

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΣΕ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

Κωνσταντίνος Ν. Μακρής

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς,
Οκτώβρης 2009

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΕΛΕΓΧΟΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ

Κωνσταντίνος Ν. Μακρής

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς,
Οκτώβρης 2009

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- (Επιβλέπων)

-

-

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS**

**MONOTONICITY PROPERTIES IN
RENEWAL PROCESSES**

By
Konstantinos N. Makris

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of
the requirements for the degree of Master of Science in
Applied Statistics

Piraeus, Greece
October 2009

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Στους γονείς μου

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Περίληψη

Μία ανανεωτική ανέλιξη αποτελεί μια γενίκευση της ανέλιξης Poisson στην περίπτωση όπου οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών γεγονότων που παρατηρούμε είναι ανεξάρτητες και ισόνομες μεταβλητές, αλλά δεν ακολουθούν απαραίτητα την εκθετική κατανομή. Τέτοιες ανελίξεις έχουν πολλές εφαρμογές σε διάφορους κλάδους της εφαρμοσμένης έρευνας, όπως η θεωρία αξιοπιστίας, η θεωρία κινδύνων και η αναλογιστική επιστήμη γενικότερα, η δημογραφία κλπ.

Σε μια ανανεωτική ανέλιξη, η ποσότητα με το μεγαλύτερο ενδιαφέρον είναι η ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$, η οποία απαριθμεί τον αναμενόμενο αριθμό των γεγονότων στο χρονικό διάστημα $[0, t]$, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι ανεξάρτητοι με μια κατανομή F . Επίσης, στην περίπτωση που η F έχει πυκνότητα, παρουσιάζει ενδιαφέρον η μελέτη της συνάρτησης $m'(t)$, η οποία ονομάζεται ανανεωτική πυκνότητα.

Στην παρούσα εργασία μελετάται η μονοτονία της ανανεωτικής πυκνότητας. Αρχικά κάνουμε μια επισκόπηση των κυριότερων αποτελεσμάτων. Στη συνέχεια η μονοτονία αυτή μελετάται περαιτέρω, τόσο με βάση κάποια θεωρήματα, όσο και μέσω αριθμητικών παραδειγμάτων, ιδιαίτερα δε στην περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει σε κάποια κλάση αξιοπιστίας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Abstract

A renewal process is a generalization of a Poisson process in the case where the times between successive events are independent, identically distributed random variables, but not necessarily exponentially distributed. Such processes have many applications in diverse areas of applied research, such as reliability theory, risk theory and actuarial science in general, demography etc.

In a renewal process, the quantity with the main interest is the renewal function, $m(t)$, which counts the expected number of events in the interval $[0, t]$, when the interarrival times between events are independent with distribution F . Also, when F has a density, it is interesting to study the function $m'(t)$, known as the renewal density.

In this dissertation, we study the monotonicity of the renewal density. First we review the main results in this area. Next, we examine further this monotonicity, using some theorems as well as via numerical results, in particular when the distribution F of interarrival times belongs to a reliability class of distributions.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων	xvii
Κατάλογος Σχημάτων	xix
Εισαγωγή	1
Κεφάλαιο 1, Η ανανεωτική συνάρτηση και η ανανεωτική πυκνότητα	5
1.1 Εισαγωγή	5
1.2 Ιδιότητες συνελίξεων	6
1.2.1 Θεωρήματα	6
1.2.2 Ιδιότητες των συνελίξεων	7
1.3 Η ανανεωτική συνάρτηση	8
1.4 Πρακτικά παραδείγματα	10
1.4.1 Παράδειγμα 1 ^ο	10
1.4.2 Παράδειγμα 2 ^ο	11
1.5 Ασυμπτωτικές ιδιότητες μιας ανανεωτικής ανέλιξης	12
1.6 Διαφορετικές μέθοδοι υπολογισμού της ανανεωτικής συνάρτησης	14
1.6.1 Η βαθμίδα αποτυχίας	14
1.6.2 Μέθοδος μετασχηματισμών Laplace	15
Κεφάλαιο 2, Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας στην περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων είναι Γάμμα	17
2.1 Εισαγωγή	17
2.2 Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας στην περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ακολουθεί τη Γάμμα κατανομή με παραμέτρους $\Gamma(\lambda, 2)$	17
2.2.1 Η k-οστή συνέλιξη της F	18
2.2.2 Η ανανεωτική πυκνότητα	19
2.2.3 Η ανανεωτική συνάρτηση	21
2.2.4 Μελέτη της μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας	22
2.3 Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας στην περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην Γάμμα κατανομή με παραμέτρους $\Gamma(\lambda, 3)$	23
2.3.1 Η ανανεωτική πυκνότητα	23
2.3.2 Η ανανεωτική συνάρτηση	25
2.3.3 Μελέτη της μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας	25
2.4 Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας στην περίπτωση που η κατανομή F είναι Γάμμα με παραμέτρους λ και 4.	27
2.4.1 Η ανανεωτική πυκνότητα	28
2.4.2 Η ανανεωτική συνάρτηση	28
2.4.3 Μελέτη της μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας	29
2.5 Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας στην περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην εκθετική $E(\lambda)$	31
2.5.1 Η εκθετική κατανομή.	31
2.5.2 Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας από τον τύπο των	32

συνελίξεων	
2.5.2α Η ανανεωτική πυκνότητα	32
2.5.2.β Η ανανεωτική συνάρτηση	33
2.5.3 Εύρεση ανανεωτικής πυκνότητας με τη μέθοδο Laplace	33
2.5.3.α Η ανανεωτική πυκνότητα	34
2.5.3.β Δεύτερος τρόπος εύρεσης της ανανεωτικής πυκνότητας	35
Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 3 Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας στην περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ακολουθεί τη μίξη εκθετικών και τη μίξη Weibull	37
3.1 Εισαγωγή	37
3.2 Η μίξη εκθετικών.	37
3.3 IFR και DFR κλάσεις κατανομών.	38
3.3.1 Η βαθμίδα αποτυχίας για την περίπτωση της εκθετικής κατανομής.	39
3.4 Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας στην περίπτωση που η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων ακολουθεί τη μίξη εκθετικών.	39
3.4.1 Παράδειγμα για τον έλεγχο της μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας στην περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ακολουθεί τη μίξη εκθετικών.	40
3.5 Μελέτη των ιδιοτήτων IFR και DFR για την Γάμμα κατανομή	43
3.6 Η κατανομή Weibull	43
3.6.1 Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας στην περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων είναι Weibull.	44
3.7 Η μίξη Weibull κατανομών.	45
3.8 Η ανανεωτική πυκνότητα στην περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων είναι μια μίξη Weibull κατανομών.	46
3.8.1 Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας στην περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ακολουθεί τη μίξη δύο DFR Weibull κατανομών.	47
3.8.2 Μελέτη μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας για την περίπτωση που η κατανομή F είναι μίξη δύο IFR Weibull κατανομών.	49
3.9 Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας με μετασχηματισμό Laplace για την περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν τη μίξη εκθετικών	51
3.9.1 Η ανανεωτική πυκνότητα με μετασχηματισμό Laplace	51
3.9.2 Η ανανεωτική πυκνότητα	52
3.9.3 Η παράγωγος της ανανεωτικής πυκνότητας	53
Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 4 Η ανανεωτική πυκνότητα στην περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων είναι IFR Weibull	55
4.1 Εισαγωγή	55
4.2 Η ανανεωτική συνάρτηση για IFR Weibull κατανομές.	55
4.2.1 Η ανανεωτική συνάρτηση για Weibull κατανομή με $\alpha=2$.	56
4.2.2 Η ανανεωτική συνάρτηση για Weibull κατανομή με $\alpha=5$.	59
4.3 Η ανανεωτική συνάρτηση πυκνότητας για IFR Weibull κατανομές.	62
4.3.1 Η ανανεωτική συνάρτηση πυκνότητας για Wei(1,2).	63
4.3.2 Η ανανεωτική συνάρτηση πυκνότητας για Wei(1,5).	64
4.4 Η ανανεωτική συνάρτηση πυκνότητας για μίξη δύο Weibull IFR κατανομών.	66
Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 5 Η προσέγγιση της ανανεωτικής συνάρτησης από την κανονική κατανομή για την περίπτωση που η F είναι IFR Weibull	71
5.1 Εισαγωγή	71
5.2 Η προσέγγιση της ανανεωτικής συνάρτησης για IFR Weibull κατανομές από την	72

κανονική κατανομή.	
5.3 Η ανανεωτική συνάρτηση για Wei(1,4).	73
5.4 Η συνάρτηση της ανανεωτικής πυκνότητας για Wei(1,4).	75
5.5 Η ανανεωτική συνάρτηση για Wei(1.5 ,5).	77
5.6 Η συνάρτηση της ανανεωτικής πυκνότητας για Wei(1.5 , 5).	80
5.7 Η ανανεωτική συνάρτηση για μεγάλες τιμές της παραμέτρου α και για μεγάλες τιμές του χρόνου t .	81
5.7.1 Η ανανεωτική συνάρτηση για μεγάλες τιμές της παραμέτρου α .	81
5.7.2 Η ανανεωτική πυκνότητα για μεγάλες τιμές t .	81
Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 6 Έλεγχος μονοτονίας της συνάρτησης $u(t)$.	83
6.1 Εισαγωγή	83
6.2 Έλεγχος μονοτονίας της $u(t)$ για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιαμέσων χρόνων είναι $\Gamma(\lambda,3)$.	84
6.2.1 Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας για την περίπτωση που η F είναι $\Gamma(\lambda,3)$	84
6.2.2 Έλεγχος μονοτονίας της συνάρτησης $u(t)$ για την περίπτωση που η F είναι $\Gamma(\lambda,3)$.	85
6.3 Έλεγχος μονοτονίας της $u(t)$ για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιαμέσων χρόνων είναι $\Gamma(\lambda,4)$.	87
6.3.1 Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας για την περίπτωση που η F είναι $\Gamma(\lambda,4)$	87
6.3.2 Έλεγχος μονοτονίας της συνάρτησης $u(t)$ για την περίπτωση που η F είναι $\Gamma(\lambda,4)$.	88
6.4 Έλεγχος μονοτονίας της συνάρτησης $u(t)$ για την περίπτωση που η F είναι $\Gamma(\lambda,2)$.	89
6.5 Έλεγχος μονοτονίας της συνάρτησης $u(t)$ για την περίπτωση που η F είναι Wei(λ,α).	90
6.5.1 Έλεγχος μονοτονίας της συνάρτησης $u(t)$ για την περίπτωση που η F είναι Wei(1,2)	91
6.5.2 Έλεγχος μονοτονίας της συνάρτησης $u(t)$ για την περίπτωση που η F είναι Wei(1,5).	92
6.6 Έλεγχος μονοτονίας της $u(t)$ για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιαμέσων χρόνων ακολουθεί την μίξη Γάμμα κατανομών.	93
6.6.1 Περίπτωση που η κατανομή F των ενδιαμέσων χρόνων ακολουθεί την μίξη $\Gamma(\lambda,4)$ με την $\Gamma(n,3)$.	95
6.6.2 Περίπτωση που η κατανομή F των ενδιαμέσων χρόνων ακολουθεί την μίξη $\Gamma(\lambda,2)$ με την $\Gamma(n,4)$.	97
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας μέσω της ολοκληρώσιμης συνάρτησης $Q(t)$.	99
7.1 Εισαγωγή	99
7.2 Εφαρμογή της συνάρτησης $Q(t)$ για την περίπτωση της ανανεωτικής πυκνότητας.	100
7.3 Εφαρμογή του Θεωρήματος 7.1 για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιαμέσων χρόνων είναι $\text{Exp}(\lambda)$.	101
7.4 Εφαρμογή των Θεωρημάτων 7.1 και 7.2 για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιαμέσων χρόνων είναι $\Gamma(\lambda,\nu)$.	101
7.5 Εφαρμογή των Θεωρημάτων 7.1 και 7.2 για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιαμέσων χρόνων είναι μια μίξη δύο Γάμμα κατανομών.	104
7.5.1. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.	104

7.5.2. Η συνάρτηση $g(x)$.	105
7.5.3 Η μίξη της $\Gamma(0.9,2)$ με την $\Gamma(2,2)$	106
7.6 Εφαρμογή των Θεωρημάτων 7.1 και 7.2 για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ακολουθεί την μίξη δύο εκθετικών κατανομών.	107
7.6.1. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.	107
7.6.2. Η συνάρτηση $g(x)$.	108
7.6.3. Η μίξη της $\text{Exp}(2)$ με την $\text{Exp}(3)$.	108

Παραρτήματα

Π1 Εντολές στο Mathematica

111

Βιβλιογραφία

127

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 4.1	62
Πίνακας 5.1	74
Πίνακας 5.2	78

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Κατάλογος Σχημάτων

2.1: Η ανανεωτική πυκνότητα για την κατανομή $\Gamma(0.9, 2)$	22
2.2: Η ανανεωτική πυκνότητα για την κατανομή $\Gamma(2,3)$ για $t \in (0, 1.5)$	26
2.3: Η ανανεωτική πυκνότητα για την κατανομή $\Gamma(2,3)$ για $t \in (1.5, 4)$	27
2.4: Η ανανεωτική πυκνότητα για την κατανομή $\Gamma(2,3)$ για $t \in (4, 5)$	27
2.5: Η ανανεωτική πυκνότητα για την κατανομή $\Gamma(2,4)$ για $t \in (0, 2)$	30
2.6: Η ανανεωτική πυκνότητα για την κατανομή $\Gamma(2,4)$ για $t \in (2, 3)$	30
3.1 Η βαθμίδα αποτυχίας για την κατανομή (3.2)	41
3.2 Η παράγωγος της βαθμίδας αποτυχίας για την συνάρτηση (3.3)	42
3.3 Η βαθμίδα αποτυχίας για την τη μίξη της $\text{Wei}(0.8, 2)$ με την $\text{Wei}(0.7, 3)$	48
3.4 Η παράγωγος της βαθμίδας αποτυχίας για την τη μίξη της $\text{Wei}(0.8, 2)$ με την $\text{Wei}(0.7, 3)$	49
3.5 Η βαθμίδα αποτυχίας για την τη μίξη της $\text{Wei}(2, 2)$ με την $\text{Wei}(3, 3)$	50
3.6 Η παράγωγος της βαθμίδας αποτυχίας για την τη μίξη της $\text{Wei}(2, 2)$ με την $\text{Wei}(3, 3)$	50
3.7 Η ανανεωτική πυκνότητα συναρτήσει του χρόνου	52
3.8 Η παράγωγος της ανανεωτικής πυκνότητας συναρτήσει του χρόνου	53
4.1 Η συνάρτηση κατανομής της $\text{Wei}(1,2)$	57
4.2 Η συνάρτηση $H(t)$	58
4.3 το κοινό γράφημα της $H(t)$ και της $F(t)$ για την $\text{Wei}(1,2)$	58
4.4 Το γράφημα της $m(t)$ για την $\text{Wei}(1,2)$	59
4.5 Η συνάρτηση $H(t)$ για το διάστημα όπου $t \in (0, 0,004)$	60
4.6 το κοινό γράφημα της $H(t)$ και της $F(t)$ για $t \in (0, 0,004)$	60
4.7 το κοινό γράφημα της $H(t)$ και της $F(t)$ για $t \in (0, 5)$	61
4.8 το γράφημα της $m(t)$ για την $\text{Wei}(1,5)$	61
4.9 Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $\text{Wei}(1,2)$	63
4.10 Η συνάρτηση $h(t)$ για το διάστημα όπου $t \in (1, 4)$	63
4.11 Η συνάρτηση $h(t)$ για το διάστημα όπου $t \in (1.12778, 4)$	64
4.12 Η συνάρτηση $h(t)$ για το διάστημα όπου $t \in (0, 4)$	64
4.13 Η συνάρτηση $h(t)$ για το διάστημα όπου $t \in (1,55352, 4)$	65
4.14 Το γράφημα της $m'(t)$ για την $\text{Wei}(1,2)$	65
4.15 Το κοινό γράφημα της $F(t)$ και της $H(t)$ για $t \in (0, 9,3677 \cdot 10^{-9})$	67
4.16 το κοινό γράφημα της $F(t)$ και της $H(t)$ για $t \in (0, 2)$	67
4.17 Η συνάρτηση $m(t)$ για το διάστημα όπου $t \in (0, 2)$	68
4.18 Η συνάρτηση $m'(t)$ για το διάστημα $t \in (0, 2)$	68
4.19 Η παράγωγος $m''(t)$ της ανανεωτικής πυκνότητας για το διάστημα $t \in (0, 3)$	69
5.1 Η γραφική παράσταση της ανανεωτικής συνάρτησης από τις τιμές του πίνακα 5.1	75
5.2 Η γραφική παράσταση της ανανεωτικής πυκνότητας από τις τιμές του πίνακα 5.1	77
5.3 Η γραφική παράσταση της ανανεωτικής συνάρτησης από τις τιμές του πίνακα 5.2	79
5.4 Η γραφική παράσταση της ανανεωτικής πυκνότητας από τις τιμές του πίνακα 5.2	80
6.1 Η ανανεωτική συνάρτηση για την περίπτωση που η F είναι $\Gamma(2,3)$	85

6.2 Η συνάρτηση $u(t)$ για την περίπτωση που η F είναι $\Gamma(2,3)$	86
6.3 Η παράγωγος της συνάρτησης $u(t)$ για την περίπτωση που η F είναι $\Gamma(2,3)$	86
6.4 Η ανανεωτική πυκνότητα για την περίπτωση που η F είναι $\Gamma(2,4)$	87
6.5 Η συνάρτηση $u(t)$ για την περίπτωση που η F είναι $\Gamma(2,4)$	88
6.6 Η παράγωγος της συνάρτησης $u(t)$ για την περίπτωση που η F είναι $\Gamma(2,4)$	89
6.7 Η συνάρτηση $u(t)$ για την περίπτωση που η F είναι $\Gamma(0.9, 2)$	90
6.8 Η ανανεωτική πυκνότητα για την περίπτωση που η κατανομή F είναι $\text{Wei}(1,2)$	91
6.9 Η συνάρτηση $u(t)$ για την περίπτωση που η κατανομή F είναι $\text{Wei}(1,2)$	92
6.10 Η ανανεωτική πυκνότητα για την περίπτωση που η κατανομή F είναι $\text{Wei}(1,5)$	92
6.11 Η συνάρτηση $u(t)$ για την περίπτωση που η κατανομή F είναι $\text{Wei}(1,5)$	93
6.12 Η ανανεωτική πυκνότητα για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων είναι μίξη της $\Gamma(2,4)$ με την $\Gamma(2,3)$	96
6.13 Η συνάρτηση $u(t)$ για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων είναι μίξη της $\Gamma(2,4)$ με την $\Gamma(2,3)$	97
6.14 Η ανανεωτική πυκνότητα για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων είναι μίξη της $\Gamma(0.9,2)$ με την $\Gamma(2,4)$	98
6.15 Η συνάρτηση $u(t)$ για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων είναι μίξη της $\Gamma(0.9,2)$ με την $\Gamma(2,4)$	98
7.1 Η συνάρτηση $g(x)$ για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων είναι $\Gamma(0.9,2)$	104
7.2 Η συνάρτηση $g(x)$ για την περίπτωση της μίξης $\Gamma(0.9,2)$ με την $\Gamma(2,2)$ για $\alpha=0.5$	106
7.3 Η συνάρτηση $g(x)$ για την περίπτωση της μίξης $\Gamma(0.9,2)$ με την $\Gamma(2,2)$ για $\alpha=0.999$	107
7.4 Η συνάρτηση $g(x)$ για την περίπτωση της μίξης $\text{Exp}(2)$ με την $\text{Exp}(3)$ για $A_1=0.3$	109

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα συστήματα που, με την εμφάνιση κάποιου γεγονότος που παρατηρούμε, επανέρχονται από πιθανοθεωρητική άποψη στην αρχική τους κατάσταση, δηλαδή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι “ανανεώνονται” στο χρόνο, αποτελούν το αντικείμενο μελέτης της ανανεωτικής θεωρίας. Από μαθηματική άποψη, ένα τέτοιο σύστημα παριστάνεται με μια στοχαστική ανέλιξη (οικογένεια τυχαίων μεταβλητών) η οποία ονομάζεται ανανεωτική ανέλιξη, δηλαδή μια ανέλιξη που απαριθμεί την εμφάνιση κάποιου γεγονότος (ενδεχομένου) και στην οποία οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των διαδοχικών γεγονότων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Σε πολλά προβλήματα εφαρμοσμένων πιθανοτήτων έχει ενδιαφέρον η μελέτη του αριθμού των ανανεώσεων και του χρόνου που χρειάζεται η κάθε ανανέωση σε ένα ανανεωτικό σύστημα.

Στο Κεφάλαιο 1 δίνονται αναλυτικά οι έννοιες της ανανεωτικής ανέλιξης, ανανεωτικής συνέλιξης και της ανανεωτικής συνάρτησης. Η ανανεωτική συνάρτηση είναι ο αναμενόμενος αριθμός των ανανεώσεων σε μια ανανεωτική διαδικασία και η παράγωγος αυτής (δηλαδή ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται) καλείται ανανεωτική πυκνότητα. Η συμπεριφορά της ως προς την μονοτονία είναι το κύριο αντικείμενο μελέτης αυτής της διπλωματικής. Στη συνέχεια αφού δοθούν δυο παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση των παραπάνω εννοιών αναφέρονται έξι σημαντικά ασυμπτωτικά θεωρήματα των ανελίξεων με πιο σημαντικό το Θεώρημα 1.8 για την ανανεωτική πυκνότητα. Τέλος αναφέρονται δυο εναλλακτικοί τρόποι υπολογισμού της ανανεωτικής συνάρτησης (βαθμίδα αποτυχίας και μετασχηματισμός Laplace). Σημαντικές αναφορές για την ανανεωτική θεωρία μπορούν να βρεθούν στο βιβλίο του Cox(1962) ή στο βιβλίο των Grimmet και Stirzaker (2002).

Το βασικό θέμα με το οποίο θα ασχοληθούμε στα επόμενα κεφάλαια είναι η μελέτη της ύπαρξης ή μη μονοτονίας για την ανανεωτική πυκνότητα, εξετάζοντας διάφορες περιπτώσεις για την κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων, σε μια ανανεωτική διαδικασία.

Πιο συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 2 βρίσκουμε την ανανεωτική πυκνότητα από τον ορισμό της, (χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της ενότητας 2.2.1 δηλαδή ότι η k -οστή συνέλιξη της F με τον εαυτό της είναι επίσης μια Γάμμα κατανομή με παραμέτρους λ και νk όπου η F είναι μια Γάμμα κατανομή με παραμέτρους λ και ν) για την περίπτωση που η F είναι Γάμμα κατανομή και για τις περιπτώσεις που η παράμετρος ν πάρει τιμές 1,2,3,4. Το αποτέλεσμα για $\alpha=1$ (περίπτωση εκθετικής) είναι ότι η ανανεωτική πυκνότητα είναι μια σταθερή συνάρτηση στο χρόνο (και πιο συγκεκριμένα ίση με την παράμετρο λ), για $\alpha=2$ παρατηρούμε ότι η ανανεωτική πυκνότητα είναι μια αύξουσα (μονότονη) συνάρτηση του χρόνου, κάτι που δεν ισχύει για τις περιπτώσεις όπου $\alpha=3$ και $\alpha=4$ όπου δεν υπάρχει μονοτονία για την ανανεωτική πυκνότητα.

Στο Κεφάλαιο 3 θα χρησιμοποιήσουμε κάποια θεωρήματα για να δείξουμε ότι για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ακολουθεί τη μίξη εκθετικών η αντίστοιχη ανανεωτική πυκνότητα είναι πάντα φθίνουσα (μονότονη) συνάρτηση του χρόνου. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι δεν ισχύει πάντα ανάλογο αποτέλεσμα για την περίπτωση που η κατανομή F είναι μια μίξη Weibull κατανομών, αφού βρίσκοντας την βαθμίδα αποτυχίας σε ένα παράδειγμα θα διαπιστώσουμε ότι η συγκεκριμένη μίξη δυο IFR Weibull κατανομών δεν καταλήγει σε IFR κατανομή, αφού η αντίστοιχη βαθμίδα αποτυχίας δεν είναι παντού μια μονότονη συνάρτηση.

Δηλαδή για την μίξη δυο DFR Weibull κατανομών γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι η αντίστοιχη ανανεωτική πυκνότητα είναι πάντα φθίνουσα, ενώ η μίξη δυο IFR Weibull δεν γνωρίζουμε (δεν υπάρχει ανάλογο θεώρημα με πριν) για την μονοτονία της ανανεωτικής πυκνότητας. Τέλος στην τελευταία ενότητα χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό Laplace σε ένα παράδειγμα για την μίξη εκθετικών για να ελέγξουμε την μονοτονία της αντίστοιχης ανανεωτικής πυκνότητας.

Στα Κεφάλαια 4 και 5 θα μελετήσουμε την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων είναι Weibull για $\alpha > 1$. Για την περίπτωση αυτή η ανανεωτική πυκνότητα δεν μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά, για τον λόγο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε διάφορες προσεγγίσεις.

Πιο συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 4 (αφού αναφέρουμε χρονικά τους επιστήμονες που ασχολήθηκαν προγενέστερα με αυτή την περίπτωση) θα χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση των Constantine και Robinson (2003) για την ανανεωτική συνάρτηση για να καταλήξουμε σε συμπεράσματα για την μονοτονία της ανανεωτικής πυκνότητας. Εξετάζοντας δύο περιπτώσεις Weibull κατανομής ($\alpha=2$ και $\alpha=5$) θα παρατηρήσουμε μη ύπαρξη μονοτονίας για την ανανεωτική πυκνότητα, σε αντίθεση με το παράδειγμα της μίξης Weibull όπου η ανανεωτική πυκνότητα είναι αύξουσα συνάρτηση ντου χρόνου.

Στο Κεφάλαιο 5 θα προσεγγίσουμε (μέσω παραδειγμάτων) την ανανεωτική συνάρτηση για την περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την Weibull κατανομή (για $\alpha > 1$) μέσω της κανονικής κατανομής. Αφού παρουσιάσουμε στην αρχή κάποιες αναφορές για την περίπτωση αυτή (με την προσέγγιση της κανονικής κατανομής) θα αναφέρουμε και θα εφαρμόσουμε την προσέγγιση των Cui και Xie (2003) για δύο περιπτώσεις IFR Weibull κατανομών μέσω δυο παραδειγμάτων. Επειδή με την παραπάνω προσέγγιση θα καταλήξουμε σε δεδομένα και όχι σε κάποια μαθηματική σχέση για την ανανεωτική συνάρτηση, η ανανεωτική πυκνότητα αφού μετρά το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η ανανεωτική συνάρτηση θα βρεθεί (για κάθε τιμή t) από την γενική σχέση, από όπου θα παρατηρήσουμε ότι οι αντίστοιχες ανανεωτικές πυκνότητες για τα δυο παραδείγματα δεν είναι μονότονες συναρτήσεις (δηλαδή παντού αύξουσες ή παντού φθίνουσες).

Από τη μελέτη των παραπάνω παραδειγμάτων των προηγούμενων κεφαλαίων (και κυρίως από τα σχήματα των ανανεωτικών πυκνοτήτων) γεννιέται το ερώτημα, μήπως για τα παραδείγματα που δεν παρατηρήθηκε μονοτονία για τις αντίστοιχες ανανεωτικές πυκνότητες ευθύνεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής.

Στο πρώτο μέρος του Κεφαλαίου 6 καλούμε $u(t)$ την συνάρτηση που προκύπτει αν αφαιρέσουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας από τον τύπο της ανανεωτικής πυκνότητας και στη συνέχεια εξετάζουμε τα παραδείγματα του κεφαλαίου 2 (περίπτωση που η κατανομή F ακολουθεί την Γάμμα κατανομή) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι συνάρτηση $u(t)$ είναι τώρα μια μονότονη συνάρτηση αποτέλεσμα που δεν ίσχυε για την ανανεωτική πυκνότητα. Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου 6 μελετούμε τα δύο παραδείγματα του κεφαλαίου 4 για IFR Weibull κατανομή από όπου φαίνεται ότι η συνάρτηση $u(t)$ μπορεί να είναι μονότονη, με την προϋπόθεση ότι οι μικρές διακυμάνσεις στη μονοτονία οφείλονται στο γεγονός ότι η ανανεωτική συνάρτηση υπολογίζεται προσεγγιστικά για τις περιπτώσεις αυτές. Στο τρίτο μέρος του κεφαλαίου 6 παρατηρούμε την μη ύπαρξη μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας εξετάζοντας δύο παραδείγματα που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ακολουθεί τη μίξη δύο Γάμμα κατανομών (για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων).

Τέλος στο Κεφάλαιο 7 παραθέτουμε το άρθρο του Weiner (1965), ο οποίος αναφέρει τις προδιαγραφές και περιορισμούς που πρέπει να ικανοποιεί μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση για να είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα (μονότονη). Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το παραπάνω θεώρημα για μια ειδική περίπτωση του παραπάνω θεωρήματος για την ύπαρξη ή μη μονοτονίας για την ανανεωτική πυκνότητα. Αφού προσδιορίσουμε τις προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν για να είναι μονότονη η ανανεωτική πυκνότητα, συνεχίζουμε εξετάζοντας διάφορα παραδείγματα για την κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων, από όπου παρατηρούμε (για συγκεκριμένα παραδείγματα) ότι για την περίπτωση που η F είναι μια Γάμμα κατανομή και για την περίπτωση της μίξης δύο Γάμμα κατανομών, οι αντίστοιχες ανανεωτικές πυκνότητες δεν είναι μονότονες.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Η ανανεωτική συνάρτηση και η ανανεωτική πυκνότητα.

1.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό δίνουμε τους ορισμούς και κάποια πρακτικά παραδείγματα των κυριότερων εννοιών που εμφανίζονται στην ανανεωτική θεωρία (renewal theory).

Η πιο σημαντική συνάρτηση που απαντάται σε αυτή τη θεωρία είναι η ανανεωτική συνάρτηση (renewal function) η παράγωγος της οποίας ονομάζεται ανανεωτική πυκνότητα και είναι το βασικό αντικείμενο μελέτης στην παρούσα διπλωματική.

Αφού δώσουμε τον ορισμό μιας ανανεωτικής ανέλιξης θα συνεχίσουμε με κάποια βασικά θεωρήματα και ιδιότητες για τις ανανεωτικές ανελιξεις για να εισάγουμε στη συνέχεια την έννοια της ανανεωτικής συνάρτησης και της ανανεωτικής πυκνότητας. Στην ενότητα 1.4 θα παραθέσουμε κάποια πρακτικά και χρήσιμα παραδείγματα που έχουν εφαρμογή η ανανεωτική συνάρτηση και πυκνότητα και θα βοηθήσουν στην καλύτερη κατανόηση των παραπάνω εννοιών. Στη συνέχεια στην ενότητα 1.5 θα αναφέρουμε κάποια βασικά θεωρήματα που στηρίζονται στις ασυμπτωτικές ιδιότητες και έχουν εφαρμογή, μεταξύ άλλων, στη στατιστική συμπερασματολογία για την ανανεωτική συνάρτηση.

Μία ανανεωτική ανέλιξη $\{N(t), t \geq 0\}$ είναι μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία, όπου στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ έχουμε τη πραγματοποίηση n φορές των ζητούμενων γεγονότων, όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι (πραγματοποίησης των γεγονότων) είναι ανεξάρτητες και ισόνομες μεταβλητές. Ασυμπτωτικά οι ανανεωτικές ανελιξεις ερμηνεύονται από την ανανεωτική εξίσωση, από το απλό ανανεωτικό θεώρημα και από το βασικό ανανεωτικό θεώρημα.

Ορισμός 1.1: Μία ανανεωτική ανέλιξη $N = \{N(t), t \geq 0\}$ είναι μια στοχαστική ανέλιξη, δηλαδή μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών, όπου

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\},$$

$T_0 = 0$, $T_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ για $n \geq 1$ και $\{X_i\}$ είναι μία ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

1.2 Ιδιότητες συνελίξεων

Σε μια ανανεωτική ανέλιξη όπως είδαμε εξετάζουμε αθροίσματα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών. Για το λόγο αυτό μια πολύ βασική έννοια στην ανανεωτική θεωρία είναι η έννοια της συνέλιξης, την οποία εξετάζουμε στην παρούσα ενότητα.

Στην παρούσα παράγραφο θα δοθούν κάποιες βασικές ιδιότητες των συνελίξεων καθώς επίσης και δύο σημαντικά και βασικά θεωρήματα που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της ανανεωτικής συνάρτησης και αποτελούν χρήσιμα εργαλεία για την επίλυση σημαντικών προβλημάτων. Οι παρακάτω ιδιότητες και τα θεωρήματα βρίσκονται στις σημειώσεις του Κ. Πολίτη (2009).

1.2.1 Θεωρήματα

Θεώρημα 1.1. Η συνέλιξη δύο αθροιστικών (συνεχών) κατανομών έστω F και H συμβολίζεται με $(F * H)(x)$ και δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$(F * H)(x) = \int_0^x F(x-t)dH(t)$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την

$$(F * H)(x) = \int_0^x F(x-t)h(t)dt$$

με την προϋπόθεση ότι υπάρχει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $h(t)$.

Αντίστοιχα με το Θεώρημα 1.1 για τις αθροιστικές συναρτήσεις κατανομών, ισχύει και για τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας αυτών

Θεώρημα 1.2 Η πυκνότητα πιθανότητας της συνέλιξης $(F * H)(x)$ συμβολίζεται με $(f * h)(x)$ και δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$(f * h)(x) = \int_0^x f(x-t)h(t)dt$$

όπου f, h είναι οι πυκνότητες των F, H αντίστοιχα.

Στη συνέχεια παραθέτουμε δύο σημαντικές ιδιότητες των συνελίξεων που βοηθούν σημαντικά στην απλοποίηση των υπολογισμών.

1.2.2 Ιδιότητες των συνελίξεων

Οι ανανεωτικές ανελίξεις έχουν κάποιες βασικές ιδιότητες που βοηθούν σημαντικά στη μελέτη των αντίστοιχων προβλημάτων.

Ιδιότητα 1.1 Μία από τις σημαντικές ιδιότητες των συνελίξεων είναι ότι, αν X, Y δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής $F(x)$ και $H(x)$ αντίστοιχα τότε η συνάρτηση κατανομής του αθροίσματος $X + Y$ είναι η συνέλιξη αυτών δηλαδή η $(F * H)(x)$

Ιδιότητα 1.2. Με δεδομένο ότι η κατανομή μιας μεταβλητής $X+Y$ είναι ίδια με αυτή της $Y+X$ ισχύει ότι

$$(F * H)(x) = (H * F)(x)$$

δηλαδή ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα.

Ιδιότητα 1.3. Η σειρά των συναρτήσεων στη συνέλιξη δεν παίζει ρόλο, δηλαδή ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα και πιο συγκεκριμένα για την συνέλιξη τριών συναρτήσεων ισχύει η παρακάτω σχέση

$$[(F * H) * D](x) = [(F * (H * D))](x)$$

1.3 Η ανανεωτική συνάρτηση

Στη παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με τη μελέτη των ιδιοτήτων της ανανεωτικής συνάρτησης $m(t)$ και ειδικότερα με την συμπεριφορά ως προς τη μονοτονία της ανανεωτικής πυκνότητας. Σε αυτή την ενότητα, αφού δώσουμε τον ορισμό της ανανεωτικής συνάρτησης, θα αναφέρουμε δύο προτάσεις.

Ορισμός 1.1. Σε μια ανανεωτική ανέλιξη $\{N(t) : t \geq 0\}$ η ανανεωτική συνάρτηση είναι η μέση τιμή, για κάθε t , της τυχαίας μεταβλητής $N(t)$.

Η ανανεωτική συνάρτηση συμβολίζεται με $m(t)$

Συνεπώς έχουμε ότι: $m(t) = E(N(t))$

Πρόταση 1.1. Για κάθε φυσικό ακέραιο n , ισχύει:

$$P\{N(t) = n\} = F^{*n}(t) - F^{*(n-1)}(t)$$

όπου F^{*n} είναι η n -τάξεως συνέλιξη της F με τον εαυτό της.

Απόδειξη Γνωρίζουμε ότι $\{N(t) \geq n\}$ συνεπάγεται ότι $\{S_n \leq t\}$ δηλαδή τα δύο ενδεχόμενα είναι ισοδύναμα, άρα

$$\begin{aligned} P\{N(t) = n\} &= P\{N(t) \geq n\} - P\{N(t) \geq n-1\} \\ &= P\{S_n \leq t\} - P\{S_{n-1} \leq t\} \\ &= P\{X_1 + \dots + X_n \leq t\} - P\{X_1 + \dots + X_{n-1} \leq t\} \\ &= F^{*n}(t) - F^{*(n-1)}(t). \end{aligned}$$

Πρόταση 1.2.

Για την ανανεωτική συνάρτηση $m(t) = E(N(t))$ ισχύει ότι

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(t)$$

Απόδειξη

Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές $W_n = W_n(t)$, $n \geq 1$ με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει:

$W_n = 1$ αν η n -οστή ανανέωση συνέβη στο διάστημα $[0, t]$

και $W_n = 0$ αλλιώς.

Από τον παραπάνω ορισμό το ενδεχόμενο $W_n = 1$ είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο

$$S_n \leq t$$

άρα

$$E\{W_n\} = 1 \cdot P\{W_n = 1\} + 0 \cdot P\{W_n = 0\}$$

$$= P\{W_n = 1\}$$

$$\begin{aligned}
&= P\{S_n \leq t\} = P\{X_1 + \dots + X_n \leq t\} \\
&= F^{*n}(t)
\end{aligned}$$

Επειδή από τον ορισμό $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
m(t) &= E\{N(t)\} = E\left\{\sum_{n=1}^{\infty} W_n\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} E\{W_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(t)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Ένα άμεσο αποτέλεσμα από την σχέση (1.1) για την ανανεωτική συνάρτηση είναι το αντίστοιχο αποτέλεσμα για την **ανανεωτική πυκνότητα** όπου με βάση τις ιδιότητες των συνελίξεων βρίσκεται από τη συνέλιξη της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και πιο συγκεκριμένα από την παρακάτω σχέση

$$m'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{*n}(t) \tag{1.2}$$

Η ανανεωτική συνάρτηση είναι ο αναμενόμενος αριθμός ανανεώσεων στο χρονικό διάστημα $[0,t]$ και η ανανεωτική πυκνότητα ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται ο αναμενόμενος αριθμός των ανανεώσεων.

Τέλος υπάρχει και ο παρακάτω τύπος υπολογισμού για την ανανεωτική συνάρτηση ο οποίος χρησιμοποιείται ως βάση για πολλούς τρόπους προσέγγισης της ανανεωτικής συνάρτησης σε περιπτώσεις που δεν μπορεί να υπολογιστεί άμεσα από τον τύπο (1.1).

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)f(x)dx \tag{1.3}$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες και σχόλια ο αναγνώστης παραπέμπεται στο βιβλίο του Θ. Αρτίκη (1991).

