Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα στην Αναλογιστική
Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Εξέλιξη - Πρόβλεψη του Συνταξιοδοτικού Συστήματος στην Ελλάδα

Ηλίας Π. Ηλιόπουλος

Διπλωματική Εργασία

Πειραιάς
Σεπτέμβριος 2009

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα στην Αναλογιστική
Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Εξέλιξη - Πρόβλεψη του Συνταξιοδοτικού Συστήματος στην Ελλάδα

Ηλίας Π. Ηλιόπουλος

Διπλωματική Εργασία

Πειραιάς
Σεπτέμβριος 2009

University of Piraeus

Department of Statistics and Insurance Science
MSc Program in Actuarial Science
and Risk Management

Evolution and Prediction of the Pension System in Greece

By

Ilias P. Iliopoulos

MSc Dissertation

Piraeus, Greece

September 2009

Αφιερώνεται στη μνήμη
της νονάς μου, Ευτυχίας.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στα μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής του Πανεπιστημίου Πειραιώς, τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Γιώργο Πιτσέλη για την άριστη συνεργασία και πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε, τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Κωνσταντίνο Πολίτη και τον Λέκτορα κ. Σπυρίδωνα Βρόντο. Θα ήταν παράλειψη να μην αναφέρω τις ευχαριστίες μου προς τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων κ. Δημήτριο Χατζηνικολάου για την άμεση και πρόθυμη συνεισφορά του σε ειδικά θέματα Οικονομετρίας, καθώς και την πληροφορικό BCh, MSc Γεωργία Ηλιοπούλου για την αποτελεσματική υποστήριξη σε τεχνικά θέματα κατά τη συγγραφή της εργασίας αυτής.

Πειραιάς, Σεπτέμβριος 2009

Περίληψη

Στην εργασία αυτή, γίνεται επιλογή και εκτίμηση κατάλληλου μοντέλου στοχαστικού συστήματος ταυτόχρονων εξισώσεων που αφορά αναλογιστικά μεγέθη συνταξιοδότησης. Για το σκοπό αυτό, γίνεται ανασκόπηση σχετικών άρθρων και μελετών, αναλύεται το θεωρητικό υπόβαθρο των οικονομετρικών μεθοδολογιών που σχετίζεται με συστήματα ταυτόχρονων εξισώσεων (simultaneous equation systems), καθώς και το πλαίσιο επικουρικών συντάξεων με βάση το οποίο ορίζονται και οι μεταβλητές του μοντέλου. Γίνεται χρήση πραγματικών δεδομένων με βάση τα οποία εκτιμώνται οι εξισώσεις του συστήματος με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων σε δύο στάδια (two stage least square method) και πραγματοποιείται πλήρης στατιστική ανάλυση των ευρημάτων (ερμηνεία συντελεστών, διαστήματα εμπιστοσύνης, έλεγχοι υποθέσεων). Ακόμα, γίνεται έλεγχος ισχύος των βασικών υποθέσεων των διαταρακτικών όρων των επιμέρους εξισώσεων. Με βάση τις υποθέσεις αυτές επιτυγχάνουμε επιθυμητές ιδιότητες εκτιμητών. Επιπλέον, γίνεται έλεγχος προβλεπτικής ικανότητας του μοντέλου και παρουσιάζεται η περίπτωση των ex post και ex ante προβλέψεων. Τέλος, παρουσιάζονται επεκτάσεις σχετικά με τη μεθοδολογία εύρεσης του κατάλληλου μοντέλου και δίνονται παρατηρήσεις που ερμηνεύουν και αναλύουν τα συμπεράσματα της έρευνας.

Abstract

This project aims to find and estimate an appropriate Simultaneous Stochastic Equation Model that refers to actuarial pension variables. For this purpose, a review of relative articles and studies is conducted, the theoretical background of the econometric methodologies is analyzed and related to the simultaneous equation system, as well as the second pillar of pension system frame, which is used in order to define the variables of the model. The equations of the system are estimated based on real data, using the two stage least square method and a full statistical analysis of the findings is conducted such as the coefficients' explanation, the confidence intervals and the hypothesis tests. Also, the basic assumptions of the disturbance variables are examined. Based on these assumptions the desired attributes of the estimators can be achieved. Moreover, the predictive ability of the model is examined and the ex post and ex ante prediction cases are presented. Finally, some suggestions related to the methodology of the determination of the appropriate model are presented, which can be used for the expansion of this research as well as some thoughts that explain and analyze the conclusions of the research are given.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εισαγωγή

1.1 Γενικό πλαίσιο

Η επιστήμη της οικονομετρίας είναι ουσιαστικά η μαθηματική έκφραση της οικονομίας. Είναι μια επιστήμη που συνδυάζει την οικονομική θεωρία, τα μαθηματικά και την στατιστική. Η τελευταία χρειάζεται μιας και τα περισσότερα οικονομικά φαινόμενα χαρακτηρίζονται από την τυχαιότητα των παραμέτρων τους. Η οικονομετρία έχει ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών κυρίως στον οικονομικοκοινωνικό τομέα. Τα υποδείγματα ταυτόχρονων εξισώσεων αποτελούν σημαντικό μέρος της σύγχρονης οικονομετρικής θεωρίας και εφαρμόζονται όταν παρουσιάζονται αλληλεξαρτήσεις μεταξύ μεταβλητών που επιθυμούμε να εκτιμήσουμε. Τα τελευταία χρόνια, έχουν γίνει προσπάθειες να αξιοποιηθεί η σύγχρονη οικονομετρία στο χώρο των ασφαλειών και των συντάξεων, μιας και ο χώρος αυτός, αφενός ενέχει μεταβλητές που η φύση τους είναι τυχαία και αφετέρου συγκεντρώνει ιδιαίτερο οικονομικό και πολιτικό ενδιαφέρον. Αφορμή για την συγγραφή της εργασίας αυτής, αποτέλεσε ο προβληματισμός για αξιοποίηση της οικονομετρικής θεωρίας που αφορά σε υποδείγματα ταυτόχρονων εξισώσεων, με σκοπό την εκτίμηση, πρόβλεψη και κατ’ επέκταση αξιολόγηση σημαντικών αλληλεξαρτημένων ασφαλιστικών μεγεθών καθορισμένου συστήματος επικουρικών συντάξεων στην Ελλάδα, εγχείρημα που υλοποιείται για πρώτη φορά.

1.2 Αντικείμενο

Αντικείμενο της εργασίας αυτής αποτελεί η έρευνα, επιλογή, εκτίμηση και αξιολόγηση ενός στοχαστικού υποδείγματος ταυτόχρονων εξισώσεων, που αφορά σε συγκεκριμένο πλαίσιο επικουρικών συντάξεων, με βάση το οποίο ορίζονται και οι μεταβλητές του μοντέλου (το πλαίσιο επικουρικών συντάξεων καθορίζεται με πρότυπο το σουηδικό μοντέλο συντάξεων - βλέπε Palmer, 2000 και Selen & Stahlberg, 2006). Δίνεται έμφαση κυρίως στην ανάλυση των μεταβλητών που εμπλέκονται στις επικουρικές συντάξεις, αλλά και στη διαδικασία επιλογής και ελέγχου του κατάλληλου μοντέλου. Ουσιαστικά, η εργασία αυτή, μέσω της μεθοδολογίας που ακολουθείται, οδηγεί στην εύρεση του κατάλληλου μοντέλου με βάση τις υφιστάμενες συνθήκες. Ωστόσο, όταν δίνονται συγκεκριμένες πληροφορίες για διαφορετικές μελλοντικές οικονομικές συνθήκες, είναι δυνατή η προσαρμογή του με κατάλληλες τροποποιήσεις, προκειμένου αυτό να δίνει ικανοποιητικές προβλέψεις.

1.3 Οργάνωση

Στο Κεφάλαιο 1, που αποτελεί την εισαγωγή της εργασίας, παραθέτουμε το γενικό πλαίσιο μέσα στο οποίο αναπτύσσεται η εργασία, το αντικείμενο και το βασικό σκοπό αυτής, καθώς επίσης την οργάνωση κατά κεφάλαια όλης της εργασίας και επισκόπιση σχετικών άρθρων.

Στο Κεφάλαιο 2, παρουσιάζεται αναλυτικά το θεωρητικό υπόβαθρο της εργασίας, δηλαδή τα στοχαστικά υποδείγματα ταυτόχρονων εξισώσεων, η δομική και ανηγμένη τους μορφή, οι βασικές υποθέσεις που υιοθετούνται, η διαδικασία της ταυτοποίησης και τέλος οι μέθοδοι εκτίμησης συστημάτων ταυτόχρονων εξισώσεων και ιδιαίτερα η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων σε δύο στάδια (two-stage least squares ή 2SLS), η οποία υιοθετείται για την επίλυση του συστήματος της παρούσας εργασίας.

Στο Κεφάλαιο 3, γίνεται πλήρης ανάλυση του αντικειμένου της εργασίας. Αρχικά, γίνεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή περί συντάξεων και ταμείων στη χώρα μας, ανάλυση των δεδομένων στα οποία στηριζόμαστε για την εκτίμηση του μοντέλου και ορισμός των μεταβλητών που χρησιμοποιούνται σε αυτό το μοντέλο. Έπειτα, παρουσιάζουμε το μοντέλο ταυτόχρονων εξισώσεων που επιλέχθηκε για την εργασία αυτή, τη δομική αλλά και την πολύ σημαντική για τις εκτιμήσεις μας ανηγμένη μορφή του συστήματος, σύμφωνα πάντα με τη θεωρητική παρουσίαση του κεφαλαίου 2.

Στο Κεφάλαιο 4, υλοποιούμε την επίλυση του προβλήματος, δηλαδή την εκτίμηση του μοντέλου ταυτόχρονων εξισώσεων. Στην αρχή και πριν από οποιαδήποτε προσπάθεια εκτίμησης, ασχολούμαστε με τη διαδικασία της ταυτοποίησης. Το επόμενο στάδιο είναι η εκτίμηση κάθε μιας από τις εξισώσεις συμπεριφοράς ξεχωριστά (στο μοντέλο της εργασίας αυτής δεν υπάρχουν εξισώσεις ορισμού - βλέπε παράγραφο 2.1). Εδώ, περιλαμβάνεται η διαδικασία εκτίμησης με τη μέθοδο 2SLS, πλήρης στατιστική ανάλυση και έλεγχος ισχύος των βασικών υποθέσεων πάνω στις οποίες στηρίζονται οι εκτιμήσεις.

Στο Κεφάλαιο 5, γίνεται γενική αξιολόγηση του μοντέλου που εκτιμήθηκε στο κεφάλαιο 4. Έχοντας εξαιρέσει από τα αρχικά δεδομένα μας δύο παρατηρήσεις, ελέγχουμε την προβλεπτική ικανότητα του μοντέλου μας εντός εύρους δείγματος και λαμβάνουμε τις λεγόμενες ex post προβλέψεις. Ακόμα, γίνεται έρευνα για την καταλληλότητα του μοντέλου για την πραγματοποίηση ex ante προβλέψεων και στο πλαίσιο αυτό, δίνονται οι παράγοντες που τροποποιούνται έτσι ώστε να λάβουμε ικανοποιητικές εκτιμήσεις.

Στο Κεφάλαιο 6, παρατίθενται γενικές παρατηρήσεις που αφορούν στην ακολουθία των βημάτων που ακολουθήσαμε για την έυρεση του μοντέλου της εργασίας αυτής, αναφορά κάποιων μοντέλων που ερευνήθηκαν στα πλαίσια της εργασίας αλλά τελικά δεν υιοθετήθηκαν εξαιτίας συγκεκριμένης αδυναμίας που έχουν, γενικά σχόλια αλλά και επεκτάσεις για το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε μαζί με τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά του. Τέλος, παραθέτουμε τον πίνακα με τα πρωτογενή δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν και αξιοποιήθηκαν για την παρούσα εργασία.

1.4 Ανασκόπηση Άρθρων

Για την παρούσα εργασία μελετήθηκαν άρθρα σχετικά με συστήματα ταυτόχρονων εξισώσεων και με στατιστικές αναλύσεις ως προς τη σημαντικότητα παραγόντων, που αφορούν σε συνταξιοδοτικά και οικονομικά δεδομένα, αλλά και άρθρα που αφορούν γενικότερα σε ειδικά συστήματα συνταξιοδότησης.

Στο άρθρο των Kim et al. (2005), εκτιμώνται ταυτόχρονα οι εξαρτημένες μεταβλητές μόχλευση κεφαλαίων, μερισματική πολιτική, ιδιοκτησιακό καθεστώς και συνταξιοδότηση με τις ανεξάρτητες μεταβλητές αγοραία αξία, τυπική απόκλιση απόδοσης, φορολογικό καθεστώς, κερδοφορία, πάγιες επενδύσεις, μέγεθος πωλήσεων και περιουσιακά στοιχεία. Για την αποτίμηση του συστήματος προτιμάται η μέθοδος 3SLS. Η επιλογή των μεταβλητών βασίζεται σε προηγούμενες μελέτες ενώ από τη μελέτη αυτή φαίνεται ποιοι παράγοντες είναι σημαντικοί για κάθε μια από τις εξαρτημένες μεταβλητές. Το σημαντικό είναι ότι οι παραπάνω εξαρτημένες μεταβλητές εξετάζονται για πρώτη φορά μαζί σε σύστημα ταυτόχρονων εξισώσεων και έτσι κομίζουμε εμπειρία από τον τρόπο ανάλυσης και εκτίμησης του συγκεκριμένου συστήματος.

Στη μελέτη του Frees (2003), γίνεται συλλογή δεδομένων που αφορούν σε συντάξεις στο διάστημα 1994-2000. Γίνεται στατιστική ανάλυση και παρατηρείται ότι οι πιο σημαντικοί παράγοντες συνταξιοδότησης αλλά και γενικότερα αποχώρησης από το σύστημα είναι η ηλικία και τα έτη υπηρεσίας. Παράλληλα, εξετάζεται η επίδραση παραγόντων του συνταξιοδοτικού πλάνου όπως παροχές υγείας, μισθός, μέγεθος πλάνου, με χρήση παλινδρόμησης για κατηγορικές μεταβλητές (multinomial logit analysis) και αναλύονται τα συμπεράσματα.

Στο άρθρο των Haberman και Sung (1994), παρουσιάζεται ένα δυναμικό μοντέλο συντάξεων που αφορά σχήμα (ταμείο) επαγγελματικής συνταξιοδότησης καθορισμένων παροχών. Επιχειρείται η ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση του κινδύνου παρούσας αξίας εισφορών (διακύμανση της παρούσας αξίας των μελλοντικών εισφορών) και του κινδύνου φερεγγυότητας (αθέτηση αναλογιστικής υποχρέωσης).

Οι Selen και Stahlberg (2006), αναλύουν την επιτυχή ασφαλιστική μεταρρύθμιση στη Σουηδία. Το σουηδικό μοντέλο βασίζεται σε σύστημα καθορισμένων εισφορών σε αντίθεση με αυτό των καθορισμένων παροχών που προϋπήρχε. Εκ του αποτελέσματος, κάνοντας σύγκριση συγκεκριμένων μεγεθών πριν και μετά τη μεταρρύθμιση, διαφαίνεται υπεροχή του νέου συστήματος. Το ίδιο θέμα αναλύει από την δική του οπτική και ο Palmer (2000). Επίσης, η Sunden (2000) παρουσιάζει συνοπτικά και διαγραμματικά την μεταρρύθμιση του σουηδικού συστήματος συντάξεων.

Υπάρχουν πολλά άρθρα που αναφέρονται σε διάφορες θεματικές ενότητες, γενικές και ειδικές που σχετίζονται με την εργασία αυτή και συμβάλλουν στην καλύτερη κατανόηση αλλά και σφαιρική προσέγγιση σε θέματα συντάξεων αλλά και σε συστήματα ταυτόχρονων εξισώσεων.

Ο Brunner (2002), αναλύει τα πλεονεκτήματα της μεταρρύθμισης αναδιανεμητικών συνταξιοδοτικών συστημάτων Pay - As - You - Go.

Το άρθρο των Eklof και Hallberg (2006), σχετίζεται με μοντελοποίηση επιλογών συνταξιοδότησης στη Σουηδία τη δεκαετία του 90' και επικεντρώνεται στην περίπτωση της εθελουσίας εξόδου και πρόωρης συνταξιοδότησης.

Οι Palmer και Fox (2000), αναλύουν τη μεταρρύθμιση των αναδιανεμητικών συστημάτων με δημογραφικά προβλήματα, σε συστήματα πολλών πυλώνων που περιέχουν εφαρμογή συστήματος καθορισμένων εισφορών.

Ο Andrietti (2000), εμβαθύνει με εμπειρική ανάλυση σε θέματα επαγγελματικής ασφάλισης στην Ευρωπαϊκή Ένωση.

Οι Haberman et al. (2005), αναπτύσσουν το θεωρητικό πλαίσιο κατασκευής ενός ευέλικτου σχήματος που μπορεί να υιοθετηθεί από τους συνταξιούχους, έτσι ώστε να πετύχουν βέλτιστο συνδυασμό απόδοσης – κατανάλωσης, στα πλαίσια ενός συστήματος καθορισμένων εισφορών.

Στο άρθρο του Haberman (1991), χρησιμοποιείται ένα μαθηματικό μοντέλο για τη σύγκριση διαφορετικών μεθόδων χρηματοδότησης συντάξεων της οποίας η απόδοση, εκφράζεται μέσα από ένα πρώτης τάξης αυτοπαλίνδρομο μοντέλο.

2. Θεωρία Συστημάτων Ταυτόχρονων Εξισώσεων

2.1 Στοχαστικά υποδείγματα ταυτόχρονων εξισώσεων

Γενικά ο όρος «στοχαστικό» αναφέρεται σε κάτι το τυχαίο. Η υιοθέτηση στοχαστικών συστημάτων υπαγορεύεται από την τυχαία φύση των οικονομικών φαινομένων και μεταβλητών που λαμβάνουν χώρα στην παρούσα εργασία. Σε ένα τέτοιο σύστημα, έχουμε μεταβλητές οι τιμές των οποίων καθορίζονται μέσα στο σύστημα, οι οποίες ονομάζονται ενδογενείς. Οι μεταβλητές αυτές καθορίζονται από άλλες αλλά και καθορίζουν άλλες μεταβλητές του συστήματος. Ακόμα, υπάρχουν μεταβλητές οι τιμές των οποίων καθορίζονται έξω από το σύστημα και οι οποίες ονομάζονται εξωγενείς. Αυτές καθορίζουν κάποιες μεταβλητές του συστήματος χωρίς να καθορίζονται από άλλες. Οι εξωγενείς μαζί με τις ενδογενείς μεταβλητές που αναφέρονται σε προηγούμενες χρονικές περιόδους (αν έχουμε χρονολογικές σειρές) ή προηγούμενες μονάδες γενικά (αν έχουμε διαστρωματικά στοιχεία) χαρακτηρίζονται ως προκαθορισμένες. Ένα σύστημα είναι δυνατό να έχει εξισώσεις συμπεριφοράς που αναλύουν τη συμπεριφορά μονάδων της οικονομίας και εξισώσεις ορισμού ή ταυτότητες. Τέλος στις εξισώσεις συμπεριφοράς, επειδή πρόκειται για στοχαστικό σύστημα, συναντούμε τους διαταρακτικούς όρους ή θορύβους ή σφάλματα που είναι τυχαίες μη παρατηρήσιμες μεταβλητές και οι οποίες αντανακλούν ουσιαστικά την επίδραση διαφόρων τυχαίων επιπρόσθετων παραγόντων στις τιμές των ενδογενών μεταβλητών.

