

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΤΥΠΟΥ WEIBULL
ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ**

Βασίλειος Σ. Ξηράκης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Νοέμβριος 2009

Η παρούσα διπλωματική εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ..... συνεδρίαση σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Τα μέλη της επιτροπής ήταν:

- Καθηγητής Κούτρας Μάρκος (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής Ατζουλάκος Δημήτριος
- Επίκουρος Καθηγητής Μπούτσικας Μιχαήλ

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS**

**WEIBULL MODEL DISTRIBUTIONS
IN SYSTEM RELIABILITY
THEORY**

by
Vasileios S. Xirakis

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and
Insurance Science of the University of Piraeus in
partial fulfilment of the requirements for the
degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece
November 2009

РАМЕТЪМО РЕПАА

ΠΑΝΕΚΣΤΗΜΟ ΓΕΡΑΝ

Στους γονείς μου

РАМЕТЪМО РЕПАА

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, για τη συμπαράστασή της σε όλη τη σταδιοδρομία μου. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω, τόσο τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Κούτρα Μάρκο για τις σημαντικές παρατηρήσεις του, οι οποίες βοήθησαν ουσιαστικά στην ολοκλήρωσή της διπλωματικής μου εργασίας, όσο και τους καθηγητές κυρίους Ατζουλάκο Δημήτριο και Μπούτσικα Μιχαήλ, οι οποίοι με ενθάρρυναν παντοιοτρόπως καθ' όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

РАМЕТЪМО РЕПАА

Περίληψη

Η πιο κεντρική κατανομή στη θεωρία αξιοπιστίας είναι η κατανομή Weibull. Θα μπορούσε κανείς να πει ότι η κατανομή Weibull είναι για τη θεωρία αξιοπιστίας ό,τι και η κανονική κατανομή για την κλασική Στατιστική.

Πέραν του βασικού μοντέλου πιθανοτήτων της κατανομής Weibull, έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία διάφορες επεκτάσεις ή και τροποποιήσεις της ώστε να γίνει πιο ευέλικτη και να μπορεί να προσαρμοσθεί ικανοποιητικά σε πραγματικά δεδομένα.

Στην παρούσα εργασία θα παρουσιαστούν αναλυτικά διάφορα μοντέλα κατανομών, τα οποία είναι επεκτάσεις ή τροποποιήσεις της κατανομής Weibull, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση σε εκείνα που μπορούν να περιγράψουν, με ένα μοναδικό συναρτησιακό τύπο την κατανομή ολόκληρου του χρόνου ζωής μιας μονάδας, η οποία έχει την τυπική βαθμίδα αποτυχίας της θεωρίας αξιοπιστίας (bathtub curve). Επίσης, θα δοθούν οι βασικές ιδιότητες των κατανομών αυτών και θα παρουσιαστούν τεχνικές στατιστικής συμπερασματολογίας για δεδομένα που προέρχονται από τέτοιες κατανομές.

Abstract

The most commonly used distribution in reliability theory is the Weibull distribution. We may state that the Weibull distribution is as significant for reliability analysis as the normal distribution is for classical statistics.

In addition to the basic probability model of the Weibull distribution, various extensions or modifications of it have appeared in the relative literature so that a more flexible model be reached which can be suitably adapted for use with real life data.

The present thesis deals in detail with various models of distributions associated with the Weibull distribution; paying special attention to those ones that can portray a functional type representing the entire lifespan distribution of a unit with the typical hazard rate function of reliability theory (bathtub curve). Furthermore the basic properties of those distributions will be presented as well as statistical inference techniques for data that follow those distributions.

Περιεχόμενα

Περίληψη	ix
Abstract	x
Περιεχόμενα	xi
Κατάλογος πινάκων	xiii
Κατάλογος σχημάτων	xv
Κατάλογος συντομογραφιών	xix

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Βασικές έννοιες αξιοπιστίας

1.1 Συστήματα αξιοπιστίας	1
1.2 Συνάρτηση αξιοπιστίας στο χρόνο	2
1.3 Ορισμός βαθμίδας αποτυχίας	3
1.4 Υπολογισμός του $MTTF = E(T)$ και της $V(T)$	5
1.5 Ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής	6
1.6 Μορφές της βαθμίδας αποτυχίας	8
1.7 Εκθετική κατανομή	15
1.8 Κατανομή ακραίων τιμών	17

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Η κλασική κατανομή Weibull

2.1 Ιστορική αναδρομή	21
2.2 Το μοντέλο του αδύναμου κρίκου	21
2.3 Η κατανομή Weibull	22
2.4 Μέτρα θέσης και διασποράς	26
2.5 Γραφήματα Weibull	30
2.6 Στατιστική συμπερασματολογία	34
2.6.1 Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας	34
2.6.2 Μέθοδος των Ροπών	46
2.6.3 Γραφική μέθοδος	47
2.7 Εφαρμογές της κλασικής κατανομής Weibull	47
2.7.1 Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας	48
2.7.2 Γραφική μέθοδος	48

2.7.3 Παρουσίαση αποτελεσμάτων.....	49
2.8 Σύγκριση μεθόδων εκτίμησης.....	54
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Μετασχηματισμένες κατανομές Weibull	
3.1 Εισαγωγή.....	57
3.2 Γραμμικός μετασχηματισμός.....	57
3.3 Μη γραμμικός μετασχηματισμός.....	70
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Γενικεύσεις/Τροποποιήσεις των χαρακτηριστικών αξιοπιστίας της κατανομής Weibull (Τύπου II)	
4.1 Εισαγωγή.....	87
4.2 Μοντέλο II(α)-1: Ψευδό-Weibull κατανομή.....	87
4.3 Μοντέλο II(α)-2: Μοντέλο Stacy-Mihram.....	96
4.4 Μοντέλο II(β)-1: Εκτεταμένη κατανομή Weibull.....	96
4.5 Μοντέλο II(β)-2: Εκθετική κατανομή Weibull.....	107
4.6 Μοντέλο II(β)-3: Τροποποιημένη κατανομή Weibull.....	120
4.7 Μοντέλο II(β)-(4-6): Γενικευμένη οικογένεια Weibull.....	126
4.8 Μοντέλο II(β)-7: Γενικευμένη τριπαραμετρική κατανομή Γάμμα.....	131
4.9 Μοντέλο II(β)-8: Εκτεταμένη γενίκευση της κατανομής Γάμμα.....	135
4.10 Μοντέλο II(β)-(9-10): Μοντέλα Weibull με τέσσερις – πέντε παραμέτρους.....	138
4.11 Μοντέλο II(β)-(11): Περικομμένη κατανομή Weibull.....	140
4.12 Μοντέλο II(β)-(12): Κατανομές Slymen and Lachenbruch.....	144
4.13 Μοντέλο II(β)-(13): Επεκταμένη Weibull.....	149
4.14 Εφαρμογή με χρόνο ζωής που ακολουθούν τη BC.....	157
4.15 Σύνοψη – Συμπεράσματα.....	161
Παράρτημα	
Εντολές στο Mathematica.....	165
Βιβλιογραφία	177

Κατάλογος Πινάκων

1.1	Σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων $F(t)$, $f(t)$, $R(t)$, $\lambda(t)$ και $A(t)$	5
2.1	Χρονολογικά δεδομένα ταχύτητας ανέμου	29
2.2	Πίνακας αποτελεσμάτων παλινδρόμησης για τις παρατηρήσεις του Πίνακα 2.1	52
2.3	Προσομοιωμένες MSV τιμές	54
4.1	Χρόνοι ζωής 50 μονάδων από εργασία του Aarset	157
4.2	Πίνακας αποτελεσμάτων πολλαπλής παλινδρόμησης για τις προσαρμοσμένες παρατηρήσεις του Πίνακα 4.1 στο μοντέλο της τροποποιημένης κατανομής Weibull	158

РАВЕЉИЧНО ПЕРПА

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Σύστημα αξιοπιστίας	1
1.2	Γράφημα αύξουσας βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$	9
1.3	Γράφημα φθίνουσας βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$	9
1.4	Γράφημα σταθερής βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$	10
1.5	Λεκανοειδής καμπύλη (bathtub curve)	11
1.6	Απλοποιημένο μοντέλο βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ που περιγράφει προσεγγιστικά τη BC	12
1.7	Μείωση της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ εξαλείφοντας πρώιμες αποτυχίες και καθυστερώντας την περίοδο φθοράς κάνοντας προληπτική συντήρηση	13
1.8	Βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ που παρουσιάζει τη μορφή RBC	13
1.9	Απλοποιημένο μοντέλο βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ που περιγράφει προσεγγιστικά την RBC	14
1.10	Βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ που παρουσιάζει τη μορφή MBC	15
1.11	Συνάρτηση αξιοπιστίας, συνάρτηση πυκνότητας και βαθμίδα αποτυχίας της εκθετικής κατανομής για διάφορες τιμές της παραμέτρου λ	16
2.1	Συνάρτηση κατανομής του κλασικού μοντέλου Weibull (2.1) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β	23
2.2	Γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας (2.3) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β	24
2.3	Γράφημα της συνάρτησης αξιοπιστίας (2.6) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β	25
2.4	Γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ (2.7) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β	26
2.5	<i>TTT</i> -plot της κλασικής κατανομής Weibull για διάφορες τιμές της παραμέτρου β	33
2.6	Γράφημα διασποράς και της προσαρμοσμένης ευθείας παλινδρόμησης με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων	53
3.1	Παράδειγμα <i>WPP</i> plot της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull με παραμέτρους με $\alpha = 0.5$, $\beta = 3.5$, $\tau = 2$	62

3.2	Γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ (3.13) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β , κρατώντας την τιμή της παραμέτρου α και τ σταθερή ($\alpha=1$, $\tau=1$).	66
3.3	Γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας (3.15) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β	69
3.4	Γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ (3.16) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β	70
3.5	Γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας (3.19) για διάφορες τιμές της παραμέτρου η με τ σταθερή ($\tau=1$)	74
3.6	Γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ (3.20) για διάφορες τιμές της παραμέτρου η κρατώντας την παράμετρο τ σταθερή ($\tau=1$)	75
3.7	Γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας (3.25) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β , κρατώντας την τιμή της παραμέτρου α σταθερή ($\alpha=1$)	79
3.8	Γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ (3.26) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β , κρατώντας την τιμή της παραμέτρου α σταθερή ($\alpha=1$)	80
3.9	WPP γραφήματα για την αντίστροφη και την κλασική κατανομή Weibull και οι ασύμπτωτες της αντίστροφης κατανομής Weibull	83
3.10	WPP γραφήματα για την αντίστροφη και την κλασική κατανομή Weibull και οι ασύμπτωτες της κλασικής κατανομής Weibull	84
4.1	Γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας (4.3) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β με α σταθερή ($\alpha=1$)	88
4.2	Γράφημα της συνάρτησης κατανομής (4.4) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β , κρατώντας την τιμή της παραμέτρου α σταθερή ($\alpha=1$)	89
4.3	Γράφημα της συνάρτησης αξιοπιστίας (4.5) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β , κρατώντας την τιμή της παραμέτρου α σταθερή ($\alpha=1$)	90
4.4	Γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ (4.6) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β , κρατώντας την τιμή της παραμέτρου α σταθερή ($\alpha=1$)	90
4.5	Γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας (4.7) για διάφορες τιμές της παραμέτρου θ	91
4.6	Γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας (4.8) για διάφορες τιμές της παραμέτρου θ .	91

4.7	Γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας (4.9) για διάφορες τιμές της παραμέτρου θ	92
4.8	Γράφημα της συνάρτησης κατανομής (4.14) για διάφορες τιμές της παραμέτρου ν , $\beta = 0.5$ και $\alpha = 1$	97
4.9	Γράφημα της συνάρτησης κατανομής (4.14) για διάφορες τιμές της παραμέτρου ν , $\beta = 1.5$ και $\alpha = 1$	98
4.10	Γράφημα της συνάρτησης κατανομής (4.15) για διάφορες τιμές της παραμέτρου ν , $\beta = 0.5$ και $\alpha = 1$	98
4.11	Γράφημα της συνάρτησης κατανομής (4.15) για διάφορες τιμές της παραμέτρου ν , $\beta = 1.5$ και $\alpha = 1$	99
4.12	Γράφημα της συνάρτησης κατανομής (4.16) για διάφορες τιμές της παραμέτρου ν , $\beta = 0.5$ και $\alpha = 1$	100
4.13	Γράφημα της συνάρτησης κατανομής (4.16) για διάφορες τιμές της παραμέτρου ν , $\beta = 0.8$ και $\alpha = 1$	100
4.14	Γράφημα της συνάρτησης κατανομής (4.16) για διάφορες τιμές της παραμέτρου ν , $\beta = 1$ και $\alpha = 1$	100
4.15	Γράφημα της συνάρτησης κατανομής (4.16) για διάφορες τιμές της παραμέτρου ν , $\beta = 2$ και $\alpha = 1$	101
4.16	WPP γράφημα για την εκτεταμένη κατανομή Weibull, για διάφορες τιμές της παραμέτρου ν με τις παραμέτρους α και β σταθερές ($\alpha = 425.53$, $\beta = 1.69$)	104
4.17	Γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας (4.24) για διάφορες τιμές των παραμέτρων β και ν με α σταθερή ($\alpha = 1$)	108
4.18	Γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ (4.26) για διάφορες τιμές των παραμέτρων β και ν με α σταθερή ($\alpha = 1$)	108
4.19	Παράδειγμα WPP γραφήματος για την εκθετική κατανομή Weibull με παραμέτρους $\nu > 1$, $\alpha = 5$, $\beta = 2.5$, $\nu = 2$	117
4.20	Παράδειγμα WPP γραφήματος για την εκθετική κατανομή Weibull με παραμέτρους $\nu < 1$, $\alpha = 5$, $\beta = 2.5$, $\nu = 0.2$	117
4.21	Γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ (4.45) για διάφορες τιμές της παραμέτρου λ και β με ν σταθερή ($\nu = 0.3$)	122

4.22	Παράδειγμα WPP γραφήματος για την τροποποιημένη κατανομή Weibull με παραμέτρους $\lambda = 0.1$, $\beta = 0.2$ και $\nu = 0.1$	124
4.23	Γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ (4.55) για διάφορες τιμές των παραμέτρων β και ν με α σταθερή ($\alpha = 1$)	128
4.24	Γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας (4.59) για διάφορες τιμές της παραμέτρου m με $\alpha = 1$, $n = 1$ και $\lambda = 1$	136
4.25	Γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ (4.62) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β με $a = 0.1$, $b = 5$ και $\lambda = 1$	138
4.26	Παράδειγμα WPP γραφήματος για το μοντέλο Weibull με τέσσερις παραμέτρους όπου οι τιμές των παραμέτρων είναι $a = 1$, $b = 2$, $\lambda = 0.1$, $\beta = 0.2$	139
4.27	Γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ (4.63) για διάφορες τιμές των παραμέτρων β_1 και β_2 με $a = 0$, $b = 1$ και $\lambda = 1$	140
4.28	Γραφήματα συναρτήσεων πυκνότητας των διπλά, δεξιά και αριστερά περικομμένων κατανομών Weibull και η συνάρτηση πυκνότητας της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull με $t_l = 2$, $t_r = 3$, $\tau = 1$, $\alpha = 2$ και $\beta = 2.5$	142
4.29	Γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ (4.72) για διάφορες τιμές των παραμέτρων α , β και k	147
4.30	Γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας (4.77) για διάφορες τιμές των παραμέτρων λ και β με $\alpha = 100$	151
4.31	Γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ (4.78) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β με $\alpha = 100$ και $\lambda = 2$	153
4.32	Παράδειγμα WPP γραφήματος της επεκταμένης Weibull με παραμέτρους $\alpha = 100$, $\beta = 0.6$ και $\lambda = 2$	155
4.33	TTT γράφημα για τα δεδομένα του Πίνακα 4.1 από την εργασία του Aarset (1987)	157
4.34	WPP γράφημα των δεδομένων του Πίνακα 4.1	158
4.35	Βαθμίδα αποτυχίας της τροποποιημένης τροποποιημένης κατανομής Weibull και της επεκταμένης Weibull με παραμέτρους που έχουν εκτιμηθεί από τα δεδομένα του Πίνακα 4.1	161

Κατάλογος συντομογραφιών

<i>BC</i>	Λεκανοειδής καμπύλη
<i>DFR</i>	Φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας
<i>f(t)</i>	Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
<i>F(t)</i>	Αθροιστική συνάρτηση κατανομής
<i>i.i.d</i>	Ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένες
<i>IFR</i>	Αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας
<i>MBC</i>	Τροποποιημένη λεκανοειδής καμπύλη
<i>MSV</i>	<i>Mean sum variation</i>
<i>MTTF</i>	Μέσος χρόνος ζωής μέχρι την αποτυχία
<i>R(t)</i>	Συνάρτηση αξιοπιστίας
<i>RBC</i>	Αντίστροφη λεκανοειδής καμπύλη
<i>T~Exp(λ)</i>	Η τυχαία μεταβλητή T ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ
<i>T~W(α,β)</i>	Η τυχαία μεταβλητή T ακολουθεί την κλασική κατανομή Weibull με παραμέτρους α και β
<i>TTT-plot</i>	Χάρτες συνολικού χρόνου ελέγχου
ΓΜ	Γραφική μέθοδος
ΕΜΠ	Εκτιμητήρια μέγιστης πιθανοφάνειας
<i>λ(t)</i>	Βαθμίδα αποτυχίας
<i>Λ(t)</i>	Συνάρτηση κινδύνου
ΜΡ	Μέθοδος των ροπών
τ.μ	Τυχαία μεταβλητή
<i>WPP plot</i>	Χάρτης πιθανότητας για την κατανομή Weibull

РАСЧЕТНО ТЕРА

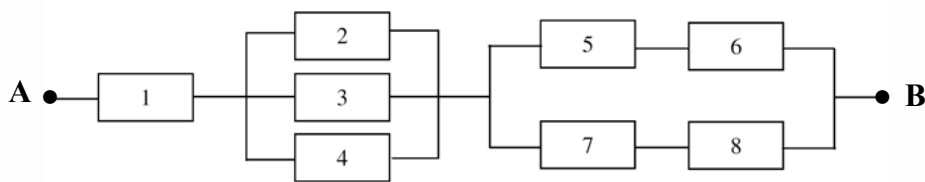
Κεφάλαιο 1^ο

Βασικές έννοιες αξιοπιστίας

1.1 Συστήματα αξιοπιστίας

Σύστημα ονομάζεται ένα σύνολο μονάδων τοποθετημένων και συνδεδεμένων, με κάποια δομή. Στο Σχήμα 1.1, παρουσιάζεται ένα ενδεικτικό σύστημα αξιοπιστίας (το σύστημα θεωρείται ότι αποτυγχάνει αν δεν υπάρχει μία διαδρομή με λειτουργούσες μονάδες από το σημείο A προς το σημείο B).

Σχήμα 1.1



Έστω ένα σύστημα n μονάδων οι οποίες είναι συνδεδεμένες με κάποιο τρόπο. Τότε η κατάσταση της i μονάδας, κάποια συγκεκριμένη στιγμή, περιγράφεται από τη δίτιμη μεταβλητή:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η μονάδα λειτουργεί} \\ 0, & \text{αν η μονάδα δε λειτουργεί.} \end{cases}$$

Όμοια η κατάσταση του συστήματος των n μονάδων, κάποια συγκεκριμένη στιγμή, περιγράφεται από τη συνάρτηση δομής :

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{αν το σύστημα λειτουργεί} \\ 0, & \text{αν το σύστημα δε λειτουργεί.} \end{cases}$$

Εισάγοντας στο μοντέλο μας και την έννοια του χρόνου, οι ορισμοί αυτοί γενικεύονται, έτσι ώστε η κατάσταση της i μονάδας τη χρονική στιγμή t να περιγράφεται από την επόμενη δίτιμη συνάρτηση:

$$x_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν η μονάδα λειτουργεί τη χρονική στιγμή } t \\ 0, & \text{αν η μονάδα δε λειτουργεί τη χρονική στιγμή } t. \end{cases}$$

Όμοια ορίζεται και η συνάρτηση δομής συναρτήσει του χρόνου. Έτσι θα έχουμε:

$$\varphi(\mathbf{x}(t)) = \begin{cases} 1, & \text{αν το σύστημα λειτουργεί τη χρονική στιγμή } t \\ 0, & \text{αν το σύστημα δε λειτουργεί τη χρονική στιγμή } t. \end{cases}$$

1.2 Συνάρτηση αξιοπιστίας στο χρόνο

Για την περιγραφή του χρόνου μέχρι την αποτυχία (χρόνος ζωής) μίας μονάδας ή ενός συστήματος θα χρησιμοποιήσουμε μη αρνητικές συνεχείς τυχαίες μεταβλητές T . Η πιθανότητα να επιζήσει η μονάδα ή το σύστημα μέχρι τη χρονική στιγμή t (να μην καταστραφεί εντός του χρονικού διαστήματος $[0, t]$) είναι τότε ίση με

$$R(t) = P[\text{να λειτουργεί στο χρόνο } t] = P[T > t], \quad t \geq 0$$

και θα ονομάζεται αξιοπιστία (της μονάδας ή του συστήματος) σε χρόνο t . Είναι προφανές ότι η αναξιοπιστία

$$F(t) = P[\text{να μη λειτουργεί στο χρόνο } t] = 1 - R(t) = 1 - P[T > t] = P[T \leq t], \quad t \geq 0$$

συμπίπτει με τη συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής T . Για το λόγο αυτό η αξιοπιστία $R(t) = 1 - F(t)$ συμβολίζεται μερικές φορές με $\bar{F}(t)$.

Επειδή $F(-\infty) = F(0) = 0$, $F(\infty) = 1$ συνεπάγεται ότι θα ισχύει πάντοτε

$$R(0) = \bar{F}(0) = 1, \quad R(\infty) = \bar{F}(\infty) = 0.$$

Ο μέσος χρόνος ζωής $E(T)$ (της μονάδας ή του συστήματος) θα λέγεται μέσος χρόνος μέχρι την αποτυχία και θα συμβολίζεται και με $MTTF$ (*Mean Time To Failure* ή *Mean Time To Fail*).

Έστω ένα σύστημα n μονάδων ($I_n = \{1, 2, \dots, n\}$). Αν

T_i : ο χρόνος ζωής της i μονάδας

T_S : ο χρόνος ζωής του συστήματος,

τότε θα έχουμε αντίστοιχα για την i -μονάδα

$$R_i(t) = P[T_i > t] = \bar{F}_i(t), \quad t \geq 0$$

$$F_i(t) = 1 - R_i(t) = 1 - P[T_i > t] = P[T_i \leq t], \quad t \geq 0$$

και για το σύστημα

$$R_S(t) = P[T_S > t] = \bar{F}_S(t), \quad t \geq 0$$

$$F_S(t) = 1 - R_S(t) = 1 - P[T_S > t] = P[T_S \leq t], \quad t \geq 0.$$

Η πιθανότητα λειτουργίας p_i της i -μονάδας του συστήματος τη χρονική στιγμή t θα είναι ίση με

$$p_i = R_i(t) = P[T_i > t] = \bar{F}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Οι μονάδες του συστήματος θα θεωρούνται ανεξάρτητες και επομένως οι τυχαίες μεταβλητές T_1, T_2, \dots, T_n θα είναι στοχαστικά ανεξάρτητες. Στην περίπτωση που επιπλέον οι κατανομές των $T_i, i = 1, 2, \dots, n$ είναι ίδιες θα λέμε ότι έχουμε ένα σύστημα i.i.d (*identically, independently distributed*) ή σύστημα ανεξάρτητων και όμοιων μονάδων. Τότε θα ισχύει

$$p = p_i = R_i(t) = R(t) = P[T_i > t] = \bar{F}_i(t) = \bar{F}(t), \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, n.$$

Η αξιοπιστία μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των p_1, p_2, \dots, p_n , δηλαδή

$$R_S = R_S(\mathbf{p}) = R(p_1, p_2, \dots, p_n).$$

Αντικαθιστώντας τα $p_i = R_i(t) = \bar{F}_i(t)$ μπορούμε να εκφράσουμε την αξιοπιστία R_S του συστήματος συναρτήσει του χρόνου ως εξής

$$R_S(t) = R(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t), \dots, \bar{F}_n(t)).$$

Στην i.i.d περίπτωση γράφουμε

$$R_S = R_S(\mathbf{p})$$

αντί για $R(p_1, p_2, \dots, p_n)$ και εισάγοντας την έννοια του χρόνου αντίστοιχα το συμβολισμό

$$R_S(t) = R_S(\bar{F}(t))$$

αντί του

$$R_S(t) = R(\bar{F}(t), \bar{F}(t), \dots, \bar{F}(t)).$$

1.3 Ορισμός της βαθμίδας αποτυχίας

Έστω μια μονάδα ή σύστημα έχει λειτουργήσει χωρίς αποτυχία στο χρονικό διάστημα $[0, t]$, όπου $t \geq 0$. Αν T ο χρόνος ζωής της μονάδας (ή του συστήματος) τότε η πιθανότητα να λειτουργήσει χωρίς αποτυχία για Δt επιπλέον χρονικές μονάδες (δηλαδή να επιβιώσει στο επόμενο χρονικό διάστημα $(t, t + \Delta t]$ θα είναι ίση με

$$P[T > t + \Delta t | T > t] = \frac{P[T > t + \Delta t]}{P[T > t]} = \frac{R(t + \Delta t)}{R(t)}, \quad \text{όπου } R(t) > 0.$$

Αντίστοιχα, η πιθανότητα αποτυχίας στο διάστημα $(t, t + \Delta t]$ δίνεται από τον τύπο

$$P[T \leq t + \Delta t | T > t] = \frac{P[t < T \leq t + \Delta t]}{P[T > t]} = \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)}$$

Αν υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης αξιοπιστίας $R(t)$ τότε μπορούμε να γράψουμε

$$R'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t}$$

οπότε

$$\frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{1}{R(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{R(t)}$$

Επομένως

$$-\frac{R'(t)}{R(t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[T \leq t + \Delta t | T > t]}{\Delta t}$$

Ο λόγος

$$\lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[T \leq t + \Delta t | T > t]}{\Delta t}, \quad t \geq 0$$

(για $R(t) > 0$) που εκφράζει το δεσμευμένο ρυθμό αποτυχίας της μονάδας στο χρονικό διάστημα $(t, t + \Delta t]$ καθώς $\Delta t \rightarrow 0$, δεδομένου ότι $T > t$ καλείται (στιγμιαία) βαθμίδα αποτυχίας ή ένταση αποτυχίας (*instantaneous failure rate, hazard rate, force of mortality, intensity of failures*).

Αφού

$$R'(t) = (1 - F(t))' = -F'(t) = -f(t),$$

όπου $f(t)$ η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής T . Στη θεωρία αξιοπιστίας η συνάρτηση πυκνότητας $f(t)$ συμβολίζεται συνήθως και με $\theta(t)$ και λέγεται συνάρτηση θνησιμότητας.

Ισχύει ότι

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} = -\frac{R'(t)}{R(t)} = (-\ln R(t))', \quad t \geq 0.$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση $\lambda(t) = (-\ln R(t))'$ στο διάστημα $[a, t]$ με $t \geq a$ έχουμε

$$\int_a^t \lambda(s) ds = -\ln R(s) \Big|_a^t = -\ln \frac{R(t)}{R(a)} \Rightarrow R(t) = R(a) \exp \left[-\int_a^t \lambda(s) ds \right].$$

Ειδικά για $a = 0$ βρίσκουμε

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(s)ds\right], \quad t \geq 0.$$

Η ποσότητα

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$$

καλείται συνάρτηση κινδύνου (*hazard function* ή *cumulative hazard function*).

Η σχέση μεταξύ των ποσοτήτων $F(t)$, $f(t)$, $R(t)$, $\lambda(t)$ και $\Lambda(t)$ μπορεί να φανεί καλύτερα από τον παρακάτω πίνακα, όπου οι ποσότητες της πρώτης στήλης δίνονται συναρτήσει των ποσοτήτων της πρώτης γραμμής.

Πίνακας 1.1

	$F(t)$	$R(t)$	$\lambda(t)$	$f(t)$	$\Lambda(t)$
$F(t)$	-	$1 - R(t)$	$1 - e^{-\int_0^t \lambda(s)ds}$	$\int_0^t f(s)ds$	$1 - e^{-\Lambda(t)}$
$R(t)$	$1 - F(t)$	-	$e^{-\int_0^t \lambda(s)ds}$	$\int_t^0 f(s)ds$	$e^{-\Lambda(t)}$
$\lambda(t)$	$\frac{F'(t)}{1 - F(t)}$	$\frac{R'(t)}{R(t)} = (-\ln R(t))'$	-	$\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(s)ds}$	$\Lambda'(t)$
$f(t)$	$F'(t)$	$-R'(t)$	$\lambda(t)e^{-\int_0^t \lambda(s)ds}$	-	$\Lambda'(t)e^{-\Lambda(t)}$
$\Lambda(t)$	$-\ln(1 - F(t))$	$-\ln R(t)$	$\int_0^t \lambda(s)ds$	$\int_0^t \frac{f(s)}{\int_s^\infty f(u)du} ds$	-

Η έννοια της βαθμίδας αποτυχίας εισήχθη για τη μελέτη της «γήρανσης» μιας μονάδας (ή ενός συστήματος) με χρόνο ζωής T . Αν $\lambda(t)$ είναι η βαθμίδα αποτυχίας που αντιστοιχεί στην κατανομή του χρόνου ζωής T , η ποσότητα $\lambda(t) \cdot \Delta t$ είναι ίση με την πιθανότητα να αποτύχει η μονάδα στο διάστημα $(t, t + \Delta t)$ δεδομένου ότι λειτουργεί στο χρόνο t (για Δt μικρό).

1.4 Υπολογισμός του $MTTF = E(T)$ και της $V(T)$

Ο υπολογισμός του μέσου χρόνου ζωής μιας μονάδας ή ενός συστήματος και της αντίστοιχης διακύμανσης διευκολύνεται από την επόμενη γενική πρόταση η οποία ισχύει για οποιεσδήποτε μη αρνητικές συνεχείς τυχαίες μεταβλητές.

Πρόταση. Αν T μια μη αρνητική συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας f_T και συνάρτηση αξιολογίας R_T και g μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $g(0) = 0$, τότε η μέση τιμή $E(g(T))$ (εφ' όσον υπάρχει) θα δίνεται από τον τύπο

$$E(g(T)) = \int_0^{\infty} g(t) f_T(t) dt = \int_0^{\infty} g'(t) R_T(t) dt.$$

Απόδειξη. Θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} E(g(T)) &= \int_0^{\infty} g(t) f_T(t) dt = \int_0^{\infty} \left[\int_0^t g'(x) dx \right] f_T(t) dt = \int_0^{\infty} \int_0^t g'(x) f_T(t) dx dt = \\ &= \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} g'(x) f_T(t) dt dx = \int_0^{\infty} g'(x) R_T(x) dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Θέτοντας $g(t) = t$ στον προηγούμενο τύπο βρίσκουμε

$$MTTF = E(T) = \int_0^{\infty} (t)' R_T(t) dt = \int_0^{\infty} R_T(t) dt$$

Ενώ για τη διακύμανση $V(T)$ αρκεί να θέσουμε $g(t) = t^2$, οπότε θα προκύψει

$$E(T^2) = \int_0^{\infty} 2t R_T(t) dt = 2 \int_0^{\infty} t R_T(t) dt$$

και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε την έκφραση

$$V(T) = E(T^2) - [E(T)]^2$$

οπότε βρίσκουμε

$$V(T) = 2 \int_0^{\infty} t R(t) dt - \left[\int_0^{\infty} R(t) dt \right]^2.$$

Γενικότερα οι ροπές ανώτερης τάξης δίνονται από τον τύπο

$$E(T^s) = s \int_0^{\infty} t^{s-1} R_T(t) dt.$$

1.5 Ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής

Έστω μια μονάδα (ή ένα σύστημα) ηλικίας $t > 0$ της οποίας ο χρόνος ζωής περιγράφεται από τη μη αρνητική συνεχή τυχαία μεταβλητή T . Ο χρόνος που απομένει μέχρι να καταστραφεί η μονάδα δίνεται από την τυχαία μεταβλητή $T-t$. Με τον όρο υπολειπόμενος χρόνος ζωής μιας μονάδας με ηλικία t θα αναφερόμαστε στη (δεσμευμένη) τυχαία μεταβλητή

$$T-t | T > t.$$

Η συνάρτηση κατανομής και η αξιοπιστία μιας μονάδας ηλικίας t θα συμβολίζονται με $F(\cdot|t)$ και $R(\cdot|t)$ αντίστοιχα, δηλαδή

$$F(x|t) = P[T - t \leq x | T > t] = \frac{P[t < T \leq t + x]}{P[T > t]} = \frac{R(t) - R(t + x)}{R(t)}, \quad t \geq 0$$

$$R(x|t) = \bar{F}(x|t) = P[T - t > x | T > t] = \frac{P[T > t + x]}{P[T > t]} = \frac{R(t + x)}{R(t)}, \quad t \geq 0.$$

Από τη σχέση

$$R(x|t) = \frac{R(t + x)}{R(t)} = \frac{e^{-\Lambda(t+x)}}{e^{-\Lambda(t)}} = e^{\Lambda(t) - \Lambda(t+x)}, \quad \text{όπου } t, x \geq 0$$

παραγωγίζοντας ως προς t παίρνουμε

$$\frac{d}{dt} R(x|t) = e^{\Lambda(t) - \Lambda(t+x)} (\Lambda(t) - \Lambda(t+x))' = R(x|t) [\Lambda'(t) - \Lambda'(t+x)]$$

δηλαδή

$$\frac{d}{dt} R(x|t) = R(x|t) [\lambda(t) - \lambda(t+x)].$$

Επομένως

$$\frac{d}{dt} R(x|t) \geq 0 \text{ για κάθε } t, x > 0 \Leftrightarrow \lambda(t+x) \leq \lambda(t) \text{ για κάθε } t, x > 0$$

δηλαδή η συνάρτηση αξιοπιστίας $R(x|t)$ μιας μονάδας (ή συστήματος) ηλικίας t είναι:

- αύξουσα συνάρτηση ως προς t για κάθε $x > 0$ αν και μόνο αν η $\lambda(\cdot)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση.
- φθίνουσα συνάρτηση ως προς t για κάθε $x > 0$ αν και μόνο αν η $\lambda(\cdot)$ είναι αύξουσα συνάρτηση.
- σταθερή συνάρτηση ως προς t για κάθε $x > 0$ αν και μόνο αν η $\lambda(\cdot)$ είναι σταθερή συνάρτηση.

Στην πρώτη περίπτωση θα λέμε ότι ο χρόνος ζωής T είναι *DFR* (*decreasing failure rate*), ενώ στη δεύτερη περίπτωση θα λέμε ότι ο χρόνος ζωής T είναι *IFR* (*increasing failure rate*). Συγκεκριμένα δίνεται ο παρακάτω ορισμός:

Ορισμός. Μία τυχαία μεταβλητή T (ή η αντίστοιχη κατανομή) θα λέμε ότι έχει την ιδιότητα *IFR* ή απλά ότι είναι *IFR* αν η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του t . Αντίστοιχα μία τ.μ. T (ή η αντίστοιχη κατανομή) θα λέμε ότι έχει την ιδιότητα *DFR* ή απλά ότι

είναι *DFR* αν η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του t . Θα γράφουμε σε συντομία $T \in IFR$ (ή $F \in IFR$) και $T \in DFR$ (ή $F \in DFR$) αντίστοιχα.

Δηλαδή, όταν $T \in IFR$ τότε η βαθμίδα αποτυχίας της μονάδας ή του συστήματος χειροτερεύει (η μονάδα/σύστημα γίνεται χειρότερη) όσο αυξάνεται η ηλικία του. Ενώ, όταν $T \in DFR$ τότε η βαθμίδα αποτυχίας μιας μονάδας ή συστήματος βελτιώνεται (η μονάδα/σύστημα γίνεται καλύτερη) όσο αυξάνεται η ηλικία του. Μία τυχαία μεταβλητή T με σταθερή βαθμίδα αποτυχίας ($\lambda(t) = t$ για κάθε $t > 0$) θεωρείται ότι είναι *IFR* και *DFR* ταυτόχρονα.

Πιο περιγραφικά, μπορούμε να πούμε, ότι όταν η βαθμίδα αποτυχίας, $\lambda(t)$, είναι αύξουσα *IFR*, η μονάδα «γερνά» (φθείρεται) με την πάροδο του χρόνου, γιατί όσο περνά ο χρόνος αυξάνεται η πιθανότητα να αποτύχει (λόγω π.χ. αλλοίωσης των χαρακτηριστικών της) δεδομένου ότι λειτουργεί. Το αντίθετο συμβαίνει όταν η βαθμίδα αποτυχίας, $\lambda(t)$, είναι φθίνουσα *DFR*. Σε αυτή τη δεύτερη περίπτωση, η δεσμευμένη πιθανότητα αποτυχίας της μειώνεται και επομένως η μονάδα κατά κάποιο τρόπο λειτουργεί ομαλότερα όσο περνά ο χρόνος.

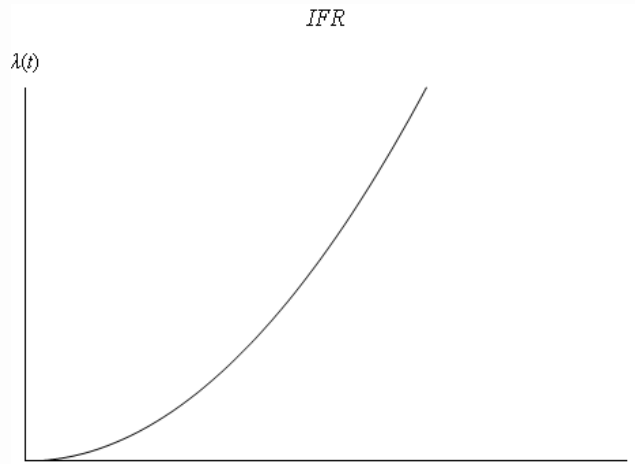
1.6 Μορφές της βαθμίδας αποτυχίας

Η μορφή της βαθμίδας αποτυχίας δηλώνει τον τρόπο με τον οποίο μια μονάδα ή ένα σύστημα γερνάει. Για παράδειγμα, όσο περνά ο χρόνος μπορεί η μονάδα (ή το σύστημα) να φθείρεται με αποτέλεσμα να γίνεται πιθανότερη η αποτυχία της (ή του) ή και το αντίθετο.

A. Αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας, *IFR*.

Όταν ο χρόνος ζωής T έχει την ιδιότητα *IFR*, τότε η μορφή της βαθμίδας αποτυχίας είναι αύξουσα. Η μορφή αυτή είναι η πιο συχνά παρουσιαζόμενη περίπτωση. Στην περίπτωση αυτή, όσο περνάει ο χρόνος η μονάδα (ή το σύστημα) είναι πιο πιθανό να αποτύχει (π.χ. μηχανικές μονάδες ή συστήματα που υποβάλλονται σε κόπωση, βιοϊατρικά πειράματα κ.α.). Παρακάτω δίνεται το γράφημα μιας αύξουσας βαθμίδας αποτυχίας.

Σχήμα 1.2



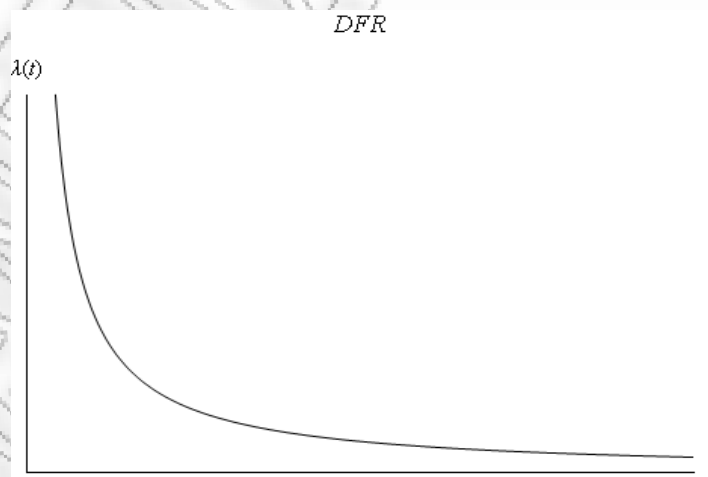
B. Φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας, *DFR*.

Όταν ο χρόνος ζωής T έχει την ιδιότητα *DFR*, τότε η μορφή της βαθμίδα αποτυχίας είναι φθίνουσα.. Σε έναν πληθυσμό που έχει την ιδιότητα *DFR*, ο χρόνος φαίνεται να δρα ευεργετικά απέναντί του, δηλαδή βελτιώνεται με την πάροδο του χρόνου. Ο χρόνος ζωής ενός πληθυσμού αναμένεται να παρουσιάσει φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας, *DFR*, όταν η συμπεριφορά του απέναντι στον χρόνο χαρακτηρίζεται από

- ενδοτράχυνση¹ (στη μηχανική) και
- ανοσία (στη βιολογία).

Παρακάτω δίνεται το γράφημα μιας φθίνουσας βαθμίδας αποτυχίας

Σχήμα 1.3



¹ Η ενδοτράχυνση ή εργοσκληύρυνση είναι μέθοδος αύξησης της αντοχής και της σκληρότητας ενός μεταλλικού υλικού (μετάλλου ή κράματος) με παραμόρφωση πέρα από το όριο διαρροής. Η ενδοτράχυνση έχει ιδιαίτερη σημασία στην μεταλλοτεχνία του χάλυβα, όταν το μέταλλο αυτό υποβληθεί σε ψυχρή κατεργασία, δηλ. σε πλαστική παραμόρφωση υπό θερμοκρασία χαμηλότερη από το μισό της θερμοκρασίας τήξης.

Γ. Σταθερή βαθμίδα αποτυχίας.

Μια απλή αλλά σημαντική περίπτωση αποτελεί η σταθερή βαθμίδα αποτυχίας στο $[0, \infty)$, δηλαδή, $\lambda(t) = \lambda > 0, t \geq 0$. Όταν συναντάμε την περίπτωση αυτή ο χρόνος ζωής είναι δυνατόν να θεωρηθεί ταυτόχρονα, *IFR* και *DFR*. Τότε η μονάδα εξακολουθεί να είναι αγέραστη, αφού με την πάροδο του χρόνου η πιθανότητα να αποτύχει δεν μεταβάλλεται. Δεν προκύπτει όμως ότι η μονάδα δεν θα χαλάσει ποτέ, όπως θα συνέβαινε στην περίπτωση όπου $\lambda(t) = 0$. Ο Villemeur (1992) αναφέρει ότι σε μονάδες όπου οι πρώιμες αποτυχίες έχουν εξαλειφθεί και έχει διενεργηθεί μια προληπτική συντήρηση για να αντικατασταθούν οι φθαρμένες μονάδες πριν αυτές αποτύχουν, η βαθμίδα αποτυχίας τείνει να είναι σταθερή. Η κατανομή του χρόνου ζωής T που έχει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας, $\lambda(t) = \lambda$ θα είναι ίση με

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(s) ds} = 1 - e^{-\int_0^t \lambda ds} = 1 - e^{-\lambda t},$$

επομένως η τυχαία μεταβλητή T θα ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ . Δηλαδή, ισχύει η παρακάτω πρόταση

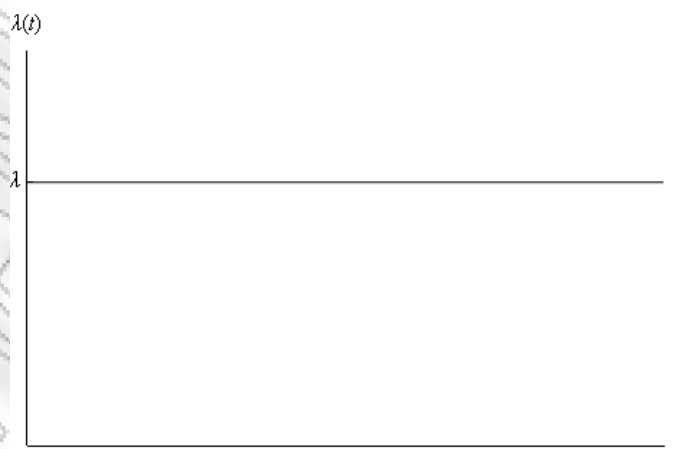
Πρόταση. Ο χρόνος ζωής μιας αγέραστης μονάδας ($\lambda(t) = \lambda, t \geq 0$) ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ .

Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν μια μονάδα έχει χρόνο ζωής που ακολουθεί την εκθετική κατανομή, τότε η μονάδα αυτή μπορεί να θεωρηθεί αγέραστη.

Παρακάτω δίνεται γράφημα μιας σταθερής βαθμίδας αποτυχίας

Σχήμα 1.4

$$T \sim \text{Eκθ}(\lambda)$$

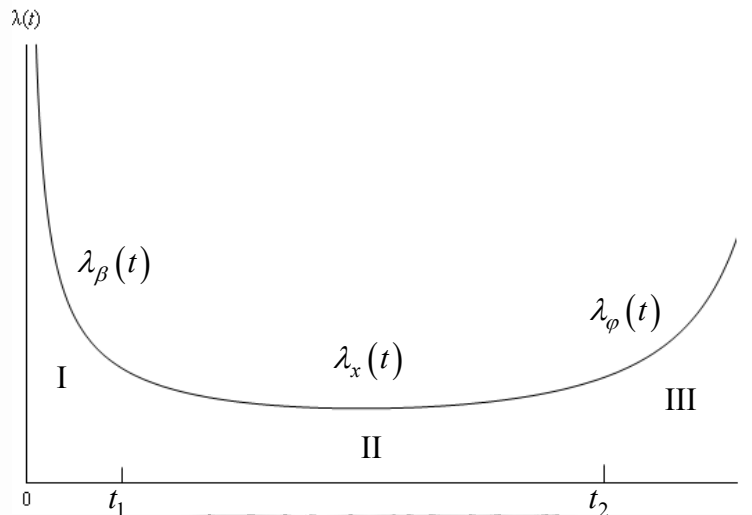


Δ. Λεκανοειδής καμπύλη (*Bathtub curve ή Bathtub shape ή BC*).

Έστω ότι μια μονάδα μπαίνει σε λειτουργία στο χρόνο $t = 0$. Η βαθμίδα αποτυχίας της, στις πιο πολλές περιπτώσεις (συμπεριλαμβανομένης και της περίπτωσης όπου η τυχαία μεταβλητή T εκφράζει το χρόνο ζωής ενός ανθρώπου) έχει την παρακάτω μορφή η οποία είναι γνωστή με την ονομασία *bathtub curve* και θα τη συμβολίζουμε με *BC*.

Σχήμα 1.5

Bathtub Curve



Σύμφωνα με την παραπάνω γραφική παράσταση, ο χρόνος ζωής χωρίζεται (ως προς τη μορφή της βαθμίδας αποτυχίας) σε τρεις περιόδους:

- I.** Η πρώτη περίοδος $[0, t_1]$ καλείται βρεφική περίοδος (*early life period*). Οι αποτυχίες που εμφανίζονται στο διάστημα αυτό μπορούν να αποδοθούν σε αδυναμίες σχεδίασης ή κατασκευής των μονάδων.
- II.** Η δεύτερη περίοδος $[t_1, t_2]$ καλείται χρήσιμη περίοδος (*useful period*) ζωής. Οι αποτυχίες που συμβαίνουν σε αυτή την περίοδο λέγονται τυχαίες ή καταστροφικές.
- III.** Η Τρίτη περίοδος $[t_2, \infty)$ καλείται περίοδος φθοράς (*wear-out period*). Οι αποτυχίες σε αυτό το διάστημα συμβαίνουν λόγω φθοράς/ ηλικίας των μονάδων.

Ο Glaser (1980) έχει δώσει τον παρακάτω ορισμό για τη λεκανοειδή καμπύλη, BC:

Ορισμός. Έστω F μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής με βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ η οποία είναι συνεχής. Τότε η F έχει τη μορφή BC εάν υπάρχει t_0 τέτοιο ώστε (α) $\lambda(t)$ είναι

φθίνουσα όταν $t < t_0$, (β) $\lambda(t)$ είναι αύξουσα όταν $t > t_0$ για παράδειγμα $\lambda'(t) < 0$ όταν $t < t_0$, $\lambda'(t_0) = 0$ και $\lambda'(t) > 0$ όταν $t > t_0$.

Ένας άλλος ορισμός που δόθηκε από τον Mi (1995) είναι ο ακόλουθος:

Ορισμός. Μια κατανομή F έχει τη μορφή BC εάν υπάρχουν $0 \leq t_1 \leq t_2 < \infty$ τέτοια ώστε:

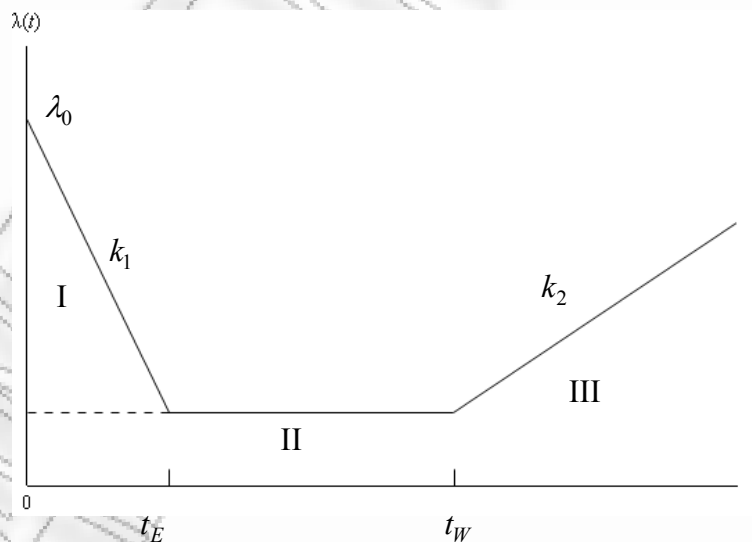
- η $\lambda(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα, όταν $0 \leq t \leq t_1$,
- η $\lambda(t)$ είναι σταθερή, όταν $t_1 \leq t \leq t_2$ και
- γνησίως αύξουσα όταν $t \geq t_2$.

Ένα απλοποιημένο μοντέλο βαθμίδας αποτυχίας που μπορεί να περιγράψει προσεγγιστικά την BC είναι το ακόλουθο

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_0 - k_1 t, & 0 \leq t \leq t_E \\ \lambda_1, & t_E \leq t \leq t_W \\ \lambda_1 + k_2 (t - t_W), & t_W \leq t \end{cases}$$

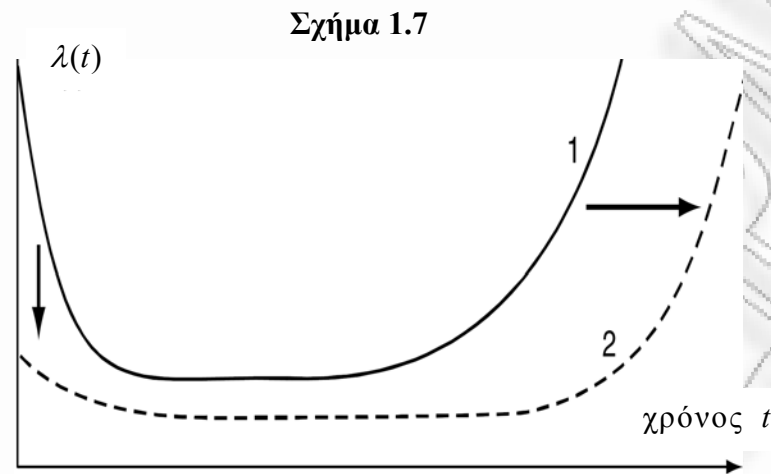
όπου t_E , t_W γνωστά χρονικά σημεία και $\lambda_1 = \lambda_0 - k_1 t_E$. Η μορφή της τελευταίας φαίνεται γραφικά στο παρακάτω σχήμα.

Σχήμα 1.6



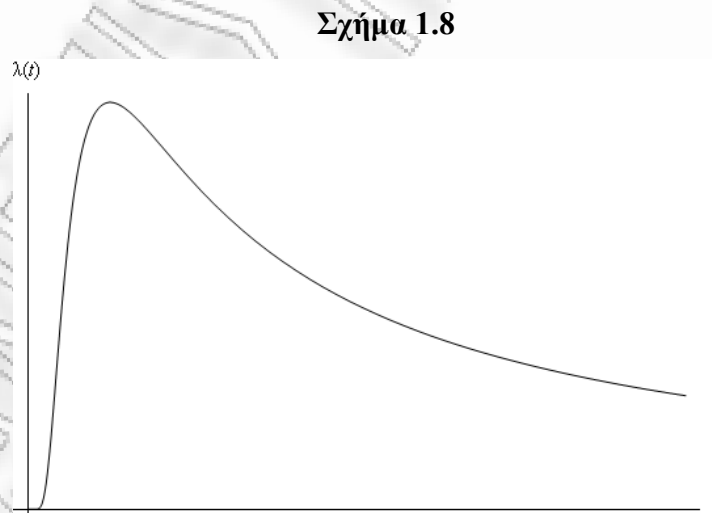
Ο Todinov (2005) αναφέρει ότι αν στην περίοδο φθοράς διενεργήσουμε προληπτικές συντηρήσεις με σκοπό την αντικατάσταση παλιών μονάδων, τότε η αξιοπιστία είναι δυνατόν να αυξηθεί σημαντικά, δηλαδή θα μειωθεί ο ρυθμός αποτυχίας. Αυτή η ενέργεια καθυστερεί

την περίοδο φθοράς που έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της αξιοπιστίας. Τα παραπάνω φαίνονται στο ακόλουθο διάγραμμα.



Ε. Αντεστραμμένη λεκανοειδής καμπύλη (*Reverse Bathtub curve* ή *RBC*).

Μια άλλη μορφή της βαθμίδας αποτυχίας είναι αυτή της αντεστραμμένης λεκανοειδούς καμπύλης (*reverse bathtub curve* ή *upside-down bathtub curve* ή *RBC*). Τις κατανομές που παρουσιάζουν μονοκόρυφες βαθμίδες αποτυχίας $\lambda(t)$, οι Chang (2000) και Jiang et al. (2003) τις ταξινομήσαν στην κατηγορία των RBC. Η βαθμίδα αποτυχίας παρουσιάζει τη μορφή RBC όταν η αποτυχία της μονάδας (ή του συστήματος) προκύπτει από κόπωση ή διάβρωση. Παρακάτω δίνεται η μορφή μιας βαθμίδας αποτυχίας που παρουσιάζει τη μορφή RBC.

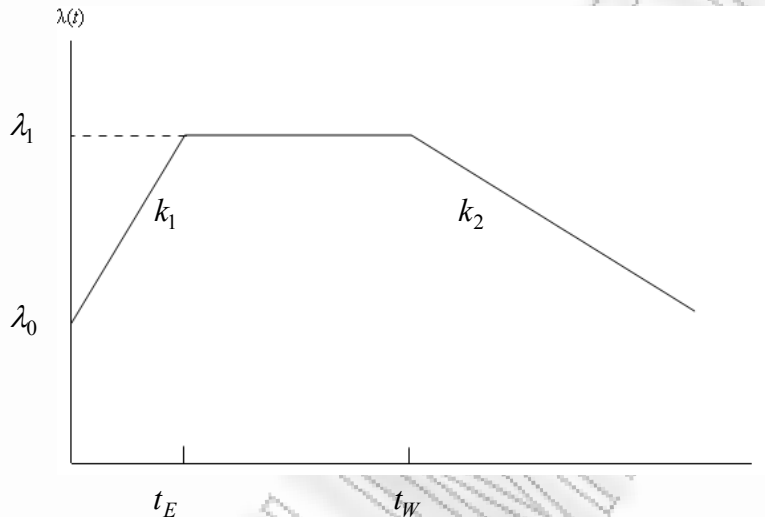


Ένα απλοποιημένο μοντέλο βαθμίδας αποτυχίας που μπορεί να περιγράψει προσεγγιστικά την RBC είναι το ακόλουθο

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_0 + k_1 t, & 0 \leq t \leq t_E \\ \lambda_1, & t_E \leq t \leq t_W \\ \lambda_1 - k_2(t - t_W), & t_W \leq t \end{cases}$$

όπου t_E , t_W γνωστά χρονικά σημεία και $\lambda_1 = \lambda_0 + k_1 t_E$. Η μορφή της τελευταίας φαίνεται γραφικά στο παρακάτω σχήμα.

Σχήμα 1.9



Σε αντιστοιχία με τον ορισμό της BC μπορούμε να δώσουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός. Έστω F μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής με βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ η οποία είναι συνεχής. Τότε η F έχει τη μορφή RBC εάν υπάρχει t_0 τέτοιο ώστε (α) $\lambda(t)$ είναι αύξουσα όταν $t < t_0$, (β) $\lambda(t)$ είναι φθίνουσα όταν $t > t_0$.

ΣΤ. Τροποποιημένη λεκανοειδής καμπύλη (*Modified bathtub curve* ή *MBC*).

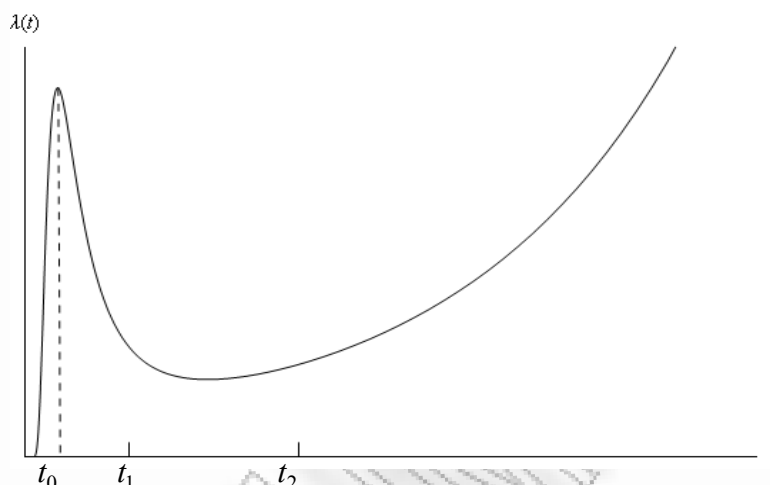
Μια μορφή της βαθμίδας αποτυχίας που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι αυτή της τροποποιημένης λεκανοειδούς καμπύλης (*Modified bathtub curve* ή *MBC*). Η μορφή της MBC είναι αρχικά αύξουσα και στη συνέχεια παρουσιάζει μορφή BC. Η βασική διαφορά που παρουσιάζει η BC με τη MBC είναι η συμπεριφορά τους κατά τη βρεφική περίοδο. Οι Jensen and Petersen (1982) πρότειναν ένα μοντέλο στο οποίο η βρεφική περίοδος παρουσιάζει δύο στάδια: στο πρώτο στάδιο η βαθμίδα αποτυχίας είναι αύξουσα, υποδεικνύοντας αποτυχίες που προέρχονται από κοινά φαινόμενα, όπως ανάρμοστος χειρισμός, εσφαλμένος έλεγχος ποιότητας και σφάλματα κατά την κατασκευή της μονάδας. Το πρώτο στάδιο της MBC φθάνει στο μέγιστο σημείο της σχετικά γρήγορα και έπειτα παρουσιάζεται μια περίοδος όπου η βαθμίδα αποτυχίας είναι φθίνουσα (δεύτερο στάδιο) που καταλήγει με τη σειρά της σε

αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας. Με άλλα λόγια, η βαθμίδα αποτυχίας αρχικά είναι αύξουσα, η οποία φθάνει στο μέγιστο σημείο της σχετικά γρήγορα, και ακολουθείται από μια βαθμίδα αποτυχίας με μορφή BC. Η μορφή MBC συναντάται συχνά σε μίξεις κατανομών, όπως μίξεις κατανομών Γάμμα ή μίξεις κατανομών Weibull.

Παρακάτω δίνεται η μορφή μιας βαθμίδας αποτυχίας που παρουσιάζει τη μορφή MBC.

Σχήμα 1.10

MBC



Στο Σχήμα 1.10 παρατηρούμε ότι μέχρι το t_0 η βαθμίδα αποτυχίας, $\lambda(t)$, είναι αύξουσα και έχουμε τοπικό μέγιστο. Στη συνέχεια η $\lambda(t)$ γίνεται φθίνουσα μέχρι το σημείο t_1 . Από το t_1 μέχρι το t_2 η $\lambda(t)$ είναι περίπου σταθερή και τέλος από το t_2 και έπειτα είναι αύξουσα.

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη BC, RBC και MBC παραπέμπουμε στην εργασία των Mi (1995) και Klutke et al. (2003) καθώς και στο σύγγραμμα των Lai and Xie (2006).