Με παραγωγή της (1.3) προκύπτει ότι η αντίστοιχη εξίσωση για την ανανεωτική πυκνότητα είναι:

$$m'(t) = f(t) + \int_0^t m'(t-x)f(x)dx \tag{1.4}$$

1.4 Πρακτικά παραδείγματα

Οι ανανεωτικές ανελίξεις έχουν πολλαπλές εφαρμογές σε προβλήματα πιθανότητας και γενικότερα σε συστήματα που ανανεώνονται. Τέτοια συστήματα έχουν εφαρμογή στη θεωρία αξιοπιστίας και στην οικονομία, ιδιαίτερα δε σε αναλογιστικά προβλήματα. Στη παρούσα παράγραφο θα αναφέρουμε ένα παράδειγμα για την θεωρία αξιοπιστίας και μία εφαρμογή σε μια ασφαλιστική εταιρία.

1.4.1 Παράδειγμα 1^ο

Σε ένα οικιακό ηλεκτρικό πίνακα απαραίτητη προϋπόθεση για να έχει το σπίτι ηλεκτρικό ρεύμα είναι να λειτουργεί η κεντρική ηλεκτρική ασφάλεια. Έστω ότι από ένα πλήθος ηλεκτρικών ασφαλειών που διαθέτουμε, τίθεται σε λειτουργία την χρονική στιγμή 0 η πρώτη ασφάλεια της οποίας ο χρόνος λειτουργίας είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή X_1 . Τη στιγμή κατά την οποία η πρώτη ασφάλεια πάψει να λειτουργεί αντικαθίσταται (ανανεώνοντας το σύστημα) από μία άλλη, της οποίας ο χρόνος λειτουργίας είναι επίσης συνεχής τυχαία μεταβλητή X_2 , η οποία έχει την ίδια κατανομή με την X_1 κοκ.

Ο χρόνος πραγματοποίησης της n ανανέωσης περιγράφεται από την τυχαία μεταβλητή

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad n \geq 1$$

Υποθέτοντας ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ και $n \geq 1$ είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την ίδια κατανομή, τότε η τυχαία μεταβλητή $N(t)$ η οποία παίρνει τιμές

$$N(t) = n \quad \text{αν} \quad S_n \leq t \leq S_{n+1}, \quad n \geq 0$$

δίνει στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ τον αριθμό των ανανεώσεων.

1.4.2 Παράδειγμα 2^ο

Θεωρούμε ότι στη διάρκεια μιας ημέρας καταφθάνουν σε μία ασφαλιστική εταιρία n τον αριθμό (τυχαία μεταβλητή) απαιτήσεις για αποζημίωση, έστω $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ τυχαίες συνεχείς μεταβλητές που παριστάνουν τους χρόνους μεταξύ δυο διαδοχικών αποζημιώσεων. Υποθέτοντας ότι οι τυχαίες μεταβλητές

$$X_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{και} \quad n \geq 1$$

είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την ίδια κατανομή, τότε η τυχαία μεταβλητή

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad n \geq 1$$

δηλώνει το χρόνο άφιξης της n-οστής αποζημίωσης στην ασφαλιστική εταιρία στη διάρκεια μιας ημέρας και τέλος στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ ο αριθμός των ανανεώσεων περιγράφεται από την τυχαία μεταβλητή $N(t)$ για την οποία ισχύει και πάλι

$$N(t) = n \quad \text{αν} \quad S_n \leq t \leq S_{n+1}, \quad n \geq 0$$

Υπάρχουν και τεχνικές που εφαρμόζονται σε διάφορα συστήματα, όπου η ανανέωση γίνεται σε ένα προκαθορισμένο χρόνο. Πιο συγκεκριμένα αν η φθορά συμβεί πέραν του καθορισμένου χρόνου τότε η συσκευή αντικαθίσταται πριν χαλάσει. Ενώ αν η φθορά επέλθει πριν από τον προκαθορισμένο χρόνο τότε αντικαθίσταται κανονικά στο χρόνο φθοράς.

1.5 Ασυμπτωτικές ιδιότητες μιας ανανεωτικής ανέλιξης

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με σε ασυμπτωτικά θεωρήματα ανανεωτικών ανελιξεων υποθέτοντας ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι μη διακριτές τυχαίες μεταβλητές που θα μας βοηθήσουν στην επίλυση πολλών προβλημάτων που σχετίζονται με ανανεωτικές διαδικασίες. Περισσότερες λεπτομέρειες μπορούν να βρεθούν στο βιβλίο των Grimmet and Stirzaker (2002).

Θεώρημα 1.3

Θεωρώντας ότι υπάρχει η μέση τιμή της F και η κατανομή είναι μη διακριτή (non-lattice), δηλαδή $m = E(X_1)$ και $m < \infty$ ισχύει

$$\frac{1}{t} N(t) \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{m} \quad \text{καθώς το} \quad t \rightarrow \infty$$

Θεώρημα 1.4

Αν θεωρήσουμε ότι υπάρχει εκτός της μέσης τιμής της F και η διακύμανσή της δηλαδή $s^2 = \text{Var}(X_1)$ και ικανοποιεί την συνθήκη $0 < s < \infty$ τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε στατιστική συμπερασματολογία για τον έλεγχο υποθέσεων χρησιμοποιώντας την σύγκλιση της παρακάτω στατιστικής συνάρτησης

$$\frac{N(t) - t/m}{\sqrt{ts^2/m^3}} \xrightarrow{D} N(0,1) \quad \text{καθώς το} \quad t \rightarrow \infty,$$

όπου το σύμβολο \xrightarrow{D} δηλώνει σύγκλιση κατά κατανομή.

Θεώρημα 1.5 (Απλό ανανεωτικό θεώρημα)

Σε αντιστοιχία με το Θεώρημα 1.3 ισχύει το ανάλογο για την ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$, δηλαδή

$$\frac{1}{t}m(t) \xrightarrow{D} \frac{1}{m} \text{ καθώς το } t \rightarrow \infty$$

Θεώρημα 1.6

Αν οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι μη αριθμήσιμοι ισχύει ότι

$$m(t+h) - m(t) \xrightarrow{D} \frac{h}{m} \text{ καθώς το } t \rightarrow \infty \text{ και για κάθε } h.$$

Τέλος αναφέρουμε ένα βασικό θεώρημα με πολλές εφαρμογές σε προβλήματα θεωρίας κινδύνου.

Θεώρημα 1.7 Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα (Key Renewal Theorem)

Έστω μια συνάρτηση $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$

Αν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

(α) $g(t) \geq 0$ για κάθε t

(β) η συνάρτηση g είναι ολοκληρώσιμη και φραγμένη, δηλαδή

$$\int_0^{\infty} g(t)dt < \infty$$

(γ) η g είναι μία φθίνουσα συνάρτηση, τότε ισχύει

$$\int_0^t g(t-x)dm(x) \rightarrow \frac{1}{m} \int_0^{\infty} g(x)dx \text{ καθώς το } t \rightarrow \infty$$

Τέλος ένα άλλο θεώρημα για την ανανεωτική πυκνότητα αναφέρει ότι :

Θεώρημα 1.8 : Αν η συνάρτηση F έχει μέση τιμή μ και πυκνότητα f τότε ισχύει :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m'(t) = \frac{1}{m}$$

Τα παραπάνω θεωρήματα μπορούν να αναζητηθούν στο βιβλίο των Grimmet and Stirzaker (2002).

1.6 Διαφορετικές μέθοδοι υπολογισμού της ανανεωτικής συνάρτησης

Στις προηγούμενες ενότητες αναφέραμε ότι η ανανεωτική συνάρτηση ικανοποιεί την σχέση

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(t)$$

Αυτή είναι μία μέθοδος υπολογισμού της ανανεωτικής συνάρτησης και βρίσκει εφαρμογές για την περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι μιας ανανεωτικής διαδικασίας ακολουθούν την κατανομή, Εκθετική, Γάμμα, Μείξη εκθετικών και άλλες κατανομές. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις που οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν κατανομή (όπως Weibull, Pareto κάποιες περιπτώσεις μίξης κατανομών κα) που το παραπάνω άθροισμα δεν υπολογίζεται και έτσι δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε συμπεράσματα για την συμπεριφορά της ανανεωτικής συνάρτησης.

Για αυτές τις περιπτώσεις υπάρχουν έμμεσοι τρόποι για να ελέγξουμε με ασφάλεια τη συμπεριφορά της ανανεωτικής συνάρτησης. Στην παρούσα ενότητα θα ασχοληθούμε με δύο τρόπους. Πρώτα θα αναφέρουμε την βαθμίδα αποτυχίας και στη συνέχεια τη μέθοδο Laplace.

1.6.1 Η βαθμίδα αποτυχίας

Στην περίπτωση που μια κατανομή είναι συνεχής, η βαθμίδα αποτυχίας ή ένταση αποτυχίας είναι εξ' ορισμού ίση με τη παρακάτω σχέση

$$I(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} \quad (1.5)$$

όπου $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ είναι η ουρά της κατανομής και $f(x)$ η πυκνότητα πιθανότητας αυτής. Με αυτή την μέθοδο δεν καταλήγουμε σε κάποια σχέση για την ανανεωτική συνάρτηση, αλλά μέσω της μονοτονίας της βαθμίδας αποτυχίας μπορούμε να βγάλουμε ασφαλή συμπεράσματα για την μονοτονία της ανανεωτικής πυκνότητας βασιζόμενοι σε κάποια θεωρήματα, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Στο κεφάλαιο 3 παραθέτουμε κάποια διευκρινιστικά παραδείγματα και χρήσιμα θεωρήματα για διάφορες περιπτώσεις κατανομών.

1.6.2 Μέθοδος μετασχηματισμών Laplace

Η διαφορά αυτής της μεθόδου με την προηγούμενη, είναι ότι με τον μετασχηματισμό Laplace μπορούμε να καταλήξουμε σε μια σχέση για την ανανεωτική συνάρτηση. Ο μετασχηματισμός Laplace μιας κατανομής με πυκνότητα πιθανότητας $f(x)$ είναι:

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \quad (1.6)$$

Ο συμβολισμός για το μετασχηματισμό Laplace μιας συνάρτησης f είναι το σύμβολο \hat{f} πάνω από την συνάρτηση ή το σύμβολο $\mathcal{L}(f(x))$.

Δύο βασικές ιδιότητες για μετασχηματισμούς Laplace είναι τα εξής:

Ιδιότητα 1 Αν f_1, f_2 δύο συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας τότε ο μετασχηματισμός Laplace της συνέλιξης τους ισούται με το γινόμενο των επιμέρους Laplace, πιο συγκεκριμένα ισχύει η παρακάτω ισότητα

$$(\hat{f}_1 * \hat{f}_2)(s) = (\hat{f}_1)(s) \cdot (\hat{f}_2)(s)$$

και στην γενική περίπτωση ισχύει

$$\hat{f}^{*k}(s) = [\hat{f}(s)]^k \quad (1.7)$$

Ιδιότητα 1 είδαμε στις προηγούμενες ενότητες ότι για την ανανεωτική συνάρτηση ισχύει

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(t)$$

Οπότε χρησιμοποιώντας τον τύπο για την ανανεωτική πυκνότητα

$$m'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{*n}(s)$$

Παίρνουμε την πυκνότητα με μετασχηματισμό Laplace

$$\mathcal{L} m'(s) = \mathcal{L} \left[\sum_{n=1}^{\infty} f^{*n}(s) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}^{*n}(s)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [\hat{f}(s)]^n$$

Στους παραπάνω υπολογισμούς χρησιμοποιήσαμε την σχέση (1.7) και στη συνέχεια λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός Laplace είναι γραμμική συνάρτηση το παραπάνω άθροισμα είναι άθροισμα γεωμετρικής πρόοδο άπειρων όρων, οπότε ισούται με

$$\mathcal{L}^{-1} m'(s) = \frac{\hat{f}(s)}{1 - \hat{f}(s)} \quad (1.8)$$

Έχοντας την ανανεωτική πυκνότητα Laplace μπορούμε με αναστροφή να πάρουμε την ανανεωτική πυκνότητα και στη συνέχεια ολοκληρώνοντάς τη να βρούμε την ανανεωτική συνάρτηση, στην περίπτωση που τα παραπάνω είναι δυνατά με αναλυτικό τρόπο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας στην περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων είναι Γάμμα

2.1 Εισαγωγή

Το βασικό πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθούμε στη συνέχεια είναι η μελέτη της μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας για διάφορες περιπτώσεις της κατανομής F των ενδιάμεσων χρόνων.

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την συμπεριφορά της ανανεωτικής πυκνότητας, δηλαδή με το ρυθμό μεταβολής του αναμενόμενου αριθμού των ανανεώσεων στο χρόνο, για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων είναι μια Γάμμα κατανομή.

Πιο συγκεκριμένα στις επόμενες ενότητες θα παρατηρήσουμε την μονοτονία της ανανεωτικής πυκνότητας όταν η F ακολουθεί την Γάμμα κατανομή με παραμέτρους $\Gamma(\lambda,2)$ και θα διαπιστώσουμε ότι αυτή είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου, κάτι που δεν ισχύει στην περίπτωση που η F ακολουθεί την Γάμμα κατανομή με παραμέτρους $\Gamma(\lambda,3)$ αφού η ανανεωτική πυκνότητα είναι συνάρτηση του ημίτονου, έχοντας σαν συνέπεια την μη ύπαρξη μονοτονίας στο διάστημα $(0, \infty)$.

Λόγω της διαφορετικότητας της ανανεωτικής πυκνότητας ως προς την μονοτονία για τις δύο παραπάνω κατανομές θα μελετήσουμε για μια επιπλέον περίπτωση την $\Gamma(\lambda,4)$, από όπου θα διαπιστώσουμε την μη ύπαρξη μονοτονίας.

Τέλος στην τελευταία ενότητα θα ελέγξουμε την ύπαρξη ή όχι μονοτονίας για την ανανεωτική πυκνότητα για την απλή περίπτωση της Γάμμα κατανομής δηλαδή της εκθετικής με δυο τρόπους.

2.2 Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας στην περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ακολουθεί τη Γάμμα κατανομή με παραμέτρους $\Gamma(\lambda,2)$

Σε αυτή την ενότητα θα υπολογίσουμε την ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$ όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν τη Γάμμα κατανομή $\Gamma(\lambda,2)$ δηλαδή με πυκνότητα

$$f(x) = \frac{1^2}{(2-1)!} e^{-1x} x^{2-1}.$$

2.2.1 Η k-οστή συνέλιξη της F

Αρχικά θα υπολογίσουμε την κατανομή της k-συνέλιξης της F με τον εαυτό της, δηλαδή της $F^{*k}(x)$ όταν η συνάρτηση κατανομής της $F(x)$ είναι Γάμμα κατανομή με παραμέτρους $\Gamma(\lambda, \nu)$.

Συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε ότι η $F^{*k}(x)$ είναι και αυτή μια Γάμμα κατανομή με παραμέτρους λ και νk , δηλαδή το άθροισμα (συνέλιξη) k τυχαίων μεταβλητών όπου η κάθε μια ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(\lambda, \nu)$ (ισόνομες) και ταυτόχρονα είναι και ανεξάρτητες, ακολουθεί επίσης την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους λ και νk .

Από τον ορισμό της συνέλιξης έχουμε ότι

$$f^{*k}(x) = \int_0^x f^{*(k-1)}(x-t) f(t) dt$$

Χρησιμοποιώντας την επαγωγική μέθοδο έχουμε ότι

1^{ov} Ισχύει για $k=1$ (προφανές) αφού

$$f^{*1}(x) = f(x)$$

2^{ov} Έστω ότι ισχύει για $k=\mu$ δηλαδή

$$f^{*\mu}(x) = \frac{1^{nm}}{(nm-1)!} x^{nm-1} e^{-1x}$$

3^{ov} Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $k=\mu+1$ δηλαδή

$$f^{*\mu+1}(x) = \frac{1^{nm+n}}{(nm+n-1)!} x^{nm+n-1} e^{-1x} \quad (2.1)$$

χρησιμοποιώντας ότι

$$f^{*\mu+1}(x) = (f * f^{*\mu})(x)$$

Παίρνουμε ότι

$$f^{*m+1}(x) = \int_0^x \frac{I^n}{(n-1)!} (x-t)^{n-1} e^{-I(x-t)} \frac{I^{nm}}{(nm-1)!} t^{nm-1} e^{-It} dt \Leftrightarrow$$

$$f^{*m+1}(x) = \frac{I^{nm+n} e^{-Ix}}{(nm-1)!(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} t^{nm-1} dt \quad (2.2)$$

Υπολογίζοντας το παρακάτω ολοκλήρωμα με το πακέτο αλγεβρικών υπολογισμών Mathematica (βλέπε παράρτημα 2.1) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\Gamma(k)=(k-1)!$ (όταν το k είναι ακέραιος) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^x (x-t)^{n-1} t^{nm-1} dt &= x^{nm+n-1} \frac{\Gamma(n)\Gamma(nm)}{\Gamma(nm+n)} \\ &= x^{nm+n-1} \frac{(n-1)!(nm-1)!}{(nm+n-1)!} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας το παραπάνω αποτέλεσμα της σχέσης (2.3) στην σχέση (2.2) παίρνουμε την (2.1)

$$\begin{aligned} f^{*m+1}(x) &= \frac{I^{nm+n} e^{-Ix}}{(nm-1)!(n-1)!} x^{nm+n-1} \frac{(n-1)!(nm-1)!}{(nm+n-1)!} \Leftrightarrow \\ f^{*m+1}(x) &= \frac{I^{nm+n}}{(nm+n-1)!} x^{nm+n-1} e^{-Ix} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Συνοψίζοντας αποδείξαμε ότι αν η $f(x)$ ακολουθεί Γάμμα κατανομή με παραμέτρους $\Gamma(\lambda, \nu)$ τότε και η πυκνότητα της k -οστής συνέλιξης $f^{*k}(x)$ ακολουθεί επίσης Γάμμα κατανομή με παραμέτρους $\Gamma(\lambda, k\nu)$.

2.2.2 Η ανανεωτική πυκνότητα

Συνεχίζοντας στην εφαρμογή όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν τη Γάμμα κατανομή $\Gamma(\lambda, 2)$, η συνέλιξη της πυκνότητας $f^{*k}(x)$ ακολουθεί επίσης την Γάμμα κατανομή με παραμέτρους $\Gamma(\lambda, 2k)$.

Η ανανεωτική συνάρτηση πυκνότητας για την συνέλιξη δύο Γάμμα κατανομών ισούται από τον ορισμό με

$$m'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{*k}(x).$$

οπότε με αντικατάσταση στην σχέση (2.1) για $v=2$ προκύπτει ότι

$$m'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1t)^{2k-1} 1e^{-1t}}{(2k-1)!} \right) \Leftrightarrow$$

$$m'(t) = 1e^{-1t} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1t)^{2k-1}}{(2k-1)!} \right)$$

Το παραπάνω άθροισμα δηλαδή το

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1t)^{2k-1}}{(2k-1)!} \right) \quad (2.5)$$

είναι η πιθανότητα να πάρει περιττή τιμή το X όταν το X ακολουθεί την κατανομή Poisson και το οποίο ισούται με $\sinh(\lambda t)$ (υπερβολικό ημίτονο του λt) και το οποίο απλοποιώντας το ισούται τελικώς με

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1t)^{2k-1}}{(2k-1)!} \right) &= \sinh(\lambda t) \\ &= \frac{1}{2} e^{1t} - \frac{1}{2} e^{-1t} \end{aligned}$$

Οπότε η ανανεωτική πυκνότητα ισούται με

$$m'(t) = 1e^{-1t} \sinh(1t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-21t}) \quad (2.6)$$

2.2.3 Η ανανεωτική συνάρτηση

Για τον υπολογισμό της ανανεωτικής συνάρτησης $m(x)$ θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (1.1) του κεφαλαίου 1 δηλαδή :

$$m(x) = \int_0^x m'(t) dt$$

με αντικατάσταση της παραπάνω σχέσης (2.6) για την ανανεωτική πυκνότητα παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 m(x) &= \int_0^x \frac{l}{2} (1 - e^{-2lt}) dt \\
 &= \frac{l}{2} \int_0^x (1 - e^{-2lt}) dt \\
 &= \frac{l}{2} \left[\int_0^x 1 dt - \int_0^x e^{-2lt} dt \right] \\
 &= \frac{l}{2} \left[x - \left(-\frac{1}{2l} (e^{-2lx} - 1) \right) \right] \\
 &= \frac{l}{2} \left[x - \left(\frac{1}{2l} (1 - e^{-2lx}) \right) \right] \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

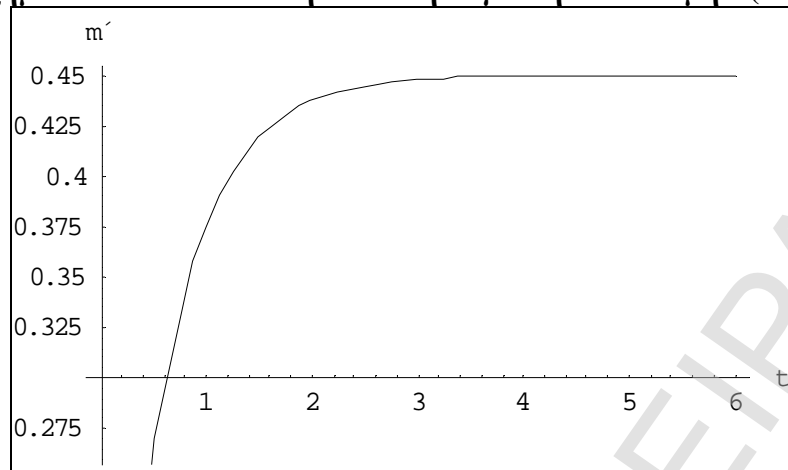
$$m(x) = \frac{1}{2} lx - \frac{1}{4} (1 - e^{-2lx})$$

Για $x=t$ έχουμε $m(t) = \frac{1}{2} lt - \frac{1}{4} (1 - e^{-2lt})$

2.2.4 Μελέτη της μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας

Ο έλεγχος για την μονοτονία της ανανεωτικής πυκνότητας στην παραπάνω περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην Γάμμα κατανομή με παραμέτρους $\Gamma(\lambda, 2)$ θα γίνει αρχικά με το γράφημα της $m'(t)$ με το t (από παράρτημα 2.3 για $\lambda=0.9$ και με βάση τη σχέση 2.6)

Σχήμα 2.1: Η ανανεωτική πυκνότητα για την κατανομή $\Gamma(0.9, 2)$



Η ανανεωτική πυκνότητα $m'(t) = \frac{I}{2}(1 - e^{-2It})$ είναι προφανώς αύξουσα συνάρτηση του t , γεγονός το οποίο φαίνεται και από το παραπάνω γράφημα.

Συμπερασματικά όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την Γάμμα κατανομή με παραμέτρους $\Gamma(\lambda, 2)$ τότε η αντίστοιχη ανανεωτική συνάρτηση πυκνότητας δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής του αναμενόμενου αριθμού των ανανεώσεων στο χρόνο είναι αύξουσα συνάρτηση του t .

2.3 Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας στην περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην Γάμμα κατανομή με παραμέτρους $\Gamma(\lambda, 3)$

Στη προηγούμενη ενότητα παρατηρήσαμε την ύπαρξη μονοτονίας για την ανανεωτική πυκνότητα στην περίπτωση που η κατανομή F είναι Γάμμα με παραμέτρους λ και 2 και πιο συγκεκριμένα είδαμε ότι αυτή είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου t .

Στη παρούσα παράγραφο θα υπολογίσουμε την ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$ όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν τη Γάμμα κατανομή $\Gamma(\lambda, 3)$ για την περίπτωση αυτή, η συνέλιξη της πυκνότητας $f^{*k}(x)$ θα ακολουθεί την $\Gamma(\lambda, 3k)$ (αποτέλεσμα από το προηγούμενη παράγραφο 2.2.1) .

2.3.1 Η ανανεωτική πυκνότητα

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα της προηγούμενης περίπτωσης βρίσκουμε αρχικά την ανανεωτική πυκνότητα για την συνέλιξη τριών Γάμμα κατανομών με βάση την σχέση 1.2 του κεφαλαίου 1.

Πιο συγκεκριμένα έχουμε ότι :

$$m'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{*k}(t).$$

με αντικατάσταση του τύπου της συνέλιξης $f^{*k}(x)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} m'(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(1t)^{3k-1} 1e^{-1t}}{(3k-1)!} \right] \\ &= 1e^{-1t} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(1t)^{3k-1}}{(3k-1)!} \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Το παραπάνω άθροισμα ισούται με

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(1t)^{3k-1}}{(3k-1)!} \right] = -\frac{1}{3} e^{-1t/2} \left(-e^{3t/2} + \text{Cos} \left[\frac{\sqrt{3}1t}{2} \right] + \sqrt{3} \text{Sin} \left[\frac{\sqrt{3}1t}{2} \right] \right)$$

(οι παραπάνω υπολογισμοί με Mathematica μπορούν να βρεθούν στο παράρτημα 2.4)

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στον τύπο για την συνάρτηση $m'(t)$ παίρνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} m'(t) &= \left(1e^{-1t} \right) - \frac{1}{3} e^{-1t/2} \left(-e^{3t/2} + \text{Cos} \left[\frac{\sqrt{3}1t}{2} \right] + \sqrt{3} \text{Sin} \left[\frac{\sqrt{3}1t}{2} \right] \right) \Leftrightarrow \\ m'(t) &= \frac{1}{3} \left(1 - e^{-3t/2} \text{Cos} \left[\frac{\sqrt{3}1t}{2} \right] - e^{-3t/2} \sqrt{3} \text{Sin} \left[\frac{\sqrt{3}1t}{2} \right] \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Μια πρώτη παρατήρηση που μπορεί να γίνει, είναι ότι σε αντίθεση με την ανανεωτική πυκνότητα της ενότητας 2.2.1 διαπιστώνουμε ότι στη σχέση για την ανανεωτική πυκνότητα περιέχονται οι συναρτήσεις του ημίτονου και του συνημίτονου οι οποίες προδιαθέτουν για την περιοδικότητα στη μονοτονία της $m'(t)$.

2.3.2 Η ανανεωτική συνάρτηση

Συνεχίζοντας τη μεθοδολογία θα υπολογίσουμε τον αναμενόμενο αριθμό των ανανεώσεων για την διαδικασία που οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους λ και 3 δηλαδή την ανανεωτική συνάρτηση $m(x)$ η οποία για αυτή την περίπτωση ισούται από τον ορισμό με :

$$m(x) = \int_0^x m'(t) dt ,$$

οπότε αντικαθιστώντας τον τύπο για την παράγωγο $m'(t)$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} &= \int_0^x \frac{1}{3} \left(1 - e^{-3t/2} \cos\left[\frac{\sqrt{3}t}{2}\right] - e^{-3t/2} \sin\left[\frac{\sqrt{3}t}{2}\right] \right) dt & (2.9) \\ &= \frac{1}{9} \left(-3 + 3Ix + e^{-3Ix/2} \left(3\cos\left[\frac{\sqrt{3}Ix}{2}\right] + \sqrt{3}\sin\left[\frac{\sqrt{3}Ix}{2}\right] \right) \right) \end{aligned}$$

Και για $x = t$ έχουμε

$$m(t) = \frac{1}{9} \left(-3 + 3It + e^{-3It/2} \left(3\cos\left[\frac{\sqrt{3}It}{2}\right] + \sqrt{3}\sin\left[\frac{\sqrt{3}It}{2}\right] \right) \right)$$

(για περισσότερη ανάλυση βλέπε παράρτημα 2.5)

2.3.3 Μελέτη της μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας

Ελέγχοντας την παράγωγο της $m'(t)$ για να δούμε τη συμπεριφορά της ως προς τη μονοτονία της, παρατηρούμε όπως αναφέρθηκε και πιο πριν ότι αυτή είναι συνάρτηση του ημίτονου και του συνημίτονου, συνεπώς θα έχει ημιτονοειδή συμπεριφορά δηλαδή θα αλλάζει περιοδικά πρόσημο συνεπώς η ανανεωτική πυκνότητα για κάποια διαστήματα θα είναι αύξουσα και σε κάποια άλλα θα είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου δηλαδή μη ύπαρξη μονοτονίας.

Συγκεκριμένα, παίρνοντας και πάλι την παράγωγο της ανανεωτικής πυκνότητας που βρέθηκε πιο παραπάνω, βλέπουμε ότι

$$m''(t) = \frac{d}{dt} m'(t) \Leftrightarrow$$

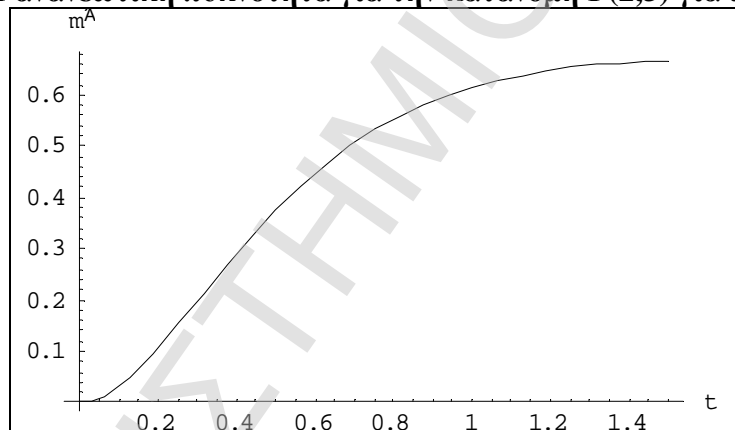
$$m''(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{3} \left(1 - e^{-3t/2} \cos \left[\frac{\sqrt{3}t}{2} \right] - e^{-3t/2} \sqrt{3} \sin \left[\frac{\sqrt{3}t}{2} \right] \right) \right) \Leftrightarrow (2.10)$$

$$m''(t) = 2\sqrt{3}e^{-9t/2} \sin \left[\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right]$$

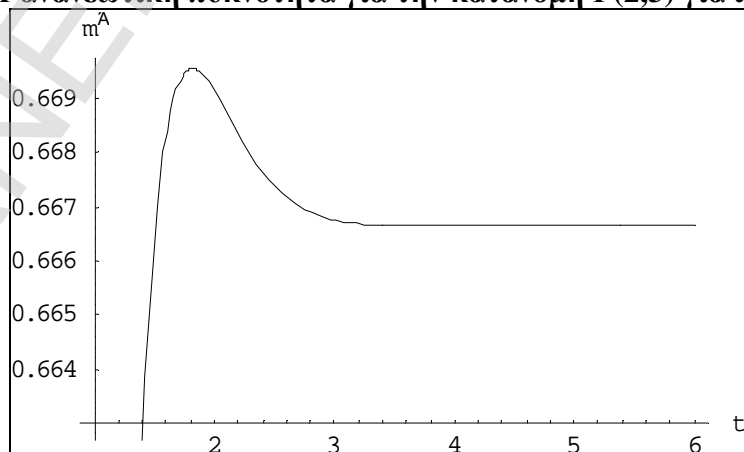
(οι υπολογισμοί για την παράγωγο βρίσκονται στο παράρτημα 2.6)

Το παραπάνω συμπέρασμα φαίνεται και από τα τρία παρακάτω γραφήματα, όπου για t μεταξύ του μηδέν και του δυο η $m'(t)$ είναι αύξουσα, για t από δυο έως τέσσερα είναι φθίνουσα και στη συνέχεια γίνεται πάλι αύξουσα για t από τέσσερα έως πέντε. Οι εντολές για τα παρακάτω τρία γραφήματα έγιναν για $\lambda=2$ και βρίσκονται στο παράρτημα 2.7)

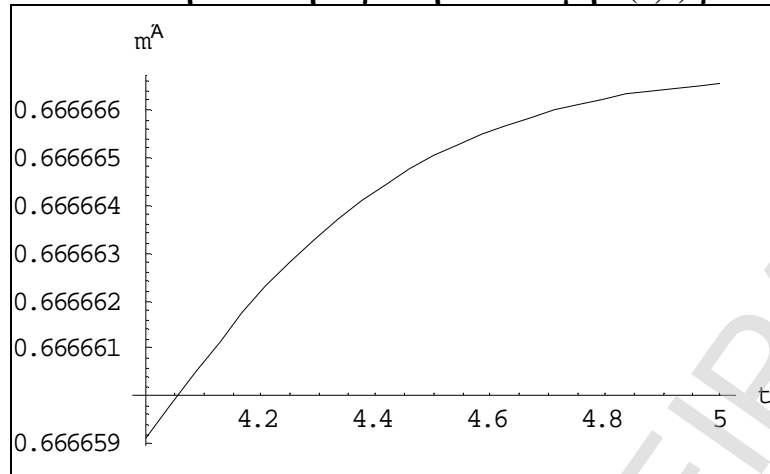
Σχήμα 2.2: Η ανανεωτική πυκνότητα για την κατανομή $\Gamma(2,3)$ για $t \in (0, 1.5)$



Σχήμα 2.3: Η ανανεωτική πυκνότητα για την κατανομή $\Gamma(2,3)$ για $t \in (1.5, 4)$



Σχήμα 2.4: Η ανανεωτική πυκνότητα για την κατανομή $\Gamma(2,3)$ για $t \in (4, 5)$



2.4 Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας στην περίπτωση που η κατανομή F είναι Γάμμα με παραμέτρους λ και 4.

Είδαμε στις δυο προηγούμενες ενότητες ότι η συμπεριφορά της ανανεωτικής πυκνότητας, ως προς τη μονοτονία, είναι αρκετά διαφορετική. Ενώ η $m'(t)$ είναι αύξουσα όταν η F είναι $\Gamma(\lambda,2)$, δεν είναι στην περίπτωση $\Gamma(\lambda,3)$.

Για το λόγω αυτό θα μελετήσουμε και μια άλλη περίπτωση για να έχουμε μια πληρέστερη εικόνα. Πιο συγκεκριμένα θα υπολογίσουμε την ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$ όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν τη Γάμμα κατανομή $\Gamma(\lambda,4)$, δηλαδή στη περίπτωση που έχουμε τέσσερις ανεξάρτητους και ισόνομους ενδιάμεσους χρόνους, όπου ο κάθε ένας ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\text{Exp}(\lambda)$ και θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή που ισούται με το άθροισμα αυτών των τεσσάρων χρόνων.

Στην περίπτωση αυτή η συνέλιξη της πυκνότητας $f^{*k}(x)$ ακολουθεί την $\Gamma(\lambda,4k)$, βλέπε (2.2.1).

2.4.1 Η ανανεωτική πυκνότητα

Όπως και στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις που εξετάσαμε η ανανεωτική συνάρτηση πυκνότητας για την συνέλιξη τεσσάρων Γάμμα κατανομών θα βρεθεί από την σχέση (1.2), δηλαδή:

$$m'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{*k}(t) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} m'(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(It)^{4k-1} I e^{-It}}{(4k-1)!} \right] \\ &= I e^{-It} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(It)^{4k-1}}{(4k-1)!} \right] \end{aligned}$$

όπου το παραπάνω άθροισμα βρίσκεται με εντολές στο Mathematica (στο παράρτημα 2.8) και ισούται με:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(It)^{4k-1}}{(4k-1)!} \right] = \frac{1}{2} (\text{Sinh}[It] - \text{Sin}[It]) \quad (2.11)$$

Οπότε αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στη συνάρτηση της ανανεωτικής πυκνότητας έχουμε

$$\begin{aligned} m'(t) &= I e^{-It} \frac{1}{2} (\text{Sinh}[It] - \text{Sin}[It]) \Leftrightarrow \\ m'(t) &= e^{-It} \frac{I}{2} (\text{Sinh}[It] - \text{Sin}[t]) \end{aligned}$$

Όπως και για τη περίπτωση που η F ήταν μια $\Gamma(\lambda, 3)$ έτσι και εδώ η ανανεωτική πυκνότητα είναι μια τριγωνομετρική συνάρτηση αποτέλεσμα το οποίο προδιαθέτει για την περιοδικότητα στη μονοτονία της $m'(t)$.

2.4.2 Η ανανεωτική συνάρτηση

Για να βρούμε την μαθηματική σχέση που περιγράφει τον αναμενόμενο αριθμό των ανανεώσεων για το συγκεκριμένο παράδειγμα όπου η F είναι μια $\Gamma(\lambda, 4)$ θα ολοκληρώσουμε την ανανεωτική πυκνότητα $m(x)$ στο διάστημα $[0, x]$ δηλαδή :

$$\begin{aligned} m(x) &= \int_0^x m'(t) dt \\ &= \frac{I}{2} \int_0^x \left(e^{-It} (\text{Sinh}[It] - \text{Sin}[It]) \right) dt \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$= \frac{1}{8} \left(-3 + e^{-2Ix} + 2Ix + 2e^{-Ix} (\text{Cos}[Ix] + \text{Sin}[Ix]) \right)$$

(οι υπολογισμοί για το παραπάνω ολοκλήρωμα βρίσκονται στο παράρτημα 2.9)

2.4.3 Μελέτη της μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας

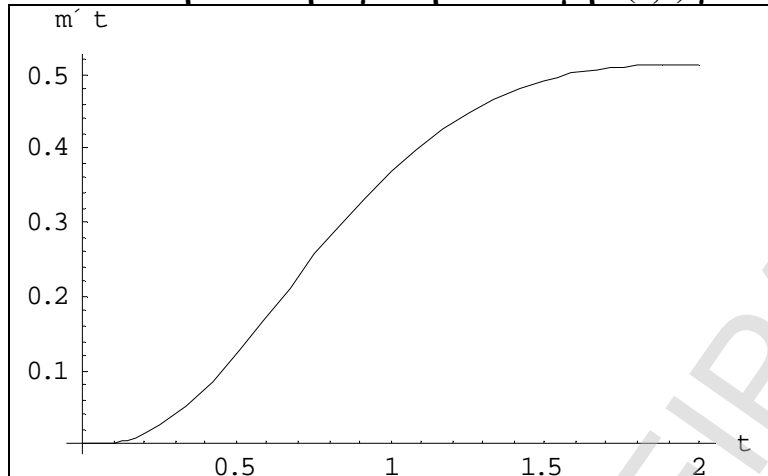
Χρησιμοποιώντας την ίδια διαδικασία ανάλυσης με πριν, βρίσκουμε την παράγωγο της $m'(t)$ για να δούμε τη συμπεριφορά της ανανεωτικής πυκνότητας ως προς τη μονοτονία της από όπου παρατηρούμε ότι αυτή είναι μια τριγωνομετρική συνάρτηση, το οποίο σημαίνει ότι θα αλλάζει περιοδικά πρόσημο και άρα η ανανεωτική πυκνότητα θα είναι για κάποια διαστήματα φθίνουσα και για άλλα θα είναι αύξουσα.