2.1.1 Δομική (διαρθρωτική) μορφή συστήματος

Ένα σύστημα του οποίου το πλήθος των ενδογενών μεταβλητών είναι ίσο με το πλήθος των εξισώσεων ονομάζεται πλήρες. Η διαρθρωτική μορφή ενός πλήρους συστήματος γραμμικών ως προς τις παραμέτρους εξισώσεων με J ενδογενείς μεταβλητές και K προκαθορισμένες γράφεται ως εξής:

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{11}Y_{1t}+\gamma_{21}Y_{2t}+\ldots+\gamma_{J1}Y_{Jt}+\beta_{11}X_{1t}+\beta_{21}X_{2t}+\ldots+\beta_{K1}X_{Kt}+u_{1t}=0\\
&\gamma_{12}Y_{1t}+\gamma_{22}Y_{2t}+\ldots+\gamma_{J2}Y_{Jt}+\beta_{12}X_{1t}+\beta_{22}X_{2t}+\ldots+\beta_{K2}X_{Kt}+u_{2t}=0\\
&.\\
&.\\
&.\\
&\gamma_{1J}Y_{1t}+\gamma_{2J}Y_{2t}+\ldots+\gamma_{JJ}Y_{Jt}+\beta_{1J}X_{1t}+\beta_{2J}X_{2t}+\ldots+\beta_{KJ}X_{Kt}+u_{Jt}=0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

όπου Y_{jt} είναι η παρατήρηση της j ενδογενούς μεταβλητής για j=1,2,…,J στην περίοδο (ή άτομο) t για t= 1,2,…,T, $X_{\kappa t}$ είναι η παρατήρηση της κ προκαθορισμένης μεταβλητής για κ=1,2,...,K στην περίοδο (ή άτομο) t και u_{Jt} είναι ο διαταρακτικός όρος της j ενδογενούς μεταβλητής στην περίοδο (ή άτομο t). Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η παρατήρηση της j ενδογενούς μεταβλητής είναι ένα διάνυσμα από Τ περιόδους ή άτομα, οπότε το σύστημα μπορεί να γραφεί γενικά με τη μορφή μητρών ως εξής:

$$
\underset{(JXJ)}{\Gamma}\ \underset{(JXT)}{Y} + \underset{(JXK)}{B}\ \underset{(KXT)}{X} = \underset{(JXT)}{U} \tag{1.2}
$$

όπου

$$
Y=\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \ldots & Y_{1T}\\ Y_{21} & Y_{22} & \ldots & Y_{2T}\\ . & . & . & .\\ Y_{J1} & Y_{J2} & \ldots & Y_{JT}\end{bmatrix}
\quad
X=\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \ldots & X_{1T}\\ X_{21} & X_{22} & \ldots & X_{2T}\\ . & . & . & .\\ X_{K1} & X_{K2} & \ldots & X_{KT}\end{bmatrix}
$$

$$
U=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1T}\\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2T}\\ . & . & . & .\\ u_{J1} & u_{J2} & \ldots & u_{JT}\end{bmatrix}
\quad
\Gamma=\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \cdots & \gamma_{J1}\\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{J2}\\ . & . & . & .\\ \gamma_{1J} & \gamma_{2J} & \cdots & \gamma_{JJ}\end{bmatrix}
$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \dots & \beta_{K1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \dots & \beta_{K2} \\ . & . & . & . \\ \beta_{1J} & \beta_{2J} & \dots & \beta_{KJ} \end{bmatrix}$$

2.1.2 Ανηγμένη μορφή συστήματος

Υποθέτουμε ότι η Γ είναι μη ιδιάζουσα, δηλαδή αντιστρέψιμη (είναι σίγουρα τετραγωνική διότι το σύστημα είναι πλήρες). Τότε από (1.2) έχουμε:

$$\Gamma^{-1}\Gamma Y + \Gamma^{-1}B X = \Gamma^{-1}U$$

$$\Rightarrow \; Y + \Gamma^{-1}B X = \Gamma^{-1}U$$

$$\Rightarrow \; Y = -\Gamma^{-1}B X + \Gamma^{-1}U$$

$$\Rightarrow \; Y = \Pi X + V \qquad (1.3)$$

όπου

$$\underset{(JXK)}{\Pi} = -\Gamma^{-1}B = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \dots & \pi_{1K} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \dots & \pi_{2K} \\ . & . & . & . \\ \pi_{J1} & \pi_{J2} & \dots & \pi_{JK} \end{bmatrix}$$

$$\underset{(JXT)}{V} = -\Gamma^{-1}U = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1T} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2T} \\ . & . & . & . \\ v_{J1} & v_{J2} & \dots & v_{JT} \end{bmatrix}$$

Αναλυτικά, η ανηγμένη μορφή γράφεται ως εξής:

$$
\begin{aligned}
Y_{1t} &= \pi_{11}X_{1t} + \pi_{12}X_{2t} + \ldots + \pi_{1K}X_{Kt} + V_{1t} \\
Y_{2t} &= \pi_{21}X_{1t} + \pi_{22}X_{2t} + \ldots + \pi_{2K}X_{Kt} + V_{2t} \\
&. \\
&. \\
&. \\
Y_{jt} &= \pi_{j1}X_{1t} + \pi_{j2}X_{2t} + \ldots + \pi_{jK}X_{Kt} + V_{jt}
\end{aligned} \qquad (1.4)
$$

όπου Y_{jt} είναι διάνυσμα (TX1) παρατηρήσεων της j ενδογενούς μεταβλητής για j=1,2,…,J, $X_{\kappa t}$ είναι διάνυσμα (TX1) παρατηρήσεων της κ προκαθορισμένης μεταβλητής για κ=1,2,...,K και V_{jt} είναι διάνυσμα (TX1) του j διαταρακτικού όρου ανηγμένης μορφής για j=1,2,…,J. Προφανώς, η ανηγμένη μορφή του συστήματος (1.4) ισχύει και διανύσματα - στοιχεία για μεμονωμένες περιόδους ή άτομα για t= 1,2,…,T.

2.1.3 Οι βασικές υποθέσεις

<u>**Υπόδειγμα μιας εξίσωσης**</u>

Στο γραμμικό υπόδειγμα μιας μόνο εξίσωσης, συνήθως υποθέτουμε ότι ισχύουν οι βασικές υποθέσεις του (κανονικού) κλασσικού γραμμικού υποδείγματος.
Αυτές οι υποθέσεις που αφορούν μια εξίσωση γραμμικής παλινδρόμησης, μπορούν να γραφούν συνοπτικά ως εξής (βλέπε Κιντή, 1982, σελ. 69):

(α) Γραμμικό ως προς τις παραμέτρους υπόδειγμα

(β) $E(u_i) = 0\ \forall i$, δηλαδή ο μέσος των u_i είναι μηδέν

(γ) $Var(u_i) = \sigma^2 < \infty\ \ \forall i$, δηλαδή τα u_i έχουν σταθερή διακύμανση

(δ) $Cov(u_i, u_j) = 0\ \ \forall\, i \neq j$, δηλαδή τα u_i και u_j, $i \neq j$, είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστα

(ε) X_i : μη στοχαστική μεταβλητή $\forall i$, δηλαδή η X_i είναι σταθερή σε επαναλήψεις του πειράματος και ανεξάρτητη από την u $\forall i$

(στ) X_i : γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους, δηλαδή δεν υπάρχει το πρόβλημα της πολυσυγγραμμικότητας,

όπου u_i είναι ο i-διαταρακτικός όρος $\forall i$ και X_i είναι η i ανεξάρτητη μεταβλητή $\forall i$.

Η υιοθέτηση των υποθέσεων που αφορούν τους διαταρακτικούς όρους, γίνεται επειδή οι τιμές τους είναι άγνωστες. Έτσι, οι προβλέψεις του υποδείγματος, ο στατιστικός έλεγχος και η σημαντικότητα των μεταβλητών, θα είναι άμεσα συνδεδεμένες με την ισχύ ή μη των υποθέσεων αυτών. Όταν πληρούνται οι υποθέσεις (α) – (στ), πράγμα που ελέγχεται με διάφορες μεθόδους μετά την εκτίμηση του υποδείγματος, τότε η εφαρμογή της συνήθους μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων (Ordinary Least Squares ή OLS), δίνει την άριστη, γραμμική, αμερόληπτη εκτιμήτρια (Best Linear Unbiased Estimator ή BLUE) $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$ της παραμέτρου β, η οποία επιπλέον είναι επαρκής (χρησιμοποιεί δηλαδή όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες), συνεπής (συγκλίνει κατά πιθανότητα στο β ή αλλιώς $\operatorname{plim}\hat{\beta} = \beta$) και ασυμπτωτικά αμερόληπτη ($\lim_{T \to \infty} E(\hat{\beta}) = \beta$, όπου T το πλήθος των παρατηρήσεων) – βλέπε Λαζαρίδη, 2002, σελ. 226). Στην περίπτωση αυτή, το υπόδειγμα στο οποίο αναφέρονται οι εν λόγω υποθέσεις (α) – (στ), λέγεται κλασικό γραμμικό υπόδειγμα. Εάν υποθέσουμε επιπλέον και την κανονικότητα των σφαλμάτων, τότε αυτό ονομάζεται κανονικό κλασικό γραμμικό υπόδειγμα και τα u_i, u_j, $i \neq j$ γίνονται μεταξύ τους ανεξάρτητα.

<u>Υπόδειγμα ταυτόχρονων εξισώσεων</u>

Στην περίπτωση γραμμικού υποδείγματος ταυτόχρονων εξισώσεων ουσιαστικά κάνουμε γενίκευση των προηγούμενων υποθέσεων. Οι υποθέσεις (α), (β), (γ), (ε) και (στ) ισχύουν για κάθε εξίσωση και η (δ) τροποποιείται έτσι ώστε να ισχύει ότι η συνδιακύμανση δυο διαταρακτικών όρων διαφορετικών χρονικών περιόδων ή ατόμων είναι μηδέν, άσχετα αν αυτοί οι όροι αναφέρονται στην ίδια ή διαφορετική εξίσωση. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η μήτρα Γ της (1.2) είναι αντιστρέψιμη και ότι σε κάθε δομική εξίσωση του συστήματος (1.1) ο συντελεστής μιας από κοινού ενδογενούς μεταβλητής μπορεί να είναι ίσος με -1 (έτσι ώστε να μπορεί η κάθε δομική εξίσωση να επιλυθεί ως προς διαφορετική κάθε φορά ενδογενή μεταβλητή).

Αντίστοιχα με το υπόδειγμα μιας εξίσωσης, υπάρχουν άλλες μέθοδοι εκτίμησης για το υπόδειγμα ταυτόχρονων εξισώσεων μετά την εφαρμογή των οποίων πρέπει να γίνει αντίστοιχα έλεγχος για την ισχύ των παραπάνω υποθέσεων (για μεγαλύτερη ανάλυση των βασικών υποθέσεων στην περίπτωση συστημάτων ταυτόχρονων εξισώσεων και τροποποιήσεις τους ανάλογα με τη μέθοδο εκτίμησής τους, βλέπε Koutsoyiannis, 1978, κεφάλαιο 16).

2.1.4 Ταυτοποίηση

Η γνώση των παραμέτρων του συστήματος ανηγμένης μορφής αρκεί για την εκτίμηση (πρόβλεψη) των ενδογενών μεταβλητών. Αν όμως το ενδιαφέρον μας επεκτείνεται και στη διενέργεια ελέγχων υποθέσεων για τις παραμέτρους αυτές, τότε είναι απαραίτητη η γνώση των παραμέτρων της δομικής μορφής του συστήματος (1.1). Όμως, δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε απευθείας τις δομικές παραμέτρους εξαιτίας του προβλήματος του σφάλματος αλληλεξάρτησης ή του προβλήματος μεροληψίας λόγω ύπαρξης ταυτόχρονων εξισώσεων (βλέπε Καφφέ, 1989, σελ. 171). Έτσι, η ιδέα είναι να εκτιμηθούν οι παράμετροι της ανηγμένης μορφής και από αυτές, κάτω από ορισμένες συνθήκες, να λάβουμε τις αντίστοιχες της δομικής μορφής. Οι συνθήκες αυτές πληρούνται μόνο αν το σύστημα είναι ταυτοποιήσιμο.

Η ταυτοποίηση είναι μια διαδικασία που προηγείται των εκτιμήσεων. Αν ταυτοποιούνται οι εξισώσεις του συστήματος, τότε λέμε ότι το σύστημα είναι ταυτοποιήσιμο και μπορούμε από την ανηγμένη μορφή να αποκτήσουμε τις δομικές παραμέτρους. Κι αυτό διότι αν ένα σύστημα είναι ταυτοποιήσιμο, εξασφαλίζουμε ότι δε μπορούν να βρεθούν παραπάνω από μια διαρθρώσεις που να έχουν την ίδια ανηγμένη μορφή.

<u>Συνθήκες ταυτοποίησης μιας εξίσωσης</u>

(α) <u>Συνθήκη διαστάσεων</u>

Έστω: K_1 : ο αριθμός των προκαθορισμένων μεταβλητών που δεν περιλαμβάνονται στην εξίσωση

J_1 : ο αριθμός των ενδογενών μεταβλητών που περιλαμβάνονται στην εξίσωση

K_2 : ο αριθμός των προκαθορισμένων μεταβλητών που περιλαμβάνονται στην εξίσωση

J_2 : ο αριθμός των ενδογενών μεταβλητών που δεν περιλαμβάνονται στην εξίσωση

Πρέπει να ισχύει: $K_1 \geq J_1-1$ ή ισοδύναμα $K_1+J_2 \geq J_1+J_2-1$ (βλέπε Καφφέ,1989, σελ. 202), όπου

K_1+J_2 : αριθμός μεταβλητών του συστήματος που δεν υπάρχουν στην εξίσωση

J_1+J_2 : αριθμός εξισώσεων του πλήρους συστήματος.

Η συνθήκη αυτή είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή. Για να ταυτοποιείται η εξίσωση πρέπει να ικανοποιείται επιπλέον και η ακόλουθη συνθήκη, η οποία είναι αναγκαία και ικανή.

(β) <u>Συνθήκη βαθμού</u>

Βρίσκουμε τη μήτρα Π του συστήματος ανηγμένης μορφής (1.3). Η Π έχει τόσες στήλες όσες και οι ενδογενείς μεταβλητές του συστήματος και τόσες γραμμές όσες οι προκαθορισμένες (συμπεριλαμβανομένης και της υποθετικής μεταβλητής που πολλαπλασιάζεται με τους σταθερούς όρους των εξισώσεων η οποία λαμβάνει μόνιμα την τιμή 1).

Πρέπει να ισχύει ότι rank (Π_r)= J1-1, όπου Π_r είναι η υπομήτρα της Π που προκύπτει αν :

i) Διαγράψουμε τις στήλες της Π που αντιστοιχούν στις ενδογενείς μεταβλητές που δεν υπάρχουν στην εξίσωση

ii) Διαγράψουμε τις γραμμές της Π που αντιστοιχούν στις προκαθορισμένες μεταβλητές που υπάρχουν στην εξίσωση

και rank (Π_r) είναι η τάξη της μεγαλύτερης σε διάσταση μη μηδενικής ορίζουσας της Π_r. Αν ισχύουν και οι δυο συνθήκες και στην πρώτη ισχύει η ανισότητα τότε η εξίσωση λέμε ότι υπερταυτοποιείται. Αν ισχύουν και οι δυο συνθήκες και στην πρώτη ισχύει η ισότητα τότε η εξίσωση λέμε ότι ταυτοποιείται ακριβώς.

2.2 Μέθοδοι εκτίμησης συστημάτων ταυτόχρονων εξισώσεων

Οι διάφορες μέθοδοι για την εκτίμηση συστημάτων ταυτόχρονων εξισώσεων αναφέρονται μόνο σε ταυτοποιήσιμες εξισώσεις συμπεριφοράς. Υπάρχουν μέθοδοι που εκτιμούν κάθε εξίσωση ξεχωριστά χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες του συστήματος αλλά με περιορισμένο τρόπο, καθώς και μέθοδοι συνολικής εκτίμησης του συστήματος. Οι πιο σημαντικές μέθοδοι της πρώτης κατηγορίας είναι η έμμεση μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων (indirect least squares ή ILS), η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων σε δυο στάδια (two-stage least squares ή 2SLS) και η μέθοδος της μεγίστης πιθανοφάνειας με περιορισμένες πληροφορίες (limited-information maximum likelihood method ή LIML). Από τη δεύτερη κατηγορία ξεχωρίζουμε τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων σε τρία στάδια (three-stage least squares ή 3SLS) και τη μέθοδο της μεγίστης πιθανοφάνειας με όλες τις πληροφορίες (full-information maximum likelihood method ή FIML).

Η μέθοδος 2SLS

Η μέθοδος 2SLS είναι η πιο σημαντική της πρώτης κατηγορίας συστημάτων για εκτίμηση δομικών παραμέτρων εξισώσεων που υπερταυτοποιούνται ή ταυτοποιούνται ακριβώς. Οφείλεται στους Basmann (1957) και Theil (1953). Ειδικά στη μέθοδο 2SLS είναι σημαντικό να πληρείται η υπόθεση ότι το μέγεθος του δείγματος είναι πολύ μεγαλύτερο από το πλήθος των προκαθορισμένων μεταβλητών του συστήματος και η υπόθεση περί σωστής εξιδείκευσης του μοντέλου και επιλογής κατάλληλων εξωγενών μεταβλητών. Η μέθοδος 2SLS συντελείται σε δύο στάδια:

Στο πρώτο στάδιο εφαρμόζουμε τη συνήθη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων στις εξισώσεις του συστήματος ανηγμένης μορφής (1.3) εκείνων των ενδογενών μεταβλητών που εμφανίζονται ως ανεξάρτητες στις υπερταυτοποιημένες ή ταυτοποιημένες ακριβώς δομικές εξισώσεις.

Στο δεύτερο στάδιο εφαρμόζουμε τη συνήθη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων στην υπερταυτοποιημένη ή ταυτοποιημένη ακριβώς δομική εξίσωση αφού αντικαταστήσουμε τις τιμές των ενδογενών μεταβλητών που εμφανίζονται ως ανεξάρτητες με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις τους από το πρώτο στάδιο.

Τα παραπάνω στάδια, αφορούν στην εύρεση των εκτιμήσεων των παραμέτρων. Επιπλέον, αν υπάρχει ενδιαφέρον για την τελική εκτίμηση των εξαρτημένων ενδογενών μεταβλητών, πρέπει στην εκτιμημένη πλέον εξίσωση να έχουμε τις παρατηρούμενες τιμές της ενδογενούς ανεξάρτητης μεταβλητής και όχι τις εκτιμημένες τιμές από το πρώτο στάδιο. Αξίζει να σημειωθεί ότι όταν μια εξίσωση ταυτοποιείται ακριβώς, τότε η μέθοδος 2SLS δίνει τα ίδια αποτελέσματα με αυτά της μεθόδου ILS.

3. Ανάλυση Μοντέλου

3.1 Ιστορική αναδρομή

Η κοινωνική ασφάλιση στην Ελλάδα ουσιαστικά «γεννήθηκε» το 1934 με το Ν.6298/34 «περί κοινωνικών ασφαλίσεων». Από τότε έγιναν αξιόλογες προσπάθειες για την ανάπτυξη του συνταξιοδοτικού μας συστήματος. Τις τελευταίες όμως δεκαετίες συντελέσθηκε μια άναρχη δόμηση του συστήματος αυτού με υπερβολικά μεγάλο αριθμό ταμείων, πολύπλοκη και πολυπλόκαμη νομοθεσία, ατέρμονη γραφειοκρατία, ικανοποίηση πελατειακών συμφερόντων και γενικά με σύγχυση για το τι ισχύει και καθεστώς αδιαφάνειας. Αυτή η πορεία σε συνδυασμό με το δημογραφικό πρόβλημα και την ανεργία στη χώρα μας, οδήγησε στη σημερινή κατάσταση που χαρακτηρίζεται από ελλειμματικά ταμεία, αδυναμία καταβολής συντάξεων, αυξανόμενη κρατική επιδότηση στα ταμεία, σκανδαλώδεις διαχειρίσεις αποθεματικών, σπατάλη στο σύστημα υγείας και πολλά άλλα.

Είναι λοιπόν ευρέως παραδεκτό, ότι στην Ελλάδα υπάρχει ανάγκη για άμεση ασφαλιστική μεταρρύθμιση. Στη χώρα μας, πρέπει αρχικά να γίνει καταγραφή της υφιστάμενης και αρκετά πολύπλοκης κατάστασης που επικρατεί, όσον αφορά το νομικό, διοικητικό και οργανωτικό πλαίσιο του συνταξιοδοτικού μας συστήματος. Σε δεύτερη φάση, πρέπει να μελετηθεί η διεθνής εμπειρία και να γίνει επιλογή των κατάλληλων μέτρων για τη χώρα μας. Στο τελικό στάδιο πρέπει να υλοποιηθούν οι υποδομές που θα υποδεχθούν το νέο σύστημα (αναλογιστικές μελέτες, κατάλληλες βάσεις δεδομένων, ψήφιση σχετικών νόμων). Προς αυτή την κατεύθυνση, έχουν ήδη γίνει κάποια βήματα (βλέπε ΦΕΚ 58, Νόμο 3655/08).

3.2 Δεδομένα

Βασική μέριμνα για την ελληνική πραγματικότητα, είναι να δημιουργηθεί ένας ενιαίος δημόσιος φορέας κοινωνικών συντάξεων κύριων και επικουρικών καθώς και ανάπτυξη των επαγγελματικών ταμείων, που με την κατάλληλη διαχείριση των αποθεματικών θα αποσκοπεί τουλάχιστον στη διατήρηση των σημερινών παροχών. Ωστόσο, για τα θέματα αυτά, αξίζει να μελετήσουμε περιπτώσεις επιτυχούς ασφαλιστικής μεταρρύθμισης εντός και εκτός Ευρωπαϊκής Ένωσης όπως στη Χιλή (1990) και Σουηδία (1994). Το Σουηδικό μοντέλο αποτέλεσε για πολλές χώρες οδηγό για τη δική τους ασφαλιστική μεταρρύθμιση ή τροποποίηση όπως π.χ. η περίπτωση της Γερμανίας.

