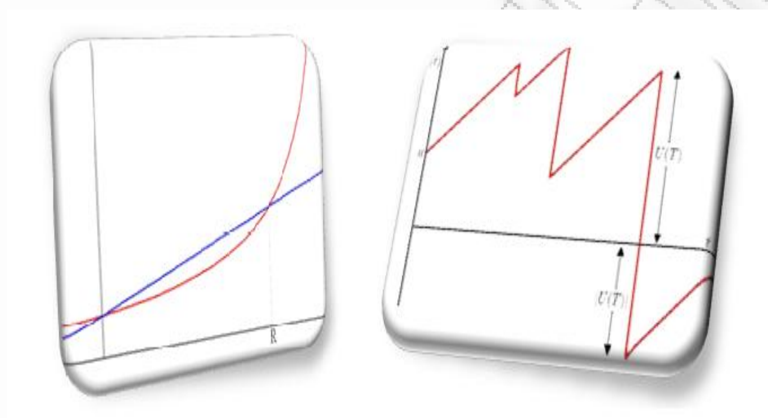
Π.Μ.Σ. Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου
Πανεπιστήμιο Πειραιώς



Στοχαστικά Επιτόκια και Διαδικασίες Πλεονάσματος Μοντέλων Κινδύνου

Φοιτητής: Γιαννόπουλος Αριστοτέλης

Τριμελής Επιτροπή:
Χατζηκωνσταντινίδης Ευσταθιος (Επιβλέπων)
Πανοπούλου Αικατερίνη
Βρόντος Σπυρίδων

Μεταπτυχιακή Διατριβή στη Θεωρία Κινδύνου
Φεβρουάριος 2011

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η Θεωρία Συλλογικών Κινδύνων ξεκίνησε στις αρχές του $20^{ου}$ αιώνα και κατά τη διάρκεια όλων αυτών των χρόνων η ανάπτυξή της ήταν ραγδαία. Σήμερα, με τη βοήθεια και της τεχνολογίας, αποτελεί έναν επιστημονικό κλάδο γεμάτο χρήσιμες ιδέες και προηγμένες μαθηματικές τεχνικές. Βασικό πεδίο μελέτης είναι η εξέλιξη των τιμών των συνολικών αποζημιώσεων ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου κατά τη διάρκεια του χρόνου. Τα αποτελέσματα τέτοιων μελετών αξιοποιούνται από τις ασφαλιστικές εταιρείες που διαθέτουν οργανωμένα τμήματα αναγνώρισης, πρόβλεψης και ποσοτικοποίησης των ασφαλιστικών κινδύνων που έχουν αναλάβει εξαιτίας των διαφόρων δραστηριοτήτων τους. Έτσι, κάθε ασφαλιστική εταιρεία είναι σε θέση να υπολογίσει τα κεφάλαια που αναμένει να της χρειαστούν ώστε να μπορέσει να ανταπεξέλθει στις υποχρεώσεις της (που περιλαμβάνουν κυρίως την καταβολλή αποζημιώσεων προς τους ασφαλισμένους). Αυτά είναι τα αναλογιστικά αναμενόμενα κεφάλαια που θα πρέπει να διαθέτει η εταιρεία. Ωστόσο σύμφωνα με το νέο Ευρωπαϊκό πλαίσιο, Solvency II κάθε εταιρεία πρέπει να έχει και κάποια πρόσθετα κεφάλαια ώστε με πιθανότητα $0,995$ να είναι σε θέση να αντιμετωπίσει δυσμενείς αποκλίσεις από τα αναλογιστικά αναμενόμενα. Τα επιπρόσθετα αυτά κεφάλαια αποτελούν το πλεόνασμα (surplus) κάθε ασφαλιστικής επιχείρησης.

Στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου γίνεται συχνά η υπόθεση ότι δεν υπάρχουν έσοδα από επενδύσεις. Ωστόσο, όπως γνωρίζουμε, ένα μεγάλο μέρος των εσόδων μιας ασφαλιστικής επιχείρησης προέρχεται από την επένδυση του πλαονάσματός της. Τα τελευταία χρόνια λοιπόν έχει παρουσιαστεί ένα μεγάλο ενδιαφέρον από πλευρας ερευνητών για τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος, όταν αυτό επενδύεται. Ο Cai (2002) μελέτησε το διακριτό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου όταν το πλεόνασμα επενδύεται με στοχαστικό επιτόκιο. Μεταγενέστερα ο ίδιος μελέτησε το ίδιο μοντέλο αλλα με το επιτόκιο να είναι μία εξαρτημένη μεταβλητή. Στις μελέτες του αυτές,βρήκε εξισώσεις και φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Σε αυτή την εργασία λοιπόν θα προσπαθήσουμε να συνθέσουμε και να παρουσιάσουμε όσο το δυνατόν περισσότερα αποτελέσματα πάνω στο διακριτό μοντέλο με επιτόκιο. Συγκεκριμένα, από τη σχετική βιβλιογραφία, θα αντλήσουμε πληροφορίες για :

- Τη διαδικασία πλεονάσματος με στοχαστικό επιτόκιο (Κεφάλαια 3 και 4)

- Τη διαδικασία πλεονάσματος με Αυτοπαλίνρομο επιτόκιο (Κεφάλαια 5 και 6)

Ωστόσο στα πλαίσια του μοντέλου που μελετάμε, η εύρεση αναλυτικών εξισώσεων για τα μέτρα κινδύνου που μας ενδιαφέρουν είναι δύσκολη υπόθεση. Επομένως το μεγαλύτερο μέρος αυτής της εργασίας στην εύρεση φραγμάτων για τις ποσότητες που μας ενδιαφέρουν. Τέλος, θα παρουσιάσουμε αρκετές ειδικές περιπτώσεις καθώς και αριθμητικές εφαρμογές βασισμένες στη θεωρία που θα αναλύσουμε.

Η σημαντικότερη ποσότητα που θα μας απασχολήσει σε αυτή την εργασία είναι η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματο που περιγράφει την εξέλιξη των τιμών του πλεονάσματος στην πορεία του χρόνου. Σε κάποια τυχαία χρονική στιγμή το ύψος του πλεονάσματος εξαρτάται από τρεις παράγοντες:

1. το αρχικό κεφάλαιο,
2. τα ασφάλιστρα που έχουν εισπραχθεί μέχρι εκείνη τη χρονική περίοδο και
3. τις αποζημιώσεις που έχουν καταβληθεί μέχρι εκείνη τη χρονική περίοδο.

Για παράδειγμα σε μία τυχάια χρονική περίοδο n (όπου $n > 0$) θα ισχύει

$$\begin{pmatrix}\text{Πλεόνασμα}\\ \text{τη χρονική}\\ \text{στιγμή } n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Αρχικό}\\ \text{κεφάλαιο}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Ασφάλιστρα που}\\ \text{εισπράττονται}\\ \text{μέχρι το χρόνο } n\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Αποζημιώσεις που}\\ \text{καταβάλλονται}\\ \text{μέχρι το χρόνο } n\end{pmatrix}$$

Σε αυτό το σημείο θα αναφερθούμε εν συντομία σε κάθε έναν από τους προσδιοριστικούς παράγοντες της στοχαστικής διαδικασίας του πλεονάσματος.

Το αρχικό κεφάλαιο

Κατά την έναρξη των εργασιών της, κάθε ασφαλιστική εταιρεία υποχρεούται από το νόμο να διαθέτει κάποιο αρχικό κεφάλαιο. Αυτό το αρχικό κεφάλαιο αποτελεί και το πλεόνασμα της εταιρείας κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$. Αν λοιπόν συμβολίσουμε με u το αρχικό κεφάλαιο, τότε θα ισχύει $U(0) = u$.

Η στοχαστική διαδικασία είσπραξης των ασφαλίστρων

Ως αντάλλαγμα για τους κινδύνους που αναλαμβάνουν, οι ασφαλιστικές εταιρείες εισπράτουν ασφάλιστρα από τους ασφαλισμένους. Η στοχαστική διαδικασία είσπραξης των ασφαλίστρων μας πληροφορεί για το ύψος των ασφαλίστρων στη διάρκεία του χρόνου. Αν την συμβολίσουμε με $X(n)$ για μία τυχαία χρονική περίοδο $n > 0$, τότε
$P(n)$ είναι τα ασφάλιστρα που εισπράττει η εταιρεία στο διάστημα $[n - 1, n]$.
Η μοντελοποίηση της $P(n)$ δεν είναι εύκολη καθώς η καταβολή των ασφαλίστρων εξαρτάται από πολλούς παράγοντες (θνησιμότητα, νοσηρότητα, κ.ά.). Παρ'ολα αυτά όμως συνηθίζεται η $P(n)$ να λαμβάνεται ως ντετερμινιστική συνάρτηση του χρόνου. Ο λόγος για τον οποίο γίνεται αυτή

η απλούστευση είναι η αποφυγή των περίπλοκων μαθηματικών υπολογισμών που προκύπτουν αν θεωρήσουμε την $P(n)$ ως στοχαστική διαδικασία.

Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων
Ως αντάλλαγμα για τα ασφάλιστρα που εισπράττει μία σφαλιστική εταιρεία, έχει την υποχρέωση να καταβάλλει αποζημιώσεις στους ασφαλισμένους της κατά την επέλευση των ζημιών που καλύπτονται από τα ασφαλιστήρια συμβόλαιά τους. Κάθε ασφαλιστική εταιρεία λοιπόν θα πρέπει να έχει στην κατοχή της όσο το δυνατόν περισσότερα στοιχεία αναφορικά με το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων που ενδέχεται να καταβάλλει στους ασφαλισμένους της. Για το λόγο αυτό οι ασφαλιστικές εταιρείες μοντελοποιούν το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων, αποκτώντας έτσι μία πληρέστερη εικόνα για την ενδεχόμενη εξέλιξή τους. Οι συνολικές αποζημιώσεις εξαρτώνται άμεσα από:

- τη χρονική περίοδο αναφοράς,
- το πλήθος των ζημιογόνων ενδεχομένων που επέρχονται στη συγγεκριμένη χρονική περίοδο, και
- το μέγεθος των επιμέρους ζημιών που προκαλούνται.

Θα συμβολίσουμε $S(n)$ τη στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων που καταβάλλονται εως το χρόνο n.

Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος
Μία ασφαλιστική επιχείρηση μπορεί να υπολογίσει το πλεόνασμά της σε μία δεδομένη χρονική στιγμή αφαιρώντας από τα Έσοδά της (αρχικό κεφάλαιο, ασφάλιστρα), τα αντίστοιχα Έξοδα (αποζημιώσεις). Έτσι αν συμβολίσουμε ως $U(n)$ το πλεόνασμα κατά την χρονική περίοδο n, αυτό θα είναι

$$U(n) = u + X(n) - S(n) \tag{1.1}$$

Σημειώνουμε ότι όλοι οι συμβολισμοί που έχουμε δώσει εως τώρα ισχύουν και για το υπόλοιπο αυτή της εργασίας, εκτός από τον συμβολισμό για τη στοχαστική διαδικασία πλενάσματος, τον οποίο θα διαφοροποιήσουμε για τις ανάγκες του μοντέλου με επιτόκιο.

1.1 Το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου σε διακριτό χρόνο

Το κλασσικό μοντέλο σε διακριτό χρόνο είναι από τα πιο γνωστά μοντέλα στη θεωρία των κινδύνων. Για την προσέγγιση της συνεχούς στοχαστικής ανέλιξης του κλασσικού μοντέλου σε συνεχές χρόνο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη διακριτή στοχαστική ανέλιξη. Το μοντέλο αυτό γνώρισε μεγάλη απήχηση γιατί μας οδηγεί σε απλούστερους μαθηματικούς υπολογισμούς σε σχέση με άλλα μοντέλα, ενώ τα αποτελέσματα που μπορεί κανείς να πάρει αν το υιοθετήσει είναι πολύ περισσότερα. Θα παρουσιάσουμε λοιπόν ορισμένα από τα κυριότερα χαρακτηριστικά του κλασσικού μοντέλου της Θεωρίας Κινδύνου σε διακριτό χρόνο που θα αποτελέσει τη βάση για να κατανοήσουμε και να αναπτύξουμε το μοντέλο με επιτόκιο.

Η διαχρονική εξέλιξη της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος

Στη μελέτη μίας στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος παίζει σημαντικό ρόλο ο τρόπος άφιξης των ζημιογόνων ενδεχομένων. Για την προσέγγιση της συνεχούς στοχαστικής ανέλιξης του κλασσικού μοντέλου σε συνεχές χρόνο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη διακριτή στοχαστική ανέλιξη. Συγκεκριμένα στο κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου σε διακριτό χρόνο χωρίζουμε το χρόνο σε διαστήματα και σε κάθε μοναδιαίο διάστημα ή θα επέλθει ο κίνδυνος ή όχι δηλαδή μία Bernoulli. Οι χρόνοι λοιπόν άφιξης των ζημιών είναι μία Γεωμετρική κατανομή. Έστω οι χρονικές στιγμές $n = 0, 1, 2, \cdots$ Θεωρούμε το πλεόνασμα τη χρονική στιγμή n ίσο με U_n με $U_0 = u$ Επίσης θεωρούμε c μία σταθερά η οποία συμβολίζει τα ασφάλιστα που εισπράττονται ανά χρονική περίοδο. Ακόμα έχουμε την τ,μ S_n που συμβολίζει τις συνολικές αποζημιώσεις για τις πρώτες $n-$ περιόδους.
Με βάση τα παραπάνω έχουμε,

$$U_n = u + cn - S_n \text{ και}$$

$$S_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

όπου Y_i οι συνολικές αποζημιώσεις της i περιόδου ανεξάρτητα από το πόσοι κινδυνοι εμφανίστηκαν στην περίοδο αυτή.
Η υπόθεση η οποία γίνεται στο μοντέλο αυτό είναι ότι, οι Y_i είναι ανεξαρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $E(Y) = \mu \leq c$
Για την ευκολότερη μελέτη του μοντέλου εισάγουμε μία μεταβλητή, την G_i, όπου,

$$G_i = c - Y_i$$

και συμβολίζει το κέρδος ή ζημία που έχει η εταιρεία απο τη χρήση της i περιόδου.
Με τη χρήση της G_i η U_n γίνεται,

$$U_n = u + cn - \sum_{i=1}^{n} Y_i = u + \sum_{i=1}^{n} (c - Y_i) = u + \sum_{i=1}^{n} G_i$$

Συμφωνα με την παραπάνω σχέση μπορούμε να γράψουμε επίσης και,

$$U_{n-1} = u + \sum_{i=1}^{n-1} G_i$$

Άρα εφαρμόζοντας τα παραπάνω θα έχουμε

$$U_n = u + \sum_{i=1}^{n} G_i = u + \sum_{i=1}^{n-1} G_i + G_n = U_{n-1} + G_n$$

όπου καταλήξαμε σε μία αναδρομική σχέση που μας δίνει το πλεόνασμα τη χρονική στιγμή n από την ανέλιξη του πλεονάσματος τη χρονική στιγμή $n-1$ και των αποτελεσμάτων για τη χρηση της περιόδου n.
Το αμέσως επόμενο βήμα ήταν στο παραπάνω μοντέλο να υποθέσουμε ότι τα ασφάλιστρα δε θα είναι μία σταθερά, αλλά θα είναι και αυτά μία τυχαία μεταβλητή. Θεωρούμε λοιπόν X_i τα συνολικά ασφάλιστρα της i περιόδου. Τότε η μεταβλητή G_i θα γίνει,

$$G_i = X_i - Y_i$$

η οποία μας οδηγεί στο παρακάτω αποτέλεσμα για τη διαδικασία πλεονάσματος.

$$U_n = u + \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} Y_i = u + \sum_{i=1}^{n} (X_i - Y_i) = u + \sum_{i=1}^{n} G_i$$

Για τη χρονική περίοδο $n-1$ θα έχουμε,

$$U_{n-1} = u + \sum_{i=1}^{n-1} G_i$$

Από όπου παιρνουμε πάλι την αναδρομική σχέση για τη διαδικασία πλεονάσματος.

$$U_n = U_{n-1} + G_n$$

Ακόμα όμως και έτσι η πληροφορία που παίρναμε από τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος ήταν ελλειπής διότι δεν λάμβανε υπόψιν την επένδυση των αποθεμάτων. Γεννήθηκε λοιπόν η ανάγκη να εισαχθεί στο μοντέλο η επίδραση του επιτοκίου. Οι Sund kai Teugels (1995, 1997) μελέτησαν την επίδραση Σταθερού επιτοκίου στη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος και την πιθανότητα χρεοκοπίας για το κλασσικό μοντέλο. Ο Yang (1999) αναφέρθηκε στο διακριτό μοντέλο με σταθερό επιτόκιο, ενώ ο Cai (2002)μελέτησε το διακριτό μοντέλο με τυχαίο επιτόκιο για προκαταβλητέα πληρωμή ασφαλίστρων και λιξηπρόθεσμη καταβολή ασφαλίστρων. Θεωρώντας X_n τα ασφάλιστρα και Y_n τις ζημιές και εισάγοντας μία νέα μεταβλητή την I_n ως το επιτόκιο της κάθε περιόδου κατέληξε στις παρακάτω σχέσης για την στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος.

- Προκαταβλητέα πληρωμή ασφαλίστρων

$$U_n = u\prod_{k=1}^{n} I_k + \sum_{k=1}^{n}\left((X_k I_k - Y_k)\prod_{i=k+1}^{n} I_n\right)$$

- Λιξηπρόθεσμη πληρωμή ασφαλίστρων

$$U_n = u\prod_{k=1}^{n} I_k + \sum_{k=1}^{n}\left((X_k - Y_k)\prod_{i=k+1}^{n} I_n\right)$$

1.2 Martingales

Μία ειδική κλάση στοχαστικών διαδικασιών είναι οι διαδικασίες martingale, ο ρόλος των οποίων είναι ιδιαίτερα σημαντικός στη στοχαστική ανάλυση. Η βασική ιδέα των martingales ήταν γνωστή από τις αρχές του 20ου αιώνα, ωστόσο το μεγαλύτερο μέρος της μαθηματικής θεωρίας τους εμφανίστηκε αργότερα και οφείλεται κυρίως στον Αμερικανό πιθανοθεωρητικό Doob. Η θεωρία των martingales είναι ιδιαίτερα εκτενής και στα πλαίσια αυτής της εργασίας θα αρκεστούμε στην παράθεση των ιδιοτήτων τους που σχετίζονται με τα θέματα που εξετάζουμε. Για τις αποδείξεις των ιδιοτήτων και γενικότερα για μία πιο ολοκληρωμένη μελέτη των διαδικασιών martingales, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις εξής πηγές: Γιαννακόπουλος (2003), Lawler (1995). Για να κατανοήσουμε καλύτερα μία διαδικασία martingale θα αναφέρουμε αρχικά ορισμένες χαρακτηριστικές ιδιότητες της υπό συνθήκη μέσης τιμής. Θεωρούμε λοιπόν μία τυχαία μεταβλητή Y που μετράει το αποτέλεσμα κάποιου τυχαίου πειράματος. Η δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. Y ως προς ένα πεπερασμένο πλήθος τυχαίων μεταβλητών $X_1, \ldots, X_n$ συμβολίζεται

$$E[Y \mid X_1, \ldots, X_n], \tag{1.2}$$

και είναι μία τυχαία μεταβλητή. Ένα χαρακτηριστικό αυτής της τυχαίας μεταβλητής είναι ότι εξαρτάται μόνο από τις τιμές των $X_1, \ldots, X_n$, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε

$$E[Y \mid X_1, \ldots, X_n] = \phi(X_1, \ldots, X_n)$$

για κάποια συνάρτηση ϕ. Η συνάρτηση ϕ λέμε ότι είναι μία μετρήσιμη συνάρτηση. Γενικότερα ισχύει ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 1.1.
Αν μία τυχαία μεταβλητή Z μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση των $X_1, \ldots, X_n$, τότε ονομάζεται μετρήσιμη ως προς τις $X_1, \ldots, X_n$. □

Ας απλοποιήσουμε όμως λίγο τους συμβολισμούς μας. Αν $X_1, X_2, \ldots$ μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, θα συμβολίσουμε με $\mathcal{F}_n$ την "πληροφοία που εμπεριέχεται στις $X_1, \ldots, X_n$". Έτσι θα μπορούμε να γράφουμε $E[Y \mid \mathcal{F}_n]$ αντί για $E[Y \mid X_1, \ldots, X_n]$. Η γνωστή μας λοιπόν σχέση $E(Y) = E[E(Y \mid X_1, \ldots, X_n)]$ γράφεται πλέον $E(Y) = E[E(Y \mid \mathcal{F}_n)]$.
Πριν προχωρίσουμε στον ορισμό των martingales παραθέτουμε τις παρακάτω **ιδότητες της υπό συνθήκη μέσης τιμής:**

1. Αν α και b σταθερές, τότε
$$E[\alpha Y_1 + bY_2 \mid \mathcal{F}_n] = \alpha E[Y_1 \mid \mathcal{F}_n] + bE[Y_2 \mid \mathcal{F}_n] \tag{1.3}$$

2. Αν η τυχαία μεταβλητή Y είναι ήδη μία συνάρτηση των $X_1, \ldots, X_n$, τότε
$$E[Y \mid \mathcal{F}_n] = Y \tag{1.4}$$

3. Για $m < n$, ισχύει
$$E[E(Y \mid \mathcal{F}_n) \mid \mathcal{F}_m] = E[Y \mid \mathcal{F}_m] \tag{1.5}$$

4. Αν η τυχαία μεταβλητή Y είναι ανεξάρτητη των $X_1, \ldots, X_n$, τότε η πληροφορία που εμπεριέχεται στις $X_1, \ldots, X_n$ δεν μας χρησιμεύει για τον προσδιορισμό της Y, δηλαδή
$$E(Y \mid \mathcal{F}_n) = E(Y) \tag{1.6}$$

Παράδειγμα 1.1: Θεωρούμε τις ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots$ με μέση τιμή μ και το πεπερασμένο άθροισμα

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Αν $\mathcal{F}_n$ είναι η πληροφορία που περιέχεται στις $X_1, \ldots, X_n$ και $m < n$, τότε από την ιδιότητα 1, έχουμε

$$E[S_m \mid \mathcal{F}_m] = E[X_1 + \cdots + X_m \mid \mathcal{F}_m] + E[X_{m+1} + \cdots + X_n \mid \mathcal{F}_m]$$

Όμως από την ιδιότητα 2, παίρνουμε ότι

$$E[X_1 + \cdots + X_m \mid \mathcal{F}_m] = X_1 + \cdots + X_m = S_m$$

αφού η S_m είναι μετρήσιμη ως προς τις $X_1, \ldots, X_m$. Επίσης εφόσον το άθροισμα $X_{m+1} + \cdots + X_n$ είναι ανεξάρτητο των $X_1, \ldots, X_m$, τότε εφαρμόζοντας την ιδιότητα 4 διαπιστώνουμε ότι

$$E[X_{m+1} + \cdots + X_n \mid \mathcal{F}_m] = E[X_{m+1} + \cdots + X_n] = (n-m)\mu$$

Επομένως συνολικά έχουμε

$$E[S_n \mid \mathcal{F}_m] = S_m + (n-m)\mu$$

□

Ορισμός 1.2.
Έστω $X_0, X_1, \ldots$ μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και $\mathcal{F}_n$ η πληροφορία που εμπεριέχεται στις $X_0, \ldots, X_n$. Θεωρούμε επίσης μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $M_0, M_1, \ldots$ με $E[\,|M_i|\,] < \infty$. Αν κάθε M_n είναι μετρήσιμη σε σχέση με τις $X_0, \ldots, X_n$, τότε

1. *Η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $M_0, M_1, \ldots,$ είναι μία διαδικασία **martingale** ως προς την $\mathcal{F}_n$ αν για κάθε $m < n$,*

$$E[M_n \mid \mathcal{F}_m] = M_m \tag{1.7}$$

ή εναλλακτικά

$$E[M_n - M_m \mid \mathcal{F}_m] = 0,$$

2. *Η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $M_0, M_1, \ldots,$ είναι μία διαδικασία **supermartingale** ως προς την $\mathcal{F}_n$ αν για κάθε $m < n$,*

$$E[M_n \mid \mathcal{F}_m] \leq M_m \tag{1.8}$$

ή εναλλακτικά

$$E[M_n - M_m \mid \mathcal{F}_m] \leq 0,$$

3. *Η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $M_0, M_1, \ldots,$ είναι μία διαδικασία **submartingale** ως προς την $\mathcal{F}_n$ αν για κάθε $m < n$,*

$$E[M_n \mid \mathcal{F}_m] \geq M_m \tag{1.9}$$

ή εναλλακτικά

$$E[M_n - M_m \mid \mathcal{F}_m] \geq 0,$$

□

Η συνθήκη $E[\ |M_i|\ ] < \infty$, χρειάζεται για να εξασφαλίσουμε οτί ορίζονται οι υπό συνθήκη μέσες τιμές. Στην πράξη, για να επαληθεύσουμε την (1.7) αρκεί να αποδείξουμε ότι $\forall\ n$,

$$E[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n, \tag{1.10}$$

αφού αν ισχύει κάτι τέτοιο, τότε από την ιδιότητα 3 της υπό συνθήκη μέσης τιμής έχουμε

$$E[M_{n+2} \mid \mathcal{F}_n] = E[E(M_{n+2} \mid \mathcal{F}_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] = E[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n$$

και συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο διαπιστώνουμε ότι ικανοποιείται η εξίσωση (1.7) του Ορισμού 1.2. Αντίστοιχα για να επαληθεύσουμε την (1.8) αρκεί να δείξουμε ότι

$$E[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \leq M_n, \tag{1.11}$$

ενώ για να επαληθεύσουμε την (1.9) αρκεί να δείξουμε ότι

$$E[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \geq M_n, \tag{1.12}$$

Επιλεκτική Στάση

Η επιλεκτική στάση (optional stopping) μας πληροφορεί σχετικά με το τι μπορεί να συμβεί αν σταματήσουμε μια διαδικασία martingale ή μία διαδικασία super(sub)martingale σε κάποιο χρόνο στάσης T. Η επιλεκτική στάση αποτελεί μία ιδιαίτερα χρήσιμη τεχνική στη στοχαστική ανάλυση και διευκολύνει τους υπολογισμούς μέσων τιμών καθώς και ποσοτήτων που σχετίζονται με τους χρόνους στάσης.

Ορισμός 1.3.
Αν T είναι ένας χρόνος στάσης τότε μπορούμε να ορίσουμε την σταματημένη διαδικασία (stopped process) $X_{t\wedge T}$. □

Η σταματημένη διαδικασία $X_{t\wedge T}$ έχει ακριβώς τις ίδιες τροχιές με την X_t μέχρι το χρόνο στάσης T, ενώ μετά το χρόνο στάσης T η $X_{t\wedge T}$ είναι "παγωμένη"στην τιμή X_T.

Θεώρημα 1.1. *(Μία σταματημένη martingale είναι μία martingale)*

1. *Αν X_t είναι μία διαδικασία martingale ως προς την $\mathcal{F}_t$ και T είναι ένας χρόνος στάσης ως προς την ίδια πληροφορία $\mathcal{F}_t$, τότε η σταματημένη διαδικασία $X_{t\wedge T}$ είναι και αυτή μία martingale ως προς την $\mathcal{F}_t$ και ισχύει*

$$E[X_{t\wedge T}] = E[X_0] \tag{1.13}$$

2. *Αν η X_t είναι μία super(sub)martingale τότε η σταματημένη διαδικασία είναι επίσης μία super(sub)martingale και ισχύει*

$$E[X_{t\wedge T}] \ \leq\ (\geq)\ E[X_0] \tag{1.14}$$

□

1.3 Αυτοπαλίνδρομο Επιτόκιο

Η διαπραγμάτευση ενός περουσιακού στοιχείου αποφέρει απόδοση στον κατοχό του. η απόδοση αυτή είναι μία τυχαία μεταβλητή η οποία μπορεί να μελετηθεί απο μια γραμμική χρονοσειρά. Η AR(1) είναι ένα μοντέλο το οποίο ανήκει στην οικογένεια των γραμμικών χρονοσειρών και δίνεται απο τη σχέση.

$$I_n = \alpha I_{n-1} + W_n \tag{1.15}$$

Όπου, (n) είναι η περίοδος αποτίμησης (α) ένας συντελεστής για τον οποίο ισχύει $(0 \leq a < 1)$ I_{n-1} είναι το επιτόκιο τη χρονική στιγμή $(n-1)$ και (W_n) είναι η τυπική στοχαστική ανέλιξη Wiener με μέση τιμή 0 και διακύμανση σ^2. Σύμφωνα με το μοντέλο η απόδοση των επενδύσεων τη χρονικη στιγμή (n) βασίζεται στην απόδοση την οποία είχαν τη χρονική στιγμή $(n-1)$. Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό, για $(\alpha = 0)$ το επιτόκιο ακολουθεί πλήρως στοχαστικό μοντέλο. Αν $\alpha = 0$ και $(W_n = i)$ όπου (i) κάποια σταθερά τότε οδηγούμαστε στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας.
Ιδιότητες της AR(1)

- Μέση τιμή

$$E\left[I_n\right] = E[\alpha I_{n-1} + W_n]$$

$$E[I_n] = \alpha E[I_{n-1}] + E[W_n]$$

$$E[I_n] = \alpha E[I_{n-1}]$$

- Διακύμανση

$$Var\left[I_n \left| I_{n-1}\right.\right] = \sigma^2$$

Από τη σχέση 1.15 κάνοντας επαναλαμβανόμενες αντικαταστάσεις μπορούμε να πάρουμε έναν γενίκο τύπο.

$$I_n = \alpha I_{n-1} + W_n$$

$$I_n = \alpha(\alpha I_{n-2} + W_{n-1}) + W_n$$

$$I_n = \alpha^2 I_{n-2} + \alpha^1 W_{n-1} + W_n$$

$$I_n = \alpha^2(I_{n-3} + W_{n-2}) + \alpha^1 W_{n-1} + W_n$$

$$\vdots$$

$$I_n = \alpha^n I_0 + \alpha^{n-1} W_1 + \cdots + \alpha^1 W_{n-1} + W_n$$

Και θεωρώντας ως αρχικό επιτόκιο ($I_0 = i_0$) τότε έχουμε

$$I_n = \alpha^n i_0 + \alpha^{n-1} W_1 + \cdots + \alpha^1 W_{n-1} + W_n \tag{1.16}$$

Γνωρίζοντας ότι ($0 \leq \alpha < 1$) διαπιστώνουνε ότι το μοντέλο δίνει μεγαλύτερη βαρύτητα στα τελευταία χρόνια.