Συγκεκριμένα η παράγωγος της ανανεωτικής πυκνότητας ισούται με :

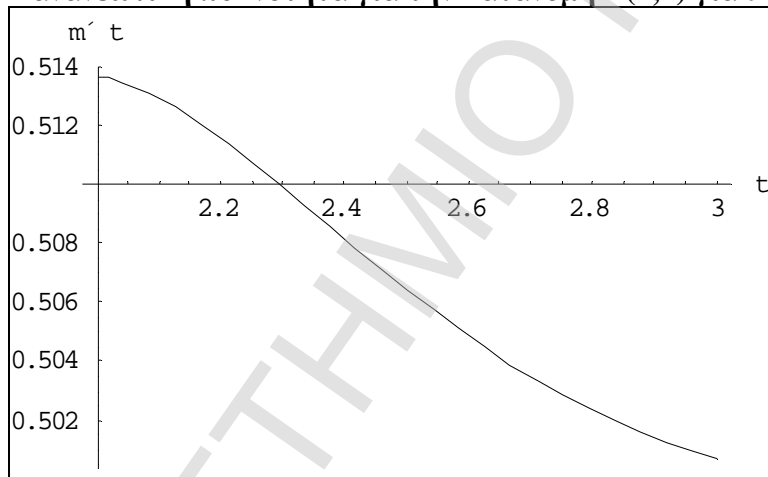
$$\begin{aligned} m''(t) &= \frac{d}{dt} m'(t) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} e^{-It} (\text{Sinh}[It] - \text{Sin}[It]) \right) \\ &= -\frac{I^2}{2} e^{-It} (\text{Sinh}[It] - \text{Sin}[It]) + \frac{1}{2} e^{-It} (I \text{Cosh}[It] - I \text{Cos}[It]) \Leftrightarrow \\ m''(t) &= -\frac{I^2}{2} e^{-It} (\text{Sinh}[It] - \text{Sin}[It] + \text{Cos}[It] - \text{Cosh}[It]) \end{aligned}$$

Το παραπάνω συμπέρασμα φαίνεται και από τα παρακάτω γραφήματα, όπου για t μεταξύ του μηδέν και του δύο η $m'(t)$ είναι αύξουσα και για t από δύο έως τρία είναι φθίνουσα. Οι εντολές για τα παρακάτω δύο γραφήματα βρίσκονται στο παράρτημα 2.10.

Σχήμα 2.5: Η ανανεωτική πυκνότητα για την κατανομή $\Gamma(2,4)$ για $t (0, 2)$



Σχήμα 2.6: Η ανανεωτική πυκνότητα για την κατανομή $\Gamma(2,4)$ για $t (2, 3)$



2.5 Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας στην περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην εκθετική $E(\lambda)$

Στη τελευταία παράγραφο του κεφαλαίου 1 αναφερθήκαμε στη μέθοδο Laplace ως έναν δεύτερο τρόπο υπολογισμού της ανανεωτικής πυκνότητας και της ανανεωτικής συνάρτησης (για περιπτώσεις που δεν μπορεί να γίνει απευθείας υπολογισμός της ανανεωτικής συνάρτησης).

Σε αυτή τη παράγραφο θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο Laplace για την απλή περίπτωση της Γάμμα κατανομής $\Gamma(\lambda,1)$ δηλαδή της εκθετικής $E(\lambda)$. Αρχικά αφού πρώτα δώσουμε τον ορισμό της εκθετικής κατανομής θα υπολογίσουμε την ανανεωτική

πυκνότητα από τον τύπο των συνελίξεων και θα διαπιστώσουμε ότι το αποτέλεσμα και με τους δύο τρόπους είναι ίδιο (αφού οι δύο τρόποι είναι ισοδύναμοι).

2.5.1 Η εκθετική κατανομή.

Η εκθετική όπως και η Γάμμα κατανομή είναι δύο μεγάλες κλάσεις συνεχών κατανομών που εξηγούν ή περιγράφουν φαινόμενα στα οποία εμφανίζονται μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές.

Πιο συγκεκριμένα αν ο αριθμός εμφάνισης ενός ενδεχομένου στο χρονικό διάστημα $[0,t)$ ακολουθεί την διαδικασία Poisson με ρυθμό λ τότε οι ενδιάμεσοι χρόνοι της διαδικασίας Poisson μεταξύ των διαδοχικών εμφανίσεων του παραπάνω ενδεχομένου ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ .

Μία πρακτική εφαρμογή της εκθετικής κατανομής είναι η μοντελοποίηση του χρόνου μεταξύ διαδοχικών κλήσεων σε ένα τηλεφωνικό κέντρο η οποία αποτέλεσε και την δημιουργία της κατανομής Erlang από τον μαθηματικό A.K.Erlang(1878-1929).

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκθετικής κατανομής είναι :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{για } t \geq 0 \quad \text{και}$$

$$f(t) = 0 \quad \text{για } t < 0$$

Ολοκληρώνοντας τη παραπάνω συνάρτηση πυκνότητας στο διάστημα $[0,t)$ έχουμε την εκθετική συνάρτηση κατανομής :

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{για } t \geq 0 \quad \text{και}$$

$$F(t) = 0 \quad \text{για } t < 0$$

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα της εκθετικής κατανομής είναι ότι η μέση τιμή και η διακύμανση αυτής είναι εύχρηστες στη φυσική ερμηνεία αφού η μέση τιμή είναι το αντίστροφο της παραμέτρου λ :

$$E(x) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{και} \quad V(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Η πιο σημαντική ιδιότητα που κάνει ξεχωριστή την εκθετική κατανομή είναι η έλλειψη μνήμης. Η φυσική ερμηνεία αυτής είναι ότι η πιθανότητα μία καινούργια συσκευή ή ένας νέος οργανισμός να λειτουργεί ή να επιβιώσει αντίστοιχα περισσότερο από χρόνο t είναι ίδια με την αντίστοιχη πιθανότητα μιας συσκευής ή ένας οργανισμού που λειτουργεί ή έχει επιβιώσει ήδη για χρόνο z . Η μαθηματική έκφραση αυτής είναι :

$$P(x > t + z \mid x > z) = P(x > t)$$

2.5.2 Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας από τον τύπο των συνελίξεων

Από την ισότητα (2.1) αποδείξαμε ότι αν η $f(x)$ ακολουθεί Γάμμα κατανομή με παραμέτρους $\Gamma(\lambda, \nu)$ τότε και η πυκνότητα της k -οστής συνέλιξης $f^{*k}(x)$ ακολουθεί Γάμμα κατανομή με παραμέτρους $\Gamma(\lambda, k\nu)$. Οπότε για την περίπτωση της εκθετικής η πυκνότητα της συνέλιξης $f^{*k}(x)$ δίνεται σαν εφαρμογή των παραπάνω για $\nu=1$.

2.5.2α Η ανανεωτική πυκνότητα

Συνεχίζοντας στην εφαρμογή όπου ο ένας ενδιάμεσος χρόνος ακολουθεί τη Γάμμα κατανομή $\Gamma(\lambda, 1)$, η συνέλιξη της πυκνότητας $f^{*k}(x)$ ακολουθεί επίσης την Γάμμα κατανομή με παραμέτρους $\Gamma(\lambda, 1k)$.

Η ανανεωτική συνάρτηση πυκνότητας για την συνέλιξη μίας Γάμμα κατανομής ισούται από τον ορισμό με

$$\begin{aligned} m'(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} f^{*k}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1t)^{k-1} 1e^{-1t}}{(k-1)!} \right) \Leftrightarrow \\ m'(t) &= 1e^{-1t} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1t)^{k-1}}{(k-1)!} \right) \end{aligned}$$

Το παραπάνω άθροισμα ισούται με

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1t)^{k-1}}{(k-1)!} \right) = e^{1t}$$

οπότε αντικαθιστώντας το παραπάνω αποτέλεσμα στην εξίσωση για την ανανεωτική πυκνότητα παίρνουμε

$$m'(t) = 1e^{-1t} e^{1t} \Leftrightarrow$$

$$m'(t) = I$$

Η ερμηνεία του πιο πάνω αποτελέσματος είναι ότι ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται ο αναμενόμενος αριθμός των ανανεώσεων (δηλαδή η ανανεωτική πυκνότητα) δηλαδή δεν εξαρτάται από τον χρόνο (είναι μια σταθερή συνάρτηση στο χρόνο) κάτι αναμενόμενο λόγω της αμνήμονος ιδιότητας που έχει η εκθετική κατανομή.

2.5.2.β Η ανανεωτική συνάρτηση

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση για την ανανεωτική πυκνότητα παίρνουμε την ανανεωτική συνάρτηση $m(x)$ που ισούται με:

$$m(x) = \int_0^x m'(t) dt$$

$$= I \int_0^x (1) dt \Leftrightarrow$$

$$m(x) = Ix$$

Δηλαδή ο αναμενόμενος αριθμός των ανανεώσεων για την περίπτωση που η κατανομή F ακολουθεί την εκθετική με παράμετρο λ είναι μια γραμμική συνάρτηση του x στο διάστημα $(0, x)$

2.5.3 Εύρεση ανανεωτικής πυκνότητας με το μετασχηματισμό Laplace.

Αν και η ανανεωτική πυκνότητα στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής βρέθηκε παραπάνω, θα υπολογίσουμε στη συνέχεια την πυκνότητα αυτή με ένα δεύτερο τρόπο.

Συγκεκριμένα, η ανανεωτική πυκνότητα θα υπολογιστεί με τη μέθοδο μετασχηματισμού Laplace, για να εξηγηθεί έτσι μέσω ενός παραδείγματος τα όσα αναφέρθηκαν στην ενότητα 1.6.2.

Αρχικά θα υπολογίσουμε την ανανεωτική πυκνότητα με βάση τον τύπο 1.8 του κεφαλαίου 1 αφού πρώτα υπολογίσουμε από τον τύπο 1.6 την μετασχηματισμένη πυκνότητα Laplace.

2.5.3.a Η ανανεωτική πυκνότητα

Η πυκνότητα πιθανότητα μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την εκθετική κατανομή $E(\lambda)$ είναι

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της πυκνότητας για αυτή την περίπτωση βρίσκεται από τον τύπο 1.6 και ισούται.

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)x} dx \Leftrightarrow \\ \hat{f}(s) &= \frac{\lambda}{\lambda + s}\end{aligned}$$

Το επόμενο βήμα στη συνέχεια είναι να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο 1.8 για να βρούμε το μετασχηματισμό Laplace της ανανεωτικής πυκνότητας.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} m'(s) &= \frac{\hat{f}(s)}{1 - \hat{f}(s)} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda + s}}{\frac{s}{\lambda + s}} \Leftrightarrow \\ \mathcal{L} m'(s) &= \frac{\lambda}{s}\end{aligned}$$

Έχοντας το μετασχηματισμό Laplace της ανανεωτικής πυκνότητας χρησιμοποιούμε την αναστροφή για να πάρουμε την ανανεωτική πυκνότητα. Η παραπάνω διαδικασία γίνεται εκτελώντας στο Mathematica την εντολή `InverseLaplaceTransform[b/s,s,x]` και το αποτέλεσμα (όπως ήταν αναμενόμενο) είναι λ .

Δηλαδή όπως και με τον προηγούμενο τρόπο

$$m'(x) = 1$$

2.5.3.β Δεύτερος τρόπος εύρεσης της ανανεωτικής πυκνότητας

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού (και επαλήθευσης) του μετασχηματισμού Laplace για την ανανεωτική πυκνότητα είναι να μεταβούμε από τον γενικό ορισμό μιας απλής συνάρτησης σε Laplace με την προϋπόθεση να γνωρίζουμε την απλή συνάρτηση δηλαδή την ανανεωτική πυκνότητα, στη συγκεκριμένη περίπτωση.

$$\mathcal{L} m'(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} m'(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-sx} 1 dx$$

$$= 1 \int_0^{\infty} e^{-sx} dx \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{L} m'(s) = \frac{1}{s} ,$$

δηλαδή όπως ήταν αναμενόμενο καταλήξαμε στο ίδιο αποτέλεσμα με πριν.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 3

Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας στην περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ακολουθεί τη μίξη εκθετικών και τη μίξη Weibull

3.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα εξετάσουμε την μονοτονία της ανανεωτικής πυκνότητας κατά το σχηματισμό μίξεων τυχαίων μεταβλητών, λόγω των μεγάλων εφαρμογών που έχουν σε προβλήματα εφαρμοσμένων πιθανοτήτων. Πιο συγκεκριμένα θα ελέγξουμε την μονοτονία της ανανεωτικής πυκνότητας χρησιμοποιώντας την διατήρηση ή μη των ιδιοτήτων IFR και DFR, βασιζόμενοι στο θεώρημα του Brown (1980). Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με την μίξη εκθετικών και στο δεύτερο με την μίξη Weibull, μελετώντας σχετικά παραδείγματα.

3.2 Η μίξη εκθετικών.

Η Μίξη εκθετικών είναι μία μεγάλη οικογένεια κατανομών με ευρύ φάσμα λόγω της προσθήκης περισσότερων παραμέτρων από την εκθετική και παίζει σημαντικό ρόλο στις εφαρμοσμένες πιθανότητες γενικότερα αλλά και στις ανανεωτικές ανελίξεις. Η πυκνότητα πιθανότητας αυτής είναι

$$f(x) = A_1 b_1 e^{-b_1 x} + A_2 b_2 e^{-b_2 x} + \dots + A_k b_k e^{-b_k x}$$

όπου $b_i \neq b_j$ για $i \neq j$

με τους δύο παρακάτω περιορισμούς

$$\sum_{i=1}^k A_i = 1 \quad \text{και} \quad b_i > 0 \quad \forall i$$

από όπου για την περίπτωση που $b_i = b \quad \forall i$ προκύπτει η εκθετική κατανομή με παράμετρο β .

Δηλαδή η συνάρτηση πιθανότητας μιας κατανομής που ακολουθεί την μίξη εκθετικών είναι ουσιαστικά ο σταθμικός μέσος k ανεξάρτητων εκθετικών κατανομών:

$$\text{Exp}[b_1], \text{Exp}[b_2], \dots, \text{Exp}[b_k]$$

όπου τα A_i είναι τα αντίστοιχα βάρη των k εκθετικών στην συνολική κατανομή.

3.3 IFR και DFR κλάσεις κατανομών.

Ένας άλλος ασφαλής τρόπος για να αποφανθούμε για την μονοτονία της ανανεωτικής πυκνότητας μιας κατανομής είναι να ελέγξουμε αν αυτή η κατανομή είναι IFR ή DFR.

Αρχικά θα δώσουμε τον ορισμό της βαθμίδας αποτυχίας και στη συνέχεια τον ορισμό για την περίπτωση που μια κατανομή (γενικά) έχει μία (ή και τις δύο) από τις παρακάτω δύο ιδιότητες IFR (increasing failure rate) και DFR (decreasing failure rate).

Ορισμός 3.1: Η βαθμίδα αποτυχίας ή ένταση αποτυχίας είναι εξ' ορισμού ίση με το παρακάτω όριο:

$$I(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{F(x+t) - F(x)}{\bar{F}(x)}$$

Στην περίπτωση που η κατανομή η οποία εξετάζουμε είναι συνεχής με πυκνότητα f , τότε ένας ισοδύναμος ορισμός για την βαθμίδα αποτυχίας ο οποίος αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 1 δίνεται από την σχέση (βλέπε Barlow και Proschan 1975).

$$I(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} \quad (3.1)$$

Όπου $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ είναι η ουρά της κατανομής.

Ορισμός 3.2: Μία κατανομή έχει την IFR ιδιότητα (ή απλά είναι IFR) αν η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(x)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του x και αντίστοιχα μια κατανομή είναι DFR όταν η $\lambda(x)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του x .

Ενώ για την περίπτωση που η βαθμίδα αποτυχίας ισούται με μια σταθερά, θα λέμε ότι η κατανομή έχει ταυτόχρονα την IFR και DFR ιδιότητα.

Στην επόμενη ενότητα θα κάνουμε μια απλή εφαρμογή για την κατανόηση των παραπάνω εννοιών για την περίπτωση που η κατανομή F είναι η εκθετική.

3.3.1 Η βαθμίδα αποτυχίας για την περίπτωση της εκθετικής κατανομής.

Τα βήματα που πρέπει να ακολουθήσουμε για τον καθορισμό της βαθμίδας αποτυχίας για την περίπτωση που η F ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ είναι :

Αρχικά να πάρουμε την πυκνότητα πιθανότητας της εκθετικής κατανομής

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

και να την διαιρέσουμε με την ουρά της εκθετικής κατανομής την οποία βρίσκουμε μέσω της συνάρτησης κατανομής από τον τύπο

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$$

Παίρνοντας έτσι τον παρακάτω τύπο της βαθμίδας αποτυχίας για την εκθετική κατανομή

$$I(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}} = \lambda$$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι για την εκθετική κατανομή η βαθμίδα αποτυχίας είναι σταθερή, το οποίο σημαίνει ότι η εκθετική κατανομή είναι τόσο IFR όσο και DFR, (για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε το βιβλίο των Barlow και Proschan 1975).

3.4 Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας στην περίπτωση που η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων ακολουθεί τη μίξη εκθετικών.

Στη παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε την συμπεριφορά (ως προς τη μονοτονία) της ανανεωτικής πυκνότητας για την περίπτωση που η κατανομή F ακολουθεί την μίξη εκθετικών, μέσω θεωρημάτων που ισχύουν για αυτή τη κατανομή ως προς την ιδιότητα IFR και DFR.

Για τη μίξη εκθετικών (και για πολλές άλλες κατανομές) είναι γνωστό (υπάρχει θεώρημα) ότι η ανανεωτική πυκνότητα είναι φθίνουσα.

Πιο αναλυτικά το θεώρημα του Brown (1980) αναφέρει ότι :

Θεώρημα 3.1 : Αν μια κατανομή F είναι DFR τότε η ανανεωτική πυκνότητα είναι πάντα φθίνουσα.

Ένα άλλο αποτέλεσμα είναι το εξής: από βιβλίο των Barlow και Proschan 1975 (σελίδα 103).

Θεώρημα 3.2 : Κάθε μείξη εκθετικών κατανομών είναι DFR.

Το αποτέλεσμα αυτό σε συνδυασμό με το θεώρημα 3.3 οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για κάθε μίξη εκθετικών κατανομών η ανανεωτική πυκνότητα είναι πάντα φθίνουσα.

3.4.1 Παράδειγμα για τον έλεγχο της μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας στην περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ακολουθεί τη μίξη εκθετικών.

Ο γενικός τύπος της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας για τη μίξη δυο εκθετικών $E[I_1]$ και $E[I_2]$ δίνεται από το παρακάτω τύπο:

$$f(x) = A_1 I_1 e^{-I_1 x} + A_2 I_2 e^{-I_2 x}$$

και με τον περιορισμό $A_1 + A_2 = 1$

Στη παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε με ένα αριθμητικό παράδειγμα για την μίξη της $E(1.5)$ με την $E(2)$ με σκοπό να ελέγξουμε αν υπάρχει μονοτονία για την ανανεωτική πυκνότητα

$$\begin{aligned} f(x) &= A_1 1.5 e^{-1.5x} + A_2 2 e^{-2x} \\ &= A_1 1.5 e^{-1.5x} + (1 - A_1) 2 e^{-2x} \end{aligned} \quad (3.2)$$

για κάποια σταθερά A_1 και A_2 στο διάστημα $(0,1)$.

Η ουρά της παραπάνω κατανομής είναι ίση με:

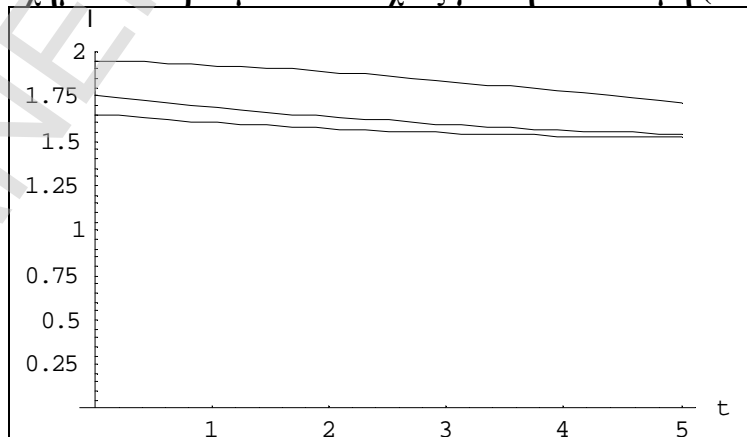
$$\begin{aligned}
\bar{F}(t) &= 1 - F(t) = 1 - \int_0^t f(x) dx \\
&= 1 - \int_0^t (A_1 1.5 e^{-1.5x} + (1 - A_1) 2 e^{-2x}) dx \\
&= 1 - \left(\left. \frac{A_1 1.5 e^{-1.5x}}{-1.5} + \frac{(1 - A_1) 2 e^{-2x}}{2} \right|_0^t \right) \\
&= 1 - (-A_1 e^{-1.5t} + A_1) + (-(1 - A_1) e^{-2t} + (1 - A_1)) \\
&= A_1 e^{-1.5t} + (1 - A_1) e^{-2t}
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας τους τύπους για την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και για την ουρά της κατανομής στον τύπο 3.1 για την βαθμίδα αποτυχίας παίρνουμε:

$$I(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{A_1 1.5 e^{-1.5t} + (1 - A_1) 2 e^{-2t}}{A_1 e^{-1.5t} + (1 - A_1) e^{-2t}}$$

Μία πρώτη προσέγγιση για την μονοτονία της βαθμίδα αποτυχίας είναι το γράφημα 3.1 αυτής σε συνάρτηση του t . Στο γράφημα 3.1 (παράρτημα 3.1) ελέγχεται η παραπάνω μονοτονία για τις περιπτώσεις που το A_1 παίρνει τις τιμές 0,5, 0,1 και 0,7 από όπου φαίνεται ότι η βαθμίδα αποτυχίας και στις τρεις περιπτώσεις είναι φθίνουσα συνάρτηση του t .

Σχήμα 3.1 Η βαθμίδα αποτυχίας για την κατανομή (3.2)



Τέλος μια πιο ασφαλής και σίγουρη μέθοδος για να ελέγξουμε αν η παραπάνω βαθμίδα αποτυχίας είναι αύξουσα ή φθίνουσα είναι να ελέγξουμε το πρόσημο της παραγώγου της και αν η παράγωγος είναι πάντα θετική (αρνητική) αυτό θα συνεπάγεται ότι η βαθμίδα αποτυχίας είναι αύξουσα (φθίνουσα).

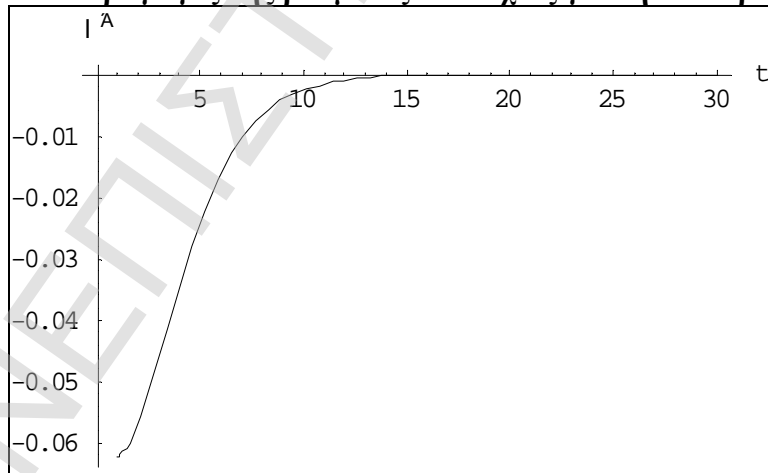
Συγκεκριμένα για την συγκεκριμένη παράγωγο της βαθμίδας αποτυχίας $I(t)$ (από προγραμματισμό στο Mathematica παράρτημα 3.2) παίρνουμε ότι

$$I'(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{A_1 1.5e^{-1.5t} + (1-A_1)2e^{-2t}}{A_1 e^{-1.5t} + (1-A_1)e^{-2t}} \right)$$

$$= \frac{-2.4e^{-2t} - 0.9e^{-1.5t}}{0.6e^{-2t} + 0.4e^{-1.5t}} - \frac{(-1.2e^{-2t} - 0.6e^{-1.5t})(1.2e^{-2t} + 0.6e^{-1.5t})}{(0.6e^{-2t} + 0.4e^{-1.5t})^2} \quad (3.3)$$

Παρατηρούμε ότι τα δύο κλάσματα έχουν αρνητικό πρόσημο το οποίο συνεπάγεται ότι η παράγωγος της βαθμίδας αποτυχίας είναι πάντα αρνητική (το οποίο φαίνεται και από το γράφημα 3.2), δηλαδή η βαθμίδα αποτυχίας είναι φθίνουσα άρα η κατανομή του παραπάνω παραδείγματος είναι DFR και με βάση τα θεωρήματα 3.3 και 3.4 καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ανανεωτική πυκνότητα είναι φθίνουσα.

Σχήμα 3.2 Η παράγωγος της βαθμίδας αποτυχίας για την συνάρτηση (3.3)



3.5 Μελέτη των ιδιοτήτων IFR και DFR για την Γάμμα κατανομή

Αφού (στη προηγούμενη ενότητα) αναφέραμε τους ορισμούς για IFR και DFR κατανομές θα συνεχίσουμε μελετώντας τις σχέσεις των παραπάνω ιδιοτήτων στην κατανομή Γάμμα.

Πιο συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε με τις περιπτώσεις όπου η παράμετρος ν παίρνει τιμές πάνω ίση και κάτω από τη μονάδα, βασιζόμενοι σε κάποια θεώρηματα και αναφορές.

Για την Γάμμα κατανομή $\Gamma(\lambda, \nu)$ ισχύουν τα εξής τα παρακάτω αποδεκτά αποτελέσματα σε σχέση με την βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής:

Για $\nu=1$ η κατανομή Γάμμα συμπίπτει με την εκθετική κατανομή και η βαθμίδα αποτυχίας όπως είδαμε στη παραπάνω εφαρμογή ισούται με λ , δηλαδή για αυτήν την περίπτωση η κατανομή F είναι IFR και DFR. Συνεπώς με βάση το θεώρημα (3.3) η ανανεωτική πυκνότητα είναι φθίνουσα.

Για $\nu < 1$ η κατανομή F είναι DFR και με βάση το θεώρημα (3.3) η ανανεωτική πυκνότητα είναι φθίνουσα (βλέπε Barlow and Proschan 1975).

Τέλος για $\nu > 1$ η κατανομή F είναι IFR. Για αυτές τις κατανομές (που έχουν την IFR ιδιότητα) ο Berman το 1978 απέδειξε μέσω ενός αντιπαραδείγματος ότι δεν ισχύει το αντίστοιχο του θεωρήματος (3.2). Δηλαδή αν μια κατανομή είναι IFR δεν συνεπάγεται ότι η ανανεωτική πυκνότητα της είναι αύξουσα.

Πιο συγκεκριμένα ο Berman χρησιμοποίησε το άθροισμα τριών ανεξάρτητων εκθετικών κατανομών με κοινή παράμετρο λ (δηλαδή την κατανομή $\Gamma(\lambda, 3)$) και έδειξε ότι ενώ η συγκεκριμένη F έχει την IFR ιδιότητα η ανανεωτική πυκνότητα της δεν είναι αύξουσα αλλά φθίνουσα (κάτι το οποίο είδαμε και στο δεύτερο κεφάλαιο στην παράγραφο 2.3).

3.6 Η κατανομή Weibull

Στις προηγούμενες παραγράφους εξετάσαμε τη συνέλιξη Γάμμα και εκθετικών κατανομών. Όπως γνωρίζουμε η εκθετική και η Γάμμα κατανομή είναι δύο μεγάλες κλάσεις συνεχών κατανομών που περιγράφουν τη μεταβλητότητα μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών. Κάποια σημαντικά παραδείγματα μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών είναι οι χρόνοι ζωής διαφόρων συστημάτων (βιολογικών, μηχανικών, ηλεκτρικών κ.α.).

Η εκθετική και η Γάμμα κατανομή παρέχουν μια λογική εναρμόνιση στη κατανομή συχνοτήτων τέτοιων τυχαίων μεταβλητών. Ωστόσο πολλές φορές η προσαρμογή δεν πλησιάζει την επιθυμητή ενώ κάποιες φορές αποτυγχάνει πλήρως.

Συνεχίστηκε έτσι η προσπάθεια για την εύρεση μιας μεγαλύτερης κλάσης συνεχών κατανομών που να μπορεί να εξηγήσει τη μεταβλητότητα όσο το δυνατόν περισσότερο μη αρνητικών φαινομένων και ταυτόχρονα να έχει μια απλή μαθηματική μορφή με όχι μεγάλο αριθμό παραμέτρων.

Το 1939 ο Σουηδός φυσικός Waloddi Weibull πρότεινε μια νέα οικογένεια κατανομών που πήρε το όνομα του Weibull.

Αν μια τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την Weibull κατανομή, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα έχει την παρακάτω μαθηματική μορφή:

$$f(x) = \left(\frac{b}{a}\right) \left(\frac{x-n}{a}\right)^{b-1} e^{-[(x-n)/a]^b} \quad \text{για } x \geq n$$

και $f(x) = 0$ για $x < n$

Αυτή είναι η γενική μορφή της κατανομής Weibull με τρεις παραμέτρους α, β, ν .

Στη παρούσα εργασία θα χρησιμοποιήσουμε την κατανομή Weibull με δυο παραμέτρους λ, α και με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = \lambda \alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha}$$

Για μεγαλύτερη ανάλυση βλέπε το βιβλίο των Derman, Gleser και Olkin 1973 (κεφάλαιο 8).

3.6.1 Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας στην περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων είναι Weibull.

Στη παραπάνω ενότητα είδαμε ότι η κατανομή Weibull έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας,

$$f(x) = \lambda \alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha}$$

όπου για την περίπτωση που η παράμετρος α πάρει την τιμή ένα η κατανομή Weibull συμπίπτει με την εκθετική κατανομή (και ισχύει ότι έχουμε αναφέρει στο κεφάλαιο 2)

Στη συνέχεια ολοκληρώνοντας τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας παίρνουμε την παρακάτω συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x^\alpha}$$

και κατ' επέκταση η ουρά της κατανομής είναι ίση με

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = 1 - (1 - e^{-Ix^a}) = e^{-Ix^a}$$

Οπότε χρησιμοποιώντας τον τύπο για την βαθμίδα αποτυχίας έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα

$$I(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} = \frac{Iax^{a-1}e^{-Ix^a}}{e^{-Ix^a}} = Iax^{a-1}$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας είναι αύξουσα συνάρτηση του x στην περίπτωση που $a > 1$, ενώ στην περίπτωση που $a < 1$ η βαθμίδα αποτυχίας γίνεται φθίνουσα συνάρτηση του x .

Συνεπώς μία κατανομή Weibull θα έχει την ιδιότητα IFR όταν η παράμετρος a είναι μεγαλύτερη του ένα, ενώ θα είναι DFR όταν $a < 1$. Ενώ για την περίπτωση που η παράμετρος a πάρει την τιμή ένα η κατανομή θα συμπίπτει με την εκθετική και η βαθμίδα αποτυχίας θα ισούται με λ το οποίο συνεπάγεται ότι για την περίπτωση αυτή η κατανομή Weibull θα έχει ταυτόχρονα την ιδιότητα IFR και DFR.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και με τον έλεγχο της παραγώγου της βαθμίδας αποτυχίας, αφού

$$\begin{aligned} I'(t) &= \frac{d}{dt} I(t) \\ &= \frac{d}{dt} (Iat^{a-1}) \Leftrightarrow \\ I'(t) &= I a(a-1)t^{a-2} \end{aligned}$$

Όπου για $a < 1$ η παράγωγος είναι πάντα αρνητική και άρα η βαθμίδα αποτυχίας φθίνουσα συνάρτηση του t , ενώ για $a > 1$ η παράγωγος είναι θετική και η βαθμίδα αποτυχίας αύξουσα συνάρτηση του t .

Τέλος η περίπτωση $a=1$ μηδενίζει την παράγωγο το οποίο συνεπάγεται ότι για την περίπτωση αυτή η κατανομή Weibull θα έχει ταυτόχρονα την ιδιότητα IFR και DFR.

3.7 Η μίξη Weibull κατανομών.

Η Μίξη Weibull όπως και κάθε μίξη κατανομών είναι μία μεγάλη οικογένεια κατανομών εξηγώντας τη μεταβλητότητα πολλών παραδειγμάτων με τυχαίες μεταβλητές λόγω της προσθήκης περισσότερων παραμέτρων από την Weibull και έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = A_1 I_1 a_1 x^{a_1-1} e^{-I_1 x^{a_1-1}} + A_2 I_2 a_2 x^{a_2-1} e^{-I_2 x^{a_2-1}} + \dots + A_k I_k a_k x^{a_k-1} e^{-I_k x^{a_k-1}}$$

με τους δύο παρακάτω περιορισμούς

$$\sum_{i=1}^k A_i = 1 \quad \text{και} \quad I_i > 0 \quad \text{και} \quad a_i > 0 \quad \forall i$$

Όπου για την περίπτωση που $I_i = I$ και $a_i = a \quad \forall i$ συμπίπτει με την Weibull κατανομή με παραμέτρους λ και a .

Δηλαδή η συνάρτηση πιθανότητας μιας κατανομής που ακολουθεί την μίξη Weibull είναι ουσιαστικά ο σταθμικός μέσος k ανεξάρτητων Weibull κατανομών:

$$Wei(a_1, I_1), Wei(a_2, I_2), \dots, Wei(a_k, I_k),$$

Όπου τα A_i είναι τα αντίστοιχα βάρη των k επί μέρους κατανομών στην συνολική κατανομή.

3.8 Η ανανεωτική πυκνότητα στην περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων είναι μια μίξη Weibull κατανομών.

Στην ενότητα 3.2 είδαμε ότι κάθε μίξη εκθετικών καταλήγει πάντα σε DFR κατανομή, κάτι αντίστοιχο δεν ισχύει για τη μίξη Weibull κατανομών.

Για τη περίπτωση που η μίξη Weibull είναι DFR ισχύει το Θεώρημα 3.2 του Brown (1980), δηλαδή ότι αν μια κατανομή F είναι DFR τότε η ανανεωτική πυκνότητα είναι φθίνουσα, αλλά όπως αναφέραμε υπάρχει περίπτωση για μια μίξη Weibull κατανομών να είναι IFR για την οποία δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων για την ύπαρξη η μη μονοτονίας για την ανανεωτική πυκνότητα.

Πιο συγκεκριμένα θα δούμε με δύο παραδείγματα (μίξη δύο Weibull) ότι η μίξη δύο Weibull που είναι και οι δύο DFR καταλήγει πάλι σε DFR κατανομή ενώ η μίξη δύο IFR Weibull κατανομών δεν καταλήγει απαραίτητα σε IFR κατανομή, αλλά ούτε και σε DFR κατανομή.

Στη γενική περίπτωση η συνάρτηση πυκνότητας μίξης δύο Weibull κατανομών έχει την παρακάτω μορφή

$$f(x) = A_1 I_1 a_1 x^{a_1-1} e^{-I_1 x^{a_1}} + A_2 I_2 a_2 x^{a_2-1} e^{-I_2 x^{a_2}}$$

Θέτοντας $A_2 = 1 - A_1$, όπου η σταθερά A_1 παίρνει τιμές στο διάστημα $(0,1)$ παίρνουμε

$$f(x) = A_1 I_1 a_1 x^{a_1-1} e^{-I_1 x^{a_1}} + (1 - A_1) I_2 a_2 x^{a_2-1} e^{-I_2 x^{a_2}}$$

και συνεχίζοντας τη διαδικασία βρίσκουμε την ουρά της κατανομής η οποία ισούται με :

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t)$$

$$= 1 - \left(\int_0^t (1 - (A_1 I_1 a_1 x^{a_1-1} e^{-I_1 x^{a_1}} + (1 - A_1) I_2 a_2 x^{a_2-1} e^{-I_2 x^{a_2}}) dx \right)$$

$$\bar{F}(t) = A_1 e^{-I_1 t^{a_1}} + (1 - A_1) e^{-I_2 t^{a_2}}$$

Οπότε στη συγκεκριμένη περίπτωση η βαθμίδα αποτυχίας θα ισούται από τον τύπο με

$$I(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{A_1 I_1 a_1 t^{a_1-1} e^{-I_1 t^{a_1}} + (1 - A_1) I_2 a_2 t^{a_2-1} e^{-I_2 t^{a_2}}}{A_1 e^{-I_1 t^{a_1}} + (1 - A_1) e^{-I_2 t^{a_2}}} \quad (3.4)$$

3.8.1 Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας στην περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ακολουθεί τη μίξη δύο DFR Weibull κατανομών.

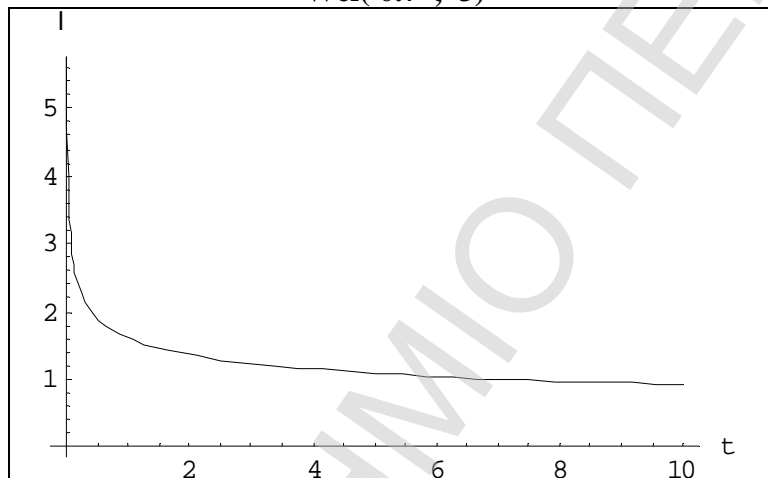
Πιο πάνω είδαμε ότι για να είναι μια Weibull κατανομή DFR θα πρέπει $\alpha < 1$.

Θα ελέγξουμε με ένα παράδειγμα τη μίξη δύο DFR Weibull κατανομών και συγκεκριμένα τη μίξη της $Wei(0.8, 2)$ και της $Wei(0.7, 3)$ δηλαδή $a_1 = 0.8$, $a_2 = 0.7$, $I_1 = 2$ και $I_2 = 3$ και έστω $A_1 = 0.6$ οπότε η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ ισούται από τον τύπο (3.9) με :

$$I(t) = \frac{0.6 \cdot 2 \cdot 0.8 \cdot t^{0.8-1} e^{-2t^{0.8-1}} + (1-0.6)3 \cdot 0.7 t^{0.7-1} e^{-3t^{0.7-1}}}{0.6 e^{-2t^{0.8-1}} + (1-0.6)e^{-3t^{0.7-1}}} \quad (3.5)$$

Για να δούμε μια εικόνα για τη συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας κάνουμε το γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας συναρτήσεως του χρόνου, (με εντολές στο Mathematica παράρτημα 3.3) από το οποίο φαίνεται ότι η βαθμίδα αποτυχίας μειώνεται εκθετικά καθώς αυξάνει ο χρόνος.

Σχήμα 3.3 Η βαθμίδα αποτυχίας για την τη μίξη της Wei(0.8 , 2) με την Wei(0.7 , 3)



Στη συνέχεια βρίσκουμε τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλεται η βαθμίδα αποτυχίας (δηλαδή την παράγωγό της) από την οποία φαίνεται από το γράφημά(3.4) (με κατάλληλες εντολές στο Mathematica που βρίσκονται στο παράρτημα 3.4) ότι είναι παντού αρνητική.

