



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ & ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ:

ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΣΤΕΛΕΧΗ

***«PORTFOLIO CHOICE WITH BACKGROUND RISK:
TECHNIQUES AND APPLICATIONS»***

Εκπονήθηκε από την Ελένη Μ. Ρούσσου

Επιβλέπων Καθηγητής: κ. Δημήτριος Μαλλιαρόπουλος

Επιτροπή Καθηγητών: κ. Νικήτας Πιπτής

κ. Γεώργιος Κατσιμπρής

Πειραιάς, Φεβρουάριος 2010

**Αφιερωμένη στους γονείς μου για την
αμέριστη συμπαράστασή τους.**

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Δημήτριο Μαλλιάροπουλο ο οποίος παρότι δεν με γνώριζε προσωπικά, δέχθηκε να επιβλέψει την διπλωματική μου εργασία και μου έδωσε έτσι τη δυνατότητα να ασχοληθώ πρακτικά και με ένα θέμα που εμπίπτει τόσο στα επιστημονικά όσο και στα επαγγελματικά μου ενδιαφέροντα. Η καθοδήγησή, η εμπειρία και οι συμβουλές του υπήρξαν πολύτιμες για την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα και τον διδακτορικό φοιτητή Αντώνη Αντύπα για τις χρήσιμες συμβουλές του και την ουσιαστική συνεισφορά του στην ολοκλήρωση αυτής της εργασίας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. ΣΚΟΠΟΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ.....	6
1.2. ΔΟΜΗ ΤΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ.....	6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΤΟΥ MARKOWITZ

2.1. ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΤΟΥ MARKOWITZ.....	8
2.2. ΣΤΑΔΙΟ 1 ^ο : ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΩΝ ΑΞΙΟΓΡΑΦΩΝ.....	11
i. Απόδοση Μετοχής.....	11
ii. Αναμενόμενη Απόδοση.....	12
iii. Διακύμανση Αποδόσεων.....	13
iv. Συντελεστής Μεταβλητότητας.....	14
v. Συνδιακύμανση Αποδόσεων.....	15
vi. Συντελεστής Συσχέτισης.....	16
2.3. ΣΤΑΔΙΟ 2 ^ο : ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ.....	17
2.4. ΣΤΑΔΙΟ 3 ^ο : ΕΠΙΛΟΓΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ.....	22

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΤΟΥ MARKOWITZ

3.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	25
3.2. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΤΑ MARKOWITZ.....	26
3.3. ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΚΑΤΑ MARKOWITZ.....	27
3.3.1. ΕΚΤΙΜΗΤΕΣ SCHRINKAGE.....	27
3.3.2. ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ.....	29
3.3.3. ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΙΣ ΣΤΑΘΜΙΣΕΙΣ ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ.....	30
3.4. ΑΝΑΣΚΟΠΙΣΗ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ ΜΕΛΕΤΩΝ.....	31
3.4.1. Kalman J. Cohen – Jerry A. Pogue (1967).....	31
3.4.2. Buckner A. Wallingford (1967).....	32
3.4.3. Harbans Lal Dhingra (1975).....	33

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΕΠΙΛΟΓΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΜΕ BACKGROUND RISK

4.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	35
4.2. ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΜΕΛΕΤΩΝ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ BACKGROUND RISK.....	36
4.3. ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ.....	37
4.4. Η ΛΥΣΗ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ.....	41
4.4.1. Η ΛΥΣΗ.....	41
4.4.2. Η ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΕΠΕΝΔΥΤΩΝ ΣΤΟ BACKGROUND RISK.....	44
4.4.3. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗΣ.....	46
4.4.4. ΤΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟ ΣΥΝΟΡΟ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΥΠΑΡΞΗ ΤΟΥ BACKGROUND RISK.....	50

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

5.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	52
5.2. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ.....	54
5.3. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	60

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	62
--------------------------	-----------

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Το περίφημο Υπόδειγμα του Harry Markowitz αποτελεί τη βάση κάθε κλασσικής προσέγγισης της επιλογής και διαχείρισης χαρτοφυλακίου. Συγκεκριμένα, βασίζεται σε δύο βασικούς άξονες τη μεγιστοποίηση της απόδοσης του επενδυτή και την ελαχιστοποίηση του κινδύνου της επένδυσής του και το αντίστροφο. Παρόλο που το Υπόδειγμα του Markowitz δίνει έμφαση στην έννοια της διαφοροποίησης για την μείωση του κινδύνου, ωστόσο αγνοεί αρκετούς σημαντικούς παράγοντες. Η ανάλυση του είναι στατική διότι υποθέτει πως όλοι οι επενδυτές ενδιαφέρονται μόνο για τον κίνδυνο – απόδοσης. Στην πραγματικότητα όμως, όταν οι επενδυτές επιλέγουν χαρτοφυλάκια με διάφορα χρηματοοικονομικά περιουσιακά στοιχεία, έχουν να αντιμετωπίσουν όχι μόνο το βασικό κίνδυνο-απόδοσης του χαρτοφυλακίου αλλά και το background risk το οποίο προκύπτει από διάφορους παράγοντες, συμπεριλαμβανομένου του πληθωρισμού, του εισοδήματος εργασίας, των επενδύσεων σε ακίνητα καθώς και των υποχρεώσεων από τη διαχείριση ενός συνταξιοδοτικού Αμοιβαίου Κεφαλαίου και ούτω καθεξής.

1.2. ΔΟΜΗ ΤΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ

Για τη συγγραφή της παρούσας εργασίας η δομή των κεφαλαίων που ακολουθήθηκε είναι η ακόλουθη:

- Στο **2^ο Κεφάλαιο**, πραγματοποιήθηκε παρουσίαση του Υποδείγματος του Markowitz, και αναπτύσσονται τα 3 βασικά στάδια της, δηλαδή, η ανάλυση των χαρακτηριστικών των περιουσιακών στοιχείων, η ανάλυση και η επιλογή χαρτοφυλακίου.

- Στο **3^ο Κεφάλαιο**, παρουσιάζονται τα βασικά προβλήματα του Υποδείγματος του Markowitz καθώς και οι μέθοδοι περιορισμού αυτών. Επίσης, στο ίδιο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη ανασκόπηση προηγούμενων εμπειρικών μελετών οι οποίες αναφέρθηκαν ως προς ένα βαθμό στους περιορισμούς του Υποδείγματος.
- Στο **4^ο Κεφάλαιο**, αναλύεται η επιλογή χαρτοφυλακίου με background risk και γίνεται εκτενής ανάλυση της δημιουργίας του μοντέλου που χρησιμοποιείται για την αντιστάθμιση του background risk καθώς αναφέρονται και τα βασικά χαρακτηριστικά του. Επιπλέον, εξετάζεται η αντισταθμιστική συμπεριφορά των επενδυτών απέναντι στον background risk και το αποδοτικό σύνολο κατά την παρουσία του background risk.
- Στο **5^ο Κεφάλαιο**, παρουσιάζεται μέσω μιας πρακτικής εφαρμογής η μεθοδολογία που ακολουθείται στην παρούσα μελέτη. Παρόλα αυτά καθορίζονται με σαφήνεια τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται και ακολουθεί λεπτομερής περιγραφή τους. Το κεφάλαιο κλείνει με τα συμπεράσματα που διεξάγονται από όλη τη μελέτη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΤΟΥ MARKOWITZ

2.1. ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΤΟΥ MARKOWITZ

Η θεωρία χαρτοφυλακίου αναμφισβήτητα αποτελεί μια από τις μεγαλύτερες επιτυχίες στην ιστορία της ποσοτικής οικονομίας. Πατέρας της σύγχρονης Θεωρίας Χαρτοφυλακίου είναι ο Harry Markowitz, ο οποίος με το έργο του «Portfolio Selection» που δημοσιεύθηκε το 1952 στο περιοδικό «Journal of Finance», προσδιόρισε ποσοτικά τις έννοιες της απόδοσης και του κινδύνου. Σημαντική υπήρξε η συμβολή του Markowitz όσον αφορά την έννοια του αποδοτικού συνόρου. Ένα χαρτοφυλάκιο ορίζεται ως αποδοτικό εφόσον συντρέχουν οι εξής δύο προϋποθέσεις:

2. Δεν υπάρχει κανένα άλλο χαρτοφυλάκιο με την ίδια αναμενόμενη απόδοση και μικρότερη τυπική απόκλιση και
3. Δεν υπάρχει κανένα άλλο χαρτοφυλάκιο που να έχει την ίδια τυπική απόκλιση και μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση.

Ο γεωγραφικός τόπος όλων των αποδοτικών χαρτοφυλακίων ονομάζεται μέτωπο των αποδοτικών συνδυασμών ή αποδοτικό σύνολο (Efficient Frontier).

Η σύγχρονη Θεωρία Χαρτοφυλακίου όπως αναπτύχθηκε από τον Markowitz περιλαμβάνει τρία στάδια ανάλυσης:

- **Στάδιο 1^ο:** Ανάλυση των χαρακτηριστικών των αξιόγραφων.
- **Στάδιο 2^ο:** Ανάλυση Χαρτοφυλακίου και
- **Στάδιο 3^ο:** Επιλογή Χαρτοφυλακίου.

Εισάγοντας την έννοια του κινδύνου υπογραμμίζει τη σπουδαιότητα της διαφοροποίησης στα επενδυτικά χαρτοφυλάκια και καταλήγει στο

συμπέρασμα πως το πρόβλημα επιλογής χαρτοφυλακίου για έναν επενδυτή εξαρτάται από τις προτιμήσεις του όσον αφορά στο συνδυασμό απόδοσης – κινδύνου του επενδυτικού χαρτοφυλακίου του και κατ' επέκταση καθορίζεται μέσα από τη διαδικασία μεγιστοποίησης της χρησιμότητάς του.

Η Θεωρία Χαρτοφυλακίου όπως αναπτύχθηκε από τον Markowitz στηρίζεται στις εξής υποθέσεις:

1. Όλοι οι επενδυτές θεωρούνται «αποτελεσματικοί επενδυτές», δηλαδή επενδυτές που επιλέγουν το χαρτοφυλάκιο τους σύμφωνα με τη συνάρτηση χρησιμότητάς τους και επιθυμούν τον ελάχιστο κίνδυνο για δεδομένη απόδοση.
2. Όλοι οι επενδυτές έχουν τη δυνατότητα να δανείσουν ή να δανειστούν οποιοδήποτε χρηματικό ποσό σε κάποιο συγκεκριμένο, σταθερό και σίγουρο επιτόκιο.
3. Όλοι οι επενδυτές έχουν ομοιογενείς προσδοκίες. Αυτό σημαίνει ότι συμπίπτουν οι εκτιμήσεις τους όσον αφορά τις συναρτήσεις πιθανότητας των μελλοντικών ποσοστών απόδοσης.
4. Η χρονική περίοδος για όλους τους επενδυτές θεωρείται ίδια, που σημαίνει ότι το μοντέλο πρέπει να εφαρμοστεί για όλους την ίδια περίοδο, δηλαδή για ένα μήνα, τρίμηνο, έτος κλπ.
5. Δεν υπάρχουν φόροι ή κόστος συναλλαγής στις διαδικασίες αγοράς ή πώλησης τίτλων. Αυτό σημαίνει ότι οι επενδυτές είναι αδιάφοροι για το αν λάβουν εισόδημα από κεφαλαιακό κέρδος ή μερίσματα.
6. Κανένας μεμονωμένος επενδυτής δεν μπορεί να επηρεάσει την τιμή μιας μετοχής με την πώληση ή αγορά της. Οι επενδυτές στο σύνολό τους καθορίζουν τις τιμές.
7. Μια άλλη υπόθεση είναι ότι δεν παρουσιάζεται καμία σημαντική μεταβολή στα επιτόκια.
8. Όλα τα περιουσιακά στοιχεία μπορούν να πουληθούν και να αγοραστούν. Στην πραγματικότητα όμως, όλοι οι επενδυτές έχουν στην κατοχή τους μη εμπορεύσιμα περιουσιακά στοιχεία ή περιουσιακά στοιχεία που δεν μπορούν να εμπορευθούν όπως για παράδειγμα το ανθρώπινο κεφάλαιο.

9. Οι επενδύσεις θεωρούνται σωστά αποτιμημένες, σε σχέση με τα επίπεδα κινδύνου που χαρακτηρίζουν την κάθε μια.
10. Όλοι οι επενδυτές έχουν ίση πρόσβαση στην πληροφόρηση αναφορικά με τις αποδόσεις κάθε αξιόγραφου και του χαρτοφυλακίου αγοράς.

Στηριζόμενος σε αυτές τις υποθέσεις ο Markowitz ανέπτυξε ένα μοντέλο ανάλυσης χαρτοφυλακίου του οποίου τα βασικά χαρακτηριστικά για κάθε χαρτοφυλακίου είναι τα εξής:

- Πρώτον η αναμενόμενη απόδοση (expected return) που αποτελείται από μια κατανομή πιθανοτήτων των αναμενόμενων αποδόσεων.
- Δεύτερον η διακύμανση (variance) των αποδόσεων αυτών που αποτελεί ένα μέτρο του κινδύνου του χαρτοφυλακίου.
- Τέλος οι επενδυτές έχουν συγκεκριμένο επενδυτικό ορίζοντα και ακολουθούν ορθολογική συμπεριφορά. Δηλαδή, ο επενδυτής προτιμά τις μεγαλύτερες αποδόσεις από τις μικρότερες για κάθε συγκεκριμένο επίπεδο κινδύνου και προτιμά τις πιο σίγουρες αποδόσεις από τις ριψοκίνδυνες για κάθε συγκεκριμένο επίπεδο.

Ουσιαστικά η Θεωρία Χαρτοφυλακίου ασχολείται με τη δυνατότητα συνδυασμού μεμονωμένων αξιόγραφων σε χαρτοφυλάκια με ποσοτικά προσδιορισμένα στοιχεία κινδύνου και απόδοσης και με την επιλογή του βέλτιστου χαρτοφυλακίου. Ως βέλτιστο χαρτοφυλάκιο ορίζεται εκείνο το χαρτοφυλάκιο το οποίο μεγιστοποιεί την αναμενόμενη ωφελιμότητα του επενδυτή με ορίζοντα μιας περιόδου.

Όπως προαναφέρθηκε, η Θεωρία Χαρτοφυλακίου κατά τον Markowitz, περιλαμβάνει τα εξής τρία στάδια ανάλυσης:

Στάδιο 1^ο: Ανάλυση των χαρακτηριστικών των αξιόγραφων

Η ανάλυση αφορά στον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών απόδοσης και κινδύνου για κάθε αξιόγραφο, π.χ. μετοχές, καθώς και στην εκτίμηση του βαθμού συσχέτισης των υπό εξέταση αξιόγραφων.

Στάδιο 2^ο: Ανάλυση Χαρτοφυλακίου

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του 1^{ου} Σταδίου προσδιορίζονται οι συνδυασμοί μετοχών που είναι «αποτελεσματικοί». Αυτό σημαίνει ότι μπορώ να βρω εκείνα τα χαρτοφυλάκια που έχουν ελάχιστο κίνδυνο και μέγιστη απόδοση. Στο στάδιο αυτό περιλαμβάνει η δημιουργία του αποδοτικού μετώπου.

