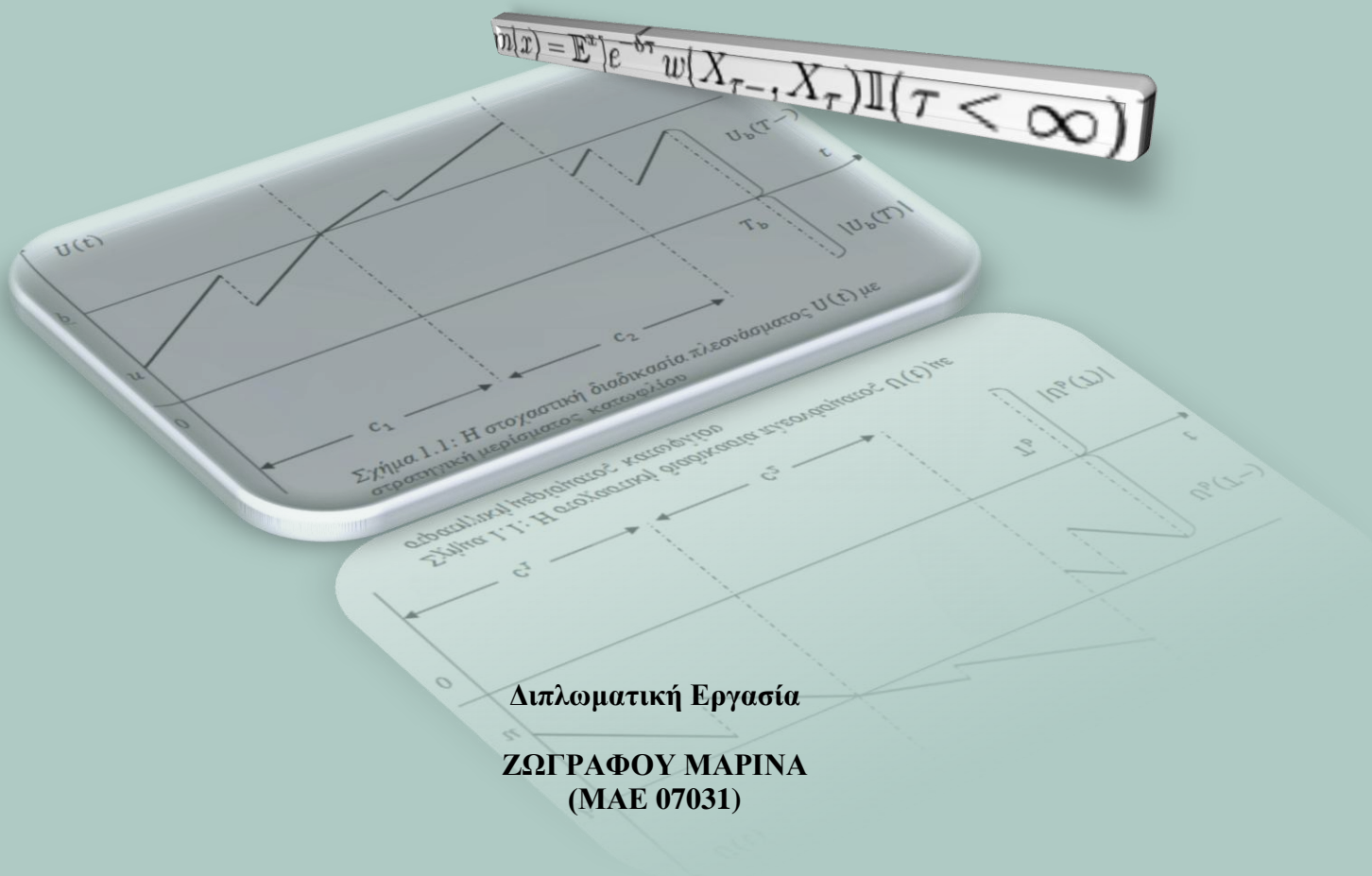




«Μελέτη της συνάρτησης των Gerber – Shiu με καταβολή
μερισμάτων κατοφλίου»



Διπλωματική Εργασία

ΖΩΓΡΑΦΟΥ ΜΑΡΙΝΑ
(ΜΑΕ 07031)

Τριμελής συμβουλευτική επιτροπή:

ΧΑΤΖΗΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΙΔΗΣ ΕΥΣΤΑΘΙΟΣ, ΑΝΑΠ/ΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ, ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ
ΠΑΝΟΠΟΥΛΟΥ ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ, ΛΕΚΤΟΡΑΣ
ΒΡΟΝΤΟΣ ΣΠΥΡΙΔΩΝ, ΛΕΚΤΟΡΑΣ

Περίληψη

Για την υγιή λειτουργία ενός ασφαλιστικού οργανισμού πρέπει να σχηματίζονται επαρκή αποθεματικά ώστε να είναι σε θέση να ανταπεξέλθει στις υποχρεώσεις του όσον αφορά επαγγελματικά και ασφαλιστικά ρίσκα. Στη θεωρία κινδύνου το βασικό πρόβλημα είναι ο προσδιορισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας, δηλαδή της πιθανότητας τα αποθεματικά να μην είναι επαρκή ώστε να καλυφθούν οι συνολικές αποζημιώσεις. Οι Gerber και Shiu κατάφεραν να μοντελοποιήσουν σε μία μόνο συνάρτηση, η οποία ονομάζεται προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, τις τυχαίες μεταβλητές του χρόνου χρεοκοπίας, του ελλείμματος ακριβώς μετά τη χρεοκοπία και του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία. Στην εργασία αυτή, μελετούμε και αποδεικνύουμε μια γενική λύση της μοντελοποίησης αυτής κάτω από τη στρατηγική μερίσματος καταφλίου. Σύμφωνα με τη στρατηγική αυτή δίνονται μερίσματα στους μετόχους μόνο στην περίπτωση που το πλεόνασμα υπερβεί ένα προκαθορισμένο όριο (κατώφλι) και τα μερίσματα δεν ξεπερνούν τις αξία των εισπρακτέων ασφαλίσεων.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου

1.1	Εισαγωγή	1
1.2.	Η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των κινδύνων.....	1
1.3.	Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων	2
1.4.	Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος	4
1.5.	Μέτρα χρεοκοπίας	5
1.6.	Το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου.....	6
1.6 1.	Η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber – Shiu.....	9
1.6.2.	Η ολοκληροδιαφορική εξίσωση για την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu	11
1.7.	Το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος.....	15
1.7.1.	Μελέτη της συνάρτησης $u(u)$	19

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Το Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος με την ύπαρξη στρατηγικής μερίσματος κατωφλίου

2.1	Περιγραφή του μοντέλου.....	24
2.2.	Η συνάρτηση των Gerber – Shiu με την ύπαρξη στρατηγικής μερίσματος κατωφλίου	25
2.2.1.	Ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις για την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής.....	26
2.2.2.	Μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση για την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $m_2(u; b)$	32
2.2.3.	Λύση μιας ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης.....	39

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Μέτρα χρεοκοπίας

3.1. Η πιθανότητα χρεοκοπίας	43
3.2. Ο χρόνος Χρεοκοπίας	47
3.3. Το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα μετά τη χρεοκοπία.	51

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Εφαρμογές	56
------------------------------------	----

Βιβλιογραφία	75
---------------------------	----

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Το κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου

1.1 Εισαγωγή

Για την υγιή λειτουργία ενός ασφαλιστικού οργανισμού πρέπει να σχηματίζονται επαρκή αποθεματικά ώστε να είναι σε θέση να ανταπεξέλθει στις υποχρεώσεις όσον αφορά επαγγελματικά και ασφαλιστικά ρίσκα. Τα αποθεματικά που στην ουσία είναι η διαφορά του ενεργητικού (απαιτήσεις) και του παθητικού (υποχρεώσεις) της ασφαλιστικής επιχείρησης, χαρακτηρίζονται με τον όρο πλεόνασμα. Στη θεωρία κινδύνου το βασικό πρόβλημα είναι ο προσδιορισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας, δηλαδή της πιθανότητας τα αποθεματικά να μην είναι επαρκή ώστε να καλυφθούν οι συνολικές αποζημιώσεις.

Η θεωρία Συλλογικών Κινδύνων ξεκίνησε στις αρχές του 20^{ου} αιώνα με τη περίφημη διδακτορική διατριβή του Σουηδού Filip Lundberg (1903). Βασιζόμενος σε αυτή, ο Harald Cramer (1930) ενσωμάτωσε τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών στη θεωρία κινδύνου. Το βασικό μοντέλο που προέκυψε ονομάζεται κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ή μοντέλο Cramer-Lundberg, με κύριο χαρακτηριστικό του, ο αριθμός των ζημιών σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων περιγράφεται από τη κατανομή Poisson. Μεταξύ αυτών βρέθηκαν και κάποιες εξισώσεις και φράγματα για τη πιθανότητα χρεοκοπίας. Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν και μεταγενέστερες μελέτες του ίδιου μοντέλου μέσω της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτηση ποινής που εισήγαγαν για πρώτη φορά οι Gerber- Shiu (1998).

Παρακάτω θα ορίσουμε κάποιες βασικές έννοιες της θεωρίας κινδύνου.

1.2 Η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των κινδύνων

Αρχικά, για να μοντελοποιήσουμε το πλεόνασμα ενός ασφαλιστικού οργανισμού πρέπει να προσδιορίσουμε τον αριθμό των κινδύνων, στους οποίους αυτός εκτίθεται.

Ορισμός 1.1. Ορίζεται $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ μια στοχαστική διαδικασία η οποία εκφράζει τον αριθμό των κινδύνων στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ και ονομάζεται απαριθμητήρια διαδικασία του αριθμού των κινδύνων, για την οποία ισχύουν τα παρακάτω,

1. $N(t) > 0$, με $N(0) = 0$
2. $N(t)$ είναι διακριτή ,
3. αν $s \leq t$ τότε $N(s) \leq N(t)$

Μία από τις γενικές κατηγορίες στοχαστικών διαδικασιών είναι η οικογένεια ανανεωτικών στοχαστικών διαδικασιών, ο ορισμός της οποίας βασίζεται στους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των ενδεχομένων που απαριθμεί η $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$. Έστω, $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ μια ακολουθία μη αρνητικών ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με συνάρτηση κατανομής $F_w(t)$, συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_w(t)$ μετασχηματισμό Laplace $\widehat{f_w}(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} f_w(t) dt$ και μέση τιμή $E(W) < \infty$. Όπου W_i , ο ενδιάμεσος χρόνος εμφάνισης του i ενδεχομένου.

1.3. Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων

Κάθε ασφαλιστική επιχείρηση έχει την υποχρέωση να καταβάλλει την αποζημίωση που δικαιούται ο ασφαλισμένος όταν επέλθει η ζημιά, την οποία καλύπτει το ασφαλιστήριο συμβόλαιό του. Είναι αναγκαίο λοιπόν να μοντελοποιήσουν το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων για να μπορούν να δουν και να κρίνουν την ενδεχόμενη εξέλιξη τους. Οι συνολικές αποζημιώσεις εξαρτώνται από το πλήθος των ζημιογόνων ενδεχομένων που εμφανίζονται σε κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα και το μέγεθος των ζημιών που προκαλούνται. Συμβολίζουμε με $S(t)$ τη στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων που καταβάλλονται ως το χρόνο t . Ορίζουμε $\{W_n, n \geq 1\}$ μία ακολουθία τ.μ. που εκφράζει τους ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των ζημιογόνων ενδεχομένων, T_n το χρόνο εμφάνισης του n -οστού ζημιογόνου ενδεχομένου. Ισχύει

$$T_n = \sum_{i=1}^n W_i$$

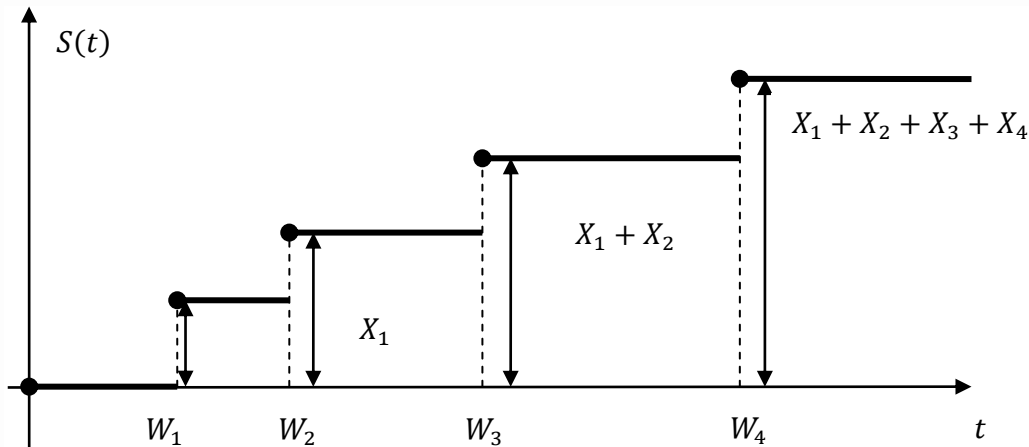
Επίσης ορίζουμε $N(t) = \sup\{n : T_n < t\}$ είναι η στοχαστική διαδικασία του πλήθους των ζημιογόνων ενδεχομένων που εμφανίζονται στο διάστημα $[0, t]$.

Ορισμός 1.2. Το μέγεθος των συνολικών αποζημιώσεων που καταβάλλονται έως το χρόνο t ορίζεται η στοχαστική διαδικασία

$$S(t) = X_1 + X_2 + \dots + X_{N(t)} \quad \text{ή} \quad S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & N(t) > 0 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases},$$

όπου $\{X_i\}_{i \geq 1}^{\infty}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με X_i τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το μέγεθος της i -όστης ζημιάς που προκαλείται από την επέλευση του n -οστού ζημιογόνου ενδεχομένου. Θεωρούμε ότι οι $\{W_n, n \geq 1\}$ και $\{X_n, n \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητες ακολουθίες οι οποίες αποτελούνται από ισόνομες, ανεξάρτητες και θετικά ορισμένες τυχαίες μεταβλητές.

Στο παρακάτω σχήμα (1.1) φαίνεται ότι οι συνολικές αποζημιώσεις $S(t)$ είναι μηδενικές μέχρι την επέλευση του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου. Στη συνέχεια η γραφική παράσταση εμφανίζει άλματα ύψους ίσου με το μέγεθος ατομικής ζημιάς, ενώ παραμένει σταθερή όταν δεν επέρχονται κίνδυνοι.



Σχήμα 1.1: Η στοχαστική διαδικασία αποζημιώσεων $S(t)$

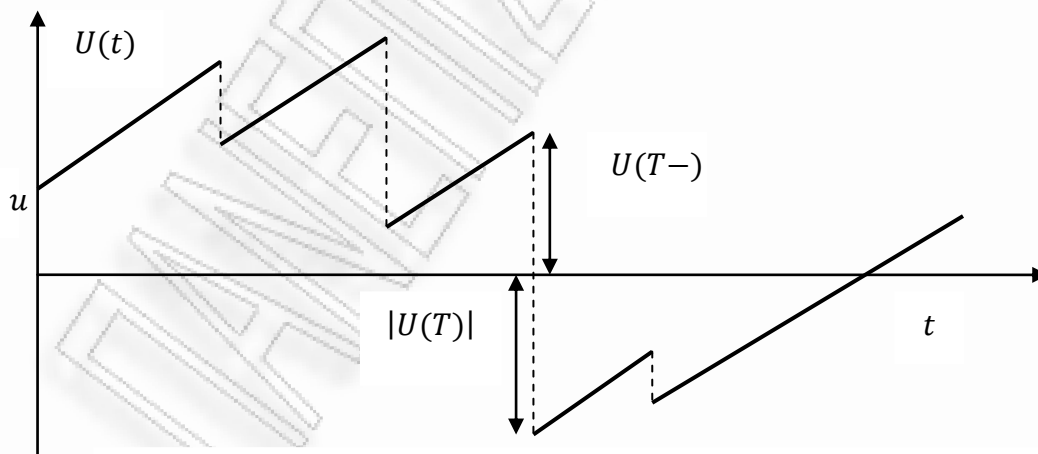
1.4. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος

Ορισμός 1.3. Ως διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t), t \geq 0\}$, ορίζεται η στοχαστική διαδικασία

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad (1.1)$$

όπου $U(0) = u (\geq 0)$ το αρχικό αποθεματικό, c ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίσεων ανά μονάδα χρόνου.

(βλ. σχήμα 1.2)



Σχήμα 1.2: Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$

Από το σχήμα 1.2 παρατηρούμε ότι η δειγματοσυνάρτηση $U(t)$ εμφανίζει άλματα προς τα κάτω κατά τις χρονικές στιγμές επέλευσης των ζημιογόνων γεγονότων W_i . Τα άλματα αυτά είναι του ίδιου μεγέθους με τα αντίστοιχα προς τα πάνω άλματα της διαδικασίας των συνολικών αποζημιώσεων $S(t)$ (σχήμα 1.1) με τη μόνη διαφορά ότι μεταξύ δύο διαδοχικών χρονικών στιγμών η δειγματοσυνάρτηση $S(t)$ έχει σταθερή τιμή ενώ η δειγματοσυνάρτηση $U(t)$ είναι ευθύγραμμο τμήμα με θετική κλίση c .

Σύμφωνα με τον ορισμό 1.3 η διαδικασία πλεονάσματος μπορεί να γίνει αρνητική κατά τις χρονικές στιγμές W_i , το ενδεχόμενο αυτό ονομάζεται Πιθανότητα Χρεοκοπίας, την οποία θα ορίσουμε παρακάτω καθώς επίσης και το χρόνο κατά τον οποίο εμφανίζεται χρεοκοπία.

Ορισμός 1.4. Κάθε ασφαλιστική επιχείρηση κατά την έναρξη των εργασιών της υποχρεούται από το νόμο να διαθέτει κάποιο αρχικό κεφάλαιο, το οποίο αποτελεί και το πλεόνασμα της εταιρείας κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$. Συμβολίζουμε με u το αρχικό κεφάλαιο και ισχύει $U(0) = u$.

1.5 Μέτρα χρεοκοπίας

Σε αυτή τη παράγραφο θα αναπτύξουμε κάποια βασικά μέτρα χρεοκοπίας της Θεωρίας Κινδύνου, όπως τον χρόνο χρεοκοπίας και την πιθανότητα χρεοκοπίας. Τα μέτρα χρεοκοπίας αυτά είναι θεμελιώδη και θα βοηθήσουν στην κατανόηση των μοντέλων κινδύνου (κλασσικό μοντέλο, κλασσικό μοντέλο υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος και κλασσικό μοντέλο υπό την ύπαρξη στρατηγικής μερίσματος κατοφλίου) που αναπτύσσονται παρακάτω.

Ο χρόνος χρεοκοπίας

Ορισμός 1.5. Για $t \geq 0$, ορίζουμε

$$T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\} \text{ με } \inf \emptyset = \infty,$$

να είναι ο χρόνος κατά τον οποίο για πρώτη φορά η διαδικασία πλεονάσματος γίνεται αρνητική.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας

Ορισμός 1.6. Μία ποσότητα που συνδέεται άμεσα με τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας η οποία για $u \geq 0$ ορίζεται ως

$$\Psi(u) := P(T < \infty | U(0) = u) = P(U(T) < 0 | U(0) = u). \quad (1.3)$$

Πρέπει να επισημανθεί ότι η μαθηματική χρεοκοπία δεν ταυτίζεται απαραίτητα με την πραγματική. Αυτό συμβαίνει διότι η διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$ δεν είναι ο μοναδικός πόρος μιας ασφαλιστικής επιχείρησης και η καταβολή μιας αποζημίωσης δεν είναι στιγμιαίο γεγονός, χρειάζεται κάποιο χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο έχει υπάρξει εισροή ασφαλιστρού. Από τον υπολογισμό της μαθηματικής πιθανότητας χρεοκοπίας προσδιορίζεται κατάλληλα το αρχικό απόθεμα u και το ασφάλιστρο c ώστε να αποφευχθεί το ενδεχόμενο η διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$ να γίνει αρνητική. Στην πράξη είναι σημαντικό μέτρο κινδύνου από το οποίο η ασφαλιστική επιχείρηση μπορεί να βγάλει χρήσιμα συμπεράσματα, όπως αν έχει ενδείξεις ότι οι υποχρεώσεις της θα αυξηθούν μπορεί να προχωρήσει σε αύξηση ασφαλιστρού, σύναψη δανείου, αύξηση μετοχικού κεφαλαίου.

1.6. Το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου

Το πιο γνωστό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου είναι το κλασικό μοντέλο. Το μοντέλο είχε μεγάλη απήχηση γιατί μας οδηγεί σε απλούστερους μαθηματικούς υπολογισμούς συγκριτικά με άλλα μοντέλα. Θα παρουσιάσουμε ορισμένα από τα κυριότερα αποτελέσματα του κλασικού μοντέλου της Θεωρίας Κινδύνου, τα οποία θα αποτελέσουν βάση για να κατανοήσουμε και να αναπτύξουμε το μοντέλο υπό τη στρατηγική μερίσματος κατωφλίου.