Και πιο συγκεκριμένα η εξίσωση για την παράγωγο της βαθμίδας αποτυχίας βρίσκεται πιο κάτω

$$I'(t) = \frac{d}{dt} I(t) \Leftrightarrow$$

$$I'(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{A_1 I_1 a_1 t^{a_1-1} e^{-I_1 t^{a_1}} + (1-A_1) I_2 a_2 t^{a_2-1} e^{-I_2 t^{a_2}}}{A_1 e^{-I_1 t^{a_1}} + (1-A_1) e^{-I_2 t^{a_2}}} \right) \Leftrightarrow$$

και αντικαθιστώντας τις τιμές των παραμέτρων παίρνουμε

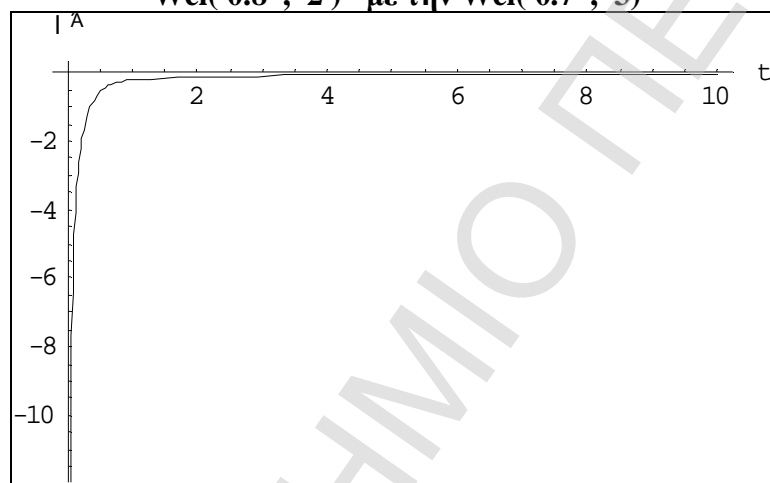
$$I'(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{0.6 \cdot 2 \cdot 0.8 \cdot t^{0.8-1} e^{-2t^{0.8}} + (1-0.6)3 \cdot 0.7 t^{0.7-1} e^{-3t^{0.7}}}{0.6 e^{-2t^{0.8}} + (1-0.6)e^{-3t^{0.7}}} \right)$$

Συνοψίζοντας στο συγκεκριμένο παράδειγμα η κατανομή από μίξη δυο Weibull DFR κατανομών έχει την ιδιότητα DFR κάτι αναμενόμενο όπως αναφέραμε στην εισαγωγή της ενότητας 3.8.

Στην πραγματικότητα, το αποτέλεσμα του παραδείγματος ισχύει γενικότερα και πιο συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.3: η μίξη δύο DFR κατανομών είναι πάντα DFR. (αναφορά από σημειώσεις Μ. Κούτρα 2007)

Σχήμα 3.4 Η παράγωγος της βαθμίδας αποτυχίας για την τη μίξη της $Wei(0.8, 2)$ με την $Wei(0.7, 3)$



3.8.2 Μελέτη μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας για την περίπτωση που η κατανομή F είναι μίξη δύο IFR Weibull κατανομών.

Με δεδομένο ότι για να είναι μια Weibull κατανομή IFR θα πρέπει $a > 1$, στη παρούσα παράγραφο θα εξετάσουμε τη μίξη της $Wei(2,2)$ με $Wei(2,3)$ δηλαδή $a_1=2$, $a_2=2$, $I_1=2$ και $I_2=3$ και έστω $A_1 = 0.01$ οπότε η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ ισούται από τον τύπο 3.1 με :

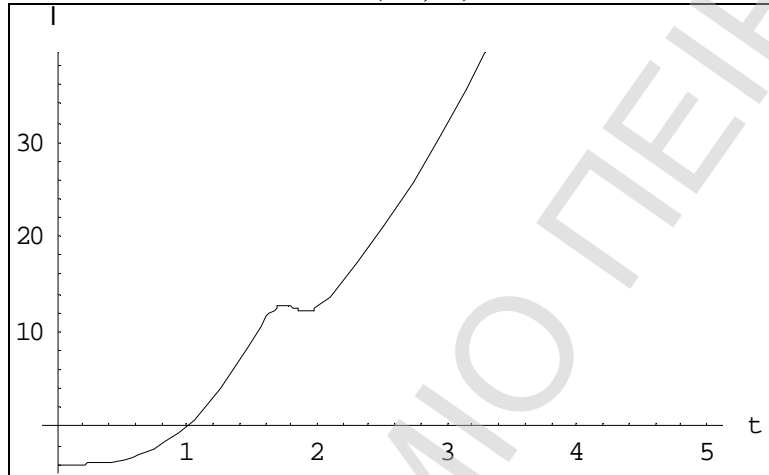
$$\lambda(t) = \frac{0.01 \cdot 2 \cdot 2 \cdot t^{2-1} e^{-2t^{2-1}} + (1-0.01) 3 \cdot 3t^{3-1} e^{-3t^{3-1}}}{0.01 e^{-2t^{2-1}} + (1-0.01) e^{-3t^{3-1}}} \quad (3.6)$$

Ακολουθώντας τη ίδια διαδικασία με αυτή της προηγούμενης ενότητας και αφού δημιουργήσαμε την παραπάνω σχέση για την βαθμίδα αποτυχίας συνεχίζουμε

κάνοντας τη γραφική παράσταση (σχήμα 3.5) της βαθμίδας αποτυχίας συναρτήσει του χρόνου t από όπου φαίνεται ότι η $\lambda(t)$ να μην είναι μονότονη, αφού ξεκινά ως αύξουσα για ένα μικρό διάστημα κοντά στο δύο γίνεται φθίνουσα και στη συνέχεια αυξάνει (οι εντολές στο Mathematica βρίσκονται στο παράρτημα 3.5)

Για πιο ακριβή συμπεράσματα για την βαθμίδα αποτυχίας θα συνεχίσουμε με την παράγωγό της.

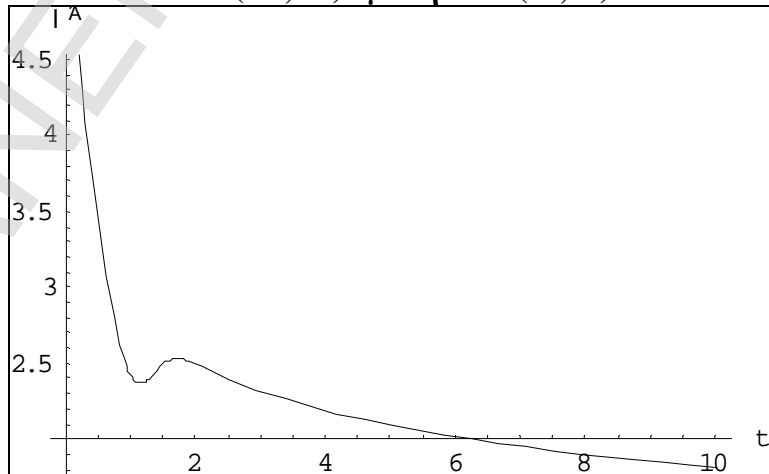
Σχήμα 3.5 Η βαθμίδα αποτυχίας για την τη μίξη της Wei(2 , 2) με την Wei(3 , 3)



Τέλος ελέγχοντας το πρόσημο της $I'(t)$ από το γράφημα 3.6 παρατηρούμε ότι η παράγωγος είναι θετική στην αρχή και στη συνέχεια (μετά από $t=6$) γίνεται αρνητική, αποτέλεσμα που έρχεται σε συμφωνία με το γράφημα 3.5 (ακολουθώντας τις εντολές του παραρτήματος 3.6)

Δηλαδή βλέπουμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας δεν είναι ούτε αύξουσα ούτε φθίνουσα παντού και άρα η μίξη δύο IFR Weibull κατανομών δεν καταλήγει σε IFR κατανομή. δηλαδή η IFR ιδιότητα δεν διατηρείται κατά τον σχηματισμό μίξεων.

Σχήμα 3.6 Η παράγωγος της βαθμίδας αποτυχίας για την τη μίξη της Wei(2 , 2) με την Wei(3 , 3)



3.9 Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας με μετασχηματισμό Laplace για την περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν τη μίξη εκθετικών

Στη τελευταία ενότητα θα ελέγξουμε την μονοτονία της ανανεωτικής πυκνότητας με την μέθοδο των μετασχηματισμών Laplace.

Πιο συγκεκριμένα αρχικά θα βρούμε την πυκνότητα με μετασχηματισμό Laplace για μία συγκεκριμένη μίξη εκθετικών κατανομή και στη συνέχεια θα βρούμε την ανανεωτική πυκνότητα. Από το γράφημα της ανανεωτικής πυκνότητας με μετασχηματισμό Laplace και από την παράγωγό της θα διαπιστώσουμε ότι αυτή είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου, κάτι αναμενόμενο με βάση τα θεωρήματα 3.3 και 3.4 και από την ανάλυση της ενότητας 3.4 .

3.9.1 Η ανανεωτική πυκνότητα με μετασχηματισμό Laplace

Η γενική μορφή της πυκνότητας πιθανότητας μιας κατανομής που είναι μίξη δύο εκθετικών όπως είδαμε στις προηγούμενες ενότητες είναι

$$f(x) = A_1 a e^{-ax} + A_2 b e^{-bx}$$

Συνεπώς η πυκνότητα πιθανότητας αυτής με μετασχηματισμό Laplace ισούται με βάση της σχέσης 1.6 του κεφαλαίου 1 με:

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-sx} (A_1 a e^{-ax} + A_2 b e^{-bx}) dx \\ &= A_1 a \int_0^{\infty} e^{-(a+s)x} dx + A_2 b \int_0^{\infty} e^{-(b+s)x} dx \\ &= \frac{A_1 a}{a+s} + \frac{A_2 b}{b+s}\end{aligned}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί επίσης να βρεθεί και με την εντολή `LaplaceTransform[f(x), x, s]` στο Mathematica.

Το επόμενο βήμα στη συνέχεια είναι να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο 1.8 του κεφαλαίου 1 για να βρούμε την ανανεωτική πυκνότητα Laplace.

Συγκεκριμένα, έχουμε ότι:

$$\mathcal{L} m'(s) = \frac{\hat{f}(s)}{1 - \hat{f}(s)} \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{L} m'(s) = \frac{\frac{A_1 a}{a+s} + \frac{A_2 b}{b+s}}{1 - \left(\frac{A_1 a}{a+s} + \frac{A_2 b}{b+s} \right)}$$

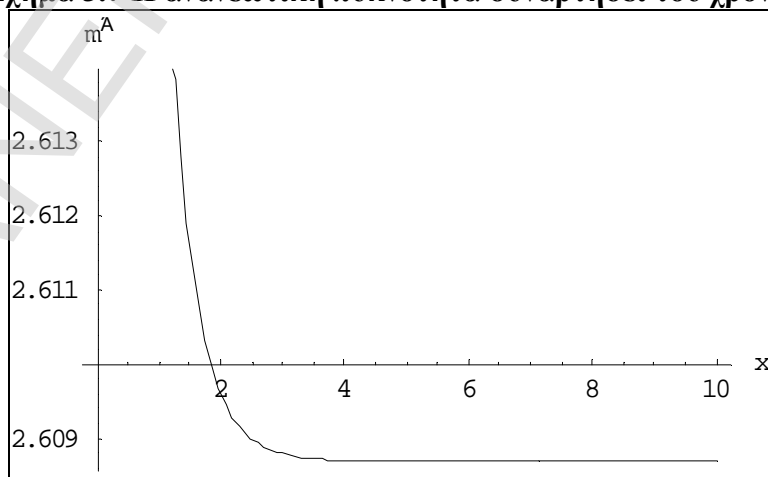
3.9.2 Η ανανεωτική πυκνότητα

Η ανανεωτική πυκνότητα θα βρεθεί για συγκεκριμένες παραμέτρους και με την βοήθεια της εντολής `InverseLaplaceTransform[m'(x), s, x]` στο Mathematica. Πιο συγκεκριμένα για $A_1 = 0.3$, $A_2 = 0.7$, $a=2$ και $b=3$ η ανανεωτική πυκνότητα ισούται με

$$m'(x) = 2.6 + 0.091e^{-2.3x}$$

Δηλαδή φαίνεται από την συνάρτηση και από το παρακάτω αντίστοιχο γράφημα ότι η ανανεωτική πυκνότητα είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου (για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε παράρτημα 3.7)

Σχήμα 3.7 Η ανανεωτική πυκνότητα συναρτήσει του χρόνου



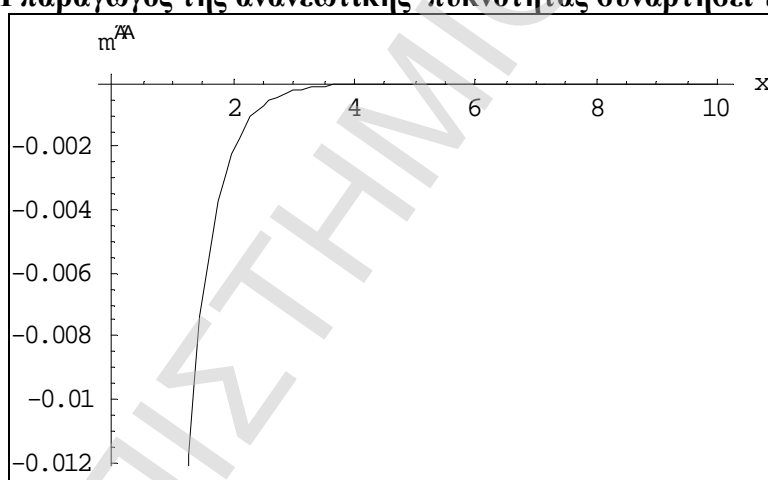
3.9.3 Η παράγωγος της ανανεωτικής πυκνότητας

Τέλος παραθέτουμε στην επόμενη ενότητα για μεγαλύτερη ακρίβεια την παράγωγο της ανανεωτικής πυκνότητας μαζί με την γραφική παράστασή της από όπου παρατηρούμε ότι η παράγωγος είναι παντού αρνητική, που σημαίνει ότι η ανανεωτική πυκνότητα δηλαδή ο ρυθμός με τον οποίο γίνονται οι ανανεώσεις φθίνει στο χρόνο

$$m''(x) = \frac{d}{dx} 2.6 + 0.091e^{-2.3x} \Leftrightarrow$$

$$m''(x) = -0.21e^{-2.3x}$$

Σχήμα 3.8 Η παράγωγος της ανανεωτικής πυκνότητας συναρτήσει του χρόνου



Οι εντολές για το παραπάνω γράφημα βρίσκονται στο παράρτημα 3.8

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 4

Η ανανεωτική πυκνότητα στην περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων είναι IFR Weibull

4.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε την ανανεωτική συνάρτηση πυκνότητας ως προς την ύπαρξη μονοτονίας για την περίπτωση που η F ακολουθεί την Weibull και τη μίξη Weibull κατανομών. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας τη βαθμίδα αποτυχίας και τα θεωρήματα 3.2 και 3.3, καταλήξαμε στο συμπέρασμα, ότι για την περίπτωση που η παράμετρος α (της Weibull κατανομής) είναι μικρότερη της μονάδας δηλαδή $\alpha < 1$ η κατανομή είναι DFR το οποίο συνεπάγεται την ύπαρξη μονοτονίας για την ανανεωτική πυκνότητα (και πιο συγκεκριμένα είναι πάντα φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου t).

Όταν η παράμετρος α πάρει την τιμή ένα ($\alpha=1$), ισχύει ότι ισχύει για την εκθετική κατανομή που αναφερθήκαμε στο κεφάλαιο 2, αφού (για την συγκεκριμένη περίπτωση) η Weibull ταυτίζεται με την εκθετική κατανομή.

Για την περίπτωση που ισχύει $\alpha > 1$ γνωρίζουμε ότι η κατανομή είναι IFR, αλλά δεν μπορούμε να βγάλουμε ασφαλή συμπεράσματα για την ύπαρξη ή μη μονοτονίας για την ανανεωτική συνάρτηση πυκνότητας.

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε για την περίπτωση που $\alpha > 1$ (δηλαδή για IFR κατανομές) και θα προσπαθήσουμε με προσεγγιστική (και όχι με ακριβή) μέθοδο να ελέγξουμε την ύπαρξη ή μη μονοτονίας για την ανανεωτική συνάρτηση πυκνότητας για τις συγκεκριμένες κατανομές.

4.2 Η ανανεωτική συνάρτηση για IFR Weibull κατανομές.

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή για την περίπτωση που η κατανομή Weibull είναι IFR θα χρησιμοποιήσουμε προσεγγιστική διαδικασία για την ανανεωτική πυκνότητα.

Υπάρχουν πολλές αναφορές και πολλά δημοσιευμένα άρθρα για την συγκεκριμένη περίπτωση. Οι Smith και Leadbetter (1963) δημιούργησαν μια δυναμοσειρά για την ανανεωτική συνάρτηση για $\alpha < 1$ και για κάποιες τιμές του t για $\alpha > 1$.

Ο Soland (1968) και ο Huang (1972) χρησιμοποίησαν ως πρώτη προσέγγιση για την ανανεωτική πυκνότητα $m'(t)$ την συνάρτηση πυκνότητας $f(t)$ της κατανομής. Όλες οι παραπάνω αναφορές στηρίζονται στο γεγονός ότι για μικρό t , η $m(t) \approx F(t)$ και $m'(t) \approx f(t)$.

Συνεχίζοντας (χρονικά) στις αναφορές για την προσέγγιση της ανανεωτικής συνάρτησης (για την περίπτωση που η κατανομή F είναι IFR Weibull) ο Spearman (1989) δημιούργησε τη συνάρτηση $H(t)$ ως μια προσέγγιση για την ανανεωτική συνάρτηση

$$\text{όπου} \quad H(t) = \left[1 + \frac{t}{m} + \frac{s^2 - 2m^2}{2m^2} \right] F(t) - \frac{1}{m} \int_0^t s \cdot f(s) ds \quad (4.1)$$

$$F(t) = 1 - e^{-1t^a}$$

και μ , s^2 οι συναρτήσεις της μέσης τιμής και της διακύμανσης, της Weibull κατανομής, συγκεκριμένα:

$$m = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{1a}} \quad \text{και} \quad s^2 = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right)}{\frac{2}{1a}} - m^2.$$

Επειδή θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου $\lambda=1$ οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$m = \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) \quad \text{και} \quad s^2 = \Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - m^2.$$

Οι A.G. Constantine και N.I. Robinson (1997) δημιούργησαν μια αρκετά καλή προσέγγιση για την ανανεωτική συνάρτηση. Πιο συγκεκριμένα αναφέρουν ότι η ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$ προσεγγίζεται κάθε φορά από τη μέγιστη συνάρτηση, μεταξύ της συνάρτησης κατανομής $F(t)$ και της συνάρτησης $H(t)$.

Δηλαδή $m(t) \approx \max\{F(t), H(t)\}$ για κάθε t .

4.2.1 Η ανανεωτική συνάρτηση για Weibull κατανομή με $\alpha=2$.

Στις παρακάτω παραγράφους θα ασχοληθούμε με την προσεγγιστική εκτίμηση της ανανεωτικής συνάρτησης για IFR κατανομές χρησιμοποιώντας την προσεγγιστική εξίσωση (4.1).

Στο παράρτημα 4.1 υπολογίσαμε με τη σειρά τις παρακάτω συναρτήσεις :

$$F(t) = 1 - e^{-t^a}$$

$$f(s) = a s^{a-1} e^{-s^a}$$

$$H(t) = \left[1 + \frac{t}{m} + \frac{s^2 - 2m^2}{2m^2} \right] F(t) - \frac{1}{m} \int_0^t s \cdot f(s) ds$$

$$m = \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) \quad s^2 = \Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - m^2$$

$$m(t) \approx \max\{F(t), H(t)\} \quad (4.2)$$

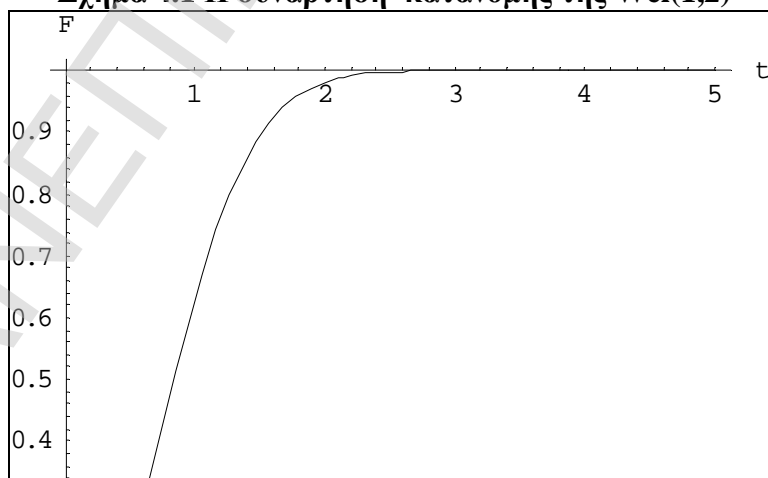
Και στη συνέχεια θα ελέγξουμε αν υπάρχουν κοινά σημεία μεταξύ των δύο συναρτήσεων (F και H) εξισώνουμε τις δύο συναρτήσεις μεταξύ τους στο Mathematica με την εντολή

$$\text{FindRoot}[F[t, a] == H[t, a], \{t, 1\}] \quad (4.3)$$

Το αποτέλεσμα της παραπάνω εντολής για $a=2$ δίνει ένα σημείο επαφής για $t=1.12778$, δηλαδή για το διάστημα t από 0 έως 1.12778 μέγιστη είναι η μια συνάρτηση και για το υπόλοιπο διάστημα γίνεται η άλλη.

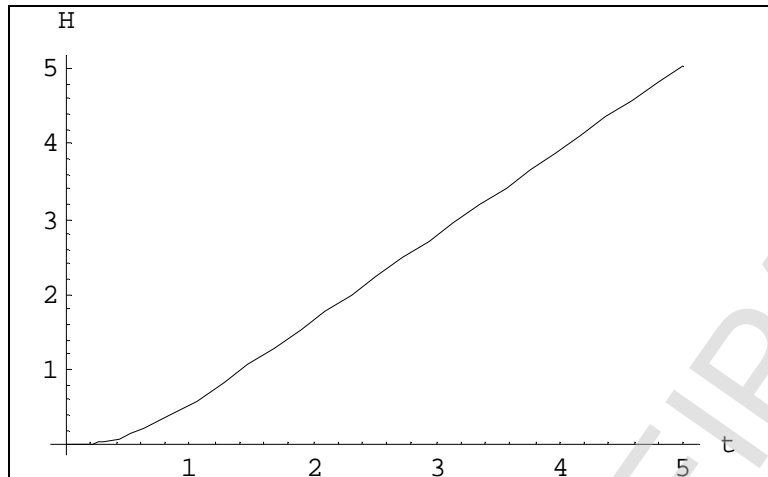
Για να δούμε ποια από τις δύο συναρτήσεις είναι μέγιστη στο πρώτο διάστημα και ποια στο άλλο, κάνουμε αρχικά τα γραφήματα της $F(t)$ και της $H(t)$ (σχήμα 4.1 και 4.2 αντίστοιχα. Τα σχήματα 4.1 έως 4.14 βρίσκονται με εντολές στο Mathematica που βρίσκονται στο παράρτημα 4.2) για να δούμε την μορφή της κάθε συνάρτησης

Σχήμα 4.1 Η συνάρτηση κατανομής της Wei(1,2)



Αναμενόμενη η μορφή της συνάρτησης κατανομής αφού μια από τις προϋποθέσεις είναι να είναι αύξουσα και να συγκλίνει στη μονάδα.

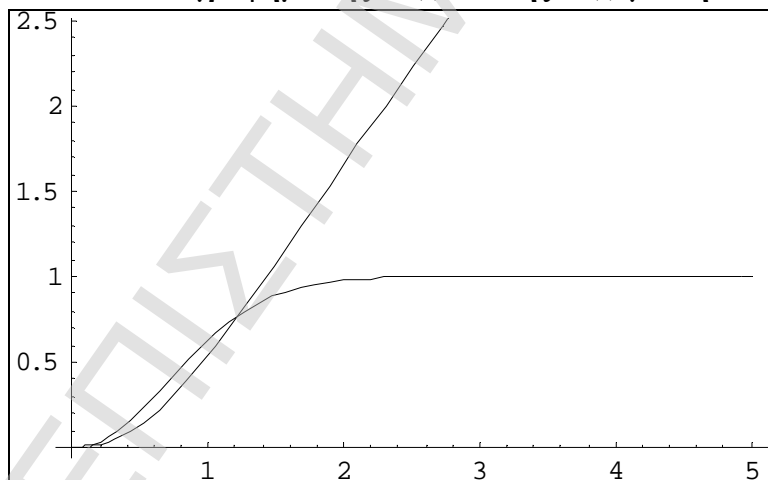
Σχήμα 4.2 Η συνάρτηση $H(t)$



ενώ αντίθετα φαίνεται ότι η συνάρτηση $H(t)$ να είναι αύξουσα, αλλά χωρίς να συγκλίνει σε κάποια τιμή και να προσεγγίζει αρκετά την ευθεία $y = x$.

Και συνεχίζουμε με το κοινό γράφημα της $H(t)$ και της $F(t)$ για καλύτερη σύγκριση των δύο συναρτήσεων.

Σχήμα 4.3 το κοινό γράφημα της $H(t)$ και της $F(t)$ για την $\text{Wei}(1,2)$



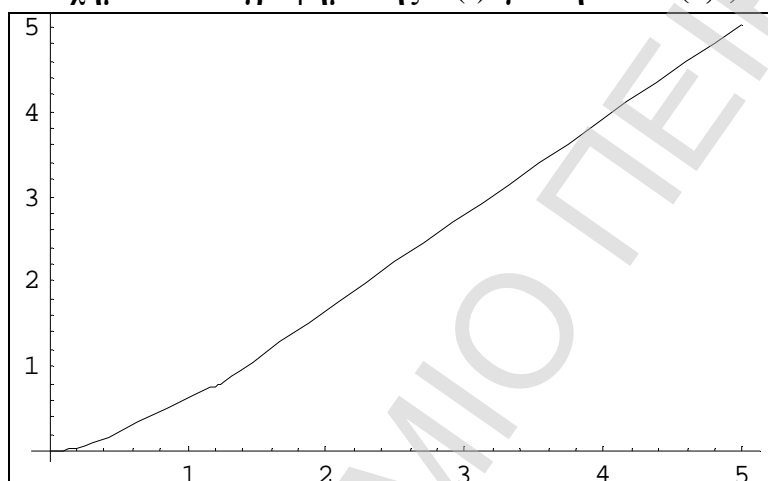
Από το γράφημα 4.3 παρατηρούμε ότι για το διάστημα t από 0 έως 1.12778 μέγιστη είναι η συνάρτηση κατανομής της Weibull και για το υπόλοιπο διάστημα γίνεται η συνάρτηση $H(t)$ (μελετούμε την ανανεωτική συνάρτηση για t κοντά στο σημείο τομής των δύο συναρτήσεων, δηλαδή στο 1,12778 όπου γίνεται αλλαγή στη μέγιστη συνάρτηση, κάτι που είναι σημαντικό για την ανανεωτική πυκνότητα όπως θα δούμε στην ενότητα 4.3).

Συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα για την περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης ενός ενδεχομένου ακολουθούν Weibull κατανομή και για την περίπτωση που η παράμετρος $\alpha=2$ (δηλαδή για μια IFR κατανομή), ο αναμενόμενος

αριθμός των ανανεώσεων στο διάστημα t από 0 έως 1,12778 περιγράφεται προσεγγιστικά από την συνάρτηση κατανομής της Weibull και για το υπόλοιπο διάστημα προσεγγίζεται από την συνάρτηση $H(t)$ με βάση την συνάρτηση (4.1).

Αφού ορίσουμε την ανανεωτική συνάρτηση από τη σχέση $m(t) \approx \max\{F(t), H(t)\}$ παρατηρούμε από το γράφημα 4.4 ότι είναι μια αύξουσα συνάρτηση του χρόνου που πλησιάζει την ευθεία $y = x$ και στο σημείο 1,12778 φαίνεται να διαταράσσεται η αρμονία της καμπύλης (σημείο όπου η ανανεωτική συνάρτηση ορίζεται από την συνάρτηση $H(t)$)

Σχήμα 4.4 Το γράφημα της $m(t)$ για την Wei(1,2)



4.2.2 Η ανανεωτική συνάρτηση για Weibull κατανομή με $\alpha=5$.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με την ενότητα 4.2.1 θα μελετήσουμε επιπλέον για την περίπτωση που $\alpha=5$ για να έχουμε μια πληρέστερη εικόνα για την ανανεωτική συνάρτηση.

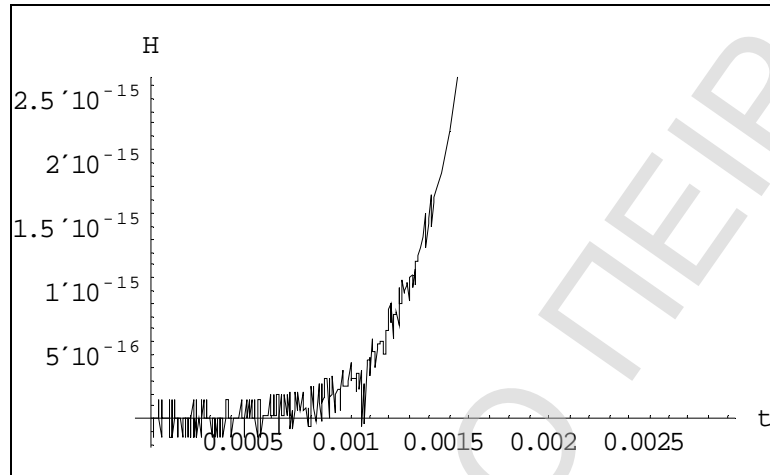
Από τον ίδιο προγραμματισμό των συναρτήσεων στο παράρτημα 4.1 αλλάζοντας μόνο την τιμή της παραμέτρου α ($\alpha=5$) σε κάθε συνάρτηση έχουμε ότι :

Η συνάρτηση κατανομής $F(t)$ και η συνάρτηση $H(t)$ ενώνονται σε δύο σημεία για $t=0.000427087$ και $t=1.55352$. Οπότε θα προσπαθήσουμε να δούμε τι συμβαίνει στα δύο αυτά σημεία.

Μια πρώτη προσέγγιση είναι να κάνουμε την γραφική παράσταση για την $H(t)$ για το μικρό διάστημα του χρόνου t ($0, 0,004$) (Σχήμα 4.5) , από το οποίο παρατηρούμε ότι υπάρχουν σημεία της συνάρτησης $H(t)$ που βρίσκονται κάτω από το μηδέν, γεγονός που δεν μπορεί να ισχύει για την ανανεωτική συνάρτηση (αφού πρέπει να είναι παντού θετική).

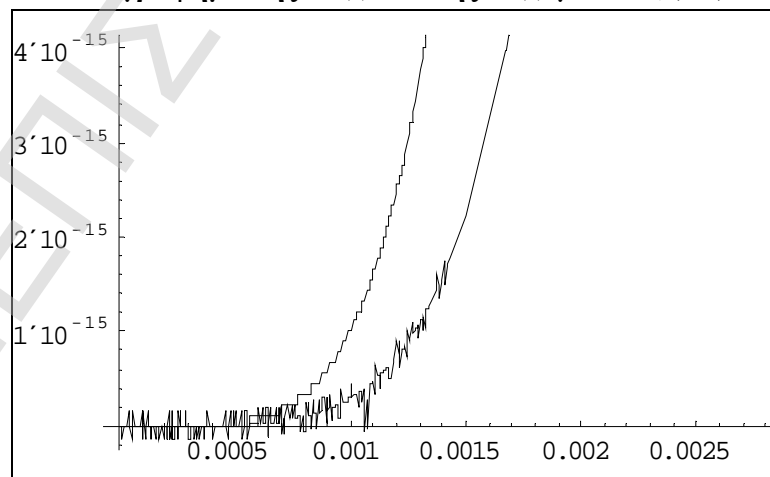
Το παραπάνω αποτέλεσμα συμβαίνει γιατί η συνάρτηση $H(t)$ είναι μια προσέγγιση της πραγματικής τιμής της ανανεωτικής συνάρτησης για μικρές τιμές t , δηλαδή φαίνεται ότι (για το μικρό αυτό διάστημα η συνάρτηση $H(t)$ να μην προσεγγίζει ικανοποιητικά την ανανεωτική συνάρτηση η οποία θα υπολογίζεται από την συνάρτηση κατανομής.

Σχήμα 4.5 Η συνάρτηση $H(t)$ για το διάστημα όπου $t \in (0, 0,004)$



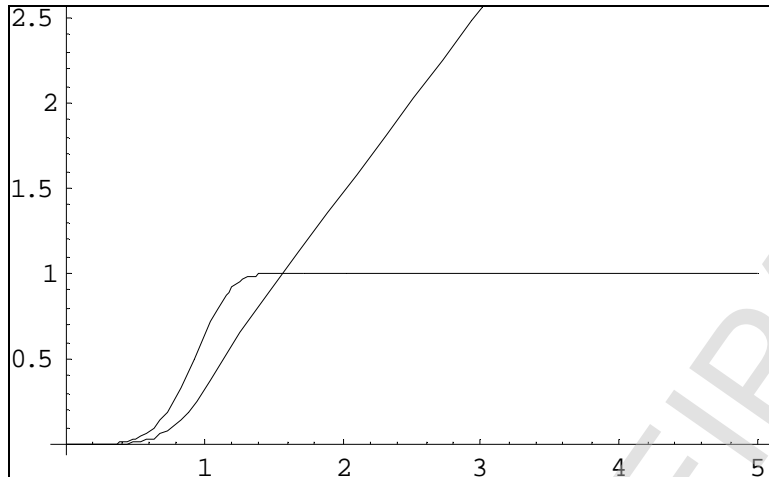
Φαίνεται από το παραπάνω γράφημα η συνάρτηση $H(t)$ να έχει μια πολύπλοκη μορφή για αυτό το μικρό διάστημα, γεγονός που φαίνεται και από το κοινό γράφημα 4.6 με την συνάρτηση κατανομής $F(t)$.

Σχήμα 4.6 το κοινό γράφημα της $H(t)$ και της $F(t)$ για $t \in (0, 0,004)$



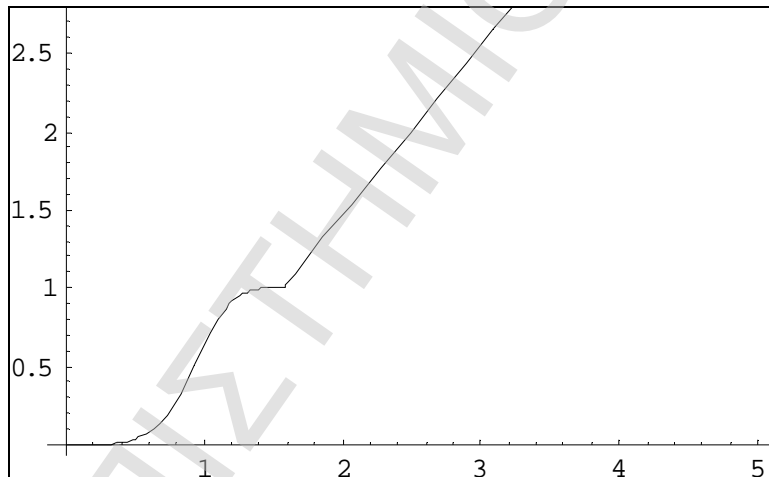
Η συμπερασματολογία δεν φαίνεται να διαφέρει σημαντικά από αυτή για $\alpha=2$, αφού και εδώ αρχικά μέγιστη συνάρτηση είναι η συνάρτηση κατανομής και στη συνέχεια γίνεται η συνάρτηση $H(t)$ (σχήμα 4.7).

Σχήμα 4.7 το κοινό γράφημα της $H(t)$ και της $F(t)$ για $t \in (0, 5)$



Από το γράφημα 4.8 φαίνεται πιο έντονα (σε σχέση με την περίπτωση $\alpha=2$) το σημείο όπου η ανανεωτική συνάρτηση σταματά να υπολογίζεται από την συνάρτηση κατανομής και υπολογίζεται από την συνάρτηση $H(t)$.

Σχήμα 4.8 το γράφημα της $m(t)$ για την $\text{Wei}(1,5)$



Δυο παρατηρήσεις που δημιουργήθηκαν από όλη την παραπάνω διαδικασία είναι ότι πρώτον τρέχοντας στο Mathematica την εντολή που δίνεται στο παράρτημα 4.2 για (ακέραιες) τιμές του α από 2 έως 10 οι δύο συναρτήσεις ενώνονται μία φορά στις περιπτώσεις που το α πάρει τις τιμές 2 και 3, ενώ για τις τιμές 4 έως 10 ενώνονται σε δύο σημεία. Και δεύτερο καθώς το α αυξάνει από το 2 στο 10 (συμπεριλαμβανομένων και δεκαδικών τιμών) το σημείο ταύτισης των συναρτήσεων αυξάνει.

Για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε τον παρακάτω πίνακα 4.1

Πίνακας 4.1

α	t_2	t_1
2	1.12778	-
3	1.3743	-
4	1.48934	0.000104512
5	1.55352	0.000427087
6	1.60202	0.00169077
7	1.64159	0.00772933
8	1.67432	0.00804609
9	1.70175	0.0174276
10	1.72501	0.0250618

Όπου t_1 και t_2 τα σημεία τομής των δύο συναρτήσεων.

4.3 Η ανανεωτική συνάρτηση πυκνότητας για IFR Weibull κατανομές.

Στην παρούσα ενότητα θα ασχοληθούμε με το βασικό θέμα της παρούσας εργασίας που είναι ο ρυθμός μεταβολής του αναμενόμενου αριθμού των ανανεώσεων μιας ανανεωτικής διαδικασίας, δηλαδή με την συνάρτηση της ανανεωτικής πυκνότητας.

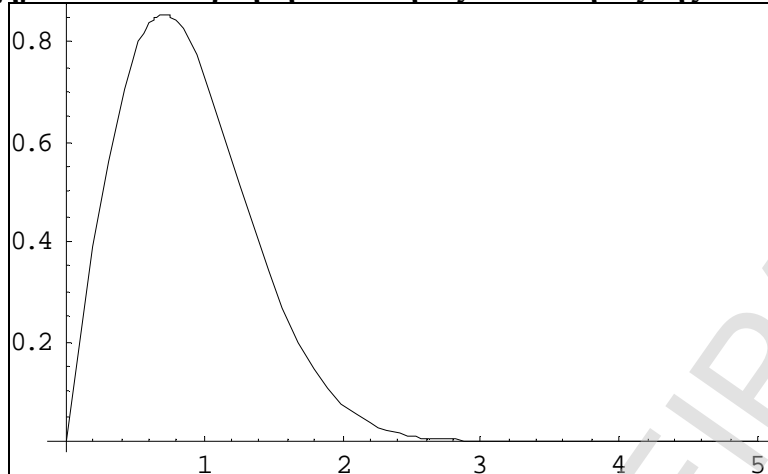
Όπως αναφέρθηκε και στις προηγούμενες ενότητες η ανανεωτική συνάρτηση υπολογίζεται προσεγγιστικά, συνεπώς και η συνάρτηση της ανανεωτικής πυκνότητας που είναι η παράγωγος της ανανεωτικής συνάρτησης θα είναι μια προσέγγιση της πραγματικής.

