(u_t^2, u_{t-k}^2) = \frac{(1 + \beta^{2k-2} \rho^2 \sigma_\eta^2) \exp\left(\beta^k \frac{\sigma_\eta^2}{1-\beta^2}\right) - 1}{3 \exp\left(\frac{\sigma_\eta^2}{1-\beta^2}\right) - 1}$$

και

$$\text{Cov}(\sigma_t^2, \sigma_{t-k}^2) = \exp\left(2 \frac{\alpha_0}{1-\beta} + \frac{\sigma_\eta^2}{1-\beta^2}\right) \left[\exp\left(\beta^k \frac{\sigma_\eta^2}{1-\beta^2}\right) - 1 \right]$$

Η μόγλευση (dynamic asymmetry (leverage)) δίνεται από τον τύπο:

$$E(\sigma_t^2, u_{t-k}) = \rho \sigma_\eta \beta^{k-1} \exp\left(\frac{3\alpha_0}{2(1-\beta)} + \sigma_\eta^2 \frac{\beta^k + \frac{5}{4}}{2(1-\beta^2)}\right).$$

3.4 Εκτίμηση των στοχαστικών μοντέλων μεταβλητότητας

Μέχρι πριν από λίγα χρόνια, τα στοχαστικά μοντέλα μεταβλητότητας σπάνια χρησιμοποιούνταν σε εμπειρικές εφαρμογές, διότι ήταν ιδιαίτερα δύσκολο να εκτιμηθούν. Παρά το γεγονός ότι οι στατιστικές ιδιότητές τους είναι εύκολο εξαχθούν χρησιμοποιώντας γνωστά αποτελέσματα από λαγαριθμοκανονικές κατανομές, η συνάρτηση πιθανότητας και οι παράμετροι της, σπάνιως είναι σε κλειστή μορφή. Επιπλέον, το volatility risk δεν μπορεί να

παρατηρηθεί άμεσα από τα ιστορικά στοιχεία, και ως εκ τούτου θα πρέπει να προσεγγιστεί. Ευτυχώς, τα τελευταία χρόνια έχουν προταθεί διάφοροι τρόποι (Shephard, 1996), οι οποίοι έχουν οδηγήσει στην ανάπτυξη πολλών εμπειρικών μεθόδων, συμπεριλαμβανομένης της προσομοίωσης μεθόδων των ροπών, αποτελεσματικές μεθόδους των ροπών, αναλυτικές προσεγγίσεις στον υπολογισμό της κατανομής της πιθανότητας και στη φασματική μέθοδο.

Το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην προσέγγιση MCMC (Markov Chain Monte Carlo) (Johannes & Polson (2007)). Αυτή είναι μία υπολογιστική τεχνική που είναι κυρίως κατάλληλη για τα συνεχούς χρόνου μοντέλα στοχαστικής μεταβλητότητας. Επειδή πρόκειται για εκτίμηση, αυτή μπορεί να ποσοτικοποιηθεί και να εκτιμηθεί ο κίνδυνος που έχει η εκτίμηση. Να σημειωθεί ότι αυτές οι προσεγγίσεις μπορεί να προσφέρουν συνεπείς εκτιμήσεις και συχνά αποτελεσματικές εκτιμήσεις ασυμπτωτικά.

Μια βολική και δημοφιλής μέθοδος εκτίμησης είναι η Quasi Maximum Likelihood (QML) (Koopman (2006)). Αυτή η τεχνική η οποία χρησιμοποιεί το φίλτρο Kalman, παρέχει επίσης μια εκτίμηση της μεταβλητότητας. Επίσης, μια άλλη πρακτική προσέγγιση έχει προταθεί από τους Bollerslev και Zhou (2002) που είναι γνωστή και σαν γενικευμένη μέθοδος των ροπών (GMM). Αν και αυτή η προσέγγιση έχει το μειονέκτημα να απαιτούν υψηλής συχνότητας δεδομένων, οι Bollerslev και Zhou αποδεικνύουν ότι η χρήση προσομοίωσης παρέχει εξαιρετικά αξιόπιστους και ακριβείς εκτιμητές σε πεπερασμένα δείγματα.

Συμπερασματικά, για την εκτίμηση των SV υποδειγμάτων έχουν προταθεί μέθοδοι εκ των οποίων οι πιο διαδεδομένες είναι η Quasi Maximum Likelihood (QML), η γενικευμένη μέθοδος των ροπών (GMM) και η Markov Chain Monte Carlo (MCMC) μέθοδος. Παρακάτω παρουσιάζονται τόσο η MCMC όσο και η QML μέθοδος.

Δεδομένου ότι η MCMC είναι μια Μπεϋζιανή προσέγγιση, ακολουθούν οι βασικές ιδέες από την Μπεϋζιανή ανάλυση. Όπως εξηγείται από τον Koop (2003), η Μπεϋζιανή οικονομετρία βασίζεται σε απλούς κανόνες της πιθανότητας. Για δύο τυχαίες μεταβλητές A και B, είναι γνωστό ότι:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

ή

$$P(\theta|y) = \frac{P(y|\theta) \cdot P(\theta)}{P(y)}$$

όπου y είναι το σύνολο των δεδομένων και θ είναι το σύνολο που περιέχει τις άγνωστες παραμέτρους. Η θεωρία του Bays μεταχειρίζεται το θ σαν τυχαία μεταβλητή. Όσο αφορά την $P(\theta|y)$ που είναι και το πιο ενδιαφέρον μέρος της ισότητας, δίνει πληροφορίες σχετικά με τις παραμέτρους αφού τηρηθούν τα δεδομένα, δηλαδή με δεδομένο ότι ισχύει η y . Αγνοώντας την $P(y)$, τότε:

$$P(\theta|y) \propto P(y|\theta) \cdot P(\theta)$$

Ο όρος $P(\theta|y)$ αναφέρεται και σαν η a-posteriori πιθανότητα. Για ευκολία στο συμβολισμό θεωρείται ότι $P(\theta|Y) = \pi(X)$.

Βάσει της θεωρίας πιθανοτήτων, είναι γνωστό ότι αν μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πιθανότητας $\pi(\chi)$, η μέση τιμή ορίζεται να είναι της a-posteriori πιθανότητας:

$$E(X) = \int x\pi(\chi) d\chi$$

ή σε πιο γενική μορφή:

$$E(h(X)) = \int h(x)\pi(\chi) d\chi$$

Αν δεν είναι γνωστός ο τύπος της $\pi(\chi)$, δεν είναι σε κλειστή μορφή όπως αλλιώς ονομάζεται, τότε δεν μπορεί να υπολογισθεί η $E(h(X))$. Το πρόβλημα λύνεται ως εξής: αν ληφθεί δείγμα $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ ώστε $X^{(1)}, \dots, X^{(n)} \sim \pi(\chi)$ τότε:

$$E(h(X)) \approx \tilde{h}_N = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N h(X^{(t)})$$

Η μέθοδος αυτή ονομάζεται και ολοκλήρωση κατά Monte Carlo. Στην περίπτωση που λαμβάνονται ανεξάρτητα δείγματα και με τη χρήση του νόμου των μεγάλων αριθμών αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N h(X^{(t)}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} E(h(X))$$

Το ερώτημα που προκύπτει είναι το πώς θα παρθούν δείγματα ανεξάρτητα που να ακολουθούν τη συνάρτηση πιθανότητας $\pi(\chi)$. Το πρόβλημα ξεπερνιέται με τη χρήση Μαρκοβιανών αλυσίδων. Από τη θεωρία πιθανοτήτων, μια στοχαστική ανέλιξη ορίζεται ότι

έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα αν:

$$P\left(X^{(t+1)} \mid X^{(t)}, \dots, X^{(1)}\right) = P\left(X^{(t+1)} \mid X^{(t)}\right).$$

Επίσης, μια Μαρκοβιανή αλυσίδα (Markov Chain) παράγεται από ένα δείγμα αν ισχύει:

$$X^{(t+1)} \sim p\left(x \mid x^{(t)}\right).$$

Δηλαδή, η τιμή του δείγματος τη χρονική στιγμή $t+1$ εξαρτάται μόνο από την τιμή της προηγούμενης χρονικής τιμής. Από τη θεωρία των στοχαστικών ανεξίτητων είναι γνωστό το παρακάτω θεώρημα (ergodic theorem):

Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα που έχει στάσιμη κατανομή, είναι απεριοδική και αδιαχώριστη, ισχύει:

$$\overline{h_N} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N h\left(X^{(t)}\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} E_{\pi}\left(h(X)\right)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν μια μαρκοβιανή αλυσίδα με στάσιμη κατανομή είναι αδιαχώριστη, τότε αυτή η κατανομή είναι μοναδική. Αυτό εξηγεί και το δείκτη στην μέση τιμή $E_{\pi}\left(h(X)\right)$.