1.7 Εκθετική κατανομή

Έστω T μια τυχαία μεταβλητή που παριστάνει χρόνο ζωής με σταθερή βαθμίδα αποτυχίας, δηλαδή

$$\lambda(t) = \lambda, \text{ για κάθε } t \geq 0.$$

Τότε η συνάρτηση αξιοπιστίας θα είναι ίση με

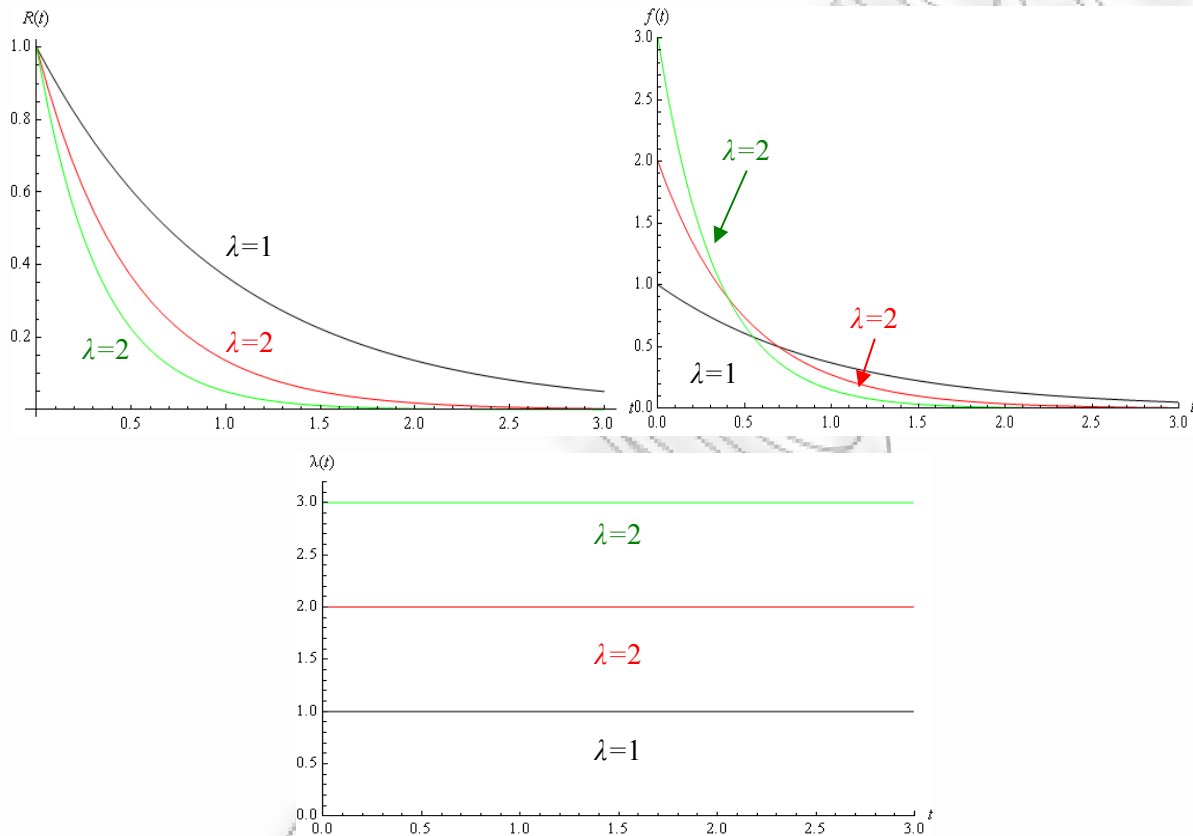
$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(s) ds} = e^{-\int_0^t \lambda ds} = e^{-\lambda t}$$

και η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας θα δίνεται από τον τύπο

$$f(t) = \lambda(t)R(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Επομένως η τυχαία μεταβλητή T ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ (συμβολικά $T \sim \text{Eκθ}(\lambda)$). Παρακάτω δίνονται τα γραφήματα της συνάρτησης αξιοπιστίας της συνάρτησης πυκνότητας καθώς και το γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας της εκθετικής κατανομής για διάφορες τιμές της παραμέτρου λ .

Σχήμα 1.11



Η ροπογεννήτρια της εκθετικής κατανομής θα είναι ίση με

$$E(e^{sT}) = \int_0^{\infty} e^{st} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^{\infty} e^{st-\lambda t} dt = \lambda \int_0^{\infty} e^{-t(\lambda-s)} dt = \frac{\lambda [e^{-t(\lambda-s)}]_0^{\infty}}{\lambda-s} = \left(1 - \frac{s}{\lambda}\right)^{-1}, \quad s < \lambda$$

Η μέση τιμή της εκθετικής κατανομής θα είναι ίση με

$$MTTF = E(T) = \int_0^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt \stackrel{\lambda t=y}{=} \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} y e^{-y} dy = \frac{1}{\lambda}.$$

Όμοια

$$E(T^2) = \int_0^{\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt \stackrel{\lambda t=y}{=} \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\infty} y^2 e^{-y} dy = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Επομένως η διακύμανση της εκθετικής κατανομής θα είναι ίση με

$$V(T) = E(T^2) - [E(T)]^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Η εκθετική κατανομή $Ek\theta(\lambda)$ είναι η μοναδική συνεχής κατανομή που έχει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας. Αυτό ακριβώς εκφράζει την αμνήμονα ιδιότητα της εκθετικής κατανομής. Πιο συγκεκριμένα, αν ο χρόνος ζωής μια μονάδας ακολουθεί την εκθετική κατανομή, τότε η αξιοπιστία μιας μονάδας ηλικίας t είναι ανεξάρτητη της ηλικίας, δηλαδή

$$R(x|t) = \frac{R(t+x)}{R(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda x} = R(x) = R(x|0), \text{ για κάθε } x \geq 0 \text{ και } t \geq 0.$$

Μια τέτοια μονάδα θεωρείται «αγέραστη», αφού κάθε χρονική στιγμή συμπεριφέρεται σαν να ήταν καινούργια.

1.8 Κατανομή ακραίων τιμών (*extreme value distributions*)

Οι κατανομές των ακραίων τιμών παίζουν σημαντικό ρόλο στη θεωρία αξιοπιστίας. Προκύπτουν με ένα φυσικό τρόπο, όταν για παράδειγμα θέλουμε να μελετήσουμε το χρόνο ζωής ενός σειριακού συστήματος που αποτελείται από n όμοιες μονάδες, όταν θέλουμε να μελετήσουμε τη διάβρωση μετάλλων, την αντοχή υλικών κ.α.

Έστω T_1, T_2, \dots, T_n ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που προέρχονται από μια συνεχή συνάρτηση κατανομής $F_T(t)$. Τότε

$$T_{(1)} = \min \{T_1, T_2, \dots, T_n\} = U_n \quad (1.1)$$

$$T_{(n)} = \max \{T_1, T_2, \dots, T_n\} = V_n \quad (1.2)$$

Τότε για τη συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής U_n έχουμε ότι

$$\begin{aligned} F_{U_n}(t) &= P(T_{(1)} \leq t) = 1 - P(T_{(1)} > t) = 1 - P(\min \{T_1, T_2, \dots, T_n\} > t) = \\ &= 1 - P(T_1 > t, T_2 > t, \dots, T_n > t), \end{aligned}$$

λόγω ανεξαρτησίας των T_1, T_2, \dots, T_n ,

$$F_{U_n}(t) = 1 - P(T_1 > t) \cdots P(T_n > t) = 1 - (1 - F_{T_1}(t)) \cdots (1 - F_{T_n}(t)). \quad (1.3)$$

Για τη συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής V_n ισχύει ότι

$$F_{V_n}(t) = P(T_{(n)} \leq t) = P(\max \{T_1, T_2, \dots, T_n\} \leq t) = P(T_1 \leq t, T_2 \leq t, \dots, T_n \leq t),$$

λόγω ανεξαρτησίας των T_1, T_2, \dots, T_n ,

$$F_{V_n}(t) = P(T_1 \leq t) \cdots P(T_n \leq t) = F_{T_1}(t) \cdots F_{T_n}(t) \quad (1.4)$$

Επειδή οι τυχαίες μεταβλητές προέρχονται από κοινή κατανομή από τις (1.3) και (1.4) έχουμε ότι

$$F_{U_n}(t) = 1 - (1 - F_T(t))^n. \quad (1.5)$$

$$F_{V_n}(t) = (F_T(t))^n. \quad (1.6)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας των U_n και V_n θα είναι

$$f_{U_n}(t) = (F_{U_n}(t))' = (1 - (1 - F_T(t))^n)' = n f(t) (1 - F_T(t))^{n-1}.$$

$$f_{V_n}(t) = (F_{V_n}(t))' = (F_T(t))^n' = n f(t) (F_T(t))^{n-1},$$

αντίστοιχα.

Παρόλο που οι τύποι (1.5) και (1.6) φαίνονται απλοί, είναι γενικά δύσκολο να εργαστεί κανείς με δυνάμεις της $F_T(t)$. Όμως, σε πολλά προβλήματα αξιοπιστίας, το n είναι πολύ μεγάλο. Συνεπώς, οδηγούμαστε σε ασυμπτωτικές τεχνικές, οι οποίες κάτω από γενικές συνθήκες της $F_T(t)$ οδηγούν σε απλούστερες εκφράσεις των $F_{U_n}(t)$ και $F_{V_n}(t)$.

Ο Cramér (1946) πρότεινε τη χρήση των τυχαίων μεταβλητών

$$Y_n = n F_T(U_n) \text{ και}$$

$$Z_n = n(1 - F_T(V_n)),$$

όπου U_n και V_n οι τυχαίες μεταβλητές που δίνονται από την έκφραση (1.1) και (1.2) αντίστοιχα.

Τότε για $y \geq 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} P(Y_n \leq y) &= P\left[F_T(U_n) \leq \frac{y}{n}\right] = P\left[U_n \leq F_T^{-1}\left(\frac{y}{n}\right)\right] = F_{U_n}\left[F_T^{-1}\left(\frac{y}{n}\right)\right] = \\ &= 1 - \left[1 - F_T\left(F_T^{-1}\left(\frac{y}{n}\right)\right)\right]^n = 1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n, \end{aligned}$$

από όπου παίρνουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n \leq y) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n = 1 - e^{-y}, \quad y \geq 0.$$

Άρα η τυχαία μεταβλητή Y_n συγκλίνει στη τυχαία μεταβλητή Y που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 1$

Παρόμοια

$$\begin{aligned} P(Z_n \leq z) &= P\left[F_T(V_n) \geq 1 - \frac{z}{n}\right] = 1 - P\left[V_n \leq F_T^{-1}\left(1 - \frac{z}{n}\right)\right] = 1 - F_{V_n}\left[F_T^{-1}\left(1 - \frac{z}{n}\right)\right] = \\ &= 1 - \left(F_T\left(F_T^{-1}\left(\frac{z}{n}\right)\right)\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n, \end{aligned}$$

από όπου παίρνουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq z) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n = 1 - e^{-z}, \quad z \geq 0.$$

Άρα η τυχαία μεταβλητή Z_n συγκλίνει στη τυχαία μεταβλητή Z που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 1$.

Αναμένεται το όριο των κατανομών των τυχαίων μεταβλητών U_n και V_n να εξαρτάται από τον τύπο της κατανομής $F_T(\cdot)$. Ωστόσο αποδεικνύεται ότι υπάρχουν τρεις πιθανοί τύποι ασυμπτωτικών κατανομών για την τυχαία μεταβλητή U_n και τρεις πιθανοί τύποι ασυμπτωτικών κατανομών για την τυχαία μεταβλητή V_n .

Ο Gumbel (1958) κατηγοριοποίησε τις κατανομές αυτές σε τρεις τύπους ασυμπτωτικών κατανομών ακραίων τιμών (*extreme value*).

- Τύπος I (*Gumbel*)

Οι κατανομές ακραίων τιμών τύπου I εφαρμόζονται στη μοντελοποίηση ακραίων περιβαλλοντικών φαινομένων, όπως, για παράδειγμα, δύναμη του αέρα, το επίπεδο υγρών κ.τ.λ. Η συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας και η βαθμίδα αποτυχίας των extreme value κατανομών τύπου I για την ελάχιστη τιμή δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους

$$F(t) = 1 - e^{-e^t}, \quad f(t) = e^{-e^t}, \quad \lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = e^t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας και η βαθμίδα αποτυχίας των κατανομών ακραίων τιμών τύπου I για τη μέγιστη τιμή δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους

$$F(t) = e^{-e^{-t}}, \quad f(t) = e^{-e^{-t}-t}, \quad \lambda(t) = \frac{e^{-e^{-t}} \cdot e^{-t}}{1 - e^{-e^{-t}}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Τύπος II (*Frechet*)

Οι κατανομές ακραίων τιμών τύπου II εφαρμόζονται σε μοντελοποίηση φαινομένων, όπως για παράδειγμα του μεγέθους σεισμών. Η συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας

και η βαθμίδα αποτυχίας των κατανομών ακραίων τιμών τύπου II για την ελάχιστη τιμή δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους

$$F(t) = 1 - e^{-(t)^{-\alpha}}, \quad f(t) = \alpha \cdot e^{-(t)^{-\alpha}} (t)^{-1-\alpha}, \quad \lambda(t) = \alpha (t)^{-1-\alpha}, \quad t \leq 0, \quad \alpha > 0.$$

Η συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας και η βαθμίδα αποτυχίας των κατανομών ακραίων τιμών τύπου II για τη μέγιστη τιμή δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους

$$F(t) = e^{-t^{-\alpha}}, \quad f(t) = \alpha \cdot e^{-t^{-\alpha}} t^{-1-\alpha}, \quad \lambda(t) = \frac{\alpha e^{-t^{-\alpha}}}{1 - e^{-t^{-\alpha}}}, \quad t \geq 0, \quad \alpha > 0.$$

- Τύπος III (*Weibull*)

Οι κατανομές ακραίων τιμών τύπου III είναι κατάλληλες για να περιγράψουν την αντοχή υλικών και το χρόνο αποτυχίας ηλεκτρονικών συσκευών. Η συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας και η βαθμίδα αποτυχίας των κατανομών ακραίων τιμών τύπου III για την ελάχιστη τιμή δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους

$$F(t) = e^{-t^\alpha}, \quad f(t) = \alpha \cdot e^{-t^\alpha} t^{-1+\alpha}, \quad \lambda(t) = \alpha t^{\alpha-1}, \quad t \geq 0, \quad \alpha > 0.$$

Η συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας και η βαθμίδα αποτυχίας των κατανομών ακραίων τιμών τύπου III για την μέγιστη τιμή δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους

$$F(t) = e^{-(t)^\alpha}, \quad f(t) = \alpha \cdot e^{-(t)^\alpha} (t)^{-1+\alpha}, \quad \lambda(t) = \frac{\alpha e^{-(t)^\alpha} (t)^{-1+\alpha}}{1 - e^{-(t)^\alpha}}, \quad t < 0, \quad \alpha > 0.$$

Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στα συγγράμματα των Kotz and Nadarajah (2000), Johnson et al. (1995), Rinne (2009) και Beirlant et al. (2004).

Κεφάλαιο 2^ο

Η κλασική κατανομή Weibull

2.1 Ιστορική Αναδρομή

Η κατανομή Weibull πήρε το όνομά της από το Σουηδό Waloddi Weibull¹, ο οποίος προώθησε τη χρησιμοποίησή της σε ευρύ πεδίο εφαρμογών (μετεωρολογία, βιολογία, οικονομία, ανάλυση επιβίωσης και αντοχή υλικών).

Η αρχική δημοσίευση της ομώνυμης κατανομής από τον Weibull (1939) έγινε σε ένα σκανδιναβικό περιοδικό και διαπραγματευόταν την αντοχή υλικών. Μια μεταγενέστερη δημοσίευση της κατανομής στα αγγλικά από τον Weibull (1951) υπήρξε ορόσημο, γιατί χρησιμοποίησε δεδομένα από διαφορετικούς επιστημονικούς κλάδους προωθώντας την πολλαπλότητα εφαρμογής της κατανομής σε αυτούς. Τα δεδομένα αυτά σχετίζονταν με την αντοχή του χάλυβα Boffors, την αντοχή των ινών του ινδικού βαμβακιού, τη διάρκεια ζωής του χάλυβα St-37 και τη σωματική διάπλαση των ενήλικων ανδρών, που γεννήθηκαν στα νησιά της Βρετανίας.

Με την κατανομή Weibull ασχολήθηκαν οι Frechét (1927), Rosen and Rammler (1933), Gnedenko (1943), Kao (1958-59) και Berrettoni (1964).

Αν και ο Weibull δεν ήταν ο πρώτος που εισήγαγε τη συγκεκριμένη κατανομή, ωστόσο συνέβαλε αποφασιστικά στην προώθησή της ως ένα χρήσιμο και ευέλικτο μοντέλο με ευρύ πεδίο εφαρμογών.

2.2 Το μοντέλο του αδύναμου κρίκου

Σε κάθε στατιστική κατανομή αντιστοιχεί ένα, τουλάχιστον, φυσικό μοντέλο. Αυτό το μοντέλο βοηθάει τόσο στην ερμηνεία της κατανομής, όσο και στην αναγνώριση και επιλογή της κατάλληλης κατανομής για ένα εμπειρικό σύνολο δεδομένων.

¹ Ernst Hjalmar Waloddi Weibull (18/6/1887 – 12/10/1979) Σουηδός μηχανικός και μαθηματικός. Εντάχθηκε στο Σουηδικό Λιμενικό Σώμα το 1904 ως δόκιμος αξιωματικός. Πλοίαρχος το 1916 και το 1940 Πλωτάρχης. Παρακολούθησε μαθήματα στο Βασιλικό Ινστιτούτο τεχνολογίας από όπου το 1924 αποφοίτησε και έγινε τακτικός καθηγητής του. Το 1932 έλαβε το διδακτορικό του από το Πανεπιστήμιο της Ουψάλα. Εργάστηκε στη σουηδική και γερμανική βιομηχανία ως σύμβουλος μηχανικός. Βραβεύτηκε από την American Society of Mechanical Engineers και τη Βασιλική Σουηδική Ακαδημία.

Το πιο συνηθισμένο μοντέλο που οδηγεί στην κατανομή Weibull είναι συνδεδεμένο με την προέλευσή της από τις κατανομές των ακραίων τιμών.

Το μοντέλο αυτό αποτελείται από n όμοιες μονάδες ή συστήματα συνδεδεμένα σε σειρά. Το σύστημα των n μονάδων αποτυγχάνει όταν τουλάχιστον μια μονάδα αποτύχει ή ισοδύναμα λειτουργεί όταν όλες οι n μονάδες λειτουργούν. Ένα παράδειγμα ενός τέτοιου σειριακού συστήματος είναι μια αλυσίδα που είναι τόσο ισχυρή όσο ο πιο αδύναμος της κρίκος. Με άλλα λόγια ο χρόνος ζωής της αλυσίδας τερματίζεται όταν σπάσει ο πιο αδύναμος της κρίκος.

2.3 Η Κατανομή Weibull

Το κλασικό μοντέλο της κατανομής Weibull, που αποτελείται από δυο παραμέτρους $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, είναι

$$F(t; \alpha, \beta) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] \quad t \geq 0. \quad (2.1)$$

Το παραπάνω μοντέλο μπορεί να γραφεί εναλλακτικά υπό τη μορφή

$$F(t; \lambda, \beta) = 1 - \exp\left[-(\lambda t)^\beta\right]$$

με $\lambda = 1/\alpha$

$$F(t; \alpha', \beta) = 1 - \exp\left(-\frac{t^\beta}{\alpha'}\right)$$

με $\alpha' = \alpha^\beta$ και

$$F(t; \lambda', \beta) = 1 - \exp\left(-\lambda' t^\beta\right) \quad (2.2)$$

με $\lambda' = (1/\alpha)^\beta$.

Όποιο από τα παραπάνω μοντέλα και αν χρησιμοποιήσουμε με την κατάλληλη αναπαραμετροποίηση θα πάρουμε τα ίδια αποτελέσματα (στην παρούσα διπλωματική εργασία θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (2.1)). Θα λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή T ακολουθεί την κλασική κατανομή Weibull με παραμέτρους α και β (συμβολικά: $T \sim W(\alpha, \beta)$).

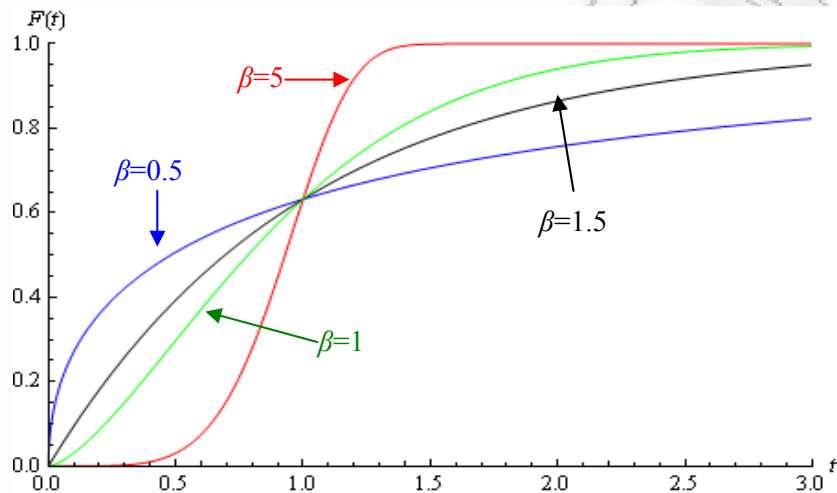
Παρατηρούμε ότι ως ειδικές περιπτώσεις της κατανομής Weibull μπορούν να προκύψουν οι εξής γνωστές κατανομές:

- εκθετική κατανομή αντικαθιστώντας στην (2.1) $\beta = 1$ $\left(F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right]\right)$.

- κατανομή Rayleigh αντικαθιστώντας στην (2.1) $\beta = 2 \left(F(t) = 1 - \exp \left[-\left(\frac{t}{\alpha} \right)^2 \right] \right)$.

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της συνάρτησης κατανομής της Weibull (2.1) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β . Σε όλα τα σχήματα αυτού του κεφαλαίου, η τιμή της παραμέτρου α κρατείται σταθερή ($\alpha = 1$).

Σχήμα 2.1



Παρατηρούμε ότι για όλες τις τιμές της παραμέτρου β και για $t = \alpha$ η τιμή της συνάρτησης κατανομής που δίνεται από τη σχέση (2.1) θα είναι πάντα σταθερή

$$F(\alpha) = 1 - e^{-1} \cong 0.63.$$

Με άλλα λόγια η πιθανότητα αποτυχίας ενός συστήματος πριν το χρόνο $t = \alpha$ είναι περίπου 63%. Ο χρόνος α που έχει αυτή την ιδιότητα αναφέρεται ως χαρακτηριστική ζωή του συστήματος. Μια άλλη ερμηνεία είναι ότι η χαρακτηριστική ζωή αντιστοιχεί στο χρόνο κατά τον οποίο περίπου το 63% του αρχικού πληθυσμού έχει αποτύχει Todinov (2005).

Η **συνάρτηση πυκνότητας** της κλασικής κατανομής Weibull δίνεται από την έκφραση

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{\beta t^{\beta-1}}{\alpha^\beta} \exp \left[-\left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right] = \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1} \exp \left[-\left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right]. \quad (2.3)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (2.3) ως προς t προκύπτει

$$f'(t) = - \frac{\beta \exp \left[-\left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right] \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \left[1 + \beta \left[\left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta - 1 \right] \right]}{t^2}. \quad (2.4)$$

Η ρίζα της εξίσωσης $f'(t) = 0$ είναι

$$t = \alpha \left(\frac{\beta - 1}{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (2.5)$$

Το πρόσημο της έκφρασης (2.4) είναι προφανώς ίδιο με το πρόσημο της παράστασης

$$-\left[1 + \beta(t/\beta)^\beta - \beta\right] = (\beta - 1) - \beta(t/\beta)^\beta.$$

Επομένως θα ισχύουν τα παρακάτω:

- Για $\beta \leq 1$ η παράσταση (2.4) είναι πάντα αρνητική.
- Για $\beta > 1$ στο διάστημα $t \in \left[0, \alpha \left(\frac{\beta - 1}{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}}\right)$ η παράσταση (2.4) είναι θετική, ενώ στο διάστημα $t \in \left[\alpha \left(\frac{\beta - 1}{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}}, +\infty\right)$ η παράσταση (2.4) είναι αρνητική.

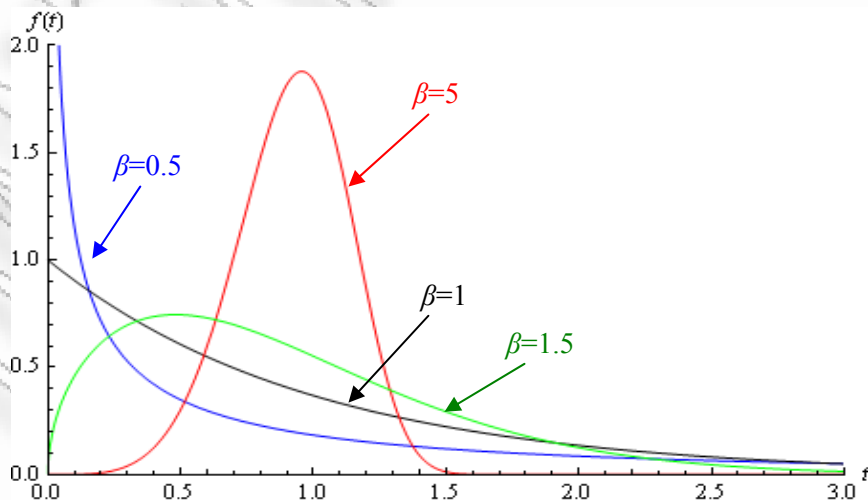
Συνεπώς για τη μονοτονία της συνάρτησης πυκνότητας, που δίνεται από τη σχέση (2.3), θα έχουμε τα ακόλουθα:

- Για $0 < \beta \leq 1$ η $f(t)$ είναι φθίνουσα.
- Για $\beta > 1$ η $f(t)$ είναι μονοκόρυφη με την κορυφή της να βρίσκεται στο σημείο

$$t_m = \alpha \left(\frac{\beta - 1}{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας (2.3) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β .

Σχήμα 2.2



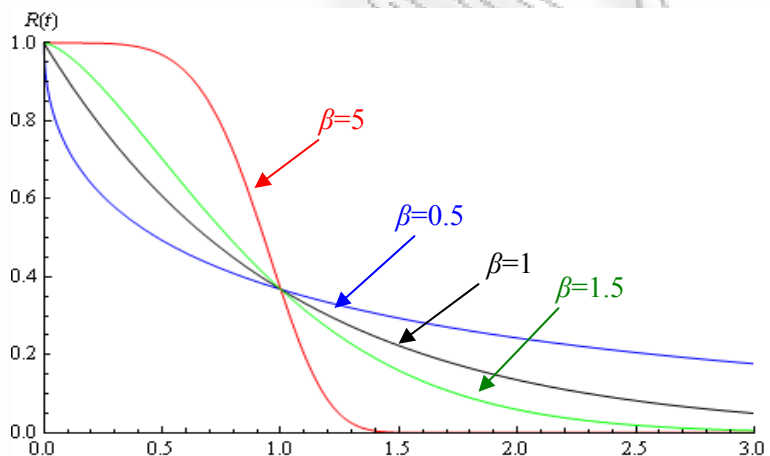
Η παράμετρος β καλείται παράμετρος «μορφής» (*shape parameter*). Όταν το β αυξάνεται, η καμπύλη της συνάρτησης πυκνότητας f γίνεται «στενότερη». Η παράμετρος α καλείται παράμετρος κλίμακας (*scale parameter*) διότι η κλασική κατανομή Weibull εξαρτάται από το α και το t μόνο μέσα του $\frac{t}{\alpha}$. Το στήριγμα της κλασικής κατανομής Weibull, έκφραση (2.1) και (2.3), είναι το διάστημα $[0, \infty)$.

Η **συνάρτηση αξιοπιστίας** της κλασικής κατανομής Weibull είναι ίση με

$$R(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] \quad t \geq 0. \quad (2.6)$$

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της συνάρτησης αξιοπιστίας (2.6) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β .

Σχήμα 2.3



Η **βαθμίδα αποτυχίας** της κλασικής κατανομής Weibull δίνεται από τον τύπο

$$\lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{\beta t^{\beta-1}}{\alpha^\beta}. \quad (2.7)$$

Οι πιθανές μορφές της βαθμίδας αποτυχίας είναι οι ακόλουθες:

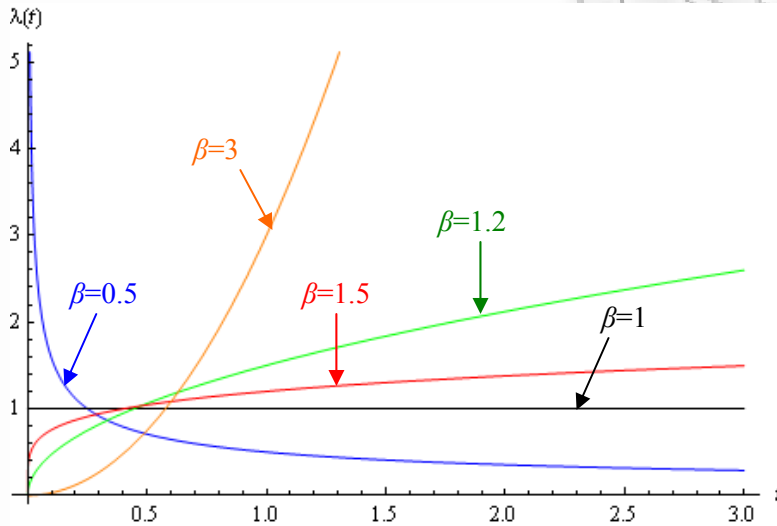
- Για $0 < \beta < 1$ η βαθμίδα αποτυχίας είναι φθίνουσα, *DFR*.
- Για $\beta = 1$ η βαθμίδα αποτυχίας είναι σταθερή.
- Για $\beta > 1$ η βαθμίδα αποτυχίας είναι αύξουσα, *IFR*.

Η μονοτονία (αύξουσα, φθίνουσα, σταθερή) της βαθμίδας αποτυχίας της κλασικής κατανομής Weibull περιορίζει τις εφαρμογές της στην αξιοπιστία, καθώς σε αρκετά πραγματικά δεδομένα η βαθμίδα αποτυχίας παρουσιάζει τη μορφή BC. Έχουν προταθεί στη

βιβλιογραφία διάφορες επεκτάσεις ή και τροποποιήσεις της κλασικής κατανομής Weibull ώστε να γίνει πιο ευέλικτη και να μπορεί να προσαρμοσθεί ικανοποιητικά σε πραγματικά δεδομένα.

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας (2.7) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β .

Σχήμα 2.4



2.4 Μέτρα θέσης και διασποράς

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της κλασικής κατανομής Weibull δίνεται από τον τύπο

$$M_T(s) = E(e^{sT}) = \int_0^{\infty} e^{st} \frac{\beta t^{\beta-1}}{\alpha^\beta} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} dt = \frac{\beta}{\alpha^\beta} \int_0^{\infty} t^{\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(st)^n}{n!} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} dt = \frac{\beta}{\alpha^\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{s^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} t^{\beta-1} t^n dt \right\} \Rightarrow$$

$$M_T(s) := \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{s^n}{n!} \alpha^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{\beta}\right) \right\}, \text{ για } \beta > 1.$$

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση του λογάριθμου μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κλασική κατανομή Weibull θα είναι ίση με

$$E(e^{k \log T}) = E(T^k) = \int_0^{\infty} t^k \frac{\beta t^{\beta-1}}{\alpha^\beta} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} dt = \frac{\beta}{\alpha^\beta} \int_0^{\infty} t^{k+\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} dt = \alpha^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}\right) \quad k \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Παρατηρούμε ότι αν μια τυχαία μεταβλητή T ακολουθεί την κλασική κατανομή Weibull, δηλαδή $T \sim W(\alpha, \beta)$, τότε για την τυχαία μεταβλητή $Y = \ln T$ ισχύει ότι

$$Y = \log T \sim F_Y(y) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\exp y}{\alpha}\right)^\beta\right].$$

Η ροπή κ-τάξης γύρω από το μηδέν της κλασικής κατανομής Weibull δίνεται από τον τύπο

$$E(T^k) = \mu'_k = \alpha^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}\right). \quad (2.9)$$

Η μέση τιμή μ της κλασικής κατανομής Weibull θα δίνεται από τον τύπο

$$\mu'_1 = E(T) = \alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right). \quad (2.10)$$

Από τον τύπο (2.10) υπολογίζεται επίσης ο μέσος χρόνος μέχρι την αποτυχία (*mean time to failure, MTTF*).

Η κεντρική ροπή κ-τάξης (ροπή περί το μέσο) υπολογίζεται από τον τύπο

$$\mu_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \mu'_j (\mu'_1)^{k-j}. \quad (2.11)$$

Έτσι κεντρική ροπή κ-τάξης (ροπή περί το μέσο) της κλασικής κατανομής Weibull εκφράζεται ως εξής

$$\mu_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \alpha^j \Gamma\left(1 + \frac{j}{\beta}\right) \left[\alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]^{k-j} = \alpha^k \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \Gamma\left(1 + \frac{j}{\beta}\right) \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]^{k-j}. \quad (2.12)$$

Σύμφωνα με τον τύπο (2.12) η διακύμανση της κλασικής κατανομής Weibull εκφράζεται ως εξής

$$\sigma^2 = \alpha^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]^2 \right]. \quad (2.13)$$

Η ροπή 3^{ης} τάξης περί το μέσο της κλασικής κατανομής Weibull, σύμφωνα με τον τύπο (2.11), εκφράζεται ως εξής

$$\mu_3 = \alpha^3 \left[\Gamma\left(1 + \frac{3}{\beta}\right) - 3\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) + 2\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]^3 \right]. \quad (2.14)$$

Η ασυμμετρία της κλασικής κατανομής Weibull εκφράζεται ως εξής

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\Gamma_3 - 3\Gamma_2\Gamma_1 + 2\Gamma_1^3}{(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^{3/2}}, \text{ όπου } \Gamma_i = \Gamma\left(1 + \frac{i}{\beta}\right).$$

Η ροπή 4^{ης} τάξης περί το μέσο της κλασικής κατανομής Weibull, σύμφωνα με τον τύπο (2.12), εκφράζεται ως εξής

$$\mu_4 = \alpha^4 \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{4}{\beta}\right) - 4\Gamma\left(1 + \frac{3}{\beta}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) + 6\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]^2 - 3\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]^4 \right\}.$$

Η κύρτωση της κλασικής κατανομής Weibull εκφράζεται ως εξής

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\Gamma_4 - 4\Gamma_3\Gamma_1 + 6\Gamma_2\Gamma_1^2 - 3\Gamma_1^4}{(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^2}, \text{ όπου } \Gamma_i = \Gamma\left(1 + \frac{i}{\beta}\right).$$

Παρατηρούμε ότι η κλασική κατανομή Weibull παρουσιάζει θετική ασυμμετρία για μικρές τιμές της παραμέτρου β . Ο δείκτης της ασυμμετρίας, $\sqrt{\gamma_1}$, μειώνεται καθώς η παράμετρος β αυξάνεται και είναι ίσος με το μηδέν για $\beta \cong 3.6023$. Για τιμές της παραμέτρου β γύρω από το 3.6 η μορφή της κλασικής κατανομής Weibull είναι παρόμοια με εκείνη της κανονικής κατανομής. Ο συντελεστής κύρτωσης γ_2 , και αυτός φθίνει καθώς η παράμετρος σχήματος β αυξάνεται, φτάνοντας να έχει την μικρότερη τιμή, 2.71, όταν $\beta \cong 3.35$, Johnson et al (1994).

Διάμεσος, Κορυφή, Ποσοστιαία σημεία

Από τον τύπο (2.1), η διάμεσος της κατανομής βρίσκεται ως εξής

$$F(t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \exp\left[-\left(\frac{t_{\text{median}}}{\alpha}\right)^\beta\right] = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t_{\text{median}} = \alpha(\ln 2)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Από τον τύπο (2.5) και για $\beta > 1$ η κορυφή της συνάρτησης πυκνότητας της κλασικής κατανομής Weibull βρίσκεται στο σημείο

$$t_{\text{mode}} = \alpha\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

όταν $\beta \leq 1$ η κορυφή της βρίσκεται στο σημείο $t = 0$.

Το p -ποσοστημόριο υπολογίζεται από τον τύπο

$$P(T \leq t_p) = F(t_p) = p \Leftrightarrow 1 - \exp\left[-\left(\frac{t_p}{\alpha}\right)^\beta\right] = p \Leftrightarrow t_p = \alpha[-\ln(1-p)]^{\frac{1}{\beta}}, \quad (2.15)$$

τα ποσοστημόρια $p = 0.25$ και 0.75 καλούνται πρώτο και τρίτο ποσοστημόριο, αντίστοιχα, ενώ το 0.5 ποσοστημόριο καλείται διάμεσος.

Παραγωγή τυχαίων αριθμών από την κατανομή Weibull

Επιθυμούμε να παράγουμε ένα (ψευδό-)τυχαίο αριθμό από την κατανομή Weibull. Η μέθοδος της αντιστροφής βασίζεται στην παρατήρηση ότι η τυχαία μεταβλητή $T = F^{-1}(U)$, όπου $U \sim U(0,1)$, ακολουθεί την κατανομή F . Πιο συγκεκριμένα έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

Πρόταση. Αν $U \sim U(0,1)$ και F μια οποιαδήποτε συνάρτηση κατανομής, τότε η τυχαία μεταβλητή $T = F^{-1}(U)$ έχει συνάρτηση κατανομής F .

Απόδειξη. Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής T είναι ίση με

$$P(T \leq t) = P(F^{-1}(U) \leq t) = P(\min\{t : F(t) \geq U\} \leq t).$$

Διαπιστώνοντας τώρα ότι $\min\{t : F(t) \geq U\} \leq t \Leftrightarrow U \leq F(t)$ διότι

- $\min\{t : F(t) \geq U\} \leq t \Rightarrow \exists t_0 \leq t : F(t_0) \geq U$, και επειδή $F(t_0) \leq F(t) \Rightarrow F(t) \geq U$,
- $F(t) \geq U \Rightarrow t \in \{x : F(x) \geq U\} \Rightarrow t \geq \min\{x : F(x) \geq U\}$,

Προκύπτει ότι

$$P(T \leq t) = P(U \leq F(t)),$$

καθώς η F είναι αύξουσα συνάρτηση και τέλος έχουμε ότι

$$P(T \leq t) = F(t),$$

γιατί $0 \leq F(t) \leq 1$ και η αθροιστική συνάρτηση της ομοιόμορφης κατανομής είναι $F_U(y) = y, \forall y \in [0,1]$. ■

Η μέθοδος της αντιστροφής για την παραγωγή τυχαίων αριθμών από μια κατανομή με συνάρτηση κατανομής F περιγράφεται από τον επόμενο γενικό αλγόριθμο

Βήμα 1^ο: Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$.

Βήμα 2^ο: Θέτουμε $T = F^{-1}(U)$.

Έτσι, αν μια τ.μ T ακολουθεί την κλασική κατανομή Weibull, τότε από τον τύπο (2.1) έχουμε

$$F(t) = u \Leftrightarrow 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] = u \Leftrightarrow \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] = 1 - u \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta = -\ln(1-u) \Leftrightarrow t = \alpha \left[-\ln(1-u)\right]^{1/\beta}.$$

Επομένως, ένας αλγόριθμος παραγωγής τυχαίων αριθμών από την κλασική κατανομή Weibull με παραμέτρους α και β , είναι ο επόμενος

Βήμα 1^ο: Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$.

Βήμα 2^ο: Θέτουμε $T = \alpha \left[-\ln(1-U)\right]^{1/\beta}$.

Επειδή και η $1-U \sim U(0,1)$ όταν $U \sim U(0,1)$ θα μπορούσαμε να γράψουμε απλούστερα $T = \alpha \left[-\ln(U)\right]^{1/\beta}$.

2.5 Γραφήματα Weibull

Στην παράγραφο αυτή θα γίνει αναφορά σε δυο γραφικές τεχνικές. Η μια από αυτές τις γραφικές τεχνικές βοηθά στο να ελεγχθεί κατά πόσο τα δεδομένα, που έχουμε στη διάθεσή μας, προέρχονται από την κλασική κατανομή Weibull και η άλλη στο κατά πόσο ο χρόνος ζωής των μονάδων, που παρακολουθούνται, είναι *IFR*, *DFR* ή έχει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας.

A. WPP γράφημα (*Weibull probability paper plot*)

Σκοπός μας είναι να βρούμε τεχνικές με τις οποίες να εξετάσουμε αν τα δεδομένα που έχουμε συλλέξει προέρχονται από την κλασική κατανομή Weibull. Υπάρχουν κλασσικές στατιστικές τεχνικές με τις οποίες μπορεί να γίνει αυτός ο έλεγχος (τεστ Kolmogorov-Smirnov, X^2 τεστ καλής προσαρμογής κ.λ.π). Εμείς σε αυτή την παράγραφο θα αναλύσουμε τις γραφικές μεθόδους για τον έλεγχο του κατά πόσο τα δεδομένα μας προέρχονται από την κλασική κατανομή Weibull.

Μετασχηματίζοντας τον τύπο (2.1) προκύπτουν διαδοχικά τα εξής:

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] \Leftrightarrow 1 - F(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] \Leftrightarrow \ln(1 - F(t)) = -\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta \Leftrightarrow$$

$$\ln(-\ln(1 - F(t))) = \beta \ln\left(\frac{t}{\alpha}\right) \Leftrightarrow \ln(-\ln(1 - F(t))) = \beta \ln(t) - \beta \ln(\alpha) \stackrel{x=\ln(t)}{=} \beta x - \beta \ln(\alpha).$$

Η $y = \beta x - \beta \ln(\alpha)$ είναι μια γραμμική συνάρτηση όπου η κλίση της ευθείας ισούται με β (παράμετρος σχήματος). Το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα $y'y$ είναι το $-\beta \ln(\alpha)$, ενώ με τον άξονα $x'x$ είναι το σημείο $\ln(\alpha)$.

Βασίζόμενοι στους μετασχηματισμούς (μετασχηματισμοί Weibull)

$$y = \ln[-\ln(1 - F(t))] \text{ και } x = \ln(t) \quad (2.16)$$

μπορούμε να κατασκευάσουμε το χάρτη πιθανότητας για την κατανομή Weibull (*Weibull probability paper, WPP*) του y έναντι του x .

Στην περίπτωση που θέλουμε να εξετάσουμε αν τα δεδομένα μας, t_1, \dots, t_n , προέρχονται από την κλασική κατανομή Weibull τότε ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Διατάσουμε τα δεδομένα μας αρχίζοντας από τη μικρότερη παρατήρηση και καταλήγουμε στη μεγαλύτερη παρατήρηση, έτσι ώστε $t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \dots \leq t_{(n)}$.
2. Υπολογίζουμε την εμπειρική συνάρτηση κατανομής $\hat{F}(t_{(i)}) = \frac{i}{n+1}$, $1 \leq i \leq n$.
3. Υπολογίζουμε τις τιμές $y_i = \ln\left\{-\ln\left[1 - \hat{F}(t_{(i)})\right]\right\}$ για $1 \leq i \leq n$.
4. Υπολογίζουμε τις τιμές $x_i = \ln(t_{(i)})$ για $1 \leq i \leq n$.
5. Κατασκευάζουμε το γράφημα της y_i ως προς x_i για $1 \leq i \leq n$.

Αν τα σημεία (x_i, y_i) βρίσκονται γύρω από μια ευθεία γραμμή τότε αποδεχόμαστε (ή καλύτερα δεν μπορούμε να απορρίψουμε) ότι τα δεδομένα μας προσαρμόζονται στο μοντέλο της κλασικής κατανομής Weibull. Αν τα δεδομένα μας δεν βρίσκονται γύρω από μια ευθεία γραμμή, τότε ανάλογα από το σχήμα και τη φύση των δεδομένων μας καταφεύγουμε σε άλλου είδους μοντέλα.

B. Χάρτες Συνολικού Χρόνου Ελέγχου (*Total Time on Test plot, TTT plot*)

Οι χάρτες συνολικού χρόνου ελέγχου χρησιμοποιούνται για να ελέγχουμε, με βάση κάποια δεδομένα που έχουμε στη διάθεσή μας, κατά πόσο ο χρόνος ζωής των μονάδων που παρακολουθούμε είναι *IFR*, *DFR* ή έχει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας.

Ο έλεγχος βασίζεται σε ποσότητες της μορφής

$$\int_0^{F^{-1}(u)} (1-F(t)) dt, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα ονομάζεται μετασχηματισμός TTT (TTT transform) της κατανομής F και θα συμβολίζεται με $H(u)$.

Ορισμός. Αν F είναι συνάρτηση κατανομής μιας μη αρνητικής τ.μ T , τότε ο μετασχηματισμός TTT της F λέγεται η συνάρτηση $H_F : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από τον τύπο

$$H_F(u) = \int_0^{F^{-1}(u)} (1-F(t)) dt = \int_0^{F^{-1}(u)} R(t) dt.$$

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι η συνάρτηση H_F είναι αύξουσα συνάρτηση με

$$H_F(1) = \int_0^{F^{-1}(1)} (1-F(t)) dt = \int_0^{\infty} R(t) dt = E(T), \quad H_F(0) = 0$$

οπότε θα ισχύει ότι

$$0 \leq H_F(u) \leq H_F(1) = E(T)$$

για κάθε $0 \leq u \leq 1$.

Ο λόγος

$$\varphi_F(u) = \frac{H_F(u)}{H_F(1)} = \frac{H_F(u)}{E(T)}$$

λέγεται τυποποιημένος μετασχηματισμός TTT (scaled TTT transform).

Για την κατανομή Weibull έχουμε δείξει ότι η αντίστροφη συνάρτησή της δίνεται από τη σχέση (2.14). Έτσι

$$F^{-1}(u) = \alpha (-\ln U)^{1/\beta}$$

οπότε η $H_F(u)$ παίρνει τη μορφή

$$H_F(u) = \int_0^{F^{-1}(u)} (1-F(t)) dt = \int_0^{\alpha(-\ln U)^{1/\beta}} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] dt.$$

Εκτελώντας το μετασχηματισμό $x = \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta$, βρίσκουμε

$$H_F(u) = \frac{\alpha}{\beta} \int_0^{-\ln(1-u)} x^{\frac{1}{\beta}-1} e^{-x} dx = \frac{\alpha}{\beta} \left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, -\ln(1-u)\right) \right]$$

όπου $\Gamma(\rho, \beta) = \int_\beta^\infty x^{\rho-1} e^{-x} dx$.

Επομένως, η ποσότητα $H_F(1)$ θα ισούται με

$$H_F(1) = \frac{\alpha}{\beta} \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{\beta}-1} e^{-x} dx = \frac{\alpha}{\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) = E(T)$$

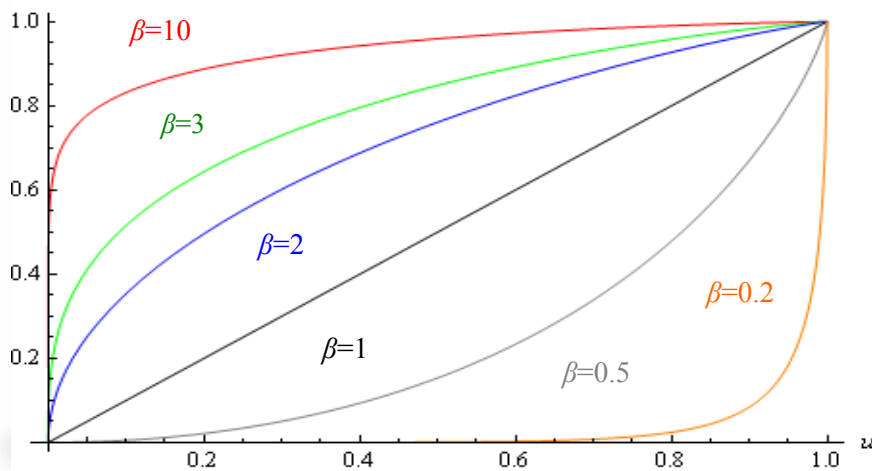
Έτσι, τελικά, ο τυποποιημένος μετασχηματισμός TTT για την κατανομή Weibull θα είναι

$$\varphi_F(u) = \frac{H_F(u)}{H_F(1)} = \frac{H_F(u)}{E(T)} = \frac{\frac{\alpha}{\beta} \left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, -\ln(1-u)\right) \right]}{\frac{\alpha}{\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)} = 1 - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}, -\ln(1-u)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)} \quad (2.17)$$

Από την έκφραση (2.17) μπορούμε να παραστήσουμε το χάρτη συνολικού χρόνου ελέγχου και όπως παρατηρούμε η μορφή της συνάρτησης $\varphi_F(u)$ εξαρτάται μόνο από την παράμετρο β (παράμετρος σχήματος).

Παρακάτω δίνεται γράφημα που παριστά το TTT -plot της κλασικής κατανομής Weibull για διάφορες τιμές της παραμέτρου β .

Σχήμα 2.5



Από το παραπάνω γράφημα παρατηρούμε ότι:

- Το TTT -plot για την κατανομή Weibull με $\alpha = 1$ και $\beta = 10, 3, 2$ οδηγεί σε καμπύλη που στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (κοίλη).
- Το TTT -plot για την κατανομή Weibull με $\alpha = \beta = 1$ που ισοδυναμεί με το TTT -plot της εκθετικής κατανομής προσεγγίζεται ικανοποιητικά από μια ευθεία γραμμή.
- Το TTT -plot για την κατανομή Weibull με $\alpha = 1$ και $\beta = 0.5, 0.2$ οδηγεί σε καμπύλη που στρέφει τα κοίλα προς τα άνω (κυρτή).

Για χρόνους ζωής που είναι *IFR* / *DFR* ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση. Έστω T ο χρόνος ζωής μιας μονάδας και φ_F ο αντίστοιχος τυποποιημένος μετασχηματισμός *TTT*. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα

- $T \in IFR \Leftrightarrow \varphi_F(u)$ κοίλη στο $[0,1]$.
- $T \in DFR \Leftrightarrow \varphi_F(u)$ κυρτή στο $[0,1]$.
- η T έχει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας $\Leftrightarrow \varphi_F(u) = u$ για $u \in [0,1]$ (ταυτοτική συνάρτηση).

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση και παρατηρώντας το Σχήμα 2.5 διαπιστώνουμε ότι

- Για $\beta = 10, 3, 2$ το *TTT*-plot οδηγεί σε κοίλη καμπύλη, επομένως, ο αντίστοιχος χρόνος ζωής έχει την ιδιότητα *IFR*.
- Για $\beta = 1$ το *TTT*-plot οδηγεί σε ευθεία, επομένως, ο αντίστοιχος χρόνος ζωής έχει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας.
- Για $\beta = 0.5, 0.2$ το *TTT*-plot οδηγεί σε κυρτή καμπύλη, επομένως, ο αντίστοιχος χρόνος ζωής έχει την ιδιότητα *DFR*.

2.6 Στατιστική συμπερασματολογία

Σε αυτή την παράγραφο θα αναφερθούμε στη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας, στη μέθοδο των ροπών καθώς και στη γραφική μέθοδο για να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους τις κλασικής κατανομής Weibull.

2.6.1 Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Με τη μέθοδο αυτή θα εκτιμήσουμε τις παραμέτρους της κλασικής κατανομής Weibull με τη χρήση δεδομένων που προέρχονται από πλήρη ή λογοκριμένα δεδομένα.

Α. Περίπτωση: Η παράμετρος β είναι γνωστή

Έστω ότι οι χρόνοι ζωής T_1, \dots, T_n από n ανεξάρτητες μονάδες ακολουθούν την κατανομή Weibull με βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t) = \frac{\beta t^{\beta-1}}{\alpha^\beta}$, $t \geq 0$ όπου, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Ας

υποθέσουμε, αρχικά, ότι η παράμετρος $\beta > 0$ είναι γνωστή και, επομένως, τα δεδομένα μας θα χρησιμοποιηθούν για τη μελέτη της παραμέτρου α μόνο.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κλασικής κατανομής Weibull δίνεται από τον τύπο

$$f(t) = \frac{\beta t^{\beta-1}}{\alpha^\beta} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right], \quad t \geq 0$$

η συνάρτηση πιθανοφάνειας θα είναι ίση με

$$L(\alpha; t_1, \dots, t_n) = \frac{\beta^n}{\alpha^{n\beta}} \left(\prod_{i=1}^n t_i\right)^{\beta-1} \exp\left[-\frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n t_i^\beta\right]$$

και αντίστοιχο πιθανολογάρημο

$$l(\alpha; t_1, \dots, t_n) = -n\beta \ln \alpha + n \ln \beta - \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n t_i^\beta + (\beta-1) \ln \left(\prod_{i=1}^n t_i\right).$$

Έχουμε

$$\frac{\partial l(\alpha; t_1, \dots, t_n)}{\partial \alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha^{-(\beta-1)} \beta \sum_{i=1}^n t_i^\beta - \frac{n\beta}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Επομένως η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου α δίνεται από το τύπο

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (2.18)$$

Για να προχωρήσουμε στη μελέτη της $\hat{\alpha}$ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, όταν $T \sim W(\alpha, \beta)$, έχουμε

$$R(t) = P(T > t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right], \quad t \geq 0$$

οπότε

$$P(T^\beta > t) = P(T > t^{1/\beta}) = R(t^{1/\beta}) = \exp\left[-\left(\frac{t^{1/\beta}}{\alpha}\right)^\beta\right] = \exp\left[-\frac{t}{\alpha^\beta}\right].$$

Άρα η τυχαία μεταβλητή T^β ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\frac{1}{\alpha^\beta}$.

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\sum_{i=1}^n T_i^\beta$ ακολουθεί την κατανομή Γάμμα $\left(n, \frac{1}{\alpha^\beta}\right)$. Η έκ-

φραση (2.18) δεν αποτελεί αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου α , καθώς

$$E(\hat{\alpha}) = E\left(\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}\right) = E\left(\left(\frac{1}{n} z\right)^{1/\beta}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{n}\right)^{1/\beta} z^{1/\beta} \frac{\left(\frac{1}{\alpha^\beta}\right)^n}{\Gamma(n)} z^{n-1} e^{-\frac{1}{\alpha^\beta} z} dz = \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{\beta}\right)}{n^{1/\beta} \Gamma(n)} \alpha.$$

Είναι φανερό ότι

$$\tilde{\alpha} = \frac{n^{1/\beta} \Gamma(n)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{\beta}\right)} \hat{\alpha} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{\beta}\right)} \left(\sum_{i=1}^n T_i^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου α . Η συνάρτηση πυκνότητας της κλασικής κατανομής Weibull ανήκει στην μονοπαραμετρική (γνωστή η παράμετρος β) εκθετική οικογένεια κατανομών καθώς μπορεί να πάρει την μορφή

$$f(t; \alpha) = c(\alpha) \exp\left\{\sum_{i=1}^n Q_i(\alpha) S_i(t)\right\} h(t)$$

δηλαδή

$$f(t) = \frac{\beta t^{\beta-1}}{\alpha^\beta} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] = \frac{\beta}{\alpha^\beta} \exp\left[-\frac{1}{\alpha^\beta} \cdot t^\beta\right] t^{\beta-1},$$

όπου $c(\alpha) = \frac{\beta}{\alpha^\beta}$, $Q(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^\beta}$, $S(t) = t^\beta$ και $h(t) = t^{\beta-1}$.

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\sum_{i=1}^n T_i^\beta$ είναι επαρκής και πλήρης για την παράμετρο α . Η ποσότητα $\tilde{\alpha}$, είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου α και είναι συνάρτηση της έκφρασης $\sum_{i=1}^n S_i(t) = \sum_{i=1}^n T_i^\beta$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Lehmann–Scheffé η ποσότητα $\tilde{\alpha}$ αποτελεί την (μοναδική) αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διακύμανσης της παραμέτρου α .

Η διακύμανση της αμερόληπτης εκτιμήτριας της παραμέτρου α , $\tilde{\alpha}$, δίνεται από τον τύπο

$$V(\tilde{\alpha}) = E(\tilde{\alpha}^2) - [E(\tilde{\alpha})]^2 = \left(\frac{\Gamma(n)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{\beta}\right)}\right)^2 E\left(\left(\sum_{i=1}^n T_i^\beta\right)^{2/\beta}\right) - \alpha^2 =$$

$$= \left(\frac{\Gamma(n)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{\beta}\right)} \right)^2 \int_0^\infty z^{2/\beta} \frac{\left(\frac{1}{\alpha^\beta}\right)^n}{\Gamma(n)} z^{n-1} e^{-\frac{1}{\alpha^\beta} z} dz - \alpha^2 \Rightarrow V(\tilde{\alpha}) = \alpha^2 \left(\frac{\Gamma(n) \cdot \Gamma\left(n + \frac{2}{\beta}\right)}{\Gamma^2\left(n + \frac{1}{\beta}\right)} - 1 \right).$$

Ας εξετάσουμε τώρα το πρόβλημα της εκτίμησης των δυνάμεων της παραμέτρου α . Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$Z = \sum_{i=1}^n T_i^\beta \sim \text{Γάμμα}\left(n, \frac{1}{\alpha^\beta}\right)$$

οπότε

$$E(Z^k) = \int_0^\infty z^k f(z) dz = \int_0^\infty z^k \frac{\left(\frac{1}{\alpha^\beta}\right)^n}{\Gamma(n)} z^{n-1} e^{-\frac{1}{\alpha^\beta} z} dz = \int_0^\infty \frac{\alpha^{k\beta}}{\Gamma(n)} y^{n+k-1} e^{-y} dy = \alpha^{k\beta} \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)}$$

ή ισοδύναμα

$$E\left(\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+k)} Z^k\right) = \alpha^{k\beta}.$$

Συνεπώς η εκτιμήτρια

$$\delta_k = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+k)} Z^k = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+k)} \left(\sum_{i=1}^n T_i^\beta\right)^k$$

είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διακύμανσης της παραμετρικής συνάρτησης $\alpha^{k\beta}$.

Ειδικές περιπτώσεις

α. Για $k = \frac{1}{\beta}$ προκύπτει η

$$\delta_{\frac{1}{\beta}} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{\beta}\right)} \left(\sum_{i=1}^n T_i^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} = \tilde{\alpha}$$

η οποία συμπίπτει με την αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διακύμανσης της α που βρέθηκε προηγουμένως.

β. Η αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διακύμανσης του μέσου χρόνου ζωής δίνεται από τη σχέση

$$E(T) = \alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = h_1(\alpha)$$

θα είναι

$$\hat{h}_1(\alpha) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \delta_{\frac{1}{\beta}} = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\Gamma(n)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{\beta}\right)} \left(\sum_{i=1}^n T_i^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

γ. Η αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διακύμανσης της ροπής δεύτερης τάξης

$$E(T^2) = \alpha^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) = h_2(\alpha),$$

θα είναι η

$$\hat{h}_2(\alpha) = \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) \delta_{\frac{2}{\beta}} = \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) \frac{\Gamma(n)}{\Gamma\left(n + \frac{2}{\beta}\right)} \left(\sum_{i=1}^n T_i^\beta\right)^{\frac{2}{\beta}},$$

ενώ η αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διακύμανσης της διακύμανσης

$$V(T) = E(T^2) - [E(T)]^2 = \alpha^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]^2 \right],$$

θα είναι η

$$\hat{V}(T) = \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]^2 \right] \delta_{\frac{2}{\beta}} = \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]^2 \right] \frac{\Gamma(n)}{\Gamma\left(n + \frac{2}{\beta}\right)} \left(\sum_{i=1}^n T_i^\beta\right)^{\frac{2}{\beta}}.$$

B. Περίπτωση: Η παράμετρος β είναι άγνωστη

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την περίπτωση που και οι δυο παράμετροι α, β της κατανομής Weibull είναι άγνωστες.

Αν διαθέτουμε πλήρες δείγμα χρόνων ζωής T_1, \dots, T_n η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τον τύπο

$$L(\alpha, \beta; t_1, \dots, t_n) = \left(\frac{\beta}{\alpha^\beta}\right)^n \left(\prod_{i=1}^n t_i\right)^{\beta-1} \exp\left(-\frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n t_i^\beta\right)$$

με αντίστοιχο πιθανολογάρημο

$$l(\alpha, \beta; t_1, \dots, t_n) = n \ln \beta - n\beta \ln \alpha + (\beta-1) \ln \left(\prod_{i=1}^n t_i\right) - \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n t_i^\beta. \quad (2.19)$$

Για την εύρεση των εκτιμητριών μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων α και β θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta; t_1, \dots, t_n)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial l(\alpha, \beta; t_1, \dots, t_n)}{\partial \beta} = 0.$$

Το τελευταίο οδηγεί στο επόμενο σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\alpha, \beta; t_1, \dots, t_n)}{\partial \alpha} &= \frac{\beta}{\alpha^{\beta+1}} \sum_{i=1}^n t_i^\beta - \frac{n\beta}{\alpha} = 0 \\ \frac{\partial l(\alpha, \beta; t_1, \dots, t_n)}{\partial \beta} &= \frac{n}{\beta} - n \ln \alpha + \ln \prod_{i=1}^n t_i + \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n (t_i^\beta) \ln \alpha - \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n (t_i^\beta \ln t_i) = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Από την εξίσωση (2.20) η παράμετρος α εκφράζεται μέσω της παραμέτρου β ως

$$\alpha = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (2.21)$$

Αντικαθιστώντας τον τύπο (2.21) στην εξίσωση (2.20), προκύπτει η εξίσωση (ως προς β μόνο)

$$\begin{aligned} \frac{n}{\beta} - n \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} + \sum_{i=1}^n \ln t_i + n \frac{\ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \sum_{i=1}^n t_i^\beta}{\sum_{i=1}^n t_i^\beta} - n \frac{\sum_{i=1}^n (t_i^\beta \ln t_i)}{\sum_{i=1}^n t_i^\beta} &= \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (t_i^\beta \ln t_i)}{\sum_{i=1}^n t_i^\beta} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln t_i = 0 \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\sum_{i=1}^n (t_i^\beta \ln t_i)}{\sum_{i=1}^n t_i^\beta} - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln t_i. \quad (2.22)$$

Η τελευταία εξίσωση μπορεί να λυθεί αριθμητικά π.χ με τη μέθοδο Newton-Raphson ή με κάποια άλλη επαναληπτική μέθοδο. Αφού υπολογισθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου β , $\hat{\beta}$, μέσω της έκφρασης (2.22), την αντικαθιστούμε στην έκφραση (2.21). Έτσι, η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου α , $\hat{\alpha}$, υπολογίζεται από τον τύπο

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^{\hat{\beta}} \right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}}.$$

Η ακριβής κατανομή των εκτιμητριών μέγιστης πιθανοφάνειας $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ δεν είναι εύκολο να υπολογισθεί.