Για το διάστημα του χρόνου που η ανανεωτική συνάρτηση εκτιμάται από την συνάρτηση κατανομής, η αντίστοιχη ανανεωτική συνάρτηση πυκνότητας (για το διάστημα αυτό) θα προσεγγίζεται από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(t)$ της κατανομής.

Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Weibull κατανομής δεν είναι μια μονότονη συνάρτηση και πιο συγκεκριμένα στη αρχή είναι αύξουσα και στη συνέχεια γίνεται φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου t (σχήμα 4.9), άρα και η συνάρτηση της ανανεωτικής πυκνότητας δεν θα είναι μια μονότονη συνάρτηση του χρόνου για το συγκεκριμένο διάστημα.

Για το διάστημα που η ανανεωτική συνάρτηση υπολογίζεται (προσεγγιστικά) από την συνάρτηση $H(t)$ η συνάρτηση της ανανεωτικής πυκνότητας θα εκτιμάται από την $h(t)$ (θέτουμε $h(t) = H'(t)$).

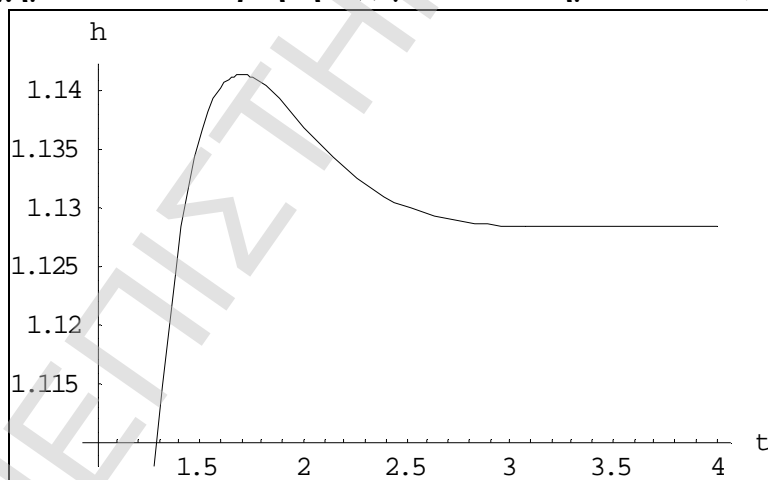
Σχήμα 4.9 Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Wei(1,2)



4.3.1 Η ανανεωτική συνάρτηση πυκνότητας για Wei(1,2).

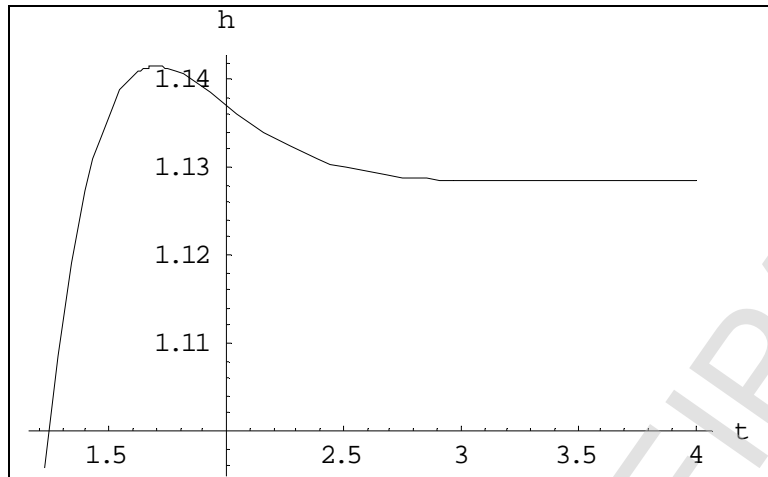
Κάνοντας τη γραφική παράσταση (γράφημα 4.10) της $h(t)$ συναρτήσεως του χρόνου, φαίνεται να μην υπάρχει μονοτονία στο συγκεκριμένο διάστημα (1.5 , 2.5).

Σχήμα 4.10 Η συνάρτηση $h(t)$ για το διάστημα όπου $t \in (1, 4)$



Επειδή όμως η συνάρτηση ανανεωτικής πυκνότητας ορίζεται από την $h(t)$ για χρόνο μετά από $t=1.12778$ θα δούμε τι συμβαίνει σε αυτή την περίπτωση από το γράφημα 4.11.

Σχήμα 4.11 Η συνάρτηση $h(t)$ για το διάστημα όπου $t \in (1.12778, 4)$

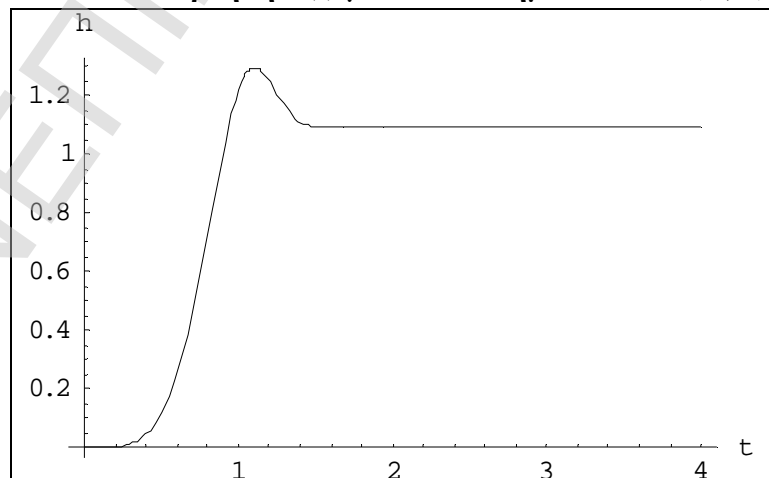


Και για το διάστημα αυτό παρατηρούμε την μη ύπαρξη μονοτονίας για την συνάρτηση $h(t)$ και κατ' επέκταση για την συνάρτηση της ανανεωτικής πυκνότητας. Με το παράδειγμα αυτό φαίνεται να μην ισχύει (πάντα) το αντίστοιχο του θεωρήματος 3.3 (θεώρημα 3.3 αν μια κατανομή F είναι DFR τότε η ανανεωτική πυκνότητα είναι πάντα φθίνουσα) με βάση το οποίο θα αναμενόταν για μια IFR κατανομή να έχει πάντα αύξουσα συνάρτηση ανανεωτικής πυκνότητας.

4.3.2 Η ανανεωτική συνάρτηση πυκνότητας για $Wei(1,5)$.

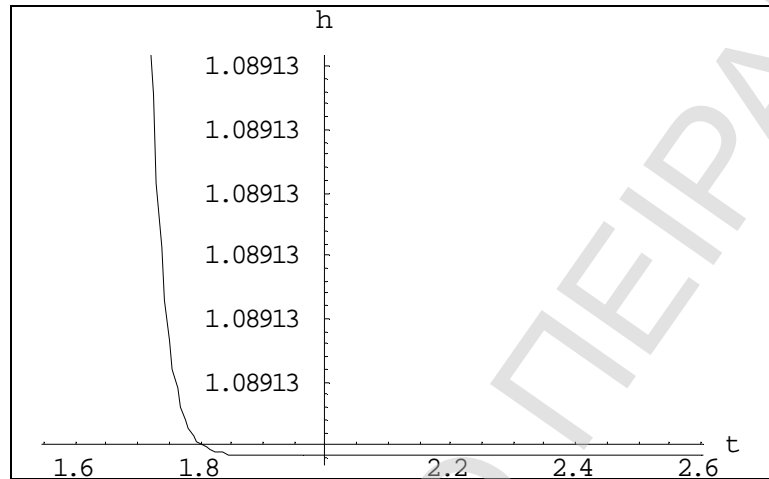
Συνεχίζοντας με το επόμενο παράδειγμα που μελετήσαμε στην ενότητα 4.2.2 (περίπτωση $Wei(1,5)$) η συνάρτηση $h(t)$ δεν είναι μονότονη όπως φαίνεται στο γράφημα 4,12.

Σχήμα 4.12 Η συνάρτηση $h(t)$ για το διάστημα όπου $t \in (0, 4)$



αλλά για το διάστημα $t \in (1,55352, \infty)$ (Σχήμα 4.13) η $h(t)$ φαίνεται να είναι μονότονη (φθίνουσα), άρα και η ανανεωτική πυκνότητα $m'(t)$ είναι μονότονη, αφού για το διάστημα αυτό ορίζεται συναρτησιακά από την $h(t)$.

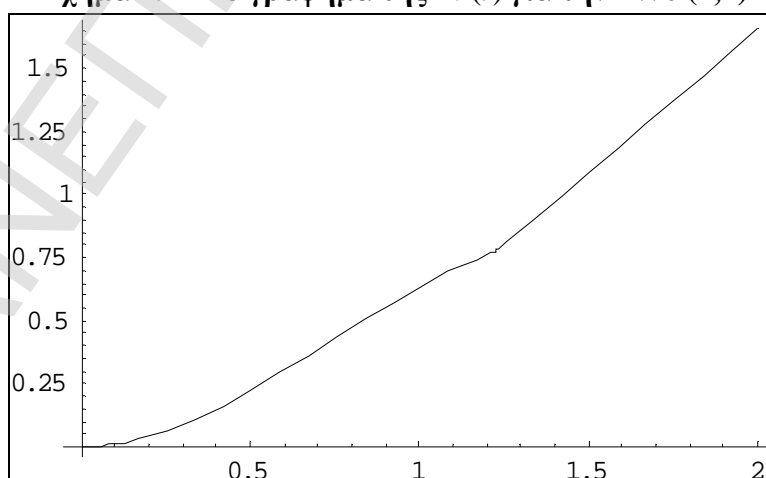
Σχήμα 4.13 Η συνάρτηση $h(t)$ για το διάστημα όπου $t \in (1,55352, 4)$



Ανακεφαλαιώνοντας τα συμπεράσματα για την παραπάνω περίπτωση είδαμε ότι η ανανεωτική πυκνότητα $m'(t)$ για το διάστημα $t \in (0, 1,55352)$ για το οποίο ορίζεται από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(t)$ είναι αύξουσα αρχικά (για τους λόγους που εξηγήθηκε εισαγωγικά στην ενότητα 4.3) και φθίνουσα για $t \in (1,55352, \infty)$ που ορίζεται από την $h(t)$.

Για να δούμε μια γενική εικόνα για την συνάρτηση της ανανεωτικής πυκνότητας $m'(t)$ θα κάνουμε το γράφημα της $m'(t)$ (Σχήμα 4.14) σε όλο το διάστημα για το οποίο ορίζεται

Σχήμα 4.14 Το γράφημα της $m'(t)$ για την Wei(1,2)



4.4 Η ανανεωτική συνάρτηση πυκνότητας για μίξη δύο Weibull IFR κατανομών.

Στην ενότητα 3.9.2 του προηγούμενου κεφαλαίου μελετήσαμε την μονοτονία της ανανεωτικής πυκνότητας $m'(t)$ για την περίπτωση που η κατανομή F είναι μίξη δυο IFR κατανομών και διαπιστώσαμε μέσω της βαθμίδας αποτυχίας την μη ύπαρξη μονοτονίας για την $m'(t)$.

Στην παρούσα ενότητα θα προσπαθήσουμε χρησιμοποιώντας την προσεγγιστική εξίσωση 4.1 να επαληθεύσουμε τα αποτελέσματα της 3.9.2. Αρχικά προγραμματίζουμε στο Mathematica (παράρτημα 4.) τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$F(t) = 1 - A_1 e^{-I_1 t^a} - (1 - A_1) e^{-I_2 t^b}$$

$$f(s) = A_1 I_1 a \cdot s^{a-1} e^{-I_1 s^a} + (1 - A_1) I_2 b \cdot s^{b-1} e^{-I_2 s^b}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την ίδια συνάρτηση πυκνότητας για μίξη Weibull με αυτή της ενότητας 3.9.2 ,δηλαδή με τις ίδιες παραμέτρους και με την παρακάτω μορφή:

$$f(s) = 0.01 \cdot 2 \cdot 2 \cdot s^{2-1} e^{-2s^{2-1}} + (1 - 0.01) 3 \cdot 2s^{2-1} e^{-3s^{2-1}}$$

$$H(t) = \left[1 + \frac{t}{m} + \frac{s^2 - 2m^2}{2m^2} \right] F(t) - \frac{1}{m} \int_0^t s \cdot f(s) ds$$

όπου m και s^2 η μέση τιμή και η διακύμανση της κατανομής F και πιο συγκεκριμένα

$$m = \int_0^{\infty} s \cdot f(s) ds \quad \text{και} \quad s^2 = \int_0^{\infty} s^2 \cdot f(s) ds$$

ενώ η ανανεωτική συνάρτηση υπολογίζεται κάθε φορά από την παρακάτω σχέση.

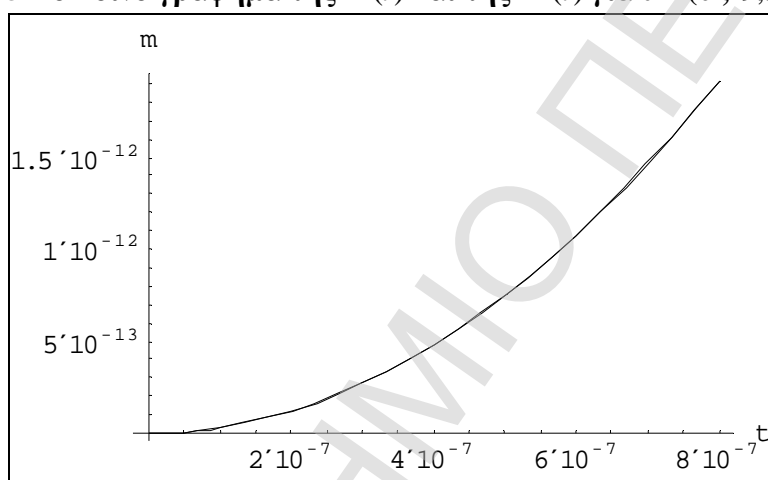
$$m(t) \approx \max\{F(t), H(t)\}$$

Για να δούμε ποια συνάρτηση (από τις F και H βάσει των οποίων υπολογίζεται η $m(t)$) είναι μέγιστη θα ελέγξουμε αν υπάρχουν αρχικά σημεία ταύτισης των δύο συναρτήσεων εξισώνοντάς τες με την εντολή `FindRoot[F[t,a] == H[t,a], {t,1}]`.

Το αποτέλεσμα δίνει ένα σημείο επαφής για $t = 9,3677 \cdot 10^{-9}$.

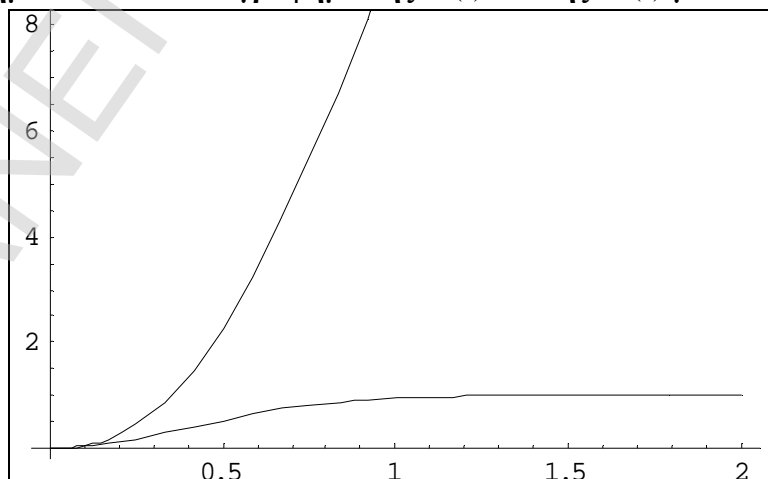
Για να δούμε τι συμβαίνει σε αυτό το σημείο κάνουμε το κοινό γράφημα των δύο συναρτήσεων F και H (το οποίο ορίζεται ως γράφημα της $m(t)$ για ένα μικρό διάστημα του χρόνου $t \in (0, 9,3677 \cdot 10^{-9})$) σχήμα 4.15, από το οποίο φαίνεται ότι οι δύο συναρτήσεις ταυτίζονται μεταξύ τους (για το διάστημα αυτό) δηλαδή δεν μπορούμε να αποφανθούμε ποια είναι μέγιστη πριν από το σημείο $t = 9,3677 \cdot 10^{-9}$ (οι εντολές στο Mathematica για τα σχήματα 4.15 έως 4.18 βρίσκονται στο παράρτημα 4.5).

Σχήμα 4.15 Το κοινό γράφημα της $F(t)$ και της $H(t)$ για $t \in (0, 9,3677 \cdot 10^{-9})$



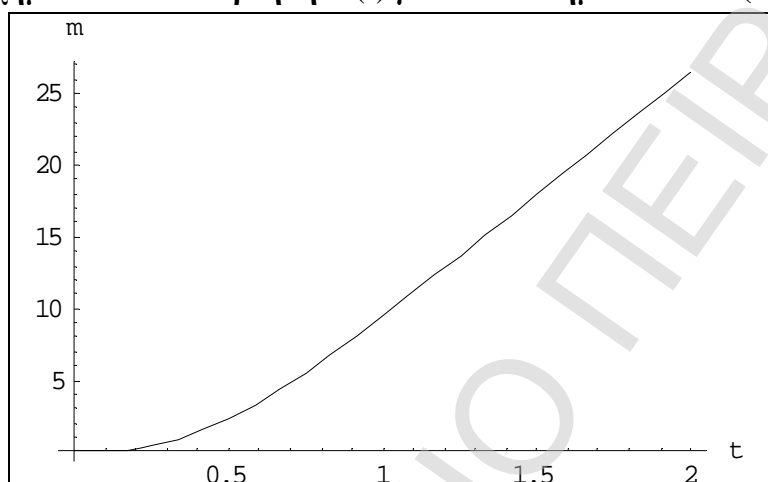
Το σχήμα 4.16 μας δείχνει για το υπόλοιπο διάστημα ποια συνάρτηση είναι μέγιστη, από το οποίο φαίνεται ότι η συνάρτηση $H(t)$ αυξάνει κατά πολύ ενώ η αντίθετα η συνάρτηση $F(t)$ είναι φραγμένη στο ένα (ως συνάρτηση κατανομής), άρα η συνάρτηση που προσεγγίζει καλύτερα την ανανεωτική συνάρτηση σε όλο το πεδίο ορισμού της είναι η $H(t)$.

Σχήμα 4.16 το κοινό γράφημα της $F(t)$ και της $H(t)$ για $t \in (0, 2)$



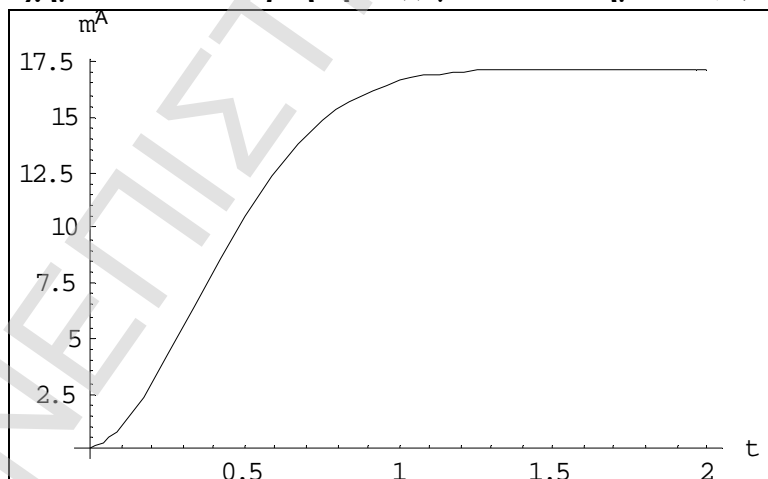
Το παρακάτω γράφημα 4.17 είναι η συνάρτηση της $H(t)$ και επειδή όπως αναφέραμε είναι η μέγιστη συνάρτηση (μεταξύ F και H) θα είναι και το γράφημα της ανανεωτικής συνάρτησης από το οποίο φαίνεται ότι ο αναμενόμενος αριθμός των ανανεώσεων $m(t)$ να είναι μια αύξουσα συνάρτηση.

Σχήμα 4.17 Η συνάρτηση $m(t)$ για το διάστημα όπου $t \in (0, 2)$



Στη συνέχεια παίρνουμε από το γράφημα 4.18 της παραγώγου της $m(t)$ δηλαδή την ανανεωτική πυκνότητα από όπου παρατηρούμε ότι η $m'(t)$ είναι μια μονότονη (αύξουσα) συνάρτηση του χρόνου.

Σχήμα 4.18 Η συνάρτηση $m'(t)$ για το διάστημα $t \in (0, 2)$



Για να δούμε αν η ανανεωτική πυκνότητα είναι όντως αύξουσα συνάρτηση θα ελέγξουμε το πρόσημο της παραγώγου.

Αρχικά ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$k(t) = \frac{d}{dt} m'(t)$$

και

$$v(t) = 0$$

στη συνέχεια προγραμματίζουμε στο Mathematica την εντολή

```
FindRoot[k[t,a,b]==v[t],{t,1}]
```

απ' όπου παίρνουμε ως αποτέλεσμα $\{t \rightarrow -3.95065\}$, δηλαδή η παράγωγος της ανανεωτικής πυκνότητας μηδενίζεται (έχει ρίζα στο μηδέν) για αρνητική τιμή του t (και όχι για θετική).

Τέλος θέτουμε τη συνάρτηση $v(t)$ ίση με -0.000000000001 δηλαδή $v[t_]:= -0.000000000001$ και με την εντολή

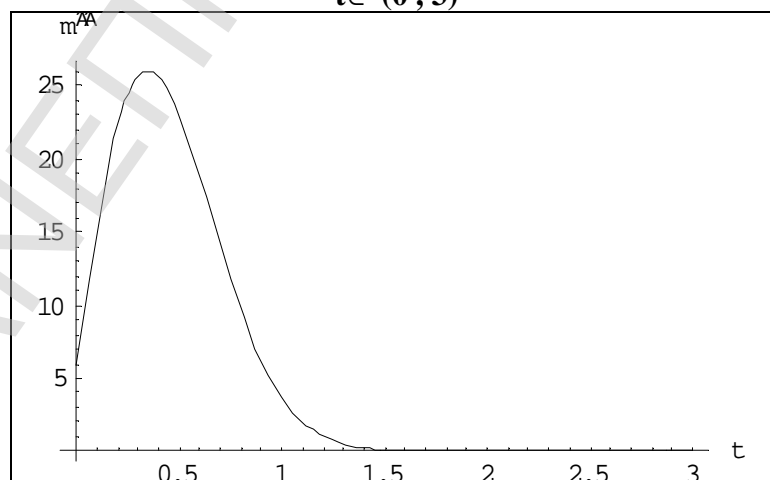
```
FindRoot[k[t,a,b]==v[t],{t,1}]
```

παίρνουμε ως ρίζα $\{t \rightarrow -3.60971\}$ δηλαδή φαίνεται ότι η παράγωγος της ανανεωτικής πυκνότητας να μην παίρνει αρνητικές τιμές για θετικές τιμές του t , δηλαδή ότι είναι πάντα θετική, το οποίο συνεπάγεται ότι ο ρυθμός μεταβολής των ανανεώσεων είναι μια μονότονη (αύξουσα) συνάρτηση.

Συνοψίζοντας, από την ενότητα 4.4 παρατηρήσαμε με την προσεγγιστική μέθοδο ύπαρξη μονοτονίας για την ανανεωτική πυκνότητα γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με τα αποτελέσματα της ενότητας 3.9.2 (όπου δεν παρατηρήσαμε μονοτονία για την ανανεωτική πυκνότητα) για την ίδια κατανομή.

Με το παραπάνω παράδειγμα φαίνεται η αδυναμία της προσεγγιστικής μεθόδου για διάφορες περιπτώσεις.

Σχήμα 4.19 Η παράγωγος $m''(t)$ της ανανεωτικής πυκνότητας για το διάστημα $t \in (0, 3)$



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 5

Η προσέγγιση της ανανεωτικής συνάρτησης από την κανονική κατανομή για την περίπτωση που η F είναι IFR Weibull

5.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφέρθηκε η σημαντικότητα της ανανεωτικής συνάρτησης Weibull η οποία έχει συγκεντρώσει πολλή προσοχή γιατί περιγράφει με σχετικά απλό και αναλυτικό τρόπο μεγάλο εύρος μεταβλητότητας (των παρατηρήσεων) και επιπλέον οι παράμετροι της συνάρτησης μπορούν εύκολα να καθοριστούν με ένα γράφημα ή χρησιμοποιώντας κατάλληλη στατιστική διαδικασία.

Από την άλλη μεριά, δεν υπάρχει ακριβής μαθηματική έκφραση της ανανεωτικής συνάρτησης Weibull για την περίπτωση που η παράμετρος $\alpha > 1$.

Για την περίπτωση αυτή χρησιμοποιούνται πίνακες και προσεγγιστικές συναρτήσεις για τον υπολογισμό της ανανεωτικής συνάρτησης. Πολλοί επιστήμονες ασχολήθηκαν για την περίπτωση αυτή, και πιο συγκεκριμένα :

Ο White (1964) παρουσίασε ένα προσεγγιστικό πίνακα για την ανανεωτική συνάρτηση για τις περιπτώσεις όπου $\alpha = 1.5, 2.5, 3, 4, 5, 7, 10$. Ο Lomnicki (1966) δημιούργησε μια σειρά άπειρων όρων για την $m(t)$. Οι Card και Chen (1988) παρουσίασαν μια εργασία που σαν στόχο είχε τον υπολογισμό ενός διαστήματος εμπιστοσύνης για την ανανεωτική συνάρτηση. Στη συνέχεια (όπως αναφέρθηκε λεπτομερέστερα στο κεφάλαιο 4) ο Spearman (1989) βρήκε μια προσέγγιση για την $m(t)$ (μέσω της $H(t)$) και οι Constantine και Robinson (1997) βασιζόμενοι στην συνάρτηση του Spearman δημιούργησαν μια καλύτερη προσέγγιση.

Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε έναν άλλο τρόπο για να προσεγγίσουμε τον αναμενόμενο αριθμό των ανανεώσεων (δηλαδή την $m(t)$) και πιο συγκεκριμένα θα χρησιμοποιήσουμε την τυποποιημένη κανονική κατανομή.

5.2 Η προσέγγιση της ανανεωτικής συνάρτησης για IFR Weibull κατανομές από την κανονική κατανομή.

Είδαμε στο κεφάλαιο 1 ότι ο υπολογισμός της ανανεωτικής συνάρτησης δίνεται από την παρακάτω σχέση :

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(t) \quad (5.1)$$

όπου $F^{*n}(x) = P\{X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq x\}$ και $\{X_j\}_{j=1,2,3,\dots}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

Για μεγάλο αριθμό παρατηρήσεων, από το κεντρικό οριακό θεώρημα η κατανομή Weibull προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή, δηλαδή οι παρατηρήσεις X_j ακολουθούν τη κανονική κατανομή $N(m, S^2)$.

$$\text{Οπότε } F^{*n}(x) = P\{X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq x\} \approx \Phi\left(\frac{x - nm}{\sqrt{nS}}\right) \quad (5.2)$$

Αντικαθιστώντας στη συνέχεια το παραπάνω αποτέλεσμα στην σχέση (5.1) παίρνουμε

$$m(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{t - nm}{\sqrt{nS}}\right) \quad (5.3)$$

Επειδή το παραπάνω άθροισμα (άπειρων όρων) είναι δύσκολο να υπολογιστεί οι Cui και Xie (2003) χρησιμοποιώντας τη παραπάνω προσέγγιση (σχέση 5.3) δημιούργησαν το παρακάτω θεώρημα για να υπολογίσουν (προσεγγιστικά) την ανανεωτική συνάρτηση, χρησιμοποιώντας άθροισμα πεπερασμένων όρων.

Θεώρημα 5.1: Για τις περιπτώσεις που η παράμετρος $\alpha \geq 3$ η ανανεωτική συνάρτηση για την Weibull κατανομή προσεγγίζεται από την:

$$m(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{t - nm}{\sqrt{nS}}\right) \approx n_1 - 1 + \sum_{n=n_1}^{n_1+k} \Phi\left(\frac{t - nm}{\sqrt{nS}}\right) \quad (5.4)$$

$$\text{όπου } n_1 = \left\lceil \left\lfloor \left\{ \frac{\sqrt{36S^2 + 4m} - 6S}{2m} \right\}^2 \right\rfloor \right\rceil + 1 \quad \text{και} \quad k = \left\lceil \left\lfloor \left\{ \frac{\sqrt{36S^2 + 4m} + 6S}{2m} \right\}^2 \right\rfloor \right\rceil - n_1$$

όπου για $\lambda=1$ η μέση τιμή και η διακύμανση είναι

$$m = \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) \quad \text{και} \quad s^2 = \Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - m^2 .$$

(όπου η αγκύλη [] χρησιμοποιείται για να δηλώσει το ακέραιο μέρος).

5.3 Η ανανεωτική συνάρτηση για Wei(1,4).

Για να υπολογίσουμε (προσεγγιστικά) την ανανεωτική συνάρτηση για $a=4$ και $\lambda=1$ χρησιμοποιώντας την σχέση 5.4 θα πρέπει πρώτα να βρούμε τα όρια του αθροίσματος, δηλαδή τις σταθερές n_1 και k , στη σχέση αυτή και στη συνέχεια την $m(t)$.

Επειδή ο τύπος 5.4 διαφοροποιείται (και πιο συγκεκριμένα τα όρια του αθροίσματος) για διαφορετικές τιμές του t , θα χωρίσουμε το διάστημα $[0, 5]$ (για το οποίο θα υπολογίσουμε την $m(t)$) σε 50 μικρότερα διαστήματα (μήκος 0,1 το κάθε ένα) και θα υπολογίσουμε για τις 50 τιμές του t την ανανεωτική συνάρτηση.

Δηλαδή θα υπολογίσουμε την συνεχή κατανομή Weibull σαν να ήταν διακριτή, όπου το μήκος 0,1 της συνεχούς κατανομής είναι μήκος 1 για τη διακριτή.

Στο παράρτημα 5.1 προγραμματίζουμε τις παρακάτω συναρτήσεις και τις απαιτούμενες εντολές επανάληψης :

$$n_1 = \left\lceil \left\lfloor \left[\frac{\sqrt{36s^2 + 4mt} - 6s}{2m} \right]^2 \right\rfloor + 1, \quad k = \left\lfloor \left[\frac{\sqrt{36s^2 + 4mt} + 6s}{2m} \right]^2 \right\rfloor - n_1$$

$$m = \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) \quad \text{και} \quad s^2 = \Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - m^2 .$$

Τα αποτελέσματα βρίσκονται αντίστοιχα στη δεύτερη και την τρίτη στήλη του πίνακα 5.1 ενώ στην τέταρτη στήλη βρίσκεται το άθροισμά τους (δηλαδή το άνω όριο στο άθροισμα της σχέσης 5.4).

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας για κάθε t τα αντίστοιχα όρια στο άθροισμα της σχέσης 5.4 παίρνουμε κάθε φορά ως αποτέλεσμα μια ή περισσότερες συναρτήσεις $\Phi[z]$ (με συγκεκριμένη κάθε φορά τιμή του z), οπότε εξισώνοντας την τιμή του z με την παρακάτω συνάρτηση

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

έχουμε για κάθε t αριθμητική τιμή για την ανανεωτική συνάρτηση όπου οι τιμές βρίσκονται στην πέμπτη στήλη του πίνακα 5.1 .

Αναφέρουμε τέλος ότι η μεταβλητή z ορίζεται (και προγραμματίζεται αρχικά στο Mathematica) ως

$$z = \frac{t - nm}{\sqrt{nm}}$$

Τα βήματα της παραπάνω διαδικασίας βρίσκονται αναλυτικά στο παράρτημα 5.2

Πίνακας 5.1

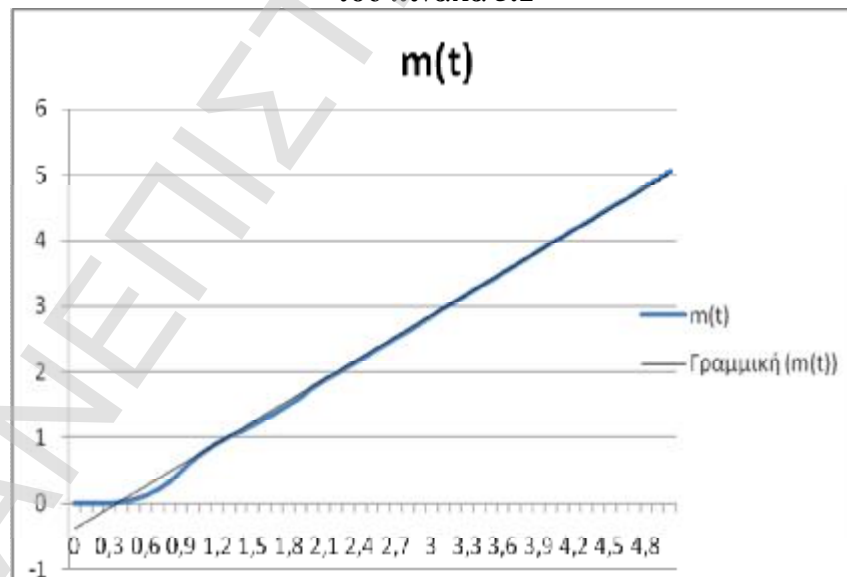
t	n_1	k	$n_1 + k$	$m(t)$	$m'(t)$
0	1	0	1	0	0
0,1	1	1	2	0,000759904	0,007599
0,2	1	1	2	0,00273853	0,019786
0,3	1	1	2	0,00855892	0,058204
0,4	1	1	2	0,0232575	0,146986
0,5	1	1	2	0,0551291	0,318716
0,6	1	1	2	0,114483	0,593539
0,7	1	1	2	0,20947	0,94987
0,8	1	1	2	0,340243	1,30773
0,9	1	2	3	0,495544	1,55301
1	1	2	3	0,65545	1,60001
1,1	1	2	3	0,800623	1,45078
1,2	1	2	3	0,920338	1,19715
1,3	1	2	3	1,01674	0,96402
1,4	1	2	3	1,10075	0,8401
1,5	1	2	3	1,18523	0,8448
1,6	1	2	3	1,27934	0,9411
1,7	1	3	4	1,38639	1,0705
1,8	1	3	4	1,50419	1,178
1,9	1	3	4	1,62753	1,2334
2	1	3	4	1,75059	1,2306
2,1	1	3	4	1,86897	1,1838
2,2	1	3	4	1,98095	1,1198
2,3	1	3	4	2,08743	1,0648
2,4	1	3	4	2,19103	1,036
2,5	1	3	4	2,29478	1,0375
2,6	1	4	5	2,40123	1,0645
2,7	1	4	5	2,51081	1,0958
2,8	1	4	5	2,62316	1,1235
2,9	1	4	5	2,7369	1,1374
3	1	4	5	2,85048	1,1358
3,1	1	4	5	2,96277	1,1229
3,2	2	3	5	3,07335	1,1058
3,3	2	3	5	3,18248	1,0913
3,4	2	3	5	3,29082	1,0834
3,5	2	3	5	3,39909	1,0827
3,6	2	4	6	3,50933	1,1024

3,7	2	4	6	3,61949	1,1016
3,8	2	4	6	3,73034	1,1085
3,9	2	4	6	3,8415	1,1116
4	2	4	6	3,95255	1,1105
4,1	2	4	6	4,06319	1,1064
4,2	2	4	6	4,17329	1,101
4,3	2	4	6	4,28284	1,0955
4,4	2	4	6	4,39196	1,0912
4,5	2	5	7	4,50376	1,118
4,6	2	5	7	4,61379	1,1003
4,7	2	5	7	4,724	1,1021
4,8	2	5	7	4,83435	1,1035
4,9	2	5	7	4,94469	1,1034
5	2	5	7	5,05489	1,102

Για να δούμε τη συμπεριφορά της ανανεωτικής συνάρτησης κάνουμε το γράφημα (σχήμα 5.1 με την εντολή ListPlot στο Mathematica ή εισάγοντας ένα σχήμα στο excel) των τιμών της $m(t)$ (στήλη 5 από πίνακα 5.1) με τις αντίστοιχες τιμές του t (στήλη 1), όπου στο άξονα των y είναι οι τιμές της ανανεωτικής συνάρτησης και στον άξονα των x είναι οι 50 παρατηρήσεις (μήκος 0.1 η κάθε μια) του χρόνου t .

Μια παρατήρηση που μπορεί να γίνει είναι ότι οι 6 πρώτες τιμές (δηλαδή για το διάστημα από 0 έως 0.6) είναι κοντά στο μηδέν, ενώ για τις υπόλοιπες παρατηρήσεις φαίνεται να προσεγγίζουν την ευθεία $y = x$.

Σχήμα 5.1 Η γραφική παράσταση της ανανεωτικής συνάρτησης από τις τιμές του πίνακα 5.1



5.4 Η συνάρτηση της ανανεωτικής πυκνότητας για Wei(1,4).

Στις προηγούμενες ενότητες για να βρούμε την μαθηματική έκφραση της ανανεωτικής πυκνότητας χρησιμοποιούσαμε την παράγωγο της ανανεωτικής συνάρτησης.

Στη παρούσα ενότητα η σχέση 5.1 είναι πολύπλοκη έχοντας ως συνέπια να είναι αρκετά δύσκολα να βρεθεί η παράγωγος και επιπλέον έχουμε να κάνουμε με δεδομένα (δηλαδή μια διακριτή και όχι συνεχή κατανομή άρα η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής δεν είναι παντού παραγωγίσιμη).

Επειδή από τον ορισμό η ανανεωτική πυκνότητα είναι ο ρυθμός μεταβολής της ανανεωτικής συνάρτησης θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω σχέση (5.5).

$$m'(t_j) \approx \frac{m(t_j) - m(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \quad (5.5)$$

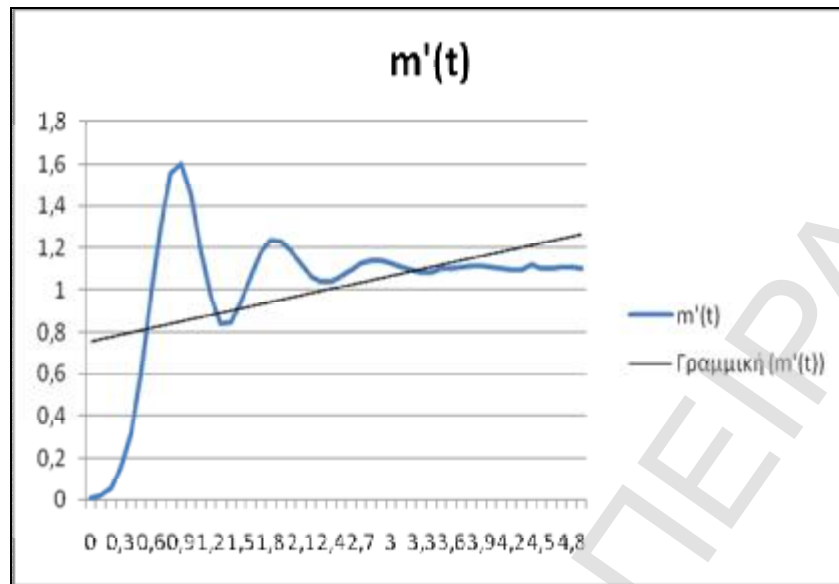
Δηλαδή η ανανεωτική πυκνότητα για κάθε t θα βρίσκεται αν από την τιμή της ανανεωτικής συνάρτησης για χρόνο t_j αφαιρέσουμε αυτή για χρόνο t_{j-1} και στη συνέχεια διαιρέσουμε το αποτέλεσμα με το διάστημα $t_j - t_{j-1}$ όπου $j=1,2,\dots,50$ $t_0 = 0$ και $m(t) = 0$ (οι παραπάνω υπολογισμοί μπορούν να γίνουν και σε ένα υπολογιστικό φύλλο excel).