Επίσης για αλυσίδες που πληρούν τις υποθέσεις του θεωρήματος και με $\sigma_h^2 = \text{Var}_{\pi}\left[h(X)\right] < \infty$, ισχύει το κεντρικό οριακό θεώρημα και η σύγκλιση είναι γεωμετρική. Όσο αφορά το αριθμητικό τυπικό σφάλμα (nse, numerical standard error) της $\overline{h_N}$, αυτό θα είναι κατά προσέγγιση ίσο με:

$$\text{nse}\left(\overline{h_N}\right) \approx \sqrt{\frac{\sigma_h^2}{N}}.$$

Το αριθμητικό τυπικό σφάλμα δεν είναι πάντα πεπερασμένο. Αν όμως η αλυσίδα συγκλίνει γεωμετρικά τότε σίγουρα είναι πεπερασμένο. Τέλος παρατηρεί κανείς ότι το σφάλμα μπορεί να είναι μικρό με κατάλληλη επιλογή του N .

Συμπερασματικά, διαπιστώνεται ότι για να υπολογισθεί η $E\left(h(X)\right)$ όταν η κατανομή της X δεν είναι σε κλειστή μορφή, γίνεται με την Monte Carlo (MC) ολοκλήρωση για την οποία χρειάζονται να παραχθούν ανεξάρτητα δείγματα από την κατανομή της X . Αυτό γίνεται με τον υπολογισμό κατάλληλης Μαρκοβιανής αλυσίδας (Markov Chain). Για αυτό και η συντομογραφία της μεθόδου είναι MCMC μέθοδος. Η παραγωγή των παραπάνω Μαρκοβιανών αλυσίδων γίνεται με τη χρήση κατάλληλων επαναληπτικών μεθόδων. Μία από αυτές είναι ο Metropolis-Hastings αλγόριθμος του οποίου τα βήματα είναι:

Για κάθε επανάληψη t

Βήμα 1: Επιλέγεται $y \sim q(y|x^{(t)})$

Βήμα 2: Με πιθανότητα

$$a(x^{(t)}, y) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(y)q(x^{(t)}|y)}{\pi(x^{(t)})q(y|x^{(t)})} \right\}$$

ορίζεται:

$$x^{(t+1)} = y \text{ (αποδοχή)}$$

αλλιώς:

$$x^{(t+1)} = x^{(t)} \text{ (απόρριψη)}$$

Όσο αφορά τη $q(x^{(t)})$ είναι μία συνάρτηση πιθανότητας. Θεωρητικά όλες οι κατανομές που έχουν τον ίδιο στήριγμα (*support*) μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Συνήθως επιλέγεται κάποια ώστε να είναι εύκολη η εξαγωγή δείγματος.

Όταν

$$q(x|y) \equiv q(|y-x|)$$

τότε:

$$a(x^{(t)}, y) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(y)}{\pi(x^{(t)})} \right\}$$

Σε αυτή την περίπτωση ο παραπάνω αλγόριθμος είναι ο Random Walk Metropolis.

Μία άλλη επαναληπτική μέθοδος για την παραγωγή Μαρκοβιανών αλυσίδων εκτός από τον Metropolis-Hastings αλγόριθμο, είναι η δειγματοληψία κατά Gibbs.

Έστω ότι $x = (x_1, \dots, x_k)$

Η δειγματοληψία κατά Gibbs χρησιμοποιεί την από κοινού υπό συνθήκη κατανομή:

$$\pi(x_j | x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k) = \frac{\pi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_k)}{\int \pi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_k) dx_j}$$

Παρατηρεί κανείς ότι η $\pi(x_j | x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k)$ είναι ανάλογη της από κοινού κατανομής.

Αυτό θα φανεί χρήσιμο στην εύρεση της.

Το δείγμα λαμβάνεται από την κατανομή:

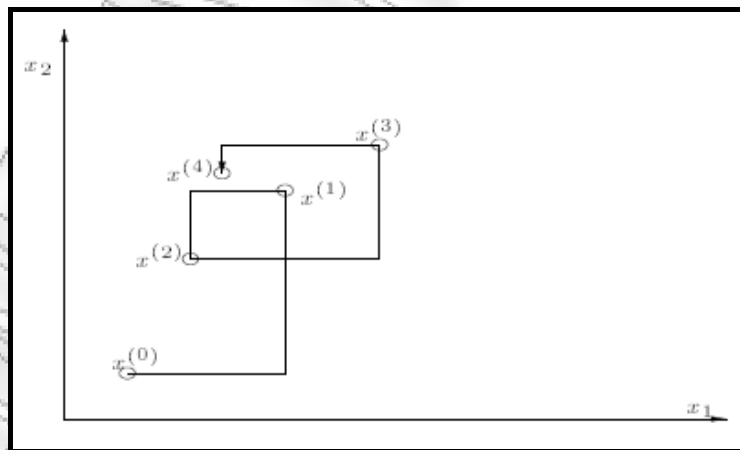
$$X_1^{(t+1)} \sim \pi(x_1 | x_2^{(t)}, x_3^{(t)}, \dots, x_k^{(t)})$$

$$X_2^{(t+1)} \sim \pi(x_2 | x_1^{(t)}, x_3^{(t)}, \dots, x_k^{(t)})$$

.....

$$X_k^{(t+1)} \sim \pi(x_k | x_1^{(t)}, x_3^{(t)}, \dots, x_{k-1}^{(t)})$$

Το διάγραμμα (3.1) απεικονίζει τις τιμές από μια πιθανή δειγματοληψία με την μέθοδο του Gibbs για $k=2$.



Διάγραμμα 3.1

Τιμές από πιθανή δειγματοληψία κατά Gibbs

Ανεξάρτητα από τη διαδικασία που χρησιμοποιείται (Metropolis-Hastings αλγόριθμος, δειγματοληψία κατά Gibbs, κ.α.) προκύπτει το ερώτημα κατά πόσο η αρχική επιλογή $x^{(0)}$, επηρεάζει τις επόμενες τιμές των επαναλήψεων (iterations) $x^{(1)}, \dots, x^{(M)}$, $M < N$. Για αυτό το λόγο οι $x^{(1)}, \dots, x^{(M)}$, οι οποίες και καλούνται burn in, παραλείπονται από τους υπολογισμούς. Έτσι το συμπέρασμα του εργοδικού θεωρήματος γίνεται:

$$\overline{h_{MN}} = \frac{1}{N-M} \sum_{t=M+1}^N h(X^{(t)}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} E_{\pi}(h(X))$$

Οι μέθοδοι που καθορίζουν την τιμή της M καλούνται διαγνωστική σύγκλιση (*convergence diagnostics*) (Gelman and Rubin (1992), Brooks and Roberts (1998), Cowles and Carlin (1995)).

Σχετικά την QML (Kalman Filter) μέθοδο, αυτή στηρίζεται στο ότι οι εξισώσεις που περιγράφουν κάποιο υπόδειγμα μπορεί να θεωρηθούν σαν δυναμικό σύστημα ως προς την μεταβλητή του χρόνου. Γενικά η μέθοδος εφαρμόζεται όταν υπάρχουν δύο εξισώσεις της μορφής:

$$x_t = c_t + Z_t \alpha_t + \varepsilon_t \quad (3.5)$$

$$\alpha_t = d_{t-1} + T_{t-1} \alpha_{t-1} + v_{t-1} \quad (3.6)$$

Να σημειωθεί ότι μία ειδική περιγραφή είναι όταν πρόκειται SV πρώτης τάξης ($c_t = \mu$, $d_{t-1} = e^{\alpha_0}$). Τα ε_t ανεξάρτητα μεταξύ τους, ακολουθούν κανονική κατανομή με μέσο 0. Ομοίως και τα v_t .