Διαστήματα εμπιστοσύνης των εκτιμήσεων $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$.

Σύμφωνα με τον Nelson (1982), ο ασυμπτωτικός πίνακας διακύμανσης-συνδιακύμανσης για τις παραμέτρους (α και β) υπολογίζεται από τον αντίστροφο του πίνακα πληροφορίας του Fisher. Δηλαδή,

$$I_{ij} = E \left[-\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right], \quad i, j = 1, 2,$$

όπου $\theta_1, \theta_2 = \alpha$ ή β . Αυτό οδηγεί στον πίνακα

$$\begin{bmatrix} V(\hat{\alpha}) & Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \\ Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) & V(\hat{\beta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \left(-\frac{\partial^2 l}{\partial^2 \alpha} \Big|_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}} \right) & E \left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta} \Big|_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}} \right) \\ E \left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta} \Big|_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}} \right) & E \left(-\frac{\partial^2 l}{\partial^2 \beta} \Big|_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}} \right) \end{bmatrix}^{-1}.$$

Συνεπώς τα προσεγγιστικά διαστήματα εμπιστοσύνης, $[\alpha_L, \alpha_U]$ και $[\beta_L, \beta_U]$ για τις παραμέτρους α και β με συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\gamma$ είναι τα

$$[\alpha_L, \alpha_U] = \hat{\alpha} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{V(\hat{\alpha})} \quad \text{και} \quad [\beta_L, \beta_U] = \hat{\beta} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{V(\hat{\beta})} \quad (2.23)$$

αντίστοιχα, όπου $z_{\gamma/2}$ είναι το άνω $\gamma/2$ -σημείο της τυποποιημένης κανονικής κατανομής ($P(Z > z_\gamma) = \gamma \Leftrightarrow Z_\gamma = \Phi^{-1}(1-\gamma)$).

Παρατηρούμε ότι οι παράμετροι της κλασικής κατανομής Weibull είναι θετικές ποσότητες, έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε το λογάριθμο τους. Χρησιμοποιώντας το λογαριθμικό μετασχηματισμό οι παράμετροι α και β μετατρέπονται σε $\ln \alpha$ και $\ln \beta$. Η κατανομή των ποσοτήτων $\ln \hat{\alpha}$ και $\ln \hat{\beta}$ θα είναι η τυποποιημένη κανονική κατανομή, συγκεκριμένα

$$Z_{\ln \hat{\alpha}} = \frac{\ln(\hat{\alpha}) - \ln(\alpha)}{\sqrt{V(\ln(\hat{\alpha}))}} \sim N(0,1) \quad \text{και} \quad Z_{\ln \hat{\beta}} = \frac{\ln(\hat{\beta}) - \ln(\beta)}{\sqrt{V(\ln(\hat{\beta}))}} \sim N(0,1),$$

όπου μέσω της μεθόδου δέλτα υπολογίζουμε ότι

$$V(\ln(\hat{\alpha})) = V(\hat{\alpha}) \left(\frac{1}{\hat{\alpha}} \right)^2 \text{ και } V(\ln(\hat{\beta})) = V(\hat{\beta}) \left(\frac{1}{\hat{\beta}} \right)^2.$$

Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε εναλλακτικά διαστήματα εμπιστοσύνης για τους λογαρίθμους των παραμέτρων, συγκεκριμένα

$$\begin{aligned} [\ln \alpha_L, \ln \alpha_U] &= \left[\ln \hat{\alpha} - z_{\gamma/2} \sqrt{V(\ln(\hat{\alpha}))}, \ln \hat{\alpha} + z_{\gamma/2} \sqrt{V(\ln(\hat{\alpha}))} \right], \\ [\ln \beta_L, \ln \beta_U] &= \left[\ln \hat{\beta} - z_{\gamma/2} \sqrt{V(\ln(\hat{\beta}))}, \ln \hat{\beta} + z_{\gamma/2} \sqrt{V(\ln(\hat{\beta}))} \right], \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} [\alpha_L, \alpha_U] &= \left[\hat{\alpha} \cdot \exp \left(-z_{\gamma/2} \frac{\sqrt{V(\hat{\alpha})}}{\hat{\alpha}} \right), \hat{\alpha} \cdot \exp \left(z_{\gamma/2} \frac{\sqrt{V(\hat{\alpha})}}{\hat{\alpha}} \right) \right], \\ [\beta_L, \beta_U] &= \left[\hat{\beta} \cdot \exp \left(-z_{\gamma/2} \frac{\sqrt{V(\hat{\beta})}}{\hat{\beta}} \right), \hat{\beta} \cdot \exp \left(z_{\gamma/2} \frac{\sqrt{V(\hat{\beta})}}{\hat{\beta}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Για παραμέτρους που είναι θετικές, όπως αυτές της κλασικής κατανομής Weibull, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούνται τα διαστήματα εμπιστοσύνης που δίνονται από τον τύπο (2.24), καθώς δίνουν θετικά άκρα και πιθανόν πιο ακριβείς προσεγγίσεις από αυτές που δίνονται από τον τύπο (2.23). Έχει παρατηρηθεί γενικά ότι η κατανομή των λογαρίθμων των εκτιμήσεων, $Z_{\ln \hat{\alpha}}$ και $Z_{\ln \hat{\beta}}$, είναι συνήθως πιο συμμετρική από ότι η κατανομή των εκτιμήσεων $Z_{\hat{\alpha}}$ και $Z_{\hat{\beta}}$. Επίσης, ο λογαριθμικός μετασχηματισμός εξασφαλίζει ότι το κάτω όριο του διαστήματος θα είναι θετικό, που ίσως να μην ισχύει για τα διαστήματα που δίνονται από τον τύπο (2.23).

Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της πιθανοφάνειας που δίνεται από τον τύπο (2.19), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial^2 \alpha} &= \frac{\beta n}{\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha^{2+\beta}} (\beta+1) \sum_{i=1}^n t_i^\beta, \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta} &= -\frac{n}{\beta} + \frac{\sum_{i=1}^n t_i^\beta}{\alpha^{\beta+1}} - \frac{\beta \cdot \sum_{i=1}^n t_i^\beta}{\alpha^{\beta+1}} \ln \alpha + \frac{\beta \cdot \sum_{i=1}^n (t_i^\beta \ln t_i)}{\alpha^{\beta+1}}, \\ \frac{\partial^2 l}{\partial^2 \beta} &= -\frac{n}{\beta^2} + \frac{(\ln \alpha)^2 \sum_{i=1}^n t_i^\beta}{\alpha^\beta} + \frac{2}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n (t_i^\beta \ln t_i) + \frac{\sum_{i=1}^n (t_i^\beta (\ln t_i)^2)}{\alpha^\beta}. \end{aligned}$$

Για τη μέση τιμή των παραπάνω ποσοτήτων βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
 & -E\left(\frac{\beta n}{\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha^{2+\beta}}(\beta+1)\sum_{i=1}^n T_i^\beta\right) = n\frac{\beta^2}{\alpha^2}, \\
 & -E\left(-\frac{n}{\beta} + \frac{\sum_{i=1}^n T_i^\beta}{\alpha^{\beta+1}} - \frac{\beta \cdot \sum_{i=1}^n T_i^\beta}{\alpha^{\beta+1}} \ln \alpha + \frac{\beta \cdot \sum_{i=1}^n (T_i^\beta \ln T_i)}{\alpha^{\beta+1}}\right) = \frac{n\gamma}{\alpha}, \\
 & -E\left(-\frac{n}{\beta^2} + \frac{(\ln \alpha)^2 \sum_{i=1}^n T_i^\beta}{\alpha^\beta} + \frac{2}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n (T_i^\beta \ln T_i) + \frac{\sum_{i=1}^n (T_i^\beta (\ln T_i)^2)}{\alpha^\beta}\right) = \frac{n(6+6\gamma^2+\pi^2)}{6\beta^2}.
 \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό των παραπάνω ποσοτήτων χρησιμοποιήσαμε τους τύπους (2.8) και (2.9). Συγκεκριμένα,

$$\begin{aligned}
 E\left(\sum_{i=1}^n T_i^\beta\right) &= \sum_{i=1}^n E(T_i^\beta) = n\alpha^\beta. \\
 E\left(\sum_{i=1}^n \ln T_i\right) &= \sum_{i=1}^n E(\ln T_i) = n\left[\frac{d}{dk} \alpha^k \Gamma\left(1+\frac{k}{\beta}\right)\right]_{k=0} = -\frac{\gamma}{\beta} + \ln \alpha. \\
 E\left(\sum_{i=1}^n (\ln t_i)^2\right) &= \sum_{i=1}^n E[(\ln T_i)^2] = n\left[\frac{d^2}{dk^2} \alpha^k \Gamma\left(1+\frac{k}{\beta}\right)\right]_{k=0} = \frac{\gamma^2}{\beta^2} + \frac{\pi^2}{6\beta^2} - \frac{2\gamma \ln \alpha}{\beta} + (\ln \alpha)^2,
 \end{aligned}$$

όπου γ η σταθερά του Euler και είναι ίση με $\gamma \cong 0.57721$.

Επομένως ο ασυμπτωτικός πίνακας διακύμανσης-συνδιακύμανσης για τις εκτιμήτριες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ θα είναι ίσος με

$$\begin{bmatrix} V(\hat{\alpha}) & Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \\ Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) & V(\hat{\beta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\frac{\beta^2}{\alpha^2} & \frac{n\gamma}{\alpha} \\ \frac{n\gamma}{\alpha} & \frac{n(6+6\gamma^2+\pi^2)}{6\beta^2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{n^2\pi^2}{6\alpha^2}\right)} \begin{bmatrix} \frac{n(6+6\gamma^2+\pi^2)}{6\beta^2} & -\frac{\gamma}{\alpha} \\ -\frac{\gamma}{\alpha} & \frac{\beta^2 n}{\alpha^2} \end{bmatrix}.$$

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης παραπέμπουμε στους Lawless (1978), Meeker and Escobar (1998), Pham (2006) και Rinne (2009). Για τη μέθοδο δέλτα παραπέμπουμε στο βιβλίο των Meeker and Escobar (1998).

Εκτίμηση της συνάρτησης αξιοπιστίας

Αν εισάγουμε τις εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ στον τύπο της συνάρτησης αξιοπιστίας (2.6) τότε προκύπτει η έκφραση

$$\hat{R}(t) = \exp \left[- \left(\frac{t}{\hat{\alpha}} \right)^{\hat{\beta}} \right],$$

η οποία είναι εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της συνάρτησης αξιοπιστίας, καθώς για τις εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας ισχύει η ιδιότητα του αναλοίωτου. Συγκεκριμένα ισχύει η παρακάτω πρόταση

Πρόταση. Έστω (X_1, X_2, \dots, X_n) τυχαίο δείγμα από τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x; \theta)$ και $\hat{\theta}$ η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου θ . Αν $g(\theta)$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση (συνάρτηση "1-1") της παραμέτρου θ τότε η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της συνάρτησης $g(\theta)$ είναι η $g(\hat{\theta})$.

Λογοκριμένα δεδομένα

Λογοκρισία τύπου I

Σύμφωνα με την λογοκρισία αυτού του τύπου, συνεχίζουμε το πείραμα καταγραφής των χρόνων ζωής των μονάδων μέχρι έναν προκαθορισμένο χρόνο c . Όσοι από τους χρόνους ζωής των n μονάδων T_1, \dots, T_n είναι μικρότεροι ή ίσοι του c καταγράφονται, ενώ οι υπόλοιποι δεν γίνονται γνωστοί. Γενικότερα, μπορούμε να πούμε ότι συνεχίζουμε το πείραμα καταγραφής του χρόνου ζωής της i -μονάδας μέχρι έναν προκαθορισμένο χρόνο c_i . Συγκεκριμένα, είτε θα γνωρίζουμε τον χρόνο ζωής της, T_i , αν $T_i \leq c_i$ είτε ότι απέτυχε σε χρόνο μεγαλύτερο του c_i . Αν συμβολίσουμε με $A = \{i : T_i > c_i\}$ το σύνολο των μονάδων που λογοκρίθηκαν και $A^c = \{i : T_i \leq c_i\}$ το συμπληρωματικό του, τότε η συνάρτηση πιθανοφάνειας του δείγματος γράφεται

$$L(\alpha, \beta) = \prod_{i \in A^c} f_T(t_i) \cdot \prod_{i \in A} (1 - F_T(c_i)).$$

Για την κλασική κατανομή κατανομή Weibull η συνάρτηση πιθανοφάνειας γράφεται

$$L(\alpha, \beta) = \left(\frac{\beta}{\alpha^\beta} \right)^r \left(\prod_{i \in A^c} t_i \right)^{\beta-1} \exp \left(- \sum_{i \in A^c} \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right) \exp \left(- \sum_{i \in A} \left(\frac{c_i}{\alpha} \right)^\beta \right),$$

με αντίστοιχο πιθανολογάρithμο

$$l(\alpha, \beta) = r \ln \beta - r \beta \ln \alpha + (\beta - 1) \sum_{i \in A} \ln t_i - \sum_{i \in A} \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta - \sum_{i \in A} \left(\frac{c_i}{\alpha} \right)^\beta.$$

Για την εύρεση των εκτιμητριών μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων α και β θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0$$

Το τελευταίο οδηγεί στο επόμενο σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \frac{\beta}{\alpha^{\beta+1}} \left(\sum_{i \in A} t_i^\beta + \sum_{i \in A} c_i^\beta \right) - \frac{r\beta}{\alpha} = 0, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \frac{r}{\beta} - r \ln \alpha + \sum_{i \in A} \ln(t_i) - \sum_{i \in A} \left\{ \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \ln \left(\frac{t_i}{\alpha} \right) \right\} - \sum_{i \in A} \left\{ \left(\frac{c_i}{\alpha} \right)^\beta \ln \left(\frac{c_i}{\alpha} \right) \right\} = 0.$$

Από την εξίσωση (2.25) η παράμετρος α εκφράζεται μέσω της παραμέτρου β ως

$$\alpha = \left[\frac{1}{r} \left(\sum_{i \in A} t_i^\beta + \sum_{i \in A} c_i^\beta \right) \right]^{\frac{1}{\beta}}$$

και αντικαθιστώντας τον παραπάνω τύπο στην εξίσωση (2.24) προκύπτει η εξίσωση (ως προς β μόνο)

$$\sum_{i \in A} \ln(t_i) = \frac{r}{\beta} \ln \left[\frac{1}{r} \left(\sum_{i \in A} t_i^\beta + \sum_{i \in A} c_i^\beta \right) \right] + \sum_{i \in A} \left[\frac{t_i^\beta r}{\sum_{i \in A} t_i^\beta + \sum_{i \in A} c_i^\beta} \cdot \ln \frac{r^{\frac{1}{\beta}} t_i}{\left(\sum_{i \in A} t_i^\beta + \sum_{i \in A} c_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}} \right] + \sum_{i \in A} \left[\frac{c_i^\beta r}{\sum_{i \in A} t_i^\beta + \sum_{i \in A} c_i^\beta} \cdot \ln \frac{r^{\frac{1}{\beta}} c_i}{\left(\sum_{i \in A} t_i^\beta + \sum_{i \in A} c_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}} \right] - \frac{r}{\beta}.$$

Η τελευταία μπορεί να λυθεί αριθμητικά. Αφού βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας $\hat{\beta}$ του β , η εκτίμηση του α γίνεται εύκολα από τον τύπο

$$\hat{\alpha} = \left[-\frac{1}{r} \left(\sum_{i \in A} T_i^{\hat{\beta}} + \sum_{i \in A} c_i^{\hat{\beta}} \right) \right]^{\frac{1}{\hat{\beta}}} = \left[-\frac{1}{r} \left(\sum_{i=1}^n \min \{ T_i^{\hat{\beta}}, c_i^{\hat{\beta}} \} \right) \right]^{\frac{1}{\hat{\beta}}}.$$

Λογοκρισία τύπου II

Υποθέτουμε ότι τα δεδομένα μας αποτελούνται από τις παρατηρηθείσες τιμές $t_{(1)}, \dots, t_{(n)}$ των r τυχαίων μεταβλητών

$$T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \dots \leq T_{(r)}$$

(r δεδομένος ακέραιος, $1 \leq r \leq n$). Θεωρείται γνωστό ότι οι υπόλοιπες μονάδες $n-r$ απέτυχαν μετά τη χρονική στιγμή $t_{(r)}$, δηλαδή

$$t_{(r)} < T_{(r+1)} \leq \dots \leq T_{(n)}.$$

Η από κοινού στατιστική συνάρτηση πυκνότητας των διατεταγμένων $T_{(1)}, \dots, T_{(r)}$ δίνεται από τον τύπο

$$f_{T_{(1)}, \dots, T_{(r)}}(\tau_1, \dots, \tau_r) = \frac{n!}{(n-r)!} [1 - F(\tau_r)]^{n-r} \prod_{i=1}^r f(\tau_i), \text{ για } \tau_1 \leq \dots \leq \tau_r.$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας θα είναι ίση με

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta; \tau_1, \dots, \tau_n) &= \frac{n!}{(n-r)!} \exp \left[- \left(\frac{\tau_r}{\alpha} \right)^\beta (n-r) \right] \left(\frac{\beta}{\alpha^\beta} \right)^r \left(\prod_{i=1}^r \tau_i \right)^{\beta-1} \exp \left(- \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^r \tau_i^\beta \right) = \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \left(\frac{\beta}{\alpha^\beta} \right)^r \left(\prod_{i=1}^r \tau_i \right)^{\beta-1} \exp \left\{ - \frac{1}{\alpha^\beta} \left(\sum_{i=1}^r \tau_i^\beta + (n-r) \tau_r^\beta \right) \right\}, \tau_1 \leq \dots \leq \tau_r \end{aligned}$$

με αντίστοιχο πιθανολογάρημο, αφού παραλείψουμε τον όρο $\frac{n!}{(n-r)!}$, καθώς δεν

περιλαμβάνει καμία από τις προς εκτίμηση παραμέτρους

$$l(\alpha, \beta; \tau_1, \dots, \tau_n) = r \ln \beta - r \beta \ln \alpha + (\beta - 1) \ln \left(\prod_{j=1}^r t_j \right) - \frac{1}{\alpha^\beta} \left(\sum_{i=1}^r \tau_i^\beta + (n-r) \tau_r^\beta \right).$$

Για την εύρεση των εκτιμητριών μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων α και β θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta; \tau_1, \dots, \tau_n)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial l(\alpha, \beta; \tau_1, \dots, \tau_n)}{\partial \beta} = 0.$$

Το τελευταίο οδηγεί στο επόμενο σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta; \tau_1, \dots, \tau_n)}{\partial \alpha} = - \frac{r \beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \left[\sum_{i=1}^r \left(\frac{\tau_i}{\alpha} \right)^\beta + (n-r) \left(\frac{\tau_i}{\alpha} \right)^\beta \right] = 0, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta; \tau_1, \dots, \tau_n)}{\partial \beta} = \frac{r}{\beta} - r \ln \beta + \sum_{i=1}^r \tau_i - \frac{1}{\alpha^\beta} \left[\sum_{i=1}^r \left(\tau_i^\beta \ln \frac{\tau_i}{\alpha} \right) + (n-r) \tau_r^\beta \ln \frac{\tau_r}{\alpha} \right] = 0. \quad (2.27)$$

Από την εξίσωση (2.26) η παράμετρος α εκφράζεται μέσω της παραμέτρου β ως

$$\alpha = \left[\frac{1}{r} \left(\sum_{i=1}^r \tau_i^\beta + (n-r) \tau_r^\beta \right) \right]^{\frac{1}{\beta}}. \quad (2.28)$$

Αντικαθιστώντας τον τύπο (2.28) στην εξίσωση (2.27), προκύπτει η εξίσωση (ως προς β μόνο)

$$\frac{(n-r) \tau_r^\beta \ln \tau_r + \sum_{i=1}^r (\tau_i^\beta \ln \tau_i)}{\sum_{i=1}^r \tau_i^\beta + (n-r) \tau_r^\beta} - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \ln \tau_i. \quad (2.29)$$

Οι εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας των α , β βρίσκονται αν λυθεί πρώτα ως προς β η εξίσωση (2.29) και στη συνέχεια αντικαταστήσουμε το $\hat{\beta}$ στον παρακάτω τύπο

$$\hat{\alpha} = \left[\frac{1}{r} \left(\sum_{i=1}^r T_i^{\hat{\beta}} + (n-r) T_r^{\hat{\beta}} \right) \right]^{\frac{1}{\hat{\beta}}}.$$

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την εκτίμηση των παραμέτρων της κλασικής κατανομής Weibull παραπέμπουμε στους Cohen (1965) και Rockette et al. (1974) και Hossain

2.6.2 Μέθοδος των Ροπών

Καθώς το μοντέλο που εξετάζουμε έχει δυο παραμέτρους, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων αυτών μπορούν να υπολογισθούν χρησιμοποιώντας τη μέση τιμή και τη δειγματική διασπορά.

Η μέση τιμή ενός δείγματος $\{t_1, \dots, t_n\}$ δίνεται από την έκφραση

$$\bar{t} = \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{n},$$

ενώ η δειγματική διασπορά από την έκφραση

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2.$$

Από τις σχέσεις (2.10) και (2.13) δίνονται η μέση τιμή και η διασπορά της κλασικής κατανομής Weibull αντίστοιχα. Εξισώνοντας, έχουμε το παρακάτω σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{t} = \alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \end{array} \right. \quad (2.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s^2 = \alpha^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]^2 \right] \end{array} \right. \quad (2.31)$$

Έτσι, διαιρώντας κατά μέλη τις (2.30), (2.31) η εκτίμηση για την παράμετρο β θα δίνεται από τη λύση της εξίσωσης

$$\frac{s^2}{\bar{t}^2} = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\hat{\beta}}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\hat{\beta}}\right)} - 1$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης απαιτεί τη χρήση κάποιας επαναληπτικής μεθόδου ούτως ώστε να υπολογιστεί η Γάμμα συνάρτηση.

Η εκτίμηση της παραμέτρου α δίνεται από τη λύση της εξίσωσης (2.27) ως προς α

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{t}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\hat{\beta}}\right)}$$

2.6.3 Γραφική μέθοδος

Αφού κατασκευάσουμε το WPP γράφημα (παράγραφος 2.5 Α.) ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

6. Προσαρμόζουμε στο γράφημα την ευθεία παλινδρόμησης χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.
7. Η κλίση της ευθείας παλινδρόμησης αποφέρει την εκτίμηση $\hat{\beta}$ της παραμέτρου σχήματος β .
8. Υπολογίζουμε το σημείο y_0 , όπου η ευθεία παλινδρόμησης τέμνει τον άξονα $y'y$. Η εκτίμηση $\hat{\alpha}$ της παραμέτρου κλίμακας α δίνεται από τη λύση της εξίσωσης

$$\hat{\alpha} = \exp\left(\frac{-y_0}{\hat{\beta}}\right).$$

2.7 Εφαρμογές της κλασικής κατανομής Weibull

Συχνά η διπαραμετρική κατανομή Weibull χρησιμοποιείται για να περιγράψει τη συχνότητα της ταχύτητας του ανέμου. Έχει παρατηρηθεί από τους Justus et al. (1976), ότι οι

πιθανές μορφές που παρουσιάζει το μοντέλο της κατανομής Weibull προσαρμόζονται ικανοποιητικά σε δεδομένα που αφορούν την ταχύτητα του ανέμου.

Οι μετρήσεις της ταχύτητας του ανέμου καταγράφονται, συνήθως, υπό τη μορφή χρονολογικών σειρών, στις οποίες τα δεδομένα προέρχονται είτε από στιγμιαίες μετρήσεις, είτε από το μέσο όρο μετρήσεων σε κάποια χρονική περίοδο. Όμως σε μερικές περιπτώσεις είναι διαθέσιμη η κατανομή συχνοτήτων των μετρήσεων, τις οποίες πρέπει να ταξινομήσουμε (ομαδοποιήσουμε) σε μικρό πλήθος ομάδων, που ονομάζονται κλάσεις.

Σκοπός μας είναι να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους της διπαραμέτρικης κατανομής Weibull από την οποία προέρχονται τα δεδομένα μας. Αυτό μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους. Στο παρακάτω παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας, τη μέθοδο των ροπών και τη γραφική μέθοδο για να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους σχήματος και κλίμακας.

2.7.1 Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας

Οι Stevens and Smulders (1979) πρότειναν ότι η κλασική κατανομή Weibull μπορεί να προσαρμοσθεί σε χρονολογικές σειρές δεδομένων που αφορούν την ταχύτητα του ανέμου χρησιμοποιώντας τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας. Η παράμετρος κλίμακας α και η παράμετρος σχήματος β , μπορούν να εκτιμηθούν από τις σχέσεις (2.21) και (2.22).

2.7.2 Γραφική μέθοδος

Κατασκευάζοντας το WPP plot με $y = \ln(-\ln(1 - F(t_i))) = \ln(-\ln(1 - P(T \leq t_i)))$ και $x = \ln(t_i)$, θα παραστήσουμε μια ευθεία γραμμή της μορφής $f(x) = \beta x - \beta \ln(\alpha)$, η οποία θα έχει κλίση β και σταθερό όρο ίσο με $-\beta \ln(\alpha)$. Για να εφαρμόσουμε τη γραφική μέθοδο θα πρέπει να υπολογίσουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής των δεδομένων μας. Η κλίση και ο σταθερός όρος θα υπολογισθούν μέσω της ευθείας παλινδρόμησης χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

Υπάρχουν περιπτώσεις κατά τις οποίες πρέπει να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους της κλασικής κατανομής Weibull χωρίς επαρκή πληροφόρηση για την κατανομή της ταχύτητας του ανέμου. Για παράδειγμα μπορεί να έχουμε στη διάθεσή μας ετήσιους ή μηνιαίους μέσους όρους. Συνήθως οι τιμές της παραμέτρου β κυμαίνονται μεταξύ 1.5 και 3, αυτό εξαρτάται από τη μεταβλητότητα της ταχύτητας του ανέμου. Μικρές τιμές της παραμέτρου β

ανταποκρίνονται σε περισσότερο μεταβλητούς ανέμους. Μια κατανομή που χρησιμοποιείται στην ανεμομηχανική είναι η κατανομή Rayleigh. Η κατανομή Rayleigh είναι μια ειδική περίπτωση της κλασικής κατανομής Weibull με την παράμετρο σχήματος $\beta=2$, τιμή η οποία αντιστοιχεί σε μέτριες ριπές ανέμων. Έτσι, αν καμία πληροφορία δεν υπάρχει σχετικά με τη μεταβλητότητα του ανέμου, τότε η παράμετρος σχήματος β θεωρείται ότι παίρνει την τιμή 2. Η παράμετρος κλίμακας α , στη συνέχεια εκτιμάται από την έκφραση (2.22), δεδομένου ότι ήδη έχουμε εκτιμήσει την παράμετρο σχήματος $\hat{\beta} = 2$.

2.7.3 Παρουσίαση αποτελεσμάτων

Κάθε μέθοδος εφαρμόζεται στα ίδια δεδομένα. Τα δεδομένα προέρχονται από την εργασία των Seguro and Lambert (2000), είναι υπό τη μορφή χρονολογικής σειράς και δίνονται στον Πίνακα 2.1.

Πίνακας 2.1

Χρονολογικά δεδομένα							
Ωρα	Ταχύτητα ανέμου (m/s)			Ωρα	Ταχύτητα ανέμου (m/s)		
	Μέρα 1	Μέρα 2	Μέρα 3		Μέρα 1	Μέρα 2	Μέρα 3
1	3.3	4.0	4.7	13	5.7	4.5	6.3
2	3.8	4.0	4.5	14	8.5	5.8	9.4
3	4.2	2.0	4.2	15	8.9	4.8	7.7
4	3.3	2.7	5.7	16	9.3	4.8	6.0
5	2.8	2.7	2.7	17	6.5	5.5	8.9
6	3.0	3.3	4.3	18	4.2	5.7	7.7
7	4.0	2.7	4.3	19	4.3	5.0	6.2
8	2.7	2.7	4.5	20	3.7	4.3	5.7
9	5.2	5.8	4.5	21	3.5	4.0	5.7
10	6.7	5.7	6.0	22	2.8	3.5	7.5
11	6.8	6.2	10.4	23	3.7	5.0	7.5
12	6.8	6.5	6.7	24	3.3	3.7	5.3

A. Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας

Εισάγουμε τα δεδομένα του Πίνακα 2.1 στο Mathematica. Ονομάζουμε t τη λίστα που περιέχει τα δεδομένα μας. Για τον προσδιορισμό της εκτιμήτριας μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου β απαιτείται η επίλυση της εξίσωσης

$$\frac{\sum_{i=1}^{72} (t_i^\beta \ln t_i)}{\sum_{i=1}^{72} t_i^\beta} - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{72} \sum_{i=1}^{72} \ln t_i.$$

Υπολογίζεται ότι

$$\hat{\beta} \cong 2.92557$$

και αντικαθιστώντας το $\hat{\beta}$ στον τύπο

$$\alpha = \left(\frac{1}{72} \sum_{i=1}^{72} t_i^{\hat{\beta}} \right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}} = \left(\frac{1}{72} \sum_{i=1}^{72} t_i^{2.92557} \right)^{\frac{1}{2.92557}}$$

βρίσκουμε

$$\hat{\alpha} = 5.7501.$$

Οι εντολές που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι εξής:

```
t = {3.3, 3.8, 4.2, 3.3, 2.8, 3.0, 4.0, 2.7, 5.2, 6.7, 6.8, 6.8, 5.7,
      8.3, 9.2, 9.3, 6.5, 4.2, 4.3, 3.7, 4.0, 2.8, 3.7, 3.3, 4.0, 4.0, 2.0,
      2.7, 2.7, 3.3, 2.7, 2.7, 5.8, 5.7, 6.2, 6.5, 4.5, 5.8, 4.8, 4.8, 5.5,
      5.7, 5.0, 4.3, 4.0, 3.5, 5.0, 3.7, 4.7, 4.5, 4.2, 5.7, 2.7, 4.3, 4.3,
      4.5, 4.5, 6.0, 10.4, 6.7, 6.3, 9.4, 7.7, 6.0, 8.9, 7.7, 6.2, 5.7,
      5.7, 7.5, 7.5, 5.3};
bm =
FindRoot[
  (Sum[Log[t[[i]]] * t[[i]]^b, {i, 1, Length[t]}] /
   Sum[t[[i]]^b, {i, 1, Length[t]}) - 1/b ==
  Sum[Log[t[[i]]], {i, 1, Length[t]}] / Length[t], {b, 1}];
am = (Sum[t[[i]]^bm[[1, 2]], {i, 1, Length[t]}] / Length[t])^(1/bm[[1, 2]]);
Print[
  "Η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου α είναι ίση με  $\hat{\alpha} =$ ",
  am,
  " και η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου β είναι
  ίση με  $\hat{\beta} =$ ", bm[[1, 2]]]
```

B. Μέθοδος των ροπών

Εισάγουμε τα δεδομένα του Πίνακα 2.1 όπως προηγουμένως. Για τον προσδιορισμό της εκτιμήτριας της παραμέτρου β με τη μέθοδο των ροπών απαιτείται η επίλυση της εξίσωσης

$$\frac{s^2}{\bar{t}^2} = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} - 1,$$

$$\text{όπου } \bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{72} t_i}{72} \cong 1.2361 \text{ και } s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 = \frac{1}{72-1} \sum_{i=1}^{72} (t_i - \bar{t})^2 \cong 3.51338.$$

Υπολογίζεται ότι

$$\hat{\beta} \cong 2.97815$$

και αντικαθιστώντας το $\hat{\beta}$ στον τύπο

$$\alpha = \frac{\bar{t}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} = \frac{\bar{t}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2.97815}\right)}$$

βρίσκουμε

$$\hat{\alpha} = 5.73949.$$

Οι εντολές που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι εξής:

```
t = {3.3, 3.8, 4.2, 3.3, 2.8, 3.0, 4.0, 2.7, 5.2, 6.7, 6.8, 6.8, 5.7,
    8.3, 9.2, 9.3, 6.5, 4.2, 4.3, 3.7, 4.0, 2.8, 3.7, 3.3, 4.0, 4.0, 2.0,
    2.7, 2.7, 3.3, 2.7, 2.7, 5.8, 5.7, 6.2, 6.5, 4.5, 5.8, 4.8, 4.8, 5.5,
    5.7, 5.0, 4.3, 4.0, 3.5, 5.0, 3.7, 4.7, 4.5, 4.2, 5.7, 2.7, 4.3, 4.3,
    4.5, 4.5, 6.0, 10.4, 6.7, 6.3, 9.4, 7.7, 6.0, 8.9, 7.7, 6.2, 5.7,
    5.7, 7.5, 7.5, 5.3};
br =
  FindRoot[Variance[t] / Mean[t]^2 ==
    (Gamma[1 + (2/b)] / Gamma[1 + (1/b)]^2) - 1, {b, 1}];
ar = Mean[t] / Gamma[1 + (1/br[[1, 2]])];
Print["Η εκτιμήτρια ροπών της παραμέτρου α είναι ίση με α̂=", ar,
  " και η εκτιμήτρια ροπών της παραμέτρου β είναι ίση με β̂=",
  br[[1, 2]]]
```

Γ. Γραφική μέθοδος

Το πρώτο βήμα που πρέπει να κάνουμε είναι να διατάξουμε τα στοιχεία που βρίσκονται στη λίστα που περιέχουν τα δεδομένα μας, δηλαδή διατάσσουμε τα στοιχεία της λίστας t .

```
{2., 2.7, 2.7, 2.7, 2.7, 2.7, 2.7, 2.8, 2.8, 3., 3.3, 3.3,
  3.3, 3.3, 3.5, 3.7, 3.7, 3.7, 3.8, 4., 4., 4., 4., 4., 4.2,
  4.2, 4.2, 4.3, 4.3, 4.3, 4.3, 4.5, 4.5, 4.5, 4.5, 4.7, 4.8,
  4.8, 5., 5., 5.2, 5.3, 5.5, 5.7, 5.7, 5.7, 5.7, 5.7, 5.7,
  5.8, 5.8, 6., 6., 6.2, 6.2, 6.3, 6.5, 6.5, 6.7, 6.7, 6.8,
  6.8, 7.5, 7.5, 7.7, 7.7, 8.3, 8.9, 9.2, 9.3, 9.4, 10.4}
```

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την εμπειρική συνάρτηση κατανομής σύμφωνα με τον τύπο

$$\hat{F}(t_{(i)}) = \frac{i}{n+1}, \quad i=1, \dots, 72 \text{ και } n=72.$$

Για περισσότερες τεχνικές ως προς τον υπολογισμό της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής παραπέμπουμε στο σύγγραμμα των Murthy et al. (2004).

Έπειτα υπολογίζουμε τις τιμές των ποσοτήτων

$$y_i = \ln \left\{ -\ln \left[1 - \hat{F}(t_{(i)}) \right] \right\} \text{ και } x_i = \ln(t_{(i)}) \text{ για } 1 \leq i \leq 72.$$

Τέλος κατασκευάζουμε το διάγραμμα διασποράς (*scatter plot*) των y_i ως προς x_i για $1 \leq i \leq 72$.

Για να προχωρήσουμε στην εκτίμηση των παραμέτρων θα υπολογισθεί η ευθεία που προσαρμόζεται στο διάγραμμα διασποράς (*scatter plot*) των y_i ως προς x_i με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Βρίσκουμε ότι

Πίνακας 2.2

Model Summary							
Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate			
1	,973 ^a	,946	,945	,28000			

a. Predictors: (Constant), x

Coefficients ^a								
Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	95% Confidence Interval for B	
		B	Std. Error	Beta			Lower Bound	Upper Bound
1	(Constant)	-5,560	,147		-37,879	,000	-5,852	-5,267
	x	3,190	,091	,973	34,991	,000	3,008	3,371

a. Dependent Variable: y

ANOVA ^b						
Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	95,992	1	95,992	1224,402	,000 ^a
	Residual	5,488	70	,078		
	Total	101,480	71			

a. Predictors: (Constant), x
b. Dependent Variable: y

Από τον Πίνακα Model summary παρατηρούμε ότι η τιμή του $R^2 = 0.946$ αυτό σημαίνει ότι το μοντέλο της κλασικής κατανομής Weibull προσαρμόζεται αρκετά καλά στα δεδομένα μας. Από τον πίνακα coefficients παρατηρούμε ότι τα p-values για κάθε παράμετρο είναι ίσα με το μηδέν, οπότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση και αποδεχόμαστε ότι οι παράμετροι της ευθείας της παλινδρόμησης είναι διάφοροι από το μηδέν.

Η ευθεία της παλινδρόμησης έχει την παρακάτω μορφή

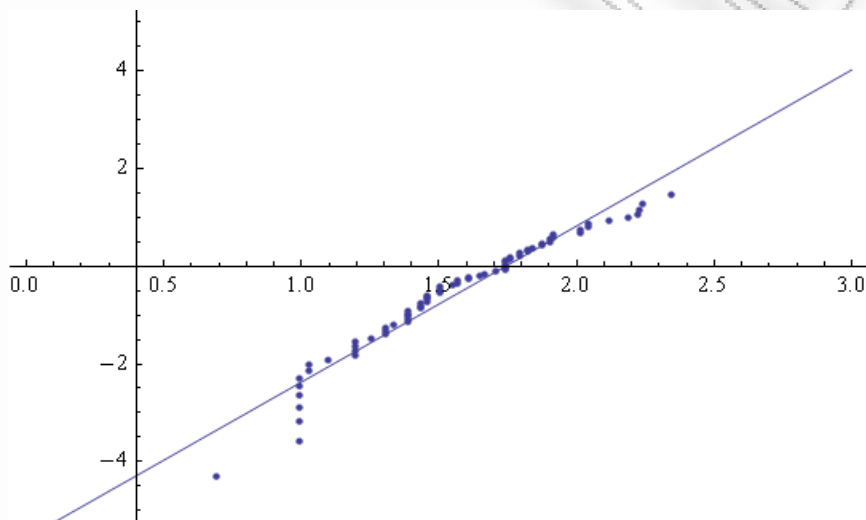
$$f(x) = 3.19 \cdot x - 5.56.$$

Η κλίση της ευθείας παλινδρόμησης είναι ίση με 3.19 ενώ ο σταθερός όρος είναι ίσος με -5.56. Έτσι η εκτίμηση της παραμέτρου σχήματος ισούται με την κλίση της ευθείας παλινδρόμησης, δηλαδή, $\hat{\beta} = 3.19$ και η εκτίμηση της παραμέτρου κλίμακας υπολογίζεται από την εξίσωση

$$-\hat{\beta} \ln(\hat{\alpha}) = -5.56 \Leftrightarrow -3.19 \ln(\hat{\alpha}) = -5.56 \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 5.71.$$

Παρακάτω δίνεται το γράφημα διασποράς και της προσαρμοσμένης ευθείας παλινδρόμησης με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

Σχήμα 2.6



Οι εντολές που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι εξής:

```
s = {3.3, 3.8, 4.2, 3.3, 2.8, 3.0, 4.0, 2.7, 5.2, 6.7, 6.8, 6.8,
      5.7, 8.3, 9.2, 9.3, 6.5, 4.2, 4.3, 3.7, 4.0, 2.8, 3.7, 3.3,
      4.0, 4.0, 2.0, 2.7, 2.7, 3.3, 2.7, 2.7, 5.8, 5.7, 6.2, 6.5,
      4.5, 5.8, 4.8, 4.8, 5.5, 5.7, 5.0, 4.3, 4.0, 3.5, 5.0, 3.7,
      4.7, 4.5, 4.2, 5.7, 2.7, 4.3, 4.3, 4.5, 4.5, 6.0, 10.4, 6.7,
      6.3, 9.4, 7.7, 6.0, 8.9, 7.7, 6.2, 5.7, 5.7, 7.5, 7.5, 5.3};
t = Sort[s]; y = {};
For[i = 1, i ≤ Length[t], i++,
  AppendTo[y, Log[-Log[1 - (i / (Length[t] + 1))]]];
data = Table[{Log[t[[i]]], y[[i]]}, {i, Length[t]};
Needs["LinearRegression`"]
line = Fit[data, {1, x}, x]
Regress[data, {1, x}, x]
Show[ListPlot[data], Plot[{line}, {x, -1, 3}],
  PlotRange → {{0, 3}, {-5, 5}}, AxesOrigin → {0.4, 0}]
```

2.8 Σύγκριση μεθόδων εκτίμησης

Στην Παράγραφο 2.6 έγινε αναφορά σε μεθόδους εκτίμησης των παραμέτρων της κλασικής κατανομής Weibull.

Στην παράγραφο αυτή θα προσδιορίσουμε, ανάλογα με το μέγεθος του δείγματος, ποια από τις ακόλουθες μεθόδους: μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας (EMΠ), μέθοδος των ροπών (MP) και γραφική μέθοδος (ΓΜ), είναι καταλληλότερη στο να εκτιμήσει τις παραμέτρους της κλασικής κατανομής Weibull.

Για τη σύγκριση των μεθόδων θα προσομοιωθούν 100 δείγματα των 10, 50 και 120 παρατηρήσεων που προέρχονται από την κλασική κατανομή Weibull με προκαθορισμένες τιμές παραμέτρους.

Το κριτήριο που θα χρησιμοποιηθεί για να επιλεγεί η καταλληλότερη μέθοδος είναι το μέσο άθροισμα αποκλίσεων (*mean sum variation, MSV*)

$$MSV = \frac{\sum_{r=1}^{100} \left\{ \frac{|\alpha - \hat{\alpha}_r|}{\alpha} + \frac{|\beta - \hat{\beta}_r|}{\beta} \right\}}{100}$$

Η μέθοδος με τη μικρότερη *MSV* τιμή επιλέγεται ως καταλληλότερη. Παρακάτω παρουσιάζεται ο σχετικός πίνακας με τις *MSV* τιμές.

Πίνακας 2.2

α	β	n	EMΠ	MP	ΓΜ	Καταλληλότερη
0.1	1	10	0.502097	0.495695	0.535162	MP
		50	0.214546	0.235081	0.260855	EMΠ
		120	0.138730	0.156240	0.174831	EMΠ
1.2	3.6	10	0.357029	0.346762	0.338053	ΓΜ
		50	0.121530	0.122796	0.16180	EMΠ
		120	0.0758742	0.087472	0.105038	EMΠ
1.4	5.2	10	0.3300660	0.320645	0.306664	ΓΜ
		50	0.1001160	0.103598	0.142361	EMΠ
		120	0.0732731	0.0786819	0.098506	EMΠ

Από τον Πίνακα 2.2 προκύπτει ότι η καταλληλότερη μέθοδος εκτίμησης των παραμέτρων της κλασικής κατανομής Weibull είναι η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας (EMΠ). Η γραφική μέθοδος (ΓΜ) καθώς και η μέθοδος των ροπών (MP) φαίνονται να είναι κατάλληλες για εκτιμήσεις των παραμέτρων όταν έχουμε στη διάθεσή μας μικρά δείγματα.

Οι εντολές που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι εξής:

```

n = 20; shape = 1; scale = 0.1; k = {}; l = {}; m = {}; j = 100; (*-j δηλώνει ποσες n-άδες θα παρούμε-*)
Do[
  t = Table[scale * (-Log[Random[]]) ^ (1 / shape), {n}]; (*-n τυχαίοι αριθμοί από Wei με παραμετρο-*)
  s = Sort[t];
  y = Table[Log[-Log[1 - (i / (Length[t] + 1))]], {i, 1, Length[t]}];
  (*-εμπειρική συνάρτη κατανομής-*)
  x = Table[Log[s[[i]]], {i, 1, Length[t]}];
  g1 = (Sum[(x[[i]] - Mean[x]) * (y[[i]] - Mean[y]), {i, 1, Length[y]}]) /
    Sum[(x[[i]] - Mean[x]) ^ 2, {i, 1, Length[y]}];
  (*-υπολογισμός κλίσης της ευθείας παλινδρόμησης-*)
  g0 = Mean[y] - g1 * Mean[x]; (*-υπολογισμός σταθεράς της ευθείας παλινδρόμησης-*)
  agraph = Solve[Log[ag] == -g0 / g1, ag]; (*-υπολογισμός της παραμετρού κλίμακας-*)
  AppendTo[k, {agraph[[1, 1, 2]], g1}];
  bm =
  FindRoot[(Sum[Log[t[[i]]] * t[[i]] ^ b, {i, 1, Length[t]}] / Sum[t[[i]] ^ b, {i, 1, Length[t]}]) - 1 / b ==
    Sum[Log[t[[i]]], {i, 1, Length[t]}] / Length[t], {b, 1}]; (*-υπολογισμός παραμ β MLE-*)
  am = (Sum[t[[i]] ^ bm[[1, 2]], {i, 1, Length[t]}] / Length[t]) ^ (1 / bm[[1, 2]]);
  (*-υπολογισμός παραμ α MLE-*)
  AppendTo[l, {am, bm[[1, 2]]}];
  r1 = FindRoot[(Variance[t] / Mean[t] ^ 2) == (Gamma[1 + (2 / i)] / Gamma[1 + (1 / i)] ^ 2) - 1, {i, 1}];
  (*-υπολογισμός παραμ β Moments-*)
  r2 = Mean[t] / Gamma[1 + (1 / r1[[1, 2]])]; (*-υπολογισμός παραμ α Moments-*)
  AppendTo[m, {r2, r1[[1, 2]]}];
, {j}]
Print["Πραγματικές παράμετροι α=", scale, ", β=", shape]
Print["Για εκτιμήσεις ΕΜΠ MSV=",
  Sum[((Abs[scale - l[[i, 1]])] / scale) + ((Abs[shape - l[[i, 2]])] / shape), {i, j}] / j]
Print["Για εκτιμήσεις με τη ΜΡ MSV=",
  Sum[((Abs[scale - m[[i, 1]])] / scale) + ((Abs[shape - m[[i, 2]])] / shape), {i, j}] / j]
Print["Για εκτιμήσεις με ΓΜ MSV=",
  Sum[((Abs[scale - k[[i, 1]])] / scale) + ((Abs[shape - k[[i, 2]])] / shape), {i, j}] / j]

```

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑ

Κεφάλαιο 3^ο

Μετασχηματισμένες κατανομές Weibull

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε στις μετασχηματισμένες κατανομές Weibull, οι οποίες προέρχονται από (α) γραμμικό (β) μη γραμμικό μετασχηματισμό της μεταβλητής της κλασικής κατανομής Weibull (2.1). Ο βασικός στόχος των μετασχηματισμών αυτών είναι η μορφή της βαθμίδας αποτυχίας των νέων κατανομών να πλησιάσει προς την BC.

Συμβολίζουμε με $G(t, \theta)$ τη συνάρτηση κατανομής του μετασχηματισμένου μοντέλου. Επίσης ορίζουμε ως T την τυχαία μεταβλητή που προέρχεται από την κλασική κατανομή Weibull και Z την τυχαία μεταβλητή που προέρχεται από την κατανομή του μετασχηματισμένου μοντέλου. Η τυχαία μεταβλητή Z σε ορισμένα μοντέλα μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές.

3.2 Γραμμικός μετασχηματισμός

A. Μονοπαραμετρική κατανομή Weibull

Ας θεωρήσουμε αρχικά το γραμμικό μετασχηματισμό

$$Z = \frac{1}{\alpha} T.$$

Η **συνάρτηση κατανομής** του νέου μοντέλου βρίσκεται από την έκφραση

$$G(t) = P(Z \leq t) = P\left(\frac{1}{\alpha} T \leq t\right) = P(T \leq \alpha t) = F(\alpha t) \Leftrightarrow$$

$$G(t) = 1 - \exp(-t^\beta) \quad t \geq 0, \beta > 0,$$

όπου F η συνάρτηση κατανομής της κλασικής κατανομής Weibull (2.1). Η νέα κατανομή καλείται μονοπαραμετρική κατανομή Weibull με συνάρτηση κατανομής G . Παρατηρούμε ότι το στήριγμα της G είναι ίδιο με εκείνο της F .

Η **συνάρτηση πυκνότητας** της μονοπαραμετρικής κατανομής Weibull βρίσκεται από τον τύπο

$$g(t) = \beta t^{\beta-1} \exp(-t^\beta),$$

η αντίστοιχη **συνάρτηση αξιοπιστίας** είναι ίση με

$$R(t) = \exp(-t^\beta),$$

ενώ τέλος, η **βαθμίδα αποτυχίας** δίνεται από τον τύπο

$$\lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} = \beta t^{\beta-1}.$$

Παρατηρούμε ότι το μοντέλο της μονοπαραμετρικής κατανομής Weibull, αποτελεί μια ειδική περίπτωση της κλασικής κατανομής Weibull (αντικαθιστώντας την παράμετρο κλίμακας $\alpha = 1$). Έτσι προκύπτει ότι η μέση τιμή, η διακύμανση καθώς και οι εκτιμήσεις αυτού του μοντέλου υπολογίζονται με αντικατάσταση του $\alpha = 1$. Τέλος, διαπιστώνουμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας του μοντέλου δεν μπορεί να πάρει τη μορφή BC.

B. Τριπαραμετρική κατανομή Weibull

Έστω ο γραμμικός μετασχηματισμός που δίνεται από τον τύπο

$$Z = T + \tau \tag{3.1}$$

Η **συνάρτηση κατανομής** του νέου μοντέλου δίνεται από την έκφραση

$$G(t) = P(Z \leq t) = P(T + \tau \leq t) = P(T \leq t - \tau) = F(t - \tau) \Leftrightarrow$$

$$G(t) = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ 1 - \exp\left[-\left(\frac{t - \tau}{\alpha}\right)^\beta\right] & t \geq \tau \end{cases} \tag{3.2}$$

όπου $-\infty < \tau < \infty$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ και F η συνάρτηση κατανομής της κλασικής κατανομής Weibull (2.1). Η νέα κατανομή καλείται τριπαραμετρική κατανομή Weibull με συνάρτηση κατανομής G . Η παράμετρος τ καλείται παράμετρος θέσης. Παρατηρούμε ότι το στήριγμα της G είναι διαφορετικό από εκείνο της F . Η νέα μεταβλητή τ καλείται μεταβλητή θέσης, αν παριστά χρονική διάρκεια η οποία δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές τότε το πεδίο ορισμού της θα είναι $\tau \in [0, \infty)$.

Για όλες τις τιμές της παραμέτρου β και για $t = \alpha + \tau$ η τιμή της συνάρτησης κατανομής που δίνεται από τον τύπο (3.2) θα είναι πάντα σταθερή

$$F(\alpha + \tau) = 1 - e^{-1} \cong 0.63$$

Για κατάλληλες τιμές των παραμέτρων της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull προκύπτουν γνωστές κατανομές:

- Αντικαθιστώντας στην έκφραση (3.2) $\beta = 1$ προκύπτει η διπαραμετρική εκθετική κατανομή.
- Αντικαθιστώντας στην έκφραση (3.2) $\beta = 2$ και $\tau = 0$ προκύπτει η κατανομή Rayleigh.

Η **συνάρτηση πυκνότητας** της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull δίνεται από τον τύπο

$$g(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t-\tau}{\alpha} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{t-\tau}{\alpha} \right)^{\beta} \right], \quad (3.3)$$

η αντίστοιχη **συνάρτηση αξιοπιστίας** είναι ίση με

$$R(t) = \exp \left[- \left(\frac{t-\tau}{\alpha} \right)^{\beta} \right],$$

ενώ τέλος, η **βαθμίδα αποτυχίας** δίνεται από τον τύπο

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t-\tau}{\alpha} \right)^{\beta-1}.$$

Όπως στην κλασική κατανομή Weibull, έτσι και στην τριπαραμετρική κατανομή Weibull οι πιθανές μορφές της βαθμίδας αποτυχίας είναι οι ακόλουθες:

- Για $0 < \beta < 1$ η βαθμίδα αποτυχίας είναι φθίνουσα, *DFR*.
- Για $\beta = 1$ η βαθμίδα αποτυχίας είναι σταθερή.
- Για $\beta > 1$ η βαθμίδα αποτυχίας είναι αύξουσα, *IFR*.

Διαπιστώνουμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας του μοντέλου δεν μπορεί να πάρει τη μορφή BC.

Μέτρα θέσης και διασποράς

Υψώνοντας τον τύπο (3.1) στην κ-τάξης δύναμη έχουμε

$$Z^k = (T + \tau)^k$$

Σύμφωνα με το διωνυμικό ανάπτυγμα

$$(\alpha + \beta)^k = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \alpha^{k-n} \beta^n,$$

υπολογίζεται ότι

$$Z^k = (T + \tau)^k = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} T^{k-n} \tau^n.$$

Εισάγοντας το γραμμικό τελεστή της μέσης τιμής στον παραπάνω τύπο προκύπτει ότι

$$E(Z^k) = E[(T + \tau)^k] = E\left[\sum_{n=0}^k \binom{k}{n} T^{k-n} \tau^n\right] = \sum_{n=0}^k \left[\binom{k}{n} \tau^n E(T^{k-n})\right],$$

όπου η ποσότητα $E(T^{k-n})$ μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο (2.8).

Έτσι, η ροπή κ-τάξης γύρω από το μηδέν της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull προκύπτει από την έκφραση

$$\mu'_k = E(Z^k) = \sum_{n=0}^k \left[\binom{k}{n} \tau^n \alpha^{k-n} \Gamma\left(1 + \frac{k-n}{\beta}\right) \right]. \quad (3.4)$$

Η μέση τιμή της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull βρίσκεται από

$$\mu'_1 = E(Z) = \alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) + \tau.$$

Η κεντρική ροπή κ-τάξης (ροπή γύρω από το μέσο) υπολογίζεται από την έκφραση (2.10)

$$\mu_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \mu'_j (\mu'_1)^{k-j}.$$

Σύμφωνα με τους τύπους (3.4) και (2.10) η διακύμανση της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull είναι ίση με

$$\mu_2 = \sigma^2 = \alpha^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]^2 \right].$$

Η ασυμμετρία και η κύρτωση υπολογίζονται με βάση τους τύπους $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ και $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$ αντίστοιχα.

Διάμεσος, Κορυφή, Ποσοστιαία σημεία

Σύμφωνα με τον τύπο (3.2) η διάμεσος της κατανομής G υπολογίζεται ως εξής:

$$G(t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \exp\left[-\left(\frac{t_{\text{median}} - \tau}{\alpha}\right)^\beta\right] = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t_{\text{median}} = \tau + \alpha (\ln 2)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Παραγωγίζοντας τον τύπο (3.3) ως προς t προκύπτει

$$g'(t) = -\frac{\beta \exp\left[-\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^\beta\right] \left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^\beta \left(1-\beta+\beta\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^\beta\right)}{(\tau-t)^2}$$

Η ρίζα της εξίσωσης $g'(t) = 0$ είναι

$$t = \tau + \alpha \left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (3.5)$$

Για την έκφραση (3.5) ισχύει ότι:

- Καθώς $\beta \rightarrow \infty$ η τιμή της προσεγγίζει γρήγορα την τιμή $\alpha + \tau$
- Για $\beta > 1$ η κορυφή της συνάρτησης πυκνότητας της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull υπολογίζεται βρίσκεται στη θέση

$$t_{\text{mode}} = \tau + \alpha \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

- Για $0 < \beta \leq 1$ η κορυφή της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull βρίσκεται στο σημείο τ και η συνάρτηση πυκνότητας που βρίσκεται από τον τύπο (3.3) είναι φθίνουσα συνάρτηση του t για όλα τα $t > \tau$.

Το p -ποσοστημόριο υπολογίζεται από τη σχέση

$$P(Z \leq t_p) = G(t_p) = p \Leftrightarrow 1 - \exp\left[-\left(\frac{t_p - \tau}{\alpha}\right)^\beta\right] = p \Leftrightarrow t_p = \tau + \alpha \left[-\ln(1-p)\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

WPP γράφημα

Κάτω από τους μετασχηματισμούς (2.16), η συνάρτηση κατανομής που βρίσκεται από τον τύπο (3.2) μετασχηματίζεται σε

$$y = \beta \ln(e^x - \tau) - \beta \ln(\alpha) \text{ και } x = \ln t.$$

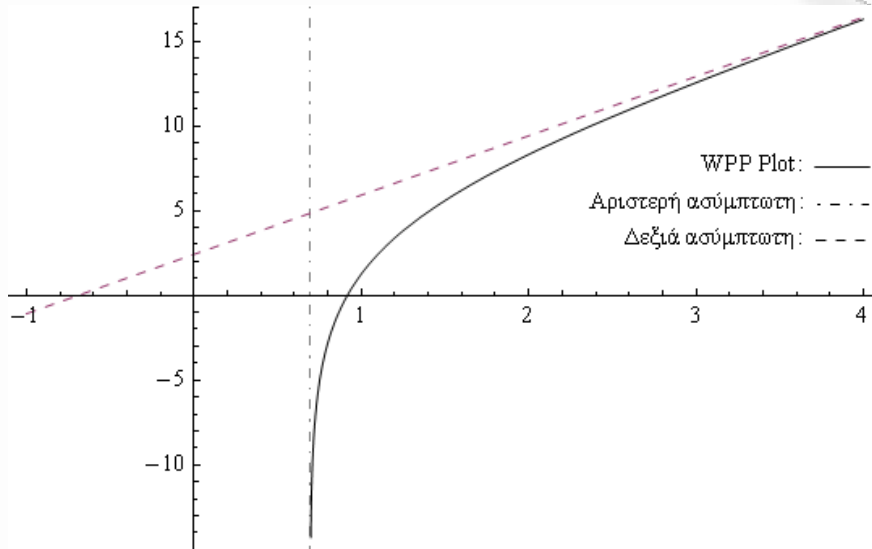
Παρατηρούμε ότι το y είναι μη-γραμμική συνάρτηση του x , με αποτέλεσμα το WPP plot της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull να είναι μια καμπύλη όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1.

Οι ασύμπτωτες του WPP plot θα είναι:

- καθώς $x \rightarrow \infty$, μια ευθεία με συνάρτηση $y = \beta x - \beta \ln(\alpha)$, δηλαδή το WPP plot της κλασικής κατανομής Weibull.
- καθώς $x \rightarrow \ln(\tau)$, μια κατακόρυφη ευθεία η οποία τέμνει τον άξονα x' στο σημείο $\ln(\tau)$.

Παρακάτω βρίσκεται ένα παράδειγμα του WPP plot όπου $\alpha = 0.5$, $\beta = 3.5$, $\tau = 2$.

Σχήμα 3.1



Στην περίπτωση που θέλουμε να ελέγξουμε αν τα δεδομένα μας προέρχονται από την τριπαραμετρική κατανομή Weibull, αρκεί να κατασκευάσουμε το WPP plot της κλασικής κατανομής Weibull όπως έγινε στην Παράγραφο 2.5.A. Αν τα δεδομένα μας προσαρμόζονται σε μια καμπύλη, της οποίας η μορφή είναι παρόμοια με αυτή που φαίνεται στο Σχήμα 3.1, τότε, αποδεχόμαστε (ή καλύτερα δεν μπορούμε να απορρίψουμε) ότι τα δεδομένα μας προσαρμόζονται στο μοντέλο της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull. Διαφορετικά απορρίπτουμε το μοντέλο της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull.

Στατιστική συμπερασματολογία

I. Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας της έκφρασης (3.3) θα είναι ίση με

$$L(t; \alpha, \beta, \tau) = \frac{\beta^n}{\alpha^{n\beta}} \left[\prod_{i=1}^n (t_i - \tau) \right]^{\beta-1} \exp \left[-\frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n (t_i - \tau)^\beta \right]$$

και αντίστοιχο πιθανολογάρithμο

$$l(\alpha, \beta, \tau; t_1, \dots, t_n) = n \ln \beta - n\beta \ln \alpha - \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n (t_i - \tau)^\beta + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \tau).$$

Για την εύρεση των εκτιμητριών μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων α , β και τ θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta, \tau; t_1, \dots, t_n)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial l(\alpha, \beta, \tau; t_1, \dots, t_n)}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial l(\alpha, \beta, \tau; t_1, \dots, t_n)}{\partial \tau} = 0.$$

Έτσι έχουμε

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta, \tau; t_1, \dots, t_n)}{\partial \alpha} = -\frac{n\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha^{\beta+1}} \sum_{i=1}^n (t_i - \tau)^\beta = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta, \tau; t_1, \dots, t_n)}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - n \ln \alpha + \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \tau) + \frac{\ln \alpha}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n (t_i - \tau)^\beta - \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n \{(t_i - \tau)^\beta \ln(t_i - \tau)\} = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta, \tau; t_1, \dots, t_n)}{\partial \tau} = (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(t_i - \tau)} - \frac{\beta}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n (t_i - \tau)^{\beta-1} = 0 \quad (3.8)$$

όπου $\tau \leq t_{(1)}$.

