ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΗΣ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗΣ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΜΕΝΗΣ ΠΟΙΝΗΣ (EXPECTED DISCOUNTED PENALTY FUNCTION) ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΝΑΣΤΑΣΙΑ Χ.
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΑΚΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΟΛΙΤΗΣ (ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ - ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΑΘΗΝΑ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΗΣ 2009

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΗΣ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗΣ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΜΕΝΗΣ ΠΟΙΝΗΣ (EXPECTED DISCOUNTED PENALTY FUNCTION) ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΝΑΣΤΑΣΙΑ Χ.
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΑΚΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΟΛΙΤΗΣ (ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ - ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΕΓΚΡΙΘΗΚΕ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΙΜΕΛΗ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

....	....	....
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΟΛΙΤΗΣ	ΜΙΧΑΗΛ ΜΠΟΥΤΣΙΚΑΣ	ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΠΙΤΣΕΛΗΣ
ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΑΘΗΝΑ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΗΣ 2009.

……………………………

Αναστασία Χ. Κωνσταντινάκη
Πτυχιούχος σχολής Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

Περιεχόμενα

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ολοκληρώνοντας αυτή τη μεταπτυχιακή εργασία, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους δασκάλους και καθηγητές μου όλα αυτά τα χρόνια, για την αγάπη που μου ενέπνευσαν στη μόρφωση και ιδιαιτέρως όλους αυτούς που με καθοδήγησαν και με βοήθησαν καθ' όλη τη διάρκεια τόσο της πειραματικής διαδικασίας όσο και της συγγραφής της εργασίας.

Κατ' αρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω των καθηγητή μου κύριο Κωνσταντίνο Πολίτη για την πολύτιμη καθοδήγηση και βοήθειά του κατά τη διάρκεια της διπλωματικής εργασίας, για τις βασικές παρατηρήσεις τους ως προς την ανάλυση της μελέτης των φραγμάτων για τις ανανεωτκές εξισώσεις που πραγματοποιήσαμε αλλά και για τις υποδείξεις του χωρίς τις οποίες θα ήταν πολύ δύσκολη η ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας. Τον ευχαριστώ ιδιαιτέρως για τις γνώσεις που μου μετέδωσε ως προς τη χρήση του προγράμματος latex κατά τη διάρκεια συγγραφής της εργασίας καθώς και για τη βοήθειά του στο πρόγραμμα Mathematica που χρησιμοποιήσαμε κατά κόρον για τη διεξαγωγή των αποτελεσμάτων. Τέλος τον ευχαριστώ για τις διορθώσεις του στη συγγραφή της εργασίας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ολόψυχα επίσης την φίλη μου Ελένη Ντόμαρη για την τεράστια βοήθεια που μου προσέφερε με τις γνώσεις της και τη συμπαράσταση της καθ'ολη τη διάρκεια της διπλωματικής εργασίας καθώς επίσης για την πρακτική και ψυχολογική βοήθεια που μου παρείχε οποιαδήποτε στιγμή τη χρειαζόμουν.

Ευχαριστώ ακόμα τους φίλους μου και ιδιαιτέρως το Βασίλη, τη Μαρία, τον Δημήτρη για την κατανόησή τους για τις ώρες που τους παραμελούσα για να αφιερωθώ στη μελέτη μου όλα αυτά τα χρόνια,για τις στιγμές ξεγνοιασιάς και διασκέδασης, αλλά κυρίως για την αμέριστη υποστήριξή και ενθάρυνσή τους σε οποιοδήποτε βήμα μου...

Τέλος ένα μεγάλο ευχαριστώ ανήκει στους γονείς μου για την αστείρευτη αγάπη τους, την υπομονή τους, την κατανόηση, καθώς επίσης και την ηθική και υλική υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια των σπουδών μου και γενικότερα στη ζωή μου.

Περίληψη

Φράγματα για τη συνάρτηση της αναμενόμενης προεξοφλημένης ποινής (expected discounted penalty function) στη θεωρία κινδύνων

Μία συνάρτηση με πολύ μεγάλο ενδιαφέρον τα τελευταία χρόνια στη θεωρία κινδύνων αποτελεί η συνάρτηση της αναμενόμενης προεξοφλημένης ποινής (expected discounted penalty function). Ειδικές περιπτώσεις της συνάρτησης αυτής αποτελούν η πιθανότητα χρεοκοπίας, η κατανομή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, η κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία κα. Είναι επίσης γνωστό ότι, στη γενική της μορφή, η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (defective renewal equation). Στην εργασία που ακολουθεί αρχικά κάνουμε μια επισκόπηση της θεωρίας των ανανεωτικών εξισώσεων και της μελέτης των ιδιοτήτων που έχει η λύση μιας τέτοιας εξίσωσης καθώς επίσης και τη μελέτη της εφαρμογής γενικών φραγμάτων για λύσεις ανανεωτικών εξισώσεων στη συνάρτηση της αναμενόμενης προεξοφλημένης ποινής, είτε στη γενική της μορφή είτε σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις. Τέλος θα γίνει η παρουσίαση, μέσω αριθμητικών παραδειγμάτων, κάποιων φραγμάτων για τη συνάρτηση αυτή. Σε περιπτώσεις που η αναλυτική μορφή της συνάρτησης είναι γνωστή (π.χ. όταν η κατανομή των αποζημιώσεων στο μοντέλο είναι η εκθετική ή μείξη εκθετικών), θα γίνει σύγκριση και αξιολόγηση των φραγμάτων που δίνονται.

Abstract

Bounds for the expected discounted penalty function in risk theory

A function with a great interest in recent years in theory risk is the expected discounted penalty function. Special cases of this function are the ruin probability, the distribution of the deficit at the time of ruin, the distribution of surplus before ruin etc. It is also known that, in its general form, this function fulfils a renewal equation (defective renewal equation) In this paper we will make an overview of the theory of defective renewal function and study of the properties that the solution of this equation has. Also, we will study the application in general bounds on the solution of defective renewal equation in the discounted penalty function of general solutions of equations refreshing in the context of the expected discounted penalty, either in its general or in some special cases. At the end we will present, by using numerical examples, for bounds for this function. In cases where the analytical form of the function is known (eg when the distribution of compensation model is the exponential or exponential mixing), a comparison and an evaluation of these bounds will be attend.

Κατάλογος Σχημάτων

Λίστα Συμβόλων

$U(t)$	ανέλιξη πλεονάσματος
$P(t)$	συνολικά ασφάλιστρα στο διάστημα $[0, t]$
u	αρχικο αποθεματικό
c	ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρων
κ	συντελεστής προσαρμογής
δ	συντελεστής προεξόφλησης
T	χρόνος χρεοκοπίας
L	μέγιστη σωρευτική απώλεια
F_e	κατανομή ισορροπίας
f_e	πυκνότητα κατανομής ισορροπίας
p_k	k-ροπή της ροπής των αποζημιώσεων
$U(T^-)$	πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία
$\lvert U(T)\rvert$	έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας
$\rho(\delta)$	λύση γενικευμένης εξίσωσης Lundberg
$\psi(u)$	πιθανότητα χρεοκοπίας
$G(u, y)$	κατανομή ελλείμματος
$\varphi_\delta(u)$	συνάρτηση Gerber - Shiu
$a(z)$	συνάρτηση για την εύρεση φράγματος
$\tau(z)$	συνάρτηση για την εύρεση φράγματος
$\sigma(z)$	συνάρτηση για την εύρεση φράγματος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Στη παρούσα εργασία, όπως γίνεται φανερό και από το τίτλο της θα μελετήσουμε φράγματα για τη συνάρτηση προεξοφλημένης τιμής όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν κατανομές με ελαφριά δεξιά ουρά όπως οι εκθετικές, η μείξη εκθετικών κατανομών και Erlang κατανομής.

Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται αναφορά σε όλες τις βασικές έννοιες της θεωρίας χρεοκοπίας η γνώση των οποίων είναι απαραίτητη για τη κατανόηση των αποτελεσμάτων που θα προκύψουν στα επόμενα Κεφάλαια. Θα ξεκινήσουμε την επισκόπηση των εννοιών με το πιο βασικό ορισμό της Θεωρίας χρεοκοπίας αυτόν της στοχαστική ανέλιξης πλεονάσματος μέσα από τον οποίο μπορούμε και να κατανοήσουμε τον όρο της χρεοκοπίας των ασφαλιστικών εταιριών. Στη συνέχεια θα προχωρήσουμε με την αναφορά σε βασικά εργαλεία όπως ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρων, το περιθώριο ασφαλείας, ο συντελεστής προσαρμογής. Η πιθανότητα χρεοκοπίας και η εξέλιξη της από διακριτό σε συνεχές χρόνο είναι ένα ακόμα από τα στοιχεία που θα εξετάσουμε. Το επόμενο στοιχείο που γίνεται αντικείμενο μελέτης της συγκεκριμένης εργασίας και στο οποίο θα επικεντρωθούμε είναι οι ανανεωτικές εξισώσεις. Αφού ορίσουμε την έννοια των ελλειμματικών ανανεωτικών εξισώσεων και τη σημασία τους στον αναλογισμό θα προχωρήσουμε σε συναρτήσεις που ικανοποιούν αυτές τις ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις. Θα μελετήσουμε την ειδική περίπτωση, της συνάρτησης των Gerber - Shiu που δίνει μια διαφορετική ερμηνεία στην έννοια των ανανεωτικών εξισώσεων αφού εξαρτάται από το έλλειμμα και το πλεόνασμα (ανάλογα με τη περίπτωση που μελετούμε) τη στιγμή της χρεοκοπίας. Ένα πολύ σημαντικό μέρος αφορά τη συνάρτηση που αποτελεί λύση της ανανεωτικής εξίσωσης των Lin and Willmot(1999) και ικανοποιεί οποιαδήποτε ανανεωτική εξίσωση με οποιεσδήποτε παραμέτρους και για οποιαδήποτε κατανομή με ελαφριά δεξιά ουρά. Το τελευταίο κομμάτι του Κεφαλαίου αναφέρεται στον ουσιαστικό στόχο της έρευνας που είναι η εύρεση του ακριβή τύπου της συνάρτησης που ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση καθώς και φράγματα που την προσεγγίσουν σύμφωνα με τα θεωρήματα των Willmot et al (2001) και G. Psarrakos (2008) για την οικογένεια των εκθετικών κατανομών και Erlang κατανομής.

Στο Κεφάλαιο 3, θα μελετήσουμε τη πιο απλή συνάρτηση που ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση σύμφωνα με τους Gerber - Shiu αυτή της πιθανότητας χρεοκοπίας (ruin probability). Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τη πιθανότητα χρεοκοπίας όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή, μείξη εκθετικών κατανομών και Erlang κατανομής, σε θεωρητικό επίπεδο χωρίς να σταθούμε σε συγκεκριμένα παραδείγματα. Συνεπώς καταλήγουμε σε συμπεράσματα τόσο για την ακριβή μορφή της πιθανότητας χρεοκοπίας όσο και για τον τύπο των φραγμάτων.

Στο Κεφάλαιο 4 θα δούμε τις εφαρμογές των θεωρητικών αποτελεσμάτων σε αριθμητικό επίπεδο, για συγκεκριμένους τύπους κατανομών καθώς και τη διαγραμματική απεικόνιση για κάθε αποτέλεσμα. Έτσι θα έχουμε την ευκαιρία να δούμε να συγκρίνουμε και να αποφασίσουμε για τη συμπεριφορά των συναρτήσεων και των φραγμάτων που τις προσεγγίζουν σε πρακτικό βαθμό, κατανοώντας καλύτερα όσα ειπώθηκαν στο προηγούμενο Κεφάλαιο.

Στο Κεφάλαιο 5 θα μελετήσουμε τα θεωρητικά αποτελέσματα μιας πιο περίπλοκής συνάρτησης που ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση σύμφωνα με τους Gerber - Shiu. Η συνάρτηση αναφέρεται στη περίπτωση όπου ο συντελεστής προεξόφλησης παίρνει τιμές μεγαλύτερες του μηδενός και αναφέρεται ως ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας. Και σ' αυτό το Κεφάλαιο θα παρατηρήσουμε τη θεωρητική εφαρμογή των τριών αυτών κατανομών που μελετήσαμε και σε προηγούμενες ενότητες (εκθετική κατανομή, μείξη εκθετικών κατανομών και Erlang κατανομής).

Αφού καταλήξουμε σε θεωρητικά αποτελέσματα στη συνέχεια θα περάσουμε στο Κεφάλαιο 6 στο οποίο θα γίνει και η πρακτική εφαρμογή των αποτελεσμάτων για συγκεκριμένες κατανομές. Στο Κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε πώς κυμαίνονται τα φράγματα καθώς και η συνάρτηση που μας ενδιαφέρει όταν ο συντελεστής προεξόφλησης λάβει διαφορές τιμές τις οποίες έχουμε ορίσει.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 7 θα μελετήσουμε τη περίπτωση της κατανομής του ελλείμματος (severity of ruin) δηλαδή τη περίπτωση που η συνάρτηση που αποτελεί λύση μιας ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης, εξαρτάται από το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας. Σ' αυτό το Κεφάλαιο θα δούμε τη συνάρτηση σε θεωρητικό επίπεδο αλλά και σε πρακτικό αφού στη συνέχεια θα μελετήσουμε τα αποτελέσματα για μείξη εκθετικών και Erlang κατανομής για συγκεκριμένες τιμές του ελλείμματος. Μαζί με τα αποτελέσματα για κάθε περίπτωση θα δούμε και τη διαγραμματική απεικόνιση των συναρτήσεων και των φραγμάτων για τη καλύτερη κατανόηση των αποτελεσμάτων και τν ευκολότερη διεξαγωγή συμπερασμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Βασικές Έννοιες από τη Θεωρία Χρεοκοπίας

2.1 Εισαγωγή

Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι αρχικά η επισκόπηση βασικών εισαγωγικών εννοιών που αφορούν στο *Κλασικό Μοντέλο της Θεωρίας Χρεοκοπίας.* Θα παραθέσουμε βασικούς ορισμούς που θα περιγράφουν την έννοια της χρεοκοπίας και τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα Κεφάλαια και ακολούθως θα δούμε την εξέλιξη της από το διακριτό μοντέλο μέχρι τις ανανεωτικές εξισώσεις και το ανανεωτικό μοντέλο το οποίο και θα μελετήσουμε διεξοδικά. Στη συνέχεια, θα ορισθεί και θα αναλυθεί η συνάρτηση της προεξοφλημένης ποινής (Gerber- Shiu) ενώ τέλος, θα γίνει η μελέτη της διαδικασίας για τη δημιουργία φραγμάτων των ανανεωτικών συναρτήσεων, ορίζοντας διαφορετικές παραμέτρους.

2.2 Βασικές Έννοιες Στοχαστικής Ανέλιξης Πλεονάσματος

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφέρουμε ορισμούς και έννοιες που μπορούμε εύκολα να εντοπίσουμε στις σημειώσεις "Εισαγωγή στη Θεωρία Χρεοκοπίας" του κ. Πολίτη (2007). Κάθε ασφαλιστική εταιρία αναλαμβάνει την υποχρέωση να καλύψει τον ασφαλισμένο από το κίνδυνο για τον οποίο έχει ασφαλιστεί έναντι συγκεκριμένων ασφαλίστρων, με τη σύναψη συμβολαίων. Ανά τακτά χρονικά διαστήματα δέχεται ένα πλήθος απαιτήσεων για αποζημιώσεις εξαιτίας της επέλευσης των ζημιών στο χαρτοφυλάκιο της. Σκοπός κάθε εταιρίας είναι να αποφύγει τη χρεοκοπία που μπορεί να επιφέρει ένα μεγάλο πλήθος ζημιών μικρής ή μεγάλης έντασης. Γι' αυτό το λόγο διαθέτει ένα αρχικό κεφάλαιο, το οποίο ονομάζεται αρχικό αποθεματικό u (initial reserve) το οποίο προσδοκά ότι θα καλύψει τη ζημία που θα επέλθει στο χαρτοφυλάκιο. Η εξέλιξη του χαρτοφυλακίου γίνεται σε συνεχή χρόνο $[0, t]$ για $\forall t > 0$, έχοντας ως χρόνο αναφοράς τη στιγμή σύναψης και λειτουργίας ενός συμβολαίου της ασφαλιστικής εταιρίας με τον ασφαλισμένο.

Στην ασφαλιστική εταιρία εισέρχονται με συνεχή ροή ασφάλιστρα $P(t)$, στη μονάδα του χρόνου, τα οποία αποτελούν τα έσοδα της ασφαλιστικής εταιρίας. Τα έξοδα της εταιρίας, $S(t)$, αφορούν τις αποζημιώσεις της στο ίδιο χρονικό διάστημα. Το αποτέλεσμα που προκύπτει από τη διαφορά των συνολικών ασφαλίστρων και των συνολικών αποζημιώσεων (κέρδος ή ζημία) κατά τη διάρκεια του χρόνου ονομάζεται *συνολική ανέλιξη πλεονάσματος* και ορίζεται ακολούθως

Τα έσοδα της ασφαλιστικής εταιρίας προέρχονται από τα ασφάλιστρα που εισέρχονται στη εταιρία στη μονάδα του χρόνου. Η κατανομή των ασφαλίστρων, $P(t)$, δηλώνει τα συνολικά ασφάλιστρα που δέχεται η εταιρία και αποτελεί γραμμική συνάρτηση του χρόνου και το πλεόνασμα της εταιρίας τη χρονική στιγμή t δίνεται από το τύπο

$$U(t) = u + P(t) - S(t)$$

Οι συνολικές αποζημιώσεις όπως εξελίσσονται στο χρόνο, αποτελούν μια *σύνθετη στοχαστική ανέλιξη εξόδων* όπως ορίζεται στο παρακάτω ορισμο:

Ορισμός 2.1. *Αν $X_1, X_2, .., X_n$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. που αποτελούν το ύψος των αποζημιώσεων και $\{N(t), t \geq 0\}$ μια στοχαστική ανέλιξη που εκφράζει το πλήθος των απαιτήσεων, ανεξάρτητη από τις X_i που παίρνει ακέραιες μη αρνητικές τιμές, τότε η στοχαστική ανέλιξη των αποζημιώσεων*

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i & N(t) \geq 1, \\ 0 & N = 0. \end{cases}$$

λέμε ότι ακολουθεί μια σύνθετη στοχαστική ανέλιξη .

Αναφορικά με όλα τα παραπάνω, ακολουθεί ο γενικός ορισμός της *στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος* και η διαγραμματική απεικόνιση (Σχήμα 2.1) *:

*το σχήμα έχει αντιγραφεί από το άρθρο ¨On the time value of ruin¨ των Gerber - Shiu(βλέπε σελ:50)

Ορισμός 2.2. *Η στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος $U(t), t \geq 0$ ορίζεται για $t \geq 0$ από τη σχέση*

$$U(t) = u + P(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

Το $U(t)$ καλείται πλεόνασμα ή αποθεματικό τη χρονική στιγμή t. Για $t = 0$ το πλεόνασμα είναι ίσο με το αρχικό αποθεματικό, δηλαδή $U(0) = u$.

Αν ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις:

1. Η $P(t)$ είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου.

2. Οι μεταβλητές X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και ανεξάρτητες από το πλήθος των αποζημιώσεων

3. Η $\{N(t), t \geq 0\}$ είναι μια ανέλιξη $Poisson$ οπότε και η $\{S(t), t \geq 0\}$ είναι μια σύνθετη ανέλιξη $Poisson$

τότε αναφερόμαστε στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου.

(Πολίτης (2007), σημειώσεις Θεωρία Χρεοκοπίας)

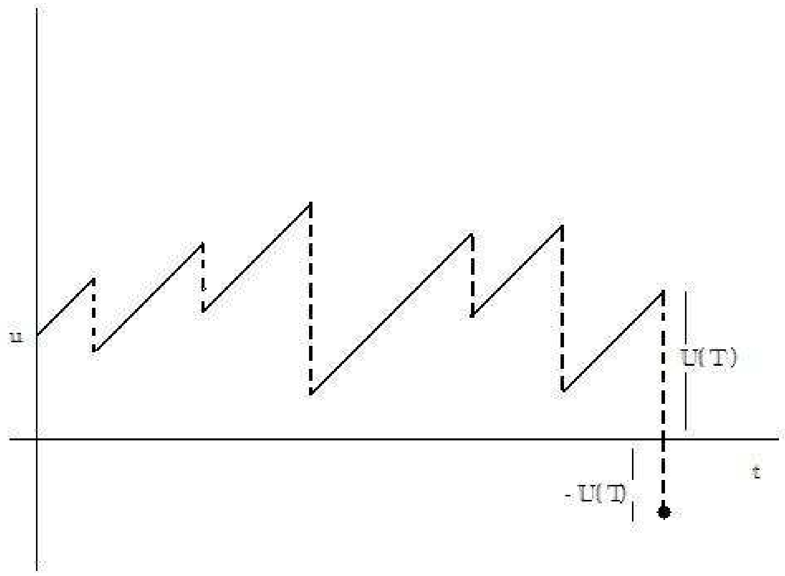
Στο Σχήμα 2.1 παρατηρούμε ότι η εταιρία κρατάει ένα αρχικό αποθεματικό και στη συνέχεια οι αποζημιώσεις που επέρχονται διαμορφώνουν το απόθεμα της εταιρίας ανάλογα με την ένταση τους μέχρι το αποθεματικό να γίνει αρνητικό και η εταιρία να έχει χρεοκοπία.

Προσοχή !!
Η κατανομή των ασφαλίστρων $P(t)$, αποτελεί γραμμική συνάρτηση του χρόνου και δίνεται από το τύπο:

$$P(t) = ct$$

Δηλαδή τα ασφάλιστρα εισέρχονται στην ασφαλιστική εταιρία συνεχώς.

Στο σύγγραμμα "Loss Models" των Klugman et al (1998) καθώς και στις σημειώσεις του Πολίτη (2007) του μαθήματος ¨ Θεωρία Χρεοκοπίας¨ μπορούμε να λάβουμε μια πιο αναλυτική προσέγγιση όλων όσων αναφέρθηκαν παραπάνω.



Σχήμα 2.1: *Ανέλιξη πλεονάσματος*

2.3 Εισαγωγή στο Κλασσικό Μοντέλο της Θεωρίας Χρεοκοπίας

Στο *κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας* (μοντέλο Cramér - Lundberg) θεωρούμε ότι οι συνολικές απαιτήσεις για αποζημιώσεις που εισέρχονται σε ένα χαρτοφυλάκιο μιας ασφαλιστικής εταιρίας περιγράφονται σύμφωνα με μια σύνθετη κατανομή. Συγκεκριμένα για $t \geq 0$ οι συνολικές απαιτήσεις στο διάστημα $[0, t]$ είναι

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

όπου X_i δηλώνει την απαίτηση για αποζημίωση που εισέρχεται σε μια ασφαλιστική εταιρία ενώ η $N(t)$ παριστάνει των αριθμό των απαιτήσεων για αποζημιώσεις που εισέρχονται σ' αυτή κατά την εξέλιξη του χρόνου. Θεωρούμε ότι οι απαιτήσεις είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές καθώς και ανεξάρτητες από τον αριθμό των αποζημιώσεων αντίστοιχα.

Στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας ισχύει ότι, ο αριθμός των απαιτήσεων για αποζημιώσεις ακολουθεί μια στοχαστική ανέλιξη Poisson, $\{N(t) : t \geq 0\}$, ενώ αντίστοιχα οι συνολικές αποζημιώσεις, $\{S(t) : t \geq 0\}$, ακολουθούν μια σύνθετη ανέλιξη Poisson.

Ορισμός 2.3. *Μια στοχαστική ανέλιξη λέγεται ανέλιξη Poisson,* $\{N(t) : t \geq 0\}$ *όταν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες*

1. $N(0) = 0$, *και για* $t \leq s$ *είναι* $N(t) \leq N(s)$ *(δηλαδή η συνάρτηση* $N(t)$ *είναι μη φθίνουσα ως προς t).*

2. Σε ένα μικρό χρονικό διάστημα h *μπορεί να συμβεί το πολύ ένα γεγονός και η πιθανότητα να συμβεί αυτό το γεγονός είναι ανάλογη με το μήκος του διαστήματος. Δηλαδή*

$$P(N(t+h) = n+k \setminus N(t) = n) = \begin{cases} \lambda h + o(h) & k = 1 \\ 1 - \lambda h + o(h) & k = 0 \\ o(h) & k \neq 1 \end{cases}$$

3. Για κάθε $t < s$ *η τ.μ.* $N(s) - N(t)$ *είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής* $N(t)$.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε κάποιες παραμέτρους που αποτελούν σημαντικό εργαλείο για τη μελέτη των ποσοτήτων που μας ενδιαφέρουν και χρησιμοποιούνται κατά κόρον στον Αναλογισμό και ειδικότερα στη Θεωρία Χρεοκοπίας. Οι παράμετροι αυτές ορίζονται παρακάτω:

Ορισμός 2.4. *Η σταθερά c δίνεται από το τύπο*

$$c = \frac{P(t)}{t}$$

όπου c είναι ο σταθερός ρυθμός είσπραξής των ασφαλίστρων (rate premiums) ανά μονάδα χρόνου στο διάστημα [0,t] και ονομάζεται ένταση ασφαλίστρου.

Οι αναμενόμενες αποζημιώσεις που προβλέπει η ασφαλιστική εταιρία ότι θα πληρώσει ανά μονάδα χρόνου είναι

$$E(X) = \lambda p_1$$

όπου λ είναι η ένταση της ανέλιξης Poisson και p_1 είναι η πρώτη ροπή που δείχνει τη μέση αποζημίωση, όταν $F(x)$ αποτελεί τη κατανομή των αποζημιώσεων. Η σχέση που δίνει τη ροπή των αποζημιώσεων ορίζεται με βάση το τύπο

$$p_k = \int_0^\infty x^k dF(x) = \int_0^\infty x^k f(x) dx. \quad (2.1)$$

Στο κλασικό μοντέλο ισχύει πάντα ότι η ένταση του ασφαλίστρου είναι πάντα μεγαλύτερη από τις αναμενόμενες αποζημιώσεις. Δηλαδή

$$c > \lambda p_1$$

Η συνθήκη αυτή υποδηλώνει ότι τα έξοδα πρέπει να είναι πάντα μικρότερα από τα έσοδα κατά μέσο όρο στη μονάδα του χρόνου έτσι ώστε να οδηγηθούμε σε συμπεράσματα για να είναι η εταιρία να είναι βιώσιμη.

Ορισμός 2.5. *Το περιθώριο ασφαλείας θ (security loading factor) εκφράζει το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους για τον ασφαλιστή και ορίζεται από τη σχέση*

$$\theta = \frac{c}{\lambda p_1} - 1, \quad \theta > 0 \quad (2.2)$$

2.4 Πιθανότητα Χρεοκοπίας στο Κλασσικό και στο Ανανεωτικό Μοντέλο

Με τον όρο χρεοκοπία εννοούμε τη περίπτωση που το αρχικό κεφάλαιο γίνει αρνητικό χωρίς αυτό να σημαίνει ότι η εταιρία θα χρεοκοπήσει στη πραγματικότητα. Δηλαδή αυτό σημαίνει ότι τα έξοδα της εταιρίας που επέρχονται από τη μεγάλη επέλευση των απαιτήσεων υπερβαίνουν τα έσοδα, δηλαδή τα ασφάλιστρα που δέχεται η εταιρία από τους ασφαλισμένους. Στη συνέχεια για να κατανοήσουμε περισσότερο την έννοια της *πιθανότητα χρεοκοπίας* στη θεωρία κινδύνου θα δώσουμε τους παρακάτω ορισμούς. Μια ασφαλιστική εταιρία την ενδιαφέρει να μελετήσει τη *πιθανότητα χρεοκοπίας* σε πεπερασμένο διάστημα, όπου ορίζεται ως εξής:

$$\psi(u,t) = P[U(t) < 0, \text{για κάποιο τ στο} \quad [0,t]]$$

για την οποία ισχύουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

1. Η *πιθανότητα χρεοκοπίας* είναι μια αύξουσα συνάρτηση ως προς το χρόνο t οπότε

$$\text{αν } t_1 \leq t_2 \quad \text{προκύπτει ότι} \quad \psi(u, t_1) \leq \psi(u, t_2)$$

2. Η *πιθανότητα χρεοκοπίας* είναι μια φθίνουσα συνάρτηση ως προς το αποθεματικό u οπότε

$$\text{αν} \quad u_1 \leq u_2 \quad \text{προκύπτει ότι} \quad \psi(u_1, t) \geq \psi(u_2, t)$$

3. Για $\forall \quad u > 0$, ισχύει ότι

$$\lim_{t \uparrow \infty} \psi(u, t) = \psi(u)$$

Στα κεφάλαια που θα ακολουθήσουν θα μελετήσουμε τη *πιθανότητα χρεοκοπίας* σε άπειρο χρόνο . Το μοντέλο αυτό έχει λιγότερες εφαρμογές στη πραγματικότητα όμως χρησιμοποιείται ευρέως στη *Θεωρία Χρεοκοπίας*. Στη συνέχεια ακολουθεί ο ορισμός της πιθανότητας μη χρεοκοπίας όπως φαίνεται παρακάτω:

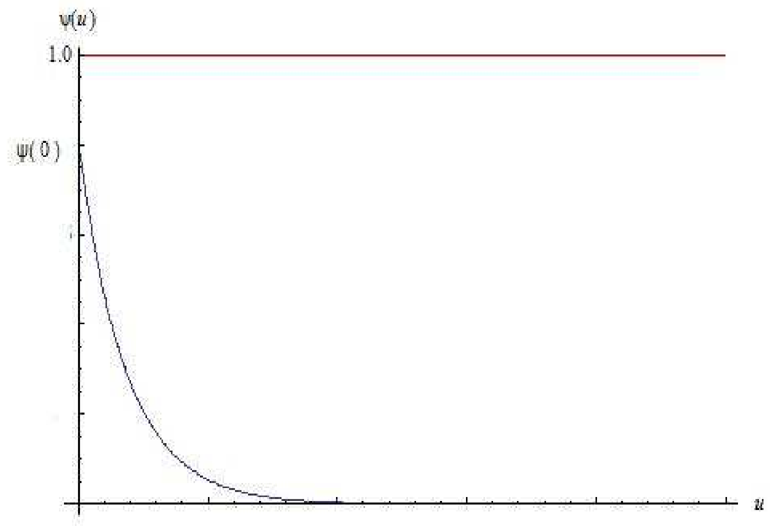
Ορισμός 2.6. *Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας σε συνεχές χρόνο, στο κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Χρεοκοπίας ορίζεται ως*

$$\delta(u) = P[U(t) \geq 0, \quad \textit{για} \quad \forall t | U(0) = u] = 1 - \psi(u)$$

Η χρονική στιγμή που συμβαίνει η χρεοκοπία ονομάζεται *χρόνος χρεοκοπίας* T και ορίζεται ως εξής

$$T = \begin{cases} \inf\{t : U(t) < 0\} \\ \infty, \quad \text{αν} \quad U(t) > 0, \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Ο χρόνος χρεοκοπίας ουσιαστικά υποδηλώνει τη χρονική στιγμή που το αποθεματικό γίνεται για πρώτη φορά αρνητικό. Παρατηρούμε ότι ο *χρόνος χρεοκοπίας* είναι μια ελλειμματική τυχαία μεταβλητή, διότι μπορεί να πάρει τη τιμή άπειρο με θετική πιθανότητα,



Σχήμα 2.2: *Συνάρτηση πιθανότητας χρεοκοπίας*

$$P(T = \infty) > 0$$

Όπως αναφέρει και στο βιβλίο του ¨Αναλογιστικά Μαθηματικά ¨ ο Κ.Ι. Κουτσόπουλος (1999) (βλέπε κεφάλαιο Ι.11) η *πιθανότητα χρεοκοπίας* με βάση το χρόνο χρεοκοπίας δίνεται από το τύπο.

$$\psi(u) = P[T < \infty | U(0) = u]$$

Ιδιότητες Πιθανότητας Χρεοκοπίας:

1. Όταν τα αναμενόμενα έξοδα της ασφαλιστικής εταιρίας είναι μεγαλύτερα από τα έσοδα που εισέρχονται μέσω των ασφαλίστρων τότε η χρεοκοπία είναι σίγουρο ενδεχόμενο με πιθανότητα 1.

2. Η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι μια φθίνουσα συνάρτηση ως προς u και όταν το αποθεματικό είναι πολύ μεγάλο η πιθανότητα χρεοκοπίας τείνει στο μηδέν.

$$\lim_{u \uparrow \infty} \psi(u) = 0$$

3. Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας, όταν θεωρηθεί σαν αθροιστική συνάρτηση κατανομής, είναι μια μεικτή κατανομή αφού ισχύει ότι $\delta(0) > 0$ και είναι συνεχής στο διαστημα $(0, \infty)$.

4. Τη χρονική στιγμή που το αρχικό αποθεματικό είναι μηδέν, δηλαδή $u = 0$, η *πιθανότητα χρεοκοπίας* έχει αποδειχθεί ότι ικανοποιεί τη παρακάτω σχέση

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$$

ενώ η *πιθανότητα μη χρεοκοπίας* ικανοποιεί τη σχέση

$$\delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta}$$

Στη συνέχεια μπορούμε να εκφράσουμε τη πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω των ανανεωτικών εξισώσεων που θα εξετάσουμε στη παρακάτω ενότητα ως μια ειδική μορφή.

Ορισμός 2.7. *Η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί την **ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση** (defective renewal equation) που δίνεται από τη παρακάτω σχέση*

$$\psi(u) = \phi \int_0^u \psi(u-x)\mathrm{d}F_e(x) + \phi\overline{F}_e(u), \quad 0 < \varphi < 1 \tag{2.3}$$

η σταθερά ϕ ορίζεται από τη σχέση $\phi = (1+\theta)^{-1}$.

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας εξαρτάται από τη συνάρτηση $F_e(x)$ η οποία αποτελεί τη *κατανομή ισορροπίας* (equilibrium distribution) και είναι συνάρτηση της κατανομής των αποζημιώσεων $F(x)$. Η *κατανομή ισορροπίας* ορίζεται ως εξής

$$F_e(u) = \frac{1}{p_1} \int_0^u \overline{F}(x)\mathrm{d}x, \quad u \geq 0 \tag{2.4}$$

Θεωρούμε ότι υπάρχει μια θετική σταθερά κ η οποία ικανοποιεί την εξίσωση

$$\int_0^\infty e^{\kappa y}\mathrm{dF_e}(y) = \frac{1}{\phi} \tag{2.5}$$

Ισχύει ότι $\frac{1}{\phi} = 1+\theta$. Οπότε, σύμφωνα με τη σχέση (2.2) που έχουμε αποδείξει, προκύπτει ότι $\frac{1}{\phi} = 1+\theta = \frac{c}{\lambda p_1}$. Αν θεωρήσουμε τη παρακάτω συνάρτηση που αποτελεί τη *πυκνότητα της κατανομής ισορροπίας*

$$f_e(x) = \frac{1}{p_1}[1 - F(x)] \tag{2.6}$$

οπότε σύμφωνα με τις παραπάνω υποθέσεις η σχέση (2.4) θα γίνει †

$$\int_0^\infty e^{\kappa y}\frac{1}{p_1}[1 - F(y)]\mathrm{d}y = \frac{c}{\lambda p_1} \Rightarrow \int_0^\infty e^{\kappa y}\overline{F}'(y)\mathrm{d}y = \frac{c}{\lambda}$$

με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, από τη τελευταία σχέση παίρνουμε

$$\frac{e^{\kappa y}}{\kappa}\overline{F}(y)|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{\kappa y}}{\kappa}f'(y)\mathrm{d}y = \frac{c}{\lambda}$$

με αντικατάσταση της ροπογεννήτριας των αποζημιώσεων που δίνεται από τη σχέση $M_X(\kappa) = \int_0^\infty e^{-\kappa y}f(y)\mathrm{d}y$ στη τελευταία σχέση το κ αποτελεί τη λύση της εξίσωσης που ακολουθεί

$$-\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa}M_X(\kappa) = \frac{c}{\lambda} \tag{2.7}$$

Η μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης και ονομάζεται *συντελεστής προσαρμογής*.