Στάδιο 3^ο: Επιλογή Χαρτοφυλακίου

Αξιολογούνται τα αποτελέσματα του 2^{ου} Σταδίου και επιλέγεται από τους αποτελεσματικούς συνδυασμούς μετοχών εκείνος που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη ωφελιμότητα του επενδυτή.

Στην επόμενη ενότητα εξετάζουμε πιο αναλυτικά τα τρία στάδια ανάλυσης σύμφωνα με το Υπόδειγμα του Markowitz.

2.2. ΣΤΑΔΙΟ 1^ο: ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΩΝ ΑΞΙΟΓΡΑΦΩΝ

Το συγκεκριμένο στάδιο ανάλυσης αναφέρεται στις έννοιες κινδύνου και απόδοσης των αξιόγραφων και ασχολείται με τις μεθόδους αριθμητικής εκτίμησης τους. Συγκεκριμένα, εξετάζονται οι τύποι υπολογισμού:

- i. της απόδοσης μιας μετοχής σε μια περίοδο
- ii. της αναμενόμενης απόδοσης
- iii. της διακύμανσης των αποδόσεων
- iv. του συντελεστή μεταβλητότητας των αποδόσεων
- v. της διακύμανσης των αποδόσεων και
- vi. του συντελεστή συσχέτισης των αποδόσεων των μετοχών.

Συγκεκριμένα,

i. Απόδοση Μετοχής

Ως απόδοση μιας μετοχής σε μια περίοδο ορίζεται ως το άθροισμα της κεφαλαιακής απόδοσης της μετοχής (ποσοστιαία μεταβολή της τιμής της μετοχής) πλέον της μερισματικής απόδοσης της μετοχής (ποσοστιαίο μέρισμα ανά μετοχή). Η μαθηματική έκφραση του ως άνω ορισμού δηλώνεται από τον τύπο:

$$R_{it} = \frac{P_{it} - P_{it-1}}{P_{it-1}} + \frac{D_{it}}{P_{it-1}}$$

όπου:

R_{it} : η απόδοση της μετοχής

P_{it} : η τιμή της μετοχής i στο τέλος της περιόδου t

P_{it-1} : η τιμή της μετοχής i στο τέλος της περιόδου $t-1$

D_{it} : το μέρισμα ανά μετοχή, της μετοχής i από το τέλος της περιόδου $t-1$ έως το τέλος της περιόδου t .

Ο μαθηματικός τύπος της απόδοσης μιας μετοχής μιας περιόδου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό τόσο των ιστορικών όσο και των αναμενόμενων μελλοντικών αποδόσεων αυτής. Συγκεκριμένα, για τον υπολογισμό της αναμενόμενης απόδοσης μιας μετοχής για συγκεκριμένη περίοδο στο μέλλον χρησιμοποιούνται η αναμενόμενη τιμή της μετοχής στο τέλος της εξεταζόμενης μελλοντικής περιόδου και το αναμενόμενο μέρισμα ανά μετοχή για τη συγκεκριμένη περίοδο. Στην περίπτωση που δεν υφίσταται πληρωμή μερίσματος η μερισματική απόδοση ισούται με μηδέν.

Θετική απόδοση έχουμε εφόσον στη λήξη της εξεταζόμενης περιόδου το άθροισμα της τιμής της μετοχής στη λήξη της περιόδου πλέον του διανεμόμενου μερίσματος ανά μετοχή κατά τη διάρκεια της περιόδου είναι μεγαλύτερο από την τιμή της μετοχής στην αρχή της περιόδου. Το αντίθετο ισχύει για την αρνητική απόδοση.

ii. Αναμενόμενη Απόδοση

Ως αναμενόμενη απόδοση μιας μετοχής μιας περιόδου ορίζεται το σταθμισμένο άθροισμα των πιθανών προσδοκώμενων μελλοντικών αποδόσεων όπου ως σταθμά χρησιμοποιούνται οι πιθανότητες πραγματοποίησής τους. Οι πιθανότητες αυτές είναι υποκειμενικές και ως εκ τούτου διαφέρουν για κάθε επενδυτή. Συνεπώς, κάθε επενδυτής είναι δυνατόν να έχει διαφορετική κατανομή πιθανοτήτων για την ίδια μετοχή. Η μαθηματική έκφραση του ως άνω ορισμού δίνεται από του τύπο:

$$E(R_i) = \sum_{i=1}^N P_i * R_{ii}$$

όπου:

$E(R_i)$: η αναμενόμενη μελλοντική απόδοση της μετοχής i

R_{ii} : η απόδοση της μετοχής i

P_i : η πιθανότητα η μετοχή i να έχει απόδοση R_{ii}

N : το σύνολο των πιθανών αποδόσεων

Η αναμενόμενη τιμή μιας μετοχής παρέχει σημαντικές πληροφορίες που σχετίζονται με την μέση τιμή της κατανομής πιθανοτήτων των αποδόσεων της μετοχής.

iii. Διακύμανση Αποδόσεων

Η προσδοκώμενη απόκλιση από την προβλεπόμενη απόδοση της μετοχής ορίζεται με το στατιστικό κριτήριο της διακύμανσης ή της τυπικής απόκλισης οι οποίες αποτελούν μέτρα υπολογισμού της αβεβαιότητας σχετικά με τις αποδόσεις της μετοχής ή διαφορετικά μέτρα εκτίμησης του κινδύνου της μετοχής. Ως διακύμανση ορίζεται το άθροισμα των σταθμισμένων τετραγώνων των αποκλίσεων των πιθανών αποδόσεων μιας μετοχής από την αναμενόμενη απόδοση τους. Η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης μας δίνει

την τυπική απόκλιση των αποδόσεων μιας μετοχής. Οι μαθηματικές εκφράσεις των ως άνω ορισμών δίδονται από τους τύπους:

$$\sigma^2(R_i) = \sum_{i=1}^N P_i [R_{it} - E(R_i)]^2$$

$$\sigma(R_i) = \sqrt{\sigma^2(R_i)}$$

όπου:

$\sigma^2(R_i)$: η διακύμανση των αποδόσεων της μετοχής i

$\sigma(R_i)$: η τυπική απόκλιση της μετοχής i

P_i : η πιθανότητα η μετοχή i να έχει απόδοση R_{it}

R_{it} : η απόδοση της μετοχής i

$E(R_i)$: η αναμενόμενη μελλοντική απόδοση της μετοχής i

N : το σύνολο των πιθανών αποδόσεων

Από τα παραπάνω γίνεται αντιληπτό πως η διακύμανση μετρά την κατά μέσο όρο μεταβλητότητα των πιθανών αποδόσεων από την αναμενόμενη απόδοσή τους. Όσο μεγαλύτερη είναι η διακύμανση των αποδόσεων μιας μετοχής, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα η πραγματική απόδοση της μετοχής να αποκλίνει σημαντικά από την αναμενόμενη απόδοση της και κατά συνέπεια τόσο μεγαλύτερος είναι ο κίνδυνος που παρουσιάζει η συγκεκριμένη μετοχή.

iv. Συντελεστής Μεταβλητότητας

Τόσο η αναμενόμενη απόδοση όσο και η διακύμανση ή η τυπική απόκλιση αποτελούν σημαντικά εργαλεία για την αξιολόγηση μιας μετοχής. Είναι όμως αρκετά για να συγκρίνουμε δυο μετοχές ταυτόχρονα; Πιο σωστά, μπορούμε να διεξάγουμε ασφαλή συμπεράσματα για το ποια μετοχή υπερτερεί έναντι της άλλης;

Στη διαδικασία επιλογής μεταξύ δυο μετοχών απαιτείται ένα βοηθητικό μέτρο, ο συντελεστής μεταβλητότητας. Ο συντελεστής μεταβλητότητας ορίζεται ως η τυπική απόκλιση των αποδόσεων μιας μετοχής προς την αναμενόμενη τιμή τους και μετρά τον κίνδυνο μιας μετοχής ανά μονάδα αναμενόμενης απόδοσης. Η μαθηματική έκφραση του συντελεστή μεταβλητότητας ορίζεται από τον τύπο:

$$CV(R_i) = \frac{\sigma(R_i)}{E(R_i)}$$

όπου:

$CV(R_i)$: ο συντελεστής μεταβλητότητας

$\sigma(R_i)$: η τυπική απόκλιση της μετοχής i

$E(R_i)$: η αναμενόμενη μελλοντική απόδοση της μετοχής i

Όσο μικρότερος είναι ο συντελεστής μεταβλητότητας μιας μετοχής, τόσο μικρότερος είναι ο κίνδυνος της μετοχής ανά μονάδα αναμενόμενης απόδοσης και συνεπώς τόσο ελκυστικότερη είναι η μετοχή προς έναν επενδυτή που αποστρέφεται τον κίνδυνο.

ν. Συνδιακύμανση Αποδόσεων

Η συνδιακύμανση ορίζεται ως το άθροισμα των σταθμικών γινομένων των αποκλίσεων των αποδόσεων των μετοχών από τις αντίστοιχες αναμενόμενες αποδόσεις τους, όπου ως σταθμά ορίζονται οι πιθανότητες εμφάνισης των διαφόρων αποδόσεων των μετοχών. Η αλγεβρική διατύπωση του ως άνω ορισμού δίδεται από τον τύπο:

$$COV(R_i, R_j) = \sum_{t=1}^N P_t (R_{it} - E(R_i)) * \sum_{t=1}^N P_t (R_{jt} - E(R_j))$$

όπου:

$COV(R_i, R_j)$: η συνδιακύμανση των αποδόσεων των μετοχών i και j

P_t : η πιθανότητα εμφάνισης των αποδόσεων R_{it} και R_{jt}

R_{it} : η απόδοση της μετοχής i

R_{jt} : η απόδοση της μετοχής j

$E(R_i)$: η αναμενόμενη μελλοντική απόδοση της μετοχής i

$E(R_j)$: η αναμενόμενη μελλοντική απόδοση της μετοχής j

N : ο συνολικός αριθμός των πιθανών αποδόσεων

Η συνδιακύμανση των αποδόσεων δύο ή περισσότερων μετοχών είναι ένα απόλυτο στατιστικό μέτρο υπολογισμού του βαθμού συσχέτισης των αποδόσεων των μετοχών που ταυτόχρονα αντανάκλα τη διασπορά των αποδόσεων κάθε μετοχής από την αναμενόμενη απόδοσή της. Θετικό πρόσημο στην τιμή της συνδιακύμανσης των αποδόσεων των μετοχών σημαίνει ότι οι αποδόσεις των μετοχών τείνει να κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση ενώ αντίθετα αρνητικό πρόσημο σημαίνει πως οι αποδόσεις των μετοχών κινούνται προς αντίθετη κατεύθυνση.

vi. Συντελεστής Συσχέτισης

Ο συντελεστής συσχέτισης δυο μετοχών ορίζεται ως ο λόγος της συνδιακύμανσης των αποδόσεων των μετοχών προς το γινόμενο των τυπικών αποκλίσεων και μετρά το βαθμό αλληλεξάρτησης των αποδόσεων των δύο μετοχών. Η μαθηματική έκφραση του ως άνω ορισμού δίδεται από τον τύπο:

$$\rho_{ij} = \frac{COV(R_i, R_j)}{\sigma(R_i) * \sigma(R_j)} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma(R_i) * \sigma(R_j)}$$

όπου:

ρ_{ij} : ο συντελεστής συσχέτισης των μετοχών i και j

$COV(R_i, R_j)$: η συνδιακύμανση των αποδόσεων των μετοχών i και j

$\sigma(R_i)$: η τυπική απόκλιση της μετοχής i

$\sigma(R_j)$: η τυπική απόκλιση της μετοχής j

Το πρόσημο της τιμής του συντελεστή συσχέτισης αποκαλύπτει την κατεύθυνση της συσχέτισης ενώ η τιμή του υποδεικνύει την ισχύ της συσχέτισης. Συγκεκριμένα, ο συντελεστής συσχέτισης παίρνει τιμές μεταξύ του διαστήματος $[-1, +1]$. Όσο η απόλυτη τιμή του συντελεστή συσχέτισης πλησιάζει στη μονάδα, τόσο πιο ισχυρή, θετική ή αρνητική, είναι η συσχέτιση μεταξύ των αποδόσεων των εξεταζόμενων μετοχών. Αντίθετα, όσο η τιμή του συντελεστή συσχέτισης πλησιάζει στο μηδέν τόσο πιο ανεξάρτητα κατευθύνονται οι αποδόσεις των μετοχών.

Πιο συγκεκριμένα:

- Αν $\rho_{ij} > 0$, οπότε $\sigma_{ij} > 0$ τότε οι δύο μετοχές i και j κινούνται μαζί προς την ίδια κατεύθυνση.
- Αν $\rho_{ij} < 0$, οπότε $\sigma_{ij} < 0$ τότε οι δύο μετοχές i και j κινούνται μαζί προς την αντίθετη κατεύθυνση.
- Αν $\rho_{ij} = 0$, οπότε $\sigma_{ij} = 0$ τότε οι δύο μετοχές i και j είναι ασυσχέτιστες, δηλαδή, η κίνηση της μιας δεν συσχετίζεται γραμμικά με την κίνηση της άλλης.
- Αν $\rho_{ij} = 1$ τότε οι δύο μετοχές i και j είναι τέλεια θετικά συσχετισμένες, δηλαδή, τις αντίθετες αποδόσεις τους τις συνδέει μια τέλεια θετική γραμμική σχέση. Αυτό σημαίνει ότι οι αποδόσεις τους κινούνται μαζί προς την ίδια κατεύθυνση με τον ίδιο γραμμικό τρόπο.
- Αν $\rho_{ij} = -1$ τότε οι δύο μετοχές i και j είναι τέλεια αρνητικά συσχετισμένες, δηλαδή, όταν η απόδοση της μίας μετοχής R_i είναι μεγαλύτερη από τη μέση τιμή της δηλαδή από το $E(R_i)$ κατά ένα συγκεκριμένο ποσό τότε η απόδοση της άλλης μετοχής R_j θα είναι μικρότερη από τη μέση τιμή της $E(R_j)$ κατά το ίδιο ακριβές ποσό.

2.3. ΣΤΑΔΙΟ 2^ο: ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

Βασική επιδίωξη του Markowitz σε αυτό το στάδιο (παράλληλα στην προσπάθειά του να συμβάλει τα μέγιστα στη Θεωρία Χαρτοφυλακίου) αποτελεί η μέτρηση της συνεισφοράς κάθε μετοχής στον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου η σπουδαιότητα της διαφοροποίησης και το αποδοτικό σύνολο.

Αρχικά ως επενδυτικό χαρτοφυλάκιο ορίζεται ένα σύνολο αξιόγραφων, π.χ. μετοχών οι οποίες περιλαμβάνονται στο χαρτοφυλάκιο με συγκεκριμένη αναλογία βάσει των ποσοστών επένδυσης. Τα ποσοστά των επενδύσεων αθροίζουν πάντοτε στην μονάδα και σύμφωνα με την αναλογία του Markowitz είναι θετικοί αριθμοί, δηλαδή δε λαμβάνεται υπ' όψη η δυνατότητα του short selling.

Το επόμενο βήμα είναι η εφαρμογή (δηλαδή ο υπολογισμός) όλων των βασικών χαρακτηριστικών που περιγράφονται στο προηγούμενο στάδιο (απόδοση, διακύμανση, συντελεστής μεταβλητότητας, συντελεστής συσχέτισης, συνδιακύμανσης των αποδόσεων) καθώς και η διεξαγωγή των κατάλληλων συμπερασμάτων.