Τα αποτελέσματα βρίσκονται στην στήλη 6 του πίνακα 5.1, από τα οποία παρατηρούμε ότι για t από 0.05 έως 0.9 όταν αυξάνεται ο χρόνος αυξάνεται και η ανανεωτική πυκνότητα (δηλαδή η ανανεωτική πυκνότητα είναι αύξουσα για το διάστημα αυτό) ενώ για t από 0.95 έως 1.4 όταν αυξάνεται ο χρόνος μειώνεται η ανανεωτική πυκνότητα (δηλαδή η ανανεωτική πυκνότητα είναι φθίνουσα για το διάστημα αυτό) και στη συνέχεια γίνεται αύξουσα, μετά φθίνουσα, αύξουσα και τέλος πάλι φθίνουσα.

Παρατηρούμε δηλαδή την μη ύπαρξη μονοτονίας για την ανανεωτική πυκνότητα.

Χρησιμοποιώντας την εντολή ListPlot στο Mathematica (ή εισάγουμε στο excel ένα γράφημα) με τις τιμές της ανανεωτικής πυκνότητας (στήλη 6 πίνακα 5.1) φαίνεται να επιβεβαιώνεται το αποτέλεσμα της μη ύπαρξης μονοτονίας για την ανανεωτική πυκνότητα (σχήμα 5.2).

Σχήμα 5.2 Η γραφική παράσταση της ανανεωτικής πυκνότητας από τις τιμές του πίνακα 5.1



Τέλος παρατηρούμε ότι η ανανεωτική πυκνότητα φαίνεται καθώς αυξάνει το t να συγκλίνει σε μια τιμή κοντά στο 1,1 αποτέλεσμα το οποίο φαίνεται να έρχεται σε συμφωνία με το θεώρημα 1.8 (του κεφαλαίου 1) δηλαδή για μεγάλες τιμές του t η ανανεωτική πυκνότητα τείνει στην τιμή $1/\mu$ όπου

$$m = \Gamma(1 + 1/a) = \Gamma(1 + 1/4) = \Gamma(5/4) = 0,906402$$

$$\text{άρα } 1/\mu = 1/0,906402 = 1,10326.$$

5.5 Η ανανεωτική συνάρτηση για $Wei(1.5, 5)$.

Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε τι συμβαίνει στην περίπτωση που η κατανομή F είναι $Wei(1,4)$ στην παρούσα ενότητα θα ασχοληθούμε με την περίπτωση που και δύο παράμετροι είναι μεγαλύτεροι της μονάδας και συγκεκριμένα την περίπτωση $Wei(1.5, 5)$.

Επειδή όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα οι μαθηματικές σχέσεις για την ανανεωτική συνάρτηση και την ανανεωτική πυκνότητα είναι δύσκολο να βρεθούν θα μελετήσουμε τα αντίστοιχα γραφήματα.

Ορίζοντας και πληκτρολογώντας στο Mathematica τις εντολές που βρίσκονται στο παράρτημα 5.1, αλλάζοντας μόνο τις τιμές των παραμέτρων $l=1.5$ και $a=5$ συμπληρώνουμε την δεύτερη, τρίτη και τέταρτη στήλη του πίνακα 5.2(δηλαδή τα

όρια του στο άθροισμα της σχέσης 5.4), όπου παρατηρούμε ότι για $t=0.1$ έχουμε $n(0.1)=1$ και $k(0.1)=-1$ αλλά το άνω όριο του αθροίσματος ισούται με $n(0.1)+k(0.1)=0$, δηλαδή υπάρχει μόνο ένας όρος στο άθροισμα για την ανανεωτική συνάρτηση.

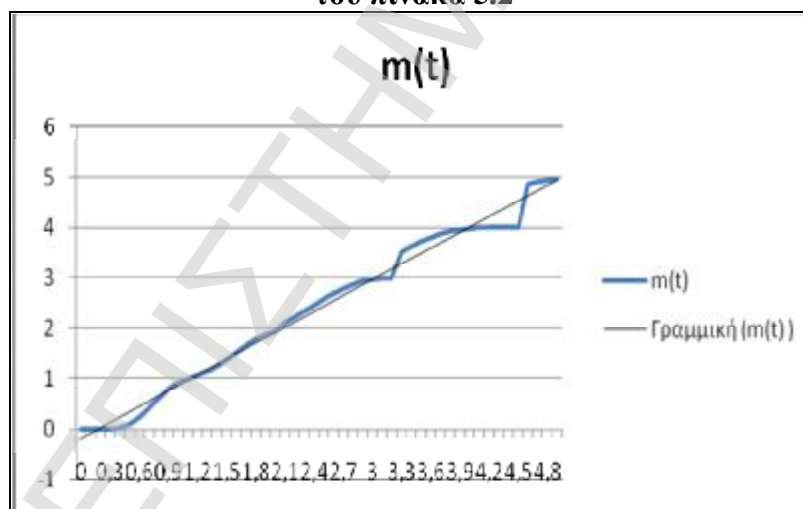
Πίνακας 5.2

t	n_1	k	$n_1 + k$	$m(t)$	$m'(t)$
0	1	-1	0	0	0
0,1	1	0	1	5,90234E-05	0,00059
0,2	1	0	1	0,000427278	0,003683
0,3	1	0	1	0,0024091	0,019818
0,4	1	0	1	0,0106344	0,082253
0,5	1	0	1	0,0369264	0,26292
0,6	1	0	1	0,10171	0,647836
0,7	1	0	1	0,224761	1,23051
0,8	1	0	1	0,404949	1,80188
0,9	1	0	1	0,60838	2,03431
1	1	1	2	0,791193	1,82813
1,1	1	1	2	0,919552	1,28359
1,2	1	1	2	1,00181	0,82258
1,3	1	1	2	1,06608	0,6427
1,4	1	1	2	1,14027	0,7419
1,5	1	1	2	1,24008	0,9981
1,6	1	1	2	1,366853	1,26773
1,7	1	1	2	1,50974	1,42887
1,8	1	1	2	1,65138	1,4164
1,9	1	1	2	1,774477	1,23097
2	1	1	2	1,86828	0,93803
2,1	1	1	2	1,93095	0,6267
2,2	1	2	3	2,12341	1,9246
2,3	1	2	3	2,22402	1,0061
2,4	1	2	3	2,33797	1,1395
2,5	1	2	3	2,45103	1,1306
2,6	1	2	3	2,56621	1,1518
2,7	1	2	3	2,68302	1,1681
2,8	1	2	3	2,78057	0,9755
2,9	1	2	3	2,85812	0,7755
3	1	2	3	2,9146	0,5648
3,1	1	2	3	2,95228	0,3768
3,2	1	2	3	2,9753	0,2302
3,3	2	1	3	2,98818	0,1288
3,4	2	2	4	3,50855	5,2037
3,5	2	2	4	3,61287	1,0432
3,6	2	2	4	3,70811	0,9524
3,7	2	2	4	3,79019	0,8208
3,8	2	2	4	3,85667	0,6648
3,9	2	2	4	3,907196	0,50526
4	2	2	4	3,94311	0,35914

4,1	2	2	4	3,96707	0,2396
4,2	2	2	4	3,98201	0,1494
4,3	2	2	4	3,99074	0,0873
4,4	2	2	4	3,99551	0,0477
4,5	2	2	4	3,99795	0,0244
4,6	2	2	4	3,99912	0,0117
4,7	2	3	5	4,85876	8,5964
4,8	2	3	5	4,90425	0,4549
4,9	2	3	5	4,93788	0,3363
5	2	3	5	4,96147	0,2359

Συνεχίζοντας την διαδικασία, η εντολή επανάληψης για την ανανεωτική συνάρτηση που βρίσκεται στο παράρτημα 5.2 (και για τις πιο πάνω τιμές των παραμέτρων) μας δίνει την τιμή της ανανεωτικής συνάρτησης για κάθε μια από τις τιμές του χρόνου t που υπάρχουν στη στήλη 1 (στήλη 5 του πίνακα 5.2), οπότε εισάγοντας τις τιμές σε μια στήλη του excel εισάγουμε ένα γράφημα (σχήμα 5.3) που στον κάθετο άξονα είναι οι τιμές της ανανεωτικής συνάρτησης και στον οριζόντιο οι 50 παρατηρήσεις του χρόνου t (οι οποίες ξεκινούν από το 0 και αυξάνουν κάθε φορά κατά 0.1) παίρνουμε το γράφημα της ανανεωτικής συνάρτησης.

Σχήμα 5.3 Η γραφική παράσταση της ανανεωτικής συνάρτησης από τις τιμές του πίνακα 5.2



Μια παρατήρηση που μπορεί να γίνει είναι ότι οι 6 πρώτες τιμές (δηλαδή για το διάστημα από 0 έως 0.6) είναι κοντά στο μηδέν, ενώ για τις υπόλοιπες παρατηρήσεις φαίνεται να προσεγγίζουν την ευθεία $y = x$ με κάποιες μεγάλες διακυμάνσεις στις παρατηρήσεις 33 και 34 (δηλαδή για χρόνο t μεταξύ 3.3 και 3.4) και t μεταξύ 4.6 και 4.7.

5.6 Η συνάρτηση της ανανεωτικής πυκνότητας για Wei(1.5 , 5).

Επειδή όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε δεδομένα (και όχι μια μαθηματική σχέση) για την ανανεωτική συνάρτηση αφού δεν ορίζεται παντού η παράγωγος, δηλαδή η ανανεωτική πυκνότητα, θα την υπολογίσουμε από την σχέση 5.5.

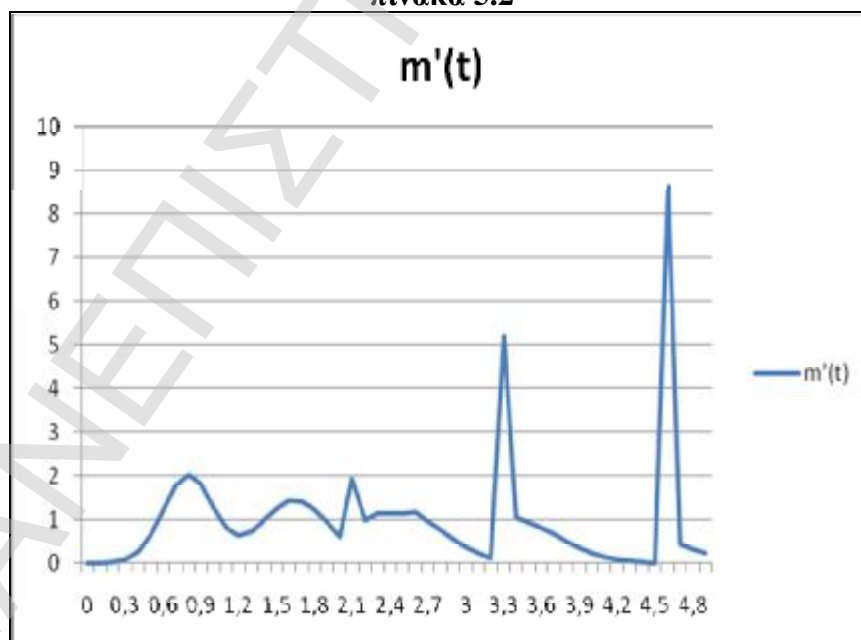
Τα αποτελέσματα που παράγονται (σε ένα υπολογιστικό φύλλο excel) από τη σχέση 5.5 (για κάθε τιμή t της στήλης 1 του πίνακα 5.2) παρουσιάζονται στη στήλη 6 του πίνακα 5.2.

Μια παρατήρηση που μπορεί να γίνει είναι ότι για $t=3.4$ και $t=4.7$ οι αντίστοιχες τιμές της ανανεωτικής πυκνότητας είναι πολύ μεγάλες συγκριτικά με τις υπόλοιπες, γιατί για $t=3.3$ η ανανεωτική συνάρτηση ισούται με 2.98818 ενώ για $t=3.4$ η ανανεωτική συνάρτηση είναι 3.50855, δηλαδή αυξάνει πολύ και ο λόγος είναι ότι για $t=3.4$ προστίθεται ένας επιπλέον όρος στο άθροισμα της σχέσης 5.4 (σε σχέση με πριν $t=3.3$), όπου το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση $t=4.7$.

Παρατηρούμε δηλαδή την μη ύπαρξη μονοτονίας για την ανανεωτική πυκνότητα με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα.

Χρησιμοποιώντας το excel και τις τιμές της ανανεωτικής πυκνότητας (στήλη 6 πίνακα 5.1) φαίνεται να επιβεβαιώνεται το αποτέλεσμα της μη ύπαρξης μονοτονίας για την ανανεωτική πυκνότητα (σχήμα 5.4).

Σχήμα 5.4 Η γραφική παράσταση της ανανεωτικής πυκνότητας από τις τιμές του πίνακα 5.2



5.7 Η ανανεωτική συνάρτηση για μεγάλες τιμές της παραμέτρου a και για μεγάλες τιμές του χρόνου t .

5.7.1 Η ανανεωτική συνάρτηση για μεγάλες τιμές της παραμέτρου a .

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε την ύπαρξη ή μη μονοτονίας για την ανανεωτική πυκνότητα για την κατανομή Weibull και για τις περιπτώσεις που η παράμετρος $a < 1$ και $a = 1$ (ειδική περίπτωση της εκθετικής), ενώ στις προηγούμενες ενότητες (του κεφαλαίου 5) ασχοληθήκαμε για την περίπτωση που $a > 1$, χωρίς να δούμε τι συμβαίνει στην ακραία περίπτωση που η παράμετρος a έχει αρκετά μεγάλη τιμή.

Οι Cui και Xie (2003) αναφέρουν στο άρθρο τους αν η παράμετρος $a \rightarrow 0$ (η οποία είναι ισοδύναμη με την περίπτωση που η διασπορά $S \rightarrow \infty$) μπορεί χρησιμοποιώντας (προσεγγιστικά) την ανίσωση $\Phi\left(\frac{t - nm}{\sqrt{ns}}\right) < 1$ να καταλήξουμε στην προσέγγιση $\Phi\left(\frac{t - nm}{\sqrt{ns}}\right) \approx 1$. Οι παραπάνω υπολογισμοί έγιναν με την παραδοχή ότι η τυποποιημένη κανονική κατανομή για τιμές μεγαλύτερες του 6 και μικρότερες του -6 είναι αρκετά μικρές (δηλαδή $\Phi(6) \approx 0$ και $\Phi(-6) \approx 0$).

Αντικαθιστώντας το παραπάνω αποτέλεσμα στην σχέση 5.4 για την ανανεωτική συνάρτηση παίρνουμε:

$$m(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{t - nm}{\sqrt{ns}}\right) \approx \sum_{n=1}^{\lfloor t/m \rfloor} 1 = \lfloor t/m \rfloor \quad (5.5)$$

όπου η αγκύλη $\lfloor \cdot \rfloor$ χρησιμοποιείται για να δηλώσει το ακέραιο μέρος και m η μέση τιμή της Weibull $m = \Gamma(1 + 1/a)$.

5.7.2 Η ανανεωτική πυκνότητα για μεγάλες τιμές t .

Τέλος θα εξετάσουμε τον ρυθμό των ανανεώσεων για μεγάλες τιμές του χρόνου t .

Το μόνο που αλλάζει από την προηγούμενη περίπτωση είναι ότι το άνω όριο στο παραπάνω άθροισμα γίνεται t/m , δηλαδή

$$m(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{t - nm}{\sqrt{ns}}\right) \approx \sum_{n=1}^{t/m} 1 = t/m \quad (5.6)$$

Οπότε η ανανεωτική πυκνότητα ισούται με

$$m'(t) = \frac{d}{dt} m(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{t}{m} \right) = \frac{1}{m} \quad (5.7)$$

αποτέλεσμα το οποίο έρχεται σε συμφωνία με το γενικό Θεώρημα 1.8 (το οποίο ισχύει για οποιαδήποτε κατανομή με πεπερασμένη μέση τιμή).

Ανακεφαλαιώνοντας τα συμπεράσματα κεφαλαίων 4 και 5 για την ύπαρξη μονοτονίας για την ανανεωτική πυκνότητα για αρκετές περιπτώσεις της Weibull κατανομής παρατηρήσαμε ότι:

Για $\alpha < 1$ που η κατανομή είναι DFR (μέσω θεωρημάτων) η ανανεωτική πυκνότητα είναι μια μονότονη συνάρτηση κάτι που δεν ισχύει πάντα για τη μίξη Weibull κατανομών.

Για $\alpha = 1$ (όπου η κατανομή Weibull συμπίπτει με την εκθετική) η ανανεωτική πυκνότητα είναι μια σταθερή συνάρτηση του χρόνου t (και πιο συγκεκριμένα $m'(t) = \lambda$).

Για $\alpha > 1$ δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων (μέσω γενικών συμπερασμάτων ή θεωρημάτων) αν υπάρχει μονοτονία για την αντίστοιχη ανανεωτική πυκνότητα.

Για $t \rightarrow \infty$ παρατηρήσαμε ότι η ανανεωτική πυκνότητα τείνει σε μια σταθερή τιμή ίση με $1/\mu$, κάτι αναμενόμενο με βάση το Θεώρημα 1.8.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 6

Έλεγχος μονοτονίας της συνάρτησης $u(t)$.

6.1 Εισαγωγή

Στα προηγούμενα κεφάλαια μελετήσαμε την συμπεριφορά ως προς την μονοτονία της ανανεωτικής πυκνότητας για τις περιπτώσεις που η συνάρτηση κατανομής F είναι IFR ή DFR.

Για την περίπτωση που η κατανομή F είναι DFR γνωρίζουμε από το θεώρημα του Brown (Θεώρημα 3.3) ότι η ανανεωτική πυκνότητα είναι φθίνουσα και επιπλέον λαμβάνοντας υπόψη ότι καθώς αυξάνει ο χρόνος το όριο της ανανεωτικής πυκνότητας (Θεώρημα 1.8) τείνει στο $1/\mu$ (όπου μ η μέση τιμή της κατανομής F), συμπεραίνουμε ότι η ανανεωτική πυκνότητα είναι πάντα μεγαλύτερη της τιμής $1/\mu$ για κάθε t , δηλαδή:

$$m'(t) \geq \frac{1}{m}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα δεν ισχύει για την περίπτωση που η F είναι IFR γιατί ενώ ισχύει το θεώρημα 1.8 δεν ισχύει το θεώρημα 3.3.

Πιο συγκεκριμένα στο κεφάλαιο 2 ασχοληθήκαμε με την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιαμέσων χρόνων είναι Γάμμα κατανομή. Ειδικότερα μελετήσαμε την περίπτωση που η παράμετρος $\alpha > 1$ δηλαδή για IFR κατανομές και παρατηρήσαμε ότι για την περίπτωση που η F είναι Γάμμα με παραμέτρους λ και 2 η ανανεωτική πυκνότητα είναι μονότονη (αύξουσα), ενώ για τα παραδείγματα $\Gamma(\lambda, 3)$ και $\Gamma(\lambda, 4)$ η ανανεωτική πυκνότητα δεν είναι πάντα μονότονη (αποτέλεσμα το οποίο αναφέρθηκε και στην ενότητα 3.5).

Από τα γραφήματα της ανανεωτικής πυκνότητας για τις δύο παραπάνω περιπτώσεις (σχήμα 2.2 έως 2.6) παρατηρούμε ότι η μονοτονία "χαλαί" για ένα μικρό διάστημα στην αρχή, οπότε γενάται το ερώτημα αν για αυτό το αποτέλεσμα είναι υπεύθυνη η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής.

Δηλαδή θα ελέγξουμε αν αφαιρώντας από την ανανεωτική πυκνότητα την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας η συνάρτηση που απομένει είναι αύξουσα (μονότονη).

Πιο συγκεκριμένα ορίζουμε την συνάρτηση $u(t) = m'(t) - f(t)$ και ελέγχουμε αν η $u(t)$ είναι μια μονότονη συνάρτηση, όπου $f(t)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής F .

Από τον ορισμό της συνέλιξης έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}u(t) &= m'(t) - f(t) \\&= \sum_{k=1}^{\infty} f^{*k}(t) - f(t) \\&= \sum_{k=1}^{\infty} f^{*k}(t) - f^{*1}(t) \Leftrightarrow \\u(t) &= \sum_{k=2}^{\infty} f^{*k}(t)\end{aligned}\tag{6.1}$$

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τη μονοτονία της $u(t)$ για διάφορες περιπτώσεις της Γάμμα κατανομής.

6.2 Έλεγχος μονοτονίας της $u(t)$ για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιαμέσων χρόνων είναι $\Gamma(\lambda,3)$.

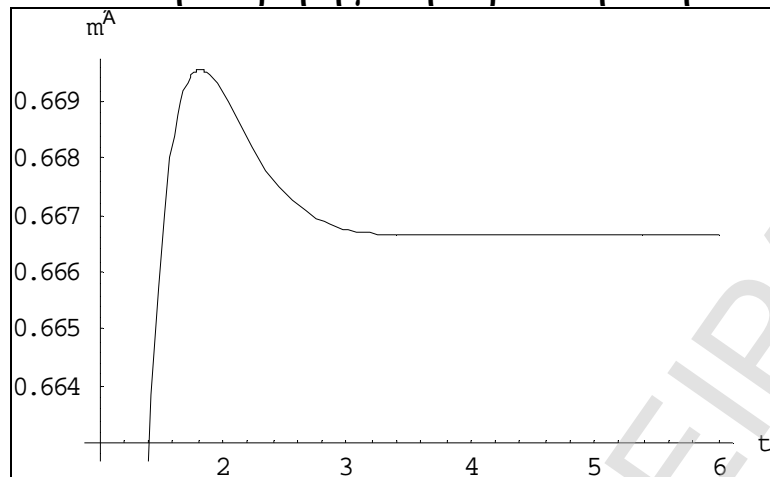
Στην ενότητα 2.3 μελετήσαμε την ανανεωτική πυκνότητα για την περίπτωση που η κατανομή F είναι $\Gamma(\lambda,3)$ και παρατηρήσαμε από τα γραφήματα 2.2 έως 2.4 ότι στην αρχή είναι αύξουσα μετά γίνεται φθίνουσα και στη συνέχεια γίνεται πάλι αύξουσα (τα παραπάνω γραφήματα έγιναν για $\lambda=2$).

6.2.1 Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας για την περίπτωση που η F είναι $\Gamma(\lambda,3)$

Κάνοντας ξανά το γράφημα (αυτή τη φορά ένα γράφημα για την $m'(t)$) για να το συγκρίνουμε στη συνέχεια με το αντίστοιχο γράφημα της $u(t)$, φαίνεται η μη ύπαρξη μονοτονίας για την ανανεωτική πυκνότητα στην αρχή για ένα μικρό διάστημα του χρόνου t .

(οι εντολές για το σχήμα 6.1 βρίσκονται στο παράρτημα 6.1).

Σχήμα 6.1 Η ανανεωτική συνάρτηση για την περίπτωση που η F είναι Γ(2,3)



6.2.2 Έλεγχος μονοτονίας της συνάρτησης $u(t)$ για την περίπτωση που η F είναι Γ(λ,3).

Όπως αναφέραμε εισαγωγικά η συνάρτηση $u(t)$ ορίζεται ως ένα άπειρο άθροισμα πυκνοτήτων, δηλαδή είναι η συνέλιξη των αντίστοιχων συναρτήσεων πυκνοτήτων των παραπάνω τυχαίων μεταβλητών εξαιρώντας την πρώτη συνέλιξη, δηλαδή τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Οπότε εφαρμόζοντας την σχέση (6.1) όπου αντικαθιστώντας στον τύπο την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Γάμμα κατανομής έχουμε :

$$u(t) = \sum_{k=2}^{\infty} f^{*k}(t) \Leftrightarrow$$

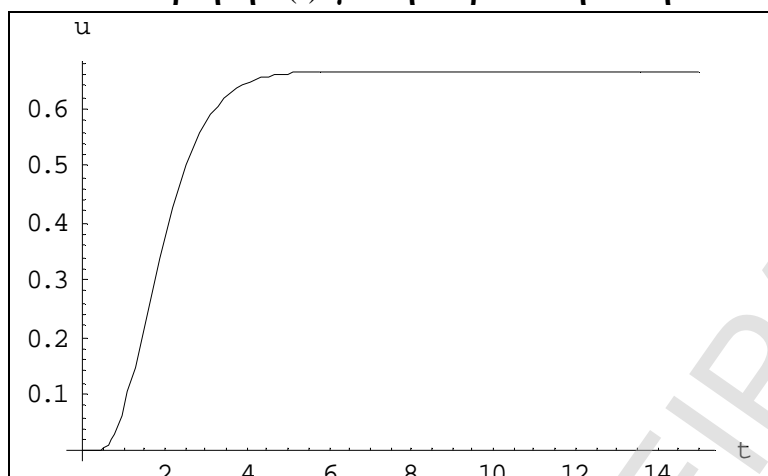
$$u(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{(1t)^{3k-1} 1e^{-1t}}{(3k-1)!} \right)$$

Προγραμματίζοντας στο Mathematica (παράρτημα 6.2) το παραπάνω άθροισμα παίρνουμε ότι :

$$u(t) = -\frac{1}{6} e^{-31t/2} 1 \left(e^{\frac{1t}{2}} (-2e^{1t} + 31^2 t^2) + 2 \text{Cos} \left[\frac{\sqrt{3}1t}{2} \right] + 2\sqrt{3} \text{Sin} \left[\frac{\sqrt{3}1t}{2} \right] \right)$$

Επειδή η μαθηματική μορφή της συνάρτησης $u(t)$ είναι αρκετά πολύπλοκη για να βγάλουμε συμπεράσματα για την ύπαρξη η μη μονοτονίας της συνάρτησης $u(t)$, θα κάνουμε το γράφημα (σχήμα 6.2) της $u(t)$ συναρτήσει του χρόνου t.

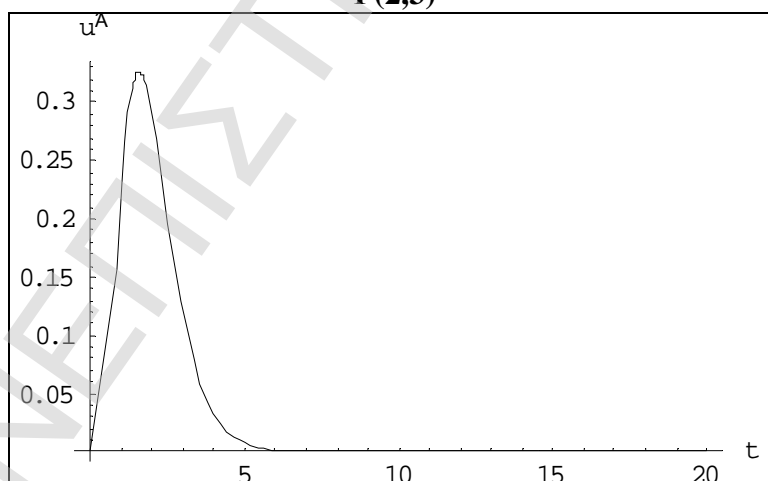
Σχήμα 6.2 Η συνάρτηση $u(t)$ για την περίπτωση που η F είναι $\Gamma(2,3)$



Από το παραπάνω σχήμα φαίνεται ότι η συνάρτηση $u(t)$ να είναι μια αύξουσα συνάρτηση (μονότονη), δηλαδή σε σύγκριση με την ανανεωτική πυκνότητα (σχήμα 6.1) φαίνεται ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας να ήταν υπεύθυνη για την μη ύπαρξη μονοτονίας στην ανανεωτική συνάρτηση.

Συνεχίζοντας θα ελέγξουμε με το γράφημα της παραγώγου της συνάρτησης $u(t)$ (με εντολές στο παράρτημα 6.3) αν διατηρεί παντού το πρόσημό της, γεγονός που θα απαντήσει στο ερώτημα για την ύπαρξη ή μη μονοτονίας της συνάρτησης $u(t)$.

Σχήμα 6.3 Η παράγωγος της συνάρτησης $u(t)$ για την περίπτωση που η F είναι $\Gamma(2,3)$



Από το σχήμα 6.3 φαίνεται η παράγωγος της συνάρτησης $u(t)$ να διατηρεί το πρόσημό της (θετική), το οποίο σημαίνει ότι η συνάρτηση $u(t)$ είναι αύξουσα, δηλαδή επιβεβαιώνεται ο αρχικός ισχυρισμός ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ευθύνεται για την μη ύπαρξη μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας (στο παράρτημα 6.3 βρίσκονται οι εντολές για το παραπάνω γράφημα).

6.3 Έλεγχος μονοτονίας της $u(t)$ για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιαμέσων χρόνων είναι $\Gamma(\lambda,4)$.

Το παραπάνω συμπέρασμα (της ενότητας 6.2) ισχύει για την περίπτωση που η κατανομή F είναι Γάμμα με παραμέτρους 2 και 3 ($\Gamma(2,3)$), επειδή στην ενότητα 2.4 μελετήσαμε ένα επιπλέον παράδειγμα για την ανανεωτική πυκνότητα για την περίπτωση που η κατανομή F είναι $\Gamma(\lambda,4)$ από όπου παρατηρήσαμε από τα γραφήματα 2.5 και 2.6 ότι η ανανεωτική πυκνότητα στην αρχή είναι αύξουσα και στη συνέχεια γίνεται φθίνουσα (τα παραπάνω γραφήματα έγιναν για $\lambda=2$).

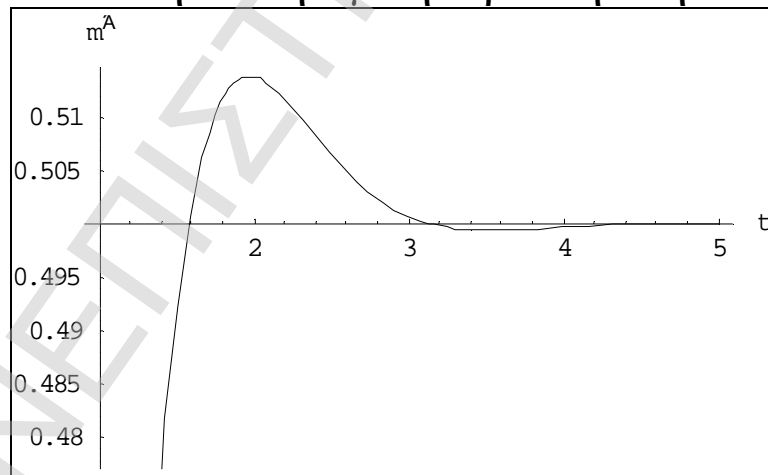
6.3.1 Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας για την περίπτωση που η F είναι $\Gamma(\lambda,4)$

Θα συνεχίσουμε την ίδια διαδικασία με αυτή της προηγούμενης ενότητας βρίσκοντας αρχικά το γράφημα της ανανεωτικής συνάρτησης (αυτή τη φορά ένα γράφημα για την $m'(t)$) και στη συνέχεια το γράφημα της $u(t)$ και στη συνέχεια θα τα συγκρίνουμε μεταξύ τους.

Από το Σχήμα 6.4 φαίνεται όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα η μη ύπαρξη μονοτονίας για την ανανεωτική πυκνότητα στην αρχή για ένα διάστημα του χρόνου t κοντά στο 2.

(οι εντολές για το σχήμα 6.4 βρίσκονται στο παράρτημα 6.4)

Σχήμα 6.4 Η ανανεωτική πυκνότητα για την περίπτωση που η F είναι $\Gamma(2,4)$



6.3.2 Έλεγχος μονοτονίας της συνάρτησης $u(t)$ για την περίπτωση που η F είναι $\Gamma(\lambda,4)$.

Χρησιμοποιώντας την σχέση 6.1 αντικαθιστώντας στον τύπο την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Γάμμα κατανομής με παραμέτρους λ και 4 (αθροίζοντας από 2 και όχι από 1 αυτή τη φορά) έχουμε :

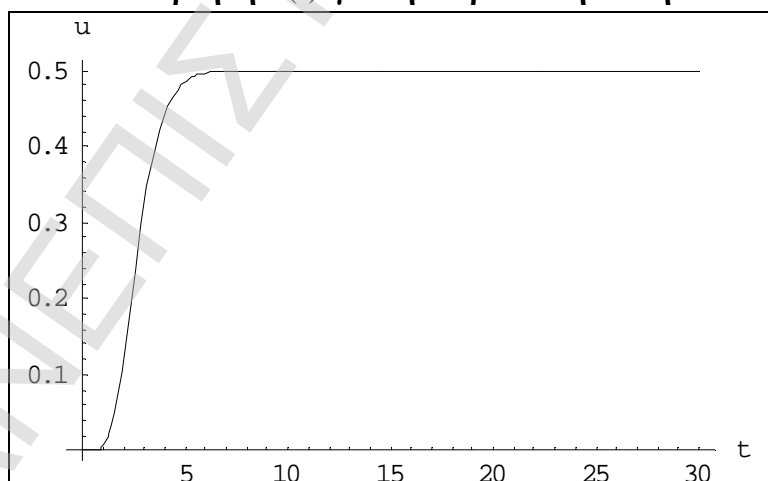
$$u(t) = \sum_{k=2}^{\infty} f^{*k}(t) \Leftrightarrow$$
$$u(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{(It)^{4k-1} I e^{-It}}{(4k-1)!} \right)$$

Προγραμματίζοντας στο Mathematica (παράρτημα 6.5) το παραπάνω άθροισμα παίρνουμε ότι :

$$u(t) = \frac{1}{6} e^{-It} I \left(-I^3 t^3 - 3 \text{Sin}[It] + 3 \text{Sinh}[It] \right)$$

Επειδή όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα η μαθηματική μορφή της συνάρτησης $u(t)$ είναι αρκετά πολύπλοκη για να βγάλουμε συμπεράσματα για την ύπαρξη ή μη μονοτονίας της συνάρτησης $u(t)$, θα κάνουμε το γράφημα (σχήμα 6.5) της $u(t)$ συναρτήσει του χρόνου t (οι εντολές στο Mathematica για το σχήμα 6.5 βρίσκονται στο παράρτημα 6.5)

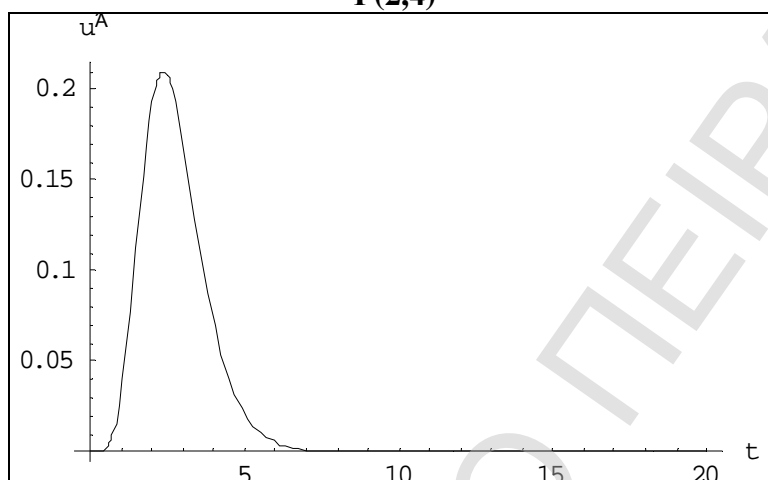
Σχήμα 6.5 Η συνάρτηση $u(t)$ για την περίπτωση που η F είναι $\Gamma(2,4)$



Από το παραπάνω σχήμα φαίνεται ότι η συνάρτηση $u(t)$ να είναι μια αύξουσα συνάρτηση (μονότονη), δηλαδή σε σύγκριση με την ανανεωτική πυκνότητα (σχήμα 6.4) φαίνεται ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας να ήταν υπεύθυνη για την μη ύπαρξη μονοτονίας στην ανανεωτική συνάρτηση.

Συνεχίζοντας τη διαδικασία θα ελέγξουμε για επιβεβαίωση το γράφημα της παραγώγου της συνάρτησης $u(t)$ αν διατηρεί το πρόσημό της, γεγονός που θα ενισχύει ισχυρά την ύπαρξη μονοτονίας για την $u(t)$.

Σχήμα 6.6 Η παράγωγος της συνάρτησης $u(t)$ για την περίπτωση που η F είναι $\Gamma(2,4)$



Το σχήμα 6.6 (παράρτημα 6.6) ενισχύει τον παραπάνω ισχυρισμό αφού φαίνεται ότι η παράγωγος της συνάρτησης $u(t)$ να μην είναι αρνητική αλλά να είναι πάντα θετική, το οποίο σημαίνει ότι η συνάρτηση $u(t)$ να είναι αύξουσα (μόνοτονη), δηλαδή επιβεβαιώνεται ο αρχικός ισχυρισμός ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ευθύνεται για την μη ύπαρξη μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας.

6.4 Έλεγχος μονοτονίας της συνάρτησης $u(t)$ για την περίπτωση που η F είναι $\Gamma(\lambda,2)$.

Αφού εξετάσαμε τις περιπτώσεις (παραδείγματα $\Gamma(2,3)$ και $\Gamma(2,4)$) όπου δεν υπήρχε μονοτονία για την ανανεωτική πυκνότητα αλλά υπήρχε (όπως είδαμε πιο πάνω) για τις αντίστοιχες συναρτήσεις $u(t)$, είναι χρήσιμο να δούμε τι συμβαίνει στη μονοτονία της συνάρτησης $u(t)$ για την περίπτωση $\Gamma(0.9, 2)$ όπου στην ενότητα 2.2 παρατηρήσαμε ότι η ανανεωτική πυκνότητα είναι αύξουσα.