Με αντικατάσταση της σχέσης (2.2) στη σχέση (2.6) προκύπτει η παρακάτω σχέση που δίνει τον ακριβή ορισμό

† η συνάρτηση κατανομής $F_e(x)$ δεν έχει μάζα στο μηδέν άρα $dF_e(x) = F_e'(x)dx$

Ορισμός 2.8. *Ο συντελεστής προσαρμογής security factor κ αποτελεί τη θετική λύση της εξίσωσης*

$$M_X(\kappa) = 1 + (1+\theta)p_1\kappa \tag{2.8}$$

και αποτελεί μια από τις πιο σημαντικές παραμέτρους στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας.

Σημαντικότητα συντελεστή προσαρμογής..

Ένας από τους λόγους που κάνει τον συντελεστή προσαρμογής τόσο σημαντικό στη μελέτη του είναι ότι ικανοποιεί την ανισότητα Lundberg που σύμφωνα με την οποία μ-πορούμε να υπολογίσουμε ένα από τα πιο απλά σε μορφή άνω φράγματα και δίνεται από το τύπο

$$\psi(u) \leq e^{-\kappa u}, \quad \forall u \geq 0$$

Επιπλέον ικανοποιεί την ασυμπτωτική σχέση των Cramer - Lundberg που δίνεται από τη σχέση

$$\psi(u) \sim Ce^{-\kappa u}, \quad 0 < C < 1$$

δηλαδή

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{Ce^{-\kappa u}} = 1, \quad 0 < C < 1$$

2.5 Έλλειμμα- Πλεόνασμα τη στιγμή της Χρεοκοπίας

Στο Σχήμα 2.1 φαίνεται η ανέλιξη πλεονάσματος όπως εξελίσσεται στο χρόνο. Παρατηρούμε ότι κάθε φορά που επέρχεται μια απαίτηση για αποζημίωση το απόθεμα της εταιρίας πέφτει κάτω από το αποθεματικό που εμφανίζει η εταιρία εκείνη τη χρονική σιγμή. Στη περίπτωση που το απόθεμα γίνει για πρώτη φορά αρνητικό εμφανίζεται χρεοκοπία .

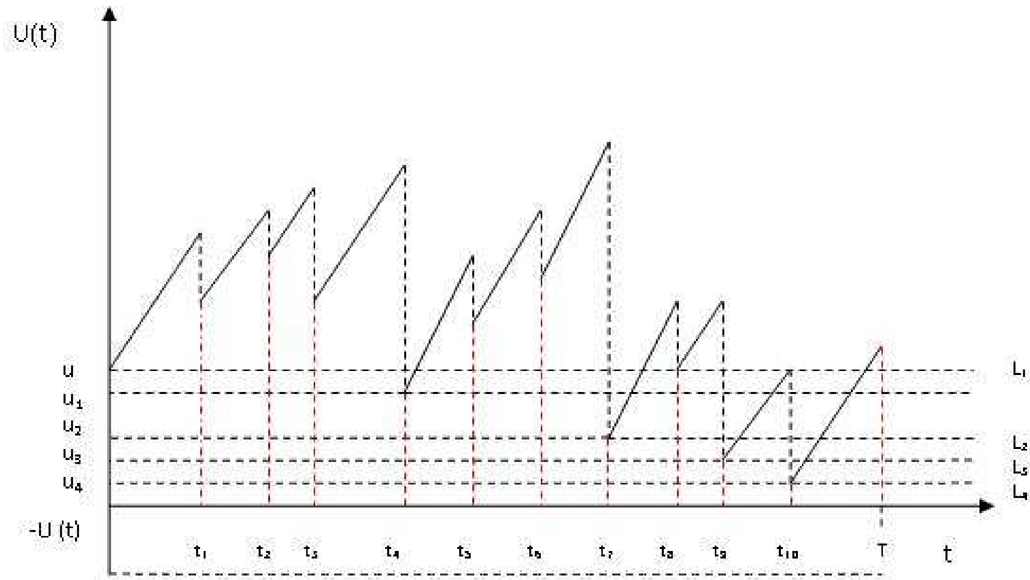
Στη συνέχεια, θα ορίσουμε δύο καινούργιες ποσότητες οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 2.1. Η τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) $|U(T)|$ ορίζει το *έλλειμμα* (deficit) τη στιγμή της χρεοκοπίας και συνήθως τη μελετάμε κατά απόλυτη τιμή εξαιτίας της αρνητικής σχέσης του ελλείμματος

$$|U(T)| = -U(T)$$

ενώ η τ.μ. $U(T^{-})$ ορίζεται ως το *πλεόνασμα* (surplus) πριν τη χρεοκοπία και ικανοποιείται από τη σχέση

$$U(T^{-}) = \lim_{t \to T^{-}} U(T)$$

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.3 εκτός από τη μεταβλητή που δείχνει τη χρονική στιγμή που επέρχεται μια απαίτηση για αποζημίωση μας ενδιαφέρει επίσης και το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u. Η τ.μ. συμβολίζεται με L_i και εκφράζει το μέγεθος της πτώσης του αποθεματικού από το αμέσως προηγούμενο αποθεματικό.



Σχήμα 2.3: *Συνολικές πτώσεις πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό*

Συμβολίζουμε με t_1 τη χρονική στιγμή που το πλεόνασμα $U(t_4)$ γίνεται για πρώτη φορά μικρότερο από το αρχικό αποθεματικό. Τότε

$$L_1 = u - u_1$$

είναι το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό τη πρώτη φορά που εμφανίζεται ζημία. Κατά αντιστοιχία υπολογίζουμε και τις υπόλοιπες πτώσεις του πλεονάσματος κάτω από το τελευταίο αποθεματικό που έχει η εταιρία τη προηγούμενη χρονική στιγμή (το οποίο είναι μικρότερο από το αρχικό αποθεματικό).

Το άθροισμα όλων των πτώσεων αποτελεί τη συνάρτηση L που ορίζεται ως εξής

$$L = L_1 + L_2 + .. + L_K$$

η οποία δηλώνει μια συνθετη τυχαία μεταβλητή που ονομάζεται *μέγιστη σωρευτική απώλεια* (maximal aggregate loss) και δηλώνει τη συνολική πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό. Οπότε η σχέση που ορίζει τη *μέγιστη σωρευτική απώλεια* ορίζεται σύμφωνα με το τύπο:

$$L = \max_{t \geq 0}\{S(t) - ct\}$$

Η L_i είναι μια τ.μ. που έχει μάζα στο μηδέν και είναι συνεχής στο $[0, \infty)$.

$$P(L_1 = 0) = \delta(0)$$

Στη πραγματικότητα οι $L_1, L_2, ..L_K$ έχουν την ίδια κατανομή. Έστω Κ το πλήθος των πτώσεων κάτω απο το αρχικό αποθεματικό το οποίο ακολουθεί μια γεωμετρική κατανομή της μορφής

$$P(K = k) = \delta(0)[\psi(0)]^k, \quad k = 0, 1, 2...$$

Η χρεοκοπία εμφανίζεται όταν η σωρευτική απώλεια ξεπερνά το αρχικό αποθεματικό.

$$P(L > u) = \psi(u)$$

2.6 Εισαγωγή στις ανανεωτικές εξισώσεις

Οι ανανεωτικές εξισώσεις, τα τελευταία χρόνια, χρησιμοποιούνται ευρέως στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας στην ανάλυση της διαδικασίας του πλεονάσματος. Τα αποτελέσματα τις ανανεωτικής ελλειμματικής εξίσωσης θα τα μελετήσουμε εκτενέστερα στις επόμενες ενότητες.

Στη συνέχεια παραθέτουμε κάποιους βασικούς ορισμούς που επεξηγούν την έννοια της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης οι οποίες και αναλύονται στο βιβλίο του Willmot and

Lin, ¨Lundberg Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications ¨(βλέπε Κεφάλαιο 9) (2001). Πριν όμως από αυτό θα κάνουμε μία συνοπτική αναφορά στις *ανανεωτικές ανελίξεις* από τις οποίες και προέρχονται οι ανανεωτικές εξισώσεις για να κατανοήσουμε πλήρως την έννοια τους.

Γενίκευση της ανέλιξης Poisson που αναφέραμε σε προηγούμενη παράγραφο αποτελεί η *ανανεωτική ανέλιξη*.

Ορισμός 2.9. *Μια ανανεωτική ανέλιξη* $\{N(t) : t \geq 0\}$ *είναι μια απαριθμήτρια ανέλιξη στην οποία οι ενδιάμεσοι χρόνοι (χρόνοι αναμονής) είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και ακολουθούν την ίδια κατανομή (όχι απαραίτητα την εκθετική)*

Οι ανανεωτικές ανελίξεις έχουν μεγάλη χρησιμότητα επίσης στη θεωρία αξιοπιστίας. Αν θεωρήσουμε ένα εργοστάσιο με λάμπες όπου κάθε φορά εγκαθιστούμε τη λάμπα που έχει χαλάσει με μία καινούργια. Έτσι λέμε ότι το σύστημα ανανεώνεται. Η $N(t)$ παριστάνει τον αριθμό των ανανεώσεων στο διάστημα $[0, t]$, τότε η $\{N(t) : t \geq 0\}$ είναι μια *ανανεωτική ανέλιξη* και ορίζεται

$$N(t) = \max\{n : Y_n \leq t\}$$

όπου Y_i ο χρόνος ζωής των i - λαμπών που εγκαταστήσαμε. Έτσι προκύπτει η βασική σχέση όπου για κάθε ακέραιο n και $t \geq 0$ τότε $\{N(t) \geq n\}$ όταν $\{Y_n \leq t\}$. Δηλαδή έχουμε τουλάχιστον n γεγονότα μέχρι το χρόνο t (ενδεχόμενο $\{N(t) \geq n\}$) και επίσης ο χρόνος αναμονής μέχρι να συμβούν και τα n είναι t.

Ορισμός 2.10. *Έστω ότι* $0 < \phi < 1$ *και η* $F(x)$ *είναι μια συνάρτηση κατανομής στο* $[0, \infty)$, *με* $F(0) = 0$ *και συνάρτηση πυκνότητας f . Αν η συνάρτηση* m *ικανοποιεί της εξίσωσης*

$$m(x) = \phi \int_0^y m(x-y)\mathrm{dF}(y) + \phi r(x), \quad x \geq 0 \tag{2.9}$$

όπου $r(x)$ *είναι κάποια συνεχής συνάρτηση στο* $(0, \infty)$, *τότε η m(x) ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση* ***(defective renewal equation)***.

Παρατήρηση !
Οι ανανεωτικές εξισώσεις διακρίνονται στις παρακάτω περιπτώσεις

- 1. ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις (defective renewal equation) όταν ισχύει $0 < \phi < 1$

- 2. κανονικές ή μη ελλειμματικές εξισώσεις (non defective renewal equation) όταν $\phi = 1$

Στα Κεφάλαια που ακολουθούν θα μελετήσουμε τη πρώτη κατηγορία δηλαδή αυτή των ελλειμματικών εξισώσεων.

2.6.1 Αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής (συνάρτηση Gerber - Shiu)

Τα τελευταία χρόνια οι ανανεωτικές ελλειμματικές εξισώσεις έχουν τεράστια εφαρμογή στον τομέα του Αναλογισμού. Πολλές προσπάθειες έχουν γίνει για την εφαρμογή τους στη Θεωρία Χρεοκοπίας. Το 1998 με το άρθρο τους ¨ *On the time value of ruin* ¨ οι Gerber - Shiu εισήγαγαν μια καινούργια συνάρτηση που ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, η οποία αποτελεί τομή στη μελέτη της Θεωρίας Χρεοκοπίας και θα δώσει πολλές ελπίδες για την εξέλιξη και τη βελτίωση των αποτελεσμάτων που την αφορούν. Η συνάρτηση των Gerber - Shiu έχει γίνει αντικείμενο μελέτης από πολλούς ερευνητές και θεωρείται ένα από τα πιο σημαντικά εργαλεία στον Αναλογισμό.

Η $\varphi_\delta(u)$ είναι συνάρτηση του ελλείμματος μετά τη χρεοκοπία $|U(T)|$, του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία $U(T^-)$ και του παράγοντα προεξόφλησης και χρησιμοποιείται ευρέως στη Θεωρία Χρεοκοπίας.

Ορισμός 2.11. *Η συνάρτηση Gerber - Shiu ως συνάρτηση του $|U(T)|$ και του $U(T^-)$ αλλά και του αρχικού αποθεματικού u είναι η εξής*

$$\varphi_\delta(u) = E\{e^{-\delta t} w(U(T), |U(T)|)\mathbf{I}(T < \infty)|U(0) = u\} \tag{2.10}$$

όπου $w(U(t), |U(T)|)$ είναι η συνάρτηση προεξοφλημένης ποινής και δ ο παράγοντας προεξόφλησης που είναι πάντα θετικός και η δείκτρια συνάρτηση

$$I(A) = \begin{cases} 1, & \text{αν συμβαίνει το ενδεχόμενο } A \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ειδικές περιπτώσεις της συνάρτησης Gerber Shiu

Η συνάρτηση των Gerber Shiu που ορίσαμε παραπάνω μπορεί να πάρει διαφορετική μορφή ορίζοντας διαφορετικές τιμές για τη συνάρτηση της προεξοφλημένης ποινής $w(x, y)$ και για τον παράγοντα προεξόφλησης δ. Κάποιες από τις πιο γνωστές περιπτώσεις που έχουν υπολογιστεί είναι οι ακόλουθες:

- όταν το $\delta = 0$ και $w(x,y) = 1$ τότε από τη σχέση (2.9) προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας :

$$\varphi_\delta(u) = E\{\mathbf{I}(T < \infty)|U(0) = u\} = \psi(u)$$

- όταν το $\delta > 0$ και $w(x,y) = 1$ τότε από τη σχέση (2.9) προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας :

$$\varphi_\delta(u) = E\{e^{-\delta t}\mathbf{I}(T < \infty)|U(0) = u\} = \overline{K}_\delta(u)$$

- όταν το $\delta > 0$ και $w(x_1,x_2) = \mathbf{I}(x_1 \leq x)\mathbf{I}(x_2 \leq y)$ τότε από τη σχέση (2.9) προκύπτει η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του $|U(T)|$ και του $U(T^-)$:[‡]

$$\varphi_\delta(u) = E\{e^{-\delta t}\mathbf{I}(x_1 \leq x)\mathbf{I}(x_2 \leq y)\mathbf{I}(T < \infty)|U(0) = u\} = F_\delta(x,y|u)$$

- όταν το $\delta > 0$ και $w(x_1,x_2) = \mathbf{I}(x_1 = x)\mathbf{I}(x_2 = y)$ τότε από τη σχέση (2.9) προκύπτει η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $|U(T)|$ και του $U(T^-)$:

$$\varphi_\delta(u) = E\{e^{-\delta t}\mathbf{I}(x_1 = x)\mathbf{I}(x_2 = y)\mathbf{I}(T < \infty)|U(0) = u\} = f_\delta(x,y|u)$$

- όταν το $\delta > 0$ και $w(x_1,x_2) = \mathbf{I}(x_1 \leq x)$ τότε από τη σχέση (2.9) προκύπτει η προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος $U(T^-)$ κατά τη χρονική στιγμή της χρεοκοπίας :

$$\varphi_\delta(u) = E\{e^{-\delta t}\mathbf{I}(x_1 \leq x)\mathbf{I}(T < \infty)|U(0) = u\} = F_\delta(x|u)$$

- όταν το $\delta > 0$ και $w(x_1,x_2) = \mathbf{I}(x_2 \leq y)$ τότε από τη σχέση (2.9) προκύπτει η προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος $|U(T)|$ κατά τη χρονική στιγμή της χρεοκοπίας :

[‡] όπου x_1 αντιστοιχεί στο $U(T^-)$ και το x_2 στο $|U(T)|$

$$\varphi_\delta(u) = E\{e^{-\delta t}\mathbf{I}(x_2 \leq y)\mathbf{I}(T < \infty)|U(0) = u\} = F_\delta(y|u)$$

- όταν το $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = \mathbf{I}(x_1 = x)$ τότε από τη σχέση (2.9) προκύπτει η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος $U(T^-)$ κατά τη χρονική στιγμή της χρεοκοπίας :

$$\varphi_\delta(u) = E\{e^{-\delta t}\mathbf{I}(x_1 = x)\mathbf{I}(T < \infty)|U(0) = u\} = f_\delta(x|u)$$

- όταν το $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = \mathbf{I}(x_2 \leq y)$ τότε από τη σχέση (2.9) προκύπτει η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ελλείμματος $|U(T)|$ κατά τη χρονική στιγμή της χρεοκοπίας :

$$\varphi_\delta(u) = E\{e^{-\delta t}\mathbf{I}(x_2 \leq y)\mathbf{I}(T < \infty)|U(0) = u\} = f_\delta(y|u)$$

2.6.2 Υπολογισμός αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής (συνάρτηση Gerber - Shiu)

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως οι ανανεωτικές εξισώσεις έχουν άμεσες εφαρμογές στη θεωρία χρεοκοπίας. Το *Ανανεωτικό Μοντέλο* αποτελεί μια πιο γενική μορφή του Κλασσικού Μοντέλου. Οι χρόνοι χρεοκοπίας μεταξύ των αποζημιώσεων είναι ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ. που ακολουθούν οποιαδήποτε συνεχή κατανομή, ενώ το πλήθος των αποζημιώσεων $N(t)$ ακολουθεί μια οποιαδήποτε στοχαστική διαδικασία. Στο ίδιο άρθρο *"on the time value of ruin"* οι Gerber - Shiu αποδεικνύουν ότι η συνάρτηση που ικανοποιεί μια τέτοια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση είναι η παρακάτω:

Η συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\varphi_\delta(u) = \frac{1}{1+\xi_\delta}\int_0^u \varphi_\delta(u-x)g_\delta(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u), \quad u \geq 0 \tag{2.11}$$

για το οποίο ισχύει ότι :

$$\frac{1}{1+\xi_\delta} = 1 - \frac{\delta}{c\rho(\delta)}$$

και θέτοντας $\rho = p(\delta)$ να είναι η μοναδική θετική ρίζα της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg Lundberg

$$\lambda + \delta - c\rho = \lambda\widehat{p}(\rho) \tag{2.12}$$

Για να καταλήξουμε σε αποτελέσματα τις λύσης της εξίσωσης Lundberg θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε την έννοια του μετασχηματισμού Laplace.

Ορισμός 2.12. *Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$. Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης f ορίζεται ως η συνάρτηση*

$$\widehat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) \mathrm{d}x$$

Ιδιότητες Laplace

1. Ο μετασχηματισμός Laplace της ουράς της κατανομής μιας συνάρτησης είναι

$$\widehat{\overline{F}}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\overline{F}(x)\mathrm{d}x = \frac{1-\widehat{f}(s)}{s} \quad .$$

2.Ο μετασχηματισμός Laplace της πρώτης παραγώγου είναι

$$\widehat{f'}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f'(x)\mathrm{d}x = sf'(s) - f(0).$$

Από τον παραπάνω ορισμό διαπιστώνουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(x)$ δίνεται από το τύπο

$$\widehat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\mathrm{d}x.$$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να ορίσουμε τα εξής:

Ορισμός 2.13. *Θεωρούμε τη συνάρτηση*

$$l(s) = \lambda + \delta - cs$$

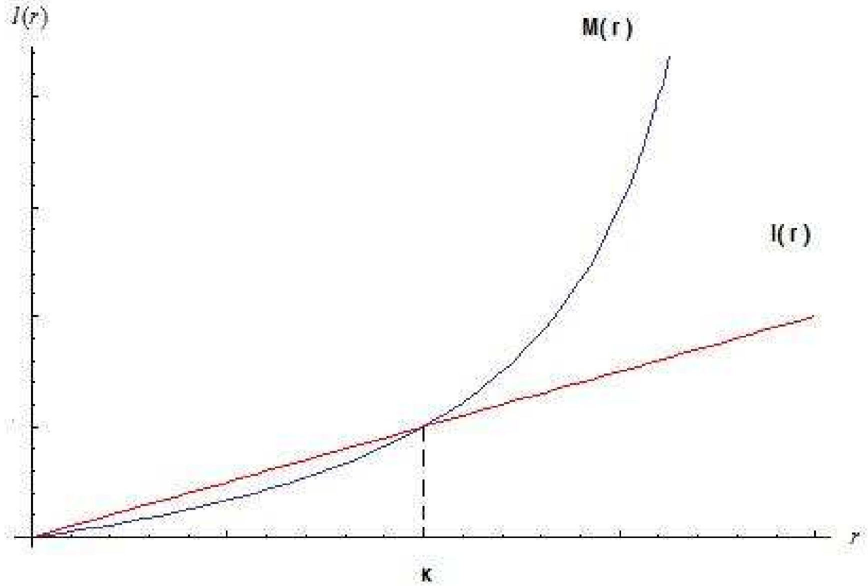
Η γενικευμένη εξίσωση Lundberg ορίζεται από τη σχέση

$$l(s) = \lambda\widehat{f}(s)$$

Παρατηρούμε στο Σχήμα 2.4 τη διαγραμματική απεικόνιση των δύο συναρτήσεων $l(s)$ και $\widehat{f}(s)$. Γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$c = (1+\theta)\lambda p_1$$

αντικαθιστώντας στη σχέση (2.7) θα έχουμε



Σχήμα 2.4: *Λύση της εξίσωσης Laundberg*

$$\lambda + cr = \lambda M_X(r)$$

για $r = -s$

$$\lambda - cs = \lambda M_X(-s) \Rightarrow \lambda - cs - \lambda \widehat{f}(s) = 0$$

Επίσης ισχύει ότι

$$l(0) = \lambda + \delta \geq \lambda = \lambda \widehat{p}(0)$$

2.6.3 Αποτελέσματα των ανανεωτικών ελλειμματικών εξισώσεων στη Θεωρία Χρεοκοπίας από τους Willmot and Lin (ειδική περίπτωση)

Οι Lin et Willmot (1998) θέλησαν να βρουν τη λύση της ειδικής περίπτωσης μιας ανανεωτικής εξίσωσης που δημιούργησαν οι Gerber - Shiu ώστε να μπορέσουν να τη μελετήσουν εκτενέστερα και να καταλήξουν σε διάφορα αποτελέσματα για οποιαδήποτε κατανομή.

Στη προσπάθεια τους να υπολογίσουν τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$, (2.10) απέδειξαν στο άρθρο τους ¨ *An analysis of a defective renewal equations using in ruin theory*¨ το (1999) τις σχέσεις των συναρτήσεων που απαρτίζουν την ανανεωτική εξίσωση $\varphi_\delta(u)$ μέσα από τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε τον ακριβή τύπο της συνάρτησης για οποιαδήποτε συνεχή κατανομή.

Έτσι σύμφωνα με τους *Lin and Willmot* (1999) μπορούμε να διακρίνουμε τις παρακάτω συναρτήσεις αλλά και παραμέτρους που την απαρτίζουν $\xi_\delta, G_\delta(x), H_\delta(u)$ για $\delta \geq 0$. Όπως φαίνεται παρακάτω οι σχέσεις που διακρίνονται είναι οι εξής:

Αρχικά η συνάρτηση $\overline{G}_\delta(x)$ ορίζεται σύμφωνα με το παρακάτω τύπο

$$\overline{G}_\delta(x) = \frac{e^{\rho x}\int_x^\infty e^{-\rho y}\overline{F}(y)\mathrm{d}y}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\overline{F}(y)\mathrm{d}y} \tag{2.13}$$

και είναι συνάρτηση μόνο της ουράς των αποζημιώσεων κάτι που κάνει ιδιαίτερα απλή την εφαρμογή της, ενώ η παράμετρος ξ_δ δίνεται από το τύπο

$$\xi_\delta = \frac{1+\theta}{\int_0^\infty e^{-\rho y}f_e(y)\mathrm{d}y} - 1 \tag{2.14}$$

και είναι συνάρτηση της πυκνότητας της κατανομής ισορροπίας και του περιθωρίου ασφαλείας. Τέλος η συνάρτηση $H_\delta(u)$ ορίζεται σύμφωνα

$$H_\delta(u) = \frac{e^{\rho u}\int_u^\infty e^{-\rho x}\int_x^\infty w(x,y)f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\overline{F}(y)\mathrm{d}y} \tag{2.15}$$

όπου το ρ αποτελεί τη λύση της γενικευμένης εξίσωσης $Lundberg$. Παρατηρούμε ότι μόνο η $H_\delta(u)$ επηρεάζεται από τον παράγοντα $w(x,y)$. Έτσι ορίζοντας διαφορετικές τιμές ή συναρτήσεις για το $w(x,y)$ έχουμε διαφορετικά αποτελέσματα κάθε φορά για τη συνάρτηση $H_\delta(u)$ και κατά συνέπεια για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$. Τα αποτελέσματα των σχέσεων θα τα μελετήσουμε στα επόμενα κεφάλαια.

Προσοχή !!

Στη περίπτωση που ο συντελεστής $w(x,y)$ ισούται με τη μονάδα τότε και μόνο τότε οι δύο συναρτήσεις $H_\delta(u)$, $\overline{G}_\delta(x)$ παράγουν το ίδιο αποτέλεσμα οποιαδήποτε κατανομή και αν ακολουθούν οι αποζημιώσεις.

Τις περισσότερες φορές είναι απαραίτητος ο υπολογισμός του ακριβή τύπου της ανανεωτικής εξίσωσης, έτσι ώστε να γίνει καλύτερα η διαγραμματική απεικόνιση των φραγμάτων ως προς την ανανεωτική εξίσωση που μελετάμε. Αυτό θα γίνει με τη χρήση κάποιων ιδιοτήτων σύμφωνα με τις οποίες μπορούμε να καταλήξουμε σε αποτελέσματα για τον υπολογισμό του ακριβή τύπου της ανανεωτικής συνάρτησης με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

2.6.4 Υπολογισμός ακριβή τύπου ανανεωτικών εξισώσεων

Πολλές φορές καλούμαστε να υπολογίσουμε τον ακριβή τύπο μιας ανανεωτικής εξίσωσης για να τον μελετήσουμε ή να τον συγκρίνουμε με φράγματα. Γι΄ αυτό το λόγο υπολογίσουμε το Μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης και στη συνέχεια αντιστρέφουμε με σκοπό να βρούμε τον ακριβή τύπο. Έτσι έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

Ο μετασχηματισμός Laplace μιας ανανεωτικής εξίσωσης της μορφής (2.8) ικανοποιεί τη παρακάτω σχέση

$$\widehat{m}(s) = \phi\widehat{m}(s)\widehat{f}(s) + \phi\widehat{r}(s) \Rightarrow \widehat{m}(s) = \frac{\phi\widehat{r}(s)}{1-\phi\widehat{f}(s)} \tag{2.16}$$

Εφαρμογές στη Θεωρία Χρεοκοπίας:

1. Ο μετασχηματισμός LaplaceLaplace μιας συνάρτησης που αποτελεί λύση μιας ανανεωτικής εξίσωσης της μορφής (2.15) δίνεται από τη σχέση

$$\widehat{\varphi}_\delta(s) = \frac{1}{1+\xi_\delta}\widehat{\varphi}_\delta(s)\widehat{g}(s) + \frac{1}{1+\xi_\delta}\widehat{H}(s)$$

$$\Leftrightarrow \widehat{\varphi}_\delta(s) = \frac{\dfrac{1}{1+\xi_\delta}\widehat{H}_\delta(u)}{1-\dfrac{1}{1+\xi_\delta}\widehat{g}_\delta(u)} \tag{2.17}$$

2. Ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας που ικανοποιεί μια ανανεωτική συνάρτησης της μορφής (2.3) δίνεται από τη σχέση

$$\widehat{\psi}(s) = \phi\widehat{\psi}(s)\widehat{f}_e(s) + \phi\widehat{\overline{F}}_e(s)$$

$$\Leftrightarrow \widehat{\psi}(s) = \frac{\phi\widehat{\overline{F}}_e(s)}{1-\phi\widehat{f}_e(s)} \tag{2.18}$$

Γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\widehat{\overline{F}}_e(s) = \frac{1-\widehat{f}_e(s)}{s}$$

άρα αντικαθιστώντας στην (2.17) προκύπτει ότι

$$\widehat{\psi}(s) = \frac{\phi(1-\widehat{f}_e(s))}{s(1-\phi\widehat{f}_e(s))} \tag{2.19}$$

2.7 Φράγματα για λύσεις ανανεωτικών εξισώσεων (Willmot et al(2001))

Στη τελευταία παράγραφο του Κεφαλαίου θα μελετήσουμε την εύρεση φραγμάτων για την ανανεωτική εξίσωση. Η εύρεση των φραγμάτων είναι πολύ σημαντική στη Θεωρία Χρεοκοπίας αφού μπορούμε με αυτό το τρόπο να διαπιστώσουμε πόσο πλησιάζει ένα φράγμα μια συνάρτηση και μελετώντας το να καταλήξουμε σε άλλα καλύτερα φράγματα, για οποιαδήποτε κατανομή. Οι *Willmot et al* (2001) $(p.678-680)$ δημιούργησαν δύο πολύ σημαντικά θεωρήματα που χρησιμοποιούνται ευρέως στον υπολογισμό φραγμάτων. Το πρώτο θεώρημα αποτελεί τη γενική μορφή και είναι περισσότερο απλό στον υπολογισμό σε σχέση με το δεύτερο που δίνει ακριβέστερα αποτελέσματα αλλά είναι πιο δύσκολο στον υπολογισμό. Εφαρμόζοντας τα φράγματα που ακολουθούν στη θεωρία χρεοκοπίας θα προκύψουν εξαιρετικής σημασίας αποτελέσματα για τη λύση της ανανεωτικής εξίσωσης. Παρατηρούμε ότι και τα δύο Θεωρήματα αποτελούν συνάρτηση του *συντελεστή προσαρμογής* κάτι που καθιστά την ύπαρξη του πολύ σημαντική για τη μελέτη των φραγμάτων. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε ένα ακόμα φράγμα για τη λύση της ανανεωτικής εξίσωσης, που εισήγαγε στο άρθρο του *" Tails bounds for the distribution of the deficit in the renewal risk model"* ο G. Psarrakos ως εξέλιξη του *Θεωρήματος* που όρισαν το 2001 οι Willmot and Lin (Κεφάλαιο 9). Στις επόμενες Ενότητες αφού υπολογίσουμε τα φράγματα με βάση τα θεωρήματα που θα αναφέρουμε ακολούθως, θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα έτσι ώστε να γίνει η καλύτερη επιλογή του φράγματος που καλύπτει ακριβέστερα την λύση της ανανεωτικής εξίσωσης.

2.7.1 Γενικό άνω και κάτω φράγμα για τη λύση της ανανεωτικής εξισώσης - *Willmot et al*

(2001)

Υποθέτουμε για $0<\phi<1$ τη παρακάτω *ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση* ***(defective renewal equation)*** που ορίσαμε και νωρίτερα από τη σχέση (2.8)

$$m(x) = \phi\int_0^x m(x-y)f(y)\mathrm{d}y + \phi r(x), \quad x\geq 0$$

Υποθέτουμε ότι η σταθερά κ αποτελεί τη λύση της εξίσωσης

$$\int_0^\infty e^{\kappa y} \mathrm{dF}(y) = \frac{1}{\phi} \tag{2.20}$$

Για να δημιουργήσουμε ακριβή φράγματα για την λύση την ανανεωτικής ελλειμματικής εξίσωσης, $m(x)$, στη περίπτωση που $\phi < 1$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$a(z) = \frac{e^{\kappa z} r(z)}{\int_z^\infty e^{\kappa y} \mathrm{dF}(y)}, \quad z > 0 \tag{2.21}$$

Υποθέτουμε ότι το *μέγιστο* της συνάρτησης $a(z)$ δίνεται από τη σχέση

$$a_U(x) = \sup_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} a(z), \quad x > 0 \tag{2.22}$$

όπως επίσης το *ελάχιστο* της συνάρτησης $a(z)$ δίνεται από τη σχέση

$$a_L(x) = \inf_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} a(z), \quad x > 0 \tag{2.23}$$

Ένα βασικό αποτέλεσμα από τη λύση της (2.7) που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια είναι τα εξής: [§]

Θεώρημα 2.1. *Αν ο συντελεστής προσαρμογής κ αποτελεί λύση της εξίσωσης* (2.8)*, τότε το άνω φράγμα δίνεται από τη σχέση*

$$m(x) \le a_U(x) e^{-\kappa x}, \quad x \ge 0 \tag{2.24}$$

αντίστοιχα το κάτω φράγμα δίνεται από τη σχέση

$$m(x) \ge a_L(x) e^{-\kappa x}, \quad x \le 0 \tag{2.25}$$

[§] τα φράγματα που θα μελετήσουμε απευθύνεται σε μια οικογένεια εκθετικών κατανομών

2.7.2 Ειδικό άνω και κάτω φράγμα για τη λύση της ανανεωτικής εξισώσης - *Willmot et al*

(2001)

Συνεχίζοντας στη μελέτη του επόμενου θεωρήματος όπως ορίζουν οι *Willmot et al* (2001) στο άρθρο υποθέτουμε τις ακόλουθες συναρτήσεις $\tau(x)$ και $\sigma(x)$ για τις οποίες θα υπολογίσουμε το *μέγιστο* και το *ελάχιστο* τους αντίστοιχα και οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις .

$$\tau(z) = \frac{r(z)}{\overline{F}(z)}, \quad x \geq 0 \tag{2.26}$$

και

$$\sigma(z) = \frac{e^{\kappa z}\overline{F}(z)}{\int_z^\infty e^{\kappa y} \mathrm{dF}(y)}, \quad x \geq 0 \tag{2.27}$$

Αρχικά το *μέγιστο* της ποσότητας $\tau(x)$ που δίνεται από τη σχέση (2.25)

$$\tau_U(z) = \sup_{0 \leq z \leq x, F_e(z)>0} \frac{r(z)}{\overline{F}(z)}, \quad x \geq 0$$

ενώ το *ελάχιστο* της ποσότητας $\tau(x)$

$$\tau_L(z) = \inf_{0 \leq z \leq x, F_e(z)>0} \frac{r(z)}{\overline{F}(z)}, \quad x \geq 0$$

αντίστοιχα το *μέγιστο* της ποσότητας $\sigma(x)$ που δίνεται από τη σχέση (2.26)

$$\sigma_U(z) = \sup_{0 \leq z \leq x, F_e(z)>0} \frac{e^{\kappa z}\overline{F}(z)}{\int_z^\infty e^{\kappa y} \mathrm{dF}(y)}, \quad x \geq 0 \tag{2.28}$$

ενώ το *ελάχιστο* της ποσότητας $\sigma(x)$

$$\sigma_L(z) = \inf_{0 \leq z \leq x, F_e(z)>0} \frac{e^{\kappa z}\overline{F}(z)}{\int_z^\infty e^{\kappa y} \mathrm{dF}(y)}, \quad x \geq 0 \tag{2.29}$$

Το θεώρημα που ακολουθεί χρησιμοποιεί τις παραπάνω συναρτήσεις

Θεώρημα 2.2. *Αν ο συντελεστής προσαρμογής κ αποτελεί λύση της εξίσωσης* (2.7), *τότε το άνω φράγμα δίνεται από τη σχέση*

$$m(x) \leq \sigma_U(x)\tau_U(x)e^{-\kappa x}, \quad x \geq 0 \tag{2.30}$$

και αντίστοιχα το κάτω φράγμα δίνεται από τη σχέση,

$$m(x) \geq \sigma_L(x)\tau_L(x)e^{-\kappa x}, \quad x \geq 0 \tag{2.31}$$

2.7.3 Γενικό φράγμα για τη λύση της ανανεωτικής εξισώσης - G. Psarrakos

Θεωρούμε την ανανεωτική ελλειμματική εξίσωση που ικανοποιεί την εξίσωση (2.8).

$$m(x) = \phi \int_0^y m(x-y)f(y)\mathrm{d}y + \phi r(x), \quad x \geq 0$$

η λύση της εξίσωσης $m(x)$ δίνεται από τη παρακάτω σχέση:

$$m(x) = \frac{1}{1-\phi} \int_0^y r(x-y)\mathrm{dG}(y) + \phi r(x), \quad x \geq 0$$

όπου η συνάρτηση $G(x)$ είναι μια σύνθετη γεωμετρική κατανομή που δίνεται από τη σχέση

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-\phi)\phi^n F^{*n}(x)$$

όπου η ουρά της συνάρτησης $G(x)$ είναι

$$\overline{G}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\phi)\phi^n \overline{F}^{*n}(x)$$

το οποίο έχει μάζα στο μηδέν με τιμή $G(0) = 1 - \phi$.