Κεφάλαιο 2

Βασικές έννοιες θεωρίας αξιοπιστίας

Στη θεωρία αξιοπιστίας έχουν εισαχθεί διάφορες κλάσεις κατανομών οι οποίες μελετούν το υπολοιπόμενο χρόνο ζωής ενός συστήματος. Αυτές οι κατανομές συχνά χαρακτηρίζονται από το βαθμό αποτυχίας (βαθμίδα αποτυχίας) ή τον υπολοιπόμενο χρόνα ζωής. Στη βιβλιογραφία μπορεί να βρει κανείς διάφορες κλάσεις κατανομών ζωής . Κάποια παραδείγματα από τις κλάσεις αυτές είναι:

- Ο αυξανόμενος ρυθμός αποτυχίας (Increasing Failure Rate, IFR)
- Ο μειούμενος ρυθμός αποτυχίας (Decreasing Failure Rate, DFR)
- New Better than Used, NBU
- New Worse than Used, NWU
- Decreasing Mean Residual Lifetime, DMRL
- Increasing Mean Residual Lifetime, IMRL
- New Better than Used in Convex Ordering, NBUC
- New Worse than Used in Convex Ordering, NWUC

Ακόμα έχουν προταθεί-εισαχθεί κατανομές σύμφωνα με τις ιδιότητες της κατανομής ισορροπίας βλέπε, (Barlow και Proschan 1965, 1975),(Block καιSavits 1976),(Cao και Wang 1991) και (Fagiuoli και Pellerey 1993,1994). Όλες αυτές οι κατανομές χρησιμοποιούνται σήμερα ευρέως στην ασφαλιστική και αναλογιστική επιστήμη για την ταξινόμηση των κατανομών ζημιών καθώς και των κατανομών συχνότητας επέλευσης των ζημιών στη διαχείρηση ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου, βλέπε Grandell (1997), Gerber (1979), Kalashnikov (1999), Lin (1996), Willmot (1994) και Lin, Willmot (1999,2000) .
Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τις κατανομές αυτές, ξεκινώντας με το ρυθμό αποτυχίας (βαθμίδα αποτυχίας) στον οποίο ανήκουν δύο κλάσεις κατανομών DFR, IFR. Έπειτα θα ασχοληθούμε με την κατανομή ισορροπίας και τα συμπεράσματα που μπορούμε να εξάγουμε μέσω του

μέσου υπολοιπόμενου χρόνου ζωής. Τέλος, θα ασχοληθούμε με τις διάφορες άλλες κλάσεις κατανομών που πηγάζουν από την κατανομή ισορροπίας.

2.1 Η βαθμίδα αποτυχίας

Θεωρούμε μία θετική τυχαία μεταβλητή Y με συνάρτηση κατανομής $(\sigma.\kappa)$ $F(y) = Pr(Y \leq y)$, $y \geq 0$ και $\bar{F}(y) = 1 - F(y)$, όπου $\bar{F}(y)$ είναι η δεξιαά ουρά της κατανομής,(συνάρτηση επιβίωσης). Η τ.μ Y μπορεί να παριστά το χρόνο ζωής ενός ατόμου, το χρόνο ζωής μιας μηχανής ή στην προκειμένη περίπτωση το ποσό ζημίας ενός ασφαλιστίκου χαρτοφυλακίου. Για τη διεξαγωγή συμπερασμάτων για το ποσό της ζημιάς είναι σημαντικό να μελετήσουμε τη δεξιά ουρά της κατανομής αυτής. Για να το κάνουμε αυτό, χρησιμοποιούμε κάποια στοιχεία από τη θεωρία της αξιοπιστίας. Ακόμα, υποθέτουμε ότι η $(\sigma.\kappa)$ $F(y)$ είναι απολύτως συνεχής συνάρτηση και έχει συνάρτηση πικνότητας πιθανότητας $(\sigma.\pi.\pi)$ $f(y) = F'(y)$ Τότε ο ρυθμός αποτυχίας (βαθμίδα αποτυχίας) ή ένταση θνησιμότητας ή σφοδρότητας δίνεται από τήν ακόλουθη σχέση.

$$\mu(y) = \frac{f(y)}{\bar{F}(y)} = \frac{F'(y)}{\bar{F}(y)} = -\frac{\bar{F}'(y)}{\bar{F}(y)} = -\frac{d}{dy}\ln \bar{F}(y)$$

δηλαδή,

$$\mu(y) = -\frac{d}{dy}\ln \bar{F}(y) \tag{2.1}$$

Όμως από τον ορισμό του $\mu(y)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mu(y) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(y+h) - F(y)}{h\bar{F}(y)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{1 - \bar{F}(y+h) - 1 + \bar{F}(y)}{\bar{F}(y)}\right\} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(y)} - \frac{\bar{F}(y+h)}{\bar{F}(y)}\right\} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{1 - \frac{\bar{F}(y+h)}{\bar{F}(y)}\right\} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{1 - Pr(Y > y+h | Y > y)\right\}, y \geq 0
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Από τη σχέση (2.2) παρατηρούμε ότι όσο πιο βαριά η δεξιά ουρά της κατανομής τόσο μικρότερες τιμές παίρνουμε για την $\mu(y)$ και το αντίθετο.
Τώρα, εξερευνώντας τη σχέση (2.1) έχουμε,

$$\mu(y) = -\frac{d}{dy}\ln \bar{F}(y) \Rightarrow \mu(y)dy = -d\ln \bar{F}(y)$$

και ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη παίρνουμε,

$$\int_0^y \mu(s)ds = -\int_0^y d\ln \bar{F}(s) = -\ln \bar{F}(y)$$

και λύνοντας ως προς $\bar{F}(y)$ καταλήγουμε,

$$\bar{F}(y) = e^{-\int_0^y \mu(s)ds} \tag{2.3}$$

Από την οποία συμπεραίνουμε ότι αν έχουμε τη $\mu(y)$ εύκολα μπορούμε να βρούμε την $\bar{F}(y)$.
Έστω τώρα ότι η μέση τιμή της Y υπάρχει και δίνεται απο τον τύπο,

$$E(Y) = \int_0^\infty ydF(y) = \int_0^\infty yf(y)dy < \infty$$

Κάνοντας παραγωντική ολοκλήρωση θα πάρουμε,

$$\int_0^\infty ydF(y) = \int_0^\infty yd(1-\bar{F}(y)) = \int_0^\infty -yd\bar{F}(y) = -y\bar{F}(y)|_0^\infty + \int_0^\infty \bar{F}(y)dy$$

και

$$\lim_{y\to\infty} y\bar{F}(y) = 0$$

Άρα,

$$E(Y) = \int_0^\infty \bar{F}(y)dy \tag{2.4}$$

Από τις σχέσεις (2.1) και (2.4) λύνοντας ως προς $E(Y)$ θα πάρουμε,

$$E(Y) = \int_0^\infty \bar{F}(y)dy = \int_0^\infty \frac{f(y)}{\mu(y)}dy = E\left(\frac{1}{\mu(y)}\right) \tag{2.5}$$

Η σχέση (2.5) επιβεβαιώνει το αρχικό συμπέρασμα το οποίο είχαμε από τη σχέση (2.2) , ότι μεγάλες τιμές της $\mu(y)$, δίνουν μικρές τιμές για τη μέση τιμή της Y, την $E(Y)$.
Ακόμα, γενικεύοντας την (2.5) για σταθερό $\mu(y) = \mu$ οδηγούμαστε στη μέση τιμή της εκθετικής κατανομής με παράμετρο, $\mu(y)$. Ουσιαστικά η βαθμίδα αποτυχίας $\mu(y)$ είναι μονότονη, μή αυξανόμενη, (μη φθίνουσα) σε σχέση με τη μεταβλητή (y) και αυτό έχει να κάνει με τη δεξιά ουρά της κατανομής, (αν είναι βαριά ή όχι).

Ορισμός 2.1.

1. *Η συνάρτηση κατανομής $F(y)$ ανήκει στην οικογένεια κατανομών DFR (Decreasing Failure Rate) αν η ποσότητα $\dfrac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(y)}$ είναι αύξουσα συνάρτηση του y για σταθερό $x \geq 0$.*

2. *Η συνάρτηση κατανομής $F(y)$ ανήκει στην οικογένεια κατανομών IFR (Increasing Failure Rate) αν η ποσότητα $\frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(y)}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του y για σταθερό $x \geq 0$.* □

Είναι φανερό ότι η οικογένεια κατανομών DFR συμπεριλαμβάνει κατανομές με φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας $\mu(y)$ ως προς y, ενώ η οικογένεια κατανομών IFR συμπεριλαμβάνει κατανομές με αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας $\mu(y)$ ως προς y.

Παρατηρήσεις:

1. Για την οικογένεια κατανομών DFR, η $h(y) = \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(y)}$ είναι αύξουσα συνάρτηση του y για σταθερό $x \geq 0$. Επομένως για $y \geq 0,\ x \geq 0$ θα ισχύει

$$h(y) \geq h(0) \ \Rightarrow\ \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(y)} \geq \bar{F}(x) \ \Rightarrow\ \bar{F}(x+y) \geq \bar{F}(y)\bar{F}(x)$$

2. Ομοίως την την οικογένεια κατανομών IFR, θα ισχύει

$$\bar{F}(x+y) \leq \bar{F}(y)\bar{F}(x),\ y \geq 0,\ x \geq 0$$

Προηγουμένως για σταθερό $\mu(y)$ είπαμε ότι η $F(y)$ ακολουθεί μία εκθετική κατανομή και μάλιστα γνωρίζουμε και την παραμετρό της, $\mu(y) = \mu$. Η εκθετική κατανομή λοιπόν της οποίας η συνάρτηση κατανομής δίνεται από τον τύπο $F(y) = 1 - e^{-\mu y}, y \geq 0$είναι ταυτόχρονα και DFR και IFR καθώς $\mu(y) = \mu, \forall y$. Γενικά είναι δύσκολο να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της $\mu(y)$ διότι σε πολλές περιπτώσεις και η $F(y)$ αλλά και η $f(y)$ δίνονται από σύνθετες παραστάσεις. Ωστόσο έχουν γίνει διάφορες προσεγγίσεις οι οποίες συχνά οδηγούν σε χρίσημα συμπεράσματα όπως το παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 2.1. *Έστω $F(y)$, είναι μία σ.κ. μίξης εκθετικών κατανομών, δηλαδή*

$$F(y) = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\theta y}) dH(\theta) \tag{2.6}$$

Όπου $H(\theta)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της θετικής τυχαίας μεταβλητής θ. Τότε ο ρυθμός (βαθμίδα) αποτυχίας θα δίνεται από τη σχέση.

$$\mu(y) = -\frac{d}{dy} \ln \bar{F}(y) = \frac{\int_0^{\infty} \theta e^{-\theta y} dH(\theta)}{\int_0^{\infty} e^{-\theta y} dH(\theta)} \tag{2.7}$$

Λύση:

Για να μελετήσουμε την $\mu(y)$ ως προς τη μονοτονία θεωρούμε τη συνάρτηση κατανομής $H_y(\theta) = Pr(\Theta_y < \theta)$ η οποία ικανοποιεί την

$$dH_y(\theta) = \frac{e^{-\theta y} dH(\theta)}{\int_0^\infty e^{-\theta y} dH(\theta)}$$

και παίρνοντας την κ-ροπή της Θ_y θα έχουμε,

$$E\left(\Theta_y^\kappa\right) = \frac{\int_0^\infty \theta^\kappa e^{-\theta y} dH(\theta)}{\int_0^\infty e^{-\theta y} dH(\theta)}$$

Παραγωγίζοντας τώρα την (2.7) ως προς (y) έχουμε,

$$\begin{aligned}
\mu'(y) &= \left\{ \frac{\int_0^\infty \theta e^{-\theta y} dH(\theta)}{\int_0^\infty e^{-\theta y} dH(\theta)} \right\}' \\
&= -\left\{ \frac{\int_0^\infty \theta^2 e^{-\theta y} dH(\theta) \int_0^\infty e^{-\theta y} dH(\theta)}{\left[\int_0^\infty e^{-\theta y} dH(\theta)\right]^2} \right\} + \left\{ \frac{\int_0^\infty \theta e^{-\theta y} dH(\theta) \int_0^\infty \theta e^{-\theta y} dH(\theta)}{\left[\int_0^\infty e^{-\theta y} dH(\theta)\right]^2} \right\} \\
&= -\left\{ \frac{\int_0^\infty \theta^2 e^{-\theta y} dH(\theta)}{\int_0^\infty e^{-\theta y} dH(\theta)} \right\} + \left\{ \frac{\int_0^\infty \theta e^{-\theta y} dH(\theta)}{\int_0^\infty e^{-\theta y} dH(\theta)} \right\}^2 \\
&= -E\left(\Theta_y^2\right) + \left\{E\left(\Theta_y\right)\right\}^2 = -Var\left(\Theta_y\right)
\end{aligned}$$

Όμως $Var\left(\Theta_y\right)$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδέν, άρα $\mu'(y) \leq 0$ οπότε η μίξη εκθετικών κατανομών είναι μία DFR κατανομή.

□

2.2 Συνάρτηση ισορροπίας

Από τη σχέση (2.4) διαιρώντας με $E(Y)$ παίρνουμε,

$$\int_0^\infty \frac{\bar{F(y)}}{E(y)} dy = 1$$

Από όπου ορίζοντας ως,

$$f_1(y) = \frac{\bar{F(y)}}{E(y)}$$

παρατηρούμε ότι η $f_1(y)$ είναι μία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και άρα η συνάρτηση κατανομής θα δίνεται από τον τύπο,

$$F_1(y) = \int_0^y \frac{\bar{F(x)}}{E(x)} dx \tag{2.8}$$

και θα καλείται ως συνάρτηση ισορροπίας της ς.κ $F(y)$. Για τη μελέτη της $F_1(y)$ θα χρειαστούμε τις ροπές της και για το λόγο αυτό θα προχωρήσουμε στην εύρεση αυτών. Θα έχουμε λοιπόν,

$$E(y^n) = \int_0^\infty y^n \frac{\bar{F}(y)}{E(y)} dy$$

και κάνοντας παραγωντική ολοκλήρωση θα πάρουμε,

$$E(y^n) = \int_0^\infty \left(\frac{y^{n+1}}{n+1}\right)' \frac{\bar{F}(y)}{E(y)} dy = \left[\frac{y^{n+1}\bar{F}(y)}{(n+1)E(y)}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{y^{n+1}}{(n+1)} \frac{d\bar{F}(y)}{E(y)}$$
$$= \lim_{y\to\infty} \frac{y^{n+1}\bar{F}(y)}{(n+1)E(y)} + \int_0^\infty \frac{y^{n+1}}{n+1} \frac{d\bar{F}(y)}{E(y)}$$

Μελετώντας τώρα το όριο $\lim_{y\to\infty} \frac{y^{n+1}\bar{F}(y)}{(n+1)E(y)}$ παρατηρούμε ότι,

$$0 \le y^{n+1}\bar{F}(y) = y^{n+1} \int_y^\infty d\bar{F}(x) \le \int_0^\infty x^{n+1} dF(x)$$

Οπότε αν υπάρχει $E(Y^{n+1}) = \int_0^\infty x^{n+1} dF(x) < \infty$ τότε το όριο γίνεται,

$$\lim_{y\to\infty} y^{n+1}\bar{F}(y) \le \lim_{y\to\infty} \int_0^\infty x^{n+1} dF(x) = 0$$

και άρα

$$\lim_{y\to\infty} y^{n+1}\bar{F}(y) = 0$$

Η οποία μας οδηγεί στην παρακάτω σχέση για τις ροπές της συνάρτησης ισορροπίας.

$$\int_0^\infty y^n dF_1(y) = \frac{E(Y^{n+1})}{(n+1)E(Y)} \tag{2.9}$$

και για $n = 1$ παιρνουμε τη μέση τιμή της συνάρτησης ισορροπίας.

$$\int_0^\infty y dF_1(y) = \frac{E(Y^2)}{2E(Y)} \tag{2.10}$$

Ακόμα αν κάνουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες στη σχέση $\int_y^\infty x dF(x)$ θα έχουμε $-\left[x\bar{F}(x)\right]_y^\infty + \int_y^\infty \bar{F}(x)$ και $\lim_{x\to\infty} x\bar{F}(x) = 0$ που μας οδηγεί στη σχέση

$$\int_y^\infty x dF(x) = y\bar{F}(y) + E(Y)\bar{F}_1(y), y \ge 0 \tag{2.11}$$

και λύνοντας ως προς $\bar{F}_1(y)$ καταλήγουμε στη σχέση

$$\bar{F}_1(y) = \frac{\int_0^\infty (x-y) dF(x)}{E(Y)}, y \ge 0 \tag{2.12}$$

2.3 Κατανομή υπολοιπόμενου χρόνου και μέση τιμή

Έστω ότι έχουμε μία τυχαία μεταβλητή Y. Ορίζουμε μια νέα τυχαία μεταβλητή T_y όπου ($T_y = Y - y|Y > y$), ονομάζεται υπολοιπόμενος χρόνος ζωήστης Y δεδομένου ότι η Y έχει φτάσει στο y.
Η συνάρτηση κατανομής της T_y θα είναι,

$$\begin{aligned} Pr\left(T_y < t\right) &= Pr\left(Y - y < t|Y > y\right) \\ &= Pr\left(Y < y + t|Y > y\right) \\ &= 1 - Pr\left(Y > y + t|Y > y\right) \\ &= 1 - \frac{\bar{F}(y+t)}{\bar{F}(y)} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Η αναμενόμενη τιμή της T_y, η οποία λέγεται και μέσος υπολοιπόμενος χρόνος (mean residual lifetime, MRL) δίνεται από,

$$r(y) = E\left(T_y\right) = \frac{\int_y^{\infty}(t-y)dF(t)}{\bar{F}(y)}, y \geq 0 \tag{2.14}$$

κάνοντας παραγωντική ή απο τη σχέση (2.4), έχουμε

$$r(y) = \int_0^{\infty} Pr\left(T_y > t\right)dt = \int_0^{\infty} \frac{\bar{F}(t+y)}{\bar{F}(y)}dt \tag{2.15}$$

και κάνοντας χρήση του ορισμού της συνάτρησης κατανομής της ισορροπίας καταλήγουμε,

$$r(y) = \frac{\int_y^{\infty} \bar{F}(x)dx}{\bar{F}(y)} = \frac{E(Y)\bar{F}_e(y)}{\bar{F}(y)} \tag{2.16}$$

Στην παραπάνω σχέση παίρνοντας $y = 0$ θα έχουμε.

$$r(0) = \frac{E(Y)\bar{F}_e(0)}{\bar{F}(0)} = E(Y)$$

Το $r(Y)$ είναι πολύ χρήσιμο στη μελέτη της δεξιάς ουράς της κατανομής καθώς μεγάλες τιμές του $r(Y)$ συνοδεύονται από βαριές δεξιές ουρές. Ακόμα το $r(Y)$ συνδέεται άμεσα με τρη συνάρτηση ισορροπίας καθως έχουμε,

$$-\frac{d}{dy}\ln \bar{F}_e(y) = \frac{\frac{\bar{F}(y)}{E(Y)}}{\bar{F}_e(y)} = \frac{1}{r(y)} \tag{2.17}$$

και κάνοντας πράξεις θα έχουμε,

$$d\ln \bar{F}_e(y) = -\left(r(y)\right)^{-1} dy$$

ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη,

$$\ln \bar{F}_e(y) = -\int_0^y \left(r(x)\right)^{-1} dx$$

και διώχνοντας το λογάριθμο φτάνουμε στο αποτέλεσμα

$$\bar{F}_e(y) = e^{-\int_0^y (r(x))^{-1} dx}, y \geq 0 \tag{2.18}$$

Συμπεράσματα:

Η $\sigma.\ \kappa$ $F(y)$λέγεται αύξουσα ως προς το μέσο υπολοιπόμενο χρόνο ζωής MRL, δηλαδή (increased mean residual lifetime IMRL) αν η $r(y)$ είναι μη φθίνουσα συνάρτηση σε σχέση με το y.
Ακόμα οδηγούμαστε και σε ένα άλλο συμπέρασμα, ότι η κλάση κατανομών DFR, IFR συμπεριλαμβάνονται στην κλάση κατανομών $IMRL$.
Μελετώντας λίγο παραπάνω την συνάρτηση κατανομής της $F_e(Ty)$, από τις σχέσεις (2.13) και (2.16) θα έχουμε,

$$\begin{aligned} F_e(Ty) &= Pr\left(Ty < t\right) \\ &= 1 - \frac{\int_t^\infty Pr\left(Ty > x\right) dx}{r(y)} = 1 - \frac{\int_t^\infty F(x+y)dx}{r(y)\bar{F}(y)} \\ &= 1 - \frac{\int_{y+t}^\infty \bar{F}(x)dx}{E\left(Y\right)\bar{F}_e(y)} = 1 - \frac{\bar{F}_e(y+t)}{\bar{F}_e(y)} \end{aligned} \tag{2.19}$$

Στη συνέχεια παραθέτουμε κάποιες σχέσεις οι οποίες χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής. Λύνοντας ως προς τη δεξιά ουρά της συνάρτησης ισορροπίας τη σχέση (2.16) θα πάρουμε,

$$\bar{F}_e(y) = \frac{\bar{F}(y)r(y)}{E\left(Y\right)}$$

και κάνοντας αντικατάσταση στη σχέση (2.11) οδηγούμαστε σε,

$$\int_y^\infty xdF(x) = y\bar{F}(y) + E\left(Y\right)\frac{\bar{F}(y)r(y)}{E\left(Y\right)} \Rightarrow$$

$$\int_y^\infty xdF(x) = y\bar{F}(y) + \bar{F}(y)r(y) \Rightarrow$$

$$\int_y^\infty xdF(x) = \bar{F}(y)(y + r(y)) \Rightarrow$$

$$\bar{F}(y) = \frac{\int_y^\infty xdF(x)}{y + r(y)}$$

Κάνοντας αντικατάσταση στο ολοκλήρωμα το κάτω όριο με το μηδέν, τότε παίρνουμε ένα άνω φράγμα για την δεξιά ουρά της κατανομής $F(y)$, δηλαδή,

$$\bar{F}(y) = \frac{\int_y^\infty x dF(x)}{y + r(y)} \leq \frac{\int_0^\infty x dF(x)}{y + r(y)} = \frac{E\,(Y)}{y + r(y)} \tag{2.20}$$

Επιστρέφοντας στη σχέση (2.16) και λύνοντάς τη τώρα ως προς $F(Y)$ θα μας δώσει,

$$F(y) = \frac{E(Y)\bar{F}_e(y)}{r(y)}$$

και αντικαθιστώντας πάλι στην (2.11) θα πάρουμε,

$$\int_y^\infty x dF(x) = y\frac{E(Y)\bar{F}_e(y)}{r(y)} + E(Y)\bar{F}_e(y) \Rightarrow$$

$$\int_y^\infty x dF(x) = E(Y)\bar{F}_e(y)\left[1 + \frac{1}{r(y)}\right]$$

στην παραπάνω σχέση αν λύσοουμε ως προς $\bar{F}_e(y)$ θα έχουμε σαν αποτέλεσμα,

$$\bar{F}_e(y) = \frac{\int_y^\infty x dF(x)}{E(y)\left[1 + \frac{1}{r(y)}\right]} = \frac{r(y)\int_y^\infty x dF(x)}{E(Y)(r(y) + y)}$$

Λειτουργώντας με τον ίδιο τρόπο που λειτουργήσαμε για να βρούμε φράγμα για την δεξιά ουρά της κατανομής, αλλάζοντας δηλαδή το κάτω όριο στο ολοκλήρωμα με μηδέν θα πάρουμε ένα άνω φράγμα για την δεξιά ουρά της κατανομής ισορροπίας.
Άρα λοιπόν θα έχουμε,

$$\bar{F}_e(y) = \frac{r(y)\int_y^\infty x dF(x)}{E(Y)(r(y) + y)} \leq \frac{r(y)\int_0^\infty x dF(x)}{E(Y)(r(y) + y)} = \frac{r(y)E(Y)}{E(Y)(r(y) + y)} = \frac{r(y)}{r(y) + y} \tag{2.21}$$

Σε περίπτωση που και η $r(y)$ φράσεται τότε το παραπάνω φράγμα βελτιώνεται ακόμα περισσότερο. Αν λοιπόν έχουμε $r(y) \leq \kappa$ τότε το φράγμα για την (2.21) θα γίνει,

$$\bar{F}_e(y) \leq \frac{\kappa}{\kappa + y}$$

Κάτι άλλο που αξίζει να σημειωθεί είναι όταν η $F(y)$ είναι απόλυτα συνεχείς με βαθμίδα αποτυχίας $\mu(y)$. Τότε από τη σχέση (2.3) και τη σχέση (2.15) θα πάρουμε,

$$r(y) = \int_0^\infty \frac{e^{-\int_0^{y+t}\mu(x)dx}}{e^{-\int_0^{y}\mu(x)dx}}dt = \int_0^\infty e^{-\int_y^{y+t}\mu(x)dx}dt$$

Όπου έχουμε εκφράσει το $r(y)$ συναρτήση του $\mu(y)$. Αν λοιπόν φράξουμε το $\mu(y)$ είτε από κάτω, είτε από πάνω αυτομάτως παίρνουμε αντίστροφα φράγματα για το $r(y)$. Δηλαδή, αν φράξουμε από κάτω το $\mu(y)$ τότε θα έχουμε άνω φράγμα για το $r(y)$ και αντίστοιχα αν έχουμε άνω φράγμα για το $\mu(y)$ τότε θα πάρουμε κάτω φράγμα για το $r(y)$. Έστω $\mu(y) \leq \mu$. Τότε για το $r(y)$ θα ισχύει,

$$r(y) \geq \int_0^\infty e^{-\int_y^{y+t}\mu dx}dt = \int_0^\infty e^{-\mu t}dt = \frac{1}{\mu}$$

ενώ αν η ανισότητα για το $\mu(y)$ ήταν ανάποδα, δηλαδή $\mu(y) \geq \mu$ τότε ακολουθώντας την ίδια διαδικασία θα καταλήξουμε σε ένα άνω φραγμα για το $r(y)$.

$$r(y) \leq \frac{1}{\mu}$$

2.4 Άλλες κλάσεις κατανομών

Στις προηγούμενες ενότητες κάναμε διαχωρισμό των κατανομών με βάση τη βαθμίδα αποτυχίας και τον υπολοιπόμενο μέσο όρο ζωής. Υπάρχουν ακόμα πολλές κλάσεις κατανομών οι οποίες χρίζουν μελέτης για την αποτελεσματηκότερη επεξεργασία των ζημιοκατανομών σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο. Αυτές είναι οι κατανομές οι οποίες ανοίκουν σε μία ομάδα όπου μελετάμε τη συνάρτηση επιβίωσης ή τη συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής ισορροπίας. Σε αυτές τις κατανομές έχουν αναφερθεί οι, Fagiuoli και Pollerey (1993, 1994). Στη συνέχεια λοιπόν θα παραθέσουμε τους ορισμούς των κλάσεων κατανωμών DFR,IFR,NBU,NWU,NWUC και NBUC .

Ορισμός 2.2.