Ο Νεκτάριος (2008), παρέχει μια ολοκληρωμένη πρόταση για το Ελληνικό σύστημα συντάξεων με βάση το σουηδικό μοντέλο. Στην παρούσα εργασία θα μας απασχολήσει το μέρος της πρότασης που αφορά στις επικουρικές συντάξεις. Γενικά οι επικουρικές συντάξεις όπως μαρτυρεί και το όνομά τους, συμπληρώνουν τις κύριες συντάξεις οι οποίες κατά βάση στηρίζονται στο αναδιανεμητικό σύστημα. Οι επικουρικές συντάξεις όταν κεφαλαιοποιούνται πλήρως εξασφαλίζουν αρμονία στα μεγέθη της οικονομίας και επιτυγχάνουν διασπορά των κινδύνων (π.χ. σε μια ενδεχόμενη δημογραφική μεταβολή θα επηρεαστούν οι κύριες συντάξεις που θα βασίζονται στο αναδιανεμητικό σύστημα και όχι οι επικουρικές). Κατά το συγγραφέα, πρέπει να εφαρμοστεί ένα υποχρεωτικό σύστημα επικουρικών συντάξεων για τους ασφαλισμένους μετά το 1992 και μεταξύ άλλων προτείνει (βλέπε σελ. 109 -120):

- εφαρμογή της πλήρους κεφαλοποίησης των αποθεματικών
- δημιουργία ατομικών λογαριασμών των ασφαλισμένων
- σύστημα καθορισμένων εισφορών
- μετατροπή του συσσωρευμένου κεφαλαίου σε ράντα τη στιγμή της συνταξιοδότησης (τα ποσά των επικουρικών συντάξεων προκύπτουν από τη διαίρεση των ατομικών λογαριασμών των ασφαλισμένων με την ισόβια αναλογιστική ράντα τη στιγμή της συνταξιοδότησης)
- διαχείριση αποθεματικών από ειδικές εταιρίες συμβεβλημένες με ευρωπαϊκές και εθνικές ΑΕΔΑΚ
- καθορισμός εισφορών περίπου στο 3% για εργαζόμενους και εργοδότες
- δυνατότητα στον κάθε ασφαλισμένο να επενδύει σε δικής του σύνθεσης χαρτοφυλάκιο ή να υπάρχει ενιαία απόδοση για όλους τους ασφαλισμένους

Για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας, λάβαμε δείγμα 46 ασφαλισμένων ανδρών ηλικιών 20-65 (έναν για κάθε ηλικία) από ελληνικό ταμείο επικουρικής ασφάλισης και έγινε καταγραφή των μισθών και των ετών ασφάλισής τους στο ταμείο στην αρχή του έτους 2009-2010. Υποθέτουμε ότι ισχύει το κεφαλαιοποιητικό σύστημα καθορισμένων εισφορών και σύμφωνα με αυτό έχει συσσωρευθεί συγκεκριμένο κεφάλαιο στον ατομικό λογαριασμό του κάθε ασφαλισμένου. Για την κατασκευή βάσης δεδομένων, θεωρούμε ότι οι μισθοί αυξάνονται με ρυθμό i=3% ετησίως και ότι το επιτόκιο επένδυσης των λογαριασμών των ασφαλισμένων είναι σταθερό και ίσο με r=3.5% ετησίως. Ο πληθωρισμός βρίσκεται περίπου στο 3% και οι εισφορές ως ποσοστό του μισθού ανέρχονται συνολικά (εργαζόμενοι και εργοδότες) στο 6%, οι οποίες προκαταβάλλονται στην αρχή του έτους. Γενικά το ποσοστό αύξησης μισθών και το επιτόκιο επένδυσης των λογαριασμών δεν θεωρούνται σταθερά αλλά θα τα θεωρήσουμε ως τέτοια για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας. Επίσης για την ευκόλυνση των υπολογισμών, θεωρούμε για την εργασία αυτή, ότι οι εισφορές προκαταβάλλονται στην αρχή του έτους, σε αντίθεση με την κοινή πρακτική που οι εισφορές αποδίδονται μηνιαίως.

3.3 Ορισμός των μεταβλητών

Κάτω από την υπόθεση ισχύος του κεφαλαιοποιητικού συστήματος καθορισμένων εισφορών για επικουρικές συντάξεις, προφανώς δεν είναι δυνατό στην Ελλάδα να ευρεθούν αντίστοιχα δεδομένα ασφαλιστικών μεγεθών που αναφέρονται σε τέτοιο πλαίσιο. Εντούτοις, θα μπορούσε να ευρεθεί μια φόρμουλα με την οποία να επιτυγχάνεται η κατασκευή τους, έστω κάτω από ιδανικές συνθήκες και παραδοχές, έτσι ώστε να λάβουμε μια βάση διαστρωματικών δεδομένων των εν λόγω ασφαλιστικών μεγεθών, που θα αναφέρεται στο δείγμα των 46 ασφαλισμένων ανδρών στο χρόνο τ. Τονίζεται ότι η φόρμουλες αυτές χρησιμεύουν, για να λάβουμε τιμές των ασφαλιστικών μεγεθών που μας ενδιαφέρουν στο χρόνο τ και μόνο αυτό, χωρίς να χρησιμοποιούνται για την μελλοντική εκτίμηση αυτών των μεγεθών. Λαμβάνοντας έτσι τα δεδομένα αυτά του χρόνου τ, μπορούμε να τα αξιοποιήσουμε εισάγοντάς τα σε κάποιο ειδικό μοντέλο, με σκοπό κάποιες προβλέψεις του ενδιαφέροντός μας.

Ύστερα από τις υποθέσεις αυτές ορίσθηκαν οι εξής μεταβλητές:

(1) Το ύψος του ατομικού λογαριασμού του t ασφαλισμένου τη χρονική στιγμή τ, που ορίζεται από τον παρακάτω τύπο:

$$F_t = 6\% S_{0,t} \left[\frac{(1+i)^{n_t} - (1+r)^{n_t}}{(1+i)-(1+r)} \right] (1+r), \quad t=1,2,\ldots,46 \qquad (2.1)$$

όπου

$$S_{0,t} = S_{\tau,t} \left[\frac{1}{(1+i)^{n_t}} \right], \quad t=1,2,\ldots,46 \qquad (2.2)$$

είναι ο αρχικός ετήσιος μισθός του t ασφαλισμένου, n_t είναι τα έτη ασφάλισης (υπηρεσίας) του t ασφαλισμένου στο ταμείο τη χρονική στιγμή τ, $S_{\tau,t}$ είναι ο ετήσιος μισθός του t ασφαλισμένου τη χρονική στιγμή τ (στην εργασία αυτή, όπου τ θα θεωρούμε την αρχή του έτους 2009-2010) και όπως έχει ήδη αναφερθεί, i=3% και r=3.5%. Ο παραπάνω υπολογισμός προκύπτει από τον τύπο που ισχύει για την τελική αξία προκαταβλητέας ράντας επιτοκίου r% με όρους σε γεωμετρική πρόοδο λόγου i% (βλέπε Αλεξανδρή, 1989, σελ. 81).

(2) Το αναλογιστικό κόστους του έτους (τ-1,τ) υπολογισμένο τη στιγμή τ που ορίζεται από τον εξής τύπο:

$$C_t = F_{\tau\text{-}1,t} r + \left[6\% S_{\tau\text{-}1,t} (1+r) \right] \frac{D_{65}}{D_x} \ddot{a}_{65}^{(12)}, \quad t=1,2,\ldots,46$$

όπου

$$F_{\tau\text{-}1,t} = 6\% S_{0,t} \left[\frac{(1+i)^{\tau-\tau_0-1} - (1+r)^{\tau-\tau_0-1}}{(1+i)-(1+r)} \right] (1+r), \quad t=1,2,\ldots,46$$

$S_{\tau\text{-}1,t}$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τον τύπο (2.2), $D_x = \upsilon^x l_x$ είναι η γνωστή σύνθετη αναλογιστική συνάρτηση επιτοκίου και θνησιμότητας, $\upsilon = (1+\delta)^{-1}$ είναι ο προεξοφλητικός παράγοντας με τεχνικό επιτόκιο δ=3.15%, x είναι η ηλικία του ασφαλισμένου τη χρονική στιγμή t, l_x είναι το πλήθος των ατόμων που επιζούν στην ηλικία x από μια αρχική ρίζα (λαμβάνεται από τους ελβετικούς πίνακες EVK 2000) και $\ddot{\alpha}_{65}^{(12)}$ είναι η παρούσα αξία (Π.Α.) ισόβιας, μηνιαίας, προκαταβλητέας αναλογιστικής ράντας ατόμου ηλικίας 65 ετών.

Το κόστος αυτό είναι ανάλογο με εκείνο του κανονικού και συμπληρωματικού κόστους που ισχύουν στις διάφορες μεθόδους κοστολόγησης-χρηματοδότησης των ταμείων (βλέπε Aitken, 1996). Ουσιαστικά το κανονικό κόστος (NC) είναι οι οι εισφορές που συσσωρεύονται σε ετήσια βάση για να σχηματισθούν οι υπεσχημένες παροχές. Στην περίπτωσή μας, στο ταμείο επικουρικής ασφάλισης, δεν υπάρχουν καθορισμένες παροχές αλλά μόνο καθορισμένες εισφορές και το εν λόγω κόστος σχηματίζεται από τον τόκο του περασμένου έτους προσαυξημένο από το μέρος το αντίστοιχο της μεθόδου προβεβλημένης πιστωτικής μονάδας (projected unit credit, βλέπε Aitken, 1996 και Ζυμπίδη, 2008, σελ. 109). Ο παραπάνω τύπος θεωρούμε ότι ισχύει μόνο για τη συγκεκριμένη περίπτωση και δεν εφαρμόζεται γενικά.

(3) Τα κέρδη του έτους (τ -1,τ) υπολογισμένα τη στιγμή τ, τα οποία προκύπτουν από τον τόκο του συσσωρευμένου ύψους του ατομικού λογαριασμού του προηγούμενου έτους και τον τόκο των εισφορών που προκαταβάλλονται στην αρχή του ίδιου έτους και δίνονται από τον εξής τύπο:

$$I_t = \left[F_{\tau\text{-}1,t} + 6\% S_{\tau\text{-}1,t}\right] r$$

(4) Η πιθανότητα θανάτου στο διάστημα (x,65) που δίνεται από τον τύπο:

$$M_t = 1 - {}_{65-x}p_x = 1 - \frac{l_{65}}{l_x} = {}_{65-x}q_x$$

όπου x είναι η ηλικία του ασφαλισμένου τη χρονική στιγμή τ, δηλαδή στην αρχή του έτους (2009-2010), ${}_{65-x}p_x$ είναι η πιθανότητα για όλα τα άτομα ηλικίας x να επιζήσουν μέχρι την ηλικία 65 (θεωρούμε ότι σε κάθε περίπτωση, καταβάλλεται σύνταξη μόνο όταν ο ασφαλισμένος γίνει 65 ετών και μέχρι τότε οι εισφορές εισπράτονται κανονικά, πλην της περίπτωσης του θανάτου ανεξαρτήτως αποχώρησης λόγω ανικανότητας ή παραιτήσεων) και ${}_{65-x}q_x$ είναι η πιθανότητα θανάτου ατόμου ηλικίας x στο διάστημα (x, 65). Οι πιθανότητες αυτές υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας στοιχεία από τους ελβετικούς πίνακες EVK 2000.

(5) Η εκθετική συνάρτηση με βάση το e στο σημείο n_t (έτη ασφάλισης του t ασφαλισμένου στο ταμείο τη χρονική στιγμή τ) και ορίζεται από τον τύπο:

$$Z_t = \exp(n_t)$$

Η συνάρτηση αυτή δεν έχει συγκεκριμένη λογική ερμηνεία, όμως είναι πολύ σημαντική για το μοντέλο ταυτόχρονων εξισώσεων της εργασίας αυτής.

3.4 Το μοντέλο ταυτόχρονων εξισώσεων

Με βάση την περιγραφή της υφιστάμενης κατάστασης του ασφαλιστικού συστήματος στην Ελλάδα, θα ήταν τουλάχιστον ενδιαφέρον αν όχι αναγκαίο, να αναπτυχθούν μέθοδοι και μοντέλα, στα πλαίσια συγκεκριμένων προτάσεων και αλλαγών, με τα οποία να δίνεται η δυνατότητα εκτίμησης κάποιων σημαντικών ασφαλιστικών μεγεθών σε επιλεγμένες περιόδους και ομάδες ασφαλισμένων. Διαπιστώθηκε, ότι μπορούν να δημιουργηθούν γραμμικά υποδείγματα που να ερμηνεύουν λογικά τη σχέση των μεταβλητών που ορίσθηκαν στην παράγραφο 3.1 και μάλιστα παρατηρώντας την αλληλεξάρτηση κάποιων μεταβλητών από αυτές, να δημιουργηθούν ανάλογα υποδείγματα ταυτόχρονων εξισώσεων.
Σε αυτή την προσπάθεια, εξετάστηκαν πολλά μοντέλα ταυτόχρονων εξισώσεων κάποια από τα οποία όμως παρουσίασαν αδυναμίες που αφορούν κυρίως

θέματα της οικονομετρικής θεωρίας συστημάτων ταυτόχρονων εξισώσεων και τα οποία παρατίθενται στο κεφάλαιο 6.

Το μοντέλο που επιλέχθηκε για την παρούσα εργασία, το οποίο πληρεί όλες τις προϋποθέσεις της οικονομετρικής θεωρίας αλλά και είναι συνεπές με το σκοπό για τον οποίο επιλέχθηκε συνδυάζοντας επιπλέον και λογική ερμηνεία του συγκεκριμένου τρόπου με τον οποίο σχετίζονται οι μεταβλητές του είναι:

$$\begin{aligned} C_t &= \alpha_0 + \alpha_1 F_t + \alpha_2 M_t + {}_1u_t \\ F_t &= b_1 C_t + b_2 Z_t + {}_2u_t \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Το μοντέλο αποτελείται από δυο εξισώσεις συμπεριφοράς, είναι πλήρες, έχει δυο ενδογενείς μεταβλητές, τις C_t και F_t, καθώς και δυο εξωγενείς, τις M_t και Z_t. Οι «θόρυβοι» ${}_1u_t$ και ${}_2u_t$, είναι τυχαίες μη παρατηρήσιμες μεταβλητές και αντιπροσωπεύουν την επίδραση διαφόρων τυχαίων παραγόντων στις τιμές των C_t και F_t αντίστοιχα.

3.4.1 Δομική μορφή του συστήματος

Θεωρούμε μια υποθετική ανεξάρτητη μεταβλητή X_t που θα λαμβάνει πάντα την τιμή 1. Σύμφωνα με ανάλυση προηγούμενου κεφαλαίου, η δομική μορφή του συστήματος (2.3) θα είναι η εξής:

$$\gamma_{11}C_t + \gamma_{21}F_t + \beta_{11}X_t + \beta_{21}M_t + \beta_{31}Z_t + {}_1u_t = 0$$

$$\gamma_{12}C_t + \gamma_{22}F_t + \beta_{12}X_t + \beta_{22}M_t + \beta_{32}Z_t + {}_2u_t = 0$$

Συγκεκριμένα, η δομική μορφή του συστήματος (2.3) γράφεται:

$$-C_t + \alpha_1 F_t + \alpha_0 X_t + \alpha_2 M_t + 0Z_t + {}_1u_t = 0$$

$$b_1 C_t - F_t + 0X_t + 0M_t + b_2 Z_t + {}_2u_t = 0$$

Το t στη συνέχεια, θα είναι μετρητής ατόμων t=1,2,...,44. Για λόγους που θα εξηγηθούν στο κεφάλαιο 5, από τα 46 άτομα παραλείπουμε ενδεικτικά, το 15^o και το 23^o.

Για J=2, T=44 και K=3, η εξίσωση (1.2) καθώς και οι μήτρες Y, X, U, Γ και B γράφονται:

$$\underset{(2X2)}{\Gamma}\ \underset{(2X44)}{Y} + \underset{(2X3)}{B}\ \underset{(3X44)}{X} = \underset{(2X44)}{U}$$

$$\underset{(2X44)}{Y} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_{44} \\ F_1 & F_2 & \dots & F_{44} \end{bmatrix} \qquad \underset{(3X44)}{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ M_1 & M_2 & \dots & M_{44} \\ Z_1 & Z_2 & \dots & Z_{44} \end{bmatrix}$$

$$\underset{(2X44)}{U} = \begin{bmatrix} {}_1u_1 & {}_1u_2 & \dots & {}_1u_{44} \\ {}_2u_1 & {}_2u_2 & \dots & {}_2u_{44} \end{bmatrix} \qquad \underset{(2X2)}{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underset{(2X3)}{B} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32} \end{bmatrix}$$

3.4.2 Ανηγμένη μορφή συστήματος

Έστω η Γ είναι αντιστρέψιμη. Τότε ισχύει η (1.3):

$$Y = \Pi X + V$$

όπου

$$\Pi = -\Gamma^{-1}B = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \end{bmatrix}$$

και

$$V = \Gamma^{-1}U = \begin{bmatrix} {}_1v_1 & {}_1v_2 & \cdots & {}_1v_{44} \\ {}_2v_1 & {}_2v_2 & \cdots & {}_2v_{44} \end{bmatrix}$$

Αναλυτικά η ανηγμένη μορφή γράφεται:

$$C_t = \pi_{11}X_t + \pi_{12}M_t + \pi_{13}Z_t + {}_1V_t$$

$$F_t = \pi_{21}X_t + \pi_{22}M_t + \pi_{23}Z_t + {}_2V_t$$

Παρακάτω, θα εργασθούμε με την ισοδύναμη δομική μορφή:

$$\underset{(T\,X\,J)}{Y}\ \underset{(J\,X\,J)}{\Gamma} + \underset{(T\,X\,K)}{X}\ \underset{(K\,X\,J)}{B} = \underset{(T\,X\,J)}{U}$$

και την ισοδύναμη ανηγμένη μορφή:

$$Y = X\,\Pi + V$$

όπου

$$\Pi = -B\Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \\ \pi_{31} & \pi_{32} \end{bmatrix}$$

Αναλυτικά έχουμε:

$$C_t = \pi_{11}X_t + \pi_{21}M_t + \pi_{31}Z_t + {}_1V_t$$

$$F_t = \pi_{12}X_t + \pi_{22}M_t + \pi_{32}Z_t + {}_2V_t \qquad (2.4)$$

4. Εκτίμηση Μοντέλου

4.1 Ταυτοποίηση

Όπως αναπτύχθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, η πρώτη μέριμνα που πρέπει κανείς να λάβει, είναι να ερευνήσει για την ταυτοποίηση των εξισώσεων του συστήματος. Συγκεκριμένα θα εξετάσουμε την ισχύ των δύο συνθηκών ταυτοποίησης. Υιοθετώντας συμβολισμούς που ήδη έχουμε χρησιμοποιήσει, για την πρώτη εξίσωση έχουμε:

(α) Συνθήκη διαστάσεων

$K_1=1$ (αριθμός των προκαθορισμένων μεταβλητών που δεν περιλαμβάνονται στην εξίσωση)

$J_1=2$ (αριθμός των ενδογενών μεταβλητών που περιλαμβάνονται στην εξίσωση)

$K_2=2$ (αριθμός των προκαθορισμένων μεταβλητών που περιλαμβάνονται στην εξίσωση)

$J_2=0$ (αριθμός των ενδογενών μεταβλητών που δεν περιλαμβάνονται στην εξίσωση)

Πρέπει να ισχύει: $K_1 \geq J_1-1$. Πράγματι $1 \geq 1$.

(β) Συνθήκη βαθμού

Αρχικά, βρίσκουμε τη μήτρα:

$$\Pi = -B\Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}^{-1} = -\begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & b_1 \\ \alpha_1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

έχουμε:

$$\Gamma^{-1} = \frac{adj(\Gamma)}{det(\Gamma)}, \quad det(\Gamma) = 1 - \alpha_1 b_1, \quad adj(\Gamma) = \begin{bmatrix} -1 & \alpha_1 \\ b_1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Gamma^{-1} = \frac{1}{1 - \alpha_1 b_1} \begin{bmatrix} -1 & \alpha_1 \\ b_1 & -1 \end{bmatrix}, \alpha_1 b_1 \neq 1$$

$$\Rightarrow \Pi = -B\Gamma^{-1} = \frac{1}{\alpha_1 b_1 - 1} \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \alpha_1 \\ b_1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_1 b_1 - 1} \begin{bmatrix} -\alpha_0 & \alpha_0 \alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \alpha_2 \\ b_1 b_2 & -b_2 \end{bmatrix}$$

Οι γραμμές της μήτρας Π αντιστοιχούν στις προκαθορισμένες μεταβλητές X_t, M_t και Z_t (από άνω προς τα κάτω). Οι στήλες της μήτρας Π αντιστοιχούν στις ενδογενείς μεταβλητές C_t και F_t (από αριστερά προς τα δεξιά). Έπειτα, κατά τα γνωστά, πράττουμε τις δυο ακόλουθες ενέργειες:

i) Διαγράφουμε τις στήλες της Π που αντιστοιχούν στις ενδογενείς μεταβλητές που δεν υπάρχουν στην εξίσωση (καμία δηλαδή)

ii) Διαγράφουμε τις γραμμές της Π που αντιστοιχούν στις προκαθορισμένες μεταβλητές που υπάρχουν στην εξίσωση, δηλαδή τις γραμμές των X_t και M_t.