Από την έκφραση (3.6) έχουμε ότι

$$\alpha = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \tau)^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (3.9)$$

Αντικαθιστώντας την (3.9) στην έκφραση (3.7) και (3.8) έχουμε το παρακάτω σύστημα

$$\left. \begin{aligned} \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \tau) - n \frac{\sum_{i=1}^n \{(t_i - \tau)^\beta \ln(t_i - \tau)\}}{\sum_{i=1}^n (t_i - \tau)^\beta} &= 0 \\ (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(t_i - \tau)} - n\beta \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \tau)^{\beta-1}}{\sum_{i=1}^n (t_i - \tau)^\beta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Οι λύσεις του συστήματος (3.10) θα μας δώσουν τις εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων β και τ , δηλαδή $\hat{\beta}$ και $\hat{\tau}$. Δεν υπάρχει κάποιος κλειστός τύπος για τις λύσεις αυτού του συστήματος, οπότε θα πρέπει να καταφύγουμε σε διάφορες αριθμητικές μεθόδους όπως π.χ μέθοδος Newton-Raphson. Αφού βρούμε τις εκτιμήσεις $\hat{\beta}$ και $\hat{\tau}$ αντικαθιστώντας τις στην έκφραση (3.9) υπολογίζουμε την εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου α . Έτσι έχουμε ότι

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (T_i - \hat{\tau})^{\hat{\beta}} \right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}}.$$

II. Μέθοδος των ροπών

Θα χρειαστούμε τρεις ροπές για να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους α , β και τ της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull. Εξισώνουμε τη ροπή 1^{ης} τάξης γύρω από το μηδέν, την κεντρική ροπή 2^{ης} τάξης και το συντελεστή ασυμμετρίας της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull με τη δειγματική μέση τιμή, δειγματική διασπορά και τη δειγματική ασυμμετρία αντίστοιχα. Έτσι έχουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i &= \tau + \alpha \Gamma_1 \\ \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 &= \alpha^2 (\Gamma_2 - \Gamma_1^2) \\ \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^3}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 \right]^{3/2}} &= \frac{\Gamma_3 - 3\Gamma_2\Gamma_1 + 2\Gamma_1^3}{(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^{3/2}} \end{aligned} \right\}$$

Για να εκτιμήσουμε την παράμετρο τ επιλύουμε την πρώτη εξίσωση του συστήματος ως προς τ . Έτσι, έχουμε

$$\bar{t} = \hat{\tau} + \hat{\alpha} \hat{\Gamma}_1 \Rightarrow \hat{\tau} = \bar{t} - \hat{\alpha} \hat{\Gamma}_1, \text{ όπου } \bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \text{ και } \hat{\Gamma}_i = \Gamma \left(1 + \frac{i}{\beta} \right).$$

Υπολογίζουμε στη συνέχεια τις ποσότητες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$.

Για να εκτιμήσουμε την παράμετρο α επιλύουμε τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος ως προς α . Έτσι, έχουμε

$$s^2 = \hat{\alpha}^2 (\hat{\Gamma}_2 - \hat{\Gamma}_1^2) \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{s}{\sqrt{(\hat{\Gamma}_2 - \hat{\Gamma}_1^2)}}, \text{ όπου } s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2$$

Τέλος, η εκτίμηση της παραμέτρου β βρίσκεται από τη λύση της τρίτης εξίσωσης του συστήματος. Συγκεκριμένα

$$g(\beta) = \gamma_1 - \hat{\gamma}_1 = \frac{\Gamma_3 - 3\Gamma_2\Gamma_1 + 2\Gamma_1^3}{(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^{3/2}} - \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^3}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 \right]^{3/2}} = 0.$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης μπορεί να βρεθεί με τη μέθοδο Newton-Raphson. Οι Johnson, Kotz and Balakrishnan (1994) παρουσιάζουν μια τροποποιημένη μέθοδο ροπών για την εκτίμηση των παραμέτρων της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull.

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις εκτιμήσεις των παραμέτρων της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull παραπέμπουμε στους Gourdin et al (1994), Lemon (1975) και Zanakis et al. (1986).

Γ. Ανακλώμενη (Συμμετρική) κατανομή Weibull (*Reflected Weibull Distribution*)

Έστω ο γραμμικός μετασχηματισμός

$$Z = -T + \tau$$

Η **συνάρτηση κατανομής** του νέου μοντέλου βρίσκεται από τον τύπο

$$G(t) = P(Z \leq t) = P(-T + \tau \leq t) = 1 - P(T \leq \tau - t) = 1 - F(\tau - t) \Leftrightarrow$$

$$G(t) = \exp \left[- \left(\frac{\tau - t}{\alpha} \right)^\beta \right] \quad \begin{array}{l} -\infty < t < \tau \\ \alpha > 0, \beta > 0 \end{array} \quad (3.11)$$

όπου F η συνάρτηση κατανομής της κλασικής κατανομής Weibull (2.1). Η παράμετρος τ καλείται παράμετρος θέσης. Παρατηρούμε ότι το στήριγμα της G είναι διαφορετικό από εκείνο της F και τα δυο είναι ξένα μεταξύ τους. Το συγκεκριμένο μοντέλο προτάθηκε από τον Cohen (1973) και είναι συμμετρικό, ως προς τον κατακόρυφο άξονα $t = \tau$, της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull. Η νέα κατανομή καλείται ανακλώμενη (συμμετρική) κατανομή Weibull με συνάρτηση κατανομής G . Η ανακλώμενη κατανομή Weibull παριστά την τρίτη ασυμπτωτική κατανομή των ακραίων τιμών (*Fisher-Tippet Type III distribution of largest values*).

Η **συνάρτηση πυκνότητας** της ανακλώμενης κατανομής Weibull βρίσκεται από τον τύπο

$$g(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\tau - t}{\alpha} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{\tau - t}{\alpha} \right)^\beta \right], \quad (3.12)$$

η αντίστοιχη **συνάρτηση αξιοπιστίας** είναι ίση με

$$R(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\tau - t}{\alpha} \right)^\beta \right],$$

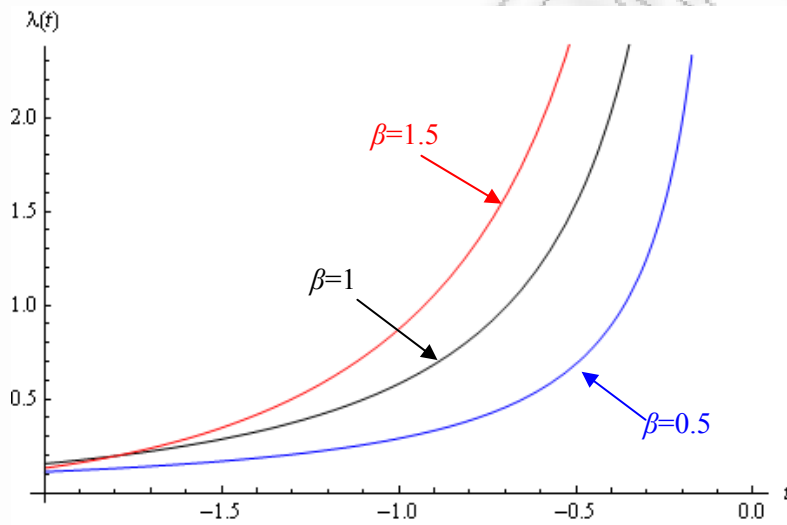
ενώ τέλος, η **βαθμίδα αποτυχίας** βρίσκεται από τον τύπο

$$\lambda(t) = \frac{\beta \left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^{\beta-1}}{1 - \exp\left[-\left(\frac{\tau-t}{\alpha}\right)^\beta\right]} \exp\left[-\left(\frac{\tau-t}{\alpha}\right)^\beta\right]. \quad (3.13)$$

Η βαθμίδα αποτυχίας είναι αύξουσα συνάρτηση του t , *IFR*.

Παρακάτω βρίσκεται το γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας (3.13) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β , κρατώντας την τιμή της παραμέτρου α και τ σταθερή ($\alpha=1$, $\tau=1$).

Σχήμα 3.2



Διαπιστώνουμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας του μοντέλου δεν μπορεί να πάρει τη μορφή BC.

Μέτρα θέσης και διασποράς

Η ροπή κ-τάξης της τυχαίας μεταβλητής Z βρίσκεται από τον τύπο

$$\mu'_k = E(Z^k) = E[(\tau - T)^k] = E\left[\sum_{n=0}^k (-1)^{k-n} \binom{k}{n} \tau^{k-n} T^n\right] = \sum_{n=0}^k (-1)^{k-n} \binom{k}{n} \tau^{k-n} E(T^n)$$

όπου η ποσότητα $E(T^n)$ υπολογίζεται από τον τύπο (2.9).

Έτσι, οι ροπές μπορούν να υπολογισθούν μέσω της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull.

Η μέση τιμή βρίσκεται από τον τύπο

$$\mu'_1 = E(Z) = \tau - \alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right),$$

η διακύμανση θα είναι ίση με

$$\mu_2 = \sigma^2 = \alpha^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]^2 \right].$$

Ο συντελεστής ασυμμετρίας βρίσκεται από την έκφραση

$$\gamma_1^2 = \frac{(\Gamma_3 - 3\Gamma_2\Gamma_1 + 2\Gamma_1^3)^2}{(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^3},$$

ο συντελεστής κύρτωσης είναι ίσος με

$$\gamma_2 = \frac{\Gamma_4 - 4\Gamma_3\Gamma_1 + 6\Gamma_2\Gamma_1^2 - 2\Gamma_1^4}{(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^3},$$

όπου

$$\Gamma_k = \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}\right).$$

Οι ποσότητες γ_1 και γ_2 εξαρτώνται μόνο από την παράμετρο σχήματος β . Στο διάστημα $\beta < \beta_0 = 3.60235$, η γ_1 είναι φθίνουσα συνάρτηση του β και αύξουσα από εκεί και ύστερα. Στο διάστημα $\beta < \beta_1 = 3.35$, η γ_2 είναι φθίνουσα συνάρτηση του β και αύξουσα από εκεί και ύστερα. Οι ελάχιστες τιμές που μπορούν να πάρουν οι γ_1 και γ_2 είναι $\gamma_1(\beta_0) = 0$ και $\gamma_2(\beta_1) \cong 2.72$. Η ανακλώμενη κατανομή Weibull παρουσιάζει θετική ασυμμετρία για $\beta < \beta_0$ και αρνητική για $\beta > \beta_0$.

Διάμεσος, Κορυφή, Ποσοστιαία σημεία

Σύμφωνα με τον τύπο (3.11), για τη διάμεσο της κατανομής θα έχουμε

$$G(t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \exp\left[-\left(\frac{\tau-t}{\alpha}\right)^\beta\right] = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t_{\text{median}} = \tau - \alpha(\ln 2)^{\frac{1}{\beta}}$$

Παραγωγίζοντας τον τύπο (3.12) ως προς t προκύπτει

$$g'(t) = \frac{\beta \exp\left[-\left(\frac{\tau-t}{\alpha}\right)^\beta\right] \left(\frac{\tau-t}{\alpha}\right)^\beta \left(1 + \beta \left(\left(\frac{\tau-t}{\alpha}\right)^\beta - 1\right)\right)}{(\tau-t)^2}.$$

Η ρίζα της εξίσωσης $g'(t) = 0$ είναι

$$t = \tau - \alpha \left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (3.14)$$

Μέσω του τύπου (3.14) και για $\beta > 1$ η μοναδική κορυφή της συνάρτησης πυκνότητας της κατανομής είναι ίση με

$$t_{\text{mode}} = \tau - \alpha \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^{1/\beta}.$$

Το p -ποσοστημόριο υπολογίζεται από τον τύπο

$$P(T \leq t_p) = F(t_p) = p \Leftrightarrow \exp\left[-\left(\frac{\tau - t_p}{\alpha}\right)^\beta\right] = p \Leftrightarrow t_p = \tau - \alpha \left[-\ln(1-p)\right]^{1/\beta}.$$

Τα ποσοστημόρια που αντιστοιχούν σε $p=0.25$ και 0.75 καλούνται πρώτο και τρίτο ποσοστημόριο, αντίστοιχα, ενώ το 0.5 ποσοστημόριο καλείται διάμεσος.

Στατιστική συμπερασματολογία

Αντιστρέφοντας το πρόσημο των δεδομένων μας οι εκτιμήσεις θα είναι ίδιες με εκείνες της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull.

Δ. Διπλή κατανομή Weibull (*Double Weibull Distribution*)

Η **συνάρτηση κατανομής** της διπλής κατανομής Weibull είναι η εξής

$$G(t) = \begin{cases} 0.5 \exp\left(-\left(\frac{\tau - t}{\alpha}\right)^\beta\right), & \text{για } t < \tau \\ 1 - 0.5 \exp\left(-\left(\frac{t - \tau}{\alpha}\right)^\beta\right), & \text{για } t \geq \tau. \end{cases}$$

Το στήριγμα της G είναι $-\infty < t < \infty$ και τα πεδία ορισμού των άλλων παραμέτρων είναι $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Για $t \geq \tau$ η διπλή κατανομή Weibull είναι όμοια με την τριπαραμετρική κατανομή Weibull, ενώ για $t < \tau$ είναι όμοια με την ανακλώμενη κατανομή Weibull.

Το συγκεκριμένο μοντέλο είναι συνδυασμός της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull και της συμμετρικής της ως προς τον κατακόρυφο άξονα άξονα $t = \tau$ και επομένως καλείται διπλή κατανομή Weibull. Όταν $\beta = 1$, προκύπτει η διπλή εκθετική κατανομή, γνωστή και ως κατανομή Laplace.

Μια ειδική περίπτωση της διπλής κατανομής Weibull για $\alpha = 1$, $\tau = 0$ εξετάστηκε από τους Balakrishnan and Kocherlakota (1985). Σε αυτή την περίπτωση η **συνάρτηση κατανομής** βρίσκεται από την έκφραση

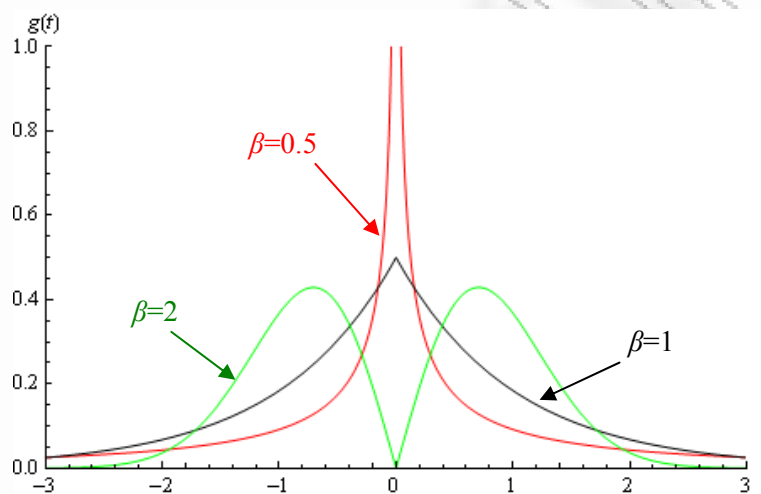
$$G(t) = \begin{cases} 0.5 \exp[-(-t)^\beta], & t \leq 0 \\ 1 - 0.5 \exp[-t^\beta], & t \geq 0 \end{cases}$$

Η **συνάρτηση πυκνότητας** δίνεται από τον τύπο

$$g(t) = \frac{\beta}{2} |t|^{\beta-1} \exp(-|t|^\beta) \quad -\infty < t < \infty, \beta > 0 \quad (3.15)$$

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας (3.15) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β (για $\beta = 1$ παίρνει τη μορφή της κατανομής Laplace).

Σχήμα 3.3



Η αντίστοιχη **συνάρτηση αξιοπιστίας** είναι ίση με

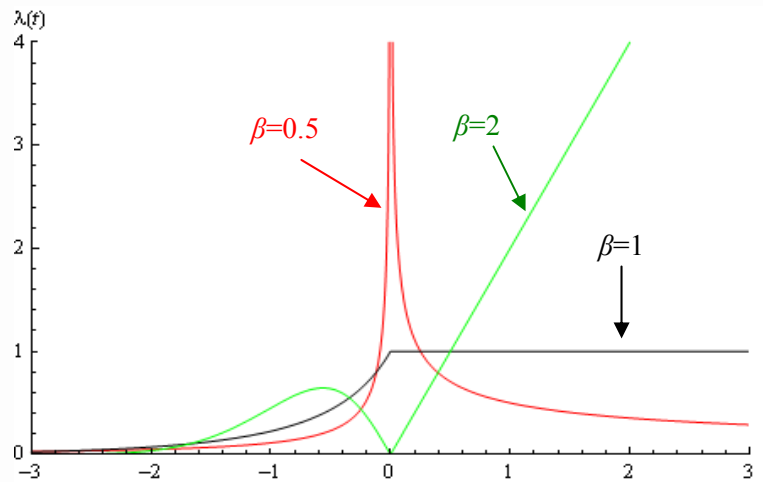
$$R(t) = \begin{cases} 1 - 0.5 \exp[-(-t)^\beta], & t \leq 0 \\ 0.5 \exp[-t^\beta], & t \geq 0 \end{cases}$$

τέλος, η **βαθμίδα αποτυχίας** προκύπτει από τον τύπο

$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{\beta(-t)^{\beta-1} \exp\{-(-t)^\beta\}}{2 - \exp\{-(-t)^\beta\}}, & t \leq 0 \\ \frac{\beta t^{\beta-1} \exp(-t^\beta)}{2 - \exp(-t^\beta)}, & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας (3.16) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β .

Σχήμα 3.4



Μέτρα θέσης και διασποράς

Η ροπή κ-τάξης γύρω από το μηδέν της ειδικής περίπτωσης για $\alpha = 1$, $\tau = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$E(T^k) = \begin{cases} 0 & \text{για } k \text{ άρτιο} \\ \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}\right) & \text{για } k \text{ περιττό} \end{cases}$$

η διακύμανση είναι ίση με

$$\sigma^2 = \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)$$

και τέλος η κύρτωση βρίσκεται από τον τύπο

$$\gamma_2 = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{4}{\beta}\right)}{\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)\right]^2}.$$

Στατιστική συμπερασματολογία

Οι Balakrishnan and Kocherlakota (1985) έχουν ασχοληθεί με την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου.

3.3 Μη-γραμμικός μετασχηματισμός

A. Μετασχηματισμός δύναμης

Έστω ο μη-γραμμικός μετασχηματισμός

$$\frac{Z-\tau}{\eta} = \left(\frac{T}{\alpha}\right)^\beta \Leftrightarrow Z = \tau + \eta \left(\frac{T}{\alpha}\right)^\beta$$

Η **συνάρτηση κατανομής** του νέου μοντέλου βρίσκεται από την έκφραση

$$G(t) = P(Z \leq t) = P\left(\left(\frac{T}{\alpha}\right)^\beta \eta + \tau \leq t\right) = P\left(T \leq \left(\frac{t-\tau}{\eta}\right)^{\frac{1}{\beta}} \alpha\right) = F\left(\left(\frac{t-\tau}{\eta}\right)^{\frac{1}{\beta}} \alpha\right) \Leftrightarrow$$

$$G(t) = 1 - \exp\left[-\frac{t-\tau}{\eta}\right] \quad \begin{matrix} t \geq \tau \\ -\infty < \tau < \infty, \eta > 0. \end{matrix} \quad (3.17)$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση κατανομής που δίνεται από την έκφραση (3.17) είναι ίδια με τη διπαραμετρική εκθετική κατανομή. Η έκφραση (3.17) μπορεί να προκύψει αν στην τριπαραμετρική κατανομή Weibull αντικαταστήσουμε το $\beta=1$. Όταν $\tau=0$ από την έκφραση (3.17) προκύπτει η κλασική (μονοπαραμετρική) εκθετική κατανομή.

Η **συνάρτηση πυκνότητας** του μετασχηματισμού δύναμης δίνεται από τον τύπο

$$g(t) = \frac{1}{\eta} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\eta}\right) \quad t \geq \tau,$$

η αντίστοιχη **συνάρτηση αξιοπιστίας** είναι ίση με

$$R(t) = \exp\left[-\frac{t-\tau}{\eta}\right],$$

ενώ τέλος, η **βαθμίδα αποτυχίας** δίνεται από τον τύπο

$$\lambda(t) = \frac{1}{\eta}.$$

Παρατηρούμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας του μοντέλου είναι σταθερή και επομένως δεν μπορεί να πάρει τη μορφή BC.

Μέτρα θέσης και διασποράς

Εφόσον η διπαραμετρική εκθετική κατανομή είναι μια ειδική περίπτωση της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull, η ανάλυση του μοντέλου μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της Παραγράφου 3.2.2 αντικαθιστώντας με $\beta=1$.

Γραφήματα

Σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς (2.16) η έκφραση (3.17) μετασχηματίζεται σε

$$y = \ln(e^x - \tau) - \ln(\eta) \quad \text{και} \quad x = \ln t.$$

Όταν $\tau = 0$, το γράφημα των y και x θα είναι ευθεία γραμμή με κλίση 45° .

Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι

$$G(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t-\tau}{\eta}\right) \Leftrightarrow 1 - G(t) = \exp\left(-\frac{t-\tau}{\eta}\right) \Leftrightarrow \ln(1 - G(t)) = -\frac{t-\tau}{\eta}$$

$$-\ln(1 - F(t)) = \frac{t-\tau}{\eta} \Leftrightarrow y = -\ln(1 - F(t)) = \frac{t-\tau}{\eta} \text{ και } x = t.$$

Η παραπάνω έκφραση είναι διαφορετική από τους μετασχηματισμούς (2.16). Έτσι σύμφωνα με αυτούς τους μετασχηματισμούς έχουμε μια νέα γραμμική σχέση των y και x , δηλαδή

$$y = \frac{x - \tau}{\eta}.$$

Με το γράφημα των y και x μπορούμε να κατασκευάσουμε τον χάρτη πιθανότητας για την εκθετική κατανομή.

Στατιστική συμπερασματολογία

I. Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας

Θα εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του μοντέλου με τη βοήθεια της μεθόδου της μέγιστης πιθανοφάνειας.

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας θα είναι

$$L(\eta, \tau; t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{\eta^n} \prod_{i=1}^n \left\{ \exp\left(-\frac{t_i - \tau}{\eta}\right) \cdot I_{(\tau, \infty)}(t_{(i)}) \right\} = \frac{1}{\eta^n} \exp\left[\sum_{i=1}^n \left(-\frac{t_i - \tau}{\eta}\right)\right] \cdot I_{(\tau, \infty)}(t_{(1)})$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας γίνεται μέγιστη ως προς τ , όταν η τιμή της παραμέτρου τ γίνεται μέγιστη.

Από τη σχέση όμως $\tau \leq t_i, i = 1, \dots, n$ έχουμε ότι $\tau \leq t_{(1)}$ που σημαίνει ότι η μέγιστη τιμή της παραμέτρου τ είναι η $t_{(1)}$, δηλαδή

$$\hat{\tau} = t_{(1)}.$$

Επομένως, η συνάρτηση πιθανοφάνειας μετατρέπεται σε

$$\max_{\tau} L(\eta, \tau; t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{\eta^n} \exp\left[\sum_{i=1}^n \left(-\frac{t_i - t_{(1)}}{\eta}\right)\right] = L_1(\eta; t_1, \dots, t_n).$$

Αρα ο πιθανολογάριθμος δίνεται από την έκφραση

$$l(\eta; t_1, \dots, t_n) = \ln\left(\frac{1}{\eta^n}\right) + \ln\left(\exp\left[\sum_{i=1}^n \left(-\frac{t_i - t_{(1)}}{\eta}\right)\right]\right) = -n \ln \eta - \sum_{i=1}^n \frac{t_i - t_{(1)}}{\eta}.$$

Για την εύρεση του εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου α θα μεγιστοποιήσουμε τον πιθανολογάρισμο. Έτσι έχουμε

$$\frac{\partial l(\eta; t_1, \dots, t_2)}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow -\frac{n}{\eta} + \frac{1}{\eta^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{(1)}) = 0 \Rightarrow \hat{\eta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{(1)}).$$

Η δεύτερη παράγωγος θα είναι

$$\frac{\partial^2 l(\alpha; t_1, \dots, t_2)}{\partial \eta^2} = \frac{n}{\eta^2} - \frac{2}{\eta^3} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{(1)}).$$

Αν θέσουμε όπου α τον αντίστοιχο του εκτιμητή, δηλαδή

$$\hat{\eta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{(1)}),$$

τότε

$$\frac{\partial^2 l(\alpha; t_1, \dots, t_2)}{\partial \eta^2} = \frac{n\hat{\alpha} - 2n\hat{\alpha}}{\hat{\eta}^3} = -\frac{n}{\hat{\eta}^3} < 0.$$

Άρα πράγματι για $\eta = \hat{\eta}$ έχουμε μέγιστο.

II. Μέθοδος ροπών

Η μέση τιμή και η διασπορά της κατανομής υπολογίζονται αν θέσουμε $\beta=1$ στα αντίστοιχα αποτελέσματα της Παραγράφου 3.2.2.

Έτσι η μέση τιμή της κατανομής θα βρίσκεται από τον τύπο

$$\mu_1' = E(Z) = \alpha \Gamma(2) + \tau = \alpha + \tau$$

και η διακύμανση της κατανομής θα είναι ίση με

$$\mu_2 = \sigma^2 = \alpha^2 \left[\Gamma(3) - [\Gamma(2)]^2 \right] = \alpha^2.$$

Η ροπή δεύτερης τάξης γύρω από το μέσο υπολογίζεται ως ακολούθως

$$V(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 \Rightarrow E(Z^2) = V(Z) + [E(Z)]^2 = \alpha^2 + (\alpha + \tau)^2.$$

Οι ροποεκτιμητρίες των παραμέτρων α και τ υπολογίζονται από τη λύση του συστήματος:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \tau = \bar{t} \\ \alpha^2 + (\alpha + \tau)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \tau = \bar{t} - \alpha \\ \alpha^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 - \bar{t}^2 = S^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = S \text{ και } \hat{\tau} = \bar{t} - S.$$

όπου $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2$ η μεροληπτική δειγματική διασπορά.

B. Λογαριθμικός μετασχηματισμός Weibull (Log Weibull Transformation)

Έστω ο μη-γραμμικός μετασχηματισμός

$$\frac{Z - \tau}{n} = \beta \ln\left(\frac{T}{\alpha}\right) \Leftrightarrow Z = \tau + n\beta \ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)$$

Η **συνάρτηση κατανομής** του νέου μοντέλου δίνεται από την έκφραση

$$G(t) = P(Z \leq t) = P\left(\tau + n\beta \ln\left(\frac{T}{\alpha}\right) \leq t\right) = P\left(T \leq \alpha e^{\frac{t-\tau}{\beta n}}\right) \Leftrightarrow$$

$$G(t) = 1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{t-\tau}{\eta}\right)\right] \quad \begin{array}{l} -\infty < t < \infty \\ -\infty < \tau < \infty, \eta > 0. \end{array} \quad (3.18)$$

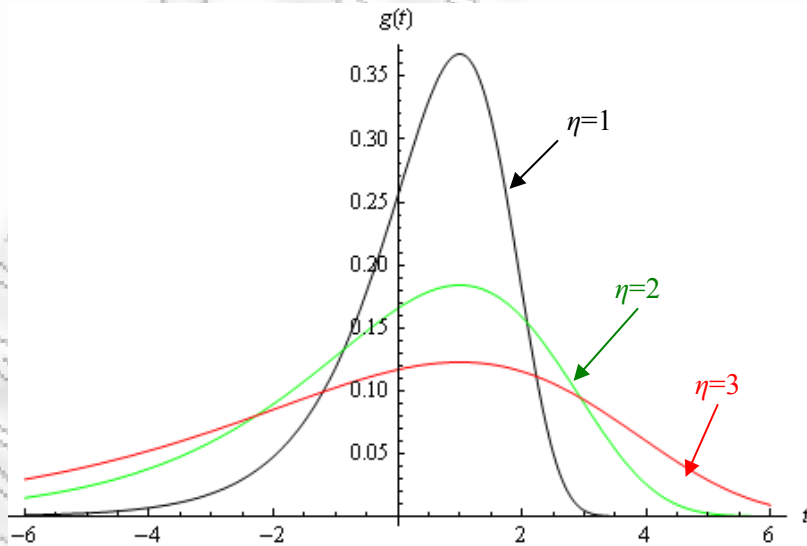
Το στήριγμα της συνάρτησης κατανομής G είναι μεγαλύτερο από εκείνο της F . Η έκφραση (3.18) αποτελεί την κατανομή των ακραίων τιμών τύπου I.

Η **συνάρτηση πυκνότητας** δίνεται από τον τύπο

$$g(t) = \frac{1}{\eta} \exp\left(\frac{t-\tau}{\eta}\right) \exp\left[-\exp\left(\frac{t-\tau}{\eta}\right)\right]. \quad (3.19)$$

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας (3.19) για διάφορες τιμές της παραμέτρου η κρατώντας την παράμετρο τ σταθερή ($\tau = 1$).

Σχήμα 3.5



Η αντίστοιχη **συνάρτηση αξιοπιστίας** είναι ίση με

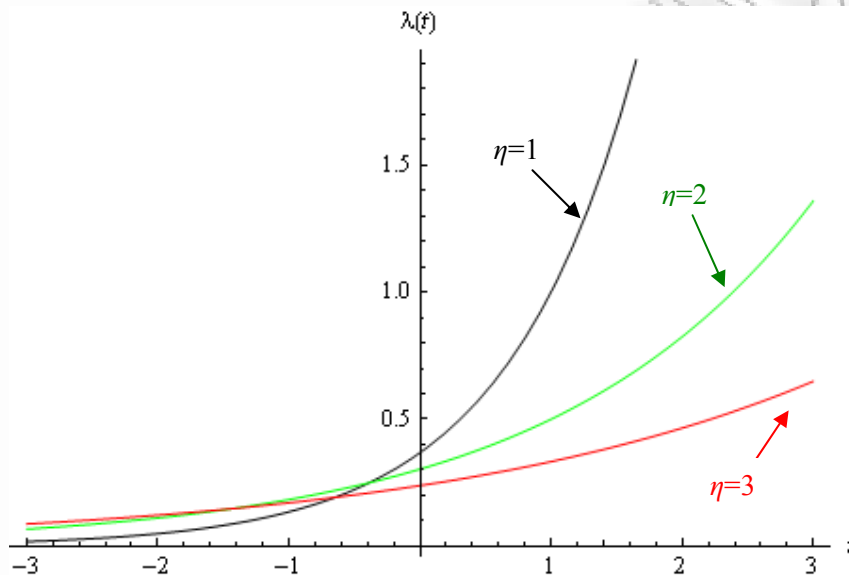
$$R(t) = \exp\left[-\exp\left(\frac{t-\tau}{\eta}\right)\right],$$

ενώ τέλος, η **βαθμίδα αποτυχίας** δίνεται από τον τύπο

$$\lambda(t) = \frac{1}{\eta} \exp\left(\frac{t-\tau}{\eta}\right). \quad (3.20)$$

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας (3.20) για διάφορες τιμές της παραμέτρου η κρατώντας την παράμετρο τ σταθερή ($\tau = 1$).

Σχήμα 3.6



Παρατηρούμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς t .

Ειδική περίπτωση

Έστω ο μετασχηματισμός

$$Z = \beta \ln \frac{T}{\alpha}.$$

Τότε η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής Z βρίσκεται από την έκφραση

$$G(t) = P(Z \leq t) = P\left(\beta \ln \frac{T}{\alpha} \leq t\right) = P\left(T \leq \alpha \exp\left(\frac{t}{\beta}\right)\right) = F\left(\alpha \exp\left(\frac{t}{\beta}\right)\right) \Rightarrow$$

$$G(t) = 1 - \exp[-\exp(t)], \quad -\infty < t < \infty.$$

Το νέο μοντέλο αποτελεί μια ειδική περίπτωση του μοντέλου της έκφρασης (3.18) για $\tau = 0$ και $\eta = 1$. Ο White (1969) ονόμασε αυτό το μοντέλο ανηγμένη λογαριθμική κατανομή Weibull (*reduced log Weibull distribution*).

Μέτρα θέσης και διασποράς

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της ανηγμένης λογαριθμικής κατανομής Weibull δίνεται από τον τύπο

$$M_t(s) = E(e^{sT}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{st} \exp(t - e^t) dt = \int_0^{\infty} u^s e^{-u} du \stackrel{u=e^t}{=} \Gamma(s+1), \text{ όπου } s > -1$$

Έτσι, η μέση τιμή θα είναι ίση με

$$E(Z) = \left. \frac{\partial \Gamma(s+1)}{\partial s} \right|_{s=0} = \Gamma'(1) = \psi(1)\Gamma(1) = -\gamma \cong 0.577216,$$

όπου ψ η συνάρτηση δίγαμμα

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

ή ισοδύναμα

$$\psi(x) = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} \right) dt,$$

όπου γ η σταθερά του Euler.

Η διακύμανση δίνεται από τον τύπο

$$V(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2,$$

όπου

$$E(Z^2) = \left. \frac{\partial^2 \Gamma(s+1)}{\partial s^2} \right|_{s=0} = \Gamma''(1) = \Gamma(1) [\psi^2(1) + \psi'(1)] = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} \cong 1.97811.$$

Επομένως, η διακύμανση είναι ίση με

$$\sigma^2 = V(Z) = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} - (-\gamma)^2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

Η ροπή τρίτης τάξης γύρω από το μηδέν ισούται με

$$\begin{aligned} E(Z^3) &= \left. \frac{\partial^3 \Gamma(s+1)}{\partial s^3} \right|_{s=0} = \Gamma'''(1) = \Gamma(1) [\psi^3(1) + 3\psi(1)\psi'(1) + \psi''(1)] = \\ &= -\gamma^3 + \frac{\gamma\pi^2}{2} + \psi''(1) \cong -5.44487. \end{aligned}$$

Η ροπή τέταρτης τάξης γύρω από το μηδέν ισούται με

$$\begin{aligned} E(Z^4) &= \left. \frac{\partial^4 \Gamma(s+1)}{\partial s^4} \right|_{s=0} = \Gamma^{(4)}(1) = \Gamma(1) [\psi^4(1) + 6\psi^2(1)\psi'(1) + 3(\psi'(1))^2 + 4\psi(1)\psi''(1) + \psi'''(1)] = \\ &= \gamma^4 + \gamma^2\pi^2 \frac{3\pi^4}{20} - 4\gamma\psi'''(1) \cong 23.5615. \end{aligned}$$

Οι ροπές της λογαριθμικής κατανομής Weibull είναι δυνατόν να υπολογιστούν μέσω των ροπών της ανηγμένης λογαριθμικής κατανομής. Επομένως, η μέση τιμή και η διακύμανση της λογαριθμικής κατανομής Weibull δίνονται από τους τύπους

$$E(Z) = \mu = \tau - \gamma\eta$$

και

$$V(Z) = \sigma^2 = \frac{\pi^2 \tau^2}{6}.$$

Σύμφωνα με τον τύπο (2.11) υπολογίζουμε τις ροπές κ-τάξης περί το μέσο. Έτσι η ασυμμετρία θα είναι ίση με

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \cong -1.13955,$$

ενώ η κέρτωση ισούται με

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \cong 5.4.$$

Το p -ποσοστημόριο υπολογίζεται από τη σχέση

$$P(Z \leq t_p) = G(t_p) = p \Leftrightarrow 1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{t_p - \tau}{\eta}\right)\right] = p \Leftrightarrow t_p = \tau + \eta \cdot \ln[-\ln(1-p)].$$

Στατιστική συμπερασματολογία

I. Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας για την έκφραση (3.19) θα είναι ίση με

$$L(\eta, \tau; t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{\eta^n} \exp\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i - \tau}{\eta}\right)\right) \exp\left[-\sum_{i=1}^n \left\{\exp\left(\frac{t_i - \tau}{\eta}\right)\right\}\right]$$

και αντίστοιχο πιθανολογάρημο

$$l(\eta, \tau; t_1, \dots, t_n) = -n \ln \eta + \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i - \tau}{\eta}\right) - \sum_{i=1}^n \left\{\exp\left(\frac{t_i - \tau}{\eta}\right)\right\}.$$

Για την εύρεση των εκτιμητριών μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων α και β θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\frac{\partial l(\eta, \tau; t_1, \dots, t_n)}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial l(\eta, \tau; t_1, \dots, t_n)}{\partial \eta} = 0.$$

Το τελευταίο οδηγεί στο επόμενο σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους

$$\frac{\partial l(\eta, \tau; t_1, \dots, t_2)}{\partial \tau} = -\frac{n}{\eta} + \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n \left\{ \exp\left(\frac{t_i - \tau}{\eta}\right) \right\} = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial l(\eta, \tau; t_1, \dots, t_2)}{\partial \eta} = -\frac{n}{\eta} - \frac{1}{\eta^2} \sum_{i=1}^n (t_i - \tau) + \frac{1}{\eta^2} \sum_{i=1}^n \left\{ (t_i - \tau) \exp\left(\frac{t_i - \tau}{\eta}\right) \right\} = 0. \quad (3.22)$$

Από την εξίσωση (3.21) η παράμετρος τ εκφράζεται μέσω της παραμέτρου η ως

$$\tau = \eta \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{t_i}{\eta}\right)}{n} \right) = \eta \ln \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{t_i}{\eta}\right) - \eta \ln(n). \quad (3.23)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.23) στη σχέση (3.22), προκύπτει η εξίσωση (ως προς β μόνο)

$$\sum_{i=1}^n \left\{ (t_i - \tau) \left(\exp\left(\frac{t_i - \tau}{\eta}\right) - 1 \right) \right\} = \eta n \Rightarrow \sum_{i=1}^n \left\{ \left(t_i - \eta \ln \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{t_i}{\eta}\right) + \eta \ln(n) \right) \left(\frac{\exp\left(\frac{t_i}{\eta}\right) n}{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{t_i}{\eta}\right)} \right) \right\} = \eta n \Rightarrow$$

$$\frac{n \sum_{i=1}^n t_i \exp\left(\frac{t_i}{\eta}\right)}{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{t_i}{\eta}\right)} - \sum_{i=1}^n t_i - \eta n \ln \left(\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{t_i}{\eta}\right) \right) + \eta n \ln \left(\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{t_i}{\eta}\right) \right) + \eta n \ln(n) - \eta n \ln(n) = \eta n \Rightarrow$$

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^n t_i \exp\left(\frac{t_i}{\eta}\right)}{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{t_i}{\eta}\right)} - \bar{t}.$$

Η τελευταία εξίσωση μπορεί να λυθεί αριθμητικά π.χ με τη μέθοδο Newton-Raphson ή κάποια άλλη επαναληπτική μέθοδο. Αφού βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας $\hat{\eta}$ του η , η εκτιμήτρια του τ δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\tau} = \hat{\eta} \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{T_i}{\hat{\eta}}\right)}{n} \right).$$

Γ. Αντίστροφη κατανομή Weibull (*Inverse Weibull Distribution*)

Έστω ο μη-γραμμικός μετασχηματισμός

$$Z = \frac{\alpha^2}{T}.$$

Η **συνάρτηση κατανομής** του νέου μοντέλου δίνεται από την έκφραση

$$G(t) = P(Z \leq t) = P\left(\frac{\alpha^2}{T} \leq t\right) = 1 - P\left(T \leq \frac{\alpha^2}{t}\right) \Leftrightarrow$$

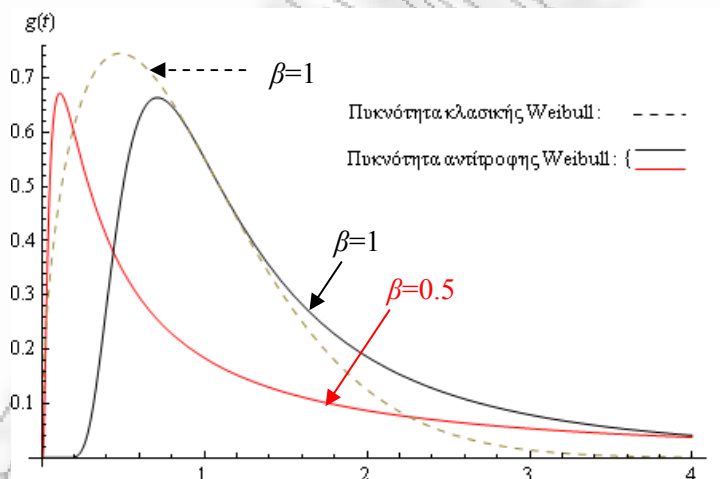
$$G(t) = \exp\left[-\left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta\right] = \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{-\beta}\right] \quad \begin{matrix} t > 0 \\ \alpha > 0, \beta > 0. \end{matrix} \quad (3.24)$$

Η **συνάρτηση πυκνότητας** της αντίστροφης κατανομής Weibull δίνεται από τον τύπο

$$g(t) = \beta \alpha^\beta t^{-\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{-\beta}\right]. \quad (3.25)$$

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας (3.25) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β , κρατώντας την τιμή της παραμέτρου α σταθερή ($\alpha = 1$).

Σχήμα 3.7



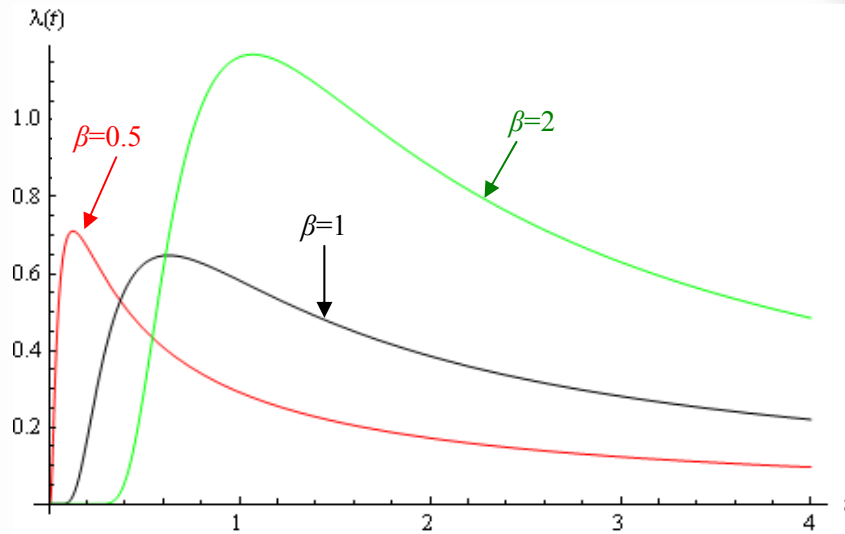
Παρατηρούμε ότι το μοντέλο της αντίστροφης κατανομής Weibull παρουσιάζει βαριές δεξιές ουρές σε σχέση με εκείνο της κλασικής κατανομής Weibull.

Η αντίστοιχη **βαθμίδα αποτυχίας** είναι ίση με

$$\lambda(t) = \frac{\beta \alpha^\beta t^{-\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{-\beta}\right]}{1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{-\beta}\right]}. \quad (3.26)$$

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας (3.26) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β , κρατώντας την τιμή της παραμέτρου α σταθερή ($\alpha = 1$).

Σχήμα 3.8



Μέτρα θέσης και διασποράς

Αρχικά θεωρούμε τους μετασχηματισμούς $\eta = \alpha^\beta$, $z = z(t) = \left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta$ και $u = \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta$ τους οποίους θα χρησιμοποιήσουμε μετέπειτα για να γίνει πιο εύκολη η ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

Η ροπή κ-τάξης γύρω από το μηδέν της αντίστροφης κατανομής Weibull δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} E(T^k) &= \int_0^\infty t^k \beta \alpha^\beta t^{-\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] dt = \int_0^\infty \eta \beta t^{k-\beta-1} \exp(-z(t)) dt = \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{z}{\eta}\right)^{\frac{k}{\beta}} \exp(-z(t)) dz = \alpha^k \Gamma\left(1 - \frac{k}{\beta}\right). \end{aligned}$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι μη πεπερασμένο όταν ισχύει $k \geq \beta$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η αντίστροφη κατανομή Weibull έχει βαριές δεξιές ουρές. Επίσης για τιμές της παραμέτρου $\beta \leq 2$ η διακύμανση δεν είναι πεπερασμένη.

Κορυφή, Ποσοστιαία σημεία

Η συνάρτηση πυκνότητας (3.25), σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς που δόθηκαν παραπάνω θα είναι ίση με

$$f(t) = \eta \beta t^{-\beta-1} \exp(-z(t)). \quad (3.27)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (3.27) ως προς t προκύπτει

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\eta\beta \exp\left[-\left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta\right] t^{-\beta-2} \left[\beta\left[\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta - 1\right] - 1\right] = \\ &= f(t)t^{-1-\beta} [\eta\beta - t^\beta(\beta+1)]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Η ρίζα της εξίσωσης $f'(t) = 0$ είναι

$$t_m = \alpha \left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Η έκφραση (3.28) είναι θετική όταν $t < t_m$ και αρνητική όταν $t > t_m$. Οπότε, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας της αντίστροφης κατανομής Weibull (3.25) έχει πάντα μια κορυφή που δίνεται από τον τύπο

$$t_{\text{mode}} = \alpha \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

και είναι πάντα θετικά ασύμμετρη, Jiang et al 2001.

Το p -ποσοστημόριο υπολογίζεται από τον τύπο

$$P(Z \leq t_p) = G(t_p) = p \Leftrightarrow \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{-\beta}\right] = p \Leftrightarrow t_p = \alpha [-\ln(p)]^{\frac{1}{\beta}}.$$

Η βαθμίδα αποτυχίας σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς μετατρέπεται στην έκφραση

$$\lambda(t) = \frac{\eta\beta t^{-\beta-1} \exp(-z(t))}{1 - \exp(-z)} \quad (3.29)$$

Ισχύει ότι

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0.$$

Παραγωγίζοντας τον τύπο (3.29) ως προς t προκύπτει

$$\lambda'(t) = \lambda(t)t^{-\beta-1} \left[\frac{\eta\beta}{1 - \exp(-z)} - (\beta+1)t^\beta \right]. \quad (3.30)$$

Από την έκφραση (3.30) συμπεραίνουμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας είναι μονοκόρυφη. Η κορυφή της βαθμίδας αποτυχίας, t_M , υπολογίζεται από τη λύση της παρακάτω εξίσωσης:

$$\lambda(t_M)t_M^{-\beta-1} \left[\frac{\eta\beta}{1 - \exp(-z(t_M))} - (\beta+1)t_M^\beta \right] = 0 \Rightarrow \frac{\eta\beta}{1 - \exp(-z(t_M))} - (\beta+1)t_M^\beta = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\eta\beta}{1 - \exp(-z(t_M))} = (\beta + 1)t_M^\beta \Rightarrow \frac{z(t_M)}{1 - \exp(-z(t_M))} = 1 + \frac{1}{\beta}.$$

Η μορφή της βαθμίδας αποτυχίας της αντίστροφης κατανομής Weibull (Σχήμα 3.8) είναι μονοκόρυφη, παρουσιάζει δηλαδή την αντίστροφη μορφή της βαθμίδας αποτυχίας ή RBC (*reverse bathtub curve*).

WPP γράφημα

Σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς (2.16) το μοντέλο της μετασχηματισμένης κατανομής Weibull (3.27) μετασχηματίζεται στη μορφή

$$y = \ln[-\ln\{1 - \exp(-z)\}]$$

όπου

$$z = \left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta = \exp(\beta \ln(\alpha) - \beta x) \text{ και } x = \ln t$$

Οι Jiang et al. (2001) έδειξαν ότι το WPP γράφημα για την αντίστροφη κατανομή Weibull είναι κοίλη συνάρτηση, μη γραμμική συνάρτηση του y προς x και έχει δυο ασύμπτωτες που δίνονται από τις σχέσεις:

- Αριστερή ασύμπτωτη: Για μικρές τιμές του t (ή για μεγάλες τιμές του z) έχουμε ότι

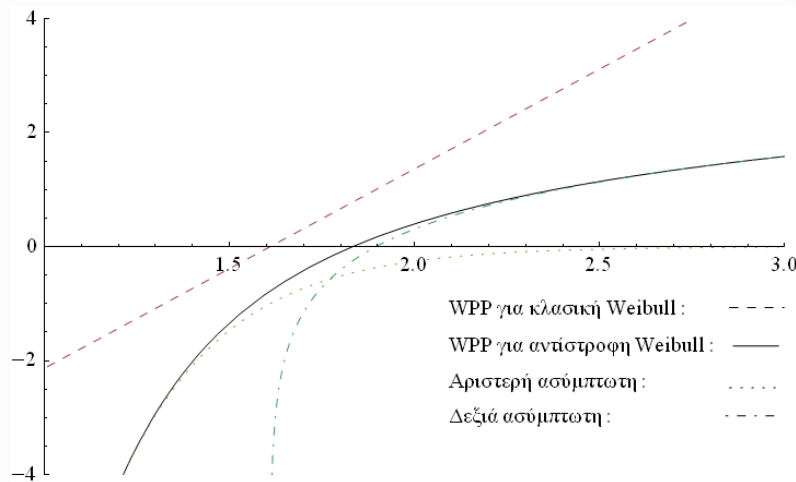
$$y = \ln\{-\ln[1 - \exp(-z)]\} \cong \ln[1 - \exp(-z)] = -z = -\exp(\beta \ln(\alpha) - \beta x).$$

- Δεξιά ασύμπτωτη: Για μεγάλες τιμές του t (ή για μικρές τιμές του z) έχουμε ότι

$$y = \ln\{-\ln[1 - \exp(-z)]\} \cong \ln[-\ln(z)] = \ln[\beta(x - \ln(\alpha))].$$

Στο Σχήμα 3.9 παριστάνονται τα WPP γραφήματα για την αντίστροφη κατανομή Weibull και για την κλασική κατανομή Weibull, καθώς και οι ασύμπτωτες της αντίστροφης κατανομής Weibull.

Σχήμα 3.9



Ο Drapella (1993) πρότεινε τον παρακάτω μετασχηματισμό

$$y = -\ln[-\ln(F(t))] \text{ και } x = \ln(t), \quad (3.31)$$

τον οποίο ονόμασε αντίστροφο μετασχηματισμό Weibull (*inverse Weibull transform*). Το γράφημα του y προς x καλείται χάρτης πιθανότητας για την αντίστροφη κατανομή Weibull (*inverse Weibull probability paper plot, IWPP*).

Έτσι σύμφωνα με το μετασχηματισμό (3.31) το μοντέλο της αντίστροφης κατανομής Weibull μετασχηματίζεται σε ευθεία γραμμή με εξίσωση

$$y = \beta[x - \ln(\alpha)].$$

Σε αντίθεση με το μοντέλο της αντίστροφης κατανομής Weibull, το μοντέλο της κλασικής κατανομής Weibull σύμφωνα με το μετασχηματισμό (3.31) μετασχηματίζεται σε

$$y = -\ln\left(-\ln\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{z}\right)\right)\right),$$

η οποία είναι κυρτή συνάρτηση και έχει δυο ασύμπτωτες που δίνονται από τις σχέσεις

(υπενθυμίζουμε ότι $z = \left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta$):

- Αριστερή ασύμπτωτη: Για μικρές τιμές του t (ή για μεγάλες τιμές του z) έχουμε ότι

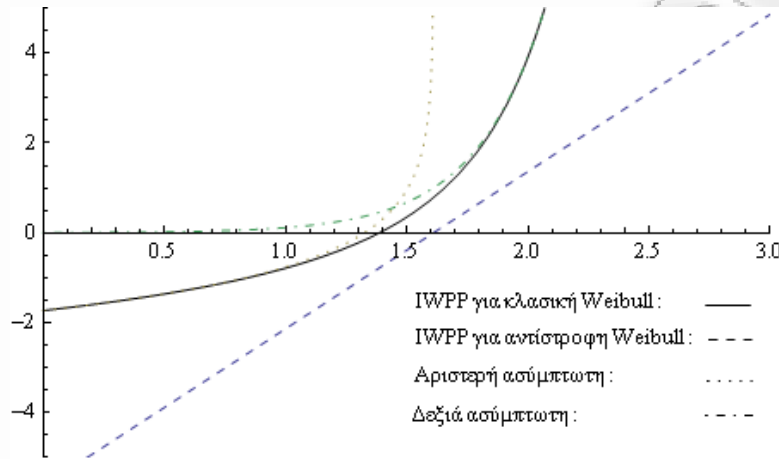
$$y = -\ln\{-\ln[1 - \exp(-z)]\} \cong -\ln[-\ln(z)] = -\ln\{-\beta[x - \ln(\alpha)]\}$$

- Δεξιά ασύμπτωτη: Για μεγάλες τιμές του t (ή για μικρές τιμές του z) έχουμε ότι

$$y = -\ln(-\ln(1 - \exp(-z))) \cong -\ln(\exp(-z)) = z = \exp\{\beta[x - \ln(\alpha)]\}$$

Στο Σχήμα 3.10 παριστάνονται τα IWPP γραφήματα για την αντίστροφη κατανομή Weibull και για την κλασική κατανομή Weibull, καθώς και οι ασύμπτωτες της κλασικής κατανομής Weibull.

Σχήμα 3.10



Σύγκριση μεταξύ IWPP και WPP γραφημάτων

Το WPP γράφημα της αντίστροφης κατανομής Weibull και το IWPP γράφημα της κλασικής κατανομής Weibull έχουν παρόμοια μορφή αν και το πρώτο είναι κοίλο και το δεύτερο κυρτό. Συγκεκριμένα μπορούμε να δούμε ότι το ένα γράφημα είναι αντίστροφη απεικόνιση του άλλου. Αυτή η παρατήρηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ελέγξουμε αν κάποια δεδομένα που έχουμε στη διάθεσή μας μπορούν να ερμηνευθούν από το μοντέλο της αντίστροφης κατανομής Weibull.

Για παράδειγμα, αν το WPP γράφημα, Παράγραφος 2.5.A, των δεδομένων μας έχει παρόμοιο σχήμα με αυτό του Σχήματος 3.9, τότε το μοντέλο της αντίστροφης κατανομής Weibull ενδέχεται να είναι το κατάλληλο μοντέλο για να ερμηνεύσει τα δεδομένα μας. Στη συνέχεια μπορούμε να κατασκευάσουμε το IWPP για να ελέγξουμε αν τα δεδομένα είναι σκορπισμένα γύρω από μια ευθεία γραμμή και έτσι να επιλέξουμε ως μοντέλο εκείνο της αντίστροφης κατανομής Weibull.

Στατιστική συμπερασματολογία

I. Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τον τύπο

$$L(\alpha, \beta; t_1, \dots, t_n) = (\beta \alpha^\beta)^n \left(\prod_{i=1}^n t_i \right)^{-\beta-1} \exp \left(-\alpha^\beta \sum_{i=1}^n t_i^{-\beta} \right)$$

με αντίστοιχο πιθανολογάρημο

$$l(\alpha, \beta; t_1, \dots, t_n) = n \ln \beta + n \beta \ln \alpha + (-\beta - 1) \ln \left(\prod_{i=1}^n t_i \right) - \alpha^\beta \sum_{i=1}^n t_i^{-\beta}.$$

Για την εύρεση των εκτιμητριών μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων α και β θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta; t_1, \dots, t_n)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial l(\alpha, \beta; t_1, \dots, t_n)}{\partial \beta} = 0.$$

Το τελευταίο οδηγεί στο επόμενο σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta; t_1, \dots, t_n)}{\partial \alpha} = \frac{n\beta}{\alpha} - \beta \alpha^{\beta-1} \sum_{i=1}^n t_i^{-\beta} = 0 \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta; t_1, \dots, t_n)}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + n \ln \alpha - \sum_{i=1}^n \ln t_i + \alpha^\beta \sum_{i=1}^n (t_i^{-\beta} \ln t_i) - \alpha^\beta \ln \alpha \sum_{i=1}^n t_i^{-\beta} = 0 \quad (3.33)$$

Από την εξίσωση (3.32) η παράμετρος α εκφράζεται μέσω της παραμέτρου β ως

$$\alpha = \left(n \cdot \left[\sum_{i=1}^n t_i^{-\beta} \right]^{-1} \right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (3.34)$$

Αντικαθιστώντας τον τύπο (3.34) στην εξίσωση (3.33), προκύπτει η εξίσωση (ως προς β μόνο)

$$\begin{aligned} \frac{n}{\beta} + n \ln \left(n \cdot \left[\sum_{i=1}^n t_i^{-\beta} \right]^{-1} \right)^{\frac{1}{\beta}} - \sum_{i=1}^n \ln t_i + n \cdot \left[\sum_{i=1}^n t_i^{-\beta} \right]^{-1} \sum_{i=1}^n (t_i^{-\beta} \ln t_i) - \frac{n}{\beta} \cdot \left[\sum_{i=1}^n t_i^{-\beta} \right]^{-1} \ln \left(n \cdot \left[\sum_{i=1}^n t_i^{-\beta} \right]^{-1} \right) \cdot \sum_{i=1}^n t_i^{-\beta} = \\ = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n \ln t_i + \frac{n}{\beta} \frac{\sum_{i=1}^n (t_i^{-\beta} \ln t_i)}{\sum_{i=1}^n t_i^{-\beta}} \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n (t_i^{-\beta} \ln t_i)}{\sum_{i=1}^n t_i^{-\beta}} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln t_i = 0 \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\sum_{i=1}^n (t_i^{-\beta} \ln t_i)}{\sum_{i=1}^n t_i^{-\beta}} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln t_i. \quad (3.25)$$

Η τελευταία εξίσωση μπορεί να λυθεί αριθμητικά π.χ με τη μέθοδο Newton-Raphson ή με κάποια άλλη επαναληπτική μέθοδο. Αφού υπολογισθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας $\hat{\beta}$ της παραμέτρου β μέσω της έκφρασης (3.25), την αντικαθιστούμε στην έκφραση (3.34).

Έτσι, η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας $\hat{\alpha}$ της παραμέτρου α , υπολογίζεται από τον τύπο

$$\hat{\alpha} = \left(n \cdot \left(\sum_{i=1}^n T_i^{-\hat{\beta}} \right)^{-1} \right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}}.$$

Κεφάλαιο 4^ο

Γενικεύσεις/Τροποποιήσεις των χαρακτηριστικών αξιοπιστίας της κατανομής Weibull (Τύπου II)

4.1 Εισαγωγή

Στα μοντέλα Weibull τύπου II η συνάρτηση κατανομής τους $G(t; \theta)$ σχετίζεται με τη συνάρτηση κατανομής του κλασικού μοντέλου Weibull $F(t; \theta)$ (2.1) μέσω κάποιας σχέσης. Για πολλά μοντέλα, που βρίσκονται σε αυτή την κατηγορία, η σχέση που τα συνδέει με το μοντέλο της κλασικής κατανομής Weibull εξηγείται καλύτερα μέσω της συνάρτησης που δίνει τα ποσοστιαία τους σημεία. Για το μοντέλο της κλασικής κατανομής Weibull η συνάρτηση ποσοστιαίων σημείων δίνεται από τη σχέση (2.15)

$$Q(u) = \alpha [-\ln(1-u)]^{\frac{1}{\beta}}.$$

Μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τα μοντέλα τύπου II σε δυο υποκατηγορίες :

- **Τύπος II(α):** Τα μοντέλα αυτού του τύπου δεν περιλαμβάνουν πρόσθετες μεταβλητές και για αυτό μπορούν να θεωρηθούν ως τροποποιημένα μοντέλα. Υπάρχουν δυο μοντέλα τέτοιου τύπου: Μοντέλο II(α)-1 και Μοντέλο II(α)-2.
- **Τύπος II(β):** Τα μοντέλα αυτού του τύπου περιλαμβάνουν μια ή περισσότερες πρόσθετες μεταβλητές και για αυτό μπορούν να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις αυτών των μοντέλων. Υπάρχουν δεκατρία μοντέλα τέτοιου τύπου: Μοντέλο II(β)-1 μέχρι Μοντέλο II(β)-13.

Βασικός στόχος είναι να κατασκευαστούν μοντέλα κατανομών τα οποία πλησιάζουν προς την κατανομή Weibull και να μπορούν να περιγράψουν με ένα συναρτησιακό τύπο, την κατανομή ολόκληρου του χρόνου ζωής μιας μονάδας με την τυπική βαθμίδα αποτυχίας της θεωρίας αξιοπιστίας BC.

4.2 Μοντέλο II(α)-1: Ψευδό-Weibull κατανομή (*Pseudo-Weibull distribution*)

Η συνάρτηση πυκνότητας της ψευδό-κατανομής Weibull βρίσκεται από τη έκφραση

$$g(t) = \frac{kt^k}{\theta^{1+\frac{1}{k}} \Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)} \exp\left(-\frac{t^k}{\theta}\right), \quad \theta, k > 0. \quad (4.1)$$

Η σχέση μεταξύ αυτού του μοντέλου και του μοντέλου της κλασικής κατανομής Weibull βρίσκεται ακολούθως:

Έστω

$$g_1(t) = \frac{t}{\mu} f(t), \quad t > 0 \quad (4.2)$$

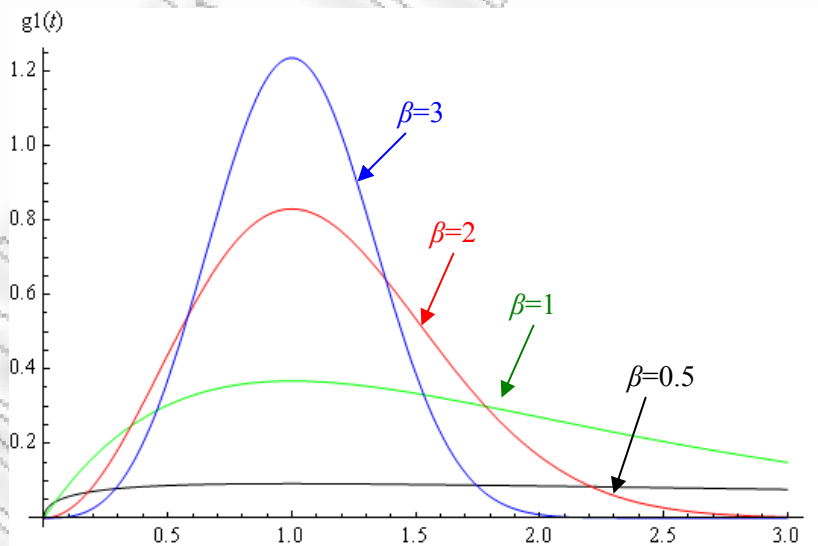
όπου $f(t)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας της κλασικής κατανομής Weibull (2.3) και μ η μέση τιμή της κλασικής κατανομής Weibull (2.10). Έτσι η έκφραση (4.2) μπορεί να γραφτεί ως

$$g_1(t) = \frac{\beta t^\beta}{\alpha^{\beta+1} \Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]. \quad (4.3)$$

Αντικαθιστώντας με $\theta = \alpha^\beta$ και $k = \beta$ στη σχέση (4.1) παίρνουμε τη σχέση (4.3).