Οι Willmot et Lin (2001, Κεφάλαιο 9) εισήγαγαν για πρώτη φορά το παρακάτω θεώρημα για την εύρεση φραγμάτων σύμφωνα με το οποίο έχουμε ότι

Θεώρημα 2.3. *Υποθέτουμε ότι $r(x) \leq (\geq)\lambda\overline{F}(x)$ για κάθε $x \geq 0$ τότε*

$$m(x) \leq (\geq)\lambda\frac{\overline{G}(x)}{\phi}, \quad x \geq 0$$

Ο G. Psarrakos με βάση το παρακάτω θεώρημα ως βελτίωση του *Θεωρήματος 2.3* των Willmot et Lin. Έτσι προκύπτει ότι :

Θεώρημα 2.4. *Θεωρούμε ότι η συνάρτηση $\lambda(x)$ είναι μια αύξουσα (ή φθίνουσα) συνάρτηση. Αν ισχύει για τη συνάρτηση $r(x)$ ότι $r(x) \leq (\geq)\lambda(x)\overline{F}(x)$ για κάθε $x \geq 0$ τότε*

$$m(x) \leq (\geq)\frac{\lambda(x)}{\phi}\overline{G}(x) - \lambda(x)\overline{F}(x) + r(x)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Φράγματα για τη Πιθανότητα Χρεοκοπίας

3.1 Εισαγωγή

Σκοπός του Κεφαλαίου είναι η μελέτη της πιθανότητας χρεοκοπίας που αποτελεί λύση μιας ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης όταν ο συντελεστής προεξόφλησης δ=0 και $w(x, y) = 1$, δηλαδή:

$$\psi(u) = \phi \int_0^u \psi(u-x)\mathrm{d}F_e(x) + \phi\overline{F}_e(u),$$

Στο παρόν κεφάλαιο αφού υπολογίσουμε τον τύπο που ικανοποιεί τη συνάρτηση που θέλουμε να φράξουμε στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τους τύπους των φραγμάτων για την *πιθανότητα χρεοκοπίας* στη περίπτωση που η κατανομή των αποζημιώσεων είναι $\alpha)$ εκθετική $\beta)$ μείξη εκθετικών και $\gamma)$ $Erlang$ κατανομή σύμφωνα με το *Θεώρημα* 2.1 και 2.2 των Willmot et al (2001). Θα εξετάσουμε αναλυτικά τον τρόπο υπολογισμού των φραγμάτων με βάση τα δύο θεωρήματα γι' αυτές τις οικογένειες κατανομών. Η κοινή μορφή των εκθετικών κατανομών μας επιτρέπει τη διατύπωση κοινών θεωρητικών αποτελεσμάτων για αυτές, τα οποία και θα ορίσουμε στις επόμενες παραγράφους.

Στόχος αυτού του Κεφαλαίου είναι να ορίσουμε, να μελετήσουμε και να συγκρίνουμε φράγματα που μπορούν να φράξουν ικανοποιητικά τη πιθανότητα χρεοκοπίας.

3.2 Εκθετική Κατανομή

Η εκθετική κατανομή αποτελεί μια από τις πιο ευρέως χρησιμοποιούμενες κατανομές στη *Θεωρία Χρεοκοπίας*. Τις περισσότερες φορές χρησιμοποιείται λόγω των πολλών καλών ιδιοτήτων που προκύπτουν από το χειρισμό της αλλά και της ιδιαίτερα απλής εφαρμογής της. Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε μια απλή εφαρμογή για τον υπολογισμό των φραγμάτων που μας ενδιαφέρουν.

Θεωρούμε ότι η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί μια εκθετική κατανομή με παράμετρο μ της παρακάτω μορφής

$$F(x) = 1 - e^{-\mu x}, \quad \mu > 0, x > 0 \tag{3.1}$$

με μέση τιμή $p_1 = \frac{1}{\mu}$, διακύμανση $Var(X) = \frac{1}{\mu^2}$ και ροπογεννήτρια $M_X(r) = \frac{\mu}{\mu - r}$.

Επίσης η ουρά της κατανομής ισορροπίας όπως έχουμε ήδη αναφέρει δίνεται από το τύπο

$$\overline{F}_e(x) = \frac{1}{p_1} \int_x^{\infty} e^{-\mu y} \mathrm{d}y = e^{-\mu x}, \quad \mu > 0, x > 0 \tag{3.2}$$

Παραγωγίζοντας προκύπτει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $(\sigma.\pi.\pi.)$ της κατανομής ισορροπίας που έχει τη παρακάτω μορφή

$$f_e(x) = \mu e^{-\mu x}, \quad \mu > 0, x > 0 \tag{3.3}$$

Ο συντελεστής προσαρμογής κ αποτελεί, όπως είδαμε τη θετική λύση της εξίσωσης (2.7). Στη περίπτωση της εκθετικής κατανομής έχει αποδειχθεί (Bowers et al (1997)) ότι ο συντελεστής προσαρμογής δίνεται από τον τύπο

$$\kappa = \frac{\theta \mu}{1 + \theta}, \quad \mu > 0, \quad \theta > 0$$

όπου θ αποτελεί το περιθώριο ασφαλείας όπως ορίστηκε στο δεύτερο κεφάλαιο.

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί τη σχέση (2.3). Για τον ακριβή υπολογισμό του τύπου της πιθανότητας χρεοκοπίας θα υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Laplace της σχέσης αυτής.Ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας υπολογίζεται αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της συνάρτησης με e^{-sx} και στη συνέχεια ολοκληρώσουμε από το 0 ως το ∞ έτσι ώστε να δημιουργήσουμε τη μορφή $\widehat{\psi}(s) = \int_0^{\infty} \psi(x) e^{-sx} \mathrm{d}x$.

Στη περίπτωση εκθετικών αποζημιώσεων η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται από τον ακριβή τύπο

$$\psi(u) = \psi(0) e^{-\kappa u} = \frac{1}{1 + \theta} e^{-\kappa u}, \quad \forall u \epsilon \mathbf{R} \tag{3.4}$$

Στη συνέχεια της παραγράφου θα γίνει αναλυτική μελέτη φραγμάτων για τη πιθανότητα χρεοκοπίας με βάση τα *Θεωρήματα 2.1 και 2.2* της *παραγράφου 2.3.*

- **Φράγματα για τη πιθανότητα χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.1 όταν δ=0**

Στη περίπτωση της εκθετικής κατανομής ο υπολογισμός των συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται στην εύρεση φραγμάτων αναφορικά με το *Θεώρημα 2.1*, είναι αρκετά απλός.

Αρχικά, η πρώτη ποσότητα που μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε είναι $a(z)$ όπου η μεγιστοποίηση (ελαχιστοποίηση) της οποίας θα μας δώσει το *άνω* και το *κάτω φράγμα.*

Γνωρίζουμε ότι ισχύει η σχέση (2.20) για την οποία έχουμε ότι

$$a(z) = \frac{e^{\kappa z}\overline{F}_e(z)}{\int_z^\infty e^{\kappa y} f_e(y)\mathrm{d}y}, \quad z > 0 \tag{3.5}$$

έτσι αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.2), (3.3) στη παραπάνω σχέση εύκολα προκύπτει ότι

$$a(z) = \frac{e^{\kappa z}e^{-\mu z}}{\mu \int_z^\infty e^{\kappa y}e^{-\mu y}\mathrm{d}y} = \frac{\mu-\kappa}{\mu}, \quad z > 0 \tag{3.6}$$

Στη συνέχεια για τον υπολογισμό του *άνω* και *κάτω φράγματος* θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε και να ελαχιστοποιήσουμε αντίστοιχα τη συνάρτηση $a(z)$ ως προς z, Παρατηρούμε όμως ότι η συνάρτηση $a(z)$ είναι ένας αριθμός και ως εκ τούτου η μεγιστοποίηση (ελαχιστοποίηση) τους θα δώσει το ίδιο αποτέλεσμα.

Όπως φαίνεται παρακάτω το *μέγιστο* της συνάρτησης είναι

$$a_U(x) = \sup_{0\le z\le x, F_e(z)>0} a(z) = \frac{\mu-\kappa}{\mu} \tag{3.7}$$

και αντίστοιχα το *ελάχιστο* της συνάρτησης είναι

$$a_L(x) = \inf_{0\le z\le x, F_e(z)>0} a(z) = \frac{\mu-\kappa}{\mu}$$

Το *άνω φράγμα* για τη πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται από το τύπο (2.23) και προκύπτει ότι

$$\psi(u) \leq a_U(u)e^{-\kappa u} = \frac{\mu - \kappa}{\mu} \quad e^{-\kappa u} \quad u > 0 \tag{3.8}$$

Ενώ αντίστοιχα το *κάτω φράγμα* για τη πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται από το τύπο (2.24) και προκύπτει ότι

$$\psi(u) \geq a_L(u)e^{-\kappa u} = \frac{\mu - \kappa}{\mu} \quad e^{-\kappa u} \quad u > 0 \tag{3.9}$$

Παρατηρούμε από τις σχέσεις (3.8) και (3.9) ότι το *άνω* και το *κάτω φράγμα* συμπίπτουν τόσο μεταξύ τους όσο και με τη πιθανότητα χρεοκοπίας. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας έχει βρεθεί επακριβώς, γι' αυτό και τα φράγματα συμπίπτουν μεταξύ τους. Συμπερασματικά με βάση το *Θεώρημα 2.1* μπορούμε να πούμε ότι τα φράγματα για τη πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ακριβή.

- **Φράγματα για τη πιθανότητα χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.2 όταν δ>0**

Αντίστοιχα θα υπολογίσουμε τις ποσότητες που χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό των φραγμάτων που ορίζονται με βάση το *Θεώρημα 2.1*. Οι *Willmot et al* στο άρθρο τους *Lundberg inequalities for renewal equations* το (2001) (*σελίδα*:678-681) αποδεικνύουν ότι για εκθετικές κατανομές τα φράγματα για ανανεωτικές ελλειμματικές εξισώσεις με βάση το *Θεώρημα 2.2* είναι ακριβή και συμπίπτουν με αυτά του *Θεωρήματος 2.1*, κάτι που μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε και μόνοι μας εφαρμόζοντας το *Θεώρημα 2.2* για εκθετική κατανομή.

Ορισμός 3.1. *(Willmot et al)(2001) 'Οταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή τότε τα φράγματα που προκύπτουν με βάση το Θεώρημα 2.1 είναι ίδια με αυτά που προκύπτουν από το Θεώρημα 2.2 για τη λύση μιας ανανεωτικής ελλειμματικής συνάρτησης.*

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη το συγκεκριμένο συμπέρασμα των *Willmot et al* μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα φράγματα για τη πιθανότητα χρεοκοπίας, $\psi(u)$ ικανοποιούν τις σχέσεις (3.8) και (3.9) για το ο *άνω* και το *κάτω φράγμα* αντίστοιχα.

Επομένως, συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή τότε τα φράγματα που ορίζονται από τους *Willmot et al* είναι ακριβή, συμπίπτουν με τη πιθανότητα χρεοκοπίας και δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

3.3 Μείξη Εκθετικών Κατανομών

Πολλές φορές είναι δυνατόν να αντιμετωπίσουμε περιπτώσεις όπου οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη εκθετικών κατανομών κάτι που καθιστά τη πιθανότητα χρεοκοπίας πιο δύσκολη στον υπολογισμό της. Σ' αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τη περίπτωση που οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη εκθετικών κατανομών.

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για μείξη εκθετικών κατανομών είναι της μορφής

$$\sum^{n} q_k \mu_k e^{-x\mu_k}, \quad x > 0$$

για κάθε $\sum_{k=1}^{n} q_k = 1$ με παραμέτρους $\mu_1, \mu_2, .., \mu_k$.

Υποθέτουμε ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη εκθετικών κατανομών. Ο τύπος που ικανοποιεί η αθροιστική συνάρτηση των αποζημιώσεων δίνεται από τον τύπο

$$F(x) = 1 - \sum_{k=1}^{n} q_k e^{-\mu_k x}, \quad x > 0 \tag{3.10}$$

Η μέση τιμή της συνάρτησης των αποζημιώσεων θα έχει την εξής μορφή

$$p_1 = \sum_{k=1}^{n} q_k (\mu_k)^{-1}$$

ενώ η ουρά της κατανομής ισορροπίας δίνεται από τη σχέση

$$\overline{F}_e(x) = \frac{\int_x^{\infty} (\sum_{k=1}^{n} q_k e^{-\mu_k y}) \mathrm{d}y}{\sum_{k=1}^{n} q_k (\mu_k)^{-1}}, \quad x > 0 \tag{3.11}$$

και αντίστοιχα η $\sigma.\pi.\pi.$ της κατανομής ισορροπίας είναι η εξής

$$f_e(x) = \frac{\sum_{k=1}^{n} q_k e^{-\mu_k x}}{\sum_{k=1}^{n} q_k (\mu_k)^{-1}}, \quad x > 0 \tag{3.12}$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει και στη προηγούμενη παράγραφο ο συντελεστής προσαρμογής κ αποτελεί τη λύση της εξίσωσης (2.7). Η ροπογεννήτρια μιας μείξης εκθετικών κατανομών δίνεται από το τύπο $M_x(r) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{\mu_k - r}$. Οπότε με αντικατάσταση μπορούμε να υπολογίσουμε τις ρίζες του πολυωνύμου που προκύπτουν από τη σχέση αυτή.

Στη συνέχεια θα πρέπει να βρούμε την πιθανότητα χρεοκοπίας για μείξη εκθετικών κατανομών. Ένας τρόπος για να καταλήξουμε στον ακριβή τύπο της είναι να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Laplace της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης με βάση τη σχέση (2.18) και στη συνέχεια να τον αντιστρέψουμε καταλήγοντας σε ασφαλή συμπεράσματα για το τύπο που δίνει τη πιθανότητα χρεοκοπίας.

Ο μετασχηματισμός Laplace της $\sigma.\pi.\pi.$ της κατανομής ισορροπίας είναι

$$\widehat{f}_e(s) = \frac{\sum_{k=1}^{n} q_k}{\frac{\sum_{k=1}^{n} q_k}{\mu_k}} [\mu_k + s]^{-1} \tag{3.13}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας δίνεται από την ιδιότητα (2.18). Άρα αντικαθιστώντας τη σχέση (3.13) προκύπτει ότι

$$\widehat{\psi}(s) = \frac{\phi(1 - \widehat{f}_e(s))}{s(1 - \phi \widehat{f}_e(s))} = \frac{\phi[1 - \frac{\sum_{k=1}^{n} q_k}{\frac{\sum_{k=1}^{n} q_k}{\mu_k}}[\mu_k + s]^{-1}]}{s[1 - \phi \frac{\sum_{k=1}^{n} q_k}{\frac{\sum_{k=1}^{n} q_k}{\mu_k}}[\mu_k + s]^{-1}]} \tag{3.14}$$

όπου $\phi = \frac{1}{1+\theta}$.

Συνεπώς, αντιστρέφοντας τη παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι και αυτή η ουρά μιας μείξης k- εκθετικών κατανομών και δίνεται από τη σχέση

$$\psi(u) = C_1 e^{-p_1 u} + C_2 e^{-p_2 u} + ... + C_k e^{-p_k u}, \quad u > 0$$

με παραμέτρους $C_1, C_2, .., C_k$ σταθερές όπου τα $p_1, p_2, .., p_k$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης του συντελεστή προσαρμογής και u αποτελεί το αρχικό αποθεματικό (*βλέπε σημ. κ. Πολίτη ¨Θεωρία Χρεοκοπίας¨ σελ. 76*).

- **Φράγματα για τη πιθανότητα χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.1 όταν δ=0**

Αφού υπολογίσαμε την πιθανότητα χρεοκοπίας θα συνεχίσουμε με το δεύτερο μέρος που είναι η εύρεση των φραγμάτων για τη προσέγγιση της με βάση το *Θεώρημα 2.1* των *Willmot et al*(2001). Όπως έχουμε προαναφέρει, η συνάρτηση $a(z)$ δίνεται από το τύπο (3.5) . Οπότε αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.11), (3.12) έχουμε το εξής αποτέλεσμα

$$a(z) = \frac{e^{zk}\int_z^{\infty}[\sum_{k=1}^{n} q_k e^{-\mu_k y}]\mathrm{d}y}{\int_z^{\infty} e^{-ky}[\sum_{k=1}^{n} q_k e^{-\mu_k y}]\mathrm{d}y} = \frac{\sum_{k=1}^{n} q_k(\mu_k)^{-1} e^{-z(\mu_k-\kappa)}}{\sum_{k=1}^{n} q_k(\mu_k-\kappa)^{-1} e^{-z(\mu_k-\kappa)}}, \quad z>0 \tag{3.15}$$

Στη συνέχεια μετά την εύρεση της ποσότητας που μας ενδιαφέρει μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το μέγιστο (ελάχιστο) της συνάρτησης $a(z)$, έτσι ώστε στη συνέχεια να δημιουργήσουμε τα φράγματα για τη πιθανότητα χρεοκοπίας, όπως φαίνεται παρακάτω:

Προφανώς, το *μέγιστο* της ποσότητας $a(z)$ θα είναι

$$a_U(x) = \sup_{0\le z\le x, F_e(z)>0} \frac{\sum_{k=1}^{n} q_k(\mu_k)^{-1} e^{-z(\mu_k-\kappa)}}{\sum_{k=1}^{n} q_k(\mu_k-\kappa)^{-1} e^{-z(\mu_k-\kappa)}} \tag{3.16}$$

ενώ το *ελάχιστο* της ποσότητας $a(z)$ θα είναι

$$a_L(x) = \inf_{0\le z\le x, F_e(z)>0} \frac{\sum_{k=1}^{n} q_k(\mu_k)^{-1} e^{-z(\mu_k-\kappa)}}{\sum_{k=1}^{n} q_k(\mu_k-\kappa)^{-1} e^{-z(\mu_k-\kappa)}}$$

Συνεπώς, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το άνω και το κάτω φράγμα,μέσω των παραπάνω σχέσεων.

Το *άνω φράγμα* (2.23) δίνεται από το τύπο:

$$\psi(u) \le \left[\sup_{0\le z\le u, F_e(u)>0} \frac{\sum_{k=1}^{n} q_k(\mu_k)^{-1} e^{-z(\mu_k-\kappa)}}{\sum_{k=1}^{n} q_k(\mu_k-\kappa)^{-1} e^{-z(\mu_k-\kappa)}}\right] \cdot e^{-\kappa u} \tag{3.17}$$

ενώ για το *κάτω φράγμα* (2.24) έχουμε :

$$\psi(u) \ge \left[\inf_{0\le z\le u, F_e(u)>0} \frac{\sum_{k=1}^{n} q_k(\mu_k)^{-1} e^{-z(\mu_k-\kappa)}}{\sum_{k=1}^{n} q_k(\mu_k-\kappa)^{-1} e^{-z(\mu_k-\kappa)}}\right] \cdot e^{-\kappa u} \tag{3.18}$$

- **Φράγματα για τη πιθανότητα χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.2 όταν δ=0**

Με παρόμοιο τρόπο θα υπολογίσουμε και τις ποσότητες που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό των φραγμάτων όπως ορίζουν στο *Θεώρημα* 2.2 οι *Willmot et al* (2001). Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται στο Θεώρημα αυτό ικανοποιούν με αντικατάσταση τις παρακάτω σχέσεις :

$$\tau(x) = \frac{\overline{F}_e(z)}{\overline{F}_e(z)} \quad \text{και} \quad \sigma(x) = \frac{e^{\kappa z}\overline{F}_e(z)}{\int_z^{\infty} e^{\kappa y} f_e(y)\mathrm{d}y}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\sigma(x)$ συμπίπτει με τη συνάρτηση $a(z)$ όταν η λύση μιας ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης είναι η *πιθανότητα χρεοκοπίας*. Όποτε έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

Το πρώτο βήμα μας είναι να υπολογίσουμε το *μέγιστο* και το *ελάχιστο* των ποσοτήτων που χρησιμοποιούνται στην εύρεση του άνω και κάτω φράγματος αντίστοιχα.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$\tau_U(x) = \sup_{0\le z\le x, F_e(z)>0} \tau(x) = \inf_{0\le z\le x, F_e(z)>0} \tau(x) = 1 \tag{3.19}$$

Το μέγιστο της ποσότητας $\sigma_U(x)$ δίνεται από τη σχέση (2.27)

$$\sigma_U(x) = \sup_{0\le z\le x, F_e(z)>0} \frac{\sum_{k=1}^{n} q_k(\mu_k)^{-1}e^{-z(\mu_k-\kappa)}}{\sum_{k=1}^{n} q_k(\mu_k-\kappa)^{-1}e^{-z(\mu_k-\kappa)}} \tag{3.20}$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε και το *ελάχιστο* της ποσότητας $\sigma_L(x)$ που δίνεται από τη σχέση (2.28), για την εύρεση του κάτω φράγματος .

$$\sigma_L(x) = \sup_{0\le z\le x, F_e(z)>0} \frac{\sum_{k=1}^{n} q_k(\mu_k)^{-1}e^{-z(\mu_k-\kappa)}}{\sum_{k=1}^{n} q_k(\mu_k-\kappa)^{-1}e^{-z(\mu_k-\kappa)}} \tag{3.21}$$

Κατά συνέπεια τα φράγματα που προκύπτουν για μείξη τριών εκθετικών κατανομών είναι τα εξής:

το *άνω φράγμα* για τη πιθανότητα χρεοκοπίας, όπως αναφέρεται στη σχέση (2.29) και με αντικατάσταση των σχέσεων (3.19), (3.20) είναι

$$\psi(u) \leq \sup_{0\leq z\leq u, F_e(z)>0} \left[\frac{\sum_{k=1}^{n} q_k(\mu_k)^{-1} e^{-z(\mu_k-\kappa)}}{\sum_{k=1}^{n} q_k(\mu_k-\kappa)^{-1} e^{-z(\mu_k-\kappa)}} \right] \cdot e^{-\kappa u}, \quad u>0 \tag{3.22}$$

και αντίστοιχα το *κάτω φράγμα* για τη πιθανότητα χρεοκοπίας, όπως αναφέρεται στη σχέση (2.30) με βάση τις σχέσεις (3.19), (3.21) είναι

$$\psi(u) \geq \inf_{0\leq z\leq u, F_e(z)>0} \left[\frac{\sum_{k=1}^{n} q_k(\mu_k)^{-1} e^{-z(\mu_k-\kappa)}}{\sum_{k=1}^{n} q_k(\mu_k-\kappa)^{-1} e^{-z(\mu_k-\kappa)}} \right] \cdot e^{-\kappa u}, \quad u>0 \tag{3.23}$$

Παρατήρηση !

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να αναφέρουμε πως από τη σύγκριση των σχέσεων (3.17), (3.22) αλλά και (3.18), (3.23) παρατηρούμε ότι τα φράγματα που προκύπτουν φαίνονται να συμπίπτουν μεταξύ τους. Γι' αυτό το λόγο μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα φράγματα που δίνονται από το *Θεώρημα* 2.1 και 2.2 είναι ακριβή και συμπίπτουν και για τη μείξη εκθετικών κατανομών εκτός από τη περίπτωση της απλής εκθετικής κατανομής.

3.4 Erlang Κατανομή

Στη τελευταία ενότητα του Κεφαλαίου θα μελετήσουμε τη περίπτωση που οι αποζημιώσεις ακολουθούν μια Erlang κατανομή με παραμέτρους n και λ με *σ.π.π* της μορφής.

$$f(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad x>0, \lambda>0 \tag{3.24}$$

με μέση τιμή $p_1 = \frac{n}{\lambda}$, διακύμανση $Var(X) = \frac{n}{\lambda^2}$ και ροπογεννήτρια $M_X(r) = (\frac{\lambda}{\lambda - r})^n$ για $r < \lambda$

Η ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων δίνεται από το τύπο

$$\overline{F}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_x^\infty y^{n-1} e^{-\lambda y} \mathrm{d}y, \quad x>0, \lambda>0, \tag{3.25}$$

η πυκνότητα της κατανομής ισορροπίας προκύπτει από τη σχέση (2.5)

$$f_e(x) = \frac{1}{n}\int_x^\infty \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}y^{n-1}e^{-\lambda y}\mathrm{d}y, \quad x > 0, \lambda > 0$$

Ο ακριβής τύπος της πιθανότητας χρεοκοπίας μπορεί να ορισθεί μέσω του μετασχηματισμού Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας , όπου και αποδείξαμε με βάση την ιδιότητα (2.18).

$$\widehat{f}_e(s) = \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-sx}\int_x^\infty \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}y^{n-1}e^{-\lambda y}\mathrm{d}y \tag{3.26}$$

Άρα αντικαθιστώντας τη σχέση (3.26) στη σχέση (2.18) προκύπτει ότι

$$\widehat{\psi}(s) = \frac{\phi[1 - \frac{1}{n}\int_x^\infty e^{-sx}\int_x^\infty \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}y^{n-1}e^{-\lambda y}\mathrm{d}y]}{s(1-\phi(\frac{1}{n}\int_x^\infty e^{-sx}\int_x^\infty \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}y^{n-1}e^{-\lambda y}\mathrm{d}y))} \tag{3.27}$$

Η αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας (3.27) μας δίνει, όταν αυτή μπορεί να γίνει αναλυτικά, τον ακριβή τύπο για τη πιθανότητα χρεοκοπίας. Στην περίπτωση της Erlang κατανομής ο ακριβής τύπος της πιθανότητας χρεοκοπίας, υπάρχει και μπορεί να βρεθεί επακριβώς κάτι που θα αποδείξουμε στο παρακάτω κεφάλαιο για συγκεκριμένη κατανομή.

- **Φράγματα για τη πιθανότητα χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.1 όταν δ=0**

Σκοπός είναι η εύρεση των φραγμάτων για τη πιθανότητα χρεοκοπίας συμφώνα με το *Θεώρημα* 2.1 που έχουν προαναφερθεί όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μια Erlang κατανομή. Με βάση το *Θεώρημα* 2.1 θα υπολογίσουμε την πρώτη ποσότητα $a(z)$ που χρησιμοποιείται στην εξεύρεση των φραγμάτων.
Έτσι από τη σχέση (3.5) διαμορφώνονται τα εξής αποτελέσματα

$$a(z) = \frac{e^{-zk}\int_z^\infty\int_y^\infty f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{\int_z^\infty e^{-zy}\int_y^\infty f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}y} \tag{3.28}$$

Γενικά, είναι αρκετά δύσκολο να απλοποιήσουμε τον ακριβή τύπο της συνάρτησης $a(z)$ κάνοντας χρήση γενικών συναρτήσεων. Για τον υπολογισμό του επόμενου βήματος που είναι η *μεγιστοποίηση* (*ελαχιστοποίηση*) αντίστοιχα της ποσότητας $a(z)$,για την οποία δεν γνωρίζουμε τον ακριβή της τύπο, θα μελετήσουμε αναλυτικότερα τα συμπεράσματα που προκύπτουν στο επόμενο Κεφάλαιο. Γι' αυτό το λόγο θα ορίσουμε ένα γενικό τύπο για τα φράγματα της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Για το *άνω φράγμα* (2.23) έχουμε ότι

$$\psi(u) \le \sup_{0\le z\le u, F_e(z)>0} \left[\frac{e^{-\kappa z}\int_z^\infty \int_y^\infty f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{\int_z^\infty e^{-zy}\int_y^\infty f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}y}\right]\cdot e^{-\kappa u} \tag{3.29}$$

και για το *κάτω φράγμα* (2.24) έχουμε ότι

$$\psi(u) \ge \inf_{0\le z\le u, F_e(z)>0} \left[\frac{e^{-\kappa z}\int_z^\infty \int_y^\infty f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{\int_z^\infty e^{-zy}\int_y^\infty f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}y}\right]\cdot e^{-\kappa u} \tag{3.30}$$

- **Φράγματα για τη πιθανότητα χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.2 όταν δ=0**

Τέλος, θα πρέπει να υπολογίσουμε τις ποσότητες $\tau(x)$ και $\sigma(x)$ όπως αυτές ορίζονται με βάση το *Θεώρημα* 2.2. Γνωρίζουμε ότι για τη ποσότητα $\tau(x)$ ισχύει ότι $\tau_U(z) = \tau_L(x) = 1$. Όπως έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενη Παράγραφο οι ποσότητες $a(z)$ και $\sigma(z)$ συμπίπτουν, συνεπώς και τα ακρότατα τους.

Το μέγιστο της ποσότητας $\sigma_U(x)$ είναι

$$\sigma_U(x) = \sup_{0\le z\le x, F_e(z)>0} \frac{e^{-\kappa z}\int_z^\infty \int_y^\infty f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{\int_z^\infty e^{-zy}\int_y^\infty f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}y}$$

ενώ το ελάχιστο σύμφωνα με τη σχέση (2.28)

$$\sigma_L(x) = \sup_{0\le z\le x, F_e(z)>0} \frac{e^{-zk}\int_z^\infty \int_y^\infty f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{\int_z^\infty e^{-zy}\int_y^\infty f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}y}$$

Και στη περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι η προσέγγιση του ακριβή τύπου των δύο ποσοτήτων γίνεται δύσκολα, όποτε καταλήγουμε σε προσεγγιστικούς τύπους για τα δύο φράγματα της παρακάτω μορφής.

Για το *άνω φράγμα* σύμφωνα με τη σχέση (2.29)

$$\psi(u) \leq \sup_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} \left[\frac{e^{-zk}\int_z^{\infty}\int_y^{\infty} f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{\int_z^{\infty} e^{-zy}\int_y^{\infty} f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}y}\right]\cdot e^{-\kappa u} \tag{3.31}$$

καθώς και για το *κάτω φράγμα* σύμφωνα με τη σχέση (2.30)

$$\psi(u) \geq \sup_{0\leq z\leq u, F_e(z)>0} \left[\frac{e^{-\kappa z}\int_z^{\infty}\int_y^{\infty} f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{\int_z^{\infty} e^{-zy}\int_y^{\infty} f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}y}\right]\cdot e^{-\kappa u} \tag{3.32}$$

Στο επόμενο Κεφάλαιο θα δούμε αριθμητικές εφαρμογές των κατανομών που μελετήσαμε έτσι ώστε να εξετάσουμε τη συμπεριφορα τους σε πραγματικά αποτελέσματα.

Παρατηρήσεις

Πριν προχωρήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο ας διατυπώσουμε επιγραμματικά τα συμπεράσματα που προκύπτουν από το κεφάλαιο αυτό.

1. Οι ποσότητες $a(z)$ και $\sigma(x)$ που χρησιμοποιούνται για την εύρεση των φραγμάτων για την προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι ίσες $a_U(z) = \sigma_U(z)$ και $a_L(z) = \sigma_L(z))$ και στα τρία παραδείγματα που μελετήσαμε. Επιπλέον η ποσότητα $\tau_U(x) = \tau_L(x) = 1$ σε κάθε περίπτωση δίνει μονάδα.

2. Για την εκθετική κατανομή τα φράγματα που προκύπτουν με βάση το *Θεώρημα* 2.1 και 2.2 συμπίπτουν τόσο μεταξύ τους όσο και με τη πιθανότητα χρεοκοπίας. Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας για εκθετικές κατανομές ορίζεται σύμφωνα με τον ακριβή της τύπο (3.7).

3. Είναι σαφές ότι όταν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι η ουρά μιας μείξης εκθετικών κατανομών τότε και η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι και αυτή μια μείξη εκθετικών κατανομών με διαφορετικές παραμέτρους.

4. Ο ακριβής τύπος για τη πιθανότητα χρεοκοπίας είναι εύκολο να βρεθεί μέσω της αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace της πιθανότητα χρεοκοπίας, ο οποίος όπως αποδείξαμε είναι συνάρτηση της πυκνότητας της κατανομής ισορροπίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Αριθμητικές εφαρμογές των φραγμάτων για την Πιθανότητα Χρεοκοπίας

4.1 Εισαγωγή

Στο Κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε αναλυτικότερα ορισμένες εφαρμογές που έχουν ως στόχο την καλύτερη κατανόηση των όσων προαναφέρθηκαν στο προηγούμενο Κεφάλαιο, για την εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας αλλά και το πόσο ικανοποιητικά φράσσεται από τα φράγματα που μελετάμε. Στις επόμενες ενότητες παρατίθενται παραδείγματα όπου οι κατανομές των αποζημιώσεων ακολουθούν α) *εκθετική* , β) *μείξη εκθετικής* και γ) *Erlang* κατανομή. Με βάση αυτές τις κατανομές θα καταλήξουμε σε αποτελέσματα για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας και στη συνέχεια σε αναλυτικούς υπολογισμούς για τα φράγματα των *Willmot et al* (2001) για τη πιθανότητα χρεοκοπίας βάσει του *Θεωρήματος 2.1 και 2.2.* Τέλος θα μελετήσουμε διαγραμματικά τόσο τη πιθανότητα χρεοκοπίας όσο και τα φράγματα που τη φράσουν και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των δύο θεωρημάτων έτσι ώστε να καταλήξουμε σε ακριβέστερα συμπεράσματα.

4.2 Αριθμητική Εφαρμογή - Εκθετική Κατανομή

Αρχικά, θα ξεκινήσουμε τις εφαρμογές με ένα απλό παράδειγμα που αφορά την εκθετική κατανομή. Υποθέτουμε ότι η ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων ακολουθεί μια *Εκθετική Κατανομή* της μορφής (3.1), οπότε

$$\overline{F}(x) = e^{-2x}, \quad x > 0$$

με παράμετρο $\mu = 2$ και μέση τιμή $p_1 = \dfrac{1}{2}$. Σ' αυτή τη περίπτωση θεωρούμε ότι το περιθώριο ασφαλείας είναι $\theta = 1$. Εύκολα προκύπτει ότι η ουρά της κατανομής ισορροπίας δίνεται από το τύπο (3.2)

$$\overline{F}_e(x) = e^{-2x}, \quad x > 0 \tag{4.1}$$

και αντίστοιχα η $\sigma.\pi.\pi.$ της κατανομής ισορροπίας με βάση το τύπο (3.3)

$$f_e(x) = 2e^{-2x}, \quad x > 0 \tag{4.2}$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί τη σχέση (3.4) οπότε αντικαθιστώντας έχουμε τη σχέση

$$\psi(u) = \frac{1}{2}e^{-u}, \quad u > 0 \tag{4.3}$$

με παράμετρο $\psi(0) = \dfrac{1}{2}$ και συντελεστή προσαρμογής κ για εκθετική κατανομή να ισούται με $k = \dfrac{1 \cdot 2}{1+1} = 1$.