1. *Η συνάρτηση κατανομής $F(y)$ ανήκει στην οικογένεια κατανομών NWU (new worse than used) όταν για κάθε $x \geq 0$ και $y \geq 0$ ισχύει*

$$\bar{F}(x+y) \geq \bar{F}(y)\bar{F}(x)$$

2. *Η συνάρτηση κατανομής $F(y)$ ανήκει στην οικογένεια κατανομών NBU (new better than used) όταν για κάθε $x \geq 0$ και $y \geq 0$ ισχύει*

$$\bar{F}(x+y) \leq \bar{F}(y)\bar{F}(x)$$

$\square$

Η ονομασία new worse than used προέρχεται από το γεγονός ότι η ανισότητα $\bar{F}(x+y) \geq \bar{F}(x)\bar{F}(y)$ είναι ένας διαφορετικός τρόπος έκφρασης της σχέσης $\Pr[T(y) > x] \geq \Pr(Y > x)$, όπου

$$T(y) = Y - y \ / \ Y > y.$$

Επομένως ένα χαρακτηρισικό της κλάσης NWU είναι το γεγονός ότι ο υπολοιπόμενος χρόνος ζωής ενός ατόμου ηλικίας y είναι στοχαστικά μεγαλύτερος από τον υπολοιπόμενο χρόνο ζωής ενός νεογέννητου ατόμου (που εκφράζεται από την τυχαία μεταβλητή Y). Αντίστοιχα, η κλάση κτανομών NBU χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι $\Pr[T(y) > x] \leq \Pr(Y > x)$.
Φυσικά η κλάση DFR είναι υποσύνολο της κλάσης NWU , ενώ η κλάση IFR είναι υποσύνολο της κλάσης NBU.

Ορισμός 2.3.

1. *Η συνάρτηση κατανομής $F(y)$ ανήκει στην οικογένεια κατανομών NWUC (new worse than used in convex ordering) όταν για κάθε $x \geq 0$ και $y \geq 0$ ισχύει*

$$\bar{F}_e(x+y) \geq \bar{F}_e(y)\bar{F}(x)$$

2. *Η συνάρτηση κατανομής $F(y)$ ανήκει στην οικογένεια κατανομών NBUC (new better than used in convex ordering) όταν για κάθε $x \geq 0$ και $y \geq 0$ ισχύει*

$$\bar{F}_e(x+y) \leq \bar{F}_e(y)\bar{F}(x)$$

$\square$

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι η κλάση κατανομών NWUC χαρακτηρίζεται από το γεγονός ο υπολοιπόμενος χρόνος ζωής της κατανομής ισορροπίας είναι στοχαστικά μεγαλύτερος από αυτόν της τ.μ. Y. Αντίστοιχα η κλάση NBUC χαρακτηρίζεται από το γεγονός ο υπολοιπόμενος χρόνος ζωής της κατανομής ισορροπίας είναι στοχαστικά μικρότερος από αυτόν της τ.μ. Y. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τις κλάσεις κατανομών, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις εξής πηγές: Willmot-Lin (2001), και Cao-Wang (1991).

Κεφάλαιο 3

Προκαταβλητέα Πληρωμή Ασφαλίστρων Για Γενική Κατανομή Επιτοκίου

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τη διαδικασία πλεονάσματος σε διακριτό χρόνο, όταν το πλεόνασμα επενδύεται και το επιτόκιο ακολουθεί μια τυχαία κατανομή. Βασικός σκοπός της μελέτης αυτής είναι η εύρεση φραγμάτων μέσω martingales και μέσω αναδρομικών σχέσεων για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Στο κεφάλαιο αυτό αναφορικά με τα φράγματα, θα παρουσίασουμε τα αποτελέσματα του Cai (2002).

3.1 Περιγραφή του μοντέλου

Έστω $(X_n, n = 1, 2, 3 \cdots)$ και $(Y_n, n = 1, 2, 3 \cdots)$ είναι δύο μη αρνητικές ανεξάρτητες ακολουθίες τυχαίων ισόνομων και ανεξάρτητων μεταβλητών όπου X_n είναι τα ασφάλιστρα που εισπράτει η ασφαλιστική εταιρεία και Y_n είναι οι ζημιές τις οποίες αποζημιώνει. Τότε το άθροισμα:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (X_k - Y_k), n \geq 1$$

Είναι ένας τυχαίαος περίπατος ο οποίος εξαρτάται από τις μεταβλητές X_n και Y_n. Μια ποσότητα της οποίας ο υπολογισμός έχει ιδιαίτερη σημασία, είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_0(u)$, μπορεί να υπολογιστεί μέσω του τυχαίαου αθροίσματος.

$$\psi_0(u) = Pr\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(S_n > u)\right\} = Pr\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(U_n < u)\right\}$$

Όπου,

$$U_n = u + \sum_{k=1}^{n}(X_k - Y_k) \tag{3.1}$$

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, στο μοντέλο το οποίο μελετάμε, το πλεόνασμα επενδύεται. Έστω λοιπόν το επιτόκιο τη (n)-οστη περίοδο (από το $n-1$ έως το n) να είναι ίσο με $(i_n \geq 0)$ και $(Z = 1 + i_n)$ να είναι συντελεστής συσώρευσης για την περίοδο αυτή.
Τότε, έχοντας υποθέσει ότι τα ασφάλιστρα καταβάλλονται στην αρχή της περιόδου, άρα η ασφαλιστική εταιρεία θα έχει έσοδα από την επένδυσή τους. Το πλεόνασμα λοιπόν, θα εξελίσεται στη διάρκεια του χρόνου και η συνάρτηση (4.1) θα γίνει:
Τη χρονική στιγμή $(n = 1)$ το πλεόνασμα θα γίνει:

$$U_1 = (U_0 + X_1)(1 + i_1) - Y_1$$

$$U_1 = (u + X_1)Z_1 - Y_1$$

Τη χρονική στιγμή $n = 2$ για το πλεόνασμα θα έχουμε.

$$U_2 = (U_1 + X_2)Z_2 - Y_2$$

Αντικαθιστώντας το U_1 με το $(u + X_1)Z_1 - Y_1$ παίρνουμε,

$$U_2 = [(u + X_1)Z_1 - Y_1 + X_2]Z_2 - Y_2$$

$$U_2 = uZ_1Z_2 + (X_1Z_1 - Y_1)Z_2 + (X_2Z_2 - Y_2)$$

Ομοίως για τη χρονική στιγμή $n = 3$ θα έχουμε,

$$U_3 = (U_2 + X_3)Z_3 - Y_3$$

Και εδώ όπως και προηγουμένως θα αντικαταστήσουμε το U_2 με το ίσο του,

$$U_3 = [uZ_1Z_2 + (X_1Z_1 - Y_1)Z_2 + (X_2Z_2 - Y_2) + X_3]Z_3 - Y_3$$

$$U_3 = uZ_1Z_2Z_3 + (X_1Z_1 - Y_1)Z_2Z_3 + (X_2Z_2 - Y_2)Z_3 + (X_3Z_3 - Y_3)$$

Ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία για τη χρονική στιγμή (n) θα καταλήξουμε στη σχέση:

$$U_n = u\prod_{i=1}^{n} Z_i + \sum_{i=1}^{n}(X_iZ_i - Y_i)\prod_{t=i+1}^{n} Z_i \tag{3.2}$$

Όπου $\prod_{\alpha}^{\beta} Z_i = 1$ για $\alpha > \beta$
Δηλαδή, το πλεόνασμα κάθε χρονική στιγμή θα ισούται με το πλεόνασμα της προηγούμενης περιόδου συν τα ασφάλιστρα της περιόδου που υπολογίζουμε το πλεόνασμα, τοκισμένα και τα δύο με το αντίστοιχο επιτόκιο, μείον τις ζημιές της περιόδου κάλυψης.

3.2 Φράγματα martigale για την πιθανότητα χρεοκοπίας

Η εύρεση τιμών για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι πολύ δύσκολη από μαθηματικής άποψης. Για το λόγο αυτό θα κατασκευάσουμε φράγματα τα οποία φράσουν την πιθανότητα χρεοκοπίας από πάνω. Για τον υπολογισμό των φραγμάτων θα χρισημοποιήσουμε τις ιδιότητες των κατανομών NBU και NWU τις οποίες πρώτος εισήγαγε στον τομέα αυτό ο Willmot (Refinements and distributional generalizations of Lundberg's inequality) . Οι ιδιότητες των συγκεκριμένων κατανομών είναι τόσο χρήσιμες στην απλούστευση των μαθηματικών πράξεων ώστε να τις χρισημοποιήσουν στη βιβλιογραφία τους οι, Cai και Garrido (A unified approach to the study of tail probabilities of compound distributions), Grandel (Mixed Poisson processes), Willmot (On a class of approximations for ruin and waiting time probabilities) και Willmot και Lin (Lunberg approximations for compound distributions with insurance applications).

Θεώρημα 3.1. *Έστω B_1 μία NWU κατανομή και B_2 μία NBU αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι οι B_1 και B_2 για κάθε α, όπου $0 < \alpha \leq 1$ ικανοποιούν τη σχέση:*

$$E\left(\frac{\bar{B}_2(\alpha X_1)}{\bar{B}_1(\alpha Y_1 Z_1^{-1})}\right) \leq 1 \tag{3.3}$$

Τότε $\forall U \geq 0$ θα ισχύει,

$$\psi(u) \leq \Lambda(u) \tag{3.4}$$

Όπου,

$$[\Lambda(x)]^{-1} = \inf_{y \geq 0} \frac{\bar{B}_2(y)}{\bar{B}_1(x+y)} \tag{3.5}$$

Απόδειξη:
Έστω,

$$S_n = \frac{\bar{B}_2(P_n)}{\bar{B}_1(C_n)}$$

Όπου, $P_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \prod_{i=1}^{k-1} Z_i^{-1}$, δηλαδή το άθροισμα όλων των ασφαλίστρων που θα καταβληθούν μέχρι την περίοδο (n) προεξοφλημένα στην έναρξη του μοντέλου και, $C_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \prod_{i=1}^{k} Z_i^{-1}$ το άθροισμα όλων των μελλοντικών αποζημιώσεων επίσης προεξοφλημένο στην έναρξη του μοντέλου, με $P_0 = C_0 = 0$.
Τότε από τον ορισμό των NBU και NWU έχουμε,

$$S_{n+1} = \frac{\bar{B}_2(P_{n+1})}{\bar{B}_1(C_{n+1})} = \frac{\bar{B}_2\left(\sum_{k=1}^{n+1} X_k \prod_{i=1}^{k-1} Z_i^{-1}\right)}{\bar{B}_1\left(\sum_{k=1}^{n+1} Y_k \prod_{i=1}^{k} Z_i^{-1}\right)}$$

Σπάμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή ώστε να εμφανίσουμε το P_n και το C_n

$$S_{n+1}=\frac{\bar{B}_2\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\prod_{i=1}^{k-1}Z_i^{-1}+X_{n+1}\prod_{i=1}^{n}Z_i^{-1}\right)}{\bar{B}_1\left(\sum_{k=1}^{n}Y_k\prod_{i=1}^{k}Z_i^{-1}+Y_{n+1}\prod_{i=1}^{n+1}Z_i^{-1}\right)}$$

Από τον ορισμό των P_n και C_n η σχέση γίνεται,

$$S_{n+1}=\frac{\bar{B}_2\left(P_n+X_{n+1}\prod_{i=1}^{n}Z_i^{-1}\right)}{\bar{B}_1\left(C_n+Y_{n+1}\prod_{i=1}^{n+1}Z_i^{-1}\right)}\leq S_n\frac{\bar{B}_2\left(X_{n+1}\prod_{i=1}^{n}Z_i^{-1}\right)}{\bar{B}_1\left(Y_{n+1}\prod_{i=1}^{n+1}Z_i^{-1}\right)}$$

Η τελευταία ανισότητα προκύπτει απο τον ορισμό των NBU και NWU . Στη συνέχεια ορίζουμε μια σ-Άλγεβρα, $\mathcal{F}_n=\{X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_n,Z_1,\cdots,Z_n\}$
Για $\forall n\geq 0$ θα ισχύει:

$$\begin{aligned}E\left(S_{n+1}|\mathcal{F}_n\right)&\leq S_nE\left(\frac{\bar{B}_2\left(X_{n+1}\prod_{i=1}^{n}Z_i^{-1}\right)}{\bar{B}_1\left(Y_{n+1}\prod_{i=1}^{n+1}Z_i^{-1}\right)}|\mathcal{F}_n\right)\\&=S_nE\left(\frac{\bar{B}_2\left(\prod_{i=1}^{n}Z_i^{-1}X_{n+1}\right)}{\bar{B}_1\left(\prod_{i=1}^{n+1}Z_i^{-1}Y_{n+1}Z_{n+1}^{-1}\right)}|\mathcal{F}_n\right)\end{aligned}$$

Λόγω ανεξαρτησίας των X_{n+1},Y_{n+1},Z_{n+1} από την $\mathcal{F}_n$ θα έχουμε:

$$E\left(S_{n+1}|\mathcal{F}_n\right)\leq S_nE\left(\frac{\bar{B}_2\left(\prod_{i=1}^{n}Z_i^{-1}X_{n+1}\right)}{\bar{B}_1\left(\prod_{i=1}^{n+1}Z_i^{-1}Z_{i+1}^{-1}Y_{i+1}^{-1}\right)}|\mathcal{F}_n\right)$$

και θεωρώντας $\alpha=\prod_{i=1}^{n}Z_i^{-1},X_1=X_{n+1},Y_1=Y_{n+1}$ και $Z_1=Z_{n+1}$ από τη σχέση (3.3) θα έχουμε:

$$E\left(S_{n+1}|\mathcal{F}_n\right)\leq S_n \tag{3.6}$$

Η σχέση (3.6) δηλώνει ότι η $S_n,n\geq 0$ είναι μια supermartigale . Εμείς θεωρήσαμε στο μοντέλο ως χρόνο χρεοκοπίας το $T=\inf(n:U_n<0)$ με $(T=\infty)$ αν $(U_n\geq 0)$ για $\forall n$. Έτσι το T είναι ένας χρόνος στάσης. Θεωρούμε $(n\wedge T)=min(n,T)$ ένα πεπερασμένο χπόνο στάσης. Κάνοντας χρήση του θεωρήματος για το χρόνο στάσης μιας supermartingale, Teylor(An introduction to measure and probability) παίρνουμε:

$$E[S_{n\wedge T}]\leq E[S_0]=1 \tag{3.7}$$

και έστω η πιθανότητα χρεοκοπίας η οποία δίνεται από τη σχέση Cai (2002) ,

$$\psi_n(u)=Pr\left\{\bigcup_{k=1}^{n}(U_k<0)\right\}=E\left\{I(T\leq n)\right\} \tag{3.8}$$

Τότε σύμφωνα με τη σχέση 5.8 θα έχουμε:

$$1 \geq ES_{n\wedge T} \geq E[S_{n\wedge T}I(T \leq n)] = E[S_T I(T \leq n)]$$

Αντικαθιστώντας την S_T με,

$$S_T = \frac{\bar{B}_2(P_T)}{\bar{B}_1(C_T)}$$

παίρνουμε,

$$1 \geq E\left(\frac{\bar{B}_2(P_T)}{\bar{B}_1(C_T)} I(T \leq n)\right)$$

και για να επέλθει χρεοκοπία θα πρέπει $C_T \geq u + P_T$, Άρα η παραπάνω σχέση κάνοντας χρήση και της (6.6) διαμορφώνεται ως,

$$1 \geq E\left(\frac{\bar{B}_2(P_T)}{\bar{B}_1(u + P_T)} I(T \leq n)\right) \geq \Lambda^{-1}(u)E(I(T \leq n))$$

και απο τον ορισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας καταλήγουμε στη σχέση

$$1 \geq \Lambda^{-1}(u)E(I(T \leq n)) = \Lambda^{-1}(u)\psi_n(u)$$

Όπου στην οποία παίρνοντας το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(u) = \psi(u)$$

καταλήγουμε στη σχέση (6.5) που ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

Πόρισμα 3.1. *Έστω R_1 μια σταθερά η οποία ικανοποιεί τη σχέση*

$$Ee^{-R_1(X_1 - Y_1 Z_1^{-1})} = 1 \tag{3.9}$$

Τότε για κάθε $u \geq 0$ θα ισχύει

$$\psi(u) \leq e^{-R_1 u} \tag{3.10}$$

Απόδειξη:
Στο θεώρημα (3.1) θεωρούμε $\bar{B}_1(x)$=$\bar{B}_2(x)$=$e^{-R_1 x}$. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα το $\Lambda(x)$ να ισούται με $e^{-R_1 x}$. Ακόμα, μέσω της ανισότητας Jensen και απο τη σχέση (5.10) για κάθε $0 < \alpha \leq 1$ θα ισχύει:

$$Ee^{-R_1(X_1-Y_1Z_1^{-1})} = E\left(e^{-R_1(X_1-Y_1Z_1^{-1})}\right)^{\alpha} \leq \left(Ee^{-R_1(X_1-Y_1Z_1^{-1})}\right)^{\alpha} = 1$$

Κάνοντας αντικατάσταση στην παραπάνω ανισότητα όπου $\bar{B}_1(x)$=$\bar{B}_2(x)$=e^{-R_1x} η ανισότητα γίνεται,

$$E\left(e^{-R_1(X_1-Y_1Z_1^{-1})}\right)^{\alpha} \leq 1 \Rightarrow$$

$$E\left(e^{-R_1X_1\alpha-(-R_1Y_1Z_1^{-1}\alpha)}\right) \leq 1 \Rightarrow$$

$$E\left(\frac{e^{-R_1X_1\alpha}}{e^{-R_1Y_1Z_1^{-1}\alpha}}\right) \leq 1$$

όπου αντικαθιστώντας τον αριθμητή με $e^{-R_1X_1\alpha} = \bar{B}_2(\alpha X_1)$ και τον παρανομαστή με $e^{-R_1Y_1Z_1^{-1}\alpha} = \bar{B}_1(\alpha Y_1Z_1^{-1})$ καταλήγουμε να δείξουμε ότι η,

$$E\left(\frac{\bar{B}_2(\alpha X_1)}{\bar{B}_1(\alpha Y_1Z_1^{-1})}\right) \leq 1$$

ισχύει, (σχέση (3.3)).

Ακόμα, απο τη σχέση $\psi(u) \leq \Lambda(u)$ για $\bar{B}_1(x)$=$\bar{B}_2(x)$=e^{-R_1u} βρίσκουμε το $\Lambda(u)$. Σύμφωνα με το θεώρημα (3.1) έχουμε:

$$\Lambda^{-1}(x) = \frac{\bar{B}_2(y)}{\bar{B}_1(x+y)} = \frac{\bar{B}_2(x)}{\bar{B}_1(u+x)} = \frac{e^{-R_1X_1}}{e^{-R_1(u+X_1)}} = \frac{1}{e^{-R_1u}} \Rightarrow$$

$$\Lambda(u) = e^{-R_1u}$$

Άρα,

$$\psi(u) \leq e^{-R_1u}$$

□

3.3 Φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω αναδρομικών σχέσεων

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με την εύρεση φραγμάτων για την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω Αναδρομικών σχέσεων. Οι Cai and Wu (Some improvements on the Lundberg bound for the ruin probability) όπως και οι Willmot and Lin (Lunberg approximations for compound distributions with insurance applications) χρησιμοποίησαν τη μέθοδο αυτή για την εύρεση φραγμάτων της πιθανότητας χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου. Τα φράγματα τα οπία εξάγονται με τη μέθοδο αυτή είναι πιο ἀυστηρά' σε σχέση με τα φράγματα που εξάγονται μέσω της μεθόδου martigale . Για να μπορέσουμε να βρούμε τέτοιου είδους φράγματα θα χρειαστεί να ορίσουμε κάποιες μεταβλητές. Έτσι, για μία κατανομή B_1 με $B_1(0) = 0$ ορίζουμε,

$$(\beta_1)^{-1} = \inf_{t\geq 0} \frac{\int_1^{\infty}[\bar{B}_1(y)]^{-1}dF(y)}{[\bar{B}_1(t)]^{-1}F(t)} \tag{3.11}$$

Οπότε για κάθε $x \geq 0$ θα έχουμε,

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{\int_1^{\infty}[\bar{B}_1(y)]^{-1}dF(y)}{[\bar{B}_1(t)]^{-1}F(t)}\right)^{-1} \bar{B}_1(x)\int_x^{\infty}[\bar{B}_1(y)]^{-1}dF(y) \tag{3.12}$$

και κάνοντας αντικατάσταση τη σχέση (3.11) η $\bar{F}(x)$ θα φράσεται από πάνω ως,

$$\bar{F}(x) \leq \beta_1\bar{B}_1(x)\int_x^{\infty}[\bar{B}_1(y)]^{-1}dF(y) \tag{3.13}$$

Το ολοκλήρωμα είναι από το x στο άπειρο της δεξιάς ουράς μιας κατανομής είναι η μέση τιμή της κατανομής την οποία ολοκληρώνει, οπότε η (6.14) θα γίνει,

$$\bar{F}(x) \leq \beta_1\bar{B}_1(x)E[\bar{B}_1(Y_1)]^{-1} \tag{3.14}$$

Όμως, $\bar{F}(x) \leq 1$ και από την τελευταία ανισότητα καταλήγουμε στη σχέση

$$\left(E[\bar{B}_1(Y_1)]^{-1}\right)^{-1} \leq \beta_1 \leq 1 \tag{3.15}$$

□

Έχοντας ορίσει τις μεταβλητές στη συνέχεια θα προχωρήσουμε σε ένα θεώρημα μέσω του οποίου μπορούμε να βρίσκουμε φράγματα.

Θεώρημα 3.2. *Έστω B_1 μια NWU κατανομή και Λ_1 μία μη αρνητική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η B_1 και η Λ_1 ικανοποιούν τη σχέση.*

$$E\left[B_1\bar{(}Y_1)\right]^{-1}E\Lambda_1(X_1Z_1) \leq 1 \tag{3.16}$$

και για κάθε $y \geq 0$ και $x \geq 0$

$$\bar{B}_1(x+y) \leq \bar{B}_1(x)\Lambda_1(y) \tag{3.17}$$

Τότε για κάθε $u \geq 0$,

$$\psi(u) \leq \beta_1 E\left[\bar{B}_1(Y_1)\right]^{-1}E\left[\bar{B}_1((u+X_1)Z_1)\right] \tag{3.18}$$

Απόδειξη:
Για την απόδειξη θα χρισημοποιήσουμε τη μέθοδο της επαγωγής για την εύρεση αναδρομικού τύπου για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Αυτό που θα κάνουμε, είναι να δεσμεύσουμε ως προς την ζημιά της πρώτης περιόδου, να δούμε τί επίπτωση θα έχει στο πλεόνασμα, και μετά εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας βρίσκουμε ανανεωτικούς τύπους για την εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας. Από τον ορισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας (σχέση (5.9)) έχουμε:

$$\psi_n(u) = Pr\left\{\bigcup_{k=1}^{n}(U_k < 0)\right\} = E\left\{I(T \leq n)\right\}$$

Για να επέλθει χρεοκοπία μετά την έλευση της πρώτης ζημίας (πρώτης περιόδου) θα πρέπει,

$$\psi_1(u) = Pr\left\{Y_1 > (u + X_1)Z_1\right\} = \int_1^{\infty}\int_0^{\infty}\bar{F}\left((u+x)z\right)dH(x)dG(z) \tag{3.19}$$

Το πλεόνασμα θα έχει γίνει $(u + X_1)Z_1$, τότε απο τις σχέσεις (6.15) και (6.18) παίρνουμε,

$$\begin{aligned}\psi_1(u) &\leq \beta_1 E\left[\bar{B}_1(Y_1)\right]^{-1}\int_1^{\infty}\int_0^{\infty}\bar{B}_1\left((u+x)z\right)dH(x)dG(z)\\ &= \beta_1 E\left[\bar{B}_1(Y_1)\right]^{-1}E\bar{B}_1\left[(u+X_1)Z_1\right]\end{aligned}$$

Αν η ζημιά είναι μεγαλύτερη από το πλεόνασμα της πρώτης περιόδου έχουμε χρεοκοπία, διαφορετικά η διαδικασία ανανεώνεται αλλά πλέον με διαφορετικό επιτόκιο. Θεωρούμε οτι η παραπάνω ανισότητα ισχύει για την $n-$οστή περίοδο. θα αποδείξουμε ότι ισχύει και στην περίοδο $n+1$. Θα έχουμε λοιπόν για την $n-$οστή περίοδο.

$$\psi_n(u) \leq \beta_1 E\left[\bar{B}_1(Y_1)\right]^{-1}E\bar{B}_1\left[(u+X_1)Z_1\right] \tag{3.20}$$

Επειδή η ανισότητα $(u + X_1)Z_1 \geq u + X_1 Z_1$ ισχύει, (έχουμε υποθέσει μη αρνητικά επιτόκια) από την (6.19) $\forall u \geq 0$ παίρνουμε,

$$\psi_n(u) \leq \beta_1 E\left[\bar{B}_1(Y_1)\right]^{-1}E\bar{B}_1(u + X_1 Z_1) \tag{3.21}$$

Δεσμεύοντας λοιπόν ως προς X_1, Y_1, Z_1 και δεδομένου ότι για να έχουμε χρεοκοπία την πρώτη περίοδο θα πρέπει να ισχύει $Y_1 > (u + X_1)Z_1$ έχουμε,

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(u) &= \int_1^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty Pr\left\{\bigcup_{k=1}^{n+1} (U_k < 0)\,|Y_1 = y, X_1 = x, Z_1 = z,\right\} dF(y)dH(x)dG(z) \\
&= \int_1^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \psi_n((u+x)z - y)dF(y)dH(x)dG(z) \\
&= \int_1^\infty \int_0^\infty \int_0^{(u+x)z} \psi_n((u+x)z - y)dF(y)dH(x)dG(z) \\
&+ \int_1^\infty \int_0^\infty \int_{(u+x)z}^\infty \psi_n((u+x)z - y)dF(y)dH(x)dG(z) \\
&= \int_1^\infty \int_0^\infty \left(\bar{F}((u+x)z) + \int_0^{(u+x)z} \psi_n((u+x)z - y)dF(y)dH(x)dG(z)\right)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει διότι αν $y > (x + u)z$ τότε η πιθανότητα $\psi_n((u + x)z - y)$ ισούται με μονάδα. Έτσι από τις σχέσεις (3.22),(6.14) και (6.20) κάνοντας αντικατάσταση την $\psi_n(u)$ και την $\bar{F}((u + x)z)$ θα έχουμε,

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(u) \le \beta_1 &\int_1^\infty \int_0^\infty \left[\bar{B}_1((u+x)z) \int_{(u+x)z}^\infty [\bar{B}_1(y)]^{-1} dF(y)\right] dH(x)dG(z) \\
&+ \beta_1 E[\bar{B}_1(Y_1)]^{-1} \int_1^\infty \int_0^\infty \left[\int_0^{(u+x)z} E\bar{B}_1((u+x)z - y + X_1Z_1)dF(y)\right] dH(x)dG(z)
\end{aligned}$$

Ωστόσω για $0 \le y \le (u + x)z$ και απο τις ιδιότητες των NWU κατανομών έχουμε:

$$\bar{B}_1((u+x)z - y + X_1Z_1) \le \bar{B}_1((u+x)z + X_1Z_1)[\bar{B}_1(y)]^{-1} \tag{3.23}$$

Κάνοντας αντικατάσταση την $\bar{B}_1((u + x)z + X_1Z_1)$ σύμφωνα με την υπόθεση, (σχέση (3.17)) παίρνουμε την ανισότητα,

$$\bar{B}_1((u+x)z - y + X_1Z_1) \le \Lambda_1(X_1Z_1)\bar{B}_1((u+x)z)[\bar{B}_1(y)]^{-1} \tag{3.24}$$

Άρα λοιπόν για την $\psi_{n+1}(u)$ κάνοντας χρήση της σχέσεως (3.24) θα πάρουμε:

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(u) \le \beta_1 &\int_1^\infty \int_0^\infty \left[\bar{B}_1((u+x)z) \int_{(u+x)z}^\infty [\bar{B}_1(y)]^{-1} dF(y)\right] dH(x)dG(z) \\
&+ \beta_1 E[\bar{B}_1(Y_1)]^{-1} \Lambda_1(X_1Z_1) \\
&\times \int_1^\infty \int_0^\infty \left[\int_0^{(u+x)z} E\bar{B}_1((u+x)z - y + X_1Z_1)dF(y)\right] dH(x)dG(z)
\end{aligned}$$

Έχουμε όμως υποθέσει ότι$E[\bar{B}_1(Y_1)]^{-1}\Lambda_1(X_1Z_1) \leq 1$ οπότε μπορούμε να απλοποιήσουμε την παράσταση χωρίς να αλλάξει η ανισότητα και θα έχουμε,

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(u) &\leq \beta_1 \int_1^\infty \int_0^\infty \left[\bar{B}_1((u+x)z) \int_{(u+x)z}^\infty [\bar{B}_1(y)]^{-1} dF(y)\right] dH(x)dG(z) \\
&+ \beta_1 \int_1^\infty \int_0^\infty \left[\bar{B}_1((u+x)z) \int_0^{(u+x)z} [\bar{B}_1(y)]^{-1} dF(y)\right] dH(x)dG(z) \\
&= \beta_1 \int_1^\infty \int_0^\infty \left[\bar{B}_1((u+x)z) \int_0^\infty [\bar{B}_1(y)]^{-1} dF(y)\right] dH(x)dG(z) \\
&= \beta_1 E[\bar{B}_1(Y_1)]^{-1} E\bar{B}_1((u+X_1)Z_1)
\end{aligned}$$

Από τη σχέση (6.19) παίρνοντας το όριο $\lim_{n\to\infty}\psi_n(u) = \psi(u)$ ολοκληρώνεται η απόδειξη.