Στο κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κίνδυνου θεωρούμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των ζημιολόγων ενδεχομένων είναι εκθετικά κατανεμημένοι, δηλαδή οι τυχαίες μεταβλητές $\{W_n, n \geq 1\}$ ακολουθούν κοινή εκθετική κατανομή, $(Exp(\lambda))$ με παράμετρο λ ,

$$\Pr(W_1 \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0,$$

Η στοχαστική διαδικασία $N(t)$ στο κλασσικό μοντέλο είναι μία στοχαστική διαδικασία Poisson, δηλαδή η πιθανότητα να εμφανιστεί ένα ενδεχόμενο σε ένα διάστημα είναι ανάλογη του μήκους αυτού του διαστήματος. Επομένως

$$\Pr[N(t) = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0,$$

Θεωρούμε ότι οι τ.μ. X_1, X_2, \dots και $N(t)$ είναι ανεξάρτητες, ενώ οι τ.μ. $X_n, n = 1, 2, \dots$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και ισόνομες, με από κοινού συνάρτηση κατανομής,

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

όπου $f(x) = \Pr(X = x)$ και συνάρτηση δεξιάς ουράς

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \int_x^\infty f(x) dx, \quad (x) = \int_x^\infty f(x) dx.$$

Το αναμενόμενο μέγεθος ζημιάς (μέση τιμή) το συμβολίζουμε με μ

$$\mu = E(x) = \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty \bar{F}(x) dx,$$

$F_e(x)$ συμβολίζουμε τη συνάρτηση ισορροπίας της τ.μ. X

$$F_e(x) = 1 - \bar{F}_e(x) = \int_0^x \frac{\bar{F}(y)}{E(x)} dy = \int_0^x f_e(y) dy \quad x > 0$$

όπου

$$f_e(y) = \frac{\bar{F}(y)}{E(x)}$$

Στο κλασσικό μοντέλο θεωρούμε τη στοχαστική διαδικασία είσπραξης ασφαλιστρών $P(t)$ και ότι ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλιστρών είναι σταθερός και ίσος με c . Τα ασφάλιστρα εισπράττονται στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ και ισχύει $P(t) = ct$. Βασική προϋπόθεση είναι να ισχύει η συνθήκη $ct \geq E[S(t)]$, δηλαδή τα ασφάλιστρα που εισπράττουμε στο $[0, t]$ να

επαρκούν για να καλύψουμε τις αναμενόμενες συνολικές αποζημιώσεις. Αφού γνωρίζουμε ότι $N(t) \sim P(\lambda t)$ θα ισχύει $E[N(t)] = \lambda t$ και $E[S(t)] = E[N(t)]E[X] = \lambda tE[X]$.

Θέλουμε λοιπόν να ισχύει

$$ct \geq \lambda tE[X] \Rightarrow c \geq \lambda E[X].$$

Ορισμός 1.7. Ορίζουμε μία παράμετρο $\theta > 0$, η οποία ονομάζεται περιθώριο ασφαλείας τέτοια ώστε

$$c = (1 + \theta)\lambda E[X] \quad (1.4)$$

Ο συντελεστής προσαρμογής

Ορισμός 1.8. Στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ο συντελεστής προσαρμογής συμβολίζεται με R και ορίζεται ως η μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης

$$1 + (1 + \theta)E(x)r = M_x(r), \quad (1.5)$$

Όπου θ το περιθώριο ασφαλείας και $M_x(r)$ η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής X στο σημείο r , δηλαδή

$$M_x(r) = E(e^{rX}) = \int_0^{\infty} e^{rx} f(x) dx.$$

Βασική προϋπόθεση για να μπορεί να οριστεί ο συντελεστής προσαρμογής είναι ότι η τυχαία μεταβλητή X πρέπει να έχει ροπογεννήτρια.

Ανισότητα Lundberg

Η πιο γνωστή ανισότητα στο κλασσικό μοντέλο είναι η ανισότητα Lundberg. Η ανισότητα αυτή συνδέει την πιθανότητα χρεοκοπίας και το συντελεστή προσαρμογής και ταυτόχρονα δίνει άνω φράγματα για τη πιθανότητα χρεοκοπίας συναρτήσει του συντελεστή προσαρμογής και του αρχικού κεφαλαίου.

Θεώρημα 1.1

Όταν υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής R , ένα άνω φράγμα για τη πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό κεφάλαιο $u \geq 0$ είναι

$$\psi(u) \leq e^{-Ru} \quad (1.6)$$

Θα δώσουμε δυο ερμηνείες για την ανισότητα του Lundberg:

- για δεδομένο αρχικό κεφάλαιο u , όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής προσαρμογής, τόσο μικρότερη είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, ενώ
- για μία δεδομένη τιμή του συντελεστή προσαρμογής R , όσο μεγαλώνει το αρχικό κεφάλαιο, τόσο μικραίνει η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg

Ορισμός 1.9. Ορίζουμε ως θεμελιώδης εξίσωσης του Lundberg, την εξίσωση της μορφής

$$cs + \lambda \hat{f}(s) - (\lambda + \delta) = 0, \quad (1.7)$$

όπου $\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} f(y) dy$ ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $f(s)$. Αποδεικνύεται ότι η (1.7) για $\delta > 0$ έχει μία θετική ρίζα που τη συμβολίζουμε με $\rho = \rho(\delta)$.

Παρατήρηση 1.1. Επισημαίνουμε ότι οι θετικές ρίζες της παραπάνω εξίσωσης υπάρχουν για $\delta > 0$, ανεξάρτητα αν το περιθώριο ασφαλείας θ είναι θετικό ή όχι. Για $\delta = 0$,

- αν $\theta < 0$ τότε οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης είναι θετικές
- και αν $\theta > 0$ οι ρίζες είναι ίσες με το μηδέν (0).

1.6.1. Η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber – Shiu

Οι Gerber και Shiu το 1998, κατάφεραν να μοντελοποιήσουν τις τυχαίες μεταβλητές T , ο χρόνος χρεοκοπίας (δηλαδή η χρονική στιγμή ακριβώς κατά την οποία το πλεόνασμα παίρνει πρώτη φορά αρνητική τιμή), $|U(t)|$, το έλλειμμα ακριβώς μετά τη χρεοκοπία και

$U(T-)$, το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία, σε μία μόνο συνάρτηση, την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής. Μία συνάρτηση, μέσω της οποίας, μελετήθηκαν ταυτόχρονα, μέτρα κινδύνου που μέχρι τότε προσεγγίζονταν μεμονωμένα.

Ορισμός 1.10. Για $u \geq 0, \delta \geq 0$ η συνάρτηση των Gerber – Shiu ορίζεται ως

$$m(u) = E \{ e^{-\delta T} w\{U(T-), |U(T)|\} I(T < \infty) | U(0) = u \}, u \geq 0, \quad (1.8)$$

όπου δ η ένταση ανατοκισμού, $0 \leq w(x, y) < \infty$ μια δισδιάστατη συνάρτηση στο \mathbb{R}^2 και ονομάζεται συνάρτηση ποινής και $I(\cdot)$ η δείκτρια συνάρτηση, η οποία μας πληροφορεί για το γεγονός ότι έχει επέλθει χρεοκοπία. Η ποσότητα $e^{-\delta T}$ μπορεί να ερμηνευτεί ως προεξοφλητικός παράγοντας ή ως μετασχηματισμός Laplace.

Η συνάρτηση των Gerber – Shiu μπορεί να ερμηνευτεί ως η προεξοφλημένη ποινή που επιβάλλεται όταν επέλθει η χρεοκοπία. Από τον ορισμό της, προκύπτουν διάφορα μέτρα κινδύνου. Παρακάτω παρατίθενται κάποιες ειδικές περιπτώσεις.

1. Για $\delta = 0, w(x, y) = 1$ τότε η αναμενόμενη συνάρτηση ποινής ισούται με την πιθανότητα χρεοκοπίας, δηλαδή

$$m_\delta(u) = E \{ I(T < \infty) | U(0) = u \} = \Psi(u)$$

2. Για $\delta > 0, w(x, y) = 1$

προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας

$$m(u) = E \{ e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = u \}$$

3. Για $\delta > 0, w(x, y) = I(x \leq x_1)I(y \leq x_2)$,

Προκύπτει η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας:

$$F_\delta(x_1, x_2 | u) = E \{ e^{-\delta T} I(x \leq x_1) I(y \leq x_2) | U(0) = u \}$$

4. Για $\delta = 0$, $w(x, y) = I(x \leq x_1)I(y \leq x_2)$,

Προκύπτει η από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ. $U(T -)$ και $|U(T)|$, δηλαδή

$$F_0(x_1, x_2|u) = E\{I(x \leq x_1)I(y \leq x_2)|U(0) = u\}$$

5. Για $\delta > 0$, $w(x, y) = I(x = x_1)$,

Προκύπτει η προεξοφλημένη σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία, $U(T -)$,

$$h(x_1|u) = E\{e^{-\delta T} I(U(T -) \leq x_1) I(T < \infty) | U(0) = u\}.$$

6. Για $\delta > 0$, $w(x, y) = I(y = x_2)$,

Προκύπτει η προεξοφλημένη σ.π.π. του ελλείμματος την στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T)|$,

$$f(x_2|u) = E\{e^{-\delta T} I(|U(T)| = x_2) I(T < \infty) | U(0) = u\}.$$

7. Για $\delta > 0$, $w(x, y) = x_1^k (w(x, y) = x_2^k)$,

Προκύπτει η προεξοφλημένη ροπή τάξης k του ελλείμματος κατά την χρεοκοπία (του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία), δηλαδή:

$$E\{e^{-\delta T} |U(T)|^k I(T < \infty) | U(0) = u\} E\{e^{-\delta T} U(T -)^k I(T < \infty) | U(0) = u\}$$

1.6.2. Η ολοκληρωδιαφορική εξίσωση για την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu

Η συνάρτηση των Gerber και Shiu εφαρμόζεται εκτός από τα Αναλογιστικά μαθηματικά και στη θεωρία των Χρηματοοικονομικών μαθηματικών (π.χ. για την τιμολόγηση ενός Αμερικανικού put option) (για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. Gerber και Shiu (1999)). Οι Gerber και Shiu μελέτησαν την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου και απέδειξαν ότι η $m(u)$ ικανοποιεί

μία ολοκληροδιαφορική εξίσωση τύπου Voltera. Η λύση της συγκεκριμένης ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης γίνεται με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace, αποδεικνύοντας ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ικανοποιεί μία ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση. Η γενική λύση αυτής δόθηκε από τους Lin και Willmot (1999) σε όρους της ουράς μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Θεώρημα 1.2. Η συνάρτηση $m(u)$ των Gerber-Shiu ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$m'(u) = \frac{\lambda + \delta}{c} m(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u m(u-x) f(x) dx - \frac{\lambda}{c} z(u), \quad u \geq 0, \quad (1.9)$$

όπου $z(u) = \int_u^\infty w(u, x-u) f(x) dx$.

Για $\delta = 0$, $w(x, y) = 1$ η συνάρτηση $m(u)$ της (1.7) ανάγεται στην πιθανότητα χρεοκοπίας $\Psi(u)$ και επομένως παίρνουμε το παρακάτω.

Πόρισμα 1.1. Η πιθανότητα χρεοκοπία $\Psi(u)$ ικανοποιεί την ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$\Psi'(u) = \frac{\lambda}{c} \Psi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \Psi(u-x) f(x) dx - \frac{\lambda}{c} \bar{F}(u), \quad u \geq 0, \quad (1.10)$$

όπου $\bar{F}(u) = 1 - F(u) = \int_u^\infty f(x) dx$.

Παρατήρηση 1.2. Από το πόρισμα 1.1 έπεται ότι η $\Psi(u)$ είναι η δεξιά ουρά μία σύνθετης Γεωμετρικής κατανομής και συγκεκριμένα

$$\Psi(u) = \Pr(L > u),$$

όπου $L = L_1 + L_2 + \dots + L_M$,

όπου $M \sim G(\Psi(0))$, $\Psi(0) = \frac{\lambda}{c} E(x) = \frac{1}{1+\theta}$, από την (1.4) και οι τυχαίες μεταβλητές L_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την $f_e(x)$.

Για την λύση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης (1.9), θα δείξουμε αρχικά ότι η $m(u)$ ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση (defective renewal equation).

Θεώρημα 1.3

Η συνάρτηση $m(u)$ για $u \geq 0$ ικανοποιεί την παρακάτω ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση

$$m(u) = \frac{1}{1+\beta} \int_0^u m(u-x)g(x)dx + \frac{1}{1+\beta} H(u), u \geq 0 \quad (1.11)$$

με

$$\beta = \frac{(1+\theta)E(x)}{\int_0^\infty e^{-\rho y} \bar{F}(y)dy}, \quad \rho = \rho(\delta),$$

$g(x) = G'(x)$, όπου η συνάρτηση κατανομής $G(x) = 1 - \bar{G}(x)$ δίνεται από την

$$\bar{G}(x) = \frac{\bar{F}(x) - e^{\rho x} \int_x^\infty e^{-\rho y} f(y)dy}{\rho \int_0^\infty e^{-\rho y} \bar{F}(y)dy},$$

και

$$H(u) = \frac{e^{\rho u} \int_u^\infty e^{-\rho x} \int_x^\infty w(x, y-x)f(y)dy}{\int_0^\infty e^{-\rho y} \bar{F}(y)dy}.$$

Απόδειξη. Βλέπε Lin-Willmot (1999). ■

Για να βρούμε τη λύση της ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.11), ορίζουμε την παρακάτω συνάρτηση κατανομής $K(u) = 1 - \bar{K}(u)$,

$$K(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta}{1+\beta} \left(\frac{1}{1+\beta} \right)^n G^{*n}(u), u \geq 0, \quad (1.12)$$

όπου G^{*n} είναι η n-οστή συνέλιξη της συνάρτησης κατανομής $G(x)$. Τότε, προφανώς ισχύει ότι η συνάρτηση επιβίωσης δίνεται από την

$$\bar{K}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta}{1+\beta} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n \bar{G}^{*n}(u), u \geq 0, \quad (1.13)$$

όπου \bar{G}^{*n} είναι η n-οστή συνέλιξη της συνάρτησης επιβίωσης $\bar{G}(x)$.

Παρατήρηση 1.3. Παρατηρούμε ότι η $\bar{K}(u)$ είναι η δεξιά ουρά (δηλαδή είναι μια συνάρτηση επιβίωσης) μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Συγκεκριμένα είναι

$$\bar{K}(u) = Pr(L_1 + L_2 + \dots + L_M > u),$$

όπου η τυχαία μεταβλητή $M \sim G(p)$, $p = \frac{\beta}{1+\beta}$, δηλαδή είναι

$$Pr(M = n) = \frac{\beta}{1+\beta} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n, n = 1, 2, \dots,$$

και οι τυχαίες μεταβλητές L_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με την συνάρτηση κατανομής $G(x)$.

Η λύση οποιασδήποτε συνάρτησης που ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση της μορφής (1.11) του Θεωρήματος 1.3 μπορεί να εκφραστεί μέσω της $\bar{K}(u)$ όπως φαίνεται από το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 1.4. Η λύση της (1.11) δίνεται από την

$$m(u) = \frac{1}{\beta} \int_0^u H(u-x) dK(u) + \frac{1}{1+\beta} H(u),$$

ή

$$m(u) = -\frac{1}{\beta} \int_0^u \bar{K}(u-x) dH(u) - \frac{H(0)}{\beta} \bar{K}(u) + \frac{1}{\beta} H(u).$$

Αν η συνάρτηση $H(u)$ είναι διαφορίσιμη, τότε

$$m(u) = -\frac{1}{\beta} \int_0^u \bar{K}(u-x) H'(u) dx - \frac{H(0)}{\beta} \bar{K}(u) + \frac{1}{\beta} H(u), u \geq 0.$$

Απόδειξη. Βλέπε Theorem 2.1 των Lin-Willmot (1999)

■

Από το Θεώρημα 1.4 έπεται για τον υπολογισμό της συνάρτησης $m(u)$ των Gerber-Shiu, αρκεί να υπολογισθεί η δεξιά ουρά $\bar{K}(u)$ της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

1.7 Το κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος.

Μία πιο ρεαλιστική επέκταση του κλασσικού μοντέλου είναι η υπόθεση ύπαρξης μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος (Constant Dividend barrier strategy). Κάτω από αυτή την υπόθεση, θεωρούμε ότι υπάρχει ένα κατώφλι στο επίπεδο $b(> u)$ τέτοιο ώστε όταν η διαδικασία πλεονάσματος φτάνει στο κατώφλι b τα ασφάλιστρα c επιστρέφονται στους μετόχους με τη μορφή μερίσματος μέχρι την εμφάνιση της επόμενης ζημιάς. Έστω $U_b(t)$ με $U_b(0) = u$ να είναι η τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος κάτω από τη συγκεκριμένη στρατηγική (βλ. σχήμα 1.3), η οποία ορίζεται ως

$$dU_b(t) = \begin{cases} cdt - dS(t), & U_b(t) < b \\ -dS(t), & U_b(t) = b \end{cases}$$

Επιπλέον ορίζουμε

$$T_b = \inf\{t \geq 0 : U_b(t) < 0\}, u \leq b,$$

τον χρόνο χρεοκοπίας κάτω από την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος, $U_b(T_b -)$ το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και $|U_b(T_b)|$, το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία. Η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως

$$\Psi(u) = P(T_b < \infty), u \leq b,$$

και η συνάρτηση Gerber- Shiu κάτω από αυτή τη προσαρμογή ορίζεται παρακάτω.

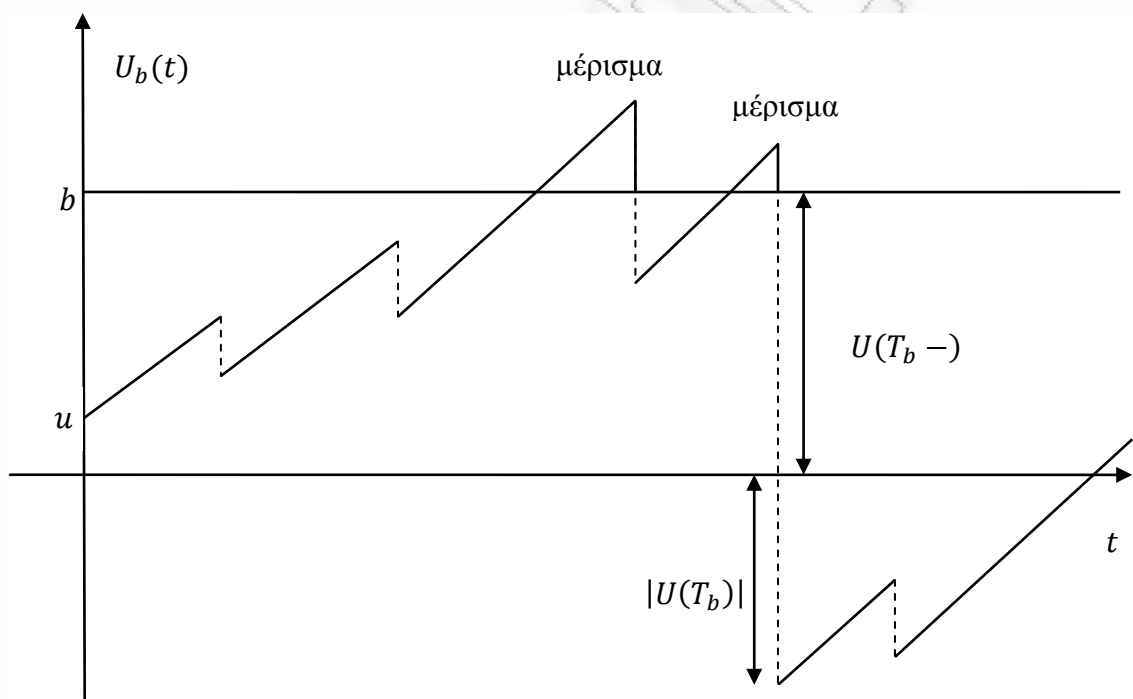
Ορισμός 1.11 Για $u \leq b$ και $\delta \geq 0$ η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ορίζεται ως

$$m_b(u) = E \{e^{-\delta T} w\{U(T_b -), |U_b(T_b)|\} I(T_b < \infty) | U_b(0) = u\}, u \leq b \quad (1.11\alpha)$$

όπου δ η ένταση ανατοκισμού, $0 \leq w(x, y) < \infty$ μία διδιάστατη συνάρτηση στο \mathbb{R}^2 .

Είναι φανερό από τον ορισμό της διαδικασίας πλεονάσματος $U_b(t)$ ότι πρόκειται για μία ειδική περίπτωση της διαδικασίας πλεονάσματος χωρίς μερίσματα, $U(t)$. Έτσι, για $b \rightarrow \infty$ έχουμε ότι $\lim_{b \rightarrow \infty} U_b(t) = U(t) \Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} m_b(u) = m(u)$.

Η στρατηγική σταθερού μερίσματος εισήχθη από τον De Finetti (1957) για το διωνυμικό μοντέλο κινδύνου.