Το επόμενο βήμα μας είναι η μελέτη των φραγμάτων μέσω των *Θεωρημάτων 2.1 και 2.2* που έχουν δοθεί στην *Ενότητα 2* έτσι ώστε να καταλήξουμε σε συμπεράσματα για τη πιθανότητα χρεοκοπίας και πόσο ικανοποιητικά φράσσεται από αυτά. Αναφορικά με το πρώτο θεώρημα, θα υπολογίσουμε τη ποσότητα $a(z)$ που δίνεται από τη σχέση (3.6) για $\kappa = 1$. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.1), (4.2) που υπολογίσαμε παραπάνω προκύπτει ότι

$$a(z) = \frac{e^z \cdot e^{-2z}}{2\int_z^{\infty} e^y \cdot e^{-2y} \mathrm{d}y} = \frac{1}{2}, \quad z > 0$$

Προφανώς, το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης $a(z)$ δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα αφού το $a(z)$ είναι ένας σταθερός αριθμός. Όπως αποδείξαμε στην Παράγραφο 3.1 το άνω και το κάτω φράγμα για τη πιθανότητα χρεοκοπίας συμπίπτουν μεταξύ τους αλλά και με τη πιθανότητα χρεοκοπίας. Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας για την εκθετική κατανομή φράσσεται ικανοποιητικά και δίνεται από τον ακριβή τύπο (4.3). Ουσιαστικά, εκτελώντας την εφαρμογή έχουμε για το *άνω φράγμα*, που ορίζεται με βάση τη σχέση (3.8), ότι $\psi(u) \leq \frac{1}{2} \cdot e^{-u}$ ενώ αντίστοιχα για το *κάτω φράγμα* με βάση τη σχέση (3.9) $\psi(u) \geq \frac{1}{2} \cdot e^{-u}$. Άρα εύκολα αποδεικνύεται ότι $\psi(u) \lesseqgtr \frac{1}{2} \cdot e^{-u}$ δηλαδή ότι τα δύο φράγματα συμπίπτουν τόσο μεταξύ τους όσο και με τη πιθανότητα χρεοκοπίας.

Αναφορικά με το *Θεώρημα 2.2* γνωρίζουμε από την Ενότητα 3.1 ότι τα φράγματα για τη πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ακριβή και συμπίπτουν με αυτά του *Θεωρήματος 2.1*.

Όπως ήταν προφανές αποδείξαμε και με αυτό το θεώρημα ότι η εκθετική κατανομή στη θεωρία κινδύνου δίνει φράγματα ακρίβειας κάτι που τη καθιστά μια από τις πιο εύκολες στη μελέτη κατανομές .

4.3 Αριθμητική Εφαρμογή - Μείξη τριών Εκθετικών Κατανομών

Σ' αυτή τη παράγραφο θα εξετάσουμε μια περισσότερο πολύπλοκη περίπτωση όπου οι αποζημιώσεις ακολουθούν *μείξη τριών εκθετικών κατανομών.* Υποθέτουμε ότι η ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων είναι της μορφής (3.10) άρα για μείξη τριών εκθετικών κατανομών

$$\overline{F}(x) = \frac{1}{3}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-3x} + \frac{1}{6}e^{-x}, \quad x > 0 \tag{4.4}$$

για το οποίο ισχύει ότι το $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1$, με μέση τιμή

$$p_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \frac{d}{dx}\overline{F}(x)$

$$f(x) = \frac{2}{3}e^{-2x} + \frac{3}{2}e^{-3x} + \frac{1}{6}e^{-x}, \quad x > 0$$

Η ουρά της κατανομής ισορροπίας δίνεται από τον τύπο (3.11)

$$\begin{aligned}\overline{F}_e(x) &= 2\int_x^\infty \left(\frac{1}{3}e^{-2y} + \frac{1}{2}e^{-3y} + \frac{1}{6}e^{-y}\right) \mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{6}\left(e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-x}\right), \quad x > 0\end{aligned} \tag{4.5}$$

ενώ παραγωγίζοντας προκύπτει η πυκνότητα της κατανομής ισορροπίας

$$f_e(x) = 2\left(\frac{1}{2}e^{-3x} + \frac{1}{3}e^{-2x} + \frac{1}{6}e^{-x}\right), \quad x > 0 \tag{4.6}$$

Η ροπογεννήτρια της κατανομής των αποζημιώσεων είναι $M_X(r) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2-r}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3-r}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-r}$ και για περιθώριο ασφαλείας $\theta = 1$ τότε ο συντελεστής προσαρμογής κ ικανοποιεί τη σχέση (3.16)

$$M_X(r) = 1 + (1+\theta)p_1 r = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2-r} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3-r} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-r} = 1 + (1+1)\cdot\frac{1}{2}\cdot r$$

Οι λύσεις του παραπάνω πολυωνύμου είναι οι εξής: $r_1 = 0.686, r_2 = 1.629, r_3 = 2.686$ (όπου $r_1 < 1 < r_2 < 2 < r_3 < 3$). Χρησιμοποιούμε τη μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης ως λύση του συντελεστή προσαρμογής που σε αυτή τη περίπτωση είναι $\kappa = 0.686$.

Στη συνέχεια ακολουθεί η εύρεση του ακριβή τύπου της πιθανότητας χρεοκοπίας με βάση τη σχέση (3.14) που αποδείξαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο.

Ο μετασχηματισμός Laplace της πυκνότητας κατανομής ισορροπίας δίνεται από το τύπο

$$\begin{aligned}\widehat{f_e}(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} f_e(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty e^{-sx}\left(\frac{1}{3}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-3x} + \frac{1}{6}e^{-x}\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\left(\frac{1}{6(s+1)} + \frac{1}{3(s+2)} + \frac{1}{2(s+3)}\right)\end{aligned} \tag{4.7}$$

Ενώ ο μετασχηματισμός Laplace της κατανομής ισορροπίας δίνεται από το τύπο

$$\begin{aligned}\widehat{F_e}(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} F_e(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty e^{-sx}\left(\frac{1}{6}e^{-2x} + \frac{1}{6}e^{-3x} + \frac{1}{6}e^{-x}\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\left(\frac{1}{6(s+1)} + \frac{1}{2(s+2)} + \frac{1}{3(s+3)}\right)\end{aligned} \tag{4.8}$$

Συνεπώς με αντικατάσταση ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας, όταν το $\phi = \frac{1}{2}$ θα γίνει

$$\widehat{\psi}(s) = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - 2\left(\frac{1}{6(s+1)} + \frac{1}{3(s+2)} + \frac{1}{2(s+3)}\right)\right)}{s\left(1 - \frac{1}{2}\cdot 2\left(\frac{1}{6(s+1)} + \frac{1}{3(s+2)} + \frac{1}{2(s+3)}\right)\right)}$$

ύστερα από μια σειρά πράξεων έχουμε :

$$\widehat{\psi}(s) = \frac{11 + 12s + 3s^2}{18 + 44s + 30s^2 + 6s^3}$$

Εύκολα προκύπτει με αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι της μορφής

$$\psi(u) = 0.0321158 \cdot e^{-2.68469u} + 0.098467 \cdot e^{-1.62958u} + 0.369417 \cdot e^{-0.685727u}, \quad u > 0 \qquad (4.9)$$

- **Φράγματα για τη πιθανότητα χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.1 όταν δ=0**

Το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός των συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται για την εύρεση των φραγμάτων της πιθανότητας χρεοκοπίας. Αρχικά θα εξετάσουμε την ποσότητα $a(z)$ που με τη μεγιστοποίηση (ελαχιστοποίηση) προκύπτει το *άνω (κάτω) φράγμα* αντίστοιχα .

Αντικαθιστώντας στη σχέση (3.15) τις σχέσεις (4.5) (4.6) έχουμε το εξής αποτέλεσμα

$$a(z) = \frac{e^{0.686z}(e^{-2z} + e^{-3z} + e^{-z})}{\int_z^\infty e^{0.686z}(3e^{-3y} + 2e^{-2y} + e^{-y})\mathrm{d}y}$$

$$= \frac{0.333 \cdot e^{1.628z}(1 + e^z + e^{2z})}{0.2881 \cdot e^{1.628z} + 0.761 \cdot e^{2.628z} + 1.06157 \cdot e^{3.628z}}, \quad z > 0$$

Για να υπολογίσουμε το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης $a(z)$ θα πρέπει να παραγωγίσουμε τη συνάρτηση ως προς z και στη συνέχεια να υπολογίσουμε τις ρίζες που μηδενίζουν τη παράγωγο, έτσι ώστε να μελετήσουμε τη μονοτονία της

$$a'(z) = \frac{-0.157645 \cdot e^{4.256z} - 0.515647 \cdot e^{5.256z} - 0.100178 \cdot e^{6.256z}}{(0.2881 \cdot e^{1.628z} + 0.761035 \cdot e^{2.628z} + 1.06157 \cdot e^{3.628z})^2} = 0$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $a'(z)$ είναι αρνητική σε όλο το διάστημα $[0, \infty)$, αφού δεν βρέθηκαν ρίζες που να μηδενίζουν τη παράγωγο. Άρα η $a(z)$ είναι φθίνουσα που έχει *μέγιστο* στο 0 και *ελάχιστο* στο x στο διάστημα $[0, x]$. Οπότε $a_U(x) = \sup_{0 \leq z \leq x, F_e(z)>0} = a(0)$ και $a_L(x) = \inf_{0 \leq z \leq x, F_e(z)>0} = a(x)$

Το *μέγιστο* της συνάρτησης $a(z)$ είναι

$$a_U(x) = \sup_{0 \leq z \leq x, F_e(z)>0} \frac{0.333 e^{1.628z}(1 + e^z + e^{2z})}{0.2881 \cdot e^{1.628z} + 0.761 \cdot e^{2.628z} + 1.06157 \cdot e^{3.628z}} = 0.473775$$

ενώ αντίστοιχα το *ελάχιστο* της συνάρτησης $a(z)$

$$a_L(x) = \inf_{0 \leq z \leq x, F_e(z)>0} \frac{0.333 \cdot e^{1.628z}(1 + e^z + e^{2z})}{0.2881 \cdot e^{1.628z} + 0.761 \cdot e^{2.628z} + 1.06157 \cdot e^{3.628z}}$$

$$= \frac{0.333 \cdot e^{1.628x}(1 + e^x + e^{2x})}{0.2881 \cdot e^{1.628x} + 0.761 \cdot e^{2.628x} + 1.06157 \cdot e^{3.628x}}$$

Μετά την εύρεση της ποσότητας που μας ενδιαφέρει μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το *άνω* και το *κάτω φράγμα* όπως ορίζονται από τις σχέσεις (3.17),(3.18) τα οποία φαίνονται παρακάτω:

Η σχέση που ικανοποιεί το *άνω φράγμα*, εφόσον ο συντελεστής προσαρμογής είναι $\kappa = 0.686$, είναι η εξής

$$\psi(u) \leq 0.473775 \cdot e^{-0.686u}, \quad u > 0$$

ενώ αντίστοιχα η σχέση ικανοποιεί το *κάτω φράγμα*

$$\psi(u) \geq \frac{0.333 \cdot e^{1.628u}(1 + e^{u} + e^{2u})}{0.2881 \cdot e^{1.628u} + 0.761 \cdot e^{2.628u} + 1.06157 \cdot e^{-3.628u}} \cdot e^{0.686u}, \quad u > 0$$

- **Φράγματα για τη πιθανότητα χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.2 όταν δ=0**

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τον υπολογισμό των φραγμάτων με βάση το *Θεώρημα 2.2.* Στη παράγραφο 3.2 δείξαμε ότι $\tau_U(x) = \tau_L(x) = 1$ καθώς επίσης ότι η συνάρτηση $a(z)$ και $\sigma(z)$ όταν μιλάμε για τη πιθανότητα χρεοκοπίας. Συνεπώς αυτόματα προκύπτουν τα φράγματα για τη πιθανότητα χρεοκοπίας, αντικαθιστώντας τα παραπάνω αποτελέσματα στις σχέσεις (3.22), (3.23) είναι

για το *άνω φράγμα*

$$\psi(u) \leq 0.473775 \cdot e^{-0.686u}, \quad u > 0$$

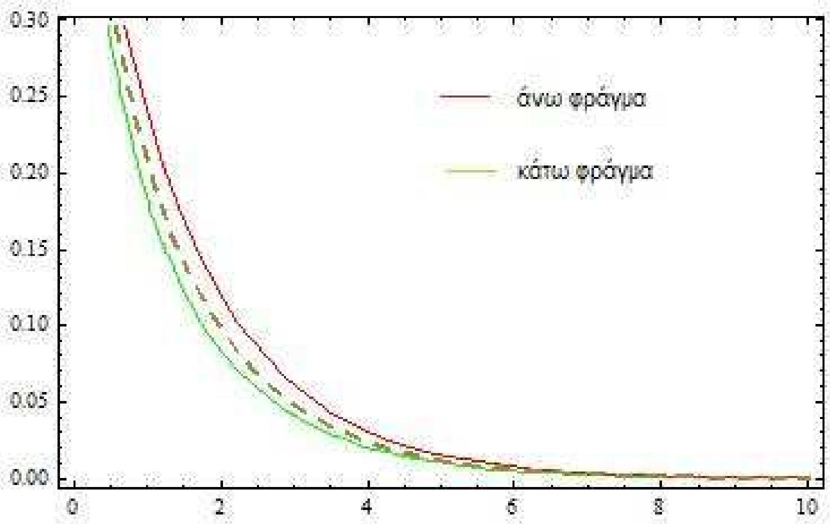
και αντίστοιχα το *κάτω φράγμα*

$$\psi(u) \geq \frac{0.333 \cdot e^{1.628u}(1 + e^{u} + e^{2u})}{0.2881 \cdot e^{1.628u} + 0.761 \cdot e^{2.628u} + 1.06157 \cdot e^{3.628u}} \cdot e^{-0.686u}, \quad u > 0$$

Αυτό το σημείο θα πρέπει να αναφέρουμε ότι τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τους υπολογισμούς των *άνω* και *κάτω φραγμάτων* με βάση τα δυο θεωρήματα των *Willmot et al* (2001) παράγουν τα ίδια αποτελέσματα κάτι που επιβεβαιώνει το συμπέρασμα ότι για μείξη εκθετικών κατανομών τα φράγματα που προκύπτουν από το *Θεώρημα 2.1* και *2.2* συμπίπτουν μεταξύ τους, αυτό σημαίνει ότι τα φράγματα φράσουν στον ίδιο βαθμό την πιθανότητα χρεοκοπίας και στις δύο περιπτώσεις. Στη συνέχεια θα δούμε και τη διαγραμματική απεικόνιση έτσι ώστε να καταλήξουμε σε συμπεράσματα για το πόσο ικανοποιητικά είναι τα φράγματα που υπολογίσαμε παραπάνω για τη πιθανότητα χρεοκοπίας.

Θεωρούμε ότι το αρχικό αποθεματικό παίρνει τιμές στο διάστημα [0, 10]. Στο διάγραμμα που φαίνεται στο Σχήμα 4.1 μπορούμε να διακρίνουμε το *άνω φράγμα*, το *κάτω φράγμα* και την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι όταν το αρχικό αποθεματικό είναι αρκετά μικρό το *άνω φράγμα* φράσει ικανοποιητικά τη πιθανότητα χρεοκοπίας αφού πλησιάζει αρκετά κοντά, ενώ στη συνέχεια παρατηρούμε ότι για μεγαλύτερα αποθεματικά τέμνει τη πιθανότητα χρεοκοπίας.



Σχήμα 4.1: *Άνω και κάτω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη τριών εκθετικών κατανομών με βάση το Θεώρημα 2.1*

Αναφορικά με το *κάτω φράγμα* παρατηρούμε ότι για μικρά αποθεματικά τείνει να τη πλησιάζει αρκετά κοντά, ενώ στη συνέχεια όσο το u μεγαλώνει το *κάτω φράγμα* προσεγγίζει πολύ ικανοποιητικά τη πραγματική πιθανότητα χρεοκοπίας και τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν, κάτι που το κάνει αξιόπιστο φράγμα.

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι το *κάτω φράγμα* είναι ένα καλό φράγμα γιατί φράσσει ικανοποιητικά τη πιθανότητα χρεοκοπίας όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη τριών εκθετικών κατανομών της μορφής (4.4) ομοίως και για το *άνω φράγμα*.

4.4 Αριθμητική Εφαρμογή -Erlang Κατανομή

Η τελευταία εφαρμογή που θα μελετήσουμε είναι η περίπτωση της Erlang κατανομής που ακολουθεί μια κατανομή της μορφής (3.24). Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί μια Erlang (4,2) με $\sigma.\pi.\pi$ της μορφής

$$f(x) = \frac{8}{3}x^3e^{-2x}, \quad x > 0$$

Η μέση τιμή των αποζημιώσεων είναι $p_1 = \frac{4}{2} = 2$, με διακύμανση $Var(X) = 1$ και ροπογεννήτρια $M_X(r) = [\frac{2}{2-r}]^4$.

Η ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων, κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, δίνεται από το τύπο

$$\overline{F}(x) = \int_x^\infty \frac{8}{3} y^3 e^{-2y} \mathrm{d}y = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}e^{-2x}x^3 + \frac{3}{4}e^{-2x}x^2 + \frac{6}{8}e^{-2x}x + \frac{6}{16}e^{-2x}\right)$$

$$= \frac{4}{3}e^{-2x}\left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{6}{4}x + \frac{6}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{3}e^{-2x}(3 + 2x(3 + x(3 + 2x)))), \quad x > 0$$

Η συνάρτηση της κατανομής ισορροπίας, σύμφωνα με τη σχέση (3.25), δίνεται από το τύπο

$$\overline{F}_e(x) = \frac{1}{6}\int_x^\infty e^{-2y}(3 + 2y(3 + y(3 + 2y)))\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{6}e^{-2x}(6 + 9x + 6x^2 + 2x^3), \quad x > 0$$

και στη συνέχεια, από τη σχέση $f_e(x) = \frac{\overline{F}(x)}{p_1}$, προκύπτει η πυκνότητα της κατανομής ισορροπίας

$$f_e(x) = \frac{1}{6}e^{-2x}(3 + 6x + 6x^2 + 4x^3), \quad x > 0.$$

Όπως προείπαμε και παραπάνω ο συντελεστής προσαρμογής κ ικανοποιεί την εξίσωση (2.7).

$$M_X(r) = (\frac{2}{2-r})^4 = 1 + (1+1)2r$$

Οι ρίζες του παραπάνω πολυωνύμου είναι οι εξής:

$$\kappa_1 = 3.04932, \quad \kappa_2 = 2.12 \pm 1.1054i, \quad \kappa_3 = 0.4586$$

Η μικρότερη θετική ρίζα του πολυωνύμου χρησιμοποιείται ως λύση το συντελεστή προσαρμογής που σε αυτή τη περίπτωση είναι $\kappa = 0.4586$.

Για να υπολογίσουμε τον ακριβή τύπο της πιθανότητας χρεοκοπίας θα κάνουμε χρήση του μετασχηματισμού Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας με βάση τη σχέση (2.18) που έχουμε αποδείξει σε προηγούμενο Κεφάλαιο. Για περιθώριο ασφαλείας $\theta = 1$ ο συντελεστής $\phi = \frac{1}{1+\theta} = \frac{1}{2}$.

Ο μετασχηματισμός Laplace της πυκνότητας της κατανομής ισορροπίας είναι

$$\widehat{f_e}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f_e(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int_0^{\infty} e^{-sx} e^{-2x}(3 + 6x + 6x^2 + 4x^3)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{24}{(s+2)^4} + \frac{12}{(s+2)^3} + \frac{6}{(s+2)^2} + \frac{3}{s+2}\right) \tag{4.10}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (4.7) τη παραπάνω σχέση και μετά από μια σειρά πράξεων *, εύκολα προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι

$$\widehat{\psi}(s) = \frac{1}{2}\frac{1 - \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{24}{(s+2)^4} + \frac{12}{(s+2)^3} + \frac{6}{(s+2)^2} + 3(s+2)\right)}{s\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{24}{(s+2)^4} + \frac{12}{(s+2)^3} + \frac{6}{(s+2)^2} + 3(s+2)\right)\right)\right)}$$

Με απλοποίηση της παραπάνω συνάρτησης έχουμε

$$\Leftrightarrow \widehat{\psi}(s) = \frac{40 + 40s + 15s^2 + 2s^3}{32s^2 + 104s + 88s^2 + 31s^3 + 4s^4}$$

*οι πράξεις που ακολουθούν έχουν γίνει με τη βοήθεια του Mathematica συνεπώς, με αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace προκύπτει ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι

$$\psi(u) = -0.036827 \cdot e^{-3.0493u} - (0.0296 + 0.0405i) \cdot e^{(-2.121-1.10539i)u} -$$

$$(0.0296 - 0.0405i) \cdot e^{(-2.121+1.10539i)u} + 0.596042 \cdot e^{-0.4586u}$$

Σκοπός μας είναι η εύρεση των φραγμάτων που φράσουν τη παραπάνω πιθανότητα χρεοκοπίας σύμφωνα με τα *Θεωρήματα 2.1* και *2.2* που έχουν προαναφερθεί. Βάσει αυτών των δύο θεωρημάτων θα υπολογιστούν οι ποσότητες $a(z), \tau(z), \sigma(z)$.

- **Φράγματα για τη πιθανότητα χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.1 όταν δ=0**

Αρχικά θα υπολογίσουμε τη ποσότητα $a(z)$ μέσω της οποίας θα βρούμε το άνω και κάτω φράγμα για τη πιθανότητα χρεοκοπίας με βάση το *Θεώρημα 2.1*. Έτσι από τη σχέση (3.28) έχουμε ότι

$$a(z) = \frac{\frac{1}{6} \cdot e^{-1.5414z}(6 + 9z + 6z^2 + 2z^3)}{\int_z^\infty \frac{1}{6} e^{-1.542y}(3 + 6y + 6y^2 + 4y^3)\mathrm{d}y}$$

$$= \frac{0.333 \cdot (1.313 + z)(2.285 + 1.687z + z^2)}{1.99 + 2.58z + 1.49z^2 + 0.433z^3}$$

Το επόμενο βήμα μας είναι η μεγιστοποίηση (ελαχιστοποίηση) της παραπάνω συνάρτησης. Για να γίνει όμως αυτό θα πρέπει να παραγωγίσουμε τη συνάρτηση $a(z)$ ως προς z και στη συνέχεια αφού βρούμε τις ρίζες να υπολογίσουμε το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης. Η παράγωγος δίνεται από τη σχέση

$$a'(z) = \frac{0.343992(0.808913 + 1.4572z + z^2)(8.01404 + 5.13826z + z^2)}{(1.519 + z)^2(3.04426 + 1.92733z + z^2)^2}$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις ρίζες της παραγώγου θέτοντας τη ποσότητα $a'(z) = 0$:

Παρατηρούμε ότι οι ρίζες που έχουν προκύψει από τη λύση της συνάρτησης είναι οι

$$z_{1,2} = -2.56844 \pm 1.18923i, \quad z_{3,4} = -0.72848 \pm 0.527342i$$

Όμως η $a'(z)$ ορίζεται στο διάστημα $[0,\infty)$ στο οποίο και δεν έχει καμία θετική λύση. Σ' αυτό το διάστημα δεν έχει καμία θετική ρίζα και όπως φαίνεται η παράγωγος είναι θετική και η συνάρτηση $a(z)$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση.

Οπότε στο διάστημα $[0,x]$ το *μέγιστο* της συνάρτησης είναι $a(z) = a_U(x) = \sup_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} a(z) = a(x)$

$$a_U(x) = \sup_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} \frac{0.333\cdot(1.313+z)(2.285+1.687z+z^2)}{1.99+2.58z+1.49z^2+0.433z^3}$$

$$= \frac{0.333(1.313+x)(2.285+1.687x+x^2)}{1.99+2.58x+1.49x^2+0.433x^3}$$

και αντίστοιχα το *ελάχιστο* της συνάρτησης είναι $a_L(x) = \inf_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} a(z) = a(0)$

$$a_L(x) = \inf_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} \frac{0.333\cdot(1.313+z)(2.285+1.687z+z^2)}{1.99+2.58z+1.49z^2+0.433z^3} = 0.499521$$

οπότε τα φράγματα που προκύπτουν με βάση τις σχέσεις με βάση το *θεώρημα 2.1* είναι τα εξής:

για το *άνω φράγμα* αντικαθιστώντας τη σχέση (3.29)

$$\psi(u) \leq \frac{0.333(1.313+u)(2.285+1.687u+u^2)}{1.99+2.58u+1.49u^2+0.433u^3}\cdot e^{-0.4586u}$$

για το *κάτω φράγμα* αντικαθιστώντας τη σχέση (3.30)

$$\psi(u) \geq 0.499521\cdot e^{-0.4586u}$$

- **Φράγματα για τη πιθανότητα χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.2 όταν δ=0**

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις ποσότητες που χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό των φραγμάτων που ορίζονται με βάση το *θεώρημα 2.2*. Παρατηρούμε ότι και εδώ ισχύει ότι $\tau_U(x) = \tau_L(x) = 1$. Ομοίως και για την Erlang κατανομή ισχύει ότι και για τις υπόλοιπες, δηλαδή οι ποσότητες $a(z)$ και $\sigma(x)$ συμπίπτουν όταν μιλάμε για τη πιθανότητα χρεοκοπίας.

Έτσι το *άνω φράγμα* δίνεται από τη σχέση (3.31) και είναι

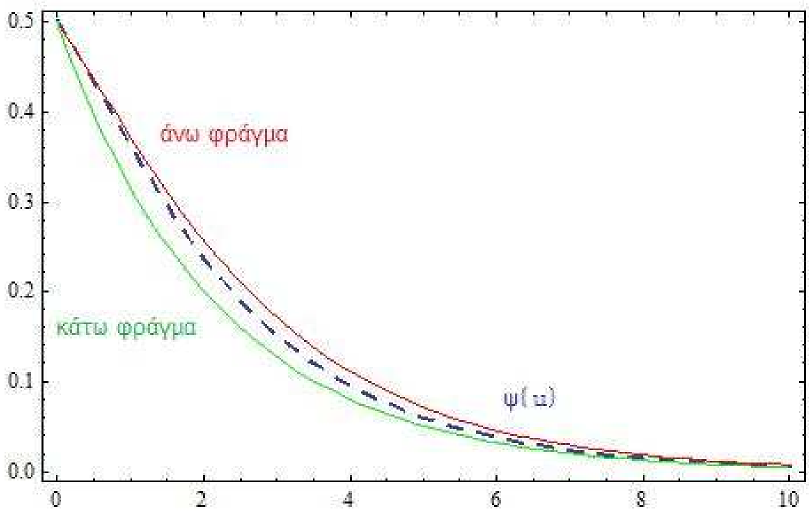
$$\psi(u) \leq \frac{0.333(1.313+u)(2.285+1.687u+u^2)e^{-0.4586u}}{1.99+2.58u+(1.49)u^2+(0.433)u^3}$$

οπότε το *κάτω φράγμα* δίνεται από τη σχέση (3.32) και είναι

$$\psi(u) \geq 0.499521 \quad e^{-0.4586u}$$

Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι, τα φράγματα που προκύπτουν από τα δύο *θεωρήματα* συμπίπτουν μεταξύ τους. Συμπερασματικά δεν μπορεί να επιλεγεί καλύτερο άνω ή κάτω φράγμα ανάμεσα στα δύο, αφού και τα δύο δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Στη συνέχεια θα απεικονίσουμε διαγραμματικά τα παραπάνω αποτελέσματα για να δούμε πόσο ¨καλά¨ είναι τα φράγματα που υπολογίσαμε για τη πιθανότητα χρεοκοπίας όταν οι κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί μια Erlang κατανομή. Θεωρούμε ότι το απόθεμα παίρνει τιμές από το [0, 10].
Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.2, για μικρά αποθεματικά παρατηρούμε ότι το *άνω φράγμα* συμπίπτει με τη πιθανότητα χρεοκοπίας. Καθώς το αρχικό αποθεματικό αυξάνεται το *άνω φράγμα* απομακρύνεται σε ένα μικρό βαθμό, ενώ στη συνέχεια καθώς το αποθεματικό γίνεται μεγαλύτερο τέμνει τη πιθανότητα χρεοκοπίας. Μπορούμε να πούμε ότι το φράγμα αυτό φράσει ικανοποιητικά τη πιθανότητα χρεοκοπίας. Αναφορικά με το *κάτω φράγμα* παρατηρούμε ότι αρχικά φράσει αρκετά καλά τη πιθανότητα χρεοκοπίας ενώ όσο το αποθεματικό αυξάνει το *κάτω φράγμα* τείνει να συμπίπτει με τη πιθανότητα χρεοκοπίας και να τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν. Έτσι διαπιστώνουμε ότι για μεγάλο u το *άνω* και το *κάτω φράγμα* προσεγγίζουν πολύ ικανοποιητικά τη πιθανότητα χρεοκοπίας. Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι τα φράγματα που έχουμε υπολογίσει όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μια Erlang κατανομή, φράσουν πολύ καλά τη πιθανότητα χρεοκοπίας.



Σχήμα 4.2: *Άνω και κάτω φράγμα για τη πιθανότητα χρεοκοπίας όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν την Erlang κατανομή με βάση το Θεώρημα 2.1*

Παρατηρήσεις

Πριν προχωρήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο ας διατυπώσουμε επιγραμματικά τα συμπεράσματα που προκύπτουν από το κεφάλαιο αυτό.

1. Οι ποσότητες $a(z)$ και $\sigma(x)$ που χρησιμοποιούνται για την εύρεση των φραγμάτων για την προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι ίσες $a_U(z) = \sigma_U(z)$ και $a_L(z) = \sigma_L(z))$ και στα τρία παραδείγματα που μελετήσαμε. Επιπλέον η ποσότητα $\tau_U(x) = \tau_L(x) = 1$ σε κάθε περίπτωση δίνει μονάδα.

2. Για την εκθετική κατανομή τα φράγματα που προκύπτουν με βάση το *Θεώρημα* 2.1 και 2.2 συμπίπτουν τόσο μεταξύ τους όσο και με τη πιθανότητα χρεοκοπίας. Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας για εκθετικές κατανομές ορίζεται σύμφωνα με τον ακριβή της τύπο (3.7).

3. Είναι σαφές ότι όταν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι η ουρά μιας μείξης εκθετικών κατανομών τότε και η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι και αυτή μια μείξη εκθετικών κατανομών με διαφορετικές παραμέτρους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Εκθετική κατανομή - Μείξη Εκθετικών κατανομών: Φράγματα για τη συνάρτηση Gerber-Shiu, Θεωρία και Εφαρμογές

5.1 Εισαγωγή

Σκοπός αυτού του Κεφαλαίου είναι η μελέτη της συνάρτησης $\varphi_\delta(x)$ που ικανοποιεί μια ανανεωτική ελλειμματική εξίσωση της μορφής (2.8) καθώς και η εύρεση φραγμάτων σύμφωνα με τους Willmot et al (2001) που έχουν δοθεί στην *Ενότητα 1.3.3*, όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν εκθετική και μείξη εκθετικών κατανομών. Στη συνέχεια θα δοθούν αναλυτικά αποτελέσματα για κάθε μία από τις δύο περιπτώσεις που θα μελετήσουμε,

Θεωρούμε την ειδική περίπτωση όπου η προεξοφλημένη ποινή λαμβάνει μοναδιαία τιμή, δηλαδή $w(x, y) = 1$, ενώ ο παράγοντας προεξόφλησης λαμβάνει τιμές μεγαλύτερες του μηδενός, $\delta > 0$ η οποία ονομάζεται μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας. Με αντικατάσταση στη σχέση (2.8) προκύπτει η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση πάνω στην οποία θα βασιστούν τα αποτελέσματα.

$$\varphi_\delta(u) = \phi \int_0^u \varphi_\delta(u - x)\mathrm{d}G_\delta(x) + \phi H_\delta(u)$$

Στις Ενότητες που ακολουθούν φαίνονται αναλυτικά, οι υπολογισμοί όλων των συναρτήσεων που αποτελούν τη λύση της συνάρτησης $\varphi_\delta(x)$ μέχρι την εύρεση του ακριβή τύπου της καθώς και τα φράγματα που τη φράσουν.

5.2 Εκθετική Κατανομή

Αρχικά, θα ξεκινήσουμε τη μελέτη για τη λύση της *ανανεωτικής ελλειμματικής εξίσωσης* που αναφέρθηκε δηλαδή, τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ με την εφαρμογή της πιο απλής μορφής για τις αποζημιώσεις, αυτή της εκθετικής κατανομής. Υποθέτουμε ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν μια εκθετική κατανομή της μορφής (3.1). Η ουρά της κατανομής ισορροπίας δίνεται από τη σχέση (3.2).

Σύμφωνα με τους *Willmot and Lin* (1999) οι παρακάτω σχέσεις δίνουν τις συναρτήσεις που αποτελούν τη λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης την οποία και παραθέσαμε στην αρχή του κεφαλαίου. Έτσι, όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή θα προκύψουν τα εξής αποτελέσματα. Για τη συνάρτηση $\overline{G}_\delta(x)$ που δίνεται από τη σχέση (2.12) έχουμε ότι

$$\overline{G}_\delta(x) = \frac{e^{\rho x}\int_x^\infty e^{-\rho y}e^{-\mu y}\mathrm{d}y}{\int_0^\infty e^{-\rho y}e^{-\mu y}\mathrm{d}y} = e^{-\mu x}, \quad x > 0 \tag{5.1}$$

ενώ παραγωγίζοντας τη παραπάνω συνάρτηση προκύπτει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που έχει τη μορφή

$$g_\delta(x) = \mu e^{-\mu x}, \quad x > 0$$

αντίστοιχα και η συνάρτηση $H_\delta(u)$ που ορίζεται από τη σχέση (2.14) θα γίνει

$$H_\delta(u) = \frac{e^{\rho u}\int_u^\infty e^{-\rho x}\int_x^\infty \mu e^{-\mu y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{\int_0^\infty e^{-\rho y}e^{-\mu y}\mathrm{d}y} = e^{-\mu u}, \quad u > 0 \tag{5.2}$$

Τέλος, η παράμετρος ξ_δ η οποία είναι συνάρτηση της πυκνότητας της κατανομής ισορροπίας αλλά και του περιθωρίου ασφαλείας δίνεται από τη σχέση (2.13) και ορίζεται ως εξής:

$$\xi_\delta = \frac{1+\theta}{\mu\int_0^\infty e^{-\rho y}e^{-\mu y}\mathrm{d}y} - 1 = \frac{(1+\theta)(\rho+\mu)}{\mu} - 1 \tag{5.3}$$

Το επόμενο βήμα είναι η εύρεση του ακριβή τύπου για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$. Με βάση την ιδιότητα (2.16), Κεφάλαιο 2, θα υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης και στη συνέχεια θα το αντιστρέψουμε ώστε να προκύψει το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Για να καταλήξουμε όμως σε αποτέλεσμα θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων που απαρτίζουν το μετασχηματισμό Laplace της $\varphi_\delta(u)$, δηλαδή τη $\widehat{H}_\delta(s)$ και τη $\widehat{g}_\delta(s)$ αντίστοιχα.

ο μετασχηματισμός Laplace της $H_\delta(x)$,

$$\widehat{H}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-su} H_\delta(u)\mathrm{d}u = \int_0^\infty e^{-(s+\mu)u} = \frac{1}{s+\mu}$$

ο μετασχηματισμός Laplace της $g_\delta(x)$,

$$\widehat{g}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-sx} g_\delta(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mu e^{-(s+\mu)u} = \frac{\mu}{s+\mu}$$

Με βάση τα παραπάνω μετά από πράξεις προκύπτει με αντικατάσταση στη (2.16) ότι

$$\widehat{\varphi}_\delta(u) = \frac{\dfrac{\mu}{(1+\theta)\cdot(\rho+\mu)\cdot(s+\mu)}}{1 - \dfrac{\mu^2}{(1+\theta)\cdot(\rho+\mu)\cdot(s+\mu)}} = \frac{\mu}{(1+\theta)\cdot(\rho+\mu)\cdot(s+\mu) - \mu^2}$$

Έπειτα με αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace προκύπτει η συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$, την οποία και θα μελετήσουμε διεξοδικά στην επόμενη Παράγραφο, προκύπτει η συνάρτηση πυ φαίνεται παρακάτω:

$$\varphi_\delta(u) = \frac{\mu}{(1+\theta)(\mu+\rho)} \cdot e^{u\left(-\frac{\theta\mu^2}{(1+\theta)(\mu+\rho)} - \frac{\mu\rho}{(1+\theta)(\mu+\rho)} - \frac{\theta\mu\rho}{(1+\theta)(\mu+\rho)}\right)} \tag{5.4}$$

Παρατηρούμε ότι και η συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ ακολουθεί μια εκθετική κατανομή. Στη συνέχεια της Παραγράφου ακολουθεί ο υπολογισμός των φραγμάτων με βάση τα θεωρήματα των *Willmot et al* (2001) που προαναφέρθηκαν στην Παράγραφο 2.6.