□

Πόρισμα 3.2. *Θεωρούμε $R_1 > 0$ μια σταθερά η οποία ικανοποιεί τη σχέση,*

$$Ee^{R_1(X_1Z_1 - Y_1)} = 1 \tag{3.25}$$

Τότε για κάθε $u \geq 0$ έχουμε ένα φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας το οποίο ισούτε με:

$$\psi(u) \leq \beta_2 Ee^{R_1Y_1} Ee^{-R_1(u+X_1)Z_1} \tag{3.26}$$

Όπου,

$$(\beta_2)^{-1} = \inf_{t\geq 0} \frac{\int_t^\infty e^{R_1y}dF(y)}{e^{R_1t}\bar{F}(t)} \tag{3.27}$$

Και αν η F είναι μία $NWUC$ κατανομή τότε το φράγμα γίνεται, για κάθε $u \geq 0$

$$\psi(u) \leq Ee^{-R_1(u+X_1)Z_1} \tag{3.28}$$

Απόδειξη:

Αν θεωρήσουμε $\bar{B}_1(x) = \Lambda_1(x) = e^{-R_1x}$ τότε από το θεώρημα (3.2) παίρνουμε τη σχέση (3.26). Ακόμα αν η F είναι μια $NWUC$ κατανομή τότε από τις ιδιώτητες των κατανομών αυτών θα ισχύει:

$$\beta_2 = \left(Ee^{R_1Y_1}\right)^{-1} \tag{3.29}$$

δηλαδή το $(\beta_2)^{-1}$ ισούται με τη ροπογεννήτρια της Y_1 στο σημείο R_1 το οποίο έχει αποδείξει ο Willmot και ο Lin (Lunberg approximations for compound distributions with insurance applications. New York: Springer-Verlag) . Αντικαθιστώντας λοιπόν τη σχέση (3.29) στη σχέση (3.26) θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\psi(u) &\leq \beta_2 Ee^{R_1Y_1} Ee^{-R_1(u+X_1)Z_1} \\
&= \left(Ee^{R_1Y_1}\right)^{-1} Ee^{R_1Y_1} Ee^{-R_1(u+X_1)Z_1} \\
&= Ee^{-R_1(u+X_1)Z_1}
\end{aligned}$$

Η οποία είναι η σχέση (3.28) και ολοκληρώνει την απόδειξη του πορίσματος.

□

Πόρισμα 3.3. *Θεωρούμε ότι το επιτόκιο είναι σταθερό για όλα τα έτη: δηλαδή $i_n = i$, $\forall n \geq 1$. Τότε για κάθε $u \geq 0$ θα έχουμε,*

$$\psi(u) \leq \beta_2 E e^{-R_1 X_1 (1+i)} \tag{3.30}$$

και αν η F είναι και εδώ μια NWUC κατανομή τότε το φράγμα απλουστεύεται και μπορεί να γραφτεί στη μορφή,

$$\psi(u) \leq (E e^{R_1 Y_1})^{-1} e^{-u R_1 (1+i)} \tag{3.31}$$

το οποίο φράγμα είναι πιο εύκολο να υπολογιστεί, διοτι το μονο που χρειαζόμαστε ειναι η ροπογεννήτρια της Y_1 στο σημείο R_1 το R_1 και το επιτόκιο με το οποίο πρέπει να προεξοφλήσουμε.

Απόδειξη:
Έχοντας στάθερό επιτόκιο για όλα τα έτη $i_n = i$ τότε το Z_1 θα γίνει, $Z_1 = 1 + i$ και η σχέση (3.26) γίνεται,

$$\begin{aligned}
\psi(u) &\leq \beta_2 E e^{R_1 Y_1} E e^{-R_1 (u + X_1) Z_1} \\
&= \beta_2 E e^{R_1 Y_1} E e^{-R_1 (u + X_1)(1+i)} \\
&= \beta_2 E e^{R_1 Y_1} e^{-R_1 u (1+i)} E e^{-R_1 X_1 (1+i)}
\end{aligned}$$

και από τη σχέση (3.25) κάνοντας πράξεις θα πάρουμε

$$\begin{aligned}
E e^{R_1 (X_1 Z_1 - Y_1)} &= 1 && \Rightarrow \\
E e^{R_1 X_1 Z_1} &= [E e^{R_1 Y_1}]^{-1} && \Rightarrow \\
E e^{R_1 X_1 (1+i)} &= [E e^{R_1 Y_1}]^{-1}
\end{aligned}$$

Οπότε αντικαθιστώντας στην ανισότητα την παραπάνω σχέση η ανισότητα θα γίνει,

$$\begin{aligned}
\psi(u) &\leq \beta_2 E e^{R_1 Y_1} [E e^{R_1 Y_1}]^{-1} E e^{-R_1 X_1 (1+i)} \\
&= \beta_2 e^{-R_1 u (1+i)}
\end{aligned}$$

η οποία είναι η σχέση (3.30). Στη σχέση αυτή αντικαθιστώνταστο β_2 σύμφωνα με τη σχέση (3.29) θα πάρουμε,

$$\begin{aligned}
\psi(u) &\leq \beta_2 e^{-R_1 u (1+i)} \\
&= [E e^{R_1 Y_1}]^{-1} e^{-R_1 u (1+i)}
\end{aligned}$$

που είναι το αποτέλεσμα το οποίο ζητάμε.

□

3.4 Αριθμητικά παραδείγματα

Στην ενότητα αυτή, θα παρουσιάσουμε μέσω δύο αριθμήτικών παραδειγμάτων τις μεθόδους εύρεσης φραγμάτων που αναπτύξαμε στις ενότητες 3 και 4 του κεφαλαίου. Θα θεωρήσουμε $X_1 = 1$ δηλαδή τα ασφάλιστρα της κάθε περιόδου θα ισούνται με μονάδα. Είναι μια υπόθεση που έχει γίνει και στο διακρίτο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου βλέπε Bowers, Gerber, Hickman, Jones and Nesbit. (Actuarial Mathematics.)

Παράδειγμα 3.1. *Θεωρούμε σταθερό επιτόκιο ίσο με 0.03. Υποθέτουμε ότι η κατανομή των Ζημιών Y_1 ακολουθεί μία Γάμμα κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:*

$$g(y) = \frac{\lambda^{\alpha} y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda y}, \quad y > 0 \tag{3.32}$$

όπου, $\alpha > 0$ και $\lambda > 0$
Για το συγκεκριμένο παράδειγμα θεωρούμε τις παραμέτρους $\alpha = 0.5$ και $\lambda = 1$. Τότε η μέση τιμή της Y_1 θα ισούται με $EY_1 = \frac{\alpha}{\lambda} = 0.5$ και επειδή $0 < \alpha < 1$ η Y_1 ανήκει στην οικογένεια κατανομών DFR.
Ακόμα θεωρούμε R_0 το συντελεστή προσαρμογής από το κλασσικό μοντέλο, συντελεστής Lundberg ,R_1 το συντελεστή που προκύπτει από το πόρισμα 3.1 και R_2 το συντελεστή που προκύπτει από το πόρισμα 3.2. Μέσω του υπολογιστικού προγράμματος Mathematica βρίσκουμε τα R_0, R_1, R_2. Στη συνέχεια για διάφορες τιμές του αρχικού κεφαλαίου μέσω και πάλι του Mathematica βρίσκουμε τα αντίστοιχα φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. τα αποτελέσματα αυτά δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 1
Άνω φράγματα στο παράδειγμα 3.1 για i=0.03

u	Martingale	Αναδρομικό	Lundberg
0.0	1.00000	0.43309	1.00000
0.5	0.65810	0.28502	0.67139
1.0	0.43309	0.18757	0.45076
1.5	0.28502	0.12344	0.30264
2.0	0.18757	0.08123	0.20319
2.5	0.12344	0.05346	0.13642
3.0	0.08123	0.03518	0.09159
3.5	0.05346	0.02315	0.06149
4.0	0.03518	0.01524	0.04129
4.5	0.02315	0.01003	0.02772
5.0	0.01524	0.00660	0.01861

Σχήμα 1.1: Φράγμα της πιθανότητας χρεοκοπίας όταν $Y_1 \approx G(0.5, 1)$.

Από τον Πίνακα 1 παρατηρούμε τη διαφορά μεταξύ των μεθόδων υπολογισμού των φραγμάτων. Αυτό που περιμέναμε είναι εμφανές. Τα φράγματα μέσω αναδρομικών σχέσεων είναι καλύτερα απο της μεθόδου Martingale.
Στο επόμενο παράδειγμα θα κατασκευάσουμε φράγματα όταν η κατανομή ζημιών ακολουθεί μία εκθετική.

Παράδειγμα 3.2. *Έστω λοιπόν η Y_1 ακολουθεί $Exp(\lambda)$. Η συνάρτηση πικνότητας πιθανότητας της Y_1 θα δίνεται από τον τύπο,*

$$g(y) = \lambda e^{-\lambda y} \tag{3.33}$$

Η υπόθεση που θα κάνουμε για την $g(y)$ είναι $\lambda = 1,8$ και για το επιτόκιο θα πάρουμε το ίδιο με το προηγούμενο παράδειγμα. Από το Mathematica θα βρούμε και πάλι τα R_0, R_1, R_2 και στη συνέχεια θα βρούμε τα φράγματα για τα αντίστοιχα R. Τα απότελέσματα του Mathematica παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 2
Άνω φράγματα στο παράδειγμα 3.2 για i=0.03

u	Martingale	Αναδρομικό	Lundberg
0.0	1.00000	0.24805	1.00000
0.5	0.49805	0.12354	0.51727
1.0	0.24805	0.06153	0.26757
1.5	0.12354	0.03065	0.13841
2.0	0.06153	0.01526	0.07159
2.5	0.03065	0.00760	0.03703
3.0	0.01526	0.00379	0.01916
3.5	0.00760	0.00189	0.00991
4.0	0.00379	0.00094	0.00513
4.5	0.00189	0.00047	0.00265
5.0	0.00094	0.00023	0.00137

Σχήμα 1.2: Φράγμα της πιθανότητας χρεοκοπίας όταν $Y_1 \approx Exp(1.8)$.

Κεφάλαιο 4

Ληξιπρόθεσμη Πληρωμή Ασφαλίστρων Για Γενική Κατανομή Επιτοκίου

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στη διαδικασία πλεονάσματος και πως αυτή εξελίσσεται όταν το επιτόκιο ακολουθεί μία οποιαδήποτε κατανομή και η πληρωμή των ασφαλίστρων γίνεται στην αρχή της κάθε ασφαλιστικής περιόδου. Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε ξανά στην εξέλιξη της διαδικασίας πλεονάσματος με επιτόκιο το οποίο θα ακολουθεί μια τυχαία κατανομή και με τη διαφορά να εστιάζεται στον τρόπο καταβολής των ασφαλίστρων. Στο κεφάλαιο αυτό θα θεωρήσουμε ότι τα ασφάλιστρα καταβάλλονται στο τέλος της περιόδου κάλυψης. Οι ζημιές τώρα, θα καταβάλλονται και αυτές στη λήξη της ασφαλιστικής περιόδου. Ο σκοπός του κεφαλαίου δε διαφοροποιείται από το προηγούμενο. Θα εστιάσουμε στη μελέτη της πιθανότητας χρεοκοπίας και την εύρεση φραγμάτων σύμφωνα με τον Cai (2002).

4.1 Περιγραφή του μοντέλου

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είχαμε ορίσει τις ακολουθίες $(X_n, n = 1, 2, 3 \cdots)$ και $(Y_n, n = 1, 2, 3 \cdots)$ ως δύο μη αρνητικές ανεξάρτητες ακολουθίες τυχαίων ισόνομων και ανεξάρτητων μεταβλητών όπου X_n είναι τα ασφάλιστρα που εισπράτει η ασφαλιστική εταιρεία και Y_n είναι οι ζημιές τις οποίες καλείται να αποζημιώσει. Χρισημοποιώντας τις μεταβλητές X_n και Y_n ορίσαμε ακόμα το άθροισμα

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (X_k - Y_k), n \geq 1$$

το οποίο είναι ένα τυχαίο άθροισμα και εξαρτάται μόνο από τις μεταβλητές X_n και Y_n. Με τη βοήθεια του αθροίσματος μπορέσαμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας. Τον ίδιο τρόπο θα χρισημοποιήσουμε και τώρα και θα ορίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_0^*(u)$ ως:

$$\psi_0^*(u) = Pr\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(S_n > u)\right\} = Pr\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(U_n < u)\right\}$$

Όπου,

$$U_n = u + \sum_{k=1}^{n}(X_k - Y_k) \tag{4.1}$$

Αυτό που χρειαζόμαστε ακόμα είναι το επιτόκιο το οποίο θα πιστώνεται στο πλεόνασμα σε κάθε χρονική περίοδο. θεωρούμε λοιπόν ότι, $\{i_n, n \geq 1\}$ είναι μία ακολουθία μή αρνητικών ισόνομων και ανεξάρτητων μεταβλητών που ισοδυναμεί με το βασικό στοχαστικό επιτόκιο, Kellison(Theory of Interest) . Το επιτόκιο θεωρούμε ότι είναι ανεξάρτητο από τις μεταβλητές X_n και Y_n. Για κάθε μεταβλητή ορίζουμε τις συναρτήσεις κατανομών. Έτσι έχουμε, $F(x) = Pr\{Y_1 \leq x\}$, $H(x) = Pr\{X_1 \leq x\}$ και $G(x) = Pr\{Z_1 \leq x\}$ όπου $Z = 1 + i_n$ είναι ο συντελεστής συσώρευσης. Έχοντας ορίσει τις μετάβλητές τις οποίες θα χρειαστούμε, μπορούμε να δούμε πως αναπτύσεται το πλεόνασμα στη διάρκεια του χρόνου. Από τη συνάρτηση (4.1) για αρχικό κεφάλαιο $U_0 = u$ το οποίο υποχρεούται η ασφαλιστική εταιρεία να έχει βάση νόμου θα έχουμε:

- Τη στιγμή της έναρξης $n = 0$ το πλεόνασμα θα είναι ίσο με $U_0 = u$.

- Τη χρονική στιγμή $n = 1$ το πλεόνασμα (αρχικό κεφάλαιο) το οποίο είχαμε στην έναρξη θα αποφέρει έσοδο το οποίο θα ισούται με $u(1+i_1)$. Επίσης η ασφαλιστική εταιρεία θα πληρώσει τις ζημιές της πρώτης περιόδου που θα είναι ίσες με Y_1 και θα εισπράξει τα ασφάλιστρα που αντιστοιχούν στην πρώτη περίοδο και είναι ίσα με X_1. Άρα το πλεόνασμα τη χρονική στιγμή $n = 1$ θα είναι ίσο με:

$$U_1 = U_0(1 + i_1) + X_1 - Y_1$$

$$U_1 = uZ_1 + (X_1 - Y_1)$$

- Τη χρονική στιγμή $n = 2$ η διαδικασία σύμφωνα με τα παραπάνω θα γίνει.

$$U_2 = U_1 Z_2 + X_2 - Y_2$$

Αντικαθιστώντας το U_1 με το ίσο του $U_1 = uZ_1 + (X_1 - Y_1)$ παίρνουμε,

$$U_2 = [uZ_1 + (X_1 - Y_1)]Z_2 + (X_2 - Y_2)$$

$$U_2 = uZ_1Z_2 + (X_1 - Y_1)Z_2 + (X_2 - Y_2)$$

- Ομοίως για τη χρονική στιγμή $n = 3$ θα έχουμε,

$$U_3 = U_2 Z_3 + (X_3 - Y_3)$$

Με τον ίδιο τρόπο, αντικαθιστώντας το U_2 με το ίσο του στην παραπάνω αχέση θα οδηγηθούμε σε,

$$U_3 = [uZ_1Z_2 + (X_1 - Y_1)Z_2 + (X_2 - Y_2)]Z_3 + (X_3 - Y_3)$$

$$U_3 = uZ_1Z_2Z_3 + (X_1 - Y_1)Z_2Z_3 + (X_2 - Y_2)Z_3 + (X_3 - Y_3)$$

$$U_3 = u\prod_{i=1}^{3} Z_i + \sum_{i=1}^{3}\left\{(X_i - Y_i)\prod_{t=i+1}^{3} Z_i\right\}$$

- Ακολουθώντας ακριβώς την ίδια μεθοδολογία για τη χρονική στιγμή (n) θα καταλήξουμε στη σχέση:

$$U_n = u\prod_{i=1}^{n} Z_i + \sum_{i=1}^{n}\left\{(X_i - Y_i)\prod_{t=i+1}^{n} Z_i\right\} \tag{4.2}$$

Όπου $\prod_{\alpha}^{\beta} Z_i = 1$ για $\alpha > \beta$
Ερμηνεύοντας τη σχέση (4.2) θα μπορούσε κάποιος να πει ότι το πλεόνασμα σε κάθε χρονική περίοδο ισούται με το πλεόνασμα της προηγούμενης χρονικής περιόδου προσαυξημένο με τα κέρδη επενδύσεων συν τη διαφορά (Ασφάλιστρα - Ζημιές) της περιόδου υπολογισμού. Η διαφορά (Ασφάλιστρα - Ζημιές) ενδεχομένως να είναι και αρνητική γιατί διαφορετικά δε θα υπήρχε πότε χρεοκοπία.

4.2 Φράγματα martigale για την πιθανότητα χρεοκοπίας

Έχοντας αναφερθεί στο μοντέλο το οποίο θα ακολουθεί η συνάρτηση του επιτοκίου και αφού έχουμε ορίσει τη στοχαστική συνάρτηση για το πλεόνασμα σε κάθε χρονική περίοδο, στη συνέχεια της ενότητας αυτής θα κατασκευάσουμε φράγματα μέσω της μεθόδου martigale για την πιθανότητα χρεοκοπίας.Όπως και σε προηγούμενο κεφάλαιο έτσι και τώρα θα κάνουμε χρήση των ιδιοτήτων των κατανομών NBU και NWU για τις οποίες έχουμε αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο.
Για να βρούμε τα φράγματα αυτά θα προχωρήσουμε σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.1. *Έστω B_1 μία NWU κατανομή και B_2 μία NBU αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι οι B_1 και B_2 για κάθε α, όπου $0 < \alpha \leq 1$ ικανοποιούν τη σχέση:*

$$E\left(\frac{\bar{B}_2(\alpha X_1 Z_1^{-1})}{\bar{B}_1(\alpha Y_1 Z_1^{-1})}\right) \leq 1 \tag{4.3}$$

Τότε $\forall u \geq 0$ θα ισχύει,

$$\psi^*(u) \leq \Lambda(u) \tag{4.4}$$

Όπου, το $\Lambda(u)$ ορίζεται ως,

$$[\Lambda(x)]^{-1} = \inf_{y \geq 0} \frac{\bar{B}_2(y)}{\bar{B}_1(x+y)} \tag{4.5}$$

Απόδειξη:
Για την απόδειξη του θεωρήματος ορίζουμε τις μεταβλητές P_n, C_n και S_n όπου,

$$S_n = \frac{\bar{B}_2(P_n)}{\bar{B}_1(C_n)}$$

με

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \prod_{i=1}^{k} Z_i^{-1}, P_0 = 0$$

και

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \prod_{i=1}^{k} Z_i^{-1}$$

Η μεταβλητή P_n δηλώνει όλα τα ασφάλιστρα τα οποία αναμένεται να εισπράξει η ασφαλιστική εταιρεία προεξοφλημένα στη στιγμή έναρξης. Από την άλλη, η μεταβλητή C_n αντίστοιχα, δηλώνει όλες τις αναμενόμενες ζημιές που θα χρειαστεί να αποζημειώσει η ασφαλιστική εταιρεία προεξοφλημένες και αυτές στη στιγμή έναρξης.
Από τον ορισμό λοιπόν των μία NWU και NBU αντίστοιχα θα δείξουμε ότι η S_n είναι μία supermartingale . Έχοντας μία σχέση για την S_n θα βρούμε πως αυτή συνδέεται με την S_{n+1}.

$$S_{n+1} = \frac{\bar{B}_2\left(P_{n+1}\right)}{\bar{B}_1\left(C_{n+1}\right)} = \frac{\bar{B}_2\left(\sum_{k=1}^{n+1} X_k \prod_{i=1}^{k} Z_i^{-1}\right)}{\bar{B}_1\left(\sum_{k=1}^{n+1} Y_k \prod_{i=1}^{k} Z_i^{-1}\right)}$$

Εμφανίζουμε το P_n στον αριθμητή και το C_n στον παρονομαστή.

$$S_{n+1} = \frac{\bar{B}_2\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \prod_{i=1}^{k} Z_i^{-1} + X_{n+1} \prod_{i=1}^{n+1} Z_i^{-1}\right)}{\bar{B}_1\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k \prod_{i=1}^{k} Z_i^{-1} + Y_{n+1} \prod_{i=1}^{n+1} Z_i^{-1}\right)}$$

Από τον ορισμό των P_n και C_n η σχέση γίνεται,

$$S_{n+1} = \frac{\bar{B}_2\left(P_n + X_{n+1} \prod_{i=1}^{n+1} Z_i^{-1}\right)}{\bar{B}_1\left(C_n + Y_{n+1} \prod_{i=1}^{n+1} Z_i^{-1}\right)} \leq S_n \frac{\bar{B}_2\left(X_{n+1} \prod_{i=1}^{n+1} Z_i^{-1}\right)}{\bar{B}_1\left(Y_{n+1} \prod_{i=1}^{n+1} Z_i^{-1}\right)}$$

Όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει απο τον ορισμό των NBU και NWU . Στη συνέχεια θα ορίσουμε μια σ-Άλγεβρα,$\mathcal{F}_n$ που θα έχει την πληροφορία για τις μεταβλητές X_i, Y_i, Z_i. Έτσι λοιπόν θα έχουμε, $\mathcal{F}_n = \{X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n, Z_1, \cdots, Z_n\}$
Για $\forall n \geq 0$ θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
E\left(S_{n+1}|\mathcal{F}_n\right) &\leq S_n E\left(\frac{\bar{B}_2\left(X_{n+1} \prod_{i=1}^{n+1} Z_i^{-1}\right)}{\bar{B}_1\left(Y_{n+1} \prod_{i=1}^{n+1} Z_i^{-1}\right)}|\mathcal{F}_n\right) \\
&= S_n E\left(\frac{\bar{B}_2\left(X_{n+1} \prod_{i=1}^{n+1} Z_i^{-1}\right)}{\bar{B}_1\left(Y_{n+1} \prod_{i=1}^{n+1} Z_i^{-1}\right)}|\mathcal{F}_n\right)
\end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό λόγω ανεξαρτησίας των $X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1}$ από την $\mathcal{F}_n$ θα έχουμε:

$$E\left(S_{n+1}|\mathcal{F}_n\right) \leq S_n E\left(\frac{\bar{B}_2\left(\prod_{i=1}^{n+1} Z_i^{-1} Z_{n+1}^{-1} X_{n+1}\right)}{\bar{B}_1\left(\prod_{i=1}^{n+1} Z_i^{-1} Z_{i+1}^{-1} Y_{i+1}^{-1}\right)}|\mathcal{F}_n\right)$$

Στην τελευταία ανισότητα θεωρούμε $\alpha = \prod_{i=1}^{n} Z_i^{-1}$ και ακόμα $X_1 = X_{n+1}, Y_1 = Y_{n+1}$ και $Z_1 = Z_{n+1}$. Με αυτόν τον τρόπο από τη σχέση (4.3) θα έχουμε:

$$E\left(S_{n+1}|\mathcal{F}_n\right) \leq S_n \tag{4.6}$$

Η σχέση (4.6) δηλώνει αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε για την S_n ότι δηλαδή η $S_n, n \geq 0$ είναι μια supermartigale . Η χρονική περίοδος στην οποία θα έχουμε χρεοκοπία έχει ορισθεί ως $T = \inf(n : U_n < 0)$ δηλαδή η πρώτη χρονική στιγμή όπου το πλεόνασμα θα γίνει αρνητικό. Το T λοιπόν είναι ένα στάσιμο σημείο και θεωρώντας $(n \wedge T) = min(n, T)$ θα έχουμε ένα πεπερασμένο στάσιμο σημείο. Με τη χρήση του θεωρήματος στασιμότητας για supermartigale θα πάρουμε τη σχέση $ES_{n\wedge T} \leq ES_0 = 1$. Η πιθανότητα χρεοκοπίας έχει δωθεί από τον Cai (2002) και έχει τη μορφή.

$$\psi_n^*(u) = Pr\left\{\bigcup_{k=1}^{n}(U_k < 0)\right\} = E\left\{I(T \leq n)\right\} \tag{4.7}$$

Αναπτύσοντας τη σχέση $ES_{n\wedge T} \leq ES_0 = 1$ θα έχουμε:

$$1 \geq ES_{n\wedge T} \geq E[S_{n\wedge T} I(T \leq n)] = E[S_T I(T \leq n)]$$

Κάνοντας αντικατάσταση της S_T με,

$$S_T = \frac{\bar{B}_2(P_T)}{\bar{B}_1(C_T)}$$

θα πάρουμε,

$$1 \geq E\left(\frac{\bar{B}_2(P_T)}{\bar{B}_1(C_T)} I(T \leq n)\right)$$

Για να επέλθει χρεοκοπία, όπως προαναφέραμε θα πρέπει το πλεόνασμα να γίνει αρνητικό. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει οι ζημιές να είναι μεγαλύτερες από τα ασφάλιστρα συν το αρχικό κεφάλαιο, δηλαδή θα πρέπει $C_T \geq u + P_T$. Οπότε η παραπάνω ανισότητα κάνοντας χρήση και της (6.6) θα διαμορφωθεί ως,

$$1 \geq E\left(\frac{\bar{B}_2(P_T)}{\bar{B}_1(u + P_T)} I(T \leq n)\right) \geq \Lambda^{-1}(u) E(I(T \leq n))$$

και απο τον ορισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας καταλήγουμε στη σχέση

$$1 \geq \Lambda^{-1}(u) E(I(T \leq n)) = \Lambda^{-1}(u) \psi_n^*(u)$$

Όπου στην οποία παίρνοντας το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n^*(u) = \psi^*(u)$$

καταλήγουμε στη σχέση (6.5) που ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

Στη συνέχεια, κάνοντας χρήση του παραπάνω θεωρήματος θα δώσουμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις όπου το φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας γίνεται ακόμα πιο απλό.

Πόρισμα 4.1. *Έστω R_1 μια σταθερά η οποία ικανοποιεί τη σχέση*

$$Ee^{-R_1(X_1-Y_1)Z_1^{-1}} = 1 \tag{4.8}$$

Τότε για κάθε $u \geq 0$ θα ισχύει

$$\psi^*(u) \leq e^{-R_1 u} \tag{4.9}$$

Απόδειξη:

Στο παραπάνω θεώρημα (4.1) αν πάρουμε για τις κατανομές B_1, B_2 να είναι από την ίδια εκθετική κατανομή με παράμετρο R_1 θα έχουμε $\bar{B}_1(x)=\bar{B}_2(x)=e^{-R_1 x}$. Αυτό αυτόματα μας οδηγεί στο αποτέλεσμα το $\Lambda(x)$ να ισούται με $e^{-R_1 x}$. Από τη σχέση (6.9) μέσω της ανισότητας Jensen για κάθε $0 < \alpha \leq 1$ θα ισχύει:

$$Ee^{-R_1(X_1-Y_1)Z_1^{-1}} = E\left(e^{-R_1(X_1-Y_1)Z_1^{-1}}\right)^{\alpha} \leq \left(Ee^{-R_1(X_1-Y_1)Z_1^{-1}}\right)^{\alpha} = 1$$

Στην παραπάνω ανισότητα κάνοντας πράξεις θα πάρουμε,

$$E\left(e^{-R_1(X_1-Y_1)Z_1^{-1}}\right)^{\alpha} \leq 1 \Rightarrow$$

$$E\left(e^{-R_1 X_1 Z_1 \alpha-(-R_1 Y_1 Z_1^{-1}\alpha)}\right) \leq 1 \Rightarrow$$

$$E\left(\frac{e^{-R_1 X_1 Z_1 \alpha}}{e^{-R_1 Y_1 Z_1^{-1}\alpha}}\right) \leq 1$$

Κάνοντας αντικατάσταση στον αριθμητή και τον παρονομαστή σύμφωνα με τον ορισμό του πορίσματος, δηλαδή, $B_1\left(\alpha \bar{Y}_1 Z_1^{-1}\right) = e^{-R_1 Y_1 Z_1^{-1}\alpha}$ και $B_2\left(\alpha \bar{X}_1 Z_1^{-1}\right) = e^{-R_1 X_1 Z_1^{-1}\alpha}$ φτάνουμε να δείξουμε ότι,

$$E\left(\frac{\bar{B}_2(\alpha X_1 Z_1)}{\bar{B}_1(\alpha Y_1 Z_1^{-1})}\right) \leq 1$$

ισχύει λόγω της υπόθεσης που κάναμε στο θέωρημα (4.1), (σχέση (4.3)). Ακόμα, στο θεώρημα (4.1) είχαμε ορίσει και το $\Lambda(x)$ ως,

$$\Lambda^{-1}(x) = \frac{\bar{B}_2(y)}{\bar{B}_1(x+y)}$$

Κάνοντας και πάλι αντικατάσταση των $\bar{B}_1, \bar{B}_2$ με $e^{-R_1 x}$ θα έχουμε,

$$\Lambda^{-1}(x) = \frac{e^{-R_1 X_1}}{e^{-R_1(u+X_1)}} = \frac{1}{e^{-R_1 u}} \Rightarrow$$

$$\Lambda(u) = e^{-R_1 u}$$

Οπότε από τη σχέση $\psi^*(u) \leq \Lambda(u)$ θα πάρουμε

$$\psi^*(u) \leq e^{-R_1 u}$$

□

4.3 Φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω αναδρομικών σχέσεων

Στη συνέχεια, στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με την εύρεση φραγμάτων για την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω Αναδρομικών, ανανεοτικών σχέσεων. Ο τρόπος προσέγγισης της μεθόδου αυτής είναι ο ίδιος που χρισημοποιήθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Να ανφέρουμε ξανά ότι τα φράγματα τα οποία εξάγονται με τη μέθοδο των ανανεοτικών σχέσεων είναι καλύτερα από τα φράγματα της μεθόδου martigale . Για να μπορέσουμε να συνεχίσουμε ορίζουμε τις μεταβλήτες τις οποίες θα χρισημοποιήσουμε στην ανάπτυξη της μεθόδου αυτής. Οι μεταβλητές που θα χρισημοποιηθούν είναι ίδιες με τις μεταβλητες της αντίστοιχης ενότητας ενότητας προηγούμενου κεφαλαίου και είναι οι κάτωθι.

$$(\beta_1)^{-1} = \inf_{t\geq 0} \frac{\int_1^\infty [\bar{B}_1(y)]^{-1} dF(y)}{[\bar{B}_1(t)]^{-1} F(t)} \tag{4.10}$$

Οπότε για κάθε $x \geq 0$ θα έχουμε,

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{\int_1^\infty [\bar{B}_1(y)]^{-1} dF(y)}{[\bar{B}_1(t)]^{-1} F(t)} \right)^{-1} \bar{B}_1(x) \int_x^\infty [\bar{B}_1(y)]^{-1} dF(y) \tag{4.11}$$

και κάνοντας αντικατάσταση τη σχέση (4.10) η $\bar{F}(x)$ θα φράσεται από πάνω ως,

$$\bar{F}(x) \leq \beta_1 \bar{B}_1(x) \int_x^\infty [\bar{B}_1(y)]^{-1} dF(y) \tag{4.12}$$

Το ολοκλήρωμα είναι η μέση τιμή της συνάρτησης την οποία ολοκληρώνει, οπότε η (4.12) θα γίνει,

$$\bar{F}(x) \leq \beta_1 \bar{B}_1(x) E[\bar{B}_1(Y_1)]^{-1} \tag{4.13}$$

Όμως, $\bar{F}(x) \leq 1$ και από την τελευταία ανισότητα καταλήγουμε στη σχέση

$$\left(E[\bar{B}_1(Y_1)]^{-1}\right)^{-1} \leq \beta_1 \leq 1 \tag{4.14}$$

$\square$

Τις μεταβλητές αυτές θα τις χρισημποιήσουμε στο παρακάτω θεώρημα που μας βοηθάει στην εύρεση φραγμάτων μέσω αναδρομικών σχέσεων.