Σχήμα 1.3 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $U_b(t)$ υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού ορίου μερίσματος

Στη συνέχεια θα δώσουμε τη γενική λύση της $m_b(u)$ που ικανοποιεί την ολοκληροδιαφορική εξίσωση της μορφής

$$m'_b(u) = -\frac{\lambda}{c} \int_0^u m_b(u-y) f(x) dx + \frac{\lambda+\delta}{c} m_b(u) - \frac{\lambda}{c} z(u), \quad 0 \leq u \leq b, \quad (1.12\alpha)$$

$$\text{με οριακή συνθήκη: } m'_b(b) = 0. \quad (1.13\alpha)$$

Προς τούτο θα χρειαστούμε αρχικά το παρακάτω.

Λήμμα 1.1. Έστω η διαφορίσιμη συνάρτηση $\varphi(u)$ ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$\varphi'(u) = a\varphi(u) + \beta \int_0^u \varphi(u-x)h(x)dx + \gamma w(u), \quad u \geq 0, \quad (1.14)$$

όπου a, β, γ είναι σταθερές ανεξάρτητες της μεταβλητής u , και h, w είναι γνωστές συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις φ, h και w έχουν πεπερασμένους μετασχηματισμούς Laplace. Τότε η γενική λύση της (1.14) δίνεται από την

$$\varphi(u) = \varphi(0)v(u) + \gamma \int_0^u v(u-y)w(x)dx, \quad u \geq 0, \quad (1.15)$$

όπου η συνάρτηση $v(u)$ ικανοποιεί την ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$v'(u) = av(u) + \beta \int_0^u v(u-x)f(x)dx, \quad u \geq 0, \quad (1.16)$$

που είναι η αντίστοιχη ομογενής της (1.14) με $v(0)=1$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $m(u)$ των Gerber-Shiu για το κλασσικό μοντέλο χωρίς την ύπαρξη μερισμάτων (βλ. σχέση 1.9) είναι της μορφής (1.14) του Λήμματος 1.1.

Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση $v(u)$ που ικανοποιεί την αντίστοιχη ομογενή της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης (1.9), δηλαδή για $v(u)$ θεωρούμε ότι

$$v'(u) = \frac{\lambda+\delta}{c}v(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u v(u-x)z(x)dx, \quad u \geq 0, \quad (1.17)$$

με $v(0)=1$.

Τότε από την (1.9) και με τη βοήθεια του Λήμματος 1.1, παίρνουμε το παρακάτω.

Πόρισμα 1.2. Η γενική λύση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης (1.9) δίνεται από την

$$m(u) = m(0)v(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u v(u-x)z(x)dx, \quad u \geq 0. \quad (1.18)$$

όπου η $v(u)$ ικανοποιεί την (1.17) με $v(0)=1$.

Επίσης παρατηρούμε ότι και η συνάρτηση $m_b(u)$ των Gerber – Shiu για το κλασσικό μοντέλο με την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος είναι της μορφής (1.14) (βλ. σχέση 1.12α) του Λήμματος 1.1. Επειδή το Λήμμα 1.1 ισχύει για κάθε $0 \leq u \leq b$. Άρα λοιπόν με τη βοήθεια του Λήμματος 1.1 παίρνουμε το παρακάτω.

Πόρισμα 1.3. Η γενική λύση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης (1.12α) δίνεται από την

$$m_b(u) = m_b(0)v(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u v(u-x)z(x)dx, u \geq 0. \quad (1.19)$$

όπου η $v(u)$ ικανοποιεί την (1.17) με $v(0)=1$.

Τέλος, με βάση τα παραπάνω δύο πορίσματα θα δώσουμε τη γενική λύση της $m_b(u)$ μέσω της $m(u)$.

Πρόταση 1.1. Η γενική λύση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης (1.12α) με οριακή συνθήκη την (1.13α) δίνεται από τη

$$m_b(u) = m(u) + k(b)v(u), 0 \leq u \leq b. \quad (1.20)$$

όπου η σταθερά $k(b)$ δίνεται από τη σχέση

$$k(b) = -\frac{m'(b)}{U'(b)}, \quad (1.21)$$

Απόδειξη

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1.19) και (1.18) παίρνουμε

$$m_b(u) - m(u) = [m_b(0) - m(0)]v(u), \quad 0 \leq u \leq b$$

ή ισοδύναμα,

$$m_b(u) = m(u) + k(b)v(u), \quad 0 \leq u \leq b. \quad (1.22)$$

όπου $k(b) = m_b(0) - m(0)$.

Από την (1.13α) έχουμε $m'_b(b) = 0$, οπότε παραγωγίζοντας την (1.22) και στη συνέχεια θέτοντας $u = b$, παίρνουμε

$$0 = m'(b) + k(b)v'(b)$$

Από την οποία προκύπτει ότι $k(b) = \frac{m'(b)}{v'(b)}$. Αντικαθιστώντας τώρα την τιμή $k(b)$ στην (1.22) παίρνουμε τη ζητούμενη σχέση (1.20). ■

1.7.1. Μελέτη της συνάρτησης $v(u)$

Η λύση της (1.17) σύμφωνα με τον Buhlmann (βλέπε παράγραφο 6.4.9) είναι η παρακάτω,

$$v(u) = \frac{1 - \Psi(u)}{1 - \Psi(0)} e^{\rho u}, \quad (1.23)$$

όπου $\rho = \rho(\delta)$ η θετική ρίζα της θεμελιώδης εξίσωσης του Lundberg (1.7) και η συνάρτηση Ψ είναι η λύση της εξίσωσης

$$\Psi'(u) = \frac{\lambda}{\hat{c}} \int_0^u [1 - \Psi(u-x)] f^*(x) dx - \frac{\lambda}{\hat{c}} [1 - \Psi(u)], \quad u \geq 0$$

με $\hat{c} = \frac{c}{\hat{f}(\rho)}$, ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλιστρών και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f^*(x)$ είναι

$$f^*(x) = \frac{e^{-\rho x} f(x)}{\hat{f}(\rho)}, \quad y \geq 0.$$

Η παραπάνω συνάρτηση συναντάται στην βιβλιογραφία ως ο μετασχηματισμός του Esscher της συνάρτησης $f(y)$.

Παρατήρηση 1.4. Από το πόρισμα 1.1 και την παρατήρηση 1.2, προκύπτει ότι η Ψ είναι η δεξιά ουρά μίας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής με παράμετρο της γεωμετρικής κατανομής την

$$\Psi(0) = \frac{\lambda}{\hat{c}} \int_0^\infty y f^*(x) dx,$$

και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του αντίστοιχου ύψους ατομικής ζημιάς την

$$\frac{\bar{F}^*(x)}{\int_0^\infty t f^*(t) dt'}$$

όπου $\bar{F}^*(x) = \int_y^\infty f^*(t) dt$.

Παρατήρηση 1.5. Από τη σχέση (1.17) και με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace μπορούμε να μελετήσουμε την $v(u)$ για γνωστές οικογένειες κατανομών της $f(x)$

$$v'(u) = \frac{\lambda + \delta}{c} v(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u v(u-x) h(x) dx, u \geq 0,$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace έχουμε,

$$\begin{aligned} s\hat{v}(s) - v(0) &= \frac{\lambda + \delta}{c} \hat{v}(s) - \frac{\lambda}{c} \hat{v}(s) \hat{f}(s) \\ \Rightarrow s\hat{v}(s) - 1 &= \frac{\lambda + \delta}{c} \hat{v}(s) - \frac{\lambda}{c} \hat{v}(s) \hat{f}(s) \\ \Rightarrow \left(s - \frac{\lambda + \delta}{c} + \frac{\lambda}{c} \hat{f}(s) \right) \hat{v}(s) &= 1 \\ \Rightarrow \hat{v}(s) &= \frac{1}{s - \frac{\lambda + \delta}{c} + \frac{\lambda}{c} \hat{f}(s)} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Παράδειγμα 1.1. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο β , ($X \sim \text{Exp}(\beta)$). Τότε η συνάρτηση κατανομής της είναι της μορφής

$$f(x) = \beta e^{-\beta x}$$

και ο μετασχηματισμός Laplace αυτής είναι

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx = \int_0^\infty e^{-sx} \beta e^{-\beta x} dx = \int_0^\infty \beta e^{-(s+\beta)x} dx = \frac{\beta}{s + \beta}$$

Άρα η σχέση (1.24) αντικαθιστώντας όπου $\hat{f}(s) = \frac{\beta}{s+\beta}$, γίνεται

$$\begin{aligned}
\hat{v}(s) &= \frac{1}{s - \frac{\lambda + \delta}{c} + \frac{\lambda}{c} \frac{\beta}{s + \beta}} \\
&= \frac{c(s + \beta)}{cs(s + \beta) - (\lambda + \delta)(s + \beta) + \lambda\beta} \\
&= \frac{c(s + \beta)}{cs^2 + \beta cs - (\lambda + \delta)s - \beta(\lambda + \delta) + \lambda\beta} \\
\Rightarrow \hat{v}(s) &= \frac{c(s + \beta)}{cs^2 + [\beta c - (\lambda + \delta)]s - \beta\delta}
\end{aligned}$$

Ο παρονομαστής είναι δευτέρου βαθμού και έχει δύο ρίζες. Αν πάρουμε τη θεμελιώδη εξίσωση του Lundberg, έχουμε

$$\begin{aligned}
cs + \lambda\tilde{f}(s) - (\lambda + \delta) &= 0 \\
\Rightarrow cs + \lambda \frac{\beta}{s + \beta} - (\lambda + \delta) &= 0 \\
\Rightarrow cs(s + \beta) + \lambda\beta - (\lambda + \delta)(s + \beta) &= 0 \\
\Rightarrow cs^2 + \beta cs + \lambda\beta - \beta(\lambda + \delta) - s(\lambda + \delta) &= 0 \\
\Rightarrow cs^2 + [\beta c - (\lambda + \delta)]s - \beta\delta &= 0.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής είναι η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg, επομένως έχει μία ρίζα την $\rho = \rho(\delta)$ και μία ρίζα την $-R$, όπου $R > 0$. Άρα

$$cs^2 + [\beta c - (\lambda + \delta)]s - \beta\delta = c(s - \rho)(s + R)$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\hat{v}(s) &= \frac{(s + \beta)}{(s - \rho)(s + R)} = \frac{\alpha_1}{(s - \rho)} + \frac{\alpha_2}{(s + R)} \\
&= \frac{\alpha_1(s + R) + \alpha_2(s - \rho)}{(s - \rho)(s + R)} \\
\Rightarrow (s + \beta) &= \alpha_1(s + R) + \alpha_2(s - \rho)
\end{aligned}$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2)s + \alpha_1 R - \alpha_2 \rho$$

Λύνοντας το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 R - \alpha_2 \rho = \beta, \end{cases}$$

βρίσκουμε τις τιμές των α_1 και α_2 .

Από τα παραπάνω συνεπάγεται

$$\hat{v}(s) = \frac{\alpha_1}{(s - \rho)} + \frac{\alpha_2}{(s + R)},$$

αν πάρουμε αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα

$$\int_0^{\infty} e^{-su} e^{au} du = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)u} du = \frac{1}{s-a}$$

έχουμε

$$v(u) = \alpha_1 e^{\rho u} + \alpha_2 e^{-Ru}$$

όπου α_1 και α_2 η λύση του παραπάνω συστήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος με την ύπαρξη στρατηγικής μερίσματος κατωφλίου

Οι στρατηγικές μερίσματος για τα μοντέλα ασφαλιστικού κινδύνου προτάθηκαν αρχικά από τον De Finetti (1957) ώστε να αντικατοπτριστεί πιο ρεαλιστικά το πλεόνασμα των εισροών στο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο. Ακολούθησε η μελέτη στρατηγικών με χρήση κατωφλίου για μοντέλο κινδύνου σύνθετης Poisson από τους Albrecher (2005), Albrecher and Kainhofer (2002), Bulmann (1970), Dickson and Waters (2004), Gerber (1972, 1973, 1979, 1981) Gerber and Shiu (1998, 2005a) Hojgaard (2002), Lin (2003), Paulsen and Gjessing (1997) and Segerdahl (1970). Παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον δύο από τις στρατηγικές μερίσματος συναρτήσεως πλεονάσματος. Η πρώτη είναι η στρατηγική σταθερού μερίσματος (Gerber, 1969) σύμφωνα με την οποία δε δίνεται μέρισμα όταν το πλεόνασμα είναι κάτω από ένα σταθερό κατώφλι αλλά στην περίπτωση που το ξεπεράσει αυτό το κατώφλι δίνεται ως μέρισμα όλο το πλεόνασμα. Η επόμενη είναι η στρατηγική μερίσματος κατωφλίου, σύμφωνα με την οποία δεν δίνεται μέρισμα όταν το πλεόνασμα είναι κάτω από ένα σταθερό κατώφλι, αλλά στην περίπτωση όμως που το πλεόνασμα ξεπεράσει αυτό το κατώφλι τα μερίσματα που δίνονται είναι λιγότερα από τα ασφάλιστρα που εισπράττει η ασφαλιστική επιχείρηση. Είναι προφανές ότι η τελευταία στρατηγική μπορεί να θεωρηθεί ειδική περίπτωση της πρώτης. Οι Gerber και Shiu (2005a) έδειξαν ότι η στρατηγική μερίσματος κατωφλίου είναι βέλτιστη όταν ο ρυθμός μερίσματος οριοθετείται εκ των άνω και οι ατομικές απαιτήσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή. Στην εργασία αυτή θα εξετάσουμε μία γενική λύση της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber και Shiu κάτω από τη στρατηγική μερίσματος κατωφλίου για να περιγράψουμε τα αποτελέσματα της, την πιθανότητα και το χρόνο χρεοκοπίας, το πλεόνασμα αμέσως πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας.

2.1 Περιγραφή του μοντέλου

Θεωρούμε ότι υπάρχει ένα κατώφλι $0 < b < \infty$ και $c_i > 0$ ο ετήσιος ρυθμός είσπραξης ασφαλιστρού για $i = 1, 2$. Ορίζουμε

$$c_i = (1 + \theta_i) \lambda E\{Y_i\},$$

όπου $\theta_i > 0$ το περιθώριο ασφαλείας. Ας υποθέσουμε ότι ο ρυθμός ετήσιου μερίσματος είναι a , $0 < a < c_i$. Όταν η διαδικασία πλεονάσματος είναι κάτω από το κατώφλι b , τότε δε δίνονται μερίσματα στους μετόχους της ασφαλιστικής εταιρείας, όταν όμως ξεπεράσει το κατώφλι b , τα μερίσματα που δίνονται στους δικαιούχους είναι a , τα οποία όμως δεν ξεπερνούν την αξία των ασφαλιστρών. Σε αυτή τη περίπτωση, το ασφάλιστρο μειώνεται κατά a , δηλαδή

$$c_2 = c_1 - a \geq 0.$$

Η διαδικασία πλεονάσματος $\{U_b(t) ; t \geq 0\}$ εκφράζεται ως

$$dU_b(t) = \begin{cases} c_1 dt - dS(t), & U_b(t) \leq b \\ c_2 dt - dS(t), & U_b(t) > b. \end{cases}$$

και ο χρόνος χρεοκοπίας ορίζεται ως

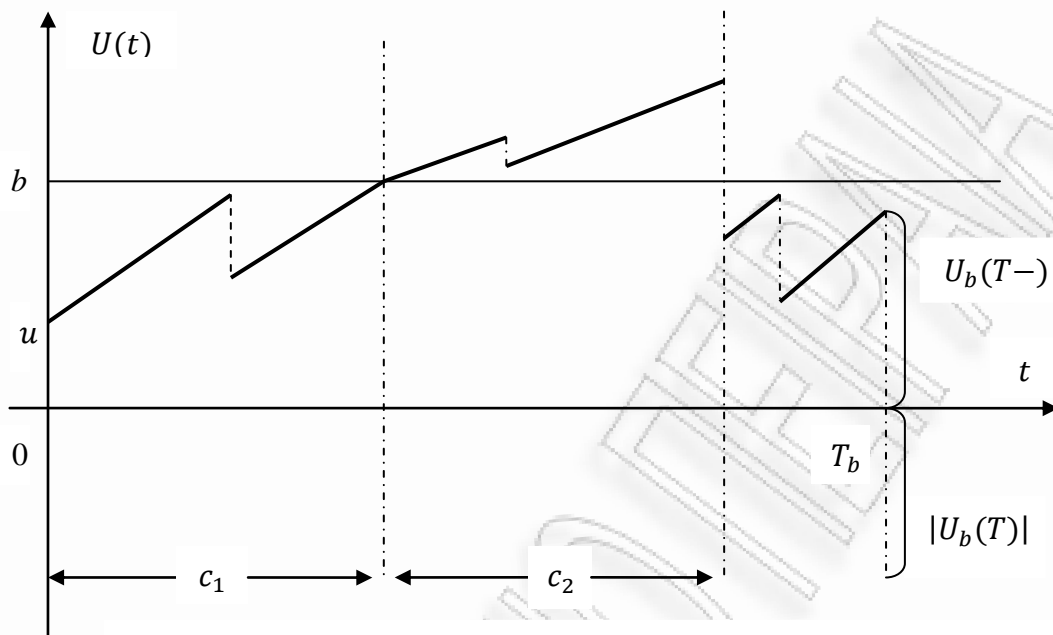
$$T_b = \inf\{t | U_b(t) < 0\}, \text{ όπου } T_b = \infty,$$

αν η χρεοκοπία δε επέρχεται σε άπειρο χρόνο.

Το μοντέλο κινδύνου με στρατηγική μερίσματος κατωφλίου συμπίπτει:

- Αν $b = \infty$, με το κλασσικό μοντέλο κινδύνου χωρίς περιορισμούς, καθώς το τελευταίο είναι μία απλουστευμένη μορφή του παρόντος μοντέλου κινδύνου.
- Αν $a = c_1$, με το μοντέλο Σύνθετης Poisson κάτω από τη στρατηγική σταθερού μερίσματος.

Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος με την ύπαρξη μερίσματος κατωφλίου εισήχθη από τους Lin και Pavlova (2006) οι οποίοι μελέτησαν τη συνάρτηση των Gerber – Shiu για το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας κάτω από τη στρατηγική μερίσματος κατωφλίου, ενώ οι Albrecher και Hartinger (2007) μελέτησαν το ίδιο μέτρο κινδύνου για εκθετικά μεγέθη ζημιών κάτω από την ύπαρξη πολλαπλών μερισμάτων (N-επιπέδων).



Σχήμα 2.1: Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$ με στρατηγική μερίσματος κατωφλίου

2.2. Η συνάρτηση των Gerber – Shiu με την ύπαρξη στρατηγικής μερίσματος κατωφλίου.

Η ελαττωματική ανανεωτική συνάρτηση των Gerber – Shiu έχει την παρακάτω μορφή:

$$m(u; b) = E\{e^{-\delta t} w(U_b(T_b -), |U_b(T_b)|) I(T < \infty) | U_b(0) = u\},$$

όπου $\delta \geq 0$ η ένταση ανατοκισμού, $0 < w(x_1, x_2) < \infty$, μία δισδιάστατη συνάρτηση στο \mathbb{R}^2 που ονομάζεται συνάρτηση ποινής, $U_b(T_b -)$ το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και $|U_b(T_b)|$, το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία και $I(\cdot)$ η δείκτρια συνάρτηση.

Για $i = 1$ και 2 ορίζουμε ρ_i τη θετική ρίζα της θεμελιώδης εξίσωσης του Lundberg η οποία έχει τη μορφή

$$c_i s + \lambda \hat{f}(s) - (\lambda + \delta) = 0.$$

Στη συνέχεια θα εισαχθεί η έννοια του τελεστή T_r

Ορισμός 2.1: Έστω $f(x)$ μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε για $\text{Re}(r) \geq 0$ και $x \geq 0$ ορίζουμε τον τελεστή $T_r f(x)$ να δίνεται από τη σχέση

$$T_r f(x) = \int_x^\infty e^{-r(y-x)} f(y) dy = \int_x^\infty e^{-ry} f(y+x) dy,$$

Παρακάτω παρουσιάζονται κάποιες βασικές ιδιότητες των τελεστών

- $T_r T_s = T_s T_r$
- $T_r f(0) = \int_0^\infty e^{-ry} f(y) dy = \hat{f}(r)$
- $T_{r_1} T_{r_2} f(x) = T_{r_2} T_{r_1} f(x) = \frac{T_{r_1} f(x) - T_{r_2} f(x)}{r_2 - r_1}, \quad r_1 \neq r_2 \in \mathbb{C}$
- $T_r \hat{f}(s) = \frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(r)}{r - s}, \quad r \neq s \in \mathbb{C}$
- $T_r \hat{f}(s) = (T_r f)(s) = T_s T_r f(0)$
- $s \hat{f}(s) - r \hat{f}(r) = (s - r) [-s T_r \hat{f}(s) - \hat{f}(r)]$
- $T_0 T_r f(x) = \int_x^\infty T_r f(u) du = \frac{\bar{F}(x) - T_r f(x)}{r} = T_r \bar{F}(x)$
- $\int_0^u T_r f(x+y) dx = T_r \bar{F}(y) - T_r \bar{F}(y+u)$

2.2.1 Ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις για την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής

Σε αυτό το σημείο, θα δώσουμε δύο ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις για την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, μία για το αρχικό πλεόνασμα u κάτω από το κατώφλι επιπέδου b και η άλλη για το πλεόνασμα πάνω από αυτό. Όπως θα δούμε παρακάτω η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής με πλεόνασμα κάτω από το κατώφλι εξαρτάται από την άλλη με το πλεόνασμα πάνω από το κατώφλι, η αντίθετη σχέση δεν ισχύει. Η συνάρτηση ποινής συμπεριφέρεται διαφορετικά αν το πλεόνασμα είναι πάνω ή κάτω από το κατώφλι επιπέδου b και η μορφή της είναι η παρακάτω

$$m(u; b) = \begin{cases} m_1(u; b), & 0 \leq u \leq b \\ m_2(u; b), & u > b. \end{cases} \quad (2.1)$$

Θεώρημα 2.1.