Η μήτρα που θα απομείνει θα είναι:

$$\Pi_r = \frac{1}{\alpha_1 b_1 - 1}\left[b_1 b_2 \quad -b_2\right]$$

Άρα rank (Π_r)=1. Το πλήθος των εξαρτημένων μεταβλητών που υπάρχουν στην εξίσωση είναι δυο. Άρα rank (Π_r)= J_1-1=1. Επειδή στη συνθήκη των διαστάσεων ισχύει η ισότητα, η πρώτη εξίσωση του συστήματος ταυτοποιείται ακριβώς. Για τη δεύτερη εξίσωση έχουμε:

(α) <u>Συνθήκη διαστάσεων</u>

K_1=2 (αριθμός των προκαθορισμένων μεταβλητών που δεν περιλαμβάνονται στην εξίσωση)

J_1=2 (αριθμός των ενδογενών μεταβλητών που περιλαμβάνονται στην εξίσωση)

K_2=1 (αριθμός των προκαθορισμένων μεταβλητών που περιλαμβάνονται στην εξίσωση)

J_2=0 (αριθμός των ενδογενών μεταβλητών που δεν περιλαμβάνονται στην εξίσωση)

Έχουμε ότι $K_1=2 \geq J_1-1=2-1=1$, που ισχύει.

(β) <u>Συνθήκη βαθμού</u>

i) Διαγράφουμε τις στήλες της Π που αντιστοιχούν στις ενδογενείς μεταβλητές που δεν υπάρχουν στην εξίσωση (καμία δηλαδή) και

ii) Διαγράφουμε τις γραμμές της Π που αντιστοιχούν στις προκαθορισμένες μεταβλητές που υπάρχουν στην εξίσωση, δηλαδή την γραμμή της Z_t.

Η μήτρα που θα απομείνει θα είναι:

$$\Pi_r = \frac{1}{\alpha_1 b_1 - 1}\begin{bmatrix} -\alpha_0 & \alpha_0\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1\alpha_2 \end{bmatrix}$$

Δεδομένου ότι det (Π_r)=0 $\Rightarrow$ rank (Π_r)=1. Το πλήθος των εξαρτημένων μεταβλητών που υπάρχουν στην εξίσωση είναι δύο. Άρα rank (Π_r)= J1-1=1. Επειδή στη συνθήκη των διαστάσεων ισχύει η ανισότητα, η δεύτερη εξίσωση του συστήματος υπερταυτοποιείται.

Κατόπιν αυτών, μπορούμε να προχωρήσουμε στην εκτίμηση των επιμέρους εξισώσεων του συστήματος. Η πλέον διαδεδομένη μέθοδος εκτίμησης εξισώσεων που ταυτοποιούνται ακριβώς ή υπερταυτοποιούνται την οποία και θα εφαρμόσουμε είναι η 2SLS (ειδικά για την πρώτη εξίσωση θα μπορούσε να εφαρμοστεί η μέθοδος ILS η οποία δίδει τα ίδια αποτελέσματα με αυτά της 2SLS).

4.2 Εκτίμηση εξισώσεων

Γενικά, χωρίς να υπάρχει κάποιος κανόνας που να το επιβάλλει, προσπαθούμε να βρούμε για την κάθε εξίσωση ξεχωριστά, εκείνες τις μεταβλητές έτσι ώστε εάν εφαρμόσουμε τη συνήθη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, να λάβουμε ικανοποιητικά αποτελέσματα και να πληρούνται κατά το δυνατό οι βασικές υποθέσεις. Άλλωστε, ο λόγος για τον οποίο αναζητούμε άλλες μεθόδους εκτίμησης στα συστήματα εξισώσεων και όχι την OLS, είναι το σφάλμα αλληλεξάρτησης ή το πρόβλημα μεροληψίας λόγω ύπαρξης ταυτόχρονων εξισώσεων (simultaneous equations bias). Στο μοντέλο της εργασίας αυτής, αυτό μπορεί να διαπιστωθεί ως εξής: από το σύστημα (2.3), αν αντικαταστήσουμε τη δεύτερη εξίσωση στην πρώτη έχουμε:

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1(b_1C_t + b_2Z_t + {}_2u_t) + \alpha_2M_t + {}_1u_t$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1b_1C_t + \alpha_1b_2Z_t + \alpha_1\,{}_2u_t + \alpha_2M_t + {}_1u_t$$

$$\Rightarrow C_t = \frac{1}{1-\alpha_1b_1}(\alpha_0 + \alpha_1b_2Z_t + \alpha_2M_t + \alpha_1\,{}_2u_t + {}_1u_t)$$

Είναι φανερό ότι η C_t (ανεξάρτητη μεταβλητή) παρουσιάζει ταυτόχρονη συσχέτιση με το διαταρακτικό όρο ${}_2u_t$. Συνεπώς, αν εφαρμόσουμε την OLS στη δεύτερη εξίσωση, θα λάβουμε εκτιμήτριες οι οποίες δε θα έχουν τις επιθυμητές ιδιότητες και συγκεκριμένα θα είναι μη συνεπείς και μεροληπτικές (βλέπε Καφφέ, 1989, παράγραφο 2.1.3 σελ. 75). Παρόμοια συμπεράσματα μπορούμε να εξάγουμε και για την πρώτη εξίσωση.

Αποδεικνύεται ότι η 2SLS εκτιμητές είναι συνεπείς (βλέπε Καφφέ, 1989, θεώρημα σελ. 254), συγκλίνουν δηλαδή κατά πιθανότητα στις προς εκτίμηση παραμέτρους και ασυμπτωτικά κανονικοί (βλέπε Theil, 1971). Βέβαια, απαραίτητη προϋπόθεση για να λάβουμε συνεπείς εκτιμητές με τη μέθοδο 2SLS, είναι το σύστημα εξισώσεων να είναι ταυτοποιήσιμο (βλέπε Λαζαρίδη, 2000, σελ. 250). Παρακάτω θα προβούμε στην 2SLS εκτίμηση των παραμέτρων με τη χρήση του πακέτου SPSS, σε πλήρη στατιστική ανάλυση των ευρημάτων και έλεγχο ισχύος των βασικών υποθέσεων για συστήματα εξισώσεων.

4.2.1 Εξίσωση 1η

<u>2SLS εκτιμητές</u>

<u>1ο στάδιο</u>

Αρχικά, εκτιμούμε με τη συνήθη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (OLS) την εξίσωση:

$$F_t = C_0 + C_1M_t + C_2Z_t + u$$

Έχουμε:

$$\hat{F}_t = 6489,333 - 14784,863M_t + 0,665Z_t$$

Είναι πολύ φυσικό σ’αυτό το στάδιο ορισμένες φορές να έχουμε χαμηλό συντελεστή προσδιορισμού. Στη συγκεκριμένη περίπτωση R^2=0.388. Αν η F_t εξαρτάται γραμμικά από την M_t, τότε στη 2^η εξίσωση του συστήματος θα έχουμε πολυσυγγραμμικότητα και συνεπώς παραβιάζεται η (στ) από τις βασικές υποθέσεις. Οπότε αν το υπόδειγμα είναι σωστό, το R^2 διαμορφώνεται κυρίως από τη γραμμική εξάρτηση των F_t και Z_t.

<u>2^ο στάδιο</u>

Εκτιμούμε με τη συνήθη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (OLS) την εξίσωση:

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{F}_t + \alpha_2 M_t + \varepsilon \qquad (3.1)$$

και λαμβάνουμε την:

$$\hat{C}_t = 10606,236 + 0,429F_t - 71707,599M_t \qquad (3.2)$$

Το αρνητικό πρόσημο του συντελεστή της M_t είναι λογικό διότι σε μια ενδεχόμενη αύξηση της πιθανότητας θανάτου ceteris paribus, το κόστος του ταμείου μειώνεται.

<u>Στατιστική ανάλυση</u>

Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων που λαμβάνουμε με την OLS από την (3.1) θεωρούνται οι σωστές εκτιμήσεις της μεθόδου 2SLS. Οι τιμές όμως των τυπικών σφαλμάτων των α_0, α_1 και α_2, του R^2 και των στατιστικών F και t, οι οποίες βασίζονται στα παρατηρούμενα σφάλματα ή Residuals, που προκύπτουν από την (3.1) θα είναι λανθασμένες. Αυτό συμβαίνει, διότι τα σωστά Residuals προκύπτουν από την (3.2) ως η διαφορά των $\hat{C}_t$ με τα C_t. χρησιμοποιώντας τις πραγματικές τιμές της μεταβλητής F_t για τον υπολογισμό των $\hat{C}_t$. Όσον αφορά τα τυπικά σφάλματα των συντελεστών του δεύτερου σταδίου (εξίσωση (3.1)) αυτά είναι λανθασμένα, διότι ο εκτιμητής της διακύμανσης του διαταρακτικού όρου που προκύπτει από το δεύτερο στάδιο χρησιμοποιώντας τις εκτιμημένες τιμές $\hat{F}_t$ από το πρώτο στάδιο είναι μεροληπτικός (βλέπε Χρήστου, 2002, σελ. 720). Ο αμερόληπτος δηλαδή εκτιμητής της διακύμανσης του διαταρακτικού όρου της πρώτης δομικής εξίσωσης του συστήματος (2.3) δίνεται από τη σχέση:

$$S_u^2 = \frac{\sum_t (C_t - \hat{C}_t)^2}{T - m}$$

όπου T είναι το πλήθος παρατηρήσεων και m το πλήθος παραμέτρων. Έτσι για να λάβουμε τις σωστές τιμές των τυπικών σφαλμάτων, πολλαπλασιάζουμε τις ληφθείσες τιμές των τυπικών σφαλμάτων του δεύτερου σταδίου με το λόγο S_u / S_ε, όπου S_ε είναι η εκτίμηση της τυπικής απόκλισης του διαταρακτικού όρου χρησιμοποιώντας τις εκτιμημένες τιμές $\hat{F}_t$ του πρώτου σταδίου.

Έχουμε:

$$S_u^2 = \frac{\sum_t (C_t - \hat{C}_t)^2}{T - m} = \frac{\sum_t (C_t - \hat{C}_t)^2}{44 - 3} = 2335424.33$$

$$\Rightarrow S_u = 1528.209$$

$$S_\varepsilon^2 = 6548884 \Rightarrow S_\varepsilon = 2559.079$$

$$\Rightarrow S_u / S_\varepsilon = 0.597$$

Συνεπώς, οι σωστές τυπικές αποκλίσεις των α_0, α_1 και α_2 είναι αντίστοιχα:

$$S_{\hat{\alpha}_0} = (2577)(0.597) = 1539.294$$

$$S_{\hat{\alpha}_1} = (0.218)(0.597) = 0.13$$

$$S_{\hat{\alpha}_2} = (13902.085)(0.597) = 8301.929$$

Επίσης έχουμε:

$$t_{\hat{\alpha}_0} = \frac{\hat{\alpha}_0}{S_{\hat{\alpha}_0}} = \frac{10606.236}{1539.294} = 6.89$$

$$t_{\hat{\alpha}_1} = \frac{\hat{\alpha}_1}{S_{\hat{\alpha}_1}} = \frac{0.429}{0.13} = 3.295$$

$$t_{\hat{\alpha}_2} = \frac{\hat{\alpha}_2}{S_{\hat{\alpha}_2}} = -\frac{71707.599}{8301.929} = -8.637$$

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση H0: α_i=0, i=0,1,2, γνωρίζουμε ότι η $t_{\hat{\alpha}_i}$ ακολουθεί την κατανομή Student (ψευδώνυμο του W.S.Gosset) με T-m βαθμούς ελευθερίας ή αλλιώς $t_{\hat{\alpha}_i} \sim t_{T-m}$.

Για επίπεδο σημαντικότητας α=0.05 συγκρίνουμε τις ποσότητες $\left|\frac{\hat{\alpha}_i - 0}{S_{\hat{\alpha}_i}}\right|$, i=0,1,2,3 με την κριτική τιμή $t_{\alpha/2;T-m}$ της κατανομής Student.

Αν $\left|\frac{\hat{\alpha}_i - 0}{S_{\hat{\alpha}_i}}\right| > t_{\alpha/2;T-m}$ τότε απορρίπτουμε την H0: α_i=0, i=0,1,2,3 δηλαδή δεχόμαστε ότι οι μεταβλητές (η κάθε μια ξεχωριστά) που χρησιμοποιούμε για την εκτίμηση της C_t είναι στατιστικά σημαντικές. Αν θέλουμε να κάνουμε στατιστικό έλεγχο της μορφής H0: $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2$ =0, αυτό επιτυγχάνεται ως γνωστό με τη στατιστική F και ουσιαστικά ελέγχουμε αν η C_t μεταβάλλεται σημαντικά όταν οι ανεξάρτητες μεταβλητές μεταβάλλονται συγχρόνως.

Κάτω από την υπόθεση H0: $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$, γνωρίζουμε ότι:

$$F = \frac{SSR/(m-1)}{SSE/(T-m)} \sim F_{m-1,T-m}$$

όπου $SSR = \sum_t (\hat{C}_t - \bar{C}_t)^2$ και $SSE = \sum_t (C_t - \hat{C}_t)^2$. Για επίπεδο σημαντικότητας α=0.05 συγκρίνουμε την ποσότητα F με την κριτική τιμή $F_{2,41;0.05}$ της κατανομής Snedecor. Αν $F > F_{2,41;0.05}$ τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H0 δηλαδή δεχόμαστε ότι οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι συνολικά σημαντικές στη διαμόρφωση των τιμών της C_t.

Συνολικά έχουμε:

$$\left|t_{\hat{\alpha}_0}\right| = 6.89 > 2.02 = t_{0.025;41}$$

$$\left|t_{\hat{\alpha}_1}\right| = 3.295 > 2.02 = t_{0.025;41}$$

$$\left|t_{\hat{\alpha}_2}\right| = 8.637 > 2.02 = t_{0.025;41}$$

Άρα απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H0 και στις τρεις περιπτώσεις.

Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνεται και από τη στατιστική F:

$$F = 93.802 > 3.225 = F_{2,41;0.05}$$

Όσον αφορά την τιμή του συντελεστή προσδιορισμού έχουμε ότι:

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{\sum_t (C_t - \hat{C}_t)^2}{\sum_t (C_t - \bar{C}_t)^2} = 0.853$$

Δηλαδή το 85.3% της συνολικής μεταβλητικότητας της εξαρτημένης μεταβλητής C_t ερμηνεύεται από τη συγκεκριμένη παλινδρόμηση, ποσοστό το οποίο είναι ιδιαιτέρως υψηλό.

Ως γνωστό, τα διαστήματα εμπιστοσύνης σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05 για τις παραμέτρους α_i, i=0,1,2 έχουν ως εξής:

$$(\hat{\alpha}_i - t_{\alpha/2}s_{\hat{\alpha}_i},\ \hat{\alpha}_i + t_{\alpha/2}s_{\hat{\alpha}_i})$$

Το κάθε διάστημα από αυτά είναι ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο α_i, i=0,1,2, με την έννοια ότι αν λάβουμε άπειρο αριθμό δειγμάτων μεγέθους T=44 από το συγκεκριμένο ταμείο και για κάθε δείγμα υπολογίσουμε το διάστημα εμπιστοσύνης με τον παραπάνω τύπο, τότε το 95% των διαστημάτων αυτών θα περιλαμβάνει την παράμετρο του πληθυσμού του ταμείου. Άρα αυτό που λαμβάνουμε είναι ένα από αυτά.

Έχουμε:

ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο α_0 είναι το $(\hat{\alpha}_0 - t_{\alpha/2}s_{\hat{\alpha}_0},\ \hat{\alpha}_0 + t_{\alpha/2}s_{\hat{\alpha}_0})$ ή το $(7496.86212,\ 13715.6098)$,

ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο α_1 είναι το $(\hat{\alpha}_1 - t_{\alpha/2}s_{\hat{\alpha}_1},\ \hat{\alpha}_1 + t_{\alpha/2}s_{\hat{\alpha}_1})$ ή το $(0.166,\ 0.691)$

και ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο α_2 είναι το $(\hat{\alpha}_2 - t_{\alpha/2}s_{\hat{\alpha}_2},\ \hat{\alpha}_2 + t_{\alpha/2}s_{\hat{\alpha}_2})$ ή το $(-88477.495,\ -54937.702)$.

<u>Έλεγχος ισχύος των βασικών υποθέσεων της 1^{ης} εξίσωσης</u>

Αρχικά θα ερευνήσουμε την κανονικότητα του διαταρακτικού όρου. Γνωρίζουμε ότι αν η πρώτη εξίσωση είναι σωστή, τότε ο εκτιμητής

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{T-m}$$

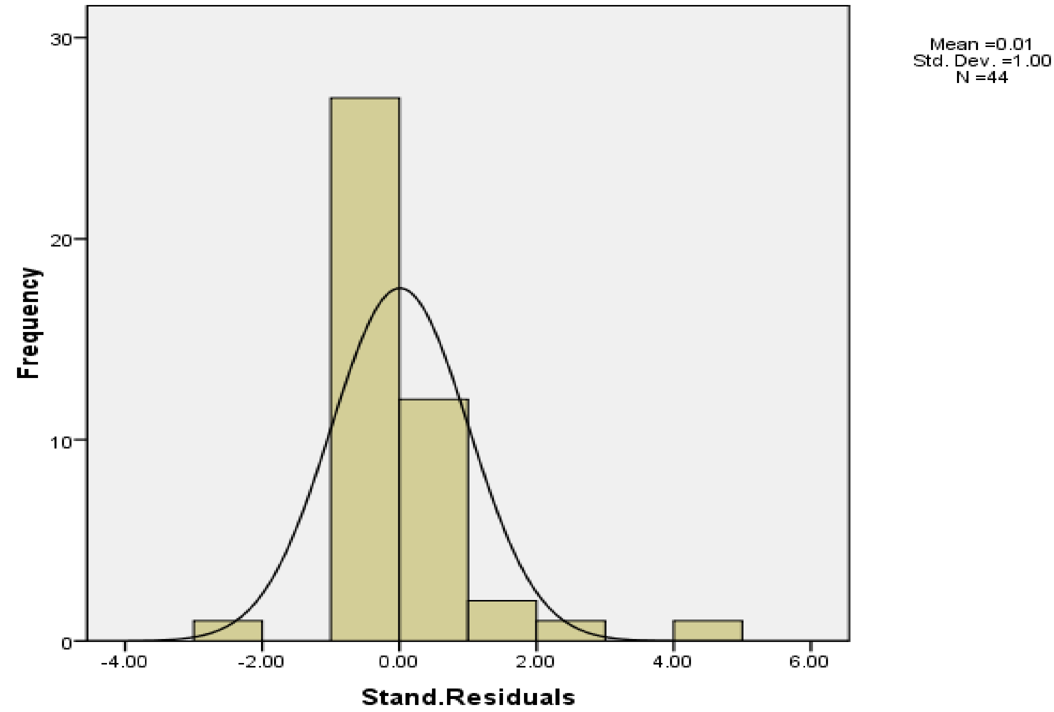
όπου T=44, m=3, i=1,2,…,44, είναι αμερόληπτος εκτιμητής του σ^2. Οπότε, για να ελέγξουμε αν $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$ ή ισοδύναμα αν $\varepsilon_i / \sigma \sim N(0,1)$ $\forall i$, μπορούμε να ελέγξουμε το εύρος των ποσοτήτων $e_i / \hat{\sigma}$ $\forall i$.

Επειδή η ε_i / σ λαμβάνει τιμές με πιθανότητα 95% στο (-1.96, 1.96), αναμένουμε ότι το 95% των τιμών $e_i / \hat{\sigma}$ $\forall i$ θα βρίσκεται σ'αυτό το διάστημα. Πράγματι, υπολογίζοντας το $\hat{\sigma}^2$ =2335424.329 και τις τιμές των $e_i / \hat{\sigma}$, βρίσκουμε ότι υπάρχουν τρεις τιμές εκτός του διαστήματος (-1.96, 1.96) οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$ $\forall i$.