Θεώρημα 4.2. *Έστω B_1 να είναι μια κατανομή η οποία ανοίκει στην οικογένεια κατανομών NWU και Λ_1 μία μη αρνητική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η B_1 και η Λ_1 ικανοποιούν την παρακάτω σχέση.*

$$E\left[B_1(\bar{Y}_1)\right]^{-1} E\Lambda_1(X_1) \leq 1 \tag{4.15}$$

Ακόμα για κάθε $y \geq 0$ και $x \geq 0$

$$\bar{B}_1(x+y) \leq \bar{B}_1(x)\Lambda_1(y) \tag{4.16}$$

Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας για κάθε $u \geq 0$ θα φράσεται και το φράγμα θα δίνεται από τη σχέση.

$$\psi^*(u) \leq \beta_1 E\left[\bar{B}_1(Y_1)\right]^{-1} E\left[\bar{B}_1(uZ_1 + X_1)\right] \tag{4.17}$$

Απόδειξη:

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος θα χρισημοποιήσουμε τη μέθοδο της επαγωγής. Αυτό που θα κάνουμε, είναι να δεσμεύσουμε ως προς την ζημιά της πρώτης περιόδου, να δούμε τί επίπτωση θα έχει στο πλεόνασμα, και μετά εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας βρίσκουμε ανανεωτικούς τύπους για την εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας. Από τον ορισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας έχουμε:

$$\psi_n^*(u) = Pr\left\{\bigcup_{k=1}^{n}(U_k < 0)\right\} = E\left\{I(T \leq n)\right\}$$

- Έλευση πρώτης ζημιάς. Για να επέλθει χρεοκοπία μετά την έλευση της πρώτης ζημίας (πρώτης περιόδου) θα πρέπει, το ποσό της ζημιάς να είναι μεγαλύτερο από το αρχικό κεφάλαιο προσαυξημένο με το έσοδο από τόκο και το ασφάλιστρο της πρώτης περιόδου.

$$\psi_1^*(u) = Pr\left\{Y_1 > (uZ_1 + X_1)\right\} = \int_1^{\infty}\int_0^{\infty} \bar{F}\left(uz + x\right) dH(x) dG(z) \tag{4.18}$$

  Το πλεόνασμα πριν την έλευση της πρώτης ζημιάς θα έχει γίνει $(uZ_1 + X_1)$, τότε απο τις σχέσεις (4.13) και (4.18) παίρνουμε,

$$\begin{aligned}\psi_1^*(u) &\leq \beta_1 E\left[\bar{B}_1(Y_1)\right]^{-1} \int_1^{\infty}\int_0^{\infty} \bar{B}_1\left(uz + x\right) dH(x) dG(z) \\ &= \beta_1 E\left[\bar{B}_1(Y_1)\right]^{-1} E\bar{B}_1\left(uZ_1 + X_1\right)\end{aligned}$$

  Αν το ποσό της ζημιάς είναι μεγαλύτερο από αυτό του πλεονάσματος της πρώτης περιόδου τότε θα έχουμε χρεοκοπία, διαφορετικά η διαδικασία θα ανανεώθει αλλά πλέον με διαφορετικό επιτόκιο, αυτό που θα ισχύει τη δεύτερη περίοδο και ούτω καθέξής.

- Θεωρούμε οτι η παραπάνω ανισότητα ισχύει για την $n-$οστή περίοδο, δηλαδή.

$$\psi_n^*(u) \leq \beta_1 E\left[\bar{B}_1(Y_1)\right]^{-1} E\bar{B}_1\left(uZ_1 + X_1\right) \tag{4.19}$$

- Εφαρμόζοντας τα παραπάνω θα αποδείξουμε ότι η ανισότητα ισχύει και στην περίοδο $n+1$. Δεσμεύοντας λοιπόν ως προς X_1, Y_1, Z_1 και δεδομένου ότι για να έχουμε χρεοκοπία την πρώτη περίοδο θα πρέπει να ισχύει $Y_1 > (uZ_1 + X_1)$ έχουμε,

$$\begin{aligned}
\psi^*_{n+1}(u) &= \int_1^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty Pr\left\{ \bigcup_{k=1}^{n+1} (U_k < 0) \,|Y_1 = y, X_1 = x, Z_1 = z, \right\} dF(y)dH(x)dG(z) \\
&= \int_1^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \psi^*_n(uz + x - y)dF(y)dH(x)dG(z) \\
&= \int_1^\infty \int_0^\infty \int_0^{uz+x} \psi^*_n(uz + x - y)dF(y)dH(x)dG(z) \\
&+ \int_1^\infty \int_0^\infty \int_{uz+x}^\infty \psi^*_n(uz + x - y)dF(y)dH(x)dG(z) \\
&= \int_1^\infty \int_0^\infty \left(\bar{F}(uz + x) + \int_0^{uz+x} \psi^*_n(uz + x - y)dF(y)dH(x)dG(z) \right)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει διότι αν $y > uz+x$ τότε η πιθανότητα $\psi^*_n(uz+x-y)$ ισούται με μονάδα. Έτσι από τις σχέσεις (4.20),(4.12) και (6.20) αντικαθηστώντας την $\psi^*_n(u)$ και την $\bar{F}(uz + x)$ θα έχουμε,

$$\begin{aligned}
\psi^*_{n+1}(u) \leq \beta_1 \int_1^\infty \int_0^\infty &\left[\bar{B}_1(uz + x) \int_{uz+x}^\infty [\bar{B}_1(y)]^{-1} dF(y) \right] dH(x)dG(z) \\
+ \beta_1 E[\bar{B}_1(Y_1)]^{-1} &\int_1^\infty \int_0^\infty \left[\int_0^{uz+x} E\bar{B}_1(uz + x - y + X_1)dF(y) \right] dH(x)dG(z)
\end{aligned}$$

Ωστόσω για $0 \leq y \leq uz + x$ και απο τις ιδιότητες των NWU κατανομών έχουμε:

$$\bar{B}_1(uz + x - y + X_1) \leq \bar{B}_1(uz + x + X_1)[\bar{B}_1(y)]^{-1} \tag{4.21}$$

Κάνοντας αντικατάσταση την $\bar{B}_1(uz + x + X_1)$ σύμφωνα με την υπόθεση, (σχέση (4.16)) παίρνουμε την ανισότητα,

$$\bar{B}_1(uz + x - y + X_1) \leq \Lambda_1(X_1)\bar{B}_1(uz + x)[\bar{B}_1(y)]^{-1} \tag{4.22}$$

Άρα λοιπόν για την $\psi^*_{n+1}(u)$ κάνοντας χρήση της σχέσεως (4.22) θα πάρουμε:

$$\begin{aligned}
\psi^*_{n+1}(u) \leq \beta_1 &\int_1^\infty \int_0^\infty \left[\bar{B}_1(uz + x) \int_{uz+x}^\infty [\bar{B}_1(y)]^{-1} dF(y) \right] dH(x)dG(z) \\
&+ \beta_1 E[\bar{B}_1(Y_1)]^{-1} \Lambda_1(X_1) \\
&\times \int_1^\infty \int_0^\infty \left[\int_0^{uz+x} E\bar{B}_1(uz + x - y + X_1)dF(y) \right] dH(x)dG(z)
\end{aligned}$$

Έχουμε όμως κάνει την υποθέση ότι $E[\bar{B}_1(Y_1)]^{-1}\Lambda_1(X_1) \leq 1$ οπότε μπορούμε να απλοποιήσουμε την παράσταση χωρίς να αλλάξει η φορά της ανισότητας και θα έχουμε,

$$\begin{aligned}
\psi^*_{n+1}(u) &\leq \beta_1 \int_1^\infty \int_0^\infty \left[\bar{B}_1(uz+x)\int_{uz+x}^\infty [\bar{B}_1(y)]^{-1}dF(y)\right] dH(x)dG(z) \\
&+ \beta_1 \int_1^\infty \int_0^\infty \left[\bar{B}_1(uz+x)\int_0^{uz+x} [\bar{B}_1(y)]^{-1}dF(y)\right] dH(x)dG(z) \\
&= \beta_1 \int_1^\infty \int_0^\infty \left[\bar{B}_1(uz+x)\int_0^\infty [\bar{B}_1(y)]^{-1}dF(y)\right] dH(x)dG(z) \\
&= \beta_1 E[\bar{B}_1(Y_1)]^{-1} E\bar{B}_1(uZ_1+X_1)
\end{aligned}$$

Από τη σχέση (4.19) παίρνοντας το όριο $\lim_{n\to\infty}\psi^*_n(u) = \psi^*(u)$ ολοκληρώνεται η απόδειξη.

□

Πόρισμα 4.2. *Θεωρούμε $R_1 > 0$ μια σταθερά. Τότε για κάθε $u \geq 0$ έχουμε ένα φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας το οποίο ισούται με:*

$$\psi^*(u) \leq \beta_0 E e^{-R_1 u Z_1} \tag{4.23}$$

Όπου,

$$(\beta_0)^{-1} = \inf_{t\geq 0} \frac{\int_t^\infty e^{R_1 y} dF(y)}{e^{R_1 t}\bar{F}(t)} \tag{4.24}$$

Και αν η F είναι μία $NWUC$ κατανομή τότε το φράγμα γίνεται, για κάθε $u \geq 0$

$$\psi^*(u) \leq \left(Ee^{R_1Y_1}\right)^{-1} Ee^{-R_1uZ_1} \tag{4.25}$$

Απόδειξη:
Αν θεωρήσουμε $\bar{B}_1(x) = \Lambda_1(x) = e^{-R_1 x}$ τότε από το θεώρημα (4.2) παίρνουμε τη σχέση (4.23). Ακόμα αν η F είναι μια $NWUC$ κατανομή τότε από τις ιδιώτητες των κατανομών αυτών θα ισχύει:

$$\beta_0 = \left(Ee^{R_1Y_1}\right)^{-1} \tag{4.26}$$

δηλαδή το $(\beta_0)^{-1}$ ισούται με τη ροπογεννήτρια της Y_1 στο σημείο R_1 το οποίο έχει αποδείξει ο Willmot και ο Lin (Lunberg approximations for compound distributions with insurance applications. New York: Springer-Verlag) . Αντικαθιστώντας λοιπόν τη σχέση (4.26) στη σχέση (4.23) θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\psi^*(u) &\leq \beta_0 E e^{-R_1uZ_1} \\
&= \left(Ee^{R_1Y_1}\right)^{-1} Ee^{-R_1uZ_1} \\
\Rightarrow \psi^*(u) &\leq \left(Ee^{R_1Y_1}\right)^{-1} Ee^{-R_1uZ_1}
\end{aligned}$$

Η οποία είναι η σχέση (4.25) και ολοκληρώνει την απόδειξη του πορίσματος.

□

Μια άλλη περίπτωση είναι όταν το επιτόκιο είναι σταθερό για όλα τα έτη. Τότε το φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας θα δίνεται σύμφωνα με το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 4.3. *Θεωρούμε ότι το επιτόκιο είναι σταθερό για όλα τα έτη: δηλαδή $i_n = i$, $\forall n \geq 1$. Τότε για κάθε $u \geq 0$ θα έχουμε,*

$$\psi^*(u) \leq \beta_0 E e^{-R_1(1+i)} \tag{4.27}$$

και αν η F είναι και εδώ μια $NWUC$ κατανομή τότε το φράγμα απλουστεύεται και μπορεί να γραφτεί στη μορφή,

$$\psi^*(u) \leq \left(E e^{R_1 Y_1}\right)^{-1} e^{-uR_1(1+i)} \tag{4.28}$$

το οποίο φράγμα είναι πιο εύκολο να υπολογιστεί, διοτι το μονο που χρειαζόμαστε ειναι η ροπογεννήτρια της Y_1 στο σημείο R_1 το R_1 και το επιτόκιο με το οποίο πρέπει να προεξοφλήσουμε.

Απόδειξη:
Έχοντας στάθερό επιτόκιο για όλα τα έτη $i_n = i$ τότε το Z_1 θα γίνει, $Z_1 = 1 + i$ και η σχέση (4.23) γίνεται,

$$\begin{aligned}\psi^*(u) &\leq \beta_0 E e^{-R_1 u Z_1}\\ &= \beta_0 E e^{-R_1 u(1+i)}\end{aligned}$$

Στη σχέση αυτή αντικαθιστώντασto β_0 σύμφωνα με τη σχέση (4.26) θα πάρουμε,

$$\begin{aligned}\psi^*(u) &\leq \beta_0 e^{-R_1 u(1+i)}\\ &= [E e^{R_1 Y_1}]^{-1} e^{-R_1 u(1+i)}\end{aligned}$$

που είναι το αποτέλεσμα το οποίο ζητάμε.

□

4.4 Αριθμητικά παραδείγματα

Στην ενότητα αυτή, θα παρουσιάσουμε δύο αριθμητικά παραδείγματα τα οποία θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε καλύτερα τις μεθόδους εύρεσης φραγμάτων που αναπτύξαμε στις ενότητες 3 και 4 του κεφαλαίου. Θα θεωρήσουμε $X_1 = 1$ δηλαδή τα ασφάλιστρα της κάθε περιόδου θα ισούνται με μονάδα και στα δύο παραδείγματα. Στο πρώτο θα υποθέσουμε Γάμμα κατανομή για τις ζημιές ενώ στο δεύτερο Εκθετική.Οι υπολογισμοί έχουν γίνει στο Mathematica και παρουσιάζονται αναλυτικά στο παράρτημα.

Παράδειγμα 4.1. *Θεωρούμε σταθερό επιτόκιο ίσο με 0.03. Υποθέτουμε ότι η κατανομή των Ζημιών Y_1 ακολουθεί μία Γάμμα κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:*

$$g(y) = \frac{\lambda^{\alpha} y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda y}, \quad y > 0 \tag{4.29}$$

όπου, $\alpha > 0$ *και* $\lambda > 0$
Θα ορίσουμε τις παραμέτρους ίδιες με του προηγούμενου κεφαλαίου για να μπορέσουμε να κάνουμε σύγκριση των δύο μοντέλων. Θα έχουμε λοιπόν, $\alpha = 0.5$ *και* $\lambda = 1$ *και άρα,* $EY_1 = \frac{\alpha}{\lambda} = 0.5$ *και επειδή ορίσαμε* $0 < \alpha < 1$ *η* Y_1 *η* Y_1 *θα ανήκει στην οικογένεια κατανομών* DFR.
Επίσης θεωρούμε R_0 *το συντελεστή προσαρμογής από το κλασσικό μοντέλο, συντελεστής Lundberg ,*R_1 *το συντελεστή που προκύπτει από το πόρισμα 4.1 και* R_2 *το συντελεστή που προκύπτει από το πόρισμα 4.3. Μέσω του υπολογιστικού προγράμματος Mathematica βρίσκουμε τα* R_0, R_1, R_2. *Στη συνέχεια, για διάφορες τιμές του αρχικού κεφαλαίου μέσω και πάλι του Mathematica βρίσκουμε τα αντίστοιχα φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Τα αποτελέσματα αυτά δίνονται στον παρακάτω πίνακα.*

Πίνακας 3
Άνω φράγματα στο παράδειγμα 4.1 για i=0.03

u	Martingale	Αναδρομικό	Lundberg
0.0	1.00000	0.45076	1.00000
0.5	0.66341	0.29904	0.67139
1.0	0.44012	0.19839	0.45076
1.5	0.29198	0.13161	0.30264
2.0	0.19370	0.08731	0.20319
2.5	0.12851	0.05793	0.13642
3.0	0.08525	0.03843	0.09159
3.5	0.05656	0.02549	0.06149
4.0	0.03752	0.01691	0.04129
4.5	0.02489	0.01122	0.02772
5.0	0.01651	0.00744	0.01861

Σχήμα 1.3: Φράγμα της πιθανότητας χρεοκοπίας όταν $Y_1 \approx G(0.5, 1)$.

Στον Πίνακα 3 παρατηρούμε τη διαφορά μεταξύ των μεθόδων υπολογισμού των φραγμάτων. Τα φράγματα μέσω αναδρομικών σχέσεων είναι καλύτερα απο της μεθόδου Martingale. Συκρίνοντας τώρα τα αποτελέσματα του πίνακα 1 με τον πίνακα 3 παρατηρούμε ότι στην προκαταβλητέα πληρωμή ασφαλίστρων έχουμε καλύτερα αποτελέσματα στα φράγματα και με τις δύο μεθόδους.
Στο επόμενο παράδειγμα θα κατασκευάσουμε φράγματα όταν η κατανομή ζημιών ακολουθεί μία εκθετική.

Παράδειγμα 4.2. *Έστω λοιπόν η* Y_1 *ακολουθεί* $Exp(\lambda)$. *Η συνάρτηση πικνότητας πιθανότητας της* Y_1 *θα δίνεται από τον τύπο,*

$$g(y) = \lambda e^{-\lambda y} \tag{4.30}$$

Η υπόθεση που θα κάνουμε για την $g(y)$ θα είναι αντίστοιχα ίδια με του προηγούμενου κεφαλαίου ώστε να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τα μοντέλα. Οπότε θέτουμε $\lambda = 1,8$ και για το επιτόκιο θα πάρουμε το ίδιο με το προηγούμενο παράδειγμα. Από το Mathematica θα βρούμε και πάλι τα R_0, R_1, R_2 και στη συνέχεια θα βρούμε τα φράγματα για τα αντίστοιχα R. Τα αποτελέσματα του Mathematica παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 4

Άνω φράγματα στο παράδειγμα 4.2 για i=0.03

u	Martingale	Αναδρομικό	Lundberg
0.0	1.00000	0.26757	1.00000
0.5	0.50714	0.13570	0.51727
1.0	0.25719	0.06882	0.26757
1.5	0.13043	0.03490	0.13841
2.0	0.06615	0.01770	0.07159
2.5	0.03355	0.00898	0.03703
3.0	0.01701	0.00455	0.01916
3.5	0.00863	0.00231	0.00991
4.0	0.00438	0.00117	0.00513
4.5	0.00222	0.00059	0.00265
5.0	0.00113	0.00030	0.00137

Σχήμα 1.4: Φράγμα της πιθανότητας χρεοκοπίας όταν $Y_1 \approx Exp(1.8)$.

Και εδώ είναι εμφανής η διαφορά μεταξύ ληξιπρόθεσμης και προκαταβλητέας πληρωμής ασφαλίστρων. Τα αποτελέσματα του τρίτου κεφαλαίου (Προκαταβλητέα πληρωμή) είναι καλύτερα.

Κεφάλαιο 5

Προκαταβλητέα Πληρωμή Ασφαλίστρων Για AR(1) Επιτόκιο

Στο κεφάλαιο αυτό θα επικεντρωθούμε στη μελέτη της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος σε διακριτό χρόνο όταν το επιτόκιο το οποίο εφαρμόζεται στο πλεόνασμα ακολουθεί μια Αυτοπαλινδρομούμενη Διαδικασία Πρώτης Τάξης AR(1). Η υπόθεση που θα κάνουμε όσον αφορά στο χρόνο καταβολής των ασφαλίστρων είναι ότι θεωρούμε πως καταβάλλονται στην αρχή της περιόδου κάλυψης (προκαταβλητέα). Ακόμα, από την εργασία του Cai (Ruin Probabilities with Dependent Rates of Interest) θα χρισημοποιήσουμε τους τύπους που έχει δώσει για την πιθανότητα χρεοκοπίας για την κατασκευή φραγμάτων martingale και μέσω αναδρομικών σχέσεων για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Στη συνέχεια θα δώσουμε κάποια αριθμητικά παραδείγματα πάνω στα φράγματα αυτά.

5.1 Περιγραφή του μοντέλου

Ορίζουμε $(X_n, n = 1, 2, 3\cdots)$ και $(Y_n, n = 1, 2, 3\cdots)$ ως δύο μη αρνητικές ανεξάρτητες ακολουθίες τυχαίων ισόνομων και ανεξάρτητων μεταβλητών όπου X_n είναι τα ασφάλιστρα που εισπράτει η ασφαλιστική εταιρεία για την περίοδο κάλυψης (n) και Y_n είναι οι ζημιές τις οποίες αποζημιώνει για την αντίστοιχη περίοδο κάλυψης. Τότε σύμφωνα με την εργασία του Cai (2002) θα πάρουμε την ακόλουθη σχέση για τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος.

$$U_n = U_0 + S_n \tag{5.1}$$

όπου, $U_0 = u$ είναι το αρχικό κεφάλαιο που υποχρεούται βάση νόμου να έχει η ασφαλιστική εταιρεία στην έναρξη της λειτουργείας της και το οποίο αναπροσαρμόζεται ανάλογα με την έκθεση σε κίνδυνο την οποία έχει, το S_n δίνεται από τον τύπο

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (X_k - Y_k), n \geq 1 \tag{5.2}$$

και είναι το άθροισμα των κερδών ή ζημίων που είχε η ασφαλιστική εταιρεία κατά τις χρονικές στιγμές $k = 1, 2, 3, \cdots, n$. Έτσι λοιπόν το U_n θα είναι το πλεόνασμα το οποίο θα έχει η ασφαλιστική εταιρεία σε κάθε χρονική περίοδο . Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό το πλεόνασμα αυτό είναι μία τυχαία μεταβλητή και εξαρτάται από τις τιμές που παίρνουν σε κάθε χρονική περίοδο οι τυχαίες μεταβλητές X_n και Y_n. Στην αρχή του κεφαλαίου αναφέραμε ότι σε κάθε χρονική περίοδο θα εφαρμόζεται ένα επιτόκιο το οποίο και αυτό θα είναι μία τυχαία μεταβλητή. Άρα, το πλεόνασμα θα εξατράται και από το επιτόκιο. Το επιτόκιο στην περίπτωση αυτή (προκαταβλητέα πληρωμή ασφαλίστρων) θα εφαρμόζεται στο πλεόνασμα της προηγούμενης περιόδου καθώς και στα ασφάλιστρα τα οποία θα εισπράτονται στην αρχή της κάθε ασφαλιστικής περιόδου. Σύμφωνα με τα παραπάνω η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος σχέση 6.1 θα γραφθεί μέσω της 6.2 ως,

$$U_n = U_0 + \sum_{k=1}^{n} (X_k - Y_k) = U_{n-1} + X_n - Y_n$$

Όμως σύμφωνα με το μοντέλο του επιτοκίου που θεωρήσαμε για το κεφάλαιο αυτό η παραπάνω σχέση θα γίνει,

$$U_n = (U_{n+1} + X_n)(1 + I_n) - Y_n$$

Στην οποία φαίνεται ξεκάθαρα ότι εκτός του πλεονάσματος της προηγούμενης περιόδου η ασφαλιστική εταιρεία έχει έσοδο και από την επένδυση των ασφαλίστρων της περιόδου της οποίας θέλουμε να υπολογίσουμε το πλεόνασμα. Έχοντας ορίσει τις μετάβλητές τις οποίες θα χρειαστούμε, μπορούμε να δούμε πως αναπτύσεται το πλεόνασμα στη διάρκεια του χρόνου. Από τη συνάρτηση (6.1) για αρχικό κεφάλαιο $U_0 = u$ θα έχουμε:

- Τη στιγμή της έναρξης $n = 0$ το πλεόνασμα θα είναι ίσο με $U_0 = u$.
- Τη χρονική στιγμή $n = 1$ στο πλεόνασμα (αρχικό κεφάλαιο) το οποίο είχαμε στην έναρξη θα προστεθούν τα ασφάλιστρα της 1-ης περιόδου. Το ποσό το οποίο θα συγκεντρωθεί θα αποφέρει έσοδο το οποίο θα ισούται με $(u + X_1)i_1$. Επίσης η ασφαλιστική εταιρεία θα πληρώσει τις ζημιές της πρώτης περιόδου που θα είναι ίσες με Y_1. Άρα το πλεόνασμα τη χρονική στιγμή $n = 1$ θα είναι ίσο με:

$$U_1 = (U_0 + X_1)(1 + I_1) - Y_1$$

$$U_1 = u(1 + I_1) + X_1(1 + I_1) - Y_1$$

- Τη χρονική στιγμή $n = 2$ η διαδικασία σύμφωνα με τα παραπάνω θα γίνει.

$$U_2 = (U_1 + X_2)(1 + I_2) - Y_2$$

Αντικαθιστώντας το U_1 με το ίσο του $U_1 = u(1 + I_1) + X_1(1 + I_1) - Y_1$ παίρνουμε,

$$U_2 = (u(1 + I_1) + X_1(1 + I_1) - Y_1 + X_2)(1 + I_2) - Y_2$$

$$U_2 = u(1 + I_1)(1 + I_2) + X_1(1 + I_1)(1 + I_2) - Y_1(1 + I_2) + X_2(1 + I_2) - Y_2$$

- Ομοίως για τη χρονική στιγμή $n = 3$ θα έχουμε,

$$U_3 = (U_2 + X_3)(1 + I_3) - Y_3$$

Με τον ίδιο τρόπο, αντικαθιστώντας το U_2 με το ίσο του στην παραπάνω αχέση θα οδηγηθούμε σε,

$$U_3 = (u(1 + I_1)(1 + I_2) + X_1(1 + I_1)(1 + I_2) - Y_1(1 + I_2) + X_2(1 + I_2) - Y_2 + X_3)(1+I_3)-Y_3$$

$$U_3 = u(1 + I_1)(1 + I_2)(1 + I_3) + X_1(1 + I_1)(1 + I_2)(1 + I_3) - Y_1(1 + I_2)(1 + I_3)$$

$$+X_2(1 + I_2)(1 + I_3) - Y_2(1 + I_3) + X_3(1 + I_3) - Y_3$$

$$U_3 = u\prod_{i=1}^{3}(1 + I_i) + \sum_{i=1}^{3}\left\{(X_i(1 + I_i) - Y_i)\prod_{t=i+1}^{3}(1 + I_i)\right\}$$

- Ακολουθώντας ακριβώς την ίδια μεθοδολογία για τη χρονική στιγμή (n) θα καταλήξουμε στη σχέση:

$$U_n = u\prod_{i=1}^{n}(1 + I_i) + \sum_{i=1}^{n}\left\{(X_i(1 + I_i) - Y_i)\prod_{t=i+1}^{n}(1 + I_i)\right\} \quad (5.3)$$

Όπου $\prod_{\alpha}^{\beta}(1 + I_i) = 1$ για $\alpha > \beta$
Ερμηνεύοντας τη σχέση (6.3) θα μπορούσε κάποιος να πει ότι το πλεόνασμα σε κάθε χρονική περίοδο ισούται με το πλεόνασμα της προηγούμενης χρονικής περιόδου προσαυξημένο με τα κέρδη επενδύσεων συν τα ασφάλιστρα της περιόδου υπολογισμού προσαυξημένα και αυτά με το κέρδος από την επένδυσή τους μείων τις ζημιές της περιόδου υπολογισμού του πλεονάσματος.