Επιχειρώντας να αναλύσουμε σε βάθος τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου γίνεται διαχωρισμός σε δυο μέρη:

- Στον συστηματικό κίνδυνο, όπου είναι ο κίνδυνος της αγοράς ο οποίος επηρεάζει τη μεταβλητότητα των αποδόσεων των μετοχών που διαπραγματεύονται σε αυτή την αγορά.

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i * x_j * \rho * \sigma_i * \sigma_j$$

Κατά συνέπεια ο συστηματικός κίνδυνος δεν μπορεί να ελαχιστοποιηθεί με διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου, δηλαδή, με την κατανομή των επενδύσεων σε διαφορετικούς τίτλους ή κλάδους.

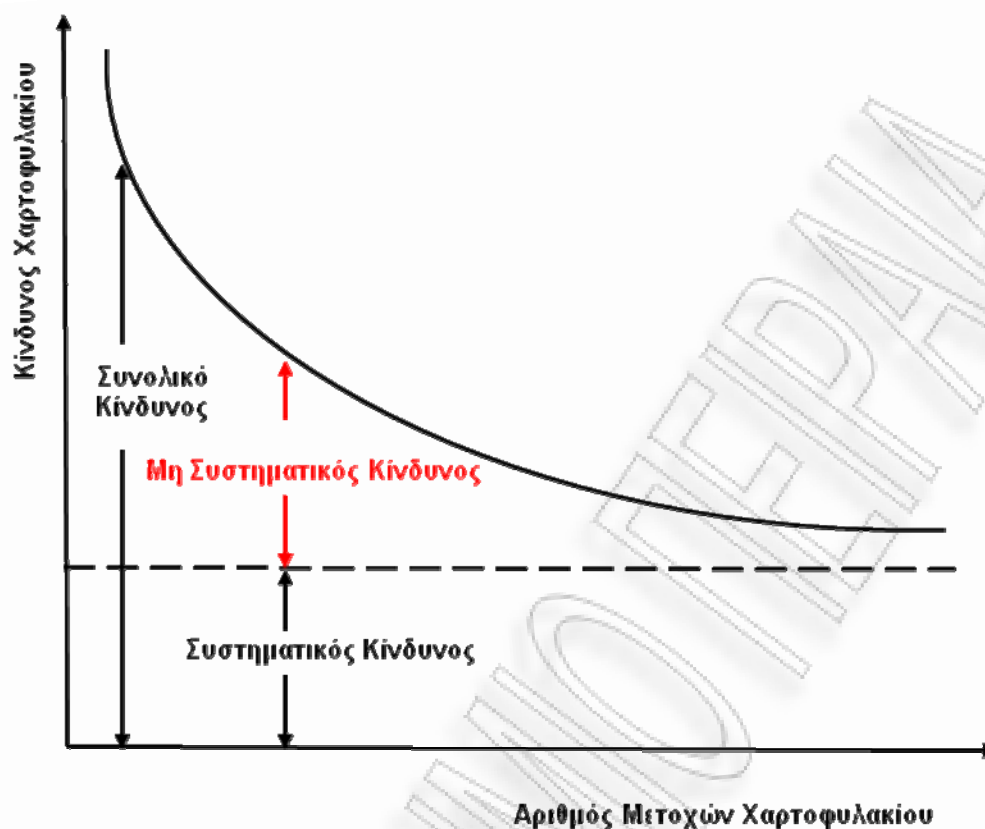
- Στον μη – συστηματικό κίνδυνο, όπου είναι ο κίνδυνος που χαρακτηρίζει τον οργανισμό ή επιχείρηση που εκδίδει την κάθε μετοχή και η μαθηματική του έκφραση είναι:

$$\sum_{i=1}^N x_i^2 * \sigma_i^2$$

Ο μη – συστηματικός κίνδυνος μπορεί να περιοριστεί ή ακόμα και να εξαλειφθεί έχοντας έναν αρκετά μεγάλο αριθμό αξιόγραφων (15-20) στο χαρτοφυλάκιο. Σε αυτό συμβάλει η διαφοροποίηση μεταξύ των αξιόγραφων του χαρτοφυλακίου. Ο συνολικός κίνδυνος του χαρτοφυλακίου μειώνεται σε σχέση με τον αντίστοιχο κίνδυνο των μεμονωμένων μετοχών που περιλαμβάνει, με το μέγεθος της μείωσης να εξαρτάται αντίστοιχα από το βαθμό συσχέτισης των αποδόσεων των μετοχών.

Όσο μικρότερος ο συντελεστής συσχέτισης τόσο μεγαλύτερη η μείωση του κινδύνου του χαρτοφυλακίου. Τα οφέλη της διαφοροποίησης μπορούν να προκύψουν μόνο εφόσον σε ένα επενδυτικό χαρτοφυλάκιο συνδυαστούν μετοχών των οποίων οι αποδόσεις να μην έχουν τέλεια θετική συσχέτιση μεταξύ τους.

Στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζεται ο συστηματικός και ο μη – συστηματικός κίνδυνος καθώς και το πώς ένα καλά διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο μπορεί να εξαλείψει τον μη – συστηματικό κίνδυνο αλλά και δεν μπορεί να αποφύγει τον συστηματικό κίνδυνο.

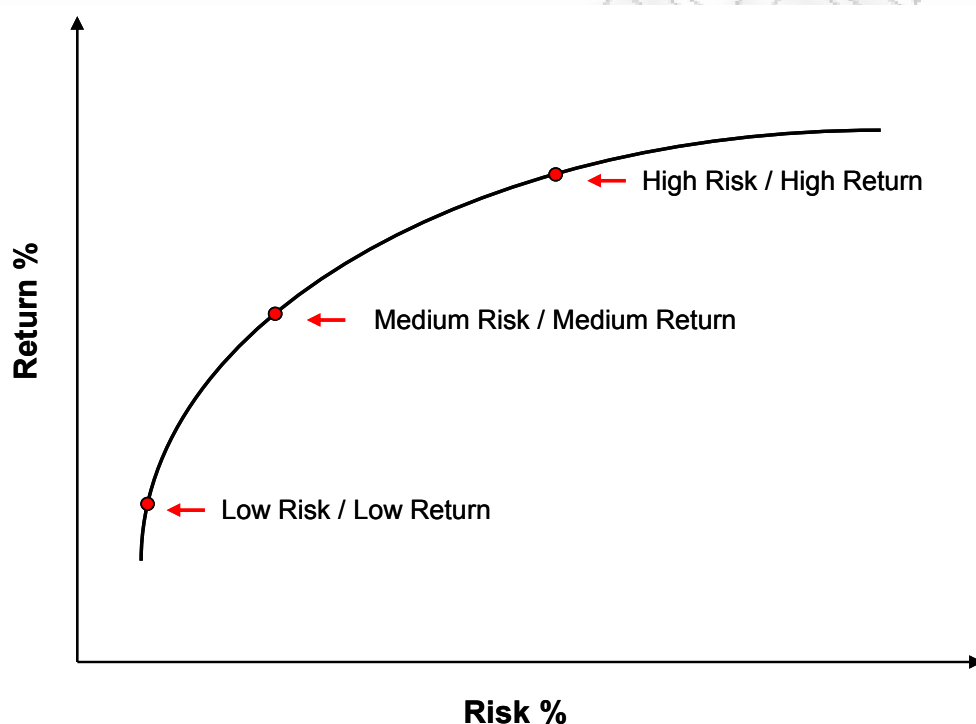


Διάγραμμα 1: Συστηματικού και μη συστηματικού κινδύνου

Με την ευθεία γραμμή συμβολίζεται ο συστηματικός κίνδυνος, ενώ με την καμπύλη συμβολίζεται ο συνολικός κίνδυνος μιας μετοχής. Είναι αυτονόητο ότι το μεσοδιάστημα μεταξύ συνολικού και συστηματικού κινδύνου είναι ο μη – συστηματικός κίνδυνος που ελαττώνεται καθώς ο αριθμός των μετοχών αυξάνει.

Τέλος, είναι φανερό ότι από ένα σύνολο αξιόγραφων μπορούν να δημιουργηθούν άπειρα χαρτοφυλάκια με τον συνδυασμό κάθε διαφορετικού ποσοστού συμμετοχής κάθε αξιόγραφου στο χαρτοφυλάκιο. Όμως ο επενδυτής θα πρέπει να επιλέξει το άριστο γι' αυτόν χαρτοφυλάκιο λαμβάνοντας υπόψη τόσο τα παραπάνω όσο και το γεγονός ότι ένα χαρτοφυλάκιο ορίζεται ως αποδοτικό εφόσον:

- δεν υπάρχει κανένα άλλο χαρτοφυλάκιο με την ίδια αναμενόμενη απόδοση και μικρότερη τυπική απόκλιση και
- δεν υπάρχει κανένα άλλο χαρτοφυλάκιο που να έχει την ίδια τυπική απόκλιση και μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση καταλήγουμε στον γεωμετρικό τόπο όλων των αποδοτικών χαρτοφυλακίων που ονομάζεται αποδοτικό σύνολο (efficient frontier).



Διάγραμμα 2: Καμπύλη αποδοτικού συνόλου (efficient frontier)

Η παραπάνω γραμμή που έχει θετική κλίση περιλαμβάνει όλους τους εφικτούς συνδυασμούς αποδόσεων και τυπικών αποκλίσεων των μετοχών που συνθέτουν χαρτοφυλάκια τα οποία έχουν τη μεγαλύτερη δυνατή απόδοση με δεδομένο κίνδυνο, ή τον ελάχιστο κίνδυνο δεδομένης της απόδοσης του χαρτοφυλακίου. Συνεπώς προκειμένου για μια γραφική απεικόνιση του αποδοτικού συνόλου του Markowitz.

Οποιοδήποτε χαρτοφυλάκιο βρίσκεται κάτω ή δεξιά της γραμμής του αποδοτικού συνόλου δεν είναι αποδοτικό. Επίσης οποιοδήποτε χαρτοφυλάκιο βρίσκεται πάνω και αριστερά της γραμμής του αποδοτικού συνόλου είναι αποδοτικό αλλά όχι εφικτό. Είναι προφανές πως κάθε επενδυτής έχει συμφέρον να επιλέξει ένα μεταξύ των χαρτοφυλακίων που υπάρχουν πάνω στη γραμμή του αποδοτικού συνόλου. Ο προσδιορισμός του συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου που θα επιλέξει κάθε επενδυτής εξαρτάται από τις προτιμήσεις του επενδυτή και αποτελεί το τρίτο στάδιο ανάλυσης στη θεωρία του Markowitz.

2.4. ΣΤΑΔΙΟ 3^ο: ΕΠΙΛΟΓΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

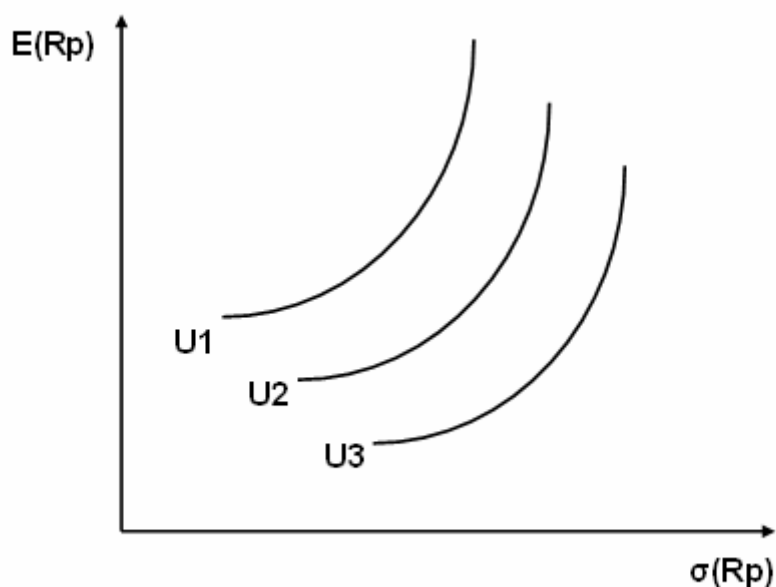
Το τελικό χαρτοφυλάκιο που θα επιλέξει ένας επενδυτής εξαρτάται από τις προτιμήσεις του απέναντι στον κίνδυνο. Συγκεκριμένα, ένας ριψοκίνδυνος επενδυτής θα αποζητά υψηλή αναμενόμενη απόδοση αναλαμβάνοντας παράλληλα σημαντικά μεγαλύτερο κίνδυνο προκειμένου να την επιτύχει. Αντίθετα ένας συντηρητικός επενδυτής θα αρκестεί σε μικρότερη αναμενόμενη απόδοση προκειμένου να αποφύγει την ανάληψη υψηλού κινδύνου. Στο παρακάτω διάγραμμα ο πρώτος επενδυτής θα επέλεγε ένα χαρτοφυλάκιο πάνω και δεξιά, ενώ ο δεύτερος ένα χαρτοφυλάκιο κάτω και αριστερά.

Είναι προφανές ότι η τελική επιλογή χαρτοφυλακίου από τον επενδυτή εξαρτάται από τις προσωπικές του προτιμήσεις που στοχεύουν κάθε φορά στη μεγιστοποίηση της ωφελιμότητάς του. Σύμφωνα με τη μικροοικονομική θεωρία ο καλύτερος τρόπος για να εκφράσουμε την έννοια της ωφελιμότητας, είναι οι καμπύλες αδιαφορίας.

Οι καμπύλες αδιαφορίας ενός επενδυτή στα πλαίσια της ανάλυσης χαρτοφυλακίων ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των συνδυασμών αναμενόμενης απόδοσης και κινδύνου χαρτοφυλακίων, που προσδίδουν στον επενδυτή την ίδια ωφέλεια. Σε ότι αφορά τις καμπύλες αδιαφορίας θα πρέπει να κάνουμε δύο βασικές υποθέσεις:

- Υποθέτουμε ότι αν ο επενδυτής πρέπει να επιλέξει μεταξύ δύο χαρτοφυλακίων τα οποία είναι όμοια αλλά διαφέρουν ως προς την απόδοση, θα επιλέξουν εκείνο με την μεγαλύτερη απόδοση.
- Υποθέτουμε ότι ο επενδυτής αποστρέφεται τον κίνδυνο, δηλαδή αν πρέπει να επιλέξει μεταξύ δυο χαρτοφυλακίων τα οποία είναι όμοια αλλά διαφέρουν ως προς το επίπεδο του κινδύνου θα επιλέξει εκείνο με τον μικρότερο κίνδυνο.

Στο διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζονται ενδεικτικές καμπύλες αδιαφορίας.