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας (4.3) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β , κρατώντας την τιμή της παραμέτρου α σταθερή ($\alpha = 1$).

Σχήμα 4.1



Η συνάρτηση κατανομής της σχέσης (4.3) δίνεται από τον τύπο

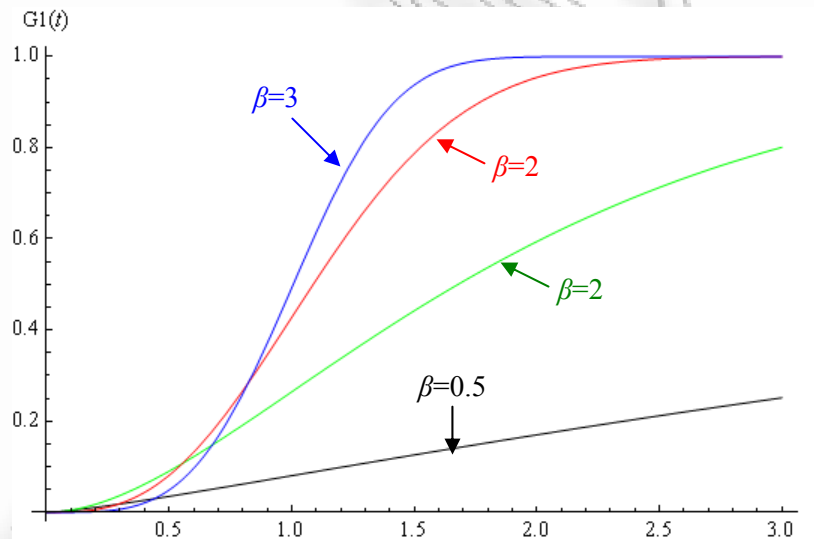
$$G_1(t; \theta, k) = 1 - \frac{\beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)} = 1 - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} \Rightarrow$$

$$G_1(t; \theta, k) = \frac{\gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}, \quad t \geq 0, \quad (4.4)$$

όπου $\Gamma(\rho, \beta) = \int_\beta^\infty x^{\rho-1} e^{-x} dx$, $\gamma(\rho, \beta) = \int_0^\beta x^{\rho-1} e^{-x} dx$ και $\Gamma(\rho, \beta) + \gamma(\rho, \beta) = \Gamma(\rho)$.

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της συνάρτησης κατανομής (4.4) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β , κρατώντας την τιμή της παραμέτρου α σταθερή ($\alpha = 1$).

Σχήμα 4.2

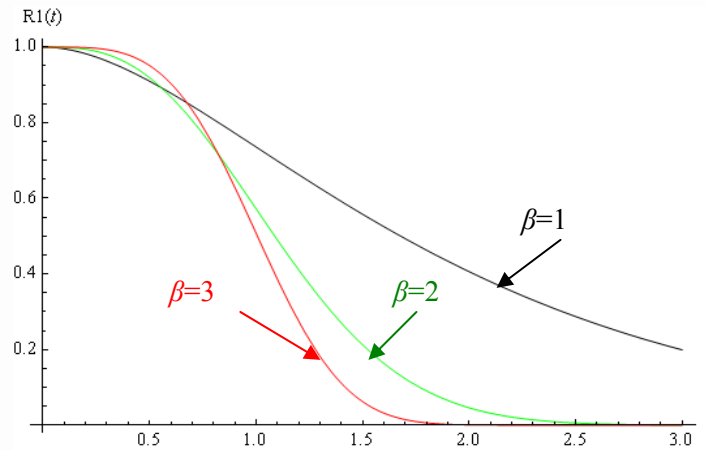


Η συνάρτηση αξιοπιστίας είναι ίση με

$$R_1(t) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}. \quad (4.5)$$

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της συνάρτησης αξιοπιστίας (4.5) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β , κρατώντας την τιμή της παραμέτρου α σταθερή ($\alpha = 1$).

Σχήμα 4.3

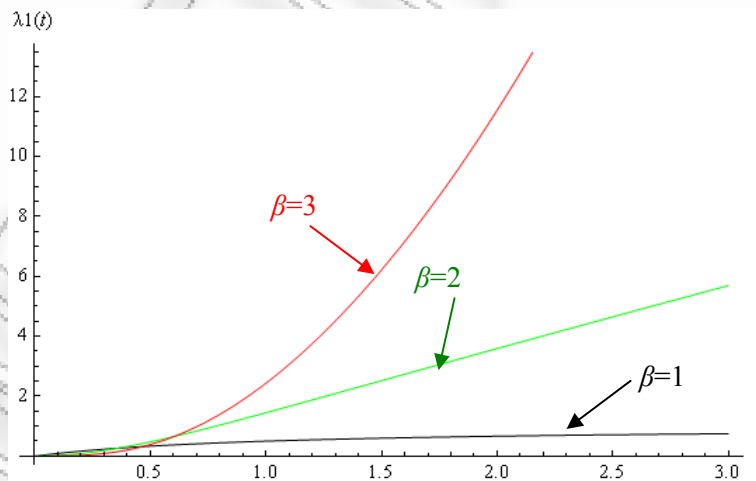


Η βαθμίδα αποτυχίας βρίσκεται από τον τύπο

$$\lambda_1(t) = \frac{\frac{\beta t^\beta}{\alpha^{\beta+1}} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right)} \quad (4.6)$$

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας (4.6) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β , κρατώντας την τιμή της παραμέτρου α σταθερή ($\alpha = 1$).

Σχήμα 4.4



Ειδική περίπτωση

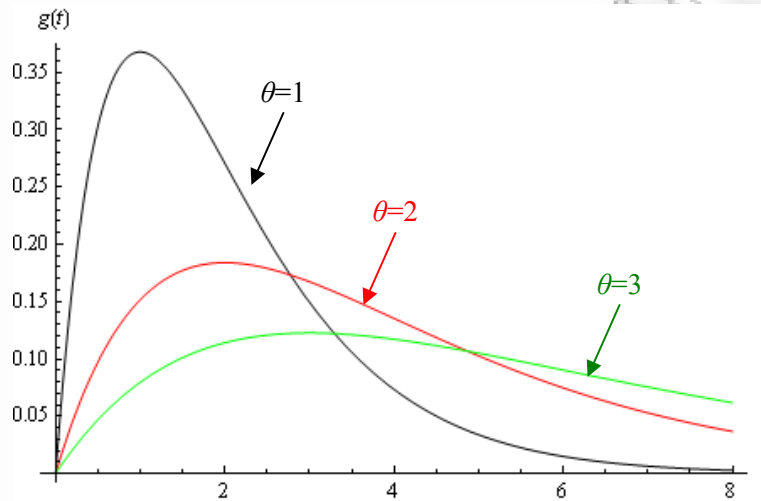
Όταν $k=1$, η σχέση (4.1) καταλήγει σε κατανομή Γάμμα¹ με παραμέτρους $(\theta, 2)$ και **συνάρτηση πυκνότητας** που βρίσκεται από τον τύπο

¹ Συμβολίζουμε με Gamma (ν, ε) τη συνάρτηση πυκνότητας: $f(t; \nu, \varepsilon) = \frac{t^{\varepsilon-1}}{\nu^\varepsilon \Gamma(\varepsilon)} \exp(-t/\nu)$.

$$g(t) = \frac{t}{\theta^2} \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right), \quad t > 0 \quad (4.7)$$

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας (4.7) για διάφορες τιμές της παραμέτρου θ .

Σχήμα 4.5

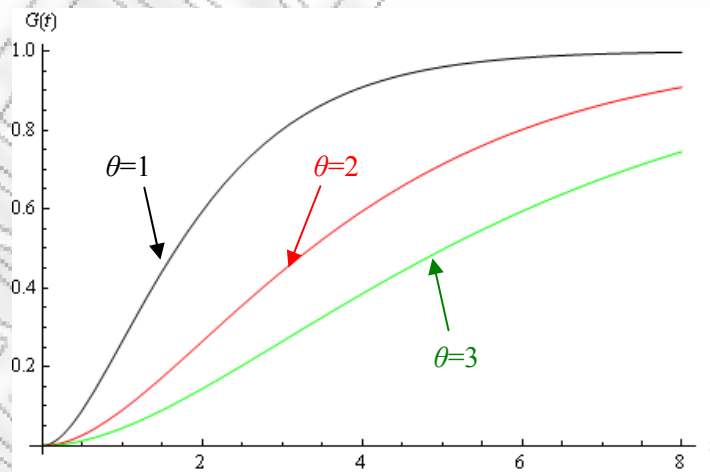


Η συνάρτηση κατανομής δίνεται από τη σχέση

$$G(t) = \int_0^t g(x) dx = 1 - \left(1 + \frac{t}{\theta}\right) \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right), \quad t > 0 \quad (4.8)$$

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας (4.8) για διάφορες τιμές της παραμέτρου θ .

Σχήμα 4.6

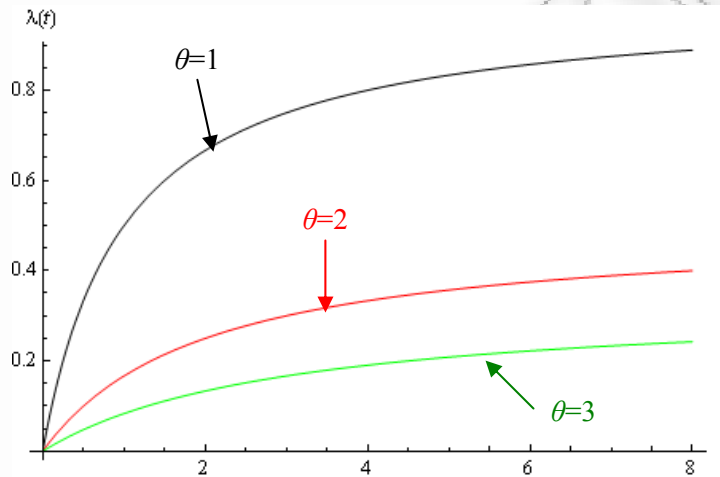


Η βαθμίδα αποτυχίας βρίσκεται από τον τύπο

$$\lambda(t) = \frac{1}{\theta} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{t}{\theta}} \right). \quad (4.9)$$

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας (4.9) για διάφορες τιμές της παραμέτρου θ .

Σχήμα 4.7



Η ψευδό-Weibull κατανομή δεν αποτελεί γενίκευση της κατανομής Γάμμα, ούτε της κατανομής Weibull.

Μέτρα θέσης και διασποράς

Η ροπή κ-τάξης γύρω από το μηδέν της σχέσης (4.1) βρίσκεται από τον τύπο

$$E(T^s) = \int_0^{\infty} t^s \frac{kt^k}{\theta^{1+\frac{1}{k}} \Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)} \exp\left(-\frac{t^k}{\theta}\right) dt = \frac{\theta^{\frac{s}{k}} \Gamma\left(1+\frac{1+s}{k}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)}.$$

Έτσι η μέση τιμή της ψευδό-Weibull κατανομής είναι ίση με

$$\mu = \frac{\theta^{\frac{1}{k}} \Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)},$$

ενώ η διακύμανση της ψευδό-Weibull κατανομής προκύπτει από τον τύπο

$$\sigma^2 = E(T^2) - [E(T)]^2 = \theta^{\frac{2}{k}} \left[\frac{\Gamma\left(1 + \frac{3}{k}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)} - \frac{\Gamma^2\left(1 + \frac{2}{k}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \right].$$

Ο Voda (1989) απέδειξε ότι αν T είναι μια τυχαία μεταβλητή από την ψευδο-τυχαία κατανομή Weibull, τότε η τυχαία μεταβλητή $Y = T^k$ ανήκει στην κλάση των κατανομών Γάμμα $\Gamma\left(t; \theta, 1 + \frac{1}{k}\right)$.

Συγκεκριμένα η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής Y θα είναι

$$F(y) = P(T^k < y) = P\left(T < y^{\frac{1}{k}}\right) = \int_0^{y^{\frac{1}{k}}} g(t; \theta, k) dt.$$

όπου $g(t; \theta, k)$ η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής T που δίνεται από τη σχέση (4.1). Έτσι έχουμε ότι

$$F(y) = \frac{k}{\theta^{1+\frac{1}{k}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \int_0^{y^{\frac{1}{k}}} t^k \exp\left(-\frac{t^k}{\theta}\right) dt \quad (4.10)$$

Γνωρίζουμε ότι αν

$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt = \int_{h(x)}^0 f(t) dt + \int_0^{g(x)} f(t) dt = \int_0^{g(x)} f(t) dt - \int_0^{h(x)} f(t) dt$$

τότε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F(x) &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^{g(x)} f(t) dt \right) \cdot \frac{d}{dx} g(x) - \frac{d}{dx} \left(\int_0^{h(x)} f(t) dt \right) \cdot \frac{d}{dx} h(x) = \\ &= f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x). \end{aligned}$$

Επομένως από τη σχέση (4.10) έχουμε

$$F'(y) = f(y) = \frac{k}{\theta^{1+\frac{1}{k}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \left(t^{\frac{1}{k}}\right)' t \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right) = \frac{\frac{1}{k} t^{\frac{1}{k}-1}}{\theta^{1+\frac{1}{k}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right).$$

Άρα τελικά αν $T \sim PW(k, \theta) \Rightarrow T^k \sim \Gamma\left(\theta, 1 + \frac{1}{k}\right)$.

Στατιστική συμπερασματολογία

Θα εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του μοντέλου με τη βοήθεια της μεθόδου της μέγιστης πιθανοφάνειας. Η συνάρτηση πιθανοφάνειας της σχέσης (4.1) θα είναι

$$L(k, \theta; t_i) = \frac{k^n \prod_{i=1}^n t_i^k}{\theta^{n+\frac{n}{k}} \Gamma^n\left(1+\frac{1}{k}\right)} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{t_i^k}{\theta}\right)$$

με αντίστοιχο πιθανολογάρημο

$$l(k, \theta; t_i) = n \ln k + k \sum_{i=1}^n \ln t_i - \left(n + \frac{n}{k}\right) \ln \theta - n \ln \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n t_i^k. \quad (4.11)$$

A. Περίπτωση: Η παράμετρος k είναι γνωστή

Στην περίπτωση που η παράμετρος k είναι γνωστή τότε παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς θ και εξισώνοντας με το μηδέν έχουμε

$$\frac{\partial l(k, \theta; t_1, \dots, t_n)}{\partial \theta} = -\frac{\left(n + \frac{n}{k}\right)}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^n t_i^k}{\theta^2} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^k}{\left(n + \frac{n}{k}\right)}.$$

Έτσι η εκτιμήτρια συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου θ δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n T_i^k}{\left(n + \frac{n}{k}\right)}.$$

Η $\hat{\theta}$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου θ . Για να το αποδείξουμε αυτό αρχικά υπενθυμίζουμε ότι αν T μια τυχαία μεταβλητή από την ψευδο-τυχαία κατανομή Weibull, τότε η τυχαία μεταβλητή T^k ανήκει στην κλάση των κατανομών Γάμμα $\Gamma\left(t; \theta, 1 + \frac{1}{k}\right)$. Έπεται ότι

η στατιστική συνάρτηση $\sum_{i=1}^n T_i^k$ ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους $\Gamma\left(t; \theta, n + \frac{n}{k}\right)$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 E(\hat{\theta}) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^n T_i^k}{\left(n + \frac{n}{k}\right)}\right) = \frac{1}{n + \frac{n}{k}} E\left(\sum_{i=1}^n T_i^k\right) = \frac{1}{n + \frac{n}{k}} \int_0^{\infty} t \cdot t^{n+\frac{n}{k}-1} \frac{\exp\left(-\frac{t}{\theta}\right)}{\theta^{n+\frac{n}{k}} \Gamma\left(n + \frac{n}{k}\right)} dt \stackrel{x=\frac{t}{\theta}}{=} \\
 &= \frac{1}{\theta^{n+\frac{n}{k}} \Gamma\left(n + \frac{n}{k}\right)} \int_0^{\infty} x^{n+\frac{n}{k}} \theta^{n+\frac{n}{k}} \theta \exp(-x) dx = \frac{\theta^{n+\frac{n}{k}} \Gamma\left(n + \frac{n}{k}\right)}{\theta^{n+\frac{n}{k}} \Gamma\left(n + \frac{n}{k}\right)} \theta = \theta.
 \end{aligned}$$

B. Περίπτωση: Η παράμετρος k είναι άγνωστη

Στην περίπτωση που και οι δυο παράμετροι της ψευδο-Weibull κατανομής είναι άγνωστες τότε θα λύσουμε το σύστημα που προκύπτει παραγωγίζοντας τη σχέση (4.11) ως προς k και θ .

$$\frac{\partial l(k, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{\left(n + \frac{n}{k}\right)}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^n t_i^k}{\theta^2} = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial l(k, \theta)}{\partial k} = \frac{n}{k} + \sum_{i=1}^n \ln t_i + \frac{n}{k^2} \ln \theta - n \frac{\Gamma'\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)} - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n (t_i^k \cdot \ln t_i) = 0. \quad (4.13)$$

Να σημειώσουμε ότι στη σχέση (4.13) εμφανίζεται η συνάρτηση δίγαμμα $\psi(x)$. Συγκεκριμένα ισχύει

$$\psi(x+1) = \frac{\Gamma'\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)},$$

με

$$\psi(x+1) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1-y^x}{1-y} dy, \quad \gamma \cong -0.57721.$$

Από τη σχέση (4.12) έχουμε ότι

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^k}{\left(n + \frac{n}{k}\right)}.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στη σχέση (4.13) προκύπτει ότι

$$\frac{n}{k} + \sum_{i=1}^n \ln t_i + \frac{n}{k^2} \ln \sum_{i=1}^n t_i^k - \frac{n}{k^2} \ln \left(n + \frac{n}{k} \right) - n \frac{\Gamma' \left(1 + \frac{1}{k} \right)}{\Gamma \left(1 + \frac{1}{k} \right)} - \frac{\sum_{i=1}^n t_i^k \left(n + \frac{n}{k} \right)}{\sum_{i=1}^n t_i^k} \sum_{i=1}^n \left(t_i^k \cdot \ln t_i \right) = 0.$$

Από την τελευταία εξίσωση μπορεί να βρεθεί αριθμητικά π.χ με τη μέθοδο Newton-Raphson ή κάποια άλλη επαναληπτική μέθοδο η τιμή της εκτιμήτριας της παραμέτρου k . Αφού βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας \hat{k} , η εκτιμήτρια της παραμέτρου θ δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n T_i^{\hat{k}}}{\left(n + \frac{n}{\hat{k}} \right)}.$$

4.3 Μοντέλο Π(α)-2: Μοντέλο Stacy-Mihram

Υπενθυμίζουμε ότι το μοντέλο της κλασικής κατανομής Weibull προϋποθέτει ότι η παράμετρος σχήματος β είναι θετική. Σε αυτό το μοντέλο η παράμετρος β μπορεί να είναι θετική είτε αρνητική.

Η **συνάρτηση πυκνότητας** δίνεται από τον τύπο

$$g(t) = \frac{|\beta| t^{\beta-1}}{\alpha^\beta} \exp \left[- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right], \quad t > 0,$$

η αντίστοιχη **συνάρτηση κατανομής** προκύπτει από τον τύπο

$$G(t) = \begin{cases} 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right], & \beta > 0 \\ \exp \left[- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right], & \beta < 0. \end{cases}$$

Αυτό το μοντέλο, για $\beta > 0$ μετατρέπεται στο μοντέλο της κλασικής κατανομής Weibull (2.1), ενώ για $\beta < 0$ μετατρέπεται στο μοντέλο της αντίστροφης κατανομής Weibull (3.24).

4.4 Μοντέλο Π(β)-1: Εκτεταμένη κατανομή Weibull (*Extended Weibull distribution*)

Οι Marshall and Olkin (1997) πρότειναν μια τροποποίηση του κλασικού μοντέλου Weibull

εισάγοντας μια επιπρόσθετη παράμετρο ν , όπου $0 < \nu < \infty$. Το μοντέλο που προέκυψε είναι το εξής

$$\bar{G}(t) = \frac{\nu \bar{F}(t)}{1 - (1 - \nu) \bar{F}(t)} = \frac{\nu \bar{F}(t)}{F(t) + \nu \bar{F}(t)} \quad \begin{matrix} t \geq 0 \\ \nu > 0 \end{matrix}$$

όπου $F(t)$ η συνάρτηση κατανομής της κλασικής κατανομής Weibull (2.1) $\bar{G}(t) = 1 - G(t)$ και $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$.

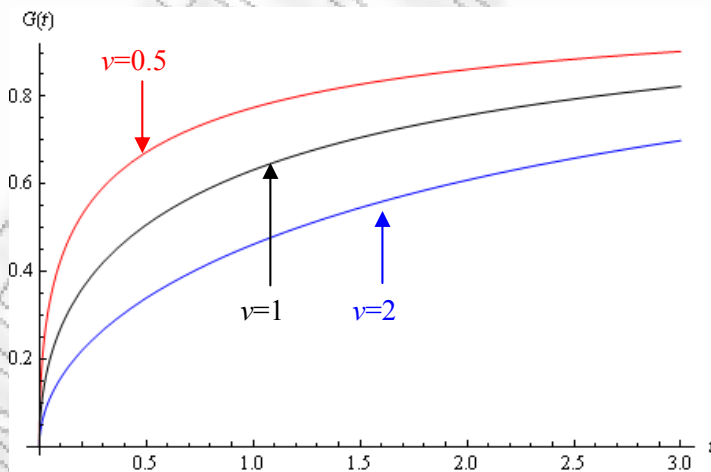
Για $\nu = 1$ προκύπτει ότι $\bar{G}(t) = \bar{F}(t)$, δηλαδή το νέο μοντέλο παίρνει τη μορφή της κλασικής κατανομής Weibull.

Η **συνάρτηση κατανομής** του μοντέλου είναι ίση με

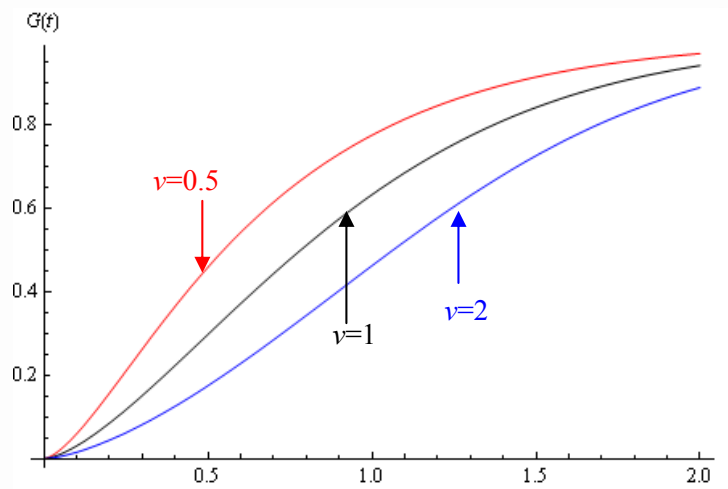
$$G(t) = 1 - \frac{\nu \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]}{1 - (1 - \nu) \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]} = 1 - \frac{\nu}{\exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] + \nu - 1}. \quad (4.14)$$

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της συνάρτησης κατανομής (4.14) για διάφορες τιμές των παραμέτρων β και ν , κρατώντας την τιμή της παραμέτρου α σταθερή ($\alpha = 1$).

Σχήμα 4.8 ($\beta = 0.5$)



Σχήμα 4.9 ($\beta = 1.5$)

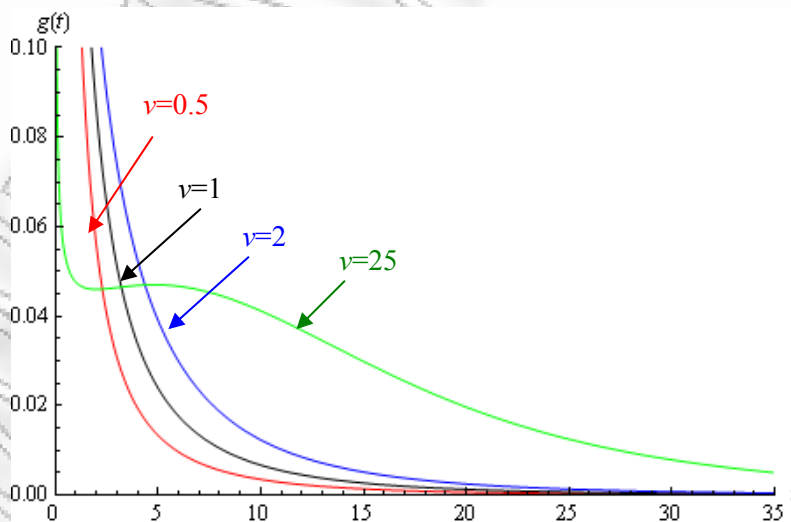


Η συνάρτηση πυκνότητας της εκτεταμένης κατανομής Weibull βρίσκεται από τον τύπο

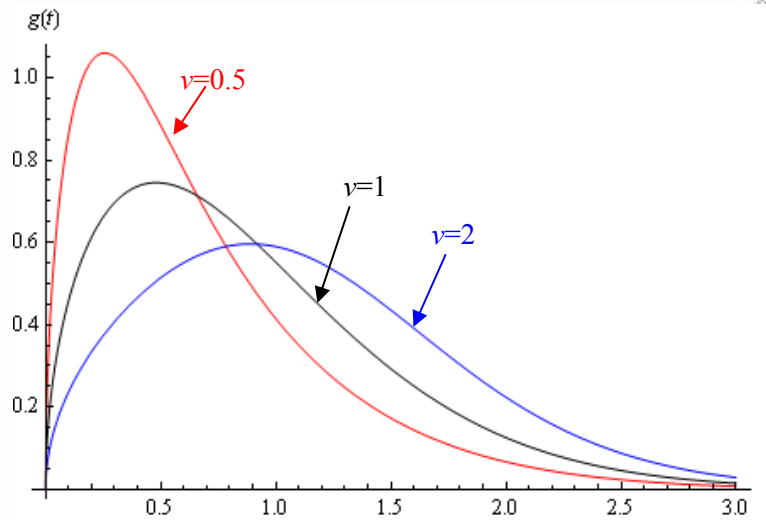
$$g(t) = \frac{\frac{\nu\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]}{\left\{1 - (1-\nu) \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]\right\}^2} \quad (4.15)$$

Παρακάτω δίνονται τα γράφημα της συνάρτησης κατανομής (4.15) για διάφορες τιμές των παραμέτρων β και ν , κρατώντας την τιμή της παραμέτρου α σταθερή ($\alpha = 1$).

Σχήμα 4.10 ($\beta = 0.5$)



Σχήμα 4.11 ($\beta = 1.5$)



Από τα Σχήματα 4.10 και 4.11 συμπεραίνουμε ότι:

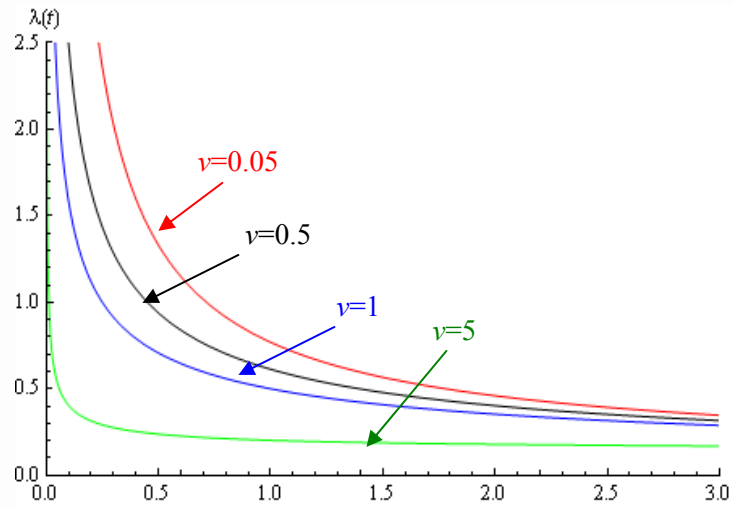
1. για $\nu \leq 1$ και
 - $\beta \leq 1$, η $g(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του t ,
 - $\beta > 1$, η $g(t)$ μονοκόρυφη, Μορφή RBC.
2. για $\nu > 1$ και
 - $\beta > 1$, η $g(t)$ μονοκόρυφη,
 - $\beta < 1$, όταν β είναι αρκετά μικρό, η $g(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του t , όμως για μεγάλα ν η $g(t)$ αρχικά φθίνει γρήγορα, στη συνέχεια γίνεται αύξουσα και καταλήγει να είναι και πάλι φθίνουσα.

Η βαθμίδα αποτυχίας της εκτεταμένης κατανομής Weibull προκύπτει από τον τύπο

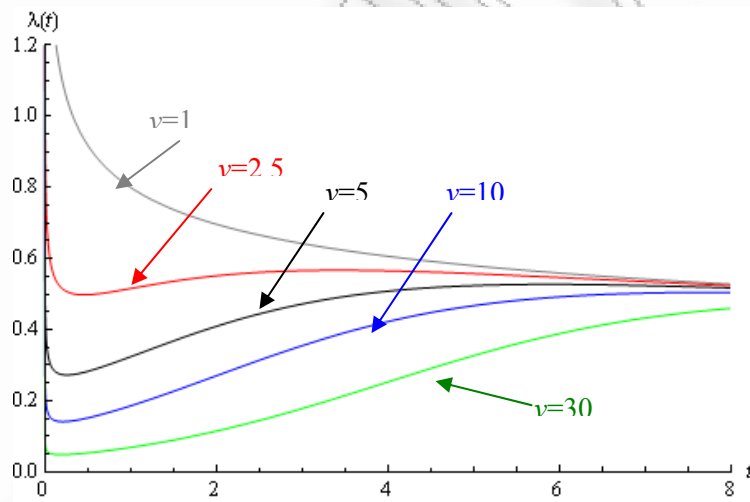
$$\lambda(t) = \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1}}{1 - (1-\nu)\exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]} \quad (4.16)$$

Παρακάτω δίνονται τα γράφημα της συνάρτησης κατανομής (4.16) για διάφορες τιμές των παραμέτρων β και ν , κρατώντας την τιμή της παραμέτρου α σταθερή ($\alpha = 1$).

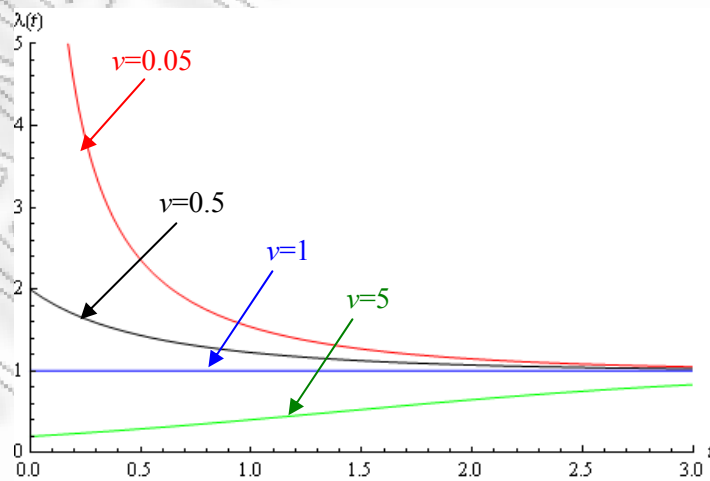
Σχήμα 4.12 ($\beta = 0.5$)



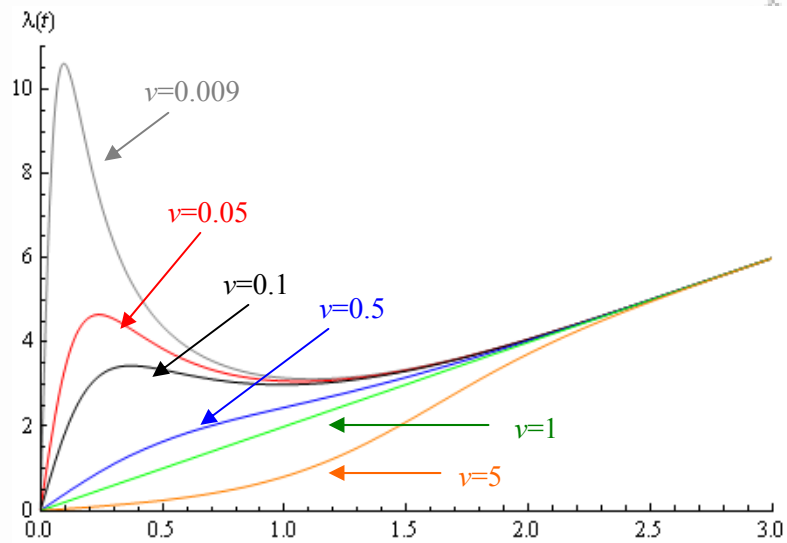
Σχήμα 4.13 ($\beta = 0.8$)



Σχήμα 4.14 ($\beta = 1$)



Σχήμα 4.15 ($\beta = 2$)



Από τα Σχήματα 4.12, 4.13, 4.14 και 4.15 συμπεραίνουμε ότι:

1. όταν $\nu \geq 1$ και $\beta > 1$, ή $\nu > 1$ και $\beta \geq 1$ τότε η $\lambda(t)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του t , *IFR* (Σχήμα 4.15).
2. όταν $\nu \leq 1$ και $\beta < 1$, ή $\nu < 1$ και $\beta \leq 1$ τότε η $\lambda(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του t , *DFR* (Σχήμα 4.12 και 4.13).
3. όταν $\beta > 1$ και $\nu < 1$ τότε η $\lambda(t)$ είναι αρχικά αύξουσα και καταλήγει σε αύξουσα συνάρτηση του t , αλλά ενδέχεται να υπάρχει ένα διάστημα όπου αυτή θα είναι φθίνουσα. Στην περίπτωση που η παράμετρος ν είναι αρκετά μικρή, όπως στο Σχήμα 4.15, η $\lambda(t)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ($t = t_1^*$) και στη συνέχεια, μετά από το σημείο t_1^* , παρουσιάζει τη μορφή *MBC*. Αυτό σημαίνει ότι σε κάποιο σημείο παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ($t = t_2^*$) το οποίο μπορεί να υπολογισθεί από τη λύση της εξίσωσης

$$1 - (1 - \nu) \exp \left[- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right] - \beta \frac{(1 - \nu) \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta}{\beta - 1} \exp \left[- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right] = 0. \quad (4.17)$$

Η παραπάνω σχέση προέρχεται από την παραγωγή της σχέσης (4.16) ως προς t και στη συνέχεια την εξισώσουμε με το μηδέν. Η εξίσωση (4.17) έχει δυο λύσεις, η μικρότερη δίνει το σημείο t_1^* και η μεγαλύτερη το σημείο t_2^* .

4. όταν $\beta < 1$ και $\nu > 1$ τότε η $\lambda(t)$ είναι αρχικά φθίνουσα και καταλήγει σε φθίνουσα συνάρτηση, αλλά ενδέχεται να υπάρχει ένα διάστημα όπου αυτή θα είναι αύξουσα. Στην

περίπτωση όπου η παράμετρος ν είναι αρκετά μεγάλη, όπως στο Σχήμα 4.13, η $\lambda(t)$ παρουσιάζει δυο ακρότατα: ένα στο σημείο $t = T_1^*$ και το άλλο στο σημείο $t = T_2^*$ τα οποία μπορούν να υπολογισθούν από την εξίσωση (4.17). Τα σημεία T_1^* και T_2^* αντιστοιχούν στη μικρότερη και μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης (4.17).

Μέτρα θέσης και διασποράς

Η ροπή κ-τάξης γύρω από το μηδέν της εκτεταμένης κατανομής Weibull δίνεται από τον τύπο

$$E(T^k) = \int_0^{\infty} t^k g(t) dt = k \int_0^{\infty} t^{k-1} \bar{G}(t) dt = \nu k \alpha^k \int_0^{\infty} \frac{\exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] \cdot \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{k-1}}{1 - (1-\nu) \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]} d\left(\frac{t}{\alpha}\right) =$$

$$= \frac{\nu k \alpha^k}{\beta} \int_0^1 \frac{[-\ln(y)]^{\frac{k}{\beta}-1}}{1 - (1-\nu)y} dy, \quad k > 0.$$

Δεν υπάρχει τρόπος για τον υπολογισμό των ρομών της εκτεταμένης κατανομής Weibull σε κλειστή μορφή, οπότε θα πρέπει να καταφύγουμε σε επαναληπτικές μεθόδους, όπως η μέθοδος Newton-Raphson. Όταν $k = \beta$ τότε,

$$E(T^\beta) = \frac{\alpha^\beta}{1 - \frac{1}{\nu}} \ln(\nu).$$

Προκύπτει ότι

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} E(T^k) = \alpha^\beta, \quad k > 0.$$

Οι τιμές των ρομών 1^{ης} τάξης γύρω από το μηδέν για διάφορους συνδυασμούς των β και ν , όταν $\alpha = 1$ μπορούν να βρεθούν με τη μορφή πίνακα στην εργασία των Marshall and Olkin (1997).

WPP γράφημα

Σύμφωνα με το μετασχηματισμό (2.16) η σχέση (4.14) γράφεται στη μορφή

$$y = \ln \left[- \left(\ln(\nu) - \ln \left(\exp \left\{ - \left(\frac{\exp(x)}{\alpha} \right)^\beta \right\} - (1-\nu) \right) \right) \right] \quad \text{και } x = \ln(t). \quad (4.18)$$

Η $y(x)$ παριστά μια ελαφριά μια καμπύλη και τη συμβολίζουμε με C . Οι Zhang and Xie (2007) μελέτησαν το WPP γράφημα της εκτεταμένης κατανομής Weibull και κατέληξαν στα εξής συμπεράσματα:

- Δεξιά ασύμπτωτη: Καθώς $x \rightarrow \infty$ (ή $t \rightarrow \infty$), τότε για την εξίσωση $y(x)$ που δίνεται απο τη συνάρτηση (4.18) προκύπτει ότι

$$y = \beta(x - \ln \alpha).$$

η οποία είναι η δεξιά ασύμπτωτη της C και συμβολίζεται με L_w . Η L_w παριστάνει ευθεία γραμμή. Καθώς το t αυξάνεται η C τείνει να πλησιάσει την ευθεία L_w .

- Αριστερή ασύμπτωτη: Καθώς $x \rightarrow -\infty$ (ή $t \rightarrow 0$), χρησιμοποιώντας τις προσεγγίσεις $e^u \cong 1+u$ και $\ln(1-u) \cong -u$ η συνάρτηση (4.18) μετατρέπεται σε

$$y \cong \ln \left\{ \left(\frac{e^x}{\alpha} \right)^\beta - \ln \left[1 + \left(1 - \frac{1}{v} \right) \left(\frac{e^x}{\alpha} \right)^\beta \right] \right\} \cong \beta x - \ln(v \alpha^\beta) = \beta(x - \ln \alpha) - \ln v \quad (4.19)$$

η οποία είναι η δεξιά ασύμπτωτη της C και συμβολίζεται με L_α . Η L_α παριστάνει ευθεία γραμμή. Καθώς το t μικραίνει η C τείνει να πλησιάσει την ευθεία L_α .

Έστω, ότι η C και η L_α τέμνουν τον άξονα x' στο σημείο X_0 και X_x , αντίστοιχα. Όταν $y = 0$, από τη συνάρτηση (4.19) δίνεται ότι

$$\alpha^\beta = \frac{\exp(\beta X_x)}{v}. \quad (4.20)$$

Όταν $y = 0$, από τη συνάρτηση (4.18) προκύπτει ότι

$$\exp \left[\left(\frac{e^{X_0}}{\alpha} \right)^\beta \right] = 1 + v(e-1). \quad (4.21)$$

Υπολογίζοντας την πρώτη και δεύτερη παράγωγο τ ως προς x ης y που δίνεται από τη συνάρτηση (4.18), βρίσκουμε ότι

$$y' = \frac{\beta \exp \left[\left(\frac{\exp(x)}{\alpha} \right)^\beta \right] \left(\frac{\exp(x)}{\alpha} \right)^\beta}{\left(v + \left(\frac{\exp(x)}{\alpha} \right)^\beta - 1 \right) \left[\ln(v) - \ln \left[v + \left(\frac{\exp(x)}{\alpha} \right)^\beta - 1 \right] \right]}.$$

Αποδεικνύεται ότι $y' > 0$, δηλαδή η y είναι αύξουσα συνάρτηση του x . Θέτοντας όπου

$z = \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta$ και εξισώνοντας τη δεύτερη παράγωγο με το μηδέν, προκύπτει ότι

$$e^z - v \exp\left[\frac{ze^z}{e^z - z(1-v) - (1-v)}\right] + (v-1) = 0. \quad (4.22)$$

Αν X μια ρίζα της εξίσωσης (4.22) διάφορη του μηδενός, τότε το

$$X_L = \frac{\ln X}{\beta} + \ln \alpha$$

θα είναι η x -συντεταγμένη του σημείου καμπής της C . Από τη συνάρτηση (4.18), προκύπτει ότι η y -συντεταγμένη είναι ίση με

$$Y_L = \ln[-\ln(v) + \ln[\exp X - (1-v)]].$$

Αν $Y_L = 0$, τότε

$$\exp X = (e-1)v + 1 \Leftrightarrow X = \ln[v(e-1) + 1].$$

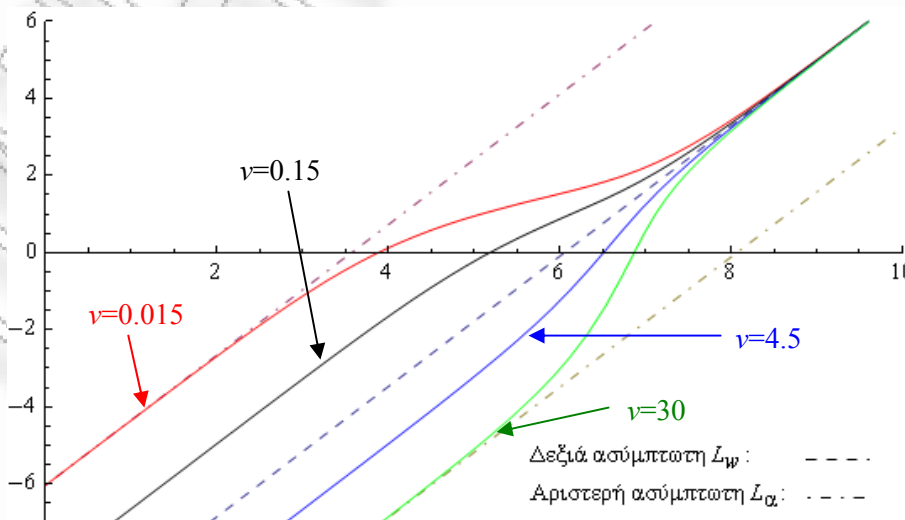
Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στη συνάρτηση (4.18) προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$\ln[v(e-1) + 1] = \frac{ev}{[2 + v(e-2)]}.$$

Λύνοντας την τελευταία σχέση βρίσκουμε ότι $v = 11.9391$.

Παρακάτω δίνεται το WPP γράφημα για την εκτεταμένη κατανομή Weibull, για διάφορες τιμές της παραμέτρου v , κρατώντας τις παραμέτρους α και β σταθερές ($\alpha = 425.53$, $\beta = 1.69$).

Σχήμα 4.16



Γενικά για το WPP γράφημα της εκτεταμένης κατανομής Weibull ισχύει ότι:

- $X_0 > 0, Y_0 < 0$ ή $X_0 < 0, Y_0 > 0$, όπου X_0, Y_0 είναι οι (x, y) συντεταγμένες του μοντέλου.
- Το γράφημα της C έχει μορφή "S". Υπάρχει ένα σημείο καμπής, $I(X_L, Y_L)$. Όταν $v < 11.9391, Y_L > 0$, το σημείο καμπής βρίσκεται πάνω από τον $x'x$ άξονα, ενώ βρίσκεται κάτω από αυτόν όταν $v > 11.9391$.
- Οι δυο ασύμπτωτες είναι παράλληλες. Όταν $v > 1$, η L_w είναι πάνω από την L_α . Όταν $v < 1$, η L_w είναι κάτω από την L_α .
- Το γράφημα της C είναι κοίλο για $v > 1$ και κυρτό για $v < 1$.

Για να ελέγξουμε αν το μοντέλο της εκτεταμένης κατανομής Weibull, προσαρμόζεται στα δεδομένα μας, αρκεί να κατασκευάσουμε το WPP γράφημα (Παράγραφος 2.2.2). Αν το γράφημα αυτό έχει μορφή παρόμοια με αυτή που φαίνεται στο Σχήμα 4.16, δηλαδή είναι κοίλο, ή κυρτό, ή έχει μορφή "S" και πλησιάζει σε ευθεία γραμμή καθώς το x μικραίνει, τότε, αποδεχόμαστε (ή καλύτερα δεν μπορούμε να απορρίψουμε) ότι τα δεδομένα μας προσαρμόζονται στο μοντέλο της εκτεταμένης κατανομής Weibull. Μια άλλη χαρακτηριστική ιδιότητα του γραφήματος είναι ότι το γράφημα παρουσιάζει ένα σημείο καμπής και το σημείο αυτό βρίσκεται κοντά στον άξονα $x'x$.

Στατιστική συμπερασματολογία

A. Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας της σχέσης (4.15) θα είναι ίση με

$$L(\alpha, \beta, v) = \frac{\left(\frac{v\beta}{\alpha^\beta}\right)^n \left(\prod_{i=1}^n t_i\right)^{\beta-1} \exp\left[-\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right]}{\left\{\prod_{i=1}^n \left[1 - (1-v) \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right\}\right]\right\}^2}$$

και αντίστοιχο πιθανολογάρημο

$$l(\alpha, \beta, v) = n \ln v + n \ln \beta - n \beta \ln \alpha + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta - 2 \sum_{i=1}^n \ln \left[1 - (1-v) \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right\}\right].$$

Για την εύρεση των εκτιμητριών μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων α , β και ν θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta, \nu)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial l(\alpha, \beta, \nu)}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial l(\alpha, \beta, \nu)}{\partial \nu} = 0.$$

Έτσι έχουμε

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta, \nu)}{\partial \nu} = \frac{n}{\nu} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\exp\left[\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right] - (1-\nu)} = 0$$

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta, \nu)}{\partial \alpha} = -\frac{\beta n}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha^{\beta+1}} \sum_{i=1}^n t_i^\beta + 2 \frac{\beta}{\alpha^{\beta+1}} \sum_{i=1}^n \frac{(1-\nu)t_i^\beta}{\exp\left[\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right] - 1 + \nu} = 0$$

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta, \nu)}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - n \ln \beta + \sum_{i=1}^n \ln t_i - \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n \left\{ t_i^\beta \ln\left(\frac{t_i}{\alpha}\right) \right\} - 2 \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n \frac{(1-\nu)t_i^\beta \ln\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)}{\exp\left[\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right] - 1 + \nu} = 0$$

Οι εκτιμήσεις των τριών παραμέτρων (α, β, ν) μπορούν να υπολογιστούν λύνοντας το παραπάνω σύστημα. Δεν υπάρχει τρόπος για τον υπολογισμό των λύσεων σε κλειστή μορφή, οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αριθμητικές μεθόδους για την εύρεσή τους (μέθοδος Newton-Raphson).

B. Γραφική μέθοδος

Αφού κατασκευάσουμε το WPP γράφημα και αποφανθούμε ότι τα δεδομένα μας προσαρμόζονται στο μοντέλο της εκτεταμένης κατανομής Weibull, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Προσαρμόζουμε στην αριστερή μεριά του γραφήματος την ευθεία L_α . Η κλίση της ευθείας L_α θα μας δώσει την εκτίμηση $\hat{\beta}$ της παραμέτρου β .
2. Βρίσκουμε τα σημεία X_0 και X_x από το γράφημα, σημεία που τέμνουν οι ευθείες C και L_α τον άξονα $x'x$ αντίστοιχα. Έπειτα, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.20) και (4.21), υπολογίζουμε τις εκτιμήσεις $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$, των παραμέτρων α και β .

3. Βρίσκουμε από το γράφημα την y συντεταγμένη, Y_0 , του σημείου τομής της ευθείας C και του άξονα $y'y$ καθώς επίσης υπολογίζουμε τη συντεταγμένη Y_0 χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.18) αντικαθιστώντας στη θέση των (α, β, ν) τις εκτιμήσεις τους από τα βήματα 1 και 2 όταν $y = 0$. Εξετάζουμε αν η τιμή που παρατηρήσαμε από το γράφημα συμπίπτει με αυτή που υπολογίσαμε μέσω της σχέσης (4.18). Αν δεν συμπίπτει, προσαρμόζουμε εκ νέου της ευθεία L_α και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 και 2.
4. Αν είναι αδύνατο να ικανοποιήσουμε τους περιορισμούς του 3^{ου} βήματος, τότε πρέπει να απορρίψουμε το μοντέλο της εκτεταμένης κατανομής Weibull και να δοκιμάσουμε διαφορετικό μοντέλο.

4.5 Μοντέλο $\Pi(\beta)$ -2: Εκθετική κατανομή Weibull (*Exponentiated Weibull Distribution*)

Οι Mudholkar and Srivastava (1993) πρότειναν μια τροποποίηση του κλασικού μοντέλου Weibull, εισάγοντας μια επιπρόσθετη παράμετρο σχήματος ν , όπου $0 < \nu < \infty$. Η **συνάρτηση κατανομής** του μοντέλου που προέκυψε είναι η εξής

$$G(t) = [F(t)]^\nu = \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right) \right]^\nu, \quad t \geq 0, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \nu > 0 \quad (4.23)$$

όπου $F(t)$ η συνάρτηση κατανομής της κλασικής κατανομής Weibull (2.1). Το στήριγμα της κατανομής G είναι $[0, \infty)$.

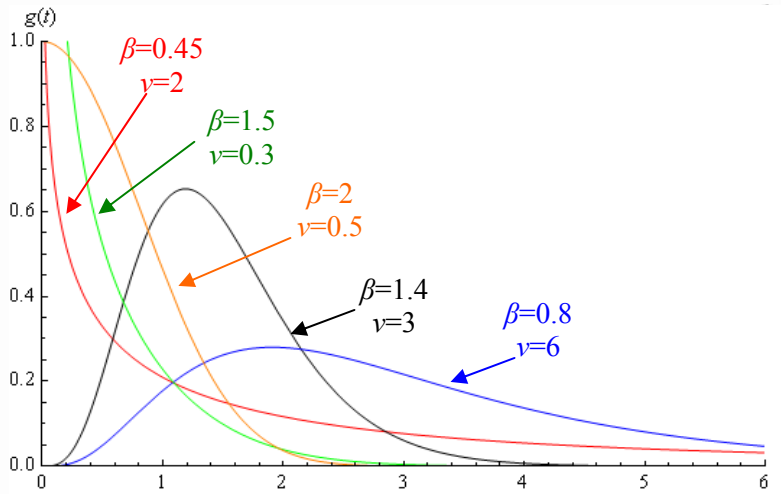
Η **συνάρτηση πυκνότητας** της εκθετικής κατανομής Weibull βρίσκεται από τον τύπο

$$g(t) = \nu [F(t)]^{\nu-1} f(t) = \frac{\beta\nu}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right) \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right) \right]^{\nu-1} \quad (4.24)$$

όπου $F(t)$ και $f(t)$ είναι η συνάρτηση κατανομής και συνάρτησης πυκνότητας της κλασικής κατανομής Weibull αντίστοιχα τύποι (2.1) και (2.3).

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας (4.24) για διάφορες τιμές των παραμέτρων β και ν , κρατώντας την τιμή της παραμέτρου α σταθερή ($\alpha = 1$).

Σχήμα 4.17



Η συνάρτηση αξιοπιστίας της εκθετικής κατανομής Weibull είναι ίση με

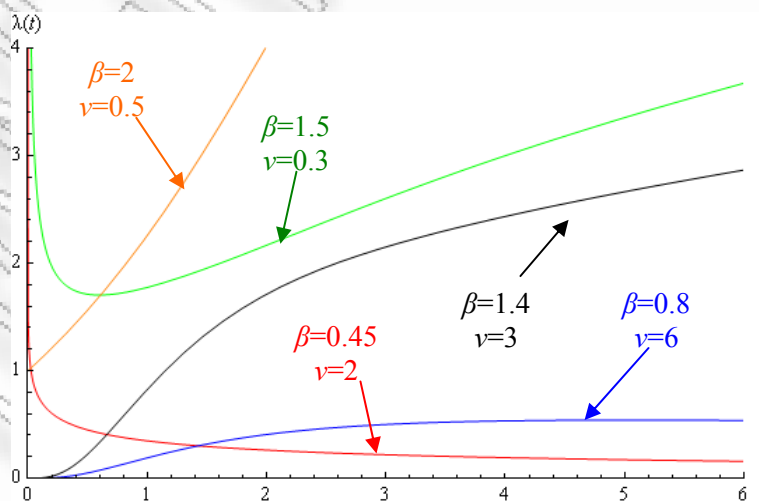
$$R(t) = 1 - \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right) \right]^\nu, \quad (4.25)$$

ενώ τέλος, η βαθμίδα αποτυχίας της εκθετικής κατανομής Weibull βρίσκεται από τον τύπο

$$\lambda(t) = \nu \frac{[F(t)]^\nu - [F(t)]^{\nu+1}}{F(t) - [F(t)]^{\nu+1}} \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \right] = \frac{\beta \nu \left(1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]\right)^{\nu-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right) \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1}}{\alpha \left[1 - \left(1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]\right)^\nu\right]}. \quad (4.26)$$

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας (4.26) για διάφορες τιμές των παραμέτρων β και ν , κρατώντας την τιμή της παραμέτρου α σταθερή ($\alpha = 1$).

Σχήμα 4.18



Η βαθμίδα αποτυχίας της εκθετικής κατανομής Weibull μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\lambda(t) = \nu \left[\frac{[F(t)]^\nu - [F(t)]^{\nu+1}}{F(t) - [F(t)]^{\nu+1}} \right] \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1} \right] = \nu \cdot h(t) \cdot \lambda_w(t) \quad (4.27)$$

όπου

$$h(t) = \left[\frac{[F(t)]^\nu - [F(t)]^{\nu+1}}{F(t) - [F(t)]^{\nu+1}} \right] \quad (4.28)$$

και

$$\lambda_w(t) = \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1} = \frac{\beta t^{\beta-1}}{\alpha^\beta},$$

η βαθμίδα αποτυχία της κλασικής κατανομής Weibull.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Το t είναι μικρό: Για μικρό t η έκφραση (4.28) μπορεί να προσεγγιστεί από τη σχέση

$$h(t) \cong [F(t)]^{\nu-1}.$$

Επίσης για μικρό t βρίσκουμε ότι

$$F(t) \cong \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta.$$

Έτσι τελικά έχουμε ότι

$$\lambda(t) \cong \frac{\beta \nu}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta \nu - 1}.$$

Δηλαδή για μικρό t , η βαθμίδα αποτυχίας της εκθετικής κατανομής Weibull μπορεί να προσεγγισθεί από τη βαθμίδα αποτυχίας της κλασικής κατανομής Weibull με παράμετρο σχήματος $(\beta \nu)$ και παράμετρο κλίμακας α .

2. Το t είναι μεγάλο: Για ευκολία μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $t \rightarrow \infty$. Επομένως, $F(t) \rightarrow 1$. Για τη σχέση (4.22) έχουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{[F(t)]^\nu - [F(t)]^{\nu+1}}{F(t) - [F(t)]^{\nu+1}} \right] \stackrel{(0)}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F'(t) \left(\nu [F(t)]^{\nu-1} - (\nu+1) [F(t)]^\nu \right)}{F'(t) \left(1 - (\nu+1) [F(t)]^\nu \right)} \rightarrow \frac{1}{\nu}.$$

Έτσι, τελικά έχουμε ότι

$$\lambda(t) \cong \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1}.$$

Δηλαδή για μεγάλο t , η βαθμίδα αποτυχίας της εκθετικής κατανομής Weibull μπορεί να προσεγγισθεί από τη βαθμίδα αποτυχίας της κλασικής κατανομής Weibull με παράμετρο σχήματος β και παράμετρο κλίμακας α .

Οι Mudholkar et al. (1995) και Jiang and Murthy (1999) απέδειξαν ότι οι πιθανές μορφές της βαθμίδας αποτυχίας είναι οι ακόλουθες:

- Για $\beta \leq 1$ και $\beta\nu \leq 1$ η βαθμίδα αποτυχίας είναι φθίνουσα *DFR*.
- Για $\beta \geq 1$ και $\beta\nu \geq 1$ η βαθμίδα αποτυχίας είναι αύξουσα *IFR*.
- Για $\beta < 1$ και $\beta\nu > 1$ η βαθμίδα αποτυχίας είναι μονοκόρυφη, δηλαδή παρουσιάζει τη μορφή RBC (*reverse bathtub curve*).
- Για $\beta > 1$ και $\beta\nu < 1$ παρουσιάζει τη μορφή BC.
- Για $\beta = \nu = 1$ η βαθμίδα αποτυχίας γίνεται σταθερή και είναι ίση με $c = \frac{1}{\alpha}$.

Οι μονοτονίες είναι αυστηρές εκτός από την περίπτωση της αρνητικής εκθετικής κατανομής που αντιστοιχεί για $\beta = \nu = 1$. Οι τεχνικές λεπτομέρειες για την απόδειξη των μονοτονιών προϋποθέτουν ανάλυση της παραγώγου $r'(z)$ του μετασχηματισμού

$$r(z) = \lambda \left(\alpha (\ln z)^{1/\beta} \right) \text{ της βαθμίδας αποτυχίας } \lambda(t), \text{ όπου } z = z(t) = \exp \left(\left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right).$$

Μέτρα θέσης και διασποράς

Η κ-τάξης ροπή γύρω από το μηδέν της εκθετικής κατανομής Weibull βρίσκεται από τον τύπο

$$\mu'_k = E(T^k) = \int_0^\infty \frac{\beta\nu}{\alpha^\beta} t^{k+\beta-1} \exp \left(-\left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right) \left[1 - \exp \left(-\left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right) \right]^{\nu-1} dt. \quad (4.29)$$

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα

$$(1+x)^q = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{q}{j} x^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-j+1)} \frac{x^j}{j!},$$

στον τελευταίο όρο της σχέσης (4.29) έχουμε ότι

$$E(T^k) = \frac{\beta\nu}{\alpha^\beta} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-j)} \frac{(-1)^j}{j!} \int_0^\infty t^{k+\beta-1} \exp \left[-(j+1) \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right] dt \quad (4.30)$$

Αντικαθιστώντας με $y = (j+1) \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta$, η σχέση (4.30) μετατρέπεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\begin{aligned}
 \mu'_k = E(T^k) &= \alpha^k \nu \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}\right) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\nu-1}{j} \frac{1}{(j+i)^{1+\frac{k}{\beta}}} = \\
 &= \alpha^k \nu \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(\nu)}{j! \Gamma(\nu-j) (j+1)^{1+\frac{k}{\beta}}} \stackrel{(1-\nu)_j = \frac{(-1)^j \Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-1)}}{=} \\
 &= \alpha^k \nu \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-\nu)_j}{j! (j+1)^{1+\frac{k}{\beta}}}. \tag{4.31}
 \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $k > -\beta$ και $\nu > 0$.

Αν $\nu \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}$ τότε από τη σχέση (4.31) προκύπτει

$$\mu'_k = \alpha^k \nu \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}\right) \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(1-\nu)_j}{j! (j+1)^{1+\frac{k}{\beta}}},$$

γιατί $(1-\nu)_j = 0$, για κάθε $j \geq \nu$.

Αν $\frac{k}{\beta} = m$ είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε οι ροπές μπορούν να εκφραστούν μέσω της συνάρτησης Βήτα $B(s, \nu)$ και δίνονται από τη σχέση

$$\mu'_k = \alpha^k \nu (-1)^m \left[\frac{d^m}{ds^m} B(s, \nu) \right]_{s=1}.$$

Ο Choudhury (2005) απέδειξε ότι η ροπογεννήτρια συνάρτηση της εκθετικής κατανομής Weibull είναι ίση με

$$\begin{aligned}
 M_T(s) = E(e^{sT}) &= \int_0^{\infty} e^{st} \frac{\beta \nu}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right) \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right)\right]^{\nu-1} dt \stackrel{u=e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}}{=} \\
 &= \nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(s\alpha)^r (-\ln u)^{\frac{r}{\beta}}}{r!} \int_0^1 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} p_i u^i\right) (\ln u)^{\frac{r}{\beta}} du,
 \end{aligned}$$

όπου

$$p_i = \frac{(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-1-i)}{i!} (-1)^i, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Τελικά καταλήγουμε στον τύπο

$$M_T(s) = v \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(s\alpha)^r \Gamma\left(\frac{r}{\beta} + 1\right)}{r!} \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} p_i \left\{ (i+1)^{\frac{r}{\beta+1}} \right\} \right].$$

Η ροπή κ-τάξης γύρω από το μηδέν της εκθετικής κατανομής Weibull σύμφωνα με την εργασία του Choudhury (2005) βρίσκεται από τον τύπο

$$\mu'_k = \frac{d^k}{d_s^k} M_T(s) \Big|_{s=0} = v\alpha^k \Gamma\left(\frac{k}{\beta} + 1\right) \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} p_i \left\{ (i+1)^{\frac{k}{\beta+1}} \right\} \right], \quad k=1,2,3,\dots$$

Ο παραπάνω τύπος ισχύει για κάθε $v > 0$ σε αντίθεση με τον τύπο (4.31) που ισχύει μόνο για θετικούς ακεραίους.