5.2 Φράγματα martingale για την πιθανότητα χρεοκοπίας

Στην προηγούμενη ενότητα αναφερθήκαμε στο μοντέλο το οποίο θα ακολουθεί η συνάρτηση του επιτοκίου και επίσης ορίσαμε τη συνάρτηση για το πλεόνασμα σε κάθε χρονική περίοδο. Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με την κατασκευή φραγμάτων μέσω martingale για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Οι ιδιότητες των κατανομών NBU και NWU θα μας φανούν πολύ χρήσιμες και στο κεφάλαιο αυτό και θα κάνουμε χρήση αυτών. Στην την εύρεση των φραγμάτων θα οδηγηθούμε σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 5.1. *Έστω B_1 μία NWU κατανομή και B_2 μία NBU αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι οι B_1 και B_2 για κάθε α, όπου $0 < \alpha \leq 1$ ικανοποιούν τη σχέση:*

$$E\left(\frac{\bar{B}_2(\alpha X_1)}{\bar{B}_1(\alpha Y_1(1+I_1)^{-1})}\right) \leq 1 \tag{5.4}$$

Τότε $\forall U \geq 0$ θα ισχύει,

$$\psi(u) \leq \Lambda(u) \tag{5.5}$$

Όπου,

$$[\Lambda(x)]^{-1} = \inf_{y \geq 0} \frac{\bar{B}_2(y)}{\bar{B}_1(x+y)} \tag{5.6}$$

Απόδειξη:
Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστεί να ορίσουμε κάποιες μεταβλητές. Έστω,

$$S_n = \frac{\bar{B}_2(P_n)}{\bar{B}_1(C_n)}$$

Όπου, $P_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \prod_{i=1}^{k-1}(1+I_i)^{-1}$, δηλαδή το άθροισμα όλων των ασφαλίστρων που αναμένεται θα καταβληθούν μέχρι την περίοδο (n) προεξοφλημένα στην έναρξη του μοντέλου και, $C_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \prod_{i=1}^{k}(1+I_i)^{-1}$ το άθροισμα όλων των αναμενόμενων μελλοντικών αποζημιώσεων επίσης προεξοφλημένο στην έναρξη του μοντέλου, με $P_0 = C_0 = 0$.
Τότε, σύμφωνα με τον ορισμό των NBU και NWU έχουμε,

$$S_{n+1} = \frac{\bar{B}_2\left(P_{n+1}\right)}{\bar{B}_1\left(C_{n+1}\right)} = \frac{\bar{B}_2\left(\sum_{k=1}^{n+1} X_k \prod_{i=1}^{k-1}(1+I_i)^{-1}\right)}{\bar{B}_1\left(\sum_{k=1}^{n+1} Y_k \prod_{i=1}^{k}(1+I_i)^{-1}\right)}$$

Σπάμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή ώστε να εμφανίσουμε το P_n και το C_n

$$S_{n+1} = \frac{\bar{B}_2\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \prod_{i=1}^{k-1}(1+I_i)^{-1} + X_{n+1}\prod_{i=1}^{n}(1+I_i)^{-1}\right)}{\bar{B}_1\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k \prod_{i=1}^{k}(1+I_i)^{-1} + Y_{n+1}\prod_{i=1}^{n+1}(1+I_i)^{-1}\right)}$$

Από τον ορισμό των P_n και C_n η σχέση γίνεται,

$$S_{n+1} = \frac{\bar{B}_2\left(P_n + X_{n+1}\prod_{i=1}^{n}(1+I_i)^{-1}\right)}{\bar{B}_1\left(C_n + Y_{n+1}\prod_{i=1}^{n+1}(1+I_i)^{-1}\right)} \leq S_n\frac{\bar{B}_2\left(X_{n+1}\prod_{i=1}^{n}(1+I_i)^{-1}\right)}{\bar{B}_1\left(Y_{n+1}\prod_{i=1}^{n+1}(1+I_i)^{-1}\right)}$$

Η τελευταία ανισότητα προκύπτει απο τον ορισμό των NBU και NWU . Στη συνέχεια ορίζουμε μια σ-Άλγεβρα, που θα περιλαμβάνει την πληροφορία για τις μεταβλητές $X_i, Y_i kai (1+I_i)$ $\mathcal{F}_n = \{X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n, (1+I_1), \cdots, (1+I_n)\}$
Για $\forall n \geq 0$ θα ισχύει:

$$\begin{aligned} E\left(S_{n+1}|\mathcal{F}_n\right) &\leq S_n E\left(\frac{\bar{B}_2\left(X_{n+1}\prod_{i=1}^{n}(1+I_i)^{-1}\right)}{\bar{B}_1\left(Y_{n+1}\prod_{i=1}^{n+1}(1+I_i)^{-1}\right)}|\mathcal{F}_n\right) \\ &= S_n E\left(\frac{\bar{B}_2\left(\prod_{i=1}^{n}(1+I_i)^{-1}X_{n+1}\right)}{\bar{B}_1\left(\prod_{i=1}^{n+1}(1+I_i)^{-1}(1+I_{n+1})^{-1}Y_{n+1}\right)}|\mathcal{F}_n\right) \end{aligned}$$

Λόγω ανεξαρτησίας των $X_{n+1}, Y_{n+1}, (1+I_{n+1})$ από την $\mathcal{F}_n$ θα έχουμε:

$$E\left(S_{n+1}|\mathcal{F}_n\right) \leq S_n E\left(\frac{\bar{B}_2\left(\prod_{i=1}^{n}(1+I_i)^{-1}X_{n+1}\right)}{\bar{B}_1\left(\prod_{i=1}^{n}(1+I_i)^{-1}(1+I_{i+1})^{-1}Y_{i+1}\right)}|\mathcal{F}_n\right)$$

και θεωρώντας $\alpha = \prod_{i=1}^{n}(1+I_i)^{-1}, X_1 = X_{n+1}, Y_1 = Y_{n+1}$ και $(1+I_1) = (1+I_{n+1})$ από τη σχέση (5.4) θα έχουμε:

$$E\left(S_{n+1}|\mathcal{F}_n\right) \leq S_n \tag{5.7}$$

Η σχέση (5.7) δηλώνει ότι η $S_n, n \geq 0$ είναι μια supermartigale . Εμείς θεωρήσαμε στο μοντέλο ως χρόνο χρεοκοπίας το $T = \inf(n : U_n < 0)$ με $(T = \infty)$ αν $(U_n \geq 0)$ για $\forall n$. Έτσι το T είναι ένας χρόνος στάσης. Θεωρούμε $(n \wedge T) = min(n, T)$ ένα πεπερασμένο χπόνο στάσης. Κάνοντας χρήση του θεωρήματος για το χρόνο στάσης μιας supermartingale, Teylor(An introduction to measure and probability) παίρνουμε:

$$E[S_{n\wedge T}] \leq E[S_0] = 1 \tag{5.8}$$

και έστω η πιθανότητα χρεοκοπίας η οποία δίνεται από τη σχέση Cai (2002) ,

$$\psi_n(u) = Pr\left\{\bigcup_{k=1}^{n}(U_k < 0)\right\} = E\left\{I(T \leq n)\right\} \tag{5.9}$$

Τότε σύμφωνα με τη σχέση 5.8 θα έχουμε:

$$1 \geq ES_{n\wedge T} \geq E[S_{n\wedge T}I(T \leq n)] = E[S_T I(T \leq n)]$$

Αντικαθιστώντας την S_T με,

$$S_T = \frac{\bar{B}_2(P_T)}{\bar{B}_1(C_T)}$$

παίρνουμε,

$$1 \geq E\left(\frac{\bar{B}_2(P_T)}{\bar{B}_1(C_T)} I(T \leq n)\right)$$

και για να επέλθει χρεοκοπία θα πρέπει $C_T \geq u + P_T$, Άρα η παραπάνω σχέση κάνοντας χρήση και της (6.6) διαμορφώνεται ως,

$$1 \geq E\left(\frac{\bar{B}_2(P_T)}{\bar{B}_1(u + P_T)} I(T \leq n)\right) \geq \Lambda^{-1}(u) E(I(T \leq n))$$

και απο τον ορισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας καταλήγουμε στη σχέση

$$1 \geq \Lambda^{-1}(u) E(I(T \leq n)) = \Lambda^{-1}(u)\psi_n(u)$$

Όπου στην οποία παίρνοντας το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(u) = \psi(u)$$

καταλήγουμε στη σχέση (6.5) που ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

Πόρισμα 5.1. *Έστω R_1 μια σταθερά η οποία ικανοποιεί τη σχέση*

$$Ee^{-R_1(X_1 - Y_1(1+I_1)^{-1})} = 1 \tag{5.10}$$

Τότε για κάθε $u \geq 0$ θα ισχύει

$$\psi(u) \leq e^{-R_1 u} \tag{5.11}$$

Απόδειξη:
Στο θεώρημα (5.1) θεωρούμε $\bar{B}_1(x) = \bar{B}_2(x) = e^{-R_1 u}$. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα το $\Lambda(x)$ να ισούται με $e^{-R_1 u}$. Επίσης από τον ορισμό της $AR(1)$ έχουμε: $I_1 = \alpha i_0 + W_1$. Ακόμα, μέσω της ανισότητας Jensen και απο τη σχέση (5.10) για κάθε $0 < \alpha \leq 1$ θα ισχύει:

$$Ee^{-R_1(X_1 - Y_1(1+\alpha i_0 + W_1)^{-1})} = E\left(e^{-R_1(X_1 - Y_1(1+\alpha i_0 + W_1)^{-1})}\right)^{\alpha} \leq \left(Ee^{-R_1(X_1 - Y_1(1+\alpha i_0 + W_1)^{-1})}\right)^{\alpha} = 1$$

Κάνοντας αντικατάσταση στην παραπάνω ανισότητα όπου $\bar{B_1}(x)=\bar{B_2}(x)=e^{-R_1u}$ η ανισότητα γίνεται,

$$E\left(e^{-R_1(X_1-Y_1(1+\alpha i_0+W_1)^{-1})}\right)^{\alpha} \leq 1 \Rightarrow$$
$$E\left(e^{-R_1X_1\alpha-(-R_1Y_1(1+\alpha i_0+W_1)^{-1}\alpha)}\right) \leq 1 \Rightarrow$$
$$E\left(\frac{e^{-R_1X_1\alpha}}{e^{-R_1Y_1(1+\alpha i_0+W_1)^{-1}\alpha}}\right) \leq 1$$

όπου αντικαθιστώντας τον αριθμητή με $e^{-R_1X_1\alpha} = \bar{B_2}(\alpha X_1)$ και τον παρανομαστή με $e^{-R_1Y_1(1+\alpha i_0+W_1)^{-1}\alpha} = \bar{B_1}(\alpha Y_1(1+\alpha i_0+W_1)^{-1})$ καταλήγουμε να δείξουμε ότι η,

$$E\left(\frac{\bar{B_2}(\alpha X_1)}{\bar{B_1}(\alpha Y_1(1+\alpha i_0+W_1)^{-1})}\right) \leq 1$$

ισχύει, (σχέση (5.4)).

Ακόμα, απο τη σχέση $\psi(u) \leq \Lambda(u)$ για $\bar{B_1}(x)=\bar{B_2}(x)=e^{-R_1u}$ βρίσκουμε το $\Lambda(u)$. Σύμφωνα με το θεώρημα (5.1) έχουμε:

$$\Lambda^{-1}(x) = \frac{\bar{B_2}(y)}{\bar{B_1}(x+y)} = \frac{\bar{B_2}(x)}{\bar{B_1}(u+x)} = \frac{e^{-R_1X_1}}{e^{-R_1(u+X_1)}} = \frac{1}{e^{-R_1u}} \Rightarrow$$
$$\Lambda(u) = e^{-R_1u}$$

Άρα,

$$\psi(u) \leq e^{-R_1u}$$

Που ολοκληρώνει την απόδειξη του πορίσματος.

□

5.3 Φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω αναδρομικών σχέσεων

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με την εύρεση φραγμάτων για την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω Αναδρομικών σχέσεων. Ο Cai στην εργασία του με τίτλο (Ruin Probabilities with Dependent Rates of Interest) έδωσε ολοκληρωτικές εξισώσεις για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Κάνοντας χρήση των εξισώσεων αυτών θα κατασκευάσουμε φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας.Η ολοκληρωτική σχέση σύμφωνα με τον Cai για το μοντέλο που μελετάμε είναι η ακόλουθη.

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(u,i_0) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \bar{F}((u+x)(1+\alpha i_0+w))dH(x)dG(w) \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{(u+x)(1+\alpha i_0+w)} \psi_n((u+x)(1+\alpha i_0+w)-y, \alpha i_0+w)dFydH(x)dG(w)\end{aligned} \tag{5.12}$$

Για να μπορέσουμε να βρούμε τέτοιου είδους φράγματα θα χρειαστεί να ορίσουμε κάποιες μεταβλητές. Έτσι, για μία κατανομή B_1 με $B_1(0)=0$ ορίζουμε,

$$(\beta_1)^{-1} = \inf_{t\geq 0} \frac{\int_1^\infty e^{R_1 y} dF(y)}{e^{R_1 t} F(t)} \tag{5.13}$$

Οπότε για κάθε $x \geq 0$ θα έχουμε,

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{\int_1^\infty e^{R_1 y} dF(y)}{e^{R_1 t} F(t)}\right)^{-1} e^{R_1 x} \int_x^\infty e^{R_1 y} dF(y) \tag{5.14}$$

και κάνοντας αντικατάσταση τη σχέση (6.12) η $\bar{F}(x)$ θα φράσεται από πάνω ως,

$$\bar{F}(x) \leq \beta_1 e^{R_1 x} \int_x^\infty e^{R_1 y} dF(y) \tag{5.15}$$

Η συνάρτηση η οποία ολοκληρώνεται είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση της Y_1 στο σημείο R_1. Άρα λοιπόν η (6.14) θα γίνει,

$$\bar{F}(x) \leq \beta_1 e^{R_1 x} E e^{R_1 Y_1} \tag{5.16}$$

□

Έχοντας ορίσει τις μεταβλητές στη συνέχεια θα προχωρήσουμε σε ένα θεώρημα μέσω του οποίου μπορούμε να βρίσκουμε φράγματα.

Θεώρημα 5.2. *Έστω ότι υπάρχει μία σταθερά $R_1 > 0$ και ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση.*

$$E e^{-R_1(X_1(1+W_1)-Y_1)} = 1 \tag{5.17}$$

Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας φράσεται και το φάργμα δίνεται από τον τύπο.

$$\psi(u) \leq \beta_1 E e^{R_1 Y_1} E e^{-R_1(u+X_1)(1+\alpha i_0+W_1)}, u \geq 0 \tag{5.18}$$

Όπου, $(1+\alpha i_0+W_1) = 1+I_1$

Απόδειξη:
Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος και την εύρεση αναδρομικού τύπου για την πιθανότητα χρεοκοπίας θα χρισημοποιήσουμε τη μέθοδο της επαγωγής . Αυτό που θα κάνουμε, είναι να δεσμεύσουμε ως προς την ζημιά της πρώτης περιόδου, να δούμε τι επίπτωση θα έχει στο πλεόνασμα, και μετά εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας βρίσκουμε ανανεωτικούς τύπους για την εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας.

- Από τον ορισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας (σχέση (5.9)) για την πρώτη περίοδο έχουμε:

$$\psi_n(u) = Pr\left\{\bigcup_{k=1}^{n}(U_k < 0)\right\} = E\{I(T \leq n)\}$$

Για να επέλθει χρεοκοπία μετά την έλευση της πρώτης ζημίας (πρώτης περιόδου) θα πρέπει,

$$\psi_1(u) = Pr\{Y_1 > (u + X_1)(1 + \alpha i_0 + W_1)\} = \int_1^\infty \int_0^\infty \bar{F}((u + x)(1 + \alpha i_0 + w))\, dH(x)dG(w) \tag{5.19}$$

Το πλεόνασμα λίγο πριν την έλευση της πρώτης ζημιάς θα έχει γίνει $(u+X_1)(1+\alpha i_0+W_1)$, και τότε απο τις σχέσεις (6.15) και (6.18) παίρνουμε,

$$\begin{aligned}\psi_1(u) &\leq \beta_1 E e^{R_1 Y_1} \int_1^\infty \int_0^\infty e^{R_1((u+x)(1+\alpha i_0+w))} dH(x)dG(w)\\ &= \beta_1 E e^{R_1 Y_1} E e^{R_1((u+X_1)(1+\alpha i_0+W_1))}\end{aligned}$$

Αν η ζημιά είναι μεγαλύτερη από το πλεόνασμα της πρώτης περιόδου έχουμε χρεοκοπία, διαφορετικά η διαδικασία ανανεώνεται αλλά πλέον με διαφορετικό επιτόκιο.

- Θεωρούμε οτι η παραπάνω ανισότητα ισχύει για την $n-$οστή περίοδο. Θα έχουμε λοιπόν για την $n-$οστή περίοδο.

$$\psi_n(u) \leq \beta_1 E e^{R_1 Y_1} E e^{R_1((u+X_1)(1+\alpha i_0+W_1))} \tag{5.20}$$

Για να μην χρεοκοπήσει την πρώτη περίοδο και να χρεοκοπήσει στις επόμενες θα πρέπει για το μέγεθος της πρώτης ζημιάς να ισχύει, $0 \leq y \leq (u + x)(1 + \alpha i_0 + w)$. Η διαδικασία θα ανανεωθεί και το πλεόνασμα θα γίνει $(u + x)(1 + \alpha i_0 + w) - y$. Οπότε, για $\alpha i_0 \geq 0$ και $W_1 \geq 0$ από την (6.19) $\forall u \geq 0$ παίρνουμε,

$$
\begin{aligned}
\psi_n((u+x)(1+\alpha i_0+w)-y) &\leq \beta_1 E e^{R_1 Y_1} E e^{R_1((u+x)(1+\alpha i_0+w)-y+X_1)(1+\alpha(\alpha i_0+w)+W_1)} \\
&\leq \beta_1 E e^{R_1 Y_1} E e^{R_1((u+x)(1+\alpha i_0+w)-y+X_1)(1+W_1)} \\
&= \beta_1 E e^{R_1 Y_1} E e^{R_1((u+x)(1+\alpha i_0+w)-y)(1+W_1)-R_1 X_1(1+W_1)} \\
&\leq \beta_1 E e^{R_1 Y_1} E e^{R_1((u+x)(1+\alpha i_0+w)-y)-R_1 X_1(1+W_1)} \\
&= \beta_1 E e^{R_1 Y_1} E e^{-R_1 X_1(1+W_1)} E e^{R_1((u+x)(1+\alpha i_0+w)-y)} \\
&= \beta_1 E e^{R_1((u+x)(1+\alpha i_0+w)-y)}
\end{aligned} \tag{5.21}
$$

- Στη συνέχεια χρισημοποιώντας την ολοκληρωτική σχέση για την πιθανότητα χρεοκοπίας (6.11) την ανισότητα για την $\psi_n(u)$ σχέση (6.19) και την (6.20) θα αποδείξουμε ότι η ανισότητα (6.19) ισχύει και την $\psi_{n+1}(u)$. Έχουμε λοιπόν,

$$
\begin{aligned}
\psi_{n+1}(u,i_0) = &\int_0^\infty \int_0^\infty \bar{F}((u+x)(1+\alpha i_0+w))dH(x)dG(w) \\
&+ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{(u+x)(1+\alpha i_0+w)} \psi_n((u+x)(1+\alpha i_0+w)-y, \alpha i_0+w)dFydH(x)dG(w)
\end{aligned}
$$

Κάνοντας αντικατάσταση της $\bar{F}((u+x)(1+\alpha i_0+w))$ σύμφωνα με την ανισότητα (6.14) και την $\psi_n((u+x)(1+\alpha i_0+w)-y, \alpha i_0+w)$ αντίστοιχα με την (6.20) θα πάρουμε,

$$
\begin{aligned}
\psi_{n+1}(u,i_0) \leq &\beta_1 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{(u+x)(1+\alpha i_0+w)}^\infty E e^{R_1 y} e^{-R_1((u+x)(1+\alpha i_0+w))} dH(x)dG(w) \\
&+ \beta_1 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{(u+x)(1+\alpha i_0+w)} e^{-R_1((u+x)(1+\alpha i_0+w)-y)} dFydH(x)dG(w) \\
&= \beta_1 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{(u+x)(1+\alpha i_0+w)}^\infty E e^{R_1 y} e^{-R_1((u+x)(1+\alpha i_0+w))} dH(x)dG(w) \\
&+ \beta_1 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{(u+x)(1+\alpha i_0+w)} e^{R_1 y} e^{-R_1(u+x)(1+\alpha i_0+w)} dFydH(x)dG(w) \\
&= \beta_1 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-R_1(u+x)(1+\alpha i_0+w)} \\
&\times \left[\int_0^{(u+x)(1+\alpha i_0+w)} e^{R_1 y} dFy + \int_{(u+x)(1+\alpha i_0+w)}^\infty e^{R_1 y} dFy \right] dH(x)dG(w) \\
&= \beta_1 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-R_1(u+x)(1+\alpha i_0+w)} \int_0^\infty e^{R_1 y} dFydH(x)dG(w) \\
&= \beta_1 e^{R_1 Y_1} e^{-R_1(u+X_1)(1+\alpha i_0+W_1)}
\end{aligned}
$$

Η τελευταία σχέση ισούται με τη σχέση (6.19)

και παίρνοντας το όριο $\lim_{n\to\infty}\psi_n(u)=\psi(u)$ ολοκληρώνεται η απόδειξη.

□

Ένα βελτιωμένο φράγμα του παραπάνω θεωρήματος μπορεί να εξαχθεί αν υποθέσουμε ότι η F ανήκει στην οικογένει κατανομών New Worse Than Used In Convex Ordering (NWUC) . Το φράγμα αυτό θα δίνεται σύμφωνα με το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 5.2. *Κάτω από τις υποθέσεις του θεωρήματος (6.2), αν η F είναι μία (NWUC) κατανομή, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας φράσεται και το φράγμα δίνεται από τη σχέση,*

$$\psi(u)\leq Ee^{-R_1(u+X_1)(1+\alpha i_0+W_1)}, u\geq 0 \tag{5.22}$$

Απόδειξη:
Από τον ορισμό για την κλάση κατανομών (NWUC) γνωρίζουμε ότι $\beta_1=(Ee^{R_1Y_1})^{-1}$. Αντικαθιστώντας λοιπόν την τιμή αυτή στη σχέση 6.17 του θεωρήματος (6.2) θα πάρουμε.

$$\psi(u)\leq\beta_1Ee^{R_1Y_1}Ee^{-R_1(u+X_1)(1+\alpha i_0+W_1)}, u\geq 0\Rightarrow$$
$$\psi(u)\leq(Ee^{R_1Y_1})^{-1}Ee^{R_1Y_1}Ee^{-R_1(u+X_1)(1+\alpha i_0+W_1)}, u\geq 0\Rightarrow$$
$$\psi(u)\leq Ee^{-R_1(u+X_1)(1+\alpha i_0+W_1)}, u\geq 0$$

Που οποκληρώνει την απόδειξη του πορίσματος.

□

Μπορούμε ακόμα να δείξουμε ότι τα φράγματα τα οποία μας δίνει το θεώρημα (6.2) είναι μικρότερα και άρα καλύτερα από το φράγμα του Lundberg.

Πρόταση 5.1. *Έστω ότι υπάρχει $R>0$ το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $Ee^{-R(X_1-Y_1)}=1$, φραγμα Lundberg. και $R_1>0$ από τη σχέση 6.16. Ακόμα αν ισχύει $EX_1>EY_1$ τότε $R_1>R$.*

Απόδειξη:
Θεωρούμε τις παρακάτω εξισώσεις,

$$f(r)=Ee^{-r(X_1(1+W_1)-Y_1)}-1$$

και

$$g(r)=Ee^{-r(X_1-Y_1)}-1$$

Θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά της f και της g. Παίρνοντας την πρώτη παράγωγο της f ως προς r θα έχουμε.

$$f'(r) = E\left[-(X_1(1+W_1) - Y_1)e^{-r(X_1(1+W_1)-Y_1)}\right]$$

ενώ η δεύτερη παράγωγος θα ισούται με

$$f''(r) = E\left[(X_1(1+W_1) - Y_1)^2 e^{-r(X_1(1+W_1)-Y_1)}\right]$$

Όπως εύκολα γίνεται αντιληπτό η δεύτερη παράγωγος είναι θετική που σημαίνει ότι η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα άνω. Ακόμα για την f έχουμε $f(0) = 0$ και $f'(0) = EY_1 - EX_1(1+W_1) \leq EY_1 - EX_1 < 0$ Η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την υπόθεση της πρότασης. Ακολουθώντας τον ίδιο τρόπο για την g θα έχουμε.

$$g'(r) = E\left[-(X_1 - Y_1)e^{-r(X_1)-Y_1)}\right]$$

ενώ η δεύτερη παράγωγος θα ισούται με

$$g''(r) = E\left[(X_1 - Y_1)^2 e^{-r(X_1-Y_1)}\right]$$

Επίσης η δεύτερη παράγωγος της g είναι θετική η πρώτη αρνητική και $g(0) = 0$. Οστόσο αν τα $R_{>0}$ και $R > 0$ υπάρχουν τότε είναι μοναδικές ρίζες των $f(r)$ και$g(r)$ αντίστοιχα. Οι δύο συναρτήσεις έχουν την ίδια συμπεριφορά με τη διαφορά να εστιάζεται κυρίως στην πρώτη παράγωγο. Η πρώτη παράγωγος της $g(r)$ είναι μεγαλύτερη από την πρώτη παράγωγο της $f(r)$ που σημαίνει,

$$e^{-R_1(X_1(1+W_1)-Y_1)} \leq e^{-R_1(X_1-Y_1)}$$

Άρα,

$$1 = Ee^{-R_1(X_1(1+W_1)-Y_1)} \leq Ee^{-R_1(X_1-Y_1)}$$

Ή ακόμα

$$g(R_1) = Ee^{-R_1(X_1-Y_1)} - 1 \geq 0$$

Από όπου παίρνουμε $R_1 > R$ και ολοκληρώνεται η απόδειξη της πρότασης.

□

5.4 Αριθμητικά παραδείγματα

Έχοντας ολοκληρώσει την παρουσίαση των μεθόδων εύρεσης φραγμάτων για την πιθανότητα χρεοκοπίας στη συνέχεια της ενότητας αυτής θα παρουσιάσουμε μέσω δύο αριθμητικών παραδειγμάτων τα αποτελέσματα τα οποία παίρνουμε από τις μεθόδους αυτές. Για την απλοποίηση των υπολογισμών θα θεωρήσουμε $X_1 = 1$ δηλαδή τα ασφάλιστρα της κάθε περιόδου θα ισούνται με μονάδα και επίσης θα θεωρήσουμε σταθερό επιτόκιο ίσο με 0.05. Στο πρώτο παράδειγμα θα πάρουμε την κατανομή ζημιών να ακολουθεί μία Γάμμα κατανομή και στο δεύτερο μία μίξη δύο Εκθετικών κατανομών.

Παράδειγμα 5.1. *Υποθέτουμε ότι η κατανομή των Ζημιών Y_1 ακολουθεί μία Γάμμα κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:*

$$g(y) = \frac{\lambda^{\alpha} y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda y}, \quad y > 0 \tag{5.23}$$

όπου, $\alpha > 0$ και $\lambda > 0$
Θεωρούμε τις παραμέτρους $\alpha = 0.6$ και $\lambda = 0.9$. Τότε η μέση τιμή της Y_1 θα ισούται με $EY_1 = \frac{\alpha}{\lambda} = 0.67$ και επειδή $0 < \alpha < 1$ η Y_1 ανήκει στην οικογένεια κατανομών DFR.
Ακόμα θεωρούμε R_0 το συντελεστή προσαρμογής από το κλασσικό μοντέλο, συντελεστής Lundberg ,R_1 το συντελεστή που προκύπτει από το πόρισμα 5.1 και R_2 το συντελεστή που προκύπτει από το πόρισμα 6.2. Μέσω του υπολογιστικού προγράμματος Mathematica βρίσκουμε τα R_0, R_1, R_2. Στη συνέχεια για διάφορες τιμές του αρχικού κεφαλαίου μέσω και πάλι του Mathematica βρίσκουμε τα αντίστοιχα φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. τα αποτελέσματα αυτά δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 5
Άνω φράγματα στο παράδειγμα 5.1 για i=0.05

u	Martingale	Αναδρομικό	Lundberg
0.0	1.00000	0.40207	1.00000
0.5	0.63409	0.25495	0.65880
1.0	0.40207	0.16166	0.43402
1.5	0.25495	0.10251	0.28593
2.0	0.16166	0.06500	0.18837
2.5	0.10251	0.04121	0.12410
3.0	0.06500	0.02613	0.08176
3.5	0.04121	0.01657	0.05386
4.0	0.02613	0.01051	0.03548
4.5	0.01657	0.00666	0.02338
5.0	0.01051	0.00422	0.01540

Σχήμα 1.5: Φράγμα της πιθανότητας χρεοκοπίας όταν $Y_1 \approx G(0.6, 0.9)$.