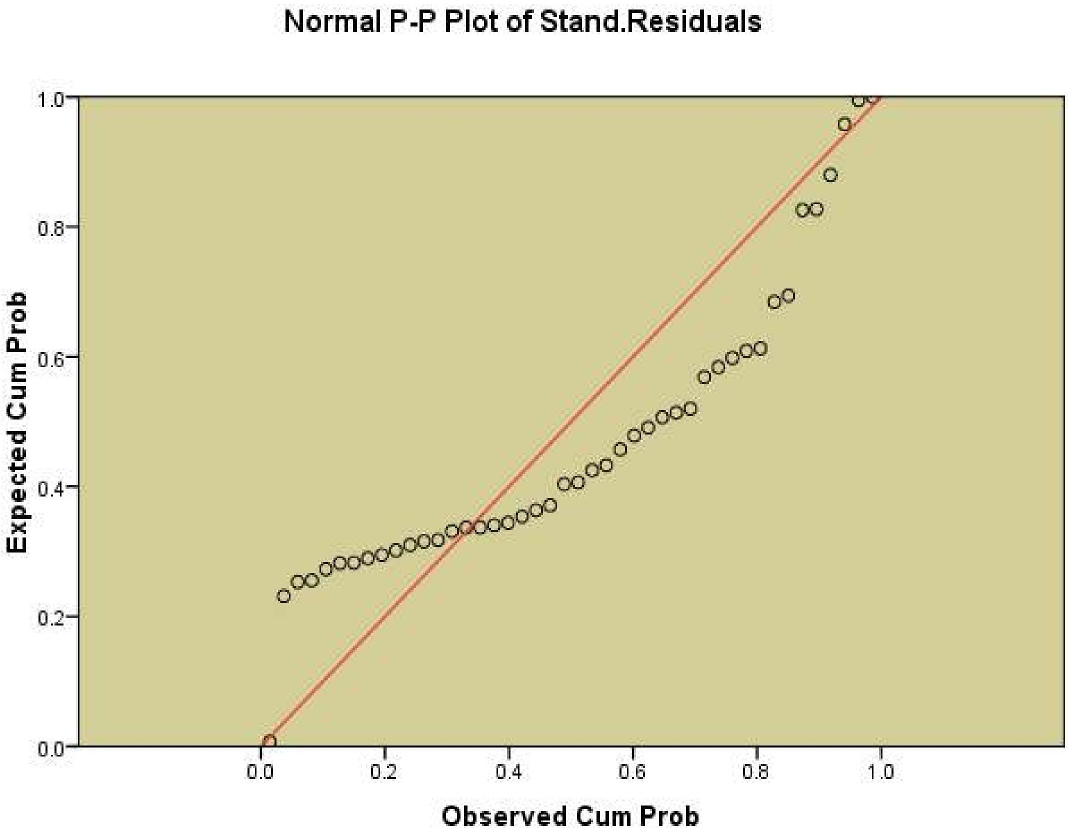
Επιπλέον μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ιστόγραμμα για τα Residuals ή τα Standardized Residuals με το οποίο λαμβάνουμε ένδειξη κανονικής κατανομής. Για τα Standardized Residuals σχηματίζουμε το πηλίκο:

$$\frac{e_i - E(e_i)}{Sd(e_i)} = \frac{e_i - 12.549}{1492.193}$$

και λαμβάνουμε το σχετικό ιστόγραμμα:



Παρατηρούμε ότι σε γενικές γραμμές, οι τιμές των Standardized Residuals σχηματίζουν την μορφή της κανονικής κατανομής, πλην όμως υπάρχει μεγάλη συχνότητα αρνητικών τιμών κοντά στο μηδέν, καθώς επίσης και τιμές εκτός του εύρους των τιμών της κανονικής κατανομής. Ως εκ τούτου δεν μπορούμε με σιγουριά να δεχτούμε την κανονικότητά τους παρά μόνο να έχουμε ένδειξη γι αυτό, όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Αν σχηματίσουμε το P-P plot των Standardized Residuals με θεωρητική κατανομή την τυπική κανονική N(0,1) θα εξάγουμε το συμπέρασμα ότι αυτά έχουν κατανομή πλησίον της τυπικής κανονικής κατανομής αλλά δεν προσαρμόζονται πλήρως σε αυτήν. Σε κάθε περίπτωση, για τους σκοπούς της εργασίας, το αποτέλεσμα αυτό είναι αρκετά ικανοποιητικό και μπορούμε να δεχτούμε την κανονικότητα των διαταρακτικών όρων της 1ης εξίσωσης. Άλλωστε, η κανονικότητα των διαταρακτικών όρων μπορεί γενικά να επιτευχθεί με τη λήψη μεγάλων δειγμάτων. Με χρήση του SPSS λαμβάνουμε το P-P plot των Standardized Residuals:



Προχωρούμε στη εξέταση της μέσης τιμής του διαταρακτικού όρου. Βλέπουμε ότι $E(e_i) = 12.549$. Άρα δε μπορούμε να δεχτούμε με βεβαιότητα ότι $E(e_i) = 0$. Όμως το σφάλμα αυτό δε θεωρείται σημαντικό με την έννοια ότι ο μέσος των Residuals είναι πλησίον του μηδέν σε σχέση με τις επιμέρους πολύ μεγαλύτερες τιμές τους. Συνεπώς θα υπάρχει μια ελαφρά υπερεκτίμηση του σταθερού όρου της παλινδρόμησης που δε θεωρούμε ότι αποτελεί σοβαρό πρόβλημα (βλέπε Κιντή, 1982, σελ. 226).

Γενικά, ο έλεγχος της υπόθεσης $E(u_i u_j) = \sigma_u^2$ για κάθε i=j και $E(u_i u_j) = 0$ για κάθε $i \neq j$, δε μπορούν να ελεγχθούν εύκολα αλλά όπως και στις άλλες υποθέσεις, αν έχουμε συμπεριλάβει τις σημαντικότερες ερμηνευτικές μεταβλητές, η μαθηματική μορφή της εξίσωσης είναι σωστή και δεν υπάρχουν σημαντικά σφάλματα μέτρησης, δεν έχουμε λόγο να πιστεύουμε στην παραβίαση αυτών (βλέπε Κιντή, 1982, σελ. 227).

Βέβαια, πρέπει να σημειώσουμε ότι η αντιμετώπιση της διερεύνησης ισχύος των υποθέσεων στα πλαίσια συστημάτων εξισώσεων με τη μέθοδο 2SLS, διαφέρει γενικά σε σχέση με τα υποδείγματα μιας μόνο εξίσωσης.

Έτσι η υπόθεση της ομοσκεδαστικότητας των διαταρακτικών όρων u_i, i=1,2,...,44, $E(u_i u_j) = \sigma_u^2$ για κάθε i=j δηλαδή η υπόθεση ότι η συνδιακύμανση δυο διαταρακτικών όρων που αναφέρονται στην ίδια μονάδα πληθυσμού είναι σταθερή και ίση με σ_u^2, ελέγχεται π.χ. με το test των Breusch και Pagan ειδικά εφαρμοσμένο για εκτιμήσεις 2SLS (βλέπε Wooldridge, 2004, σελ. 486). Σύμφωνα με αυτό εφαρμόζουμε γραμμική παλινδρόμηση με εξαρτημένη μεταβλητή το τετράγωνο των σωστών καταλοίπων του δεύτερου σταδίου και ανεξάρτητες όλες τις εξωγενείς μεταβλητές του συστήματος δηλαδή τις M_t και Z_t. Από την παραπάνω διαδικασία λαμβάνουμε το R^2 της παλινδρόμησης και έπειτα σχηματίζουμε τη στατιστική

$$F = \frac{R^2 / \kappa}{(1-R^2)(T-\kappa-1)}$$

όπου κ είναι το πλήθος των ερμηνευτικών μεταβλητών της παραπάνω παλινδρόμησης. Η στατιστική F κάτω από υπόθεση H_0 της ομοσκεδαστικότητας, ακολουθεί κατανομή Snedecor με κ και Τ-κ-1 βαθμούς ελευθερίας. Κατά τα γνωστά, αν $F > F_{\kappa,T-\kappa-1;0.05}$, τότε απορρίπτουμε την υπόθεση της ομοσκεδαστικότητας σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05.

Συγκεκριμένα για την 1η εξίσωση του συστήματος έχουμε ότι R^2=0.054 και

$$F = \frac{0.054/2}{(1-0.054)(44-2-1)} = 1.17$$

Γνωρίζοντας τώρα ότι $F_{2,41;0.05} = 3.23$, έχουμε ότι F=1.17 < $F_{2,41;0.05} = 3.23$ και άρα δεχόμαστε την υπόθεση της ομοσκεδαστικότητας των διαταρακτικών όρων.

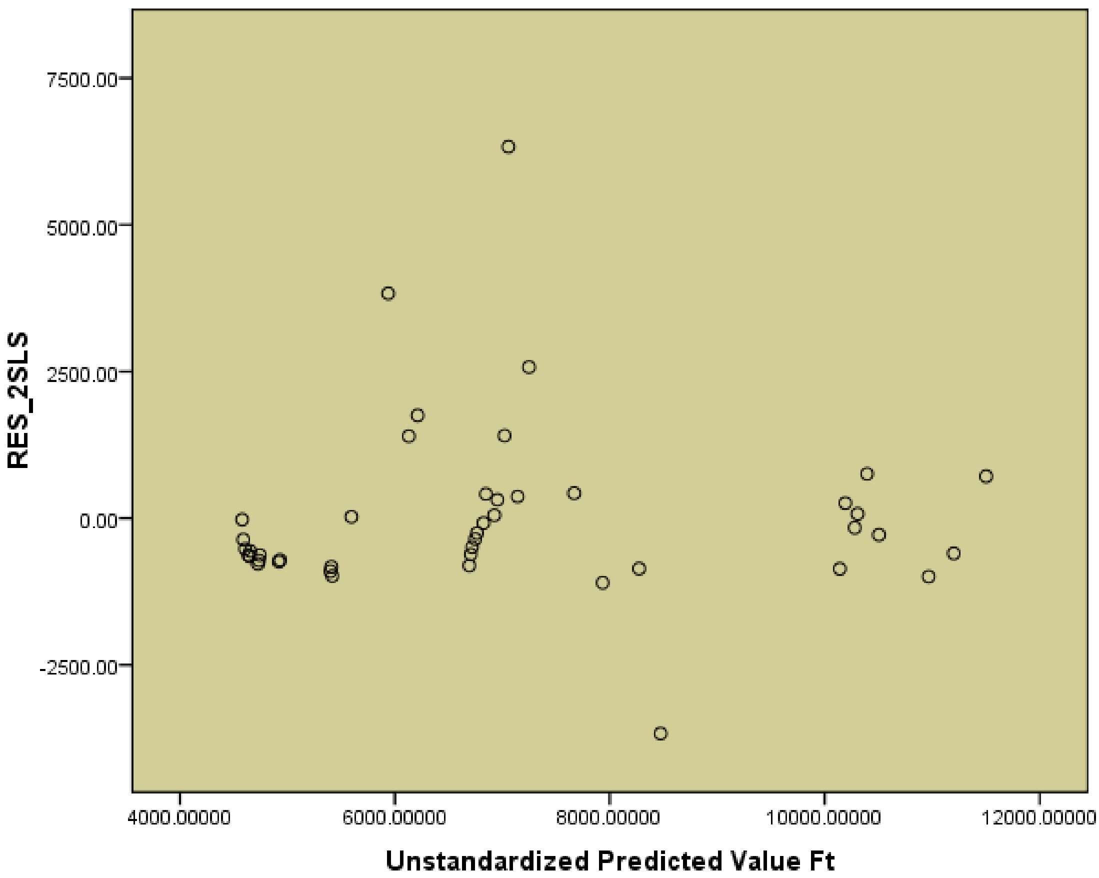
Σε περίπτωση που έχουμε ένδειξη μη ισχύος της υπόθεσης ομοσκεδαστικότητας, πρέπει να λάβουμε ιδιαίτερα μέτρα έτσι ώστε να αποκτήσουμε το επιθυμητό μοντέλο. Πρακτικά η ετεροσκεδαστικότητα υφίσταται όταν έχουμε διασπορά σε μια ή παραπάνω ανεξάρτητες μεταβλητές, όταν έχουμε διαστρωματικά δεδομένα, ή ακόμα όταν υπάρχουν παράγοντες που επιδρούν στην εξαρτημένη μεταβλητή και δεν τους λάβαμε υπόψη. Στην περίπτωση αυτή ο εκτιμητής $\hat{\beta}$ είναι συνεπής αλλά όχι BLUE για την παράμετρο β.

Για την ανίχνευση της ισχύος της υπόθεσης $E(u_i u_j) = 0$ για κάθε $i \neq j$ τόσο στην ίδια εξίσωση όσο και μεταξύ των δυο εξισώσεων, δηλαδή της υπόθεσης περί μη ύπαρξης αυτοσυσχέτισης ή καλύτερα περί μη συσχέτισης των διαταρακτικών όρων όπως συνηθίζεται να λέγεται στην περίπτωση των διαστρωματικών δεδομένων, δε λαμβάνουμε ιδιαίτερα μέτρα δεδομένης της φύσης των διαστρωματικών δεδομένων και της τάσης αυτών να μην εμφανίζουν αυτοσυσχέτιση.

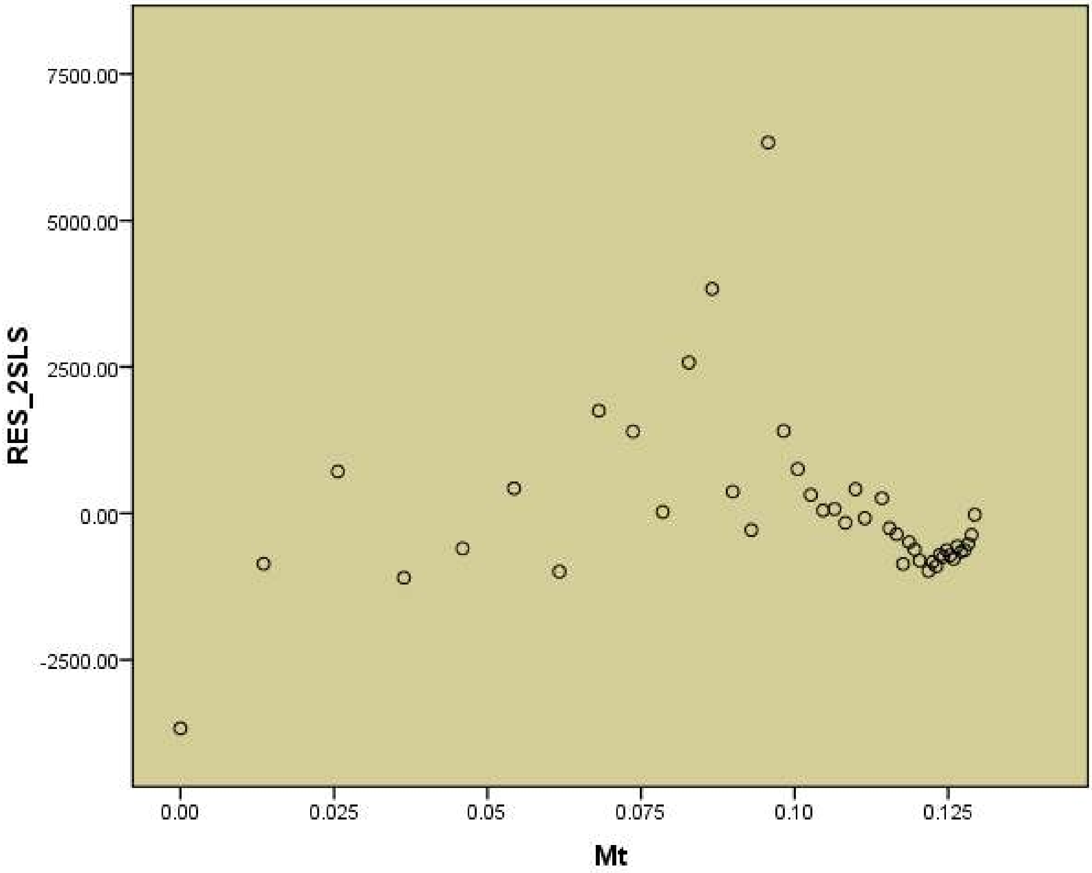
Η υπόθεση της γραμμικής ανεξαρτησίας των ανεξάρτητων μεταβλητών υποδηλώνει τη σημαντικότητα του προβλήματος της πολυσυγγραμμικότητας. Είναι ευνόητο ότι θα υπάρχει σίγουρα κάποιος βαθμός εξάρτησης μεταξύ των ανεξάρτητων μεταβλητών της εξίσωσης και το ερώτημα που προκύπτει είναι από τί ποσοστό εξάρτησης και άνω, μπορεί αυτό να αποδειχθεί επικίνδυνο για την αξιοπιστία των εκτιμήσεών μας. Γενικά στην οικονομετρική αρθρογραφία και βιβλιογραφία δεν έχει δοθεί μια κοινώς παραδεκτή λύση του προβλήματος της πολυσυγγραμμικότητας. Ένας απλός τρόπος είναι να υπολογίσουμε το συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των δυο ερμηνευτικών μεταβλητών που έχουμε στην εξίσωση $\hat{F}_t$ και M_t (αυτό ενδείκνυται μόνο στην περίπτωση αυτή που έχουμε δυο ερμηνευτικές μεταβλητές). Πρέπει να σημειωθεί ότι δε γίνεται χρήση της μεταβλητής F_t αλλά της $\hat{F}_t$, διότι με βάση την τελευταία λάβαμε τις 2SLS εκτιμήσεις. Έχουμε ότι το τετράγωνο του συντελεστή συσχέτισης είναι $r^2_{\hat{F}_t, M_t} = 0.29$. Ο Klein υποστήριξε (βλέπε Klein, 1962, σελ. 101), ότι αν το τετράγωνο του συντελεστή συσχέτισης δυο μεταβλητών είναι μικρότερο από το συντελεστή προσδιορισμού R^2, τότε η πολυσυγγραμμικότητα δεν αποτελεί ιδιαίτερο πρόβλημα. Στην εξίσωσή μας $r^2_{\hat{F}_t,M_t} = 0.29 < 0.8527 = R^2$ (για σχετικό τύπο του δειγματικού συντελεστή συσχέτισης, βλέπε Τσίμπο – Γεωργιακώδη, 2000, σελ. 106) οπότε αν δεχθούμε τον ισχυρισμό του Klein, δεν τίθεται θέμα πολυσυγγραμμικότητας (βλέπε Κιντή, 1982, σελ. 168).

Τέλος, όσον αφορά την ισχύ της βασικής υπόθεσης (ε), εξετάζουμε την μήτρα σχεδιασμού X που αποτελείται από m στήλες (όσες δηλαδή και οι παράμετροι της παλινδρόμησης) εκ των οποίων η πρώτη στήλη είναι μονάδες και οι υπόλοιπες m-1 αποτελούν τις τιμές των ερμηνευτικών μεταβλητών της εξίσωσης. Με την υπόθεση (ε) εξασφαλίζουμε ότι τα στοιχεία της μήτρας σχεδιασμού X είναι ανεξάρτητα ή τουλάχιστον ασυσχέτιστα με τα στοιχεία του διανύσματος του διαταρακτικού όρου. Αυτό όμως εξασφαλίζει ότι η κατανομή πιθανότητας της εξαρτημένης ενδογενούς μεταβλητής εξαρτάται αποκλειστικά από την κατανομή πιθανότητας του διαταρακτικού όρου, πράγμα το οποίο βεβαιώνει τη μονόδρομη σχέση αιτίας – αποτελέσματος από τις ανεξάρτητες μεταβλητές προς τις εξαρτημένες (βλέπε Κιντή, 1982, σελ. 61). Υποθέτουμε ότι η μήτρα X είναι σταθερή σε επαναλαμβανόμενα δείγματα και όχι τυχαία, παρόλο που η φύση των οικονομικών μεταβλητών υποδεικνύει γενικά το αντίθετο. Αυτό συμβαίνει, διότι θεωρούμε ότι λόγω της αντιπροσωπευτικότητας του δείγματος, αν λάβουμε επαναλαμβανόμενα δείγματα ασφαλισμένων ηλικιών 20 με 65, θα έχουμε περίπου τις ίδιες τιμές των ετών υπηρεσίας, πιθανοτήτων θνησιμότητας και μισθών. Άρα ισχυριζόμαστε ότι σε επαναλαμβανόμενα δείγματα ασφαλισμένων ηλικίας 20 με 65 η μήτρα σχεδιασμού X, που αποτελείται από τη στήλη των μονάδων και τα διανύσματα τιμών των $\hat{F}_t$ και M_t, θα είναι ουσιαστικά σταθερή.

Γενικά αν η X είναι τυχαία, τότε οι εκτιμήσεις μας παραμένουν συνεπείς και αμερόληπτες, αρκεί τα στοιχεία της μήτρας X να είναι ανεξάρτητα του διανύσματος του διαταρακτικού όρου, πράγμα που μπορεί να ανιχνευθεί με διαγράμματα των X_i με τα e_i (βλέπε Κιντή, 1982, σελ. 193). Πράγματι, σε περίπτωση που θεωρήσουμε ότι η X είναι τυχαία (και συνεπώς το αρχικό δείγμα δεν είναι αντιπροσωπευτικό) και λάβουμε το διάγραμμα διασποράς (scatter plot) των $\hat{F}_t$ και e_i (όπου e_i είναι τα τελικά residuals του δεύτερου σταδίου χρησιμοποιώντας τις παρατηρούμενες τιμές F_t), διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει κάποια συγκεκριμένη εξάρτηση συναρτησιακής μορφής που να τα συνδέει συνολικά:



Το αυτό συμβαίνει αν παρατηρήσουμε και το scatter plot των M_t και e_i:



Άρα θεωρούμε ότι σε κάθε περίπτωση οι εκτιμήσεις μας θα παραμείνουν αξιόπιστες.

4.2.2 Εξίσωση $2^η$

<u>2SLS εκτιμητές</u>

<u>$1^ο$ στάδιο</u>

Αρχικά, εκτιμούμε με τη συνήθη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (OLS) την εξίσωση:

$$C_t = d_0 + d_1 M_t + d_2 Z_t + u$$

Έχουμε :

$$\hat{C}_t = 13388.846 - 78047.311M_t + 0,285Z_t$$

Όπως είπαμε και στην 1η εξίσωση, αν η C_t εξαρτάται γραμμικά από την Z_t, τότε στη 2η εξίσωση του συστήματος θα έχουμε πολυσυγγραμμικότητα και συνεπώς παραβιάζεται η (στ) από τις βασικές υποθέσεις. Οπότε αν το υπόδειγμα είναι σωστό, το R^2 διαμορφώνεται κυρίως από τη γραμμική εξάρτηση των C_t και M_t. Εδώ, το R^2=0.588.