Διάμεσος, Κορυφή, Ποσοστιαία σημεία

Το p -ποσοστημόριο υπολογίζεται από τη σχέση

$$Q(p) = P(T \leq t_p) = G(t_p) = p \Leftrightarrow \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{t_p}{\alpha}\right)^\beta\right) \right]^v = p \Leftrightarrow t_p = \alpha \left[-\ln\left(1 - p^{\frac{1}{v}}\right) \right]^{\frac{1}{\beta}} \quad (4.32)$$

Αντικαθιστώντας με $p = \frac{1}{2}$ στη σχέση (4.32), δίνεται η διάμεσος της εκθετικής κατανομής

Weibull

$$t_{\text{median}} = \alpha \left[-\ln\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{v}}\right) \right]^{\frac{1}{\beta}}.$$

Για να βρούμε την κορυφή της εκθετικής κατανομής Weibull εργαζόμαστε ως εξής:

Παραγωγίζοντας τη σχέση (4.24) ως προς t έχουμε ότι

$$g'(t) = \left[(\beta-1)t^{-1} - \beta\alpha^{-\beta}t^{\beta-1} + \beta(v-1)\alpha^{-\beta}t^{\beta-1} \left(\exp\left\{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right\} - 1 \right)^{-1} \right] \cdot g(t). \quad (4.33)$$

Εξισώνουμε τη σχέση (4.33) με το μηδέν και εφόσον η $g(t)$ είναι πάντα θετική για κάθε $t > 0$, έχουμε ότι

$$(\beta-1)t^{-1} - \beta\alpha^{-\beta}t^{\beta-1} + \beta(v-1)\alpha^{-\beta}t^{\beta-1} \left(\exp\left\{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right\} - 1 \right)^{-1} = 0 \quad (4.34)$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. $\nu = 1$: Έχουμε την κλασική κατανομή Weibull, όπου η συνάρτηση πυκνότητάς της είναι φθίνουσα για $\beta \leq 1$ και μονοκόρυφη για $\beta > 1$ με την κορυφή να δίνεται από τη σχέση

$$t_{\text{mode}} = \alpha \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^{1/\beta}.$$

2. $\beta = 1$: Για $\nu > 1$ έχουμε ότι $\beta\nu > 1$ και σύμφωνα με τη σχέση (4.34) δίνεται ότι

$$(\nu - 1) \left(\exp\left(\frac{t}{\alpha}\right) - 1 \right)^{-1} = 1 \Rightarrow t = \alpha \ln(\nu),$$

η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί και ως

$$t = 2\alpha \left[\frac{\nu-1}{\nu+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{\nu-1}{\nu+1}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{\nu-1}{\nu+1}\right)^5 + \dots \right] \text{ για κάθε } \nu > 0.$$

Αφαιρώντας τους όρους οι οποίοι έχουν δύναμη μεγαλύτερη της μονάδας στην παραπάνω σχέση, μπορούμε να έχουμε μια προσέγγιση της κορυφής που δίνεται από τη σχέση

$$t_{\text{mode}} \cong 2\alpha \frac{\nu-1}{\nu+1}.$$

Χρησιμοποιήσαμε την παρακάτω σειρά

$$\ln(z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{2n+1} \text{ για κάθε } z > 0.$$

Για $\nu \leq 1$ δηλαδή $\beta\nu \leq 1$ η συνάρτηση πυκνότητας της εκθετικής κατανομής Weibull είναι φθίνουσα.

3. $\beta < 1, \nu < 1$: Η συνάρτηση πυκνότητας της εκθετικής κατανομής Weibull είναι φθίνουσα, οπότε δεν έχει κορυφή.

4. για $0 < \beta < 1, \nu > 1$ ή $\beta > 1, 0 < \nu < 1$ τέτοια ώστε $\beta\nu > 1$: Η συνάρτηση πυκνότητας της εκθετικής κατανομής Weibull είναι μονοκόρυφη.

Οι Nassar and Eissa (2003) πρότειναν τον παρακάτω τρόπο για τον υπολογισμό της κορυφής.

Από τη σχέση (4.34) έχουμε ότι

$$\beta - 1 - \beta\alpha^{-\beta}t^{\beta} + \beta(\nu-1) \frac{\alpha^{-\beta}t^{\beta}}{\exp\left\{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}\right\} - 1} = 0.$$

Ισχύει ότι

$$\frac{z}{\exp(z)-1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}, \quad z < 2\pi$$

όπου B_n οι αριθμοί Bernoulli, με $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}$, ... Έτσι, θέτοντας

$z = \alpha^{-\beta} t^\beta$ όταν $\beta < 1$, έχουμε την παρακάτω προσέγγιση

$$\beta - 1 - \beta \alpha^{-\beta} t^\beta + \beta(\nu - 1) \left(1 - \frac{\alpha^{-\beta} t^\beta}{2} \right) = 0 \Rightarrow t_{\text{mode}} = \alpha \left(\frac{2(\beta\nu - 1)}{\beta(\nu + 1)} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad \beta\nu > 1 \quad (4.35)$$

Οι Mudholkar και Hutson (1996) πρότειναν την παρακάτω σχέση για τον υπολογισμό της κορυφής

$$t_{\text{mode}} = \alpha \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\beta(\beta - 8\nu + 2\beta\nu + 9\beta\nu^2)}}{\beta\nu} - 1 - \frac{1}{\nu} \right) \right]^\nu \quad (4.36)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (4.27) $\nu = 1$, προκύπτει η συνάρτηση πυκνότητας της κλασικής κατανομής Weibull. Από αυτή την παρατήρηση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας της εκθετικής κατανομής Weibull θα είναι φθίνουσα όταν $\beta\nu \leq 1$, ενώ, όπως αποδείχθηκε παραπάνω, όταν $\beta\nu > 1$ θα είναι μονοκόρυφη με την κορυφή να δίνεται από τις σχέσεις (4.35) ή (4.36).

5. $\beta > 1, \nu > 1$: Η συνάρτηση πυκνότητας της εκθετικής κατανομής Weibull είναι μονοκόρυφη.

Τελικά από τις πέντε περιπτώσεις συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας της εκθετικής κατανομής Weibull θα είναι:

- φθίνουσα όταν $\beta\nu \leq 1$ και
- μονοκόρυφη όταν $\beta\nu > 1$.

Επίσης ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\beta\nu}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right) \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right) \right]^{\nu-1} = \\ &= \frac{\beta\nu}{\alpha^\beta} \lim_{t \rightarrow 0^+} \exp\left(-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right) \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\beta-1} \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right) \right]^{\nu-1} \end{aligned}$$

Καθώς $t \rightarrow 0^+$, έπεται ότι η ποσότητα $1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right)$ μπορεί να προσεγγισθεί από την ποσότητα $(t/\alpha)^\beta$. Άρα ισχύει ότι

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \frac{\beta\nu}{\alpha^\beta} \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\beta-1} \left[\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta \right]^{\nu-1} = \frac{\beta\nu}{\alpha^{\beta\nu}} \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\beta\nu-1} \Rightarrow$$

$$g(0) = \begin{cases} \infty & \text{όταν } \beta\nu < 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \text{όταν } \beta\nu = 1 \\ 0 & \text{όταν } \beta\nu > 1. \end{cases}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η επιρροή που έχει το γινόμενο των παραμέτρων σχήματος, $\beta\nu$ στη μορφή της συνάρτησης πυκνότητας της εκθετικής κατανομής Weibull, είναι παρόμοια με εκείνη της παραμέτρου σχήματος στην κλασική κατανομή Weibull.

Οι Mudholkar και Hutson (1996) ταξινομήσαν τη συνάρτηση πυκνότητας της εκθετικής κατανομής Weibull σε τρεις κατηγορίες βασιζόμενοι στις μορφές και στις ουρές των συναρτήσεων πυκνότητας των κατανομών για τις ακραίες τιμές. Η ταξινόμησή τους είναι η εξής:

- **Κατηγορία I** ($\beta\nu < 1$) Φθίνουσες πυκνότητες, που καταλήγουν σε μη φραγμένες αριστερές ουρές και έχουν μέτριες δεξιές ουρές.
- **Κατηγορία II** ($\beta\nu = 1$) Φθίνουσες πυκνότητες όπου οι αριστερές ουρές έχουν τεταγμένη ίση με 1 και μέτριες ουρές.
- **Κατηγορία III** ($\beta\nu > 1$) Μονοκόρυφες πυκνότητες με ελαφρές ουρές και μέτριες δεξιές ουρές.

Επίσης οι προαναφερθείσες τρεις κατηγορίες υποκατηγοριοποιούνται όπως:

- **Υποκατηγορία α** ($\beta > 1$) Δεξιά ουρά κατηγοριοποιημένη ως μέτρια ελαφριά.
- **Υποκατηγορία β** ($\beta = 1$) Δεξιά ουρά κατηγοριοποιημένη ως μέτρια μέτρια.
- **Υποκατηγορία γ** ($\beta < 1$) Δεξιά ουρά κατηγοριοποιημένη ως μέτρια βαριά.

WPP γράφημα

Σύμφωνα με το μετασχηματισμό (2.16) η σχέση (4.23) γράφεται στη μορφή

$$y = \ln \left[-\ln \left[1 - \left(1 - \exp \left\{ - \left(\frac{\exp(x)}{\alpha} \right)^\beta \right\} \right)^v \right] \right] \text{ και } x = \ln(t).$$

Το γράφημα των y και x ορίζει το WPP γράφημα για την εκθετική κατανομή Weibull.

Οι Jiang και Murthy (1999) μελέτησαν το WPP γράφημα και απέδειξαν ότι:

- Η y' είναι μονότονη για όλες τις τιμές των παραμέτρων. Συνεπάγεται ότι η y είναι μονότονη συνάρτηση του x . Επίσης το πρόσημο της y'' εξαρτάται μόνο από την παράμετρο v , συγκεκριμένα είναι
 - Θετικό όταν $v < 1$,
 - 0, όταν $v = 1$,
 - αρνητικό, όταν $v > 1$.

Δηλαδή το WPP γράφημα είναι κοίλο για $v > 1$ και κυρτό για $v < 1$.

- Δεξιά ασύμπτωτη: Καθώς $x \rightarrow \infty$ (ή $t \rightarrow \infty$), τότε για την αξιοπιστία της κλασικής κατανομής Weibull ισχύει ότι $R_W(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, τότε για τη σχέση (4.25) θα έχουμε ότι

$$R(t) = 1 - [1 - R_W(t)]^v \cong 1 - [1 - v \cdot R_W(t)] = v \cdot R_W(t).$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στη σχέση (2.16) προκύπτει ότι

$$y = \ln \left[-\ln \left[\underbrace{1 - (1 - F_W(t))^v}_{v \cdot R_W(t)} \right] \right] = \ln \left[-\ln (v \cdot R_W(t)) \right] = \ln \left[-\ln v - \ln R_W(t) \right].$$

Όμως

$$\ln [R_W(t)] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty \Rightarrow |\ln v| \ll |\ln [R_W(t)]| \text{ καθώς } x \rightarrow \infty,$$

δηλαδή,

$$y \cong \beta(x - \ln \alpha) \text{ καθώς } x \rightarrow \infty,$$

η οποία είναι η δεξιά ασύμπτωτη της y και συμβολίζεται με L_w .

- Αριστερή ασύμπτωτη: Καθώς $x \rightarrow -\infty$ (ή $t \rightarrow 0$) δίνεται ότι

$$F_W(t) \cong \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση στην (2.16) προκύπτει ότι

$$\ln \left[1 - \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta\nu} \right] \cong - \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta\nu} \text{ καθώς } t \rightarrow 0.$$

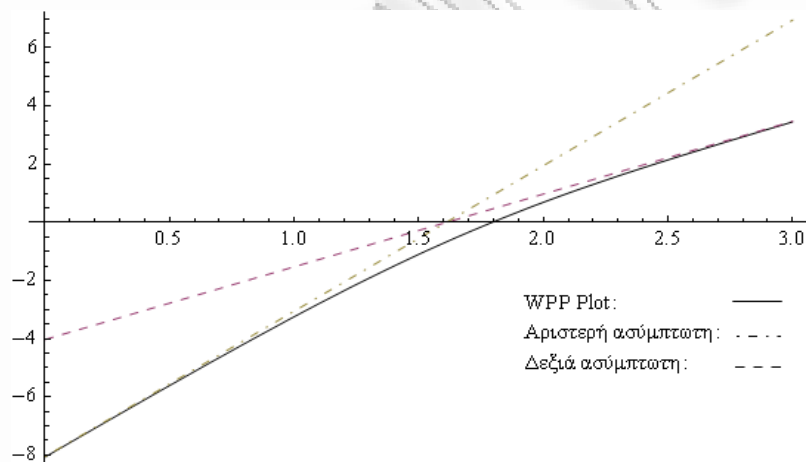
Δηλαδή,

$$y \cong \beta\nu(x - \ln \alpha) \text{ καθώς } x \rightarrow -\infty,$$

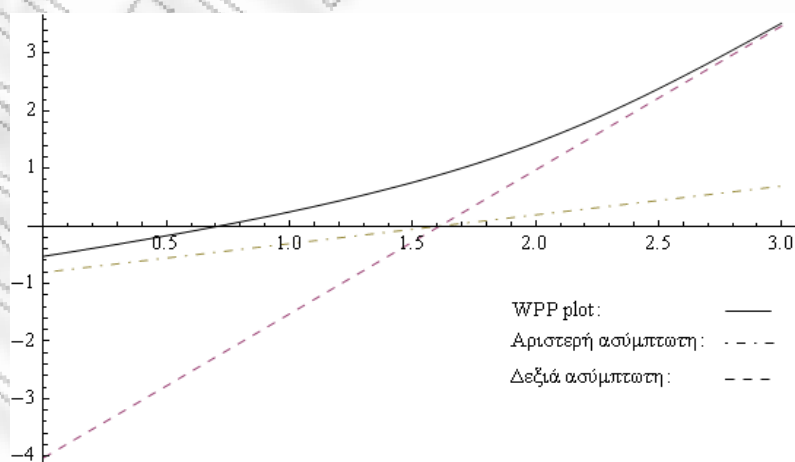
η οποία είναι η αριστερή ασύμπτωτη της y και συμβολίζεται με L_α .

Η δεξιά και αριστερή ασύμπτωτη τέμνουν τον άξονα x' στο σημείο $\ln(\alpha)$, αλλά οι κλίσεις τους είναι διαφορετικές εκτός αν $\nu=1$, όπου ταυτίζονται σε μια ευθεία γραμμή, η οποία παριστά το WPP γράφημα για την κλασική κατανομή Weibull. Παρακάτω δίνονται WPP γραφήματα Σχήμα 4.17 (για $\nu > 1$) και Σχήμα 4.18 (για $\nu < 1$).

Σχήμα 4.19 ($\alpha = 5, \beta = 2.5, \nu = 2$)



Σχήμα 4.20 ($\alpha = 5, \beta = 2.5, \nu = 0.2$)



Αν κατασκευάσουμε το WPP γράφημα, Παράγραφος 2.5.A, ενός συνόλου δεδομένων και παρουσιάσουν μορφή παρόμοια με τα Σχήματα 4.17 ή 4.18, τότε τα δεδομένα μας μπορούν να ερμηνευθούν με τη χρήση του μοντέλου της εκθετικής κατανομής Weibull. Αν όχι, τότε το μοντέλο της εκθετικής κατανομής Weibull δεν είναι κατάλληλο.

Στατιστική συμπερασματολογία

A. Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκθετικής κατανομής Weibull δίνεται από τον τύπο (4.24)

$$g(t) = \frac{\beta v}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right) \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right)\right]^{v-1}$$

η συνάρτηση πιθανοφάνειας θα είναι ίση με

$$L(\alpha, \beta, v) = \frac{\beta^n v^n}{\alpha^{n\beta}} \cdot \left(\prod_{i=1}^n t_i\right)^{\beta-1} \exp\left[-\frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n t_i^\beta\right] \cdot \prod_{i=1}^n \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right)\right]^{v-1}$$

και αντίστοιχο πιθανολογάρithμο

$$l(\alpha, \beta, v) = n \ln \beta + n \ln v - n \beta \ln \alpha + (\beta-1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i) - \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n t_i^\beta + (v-1) \sum_{i=1}^n \ln\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right)\right).$$

Για την εύρεση των εκτιμητριών μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων α , β και v θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta, v)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial l(\alpha, \beta, v)}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial l(\alpha, \beta, v)}{\partial v} = 0.$$

Έτσι έχουμε ότι

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta, v)}{\partial v} = \frac{n}{v} + \sum_{i=1}^n \ln\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right)\right) = 0 \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta, v)}{\partial \alpha} = -\frac{\beta n}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha^{\beta+1}} \sum_{i=1}^n t_i^\beta - (v-1) \sum_{i=1}^n \frac{\beta \exp\left(-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right) \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{\beta-1} \cdot t_i}{\alpha^2 \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right)\right)} = 0 \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\alpha, \beta, \nu)}{\partial \beta} = & \frac{n}{\beta} - n \ln \alpha + \sum_{i=1}^n \ln(t_i) + \frac{\ln \alpha}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n t_i^\beta - \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n \{t_i^\beta \cdot \ln(t_i)\} + \\ & + (\nu - 1) \sum_{i=1}^n \frac{\exp\left(-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right) \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)}{1 - \exp\left(-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right)} = 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Από τη σχέση (4.37) υπολογίζεται η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου ν ως συνάρτηση των (α, β) , ως εξής:

$$\hat{\nu} = \hat{\nu}(\alpha, \beta) = - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{T_i}{\alpha}\right)^\beta\right)\right)}. \quad (4.40)$$

Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (4.38) με $\frac{\alpha}{\beta}$ βρίσκουμε

$$-n + \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n t_i^\beta - (\nu - 1) \sum_{i=1}^n \frac{\exp\left(-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right) \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{\beta-1} \cdot t_i}{\alpha \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right)\right)} = 0. \quad (4.41)$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (4.41) με $\ln \alpha$ και την αφαιρούμε από τη σχέση (4.39), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln(t_i) - \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n \{t_i^\beta \cdot \ln(t_i)\} + (\nu - 1) \sum_{i=1}^n \frac{\exp\left(-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right) \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)}{1 - \exp\left(-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right)} + \\ + (\nu - 1) \ln(\alpha) \sum_{i=1}^n \frac{\exp\left(-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right) \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{\beta-1} \cdot t_i}{\alpha \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right)\right)} = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln(t_i) - \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n \{t_i^\beta \cdot \ln(t_i)\} + (v-1) \sum_{i=1}^n \frac{\exp\left(-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right) \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \ln t_i}{1 - \exp\left(-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right)} + \\ & + (v-1) \sum_{i=1}^n \frac{\exp\left(-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right) \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}{1 - \exp\left(-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right)} \left(\frac{\ln \alpha}{\alpha^2} - \ln \alpha\right) = 0. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.40), (4.41) και (4.42) θα καταλήξουμε σε ένα σύστημα τριων εξισώσεων, από όπου μπορούμε να υπολογίσουμε τις εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ και $\hat{\nu}$ των παραμέτρων α , β και ν αντίστοιχα. Λόγω των περίπλοκων μορφών αυτών των εξισώσεων, οι λύσεις μπορούν να υπολογισθούν με αριθμητικές μεθόδους, όπως η μέθοδος Newton-Raphson. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την εκτίμηση των παραμέτρων παραπέμπουμε στους Gurta et al. (1998) και Pal et al. (2006).

B. Γραφική μέθοδος

Αφού έχουμε επιλέξει ως κατάλληλο μοντέλο εκείνο της εκθετικής κατανομής Weibull, τότε οι παράμετροι του μοντέλου (α , β και ν) μπορούν να εκτιμηθούν ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1^ο: Η δεξιά ασύμπτωτη του WPP γραφήματος είναι η ευθεία L_w . Η κλίση της L_w θα μας δώσει την εκτίμηση της παραμέτρου β , $\hat{\beta}$, ενώ η τεταγμένη θα μας δώσει την εκτίμηση της παραμέτρου α , $\hat{\alpha}$.

Βήμα 2^ο: Η αριστερή ασύμπτωτη του WPP γραφήματος είναι η ευθεία L_α . Η κλίση της L_α θα μας δώσει την εκτίμηση του γινομένου $\beta\nu$. Κάνοντας χρήση του $\hat{\beta}$ από το 1^ο βήμα υπολογίζουμε την εκτίμηση της παραμέτρου ν , $\hat{\nu}$.

4.6 Μοντέλο Π(β)-3: Τροποποιημένη κατανομή Weibull (*Modified Weibull distribution*)

Οι Lai et al. (2003) πρότειναν μια τροποποίηση του κλασικού μοντέλου Weibull, εισάγοντας μια επιπρόσθετη παράμετρο ν , όπου $0 \leq \nu < \infty$. Η **συνάρτηση κατανομής** του μοντέλου που προέκυψε είναι η εξής

$$G(t) = 1 - \exp(-\lambda t^\beta e^{\nu t}), \quad t \geq 0, \quad \lambda > 0, \beta \geq 0 \text{ και } \nu \geq 0. \quad (4.43)$$

Η **συνάρτηση πυκνότητας** της τροποποιημένης κατανομής Weibull δίνεται από τον τύπο

$$g(t) = \lambda(\beta + \nu t)t^{\beta-1}e^{\nu t} \exp(-\lambda t^\beta e^{\nu t}), \quad (4.44)$$

η αντίστοιχη **συνάρτηση αξιοπιστίας** είναι ίση με

$$R(t) = \exp(-\lambda t^\beta e^{\nu t}),$$

ενώ τέλος, η **βαθμίδα αποτυχίας** βρίσκεται από τον τύπο

$$\lambda(t) = \lambda(\beta + \nu t)t^{\beta-1}e^{\nu t}. \quad (4.45)$$

Η μορφή της βαθμίδας αποτυχίας εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου β και αυτό προκύπτει από τον παράγοντα $t^{\beta-1}$ που βρίσκεται στη σχέση (4.45). Έτσι, διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Για $\beta \geq 1$, από τον τύπο (4.45) παρατηρούμε ότι:
 1. η $\lambda(t)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του t , δηλαδή *IFR*.
 2. ισχύει ότι $\lambda(0) = 0$ για $\beta > 1$, ενώ $\lambda(0) = \lambda$ για $\beta = 1$.
 3. $\lambda(t) \rightarrow \infty$ καθώς $t \rightarrow \infty$.
- Για $0 < \beta < 1$ παρατηρούμε ότι:
 1. η $\lambda(t)$ αρχικά είναι φθίνουσα και στη συνέχεια αύξουσα συνάρτηση του t , δηλαδή προκύπτει η μορφή BC (*bathhtub curve*).
 2. $\lambda(t) \rightarrow \infty$ καθώς $t \rightarrow 0$ και $\lambda(t) \rightarrow \infty$ καθώς $t \rightarrow \infty$.
 3. η πρώτη παράγωγος της $\lambda(t)$

$$\lambda'(t) = \lambda e^{\nu t} t^{\beta-2} [\beta^2 + t^2 \nu^2 + \beta(2\nu t - 1)]$$

τέμνει τον άξονα $x'x$ μια φορά, στο σημείο t^* όταν $t > 0$. Η $\lambda(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του t όταν $t < t^*$ και αύξουσα όταν $t > t^*$. Το σημείο καμπής t^* δίνεται από τη σχέση

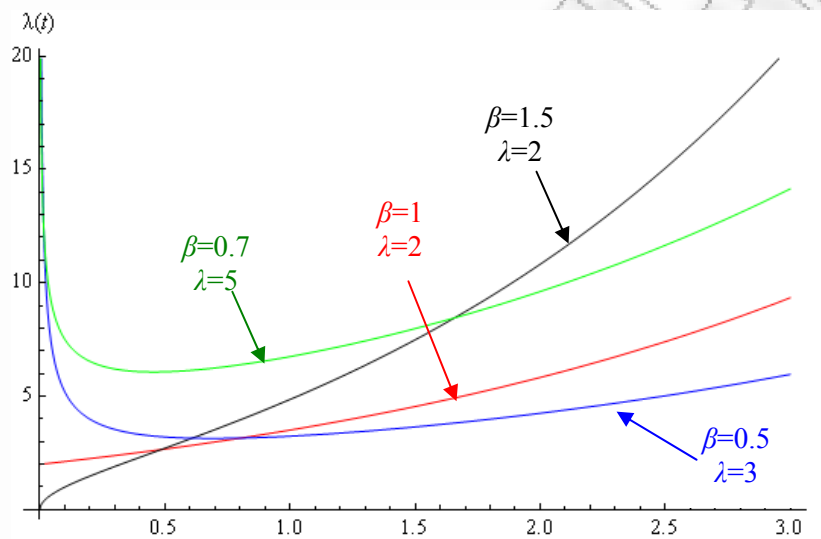
$$t^* = \frac{\sqrt{\beta} - \beta}{\nu}.$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι το t^* ελαττώνεται καθώς η παράμετρος ν αυξάνεται. Αυτό μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής. Η $\lambda(t)$ στο κλασικό μοντέλο Weibull μπορεί να είναι σταθερή, φθίνουσα ή αύξουσα. Η $\lambda(t)$ στο μοντέλο της τροποποιημένης

κατανομής Weibull διαφέρει από το κλασικό μοντέλο και αυτό οφείλεται στον επιπρόσθετο παράγοντα $\exp(vt)$, ο οποίος μπορεί να θεωρηθεί ως επιταχυντικός παράγοντας αυξάνοντας το t και την παράμετρο v . Με αποτέλεσμα, το t^* να ελαττώνεται καθώς η παράμετρος v αυξάνεται.

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας (4.45) για διάφορες τιμές της παραμέτρου λ και β , κρατώντας την τιμή της παραμέτρου v σταθερή ($v = 0.3$).

Σχήμα 4.21



Όπως παρατηρούμε από το Σχήμα 4.21 η βαθμίδα αποτυχίας της τροποποιημένης κατανομής Weibull μπορεί να πάρει τη μορφή BC.

Οι ροπές της τροποποιημένης κατανομής Weibull υπολογίζονται μέσω αριθμητικής ολοκλήρωσης.

Το p -ποσοστημόριο υπολογίζεται από τη σχέση

$$P(T \leq t_p) = G(t_p) = p \Leftrightarrow 1 - \exp\left(-\lambda t_p^\beta e^{vt_p}\right) = p \Leftrightarrow t_p = \left[-\frac{\ln(1-p)}{\lambda} \exp(-vt_p)\right]^{\frac{1}{\beta}}.$$

Σχέση του μοντέλου της τροποποιημένης κατανομής Weibull με άλλα μοντέλα

1. Όταν η παράμετρος $v = 0$, τότε το μοντέλο μετατρέπεται στο μοντέλο της κλασικής κατανομής Weibull (2.4).
2. Όταν η παράμετρος $\beta = 0$, τότε το μοντέλο μετατρέπεται στο μοντέλο της λογαριθμικής κατανομής Weibull (κατανομή ακραίων τιμών τύπου I) όπου έγινε αναφορά στην Παράγραφο 3.3.2.

3. Το μοντέλο Βήτα-ολοκλήρωσης που προτάθηκε από τους Lai et al. (1998), προσδιορισμένο υπό τη μορφή συνάρτησης θνησιμότητας $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(x)dx$, βρίσκεται από τον τύπο

$$\Lambda(t) = at^b(1-dt)^c, \quad 0 < t < \frac{1}{d}$$

και $a, b, d > 0$, και $c < 0$. Η συνάρτηση κατανομής του μοντέλου δίνεται από τον τύπο

$$G(t) = 1 - \exp[-\Lambda(t)].$$

Αν θέσουμε $d = \frac{1}{n}$, $b = \beta$ και $c = vn$. Καθώς το $n \rightarrow \infty$, προκύπτει ότι

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{vn} \rightarrow e^{vt}$$

με αποτέλεσμα

$$\Lambda(t) = \lambda t^\beta e^{vt}.$$

Η παραπάνω σχέση είναι η παράγωγος ως προς t της έκφρασης (4.45). Επομένως, το μοντέλο της τροποποιημένης κατανομής Weibull μπορεί να χαρακτηριστεί ως το όριο του μοντέλου Βήτα-ολοκλήρωσης.

WPP γράφημα

Σύμφωνα με το μετασχηματισμό Weibull (2.16) ο τύπος (4.43) γράφεται στη μορφή

$$y = \ln \lambda + \beta x + ve^x \quad \text{και} \quad x = \ln(t) \quad (4.46)$$

Το WPP γράφημα είναι κυρτό και οι δυο ασύμπτωτες δίνονται από:

- Αριστερή ασύμπτωτη: Καθώς $x \rightarrow -\infty$ (ή $t \rightarrow 0$) δίνεται από $y \cong \beta x + \ln \lambda$.
- Δεξιά ασύμπτωτη: Καθώς $x \rightarrow \infty$ (ή $t \rightarrow \infty$) δίνεται από $y \cong ve^x$.

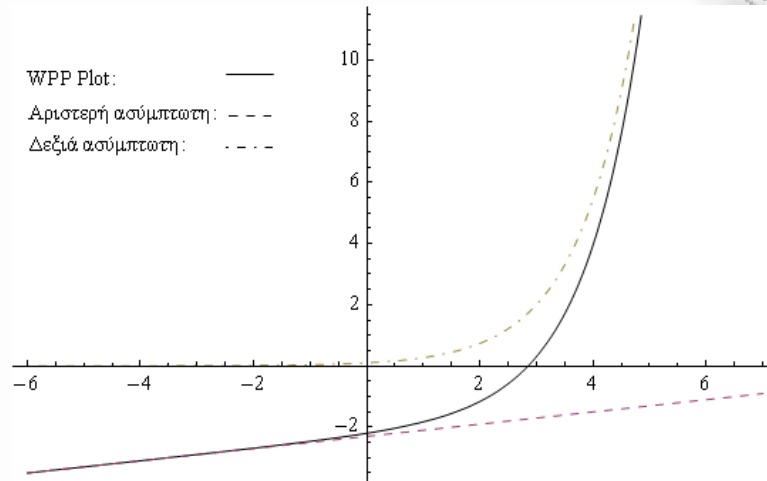
Έστω (x_0, y') και (x', y_0) τα σημεία του WPP γραφήματος, όπου αυτό τέμνει τον άξονα $x'x$ (αντιστοιχεί σε $y' = 0$) και $y'y$ (αντιστοιχεί σε $x' = 0$). Δηλαδή τα x_0 και y_0 αντιστοιχούν στην τετμημένη και τεταγμένη, των αντίστοιχων σημείων. Τότε προκύπτει ότι

$$\ln \lambda + \beta x_0 + ve^{x_0} = 0 \quad \text{και} \quad y_0 = \ln \lambda + v. \quad (4.47)$$

Διαπιστώνουμε ότι $x_0 < 0$ και $y_0 > 0$ είτε $x_0 > 0$ και $y_0 < 0$, επίσης ισχύει ότι $\beta|x_0| < |y_0|$.

Παρακάτω δίνεται το WPP γράφημα για την τροποποιημένη κατανομή Weibull, όπου οι τιμές των παραμέτρων είναι $\lambda = 0.1$, $\beta = 0.2$, $\nu = 0.1$.

Σχήμα 4.22



Εναλλακτικό γράφημα

Ένα εναλλακτικό γράφημα, είναι το εξής

$$y = \ln \left[-\ln(1 - F(t)) \right] \text{ και } x = t. \quad (4.48)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.43) και (4.48) προκύπτει ότι

$$y = \ln \lambda + \beta \ln x + \nu x.$$

Το νέο γράφημα είναι κοίλο και οι δυο ασύμπτωτες δίνονται από:

- Αριστερή ασύμπτωτη: Καθώς $x \rightarrow -\infty$ (ή $t \rightarrow 0$) δίνεται από $y \cong \beta \ln x$.
- Δεξιά ασύμπτωτη: Καθώς $x \rightarrow \infty$ (ή $t \rightarrow \infty$) δίνεται από $y \cong \nu x$.

Αν κατασκευάσουμε το WPP γράφημα, Παράγραφος 2.5.A, ενός συνόλου δεδομένων και παρουσιάσουν μορφή παρόμοια με το Σχήμα 4.22 τότε τα δεδομένα μας μπορούν να ερμηνευθούν με τη χρήση του μοντέλου της τροποποιημένης κατανομής Weibull. Αν όχι, τότε το μοντέλο της τροποποιημένης κατανομής Weibull δεν είναι κατάλληλο.

Στατιστική συμπερασματολογία

A. Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας της σχέσης (4.44) θα είναι ίση με

$$L(\lambda, \beta, \nu) = \lambda^n \prod_{i=1}^n (\beta + \nu t_i) \left(\prod_{i=1}^n t_i \right)^{\beta-1} \exp \left[\nu \sum_{i=1}^n t_i \right] \exp \left[-\lambda \sum_{i=1}^n (e^{\nu t_i} t_i^\beta) \right]$$

και αντίστοιχο πιθανολογάρithμο

$$l(\lambda, \beta, \nu) = n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln(\beta + \nu t_i) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i) + \nu \sum_{i=1}^n t_i - \lambda \sum_{i=1}^n (t_i^\beta e^{\nu t_i}).$$

Για την εύρεση των εκτιμητριών μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων λ , β και ν θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\frac{\partial l(\lambda, \beta, \nu)}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial l(\lambda, \beta, \nu)}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial l(\lambda, \beta, \nu)}{\partial \nu} = 0.$$

Έτσι έχουμε ότι

$$\frac{\partial l(\lambda, \beta, \nu)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n (e^{\nu t_i} t_i^\beta) = 0 \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial l(\lambda, \beta, \nu)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta + \nu t_i} + \sum_{i=1}^n \ln t_i - \lambda \sum_{i=1}^n (e^{\nu t_i} t_i^\beta \ln t_i) = 0 \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial l(\lambda, \beta, \nu)}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{\beta + \nu t_i} + \sum_{i=1}^n t_i - \lambda \sum_{i=1}^n (e^{\nu t_i} t_i^{\beta+1}) = 0. \quad (4.51)$$

Από τη σχέση (4.49) δίνεται ότι

$$\lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^n (e^{\nu t_i} t_i^\beta)}. \quad (4.52)$$

Έτσι, με την αριθμητική επίλυση των σχέσεων (4.50), (4.51) και (4.52) προκύπτουν οι εκτιμήτριες $(\hat{\lambda}, \hat{\beta}, \hat{\nu})$ των παραμέτρων λ , β και ν .

B. Γραφική μέθοδος

Αφού κατασκευάσουμε το WPP γράφημα και αποφανθούμε ότι τα δεδομένα μας προσαρμόζονται στο μοντέλο της τροποποιημένης κατανομής Weibull ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Προσαρμόζουμε μια καμπύλη στα μετασχηματισμένα δεδομένα μας.
2. Εκτιμάμε την παράμετρο ν από την κλίση της ασύμπτωτης που αντιστοιχεί σε ευθεία γραμμή.
3. Εκτιμάμε τις υπόλοιπες παραμέτρους από τις συντεταγμένες που δίνονται από τη σχέση (4.47).

Μια πιθανή προσέγγιση είναι να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απλής παλινδρόμησης χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.46) και στη συνέχεια να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους με τη

μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Εναλλακτικά, μπορούμε να εφαρμόσουμε πολλαπλή παλινδρόμηση χρησιμοποιώντας τις ποσότητες $x_1 = x$ και $x_2 = e^x$ ούτως ώστε το WPP γράφημα να μπορεί να παρασταθεί ως γραμμική εξίσωση:

$$y = \ln \lambda + \beta x_1 + \nu x_2,$$

τα x_1 και x_2 δεν είναι ανεξάρτητα. Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων προκύπτουν λύνοντας ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων.

4.7 Μοντέλο $\Pi(\beta)$ -(4-6): Γενικευμένη οικογένεια Weibull (*Generalized Weibull family*)

Οι Mudhokar and Srivastava (1993) και Mudholkar et al. (1995) ανέπτυξαν τρία διαφορετικά μοντέλα τα οποία θα αναλυθούν παρακάτω. Τη σχέση αυτών των μοντέλων και της κλασικής κατανομής Weibull μπορεί κανείς να την δει μέσω της ποσοστομοριακής συνάρτησής τους. Για την κλασική κατανομή Weibull η ποσοστομοριακή συνάρτηση δίνεται από τη σχέση

$$Q(p) = \alpha [-\ln(1-p)]^{\frac{1}{\beta}}.$$

Μοντέλο $\Pi(\beta)$ -4: Γενικευμένη οικογένεια Weibull (*Generalized Weibull family*)

Η ποσοστομοριακή συνάρτηση του μοντέλου δίνεται από τη σχέση (Mudholkar et al 1996)

$$Q(p) = \begin{cases} \alpha \left[\frac{1-(1-p)^\nu}{\nu} \right]^{\frac{1}{\beta}}, & \nu \neq 0 \\ \alpha [-\ln(1-p)]^{\frac{1}{\beta}}, & \nu = 0 \end{cases} \quad (4.53)$$

όπου $\alpha, \beta > 0$ και $\nu \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι για το ένα σκέλος της σχέσης (4.53) ισχύει ότι

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \alpha \left[\frac{1-(1-p)^\nu}{\nu} \right]^{\frac{1}{\beta}} = \alpha [-\ln(1-p)]^{\frac{1}{\beta}}$$

δηλαδή, είναι παρόμοιο με τον μετασχηματισμό Box-Cox, χρησιμοποιείται για να σταθεροποιήσουμε τη διακύμανση χρονοσειρών.

Αντιστρέφοντας τη σχέση (4.53) για $\nu \neq 0$ δίνεται η **συνάρτηση κατανομής** της γενικευμένης οικογένειας Weibull

$$G(t) = 1 - \left[1 - v \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right]^{\frac{1}{\beta}}, \quad t \geq 0.$$

Το στήριγμα της $G(t)$ εξαρτάται από τις παραμέτρους του μοντέλου. Έτσι, όταν:

- $v \leq 0$, το στήριγμα της $G(t)$ είναι $(0, \infty)$.
- $v > 0$, το στήριγμα της $G(t)$ είναι $\left(0, \frac{\alpha}{v^{1/\beta}} \right)$.

Η **συνάρτηση πυκνότητας** της γενικευμένης οικογένειας Weibull δίνεται από τον τύπο

$$g(t) = \frac{\left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1}}{\frac{\alpha}{\beta} \left[1 - v \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right]} \left[1 - v \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right]^{\frac{1}{\beta}}. \quad (4.54)$$

η αντίστοιχη **βαθμίδα αποτυχίας** της γενικευμένης οικογένειας Weibull είναι ίση με

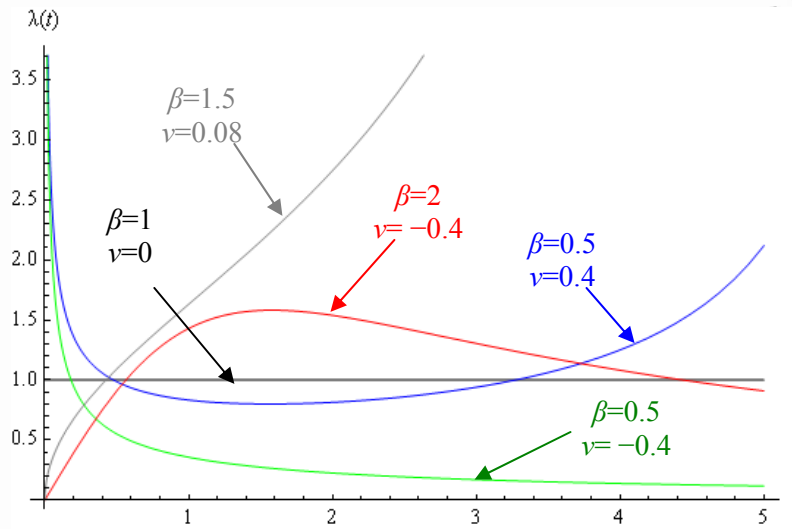
$$\lambda(t) = \frac{\left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1}}{\frac{\alpha}{\beta} \left[1 - v \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right]}. \quad (4.55)$$

Οι Mudholkar et al. (1996) απέδειξαν ότι οι πιθανές μορφές της βαθμίδας αποτυχίας είναι οι ακόλουθες:

- Για $\beta < 1$ και $v > 0$, η $\lambda(t)$ έχει τη μορφή BC (*bathtub curve*).
- Για $\beta \leq 1$ και $v \leq 0$, η βαθμίδα αποτυχίας είναι φθίνουσα, DFR.
- Για $\beta > 1$ και $v < 0$, η βαθμίδα αποτυχίας είναι μονοκόρυφη, RBC (*reverse bathtub curve*).
- Για $\beta \geq 1$ και $v \geq 0$, η βαθμίδα αποτυχίας είναι αύξουσα, IFR.
- Για $\beta = 1$ και $v = 0$, η βαθμίδα αποτυχίας είναι σταθερή και ίση με $c = \frac{1}{\alpha}$.

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας (4.55) για διάφορες τιμές των παραμέτρων β και v , κρατώντας την τιμή της παραμέτρου α σταθερή ($\alpha = 1$).

Σχήμα 4.23



Όπως παρατηρούμε από το Σχήμα 4.23 η βαθμίδα αποτυχίας της τροποποιημένης κατανομής Weibull μπορεί να πάρει τη μορφή BC.

Μέτρα θέσης και διασποράς

Οι Mudhokar και Kolia (1994) απέδειξαν ότι η ροπή κ-τάξης γύρω από το μηδέν της γενικευμένης οικογένειας Weibull δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$E(T^k) = \begin{cases} \alpha^k \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right) \Gamma\left(\frac{k}{\beta} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu} + \frac{k}{\beta} + 1\right) \nu^{\frac{k}{\beta} + 1}}, & \text{για } \nu > 0 \\ \alpha^k \frac{\Gamma\left(-\frac{k}{\beta} - \frac{1}{\nu}\right) \Gamma\left(\frac{k}{\beta} + 1\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{\nu} + 1\right) (-\nu)^{\frac{k}{\beta} + 1}}, & \text{για } \nu < 0. \end{cases}$$

Έτσι, αν $\nu > 0$ και $\beta > 0$, οι ροπές όλων των τάξεων υπάρχουν. Επιπλέον, όταν $\nu < 0$, η ροπή κ-τάξης γύρω από το μηδέν υπάρχει στην περίπτωση που ισχύει $\frac{\nu}{\beta} < -\frac{1}{k}$ και στην περίπτωση που ισχύει $\frac{1}{\beta} < 0$, αν $\frac{1}{\beta} \geq -\frac{1}{k}$.

Στατιστική συμπερασματολογία

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας της σχέσης (4.54) θα είναι ίση με

$$L(\alpha, \beta, \nu) = \frac{\beta^n}{\alpha^{\beta n}} \frac{\left(\prod_{i=1}^n t_i\right)^{\beta-1}}{\prod_{i=1}^n \left(1 - \nu \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right)} \left[\prod_{i=1}^n \left(1 - \nu \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right) \right]^{\frac{1}{\nu}}$$

και αντίστοιχο πιθανολογάρημο

$$l(\alpha, \beta, \nu) = n \ln \beta + n \beta \ln \alpha + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i) - \sum_{i=1}^n \ln \left(1 - \nu \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right) + \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 - \nu \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right).$$

Για την εύρεση των εκτιμητριών μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων λ , β και ν θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta, \nu)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial l(\alpha, \beta, \nu)}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial l(\alpha, \beta, \nu)}{\partial \nu} = 0.$$

Μοντέλο Π(β)-5: Περισσότερο Γενικευμένη οικογένεια Weibull (*More generalized Weibull family*)

Μια διαφορετική εκδοχή της οικογένειας Weibull, όταν $\alpha = 0$, μελετήθηκε από τους Mudholkar και Kolia (1994). Έτσι, η ποσοστομοριακή συνάρτηση του νέου μοντέλου δίνεται από τη σχέση

$$Q(p) = \beta \left[\frac{1 - (1-p)^\nu}{\nu} \right]^{\frac{1}{\beta}} - \beta. \quad (4.56)$$

όπου $\nu, \beta \in \mathbb{R}$.

Η **συνάρτηση κατανομής** υπολογίζεται λύνοντας ως προς p την ποσοστομοριακή συνάρτηση. Έτσι

$$G(t) = 1 - \left[1 - \nu \left(1 + \frac{t}{\beta}\right)^\beta \right]^{\frac{1}{\nu}}.$$

Το στήριγμα της $G(t)$ εξαρτάται από τις παραμέτρους του μοντέλου. Έτσι, όταν:

- $c < 0$ και
 - $\nu < 0$, τότε $t \in (-\infty, -\beta)$,
 - $\nu > 0$, τότε $t \in \left(-\infty, \frac{\beta}{\sqrt[\nu]{\nu}} - \beta\right)$.
- $c > 0$ και

- $\nu < 0$, τότε $t \in (-\beta, \infty)$,
- $\nu > 0$, τότε $t \in \left(-\beta, \frac{\beta}{\sqrt[\nu]{\nu}} - \beta\right)$.

Η **συνάρτηση πυκνότητας** του μοντέλου δίνεται από τον τύπο

$$g(t) = \left[1 - \nu \left(1 + \frac{t}{\beta}\right)^\beta\right]^{\frac{1}{\nu}-1} \left(1 + \frac{t}{\beta}\right)^{\beta-1},$$

η αντιστοιχη **βαθμίδα αποτυχίας** του μοντέλου είναι ίση με

$$\lambda(t) = \frac{\left(1 + \frac{t}{\beta}\right)^{\beta-1}}{\left[1 - \nu \left(1 + \frac{t}{\beta}\right)^\beta\right]}.$$

Μέτρα θέσης και διασποράς

Οι Mudholkar και Kolia (1994) μελέτησαν τις ροπές, την ασυμμετρία, την κύρτωση και τις ακραίες τιμές αυτού του μοντέλου. Η ροπή κ-τάξης γύρω από το μηδέν του μοντέλου, όταν $\nu > 0$, δίνεται από τη σχέση

$$E(T^k) = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \beta^k \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right) \Gamma\left(\frac{k}{\beta} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu} + \frac{k}{\beta} + 1\right) \nu^{\frac{k}{\beta} + 1}}.$$

Ειδικές περιπτώσεις

Το μοντέλο κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες μέσω της σχέσης (4.56) ανάγεται σε γνωστές κατανομές. Συγκεκριμένα:

- Για $\nu = 0$ και $\beta > 0 \Rightarrow$ ανηγμένη κατανομή Weibull
- Για $\nu = 0$ και $\beta < 0 \Rightarrow$ αντίστροφη ανηγμένη κατανομή Weibull.
- Για $\nu = 1$ και $\beta = 1 \Rightarrow$ ομοιόμορφη κατανομή στο $[-1, 0]$.
- Για $\nu = 0$ και $\beta = 1 \Rightarrow$ εκθετική κατανομή
- Για $\nu = -1$ και $\beta = \infty \Rightarrow$ λογιστική κατανομή.

Μοντέλο $\Pi(\beta)$ -6: Εκτεταμένη κατανομή Weibull (*extended Weibull distribution*)

Η ποσοστομοριακή συνάρτηση του νέου μοντέλου δίνεται από τη σχέση

$$Q(p) = \begin{cases} \beta \left[-\ln(1-p) \right]^{\frac{1}{\beta}} - 1, & \text{για } \beta \neq 0 \\ \ln[-\ln(1-p)], & \text{για } \beta = 0. \end{cases}$$

Η συνάρτηση κατανομής είναι ίση με

$$G(t) = \begin{cases} 1 - \exp \left[- \left(1 + \frac{t}{\beta} \right)^\beta \right], & \text{για } \beta \neq 0 \\ 1 - \exp[-\exp(t)], & \text{για } \beta = 0. \end{cases}$$

Το στήριγμα της $G(t)$ εξαρτάται από τις παραμέτρους του μοντέλου. Έτσι, όταν:

- $\beta < 0$, το στήριγμα της $G(t)$ είναι $(-\infty, \beta)$,
- $\beta > 0$, το στήριγμα της $G(t)$ είναι $(-\beta, \infty)$,
- $\beta = 0$, το στήριγμα της $G(t)$ είναι $(-\infty, \infty)$.

Το μοντέλο προτάθηκε από τους Freimer et al. (1989) και το ονόμασαν Εκτεταμένη κατανομή Weibull (*extended Weibull distribution*).

4.8 Μοντέλο $\Pi(\beta)$ -7: Γενικευμένη τριπαραμετρική κατανομή Γάμμα (*Three-parameter generalized Gamma*)

Ο Stacy (1962) πρότεινε μια γενίκευση της κατανομής Γάμμα, η οποία είναι επίσης, γενίκευση της κατανομής Weibull.

Η **συνάρτηση πυκνότητας** της γενικευμένης τριπαραμετρικής κατανομής Γάμμα δίνεται από τη σχέση

$$g(t) = \frac{\beta t^{\beta k - 1}}{\alpha^{\beta k} \Gamma(k)} \exp \left[- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right], \quad t \geq 0 \quad (4.57)$$

$\alpha, \beta > 0$ και $k > 0$.

Όταν $k = 1$, το μοντέλο μετατρέπεται στο μοντέλο της κλασικής κατανομής Weibull και όταν $\beta = 1$ το μοντέλο μετατρέπεται στην κατανομή Γάμμα.

Η **συνάρτηση κατανομής** του μοντέλου, η οποία δεν έχει κλειστό αναλυτικό τύπο, δίνεται από τη σχέση

$$G(t) = \frac{\Gamma_w(k)}{\Gamma(k)}$$

όπου, $w = \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta$ και $\Gamma_w(k)$ η μη-πλήρης συνάρτηση Γάμμα, $\Gamma_w(k) = \int_0^w s^{k-1} e^{-s} ds$

(*incomplete gamma function*).

Η **βαθμίδα αποτυχίας** του μοντέλου βρίσκεται από τον τύπο

$$\lambda(t) = \frac{\beta t^{\beta k - 1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]}{\alpha^{\beta k} (\Gamma(k) - \Gamma_w(k))}$$

όπου, $w = \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta$.

Οι Pham και Almhana (1995) μελέτησαν τις πιθανές μορφές της βαθμίδας αποτυχίας του μοντέλου της γενικευμένης τριπαραμετρικής κατανομής Γάμμα. Τα αποτελέσματα που παρουσίασαν είναι τα παρακάτω:

- όταν $\frac{1 - k\beta}{\beta(\beta - 1)} > 0$ και
 - $\beta > 1$, η $\lambda(t)$ παρουσιάζει τη μορφή BC (*bathtub curve*).
 - $0 < \beta < 1$, η $\lambda(t)$ παρουσιάζει τη μορφή RBC (*reverse bathtub curve*).
- διαφορετικά
 - για $\beta > 1$, η $\lambda(t)$ είναι αύξουσα, *IFR*,
 - για $0 < \beta < 1$, η $\lambda(t)$ είναι φθίνουσα, *DFR*,
 - για $\beta = 1$, η $\lambda(t)$ είναι σταθερή.

Η γενικευμένη τριπαραμετρική κατανομή Γάμμα δεν περιέχει παράμετρο θέσης. Έτσι, μια απλή επέκταση του μοντέλου θα προερχόταν από την εισαγωγή μιας παραμέτρου θέσης. Ο Harter (1967) αναφέρθηκε σε αυτό το μοντέλο το οποίο δίνεται από την έκφραση

$$g(t) = \frac{\beta(t - \tau)^{\beta k - 1}}{\alpha^{\beta k} \Gamma(k)} \exp\left[-\left(\frac{t - \tau}{\alpha}\right)^\beta\right], \quad t \geq 0, \quad \alpha, \beta, k > 0 \text{ και } t > \tau.$$

Μέτρα θέσης και διασποράς

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της γενικευμένης της κατανομής Γάμμα δίνεται από τη σχέση

$$M_t(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(s\alpha)^r}{r!} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\beta k + r}{\beta}\right)}{\Gamma(k)} \right], \quad s \geq 0.$$

Η ροπή κ-τάξης γύρω από το μηδέν της γενικευμένης της κατανομής Γάμμα δίνεται από τη σχέση

$$E(T^r) = \frac{\alpha^k \Gamma\left(k + \frac{r}{\beta}\right)}{\Gamma(k)}.$$

Έτσι, η μέση τιμή της γενικευμένης κατανομής Γάμμα δίνεται από τη σχέση

$$\mu = \frac{\alpha \Gamma\left(k + \frac{1}{\beta}\right)}{\Gamma(k)}$$

και η διακύμανση από τη σχέση

$$\sigma^2 = \alpha^2 \left\{ \frac{\Gamma\left(k + \frac{2}{\beta}\right)}{\Gamma(k)} - \left[\frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{\beta}\right)}{\Gamma(k)} \right]^2 \right\}.$$

Στατιστική συμπερασματολογία

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας της σχέσης (4.57) θα είναι ίση με

$$L(\alpha, \beta, k) = \frac{\beta^n}{\alpha^{\beta kn} (\Gamma(k))^n} \left(\prod_{i=1}^n t_i \right)^{\beta k - 1} \exp \left[-\frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n t_i^\beta \right]$$

και αντίστοιχο πιθανολογάρημο

$$l(\alpha, \beta, k) = n \ln \beta - n \beta k \ln \alpha - n \ln [\Gamma(k)] + (\beta k - 1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i) - \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n t_i^\beta.$$

Για την εύρεση των εκτιμητριών μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων λ , β και ν θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta, k)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial l(\alpha, \beta, k)}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial l(\alpha, \beta, k)}{\partial k} = 0.$$

Επομένως, έχουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial l(\alpha, \beta, k)}{\partial \alpha} &= \frac{\beta}{\alpha^{\beta+1}} \sum_{i=1}^n t_i^\beta - \frac{n\beta k}{\alpha} = 0 \\
 \frac{\partial l(\alpha, \beta, k)}{\partial \beta} &= \frac{n}{\beta} - nk \ln \alpha + k \sum_{i=1}^n \ln t_i + \ln \alpha \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta - \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n \{t_i^\beta \ln t_i\} = 0 \\
 \frac{\partial l(\alpha, \beta, k)}{\partial k} &= -n\beta \ln \alpha + \beta \sum_{i=1}^n \ln t_i - n\psi(k) = 0
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta - nk &= 0 \\
 \frac{n}{\beta} + k \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{t_i}{\alpha}\right) - \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \ln \left(\frac{t_i}{\alpha}\right) \right\} &= 0 \\
 \beta \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{t_i}{\alpha}\right) - n\psi(k) &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (4.58)$$

$$\text{όπου } \psi(k) = \frac{d[\ln\{\Gamma(k)\}]}{dk}.$$

Λύνοντας ως προς α την πρώτη εξίσωση του συστήματος (4.58) έχουμε ότι

$$\alpha = \left(\frac{\sum_{i=1}^n t_i^\beta}{nk} \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Αντικαθιστώντας τον παραπάνω τύπο στη δεύτερη εξίσωση του συστήματος (4.58) έχουμε ότι

$$k = \left[\beta \left(\frac{\sum_{i=1}^n \ln t_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n t_i^\beta \ln t_i}{\sum_{i=1}^n t_i^\beta} \right) \right]^{-1}.$$

Τέλος από την τρίτη εξίσωση του συστήματος (4.58) έχουμε ότι

$$-\psi(k) + \beta \frac{\sum_{i=1}^n \ln t_i}{n} - \ln \sum_{i=1}^n t_i^\beta + \ln nk = 0.$$

Οι Hager and Bain (1970) μελέτησαν ανεξαρτησία των εκτιμητριών, καθώς επίσης και με αριθμητικές μεθόδους για τον υπολογισμό των εκτιμητριών. Επίσης οι Wingo (1987) και Hirose (2000) ασχολήθηκαν με αριθμητικά προβλήματα που προκύπτουν με την εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας.

4.9 Μοντέλο Π(β)-8: Εκτεταμένη γενίκευση της κατανομής Γάμμα (*Extended generalized Gamma*)

Υπάρχουν αρκετές τροποποιήσεις ή γενικεύσεις της γενικευμένης κατανομής Γάμμα, οι οποίες έχουν μελετηθεί. Οι Ghitany (1998) και Kalla et al. (2001) είναι μερικοί από αυτούς. Εμείς θα αναφερθούμε στο μοντέλο που προτάθηκε από τον Ghitany (1998).

Η **συνάρτηση πυκνότητας** της εκτεταμένης γενίκευσης της κατανομής Γάμμα που προτάθηκε από τον Ghitany (1998) δίνεται από τον τύπο

$$f(t; \alpha, m, \lambda, n) = \frac{\alpha^{m-\lambda}}{\Gamma_\lambda(m, \alpha n)} \frac{t^{m-1} \exp(-\alpha t)}{(t+n)^\lambda}, \quad \begin{matrix} t \geq 0 \\ \lambda \geq 0, \alpha, m, n > 0, \end{matrix} \quad (4.59)$$

όπου, $\Gamma_\lambda(m, \alpha n) = \int_0^\infty \frac{y^{m-1} e^{-y}}{(t+\alpha n)^\lambda} dy$ είναι η γενικευμένη συνάρτηση Γάμμα (*generalized gamma function*), m θα είναι η παράμετρος σχήματος, α θα είναι η παράμετρος κλίμακας, n είναι η παράμετρος μετατόπισης και λ είναι η παράμετρος που δείχνει την επίδραση της παραμέτρου n , Agarwal et. al (1996). Όταν $\lambda = 0$ τότε

$$\Gamma_0(m, \alpha n) = \int_0^\infty y^{m-1} e^{-y} dy = \Gamma(m),$$

έτσι η (4.59) παίρνει τη μορφή

$$f(t; \alpha, m, n) = \frac{\alpha^m}{\Gamma(m)} t^{m-1} \exp(-\alpha t).$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$f(0) = \begin{cases} \infty & \text{αν } m < 1 \\ \alpha^{1-\lambda} & \text{αν } m = 1 \\ \frac{\alpha^{1-\lambda}}{\Gamma_\lambda(1, \alpha n)n^\lambda} & \text{αν } m > 1 \\ 0 & \text{αν } m > 1 \end{cases}$$

και $f(\infty)$ για κάθε $m > 0$.

Παραγωγίζοντας την (4.59) ως προς t βρίσκουμε ότι

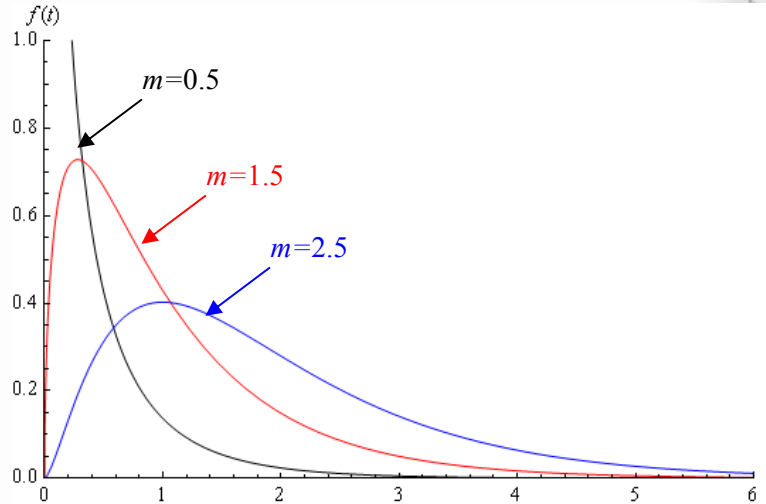
$$f'(t) = -\left(\alpha + \frac{\lambda}{t+n} - \frac{m-1}{t}\right) f(t).$$

Αν $m \leq 1$, τότε $f'(t) < 0$ οπότε η $f(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση, ενώ αν $m > 1$, τότε η $f(t)$ είναι μονοκόρυφη με την κορυφή να βρίσκεται στο σημείο

$$t_{\text{mode}} = \frac{1}{2\alpha} \left\{ m-1 - (\lambda + \alpha n) + \sqrt{[m-1 - (\lambda + \alpha n)]^2 + 4\alpha n(m-1)} \right\}.$$

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας (4.59) για διάφορες τιμές της παραμέτρου m κρατώντας τις παραμέτρους α , n και λ σταθερές ίσες με την μονάδα.