Από τον Πίνακα 5 παρατηρούμε ότι τα φράγματα τα οποία εξάγονται με τη μέθοδο των αναδρομικών σχέσεων είναι καλύτερα απο τα φράγματα της μεθόδου Martingale.
Στο επόμενο παράδειγμα θα κατασκευάσουμε φράγματα όταν η κατανομή ζημιών ακολουθεί μία μίξη εκθετικών κατανομών με παραμέτρους λ_1 και λ_2. Τα βάρη θα είναι 1/2 από την πρώτη και 1/2 από τη δεύτερη. θα έχουμε λοιπόν.

Παράδειγμα 5.2. *Έστω λοιπόν η Y_1 η κατανομή ζημιάς. Η συνάρτηση πικνότητας πιθανότητας της Y_1 θα δίνεται από τον τύπο,*

$$g(y) = 1/2\lambda_1 e^{-\lambda_1 y} + 1/2\lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \tag{5.24}$$

Η υπόθεση που θα κάνουμε για την $g(y)$ είναι $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 1,2$. Το επιτόκιο το θεωρούμε το ίδιο με το προηγούμενο παράδειγμα. Από το Mathematica θα βρούμε και πάλι τα R_0, R_1, R_2 και στη συνέχεια θα βρούμε τα φράγματα για τα αντίστοιχα R. Τα απότελέσματα του Mathematica παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 6
Άνω φράγματα στο παράδειγμα 5.2 για i=0.05

u	Martingale	Αναδρομικό	Lundberg
0.0	1.00000	0.13726	1.00000
0.5	0.37048	0.05085	0.39009
1.0	0.13726	0.01884	0.15217
1.5	0.05085	0.00698	0.05936
2.0	0.01884	0.00259	0.02315
2.5	0.00698	0.00096	0.00903
3.0	0.00259	0.00035	0.00352
3.5	0.00096	0.00013	0.00137
4.0	0.00035	0.00005	0.00054
4.5	0.00013	0.00002	0.00021
5.0	0.00005	6.6868*10^-6	0.00008

Σχήμα 1.6: Φράγμα της πιθανότητας χρεοκοπίας όταν Y_1 ακολουθεί μίξη από $Exp(\lambda)$.

Κεφάλαιο 6

Ληξιπρόθεσμη Πληρωμή Ασφαλίστρων Για AR(1) Επιτόκιο

6.1 Περιγραφή του μοντέλου

Ορίζουμε $(X_n, n = 1, 2, 3 \cdots)$ και $(Y_n, n = 1, 2, 3 \cdots)$ ως δύο μη αρνητικές ανεξάρτητες ακολουθίες τυχαίων ισόνομων και ανεξάρτητων μεταβλητών όπου X_n είναι τα ασφάλιστρα που εισπράτει η ασφαλιστική εταιρεία για την περίοδο κάλυψης (n) και Y_n είναι οι ζημιές τις οποίες αποζημιώνει για την αντίστοιχη περίοδο κάλυψης. Τότε σύμφωνα με την εργασία του Cai (2002) θα πάρουμε την ακόλουθη σχέση για τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος.

$$U_n = U_0 + S_n \tag{6.1}$$

όπου, $U_0 = u$ είναι το αρχικό κεφάλαιο που υποχρεούται βάση νόμου να έχει η ασφαλιστική εταιρεία στην έναρξη της λειτουργείας της και το οποίο αναπροσαρμόζεται ανάλογα με την έκθεση σε κίνδυνο την οποία έχει, το S_n δίνεται από τον τύπο

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (X_k - Y_k)\,, n \geq 1 \tag{6.2}$$

και είναι το άθροισμα των κερδών ή ζημίων που είχε η ασφαλιστική εταιρεία κατά τις χρονικές στιγμές $k = 1, 2, 3, \cdots, n$. Έτσι λοιπόν το U_n θα είναι το πλεόνασμα το οποίο θα έχει η ασφαλιστική εταιρεία σε κάθε χρονική περίοδο . Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό το πλεόνασμα αυτό είναι μία τυχαία μεταβλητή και εξαρτάται από τις τιμές που παίρνουν σε κάθε χρονική περίοδο οι τυχαίες μεταβλητές X_n και Y_n. Στην αρχή του κεφαλαίου αναφέραμε ότι σε κάθε χρονική περίοδο θα εφαρμόζεται ένα επιτόκιο το οποίο και αυτό θα είναι μία τυχαία μεταβλητή. Άρα, το πλεόνασμα θα εξατράται και από το επιτόκιο. Το επιτόκιο στην περίπτωση αυτή (λιξηπρόθεσμη πληρωμή ασφαλίστρων) θα εφαρμόζεται στο πλεόνασμα της προηγούμενης περιόδου. Σύμφωνα με τα παραπάνω η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος σχέση 6.1 θα γραφθεί μέσω της 6.2 ως,

$$U_n = U_0 + \sum_{k=1}^{n} (X_k - Y_k) = U_{n-1} + X_n - Y_n$$

Όμως σύμφωνα με το μοντέλο του επιτοκίου που θεωρήσαμε για το κεφάλαιο αυτό η παραπάνω σχέση θα γίνει,

$$U_n = U_{n-1} (1 + I_n) + X_n - Y_n$$

Όπου παρατηρούμε ότι η ασφαλιστική εταιρεία έχει έσοδο από την επένδυση του πλεονάσματος της προηγούμενης περιόδου. Έχοντας ορίσει τις μετάβλητές τις οποίες θα χρειαστούμε, μπορούμε να δούμε πως αναπτύσεται το πλεόνασμα στη διάρκεια του χρόνου. Από τη συνάρτηση (6.1) για αρχικό κεφάλαιο $U_0 = u$ θα έχουμε:

- Τη στιγμή της έναρξης $n = 0$ το πλεόνασμα θα είναι ίσο με $U_0 = u$.
- Τη χρονική στιγμή $n = 1$ στο πλεόνασμα (αρχικό κεφάλαιο) θα προστεθούν τα έσοδα από τόκους επενδύσεων. Επίσης η ασφαλιστική εταιρεία θα πληρώσει τις ζημιές της πρώτης περιόδου που θα είναι ίσες με Y_1 και θα εισπράξει τα ασφάλιστρα της πρώτης περιόδου τα οποία θα είναι ίσα με X_1. Άρα το πλεόνασμα τη χρονική στιγμή $n = 1$ θα είναι ίσο με:

$$U_1 = U_0(1 + I_1) + X_1 - Y_1$$

$$U_1 = u(1 + I_1) + X_1 - Y_1$$

- Τη χρονική στιγμή $n = 2$ η διαδικασία σύμφωνα με τα παραπάνω θα γίνει.

$$U_2 = U_1(1 + I_2) + X_2 - Y_2$$

Αντικαθιστώντας το U_1 με το ίσο του $U_1 = u(1 + I_1) + X_1 - Y_1$ παίρνουμε,

$$U_2 = (u(1 + I_1)(1 + I_1) + X_1 - Y_1) (1 + I_2) + X_2 - Y_2$$
$$U_2 = u(1 + I_1)(1 + I_2) + (X_1 - Y_1)(1 + I_2) + X_2 - Y_2$$

- Ομοίως για τη χρονική στιγμή $n = 3$ θα έχουμε,

$$U_3 = U_2(1+I_3) + X_3 - Y_3$$

Με τον ίδιο τρόπο, αντικαθιστώντας το U_2 με το ίσο του στην παραπάνω αχέση θα οδηγηθούμε σε,

$$U_3 = (u(1+I_1)(1+I_2) + (X_1 - Y_1)(1+I_2) + X_2 - Y_2)\,(1+I_3) + X_3 - Y_3$$

$$U_3 = u(1+I_1)(1+I_2)(1+I_3) + (X_1 - Y_1)(1+I_2)(1+I_3)$$

$$+(X_2 - Y_2)(1+I_3) + X_3 - Y_3$$

$$U_3 = u\prod_{i=1}^{3}(1+I_i) + \sum_{i=1}^{3}\left\{(X_i - Y_i)\prod_{t=i+1}^{3}(1+I_i)\right\}$$

- Ακολουθώντας ακριβώς την ίδια μεθοδολογία για τη χρονική στιγμή (n) θα καταλήξουμε στη σχέση:

$$U_n = u\prod_{i=1}^{n}(1+I_i) + \sum_{i=1}^{n}\left\{(X_i - Y_i)\prod_{t=i+1}^{n}(1+I_i)\right\} \tag{6.3}$$

Όπου $\prod_{\alpha}^{\beta}(1+I_i) = 1$ για $\alpha > \beta$
Ερμηνεύοντας τη σχέση (6.3) θα μπορούσε κάποιος να πει ότι το πλεόνασμα σε κάθε χρονική περίοδο ισούται με το πλεόνασμα της προηγούμενης χρονικής περιόδου προσαυξημένο με τα κέρδη επενδύσεων συν τα ασφάλιστρα της περιόδου υπολογισμού μείων τις ζημιές της περιόδου υπολογισμού του πλεονάσματος.

6.2 Φράγματα martingale για την πιθανότητα χρεοκοπίας

Έχοντας ορίσει μοντέλο το οποίο θα ακολουθεί η συνάρτηση του επιτοκίου και αφού έχουμε ορίσει τη στοχαστική συνάρτηση για το πλεόνασμα σε κάθε χρονική περίοδο, στη συνέχεια της ενότητας αυτής θα κατασκευάσουμε φράγματα μέσω της μεθόδου martigale για την πιθανότητα χρεοκοπίας.Όπως και σε προηγούμενο κεφάλαιο έτσι και τώρα θα κάνουμε χρήση των ιδιοτήτων των κατανομών NBU και NWU .
Για να βρούμε τα φράγματα αυτά θα προχωρήσουμε σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 6.1. *Έστω B_1 μία NWU κατανομή και B_2 μία NBU αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι οι B_1 και B_2 για κάθε α, όπου $0 < \alpha \leq 1$ ικανοποιούν τη σχέση:*

$$E\left(\frac{\bar{B}_2(\alpha X_1(1+I_1)^{-1})}{\bar{B}_1(\alpha Y_1(1+I_1)^{-1})}\right) \leq 1 \tag{6.4}$$

Τότε $\forall u \geq 0$ *θα ισχύει,*

$$\psi^*(u) \leq \Lambda(u) \tag{6.5}$$

Όπου, το $\Lambda(u)$ *ορίζεται ως,*

$$[\Lambda(x)]^{-1} = \inf_{y \geq 0} \frac{\bar{B}_2(y)}{\bar{B}_1(x+y)} \tag{6.6}$$

Απόδειξη:

Για την απόδειξη του θεωρήματος ορίζουμε τις μεταβλητές P_n, C_n και S_n όπου,

$$S_n = \frac{\bar{B}_2(P_n)}{\bar{B}_1(C_n)}$$

με

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \prod_{i=1}^{k} (1+I_i)^{-1}, P_0 = 0$$

και

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \prod_{i=1}^{k} (1+I_i)^{-1}$$

Η μεταβλητή P_n δηλώνει όλα τα ασφάλιστρα τα οποία αναμένεται να εισπράξει η ασφαλιστική εταιρεία προεξοφλημένα στη στιγμή έναρξης. Από την άλλη, η μεταβλητή C_n αντίστοιχα, δηλώνει όλες τις αναμενόμενες ζημιές που θα χρειαστεί να αποζημιώσει η ασφαλιστική εταιρεία προεξοφλημένες και αυτές στη στιγμή έναρξης.
Από τον ορισμό λοιπόν των μία NWU και NBU αντίστοιχα θα δείξουμε ότι η S_n είναι μία supermartingale . Έχοντας μία σχέση για την S_n θα βρούμε πως αυτή συνδέεται με την S_{n+1}.

$$S_{n+1} = \frac{\bar{B}_2\left(P_{n+1}\right)}{\bar{B}_1\left(C_{n+1}\right)} = \frac{\bar{B}_2\left(\sum_{k=1}^{n+1} X_k \prod_{i=1}^{k}(1+I_i)^{-1}\right)}{\bar{B}_1\left(\sum_{k=1}^{n+1} Y_k \prod_{i=1}^{k}(1+I_i)^{-1}\right)}$$

Εμφανίζουμε το P_n στον αριθμητή και το C_n στον παρονομαστή.

$$S_{n+1} = \frac{\bar{B}_2\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \prod_{i=1}^{k}(1+I_i)^{-1} + X_{n+1} \prod_{i=1}^{n+1}(1+I_i)^{-1}\right)}{\bar{B}_1\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k \prod_{i=1}^{k}(1+I_i)^{-1} + Y_{n+1} \prod_{i=1}^{n+1}(1+I_i)^{-1}\right)}$$

Από τον ορισμό των P_n και C_n η σχέση γίνεται,

$$S_{n+1} = \frac{\bar{B}_2\left(P_n + X_{n+1} \prod_{i=1}^{n+1}(1+I_i)^{-1}\right)}{\bar{B}_1\left(C_n + Y_{n+1} \prod_{i=1}^{n+1}(1+I_i)^{-1}\right)} \leq S_n \frac{\bar{B}_2\left(X_{n+1} \prod_{i=1}^{n+1}(1+I_i)^{-1}\right)}{\bar{B}_1\left(Y_{n+1} \prod_{i=1}^{n+1}(1+I_i)^{-1}\right)}$$

Όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει απο τον ορισμό των NBU και NWU . Στη συνέχεια θα ορίσουμε μια σ-Άλγεβρα,$\mathcal{F}_n$ που θα έχει την πληροφορία για τις μεταβλητές $X_i, Y_i, (1+I_i)$. Έτσι λοιπόν θα έχουμε, $\mathcal{F}_n = \{X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n, (1+I_1), \cdots, (1+I_n)\}$
Για $\forall n \geq 0$ θα ισχύει:

$$
\begin{aligned}
E\left(S_{n+1}|\mathcal{F}_n\right) &\leq S_n E\left(\frac{\bar{B}_2\left(X_{n+1}\prod_{i=1}^{n+1}(1+I_i)^{-1}\right)}{\bar{B}_1\left(Y_{n+1}\prod_{i=1}^{n+1}(1+I_i)^{-1}\right)}|\mathcal{F}_n\right) \\
&= S_n E\left(\frac{\bar{B}_2\left(X_{n+1}\prod_{i=1}^{n+1}(1+I_i)^{-1}\right)}{\bar{B}_1\left(Y_{n+1}\prod_{i=1}^{n+1}(1+I_i)^{-1}\right)}|\mathcal{F}_n\right)
\end{aligned}
$$

Στο σημείο αυτό λόγω ανεξαρτησίας των $X_{n+1}, Y_{n+1}, (1+I_{n+1})$ από την $\mathcal{F}_n$ θα έχουμε:

$$
E\left(S_{n+1}|\mathcal{F}_n\right) \leq S_n E\left(\frac{\bar{B}_2\left(\prod_{i=1}^{n+1}(1+I_i)^{-1}(1+I_{n+1})^{-1}X_{n+1}\right)}{\bar{B}_1\left(\prod_{i=1}^{n+1}(1+I_i)^{-1}(1+I_{n+1})^{-1}Y_{i+1}^{-1}\right)}|\mathcal{F}_n\right)
$$

Στην τελευταία ανισότητα θεωρούμε $\alpha = \prod_{i=1}^{n}(1+I_i)^{-1}$ και ακόμα $X_1 = X_{n+1}, Y_1 = Y_{n+1}$ και $_1 = (1+I_{n+1})$. Με αυτόν τον τρόπο από τη σχέση (6.4) θα έχουμε:

$$
E\left(S_{n+1}|\mathcal{F}_n\right) \leq S_n \tag{6.7}
$$

Η σχέση (6.7) δηλώνει αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε για την S_n ότι δηλαδή η $S_n, n \geq 0$ είναι μια supermartigale . Η χρονική περίοδος στην οποία θα έχουμε χρεοκοπία έχει ορισθεί ως $T = \inf(n : U_n < 0)$ δηλαδή η πρώτη χρονική στιγμή όπου το πλεόνασμα θα γίνει αρνητικό. Το T λοιπόν είναι ένα στάσιμο σημείο και θεωρώντας $(n \wedge T) = min(n, T)$ θα έχουμε ένα πεπερασμένο στάσιμο σημείο. Με τη χρήση του θεωρήματος στασιμότητας για supermartigale θα πάρουμε τη σχέση $ES_{n\wedge T} \leq ES_0 = 1$. Η πιθανότητα χρεοκοπίας έχει δωθεί από τον Cai (2002) και έχει τη μορφή.

$$
\psi_n^*(u) = Pr\left\{\bigcup_{k=1}^{n}(U_k < 0)\right\} = E\left\{I(T \leq n)\right\} \tag{6.8}
$$

Αναπτύσοντας τη σχέση $ES_{n\wedge T} \leq ES_0 = 1$ θα έχουμε:

$$
1 \geq ES_{n\wedge T} \geq E[S_{n\wedge T}I(T \leq n)] = E[S_T I(T \leq n)]
$$

Κάνοντας αντικατάσταση της S_T με,

$$
S_T = \frac{\bar{B}_2(P_T)}{\bar{B}_1(C_T)}
$$

θα πάρουμε,

$$1 \geq E\left(\frac{\bar{B}_2(P_T)}{\bar{B}_1(C_T)} I(T \leq n)\right)$$

Για να επέλθει χρεοκοπία, όπως προαναφέραμε θα πρέπει το πλεόνασμα να γίνει αρνητικό. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει οι ζημιές να είναι μεγαλύτερες από τα ασφάλιστρα συν το αρχικό κεφάλαιο, δηλαδή θα πρέπει $C_T \geq u + P_T$. Οπότε η παραπάνω ανισότητα κάνοντας χρήση και της (6.6) θα διαμορφωθεί ως,

$$1 \geq E\left(\frac{\bar{B}_2(P_T)}{\bar{B}_1(u + P_T)} I(T \leq n)\right) \geq \Lambda^{-1}(u)E(I(T \leq n))$$

και απο τον ορισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας καταλήγουμε στη σχέση

$$1 \geq \Lambda^{-1}(u)E(I(T \leq n)) = \Lambda^{-1}(u)\psi_n^*(u)$$

Όπου στην οποία παίρνοντας το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n^*(u) = \psi^*(u)$$

καταλήγουμε στη σχέση (6.5) που ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

Στη συνέχεια, κάνοντας χρήση του παραπάνω θεωρήματος θα δώσουμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις όπου το φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας γίνεται ακόμα πιο απλό.

Πόρισμα 6.1. *Έστω R_1 μια σταθερά η οποία ικανοποιεί τη σχέση*

$$Ee^{-R_1(X_1-Y_1)(1+I_1)^{-1}} = 1 \tag{6.9}$$

Τότε για κάθε $u \geq 0$ θα ισχύει

$$\psi^*(u) \leq e^{-R_1 u} \tag{6.10}$$

Απόδειξη:

Στο παραπάνω θεώρημα (6.1) αν πάρουμε για τις κατανομές B_1, B_2 να είναι από την ίδια εκθετική κατανομή με παράμετρο R_1 θα έχουμε $\bar{B}_1(x)=\bar{B}_2(x)=e^{-R_1 x}$. Αυτό αυτόματα μας οδηγεί στο αποτέλεσμα το $\Lambda(x)$ να ισούται με $e^{-R_1 x}$. Από τη σχέση (6.9) μέσω της ανισότητας Jensen για κάθε $0 < \alpha \leq 1$ θα ισχύει:

$$Ee^{-R_1(X_1-Y_1)(1+I_1)^{-1}} = E\left(e^{-R_1(X_1-Y_1)(1+I_1)^{-1}}\right)^\alpha \leq \left(Ee^{-R_1(X_1-Y_1)(1+I_1)^{-1}}\right)^\alpha = 1$$

Στην παραπάνω ανισότητα κάνοντας πράξεις θα πάρουμε,

$$E\left(e^{-R_1(X_1-Y_1)(1+I_1)^{-1}}\right)^{\alpha} \leq 1 \Rightarrow$$
$$E\left(e^{-R_1X_1Z_1\alpha-(-R_1Y_1(1+I_1)^{-1}\alpha)}\right) \leq 1 \Rightarrow$$
$$E\left(\frac{e^{-R_1X_1Z_1\alpha}}{e^{-R_1Y_1(1+I_1)^{-1}\alpha}}\right) \leq 1$$

Κάνοντας αντικατάσταση στον αριθμητή και τον παρονομαστή σύμφωνα με τον ορισμό του πορίσματος, δηλαδή, $\bar{B}_1\left(\alpha Y_1(1+I_1)^{-1}\right) = e^{-R_1Y_1(1+I_1)^{-1}\alpha}$ και $\bar{B}_2\left(\alpha X_1(1+I_1)^{-1}\right) = e^{-R_1X_1(1+I_1)^{-1}\alpha}$ φτάνουμε να δείξουμε ότι,

$$E\left(\frac{\bar{B}_2(\alpha X_1Z_1)}{\bar{B}_1(\alpha Y_1(1+I_1)^{-1})}\right) \leq 1$$

ισχύει λόγω της υπόθεσης που κάναμε στο θέωρημα (6.1), (σχέση (6.4)). Ακόμα, στο θεώρημα (6.1) είχαμε ορίσει και το $\Lambda(x)$ ως,

$$\Lambda^{-1}(x) = \frac{\bar{B}_2(y)}{\bar{B}_1(x+y)}$$

Κάνοντας και πάλι αντικατάσταση των $\bar{B}_1, \bar{B}_2$ με e^{-R_1x} θα έχουμε,

$$\Lambda^{-1}(x) = \frac{e^{-R_1X_1}}{e^{-R_1(u+X_1)}} = \frac{1}{e^{-R_1u}} \Rightarrow$$
$$\Lambda(u) = e^{-R_1u}$$

Οπότε από τη σχέση $\psi^*(u) \leq \Lambda(u)$ θα πάρουμε

$$\psi^*(u) \leq e^{-R_1u}$$

□

6.3 Φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω αναδρομικών σχέσεων

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με την εύρεση φραγμάτων για την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω Αναδρομικών σχέσεων. Σύμφωνα με την εργασία τουCai με τίτλο (Ruin Probabilities with Dependent Rates of Interest) στην οποία έδωσε ολοκληρωτικές εξισώσεις για την πιθανότητα χρεοκοπίας θα κατασκευάσουμε φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας.Η ολοκληρωτική σχέση σύμφωνα με τον Cai για το μοντέλο που μελετάμε είναι η ακόλουθη.

$$\begin{aligned}\psi^*_{n+1}(u,i_0) = &\int_0^\infty \int_0^\infty \bar{F}(u(1+\alpha i_0+w)+x)dH(x)dG(w)\\ &+\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{u(1+\alpha i_0+w)+x} \psi^*_n(u(1+\alpha i_0+w)+x-y,\alpha i_0+w)dFydH(x)dG(w)\end{aligned} \tag{6.11}$$

Για να μπορέσουμε να βρούμε τέτοιου είδους φράγματα θα χρειαστεί να ορίσουμε κάποιες μεταβλητές. Έτσι, για μία κατανομή B_1 με $B_1(0)=0$ ορίζουμε,

$$(\beta_1)^{-1} = \inf_{t\geq 0} \frac{\int_1^\infty e^{R_1 y}dF(y)}{e^{R_1 t}F(t)} \tag{6.12}$$

Οπότε για κάθε $x \geq 0$ θα έχουμε,

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{\int_1^\infty e^{R_1 y}dF(y)}{e^{R_1 t}F(t)}\right)^{-1} e^{R_1 x}\int_x^\infty e^{R_1 y}dF(y) \tag{6.13}$$

και κάνοντας αντικατάσταση τη σχέση (6.12) η $\bar{F}(x)$ θα φράσεται από πάνω ως,

$$\bar{F}(x) \leq \beta_1 e^{R_1 x}\int_x^\infty e^{R_1 y}dF(y) \tag{6.14}$$

Η συνάρτηση η οποία ολοκληρώνεται είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση της Y_1 στο σημείο R_1. Άρα λοιπόν η (6.14) θα γίνει,

$$\bar{F}(x) \leq \beta_1 e^{R_1 x} E e^{R_1 Y_1} \tag{6.15}$$

□

Έχοντας ορίσει τις μεταβλητές στη συνέχεια θα προχωρήσουμε σε ένα θεώρημα μέσω του οποίου μπορούμε να βρίσκουμε φράγματα.

Θεώρημα 6.2. *Έστω ότι υπάρχει μία σταθερά $R_1 > 0$ και ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση.*

$$Ee^{-R_1(X_1(1+W_1)-Y_1)} = 1 \tag{6.16}$$

Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας φράσεται και το φάργμα δίνεται από τον τύπο.

$$\psi^*(u) \leq \beta_1 E e^{R_1 Y_1} E e^{-R_1(u+X_1)(1+\alpha i_0+W_1)}, u \geq 0 \tag{6.17}$$

Όπου, $(1+\alpha i_0 + W_1) = 1 + I_1$

Απόδειξη:
Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος και την εύρεση αναδρομικού τύπου για την πιθανότητα χρεοκοπίας θα χρισημοποιήσουμε τη μέθοδο της επαγωγής . Αυτό που θα κάνουμε, είναι να δεσμεύσουμε ως προς την ζημιά της πρώτης περιόδου, να δούμε τι επίπτωση θα έχει στο πλεόνασμα, και μετά εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας βρίσκουμε ανανεωτικούς τύπους για την εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας.

- Από τον ορισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας (σχέση (5.9)) για την πρώτη περίοδο έχουμε:

$$\psi_n^*(u) = Pr\left\{\bigcup_{k=1}^{n}(U_k < 0)\right\} = E\left\{I(T \leq n)\right\}$$

Για να επέλθει χρεοκοπία μετά την έλευση της πρώτης ζημίας (πρώτης περιόδου) θα πρέπει,

$$\psi_1^*(u) = Pr\left\{Y_1 > u(1+\alpha i_0 + W_1) + X_1\right\} = \int_1^\infty \int_0^\infty \bar{F}\left(u(1+\alpha i_0 + w) + x\right) dH(x)dG(w) \tag{6.18}$$

Το πλεόνασμα λίγο πριν την έλευση της πρώτης ζημιάς θα έχει γίνει $u(1+\alpha i_0 + W_1) + X_1$, και τότε απο τις σχέσεις (6.15) και (6.18) παίρνουμε,

$$\begin{aligned}\psi_1^*(u) &\leq \beta_1 E e^{R_1 Y_1} \int_1^\infty \int_0^\infty e^{R_1(u(1+\alpha i_0+w)+x)} dH(x)dG(w)\\ &= \beta_1 E e^{R_1 Y_1} E e^{R_1(u(1+\alpha i_0+W_1)+X_1)}\end{aligned}$$

Αν η ζημιά είναι μεγαλύτερη από το πλεόνασμα της πρώτης περιόδου έχουμε χρεοκοπία, διαφορετικά η διαδικασία ανανεώνεται αλλά πλέον με διαφορετικό επιτόκιο.