Η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $m(u; b)$ ικανοποιεί τις ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις της παρακάτω μορφής

$$m'(u; b) = \begin{cases} m'_1(u; b), & 0 \leq u \leq b \\ m'_2(u; b), & u > b \end{cases} \quad (2.2)$$

όπου

$$m'_1(u; b) = \frac{\lambda + \delta}{c_1} m_1(u; b) - \frac{\lambda}{c_1} \int_0^u m_1(u - x; b) f(x) dx - \frac{\lambda}{c_1} z(u), \text{ και}$$

$$m'_2(u; b) = \frac{\lambda + \delta}{c_2} m_2(u; b) - \frac{\lambda}{c_2} \left[\int_0^{u-b} m_2(u - x; b) f(x) dx + \int_{u-b}^u m_1(u - x; b) f(x) dx \right] - \frac{\lambda}{c_2} z(u),$$

έχοντας ορίσει όπου $z(u) = \int_u^\infty w(u, x - u) f(x) dx$

Απόδειξη

Αν εξετάσουμε το χρόνο του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου όταν $0 \leq u \leq b$, υπάρχουν δύο περιπτώσεις, η μία ότι το πρώτο ζημιογόνο ενδεχόμενο εμφανίζεται πριν το πλεόνασμα φθάσει το κατώφλι b που έχουμε ορίσει και η δεύτερη ότι επέρχεται αφού το πλεόνασμα ξεπεράσει το κατώφλι. Αν εξετάσουμε το μέγεθος του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου υπάρχουν δύο πιθανότητες, ή μετά από αυτό η διαδικασία θα ξεκινήσει από την αρχή με νέο πλεόνασμα ή θα επέλθει χρεοκοπία στην ασφαλιστική επιχείρηση. Εφαρμόζοντας τα παραπάνω, τη στιγμή του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου η διαδικασία πλεονάσματος είναι της μορφής

$$U(t) = u + c_1 t - x$$

- αν $0 \leq x \leq u + c_1 t$ τότε δεν εμφανίζεται χρεοκοπία
- αν όμως $x > u + c_1 t$ τότε επέρχεται χρεοκοπία και η δείκτρια $I(T < \infty) = 1$.

Άρα το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία είναι $U_b(T_b^-) = u + c_1 t$, και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι $|U_b(T_b)| = x - u - c_2 t$

Είναι γνωστό ότι η προεξοφλημένη συνάρτηση ποιής των Gerber-Shiu είναι

$$m(u; b) = E\{e^{-\delta t} w(U_b(T_b -), |U_b(T_b)|) I(T < \infty) | U_b(0) = u\},$$

αφού $0 < u + c_1 t < b \Rightarrow 0 < t < \frac{b-u}{c_1}$ και

$$m(u; b) = m_1(u; b)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{b-u}{c_1}} e^{-\delta t} \left[\int_0^{u+c_1 t} m(u + c_1 t - x; b) f(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{u+c_1 t}^{\infty} w(u + c_1 t, x - u - c_1 t) f(x) dx \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &\quad + \int_{u+c_1 t}^{\infty} e^{-\delta t} \left[\int_0^{b+c_2(t-\frac{b-u}{c_1})} m\left(b + c_2\left(t - \frac{b-u}{c_1}\right) - x; b\right) f(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{b+c_2(t-\frac{b-u}{c_1})}^{\infty} w\left(b + c_2\left(t - \frac{b-u}{c_1}\right), x - b - c_2\left(t - \frac{b-u}{c_1}\right)\right) f(x) dx \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \lambda \int_0^{\frac{b-u}{c_1}} e^{-(\lambda+\delta)t} \gamma(u + c_1 t; b) dt \\ &\quad + \lambda \int_{\frac{b-u}{c_1}}^{\infty} e^{-(\lambda+\delta)t} \gamma\left(b + c_2\left(t - \frac{b-u}{c_1}\right); b\right) dt \end{aligned} \quad (2.3)$$

θέσαμε $\gamma(t; b) = \int_0^t m(t - x; b) f(x) dx + z(t)$.

Στη συνέχεια θέτοντας

$$s_1 = u + c_1 t ,$$

παραγωγίζοντας έχουμε

$$dt = \frac{ds_1}{c_1},$$

και αφού αλλάξουμε τα όρια του ολοκληρώματος έχουμε το 1^ο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
& \lambda \int_0^{\frac{b-u}{c_1}} e^{-(\lambda+\delta)t} \gamma(u + c_1 t; b) dt \\
&= \lambda \int_u^b e^{-(\lambda+\delta)\frac{s_1-u}{c_1}} \gamma(s_1; b) \frac{ds_1}{c_1} \\
&= \frac{\lambda}{c_1} e^{(\lambda+\delta)\frac{u}{c_1}} \int_u^b e^{-(\lambda+\delta)\frac{s_1}{c_1}} \gamma(s_1; b) ds_1.
\end{aligned}$$

στο 2^ο ολοκλήρωμα θέτουμε

$$s_2 = b + c_2 \left(t - \frac{b-u}{c_1} \right)$$

παραγωγίζοντας έχουμε

$$dt = \frac{ds_2}{c_2}$$

και αλλάζοντας τα όρια του ολοκληρώματος έχουμε

$$\begin{aligned}
& \lambda \int_{\frac{b-u}{c_1}}^{\infty} e^{-(\lambda+\delta)t} \gamma \left(b + c_2 \left(t - \frac{b-u}{c_1} \right); b \right) dt \\
&= \lambda \int_b^{\infty} e^{-(\lambda+\delta) \left(\frac{s_2}{c_2} - \frac{\frac{(c_1-c_2)b}{c_1} - \frac{u}{c_1}}{c_2} \right)} \gamma(s_2; b) \frac{ds_2}{c_2} \\
&= \frac{\lambda}{c_2} e^{(\lambda+\delta)\frac{u}{c_1}} \int_b^{\infty} e^{-(\lambda+\delta)\frac{\left[s_2 - \frac{(c_1-c_2)b}{c_1} \right]}{c_2}} \gamma(s_2; b) ds_2.
\end{aligned}$$

Άρα αντικαθιστώντας τα δύο ολοκληρώματα στην (2.3) παίρνει τη μορφή

$$m(u; b) = m_1(u; b)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda}{c_1} e^{(\lambda+\delta)\frac{u}{c_1}} \int_u^b e^{-(\lambda+\delta)\frac{t}{c_1}} \gamma(t; b) dt \\
&+ \frac{\lambda}{c_2} e^{(\lambda+\delta)\frac{u}{c_1}} \int_b^{\infty} e^{-(\lambda+\delta)\frac{\left[t - \frac{(c_1-c_2)b}{c_1} \right]}{c_2}} \gamma(t; b) dt, \quad \text{για } 0 \leq u \leq b
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω ως προς u έχουμε

$$\begin{aligned} m_1'(u; b) &= \frac{\lambda}{c_1} \frac{\lambda + \delta}{c_1} e^{(\lambda + \delta) \frac{u}{c_1}} \int_u^b e^{-(\lambda + \delta) \frac{t}{c_1}} \gamma(t; b) dt - \frac{\lambda}{c_1} \gamma(u; b) \\ &\quad + \frac{\lambda}{c_2} \frac{\lambda + \delta}{c_1} e^{(\lambda + \delta) \frac{u}{c_1}} \int_b^\infty e^{-(\lambda + \delta) \frac{t}{c_2}} \gamma(t; b) dt \\ &= \frac{\lambda + \delta}{c_1} m_1(u; b) - \frac{\lambda}{c_1} \gamma(u; b), \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα ,

$$m_1'(u; b) = \frac{\lambda + \delta}{c_1} m_1(u; b) - \frac{\lambda}{c_1} \int_0^u m_1(u - x; b) f(x) dx - \frac{\lambda}{c_1} z(u), \quad 0 \leq u \leq b.$$

Όμοια, όταν $u \geq b$, αποδεικνύεται ότι

$$m(u; b) = \frac{\lambda}{c_2} e^{(\lambda + \delta) \frac{u}{c_2}} \int_{um_2(u; b)}^\infty e^{-(\lambda + \delta) \frac{t}{c_2}} \gamma(t; b) dt, \quad (2.5)$$

και

$$\begin{aligned} m_2'(u; b) &= \frac{\lambda + \delta}{c_2} m_2(u; b) - \frac{\lambda}{c_2} \gamma(u; b) \\ &= \frac{\lambda + \delta}{c_2} m_2(u; b) \\ &\quad - \frac{\lambda}{c_2} \left[\int_0^{u-b} m_2(u - x; b) f(x) dx + \int_{u-b}^u m_1(u - x; b) f(x) dx \right] \\ &\quad - \frac{\lambda}{c_2} z(u), \end{aligned}$$

■

Παρατηρούμε από την (2.2) ότι η ολοκληροδιαφορική εξίσωση m_1 δεν συμπεριλαμβάνει την ολοκληροδιαφορική εξίσωση m_2 αλλά είναι υποσύνολό της. Επίσης, αν θέσουμε $c_1 = c$ και $c_2 = 0$ τότε η (2.2) συμπίπτει με την (1.9), δηλαδή την ολοκληροδιαφορική εξίσωση υπό τη στρατηγική σταθερού μερίσματος.

Συμπεραίνουμε από τις (2.4) και (2.5) ότι η ολοκληροδιαφορική εξίσωση $m(u; b)$ είναι συνεχής για $u = b$, δηλαδή

$$m_1(b; b) = m_2(b; b) = \lim_{u \rightarrow b^+} m_2(u; b),$$

Όμως, δε συμβαίνει το ίδιο για $m'(u; b)$ όταν $u = b$. Ας πάρουμε το όριο $u \rightarrow b^+$ της $m_2(u; b)$ στην (2.2)

$$\begin{aligned} m_2'(b; b) &:= \lim_{u \rightarrow b^+} m_2'(u; b) \\ &= \frac{\lambda + \delta}{c_2} m_2(b; b) - \frac{\lambda}{c_2} \left[\int_0^b m_1(b-x; b) f(x) dx \right] - \frac{\lambda}{c_2} z(b) \end{aligned}$$

αφού $m_2(b; b) = m_1(b; b)$ από την (2.2) για την $m_1(b; b)$ έχουμε

$$\begin{aligned} &= \frac{\lambda + \delta}{c_2} m_1(b; b) + \frac{c_1}{c_2} \left[m_1'(b; b) - \frac{\lambda + \delta}{c_1} m_1(b; b) \right] \\ &= \frac{c_1}{c_2} m_1'(b; b). \end{aligned}$$

Άρα αποδείξαμε ότι

$$c_2 m_2'(b; b) = c_1 m_1'(b; b)$$

2.2.2. Μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση για την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $m_2(u; b)$

Σε αυτή την ενότητα, χρησιμοποιώντας τον Τελεστή $T_r f(x)$, τον οποίο έχουμε ορίσει παραπάνω, θα βρούμε μια ανανεωτική συνάρτηση για την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $m_2(u; b)$ για $u > b$. Για να προχωρήσουμε όμως θα πρέπει να ορίσουμε και κάποιες άλλες συναρτήσεις.

Έστω A_i από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής με δεξιά ουρά να ορίζεται από τη σχέση

$$\bar{A}_i(x) = 1 - A_i(x) = \frac{\int_x^\infty e^{-\rho_i(t-x)} \bar{F}(t) dt}{\int_0^\infty e^{-\rho_i t} \bar{F}(t) dt} = \frac{T_{\rho_i} \bar{F}(x)}{T_{\rho_i} \bar{F}(0)}, \quad x \geq 0 \quad \text{για } i = 1, 2. \quad (2.6)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της A_i ορίζεται ως

$$\hat{a}_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dA_i(x) = \frac{\rho_i}{1 - \hat{f}(\rho_i)} \frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(\rho_i)}{\rho_i - s}, \quad (2.7)$$

επίσης πρέπει να ορίσουμε την παράμετρο

$$\pi_i = \frac{\lambda[1 - \hat{f}(\rho_i)]}{c_i \rho_i} = \frac{\lambda}{c_i} T_{\rho_i} \bar{F}(0). \quad (2.8)$$

Παρατήρηση 2.1. Αν $0 < \pi_i < 1$ και $\rho_i \rightarrow 0$, $\pi_i \rightarrow \frac{1}{1+\theta} = \frac{\lambda}{c}$ (επακόλουθο της $c = (1+\theta)\lambda \bar{E}(x)$)

τότε η $m_\infty(u; b)$ ικανοποιεί την ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση.

$$m_\infty(u; b) = \pi_1 \int_0^\infty m_\infty(u-x) dA_1(x) + \frac{\lambda}{c_1} T_{\rho_1} z(u) \quad (2.9)$$

Βλέπε Gerber και Shiu (1998) και Lin και Wilmot (1999)

Για να γίνουν ευκολότεροι οι παρακάτω υπολογισμοί χρειαζόμαστε το παρακάτω.

Λήμμα 2.1. Για $b \leq u \leq \infty$ ισχύει

$$\hat{f}(s)T_s m_2(b; b) = \int_b^\infty e^{-s(u-b)} \int_0^{u-b} m_2(u-x; b) f(x) dx du \quad (2.10)$$

Απόδειξη

Ξεκινώντας από το δεύτερο μέλος της ισότητας θα καταλήξουμε στο πρώτο.

Αλλάζοντας τα όρια ολοκλήρωσης αφού

$$b \leq u \leq \infty \text{ και } 0 \leq x \leq u - b \Rightarrow 0 \leq x + b \leq u$$

άρα έχουμε $x + b \leq u \leq \infty$ και $0 \leq x \leq \infty$

$$\begin{aligned} & \int_b^\infty e^{-s(u-b)} \int_0^{u-b} m_2(u-x; b) f(x) dx du \\ &= -\lambda \int_0^\infty \int_{x+b}^\infty e^{-s(u-b)} m_2(u-x; b) f(x) du dx \\ &= -\lambda \int_0^\infty f(x) \left(\int_{x+b}^\infty e^{-s(u-b)} m_2(u-x; b) du \right) dx \\ &= -\lambda \int_0^\infty f(x) e^{-sx} \left(\int_{x+b}^\infty e^{-s(u-x-b)} m_2(u-x; b) du \right) dx \end{aligned}$$

Θέτουμε $u - x = t$, τότε $du = dt$ και

$$x + b \leq u \leq \infty \Rightarrow b \leq u - x \leq \infty \Rightarrow b \leq t \leq \infty$$

$$\begin{aligned} &= -\lambda \int_0^\infty f(x) e^{-sx} \left(\int_b^\infty e^{-s(t-b)} m_2(t; b) dt \right) dx \\ &= -\lambda \int_0^\infty f(x) e^{-sx} T_s m_2(b; b) dx \\ &= -\lambda T_s m_2(b; b) \int_0^\infty f(x) e^{-sx} dx \end{aligned}$$

$$= -\lambda \hat{f}(s) T_s m_2(b; b)$$

■

Λήμμα 2.2. Για $b \leq u \leq \infty$ ισχύει

$$\int_0^b m_1(x; b) T_s f(b-x) dx = \int_b^\infty e^{-s(u-b)} \int_{u-b}^u m_1(u-x; b) f(x) dx du \quad (2.11)$$

Απόδειξη

Ξεκινώντας από το δεύτερο μέλος της ισότητας θα καταλήξουμε στο πρώτο.

Θέτουμε $u-x=t$, τότε $du=dt$ και

$$u-b \leq x \leq u \Rightarrow b \geq u-x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq t \leq b$$

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} & \int_b^\infty e^{-s(u-b)} \int_{u-b}^u m_1(u-x; b) f(x) dx du \\ &= \int_b^\infty e^{-s(u-b)} \int_0^b m_1(t; b) f(u-t) dt du \\ &= \int_0^b m_1(t; b) \int_b^\infty e^{-s(u-b)} f(u-t) du dt \end{aligned}$$

όπου $u-t=y$, τότε $du=dy$ και

$$b \leq u \leq \infty \Rightarrow b-t \leq u-t \leq \infty \Rightarrow b-t \leq y \leq \infty$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^b m_1(t; b) \int_{b-t}^\infty e^{-s(y+t-b)} f(y) dy dt \\ &= \int_0^b m_1(x; b) T_s f(b-x) dx \end{aligned}$$

■

Θεώρημα 2.2 Η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $m_2(u; b)$ ικανοποιεί τη παρακάτω ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση

$$m_2(u; b) = \pi_2 \left[\int_0^{u-b} m_2(u-x; b) dA_2(x) + \int_{u-b}^u m_1(u-x; b) dA_2(x) \right] + \frac{\lambda}{c_2} T_{\rho_2} z(u) \quad (2.12)$$

για $u > b$.

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας την 2.2, για $u > b$, πολλαπλασιάζουμε με τον όρο $c_2 e^{-s(u-b)}$ και ολοκληρώνουμε ως προς u με όρια από b έως ∞ τα δύο μέλη της εξίσωσης (2.2). Το πρώτο μέλος γίνεται

$$m_2'(u; b) = c_2 \int_b^{\infty} e^{-s(u-b)} m_2'(u; b) du,$$

ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες ισχύει $\int_a^{\beta} f'(t)z(t)dt = f(t)[z(t)]_a^{\beta} - \int_a^{\beta} f(t)z'(t)dt$, άρα έχουμε

$$\begin{aligned} m_2'(u; b) &= c_2 \left[m_2(u; b) e^{-s(u-b)} \Big|_b^{\infty} - \int_b^{\infty} (e^{-s(u-b)})' m_2(u; b) du \right] \\ &= c_2 \left[-m_2(b; b) + s \int_b^{\infty} e^{-s(u-b)} m_2(u; b) du \right] \\ &= c_2 s T_s m_2(b; b) - c_2 m_2(b; b). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Κάνοντας το ίδιο τώρα και στο δεύτερο μέλος της σχέσης (2.2) έχουμε

$$\begin{aligned} &(\lambda + \delta) \int_b^{\infty} e^{-s(u-b)} m_2(u; b) du \\ &- \lambda \int_b^{\infty} e^{-s(u-b)} \int_0^{u-b} m_2(u-x; b) f(x) dx du \\ &- \lambda \int_b^{\infty} e^{-s(u-b)} \int_{u-b}^u m_1(u-x; b) f(x) dx du \\ &- \lambda \int_b^{\infty} e^{-s(u-b)} z(u) du. \end{aligned}$$

Για να γίνουν ευκολότεροι οι υπολογισμοί θα πάρουμε ξεχωριστούς τους όρους.

$$\bullet (\lambda + \delta) \int_b^\infty e^{-s(u-b)} m_2(u; b) du = (\lambda + \delta) T_s m_2(b; b) \quad (2.14)$$

$$\bullet -\lambda \int_b^\infty e^{-s(u-b)} \int_0^{u-b} m_2(u-x; b) f(x) dx du = -\lambda \hat{f}(s) T_s m_2(b; b) \quad (2.15)$$

από το Λήμμα 2.1

$$\bullet -\lambda \int_b^\infty e^{-s(u-b)} \int_{u-b}^u m_1(u-x; b) f(x) dx du = -\lambda \int_0^b m_1(x; b) T_s f(b-x) dx \quad (2.16)$$

από το Λήμμα 2.2

$$\bullet -\lambda \int_b^\infty e^{-s(u-b)} z(u) d = -\lambda T_s z(b) \quad (2.17)$$

Άρα ενώνοντας όλους τους παραπάνω όρους (2.13), (2.14), (2.15), (2.16), (2.17), οδηγούμαστε στη σχέση

$$c_2 s T_s m_2(b; b) - c_2 m_2(b; b) = (\lambda + \delta) T_s m_2(b; b) - \lambda \hat{f}(s) T_s m_2(b; b) - \lambda \int_0^b m_1(x; b) T_s f(b-x) dx - \lambda T_s z(b)$$

Από την οποία συνεπάγεται

$$\begin{aligned} [c_2 s - (\lambda + \delta) + \lambda \hat{f}(s)] T_s m_2(b; b) \\ = c_2 m_2(b; b) - \lambda \int_0^b m_1(x; b) T_s f(b-x) dx - \lambda T_s z(b), \end{aligned} \quad (2.18)$$

χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη εξίσωση του Lundberg

$$c_i s + \lambda \tilde{f}(s) - (\lambda + \delta) = 0$$

και ρ_i τη θετική ρίζα της έχουμε

$$c_2 m_2(b; b) = \lambda \int_0^b m_1(x; b) T_s f(b-x) dx + \lambda T_s z(b).$$

Συμπερασματικά η (2.17) παίρνει τη μορφή

$$[c_2(s - \rho_2) + \lambda \hat{f}(s) - \lambda \hat{f}(\rho_2)] T_s m_2(b; b)$$

$$= \lambda \left[\int_0^b m_1(x; b) T_{\rho_2} f(b-x) dx - \int_0^b m_1(x; b) T_s f(b-x) dx \right] + \lambda [T_{\rho_2} z(b) - T_s z(b)]$$

Διαιρώντας με $s - \rho_2$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \left[c_2 - \lambda \frac{\hat{f}(s) - \lambda \hat{f}(\rho_2)}{\rho_2 - s} \right] T_s m_2(b; b) \\ &= \lambda \int_0^b m_1(x; b) \frac{T_{\rho_2} f(b-x) - T_s f(b-x)}{s - \rho_2} dt + \lambda \frac{T_{\rho_2} z(b) - T_s z(b)}{s - \rho_2} \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την (2.7) και τις ιδιότητες των τελεστών συνεπάγεται

$$\begin{aligned} & \left[c_2 - \lambda \frac{1 - \hat{f}(\rho_2)}{\rho_2} \hat{\alpha}_2(s) \right] T_s m_2(b; b) \\ &= \lambda \int_0^b m_1(x; b) T_s T_{\rho_2} f(b-x) dx + \lambda T_s T_{\rho_2} z(b) \end{aligned}$$

άρα έχουμε

$$\begin{aligned} T_s m_2(b; b) &= \lambda \frac{1 - \hat{f}(\rho_2)}{c_2 \rho_2} \hat{\alpha}_2(s) T_s m_2(b; b) \\ &\quad + \frac{\lambda}{c_2} \int_0^b m_1(x; b) T_s T_{\rho_2} f(b-x) dx + \frac{\lambda}{c_2} T_s T_{\rho_2} z(b). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Παίρνοντας έναν έναν τους όρους έχουμε

- $T_s m_2(b; b) = \int_b^\infty e^{-s(u-b)} m_2(u; b) du$
- $\lambda \frac{1 - \hat{f}(\rho_2)}{c_2 \rho_2} \hat{\alpha}_2(s) T_s m_2(b; b) = \pi_2 \int_b^\infty e^{-s(u-b)} \int_0^{u-b} m_2(u-x; b) \alpha_2(x) dx du$
(από το Λήμμα 2.1 και τη σχέση 2.8 για $i = 2$)
- $\frac{\lambda}{c_2} \int_0^b m_1(t; b) T_s T_{\rho_2} f(b-t) dt = \frac{\lambda}{c_2} \int_b^\infty e^{-s(u-b)} \int_{u-b}^u m_1(u-x; b) T_{\rho_2} f(x) dx du$
(από το Λήμμα 2.2).