Θα χρησιμοποιήσουμε και εδώ την σχέση 6.1 αντικαθιστώντας στον τύπο την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Γάμμα κατανομής με παραμέτρους λ και 2 έχουμε :

$$u(t) = \sum_{k=2}^{\infty} f^{*k}(t) \Leftrightarrow$$

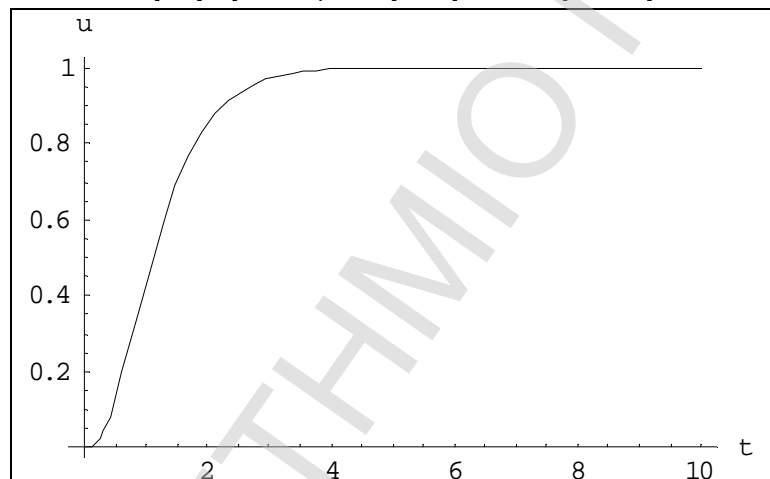
$$u(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{(I t)^{2k-1} I e^{-I t}}{(2k-1)!} \right)$$

Προγραμματίζοντας στο Mathematica (παράρτημα 6.7) το παραπάνω άθροισμα παίρνουμε ότι :

$$u(t) = - \frac{e^{-I t} I^2 t \left(\sqrt{I^2 t^2} - \text{Sinh}[\sqrt{I^2 t^2}] \right)}{\sqrt{I^2 t^2}}$$

Στο παράρτημα 6.7 πληκτρολογούμε στο Mathematica την κατάλληλη εντολή (για $\lambda=0.9$) παίρνουμε το παρακάτω σχήμα για την συνάρτηση $u(t)$

Σχήμα 6.7 Η συνάρτηση $u(t)$ για την περίπτωση που η F είναι $\Gamma(0.9, 2)$



Από το σχήμα 6.7 φαίνεται ότι η αφαιρώντας τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (της κατανομής $\Gamma(0.9,2)$) από την ανανεωτική πυκνότητα η συνάρτηση $u(t)$ παραμένει μονότονη.

6.5 Έλεγχος μονοτονίας της συνάρτησης $u(t)$ για την περίπτωση που η F είναι $\text{Wei}(\lambda, \alpha)$.

Στις προηγούμενες ενότητες ασχοληθήκαμε με την ύπαρξη η μη μονοτονίας της συνάρτησης $u(t)$ για τρία παραδείγματα της κατανομής Γάμμα.

Στις επόμενες ενότητες θα μελετήσουμε την μονοτονία της συνάρτησης $u(t)$ για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ακολουθεί την Weibull κατανομή και πιο συγκεκριμένα θα μελετήσουμε τα δυο παραδείγματα του κεφαλαίου 4.

6.5.1 Έλεγχος μονοτονίας της συνάρτησης $u(t)$ για την περίπτωση που η F είναι Wei(1,2)

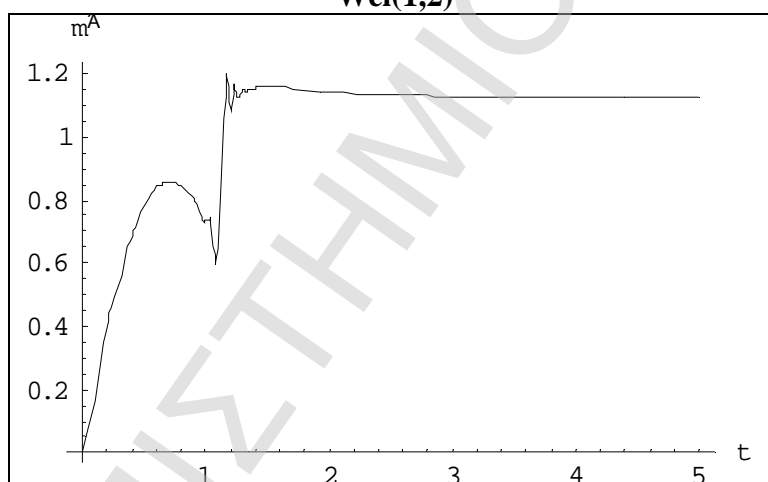
Είδαμε στην ενότητα 4.3.1 για το διάστημα από 0 έως 1.12778 (διάστημα για το οποίο η κατανομή F είναι μεγαλύτερη από την συνάρτηση H) που η ανανεωτική συνάρτηση ορίζεται από την συνάρτηση F , η συνάρτηση πυκνότητας ορίζεται από την αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, ενώ για το υπόλοιπο διάστημα που η ανανεωτική συνάρτηση ορίζεται από την συνάρτηση $H(t)$ η αντίστοιχη ανανεωτική πυκνότητα υπολογίζεται μέσω της παραγώγου της $H(t)$ δηλαδή της $h(t)$.

Στη παρούσα ενότητα παραγωγίζοντας την σχέση 4.2 για την ανανεωτική συνάρτηση

$$m(t) \approx \max\{F(t), H(t)\}$$

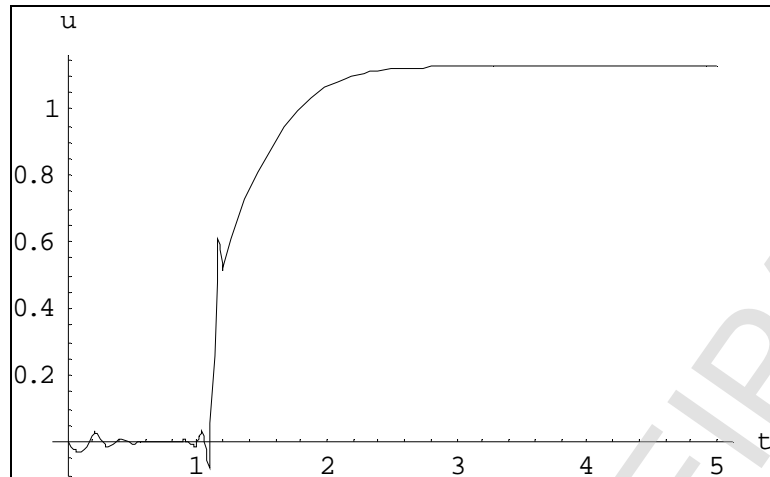
υπολογίζουμε την αντίστοιχη προσέγγιση για την ανανεωτική πυκνότητα (για όλο το διάστημα), οπότε κάνοντας στη συνέχεια το γράφημα της ανανεωτικής πυκνότητας παίρνουμε:

Σχήμα 6.8 Η ανανεωτική πυκνότητα για την περίπτωση που η κατανομή F είναι Wei(1,2)



Από το παραπάνω σχήμα (κάνοντας χρήση του Mathematica στο παράρτημα 6.8) φαίνεται ότι δεν υπάρχει μονοτονία για την ανανεωτική πυκνότητα. Αφαιρώντας από την σχέση για την ανανεωτική πυκνότητα (που προκύπτει παραγωγίζοντας την σχέση 4.2) την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της αντίστοιχης Weibull κατανομής (δηλαδή της $f(t)$) και φτιάχνοντας το αντίστοιχο γράφημα για την συνάρτηση $u(t)$ παίρνουμε το παρακάτω σχήμα (οι παραπάνω υπολογισμοί και εντολές στο Mathematica βρίσκονται στο παράρτημα 6.9)

Σχήμα 6.9 Η συνάρτηση $u(t)$ για την περίπτωση που η κατανομή F είναι $Wei(1,2)$

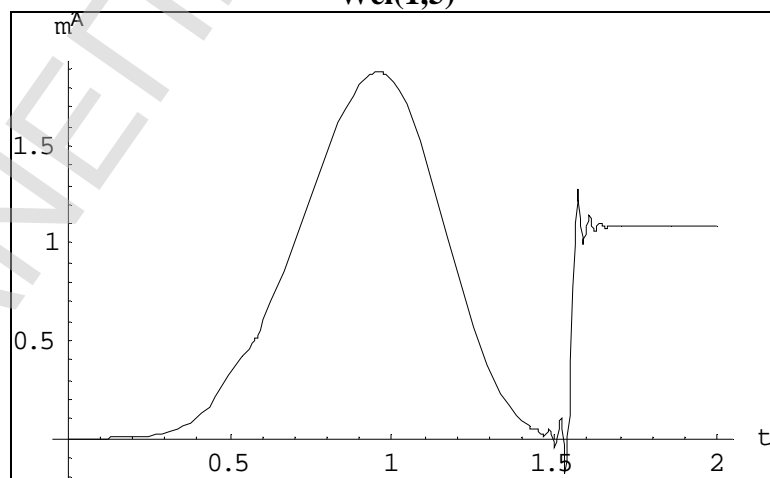


Φαίνεται από το Σχήμα 6. 9 η συνάρτηση $u(t)$ να είναι αύξουσα (μονότονη) εκτός από κάποιες μικρές αυξομειώσεις σε κάποια μικρά διαστήματα που μπορεί να αποδοθούν στο γεγονός ότι η ανανεωτική πυκνότητα υπολογίστηκε πιο πάνω προσεγγιστικά. Στο ίδιο γεγονός οφείλεται και το ότι η συνάρτηση $u(t)$ φαίνεται στο σχήμα να παίρνει και αρνητικές τιμές, για μικρές τιμές του χρόνου t .

6.5.2 Έλεγχος μονοτονίας της συνάρτησης $u(t)$ για την περίπτωση που η F είναι $Wei(1,5)$.

Θα υπολογίσουμε όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα την ανανεωτική πυκνότητα (για όλο το διάστημα για το οποίο μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε) μέσω της προσεγγιστικής σχέσης 4.2 για την ανανεωτική συνάρτηση και στη συνέχεια φτιάχνοντας (πάρτημα 6.8 με μόνη διαφορά ότι τώρα ορίζουμε $a:=5$) το γράφημα για την ανανεωτική πυκνότητα παίρνουμε το παρακάτω σχήμα:

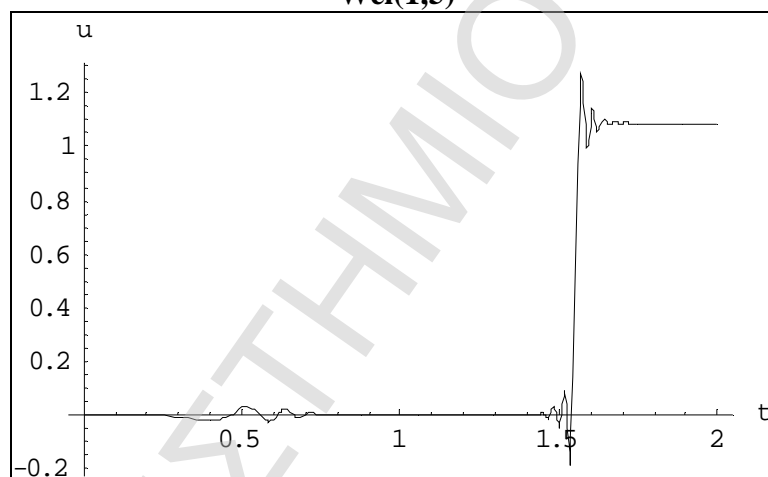
Σχήμα 6.10 Η ανανεωτική πυκνότητα για την περίπτωση που η κατανομή F είναι $Wei(1,5)$



Όπως και στην ενότητα 4.3.2 φαίνεται ότι η ανανεωτική πυκνότητα για το συγκεκριμένο παράδειγμα περιγράφεται αρχικά από την αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και στη συνέχεια ορίζεται από την παράγωγο της συνάρτησης $H(t)$, δηλαδή από την συνάρτηση $h(t)$, οπότε φαίνεται από το παράδειγμα αυτό ότι η υπόθεση ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ευθύνεται για την μη ύπαρξη μονοτονίας για την ανανεωτική πυκνότητα να έχει βάση.

Αφαιρώντας από την ανανεωτική πυκνότητα τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την κατανομή $Wei(1,5)$ παίρνουμε την συνάρτηση $u(t)$, και στο Σχήμα 6.11 (παράρτημα 6.9 για $a:=5$) έχουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $u(t)$ από όπου φαίνεται ότι έχει εξομαλυνθεί σε μεγάλο βαθμό το γεγονός της ύπαρξης μονοτονίας για την ανανεωτική πυκνότητα εκτός από κάποιες μικρές διαφοροποιήσεις που μπορεί να ερμηνευτούν από το γεγονός ότι η ανανεωτική πυκνότητα υπολογίστηκε προσεγγιστικά.

Σχήμα 6.11 Η συνάρτηση $u(t)$ για την περίπτωση που η κατανομή F είναι $Wei(1,5)$



6.6 Έλεγχος μονοτονίας της $u(t)$ για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιαμέσων χρόνων ακολουθεί την μίξη Γάμμα κατανομών.

Στις προηγούμενες ενότητες είδαμε τι συμβαίνει στην μονοτονία της ανανεωτικής πυκνότητας για την περίπτωση που η κατανομή F είναι μια Γάμμα κατανομή (μέσω συγκεκριμένων παραδειγμάτων), θα συνεχίσουμε με εφαρμογές για την περίπτωση της μίξης δυο Γάμμα κατανομών (περίπτωση που δεν ελέγχθηκε πιο πριν).

Αρχικά θα μελετήσουμε τη μίξη δυο κατανομών Γάμμα για τις οποίες δεν παρατηρήθηκε ξεχωριστά για κάθε κατανομή μονοτονία για τις αντίστοιχες ανανεωτικές πυκνότητες και πιο συγκεκριμένα για την μίξη της $\Gamma(\lambda,4)$ με την $\Gamma(n,3)$.

Τέλος στο δεύτερο μέρος της παρούσας ενότητας θα μελετήσουμε την συμπεριφορά της ανανεωτικής πυκνότητας για την περίπτωση που η κατανομή F είναι μίξη της $\Gamma(\lambda, 2)$ με την $\Gamma(n, 4)$ (όπου η αντίστοιχη ανανεωτική πυκνότητα για την $\Gamma(\lambda, 2)$ είναι μονότονη, αποτέλεσμα που δεν ισχύει για την $\Gamma(\lambda, 4)$).

Επειδή είναι δύσκολο να υπολογιστεί η k -οστή συνέλιξη για τη μίξη δυο Γάμμα κατανομών, θα υπολογίσουμε την ανανεωτική πυκνότητα από την σχέση 1.8 για μετασχηματισμό Laplace.

Αρχικά βρίσκουμε τον μετασχηματισμό της πυκνότητας πιθανότητας από την σχέση 1.6 και πιο συγκεκριμένα έχουμε :

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(t) dt$$

όπου

$$f(t) = a \frac{(1t)^{k-1} 1e^{-1t}}{(k-1)!} + (1-a) \frac{(nt)^{m-1} ne^{-nt}}{(m-1)!}$$

η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας στη γενική περίπτωση για την μίξη δυο Γάμμα κατανομών.

Αντικαθιστώντας την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(t)$ στην παραπάνω σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \left(a \frac{(1t)^{k-1} 1e^{-1t}}{(k-1)!} + (1-a) \frac{(nt)^{m-1} ne^{-nt}}{(m-1)!} \right) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} a \frac{(1t)^{k-1} 1e^{-1t}}{(k-1)!} dt + \int_0^{\infty} e^{-st} (1-a) \frac{(nt)^{m-1} ne^{-nt}}{(m-1)!} dt \\ &= a 1^k \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{t^{k-1} e^{-1t}}{(k-1)!} dt + (1-a) n^m \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{t^{m-1} e^{-nt}}{(m-1)!} dt \\ &= a 1^k \int_0^{\infty} \frac{t^{k-1} e^{-t(1+s)}}{(k-1)!} dt + (1-a) n^m \int_0^{\infty} \frac{t^{m-1} e^{-t(n+s)}}{(m-1)!} dt \\ &= a \frac{1^k}{(1+s)^k} + (1-a) \frac{n^m}{(n+s)^m} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\hat{f}(s) = a \left(\frac{l}{l+s} \right)^k + (1-a) \left(\frac{n}{n+s} \right)^m$$

Συνεχίζοντας την διαδικασία αντικαθιστούμε την παραπάνω σχέση στην σχέση 1.8 για την μετασχηματισμένη ανανεωτική πυκνότητα παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} m'(s) &= \frac{\hat{f}(s)}{1-\hat{f}(s)} \Leftrightarrow \\ \mathcal{L} m'(s) &= \frac{a \left(\frac{l}{l+s} \right)^k + (1-a) \left(\frac{n}{n+s} \right)^m}{\left(1 - a \left(\frac{l}{l+s} \right)^k + (1-a) \left(\frac{n}{n+s} \right)^m \right)} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Στις επόμενες ενότητες θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση 6.2 για να βρούμε την μετασχηματισμένη (κατά Laplace) ανανεωτική πυκνότητα για δυο παραδείγματα μίξης δυο κατανομών Γάμμα και στη συνέχεια προγραμματίζοντας στο Mathematica την εντολή Inverse Laplace Transform έχουμε την ανανεωτική πυκνότητα.

6.6.1 Περίπτωση που η κατανομή F των ενδιαμέσων χρόνων ακολουθεί την μίξη $\Gamma(\lambda,4)$ με την $\Gamma(n,3)$.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την περίπτωση αυτή είναι:

$$f(t) = a \frac{(lt)^{4-1} l e^{-lt}}{(4-1)!} + (1-a) \frac{(nt)^{3-1} n e^{-nt}}{(3-1)!}$$

και η μετασχηματισμένη ανανεωτική πυκνότητα για την περίπτωση αυτή με βάση την σχέση 6.2 δίνεται από την σχέση:

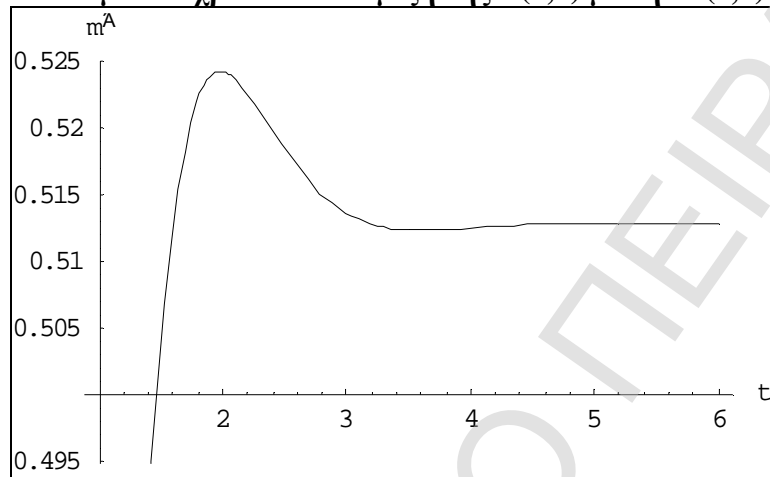
$$\mathcal{L} m'(s) = \frac{a \left(\frac{l}{l+s} \right)^4 + (1-a) \left(\frac{n}{n+s} \right)^3}{\left(1 - a \left(\frac{l}{l+s} \right)^4 + (1-a) \left(\frac{n}{n+s} \right)^3 \right)}$$

Για να βρούμε την ανανεωτική πυκνότητα ορίζουμε στο Mathematica την εντολή:

$$m'(t) = \text{Inverse Laplace Transform} [\mathcal{L} m'(s), s, t]$$

Επειδή η συναρτησιακή μορφή της παραπάνω ανανεωτικής πυκνότητας είναι αρκετά πολύπλοκη για να βγάλουμε συμπεράσματα για την ύπαρξη ή μη μονοτονίας για την ανανεωτική πυκνότητα (από τις ανάλογες εντολές στο Mathematica και $\lambda=n=2$ και $a=0.5$ παράρτημα 6.10 και 6.11), φτιάχνουμε τα παρακάτω δύο γραφήματα (Σχήμα 6.12 και 6.13).

Σχήμα 6.12 Η ανανεωτική πυκνότητα για την περίπτωση που η κατανομή Ετών ενδιάμεσων χρόνων είναι μίξη της $\Gamma(2,4)$ με την $\Gamma(2,3)$



Από το παραπάνω γράφημα φαίνεται ότι η ανανεωτική πυκνότητα δεν είναι μονότονη, αφού υπάρχει ένα σημείο κοντά στο 2 που αυξάνεται και στη συνέχεια μειώνεται.

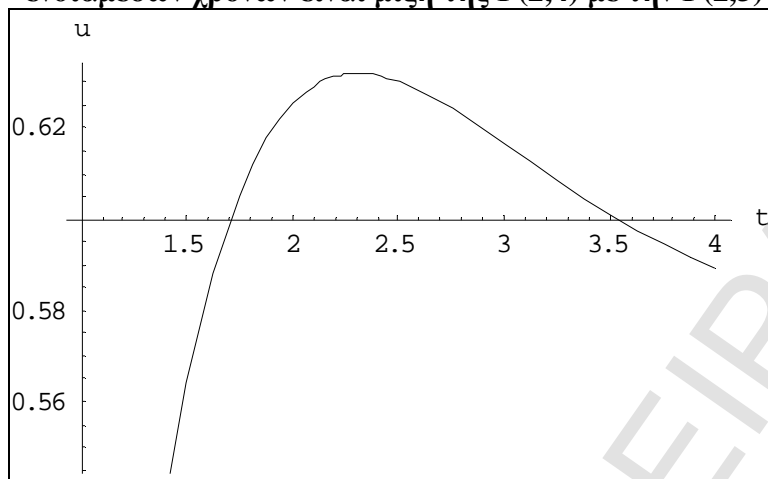
Συνεχίζοντας τη διαδικασία θα βρούμε την αντίστοιχη συνάρτηση $u(t)$ για την παραπάνω περίπτωση, βρίσκοντας αρχικά την συνάρτηση $u(t)$ και φτιάχνοντας στη συνέχεια το αντίστοιχο γράφημα.

$$u(t) = m'(t) - f(t) \Leftrightarrow$$

$$u(t) = m'(t) - \left[a \frac{(1t)^{k-1} 1e^{-1t}}{(k-1)!} + (1-a) \frac{(nt)^{k-1} ne^{-nt}}{(k-1)!} \right]$$

Επειδή όπως και πριν η συναρτησιακή μορφή της συνάρτησης $u(t)$ είναι αρκετά πολύπλοκη θα μελετήσουμε το αντίστοιχο γράφημα της $u(t)$ για να δούμε τι συμβαίνει με την μονοτονία της.

Σχήμα 6.13 Η συνάρτηση $u(t)$ για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων είναι μίξη της $\Gamma(2,4)$ με την $\Gamma(2,3)$



Φαίνεται ότι μετά την αφαίρεση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας από την ανανεωτική πυκνότητα η συνάρτηση που προκύπτει, δηλαδή η $u(t)$ να μην είναι μια μονότονη συνάρτηση, αφού εξακολουθεί αρχικά να είναι αύξουσα και στη συνέχεια να γίνεται φθίνουσα.

6.6.2 Περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ακολουθεί την μίξη $\Gamma(\lambda,2)$ με την $\Gamma(n,4)$.

Ο μετασχηματισμός της ανανεωτική πυκνότητας για την περίπτωση αυτή θα βρεθεί με βάση την σχέση 6.2 χρησιμοποιώντας τις τιμές των παραμέτρων του συγκεκριμένου παραδείγματος.

Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

$$\mathcal{L} m'(s) = \frac{a \left(\frac{l}{l+s} \right)^2 + (1-a) \left(\frac{n}{n+s} \right)^4}{\left(1 - a \left(\frac{l}{l+s} \right)^2 + (1-a) \left(\frac{n}{n+s} \right)^4 \right)}$$

με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την περίπτωση αυτή:

$$f(t) = a \frac{(lt)^{2-1} l e^{-lt}}{(2-1)!} + (1-a) \frac{(nt)^{4-1} n e^{-nt}}{(4-1)!}$$

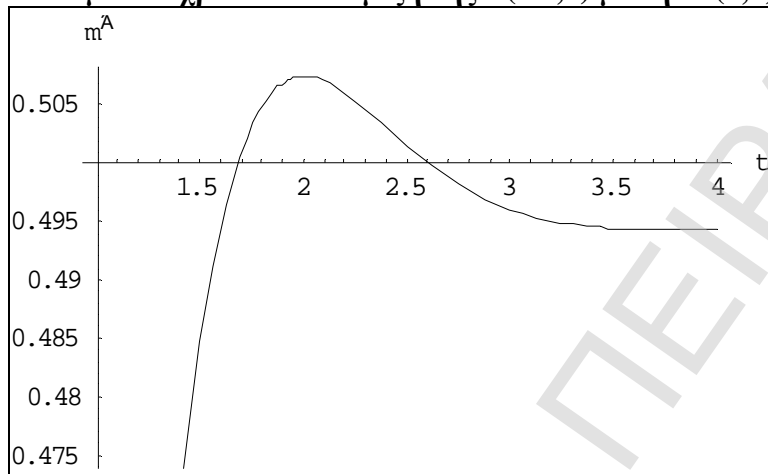
Για να βρούμε την ανανεωτική πυκνότητα ορίζουμε στο Mathematica την εντολή:

$$m'(t) = \text{Inverse Laplace Transform} [\mathcal{L} m'(s), s, t]$$

Επειδή (όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα) η συναρτησιακή μορφή της παραπάνω ανανεωτικής πυκνότητας είναι αρκετά πολύπλοκη για να βγάλουμε συμπεράσματα για την ύπαρξη ή μη μονοτονίας για την ανανεωτική ορίζουμε αρχικά

τις συναρτήσεις $m'(t)$ και $u(t)$ και στη συνέχεια τις παριστάνουμε γραφικά στα Σχήματα 6.14 και 6.15 χρησιμοποιώντας τις εντολές του παραρτήματος 6.12 αντικαθιστώντας τις τιμές $\alpha=0.1$ $\lambda=0.9$ $\kappa=n=2$ και $m=4$.

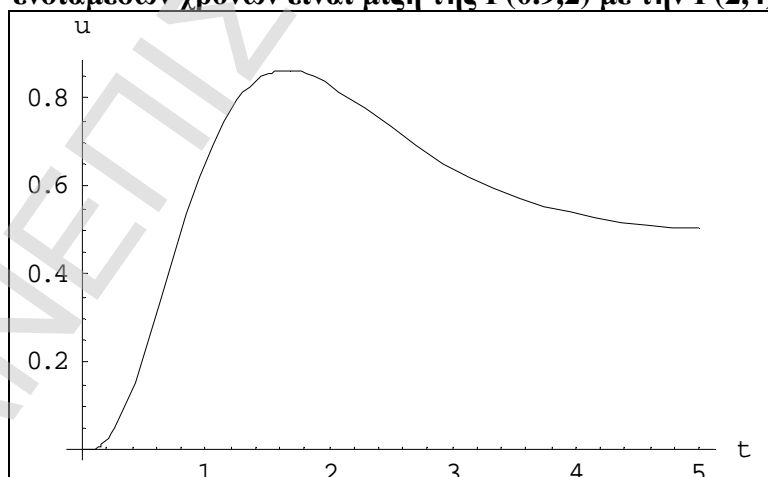
Σχήμα 6.14 Η ανανεωτική πυκνότητα για την περίπτωση που η κατανομή Έτων ενδιάμεσων χρόνων είναι μίξη της $\Gamma(0.9,2)$ με την $\Gamma(2,4)$



Από το παραπάνω γράφημα φαίνεται ότι η ανανεωτική πυκνότητα δεν είναι μονότονη, αφού υπάρχει ένα σημείο κοντά στο 2 που αυξάνεται και στη συνέχεια μειώνεται.

Επειδή όπως και πριν η συναρτησιακή μορφή της συνάρτησης $u(t)$ είναι αρκετά πολύπλοκη θα μελετήσουμε το αντίστοιχο γράφημα της $u(t)$ για να δούμε τι συμβαίνει με την μονοτονία της.

Σχήμα 6.15 Η συνάρτηση $u(t)$ για την περίπτωση που η κατανομή Έτων ενδιάμεσων χρόνων είναι μίξη της $\Gamma(0.9,2)$ με την $\Gamma(2,4)$



Και σε αυτό το παράδειγμα φαίνεται ότι, μετά την αφαίρεση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας από την ανανεωτική πυκνότητα η συνάρτηση που προκύπτει, δηλαδή η $u(t)$ να μην είναι μια μονότονη συνάρτηση (παραρτήμα 6.13 αντικαθιστώντας τις τιμές $\alpha=0.1$ $\lambda=0.9$ $\kappa=n=2$ και $m=4$).

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 7

Έλεγχος μονοτονίας της ανανεωτικής πυκνότητας μέσω της ολοκληρώσιμης συνάρτησης $Q(t)$.

7.1 Εισαγωγή

Στα προηγούμενα κεφάλαια και συγκεκριμένα στο κεφάλαιο 3 χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα του Brown και αναφέραμε τις προϋποθέσεις που χρειάζεται να έχει η ανανεωτική πυκνότητα για να είναι πάντα φθίνουσα.

Στο παρόν κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε ένα θεώρημα το οποίο αποδείχθηκε από τον Weiner (1965) και το οποίο δίνει κάποιες επαρκείς συνθήκες έτσι ώστε η λύση μιας ανανεωτικής εξίσωσης να είναι παντού μονότονη (αύξουσα ή φθίνουσα).

Στη συνέχεια παραθέτουμε το θεώρημα του Weiner (δύο περιπτώσεις, μια για αύξουσα και μια για φθίνουσα λύση της ανανεωτικής εξίσωσης).

Στις επόμενες ενότητες εφαρμόζουμε το θεώρημα αυτό στη σχέση (1.4) η οποία είναι η ανανεωτική εξίσωση που έχει σαν λύση της την ανανεωτική πυκνότητα $m'(t)$.

Πιο συγκεκριμένα το θεώρημα αναφέρει:

Θεώρημα 7.1: Έστω ότι η συνάρτηση $Q(t)$ ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση

$$Q(t) = K(t) + \int_0^t Q(t-u)h(u)du \quad (7.1)$$

όπου $h(u) > 0$ για $u > 0$, $h(u) = 0$ για $u \leq 0$

$$\int_0^{\infty} h(u)du = 1 \text{ και } \int_0^{\infty} uh(u)du < \infty.$$

Έστω ότι $K(u) \geq 0$ για $u > 0$, $K(u) = 0$ για $u \leq 0$

και

$$\int_0^{\infty} K(u)du < \infty .$$

Έστω επίσης ότι υφίσταται πάντα η παράγωγος $k(u) = K'(u)$, τότε η συνάρτηση $Q(t)$ είναι γνησίως αύξουσα (μονότονη)

$$\text{αν ισχύει } K(0) + \frac{k(u)}{h(u)} > 0 \text{ για κάθε } u > 0.$$

Θεώρημα 7.2: Έστω ότι η συνάρτηση $Q(t)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 7.1, τότε η συνάρτηση $Q(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα (μονότονη)

$$\text{αν ισχύει } K(0) + \frac{k(u)}{h(u)} < 0 \text{ για κάθε } u > 0.$$

7.2 Εφαρμογή της συνάρτησης $Q(t)$ για την περίπτωση της ανανεωτικής πυκνότητας.

Στο κεφάλαιο 1 αναφέρθηκε η εξίσωση για την ανανεωτική πυκνότητα (σχέση 1.4) η οποία είναι μια ειδική περίπτωση της εξίσωσης 7.1 και πιο συγκεκριμένα οι συναρτήσεις K και h στην σχέση (7.1) είναι τώρα (στην περίπτωση για την ανανεωτική πυκνότητα) ίδιες και ίσες με την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f .

Συγκεκριμένα, είδαμε στο κεφάλαιο 1 ότι η ανανεωτική πυκνότητα ικανοποιεί τη σχέση

$$m'(t) = f(t) + \int_0^t m'(t-u)f(u)du$$

$$\text{όπου } f(u) > 0 \text{ για } u > 0, \quad f(u) = 0 \text{ για } u \leq 0.$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$\int_0^{\infty} f(u)du = 1 \text{ και } \int_0^{\infty} u \cdot f(u)du = m < \infty$$

Αν θεωρήσουμε ότι η παράγωγος $k(u) = K'(u) = f'(u)$ υπάρχει πάντα, τότε η συνάρτηση $m'(u)$ είναι αύξουσα (μονότονη)

$$\text{αν ισχύει } K(0) + \frac{k(u)}{h(u)} = f(0) + \frac{f'(u)}{f(u)} > 0 \text{ για } u > 0.$$

Οι παραπάνω περιορισμοί ισχύουν, γιατί μελετάμε την ειδική που οι συναρτήσεις h και K ισοούνται με την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f η οποία από τον ορισμό της (για να είναι μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας) ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες.

7.3 Εφαρμογή του Θεωρήματος 7.1 για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων είναι $\text{Exp}(\lambda)$.

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, ισχύουν πάντα οι περιορισμοί για την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, οπότε θα επικεντρωθούμε στη συμπεριφορά, ως προς την ανίσωση $g(x) > 0$.

Όπου θέτουμε

$$g(x) = f(0) + \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (7.2)$$

Για την περίπτωση της $\Gamma(\lambda, 1)$ δηλαδή της εκθετικής $\text{Exp}(\lambda)$ έχουμε ότι:

$$f(x) = 1e^{-\lambda x}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} 1e^{-\lambda x} = 1e^{-\lambda x} \frac{d}{dx} (-\lambda x) = -\lambda^2 e^{-\lambda x}$$

και $f(0) = 1$

οπότε

$$g(x) = f(0) + \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 + \frac{-\lambda^2 e^{-\lambda x}}{1e^{-\lambda x}} = 1 - \lambda = 0.$$

Συμπεραίνουμε ότι δεν ισχύει η ανίσωση $g(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, δηλαδή η αντίστοιχη ανανεωτική πυκνότητα για την περίπτωση αυτή δεν είναι γνησίως αύξουσα (μονότονη συνάρτηση).

7.4 Εφαρμογή των Θεωρημάτων 7.1 και 7.2 για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων είναι $\Gamma(\lambda, \nu)$.

Στο κεφάλαιο 2 παρατηρήσαμε ότι για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων σε μια ανανεωτική διαδικασία ακολουθεί την Γάμμα κατανομή (για $\nu > 1$), η αντίστοιχη ανανεωτική πυκνότητα δεν είναι μια μονότονη συνάρτηση

εκτός της περίπτωσης $v=2$, όπου η αντίστοιχη ανανεωτική πυκνότητα είναι μια αύξουσα συνάρτηση (μονότονη) στο χρόνο.

Στην παρούσα ενότητα θα χρησιμοποιήσουμε τα Θεωρήματα 7.1 και 7.2 για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιαμέσων χρόνων είναι Γάμμα κατανομή και για τις περιπτώσεις που η παράμετρος $v < 1$, $v = 1$ και $v > 1$.

Αρχικά θα υπολογίσουμε την συνάρτηση $g(x)$,

όπου
$$g(x) = f(0) + \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Για την περίπτωση της $\Gamma(\lambda, v)$ έχουμε ότι:

$$f(x) = \frac{l^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-lx}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

$$= \frac{d}{dx} \frac{l^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-lx}$$

$$= \frac{l^n}{(n-1)!} \frac{d}{dx} (x^{n-1} e^{-lx})$$

$$= \frac{l^n}{(n-1)!} [(n-1)x^{n-2} e^{-lx} - lx^{n-1} e^{-lx}]$$

$$= \frac{l^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-lx} \left[\frac{(n-1)}{x} - l \right]$$

$$= f(x) \left[\frac{(n-1)}{x} - l \right]$$

και
$$f(0) = \frac{l^n}{(n-1)!} 0^{n-1} e^{-l \cdot 0} = 0$$

οπότε
$$g(x) = f(0) + \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$= 0 + \frac{f(x) \left[\frac{(n-1)}{x} - 1 \right]}{f(x)} \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{(n-1)}{x} - 1 \quad (7.3)$$

Εξετάζοντας τις τρεις περιπτώσεις της παραμέτρου ν έχουμε:

Για $\nu < 1$: Ο πρώτος όρος της συνάρτησης $g(x)$ γίνεται αρνητικός και με βάση το γεγονός ότι ο δεύτερος όρος είναι πάντα αρνητικός (αφού $\lambda > 0$) από το Θεώρημα 7.2 παρατηρούμε ότι η αντίστοιχη ανανεωτική πυκνότητα είναι πάντα φθίνουσα. Αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με το θεώρημα του Brown και τα όσα έχουμε αναφέρει στο κεφάλαιο 3.

Για $\nu = 1$: Έχουμε την ειδική περίπτωση της εκθετικής όπου η συνάρτηση $g(x)$ ισούται με μηδέν γεγονός που δεν εμπίπτει σε κανένα από τα Θεωρήματα 7.1 και 7.2, (αλλά γνωρίζουμε όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενα παραδείγματα ότι η ανανεωτική πυκνότητα είναι μια σταθερή συνάρτηση στο χρόνο και ίση με την παράμετρο λ).

Για $\nu > 1$: Ο πρώτος όρος είναι πάντα θετικός και στην περίπτωση που το x είναι πολύ μικρό (σχεδόν μηδέν) ο πρώτος όρος τείνει στο άπειρο και επειδή το λ παίρνει πεπερασμένες τιμές η συνάρτηση $g(x)$ θα είναι θετική, οπότε από το Θεώρημα 7.2 προκύπτει ότι η ανανεωτική πυκνότητα θα είναι αύξουσα.

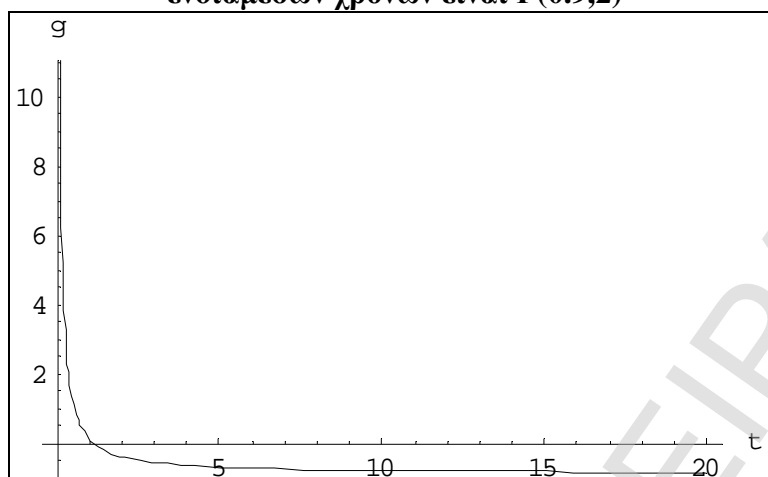
Για την περίπτωση που το x τείνει στο άπειρο ο πρώτος όρος θα τείνει στο μηδέν και η συνάρτηση $g(x)$ θα τείνει στο $-\lambda$, οπότε από το Θεώρημα 7.2 η ανανεωτική πυκνότητα θα είναι μια φθίνουσα συνάρτηση. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι για $\nu > 1$ η ανανεωτική πυκνότητα αρχικά θα είναι αύξουσα και στη συνέχεια θα γίνεται φθίνουσα άρα μη ύπαρξη μονοτονίας για την ανανεωτική πυκνότητα.