- **Φράγματα για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.1**

Αρχικά, θα ξεκινήσουμε με τον υπολογισμό των φραγμάτων σύμφωνα με το *Θεώρημα* 2.1.

Η σταθερά κ ικανοποιεί τη γενικευμένη συνθήκη του $Lundberg$ (βλ. (2.19)), που φαίνεται παρακάτω

$$\int_0^\infty e^{\kappa x}\mathrm{dG}_\delta(x) = 1 + \xi_\delta$$

Η μικρότερη θετική ρίζα αποτελεί τη λύση της εξίσωσης που χρησιμοποιείται στην εύρεση των φραγμάτων.

$$\Rightarrow \mu \cdot \int_0^\infty e^{(\kappa-\mu)y} \mathrm{d}y = \frac{(1+\theta)(\rho+\mu)}{\mu} \tag{5.5}$$

Η πρώτη ποσότητα που μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε είναι η $a(z)$. Με αντικατάσταση της εκθετικής κατανομής θα προκύψει το ακόλουθο αποτελέσματα:

$$a(z) = \frac{e^{\kappa z} e^{-\mu z}}{\int_z^\infty e^{\kappa y} \mu e^{-\mu y} \mathrm{d}y} = \frac{\mu-\kappa}{\mu}, \quad z > 0 \tag{5.6}$$

Με βάση τη σχέση (5.6) να υπολογίσουμε το άνω και το κάτω φράγματα της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $a(z)$ είναι ένας σταθερός αριθμός όποτε η μεγιστοποίηση (ελαχιστοποίηση) θα δώσει το ίδιο αποτέλεσμα, που θα είναι και αυτό ένας σταθερός αριθμός.

Οπότε με βάση τις σχέσεις (2.21), (2.22) που δίνουν το *μέγιστο* και το *ελάχιστο* αντίστοιχα της ποσότητας $a(z)$ ισχύει

$$a_U(x) = a_L(x) = \frac{\mu-\kappa}{\mu}, \quad \mu > 0$$

Σύμφωνα με τους παραπάνω υπολογισμούς καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι σχέσεις που ικανοποιούν τα δύο φράγματα είναι οι εξής:

το *άνω φράγμα* που προκύπτει ως συνάρτηση της ποσότητας $a(z)$με βάση τη σχέση (2.23) είναι

$$\varphi_\delta(u) \leq \frac{\mu-\kappa}{\mu} \cdot e^{-\kappa u}, \quad u > 0 \tag{5.7}$$

ενώ αντίστοιχα το *κάτω φράγμα* που προκύπτει με βάση τη σχέση (2.24) είναι

$$\varphi_\delta(u) \geq \frac{\mu-\kappa}{\mu} \cdot e^{-\kappa u}, \quad u > 0 \tag{5.8}$$

Κατά συνέπεια από τις σχέσεις (5.7) και (5.8) παρατηρούμε ότι τα δύο φράγματα συμπίπτουν μεταξύ τους και φράσσουν με μεγάλη ακρίβεια την $\varphi_\delta(x)$.

- **Φράγματα για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.2**

Λαμβάνοντας υπόψη το συμπέρασμα των *Willmot et al* που αναφέρεται στον Ορισμό 3.1 καταλήγουμε στο γεγονός ότι το *Θεώρημα* 2.2 δίνει τα ίδια φράγματα με το *Θεώρημα* 2.1 για οποιαδήποτε συνάρτηση αποτελεί λύση μιας ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης και για οποιαδήποτε τιμή πάρει ο συντελεστής προεξόφλησης.

Παρατήρηση !!! Πριν προχωρήσουμε στην επόμενη παράγραφο, ας ρίξουμε μια προσεκτική ματιά στα συμπεράσματα που διατυπώνονται. Γενικά, παρατηρούμε ότι όταν η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί μια εκθετική κατανομή, για κάθε συνάρτηση που αποτελεί λύση μιας ανανεωτικής ελλειμματικής εξίσωσης, υπάρχουν φράγματα που μπορούν να τη φράξουν με μεγάλη ακρίβεια. Στην επόμενη παράγραφο θα μελετήσουμε μια συγκεκριμένη κατανομή εκθετικής μορφής ως εφαρμογή όσων ειπώθηκαν παραπάνω ώστε να γίνει ευκολότερα κατανοητή η διαδικασία εξαγωγής των αποτελεσμάτων.

5.3 Αριθμητική Εφαρμογή για την Εκθετική Κατανομή

Η πρώτη εφαρμογή αποτελεί ένα απλό παράδειγμα εκθετικής κατανομής το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για την αριθμητική απόδειξη των συμπερασμάτων που προηγήθηκαν στη Παράγραφο 5.1. Υποθέτουμε ότι η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί μια συγκεκριμένη συνάρτηση εκθετικής κατανομής η οποία είναι της μορφής *

$$\overline{F}(x) = e^{-2x}, \quad x > 0$$

με παράμετρο $\mu = 2$ και μέση τιμή $p_1 = \frac{1}{2}$. Θεωρούμε επίσης ότι $\lambda = 1$, $c = 1$. Οπότε με αντικατάσταση στη σχέση (2.2) το *περιθώριο ασφαλείας* θ θα είναι:

$$\theta = \frac{c}{\lambda p_1} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 1$$

Οι λύσεις των συναρτήσεων που αποτελούν τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ είναι οι ακόλουθες :

Για τη συνάρτηση $G_\delta(x)$ έχουμε σύμφωνα με τη σχέση (5.1) με αντικατάσταση της ουράς της κατανομής των αποζημιώσεων:

$$\overline{G}_\delta(x) = \frac{e^{\rho x}\int_x^\infty e^{-\rho y}e^{-2y}\mathrm{d}y}{\int_0^\infty e^{-\rho y}e^{-2y}\mathrm{d}y} = e^{-2x}$$

*η συνάρτηση έχει χρησιμοποιηθεί ξανά στην Ενότητα 4 οπότε κάποια αποτελέσματα έχουν ήδη υπολογιστεί (βλέπε Παράγραφο 4.1) ενώ παραγωγίζοντας προκύπτει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$g_\delta(x) = 2 \cdot e^{-2x}$$

επίσης η συνάρτηση $H_\delta(u)$, σύμφωνα με τη σχέση (5.2), έχουμε

$$H_\delta(u) = \frac{e^{\rho u}\int_u^\infty e^{-\rho x}\int_x^\infty 2e^{-2y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{\int_0^\infty e^{-\rho y}e^{-2y}\mathrm{d}y} = e^{-2u}, \quad u > 0$$

Ενώ αναφορικά με τη παράμετρο ξ_δ που δίνεται από τη σχέση (5.3), έχουμε με αντικατάσταση της πυκνότητας της κατανομής ισορροπίας (σχέση: (4.2)),

$$\xi_\delta = \frac{2}{2\int_0^\infty e^{-\rho y}e^{-2y}\mathrm{d}y} - 1 = \frac{2}{\dfrac{2}{\rho+2}} - 1 = \rho + 1$$

όπου ρ είναι η λύση της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg .

Στη συνέχεια θα πρέπει να υπολογίσουμε τον ακριβή τύπο της συνάρτησης $\varphi_\delta(u)$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.4) υπολογίζουμε άμεσα τη πιθανότητα χρεοκοπίας.

$$\varphi_\delta(u) = \frac{1}{2+\rho} \cdot e^{\left(-\frac{2}{2+\rho} - \frac{2\rho}{2+\rho}\right)u}, \quad u \geq 0 \tag{5.9}$$

Για να δούμε όμως πως ακριβώς κυμαίνεται η συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ σε ένα συγκεκριμένο διάστημα θα πρέπει να υπολογίσουμε τη τιμή του ρ πού ικανοποιεί τη σχέση (2.11) για συγκεκριμένες τιμές του δ.

Ο μετασχηματισμός Laplace της πυκνότητας της κατανομής των αποζημιώσεων είναι

$$\widehat{f}_\delta(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-(s+2)x}\mathrm{d}x = \frac{2}{s+2}$$

Συνεπώς προκύπτει ότι:

$$\lambda + \delta - c\rho = \lambda\widehat{f}(\rho) \Rightarrow 1 + \delta - \rho = \frac{2}{2+\rho} \tag{5.10}$$

1. φράγματα στη περίπτωση που το δ=0.05

Αρχικά θα θεωρήσουμε ότι το $\delta = 0.05$. Η ρίζα της γενικευμένης εξίσωσης $Lundberg$ που προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης (5.10) είναι η $\rho = 1.80952$.

Το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός της $\varphi_\delta(u)$ όταν το $\rho = 1.80952$. Με αντικατάσταση στη σχέση (5.9):

$$\varphi_\delta(u) = 0.2625 \cdot e^{-1.475u}, \quad u \geq 0$$

Αντικαθιστώντας τις συναρτήσεις που την απαρτίζουν στη σχέση (5.5) και έχουμε ήδη υπολογίσει όταν το $\rho = 1.80952$ εύκολα προκύπτει ότι

$$\int_0^\infty 2 \cdot e^{-(2-\kappa)x} \mathrm{d}x = 1 + 2.80952 \Rightarrow \frac{2}{2-\kappa} - 1 - 2.80952 = 0$$

$$\Rightarrow \kappa = 1.475$$

οπότε η ρίζα της εξίσωσης είναι $\kappa = 1.475$.

- **Φράγματα για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.1**

Στη συνέχεια με βάση το *Θεώρημα* 2.1 θα υπολογίσουμε τα φράγματα για συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$. Αρχικά για τη ποσότητα $a(z)$ με αντικατάσταση στη σχέση (5.6) έχουμε

$$a(z) = \frac{e^{-(2-1.475)z}}{2\int_z^\infty e^{-(2-1.475)x} \mathrm{d}x} = \frac{e^{-0.525z}}{2 \cdot (1.90476 \cdot e^{-0.525z})} = 0.2625$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $a(z)$ είναι ένας αριθμός. Οπότε το *ελάχιστο* και το *μέγιστο* δίνει το ίδιο αποτέλεσμα.

Εύκολα προκύπτει σύμφωνα με τη σχέση (5.7) ότι το *άνω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$, όταν $\kappa = 1.475$ είναι

$$\varphi_\delta(u) \leq 0.2625 \cdot e^{-1.475u}, \quad u \geq 0$$

ενώ αντίστοιχα το *κάτω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ σύμφωνα με τη σχέση (5.8) είναι

$$\varphi_\delta(u) \geq 0.2625 \cdot e^{-1.475u}, \quad u \geq 0$$

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενη ενότητα για εκθετικές κατανομές τα φράγματα που προκύπτουν για μια *ανανεωτική ελλειμματική εξίσωση*, με βάση το θεώρημα 2.2, είναι ακριβή και συμπίπτουν με αυτά του Θεωρήματος 2.1.

2. φράγματα στη περίπτωση που το δ=0.5

Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε ότι το $\delta = 0.5$ οπότε με αντικατάσταση στην εξίσωση (5.10) προκύπτει ότι η ρίζα της γενικευμένης εξίσωσης $Lundberg$ είναι $\rho = 0.666667$.

Το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός της $\varphi_\delta(u)$ στη περίπτωση όπου το $\rho = 0.666667$. Με αντικατάσταση έχουμε ότι :

$$\varphi_\delta(u) = 0.375 \cdot e^{-1.25u}, \quad u \geq 0$$

Η σταθερά κ ικανοποιεί τη συνθήκη (5.5). Συνεπώς προκύπτει το αποτέλεσμα:

$$\frac{2}{2-\kappa} - 1 - 1.66667 = 0 \Rightarrow \kappa = 1.25$$

- **Φράγματα για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.1**

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζονται τα φράγματα όταν το δ=0.5. Συνεπώς σύμφωνα με τη σχέση (5.7) το *άνω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$, όταν $\kappa = 1.25$ είναι

$$\varphi_\delta(u) \leq 0.375 \cdot e^{-1.25u}, \quad u \geq 0$$

ενώ αντίστοιχα το *κάτω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ σύμφωνα με τη σχέση (5.8) είναι

$$\varphi_\delta(u) \geq 0.375 \cdot e^{-1.25u}, \quad u \geq 0$$

Συνεπώς διαπιστώνουμε ότι για οποιαδήποτε τιμή πάρει ο συντελεστής προεξόφλησης δ τα φράγματα που προκύπτουν από την εφαρμογή του Θεωρήματος 2.1 πάντα συμπίπτουν με τη συνάρτηση της πιθανότητας χρεοκοπίας. Επίσης το *άνω φράγμα* συμπίπτει με το *κάτω φράγμα*. Αυτό σημαίνει ότι τα φράγματα που υπολογίσαμε είναι πολύ ικανοποιητικά και φράσσουν με μεγάλη επιτυχία τη συνάρτηση που μελετάμε.

5.4 Μείξη Εκθετικών Κατανομών

Προχωρώντας στην επόμενη ενότητα, θα εξετάσουμε τη περίπτωση όπου οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη εκθετικών κατανομών. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή της στις ανανεωτικές εξισώσεις φαίνονται παρακάτω. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει και σε προηγούμενη ενότητα η κατανομή των αποζημιώσεων ορίζεται από τη σχέση (3.10) συγκεκριμένα,

$$F(x) = 1 - \sum_{k=1}^{n} q_k e^{-\mu_k x}, \quad x > 0$$

Στη συνέχεια, το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός των συναρτήσεων που απαρτίζουν τη $\varphi_\delta(u)$ έστι ώστε να καταλήξουμε σε κατάλληλα συμπεράσματα για τη λύση της ανανεωτικής εξίσωσης.

Η πρώτη συνάρτηση που θα μελετήσουμε είναι η ουρά της $G_\delta(x)$ που δίνεται από τη σχέση (2.12). Με αντικατάσταση της ουράς της κατανομής των αποζημιώσεων προκύπτουν τα παρακάτω:

$$\overline{G}_\delta(x) = e^{\rho x} \frac{\int_x^\infty e^{-\rho y} \left[\sum_{k=1}^n q_k e^{-\mu_k y}\right] \mathrm{d}y}{\int_0^\infty e^{-\rho y} \left[\sum_{k=1}^n q_k e^{-\mu_k y}\right] \mathrm{d}y} = e^{\rho x} \frac{\int_x^\infty \left[\sum_{k=1}^n q_k e^{-(\mu_k+\rho) y}\right] \mathrm{d}y}{\int_0^\infty \left[\sum_{k=1}^n q_k e^{-(\mu_k+\rho) y}\right] \mathrm{d}y} \tag{5.11}$$

$$= e^{\rho x} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{q_k}{\mu_k+\rho} e^{-(\mu_k+\rho)x}}{\sum_{k=1}^n \frac{q_k}{\mu_k+\rho}} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{q_k}{\mu_k+\rho} e^{-\mu_k x}}{\sum_{k=1}^n \frac{q_k}{\mu_k+\rho}}$$

παραγωγίζοντας τη παραπάνω συνάρτηση προκύπτει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g_\delta(x)$

$$g_\delta(x) = \frac{\sum_{k=1}^n q_k \mu_k (\mu_k+\rho)^{-1} e^{-\mu_k x}}{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1}}, \quad x>0 \tag{5.12}$$

Αντίστοιχα, η συνάρτηση $H_\delta(u)$ σύμφωνα με τη σχέση (2.14) θα γίνει

$$H_\delta(u) = \frac{e^{\rho u}\int_u^\infty e^{-\rho x}\int_x^\infty \sum_{k=1}^n q_k\mu_k e^{-\mu_k y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\sum_{k=1}^n q_k e^{-\mu_k y}\mathrm{d}y}$$

$$= \frac{e^{\rho u}\int_u^\infty \sum_{k=1}^n q_k e^{-(\rho+\mu_k)x}\mathrm{d}x}{\int_0^\infty \sum_{k=1}^n q_k e^{-(\rho+\mu_k)y}\mathrm{d}y} = \frac{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1}e^{-\mu_k u}}{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1}} \tag{5.13}$$

Τέλος, για τη παράμετρο ξ_δ ως συνάρτηση της πυκνότητας της κατανομής ισορροπίας, θα έχουμε τα εξής αποτελέσματα. Όπως έχουμε αποδείξει σε προηγούμενη ενότητα η πυκνότητα της κατανομής ισορροπίας δίνεται από τη σχέση $f_e(x) = \frac{\sum_{k=1}^n q_k e^{-\mu_k x}}{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k)^{-1}}$, οπότε με αντικατάσταση στη σχέση (2.13) προκύπτει ότι

$$\xi_\delta = \frac{1+\theta}{\int\limits_0^\infty e^{-\rho y}\left[\frac{\sum_{k=1}^n q_k e^{-\mu_k y}}{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k)^{-1}}\right]\mathrm{d}y} - 1 = \frac{1+\theta}{\int\limits_0^\infty \frac{\sum_{k=1}^n q_k e^{-(\mu_k+\rho)y}}{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k)^{-1}}\mathrm{d}y} - 1$$

$$= \frac{1+\theta}{\frac{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1}}{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k)^{-1}}} - 1, \quad \theta>0 \tag{5.14}$$

Έχοντας υπολογίσει όλες τις συναρτήσεις που απαρτίζουν τη $\varphi_\delta(u)$ διαπιστώνουμε ότι όταν η $w(x,y)=1$, οι συναρτήσεις $H_\delta(u)$ και $\overline{G}_\delta(u)$ δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα κατά συνέπεια ισούνται μεταξύ τους. Αυτό το συμπέρασμα θα φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο στη πορεία, αφού παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον στον υπολογισμό των φραγμάτων.

Στη συνέχεια, αφού έχουμε υπολογίσει τις συναρτήσεις που αποτελούν τη λύση της συνάρτησης $\varphi_\delta(u)$, θα προβούμε στην εύρεση του ακριβή της τύπου μέσω του μετασχηματισμού Laplace που δίνεται από τη σχέση (2.16). Γι' αυτό το λόγο θα πρέπει να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων $\widehat{H}_\delta(u)$ και το $\widehat{g}_\delta(x)$.

Ο μετασχηματισμός Laplace της $H_\delta(u)$ δίνεται από το τύπο

$$\widehat{H}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-su} H_\delta(u)\mathrm{d}u = \int_0^\infty \frac{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1} e^{-(\mu_k+s)u}}{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1}}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1}(\mu_k+s)^{-1}}{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1}}$$

και αντίστοιχα ο μετασχηματισμός Laplace της $g_\delta(x)$

$$\widehat{g}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-sx} g_\delta(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\sum_{k=1}^n q_k\mu_k(\mu_k+\rho)^{-1} e^{-(\mu_k+s)x}}{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1}\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^n q_k\mu_k(\mu_k+\rho)^{-1}(\mu_k+s)^{-1}}{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1}} \tag{5.15}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην (2.16) προκύπτει ότι

$$\widehat{\varphi}_\delta(s) = \frac{(1+\theta)\dfrac{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k)^{-1}}{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1}} \dfrac{\sum_{k=1}^n q_k[(\mu_k+\rho)^{-1}(\mu_k+s)^{-1}]}{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1}}}{1-(1+\theta)\dfrac{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k)^{-1}}{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1}} \dfrac{\sum_{k=1}^n q_k\mu_k(\mu_k+\rho)^{-1}(\mu_k+s)^{-1}}{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1}}} \tag{5.16}$$

Στη συνέχεια αντιστρέφοντας τη συνάρτηση (5.16) υπολογίζουμε τον ακριβή τύπο της συνάρτησης $\varphi_\delta(x)$. Το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός φραγμάτων για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(x)$ όταν αυτή ακολουθεί μείξη εκθετικών κατανομών.

- **Φράγματα για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.1 όταν δ>0**

Θα ξεκινήσουμε τους υπολογισμούς με βάση το *Θεώρημα 2.1.* Η ποσότητα που μας ενδιαφέρει είναι η συνάρτηση $a(z)$ η όποια ικανοποιεί τη σχέση (2.20). Αρά ισχύει ότι

$$a(z) = \frac{e^{\kappa z} H_\delta(z)}{\int\limits_z^\infty e^{\kappa y} g_\delta(y)\mathrm{d}y} = \frac{e^{\kappa z} \frac{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1} e^{-\mu_k z}}{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1}}}{\int\limits_z^\infty e^{\kappa y} \frac{\sum_{k=1}^n q_k\mu_k(\mu_k+\rho)^{-1} e^{-\mu_k y}}{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1}}}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1} e^{-(\mu_k+\kappa)z}}{\int\limits_z^\infty \sum_{k=1}^n q_k\mu_k(\mu_k+\rho)^{-1} e^{-(\mu_k+\kappa)y}} \tag{5.17}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1} e^{-(\mu_k-\kappa)z}}{\sum_{k=1}^n q_k\mu_k[(\mu_k+\rho)^{-1}(\mu_k-\kappa)^{-1}] e^{-(\mu_k-\kappa)z}}$$

Η εύρεση της μονοτονίας της συνάρτησης $a(z)$ είναι απαραίτητη για τον προσδιορισμό των φραγμάτων. Παρατηρούμε ότι:

το *μέγιστο* της συνάρτησης δίνεται απο τη σχέση

$$a_U(x) = \sup_{0\le z\le x, F_e(z)>0} \frac{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1} e^{-(\mu_k-\kappa)z}}{\sum_{k=1}^n q_k\mu_k[(\mu_k+\rho)^{-1}(\mu_k-\kappa)^{-1}] e^{-(\mu_k-\kappa)z}}$$

και αντίστοιχα το *ελάχιστο* δίνεται από τη σχέση

$$a_L(x) = \inf_{0\le z\le x, F_e(z)>0} \frac{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1} e^{-(\mu_k-\kappa)z}}{\sum_{k=1}^n q_k\mu_k[(\mu_k+\rho)^{-1}(\mu_k-\kappa)^{-1}] e^{-(\mu_k-\kappa)z}}$$

Με βάση τα παραπάνω προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα:

Για το *άνω φράγμα* ισχύει ότι

$$\varphi_\delta(u) \leq [\sup_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} \frac{\sum_{k=1}^{n} q_k(\mu_k+\rho)^{-1}e^{-(\mu_k-\kappa)z}}{\sum_{k=1}^{n} q_k\mu_k[(\mu_k+\rho)^{-1}(\mu_k-\kappa)^{-1}]e^{-(\mu_k-\kappa)z}}] \cdot e^{-\kappa u}, \quad u>0 \quad (5.18)$$

και αντίστοιχα το *κάτω φράγμα* ισχύει ότι

$$\varphi_\delta(u) \geq [\inf_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} \frac{\sum_{k=1}^{n} q_k(\mu_k+\rho)^{-1}e^{-(\mu_k-\kappa)z}}{\sum_{k=1}^{n} q_k\mu_k[(\mu_k+\rho)^{-1}(\mu_k-\kappa)^{-1}]e^{-(\mu_k-\kappa)z}}] \cdot e^{-\kappa u}, \quad u>0 \quad (5.19)$$

- **Φράγματα για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.2**

Την ίδια διαδικασία θα ακολουθήσουμε στον υπολογισμό των συναρτήσεων $\tau(x)$ και $\sigma(x)$ που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των φραγμάτων με βάση το *Θεώρημα* 2.2. Οι συναρτήσεις $H(z)$ και $\overline{G}(z)$ συμπίπτουν μεταξύ τους όπως έχουμε αναφέρει και παραπάνω. Έτσι έχουμε:

$$\tau(x) = \frac{H_\delta(z)}{\overline{G}_\delta(z)} = 1$$

Συνεπώς το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης $\tau(x)$ δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα αφού η συνάρτηση είναι ένας αριθμός.

όμοια για τη συνάρτηση $\sigma(x)$ έχουμε με αντικατάσταση των σχέσεων (5.11), (5.12) ότι:

$$\sigma(x) = \frac{e^{z\kappa}\overline{G}_\delta(z)}{\int\limits_z^\infty e^{\kappa y} g(y)\mathrm{d}y} = \frac{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1}e^{-(\mu_k-\kappa)z}}{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1}} \Big/ \left(\int\limits_z^\infty e^{\kappa y}\frac{\sum_{k=1}^n q_k\mu_k(\mu_k+\rho)^{-1}e^{-\mu_k y}}{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1}}\mathrm{d}y\right)$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1}e^{-(\mu_k-\kappa)z}}{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1}} \Big/ \left(\int_z^\infty \left[\sum_{k=1}^n \frac{q_k\mu_k(\mu_k+\rho)^{-1}e^{-(\mu_k-\kappa)y}}{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1}}\right]\mathrm{d}y\right)$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1}e^{-(\mu_k-\kappa)z}}{\sum_{k=1}^n q_k\mu_k[(\mu_k+p)^{-1}(\mu_k-\kappa)^{-1}]e^{-(\mu_k-\kappa)z}}$$

και αντίστοιχα το μέγιστο για τη συνάρτηση $\sigma(x)$ θα είναι

$$\sigma_U(x) = \sup_{0\le z\le x, F_e(z)>0} \frac{e^{z\kappa}\overline{G}_\delta(z)}{\int_z^\infty e^{\kappa y} g(y)\mathrm{d}y}$$

$$= \sup_{0\le z\le x, F_e(z)>0} \frac{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1}e^{-(\mu_k-\kappa)z}}{\sum_{k=1}^n q_k\mu_k[(\mu_k+p)^{-1}(\mu_k-\kappa)^{-1}]e^{-(\mu_k-\kappa)z}} \tag{5.20}$$

όπως επίσης για τη συνάρτηση $\sigma_L(x)$ με αντικατάσταση των σχέσεων (5.11), (5.12) προκύπτει ότι

$$\sigma_L(x) = \inf_{0\le z\le x, F_e(z)>0} \frac{e^{zk}\overline{G}_\delta(z)}{\int_z^\infty e^{\kappa y} g(y)\mathrm{d}y}$$

$$= \inf_{0\le z\le x, F_e(z)>0} \frac{\sum_{k=1}^n q_k(\mu_k+\rho)^{-1}e^{-(\mu_k-\kappa)z}}{\sum_{k=1}^n q_k\mu_k[(\mu_k+p)^{-1}(\mu_k-\kappa)^{-1}]e^{-(\mu_k-\kappa)z}} \tag{5.21}$$

Η σχέση που μας δίνει το *άνω φράγμα* σύμφωνα με τη σχέση (5.20) για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ είναι η εξής :

$$\varphi_\delta(u) \leq \left[\sup_{0 \leq z \leq x, F_e(z) > 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} q_k(\mu_k + \rho)^{-1} e^{-(\mu_k - \kappa)z}}{\sum_{k=1}^{n} q_k \mu_k [(\mu_k + \rho)^{-1} (\mu_k - \kappa)^{-1}] e^{-(\mu_k - \kappa)z}} \right] \cdot e^{-\kappa u} \quad u \geq 0 \qquad (5.22)$$

και αντίστοιχα η σχέση μας δίνει το *κάτω φράγμα* με βάση τη σχέση (5.21) για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ είναι η εξής :

$$\varphi_\delta(u) \geq \left[\inf_{0 \leq z \leq x, F_e(z) > 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} q_k(\mu_k + \rho)^{-1} e^{-(\mu_k - \kappa)z}}{\sum_{k=1}^{n} q_k \mu_k [(\mu_k + \rho)^{-1} (\mu_k - \kappa)^{-1}] e^{-(\mu_k - \kappa)z}} \right] \cdot e^{-\kappa u} \quad u \geq 0 \qquad (5.23)$$

Παρατηρούμε είναι ότι τα δύο Θεωρήματα παράγουν τα ίδια αποτελέσματα, δηλαδή τα φράγματα συμπίπτουν μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει ότι μεταξύ των δύο θεωρημάτων δεν υπάρχει διαφορά, όποτε και δεν μπορούμε να επιλέξουμε αυτό που παράγει ικανοποιητικότερο αποτέλεσμα.

5.5 Αριθμητική Εφαρμογή για Μείξη Εκθετικών Κατανομών

Στην εφαρμογή που ακολουθεί θα μελετήσουμε μια συγκεκριμένη συνάρτηση που αφορά τη περίπτωση που οι αποζημιώσεις ακολουθούν μια μείξη δύο εκθετικών κατανομών, έτσι ώστε να κατανοήσουμε ευκολότερα τα αποτελέσματα που προέκυψαν στη προηγούμενη ενότητα. Έτσι υποθέτουμε ότι η ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων δίνεται από το παρακάτω τύπο

$$\overline{F}(x) = \frac{1}{2} e^{-3x} + \frac{1}{2} e^{-7x}, \quad x > 0$$

με παράμετρο $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$, και μέση τιμή σύμφωνα με τη σχέση (2.1) που δίνει τη πρώτη ροπή των αποζημιώσεων θα γίνει

$$p_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{7} = \frac{5}{21}$$

Για τη διεξαγωγή αποτελεσμάτων θεωρούμε ότι $\lambda = 1$ και την ένταση ασφαλίστρου $c = \frac{1}{3}$. Το περιθώριο ασφαλείας σύμφωνα με τη σχέση (2.2) όπως φαίνεται παρακάτω ισούται με $\theta = \frac{2}{5}$.

$$\theta = \frac{c}{\lambda p_1} - 1 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{21}} - 1 = \frac{2}{5}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η πυκνότητα της κατανομής των αποζημιώσεων είναι

$$f(x) = \frac{3}{2}e^{-3x} + \frac{7}{2}e^{-7x}, \quad x > 0$$

Η πυκνότητα κατανομής ισορροπίας να δίνεται από τη σχέση (2.5)

$$f_e(x) = \frac{21}{5}\left(\frac{1}{2}e^{-3x} + \frac{1}{2}e^{-7x}\right)$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις συναρτήσεις που αποτελούν τη λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης (2.8) δηλαδή τη συνάρτηση $\varphi_\delta(x)$. Οπότε αντικαθιστώντας τη κατανομή των αποζημιώσεων για μείξη εκθετικών κατανομών έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα.

Η πρώτη συνάρτηση που μας ενδιαφέρει είναι η $\overline{G}_\delta(x)$ για την οποία προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα

$$\overline{G}_\delta(x) = \frac{e^{\rho x}\int_x^\infty e^{-\rho y}\left(\frac{1}{2}e^{-3y} + \frac{1}{2}e^{-7y}\right)\mathrm{d}y}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\left(\frac{1}{2}e^{-3y} + \frac{1}{2}e^{-7y}\right)\mathrm{d}y} = \frac{e^{\rho x}\int_x^\infty\left(e^{-(\rho+3)y} + e^{-(\rho+7)y}\right)\mathrm{d}y}{\int_0^\infty\left(e^{-(\rho+3)y} + e^{-(\rho+7)y}\right)\mathrm{d}y}$$

$$= \frac{e^{\rho x}\left(\frac{1}{(\rho+3)}e^{-(\rho+3)x} + \frac{1}{(\rho+7)}e^{-(\rho+7)x}\right)}{\frac{1}{(\rho+3)} + \frac{1}{(\rho+7)}} = \frac{\left(\frac{1}{(\rho+3)}e^{-3x} + \frac{1}{(\rho+7)}e^{-7x}\right)}{\frac{1}{(\rho+3)} + \frac{1}{(\rho+7)}}$$

όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε και από τη σχέση (5.11) που αποδείξαμε στη προηγούμενη παράγραφο

$$\overline{G}_\delta(x) = \frac{e^{-7x}(3+p+e^{4x}(7+\rho))}{2(5+\rho)}$$

παραγωγίζοντας τη συνάρτηση $G_\delta(x)$ προκύπτει η συνάρτηση $g_\delta(x)$

$$g_\delta(x) = \frac{e^{-7x}\left(7\left(3+p+e^{4x}(7+\rho)\right) - 4e^{4x}(7+\rho)\right)}{2(5+\rho)}$$

Αντίστοιχα θα υπολογίσουμε και τη συνάρτηση $H_\delta(u)$ με βάση τη σχέση (5.13) θα γίνει

$$H_\delta(u) = \frac{e^{\rho u}\int_u^\infty e^{-\rho x}\int_x^\infty(\frac{3}{2}e^{-3y}+\frac{7}{2}e^{-7y})\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\left(\dfrac{3}{2}e^{-3y}+\dfrac{7}{2}e^{-7y}\right)\mathrm{d}y} = \frac{e^{\rho u}\int_u^\infty(e^{-(\rho+3)x}+e^{-(\rho+7)x})\mathrm{d}x}{\int_0^\infty(3e^{-(\rho+3)y}+7e^{-(\rho+7)y})\mathrm{d}y}$$

$$= \frac{e^{\rho u}\left(\frac{1}{\rho+3}e^{-(\rho+3)u}+\frac{1}{\rho+7}e^{-(\rho+7)u}\right)}{\frac{1}{\rho+3}+\frac{1}{\rho+7}} = \frac{\left(\frac{1}{\rho+3}e^{-3u}+\frac{1}{\rho+7}e^{-7u}\right)}{\frac{1}{\rho+3}+\frac{1}{\rho+7}}$$

$$= \frac{e^{-7u}(3+\rho+e^{4u}(7+\rho))}{2(5+\rho)}$$

Παρατήρηση: Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $H_\delta(u)$ και $\overline{G}_\delta(u)$ παράγουν το ίδιο αποτέλεσμα κάτι που συμβαίνει μόνο στη περίπτωση που το $w(x,y)=1$.

Ενώ για τη παράμετρο ξ_δ, όταν το $\theta = \frac{2}{5}$, προκύπτει σύνφωνα με τη σχέση (5.14) ότι

$$\xi_\delta = \frac{2}{3\int_0^\infty(e^{-(\rho+3)x}+e^{-(\rho+7)x})\mathrm{d}x} - 1 = \frac{2}{3\left(\frac{1}{\rho+3}+\frac{1}{\rho+7}\right)} - 1 = \frac{6+7\rho+\rho^2}{15+3\rho}$$

Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε τον ακριβή τύπο της $\varphi_\delta(u)$ με βάση την ιδιότητα (5.17) που δίνει το το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης όπως φαίνεται παρακάτω

Για την εύρεση του μετασχηματισμού Laplace της $\varphi_\delta(u)$ θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων που την απαρτίζουν. Έτσι έχουμε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $H_\delta(u)$ είναι

$$\widehat{H}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-su} H_\delta(u)\mathrm{d}u = \int_0^\infty \frac{e^{-(7+s)u}(3 + p + e^{4u}(7+\rho))}{2(5+\rho)}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{\dfrac{7+\rho}{s+3} + \dfrac{3}{s+7} + \dfrac{\rho}{s+7}}{2(5+\rho)}$$

και αντίστοιχα ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $g_\delta(x)$ είναι

$$\widehat{g}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-sx} g_\delta(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{e^{-(7+s)x}(7(3+\rho) + 3e^{4x}(7+\rho))}{2(5+\rho)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\dfrac{3(7+\rho)}{s+3} + \dfrac{21}{s+7} + \dfrac{7\rho}{s+7}}{2(5+\rho)}$$

Έτσι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\widehat{\varphi}_\delta(u)$ θα γίνει με αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων

$$\widehat{\varphi}_\delta(u) = \frac{(29 + 5s + \rho(5+s))}{(21(1+s)(6+s) + \rho^2(3+s)(7+s) + \rho(147 + 5s(17+2s)))^2} \tag{5.24}$$

Με αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace της συνάρτησης $\varphi_\delta(u)$ που έγινε μέσω του προγράμματος $Mathemetica$ προκύπτει ο ακριβής τύπος της $\varphi_\delta(u)$. (*βλέπε Παράρτημα* Ε.1)

Η συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ που προέκυψε είναι μια μείξη εκθετικών κατανομών και είναι συνάρτηση του ρ. Αυτό είναι προφανές αφού όταν η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί εκθετική ή μείξη εκθετικών κατανομών τότε και η συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ ακολουθεί και αυτή εκθετική ή μια μείξη εκθετικών κατανομών αντίστοιχα όπως αναφέρουν και στο άρθρο τους οι Willmot and Lin (1998).