- $T_s T_{\rho_2} z(b) = \int_b^{\infty} e^{-s(u-b)} T_{\rho_2} z(u) du$

Άρα η (2.19) γίνεται

$$\begin{aligned} \int_b^{\infty} e^{-s(u-b)} m_2(u; b) du &= \pi_2 \int_b^{\infty} e^{-s(u-b)} \int_0^{u-b} m_2(u-x; b) \alpha_2(x) dx du \\ &+ \frac{\lambda}{c_2} \int_b^{\infty} e^{-s(u-b)} \int_{u-b}^u m_1(u-x; b) T_{\rho_2} f(x) dx du \\ &+ \frac{\lambda}{c_2} \int_b^{\infty} e^{-s(u-b)} T_{\rho_2} z(u) du, \end{aligned}$$

από την οποία συνεπάγεται

$$\begin{aligned} m_2(u; b) du &= \pi_2 \int_0^{u-b} m_2(u-x; b) \alpha_2(x) dx + \frac{\lambda}{c_2} \int_{u-b}^u m_1(u-x; b) T_{\rho_2} f(x) dx \\ &+ \frac{\lambda}{c_2} T_{\rho_2} z(u). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Για να απλοποιήσουμε την (2.20) θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις

από τη (2.5) έχουμε

$$T_{\rho_2} f(x) dx = \left[\int_0^{\infty} e^{-\rho_2 t} \bar{F}(t) dt \right] dA_2(x),$$

και από τη (2.6) έχουμε

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho_2 t} \bar{F}(t) dt = \frac{1 - \hat{f}(\rho_2)}{\rho_2},$$

άρα η (2.20) γίνεται

$$m_2(u; b)du = \pi_2 \int_0^{u-b} m_2(u-x; b)\alpha_2(x)dx + \int_{u-b}^u m_1(u-x; b)\alpha_2(x)dx + \frac{\lambda}{c_2} T_{\rho_2} z(u). \quad (2.21)$$

Πόρισμα 2.1. Ως αποτέλεσμα του θεωρήματος 2.2, η $m(u; b)$ ικανοποιεί την παρακάτω ελαττωματική ανανεωτική συνάρτηση

$$m(u; b) = \pi_2 \int_0^u m(u-x; b)\alpha_2(x)dx + \frac{\lambda}{c_2} T_{\rho_2} z(u), \quad u > b \quad (2.22)$$

2.2.3 Λύση μιας ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης

Σε αυτή τη παράγραφο, θα δείξουμε αναλυτικές εκφράσεις για την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής. Μέρος αυτών στηρίζεται σε αποτελέσματα των Lin και Wilmot (1999), Lin et al. (2003), Asmussen (2000) και Gerber και Shiu (2005a).

Γνωρίζουμε ότι η γενική λύση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης από την πρόταση 1.1 είναι της μορφής

$$m_b(u) = m(u) + k(b)v(u),$$

ανάγοντάς την στο μοντέλο μας παίρνει την παρακάτω μορφή

$$m_1(u; b) = m_\infty(u; b) + kv(u; b)$$

όπου k μία σταθερά.

Αν θέσουμε $u = b$ έχουμε

$$m_1(b; b) = m_2(b; b) = m_\infty(b; b) + kv(b; b)$$

Χρησιμοποιώντας την (2.12) για $u = b$ έχουμε

$$m_2(b; b) = \pi_2 \int_0^b m_1(b-x; b)dA_2(x) - \frac{\lambda}{c_2} T_{\rho_2} z(u)$$

Αν αντικαταστήσουμε τώρα στην (2.22) έχουμε

$$\begin{aligned}
m_2(b; b) &= \pi_2 \int_0^b m_\infty(b-x; b) dA_2(x) + k\pi_2 \int_0^b v(b-x; b) dA_2(x) + \frac{\lambda}{c_2} T_{\rho_2} z(u), \\
\Rightarrow m_\infty(b; b) + kv(b; b) & \\
&= \pi_2 \int_0^b m_\infty(b-x; b) dA_2(x) + k\pi_2 \int_0^b v(b-x; b) dA_2(x) + \frac{\lambda}{c_2} T_{\rho_2} z(b)
\end{aligned}$$

Λύνοντας ως προς k έχουμε

$$k = \frac{\pi_2 \int_0^b m_\infty(b-x; b) dA_2(x) - m_\infty(b; b) + \frac{\lambda}{c_2} T_{\rho_2} z(b)}{v(b; b) - \pi_2 \int_0^b v(b-x; b) dA_2(x)} \quad (2.23)$$

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε την $m_\infty(u; b)$ με όρους της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Χρησιμοποιώντας την (1.12) την οποία ορίσαμε στο πρώτο κεφάλαιο ως συνάρτηση κατανομής μίας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής για το κλασσικό μοντέλο κινδύνου

$$K(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta}{1+\beta} \left(\frac{1}{1+\beta} \right)^n G^{*n}(u), u \geq 0,$$

αν αντικαταστήσουμε όπου

- $K(u)$ με $K_i(x)$ για $i = 1$ και 2 ,
- $G^{*n}(u)$ με $A_i^{*n}(x)$,
- και $\frac{1}{1+\beta} = \pi_i$

την ανάγουμε στο μοντέλο κινδύνου με την ύπαρξη στρατηγικής μερίσματος κατωφλίου και η συνάρτηση κατανομής της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής παίρνει τη μορφή

$$K_i(x) = 1 - \bar{K}_i(x) = \sum_{u=0}^{\infty} (1 - \pi_i) \pi_i^n A_i^{*n}(x), u \geq 0, \quad (2.24)$$

όπου A_i^{*n} είναι η n -οστή συνέλιξη της A_i .

Αφού η $m_\infty(u; b)$ ικανοποιεί την παρακάτω ελαττωματική ανανεωτική συνάρτηση

$$m_\infty(u; b) = \pi_1 \int_0^u m_\infty(u-x; b) \alpha_1(x) dx + \frac{\lambda}{c_1} T_{\rho_1} z(u). \quad (2.25)$$

από το θεώρημα 1.4, την παρατήρηση 2.1 και αφού θέσαμε

$$\pi_1 = \frac{1}{1 + \beta} \Rightarrow \frac{1}{\beta} = \frac{\pi_1}{1 - \pi_1}$$

καταλήγουμε στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.3. Η λύση της (2.25) είναι της μορφής

$$m_\infty(u; b) = \frac{\lambda}{c_1(1 - \pi_1)} \int_0^u T_{\rho_1} z(u - x; b) K_1(x) dx + \frac{\lambda}{c_1} T_{\rho_1} z(u)$$

ή

$$m_\infty(u; b) = \frac{\lambda}{c_1(1 - \pi_1)} \left[- \int_0^u \bar{K}_1(u - x; b) T_{\rho_1} z(x) dx - \bar{K}_1(u; b) T_{\rho_1} z(0) + T_{\rho_1} z(u) \right] \quad (2.26a)$$

■

Εν συνεχεία θα δώσουμε μία έκφραση για την $m_2(u; b)$. Αν θέσουμε στην (2.12) όπου $u = y + b$,

$$m_2(y + b; b) = g(y) \text{ και}$$

$$\pi_2 \int_{u-b}^u m_1(u - x; b) dA_2(x) + \frac{\lambda}{c_2} T_{\rho_2} z(u) = h(y + b) = h(u)$$

τότε θα έχουμε

$$m_2(u; b) = \pi_2 \left[\int_0^{u-b} m_2(u - x; b) dA_2(x) + \int_{u-b}^u m_1(u - x; b) dA_2(x) \right] + \frac{\lambda}{c_2} T_{\rho_2} z(u)$$

$$\Rightarrow g(y) = \pi_2 \int_0^y g(y - x) dA_2(x) + h(y + b)$$

από το θεώρημα 1.4 καταλήγουμε στο παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 2.4. Η λύση της (2.12) είναι της μορφής

$$\begin{aligned} m_2(u; b) = g(y) &= \frac{1}{(1 - \pi_2)} \int_0^y h(y + b - x) K_2(x) dx + h(y + b) \\ &= \frac{1}{(1 - \pi_2)} \int_0^{u-b} h(u - x) K_2(x) dx + h(u) \end{aligned}$$

ή

$$m_2(u; b) = g(y) = -\frac{1}{(1 - \pi_2)} \left[\int_0^u \bar{K}_2(u - x) h(x) dx + \bar{K}_2(u - b) h(b) \right] + h(u)$$

■

Αν συγκεντρώσουμε όλα τα παραπάνω ως περίληψη καταλήγουμε στο παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 2.5. Η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $m(u; b)$ μπορεί να εκφραστεί αναλυτικά στα παρακάτω βήματα

$$\bullet \quad m_\infty(u; b) = \frac{\lambda}{c_1(1-\pi_1)} \int_0^u T_{\rho_1} z(u-x; b) K_1(x) dx + \frac{\lambda}{c_1} T_{\rho_1} z(u) \quad (2.26b)$$

$$\bullet \quad k = \frac{\pi_2 \int_0^b m_\infty(b-x; b) dA_2(x) - m_\infty(b; b) + \frac{\lambda}{c_2} T_{\rho_2} z(b)}{v(b; b) - \pi_2 \int_0^b v(b-x; b) dA_2(x)} \quad (2.27)$$

$$\bullet \quad m_1(u; b) = m_\infty(u; b) + k \frac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)} e^{\rho_1 u}, \quad 0 \leq u \leq b \quad (2.28)$$

$$\bullet \quad h(u) = \pi_2 \int_{u-b}^u m_1(u-x; b) dA_2(x) + \frac{\lambda}{c_2} T_{\rho_2} z(u), \quad u > b \quad (2.29)$$

$$\bullet \quad m_2(u; b) = \frac{1}{(1-\pi_2)} \int_0^{u-b} h(u-x) K_2(x) dx + h(u), \quad u > b \quad (2.30)$$

όπου $K_i = 1$ και 2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μέτρα Χρεοκοπίας

3.1. Η πιθανότητα χρεοκοπίας

Σε αυτή τη παράγραφο θα μελετήσουμε τη πιθανότητα χρεοκοπίας όταν ο χρόνος χρεοκοπίας είναι πεπερασμένος, καθώς επίσης και την πιθανότητα της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό κεφάλαιο ως ειδική περίπτωση. Υποθέτουμε ότι το περιθώριο ασφαλείας $\theta_2 > 0$, το οποίο σημαίνει ότι και $\theta_1 > 0$. Αν το περιθώριο ασφαλείας θ_2 είναι αρνητικό αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ίση με 1 (δηλαδή η χρεοκοπία είναι βέβαιη) για οποιοδήποτε αρχικό αποθεματικό u και ο χρόνος χρεοκοπίας είναι μία πεπερασμένη τυχαία μεταβλητή.

Όπως είναι γνωστό από το Κεφάλαιο 1, όταν η ένταση ανατοκισμού δ είναι μηδέν προκύπτουν διάφορες μορφές της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής, οι οποίες οδηγούν σε σημαντικά αποτελέσματα της Θεωρίας Κινδύνου. Η μη-αρνητικές λύσεις της θεμελιώδους εξίσωσης του Lundberg είναι μηδέν $\rho_1 = \rho_2 = 0$ (Παρατήρηση 1.1), αυτό σημαίνει ότι $\pi_i = \frac{1}{1+\theta_i}$ για $i = 1$ και 2 από την παρατήρηση 2.1. και οι $A_1(x)$ και $A_2(x)$ από την συνάρτηση (2.6) παίρνουν τη μορφή της συνάρτησης ισορροπίας

$$F_e(x) = 1 - \bar{F}_e(x) = \int_0^x \frac{\bar{F}(y)}{E(x)} dy = \int_0^x f_e(y) dy \quad x > 0$$

Επίσης,

$$T_{\rho_1} z(u) = T_{\rho_2} z(u) = \int_u^\infty z(y) dy.$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας για το κλασσικό μοντέλο κινδύνου $\Psi(u)$ μπορεί να γραφτεί και ως $\Psi_{1,\infty}(u)$ με $u \geq 0$ και ρυθμό ασφαλίστρου c_1 ή $\Psi_{2,\infty}(u)$ με $u \geq 0$ και ρυθμό ασφαλίστρου c_2 .

Στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου για $w(x, y) = 1$ και $\delta > 0$ ισχύει ότι

$$m_T(u) = \bar{K}_\delta(u), u \geq 0,$$

όπου $\bar{K}_\delta(u)$ είναι η δεξιά ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής που δίνεται από την (1.13), ενώ για $w(x, y) = 1$, $\delta = 0$, ισχύει $m_T(u)|_{\delta=0} = \psi(u)$, οπότε ισχύει

$\psi(u) = \bar{K}_0(u)$, άρα μετά τις αλλαγές στο π_i και στην $A_i(x)$ για $i = 1$ και 2 είναι προφανές ότι οι $\bar{K}_1(u)$ και $\bar{K}_2(u)$ συμπίπτουν με τις $\Psi_{1,\infty}(u)$ και $\Psi_{2,\infty}(u)$ και από την παρατήρηση (1.2) ισχύει $\Psi_{1,\infty}(0) = \frac{1}{1+\theta_1}$ και $\Psi_{2,\infty}(0) = \frac{1}{1+\theta_2}$.

Αφού έχουμε θέσει για $w(x, y) = 1$ και $\delta = 0$ τότε η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $m(u; b)$ ισούται με την πιθανότητα χρεοκοπίας $\Psi(u; b)$ και η $z(u)$ αφού την έχουμε ορίσει στο κεφάλαιο 1 (θεώρημα 1.2) ως

$$z(u) = \int_u^\infty w(u, x - u) f(x) dx = \bar{F}(x)$$

και η $v(u)$ από την (1.23)

$$v(u) = \frac{1 - \Psi(u)}{1 - \Psi(0)} e^{\rho u} = \frac{1 - \Psi_{1,\infty}(u)}{1 - \Psi_{1,\infty}(0)}$$

Από το θεώρημα 2.5. και χρησιμοποιώντας τις παραπάνω υποθέσεις οδηγούμαστε στο παρακάτω πόρισμα

Πόρισμα 3.1. Η πιθανότητα χρεοκοπίας για το μοντέλο κινδύνου σύνθετης Poisson υπό τη στρατηγική μερίσματος κατωφλίου δίνεται από την παρακάτω σχέση.

$$\Psi(u; b) = \begin{cases} \Psi_1(u) = 1 - q(b) + q(b)\Psi_{1,\infty}(u; b), & 0 \leq u \leq b \\ \Psi_2(u) = -\frac{1 + \theta_2}{\theta_2} \int_0^{u-b} h(u-x) d\Psi_{2,\infty}(x; b) + h(u), & u > b \end{cases} \quad (3.1)$$

όπου

$$q(b) = \frac{\theta_2}{(\theta_1 - \theta_2)\Psi_{1,\infty}(b) + \theta_2} \quad (3.2)$$

οι τιμές της οποίας ανήκουν στο διάστημα $[0,1]$ και

$$h(u) = \frac{1}{1+\theta_2} \int_{u-b}^u \Psi_1(u-t; b) dF_e(t) + \frac{1}{1+\theta_2} \bar{F}_e(u), \quad u > b \quad (3.3)$$

Απόδειξη

Ξεκινώντας από την (2.27)

$$k = \frac{\pi_2 \int_0^b m_\infty(b-x; b) dA_2(x) - m_\infty(b; b) + \frac{\lambda}{c_2} T_{\rho_2} z(u)}{v(b; b) - \pi_2 \int_0^b v(b-x; b) dA_2(x)}$$

χρησιμοποιώντας τις παραπάνω υποθέσεις έχουμε

$$\begin{aligned} k &= \frac{\frac{1}{1+\theta_2} \int_0^b \Psi_{1,\infty}(b-x; b) dF_e(x) - \Psi_{1,\infty}(b; b) + \frac{1}{1+\theta_2} \bar{F}_e(b)}{\frac{1 - \Psi_{1,\infty}(b; b)}{1 - \Psi_{1,\infty}(0; b)} - \frac{1}{1+\theta_2} \int_0^b \frac{1 - \Psi_{1,\infty}(b-x; b)}{1 - \Psi_{1,\infty}(0; b)} dF_e(x)} \\ &= [1 - \Psi_{1,\infty}(0)] \frac{\frac{1}{1+\theta_2} [(1+\theta_1)\Psi_{1,\infty}(b; b) - \bar{F}_e(b)] - \Psi_{1,\infty}(b; b) + \frac{1}{1+\theta_2} \bar{F}_e(b)}{1 - \Psi_{1,\infty}(b; b) - \frac{1}{1+\theta_2} [F_e(b) - \int_0^b \Psi_{1,\infty}(b-x; b) dF_e(x)]} \\ &= [1 - \Psi_{1,\infty}(0)] \frac{\left(\frac{1+\theta_1}{1+\theta_2} - 1\right) \Psi_{1,\infty}(b; b)}{1 - \Psi_{1,\infty}(b; b) - \frac{1}{1+\theta_2} F_e(b) + \frac{1+\theta_1}{1+\theta_2} \Psi_{1,\infty}(b; b) - \frac{1}{1+\theta_2} \bar{F}_e(b)} \\ &= [1 - \Psi_{1,\infty}(0)] \frac{(\theta_1 - \theta_2) \Psi_{1,\infty}(b; b)}{(\theta_1 - \theta_2) \Psi_{1,\infty}(b; b) + \theta_2} \end{aligned}$$

Αν πάρουμε την (2.28) και αντικαταστήσουμε με βάση τις παραπάνω υποθέσεις έχουμε

$$m_1(u; b) = m_\infty(u; b) + k \frac{1 - \Psi(u; b)}{1 - \Psi(0; b)} e^{\rho u}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Psi_1(u; b) &= \Psi_{1,\infty}(u; b) + [1 - \Psi_{1,\infty}(0)] \frac{(\theta_1 - \theta_2)\Psi_{1,\infty}(b; b)}{(\theta_1 - \theta_2)\Psi_{1,\infty}(b; b) + \theta_2} \left[\frac{1 - \Psi_{1,\infty}(u; b)}{1 - \Psi_{1,\infty}(0; b)} \right] \\ &= \Psi_{1,\infty}(u; b) + \frac{(\theta_1 - \theta_2)\Psi_{1,\infty}(b; b)}{(\theta_1 - \theta_2)\Psi_{1,\infty}(b; b) + \theta_2} [1 - \Psi_{1,\infty}(u; b)] \\ &= \frac{(\theta_1 - \theta_2)\Psi_{1,\infty}(b; b)}{(\theta_1 - \theta_2)\Psi_{1,\infty}(b; b) + \theta_2} + \frac{\theta_2}{(\theta_1 - \theta_2)\Psi_{1,\infty}(b; b) + \theta_2} \Psi_{1,\infty}(u; b) \end{aligned}$$

Αν θέσουμε

$$q(b) = \frac{\theta_2}{(\theta_1 - \theta_2)\Psi_{1,\infty}(b; b) + \theta_2}$$

τότε έχουμε

$$\Psi_1(u; b) = 1 - q(b) + q(b)\Psi_{1,\infty}(u; b) \quad \text{για } 0 \leq u \leq b.$$

Όμοια για $u > b$ χρησιμοποιώντας το θεώρημα 2.5 και χρησιμοποιώντας τις παραπάνω υποθέσεις καταλήγουμε στο δεύτερο σκέλος της συνάρτησης. ■

Πόρισμα 3.2. Για $0 \leq u \leq b$ η πιθανότητα της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό κεφάλαιο ορίζεται

$$\Psi(0; b - u) = \frac{(1 + \theta_1)(\theta_1 - \theta_2)\Psi_{1,\infty}(b - u; b) + \theta_2}{(1 + \theta_1)[(\theta_1 - \theta_2)\Psi_{1,\infty}(b - u; b) + \theta_2]} \quad (3.4)$$

Απόδειξη

Για $0 \leq u \leq b$ από την (3.1) έχουμε

$$\Psi(u; b) = 1 - q(b) + q(b)\Psi_{1,\infty}(u; b)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Psi(0; b - u) &= 1 - q(b - u) + q(b - u)\Psi_{1,\infty}(0; b) \\
&= 1 - q(b - u) + q(b - u)\frac{1}{1 + \theta_1} \\
&= 1 - \frac{\theta_1}{1 + \theta_1}q(b - u)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την (3.2) έχουμε

$$\begin{aligned}
\Psi(0; b - u) &= 1 - \frac{\theta_1}{1 + \theta_1} \left(\frac{\theta_2}{(\theta_1 + \theta_2)\Psi_{1,\infty}(b - u) + \theta_2} \right) \\
&= \frac{(1 + \theta_1)[(\theta_1 + \theta_2)\Psi_{1,\infty}(b - u) + \theta_2] - \theta_1\theta_2}{(1 + \theta_1)[(\theta_1 + \theta_2)\Psi_{1,\infty}(b - u) + \theta_2]} \\
\Rightarrow \Psi(0; b - u) &= \frac{(1 + \theta_1)(\theta_1 - \theta_2)\Psi_{1,\infty}(b - u; b) + \theta_2}{(1 + \theta_1)[(\theta_1 - \theta_2)\Psi_{1,\infty}(b - u; b) + \theta_2]}
\end{aligned}$$

■

Παρατήρηση 3.1. Όταν $u > b$, η πιθανότητα της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό κεφάλαιο, $\Psi(0; 0)$ σύμφωνα με το μοντέλο κινδύνου υπό τη στρατηγική μερίσματος κατωφλίου, ισούται με την ίδια πιθανότητα κάτω από το κλασσικό μοντέλο σύνθετης Poisson με ρυθμό ασφαλιστρον c_2 .

3.2. Ο χρόνος Χρεοκοπίας

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε μία άλλη ειδική περίπτωση της $m(u; b)$. Για $\delta \geq 0$ και $w(x_1, x_2) = 1$ για $x_1, x_2 > 0$. προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και ισχύει

$$m(u; b) = E \{ e^{-\delta T_b} I(T_b < \infty) | U_b(0) = u \}.$$

Η $z(u)$ ανάγεται σε $\bar{F}(x)$

$$z(u) = \int_u^{\infty} w(u, x - u) d = \bar{F}(x). \quad (3.5)$$

Για $\delta = 0$, η πιθανότητα χρεοκοπίας έχει αναλυθεί στην παράγραφο 3.1. Αφού υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας T_b , η κατανομή του μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την αντίστροφη μέθοδο Laplace και οι ροπές του παραγωγίζοντας ως προς δ . Η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $m(u; b)$ δίνεται από το θεώρημα 2.5 και δεν εκφράζεται ως προς δ , αντίθετα εκφράζεται μέσω $\rho_1 = \rho_1(\delta)$ και $\rho_2 = \rho_2(\delta)$. Ας ορίσουμε

$$\mathcal{L}(u; b) = m(u; b)|_{w \equiv 1},$$

$$\mathcal{L}_1(u) = m_1(u)|_{w \equiv 1},$$

$$\mathcal{L}_2(u) = m_2(u)|_{w \equiv 1} \text{ και}$$

$$\mathcal{L}_\infty(u) = m_\infty(u)|_{w \equiv 1}.$$

Ας σημειώσουμε ότι οι παραπάνω συμβολισμοί είναι κάπως παραπλανητικοί, αφού οι πραγματική μεταβλητή μας δ , συμπεριλαμβάνεται στις παραπάνω συναρτήσεις. Ωστόσο, εκφράζοντάς τις ως προς u είναι απαραίτητο για τα αποτελέσματα που θα παράγουμε. Στη συνέχεια θα δώσουμε το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας

Πόρισμα 3.3. Ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας για το μοντέλο κινδύνου σύνθετης Poisson υπό τη στρατηγική μερίσματος κατοφλίου δίνεται από την παρακάτω σχέση.

$$\mathcal{L}(u; b) = \begin{cases} \mathcal{L}_1(u) = \mathcal{L}_\infty(u) + k \frac{1 - \Psi(u)}{1 - \Psi(0)} e^{\rho_1 u}, & 0 \leq u \leq b \\ \mathcal{L}_2(u) = \frac{1}{1 - \pi_2} \int_0^{u-b} h(u-x) dK_2(x) + h(u), & u > b \end{cases} \quad (3.6)$$

όπου

$$\mathcal{L}_\infty(u) = \frac{\pi_1}{1 - \pi_1} \left[\int_0^\infty \bar{K}_1(u-x; b) dA_1(x) - \bar{K}_1(u; b) + \bar{A}_1(u) \right], \quad u \geq 0$$

$$k = \frac{\pi_2 \int_0^b \mathcal{L}_\infty(b-x) dA_2(x) - \mathcal{L}_\infty(b) + \pi_2 \bar{A}_2(b)}{v(b) - \pi_2 \int_0^b v(b-x) dA_2(x)} \quad (3.7)$$

και

$$h(u) = \pi_2 \int_{u-b}^u \mathcal{L}_1(u-t) dA_2(t) + \pi_2 \bar{A}_2(u), \quad u > b \quad (3.8)$$

Απόδειξη

Από το θεώρημα 2.5 έχουμε

$$m_1(u; b) = m_\infty(u; b) + k \frac{1 - \Psi(u)}{1 - \Psi(0)} e^{\rho_1 u}, \quad 0 \leq u \leq b$$

και

$$m_2(u; b) = \frac{1}{1 - \pi_2} \int_0^{u-b} h(u-x) K_2(x) dx + h(u), \quad u > b$$

από τις υποθέσεις που έχουμε κάνει στην αρχή της παραγράφου καταλήγουμε

$$\mathcal{L}(u; b) = \begin{cases} \mathcal{L}_1(u) = \mathcal{L}_\infty(u) + k \frac{1 - \Psi(u)}{1 - \Psi(0)} e^{\rho_1 u}, & 0 \leq u \leq b \\ \mathcal{L}_2(u) = \frac{1}{1 - \pi_2} \int_0^{u-b} h(u-x) dK_2(x) + h(u), & u > b \end{cases}$$

και από τις (2.6) και (2.8) έχουμε

$$\bar{A}_i(x) = \frac{T_{\rho_i} \bar{F}(x)}{T_{\rho_i} F(0)}, \quad x \geq 0$$

$$\pi_i = \frac{\lambda}{c_i} T_{\rho_i} \bar{F}(0)$$

και αφού

$$z(u) = \bar{F}(x)$$

η (2.27)

$$k = \frac{\pi_2 \int_0^b m_\infty(b-x; b) dA_2(x) - m_\infty(b; b) + \frac{\lambda}{c_2} T_{\rho_2} z(b)}{v(b; b) - \pi_2 \int_0^b v(b-x; b) dA_2(x)},$$

γίνεται

$$k = \frac{\pi_2 \int_0^b \mathcal{L}_\infty(b-x) dA_2(x) - \mathcal{L}_\infty(b) + \pi_2 \bar{A}_2(b)}{v(b) - \pi_2 \int_0^b v(b-x) dA_2(x)}.$$

Αν πάρουμε την (2.26) και σύμφωνα με τις παραπάνω υποθέσεις έχουμε

$$m_\infty(u; b) = \frac{\lambda}{c_1(1-\pi_1)} \left[- \int_0^u \bar{K}_1(u-x; b) T_{\rho_1} z(x) dx - \bar{K}_1(u; b) T_{\rho_1} z(0) + T_{\rho_1} z(u) \right]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L}_\infty(u) &= \frac{\lambda}{c_1(1-\pi_1)} \left[- \int_0^u \bar{K}_1(u-x; b) dT_{\rho_1} \bar{F}(x) - \bar{K}_1(u; b) T_{\rho_1} \bar{F}(0) + T_{\rho_1} \bar{F}(u) \right] \\ &= \frac{\lambda}{c_1(1-\pi_1)} \left[- \int_0^u \bar{K}_1(u-x; b) d(\bar{A}_l(x) T_{\rho_1} F(0)) - \bar{K}_1(u; b) T_{\rho_1} \bar{F}(0) + \bar{A}_l(u) T_{\rho_1} F(0) \right] \\ &= \frac{\pi_1}{(1-\pi_1)} \left[\int_0^u \bar{K}_1(u-x; b) dA_1(x) - \bar{K}_1(u; b) + \bar{A}_l(u) \right] \end{aligned}$$

Άρα

$$\mathcal{L}_\infty(u) = \frac{\pi_1}{(1-\pi_1)} \left[\int_0^u \bar{K}_1(u-x; b) dA_1(x) - \bar{K}_1(u; b) + \bar{A}_l(u) \right], \quad u \geq 0$$

■

3.3. Το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα μετά τη χρεοκοπία.

Σε αυτή την ενότητα, θα μελετήσουμε την ελαττωματική από κοινού και την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής για το πλεόνασμα τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και για το έλλειμμα τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπία, καθώς και την κατανομή του ποσού της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό κεφάλαιο u . Θεωρούμε το περιθώριο ασφαλείας $\theta_i > 0$, $i = 1, 2$.

Αν υποθέσουμε ότι $\delta = 0$ και $w(X, Y) = I(X \leq x_1)I(Y \leq x_2)$, για σταθερά $x_1, x_2 > 0$, η αναμενόμενη συνάρτηση ποινής ισούται με την από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ. $U(T -)$ και $|U(T)|$, δηλαδή του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπία. Άρα οι συναρτήσεις $m(u; b)$, $m_1(u; b)$, $m_2(u; b)$ και $m_\infty(u; b)$ ισούνται αντίστοιχα με τις $F(x_1, x_2|u; b)$, $F_1(x_1, x_2|u; b)$, $F_2(x_1, x_2|u; b)$ και $F_\infty(x_1, x_2|u; b)$.

Στο κεφάλαιο 2 έχουμε ορίσει την $z(u)$ η οποία σύμφωνα με τις υποθέσεις μας γίνεται

$$z(u) = \int_u^\infty w(u, x - u)f(x) dx = I(u \leq x_1)[\bar{F}(u) - \bar{F}(u + x_2)]$$

Από τους Lin και Willmot (1999) (Πόρισμα 5.1) η από κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας κατά το κλασικό μοντέλο κινδύνου ικανοποιεί την

$$F(x, y|u) = \begin{cases} \frac{1}{\theta E(X)} \left\{ \int_0^x \Psi(u - t)\bar{F}(t)dt - \int_0^x \Psi(u - t)\bar{F}(y + t)dt \right\} \\ \quad + \frac{1}{\theta} \Psi(u)[F_e(x + y) - F_e(x) - F_e(y)], & x \leq u \\ \frac{1 + \theta}{\theta} [\Psi(u) - \Psi(u + y)] + \frac{1}{\theta E(X)} \int_0^y \Psi(u + y - t)\bar{F}(t)dt \\ \quad + \frac{1}{\theta} \Psi(u)[F_e(x + y) - F_e(x) - F_e(y)] - \frac{1}{\theta} [F_e(x + y) - F_e(x)] & x > u \end{cases}$$

Για το μοντέλο κινδύνου σύνθετης Poisson υπό τη στρατηγική μερίσματος κατωφλίου η αντίστοιχη από κοινού συνάρτηση κατανομής ικανοποιεί την

$$F_{\infty}(x_1, x_2|u) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_1} \left\{ \frac{1}{E(X)} \int_0^{x_1} \Psi_{1,\infty}(u-t)[\bar{F}(t) - \bar{F}(x_2+t)]dt \right. \\ \left. + \Psi_{1,\infty}(u)[F_e(x_1+x_2) - F_e(x_1) - F_e(x_2)] \right\}, & 0 \leq x_1 \leq u \\ \frac{1}{\theta_1} \left\{ (1+\theta_1)[\Psi_{1,\infty}(u) - \Psi_{1,\infty}(u+x_2)] + \frac{1}{E(X)} \int_0^{x_2} \Psi_{1,\infty}(u+x_2-t)\bar{F}(t)dt \right. \\ \left. + \Psi_{1,\infty}(u)[F_e(x_1+x_2) - F_e(x_1) - F_e(x_2)] \right. \\ \left. - [F_e(x_1+x_2) - F_e(x_1)] \right\} & x_1 > u \end{cases} \quad (3.9)$$

Οι αντίστοιχες περιθώριες συναρτήσεις κατανομής

$$F_{\infty, X_1}(x_1|u) = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} F_{\infty}(x_1, x_2|u) \quad \text{και} \quad F_{\infty, X_2}(x_2|u) = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} F_{\infty}(x_1, x_2|u)$$

άρα έχουμε

$$F_{\infty, X_1}(x_1|u) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_1} \left\{ \frac{1}{E(X)} \int_0^{x_1} \Psi_{1,\infty}(u-t)\bar{F}(t)dt - \Psi_{1,\infty}(u)F_e(x_1) \right\}, & 0 \leq x_1 \leq u \\ \frac{1}{\theta_1} \{ \theta_1 \Psi_{1,\infty}(u) + [1 + \Psi_{1,\infty}(u)]\bar{F}_e(x_1) \}, & x_1 > u \end{cases} \quad (3.10)$$

και

$$F_{\infty, X_2}(x_2|u) = \frac{1}{\theta_1} \left\{ (1+\theta_1)[\Psi_{1,\infty}(u) - \Psi_{1,\infty}(u+x_2)] + \frac{1}{E(X)} \int_0^{x_2} \Psi(u+x_2-t)\bar{F}_e(t)dt - \Psi_{1,\infty}(u)F_e(x_2) \right\}. \quad (3.11)$$

Στη συνέχεια από τις (2.26)-(2.30) παράγονται αναλυτικές εκφράσεις για την $F(x_1, x_2|u; b)$

Πόρισμα 3.4. Αν θέσουμε

$$\sigma(x_1, x_2|u) = \bar{F}_e(u) + \bar{F}_e(x_1 + x_2) - \bar{F}_e(x_1) - \bar{F}_e(u + x_2), \quad u \geq 0$$

τότε η $F(x_1, x_2|u; b)$ δίνεται από την

$$F_1(x_1, x_2|u; b) = F_{\infty}(x_1, x_2|b) + \kappa[1 - \Psi_{1,\infty}(u)], \quad 0 \leq u \leq b$$

$$F_2(x_1, x_2|u; b) = -\frac{1 + \theta_2}{\theta_2} \left[\int_b^u \Psi_{2,\infty}(u - x) dh(x) + \Psi_{2,\infty}(u - b)h(b) \right] + h(u), \quad u > b,$$

όπου

$$\kappa = \frac{(\theta_1 - \theta_2)F_{\infty}(x_1, x_2|b) - \bar{F}_e(b) + I(b \leq x_1)\sigma(x_1, x_2|b)}{(\theta_1 - \theta_2)\Psi_{1,\infty}(b) + \theta_2}$$

και

$$h(u) = \frac{1}{1 + \theta_2} \int_{u-b}^u F_1(x_1, x_2|u - x; b) dF_e(x) + \frac{I(u \leq x_1)}{1 + \theta_2} \sigma(x_1, x_2|u), \quad u > b,$$

Αν θέσουμε $x_1 \rightarrow \infty$ ή $x_2 \rightarrow \infty$, παράγουμε την ελαττωματική περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία ή την ελαττωματική περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία αντίστοιχα.

Πόρισμα 3.5. Η ελαττωματική περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία $F_{x_1}(x_1|u; b)$ δίνεται από την

$$F_{1,x_1}(x_1|u; b) = F_{\infty,x_1}(x_1|b) + \kappa[1 - \Psi_{1,\infty}(u)], \quad 0 \leq u \leq b, \quad (3.12)$$

$$F_{2,x_1}(x_1, |u; b) = -\frac{1 + \theta_2}{\theta_2} \left[\int_b^u \Psi_{2,\infty}(u - x) dh(x) + \Psi_{2,\infty}(u - b)h(b) \right] + h(u), \quad u > b$$

(3.13)

όπου

$$\kappa = \frac{(\theta_1 - \theta_2)F_{\infty, X_1}(x_1|b) - \bar{F}_e(b) + I(u \leq x_1)[\bar{F}_e(b) - \bar{F}_e(x_1)]}{(\theta_1 - \theta_2)\Psi_{1, \infty}(b) + \theta_2} \quad (3.14)$$

και

$$h(u) = \frac{1}{1 + \theta_2} \int_{u-b}^u F_{1, X_1}(x_1|u-x; b) dF_e(x) + \frac{I(u \leq x_1)}{1 + \theta_2} [\bar{F}_e(u) - \bar{F}_e(x_1)], \quad u > b. \quad (3.15)$$

Πόρισμα 3.6. Η ελαττωματική περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας $F_{X_2}(x_2|u; b)$ δίνεται από την

$$F_{1, X_2}(x_2|u; b) = F_{\infty, X_2}(x_2|b) + \kappa[1 - \Psi_{1, \infty}(u)], \quad 0 \leq u \leq b, \quad (3.16)$$

$$F_{2, X_2}(x_2|u; b) = -\frac{1 + \theta_2}{\theta_2} \left[\int_b^u \Psi_{2, \infty}(u-x) dh(x) + \Psi_{2, \infty}(u-b)h(b) \right] + h(u), \quad u > b \quad (3.17)$$

όπου

$$\kappa = \frac{(\theta_1 - \theta_2)F_{\infty, X_2}(x_2|b) - \bar{F}_e(b + x_2)}{(\theta_1 - \theta_2)\Psi_{1, \infty}(b) + \theta_2} \quad (3.18)$$

και

$$h(u) = \frac{1}{1 + \theta_2} \int_{u-b}^u F_{1, X_2}(x_2|u-x; b) dF_e(x) + \frac{1}{1 + \theta_2} [\bar{F}_e(u) - \bar{F}_e(u + x_2)], \quad u > b. \quad (3.19)$$

Όταν το επίπεδο κατωφλίου είναι $b - u$ και το αρχικό κεφάλαιο είναι μηδέν. Το πόρισμα 3.6 μας οδηγεί στην κατανομή της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό επίπεδο.

Πόρισμα 3.7. Η κατανομή της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό επίπεδο δίνεται από την

$$G(x_2|0) = F_{\infty, x_2}(x_2|b - u) + \frac{\theta_1}{1 + \theta_1} k, \quad 0 \leq u \leq b \quad (3.20)$$

με

$$k = \frac{(\theta_1 - \theta_2)F_{\infty, x_2}(x_2|b - u) - \bar{F}_e(b - u + x_2)}{(\theta_1 - \theta_2)\Psi_{1, \infty}(b - u) + \theta_2}$$

Για την καλύτερη κατανόηση όλου του 3^{ου} κεφαλαίου ακολουθούν παραδείγματα στο κεφάλαιο 4.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Εφαρμογές

Παράδειγμα 4.1. Έστω ότι οι ατομικές απαιτήσεις κατανέμονται εκθετικά με μέσο $\frac{1}{\mu}$, $\mu > 0$, και

$$F(x) = 1 - e^{-\mu x} = F_e(x), \quad x > 0.$$

Ας θέσουμε $\beta_i = \frac{\theta_i}{1+\theta_i}\mu$, $i = 1,2$ και η πιθανότητα χρεοκοπίας όπως είναι γνωστό έχει τη μορφή

$$\Psi_{i,\infty}(u) = \frac{1}{1+\theta_i} e^{-\beta_i u}, \quad u \geq 0, i = 1,2.$$

Τότε από την (3.4) η πιθανότητα της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό κεφάλαιο δίνεται ως

$$\begin{aligned} \Psi(0; b - u) &= \frac{(1 + \theta_1)(\theta_1 - \theta_2)\Psi_{1,\infty}(b - u; b) + \theta_2}{(1 + \theta_1)[(\theta_1 - \theta_2)\Psi_{1,\infty}(b - u; b) + \theta_2]} \\ &= \frac{(\theta_1 - \theta_2)e^{-\beta_1(b-u)} + \theta_2}{(\theta_1 - \theta_2)e^{-\beta_1(b-u)} + (1 + \theta_1)\theta_2}, \quad 0 \leq u \leq b. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Στη συνέχεια από την (3.1) έχουμε

$$\begin{aligned} \Psi_1(u) &= 1 - q(b) + q(b)\Psi_{1,\infty}(u; b) \\ &= 1 - q(b) + \frac{q(b)}{1 + \theta_1} e^{-\beta_1 u}, \quad 0 \leq u \leq b \end{aligned} \quad (4.2)$$

όπου $q(b)$ από την (3.2)

$$\begin{aligned} q(b) &= \frac{\theta_2}{(\theta_1 + \theta_2)\Psi_{1,\infty}(b) + \theta_2} \\ &= \frac{(1 + \theta_1)\theta_2}{(\theta_1 + \theta_2)e^{-\beta_1 b} + (1 + \theta_1)\theta_2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Αν πάρουμε την (3.3)

$$h(u) = \frac{1}{1 + \theta_2} \int_{u-b}^u \Psi_1(u-t; b) dF_e(t) + \frac{1}{1 + \theta_2} \bar{F}_e(u)$$

από την (4.2) γίνεται

$$\begin{aligned} h(u) &= \frac{1}{1 + \theta_2} \int_{u-b}^u \left(1 - q(b) + \frac{q(b)}{1 + \theta_1} e^{-\beta_1(u-t)} \right) d(1 - e^{-\mu t}) + \frac{1}{1 + \theta_2} e^{-\mu u} \\ &= \frac{1}{1 + \theta_2} \left\{ - \int_{u-b}^u (1 - q(b)) de^{-\mu t} - \frac{q(b)}{1 + \theta_1} \int_{u-b}^u e^{-\beta_1(u-t)} de^{-\mu t} + e^{-\mu u} \right\} \\ &= \frac{1}{1 + \theta_2} \left\{ [1 - q(b)] e^{-\mu(u-b)} - [1 - q(b)] e^{-\mu u} + \frac{\mu q(b)}{1 + \theta_1} e^{-\beta_1 u} \int_{u-b}^u e^{(\beta_1 - \mu)t} dt \right. \\ &\quad \left. + e^{-\mu u} \right\} \\ &= \frac{1}{1 + \theta_2} \left\{ [1 - q(b)] e^{-\mu(u-b)} + q(b) e^{-\mu u} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu q(b)}{1 + \theta_1} \frac{1}{\beta_1 - \mu} e^{-\beta_1 u} [1 - e^{-(\beta_1 - \mu)b}] e^{(\beta_1 - \mu)u} \right\} \\ &= \frac{1}{1 + \theta_2} \left\{ [1 - q(b)] e^{-\mu(u-b)} + q(b) e^{-\mu u} - q(b) [1 - e^{-(\beta_1 - \mu)b}] e^{-\mu u} \right\} \\ &= \frac{1}{1 + \theta_2} [1 - q(b) + q(b) e^{-\beta_1 b}] e^{-\mu(u-b)} \\ &= \frac{1}{1 + \theta_2} Q(b) e^{-\mu(u-b)}, \quad u \\ &\quad > b, \end{aligned} \tag{4.4}$$

όπου $Q(b) = 1 - q(b) + q(b) e^{-\beta_1 b}$.

Αν πάρουμε τώρα την (3.1) έχουμε

$$\begin{aligned}
\Psi_2(u) &= -\frac{1+\theta_2}{\theta_2} \int_0^{u-b} h(u-x) d\Psi_{2,\infty}(x; b) + h(u) \\
&= -\frac{1+\theta_2}{\theta_2} \int_0^{u-b} \frac{1}{1+\theta_2} Q(b) e^{-\mu(u-x-b)} d \left[\frac{1}{1+\theta_2} e^{-\beta_2 x} \right] + \frac{1}{1+\theta_2} Q(b) e^{-\mu(u-b)} \\
&= \frac{1}{1+\theta_2} \left\{ -\frac{1}{\theta_2} \int_0^{u-b} Q(b) e^{-\mu(u-x-b)} d e^{-\beta_2 x} + Q(b) e^{-\mu(u-b)} \right\} \\
&= \frac{1}{1+\theta_2} \left\{ Q(b) \frac{\beta_2}{\theta_2} \int_0^{u-b} e^{-(\beta_2-\mu)x} dx + Q(b) \right\} e^{-\mu(u-b)} \\
&= \frac{1}{1+\theta_2} \left\{ -Q(b) \frac{\beta_2}{\theta_2} \frac{1}{\beta_2-\mu} [e^{-(\beta_2-\mu)(u-b)} - 1] + Q(b) \right\} e^{-\mu(u-b)} \\
&= \frac{1}{1+\theta_2} \{ Q(b) [e^{-(\beta_2-\mu)(u-b)} - 1] + Q(b) \} e^{-\mu(u-b)} \\
&= \frac{1}{1+\theta_2} Q(b) e^{-\beta_2(u-b)}, \quad u > b. \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Ανακεφαλαιώνοντας,

$$\Psi(u; b) = \begin{cases} \Psi_1(u) = 1 - q(b) + \frac{q(b)}{1+\theta_1} e^{-\beta_1 u}, & 0 \leq u \leq b \\ \Psi_2(u) = \frac{1}{1+\theta_2} [1 - q(b) + q(b) e^{-\beta_1 b}] e^{-\beta_2(u-b)}, & u > b \end{cases} \tag{4.6}$$

όπου $q(b)$ δίνεται από την (4.3) και $\beta_i = \frac{\theta_i}{1+\theta_i} \mu$, $i = 1, 2$

Παρατηρούμε ότι $0 \leq Q(b) \leq 1$ και μπορούμε να δώσουμε ένα τύπου Lundberg άνω φράγμα για την τη πιθανότητα χρεοκοπίας $\Psi_2(u)$

$$\Psi_2(u) \leq \frac{1}{1 + \theta_2} e^{-\beta_2(u-b)}$$

Αφού οι ατομικές απαιτήσεις κατανέμονται εκθετικά με συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = 1 - e^{-\mu x} = F_e(x), \quad y > 0, \quad \mu > 0$$

και συγκεκριμένα

$$A_1(x) = A_2(x) = 1 - e^{-\mu x} = F(x) = F_e(x)$$

$$F_e(x) = \int_0^x \frac{\bar{F}(y)}{E(x)} dy = \int_0^x \frac{e^{-\mu y}}{\frac{1}{\mu}} dy = \int_0^x \mu e^{-\mu y} dy$$

ο μετασχηματισμός Laplace της είναι

$$\hat{f}_e(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_e(x) dx = \int_0^\infty e^{-sx} \frac{\bar{F}(y)}{E(x)} dx = \int_0^\infty e^{-sx} \mu e^{-\mu x} dx = \frac{\mu}{\mu + s}$$

και από την (2.8) έχουμε

$$\pi_i = \frac{\lambda [1 - \hat{f}(\rho_i)]}{c_i \rho_i} = \frac{\lambda \left[1 - \frac{\mu}{\mu + \rho_i}\right]}{c_i \rho_i} = \frac{\lambda}{c_i (\mu + \rho_i)}, \quad \text{για } i = 1, 2. \quad (4.7)$$

Έχει αποδειχθεί από τους Lin et al. (2003) ότι

$$\bar{K}_i(u) = \pi_i e^{-\tau_i u}, \quad i = 1, 2$$

και

$$\Psi(u) = \frac{\mu - \tau_1}{\mu + \rho_1} e^{-(\rho_1 + \tau_1)u}$$

όπου

$$\tau_i = (1 - \pi_i)\mu.$$

Επιπλέον,

$$\mathcal{L}_\infty(u) = \frac{\pi_1}{(1 - \pi_1)} \left[\int_0^u \bar{K}_1(u - x; b) dA_1(x) - \bar{K}_1(u; b) + \bar{A}_1(u) \right], \quad u \geq 0$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\infty(u) &= \frac{\pi_1}{(1-\pi_1)} \left[\int_0^u \pi_1 e^{-\tau_1(u-x)} d(1-e^{-\mu x}) - \pi_1 e^{-\tau_1 u} + e^{-\mu u} \right], \quad u \geq 0 \\
&= \frac{\pi_1}{(1-\pi_1)} \left[\int_0^u \pi_1 e^{-\tau_1(u-x)} \mu e^{-\mu x} dx - \pi_1 e^{-\tau_1 u} + e^{-\mu u} \right] \\
&= \frac{\pi_1}{(1-\pi_1)} \left[\pi_1 \mu e^{-\tau_1 u} \int_0^u e^{(\tau_1-\mu)x} dx - \pi_1 e^{-\tau_1 u} + e^{-\mu u} \right] \\
&= \frac{\pi_1}{(1-\pi_1)} \left[\frac{\pi_1 \mu e^{-\tau_1 u}}{\tau_1 - \mu} (e^{(\tau_1-\mu)u} - 1) - \pi_1 e^{-\tau_1 u} + e^{-\mu u} \right] \\
&= \frac{\pi_1}{(1-\pi_1)} \left[\frac{\pi_1 \mu e^{-\tau_1 u}}{(1-\pi_1)\mu - \mu} (e^{(\tau_1-\mu)u} - 1) - \pi_1 e^{-\tau_1 u} + e^{-\mu u} \right] \\
&= \frac{\pi_1}{(1-\pi_1)} \left[e^{-\tau_1 u} (e^{(\tau_1-\mu)u} - 1) - \pi_1 e^{-\tau_1 u} + e^{-\mu u} \right] \\
&= \frac{\pi_1}{(1-\pi_1)} \left[e^{-\mu u} - e^{-\tau_1 u} - \pi_1 e^{-\tau_1 u} + e^{-\mu u} \right] \\
&= \frac{\pi_1}{(1-\pi_1)} (1-\pi_1) e^{-\tau_1 u} \\
\Rightarrow \mathcal{L}_\infty(u) &= \pi_1 e^{-\tau_1 u} = \bar{K}_1(u) \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Να σημειώσουμε ότι $-\tau_i$ και ρ_i οι αρνητικές και οι θετικές ρίζες της θεμελιώδης εξίσωσης του Lundberg

$$c_i s + \lambda \hat{f}(s) - (\lambda + \delta) = 0.$$

με $i = 1, 2$.

Για να υπολογίσουμε την $\mathcal{L}(u; b)$, αρχικά παίρνουμε την (3.7)

$$k = \frac{\pi_2 \int_0^b \mathcal{L}_\infty(b-x) dA_2(x) - \mathcal{L}_\infty(b) + \pi_2 \bar{A}_2(b)}{v(b) - \pi_2 \int_0^b v(b-x) dA_2(x)}$$

ξεκινώντας με τον αριθμητή έχουμε

$$\begin{aligned}
&\pi_2 \int_0^b \mathcal{L}_\infty(b-x) dA_2(x) - \mathcal{L}_\infty(b) + \pi_2 \bar{A}_2(b) \\
&= \pi_2 \int_0^b \pi_1 e^{-\tau_1(b-x)} \mu e^{-\mu x} dx - \mathcal{L}_\infty(b) + \pi_2 e^{-\mu b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi_2 \pi_1 \mu e^{-\tau_1 b} \int_0^b e^{(\tau_1 - \mu)x} dx - \mathcal{L}_\infty(b) + \pi_2 e^{-\mu b} \\
&= \pi_2 \pi_1 \mu e^{-\tau_1 b} [e^{\tau_1 b - \mu b} - 1] - \mathcal{L}_\infty(b) + \pi_2 e^{-\mu b} \\
&= \pi_2 \pi_1 \mu e^{-\tau_1 b} \left[\frac{e^{\tau_1 b - \mu b} - 1}{\tau_1 - \mu} \right] - \mathcal{L}_\infty(b) + \pi_2 e^{-\mu b} \\
&= \frac{\pi_2 \pi_1 \mu e^{-\tau_1 b}}{-\pi_1 \mu} [e^{\tau_1 b - \mu b} - 1] - \mathcal{L}_\infty(b) + \pi_2 e^{-\mu b} \\
&= -\pi_2 e^{-\mu b} + \pi_2 e^{-\tau_1 b} - \mathcal{L}_\infty(b) + \pi_2 e^{-\mu b} \\
&= \left(\frac{\pi_2}{\pi_1} - 1 \right) \mathcal{L}_\infty(b)
\end{aligned}$$

άρα έχουμε

$$\begin{aligned}
k &= \frac{\left(\frac{\pi_2}{\pi_1} - 1 \right) \mathcal{L}_\infty(b)}{\frac{1 - \Psi(b)}{1 - \Psi(0)} e^{\rho_1 b} - \pi_2 \int_0^b \frac{1 - \Psi(b-x)}{1 - \Psi(0)} e^{\rho_1(b-x)} dA_2(x)} \\
&= \frac{1 - \frac{\mu - \tau_1}{\mu + \rho_1} \left(\frac{\pi_2}{\pi_1} - 1 \right) \pi_1 e^{-\tau_1 b}}{\left[1 - \frac{\mu - \tau_1}{\mu + \rho_1} e^{-(\rho_1 + \tau_1)b} \right] e^{\rho_1 b} + \pi_2 e^{\rho_1 b} \int_0^b \left[1 - \frac{\mu - \tau_1}{\mu + \rho_1} e^{-(\rho_1 + \tau_1)(b-x)} \right] e^{-\rho_1 x} d(e^{-\mu x})} \\
&= \frac{\rho_1 + \tau_1}{\mu + \rho_1} \frac{(\pi_2 - \pi_1) e^{-(\rho_1 + \tau_1)b}}{1 - \frac{\mu - \tau_1}{\mu + \rho_1} e^{-(\rho_1 + \tau_1)b} + \frac{\mu \pi_2}{\mu + \rho_1} [e^{-(\mu + \rho_1)b} - 1] + \mu \pi_2 \frac{\mu - \tau_1}{\mu + \rho_1} e^{-(\rho_1 + \tau_1)b} \int_0^b e^{(\tau_1 - \mu)x} dx} \\
&= \frac{\rho_1 + \tau_1}{\mu + \rho_1} \frac{(\pi_2 - \pi_1) e^{-(\rho_1 + \tau_1)b}}{1 - \frac{\mu - \tau_1}{\mu + \rho_1} e^{-(\rho_1 + \tau_1)b} + \frac{\mu \pi_2}{\mu + \rho_1} [e^{-(\mu + \rho_1)b} - 1] + \frac{\mu \pi_2}{\mu + \rho_1} [e^{-(\rho_1 + \tau_1)b} - e^{-(\mu + \rho_1)b}]} \\
&\Rightarrow k \\
&= \frac{(\rho_1 + \tau_1)(\pi_2 - \pi_1) e^{-(\rho_1 + \tau_1)b}}{\rho_1 + \tau_2 + (\tau_1 - \tau_2) e^{-(\rho_1 + \tau_1)b}} \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Από την (3.6) έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1(u) &= \mathcal{L}_\infty(u) + k \frac{1 - \Psi(u)}{1 - \Psi(0)} e^{\rho_1 u} \\
&= \pi_1 e^{-(1-\pi_1)\mu u} + k \frac{1 - \frac{\mu - \tau_1}{\mu + \rho_1} e^{-(\rho_1 + \tau_1)u}}{1 - \frac{\mu - \tau_1}{\mu + \rho_1}} e^{\rho_1 u} \\
&= \left\{ \pi_1 - \frac{k(\mu - \tau_1)}{\rho_1 + \tau_1} \right\} e^{-\tau_1 u} + \frac{k(\mu - \tau_1)}{\rho_1 + \tau_1} e^{\rho_1 u} \\
&= \left\{ \pi_1 - \frac{k(\mu - (1 - \pi_1)\mu)}{\rho_1 + \tau_1} \right\} e^{-\tau_1 u} + \frac{k(\mu - (1 - \pi_1)\mu)}{\rho_1 + \tau_1} e^{\rho_1 u} \\
&= \left\{ \pi_1 - \frac{(\rho_1 + \tau_1)(\pi_2 - \pi_1)e^{-(\rho_1 + \tau_1)b}}{\rho_1 + \tau_2 + (\tau_1 - \tau_2)e^{-(\rho_1 + \tau_1)b}} \pi_1 \mu \right\} e^{-\tau_1 u} \\
&\quad + \frac{(\rho_1 + \tau_1)(\pi_2 - \pi_1)e^{-(\rho_1 + \tau_1)b}}{\rho_1 + \tau_2 + (\tau_1 - \tau_2)e^{-(\rho_1 + \tau_1)b}} \pi_1 \mu e^{\rho_1 u} \\
&= \pi_1 \left\{ 1 - \frac{\mu(\pi_2 - \pi_1)e^{-(\rho_1 + \tau_1)b}}{\rho_1 + \tau_2 + (\tau_1 - \tau_2)e^{-(\rho_1 + \tau_1)b}} \right\} e^{-\tau_1 u} \\
&\quad + \frac{\mu(\pi_2 - \pi_1)e^{-(\rho_1 + \tau_1)b}}{\rho_1 + \tau_2 + (\tau_1 - \tau_2)e^{-(\rho_1 + \tau_1)b}} e^{\rho_1 u} \\
&= \pi_1 r(b) e^{-\tau_1 u} + [1 - r(b)] e^{\rho_1 u}
\end{aligned}$$

όπου

$$r(b) = 1 - \frac{\mu(\pi_2 - \pi_1)e^{-(\rho_1 + \tau_1)b}}{\rho_1 + \tau_2 + (\tau_1 - \tau_2)e^{-(\rho_1 + \tau_1)b}}$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε την $h(u)$, η οποία από την (3.8) είναι της παρακάτω μορφής

$$\begin{aligned} h(u) &= \pi_2 \int_{u-b}^u \mathcal{L}_1(u-t) dA_2(t) + \pi_2 \bar{A}_2(u) \\ &= \pi_2 \left\{ \int_{u-b}^u \left\{ \pi_1 r(b) e^{-\tau_1(u-t)} + [1 - r(b)] e^{\rho_1(u-t)} \right\} \mu e^{-\mu t} dt + e^{-\mu u} \right\} \\ &= \pi_2 \left\{ \int_{u-b}^u \pi_1 r(b) e^{-\tau_1(u-t)} \mu e^{-\mu t} dt + \int_{u-b}^u e^{\rho_1(u-t)} \mu e^{-\mu t} dt \right. \\ &\quad \left. - \int_{u-b}^u r(b) e^{\rho_1(u-t)} \mu e^{-\mu t} dt + e^{-\mu u} \right\} \end{aligned}$$

Για να γίνουν ευκολότεροι οι υπολογισμοί θα δούμε ξεχωριστά τα ολοκληρώματα της παραπάνω μορφής της $h(u)$

Το 1^ο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} &\int_{u-b}^u \pi_1 r(b) e^{-\tau_1(u-t)} \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \mu \pi_1 r(b) e^{-\tau_1 u} \int_{u-b}^u e^{(\tau_1 - \mu)t} dt \\ &= \frac{\mu \pi_1 r(b) e^{-\tau_1 u}}{\tau_1 - \mu} [e^{(\tau_1 - \mu)u} - e^{(\tau_1 - \mu)(u-b)}] \\ &= -r(b) [e^{-\mu u} - e^{-\tau_1 b - \mu u + \mu b}] \\ &= -r(b) e^{-\mu u} + r(b) e^{-\mu u} e^{-(\tau_1 - \mu)b} \end{aligned}$$

Το 2^ο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \int_{u-b}^u e^{\rho_1(u-t)} \mu e^{-\mu t} dt &= -\frac{\mu e^{\rho_1 u}}{\rho_1 + \mu} [e^{-(\rho_1 + \mu)u} - e^{-(\rho_1 + \mu)(u-b)}] \\ &= -\frac{\mu}{\rho_1 + \mu} e^{-\mu u} + \frac{\mu}{\rho_1 + \mu} e^{\rho_1 b - \mu u + \mu b} \end{aligned}$$

Το 3^ο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \int_{u-b}^u r(b) e^{\rho_1(u-t)} \mu e^{-\mu t} dt &= \mu r(b) e^{\rho_1 u} [e^{-(\rho_1 + \mu)u} - e^{-(\rho_1 + \mu)(u-b)}] \\ &= -\frac{\mu}{\rho_1 + \mu} r(b) e^{-\mu u} + \frac{\mu}{\rho_1 + \mu} r(b) e^{\rho_1 b - \mu u + \mu b} \end{aligned}$$

Αν ενώσουμε όλα τα παραπάνω η $h(u)$ γίνεται

$$\begin{aligned} h(u) &= \pi_2 \left\{ \int_{u-b}^u \pi_1 r(b) e^{-\tau_1(u-t)} \mu e^{-\mu t} dt + \int_{u-b}^u e^{\rho_1(u-t)} \mu e^{-\mu t} dt \right. \\ &\quad \left. - \int_{u-b}^u r(b) e^{\rho_1(u-t)} \mu e^{-\mu t} dt + e^{-\mu u} \right\} \\ &= \pi_2 \left\{ r(b) e^{-\mu u} - r(b) e^{-\mu u} e^{-(\tau_1 - \mu)b} - \frac{\mu}{\rho_1 + \mu} e^{-\mu u} + \frac{\mu}{\rho_1 + \mu} e^{\rho_1 b - \mu u + \mu b} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu}{\rho_1 + \mu} r(b) e^{-\mu u} - \frac{\mu}{\rho_1 + \mu} r(b) e^{\rho_1 b - \mu u + \mu b} + e^{-\mu u} \right\} \\ &= \pi_2 e^{-\mu u} \left\{ r(b) - r(b) e^{-(\tau_1 - \mu)b} - \frac{\mu}{\rho_1 + \mu} + \frac{\mu}{\rho_1 + \mu} e^{\rho_1 b + \mu b} + \frac{\mu}{\rho_1 + \mu} r(b) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu}{\rho_1 + \mu} r(b) e^{\rho_1 b + \mu b} + 1 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi_2 e^{-\mu u} \left\{ -r(b) + r(b)e^{-(\tau_1 - \mu)b} - \frac{\mu}{\rho_1 + \mu} + \frac{\mu}{\rho_1 + \mu} e^{\rho_1 b + \mu b} + \frac{\mu}{\rho_1 + \mu} r(b) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\mu}{\rho_1 + \mu} r(b)e^{\rho_1 b + \mu b} + 1 \right\} \\
&= \pi_2 e^{-\mu u} \left\{ r(b)e^{-(\tau_1 - \mu)b} + \frac{\mu}{\rho_1 + \mu} e^{\rho_1 b + \mu b} [1 - r(b)] + \frac{\rho_1}{\rho_1 + \mu} - \frac{\rho_1}{\rho_1 + \mu} r(b) \right\} \\
&= \pi_2 e^{-\mu(u-b)} \left\{ r(b)e^{-\tau_1 b} + \frac{\mu}{\rho_1 + \mu} e^{\rho_1 b} [1 - r(b)] + \frac{\rho_1}{\rho_1 + \mu} [1 - r(b)] e^{-\mu b} \right\}.
\end{aligned}$$

Αν θέσουμε

$$R(b) = r(b)e^{-\tau_1 b} + \frac{\mu}{\rho_1 + \mu} e^{\rho_1 b} [1 - r(b)] + \frac{\rho_1}{\rho_1 + \mu} [1 - r(b)] e^{-\mu b}$$

η $h(u)$ γίνεται

$$h(u) = \pi_2 R(b) e^{-\mu(u-b)}.$$

Για να βρούμε την $\mathcal{L}_2(u)$ από την (3.6) έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2(u) &= \frac{1}{1 - \pi_2} \int_0^{u-b} h(u-x) dK_2(x) + h(u) \\
&= \frac{1}{1 - \pi_2} \int_0^{u-b} \pi_2 R(b) e^{-\mu(u-x-b)} d(1 - \pi_2 e^{-\tau_2 x}) + \pi_2 R(b) e^{-\mu(u-b)} \\
&= \frac{1}{1 - \pi_2} \int_0^{u-b} \pi_2 R(b) e^{-\mu(u-x-b)} \pi_2 \tau_2 e^{-\tau_2 x} dx + \pi_2 R(b) e^{-\mu(u-b)} \\
&= \frac{\pi_2 R(b)}{1 - \pi_2} \pi_2 \tau_2 e^{-\mu(u-b)} \int_0^{u-b} e^{(\mu - \tau_2)x} dx + \pi_2 R(b) e^{-\mu(u-b)} \\
&= \frac{\pi_2 R(b)}{1 - \pi_2} \frac{\pi_2 \tau_2}{\mu - \tau_2} e^{-\mu(u-b)} [e^{(\mu - \tau_2)(u-b)} - 1] + \pi_2 R(b) e^{-\mu(u-b)} \\
&= \frac{\pi_2 R(b)}{1 - \pi_2} \frac{\pi_2 (1 - \pi_2) \mu}{\mu \pi_2} e^{-\mu(u-b)} [e^{(\mu - \tau_2)(u-b)} - 1] + \pi_2 R(b) e^{-\mu(u-b)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi_2 R(b) \pi_2 (1 - \pi_2) \mu}{1 - \pi_2 \mu \pi_2} e^{-\mu(u-b)} [e^{(\mu-\tau_2)(u-b)} - 1] + \pi_2 R(b) e^{-\mu(u-b)} \\
&= \pi_2 R(b) e^{\tau_2(u-b)}, \quad u > b.
\end{aligned}$$

Τελικά, αν πάρουμε όλα τα παραπάνω ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας $\mathcal{L}(u; b)$ δίνεται από τη παρακάτω σχέση

$$\mathcal{L}(u; b) = \begin{cases} \mathcal{L}_1(u) = \pi_1 r(b) e^{-\tau_1 u} + [1 - r(b)] e^{\rho_1 u}, & 0 \leq u \leq b \\ \mathcal{L}_2(u) = \pi_2 R(b) e^{\tau_2(u-b)}, & u > b \end{cases} \quad (4.10)$$

όπου

$$R(b) = r(b) e^{-\tau_1 b} + \frac{\mu}{\rho_1 + \mu} e^{\rho_1 b} [1 - r(b)] + \frac{\rho_1}{\rho_1 + \mu} [1 - r(b)] e^{-\mu b} \quad (4.11)$$

και

$$r(b) = 1 - \frac{\mu(\pi_2 - \pi_1) e^{-(\rho_1 + \tau_1)b}}{\rho_1 + \tau_2 + (\tau_1 - \tau_2) e^{-(\rho_1 + \tau_1)b}}. \quad (4.12)$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την ελαττωματική από κοινού και την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής για το πλεόνασμα τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και για το έλλειμμα τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας, καθώς και την κατανομή του ποσού της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό κεφάλαιο u . Για τον υπολογισμό των συναρτήσεων χρησιμοποιήθηκε mathematica.

Η από κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας όταν οι ατομικές απαιτήσεις κατανέμονται εκθετικά δίνεται από των παρακάτω τύπο αν πάρουμε την (3.9)

Για $0 \leq x_1 \leq u$

$$\begin{aligned}
& F_{\infty}(x_1, x_2|u) \\
&= \frac{1}{\theta_1(1+\theta_1)} e^{-\beta_1 u} \left\{ (1 - e^{-\mu x_2})(e^{-\mu x_1} - 1) \right. \\
&\quad \left. + \mu \left(\frac{e^{x_1(\beta_1 - \mu)} - 1}{\beta_1 - \mu} - \frac{e^{-\mu x_2}(e^{x_1(\mu + \beta_1)} - 1)}{\beta_1 + \mu} \right) \right\} \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Για $x_1 > u$

$$\begin{aligned}
& F_{\infty}(x_1, x_2|u) \\
&= \frac{1}{\theta_1} \left\{ e^{-\beta_1 u} (1 - e^{-\beta_1 x_2}) - e^{-\mu x_1} (1 - e^{-\mu x_2}) - \frac{1}{1 + \theta_1} e^{-\beta_1 u} (1 - e^{-\mu x_1}) (1 - e^{-\mu x_2}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mu}{(1 + \theta_1)(\beta_1 - \mu)} e^{\beta_1(u+x_2)} (e^{x_2(\beta_1 - \mu)}) \right\}
\end{aligned}$$

Οι αντίστοιχες περιθώριες συναρτήσεις κατανομής είναι

$$F_{\infty, X_1}(x_1|u) = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} F_{\infty}(x_1, x_2|u)$$

$$\begin{aligned}
& F_{\infty, X_1}(x_1|u) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\theta_1(1+\theta_1)(\beta_1 - \mu)} e^{-\beta_1 u - \mu x_1} \{ \beta_1 - \beta_1 e^{\mu x_1} + \mu(e^{\beta_1 x_1} - 1) \}, & 0 \leq x_1 \leq u \\ \frac{1}{\theta_1(1+\theta_1)} e^{-\beta_1 u - \mu x_1} \{ 1 + \theta_1 e^{\mu x_1} + (1 + \theta_1) e^{\beta_1 u} \}, & x_1 > u \end{cases}
\end{aligned}$$

και

$$F_{\infty, X_2}(x_2|u) = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} F_{\infty}(x_1, x_2|u)$$

$$\begin{aligned}
& F_{\infty, X_2}(x_2|u) \\
&= \frac{1}{\theta_1(1+\theta_1)(\beta_1 - \mu)} e^{-x_2(\beta_1 + \mu) - u\beta_1} \{ \beta_1 e^{x_2 \beta_1} + (\beta_1 - \mu)\theta_1 e^{x_2(\beta_1 + \mu)} \\
&\quad - (\beta_1 \theta_1 + \beta_1 - \theta_1 \mu) e^{x_2 \mu} \}
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια παρατίθεται αριθμητικό παράδειγμα και οι υπολογισμοί έχουν γίνει με τη βοήθεια του προγράμματος mathematica.

Θεωρούμε ότι οι ατομικές απαιτήσεις κατανέμονται εκθετικά με μέσο $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{4}$ και

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{4}x} = F_e(x),$$

έστω ότι οι τιμές του περιθωρίου ασφαλείας $\theta_1 = 0,5$ και $\theta_2 = 0,6$, το κατώφλι $b = 5$ και το αρχικό κεφάλαιο $u = 4$.

Από τη σχέση (4.1) η πιθανότητα της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό κεφάλαιο είναι $\Psi(0; b - u) = 0,67$. Από τη σχέση (4.6) για $0 \leq u \leq b$ η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι $\Psi_1(u) = 0,005$ και για $u > b$ και συγκεκριμένα $u = 6$ η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι $\Psi_2(u) = 0,0006$.

Από τη σχέση $c_i = (1 + \theta_i) \lambda E\{Y_i\}$ για $i = 1, 2$ μπορούμε να υπολογίσουμε τον ρυθμό είσπραξης ασφαλιστρών $c_1 = 0,75$ και $c_2 = 0,8$.

Από την (4.7) έχουμε

$$\pi_i = \frac{\lambda}{c_i(\mu + \rho_i)}$$

όπου ρ_i οι θετικές ρίζες της θεμελιώδης εξίσωσης του Lundberg $\rho_1 = 5,5497$ και $\rho_2 = 5,15807$.

Άρα έχουμε $\pi_1 = 0,279241$ και $\pi_2 = 0,272983$.

Από την (4.8) $\mathcal{L}_\infty(u) = \pi_1 e^{-\tau_1 u} = \bar{K}_1(u)$

όπου $-\tau_i$ οι αρνητικές ρίζες της θεμελιώδης εξίσωσης του Lundberg $\tau_1 = -2,88304$ και $\tau_2 = -2,90807$.

Άρα $\mathcal{L}_\infty(u) = 8,5794 * 10^{-9}$ για $u > b$

Αν πάρουμε την (4.12) έχουμε

$$r(b) = 1 - \frac{\mu(\pi_2 - \pi_1)e^{-(\rho_1 + \tau_1)b}}{\rho_1 + \tau_2 + (\tau_1 - \tau_2)e^{-(\rho_1 + \tau_1)b}} = 1$$

από την (4.11) έχουμε

$$R(b) = r(b)e^{-\tau_1 b} + \frac{\mu}{\rho_1 + \mu} e^{\rho_1 b} [1 - r(b)] + \frac{\rho_1}{\rho_1 + \mu} [1 - r(b)]e^{-\mu b} = 5.48991 * 10^{-7}$$

Τελικά, ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας ο οποίος δίνεται στη σχέση (4.10) υπολογίζεται

$$\Rightarrow \mathcal{L}(u; b) = \begin{cases} \mathcal{L}_1(u) = 2.73924 * 10^{-6}, & 0 \leq u \leq b \\ \mathcal{L}_2(u) = 2.74573 * 10^{-6}, & u > b \end{cases}$$

Η από κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν την χρεοκοπία

δίνεται από την (4.13)

Για $0 \leq x_1 \leq u$

$$F_{\infty}(x_1, x_2 | u) = 0.00321863 + 0.00643727 * e^{-4x_1} - 0.0096559 * e^{-2.66667x_1} \\ - 0.00482795 * e^{5.33333x_1 - 4x_2} + 0.0112652 * e^{-4x_2} - 0.00643727 \\ * e^{-4(x_1 + x_2)}$$

Η από κοινού συνάρτηση του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας

Για $x_1 > u$

$$F_{\infty}(x_1, x_2 | u) = 0.00321863 - 1.99356 * e^{-4x_1} + 1.99356 * e^{-4(x_1 + x_2)} \\ - 0.00321863 e^{-4x_2} - 2.14404 * 10^{-18} * e^{-1.33333 x_2}$$

Οι αντίστοιχες περιθώριες συναρτήσεις κατανομής είναι

$$F_{\infty, X_1}(x_1|u) = \begin{cases} 0.00321863 + 0.00643727 * e^{-4x_1} - 0.0096559 * e^{-2.66667x_1}, & 0 \leq x_1 \leq u \\ 0.00321863 + 2.00644 e^{-4x_1}, & x_1 > u \end{cases}$$

και

$$F_{\infty, X_2}(x_2|u) = 0.00321863 - 0.00321863 * e^{-4x_2} - 2.14404 * 10^{-18} * e^{-1.33333 x_2}$$

Παράδειγμα 4.2 : Έστω ότι οι ατομικές απαιτήσεις κατανομονται με συνδυασμό εκθετικών κατανομών. Πιο συγκεκριμένα

$$\bar{F}(x) = \sum_{j=1}^n \omega_j e^{-\mu_j x}, \quad x \geq 0, \quad \mu_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

με $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$ για θετικούς ακέραιους n .

Σύμφωνα με Gerber et al. (1987)

$$\bar{F}_e(x) = \sum_{j=1}^n \omega_j^* e^{-\mu_j x}, \quad x \geq 0,$$

όπου

$$\omega_j^* = \frac{\frac{\omega_j}{\mu_j}}{\sum_{l=1}^n \frac{\omega_l}{\mu_l}}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

και η πιθανότητα χρεοκοπίας έχει τη μορφή

$$\Psi_{i,\infty}(u) = \sum_{j=1}^n C_{ij} e^{-\beta_{ij} u}, \quad u \geq 0, \quad i = 1, 2,$$

όπου $0 < \beta_{i1} < \beta_{i2} < \dots < \beta_{in}$ είναι οι ρίζες της $\sum_{j=1}^n \left[\frac{\omega_j^* \mu_j}{\mu_j - \beta} \right] = 1 + \theta_i, i = 1, 2$, και

υποθέτουμε ότι είναι πραγματικές και διακριτές τιμές, και

$$C_{ij} = \frac{\sum_{l=1}^n \frac{\omega_l^*}{\mu_l - \beta_{ij}}}{\sum_{l=1}^n \frac{\omega_l^* \mu_l}{(\mu_l - \beta_{ij})^2}}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Παρατηρούμε ότι $\beta_{i1}, i = 1, 2$, είναι οι συντελεστές προσαρμογής Lundberg

Από το πόρισμα (3.2) προκύπτει ότι η πιθανότητα της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό κεφάλαιο δίνεται από

$$\Psi(0; b - u) = \frac{(1 + \theta_1)(\theta_1 - \theta_2) \sum_{j=1}^n C_{1j} e^{-\beta_{1j}(b-u)} + \theta_2}{(1 + \theta_1)[(\theta_1 - \theta_2) \sum_{j=1}^n C_{1j} e^{-\beta_{1j}(b-u)} + \theta_2]}, \quad 0 \leq u \leq b.$$

Επίσης, είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι

$$\Psi_1(u) = 1 - q(b) + q(b) \sum_{j=1}^n C_{1j} e^{-\beta_{1j}u}, \quad 0 \leq u \leq b,$$

όπου

$$q(b) = \frac{\theta_2}{(\theta_1 - \theta_2) \sum_{j=1}^n C_{1j} e^{-\beta_{1j}b} + \theta_2}.$$

Πριν παράγουμε μία αναλυτική έκφραση για την $\Psi_2(u)$, θα παρουσιάσουμε δύο σημαντικές ταυτότητες. Αλλάζοντας ελαφρώς τον συμβολισμό του τύπου (10.4.13) των Willmot and Lin (2001), γίνεται

$$\sum_{l=1}^n \frac{\beta_{il} C_{il}}{\mu_j - \beta_{il}} = \frac{\theta_i}{1 + \theta_i}, \quad i = 1, 2. \quad (4.14)$$

Αφού $\sum_{l=1}^n C_{il} = \Psi_{i,\infty}(0) = \frac{1}{1+\theta_i}$, έχουμε

$$\sum_{l=1}^n \frac{\mu_j C_{il}}{\mu_j - \beta_{il}} = \sum_{l=1}^n C_{il} + \sum_{l=1}^n \frac{\beta_{il} C_{il}}{\mu_j - \beta_{il}} = \frac{1}{1 + \theta_i} + \frac{\theta_i}{1 + \theta_i} i = 1, 2. \quad (4.15)$$

Κατά αναλογία με τις (3.7) και (3.8) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} h(u) &= \frac{1}{1 + \theta_2} \sum_{j=1}^n \omega_j^* \left\{ \mu_j \int_{u-b}^u \psi_1(u-t) e^{-\mu_j t} dt + e^{-\mu_j u} \right\} \\ &= \frac{1}{1 + \theta_2} \sum_{j=1}^n \omega_j^* \left\{ [1 - q(b)] e^{-\mu_j(u-b)} + q(b) e^{-\mu_j u} \right. \\ &\quad \left. + q(b) \sum_{l=1}^n \frac{\mu_j C_{1l}}{\mu_j - \beta_{1l}} [e^{-\beta_{1l} b} e^{-\mu_j(u-b)} e^{-\mu_j u}] \right\}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη (4.15) με $i = 1$, έχουμε

$$h(u) = \sum_{j=1}^n \omega_j^* Q_j(b) e^{-\mu_j(u-b)},$$

όπου

$$Q_j(b) = 1 - q(b) + q(b) \sum_{l=1}^n \frac{\mu_j C_{1l}}{\mu_j - \beta_{1l}} e^{-\beta_{1l} b}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \psi_2(u) &= \frac{1}{\theta_2} \sum_{j=1}^n \omega_j^* Q_j(b) \sum_{l=1}^n \frac{\beta_{2l} C_{2l}}{\mu_j - \beta_{2l}} e^{-\beta_{2l}(u-b)} \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \omega_j^* Q_j(b) \left\{ \frac{1}{1 + \theta_2} - \frac{1}{\theta_2} \sum_{l=1}^n \frac{\beta_{2l} C_{2l}}{\mu_j - \beta_{2l}} e^{-\beta_{2l}(u-b)} \right\} e^{-\mu_j(u-b)} \\ &= \frac{1}{\theta_2} \sum_{j=1}^n \omega_j^* Q_j(b) \sum_{l=1}^n \frac{\beta_{2l} C_{2l}}{\mu_j - \beta_{2l}} e^{-\beta_{2l}(u-b)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\theta_2} \sum_{j=1}^n \beta_{2j} C_{2j} \left\{ \sum_{l=1}^n \frac{\omega_l^* Q_l(b)}{\mu_l - \beta_{2j}} \right\} e^{-\beta_{2j}(u-b)}, \quad u > b,$$

εξαιτίας της (4.14) με $i = 2$. Έτσι,

$$\psi(u; b) = \begin{cases} \psi_1(u) = 1 - q(b) + q(b) \sum_{j=1}^n C_{1j} e^{-\beta_{1j}u} & 0 \leq u \leq b \\ \psi_2(u) = \frac{1}{\theta_2} \sum_{j=1}^n \beta_{2j} C_{2j} \left\{ \sum_{l=1}^n \frac{\omega_l^* Q_l(b)}{\mu_l - \beta_{2j}} \right\} e^{-\beta_{2j}(u-b)} & u > b \end{cases}$$

Εάν η κατανομή των ατομικών απαιτήσεων είναι μείξη δηλαδή $\omega_j \geq 0$ για όλα τα j , τότε $C_{il} \geq 0$ για όλα τα l και $i = 1, 2$. Ως εκ τούτου, $0 \leq Q_j(b) \leq 1$ για όλα τα j . Στη συνέχεια μπορούμε να βρούμε ένα άνω φράγμα της μορφής της ανισότητας του Lundberg για την $\psi_2(u)$ όπως φαίνεται παρακάτω,

$$\begin{aligned} \psi_2(u) &= \frac{1}{\theta_2} \sum_{j=1}^n \omega_j^* Q_j(b) \sum_{l=1}^n \frac{\beta_{2l} C_{2l}}{\mu_j - \beta_{2l}} e^{-\beta_{2l}(u-b)} \\ &\leq \frac{1}{\theta_2} \sum_{j=1}^n \omega_j^* Q_j(b) \sum_{l=1}^n \frac{\beta_{2l} C_{2l}}{\mu_j - \beta_{2l}} e^{-\beta_{21}(u-b)} = \frac{1}{1 + \theta_2} \sum_{j=1}^n \omega_j^* Q_j(b) e^{-\beta_{21}(u-b)} \\ &\leq \frac{1}{1 + \theta_2} e^{-\beta_{21}(u-b)}, \quad u > b. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας όλες τις παραπάνω υποθέσεις για $i = 1, 2$ έχουμε

$$\bar{A}_i(y) = \sum_{j=1}^n \omega_{ij}^* e^{-\mu_j y}, \quad y \geq 0,$$

όπου

$$\omega_{ij}^* = \frac{\omega_j}{\frac{\mu_j + \rho_i}{\sum_{l=1}^n \omega_l}}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Επιπλέον,

$$\bar{K}_i(u) = \sum_{j=1}^n C_{ij} e^{-\beta_{ij}u}, \quad u \geq 0.$$

Βιβλιογραφία

- ✚ Gerber H., Shiu E., 1998. On the time value of ruin. North American Actuarial Journal, 2:48-78.
- ✚ Gerber H., Shiu E., 2005a. On optimal dividend strategies in the compound Poisson model. Preprint
- ✚ Willmot G., Lin S., 1999. Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory. Insurance Mathematics and Economics 25, 63-84.
- ✚ Willmot G., Lin S., 2000. The moments of the time of ruin, the surplus before ruin, and the deficit at ruin. Insurance Mathematics and Economics 27, 19-44.
- ✚ Willmot G., Lin S., 2003. The classical risk model, with constant dividend barrier: analysis of the Gerber-Shiu discounted penalty function. Insurance Mathematics and Economics
- ✚ X. Sheldon Lin, Kristina P. Pavlova. The compound Poisson risk model with a threshold dividend strategy