<u>2ο στάδιο</u>

Εκτιμούμε με τη συνήθη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (OLS) την εξίσωση:

$$F_t = b_1\hat{C}_t + b_2Z_t + \varepsilon$$

και λαμβάνουμε την:

$$\hat{F}_t = 0.725C_t + 0.537Z_t$$

<u>Στατιστική ανάλυση</u>

Τονίζουμε ξανά, ότι για να λάβουμε τις εκτιμήσεις της F_t, δηλαδή τις $\hat{F}_t$, πρέπει μετά το 2ο στάδιο να αντικατασταθούν οι εκτιμηθείσες τιμές του 1ου σταδίου $\hat{C}_t$ με τις πραγματικές C_t. Υπολογίζουμε κατά τα γνωστά τα σωστά Residuals και τον εκτιμητή της διασποράς του θορύβου $_2u_t$ της 2ης δομικής εξίσωσης του συστήματος (2.3) που δίνεται όπως και στην 1η εξίσωση από τον αντίστοιχο τύπο:

$$S_u^2 = \frac{\sum_t (F_t - \hat{F}_t)^2}{T - m}$$

όπου T είναι το πλήθος παρατηρήσεων και m το πλήθος παραμέτρων. Έτσι για να λάβουμε τις σωστές τιμές των τυπικών σφαλμάτων, πολλαπλασιάζουμε τις ληφθείσες τιμές των τυπικών σφαλμάτων του δεύτερου σταδίου με το λόγο S_u / S_ε, όπου S_ε είναι η εκτίμηση της τυπικής απόκλισης του διαταρακτικού όρου χρησιμοποιώντας τις εκτιμημένες τιμές $\hat{C}_t$ του πρώτου σταδίου.

Έχουμε:

$$S_u^2 = \frac{\sum_t (F_t - \hat{F}_t)^2}{T - m} = \frac{\sum_t (F_t - \hat{F}_t)^2}{44 - 2} = 4338965.386$$

$$\Rightarrow S_u = 2083.018$$

$$S_\varepsilon^2 = 10228457 \Rightarrow S_\varepsilon = 3198.196$$

$$\Rightarrow S_u / S_\varepsilon = 0.651$$

Συνεπώς, οι σωστές τυπικές αποκλίσεις των b_1 και b_2 είναι αντίστοιχα:

$$S_{\hat{b}_1} = (0.117)(0.651) = 0.076$$

$$S_{\hat{b}_2} = (0.205)(0.651) = 0.133$$

Επίσης έχουμε:

$$t_{\hat{b}_1} = \frac{\hat{b}_1}{S_{\hat{b}_1}} = \frac{0.725}{0.076} = 9.514$$

$$t_{\hat{b}_2} = \frac{\hat{b}_2}{S_{\hat{b}_2}} = \frac{0.537}{0.133} = 4.022$$

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση H_0: $b_i=0$, i=1,2, γνωρίζουμε ότι η $t_{\hat{b}_i}$ ακολουθεί την κατανομή Student με T-m βαθμούς ελευθερίας ή αλλιώς $t_{\hat{b}_i} \sim t_{T-m}$.

Για επίπεδο σημαντικότητας α=0.05 συγκρίνουμε τις ποσότητες $\left|\frac{\hat{b}_i - 0}{S_{\hat{b}_i}}\right|$, i=1,2, με την κριτική τιμή $t_{\alpha/2;T-m}$ της κατανομής Student.

Αν $\left|\frac{\hat{b}_i - 0}{S_{\hat{b}_i}}\right| > t_{\alpha/2;T-m}$ τότε απορρίπτουμε την H_0: $b_i=0$, i=1,2, δηλαδή δεχόμαστε ότι οι μεταβλητές (η κάθε μια ξεχωριστά) που χρησιμοποιούμε για την εκτίμηση της F_t είναι στατιστικά σημαντικές.

Αν θέλουμε να κάνουμε στατιστικό έλεγχο της μορφής H_0: $b_1=b_2=0$, αυτό επιτυγχάνεται ως γνωστό με τη στατιστική F και ουσιαστικά ελέγχουμε αν η F_t μεταβάλλεται σημαντικά όταν οι ανεξάρτητες μεταβλητές μεταβάλλονται συγχρόνως.

Κάτω από την υπόθεση H_0 : $b_1=b_2=0$, γνωρίζουμε ότι:

$$F = \frac{SSR/(m-1)}{SSE/(T-m)} \sim F_{m-1,T-m}$$

όπου $SSR = \sum_t (\hat{F}_t - \bar{F}_t)$ και $SSE = \sum_t (F_t - \hat{F}_t)$. Για επίπεδο σημαντικότητας α=0.05 συγκρίνουμε την ποσότητα F με την κριτική τιμή $F_{2,42;0.05}$ της κατανομής Snedecor. Αν $F > F_{2,42;0.05}$ τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0 δηλαδή δεχόμαστε ότι οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι συνολικά σημαντικές στη διαμόρφωση των τιμών της F_t. Συνολικά έχουμε:

$$\left|t_{\hat{b}_1}\right| = 9.514 > 2.02 = t_{0.025;42}$$

$$\left|t_{\hat{b}_2}\right| = 4.022 > 2.02 = t_{0.025;42}$$

Άρα απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0 και στις δύο περιπτώσεις.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, επειδή δεν υπάρχει σταθερός όρος, ο συντελεστής προσδιορισμού R^2 δεν έχει τη συνήθη σημασία του κι έτσι καταφεύγουμε σε άλλες μεθόδους (βλέπε Λαζαρίδη, 2002, σελ. 322-325). Για την περίπτωση αυτή και προκειμένου να έχουμε μια εικόνα σε τι ποσοστό η παλινδρόμηση ερμηνεύει τη συνολική μεταβλητικότητα της εξαρτημένης μεταβλητής F_t και γενικότερα για την καλή προσαρμογή του μοντέλου μας, οι Murphy (1973), Theil (1975) και οι Pindyck και Rubinfeld (1981) προτείνουν τον παρακάτω δείκτη (βλέπε Λαζαρίδη, 2002, σελ. 306):

$$U = \frac{RMSE}{\sqrt{\frac{1}{T}\sum_t \hat{F}_t^2} + \sqrt{\frac{1}{T}\sum_t F_t^2}}$$

όπου

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_t (\hat{F}_t - F_t)^2}$$

και άρα έχουμε:

$$U = \frac{2035.126}{7343.539 + 7818.99} = 0.1342$$

Γενικά, όσο πιο κοντά βρίσκεται αυτός ο δείκτης στο μηδέν, τόσο καλύτερη προσαρμογή έχει το μοντέλο. Η τιμή U=0.134 είναι σχετικά κοντά στο μηδέν και συνεπώς δεν υπάρχει λόγος να δεχτούμε ότι το μοντέλο δεν έχει καλή προσαρμογή.

Τα διαστήματα εμπιστοσύνης σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05 για τις παραμέτρους b_i, i=1,2 έχουν ως εξής:

$$(\hat{b}_i - t_{\alpha/2} s_{\hat{b}_i},\ \hat{b}_i + t_{\alpha/2} s_{\hat{b}_i})$$

Έχουμε:

ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο b_1 είναι το $(\hat{b}_1 - t_{\alpha/2} s_{\hat{b}_1},\ \hat{b}_1 + t_{\alpha/2} s_{\hat{b}_1})$ ή το $(0.571,\ 0.879)$

και ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο b_2 είναι το $(\hat{b}_2 - t_{\alpha/2} s_{\hat{b}_2},\ \hat{b}_2 + t_{\alpha/2} s_{\hat{b}_2})$ ή το $(0.267,\ 0.807)$.

Έλεγχος ισχύος των βασικών υποθέσεων της 2ης εξίσωσης

Αρχικά θα ερευνήσουμε την κανονικότητα του διαταρακτικού όρου μέσω των Residuals. Έχουμε:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{T - m}$$

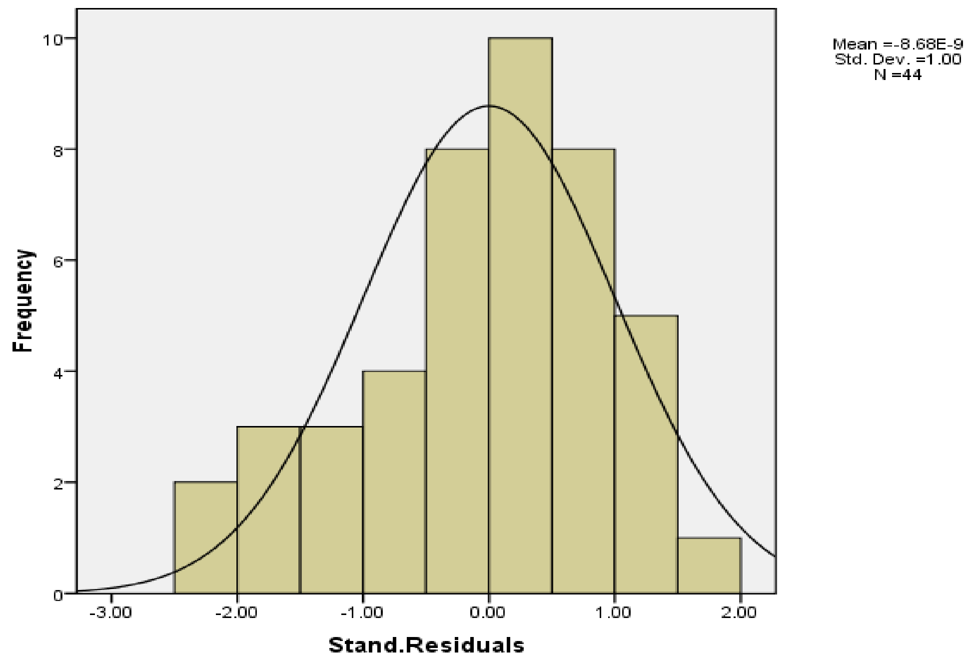
όπου T=44, m=2, i=1,2,…,44 με $\hat{\sigma}^2$=4338965.386 και $\hat{\sigma}$=2083.018. Υπολογίζουμε τη στήλη $e_i/\hat{\sigma}$ και αναμένουμε περίπου δύο παρατηρήσεις να είναι εκτός του διαστήματος (-1.96, 1.96). Μόνο μια παρατήρηση βρίσκεται εκτός του διαστήματος αυτού. Επειδή δε μας ικανοποιεί αυτό το αποτέλεσμα σε βαθμό που να έχουμε έντονη ένδειξη για κανονικότητα του διαταρακτικού όρου θα εφαρμόσουμε το test των Kolmogorov – Smirnov για την κανονική κατανομή. Με τη χρήση του SPSS λαμβάνουμε τον ακόλουθο πίνακα:

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

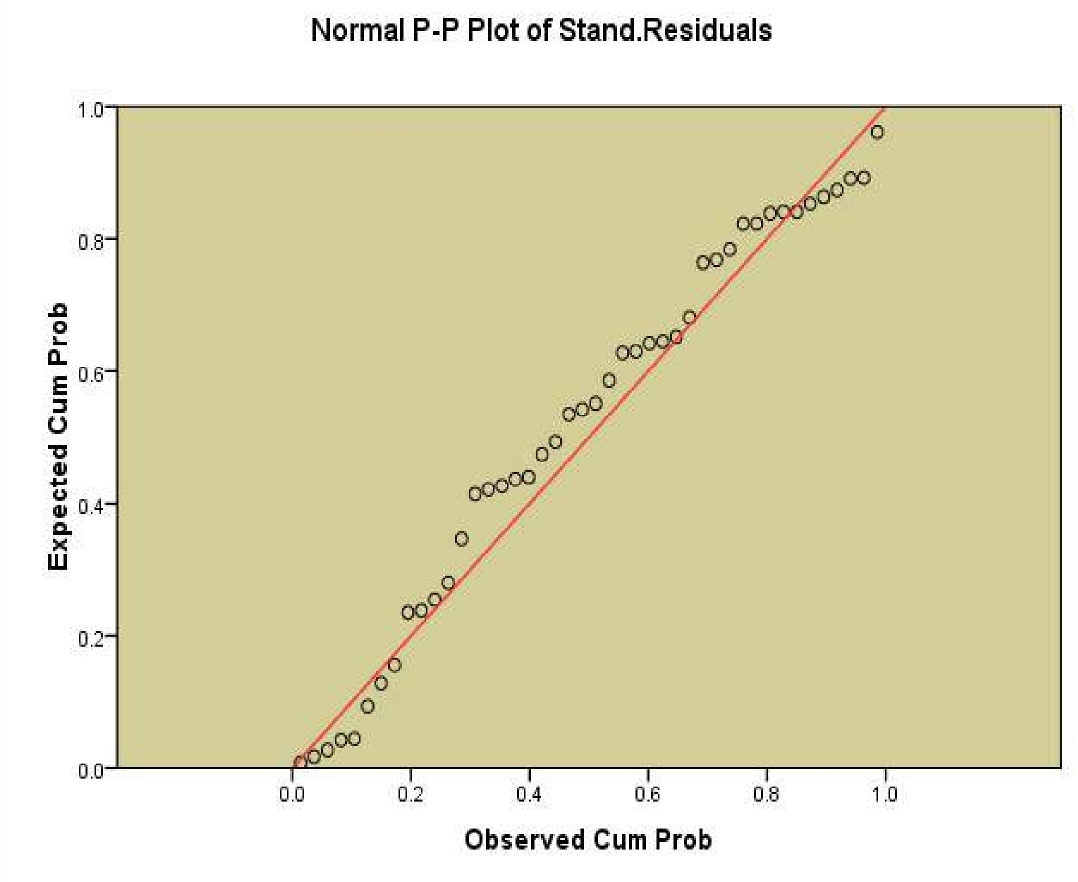
		RES_2SLS_Ft
N		44
Normal Parameters[a]	Mean	705.9469
	Std. Deviation	1930.83102
Most Extreme Differences	Absolute	.119
	Positive	.085
	Negative	-.119
Kolmogorov-Smirnov Z		.790
Asymp. Sig. (2-tailed)		.561

a. Test distribution is Normal.

Το p-value=0.561 > 0.05=α. Άρα δεχόμαστε την υπόθεση H_0 , δηλαδή δεχόμαστε την υπόθεση ότι τα Residuals κατανέμονται κανονικά. Προς αυτή την κατεύθυνση συνηγορεί και το ιστόγραμμα των Residuals ή των Standardized Residuals. Παρακάτω, παραθέτουμε το ιστόγραμμα των τυποποιημένων παρατηρούμενων σφαλμάτων:



Παρατηρούμε ότι οι τιμές των Standardized Residuals σχηματίζουν τη μορφή της κανονικής κατανομής πλην όμως υπάρχει αρνητική ασυμμετρία. Αυτό μπορεί να διαπιστωθεί και από την τιμή του συντελεστή ασυμμετρίας (skewness) που είναι -0.659. Ακόμα, για την έρευνα της κανονιικότητας των Residuals θα μπορούσαμε να σχηματίσουμε το P-P plot των Standardized Residuals με αντίστοιχη θεωρητική κατανομή την τυπική κανονική N(0,1) που θα μας οδηγούσε στο ίδιο συμπέρασμα, δηλαδή την αποδοχή της κανονικότητας των Residuals:



Για την υπόθεση της μηδενικής μέσης τιμής του διαταρακτικού όρου έχουμε ότι $E(e_i) = 705.94$. Όμως επειδή δεν έχουμε σταθερό όρο, αναμένουμε γενικά ότι $E(e_i) \neq 0$ (βλέπε Λαζαρίδη, 2002, σελ. 324).

Για τον έλεγχο της ετεροσκεδαστικότητας, θα εφαρμόσουμε όπως και στην 1^{η} εξίσωση το test των Breusch και Pagan για 2SLS εκτιμήσεις. Σύμφωνα με αυτό εφαρμόζουμε γραμμική παλινδρόμηση με εξαρτημένη μεταβλητή το τετράγωνο των σωστών καταλοίπων του δεύτερου σταδίου και ανεξάρτητες όλες τις εξωγενείς μεταβλητές του συστήματος δηλαδή τις M_t και Z_t. Από την παραπάνω διαδικασία λαμβάνουμε το R^2 της παλινδρόμησης και έπειτα σχηματίζουμε τη στατιστική

$$F = \frac{R^2 / \kappa}{(1 - R^2)(T - \kappa - 1)}$$

όπου κ είναι το πλήθος των ερμηνευτικών μεταβλητών της παραπάνω παλινδρόμησης. Η στατιστική F κάτω από υπόθεση H_0 της ομοσκεδαστικότητας, ακολουθεί κατανομή Snedecor με κ και T-κ-1 βαθμούς ελευθερίας. Κατά τα γνωστά, αν $F > F_{\kappa, T-\kappa-1; 0.05}$, τότε απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση H_0, δηλαδή την υπόθεση της ομοσκεδαστικότητας σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05.

Συγκεκριμένα για την 2^{η} εξίσωση έχουμε ότι R^2=0.111 και η τιμή της στατιστικής F είναι:

$$F = \frac{0.111/2}{(1 - 0.111)(44 - 2 - 1)} = 2.559$$

Γνωρίζοντας τώρα ότι $F_{2,41;0.05} = 3.23$, έχουμε ότι $F=2.559 < F_{2,41;0.05} = 3.23$ και άρα δεχόμαστε την υπόθεση της ομοσκεδαστικότητας των διαταρακτικών όρων.

Για την ανίχνευση της ισχύος της υπόθεσης $E(u_i u_j) = 0$ για κάθε $i \neq j$ τόσο στην ίδια εξίσωση όσο και μεταξύ των δυο εξισώσεων (που αναφέρονται δηλαδή σε διαφορετικά άτομα), δηλαδή της υπόθεσης περί μη συσχέτισης των διαταρακτικών όρων τόσο στην ίδια εξίσωση όσο και μεταξύ των δύο εξισώσεων, ισχύουν τα όσα γράφηκαν για την 1η εξίσωση.

Όσον αφορά την ισχύ της βασικής υπόθεσης (ε), υποθέτουμε ότι η μήτρα X είναι σταθερή σε επαναλαμβανόμενα δείγματα και όχι τυχαία, όπως ακριβώς υποθέσαμε και στην 1η εξίσωση.

Τέλος, για την υπόθεση μη ύπαρξης πολυσυγγραμμικότητας έχουμε ότι $r^2_{\hat{C}_t,Z_t} = 0.328$ (χρησιμοποιούμε τιμές της $\hat{C}_t$ και όχι αυτές της C_t, γιατί με αυτόν τον τρόπο λαμβάνουμε υπόψη μας την αλληλεξάρτηση των ενδογενών μεταβλητών του συστήματος). Αν λάβουμε υπόψη το συντελεστή U που υπολογίσαμε για την έρευνα καλής προσαρμογής της 2ης εξίσωσης, αντικαθιστώντας το R^2, θεωρούμε ότι η προσαρμογή της συγκεκριμένης εξίσωσης ανέρχεται σε ποσοστό μεγαλύτερο της τιμής του $r^2_{\hat{C}_t,Z_t}$. Άρα δε θεωρούμε ότι η γραμμική εξάρτηση των $\hat{C}_t$ και Z_t επηρεάζει την αξιοπιστία των εκτιμήσεών μας.

5. Αξιολόγηση Μοντέλου

5.1 Έλεγχος προβλεπτικής ικανότητας του μοντέλου

5.1.1 Ex post προβλέψεις

Αρχικά, ενώ είχαμε 46 παρατηρήσεις, χρησιμοποιήσαμε για την εκτίμηση του μοντέλου μόνο 44 από αυτές και παραλείψαμε 2 από τις αρχικές παρατηρήσεις, την 15^{η} και την 23^{η}, για να διαπιστώσουμε κατά πόσο οι προβλέψεις που λάβαμε από το εκτιμημένο μοντέλο είναι κοντά στις παρατηρούμενες. Οι εκτιμήσεις που λαμβάνουμε για τις δύο αυτές παρατηρήσεις χρησιμοποιώντας το εκτιμημένο μοντέλο λέγονται ex post προβλέψεις, διότι οι ανεξάρτητες μεταβλητές που χρησιμοποιούνται σε κάθε εξίσωση περιέχουν τιμές που ήδη έχουν παρατηρηθεί. Επειδή οι παρατηρούμενες τιμές των ενδογενών μεταβλητών C_t και F_t καθώς αυξάνεται η ηλικία έχουν γενικά ανοδική τάση, θεωρήθηκε πιο αντιπροσωπευτικό να εξαιρεθούν για τους σκοπούς πρόβλεψης δύο τιμές περί το κέντρο του πεδίου τιμών των μεταβλητών αυτών. Έτσι, δεδομένου του εκτιμημένου μοντέλου, έχουμε:

$$\hat{C}_{15} = 10606,236 + 0,429 F_{15} - 71707,599 M_{15} \qquad (4.1)$$

Γνωρίζουμε από την ανάλυση παλινδρόμησης ότι η $\hat{C}_{15}$ είναι η BLUE εκτίμηση της αναμενόμενης τιμής της C_{15} δεδομένων των τιμών των F_{15} και M_{15}. Επειδή όμως εμείς θεωρούμε τη $\hat{C}_{15}$ σαν εκτίμηση της C_{15} και όχι της $E(C_{15})$ κάνουμε το λεγόμενο σφάλμα πρόβλεψης f_{15}, όπου $f_{15} = \hat{C}_{15} - C_{15}$. Η τυπική απόκλιση του σφάλματος f_{15} δίνεται από τον τύπο:

$$Sd(f_{15}) = s \cdot sqrt(1+\begin{bmatrix}1 & F_{15} & M_{15}\end{bmatrix}(X'X)^{-1}\begin{bmatrix}1 \\ F_{15} \\ M_{15}\end{bmatrix}) \tag{4.2}$$

(βλέπε Λαζαρίδη, 2002, σελ. 284), όπου s είναι ο αμερόληπτος εκτιμητής της τυπικής απόκλισης των τιμών του διαταρακτικού όρου της 1ης εξίσωσης και

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ F_1 & F_2 & ... & F_{44} \\ M_1 & M_2 & ... & M_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & F_1 & M_1 \\ 1 & F_2 & M_2 \\ ... & ... & ... \\ 1 & F_{44} & M_{44} \end{bmatrix}$$

Τα άκρα ενός 95% διάστήματος εμπιστοσύνης για την C_{15} βρίσκονται ως εξής:

$$\hat{C}_{15} \pm Sd(f_{15})t_{\alpha/2;T-m} \tag{4.3}$$

όπου T=44 και m=3.

