

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΣΥΓΧΡΟΝΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ
ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΕΦΟΔΙΑΣΜΕΝΑ
ΜΕ ΚΑΝΟΝΕΣ ΡΟΩΝ ΚΑΙ
ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ**

Σπυρίδων Νικόλαος Ε. Στογιάννος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων
για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην
Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Ιούνιος 2010

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΣΥΓΧΡΟΝΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ
ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΕΦΟΔΙΑΣΜΕΝΑ
ΜΕ ΚΑΝΟΝΕΣ ΡΟΩΝ ΚΑΙ
ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ**

Σπυρίδων Νικόλαος Ε. Στογιάννος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων
για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην
Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Ιούνιος 2010

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Δ. Αντζουλάκος, Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Μ. Μπούτσικας, Επίκουρος Καθηγητής
- Γ. Τζαβελάς, Λέκτορας

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS**

**Modern control charts for process average
supplemented with run and scans rules**

By

Spiridon Nikolaos E. Stogiannos

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of
the requirements for the degree of Master of Science in
Applied Statistics

Piraeus, Greece

June 2010

РАНЕЕЗНАМО ТЕРПАА

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΔΑΙΑ

Στον καθηγητή μου

Π. Κασταμονίτη

ТАНЕЦЪМЪО ТЕРПАА

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Αντζουλάκο Δημήτριο για την άψογη συνεργασία που είχαμε αλλά και για την πραγματικά μεγάλη βοήθεια που μου προσέφερε προκειμένου να φέρω σε πέρας αυτή τη διπλωματική εργασία και κυρίως για την υπομονή του και την επιμονή που επέδειξε για το πέρας της παρούσης καθώς και τα μέλη της τριμελούς επιτροπής κ.κ. Μ. Μπούτσικα (Επίκουρο Καθηγητή), Γ. Τζαβελά (Λέκτορα) για την επίβλεψη της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

РАНЕЕЗНАМО ТЕРПАА

Περίληψη

Τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart για την παρακολούθηση του μέσου μ μιας διεργασίας δίνουν σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας (μετατόπιση του μέσου) όταν ένα σημείο του διαγράμματος βρεθεί εκτός της ζώνης που ορίζεται από το κάτω (LCL) και το άνω (UCL) όριο ελέγχου του διαγράμματος. Είναι γνωστό ότι τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart δεν είναι ευαίσθητα σε μικρές μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας. Η ευαισθητοποίηση του διαγράμματος ως προς την ικανότητα του να ανιχνεύει μικρές μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας επιτυγχάνεται με χρήση προειδοποιητικών ορίων (εσωτερικών των LCL και UCL) και με χρήση κανόνων διακοπής (stopping rules) που περιγράφουν ενδεχόμενα που σχετίζονται με την εμφάνιση ειδικών σχηματισμών από σημεία στο διάγραμμα. Η εμφάνιση ενός τέτοιου σχηματισμού δίνει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας. Τέτοιοι κανόνες παρουσιάστηκαν και εφαρμόστηκαν για πρώτη φορά το 1956 από την εταιρεία Western Electric Company.

Σκοπός της διπλωματικής είναι η παρουσίαση της σύγχρονης βιβλιογραφίας για κανόνες διακοπής που σχετίζονται με στατιστικές συναρτήσεις ροών (runs) και σχηματισμών (patterns) στα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart, και η συγκριτική μελέτη των διαφόρων προσεγγίσεων.

РАНЕЕЗНАМО ТЕРРА

Abstract

Shewhart-type control charts for monitoring the mean of a manufacturing process give signal of an out of control process (shift of the mean) when a plotted point falls outside the area specified by the lower (LCL) and upper (UCL) control limit of the chart. It is well known that Shewhart type control charts are not sensitive in detecting small shifts of the process mean. The sensitization of the chart to detect small shifts of the process mean is usually achieved by the use of warning limits (internal of LCL and UCL) and the adoption of stopping rules related with the appearance of special patterns of plotted points in the chart. The appearance of a special pattern of points gives signal of an out of control process. Such rules were introduced and applied for the first time in 1956 by the Western Electric Company.

The main purpose of the dissertation is the presentation of the modern bibliography for stopping rules that are related to runs and patterns statistics in Shewhart-type control charts, and the comparative study of different approaches

ТАНЕЦЫ И ТЕАТР

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 1	1
<i>Εισαγωγή</i>	1
1.1 Η έννοια της ποιότητας	1
1.2 Ιστορική εξέλιξη	2
1.2.1 Έλεγχος - επιθεώρηση	2
1.2.2 Στατιστικός έλεγχος ποιότητας	2
1.2.3 Διασφάλιση ποιότητας	3
1.2.4 Στρατηγική διοίκηση της ποιότητας	4
1.3 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart	5
1.4 Μέσο μήκος ροής στα διαγράμματα ελέγχου	9
1.5 Κανόνες ευαισθητοποίησης ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart	12
Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 2	15
<i>Ανασκόπηση</i>	15
2. Εισαγωγή	15
2.1 Champ και Woodall (1987)	16
2.2 Shmueli και Cohen (2003)	26
2.4 Michael Khoo (2003)	36
2.5 Khoo και Ariffin (2006)	44
2.6 Acosta (2007)	51
2.7 Συγκριτική Σύνοψη	56
Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 3	61
<i>Τροποποιημένοι και αναθεωρημένοι κανόνες ροών τύπου r-από-m</i>	61
3.1 Τροποποιημένο r-από-m διάγραμμα (2008a)	61
3.1.1 Η λογική του διαγράμματος	61
3.1.2 Απόδοση του τροποποιημένου r από m διαγράμματος ελέγχου	64
3.1.3 Συμπεράσματα	67
3.1.4 Μέθοδος αλυσίδων Markov για τη μελέτη του M: r/m διαγράμματος ελέγχου	67
3.2 Αναθεωρημένο m-από-k διάγραμμα ελέγχου	72
3.2.1 Απόδοση των σχημάτων R-2/3 και R-4/5	74
3.2.2 Εφαρμογή	78
3.2.3 Μεθοδολογία μελέτης των διαγραμμάτων I-2/3 και R-2/3	79
Π Α Ρ Α Ρ Τ Η Μ Α	83
Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α	89

РАНЕЕЗНАМО ТЕРРА

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Η έννοια της ποιότητας

Η ποιότητα είναι μια πολυσύνθετη έννοια, στην οποία έχουν δοθεί διάφοροι ορισμοί. Σύμφωνα με το διεθνές πρότυπο ISO 8402 (1986):

«Ποιότητα είναι το σύνολο των ιδιοτήτων και χαρακτηριστικών ενός προϊόντος, διαδικασίας ή υπηρεσίας που καθορίζουν την ικανότητα ανταπόκρισης σε δηλωμένες ή εννοούμενες ανάγκες»

Ανεξάρτητα από προτιμήσεις ως προς τον ορισμό, είναι κοινά αποδεκτό ότι υπάρχουν δυο γενικές πλευρές της ποιότητας: ποιότητα σχεδιασμού και ποιότητα κατασκευής.

Η ποιότητα σχεδιασμού αναφέρεται στα κύρια χαρακτηριστικά του προϊόντος. Διαφορές στην ποιότητα σχεδιασμού ομοειδών προϊόντων είναι απόρροια συνειδητών επιλογών της διοίκησης της επιχείρησης και ανάλογων επιλογών από τους μηχανικούς κατά τη φάση σχεδίασης του προϊόντος. Π.χ. ένα πολυτελές επιβατικό αυτοκίνητο μεγάλου κυβισμού έχει διαφορετική ποιότητα σχεδιασμού από ένα οικονομικό αυτοκίνητο μικρού κυβισμού. Η επιλογή ορισμένης ποιότητας σχεδιασμού αποτελεί σημαντική στρατηγική απόφαση και μέσο ανταγωνισμού, καθώς προσδιορίζει το τμήμα της αγοράς στο οποίο απευθύνεται το προϊόν.

Ποιότητα κατασκευής είναι ο βαθμός συμμόρφωσης προς τις προδιαγραφές που προβλέπει ο σχεδιασμός του προϊόντος. Η ποιότητα κατασκευής αποτελεί αντικείμενο του ελέγχου ποιότητας και της διασφάλισης ποιότητας, που σύμφωνα με το πρότυπο ISO 9000 (1994) ορίζονται ως εξής:

Έλεγχος ποιότητας είναι οι επιχειρησιακές τεχνικές και δραστηριότητες που χρησιμοποιούνται για να ικανοποιηθούν οι απαιτήσεις για ποιότητα.

Διασφάλιση ποιότητας είναι όλες εκείνες οι προγραμματισμένες και συστηματικές ενέργειες, που είναι απαραίτητες για να εξασφαλίζουν επαρκώς ότι ένα προϊόν ή υπηρεσία θα ανταποκρίνεται σε δεδομένες απαιτήσεις για ποιότητα.

1.2 Ιστορική εξέλιξη

Η θεωρία και η πράξη της ποιότητας και γενικά του ελέγχου ποιότητας, ιδιαίτερα από την εποχή της βιομηχανικής επανάστασης μέχρι σήμερα, έχουν περάσει από διάφορες περιόδους, που είναι δυνατό να ονομαστούν και να ταξινομηθούν με διαφορετικούς τρόπους. Σύμφωνα πάντως με την άποψη ορισμένων ειδικών ερευνητών (π.χ. Garvin (1988)), η ιστορική εξέλιξη της ποιότητας μπορεί να περιγραφεί από 4 φάσεις.

1.2.1. Έλεγχος - επιθεώρηση

Από τις αρχές του 19ου αιώνα, οπότε η τυποποίηση άρχισε να γίνεται εφικτή, μέχρι περίπου το 1920 η διασφάλιση της ποιότητας βασίζεται αποκλειστικά στην επιθεώρηση και μέτρηση των παραγομένων προϊόντων. Ενώ αρχικά ο έλεγχος αυτός διενεργείται άτυπα από τον ίδιο τον τεχνίτη, με την εμφάνιση του Frederick Taylor και των μεθόδων της επιστημονικής διοίκησης κατά το 1900 ο έλεγχος ικανοποίησης των προδιαγραφών περνά στη δικαιοδοσία και ευθύνη ειδικών ελεγκτών. Ο έλεγχος ποιότητας όμως εξακολουθεί να περιορίζεται στον εντοπισμό και επισκευή των ελαττωματικών προϊόντων, χωρίς γενικά να επεκτείνεται σε προσπάθειες αναγνώρισης και διόρθωσης των αιτίων της κακής ποιότητας.

1.2.2. Στατιστικός έλεγχος ποιότητας

Ο στατιστικός έλεγχος ποιότητας έχει τις αρχές του την δεκαετία του 1920 στα Bell Telephone Laboratories των Η.Π.Α., όπου αναπτύχθηκαν σχεδόν ταυτόχρονα δύο από τις τρεις περιοχές του: η δειγματοληψία αποδοχής και ο στατιστικός έλεγχος διεργασιών.

Η δειγματοληψία αποδοχής ξεκίνησε από την απλή διαπίστωση ότι ο 100% έλεγχος δεν είναι ο περισσότερο αποτελεσματικός τρόπος, από οικονομική άποψη, διαχωρισμού μεταξύ καλών και ελαττωματικών προϊόντων. Ορμώμενοι από αυτή την παρατήρηση ο Harold Dodge και ο Harry Romig ανέπτυξαν δειγματοληπτικά σχήματα ελέγχου παρτίδων παραγωγής, σύμφωνα με τα οποία η απόφαση για αποδοχή ή απόρριψη συγκεκριμένης παρτίδας εξαρτάται από την ποιότητα περιορισμένου αριθμού μονάδων, που ανήκουν σε τυχαίο δείγμα από την παρτίδα αυτή.

Ο στατιστικός έλεγχος διεργασιών εισάγει για πρώτη φορά την έννοια της πρόληψης στον έλεγχο ποιότητας. Η αρχική του ανάπτυξη οφείλεται στον Walter Shewhart ο οποίος συνειδητοποίησε ότι η διασπορά τιμών ενός χαρακτηριστικού ποιότητας (π.χ. μιας διάστασης) είναι αναπόφευκτη κατά την παραγωγή, αλλά ένα μέρος της οφείλεται σε τυχαίες, μη ελεγχόμενες αιτίες και ένα άλλο μέρος οφείλεται σε συγκεκριμένα αίτια (συστηματικές

μεταβολές, ειδικά αίτια μεταβλητότητας), τα οποία μπορούν να εντοπισθούν και να διορθωθούν. Για να διευκολύνει τη διάκριση ανάμεσα σε τυχαίες και συστηματικές μεταβολές, ο Shewhart σχεδίασε απλές στατιστικές τεχνικές και αντίστοιχα διαγράμματα ελέγχου και πρότεινε τρόπους βελτίωσης της ποιότητας με εξάλειψη των αιτίων των συστηματικών μεταβολών. Τα διαγράμματα ελέγχου που εισήγαγε ο Shewhart εξακολουθούν και σήμερα να είναι τα ευρύτερα χρησιμοποιούμενα εργαλεία για τον έλεγχο ομαλής λειτουργίας των παραγωγικών διαδικασιών.

Ο στατιστικός έλεγχος ποιότητας γνώρισε ιδιαίτερη ανάπτυξη στις Η.Π.Α. κατά τον Β΄ παγκόσμιο πόλεμο, με τη δημιουργία στατιστικών πινάκων και προτύπων για την υποβοήθηση της παραγωγής και της παραλαβής ικανοποιητικής ποιότητας όπλων και πυρομαχικών από μεγάλο αριθμό προμηθευτών. Τα πρώτα μαθήματα ελέγχου ποιότητας σε πανεπιστημιακό επίπεδο έγιναν στο Carnegie Institute of Technology το 1941 και στο Stanford University το 1942. Η πρώτη επιστημονική εταιρία ελέγχου ποιότητας δημιουργήθηκε το 1946 στις Ηνωμένες Πολιτείες.

Η εφαρμογή των μεθόδων του στατιστικού ελέγχου ποιότητας δεν ατόνησε με την εμφάνιση των νέων τάσεων που οριοθετούν τις δυο επόμενες φάσεις της ιστορικής εξέλιξής του. Αντίθετα νέα ώθηση δόθηκε μετά το 1980 με την ανάπτυξη τρίτης μεγάλης περιοχής του στατιστικού ελέγχου ποιότητας, που επικεντρώθηκε στη βελτίωση της ποιότητας κατά τη φάση σχεδίασης προϊόντων και παραγωγικών διαδικασιών με τη βοήθεια του σχεδιασμού και της ανάλυσης πειραμάτων που αποτελεί την τρίτη περιοχή του στατιστικού ελέγχου ποιότητας.

1.2.3. Διασφάλιση ποιότητας

Η περίοδος της διασφάλισης ποιότητας χαρακτηρίζεται από την εισαγωγή νέων εννοιών και μεθόδων επιπλέον των στατιστικών και την επέκτασή τους από την παραγωγή σε όλους τους τομείς δραστηριότητας των επιχειρήσεων. Μπορεί να θεωρηθεί ότι η βασική φάση ανάπτυξης της διασφάλισης ποιότητας καλύπτει χρονικά την περίοδο από το 1950 μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 1980 και περιλαμβάνει τις 4 παρακάτω συνιστώσες:

(α) Κόστος ποιότητας: Η ποσοτικοποίηση των στοιχείων κόστους ποιότητας εισάγεται για πρώτη φορά το 1951 από τον Joseph Juran στην πρώτη έκδοση του συγγράμματος Quality Control Handbook, το οποίο εξακολουθεί να κατέχει σημαντική θέση στη διεθνή βιβλιογραφία (Juran και Gryna (1988)).

(β) Ολικός έλεγχος ποιότητας. Κεντρικός άξονας του ολικού ελέγχου ποιότητας είναι η θέση ότι η ευθύνη της ποιότητας δεν περιορίζεται στα τμήματα παραγωγής και ποιοτικού ελέγχου, αλλά επεκτείνεται σε ολόκληρη την επιχείρηση και σε όλες τις φάσεις της σχεδίασης, αγοράς πρώτων υλών, παραγωγής, διανομής και εξυπηρέτησης των πελατών. Εμπνευστής του ολικού ελέγχου ποιότητας και συγγραφέας του ομώνυμου βιβλίου που πρωτοεκδόθηκε το 1951 είναι ο Armand Feigenbaum (Feigenbaum (1991)).

(γ) Ανάλυση αξιοπιστίας. Η αξιοπιστία αποτελεί τη χρονική διάσταση της ποιότητας, στην οποία δεν είχε δοθεί ιδιαίτερη προσοχή μέχρι το 1950. Στη συνέχεια όμως η θεωρία αξιοπιστίας γνώρισε σημαντική εξέλιξη εξαιτίας της ανάπτυξης της βιομηχανίας ηλεκτρονικών και των σχετικών αναγκών βελτίωσης της ποιότητας των διαφόρων ηλεκτρονικών συσκευών.

(δ) «Μηδενικά ελαττώματα». Η τελευταία συνιστώσα της διασφάλισης ποιότητας επικεντρώνεται στον τομέα του ανθρώπινου παράγοντα. Ξεκίνησε το 1961 από την εταιρία Martin όπου την εποχή εκείνη γινόταν η κατασκευή των πυραύλων Pershing για τον αμερικανικό στρατό. Με τα κατάλληλα κίνητρα, την έμφαση στην ποιότητα και τη σωστή παρακολούθηση και διαχείριση ενός προγράμματος με κύριο στόχο την προσπάθεια ολοκλήρωσης κάθε εργασίας χωρίς σφάλματα εξαρχής, κατέστη δυνατή η κατασκευή προϊόντων με μηδέν ελαττώματα. Η φιλοσοφία του προγράμματος και η άποψη ότι η τέλεια ποιότητα είναι και τεχνικά εφικτή και οικονομικά επιθυμητή περιγράφεται σε ένα δημοφιλές αλλά και αμφιλεγόμενο βιβλίο του Philip Crosby, που εργαζόταν στην εταιρία Martin την δεκαετία του 1960 (Crosby (1979)).

1.2.4. Στρατηγική διοίκηση της ποιότητας

Η στρατηγική διοίκηση της ποιότητας αποτελεί την πιο σύγχρονη τάση, που υιοθετείται όλο και περισσότερο από τις βιομηχανίες που πρωτοπορούν στα θέματα ποιότητας. Αν και δεν υπάρχει κάποιο συγκεκριμένο γεγονός που σηματοδοτεί την έναρξη αυτής της περιόδου, μπορεί να θεωρηθεί ότι από τα μέσα της δεκαετίας του 1980 αρχίζει να γίνεται συνείδηση ότι η ποιότητα δεν αποτελεί απλά και μόνο ένα πρόβλημα που επιζητεί αντίδραση και λύση, αλλά είναι συχνά ένας τομέας τον οποίο μπορεί να εκμεταλλευτεί στρατηγικά μια επιχείρηση για να ενισχύσει τη θέση της στην αγορά. Συνοπτικά η στρατηγική διοίκηση της ποιότητας στηρίζεται στις παρακάτω θέσεις:

(α) Η ποιότητα είναι βασικός τομέας ανταγωνισμού. Επειδή είναι πολυδιάστατη, δίνει ανάλογες δυνατότητες για τον χειρισμό της σαν εργαλείο ενίσχυσης της ανταγωνιστικότητας

μιας επιχείρησης, με την επιλεκτική έμφαση σε εκείνες τις διαστάσεις, οι οποίες εξυπηρετούν αποτελεσματικότερα τους στρατηγικούς στόχους.

(β) Η ποιότητα ενός προϊόντος ορίζεται από την αγορά, δηλαδή από τους καταναλωτές που θα χρησιμοποιήσουν το προϊόν. Ειδικότερα οι προδιαγραφές δεν είναι σκόπιμο να καθορίζονται αυθαίρετα από τους μηχανικούς που σχεδιάζουν το προϊόν, αλλά αντίθετα η σχεδίαση του προϊόντος πρέπει να καθοδηγείται από τις επιθυμίες των καταναλωτών.

(γ) Η ποιότητα δεν είναι απόλυτη, αλλά σχετική, δηλαδή πρέπει να αποτιμάται σε σύγκριση με την ποιότητα αντίστοιχων προϊόντων των ανταγωνιστών.

(δ) Η ικανοποίηση των πελατών και άρα η ποιότητα του προϊόντος δεν περιορίζονται στον χρόνο της αγοράς, αλλά επεκτείνονται και προσδιορίζονται σε όλη τη διάρκεια ζωής του προϊόντος.

Η παραπάνω προσέγγιση της ποιότητας υποδηλώνει ορισμένες νέες απαιτήσεις για τις επιχειρήσεις. Συγκεκριμένα ιδιαίτερη σημασία αποκτά η έρευνα αγοράς, με την οποία μπορεί να εκτιμηθούν οι ανάγκες και επιθυμίες των καταναλωτών και ο βαθμός ικανοποίησής τους από τα προσφερόμενα προϊόντα. Επιπλέον, μεγαλύτερη βαρύτητα από την τιμή πώλησης αποκτά το συνολικό κόστος στον καταναλωτή σε όλη τη διάρκεια ζωής του προϊόντος, που περιλαμβάνει τα έξοδα συντήρησης και επισκευών, με ανάλογες συνέπειες για τον τομέα υποστήριξης των προϊόντων και εξυπηρέτησης των πελατών.

Η αποδοχή του στρατηγικού ρόλου της ποιότητας και η προσπάθεια ανάπτυξης συστημάτων και νοοτροπίας συνεχούς βελτίωσης της ποιότητας προϋποθέτουν μακροπρόθεσμη προοπτική, η οποία δυστυχώς υπάρχει σπάνια, ιδιαίτερα σε μικρές και μεσαίες επιχειρήσεις. Όμως τα συνεχώς αυξανόμενα μηνύματα από τον επιχειρηματικό κόσμο ενισχύουν τη διαπίστωση ότι η συστηματική προσπάθεια βελτίωσης της ποιότητας στα πλαίσια της στρατηγικής διοίκησης οδηγούν προς την αύξηση του μεριδίου αγοράς και ταυτόχρονη μείωση του συνολικού κόστους ποιότητας.

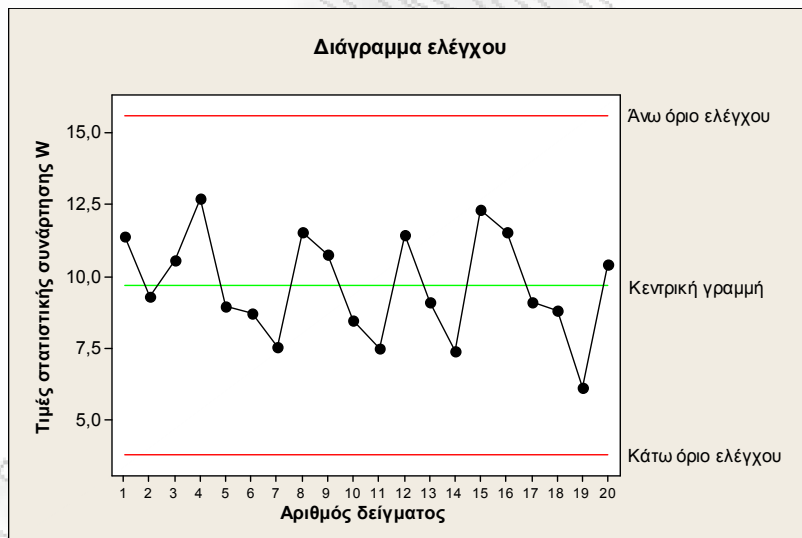
1.3 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart

Στις παραγωγικές διεργασίες μας ενδιαφέρει η παρακολούθηση της συμπεριφορά μιας κρίσιμης ποσότητας ενός (μετρήσιμου) χαρακτηριστικού X (τυχαία μεταβλητή) των προϊόντων που παράγονται (για παράδειγμα το χαρακτηριστικό X μπορεί να είναι μήκος, βάρος, όγκος προϊόντων). Η παρακολούθηση της κρίσιμης ποσότητας βασίζεται σε μετρήσεις του χαρακτηριστικού X (τυχαία μεταβλητή), που προκύπτουν από την επιλογή τυχαίων δειγμάτων προϊόντων από την παραγωγή σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, έστω τα

X_1, X_2, \dots . Χρησιμοποιώντας τα τυχαία δείγματα X_1, X_2, \dots υπολογίζουμε την τιμή $W_i = g(X_i)$, $i = 1, 2, \dots$, μιας κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης (τυχαίας μεταβλητής) που εκτιμά (συνήθως αμερόληπτη εκτιμήτρια) την κρίσιμη ποσότητα που μας ενδιαφέρει (π.χ. μέση τιμή ή διακύμανση της X). Έτσι η (διαχρονική) παρακολούθηση της συμπεριφοράς της κρίσιμης ποσότητας επιτυγχάνεται με την παρακολούθηση των τιμών που λαμβάνει η στατιστική συνάρτηση W στα διάφορα δείγματα.

Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε να παρακολουθήσουμε τη συμπεριφορά της μέσης τιμής της διαμέτρου X των κυλίνδρων που παράγει μια μηχανή. Για το σκοπό μπορούμε να επιλέξουμε τυχαία δείγματα μεγέθους n ($n \geq 1$) κυλίνδρων από την παραγωγή της μηχανής σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα και να χρησιμοποιήσουμε τη στατιστική συνάρτηση $W_i = g(X_i) = (X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in})/n$ (η οποία είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του μέσου της X) για την παρακολούθηση της συμπεριφοράς της μέσης τιμής.

Ένα τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart (τα διαγράμματα αυτά τα εισήγαγε το 1924 ο W. A. Shewhart) είναι μια γραφική παράσταση με την ακόλουθη μορφή



Σχήμα 1.1. Τυπικό διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart

Στο παραπάνω σχήμα, εκτός από τις παρατηρούμενες τιμές της W που έχουν παρασταθεί με σημεία (κουκκίδες) τα οποία έχουν συνδεθεί με μια τεθλασμένη γραμμή, έχουν σχεδιαστεί και άλλες τρεις γραμμές. Η κεντρική γραμμή (*center line, CL*) ή μέσο επίπεδο της διεργασίας παριστάνει συνήθως τη μέση τιμή (*mean value*) της W όπως αυτή προκύπτει από τη λειτουργία μιας εντός ελέγχου διεργασίας ή την τιμή στόχο του προϊόντος. Οι δύο ακραίες γραμμές που εμφανίζονται ονομάζονται άνω και κάτω όρια ελέγχου (*upper and lower control limits, UCL and LCL*). Όσο οι τιμές (σημεία, δεδομένα) της W εμφανίζονται εντός των ορίων

ελέγχου και η συμπεριφορά τους είναι “τυχαία” μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου (για την ακρίβεια εντός στατιστικού ελέγχου) και δεν χρειάζεται να προβούμε σε κάποια διορθωτική ενέργεια. Αν όμως κάποιο σημείο βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου λέμε ότι υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου και πρέπει να προχωρήσουμε σε έρευνα για να ανακαλύψουμε τις ειδικές αιτίες μεταβλητότητας που είναι υπεύθυνες για αυτή τη συμπεριφορά και αν κριθεί απαραίτητο να προβούμε σε διορθωτικές ενέργειες.

Στο ακόλουθο πλαίσιο δίνεται ένα γενικό μοντέλο, το μοντέλο ορίων σίγμα (*sigma limits model*), για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου

Μοντέλο ορίων L σίγμα	
UCL	$= \mu_w + L\sigma_w$
$Center\ Line$	$= \mu_w$
LCL	$= \mu_w - L\sigma_w$

Το μ_w και το σ_w δηλώνουν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της στατιστικής συνάρτησης W που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου, η οποία εκτιμά την κρίσιμη ποσότητα ενός προϊόντος που θέλουμε να παρακολουθήσουμε, ενώ ο αριθμός L δηλώνει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Για την αποτελεσματική χρήση ενός τέτοιου διαγράμματος ελέγχου θα πρέπει η W να ακολουθεί κανονική κατανομή. Όταν το $L=3$ ομιλούμε για κατασκευή ορίων ελέγχου τριών σίγμα (*three sigma control limits*, 3σ). Για μεγάλες τιμές του L η απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή μεγαλώνει και έτσι μειώνεται ο κίνδυνος (ρίσκο, πιθανότητα) να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου. Σε αναλογία με την ορολογία που χρησιμοποιείται στους ελέγχους στατιστικών υποθέσεων, λέμε ότι μειώνεται η πιθανότητα του σφάλματος τύπου I (ή ρίσκο α), αλλά ταυτόχρονα αυξάνεται η πιθανότητα του σφάλματος τύπου II (ή ρίσκο β). Για μικρές τιμές του L έχουμε τα αντίθετα αποτελέσματα.

Για όρια ελέγχου 3σ και κανονική κατανομή της στατιστικής συνάρτησης W , όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, η πιθανότητα να πάρει η W τιμή εκτός των ορίων ελέγχου είναι ίση με $\alpha = 0.0027$. Το γεγονός αυτό πρακτικά σημαίνει ότι ένας εσφαλμένος συναγερμός συμβαίνει 27 φορές ανά 10000 σημεία του διαγράμματος ελέγχου. Επίσης, για

εντός ελέγχου διεργασίες, η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο κάτω (πάνω) από το LCL (UCL) είναι ίση με $\alpha = 0.00135$.

Έστω ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού X των προϊόντων που παράγονται ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με μ και σ γνωστά. Έστω επίσης ότι έχουμε στη διάθεσή μας ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους n το καθένα, τα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $i \geq 1$. Για κάθε τυχαίο δείγμα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ είναι γνωστό ότι ο δειγματικός μέσος

$$W_i = \bar{X}_i = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}}{n}$$

ακολουθεί την κατανομή $N(\mu, \sigma^2/n)$, και είναι αμερόληπτος εκτιμητής της μέσης τιμής μ του χαρακτηριστικού X . Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος ελέγχου για την παρακολούθηση της μέσης τιμής του χαρακτηριστικού X , το οποίο ονομάζεται $Xbar$ ή \bar{X} διάγραμμα ελέγχου, με 3σ όρια ελέγχου δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο

\bar{X} διάγραμμα ελέγχου	
UCL	$= \mu + \frac{3}{\sqrt{n}}\sigma$
CL	$= \mu$
LCL	$= \mu - \frac{3}{\sqrt{n}}\sigma$

Τα παραπάνω όρια ελέγχου του διαγράμματος είναι γνωστά ως όρια ελέγχου Φάσης II.

Εκτός από το μοντέλο ορίων σίγμα, για την κατασκευή ορίων ελέγχου σε ένα διάγραμμα ελέγχου υπάρχει και το μοντέλο ορίων πιθανότητας (*probability limits model*) που παρουσιάζεται στο ακόλουθο πλαίσιο (μοντέλο ορίων πιθανότητας α) για κανονική (ή προσεγγιστικά) κανονική κατανομή της στατιστικής συνάρτησης W που απεικονίζεται σε αυτό

Μοντέλο ορίων πιθανότητας α	
UCL	$= w_{\alpha/2} = \mu_W + z_{\alpha/2}\sigma_W$
<i>Center Line</i>	$= w_{0.5} = \mu_W$
LCL	$= w_{1-(\alpha/2)} = \mu_W - z_{\alpha/2}\sigma_W$

(με w_α συμβολίζεται το άνω α ποσοστιαίο σημείο της W). Για εντός ελέγχου διεργασίες (με κανονική κατανομή για την W) έχουμε ότι η πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού σε κάθε

πλευρά των ορίων ελέγχου είναι ίση με $a/2$ (a είναι η πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού).

Τα δύο μοντέλα κατασκευής διαγραμμάτων ελέγχου που μόλις περιγράψαμε αποτελούν μοντέλα κατασκευής δίπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου αφού υπάρχει και άνω και κάτω όριο ελέγχου. Στη βιβλιογραφία αναφέρονται και τα μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου στα οποία απουσιάζει είτε το άνω είτε το κάτω όριο ελέγχου.

Στα διαγράμματα ελέγχου Shewhart διακρίνουμε δύο μεγάλες κατηγορίες ανάλογα με το αν το χαρακτηριστικό X είναι συνεχής ή διακριτή τυχαία μεταβλητή. Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 τότε υπάρχουν διαγράμματα ελέγχου Shewhart για την παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διασποράς της X . Στην περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή υπάρχουν διαγράμματα ελέγχου Shewhart για την παρακολούθηση του ποσοστού (και του αριθμού) των ελαττωματικών προϊόντων που αποδίδει η παραγωγική διεργασία, καθώς επίσης και για τον αριθμό (και το μέσο αριθμό) των ελαττωμάτων (ατελειών) σε μια μονάδα ελέγχου (για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε Αντζουλάκος (2006), Δαμιανού (1996), Καφφές (1996)).

1.4 Μέσο μήκος ροής στα διαγράμματα ελέγχου

Μια βασική έννοια που σχετίζεται με τα διαγράμματα ελέγχου είναι το μέσο μήκος ροής ARL (*average run length*) του διαγράμματος. Η τυχαία μεταβλητή T που δηλώνει το πλήθος των σημείων που πρέπει να σχεδιαστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου έως ότου πάρουμε ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας ονομάζεται μήκος ροής (*run length*) του διαγράμματος. Το μέσο μήκος ροής ARL ορίζεται ως ο αναμενόμενος αριθμός των σημείων που πρέπει να σχεδιαστούν στο διάγραμμα έως ότου λάβουμε για πρώτη φορά ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας, δηλαδή $ARL = E(T)$.

Στα διαγράμματα ελέγχου Shewhart με απεικονιζόμενη ποσότητα τη W η οποία έχει εντός ελέγχου μέσο μ , τυπική απόκλιση σ και συνάρτηση κατανομής $F_0(\cdot)$, έχουμε ότι η πιθανότητα p_0 εμφάνισης ενός σημείου του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου είναι ίση με

$$p_0 = 1 - P(LCL \leq W \leq UCL) = 1 - F_0(\mu + L\sigma) + F_0(-(\mu - L\sigma))$$

και το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι ίσο με

$$ARL_0 = \frac{1}{p_0}$$

αφού το μήκος ροής T ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας p_0 . Φυσικά για μια διεργασία που βρίσκεται εντός ελέγχου θέλουμε να έχουμε μεγάλη τιμή για το ARL_0 έτσι ώστε να μειωθεί ο αριθμός των λανθασμένων ενδείξεων εκτός ελέγχου διεργασίας.

Για μια εκτός ελέγχου διεργασία, όπου η συνάρτηση κατανομή της τυχαίας μεταβλητής W είναι η $F_1(\cdot)$, έχουμε ότι η πιθανότητα p_1 εμφάνισης ενός σημείου εκτός των ορίων ελέγχου του διαγράμματος είναι ίση με

$$p_1 = 1 - P(LCL \leq W \leq UCL) = 1 - F_1(\mu + L\sigma) + F_1(-(\mu - L\sigma))$$

και το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι ίσο με

$$ARL_1 = \frac{1}{p_1}$$

Φυσικά για μια διεργασία που βρίσκεται εκτός ελέγχου θέλουμε να έχουμε μικρή τιμή για το ARL_1 έτσι ώστε να μειωθεί ο αριθμός των δειγμάτων (και συνεπώς ο χρόνος) που απαιτούνται για να γίνει αντιληπτό ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου.

Αν για την τυχαία μεταβλητή W είναι γνωστό ότι $W \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε είναι εύκολο να δειχθεί ότι το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι ίσο με

$$ARL_0 = \frac{1}{2\Phi(-L)}$$

και για $L = 3$ προκύπτει ότι

$$ARL_0 \cong \frac{1}{0.0027} \cong 370.$$

Αν κατά τη διάρκεια της παραγωγικής διεργασίας η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής W μετατοπιστεί από τη θέση μ στη θέση $\mu^* = \mu + \delta\sigma$ (μετατόπιση εκφρασμένη σε μονάδες τυπικής απόκλισης) και η διακύμανσή της δεν αλλάξει έχουμε ότι

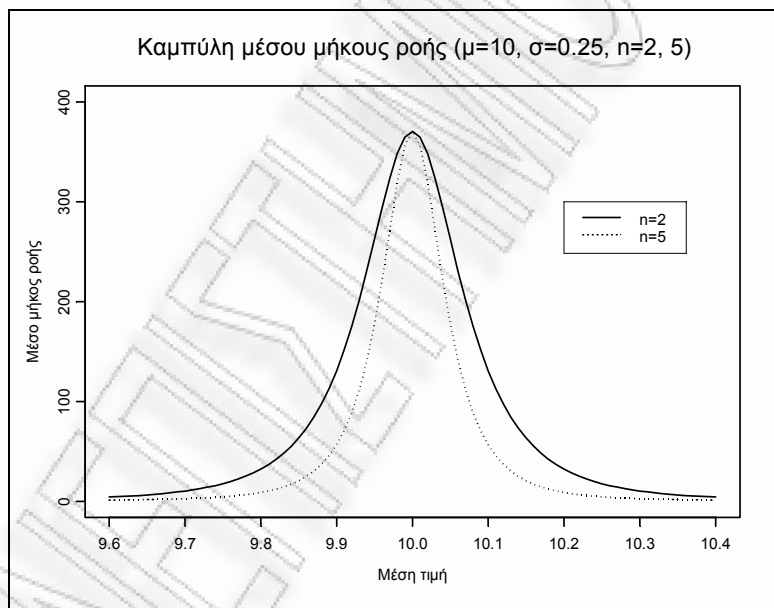
$$\begin{aligned} p_1 &= 1 - P(LCL \leq W \leq UCL \mid W \sim N(\mu + \delta\sigma, \sigma^2)) \\ &= 1 - P(\mu - L\sigma \leq W \leq \mu + L\sigma \mid W \sim N(\mu + \delta\sigma, \sigma^2)) \\ &= 1 - \Phi(L - \delta) + \Phi(-L - \delta) = 1 - \Phi(L - \delta) - \Phi(-L - \delta) \end{aligned}$$

και

$$ARL_1 = \frac{1}{p_1} = \frac{1}{2 - \Phi(L - \delta) - \Phi(L + \delta)}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $ARL(\delta)$ για να δηλώσουμε το μέσο μήκος ροής ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart όταν ο μέσος της διεργασίας μετατοπιστεί από τη θέση μ στη θέση $\mu + \delta\sigma$. Φυσικά για $\delta = 0$ προκύπτει το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής. Επίσης με ανάλογο τρόπο γίνεται ο υπολογισμός του ARL στα μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου.

Για παράδειγμα, στο ακόλουθο σχήμα δίνεται γραφική παράσταση του ARL_1 στην περίπτωση που η στατιστική συνάρτηση $W \sim N(\mu, 0.25^2/n)$ για $n = 2$ και $n = 5$. Από το σχήμα προκύπτει ότι το ARL_1 δεν είναι καθόλου ικανοποιητικό για μικρές μετατοπίσεις του μέσου επιπέδου της διεργασίας. Για παράδειγμα αν το μέσο επίπεδο της διεργασίας από $\mu = 10$ μετατοπιστεί στη θέση $\mu^* = 10.1$ τότε $\beta = 0.992359$ και $ARL_1 \cong 130$.



Σχήμα 1.2. Μέσο μήκος ροής για $W \sim N(\mu, 0.25^2/n)$ για $n = 2, 5$.

Η χρήση του ARL ως μέτρου για την περιγραφή της απόδοσης μιας διεργασίας έχει υποστεί αρκετή κριτική τα τελευταία χρόνια γιατί το ARL που παρατηρείται στην πράξη διαφέρει συνήθως αρκετά από το “θεωρητικό” ARL (είτε είναι αρκετά μεγαλύτερο είτε είναι αρκετά μικρότερο) αφού η κατανομή του μήκους ροής είναι πολύ ασυμμετρική ($G(p)$) και συνεπώς η μέση τιμή δεν μπορεί να θεωρηθεί ως αντιπροσωπευτικό μέτρο κεντρικής τάσης της κατανομής (ιδιαίτερα για μικρές τιμές του p).

1.5 Κανόνες ευαισθητοποίησης ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart

Από μελέτες έχει διαπιστωθεί ότι για μικρές μετατοπίσεις του μέσου μ της W (έως και 1.5σ) το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής ARL του διαγράμματος ελέγχου Shewhart δεν είναι ικανοποιητικό (είναι αρκετά μεγάλος αριθμός). Για να κάνουμε περισσότερο ευαίσθητο ένα διάγραμμα ελέγχου ως προς την ικανότητά του να ανιχνεύει πιο γρήγορα εκτός ελέγχου διεργασίες, εκτός από τη σχεδίαση των ορίων ελέγχου, σχεδιάζουμε επίσης και προειδοποιητικά εσωτερικά των ορίων ελέγχου όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα (η σχεδίαση των προειδοποιητικών ορίων προϋποθέτει την ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου χρησιμοποιώντας το μοντέλο των ορίων τριών σίγμα (3σ)).



Σχήμα 1.3. Προειδοποιητικά όρια ελέγχου

Τα προειδοποιητικά όρια χρησιμοποιούνται μαζί με κάποιους “κανόνες” που περιγράφουν την εμφάνιση ειδικών μοτίβων σε ένα διάγραμμα ελέγχου. Στην περίπτωση που εμφανιστεί το μοτίβο που περιγράφει ο κανόνας τότε θεωρούμε ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου χωρίς απαραίτητα να έχουμε κάποιο σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου (UCL και LCL). Οι σημαντικότεροι κανόνες που χρησιμοποιούνται για την ευαισθητοποίηση ενός διαγράμματος ελέγχου είναι οι ακόλουθοι:

1. Ένα ή περισσότερα σημεία εκτός των ορίων ελέγχου
2. Δύο από τρία συνεχόμενα σημεία στην Ζώνη A (σε μια από τις δύο ζώνες A)

3. Τέσσερα από πέντε συνεχόμενα σημεία πέραν της Ζώνης C (σε μια από τις δύο περιοχές)
4. Οκτώ συνεχόμενα σημεία στην ίδια μεριά (επάνω ή κάτω) της κεντρικής γραμμής
5. Έξι συνεχόμενα σημεία σε αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη
6. Δεκαπέντε συνεχόμενα σημεία στην ολική Ζώνη C
7. Δεκατέσσερα συνεχόμενα σημεία σε εναλλασσόμενη μορφή “πάνω-κάτω”
8. Οκτώ συνεχόμενα σημεία εκτός της ολικής Ζώνης C
9. Οποιαδήποτε ασυνήθιστη ή μη τυχαία ακολουθία σημείων
10. Ένα ή περισσότερα σημεία κοντά στα προειδοποιητικά όρια ή τα όρια ελέγχου.

Οι πρώτοι τέσσερις κανόνες είναι γνωστοί ως *Western Electric Rules*. Στο ακόλουθο διάγραμμα ελέγχου έχουν σημειωθεί τα σημεία που “χτυπούν” για πρώτη φορά ο καθένας από τους *Western Electric Rules*.



Σχήμα 1.4. Western Electric Rules

Έτσι, στο σημείο 4 χτύπησε ο Κανόνας 2, στο σημείο 11 χτύπησε ο Κανόνας 3, στο σημείο 16 χτύπησε ο Κανόνας 1 και στο σημείο 21 χτύπησε ο Κανόνας 4.

Η χρήση πολλών κανόνων ταυτοχρόνως θα πρέπει να γίνεται με ιδιαίτερη προσοχή γιατί ένας μεγάλος αριθμός λανθασμένων συναγερμών συνεπάγεται και αντίστοιχο αριθμό λανθασμένων διακοπών της παραγωγικής διαδικασίας για την ανίχνευση ειδικών αιτιών μεταβλητότητας με αποτέλεσμα την αύξηση του κόστους παραγωγής.

Επίσης η χρήση πολλών κανόνων ταυτοχρόνως καθιστά εξαιρετικά δύσκολο τον υπολογισμό του μέσου μήκους ροής *ARL* του διαγράμματος ελέγχου. Η πρώτη σημαντική

εργασία που αντιμετώπισε το προαναφερθέν πρόβλημα με ένα ενοποιητικό τρόπο ήταν των Champ και Woodall (1987). Στο κεφάλαιο 3 θα αναπτύξουμε την αναγκαία θεωρία για τον υπολογισμό του μέσου μήκους ροής *ARL* ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart υπό την παρουσία κανόνων ευαισθητοποίησης χρησιμοποιώντας μια προσέγγιση παρόμοια με αυτή που αναπτύχθηκε στις εργασίες των Fu (1996), Koutras (1997), Antzoulakos (1999, 2001) (δείτε επίσης Ρακιτζής (2004)).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ανασκόπηση

2. Εισαγωγή

Μεταξύ άλλων, στις εργασίες των Page (1955), Western Electric Company (1956), Roberts (1958), Bissell (1978) και Wheeler (1983) χρησιμοποιήθηκαν κανόνες ροών για την ευαισθητοποίηση ενός διαγράμματος ελέγχου. Ωστόσο σε αυτές τις εργασίες δεν προτάθηκε μια γενική προσέγγιση για να καθοριστούν οι ακριβείς ιδιότητες των διαγραμμάτων ελέγχου. Αυτό έγινε για πρώτη φορά στην εργασία των Champ και Woodall (1987) όπου προτάθηκε μια προσέγγιση με χρήση αλυσίδων Markov για να βρεθεί το μέσο μήκος ροής, αλλά και η κατανομή του μήκους ροής του \bar{X} διαγράμματος ελέγχου Shewhart εφοδιασμένου με κανόνες ροών. Οι Shmueli και Cohen (2003) πρότειναν μια απλή μεθοδολογία για τη μελέτη την κατανομής του μήκους ροής ενός διαγράμματος ελέγχου εφοδιασμένου με κανόνες ροών. Η μεθοδολογία που ανέπτυξαν σκοπεύει στην εύρεση της πιθανογεννήτριας του μήκους ροής του διαγράμματος.

Το βασικό μειονέκτημα της εργασίας των Champ και Woodall (1987) (και προφανώς και των Shmueli και Cohen (2003)) είναι ότι δεν μπορούμε να έχουμε το επιθυμητό εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής αφού οι ζώνες και τα όρια ελέγχου των διαγραμμάτων είναι σταθερά. Ο Klein (2000) πρότεινε τη χρησιμοποίηση δύο διαγραμμάτων ελέγχου όπου το εντός ελέγχου μήκος ροής μπορεί να πάρει όποια τιμή θέλουμε. Ο Khoo (2003), προέκτεινε την εργασία του Klein (2000). Προκειμένου να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα των διαγραμμάτων στην ανίχνευση μικρών αλλά και μεγάλων μετατοπίσεων οι Khoo και Ariffin (2006) εισήγαγαν διπλά συμμετρικά όρια ελέγχου. Τέλος στην εργασία του ο Acosta (2007) μελέτησε σε βάθος κανόνες της μορφής k -από- k και k -από- $k+1$.

2.1 Champ και Woodall (1987)

2.1.1. Συμπληρωματικοί κανόνες ροών

Έστω μια τυχαία μεταβλητή X που μετρά την ποιότητα ενός προϊόντος. Παρατηρούμε διαδοχικούς ανεξάρτητους δειγματικούς μέσους $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots$, για τους οποίους υποθέτουμε ότι $\bar{X}_i \sim N(\mu_i, \sigma^2/n)$, $i=1,2,\dots$, όπου το σ^2 είναι γνωστό και παραμένει σταθερό στο χρόνο. Είναι βολικό να βασισθούν οι αποφάσεις μας στο τυποποιημένο δείγμα $Z_i = (\bar{X}_i - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$, $i=1,2,\dots$. Ως γνωστόν, τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart βασίζονται στους τρέχοντες δειγματικούς μέσους, όπου ένα σήμα εκτός ελέγχου προκύπτει στο στάδιο T όταν $|Z_T| > L$, όπου συνήθως το $L=3$. Αυτή η διαδικασία έχει το μειονέκτημα ότι δεν είναι ευαίσθητη σε μικρές μετατοπίσεις του μέσου. Ένας τρόπος να βελτιώσουμε την ευαισθησία στις μικρές μετατοπίσεις του μέσου είναι να προσθέσουμε περισσότερους κανόνες για να έχουμε ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας.

Οι κανόνες ευαισθητοποίησης ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart στο οποίο απεικονίζεται μια τυχαία μεταβλητή W με εντός ελέγχου μέσο μ και τυπική απόκλιση σ ($LCL = \mu - L\sigma$, $UCL = \mu + L\sigma$) μπορούν να κωδικοποιηθούν με τον ακόλουθο τρόπο σύμφωνα με τους Champ και Woodall (1987). Ο συμβολισμός $T(k, m, a, b)$ θα δηλώνει ότι k από m διαδοχικά σημεία του διαγράμματος βρίσκονται στο διάστημα $(\mu + a\sigma, \mu + b\sigma)$, $a < b$. Έτσι στο σύνηθες διάγραμμα ελέγχου Shewhart, $L=3$, ο Κανόνας 1 της Παραγράφου 1.5, που είναι ο κλασικός κανόνας λήψης ένδειξης εκτός ελέγχου διεργασίας, μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$C_1 = \{T(1,1,-\infty,-3), T(1,1,3,\infty)\},$$

και ο Κανόνας 2 της Παραγράφου 1.5 μπορεί να αποδοθεί ως

$$C_2 = \{T(2,3,-3,-2), T(2,3,2,3)\}$$

Οι Champ και Woodall (1987) μελέτησαν τους ακόλουθους κανόνες ευαισθητοποίησης

$$\text{Rule 1: } C_1 = \{T(1,1,-\infty,-3), T(1,1,3,\infty)\}$$

$$\text{Rule 2: } C_2 = \{T(2,3,-3,-2), T(2,3,2,3)\}$$

$$\text{Rule 3: } C_3 = \{T(4,5,-3,-1), T(4,5,1,3)\}$$

$$\text{Rule 4: } C_4 = \{T(8,8,-3,0), T(8,8,0,3)\}$$

$$\text{Rule 5: } C_5 = \{T(2,2,-3,-2), T(2,2,2,3)\}$$

$$\text{Rule 6: } C_6 = \{T(5,5,-3,-1), T(5,5,1,3)\}$$

$$\text{Rule 7: } C_7 = \{T(1,1,-\infty,-3.09), T(1,1,3.09, \infty)\}$$

$$\text{Rule 8: } C_8 = \{T(2,3,-3.09,-1.96), T(2,3,-1.96,3.09)\}$$

$$\text{Rule 9: } C_9 = \{T(8,8,-3.09,0), T(8,8,0,3.09)\}$$

Με το συμβολισμό

$$C_{ij\dots k} = C_i \cup C_j \cup \dots \cup C_k$$

δηλώνεται ένα διάγραμμα ελέγχου Shewhart το οποίο δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν συμβεί τουλάχιστον ένα ενδεχόμενο από αυτά που περιγράφουν οι κανόνες C_i, C_j, \dots, C_k . Ο κανόνας $C_{ij\dots k}$ ονομάζεται σύνθετος κανόνας.

2.1.2. Συγκρίσεις ARL

Ο Πίνακας 2.1 περιέχει τιμές του μέσου μήκους ροής σε διάφορα διαγράμματα ελέγχου Shewhart εφοδιασμένα με κανόνες ροών. Η μετατόπιση του μέσου δίνεται σε μονάδες τυπικής απόκλισης, δηλαδή $\delta = \sqrt{n} |\mu - \mu_0| / \sigma$. Ο Πίνακας 2.1 δείχνει ότι η χρήση των κανόνων ροών αυξάνουν την ευαισθησία των διαγραμμάτων σε μικρές μετατοπίσεις του μέσου. Οι κανόνες ροών, επίσης, ελαττώνουν (κάτω από 370.4) το μέσο μήκος ροής στην τιμή στόχο (ARL_0). Το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής για το διάγραμμα C_{1234} είναι μόλις 91.75 και η χρήση περισσότερων κανόνων ροών θα μειώσουν περισσότερο την τιμή αυτή. Ωστόσο, οποιαδήποτε επιθυμητή τιμή του ARL_0 μπορεί να επιτευχθεί, διευρύνοντας τα όρια ελέγχου.

Ο Πίνακας 2.2 περιέχει τους λόγους των τιμών του ARL του «αντίστοιχου» τυπικού \bar{X} διαγράμματος ελέγχου με τις τιμές για το ARL_0 όπως εκείνες του Πίνακα 2.1. Τα όρια ελέγχου για το \bar{X} διάγραμμα ελέγχου (L) έχουν επιλεχθεί με ακρίβεια δυο δεκαδικών ψηφίων, έτσι ώστε το ARL_0 να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά αλλά όχι μεγαλύτερο του αντίστοιχου ARL που αναφέρεται στο \bar{X} διάγραμμα ελέγχου εφοδιασμένου με κανόνες ροών. Γίνεται προφανές από τον Πίνακα 2.2 ότι τα εφοδιασμένα με κανόνες ροών διαγράμματα ελέγχου είναι πιο αποτελεσματικά στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων του

μέσου. Τα διαγράμματα με κανόνες ροών είναι λιγότερο αποτελεσματικά στις μεγάλες μετατοπίσεις του μέσου, αλλά και οι δύο τύποι διαγραμμάτων τείνουν να ανιχνεύουν μεγάλες μετατοπίσεις αρκετά γρήγορα. Η αύξηση της ευαισθησίας που αποκτάται με τη χρήση κανόνων ροών δεν μπορεί να κερδηθεί μειώνοντας την απόσταση των ορίων ελέγχου ενός τυπικού \bar{X} διαγράμματος ελέγχου.

Πίνακας 2.1. ARL τιμές για διαγράμματα ελέγχου Shewhart εφοδιασμένα με κανόνες ροών

Μετατόπιση	Διαγράμματα Ελέγχου															
	C ₁	C ₇	C ₁₂	C ₇₈	C ₁₅	C ₁₃	C ₁₄	C ₇₉	C ₁₆	C ₁₂₃	C ₁₅₆	C ₁₂₄	C ₇₈₉	C ₁₃₄	C ₁₄₅₆	C ₁₂₃₄
.0	370.40	499.62	225.44	239.75	278.03	166.05	152.73	170.41	349.38	132.89	266.82	122.05	126.17	105.78	133.21	91.75
.2	308.43	412.01	177.56	185.48	222.59	120.70	110.52	120.87	279.53	97.86	208.44	89.14	91.19	76.01	96.37	66.80
.4	200.08	262.19	104.46	106.15	134.17	63.88	59.76	63.80	165.48	52.93	119.47	48.71	49.19	40.95	51.94	36.61
.6	119.67	153.86	57.92	57.80	75.27	33.99	33.64	35.46	89.07	28.70	63.70	27.49	27.57	23.15	29.01	20.90
.8	71.55	90.41	33.12	32.75	42.96	19.78	21.07	22.09	48.40	16.93	34.96	17.14	17.14	14.62	17.94	13.25
1.0	43.89	54.55	20.01	19.70	25.61	12.66	14.58	15.26	27.74	10.95	20.43	11.73	11.71	10.19	12.19	9.22
1.2	27.82	34.03	12.81	12.62	16.06	8.84	10.90	11.42	17.05	7.68	12.83	8.61	8.59	7.66	8.90	6.89
1.4	18.25	21.97	8.69	8.58	10.60	6.62	8.60	9.05	11.28	5.76	8.65	6.63	6.62	6.08	6.84	5.41
1.6	12.38	14.68	6.21	6.16	7.36	5.24	7.03	7.44	7.98	4.54	6.22	5.27	5.27	5.01	5.42	4.41
1.8	8.69	10.15	4.66	4.64	5.36	4.33	5.85	6.24	5.97	3.73	4.71	4.27	4.27	4.24	4.39	3.68
2.0	6.30	7.25	3.65	3.65	4.07	3.68	4.89	5.25	4.67	3.14	3.72	3.50	3.52	3.65	3.61	3.13
2.2	4.72	5.36	2.96	2.98	3.22	3.18	4.08	4.41	3.78	2.70	3.04	2.91	2.94	3.17	3.01	2.70
2.4	3.65	4.08	2.48	2.51	2.64	2.78	3.38	3.67	3.14	2.35	2.55	2.47	2.50	2.77	2.54	2.35
2.6	2.90	3.20	2.13	2.17	2.22	2.43	2.81	3.05	2.64	2.07	2.19	2.13	2.16	2.43	2.19	2.07
2.8	2.38	2.59	1.87	1.91	1.93	2.14	2.35	2.54	2.26	1.85	1.91	1.87	1.91	2.14	1.91	1.85
3.0	2.00	2.15	1.68	1.71	1.70	1.89	1.99	2.14	1.95	1.67	1.70	1.68	1.71	1.89	1.70	1.67

Πίνακας 2.2. Λόγοι ARL τιμών (διαγράμματα Shewhart συγκρινόμενο με αντίστοιχα διαγράμματα ελέγχου Shewhart με κανόνες ροών)

		Όριο ελέγχου Shewhart L														
Μετατόπιση	C_1	C_7	C_{12}	C_{78}	C_{15}	C_{13}	C_{14}	C_{79}	C_{16}	C_{123}	C_{156}	C_{124}	C_{789}	C_{134}	C_{1456}	C_{1234}
.0	1.00	1.00	.98	.98	1.00	.98	.97	.98	.99	.99	.97	.99	.98	.96	.99	.98
.2	1.00	1.00	1.06	1.08	1.04	1.15	1.15	1.19	1.04	1.16	1.05	1.17	1.18	1.19	1.18	1.18
.4	1.00	1.00	1.21	1.26	1.15	1.49	1.47	1.54	1.14	1.49	1.22	1.50	1.52	1.56	1.52	1.53
.6	1.00	1.00	1.34	1.42	1.25	1.77	1.66	1.74	1.27	1.76	1.40	1.71	1.75	1.80	1.74	1.77
.8	1.00	1.00	1.45	1.54	1.33	1.92	1.68	1.76	1.40	1.91	1.55	1.76	1.80	1.84	1.80	1.82
1.0	1.00	1.00	1.52	1.61	1.39	1.93	1.57	1.63	1.51	1.92	1.66	1.68	1.72	1.75	1.72	1.75
1.2	1.00	1.00	1.54	1.63	1.43	1.83	1.40	1.44	1.56	1.84	1.71	1.55	1.56	1.56	1.58	1.61
1.4	1.00	1.00	1.54	1.62	1.44	1.68	1.22	1.25	1.55	1.70	1.70	1.40	1.43	1.40	1.43	1.45
1.6	1.00	1.00	1.50	1.56	1.43	1.50	1.07	1.07	1.49	1.55	1.63	1.27	1.29	1.24	1.30	1.31
1.8	1.00	1.00	1.44	1.49	1.40	1.33	.94	.94	1.41	1.39	1.54	1.17	1.19	1.10	1.18	1.18
2.0	1.00	1.00	1.37	1.41	1.35	1.18	.86	.84	1.31	1.27	1.44	1.09	1.10	.99	1.10	1.08
2.2	1.00	1.00	1.29	1.32	1.30	1.07	.80	.78	1.21	1.16	1.34	1.04	1.04	.91	1.04	1.01
2.4	1.00	1.00	1.22	1.24	1.24	.98	.78	.75	1.13	1.08	1.25	1.00	1.00	.85	1.00	.96
2.6	1.00	1.00	1.16	1.15	1.19	.93	.78	.74	1.08	1.02	1.18	.97	.96	.81	.97	.92
2.8	1.00	1.00	1.11	1.10	1.13	.89	.80	.76	1.03	.98	1.13	.95	.94	.80	.95	.90
3.0	1.00	1.00	1.05	1.05	1.10	.88	.82	.78	1.01	.95	1.06	.93	.92	.80	.94	.89

2.1.3. Μεθοδολογία Αλυσίδων Markov

Οι πιθανές τιμές της τυποποιημένης δειγματικής μέσης τιμής μπορούν να κατηγοριοποιηθούν καταλλήλως ανάλογα με τους συγκεκριμένους κανόνες ροών που χρησιμοποιούνται. Εάν συμβολίσουμε με $r+1$ τον αριθμό των διαφορετικών τιμών στο σύνολο $\{a_i, b_i (i = 1, 2, \dots, t)\}$ και με A_0, A_1, \dots, A_r τις διαταγμένες τιμές τους, τότε η περιοχή $R_j (j = 1, 2, \dots, r)$ ορίζεται να είναι το διάστημα (A_{j-1}, A_j) , και με p_j ορίζεται η πιθανότητα να πέσει μια παρατήρηση στο διάστημα $R_j (j = 1, 2, \dots, r)$. Για παράδειγμα, οι περιοχές που σχετίζονται για τον κανόνα C_{13} είναι $R_1 = (-\infty, -3)$, $R_2 = (-3, -1)$, $R_3 = (-1, 1)$, $R_4 = (1, 3)$ και $R_5 = (3, \infty)$.

Οι καταστάσεις της αλυσίδας Markov υποδεικνύουν την κατάσταση του διαγράμματος σε σχέση με τους κανόνες ροών. Υπάρχει μια απορροφητική κατάσταση που αντιστοιχεί στην εκτός ελέγχου ένδειξη. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν δύο απορροφητικές καταστάσεις, οι οποίες θα δηλώνουν ποια πλευρά του διαγράμματος παρήγαγε την εκτός ελέγχου ένδειξη.

Για τον κανόνα $T(k_i, m_i, a_i, b_i)$, $m_i > 1$, ορίζουμε τα διανύσματα:

$$\mathbf{W}'_i = (W_{i,1}, \dots, W_{i,m_i-1}), \quad \mathbf{X}'_i = (X_{i,1}, \dots, X_{i,m_i-1})$$

όπου

$$W_{i,j} = 1, \text{ εάν η } j \text{ κατά σειρά προηγούμενη παρατήρηση ήταν μέσα στο } (a_i, b_i)$$

$$W_{i,j} = 0, \text{ αλλιώς}$$

και

$$X_{i,j} = W_{i,j}, \text{ όταν } \sum_{h=1}^j (1 - W_{i,h}) < m_i - k_i + 1$$

$$X_{i,j} = 0, \text{ αλλιώς}$$

Το διάνυσμα \mathbf{X}'_i δηλώνει με τα «1» μόνο τις παρατηρήσεις που πέφτουν στο διάστημα (a_i, b_i) και που μπορούν να συμβάλλουν σε μια εκτός ελέγχου ένδειξη. Έτσι μια μεταβατική κατάσταση ενός διαγράμματος που χρησιμοποιεί t κανόνες μπορεί να αναπαρασταθεί ως $\mathbf{S}' = (\mathbf{X}'_1, \mathbf{X}'_2, \dots, \mathbf{X}'_t)$ όπου το υπο-διάνυσμα \mathbf{X}'_i ορίζεται, όπως προηγουμένως, για τον κανόνα $T(k_i, m_i, a_i, b_i)$, $i = 1, 2, \dots, t$. Για κάθε κανόνα με $m = 1$, δεν είναι απαραίτητο να θυμόμαστε καμία πληροφορία για τις προηγούμενες παρατηρήσεις. Πέραν τούτου, για να μειώσουμε το μέγεθος του διανύσματος \mathbf{S}' , είναι βολικό να αντικαταστήσουμε το υπο-

διάνυσμα που σχετίζεται με κάθε κανόνα της μορφής $T(m, m, a, b)$, $m > 1$, με έναν «μετρητή» l , όπου το l μπορεί να πάρει τιμές $0, 1, \dots, m-1$. Ο μετρητής l δηλώνει τον αριθμό των συνεχόμενων σημείων που πέφτουν στο διάστημα (a, b) με σημείο εκκίνησης το πιο πρόσφατο σημείο που ήταν εκτός του διαστήματος (a, b) .

Ο Πίνακας 2.3 περιλαμβάνει τις 30 καταστάσεις της αλυσίδας Markov για το διάγραμμα ελέγχου C_{13} . Οι τέσσερις πρώτες συνιστώσες κάθε διανύσματος αναπαριστούν την κατάσταση που σχετίζεται με τον κανόνα $T(4, 5, -3, -1)$, και οι επόμενες με τον κανόνα $T(4, 5, 1, 3)$. Για παράδειγμα, η κατάσταση 21, που συμβολίζεται με (01001010), δηλώνει ότι οι προηγούμενες 3 παρατηρήσεις έπεσαν στα διαστήματα $(1, 3)$, $(-3, -1)$ και $(1, 3)$, αντίστοιχα. Εάν υπήρχε κάποια παρατήρηση πιο πριν από αυτές τις τρεις, θα ήταν τέτοια ώστε δεν θα μπορούσε να συμβάλει σε εκτός ελέγχου ένδειξη.

Ο πίνακας μεταβάσεων \mathbf{P} ορίζεται ως $\mathbf{P} = [P_{ij}]$, όπου P_{ij} είναι η πιθανότητα να μεταβούμε από την κατάσταση i στην κατάσταση j . Οι καταστάσεις αριθμούνται από το 1 έως το s , όπου η κατάσταση 1 είναι η αρχική κατάσταση και η κατάσταση s είναι η απορροφητική.

Για κάθε κανόνα $T(k_i, m_i, a_i, b_i)$, ορίζουμε

$$X_{i,0} = 1, \text{ εάν η τρέχουσα παρατήρηση είναι στο διάστημα } (a_i, b_i)$$

$$X_{i,0} = 0, \text{ αλλιώς.}$$

Η μετάβαση στην απορροφητική κατάσταση συμβαίνει εάν για κάποιο i ισχύει

$$\sum_{j=0}^{m_i-1} X_{i,j} = k_i$$

ειδώλλως υπάρχει μετάβαση σε άλλη μεταβατική κατάσταση. Αυτή η μεταβατική κατάσταση μπορεί να αναπαρασταθεί από διάνυσμα $\mathbf{V}' = (y_1, y_2, \dots, y_t)$, όπου $\mathbf{y}'_t = (y_{i,j}, \dots, y_{i,m_i-1})$, $i = 1, 2, \dots, t$, και

$$y_{i,j} = X_{i,j-1} \text{ εάν } \sum_{h=0}^{j-1} (1 - X_{i,h}) < m_i - k_i + 1$$

$$y_{i,j} = 0, \text{ αλλιώς}$$

($j = 1, 2, \dots, m_i - 1, i = 1, 2, \dots, t$).

Για παράδειγμα, στον Πίνακα 2.3, εάν βρισκόμαστε στην κατάσταση 17, (10100100), και η επόμενη παρατήρηση πέσει στην περιοχή $R_2 = (-3, -1)$, τότε η αλυσίδα μεταβαίνει στην κατάσταση 8, (11010000).

Πίνακας 2.3. Καταστάσεις και μεταβάσεις για το διάγραμμα ελέγχου C_{13}

Παρούσα Κατάσταση		Αριθμός επόμενης κατάστασης				
No.	Representation	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
1	(00000000)	30	2	1	11	30
2	(10000000)	30	4	3	12	30
3	(01000000)	30	5	1	11	30
4	(11000000)	30	7	6	13	30
5	(10100000)	30	8	3	12	30
6	(01100000)	30	9	1	11	30
7	(11100000)	30	30	10	14	30
8	(11010000)	30	30	6	13	30
9	(10110000)	30	30	3	12	30
10	(01110000)	30	30	1	11	30
11	(00001000)	30	16	15	19	30
12	(01001000)	30	17	15	19	30
13	(01101000)	30	18	15	19	30
14	(01111000)	30	30	15	19	30
15	(00000100)	30	2	1	20	30
16	(10000100)	30	4	3	21	30
17	(10100100)	30	8	3	21	30
18	(10110100)	30	30	3	21	30
19	(00001100)	30	23	22	24	30
20	(00001010)	30	16	15	25	30
21	(01001010)	30	17	15	25	30
22	(00000110)	30	2	1	26	30
23	(10000110)	30	4	3	27	30
24	(00001110)	30	29	28	30	30
25	(00001101)	30	23	22	30	30
26	(00001011)	30	16	15	30	30
27	(01001011)	30	17	15	30	30
28	(00000111)	30	2	1	30	30
29	(10000111)	30	4	3	30	30
30	Absorbing	30	30	30	30	30

Ο Πίνακας 2.4 δίνει το ποσοστό των μη μηδενικών στοιχείων του πίνακα μετάβασης των αλυσίδων Markov που συνδέονται με διάφορα διαγράμματα ελέγχου εφοδιασμένα με κανόνες ροών. Προκύπτει ότι οι πίνακες είναι γενικά αραιοί.

Πίνακας 2.4. Ιδιότητες του πίνακα μετάβασης της αλυσίδας Markov

Διάγραμμα ελέγχου	Αριθμός καταστάσεων	Ποσοστό από μη μηδενικά στοιχεία
C_1, C_7	2	75.0
C_{15}	4	68.8
C_{12}, C_{78}	8	32.8
C_{16}	10	35.0
C_{156}	16	31.6
C_{14}, C_{79}	16	17.2
C_{13}	30	11.7
C_{124}, C_{789}	44	9.3
C_{1456}	64	9.8
C_{123}	72	6.5
C_{134}	110	4.1
C_{1234}	216	2.7

Για να υπολογίσουμε τις πιθανότητες του μήκους ροής, ορίζουμε το $(s-1) \times 1$ διάνυσμα \mathbf{L}_h ως

$$\mathbf{L}'_h = [\Pr(N_1 = h), \dots, \Pr(N_{s-1} = h)],$$

όπου N_i είναι το μήκος ροής του διαγράμματος με αρχική κατάσταση i . Οι Brook και Evans (1972) έδειξαν ότι αυτά τα διανύσματα μπορούν να υπολογιστούν με το επαναληπτικό σχήμα

$$\mathbf{L}_1 = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}) \mathbf{1}$$

$$\mathbf{L}_h = \mathbf{Q} \mathbf{L}_{h-1}, \quad h = 2, 3, \dots,$$

όπου $\mathbf{1}$ είναι ένα διάνυσμα στήλη με 1 παντού, και ο πίνακας \mathbf{Q} είναι ένας $(s-1) \times (s-1)$ πίνακας που απορρέει από τον πίνακα \mathbf{P} διαγράφοντας την τελευταία γραμμή και την τελευταία στήλη.

Αυτός ο τρόπος υπολογισμού των πιθανοτήτων του μήκους ροής είναι αρκετά απλός επαναληπτικός τρόπος λαμβάνοντας υπόψη ότι ο πίνακας \mathbf{P} είναι αραιός. Για παράδειγμα, για τον διάγραμμα ελέγχου C_{12} , έχουμε το ακόλουθο επαναληπτικό σχήμα για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων του μήκους ροής

$$\Pr(N_1 = h) = p_3 \Pr(N_1 = h-1) + p_2 \Pr(N_2 = h-1) + p_4 \Pr(N_4 = h-1),$$

$$\Pr(N_2 = h) = p_3 \Pr(N_3 = h-1) + p_4 \Pr(N_5 = h-1),$$

$$\Pr(N_3 = h) = p_3 \Pr(N_1 = h-1) + p_4 \Pr(N_4 = h-1),$$

$$\Pr(N_4 = h) = p_3 \Pr(N_6 = h-1) + p_2 \Pr(N_7 = h-1),$$

$$Pr(N_5 = h) = p_3 Pr(N_6 = h - 1),$$

$$Pr(N_6 = h) = p_3 Pr(N_1 = h - 1) + p_2 Pr(N_2 = h - 1),$$

$$Pr(N_7 = h) = p_3 Pr(N_3 = h - 1),$$

για $h = 2, 3, 4, \dots$, όπου

$$Pr(N_1 = 1) = 1 - p_2 - p_3 - p_4, \quad Pr(N_2 = 1) = 1 - p_3 - p_4,$$

$$Pr(N_3 = 1) = 1 - p_3 - p_4, \quad Pr(N_4 = 1) = 1 - p_2 - p_3,$$

$$Pr(N_5 = 1) = 1 - p_3, \quad Pr(N_6 = 1) = 1 - p_2 - p_3,$$

$$Pr(N_7 = 1) = 1 - p_2 - p_3,$$

Οι Brook και Evans (1972) έδειξαν ότι το ARL για αρχική κατάσταση i μπορεί να υπολογιστεί με πρόσθεση των στοιχείων της i -οστής γραμμής του πίνακα $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$. Οι Woodall και Reynolds (1983) έδωσαν μια μέθοδο για τον προσεγγιστικό υπολογισμό του ARL. Αυτή η προσέγγιση είναι η πλέον αποτελεσματική στην περίπτωση μας, διότι ο πίνακας \mathbf{Q} έχει συνήθως μεγάλη διάσταση και είναι αραιός. Οι Woodall και Reynolds (1983) έδειξαν ότι

$$E(N) \cong \sum_{h=1}^{n^*} h Pr(N = h) + \hat{\lambda} Pr(N = n^*) \times [n^* / (1 - \hat{\lambda}) + 1 / (1 - \hat{\lambda})^2],$$

όπου

$$\hat{\lambda} = \frac{[1 - \sum_{h=1}^{n^*} Pr(N = h)]}{[1 - \sum_{h=1}^{n^*-1} Pr(N = h)]}$$

και N είναι το μήκος ροής. Για να διαφωτιστεί η αποτελεσματικότητα αυτής της προσέγγισης, η μεγαλύτερη τιμή που απαιτήθηκε για να υπολογιστούν τα ARL του Πίνακα 2.1, ήταν $n^* = 21$.

Το ποσοστιαίο σημείο N_a ($0 < a < 1$), το οποίο ορίζεται ως ο μικρότερος ακέραιος τέτοιος ώστε $Pr(N \leq N_a) \geq a$, μπορεί να προσδιορισθεί εύκολα όταν $N_a \leq n^*$. Όπως έδειξαν οι Woodall και Reynolds (1983), όταν $N_a > n^*$ τότε

$$N_a \cong n^* - 1 + \frac{\ln[(1 - \hat{\lambda})(\sum_{h=1}^{n^*} Pr(N = h) - a) / Pr(N = n^*) + \hat{\lambda}]}{\ln(\hat{\lambda})}$$

Εάν χρειάζεται μόνο το ARL για ένα δίπλευρο διάγραμμα, τότε η προσέγγιση που αναπτύξαμε με αλυσίδες Markov μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε το ακριβές ARL των δύο μονόπλευρων διαγραμμάτων, έστω ARL_L και ARL_U , και τότε η παρακάτω σχέση μας δίνει μια ακριβή προσέγγιση του ARL του δίπλευρου διαγράμματος

$$\frac{1}{ARL} = \frac{1}{ARL_L} + \frac{1}{ARL_U}.$$

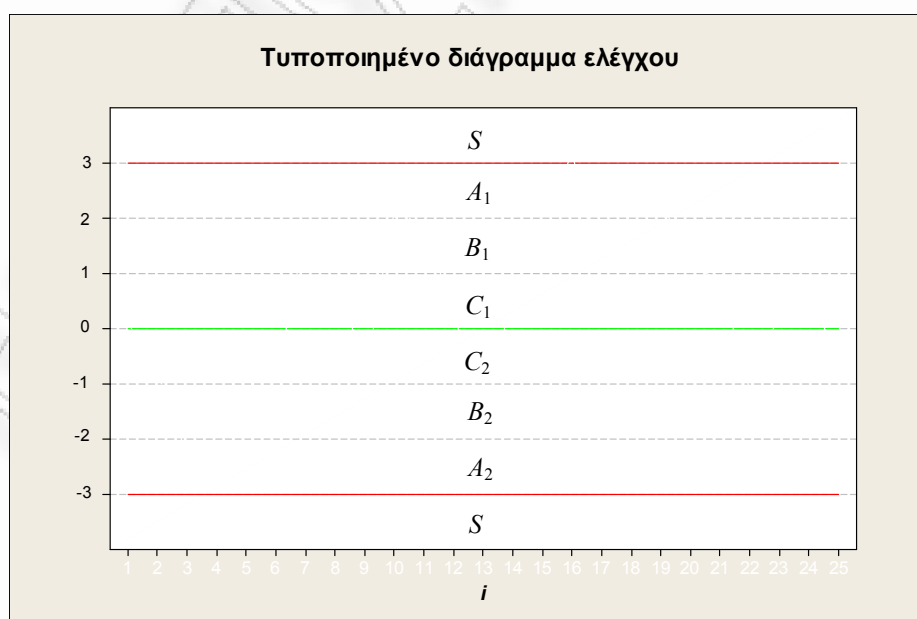
Για παράδειγμα, το μονόπλευρο C_{1234} απαιτεί μόνο 91 καταστάσεις, ενώ το δίπλευρο απαιτεί 216. Θα πρέπει να σημειωθεί πως η παραπάνω σχέση δίνει ακριβές αποτέλεσμα όταν έχουμε $k = m$.

2.2 Shmueli και Cohen (2003)

2.2.1. Εισαγωγή

Οι Shmueli και Cohen (2003) πρότειναν μια απλή μεθοδολογία για τη μελέτη την κατανομής του μήκους ροής ενός διαγράμματος ελέγχου εφοδιασμένου με κανόνες ροών. Η μεθοδολογία που ανέπτυξαν σκοπεύει στην εύρεση της πιθανογεννήτριας του μήκους ροής του διαγράμματος.

Έστω ότι στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζονται τυποποιημένες Z τιμές. Στο διάγραμμα ορίζουμε τις περιοχές S , A_i , B_i και C_i , $i = 1, 2$, όπως στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 2.1. Τυποποιημένο διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart χωρισμένο σε 7 ζώνες

Σύμφωνα με τους Champ και Woodall (1987), θεωρούμε τους ακόλουθους κανόνες (και μερικούς συνδυασμούς τους) για ένα τυποποιημένο διάγραμμα ελέγχου:

$$R_1 = \{T(1,1,S)\}$$

$$R_2 = \{T(2,3,A_2), T(2,3,A_1)\}$$

$$R_3 = \{T(4,5,B_1 \cup A_1), T(4,5,A_2 \cup B_2)\}$$

$$R_4 = \{T(8,8,C_1 \cup B_1 \cup A_1), T(8,8,A_2 \cup B_2 \cup C_2)\}$$

$$R_5 = \{T(2,2,A_2), T(2,2,A_1)\}$$

$$R_6 = \{T(5,5,B_1 \cup A_1), T(5,5,A_2 \cup B_2)\}$$

Επιπροσθέτως, συμβολίζουμε την πιθανότητα ένα σημείο να είναι στην περιοχή A_i , B_i και C_i ως a_i , b_i και c_i , $i=1,2$. Η πιθανότητα να υπερβαίνει τα όρια ελέγχου συμβολίζεται με δ . Αυτές οι πιθανότητες μπορούν να υπολογιστούν για μια εντός ελέγχου διαδικασία ή για οποιαδήποτε μετατόπιση του μέσου. Για παράδειγμα, εάν η διαδικασία είναι εντός ελέγχου έχουμε ότι $\delta = 2\Phi(-3) = 0.0027$ και $a_1 + a_2 = 2(\Phi(3) - \Phi(2)) = 0.0428$. Εάν τώρα έχουμε μια μετατόπιση του μέσου κατά 1σ , τότε οι πιθανότητες είναι $\delta = 1 - \Phi(2) + \Phi(-4) = 0.023$ και $a_1 + a_2 = \Phi(2) - \Phi(1) + \Phi(-3) - \Phi(-4) = 0.137$.

2.2.2. Εύρεση της πιθανογεννήτριας του μήκους ροής

Ορίζουμε ως «κατάληξη» (suffix) την ακολουθία των γραμμάτων που συμβολίζουν τις περιοχές του γραφήματος στις οποίες πέφτουν τα τελευταία σημεία. Για παράδειγμα, A_1S δηλώνει ότι τα τελευταία δύο σημεία παρουσιάστηκαν στις περιοχές A_1 και S . Για να βρούμε την πιθανογεννήτρια του μήκους ροής για έναν απλό κανόνα, ή για έναν συνδυασμό κανόνων, γενικεύεται η μεθοδολογία του Feller (1968) σύμφωνα με τα ακόλουθα βήματα:

1. Βρίσκουμε όλες τις Q το πλήθος διαφορετικές καταλήξεις που προκαλούν ένδειξη εκτός ελέγχου διαδικασίας.
2. Ορίζουμε $u_n^{(i)}$ την πιθανότητα συμπληρώσει το n -οστό σημείο την i -οστή κατάληξη, με $u_0^{(i)} = 1$, $i = 1, 2, \dots, Q$.

3. Διατυπώνουμε μια αναδρομική σχέση για κάθε $u_n^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, Q$.

4. Υπολογίζουμε τις Q σειρές δυνάμεων $U_i(s) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(i)} s^n$, $i = 1, 2, \dots, Q$.

5. Η πιθανογεννήτρια του μήκους ροής δίνεται από την σχέση

$$G(s) = 1 - \frac{1}{\sum_{i=1}^Q U_i(s) - Q + 1}$$

Το μέσο μήκος ροής, ARL, λαμβάνεται εύκολα παραγωγίζοντας την πιθανογεννήτρια.

2.2.3. Κανόνες ροών και κατανομές k τάξης

Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς της Παραγράφου 2.2.1, οι κανόνες που περιγράφηκαν εκεί μπορούν να χωριστούν σε δύο τύπους:

1. Κανόνες ροών τύπου $T(k, k, Z)$. Περιλαμβάνουν τους κανόνες R_1, R_4, R_5 και R_6
2. Σχηματισμούς τύπου $T(k, k+1, Z)$. Περιλαμβάνουν τους κανόνες R_2 και R_3

Ο χρόνος αναμονής, μέχρι να συμβεί ένα γεγονός του πρώτου τύπου, ανήκει στην «γεωμετρική κατανομή k τάξης». Όταν $k = 1$ τότε έχουμε την τυπική γεωμετρική κατανομή. (Johnson et al., (1992))

Ο χρόνος αναμονής, μέχρι να συμβεί ένα γεγονός του δεύτερου τύπου, ανήκει στην “ k από d ($d > k$) κατανομή”, η οποία διαπραγματεύεται τον χρόνο αναμονής μέχρι να συμβούν k επιτυχίες σε ένα παράθυρο με μέγιστο μήκος d συνεχόμενες δοκιμές Bernoulli. (βλ. Balakrishnan και Koutras (2002))

2.2.4. Κανόνες ροών τύπου $T(k, k, Z)$

Αυτή η περίπτωση σχετίζεται με τους κανόνες R_4, R_5 και R_6 όπου μια ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας προκύπτει από τον κανόνα ροής k σημεία σε μία από τις δύο περιοχές, τις οποίες συμβολίζουμε Z_1 και Z_2 , ή από ένα σημείο στην περιοχή S .

Για παράδειγμα, για τον συνδυασμό των κανόνων R_5 ($k = 2$) και R_1 υπάρχουν τρεις καταλήξεις S, A_1A_1, A_2A_2 . Στη γενική περίπτωση η πιθανότητα να πέσει ένα σημείο στην ζώνη Z_i συμβολίζεται με p_i ($i = 1, 2$). Οι τρεις αναδρομικές σχέσεις που συσχετίζονται με τις τρεις πιθανές καταλήξεις $S, Z_1 Z_1 \dots Z_1$ και $Z_2 Z_2 \dots Z_2$, δίνονται από τις σχέσεις

$$\delta = u_n^{(1)}$$

$$p_1^k = u_n^{(2)} + u_{n-1}^{(2)}p_1 + \dots + u_{n-k+1}^{(2)}p_1^{k-1}$$

$$p_2^k = u_n^{(3)} + u_{n-1}^{(3)}p_2 + \dots + u_{n-k+1}^{(3)}p_2^{k-1}$$

Πολλαπλασιάζοντας με s^n και αθροίζοντας ως προς n , λαμβάνουμε τις τρεις συναρτήσεις $U_1(s)$, $U_2(s)$, $U_3(s)$, από τις οποίες προκύπτει η πιθανογεννήτρια

$$G(s) = \frac{\delta s + (p_1^k + p_2^k) - [p_1^k(\delta + p_1) + p_2^k(\delta + p_2)]s^{k+1} - 2(p_1 p_2)^k s^{2k} + (p_1 p_2)^k (\delta + p_1 + p_2)s^{2k+1}}{1 - (1 - \delta)s - [p_1^k(\delta + p_1) + p_2^k(\delta + p_2)]s^{k+1} - (p_1 p_2)^k s^{2k} - (p_1 p_2)^k (1 - p_1 - p_2 - \delta)s^{2k+1}}$$

Το ακριβές μέσο μήκος ροής (ARL) λαμβάνεται με παραγωγή της παραπάνω συνάρτησης. Έτσι

$$ARL = G'(1) = \frac{(1 - p_1^k)(1 - p_2^k)}{\delta[(1 - p_1^k)(1 - p_2^k)] + (1 - p_1)(1 - p_2^k)p_1^k + (1 - p_2)(1 - p_1^k)p_2^k}$$

Ο παραπάνω τύπος, με διαφορετική μεθοδολογία, έχει δοθεί και από τον Aki (1992).

2.2.5. Κανόνες ροών τύπου $T(k, k+1, Z)$

Αυτή η περίπτωση σχετίζεται με τους κανόνες R_2 και R_3 όπου ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας προκύπτει όταν k από τα τελευταία $k+1$ συνεχόμενα σημεία βρίσκονται στην περιοχή Z_1 ή Z . Κατανομές αυτού του είδους έχουν μελετηθεί από πολλούς συγγραφείς (βλ. Balakrishnan και Koutras (2002)).

Για παράδειγμα, για τον κανόνα R_1 και για τον κανόνα $T(2, 3, Z)$ (για λόγους απλότητας θεωρούμε την περίπτωση $k=2$, αφού για μεγαλύτερες τιμές του k μπορούμε να εργαστούμε παρόμοια) έχουμε επτά δυνατές καταλήξεις: S , $\{Z_1 Z_1\}$, $\{Z_1 Z_2 Z_1\}$, $\{Z_1(\overline{Z_1 \cup Z_2 \cup S})Z_1\}$, $\{Z_2 Z_2\}$, $\{Z_2 Z_1 Z_2\}$, και $\{Z_2(\overline{Z_1 \cup Z_2 \cup S})Z_2\}$. Η αναδρομική σχέση για την πρώτη κατάληξη είναι η

$$\delta = u_n^{(1)},$$

για τις επόμενες τρεις καταλήξεις έχουμε

$$p_1^2 = u_n^{(2)} + p_1[u_{n-1}^{(2)} + u_{n-1}^{(3)} + u_{n-1}^{(4)}]$$

$$p_1^2 p_2 = u_n^{(3)} + u_{n-1}^{(6)} p_1 + p_1 p_2 [u_{n-2}^{(2)} + u_{n-2}^{(3)} + u_{n-2}^{(4)}]$$

$$p_1^2(1-p_1-p_2-\delta) = u_n^{(4)} + p_1(1-p_1-p_2-\delta)[u_{n-2}^{(2)} + u_{n-2}^{(3)} + u_{n-2}^{(4)}]$$

και οι τελευταίες τρεις αναδρομικές σχέσεις είναι πανομοιότυπες με τις παραπάνω τρεις, εναλλάσσοντας το p_1 με το p_2 και τους υπερδείκτες (2), (3), (4) με τους υπερδείκτες (5), (6), (7), αντίστοιχα. . Στην συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε κάθε εξίσωση με s^n και αθροίζουμε για $n=1,2,3,\dots$. Σε αυτή την περίπτωση δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τα $U_i(s)$ αναλυτικά από κάθε εξίσωση αλλά χρειάζεται να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα τάξεως 6 (ή γενικά τάξης $4k-2$). Το ARL λαμβάνεται από την παραγωγή της πιθανογεννήτριας.

Η παραπάνω μεθοδολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κάθε τύπο από κανόνες ροών ή σχηματισμών, όπως και για συνδυασμούς τους.

2.2.6. Σύγκριση με την μέθοδο των Champ και Woodall (1987)

Η μέθοδος υπολογισμού του μήκους ροής βασισμένη σε αλυσίδες Markov, την οποία είχαν παρουσιάσει οι Champ και Woodall (1987) απαιτεί τον πλήρη καθορισμό όλων των πιθανών καταστάσεων της αλυσίδας και τον υπολογισμό του πίνακα μεταβάσεων (όπου, συνήθως, έχει μεγάλη διάσταση) και χρησιμοποιείται για να λάβουμε αναδρομικές σχέσεις για την κατανομή του μήκους ροής. Προκειμένου να υπολογίσουμε το ακριβές ARL ο πίνακας μεταβάσεων θα πρέπει να αντιστραφεί. Οι Woodall και Reynolds (1983) πρότειναν ότι σε μερικές περιπτώσεις ο υπολογισμός μπορεί να γίνει προσεγγιστικά.

Στην συγκεκριμένη μέθοδο καταγράφουμε απλά όλες τις καταλήξεις οι οποίες οδηγούν σε ενδείξεις εκτός ελέγχου διεργασίας. Το υπολογιστικό κόστος για την μέθοδο αυτή είναι η επίλυση του γραμμικού σύστημα που είναι αρκετά μικρότερο σε σχέση με την μέθοδο των αλυσίδων Markov.

Εν κατακλείδι, πέρα από το υπολογιστικό κέρδος της μεθόδου αυτής, μπορούμε να έχουμε αναδρομικές και μη αναδρομικές σχέσεις για τον προσδιορισμό της κατανομής του μήκους ροής. Όταν όλη η κατανομή απαιτείται, τότε οι αναδρομικές σχέσεις είναι καταλληλότερες για τον υπολογισμό. Ωστόσο, για να υπολογίσουμε απλά μια πιθανότητα (για παράδειγμα, μια εκτίμηση) τότε είναι αποτελεσματικότερο να χρησιμοποιήσουμε τη μη αναδρομική μέθοδο. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό, διότι, η κατανομή του μήκους ροής έχει βαριά δεξιά ουρά.

2.3 Klein (2000)

2.3.1. Εισαγωγή

Το βασικό μειονέκτημα της εργασίας των Champ και Woodall (1987) (και προφανώς και των Shmueli και Cohen (2003)) είναι ότι δεν μπορούμε να έχουμε το επιθυμητό εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής αφού οι ζώνες και τα όρια ελέγχου των διαγραμμάτων είναι σταθερά. Ο Klein (2000) πρότεινε τη χρησιμοποίηση δύο νέων διαγραμμάτων ελέγχου όπου το εντός ελέγχου μήκος μπορεί να πάρει όποια τιμή θέλουμε. Και τα δύο διαγράμματα στηρίζονται σε κανόνες ροών και είναι εύκολα υλοποιήσιμα. Στο πρώτο διάγραμμα ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας προκύπτει όταν 2 από 2 συνεχόμενα σημεία βρίσκονται πέρα από ένα συγκεκριμένο όριο. Στο δεύτερο διάγραμμα ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας προκύπτει όταν 2 από 3 συνεχόμενα σημεία βρίσκονται πέρα από ένα συγκεκριμένο, διαφορετικό του προηγούμενου, όριο ελέγχου.

2.3.2. Παρουσίαση των διαγραμμάτων και συγκρίσεις

Οι Derman και Ross (1997), είχαν προτείνει δυο σχήματα προκειμένου να αυξήσουν την ευαισθησία ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart. Το πρώτο σενάριο, διατύπωνε πως έχουμε ένδειξη για εκτός ελέγχου διεργασία όταν δύο στα δύο σημεία (δύο συνεχόμενα σημεία, 2-από-2) βρεθούν πάνω από το άνω όριο ελέγχου, είτε βρεθούν κάτω από το κάτω όριο ελέγχου, είτε το ένα πάνω από το άνω όριο ελέγχου και το άλλο κάτω από το κάτω όριο ελέγχου. Στο δεύτερο σενάριο, έχουμε ένδειξη για εκτός ελέγχου διαδικασία όταν δύο από τα τρία συνεχόμενα σημεία βρεθούν πάνω από το άνω όριο ελέγχου, είτε βρεθούν κάτω από το κάτω όριο ελέγχου, είτε το ένα πάνω από το άνω όριο ελέγχου και το άλλο κάτω από το κάτω όριο ελέγχου (σχήμα 2-από-3).

Ο Klein (2000) παρουσιάζει μια ελαφρώς εναλλακτική πρόταση από τους Derman και Ross. Για το μεν πρώτο σενάριο προτείνει πως ένδειξη έχουμε όταν δύο από δύο σημεία βρίσκονται ταυτόχρονα είτε πάνω από το άνω όριο ελέγχου, είτε κάτω από το κάτω όριο ελέγχου. Ομοίως και στην δεύτερη περίπτωση, ένδειξη για εκτός ελέγχου διεργασία έχουμε όταν δύο από τα τρία συνεχόμενα σημεία βρίσκονται ταυτόχρονα είτε πάνω από το άνω όριο ελέγχου, είτε κάτω από το κάτω όριο ελέγχου.

Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζονται τιμές ARL για τα διαγράμματα των Derman και Ross, του Klein και του τυπικού διαγράμματος Shewhart με 3σ όρια ελέγχου.

Πίνακας 2.5. Τιμές ARL διαγραμμάτων ελέγχου του Derman και Ross, του Klein και Shewhart με 3σ όρια ελέγχου

Shift	Όρια Ελέγχου				
	Shewhart ± 3	D-R:2-από-2 ± 1.9322	D-R: 2-από-3 ± 2.0698	Klein: 2-από-2 ± 1.7814	Klein: 2-από-3 ± 1.9307
0	370	370	370	370	370
0.2	308	313	308	277	271
0.4	200	204	193	150	142
0.6	120	116	107	79	73
0.8	72	65	58	44	40
1	44	37	33	26	23
1.2	28	23	20	16	15
1.4	18	15	13	11	10
1.6	12	10	8.9	7.8	7.1
1.8	8.7	7.2	6.6	5.9	5.4
2	6.3	5.5	5.1	4.6	4.3
2.2	4.7	4.4	4.1	3.8	3.6
2.4	3.6	3.6	3.4	3.2	3.1
2.6	2.9	3.1	3.0	2.8	2.8
2.8	2.4	2.8	2.7	2.6	2.5
3	2.0	2.5	2.5	2.4	2.4
4	1.2	2.1	2.1	2.0	2.0
5	1.0	2.0	2.0	2.0	2.0

Από τον παραπάνω πίνακα, παρατηρούμε πως η πρόταση του Klein είναι σαφώς καλύτερη για μικρές μετατοπίσεις, με εξαίρεση όταν έχουμε μετατόπιση μεγαλύτερη από 2.8σ, τότε υπερτερεί σαφώς ένα κλασικό διάγραμμα τύπου Shewhart.

2.3.3. Μεθοδολογία του διαγράμματος ελέγχου 2-από-2

Το μέσος μήκος ροής (ARL) για αυτό το σχήμα τίθεται ίσο με 370.4 όσο και το ARL ενός τυπικού διαγράμματος Shewhart. Σκοπός μας είναι να βρεθούν τα κατάλληλα όρια ελέγχου

Το διάγραμμα ελέγχου μπορεί να θεωρηθεί σαν ένωση τριών περιοχών, μια περιοχή που βρίσκεται πάνω από το άνω όριο ελέγχου, μια περιοχή που βρίσκεται πέρα από το κάτω όριο ελέγχου και μια τελευταία περιοχή που βρίσκεται ανάμεσα στα δύο όρια ελέγχου. Έτσι συμβολίζουμε με p_U την πιθανότητα ένα σημείο να βρεθεί στην πρώτη περιοχή, με p_L την πιθανότητα να βρεθεί στην δεύτερη περιοχή και με p την πιθανότητα να βρεθεί στην τρίτη περιοχή.

Θεωρούμε, τώρα, μια αλυσίδα Markov με τρεις μεταβατικές καταστάσεις {1, 2, 3} και μια απορροφητική κατάσταση {4}. Η κατάσταση {1} δηλώνει σημείο που πέφτει ανάμεσα από τα δύο όρια ελέγχου, η {2} δηλώνει σημείο που πέφτει πάνω από το άνω όριο ελέγχου (UCL) και η {3} δηλώνει σημείο που πέφτει κάτω από το κάτω όριο ελέγχου (LCL). Η αλυσίδα μεταβαίνει στην απορροφητική κατάσταση {4} όταν δύο συνεχόμενα σημεία βρεθούν και τα δύο είτε στην {2} είτε στην {3} κατάσταση.

Ο πίνακας μετάβασης της αλυσίδα Markov είναι ο ακόλουθος

		Κατάσταση το χρόνο $t + 1$			
		1	2	3	4
Κατάσταση το χρόνο t	1	p	pU	pL	0
	2	p	0	pL	pU
	3	p	pU	0	pL
	4	0	0	0	1

Προκειμένου να υπολογιστεί ο (μέσος) αριθμός των μεταβιβάσεων που χρειάζονται έτσι ώστε να οδηγηθούμε στην απορροφητική κατάσταση θα χρειαστεί να επιλυθεί το παρακάτω σύστημα γραμμικών εξισώσεων (δείτε Derman, Gleser and Olkin (1973))

$$M_{14} = 1 + (p)M_{14} + (pU)M_{24} + (pL)M_{34}$$

$$M_{24} = 1 + (p)M_{14} + (pL)M_{34}$$

$$M_{34} = 1 + (p)M_{14} + (pU)M_{24}$$

Εδώ, η M_{14} είναι ο αναμενόμενος χρόνος που απαιτείται ώστε από την αρχική κατάσταση {1} να βρεθούμε στην απορροφητική κατάσταση {4}. Από το παραπάνω σύστημα προκύπτει ότι

$$M_{14} = \frac{1}{1 - p - \frac{pU}{1 + pU} - \frac{pL}{1 + pL}}$$

Αφού χρησιμοποιούμε συμμετρικά όρια ελέγχου, έχουμε ότι $pL = pU = p^*$ και επειδή $1 - p = pL + pU = 2p^*$, παίρνουμε

$$M_{14} = \frac{1 + p^*}{2p^*}.$$

Επειδή θέλουμε να ισχύει η σχέση $M_{14} = ARL = 370.4$, προκύπτει ότι $p^* = pU = pL = 0.037422$, και τελικά, από πίνακες κανονικής κατανομής έχουμε πως $UCL = 1.7814$ ($LCL = -1.7814$).

Για μια μετατόπιση του μέσου κατά $b > 0$ μονάδες τυπικής απόκλισης, προκειμένου να υπολογίσουμε το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής μια εκτός διεργασίας, έχουμε

$$pL = \Pr(Z + b < -1.7814) = \Pr(Z < -1.7814 - b), \quad Z \sim N(0, 1).$$

Για $b = 1$, έχουμε $pL = P(Z < -2.7814) = 0.002706$, $pU = P(Z > 0.7814) = 0.217278$, και τελικά $ARL_1 = 25.78$.

2.3.4. Μεθοδολογία του διαγράμματος ελέγχου 2-από-3

Η διαδικασία εδώ είναι παρόμοια με την προηγούμενη, με την διαφορά ότι οι καταστάσεις στην αλυσίδα Markov, έχουν γίνει οχτώ και είναι οι ακόλουθες:

- (OO): δύο συνεχόμενα σημεία ανάμεσα στα όρια ελέγχου
- (OU): το πρώτο σημείο ανάμεσα στα όρια ελέγχου και το άλλο πάνω από το άνω όριο ελέγχου.
- (OL): το πρώτο σημείο ανάμεσα στα όρια ελέγχου και το άλλο κάτω από το κάτω όριο ελέγχου.
- (UL): το πρώτο σημείο πάνω από το άνω όριο και το δεύτερο κάτω από το κάτω όριο ελέγχου.
- (UO): το πρώτο πάνω από το άνω όριο και το δεύτερο ανάμεσα από τα όρια ελέγχου.
- (LO): το πρώτο κάτω από το κάτω όριο και το δεύτερο ανάμεσα από τα όρια ελέγχου.
- (LU): το πρώτο κάτω από το κάτω όριο και το δεύτερο πάνω από το άνω όριο ελέγχου.
- (OOC): Απορροφητική κατάσταση, δύο από τα τρία σημεία πάνω από το άνω όριο ελέγχου, είτε δύο από τα τρία σημεία κάτω του κάτω ορίου ελέγχου.

Ο πίνακας μετάβασης της αλυσίδα Markov είναι ο ακόλουθος

		Κατάσταση το χρόνο $t + 1$							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Κατάσταση το χρόνο t		OO	OU	OL	UL	UO	LO	LU	OOC
		1	OO	p	pU	pL	0	0	0
2	OU	0	0	0	pL	p	0	0	pU
3	OL	0	0	0	0	0	p	pU	pL
4	UL	0	0	0	0	0	p	0	pL+pU
5	UO	0	0	0	0	0	0	0	pU
6	LO	p	0	pL	0	0	0	0	pU
7	LU	p	pU	0	0	p	0	0	pL+pU
8	OOC	0	0	0	0	0	0	0	1

Το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων που πρέπει να λυθούν ως προς M_{18} είναι το ακόλουθο

$$M_{18} = I + (p)M_{18} + (pU)M_{28} + (pL)M_{38}$$

$$M_{28} = I + (p)M_{58} + (pL)M_{48}$$

$$M_{38} = I + (p)M_{68} + (pU)M_{78}$$

$$M_{48} = I + (p)M_{68}$$

$$M_{58} = I + (p)M_{18} + (pL)M_{38}$$

$$M_{68} = I + (p)M_{18} + (pU)M_{28}$$

$$M_{78} = I + (p)M_{58}$$

Για να βρούμε τα όρια ελέγχου ώστε το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής να είναι 370.4 θα επιλύσουμε το άνω γραμμικό σύστημα με τους εξής περιορισμούς:

$$pL = pU, \quad pL + pU + p = 1, \quad M_{18} = 370.4.$$

Έτσι $pU = pL = 0.2676$ και από πίνακες της κανονικής κατανομής προκύπτει ότι τα όρια ελέγχου είναι ± 1.9307 .

Τέλος για να υπολογίσουμε το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής, εργαζόμαστε όπως πριν. Για μια μετατόπιση του μέσου κατά $b > 0$ μονάδες τυπικής απόκλισης, προκειμένου να υπολογίσουμε το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής μια εκτός διεργασίας, έχουμε

$$pL = \Pr(Z + b < -1.9307) = \Pr(Z < -1.9307 - b), \quad Z \sim N(0, 1).$$

Για $b = 1$, έχουμε $pL = P(Z < -2.9307) = 0.00191$, $pU = P(Z > 0.9307) = 0.176004$, και τελικά $ARL_I = 23.3747$.

2.4 Michael Khoo (2003)

2.4.1. Εισαγωγή

Ο Khoo (2003), προέκτεινε την εργασία του Klein (2000) μελετώντας τους κανόνες 2-από-4, 3-από-3 και 3-από-4. Επίσης έδωσε ειδικά διαγράμματα μέσω των οποίων γίνεται ευκολότερος ο σχεδιασμός των διαγραμμάτων ελέγχου. Τα ειδικά διαγράμματα αυτά βοηθούν αρκετά αυτούς που θέλουν να εφαρμόσουν τα διαγράμματα χωρίς να έχουν το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο.

2.4.2. Παρουσίαση των προτάσεων του Khoo (2003)

Στο άρθρο του ο Khoo (2003) παρουσιάζει μια γραφική μέθοδο, ή μάλλον καλύτερα ένα εργαλείο, με το οποίο ο τεχνικός που θα κληθεί να το εφαρμόσει ένα διάγραμμα ελέγχου με κανόνες ροών ή σχηματισμών να μην είναι υποχρεωμένος αφενός μεν να επιλύει το γραμμικό σύστημα που προκύπτει κάθε φορά, αφετέρου δε να δύναται να επιλέξει ο ίδιος το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής.

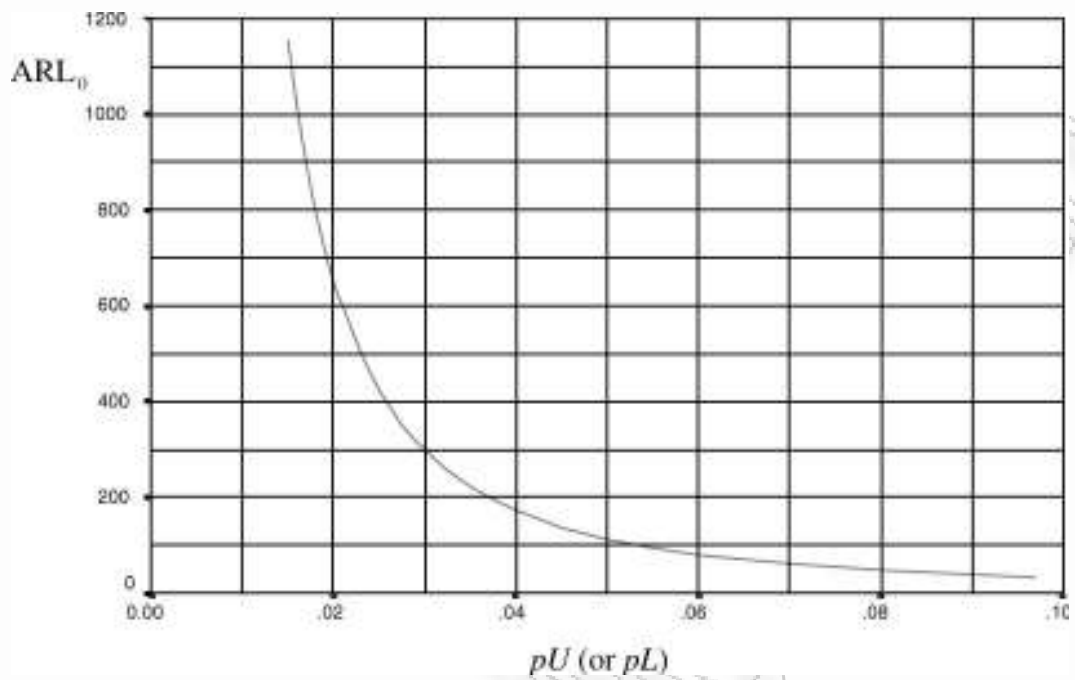
Στα παρακάτω γραφήματα δίνεται η γραφική παράσταση του εντός ελέγχου ARL έναντι της πιθανότητας pU (ή pL , αφού $pL = pU$) σε μια εντός ελέγχου διεργασία για τα σχήματα 2-από-3, 2-από-4, 3-από-3 και 3-από-4 και για ένα εύρος τιμών του ARL από 100 έως 2000.

Ο Khoo πρότείνει τα ακόλουθα βήματα για την εφαρμογή της διαδικασίας του:

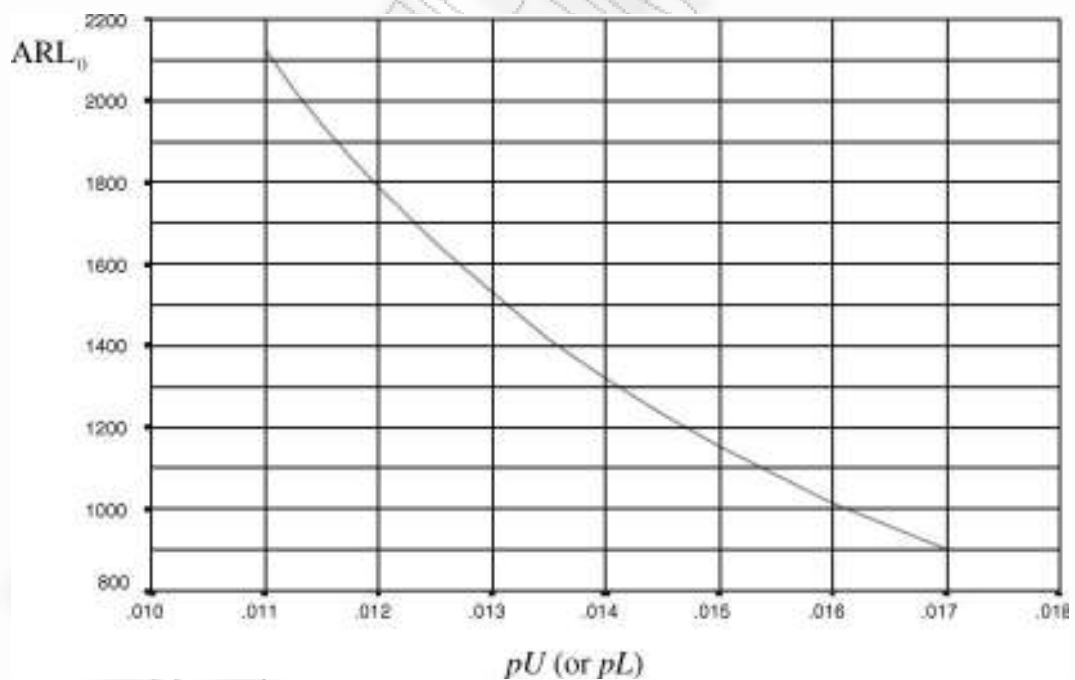
- (Α) Επιλέγουμε το επιθυμητό σχήμα ελέγχου ανάλογα με το μέγεθος της μετατόπισης του μέσου που θέλουμε να εντοπίζουμε άμεσα. Έτσι εάν μας ενδιαφέρει να εντοπίζουμε μικρές μετατοπίσεις επιλέγουμε το σχήμα 3-από-4, ενώ για μεγαλύτερες το 2-από-2. Για αρκετά μεγάλες μετατοπίσεις του μέσου προτείνεται το τυπικό διάγραμμα Shewhart.
- (Β) Αποφασίζουμε το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ARL_0 .
- (Γ) Χρησιμοποιώντας το κατάλληλο διάγραμμα βρίσκουμε την τιμή του pU (ή pL).
- (Δ) Εκτελούμε ανάλυση ευαισθησίας για τον ακριβή καθορισμό του pU συγκρίνοντας την τιμή του ARL_0 που προέκυψε από την τιμή pU του βήματος (Γ) με την τιμή

άλλων τιμών του ARL_0 που υπολογίζονται με παραπλήσιες τιμές του pU . Αποφασίζουμε να χρησιμοποιήσουμε εκείνη την τιμή του pU που δίνει τιμή για το ARL_0 που είναι πιο κοντά στην επιθυμητή τιμή του. Αυτό το βήμα είναι προαιρετικό, διότι οι τιμές που έχουμε από το βήμα (Γ) μας δίνουν ένα ARL_0 το οποίο είναι αρκετά κοντά στο επιθυμητό.

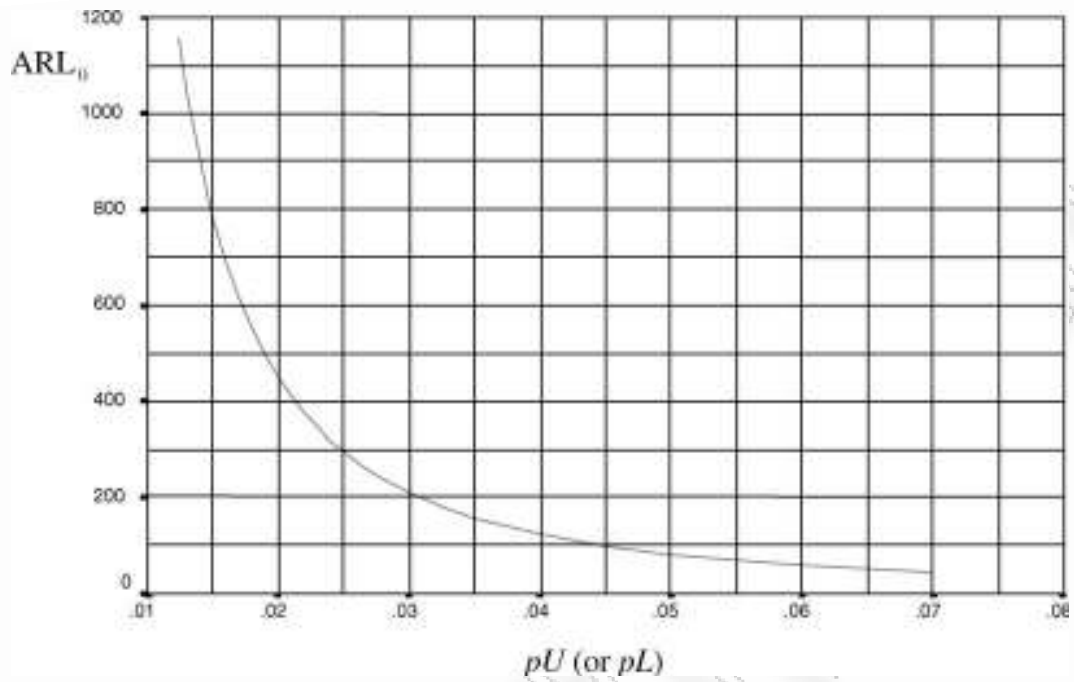
- (E) Βασιζόμενοι στην τιμή του pU βρίσκουμε τα όρια ελέγχου χρησιμοποιώντας πίνακες της κανονική κατανομής.



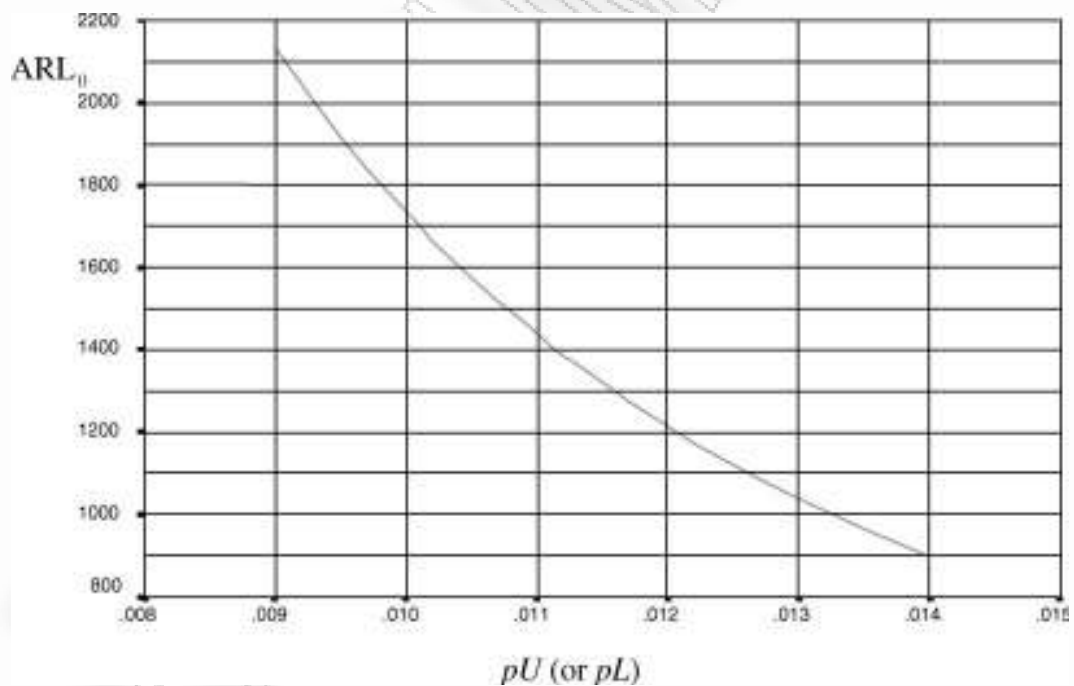
Σχήμα 2.2 Εντός ελέγχου ARL σε σχέση με ρU (ή ρL) για τον κανόνα 2-από-3 (το εντός ελέγχου ARL λαμβάνει τιμές από το 100 έως το 1000)



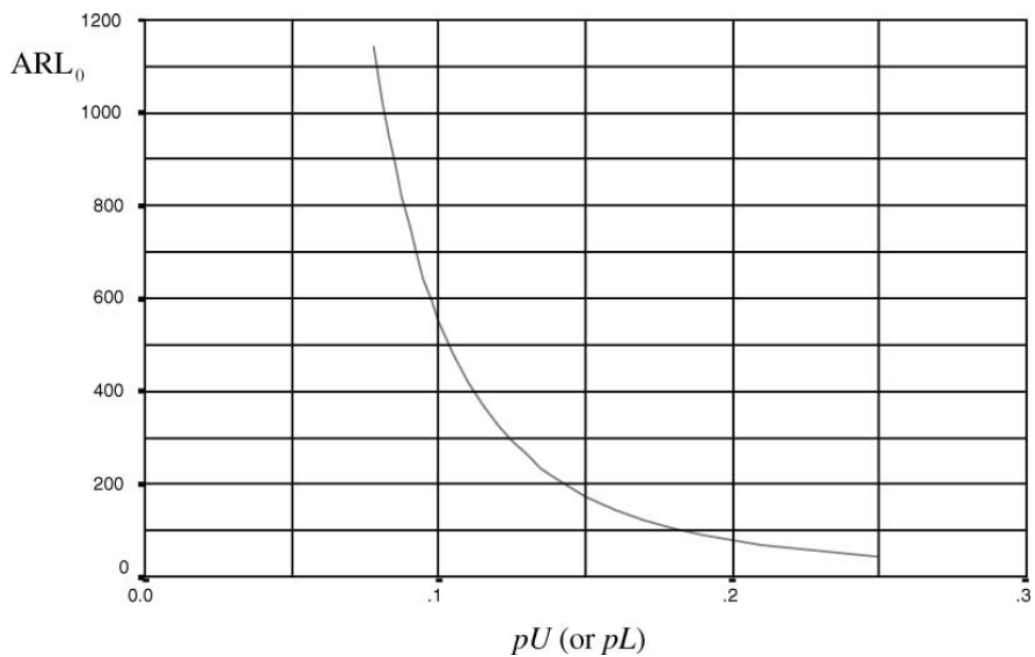
Σχήμα 2.3 Εντός ελέγχου ARL σε σχέση με ρU (ή ρL) για τον κανόνα 2-από-3 (το εντός ελέγχου ARL λαμβάνει τιμές από το 1000 έως το 2000)



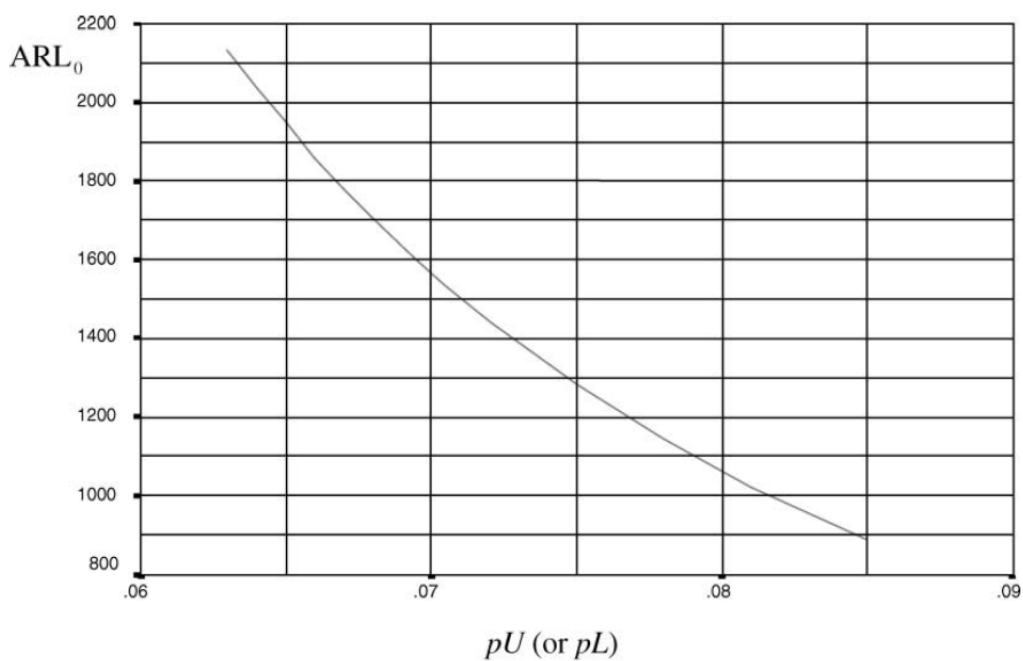
Σχήμα 2.4 Εντός ελέγχου ARL σε σχέση με ρU (ή ρL) για τον κανόνα 2-από-4 (το εντός ελέγχου ARL λαμβάνει τιμές από το 100 έως το 1000)



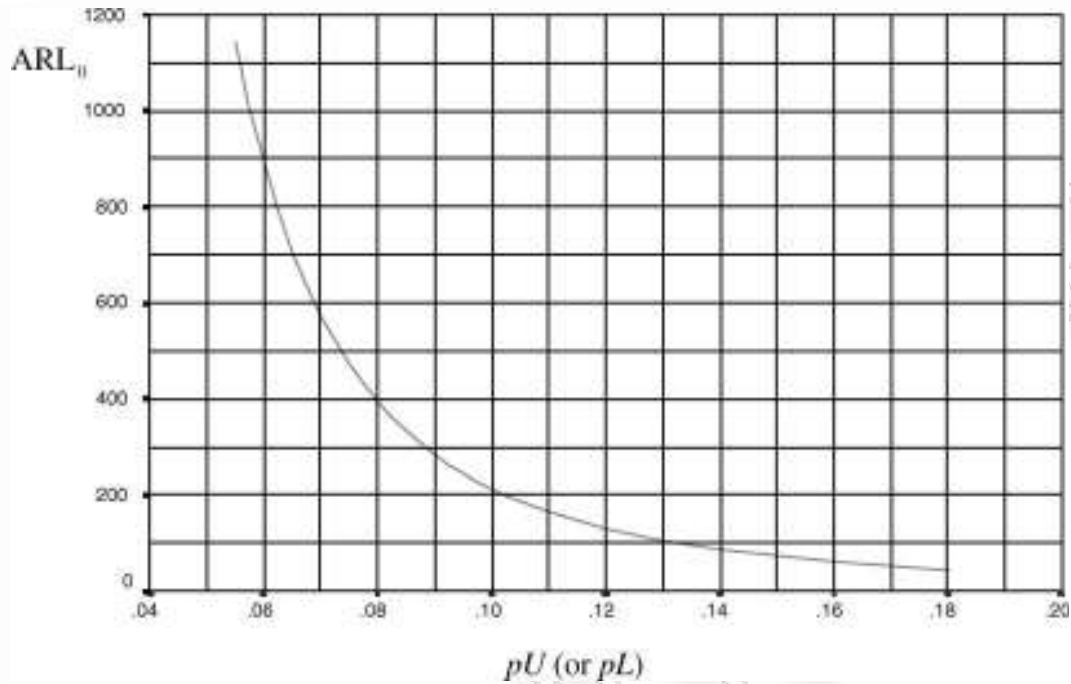
Σχήμα 2.5 Εντός ελέγχου ARL σε σχέση με ρU (ή ρL) για τον κανόνα 2-από-4 (το εντός ελέγχου ARL λαμβάνει τιμές από το 1000 έως το 2000)



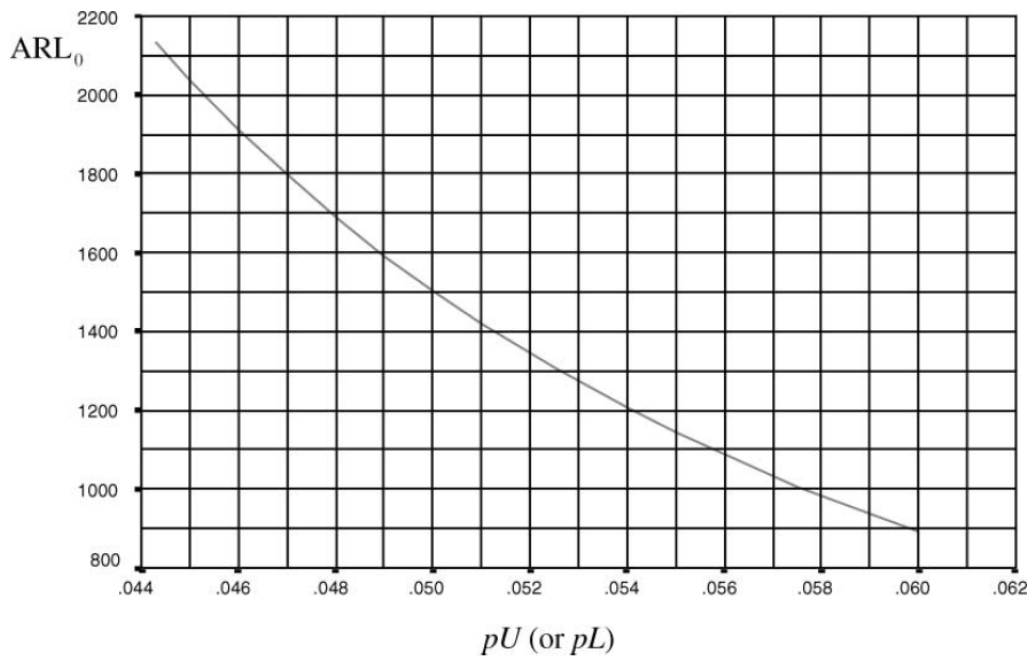
Σχήμα 2.6 Εντός ελέγχου ARL σε σχέση με pU (ή pL) για τον κανόνα 3-από-3 (το εντός ελέγχου ARL λαμβάνει τιμές από το 100 έως το 1000)



Σχήμα 2.7 Εντός ελέγχου ARL σε σχέση με pU (ή pL) για τον κανόνα 3-από-3 (το εντός ελέγχου ARL λαμβάνει τιμές από το 1000 έως το 2000)



Σχήμα 2.8 Εντός ελέγχου ARL σε σχέση με pU (ή pL) για τον κανόνα 3-από-4 (το εντός ελέγχου ARL λαμβάνει τιμές από το 100 έως το 1000)



Σχήμα 2.9 Εντός ελέγχου ARL σε σχέση με pU (ή pL) για τον κανόνα 3-από-4 (το εντός ελέγχου ARL λαμβάνει τιμές από το 1000 έως το 2000)

2.4.2. Ένα παράδειγμα

Τα βήματα που πρέπει να γίνουν για το σχήμα 3-από-4 με εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής 600 είναι τα ακόλουθα

Βήμα 1.: Το επιθυμητό ARL_0 είναι 600.

Βήμα 2.: Από το Σχήμα 2.8, βρίσκουμε ότι η τιμή του pU (ή pL) σχετικά με το επιθυμητό ARL_{in} είναι περίπου 0.069.

Βήμα 3.: Εκτελούμε ανάλυση ευαισθησίας με τα ακόλουθα αποτελέσματα

pU/pL	ARL_0
0.069	599.098
0.06899	599.343
0.06898	599.589
0.06897	599.835
0.06896	600.082

Βήμα 4.: Από τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι για $pU = 0.06896$ έχουμε την καλύτερη προσέγγιση για το ARL_0 . Οπότε τα όρια ελέγχου θα είναι ± 1.4836 , από πίνακες της κανονικής κατανομής.

2.4.3. Γραμμικά συστήματα για τα σχήματα 2-από-4, 3-από-3 και 3-από-4

Για τον υπολογισμό της ακριβής τιμής της πιθανότητας pU (ή pL) σε κάθε ένα από τα σχήματα 2-από-4, 3-από-3 και 3-από-4 απαιτείται η λύση κατάλληλου γραμμικού συστήματος. Ακολουθώντας τη μεθοδολογία του Klein (2000), ο Khoo (2003) κατέληξε στα παρακάτω συστήματα:

Για το σχήμα 2-από-4 το γραμμικό σύστημα είναι το ακόλουθο

$$M_{1(14)} = 1 + (p)M_{1(14)} + (pU)M_{2(14)} + (pL)M_{5(14)}$$

$$M_{2(14)} = 1 + (p)M_{3(14)} + (pL)M_{8(14)}$$

$$M_{3(14)} = 1 + (p)M_{4(14)} + (pL)M_{10(14)}$$

$$M_{4(14)} = 1 + (p)M_{1(14)} + (pL)M_{5(14)}$$

$$M_{5(14)} = 1 + (p)M_{6(14)} + (pU)M_{9(14)}$$

$$M_{6(14)} = 1 + (p)M_{7(14)} + (pU)M_{12(14)}$$

$$M_{7(14)} = 1 + (p)M_{1(14)} + (pU)M_{2(14)}$$

$$M_{8(14)} = 1 + (p)M_{11(14)}$$

$$M_{9(14)} = 1 + (p)M_{13(14)}$$

$$M_{10(14)} = 1 + (p)M_{6(14)}$$

$$M_{11(14)} = 1 + (p)M_{7(14)}$$

$$M_{12(14)} = 1 + (p)M_{3(14)}$$

$$M_{13(14)} = 1 + (p)M_{4(14)}$$

όπου το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι η ποσότητα $M_{1(14)}$.

Για το σχήμα 3-από-3 το γραμμικό σύστημα είναι το ακόλουθο

$$M_{1(10)} = 1 + (p)M_{1(10)} + (pU)M_{2(10)} + (pL)M_{3(10)}$$

$$M_{2(10)} = 1 + (p)M_{6(10)} + (pU)M_{5(10)} + (pL)M_{4(10)}$$

$$M_{3(10)} = 1 + (p)M_{7(10)} + (pU)M_{5(10)} + (pL)M_{9(10)}$$

$$M_{5(10)} = 1 + (p)M_{5(10)} + (pU)M_{8(10)} + (pL)M_{4(10)}$$

$$M_{6(10)} = 1 + (p)M_{1(10)} + (pU)M_{2(10)} + (pL)M_{3(10)}$$

$$M_{7(10)} = 1 + (p)M_{1(10)} + (pU)M_{2(10)} + (pL)M_{3(10)}$$

$$M_{8(10)} = 1 + (p)M_{6(10)} + (pL)M_{4(10)}$$

$$M_{9(10)} = 1 + (p)M_{7(10)} + (pU)M_{5(10)}$$

όπου το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι η ποσότητα $M_{1(10)}$.

Για το σχήμα 3-από-4 το γραμμικό σύστημα είναι το ακόλουθο

$$M_{1(26)} = 1 + (p)M_{1(26)} + (pU)M_{2(26)} + (pL)M_{5(26)}$$

$$M_{2(26)} = 1 + (p)M_{3(26)} + (pU)M_{8(26)} + (pL)M_{14(26)}$$

$$M_{3(26)} = 1 + (p)M_{4(26)} + (pU)M_{9(26)} + (pL)M_{15(26)}$$

$$M_{4(26)} = 1 + (p)M_{1(26)} + (pU)M_{2(26)} + (pL)M_{5(26)}$$

$$M_{5(26)} = 1 + (p)M_{6(26)} + (pU)M_{17(26)} + (pL)M_{11(26)}$$

$$M_{6(26)} = 1 + (p)M_{7(26)} + (pU)M_{16(26)} + (pL)M_{12(26)}$$

$$M_{7(26)} = 1 + (p)M_{1(26)} + (pU)M_{2(26)} + (pL)M_{5(26)}$$

$$\begin{aligned}
M_{8(26)} &= 1 + (p)M_{10(26)} + (pL)M_{20(26)} \\
M_{9(26)} &= 1 + (p)M_{3(26)} + (pL)M_{14(26)} \\
M_{10(26)} &= 1 + (p)M_{4(26)} + (pL)M_{15(26)} \\
M_{11(26)} &= 1 + (p)M_{13(26)} + (pU)M_{23(26)} \\
M_{12(26)} &= 1 + (p)M_{6(26)} + (pU)M_{17(26)} \\
M_{13(26)} &= 1 + (p)M_{7(26)} + (pU)M_{16(26)} \\
M_{14(26)} &= 1 + (p)M_{18(26)} + (pU)M_{21(26)} + (pL)M_{25(26)} \\
M_{15(26)} &= 1 + (p)M_{6(26)} + (pU)M_{17(26)} + (pL)M_{11(26)} \\
M_{16(26)} &= 1 + (p)M_{3(26)} + (pU)M_{8(26)} + (pL)M_{14(26)} \\
M_{17(26)} &= 1 + (p)M_{19(26)} + (pU)M_{22(26)} + (pL)M_{24(26)} \\
M_{18(26)} &= 1 + (p)M_{7(26)} + (pU)M_{16(26)} + (pL)M_{12(26)} \\
M_{19(26)} &= 1 + (p)M_{4(26)} + (pU)M_{9(26)} + (pL)M_{15(26)} \\
M_{20(26)} &= 1 + (p)M_{18(26)} + (pL)M_{25(26)} \\
M_{21(26)} &= 1 + (p)M_{19(26)} + (pL)M_{24(26)} \\
M_{22(26)} &= 1 + (p)M_{10(26)} + (pL)M_{20(26)} \\
M_{23(26)} &= 1 + (p)M_{19(26)} + (pU)M_{22(26)} \\
M_{24(26)} &= 1 + (p)M_{18(26)} + (pU)M_{22(26)} \\
M_{25(26)} &= 1 + (p)M_{13(26)} + (pU)M_{23(26)}
\end{aligned}$$

όπου το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι η ποσότητα $M_{1(26)}$.

2.5 Khoo και Ariffin (2006)

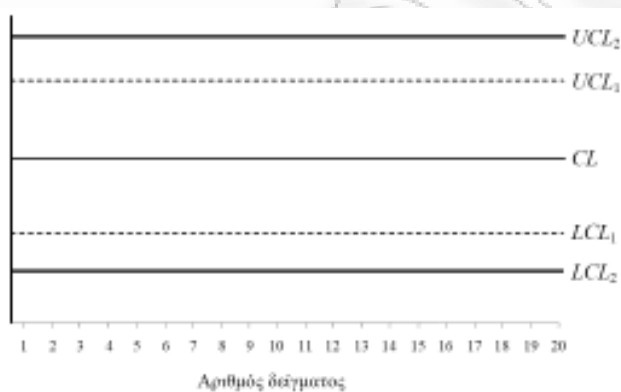
2.5.1. Εισαγωγή

Οι κανόνες ροών έχουν ενσωματωθεί στα διαγράμματα ελέγχου Shewhart προκειμένου να αυξήσουν την ευαισθησία τους στον εντοπισμό μικρών μετατοπίσεων του μέσου. Ωστόσο παρουσιάζουν υστέρηση στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων του μέσου σε σχέση με τα κλασικά διαγράμματα Shewhart. Το σημείο αυτό αποτελεί σημαντικό μειονέκτημά τους εφόσον θα θέλαμε μεγάλες μετατοπίσεις του μέσου, που είναι και οι πιο σοβαρές, να

ανιχνεύονται άμεσα. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίστηκε αποτελεσματικά από τους Khou και Ariffin (2006), των οποίων η πρόταση θα παρουσιαστεί στην επόμενη παράγραφο.

2.5.2. Βελτιωμένα σχήματα - Προσέγγιση με δύο ζεύγη ορίων ελέγχου

Τα δύο βελτιωμένα σχήματα που πρότειναν οι Khou και Ariffin (2006) στηρίζονται στους κανόνες ροών 2-από-2 και 2-από-3 του Klein (2000). Εκείνο που διαφέρει, είναι ότι στην προκειμένη περίπτωση έχει προστεθεί ένας επιπλέον κανόνας τύπου 1-από-1 και στις δύο περιπτώσεις ο οποίος κάνει χρήση των δικών του ορίων ελέγχου. Έτσι μια ένδειξη για εκτός ελέγχου διαδικασία λαμβάνεται είτε όταν ένα σημείο είναι πέρα από τα όρια ελέγχου UCL_2/LCL_2 , είτε με τον κανόνα 2-από-2 ή 2-από-3 που σχετίζονται με τα όρια ελέγχου UCL_1/LCL_1 . Ενδεικτικό είναι το ακόλουθο σχήμα



Σχήμα 2.10 Διπλά συμμετρικά όρια ελέγχου

Με άλλα λόγια, εδώ, έχουμε δύο ζεύγη ορίων ελέγχου, ένα για τον εντοπισμό του σημείου που χτυπά με τον κανόνα 1-από-1 (UCL_2, LCL_2), και το άλλο ζεύγος για τον εντοπισμό των σημείων που χτυπούν με τον κανόνα 2-από-2 ή τον 2-από-3. Για να χρησιμοποιήσουμε τους νέους κανόνες, θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε τα εξωτερικά όρια ελέγχου (UCL_2/LCL_2). Τα εξωτερικά όρια θα πρέπει να είναι μεγαλύτερα από $\pm 3\sigma$, εάν το επιθυμητό μέσο μήκος ροής θέλουμε να είναι 370.37. Στην συνέχεια υπολογίζουμε τα εσωτερικά όρια ελέγχου (UCL_1/LCL_1), χρησιμοποιώντας την μεθοδολογία των αλυσίδων Markov έτσι ώστε να έχουμε το επιθυμητό εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής.

Στους ακόλουθους πίνακες παρουσιάζονται τιμές του μήκους ροής για πέντε διαφορετικά σενάρια για τα εξωτερικά όρια ελέγχου. Για λόγους σύγκρισης δίνονται και οι τιμές του μήκους ροής του αντίστοιχου διαγράμματος ελέγχου Shewhart, και του απλού διαγράμματος, 2-από2, είτε του 2-από-3 χωρίς την επιπρόσθετη χρήση του κανόνα 1-από-1.

Πίνακας 2.6. ARL τιμές για το βελτιωμένο σχήμα 2-από-2

Μετατόπιση	2-από-2		2-από-2 (A)		2-από-2 (B)		2-από-2 (C)		2-από-2 (D)		2-από-2 (E)	
	Shewhart	± 1.7814	± 3.4 & $UCL_2/LCL_2 = \pm 3.4$ & $UCL_1/LCL_1 = \pm 1.843$	± 3.5 & $UCL_2/LCL_2 = \pm 3.5$ & $UCL_1/LCL_1 = \pm 1.823$	± 3.6 & $UCL_2/LCL_2 = \pm 3.6$ & $UCL_1/LCL_1 = \pm 1.81$	± 3.7 & $UCL_2/LCL_2 = \pm 3.7$ & $UCL_1/LCL_1 = \pm 1.798$	± 3.8 & $UCL_2/LCL_2 = \pm 3.8$ & $UCL_1/LCL_1 = \pm 1.792$					
0	371.20	375.48	373.22	373.25	373.84	369.57	372.69					
0.2	311.60	280.52	281.48	281.57	282.24	277.16	278.38					
0.4	204.13	153.98	156.50	155.63	155.78	153.88	153.58					
0.6	120.22	81.14	81.97	81.39	80.83	80.04	80.00					
0.8	71.86	45.33	45.30	44.90	44.77	44.75	44.65					
1	44.28	26.95	26.40	26.40	26.45	26.37	26.38					
1.2	28.38	16.99	16.38	16.42	16.51	16.45	16.55					
1.4	18.03	11.25	10.68	10.68	10.75	10.75	10.85					
1.6	12.51	7.92	7.48	7.48	7.48	7.52	7.60					
1.8	9.00	5.83	5.41	5.45	5.48	5.48	5.52					
2	6.39	4.52	4.14	4.17	4.21	4.24	4.27					
2.2	4.72	3.71	3.32	3.34	3.38	3.41	3.45					
2.4	3.65	3.19	2.80	2.82	2.87	2.90	2.94					
2.6	2.92	2.84	2.40	2.44	2.49	2.53	2.58					
2.8	2.36	2.58	2.12	2.16	2.21	2.24	2.28					
3	1.98	2.38	1.90	1.94	1.98	2.02	2.07					
4	1.19	2.04	1.27	1.31	1.34	1.38	1.42					
5	1.02	2.00	1.05	1.06	1.07	1.09	1.11					
6	1.00	2.00	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01					

Πίνακας 2.7. ARL τιμές για το βελτιωμένο σχήμα 2-από-3

Μετατόπιση	Shewhart	2-από-3 (A)		2-από-3 (B)		2-από-3 (C)		2-από-3 (D)		2-από-3 (E)	
		± 3	± 1.9307	$UCL_2/LCL_2 = \pm 3.4$ & $UCL_1/LCL_1 = \pm 1.986$	$UCL_2/LCL_2 = \pm 3.5$ & $UCL_1/LCL_1 = \pm 1.966$	$UCL_2/LCL_2 = \pm 3.6$ & $UCL_1/LCL_1 = \pm 1.955$	$UCL_2/LCL_2 = \pm 3.7$ & $UCL_1/LCL_1 = \pm 1.946$	$UCL_2/LCL_2 = \pm 3.8$ & $UCL_1/LCL_1 = \pm 1.94$			
0	371.20	374.48	373.13	371.06	372.94	369.96	369.33				
0.2	311.60	277.11	278.78	275.61	276.46	275.39	275.03				
0.4	204.13	145.00	148.85	145.41	145.25	144.66	143.90				
0.6	120.22	74.47	76.57	75.16	74.59	74.24	73.80				
0.8	71.86	40.89	41.57	41.08	40.86	40.66	40.47				
1	44.28	23.80	24.24	23.85	23.78	23.59	23.55				
1.2	28.38	15.32	15.31	15.07	15.05	15.04	15.08				
1.4	18.03	10.23	10.13	10.01	9.98	10.01	10.03				
1.6	12.51	7.24	7.05	7.00	7.01	7.02	7.04				
1.8	9.00	5.38	5.52	5.14	5.16	5.16	5.17				
2	6.39	4.28	4.27	4.00	4.03	4.05	4.09				
2.2	4.72	3.54	3.45	3.26	3.31	3.33	3.36				
2.4	3.65	3.06	2.94	2.78	2.81	2.84	2.87				
2.6	2.92	2.73	2.58	2.40	2.44	2.48	2.51				
2.8	2.36	2.50	2.28	2.14	2.19	2.22	2.25				
3	1.98	2.35	2.07	1.94	1.98	2.02	2.06				
4	1.19	2.03	1.42	1.31	1.34	1.38	1.43				
5	1.02	2.00	1.11	1.06	1.07	1.09	1.11				
6	1.00	2.00	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01				

Από τους παραπάνω πίνακες προκύπτει ότι τα νέα βελτιωμένα σχήματα έχουν καλύτερο ARL στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων του μέσου ενώ ταυτοχρόνως έχουν την ίδια καλή απόδοση στον εντοπισμό μικρών μετατοπίσεων του μέσου.

2.5.3. Μελέτη του βελτιωμένου σχήματος 2-από-2

Για τον προσδιορισμό των ορίων ελέγχου ακολουθούμε τη μεθοδολογία του Klein (2000). Έτσι, συμβολίζουμε την πιθανότητα ένα σημείο να είναι εντός των εσωτερικών ορίων UCL_1 και LCL_1 με r , με r_U την πιθανότητα ένα σημείο να βρίσκεται στην περιοχή UCL_1-UCL_2 , με r_L την πιθανότητα ένα σημείο να βρίσκεται στην περιοχή LCL_1-LCL_2 , με r_{2U} την πιθανότητα να βρίσκεται πάνω από το UCL_2 και με r_{2L} την πιθανότητα να βρίσκεται κάτω από το LCL_2 . Έτσι έχουμε μια αλυσίδα Markov, με τρεις μεταβατικές καταστάσεις και μια απορροφητική:

- Κατάσταση {1} : κανένα σημείο πέρα από οποιοδήποτε όριο ελέγχου
- Κατάσταση {2} : ένα σημείο μεταξύ των ορίων UCL_1 και UCL_2
- Κατάσταση {3} : ένα σημείο μεταξύ των ορίων LCL_1 και LCL_2
- Κατάσταση {4} : η απορροφητική κατάσταση

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι ο ακόλουθος:

		Κατάσταση το χρόνο $t + 1$			
		1	2	3	4
Κατάσταση το χρόνο t	1	r	r_U	r_L	$r_{2U}+r_{2L}$
	2	r	0	r_L	$r_U+r_{2U}+r_{2L}$
	3	r	r_U	0	$r_L+r_{2U}+r_{2L}$
	4	0	0	0	1

Το αντίστοιχο σύστημα είναι το ακόλουθο

$$N_{14} = I + rN_{14} + r_U N_{24} + r_L N_{34}$$

$$N_{24} = I + rN_{14} + r_L N_{34}$$

$$N_{34} = I + rN_{14} + r_U N_{24}$$

Εξαιτίας της συμμετρικότητας των ορίων ελέγχου, θέτουμε $r_{2U} = r_{2L} = a$ και $r_U = r_L = b$, επίσης $r + r_U + r_L + r_{2U} + r_{2L} = I$. Επομένως:

$$ARL_0 = N_{14} = \frac{1+b}{2(a+ab+b^2)}$$

Για παράδειγμα, για ένα χαρακτηριστικό που έχει κανονική κατανομή και για $ARL_0 = 370.37$, $UCL_2/LCL_2 = \pm 3.5\sigma$, από πίνακες κανονικής κατανομής βρίσκουμε ότι $a = 0.000233$. Έτσι από την άνω σχέση προκύπτει ότι $b = 0.0340043$, επομένως $UCL_1/LCL_1 = \pm 1.823\sigma$.

2.5.3. Μελέτη του βελτιωμένου σχήματος 2-από-3

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε επτά μεταβατικές καταστάσεις και μια απορροφητική. Πιο συγκεκριμένα:

- Κατάσταση {OO} : ένα σημείο μεταξύ των ορίων UCL_1 & LCL_1
- Κατάσταση {OU} : ένα σημείο μεταξύ των ορίων UCL_1 & LCL_1 , και ένα μεταξύ των ορίων UCL_1 & LCL_2
- Κατάσταση {OL} : ένα σημείο μεταξύ των ορίων UCL_1 & LCL_1 , και μεταξύ των ορίων LCL_1 & LCL_2
- Κατάσταση {UL} : ένα σημείο μεταξύ των ορίων UCL_1 & UCL_2 , και ένα μεταξύ των ορίων LCL_1 & LCL_2
- Κατάσταση {UO} : ένα σημείο μεταξύ των ορίων UCL_1 & UCL_2 , και ένα μεταξύ των ορίων UCL_1 & LCL_1
- Κατάσταση {LO} : ένα σημείο μεταξύ των ορίων LCL_1 & LCL_2 , και ένα μεταξύ των ορίων UCL_1 & LCL_1
- Κατάσταση {LU} : ένα σημείο μεταξύ των ορίων LCL_1 & LCL_2 , και ένα μεταξύ των ορίων UCL_1 & UCL_2
- Κατάσταση {OOC} : απορροφητική κατάσταση

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι ο ακόλουθος:

		Κατάσταση το χρόνο $t + 1$							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Κατάσταση το χρόνο t		OO	OU	OL	UL	UO	LO	LU	OOO
		1	OO	r	r_U	r_L	0	0	0
2	OU	0	0	0	r_L	r	0	0	$r_U+r_{2U}+r_{2L}$
3	OL	0	0	0	0	0	r	r_U	$r_L+r_{2U}+r_{2L}$
4	UL	0	0	0	0	0	r	0	$r_U+r_L+r_{2U}+r_{2L}$
5	UO	0	0	0	0	0	0	0	$r_U+r_{2U}+r_{2L}$
6	LO	r	0	r_L	0	0	0	0	$r_L+r_{2U}+r_{2L}$
7	LU	r	r_U	0	0	r	0	0	$r_U+r_L+r_{2U}+r_{2L}$
8	OOO	0	0	0	0	0	0	0	1

Το αντίστοιχο σύστημα είναι το ακόλουθο

$$N_{18} = I + (r)N_{18} + (r_U)N_{28} + (r_L)N_{38}$$

$$N_{28} = I + (r)N_{58} + (r_L)N_{48}$$

$$N_{38} = I + (r)N_{68} + (r_U)N_{78}$$

$$N_{48} = I + (r)N_{68}$$

$$N_{58} = I + (r)N_{18} + (rL)N_{38}$$

$$N_{68} = I + (r)N_{18} + (r_U)N_{28}$$

$$N_{78} = I + (r)N_{58}$$

Με τους περιορισμούς, $r_{2U} = r_{2L} = a$, $r_U = r_L = b$ και $r + r_U + r_L + r_{2U} + r_{2L} = I$, το μέσο μήκος ροής δίνεται από τον τύπο

$$ARL_0 = N_{18} = \frac{-1 + (2a - 3)b + (2a - 1)b^2 + 2b^3}{2[2a^2b(1 + b) + b^2(2b^2 - b - 2) + a(4b^3 + b^2 - 3b - 1)]}$$

2.6 Acosta (2007)

2.6.1. Εισαγωγή

Ο Acosta (2007) μελέτησε σε βάθος κανόνες της μορφής k -από- k και k -από- $k+1$. Ταυτόχρονα μελέτησε τους ίδιους κανόνες όταν χρησιμοποιείται επιπροσθέτως ο κανόνας 1-από-1. Ουσιαστικά ακολούθησε την προσέγγιση των Khoo και Griffin (2006).

2.6.2. Το σχήμα 1-από-1 και k -από- k

Το συγκεκριμένο σχήμα είχε προταθεί αρχικά από τον Page (1955). Το διάγραμμα ελέγχου αποτελείται από ένα (εσωτερικό) ζεύγος ορίων ελέγχου για τον κανόνα k -από- k (όριο προειδοποίησης) και από ένα (εξωτερικό) ζεύγος ορίων ελέγχου για τον κανόνα 1-από-1 (όριο δράσης).

Με p_1 συμβολίζουμε την πιθανότητα ένα σημείο να πέσει ανάμεσα στα όρια προειδοποίησης και με p_2 συμβολίζουμε την πιθανότητα ένα σημείο να πέσει ανάμεσα από τα όρια προειδοποίησης και τα όρια δράσης. Όπως έδειξε ο Page (1955) το μέσο μήκος ροής το ικανοποιεί την παρακάτω σχέση

$$ARL = \frac{1 - p_2^k}{1 - p_1 - p_2 - p_1 p_2^k}.$$

Για να βρεθούν τα όρια ελέγχου για το συγκεκριμένο σχήμα, προτείνεται, πρώτα να οριστούν τα όρια προειδοποίησης έτσι ώστε να έχουμε ένα συγκεκριμένο εντός ελέγχου ARL και κατόπιν να οριστούν τα όρια δράσης έτσι ώστε να λάβουμε το μικρότερο εκτός ελέγχου ARL για μια συγκεκριμένη μετατόπιση του μέσου.

Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνονται τα αποτελέσματα για μερικούς συνδυασμούς των k , w (όριο προειδοποίησης) και a (όριο ελέγχου).

Πίνακας 2.8. ARL τιμές για το σχήμα 1-από-1 και k -από- k

δ	Shewhart	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=8$	$k=9$
		$w=1.84$ $a=3.40$	$w=1.33$ $a=3.20$	$w=0.96$ $a=3.20$	$w=0.69$ $a=3.20$	$w=0.11$ $a=3.40$	$w=0$ $a=3.37$
0	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
0.2	308.4	278.6	271.9	263.6	257.6	235.6	234.5
0.4	200.1	152.4	142.7	132.7	126.2	107.5	106.9
0.6	119.7	79.9	72.5	66.0	62.2	53.6	53.6
0.8	71.6	43.8	39.1	35.5	33.7	30.8	31.1
1.0	43.9	25.7	22.8	20.1	20.2	20.0	20.5
1.2	27.8	16.0	14.3	13.5	13.3	14.4	14.9
1.4	18.2	10.6	9.6	9.4	9.5	11.2	11.7
1.6	12.4	7.4	6.9	7.0	7.3	9.1	9.6
1.8	8.7	5.5	5.3	5.5	5.8	7.7	8.1
2.0	6.3	4.2	4.2	4.5	4.8	6.7	6.9
2.2	4.7	3.4	3.4	3.7	4.0	5.6	5.8
2.4	3.6	2.8	2.9	3.2	3.5	4.8	4.9
2.6	2.9	2.4	2.5	2.8	3.0	4.0	4.1
2.8	2.4	2.1	2.2	2.4	2.6	3.3	3.3
3.0	2.0	1.9	2.0	2.1	2.2	2.8	2.8
4.0	1.2	1.3	1.3	1.3	1.3	1.4	1.4
5.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.1	1.1	1.1
6.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Όπως φαίνεται και στον παραπάνω πίνακα, όταν η μετατόπιση είναι μικρότερη από 1σ όλα τα διαγράμματα υπερτερούν του κλασικού διαγράμματος ελέγχου Shewhart. Επίσης, η ευαισθησία των διαγραμμάτων αυξάνει όσο αυξάνεται το k . Αξίζει να σημειωθεί, πως όταν το $k=9$, δεν υπάρχει κανένα όριο προειδοποίησης, δηλαδή αρκεί να πούμε πως έχουμε ένδειξη όταν 9-από-9 σημεία βρεθούν στην ίδια πλευρά της κεντρικής γραμμής.

2.6.3. Το σχήμα 1-από-1 και k -από- $k+1$

Το διάγραμμα ελέγχου αποτελείται από ένα (εσωτερικό) ζεύγος ορίων ελέγχου για τον κανόνα k -από- $k+1$ (όριο προειδοποίησης) και από ένα (εξωτερικό) ζεύγος ορίων ελέγχου για τον κανόνα 1-από-1 (όριο δράσης).

Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνονται τα αποτελέσματα για μερικούς συνδυασμούς των k , w (όριο προειδοποίησης) και a (όριο ελέγχου).

Όπως φαίνεται και στον παραπάνω πίνακα, όταν η μετατόπιση είναι μικρότερη από 1σ όλα τα διαγράμματα υπερτερούν του κλασικού διαγράμματος ελέγχου Shewhart. Επίσης, η ευαισθησία των διαγραμμάτων αυξάνει όσο αυξάνεται το k . Αξίζει να σημειωθεί, πως όταν το

$k = 12$, δεν υπάρχει κανένα όριο προειδοποίησης, δηλαδή αρκεί να πούμε πως έχουμε ένδειξη όταν 12-από-13 σημεία βρεθούν στην ίδια πλευρά από την κεντρική γραμμή.

Πίνακας 2.9. ARL τιμές για το σχήμα 1-από-1 και k -από- $k+1$

δ	Shewhart	$k = 2$	$k = 3$	$k = 7$	$k = 10$	$k = 11$	$k = 12$
		$w = 1.99$ $a = 3.40$	$w = 1.47$ $a = 3.30$	$w = 0.53$ $a = 3.30$	$w = 0.17$ $a = 3.20$	$w = 0.08$ $a = 3.20$	$w = 0$ $a = 3.20$
0	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
0.2	308.4	273.6	258.5	235.0	227.4	222.4	223.1
0.4	200.1	145.6	127.0	104.7	98.0	97.6	95.9
0.6	119.7	75.0	62.3	49.6	47.5	46.9	47.6
0.8	71.6	40.8	33.2	27.0	27.1	27.2	27.5
1.0	43.9	23.8	19.4	17.1	17.9	18.5	19.0
1.2	27.8	14.8	12.4	12.0	13.3	13.6	14.3
1.4	18.2	9.9	8.6	9.2	10.5	11.0	11.6
1.6	12.4	7.0	6.3	7.4	8.8	9.2	9.7
1.8	8.7	5.2	4.9	6.3	7.5	7.8	8.1
2.0	6.3	4.1	4.0	5.3	6.2	6.5	6.8
2.2	4.7	3.3	3.4	4.6	5.3	5.4	5.5
2.4	3.6	2.8	3.0	3.9	4.3	4.4	4.4
2.6	2.9	2.4	2.6	3.3	3.5	3.6	3.5
2.8	2.4	2.1	2.3	2.7	2.8	2.9	2.9
3.0	2.0	1.9	2.1	2.3	2.3	2.4	2.4
4.0	1.2	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3
5.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
6.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

2.6.4. Προτεινόμενα διαγράμματα

Ο ακόλουθος πίνακας προτάθηκε από τον Acosta και ο οποίος περιέχει προτεινόμενα διαγράμματα ελέγχου. Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι όλα έχουν κοινή τιμή για το a ίση με 3.3 αφού αυτή είναι πάνω-κάτω η τιμή που βρέθηκε να παρουσιάζεται στα περισσότερα διαγράμματα.

Πίνακας 2.10. Προτεινόμενα διαγράμματα ελέγχου

δ	Shewhart	5-από-5	7-από-8	12-από-13	9-από-9
		$w = 0.66$ $a = 3.3$	$w = 0.50$ $a = 3.3$	$w = 0$ $a = 3.3$	$w = 0$ $a = 3.3$
0	370.4	392.1	385.4	435.2	343.8
0.2	308.4	265.0	236.4	250.3	221.7
0.4	200.1	125.9	101.2	102.6	102.8
0.6	119.7	61.5	47.9	49.6	52.0
0.8	71.6	33.3	26.4	28.8	30.3
1.0	43.9	20.2	17.7	19.6	20.0
1.2	27.8	13.4	12.0	14.8	14.5
1.4	18.2	9.7	9.2	12.1	11.3
1.6	12.4	7.4	7.6	10.3	9.3
1.8	8.7	6.0	6.5	8.7	7.8
2.0	6.3	5.0	5.6	7.4	6.6
2.2	4.7	4.3	4.9	6.1	5.5
2.4	3.6	3.7	4.2	5.0	4.6
2.6	2.9	3.2	3.6	3.9	3.8
2.8	2.4	2.8	3.0	3.2	3.1
3.0	2.0	2.4	2.5	2.6	2.6
4.0	1.2	1.3	1.3	1.3	1.3
5.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
6.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Για μετατοπίσεις μεγαλύτερες του 1σ όλα τα διαγράμματα έχουν παρόμοια συμπεριφορά. Για μετατοπίσεις μικρότερες του 2σ όλα τα διαγράμματα υπερτερούν του κλασικού διαγράμματος ελέγχου Shewhart, ενώ για μεγαλύτερες μετατοπίσεις έχουν παρόμοια συμπεριφορά με το κλασικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart.

2.6.5. Μεθοδολογία για το σχήμα 1-από-1 και k -από- k

Θεωρούμε ένα διάγραμμα ελέγχου με δύο εξωτερικά όρια ελέγχου (UCL, LCL) και δύο εσωτερικά προειδοποιητικά όρια (UWL, LWL), με τους ακόλουθους κανόνες ροών:

$$T(1, 1, UCL, \infty), T(k, k, UWL, UCL), T(k, k, LWL, LCL), T(1, 1, -\infty, LCL)$$

Ορίζουμε τις ακόλουθες πέντε περιοχές στο διάγραμμα ελέγχου και τις αντίστοιχες πιθανότητες να πέσει ένα σημείο σε αυτές:

- πάνω από το UCL, με πιθανότητα p_4
- ανάμεσα στο LWL & LCL, με πιθανότητα p_3
- κάτω από το LCL, με πιθανότητα p_5

- ανάμεσα στο UWL & UCL, με πιθανότητα p_2
- ανάμεσα στο LWL & UWL, με πιθανότητα p_1

Η διαδικασία θεωρείται ότι είναι εκτός ελέγχου όταν ένα σημείο βρεθεί πέρα από τα εξωτερικά όρια (UCL, LCL), ή όταν k συνεχόμενα σημεία πέσουν πάνω από το UWL ή όταν k συνεχόμενα σημεία πέσουν κάτω από το LWL

Για μια διεργασία όπου ο μέσος έχει μετατοπιστεί κατά δ έχουμε:

$$p_1 = \Phi(UWL - \delta) - \Phi(LWL - \delta)$$

$$p_2 = \Phi(UCL - \delta) - \Phi(UWL - \delta)$$

$$p_3 = \Phi(LWL - \delta) - \Phi(LCL - \delta)$$

$$p_4 = 1 - \Phi(UCL - \delta)$$

$$p_5 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5$$

Θεωρούμε, τώρα μια αλυσίδα Markov με τις ακόλουθες $2k$ καταστάσεις:

- Κατάσταση $\{1\}$: ένα σημείο ανάμεσα από τα προειδοποιητικά όρια
- Κατάσταση $\{2\}$: ένα σημείο ανάμεσα στο UWL & UCL
- Κατάσταση $\{3\}$: ένα σημείο ανάμεσα στο LWL & LCL
- Κατάσταση $\{4\}$: δύο συνεχόμενα σημεία ανάμεσα στο UWL & UCL
- Κατάσταση $\{5\}$: δύο συνεχόμενα σημεία ανάμεσα στο LWL & LCL
- Κατάσταση $\{6\}$: τρία συνεχόμενα σημεία ανάμεσα στο UWL & UCL
- Κατάσταση $\{7\}$: τρία συνεχόμενα σημεία ανάμεσα στο LWL & LCL
-
- Κατάσταση $\{2k\}$: απορροφητική κατάσταση

Έστω ότι έχουμε $k = 4$. Μπορεί ναδειχθεί ότι ο πίνακας μετάβασης είναι ο ακόλουθος:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 + p_5 \\ p_1 & 0 & p_3 & p_2 & 0 & 0 & 0 & p_4 + p_5 \\ p_1 & p_2 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & p_4 + p_5 \\ p_1 & 0 & p_3 & 0 & 0 & p_2 & 0 & p_4 + p_5 \\ p_1 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & p_4 + p_5 \\ p_1 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 + p_4 + p_5 \\ p_1 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 + p_4 + p_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έστω ο πίνακας $\mathbf{R} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$, όπου \mathbf{Q} ο πίνακας που προκύπτει από τον \mathbf{P} διαγράφοντας την τελευταία γραμμή και την τελευταία στήλη του. Τότε

$$ARL = \sum_{j=0}^k R_{0,j}$$

2.7 Συγκριτική Σύνοψη

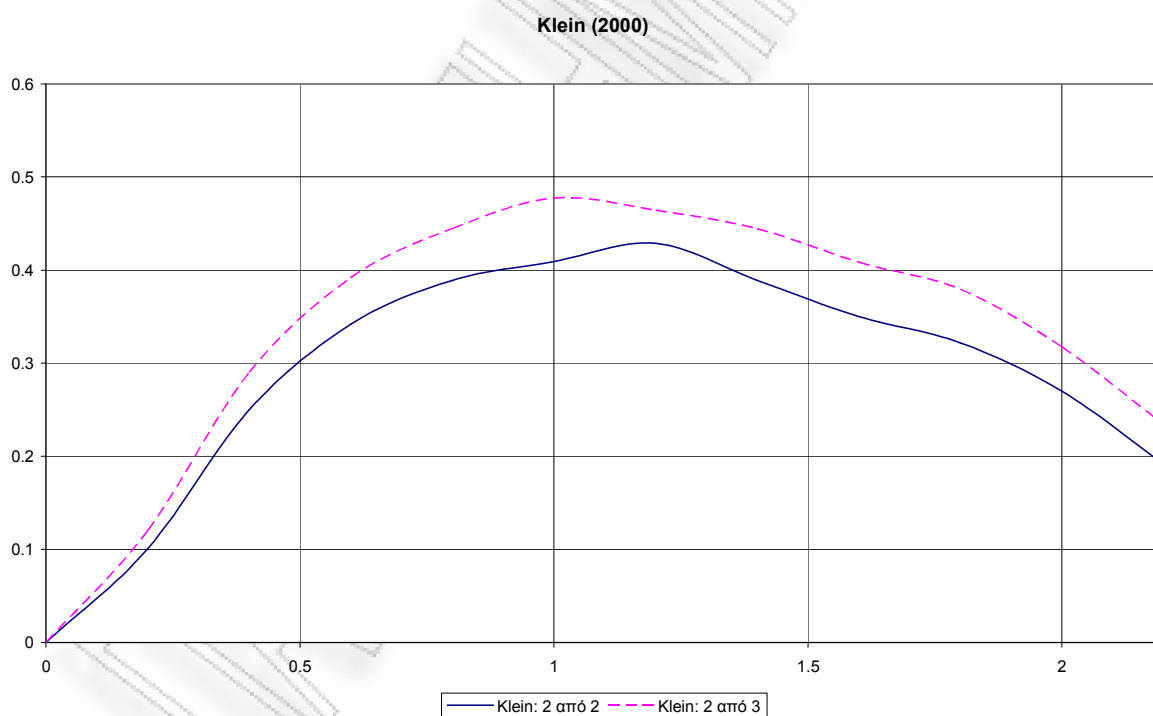
Χρήσιμο και απαραίτητο κρίνεται να συγκρίνουμε όλα τα προαναφερθέντα σχήματα-σχεδιασμός. Προκειμένου να γίνει εφικτό θα χρησιμοποιήσουμε διαγραμματική απεικόνιση. Έτσι για κάθε ένα σχήμα-σχεδιασμό, θα θεωρήσουμε σαν βάση το τυπικό διάγραμμα Shewhart, και θα το συγκρίνουμε με την % διαφορά για κάθε απόκλιση-μετατόπιση από τον μέσο.

Για παράδειγμα, όπως βλέπουμε στον παρακάτω πίνακα, για τον σχεδιασμό 2-από-2 του Klein (2000) και για μετατόπιση 1σ , ο σχεδιασμός του Klein, είναι 40,9% καλύτερος από το τυπικό διάγραμμα Shewhart, αφού

$$\frac{44 - 26}{44} * 100\% = 40.9\%$$

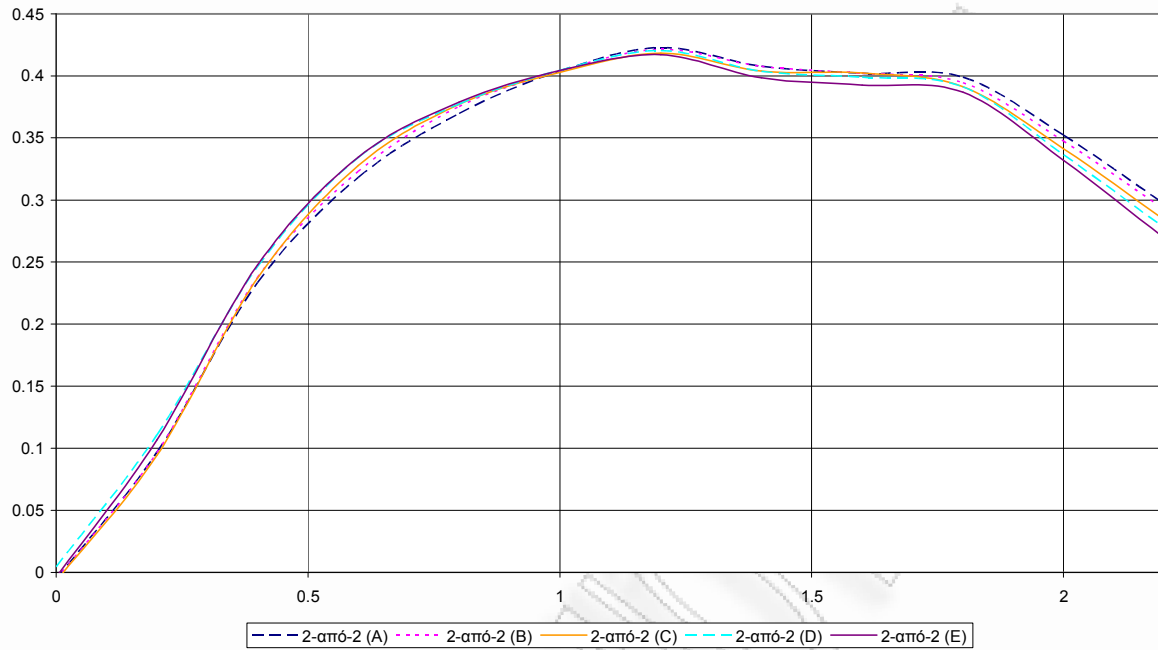
Shewhart Klein: 2 από 2			%
Μετατόπιση	± 3	$\pm 1,7814$	
0	370	370	0,000
0,2	308	277	0,101
0,4	200	150	0,250
0,6	120	79	0,342
0,8	72	44	0,389
1	44	26	0,409
1,2	28	16	0,429
1,4	18	11	0,389
1,6	12	7,8	0,350
1,8	8,7	5,9	0,322
2	6,3	4,6	0,270
2,2	4,7	3,8	0,191
2,4	3,6	3,2	0,111
2,6	2,9	2,8	0,034
2,8	2,4	2,6	-0,083
3	2	2,4	-0,200
4	1,2	2	-0,667
5	1	2	-1,000

Ενδεικτικό είναι και το ακόλουθο διάγραμμα



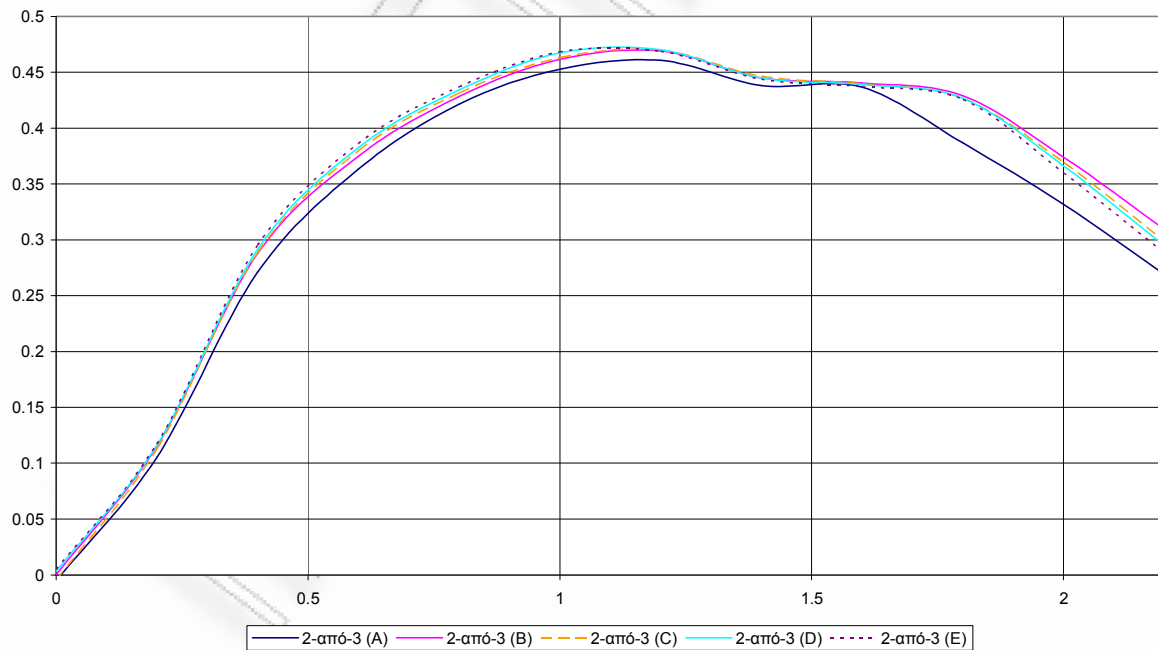
Σχήμα 2.11 ARL Καμπύλες: Klein (2000), για 2-από-2 και 2-από-3 μέχρι $\delta=2,2$
(x-άξονας: δ , y-άξονας: συντελεστής, διαφορά ως προς Shewhart)

Khoo Ariffin 2-από-2 (2006)



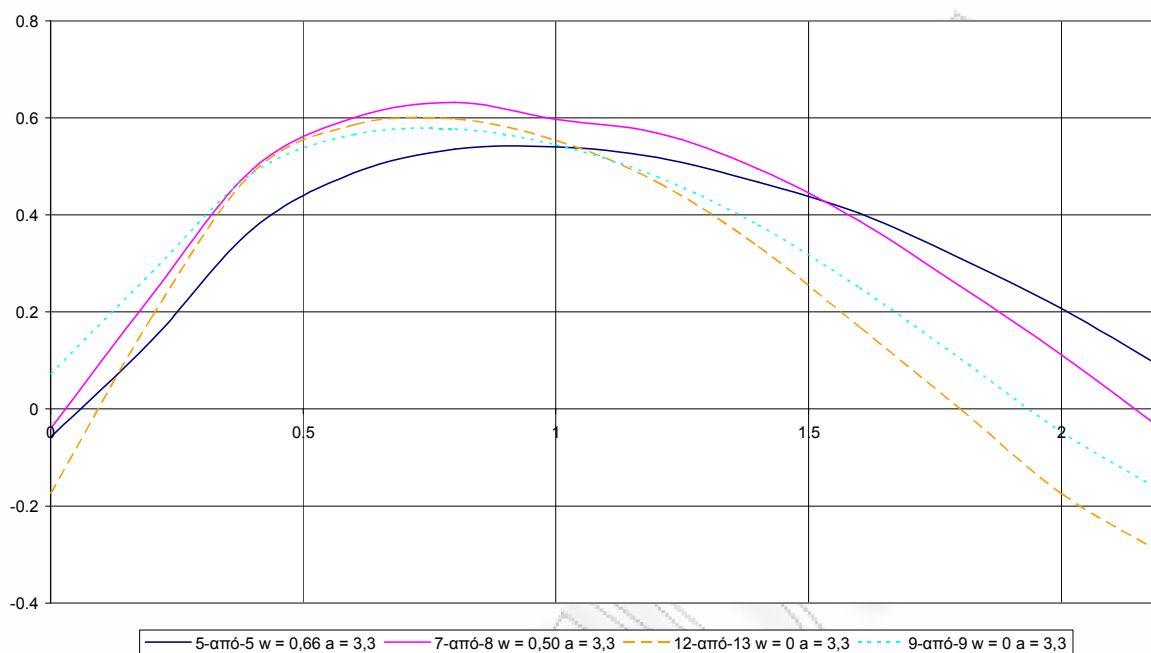
Σχήμα 2.12 ARL Καμπύλες: Khoo Ariffin (2006) 2-από-2
(x-άξονας: δ , y-άξονας: συντελεστής, διαφορά ως προς Shewhart)

Khoo Ariffin 2-από-3 (2006)



Σχήμα 2.13 ARL Καμπύλες: Khoo Ariffin (2006) 2-από-3
(x-άξονας: δ , y-άξονας: συντελεστής, διαφορά ως προς Shewhart)

Acosta (2007)



Σχήμα 2.14 ARL Καμπύλες: Acosta (2007)
(x-άξονας: δ , y-άξονας: συντελεστής, διαφορά ως προς Shewhart)

Από τα παραπάνω γραφήματα παρατηρούμε ότι η προσέγγιση του Acosta (2007) παρουσιάζεται κατά πολύ καλύτερη στον εντοπισμό μικρών μετατοπίσεων του μέσου μιας διαδικασίας. Ωστόσο, εάν θέλαμε έναν σχεδιασμό που να είναι ευαίσθητος σε μεγάλες μετατοπίσεις του μέσου, τότε ένα τυπικό διάγραμμα Shewhart είναι αυτό που υπερτερεί.

РАНЕЕ НЕ ПЕРПА

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Τροποποιημένοι και αναθεωρημένοι κανόνες ροών τύπου r -από- m

3.1 Τροποποιημένο r -από- m διάγραμμα

Στην εργασία των Antzoulakos και Rakitzis (2008a) παρουσιάζεται μια τροποποιημένη έκδοση του r/m (r out of m) διαγράμματος ελέγχου, το οποίο μελετήθηκε από τους Klein (2000) και Khoo (2004). Το νέο διάγραμμα ελέγχου ονομάζεται τροποποιημένο r από m διάγραμμα ελέγχου και συμβολίζεται ως $M: r/m$. Το $M: r/m$ διάγραμμα υπερτερεί σταθερά από το αντίστοιχο r/m διάγραμμα ελέγχου για κάθε μετατόπιση του μέσου. Για μετατοπίσεις μέχρι και 2.6 τυπικές αποκλίσεις υπερτερεί επίσης του τυπικού διαγράμματος Shewhart. Παρουσιάζουμε πρόσθετα χαρακτηριστικά της κατανομής του μέσου μήκους ροής για το $M: r/m$ διάγραμμα, όπως η τυπική απόκλιση και τα ποσοστιαία σημεία. Επίσης στο τέλος της παραγράφου παρουσιάζεται μεθοδολογία με αλυσίδες Markov για την διερεύνηση του χρόνου αναμονής για την πρώτη εμφάνιση ενός σχηματισμού σε μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων δοκιμών με πολλαπλά αποτελέσματα. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιείται για τη μελέτη του μήκους ροής του $M: r/m$ διαγράμματος.

3.1.1 Η λογική του διαγράμματος

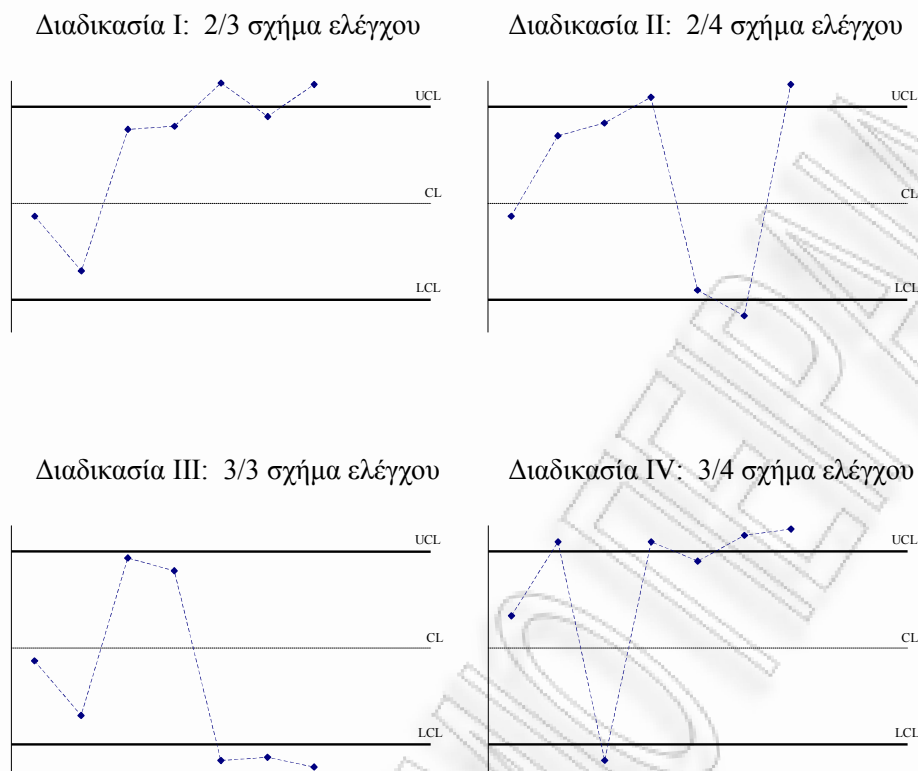
Όπως έχουμε ήδη αναφέρει ο Klein (2000), εμπνεόμενος από τους Derman και Ross (1997), πρότεινε τους εξής δύο κανόνες ροών σε ένα το τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart: (α) τον κανόνα δύο-από-δύο, ο οποίος δίνει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας όταν δύο συνεχόμενα σημεία βρίσκονται πάνω από το άνω όριο ελέγχου, είτε δύο συνεχόμενα σημεία βρίσκονται κάτω από το κάτω όριο ελέγχου του διαγράμματος, και (β) τον δύο-από-τρία, ο οποίος δίνει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας όταν δύο από τα τρία συνεχόμενα σημεία

βρίσκονται πάνω από το άνω όριο ελέγχου είτε όταν δύο από τα τρία συνεχόμενα σημεία βρίσκονται κάτω από το κάτω όριο ελέγχου. Και τα δύο αυτά σχήματα δίνουν καλύτερο ARL από το τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart για μετατοπίσεις του μέσου μέχρι και 2.6 τυπικές αποκλίσεις.

Οι δύο προαναφερόμενοι κανόνες αποτελούν ειδικές περιπτώσεις του r -από- m (r/m) κανόνα ροών ($1 \leq r \leq m$) το οποίο δίνει σήμα για μια εκτός στατιστικού ελέγχου διεργασία όταν r από m συνεχόμενα σημεία βρίσκονται πάνω από το άνω όριο ελέγχου (UCL), είτε όταν r από m συνεχόμενα σημεία βρίσκονται κάτω από το κάτω όριο ελέγχου (LCL). Το (α) και το (β) σχήμα αντιστοιχούν στον 2/2 και 2/3 κανόνα αντίστοιχα, ενώ το τυπικό διάγραμμα ελέγχου στον 1/1 κανόνα. Ο Khoo (2004) προχώρησε σε ανάλυση των 2/2, 2/3, 2/4, 3/3 και 3/4 κανόνων και κατέληξε στο ότι το σχήμα 3/4 είναι το πιο αποτελεσματικό για ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων του μέσου.

Στο r/m σχήμα, με $r < m$, η ομάδα των σημείων με μέγιστο μήκος m η οποία προκαλεί σήμα για εκτός ελέγχου διαδικασία, μπορεί να γραφεί ως ένωση δυο ομάδων σημείων. Η πρώτη ομάδα, A, περιέχει τα σημεία που είναι πάνω (κάτω) από το UCL (LCL) και η δεύτερη ομάδα, B, περιέχει το πολύ $m-r$ σημεία τα οποία βρίσκονται ανάμεσα στα σημεία της A ομάδας.

Στην Σχήμα 3.1, παρέχονται μερικές διαδικασίες η οποίες δείχνουν τον σχηματισμό r/m και χρησιμοποιούνται ώστε να ανιχνευθούν μετατοπίσεις του μέσου μιας διαδικασίας.



Σχήμα 3.1. Επεξήγηση των r/m σχηματισμών

Για τις διαδικασίες I, II και IV υπάρχει ένδειξη ότι ο μέσος της διαδικασίας έχει μετατοπιστεί προς τα άνω, ενώ για την III υπάρχει ένδειξη ότι ο μέσος της διαδικασίας έχει μετατοπιστεί χαμηλότερα. Όπως και να έχει, για την διαδικασία II, υπάρχουν αμφιβολίες ότι ο μέσος έχει μετατοπιστεί προς τα άνω διότι ανάμεσα από τα r ($=2$) σημεία τα οποία βρίσκονται πάνω από το UCL (στοιχεία της ομάδας A) υπάρχουν $m-r$ ($=2$) σημεία σε μεγάλη απόσταση από αυτά (στοιχεία της ομάδας B). Έτσι, φαίνεται λογικό να λάβουμε υπόψη μας την τοποθεσία των σημείων της ομάδας B σε σχέση με την τοποθεσία των σημείων της ομάδας A, ώστε να αποφανθούμε ότι υπάρχει ένδειξη για εκτός ελέγχου διαδικασία. Μια λογική υπόθεση είναι να απαιτούμε από τα σημεία της ομάδας B να βρίσκονται αρκετά κοντά στα σημεία της ομάδας A.

Για αυτό το λόγο, στην περίπτωση που $r < m$, προτείνεται το τροποποιημένο διάγραμμα ελέγχου, το οποίο μας δίνει σήμα για μια εκτός ελέγχου διεργασία όταν είτε r σημεία βρίσκονται άνω του άνω ορίου ελέγχου τα οποία διαχωρίζονται από το πολύ $m-r$ σημεία τα οποία βρίσκονται ανάμεσα από την κεντρική γραμμή και το άνω όριο ελέγχου, είτε r σημεία

βρίσκονται κάτω από το κάτω όριο ελέγχου τα οποία διαχωρίζονται το πολύ από $m-r$ σημεία τα οποία βρίσκονται ανάμεσα από την κεντρική γραμμή και το κάτω όριο ελέγχου.

Το παραπάνω καλείται τροποποιημένο r από m διάγραμμα ελέγχου και συμβολίζεται ως $M: r/m$.

3.1.2 Απόδοση του τροποποιημένου r από m διαγράμματος ελέγχου

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται η απόδοση του $M: r/m$ διαγράμματος ελέγχου. Υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές από τις οποίες προκύπτουν τα σημεία του διαγράμματος είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση ίση με 1 ($\sigma=1$). Η διαδικασία θεωρείται εντός ελέγχου όταν ο μέσος της είναι ίσος με μηδέν ($\mu=0$).

Στον Πίνακα 3.1, παρουσιάζονται οι τιμές του ARL και τα όρια ελέγχου του $M: r/m$ ($m=3,4,5$ και $2 \leq r < m$) διαγράμματος για εντός ελέγχου ARL είναι ίσο με 370,4. Για λόγους σύγκρισης υπάρχουν και οι τιμές από τα διαγράμματα των Khoo (2004) και Klein (2000), όπως επίσης και οι τιμές για το τυπικό διάγραμμα Shewhart. Η μετατόπιση του μέσου λαμβάνει τιμές από το μηδέν έως και 5σ .

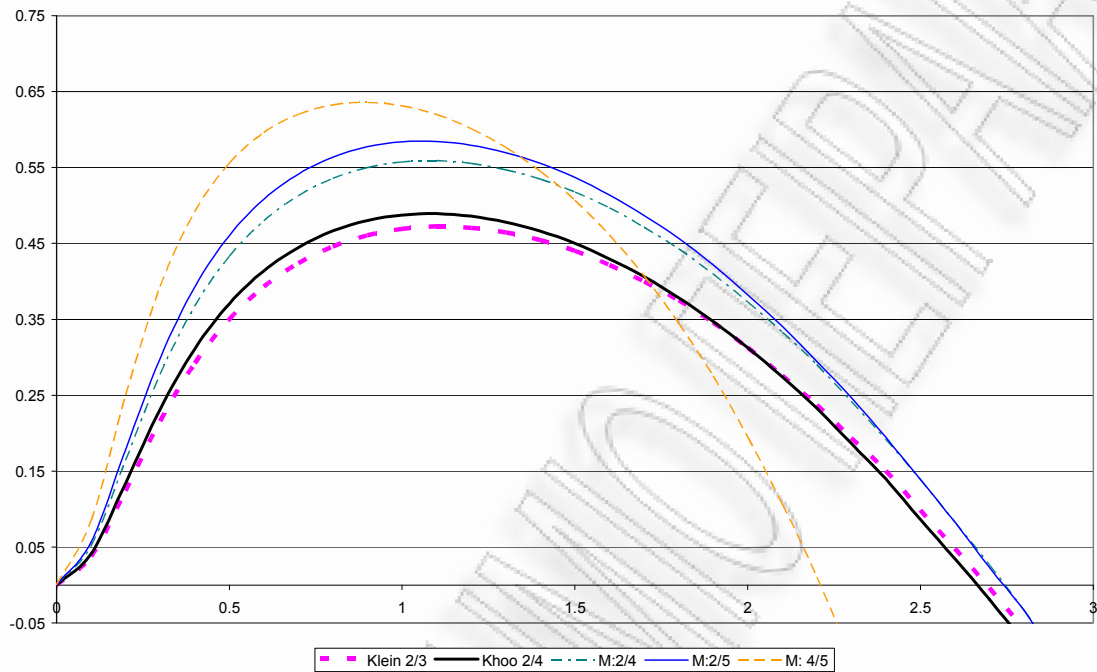
Από τα δεδομένα του Πίνακα 3.1, φαίνεται ότι το $M: r/m$ υπερτερεί σταθερά των αντίστοιχων r/m διαγραμμάτων για κάθε μετατόπιση του μέσου. Για μετατοπίσεις του μέσου μεγαλύτερη από 2.6 τυπικές αποκλίσεις το διάγραμμα Shewhart έχει την καλύτερη απόδοση. Η επιλογή για το βέλτιστο τροποποιημένο διάγραμμα ελέγχου εξαρτάται από το μέγεθος της μετατόπισης που επιθυμούμε να εντοπίσουμε.

Πίνακας 3.1. Τιμές ARL για τα $M:r/m$ διαγράμματα ελέγχου

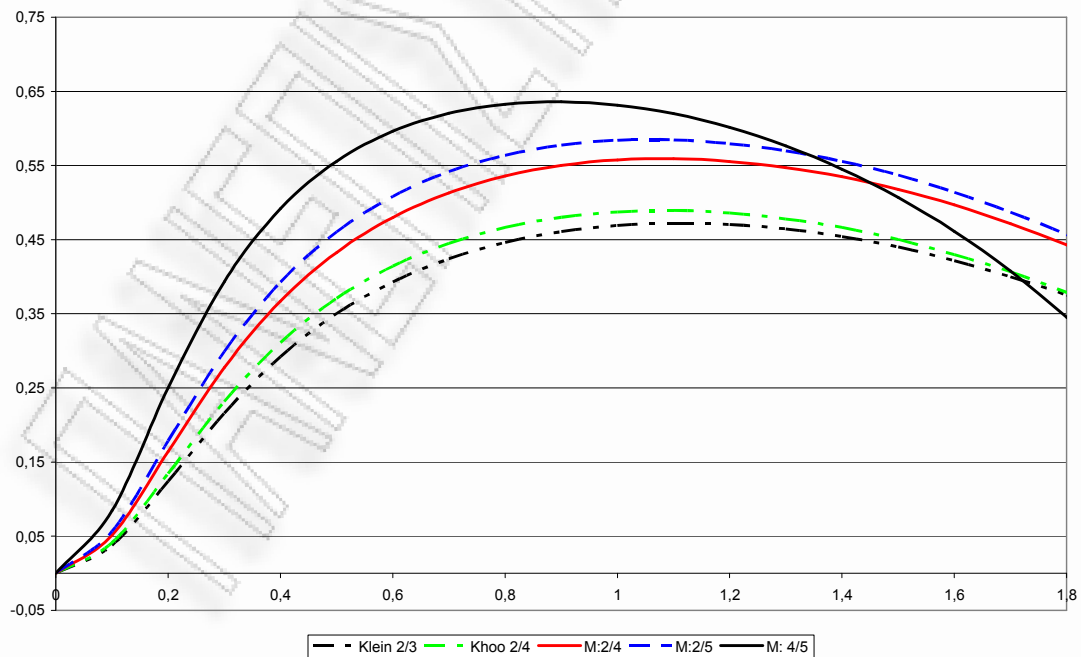
Μετατόπιση	Klein		Khoο		Khoο						
	Shewhart 1/1	2/2	Klein 2/3	2/4	3/4	M: 2/2	M:2/3	M:2/4	M:2/5	M: 3/4	M: 4/5
0	370.40	370.37	370.40	370.40	370.40	370.37	370.32	370.39	370.33	370.45	370.40
0.1	352.93	342.00	339.58	338.37	329.98	342.00	337.48	334.80	332.98	328.58	323.10
0.2	308.43	276.65	270.10	266.95	246.51	276.65	264.73	257.80	253.34	243.13	231.24
0.3	253.14	207.12	198.46	194.48	170.16	207.12	191.59	182.89	177.45	166.16	153.58
0.4	200.08	150.24	141.62	137.81	115.70	150.24	134.90	126.61	121.51	112.02	101.68
0.5	155.22	108.45	100.87	97.67	79.74	108.45	95.06	88.03	83.76	76.66	68.97
0.6	119.67	78.91	72.64	70.11	56.27	78.91	67.88	62.24	58.84	53.80	48.34
0.7	92.32	58.21	53.17	51.24	40.79	58.21	49.37	44.96	42.32	38.83	35.06
0.8	71.55	43.63	39.64	38.18	30.38	43.63	36.63	33.22	31.21	28.83	26.28
0.9	55.83	33.25	30.11	29.02	23.22	33.25	27.74	25.12	23.59	22.00	20.33
1	43.89	25.78	23.30	22.50	18.20	25.78	21.44	19.42	18.26	17.23	16.18
1.1	34.80	20.32	18.36	17.77	14.60	20.32	16.89	15.34	14.46	13.83	13.23
1.2	27.82	16.28	14.73	14.30	11.97	16.28	13.56	12.37	11.70	11.36	11.09
1.3	22.43	13.24	12.01	11.71	10.02	13.24	11.08	10.16	9.65	9.52	9.50
1.4	18.25	10.94	9.96	9.74	8.55	10.94	9.21	8.49	8.11	8.14	8.30
1.5	14.97	9.17	8.38	8.23	7.41	9.17	7.78	7.22	6.93	7.08	7.38
1.6	12.38	7.79	7.16	7.06	6.54	7.79	6.67	6.23	6.02	6.26	6.67
1.7	10.33	6.71	6.20	6.13	5.85	6.71	5.79	5.46	5.30	5.62	6.12
1.8	8.69	5.85	5.43	5.40	5.30	5.85	5.10	4.84	4.72	5.11	5.69
1.9	7.37	5.17	4.82	4.81	4.87	5.17	4.55	4.35	4.26	4.71	5.34
2	6.30	4.61	4.33	4.33	4.52	4.61	4.10	3.95	3.89	4.38	5.07
2.1	5.43	4.16	3.93	3.94	4.23	4.16	3.74	3.62	3.58	4.12	4.85
2.2	4.72	3.79	3.60	3.62	4.00	3.79	3.44	3.35	3.33	3.91	4.67
2.3	4.13	3.49	3.33	3.36	3.81	3.49	3.19	3.13	3.11	3.74	4.53
2.4	3.65	3.23	3.10	3.14	3.66	3.23	2.99	2.95	2.94	3.59	4.42
2.5	3.24	3.02	2.92	2.96	3.53	3.02	2.82	2.82	2.79	3.48	4.33
2.6	2.90	2.85	2.76	2.80	3.43	2.85	2.68	2.66	2.66	3.39	4.26
2.7	2.62	2.70	2.63	2.67	3.35	2.70	2.56	2.55	2.56	3.31	4.20
2.8	2.38	2.58	2.52	2.56	3.28	2.58	2.47	2.46	2.46	3.25	4.16
2.9	2.17	2.48	2.43	2.47	3.22	2.48	2.38	2.38	2.39	3.20	4.12
3	2.00	2.39	2.36	2.39	3.18	2.39	2.32	2.32	2.32	3.16	4.09
3.1	1.85	2.32	2.29	2.32	3.14	2.32	2.26	2.26	2.27	3.12	4.07
3.2	1.73	2.26	2.24	2.27	3.11	2.26	2.21	2.21	2.22	3.10	4.05
3.3	1.62	2.21	2.19	2.22	3.09	2.21	2.17	2.18	2.18	3.08	4.04
3.4	1.53	2.17	2.16	2.18	3.07	2.17	2.14	2.14	2.15	3.06	4.03
3.5	1.45	2.14	2.13	2.15	3.05	2.14	2.11	2.12	2.12	3.05	4.02
3.6	1.38	2.11	2.10	2.12	3.04	2.11	2.09	2.09	2.10	3.03	4.02
3.7	1.32	2.09	2.08	2.10	3.03	2.09	2.07	2.07	2.08	3.03	4.01
3.8	1.27	2.07	2.06	2.08	3.02	2.07	2.06	2.06	2.06	3.02	4.01
3.9	1.23	2.05	2.05	2.06	3.02	2.05	2.04	2.05	2.05	3.01	4.01
4	1.19	2.04	2.04	2.05	3.01	2.04	2.03	2.04	2.04	3.01	4.00
4.1	1.16	2.03	2.03	2.04	3.01	2.03	2.03	2.03	2.03	3.01	4.00
4.2	1.13	2.02	2.02	2.03	3.01	2.02	2.02	2.02	2.02	3.01	4.00
4.3	1.11	2.02	2.02	2.02	3.01	2.02	2.02	2.02	2.02	3.00	4.00
4.4	1.09	2.01	2.01	2.02	3.00	2.01	2.01	2.01	2.01	3.00	4.00
4.5	1.07	2.01	2.01	2.01	3.00	2.01	2.01	2.01	2.01	3.00	4.00
4.6	1.06	2.01	2.01	2.01	3.00	2.01	2.01	2.01	2.01	3.00	4.00
4.7	1.05	2.01	2.01	2.01	3.00	2.01	2.00	2.01	2.01	3.00	4.00
4.8	1.04	2.00	2.00	2.01	3.00	2.00	2.00	2.00	2.00	3.00	4.00
4.9	1.03	2.00	2.00	2.00	3.00	2.00	2.00	2.00	2.00	3.00	4.00
5	1.02	2.00	2.00	2.00	3.00	2.00	2.00	2.00	2.00	3.00	4.00

Η κατανομή του μήκους ροής η οποία σχετίζεται με το $M: r/m$ διάγραμμα ελέγχου, παρουσιάζει μια λοξότητα προς τα δεξιά. Για αυτές τις περιπτώσεις, μας ενδιαφέρουν περισσότερο τα ποσοστιαία σημεία της κατανομής του μήκους ροής προκειμένου να μετρήσουμε την απόδοση της παραγωγικής διαδικασίας.

Στα ακόλουθα γραφήματα παρουσιάζονται τα δεδομένα του προηγούμενου πίνακα και φαίνεται καθαρά η υπεροχή του τροποποιημένου κανόνα για την ανίχνευση των μικρών μετατοπίσεων.



Σχήμα 3.2. ARL Καμπύλες: Τροποποιημένου Κανόνα σε σύγκριση με Klein (2000) και Khoo (2003) (για δ έως 3σ)



Σχήμα 3.3. ARL Καμπύλες: Τροποποιημένου Κανόνα σε σύγκριση με Klein (2000) και Khoo (2003) (για δ έως 1.8σ)

3.1.3 Συμπεράσματα

Για εντός ελέγχου ARL ίσο με 370.4 γίνεται φανερό πως το $M: r/m$ διάγραμμα ελέγχου είναι σταθερά ανώτερο από τα αντίστοιχα σχετικά r/m διαγράμματα ελέγχου με μέτρο σύγκρισης το εκτός ελέγχου ARL. Για μετατοπίσεις μέχρι και 2.6 τυπικές αποκλίσεις το $M: r/m$ υπερτερεί του διαγράμματος Shewhart. Αυτά τα χαρακτηριστικά αποτελούν απόδειξη ότι το $M: r/m$ αποτελεί μια καλή εναλλακτική λύση έναντι του διαγράμματος Shewhart για μικρές και μεσαίες μετατοπίσεις του μέσου μιας διαδικασίας. Για μικρές μετατοπίσεις του μέσου προτείνεται το $M: 4/5$ σχήμα, ενώ για μεσαίες μετατοπίσεις του μέσου προτείνονται τα $M: 2/5$ και $M: 2/3$ σχήματα. Για μεγαλύτερες μετατοπίσεις συστήνεται το διάγραμμα Shewhart.

3.1.4 Μέθοδος αλυσίδων Markov για τη μελέτη του $M: r/m$ διαγράμματος ελέγχου

A. Χρόνος αναμονής για την πρώτη εμφάνιση ενός απλού σχηματισμού

Έστω $\{X_t, t \geq 1\}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων δοκιμών, η οποία παίρνει τιμές στο σύνολο $A = \{a_1, a_2, \dots, a_\lambda\}$, $\lambda \geq 2$, και έστω $P(X_j = a_i) = p_i$. ($j \geq 1$, $1 \leq i \leq \lambda$, $\sum p_i = 1$). Έστω $\varepsilon = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$ ένας απλός σχηματισμός με μήκος k ($1 \leq i_n \leq \lambda$, $1 \leq n \leq k$) και ας συμβολίσουμε με T τον χρόνο αναμονής για την πρώτη εμφάνιση του σχηματισμού ε . Αναλύουμε τον σχηματισμό ε σε k ομάδες (υπο-σχηματισμούς) και τους συμβολίζουμε ως " 2 " = a_{i_1} , " 3 " = $a_{i_1} a_{i_2} \dots$, " $k+1$ " = $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$, και έστω ότι η ομάδα " 1 " που εκπροσωπεί την υπο-σχηματισμό $A - \{a_{i_1}\}$. Ορίζουμε την αλυσίδα Markov $\{Y_t, t \geq 1\}$ με χώρο καταστάσεων $\Omega = \{1, 2, \dots, k+1\}$ που ενεργεί πάνω στην ακολουθία $\{X_t, t \geq 1\}$ ως εξής:

(α) η κατάσταση $k+1$ είναι η απορροφητική

(β) δίνουμε στο Y_n την τιμή j ($2 \leq j \leq k+1$) εάν το μέγιστο της τελευταίας ομάδας από τις πρώτες n δοκιμές X_1, X_2, \dots, X_n (μετρώντας ανάποδα) αντιστοιχεί στην ομάδα (υπο-σχηματισμό) που αντιστοιχεί στο σύμβολο " j ", αλλιώς ορίζουμε στο Y_n την τιμή 1.

Τα παραπάνω καθορίζουν μια ομογενή αλυσίδα Markov, με αρχικό διάνυσμα πιθανοτήτων

$$\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{k+1}] = [\Pr[Y_1 = 1], \Pr[Y_1 = 2], \dots, \Pr[Y_1 = k+1]] = [1 - p_{i_1}, p_{i_1}, 0, \dots, 0]$$

και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{(k+1) \times (k+1)}$ που ορίζεται ως εξής

$$p_{ij} = \Pr[Y_n = j | Y_{n-1} = i] = \sum_{(i,j)} p_m, \quad i, j \in \Omega, \quad n \geq 2.$$

όπου $\sum_{(i,j)} p_m$ σημαίνει άθροισμα όλων των p_m που αντιστοιχούν στα a_m για τα οποία το υπο-σηματισμός "i" μετατρέπεται στον υπο-σηματισμό "j". Σημειώνεται ότι, $\pi_m = p_{1m}$ για $1 \leq m \leq k+1$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{e}_1 \mathbf{P}$.

Το συμβάν $\{Y_n = k+1\}$ συνεπάγεται ότι ο σχηματισμός ε έχει συμβεί την n -οστή δοκιμή ή και νωρίτερα. Για αυτό τον λόγο, για $n \geq 1$ έχουμε

$$\Pr[T \leq n] = \Pr[Y_n = k+1] = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P}^{n-1} \mathbf{e}'_{k+1} = \mathbf{e}_1 \mathbf{P}^n \mathbf{e}'_{k+1}$$

και

$$\Pr[T > n] = \Pr[Y_n \in \{1, 2, \dots, k\}] = \sum_{i=1}^k \Pr[Y_n = i] = \sum_{i=1}^k \boldsymbol{\pi} \mathbf{P}^{n-1} \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_1 \mathbf{P}^n (\mathbf{1}' - \mathbf{e}'_{k+1}).$$

Ο πίνακας πιθανοτήτων των μεταβιβάσεων \mathbf{P} μπορεί να γραφτεί ως

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{1}' \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$\mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^n & (\mathbf{I} - \mathbf{R}^n)\mathbf{1}' \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Έτσι, για $n \geq 1$ είναι αληθές ότι

$$\Pr[T \leq n] = \mathbf{e}_1 (\mathbf{I} - \mathbf{R}^n) \mathbf{1}', \quad \Pr[T > n] = \mathbf{e}_1 \mathbf{R}^n \mathbf{1}'$$

και

$$\Pr[T = n] = \mathbf{e}_1 \mathbf{R}^{n-1} (\mathbf{I} - \mathbf{R}) \mathbf{1}'.$$

Η πιθανογεννήτρια $G(s)$ του T δίνεται από τον τύπο

$$G(s) = E(s^T) = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr[T = n] s^n = s \mathbf{e}_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (s\mathbf{R})^{n-1} \right) (\mathbf{I} - \mathbf{R}) \mathbf{1}' = s \mathbf{e}_1 (\mathbf{I} - s\mathbf{R})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{R}) \mathbf{1}'$$

και η m -οστή παραγοντική ροπή του T δίνεται από τον τύπο

$$E[T(T-1)\dots(T-m+1)] = \left[\frac{d^m G(s)}{ds^m} \right] = m! \mathbf{e}_1 \mathbf{R}^{m-1} (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-m} \mathbf{1}'.$$

Η παραπάνω σχέση συνεπάγεται ότι

$$E(T) = \mathbf{e}_1 (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}', \quad E[T(T-1)] = 2\mathbf{e}_1 \mathbf{R} (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-2} \mathbf{1}'.$$

Β. Χρόνος αναμονής για την πρώτη εμφάνιση ενός σύνθετου Σχηματισμού

Η μέθοδος για την μελέτη του χρόνου αναμονής για έναν απλό σχηματισμό μπορεί εύκολα να γενικευτεί έτσι ώστε να μελετηθεί ο χρόνος αναμονής σύνθετων σχηματισμών. Ένας σύνθετος σχηματισμός ε είναι η ένωση των m απλών σχηματισμών (το m είναι σταθερός ακέραιος). Η βασική ιδέα για να χειριστούμε αυτήν την κατάσταση είναι να αποσυνθέσουμε τον κάθε σχηματισμό σε υπο-σχηματισμούς και να αφαιρέσουμε τυχόν ίδιους σχηματισμούς. Από εκεί και πέρα, για να μειώσουμε τη διάσταση του πίνακα πιθανοτήτων των μεταβιβάσεων \mathbf{P} , οι m απορροφητικές καταστάσεις των επιμέρους m απλών σχηματισμών μπορούν να συνδυαστούν σε μια και μόνο απορροφητική κατάσταση.

Γ. Ανάπτυξη του M : r/r σχήματος

Υποθέτουμε, εδώ, ότι οι τυχαίες μεταβλητές που εμφανίζονται στο διάγραμμα ελέγχου είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέσο μ και τυπική απόκλιση ίση με μονάδα που παραμένει σταθερή. Η διαδικασία θεωρείται ότι παραμένει εντός ελέγχου (εκτός ελέγχου) όταν ο μέσος ισούται με μηδέν (διάφορος του μηδενός)

Σε ένα r/r διάγραμμα ελέγχου ορίζουμε τρεις περιοχές: μια πάνω από το άνω όριο ελέγχου UCL (περιοχή 1), μια κάτω από το κάτω όριο ελέγχου LCL (περιοχή 2) και η τελευταία ανάμεσα στα δύο όρια ελέγχου (περιοχή 0). Η κεντρική γραμμή CL του διαγράμματος τοποθετείται στο μηδέν και χρησιμοποιούνται συμμετρικά όρια ελέγχου, δηλαδή $UCL = d$ και $LCL = -d$ ($d > 0$). Η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο στην κάθε περιοχή 1, 2, 0 συμβολίζεται με p_U, p_L, q . Έτσι:

$$p_U = p_U(\mu) = 1 - \Phi(d - \mu)$$

$$p_L = p_L(\mu) = 1 - \Phi(d + \mu)$$

$$q = q(\mu) = 1 - p_U - p_L$$

όπου με $\Phi(\cdot)$ συμβολίζεται η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονική κατανομής.

Έστω $\{X_t, t \geq 1\}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων δοκιμών με τιμές στο σύνολο $A = \{0,1,2\}$, και έστω $P(X_t = 0) = q$, $P(X_t = 1) = p_U$, $P(X_t = 2) = p_L$ και ο σύνθετος σχηματισμός

$$\varepsilon = \{\underbrace{11\dots 1}_r, \underbrace{22\dots 2}_r\}$$

Με T συμβολίζεται ο χρόνος αναμονής για την πρώτη εμφάνιση του συμβάντος ε .

Από τα παραπάνω είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι το μήκος ροής του r/r διαγράμματος ελέγχου συμπίπτει με τον χρόνο αναμονής T του σύνθετου σχηματισμού ε . Αποσυνθέτοντας τον σχηματισμό ε έχουμε τις ακόλουθες $(2r)$ ομάδες-καταστάσεις:

$$\begin{aligned} "1" &= 0, \quad "2" = 2, \quad "3" = 11, \dots, \quad "r" = \underbrace{11\dots 1}_{r-1}, \quad "r+1" = 2, \quad "r+2" = 22, \dots, \\ "2r-1" &= \underbrace{22\dots 2}_{r-1}, \quad "2r" = \{ \underbrace{11\dots 1}_r, \underbrace{22\dots 2}_r \} \end{aligned}$$

Έτσι λαμβάνουμε

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{1}' \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cccccccc|c} q & p_U & 0 & \cdots & 0 & p_L & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ q & 0 & p_U & \cdots & 0 & p_L & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_L & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_L & 0 & \cdots & 0 & p_U \\ q & p_U & 0 & \cdots & 0 & 0 & p_L & \cdots & 0 & 0 \\ q & p_U & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q & p_U & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_L \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right)_{(2r) \times (2r)}$$

και τελικά μετά από πράξεις

$$E(T) = E(T | \mu) = \mathbf{e}_1 (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}' = \left(p_U + p_L + \frac{p_U - p_U^r}{1 - p_U^r} + \frac{p_L - p_L^r}{1 - p_L^r} \right)^{-1}.$$

Για μια εντός ελέγχου διαδικασία ($\mu=0$), έχουμε ότι $p_U = p_L = p$, έτσι:

$$E(T | \mu = 0) = \frac{1 - p^r}{2p^r(1 - p)}, \quad p = 1 - \Phi(d)$$

Τα όρια ελέγχου του r/r σχήματος μπορούν να βρεθούν ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1^ο: Επιλέγουμε έναν θετικό ακέραιο r .

Βήμα 2^ο: Επιλέγουμε το επιθυμητό εντός ελέγχου $ARL=c$.

Βήμα 3^ο: Υπολογίζουμε την μοναδική ρίζα της $c = E(T | \mu = 0)$ στο διάστημα $(0,1)$,
έστω p^* .

Βήμα 4^ο: Υπολογίζουμε το $UCL = d$ από την σχέση $d = \Phi^{-1}(1 - p^*)$.

Έτσι έχουμε όλα τα κατάλληλα εργαλεία προκειμένου να μελετήσουμε το r/r σχήμα.

Δ. Ανάπτυξη του $M: r/m$ Σχήματος

Στο $M: r/m$ σχήμα ($2 \leq r \leq m$) ορίζονται τέσσερις περιοχές: μια πάνω από το UCL (περιοχή 1), μια κάτω από το LCL (περιοχή 4), μια ανάμεσα από την CL και το UCL (περιοχή 2) και μια ανάμεσα από την CL και το LCL (περιοχή 3). Η κεντρική γραμμή CL καθορίζεται στο μηδέν και χρησιμοποιούνται συμμετρικά όρια ελέγχου, τα οποία είναι: $UCL = d$ και $LCL = -d$. Η πιθανότητα ένα σημείο να βρεθεί στις περιοχές 1, 2, 3, 4 είναι p_U, p_L, q_U, q_L , αντίστοιχα. Έτσι

$$p_U = p_U(\mu) = 1 - \Phi(d - \mu)$$

$$p_L = p_L(\mu) = 1 - \Phi(d + \mu)$$

$$q_U = q_U(\mu) = \Phi(d - \mu) + \Phi(\mu) - 1$$

$$q_L = q_L(\mu) = \Phi(d + \mu) - \Phi(\mu)$$

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε το $M: 3/4$ σχήμα. Έστω $\{X_t, t \geq 1\}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων δοκιμών με τιμές στο σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4\}$, και ο σύνθετος σχηματισμός

$$\varepsilon = \{11, 1211, 1121, 444, 4344, 4434\}$$

Με T συμβολίζεται ο χρόνος αναμονής για την πρώτη εμφάνιση του συμβάντος ε .

Από τα παραπάνω είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι το μήκος ροής του $M: 3/4$ διαγράμματος ελέγχου συμπίπτει με τον χρόνο αναμονής T του σύνθετου σχηματισμού ε . Αποσυνθέτοντας τον σχηματισμό ε έχουμε τις ακόλουθες (12) ομάδες-καταστάσεις:

$$"1" = \{2, 3\}, \quad "2" = 1, \quad "3" = 11, \quad "4" = 12, \quad "5" = 121, \quad "6" = 112,$$

$$"7" = 4, \quad "8" = 44, \quad "9" = 43, \quad "10" = 434, \quad "11" = 443,$$

$$"12" = \{111, 1211, 1121, 444, 4344, 4434\}.$$

Έτσι λαμβάνουμε

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} q_U + q_L & p_U & 0 & 0 & 0 & 0 & p_L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_L & 0 & p_U & q_U & 0 & 0 & p_L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_L & 0 & 0 & 0 & 0 & q_U & p_L & 0 & 0 & 0 & 0 & p_U \\ q_U + q_L & 0 & 0 & 0 & p_U & 0 & p_L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_L & 0 & 0 & q_U & 0 & 0 & p_L & 0 & 0 & 0 & 0 & p_U \\ q_U + q_L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_L & 0 & 0 & 0 & 0 & p_U \\ q_U & p_U & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_L & q_L & 0 & 0 & 0 \\ q_U & p_U & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_L & p_L \\ q_U + q_L & p_U & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_L & 0 & 0 \\ q_U & p_U & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_L & 0 & 0 & p_L \\ q_U + q_L & p_U & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Για μια διαδικασία εντός ελέγχου ($\mu=0$), έχουμε ότι $p_U = p_L = p$, $q_U = q_L(1-2p)/2$, οπότε προκύπτει

$$E(T | \mu = 0) = \frac{4p^5 - 8p^4 + 7p^3 - 6p^2 - 4p - 4}{2p^3(4p^3 - 8p^2 + 11p - 8)}, \quad p = 1 - \Phi(d).$$

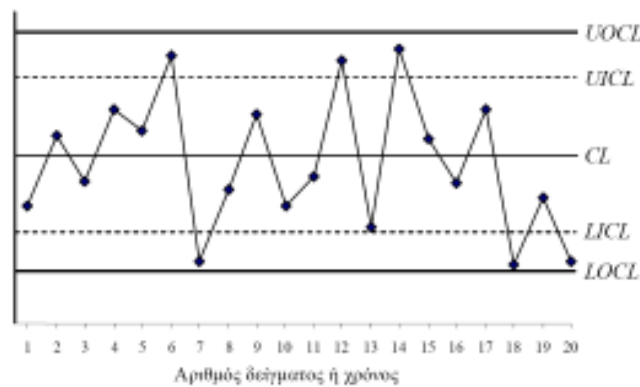
Τα όρια ελέγχου του $M: 3/4$ σχήματος μπορούν να βρεθούν ακολουθώντας τα βήματα που περιγράψαμε στο r/r σχήμα.

3.2 Αναθεωρημένο m -από- k διάγραμμα ελέγχου

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι οι Khoo και Griffin (2006) πρότειναν έναν συνδυασμό του κλασικού διαγράμματος ελέγχου Shewhart (1/1) με τα διαγράμματα τύπου δύο-από-δύο (2/2) ή δύο-από-τρία (2/3) του Klein (2000). Αυτός ο συνδυασμός κανόνων θα αναφέρεται εφεξής βελτιωμένος m -από- k κανόνας και θα συμβολίζεται ως $I-m/k$, όπου $k \geq 2$ και $2 \leq m \leq k$. Οι κανόνες $I-2/2$ και $I-2/3$ παρουσιάζουν καλύτερη απόδοση σε όρους ARL, συγκρίνοντάς τα με τους αντίστοιχους κανόνες του Klein (2000) στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων του μέσου, ενώ διατηρούν την ανωτερότητάς τους στην ανίχνευση μικρών ή/και μεσαίων μετατοπίσεων του μέσου.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ένας νέος κανόνας, ο οποίος καλείται αναθεωρημένος m -από- k κανόνας ροής και θα συμβολίζεται ως $R-m/k$.

Έστω ένα διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart με μια κεντρική γραμμή (CL) και δύο συμμετρικά σετ ορίων ελέγχου, τα εξωτερικά όρια ελέγχου (LOCL,UCOL) και τα εσωτερικά όρια ελέγχου (LICL,UICL).



Σχήμα 3.4. Το σχήμα $R-2/3$
(x-άξονας: αριθμός δείγματος, y-άξονας: μέση τιμή δείγματος)

Τα εσωτερικά και εξωτερικά όρια ελέγχου ικανοποιούν την συνθήκη $LOCL < LICL < CL < UICL < UOCL$. Για $k \geq 2$ και $2 \leq m < k$, ο αναθεωρημένος κανόνας ροής δίνει σήμα εκτός στατιστικού ελέγχου διεργασίας όταν (α) ένα σημείο βρεθεί εκτός των εξωτερικών ορίων ελέγχου, ή (β) m από k συνεχόμενα σημεία βρεθούν ανάμεσα στα UICL (LICL) και UOCL (LOCL) και τα υπόλοιπα σημεία που μετέχουν (δηλ. $k-m$) βρίσκονται ανάμεσα από την κεντρική γραμμή CL και το UOCL (LOCL).

Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται η διαφορά του $I-2/3$ με τον $R-2/3$. Το σχήμα $R-2/3$ δίνει σήμα εκτός ελέγχου στο δείγμα 20, ενώ το σχήμα $I-2/3$ στα δείγματα 14 και 20.

Για τον σχεδιασμό ενός διαγράμματος ελέγχου τύπου $R-m/k$ πρώτα επιλέγουμε μια τιμή c για το εντός ελέγχου ARL και κατόπιν υπολογίζουμε τα εξωτερικά όρια ελέγχου $UOCL = L$, $LOCL = -L$. Η τιμή L πρέπει να ικανοποιεί την σχέση $L > z_{1/2c}$ προκειμένου να έχουμε μεγαλύτερα όρια ελέγχου από το κλασσικό διάγραμμα Shewhart εφοδιασμένο με τον κανόνα 1/1 με το ίδιο εντός ελέγχου ARL (z_a συμβολίζεται το άνω a ποσοστιαίο σημείο της τυπικής κανονικής κατανομής). Στην συνέχεια υπολογίζονται τα εσωτερικά όρια ελέγχου $LICL = -d$, $UICL = d$ προκειμένου να μας δώσουν την επιθυμητή τιμή c για το εντός ελέγχου ARL.

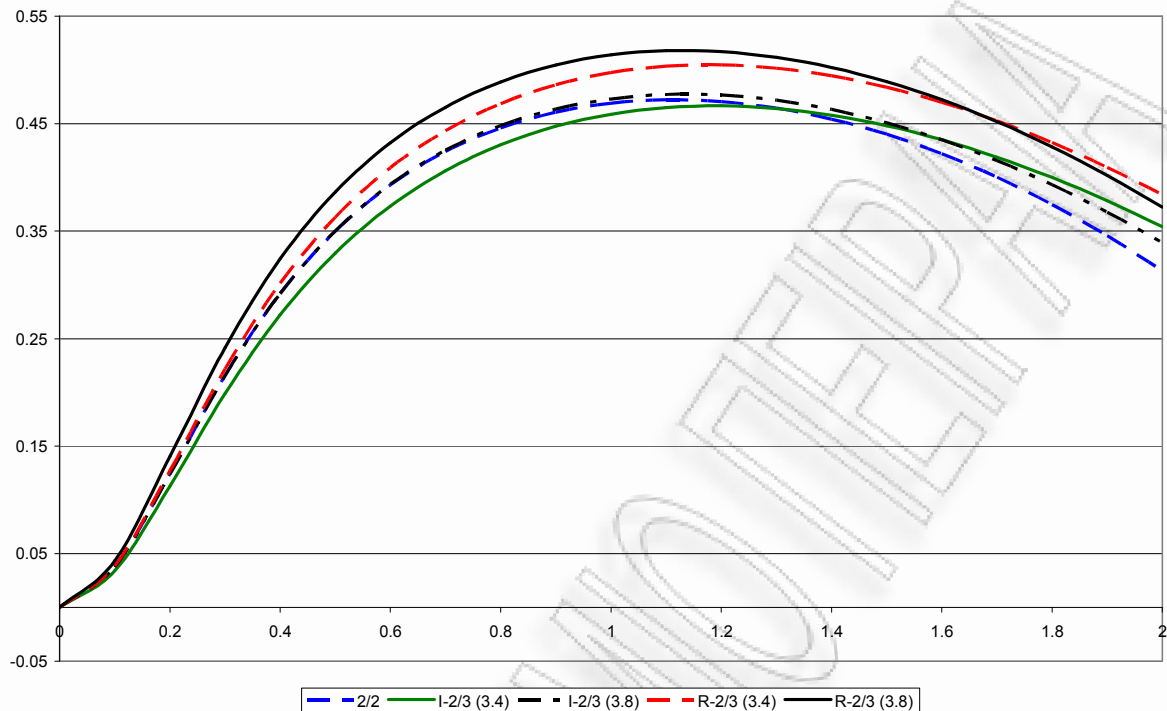
3.2.1 Απόδοση των σχημάτων $R-2/3$ και $R-4/5$

Έστω $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $i = 1, 2, \dots$, ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό το οποίο ακολουθεί κανονική κατανομή που έχει σταθερή διακύμανση σ^2 . Η διαδικασία βρίσκεται εκτός στατιστικού ελέγχου όταν ο μέσος της κατανομής του ποιοτικού χαρακτηριστικού δεν ισούται με την τιμή στόχο μ_0 . Για να ελέγξουμε την διαδικασία, ο τυποποιημένος δειγματικός μέσος $Z_i = (\bar{X}_i - \mu_0) / (\sigma / \sqrt{n})$ απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου.

Με τους παραπάνω όρους γίνεται μια συγκριτική μελέτη της απόδοσης του ARL ενός διαγράμματος Shewhart με τον κανόνα 1/1, τον κανόνα 2/3 του Klein (2000), τον κανόνα $I-2/3$ των Khoο και Araffin (2006) και του $R-2/3$. Για αυτά τα διαγράμματα ελέγχου στον Πίνακα 3.2, δίνεται το ARL και τα όρια ελέγχου έτσι ώστε το εντός ελέγχου ARL να ισούται με 370.4. Για λόγους σύγκρισης η τιμή του L συμπίπτει για τους κανόνες $I-2/3$ και $R-2/3$. Στον Πίνακα 3.3 παρουσιάζονται αντίστοιχα αποτελέσματα για τον κανόνα 4/5. Από τα στοιχεία που προκύπτουν και από τους δύο πίνακες προκύπτει ότι όσο μεγαλώνει η τιμή του L τόσο μειώνεται η τιμή του d . Επιπροσθέτως, για την ίδια τιμή του L ο κανόνας $I-m/k$ χρησιμοποιεί ευρύτερα εσωτερικά όρια ελέγχου από τον κανόνα $R-m/k$.

Πίνακας 3.2. ARL τιμές για τα διαγράμματα ελέγχου 1/1, 2/3, I-2/3 και R-2/3

Μετατόπιση	1/1	I-2/3						R-2/3					
		2/3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	
0.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.1	352.93	339.58	340.95	340.33	339.97	339.76	339.64	339.30	338.56	338.11	337.84	337.84	337.69
0.2	308.43	270.10	273.62	272.01	271.06	270.53	270.24	269.18	267.29	266.16	265.49	265.49	265.11
0.3	253.14	198.46	202.82	200.78	199.60	198.94	198.58	196.95	194.62	193.23	192.43	192.43	191.97
0.4	200.08	141.62	145.62	143.69	142.59	141.99	141.67	139.75	137.59	136.32	135.60	135.60	135.19
0.5	155.22	100.87	104.06	102.47	101.58	101.10	100.85	98.89	97.13	96.12	95.54	95.54	95.23
0.6	119.67	72.64	75.00	73.78	73.10	72.73	72.56	70.71	69.37	68.61	68.18	68.18	67.95
0.7	92.32	53.17	54.84	53.92	53.42	53.16	53.04	51.38	50.39	49.83	49.52	49.52	49.36
0.8	71.55	39.64	40.77	40.10	39.74	39.56	39.48	38.02	37.30	36.90	36.69	36.69	36.58
0.9	55.83	30.11	30.85	30.36	30.11	29.99	29.94	28.68	28.16	27.88	27.73	27.73	27.66
1.0	43.89	23.30	23.76	23.41	23.23	23.15	23.13	22.05	21.68	21.48	21.38	21.38	21.34
1.1	34.80	18.36	18.62	18.37	18.25	18.20	18.19	17.28	17.00	16.87	16.80	16.80	16.78
1.2	27.82	14.73	14.84	14.66	14.58	14.56	14.56	13.78	13.58	13.49	13.45	13.45	13.44
1.3	22.43	12.01	12.02	11.90	11.85	11.84	11.85	11.18	11.04	10.98	10.96	10.96	10.96
1.4	18.25	9.96	9.89	9.81	9.78	9.78	9.79	9.22	9.13	9.09	9.08	9.08	9.08
1.5	14.97	8.38	8.26	8.21	8.19	8.20	8.22	7.72	7.66	7.64	7.64	7.64	7.65
1.6	12.38	7.16	7.00	6.96	6.96	6.98	7.00	6.56	6.52	6.51	6.52	6.52	6.54
1.7	10.33	6.20	6.00	5.99	5.99	6.01	6.04	5.65	5.63	5.63	5.64	5.64	5.66
1.8	8.69	5.43	5.22	5.21	5.23	5.25	5.27	4.93	4.92	4.93	4.95	4.95	4.97
1.9	7.37	4.82	4.58	4.59	4.61	4.63	4.66	4.35	4.35	4.37	4.39	4.39	4.41
2.0	6.30	4.33	4.07	4.08	4.11	4.14	4.16	3.88	3.89	3.91	3.93	3.93	3.96
2.1	5.43	3.93	3.65	3.67	3.70	3.73	3.76	3.50	3.51	3.54	3.56	3.56	3.59
2.2	4.72	3.60	3.31	3.33	3.36	3.39	3.42	3.18	3.20	3.23	3.25	3.25	3.28
2.3	4.13	3.33	3.02	3.05	3.08	3.11	3.14	2.91	2.94	2.97	3.00	3.00	3.03
2.4	3.65	3.10	2.78	2.81	2.84	2.88	2.91	2.69	2.72	2.75	2.78	2.78	2.81
2.5	3.24	2.92	2.57	2.60	2.64	2.68	2.71	2.50	2.53	2.57	2.60	2.60	2.63
2.6	2.90	2.76	2.39	2.43	2.47	2.51	2.54	2.34	2.37	2.41	2.44	2.44	2.48
2.7	2.62	2.63	2.24	2.28	2.32	2.36	2.40	2.20	2.23	2.27	2.31	2.31	2.34
2.8	2.38	2.52	2.11	2.15	2.19	2.23	2.27	2.07	2.11	2.15	2.19	2.19	2.23
2.9	2.17	2.43	2.00	2.04	2.08	2.12	2.16	1.97	2.01	2.05	2.09	2.09	2.12
3.0	2.00	2.36	1.90	1.94	1.98	2.02	2.06	1.87	1.91	1.95	1.99	1.99	2.03
3.1	1.85	2.29	1.80	1.85	1.89	1.93	1.98	1.79	1.83	1.87	1.91	1.91	1.95
3.2	1.73	2.24	1.72	1.77	1.81	1.85	1.90	1.71	1.75	1.79	1.84	1.84	1.88
3.3	1.62	2.19	1.65	1.69	1.74	1.78	1.82	1.64	1.68	1.72	1.77	1.77	1.81
3.4	1.53	2.16	1.58	1.63	1.67	1.71	1.76	1.57	1.62	1.66	1.70	1.70	1.75
3.5	1.45	2.13	1.52	1.57	1.61	1.65	1.70	1.52	1.56	1.60	1.64	1.64	1.69
3.6	1.38	2.10	1.47	1.51	1.55	1.59	1.64	1.46	1.50	1.55	1.59	1.59	1.63
3.7	1.32	2.08	1.42	1.46	1.50	1.54	1.58	1.41	1.45	1.49	1.54	1.54	1.58
3.8	1.27	2.06	1.37	1.41	1.45	1.49	1.53	1.37	1.40	1.44	1.49	1.49	1.53
3.9	1.23	2.05	1.33	1.36	1.40	1.44	1.48	1.32	1.36	1.40	1.44	1.44	1.48
4.0	1.19	2.04	1.29	1.32	1.36	1.40	1.44	1.28	1.32	1.36	1.40	1.40	1.44

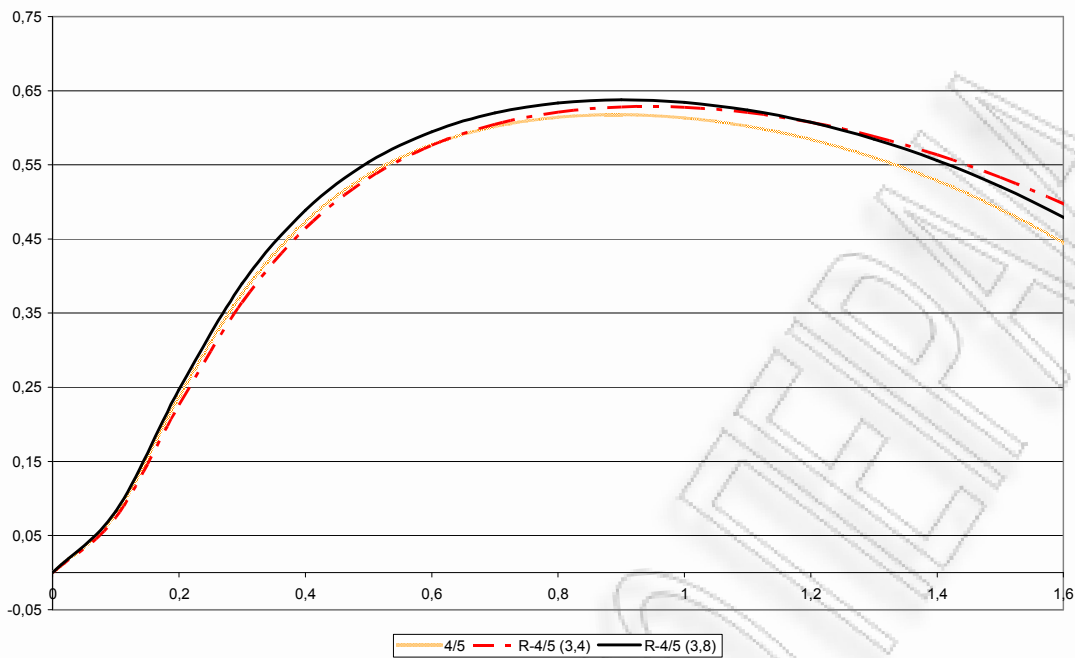


Σχήμα 3.5. Συγκρίσεις ARL για Acosta (2007), Kho και Ariffin (2006) και Αναθεωρημένου Κανόνα 2/3 (για δ έως 2σ , x-άξονας: δ , y-άξονας: συντελεστής, διαφορά ως προς Shewhart)

Από τους Πίνακες 3.2 και 3.3 προκύπτει ότι ο αναθεωρημένος κανόνας $R-m/k$ υπερτερεί σταθερά των αντίστοιχών του $r-m/k$. Επίσης, παρουσιάζει καλύτερη απόδοση του ARL από ένα τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart για μετατοπίσεις του μέσου μέχρι και 2.4 τυπικές αποκλίσεις. Για μετατοπίσεις του μέσου από 2.4 μέχρι 3 τυπικές αποκλίσεις ο $R-2/3$ υπερτερεί του διαγράμματος Shewhart. Τέλος για μεγαλύτερες μετατοπίσεις οι διαφορές του αναθεωρημένου κανόνα με το τυπικό διάγραμμα Shewhart είναι πρακτικά ασήμαντες.

Πίνακας 3.3. ARL τιμές για τα διαγράμματα ελέγχου 1/1, 4/5, I-4/5 και R-4/5

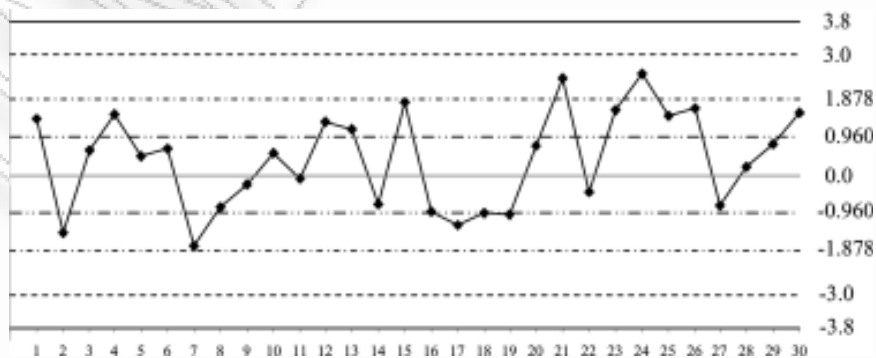
Μετατόπιση	1/1	4/5	I-4/5					R-4/5				
			3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8
	3	1.043	1.092	1.075	1.065	1.058	1.053	1.002	0.984	0.0973	0.965	0.96
0.0	370.40	370.40	370.74	370.39	370.47	370.38	370.36	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.1	352.93	324.91	328.58	326.98	326.24	325.66	325.33	326.67	325.31	324.45	323.92	323.59
0.2	308.43	235.22	242.56	239.56	237.89	236.77	236.11	238.64	235.76	233.98	232.88	232.21
0.3	253.14	157.91	165.25	162.22	160.50	159.40	158.75	160.89	157.97	156.21	155.13	154.47
0.4	200.08	105.40	111.03	108.66	107.31	106.47	105.98	107.20	104.93	103.58	102.77	102.28
0.5	155.22	71.92	75.78	74.10	73.16	72.58	72.25	72.70	71.12	70.19	69.64	69.32
0.6	119.67	50.61	53.10	51.96	51.34	50.97	50.76	50.72	49.66	49.05	48.70	48.50
0.7	92.32	36.79	38.32	37.57	37.17	36.94	36.82	36.51	35.82	35.43	35.21	35.10
0.8	71.55	27.60	28.50	28.01	27.76	27.62	27.56	27.11	26.67	26.43	26.30	26.24
0.9	55.83	21.34	21.81	21.50	21.35	21.27	21.24	20.75	20.47	20.33	20.26	20.24
1.0	43.89	16.97	17.15	16.96	16.88	16.84	16.84	16.34	16.17	16.09	16.06	16.06
1.1	34.80	13.84	13.83	13.72	13.68	13.68	13.69	13.20	13.11	13.07	13.07	13.09
1.2	27.82	11.57	11.42	11.36	11.36	11.37	11.40	10.93	10.88	10.88	10.90	10.93
1.3	22.43	9.88	9.63	9.61	9.63	9.66	9.69	9.24	9.23	9.25	9.29	9.32
1.4	18.25	8.60	8.27	8.29	8.32	8.36	8.40	7.97	7.99	8.02	8.07	8.11
1.5	14.97	7.63	7.23	7.27	7.31	7.36	7.41	6.99	7.03	7.08	7.13	7.17
1.6	12.38	6.87	6.41	6.47	6.53	6.59	6.64	6.22	6.28	6.34	6.40	6.45
1.7	10.33	6.28	5.77	5.83	5.90	5.97	6.03	5.61	5.68	5.75	5.82	5.87
1.8	8.69	5.82	5.24	5.32	5.40	5.47	5.54	5.12	5.20	5.28	5.35	5.41
1.9	7.37	5.45	4.81	4.90	4.99	5.07	5.14	4.72	4.81	4.89	4.97	5.04
2.0	6.30	5.16	4.45	4.55	4.65	4.73	4.81	4.38	4.47	4.57	4.65	4.72
2.1	5.43	4.92	4.15	4.26	4.36	4.45	4.53	4.08	4.19	4.29	4.38	4.46
2.2	4.72	4.74	3.88	4.00	4.11	4.20	4.29	3.83	3.95	4.05	4.15	4.24
2.3	4.13	4.59	3.64	3.77	3.88	3.99	4.08	3.60	3.73	3.84	3.94	4.04
2.4	3.65	4.47	3.43	3.56	3.68	3.79	3.90	3.40	3.53	3.65	3.76	3.86
2.5	3.24	4.37	3.23	3.37	3.49	3.61	3.72	3.21	3.34	3.47	3.58	3.69
2.6	2.90	4.29	3.05	3.19	3.32	3.44	3.56	3.03	3.17	3.30	3.42	3.54
2.7	2.62	4.23	2.87	3.01	3.15	3.28	3.40	2.86	3.00	3.13	3.26	3.38
2.8	2.38	4.18	2.71	2.85	2.99	3.12	3.25	2.70	2.84	2.98	3.11	3.24
2.9	2.17	4.14	2.55	2.69	2.83	2.97	3.10	2.54	2.68	2.82	2.96	3.09
3.0	2.00	4.11	2.40	2.54	2.68	2.82	2.95	2.39	2.53	2.67	2.81	2.94
3.1	1.85	4.09	2.26	2.39	2.53	2.67	2.81	2.25	2.39	2.52	2.66	2.80
3.2	1.73	4.07	2.12	2.25	2.39	2.52	2.66	2.12	2.25	2.38	2.52	2.66
3.3	1.62	4.05	2.00	2.12	2.25	2.38	2.52	2.00	2.12	2.25	2.38	2.51
3.4	1.53	4.04	1.88	1.99	2.12	2.24	2.38	1.88	1.99	2.12	2.24	2.38
3.5	1.45	4.03	1.77	1.88	1.99	2.11	2.24	1.77	1.88	1.99	2.11	2.24
3.6	1.38	4.02	1.67	1.77	1.88	1.99	2.11	1.67	1.77	1.88	1.99	2.11
3.7	1.32	4.02	1.58	1.67	1.77	1.88	1.99	1.58	1.67	1.77	1.88	1.99
3.8	1.27	4.01	1.50	1.58	1.67	1.77	1.88	1.50	1.58	1.67	1.77	1.88
3.9	1.23	4.01	1.43	1.50	1.58	1.67	1.77	1.43	1.50	1.58	1.67	1.77
4.0	1.19	4.01	1.37	1.43	1.50	1.58	1.67	1.37	1.43	1.50	1.58	1.67



Σχήμα 3.6. Συγκρίσεις ARL για Acosta (2007), Khou και Griffin (2006) και Αναθεωρημένου Κανόνα 4/5 (για δ έως 1.6 σ)

3.2.2 Εφαρμογή

Προκειμένου να διαπιστώσουμε καλύτερα την απόδοση που επιφέρει η εφαρμογή του αναθεωρημένου κανόνα $R-m/k$, χρησιμοποιούμε τα δεδομένα του Khou (2003). Τα δεδομένα περιλαμβάνουν 30 παρατηρήσεις, όπου οι 20 πρώτες παρατηρήσεις προέκυψαν από κανονική κατανομή $N(0, 1)$, και εκπροσωπούν την εντός στατιστικού ελέγχου διαδικασία με μέσο ($\mu_0 = 0$), και οι τελευταίες 10 παρατηρήσεις έχουν προέλθει από κανονική κατανομή $N(1, 1)$ και αντιπροσωπεύουν την διαδικασία να βρίσκεται εκτός στατιστικού ελέγχου με μέσο 1 ($\delta = 1$).



Σχήμα 3.7. Πειραματικά Δεδομένα

Στο Σχήμα έχουν απεικονιστεί οι 30 παρατηρήσεις καθώς επίσης και τα εξής όρια ελέγχου: (α) τα όρια ελέγχου του τυπικού διαγράμματος Shewhart $L=3$, (β) τα όρια ελέγχου του $R-2/3$ με $L=3.8$ και $d=1.878$, και (γ) τα όρια ελέγχου του $R-2/3$ με $L=3.8$ και $d=0.960$.

Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι μόνο ο κανόνας $R-2/3$ έχει δώσει σήμα εκτός ελέγχου στην παρατήρηση 26 όπου υπάρχουν τέσσερα συνεχόμενα σημεία άνω του εσωτερικού ορίου $d=0.960$. Ακόμα και εάν χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε άλλο συνδυασμό ορίων ελέγχου και κανόνων των Πινάκων 3.2 και 3.2, το συμπέρασμα δεν αλλάζει. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το διάγραμμα $R-4/5$ είναι πιο ευαίσθητο σε μικρές μετατοπίσεις του μέσου από ότι το διάγραμμα $R-2/3$ και το κλασικό διάγραμμα ελέγχου με τον 1/1 κανόνα.

Το συγκεκριμένο παράδειγμα επιδεικνύει πως ένας απλός κανόνας ροής μπορεί να αυξήσει την ευαισθησία ενός τυπικού διαγράμματος Shewhart στην εύρεση μόνιμων μετατοπίσεων του μέσου μιας παραγωγικής διαδικασίας.

3.2.3 Μεθοδολογία μελέτης των διαγραμμάτων $I-2/3$ και $R-2/3$

Η μεθοδολογία για τη μελέτη των αναθεωρημένων διαγραμμάτων είναι παρόμοια με αυτή που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Έστω ένα τυποποιημένο διάγραμμα Shewhart με κεντρική γραμμή CL, εξωτερικά όρια ελέγχου LOCL, UOCL και εσωτερικά όρια ελέγχου LICL, UICL, εφοδιασμένο με τον $R-2/3$ κανόνα ροής. Ορίζουμε πέντε περιοχές στο διάγραμμα ελέγχου: η περιοχή που βρίσκεται ανάμεσα στα UOCL και UICL (περιοχή 1), η περιοχή που βρίσκεται ανάμεσα στα UICL και CL (περιοχή 2), η περιοχή που βρίσκεται ανάμεσα στα CL και LICL (περιοχή 3), η περιοχή που βρίσκεται ανάμεσα στα LICL και LOCL (περιοχή 4) και η τελευταία πέρα των εξωτερικών ορίων (περιοχή 5). Η CL τοποθετείτε στο μηδέν και χρησιμοποιούμε συμμετρικά εσωτερικά και εξωτερικά όρια ελέγχου, δηλαδή $LOCL = -L$, $UOCL = L$, $LICL = -d$, $UICL = d$ ($L > d > 0$). Η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο στις περιοχές 1, 2, 3, 4, 5 συμβολίζεται με p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 αντίστοιχα. Για μια μετατόπιση του μέσου κατά δ τυπικές αποκλίσεις, ισχύει ότι

$$p_1 = p_1(\delta) = \Phi(L - \delta) - \Phi(d - \delta)$$

$$p_2 = p_2(\delta) = \Phi(d - \delta) + \Phi(\delta) - 1$$

$$p_3 = p_3(\delta) = \Phi(d + \delta) - \Phi(\delta)$$

$$p_4 = p_4(\delta) = \Phi(L + \delta) - \Phi(d + \delta)$$

$$p_5 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4$$

όπου $\Phi(\cdot)$ είναι η τυπική κανονική κατανομή.

Εν συνεχεία, έστω $\{Y_t, t \geq 1\}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων δοκιμών, η οποία παίρνει τιμές στο σύνολο $A = \{1,2,3,4,5\}$, και $P(Y_t = i) = p_i$ ($1 \leq i \leq 5$). Έχοντας τον σύνθετο σχηματισμό $\varepsilon = \{11, 121, 44, 434, 5\}$ συμβολίζουμε με T τον χρόνο αναμονής εμφάνισης του ε . Είναι φανερό ότι το μήκος ροής του διαγράμματος $R-2/3$ συμπίπτει με τον χρόνο αναμονής T του σύνθετου σχηματισμού ε και η μέση τιμή του T με το ARL του διαγράμματος $R-2/3$. Κατά τα συνήθη αποσυνθέτουμε τον σχηματισμό ε στις ακόλουθες 5 ομάδες-καταστάσεις

$$"2" = 1, \quad "3" = 12, \quad "4" = 4, \quad "5" = 42, \quad "6" = \{11, 121, 44, 434, 5\}$$

όπου η τελευταία ομάδα περιέχει όλους τους σχηματισμούς που οδηγούν σε εμφάνιση του ε . Ορίζουμε την αλυσίδα Markov $\{Z_t, t \geq 1\}$ με χώρο καταστάσεων $\Omega = \{1,2,\dots,6\}$ που ενεργεί πάνω στην ακολουθία $\{Y_t, t \geq 1\}$ ως εξής: (α) η κατάσταση 6 είναι η απορροφητική και (β) δίνουμε στο Z_n την τιμή j ($2 \leq j \leq 6$) εάν το μέγιστο της τελευταίας ομάδας από τις πρώτες n δοκιμές X_1, X_2, \dots, X_n (μετρώντας ανάποδα) αντιστοιχεί στην ομάδα (υπο-σχηματισμό) που αντιστοιχεί στο σύμβολο " j ", αλλιώς ορίζουμε στο Y_n την τιμή 1.

Τα παραπάνω καθορίζουν μια ομογενή αλυσίδα Markov πάνω στον Ω με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{1}' \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} p_2 + p_3 & p_1 & 0 & p_4 & 0 & p_5 \\ 0 & 0 & p_2 & p_4 & 0 & p_1 + p_5 \\ p_2 + p_3 & 0 & 0 & p_4 & 0 & p_1 + p_5 \\ p_2 & p_1 & 0 & 0 & p_3 & p_4 + p_5 \\ p_2 + p_3 & p_1 & 0 & 0 & 0 & p_4 + p_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Για μια εντός ελέγχου διαδικασία ($\delta=0$) έχουμε ότι

$$p_1 = p_4 = p = \Phi(L) - \Phi(d), \quad p_2 = p_3 = q = \Phi(d) - 1/2, \quad p_5 = 1 - 2p - 2q$$

οπότε

$$E(T) = \mathbf{e}_1(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{1}' = \frac{1 + p + pq}{1 - p - (2 + p)q - 2pq^2}.$$

Έτσι, για σταθερές τιμές των εξωτερικών ορίων $UOCL = L$, $LOCL = -L$, η τιμή του d που καθορίζει την θέση των εσωτερικών ορίων ελέγχου προκύπτει επιλύοντας την εξίσωση $E(T) = c$, όπου το c είναι η τιμή του ARL για μια εντός ελέγχου διαδικασία.

Χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία μπορούμε να καθορίσουμε τα εσωτερικά όρια ελέγχου για τον κανόνα ροής $I-2/3$. Συγκεκριμένα, ορίζουμε της εξής τέσσερις περιοχές: η περιοχή που βρίσκεται ανάμεσα στα $UOCL$ και $UICL$ (περιοχή 1), η περιοχή που βρίσκεται ανάμεσα στα $UICL$ και $LICL$ (περιοχή 2), η περιοχή που βρίσκεται ανάμεσα στα $LICL$ και $LOCL$ (περιοχή 3) και η περιοχή που βρίσκεται εκτός των εξωτερικών ορίων (περιοχή 4). Η μελέτη του $I-2/3$ κανόνα ροής ανάγεται στη μελέτη του σύνθετου σχηματισμού

$$\varepsilon = \{11, 121, 131, 33, 323, 313, 4\}.$$

Ακολουθώντας την προηγούμενη διαδικασία έχουμε ότι τα κυριότερα μέρη για την μελέτη μας είναι οι καταστάσεις

$$\begin{aligned} "1" &= 2, & "2" &= 1, & "3" &= 12, & "4" &= 13, & "5" &= 3, & "6" &= 32, \\ "7" &= 31, & "8" &= \{11, 121, 131, 33, 323, 313, 4\} \end{aligned}$$

οι πιθανότητες

$$p_1 = p_1(\delta) = \Phi(L - \delta) - \Phi(d - \delta)$$

$$p_2 = p_2(\delta) = \Phi(d - \delta) + \Phi(d + \delta) - 1$$

$$p_3 = p_3(\delta) = \Phi(L + \delta) - \Phi(d + \delta)$$

$$p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3$$

και ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} p_2 & p_1 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & p_4 \\ 0 & 0 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 & p_4 + p_1 \\ p_2 & 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & p_4 + p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & p_4 + p_1 + p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & p_1 & p_4 + p_3 \\ p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 + p_3 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 + p_1 + p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Έτσι η μέση τιμή του T για $\delta=0$ (εντός ελέγχου διεργασία) είναι ίση με

$$E(T) = \frac{1 + (q+2)p + (q+2)p^2}{1 - q^2 p(1+p) - q(1+p+p^2)}$$

όπου

$$p = p_1(0) = p_3(0) = \Phi(L) - \Phi(d), \quad q = p_2(0) = 2\Phi(d) - 1.$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Προκειμένου να υπολογιστεί το εντός και εκτός στατιστικού ελέγχου μέσο μήκος ροής, χρησιμοποιώντας την τεχνική εμφύτευσης τυχαίων μεταβλητών σε μια ομογενή αλυσίδα Markov, χρησιμοποιήθηκε το μαθηματικό πακέτο Mathematica. Παρακάτω ακολουθούν μερικές ενδεικτικές ρουτίνες.

➤ Shewhart

```
(*Shewhart 1/1*)
maxd =4;
step = 0.1;
f[x_]=N[1/(2-CDF[NormalDistribution[0,1],3-x]-CDF[NormalDistribution[0,1],3+x])];
For[i=0,i<=maxd,i=i+step,
Print[f[i]]];
```

➤ Klein (2000) 2 από 2

```
ARLin = {370.4,500,1000};
Do[
root = 0;i=1;
roots = NSolve[(1+x)/(2x^2)==ARLin[[n]],x];
While [root==0,
If[roots[[i,1,2]]>0,root=roots[[i,1,2],i++]];
L = InverseCDF[NormalDistribution[0,1],root];
Print["For ARLin=",ARLin[[n]]," UCL=",-L," LCL=",L,{n,Length[ARLin]}];
step = 0.2;
maxd =4;
L=1.7814;
Do[
pL = CDF[NormalDistribution[0,1],-L-d];
pU= CDF[NormalDistribution[0,1],-L+d];
ARLout=1/(pL+pU-(pU/(1+pU))-(pL/(1+pL)));
Print["d=",d," ARLout=",ARLout],{d,0,maxd,step}];
```

➤ Khoo (2004) 2 από 4

```

R={ {1-p,-u,0,0,-k,0,0,0,0,0,0,0,1},
{0,1,-p,0,0,0,0,-k,0,0,0,0,1},
{0,0,1,-p,0,0,0,0,0,-k,0,0,1},
{-p,0,0,1,-k,0,0,0,0,0,0,0,1},
{0,0,0,0,1,-p,0,0,-u,0,0,0,1},
{0,0,0,0,0,1,-p,0,0,0,0,-u,0,1},
{-p,-u,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1},
{0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,-p,0,1},
{0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,-p,1},
{0,0,0,0,0,-p,0,0,0,1,0,0,1},
{0,0,0,0,0,0,-p,0,0,0,1,0,1},
{0,0,-p,0,0,0,0,0,0,0,1,0,1},
{0,0,0,-p,0,0,0,0,0,0,0,1,1}};
MatrixForm[R]
MatrixForm[RowReduce[R]]
h[p_,k_,u_]=(-1-k-k p-k p^2-u-2 k u-p u-4 k p u-p^2 u-3 k p^2 u-2 k p^3 u-k p^4 u+4 k^2 p^2 u^2+8 k^2 p^3 u^2+5 k^2 p^4 u^2+2 k^2 p^5 u^2-2 k^3 p^4 u^3-2 k^3 p^5 u^3-k^3 p^6 u^3)/(-1+p+k p^3+3 k p^2 u+p^3 u+k p^3 u+k p^4 u+k p^5 u-3 k^2 p^4 u^2-3 k^2 p^5 u^2-2 k^2 p^6 u^2+k^3 p^6 u^3+k^3 p^7 u^3);
f[p_]=FullSimplify[h[1-2p,p,p]]
Solve[f[p]==370.4,p]
dist:=NormalDistribution[0,1];
UCL=Quantile[dist,1-0.022145];
LCL=-UCL;
Print["UCL: ",UCL," LCL: ",LCL]
u[δ_]=1-CDF[dist,UCL-δ];
k[δ_]=CDF[dist,LCL-δ];
p[δ_]=1-u[δ]-k[δ];
ARL[δ_]=h[p[δ],k[δ],u[δ]];
T1=Table[ARL[δ],{δ,0,3,0.2}]/MatrixForm

```

➤ Antzoulakos και Rakitzis (2008a) 3 από 4

```

dist=NormalDistribution[0,1];
c=370.4;
f[p_]=(4p^5-8p^4+7p^3-6p^2-4p-4)/(2p^3(3p^3-8p^2+11p-8));
X=NSolve[f[p]==c,p];
d=Quantile[dist,1-X[[4,1,2]]];
Do[
pu=1-CDF[dist,d-δ];
pl=CDF[dist,-d-δ];
qu=CDF[dist,d-δ]-CDF[dist,-δ];
ql=CDF[dist,-δ]-CDF[dist,-d-δ];
e1=Table[0,{11}];
e1[[1]]=1;
l1=Table[1,{11}];
ID=IdentityMatrix[11];
R=
(qu+ql pu 0 0 0 0 pl 0 0 0 0
ql 0 pu qu 0 0 pl 0 0 0 0
ql 0 0 0 0 qu pl 0 0 0 0
qu+ql 0 0 0 pu 0 pl 0 0 0 0
ql 0 0 qu 0 0 pl 0 0 0 0
qu+ql 0 0 0 0 0 pl 0 0 0 0
qu pu 0 0 0 0 0 pl ql 0 0
qu pu 0 0 0 0 0 0 0 0 ql
qu+ql pu 0 0 0 0 0 0 0 pl 0
qu pu 0 0 0 0 0 0 0 ql 0 0
qu+ql pu 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0);
a=R[[1]];
ARL[δ_]=1+a.Inverse[ID-R].l1;
Print[δ," ",N[ARL[δ]],{δ,0.3,0.2}]

```

➤ Antzoulakos και Rakitzis (2008b) 2 από 3

```

dist := NormalDistribution[0, 1];
list1 = {3.4};(* UOCL VALUE *)
list2 = {};
list3 = {370.4};(* IN-CONTROL VALUE c *)
Do[
Do[
δ = 0;(* IN-CONTROL CASE *)
L = list1[[i]];(* UOCL *)
c = list3[[j]];(* Subscript[ARL, 0] *)
pU1 = CDF[dist, L - δ] - CDF[dist, d - δ];
pU2 = CDF[dist, d - δ] + CDF[dist, d + δ] - 1;
pU3 = CDF[dist, L + δ] - CDF[dist, d + δ];
pU4 = 1 - pU1 - pU2 - pU3;
αU = {pU2, pU1, 0, 0, pU3, 0, 0};
l1 = Table[1, {7}];
ID = IdentityMatrix[7];
QU = ( { {pU2, pU1, 0, 0, pU3, 0, 0},
{0, 0, pU2, pU3, 0, 0, 0},
{pU2, 0, 0, 0, pU3, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, pU2, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, pU2, pU1},
{pU2, pU1, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, pU2, 0, 0, 0, 0} } );
ARLU[d_] = 1 + αU.Inverse[ID - QU].l1;
X = FindRoot[ARLU[d] == c, {d, 1}];
d = X[[1, 2]];
Clear[δ];
Do[
Do[
fU1 = CDF[dist, L - s] - CDF[dist, d - s];
fU2 = CDF[dist, d - s] + CDF[dist, d + s] - 1;
fU3 = CDF[dist, L + s] - CDF[dist, d + s];
fU4 = 1 - fU1 - fU2 - fU3;
fU = {fU2, fU1, 0, 0, fU3, 0, 0};
l1 = Table[1, {7}];
ID = IdentityMatrix[7];
RU = ( { {fU2, fU1, 0, 0, fU3, 0, 0},
{0, 0, fU2, fU3, 0, 0, 0},

```

```

{fU2, 0, 0, 0, fU3, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, fU2, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, fU2, fU1},
{fU2, fU1, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, fU2, 0, 0, 0, 0} } );
FU[s_] = N[1 + fU.Inverse[ID - RU].11];
Print["SHIFT  $\delta$ : ", s, " ",
"!(*SubscriptBox["ARL", "1"]): ", FU[s], {s, 0, 6, 0.2}];
Clear[d, {i, 1, Length[list1]}, {j, 1, Length[list3]}]

```

ТАНЕЦЫ И ТЕАТР

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

- Αντζουλάκος, Δ. (2006). *Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας*, Σημειώσεις παραδόσεων του μαθήματος του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας στα πλαίσια του Μ.Π.Σ. στην Εφαρμοσμένη Στατιστική, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- Δαμιανού, Χ. (1996). *Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας και Αξιοπιστία*, Σημειώσεις παραδόσεων, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα.
- Καφφές, Δ. Γ. (1996). *Στατιστικός Ποιοτικός Έλεγχος*, Σημειώσεις παραδόσεων, Πανεπιστήμιο Πειραιά, Πειραιάς.
- Ρακιτζής, Α. (2004). *Διαγράμματα Ελέγχου Τύπου Shewhart με Κανόνες Διακοπής που βασίζονται σε ροές*, Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς
- Ταγαράς, Γ. (2002). *Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας*, Εκδόσεις ΖΗΤΗ, Αθήνα.

Ξένη

- Acosta, C. (2007). Two Sets of Runs Rules for the \bar{X} Chart, *Quality Engineering*, **19**, 129-136.
- Aki, S. (1992). Waiting time problems for a sequence of discrete random variables. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **44**, 363-378.
- Antzoulakos, D. L. (1999). On waiting time problems associated with runs in Markov dependent trials, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **51**, 323-330.
- Antzoulakos, D. L. (2001). Waiting times for patterns in a sequence of multistate trials. *Journal of Applied Probability*, **38**, 508-518.
- Antzoulakos, D. & Rakitzis, A. (2008a). The Modified r Out of m Control Chart, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **37**, 396-408.
- Antzoulakos, D. & Rakitzis, A. (2008b). The Revised m -of- k Runs Rule, *Quality Engineering*, **20**, 75-81.
- Balakrishnan, N., Koutras, M. V. (2002). *Runs and Scans with Applications*. John Wiley.
- Bissell, A. F. (1978), An Attempt to Unify the Theory of Quality Control Procedures, *Bulletin in Applied Statistics*, **5**, 113-128.
- Brook, D., and Evans, D. A. (1972), An Approach to the Probability Distribution of CUSUM Run Length, *Biometrika*, **59**, 539-549.
- Champ, C. W. & Woodall, W. H. (1987). Exact Results for Shewhart Control Charts With Supplementary Runs Rules, *Technometrics*, **29**, 393-399.

- Crosby, P.B. (1979). *Quality is free*. McGraw – Hill.
- Derman, C., Gleser, L. J., and Olkin, I. (1973). *A Guide to Probability Theory and Application*. Holt, Rhinehart and Winston, New York.
- Feigenbaum, A.V. (1991). *Total Quality Control*. McGraw – Hill.
- Fu, J. C. (1996). Distribution theory of runs and patterns associated with a sequence of multi-state trials. *Statistica Sinica*, **6**, 957–974.
- Garvin, D.A. (1988). *Managing Quality*. The Free Press.
- Johnson, N. L., Kotz, S., Kemp, A. W. (1992). *Univariate Discrete Distributions*. 2nd ed. John Wiley.
- Juran, J.M., & Gryna, F.M. (1988). *Juran's Quality Control Handbook*. McGraw – Hill.
- Khoo, M. (2003). Design of Runs Rules Schemes, *Quality Engineering*, **16**, 27-43.
- Khoo, M. & Ariffin, K. (2006). Two Improved Runs Rules for the Shewhart Control Chart, *Quality Engineering*, **18**, 173-178.
- Klein, M. (2000). Two Alternatives to the Shewhart \bar{X} Control Chart, *Journal of Quality Technology*, **32**, 427-431.
- Koutras, M. V. (1997). Waiting time distributions associated with runs of fixed length in two-state Markov chains, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **49**, 123-139.
- Page, E. S. (1955). Control charts with warning lines. *Biometrika*, **42**, 243–257.
- Roberts, S. W. (1958). Properties of control chart zone tests. *Bell Sys. Tech. J.* **37**, 83–114.
- Shmueli, G. & Cohen, A. (2003). Run-Length Distribution for Control Charts with Runs and Scans Rules, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **32**, 475-495.
- Western Electric Company. (1956). *Statistical Quality Control Handbook*. Indianapolis, IN.
- Wheeler, D. J. (1983). Detecting a shift in process average: Tables of the power function for X charts. *J. Qual. Technol.* **15**, 155–170.
- Woodall, W. H., Reynolds, M. R. Jr. (1983). A discrete markov chain representation of the sequential probability ratio test. *Communications in Statistics—Sequential Analysis*. **2**, 27–44.