Επίσης ορίζεται:

$$\Omega_t = Var \begin{bmatrix} e_t \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_t & G_t \\ G_t' & Q_t \end{bmatrix}$$

Με αυτό τον τρόπο περιγραφής των δεδομένων, υπάρχουν δύο βασικά πλεονεκτήματα. Πρώτον, στο παραπάνω σύστημα συμπεριλαμβάνεται μια μεταβλητή ευαίσθητη σε μεταβολές που η συμπεριφορά της είναι στοχαστική και δεύτερον, μπορούν να αναλυθούν χρησιμοποιώντας ένα ισχυρό αναδρομικό αλγόριθμο γνωστό ως Kalman (Bucy) φίλτρο.

Αν I_{t-1} είναι το πληροφοριακό σύνολο μέχρι και τη χρονική $t-1$ τότε ορίζονται:

$$a_{t|t-1} = E(a_t | I_{t-1})$$

$$P_{t|t-1} = E \left[(a_t - a_{t|t-1})(a_t - a_{t|t-1})' \right]$$

και κάτω από την υπόθεση ότι τα σφάλματα ακολουθούν κανονική κατανομή, αποδεικνύεται ότι ο $a_{t|t-1}$ είναι ο ελάχιστος MSE εκτιμητής του a_t και η $P_{t|t-1}$ είναι ο ελάχιστος MSE εκτιμητής του $a_{t|t-1}$.

Έτσι:

$$\tilde{x}_t = x_{t|t-1} = E(x_t | a_{t|t-1}) = c_t + Z_t a_{t|t-1}$$

$$\tilde{e}_t = e_{t|t-1} \equiv x_t - \tilde{x}_{t|t-1}$$

$$\tilde{F}_t = F_{t|t-1} \equiv \text{Var}(e_{t|t-1}) = Z_t P_{t|t-1} Z_t' + H_t.$$

Το Kalman (Bucy) φίλτρο είναι ένας αναδρομικός αλγόριθμος ο οποίος μετά από κάθε νέο βήμα λαμβάνει υπόψη του τα νέα στοιχεία επανεκτιμά την μέση τιμή και τη διακύμανση της μεταβλητές στη σχέση (3.6).

3.5 Υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας του μέσου υποδείγματα

Όπως παρατηρεί κανείς τόσο τα GARCH όσο και στο SV(1) υποδείγματα, περιέχουν την ποσότητα μ που ορίζεται να είναι αριθμός. Στην περίπτωση όπου το μ δεν είναι αριθμός προκύπτει μια νέα οικογένεια υποδειγμάτων. Ένας τρόπος που μπορεί να ορισθούν είναι ο ακόλουθος:

$$X_t = \delta h_t + u_t \quad (3.7)$$

με

$$u_t = z_t \sqrt{h_t} \quad (3.8)$$

$$h_t^\lambda = \omega + \alpha f^\nu(z_{t-1}) h_{t-1}^\lambda + \beta h_{t-1}^\lambda + \varphi_\eta \lambda \eta_{t-1} \quad (3.9)$$

$$f(z_{t-1}) = |z_{t-1} - b| - \gamma(z_{t-1} - b) \quad (3.10)$$

$$\begin{pmatrix} z_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix} \right] \quad (3.11)$$

Όπως παρατηρεί κανείς, αλλάζοντας κάποιες από τις παραμέτρους, προκύπτει και κάποιο άλλο υπόδειγμα το οποίο το συναντά κανείς με ειδική ονομασία. Επιπλέον τα μοντέλα που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους μπορούν να θεωρηθούν ειδικές περιπτώσεις της παραπάνω οικογένειας. Ενδεικτικά:

- $\lambda = 1, \nu = 2, \varphi_\eta = b = \gamma = 0$ είναι το $GARCH(1,1) - M$ (Engle, Lilien, Robins(1987))
- $\lambda = 1, \nu = 2, \varphi_\eta = \gamma = 0$ είναι το $NLGARCH(1,1)$ (Engle, NG (1993))
- $\lambda = 1, \nu = 2, \varphi_\eta = b = 0$ είναι το $GJRGARCH(1,1) - M$ (Glosten, Jagannathan, Runkle, (1993))
- $\lambda = \frac{1}{2}, \nu = 1, \varphi_\eta = b = 0$ είναι το $TGARCH(1,1)$ (Zakoian (1994))
- $\lambda = \frac{1}{2}, \nu = 1, \varphi_\eta = b = \gamma = 0$ είναι το $AVGARCH(1,1)$ (Taylor (1986), Schwert (1989))
- $\lambda = 0, \nu = 1, \varphi_\eta = 0, b = 0$ είναι το $EGARCH(1,1) - M$ (Taylor (1986), Nelson (1991))
- $\lambda = 0, a = 0, \varphi_\eta = 1$ είναι το $SV(1)$ (Harvey and Shephard (1996))

Αρχικά μπορεί να θέσει κανείς περιορισμούς στις σχέσεις (3.7) έως και (3.11) ώστε η X_t να είναι στάσιμη. Επίσης η υπό συνθήκη διακύμανση θα πρέπει να είναι θετική με πιθανότητα 1. Κάτω από την υπόθεση της στασιμότητας προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
\gamma_{\kappa} &= Cov(X_t, X_{t-\kappa}) = E(X_t X_{t-\kappa}) - E(X_t)E(X_{t-\kappa}) = \\
&= Cov[(\delta h_t + u_t)(\delta h_{t-\kappa} + u_{t-\kappa})] - E(\delta h_t + u_t)E(\delta h_{t-\kappa} + u_{t-\kappa}) = \\
&= E(\delta h_t \delta h_{t-\kappa} + u_t \delta h_{t-\kappa} + \delta h_t u_{t-\kappa} + u_t u_{t-\kappa}) - \delta^2 E(h_t)E(h_{t-\kappa}) = \\
&= \delta^2 [E(h_t h_{t-\kappa}) - E(h_t)E(h_{t-\kappa})] + \delta E(h_t u_{t-\kappa}) = \\
&= \delta^2 Cov(h_t, h_{t-\kappa}) + \delta E(h_t u_{t-\kappa})
\end{aligned}$$

Τελικά:

$$\gamma_{\kappa} = \delta^2 Cov(h_t, h_{t-\kappa}) + \delta E(h_t u_{t-\kappa}) \quad (3.12)$$

Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι απαραίτητη προϋπόθεση για να ισχύει η (3.12) θα πρέπει η z_t και η_t να ακολουθεί κανονική κατανομή.

Επίσης αν $E(h_t u_{t-\kappa}) = 0$ όπως είναι στο *GARCH-M* (Engle, 1987) τότε:

$$\gamma_{\kappa} = \delta^2 Cov(h_t, h_{t-\kappa})$$

Δηλαδή η κ τάξης αυτοσυνδιακύμανση της X_t έχει το ίδιο πρόσημο με την αυτοσυνδιακύμανση της h_t ανεξαρτήτου της τιμής της δ . Αυτό εξηγεί και την μη αποτελεσματικότητα των *GARCH-M* στα χρηματοοικονομικά (Fiorentini and Sentana (1998)). Αν για παράδειγμα κάποιος ήθελε να κατασκευάσει ένα υπόδειγμα όπου το πρόσημο των αυτοσυσχετίσεων της απόδοσης κάποιου χρηματοοικονομικού προϊόντος έστω X_t να είναι διαφορετικό από το πρόσημο των αυτοσυσχετίσεων της υπό συνθήκη διασποράς h_t δεν είναι εφικτό. Κάτι τέτοιο είναι συχνό, αφού στα χρηματοοικονομικά δεδομένα παρατηρείται να υπάρχει volatility clustering. Οι αυτοσυσχετίσεις της υπό συνθήκη διασποράς h_t είναι θετικές. Όμως το ίδιο δεν ισχύει πάντα για τις αυτοσυσχετίσεις της X_t . Ειδικότερα όταν το κ είναι μικρό, τότε οι αυτοσυσχετίσεις είναι θετικές ενώ για κάποιες μεγάλη τιμές του κ οι αυτοσυσχετίσεις είναι αρνητικές (Poterba and Summers (1988)).