Για να ελέγξουμε την μηδενική υπόθεση H_0 ότι δεν υπάρχει σημαντική διαφορά πραγματικής και εκτιμώμενης τιμής έναντι της εναλλακτικής H_1 ότι υπάρχει σημαντική διαφορά, συγκρίνουμε τις ποσότητες $\left|\frac{\hat{C}_{15} - C_{15}}{Sd(f_{15})}\right|$ και $t_{\alpha/2;T-m}$. Αν $\left|\frac{\hat{C}_{15} - C_{15}}{Sd(f_{15})}\right| > t_{\alpha/2;T-m}$,τότε σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05 απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0 υπέρ της H_1.

Έχουμε:

$$X'X = \begin{bmatrix} 44 & 310594.04 & 4.327 \\ 310594.4 & 2690010653 & 28922.937 \\ 4.327 & 28922.937 & 0.474 \end{bmatrix}$$

Βρίσκοντας την $\det(X'X)$ και την $\mathrm{adj}(X'X)$ λαμβάνουμε:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.468 & 0 & -2.845 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2.845 & 0 & 23.437 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζοντας τους τύπους (4.1) και (4.2) για $F_{15} = 6930.287$ και $M_{15} = 0.121$ έχουμε:

$$\hat{C}_{15} = 10606.236 + (0.429)(6930.287) - (71707.599)(0.121) = 4894.894$$

$$Sd(f_{15}) = 1528.209\,\mathrm{sqrt}(1 + 0.428) = 1826.418$$

$$\left|\frac{\hat{C}_{15} - C_{15}}{Sd(f_{15})}\right| = \left|\frac{4894.894 - 3912.666}{1826.418}\right| = 0.537$$

Επίσης, $t_{0.025;41}$=2.02. Άρα δεχόμαστε την υπόθεση H_0, δηλαδή ότι η διαφορά πραγματικής τιμής C_{15} και εκτιμώμενης τιμής $\hat{C}_{15}$ δεν είναι σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05.

Ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την C_{15} εφαρμόζοντας την (4.3) είναι το $(1205.529,\ 8584.259)$. Αντίστοιχα, για την παρατήρηση 23 έχουμε:

$F_{23} = 9464.753$, $M_{23} = 0.113$, $Sd(f_{23}) = 1143.558$ και $\hat{C}_{23} = 6572.261$.

Άρα, $\left|\frac{\hat{C}_{23} - C_{23}}{Sd(f_{23})}\right| = 0.225 < 2.02 = t_{0.025;41}$ και συνεπώς δεχόμαστε την υπόθεση H_0 ότι η διαφορά πραγματικής τιμής C_{23} και εκτιμώμενης τιμής $\hat{C}_{23}$ δεν είναι σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05.

Ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την C_{23} εφαρμόζοντας ανάλογα την (4.3) είναι το $(4262.272,\ 8882.25)$.

Όσον αφορά τις $\hat{F}_{15}$ και $\hat{F}_{23}$ δεδομένου του εκτιμημένου μοντέλου, έχουμε:

$$\hat{F}_{15} = 0.725C_{15} + 0.537Z_{15} \tag{4.4}$$

Η τυπική απόκλιση του σφάλματος f_{15} δίνεται από τον τύπο:

$$Sd(f_{15}) = s \cdot sqrt(1 + \begin{bmatrix} C_{15} & Z_{15} \end{bmatrix} (X'X)^{-1} \begin{bmatrix} C_{15} \\ Z_{15} \end{bmatrix}) \tag{4.5}$$

όπου s είναι τώρα αντίστοιχα ο αμερόληπτος εκτιμητής της τυπικής απόκλισης των τιμών του διαταρακτικού όρου της 2ης εξίσωσης και η μήτρα $X'X$ υπολογίζεται ως εξής:

$$X'X = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_{44} \\ Z_1 & Z_2 & \dots & Z_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & Z_1 \\ C_2 & Z_2 \\ \dots & \dots \\ C_{44} & Z_{44} \end{bmatrix}$$

Τα άκρα ενός 95% διαστήματος εμπιστοσύνης για την F_{15} βρίσκονται ως εξής:

$$\hat{F}_{15} \pm Sd(f_{15}) t_{\alpha/2;T-m} \tag{4.6}$$

όπου T=44, m=2.

Για να ελέγξουμε την μηδενική υπόθεση H_0 ότι δεν υπάρχει σημαντική διαφορά πραγματικής και εκτιμώμενης τιμής έναντι της εναλλακτικής H_1 ότι υπάρχει σημαντική διαφορά, συγκρίνουμε τις ποσότητες $\left| \dfrac{\hat{F}_{15} - F_{15}}{Sd(f_{15})} \right|$ και $t_{\alpha/2;T-m}$.

Αν $\left|\dfrac{\hat{F}_{15}-F_{15}}{Sd(f_{15})}\right| > t_{\alpha/2;T-m}$,τότε σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05 απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0 υπέρ της H_1.

Έχουμε:

$$X'X = \begin{bmatrix} 2564013745 & 1057015159 \\ 1057015159 & 700692626 \end{bmatrix}$$

Βρίσκοντας την $\det(X'X)$ και την $\operatorname{adj}(X'X)$ λαμβάνουμε:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζοντας τους τύπους (4.4) και (4.5) για $C_{15} = 3912.666$ και $Z_{15} = 2980.958$ έχουμε:

$$\hat{F}_{15} = 4437.457$$

$$Sd(f_{15}) = s = 2083.018$$

$$\left|\frac{\hat{F}_{15}-F_{15}}{Sd(f_{15})}\right| = \left|\frac{4437.457-6930.287}{2083.018}\right| = 1.196$$

Επίσης, $t_{0.025;42}$ =2,02. Άρα δεχόμαστε την υπόθεση H_0, ότι η διαφορά πραγματικής τιμής F_{15} και εκτιμώμενης τιμής $\hat{F}_{15}$ δεν είναι σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05.

Ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την F_{15} εφαρμόζοντας την (4.6) είναι το $(229.760,\ 8645.153)$. Αντίστοιχα, για την παρατήρηση 23 έχουμε:

$C_{23} = 6829.948$, $Z_{23} = 2980.958$, $Sd(f_{23}) = s = 2083.018$ και $\hat{F}_{23} = 6552.486$.

Άρα, $\dfrac{\hat{F}_{23} - F_{23}}{Sd(f_{23})} = 1.398 < 2.02 = t_{0.025;42}$ και συνεπώς δεχόμαστε την υπόθεση H_0 ότι η διαφορά πραγματικής τιμής F_{23} και εκτιμώμενης τιμής $\hat{F}_{23}$ δεν είναι σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05.

Ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την F_{23} εφαρμόζοντας ανάλογα την (4.6) είναι το $(2344.79,\ 10760.183)$.

5.1.2 Ex ante προβλέψεις

Με την παραπάνω διαδικασία που αναλύθηκε στην παράγραφο 5.1.1, διαπιστώσαμε με βάση τις τιμές που είχαμε εξαιρέσει από την αρχή, ότι το μοντέλο μας, δίνει ικανοποιητικές προβλέψεις. Πρέπει όμως να εξετάσουμε την περίπτωση των προβλέψεων του μοντέλου, στην οποία χρησιμοποιούμε ως τιμές ανεξάρτητων μεταβλητών τιμές οι οποίες δεν έχουν ακόμα παρατηρηθεί και είναι εκτιμήσεις των πραγματικών τιμών που θα λάβουν οι μεταβλητές αυτές. Οι προβλέψεις αυτές ονομάζονται ex ante προβλέψεις, διότι ακριβώς γίνονται πριν αποκτήσουμε τις πραγματικές παρατηρούμενες τιμές των μεταβλητών.
Αν είχαμε χρονολογικές σειρές, προφανώς θα μας ενδιέφερε να κάνουμε πρόβλεψη για τα επόμενα χρόνια. Κάτι τέτοιο θα συνέβαινε εάν είχαμε τιμές συνολικών μεγεθών κάποιου ταμείου για μια σειρά ετών και ενδιαφερόμαστε για προβλέψεις επόμενων ετών. Στην περίπτωσή μας, για να εκτιμήσουμε το μοντέλο χρησιμοποιήσαμε διαστρωματικά στοιχεία (παρατηρήσεις) ατόμων ηλικίας 20 με 65 ετών μιας συγκεκριμένης χρονιάς και συνεπώς δεν έχει νόημα να γίνει κάποια πρόβλεψη για άτομα μεγαλύτερης ηλικίας των 65 ετών. Ομοίως, δε θα είχε νόημα με παρατηρήσεις ατόμων π.χ. 20 με 50 ετών, να εκτιμήσουμε

αντίστοιχες τιμές για άτομα 51 έως 65 ετών. Το ερώτημα που προκύπτει, είναι κατά πόσον και πότε το μοντέλο μας, μπορεί να δώσει ικανοποιητικές προβλέψεις για παρόμοια δείγματα στο χρόνο τ (και πιθανότατα με κάποιες τροποποιήσεις σε χρονική στιγμή μετά το τ) ή για το ίδιο δείγμα σε χρονική στιγμή μετά το τ ή ακόμα για ολόκληρο το ταμείο (όσον αφορά τους άνδρες) σε διάφορους χρόνους. Κάτι τέτοιο, δεδομένης της τυχαιότητας που χαρακτηρίζει τα ασφαλιστικά μεγέθη σε ένα σύστημα καθορισμένων εισφορών και δεδομένης κατά συνέπεια της αβεβαιότητας για το ύψος των παροχών, θα είχε εξαιρετικό ενδιαφέρον, μιας και θα μπορούσε το ταμείο προβλέποντας αυτά τα μεγέθη, να διευκολύνει τον οικονομικό του προγραμματισμό, αλλά και οι ασφαλισμένοι να μπορούν να γνωρίζουν με κάποια απόκλιση, την πορεία του ατομικού τους λογαριασμού.

Δε θα ήταν παράλογο να ισχυριστούμε ότι το μοντέλο που εκτιμήσαμε, μπορεί να χρησιμοποιηθεί τουλάχιστον για την εκτίμηση βραχυχρόνιων μελλοντικών προβλέψεων των ενδογενών μας μεταβλητών (με την έννοια, ότι για μικρά διαστήματα, συνήθως δεν έχουμε σημαντικές κοινωνικοοικονομικές αλλαγές κι έτσι η ισχύς του μοντέλου που εκτιμήσαμε παραμένει σχετικά αμετάβλητη). Το μοντέλο, για το σκοπό αυτό, θα μπορούσε να τροποποιηθεί στην ανηγμένη του μορφή ως εξής:

$$\begin{aligned} \hat{C}_t' &= \hat{\pi}_{11}\hat{X}_t' + \hat{\pi}_{21}\hat{M}_t' + \hat{\pi}_{31}\hat{Z}_t' + {}_1V_t' \\ \hat{F}_t' &= \hat{\pi}_{11}\hat{X}_t' + \hat{\pi}_{21}\hat{M}_t' + \hat{\pi}_{31}\hat{Z}_t' + {}_1V_t' \end{aligned} \qquad (4.7)$$

όπου ο τόνος στις μεταβλητές, υποδηλώνει ότι αυτές αναφέρονται στον κατ’επιλογή μελλοντικό χρόνο.

Καταρχήν, όπως βλέπουμε στην ανηγμένη μορφή (4.7), χρειάζεται να λάβουμε τις εκτιμήσεις των εξωγενών μεταβλητών για το μέλλοντα χρόνο. Οι μελλοντικές εκτιμήσεις των εξωγενών μεταβλητών, δηλαδή οι μελλοντικές εκτιμήσεις των μεταβλητών M_t και Z_t, διαμορφώνονται εύκολα, διότι για τον υπολογισμό τους, αρκούν η ηλικία και τα έτη υπηρεσίας των ασφαλισμένων του ταμείου αντίστοιχα, σε συγκεκριμένη μελλοντική χρονική στιγμή. Ακόμα, επειδή στο μοντέλο που εκτιμήσαμε, συμπεριλάβαμε όλες τις ηλικίες από 20 μέχρι 65 έτη, αν εκτιμήσουμε τις τιμές των εξωγενών μεταβλητών για όλους τους ασφαλισμένους του ταμείου για συγκεκριμένη μελλοντική χρονική στιγμή (σε έτη), καθώς επίσης και τις εκτιμήσεις των αντίστοιχων διαταρακτικών όρων όπως θα αναφέρουμε παρακάτω, θα είναι εφικτό, ανάλογα βέβαια και με το συνολικό δυναμικό του ταμείου, να λάβουμε προβλέψεις των αντίστοιχων ενδογενών μεταβλητών.

Επίσης, από την ανηγμένη μορφή (4.7), βλέπουμε ότι χρειάζεται να λάβουμε και τις εκτιμήσεις των αντίστοιχων διαταρακτικών όρων που ονομάζονται στη βιβλιογραφία προσθετικοί παράγοντες. Οι προσθετικοί παράγοντες μπορούν να θεωρηθούν ως προσαρμογές των σταθερών όρων σε κάθε μια από τις εξισώσεις ανηγμένης μορφής και ουσιαστικά είναι υποκειμενικές κρίσεις για παράγοντες και παραμέτρους που υπεισέρχονται επιπρόσθετα στο διάστημα της πρόβλεψης και δεν τα έχουμε λάβει υπόψη (βλέπε Intriligator, 1992, σελ. 111).
Για παράδειγμα, μετά από ένα διάστημα μεγαλύτερο των δέκα ετών, οι πίνακες θνησιμότητας θα έχουν αλλάξει, με αποτέλεσμα οι τιμές της μεταβλητής M_t για τις ίδιες ηλικίες, να έχουν υποστεί μεταβολή και έτσι το μοντέλο που εκτιμήθηκε με βάση τις παλιές τιμές της M_t, να μην έχει ισχύ.
Ακόμα, θα μπορούσαμε να εκτιμήσουμε, βάση πληροφοριών ή οικονομικής πολιτικής, ότι στο διάστημα που θα μεσολαβήσει μέχρι την πρόβλεψη, θα έχουμε μεγάλη αύξηση του πληθωρισμού, με αποτέλεσμα να έχουμε μεταβολή στα επιτόκια και γενικά στις αποδόσεις, αλλά και στους μισθούς. Είναι προφανές, ότι και στην περίπτωση αυτή, το μοντέλο που εκτιμήθηκε με βάση τις παλιές τιμές των μεγεθών που εκτιμάται ότι θα υποστούν μεταβολή, δε θα έχει ισχύ, με συνέπεια μετά το πέρας των μεταβολών αυτών, να υπάρξει απόκλιση παρατηρούμενων και εκτιμώμενων τιμών.
Όπως γίνεται εύκολα κατανοητό, οι υποκειμενικές κρίσεις για παράγοντες και παραμέτρους που υπεισέρχονται επιπρόσθετα στο διάστημα της πρόβλεψης και οι οποίες απεικονίζονται στις εκτιμήσεις των αντίστοιχων διαταρακτικών όρων, είναι πολύπλοκη συνάρτηση πολλών παραγόντων και κυρίως έγκυρων

πληροφοριών που αφορούν συγκεκριμένες μεταβολές μεγεθών. Γι αυτό το λόγο, στις περιπτώσεις αυτές και κυρίως όταν πρόκειται για οικονομετρικά υποδείγματα σημαντικών μεγεθών της οικονομίας, απαιτείται η συνεργασία ερευνητών, πολλών ειδικών επιστημόνων αλλά και πολιτικών.

Να σημειωθεί ότι οι εκτιμήσεις των συντελεστών της ανηγμένης μορφής (4.7), είναι οι εκτιμήσεις των συντελεστών της αρχικής ανηγμένης μορφής, που προκύπτουν άμεσα από τις εκτιμήσεις του μοντέλου μας.

Τέλος, ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η ακρίβεια με την οποία γίνονται αυτές οι προβλέψεις. Αποδεικνύεται, ότι η ακρίβεια αυτή είναι ουσιαστικά συνάρτηση των σφαλμάτων εκτίμησης των συντελεστών ανηγμένης μορφής, των σφαλμάτων πρόβλεψης των εξωγενών μεταβλητών του μελλοντικού χρόνου και των σφαλμάτων στους διαταρακτικούς όρους που ενέχουν κυρίως οικονομικές μεταβολές (βλέπε Intriligator, 1992, σελ. 116 -117).
Είναι σαφές, ότι η λήψη ικανοποιητικών προβλέψεων είναι συνδυασμός όλων των παραπάνω, η υλοποίηση των οποίων ξεφεύγει από τα όρια της εργασίας αυτής. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να επαναλάβουμε τη διαδικασία εκτίμησης του μοντέλου ταυτόχρονων εξισώσεων μετά την μεταβολή σημαντικών μεγεθών, έτσι ώστε αυτές οι μεταβολές να συμπεριληφθούν στις εκτιμήσεις μας.

6. Επεκτάσεις – Συμπεράσματα

6.1 Επεκτάσεις με βάση τη μεθοδολογία εύρεσης μοντέλου

Γενικά, η εύρεση κατάλληλου μοντέλου ταυτόχρονων εξισώσεων που θα εξυπηρετεί τους στόχους μας και θα ερμηνεύει ικανοποιητικά το φαινόμενο που εξετάζουμε, είναι μια διαδικασία αρκετά επίπονη, χρονοβόρα και αρκετές φορές σε περίπτωση μεγάλων ερευνών, πολύ κοστοφόρα. Αυτό συμβαίνει διότι στη διαδικασία εύρεσης του ιδανικού κάθε φορά μοντέλου υπεισέρχονται πολλές παράμετροι αλλά και συνθήκες οι οποίες πρέπει να πληρούνται. Κατά συνέπεια, κρίνεται σκόπιμο να μπορεί να αναπτυχθεί μια μεθοδολογία την οποία ακολουθώντας ο ερευνητής, να βρίσκει το επιθυμητό μοντέλο ελαχιστοποιώντας κυρίως τη διάρκεια και το κόστος. Στα πλαίσια αυτής της εργασίας, προσπαθήσαμε να χαράξουμε ένα δρόμο, τον οποίο και ακολουθήσαμε για την εύρεση του επιθυμητού μοντέλου, οι βασικές αρτηρίες του οποίου μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως οδηγός από επόμενους ερευνητές. Αυτές παρουσιάζονται κατά σειρά:

(α) Επιλογή ενός λογικού μοντέλου

Το πρώτο βήμα είναι να γίνει επιλογή κατάλληλων κατά την κρίση μας μεταβλητών και κατά συνέπεια επιλογή ενός μοντέλου. Σε αυτό το στάδιο δεν ασχολούμαστε με την εκτίμηση του μοντέλου και τον έλεγχο ισχύος των βασικών υποθέσεων. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να ερευνήσουμε ποιες μεταβλητές (μεγέθη) θα επιθυμούσαμε να εκτιμήσουμε (εξαρτημένες μεταβλητές) και ποιες μεταβλητές θα μπορούσαν πιθανότατα να τις καθορίζουν (ανεξάρτητες), έτσι ώστε να είναι αυξημένη η πιθανότητα το μοντέλο να γίνει αποδεκτό μετά την εκτίμησή του.

(β) Ταυτοποίηση

Μετά το προηγούμενο βήμα, πρέπει να γίνει άμεσα ο έλεγχος ταυτοποίησης για κάθε μια εξίσωση του συστήματος ξεχωριστά. Αν τουλάχιστον μια απο τις δύο δεν ταυτοποιείται, τότε και το σύστημα δεν ταυτοποιείται και είμαστε υποχρεωμένοι να ακολουθήσουμε πάλι το βήμα (α) επιλέγοντας ένα άλλο μοντέλο. Στην παρούσα εργασία υπήρξαν πολλά υποψήφια μοντέλα στο βήμα (α), κάποια από τα οποία όμως δεν πληρούσαν τη διαδικασία της ταυτοποίησης. Παρακάτω παρουσιάζουμε δύο από αυτά:

<u>Μοντέλο 1</u>

$$C_t = \alpha_1 + \alpha_2 S_t + \alpha_3 M_t + {}_1u_t$$

$$F_t = \beta_1 + \beta_2 F_{\tau-1,t} + \beta_3 C_{r,\tau-1} + \beta_4 C_t + {}_2u_t$$

όπου S_t είναι ο μισθός του t ασφαλισμένου τη χρονική στιγμή τ, $F_{\tau\text{-}1,t}$ είναι το ύψος του ατομικού λογαριασμού του t ασφαλισμένου τη χρονική στιγμή τ-1 και $C_{r,\tau\text{-}1}$ είναι οι εισφορές του t ασφαλισμένου τη χρονική στιγμή τ-1, για t =1,2...,46. Αν ακολουθήσουμε τη διαδικασία της ταυτοποίησης, παρατηρούμε ότι η πρώτη εξίσωση δεν ταυτοποιείται και συγκεκριμένα δεν ικανοποιείται η συνθήκη του βαθμού. Πράγματι έχουμε για την 1η εξίσωση ότι:

$$\Pi_r = \begin{bmatrix} \beta_2 \beta_4 \\ \beta_3 \beta_4 \end{bmatrix}$$

Άρα rank (Π_r) =1 και J1-1=1-1=0 και συνεπώς δεν ικανοποιείται η συνθήκη του βαθμού.