- Θεωρούμε οτι η παραπάνω ανισότητα ισχύει για την $n-$οστή περίοδο. Θα έχουμε λοιπόν για την $n-$οστή περίοδο.

$$\psi_n^*(u) \leq \beta_1 E e^{R_1 Y_1} E e^{R_1(u(1+\alpha i_0+W_1)+X_1)} \tag{6.19}$$

Για να μην χρεοκοπήσει την πρώτη περίοδο και να χρεοκοπήσει στις επόμενες θα πρέπει για το μέγεθος της πρώτης ζημιάς να ισχύει, $0 \leq y \leq u(1+\alpha i_0 + w) + x$. Η διαδικασία θα ανανεωθεί και το πλεόνασμα θα γίνει $u(1+\alpha i_0 + w) + x - y$. Οπότε, για $\alpha i_0 \geq 0$ και $W_1 \geq 0$ από την (6.19) $\forall u \geq 0$ παίρνουμε,

$$\begin{aligned}\psi_n^*(u(1+\alpha i_0+w)+x-y) &\leq \beta_1 E e^{R_1 Y_1} E e^{R_1(u(1+\alpha i_0+w)+x-y+X_1)(1+\alpha(\alpha i_0+w)+W_1)}\\ &\leq \beta_1 E e^{R_1 Y_1} E e^{R_1(u(1+\alpha i_0+w)+x-y+X_1)(1+W_1)}\\ &= \beta_1 E e^{R_1 Y_1} E e^{R_1(u(1+\alpha i_0+w)+x-y)(1+W_1)-R_1X_1(1+W_1)}\\ &\leq \beta_1 E e^{R_1 Y_1} E e^{R_1(u(1+\alpha i_0+w)+x-y)-R_1X_1(1+W_1)}\\ &= \beta_1 E e^{R_1 Y_1} E e^{-R_1X_1(1+W_1)} E e^{R_1(u(1+\alpha i_0+w)+x-y)}\\ &= \beta_1 E e^{R_1(u(1+\alpha i_0+w)+x-y)}\end{aligned} \tag{6.20}$$

- Στη συνέχεια χρισημοποιώντας την ολοκληρωτική σχέση για την πιθανότητα χρεοκοπίας (6.11) την ανισότητα για την $\psi_n^*(u)$ σχέση (6.19) και την (6.20) θα αποδείξουμε ότι η ανισότητα (6.19) ισχύει και την $\psi_{n+1}^*(u)$. Έχουμε λοιπόν,

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}^*(u,i_0) = &\int_0^\infty \int_0^\infty \bar{F}(u(1+\alpha i_0+w)+x)dH(x)dG(w)\\ &+\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{u(1+\alpha i_0+w)+x} \psi_n^*(u(1+\alpha i_0+w)+x-y,\alpha i_0+w)dFydH(x)dG(w)\end{aligned}$$

Κάνοντας αντικατάσταση της $\bar{F}(u(1+\alpha i_0+w)+x)$ σύμφωνα με την ανισότητα (6.14) και την $\psi_n^*(u(1+\alpha i_0+w)+x-y,\alpha i_0+w)$ αντίστοιχα με την (6.20) θα πάρουμε,

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}^*(u,i_0) \leq &\beta_1 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{u(1+\alpha i_0+w)+x}^\infty Ee^{R_1 y}e^{-R_1(u(1+\alpha i_0+w)+x)}dH(x)dG(w)\\ &+\beta_1 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{u(1+\alpha i_0+w)+x} e^{-R_1(u(1+\alpha i_0+w)+x-y)}dFydH(x)dG(w)\\ &=\beta_1 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{u(1+\alpha i_0+w)+x}^\infty Ee^{R_1 y}e^{-R_1(u(1+\alpha i_0+w)+x)}dH(x)dG(w)\\ &+\beta_1 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{u(1+\alpha i_0+w)+x} e^{R_1 y}e^{-R_1 u(1+\alpha i_0+w)+x}dFydH(x)dG(w)\\ &=\beta_1 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-R_1 u(1+\alpha i_0+w)+x}\\ &\times\left[\int_0^{u(1+\alpha i_0+w)+x} e^{R_1 y}dFy+\int_{u(1+\alpha i_0+w)+x}^\infty e^{R_1 y}dFy\right]dH(x)dG(w)\\ &=\beta_1 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-R_1 u(1+\alpha i_0+w)+x}\int_0^\infty e^{R_1 y}dFydH(x)dG(w)\\ &=\beta_1 e^{R_1 Y_1}e^{-R_1 u(1+\alpha i_0+W_1)+X_1}\end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση ισούται με τη σχέση (6.19)
και παίρνοντας το όριο $\lim_{n\to\infty}\psi_n^*(u)=\psi^*(u)$ ολοκληρώνεται η απόδειξη.

□

Ένα βελτιωμένο φράγμα του παραπάνω θεωρήματος μπορεί να εξαχθεί αν υποθέσουμε ότι η F ανήκει στην οικογένει κατανομών New Worse Than Used In Convex Ordering (NWUC) . Το φράγμα αυτό θα δίνεται σύμφωνα με το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 6.2. *Κάτω από τις υποθέσεις του θεωρήματος (6.2), αν η F είναι μία (NWUC) κατανομή, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας φράσεται και το φράγμα δίνεται από τη σχέση,*

$$\psi^*(u) \leq Ee^{-R_1 u(1+\alpha i_0+W_1)+X_1}, u \geq 0 \tag{6.21}$$

Απόδειξη:

Από τον ορισμό για την κλάση κατανομών (NWUC) γνωρίζουμε ότι $\beta_1 = (Ee^{R_1 Y_1})^{-1}$. Αντικαθιστώντας λοιπόν την τιμή αυτή στη σχέση 6.17 του θεωρήματος (6.2) θα πάρουμε.

$$\psi^*(u) \leq \beta_1 Ee^{R_1 Y_1} Ee^{-R_1 u(1+\alpha i_0+W_1)+X_1}, u \geq 0 \Rightarrow$$
$$\psi^*(u) \leq (Ee^{R_1 Y_1})^{-1} Ee^{R_1 Y_1} Ee^{-R_1 u(1+\alpha i_0+W_1)+X_1}, u \geq 0 \Rightarrow$$
$$\psi^*(u) \leq Ee^{-R_1 u(1+\alpha i_0+W_1)+X_1}, u \geq 0$$

Που οποκληρώνει την απόδειξη του πορίσματος.

□

Μπορούμε ακόμα να δείξουμε ότι τα φράγματα τα οποία μας δίνει το θεώρημα (6.2) είναι μικρότερα και άρα καλύτερα από το φράγμα του Lundberg.

6.4 Αριθμητικά παραδείγματα

Τέλος, στην ενότητα αυτή, όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια θα δώσουμε δύο αριθμητικά παραδείγματα για τις μεθόδους υπολογισμού των φραγμάτων που παρουσιάστικαν στις ενότητες 3 και 4 του κεφαλαίου αυτού. Θα θεωρήσουμε $X_1 = 1$ δηλαδή τα ασφάλιστρα της κάθε περιόδου θα ισούνται με μονάδα και στα δύο παραδείγματα. Στο πρώτο θα υποθέσουμε Γάμμα κατανομή για τις ζημιές ενώ στο δεύτερο θα υποθέσουμε μίξη Εκθετικων. Το επιτόκιο θα θεωρήσουμε ότι είναι σταθερό και ίσο με 0.05. Οι υπολογισμοί έχουν γίνει στο Mathematica και παρουσιάζονται αναλυτικά στο παράρτημα.

Παράδειγμα 6.1. *Υποθέτουμε ότι η κατανομή των Ζημιών Y_1 ακολουθεί μία Γάμμα κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:*

$$g(y) = \frac{\lambda^\alpha y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda y}, \quad y > 0 \tag{6.22}$$

όπου, $\alpha > 0$ και $\lambda > 0$
Θα ορίσουμε τις παραμέτρους ίδιες με του προηγούμενου κεφαλαίου για να μπορέσουμε να κάνουμε σύγκριση των δύο μοντέλων. Θα έχουμε λοιπόν, $\alpha = 0.6$ και $\lambda = 0.9$ και άρα, $EY_1 = \frac{\alpha}{\lambda} = 0.67$

και επειδή ορίσαμε $0 < \alpha < 1$ η Y_1 η Y_1 θα ανήκει στην οικογένεια κατανομών DFR.
Επίσης θεωρούμε R_0 το συντελεστή προσαρμογής από το κλασσικό μοντέλο, συντελεστής Lundberg ,R_1 το συντελεστή που προκύπτει από το πόρισμα 6.1 και R_2 το συντελεστή που προκύπτει από το πόρισμα 6.2. Μέσω του υπολογιστικού προγράμματος Mathematica βρίσκουμε τα R_0, R_1, R_2. Στη συνέχεια, για διάφορες τιμές του αρχικού κεφαλαίου μέσω και πάλι του Mathematica βρίσκουμε τα φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Τα αποτελέσματα αυτά δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 7
Άνω φράγματα στο παράδειγμα 6.1 για i=0.05

u	Martingale	Αναδρομικό	Lundberg
0.0	1.00000	0.43402	1.00000
0.5	0.64520	0.28003	0.65880
1.0	0.41628	0.18067	0.43402
1.5	0.26858	0.11657	0.28593
2.0	0.17329	0.07521	0.18837
2.5	0.11180	0.04853	0.12410
3.0	0.07214	0.03131	0.08176
3.5	0.04654	0.02020	0.05386
4.0	0.03003	0.01303	0.03548
4.5	0.01937	0.00841	0.02338
5.0	0.01250	0.00543	0.01540

Σχήμα 1.7: Φράγμα της πιθανότητας χρεοκοπίας όταν $Y_1 \approx G(0.6, 0.9)$.

Στον Πίνακα 7 παρατηρούμε ότι τα φράγματα που υπολογίστικαν με την αναδρομική σχέση συγκλίνουν πιο γρήγορα που σημαίνει ότι είναι καλύτερα απο τα φράγματα της μεθόδου Martingale. Συκρίνοντας τώρα τα αποτελέσματα του πίνακα 5 με τον πίνακα 7 παρατηρούμε ότι και πάλι στην προκαταβλητέα πληρωμή ασφαλίστρων έχουμε καλύτερα αποτελέσματα στα φράγματα και με τις δύο μεθόδους.
Στο επόμενο παράδειγμα θα κατασκευάσουμε φράγματα όταν η κατανομή ζημιών ακολουθεί μία μίξη εκθετικων κατανομών.

Παράδειγμα 6.2. *Έστω λοιπόν η Y_1 ακολουθεί μία μίξη από $Exp(\lambda)$. Η συνάρτηση πικνότητας πιθανότητας της Y_1 θα δίνεται από τον τύπο,*

$$g(y) = 1/2\lambda_1 e^{-\lambda_1 y} + 1/2\lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \tag{6.23}$$

Για να είναι συγκρίσιμες η προκαταβλιτέα και η λιξηπρόθεσμη μέθοδος θα θεωρήσουμε τις ίδιες τιμές για τις μεταβλητές λ_1 και λ_2. Από το Mathematica θα βρούμε και πάλι τα R_0, R_1, R_2 και στη συνέχεια θα βρούμε τα φράγματα για τα αντίστοιχα R. Τα απότελέσματα του Mathematica παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 8			
Άνω φράγματα στο παράδειγμα 6.2 για i=0.05			
u	Martingale	Αναδρομικό	Lundberg
0.0	1.00000	0.14428	1.00000
0.5	0.55952	0.05357	0.39009
1.0	0.31307	0.01989	0.15217
1.5	0.17517	0.00738	0.05936
2.0	0.09801	0.00274	0.02315
2.5	0.05484	0.00102	0.00903
3.0	0.03068	0.00038	0.00352
3.5	0.01717	0.00014	0.00137
4.0	0.00961	0.00005	0.00054
4.5	0.00537	0.00002	0.00021
5.0	0.00301	7.18148*10^-6	0.00008

Σχήμα 1.8: Φράγμα της πιθανότητας χρεοκοπίας όταν Y_1 ακολουθεί μίξη από$Exp(\lambda)$.

Και εδώ είναι εμφανής η διαφορά μεταξύ λιξηπρόθεσμης και προκαταβλητέας πληρωμής ασφαλίστρων. Τα αποτελέσματα του πέμπτου κεφαλαίου (Προκαταβλητέα πληρωμή) είναι καλύτερα.

Παράρτημα Α΄

Εντολές στο Mathematica

Παράδειγμα 3.1
Για την επίλυση αυτού του Παραδείγματος χρειαστίκαμε τους τύπους του Πορίσματος 3.1 της Παραγράφου 3.2. και του Πορίσματος 3.2 της Παραγράφου 3.3. Αρχικά ορίσαμε τη συνάρτηση πικνότητας πιθανότητας της κατανομής ζημιών Y_1 χρησιμοποιώντας τις παρακάτω εντολές

```
lambda:=1; alpha:=0.5; Z:=1.03;
f[y_]:=PDF[GammaDistribution[alpha,lamda],y]
```

Στη συνέχεια βρίκαμε τη Ροπογεννήτρια συνάρτηση της `f[y_]` μέσω των εντολών

```
M[t_]:=LaplaceTransform[f[y],y,-t]
```

Για την εύρεση των τιμών R_0, R_1, R_2 δεν είχαμε παρά να λύσουμε τη Ροπογεννήτρια ως προς,

- Για R_0, Lunberg

  `Solve[M[t]==Exp[t],t]`

- Για R_1, Martingale

  `Solve[M[t*Z^-1]==Exp[t],t]`

- Για R_2, Αναδρομικά

```
Solve[M[t]==Exp[t*Z],t]
```

Τέλος, έχοντας βρει τις διάφορες τιμές για το R από τις ανισότητες της πιθανότητας χρεοκοπίας που εχουμε βρεί στις αντίστοιχες παραγράφους βρίσουμε φράγματα για διάφορες τιμές του u, όπου και πάλι θα έχουμε.

- Για R_0, Lunberg

  ```
  Psi[u_]:=Exp[-R*u];
  ```

- Για R_1, Martingale

  ```
  Psi[u_]:=Exp[-R*u];
  ```

- Για R_2, Αναδρομικά

  ```
  Psi[u_]:=M[R]^-1Exp[-R*u*Z]
  ```

Έτσι λοιπόν βρίσκουμε τα αντίστοιχα φράγματα για τις παρακάτω τιμές.

```
psi[0]
psi[0.5]
psi[1]
psi[1.5]
psi[2]
psi[2.5]
psi[3]
psi[3.5]
psi[4]
psi[4.5]
psi[5]
```

Παράδειγμα 3.2

Για την επίλυση αυτού του Παραδείγματος χρειαστίκαμε τους τύπους του Πορίσματος 3.1 της Παραγράφου 3.2. και του Πορίσματος 3.2 της Παραγράφου 3.3. Αρχικά ορίσαμε τη συνάρτηση πικνότητας πιθανότητας της κατανομής ζημιών Y_1 χρησιμοποιώντας τις παρακάτω εντολές

```
lambda:=1; alpha:=1.8; Z:=1.03;
f[y_]:=PDF[ExponentialDistribution[alpha],y];
```

Στη συνέχεια βρίκαμε τη Ροπογεννήτρια συνάρτηση της `f[y_]` μέσω των εντολών

```
M[t_]:=LaplaceTransform[f[y],y,-t]
```

Για την εύρεση των τιμών R_0, R_1, R_2 δεν είχαμε παρά να λύσουμε τη Ροπογεννήτρια ως προς,

- Για R_0, Lunberg

  ```
  FindRoot[M[t]==Exp[t],t,5]
  ```

- Για R_1, Martingale

  `FindRoot[M[t*Z`$^{-1}$`]==Exp[t],t,5]`

- Για R_2, Αναδρομικά

  ```
  FindRoot[M[t]==Exp[t*Z],t,5]
  ```

Τέλος, έχοντας βρει τις διάφορες τιμές για το R από τις ανισότητες της πιθανότητας χρεοκοπίας που εχουμε βρεί στις αντίστοιχες παραγράφους βρίσουμε φράγματα για διάφορες τιμές του u, όπου και πάλι θα έχουμε.

- Για R_0, Lunberg

  ```
  Psi[u_]:=Exp[-R*u];
  ```

- Για R_1, Martingale

  ```
  Psi[u_]:=Exp[-R*u];
  ```

- Για R_2, Αναδρομικά

  Psi[u_]:=M[R]$^{-1}$Exp[-R*u*Z]

Έτσι λοιπόν βρίσκουμε τα αντίστοιχα φράγματα για τις παρακάτω τιμές.

```
psi[0]
psi[0.5]
psi[1]
psi[1.5]
psi[2]
psi[2.5]
psi[3]
psi[3.5]
psi[4]
psi[4.5]
psi[5]
```

Παράδειγμα 4.1

Για την επίλυση αυτού του Παραδείγματος χρειαστίκαμε τους τύπους του Πορίσματος 4.1 της Παραγράφου 4.2. και του Πορίσματος 4.2 της Παραγράφου 4.3. Αρχικά ορίσαμε τη συνάρτηση πικνότητας πιθανότητας της κατανομής ζημιών Y_1 χρησιμοποιώντας τις παρακάτω εντολές

```
lambda:=1; alpha:=0.5; Z:=1.03;
f[y_]:=PDF[GammaDistribution[alpha,lamda],y]
```

Στη συνέχεια βρίκαμε τη Ροπογεννήτρια συνάρτηση της f[y_] μέσω των εντολών

```
M[t_]:=LaplaceTransform[f[y],y,-t]
```

Για την εύρεση των τιμών R_0, R_1, R_2 δεν είχαμε παρά να λύσουμε τη Ροπογεννήτρια ως προς,

- Για R_0, Lunberg

  ```
  Solve[M[t]==Exp[t],t]
  ```

- Για R_1, Martingale

```
Solve[M[t*Z^-1]==Exp[t*Z^-1],t]
```

- Για R_2, Αναδρομικά

```
Solve[M[t]==Exp[t],t]
```

Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι το R_0 ισούται με το R_2.

Τέλος, έχοντας βρει τις διάφορες τιμές για το R από τις ανισότητες της πιθανότητας χρεοκοπίας που εχουμε βρεί στις αντίστοιχες παραγράφους βρίσουμε φράγματα για διάφορες τιμές του u, όπου και πάλι θα έχουμε.

- Για R_0, Lunberg

```
Psi[u_]:=Exp[-R*u];
```

- Για R_1, Martingale

```
Psi[u_]:=Exp[-R*u];
```

- Για R_2, Αναδρομικά

```
Psi[u_]:=M[R]^-1Exp[-R*u*Z]
```

Έτσι λοιπόν βρίσκουμε τα αντίστοιχα φράγματα για τις παρακάτω τιμές.

```
psi[0]
psi[0.5]
psi[1]
psi[1.5]
psi[2]
psi[2.5]
psi[3]
psi[3.5]
psi[4]
psi[4.5]
```

```
psi[5]
```

Παράδειγμα 4.2

Για την επίλυση αυτού του Παραδείγματος χρειαστίκαμε τους τύπους του Πορίσματος 4.1 της Παραγράφου 4.2. και του Πορίσματος 4.2 της Παραγράφου 4.3. Αρχικά ορίσαμε τη συνάρτηση πικνότητας πιθανότητας της κατανομής ζημιών Y_1 χρησιμοποιώντας τις παρακάτω εντολές

```
lambda:=1; alpha:=1.8; Z:=1.03;
f[y_]:=PDF[ExponentialDistribution[alpha],y];
```

Στη συνέχεια βρίκαμε τη Ροπογεννήτρια συνάρτηση της `f[y_]` μέσω των εντολών

```
M[t_]:=LaplaceTransform[f[y],y,-t]
```

Για την εύρεση των τιμών R_0, R_1, R_2 δεν είχαμε παρά να λύσουμε τη Ροπογεννήτρια ως προς,

- Για R_0, Lunberg

  ```
  FindRoot[M[t]==Exp[t],t,5]
  ```

- Για R_1, Martingale

  FindRoot[M[t*Z^{-1}]==Exp[t],t,5]

- Για R_2, Αναδρομικά

  ```
  FindRoot[M[t]==Exp[t*Z],t,5]
  ```

Τέλος, έχοντας βρει τις διάφορες τιμές για το R από τις ανισότητες της πιθανότητας χρεοκοπίας που εχουμε βρεί στις αντίστοιχες παραγράφους βρίσουμε φράγματα για διάφορες τιμές του u, όπου και πάλι θα έχουμε.

- Για R_0, Lunberg

  ```
  Psi[u_]:=Exp[-R*u];
  ```

- Για R_1, Martingale

```
Psi[u_]:=Exp[-R*u];
```

- Για R_2, Αναδρομικά

Psi[u_]:=M[R]$^{-1}$Exp[-R*u*Z]

Έτσι λοιπόν βρίσκουμε τα αντίστοιχα φράγματα για τις παρακάτω τιμές.

```
psi[0]
psi[0.5]
psi[1]
psi[1.5]
psi[2]
psi[2.5]
psi[3]
psi[3.5]
psi[4]
psi[4.5]
psi[5]
```

Παράδειγμα 5.1

Για την επίλυση αυτού του Παραδείγματος χρειαστίκαμε τους τύπους του Πορίσματος 5.1 της Παραγράφου 5.2. και του Πορίσματος 5.2 της Παραγράφου 5.3. Αρχικά ορίσαμε τη συνάρτηση πικνότητας πιθανότητας της κατανομής ζημιών Y_1 χρησιμοποιώντας τις παρακάτω εντολές

```
lambda:=0.9; alpha:=0.6; Z:=1.05;
f[y_]:=PDF[GammaDistribution[alpha,lamda],y]
```

Στη συνέχεια βρίκαμε τη Ροπογεννήτρια συνάρτηση της `f[y_]` μέσω των εντολών

```
M[t_]:=LaplaceTransform[f[y],y,-t]
```

Για την εύρεση των τιμών R_0, R_1, R_2 δεν είχαμε παρά να λύσουμε τη Ροπογεννήτρια ως προς,

- Για R_0, Lunberg

```
Solve[M[t]==Exp[t],t]
```

- Για R_1, Martingale

```
Solve[M[t*Z^-1]==Exp[t],t]
```

- Για R_2, Αναδρομικά

```
Solve[M[t]==Exp[t*Z],t]
```

Τέλος, έχοντας βρει τις διάφορες τιμές για το R από τις ανισότητες της πιθανότητας χρεοκοπίας που εχουμε βρεί στις αντίστοιχες παραγράφους βρίσουμε φράγματα για διάφορες τιμές του u, όπου και πάλι θα έχουμε.

- Για R_0, Lunberg

```
Psi[u_]:=Exp[-R*u];
```

- Για R_1, Martingale

```
Psi[u_]:=Exp[-R*u];
```

- Για R_2, Αναδρομικά

```
Psi[u_]:=M[R]^-1Exp[-R*u*Z]
```

Έτσι λοιπόν βρίσκουμε τα αντίστοιχα φράγματα για τις παρακάτω τιμές.

```
psi[0]
psi[0.5]
psi[1]
psi[1.5]
psi[2]
```

```
psi[2.5]
psi[3]
psi[3.5]
psi[4]
psi[4.5]
psi[5]
```

Παράδειγμα 5.2

Για την επίλυση αυτού του Παραδείγματος χρειαστίκαμε τους τύπους του Πορίσματος 5.1 της Παραγράφου 5.2. και του Πορίσματος 5.2 της Παραγράφου 5.3. Αρχικά ορίσαμε τη συνάρτηση πικνότητας πιθανότητας της κατανομής ζημιών Y_1 χρησιμοποιώντας τις παρακάτω εντολές

```
lambda:=1.5; alpha:=2; Z:=1.05;
f[y_]:=(1/2)*lamda*Exp[-lamda*y]+(1/2)*alpha*Exp[-alpha*y];
```

Στη συνέχεια βρίκαμε τη Ροπογεννήτρια συνάρτηση της `f[y_]` μέσω των εντολών

```
M[t_]:=LaplaceTransform[f[y],y,-t]
```

Για την εύρεση των τιμών R_0, R_1, R_2 δεν είχαμε παρά να λύσουμε τη Ροπογεννήτρια ως προς,

- Για R_0, Lunberg

  ```
  FindRoot[M[t]==Exp[t],t,5]
  ```

- Για R_1, Martingale

  `FindRoot[M[t*Z`$^{-1}$`]==Exp[t],t,5]`

- Για R_2, Αναδρομικά

  ```
  FindRoot[M[t]==Exp[t*Z],t,5]
  ```

Τέλος, έχοντας βρει τις διάφορες τιμές για το R από τις ανισότητες της πιθανότητας χρεοκοπίας που εχουμε βρεί στις αντίστοιχες παραγράφους βρίσουμε φράγματα για διάφορες τιμές του u, όπου

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

και πάλι θα έχουμε.

- Για R_0, Lunberg

  ```
  Psi[u_]:=Exp[-R*u];
  ```

- Για R_1, Martingale

  ```
  Psi[u_]:=Exp[-R*u];
  ```

- Για R_2, Αναδρομικά

  Psi[u_]:=M[R]$^{-1}$Exp[-R*u*Z]

Έτσι λοιπόν βρίσκουμε τα αντίστοιχα φράγματα για τις παρακάτω τιμές.

```
psi[0]
psi[0.5]
psi[1]
psi[1.5]
psi[2]
psi[2.5]
psi[3]
psi[3.5]
psi[4]
psi[4.5]
psi[5]
```

Παράδειγμα 6.1

Για την επίλυση αυτού του Παραδείγματος χρειαστίκαμε τους τύπους του Πορίσματος 6.1 της Παραγράφου 6.2. και του Πορίσματος 6.2 της Παραγράφου 6.3. Αρχικά ορίσαμε τη συνάρτηση πικνότητας πιθανότητας της κατανομής ζημιών Y_1 χρησιμοποιώντας τις παρακάτω εντολές

```
lambda:=0.9; alpha:=0.5; Z:=1.05;
f[y_]:=PDF[GammaDistribution[alpha,lamda],y]
```

Στη συνέχεια βρίκαμε τη Ροπογεννήτρια συνάρτηση της `f[y_]` μέσω των εντολών

```
M[t_]:=LaplaceTransform[f[y],y,-t]
```

Για την εύρεση των τιμών R_0, R_1, R_2 δεν είχαμε παρά να λύσουμε τη Ροπογεννήτρια ως προς,

- Για R_0, Lunberg

  ```
  Solve[M[t]==Exp[t],t]
  ```

- Για R_1, Martingale

  ```
  Solve[M[t*Z^-1]==Exp[t],t]
  ```

- Για R_2, Αναδρομικά

  ```
  Solve[M[t]==Exp[t*Z],t]
  ```

Τέλος, έχοντας βρει τις διάφορες τιμές για το R από τις ανισότητες της πιθανότητας χρεοκοπίας που εχουμε βρεί στις αντίστοιχες παραγράφους βρίσουμε φράγματα για διάφορες τιμές του u, όπου και πάλι θα έχουμε.

- Για R_0, Lunberg

  ```
  Psi[u_]:=Exp[-R*u];
  ```

- Για R_1, Martingale

  ```
  Psi[u_]:=Exp[-R*u];
  ```

- Για R_2, Αναδρομικά

  ```
  Psi[u_]:=M[R]^-1Exp[-R*u*Z]
  ```

Έτσι λοιπόν βρίσκουμε τα αντίστοιχα φράγματα για τις παρακάτω τιμές.

```
psi[0]
psi[0.5]
psi[1]
psi[1.5]
psi[2]
psi[2.5]
psi[3]
psi[3.5]
psi[4]
psi[4.5]
psi[5]
```

Παράδειγμα 6.2

Για την επίλυση αυτού του Παραδείγματος χρειαστίκαμε τους τύπους του Πορίσματος 6.1 της Παραγράφου 6.2. και του Πορίσματος 6.2 της Παραγράφου 6.3. Αρχικά ορίσαμε τη συνάρτηση πικνότητας πιθανότητας της κατανομής ζημιών Y_1 χρησιμοποιώντας τις παρακάτω εντολές

```
lambda:=1.5; alpha:=2; Z:=1.05;
f[y_]:=(1/2)*lamda*Exp[-lamda*y]+(1/2)*alpha*Exp[-alpha*y];
```

Στη συνέχεια βρίκαμε τη Ροπογεννήτρια συνάρτηση της `f[y_]` μέσω των εντολών

```
M[t_]:=LaplaceTransform[f[y],y,-t]
```

Για την εύρεση των τιμών R_0, R_1, R_2 λύσαμε την εξίσωση της Ροπογεννήτριας ως προς,

- Για R_0, Lunberg

  ```
  FindRoot[M[t]==Exp[t],t,5]
  ```

- Για R_1, Martingale

  ```
  FindRoot[M[t*Z^-1]==Exp[t],t,5]
  ```

- Για R_2, Αναδρομικά

```
FindRoot[M[t]==Exp[t*Z],t,5]
```

Τέλος, έχοντας βρει τις διάφορες τιμές για το R από τις ανισότητες της πιθανότητας χρεοκοπίας που εχουμε βρεί στις αντίστοιχες παραγράφους βρίσουμε φράγματα για διάφορες τιμές του u, όπου και πάλι θα έχουμε.

- Για R_0, Lunberg

  ```
  Psi[u_]:=Exp[-R*u];
  ```

- Για R_1, Martingale

  ```
  Psi[u_]:=Exp[-R*u];
  ```

- Για R_2, Αναδρομικά

  Psi[u_]:=M[R]$^{-1}$Exp[-R*u*Z]

Έτσι λοιπόν βρίσκουμε τα αντίστοιχα φράγματα για τις παρακάτω τιμές.

```
psi[0]
psi[0.5]
psi[1]
psi[1.5]
psi[2]
psi[2.5]
psi[3]
psi[3.5]
psi[4]
psi[4.5]
psi[5]
```

Βιβλιογραφία

[1] Γιαννακόπουλος Α Ν (2003). *Στοχαστική ανάλυση και εφαρμογές στην χρηματοοικονομική.* Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

[2] Νίκας Πασχάλης 2009 . *Αξία της Χρεοκοπίας με Σταθερό Επιτόκιο.* Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[3] Jun Cai (2002). *Discrete time risk models under rates of interest* Insurance: Probability in the Engineering and Informational Sciences, 16: 309-324

[4] Cai, J. and Wu, Y. (1997). *Some improvements on the Lunberg bound for the ruin probability* Statistics and Probability Letters 33: 395-403

[5] Cai J, Dickson D (2003). *Upper bounds for ultimate ruin probabilities in the Sparre Andersen model with interest.* Insurance: Mathematics and Economics, 32: 61-71.

[6] Cao J, Wang Y (1991). *The NBUC and NWUC classes of life distributions.* Journal of Applied Probability, 28: 473-479

[7] Kellison, S. (1991). *The theory of interest, 2nd edition* Boston:Irwin

[8] Sundt B, Teugels J (1995). *Ruin estimates under interest force.* Insurance: Mathematics and Economics, 16: 7-22.

[9] Sundt B, Teugels J (1997). *The adjustment function in ruin estimates under interest force.* Insurance: Mathematics and Economics, 19: 85-94.

[10] Willmot, G. E and Lin,X.S (2001). *Lundberg approximations for compound distributions with insurance applications.* New York: Springer-Verlag

[11] Bowers, N., Gerber, H., Hickman, J.,Jones, D., and Nesbit, C.(1997) *Actuarial Mathematics*, 2nd ed. Schaumburg, IL: The Society of Actuaries.

[12] Yang, H.(1999) *Non-exponential bounds for ruin probability with interest effect included*, Scandinavian Actuarial Journal 1:66-79.