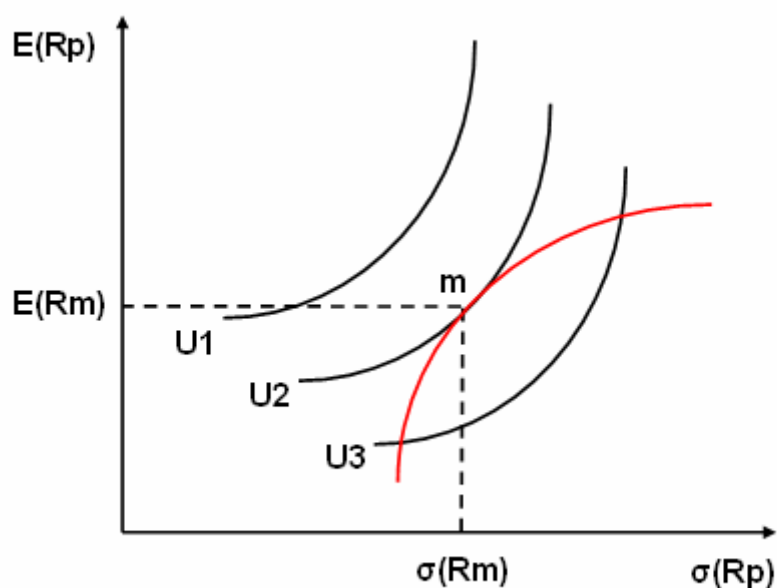


Διάγραμμα 3: Καμπύλες αδιαφορίας επενδυτή

Όλοι οι συνδυασμοί απόδοσης – κινδύνου που απεικονίζονται με την καμπύλη αδιαφορίας U_3 παρέχουν την ίδια ωφελιμότητα για τον επενδυτή. Ομοίως ισχύει για τις παράλληλες καμπύλες U_1 και U_2 οι οποίες όμως υπερτερούν από την U_3 καθώς για κάθε επίπεδο κινδύνου προσδίδουν μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση ή για κάθε επίπεδο αναμενόμενης απόδοσης προσδίδουν μικρότερο κίνδυνο. Είναι προφανές πως οι καμπύλες U_1 και U_2

παρέχουν υψηλότερα επίπεδα ωφέλειας από την U_3 και ως εκ τούτου είναι προτιμητέες από τον επενδυτή στον οποίο αναφέρονται.

Συνδυάζοντας τις καμπύλες αδιαφορίας του επενδυτή με το αποδοτικό σύνολο, προκύπτει ο συγκεκριμένος συνδυασμός – συγκεκριμένο επενδυτικό χαρτοφυλάκιο – μέσω του οποίου μεγιστοποιείται η ωφέλεια του επενδυτή.



Διάγραμμα 4: Καμπύλες αδιαφορίας επενδυτή και αποδοτικό σύνολο

Στο σημείο επαφής του αποδοτικού συνόλου με την καμπύλη αδιαφορίας (σημείο M), ο επενδυτής μεγιστοποιεί τη χρησιμότητά του. Ο συνδυασμός αναμενόμενης απόδοσης και κινδύνου που ορίζεται από το συγκεκριμένο σημείο, καθορίζει το βέλτιστο επενδυτικό χαρτοφυλάκιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ MARKOWITZ

3.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αυτό που σήμερα γνωρίζουμε ως Θεωρία Χαρτοφυλακίου, η συνδυασμένη χρήση των υποδειγμάτων ανάλυσης επενδύσεων χαρτοφυλακίων, εφαρμογής των ποσοτικών κριτηρίων αξιολόγησής τους και τεκμηρίωσης των αποτελεσμάτων μέσω της εμπειρικής έρευνας, αποτελεί συνέπεια μιας δυναμικής πορείας πραγματοποίησης ερευνών και αξιολόγησής θεωριών η οποία ξεκινά το 1952 με τη θεωρία χαρτοφυλακίου του Markowitz. Η απλή υπόθεση του Markowitz ότι οι ορθολογικοί επενδυτές επιθυμούν υψηλή απόδοση στις επενδύσεις τους ενώ ταυτόχρονα αποστρέφονται τον κίνδυνο, υπογράμμισε για πρώτη φορά τη σημασία της διαφοροποίησης των επενδυτικών χαρτοφυλακίων προκειμένου για τη μείωση του συνολικού τους κινδύνου. Στόχος της επιστημονικής ανάλυσης θα πρέπει να αποτελεί η εύρεση εκείνης της ομάδας χαρτοφυλακίων για τα οποία ο επενδυτής λαμβάνει τη μέγιστη απόδοση ανά μονάδα κινδύνου ή όπως προσδιορίζεται από τον συγγραφέα του «αποδοτικού συνόλου». Ο προσδιορισμός του αποδοτικού συνόλου σε συνδυασμό με τις προτιμήσεις των επενδυτών θα καθορίσει τα άριστα επενδυτικά χαρτοφυλάκια.

Οι πρωτοποριακές προτάσεις της θεωρίας του Markowitz αλλά και τα προβλήματα που παρουσίασε η εφαρμογή της όπως ήταν αναμενόμενο αποτέλεσαν τη βάση για την ανάπτυξη νέων θεωριών όπως αυτές του Μονοπαραγωγτικού ή των Πολυπαραγωγτικών Υποδειγμάτων.

3.2. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΤΟΥ MARKOWITZ

Αναμφισβήτητα τα προβλήματα του Υποδείγματος του Markowitz είναι πολλά και προφανή. Το σημαντικότερο όλων είναι ότι χρειάζονται πολλές εκτιμήσεις. Για ένα χαρτοφυλάκιο που περιέχει (n) αξιόγραφα θα πρέπει να υπολογιστούν (n) αναμενόμενες αποδόσεις, (n) διακυμάνσεις και $\frac{n(n-1)}{2}$ συνδιακυμάνσεις. Θα χρειαστούν δηλαδή συνολικά $\frac{n(n+3)}{2}$ εκτιμήσεις. Για παράδειγμα, εάν $n = 100$ αξιόγραφα, τότε θα απαιτηθούν 5.150 εκτιμήσεις. Σημειώνεται, δηλαδή, τεράστια δυσκολία στην πρόβλεψη των ενδεχόμενων αποδόσεων κάθε αξιόγραφου για την συγκεκριμένη χρήση και επιπλέον στην πρόβλεψη και πιθανότητα επέλευσης κάθε ενδεχόμενης απόδοσης.

Για την αντιμετώπιση αυτού του τόσο σημαντικού προβλήματος πολλοί αναλυτές χρησιμοποίησαν ως προσδοκώμενη απόδοση και ως τυπική απόκλιση τη μέση ετήσια απόδοση μιας παρελθούσας περιόδου.

Τα προβλήματα αυτής της διαρθρωτικής παρέμβασης είναι πολλά και έχουν να κάνουν:

- a. Με την έλλειψη ουσιαστικής αιτιολόγησης, δηλαδή γιατί η μέση προσδοκώμενη απόδοση του παρελθόντος θα πρέπει να αποτελεί και την προσδοκώμενη απόδοση της τρέχουσας χρήσης και,
- b. Με το γιατί η μέση τυπική απόκλιση του παρελθόντος θα πρέπει να αποτελεί την τυπική απόκλιση της τρέχουσας χρήσης.

Εκτός του ότι το Υπόδειγμα του Markowitz πάσχουν από σημαντικά λάθη εκτίμησης, παρουσιάζει επιπλέον και δυο προβλήματα στην κατασκευή του:

- Πρώτον, οι σταθμίσεις πολλών αξιόγραφων είναι ακραίες, δηλαδή είτε υπερβολικά υψηλές (πολύ υψηλότερες της μονάδας), είτε υπερβολικά αρνητικές παρότι αθροίζουν στην μονάδα.
- Δεύτερον, οι σταθμίσεις των αξιόγραφων παρουσιάζουν αστάθεια, δηλαδή, μικρές αλλαγές στις αναμενόμενες αποδόσεις ή στον πίνακα συνδιακύμανσης οδηγούν σε μεγάλες αλλαγές στις σταθμίσεις του χαρτοφυλακίου.

Τα προβλήματα αυτά γίνονται εντονότερα όταν κάποια αξιόγραφα στο χαρτοφυλάκιο έχουν υψηλή συσχέτιση. Για το λόγο αυτό, αρκετοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι οι κλασσικές μέθοδοι αριστοποίησης χαρτοφυλακίου, όπως η μέθοδος του Markowitz λειτουργούν στην πράξη ως μέθοδοι μεγιστοποίησης του λάθους Michaud (1989).

3.3. ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ MARKOWITZ

Με σκοπό την ελαχιστοποίηση του λάθους εκτίμησης της κλασσικής μεθόδου αριστοποίησης χαρτοφυλακίου, έχουν προταθεί μια σειρά εναλλακτικών μεθόδων. Μεταξύ των μεθόδων αυτών περιλαμβάνονται:

- a. Εκτιμητές Shrinkage
- b. Χρήση Παραγοντικών Υποδειγμάτων και
- c. Περιορισμοί στις σταθμίσεις του χαρτοφυλακίου.

3.3.1. ΕΚΤΙΜΗΤΕΣ SHRINKAGE

Η ιδέα της χρήσης ενός Shrinkage Estimator οφείλεται στους James και Stein (1961), οι οποίοι υποστήριξαν ότι για τρεις ή περισσότερες τυχαίες μεταβλητές, το διάνυσμα των πραγματικών μέσων τους μπορεί να εκτιμηθεί

ως ένας γραμμικός συνδυασμός των δειγματικών μέσων τους, $\hat{\mu}$, και μιας κοινής σταθεράς, μ_0 , η οποία συνήθως είναι διαστρωματικός μέσος όλων των μεταβλητών:

$$\mu_s = \delta\mu_0 + (1 - \delta)\hat{\mu}$$

για $0 < \delta < 1$.

Ο εκτιμητής Shrinkage «σμικρύνει» τους μέσους προς μια κοινή σταθερά μ_0 . Κατά συνέπεια, μειώνει τα ακραία λάθη εκτίμησης των διαστρωματικών μέσων.

Η άριστη τιμή του δ εξαρτάται θετικά από τον αριθμό των αξιόγραφων στο χαρτοφυλάκιο και αρνητικά από το μέγεθος του δείγματος (παρατηρήσεις) καθώς αυξάνει η ακρίβεια της εκτίμησης των μέσων και αρνητικά από την διασπορά των μέσων γύρω από το μ_0 .

Η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί και στην εκτίμηση του πίνακα συνδιακύμανσης, Σ :

$$\Sigma_s = \delta\Sigma_0 + (1 - \delta)\hat{\Sigma}$$

καθώς επίσης και απευθείας πάνω στα σταθμά του χαρτοφυλακίου:

$$w_s = \delta w_0 + (1 - \delta)\hat{w}$$

με $w_0 = \frac{1}{K}$, και K τον αριθμό των αξιόγραφων στο χαρτοφυλάκιο.

Εναλλακτικά, το διάνυσμα w_0 μπορεί να είναι τα σταθμά του χαρτοφυλακίου της αγοράς ή ενός χαρτοφυλακίου στόχου (benchmark) του διαχειριστή.

Αξίζει να σημειωθεί ότι κάθε μορφή εκτίμησης Shrinkage περιλαμβάνει μια αυθαίρετη επιλογή της σταθεράς στόχου.

3.3.2. ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ

Μια εναλλακτική μέθοδος που αποσκοπεί στην μείωση του στατιστικού λάθους στην κατασκευή χαρτοφυλακίων είναι η χρήση ενός Παραγοντικού Υποδείγματος αποτίμησης κατά Sharpe (1963). Τα Παραγοντικά Υποδείγματα επιβάλλουν περιορισμούς στον πίνακα συνδιακύμανσης των αποδόσεων και κατά συνέπεια, μειώνουν τον αριθμό των παραμέτρων που πρέπει να εκτιμηθούν.

Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, ας υποθέσουμε ότι οι αναμενόμενες υπερβάλλουσες αποδόσεις ακολουθούν ένα Μονοπαραγοντικό Υπόδειγμα αποτίμησης, έστω CAPM:

$$r_{i,t} = a_i + \beta_i r_{m,t} + \varepsilon_{i,t}$$

όπου τα διαστρωματικά κατάλοιπα έχουν μηδενική συσχέτιση μεταξύ τους, δηλαδή, ο πίνακας συνδιακύμανσης Σ_ε είναι διαγώνιος και δεν σχετίζονται με τα β_i . Βάζοντας τα K , β_i σε ένα διάνυσμα β , ο πίνακας συνδιακύμανσης των υποβαλλουσών αποδόσεων είναι:

$$\Sigma = \sigma_m^2 \beta \beta' + \Sigma_\varepsilon.$$

Το πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής έγκειται στο ότι μειώνει σημαντικά τον αριθμό των παραμέτρων που πρέπει να εκτιμηθούν στον πίνακα Σ σε $3K + 1$ ($\{a_i, \beta_i, \sigma_i^2\}_{i=1}^K, \sigma_m^2$) έναντι $Kx(K-1)$ χωρίς περιορισμούς. Το μειονέκτημα της μεθόδου αυτής έγκειται στο ότι ένα Μονοπαραγοντικό Υπόδειγμα δεν μπορεί να εξηγήσει επαρκώς τη συσχέτιση μεταξύ των αποδόσεων.

Ο προφανής τρόπος για να ξεπεράσουμε το παραπάνω μειονέκτημα είναι να υποθέσουμε ένα Πολυπαραγοντικό Υπόδειγμα αποτίμησης:

$$r_{i,t} = a_i + \beta_i' f_t + \varepsilon_{i,t}$$

όπου β_i είναι ένα διάνυσμα των β και f_t ένα διάνυσμα των M παραγόντων κινδύνου. Ο πίνακας συνδιακύμανσης των υπερβαλλουσών αποδόσεων είναι:

$$\Sigma = B\Sigma_f B' + \Sigma_\varepsilon$$

όπου B είναι ένας πίνακας ($K \times M$) και Σ_f ο πίνακας συνδιακύμανσης των παραγόντων ($M \times M$).

Αν οι παράγοντες παρουσιάζουν συσχέτιση μεταξύ τους, ο αριθμός παραμέτρων προς εκτίμηση του Σ είναι $\frac{M(M+1)}{2} + K(M+2)$. Αν οι παράγοντες δεν παρουσιάζουν συσχέτιση μεταξύ τους, δηλαδή ο πίνακας Σ_f είναι διαγώνιος, ο αριθμός παραμέτρων προς εκτίμησης του Σ είναι $M + K(M+2)$. Η μείωση του αριθμού των προς εκτίμηση παραμέτρων είναι σημαντική σε σχέση με την εκτίμηση του πίνακα συνδιακύμανσης των αποδόσεων χωρίς περιορισμούς. Για παράδειγμα, με 500 αξιόγραφα στο χαρτοφυλάκιο και 5 παράγοντες, ο αριθμός των παραμέτρων είναι 3.515 αν οι παράγοντες έχουν συσχέτιση έναντι 125.000 παραμέτρων χωρίς περιορισμούς.

Ουσιαστικά, η πρακτική δυσκολία στην εφαρμογή του Πολυπαραγοντικού Υποδείγματος είναι η επιλογή των παραγόντων.

3.3.3. ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΙΣ ΣΤΑΘΜΙΣΕΙΣ ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

Η τρίτη μέθοδος που αποσκοπεί στην μείωση του στατιστικού λάθους στην κατασκευή χαρτοφυλακίων είναι η χρήση περιορισμών στις σταθμίσεις του χαρτοφυλακίου στη διαδικασία βελτιστοποίησης. Οι πιο συνήθεις περιορισμοί είναι περιορισμοί Short Sales (δηλαδή όλες οι σταθμίσεις να είναι θετικές) περιορισμοί στο μέγιστο ύψος των ατομικών σταθμίσεων (δηλαδή καμιά

στάθμιση να μην είναι πάνω από $\chi\%$ και περιορισμοί στο ύψος της μόχλευσης. Η επιβολή περιορισμών είναι πολύ διαδεδομένη στην πράξη. Όπως και στην περίπτωση του εκτιμητή Shrinkage, η επιβολή περιορισμών γίνεται συνήθως αυθαίρετα.

3.4. ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ ΜΕΛΕΤΕΣ

Τόσο το Υπόδειγμα του Markowitz όσο και τα νεότερα υποδείγματα αποτέλεσαν με τη σειρά τους αντικείμενα μελέτης και κριτικής, από διάφορους ερευνητές. Παρακάτω παρουσιάζονται ορισμένες από αυτές τις μελέτες, με αφετηρία το έτος 1967 έως και το 1975.

3.4.1. Kalman J. Cohen – Jerry A. Pogue (1967)

***«An Empirical Evaluation of Alternative Portfolio – Selection Models»,
(The Journal of Business, Vol.40, No.2, Pages: 166-193)***

Οι Cohen και Pogue στο άρθρο τους αναφέρονται στις αδυναμίες που παρουσιάζει το Υπόδειγμα του Markowitz όσον αφορά στις μεγάλες υπολογιστικές απαιτήσεις του καθώς και στο γεγονός ότι αγνοεί τη δυνατότητα δυναμικής αναπροσαρμογής των χαρτοφυλακίων (rebalancing). Εξ' αφορμής αυτών επιχειρούν να αξιολογήσουν εμπειρικά εναλλακτικά μοντέλα επιλογής χαρτοφυλακίου όπως τα Πολυπαραγοντικά και Μονοπαραγοντικά Υποδείγματα. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας κοινές μετοχές, εφήρμοσαν τις τεχνικές του Υποδείγματος του Markowitz, του Μονοπαραγοντικού Υποδείγματος καθώς και δύο τύπους Πολυπαραγοντικών Υποδειγμάτων – Covariance Form και Diagonal Model – προκειμένου για τον υπολογισμό του αποδοτικού συνόλου στο εκάστοτε μοντέλο.

Η εμπειρική τους μελέτη στηρίχθηκε σε δύο δείγματα των 75 και 100 κοινών μετοχών για την περίοδο 1947–1958 και 1958–1964. Οι μελετητές επίσης

χρησιμοποίησαν άνω όριο στα ποσοστά επένδυσης των αποδοτικών χαρτοφυλακίων τους προκειμένου να συνάδουν με τους νόμιμους περιορισμούς της εποχής. Τα αποδοτικά όνορα που προέκυψαν αξιολογήθηκαν σε σχέση με μετοχικά χαρτοφυλάκια τυχαίας σύνθεσης και με 78 μετοχικά A/K της εποχής. Τα αποτελέσματα της έρευνας ανέδειξαν την υπεροχή του Μονοπαραγοντικού Υποδείγματος έναντι των Πολυπαραγοντικών καθώς και την υπεροχή των χαρτοφυλακίων που βρίσκονται στα αποδοτικά όνορα των μοντέλων, έναντι των χαρτοφυλακίων τυχαίας σύνθεσης. Ωστόσο διαπιστώθηκε πως στο σύνολο τους τα A/K των αποδοτικών χαρτοφυλακίων τόσο του Μονοπαραγοντικού όσο και των Πολυπαραγοντικών Υποδειγμάτων.

3.4.2. Buckner A. Wallingford (1967)

«A Survey and Comparison of Portfolio Selection Models»,

**(The Journal of Finance and Quantitative Analysis, Vol.2, No.2, Pages:
85-106)**

Ο αρθρογράφος στηριζόμενος στις μελέτες των Farrar, Cohen και Pogue καθώς και στα Υποδείγματα των Markowitz και Sharp επιχειρεί να αξιολογήσει τα διαφορετικά υποδείγματα επιλογής χαρτοφυλακίου. Ξεκινώντας με τα βασικά μειονεκτήματα - θεωρητικού και πρακτικού επιπέδου – του μοντέλου του Markowitz και αναφέροντας τις απλουστεύσεις του Sharp αρχικώς σκιαγραφεί τη Θεωρία Χαρτοφυλακίου όπως είχε παρουσιαστεί έως τότε. Στη συνέχεια, με τη χρήση εμπειρικών και πλασματικών δεδομένων προβαίνει στην αξιολόγηση των μοντέλων.

Συγκεκριμένα ο Wallingford, στηριζόμενος στις παρατηρήσεις των Cohen και Pogue επιχειρεί να αξιολογήσει τη δυναμική του Μονοπαραγοντικού Υποδείγματος έναντι του Δι-παραγοντικού Υποδείγματος. Για του χρησιμοποιεί δύο δείγματα 20 μετοχών κοινών και προνομιούχων αντίστοιχα. Για τη μελέτη εφαρμόζονται τόσο πραγματικά όσο και

προσομοιωμένα στοιχεία ενώ, σε αντίθεση με την έρευνα των Cohen και Rogue, δεν εφαρμόζονται περιορισμοί στα ποσοστά επενδύσεων των χαρτοφυλακίων. Τα αποτελέσματα της μελέτης αναδεικνύουν την υπεροχή των Πολυπαραγοντικών μοντέλων επιλογής χαρτοφυλακίων γεγονός που σύμφωνα με τον Wallingford πιθανώς να οφείλεται στους ιδιαίτερους περιορισμούς της έρευνας.

3.4.3. Harbans Lal Dhingra (1975)

«Stability of Efficient Portfolio Under Uncertainty»,

(The Journal of Finance and Quantitative Analysis, Vol.30, No.3, Pages: 912-914)

Στο έργο «Stability of Efficient Portfolio Under Uncertainty» επιχειρείται να αναδειχθεί το πρόβλημα της αβεβαιότητας στη διαδικασία επιλογής χαρτοφυλακίων που προέρχονται από την ύπαρξη σφαλμάτων στους εκτιμητές των παραμέτρων των βασικών μοντέλων των Markowitz και Sharp.

Ο αρθρογράφος χρησιμοποιεί τα ιστορικά στοιχεία τριμηνιαίων αποδόσεων των μετοχών των εκατό μεγαλύτερων κατασκευαστικών εταιρειών της Αμερικής για την περίοδο 1957-1971 διακρίνοντας τη μελέτη της σε τέσσερις δειγματικές περιόδους (10 τρίμηνα, 20 τρίμηνα, 40 τρίμηνα, 60 τρίμηνα). Για κάθε δειγματική περίοδο εφαρμόζει τη μέθοδο της γραμμικής παλινδρόμησης των ελαχίστων τετραγώνων προκειμένου να εξάγει τη σχέση μεταξύ των τριμηνιαίων αποδόσεων των μετοχών κάθε εταιρείας με τις αντίστοιχες του Γενικού Δείκτη των κατασκευών (Standard & Poor's Industrial Index) και να υπολογιστεί τους εκτιμητές των παραμέτρων του μοντέλου. Στη συνέχεια εκτιμάται η επίδραση των σφαλμάτων των εκτιμητών των παραμέτρων στις αντίστοιχες εκτιμήσεις των χαρακτηριστικών απόδοσης και κινδύνου. Συγκεκριμένα, στη μελέτη υποστηρίζεται ότι λόγω ύπαρξη σφαλμάτων στους εκτιμητές των παραμέτρων του μοντέλου του Sharp, το μοντέλο προσδίδει διαφορετικές εκτιμήσεις του κινδύνου και της απόδοσης των χαρτοφυλακίων

που βρίσκονται πάνω στο αποδοτικό σύνολο από τις αντίστοιχες πραγματικές. Εν κατακλείδι, υποστηρίζεται ότι το μοντέλο του Sharp παραπλανεί τους επενδυτές όσον αφορά στην επιλογή του άριστου χαρτοφυλακίου καθώς στην πραγματικότητα, λόγω ύπαρξης σφαλμάτων στους εκτιμητές των παραμέτρων, θα απολαμβάνουν περισσότερο κίνδυνο και μικρότερη απόδοση από εκείνη που ορίζει το αποδοτικό σύνολο του Sharp.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΕΠΙΛΟΓΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΜΕ BACKGROUND RISK

4.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τις επιπτώσεις του background risk για την επιλογή του χαρτοφυλακίου ενός επενδυτή στα πλαίσια του Υποδείγματος Μέσου-Διακύμανσης, και θα αναλύσουμε τις ιδιότητες του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης καθώς και τη συμπεριφορά αντιστάθμισης των επενδυτών κατά την παρουσία background risk.

Όταν οι επενδυτές επιλέγουν χαρτοφυλάκια με διάφορα χρηματοοικονομικά περιουσιακά στοιχεία, έχουν να αντιμετωπίσουν όχι μόνο το βασικό κίνδυνο του χαρτοφυλακίου αλλά και το background risk ο οποίος προκύπτει από διάφορους παράγοντες, συμπεριλαμβανομένου του πληθωρισμού, του εισοδήματος εργασίας, των επενδύσεων σε ακίνητα καθώς και των υποχρεώσεων από τη διαχείριση ενός συνταξιοδοτικού Αμοιβαίου Κεφαλαίου και ούτω καθεξής. Τα περιουσιακά στοιχεία που εκτίθενται σε background risk είναι τα background assets και τα χρηματοοικονομικά περιουσιακά στοιχεία. Στην παρούσα ανάλυση, υποθέτουμε ότι όλα τα χρηματοοικονομικά περιουσιακά στοιχεία που επενδύονται στις χρηματοπιστωτικές αγορές καλούνται περιουσιακά στοιχεία χαρτοφυλακίου. Επειδή τα background assets δεν είναι εύκολα ρευστοποιήσιμα και εμπορεύσιμα, είναι πρακτικά αδύνατο για τους επενδυτές να ελέγξουν το background risk προσαρμόζοντας αυτά τα περιουσιακά στοιχεία βραχυπρόθεσμα. Αφού ο συνολικός κίνδυνος και όχι μόνο ο κίνδυνο του χαρτοφυλακίου είναι το βασικό μας μέλημα, η ύπαρξη του background risk μπορεί να επηρεάσει σημαντικά τις επενδυτικές αποφάσεις των επενδυτών στα διάφορα περιουσιακά στοιχεία του χαρτοφυλακίου. Γι' αυτό το λόγο θα μελετήσουμε τις επιπτώσεις του background risk στην επιλογή χαρτοφυλακίου και θα εξετάσουμε τα ιδιότητες του επιλεγμένου χαρτοφυλακίου μέσα σε ένα πλαίσιο του Μέσου-Διακύμανσης.

4.2. ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΜΕΛΕΤΩΝ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ BACKGROUND RISK

Οι παραδοσιακές μελέτες χαρτοφυλακίου, όπως είναι του Markowitz (1952), του Merton (1969, 1971) και του Samuelson (1969) δεν λαμβάνουν υπόψη τον background risk, καθώς θεωρούν ότι η αγορά είναι πλήρης, γεγονός που συνεπάγεται ότι τα background assets μπορούν να καλυφθούν και να τιμολογηθούν από διαπραγματεύσιμα χρηματοοικονομικά περιουσιακά στοιχεία. Κατά συνέπεια, η ορθότητα των αποτελεσμάτων εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την υπόθεση της πληρότητας της αγοράς. Στην πραγματικότητα, αποδεικνύεται ότι η παραδοσιακή θεωρία χαρτοφυλακίου αδυνατεί να εξηγήσει τις επενδυτικές αποφάσεις των επενδυτών στην πράξη (Campbell 2006). Παρ' όλα αυτά οι Lusk και Coble (2008) κατέληξαν πως οι επενδυτές είναι περισσότερο επιφυλακτικοί (risk-averse) στην παρουσία background risk από ότι είναι στην απουσία αυτού. Από την άλλη πλευρά, ο Cocco (2005) ανέλυσε τις επιπτώσεις που έχουν οι επενδυτές σε κατοικίες για τη σύσταση του χαρτοφυλακίου ενός επενδυτή και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι επενδύσεις αυτές διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη συσσώρευση περιουσιακών στοιχείων και στην επιλογή του χαρτοφυλακίου μεταξύ μετοχών και εντόκων γραμματίων. Επιπλέον, πολλές έρευνες έχουν μελετήσει τη σχέση μεταξύ της μεταβολής του εισοδήματος εργασίας και των επενδυτικών αποφάσεων για την επιλογή χαρτοφυλακίου και επιβεβαιώνουν τη σχέση του κινδύνου του εισοδήματος εργασίας με την κατανομή των περιουσιακών στοιχείων (Bodie 1992, Heaton και Lucas 2000, Viceira 2001).

Επίσης, πολλά θεωρητικά μοντέλα έχουν επίσης αναπτυχθεί προκειμένου να συμπεριλάβουν τις επιπτώσεις του background risk στην επιλογή χαρτοφυλακίου. Ο Solnik (1978) από την άλλη πραγματεύεται την επίδραση του μη-αναμενόμενου πληθωρισμού στην επιλογή χαρτοφυλακίου, το οποίο μπορεί να ερμηνευθεί και ως αιτία του background risk.

Στην παρούσα εργασία αναλύονται οι ιδιότητες του βέλτιστου χαρτοφυλακίου με την παρουσία του background risk δίνοντας έμφαση στην αντισταθμιστική συμπεριφορά των επενδυτών. Αυτό είναι σημαντικό, διότι μας βοηθά στην

κατανόηση του μηχανισμού που βρίσκεται πίσω από την κατασκευή του εν λόγω χαρτοφυλακίου προκειμένου να αντισταθμίζει το background risk. Λόγω των ποικίλων παραγόντων του background risk απαιτούνται πολλοί διαφορετικοί συνδυασμούς περιουσιακών στοιχείων προκειμένου να χρησιμοποιηθούν ως μέσα αντιστάθμισης του background risk, σε αυτό παίζει καθοριστικό ρόλο η συσχέτισή τους με τα background assets. Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί ότι τόσο ο κίνδυνος όσο και η αναλογία των background assets μπορούν να μεταβάλλουν την ανοχή των επενδυτών στον κίνδυνο καθώς και την επενδυτική τους συμπεριφορά.

4.3. ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Θεωρούμε έναν επενδυτή με αρχική πλούτο W_0 , ο οποίος είναι ένα άθροισμα των background assets και των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου. Εάν τα βάρη των background assets είναι $(1-w)$ και των υπολοίπων περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου είναι w , τότε με βάση το συνολικό πλούτο θα ισούνται με $W_0(1-w)$ και W_0w αντίστοιχα. Τα βάρη w και $(1-w)$ είναι γνωστά και δίδονται κατά την έναρξη της επενδυτικής περιόδου. Επειδή τα background assets δεν είναι εμπορεύσιμα υποθέσουμε πως τα $(1-w)$ καθορίζονται κατά τη χρονική περίοδο εξέτασης του μοντέλου μας.

Εάν οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου και των background assets συμβολίζονται r_p και r_b , αντίστοιχα, τότε ο συνολικός πλούτος του επενδυτή κατά τη λήξη της περιόδου επένδυσης t μπορεί να εκφράζεται ως εξής,

$$W_t = W_0(1 + wr_p + (1-w)r_b) \quad (1)$$

Ας υποθέσουμε πως υπάρχουν διαθέσιμα στην αγορά n χρηματοοικονομικά περιουσιακά στοιχεία των οποίων οι αποδόσεις εκφράζονται με τη βοήθεια ενός διάνυσμα R στηλών. Το χαρτοφυλάκιο είναι ένα διάνυσμα,

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$$

όπου,

q_i : είναι το ποσοστό του χαρτοφυλακίου που επενδύεται σε i περιουσιακά στοιχεία και

T : ο εκθέτης αντιπροσωπεύει την αντιμεταθετική ιδιότητα.

Άρα, η απόδοση του χαρτοφυλακίου δίδεται από την σχέση $r_p = q^T R$. Η αναμενόμενη απόδοση και η διακύμανση του συνολικού πλούτου κατά την ημερομηνία λήξης της επένδυσης δίνονται από τις σχέσεις:

$$E(W_t) = W_0(1 + wq^T R + (1 - w)E(r_b)) \quad (2)$$

$$Var(W_t) = W_0^2(w^2 q^T V q + 2w(1 - w)q^T Cov(R, r_b) + (1 - w)^2 Var(r_b)) \quad (3)$$

όπου,

- R : το διάνυσμα της αναμενόμενης απόδοσης των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου και
- V : ο πίνακας συνδιακύμανσης των αποδόσεων. Σημειώνεται πως ο πίνακας V δεν είναι μοναδιαίος.

Για να επιλύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης υποθέτουμε πως ο επενδυτής ακολουθεί το υπόδειγμα Μέσου-Διακύμανσης:

$$\min Var(W_t) \quad \text{s.t} \quad E(W_t) = W \quad (4)$$

$$q^T I = 1$$

όπου,

- I : ένας διάνυσμα n στηλών με όλα τα στοιχεία του να ισούνται με την μονάδα.

Δεδομένου ότι, ο background risk δεν μπορεί να ασφαλισθεί και αποτελεί εξωγενή παράγοντα για το μοντέλο μας, η εξίσωση (4) είναι ισοδύναμη με το εξής πρόβλημα:

$$\min w^2 q^T V q + 2w(1-w)q^T \text{Cov}(R, r_b) \quad \text{s.t.} \quad q^T R = \mu \quad (5)$$

$$q^T I = 1$$

όπου,

- $\mu = \frac{\frac{W}{W_0} - 1 - (1-w)E(r_b)}{w}$, και
- $\text{Cov}(R, r_b)$: ένα διάνυσμα n στηλών της συνδιακύμανσης μεταξύ των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων και των background assets.

Όπως επισημάνθηκε από τους Lusk και Cobre (2008), εάν τα background assets είναι ασυσχέιστα με τα περιουσιακά στοιχεία του χαρτοφυλακίου, τότε το background risk δεν έχει καμία επίπτωση στην επιλογή χαρτοφυλακίου των επενδυτών. Στην περίπτωση αυτή, το μοντέλο μας περιορίζει το πρόβλημα βελτιστοποίησης του παραδοσιακού Υποδείγματος του Markowitz. Επιβάλλεται, λοιπόν η προϋπόθεση ότι η $\text{Cov}(R, r_b) \neq 0$ και θα εξετάσουμε πώς η λύση της εξίσωσης (5) αποκλίνει από το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο κατά την απουσία του background risk.

Σημειώνεται ότι το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο με την παρουσία background risk υπερिशύει του παραδοσιακού βέλτιστου χαρτοφυλακίου και έχει μεγαλύτερο κίνδυνο. Για να φανεί αυτό, συμβολίζουμε ως q^* το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο στο παραδοσιακό πρόβλημα Μέσου-Διακύμανσης και ως q_b^* τη λύση του μοντέλου μας. Για απλούστευση έστω, $u(\cdot)$ και $U(\cdot)$ είναι οι συναρτήσεις

χρησιμότητας για το παραδοσιακό πρόβλημα και για το μοντέλο μας, αντίστοιχα. Ελαχιστοποιώντας την $u(\cdot)$ και την $U(\cdot)$ έχουμε τις ακόλουθες ανισότητες:

$$U(q_b^*) \leq U(q^*), \quad u(q^*) \leq u(q_b^*)$$

Δηλαδή,

$$w^2 q_b^{*T} V q_b^* + 2w(1-w) q_b^{*T} Cov(R, r_b) \leq w^2 q^{*T} V q^* + 2w(1-w) q^{*T} Cov(R, r_b) \quad (6)$$

$$q^{*T} V q^* \leq q_b^{*T} V q_b^* \quad (7)$$

Συνεπώς, ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου q_b^* είναι υψηλότερος από αυτόν του q^* . Ωστόσο, ο κίνδυνος του συνόλου των περιουσιακών στοιχείων περιορίζεται λόγω της σχέσης:

$$q_b^{*T} Cov(R, r_b) \leq q^{*T} Cov(R, r_b) \quad (8)$$

Σύμφωνα με τους Sharpe και Tint (1990), ορίζουμε το Background Risk Hedging Credit ($BRHC$) για το χαρτοφυλακίου q ως εξής:

$$BRHC_q = -q^T Cov(R, r_b) = -\sigma_b \sum_{i=1}^n q_i \rho_{i,b} \sigma_i$$

όπου,

σ_i : η τυπική απόκλιση i περιουσιακού στοιχείου του χαρτοφυλακίου,

σ_b : η τυπική απόκλιση των background asset και

$\rho_{i,b}$: ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ του περιουσιακού στοιχείου του χαρτοφυλακίου και του background asset.

Ο $BRHC$ για ένα χαρτοφυλάκιο μετρά την αλληλεπίδραση μεταξύ των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου και των background assets και προσδιορίζει πώς αυτή η αλληλεπίδραση επηρεάζει το συνολικό κίνδυνο. Η εξίσωση (8) συνεπάγεται ότι τα χαρτοφυλάκια που έχουν υψηλότερο $BRHC$ μπορούν να αντισταθμίσουν καλύτερα το background risk. Μολονότι το χαρτοφυλάκιο q_b^* έχει υψηλότερο κίνδυνο από ότι το q^* , ωστόσο είναι πιο πιθανό να περιορίσουν το συνολικό κίνδυνο που αντιμετωπίζουν οι επενδυτές λόγω των υψηλότερων $BRHC$ τους.

Ομοίως, προσδιορίζουμε το $BRHC$ για ένα περιουσιακό στοιχείο i , $BRHC_i = -Cov(r_i, r_b)$. Ουσιαστικά, ο $BRHC_i$ είναι ο οριακός πιστωτικός κίνδυνος αντιστάθμισης ενός περιουσιακού στοιχείου i , και όσο υψηλότερος ο $BRHC_i$ τόσο καλύτερα το περιουσιακό στοιχείο αντισταθμίζει το background risk. Προφανώς, ο $BRHC$ για ένα χαρτοφυλάκιο είναι απλά ο σταθμισμένος μέσος των $BRHC_s$ των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου. Δηλαδή,

$$BRHC_q = \sum_{i=1}^n q_i BRHC_i \quad (9)$$

4.4. Η ΛΥΣΗ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

4.4.1. Η ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας τους πολλαπλασιαστές Lagrange για τους δύο περιορισμούς, η πρώτη προϋπόθεση για τη βελτιστοποίηση του προβλήματος της εξίσωσης (5) επιτυγχάνεται ως εξής:

$$2w^2Vq + 2w(1-w)\text{Cov}(R, r_b) - \lambda_1 R - \lambda_2 I = 0 \quad (10)$$

όπου,

- λ_1 και λ_2 είναι ο Πολλαπλασιαστής Lagrange.

Λύνοντας ως προς το q την εξίσωση (10) έχουμε:

$$q = \frac{1}{2w^2}V^{-1}(\lambda_1 R + \lambda_2 I - 2w(1-w)\text{Cov}(R, r_b)) = \frac{1}{2w^2}(\lambda_1 b q_1 + \lambda_2 c q_0) - \frac{1-w}{w} f q_2 \quad (11)$$

όπου,

- $b = I^T V^{-1} R$,
- $c = I^T V^{-1} I$, και
- $f = I^T V^{-1} \text{Cov}(R, r_b)$.

Σύμφωνα με την ανάλυση του Roll (1992):

- $q_0 = \frac{V^{-1}}{I^T V^{-1} I}$: είναι η ελάχιστη διακύμανση του χαρτοφυλακίου στο παραδοσιακό μοντέλο Μέσου-Διακύμανσης, και
- $q_1 = \frac{V^{-1} R}{I^T V^{-1} R}$ είναι το σημείο τομής των αποτελεσματικών συνόρων και της ευθείας που διέρχεται από το q_0 .
- Επίσης και το $q_2 = \frac{1}{f} V^{-1} \text{Cov}(R, r_b)$ και $q_2^T I = 1$.

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (11) στους περιορισμούς της εξίσωσης (5), οι αποδόσεις των Πολλαπλασιαστών Lagrange δίδονται από τις:

$$\lambda_1 = \frac{2w^2}{b(R_1 - R_0)} \left((\mu - R_0) + \frac{1-w}{w} f(R_2 - R_0) \right),$$

$$\lambda_2 = \frac{2w^2}{c(R_1 - R_0)} \left((R_1 - \mu) + \frac{1-w}{w} f(R_1 - R_2) \right)$$

όπου,

- $R_0 = q_0^T R$,
- $R_1 = q_1^T R$, και
- $R_2 = q_2^T R$.

Ως εκ τούτου, το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο για το μοντέλο μας είναι:

$$q = \left(\frac{R_1 - \mu}{R_1 - R_0} q_0 + \frac{\mu - R_0}{R_1 - R_0} q_1 \right) + \frac{1-w}{w} f \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1 - R_0} q_0 + \frac{R_2 - R_0}{R_1 - R_0} q_1 - q_2 \right) = q_{MV} + \frac{1-w}{w} f q_H \quad (12)$$

όπου,

- $q_{MV} = \frac{R_1 - \mu}{R_1 - R_0} q_0 + \frac{\mu - R_0}{R_1 - R_0} q_1$, και
- $q_H = \frac{R_1 - R_2}{R_1 - R_0} q_0 + \frac{R_2 - R_0}{R_1 - R_0} q_1 - q_2$

Από την εξίσωση (12) μπορούμε να δούμε ότι, όταν η διαδικασία λήψης αποφάσεων λαμβάνει υπόψη τον background risk, το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο μπορεί να αναλυθεί σε δύο παράγοντες:

- το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο q_{MV} με την παραδοσιακή έννοια Μέσου-Διακύμανσης και
- το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης του background risk.

Ο δεύτερος παράγοντας $\frac{1-w}{w}fq_H$ μετρά την απόκλιση του χαρτοφυλακίου q από το χαρτοφυλάκιο q_{MV} κατά την παρουσία background risk. Σκοπός αυτής της απόκλισης είναι η αύξηση του $BRHC$ του χαρτοφυλακίου q , με αποτέλεσμα την καλύτερη αντιστάθμιση του background risk. Για το λόγο αυτό, καλείται και χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης του background risk. Η κατασκευή του εν λόγω χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης δεν εξαρτάται μόνο από τη συνδιακύμανση μεταξύ των background assets και των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου, αλλά και από τον πίνακα συνδιακύμανσης των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου. Επιπλέον, όταν οι άλλοι παράγοντες παραμένουν σταθεροί, όσο υψηλότερο είναι το ποσοστό $\frac{1-w}{w}$, τόσο περισσότερο το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο θα αποκλίνει από το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο Μέσου-Διακύμανσης.

4.4.2. Η ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΕΠΕΝΔΥΤΩΝ ΣΤΟ BACKGROUND RISK

Εξετάζοντας την συμπεριφορά αντιστάθμισης των επενδυτών, επικεντρώνουμε την προσοχή μας στις ιδιότητες του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης του background risk $q_H = \frac{R_1 - R_2}{R_1 - R_0}q_0 + \frac{R_2 - R_0}{R_1 - R_0}q_1 - q_2$, και εξηγούμε γιατί είναι έτσι κατασκευασμένο.

Ξεκινώντας από τον 3^ο όρο το q_2 εξετάζουμε την ακόλουθη παλινδρόμησης,

$$r_b = \alpha + B^T R,$$

όπου,

- B : το διάνυσμα του συντελεστή παλινδρόμησης.

Τα α και $B^T R$ είναι τα αντίστοιχα τμήματα των αποδόσεων του background asset και έχουν $Cov(R, \alpha) = 0$.

Ως εκ τούτου, με βάση την εξίσωση $r_b = \alpha + B^T R$ έχουμε:

$$V^{-1}Cov(R, r_b) = V^{-1}Cov(R, \alpha + B^T R) = B \quad (13)$$

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι, $q_2 = \frac{1}{B^T I} B$. Ως αποτέλεσμα, το χαρτοφυλάκιο q_2 εκφράζει τις αποδόσεων του background asset, οι οποίες μπορούν να ερμηνευθούν από τις αποδόσεις των στοιχείων του χαρτοφυλακίου. Επομένως, το $B^T I$ μέτρα την ευαισθησία των αποδόσεων του background asset στις αλλαγές των αποδόσεων του περιουσιακού στοιχείου του χαρτοφυλακίου. Για το λόγο αυτό, το χαρτοφυλάκιο q_2 αυξάνει το $BRHC$ του βέλτιστου χαρτοφυλακίου και παίζει καθοριστικό ρόλο στην αντιστάθμιση του background risk. Υπενθυμίζουμε ότι τα background assets αποτελούν το $(1-w)$ του συνόλου των περιουσιακών στοιχείων και το υπόλοιπο αποτελείται από τα περιουσιακά στοιχεία του χαρτοφυλακίου.

Εν συνεχεία εξετάζουμε ένα άλλο χαρτοφυλάκιο, το $\frac{R_1 - R_2}{R_1 - R_0} q_0 + \frac{R_2 - R_0}{R_1 - R_0} q_1$, το

οποίο είναι το άθροισμα των δύο πρώτων όρων του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης. Αρχικά θα λέγαμε ότι, η αναμενόμενη απόδοση του συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου είναι ίδια με εκείνη του χαρτοφυλακίου q_2 . Ως εκ τούτου, βασικός σκοπός του χαρτοφυλακίου είναι να ακυρώσει την απόδοση που δημιουργήθηκε από το χαρτοφυλάκιο q_2 , έτσι ώστε το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο να επιτυγχάνει την απαιτούμενη απόδοση μ . Από όλα τα χαρτοφυλάκια που έχουν την ίδια αναμενόμενη απόδοση όπως αυτό του q_2 ,

το αποδοτικό χαρτοφυλάκιο είναι πιο αποτελεσματικό στην μείωση του συνολικού κινδύνου. Για το λόγο αυτό, το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο διαμορφώνεται έτσι ώστε να αντισταθμίζει τον κίνδυνο που προκύπτουν από το χαρτοφυλάκιο q_2 .

Με βάση την ανάλυσή μας, ο διαχωρισμός του βέλτιστου χαρτοφυλακίου κατά την ύπαρξη του background risk δείχνει ότι η διαδικασία επιλογής χαρτοφυλακίου μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

1. Για μια δεδομένη αναμενόμενη απόδοση, οι επενδυτές επιλέγουν το παραδοσιακό χαρτοφυλάκιο q_{MV} Μέσου-Διακύμανσης.
2. Οι επενδυτές κατασκευάζουν χαρτοφυλάκιο q_2 που καταγράφει τις μεταβολές των αποδόσεων του background asset και του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου $\frac{R_1 - R_2}{R_1 - R_0} q_0 + \frac{R_2 - R_0}{R_1 - R_0} q_1$, το οποίο έχει την ίδια αναμενόμενη απόδοση με το q_2 , και τέλος
3. Το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης προσδιορίζεται με βάση την αναλογία των background assets ως προς τα περιουσιακά στοιχεία του χαρτοφυλακίου.

4.4.3. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗΣ

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε τα χαρακτηριστικά του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης και θα δούμε πώς αυτό επηρεάζει τον κίνδυνο του βέλτιστου χαρτοφυλακίου στο μοντέλο μας.

Πρόταση 1. Το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης κινδύνου έχει αναμενόμενη απόδοση ίση με το μηδέν.

Απόδειξη: Το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης είναι ένα αυτο-χρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο, διότι ισχύει το εξής:

$$q_H^T I = \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1 - R_0} q_0 + \frac{R_2 - R_0}{R_1 - R_0} q_1 - q_2 \right)^T I = \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1 - R_0} + \frac{R_2 - R_0}{R_1 - R_0} - 1 \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{R_1 - R_2 + R_2 - R_0 - R_1 + R_0}{R_1 - R_0} = 0$$

Επίσης είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι, $q_H^T R = 0$. Δεν υπάρχουν λοιπόν, αποδόσεις που να προκύπτουν από το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης. Αυτό δεν αποτελεί έκπληξη, δεδομένου του γεγονότος ότι η δημιουργία του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης είναι ανεξάρτητη από την απαιτούμενη απόδοση.

Πρόταση 2. Ο BRHC του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης δεν είναι αρνητικός.

Απόδειξη: Δεδομένου της εξίσωσης (12), έχουμε:

$$BRHC_q = BRHC_{q_{MV}} + \frac{1-w}{w} fBRHC$$

Η εξίσωση (8) δείχνει ότι το χαρτοφυλάκιο q έχει υψηλότερο BRHC απ' ό τι το χαρτοφυλάκιο q_{MV} .

$$\text{Άρα, } \frac{1-w}{w} fBRHC_{q_H} \geq 0.$$

$$\text{Επομένως, } \frac{R_1 - R_2}{R_1 - R_0} fBRHC_{q_0} + \frac{R_2 - R_0}{R_1 - R_0} fBRHC_{q_1} \geq fBRHC_{q_2}$$

Πρόταση 3. Το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης και το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο (Μέση-Διακύμανσης) είναι ασυσχέτιστα, δηλαδή ισχύει,

$$\text{Cov}(q_H^T R, q_{MV}^T R) = 0 \quad (14)$$

Απόδειξη: Μπορεί να αποδειχθεί ότι,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(q_H^T R, q_{MV}^T R) &= q_H^T V q_{MV} = \\ &= \left[\left(\frac{R_1 - R_2}{R_1 - R_0} q_0 + \frac{R_2 - R_0}{R_1 - R_0} q_1 - q_2 \right)^T V \left(\frac{R_1 - \mu}{R_1 - R_0} q_0 + \frac{\mu - R_0}{R_1 - R_0} q_1 \right) \right] = \\ &= \left[\left(\frac{(R_1 - R_2)(R_1 - \mu)}{(R_1 - R_0)^2} + \frac{(R_1 - R_2)(\mu - R_0)}{(R_1 - R_0)^2} + \frac{(R_2 - R_0)(R_1 - \mu)}{(R_1 - R_0)^2} - \frac{R_1 - \mu}{R_1 - R_0} q_1 \right) \sigma_0^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{(R_2 - R_0)(\mu - R_0)}{(R_1 - R_0)^2} \sigma_1^2 - \frac{\mu - R_0}{R_1 - R_0} q_2^T V q_1 \right) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

όπου,

σ_0^2 : οι διακυμάνσεις του χαρτοφυλακίου q_0 και

σ_1^2 : οι διακυμάνσεις του χαρτοφυλακίου q_1 .

Έστω ότι $a = R^T V^{-1} R$, τότε θα έχουμε τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$R_0 = \frac{b}{c}, \quad R_1 = \frac{a}{b}, \quad \sigma_0^2 = \frac{1}{c}, \quad \sigma_1^2 = \frac{\alpha}{b^2} \quad \text{και}$$

$$q_2^T V q_1 = \left(\frac{V^{-1} \text{Cov}(R, r_b)}{I^T V^{-1} \text{Cov}(R, r_b)} \right)^T V \left(\frac{V^{-1} R}{I^T V^{-1} R} \right) = \frac{R_2}{b} \quad (16)$$

Αντικαθιστώντας R_0 , R_1 , σ_0^2 , σ_1^2 και την Εξίσωση (16) στην (15) προκύπτει η Εξίσωση (14).

Η 3^η Πρόταση επιβεβαιώνει προηγούμενη διαπίστωση μας ότι η απόφαση επιλογής χαρτοφυλακίου του επενδυτή διαχωρίζεται με την παρουσία background risk. Δηλαδή, το χαρτοφυλάκιο του επενδυτή έχει δύο ανεξάρτητους παράγοντες:

- το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο Μέσου-Διακύμανσης χωρίς «ευαισθησία» στο background risk και
- το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης του background risk.

Πρόταση 4. Αν το χαρτοφυλάκιο q_2 είναι ένα αποδοτικό χαρτοφυλάκιο Μέσου-Διακύμανσης, τότε δεν «προσθέτει» κίνδυνο στο βέλτιστο χαρτοφυλάκιο q . Διαφορετικά, αυξάνει τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου.

Απόδειξη: Αν q_2 είναι ένα αποδοτικό χαρτοφυλάκιο Μέσου-Διακύμανσης, με βάση το Θεώρημα «Two-fund Separation» υποδηλώνεται ότι,

$$q_2 = Kq_0 + (1-K)q_1 \quad (17)$$

όπου,

$$K = \frac{R_1 - R_2}{R_1 - R_0}.$$

Ως εκ τούτου, έχουμε, $q_H = 0$, δηλαδή,

$$\frac{1-w}{w} fq_H = 0 \quad (18)$$

Από την εξίσωση (12), ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου είναι $q_{MV}^T V q_{MV}$, ο οποίος είναι ίδιος με εκείνον του χαρτοφυλακίου κατά την απουσία του background risk.

Εάν το χαρτοφυλάκιο q_2 δεν είναι ένα αποδοτικό χαρτοφυλάκιο Μέσου-Διακύμανσης, τότε έχουμε την ακόλουθη ανισότητα,

$$\frac{1-w}{w} fq_H \neq 0.$$

Από την Πρόταση 3 συνεπάγεται ότι ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου με την παρουσία background risk μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\sigma_p^2 = q_{MV}^T V q_{MV} + \left(\frac{1-w}{w} f q_H\right)^T V \left(\frac{1-w}{w} f q_H\right) > q_{MV}^T V q_{MV} \quad (19)$$

Σε αυτή την περίπτωση, η διακύμανση του βέλτιστου χαρτοφυλακίου αυξάνει κατά $\left(\frac{1-w}{w} f q_H\right)^T V \left(\frac{1-w}{w} f q_H\right)$ λόγω του ότι συμπεριλαμβάνει το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης.

Όταν το χαρτοφυλάκιο q_2 είναι ένα αποδοτικό χαρτοφυλάκιο Μέσου-Διακύμανσης, τότε αυτό σημαίνει ότι τα background assets μπορούν να διαχωριστούν από όλα τα χρηματοοικονομικά περιουσιακά στοιχεία (Huberman και Kandel, 1987). Κατά συνέπεια, οι επενδυτές έχουν το ίδιο αποτελεσματικό σύνολο κατά την παρουσία background risk όπως και στο παραδοσιακό πρόβλημα Μέσου-Διακύμανσης.

4.4.4. ΤΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟ ΣΥΝΟΡΟ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΥΠΑΡΞΗ ΤΟΥ BACKGROUND RISK

Όταν τα background assets δεν μπορούν να διαχωριστούν με τα περιουσιακά στοιχεία του χαρτοφυλακίου, τότε ξαναγράψουμε την εξίσωση (12) ως εξής,

$$q = q_{MV} + X \quad (20)$$

όπου,

- $X = \frac{1-w}{w} f q_H$.

Από την Πρόταση 3, η διακύμανση του χαρτοφυλακίου κατά την ύπαρξη/παρουσία background risk είναι,

$$\sigma_p^2 = q^T V q = q_{MV}^T V q_{MV} + X^T V X = \frac{1}{d}(c\mu^2 - 2b\mu + a) + \theta, \quad (21)$$

όπου,

- $d = ac - b^2$,
- $\theta = X^T V X$, με $\theta > 0$.

Η εξίσωση (21) είναι το αποτελεσματικό σύνολο του επενδυτή κατά την ύπαρξη του background risk. Ουσιαστικά η εξίσωση αυτή δείχνει ότι η ύπαρξη του background risk μετακινεί ελαφρώς το αποτελεσματικό σύνολο προς τα δεξιά χωρίς καμία αλλαγή στο σχήμα.

Συνεπώς, η ελάχιστη μεταβολή του χαρτοφυλακίου με background risk είναι $q = q_0 + X$ και η αναμενόμενη απόδοση του είναι η ίδια με εκείνη του χαρτοφυλακίου q_0 .

Στην περίπτωση αυτή, το χαρτοφυλάκιο της αγοράς είναι ένας κυρτός γραμμικός συνδυασμός των χαρτοφυλακίων που δημιουργήθηκαν από μεμονωμένους επενδυτές, όταν η αγορά φθάνει σε ισορροπία. Ως εκ τούτου, το χαρτοφυλάκιο της αγοράς δεν είναι ένα αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο στα πλαίσια του παραδοσιακού Μέσου-Διακύμανσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ:5 ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

5.1. ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Στο κεφάλαιο αυτό θα παραθέσουμε αριθμητική εφαρμογή του βέλτιστου χαρτοφυλακίου κατά την παρουσία ή μη background risk.

Για αυτό το σκοπό, αποφασίσαμε να χρησιμοποιήσουμε:

1. Για το τμήμα του χαρτοφυλακίου μας που θα εμπεριέχει κίνδυνο,
 - ένα κλαδικό δείκτη που περιλαμβάνει μετοχές 300 επιχειρήσεων υψηλής κεφαλαιοποίησης της Κίνας, τον **China International Trust & Investment Corporation (CITIC) S&P**,
 - Από τον δείκτη αυτό επιλέγουμε 3 μετοχές (risky assets), από τους κλάδους των Τραπεζών (Banking), Ακινήτων (Real Estate) και Δημόσιων Επιχειρήσεων Κοινής Ωφέλειας (Public Utility) και αυτό για να επιτύχουμε καλύτερη διαφοροποίηση στο δείγμα μας,
2. Για το «ασφαλές» τμήμα του χαρτοφυλακίου μας που θα εμπεριέχει το περιουσιακό στοιχείο μηδενικού κινδύνου (risk-free rate),
 - έναν ομολογιακό δείκτη κρατικά ομολόγων της Σαγκάης τον **Shanghai Exchange Government Index**.

Οι τιμές για τους παραπάνω δείκτες αποτελούν παρατηρήσεις σε μηνιαία βάση για την περίοδο από την 1^η Ιανουαρίου 2006 έως και την 31^η Δεκεμβρίου 2009 τα οποία προέρχεται από την DataStream.

Αρχικά υποθέτουμε πως:

- ο συνολικός αρχικός πλούτος του επενδυτή είναι $W_0 = 1$ και

- ο αναμενόμενος πλούτος του στη λήξη της επενδυτικής περιόδου είναι $W = 1.03$.

Για να μπορέσουμε να συνεχίσουμε την έρευνα μας και να εξετάσουμε τις που έχει η παρουσία background risk στην επιλογή χαρτοφυλακίου, θα θεωρήσουμε διάφορα σενάρια, καθένα από τα οποία αντιπροσωπεύει ένα συνδυασμό των ακόλουθων μεταβλητών, δηλαδή:

1. Η αναλογία των background assets ως προς το σύνολο των περιουσιακών στοιχείων είναι $= 0,3$ ή $0,7$.
2. Παίρνουμε ως δεδομένο πως η τυπική απόκλιση των background assets είναι $0,1$ ή $0,3$, ενώ
3. Η αναμενόμενη απόδοση των background assets είναι 2%
4. Η συσχέτιση μεταξύ των background assets και των μετοχών υψηλού κινδύνου (risky assets) είναι είτε θετικές είτε αρνητικές και οι συντελεστές τους είναι -0.5 , -0.1 , ή $0,1$, $0,5$, ενώ
5. Η συσχέτιση μεταξύ των background assets και του περιουσιακού στοιχείου μηδενικού κινδύνου (risk-free rate) είναι 0 .

5.2. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Το σύνολο των στατιστικών μας στοιχείων, δηλαδή οι μέσες αποδόσεις, οι τυπικές αποκλίσεις, και ο πίνακας του συντελεστή συσχέτισης παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα, (Πίνακας 1):

	Banking (q_1)	Real Estate (q_2)	Public Utility (q_3)	Government Bonds (q_4)
Correlation	1	0,8515	0,6539	-0,4507
	0,8515	1	0,6886	-0,3564
	0,6539	0,6886	1	-0,2115
	-0,3564	-0,4507	-0,2115	1
Expected Return	4,01%	4,82%	2,68%	0,28%
Standard Deviation	13,71%	15,49%	12,82%	0,66%

Πίνακας 1: Συνολικά Στατιστικά Στοιχεία

Όπως μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε, οι μετοχές υψηλού κινδύνου (risky assets) (Banking, Real Estate, Public Utility) είναι θετικά συσχετισμένες μεταξύ τους, ενώ τα κρατικά ομόλογα (Government Bond Index) είναι αρνητικά συσχετισμένα με καθεμία από αυτές.

Οι Πίνακες 2α και 2β και οι Πίνακες 3α και 3β που ακολουθούν παρουσιάζουν τα βέλτιστα χαρτοφυλάκια q με την παρουσία background risk και τα βέλτιστα χαρτοφυλάκια Μέσου-Διακύμανσης q_{MV} υπό διαφορετικά σενάρια.

Συγκεκριμένα, ο

- Πίνακας 2α αντιπροσωπεύει την περίπτωση όπου τα background assets έχουν αρνητική συσχέτιση με τα risky assets (Banking, Real Estate, Public Utility) όταν η αναλογία των background assets είναι 0.3 και
- Πίνακας 2β αντιπροσωπεύει την περίπτωση όπου τα background assets έχουν αρνητική συσχέτιση με τα risky assets (Banking, Real Estate, Public Utility) όταν η αναλογία των background assets είναι 0.7, ενώ αντίστοιχα
- Πίνακας 3α αντιπροσωπεύει την περίπτωση θετικών συσχετισμών μεταξύ background assets και risky assets όταν η αναλογία των background assets είναι 0.3 και
- Πίνακας 3β αντιπροσωπεύει την περίπτωση θετικών συσχετισμών μεταξύ background assets και risky assets όταν η αναλογία των background assets είναι 0.7.

- **1^η Περίπτωση (Αρνητική Συσχέτιση)**

- ✓ Τα background assets έχουν αρνητική συσχέτιση με τις μετοχές υψηλού κινδύνου (Banking, Real Estate, Public Utility) (risky assets).
- ✓ Η αναλογία των background assets = 0,3 ή 0,7.
- ✓ Η τυπική απόκλιση (standard deviation) των background assets = 0,1 και 0,3.
- ✓ Η αναμενόμενη απόδοση των background assets είναι 2%.
- ✓ Η συσχέτιση μεταξύ των background assets και των μετοχών υψηλού κινδύνου (risky assets) είναι είτε θετικές είτε αρνητικές και οι συντελεστές τους είναι -0.5, -0.1, ή 0,1, 0,5, ενώ
- ✓ Η συσχέτιση μεταξύ των background assets και του περιουσιακού στοιχείου μηδενικού κινδύνου (risk-free rate) είναι 0.

✓ Η αναλογία των background assets = 0,3.

Χαρτοφυλάκια							
Με Background Risk						Χωρίς Background Risk	
Περιουσιακά Στοιχεία Χαρτοφυλακίου		Συσχέτισεις background asset & risky assets					
		(-0.5, -0.5, -0.5)	(-0.5, -0.1, -0.5)	(-0.1, -0.5, -0.1)	(-0.1, -0.1, -0.1)		
Weight of portfolio assets=0.3	Stdev=0.1	q_1	0,4495	2,5509	-1,7180	0,3833	0,3668
		q_2	0,5279	-1,5115	2,8805	0,8412	0,9195
		q_3	0,4113	1,0062	-0,6746	-0,0797	-0,2025
		q_4	-0,3887	-1,0456	0,5121	-0,1448	-0,0838
	Stdev=0.3	q_1	0,6149	6,9191	-5,8877	0,4164	0,3668
		q_2	-0,2554	-6,3734	6,8026	0,6845	0,9195
		q_3	1,6388	3,4234	-1,6189	0,1658	-0,2025
		q_4	-0,9983	-2,9691	1,7040	-0,2667	-0,0838

Πίνακας 2α: Βέλτιστα χαρτοφυλάκια με και χωρίς background risk, όταν υπάρχει αρνητική συσχέτιση και η αναλογία των portfolio assets είναι 0,3.

✓ Η αναλογία των background assets = 0,7

Χαρτοφυλάκια							
Με Background Risk						Χωρίς Background Risk	
Περιουσιακά Στοιχεία Χαρτοφυλακίου		Συσχέτισεις background asset & risky assets					
		(-0.5, -0.5, -0.5)	(-0.5, -0.1, -0.5)	(-0.1, -0.5, -0.1)	(-0.1, -0.1, -0.1)		
Weight of portfolio assets=0.7	Stdev=0.1	q_1	0,2521	0,6380	-0,1461	0,2399	0,2369
		q_2	0,4942	0,1196	0,9263	0,5517	0,5661
		q_3	-0,0142	0,0951	-0,2136	-0,1044	-0,1269
		q_4	0,2679	0,1473	0,4334	0,3127	0,3239
	Stdev=0.3	q_1	0,2824	1,4404	-0,9119	0,2460	0,2369
		q_2	0,3503	-0,7734	1,6467	0,5229	0,5661
		q_3	0,2113	0,5391	-0,3871	-0,0593	-0,1269
		q_4	0,1560	-0,2060	0,6523	0,2903	0,3239

Πίνακας 2β: Βέλτιστα χαρτοφυλάκια με και χωρίς background risk, όταν υπάρχει αρνητική συσχέτιση και η αναλογία των portfolio assets είναι 0,7.

• **2^η Περίπτωση (Θετική Συσχέτιση)**

- ✓ Τα background assets έχουν θετική συσχέτιση με τις μετοχές υψηλού κινδύνου (Banking, Real Estate, Public Utility) (risky assets).
- ✓ Η αναλογία των background assets = 0,3 ή 0,7.
- ✓ Η τυπική απόκλιση (standard deviation) των background assets = 0,1 και 0,3.
- ✓ Η αναμενόμενη απόδοση των background assets είναι 2%.
- ✓ Η συσχέτιση μεταξύ των background assets και των μετοχών υψηλού κινδύνου (risky assets) είναι είτε θετικές είτε αρνητικές και οι συντελεστές τους είναι -0.5, -0.1, ή 0,1, 0,5, ενώ
- ✓ Η συσχέτιση μεταξύ των background assets και του περιουσιακού στοιχείου μηδενικού κινδύνου (risk-free rate) είναι 0.

✓ Η αναλογία των background assets = 0,3

Χαρτοφυλάκια							
Με Background Risk							Χωρίς Background Risk
Περιουσιακά Στοιχεία Χαρτοφυλακίου		Συσχέτισεις background asset & risky assets					
		(0.1, 0.1, 0.1)	(0.1, 0.5, 0.1)	(0.5, 0.1, 0.5)	(0.5, 0.5, 0.5)		
Weight of portfolio assets=0.3	Stdev=0.1	q_1	0,3503	2,4516	-1,8173	0,2841	0,3668
		q_2	0,9978	-1,0415	3,3505	1,3111	0,9195
		q_3	-0,3252	0,2697	-1,4111	-0,8162	-0,2025
		q_4	-0,0229	-0,6798	0,8779	0,2210	-0,0838
	Stdev=0.3	q_1	0,3172	6,6213	-61855,0000	0,1187	0,3668
		q_2	1,1545	-4,9636	8,2124	2,0944	0,9195
		q_3	-0,5707	1,2140	-3,8284	-2,0437	-0,2025
		q_4	0,0991	-1,8717	2,8014	0,8307	-0,0838

Πίνακας 3α: Βέλτιστα χαρτοφυλάκια με και χωρίς background risk, όταν υπάρχει θετική συσχέτιση και η αναλογία των portfolio assets είναι 0,3.

✓ Η αναλογία των background assets = 0,7

Χαρτοφυλάκια							
Με Background Risk							Χωρίς Background Risk
Περιουσιακά Στοιχεία Χαρτοφυλακίου		Συσχέτισεις background asset & risky assets					
		(0.1, 0.1, 0.1)	(0.1, 0.5, 0.1)	(0.5, 0.1, 0.5)	(0.5, 0.5, 0.5)		
Weight of portfolio assets=0.7	Stdev=0.1	q_1	0,2338	0,6198	-0,1643	0,2217	0,2369
		q_2	0,5805	0,2059	1,0126	0,6380	0,5661
		q_3	-0,1494	-0,0402	-0,3489	-0,2396	-0,1269
		q_4	0,3351	0,2145	0,5006	0,3799	0,3239
	Stdev=0.3	q_1	0,2278	1,3857	-0,9666	0,1913	0,2369
		q_2	0,6093	-0,5145	1,9056	0,7819	0,5661
		q_3	-0,1945	0,1333	-0,7929	-0,4651	-0,1269
		q_4	0,3575	-0,0045	0,8539	0,4919	0,3239

Πίνακας 3β: Βέλτιστα χαρτοφυλάκια με και χωρίς background risk, όταν υπάρχει θετική συσχέτιση και η αναλογία των portfolio assets είναι 0,7.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η σύνθεση του χαρτοφυλακίου q αποκλίνει σημαντικά από εκείνη του q_{MV} , και όσο μεγαλύτερος είναι ο background risk ή η αναλογία των background assets στο σύνολο του χαρτοφυλακίου τόσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά μεταξύ των δύο χαρτοφυλακίων.

Κατά τους ερευνητές Kimball (1993), Gollier και Pratt (1996), οι επενδυτές είναι λιγότερο διατεθειμένοι να ανεχτούν άλλους κινδύνους κατά την παρουσία background risk. Αντιθέτως, τα αποτελέσματά μας δείχνουν ότι οι επενδυτές μπορούν να κατέχουν περισσότερο περιουσιακά στοιχεία με υψηλό κίνδυνο (risky assets) όταν ο background risk αυξάνει ανάλογα με τις συσχετίσεις μεταξύ των background assets και των περιουσιακών στοιχείων με υψηλό κίνδυνο (risky assets).

Όταν οι συσχετίσεις μεταξύ των background assets και εκείνων του χαρτοφυλακίου (portfolio assets) είναι αρνητική, η ζήτηση για περιουσιακά στοιχεία μηδενικού κινδύνου σε γενικές γραμμές μειώνεται. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα περιουσιακά στοιχεία με υψηλό κίνδυνο (risky assets) μπορούν να χρησιμεύσουν ως καλύτερα μέσα για την αντιστάθμιση του background risk, και μια αύξηση στις θέσεις αυτών των περιουσιακών στοιχείων αυξάνει τον $BRHC$ του χαρτοφυλακίου.

Στις περιπτώσεις θετικής συσχέτισης, οι θέσεις στα περιουσιακά στοιχεία μηδενικού κινδύνου συνήθως αυξάνουν προκειμένου να μειωθεί ο συνολικός κίνδυνος. Επιπλέον, διαπιστώνουμε ότι η αναλογία του βέλτιστου χαρτοφυλακίου σε οποιοδήποτε περιουσιακά στοιχεία υψηλού κινδύνου (risky asset) είναι υψηλότερη ή χαμηλότερα όταν καθίσταται πιο αρνητική ή θετική συσχέτιση με τα background assets αντίστοιχα.

Οι τυπικές αποκλίσεις των συνολικών περιουσιακών στοιχείων στις διάφορες περιπτώσεις παρουσιάζονται στον παρακάτω Πίνακα (Πίνακας 4).

Συσχετίσεις background asset & risky assets		Weight of portfolio assets=0.3				Weight of portfolio assets=0.7			
		Background Risk Stdev=0.1		Background Risk Stdev=0.3		Background Risk Stdev=0.1		Background Risk Stdev=0.3	
		Με	Χωρίς	Με	Χωρίς	Με	Χωρίς	Με	Χωρίς
		Background Risk	Background Risk	Background Risk	Background Risk	Background Risk	Background Risk	Background Risk	Background Risk
Αρνητικές	(-0.5, -0.5, -0.5)	0,0037	0,004	0,0334	0,0362	0,0041	0,0041	0,0064	0,007
	(-0.5, -0.1, -0.5)	0,0024	0,0064	0,0076	0,0434	0,0049	0,0056	0,0048	0,0114
	(-0.1, -0.5, -0.1)	0,002	0,0044	0,0153	0,0374	0,0039	0,0044	0,0037	0,0078
	(-0.1, -0.1, -0.1)	0,0068	0,0068	0,0445	0,0446	0,0059	0,0059	0,0122	0,0122
Θετικές	(0.1, 0.1, 0.1)	0,0082	0,0082	0,0487	0,0488	0,0067	0,0067	0,0148	0,0148
	(0.1, 0.5, 0.1)	0,0081	0,0106	0,0338	0,056	0,0078	0,0082	0,0152	0,0192
	(0.5, 0.1, 0.5)	0,0046	0,0086	0,0142	0,05	0,0063	0,007	0,009	0,0156
	(0.5, 0.5, 0.5)	0,0107	0,011	0,0544	0,0572	0,0084	0,0085	0,0195	0,02

Πίνακας 4: Κίνδυνος του συνολικού πλούτου για τους διάφορους συνδυασμούς συσχετίσεων.

Τα αποτελέσματα επιβεβαιώνουν ότι ο συνολικός πλούτος είναι λιγότερο επικίνδυνος, όταν ο background risk λαμβάνεται υπόψη στην απόφαση επιλογής χαρτοφυλακίου παρά όταν ο background risk αγνοείται. Επιπλέον, αυτή η μείωση του κινδύνου μεγιστοποιείται και στις περιπτώσεις:

- ύπαρξης υψηλού background risk ή
- όταν η αναλογία του background asset είναι μεγάλη.

5.3. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Αυτό το έγγραφο ερευνά τη συμπεριφορά των επενδυτών στην επιλογή χαρτοφυλακίου και τις ιδιότητες του βέλτιστου χαρτοφυλακίου κατά την παρουσία background risk. Με την ανωτέρω εφαρμογή εξετάσαμε το πώς η επιλογή χαρτοφυλακίου επηρεάζεται από διάφορους παράγοντες του background risk.

Η ανάλυσή μας δείχνει ότι το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο q κατά την παρουσία background risk μπορεί να χωριστεί σε δύο ανεξάρτητες συνιστώσες:

- το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο q_{MV} Μέσου-Διακύμανσης και
- το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης κινδύνου.

Το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης κινδύνου χρησιμοποιείται για να αντισταθμίσει το background risk, μειώνοντας έτσι τον συνολικό κίνδυνο. Η ικανότητα αυτή αντιστάθμισης κινδύνου, η οποία μετράται από τον $BRHC$ του χαρτοφυλακίου, προσδιορίζεται από τη συσχέτιση μεταξύ των background assets και των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου.

Όσο τα background assets συσχετίζονται με τα περιουσιακά στοιχεία του χαρτοφυλακίου και δεν καλύπτονται από αυτά, το χαρτοφυλάκιο q αποκλίνει από το χαρτοφυλάκιο q_{MV} και είναι πιο επικίνδυνο. Ο περιορισμός του κινδύνου στο συνολικό πλούτο εξαρτάται από τον πίνακα συσχέτισης μεταξύ των περιουσιακών στοιχείων με κίνδυνο και των περιουσιακών στοιχείων αντιστάθμισης, ο background risk, καθώς και το ποσοστό του συνολικού πλούτου στα background assets.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνόγλωσση:

- Βασιλείου Δημήτριος, Ηρειώτης Νικόλαος, “Ανάλυση Επενδύσεων και Διαχείριση χαρτοφυλακίου”, Εκδόσεις Rosili, 2009
- Κοτζαμάνης Στέφανος, “Διαχείριση χαρτοφυλακίου: Στη θεωρία και στην πράξη”, Εκδόσεις Finance Invest
- Μαλλιαρόπουλος Δημήτριος, “Ειδικά Θέματα Χρηματοοικονομικής: Επιλογή και Αξιολόγηση Χαρτοφυλακίων”, Σημειώσεις Φεβρουάριος 2009.

Ξενόγλωσση:

- Bodie, Z., Merton, R.C., Samuelson, W.F, 1992. Labour supply flexibility and portfolio choice in a life cycle model. *Journal of Economic Dynamics and Control* 16, 427-449.
- Campbell, J.Y., 2006. Household finance. *Journal of Finance* 61, 1553-1604.
- Cocco, J.F., 2005. Portfolio choice in the presence of housing. *Review of Financial Studies* 18, 535-567.
- Edwin J. Elton, Martin J. Gruber, Stephen J. Brown, William N. Goetzmann, “Modern Portfolio Theory and Investment Analysis”, John Wiley & Sons, Inc., 2003 (Sixth Edition).
- Heaton, J., Lucas, D., 2000. Portfolio choice in the presence of background risk. *Economic Journal* 110, 1-26.
- Huberman, G., Kandel, S., 1987. Mean-variance spanning. *Journal of Finance* 42, 873-888.
- Kimball, M.S., 1993. Standard risk aversion. *Econometrica* 61, 589-611.
- Lusk, J.L, Coble, K.H., 2008. Risk aversion in the presence of background risk: Evidence from an economic experiment. *Research in Experimental Economics* 12, 315-340.

- Markowitz, H., 1952. Portfolio selection. *Journal of Finance* 7, 77-91.
- Merton, R.C., 1969. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. *Review of Economics and Statistics* 51, 247-257.
- Merton, R.C., 1971. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory* 3, 373-413.
- Roll, R., 1992. A mean/variance analysis of tracking error. *Journal of Portfolio Management* 18(4), 13-22.
- Samuelson, P.A., 1969. Portfolio selection by dynamic stochastic programming. *Review of Economics and Statistics* 51(3), 239-246.
- Sharpe, W.F., Tint, L.G., 1990. Liabilities: A new approach. *Journal of Portfolio Management* 16(2), 5-10.
- Solnik, B.H., 1978. Inflation and optimal portfolio choices. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13(5), 903-925.
- Viceira, L.M., 2001. Optimal portfolio choice for long-horizon investors with non-tradable labour income. *Journal of Finance* 56, 433-470.