Για να γίνει όμως πιο ακριβής η λήψη των αποτελεσμάτων θα προβούμε στον υπολογισμό του ρ που είναι η λύση της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg και ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση (2.11).

Ο μετασχηματισμός Laplace της πυκνότητας των αποζημιώσεων δίνεται από τη σχέση

$$\widehat{f}(s) = \frac{3}{2(s+3)} + \frac{7}{2(s+7)}$$

Έτσι με αντικατάσταση στη σχέση (2.11) έχουμε τη παρακάτω εξίσωση

$$1 + \delta - \frac{1}{3}\rho = \frac{3}{2(\rho+3)} + \frac{7}{2(\rho+7)} \tag{5.25}$$

1. φράγματα στη περίπτωση που το δ=0.05

Αρχικά θα θεωρήσουμε ότι το $\delta = 0.05$ για να καταλήξουμε στα αποτελέσματα που μας ενδιαφέρουν και αφορούν τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$.

Οι ρίζες που προκύπτουν απο τη λύση της εξίσωσης (5.25) είναι οι εξής:

$$\rho_1 = -7.87859, \quad \rho_2 = -2.42861, \quad \rho_3 = 3.4572$$

Θα επιλέξουμε τη μικρότερη θετική ρίζα ως λύση της γενικευμένης εξίσωσης $Lundberg$. Σ' αυτή τη περίπτωση είναι το $\rho = 3.4572$.

Το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός της συνάρτησης $\varphi_\delta(u)$. Όταν το $\rho = 3.4572$ ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\varphi_\delta(u)$ θα πάρει τη μορφή

$$\widehat{\varphi}_\delta(u) = \frac{2.05642 + 0.375741s}{13.1094 + 8.29901s + s^2}$$

Με τη βοήθεια του $Mathematica$ αντιστρέφουμε τη συνάρτηση και έτσι προκύπτει ότι

$$\varphi_\delta(u) = 0.0652102e^{-6.17657u} + 0.310531e^{-2.12244u}, \quad u > 0$$

Η σταθερά κ ικανοποιεί τη συνθήκη (2.19). Αντικαθιστώντας τις συναρτήσεις που την απαρτίζουν, τις οποίες έχουμε ήδη υπολογίσει, εύκολα προκύπτει ότι

$$\int_0^\infty 0.0591212 \cdot e^{-(7-\kappa)x}(-41.8288e^{4x} + 7(6.4572 + 10.4572e^{4x}))\mathrm{d}x = 1 + 1.66141$$

$$\Rightarrow \frac{21 - 4.52703\kappa}{(-7+\kappa)(-3+\kappa)} - 1 - 1.66141 = 0$$

οπότε οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$\kappa_1 = 6.17656, \quad \kappa_2 = 2.12245$$

Η μικρότερη θετική ρίζα αποτελεί και το συντελεστή προσαρμογής και αυτή είναι η $\kappa = 2.12245$.

- **Φράγματα για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.1**

Στη συνέχεια ακολουθεί η εύρεση των φραγμάτων για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ με βάση το *Θεώρημα* 2.1 λαμβάνοντας υπόψη τους παραπάνω υπολογισμούς . Αρχικά θα υπολογίσουμε τη ποσότητα $a(z)$ μέσω της οποίας θα υπολογίσουμε το *άνω* και *κάτω φράγμα* για μείξη εκθετικών κατανομών όταν $\delta = 0.05$. Με αντικατάσταση στη σχέση (5.17) έχουμε

$$a(z) = \frac{0.0591212 \cdot e^{-(7-2.12245)z}(6.4572 + 10.4572 \cdot e^{4z})}{0.0591212 \int_z^\infty e^{-(7-2.12245)x}(-41.8288 \cdot e^{4x} + 7(6.4572 + 10.4572 \cdot e^{4x}))\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{e^{-4.87755z}(0.381757 + 0.618242e^{4z})}{0.0591212 \cdot (9.26703 \cdot e^{-4.87755z} + 35.7491 \cdot e^{-0.87755z})}$$

$$= \frac{6.45719 \cdot e^{0.87755z} + 10.4572 \cdot e^{4.87755z}}{9.26703 \cdot e^{0.87755z} + 35.7491 \cdot e^{4.87755z}}$$

Για να υπολογίσουμε όμως το άνω και κάτω φράγμα θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης $a(z)$. Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση $a(z)$ και εν συνεχεία τη θέτουμε ίση με μηδέν για να υπολογίσουμε τις ρίζες που τη μηδενίζουν. Δηλαδή $a'(z) = 0$, οπότε:

$$a'(z) = \frac{-535.726e^{5.7551z}}{(9.26703e^{0.87755z} + 35.7491e^{4.87755z})^2}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχουν ρίζες που να μηδενίζουν τη παράγωγο. Οπότε στο διάστημα $[0, \infty)$ η συνάρτηση $a(z)$ είναι φθίνουσα αφού η παράγωγος της είναι παντού αρνητική.

Άρα η συνάρτηση $a(z)$ έχει *μέγιστο* στο 0 οπότε $a_U(x) = \sup_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} a(z) = a(0)$

$$a_U(x) = \sup_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} \frac{6.45719 \cdot e^{0.87755z} + 10.4572 \cdot e^{4.87755z}}{9.26703 \cdot e^{0.87755z} + 35.7491 \cdot e^{4.87755z}} = 0.375741$$

ενώ το *ελάχιστο* είναι στο x οπότε $a_L(x) = \inf_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} a(z) = a(x)$

$$a_L(x) = \inf_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} \frac{6.45719 \cdot e^{0.87755z} + 10.4572 \cdot e^{4.87755z}}{9.26703 \cdot e^{0.87755z} + 35.7491 \cdot e^{4.87755z}}$$

$$= \frac{6.45719 \cdot e^{0.87755x} + 10.4572 \cdot e^{4.87755x}}{9.26703 \cdot e^{0.87755x} + 35.7491 \cdot e^{4.87755x}}$$

Εύκολα προκύπτει σύμφωνα με τη σχέση (5.18) ότι το *άνω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ όταν $\kappa = 2.12245$ είναι

$$\varphi_\delta(u) \leq 0.375741 \cdot e^{-2.12245u}$$

ενώ αντίστοιχα το *κάτω φράγμα* σύμφωνα με τη σχέση (5.19) για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ όταν $\kappa = 2.12245$ είναι

$$\varphi_\delta(u) \geq \frac{6.45719 \cdot e^{0.87755u} + 10.4572 \cdot e^{4.87755u}}{9.26703 \cdot e^{0.87755u} + 35.7491 \cdot e^{4.87755u}} \cdot e^{-2.12245u}$$

- **Φράγματα τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.2**

Με τον ίδιο τρόπο θα υπολογίσουμε τα φράγματα με βάση το *Θεώρημα* 2.2. Όπως αποδείξαμε στη Παράγραφο 5.2 από τη σχέση (;;) οι συναρτήσεις $\tau_U(x) = \tau_L(x) = 1$ δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε τη συνάρτηση $\sigma(z)$ η οποία ορίζεται από το τύπο :

$$\sigma(z) = \frac{e^{\kappa z}\overline{G}_\delta(z)}{\int_z^\infty e^{\kappa y} g(y)\mathrm{d}y} = \frac{e^{\kappa z} H_\delta(z)}{\int_z^\infty e^{\kappa y} g(y)\mathrm{d}y} = a(z) \tag{5.26}$$

Εφόσον οι συναρτήσεις $a(z)$ και $\sigma(z)$ παράγουν το ίδιο αποτέλεσμα λόγω της ισότητας των δύο συναρτήσεων $H_\delta(z)$ και $\overline{G}_\delta(z)$ όταν $w(x, y) = 1$, τότε κατά συνέπεια η συνάρτηση $\sigma(z)$ είναι και αυτή μια φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0, \infty)$ που δίνεται από τη σχέση

$$\sigma(z) = \frac{6.45719 \cdot e^{0.87755z} + 10.4572 \cdot e^{4.87755z}}{9.26703 \cdot e^{0.87755z} + 35.7491 \cdot e^{4.87755z}}$$

και έχει *μέγιστο* στο 0 οπότε $\sigma_U(x) = \sup_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \sigma(z) = \sigma(0)$ σύμφωνα με τη σχέση (5.20):

$$\sigma_U(x) = \sup_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{6.45719 \cdot e^{0.87755z} + 10.4572 \cdot e^{4.87755z}}{9.26703 \cdot e^{0.87755z} + 35.7491 \cdot e^{4.87755z}} = 0.375741$$

ενώ το *ελάχιστο* είναι στο x οπότε $\sigma_L(x) = \inf_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \sigma(z) = \sigma(x)$ σύμφωνα με τη σχέση (5.21):

$$\sigma_L(x) = \inf_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{6.45719 \cdot e^{0.87755z} + 10.4572 \cdot e^{4.87755z}}{9.26703 \cdot e^{0.87755z} + 35.7491 \cdot e^{4.87755z}}$$

$$= \frac{6.45719 \cdot e^{0.87755x} + 10.4572 \cdot e^{4.87755x}}{9.26703 \cdot e^{0.87755x} + 35.7491 \cdot e^{4.87755x}}$$

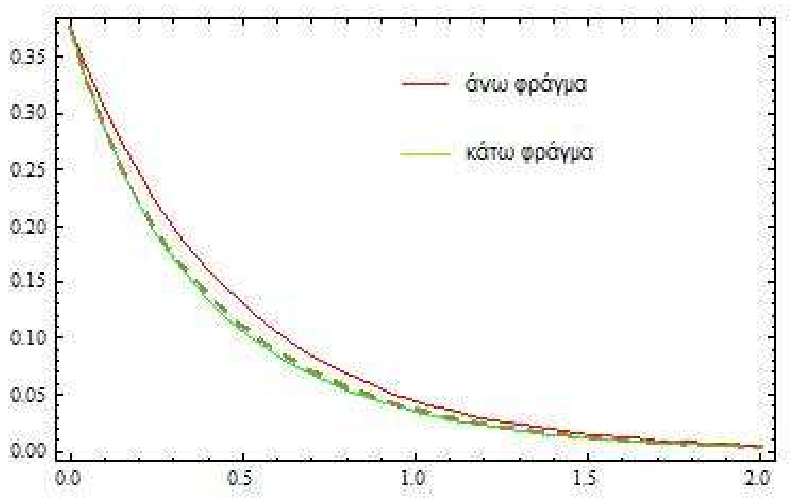
Σύμφωνα με τη σχέση (5.22) το *άνω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ όταν $\kappa = 2.12245$ είναι

$$\varphi_\delta(u) \leq 0.375741 \cdot e^{-2.12245u}, \quad u > 0$$

ενώ αντίστοιχα το *κάτω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ σύμφωνα με τη σχέση (5.23) όταν $\kappa = 2.12245$ είναι

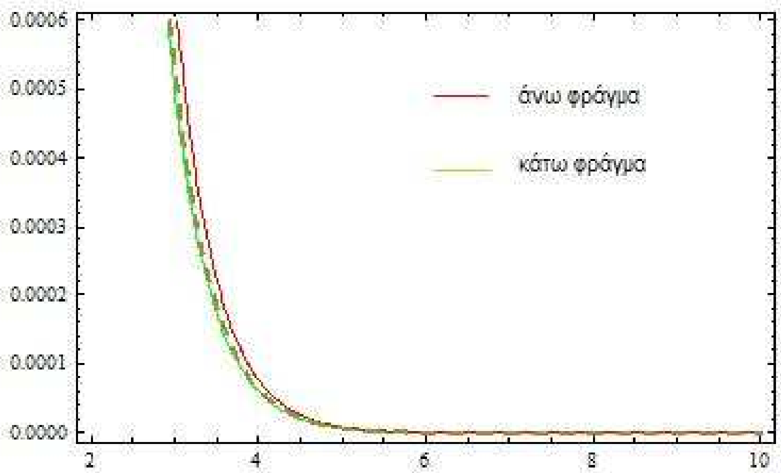
$$\varphi_\delta(u) \geq \frac{6.45719e^{0.87755u} + 10.4572e^{4.87755u}}{9.26703e^{0.87755u} + 35.7491e^{4.87755u}} \cdot e^{-2.12245u}, \quad u > 0$$

Από τα παραπάνω αποτελέσματα όπως εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε προκύπτει ότι τα φράγματα των δύο θεωρημάτων συμπίπτουν μεταξύ τους. Στο Σχήμα 5.1 και 5.2, απεικονίζονται διαγραμματικά η συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ καθώς επίσης το *άνω* και *κάτω φράγμα* στη περίπτωση όπου το $\delta = 0.05$. Η διακεκομμένη γραμμή παρουσιάζει τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ ενώ η κόκκινη και η πράσινη το *άνω* και το *κάτω φράγμα* αντίστοιχα. Θεωρούμε το διάστημα $[0, 2]$ (Σχήμα 5.1) και $[2, 10]$ (Σχήμα 5.2) στο οποίο κυμαίνεται το αποθεματικό της ασφαλιστικής εταιρείας. Στο διάγραμμα αυτό παρατηρούμε τη συμπεριφορά των τριών συναρτήσεων καθώς το αποθεματικό μεταβάλλεται.



Σχήμα 5.1: *Άνω και κάτω φράγμα για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη εκθετικών κατανομών για $\delta = 0.05$*

Παρατηρώντας τα δύο Σχήματα διαπιστώνουμε ότι το *άνω* και *κάτω φράγμα* προσεγγίζουν τη $\varphi_\delta(u)$ σε μεγάλο βαθμό, κάτι που είναι προφανές κοιτάζοντας προσεχτικότερα τα αποτελέσματα. Για να κατανοήσουμε περισσότερο το διάγραμμα χωρίσαμε το αποθεματικό σε δύο διαστήματα από $[0, 2]$ και $[2, 10]$. Στο διάστημα $[0, 2]$ παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ και το *άνω* και το *κάτω φράγμα* μικραίνουν με πολύ γρήγορο ρυθμό στο μηδέν καθώς το αποθεματικό μεγαλώνει.



Σχήμα 5.2: *Άνω και κάτω φράγμα για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη εκθετικών κατανομών για $\delta = 0.05$*

Εξετάζοντας το Σχήμα 5.2 παρατηρούμε ότι για το υπόλοιπο διάστημα καθώς το αποθεματικό αυξάνεται οι συναρτήσεις σταδιακά τείνουν στο μηδέν. Τα φράγματα φράσσουν τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ σε πολύ ικανοποιητικό βαθμό ενώ για μεγάλα αποθεματικά οι συναρτήσεις συμπίπτουν μεταξύ τους.

2. φράγματα στη περίπτωση που το δ=0.5

Στην επόμενη περίπτωση θα μεγαλώσουμε τη τιμή του συντελεστή προεξόφλησης. Θεωρούμε ότι το $\delta = 0.5$. Οι ρίζες που προκύπτουν απο τη λύση της εξίσωσης (5.25) είναι οι εξής:

$$\rho_1 = -7.79351, \quad \rho_2 = -2.51937, \quad \rho_3 = 4.81289$$

Για τον υπολογισμό των φραγμάτων θα χρησιμοποιήσουμε τη μικρότερη θετική ρίζα, $\rho = 4.81289$.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ για $\rho = 4.81289$. Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\varphi_\delta(u)$ που δίνεται από τη σχέση (5.24) θα πάρει τη μορφή

$$\widehat{\varphi}_\delta(u) = \frac{1.72487 + 0.31897s}{14.3016 + 8.53517s + s^2}$$

Με τη βοήθεια του $Mathematica$ αντιστρέφουμε τη συνάρτηση και έτσι προκύπτει ότι

$$\varphi_\delta(u) = 0.0675431e^{-6.24513u} + 0.251427e^{-2.29004u}$$

Η σταθερά κ ικανοποιεί τη συνθήκη (2.19) που αναφέραμε παραπάνω. Συνεπώς με αντικατάσταση των συναρτήσεων που την απαρτίζουν, τις οποίες έχουμε ήδη υπολογίσει, για $\rho = 4.812891$ εύκολα προκύπτει ότι η λύση της εξίσωσης που επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε είναι η $\kappa = 2.29005$

- **Φράγματα για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.1**

Σ' αυτό το σημείο θα υπολογίσουμε τη ποσότητα $a(z)$ που χρησιμοποιείται στην εύρεση του *άνω* και *κάτω φράγματος* για μείξη εκθετικών κατανομών όταν $\delta = 0.5$. Με αντικατάσταση στη σχέση (5.17) έχουμε

$$a(z) = \frac{7.81288 \cdot e^{0.70995z} + 11.8129 \cdot e^{4.70995z}}{11.6116 \cdot e^{0.70995z} + 49.9172 \cdot e^{4.70995z}}$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τη πρώτη παράγωγο για να βρούμε τις ρίζες που τη μηδενίζουν.

$$a'(z) = \frac{(-0.000084 \cdot e^{1.4199z} - 1011.33 \cdot e^{5.4199z} - 0.00413616 \cdot e^{9.4199z})}{(11.6116 \cdot e^{0.70995z} + 49.9172 \cdot e^{4.70995z})^2}$$

Για να βρούμε τις ρίζες που μηδενίζουν τη παράγωγο θα θέσουμε τη παραπάνω συνάρτηση ίση με μηδέν, $a'(z) = 0$. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν ρίζες που να μηδενίζουν τη παράγωγο. Οπότε στο διάστημα $[0, \infty)$ η συνάρτηση $a(z)$ είναι φθίνουσα αφού η παράγωγος της είναι παντού αρνητική.

Οπότε η συνάρτηση $a(z)$ έχει *μέγιστο* στο 0 οπότε $a_U(x) = \sup_{0 \leq z \leq x, F_e(z) > 0} a(z) = a(0)$

$$a_U(x) = \sup_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} \frac{7.81288 \cdot e^{0.70995z} + 11.8129 \cdot e^{4.70995z}}{11.6116 \cdot e^{0.70995z} + 49.9172 \cdot e^{4.70995z}} = 0.318969$$

ενώ το *ελάχιστο* είναι στο x οπότε $a_L(x) = \inf_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} a(z) = a(x)$

$$a_L(x) = \inf_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} \frac{7.81288 \cdot e^{0.70995z} + 11.8129 \cdot e^{4.70995z}}{11.6116 \cdot e^{0.70995z} + 49.9172 \cdot e^{4.70995z}}$$

$$= \frac{7.81288 \cdot e^{0.70995x} + 11.8129 \cdot e^{4.70995x}}{11.6116 \cdot e^{0.70995x} + 49.9172 \cdot e^{4.70995x}}$$

Εύκολα προκύπτει σύμφωνα με τη σχέση (5.18) ότι το *άνω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ όταν $\kappa = 2.29005$ είναι

$$\varphi_\delta(u) \leq 0.318969 \cdot e^{-2.29005u}$$

ενώ αντίστοιχα το *κάτω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ σύμφωνα με τη σχέση (5.19) όταν $\kappa = 2.29005$ είναι

$$\varphi_\delta(u) \geq \frac{7.81288 \cdot e^{0.70995u} + 11.8129 \cdot e^{4.70995u}}{11.6116 \cdot e^{0.70995u} + 49.9172 \cdot e^{4.70995u}} \cdot e^{-2.29005u}$$

- **Φράγματα για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.2**

Με τον ίδιο τρόπο θα υπολογίσουμε τα φράγματα με βάση το *Θεώρημα* 2.2. Η συνάρτηση $\sigma(z)$ ισούται με τη συνάρτηση $a(z)$ όπως έχουμε αποδείξει με τη σχέση (5.26). Αντίστοιχα με τη πρώτη περίπτωση (δ=0.05) υπολογίζουμε τη μονοτονία της συνάρτησης. Τα φράγματα που προκύπτουν όταν το δ=0.5 όταν ο συντελεστής προσαρμογής $\kappa = 2.29005$ είναι τα εξής:

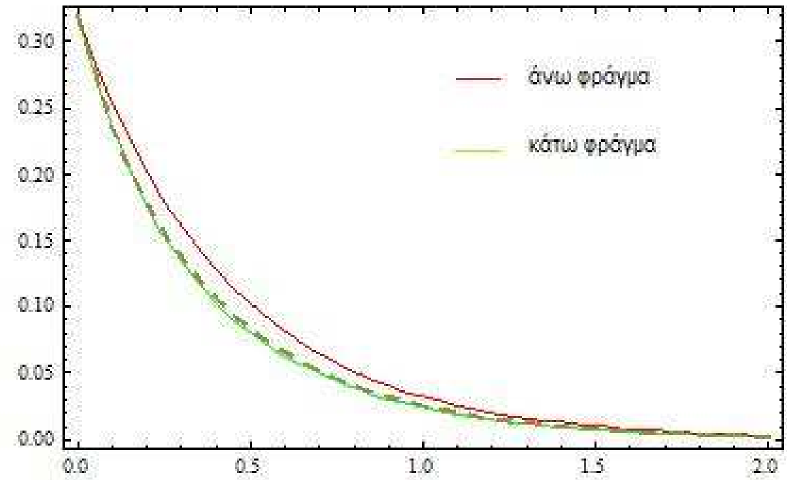
Σύμφωνα με τη σχέση (5.22) το *άνω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ είναι

$$\varphi_\delta(u) \leq 0.318969 \cdot e^{-2.29005u}$$

ενώ αντίστοιχα το *κάτω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ σύμφωνα με τη σχέση (5.23) είναι

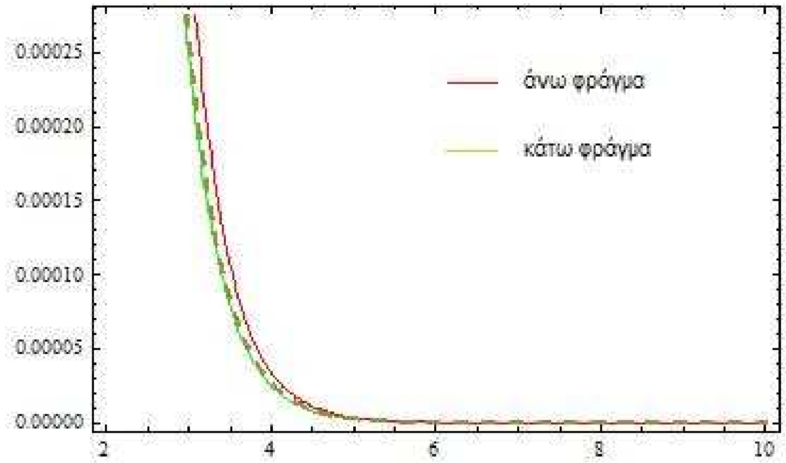
$$\varphi_\delta(u) \geq \frac{7.81288 \cdot e^{0.70995u} + 11.8129 \cdot e^{4.70995u}}{11.6116 \cdot e^{0.70995u} + 49.9172 \cdot e^{4.70995u}} \cdot e^{-2.29005u}$$

Στο Σχήμα 5.3 και 5.4 θεωρούμε επίσης τις ίδιες παραμέτρους. Παρατηρούμε ότι και για δ=0.5 τα φράγματα φράσσουν πολύ ικανοποιητικά τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ σε όλο το διάστημα $[0, 10]$ στο οποίο κυμαίνεται το αποθεματικό u.



Σχήμα 5.3: *Άνω και κάτω φράγμα για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη εκθετικών κατανομών όταν $\delta = 0.5$ στο διάστημα [0,2]*

Στο Σχήμα 5.3 παρατηρούμε πως κυμαίνονται οι συναρτήσεις στο διάστημα $[0, 2]$. Διαπιστώνουμε ότι και οι τρεις συναρτήσεις μειώνονται με πολύ γρήγορο ρυθμό για πολύ μικρά αποθεματικά.



Σχήμα 5.4: *Άνω και κάτω φράγμα για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη εκθετικών κατανομών όταν $\delta = 0.5$ στο διάστημα [2,10]*

Όσο το αποθεματικό αυξάνει οι συναρτήσεις αποκτούν ένα πιο ομαλό ρυθμό και καθώς φθάνουν προς το τέλος του διαστήματος που ορίσαμε συμπίπτουν μεταξύ τους και τείνουν στο μηδέν όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.4. Μπορούμε να πούμε ότι τα φράγματα προσεγγίζουν πολύ ικανοποιητικά τη συνάρτηση σε όλο το διάστημα τιμών.

3. φράγματα στη περίπτωση που το δ=1

Στη τελευταία περίπτωση θεωρούμε ότι το $\delta = 1$. Οι ρίζες που προκύπτουν απο τη λύση της εξίσωσης (5.25) είναι οι εξής:

$$\rho_1 = -7.71575, \quad \rho_2 = 6.30556, \quad \rho_3 = -2.58982$$

Η μικρότερη θετική ρίζα που αποτελεί και τη λύση της εξίσωσης είναι η $\rho = 6.30556$.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ όταν το $\rho = 6.30556$, έτσι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\varphi_\delta(u)$ θα πάρει τη μορφή

$$\widehat{\varphi}_{\delta}(u) = \frac{1.46656 + 0.273929s}{15.2475 + 8.72727s + s^2}$$

Αντιστρέφοντας τη συνάρτηση προκύπτει ότι

$$\varphi_{\delta}(u) = 0.0673378e^{-6.31141u} + 0.206591e^{-2.41586u}$$

Από τη συνθήκη (2.19) η σταθερά κ, για $\rho = 4.812891$ προκύπτει ότι $\kappa = 2.41585$ που αποτελεί και τη μικρότερη θετική ρίζα.

- **Φράγματα για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.1**

Αναφορικά με τη ποσότητα $a(z)$ μέσω της οποίας θα υπολογίσουμε το *άνω* και *κάτω φράγμα* για μείξη εκθετικών κατανομών όταν $\delta = 1$, έχουμε με αντικατάσταση στη σχέση (5.17)

$$a(z) = \frac{9.30557 \cdot e^{0.58415z} + 13.3056 \cdot e^{4.58415z}}{14.2096 \cdot e^{0.58415z} + 68.3335 \cdot e^{4.58415z}}$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τη πρώτη παράγωγο και στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις ρίζες της θέτοντας τη πρώτη παράγωγο ίση με το μηδέν, $a'(z) = 0$.

$$a'(z) = \frac{-1.8477999 \cdot 10^{-6} \cdot e^{1.1683z} - 1787.26 \cdot e^{5.1683z} + 0.00249355 \cdot e^{9.1683z}}{(14.2096 \cdot e^{0.58415z} + 68.3335 \cdot e^{4.58415z})^2}$$

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν ρίζες που να μηδενίζουν τη παράγωγο. Οπότε στο διάστημα $[0, \infty)$ η συνάρτηση $a(z)$ είναι φθίνουσα αφού η παράγωγος της είναι παντού αρνητική.

Οπότε η συνάρτηση $a(z)$ έχει *μέγιστο* στο 0 οπότε $a_U(x) = \sup_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} a(z) = a(0)$

$$a_U(x) = \sup_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{9.30557 \cdot e^{0.58415z} + 13.3056 \cdot e^{4.58415z}}{14.2096 \cdot e^{0.58415z} + 68.3335 \cdot e^{4.58415z}} = 0.273932$$

ενώ το *ελάχιστο* είναι στο x οπότε $a_L(x) = \inf_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} a(z) = a(x)$

$$a_L(x) = \inf_{0 \leq z \leq x, F_e(z)>0} \frac{9.30557 \cdot e^{0.58415z} + 13.3056 \cdot e^{4.58415z}}{14.2096 \cdot e^{0.58415z} + 68.3335 \cdot e^{4.58415z}}$$

$$= \frac{9.30557 \cdot e^{0.58415x} + 13.3056 \cdot e^{4.58415x}}{14.2096 \cdot e^{0.58415x} + 68.3335 \cdot e^{4.58415x}}$$

Εύκολα προκύπτει σύμφωνα με τη σχέση (5.18) ότι το *άνω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ όταν $\kappa = 2.41585$ είναι

$$\varphi_\delta(u) \leq 0.273932 \cdot e^{-2.41585u}$$

ενώ αντίστοιχα το *κάτω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ σύμφωνα με τη σχέση (5.19) όταν $\kappa = 2.41585$ είναι

$$\varphi_\delta(u) \geq \frac{9.30557 \cdot e^{0.58415u} + 13.3056 \cdot e^{4.58415u}}{14.2096 \cdot e^{0.58415u} + 68.3335 \cdot e^{4.58415u}} \cdot e^{-2.41585u}$$

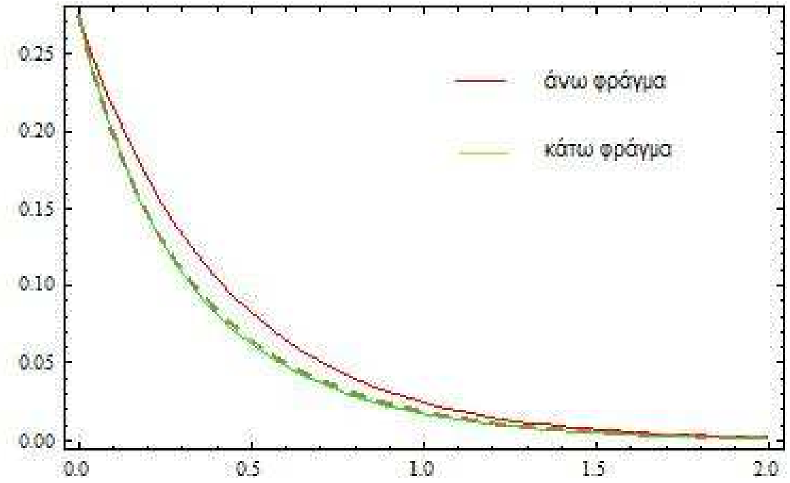
- **Φράγματα για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.2**

Με τον ίδιο τρόπο θα υπολογίσουμε τα φράγματα με βάση το *Θεώρημα* 2.2. Όπως έχουμε αποδείξει με τη σχέση (5.26), η συνάρτηση $\sigma(z)$ ισούται με τη συνάρτηση $a(z)$ όταν $w(x, y) = 1$. Κατά συνέπεια σύμφωνα με τη σχέση (5.22) το *άνω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ όταν $\kappa = 2.41585$ είναι

$$\varphi_\delta(u) \leq 0.273932 \cdot e^{-2.41585u}$$

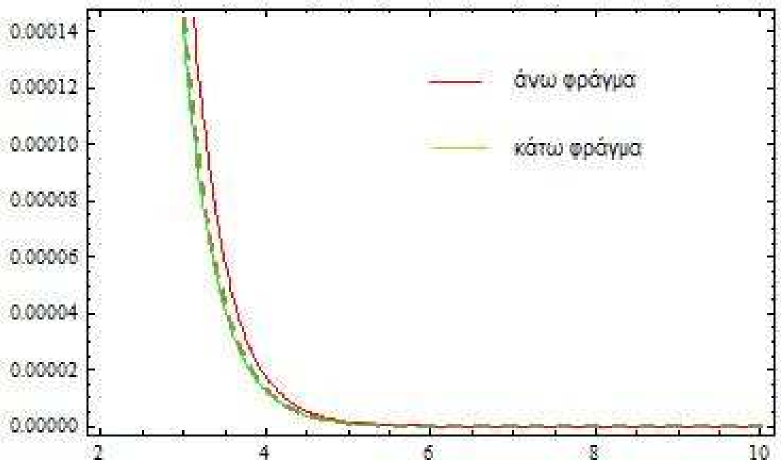
ενώ αντίστοιχα το *κάτω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ σύμφωνα με τη σχέση (5.23) όταν $\kappa = 2.41585$ είναι

$$\varphi_\delta(u) \geq \frac{9.30557 \cdot e^{0.58415u} + 13.3056 \cdot e^{4.58415u}}{14.2096 \cdot e^{0.58415u} + 68.3335 \cdot e^{4.58415u}} \cdot e^{-2.41585u}$$



Σχήμα 5.5: *Άνω και κάτω φράγμα για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη εκθετικών κατανομών όταν $\delta = 1$ στο διάστημα [0,2]*

Όμοια και στα Σχήματα 5.5 και 5.6, χρησιμοποιώντας ίδιες συναρτήσεις και παραμέτρους, παρατηρούμε την ίδια ακριβώς εικόνα για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ όταν το δ=1. Τα φράγματα πλησιάζουν σε μεγάλο βαθμό τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ και καθώς το αποθεματικό u μεγαλώνει συμπίπτουν μεταξύ τους και τείνουν στο μηδέν. Ιδιαίτερα στη Σχήμα 5.5 στο οποίο παρατηρούμε πως μεταβάλλονται οι συναρτήσεις στο διάστημα $[0, 2]$ διαπιστώνουμε ότι το κάτω φράγμα πλησιάζει περισσότερο τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ σε σημείο που να τη τέμνει από την αρχή του διαστήματος σε αντίθεση με το άνω φράγμα που πλησιάζει αρκετά τη συνάρτηση χωρίς να τη τέμνει για μικρά αποθεματικά. Συνεπώς καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για οποιοδήποτε δ τα φράγματα των Willmot et al(2001) όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη εκθετικών κατανομών χαρακτηρίζονται ως πολύ ικανοποιητικά αφού προσεγγίζουν τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ με μεγάλη επιτυχία. Άρα μπορούμε να δεχτούμε ότι τα συγκεκριμένα φράγματα δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα για μείξη εκθετικών κατανομών.



Σχήμα 5.6: *Άνω και κάτω φράγμα για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη εκθετικών κατανομών όταν $\delta = 1$ στο διάστημα [2,10]*

Παρατηρήσεις:

Κάνοντας μια γρήγορη επανάληψη του Κεφαλαίου 5 μπορούμε να διαπιστώσουμε τα παρακάτω πολύ σημαντικά συμπεράσματα :

1. Όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή τότε τα φράγματα που υπολογίζονται με βάση τα δύο Θεωρήματα των Willmot et al(2001) συμπίπτουν μεταξύ τους και με τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ για οποιαδήποτε τιμή του δ.

2. Όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη εκθετικών κατανομών τότε το *άνω (κάτω) φράγμα* του Θεωρήματος 1 συμπίπτει με το *άνω (κάτω) φράγμα* φράγμα του Θεωρήματος 2.

3. Στη περίπτωση του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, όπου $w(x, y) = 1$, οι συναρτήσεις $a(z)$ και $\sigma(z)$ δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα αφού $H_\delta(u)$ και $\overline{G}_\delta(u)$ ταυτίζονται.

4. Τα φράγματα που προκύπτουν για τη μείξη εκθετικών κατανομών για οποιαδήποτε τιμή του δ φράσουν σε ικανοποιητικό βαθμό τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$

5. Όταν οι αποζημιώσεις είναι μία μείξη εκθετικών κατανομών τότε και η συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ αποτελεί μια μείξη εκθετικών κατανομών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Erlang Κατανομή: Φράγματα για τη συνάρτηση Gerber-Shiu, Θεωρία και Εφαρμογές

6.1 Εισαγωγή

Σκοπός αυτού του Κεφαλαίου είναι η μελέτη της συνάρτησης $\varphi_\delta(x)$ που ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση της μορφής (2.8) στη περίπτωση όπου $w(x, y) = 1$ και ο παράγοντας προεξόφλησης λαμβάνει τιμές μεγαλύτερες του μηδενός, $\delta > 0$,δηλαδή τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang Κατανομή. Επίσης θα ακολουθήσει η εύρεση φραγμάτων με βάση τα *Θεωρήματα* 2.1 και 2.2 των Willmot et al (2001). Το Κεφάλαιο αυτό αποτελεί συνέχεια του Κεφαλαίου 5 και θα περιλαμβάνει θεωρία και αριθμητικά αποτελέσματα. Η Erlang Κατανομή αποτελεί μια περισσότερο πολύπλοκη κατανομή εξαιτίας της ιδιαίτερης μορφής της και αυτό κάνει πιο δύσκολη τη μελέτη της σε σχέση με την εκθετική και τη μείξη εκθετικών κατανομών. Λόγω έλλειψης ύπαρξης ενός ακριβή τύπου για τη κατανομή των αποζημιώσεων το έργο για την εύρεση μιας σχέσης που θα αποτελεί πρότυπο για τον υπολογισμό φραγμάτων οποιασδήποτε αριθμητικής εφαρμογής είναι ανέφικτο, και αυτό κάνει πιο δύσκολη την εφαρμογή της. Όσον αφορά τη συγκεκριμένη περίπτωση που θα μελετήσουμε θα δούμε τη συμπεριφορά της και πόσο καλά φράσσεται από τα φράγματα των Willmot et al ορίζοντας μια αριθμητική εφαρμογή.

6.2 Erlang Κατανομή μελέτη της συνάρτησης των Gerber-Shiu όταν δ>0

Όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία Erlang κατανομή τότε η εύρεση της συνάρτησης $\varphi_\delta(u)$ και των φραγμάτων γίνεται περισσότερο περίπλοκη σε σχέση με την μείξη εκθετικών κατανομών. Υποθέτουμε ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν κατανομή με παραμέτρους (n, λ).

$$\overline{F}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_x^{\infty} y^{n-1}e^{-\lambda y}\mathrm{d}y, \quad x>0, \lambda>0,$$

Για την εύρεση των συναρτήσεων που αποτελούν τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους που έχουμε αναφέρει στη Παράγραφο 3.3 .

Οι συναρτήσεις που χρειάζονται για τον υπολογισμό της λύσης της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης, $\varphi_\delta(u)$, ορίζονται με βάση τους παρακάτω γενικούς τύπους, αφού είναι αρκετά δύσκολο να δοθούν σε αναλυτικότερα αποτελέσματα.

Αρχικά, για τη συνάρτηση $\overline{G}_\delta(x)$ που δίνεται από τη σχέση (2.12), με αντικατάσταση της κατανομής των αποζημιώσεων

$$\overline{G}_\delta(x) = \frac{e^{px}\int_x^{\infty} e^{-pw}\int_w^{\infty} y^{n-1}e^{-\lambda y}\mathrm{d}y\mathrm{d}w}{\int_0^{\infty} e^{-pw}\int_w^{\infty} y^{n-1}e^{-\lambda y}\mathrm{d}y\mathrm{d}w} \tag{6.1}$$

Με παραγώγιση προκύπτει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g_\delta(x) = (1-\overline{G}_\delta(x))'$ *

Αντίστοιχα η συνάρτηση $H_\delta(u)$ με βάση την σχέση (2.14), θα γίνει με αντικατάσταση της σχέσης (3.25)

$$H_\delta(u) = \frac{e^{pu}\int_u^{\infty} e^{-\rho x}\int_x^{\infty} y^{n-1}e^{-\lambda y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{\int_0^{\infty} e^{-\rho x}\int_x^{\infty} y^{n-1}e^{-\lambda y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x} \tag{6.2}$$

Πόρισμα 6.1. *Στη περίπτωση της Erlang κατανομής όταν ο συντελεστής προεξόφλησης είναι μεγαλύτερος του μηδενός οι συναρτήσεις $H_\delta(u)$ και $\overline{G}_\delta(x)$ ισούται μεταξύ τους.*

ενώ για τη παράμετρο ξ_δ ως συνάρτηση της πυκνότητας της κατανομής ισορροπίας $f_e(x) = \frac{\lambda^{n+1}}{n(n-1)!}\int_x^{\infty} y^{n-1}e^{-\lambda y}\mathrm{d}y$ προκύπτει με βάση τη σχέση (2.13)

$$\xi_\delta = \frac{1+\theta}{\dfrac{\lambda^{n+1}}{n(n-1)!}\int\limits_0^{\infty} e^{-\rho y}\int\limits_y^{\infty} t^{n-1}e^{-\lambda t}\mathrm{d}t} - 1 \tag{6.3}$$

*ο γενικός τύπος της συνάρτησης $g_\delta(x)$ είναι αρκετά δύσκολο να βρεθεί ωστόσο γίνεται πιο απλό στις εφαρμογές που θα μελετήσουμε στην επόμενη Ενότητα.

Το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός της συνάρτησης $\varphi_\delta(u)$. Για την εύρεση της θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα (2.16) που ορίζει το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης και στη συνέχεια, αφού υπολογιστεί, θα αντιστραφεί έτσι ώστε να καταλήξουμε στον ακριβή της τύπο. Επειδή είναι αδύνατο να εφαρμόσουμε αυτή την ιδιότητα σε ένα τόσο γενικό αποτέλεσμα θα καταλήξουμε σε συμπεράσματα για τον ακριβή τύπο της $\varphi_\delta(u)$ ορίζοντας μια συγκεκριμένη κατανομή. Αναλυτικότερα αποτελέσματα θα δούμε στην Ενότητα που ακολουθεί.

Το επόμενο βήμα είναι η εύρεση των φραγμάτων για την $\varphi_\delta(u)$ με βάση τα Θεωρήματα που αναφέρονται στην Ενότητα 1.4.

- **Φράγματα για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.1**

Αρχικά θα υπολογίσουμε την ποσότητα $a(z)$ συμφώνα με το *Θεώρημα* 2.1. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.15) και (5.16) που υπολογίσαμε παραπάνω, στη σχέση (2.20) προκύπτει το εξής αποτέλεσμα:

$$a(z) = \frac{[e^{(\kappa+\rho)z}\int_z^\infty e^{-\rho x}\int_x^\infty y^{n-1}e^{-\lambda y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x]}{\int_z^\infty e^{\kappa y}\mathrm{d}[e^{\rho y}\int_y^\infty e^{-\rho w}[\int_w^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}\mathrm{d}t]\mathrm{d}w]y}, \quad z > 0 \tag{6.4}$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τη μονοτονία της ποσότητας $a(z)$ έτσι ώστε να καταλήξουμε στις σχέσεις που ικανοποιούν το *μέγιστο (ελάχιστο)* της συνάρτησης αντίστοιχα

Το *μέγιστο* της $a(z)$ ορίζεται συμφώνα με τη σχέση (2.21)

$$a_U(u) = \sup_{0\le z\le u, F_e(z)>0} \frac{e^{(\kappa+\rho)z}\int_z^\infty e^{-\rho x}\int_x^\infty y^{n-1}e^{-\lambda y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{\int_z^\infty e^{\kappa y}\mathrm{d}[e^{\rho y}\int_y^\infty e^{-\rho w}[\int_w^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}\mathrm{d}t]\mathrm{d}w]y}, \quad u > 0$$

και αντίστοιχα το *ελάχιστο* της $a(z)$ ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση (2.22)

$$a_L(u) = \inf_{0\le z\le u, F_e(z)>0} \frac{e^{(\kappa+\rho)z}\int_z^\infty e^{-\rho x}\int_x^\infty y^{n-1}e^{-\lambda y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{\int_z^\infty e^{\kappa y}\mathrm{d}[e^{\rho y}\int_y^\infty e^{-\rho w}[\int_w^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}\mathrm{d}t]\mathrm{d}w]y}, \quad u > 0$$

Προσοχή! Σ' αυτή τη περίπτωση δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε ακριβή αποτελέσματα από τη *μεγιστοποίηση (ελαχιστοποίηση)* της ποσότητας $a(z)$ με βάση τους γενικούς τύπους αφού είναι αρκετά δύσκολο να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις που την απαρτίζουν.

Οπότε καταλήγουμε στις παρακάτω σχέσεις που δίνουν φράγματα σύμφωνα με τις οποίες το *άνω φράγμα* δίνεται από τη σχέση (2.23)

$$\varphi_\delta(u) \leq \left[\sup_{0\leq z\leq u, F_e(z)>0} \frac{[e^{(\kappa+\rho)z}\int_z^\infty e^{-\rho x}\int_x^\infty y^{n-1}e^{-\lambda y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x]}{\int_z^\infty e^{\kappa y}\mathrm{d}[e^{\rho y}\int_y^\infty e^{-\rho w}[\int_w^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}\mathrm{d}t]\mathrm{d}w]y}\right]\cdot e^{-\kappa u} \quad (6.5)$$

ενώ αντίστοιχα *το κάτω φράγμα* δίνεται από τη σχέση (2.24)

$$\varphi_\delta(u) \geq \left[\inf_{0\leq z\leq u, F_e(z)>0} \frac{[e^{(\kappa+\rho)z}\int_z^\infty e^{-\rho x}\int_x^\infty y^{n-1}e^{-\lambda y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x]}{\int_z^\infty e^{\kappa y}\mathrm{d}[e^{\rho y}\int_y^\infty e^{-\rho w}[\int_w^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}\mathrm{d}t]\mathrm{d}w]y}\right]\cdot e^{-\kappa u} \quad (6.6)$$

- **Φράγματα για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.2 όταν δ>0**

Όμοια θα υπολογίσουμε τις συναρτήσεις $\tau(z)$ και $\sigma(z)$ που χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό του *άνω (κάτω) φράγματος* και ορίζονται με βάση το *Θεώρημα* 2.2.

Σύμφωνα με τη σχέση (2.25) και σύμφωνα με το Πόρισμα 6.1 η συνάρτηση $\tau(z) = 1$ συνεπώς η μεγιστοποίηση ή η ελαχιστοποίηση δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.. Ενώ σύμφωνα με τη σχέση (2.26) και με αντικατάσταση της σχέσης (6.1) και της πρώτης παραγώγου της έχουμε για τη συνάρτηση $\sigma(z)$ ότι

$$\sigma(z) = \frac{[e^{(\kappa+\rho)z}\int_z^\infty e^{-\rho x}\int_x^\infty y^{n-1}e^{-\lambda y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x]}{\int_z^\infty e^{\kappa y}\mathrm{d}[e^{\rho y}\int_y^\infty e^{-\rho w}[\int_w^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}\mathrm{d}t]\mathrm{d}w]y}$$

Το μέγιστο της συνάρτησης $\sigma(z)$ θα γίνει

$$\sigma_U(x) = \sup_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} \frac{[e^{(\kappa+\rho)z}\int_z^\infty e^{-\rho x}\int_x^\infty y^{n-1}e^{-\lambda y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x]}{\int_z^\infty e^{\kappa y}\mathrm{d}[e^{\rho y}\int_y^\infty e^{-\rho w}[\int_w^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}\mathrm{d}t]\mathrm{d}w]y} \quad (6.7)$$

Αντίστοιχα για τον υπολογισμό του *κάτω φράγματος* το ελάχιστο της συνάρτησης $\sigma(z)$ θα γίνει

$$\sigma_L(x) = \inf_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} \frac{[e^{(\kappa+\rho)z}\int_z^\infty e^{-\rho x}\int_x^\infty y^{n-1}e^{-\lambda y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x]}{\int_z^\infty e^{\kappa y}\mathrm{d}[e^{\rho y}\int_y^\infty e^{-\rho w}[\int_w^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}\mathrm{d}t]\mathrm{d}w]y} \quad (6.8)$$

Η σχέση που μας δίνει το *άνω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ που δίνεται από τη σχέση (2.29) είναι η παρακάτω

$$\varphi_\delta(u) \leq \left[\sup_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} \frac{[e^{(\kappa+\rho)z}\int_z^\infty e^{-\rho x}\int_x^\infty y^{n-1}e^{-\lambda y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x]}{\int_z^\infty e^{\kappa y}\mathrm{d}[e^{\rho y}\int_y^\infty e^{-\rho w}[\int_w^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}\mathrm{d}t]\mathrm{d}w]y}\right]\cdot e^{-\kappa u} \tag{6.9}$$

και αντίστοιχα η σχέση που μας δίνει το *κάτω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(x)$ που δίνεται από τη σχέση (2.30) είναι η παρακάτω

$$\varphi_\delta(u) \geq \left[\inf_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} \frac{[e^{(\kappa+\rho)z}\int_z^\infty e^{-\rho x}\int_x^\infty y^{n-1}e^{-\lambda y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x]}{\int_z^\infty e^{\kappa y}\mathrm{d}[e^{\rho y}\int_y^\infty e^{-\rho w}[\int_w^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}\mathrm{d}t]\mathrm{d}w]\mathrm{d}y}\right]\cdot e^{-\kappa u} \tag{6.10}$$

Οι δύο τελευταίες σχέσεις χρησιμοποιούνται στην επόμενη Ενότητα, όταν εξετάζουμε την αποτελεσματικότητα των φραγμάτων σε κάποια συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα.

6.3 Αριθμητική - Εφαρμογή για Erlang Κατανομή

Στη τελευταία ενότητα του Κεφαλαίου θα μελετήσουμε μια εφαρμογή για τη περίπτωση της Erlang κατανομής, αναφορικά με όσα ειπώθηκαν στη προηγούμενη ενότητα. Υποθέτουμε ότι η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί μια Erlang(3,2) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της παρακάτω μορφής

$$f(x) = 4x^2e^{-2x}, \quad x>0 \tag{6.11}$$

Η μέση τιμή των αποζημιώσεων είναι $p_1 = \frac{3}{2}$ και διακύμανση $Var(X) = \frac{3}{2^2} = \frac{3}{4}$. Η ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων δίνεται από το τύπο

$$\overline{F}(x) = \int_x^\infty 4y^2e^{-2y}\mathrm{d}y = 4\left(\frac{x^2e^{-2x}}{2} + \frac{xe^{-2x}}{2} + \frac{e^{-2x}}{4}\right)$$

$$= e^{-2x}(1+2x(1+x)), \quad x>0$$

Για τη εξαγωγή αποτελεσμάτων θεωρούμε ότι $\lambda = 1$ και η ένταση ασφαλίστρου $c = \frac{5}{2}$. Το περιθώριο ασφαλείας σύμφωνα με τη σχέση (2.2) θα γίνει $\theta = \frac{2}{3}$

$$\theta = \frac{c}{\lambda p_1} - 1 = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} - 1 = \frac{2}{3}$$

Στη συνέχεια η πυκνότητα της κατανομής ισορροπίας δίνεται από τη σχέση (2.5)

$$f_e(x) = \frac{2}{3} e^{-2x}(1 + 2x(1 + x))$$

Οι συναρτήσεις που απαρτίζουν την συνάρτηση $\varphi_\delta(x)$, όπως έχουμε αποδείξει στη παράγραφο 5.3, ορίζονται με βάση τις σχέσεις που ακολουθούν. Αντικαθιστώντας στη σχέση (6.1) την ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων έχουμε:

$$\overline{G}_\delta(x) = \frac{e^{\rho x} \int_x^\infty e^{-(2+\rho)y}(1 + 2y(1 + y))\mathrm{d}y}{\int_0^\infty e^{-(\rho+2)y}(1 + 2y(1 + y))\mathrm{d}y}$$

$$= e^{\rho x} \frac{e^{-(2+\rho)x}(4 + (2 + \rho)(2 + 4x + (2 + \rho)(1 + 2x(1 + x))))}{4 + (2 + \rho)(2 + (2 + \rho))}$$

Η απλοποίηση της συνάρτησης γίνεται με τη χρήση του προγράμματος *Mathematica* από το οποίο προκύπτει ότι

$$\overline{G}_\delta(x) = \frac{e^{-2x}(4 + (2 + \rho)(2 + 4x + (2 + \rho)(1 + 2x(1 + x))))}{12 + 6\rho + \rho^2}.$$

Η πρώτη παράγωγος της $\overline{G}_\delta(x)$ είναι:

$$g_\delta(x) = \frac{e^{-2x}(8 + 4(2 + \rho)x(2 + (2 + \rho)x))}{12 + \rho(6 + \rho)}$$

αντίστοιχα και η συνάρτηση $H_\delta(u)$ θα γίνει σύμφωνα με τη σχέση (6.2)

$$H_\delta(u) = \frac{e^{\rho u}\int_u^\infty e^{-\rho x}\int_x^\infty 4y^2e^{-2y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{\int_0^\infty e^{-\rho z}e^{-2y}(1+2y(1+y))\mathrm{d}y}$$

$$= e^{\rho u}\frac{e^{-(2+\rho)u}(4+(2+\rho)(2+4u+(2+\rho)(1+2u(1+u))))}{4+(2+\rho)(2+(2+\rho))}$$

οπότε με βάση το πρόγραμμα $Mathematica$ προκύπτει ότι

$$H_\delta(u) = \frac{e^{-2u}(4+(2+\rho)(2+4u+(2+\rho)(1+2u(1+u))))}{12+6\rho+\rho^2},$$

ενώ για τη παράμετρο ξ_δ σύμφωνα με τη σχέση (6.3)

$$\xi_\delta = \frac{1+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\int_0^\infty e^{-(\rho+2)y}(1+2y(1+y))\mathrm{d}x} - 1$$

$$= \frac{\frac{5}{3}}{\frac{4+(2+\rho)(2+(2+\rho))}{(2+\rho)^3}} - 1 = \frac{2(2+\rho)^3}{12+\rho(6+\rho)} - 1$$

Το επόμενο βήμα είναι η εύρεση του μετασχηματισμού Laplace της συνάρτησης $\varphi_\delta(x)$ που δίνεται από τη σχέση (2.16).

Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $H_\delta(x)$ ισούται με

$$\widehat{H}_\delta(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-(2+s)u}(4+(2+\rho)(2+4u+(2+\rho)(1+2u(1+u))))}{12+6\rho+\rho^2}$$

$$= \frac{96+64s+12s^2+\rho^2(12+6s+s^2)+\rho(64+36s+6s^2)}{(12+6\rho+\rho^2)(2+s)^3}$$

και αντίστοιχα ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $g_\delta(x)$

$$\widehat{g}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-(2+s)x}\frac{(8+4(2+\rho)x(2+(2+\rho)x))}{12+\rho(6+\rho)}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{8(12+\rho^2+6s+s^2+\rho(6+s))}{(12+6\rho+\rho^2)(2+s)^3}$$

οπότε εύκολα προκύπτει, με αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων, ότι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\varphi_\delta(u)$ είναι:

$$\widehat{\varphi}_\delta(s) = \frac{\frac{12+\rho(6+\rho)}{2(2+\rho)^3}\cdot(\frac{96+64s+12s^2+\rho^2(12+6s+s^2)+\rho(64+36s+6s^2)}{(12+6\rho+\rho^2)(2+s)^3})}{1-\frac{12+\rho(6+\rho)}{2(2+\rho)^3}\cdot(\frac{8(12+\rho^2+6s+s^2+\rho(6+s))}{(12+6\rho+\rho^2)(2+s)^3})}$$

$$= \frac{96+4s(16+3s)+\rho^2(12+s(6+s))+\rho(64+6s(6+s))}{2(16+\rho^3(2+s)^3+4s(18+s(11+2s))+\rho^2(44+6s(12+s(6+s)))+4\rho(18+s(35+3s(6+s))))} \tag{6.12}$$

Με αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace της συνάρτησης (6.11) θα γίνει ο υπολογισμός του ακριβή τύπου της ανανεωτικής συνάρτησης $\widehat{\varphi}_\delta(u)$. Παρατηρούμε ότι η εύρεση του ακριβή τύπου της $\varphi_\delta(u)$ είναι αρκετά περίπλοκη λόγω του μεγάλου μεγέθους της. Για να γίνει πιο απλή η διαδικασία εύρεσης της, θα υπολογίσουμε το ρ που είναι η λύση της γενικευμένης εξίσωσης *Lundberg* όπως ορίζεται από τη σχέση (2.11) για συγκεκριμένο δ κάθε φορά. Το ρ αποτελεί τη θετική λύση της εξίσωσης

$$\lambda+\delta-c\rho = \lambda\widehat{f}(\rho)$$

ο μετασχηματισμός Laplace της πυκνότητας των αποζημιώσεων δίνεται από τη σχέση

$$\widehat{f}(s) = \frac{8}{(s+2)^3}$$

Έτσι με αντικατάσταση όλων των γνωστών αποτελεσμάτων η εξίσωση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\Rightarrow 1+\delta-\frac{5}{2}\rho=\frac{8}{(\rho+2)^3} \tag{6.13}$$

1. φράγματα στη περίπτωση που το δ=0.5

Αρχικά θα θεωρήσουμε ότι το $\delta = 0.5$ και θα υπολογίσουμε τα αποτελέσματα που μας ενδιαφέρουν μέχρι τον εντοπισμό των φραγμάτων. Οι ρίζες της εξίσωσης $Lundberg$ που δίνεται από τη σχέση (6.12) είναι οι εξής:

$$\rho_{1,2} = -2.56678 \pm 0.815133i, \quad \rho_3 = -0.621439, \quad \rho_4 = 0.354991$$

Η μικρότερη θετική ρίζα αποτελεί τη λύση της εξίσωσης και είναι $\rho = 0.354991$.

Το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός της $\varphi_\delta(u)$. Όταν το $\rho = 0.354991$ ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\varphi_\delta(u)$ θα γίνει

$$\widehat{\varphi}_\delta(s)=\frac{4.60279+2.96828s+0.545756s^2}{3.63395+10.0537s+5.69374s^2+s^3}$$

Αντιστρέφοντας τώρα τη προηγούμενη συνάρτηση με τη βοήθεια του $Mathematica$ προκύπτει το αποτέλεσμα

$$\varphi_\delta(u) = (-0.04052{+}0.0278945i)e^{(-2.60598+0.86691i)u}-(0.0405309{+}0.0278945i)e^{(-2.60598-0.86691i)u}$$

$$+0.626818\cdot e^{-0.48178u}, \quad u>0$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ ακολουθεί μείξη εκθετικών κατανομών. Το κ ικανοποιεί τη συνθήκη (2.19) , όπως έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενη Παράγραφο.

Αντικαθιστώντας τις συναρτήσεις που το απαρτίζουν για $\rho = 0.354991$ εύκολα προκύπτει ότι

$$\int_0^\infty 0.0701461 e^{-(2-\kappa)x}(8 + 9.41996x(2 + 2.35499x))\mathrm{d}x = 1 + 0.832319$$

$$\Rightarrow \frac{(-3.11223 + (-2.64309 + 1.32155\kappa) - 0.561169(-2+\kappa)^2)}{(-2+\kappa)^3} - 1 - 0.832319 = 0$$

οπότε οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$\kappa_{1,2} = 2.60598 \pm 0.866921i, \quad \kappa_3 = 0.481786$$

Η μικρότερη θετική ρίζα αποτελεί και τη λύση της εξίσωσης και αυτή είναι η $\kappa = 0.481786$.

- **Φράγματα για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.1**

Στη συνέχεια ακολουθεί η εύρεση των φραγμάτων με βάση το *Θεώρημα* 2.1 για συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$. Θα ξεκινήσουμε με την εύρεση της ποσότητας $a(z)$ μέσω της οποίας θα υπολογίσουμε το *άνω* και *κάτω φράγμα* για μια Erlang κατανομή όταν $\delta = 0.5$. Με αντικατάσταση στη σχέση (6.4) έχουμε

$$a(z) = \frac{0.070146 \cdot e^{-(2-0.481786)z}\,(4 + 2.35499(2 + 4z + 2.35499(1 + 2z(1+z))))}{0.070146 \int_z^\infty e^{-(2-0.481786)x}(8 + 9.419964x(2 + 2.354991x))\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{e^{-1.51821z}(1 + 1.43883z + 0.778057z^2)}{0.070146 e^{-1.51821z}(12.6785 + (8.1736 + 19.2487z + (5.26935 + z(12.4093 + 14.6119z))))}$$

$$= \frac{14.256\,(1 + 1.43883z + 0.778057z^2)}{26.1215 + 31.658z + 14.6119z^2}$$

Στη συνέχεια για να βρούμε τα φράγματα θα πρέπει να υπολογίσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης $a(z)$. Γι' αυτό το λόγο θα πρέπει να υπολογίσουμε τη πρώτη παράγωγο και εν συνεχεία να βρούμε τις ρίζες που μηδενίζουν τη συνάρτηση $a'(z)$.

$$a'(z) = \frac{51.4312 \cdot (0.65372 + z)(2.51297 + z)}{(26.1215 + 31.658z + 14.6119z^2)^2}$$

Για να βρούμε τις ρίζες που μηδενίζουν τη παράγωγο θα θέσουμε τη παραπάνω συνάρτηση ίση με μηδέν, $a'(z) = 0$. Έτσι προκύπτουν οι παρακάτω ρίζες:

$$z_1 = -2.51297, \quad z_2 = -0.65372$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν αρνητικές ρίζες που μηδενίζουν τη παράγωγο. Όμως μελετούμε το διάστημα $[0, \infty)$ στο οποίο η συνάρτηση $a(z)$ είναι αύξουσα.

Οπότε η συνάρτηση $a(z)$ έχει *μέγιστο* στο x οπότε $a_U(x) = \sup_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} a(z) = a(x)$

$$a_U(x) = \sup_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{14.256\,(1 + 1.43883z + 0.778057z^2)}{26.1215 + 31.658z + 14.6119z^2}$$

$$= \frac{14.256\,(1 + 1.43883x + 0.778057x^2)}{26.1215 + 31.658x + 14.6119x^2}$$

ενώ το *ελάχιστο* είναι στο 0 οπότε $a_L(x) = \inf_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} a(z) = a(0)$

$$a_L(x) = \inf_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{14.256\,(1 + 1.43883z + 0.778057z^2)}{26.1215 + 31.658z + 14.6119z^2} = 0.545752$$

Εύκολα προκύπτει σύμφωνα με τη σχέση (6.5) ότι το *άνω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ εφόσον $\kappa = 0.481786$ είναι

$$\varphi_\delta(u) \le \frac{14.256\,(1 + 1.43883u + 0.778057u^2)}{26.1215 + 31.658u + 14.6119u^2} \cdot e^{-0.481786u}$$

ενώ αντίστοιχα σύμφωνα με τη σχέση (6.6) το *κάτω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ επειδή $\kappa = 0.481786$ είναι

$$\varphi_\delta(u) \geq 0.545752 \cdot e^{-0.481786u}$$

- **Φράγματα για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.2**

Ακολούθως θα υπολογίσουμε τα φράγματα με βάση το *Θεώρημα* 2.2. Όπως αποδείξαμε στη Παράγραφο 6.1 το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης $\tau(x)$ δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα που είναι ένας αριθμός, δηλαδή $\tau_U(x) = \tau_L(x) = 1$. Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε το *μέγιστο* και το *ελάχιστο* της ποσότητας $\sigma(x)$. Η συνάρτηση $\sigma(x)$ ορίζεται από το τύπο

$$\sigma(x) = \frac{e^{\kappa z}\overline{G}_\delta(z)}{\int_z^\infty e^{\kappa y} g(y)\mathrm{d}y} = \frac{e^{\kappa z} H_\delta(z)}{\int_z^\infty e^{\kappa y} g(y)\mathrm{d}y} = a(z) \tag{6.14}$$

αφού οι συναρτήσεις $a(z)$ και $\sigma(x)$ παράγουν το ίδιο αποτέλεσμα κατά συνέπεια η συνάρτηση $\sigma(x)$ είναι και αυτή μια αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0, \infty)$ που δίνεται από τη σχέση

$$\sigma(x) = \frac{14.256 \cdot (1 + 1.43883z + 0.778057z^2)}{26.1215 + 31.658z + 14.6119z^2}$$

και έχει *μέγιστο* στο x οπότε $\sigma_U(x) = \sup_{0 \leq z \leq x, F_e(z) > 0} \sigma(z) = \sigma(x)$ σύμφωνα με τη σχέση (6.7):

$$\sigma_U(x) = \sup_{0 \leq z \leq x, F_e(z) > 0} \frac{14.256 \cdot (1 + 1.43883z + 0.778057z^2)}{26.1215 + 31.658z + 14.6119z^2}$$

$$= \frac{14.256 \cdot (1 + 1.43883x + 0.778057x^2)}{26.1215 + 31.658x + 14.6119x^2}$$

ενώ το *ελάχιστο* είναι στο 0 οπότε $\sigma_L(x) = \inf_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} \sigma(z) = \sigma(0)$ σύμφωνα με τη σχέση (6.8):

$$\sigma_L(x) = \inf_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} \frac{14.256 \cdot (1 + 1.43883z + 0.778057z^2)}{26.1215 + 31.658z + 14.6119z^2} = 0.545752$$

Σύμφωνα με τη σχέση (6.9) το *άνω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ για $\kappa = 0.481786$ θα γίνει

$$\varphi_\delta(u) \leq frac14.256 \cdot \big(1 + 1.43883u + 0.778057u^2\big)26.1215 + 31.658u + 14.6119u^2 \cdot e^{-0.481786u}$$

ενώ αντίστοιχα το *κάτω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ σύμφωνα με τη σχέση (6.10) όταν $\kappa = 0.481786$ θα γίνει

$$\varphi_\delta(u) \geq 0.545752 \cdot e^{-0.481786u}$$

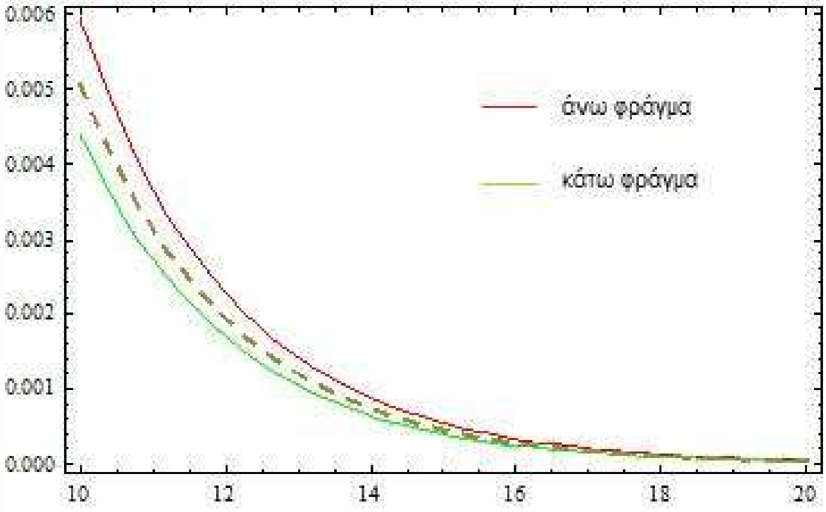
Παρατηρούμε ότι όταν μελετάμε τη περίπτωση του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, δηλαδή για $w(x,y) = 1$, τα δύο θεωρήματα δίνουν τα ίδια αποτελέσματα για το άνω και κάτω φράγμα για οποιαδήποτε κατανομή. [†] Οπότε τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι ίδια.

Στο σχήμα 6.1 απεικονίζονται διαγραμματικά η συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$, διακεκομμένη γραμμή, και το *άνω* και *κάτω φράγμα* με κόκκινη και πράσινη γραμμή αντίστοιχα. Ορίζουμε το διάστημα $[10, 50]$ στο οποίο κυμαίνεται το αποθεματικό u της ασφαλιστικής εταιρείας όταν ο συντελεστής προεξόφλησης είναι $\delta = 0.5$.

Προσοχή ! Η συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ για τιμές μικρότερες του 10 εμφανίζει μόνο μιγαδικές λύσεις οι οποίες και δεν μπορούν να απεικονιστούν διαγραμματικά. Συνεπώς για να μελετήσουμε τη συνάρτηση και το πόσο καλά προσεγγίζεται από τα φράγματα ορίσαμε ένα μεγαλύτερο εύρος τιμών.

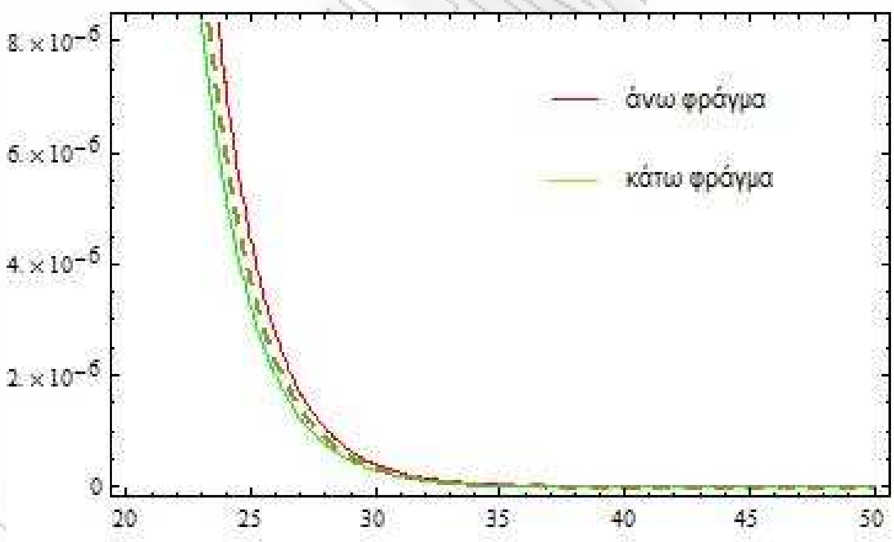
Παρατηρώντας τη συμπεριφορά των συναρτήσεων φαίνεται ότι τα δύο φράγματα πλησιάζουν σε μεγάλο βαθμό τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$. Αρχικά παρατηρούμε επίσης μία απότομη αλλαγή στη συμπεριφορά των τριών συναρτήσεων καθώς κυμαίνονται στο διάστημα [10,20]. Απομονώνοντας το διάστημα [10,20] σε ένα άλλο διάγραμμα διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ έχει μια πολύ γρήγορη πτώση προς το μηδέν στο διάστημα [10,20] για μικρές μεταβολές του αποθεματικού. Μπορούμε να διαπιστώσουμε αυτή τη σημαντική πτώση κοιτώντας τα δύο διαγράμματα, όπου στο Σχήμα 6.1 η τιμή της συνάρτηση πέφτει από το $6 * 10^{-2}$, για μικρή μεταβολή του αποθεματικού, σε $8 * 10^{-6}$! Στη συνέχεια όμως και

[†] Αυτό συμβαίνει λόγω της ισότητας των συναρτήσεων $H_\delta(z)$ και $\overline{G}_\delta(z)$



Σχήμα 6.1: *Άνω και κάτω φράγμα για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang κατανομη και $\delta = 0.5$ στο διάστημα [10,20]*

για το υπόλοιπο διάστημα [20,50] τα πράγματα εξισορροπούνται, παρατηρούμε καθώς το αποθεματικό μεταβάλλεται μια πιο ήπια τάση της συνάρτησης $\varphi_\delta(u)$ να τείνει προς το μηδέν.



Σχήμα 6.2: *Άνω και κάτω φράγμα για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang κατανομή και $\delta = 0.5$ στο διάστημα [2,10]*

Έτσι καθώς το αποθεματικό u αυξάνεται το *άνω* και *κάτω φράγμα* συμπίπτουν με τη συνάρτηση η οποία τείνει στο μηδέν. Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι τα φράγματα είναι πολύ ικανοποιητικά αφού φράσσουν με επιτυχία τη συνάρτηση την οποία μελετάμε.

2. φράγματα στη περίπτωση που το δ=1

Στη δεύτερη περίπτωση θα θεωρήσουμε ότι το $\delta = 1$. Οι ρίζες που προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης σχέση (6.12) είναι οι εξής:

$$\rho_{1,2} = -2.55245 \pm 0.803959i, \quad \rho_3 = -0.717707, \quad \rho_4 = 0.6226$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μικρότερη θετική λύση για την εύρεση των φραγμάτων, δηλαδή $\rho = 0.6226$, αποτελεί τη λύση της γενικευμένης εξίσωσης $Lundberg$.