<u>Μοντέλο 2</u>

$$C_t = \alpha_1 S_t + \alpha_2 M_t + \alpha_3 I_t + {}_1u_t$$

$$F_t = \beta_1 + \beta_2 F_{\tau-1,t} + \beta_3 I_t + {}_2u_t$$

$$I_t = \gamma_1 + \gamma_2 F_{\tau-1,t} + \gamma_3 R + {}_3u_t$$

όπου R είναι η απόδοση των επενδύσεων η οποία γενικά μπορεί να είναι σταθερή ή συνηθέστερα τυχαία. Αν ακολουθήσουμε τη διαδικασία της ταυτοποίησης, παρατηρούμε ότι η τρίτη εξίσωση δεν ταυτοποιείται και συγκεκριμένα δεν ικανοποιείται η συνθήκη του βαθμού. Πράγματι έχουμε για την $3^{η}$ εξίσωση ότι:

$$\Pi_r = \begin{bmatrix} -\alpha_1\alpha_3 \\ -\alpha_2\alpha_3 \end{bmatrix}$$

Άρα rank (Π_r) =1 και J1-1=1-1=0 και συνεπώς δεν ικανοποιείται η συνθήκη του βαθμού.

Στα δύο παραπάνω παραδείγματα η ερμηνεία των υπόλοιπων μεταβλητών παραλείπεται διότι είναι ίδια με αυτήν που ήδη έχουμε παραθέσει.

(γ) Εκτίμηση του μοντέλου

Από τη στιγμή που το μοντέλο ταυτοποιείται, προχωρούμε στην εκτίμησή του (για την εκτίμηση των μοντέλων έγινε χρήση του στατιστικού πακέτου SPSS 16) και παρατηρούμε αν όλες οι μεταβλητές είναι σημαντικές για κάποιο επίπεδο σημαντικότητας που έχουμε θέσει. Αν όλες οι μεταβλητές είναι σημαντικές, τότε προχωρούμε κατά τα γνωστά στον έλεγχο ισχύος των βασικών υποθέσεων και αν κάποιες από αυτές δεν ισχύουν, παίρνουμε κατάλληλα διορθωτικά μέτρα σύμφωνα με τη θεωρία της Οικονομετρίας. Αν κάποια από αυτές δεν είναι σημαντική, τότε πρέπει να ακολουθήσουμε πάλι το βήμα (α) επιλέγοντας ένα άλλο μοντέλο. Παρακάτω, παρουσιάζουμε δύο μοντέλα τα οποία ενώ ταυτοποιούνται, κατόπιν εκτιμήσεως δεν είναι σημαντική κάποια (ή κάποιες) μεταβλητή τους ή παρουσιάζουν γενικά κάποιο πρόβλημα.

<u>Μοντέλο 3</u>

$$C_t = \alpha_1 S_t + \alpha_2 M_t + \alpha_3 I_t + {}_1u_t$$

$$F_t = \beta_1 + \beta_2 F_{\tau-1,t} + \beta_3 I_t + {}_2u_t$$

$$I_t = \gamma_1 + \gamma_2 F_t + \gamma_3 C_t + {}_3u_t$$

Κατά τη διαδικασία της εκτίμησης του μοντέλου παρατηρούμε ότι στην τρίτη εξίσωση, η μεταβλητή C_t δεν είναι σημαντική διότι αν εφαρμόσουμε γραμμική παλινδρόμηση με τη μέθοδο Stepwise συμπεραίνουμε ότι δεν χρειάζεται να την συμπεριλάβουμε στην εν λόγω εξίσωση (η μέθοδος αυτή εισάγει σταδιακά όλες τις ανεξάρτητες μεταβλητές στην εξίσωση και ελέγχει μετά αν κάποιες πρέπει να αφαιρεθούν ή όχι).

Μοντέλο 4

$$C_t = \alpha_1 + \alpha_2 S_t + \alpha_3 M_t + \alpha_4 F_t + {}_1u_t$$

$$F_t = \beta_1 + \beta_2 F_{\tau-1,t} + \beta_3 I_t + \beta_4 C_t + {}_2u_t$$

$$I_t = \gamma_1 + \gamma_2 F_t + \gamma_3 F_{\tau-1,t} + {}_3u_t$$

Κατά τη διαδικασία της εκτίμησης του μοντέλου παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει πρόβλημα ως προς τη σημαντικότητα του μοντέλου. Όμως, στην τρίτη εξίσωση δεν θεωρείται σκόπιμο να συμπεριληφθούν μαζί η F_t και $F_{\tau\text{-}1,t}$, διότι είναι προφανές ότι θα υπολογίζονται σε κάθε περίπτωση με την ίδια διαδικασία. Αυτό φαίνεται αν υπολογίσουμε τον συντελεστή γραμμικής τους συσχέτισης ο οποίος τείνει στη μονάδα οπότε κατά πάσα πιθανότητα θα παρουσιαστεί πρόβλημα πολυσυγγραμμικότητας μετά την 2SLS εκτίμηση.

Σημείωση: το γεγονός ότι τα μοντέλα 3 και 4 αλλά και όλα τα μοντέλα εκείνα που δε μπορούν να υιοθετηθούν για την εργασία αυτή εξαιτίας κάποιου προβλήματος κατόπιν εκτιμήσεώς τους (π.χ. ύπαρξη μεταβλητής στατιστικά μη σημαντικής), οφείλεται εν μέρει, στη λήψη σχετικά μικρού δείγματος σε σχέση με το σύνολο των ατόμων του ταμείου (πληθυσμού) καθώς και στο μικρό αριθμό ενδογενών και εξωγενών μεταβλητών του μοντέλου (βλέπε Intrligator, 1992, σελ. 167).

6.2 Συμπεράσματα για το μοντέλο

Το μοντέλο (2.3) που επιλέχθηκε για την παρούσα εργασία, όπως δείξαμε παραπάνω, δεν αντιμετωπίζει πρόβλημα ταυτοποίησης ή μη σημαντικότητας κάποιων μεταβλητών του και γενικά ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις και τους σκοπούς για τους οποίους κατασκεύαστηκε. Παρά την απλότητα και το μικρό μέγεθος αυτού του μοντέλου (αποτελείται από δύο μόνο εξισώσεις), η υιοθέτησή του συμβάλλει στην προσπάθεια και επιπλέον έρευνα στο μέλλον, για τους τρόπους με τους οποίους θα μπορούσε η οικονομετρική επιστήμη να γίνει αρωγός στην εκτίμηση ασφαλιστικών-συνταξιοδοτικών μεγεθών και γενικότερα στην λήψη πολιτικών αποφάσεων. Επιπλέον, αφενός μέχρι σήμερα δεν έχουν γίνει σημαντικές προσπάθειες να εκτιμηθούν ασφαλιστικά μεγέθη με τη χρήση συστημάτων ταυτόχρονων εξισώσεων και συνεπώς η παρούσα εργασία αποτελεί μια πρώτη προσπάθεια προς αυτή την κατεύθυνση, αφετέρου το πρότυπο εφαρμογής είναι το σουηδικό μοντέλο το οποίο υπόσχεται ευοίονες προοπτικές για τα ελληνικά δεδομένα.

Από την άλλη πλευρά, η συγκεκριμένη εφαρμογή του μοντέλου που παρουσιάσαμε ενέχει κάποια μειονεκτήματα. Είναι προφανές ότι το σουηδικό μοντέλο δεν έχει εφαρμοστεί στην Ελλάδα και συνεπώς ήταν αδύνατο να έχουμε δεδομένα ταμείων που να ανταποκρίνονται στην εφαρμογή του. Έτσι, για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας, κατασκευάστηκαν οι εμπλεκόμενες μεταβλητές συμφωνα με το σουηδικό μοντέλο κι έτσι αποκτήθηκαν εικονικά δεδομένα και όχι παρατηρηθέντα. Στα ταμεία, σε κάθε περίπτωση υπάρχει κάποιο σχέδιο με βάση το οποίο υπολογίζονται τα διάφορα μεγέθη. Στην περίπτωσή μας, οι τύποι των μεταβλητών που χρησιμοποιήσαμε, δεν εμπεριέχουν κάποιο τυχαίο παράγοντα για λόγους ευκολίας. Είναι σαφές όμως ότι για παράδειγμα εάν οι αποδόσεις δεν ήταν σταθερές, το μοντέλο θα ήταν περισσότερο ρεαλιστικό. Ακόμα, το ότι χρησιμοποιήσαμε δεδομένα από έναν ασφαλισμένο για κάθε ηλικία, δημιουργεί ένα εκτιμημένο μοντέλο που ουσιαστικά κάτω από ορισμένες συνθήκες, μπορεί να μην είναι τόσο αντιπροσωπευτικό όσο ένα άλλο στο οποίο θα χρησιμοποιούσαμε π.χ. πιο πολλούς ασφαλισμένους για κάθε ηλικία ή ασφαλισμένους από πολλά ταμεία επικουρικής ασφάλισης έτσι ώστε οι εκτιμήσεις του μοντέλου να ερμήνευαν ικανοποιητικά το σύνολο της επικουρικής ασφάλισης. Επίσης, το ότι κατακευάσαμε τις μεταβλητές, αυτό μας βοήθησε αρκετά στην επιλογή των μεταβλητών στο εν λόγω μοντέλο, διαδικασία η οποία ενδεχομένως θα ήταν πιο δύσκολη σε περίπτωση χρήσης παρατηρηθέντων ιστορικών τιμών. Στην περίπτωση που χρειάζεται κατασκευή δεδομένων, εγείρεται επιπλέον το πρόβλημα του τρόπου με τον οποίον θα αποκτηθούν.

Τέλος, η ισχύς των βασικών υποθέσεων οφείλεται εν μέρει σε κάποιες ιδανικές παραδοχές, όπως το ότι η μήτρα σχεδιασμού X θα είναι ουσιαστικά σταθερή πράγμα το οποίο γενικά δεν ισχύει αφού η μήτρα αυτή αναφέρεται σε οικονομικά δεδομένα και συνήθως αυτά είναι ευμετάβλητα.

Εν κατακλείδι, θα λέγαμε ότι η παρούσα εργασία αποτελεί ένα γενικό οδηγό για κάποιον ερευνητή ο οποίος ενδιαφέρεται για την εύρεση ενός μοντέλου ταυτόχρονων εξισώσεων το οποίο θα εκτιμά ασφαλιστικά μεγέθη με συγκεκριμένο ενδιαφέρον σε καθορισμένα πλαίσια. Αν ενδιαφερόμαστε το μοντέλο να έχει πρακτική αξία μεγάλης ευρύτητας εφαρμογών, τότε απαιτούνται επιστημονική έρευνα και γνώμες ειδικών σε κάθε βήμα προς αυτή την κατεύθυνση. Ενδεικτικά, πρέπει να έχουμε ανάλογα με τις προσδοκίες μας, το κατάλληλο δείγμα από συγκεκριμένο χώρο με βάση τη μεθοδολογία της δειγματοληψίας, να ευρεθούν οι κατάλληλες μεταβλητές και η μαθηματική σχέση μεταξύ τους που θα αναφέρονται σε καθορισμένα ασφαλιστικά πλαίσια του ενδιαφέροντός μας, να εκτιμηθεί το μοντέλο σύμφωνα με την οικονομετρική θεωρία και να επιβεβαιωθούν οι υποθέσεις με βάση τις οποίες λαμβάνουμε αξιόπιστους εκτιμητές (σε περίπτωση που αυτές δεν επαληθεύονται απαιτούνται συγκεκριμένες διορθωτικές ενέργειες που μπορεί να οδηγήσουν στην υιοθέτηση διαφορετικού μοντέλου) και τέλος να υπάρχουν οι κατάλληλες πληροφορίες κοινωνικοοικονομικού ενδιαφέροντος που αφορούν στο μέλλον, έτσι ώστε να ενσωματωθούν στο εκτιμημένο μοντέλο για να λάβουμε προβλέψεις που θα επαληθευτούν με όσο το δυνατό μικρότερες αποκλίσεις. Στην εργασία αυτή δίνεται έμφαση, όχι τόσο στην άριστη υλοποίηση των παραπάνω βημάτων (κάτι τέτοιο εξάλλου δεν θα ήταν εφικτό στα πλαίσια αυτής της εργασίας), όσο στην γνώση της ανάλυσης της διαδικασίας προς αυτή την κατεύθυνση και την αξιοποίηση της εμπειρίας που κομίζεται, έστω με τη χρήση μικρού δείγματος περιορισμένου ασφαλιστικού χώρου, συνθήκες οι οποίες είναι ικανές να αποτελέσουν πυξίδα και δείκτη για κάθε επίδοξη σχετική ερευνητική πρωτοβουλία.

Παράρτημα

Πίνακας Δεδομένων

Α/Α	ΗΛΙΚΙΑ	ΕΤΗ ΑΣΦΑΛΙΣΗΣ	ΜΗΝΙΑΙΟΣ ΜΙΣΘΟΣ (€)	lx (EVK 2000)
1	20	1	656	99,905
2	21	2	578	99,847
3	22	3	600	99,783
4	23	4	674	99,715
5	24	4	646	99,646
6	25	4	703	99,577
7	26	5	705	99,511
8	27	5	735	99,445
9	28	5	779	99,381
10	29	6	888	99,318
11	30	6	874	99,254
12	31	7	934	99,189
13	32	7	950	99,120
14	33	7	892	99,047
15	34	8	1009	98,969
16	35	8	1114	98,885
17	36	8	1210	98,793
18	37	8	1236	98,692
19	38	9	1204	98,583
20	39	8	1205	98,465
21	40	8	1212	98,337
22	41	9	1266	98,199
23	42	8	1378	98,051
24	43	8	1169	97,892
25	44	8	1346	97,724
26	45	9	1245	97,544
27	46	9	1306	97,353
28	47	8	1103	97,150
29	48	8	1168	96,934
30	49	9	1434	96,704
31	50	8	1441	96,457
32	51	8	2751	96,189
33	52	9	1034	95,899
34	53	8	1100	95,580
35	54	7	1750	95,228
36	55	8	1571	94,836
37	56	6	898	94,397
38	57	7	1221	93,902
39	58	7	1288	93,341
40	59	9	956	92,704

41	60	8	1168	91,980
42	61	9	1096	91,173
43	62	8	1006	90,270
44	63	9	1370	89,271
45	64	8	1138	88,177
46	65	8	847	86,983

Σημείωση: τα δεδομένα του παραπάνω πίνακα που αφορούν στις ηλικίες, τα έτη ασφάλισης και το μηνιαίο μισθό, προέρχονται από ελληνικό ταμείο επικουρικής ασφάλισης και η τελευταία στήλη που αφορά επιζώντες ηλικίας x από μία αρχική ρίζα, προέρχεται από τους ελβετικούς πίνακες EVK 2000.

Βιβλιογραφία

Ξένη

AITKEN, W.H. (1996), *Pensions funding and Valuation – A problem solving approach,* ACTEX Publications, USA.

ANDRIETTI, A. (2000), *Occupational Pension Coverage in The European Union. An Empirical Analysis,* University of Essex, Colchester(UK) – available at http://www.iser.essex.ac.uk, 28-09-2009.

BASMANN, R. L. (1957), *A Generalized Classical method of Linear Estimation of Coefficients in a Structural Equation,* Econometrica, vol. 25.

BRUNNER, J. (2002), *Welfare Effects of Pension Finance Reform.* Johannes Kepler University of Linz Department of Economics.

EKLOF,M. & HALLBERG, D. (2006), *Estimating retirement behavior with special early retirement offers,* Working paper 2006:13 – available at http://www.nber.org, 20-09-2009.

EVK (2000), *Ελβετικοί Πίνακες υπηρεσίας.*

FREES, E. (2003), *Pension Plan Termination And Retirement Study*, in cooperation with the Society of Actuaries Non-Mortality Decrement Task Force.

HABERMAN, S, et al. (2005), *The Management of De-cumulation Risks in a Defined Contribution Pension Scheme* – available at http://web.econ.unito.it, 25-09-2009.

HABERMAN, S. & SUNG, J. (1994), *Dynamic Approaches to Pension Funding,* Department of Actuarial Science and Statistics, City University, Insurance: Mathematics and Economics 15 – available at http://www.sciencedirect.com, 22-09-2009.

HABERMAN, S. (1991), *Pension Funding Methods and Autoregressive Interest Rate Model*. Second AFFIR Colloquium,1991,2: 181-204.

INTRILIGATOR, M. (1992), *Οικονομετρικά Υποδείγματα, Τεχνικές και Εφαρμογές, Τεύχος Β (Μετάφραση).* Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα.

KLEIN, L. (1962), *An Introduction to Econometrics.* Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.

KOUTSOYIANNIS, A. (1978), *Theory of econometrics, Second Edition.* The Macmillan Press Ltd, Hong Kong.

MYRPHY, L. J. (1973), *Introductory Econometrics.* R. D. Irwin, Homewood, Illinois.

PALMER, W. (2000), *The Swedish Pension Reform Model – Framework and Issues.* The National Social Insurance Board – available at http://www.oecd.org, 05-09-2009.

PALMER, W. – Fox, L. (2000), *New approaches to multi-pillar pension systems: What in the world is going on?* The Year 2000 International Research Conference on Social Security – September 2000.

PYNDYCK, R. S. & RUBINFELD, D. L. (1981), *Econometric Models and Economic Forecasts,* McGraw-Hill, New York.

SELEN, J. & Stahlberg, A. C. (2006), *Why Sweden's pension reform was able to be successfully implemented*. Swedish Institute for Social Research, Stockholm University – available at http://www.mps2009.org, 12-09-2009.

SUNDEN, A. (2000), *The Swedish Pension Reform,* Flagship Course in Pension Reform, March 6 – 17, 2000 – Washington, D.C. World Bank Institute – available at http://oxrep.oxfordjournals.org, 03-09-2009.

THEIL, H. (1975), *Economic Forecast and Policy.* North-Holland, Amsterdam.

THEIL, H. (1971), *Principles of econometrics,* Wiley, New York.

THEIL, H. (1953), *Estimation and Simultaneous Correlation in Complete Equation Systems.* The Hague: Central Planning Bureau (mimeographed).

WOOLDRIDGE, J. (2004), *Introductory Econometrics*: *A Modern Approach, Second Edition.* South – Western College Publishing.

YONG H. KIM, JONG C. RHIM, JUN GYU KANG. (2005), *Agency Costs And Corporate Financial Policies: A Simultaneous Equation Approach.* Journal of Buisness and Economics Research – available at http://www.cluteinstitute-onlinejournals.com, 15-06-2009.

Ελληνική

ΑΛΕΞΑΝΔΡΗΣ, Ν. (1989), *Οικονομικά Μαθηματικά.* Εκδόσεις Σταμούλη, Πειραιάς.

ΖΥΜΠΙΔΗΣ, Α. (2008), *Συνταξιοδοτικά Συστήματα και Αναλογιστικές Μελέτες.* Εκδόσεις ΟΠΑ, Αθήνα.

ΚΑΦΦΕΣ, Δ. (1991), *Μαθήματα Ανάλυσης Παλινδρόμησης.* Εκδόσεις Σταμούλη, Πειραιάς.

ΚΑΦΦΕΣ, Δ. (1989), *Μαθήματα Οικονομετρικών Μεθόδων.* Εκδόσεις Σταμούλη, Πειραιάς.

ΚΙΝΤΗΣ, Α. (1982), *Οικονομετρία Α*. Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα.

ΛΑΖΑΡΙΔΗΣ, Α. (2002), *Οικονομετρία Ι.* Εκδόσεις Ζυγός, Θεσσαλονίκη.

ΛΑΖΑΡΙΔΗΣ, Α. (2000), *Οικονομετρία ΙΙ.* Εκδόσεις Ζυγός, Θεσσαλονίκη.

ΝΕΚΤΑΡΙΟΣ, Μ. (2008), *Ασφαλιστική Μεταρρύθμιση με Συναίνεση και Διαφάνεια.* Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα.

ΤΣΙΜΠΟΣ, Κ – ΓΕΩΡΓΙΑΚΩΔΗΣ, Φ. (2000), *Περιγραφική και Διερευνητική Στατιστική, Ανάλυση Δεδομένων, Τόμος Β.* Εκδόσεις Σταμούλη, Πειραιάς.

ΦΕΚ 58 Α/ 03.04.2008 Νόμος 3655/08 *"Διοικητική και οργανωτική μεταρρύθμιση του Συστήματος Κοινωνικής Ασφάλισης και λοιπές ασφαλιστικές διατάξεις"* .

ΧΡΗΣΤΟΥ, Γ. (2002), *Εισαγωγή στην Οικονομετρία, Τόμος Β.* Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα.