ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ
ΜΠΣ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΣΤΕΛΕΧΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

Portfolio Resampling: Techniques and Applications

Ευτύχιος Κ. Τσικούρας

Επιβλέπων: Καθηγητής κ. Μαλλιαρόπουλος Δημήτριος
Επιτροπή: Καθηγητής κ. Διακογιάννης Γεώργιος
Επίκ. Καθηγητής κ. Κουρογένης Νικόλαος

Πειραιάς, Φεβρουάριος 2010

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος «Χρηματοοικονομικής Ανάλυσης για στελέχη Επιχειρήσεων» του Πανεπιστημίου Πειραιώς.

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή κ. Δημήτριο Μαλλιαρόπουλο για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε αναθέτοντάς μου την εργασία αυτή, καθώς και για την καθοδήγηση, τις συμβουλές και τη βοήθεια που στη διάρκεια συγγραφής της διπλωματικής εργασίας μου παρείχε.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές του Μ.Π.Σ. Χρηματοοικονομικής Ανάλυσης για στελέχη, για τη μεγάλη προσπάθεια που κατέβαλαν ώστε να στηρίξουν το πρόγραμμα και να το φέρουν σε υψηλό επίπεδο.

Παράλληλα, θέλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου Κωνσταντίνο και Άννα, όπως και όλη την οικογένειά μου καθώς και τους φίλους μου, οι οποίοι μου στάθηκαν ηθικά καθ’ όλη τη διάρκεια αυτής της δύσκολης διαδρομής.

Τέλος δε θα μπορούσα να ξεχάσω τον διδακτορικό φοιτητή Αντώνη Αντύπα, όπου χωρίς την αμέριστη βοήθειά του δε θα μπορούσα να φέρω εις πέρας την παρούσα εργασία.

Ευτύχιος Κ. Τσικούρας

Φεβρουάριος 2010

Περιεχόμενα

Πίνακες - Σχήματα

Κεφάλαιο 1

Κεφάλαιο 2

Κεφάλαιο 3

Κεφάλαιο 4

Κεφάλαιο 5

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Η έννοια των αποδοτικών χαρτοφυλακίων

Στη σύγχρονη εποχή, τόσο το μεγάλο πλήθος των διαθέσιμων επενδυτικών επιλογών όσο και ο μεγάλος και ποικίλος αριθμός καναλιών διάθεσής τους καθιστά τη διάρθρωση ενός χαρτοφυλακίου μία δύσκολη απόφαση. Οι παραδοσιακές μορφές επένδυσης, όπως, απλές καταθέσεις, προθεσμιακές καταθέσεις (κ.α.), συναγωνίζονται πιο σύγχρονες μορφές επένδυσης, όπως μετοχές, εταιρικά ομόλογα, repos, παράγωγα προϊόντα (forwards, futures, swaps, options), αμοιβαία κεφάλαια και άλλα. Στην εποχή που ζούμε έχει απελευθερωθεί η κίνηση κεφαλαίων προσελκύοντας το επενδυτικό κοινό σε όλες τις χρηματαγορές και κεφαλαιαγορές παγκοσμίως, διευρύνοντας έτσι ακόμα περισσότερο το πλήθος των επενδυτικών επιλογών και καθιστώντας δυσκολότερο τον προσδιορισμό τους. Περιορισμοί όπως ο χρονικός ορίζοντας επένδυσης, το διαθέσιμο επενδυτικό κεφάλαιο, το όριο ανάληψης επενδυτικού κινδύνου δε βοηθούν σε μεγάλο βαθμό στον προσδιορισμό της ποιοτικής και ποσοτικής διάρθρωσης ενός χαρτοφυλακίου.

Την ανάγκη ύπαρξης ενός θεωρητικού πλαισίου αξιολόγησης των επενδυτικών προτάσεων έρχεται να καλύψει η Θεωρία Χαρτοφυλακίου. Η επιλογή και Διαχείριση Χαρτοφυλακίου είναι ένα θέμα αρκετά σημαντικό τόσο ως μέρος της Χρηματοοικονομικής Επιστήμης όσο και ως βασικό συστατικό στοιχείο της Ποσοτικής Διαχείρισης Κεφαλαίων. Η Θεωρία Χαρτοφυλακίου αναπτύσσει μοντέλα βάσει των οποίων, ολοένα και περισσότεροι επαγγελματίες, προσδιορίζουν με το βέλτιστο δυνατό αποτέλεσμα τη διάρθρωση ενός επενδυτικού χαρτοφυλακίου. Στο σύνολό τους τα μοντέλα επιχειρούν να προσδιορίσουν εκείνα τα χαρτοφυλάκια για τα οποία ο επενδυτής λαμβάνει τη βέλτιστη απόδοση ανά μονάδα κινδύνου που αναλαμβάνει.

Αδιαμφισβήτητα πατέρας της σύγχρονης Θεωρίας Χαρτοφυλακίου είναι ο H.Markowitz, ο οποίος με το έργο του “Portfolio Selection” (1952), προσδιόρισε ποσοτικά τις έννοιες της απόδοσης και του κινδύνου και άνοιξε νέους δρόμους στην επιστήμη της ποσοτικής οικονομίας. Ίσως σημαντικότερη συμβολή του συγγραφέα αποτελεί η έννοια του αποδοτικού συνόρου. Ένα χαρτοφυλάκιο ορίζεται ως αποδοτικό εφόσον συντρέχουν οι εξής δύο προϋποθέσεις:

a. Δεν υπάρχει κανένα άλλο χαρτοφυλάκιο με την ίδια απόδοση και μικρότερη τυπική απόκλιση, και
b. Δεν υπάρχει κανένα άλλο χαρτοφυλάκιο που να έχει την ίδια τυπική απόκλιση και μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση.

Ο γεωμετρικός τόπος όλων των αποδοτικών χαρτοφυλακίων ονομάζεται μέτωπο των αποδοτικών συνδυασμών ή αποδοτικό σύνορο (efficient frontier).

Η έννοια του αποδοτικού συνόρου είναι εξαιρετικής σημασίας καθώς βάσει αυτής προσδιορίζονται τα άριστα επενδυτικά χαρτοφυλάκια και κατ’ επέκταση περιορίζονται οι επιλογές των επενδυτών. Εφόσον είναι γνωστή η καμπύλη του αποδοτικού χαρτοφυλακίου, ο προσδιορισμός ενός συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου εξαρτάται αποκλειστικά από τις προτιμήσεις του επενδυτή.

1.2 Η ιδέα του Resampling

Ο κλάδος της διαχείρισης κεφαλαίων θα εξακολουθήσει να διαδραματίζει σημαντικό ρόλο και στο μέλλον, αφού η ανάγκη για αποδόσεις θα συνεχίσει να υπάρχει. Αυτό δικαιολογεί και τις μεγάλες επενδύσεις σε χρόνο και χρήμα, τόσο των φορέων εκπαίδευσης όσο και των επιχειρήσεων, σε όλο τον κόσμο, για έρευνα πάνω σε θέματα άμεσα συσχετιζόμενα με τον κλάδο της Διαχείρισης Κεφαλαίων. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου πάσχει από τη μεγιστοποίηση σφάλματος. Επειδή ο αλγόριθμος των εισροών στο αποδοτικό όριο μετράται με σφάλμα, το optimizer τείνει να πάρει τα συγκεκριμένα περιουσιακά στοιχεία με τα πιο ελκυστικά χαρακτηριστικά (υψηλή απόδοση και χαμηλό κίνδυνο ή χαμηλή συσχέτιση) και σε μικρό ποσοστό ή να μην επιλεγούν εκείνα με τα χειρότερα χαρακτηριστικά. Αυτές οι υπερβολές είναι ακριβώς οι περιπτώσεις στις οποίες το σφάλμα εκτίμησης είναι πιθανό να είναι υψηλότερο. Ως εκ τούτου, η διαδικασία μεγιστοποιεί τις επιπτώσεις στο σφάλμα εκτίμησης για τα βάρη του χαρτοφυλακίου. Αν, για παράδειγμα, τα περιουσιακά στοιχεία έχουν υψηλή συσχέτιση, αυτά εμφανίζονται στο πρόγραμμα του τετραγωνικού αλγόριθμου να είναι παρόμοια, αλλά ένας αλγόριθμος που θα λαμβάνει σημειακές εκτιμήσεις ως εισροές και τις αντιμετωπίζει σαν να ήταν γνωστές με βεβαιότητα θα αντιδράσει σε μικροσκοπικές αλλαγές της απόδοσης. Με άλλα λόγια, ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης είναι πολύ ισχυρός για την ποιότητα των εισροών. Αυτό το πρόβλημα δεν είναι απαραίτητο να προέρχεται από τον ίδιο τον μηχανισμό και είναι συνεχής η προσπάθεια για μια βελτίωση των εισροών (inputs). Για την αντιμετώπιση του σφάλματος εκτίμησης, πρόσφατα έχει εισαχθεί μια έννοια που ονομάζεται "resampled efficiency". Αυτό το άρθρο περιγράφει τη νέα αυτή τεχνολογία, τη θέτει στο πλαίσιο των καθιερωμένων διαδικασιών και επισημαίνει ορισμένες ιδιαιτερότητες της προσέγγισης του resampled efficiency.

1.3 Περιορισμοί πρακτικής εφαρμογής

Η παρούσα μελέτη διεξήχθη υπό το σύνολο των εξής περιορισμών:

- Το τελικό δείγμα επιλέχθηκε σε μηνιαίες τιμές βάσης των δεικτών MSCI USA και MSCI Europe για την περίοδο 1/1/1999 – 29/9/2006
- Για τον υπολογισμό των αποδόσεων χρησιμοποιήθηκε ο τύπος της λογαριθμικής κεφαλαιακής απόδοσης
- Τα εξεταζόμενα επενδυτικά χαρτοφυλάκια δεν περιλαμβάνουν μηδενικού κινδύνου αξιόγραφα

1.4 Διάρθρωση εργασίας

Το αντικείμενο της συγκεκριμένης εργασίας είναι ορισμένα θεωρητικά και πρακτικά θέματα της επιλογής Χαρτοφυλακίου. Θα εξετάσουμε ζητήματα που προκύπτουν προοδευτικά στην ερευνητική αναζήτηση της επιλογής και διαχείρισης Χαρτοφυλακίου. Η εργασία αποτελείται από 5 ενότητες. Η πρώτη ενότητα είναι το παρόν κεφάλαιο στο οποίο αναφέρονται συνοπτικά οι βασικές έννοιες της Θεωρίας Χαρτοφυλακίου και περιγράφονται οι σκοποί και οι περιορισμοί της παρούσας μελέτης.

Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφεται το θεωρητικό πλαίσιο της ανάλυσης Χαρτοφυλακίων, εστιάζοντας στα βασικότερα υποδείγματα της σύγχρονης Θεωρίας Χαρτοφυλακίου.

Στη συνέχεια στο τρίτο κεφάλαιο παρατηρούμε ότι οι προσδοκίες που δημιουργεί η θεωρία δεν ικανοποιούνται στην πράξη. Όπως είναι γνωστό, οι μέσες τιμές και οι διακυμάνσεις - συνδιακυμάνσεις που εκτιμάμε από ιστορικά δεδομένα έχουν ένα σφάλμα εκτίμησης, με αποτέλεσμα τα αντίστοιχα χαρτοφυλάκια, να αποδεικνύονται μη αποδοτικά στην πράξη. Σε αυτό το κεφάλαιο αναπτύσσονται τα προβλήματα της Θεωρίας Χαρτοφυλακίου του H.Markowitz. Στη συνέχεια παραθέτονται και αναλύονται κάποιες λύσεις για τα προβλήματα, όπως το μονοπαραγωντικό υπόδειγμα, περιορισμοί στις σταθμίσεις χαρτοφυλακίου, εκτιμητές συρρίκνωσης (shrinkage estimator)

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναπτύσσουμε ένα πλαίσιο επιλογής χαρτοφυλακίου που παρουσιάστηκε από τον Richard Michaud για πρώτη φορά, το 1989. Αναπτύσσεται η έννοια του resamplimg, όπου ουσιαστικά επιχειρεί τη δημιουργία χαρτοφυλακίων χρησιμοποιώντας την παραμετρική μέθοδο επαναληπτικής δειγματοληψίας. Γίνεται, τέλος, μια εκτενής ανασκόπηση στην έννοια και στην κριτική.

Στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας παραθέτουμε την εμπειρική μελέτη που έγινε για τη σύγκριση του efficient frontier με το resampling frontier.

Αναπτύσσουμε τις μεθόδους που ακολουθήσαμε και αναλύουμε τα αποτελέσματα στα οποία καταλήξαμε.

Κεφάλαιο 2

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την επιλογή του άριστου χαρτοφυλακίου, σύμφωνα με τον Markowitz. Το υπόδειγμα υποθέτει ότι οι αποδόσεις ακολουθούν κανονική κατανομή με σταθερή διακύμανση. Ο επενδυτής επιλέγει το χαρτοφυλάκιο εκείνο όπου μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση με δεδομένη διακύμανση (κίνδυνο) και αντίστροφα, το χαρτοφυλάκιο το οποίο ελαχιστοποιεί τη διακύμανση (κίνδυνο) με δεδομένη την αναμενόμενη απόδοση. Άρα η συνάρτηση χρήματος είναι θετική ως προς την αναμενόμενη απόδοση και αρνητική ως προς τη διακύμανση (κίνδυνο) του χαρτοφυλακίου.

2.2 Υποθέσεις υποδείγματος Markowitz

Το υπόδειγμα του Markowitz βασίζεται στις υποθέσεις ότι, οι επενδυτές λαμβάνουν αποφάσεις (a) κάνοντας χρήση της αναμενόμενης απόδοσης και του κινδύνου της απόδοσης της επένδυσης (b) (i) Μεταξύ δύο μετοχών που έχουν την ίδια αναμενόμενη απόδοση προτιμάται η μετοχή με τον μικρότερο κίνδυνο και (ii) Μεταξύ δύο μετοχών που έχουν τον ίδιο κίνδυνο, προτιμάται η μετοχή με τη μεγαλύτερη απόδοση.

Η πρώτη υπόθεση μας λέει (άτυπα) πως η κατανομή των αποδόσεων είναι κανονική, δηλαδή

$$R_{it} = \frac{P_{it} + P_{it-1}}{P_{it-1}} + \frac{D_{it}}{P_{it-1}} \quad (2.1)$$

όπου:

R_{it} η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής i τη χρονική στιγμή t

$\frac{P_{it} + P_{it-1}}{P_{it-1}}$ η κεφαλαιακή απόδοση

$\frac{D_{it}}{P_{it-1}}$ η μερισματική απόδοση

P_{it} η τιμή της μετοχής i στο τέλος της περιόδου t

P_{it-1} η τιμή της μετοχής i στο τέλος της περιόδου t-1

και

D_{it} το μέρισμα της μετοχής i από t-1 έως t

Τη μελλοντική τιμή P_i και D_i δεν τη γνωρίζουμε, αλλά μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα.

Η αναμενόμενη απόδοση μιας μετοχής ισούται με το σταθμισμένο μέσο των πιθανών αποδόσεων, με σταθμά τις πιθανότητες που αντιστοιχούν σε αυτές τις αποδόσεις. Δηλαδή,

$$E(R_i) = P_i E(R_1) + P_2 E(R_2) + ... + P_n E(R_n) \quad (2.2)$$

Για να υπολογίσουμε τον κίνδυνο, αρχικά υπολογίζουμε τη διασπορά της απόδοσης, Η διασπορά μου μετρά τον κίνδυνο της απόδοσης και ισούται με τον σταθμισμένο μέσο των τετραγωνικών αποκλίσεων των πιθανών αποδόσεων από την αναμενόμενη απόδοση, με σταθμά τις πιθανότητες που αντιστοιχούν στις πιθανές αποδόσεις. Δηλαδή,

$$\sigma^2(R_i) = P_1[E(R_1) - E(R_i)]^2 + P_2[E(R_2) - E(R_i)]^2 + ... + P_n[E(R_n) - E(R_i)]^2 \quad (2.3).$$

Οι τύποι (2.2) και (2.3) γράφονται και ως εξής:

$$E(R_i) = \sum_{n=1}^{N} P_n R_n \quad (2.2) \qquad \text{και} \qquad \sigma^2(R_i) = \sum_{n=1}^{N} P_n [R_n - E(R_i)]^2 \quad (2.3)$$

Ενώ η τυπική απόκλιση προκύπτει

$$\sigma(R_i) = \sqrt{\sigma^2(R_i)} \quad (2.4)$$

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1</u>

Για την ανάλυσή μας υποθέτουμε ότι έχουμε κανονική κατανομή και έτσι υπολογίζουμε αναμενόμενες αποδόσεις και τυπική απόκλιση της αναμενόμενης απόδοσης.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε 5 παρατηρήσεις (k=5) με πιθανότητες η μετοχή i να έχει τις εξής αποδόσεις:

Πίνακας 1.1

Πιθανότητα	Απόδοση(R_i)
0,15	3%
0,2	-1%
0,3	4%
0,25	-2%
0,1	2%

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ότι η αναμενόμενη απόδοση είναι ως εξής,

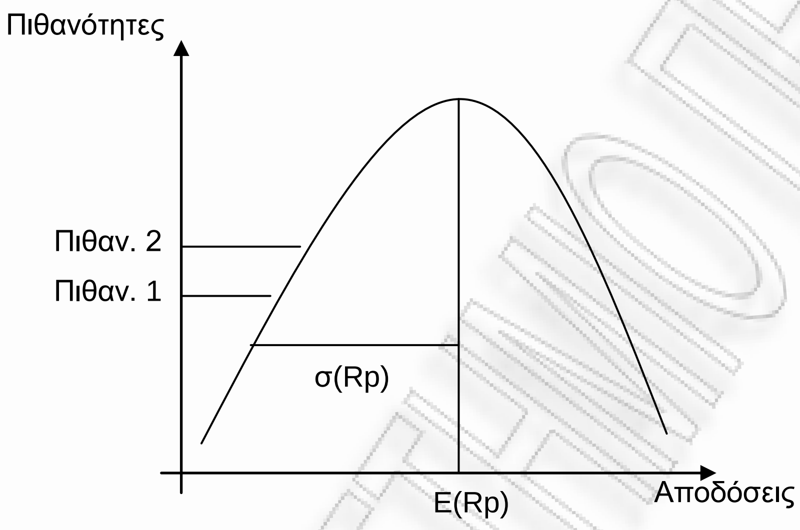
$$E(R_i) = [0.15*3\%] + [0.2*(-1\%)] + [0.3*4\%] + [0.25*(-2\%)] + [0.1*2\%] = 0.015$$

Άρα εδώ βλέπουμε ότι η μετοχή έχει αναμενόμενο κέρδος (αναμενόμενη απόδοση) 1,15%. Αυτή η απόδοση έχει μεγάλη πιθανότητα να εμφανιστεί, αλλά δεν είναι βέβαιο.

Βλέπουμε οτι έχουμε μια κατανομή πιθανοτήτων και θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι πιθανότητες αθροίζουν στη μονάδα, δηλαδή έχουμε πάρει όλες τις πιθανές περιπτώσεις. Οποιαδήποτε μεταβολή ενέχει κίνδυνο.

$$p = f(E(R), \sigma(R))$$

Σχήμα 1.1



Η διασπορά δείχνει τη μεταβολή των πιθανών αποδόσεων (κίνδυνο) γύρω από την αναμενόμενη απόδοση (ή μέση απόδοση).

Για να υπολογίσουμε τον κίνδυνο, αρχικά υπολογίζουμε τη διασπορά

$$\sigma^2(R_i) = (0.15)*(3\% - 1.15\%)^2 + (0.2)*(-1\% - 1.15\%)^2 + (0.3)*(4\% - 1.15\%)^2 +$$
$$+ (0.25)*(-2\% - 1.15\%)^2 + (0.1)*(2 - 1.15)^2 = 0.00064$$

και στη συνέχεια την τυπική απόκλιση, η οποία είναι

$$\sigma(R_i) = 0.0253$$

2.3 Περισσότερα από ένα αξιόγραφα

Τι γίνεται όμως στην περίπτωση όπου δεν έχουμε μία, αλλά περισσότερες μετοχές; Τις δύο μετοχές (ή και περισσότερες) μπορούμε να τις συγκρίνουμε με τα $E(R_i)$, $\sigma^2(R_i)$ και $\sigma(R_i)$, αν όμως έχουν διαφορετική απόδοση και διαφορετικό κίνδυνο και δεν μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα τότε χρησιμοποιούμε τον Συντελεστή Μεταβλητότητας,

$$CV = \frac{\sigma(R)}{E(R)} \quad (2.5)$$

Ο συντελεστής μεταβλητότητας μας δείχνει τον κίνδυνο ανά μονάδα αναμενόμενης απόδοσης. Όσο πιο μικρή είναι η τιμή του, τόσο το καλύτερο. Μειονέκτημά του είναι ότι δεν μπορεί να υπολογιστεί εάν η απόδοση της μετοχής είναι μηδέν.

Τώρα στην περίπτωση όπου θέλουμε να συγκρίνουμε δύο μετοχές με ίδια τυπική απόκλιση και μέσες αποδόσεις, θα πρέπει να παρατηρήσουμε πια έχει μεγαλύτερο κίνδυνο από την άλλη. Σαν μέτρο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη Συνδιακύμανση μεταξύ των αποδόσεων των δύο μετοχών.

ΕΦΑΡΜΟΓΉ 2

Συνεχίζοντας την Εφαρμογή 1 προσθέτουμε ακόμα μια μετοχή, τη μετοχή j

και έχουμε:

Πίνακας 1.2

Πιθανότητα	Απόδοση (R_i)	Απόδοση (R_j)
0,15	3%	4%
0,2	-1%	-2%
0,3	4%	3%
0,25	-2%	1%
0,1	2%	5%

Με την ίδια διαδικασία βρίσκουμε την αναμενόμενη απόδοση και την τυπική απόκλιση και για την μετοχή j. Έτσι έχουμε,

$E(R_i) = 0.015$ και $E(R_j) = 0.0185$

$\sigma(R_i) = 0.0253$ και $\sigma(R_j) = 0.02286$

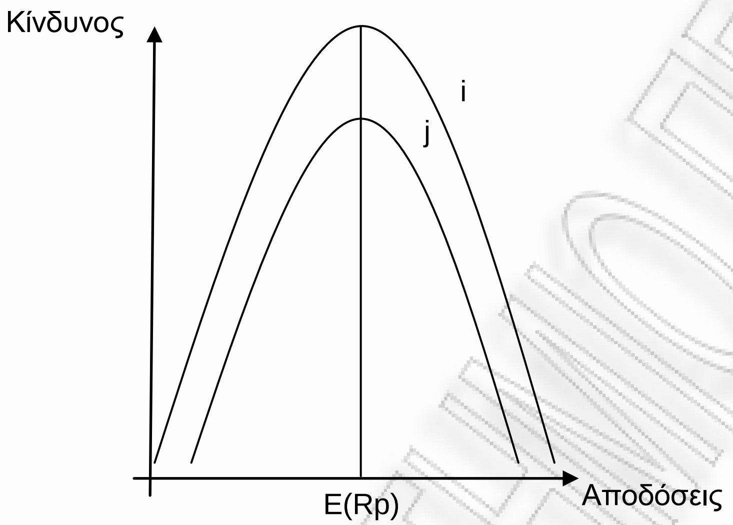
Σε αυτήν την περίπτωση είναι φανερό ότι θα επιλέξουμε τη μετοχή j γιατί έχει μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση και μικρότερο κίνδυνο.

Το πρόβλημα προκύπτει, όταν δεν είναι τόσο ξεκάθαρο ποια μετοχή θα έπρεπε να επιλεγεί, στην περίπτωση δηλαδή όπου η αναμενόμενη απόδοση της i μετοχής ήταν μεγαλύτερη, ή ο κίνδυνος της μετοχής i ήταν μικρότερος. Εδώ μπαίνει ο συντελεστής μεταβλητότητας $\frac{\sigma(R)}{E(R)}$.

Επίσης μπορούμε να αποτυπώσουμε τα παραπάνω και γραφικά.

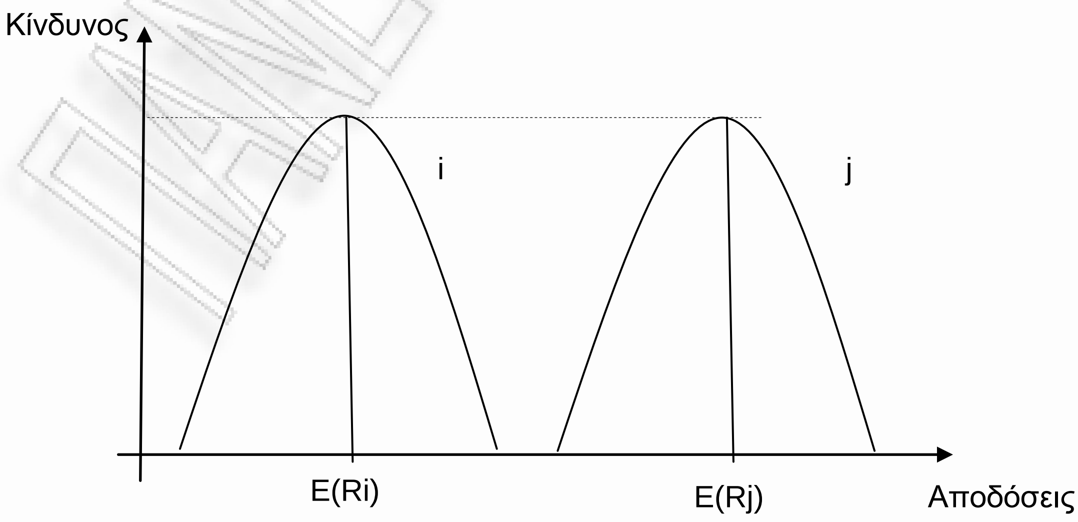
Αν έχουμε δύο μετοχές με διαφορετικές τυπικές αποκλίσεις, αλλά ίδια αναμενόμενη απόδοση όπως βλέπουμε στο Σχήμα 1.2

Σχήμα 1.2



η μετοχή i έχει την ίδια αναμενόμενη απόδοση με τη μετοχή j, αλλά η i έχει μεγαλύτερο κίνδυνο, άρα εύλογα θα επιλέγαμε τη μετοχή j.

Σχήμα 1.3



Στο Σχήμα 1.3 βλέπουμε ότι και οι δύο μετοχές, τόσο η μετοχή i, όσο και η j έχουν τον ίδιο κίνδυνο, αλλά η μετοχή j έχει μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση, άρα εδώ θα επιλέγαμε τη μετοχή j.

Η Συνδιακύμανση (Covariance – Cov) μας δείχνει την κατεύθυνση που κινούνται οι δύο «σειρές» αυτών των αποδόσεων. Θετική συνδιακύμανση δηλώνει ότι οι δύο μετοχές κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση. (για δύο λόγους μπορεί να βγει αρνητική η συνδιακύμανση: (a) Λάθος δεδομένα, (b) Πολλά μηδενικά στις παρατηρήσεις μας, δηλαδή να μην εμπορεύεται η μετοχή.

Μειονέκτημα αυτού του μέτρου είναι ότι αν και η συνδιακύμανση μας δείχνει τη διεύθυνση που κινούνται οι δύο μετοχές, δε μας δείχνει την ισχύ των αποδόσεων μεταξύ των μετοχών.

Αυτή μπορούμε να τη βρούμε με το Συντελεστή Συσχέτισης,

$$P_{ij} = \frac{Cov(R_i, R_j)}{\sigma(R_i)\sigma(R_j)} \qquad (2.6)$$

όπου οι τιμές που παίρνει κυμαίνονται από -1 έως 1

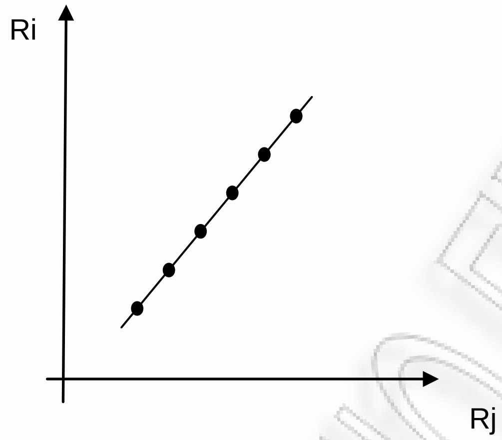
$$-1 \leq P_{ij} \leq 1$$

και αποτελεί κριτήριο για την επιλογή μιας μετοχής.

Έχουμε τις εξής πέντε περιπτώσεις:

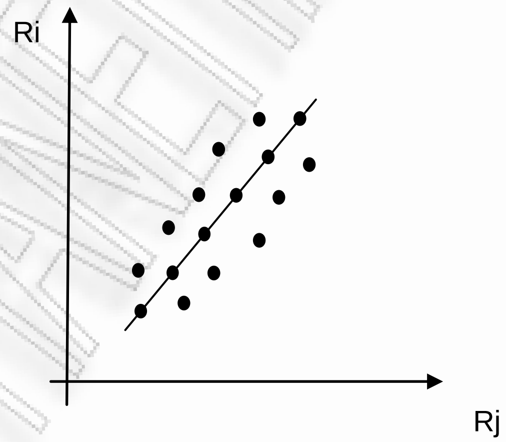
- Στην περίπτωση όπου $P_{ij} = 1$, τότε έχουμε τέλεια θετική συσχέτιση και όλα τα ζεύγη των τιμών βρίσκονται σε μια ευθεία που έχει θετική κλίση. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση όπου δύο μετοχές έχουν θετική συσχέτιση (πάνω από 90), αυτό σημαίνει ότι η μια είναι υποκατάστατο της άλλης.

Σχήμα 1.4



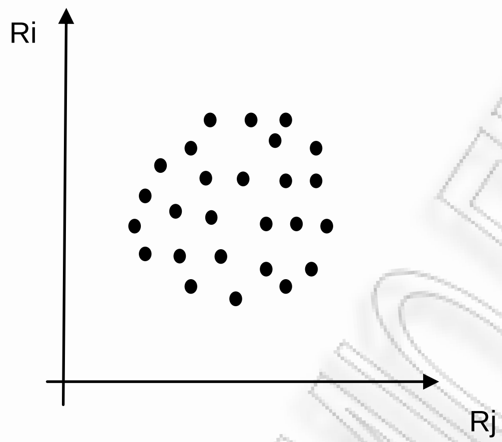
- Όταν $0 \prec P_{ij} \prec 1$, τότε έχουμε θετική ευθεία με μερικά σημεία πάνω στην ευθεία και άλλα εκτός (τέτοια εικόνα έχουν και οι μετοχές του Ελληνικού χρηματιστηρίου).

Σχήμα 1.5



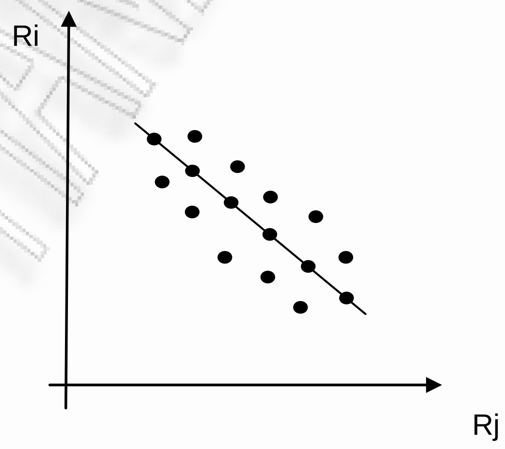
- Αν $P_{ij} = 0$ υπάρχει ανεξαρτησία αποδόσεων.

Σχήμα 1.6



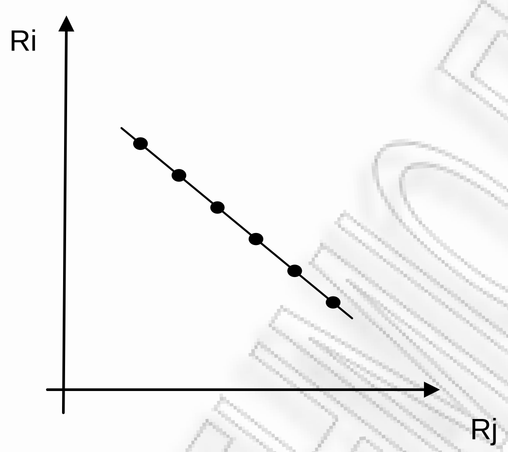
- Στην περίπτωση $-1 \prec P_{ij} \prec 0$, έχουμε αρνητική ευθεία όπου μερικά σημεία είναι πάνω στην ευθεία και άλλα εκτός.

Σχήμα 1.7



- Και τέλος όταν $P_{ij} = -1$, έχουμε τέλεια αρνητική συσχέτιση και όλα τα ζεύγη των τιμών βρίσκονται σε μια ευθεία που έχει αρνητική κλίση.

Σχήμα 1.8



Ο Συντελεστής Συσχέτισης είναι αυτός που επηρεάζει τον κίνδυνο του Χαρτοφυλακίου. Όσο πιο (μικρός είναι – ο Σ.Σ.) μικρή είναι η τιμή του, τόσο πιο μικρός είναι ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου.

Ο αριθμός των Συνδιακυμάνσεων που έχει ένα χαρτοφυλάκιο που έχει Ν μετοχές ισούται με

$$\frac{N(N-1)}{2}$$

Συμπερασματικά θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η συνδιακύμανση μας δείχνει την κατεύθυνση κίνησης απόδοσης δύο μετοχών και ο Συντελεστής Συσχέτισης δείχνει επιπλέον την ισχύ της σχέσης.

ΕΦΑΡΜΟΓΉ 3

Συνεχίζοντας την Εφαρμογή 2 με τις δύο μετοχές i και j, αναζητούμε να βρούμε τη συνδιακύμανσή τους

Πίνακας 1.3

Πιθανότητα	Απόδοση (R_i)	Απόδοση (R_j)
0,15	3%	4%
0,2	-1%	-2%
0,3	4%	3%
0,25	-2%	1%
0,1	2%	5%

$$Cov(R_i, R_j) = 0{,}15*(3\% - 1{,}15\%)*(4\% - 1{,}85\%) + 0{,}2*(-1\% - 1{,}15\%)*(-2\% - 1{,}85\%) + \\ + 0{,}3*(4\% - 1{,}15\%)*(3\% - 1{,}85\%) + 0{,}25*(-2\% - 1{,}15\%)*(1\% - 1{,}85\%) + \\ + 0{,}1*(2\% - 1{,}15\%)*(5\% - 1{,}85\%) = 0{,}00042$$

βλέπουμε ότι η συνδιακύμανση των δύο μετοχών είναι θετική, δηλαδή ότι έχουν την ίδια κατεύθυνση.

Με τον συντελεστή συσχέτισης βρίσκουμε την ισχύ μεταξύ των δύο αυτών μετοχών

$P_{ij} = \frac{Cov(R_i, R_j)}{\sigma(R_i)\sigma(R_j)} = 0{,}719$ βλέπουμε ότι είναι κοντά στη μονάδα, άρα είναι ισχυρή.

Αν υψώσουμε τον Συντελεστή Συσχέτισης στο τετράγωνο μας δίνει το R^2. Το R^2 μας δείχνει πόσο τις εκατό της μεταβλητότητας της εξαρτημένης μεταβλητής εξηγείται από την ανεξάρτητη μεταβλητή. Όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή του, τόσο πιο ισχυρή είναι και η σχέση. Πρέπει να σημειωθεί ότι $0 \le R^2 \le 1$. Επίσης, μέσα σε ένα Χαρτοφυλάκιο δε θα έπρεπε να επιλέγουμε δύο μετοχές που έχουν συντελεστή συσχέτισης πάνω από 90.

Η λογαριθμική απόδοση ορίζεται από τη σχέση,

$$R_{it} = \frac{P_{it} - P_{it-1}}{P_{it-1}} = \frac{P_{it}}{P_{it-1}} - 1 \Rightarrow R_{it} + 1 = \frac{P_{it}}{P_{it-1}} \quad (2.7)$$

και έτσι έχουμε

$$\ln(1 + R_{it}) = \ln(\frac{P_{it}}{P_{it-1}}) \quad (2.8)$$

Το πλεονέκτημα που μας δίνει η λογαριθμική απόδοση είναι ότι (a) κάνει την κατανομή συνεχή και (b) κάνει την κατανομή πιο συμμετρική.

2.4 Ανάλυση Χαρτοφυλακίων

Χαρτοφυλάκιο μετοχών είναι ένα σύνολο μετοχών που ορίζεται από τα σταθμά επένδυσης στις μετοχές του. Η απόδοση του Χαρτοφυλακίου μπορεί να υπολογιστεί με δύο τρόπους (a) Κεφαλαιακή και Μερισματική απόδοση και (b) Σταθμικό μέσο των αποδόσεων των μετοχών που το απαρτίζουν, με σταθμά τα ποσοστά επένδυσης στις μετοχές του.

Έτσι αν έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο (*P*) το οποίο απαρτίζεται από δύο μετοχές τη μετοχή 1 και τη μετοχή 2, τότε,

$$R_p = x_1 R_1 + x_2 R_2 \quad (2.9)$$

με $x_1 + x_2 = 1$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο μετοχές, τη μετοχή 1 και τη μετοχή 2 και παίρνουμε 6 παρατηρήσεις με τις εξής αποδόσεις

Πίνακας 1.4

Παρατηρήσεις	Απόδοση (R_1)	Απόδοση (R_2)	Απόδοση (R_p)
1	3%	3%	3%
2	-2%	4%	1%
3	-3%	6%	1,5%
4	2%	3%	2,5%
5	5%	5%	5%
6	-1%	2%	0,5%

Βλέπουμε ότι η μετοχή 1 έχει και αρνητικές αποδόσεις. Δημιουργώντας όμως ένα χαρτοφυλάκιο δύο μετοχών $P_{(1,2)}$, της μετοχής 1 και της μετοχής 2 με σταθμά 50% και 50% , τότε παίρνουμε τις αποδόσεις που εμφανίζονται στην τέταρτη στήλη και προκύπτουν από τον τύπο (που είδαμε πιο πάνω) $R_p = x_1 R_1 + x_2 R_2$.

Άρα με αυτόν τον τρόπο βλέπουμε τα οφέλη της διαφοροποίησης ενός χαρτοφυλακίου, έχουμε καταφέρει να κάνουμε τις αρνητικές αποδόσεις που θα είχαμε αν κατείχαμε μόνο τη μετοχή 1 θετικές και να μειώσουμε τον κίνδυνο.

Με βάση την ανάλυση που πραγματοποιήσαμε μέχρι τώρα προκύπτει ότι η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι,

$$E(R_p) = x_1 E(R_1) + x_2 E(R_2) \quad (2.10)$$

με $\quad x_1 + x_2 = 1$

Την τυπική απόκλιση την υπολογίζουμε,

$$\sigma^2(R_p) = x_1^2 \sigma^2(R_1) + x_2^2 \sigma^2(R_2) + 2 x_1 x_2 \sigma_{12} \quad (2.11)$$

Και τον συντελεστή μεταβλητότητας

$$CV_p = \frac{\sigma(R_p)}{E(R_p)} \quad (2.12)$$

Για να επιλέξουμε τα σταθμά θα πρέπει να βρούμε τις κεφαλαιακές αξίες των μετοχών, μετά τις αθροίζουμε και διαιρούμε κάθε μια από αυτές με το άθροισμά τους.

Γενικεύοντας, η αναμενόμενη απόδοση ενός χαρτοφυλακίου που περιέχει N μετοχές είναι,

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{N} x_i E(R_i) \quad (2.13)$$

και η τυπική του απόκλιση

$$\sigma^2(R_p) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma^2(R_i) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij} \quad (2.14)$$

όπου

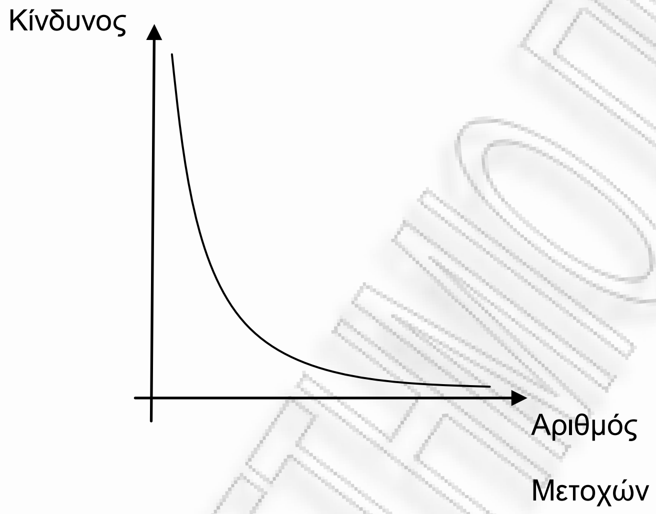
$\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma^2(R_i)$, είναι ο μη συστηματικός κίνδυνος

και

$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$, είναι ο συστηματικός κίνδυνος

Θα πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι ο αριθμός των συνδιακυμάνσεων είναι $\frac{N(N-1)}{2}$. Ένα καλά διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο θα πρέπει να έχει μη συστηματικό κίνδυνο (σχεδόν) μηδέν. Για να το πετύχουμε αυτό θα πρέπει να επιλέξουμε αρκετές μετοχές[1].

<u>Σχήμα 1.9</u>



[1] *Σήμερα χρησιμοποιούμε συνήθως 15 με 30 μετοχές, θεωρητικά με τις 30 μετοχές πετυχαίνουμε ο μη συστηματικός κίνδυνος να τείνει στο μηδέν. Παλαιότερα η θεωρία αναφερόταν σε 8 μετοχές*

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5</u>

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε και πάλι δύο μετοχές, τη μετοχή 1 και τη μετοχή 2 και παίρνουμε 6 παρατηρήσεις με τις εξής αποδόσεις:

Πίνακας 1.5

Παρατηρήσεις	Απόδοση (R_1)	Απόδοση (R_2)
1	3%	5%
2	2,5%	2%
3	2,4%	3%
4	4%	6%
5	6%	-2%
6	6,5%	9%

Για να δημιουργήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τις αναμενόμενες αποδόσεις των δύο μετοχών τη χρονική στιγμή $T+1$ (στην προκειμένη περίπτωση της εφαρμογής μας τη χρονική στιγμή 7). Η αναμενόμενη απόδοση, λοιπόν, της μετοχής 1 θα είναι $E(R_1) = 4.07\%$, ενώ η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής 2 είναι $E(R_2) = 3.83\%$.

Οι τυπικές αποκλείσεις υπολογίζονται σε $\sigma^2(R_1) = 0.00026$ και $\sigma^2(R_2) = 0.00118$, ενώ έχουν $\sigma_{1,2} = 0.00007$.

Θέλουμε να δημιουργήσουμε δύο χαρτοφυλάκια και να τα συγκρίνουμε μεταξύ τους για να δούμε πιο από τα δύο μας συμφέρει να επιλέξουμε. Έστω το χαρτοφυλάκιο P_1 με σταθμά 0,6 (ή 60%) για τη μετοχή 1 και 0,4 (ή 40%) για τη μετοχή 2. Και το χαρτοφυλάκιο P_2 με σταθμά 0,4 για τη μετοχή 1 και 0,6 για τη μετοχή 2. Με βάση τους τύπους που έχουμε δει πιο πάνω υπολογίζουμε τις αναμενόμενες αποδόσεις, την τυπική απόκλιση, καθώς επίσης και τον συντελεστή μεταβλητότητας των δύο χαρτοφυλακίων και έχουμε:

$E(R_{P1}) = 3.97\%$, $\sigma(R_{P1}) = 0.0178$ και $CV_{P1} = 0.449$

$E(R_{P2}) = 3.93\%$, $\sigma(R_{P2}) = 0.0223$και $CV_{P2} = 0.570$

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής μεταβλητότητας του χαρτοφυλακίου P_1 είναι μικρότερος από αυτόν του P_2 και γι' αυτό επιλέγουμε το πρώτο χαρτοφυλάκιο.

2.5 Συνεισφορά των μετοχών στην αναμενόμενη απόδοση και τον κίνδυνο του Χαρτοφυλακίου

Όπως είδαμε προηγουμένως η αναμενόμενη απόδοση ενός Χαρτοφυλακίου (P) που αποτελείται, για παράδειγμα, από δύο μετοχές, είναι

$$E(R_p) = x_1 E(R_1) + x_2 E(R_2)$$

και ο κίνδυνος του Χαρτοφυλακίου (P) προκύπτει,

$$\sigma^2(R_p) = x_1^2 \sigma^2(R_1) + x_2^2 \sigma^2(R_2) + 2x_1 x_2 \sigma_{12}$$

το οποίο μπορούμε να το γράψουμε και

$$\sigma^2(R_p) = x_1^2 \sigma^2(R_1) + x_2^2 \sigma^2(R_2) + x_1 x_2 \sigma_{12} + x_1 x_2 \sigma_{12}$$

$$\sigma^2(R_p) = x_1 (x_1 \sigma^2(R_1) + x_2 \sigma_{12}) + x_2 (x_2 \sigma^2(R_2) + x_1 \sigma_{12})$$

Σκοπός μας είναι να ορίσουμε τον κίνδυνο του Χαρτοφυλακίου σαν σταθμικό μέσο δύο αγκυλών. Τον πρώτο σταθμό (x_1) επί την αγκύλη $(x_1\sigma^2(R_1)+x_2\sigma_{12})$. Αυτή αποτελεί τη συνεισφορά της μετοχής (1) στον κίνδυνο του Χαρτοφυλακίου. Το ίδιο ισχύει και για τη μετοχή (2), όπου η συνεισφορά της στον κίνδυνο του Χαρτοφυλακίου είναι $x_2(x_2\sigma^2(R_2)+x_1\sigma_{12})$. Αυτό μας δείχνει πια μετοχή συνεισφέρει περισσότερο στο συνολικό κίνδυνο του Χαρτοφυλακίου. Το $(x_1\sigma^2(R_1)+x_2\sigma_{12})$ είναι ο κίνδυνος της μετοχής (1) μέσα στο Χαρτοφυλάκιο (P) και αντίστοιχα, το $(x_2\sigma^2(R_2)+x_1\sigma_{12})$ είναι ο κίνδυνος της μετοχής (2) μέσα στο Χαρτοφυλάκιο (P).

Αν, τώρα, τον κίνδυνο του Χαρτοφυλακίου (P) τον γράψουμε

$$1 = x_1\frac{x_1\sigma_1^2 + x_2\sigma_{12}}{\sigma_p^2} + x_2\frac{x_2\sigma_2^2 + x_1\sigma_{12}}{\sigma_p^2} \quad (2.15)$$

αυτό που παίρνουμε από την παραπάνω σχέση είναι ότι το κλάσμα $\frac{x_1\sigma_1^2 + x_2\sigma_{12}}{\sigma_p^2}$ αποτελεί το βήτα (Beta) της μετοχής (1) στο Χαρτοφυλάκιο και το κλάσμα $\frac{x_2\sigma_2^2 + x_1\sigma_{12}}{\sigma_p^2}$, το βήτα (Beta) της μετοχής (2) στο Χαρτοφυλάκιο.

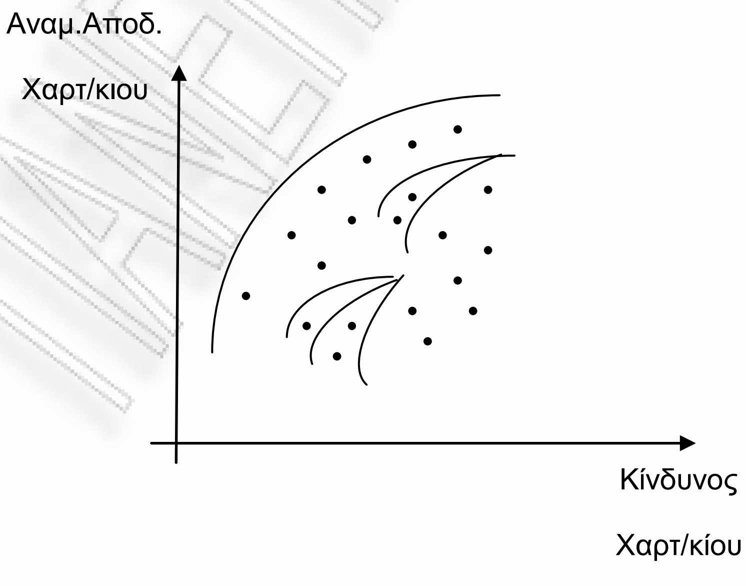
Αντιλαμβανόμαστε ότι ο σταθμικός μέσος των βήτα ισούται με τη μονάδα. Άρα το βήτα είναι σχετικό μέτρο κινδύνου, ενώ η τυπική απόκλιση είναι απόλυτο μέτρο κινδύνου. Αν το βήτα της μετοχής είναι μικρότερο της μονάδας, τότε ο κίνδυνος της μετοχής είναι μικρότερος του ολικού κινδύνου του Χαρτοφυλακίου που ανήκει και η μετοχή λέγεται αμυντική. Το αντίθετο ισχύει αν το βήτα της μετοχής είναι μεγαλύτερο της μονάδας. Τότε ο κίνδυνος της μετοχής είναι μεγαλύτερος από τον ολικό κίνδυνο του Χαρτοφυλακίου και η μετοχή χαρακτηρίζεται επιθετική. Το βήτα μετρά τον κίνδυνο της μετοχής σε σχέση με το χαρτοφυλάκιο και ονομάζεται συστηματικός κίνδυνος. Τέλος θα πρέπει να αναφέρουμε ότι ο υπολογισμός του βήτα κρύβει στατιστικές παγίδες. Αν έχουμε επενδυτή που του αρέσει ο κίνδυνος, τότε επιλέγουμε μετοχές με beta μεγαλύτερο της μονάδας και αν έχουμε επενδυτή ο οποίος αποστρέφεται τον κίνδυνο (Risk averse) επιλέγουμε μετοχές με beta μικρότερο της μονάδας.

2.6 Το Αποδοτικό Σύνολο Μετοχών

Βάση της θεωρίας χαρτοφυλακίου, στόχος του επενδυτή είναι να ελαχιστοποιήσει τον κίνδυνο και να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη απόδοση. Ένα χαρτοφυλάκιο που έχει ελάχιστο κίνδυνο και μέγιστη απόδοση, ονομάζεται αποδοτικό. Το σύνολο των χαρτοφυλακίων που έχουν ελάχιστο κίνδυνο και μέγιστη απόδοση ονομάζεται αποδοτικό σύνολο (ή σύνορο, ή μέτωπο) (efficient frontier).

Ουσιαστικά μας παρέχει σχέση μεταξύ αναμενόμενης απόδοσης και κινδύνου. Αν γνωρίζουμε το ένα μπορούμε να υπολογίσουμε και το άλλο.

Σχήμα 1.10

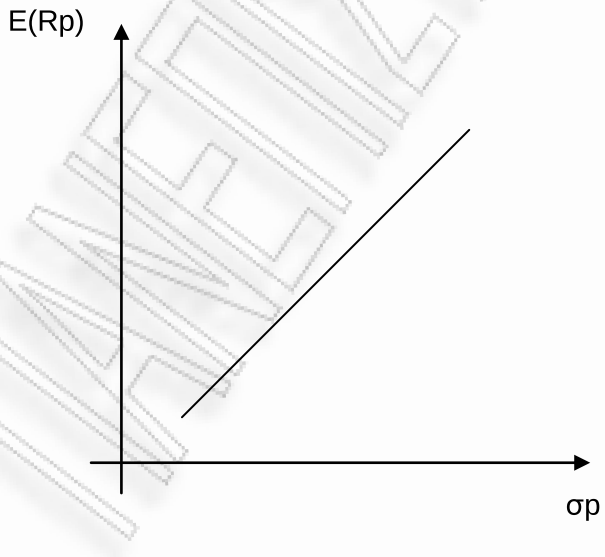


1. $E(R_p) = x_1 E(R_1) + x_2 E(R_2)$
2. $\sigma^2(R_p) = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_1\sigma_2 P_{12}$
3. όπου $x_1 + x_2 = 1$ και υποθέτουμε $x_1, x_2 \geq 0$ (υπενθυμίζουμε ότι είναι συνθήκη που προϋποθέτει το υπόδειγμα Markowitz)
4. Από τις (1) και (3) έχω $x_1 = \dfrac{E(R_p) - E(R_2)}{E(R_1) - E(R_2)}$

Με αυτόν τον τρόπο πετύχαμε να εκφράσουμε το x_1 σαν συνάρτηση της αναμενόμενης απόδοσης του χαρτοφυλακίου. Τα άριστα σταθμά εκφράζονται σαν συνάρτηση της αναμενόμενης απόδοσης του χαρτοφυλακίου.

Σύμφωνα με τον Markowitz, στην περίπτωση όπου οι δύο μετοχές βρίσκονται σε ευθεία γραμμή, δηλαδή όταν $P_{12} = +1$,

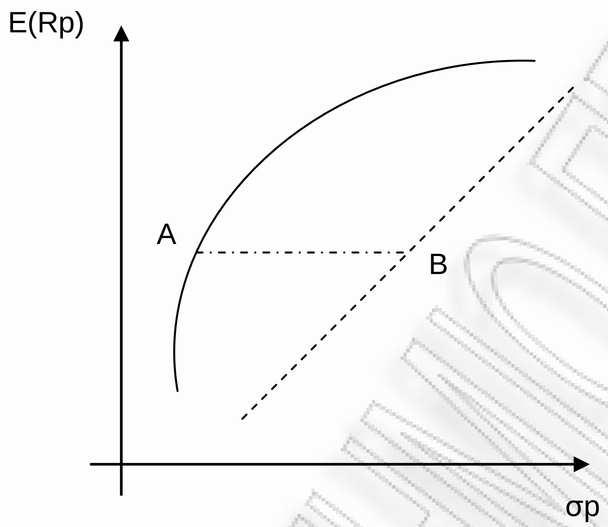
Σχήμα 1.11



δε συμφέρει να έχουμε και τις δύο μετοχές στο χαρτοφυλάκιό μας, γιατί η μία είναι υποκατάστατο της άλλης και έτσι δεν πετυχαίνουμε διαφοροποίηση στο Χαρτοφυλάκιό μας.

Αν ο Συντελεστής Συσχέτισης είναι $P_{1,2} < 1$ η ευθεία γίνεται καμπύλη

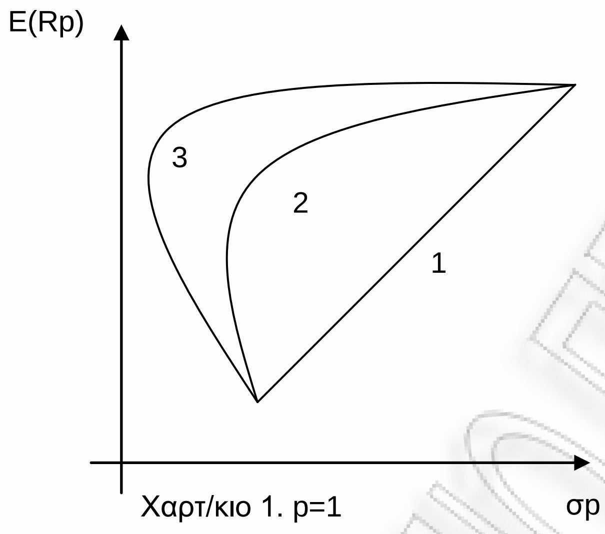
<u>Σχήμα 1.12</u>



Όπως παρατηρούμε και από το σχήμα, εδώ υπάρχει διαφοροποίηση, γιατί, σε σχέση με την ευθεία, για ίδια απόδοση έχουμε καταφέρει να έχουμε μικρότερο κίνδυνο. Είναι φανερό ότι το χαρτοφυλάκιο A είναι καλύτερο από το χαρτοφυλάκιο B, επειδή έχει την ίδια απόδοση, αλλά μικρότερο κίνδυνο.

Η σχέση αναμενόμενης απόδοσης και κινδύνου είναι καμπύλη. Όσο μειώνουμε τον Συντελεστή Συσχέτισης τόσο μικρότερο κίνδυνο πετυχαίνουμε. Αν ο Συντελεστής Συσχέτισης είναι μηδέν ($P_{1,2} = 0$) θα έχουμε ακόμα μικρότερο κίνδυνο και η καμπύλη θα είναι ακόμα πιο αριστερά.

<u>,Σχήμα 1.13</u>

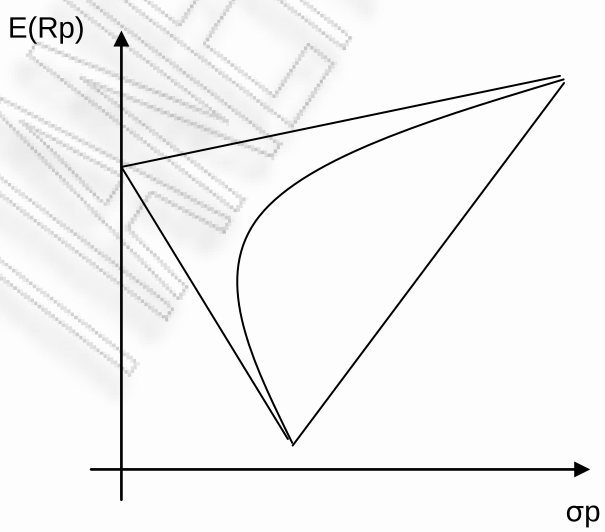


Χαρτ/κιο 1. p=1

Χαρτ/κιο 2. p<1

Στην περίπτωση που $P_{12} = -1$ τότε έχουμε δύο ευθείες, όπου και μηδενίζουμε τον κίνδυνο.

<u>Σχήμα 1.14</u>

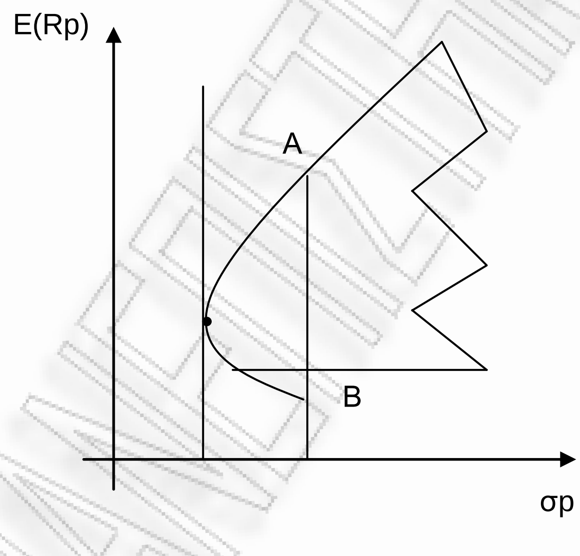


Γενικεύοντας θα πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι ουσιαστικά θέλουμε να βρούμε μια καμπύλη με χαρτοφυλάκια, τα οποία θα μεγιστοποιούν την αναμενόμενη απόδοση και θα ελαχιστοποιούν τον κίνδυνο. Η καμπύλη εξ ορισμού θα είναι η εξίσωση αναμενόμενης απόδοσης και κινδύνου (σχέση x & y). Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του κινδύνου (σ_p^2), η οποία γίνεται σύμφωνα με τις συνθήκες

1. $E(R_p) = r_p$, να έχει δηλαδή δεδομένη τιμή
2. $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$, δηλαδή τα σταθμά να έχουν άθροισμα στη μονάδα
3. $x_i \geq 0$, όπου i=1,2,3,…,N

Γραφική λύση,

<u>Σχήμα 1.15</u>



Από το σύνολο των χαρτοφυλακίων επιλέγουμε εκείνα με τη μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση και τον μικρότερο κίνδυνο. Στο σχήμα τα άριστα χαρτοφυλάκια ξεκινάνε από το σημείο όπου εφάπτεται η κάθετη γραμμή της σ_p, στην καμπύλη. Άρα θα επιλέγαμε το χαρτοφυλάκιο Α γιατί έχει τον ίδιο κίνδυνο με το χαρτοφυλάκιο Β, αλλά μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση.

2.7 Συμπεράσματα

Είδαμε, σύμφωνα με τον Markowitz, πως οι επενδυτές για να επιλέξουν το άριστο χαρτοφυλάκιο, λαμβάνουν αποφάσεις κάνοντας χρήση της αναμενόμενης απόδοσης και του κινδύνου, καθώς επίσης, μεταξύ δύο αξιογράφων που έχουν την ίδια αναμενόμενη απόδοση, επιλέγεται εκείνο με τον μικρότερο κίνδυνο. Άρα ο επενδυτής επιλέγει το χαρτοφυλάκιο το οποίο του μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση με δεδομένο κίνδυνο και το αντίστροφο. Έτσι ένα χαρτοφυλάκιο που έχει ελάχιστο κίνδυνο και μέγιστη απόδοση, ονομάζεται αποδοτικό. Το σύνολο των χαρτοφυλακίων που έχουν ελάχιστο κίνδυνο και μέγιστη απόδοση ονομάζεται αποδοτικό σύνολο (efficient frontier). Όμως η θεωρία του Markowitz έχει προβλήματα τα οποία και θα μελετήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 3

3.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε την επιλογή του άριστου χαρτοφυλακίου, σύμφωνα με τον Markowitz. Το υπόδειγμα αυτό όμως παρουσιάζει προβλήματα. Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται περιγραφή των προβλημάτων που παρουσιάζονται στην κατασκευή χαρτοφυλακίων. Ως εκ τούτου και με σκοπό την ελαχιστοποίηση του λάθους εκτίμησης της κλασικής μεθόδου αριστοποίησης χαρτοφυλακίου, αναλύω εναλλακτικές μεθόδους που έχουν προταθεί. Αρχικά γίνεται λόγος για τη χρήση παραγοντικών υποδειγμάτων και πιο συγκεκριμένα γίνεται ανάλυση του μονοπαραγοντικού υποδείγματος. Στη συνέχεια υπάρχει αναφορά σε κάποιους περιορισμούς στις σταθμίσεις του χαρτοφυλακίου για τη μείωση του λάθους εκτίμησης και κλείνοντας γίνεται ανάλυση των εκτιμητών συρρίκνωσης (shrinkage estimator).

3.2 Προβλήματα του υποδείγματος Markowitz

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2, ο H.Markowitz αναγνώρισε δύο «βασικούς σκοπούς» οι οποίοι είναι κοινοί μεταξύ των επενδυτών.

- Όλοι θέλουν υψηλές αποδόσεις, (αν και η επιθυμητή απόδοση, μπορεί να διαφέρει από επενδυτή σε επενδυτή), και
- Όλοι προτιμούν τη βεβαιότητα. Οι αποδόσεις αυτές να μην εξαρτώνται από τυχαίους - απρόβλεπτους παράγοντες.

Εισήγαγε επίσης την έννοια του μη αποδοτικού χαρτοφυλακίου, ορίζοντάς το ως αυτό για το οποίο υπάρχει ένα άλλο με τον ίδιο κίνδυνο, αλλά με μεγαλύτερη απόδοση.

Όμως το υπόδειγμα του Markowitz αν και είναι πάρα πολύ ελκυστικό, παρουσιάζει ορισμένα μειονεκτήματα - προβλήματα. Αρχικά θα μπορούσαμε να αναφέρουμε τα σημαντικά υψηλά λάθη εκτίμησης. Έτσι πολλά προγράμματα που χρησιμοποιούν το μοντέλο Markowitz βγάζουν κάποια αξιόγραφα «optimal» και τα υπόλοιπα μηδέν.

Ένα ακόμα πρόβλημα που παρατηρείται στα χαρτοφυλάκια του Markowitz είναι ότι ο πίνακας των Διακυμάνσεων - Συνδιακυμάνσεων δεν παραμένει διαχρονικά σταθερός. Τα σταθμά του χαρτοφυλακίου εξαρτώνται από αυτόν τον πίνακα, άρα αφού αυτός μεταβάλλεται, τα «optimal» σταθμά του παρελθόντος δεν είναι «optimal» για το μέλλον.

Τέλος πρόβλημα του υποδείγματος του Markowitz αποτελεί το γεγονός ότι χρειάζονται πολλές εκτιμήσεις. Έτσι σε ένα χαρτοφυλάκιο με N αξιόγραφα θα απαιτηθούν i) N αναμενόμενες αποδόσεις, ii) N διακυμάνσεις και iii) [(N(N-1)]/2 συνδιακυμάνσεις, άρα αν έχουμε για παράδειγμα N=150 αξιόγραφα θα απαιτηθούν 11.475 εκτιμήσεις.

Για την επίλυση αυτού του προβλήματος αναπτύχθηκε το υπόδειγμα του ενός δείκτη (Single - Index Model) από τον William Sharpe. Το μοντέλο αυτό μειώνει σημαντικά τις εκτιμήσεις οι οποίες χρειάζονται για τον υπολογισμό του αποτελεσματικού συνόρου.

3.3 Το Μονοπαραγοντικό υπόδειγμα

Με βάση αυτό το υπόδειγμα, η απόδοση του κάθε αξιογράφου μπορεί να παρουσιαστεί ως μια γραμμική συνάρτηση της απόδοσης ενός δείκτη.

Δηλαδή

$$R_{it} = \alpha_\iota + \beta_\iota R_{mt} + U_{it}$$

όπου,

R_{it} η απόδοση του αξιογράφου i

R_{mt} η απόδοση του χρηματιστηριακού δείκτη της αγοράς

α_i ένα τμήμα της απόδοσης του αξιογράφου i, το οποίο είναι ανεξάρτητο από την απόδοση του δείκτη

β_i συντελεστής ο οποίος μετράει την ευαισθησία της απόδοσης του αξιογράφου σε μεταβολές της απόδοσης του χρηματιστηριακού δείκτη

U_{it} τυχαίο σφάλμα

Ουσιαστικά μας λέει ότι η απόδοση της μετοχής i συνδέεται γραμμικά, αλλά όχι τέλεια με την απόδοση της αγοράς.

3.3.1 Υποθέσεις υποδείγματος

Το υπόδειγμα βασίζεται στις υποθέσεις ότι

(i) οι μεταβλητές R_m και U_i είναι τυχαίες μεταβλητές

(ii) η αναμενόμενη αξία του U_i είναι ίση με το μηδέν [$E(U_t) = 0$]

(iii) η συνδιακύμανση των R_m και U_i είναι ίση με το μηδέν [$Cov(R_m, U_i) = 0$]. Αυτό μας λέει ουσιαστικά ότι δεν υπάρχει άλλος κοινός παράγοντας που να επηρεάζει τις αποδόσεις και γι' αυτό το m είναι ο μόνος κοινός παράγοντας και το υπόδειγμα ονομάζεται μονοπαραγοντικό.

(iv) Επίσης η διακύμανση του U_i είναι $E(U_i)^2 = \sigma_{Ui}^2$ και η διακύμανση του R_m είναι $E(R_m - \overline{R}_m)^2 = \sigma_m^2$

Σύμφωνα με το υπόδειγμα έχουμε δύο αποδόσεις, η μία από το m (την αγορά δηλαδή) και ονομάζεται συστηματική και η άλλη από τη μετοχή i και ονομάζεται μη συστηματική.

Ουσιαστικά η συστηματική απόδοση είναι η $\beta_i R_m$ και η μη συστηματική απόδοση είναι η $a_i + U_i$.

Η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής i είναι τέλεια γραμμική ευθεία με την αναμενόμενη απόδοση της αγοράς m.

$$E(R_i) = a_i + \beta_i E(R_m) \text{ και } \sigma_{R_i}^2 = \beta_i^2 \sigma_{R_m}^2 + \sigma_{U_i}^2$$

Άρα ο ολικός κίνδυνος της μετοχής i εκφράζεται σαν άθροισμα δύο κινδύνων, τον $\beta_i^2 \sigma_{R_m}^2$ όπου είναι ο συστηματικός κίνδυνος και τον $\sigma_{U_i}^2$ όπου είναι ο μη συστηματικός κίνδυνος.

Το β_i είναι ένας συντελεστής ευαισθησίας. Μας δείχνει πόσο ευαίσθητη είναι η απόδοση της μετοχής i στις κινήσεις της απόδοσης του δείκτη R_m.

Ουσιαστικά η παλινδρόμηση είναι μια ευθεία γραμμή η οποία περιγράφει τη σχέση μεταξύ μεταβολών στις αποδόσεις ενός αξιογράφου και μεταβολών στις αποδόσεις ενός χρηματιστηριακού δείκτη της αγοράς. Η κλίση της γραμμής αυτής λέγεται συντελεστής βήτα και είναι ο συντελεστής της παλινδρόμησης.

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων εκτιμά τον συντελεστή της παλινδρόμησης ως εξής $\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_m)}{\sigma_m^2}$. Ο αριθμητής μας δείχνει τον κίνδυνο της μετοχής i μέσα στο χαρτοφυλάκιο m και ο παρανομαστής μας δείχνει τον ολικό κίνδυνο του χαρτοφυλακίου m. Από τη στιγμή που έχουμε βρει το β_i με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων μπορούμε να υπολογίσουμε και τον σταθερό όρο της παλινδρόμησης, $\alpha_i = E(R_i) - \beta_i E(R_m)$, $\rho_{im} = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_i \sigma_m} = \frac{\beta_i \sigma_m^2}{\sigma_i \sigma_m} = \frac{\beta_i \sigma_m}{\sigma_i}$. Ενώ ο συντελεστής βήτα της αγοράς είναι ίσος με τη μονάδα $\beta_m = \frac{\sigma_{mm}}{\sigma_m^2} = \frac{\sigma_m^2}{\sigma_m^2} = 1$. Από τα παραπάνω κατλύγουμε στο συμπέρασμα ότι το βήτα είναι σχετικό μέτρο.

Την ισχύ της παλινδρόμησης μπορούμε να τη βρούμε με το R^2. Ουσιαστικά μας δείχνει πόσο επί τις 100 της μεταβλητικότητας της απόδοσης της μετοχής εξηγείται από τη μεταβλητικότητα της απόδοσης του δείκτη. Το R^2 είναι μεταξύ του μηδέν και της μονάδας ($0 \leq R^2 \leq 1$). Αν πάρει τιμή ίση με το μηδέν αυτό μας δείχνει ότι δεν υπάρχει σχέση και όταν είναι ίσο με τη μονάδα τότε έχουμε τέλεια σχέση. Όσο οι τιμές που παίρνει είναι πιο κοντά στη μονάδα, τόσο η σχέση είναι ισχυρή, δηλαδή η ανεξάρτητη μεταβλητή εξηγεί την εξαρτημένη.

$$R^2 = \left[\frac{Cov(R_{it}, R_{mt})}{\sigma(R_{it}), \sigma(R_{mt})} \right]^2$$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τη συνδιακύμανση μεταξύ δύο μετοχών χρησιμοποιώντας το μονοπαραγοντικό υπόδειγμα καταλήγουμε στο $Cov(R_{1t}, R_{2t}) = \beta_1 \beta_2 \sigma^2_{Rm}$.

Μιλώντας για χαρτοφυλάκια, αν το χαρτοφυλάκιο είναι πολύ καλά διαφοροποιημένο , τότε ο μη συστηματικός κίνδυνος τείνει να προσεγγίσει το μηδέν, δηλαδή $\sigma^2_{U_{pt}} \approx 0$. Αν λοιπόν στην εξίσωση $R_{pt} = a_p + \beta_p R_{mt} + U_{pt}$, αν το $R^2 \to 1$, τότε σημαίνει ότι έχω καλή διαφοροποίηση, δηλαδή το $\beta_p R_{mt}$ εξηγεί το R_{pt}, άρα το U_{pt} τείνει να μηδενίζεται.

3.3.2 Στόχος του υποδείγματος

Στόχος του υποδείγματος είναι να απλοποιήσει τις εκτιμήσεις οι οποίες χρειάζονται στο υπόδειγμα του Markowitz και να επιλύσει το πρόβλημα της ανάλυσης χαρτοφυλακίου άμεσα.

Η απλοποίηση φαίνεται άμεσα από τον τρόπο υπολογισμού της αναμενόμενης απόδοσης ενός αξιογράφου i

$$E(R_i) = E(\alpha_i + \beta_i R_m + U_i)$$

$$E(R_i) = E(\alpha_i) + E(\beta_i R_m) + E(U_i)$$

$$E(R_i) = \alpha_i + \beta_i E(\overline{R}_m)$$

Η διακύμανση ενός αξιογράφου i είναι

$\sigma_i^2 = E(R_i - \overline{R}_i)^2$ και αντικαθιστώντας έχουμε,

$$\sigma_i^2 = E[(\alpha_i + \beta_i R_m + U_i) - (\alpha_i + \beta_i \overline{R}_m)]^2$$

$$\sigma_i^2 = E[\beta_i (R_m - \overline{R}_m) + U_i]^2$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 E(R_m - \overline{R}_m)^2 + 2\beta_i E[U_i (R_m - \overline{R}_m)] + E(U_i)^2$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 E(R_m - \overline{R}_m)^2 + E(U_i)^2$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{Ui}^2$$

Η συνδιακύμανση των δύο αξιογράφων i και j είναι

$\sigma_{ij} = E[(R_i - \overline{R}_i)(R_j - \overline{R}_j)]$ κάνοντας αντικατάσταση έχουμε,

$$\sigma_{ij} = E\{[(\alpha_i + \beta_i R_m + U_i) - (\alpha_i + \beta_i \overline{R}_m)][(\alpha_j + \beta_j R_m + U_j) - (\alpha_j + \beta_j \overline{R}_m)]\}$$

$$\sigma_{ij} = E\{[\beta_i (R_m - \overline{R}_m) + U_i][\beta_j (R_m - \overline{R}_m) + U_j]\}$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j E(R_m - \overline{R}_m)^2 + \beta_j E[U_i (R_m - \overline{R}_m)] + \beta_i E[U_j (R_m - \overline{R}_m)] + E(U_i U_j)$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2$$

Για να μπορέσουμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε τις 3 εξισώσεις θα πρέπει να εκτιμήσουμε τα α_i, β_i και σ_{Ui}^2 για κάθε αξιόγραφο και $E(R_m)$, σ_m^2. Άρα θα πρέπει να κάνουμε 3N+2 εκτιμήσεις. Συνεχίζοντας το παράδειγμα (της ενότητας 2.2), αν N=150, τότε θα πρέπει να κάνουμε 452 εκτιμήσεις και όχι 11.475 που χρειάζονται με το υπόδειγμα του Markowitz.

3.3.3 Επίλυση του προβλήματος άμεσα

Η αναμενόμενη απόδοση ενός χαρτοφυλακίου είναι

$$E(R_p) = \alpha_p + \beta_p E(R_m), \text{ όπου } \alpha_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \alpha_i \text{ και } \beta_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i$$

Ο κίνδυνος ενός χαρτοφυλακίου είναι

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_{Ui}^2, \text{ όπου } \beta_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i$$

Όταν ο αριθμός των αξιογράφων σε ένα χαρτοφυλάκιο αυξάνεται η σπουδαιότητα του κινδύνου των καταλοίπων μειώνεται. Υποθέτουμε ότι $w_i = 1/N \quad \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_{Ui}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sigma_{Ui}^2 = \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{N} \sigma_{Ui}^2\right]$. Καθώς ο αριθμός των αξιογράφων (N) αυξάνεται, ο μέσος κίνδυνος των καταλοίπων μειώνεται και τείνει να γίνει μηδέν.

3.3.4 Χρήσεις του υποδείγματος

Το υπόδειγμα χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του αποδοτικού συνόλου αφού $\sigma_{R_{it}}^2 = \beta_i^2 \sigma_{R_{mt}}^2 + \sigma_{U_{it}}^2$ και $Cov(R_{it}, R_{jt}) = \beta_i \beta_j \sigma_{R_m}^2$.

Επίσης μπορεί να μας χρησιμεύσει για να ελέγξουμε αν ένα χαρτοφυλάκιο είναι καλά διαφοροποιημένο ή όχι. Αυτό γίνεται υπολογίζοντας τον μη συστηματικό κίνδυνο του χαρτοφυλακίου και ελέγχουμε το μέγεθος του ως προς τον ολικό κίνδυνο του χαρτοφυλακίου. Όσο πιο μικρός είναι ο μη συστηματικός κίνδυνος ως προς τον ολικό, τόσο πιο καλά διαφοροποιημένο είναι το χαρτοφυλάκιο.

3.4 Περιορισμοί στις σταθμίσεις χαρτοφυλακίου

Τα χαρτοφυλάκια χωρίς περιορισμούς είναι πολύ πιο ευαίσθητα στο σφάλμα εκτίμησης απ' ότι τα χαρτοφυλάκια με περιορισμούς αρνητικών σταθμίσεων. Η βελτιστοποίηση ενός χαρτοφυλακίου σε συνθήκες αβεβαιότητας και χωρίς τους κατάλληλους περιορισμούς, οδηγεί σε μεγιστοποίηση του σφάλματος.

Μία ακόμα μέθοδος που αποσκοπεί στη μείωση του σταθμικού λάθους στην κατασκευή χαρτοφυλακίου είναι η χρήση περιορισμών στις σταθμίσεις του χαρτοφυλακίου. Είναι μια μέθοδος πολύ διαδεδομένη στην πράξη και συνήθως η επιβολή περιορισμών γίνεται αυθαίρετα. Οι πιο συνήθεις περιορισμοί είναι περιορισμοί short sales (δηλαδή όλες οι σταθμίσεις να είναι θετικές), περιορισμοί στο ύψος της μόχλευσης και περιορισμοί στο μέγιστο ύψος των ατομικών σταθμίσεων (δηλαδή, καμία στάθμιση να μην ξεπερνά μία τιμή x%).

3.5 Εκτιμητές Συρρίκνωσης

Ουσιαστικά αυτό που λέει η χρήση των εκτιμητών συρρίκνωσης (shrinkage estimator) είναι ότι για τρεις ή και περισσότερες τυχαίες μεταβλητές, το διάνυσμα των πραγματικών μέτρων τους μπορεί να εκτιμηθεί σαν ένας γραμμικός συνδυασμός των δειγματικών τους μέσων $\hat{\mu}$ και μιας κοινής σταθεράς μ_0, η οποία είναι ο διαστρωματικός μέσος όλων των μεταβλητών (grand mean). Η ιδέα αυτή οφείλεται στους James and Stein (1961) και ουσιαστικά μας λένε ότι $\mu_s = \delta\mu_0 + (1-\delta)\hat{\mu}$, όπου το δ είναι μεταξύ μηδέν και ένα ($0 < \delta < 1$). Ο εκτιμητής shrinkage ουσιαστικά συρρικνώνει τους μέσους προς μια κοινή σταθερά μ_0. Κατά συνέπεια μειώνει τα ακραία λάθη εκτίμησης των διαστρωματικών μέσων.

Η τιμή του δ εξαρτάται θετικά από τον αριθμό των αξιογράφων στο χαρτοφυλάκιο και αρνητικά από το μέγεθος του δείγματος και επίσης αρνητικά από τη διασπορά των μέσων γύρο από το μ_0.

Η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί τόσο στην εκτίμηση του πίνακα συνδιακυμάνσεων Σ, $\Sigma_s = \delta\Sigma_0 + (1-\delta)\hat{\Sigma}$. Καθώς επίσης και στα σταθμά του χαρτοφυλακίου, $w_s = \delta w_0 + (1-\delta)\hat{w}$. Αν N ο αριθμός των αξιογράφων στο χαρτοφυλάκιο, έχουμε $w_0 = \frac{1}{N}$. Θα πρέπει να αναφέρομαι, κλείνοντας, ότι κάθε μορφή εκτίμησης συρρίκνωσης (shrinkage) περιλαμβάνει μια αυθαίρετη επιλογή της σταθεράς στόχου.

3.6 Επίλογος

Με βάση αυτές τις πληροφορίες δεν είναι λίγοι αυτοί που πιστεύουν ότι η εύρεση του βέλτιστου χαρτοφυλακίου στα πλαίσια του υποδείγματος Markowitz είναι στην πραγματικότητα μια μεγιστοποίηση του σφάλματος εκτίμησης. Αυτό γιατί, το πλαίσιο προσδιορισμού της βέλτιστης λύσης, θεωρεί ότι οι μέσες τιμές και οι συνδιακυμάνσεις αντιστοιχούν στην πραγματική κατανομή πιθανότητας των αποδόσεων. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα αξιόγραφα με «επιθυμητά» χαρακτηριστικά τείνουν να λαμβάνουν μια, δυσανάλογα, θετική στάθμιση στο χαρτοφυλάκιο.

Επίσης το υπόδειγμα υπερεκτιμά σταθερά τις αναμενόμενες αποδόσεις σε σχέση με τον κίνδυνο. Εδώ η επικινδυνότητα αυξάνεται όταν αυξάνεται η ανοχή απέναντι στον κίνδυνο. Σε αυτήν την περίπτωση, οι επενδυτές αυξάνουν το συνολικό κίνδυνο του χαρτοφυλακίου τους, όχι μόνο λόγο του αυξανόμενου βαθμού επικινδυνότητας των μετοχών, αλλά και του κινδύνου που εισάγει το σφάλμα εκτίμησης. (οι Frost και Savarino και οι Jagannathan και Ma, έδειξαν ότι θέτοντας τους λάθος περιορισμούς μειώνεται ο κίνδυνος και αυξάνεται η αποδοτικότητα ενός χαρτοφυλακίου. Ο περιορισμός των μη αρνητικών σταθμίσεων είναι ισοδύναμος με τη μείωση της συνδιακύμανσης μεταξύ των αξιογράφων.) Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι τα χαρτοφυλάκια χωρίς περιορισμούς είναι πολύ πιο ευαίσθητα στο σφάλμα εκτίμησης απ' ότι τα χαρτοφυλάκια με περιορισμούς αρνητικών σταθμίσεων.

Όπως είδαμε οι καθιερωμένες μέθοδοι επιλογής χαρτοφυλακίου οδηγούν στην επιλογή μόνο βέλτιστων χαρτοφυλακίων, όπου τελικά δε μεγιστοποιούν τη χρησιμότητα του επενδυτή. Αυτή είναι ίσως και η σημαντικότερη συνέπεια του σφάλματος εκτίμησης. Είναι γεγονός πως ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης επιλέγει αξιόγραφα με ελκυστικά χαρακτηριστικά που έχουν συχνά μεγάλο σφάλμα εκτίμησης. Αυτό συνεπάγεται την κατανομή του διαθέσιμου κεφαλαίου σε ένα περιορισμένο σύνολο αξιογράφων, με αποτέλεσμα τα χαρτοφυλάκια που δημιουργούνται να μην εκμεταλλεύονται το φαινόμενο της διαφοροποίησης στο έπακρο, άρα να έχουν αυξημένο κίνδυνο σχετικά με την απόδοση που μπορεί να πετύχουν.

Η ύπαρξη του σφάλματος εκτίμησης είναι καθοριστικής σημασίας στο πρόβλημα της επιλογής χαρτοφυλακίου. Έχοντας ως βάση προσδιορισμού του βέλτιστου χαρτοφυλακίου το υπόδειγμα του Markowitz, παρουσιάζεται η ανάγκη διαμόρφωσης σωστών εκτιμήσεων για τις βασικές παραμέτρους. Αυτό το εγχείρημα, όμως, έχει αποδειχθεί πολύ δύσκολο. Ειδικά όσον αφορά τις αναμενόμενες αποδόσεις, η δυσκολία είναι τεράστια. Το επόμενο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο σε ένα υπόδειγμα που έχει προταθεί με σκοπό τον περιορισμό των προβλημάτων που μέχρι τώρα αναφέρθηκαν.

Κεφάλαιο 4

Η ιδέα του Resampling

4.1 Εισαγωγή

Η δειγματοληψία Χαρτοφυλακίου επιτρέπει σε έναν αναλυτή να απεικονίσει το σφάλμα εκτίμησης στις παραδοσιακές μεθόδους βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου. Οι εκτιμώμενες παράμετροι που χρησιμοποιούνται στα προβλήματα κατανομής περιουσιακών στοιχείων (συνήθως σημειακές εκτιμήσεις των μέσων, των διακυμάνσεων και των συσχετίσεων) υπολογίζονται χρησιμοποιώντας μόνο μία πιθανή πραγματοποίηση της ιστορικής απόδοσης. Ακόμη και αν υποτεθεί στασιμότητα (σταθερός μέσος και συνδιακυμάνσεις μη εξαρτώμενες από τον χρόνο), μόνο σε πολύ μεγάλα δείγματα μπορούν οι σημειακές εκτιμήσεις, για τις εισροές του κινδύνου και της απόδοσης, να είναι ίσες με την πραγματική κατανομή των παραμέτρων. Το αποτέλεσμα που προκύπτει από το σφάλμα εκτίμησης στα άριστα (optimal) χαρτοφυλάκια μπορεί να συλληφθεί από τη διαδικασία portfolio resampling.

Ας υποθέσουμε ότι εκτιμούμε ταυτόχρονα τον πίνακα διακύμανσης - συνδιακύμανσης $\hat{\Omega}_0$ και το διάνυσμα των αποδόσεων $\hat{\mu}_0$, χρησιμοποιώντας T παρατηρήσεις, όπου Ω είναι ένας $k*k$ πίνακας συνδιακύμανσης των αναμενόμενων αποδόσεων και μ είναι ένα $k*1$ διάνυσμα των μέσων αναμενόμενων αποδόσεων. Τα σημεία των εκτιμήσεων είναι τυχαίες μεταβλητές (επειδή υπολογίζονται από τυχαίες αποδόσεις), αυτό είναι, ένα άλλο δείγμα τυχαίων μεταβλητών από την ίδια την κατανομή που θα οδηγήσει σε διαφορετικές εκτιμήσεις. Η κατάσταση αυτή ονομάζεται δειγματοληπτικό σφάλμα.

Πώς μπορούμε να συλλάβουμε την τυχαιότητα των εισροών (inputs); Μια απάντηση είναι το portfolio resampling, το οποίο σχεδιάζεται επανειλημμένα από την κατανομή της απόδοσης. Μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα στατιστικά ισοδύναμο δείγμα με τις παρατηρήσεις T (αρχικού μήκους δεδομένων), δημιουργώντας έτσι ένα νέο σύνολο δεδομένων για την εκτίμηση των παραμέτρων. Είτε σχεδιάζοντας T φορές χωρίς αντικατάσταση από την εμπειρική κατανομή (μία μη παραμετρική μέθοδο που είναι γνωστή ως bootstrapping) ή κάνοντας δειγματοληψία από μια πολυμεταβλητή κανονική κατανομή (μία παραμετρική μέθοδος που ονομάζεται προσομοίωση Monte Carlo). Και οι δύο μέθοδοι παρέχουν σχεδόν τα ίδια αποτελέσματα.

4.2 Μέθοδοι Επαναληπτικής Δειγματοληψίας

Όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη ενότητα, δύο είναι οι μέθοδοι επαναληπτικής δειγματοληψίας, η προσομοίωση Monte Carlo και μέθοδος Bootstrap. Αυτές οι μέθοδοι είναι πολύ χρήσιμες αφού επιτρέπουν την «κατασκευή» δεδομένων από τα είδη υπάρχοντα.

4.2.1 Προσομοίωση Monte Carlo

Είναι μία παραμετρική μέθοδος που χρησιμοποιείται για την προσομείωση των διαφόρων πηγών αβεβαιότητας που επηρεάζουν την τιμή μιας επένδυσης. Ουσιαστικά μπορούμε να προσεγγίσουμε κάποια τιμή της υπό μελέτης μεταβλητής που επηρεάζεται από την τυχαία μεταβλητή. Δημιουργούμε λοιπόν μια εκτίμηση για τη μέση τιμή και μια για τη διακύμανση ($\overline{\mu}, \overline{\sigma}$) της τυχαίας μεταβλητής, που ακολουθεί κανονική κατανομή και στη συνέχεια μπορούμε να πάρουμε N τυχαίες μεταβλητές από αυτήν την κατανομή. Δημιουργούμε ουσιαστικά N πιθανά σενάρια, ώστε εν τέλει να πάρουμε μια προσέγγιση για την εξέλιξη του φαινομένου.

4.2.2 Μέθοδος Bootstrap

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται όταν τα στοιχεία για την κατανομή που ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή δεν είναι αρκετά. Έτσι αν έχουμε ένα δείγμα N στοιχείων μπορούμε να δημιουργήσουμε όσα δεδομένα N_x στοιχείων θέλουμε, τέτοια ώστε $N_x < N$. Κάθε φορά παίρνουμε στοιχεία από το αρχικό σύνολο N με τυχαίο τρόπο. Ουσιαστικά χρησιμοποιούμε τις τιμές των τυχαίων μεταβλητών που έχουμε είδη παρατηρήσει και δημιουργούμε σύνολα δεδομένων που έχουν την ίδια εμπειρική κατανομή πιθανότητας με το αρχικό σύνολο.

4.3 Οπτικοποιώντας το Σφάλμα Εκτίμησης

Με την διαδικασία επαναληπτικής δειγματοληψίας n φορές, έχουμε n νέες σειρές βελτιστοποίησης των αποδόσεων ($\hat{\Omega}_1, \hat{\mu}_1$ σε $\hat{\Omega}_n, \hat{\mu}_n$). Για κάθε μία από αυτές τις εισροές (inputs), μπορούμε να υπολογίσουμε τώρα ένα νέο σύνορο που εκτείνεται από το χαρτοφυλάκιο με την ελάχιστη διακύμανση στο χαρτοφυλάκιο με τη μέγιστη απόδοση. Υπολογίζουμε m χαρτοφυλάκια κατά μήκος του συνόρου και σώζουμε τις αντίστοιχες διανυσματικές κατανομές, $w_{11},...,w_{1m}$ σε $w_{n1},...,w_{nm}$. Αξιολογώντας όλα τα $n * m$ χαρτοφυλάκια με τις αρχικές εισροές βελτιστοποίησης $\left(\hat{\Omega}_1, \hat{\mu}_1\right)$ θα ωθήσουμε όλα τα χαρτοφυλάκια να σχεδιαστούν κάτω από το αρχικό αποτελεσματικό (αποδοτικό) σύνορο. Ο λόγος είναι ότι κανένα διανυσματικό βάρος που είναι βέλτιστο (optimal) για το $\hat{\Omega}_1$ και $\hat{\mu}_1$ (με $i = 1,...,n$) δεν μπορεί να είναι βέλτιστο για $\hat{\Omega}_0$, $\hat{\mu}_0$. Ως εκ τούτου, επειδή τα βάρη προέρχονται από τα δεδομένα (data) που περιέχουν σφάλμα εκτίμησης, όλα τα βάρη του χαρτοφυλακίου οδηγούν στην κατασκευή χαρτοφυλακίων κάτω από το αποτελεσματικό σύνορο. Το σφάλμα εκτίμησης στα inputs μετατρέπεται σε αβεβαιότητα σχετικά με τη βέλτιστη διανυσματική κατανομή.

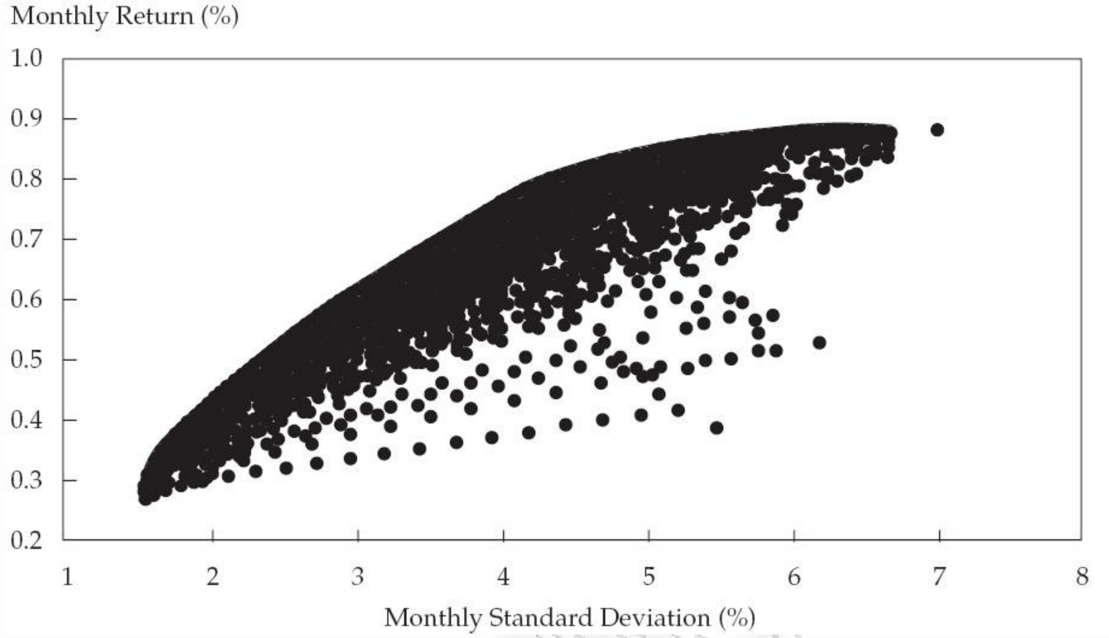
Οι μηχανικές του χαρτοφυλακίου resampling φαίνονται καλύτερα με ένα πρακτικό παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δεδομένα, όπου εκτελούμε μια τυπική βελτιστοποίηση μέσου - διακύμανση (δηλαδή, την ελαχιστοποίηση του κινδύνου του χαρτοφυλακίου που υπόκεινται σε περιορισμό επιστροφής) στα οποία οι αποδόσεις ποικίλλουν από την απόδοση του χαρτοφυλακίου με ελάχιστη διακύμανση στην απόδοση του χαρτοφυλακίου με μέγιστη διακύμανση.

Με αυτή τη διαδικασία ορισμένα περιουσιακά στοιχεία δεν μπαίνουν καν στη λύση. Επίσης, μικρές αλλαγές στην αποστροφή του κινδύνου μπορεί να οδηγήσουν σε πολύ διαφορετικά χαρτοφυλάκια. Λόγω της αβεβαιότητας σχετικά με το βαθμό της αποστροφής κινδύνου του επενδυτή, το χαρακτηριστικό αυτό της παραδοσιακής μεθόδου βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου είναι μη ελκυστικό.

Ας υποθέσουμε, αντίθετα, ότι θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο του resampling. Σε αυτή την περίπτωση, κάθε νέο διανυσματικό βάρος (που υπολογίζεται από resampled εισροές) μπορεί να ερμηνευθεί ως ένα σύνολο από στατιστικά ισοδύναμα βάρη. Ωστόσο, μόνο το αρχικό σύνολο των βαρών, w_0, είναι βέλτιστο για το αρχικό σύνολο των εισροών $(\hat{\Omega}_0, \hat{\mu}_0)$. Όλα τα άλλα χαρτοφυλάκια πρέπει να χαραχτούν (plot) κάτω από το αποτελεσματικό σύνορο.

Οι εκτιμήσεις των βαρών είναι το άμεσο αποτέλεσμα του δειγματοληπτικού σφάλματος. Στο Σχήμα 4.1 βλέπουμε το αποτελεσματικό σύνορο και τα resampled χαρτοφυλάκια που προέκυψαν από τη χρήση της τεχνικής που περιγράφεται ως resampling. Οι κύκλοι αντιπροσωπεύουν τα resampled χαρτοφυλάκια, και το αποτελεσματικό σύνορο μπορεί να θεωρηθεί ως «περίβλημά» τους. Η περιοχή διασποράς προκύπτει λόγω της μεγάλης διακύμανσης στα ισοδύναμα στατιστικά διανυσματικά βάρη.

Σχήμα 4.1. Αποδοτικό όριο και Χαρτοφυλάκια Resampling



Αύξηση του αριθμού των απεικονίσεων, n, ωθούν τα σημεία των δεδομένων πιο κοντά στο αρχικό σύνορο καθώς η διασπορά στα δεδομένα (inputs) γίνεται μικρότερη. Το αποτέλεσμα είναι ισοδύναμο με τη μείωση (έως και κατάργηση) του σφάλματος δειγματοληψίας. Αλλά η ανάλυση δε μας λέει που βρίσκεται το νέο σύνορο - όπου οδηγεί στην επόμενη ενότητα.

4.4 Resampled Efficiency.

Στην προηγούμενη ενότητα αποδείχθηκε ότι η μέθοδος που χρησιμοποιεί resampled απόδοση πρόκειται να ασχοληθεί με το σφάλμα εκτίμησης. Χαρτοφυλάκια κατά μήκος του λεγόμενου resampled συνόρου ορίζονται ως ". . . οι μέσοι όροι του βαθμού που συνδέονται με τη μέση διακύμανση του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου" (Michaud 1998). Χαρτοφυλάκια που φέρουν Rank 1 είναι χαρτοφυλάκια με ελάχιστη διακύμανση, χαρτοφυλάκια που φέρουν Rank m είναι χαρτοφυλάκια με μέγιστη απόδοση. Κάθε άλλο χαρτοφυλάκιο παίρνει ένα rank ανάμεσα, το οποίο εξαρτάται από τις τάξεις της αναμενόμενης απόδοσης. Η απόσταση μεταξύ της ελάχιστης διασποράς και της μέγιστης απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι μοιρασμένη εξίσου.

Η κατανομή διατηρεί ένα σημαντικό χαρακτηριστικό του χαρτοφυλακίου: Τα βάρη αθροίζουν στη μονάδα (ακόμα και στην περίπτωση των περιορισμών). Αυτό το χαρακτηριστικό είναι πιθανόν η κύρια πρακτική αιτιολόγηση για αυτή τη διαδικασία.

Το resampled βάρος για ένα χαρτοφυλάκιο m τάξης (m ο αριθμός χαρτοφυλακίων κατά μήκος του συνόρου), δίνεται από τον τύπο

$$\overline{w}_m^{resampled} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_{im'} \quad (4.1)$$

όπου w_{im} δηλώνει το $k*1$ διάνυσμα του m οστών χαρτοφυλακίου κατά μήκος των ορίων για τα i οστά resampling.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε εκτίμηση 100 αποτελεσματικά σύνορα. Έτσι, έχουμε επίσης 100 χαρτοφυλάκια για κάθε βαθμίδα. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το μέσο βάρος για κάθε περιουσιακό στοιχείο σε όλα τα 100 χαρτοφυλάκια. Επιπλέον, μπορούμε να μετρήσουμε τη διασπορά στα βάρη του χαρτοφυλακίου για να εκτιμήσουμε το πώς η αβεβαιότητα στις εισροές τροφοδοτείται με τη διασπορά στα αποτελέσματα.

Η διαδικασία μπορεί να συνοψιστεί ως εξής:

Βήμα 1^o:

Εκτίμηση του πίνακα διακύμανσης - συνδιακύμανσης και το μέσο διάνυσμα των ιστορικών εισροών. (Ως εναλλακτική λύση, οι εισροές θα μπορούσε να είναι προκαθορισμένες.)

Βήμα 2^o:

Ανασχεδιάζουμε από τις εισροές (δημιουργήθηκε στο Βήμα 1) λαμβάνοντας T δείγματα (draws) από την κατανομή των εισροών. Ο αριθμός των δειγμάτων είναι συνάρτηση του βαθμού εξάλειψης της αβεβαιότητας που επιθυμούμε. Δηλαδή όσο περισσότερα draws παίρνουμε τόσα περισσότερα διαφοροποιημένα σενάρια ενσωματώνουμε στην ανάλυση. Υπολογίζουμε ένα νέο πίνακα διακύμανσης - συνδιακύμανσης από τις σειρές του δείγματος. Σφάλμα εκτίμησης θα οδηγήσει σε πίνακες που είναι διαφορετικοί από εκείνους που λαμβάνονται στο Βήμα 1.

Βήμα 3^{o}:

Υπολογίζουμε το αποτελεσματικό σύνορο για τις εισροές που παράγονται στο Βήμα 2. Αποθηκεύουμε τα βάρη του βέλτιστου χαρτοφυλακίου για m ισομερώς κατανεμημένα σημεία αποδόσεων κατά μήκος του συνόρου.

Βήμα 4^{o}:

Αφού επαναλάβουμε τα βήματα 2 και 3 πολλές φορές, υπολογίζουμε τα μέσα βάρη του χαρτοφυλακίου για κάθε σημείο απόδοσης. Εκτιμούμε το σύνορο του μέσου όρου των χαρτοφυλακίων με τον πίνακα διακύμανσης - συνδιακύμανσης από το Βήμα 1 για να «χαράξουμε» (plot) το resampled σύνορο.

Αντί να προσθέσουμε χαρτοφυλάκια που μοιράζονται την ίδια σειρά (ταξινόμηση) (rank), θα μπορούσαμε να προσθέσουμε χαρτοφυλάκια που δείχνουν την ίδια αντιστάθμιση κινδύνου και απόδοσης. Μπορεί να γίνει εύκολα με τη μεγιστοποίηση του

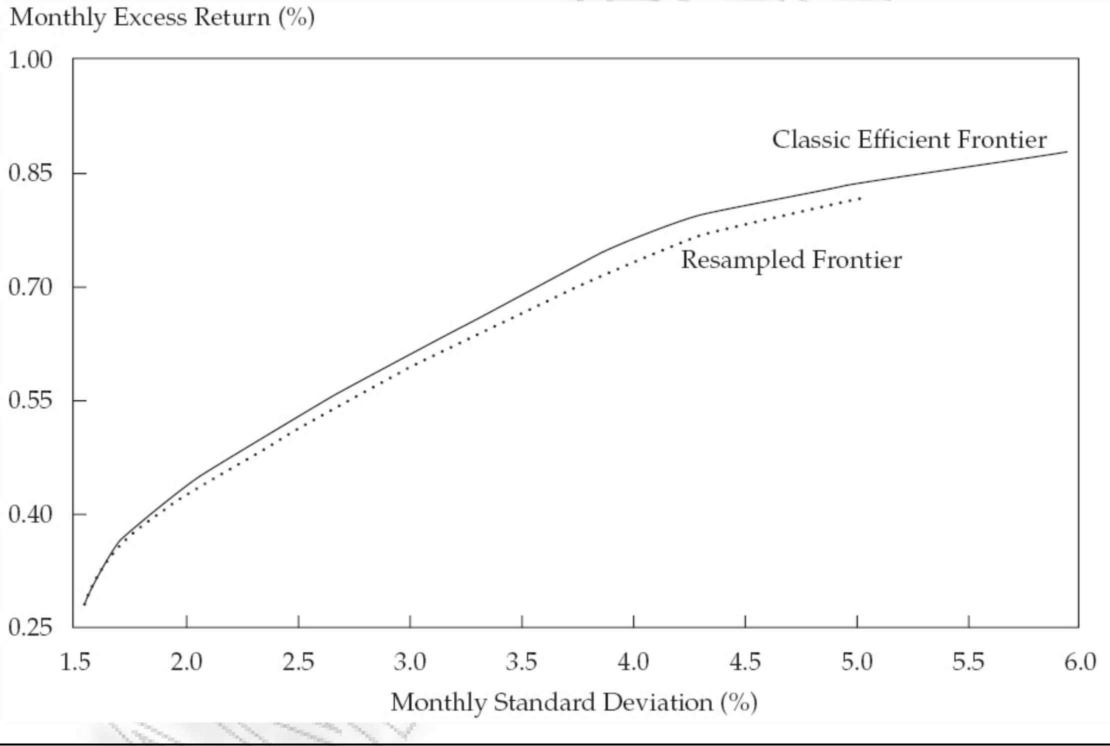
$$U = \mu - 0{,}5\lambda_m \sigma^2 \quad (4.2)$$

για την αποστροφή του κινδύνου λ_m και εν συνεχεία τον υπολογισμό του μέσου όρου λ_m - συνδεδεμένων χαρτοφυλακίων. Θεωρητικά τα ωφέλημα ταξινομημένα χαρτοφυλάκια είναι προτιμότερα επειδή καταδεικνύουν την αντιστάθμιση του κίνδυνου και της απόδοσης, ενός επενδυτή με συγκεκριμένη αποστροφή στον κίνδυνο όπου ουσιαστικά θα επιλέξει εάν πράγματι απαιτείται να επαναλάβει την επιλογή σε διάφορα περιβάλλοντα κινδύνου - απόδοσης.

Τα resampled χαρτοφυλάκια αντικατοπτρίζουν μεγαλύτερη διαφοροποίηση (περισσότερα στοιχεία του ενεργητικού έχουν εισέλθει στη λύση) από ότι τα κλασικά αποδοτικά χαρτοφυλάκια μέσης διακύμανσης. Επίσης, εμφανίζουν λιγότερο απότομες αλλαγές (ομαλές μεταβάσεις) στην κατανομή καθώς αλλάζουν οι απαιτούμενες αποδόσεις. Στα μάτια πολλών επαγγελματιών, και τα δύο χαρακτηριστικά είναι επιθυμητά.

Λόγω της εμφανούς υπερδιαφοροποίησης (σε σχέση με τις προβλέψεις απόδοσης), το resampled σύνορο θα έχει διαφορετική κατανομή βάρους από εκείνο του παραδοσιακού συνόρου και, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2, θα «χαραχθεί» (plot) κάτω από το παραδοσιακό σύνορο. Το resampled σύνορο δεν φθάνει την ίδια μέγιστη απόδοση με το παραδοσιακό σύνορο, λόγω της μεγαλύτερης διαφοροποίησής του. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η λύση της μέγιστης απόδοσης στο παραδοσιακό σύνορο αποτελείται από 100 τοις εκατό των επενδύσεων στην υψηλότερη απόδοση ενεργητικού, κατά μέσο όρο η διαδικασία απαγορεύει αυτού του είδους τη λύση για το resampled σύνορο. Τα σύνορα είναι παρόμοια όσον αφορά τον χώρο κινδύνου-απόδοσης, αλλά εντελώς διαφορετικό όσον αφορά τον "χώρο των βαρών".

Σχήμα 4.2. Κλασικό αποδοτικό όριο & Resampled Frontier



Ένα από τα προβλήματα με τη χρήση του κριτηρίου του μέσου μπορεί να εξηγηθεί με στενό έλεγχο της κατανομής των resampled βαρών για μια συγκεκριμένη συνδεδεμένη σειρά χαρτοφυλακίων. Πρώτον, κατά μέσο όρο πάνω σε περιορισμένες λύσεις είναι πολύ πιθανό να οδηγήσει σε μία μέση κατανομή η οποία είναι κάτω από την περιορισμένη λύση, επειδή πάντα θα υπάρχουν κάποια δείγματα (draws) όπου η πίεση δεν είναι δεσμευτική - λόγω της τυχαιότητας των εισροών μέσης απόδοσης.

Δεύτερον, το resampling είναι πιθανόν να περιλαμβάνει σχεδόν όλα τα περιουσιακά στοιχεία στη λύση, επειδή η πιθανότητα είναι ότι τουλάχιστον ένα ευνοϊκό δείγμα (draw) θα προσδιορισθεί (allocate) σε ένα περιουσιακό στοιχείο.

4.5 Μετρώντας την απόσταση των βαρών

Συμπερασματικά, η resampling διαδικασία προβλέπει την κατανομή των βαρών του χαρτοφυλακίου. Μπορούμε τώρα να εξετάσουμε κατά πόσο τα δύο χαρτοφυλάκια έχουν στατιστική διαφορά. Η δοκιμή αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως μέτρηση της απόστασης σε k διαστάσεις διανυσματικού χώρου. Το μέτρο Ευκλείδειας απόστασης για την απόσταση του διανύσματος των βαρών του χαρτοφυλακίου ενός χαρτοφυλακίου i (συμβολίζεται w_i) με p χαρτοφυλάκιο (συμβολίζεται w_p) δίνεται από

$$\left(w_p - w_i\right)'\left(w_p - w_i\right), \quad (4.3)$$

όπου $w_p - w_i$ ισοδυναμεί με ένα ενεργό βάρος.

Η στατιστική απόσταση, ωστόσο, υπολογίζεται από

$$\left(w_p - w_i\right)'\sum^{-1}\left(w_p - w_i\right), \quad (4.4)$$

όπου $\sum$ είναι ο πίνακας διακύμανσης - συνδιακύμανσης των βαρών του χαρτοφυλακίου. Αυτό το στατιστικό τεστ είναι κατανεμημένο ως x^2 με βαθμούς ελευθερίας ίσους με τον αριθμό των στοιχείων του ενεργητικού.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο στοιχεία, το καθένα με 10% μέσο και 20% μεταβλητότητα. Ας υποθέσουμε επίσης ότι η αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων του ενεργητικού είναι 0,0 και ο συντελεστής αποστροφής στον κίνδυνο είναι 0,2. Στη συνέχεια, η βέλτιστη λύση χωρίς σφάλμα εκτίμησης είναι:

$$w^* = \begin{pmatrix} w_1^* \\ w_2^* \end{pmatrix}$$

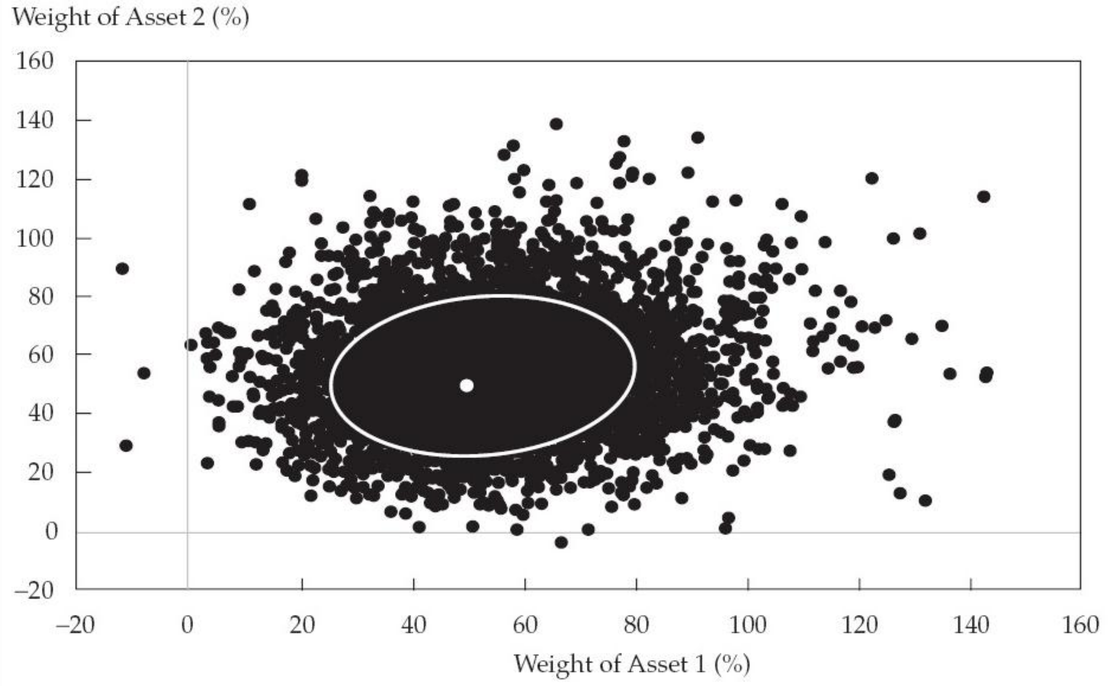
$$= \lambda \Omega^{-1} \mu$$

$$= 0,2 \begin{bmatrix} \frac{1}{(0,2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(0,2)^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

Τώρα, υπολογίζουμε τα βέλτιστα χαρτοφυλάκια χωρίς να προσθέσουμε περιορισμούς. Αυτά τα χαρτοφυλάκια, εξ ορισμού, δεν απαιτούν συμμετοχές για να προσθέσετε έως και 1, οπότε, το resampling δε θα είχε νόημα, διότι όλα τα resampled βάρη θα σχεδιαστούν (plot) σε μια ευθεία γραμμή (από το 100 τοις εκατό Βάρος 1 έως 100 τοις εκατό Βάρος 2). Παρατηρώντας το Σχήμα 6 θα μπορούσαμε να μπούμε στον πειρασμό να συμπεράνουμε ότι αυτοί οι μαύροι κύκλοι δεν είναι χαρτοφυλάκια (διότι τα στοιχεία ενεργητικού δεν αθροίζονται (add up)), αλλά τα μετρητά μπορεί να θεωρηθούν ως ένα τρίτο περιουσιακό στοιχείο, διότι τα μετρητά θα άφηναν τον οριακό (περιθωριακό) κίνδυνο, καθώς και τον συνολικό κίνδυνο, αμετάβλητα.

Σχήμα 4.3. Σφάλμα εκτίμησης & βάρη χαρτοφυλακίου



Παρά το γεγονός ότι (όπως δείχνει το Σχήμα 4.3), η βέλτιστη λύση είναι στο 50% για τα δύο στοιχεία, τα εκτιμώμενα βάρη είναι διάσπαρτα γύρω από τη λύση αυτή. Συγκρίνοντας τη διανυσματική διαφορά με την κριτική τιμή της x^2 δίνει ένα μέτρο του πόσο είναι η στατιστική διαφορά ενός χαρτοφυλακίου. Η έλλειψη (γεωμετρική (ellipse)) στο Σχήμα 4.3 δείχνει τη γραμμή της συνεχούς πυκνότητας, που είναι συνεπής με την Εξίσωση (4.4), για την απόσταση (διάνυσμα (vector)) μεταξύ του βέλτιστου χαρτοφυλακίου χωρίς σφάλμα εκτίμησης και του resampling. Για αυτό το παράδειγμα με δύο ενεργητικά (assets), οι γραμμές σταθερής πυκνότητας μπορούν να ληφθούν από

$$p\left(w_1 - w_1^*, w_2 - w_2^*\right) = \frac{1}{2\pi \det(\sum)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} w_1 - w_1^* \\ w_2 - w_2^* \end{bmatrix} \sum^{-1} \begin{bmatrix} w_1 - w_1^* \\ w_2 - w_2^* \end{bmatrix}},$$

$$\sum^{-1} = \begin{bmatrix} 27.91 & 0.005 \\ 0.005 & 27.76 \end{bmatrix}$$

όπου "det" αντιπροσωπεύει καθοριστικό παράγοντα του πίνακα σε παρένθεση.

Τα Χαρτοφυλάκια μέσα σε αυτή την έλλειψη (ellipse) θα πρέπει να αντιμετωπίζονται ως στατιστικά ισοδύναμα, ενώ χαρτοφυλάκια έξω από αυτή την έλλειψη (ellipse) θα πρέπει να αντιμετωπίζονται ως σημαντικές διαφορές στα βάρη του χαρτοφυλακίου. Λαμβάνοντας υπόψη τις πληροφορίες αυτές, μπορούμε τώρα να επιθεωρήσουμε οπτικά ένα νέο χαρτοφυλάκιο (νέες πληροφορίες σχετικά με τις αγορές) για να αποφασίσουμε αν είναι αρκετά διαφορετικό από το τρέχων χαρτοφυλάκιο (αφού γίνει υπολογισμός του θορύβου στα εισαγόμενα στοιχεία (inputs)) που πρέπει να εφαρμοστεί. Από αυτή την άποψη, θα μπορούσαμε να ερμηνεύσουμε την περιοχή εντός της έλλειψης (ellipse) ως μη εμπορική ζώνη.

Ωστόσο, παρουσιάζοντας long-only περιορισμούς (περικοπή των βαρών στο μηδέν), ακυρώνεται την υπόθεση ομαλότητας για την κατανομή των βαρών του χαρτοφυλακίου. Ο Michaud (1998) χρησιμοποιεί διαφορετικό μέτρο απόστασης, εκείνο που εφαρμόζεται ευρέως στη διαχείριση ενεργητικού, αναγνωρίζοντας ότι δύο χαρτοφυλάκια με τον ίδιο κίνδυνο και απόδοση ενδέχεται να παρουσιάζουν πραγματικά διαφορετική κατανομή. Για την προσέγγιση αυτή, η απόσταση μεταξύ δύο χαρτοφυλακίων ορίζεται ως

$$\left(w_p - w_i\right)' \hat{\Omega}_0 \left(w_p - w_i\right), \quad (4.5)$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο του σφάλματος παρακολούθησης (tracking error).

Η διαδικασία λειτουργεί ως εξής:

Βήμα 1^{o}:

Ορίζουμε χαρτοφυλάκιο για να τεστάρουμε αντίθετες διαφορές. Υπολογίζουμε την Εξίσωση (4.5) για όλα τα resampled χαρτοφυλάκια.

Βήμα 2^{o}:

«Σορτάρουμε» τα Χαρτοφυλάκια ανά tracking error κατά φθίνουσα τάξη (η υψηλότερη στην κορυφή).

Βήμα 3°:

Ορίζουμε TE_a ως το κρίσιμο σφάλμα εντοπισμού (tracking error) για το επίπεδο a τοις εκατό (δηλαδή, εάν 1.000 χαρτοφυλάκια είναι resampled και το κρίσιμο επίπεδο είναι 5%, στη συνέχεια να εξετάζουμε το tracking error ενός χαρτοφυλακίου που είναι 50° από την κορυφή). Ως εκ τούτου, όλα τα χαρτοφυλάκια

$$\left(w_p - w_i\right)' \hat{\Omega}_0 \left(w_p - w_i\right) \geq TE_a^2 \qquad (4.6)$$

είναι χαρακτηρισμένα με στατιστικά σημαντική διαφορά.

Βήμα 4°:

Ως τελευταίο βήμα, υπολογίζουμε την ελάχιστη και μέγιστη κατανομή για κάθε περιουσιακό στοιχείο εντός της περιοχής εμπιστοσύνης.

Για παράδειγμα με τρία περιουσιακά στοιχεία, η αβεβαιότητα σχετικά με τη βελτιστοποίηση στα βάρη μπορεί να είναι ορατή, αλλά για περισσότερες διαστάσεις, η οπτικοποίηση (visualization) γίνεται δύσκολη.

Σημειώστε ότι η ομοιότητα αυτή ορίζεται σε σχέση με το διάνυσμα του βέλτιστου βάρους και όχι σε όρους κινδύνου και απόδοσης. Δύο χαρτοφυλάκια θα μπορούσαν να είναι παρόμοια σε όρους κινδύνου και απόδοσης, αλλά πολύ διαφορετικά στην κατανομή, η οποία είναι γνωστή, διότι τα σημεία κινδύνου - απόδοσης κάτω από το σύνορο δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδικά. Ωστόσο, αυτή η διαδικασία δοκιμής είναι διαισθητική (intuitive). Σημειώστε, επίσης, ότι η διασπορά στα βάρη είναι μεγάλη, οπότε θα είναι δύσκολο να απορριφθεί η υπόθεση ότι τα χαρτοφυλάκια είναι στατιστικά ισοδύναμα, ακόμα και αν δεν είναι. Ως εκ τούτου, η ισχύς του τεστ θα είναι χαμηλή.

4.6 Resampling και γραμμική παλινδρόμηση

Χωρίς έναν long-only περιορισμό, το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο θα μπορούσε πράγματι να βρεθεί χρησιμοποιώντας μια απλή προσέγγιση παλινδρόμησης διότι η βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου στην περίπτωση αυτή είναι ένα γραμμικό πρόβλημα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε k χρονοσειρές των καθ' υπέρβαση αποδόσεων (excess returns)- όπου είναι, η συνολική απόδοση R, μείον το ποσοστό των μετρητών c, με T παρατηρήσεις το καθένα. Η κατασκευή χαρτοφυλάκιο μπορεί στη συνέχεια να γραφτεί ως μία απλή παλινδρόμηση (η οποία μπορεί να εκτιμηθεί με τη χρήση οποιουδήποτε τυποποιημένου λογισμικού regression):

$$\begin{aligned} y &= \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + u \\ &= 1, \\ x_i &= R_i - r \end{aligned} \tag{4.7}$$

Χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε πακέτο οικονομετρίας ή το Microsoft Excel, απλά εκτελούμε μια παλινδρόμηση του 1 ενάντια σε όλες τις αποδόσεις περιουσιακών στοιχείων, εκτός από ένα σημείο τομής. Η μέθοδος αυτή θα ωθήσει την παλινδρόμηση μέσω της πηγής σε χώρο υπερβάλλουσας απόδοσης (excess-return) και, ως εκ τούτου, θα μεγιστοποίηση το Sharpe ratio. Το αποτέλεσμα μπορεί να ερμηνευθεί ως ένα χαρτοφυλάκιο που πλησιάζει σε μηδενικό κίνδυνο (το διάνυσμα του 1 δεν δείχνει μεταβλητότητα) και σε μοναδική απόδοση και θα δημιουργήσει έτσι μια ευκαιρία κερδοσκοπίας (arbitrage). Οι συντελεστές παλινδρόμησης θα αντικατοπτρίζουν τα βάρη του χαρτοφυλακίου ($\beta_i = w_i$), που για λόγους ευκολίας χρησιμοποιείται ως βάση για ποσό 1.

Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας το ίδιο πλαίσιο, θα μπορούσαμε να εκτελέσουμε μια «βεβιασμένη» παλινδρόμηση (constrained regression) για να δημιουργηθούν χαρτοφυλάκια συναθροίζοντας ιδιαίτερες απαιτούμενες αποδόσεις. Το πλαίσιο αυτό θα μπορούσε στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί επίσης για τη δοκιμή των περιορισμών στους επιμέρους συντελεστές παλινδρόμησης (εκτίμηση βαρών χαρτοφυλακίου) και στους περιορισμούς στις ομάδες των περιουσιακών στοιχείων και να ελέγξει κατά πόσο οι συντελεστές παλινδρόμησης είναι σημαντικά διαφορετικοί από το μηδέν.

Το πλαίσιο παλινδρόμησης θέτει ένα κεντρικό πρόβλημα της κατασκευής του χαρτοφυλακίου σε μια γνωστά διαφορετική προοπτική απεικόνιση: Μεγάλος βαθμός συσχέτισης των αποδόσεων του ενεργητικού (των assets) σημαίνει μεγάλο βαθμό συσχέτισης των regressors, με τις προφανείς συνέπειες της multicollinearity – υψηλή τυπική απόκλιση στα βάρη του χαρτοφυλακίου (συντελεστές παλινδρόμησης) και προβλήματα αναγνώρισης (δύσκολο να γίνει διάκριση μεταξύ δύο παρόμοιων περιουσιακών στοιχείων). Κάνοντας απλό downtesting (σταδιακή κατάργηση των περιουσιακών στοιχείων που αρχίζει με το λιγότερο σημαντικό περιουσιακό στοιχείο) και αποκλείοντας τα ασήμαντα ενεργητικά (περιουσιακών στοιχείων - assets) θα παράγει ένα αποτέλεσμα που θα εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την σειρά του αποκλεισμού, χωρίς να μας καθοδηγεί ως προς το πού να αρχίσουμε. Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό και στους asset allocators και στους οικονομέτρες.

Το Portfolio resampling μπορεί να ερμηνευθεί ως μια προσέγγιση προσομοίωσης για να καταλήξουμε στην κατανομή των εκτιμήσεων βάρους. Το κέντρο της κατανομής υπολογίζεται κατά τον ίδιο τρόπο όπως στο χαρτοφυλάκιο resampling κατά μέσο όρο πάνω από το συντελεστή εκτιμήσεις για ένα συγκεκριμένο περιουσιακό στοιχείο. Αντί για τη λήψη των διαρθρωτικών μορφών του μοντέλου, ως δεδομένο και προσομοίωση του όρου σφάλματος, το resampling προσομοιώνει ένα εντελώς νέο σύνολο δεδομένων, το οποίο ισοδυναμεί με την παραδοχή ότι τα regressors είναι στοχαστικά. Με τον σχεδιασμό (drawing) νέων δεδομένων απόδοσης από τον πίνακα διακύμανσης - συνδιακύμανσης και επανεκτιμώντας την Εξίσωση (4.7) n φορές, μπορούμε να υπολογίσουμε το μέσο βάρος για το περιουσιακό στοιχείο $j = 1...k$ μέσω του υπολογισμού μέσου όρου πέρα από τους κατ' εκτίμηση συντελεστές παλινδρόμησης ($\hat{\beta}_i = \hat{w}_i$)

$$\bar{\hat{w}}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{w}_{ij}, \; j = 1...k \quad (4.8)$$

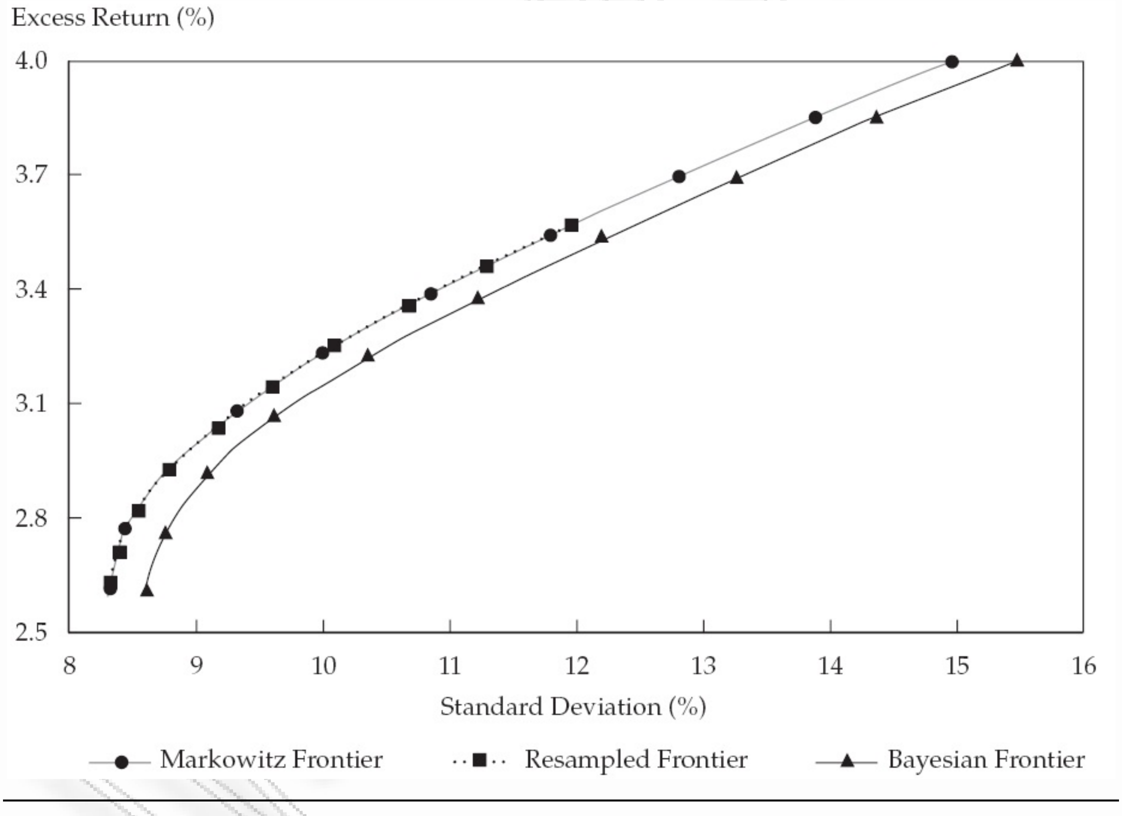
Αν και η κατά μέσο όρο δεν είναι αναγκαία για χαρτοφυλάκια με long-only περιορισμούς (επειδή η κατανομή των εξαρτημένων μεταβλητών (regressors) είναι γνωστή), το resampling χαρτοφυλάκιο είναι πιο γενικό από την προσέγγιση της παλινδρόμησης. Μπορεί επίσης να εφαρμοστεί στην περίπτωση του περιορισμού long - only, όπου η κατανομή του βάρους δεν είναι γνωστή. Ουσιαστικά, αυτή η προσέγγιση απαιτεί να κάνεις bootstrapping την άγνωστη κατανομή ενός t-statistic. Αν, για παράδειγμα, ένα περιουσιακό στοιχείο περιλαμβάνεται σε 70 από τις 1.000 φορές που έχει «τρέξει» (runs) για μια δεδομένη σειρά (given rank) ή ένα ωφέλιμο αποτέλεσμα (utility score), θα πάρουμε ένα p-value της τάξεως του 7%. Αυτή η προσέγγιση μπορεί επίσης να επεκταθεί μέσω της χρήσης Bayesian ανάλυσης με τη χρησιμοποίηση τυποποιημένων αποτελεσμάτων (standard textbook results). Σε μια τέτοια ανάλυση, οι πρότερες (προγενέστερες) πεποιθήσεις μας (priors), καθορίζονται με την κατανομή των βαρών του χαρτοφυλακίου, αντί της απόδοσης των περιουσιακών στοιχείων.

4.7 Παγίδες στο Portfolio Resampling

Το σφάλμα εκτίμησης θα αυξήσει τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου. Ας εξετάσουμε την απλούστερη περίπτωση. Ένα χαρτοφυλάκιο με δύο περιουσιακά στοιχεία. Στην περίπτωση αυτή, κάθε συνδυασμός των δύο στοιχείων του ενεργητικού θα είναι αποτελεσματικός. Όλα τα resampled χαρτοφυλάκια θα εξακολουθούν να βρίσκονται στο αποτελεσματικό σύνορο, και κανένα χαρτοφυλάκιο δεν θα βρεθεί κάτω από αυτό, αν και το σύνορο σε αυτή την περίπτωση θα μπορούσε να είναι μικρό (μικρού μήκους), γιατί, μερικές φορές, η σειρά των στοιχείων του ενεργητικού αντιστρέφεται, ώστε η μέση μέγιστη - απόδοση του χαρτοφυλακίου δεν περιέχει το 100 τοις εκατό της υψηλότερης απόδοσης των περιουσιακών στοιχείων.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο ασυσχέτιστα περιουσιακά στοιχεία με εκτιμόμενες μεταβλητότητες 10% και 15%. Ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε 60 μηνιαίες παρατηρήσεις για την εκτίμηση του συνόρου. Οι ετήσιες μέσες αποδόσεις των μετρητών είναι 4% και 2%. Στο Σχήμα 4.4 καταρτίζονται (plot) τα αποτελέσματα του αποτελεσματικού συνόρου που βρέθηκαν από την παραδοσιακή, τη resampled, και τη Bayesian προσέγγιση. Η αύξηση του κινδύνου καταγράφεται μόνο από το Bayesian σύνορο. Στη Bayesian μέθοδο, για την ίδια αναμενόμενη απόδοση (οι αναμενόμενες αποδόσεις δε θα αλλάξουν με την εισαγωγή του σφάλματος εκτίμησης σαν ένα uninformative prior), κάθε χαρτοφυλάκιο εκθέτει τον επενδυτή σε μεγαλύτερο κίνδυνο γιατί οι μέθοδοι Bayesian μοχλεύουν προς τα πάνω τον πίνακα διακύμανσης - συνδιακύμανσης, αλλά αφήνουν το διάνυσμα της απόδοσης αμετάβλητο. Σε άμεση αντίθεση, το λάθος εκτίμησης στο resampled σύνορο εμφανίζεται μόνο ως συντόμευση των συνόρων, δεν είναι τόσο η αύξηση του κινδύνου για κάθε επίπεδο απόδοσης. Αντ' αυτού, η αβεβαιότητα σχετικά με τον μέσο, προκαλεί μείωση της μέγιστης αναμενόμενης μέσης απόδοσης, η οποία δεν είναι πειστική. Οι μέθοδοι Bayesian αναγνωρίζουν ότι η αποκλειστική χρήση των πληροφοριών του δείγματος δε θα μας επιτρέψει να αντιμετωπίσουμε τις επιπτώσεις της παραμέτρου της αβεβαιότητας σχετικά με την επιλογή του βέλτιστου χαρτοφυλακίου.

Σχήμα 4.4. Παραδοσιακό, Resampling & Bayesian όρια



Οι μέθοδοι Bayesian μπορούν να χρησιμοποιήσουν priors είτε uninformative ή informative. Uninformative priors εκφράζουν απλά την πιθανή σειρά των παραμέτρων εκτίμησης. Κατά συνέπεια, η προσθήκη ενός uninformative prior σε ένα σύνολο δεδομένων απόδοσης, αυξάνει την αβεβαιότητα για τις μελλοντικές αποδόσεις, αλλά όχι το μέσο αποτέλεσμα. Επειδή τα priors αφήνουν το σύνολο των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων σταθερό, αυτή η μέθοδος έχει χρησιμοποιηθεί ελάχιστα από τους επαγγελματίες. Τα informed priors μεταβάλλουν το μέσο αναμενόμενο αποτέλεσμα και, συνεπώς, αλλάζουν το σύνολο των λύσεων. Ένα informed prior δηλώνοντας ότι όλες οι μέσες αποδόσεις είναι ίσες θα παράγει την ελάχιστη διακύμανση του χαρτοφυλακίου. Ένα informed prior δηλώνοντας ότι οι μέσες αποδόσεις είναι κοντά στις πραγματικές (implied) αποδόσεις του χαρτοφυλακίου αναφοράς θα κινήσει το αποτελεσματικό σύνορο προς την κατεύθυνση του χαρτοφυλακίου αναφοράς.

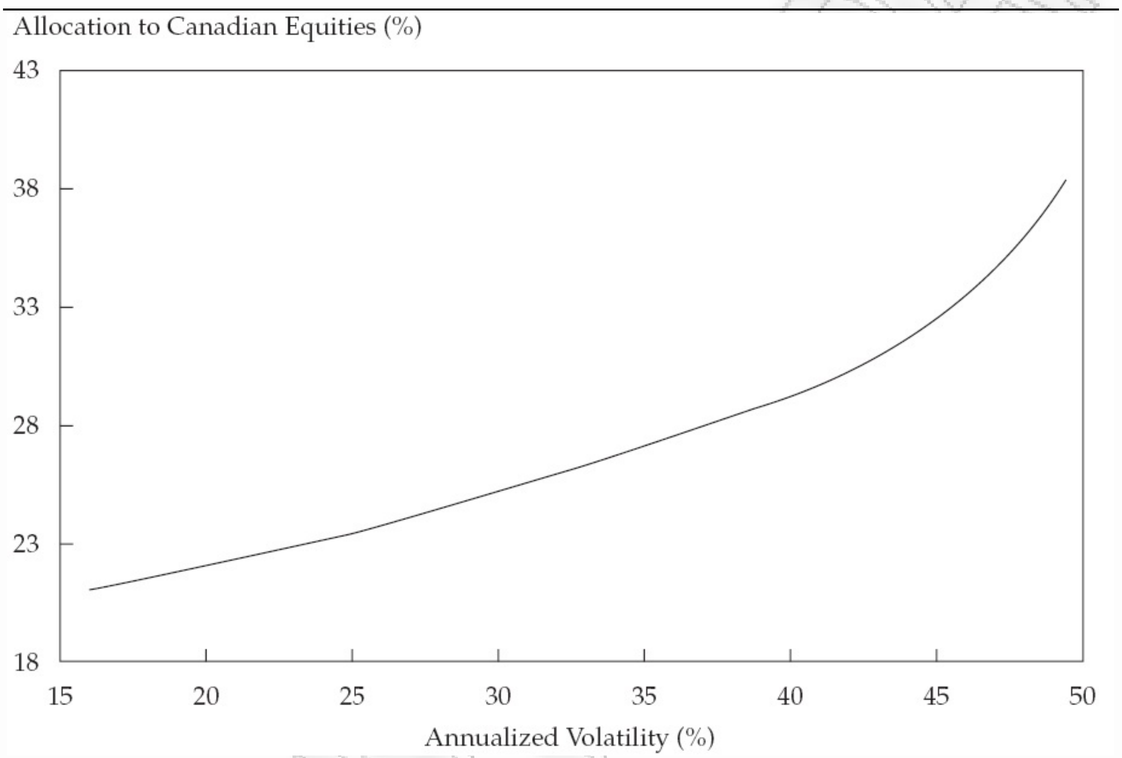
Η ανάλυση Bayesian επιχειρεί να συνδυάσει τις πληροφορίες του δείγματος για τις αποδόσεις του ενεργητικού με τα priors για την κατανομή της απόδοσης. Μαζί, τα priors και το αποτελεσματικό επίπεδο εμπιστοσύνης οδηγούν στην προβλευθείσα κατανομή. Έτσι η βέλτιστη επιλογή του χαρτοφυλακίου βασίζεται στην προβλευθείσα κατανομή.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι δύο περιουσιακά στοιχεία έχουν την ίδια αναμενόμενη απόδοση, αλλά το ένα από αυτά έχει σημαντικά μεγαλύτερη μεταβλητότητα. Θα μπορούσαμε να σκεφτούμε αυτό το παράδειγμα ως διεθνή κατανομή σταθερού εισοδήματος πάνω σε μια βάση αντιστάθμισης και μια βάση μη αντιστάθμισης. Στην περίπτωση αυτή, οι περισσότεροι επαγγελματίες (και βελτιστοποιητές (optimizers) μέσης απόκλισης) αποκλείουν από τη λύση τα περιουσιακά στοιχεία με υψηλή μεταβλητότητα (εκτός αν υπάρχουν κάποιες επιθυμητές συσχετίσεις). Πώς το resampled efficiency ασχολείται με αυτά τα περιουσιακά στοιχεία; Επαναλαμβάνοντας τον σχεδιασμό από την αρχική κατανομή θα παραχθούν σχεδιασμοί από ευμετάβλητα περιουσιακά στοιχεία με εξαιρετικά αρνητικές αποδόσεις, καθώς και σχεδιασμοί με εξαιρετικά θετικές αποδόσεις. Στην περίπτωση των υψηλά θετικών αποδόσεων, ο τετραγωνικός προγραμματισμός θα επενδύσει σε μεγάλο βαθμό σε αυτό το περιουσιακό στοιχείο. Στην περίπτωση των υψηλά αρνητικών αποδόσεων, το πρόγραμμα θα «shortάρει» το περιουσιακό στοιχείο. Το «shortάρισμα» δεν επιτρέπεται για χαρτοφυλάκια με long - only περιορισμούς, όμως, έτσι το αποτέλεσμα θα είναι θετικό για την κατανομή των δειγμάτων (draws) από τις υψηλά θετικές μέσες αποδόσεις και μηδενική κατανομή για δείγματα (draws) από τις υψηλά αρνητικές μέσες αποδόσεις.

Η απεριόριστη βελτιστοποίηση είναι διαφορετική. Στην κλασική προσέγγιση, μεγάλες θέσεις αγοράς (long) είναι αντισταθμισμένες (offset) (κατά μέσο όρο) από μεγάλες αρνητικές θέσεις. Κατά συνέπεια, η αύξηση της μεταβλητότητας θα αποφέρει αύξηση στη μέση κατανομή. Άρα, η επιδείνωση του Sharpe Ratio, θα πρέπει να συνοδεύεται από αύξηση του βάρους. Αυτό το αποτέλεσμα δεν είναι πιθανό. Προκύπτει απευθείας από τον κανόνα της κατανομής σε συνδυασμό με έναν περιορισμό long - only, ο οποίος δημιουργεί μια δυνατότητα επιλογής για την κατανομή του αντίστοιχου περιουσιακού στοιχείου. Τα περιουσιακά στοιχεία είναι είτε εντός είτε εκτός, αλλά ποτέ αρνητικά.

Αυτή η διαισθητική γραμμή του συλλογισμού μπορεί να γίνει σαφής σκεπτόμενοι ένα απλό παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι πρόκειται να συγκεντρώσουμε ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών από τρείς χώρες και ένα asset σταθερού επιτοκίου. Ας υποθέσουμε επίσης ότι το μέγεθος του δείγματος θα είναι 60 μηνιαίες παρατηρήσεις, το οποίο είναι ένα ρεαλιστικό χρονικό πλαίσιο για πιο πρακτικές εφαρμογές. Διαφοροποιούμε τη μεταβλητότητα μόνο του χειρότερου σε επιδόσεις περιουσιακού στοιχείου, και παρατηρούμε την κατανομή αυτού του περιουσιακού στοιχείου κατά το χαρτοφυλάκιο με τη μέγιστη απόδοση. Σε αυτήν την περίπτωση θα παίρναμε ένα σχήμα σαν το Σχήμα 4.5, όπου δείχνει ότι έστω και αν υπάρχει μια χώρα όπου οι μετοχές της έχουν τη χαμηλότερη απόδοση, οι κατανομές τους κάνουν «peak» στο χαρτοφυλάκιο με τη μέγιστη απόδοση. Ο λόγος είναι ότι στα χαρτοφυλάκια resampling, καθώς αυξάνεται η αστάθεια (το Sharpe ratio επιδεινώνεται), οι κατανομές στις υψηλές αποδόσεις τελικά αυξάνονται. Έτσι, μια υποβάθμιση της σχέσης απόδοσης - κινδύνου για τη χώρα με αυτές τις μετοχές, ακολουθείται από μια αύξηση του βάρους. Το αποτέλεσμα αυτό δεν προέρχεται από υψηλότερη διακύμανση που οδηγεί σε μεγαλύτερο σφάλμα εκτίμησης, το φαινόμενο δε θα προκύψει σε long - short χαρτοφυλάκια. Επιδρά άμεσα στον υπολογισμό μέσου όρου πέρα από τα long – only χαρτοφυλάκια. Ο long - only περιορισμός δημιουργεί «επιλογές» (“optionality”).

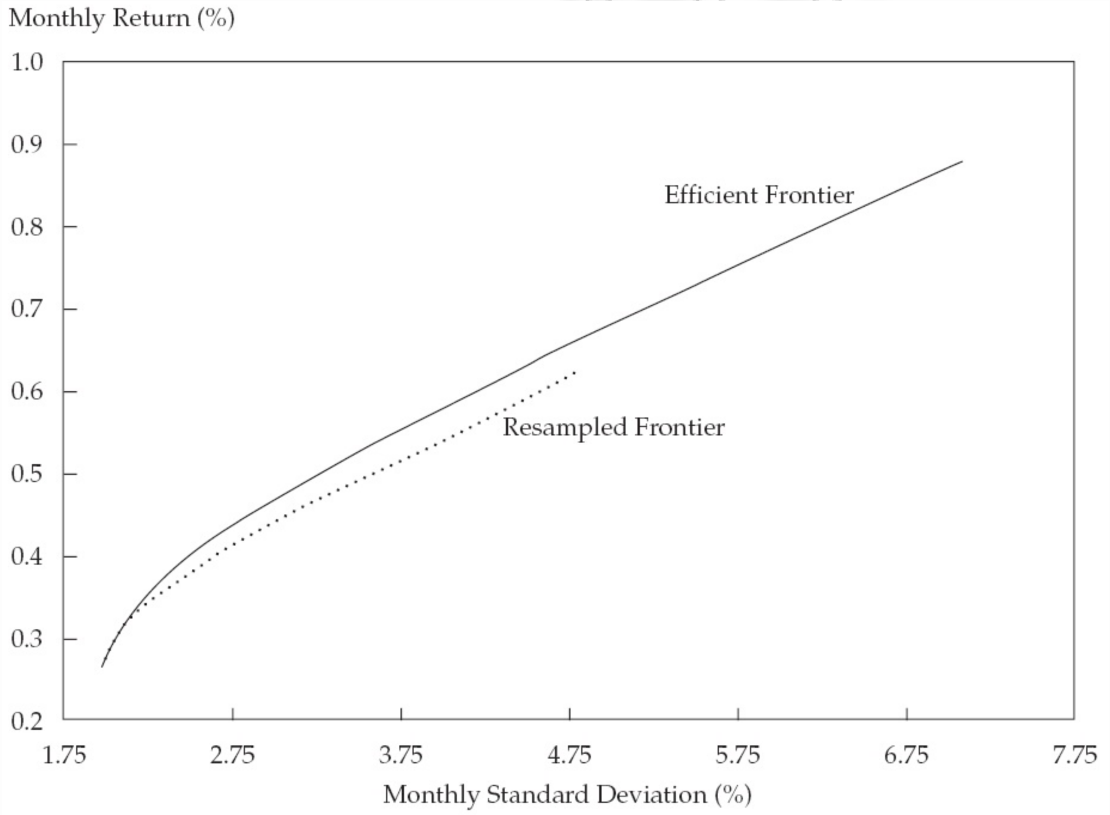
Σχήμα 4.5. Κατανομή & μεταβλητότητα μετοχών με χαμηλή απόδοση



Μία από τις βασικές ιδιότητες των μαθηματικών αποτελεσματικών - συνόλων είναι ότι το αποτελεσματικό σύνορο δεν περιέχει μέρη καμπής προς τα πάνω. Ένα ανοδικό σημείο καμπής θα σήμαινε ότι θα μπορούσε κανείς να κατασκευάσει χαρτοφυλάκια πιο πάνω από το σύνορο με γραμμικό συνδυασμό δύο συνοριακών χαρτοφυλακίων (portfolio frontier). Θα μπορούσε μια τέτοια απαγορευτική κατάσταση να προκύψει από τη χρήση της έννοιας του resampled frontier;

Για μια απάντηση, θα πρέπει να έχουμε κατά νου ότι η διαφορά μεταξύ του resampled και του παραδοσιακού αποτελεσματικού συνόρου προκύπτει επειδή το resampling προβλέπει ότι τα χαρτοφυλάκια είναι πολύ διαφοροποιημένα. Ωστόσο οι περιπτώσεις, όπου μπορούν να εμφανιστούν στο resampling, ότι η διαφοροποίηση γίνεται μικρότερη ως λύση της μέγιστης απόδοση προσεγγίζονται (διότι όλες οι λύσεις μέγιστης απόδοσης τείνουν να συγκεντρώνονται σε ενεργητικά υψηλής απόδοσης ούτως ή άλλως). Αυτό είναι ακριβώς που έχει συμβεί στο resampled σύνορο που φαίνεται στο Σχήμα 4.6. Ασφαλώς, το πραγματικό τεστ του resampled efficiency είναι επιδόσεις εκτός δείγματος (out – of – sample performance) σε μια μελέτη Monte Carlo, αλλά τα κυρτά τμήματα ενός συνόρου είναι δύσκολο να αιτιολογηθούν (justify).

Σχήμα 4.6. Αποδοτικό όριο & όριο Resampling



Επιπλέον, όλες τα resamplings προέρχονται από το ίδιο διάνυσμα και πίνακα συνδιακυμάνσεων ($\hat{\Omega}_0, \hat{\mu}_0$). Η πραγματική κατανομή, όμως, είναι άγνωστη. Ως εκ τούτου, όλα τα resampled χαρτοφυλάκια θα υποφέρουν από την απόκλιση των παραμέτρων $\hat{\Omega}_0, \hat{\mu}_0$ από $\Omega_{true}, \mu_{true}$ σχεδόν με τον ίδιο τρόπο.

Το averaging (ο μέσος όρος) δε θα βοηθήσει σε μεγάλο βαθμό σε αυτή την περίπτωση, διότι το μέσο βάρος είναι το αποτέλεσμα ενός διανυσματικού input (εισόδου), το οποίο είναι πολύ αβέβαιο. Ως εκ τούτου, είναι δίκαιο να πούμε ότι όλα τα χαρτοφυλάκια κληρονομούν το ίδιο σφάλμα εκτίμησης. Η ιδιαίτερη σημασία που αποδίδεται στο $\hat{\Omega}_0, \hat{\mu}_0$ τελικά περιορίζει την ανάλυση.

4.8 Συμπεράσματα

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου ήταν να δούμε κατά πόσο η μεθοδολογία του resampling μπορεί να οδηγήσει στην επιλογή καλύτερων χαρτοφυλακίων σε όρους απόδοσης - κινδύνου.

Σε γενικές γραμμές, πρέπει να αναφέρουμε, ότι σε χαρτοφυλάκια με περιορισμό αρνητικών σταθμίσεων τα αποδοτικά όρια που προκύπτουν με τη μέθοδο resampling, έχουν το δεξί τους άκρο σε χαμηλότερο επίπεδο κινδύνου σε σχέση με τα κλασικά Markowitz και αυτό γιατί μέσω της «εξομάλυνσης» των ακραίων σταθμίσεων (averaging), δεν είναι εφικτή η θεωρητικά μέγιστη απόδοση του Markowitz. Τα resampled χαρτοφυλάκια χαμηλής τάξης (rank), αυτά δηλαδή που βρίσκονται κοντά στο χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διακύμανσης (Global Minimum Variance Portfolio – GMV P), πετυχαίνουν οριακά καλύτερη απόδοση από τα αντίστοιχα Markowitz.

Μιλώντας για χαρτοφυλάκια χωρίς περιορισμούς, θα μπορούσαμε να πούμε ότι έχουμε μια μεγιστοποίηση του σφάλματος. Εδώ η μέθοδος του resampling σε σχέση με την κλασική μέθοδο, δεν παρέχει κάποιο αξιόλογο πλεονέκτημα. Εφαρμόζοντας ένα πλαίσιο επιλογής χαρτοφυλακίου χρησιμοποιώντας βασικές παραμέτρους με μεγάλο σφάλμα εκτίμησης, διατρέχουμε τον κίνδυνο μεγάλων απωλειών. Ο κίνδυνος αυτός δεν αυξάνεται εκθετικά με την επιλογή χαρτοφυλακίων υψηλότερης τάξης, αντίθετα η ελάχιστη τάξη χαρακτηρίζεται από χαμηλότερη μεταβλητότητα. Τα χαρτοφυλάκια χωρίς περιορισμούς, υστερούν σε σχέση με τα χαρτοφυλάκια με περιορισμό αρνητικών σταθμίσεων. Επίσης δε θα πρέπει να παραλείψουμε να αναφέρουμε, ότι το κόστος εφαρμογής και διατήρησης μιας μεθόδου επιλογής χαρτοφυλακίου χωρίς περιορισμούς, είναι αρκετά υψηλό σε σχέση με την περίπτωση ύπαρξης περιορισμών. Οι ανάγκες για αναπροσαρμογή είναι αρκετά μεγαλύτερες και έτσι κατά μέσο όρο από μήνα σε μήνα είναι απαραίτητο να ανακατανέμουμε το κεφάλαιο (ακόμα και σε ποσοστό 80%). Στις περιπτώσεις χαρτοφυλακίων χωρίς περιορισμούς παρατηρούμε ότι το μέσο εκτιμηθέν χαρτοφυλάκιο Markowitz συμπίπτει με το resampled. Αυτό δε σημαίνει ότι τα χαρτοφυλάκια αυτά έχουν ακριβώς τις ίδιες σταθμίσεις γιατί αν τις είχαν θα συμφωνούσαν και τα αποδοτικά όρια. Ουσιαστικά η λειτουργία του averaging των σταθμίσεων δίνει μεν πιο διαφοροποιημένα χαρτοφυλάκια, αλλά με παραπλήσιους δείκτες sharpe με τα αντίστοιχα Markowitz.

Τα χαρτοφυλάκια χωρίς περιορισμούς είναι μια μη ρεαλιστική περίπτωση, ας δούμε λοιπόν τι συμβαίνει και με τα χαρτοφυλάκια με αρνητικές σταθμίσεις. Καθώς αυξάνεται η τάξη του χαρτοφυλακίου, ο δείκτης sharpe μειώνεται συνεχώς. Αυτό σημαίνει πως η επίδραση του σφάλματος εκτίμησης των παραμέτρων και η ανοχή απέναντι στον κίνδυνο ενός επενδυτή, είναι παράμετροι με αυστηρά καθορισμένη σχέση. Όσο πιο συντηρητικός είναι ένας επενδυτής, τόσο λιγότερο ζημιώνεται από το σφάλμα εκτίμηση στις βασικές παραμέτρους.

Η διασπορά του κεφαλαίου σε ένα λογικό αριθμό περιουσιακών στοιχείων είναι πολύ σημαντική. Η επιλογή ενός χαρτοφυλακίου με αυτά τα χαρακτηριστικά παρέχει πολλά οφέλη. Στην περίπτωση δημιουργίας χαρτοφυλακίων με το Markowitz υπάρχει ένας πολύ χαμηλός βαθμός διαφοροποίησης με τις περισσότερες μετοχές να έχουν μηδενική στάθμιση. Μια τέτοια κατάσταση είναι φυσικά μη επιθυμητή από έναν διαχειριστή κεφαλαίων ο οποίος θέλει το χαρτοφυλάκιό του να έχει μια ικανοποιητική διασπορά του κινδύνου. Με τη μέθοδο του resampling οι ακραίες σταθμίσεις έχουν εξομαλυνθεί, ειδικά στα χαρτοφυλάκια υψηλότερου κινδύνου. Ακόμα στη λύση εισέρχεται ένας μεγαλύτερος αριθμός μετοχών γεγονός που αυξάνει σημαντικά τη διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου. Θα πρέπει να τονίσουμε για μια ακόμα φορά πως το όφελος αυτό, που προκύπτει από τη μέθοδο που αναλύουμε, είναι πολύ σημαντικό.

Παρολ' αυτά είδαμε, πως σε γενικές γραμμές το κόστος εφαρμογής και διατήρησης ενός χαρτοφυλακίου είναι αρκετά υψηλό και ενδεχομένως να πρέπει να θεωρήσουμε πρόσθετους περιορισμούς αναφορικά με το κόστος συναλλαγών. Η γενική δε κατάργηση των περιορισμών εκτοξεύει τα κόστη συναλλαγών αφού τα χαρτοφυλάκια απαιτούν ριζική ανανέωση, χωρίς όμως πάντα να αποδίδουν καλύτερα. Αυτό ισχύει και για τις δύο μεθόδους, ανεξάρτητα αν η μέθοδος resampling (επεναλυπτικής δειγματοληψίας) επιλέγει χαρτοφυλάκια με μεγαλύτερη διαφοροποίηση, γεγονός που θα περίμενε κάποιος να μην απαιτεί μεγάλη αναπροσαρμογή από μήνα σε μήνα.

Θα πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι με την εφαρμογή της μεθόδου καταλήγουμε σε ποιοτικά καλύτερα χαρτοφυλάκια με υψηλότερο βαθμό διαφοροποίησης, ένα χαρακτηριστικό ουσιώδες για έναν επενδυτή.

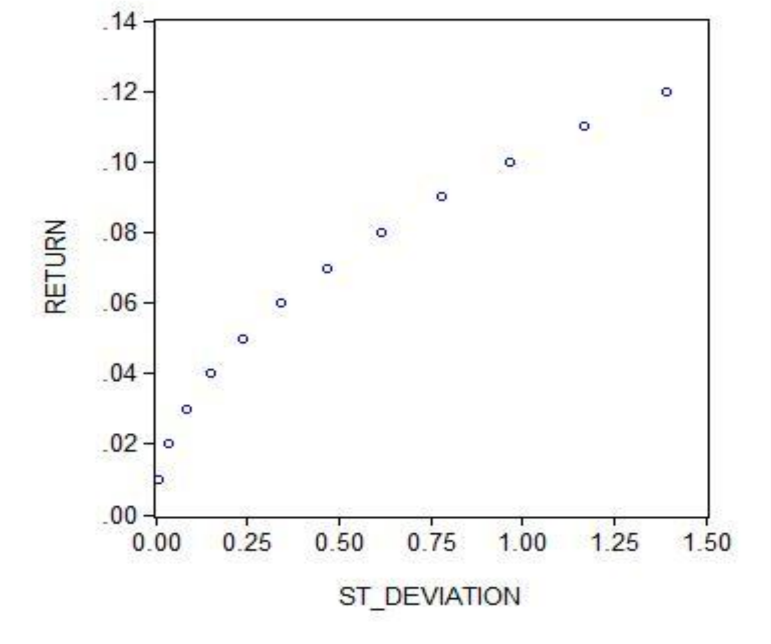
Κεφάλαιο 5

5.1 Εφαρμογή

Αρχικά συλλέξαμε στοιχεία από τους δείκτες MSCI USA και MSCI EU. Τα στοιχεία χρονολογούνται από το 1999 έως και το 2006. Ουσιαστικά προσπαθήσαμε να συγκεντρώσουμε στοιχεία από τις 2 μεγαλύτερες αγορές παγκοσμίως.

Με τα στοιχεία που συγκεντρώσαμε αρχικά δημιουργήσαμε 12 χαρτοφυλάκια με τη μέθοδο του Markowitz. Τα αποτελέσματα τα οποία πήραμε μας έδωσαν το Σχήμα 5.1

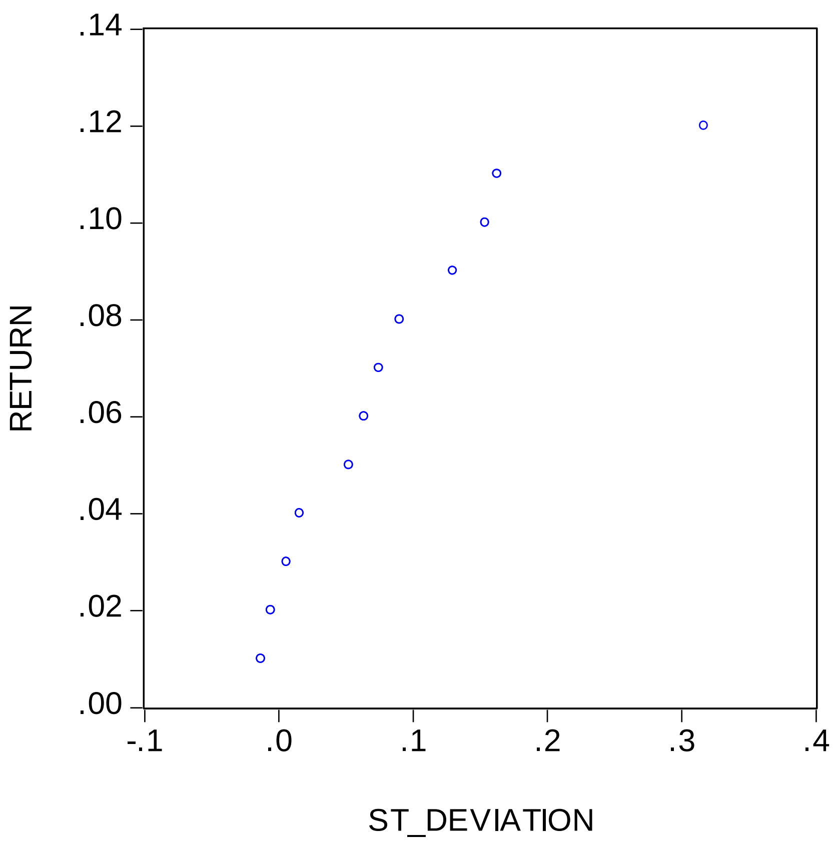
Σχήμα 5.1. Efficient frontier



Αφού λοιπόν έχουμε εκτιμήσει (πιο πριν) το διάνυσμα των αποδόσεων και τον πίνακα διακύμανσης - συνδιακύμανσης χρησιμοποιώντας τα ιστορικά στοιχεία, θα πρέπει να δούμε τώρα τι θα συμβεί με το Resamplinmng που περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

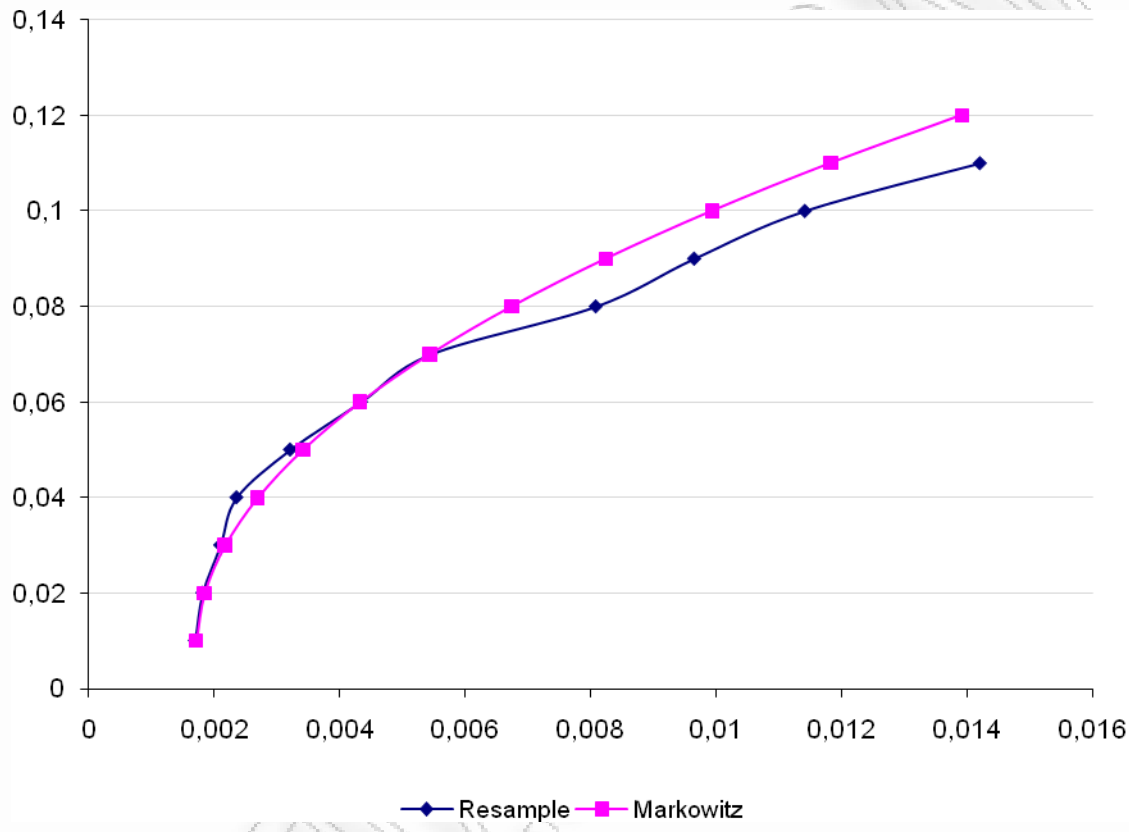
Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Bootstrap «τρέχουμε» 1000 draws. Έτσι λοιπόν δημιουργούνται 1000 διαφορετικά ζεύγη βαρών (weights) για κάθε ένα από τα 12 χαρτοφυλάκια. Από αυτά τα βάρη παίρνουμε τον μέσο όρο τους και δημιουργούμε εκ νέου 12 νέα χαρτοφυλάκια με διαφορετικά σταθμά, αυτή τη φορά, χρησιμοποιώντας τις αποδόσεις και τον πίνακα διακύμανσης - συνδιακύμανσης που έχουμε εκτιμήσει στην προηγούμενη διαδικασία. Έτσι λοιπόν παίρνουμε τα αποτελέσματα που φαίνονται στο Σχήμα 5.2

Σχήμα 5.2. Αποτελέσματα του Resampling frontier



Βάζοντας τα αποτελέσματα στο ίδιο γράφημα θα πάρουμε την εικόνα που έχουμε στο Σχήμα 5.3

Σχήμα 5.3. Efficient vs Resampling Frontier



Βλέπουμε ότι το σχήμα που προκύπτει είναι σύμφωνο με τις παρατηρήσεις της βιβλιογραφίας, για τη μέθοδο του resampling, που αναπτύξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

5.2 Συμπέρασμα

Το Portfolio resampling προσφέρει έναν διαισθητικό τρόπο για την ανάπτυξη τεστ για τη στατιστική διαφορά μεταξύ των δύο χαρτοφυλακίων (διανυσματικά σταθμά). Το Resampling θα είναι συνεπώς η μεθοδολογία της επιλογής για την ανίχνευση της στατιστικής σημαντικότητας των δύο χαρτοφυλακίων. Αυτό που δεν είναι σαφές, ωστόσο, είναι γιατί η κατανομή των σταθμών μέσο του resampled για την κατασκευή του χαρτοφυλακίου θα πρέπει να αποτελέσει τη βέλτιστη λύση αντιμετώπισης του προβλήματος που σχετίζεται με το σφάλμα εκτίμησης για την κατασκευής ενός optimal χαρτοφυλακίου. Στην περίπτωση των long – short χαρτοφυλακίων, η χρήση (του κατά μέσο όρο) averaged resampled χαρτοφυλακίων δεν παρέχει καμία βελτίωση σε σχέση με τις παραδοσιακές λύσεις Markowitz (στην πραγματικότητα, οι λύσεις-που είναι, τα σύνορα-συμπίπτουν). Στην περίπτωση των long-only περιορισμών, το resampled efficiency οδηγεί σε περισσότερο-διαφοροποιημένα χαρτοφυλάκια, τα οποία είναι γνωστά για να «χτυπήσει» τα χαρτοφυλάκια Markowitz σε ελέγχους εκτός δείγματος. Ως εκ τούτου, τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν από τον Michaud (1998) ότι το resampled efficiency (απόδοση) χτυπούν το απλό χαρτοφυλάκιο του Markowitz σε ελέγχους εκτός δείγματος (out-of-sample) είναι έκπληξη.

Αυτό που είναι σαφές είναι ο βαθμός στον οποίο το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να γενικευτεί, διότι τα resampling χαρτοφυλάκια φέρουν μαζί τους κάποια ανεπιθύμητα χαρακτηριστικά. Επιδείνωση του Sharpe ratio (που προκαλείται από μεγαλύτερη αστάθεια) τείνει να αυξήσει την κατανομή των εν λόγω περιουσιακών στοιχείων στα υψηλής απόδοσης (high – return) χαρτοφυλάκια επειδή ευνοϊκή σχεδίαση αποδόσεων οδηγεί σε μεγάλες κατανομές ενώ δυσμενής σχεδίαση οδηγεί σε μηδενικές κατανομές στα περισσότερα («επιλογής»). Επιπλέον, το αποτελεσματικό σύνορο μπορεί να εμφανίζει σημεία καμπής (το πέρασμα από κοίλο σε κυρτό).

Τέλος, αν και η τελική δοκιμή της κάθε μεθόδου κατασκευής χαρτοφυλακίου είναι έξω από τις επιδόσεις του δείγματος (out - of – sample performance), η αποτελεσματικότητα Markowitz δεν είναι το σχετικό σημείο αναφοράς για resampled απόδοση. Αντιθέτως είναι οι εναλλακτικές λύσεις Bayesian, οι οποίες έχουν ένα ισχυρό θεμέλιο στη θεωρία αποφάσεων. Ως εκ τούτου, μια σημαντική οδός για μελλοντική έρευνα είναι το πώς συγκρίνεται εναλλακτικές λύσεις με το resampling Bayesian.

Εν ολίγοις, αν και γιατί το resampled efficiency θα πρέπει να είναι η βέλτιστη δεν είναι σαφές, το resampling παραμένει μια ενδιαφέρουσα ευρετική (εμπειρική) μέθοδος για να ασχοληθεί με το σημαντικό πρόβλημα της μεγιστοποίησης λάθους.

Βιβλιογραφία

[1] Best, M., and R. Grauer. (1991), "On the Sensitivity of Mean Variance Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results." *Review of Financial Studies,* vol. 4, no. 2.

[2] Britten-Jones, M. (1999). "The Sampling Error in Estimates of Mean-Variance Efficient Portfolios." *Journal of Finance,* vol. 54, no. 2.

[3] Campbell, J.Y., Lo, A.W., MacKinlay, A.C., (1997). "The Econometrics of Financial Markets", Princeton University Press.

[4] Chopra, V., and W. Ziemba. (1993). "The Effects of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice." *Journal of Portfolio Management,* vol. 19, no.2

[5] Chopra, V.K., C.R. Hensel, and A.L. Turner. (1993). "Massaging Mean-Variance Inputs: Returns from Alternative Investment Strategies in the 1980s." *Management Science,* vol 39, no. 7

[6] Edwin J. Elton, Martin J. Gruber, Stephen j. Brown and William n. Goetzann (7^{th} Edition) "*Modern Portfolio Theory and Investment Analysis".*

[7] Fama, E., (1970). "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work", Journal of Finance, 25, p.p.383-417

[8] Fletcher J., Hillier J., (2001): "An Examination of Resampled Portfolio Efficiency", Financial Analysts Journal 57, 5, 66-74.

[9] Gibbons, M., S. Ross, and J. Shanken. (1989). "A Test of Efficiency of a Given Portfolio." *Econometrica,* vol. 57, no. 5

[10] Huang, C., and R. Litzenberger. (1988). *Foundations of Financial Economics.* New York: Prentice Hall.

[11] Jobson, J., and B. Korkie. (1983). "*Statistical Inference in Two Parameter Portfolio Theory with Multiple Regression Software"* Journal OF Financial and Quantitative Analysis, vol. 18, no. 2

[12] Kritzman, M., (2006). “Are Optimizers Error Maximizers? Hype versus reality?”, Journal of Portfolio Management, 32:4, 66-69.

[13] Mendoza, J.L., D.E. Hart, and A. Powell. (1991). “*A bootstrap confidence interval based on a correlation corrected for range restriction.”* Multivariate Behavioral Research 26

[14] Mendoza, J.L., D.E. Hart, and A. Powell. (1991). “*A bootstrap confidence interval based on a correlation corrected for range restriction.”* Multivariate Behavioral Research 26

[15] Mendoza, J.L., D.E. Hart, and A. Powell. (1991). “*A bootstrap confidence interval based on a correlation corrected for range restriction.”* Multivariate Behavioral Research 26

[16] Markowitz, H. 1987. “*Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets.”* New York.

[17] Michaud, R. (1989). “The Markowitz Optimization Enigma: Is ‘Optimized’ Optimal?’’ Financial Analysts Journal, vol. 45, no.1

[18] Michaud, R.(1998). “*Efficient Asset Management”.* Boston, MA: Harvard Business School Press.

[19] Narwrocki, D. (1996). “*Portfolio Analysis with a Large Universe of Assets.”* Applied Economics, vol 28, no.9

[20] Pitman, E.J.G. (1973). “*Significance tests which may be applied to samples from any populations”.* Journal of the Royal Statistical Society.

[21] Scerer, B. Forthcoming (2002). “*Portfolio Construction and Risk Budgeting.”* London: Riskwaters.

[22] Sharpe, W. (1970). “*Portfolio Theory and Capital Markets.”* New York: McGraw-Hill.

[23] Simon. J.L. (1993). “*Resampling: The new statistics.”* Belmont, CA.