Σχήμα 4.24



Όταν $\lambda = 0$ προκύπτει ότι

$$f(0) = \begin{cases} \infty & \text{αν } m < 1 \\ \alpha & \text{αν } m = 1 \\ 0 & \text{αν } m > 1 \end{cases}$$

και $f(\infty) = 0$ για κάθε $m > 0$. Επίσης η $f(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση όταν $m \leq 1$, ενώ όταν $m > 1$, η $f(t)$ είναι μονοκόρυφη με την κορυφή να βρίσκεται στο σημείο

$$t_{\text{mode}} = \frac{m-1}{\alpha}.$$

Η **συνάρτηση κατανομής** του οντιέλου βρίσκεται απο τον τύπο

$$F(t) = \frac{\Gamma_{\lambda}(m, \alpha n) - \Gamma_{\lambda}(m, \alpha n; \alpha t)}{\Gamma_{\lambda}(m, \alpha n)},$$

όπου $\Gamma_{\lambda}(m, \alpha n; \alpha t) = \int_{\alpha t}^{\infty} \frac{y^{m-1} e^{-y}}{(t + \alpha n)^{\lambda}} dy$,

η αντίστοιχη **βαθμίδα αποτυχίας** είναι ίση με

$$\lambda(t) = \frac{\alpha^{m-\lambda}}{\Gamma_{\lambda}(m, \alpha n; \alpha t)} \frac{t^{m-1} e^{-\alpha t}}{(t+n)^{\lambda}}. \quad (4.60)$$

Παρατηρούμε ότι $\lambda(0) = f(0)$ σύμφωνα με τον κανόνα de L' Hospital προκύπτει ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{f'(t)}{f(t)} = \alpha.$$

Σύμφωνα με τον Ghitany (1998) οι πιθανές μορφές τη βαθμίδα αποτυχίας (4.60) είναι οι εξής:

- Για $\lambda = 0$ και $m = 1$ η βαθμίδα από τυχίας είναι σταθερή και ισουταιά με $c = \alpha$.
- Για $\lambda = 0$ και $m < 1$ ή $\lambda > 0$ και $m \leq 1$ η βαθμίδα αποτυχίας είναι φθίνουσα, *DFR*.
- Για $\lambda = 0$ και $m > 1$ ή $0 < \lambda \leq m - 1$ η βαθμίδα αποτυχίας είναι αύξουσα, *IFR*.
- Για $\lambda > m - 1 > 0$ η βαθμίδα αποτυχίας παρουσιάζει τη μορφή RBC (*reverse bathtub curve*) με μοναδικό σημείο καμπής $t_h \in (0, t_0)$, όπου

$$t_0 = \frac{m-1 + \sqrt{\lambda(m-1)}}{\lambda - (m-1)} n.$$

Τέλος για τιμές της παραμέτρου $\lambda = 0$, η βαθμίδα αποτυχίας που δίνεται από τον τύπο (4.60) θα είναι παρόμοια με εκείνη της κατανομής Γάμμα. Σύμφωνα με τους Barlow and Proschan (1975) προκύπτει ότι:

$$\lambda(t) = \begin{cases} IFR & \text{αν } m < 1 \\ \alpha & \text{αν } m = 1 \\ DFR & \text{αν } m > 1. \end{cases}$$

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της βαθμίδα αποτυχίας (4.9) για διάφορες τιμές της παραμέτρου m κρατώντας τις παραμέτρους α , n και λ σταθερές ίσες με την μονάδα.

Μέτρα θέσης και διασποράς

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση του μοντέλου βρίσκεται από τον τύπο

$$M_T(s) = \left(1 - \frac{s}{\alpha}\right)^{\lambda-m} \frac{\Gamma\left(m, \alpha n \left(1 - \frac{s}{\alpha}\right)\right)}{\Gamma_\lambda(m, \alpha n)}, \quad t < \alpha.$$

Η παράγωγος r -τάξης της παραπάνω έκφρασης θα είναι ίση με

$$\frac{d^r}{ds^r} M_T(s) = \alpha^{-r} \left(1 - \frac{s}{\alpha}\right)^{\lambda-m-r} \frac{\Gamma\left(m+r, \alpha n \left(1 - \frac{s}{\alpha}\right)\right)}{\Gamma_\lambda(m, \alpha n)}, \quad t < \alpha.$$

Επομένως, η ροπή k -τάξης γύρω από το μηδέν βρίσκεται από τον τύπο

$$\frac{d^k}{ds^k} M_T(0) = \alpha^{-k} \frac{\Gamma(m+k, \alpha n)}{\Gamma_\lambda(m, \alpha n)}.$$

4.10 Μοντέλο $\Pi(\beta)$ -(9-10): Μοντέλα Weibull με τέσσερις – πέντε παραμέτρους (*Four – and five parameter Weibulls*)

Ο Kies (1958) μελέτησε το μοντέλο Weibull με τέσσερις παραμέτρους, ενώ ο Phani (1987) προχώρησε περαιτέρω μελετώντας το μοντέλο Weibull με πέντε παραμέτρους.

Μοντέλο $\Pi(\beta)$ -9: Μοντέλο Weibull με τέσσερις παραμέτρους (*Four – parameter Weibull*)

Η **συνάρτηση κατανομής** του μοντέλου Weibull με τέσσερις παραμέτρους δίνεται από τον τύπο

$$G(t) = 1 - \exp \left\{ -\lambda \left(\frac{t-a}{b-t} \right)^\beta \right\}, \quad \begin{array}{l} 0 \leq a \leq t \leq b < \infty \\ \lambda, \beta > 0, \end{array} \quad (4.61)$$

η αντίστοιχη **συνάρτηση πυκνότητας** του μοντέλου Weibull με τέσσερις παραμέτρους είναι ίση με

$$g(t) = \frac{\lambda \beta (b-a) \exp \left\{ -\lambda \left(\frac{t-a}{b-t} \right)^\beta \right\} (t-a)^{\beta-1}}{(b-t)^{\beta+1}},$$

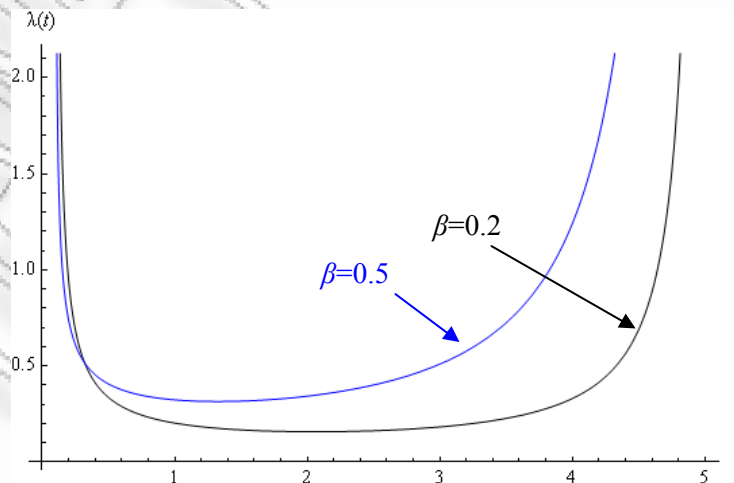
ενώ τέλος, η **βαθμίδα αποτυχίας** του μοντέλου Weibull με τέσσερις παραμέτρους βρίσκεται από τον τύπο

$$\lambda(t) = \frac{\lambda \beta (b-a) (t-a)^{\beta-1}}{(b-t)^{\beta+1}}. \quad (4.62)$$

Για τιμές της παραμέτρου β , όπου $0 < \beta < 1$, προκύπτει η μορφή BC (*bathtub curve*).

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας (4.62) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β , κρατώντας σταθερές τις παραμέτρους a, b, λ ($a = 0.1, b = 5, \lambda = 1$).

Σχήμα 4.25



WPP γράφημα

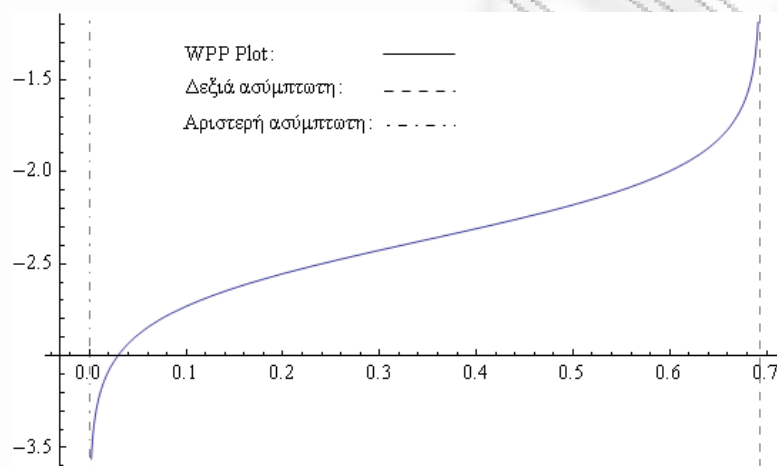
Κάτω από τους μετασχηματισμούς (2.16) η σχέση (4.61) μετασχηματίζεται στη

$$y = \ln \lambda + \beta \left[\ln(e^x - a) - \ln(b - e^x) \right] \text{ και } \ln a \leq x \leq \ln b.$$

Το WPP γράφημα θα μορφή "S", με την αριστερή ασύμπτωτη να είναι κάθετη γραμμή στο σημείο $x = \ln a$, ενώ η δεξιά ασύμπτωτη είναι κάθετη γραμμή στο σημείο $x = \ln b$.

Παρακάτω δίνεται το WPP γράφημα για το μοντέλο Weibull με τέσσερις παραμέτρους, όπου οι τιμές των παραμέτρων είναι $a = 1$, $b = 2$, $\lambda = 0.1$, $\beta = 0.2$.

Σχήμα 4.26



Μοντέλο Π(β)-10: Μοντέλο Weibull με πέντε παραμέτρους (Five-parameter Weibull)

Η **συνάρτηση κατανομής** του του μοντέλου Weibull με πέντε παραμέτρους δίνεται από τον τύπο

$$G(t) = 1 - \exp \left\{ -\lambda \frac{(t-a)^{\beta_1}}{(b-t)^{\beta_2}} \right\}, \quad 0 \leq a \leq t \leq b < \infty$$

$$\lambda, \beta_1, \beta_2 > 0,$$

η αντίστοιχη **συνάρτηση πυκνότητας** του μοντέλου είναι ίση με

$$g(t) = \frac{\lambda (t-a)^{\beta_1-1} [(b\beta_1 - a\beta_2) + (\beta_2 - \beta_1)t]}{(b-t)^{\beta_2+1}} \exp \left\{ -\lambda \frac{(t-a)^{\beta_1}}{(b-t)^{\beta_2}} \right\},$$

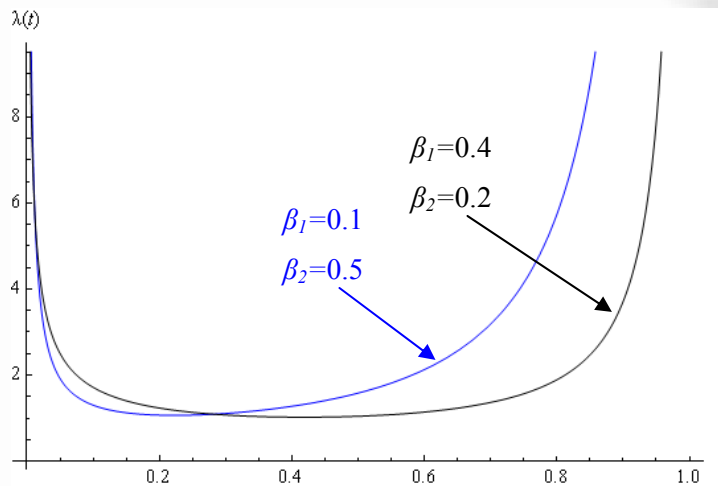
ενώ τέλος, η **βαθμίδα αποτυχίας** του μοντέλου βρίσκεται από τον τύπο

$$\lambda(t) = \frac{\lambda (t-a)^{\beta_1-1} [(b\beta_1 - a\beta_2) + (\beta_2 - \beta_1)t]}{(b-t)^{\beta_2+1}}. \quad (4.63)$$

Για τιμές των παραμέτρων β_1 και β_2 , όπου $0 < \beta_1 < 1$ και $0 < \beta_2 < 1$, προκύπτει η μορφή BC (*bathhtub curve*).

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας (4.63) για διάφορες τιμές των παραμέτρων β_1 και β_2 , κρατώντας σταθερές τις παραμέτρους a, b, λ ($a=0, b=1, \lambda=1$).

Σχήμα 4.27



4.11 Μοντέλο $\Pi(\beta)$ -11: Περικομμένη κατανομή Weibull (*Truncated Weibull distribution*)

Περιορίζοντας το στήριγμα της κλασικής κατανομής Weibull ή της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull, σε ένα μικρότερο πεδίο ορισμού, τότε προκύπτει η περικομμένη κατανομή Weibull. Ο λόγος που η περικομμένη κατανομή Weibull συγκαταλέγεται στα μοντέλα τύπου $\Pi(\beta)$, είναι ότι τα σημεία περικοπής μπορούμε να τα θεωρήσουμε ως επιπρόσθετες μεταβλητές.

Τα πιο γνωστά είδη περικοπής, όταν η μεταβλητή είναι χρόνος ζωής ή διάρκεια, είναι:

- αριστερή περικοπή. Σε μια κάτω περικομμένη κατανομή, οι τιμές που βρίσκονται αριστερά από το σημείο περικοπής t_l έχουν παραληφθεί.
- δεξιά περικοπή. Σε μια άνω περικομμένη κατανομή, οι τιμές που βρίσκονται δεξιά από το σημείο περικοπής t_r έχουν παραληφθεί.
- διπλή περικοπή. Μια διπλά περικομμένη κατανομή περιέχει τις μεταβλητές που βρίσκονται στο μεσαίο τμήμα της, δηλαδή μεταξύ του διαστήματος $[t_l, t_r]$.

Θα χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο της τριπαραμετρικής κατανομής (3.2). Έτσι, η **συνάρτηση κατανομής** της περικομμένης Weibull βρίσκεται από τον τύπο

$$G_{DT}(t) = \frac{F(t) - F(t_l)}{F(t_r) - F(t_l)} = \frac{1 - \exp\left[\left(\frac{t_l - \tau}{\alpha}\right)^\beta - \left(\frac{t - \tau}{\alpha}\right)^\beta\right]}{1 - \exp\left[\left(\frac{t_l - \tau}{\alpha}\right)^\beta - \left(\frac{t_r - \tau}{\alpha}\right)^\beta\right]} \quad \tau \leq t_l \leq t \leq t_r < \infty, \quad (4.64)$$

όπου F η τριπαραμετρική κατανομή Weibull. Το παραπάνω μοντέλο αναφέρεται και ως διπλά περικομμένη κατανομή Weibull.

Ειδικές περιπτώσεις του μοντέλου (4.64):

- όταν $t_l > \tau$ και $t_r \rightarrow \infty$ προκύπτει το μοντέλο της αριστερά περικομμένης κατανομής Weibull. Η συνάρτηση κατανομής του μοντέλου δίνεται από τη σχέση

$$G_{LT}(t) = 1 - \exp\left[\left(\frac{t_l - \tau}{\alpha}\right)^\beta - \left(\frac{t - \tau}{\alpha}\right)^\beta\right] \quad (4.65)$$

- όταν $t_l = \tau$ και $\tau < t_r < \infty$ προκύπτει το μοντέλο της δεξιά περικομμένης κατανομής Weibull. Η συνάρτηση κατανομής του μοντέλου δίνεται από τη σχέση

$$G_{RT}(t) = \frac{1 - \exp\left[-\left(\frac{t - \tau}{\alpha}\right)^\beta\right]}{1 - \exp\left[-\left(\frac{t_r - \tau}{\alpha}\right)^\beta\right]} \quad (4.66)$$

- όταν $t_l = \tau$ και $t_r \rightarrow \infty$ προκύπτει το μοντέλο της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull.

Η **συνάρτηση πυκνότητας** της διπλά περικομμένης κατανομής Weibull βρίσκεται από τον τύπο

$$g_{DT}(t) = \frac{f(t)}{F(t_r) - F(t_l)} = \frac{\frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t - \tau}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[\left(\frac{t_l - \tau}{\alpha}\right)^\beta - \left(\frac{t - \tau}{\alpha}\right)^\beta\right]}{1 - \exp\left[\left(\frac{t_l - \tau}{\alpha}\right)^\beta - \left(\frac{t_r - \tau}{\alpha}\right)^\beta\right]}, \quad (4.67)$$

όπου f η συνάρτηση πυκνότητας της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull.

Η μορφή της g_{DT} εξαρτάται από τη μορφή της f στο διάστημα $t_l \leq t \leq t_r$. Οι πιθανές μορφές της g_{DT} είναι:

- φθίνουσα, όταν $\beta < 1$ ή $\beta > 1$ και $t_l > t^*$,
- αύξουσα, όταν $\beta > 1$ και $t_r < t^*$,

- μονοκόρυφη, όταν $\beta > 1$ και $t_l < t^* < t_r$,

όπου $t^* = \tau + \alpha \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^{1/\beta}$ η κορυφή της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull.

Η συνάρτηση πυκνότητας του μοντέλου της σχέσης (4.65) δίνεται από τη σχέση

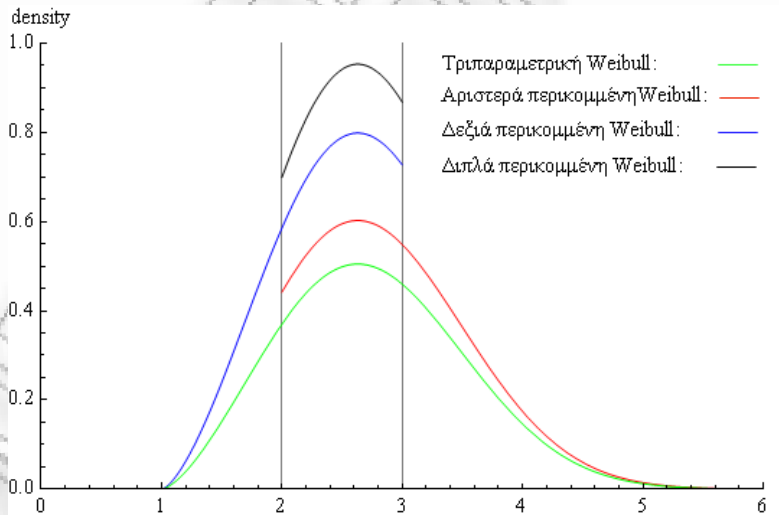
$$g_{LT}(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp \left[\left(\frac{t_l-\tau}{\alpha}\right)^\beta - \left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^\beta \right].$$

Η συνάρτηση πυκνότητας του μοντέλου της σχέσης (4.66) δίνεται από τη σχέση

$$g_{RT}(t) = \frac{\frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp \left[-\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^\beta \right]}{1 - \exp \left[-\left(\frac{t_r-\tau}{\alpha}\right)^\beta \right]}.$$

Παρακάτω δίνονται τα γραφήματα των συναρτήσεων πυκνότητας των διπλά, δεξιά και αριστερά περικομμένων κατανομών Weibull καθώς και η συνάρτηση πυκνότητας της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull, όπου $t_l = 2$, $t_r = 3$, $\tau = 1$, $\alpha = 2$ και $\beta = 2.5$.

Σχήμα 4.28



Η **βαθμίδα αποτυχίας** της διπλά περικομμένης κατανομής Weibull δίνεται από τη σχέση

$$\lambda(t) = \frac{g_{DT}(t)}{1 - G_{DT}(t)} = \frac{f(t)}{F(t_r) - F(t)} = \left[\frac{f(t)}{1 - F(t)} \right] \left[\frac{1 - F(t)}{F(t_r) - F(t)} \right].$$

Η πρώτη αγκύλη αποτελείται από τη βαθμίδα αποτυχίας της τριπαραμετρικής κατανομής Weibull. Η δεύτερη αγκύλη αποτελείται από μια αύξουσα συνάρτηση, η οποία προσεγγίζει το άπειρο καθώς $t \rightarrow t_r$. Αυτό σημαίνει ότι η βαθμίδα αποτυχίας θα είναι αύξουσα, φθίνουσα ή

θα έχει τη μορφή BC (*bathhtub curve*). Συγκεκριμένα όταν $0 < \beta < 1$, η μορφή της βαθμίδας αποτυχίας για τη διπλά και αριστερή περικομμένη κατανομή Weibull προκύπτει να είναι BC.

Μέτρα θέσης και διασποράς

Οι McEwen and Pargosol (1991) μελέτησαν τις ροπές της περικομμένης κατανομής Weibull. Συγκεκριμένα η ροπή κ-τάξης γύρω από το μηδέν δίνεται:

- για τη διπλά περικομμένη κατανομή Weibull, από τη σχέση

$$E(T_{DT}^k) = \frac{\exp\left[\left(\frac{t_l - \tau}{\alpha}\right)^\beta\right]}{1 - \exp\left[-\left(\frac{t_r - \tau}{\alpha}\right)^\beta\right]} \sum_{n=0}^k \left\{ \binom{k}{n} \alpha^{k-n} \tau^n \left[\gamma\left(\frac{k-n}{\beta} + 1, \left(\frac{t_r - \tau}{\alpha}\right)^\beta\right) - \gamma\left(\frac{k-n}{\beta} + 1, \left(\frac{t_l - \tau}{\alpha}\right)^\beta\right) \right] \right\}.$$

- για την αριστερή περικομμένη κατανομή Weibull, αυτή που δίνεται από τη σχέση

$$E(T_{LT}^k) = \exp\left[\left(\frac{t_l - \tau}{\alpha}\right)^\beta\right] \sum_{n=0}^k \left\{ \binom{k}{n} \alpha^{k-n} \tau^n \left[\Gamma\left(\frac{k-n}{\beta} + 1\right) - \gamma\left(\frac{k-n}{\beta} + 1, \left(\frac{t_l - \tau}{\alpha}\right)^\beta\right) \right] \right\}.$$

- για τη δεξιά περικομμένη κατανομή Weibull, αυτή που δίνεται από τη σχέση

$$E(T_{RT}^k) = \frac{1}{1 - \exp\left[-\left(\frac{t_r - \tau}{\alpha}\right)^\beta\right]} \sum_{n=0}^k \left\{ \binom{k}{n} \alpha^{k-n} \tau^n \gamma\left(\frac{k-n}{\beta} + 1, \left(\frac{t_r - \tau}{\alpha}\right)^\beta\right) \right\}.$$

Το p -ποσοστημόριο της διπλά περικομμένης κατανομής Weibull υπολογίζεται από τη σχέση

$$Q_{DT}(p) = \tau + \alpha \left\{ -\ln\left[1 - F(t_l) - p(F(t_r) - F(t_l))\right] \right\}^{\frac{1}{\beta}},$$

όπου F η τριπαραμετρική κατανομή Weibull.

Στατιστική συμπερασματολογία

Παρακάτω θα υπολογίσουμε τις εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας για τη διπλά περικομμένη κατανομή Weibull, σχέση (4.67). Έτσι, για δεδομένα t_l και t_r , το σύνολο $\{t_l \leq t_i \leq t_r, i=1, \dots, n\}$ παριστά ένα σετ n παρατηρήσεων από τη διπλά περικομμένη κατανομή Weibull.

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας για τη σχέση (4.67) θα είναι ίση με

$$L(\alpha, \beta, \tau; t_1, \dots, t_n) = \frac{\beta^n \left[\prod_{i=1}^n (t_i - \tau) \right]^{\beta-1} \exp \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{t_i - \tau}{\alpha} \right)^\beta - \left(\frac{t_i - \tau}{\alpha} \right)^\beta \right]}{\left[1 - \exp \left\{ \left(\frac{t_l - \tau}{\alpha} \right)^\beta - \left(\frac{t_r - \tau}{\alpha} \right)^\beta \right\} \right]^n}$$

και αντίστοιχο πιθανολογάρημο

$$l(\alpha, \beta, \tau; t_1, \dots, t_n) = n \ln \beta - n \beta \ln \alpha + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \tau) + \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{t_i - \tau}{\alpha} \right)^\beta - \left(\frac{t_i - \tau}{\alpha} \right)^\beta \right] - n \ln \left[1 - \exp \left\{ \left(\frac{t_l - \tau}{\alpha} \right)^\beta - \left(\frac{t_r - \tau}{\alpha} \right)^\beta \right\} \right].$$

Για την εύρεση των εκτιμητριών μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων α , β και τ θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta, \tau; t_1, \dots, t_2)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial l(\alpha, \beta, \tau; t_1, \dots, t_2)}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial l(\alpha, \beta, \tau; t_1, \dots, t_2)}{\partial \tau} = 0.$$

Οι Mittal and dahiya (1989) μελέτησαν τις εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας για την περικομμένη κατανομή Weibull. Πρότειναν τροποποιημένες εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας και τις σύγκριναν με τις εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας. Επίσης, αποτελέσματα που αφορούν την εκτίμηση των παραμέτρων για το μοντέλο μπορούν να βρεθούν στις δημοσιεύσεις των Martinez and Quintana (1991), Shalaby and Al-Youssef (1992) και Hwang (1996).

4.12 Μοντέλο Π(β)-12: Κατανομές Slymen and Lachenbruch (*Slyme and-Lachenbruch distributions*)

Οι Slymen and Lachenbruch (1984) πρότειναν την κατασκευή δυο οικογενειών κατανομών, ορίζοντας σύνθεση μιας συνάρτησης g με μια συνάρτηση αξιοπιστίας $R(t)$ κάτω από συγκεκριμένους περιορισμούς. Οι κατανομές κάθε οικογένειας προέρχονται από κατάλληλους μετασχηματισμούς της χρονικής μεταβλητής της συνάρτησης αξιοπιστίας, οι οποίοι μετασχηματισμοί ακολουθούν συγκεκριμένους κανόνες. Συγκεκριμένα, έστω $R(t)$ η συνάρτηση αξιοπιστίας και $g(R(t))$ μια νέα συνάρτηση του $R(t)$ τέτοια ώστε:

- $\lim_{t \rightarrow 0} g(R(t)) = -\infty$,
- $\lim_{t \rightarrow \infty} g(R(t)) = \infty$ και

- g είναι αύξουσα συνάρτηση.

Η γενική μορφή των οικογενειών που μελέτησαν είναι:

$$g(R(t)) = \alpha + \beta w(t) \quad (4.68)$$

όπου $-\infty < \alpha < \infty$, $\beta > 0$ και $w(t)$ είναι ένας μετασχηματισμός, ο οποίος, μπορεί να περιέχει μία ή περισσότερες παραμέτρους τέτοιες ώστε:

- $\lim_{t \rightarrow 0} w(t) = -\infty$,
- $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \infty$ και
- w είναι αύξουσα συνάρτηση.

Έστω τώρα η παρακάτω συνάρτηση, που έχει ως μεταβλητή μια συνάρτηση αξιοπιστίας

$$g(R(t)) = \ln[-\ln(R(t))]$$

απο τη σχέση (4.68) προκύπτει ότι

$$\ln[-\ln(R(t))] = \alpha + \beta w(t) \Rightarrow R(t) = \exp[-\exp\{\alpha + \beta w(t)\}]. \quad (4.69)$$

Αν στην σχέση (4.69) αντικαταστήσουμε με $w(t) = \ln t$ τότε προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$R(t) = \exp[-\exp\{\alpha + \beta \ln t\}] = \exp(-e^\alpha t^\beta),$$

δηλαδή προκύπτει η συνάρτηση αξιοπιστίας της κλασικής κατανομής Weibull με παράμετρο κλίμακας e^α και παράμετρο σχήματος β .

Έστω, τώρα η παρακάτω σχέση

$$w_H(t) = \frac{\sinh(k \cdot \ln t)}{k} \quad (4.70)$$

όπου $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ η συνάρτηση του υπερβολικού ημιτόνου και $k > 0$. Η σχέση (4.70)

γράφεται διαφορετικά ως

$$w(t) = \frac{\exp(k \cdot \ln t) - \exp(-k \cdot \ln t)}{2k} = \frac{t^k - t^{-k}}{2k}, \quad (4.71)$$

Η παράμετρος k μπορεί να είναι γνωστή ή να εκτιμηθεί από τα δεδομένα μας. Χρησιμοποιώντας τους κανόνες de l'Hospital, από τη σχέση (4.71) προκύπτει ότι

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{t^k - t^{-k}}{2k} = \ln t.$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.70) στην οριακή κατανομή, που δίνεται από τη σχέση (4.69), καθώς $k \rightarrow 0$ προκύπτει η κλασική κατανομή Weibull. Οι Slymen and Lachenbruch (1984) ονόμασαν την κατανομή που ορίζεται από την εφαρμογή της σχέσης (4.70) στην σχέση (4.69), τροποποιημένη κατανομή Weibull².

Έτσι, η τροποποιημένη κατανομή Weibull των Slymen and Lachenbruch (1984) έχει **συνάρτηση κατανομής** που δίνεται από τη σχέση

$$G(t) = 1 - \exp \left\{ - \exp \left[\alpha + \beta \frac{t^k - t^{-k}}{2k} \right] \right\}, \quad t \geq 0,$$

η αντίστοιχη **βαθμίδα αποτυχίας** του μοντέλου είναι ίση με

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{2} (t^{k-1} + t^{-k-1}) \exp \left[\alpha + \beta \frac{t^k - t^{-k}}{2k} \right]. \quad (4.72)$$

Για τη σχέση (4.72) παρατηρούμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \infty.$$

Σύνεπως, δεν είναι δυνατό να κατασκευάσουμε μια φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας με την τροποποιημένη κατανομή Weibull των Slymen and Lachenbruch (1984), όταν $0 < t < \infty$ και $k > 0$. Ωστόσο, κάτω από ένα ορισμένο εύρος του t , ενδέχεται η συνάρτηση της βαθμίδας αποτυχίας να είναι φθίνουσα. Συγκεκριμένα, για ορισμένες τιμές των παραμέτρων α , β και k η βαθμίδα αποτυχίας μπορεί να είναι φθίνουσα εκτός από τις ουρές της κατανομής.

Έστω

$$e^{-\alpha} \frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{\beta}{2} \exp \left\{ \beta \frac{t^k - t^{-k}}{2k} \right\} N(t),$$

όπου $N(t)$ η σχέση

$$N(t) = (k-1)^{k-2} - (k+1)^{-k-2} + \frac{\beta}{2} (t^{k-1} + t^{-k-1})^2.$$

Ο μεγιστοβάθμιος όρος της $N(t)$ είναι ο $t^{-2(k+1)}$, έτσι $\lim_{t \rightarrow 0} N(t) = \infty$. Θέτοντας τη σχέση

$N(t)$ ίση με το μηδέν αποδεικνύεται ότι η βαθμίδα αποτυχίας του μοντέλου θα είναι αύξουσα όταν

² Για να μην υπάρχει σύγχυση με το μοντέλο $\Pi(\beta)$ -3 θα την καλούμε τροποποιημένη κατανομή Weibull των Slymen and Lachenbruch

$$\beta > \frac{2 \left[(k+1)t^{-k-2} - (k-1)t^{k-2} \right]}{\left(t^{k-1} + t^{-k-1} \right)^2} = M .$$

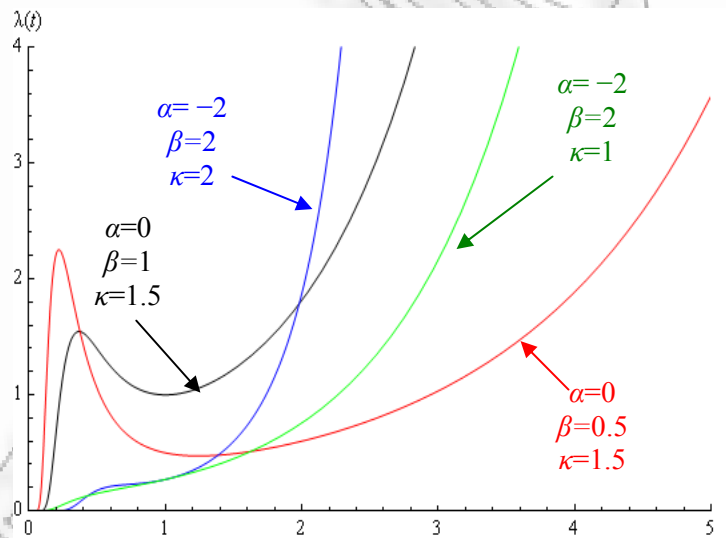
Παραγωγίζοντας ως προς t την παραπάνω σχέση υπολογίζουμε τη μέγιστη τιμή του M

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \frac{-2}{\left(t^{k-1} + t^{-k-1} \right)^2} (k+1)(k+2)t^{-k-3} + (k-1)(k-2)t^{k-3} - \frac{2 \left[(k+1)t^{-k-2} - (k-1)t^{k-2} \right]^2}{\left(t^{k-1} + t^{-k-1} \right)^3} = \\ &= -\frac{2}{\left(t^{k-1} + t^{-k-1} \right)^2} V(t), \end{aligned}$$

δηλαδή, η ποσότητα M παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο σημείο t_{\max} όταν $V(t_{\max}) = 0$.

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας (4.72) για διάφορες τιμές των παραμέτρων α , β και k .

Σχήμα 4.29



Μέτρα θέσης και διασποράς

Δεν υπάρχει κλειστός τύπος για τον υπολογισμό των ροπών της περικομμένης κατανομής Weibull. Έστω, $U = R(T)$, όπου R η συνάρτηση αξιοπιστίας, η τυχαία μεταβλητή U κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $(0,1)$, ούτως ώστε $T = R^{-1}(U)$. Έτσι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής T , $E(T)$ δίνεται από τη σχέση

$$\mu = E(T) = \int_0^1 R^{-1}(T) dU ,$$

η κεντρική ροπή κ -τάξης (ροπή περί το μέσο) υπολογίζεται από τη σχέση

$$E[(T - \mu)^k] = \int_0^1 [R^{-1}(U) - \mu]^k dU.$$

Το $(1-p)$ ποσοστιαίο σημείο δίνεται από τη σχέση

$$t_{1-p} = \left(C + \sqrt{C^2 + 1} \right)^{\frac{1}{k}},$$

όπου

$$C = \frac{k \{ \ln[-\ln(1-p)] - \alpha \}}{\beta}.$$

Στατιστική συμπερασματολογία

A. Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Οι Slymen and Lachenbruch (1984) εξέτασαν την εκτίμηση των παραμέτρων α και β με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, θεωρώντας δεδομένη την παράμετρο k . Έτσι από τη σχέση (4.68) βρσκουμε οτι

$$V(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \left\{ g(\hat{R}(t_i)) - \alpha - \beta w(t_i) \right\}^2 \quad (4.73)$$

όπου \hat{R} , η εμπειρική συνάρτηση αξιοπιστίας.

Έστω τώρα ότι $g_i = g(\hat{R}(t_i))$ και $w_i = w(t_i)$, τότε από τη σχέση (4.73) οι εκτιμήσεις των παραμέτρων α και β θα είναι

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (g_i - \hat{g})(w_i - \hat{w})}{\sum_{i=1}^n (w_i - \hat{w})} \quad (4.74)$$

και

$$\hat{\alpha} = \hat{g} - \hat{\beta} \hat{w} \quad (4.75)$$

όπου

$$\hat{g} = \sum_{i=1}^n \frac{g_i}{n} \quad \text{και} \quad \hat{w} = \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{n}.$$

Στην περίπτωση που η παράμετρος k δεν είναι γνωστή, η σχέση (4.73) αντικαθιστάται από τη σχέση $V(\alpha, \beta, k)$ για να δηλώσουμε την ταυτόχρονη εκτίμηση και των τριων παραμέτρων. Δεν υπάρχει κλειστός τύπος για την παράμετρο k . Οι εκτιμήσεις υπολογίζονται λύνοντας το

σύστημα που αποτελείται από τις σχέσεις (4.74), (4.75) και $\frac{dV(\alpha, \beta, k)}{dk}$. Για τη λύση του παραπάνω συστήματος μπορεί να γίνει χρήση κάποιας επαναληπτικής μεθόδου.

B. Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας

Οι Slymen and Lachenbruch (1984) ασχολήθηκαν με την εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας για τυχαίες λογοκριμένες παρατηρήσεις. Συγκεκριμένα, έστω ότι διαθέτουμε n παρατηρήσεις τέτοιες ώστε για την i -οστή παρατήρηση αντιστοιχεί το ζεύγος (t_i, δ_i) , όπου t_i ο χρόνος ζωής της i -οστής παρατήρησης και $\delta_i = 1$ αν η i παρατήρηση είναι αλογόκριτη ή $\delta_i = 0$ αν είναι λογοκριμένη. Έτσι, η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση

$$L(\alpha, \beta, k) = \prod_{i=1}^n \lambda(t_i)^{\delta_i} R(t_i)$$

και αντίστοιχο πιθανολογάρημο

$$\ln L(\alpha, \beta, k) = \sum_{i=1}^n \left[\delta_i \left\{ \ln \left(\frac{\beta}{2} \right) + \ln \left(t_i^{k-1} + t_i^{-k-1} \right) + \alpha + \beta \frac{t_i^k - t_i^{-k}}{2k} \right\} - \exp \left\{ \alpha + \beta \frac{t_i^k - t_i^{-k}}{2k} \right\} \right].$$

Οι εκτιμήτριες των παραμέτρων που θα υπολογισθούν με τη μεγιστοποίηση της παραπάνω σχέσης απαιτεί τη χρήση κάποιας επαναληπτικής μεθόδου.

Τέλος οι Slymen and Lachenbruch (1984), μελέτησαν τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης όπου $H_0 : k = 0$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : k > 0$. Δηλαδή είναι ο έλεγχος Weibull έναντι της τροποποιημένης κατανομής Weibull των Slymen and Lachenbruch.

4.13 Μοντέλο Π(β)-13: Επεκταμένη Weibull (Weibull extension)

Το μοντέλο προτάθηκε από τους Xie et al. (2002). Είναι μια επέκταση του διπαραμετρικού μοντέλου που προτάθηκε από τον Chen (2000).

Η **συνάρτηση κατανομής** της επεκταμένης κατανομής Weibull δίνεται από τον τύπο

$$G(t) = 1 - \exp \left\{ \lambda \alpha \left(1 - \exp \left[\left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right] \right) \right\} \quad \begin{matrix} t \geq 0 \\ \lambda, \alpha, \beta > 0, \end{matrix} \quad (4.76)$$

η αντίστοιχη η **συνάρτηση πυκνότητας** της επεκταμένης κατανομής Weibull είναι ίση με

$$g(t) = \lambda\beta \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] \exp\left\{\lambda\alpha \left(1 - \exp\left[\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]\right)\right\}. \quad (4.77)$$

Το στήριγμα της επεκταμένης κατανομής Weibull είναι το διάστημα $[0, \infty)$. Οι Tang et al. (2003) μελέτησαν τις πιθανές μορφές καθώς επίσης και τη συμπεριφορά των ακραίων τιμών της συνάρτησης πυκνότητας του μοντέλου. Έτσι, παραγωγίζοντας τη σχέση (4.77) ως προς t δίνεται ότι

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\lambda\beta}{\alpha} e^{M(t)} T^{\beta-2} \left[\beta - 1 + \beta T^\beta (1 - \lambda\alpha e^{T^\beta}) \right]$$

όπου

$$M(t) = \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta + \lambda\alpha \left(1 - \exp\left[\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]\right) \text{ και } T = \frac{t}{\alpha}.$$

Το πρόσημο της παραπάνω σχέσης εξαρτάται από τη σχέση

$$K(t) = \beta - 1 + \beta T^\beta (1 - \lambda\alpha e^{T^\beta}).$$

Η παράγωγος της $K(t)$ ως προς t δίνεται από τη σχέση

$$\frac{dK(t)}{dt} = \frac{\beta^2}{\alpha} T^{\beta-1} (1 - \lambda\alpha e^{T^\beta} - \lambda\alpha\beta T^\beta e^{T^\beta}).$$

Έστω ότι $s(t) = \frac{\beta^2 t^{\beta-1}}{\alpha^\beta}$ και $C(t) = 1 - \lambda\alpha e^{T^\beta} - \lambda\alpha\beta T^\beta e^{T^\beta}$. Ισχύει ότι $s(t) > 0$ για κάθε $t > 0$.

Η $C(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0, \infty)$. Ακόμα, $C(0) = 1 - \lambda\alpha$ και $C(t) < 0$ για μεγάλες τιμές του t . Στην περίπτωση όπου $\lambda\alpha \geq 1$

$$C(0) \leq 0 \Rightarrow C(t) \leq 0 \Rightarrow \frac{dK(t)}{dt} \leq 0$$

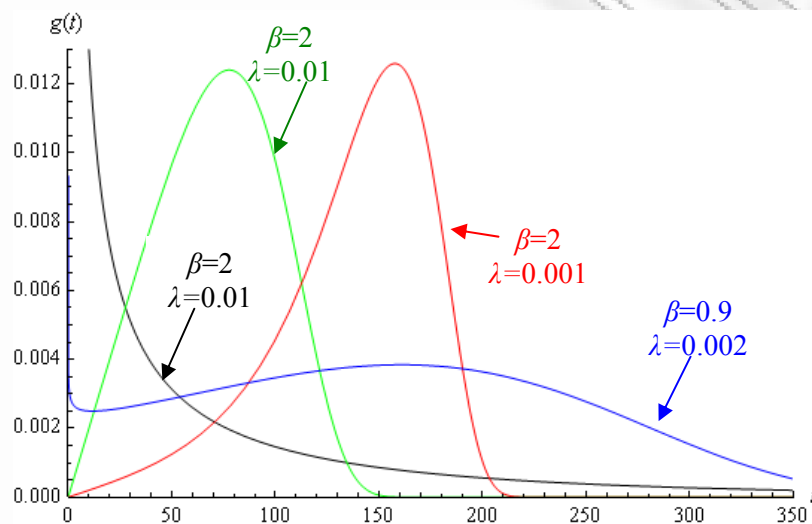
οπότε η $K(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση και $K(0) = \beta - 1$. Επίσης, στην περίπτωση όπου $\lambda\alpha < 1$, $C(0) \Rightarrow K(t)$ είναι μονοκόρυφη συνάρτηση και $K(0) = \beta - 1$. Με βάση τα παραπάνω συνοψίζουμε ότι:

- Περίπτωση 1. $\lambda\alpha \geq 1$ (ή $\lambda\alpha = \eta \geq 1$)
 - αν $\beta > 1$, $K(0) > 0 \Rightarrow g(t)$ είναι μονοκόρυφη ή
 - αν $0 < \beta \leq 1$, $K(0) \leq 0 \Rightarrow K(t) \leq 0 \Rightarrow \frac{dg(t)}{dt} \leq 0 \Rightarrow g(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση.
- Περίπτωση 2. $\lambda\alpha < 1$ (ή $\lambda\alpha = \eta < 1$)

- αν $\beta > 1$, $K(0) > 0$ και η συνάρτηση $K(t)$ είναι αρνητική για μεγάλες τιμές του $t \Rightarrow g(t)$ είναι μονοκόρυφη.
- αν $\beta = 1$, $K(0), K(t)$ είναι μονοκόρυφη $\Rightarrow g(t)$ είναι φθίνουσα.
- αν $0 < \beta \leq 1$, $K(0) < 0$ και η συνάρτηση $K(t)$ είναι αρνητική για μεγάλες τιμές του $t \Rightarrow g(t)$ είναι φθίνουσα, ή αρχικά φθίνουσα, έπειτα αύξουσα και τελικά φθίνουσα συνάρτηση.

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας (4.77) για διάφορες τιμές των παραμέτρων λ και β κρατώντας την παράμετρο α σταθερή ($\alpha = 100$).

Σχήμα 4.30



Σύμφωνα με τη συνάρτηση πυκνότητας (4.77), οι πιθανές μορφές των ουρών της ταξινομούνται ως εξής:

- $\beta > 1$, $g(t)$ είναι μονοκόρυφη και $g(t) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow 0$.
- $\beta = 1$, $g(t) \rightarrow \lambda$ καθώς $t \rightarrow 0$, επομένως η συνάρτηση πυκνότητας παρουσιάζει ψηλές ουρές στα αριστερά της.
- $0 < \beta < 1$, $g(t) \rightarrow \infty$ καθώς $t \rightarrow 0$, η συνάρτηση πυκνότητας παρουσιάζει μη-φραγμένες ψηλές ουρές στα αριστερά της.

Η **βαθμίδα αποτυχίας** της επεκταμένης κατανομής Weibull βρίσκεται από τον τύπο

$$\lambda(t) = \lambda \beta \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right]. \quad (4.78)$$

Για να μελετήσουμε τη μορφή της βαθμίδας αποτυχίας, αρχικά παραγωγίζουμε ως προς t , έτσι βρίσκουμε ότι

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{\lambda\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-2} \exp\left[\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] \left[\beta\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta + (\beta-1)\right].$$

Παρατηρούμε ότι η μορφή της βαθμίδας αποτυχίας (4.78) εξαρτάται από την παράμετρο σχήματος β . Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Περίπτωση 1. $\beta \geq 1$

- για κάθε $t > 0$, $\lambda'(t) > 0$, οπότε η βαθμίδα αποτυχίας είναι αύξουσα συνάρτηση του t , δηλαδή *IFR*.
- $\lambda(0) = 0$, όταν $\beta > 1$ και $\lambda(0) = \lambda$, όταν $\beta = 1$.
- $\lambda(t) \rightarrow +\infty$ καθώς $t \rightarrow +\infty$.

- Περίπτωση 2. $\beta < 1$

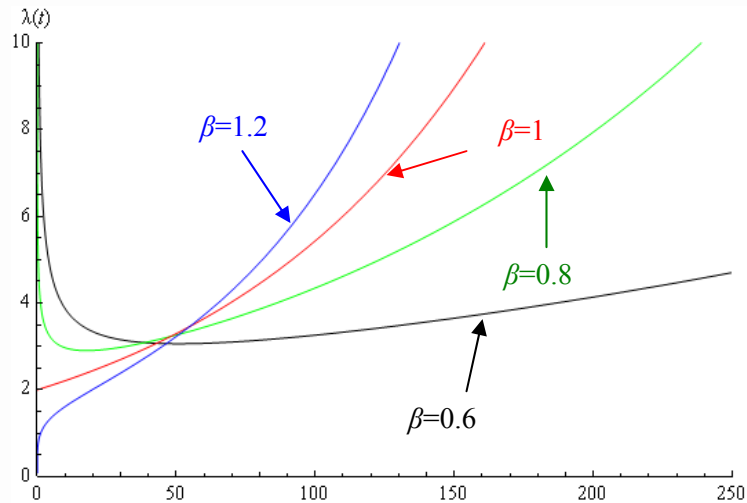
- έστω $\lambda(t^*) = 0$ τότε $\beta\left(\frac{t^*}{\alpha}\right)^\beta + \beta - 1 = 0 \Rightarrow t^* = \alpha\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$. Παρατηρούμε ότι όταν

$\beta < 1$, το t^* υπάρχει και είναι πεπερασμένο. Στην περίπτωση όπου, $t < t^*$, $\lambda'(t) < 0$, δηλαδή η βαθμίδα αποτυχίας είναι φθίνουσα και στην περίπτωση όπου, $t > t^*$, $\lambda'(t) > 0$, δηλαδή η βαθμίδα αποτυχίας είναι αύξουσα συνάρτηση. Δηλαδή, η $\lambda(t)$ παρουσιάζει τη μορφή BC (*bathhtub curve*).

- $\lambda(t) \rightarrow +\infty$ καθώς $t \rightarrow 0$ ή $t \rightarrow +\infty$
- το σημείο καμπής t^* αυξάνει καθώς η παράμετρος σχήματος β μειώνεται από το 1 στο 0.

Παρακάτω δίνεται το γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας (4.78) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β κρατώντας τις παραμέτρους α και λ σταθερές ($\alpha = 100$, $\lambda = 2$).

Σχήμα 4.31



Σχέση της επεκταμένης κατανομής Weibull με άλλα μοντέλα

1. Όταν $\alpha = 1$ το μοντέλο που προκύπτει μελετήθηκε από τον Chen (2000) και έχει συνάρτηση κατανομής που δίνεται από τη σχέση

$$G(t) = 1 - \exp\left\{\lambda \left[1 - \exp(t^\beta)\right]\right\}$$

2. Όταν η παράμετρος κλίμακας α παίρνει μεγάλες τιμές ($\alpha \rightarrow \infty$) τότε προκύπτει, ασυμπτωτικά, το μοντέλο της κλασικής κατανομής Weibull. Συγκεκριμένα

$$1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} \cong 1 - \left[1 + \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta + o(t^\beta)\right] \cong -\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta,$$

σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση κατανομής θα δίνεται από τη σχέση

$$G(t) = 1 - \exp\left\{\lambda \alpha \left[1 - \exp\left[\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]\right]\right\} \cong 1 - \exp\left[-\lambda \alpha^{1-\beta} t^\beta\right],$$

δηλαδή προκύπτει το μοντέλο της κλασικής κατανομής Weibull (2.1) με παράμετρο σχήματος β και παράμετρο κλίμακας $\frac{\alpha}{\sqrt[\beta]{\lambda \alpha}}$.

3. Όταν $\lambda \alpha = 1$ προκύπτει το μοντέλο της εκθετικής δύναμης (*exponential power model*), που μελετήθηκε από τους Smith και Bain (1975).

Μέτρα θέσης και διασποράς

Ο Nadarajah (2005) απέδειξε ότι αν μια τυχαία μεταβλητή T με συνάρτηση πυκνότητας που δίνεται από τη σχέση (4.77) και $k/\beta = n$ ένας ακέραιος αριθμός τότε η k -τάξης ροπή γύρω από το μηδέν δίνεται από τη σχέση

$$E(T^k) = n\alpha^k \exp(\lambda\alpha) \frac{\partial^{n-1}(\lambda\alpha)^{-\nu} \Gamma(\nu, \lambda\alpha)}{\partial \nu^{n-1}},$$

όπου $n = 1, 2, \dots$, η παράγωγος υπολογίζεται καθώς $\nu \rightarrow 0$.

Το p -ποσοστημόριο υπολογίζεται από τη σχέση

$$P(T \leq t_p) = G(t_p) = p \Leftrightarrow 1 - \exp\left\{\lambda\alpha \left[1 - \exp\left[\left(\frac{t_p}{\alpha}\right)^\beta\right]\right]\right\} = p \Leftrightarrow t_p = \alpha \left\{\ln\left[1 - \frac{\ln(1-p)}{\lambda\alpha}\right]\right\}^{\frac{1}{\beta}}.$$

WPP γράφημα

Σύμφωνα με το μετασχηματισμό Weibull (2.16), η σχέση (4.76) μετασχηματίζεται στη σχέση

$$\begin{aligned} y = \ln[-\ln(1-F(t))] &= \ln\left\{-\lambda\alpha \left[1 - \exp\left[\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]\right]\right\} = \ln\left\{\lambda\alpha \left[\exp\left[\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] - 1\right]\right\} \Rightarrow \\ y &= \ln(\lambda\alpha) + \ln\left(\exp\left[\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] - 1\right) \end{aligned} \quad (4.79)$$

και $t = e^x$.

Για μικρές τιμές του t ($t \rightarrow 0$), $\exp\left[\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] - 1 \cong \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta$, έτσι η σχέση (4.79) προσεγγίζεται

από μια ευθεία γραμμή που δίνεται από τη σχέση

$$y = \beta x + \ln(\lambda\alpha^{1-\beta}). \quad (4.80)$$

Για μεγάλες τιμές του t ($t \rightarrow \infty$), η ποσότητα $\ln\left(\exp\left[\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] - 1\right)$ που βρίσκεται στη σχέση

(4.79) μπορεί να προσεγγισθεί από τη σχέση

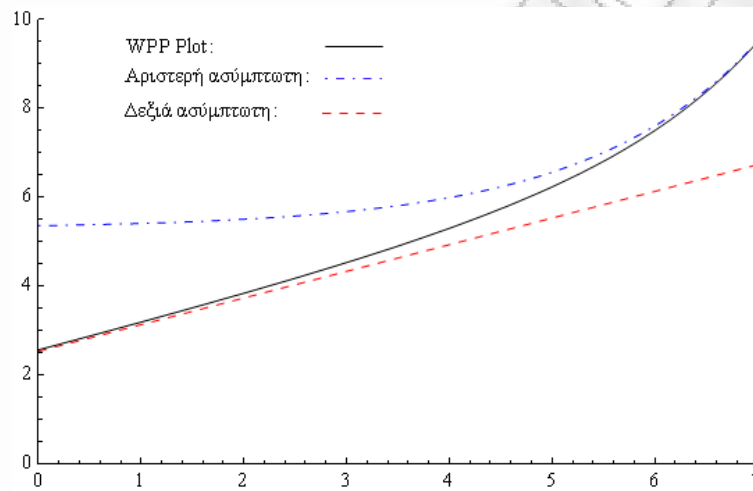
$$\ln\left(\exp\left[\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] - 1\right) \cong \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta.$$

Η ποσότητα y (ως συνάρτηση του t) μπορεί να προσεγγισθεί από την καμπύλη $\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta$, έτσι η ποσότητα $\ln y$ για μεγάλες τιμές του t ($t \rightarrow \infty$), είναι μια γραμμική εξίσωση του t συγκεκριμένα

$$\ln y = \beta \ln t - \beta \ln \alpha . \quad (4.81)$$

Παρακάτω δίνεται ένα παράδειγμα του WPP plot με $\alpha = 100$, $\beta = 0.6$, $\lambda = 2$.

Σχήμα 4.32



Στατιστική συμπερασματολογία

A. Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας της σχέσης (4.77) είναι ίση με

$$L(\alpha, \beta, \lambda) = \lambda^n \beta^n \left[\prod_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha} \right) \right]^{\beta-1} \exp \left[\frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n (t_i)^\beta \right] \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda \alpha \left(1 - \exp \left[\left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right] \right) \right\}$$

και αντίστοιχο πιθανολογάρημο

$$l(\alpha, \beta, \lambda) = n \ln \lambda - n \ln \beta + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln \frac{t_i}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n (t_i)^\beta + \sum_{i=1}^n \lambda \alpha \left(1 - \exp \left[\left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right] \right)$$

Για την εύρεση των εκτιμητριών μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων α , β και λ θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta, \lambda)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial l(\alpha, \beta, \lambda)}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial l(\alpha, \beta, \lambda)}{\partial \lambda} = 0.$$

Έτσι, έχουμε

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} + \sum_{i=1}^n \alpha \left[1 - \exp\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \right] = 0 \Rightarrow \lambda = - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \alpha \left[1 - \exp\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \right]}$$

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta, \lambda)}{\partial \alpha} = - \frac{n(\beta-1)}{\alpha} - \sum_{i=1}^n \frac{\beta t_i \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{\beta-1}}{\alpha^2} + \sum_{i=1}^n \left\{ \left[1 - \exp\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \right] \lambda + \frac{\beta \lambda t_i \exp\left[\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right] \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{\beta-1}}{\alpha} \right\} = 0$$

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta, \lambda)}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln \frac{t_i}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \ln \frac{t_i}{\alpha} \right\} - \sum_{i=1}^n \left\{ \alpha \lambda \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \ln \left(\frac{t_i}{\alpha}\right) \cdot \exp\left[\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right] \right\} = 0.$$

Το παραπάνω σύστημα δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά, χρειάζεται να χρησιμοποιηθούν επαναληπτικές μέθοδοι για τη λύση του.

Β. Γραφική μέθοδος

Αφού έχουμε επιλέξει ως κατάλληλο μοντέλο εκείνο της επεκταμένης κατανομής Weibull, τότε οι παράμετροι του μοντέλου (α , β και λ) μπορούν να εκτιμηθούν ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1^ο: Η αριστερή ασύμπτωτη του WPP γραφήματος δίνεται από τη σχέση (4.80). Η κλίση της ευθείας αυτής θα μας δώσει την εκτίμηση $\hat{\beta}$ της παραμέτρου β , ενώ η τεταγμένη, $\ln(\lambda \alpha^{1-\beta})$, θα μας δώσει την εκτίμηση της παραμέτρου λ , $\hat{\lambda}$.

Βήμα 2^ο: Η δεξιά ασύμπτωτη του WPP γραφήματος είναι η ευθεία που δίνεται από τη σχέση (4.81). Η τεταγμένη θα μας δώσει την εκτίμηση $\hat{\alpha}$ της παραμέτρου α .

Οι Tang et al (2003) μελέτησαν δυο ελέγχους υποθέσεων σχετικά με το μοντέλο της επεκταμένης κατανομής Weibull. Συγκεκριμένα:

1. Στατιστικός έλεγχος για την παράμετρο κλίμακας α . Η μηδενική υπόθεση $H_0: \alpha = 1$, δηλαδή το μοντέλο Chen (2000), έναντι $H_1: \alpha \neq 1$, επεκταμένη κατανομή Weibull.

2. Στατιστικός έλεγχος που αφορά την ποσότητα $\lambda \alpha = \eta = 1$. Η μηδενική υπόθεση $H_0: \eta = \lambda \alpha = 1$, δηλαδή το μοντέλο της εκθετικής δύναμης (*exponential power*) των Smith and Bain (1975), έναντι $H_1: \eta = \lambda \alpha \neq 1$, επεκταμένη κατανομή Weibull.

4.14 Εφαρμογή με χρόνους ζωής που ακολουθούν την BC

Σε αυτή την παράγραφο θα προσαρμοστούν χρόνοι ζωής μονάδων, που ακολουθούν την BC, σε μοντέλα κατανομών τα οποία μπορούν να περιγράψουν ολόκληρο το χρόνο ζωής τους.

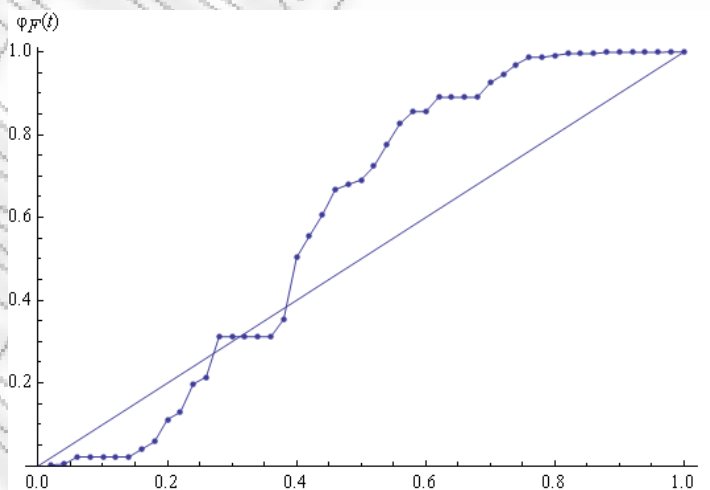
Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο χρόνος ζωής 50 μονάδων μέχρι την αποτυχία τους όπως παρουσιάζονται στην εργασία του Aarset (1987).

Πίνακας 4.1

r	t_r	r	t_r	r	t_r	r	t_r	r	t_r
1	0.1	11	7	21	36	31	67	41	84
2	0.2	12	11	22	40	32	67	42	84
3	1	13	12	23	45	33	67	43	84
4	1	14	18	24	46	34	67	44	85
5	1	15	18	25	47	35	72	45	85
6	1	16	18	26	50	36	75	46	85
7	1	17	18	27	55	37	79	47	85
8	2	18	18	28	60	38	82	48	85
9	3	19	21	29	63	39	82	49	86
10	6	20	32	30	63	40	83	50	86

Αρχικά θα μελετηθεί αν οι χρόνοι ζωής των μονάδων, που δίνονται στον Πίνακα 4.1, ακολουθούν την BC. Η μέθοδος που θα ακολουθηθεί είναι το TTT γράφημα των χρόνων ζωής. Το TTT γράφημα δίνεται παρακάτω

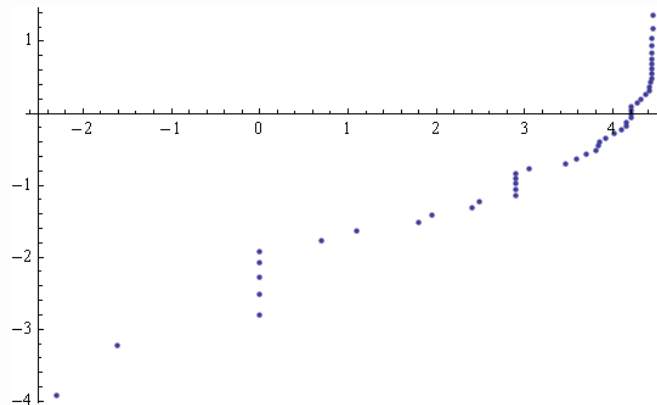
Σχήμα 4.33



Προκύπτει από το Σχήμα 4.33 ότι πράγματι οι χρόνοι ζωής που δίνονται στον Πίνακα 4.1 ακολουθούν την BC, Aarset (1987).

Έπειτα θα κατασκευαστεί το WPP γράφημα των δεδομένων του Πίνακα 4.1

Σχήμα 4.34



Οι εντολές που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι εξής:

```
s = {0.1, 0.2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 6, 7, 11, 12, 18, 18, 18, 18, 18, 21, 32, 36, 40, 45, 46,
47, 50, 55, 60, 63, 63, 67, 67, 67, 67, 72, 75, 79, 82, 82, 83, 84, 84, 84, 85, 85, 85,
85, 85, 86, 86};
t = Sort[s]; y = {};
For[i = 1, i ≤ Length[t], i++, AppendTo[y, Log[-Log[1 - (i / (Length[t] + 1))]]]]];
data = Table[{Log[t[[i]]], y[[i]]}, {i, Length[t]}];
ListPlot[data, AxesOrigin → {-2.5, 0}]
```

Στη συνέχεια θα προσαρμοστούν τα δεδομένα του Πίνακα 4.1 σε μοντέλα κατανομών τα οποία μπορούν να περιγράψουν χρόνους ζωής που ακολουθούν την BC. Τα μοντέλα που θα χρησιμοποιηθούν είναι η τροποποιημένη κατανομή Weibull (μοντέλο $\Pi(\beta)$ -3) και η επεκταμένη Weibull (μοντέλο $\Pi(\beta)$ -13).