Για $\nu = 2$: Στο κεφάλαιο 2 αναφέραμε ότι η αντίστοιχη ανανεωτική πυκνότητα για την περίπτωση $\Gamma(\lambda, \nu) = \Gamma(0.9, 2)$ είναι μια αύξουσα (μονότονη) συνάρτηση. Από την σχέση 7.3 έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{(n-1)}{x} - 1 \\ &= \frac{2-1}{x} - 0.9 \\ &= \frac{1}{x} - 0.9 \end{aligned}$$

Φτιάχνοντας το γράφημα της παραπάνω σχέσης (Σχήμα 7.1) έχουμε:

Σχήμα 7.1 Η συνάρτηση $g(x)$ για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων είναι $\Gamma(0.9,2)$



Φαίνεται για την περίπτωση αυτή με βάση τα Θεωρήματα 7.1 και 7.2 η ανανεωτική πυκνότητα να μην είναι μια μονότονη συνάρτηση, αποτέλεσμα που έρχεται σε αντίθεση με αυτό του κεφαλαίου 2 όπου η ανανεωτική συνάρτηση ήταν μια μονότονη συνάρτηση. Δηλαδή το θεώρημα του Weiner δεν εφαρμόζεται για την περίπτωση αυτή.

7.5 Εφαρμογή των Θεωρημάτων 7.1 και 7.2 για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων είναι μια μίξη δύο Γάμμα κατανομών.

Αφού μελετήσαμε στη προηγούμενη ενότητα την ανανεωτική πυκνότητα για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων είναι μια Γάμμα κατανομή, στη παρούσα ενότητα θα δούμε αν ισχύουν τα ίδια συμπεράσματα για την περίπτωση που η κατανομή F ακολουθεί την μίξη Γάμμα κατανομών για δυο συγκεκριμένα παραδείγματα.

Όπως και πριν (περίπτωση Γάμμα κατανομής) επειδή αναφερόμαστε σε συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας, θα ικανοποιούνται πλήρως οι απαιτήσεις και οι προϋποθέσεις των Θεωρημάτων 7.1 και 7.2 για να καταλήξουμε στα επιθυμητά συμπεράσματα για την συμπεριφορά ως προς την μονοτονία της ανανεωτικής πυκνότητας για την μίξη Γάμμα κατανομών.

7.5.1. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (όπου στη παρούσα ενότητα θα ασχοληθούμε με τη μίξη δύο Γάμμα κατανομών) δίνεται από τον ακόλουθο τύπο :

$$f(x) = \left[a \frac{(lx)^{n-1} l e^{-lx}}{(n-1)!} + (1-a) \frac{(nx)^{m-1} n e^{-nx}}{(m-1)!} \right]$$

Όπου a είναι το ποσοστό συμμετοχής (αντίστοιχο βάρος) της κατανομής $\Gamma(\lambda, \nu)$ στην συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ και $(1-a)$ το ποσοστό συμμετοχής της κατανομής $\Gamma(n,m)$ στην $f(x)$.

Οπότε η παράγωγος της παραπάνω συνάρτησης ισούται με :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} f(x) \\ &= \frac{d}{dx} \left[a \frac{(1x)^{n-1} 1e^{-1x}}{(n-1)!} + (1-a) \frac{(nx)^{m-1} ne^{-nx}}{(m-1)!} \right] \\ &= \frac{d}{dx} \left[a \frac{(1x)^{n-1} 1e^{-1x}}{(n-1)!} \right] + \frac{d}{dx} \left[(1-a) \frac{(nx)^{m-1} ne^{-nx}}{(m-1)!} \right] \\ &= a \frac{1^n}{(n-1)!} \left[(n-1)x^{n-2} e^{-1x} - 1x^{n-1} e^{-1x} \right] + (1-a) \frac{n^m}{(m-1)!} \left[(m-1)x^{m-2} e^{-nx} - nx^{m-1} e^{-nx} \right] \end{aligned}$$

και

$$f(0) = \left[a \frac{(10)^{n-1} 1e^{-10}}{(n-1)!} + (1-a) \frac{(n0)^{m-1} ne^{-n0}}{(m-1)!} \right] = 0$$

7.5.2. Η συνάρτηση $g(x)$.

Χρησιμοποιώντας την σχέση 7.2 η συνάρτηση $g(x)$ ισούται για την περίπτωση αυτή με:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(0) + \frac{f'(x)}{f(x)} \Leftrightarrow \\ g(x) &= \frac{a \frac{1^n}{(n-1)!} \left[(n-1)x^{n-2} e^{-1x} - 1x^{n-1} e^{-1x} \right] + (1-a) \frac{n^m}{(m-1)!} \left[(m-1)x^{m-2} e^{-nx} - nx^{m-1} e^{-nx} \right]}{\left[a \frac{(1x)^{n-1} 1e^{-1x}}{(n-1)!} + (1-a) \frac{(nx)^{m-1} ne^{-nx}}{(m-1)!} \right]} \quad (7.4) \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε δύο παραδείγματα στην σχέση 7.4 και θα προσπαθήσουμε να καταλήξουμε σε συμπεράσματα για την ύπαρξη ή μη μονοτονίας για την ανανεωτική πυκνότητα, χρησιμοποιώντας τα Θεωρήματα 7.1 και 7.2.

7.5.3. Η μίξη της $\Gamma(0.9,2)$ με την $\Gamma(2,2)$.

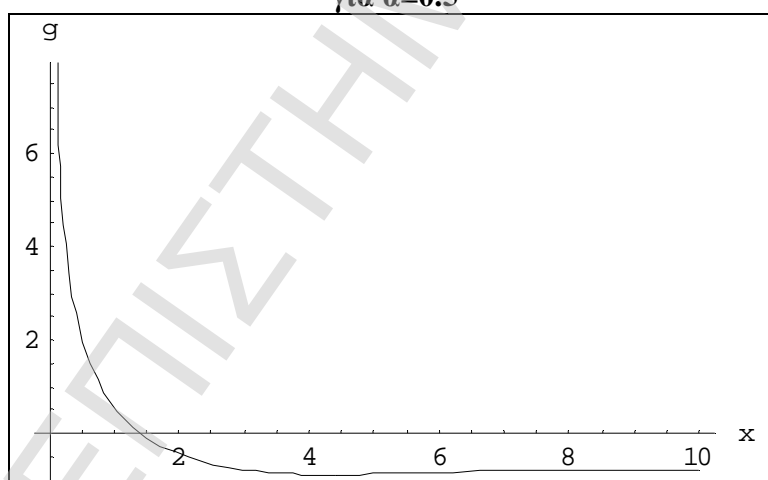
Όπως και στο κεφάλαιο 6 εξετάσαμε την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ακολουθεί την μίξη δυο Γάμμα κατανομών και πιο συγκεκριμένα τη μίξη της $\Gamma(0.9,2)$ με την $\Gamma(2,2)$ έτσι και στην παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε την ίδια περίπτωση με τη χρήση των Θεωρημάτων 7.1 και 7.2.

Ο λόγος που μελετάμε τη παραπάνω περίπτωση είναι γιατί, στο κεφάλαιο 2 (χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέλιξης) για την περίπτωση που η κατανομή F είναι $\Gamma(0.9,2)$, η αντίστοιχη ανανεωτική πυκνότητα είναι μια αύξουσα (μονότονη) συνάρτηση.

Τίθεται έτσι το ερώτημα μήπως κάποιος συνδυασμός, ο οποίος να περιέχει την $\Gamma(0.9,2)$ (αποδίδοντας διαφορετικά βάρη σε κάθε περίπτωση στην $\Gamma(0.9,2)$) προσδίδει στην τελική ανανεωτική πυκνότητα (που προκύπτει από την παραπάνω μίξη) μια μονότονη συμπεριφορά.

Αφού προγραμματίσουμε στο Mathematica την σχέση 7.4 και ορίσουμε τις τιμές των παραμέτρων για την παραπάνω μίξη στη συνέχεια φτιάχνουμε δύο γραφήματα για δύο διαφορετικές τιμές της παραμέτρου α , Σχήμα 7.2 και 7.3 (για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε παράρτημα 7.1).

Σχήμα 7.2 Η συνάρτηση $g(x)$ για την περίπτωση της μίξης $\Gamma(0.9,2)$ με την $\Gamma(2,2)$ για $\alpha=0.5$



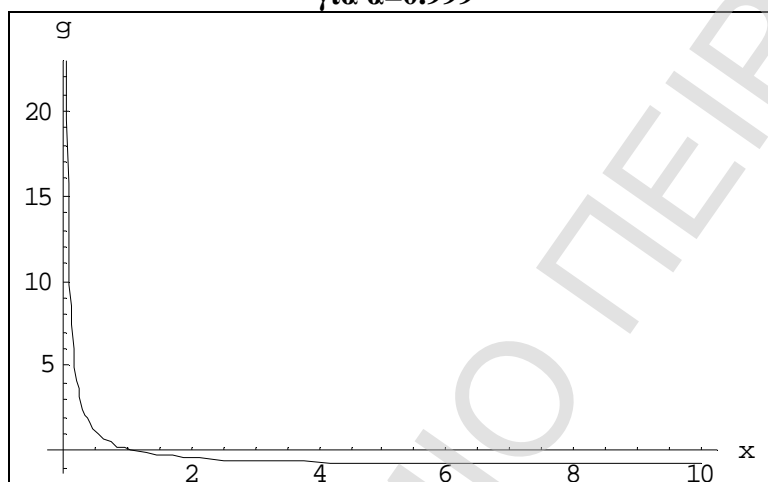
Στο Σχήμα 7.2 παρατηρούμε ότι για $\alpha=0.5$ (ίσα βάρη της $\Gamma(0.9,2)$ και της $\Gamma(2,2)$ στην τελική κατανομή) η συνάρτηση $g(x)$ αλλάζει πρόσημο κοντά στο 2, οπότε από τα Θεωρήματα 7.1 και 7.2 συμπεραίνουμε ότι η ανανεωτική πυκνότητα είναι στην αρχή αύξουσα και στη συνέχεια γίνεται φθίνουσα (δηλαδή μη ύπαρξη μονοτονίας).

Το παραπάνω αποτέλεσμα φαίνεται να ισχύει και για $\alpha=0.999$, δηλαδή για την περίπτωση που η κατανομή $\Gamma(0.9,2)$ έχει μεγάλη βαρύτητα στην τελική κατανομή Σχήμα 7.3 (παράρτημα 7.1 αντικαθιστώντας μόνο την παράμετρο $\alpha:=0.999$), αφού η

συνάρτηση $g(x)$ δεν διατηρεί το πρόσημό της και κατ' επέκταση και η ανανεωτική πυκνότητα δεν διατηρεί την μονοτονία της.

Τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να ισχύουν, επειδή με βάση τα Θεωρήματα 7.1 και 7.4 στην ενότητα 7.4 δεν παρατηρήθηκε μονοτονία για την ανανεωτική πυκνότητα για την περίπτωση που η F είναι $\Gamma(0.9,2)$.

Σχήμα 7.3 Η συνάρτηση $g(x)$ για την περίπτωση της μίξης $\Gamma(0.9,2)$ με την $\Gamma(2,2)$ για $a=0.999$



7.6 Εφαρμογή των Θεωρημάτων 7.1 και 7.2 για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ακολουθεί την μίξη δύο εκθετικών κατανομών.

Τέλος θα μελετήσουμε την ανανεωτική πυκνότητα για την περίπτωση που η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων είναι μια μίξη δύο εκθετικών κατανομών, με τιμές των παραμέτρων ίδιες με αυτές του παραδείγματος της ενότητας 3.9.

Όπως και πριν (για τους ίδιους λόγους), ικανοποιούνται πλήρως οι προϋποθέσεις των Θεωρημάτων 7.1 και 7.2.

7.6.1. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για τη μίξη δύο εκθετικών κατανομών δίνεται από τον ακόλουθο τύπο :

$$f(x) = A_1 a e^{-ax} + A_2 b e^{-bx}$$

όπου ισχύει ο περιορισμός $A_1 + A_2 = 1$.

Οπότε η παράγωγος της παραπάνω συνάρτησης ισούται με :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{d}{dx} f(x) \\
 &= \frac{d}{dx} (A_1 a e^{-ax} + A_2 b e^{-bx}) \\
 &= \frac{d}{dx} (A_1 a e^{-ax}) + \frac{d}{dx} (A_2 b e^{-bx}) \\
 &= -A_1 a^2 e^{-ax} - A_2 b^2 e^{-bx} \Leftrightarrow \\
 f'(x) &= -(A_1 a^2 e^{-ax} + A_2 b^2 e^{-bx})
 \end{aligned}$$

Και

$$f(0) = A_1 a e^{-a \cdot 0} + A_2 b e^{-b \cdot 0} = A_1 a + A_2 b$$

7.6.2. Η συνάρτηση g(x).

Χρησιμοποιώντας την σχέση 7.2 η συνάρτηση g(x) ισούται για την περίπτωση αυτή με:

$$\begin{aligned}
 g(x) &= f(0) + \frac{f'(x)}{f(x)} \Leftrightarrow \\
 g(x) &= A_1 a + A_2 b - \frac{(A_1 a^2 e^{-ax} + A_2 b^2 e^{-bx})}{A_1 a e^{-ax} + A_2 b e^{-bx}} \quad (7.5)
 \end{aligned}$$

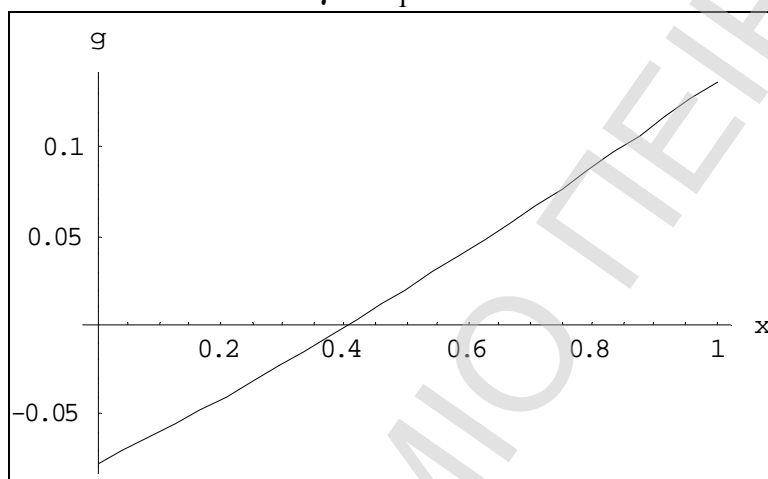
Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε ένα παράδειγμα της σχέσης 7.5 για την περίπτωση όπου $A_1 + A_2 = 0.3 + 0.7 = 1$ και θα δούμε αν υπάρχει ή όχι μονοτονία για την ανανεωτική πυκνότητα, χρησιμοποιώντας τα Θεωρήματα 7.1 και 7.2.

7.6.3. Η μίξη της Exp(2) με την Exp(3).

Στην ενότητα 3.9 μελετήσαμε την ίδια περίπτωση μίξης δύο εκθετικών (με τις ίδιες παραμέτρους) χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Laplace, από όπου παρατηρήσαμε ότι η αντίστοιχη ανανεωτική πυκνότητα είναι μια μονότονη συνάρτηση (και συγκεκριμένα φθίνουσα), έτσι και στην παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε την ίδια περίπτωση με τη χρήση των Θεωρημάτων 7.1 και 7.2.

Αφού προγραμματίσουμε στο Mathematica την σχέση 7.5 και ορίσουμε τις τιμές των παραμέτρων για την παραπάνω μίξη στη συνέχεια φτιάχνουμε το διάγραμμα της $g(x)$ (για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε παράρτημα 7.2) από όπου φαίνεται ότι η συνάρτηση $g(x)$ δεν διατηρεί το πρόσημό της (αφού στην αρχή παίρνει αρνητικές τιμές και στη συνέχεια γίνεται μια θετική συνάρτηση) και άρα με βάση τα θεωρήματα 7.1 και 7.2 συμπεραίνουμε ότι η ανανεωτική πυκνότητα δεν είναι μια μονότονη συνάρτηση .

Σχήμα 7.4 Η συνάρτηση $g(x)$ για την περίπτωση της μίξης Exp(2) με την Exp(3) για $A_1=0.3$



Δηλαδή για το συγκεκριμένο παράδειγμα παρατηρούμε ότι δεν εφαρμόζεται το θεώρημα του Weiner.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Παραρτήματα

Εντολές στο Mathematica

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Κεφάλαιο 2

2.1

Η εντολή για το ολοκλήρωμα της σχέσης 2.2 είναι :

```
Integrate[((x-t)^(ν-1))*t^(νμ-1),{t,0,x}]
```

2.2

Το άθροισμα 2..4 βρίσκεται (και απλοποιείτε) με τις παρακάτω εντολές:

```
Sum[(λ^(2k-1))/(2k-1)!,{k,1,Infinity}]
```

```
Simplify[%]
```

2.3

Οι εντολές για το σχήμα 2.1 είναι:

```
λ:=0.9
```

```
Plot[(λ/2)*(1-Exp[-2λ*t]),{t,0,6},AxesLabel→{t,m'(t)}]
```

2.4

Η εντολή για το ολοκλήρωμα της σχέσης 2.5 είναι :

```
Sum[((λt)^(3k-1))/(3k-1)!, {k,1,Infinity}]
```

```
Simplify[%]
```

2.5

Το ολοκλήρωμα της σχέσης 2.6 βρίσκεται από την εντολή:

```
Integrate[-1/3(e^-3lt/2)*l*(-e3lt/2+Cos[(1/2)*√3 l*t]+√3 *Sin[(1/2)*√3 *l*t]),{t,0,x}]
```

2.6

Η παράγωγος της ανανεωτικής πυκνότητας σχέση 2.7 δίνεται μέσω της εντολής :

```
D[-1/3(e^-3lt/2)l*(-e3lt/2+Cos[(1/2)*√3 lt]+√3 Sin[(1/2)*√3 lt]),t]
```

```
Simplify[%]
```

2.7

Οι εντολές για τα σχήματα 2.2 2.3 και 2.4 (ίδια συνάρτηση για διαφορετικά διαστήματα) δίνεται αντίστοιχα από τις τρεις παρακάτω εντολές Plot...

`l:=2`

`Plot[-1/3(e-3lt/2)l(-e3lt/2+Cos[(1/2)√3 lt]+√3 Sin[(1/2)√3 lt]),{t,0,1.5},AxesLabel→{t,m'(t)}]`

`Plot[-1/3(e-3lt/2)l(-e3lt/2+Cos[(1/2)√3 lt]+√3 Sin[(1/2)√3 lt]),{t,1.5,4},AxesLabel→{t,m'(t)}]`

`Plot[-1/3(e-3lt/2)l(-e3lt/2+Cos[(1/2)√3 lt]+√3 Sin[(1/2)√3 lt]),{t,4,5},AxesLabel→{t,m'(t)}]`

2.8

Το άθροισμα της σχέσης 2.8 υπολογίζεται με την πληκτρολογώντας την εντολή:

`Sum[((λt)^(4k-1))*λ*Exp[-λt]/(4k-1)!, {k,1,Infinity}]`

2.9

Πληκτρολογώντας την παρακάτω εντολή βρίσκουμε το ολοκλήρωμα για την ανανεωτική συνάρτηση της σχέσης 2.9:

`Integrate[(1/2)*(e-l*t)*l*(-Sin[l*t]+Sinh[l*t]),{t,0,x}]`

2.10

Οι εντολές για τα σχήματα 2.5 και 2.6 (ίδια συνάρτηση για διαφορετικά διαστήματα) δίνεται αντίστοιχα από τις δύο παρακάτω εντολές Plot...

`l:=2`

`Plot[(1/2)e-l*tl(-Sin[l*t]+Sinh[l*t]),{t,0,2},AxesLabel→{t,m'(t)}]`

`Plot[(1/2)e-l*tl(-Sin[l*t]+Sinh[l*t]),{t,2,3},AxesLabel→{t,m'(t)}]`

Κεφάλαιο 3

3.1

Οι εντολές για τη βαθμίδα αποτυχίας στο σχήμα 3.1 είναι:

$$f[t_,a1_]:= (a1*b*Exp[-b*t]+(1-a1)*l*Exp[-l*t])/(a1*Exp[-b*t]+(1-a1)*Exp[-l*t])$$

$$b:=1.5$$

$$l:=2$$

$$\text{Plot}[\{f[t,0.5],f[t,0.1],f[t,0.7]\},\{t,0,5\},\text{PlotRange}\rightarrow\{0,2\},\text{AxesLabel}\rightarrow\{t,\lambda t\}]$$

3.2

Οι εντολές για την παράγωγο της παραπάνω βαθμίδας αποτυχίας και το αντίστοιχο σχήμα 3.2 της παραγώγου για συγκεκριμένες τιμές παραμέτρων είναι:

$$f[t,0.4]$$

$$D[1.2e^{-2t}+0.6000000000000001e^{-1.5t}0.6e^{-2t}+0.4e^{-1.5t},t]$$

$$\text{Plot}[-2.4e^{-2t}-0.9000000000000001e^{-1.5t}0.6e^{-2t}+0.4e^{-1.5t}-(-1.2e^{-2t}-0.6000000000000001e^{-1.5t})(1.2e^{-2t}+0.6000000000000001e^{-1.5t})(0.6e^{-2t}+0.4e^{-1.5t})^2,\{t,1,30\},\text{AxesLabel}\rightarrow\{t,\lambda'\}]$$

3.3

Οι εντολές για το γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας (σχήματος 3.3) για μίξη Weibull κατανομών με τιμές των παραμέτρων αυτών της σχέσης 3.5:

$$f[t_,a_]= (a*2*(0.8)*(t^{(0.8-1)})*Exp[-2*t^{(2*(0.8-1))}]+(1-a)*3*(0.7)*(t^{(0.7-1)})*Exp[-3*t^{(3*(0.7-1))}])/(a*Exp[-2*t^{(2*(0.8-1))}]+(1-a)*Exp[-3*t^{(3*(0.7-1))}])$$

$$a:=0.6$$

$$\text{Plot}[2.0999999999999996(1-a)e^{-3t}0.9000000000000001t0.30000000000000004+1.6ae^{-2t}0.3999999999999999t0.19999999999999996(1-a)e^{-3t}0.9000000000000001+ae^{-2t}0.3999999999999999,\{t,0,10\},\text{AxesLabel}\rightarrow\{t,\lambda\}]$$

3.4

Οι εντολές για το γράφημα της παραγώγου της βαθμίδας αποτυχίας της σχέσης 3.5

```
D[2.0999999999999996(1-a)e-3t0.9000000000000001t0.30000000000000004+1.6ae-2t0.3999999999999999t0.19999999999999996(1-a)e-3t0.9000000000000001+ae-2t0.3999999999999999,t]
```

a:=0.6

```
Plot[2.268e-3t0.9000000000000001t2.2+0.7679999999999998e-2t0.3999999999999999t1.5999999999999999-0.252e-3t0.9000000000000001t1.3-0.1919999999999995e-2t0.3999999999999999t1.20.4e-3t0.9000000000000001+0.6e-2t0.3999999999999999-(1.08e-3t0.9000000000000001t1.9000000000000001+0.47999999999999987e-2t0.3999999999999999t1.4)(0.8399999999999999e-3t0.9000000000000001t0.30000000000000004+0.96e-2t0.3999999999999999t0.19999999999999996)(0.4e-3t0.9000000000000001+0.6e-2t0.3999999999999999)2,{t,0,10},AxesLabel->{t,λ'}]
```

3.5

Οι εντολές για το γράφημα (σχήμα 3.5) της βαθμίδας αποτυχίας για την βαθμίδα αποτυχίας της μίξης δυο Weibull IFR κατανομών σχέση 3.6 είναι :

```
f[t_,a_]=(a*2*(2)*(t^(2-1))*Exp[-2*t^(2*(2-1))]+(1-a)*3*(2)*(t^(2-1))*Exp[-3*t^(3*(2-1))])/(a*Exp[-2*t^(2*(2-1))]+(1-a)*Exp[-3*t^(3*(2-1))])
```

a:=0.001

```
Plot[5.1(1-a)e-3t2.0999999999999996t0.7+3.6ae-2t1.6t0.8ae-2t1.6+(1-a)e-3t2.0999999999999996,{t,0,5},AxesLabel->{t,λt}]
```

3.6

Για να βρούμε την γραφική παράσταση για την παράγωγο της βαθμίδας αποτυχίας της σχέσης 3.6 σχήμα 3.6 πληκτρολογούμε τις πιο κάτω εντολές :

```
D[5.1(1-a)e-3t2.0999999999999996t0.7+3.6ae-2t1.6t0.8ae-2t1.6+(1-a)e-3t2.0999999999999996,t]
```

a:=0.001

```
Plot[-(1.53e-3t2.0999999999999996t0.7+2.52e-2t1.6t0.8)(-2.2399999999999998e-2t1.6t0.6000000000000001-1.89e-3t2.0999999999999996t1.09999999999999996)(0.7e-2t1.6+0.30000000000000004e-3t2.0999999999999996)2+1.071e-3t2.0999999999999996t0.30000000000000004+2.016e-2t1.6t0.19999999999999996-8.064e-2t1.6t1.4000000000000001-9.639e-3t2.0999999999999996t1.7999999999999999960.7e-2t1.6+0.30000000000000004e-3t2.0999999999999996,{t,0,10},AxesLabel->{t,λ'}]
```

3.7

Για τον υπολογισμό του σχήματος 3.7 πληκτρολογούμε :

a:=2

c:=0.3

b:=3

d:=0.7

InverseLaplaceTransform[((ac/(a+s)+(bd/(b+s)))/(1-(ac/(a+s)-bd/(b+s))),s,x]

Plot[2.608695652173912+0.09130434782608769e-2.3000000000000007x,{x,0,10},
AxesLabel→{x,m'}]

3.8

Οι εντολές για το σχήμα 3.8 για την παράγωγο της ανανεωτικής πυκνότητας είναι:

D[2.608695652173912+0.09130434782608769e-2.3000000000000007x,x]

Plot[-0.210000000000000177e-2.3000000000000007x,{x,0,10},AxesLabel→{x,m''}]

Κεφάλαιο 4

4.1

F[t_,a_]:=1-Exp[-l*(t^a)]

f[s_,a_]:=l*a*(s^(a-1))*Exp[-l*s^a]

H[t_,a_]:=((1+(t/μ)+((σ^2)-2*μ^2)/2*μ^2)*F[t,a]-(1/μ)*(Integrate[s*f[s,a],{s,0,t}])

l:=1

μ:=Gamma[1+1/a]

σ^2:=Gamma[1+2/a]-μ^2

g[t_,a_]:=Max[F[t,a],H[t,a]]

4.3

Οι εντολές για τα σχήματα 4.1 έως 4.14 για το κάθε ένα ξεχωριστά είναι:

Σχήμα 4.1

a:=2

l:=1

p1:=Plot[F[t,a],{t,0,5}]

Σχήμα 4.2

a:=2

l:=1

p2:= Plot[H[t,a],{t,0,5}]

Σχήμα 4.3

a:=2

l:=1

Show[p1,p2]

Σχήμα 4.4

a:=2

l:=1

p3:=Plot[g[t,a],{t,0,2}]

Σχήμα 4.5

a:=5

l:=1

p2:= Plot[H[t,a],{t,0,0.004}]

Σχήμα 4.6

a:=5

l:=1

p1:=Plot[F[t,a],{t,0,0.004}]

p2:= Plot[H[t,a],{t,0,0.004}]

Show[p1,p2]

Σχήμα 4.7

a:=5

l:=1

p1:=Plot[F[t,a],{t,0,5}]

p2:= Plot[H[t,a],{t,0,5}]

Show[p1,p2]

Σχήμα 4.8

a:=5

l:=1

p3:=Plot[g[t,a],{t,0,5}]

Σχήμα 4.9

a:=2

l:=1

p4:=Plot[f[t,a],{t,0,5}]

Σχήμα 4.10

a:=2

l:=1

h[t_,a_]:=D[H[t,a],t]

p5:=Plot[h[t,a],{t,0,4}]

Σχήμα 4.11

P6:=Plot[h[t,a],{t,1.2246, 4}]

Σχήμα 4.12

a:=5

l:=1

h[t_,a_]:=D[H[t,a],t]

p7:=Plot[h[t,a],{t,0,4}]

Σχήμα 4.13

P8:=Plot[h[t,a],{t,1.56991, 4}]

Σχήμα 4.14

a:=5

l:=1

z[t_,a_]:=D[g[t,a],t]

p9:=Plot[z[t,a],{t,0,2}]

4.4

```
F[t_,a_]:=1-c*Exp[-l*(t^a)]-(1-c)*Exp[-n*(t^b)]  
f[s_,a_,b_]:=D[F[t,a],t]  
 $\mu:=\text{Integrate}[s*(a*c\text{Exp}[-l*s^a]*l*(s^{(a-1)})+b*(1-c)\text{Exp}[-n*s^b]*n*(s^{(-1+b)}),\{s,1,\text{Infinity}\}]$   
 $\sigma:=\text{Integrate}[(s^2)*(a*c\text{Exp}[-l*s^a]*l*(s^{(a-1)})+b*(1-c)\text{Exp}[-n*s^b]*n*(s^{(-1+b)}),\{s,1,\text{Infinity}\}]-\mu^2$   
H[t_,a_]:= (1+(t/μ)+((σ)-2*μ^2)/2*μ^2)*F[t,a]-(1/μ)*(Integrate[s*f[s,a,b],{s,0,t}])  
c:=0.01  
a:=2  
b:=2  
l:=2  
n:=3
```

4.5

οι εντολές στο για τα σχήματα 4.15 έως 4.18

Σχήμα 4.15

```
p1:=Plot[F[t,a],{t,0,0.0000000093677}]  
p2:=Plot[H[t,a],{t,0,0.0000000093677}]  
Show[p1,p2]
```

Σχήμα 4.16

```
P3:=Plot[F[t,a],{t,0,2}]  
P4:=Plot[H[t,a],{t,0,2}]  
Show[p3,p4]
```

Σχήμα 4.17

```
g[t_,a_,b_]:=Max[F[t,a],H[t,a]]
```

```
Plot[g[t,a,b],{t,0,2},AxesLabel->{t,m}]
```

Σχήμα 4.18

```
k[t_,a_,b_]:=D[g[t,a,b],t]
```

```
Plot[k[t,a,b],{t,0,2},AxesLabel->{t,m'}]
```

Κεφάλαιο 5

5.1

Τα όρια του αθροίσματος για την σχέση 5.4 βρίσκονται από τις εντολές επανάληψης Do για τις συναρτήσεις n(t) και g(t)

```
μ:=Gamma[1/a+1]
```

```
s:=Gamma[2/a+1]-μ^2
```

```
σ:=Sqrt[s]
```

```
a:=4
```

```
n[t_]:=Floor[(((Sqrt[36*s+4*μ*t])-6*σ)/2*μ)^2]+1
```

```
k[t_]:=Floor[(((Sqrt[36*s+4*μ*t])+6*σ)/2*μ)^2]-n[t]
```

```
g[t_]:=n[t]+k[t]
```

```
Do[Print[t, "->" ,n[t]],{t,0,5,0.1}]
```

```
Do[Print[t, "->" ,k[t]],{t,0,5,0.1}]
```

```
Do[Print[t, "->" ,g[t]],{t,0,5,0.1}]
```

5.2

```
z:=(t-v*μ)/(σ*Sqrt[v])  
Φ[z]:=(1/(Sqrt[2*π]))*∫-InfinityzExp[-(y^2)/2]dy  
M[t]:=n[t]-1+v=n[t]g[t]Φ[(t-v*μ)/(σ*Sqrt[v])]  
Do[Print[t,n[t]-1+v=n[t]g[t]Φ[z]],{t,0.1,5,0.1}]
```

Κεφάλαιο 6

6.1

```
Sum[(((1*t)^(3*k-1))/(3*k-1)!*(1*Exp[-1*t]),{k,1,Infinity}]  
Simplify[%]  
l:=2  
Plot[%%,{t,1,5},AxesLabel→ {t,m'}]
```

6.2

```
Sum[(((1*t)^(3*k-1))/(3*k-1)!*(1*Exp[-1*t]),{k,2,Infinity}]  
Simplify[%]  
l:=2  
Plot[%%,{t,0,5},AxesLabel→ {t,m'}]
```

6.3

```
D[%%,t]  
Plot[%,{t,0,6},AxesLabel→ {t,m''}]
```

6.4

```
Sum[(((1*t)^(4*k-1))/(4*k-1)!*(1*Exp[-1*t]),{k,1,Infinity}]  
l:=2  
Plot[%%,{t,1,5},AxesLabel→ {t,m'}]
```

6.5

```
Sum[(((1*t)^(4*k-1))/(4*k-1)!)*(1*Exp[-1*t]),{k,2,Infinity}]
```

```
l:=2
```

```
Plot[%%,{t,0,8},AxesLabel->{t,u}]
```

6.6

```
D[%%%,t]
```

```
Plot[%,{t,0,6},AxesLabel->{t,m''}]
```

6.7

```
Sum[(((1*t)^(2*k-1))/(2*k-1)!)*(1*Exp[-1*t]),{k,2,Infinity}]
```

```
Simplify[%]
```

```
l:=0.9
```

```
Plot[%%,{t,0,5},AxesLabel->{t,u}]
```

6.8

```
F[t_,a_]:=1-Exp[-1*(t^a)]
```

```
f[s_,a_]:=1*a*(s^(a-1))*Exp[-1*s^a]
```

```
H[t_,a_]:=((1+(t/μ)+((σ^2)-2*μ^2)/2*μ^2)*F[t,a]-(1/μ)*(Integrate[s*f[s,a],{s,0,t}]))
```

```
l:=1
```

```
μ:=Gamma[1+1/a]
```

```
σ^2:=Gamma[1+2/a]-μ^2
```

```
g[t_,a_]:=Max[F[t,a],H[t,a]]
```

```
q[t_,a_]:=D[g[t,a],t]
```

```
a:=2
```

```
Plot[q[t,a],{t,0,5},AxesLabel->{t,m''}]
```

6.9

```
f[t_,a_]:=1*a*(t^(a-1))*Exp[-1*t^a]
```

```
u[t_,a_]:=q[t,a]-f[t,a]
```

```
Plot[u[t,a],{t,0,5},AxesLabel->{t,u}]
```

6.10

```
Lm'[s_]:=((a*(1/(1+s))^4)+((1-a)*(n/(n+s))^3))/(1-((a*(1/(1+s))^4)+((1-a)*(n/(n+s))^3)))
```

```
m'[t_]:=InverseLaplaceTransform[Lm'[s],s,t]
```

```
l:=2
```

```
n:=2
```

```
a:=0.5
```

```
Plot[m'[t],{t,0,6},AxesLabel->{t,m'}]
```

6.11

```
f[t_]:=a*(((1*t)^(k-1))/(k-1)!)*(1*Exp[-1*t])+(1-a)*(((n*t)^(m-1))/(m-1)!)*(n*Exp[-n*t])
```

```
u[t_]:=m'[t]-f[t]
```

```
Plot[u[t],{t,0,4},AxesLabel->{t,u}]
```

6.12

```
Lm'[s_]:=((a*(1/(1+s))^2)+((1-a)*(n/(n+s))^4))/(1-((a*(1/(1+s))^2)+((1-a)*(n/(n+s))^4)))
```

```
m'[t_]:=InverseLaplaceTransform[Lm'[s],s,t]
```

```
l:=0.9
```

```
n:=2
```

```
a:=0.1
```

```
Plot[m'[t],{t,0,6},AxesLabel->{t,m'}]
```


6.13

```
f[t_]:=a*(((1*t)^(k-1))/(k-1)!*(1*Exp[-1*t]) +(1-a)*(((n*t)^(m-1))/(m-1)!*(n*Exp[-n*t]))
```

```
u[t_]:=m'[t]-f[t]
```

```
Plot[u[t],{t,0,4},AxesLabel->{t,u}]
```

Κεφάλαιο 7

7.1

```
f[x_]:=a*(((x)^(k-1))/(k-1)!*((1^k)*Exp[-1*x]) +(1-a)*(((x)^(m-1))/(m-1)!*(n^m)*Exp[-n*x]))
```

```
h[x_]:=D[f[x],x]
```

```
g[x_]:=f[0]+(h[x])/f[x]
```

```
a:=0.5
```

```
l:=0.9
```

```
k:=2
```

```
n:=2
```

```
m:=2
```

```
Plot[g[x],{x,0,10}, AxesLabel->{x,g}]
```

7.2

```
f[x_]:=A*a*Exp[-a*x]+B*b*Exp[-b*x]
```

```
h[x_]:=D[f[x],x]
```

```
g[x_]:=f[0]+(h[x])/f[x]
```

```
A:=0.3
```

```
B:=0.7
```

```
a:=2
```

```
b:=3
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

- [1] Αρτίκης Θ. (1991) *Μαθήματα στοχαστικών διαδικασιών*, Τεύχος 2, Εκδόσεις Σταμούλη, Πειραιάς.
- [2] Κούτρας Μ. (2007) *Στατιστική θεωρία αξιοπιστίας και έλεγχοι χρόνων ζωής*, Σημειώσεις Πανεπιστημιακών Παραδόσεων, ΠΜΣ Εφαρμοσμένη Στατιστική, Πανεπιστήμιο Πειραιά.
- [3] Πολίτης Κ. (2009) *Θεωρία χρεοκοπίας*, Σημειώσεις Πανεπιστημιακών Παραδόσεων, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιά.

Ξένη

- [1] Barlow, R. E. and Proschan, F. (1981) *Statistical Theory of Life Testing: Probability Models. To Begin With*, Silver Springs, MD.
- [2] Berman, M. (1978) Regenerative multivariate point processes. *Adv. Appl. Prob.* 10, 411–430.
- [3] Brown, M. (1980) Bounds, inequalities, and monotonicity properties for some specialized renewal processes. *Annals of Probability*, 8, 227–240.
- [4] Constantine, A. G., Robinson, N. I. (1997). The Weibull renewal function for moderate to large arguments. *Computational Statistics & Data Analysis* 24:9–27.
- [5] Cox, D.R., (1962) *Renewal Theory*. Methuen, London.
- [6] Cui, L., Xie, M. (2003). Some normal approximations for renewal function of large Weibull shape parameters. *Communications in Statistics—Simulation and Computation*, 32:1–16.
- [7] Derman, C. Gleser, L.J., Olkin, I. (1973) *A Guide to Probability Theory and Application*. Holt, Rinehart and Winston.
- [8] Grimmett, G. and Stirzaker, D. (2002) *Probability and Random Processes*. Oxford University Press, Oxford.

- [9] Huang, C.N., (1972) *The numerical computation of the renewal function*, Master's thesis, University of Texas at Austin, TX.
- [10] Lomnicki, Z. A. (1966) A note on the Weibull renewal process. *Biometrika*, 53, 375–381.
- [11] Smith, W.L. and M.R. Leadbetter (1963) On the renewal function for the Weibull distribution, *Technometrics*, 5, 393–396.
- [12] Soland, R.M. (1968) Renewal functions for gamma and Weibull distributions with increasing hazard rate, *Operations Research*, 17, 536–543.
- [13] Spearman, M.U. (1989) A simple approximation for IFR renewal functions, *Microelectron. Reliab.*, 29, 73–80.
- [14] Weiner, H. J. (1965) An integral equation in age-dependent branching processes. *Ann. Math. Statist.* 36, 1569–1573.
- [15] White, J.S. (1964) Weibull renewal analysis, *Aerospace Reliability and Maintenance Conference*, Washington, DC, 29 June-I July 1964 (Society of Automotive Engineers, New York), 639–657.