Όταν κάποιος ασχολείται με χρηματοοικονομικά δεδομένα, η εκτιμημένη τιμή του β είναι θετική, αφού στις παραπάνω σχέσεις εκφράζει το volatility clustering. Επίσης η εκτιμημένη

τιμή του ρ είναι αρνητικό εξαιτίας της ασύμμετρης επίδρασης (asymmetry effect) (Harvey & Shephard (1996)). Κάτω από αυτές τις υποθέσεις, για κάθε τιμή του κ , προκύπτει ότι:

$$E(h_t u_{t-\kappa}) < 0 \quad (3.13)$$

και

$$\text{Cov}(h_t, h_{t-\kappa}) > 0 \quad (3.14)$$

Βάσει των (3.12), (3.13) και (3.14) προκύπτει ότι:

$$\gamma_\kappa < 0, \text{ όταν } \delta \in \left(0, \frac{-E(h_t u_{t-\kappa})}{\text{Cov}(h_t, h_{t-\kappa})} \right)$$

και

$$\gamma_\kappa > 0, \text{ όταν } \delta \in \left(\frac{-E(h_t u_{t-\kappa})}{\text{Cov}(h_t, h_{t-\kappa})}, \infty \right)$$

όταν β είναι θετική ρ είναι αρνητικό.

3.6 Τρόποι σύγκρισης δύο υποδειγμάτων

Το επόμενο ερώτημα που τίθεται είναι η αξιολόγηση δύο ή περισσότερων υποδειγμάτων ως προς την αποτελεσματικότητα με την οποία περιγράφουν το φαινόμενο. Όπως για παράδειγμα αν κάποιος αναλυτής έχει να επιλέξει μεταξύ ενός SV και ενός GARCH υποδείγματος ή μεταξύ δύο υποδειγμάτων από την οικογένεια των GARCH. Απάντηση σε αυτά τα ερωτήματα δίνουν οι συγκρίσεις οι οποίες πραγματοποιούνται μεταξύ των υπό αξιολόγηση υποδειγμάτων με τη χρήση της likelihood ratio statistics μεθόδου ή της μεθόδου συντελεστών Bayes που περιγράφονται παρακάτω.

Η μέθοδος εισήχθη από τον Atkinson (1986). Βασικό χαρακτηριστικό είναι η:

$$LR_y = 2 \left[\log \hat{f}(y | M_1, \hat{\theta}_1) - \log \hat{f}(y | M_0, \hat{\theta}_0) \right] \quad (3.13)$$

όπου τα M_1 και M_0 στη σχέση αναφέρονται στα προς σύγκριση υποδείγματα: στο SV υπόδειγμα η πρώτη και στο GARCH η δεύτερη. Η ποσότητα $\hat{\theta}_1$ εκφράζει την εκτιμώμενη αναμενόμενη τιμή του διανύσματος των παραμέτρων του SV υποδείγματος ενώ η $\hat{\theta}_0$ την

εκτιμώμενη αναμενόμενη τιμή του διανύσματος των παραμέτρων από το GARCH υπόδειγμα. Στην περίπτωση που η τιμή της συνάρτησης LR είναι θετική, αυτό σημαίνει την υπεροχή του SV υποδείγματος έναντι του αντίστοιχου GARCH και αντιστρόφως.

Η άλλη μέθοδος σύγκρισης δύο υποδειγμάτων είναι εκείνη των συντελεστών του Bayes (*Bayes' factors method*) η οποία αναπτύχθηκε από τον Chib (1995). Η μέθοδος αυτή κάνει χρήση της συνάρτησης BF η οποία ορίζεται από τη σχέση:

$$BF_y = \left[\log \hat{f}(y|M_1, \hat{\theta}_1) + \log \hat{f}(\hat{\theta}_1|M_1) \right] - \log \hat{f}(\hat{\theta}_1|M_1, y) - \left[\log \hat{f}(y|M_0, \hat{\theta}_0) + \log \hat{f}(\hat{\theta}_0|M_0) \right] - \log \hat{f}(\hat{\theta}_0|M_0, y)$$

όπου τα $M_1, M_0, \hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_0$ εκφράζουν ότι και στη σχέση (3.13).

Στην περίπτωση που η τιμή της συνάρτησης BF είναι θετική, αυτό σημαίνει την υπεροχή του SV υποδείγματος έναντι του αντίστοιχου GARCH και αντιστρόφως.

3.7 Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκαν αρχικά δύο ευρέως γνωστές από τις εφαρμογές τους επεκτάσεις των GARCH υποδειγμάτων, το Generalized Quadratic ARCH και το EGARCH υπόδειγμα. Στη συνέχεια αποσαφηνίζεται η έννοια της στοχαστικής μεταβλητότητας η οποία έχει δύο διαφορετικές χρήσεις στη βιβλιογραφία. Μία από αυτές είναι οι τυχαίες διακυμάνσεις των τιμών της χρονοσειράς. Στα χρηματοοικονομικά η τιμή είναι συνήθως η απόδοση κάποιου προϊόντος. Υπό αυτή την έννοια, υπάρχουν δύο κατηγορίες τέτοιων μοντέλων. Η μία κατηγορία θεωρεί ότι η μεταβλητότητα της απόδοσης λειτουργεί με ένα εκ των προτέρων γνωστό-ντετερμινιστικό τρόπο και η άλλη στην οποία δεν υπάρχει κάποιος *a-priori* γνωστός τρόπος για αυτό και δεύτερη κατηγορία καλείται στοχαστική.

Η δεύτερη χρήση της έννοιας της στοχαστικής μεταβλητότητας, αναφέρεται σε μοντέλα στα οποία η διασπορά της απόδοσης υπόκειται σε τυχαία σοκ, έτσι ώστε η μεταβλητότητα να είναι κατά κάποιο 'κρυμμένη'. Δηλαδή η μεταβλητότητα της τρέχουσας περιόδου δεν είναι γνωστή με βεβαιότητα. Υπό αυτή την έννοια στην παρούσα εργασία, θα θεωρείται ένα SV υπόδειγμα. Δεδομένου ότι τα CIR και GARCH μοντέλα έχουν καταστήσει ότι η υπό συνθήκη μεταβλητότητα της τρέχουσας περιόδου είναι γνωστή, τότε αυτά τα μοντέλα δεν μπορούν να χαρακτηρισθούν σαν στοχαστικά.

Τα βασικά πλεονεκτήματα των SV υποδειγμάτων είναι δύο. Πρώτον, ένα μεγάλο μέρος

θεωρίας αποτίμησης περιουσιακών στοιχείων είναι χτισμένο σε μοντέλα συνεχούς χρόνου. Σε αυτή την κατηγορία τα SV μοντέλα τείνουν να ταιριάζουν περισσότερο. Δεύτερον, η αυξανόμενη χρήση μοντέλων που λάμβαναν πολλές τιμές του ίδιου μεγέθους κατά τη διάρκεια της ίδιας ημέρας με στόχο να ληφθεί υπ' όψιν η λεγόμενη πραγματική μεταβλητότητα (*realized volatility*), έχει αναδείξει τα SV υποδείγματα να υπερτερούν έναντι των GARCH.

Το μειονέκτημα των SV υποδειγμάτων είναι ότι η μεταβλητότητα δεν είναι μετρήσιμη σε σχέση με τις από το παρελθόν πληροφορίες. Δηλαδή, η εκτίμηση της τρέχουσας μεταβλητότητας πρέπει να φιλτράρεται από ένα θορυβώδες περιβάλλον και η εκτίμηση να αλλάζει, αφού θα είναι διαθέσιμες και άλλες παρατηρήσεις. Στη συνέχεια παρουσιάστηκε αναλυτικά η MCMC και η QML μέθοδος εκτίμησης του SV υποδείγματος. Τέλος παρουσιάστηκαν οι στατιστικές μέθοδοι με τις οποίες επιλέγεται το καταλληλότερο υπόδειγμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Μοντελοποίηση της μεταβλητότητας των αποδόσεων των μετοχών Ευρωπαϊκών τηλεπικοινωνιακών εταιριών

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, επιχειρείται να βρεθεί το καταλληλότερο υπόδειγμα για την μεταβλητότητα της απόδοσης μετοχών από τον κλάδο κινητής τηλεφωνίας. Αυτό θα γίνει με δύο διαφορετικούς τρόπους-μεθόδους: με τη χρήση αυτοπαλίνδρομων υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας υποδειγμάτων και με τη στοχαστική μεταβλητότητα, όπως παρουσιάστηκαν στο δεύτερο και τρίτο κεφάλαιο αντίστοιχα. Αρχικά, γίνεται σύντομη περιγραφή των λογαριθμικών αποδόσεων και στη συνέχεια τα βήματα που ακολουθούνται μέχρι την κατασκευή των υποδειγμάτων. Τέλος, γίνεται σύγκριση για το ποιο υπόδειγμα είναι καταλληλότερο στην ερμηνεία της μεταβλητότητας της χρονοσειράς.

4.2 Περιγραφή δεδομένων

Τα δεδομένα αφορούν ημερήσιες τιμές κλεισίματος των μετοχών ευρωπαϊκών τηλεπικοινωνιακών εταιριών. Αφορούν την περίοδο από 1/1/2008 μέχρι και 31/12/2010. Πρόκειται για τις εταιρίες: Deutsche Telekom (DT), Vodafone (VDF), France Telecom (FT), Portugal Telecom (PT), Austria Telecom (AT) και O2 Telecom (O2). Οι τιμές των μετοχών των παραπάνω εταιριών είναι από τα χρηματιστήρια των χωρών των μητρικών τους εταιριών, για παράδειγμα της Deutsche Telekom από το χρηματιστήριο της Φρανκφούρτης.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο πρώτο κεφάλαιο είναι σημαντικό πώς κάθε αναλυτής ορίζει την απόδοση. Η επικρατέστερη είναι η λογαριθμοκανονική απόδοση:

$$z_t = \log \frac{x_t}{x_{t-1}}$$

η οποία είναι προσέγγιση της:

$$z_t = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}}$$

όπου x_t η ημερήσια τιμή κλεισίματος της μετοχής την t -στή ημέρα.

Το βασικό πλεονέκτημα της χρήσης χρονοσειρών λογαριθμικών αποδόσεων είναι ότι τα αποτελέσματα είναι "καθαροί" αριθμοί απαλλαγμένοι από μονάδες μέτρησης. Ακόμα με τη χρήση λογαριθμικών αποδόσεων επιλύονται διάφορα προβλήματα, όπως το πρόβλημα της μη-στασιμότητας, αυτοσυσχέτισης και ετεροσκεδαστικότητας.

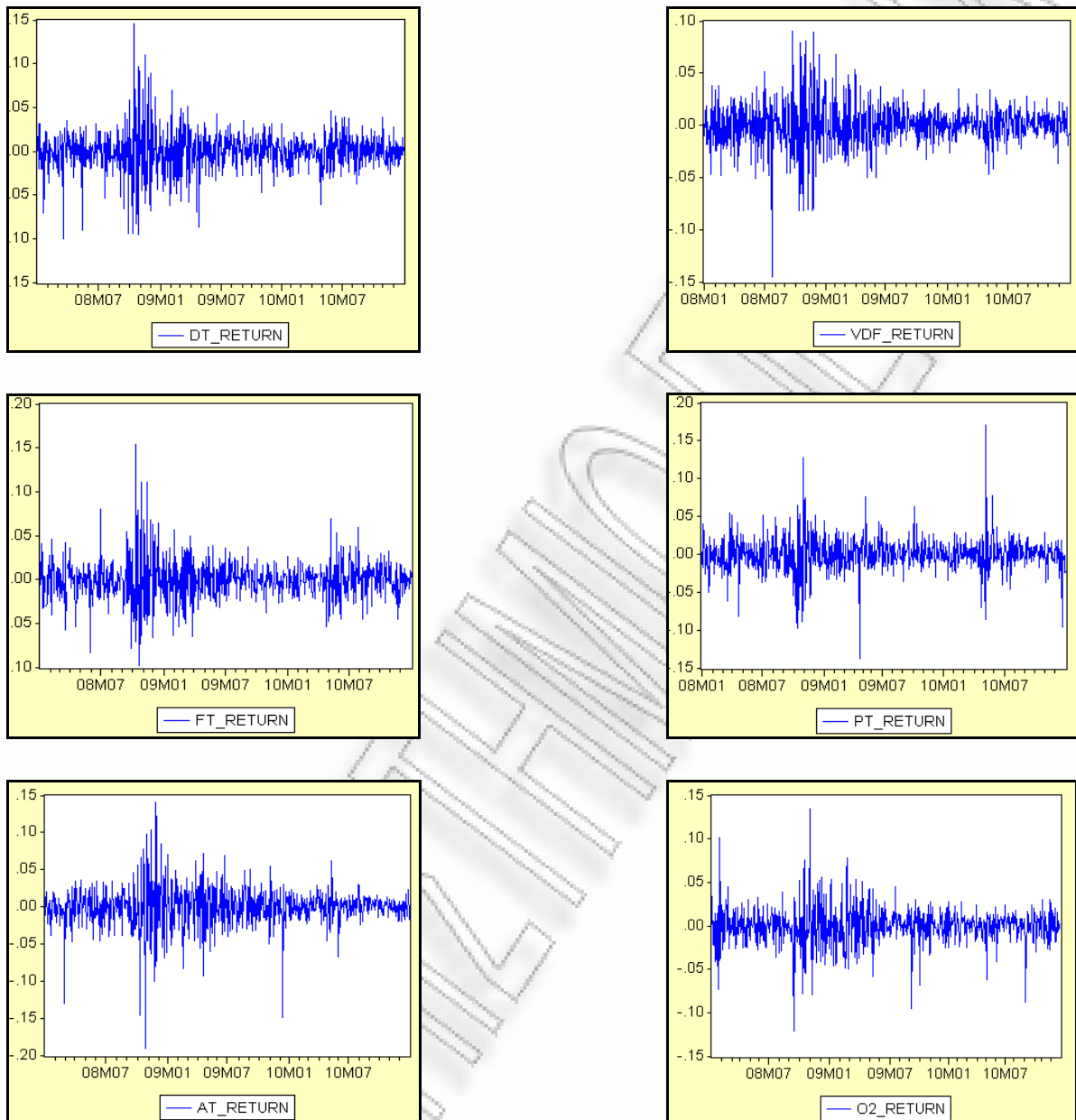
Στον Πίνακα 4.1 απεικονίζονται τα βασικά περιγραφικά μέτρα των λογαριθμικών αποδόσεων. Παρατηρείται ότι ο μέσος όρος, για όλες τις εταιρείες, βρίσκεται στη περιοχή του μηδενός. Οι αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις είναι σχετικά μεγάλες. Συνεπώς, οποιαδήποτε αναφορά στην έννοια της μέσης απόδοσης δεν έχει ούτε πραγματική αλλά ούτε και στατιστική σημασία.

Πίνακας 4.1

Περιγραφικά στατιστικά στοιχεία λογαριθμικών αποδόσεων

ΕΤΑΙΡΙΑ	# ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ	ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ	ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ	ΚΥΡΤΩΣΗ	ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑ
DT_RETURN	742	-0.001	0.024	8.017	0.036
VDF_RETURN	750	0.000	0.022	7.810	-0.347
FT_RETURN	747	-0.001	0.023	8.016	0.514
PT_RETURN	741	0.000	0.023	12.035	0.143
AT_RETURN	728	-0.001	0.027	10.540	-0.733
O2_RETURN	722	0.000	0.021	8.689	-0.064

Στο Διάγραμμα 4.1 παρουσιάζονται τα διαγράμματα των χρονοσειρών των λογαριθμικών αποδόσεων. Από τα διαγράμματα αυτά παρατηρεί κανείς ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά των αποδόσεων χρηματοοικονομικών δεδομένων, την ομαδοποιημένη μεταβλητότητα (*volatility clustering*). Με άλλα λόγια κατά την εξέλιξη της κάθε χρονοσειράς υπήρχαν αρκετές περιόδους έντονης μεταβλητότητας, η οποία μπορεί να είναι είτε θετική είτε αρνητική. Επίσης, γίνεται φανερό ότι οι χρονοσειρές μακροχρόνια εξελίσσονται γύρω από τη τιμή του μηδενός.

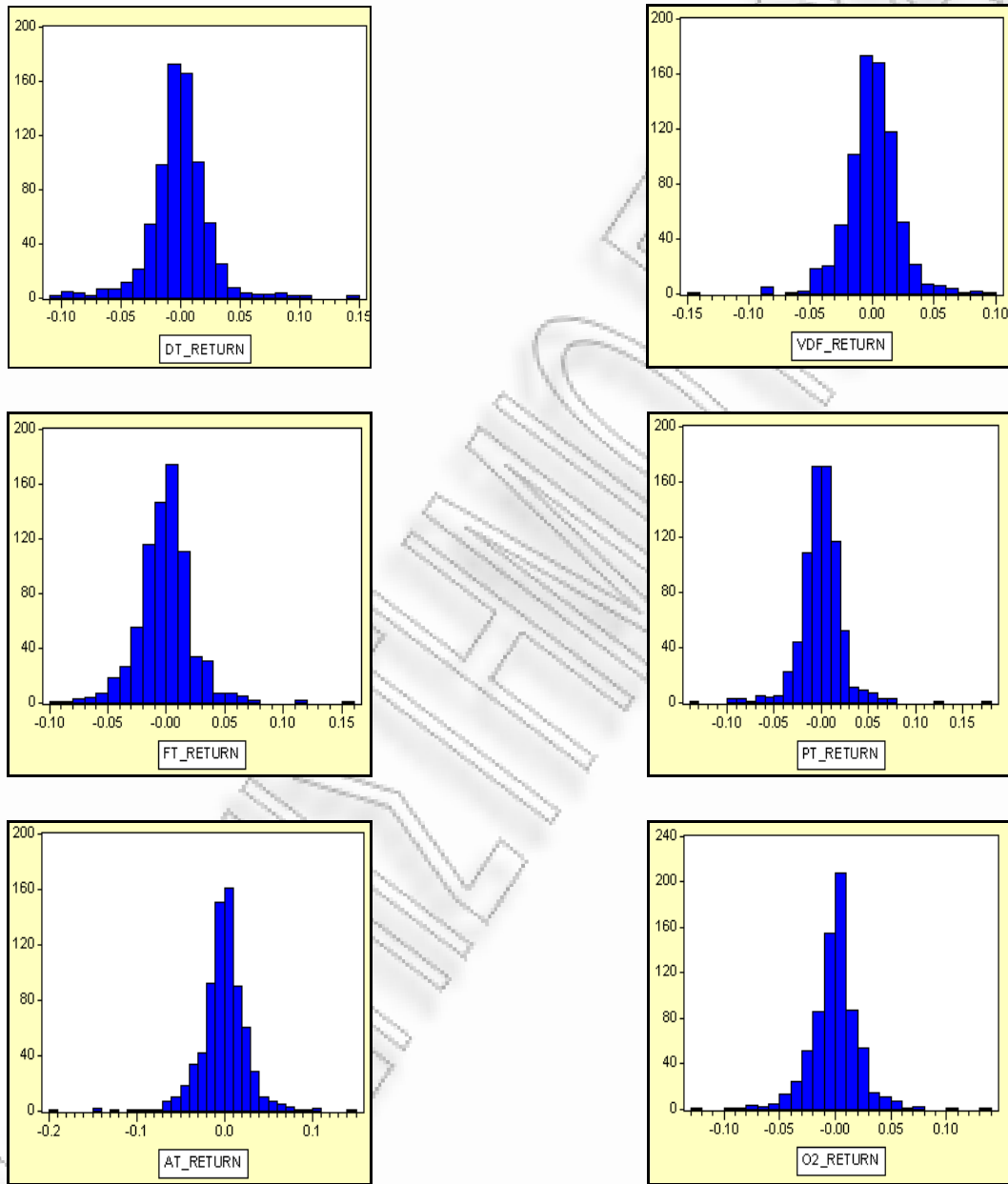


Διάγραμμα 4.1

Διαγράμματα χρονοσειρών λογαριθμικών αποδόσεων

Επιπρόσθετα, στο Διάγραμμα 4.2 παρουσιάζονται τα ιστογράμματα των λογαριθμικών αποδόσεων για κάθε μία από τις εταιρείες. Από τα διαγράμματα αυτά μπορεί να συμπεράνει κανείς ότι υπάρχει κύρτωση χωρίς να υπάρχουν ενδείξεις ασυμμετρίας. Επίσης η μεγαλύτερη

συχνότητα παρατηρείται να βρίσκεται στην περιοχή του μηδενός κάτι που αναμένεται, αφού ο μέσος όρος του δείγματος είναι το μηδέν.



Διάγραμμα 4.2

Ιστόγραμμα λογαριθμικών αποδόσεων

Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι υπάρχουν απομακρυσμένες παρατηρήσεις στις ουρές της κάθε κατανομής. Οι απομακρυσμένες παρατηρήσεις της αριστερής ουράς πρακτικά σημαίνει δυσμενή αποτελέσματα για τις εταιρείες.

4.3 Προσδιορισμός GARCH και SV υποδειγμάτων

Αφού ορισθεί η λογαριθμοκανονική απόδοση γίνεται έλεγχος στασιμότητας της εν λόγω σειράς. Αυτό γίνεται με τον Augmented Dickey Fuller έλεγχο μοναδιαίας ρίζας. (Ο απλός Dickey Fuller έλεγχος μοναδιαίας ρίζας είναι έγκυρος για μοντέλα AR(1). Αν το μοντέλο έχει συσχέτιση σε υστερήσεις ανώτερης τάξης, τότε η υπόθεση ότι τα κατάλοιπα είναι «λευκός θόρυβος» παραβιάζεται).

Στον Πίνακα 4.2 συμπεραίνει κανείς ότι και οι έξι σειρές των λογαριθμικών αποδόσεων είναι στάσιμες.

Πίνακας 4.2

Έλεγχος στασιμότητας

Null Hypothesis: DT_RETURN has a unit root Exogenous: Constant Lag Length: 1 (Automatic based on SIC, MAXLAG=19)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-23.85701	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.438785	
5% level	-2.865153	
10% level	-2.568749	

Null Hypothesis: VDF_RETURN has a unit root Exogenous: Constant Lag Length: 2 (Automatic based on SIC, MAXLAG=19)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-20.47441	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.438739	
5% level	-2.865132	
10% level	-2.568738	

Null Hypothesis: FT_RETURN has a unit root Exogenous: Constant Lag Length: 1 (Automatic based on SIC, MAXLAG=19)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-24.07897	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.438785	
5% level	-2.865153	
10% level	-2.568749	

Null Hypothesis: PT_RETURN has a unit root Exogenous: Constant Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=20)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-28.26862	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.438605	
5% level	-2.865073	
10% level	-2.568707	

Null Hypothesis: AT_RETURN has a unit root		
Exogenous: Constant		
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=19)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-29.74194	0.0000
Test critical values:	1% level	-3.438901
	5% level	-2.865204
	10% level	-2.568777

Null Hypothesis: O2_RETURN has a unit root		
Exogenous: Constant		
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=19)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-28.89464	0.0000
Test critical values:	1% level	-3.439192
	5% level	-2.865332
	10% level	-2.568846

Το επόμενο βήμα είναι ο προσδιορισμός ενός ARMA(p,q) ή αλλιώς ο προσδιορισμός του μέσου. Αυτό γίνεται βάσει της μεθοδολογίας Box & Jenkins (1970). Αρχικά εκτιμούνται ARMA(p,q) υποδείγματα για όλους τους συνδυασμούς με $p+q \leq 3$ χρησιμοποιώντας την μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας. Επόμενο βήμα είναι να γίνουν στατιστικοί έλεγχοι της μη παραβίασης των προϋποθέσεων που πρέπει να διέπουν τα σφάλματα, όπως έχουν περιγραφεί στο δεύτερο κεφάλαιο (π.χ. έλεγχος κανονικότητας Jarque-Bera, κορελόγραμμα καταλοίπων Q-statistic test). Από τα υποδείγματα που έχουν γίνει αποδεκτά, επιλέγεται το “καταλληλότερο” υπόδειγμα με βάση την ελάχιστη τιμή των πληροφοριακών κριτηρίων Akaike (AIC) ή Schwartz (BIC). Το κριτήριο Schwarz είναι εναλλακτικό του AIC, το οποίο επιβάλλει μεγαλύτερη ποινή για επιπρόσθετους συντελεστές. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται το BIC κριτήριο. Από την ανάλυση συμπεραίνει κανείς ότι για όλες τις σειρές λογαριθμικών αποδόσεων, το “καταλληλότερο” είναι το ARMA(1,1). Αξίζει να αναφερθεί ότι για την λογαριθμική απόδοση της AT το ARMA(1,1) είναι οριακά καλύτερο από το AR(1) (τιμή κριτηρίου Schwarz -4.363 και -4.364 αντίστοιχα). Όπως αναμενόταν η επιλογή του “καταλληλότερου” υποδείγματος είναι η ίδια είτε χρησιμοποιηθεί E-Views 5.0 είτε SPSS vs. 13. Επιπλέον, οι εκτιμήσεις των συντελεστών των υποδειγμάτων και από τα δύο προγράμματα είναι σχεδόν ίσες.

Το επόμενο βήμα είναι ο προσδιορισμός του GARCH(m,s) υποδείγματος για την υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητα. Στο σημείο αυτό εξετάζονται υποδείγματα ARMA(p,q)-GARCH(m, s) με $m+s \leq 3$ στα οποία το πρώτο μέρος του υποδείγματος (ARMA(p,q)) έχει προκύψει από την προηγούμενη ανάλυση. Στη συνέχεια για τα υποψήφια υποδείγματα γίνεται και πάλι έλεγχος των νέων καταλοίπων και επιλέγεται το “καταλληλότερο” υπόδειγμα βάσει των πληροφοριακών κριτηρίων. Και σε αυτό το βήμα χρησιμοποιείται το BIC κριτήριο. Να σημειωθεί ότι αν κάποιος αναλυτής χρησιμοποιήσει ένα από τα δύο κριτήρια δηλαδή το AIC ή το BIC κριτήριο για το “καταλληλότερο” μοντέλο του μέσου, για το ARMA(p, q) τότε θα

χρησιμοποιήσει το ίδιο κριτήριο και στο επόμενο βήμα για το “καταλληλότερο” μοντέλο του GARCH(m,s).

Στον Πίνακα 4.3 παρουσιάζεται το καταλληλότερο υπόδειγμα της οικογένειας GARCH για τη λογαριθμική απόδοση κάθε μετοχής.

Πίνακας 4.3

Επιλογή GARCH υποδειγμάτων με βάση το κριτήριο BIC

ΕΤΑΙΡΙΑ	ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΤΕΡΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ
DT	ARMA(1,1)-GARCH(1,1)
VDF	ARMA(1,1)-GARCH(1,1)
FT	ARMA(1,1)-GARCH(1,1)
PT	ARMA(1,1)-GARCH(1,1)
AT	ARMA(1,0)-GARCH(1,0)
O2	ARMA(1,1)-GARCH(1,1)

Αυτό που παρατηρεί κανείς είναι σχετικά με τη λογαριθμική απόδοση της AT. Ενώ το καλύτερο υπόδειγμα του μέσου είναι το ARMA(1,1) εντούτοις το καλύτερο είναι με μέσο ARMA(1,0). Αυτό προκύπτει επειδή κάποια από τα ARMA(1,1)-GARCH(m,s) $m+s \leq 3$ της AT, απορρίφθηκαν και τα υπόλοιπα από αυτά είχαν υψηλότερη τιμή του BIC κριτηρίου.

Σχετικά με τα υποδείγματα στοχαστικής αβεβαιότητας επιλέγεται η QML-Kalman Filter μέθοδος. Αυτό που παρατηρείται είναι ότι οι εκτιμήσεις κάποιων παραμέτρων σε κάποια από τα παραπάνω υποδείγματα (VDF, O2 και FT) δεν μπορούν να χαρακτηριστούν σαν ικανοποιητικές. Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί ότι αν χρησιμοποιηθεί η GMM μέθοδος για όλες τις παραπάνω λογαριθμικές αποδόσεις, τα αποτελέσματα είναι ακόμη χειρότερα όσο αφορά τις εκτιμήσεις των παραμέτρων των μοντέλων.

Το τελικό βήμα είναι ποιο υπόδειγμα μεταξύ του GARCH και του SV είναι το καλύτερο. Η απάντηση δίνεται με τη βοήθεια του LR test. Στον Πίνακα 4.4 παρουσιάζεται ποιο υπόδειγμα είναι το καταλληλότερο ανά περίπτωση.

Πίνακας 4.4

Επιλογή SV και GARCH υποδειγμάτων

με βάση το LR test

ΕΤΑΙΡΙΑ	ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΤΕΡΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ
DT	SV
VDF	GARCH
FT	GARCH
PT	SV
AT	SV
O2	GARCH

Τελικά, το καταλληλότερο υπόδειγμα για τη λογαριθμική απόδοση εξαρτάται ανά περίπτωση. Όταν πρόκειται για τις DT, PT και AT, το καταλληλότερο υπόδειγμα είναι το SV. Για τις υπόλοιπες είναι το GARCH. Αξίζει να αναφερθεί ότι τα SV υποδείγματα υπολογίστηκαν με την QML-Kalman Filter μέθοδο. Αν υπολογίζονταν με την MCMC μέθοδο, τότε αυτά ενδέχεται να ήταν τα καταλληλότερα υποδείγματα σε σχέση με τα GARCH και για τις έξι λογαριθμικές αποδόσεις.

4.4 Ανακεφαλαίωση

Σε αυτό το κεφάλαιο επιχειρήθηκε να βρεθεί το καταλληλότερο υπόδειγμα για την μεταβλητότητα της απόδοσης έξι μετοχών Ευρωπαϊκών τηλεπικοινωνιακών εταιριών. Αρχικά υπολογίστηκε η λογαριθμική απόδοση η οποία είναι στάσιμη. Στη συνέχεια προσδιορίστηκε το καλύτερο ARMA(p,q) για $p+q \leq 3$ υπόδειγμα για τη μοντελοποίηση του μέσου της σειράς, με την μεθοδολογία Box & Jenkins (1970). Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι το καταλληλότερο υπόδειγμα για τις λογαριθμικές αποδόσεις είναι το ARMA(1,1)-GARCH(1,1) εκτός από την AT που είναι το ARMA(1,0)-GARCH(1,0). Ακόμα και σε αυτή την

περίπτωση, το καταλληλότερο υπόδειγμα του μέσου των λογαριθμικών αποδόσεων είναι οριακά καλύτερο από το ARMA(1,1).

Στη συνέχεια προσδιορίστηκε το SV υπόδειγμα με την QML-Kalman Filter μέθοδο. Αυτό που παρατηρείται είναι ότι οι εκτιμήσεις κάποιων παραμέτρων σε κάποια υποδείγματα δεν μπορούν να χαρακτηριστούν σαν ικανοποιητικές. Αν αντί της QML-Kalman Filter μέθοδο χρησιμοποιηθεί η GMM μέθοδος, τα υποδείγματα δεν γίνονται αποδεκτά. Τέλος, έγινε σύγκριση για το ποιο υπόδειγμα είναι καταλληλότερο στην ερμηνεία της μεταβλητότητας της σειράς. Το καλύτερο υπόδειγμα για τη λογαριθμική απόδοση εξαρτάται ανά περίπτωση.

РАМЕТЪМО ТЕПАА

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

1. Μπλούτσος Κ. (2008) “Υπολογισμός του Value-at-Risk με τη χρήση Γενικευμένων Αυτοπαλίνδρομων υπό συνθήκη Ετεροσκεδαστικότητας Υποδειγμάτων” Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Στατιστικής Πανεπιστήμιο Πειραιά
2. Καραμάνης Δ. (2005) “Μελέτη Υποδειγμάτων ARCH και εφαρμογή στον πληθωρισμό της Ελλάδος” Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Ο.Δ.Ε. Πανεπιστήμιο Πειραιά
3. Δράκος Κ. Σημειώσεις από το μεταπτυχιακό μάθημα “Διοίκηση Κινδύνου”, ΠΜΣ Εφαρμοσμένη Στατιστική

Ξένα

1. Anderson T. W. (1994) “The Statistical Analysis of Time Series” Wiley Classics J. Wiley & Sons, N. York
2. Andersen T.G. and Sørensen B.E. (1996) “GMM estimation of a stochastic volatility model: A Monte Carlo study”, *Journal of Business & Economic Statistics* 14, 328-352
3. Andersen T.G. and Sørensen B.E. (1997) “GMM and QML Asymptotic standard deviations in stochastic volatility models: Comments on Ruiz (1994), *Journal of Econometrics* 76, 397-403
4. Atkinson A.C. (1986) “Monte Carlo tests of separate families of hypotheses”, Imperial College, London
5. Best Philip (1998) “Implementing Value at Risk” John Wiley & Sons, Wiley series in financial engineering
6. Bollerslev T. (1986) “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity” *Journal of Econometrics* 31, 307-327
7. Bollerslev T. (1988) “On the Correlation Structure for the Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic Process” *Journal of Time Series Analysis* 9, 121-131
8. Bollerslev T., Chou R.Y., and Kroner K. F. (1992) “ARCH Modelling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence” *Journal of Econometrics* 52, 5-59
9. Bollerslev T., Gibson M., Zhou H. (2004) “Dynamic Estimation of Volatility Risk Premia and Investor Risk Aversion from Option-Implied and Realized Volatilities” Working Paper, Duke, Federal Reserve Board
10. Bouleau N. and Lepingle D. (1994) “Numerical Methods for Stochastic Processes” John Wiley Sons
11. Brooks S. P. and Roberts G. O. (1998) “Assessing Convergence of Markov Chain Monte Carlo Algorithms.” *Statistics and Computing* 8:319–335
12. Commaeur J., Koopman, S. (2007) “An introduction to State Space Time Series Analysis” Oxford
13. Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. (1985b) “A Theory of the Term Structure of Interest Rates” *Econometrica* 53-385
14. Chou R., Engle R. F. and Kane A. (1992) “Measuring Risk Aversion from Excess Returns on a Stock Index” *Journal of Econometrics* 52, 201-224

15. Chib S. (1995) "Marginal Likelihood from Gibbs Output" *Journal of the American Statistical Association* 90, 1313-1321
16. Cowles M. K. and Carlin B. P. (1995) "Markov Chain Monte Carlo Diagnostics: A Comparative Review" *Journal of the American Statistical Association* 91:883–904
17. Demos A. (2002) "Moments and Dynamic Structure of a Time-Varying-Parameter Stochastic Volatility in Mean Model" *The Econometrics Journal* 5.2, 345-357
18. Ding Z., C., Granger W. J. and Engle R. F. (1993) "A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model" *Journal of Empirical Finance* 1, 83-106
19. Enders W. (1995) "Applied Econometric Time Series" John Wiley & Sons, New York
20. Engle R. F. (1982) "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation" *Econometrica* 50, 987-1007
21. Engle R. F., Lilien D. M. and Robins R. P. (1987) "Estimating Time-Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model" *Econometrica* 55, 391-407
22. Engle, R. F. and Ng V. K. (1993) "Measuring and Testing the Impact of News on Volatility" *Journal of Finance* 48, 1749-1778
23. Engle R. F. and Manganelli S. (2001) "Value At Risk Models In Finance" Working Paper No75, European Central Bank
24. Fernandez C. and Steel M. (1998) "On Bayesian Modelling of Fat Tails and Skewness", *Journal of the American Statistical Association*, 93, 359–371
25. Fiorentini G. and Sentana E. (1998) "Conditional Means of Time Series Processes and Time Series Processes for Conditional Means" *International Economic Review* 39, 1101-1118
26. French K. R., Schwert W. G. and Stambaugh R. F. (1987) "Expected Stock Returns and Volatility" *Journal of Financial Economics* 19, 3-29
27. Ghysels E, Harvey A.C and Renault E. (1996) "Stochastic Volatility" *Handbook of Statistics*, Volume 14, North Holland, Amsterdam, Holland
28. Gallant A.R., Hsieh D. and Tauchen G. (1997) "Estimation of Stochastic Volatility Models with Diagnostics" *Journal of Econometrics* 81, 159-192
29. Gelman A. and Rubin D. B. (1992) "Inference from iterative simulation using multiple sequences" *Statistical Science*, 7, 457-72
30. Glosten L. R., Jagannathan R. and Runkle D. E. (1993) "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks" *Journal of Finance* 48, 1779-1801
31. Gouriéroux C. and Jasiak J. (2001) "Financial Econometrics" Princeton
32. Gouriéroux C. (1997) "ARCH Models and Financial Applications" Springer
33. Gradshteyn I.S. and Ryzhik I.M. (1994) "Table of Integrals, Series, and Products" Jeffrey editor, Academic Press
34. Hamilton J. D. (1994) "Time Series Analysis" Princeton University Press
35. Harvey A. (1993) "Time Series Models" Harvester Wheatsheaf
36. Harvey A., Ruiz E. and Shephard N. (1994) "Multivariate Stochastic Variance Models" *Review of Economic Studies* 61, 247-264
37. Harvey A. and Shephard N. (1996) "Estimation of an Asymmetric Stochastic Volatility Model for asset Returns" *Journal of Business and Economic Statistics* 14, 429-434
38. He C. (2000) "Moments and the Autocorrelation Structure of the Exponential GARCH(p,q) Process" Working Paper 359, Stockholm School of Economics

39. He C. and Terasvirta T. (1999a) "Properties of Moments of a Family of GARCH Processes" *Journal of Econometrics* 92, 173-192
40. He C. and Terasvirta T. (1999b) "Fourth Moment Structure of the GARCH(p,q) Process" *Econometric Theory* 15, 824-846
41. He C., Terasvirta T. and Malmsten H. (1999) "Fourth Moment Structure of a Family of First-Order Exponential GARCH Models" Working Paper 345, Stockholm School of Economics
42. Hentschel L. (1995) "All in the Family. Nesting symmetric and asymmetric GARCH models" *Journal of Financial Economics* 39, 71-104
43. Hong E.P. (1991) "The Autocorrelation Structure for the GARCH-M Process" *Economics Letters* 37, 129-132
44. Institute Of Risk Management (IRM), Association of Insurance and Risk Managers (AIRMIC) and National Forum for Risk Management in the Public Sector (ALARM), "A Risk Management Standard", June 2007
45. Johannes M., and Polson N. G. (2007), 'MCMC Methods for Financial Econometrics', in Y. Aï-Sahalia and L. P. Hansen (eds.), *Handbook of Financial Econometrics*, New York: Elsevier
46. Jorion P. (2001) "Value at Risk, The New Benchmark for Managing Financial Risk" 2nd Edition McGraw-Hill
47. Koop G. (2003) "Bayesian Econometrics" John Wiley & Sons, England
48. Koopman S. J., Harvey A. C., Doornik J. A. and Shephard, N. (2006) *Stamp 6: Structural Time Series Analyser, Modeller and Predictor*, London: Timberlake Consultants
49. Karanasos M. "The Second Moment and Autocovariance Function of the Squared Errors of the GARCH Model" *Journal of Econometrics* 90, 63-76
50. Keung L. W. (2003) "Diagnostic Checks in Time Series", Chapman & Hall
51. Kupiec P. (1995) "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models" *Journal of Derivatives*, 73-84
52. Lambert P., and Laurent S. (2001a) "Modelling Financial Time Series Using GARCH Type Models and a Skewed Student Density," Discussion Paper 01-25, Institut de Statistique Louvain-la-Neuve
53. Merton R. C. (1980) "On Estimating the Expected Return on the Market: An Exploratory Investigation" *Journal of Financial Economics* 8, 323-361
54. Mills T. (1997) "The Econometric Modelling of Financial Time Series" Cambridge Univ. Press
55. Nelson D.B. (1991) "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach" *Econometrica* 59, 347-370
56. Poterba J.M. and Summers L.H. (1988) "Mean Reversion in Stock Prices: Evidence and Implications" *Journal of Financial Economics* 22, 27-59
57. Schwert G.W. (1989) "Why does Stock Market Volatility change over Time?" *Journal of Finance* 45, 1129-1155
58. Sentana E. (1995) "Quadratic ARCH Models", *Review of Economic Studies* 62, 639-661
59. Shephard N. (1996) "Statistical Aspects of ARCH and Stochastic Volatility in Time Series Models in Econometrics, Finance and other Fields" edit: Cox, D.R. D.V. Hinkley and O.E. Barndorff-Nielsen, Chapman and Hall
60. Shephard N. (2004) *Stochastic Volatility: Selected Readings*. Oxford University Press, Oxford, UK

61. Taylor S.J. (1995) "Modelling Financial Time Series" J.Wiley & Sons
62. Yang M. and Bewley R. (1995) "Moving Average Conditional Heteroskedastic Models" Economics Letters 49, 367-372
63. Zakoian J. M. (1994) "Threshold Heteroskedastic Models" Journal of Economic Dynamics and Control 18, 931-955

FAKULTAS TEKNOLOGI PERAK

РАМЕТЪМО ТЕПАА