- Τροποποιημένη κατανομή Weibull

Θα εκτιμηθούν οι παράμετροι του μοντέλου. Αρχικά θα υπολογισθούν οι εκτιμήτριες του μοντέλου με τη γραφική μέθοδο. Θα εφαρμόσουμε πολλαπλή παλινδρόμηση χρησιμοποιώντας τις ποσότητες $x_1 = x$ και $x_2 = e^x$ ούτως ώστε το WPP γράφημα να μπορεί να παρασταθεί ως γραμμική εξίσωση:

$$y = \ln \lambda + \beta x_1 + \nu x_2,$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει

Πίνακας 4.2

Coefficients ^a						
Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	-2,435	,079		-30,684	,000
	exp(x)	,015	,002	,423	6,462	,000
	x	,389	,043	,585	8,937	,000

a. Dependent Variable: y

Το εκτιμώμενο μοντέλο που προκύπτει είναι το εξής:

$$y = -2.435 + 0.389x + 0.01512 \exp(x).$$

Έτσι, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων θα είναι ίσες με

$$\ln \lambda = -2.435 \Rightarrow \hat{\lambda} = \exp(-2.435) = 0.0876, \hat{\beta} = 0.389 \text{ και } \hat{\nu} = 0.01512.$$

Χρησιμοποιώντας ως πρώτες προσεγγίσεις τις εκτιμήσεις που βρήκαμε από τη γραφική μέθοδο $(\hat{\lambda}, \hat{\beta}, \hat{\nu}) = (0.0876, 0.389, 0.01512)$, προκύπτει ότι οι εκτιμήτριες των παραμέτρων με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας θα είναι

$$(\hat{\lambda}, \hat{\beta}, \hat{\nu}) = (0.0624011, 0.354803, 0.0233175).$$

Παρατηρούμε ότι η εκτιμήτρια της παραμέτρου β είναι $\hat{\beta} = 0.354803 < 1$, άρα η προσαρμοσμένη βαθμίδα αποτυχίας στα δεδομένα του Πίνακα 4.1 θα έχει μορφή BC. Το σημείο καμπής της $\lambda(t)$ βρίσκεται από

$$t^* = \frac{\sqrt{\beta} - \beta}{\nu} = \frac{\sqrt{0.354803} - 0.354803}{0.0233175} \cong 10.3292.$$

Για τον υπολογισμό των εκτιμητριών μέγιστης πιθανοφάνειας χρησιμοποιήθηκαν οι εξής εντολές:

```
t = {0.1, 0.2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 6, 7, 11, 12, 18, 18, 18, 18, 18, 21, 32, 36, 40, 45,
46, 47, 50, 55, 60, 63, 63, 67, 67, 67, 67, 72, 75, 79, 82, 82, 83, 84, 84, 84, 85,
85, 85, 85, 85, 86, 86};
FindRoot[{(Length[t] / 1) - Sum[Exp[v * t[[i]]] * t[[i]]^b, {i, 1, Length[t]}] == 0,
Sum[(1 / (b + (v * t[[i]])))], {i, 1, Length[t]}] + Sum[Log[t[[i]]], {i, 1, Length[t]}] -
1 * Sum[Exp[v * t[[i]]] * t[[i]]^b * Log[t[[i]]], {i, 1, Length[t]}] == 0,
Sum[t[[i]] / (b + (v * t[[i]])), {i, 1, Length[t]}] + Sum[t[[i]], {i, 1, Length[t]}] -
1 * Sum[Exp[v * t[[i]]] * t[[i]]^(b + 1), {i, 1, Length[t]}] == 0},
{{1, 0.0876}, {b, 0.389}, {v, 0.01512}}]
```

- Επεκταμένη Weibull

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας οι εκτιμήσεις των παραμέτρων του μοντέλου θα είναι

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}) = (0.000012, 0.137923, 24.3368).$$

Το σημείο καμπής της $\lambda(t)$ βρίσκεται από

$$t^* = \hat{\alpha} \left(\frac{1 - \hat{\beta}}{\hat{\beta}} \right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}} = (0.000012) \left(\frac{1 - 0.137923}{0.137923} \right)^{\frac{1}{0.137923}} \cong 7.49.$$

Οι εντολές που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι εξής:

```
t = {0.1, 0.2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 6, 7, 11, 12, 18, 18, 18, 18, 18, 21, 32, 36, 40, 45,
46, 47, 50, 55, 60, 63, 63, 67, 67, 67, 67, 72, 75, 79, 82, 82, 83, 84, 84, 84, 85,
85, 85, 85, 85, 86, 86};
FindRoot[{(Length[t] / 1) - Sum[a * Exp[(t[[i]] / a) ^ b], {i, 1, Length[t]}] == 0,
- ((Length[t] * (b - 1)) / a) - Sum[(b * t[[i]] * (t[[i]] / a) ^ (b - 1)) / a ^ 2, {i, 1, Length[t]}] +
Sum[((1 - Exp[(t[[i]] / a) ^ b]) * 1) +
((b * 1 + t[[i]] * Exp[(t[[i]] / a) ^ b] * (t[[i]] / a) ^ (b - 1)) / a), {i, 1, Length[t]}] == 0,
(Length[t] / b) + Sum[Log[t[[i]] / a], {i, 1, Length[t]}] +
Sum[(t[[i]] / a) ^ b * Log[t[[i]] / a], {i, 1, Length[t]}] -
Sum[a * 1 * Exp[(t[[i]] / a) ^ b] * (t[[i]] / a) ^ b * Log[t[[i]] / a], {i, 1, Length[t]}] == 0},
{{a, 1}, {b, 1}, {1, 1}}, MaxIterations -> 1000]
```

Για τη σύγκριση των μοντέλων θα χρησιμοποιηθεί το κριτήριο Akaike (1974) (*Akaike information criterion, AIC*)

$$AIC = 2k - 2 \ln(L),$$

όπου k το πλήθος των παραμέτρων του μοντέλου και L η μέγιστη τιμή της συνάρτησης πιθανοφάνειας του μοντέλου. Έτσι, για την τροποποιημένη κατανομή Weibull προκύπτει ότι

$$AIC = 460.31,$$

ενώ για την επεκταμένη Weibull βρίσκεται ότι

$$AIC = 479.469.$$

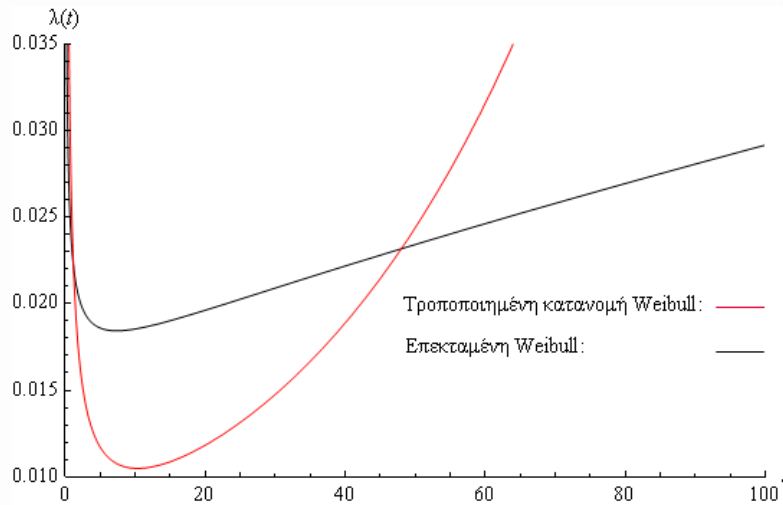
Επιλέγεται το μοντέλο που παρουσιάζει τη μικρότερη τιμή AIC . Άρα, επιλέγεται το μοντέλο της τροποποιημένης κατανομής Weibull. Οι εντολές που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι εξής:

```
(*--AIC MODIFIED WEIBULL--*)
t = {0.1, 0.2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 6, 7, 11, 12, 18, 18, 18, 18, 18, 21, 32, 36, 40, 45,
46, 47, 50, 55, 60, 63, 63, 67, 67, 67, 67, 72, 75, 79, 82, 82, 83, 84, 84, 84, 85,
85, 85, 85, 85, 86, 86};
h[l_, b_, v_] = Length[t] * Log[l] + Sum[Log[b + v * t[[i]]], {i, 1, Length[t]}] +
(b - 1) * Sum[Log[t[[i]]], {i, 1, Length[t]}] + v * Sum[t[[i]], {i, 1, Length[t]}] -
1 * Sum[Exp[v * t[[i]]] * t[[i]] ^ b, {i, 1, Length[t]}];
2 * 3 - 2 * h[0.0624011, 0.354803, 0.0233175]
```

```
(*--AIC Weibull Extension--*)
t = {0.1, 0.2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 6, 7, 11, 12, 18, 18, 18, 18, 18, 21, 32, 36, 40, 45,
46, 47, 50, 55, 60, 63, 63, 67, 67, 67, 67, 72, 75, 79, 82, 82, 83, 84, 84, 84, 85,
85, 85, 85, 85, 86, 86};
s[a_, b_, l_] = Length[t] * Log[l] + Length[t] * Log[b] +
(b - 1) * Sum[Log[t[[i]] / a], {i, 1, Length[t]}] + Sum[(t[[i]] / a) ^ b, {i, 1, Length[t]}] +
Sum[l * a * (1 - Exp[(t[[i]] / a) ^ b]), {i, 1, Length[t]}];
2 * 3 - 2 * s[0.000012445486428476273, 0.13792312886779937, 24.336766978974087]
```

Παρακάτω δίνεται το γράφημα των βαθμίδων αποτυχίας των δυο μοντέλων

Σχήμα 4.35



4.15 Σύνοψη - Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάστηκαν διάφορες κατανομές οι οποίες πλησιάζουν προς την κατανομή Weibull. Πολλές από αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ερμηνεύσουν το χρόνο ζωής μιας μονάδας (ή συστήματος), την αντοχή υλικών κ.α. Παρακάτω θα γίνει αναφορά σε εκείνες τις κατανομές που η βαθμίδα αποτυχίας τους έχει τη μορφή BC, RBC ή MBC.

Η εκτεταμένη κατανομή Weibull με συνάρτηση πυκνότητας που δίνεται από τον τύπο

$$g(t) = \frac{\frac{\nu\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]}{\left\{1 - (1-\nu) \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]\right\}^2} \quad \begin{array}{l} t \geq 0 \\ \nu > 0 \end{array}$$

και βαθμίδα αποτυχίας ίση με

$$\lambda(t) = \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1}}{1 - (1-\nu) \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]},$$

παρουσιάζει τη μορφή MBC όταν $\beta < 1$ και $\nu > 1$.

Η εκθετική κατανομή Weibull με συνάρτηση πυκνότητας που δίνεται από τον τύπο

$$g(t) = \frac{\beta\nu}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] \left[1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]\right]^{\nu-1}, \quad \begin{array}{l} t \geq 0 \\ \alpha > 0, \beta > 0, \nu > 0 \end{array}$$

και βαθμίδα αποτυχίας ίση με

$$\lambda(t) = \frac{\beta v \left(1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right] \right)^{v-1} \exp \left(- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right) \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1}}{\alpha \left[1 - \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right) \right)^v \right]},$$

παρουσιάζει τη μορφή BC όταν $\beta > 1$ και $\beta v < 1$, ενώ όταν $\beta < 1$ και $\beta v > 1$ παρουσιάζει τη μορφή RBC.

Η τροποποιημένη κατανομή Weibull με συνάρτηση πυκνότητας που δίνεται από τον τύπο

$$g(t) = \lambda(\beta + vt)t^{\beta-1}e^{vt} \exp(-\lambda t^\beta e^{vt}), \quad t \geq 0$$

$\lambda > 0, \beta \geq 0$ και $v \geq 0$

και βαθμίδα αποτυχίας ίση με

$$\lambda(t) = \lambda(\beta + vt)t^{\beta-1}e^{vt},$$

παρουσιάζει τη μορφή BC όταν $0 < \beta < 1$.

Η γενικευμένη οικογένεια Weibull με συνάρτηση πυκνότητας που δίνεται από τον τύπο

$$g(t) = \frac{\left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1}}{\frac{\alpha}{\beta} \left[1 - v \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right]} \left[1 - v \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right]^{\frac{1}{\beta}}, \quad t \geq 0$$

$\alpha, \beta > 0$ και $v \in \mathbb{R}$

και βαθμίδα αποτυχίας ίση με

$$\lambda(t) = \frac{\left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1}}{\frac{\alpha}{\beta} \left[1 - v \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right]},$$

παρουσιάζει τη μορφή BC όταν $0 < \beta < 1$ και $v > 0$, ενώ παρουσιάζει τη μορφή RBC όταν $\beta > 1$ και $v < 0$.

Η γενικευμένη τριπαραμετρική κατανομή Γάμμα με συνάρτηση πυκνότητας που δίνεται από τον τύπο

$$g(t) = \frac{\beta t^{\beta k-1}}{\alpha^{\beta k} \Gamma(k)} \exp \left[- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right], \quad t \geq 0$$

$\alpha, \beta > 0$ και $k > 0$

και βαθμίδα αποτυχίας ίση με

$$\lambda(t) = \frac{\beta t^{\beta k - 1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]}{\alpha^{\beta k} \left(\Gamma(k) - \Gamma_{(t/\alpha)^\beta}(k)\right)},$$

όταν $\frac{1-k\beta}{\beta(\beta-1)} > 0$ παρουσιάζει τη μορφή BC για $\beta > 1$, ενώ παρουσιάζει τη μορφή RBC για $0 < \beta < 1$.

Οι κατανομές Weibull με τέσσερις ή πέντε παραμέτρους με συναρτηήσεις πυκνότητας που δίνονται από τους τύπους αντίστοιχα

$$g_4(t) = \frac{\lambda\beta(b-a) \exp\left\{-\lambda\left(\frac{t-a}{b-t}\right)^\beta\right\} (t-a)^{\beta-1}}{(b-t)^{\beta+1}}, \quad 0 \leq a \leq t \leq b < \infty, \quad \lambda, \beta > 0,$$

$$g_5(t) = \frac{\lambda(t-a)^{\beta_1-1} [(b\beta_1 - a\beta_2) + (\beta_2 - \beta_1)t]}{(b-t)^{\beta_2+1}} \exp\left\{-\lambda\left(\frac{t-a}{b-t}\right)^{\beta_1}\right\}, \quad 0 \leq a \leq t \leq b < \infty, \quad \lambda, \beta_1, \beta_2 > 0,$$

και βαθμίδα αποτυχίας ίση με

$$\lambda_4(t) = \frac{\lambda\beta(b-a)(t-a)^{\beta-1}}{(b-t)^{\beta+1}}, \quad \lambda_5(t) = \frac{\lambda(t-a)^{\beta_1-1} [(b\beta_1 - a\beta_2) + (\beta_2 - \beta_1)t]}{(b-t)^{\beta_2+1}},$$

η $\lambda_4(t)$ έχει τη μορφή BC όταν $0 < \beta < 1$, ενώ η $\lambda_5(t)$ έχει τη μορφή BC όταν $0 < \beta_1 < 1$ και $0 < \beta_2 < 1$.

Η διπλά περικομμένη κατανομή Weibull με συνάρτηση πυκνότητας που δίνεται από τον τύπο

$$g_{DT}(t) = \frac{\frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[\left(\frac{t_l-\tau}{\alpha}\right)^\beta - \left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^\beta\right]}{1 - \exp\left[\left(\frac{t_l-\tau}{\alpha}\right)^\beta - \left(\frac{t_r-\tau}{\alpha}\right)^\beta\right]}, \quad \tau \leq t_l \leq t \leq t_r < \infty$$

και βαθμίδα αποτυχίας ίση με

$$\lambda_{DT}(t) = \frac{f(t)}{F(t_r) - F(t)},$$

όπου f και F η συνάρτηση πυκνότητας και συνάρτηση κατανομής της κλασικής κατανομής Weibull αντίστοιχα. Η βαθμίδα αποτυχίας του μοντέλου παρουσιάζει τη μορφή BC όταν $0 < \beta < 1$.

Η γενικευμένη τριπαραμετρική κατανομή Γάμμα με συνάρτηση πυκνότητας που δίνεται από τον τύπο

$$g(t) = \lambda \beta \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] \exp\left\{\lambda \alpha \left(1 - \exp\left[\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]\right)\right\} \quad \begin{matrix} t \geq 0 \\ \lambda, \alpha, \beta > 0 \end{matrix}$$

και βαθμίδα αποτυχίας ίση με

$$\lambda(t) = \lambda \beta \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right],$$

παρουσιάζει τη μορφή BC όταν $0 < \beta < 1$.

Υπενθυμίζουμε ότι η αντίστροφη κατανομή Weibull που αναφέρθηκε στο 2^ο κεφάλαιο με συνάρτηση πυκνότητας που δίνεται από τον τύπο

$$g(t) = \beta \alpha^\beta t^{-\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right], \quad \begin{matrix} t > 0 \\ \alpha > 0, \beta > 0 \end{matrix}$$

και βαθμίδα αποτυχίας ίση με

$$\lambda(t) = \frac{\beta \alpha^\beta t^{-\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]}{1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]},$$

παρουσιάζει τη μορφή RBC $\forall \alpha, \beta > 0$.

Παράρτημα

Εντολές στο *Mathematica*

Στο παράρτημα αυτό δίνονται οι εντολές, οι οποίες έχουν υλοποιηθεί στο μαθηματικό πακέτο *Mathematica*, προκειμένου να κατασκευαστούν οι γραφικές παραστάσεις που περιέχονται στη διπλωματική εργασία.

- Κατασκευή σχήματος 1.2

```
Plot[f[x_]=x^2, {x, 0, 1}, PlotStyle->{Black}, Ticks->None, AxesLabel->{t, λ[t]}, PlotRange->{{0, 1.5}, {0, 1}}, PlotLabel->IFR, LabelStyle->{Italic}]
```

- Κατασκευή σχήματος 1.3

```
Plot[f[x_]=1/x, {x, 0, 6}, PlotStyle->{Black}, Ticks->None, AxesLabel->{t, λ[t]}, PlotRange->{{0, 0.8}, {0, 30}}, PlotLabel->DFR, LabelStyle->{Italic}]
```

- Κατασκευή σχήματος 1.4

```
Plot[g[x_]=2, {x, 0, 3}, PlotStyle->{Black}, Ticks->{None, {{2, λ}}}, AxesLabel->{t, λ[t]}, PlotRange->{{0, 3}, {0, 3}}, PlotLabel->T~Ekθ[λ], LabelStyle->{Italic}]
```

- Κατασκευή σχήματος 1.5

```
f[t_, a_, b_, l_, b1_, b2_]=(1*(t-a)^(b1-1)*(b*b1-a*b2+t*(b2-b1)))/(b-t)^(b2+1);  
Plot[f[t, 0, 1, 1, 0.4, 0.2], {t, 0, 1}, PlotStyle->{Black}, AxesLabel->{t, λ[t]}, PlotRange->{{0, 0.89}, {0, 6}}, Ticks->{{0}, None}, PlotLabel->Bathtub Curve]
```

- Κατασκευή σχήματος 1.6

```
Plot[Piecewise[{{5-4*t, 0<=t<=1}, {5-4*1, 1<=t<=3}, {1+1.3*(t-3), 3<=t}}, {t, 0, 5}, PlotRange->{{0, 5}, {0, 6}}, PlotStyle->{Black}, AxesLabel->{t, λ[t]}, Ticks->{{0}, None}]
```

Κατασκευή σχήματος 1.3

- Κατασκευή σχήματος 1.8

```
f[t_, a_, b_] := (b*a^b*t^(-b-1)*Exp[-(t/a)^(-b)]) / (1-Exp[-(t/a)^(-b)]);
Plot[f[t, 1, 1], {t, 0, 5}, PlotStyle->{Black}, AxesLabel->{t, λ[t]}, Ticks->None]
```

- Κατασκευή σχήματος 1.9

```
Plot[Piecewise[{{3+4*t, 0<=t<=1}, {3+4*1, 1<=t<=3}, {7-1.5*(t-3), 3<=t}}, {t, 0, 5.5}, PlotRange->{{0, 6}, {0, 9}}, PlotStyle->{Black}, AxesLabel->{t, λ[t]}, Ticks->None]
```

- Κατασκευή σχήματος 1.10

```
f[t_, a_, b_, k_] := 0.5*b*(t^(k-1)+t^(-k-1))*Exp[a+b*((t^k-t^(-k))/(2*k))];
Plot[f[t, 0, 0.5, 1.5], {t, 0, 5}, PlotRange->{{0, 5}, {0, 2.5}}, PlotStyle->{Black}, AxesLabel->{t, λ[t]}, Ticks->None, PlotLabel->MBC, LabelStyle->{Italic}]
```

- Κατασκευή σχήματος 1.11

```
h[l_]:=Exp[-1*t];
Plot[{h[1], h[2], h[3]}, {t, 0, 3}, PlotStyle->{Black, Red, Green}, AxesLabel->{t, R[t]}]
g[l_]:=D[1-Exp[-1*t], t];
Plot[{g[1], g[2], g[3]}, {t, 0, 3}, PlotStyle->{Black, Red, Green}, AxesLabel->{t, f[t]}, PlotRange->{{0, 3}, {0, 3}}]
v[l_]:=1;
Plot[{v[1], v[2], v[3]}, {t, 0, 3}, PlotStyle->{Black, Red, Green}, AxesLabel->{t, λ[t]}, PlotRange->{{0, 3}, {0, 3.2}}]
```

- Κατασκευή σχήματος 2.1

```
f[t_, a_, b_] := 1-Exp[-(t/a)^b];
```

```
Plot[{f[t,1,0.5],f[t,1,1],f[t,1,1.5],f[t,1,5]},{t,0,3},AxesOrigin->{0,0},PlotRange->{{0,3},{0,1}},PlotStyle->{Blue,Green,Black,Red},AxesLabel->{t,F[t]}}
```

- Κατασκευή σχήματος 2.2

```
f[t_,a_,b_]=D[1-Exp[-(t/a)^b],t];
Plot[{f[t,1,0.5],f[t,1,1],f[t,1,1.5],f[t,1,5]},{t,0,3},AxesOrigin->{0,0},PlotRange->{{0,3},{0,2}},PlotStyle->{Blue,Black,Green,Red},AxesLabel->{t,f[t]}}
```

- Κατασκευή σχήματος 2.3

```
f[t_,a_,b_]=Exp[-(t/a)^b];
Plot[{f[t,1,0.5],f[t,1,1],f[t,1,1.5],f[t,1,5]},{t,0,3},AxesOrigin->{0,0},PlotStyle->{Blue,Black,Green,Red},AxesLabel->{t,R[t]}}
```

- Κατασκευή σχήματος 2.4

```
f[t_,a_,b_]=D[1-Exp[-(t/a)^b],t]/Exp[-(t/a)^b];
Plot[{f[t,1,0.5],f[t,1,1],f[t,1,1.5],f[t,1,1.2],f[t,1,3]},{t,0,3},PlotStyle->{Blue,Black,Green,Red,Orange},AxesLabel->{t,λ[t]}}
```

- Κατασκευή σχήματος 2.5

```
f[u_,b_]=1-Gamma[1/b,-Log[1-u]]/Gamma[1/b]
Plot[{f[u,10],f[u,3],f[u,2],f[u,1],f[u,0.5],f[u,0.2]},{u,0,1},PlotStyle->{Red,Green,Blue,Black,Gray,Orange},AxesLabel->Automatic]
```

- Κατασκευή σχήματος 2.6

```
s={3.3,3.8,4.2,3.3,2.8,3.0,4.0,2.7,5.2,6.7,6.8,6.8,5.7,8.3,9.2,9.3,6.5,4.2,4.3,3.7,4.0,2.8,3.7,3.3,4.0,4.0,2.0,2.7,2.7,3.3,2.7,2.7,5.8,5.7,6.2,6.5,4.5,5.8,4.8,4.8,5.5,5.7,5.0,4.3,4.0,3.5,5.0,3.7,4.7,4.5,4.2,5.7,2.7,4.3,4.3,4.5,4.5,6.0,10.4,6.7,6.3,9.4,7.7,6.0,8.9,7.7,6.2,5.7,5.7,7.5,7.5,5.3};
```

```
t=Sort[s];y={};
For[i=1,i<=Length[t],i++,AppendTo[y,Log[-Log[1-
(i/(Length[t]+1))]]]]
data=Table[{Log[t[[i]],y[[i]]},{i,Length[t]}];
Needs["LinearRegression`"]
line = Fit[data, {1,x},x]
Regress[data,{1,x},x]
Show[ListPlot[data],Plot[{line},{x,-1,
3}],PlotRange->{{0,3},{-5,5}},AxesOrigin->{0.4,0}]
```

- Κατασκευή σχήματος 3.1

```
a=0.5;b=3.5;c=2;
f[t_]=b*Log[Exp[t]-c]-b*Log[a];
g[t_]=b*t-b*Log[a];
Plot[{f[t],g[t]},{t,-
1,4},GridLines->{{Log[c]},None},PlotStyle->{Black,Dashed},G
ridLinesStyle->Directive[DotDashed]]
```

- Κατασκευή σχήματος 3.2

```
a=1;b=0.5;τ=0;
g[t_]=D[Exp[-((τ-t)/a)^b],t]/(1-Exp[-((τ-t)/a)^b]);
a=1;b=1;τ=0;
h[t_]=D[Exp[-((τ-t)/a)^b],t]/(1-Exp[-((τ-t)/a)^b]);
a=1;b=1.5;τ=0;
s[t_]=D[Exp[-((τ-t)/a)^b],t]/(1-Exp[-((τ-t)/a)^b]);
p1=Plot[g[t],{t,-2,0},PlotStyle->RGBColor[0,0,1]];
p2=Plot[h[t],{t,-2,0},PlotStyle->RGBColor[0,0,0]];
p3=Plot[s[t],{t,-2,0},PlotStyle->RGBColor[1,0,0]];
Show[p1,p2,p3,AxesLabel->{t,λ[t]},AxesOrigin->{-2,0}]
```

- Κατασκευή σχήματος 3.3

```
f[t_,b_]=(b/2)*Abs[t]^(b-1)*Exp[-Abs[t]^b];
Plot[{f[t,0.5],f[t,1],f[t,2]},{t,-3,3},AxesOrigin->{-
3,0},PlotStyle->{Red,Black,Green},PlotRange->{{-
3,3},{0,1}},AxesLabel->{t,g[t]}}
```

- Κατασκευή σχήματος 3.3

```
f[t_,b_]=Piecewise[{{(b*(-t)^(b-1)*Exp[-(-t)^b])/(2-Exp[-
(-t)^b]),t<=0},{(b*t^(b-1)*Exp[-t^b])/Exp[-t^b],t>=0}}];
```

```
Plot[{f[t, 0.5], f[t, 1], f[t, 2]}, {t, -3, 3}, AxesOrigin -> {-3, 0}, PlotStyle -> {Red, Black, Green}, PlotRange -> {{-3, 3}, {0, 4}}, AxesLabel -> {t, λ[t]}
```

- Κατασκευή σχήματος 3.5

```
f[t_, τ_, h_] = (1/h) * Exp[(t - τ)/h] - Exp[(t - τ)/h];
Plot[{f[t, 1, 1], f[t, 1, 2], f[t, 1, 3]}, {t, -6, 6}, AxesLabel -> {t, g[t]}, PlotStyle -> {Black, Green, Red}]
```

- Κατασκευή σχήματος 3.6

```
f[t_, τ_, h_] = (1/h) * Exp[(t - τ)/h];
Plot[{f[t, 1, 1], f[t, 1, 2], f[t, 1, 3]}, {t, -3, 3}, AxesLabel -> {t, λ[t]}, PlotStyle -> {Black, Green, Red}]
```

- Κατασκευή σχήματος 3.7

```
f[t_, a_, b_] = b * a^b * t^(-b - 1) * Exp[-(t/a)^(-b)];
s[t_, a_, b_] = D[1 - Exp[-(t/a)^b], t];
Plot[{f[t, 1, 0.5], f[t, 1, 1.5], s[t, 1, 1.5]}, {t, 0, 4}, PlotStyle -> {Red, Black, Dashed}, AxesLabel -> {t, g[t]}]
```

- Κατασκευή σχήματος 3.8

```
f[t_, a_, b_] = (b * a^b * t^(-b - 1) * Exp[-(t/a)^(-b)]) / (1 - Exp[-(t/a)^(-b)]);
Plot[{f[t, 1, 0.5], f[t, 1, 1], f[t, 1, 2]}, {t, 0, 4}, PlotStyle -> {Red, Black, Green}, AxesLabel -> {t, λ[t]}]
```

- Κατασκευή σχήματος 3.9

```
f[t_, a_, b_] = Log[-Log[1 - Exp[-Exp[b * Log[a] - b * t]]]];
g[t_, a_, b_] = b * t - b * Log[a];
h[t_, a_, b_] = -Exp[-b * (t - Log[a])];
s[t_, a_, b_] = Log[b * (t - Log[a])];
Plot[{f[t, 5, 3.5], g[t, 5, 3.5], h[t, 5, 3.5], s[t, 5, 3.5]}, {t, 0, 3}, PlotRange -> {{1, 3}, {-4, 4}}, PlotStyle -> {Black, Dashed, Dotted, DotDashed}]
```

- Κατασκευή σχήματος 3.10

```
f[t_, a_, b_] = b * (t - Log[a]);
```

```

g[t_,a_,b_]=-Log[-Log[1-Exp[-1/(Exp[b*Log[a]-b*t])]]];
h[t_,a_,b_]=-Log[-b*(t-Log[a])];
s[t_,a_,b_]=Exp[b*(t-Log[a])];
Plot[{f[t,5,3.5],g[t,5,3.5],h[t,5,3.5],s[t,5,3.5]},{t,0,3},
,PlotRange->{{1,3},{-4,4}},PlotStyle->{Dashed,Black,Dotted,DotDashed}]

```

- Κατασκευή σχήματος 4.1

```

f[t_,a_,b_]=(b*t^b*Exp[-(t/a)^b])/(a^(b+1)*Gamma[1+(1/b)]);
Plot[{f[t,1,0.5],f[t,1,1],f[t,1,2],f[t,1,3]},{t,0,3},Axes
Label->{t,g1[t]},PlotStyle->{Black,Green,Red,Blue}]

```

- Κατασκευή σχήματος 4.2

```

f[t_,a_,b_]=Integrate[(b*x^b*Exp[-(x/a)^b])/(a^(b+1)*Gamma[1+(1/b)]),{x,0,t}];
Plot[{f[t,1,0.5],f[t,1,1],f[t,1,2],f[t,1,3]},{t,0,3},Axes
Label->{t,G1[t]},PlotStyle->{Black,Green,Red,Blue}]

```

- Κατασκευή σχήματος 4.3

```

f[t_,a_,b_]=1-Integrate[(b*x^b*Exp[-(x/a)^b])/(a^(b+1)*Gamma[1+(1/b)]),{x,0,t}];
Plot[{f[t,1,1],f[t,1,2],f[t,1,3]},{t,0,3},AxesLabel->{t,R1
[t]},PlotStyle->{Black,Green,Red}]

```

- Κατασκευή σχήματος 4.4

```

f[t_,a_,b_]=((b*t^b*Exp[-(t/a)^b])/(a^(b+1)*Gamma[1+(1/b)]))/(1-Integrate[(b*x^b*Exp[-(x/a)^b])/(a^(b+1)*Gamma[1+(1/b)]),{x,0,t}]);
Plot[{f[t,1,1],f[t,1,2],f[t,1,3]},{t,0,3},AxesLabel->{t,λ1
[t]},PlotStyle->{Black,Green,Red}]

```

- Κατασκευή σχήματος 4.5

```

f[t_,a_]=D[1-(1+(t/a))*Exp[-(t/a)],t];
Plot[{f[t,1],f[t,2],f[t,3]},{t,0,8},PlotStyle->{Black,Red,Green},AxesLabel->{t,g[t]}]

```

- Κατασκευή σχήματος 4.6

```
f[t_,a_]=1-(1+(t/a))*Exp[-(t/a)];
Plot[{f[t,1],f[t,2],f[t,3]},{t,0,8},PlotStyle->{Black,Red,
Green},AxesLabel->{t,G[t]}}
```

- Κατασκευή σχήματος 4.7

```
f[t_,a_]=(1/a)*(1-(1/(1+(t/a))));
Plot[{f[t,1],f[t,2],f[t,3]},{t,0,8},PlotStyle->{Black,Red,
Green},AxesLabel->{t,λ[t]}}
```

- Κατασκευή σχήματος 4.8

```
f[t_,a_,b_,v_]=1-((v*Exp[-(t/a)^b])/(1-(1-v)*Exp[-
(t/a)^b]));
Plot[{f[t,1,0.5,0.5],f[t,1,0.5,1],f[t,1,0.5,2]},{t,0,3}
,PlotStyle->{Red,Black,Blue},AxesLabel->{t,G[t]}}
```

- Κατασκευή σχήματος 4.9

```
f[t_,a_,b_,v_]=1-((v*Exp[-(t/a)^b])/(1-(1-v)*Exp[-
(t/a)^b]));
Plot[{f[t,1,1.5,0.5],f[t,1,1.5,1],f[t,1,1.5,2]},{t,0,2},P
lotStyle->{Red,Black,Blue},AxesLabel->{t,G[t]}}
```

- Κατασκευή σχήματος 4.10

```
f[t_,a_,b_,v_]=D[1-((v*Exp[-(t/a)^b])/(1-(1-v)*Exp[-
(t/a)^b])),t];
Plot[{f[t,1,0.5,0.5],f[t,1,0.5,1],f[t,1,0.5,2],f[t,1,0.5,
25]},{t,0,35},PlotStyle-
>{Red,Black,Blue,Green},AxesLabel->{t,g[t]},PlotRange->{{0,
35},{0,0.1}}]
```

- Κατασκευή σχήματος 4.11

```
f[t_,a_,b_,v_]=D[1-((v*Exp[-(t/a)^b])/(1-(1-v)*Exp[-
(t/a)^b])),t];
Plot[{f[t,1,1.5,0.5],f[t,1,1.5,1],f[t,1,1.5,2]},{t,0,3},P
lotStyle->{Red,Black,Blue},AxesLabel->{t,g[t]}}
```

- Κατασκευή σχήματος 4.12

```
f[t_,a_,b_,v_]=((b/a)*(t/a)^(b-1))/(1-(1-v)*Exp[-
(t/a)^b]);
Plot[{f[t,1,0.5,0.05],f[t,1,0.5,0.5],f[t,1,0.5,1],f[t,1,0
.5,5]}, {t,0,3},PlotStyle-
>{Red,Black,Blue,Green},PlotRange->{{0,3},{0,2.5}},AxesLab
el->{t,λ[t]}
```

- Κατασκευή σχήματος 4.13

```
f[t_,a_,b_,v_]=((b/a)*(t/a)^(b-1))/(1-(1-v)*Exp[-
(t/a)^b]);
Plot[{f[t,1,0.8,1],f[t,1,0.8,2.5],f[t,1,0.8,5],f[t,1,0.8,
10],f[t,1,0.8,30]}, {t,0,8},PlotStyle-
>{Gray,Red,Black,Blue,Green,Orange},PlotRange->{{0,8},{0,1
.2}},AxesLabel->{t,λ[t]}
```

- Κατασκευή σχήματος 4.14

```
f[t_,a_,b_,v_]=((b/a)*(t/a)^(b-1))/(1-(1-v)*Exp[-
(t/a)^b]);
Plot[{f[t,1,1,0.05],f[t,1,1,0.5],f[t,1,1,1],f[t,1,1,5]}, {
t,0,3},PlotStyle-
>{Red,Black,Blue,Green},PlotRange->{{0,3},{0,5}},AxesLabel
->{t,λ[t]}
```

- Κατασκευή σχήματος 4.15

```
f[t_,a_,b_,v_]=((b/a)*(t/a)^(b-1))/(1-(1-v)*Exp[-
(t/a)^b]);
Plot[{f[t,1,2,0.009],f[t,1,2,0.05],f[t,1,2,0.1],f[t,1,2,0
.5],f[t,1,2,1],f[t,1,2,5]}, {t,0,3},PlotStyle-
>{Gray,Red,Black,Blue,Green,Orange},PlotRange->{{0,3},{0,1
1}},AxesLabel->{t,λ[t]}
```

- Κατασκευή σχήματος 4.16

```
f[x_,a_,b_,v_]=Log[-Log[v]+Log[Exp[(Exp[x]/a)^b]-(1-v)]];
g[x_,a_,b_]=b (x-Log[a]);
h[x_,a_,b_,v_]=b (x-Log[a])-Log[v];
```



```
Plot[{g[x, 425.53, 1.69], h[x, 425.53, 1.69, 0.015], h[x, 425.53,
1.69, 30], f[x, 425.53, 1.69, 0.015], f[x, 425.53, 1.69, 0.15], f[x
, 425.53, 1.69, 4.5], f[x, 425.53, 1.69, 30]}, {x, 0, 10}, PlotRange
->{{0, 10}, {-7, 6}}, PlotStyle-
>{Dashed, DotDashed, DotDashed, Red, Black, Blue, Green}]
```

- Κατασκευή σχήματος 4.17

```
f[t_, a_, b_, v_] = D[(1 - Exp[-(t/a)^b])^v, t];
Plot[{f[t, 1, 0.45, 2], f[t, 1, 1.4, 3], f[t, 1, 0.8, 6], f[t, 1, 1.5, 0
.3], f[t, 1, 2, 0.5]}, {t, 0, 8}, PlotStyle-
>{Red, Black, Blue, Green, Orange}, AxesLabel->{t, g[t]}, PlotRan
ge->{{0, 6}, {0, 1}}]
```

- Κατασκευή σχήματος 4.18

```
f[t_, a_, b_, v_] = D[(1 - Exp[-(t/a)^b])^v, t] / (1 - (1 - Exp[-
(t/a)^b])^v);
Plot[{f[t, 1, 0.45, 2], f[t, 1, 1.4, 3], f[t, 1, 0.8, 6], f[t, 1, 1.5, 0
.3], f[t, 1, 2, 0.5]}, {t, 0, 8}, PlotStyle-
>{Red, Black, Blue, Green, Orange}, AxesLabel->{t, λ[t]}, PlotRan
ge->{{0, 6}, {0, 4}}]
```

- Κατασκευή σχήματος 4.19

```
a=5;b=2.5;v=2;
f[t_, a_, b_, v_] = Log[-Log[1 - (1 - Exp[-(Exp[t]/a)^b])^v]];
Plot[{f[t, a, b, v], b*(t-Log[a]), b*v*(t-
Log[a])}, {t, 0, 3}, PlotStyle->{Black, Dashed, DotDashed}]
```

- Κατασκευή σχήματος 4.20

```
a=5;b=2.5;v=0.2;
f[t_, a_, b_, v_] = Log[-Log[1 - (1 - Exp[-(Exp[t]/a)^b])^v]];
Plot[{f[t, a, b, v], b*(t-Log[a]), b*v*(t-
Log[a])}, {t, 0, 3}, PlotStyle->{Black, Dashed, DotDashed}]
```

- Κατασκευή σχήματος 4.21

```
f[t_, b_, l_, v_] = 1*(b+v*t)*t^(b-1)*Exp[v*t];
```

```
Plot[{f[t,1,2,0.3],f[t,1.5,2,0.3],f[t,0.5,3,0.3],f[t,0.7,
5,0.3]},{t,0,3},PlotStyle-
>{Red,Black,Blue,Green},AxesLabel->{t,λ[t]}]
```

- Κατασκευή σχήματος 4.22

```
f[t_,v_,b_,l_]=Log[l]+b*t+v*Exp[t];
g[t_,b_,l_]=b*t+Log[l];
h[t_,v_]=v*Exp[t];
Plot[{f[t,0.1,0.2,0.1],g[t,0.2,0.1],h[t,0.1]},{t,-
6,7},PlotStyle->{Black,Dashed,DotDashed}]
```

- Κατασκευή σχήματος 4.23

```
f[t_,a_,b_,v_]=((t/a)^(b-1))/((a/b)*(1-v*(t/1)^b));
Plot[{f[t,1,1,0],f[t,1,0.5,0.4],f[t,1,0.5,-0.4],f[t,1,2,-
0.4],f[t,1,1.5,0.08]},{t,0,5},AxesLabel->{t,λ[t]},PlotStyl
e->{Black,Blue,Green,Red,Gray}]
```

- Κατασκευή σχήματος 4.24

```
g[t_,a_,m_,n_,l_]=(a^(m-1)/Integrate[(y^(m-1)*Exp[-
y]/(y+a*n)^1},{y,0,∞}])*(t^(m-1)*Exp[-a*t]/(t+n)^1);
Plot[{g[t,1,0.5,1,1],g[t,1,1.5,1,1],g[t,1,2.5,1,1]},{t,0,
6},PlotRange->{{0,6},{0,1}},PlotStyle->{Black,Red,Blue},Axe
sLabel->{t,f[t]}]
```

- Κατασκευή σχήματος 4.25

```
f[t_,a_,b_,β_,l_]=(1*β*(b-a)*(t-a)^(β-1))/(b-t)^(β+1);
Plot[{f[t,0.1,5,0.2,1],f[t,0.1,5,0.5,1]},{t,0,5},PlotStyl
e->{Black,Blue},AxesOrigin->{0,0},AxesLabel->{t,λ[t]}]
```

- Κατασκευή σχήματος 4.26

```
a=1;b=2;l=0.1;β=0.2;
f[t_,a_,b_,β_,l_]=Log[l]+β*(Log[Exp[t]-a]-Log[b-Exp[t]]);
Plot[f[t,a,b,β,l]},{t,0,0.7},GridLines->{{Log[a],DotDashed
},{Log[b],Dashed}},None},AxesOrigin->{-0.03,-3}]
```

- Κατασκευή σχήματος 4.27

```
f[t_,a_,b_,l_,b1_,b2_]=(1*(t-a)^(b1-1)*(b*b1-a*b2+t*(b2-
b1)))/(b-t)^(b2+1);
```

```
Plot[{f[t,0,1,1,0.1,0.5],f[t,0,1,1,0.4,0.2]},{t,0,1},Plot
Style→{Blue,Black},AxesOrigin→{0,0},AxesLabel→{t,λ[t]}]
```

- Κατασκευή σχήματος 4.28

```
f[t_,a_,b_,c_,t1_,tr_]=((c/b)*((t-a)/b)^(c-1)*Exp[((t1-
a)/b)^c-((t-a)/b)^c])/(1-Exp[-((tr-a)/b)^c]);
g[t_,a_,b_,c_,t1_]=((c/b)*((t-a)/b)^(c-1)*Exp[((t1-
a)/b)^c-((t-a)/b)^c]);
h[t_,a_,b_,c_,tr_]=((c/b)*((t-a)/b)^(c-1)*Exp[-((t-
a)/b)^c])/(1-Exp[-((tr-a)/b)^c]);
k[t_,a_,b_,c_]=((c/b)*((t-a)/b)^(c-1)*Exp[-((t-a)/b)^c]);
u=Plot[f[t,1,2,2.5,2,3],{t,2,3},PlotRange→{{0,6},{0,1}},P
lotStyle→{Black}];
x=Plot[g[t,1,2,2.5,2],{t,2,6},PlotRange→{{0,6},{0,1}},Plo
tStyle→{Red}];
y=Plot[h[t,1,2,2.5,3],{t,1,3},PlotRange→{{0,6},{0,1}},Plo
tStyle→{Blue}];
z=Plot[k[t,1,2,2.5],{t,0,6},PlotRange→{{0,6},{0,1}},Plots
tyle→{Green}];
Show[u,x,y,z,GridLines→{{2,3},None},AxesLabel→{t,density}
]
```

- Κατασκευή σχήματος 4.29

```
f[t_,a_,b_,k_]=0.5*b*(t^(k-1)+t^(-k-1))*Exp[a+b*((t^k-
t^(-k))/(2*k))];
Plot[{f[t,0,1,1.5],f[t,0,0.5,1.5],f[t,-2,2,2],f[t,-
2,2,1]},{t,0,5},PlotRange→{{0,5},{0,4}},PlotStyle→{Black,
Red,Blue,Green},AxesLabel→{t,λ[t]}]
```

- Κατασκευή σχήματος 4.30

```
f[t_,a_,b_,l_]=1*b*(t/a)^(b-1)*Exp[(t/a)^b]*Exp[1*a*(1-
Exp[(t/a)^b])];
Plot[{f[t,100,0.3,0.01],f[t,100,2,0.01],f[t,100,2,0.001],
f[t,100,0.9,0.002]},{t,0,350},PlotRange→{{0,350},{0,0.013
}},PlotStyle→{Black,Green,Red,Blue},AxesLabel→{t,g[t]}]
```

- Κατασκευή σχήματος 4.31

```
f[t_,a_,b_,l_]=1*b*(t/a)^(b-1)*Exp[(t/a)^b];
Plot[{f[t,100,0.6,2],f[t,100,0.8,2],f[t,100,1,2],f[t,100,
1.2,2]},{t,0,250},PlotRange→{{0,250},{0,10}},PlotStyle→{B
lack,Green,Red,Blue},AxesLabel→{t,λ[t]}]
```

- Κατασκευή σχήματος 4.32

```
a=100;b=0.6;l=2;
f[t_,a_,b_,l_]=Log[l*a]+Log[Exp[(Exp[t]/a)^b]-1];
Plot[{f[t,a,b,l],b*t+Log[l*a^(1-
b)],Log[l*a]+(Exp[t]/a)^b},{t,0,7},PlotStyle->{Black,{Dash
ed,Red},{DotDashed,Blue}},PlotRange->{{0,7},{0,10}}]
```

- Κατασκευή σχήματος 4.33

```
s={0.1,0.2,1,1,1,1,1,2,3,6,7,11,12,18,18,18,18,18,21,32,3
6,40,45,46,47,50,55,60,63,63,67,67,67,67,72,75,79,82,82,8
3,84,84,84,85,85,85,85,85,86,86};
n=Length[s];
T=Sort[s];
A=Array[a,n];
TT=Array[b,n];
X=Array[x,n];
points=Array[p,n];
Do[A[[i]]=Sum[T[[j]],{j,1,i}},{i,1,n}]
Do[TT[[i]]=A[[i]]+(n-i)*T[[i]},{i,1,n}]
Do[X[[i]]=TT[[i]]/TT[[n]},{i,1,n}]
Do[points[[i]]={i/n,X[[i]]},{i,1,n}]
Show[ListPlot[points,PlotRange->{0,1},Joined->True,Mesh->All
],Plot[y=x,{x,0,1}],AxesLabel->{t,φF[t]},PlotRange->{{0,1},
{0,1.01}}]
```

- Κατασκευή σχήματος 4.34

```
s={0.1,0.2,1,1,1,1,1,2,3,6,7,11,12,18,18,18,18,18,21,32,3
6,40,45,46,47,50,55,60,63,63,67,67,67,67,72,75,79,82,82,8
3,84,84,84,85,85,85,85,85,86,86};
t=Sort[s];y={};
For[i=1,i<=Length[t],i++,AppendTo[y,Log[-Log[1-
(i/(Length[t]+1))]]]]
data=Table[{Log[t[[i]]],y[[i]]},{i,Length[t]};
ListPlot[data,AxesOrigin->{-2.5,0}]
```

- Κατασκευή σχήματος 4.35

```
f[t_,a_,b_,l_]=l*b*(t/a)^(b-1)*Exp[(t/a)^b];
g[t_,b_,l_,v_]=l*(b+v*t)*t^(b-1)*Exp[v*t];
Plot[{f[t,0.0000124455,0.137923,24.3368],g[t,0.354803,0.0
6240117,0.0233175]},{t,0,100},AxesLabel->{t,λ[t]},PlotRang
e->{{0,100},{0.01,0.035}},PlotStyle->{Black,Red}]
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

- Δαμιανού, Χαραλαμπος Χ., Κούτρας, Μάρκος Β. (2003). *Εισαγωγή στη Στατιστική Μέρος Ι*, Εκδόσεις Συμμετρία.
- Κούτρας, Μάρκος Β. (2003). *Στατιστική Θεωρία αξιοπιστίας και έλεγχοι χρόνων ζωής*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, ΠΜΣ «Εφαρμοσμένη Στατιστική».
- Κούτρας, Μάρκος Β. (2004). *Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Θεωρία και Εφαρμογές: Μέρος Ι και ΙΙ*, Εκδόσεις Α. Σταμούλης.
- Μπούτσικας, Μιχαήλ (2008). *Θεωρία Αξιοπιστίας*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Τμ. Στατιστικής και Ασφ. Επιστήμης.
- Μπούτσικας, Μιχαήλ (2008). *Μέθοδοι Προσομοίωσης και Υπολογιστικές Στατιστικές Τεχνικές*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, ΠΜΣ «Εφαρμοσμένη Στατιστική».
- Τσίτσας Λεωνίδας (2002). *Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός*, Εκδόσεις Συμμετρία.

Ξένη

- Aarset, M.V. (1987). How to identify bathtub hazard rate, *IEEE Transactions on Reliability*, **36**, 106–108.
- Agarwal, S.K. and Kalla, S.L. (1996). A generalized gamma distribution and its application in reliability. *Communications in Statistics—Series A: Theory and Methods*, **25**, 201–210.
- Akaike H.A, (1974). New look at statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **19**, 716-723.
- Balakrishnan, N. and Kocherlakota, S. (1985). On the double Weibull distribution: Order statistics and estimation, *Sankhya*, **47**, 161–176.
- Barlow, R.E and Proschan, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing – Probability Models*, New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Beirlant, Jan, Goegebeur, Yuri, Teugels, Jozef and Segers, Johan (2004). *Statistics of Extremes Theory and Applications*, Wiley series in probability and statistics
- Berrettoni, J.N. (1964). Practical applications of the Weibull distribution, *Industrial Quality Control*, **21**, 71-79.
- Chang, D.S., (2000). Optimal burn-in decision for products with an unimodal failure rate function, *European Journal of Operational Research*, **126**, 534-540.
- Chen, Z. (2000). A new two-parameter lifetime distribution with bathtub shape or increasing failure rate function, *Statistics & Probability Letters*, **49**, 155–161.
- Chin-Diew, Lai and Min, Xie, (2006). *Stochastic Ageing and Dependence for Reliability*, Springer.

- Choudhury, Amit (2005). A simple derivation of moments of the exponentiated Weibull distribution, *Metrika*, **62**: 17-22.
- Cohen, Clifford A. (1965). Maximum likelihood estimation in the Weibull distribution based on complete and censored samples, *Technometrics*, **7**, 579-588.
- Cohen, Clifford A.. (1973). The Reflected Weibull Distribution, *Techometrics*, **15**, 867-863.
- Cramér, H. (1946). *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press, Princeton.
- Drapella, A. (1993). Complementary Weibull distribution: Unknown or just forgotten, *Quality and Reliability Engineering International*, **9**, 383–385.
- Fréchet, M.R. (1927): Sur la loi de probabilité de l'écart maximum; *Annales de la Société Polonaise de Mathématique*, Cracovie, **6**, 93–116.
- Freimer, Marshall, Kollia, Georgia, Mudholkar, Govind S. and Lin, C. Thomas (1989). Extremes, extreme spacings and outliers in the tukey and weibull families, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **18**, 4261-4274.
- Ghitany, M.E. (1998). On a recent generalization of gamma distribution. *Communications in Statistics—Series A: Theory and Methods*, **27**, 223–233.
- Glaser, R.E. (1980). Bathtub and related failure rate characterization, *Journal of the American statistical association*, **75**, 667-672.
- Gnedenko, B.V. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, *Annals of Mathematics*, **44**, 423-453.
- Gourdin, E., Hansen, P., and Jaumard, B. (1994). Finding maximum likelihood estimators for the 3-parameter Weibull distribution, *Journal of Global Optimization*, **5**, 373–397.
- Gumbel, E.J. (1958). *Statistics of Extremes*, Columbia University Press.
- Gupta, Ramesh C., Gupta, Pushpa L. and Gupta, Rameshwar, D. (1998). Modeling failure time data by lehman alternatives, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **27**, 887-904.
- Gupta, Rameshwar, D. and Kundu, Debasis (2001). Exponentiated exponential family: An alternative to Gamma and Weibull distributions, *Biometrical Journal*, **1**, 117-130.
- Hager, H.W. and Bain, L.J. (1970). Inferential procedures for the generalized gamma distribution, *Journal of the American Statistical Association*, **65**, 1601–1609.
- Harter, H.L. (1967). Maximum–likelihood estimation of the parameters of a four–parameter generalized gamma population for complete and censored samples, *Technometrics*, **9**, 159–165.
- Hirose, H. (2000). Maximum likelihood parameter estimation by model augmentation with applications to the extended four - parameter generalized gamma distribution, *Mathematics and Computers in Simulation*, **54**, 81–97.
- Hossain, Anwar, M. and Zimmer, William J. (2003). Comparison of estimation methods for Weibull parameters: complete and Censored samples, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **73**, 145-153.
- Hwang, H.S. (1996). A reliability prediction model for missile systems based on truncated Weibull distribution, *Computers and Industrial Engineering*, **31**, 245–248.

- Jensen, F. and Petersen, N.E. (1982). *Burn-in: An engineering approach to the design and analysis of burn-in procedures*, Wiley, New York.
- Jiang, R. and Murthy, D.N.P. (1999), The exponentiated Weibull family: A graphical approach, *IEEE Transactions on Reliability*, **48**, 68–72.
- Jiang, R., Murthy D.N.P., and Ji, P. (2001). Models involving two inverse Weibull distributions, *Reliability Engineering and System Safety*, **73**, 73–81.
- Jiang, R., Ji, P. and Xiao X. (2003). Aging property of unimodal failure rate models, *Reliability Engineering and Systems Safety*, **79**, 113–116.
- Johnson, Norman L., Kotz, Samuel, and Balakrishnan, N., (1994). *Continuous Univariate Distributions Volume 1*, Second Edition. Wiley Series in Probability and Statistics.
- Johnson, Norman L., Kotz, Samuel, and Balakrishnan, N., (1995). *Continuous Univariate Distributions Volume 2*, Second Edition. Wiley Series in Probability and Statistics.
- Justus, C.G., Hargraves, W.R., Yalcin, A. (1976). Nationwide assessment of potential output from windpowered generators, *J. Appl. Meteorol.* **15**, 673–678.
- Kalla, S.L., Al-Saqabi, B.N., and Khajah, H.G. (2001). A unified form of gamma-type distributions, *Applied Mathematics and Computation*, **118**, 175–187.
- Kao, J.H.K. (1958). Computer methods for estimating Weibull parameters in reliability studies, *Transactions of IRE-Reliability and Quality Control*, **13**, 15–22..
- Kao, J.H.K. (1959). A graphical estimation of mixed Weibull parameters in life-testing electron tubes, *Technometrics*, **1**, 389–407.
- Kies, J.A. (1958): The strength of glass; *Naval Research Lab. Report*, **5093**; Washington, D.C.
- Klutke, Ann-Georgia, Kiessler, Peter C. and Wortman, M.A (2003). A critical look at the bathtub curve, *IEEE Transactions on reliability*, **52**, 125–129.
- Kotz, Samuel and Nadarajah, Saralees (2000). *Extreme value distributions theory and applications*, Imperial College Press.
- Lai, C. D., Xie, M. (2006). *Stochastic ageing and dependence for reliability*, Springer.
- Lai, C. D., Xie, M., and Murthy, D.N.P. (2003). Modified Weibull model, *IEEE Transactions on Reliability*, **52**, 33–37.
- Lai, C.D., Moore, T. and Xie (1998). The beta integrated model, *Proc. Int. Workshop on Reliability Modeling Analysis-From Theory to Practice*, 153–159.
- Lawless, J.F. (1978). Confidence interval estimation for the Weibull and extreme value distributions (with a discussion by R. G. Easterling), *Technometrics*, **20**, 355–365.
- Lemon, G.H. (1975). Maximum likelihood estimation for the three parameter Weibull distribution based on censored samples, *Technometrics*, **17**, 247–254.
- Marshall, A.W. and Olkin, I. (1997). A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families, *Biometrika*, **84**, 641–652.
- Martinez, S. and Quintana, F. (1991). On a test for generalized upper truncated Weibull distribution, *Statistics and Probability Letters*, **12**, 273–279.

- McEwen, R.P. and Parresol, B.R. (1991). Moment expressions and summary statistics for the complete and truncated Weibull distribution, *Communications in Statistics—Series A: Theory and Methods*, **20**, 1361–1372.
- Meeker, William, Q., Escobar, Luis, A. (1998). *Statistical methods for reliability data*, Wiley series in probability and statistics.
- Mi, J. (1995). Bathtub failure rate and upside-down bathtub mean residual life, *IEEE Transactions on Reliability*, **44**, 388–391.
- Mittal, M.M. and Dahiya, R.C. (1989). Estimating the parameters of a truncated Weibull distribution, *Communications in Statistics—Series A: Theory and Methods*, **18**, 2027–2042.
- Mudholkar, G.S. and Hutson, A.D. (1996). The exponentiated Weibull family: Some properties and a flood data application, *Communications in Statistics—Series A: Theory and Methods*, **25**, 3059–3083.
- Mudholkar, G.S. and Kollia, G.D. (1994). Generalized Weibull family: A structural analysis, *Communications in Statistics—Series A: Theory and Methods*, **23**, 1149–1171.
- Mudholkar, G.S. and Srivastava, D.K. (1993). Exponentiated Weibull family for analyzing bathtub failure-rate data, *IEEE Transactions on Reliability*, **42**, 299–302.
- Mudholkar, G.S., Srivastava, D.K., and Freimer, M. (1995). The exponentiated Weibull family—a reanalysis of the bus-motor-failure data, *Technometrics*, **37**, 436–445.
- Mudholkar, G.S., Srivastava, D.K., and Kollia, G.D. (1996). A generalization of the Weibull distribution with application to the analysis of survival data, *Journal of the American Statistical Association*, **91**, 1575–1583.
- Murthy, D.N.P., Min, Xie and Renyan, Jiang, (2004). *Weibull Models*, Wiley Series in Probability and Statistics.
- Nadarajah, Saralees (2005). On the moments of the modified Weibull distribution, *Reliability engineering and system safety*, **90**, 114-117
- Nadarajah, Saralees and Gupta, Arjun, K. (2005). On the moments of the exponentiated Weibull distribution, *Communications in statistics-Theory and methods*, **34**, 253-256.
- Nadarajah, Saralees and Kotz, Samuel. (2006). The exponentiated type distributions, *Acta. Appl. Math*, **92**, 97-111.
- Nassar, Manal, M. and Eissa, Fathy, H. (2003). On the exponentiated Weibull distribution, *Communications in statistics-Theory and methods*, **32**, 1317-1336.
- Nelson, W. B. (1982). *Applied Life Data Analysis*, Wiley series in probability and mathematical statistics.
- Pal, M., Ali, M.M., Woo, J. (2006). Exponentiated Weibull distribution, *Statistica*, **2**.
- Pham, Hoang. (2006). *System Software Reliability*, Springer series in reliability engineering.
- Pham, T. and Almhana, J. (1995). The generalized Gamma distribution: its hazard rate and stress-strength model, *IEEE Transactions on Reliability*, **44**, 392-397.
- Phani, K.K. (1988). A new modified Weibull distribution function for the evaluation of the strength of silicon carbide and alumina fibres, *Journal of materials science*, **23**, 2424-2428.
- Rinne, Horst (2009). *The Weibull Distribution: A Handbook*, Taylor & Francis Group.

- Rockette, H., Charles, A., Lawrence, A.K. (1974). Maximum likelihood estimation with the Weibull model, *Journal of the American Statistical Association*, **69**, 246-249.
- Rosen, P. and Rammler, B. (1933). The laws governing the fineness of powdered coal, *Journal of the Institute of Fuels*, **6**, 246-249.
- Samuel, Kotz and Saralees, Nadarajah (2000). *Extreme Value Distributions Theory and Applications*, Imperial College Press.
- Seguro, J.V. and Lambert, T.W. (2000). Modern estimation of the parameters of the Weibull wind speed distribution for wind energy analysis, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, **85**, 75-84.
- Shalaby, O.A. and Al-Youssef, M.H. (1992): Bayesian analysis of the parameters of a doubly truncated Weibull distribution; *The Egyptian Statistical Journal*, **36**, 39-56
- Slymen, D.J. and Lachenbruch, P.A. (1984). Survival distributions arising from two families and generated by transformations, *Communications in Statistics—Series A: Theory and Methods*, **13**, 1179-1201.
- Smith, R.M. and Bain, L.J. (1975). An exponential power life-testing distribution. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **4**, 469-481.
- Stacy, E.W. (1962). A generalization of the gamma distribution. *Annals of the Mathematical Statistics*, **33**, 1187-1192.
- Stacy, E.W. and Mihram, G.A. (1965). Parameter estimation for a generalised gamma distribution, *Technometrics*, **7**, 349-358.
- Stevens, M.J. and Smulders, P.T. (1979), The estimation of the parameters of the Weibull wind speed distribution for wind energy utilization purposes, *Wind Eng.* (2) 132-145.
- Tang, Y., Xie, M. and Goh, T. N. (2003). Statistical Analysis of a Weibull Extension Model, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **32**, 913 - 928.
- Todinov, M. T (2005). *Reliability and risk models : setting reliability requirements*, John Wiley & Sons Ltd.
- Villemeur, A. (1992). *Reliability, Availability, Maintainability and Safety Assessment*, vol. 2, John Wiley & Sons, Ltd.
- Voda, V. G. (1989). New models in durability tool-testing: psuedo-Weibull distribution, *Kybernetika*, **25**, 209-215.
- Weibull, W. (1939). A statistical theory of the strength of material, *Ingeniors Vetenskapa Acadamiens Handligar*, **151**, 1-45.
- Weibull, W. (1951). A statistical distribution function of wide applicability, *Journal of Applied Mechanics*, **18**, 293-296.
- Wingo, D.R. (1988). Parametric point estimation for a doubly-truncated Weibull distribution, *Microelectronics and Reliability*, **28**, 613-617.
- Xie, M., Goh, T. N. and Tang, Y. (2002). A modified Weibull extension with bathtub-shaped failure rate function, *Reliability Engineering and Systems Safety*, **76**, 279-285.

Zanakis, S.H. and Kyparisis, J. (1986). A review of maximum likelihood estimation methods for the three parameter Weibull distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **25**, 53–73.

Zhang, Tieling and Xie, Min. (2007). Failure data analysis with extended Weibull distribution, *Communications in statistics-Simulation and computation*, **36**, 579-592.

FAKULTAS TEKNOLOGI PERTANIAN