Στη συνέχεια ακολουθεί ο υπολογισμός της $\varphi_\delta(u)$. Όταν το $\rho = 0.6226$ ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\varphi_\delta(u)$ είναι

$$\widehat{\varphi}_\delta(s) = \frac{3.89443 + 2.45975s + 0.446916s^2}{4.42467 + 10.5314s + 5.77825s^2 + s^3}$$

Με αντιστροφή της συνάρτησης $\widehat{\varphi}_\delta(s)$ με χρήση του $Mathematica$ προκύπτουν τα παρακάτω:

$$\varphi_\delta(u) = (-0.0506062-0.0348137i)e^{(-2.59231-0.856505i)u}-(0.0506062-0.0348137i)e^{(-2.59231+0.856505i)u}$$

$$+0.548128 \cdot e^{-0.593621u}, \quad u > 0$$

Το κ ικανοποιεί τη συνθήκη (2.19) σύμφωνα με την οποία όταν το $\rho = 0.6226$ οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$\kappa_{1,2} = 2.59223 \pm 0.856542i, \quad \kappa_3 = 0.593477$$

Η μικρότερη θετική ρίζα αποτελεί και τη λύση της εξίσωσης και αυτή είναι η $\kappa = 0.593477$.

- **Φράγματα για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.1**

Το επόμενο βήμα είναι η εύρεση των φραγμάτων με βάση το *Θεώρημα* 2.1 για συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$. Η ποσότητα που μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε είναι η $a(z)$ μέσω της οποίας θα γίνει η εύρεση του *άνω* και *κάτω φράγματος* για μια Erlang κατανομή όταν $\delta = 1$. Με αντικατάσταση στη σχέση (6.4) έχουμε

$$a(z) = \frac{16.1232\,(1 + 1.50382z + 0.853183z^2)}{36.0681 + 42.7306z + 19.5604z^2}$$

Στη συνέχεια για να βρούμε τα φράγματα θα πρέπει να υπολογίσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης $a(z)$. Γι' αυτό το λόγο θα πρέπει να υπολογίσουμε τη πρώτη παράγωγο και εν συνεχεία να βρούμε τις ρίζες που μηδενίζουν τη συνάρτηση $a'(z)$.

$$a'(z) = \frac{0.0012615 \cdot (0.643125 + z)(2.54145 + z)(89998.4 + z)}{(36.0681 + z(42.7306 + 19.5604z))^2}$$

Για να βρούμε τις ρίζες που μηδενίζουν τη παράγωγο θα θέσουμε τη παραπάνω συνάρτηση ίση με μηδέν $a'(z) = 0$. Έτσι προκύπτουν οι παρακάτω ρίζες:

$$z_1 = -89998.4, \quad z_2 = -2.54145, \quad z_3 = -0.643125$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν αρνητικές ρίζες που μηδενίζουν τη παράγωγο. Όμως το διάστημα το οποίο μελετάμε στο $[0, \infty)$ στο οποίο η συνάρτηση $a(z)$ είναι αύξουσα.

Οπότε η συνάρτηση $a(z)$ έχει *μέγιστο* στο x οπότε $a_U(x) = \sup_{0 \le z \le x, F_e(z)>0} a(z) = a(x)$

$$a_U(x) = \sup_{0 \le z \le x, F_e(z)>0} \frac{16.1232 \cdot (1 + 1.50382z + 0.853183z^2)}{36.0681 + 42.7306z + 19.5604z^2}$$

$$= \frac{16.1232\,(1 + 1.50382x + 0.853183x^2)}{36.0681 + 42.7306x + 19.5604x^2}$$

ενώ το *ελάχιστο* είναι στο 0 οπότε $a_L(x) = \inf_{0 \le z \le x, F_e(z)>0} a(z) = a(0)$

$$a_L(x) = \inf_{0 \le z \le x, F_e(z)>0} \frac{16.1232 \cdot (1 + 1.50382z + 0.853183z^2)}{36.0681 + 42.7306z + 19.5604z^2} = 0.447021$$

Εύκολα προκύπτει σύμφωνα με τη σχέση (6.5) ότι το *άνω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ για $\kappa = 0.593477$ είναι

$$\varphi_\delta(u) \leq \frac{16.1232\,(1. + 1.50382x + 0.853183x^2)}{36.0681 + 42.7306x + 19.5604x^2} \cdot e^{-0.593477u}$$

ενώ αντίστοιχα σύμφωνα με τη σχέση (6.6), το *κάτω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ εφόσον $\kappa = 0.593477$ είναι

$$\varphi_\delta(u) \geq 0.447021 \cdot e^{-0.593477u}$$

- **Φράγματα για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.2**

Ομοίως θα υπολογίσουμε τα φράγματα με βάση το *Θεώρημα* 2.2. Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το *μέγιστο* και το *ελάχιστο* της ποσότητας $\sigma(z)$. Από τη σχέση (6.13) γνωρίζουμε ότι ισχύει ότι $\sigma(z) = a(z)$ Η συνάρτηση $\sigma(z)$ ορίζεται από το τύπο

$$\sigma(x) = \frac{16.1232\,(1. + 1.50382z + 0.853183z^2)}{36.0681 + 42.7306z + 19.5604z^2}$$

Κατά συνέπεια το *μέγιστο* της συνάρτησης $\sigma(x)$ ορίζεται στο x οπότε $\sigma_U(x) = \sup_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} \sigma(z) = \sigma(x)$ σύμφωνα με τη σχέση (6.7):

$$\sigma_U(x) = \sup_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} \frac{16.1232\,(1. + 1.50382z + 0.853183z^2)}{36.0681 + 42.7306z + 19.5604z^2}$$

$$= \frac{16.1232\,(1. + 1.50382x + 0.853183x^2)}{36.0681 + 42.7306x + 19.5604x^2}$$

ενώ το *ελάχιστο* είναι στο 0 οπότε $\sigma_L(x) = \inf_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} \sigma(z) = \sigma(0)$ σύμφωνα με τη σχέση (6.8):

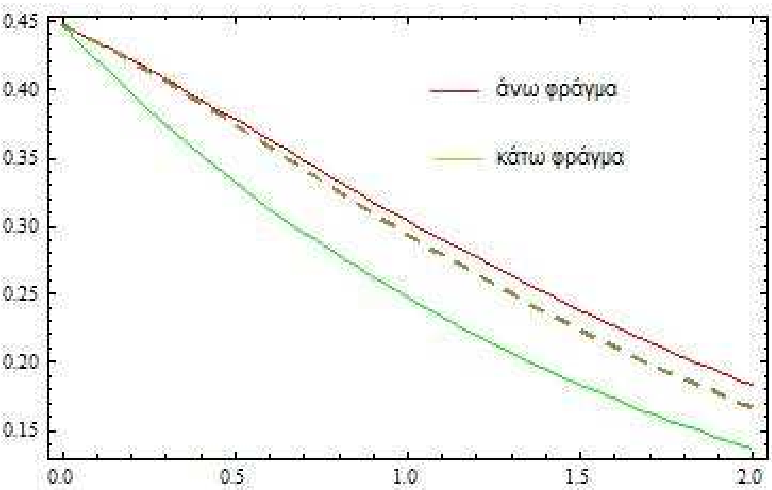
$$\sigma_L(x) = \inf_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{16.1232\,(1. + 1.50382z + 0.853183z^2)}{36.0681 + 42.7306z + 19.5604z^2} = 0.447021$$

Σύμφωνα με τη σχέση (6.9) το *άνω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ όταν $\kappa = 0.593477$ θα γίνει

$$\varphi_\delta(u) \le \frac{16.1232\,(1. + 1.50382x + 0.853183x^2)}{36.0681 + 42.7306x + 19.5604x^2} \cdot e^{-0.593477u}$$

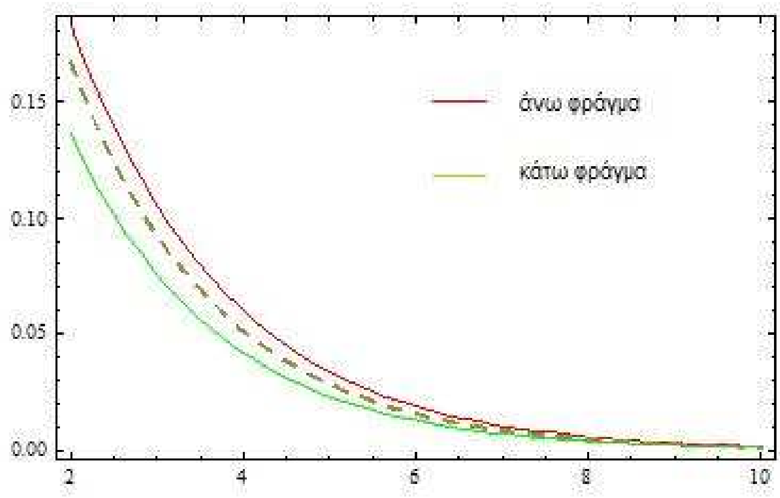
ενώ αντίστοιχα το *κάτω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ σύμφωνα με τη σχέση (6.10) όταν $\kappa = 0.593477$ θα γίνει

$$\varphi_\delta(u) \ge 0.447021 \cdot e^{-0.593477u}$$



Σχήμα 6.3: *Άνω και κάτω φράγμα για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang κατανομή και $\delta = 1$ στο διάστημα [0,2]*

Από το Σχήμα 6.3 και 6.4 διαπιστώνουμε ότι καθώς το δ αυξάνεται η συνάρτηση αποκτά πραγματικές λύσεις, έτσι μπορούμε να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης στο διάστημα [0,10]. Ομοίως και εδώ όπως και στη προηγούμενη περίπτωση διαπιστώνουμε παρατηρώντας τα Σχήματα 6.3 και 6.4 ότι τα φράγματα προσεγγίζουν $\varphi_\delta(u)$ με μεγάλη ακρίβεια.



Σχήμα 6.4: *Άνω και κάτω φράγμα για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang κατανομή και $\delta = 1$ στο διάστημα [2,10]*

Όπως εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε στα διαγράμματα και σ' αυτή τη περίπτωση έχουμε μια απότομη πτώση της τιμής της συνάρτησης στο μηδέν, λιγότερο όμως απότομη από τη προηγούμενη περίπτωση. Έτσι όταν το αποθεματικό κυμαίνεται στο διάστημα [0,10] παρατηρούμε ότι τα φράγματα πλησιάζουν πολύ αποτελεσματικά τη συνάρτηση και καθώς το αποθεματικό αυξάνεται οι τρεις συναρτήσεις συμπίπτουν μεταξύ τους τείνοντας προς το μηδέν. Δηλαδή όσο αυξάνεται το αποθεματικό τόσο ικανοποιητικότερα γίνονται τα φράγματα.

3. φράγματα στη περίπτωση που το δ=2

Στη τελευταία περίπτωση θα θεωρήσουμε ότι το $\delta = 2$. Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε τις ρίζες που προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης (6.12). Έτσι έχουμε :

$$\rho_{1,2} = -2.52704 \pm 0.782737i, \quad \rho_3 = -0.837639, \quad \rho_4 = 1.09172$$

Η μικρότερη θετική λύση της γενικευμένης εξίσωσης $Lundberg$ είναι η $\rho = 1.09172$.
Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\varphi_\delta(u)$ όταν το $\rho = 1.09172$ είναι

$$\widehat{\varphi}_\delta(s) = \frac{3.0483 + 1.86873s + 0.334014s^2}{5.32789 + 11.0401s + 5.86465s^2 + s^3}$$

Η αντιστροφή της συνάρτησης $\widehat{\varphi}_\delta(s)$ με χρήση του $Mathematica$ προκύπτει το παρακάτω:

$$\varphi_\delta(u) = (-0.0616857 - 0.0432957i) \cdot e^{(-2.56673-0.835734i)u} - (0.0616857 - 0.0432957i) \cdot e^{(-2.56673+0.835736i)u}$$

$$+0.457385 \cdot e^{-0.731196u}, \quad u > 0$$

Όμοια υπολογίζουμε τη σταθερά κ σύμφωνα με τη συνθήκη (2.19) από την οποία προκύπτουν οι ρίζες

$$\kappa_{1,2} = 2.56673 \pm 0.835761i, \quad \kappa_3 = 0.73119$$

Η μικρότερη θετική ρίζα αποτελεί και τη λύση της εξίσωσης και αυτή είναι η $\kappa = 0.73119$.

- **Φράγματα για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.1**

Ακολουθεί η εύρεση των φραγμάτων με βάση το *Θεώρημα* 2.1 για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$. Η ποσότητα που μας ενδιαφέρει είναι η $a(z)$ μέσω της οποίας θα γίνει η εύρεση του *άνω* και *κάτω φράγματος* για μια Erlang κατανομή όταν $\delta = 2$. Με αντικατάσταση στη σχέση (6.4) έχουμε

$$a(z) = \frac{19.7422 \cdot (1 + 1.59478z + 0.968357z^2)}{59.1059 + 66.9942z + 30.1345z^2}$$

Στη συνέχεια για να βρούμε τα φράγματα θα πρέπει να υπολογίσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης $a(z)$. Γι' αυτό το λόγο θα πρέπει να υπολογίσουμε τη πρώτη παράγωγο και εν συνεχεία θα τη θέσουμε ίση με το μηδέν για να βρούμε τις ρίζες που τη μηδενίζουν , $a'(z) = 0$.

$$a'(z) = -\frac{0.00237969 \cdot (-139512. + z)(0.623774 + z)(2.59938 + z)}{(59.1059 + 66.9942z + 30.1345z^2)^2}$$

Έτσι προκύπτουν οι παρακάτω ρίζες:

$$z_1 = -0.623774, \quad z_2 = -2.59938, \quad z_3 = 139512$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν αρνητικές και θετικές ρίζες που μηδενίζουν τη παράγωγο. Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα μελετήσουμε μόνο το διάστημα $[0, 100)$ στο οποίο η συνάρτηση $a(z)$ είναι αύξουσα.

Οπότε η συνάρτηση $a(z)$ έχει *μέγιστο* στο x όπου $a_U(x) = \sup_{0 \le z \le 100, F_e(z) > 0} a(z) = a(100)$

$$a_U(x) = \sup_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{19.7422 \cdot (1. + 1.59478z + 0.968357z^2)}{59.1059 + 66.9942z + 30.1345z^2} = 0.630772$$

ενώ το *ελάχιστο* είναι στο 0 οπότε $a_L(x) = \inf_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} a(z) = a(0)$

$$a_L(x) = \inf_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{19.7422 \cdot (1 + 1.59478z + 0.968357z^2)}{59.1059 + 66.9942z + 30.1345z^2} = 0.334014$$

Εύκολα προκύπτει σύμφωνα με τη σχέση (6.5) ότι το *άνω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ όταν $\kappa = 0.73119$ είναι

$$\varphi_\delta(u) \le 0.630772 \cdot e^{-0.73119u}$$

ενώ αντίστοιχα σύμφωνα με τη σχέση (6.6) το *κάτω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ όταν $\kappa = 0.73119$ είναι

$$\varphi_\delta(u) \geq 0.334014 \cdot e^{-0.73119u}$$

- **Φράγματα τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας με βάση το Θεώρημα 2.2**

Ομοίως θα υπολογίσουμε τη ποσότητα $\sigma(x)$ με βάση το *Θεώρημα* 2.2. Από τη σχέση (6.13) γνωρίζουμε ότι ισχύει $\sigma(x) = a(z)$ Η συνάρτηση $\sigma(x)$ ορίζεται από το τύπο

$$\sigma(x) = \frac{19.7422 \cdot (1 + 1.59478z + 0.968357z^2)}{59.1059 + 66.9942z + 30.1345z^2}$$

Κατά συνέπεια το *μέγιστο* της συνάρτησης $\sigma(x)$ στο διάστημα $[0, 100]$ ορίζεται στο 100 οπότε $\sigma_U(x) = \sup_{0 \leq z \leq x, F_e(z) > 0} \sigma(z) = \sigma(x)$ σύμφωνα με τη σχέση (6.7):

$$\sigma_U(x) = \sup_{0 \leq z \leq x, F_e(z) > 0} \frac{19.7422 \cdot (1 + 1.59478z + 0.968357z^2)}{59.1059 + 66.9942z + 30.1345z^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_U(x) = 0.630772$$

ενώ το *ελάχιστο* είναι στο 0 οπότε $\sigma_L(x) = \inf_{0 \leq z \leq x, F_e(z) > 0} \sigma(z) = \sigma(0)$ σύμφωνα με τη σχέση (6.8):

$$\sigma_L(x) = \inf_{0 \leq z \leq x, F_e(z) > 0} \frac{19.7422 \cdot (1 + 1.59478z + 0.968357z^2)}{59.1059 + 66.9942z + 30.1345z^2}$$

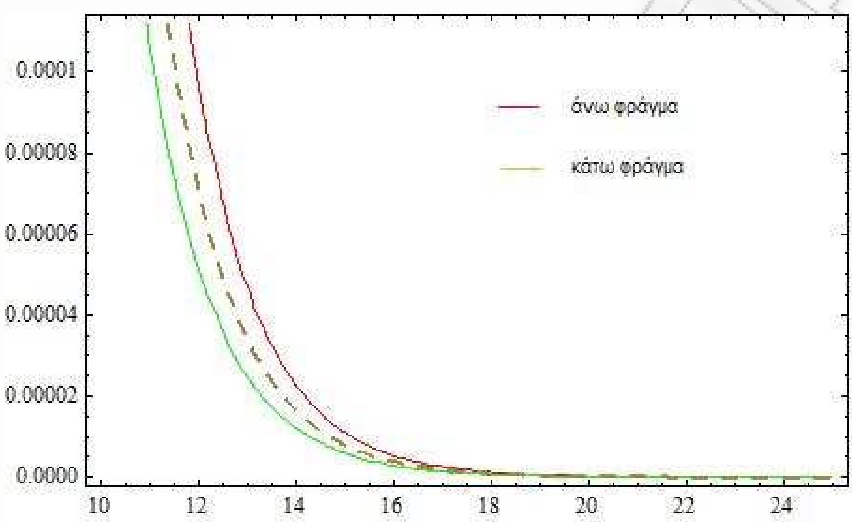
$$= 0.334014$$

Το *άνω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ σύμφωνα με τη σχέση (6.9) όταν $\kappa = 0.73119$ είναι

$$\varphi_\delta(u) \leq 0.630772 \cdot e^{-0.73119u}$$

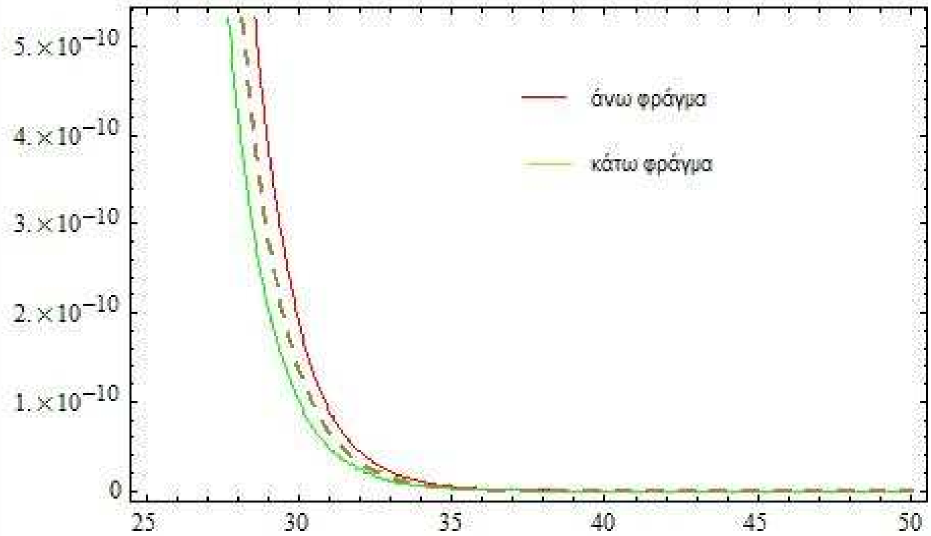
ενώ αντίστοιχα το *κάτω φράγμα* για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ σύμφωνα με τη σχέση (6.10) όταν $\kappa = 0.73119$ είναι

$$\varphi_\delta(u) \geq 0.334014 \cdot e^{-0.73119u}$$



Σχήμα 6.5: *Άνω και κάτω φράγμα για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang κατανομή και $\delta = 2$ στο διάστημα [10,25]*

Τέλος για τη περίπτωση που το δ=2 παρατηρούμε πάλι τη πολυπλοκότητα της συνάρτησης $\varphi_\delta(u)$, η οποία για μικρές τιμές του αποθεματικού εμφανίζει μιγαδικές λύσεις τις οποίες και δε μπορούμε να μελετήσουμε. Συνεπώς ορίζουμε ένα διάστημα τιμών [10,50] στο οποίο θα μελετήσουμε τη συνάρτηση. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι υπάρχει σημαντική πτώση της συνάρτησης για μικρές μεταβολές του αποθεματικού. Οι πτώση είναι τεράστια αν παρατηρήσουμε τις τιμές που λαμβάνει η συνάρτηση στο διάστημα [10,25] από 10^{-3} σε 10^{-10}. Στη συνέχεια όμως παρατηρούμε μια πιο ήπια εξέλιξη της συνάρτησης όπου στο διάστημα [25,50] κυμαίνεται με μικρές αλλαγές στο μηδέν. Το *άνω* και *κάτω φράγμα* πλησιάζουν σε μεγάλο βαθμό τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ για μικρά αποθεματικά ενώ όσο το αποθεματικό μεγαλώνει τα φράγματα τέμνουν τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ και τείνουν στο μηδέν. Γενικά μπορούμε να πούμε ότι τα φράγματα είναι πολύ ικανοποιητικά αφού προσεγγίζουν αρκετά καλά τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$.



Σχήμα 6.6: *Άνω και κάτω φράγμα για τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang κατανομή και $\delta = 2$ στο διάστημα [25,50]*

Παρατηρήσεις:

Κάνοντας μια γρήγορη ανασκόπηση του Κεφαλαίου 6 μπορούμε να διαπιστώσουμε τα παρακάτω πολύ σημαντικά συμπεράσματα :

1. Όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang κατανομή τότε το *άνω (κάτω) φράγμα* του Θεωρήματος 1 συμπίπτει με το *άνω (κάτω) φράγμα* φράγμα του Θεωρήματος 2.

3. Στη περίπτωση του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, όπου $w(x, y) = 1$, οι συναρτήσεις $a(z)$ και $\sigma(z)$ δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα αφού $H_\delta(u)$ και $\overline{G}_\delta(u)$.

4. Τα φράγματα που προκύπτουν για τη Erlang κατανομή για οποιαδήποτε τιμή του δ φράσουν σε ικανοποιητικό βαθμό τη συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$.

5. Όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang κατανομή τότε και η συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ ακολουθεί μείξη εκθετικών κατανομών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Φράγματα για τη Κατανομή Ελλείμματος

7.1 Εισαγωγή

Η κατανομή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι το θέμα που θα μελετήσουμε στο Κεφάλαιο που ακολουθεί. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει και στο Κεφάλαιο 2 η κατανομή του ελλείμματος αποτελεί μια ειδική περίπτωση της συνάρτησης των Gerber Shiu (1987) και δηλώνει τη πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία δοθέντος ότι έχουμε ένα αποθεματικό u και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να μη ξεπερνάει το y. Η κατανομή του ελλείμματος (*seveity of ruin*) είναι η λύση μιας ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης και χρησιμοποιείται ιδιαίτερα στον Αναλογισμό και στη Θεωρία Χρεοκοπίας. Η μορφή της κατανομής του ελλείμματος κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις μας επιτρέπει, τη συσχέτιση της με τη πιθανότητα χρεοκοπίας αλλά και τη δημιουργία φραγμάτων σε σχέση μ' αυτή. Σκοπός του Κεφαλαίου είναι να μελετήσουμε τη συνάρτηση της κατανομής του ελλείμματος στη περίπτωση όπου η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί μείξη εκθετικών κατανομών και Erlang κατανομής έτσι ώστε να δούμε τη συμπεριφορά της ανάλογα με τη κατανομή. Επίσης θα μελετήσουμε πως κυμαίνονται τα φράγματα σε σχέση με τη κατανομή του ελλείμματος αναφορικά με τις δύο αυτές κατανομές. Στόχος μας είναι να ανακαλύψουμε ποια από όλα τα φράγματα που θα μελετήσουμε είναι πιο καλά από κάποια άλλα για διάφορες τιμές του ελλείμματος καθώς και να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των δύο κατανομών και να επιλέξουμε τη καλύτερη. Περισσότερες πληροφορίες μπορούμε να αναζητήσουμε τα άρθρα των Willmot and Lin (1998), (2001) και Willmot (2002).

7.2 Εισαγωγή σε βασικές έννοιες της κατανομής του ελλείμματος

Η κατανομή του ελλείμματος είναι μια ειδική περίπτωση της συνάρτησης (2.7) των Gerber Shiu για δ=0 που δίνεται από τη σχέση

$$\varphi_0(u) = P[|U(T)| \leq y, T < \infty | U(0) = u]$$

Στη περίπτωση της κατανομής του ελλείμματος η συνάρτηση προεξοφλημένης ποινής w(x,y) ισούται με τη μονάδα, δηλαδή $w(t) = 1$, όταν τη χρονική στιγμή που συμβαίνει χρεοκοπία το έλλειμμα δε ξεπερνά το y, $t \leq y$ και μηδέν διαφορετικά. Θεωρούμε ότι ο συντελεστής προεξόφλησης $\delta = 0$, συνεπώς από τη σχέση (2.11) που ικανοποιεί τη γενικευμένη εξίσωση Lundberg προκύπτει ότι $\rho = 0$.Η κατανομή του ελλείμματος ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση της μορφής (2.8), όπως φαίνεται παρακάτω (βλ. Willmot) (2002):

$$G(u,y) = \frac{1}{1+\theta}\int_0^u G(u-x,y)\mathrm{dF}_e(y) + \frac{1}{1+\theta}\{\overline{F}_e(u) - \overline{F}_e(u+y)\} \tag{7.1}$$

Η συνεχής συνάρτηση $r(x)$ δεδομένου ότι εξαρτάται από τη κατανομή του ελλείμματος και τη συνάρτηση προεξοφλημένης ποινής w(x,y) θα παίρνει την εξής μορφή. Με τη χρήση του Θεωρήματος Fubini έχουμε ότι $w(x_1, x_2) = 1$ για $x_2 \leq y$ οπότε $w(x, t-x) = 1$ για $t \leq x + y$. Οπότε με αντικατάσταση στη σχέση (7.2) η συνάρτηση $r(x)$ θα πάρει τη μορφή

$$r(u) = \frac{1}{1+\theta}\int_u^\infty \int_x^{x+y} w(t-y)\mathrm{dF}(y)\mathrm{d}x = \frac{1}{1+\theta}\int_u^\infty \{\overline{F}(t) - \overline{F}(t+y)\}\mathrm{d}t.$$

$$\Rightarrow r(u) = \frac{1}{1+\theta}\{\overline{F}_e(u) - \overline{F}_e(u+y)\}$$

Η ουρά της συνάρτησης της κατανομής του ελλείμματος ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση Willmot et al (2001)

$$\overline{G}(u,y) = \frac{1}{1+\theta}\int_0^u \overline{G}(u-x,y)\mathrm{dF}_e(y) + \frac{1}{1+\theta}\overline{F}_e(u+y) \tag{7.2}$$

Η συνάρτηση που συνδέει τις συναρτήσεις (7.2) και (7.2) είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας αφού ισχύει ότι

$$\overline{G}(u,y) = \psi(u) - G(u,y) \tag{7.3}$$

Ένας ασφαλής τρόπος να υπολογίσουμε τον ακριβή τύπο της κατανομής του ελλείμματος είναι μέσω της χρήσης του μετασχηματισμού Laplace. Με βάση την ιδιότητα (2.4) μπορούμε να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Laplace της κατανομής του ελλείμματος $G(u, y)$. Έτσι έχουμε:

$$\widehat{G}(u,s) = \frac{\frac{1}{1+\theta}[\widehat{\overline{F}}_e(s) - \widehat{\overline{F}}_e(s+y)]}{1 - \frac{1}{1+\theta}\widehat{f}_e(s)} \tag{7.4}$$

Ας δούμε τώρα κάποια συγκεκριμένα παραδείγματα που αφορούν τη περίπτωση της κατανομής του ελλείμματος για μείξη εκθετικών κατανομών και Erlang κατανομής.

7.3 Κατανομή του Ελλείμματος όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν Μείξη Εκθετικών Κατανομών (συνέχεια Εφαρμογής 4.3)

Θα συνεχίσουμε τη μελέτη της Εφαρμογής 4.2 στην οποία οι αποζημιώσεις ακολουθούν μια μείξη τριών εκθετικών κατανομών, μελετώντας αυτή τη φορά τη συνάρτηση της κατανομής του ελλείμματος. Ο μετασχηματισμός Laplace της κατανομής του Ελλείμματος $G(u, y)$ δίνεται από τη σχέση (7.2). Με αντικατάσταση των σχέσεων (4.3) και (4.3) που έχουμε υπολογίσει σε προηγούμενη Ενότητα θα έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

$$\widehat{G}(s,y) = \frac{\frac{1}{2}\left(2\left(\frac{1}{6(s+1)} + \frac{1}{6(s+2)} + \frac{1}{6(s+3)}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{e^{-y}}{s+1} + \frac{e^{-2y}}{s+2} + \frac{e^{-3y}}{s+3}\right)\right)}{1 - \frac{1}{2}\cdot 2\left(\frac{1}{6(s+1)} + \frac{1}{3(s+2)} + \frac{1}{2(s+3)}\right)}$$

Με απλοποίηση της παραπάνω συνάρτησης προκύπτει ότι

$$\Rightarrow \widehat{G}(s,y) = \frac{e^{-3y}(-1+e^{y})(2+3s+s^2+e^{y}(5+7s+2s^2)+e^{2y}(11+12s+3s^2))}{17+43s+30s^2+6s^3} \tag{7.5}$$

Η συνάρτηση $G(u, y)$ εξαρτάται, κατά κύριο λόγο, από το αποθεματικό, το οποίο το μελετάμε σε συνεχή χρόνο. Το y είναι μια σταθερά για την οποία θα πάρουμε συγκεκριμένες τιμές, ώστε να μελετήσουμε τη συνάρτηση και τα φράγματα που μας ενδιαφέρουν. Έτσι θα πάρουμε τις παρακάτω τρείς περιπτώσεις.

1. φράγματα στη περίπτωση που το y=2

Αντικαθιστώντας τη τιμή $y = 2$ στη σχέση (7.3), που δίνει το μετασχηματισμό Laplace της κατανομής του Ελλείμματος, προκύπτει ότι

$$\widehat{G}(s, 2) = \frac{0.473979(1.38865 + s)(2.56464 + s)}{(0.656728 + s)(1.53785 + s)(2.80542 + s)}$$

Με αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace με τη βοήθεια του $Mathematica$ παίρνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα

$$G(u, 2) = 0.0593654 \cdot e^{-2.80542u} + 0.0650133 \cdot e^{-1.53785u} + 0.3496 \cdot e^{-0.656728u}$$

Συνεπώς, όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη k εκθετικών κατανομών και το έλλειμμα αποτελεί μια σταθερά τότε και η κατανομή του ελλείμματος είναι μείξη k- εκθετικών κατανομών και δίνεται από τη σχέση

$$G(u, y) = C_1 e^{-p_1 u} + C_2 e^{-p_2 u} + ... + C_k e^{-p_k u}, \quad u > 0$$

με παραμέτρους $C_1, C_2, .., C_k$ είναι οι σταθερές.

- **Φράγματα για τη Κατανομή του Ελλείμματος με βάση το Θεώρημα 2.1 όταν δ=0**

Το πρώτο βήμα είναι να υπολογίσουμε τη συνάρτηση $a(z)$ την οποία χρησιμοποιούμε για την εύρεση των φραγμάτων με βάση το Θεώρημα 2.1 στη περίπτωση που το $y = 2$.

$$a(z) = \frac{e^{\kappa z}[\overline{F}_e(z) - \overline{F}_e(z + y)]}{\int_z^{\infty} e^{\kappa y} f_e(y) \mathrm{d}y} \tag{7.6}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (7.3) και όταν ο συντελεστής προσαρμογής είναι $\kappa = 0.686$ έχουμε

$$a(z) = \frac{2e^{0.686z}\left(\left(\frac{e^{-3z}}{6} + \frac{e^{-2z}}{6} + \frac{e^{-z}}{6}\right) - \left(\frac{e^{-(2+z)}}{6} + \frac{1}{6}e^{-3(2+z)} + \frac{1}{6}e^{-2(2+z)}\right)\right)}{2\int_z^{\infty} e^{0.686x}\left(\frac{e^{-2x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{3} + \frac{e^{-x}}{6}\right)\mathrm{d}x}$$

Μετά από πράξεις προκύπτει ότι η $a(z)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$a(z) = \frac{0.00527896 \cdot e^{1.628z}(62.9872 + 61.9872 \cdot e^{z} + 54.5982 \cdot e^{2z})}{0.288101 \cdot e^{1.628z} + 0.761035 \cdot e^{2.628z} + 1.06157 \cdot e^{3.628z}}$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης. Η πρώτη παράγωγος είναι η

$$a'(z) = \frac{-0.158774e^{4.256z} - 0.539886e^{5.256z} - 0.128031e^{6.256z}}{(0.288101e^{1.628z} + 0.761035e^{2.628z} + 1.06157e^{3.628z})^2}$$

Θέτουμε τη πρώτη παράγωγο ίση με το μηδέν έτσι ώστε να υπολογίσουμε τα ακρότατα της συνάρτησης. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η παράγωγος δεν έχει ρίζες που να τη μηδενίζουν. Η συνάρτηση $a(z)$ είναι φθίνουσα αφού η πρώτη παράγωγος είναι αρνητική σ' όλο το διάστημα $[0, \infty)$.

Συνεπώς η συνάρτηση $a(z)$ έχει *μέγιστο* στο διάστημα $[0, x]$ στο 0 δηλαδή $a_U(x) = \sup_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} = a(0)$

$$a_U(x) = \sup_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{0.00527896 \cdot e^{1.628z}(62.9872 + 61.9872 \cdot e^{z} + 54.5982 \cdot e^{2z})}{0.288101 \cdot e^{1.628z} + 0.761035 \cdot e^{2.628z} + 1.06157 \cdot e^{3.628z}} = 0.449118$$

ενώ το *ελάχιστο* στο x δηλαδή $a_L(x) = \inf_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} = a(x)$

$$a_L(x) = \inf_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{0.00527896 \cdot e^{1.628z}(62.9872 + 61.9872 \cdot e^{z} + 54.5982 \cdot e^{2z})}{0.288101 \cdot e^{1.628z} + 0.761035 \cdot e^{2.628z} + 1.06157 \cdot e^{3.628z}}$$

$$= \frac{0.00527896 \cdot e^{1.628x}(62.9872 + 61.9872 \cdot e^{x} + 54.5982 \cdot e^{2x})}{0.288101 \cdot e^{1.628x} + 0.761035 \cdot e^{2.628x} + 1.06157 \cdot e^{3.628x}}$$

Η σχέση που ικανοποιεί το *άνω φράγμα* εφόσον ο συντελεστής προσαρμογής έχει βρεθεί στην Ενότητα 4.2 ότι είναι $\kappa = 0.686$ είναι η εξής

$$G(u,2) \leq 0.449 \cdot e^{-0.686u}, \quad u > 0$$

ενώ αντίστοιχα η σχέση ικανοποιεί το *κάτω φράγμα*

$$G(u,2) \geq \frac{0.00527896 \cdot e^{1.628u}(62.9872 + 61.9872 \cdot e^{u} + 54.5982 \cdot e^{2u})}{0.288101 \cdot e^{1.628u} + 0.761035 \cdot e^{2.628u} + 1.06157 \cdot e^{3.628u}} \cdot e^{-0.686u}, \quad u > 0$$

- **Φράγματα για τη Κατανομή του Ελλειμματος με βάση το Θεώρημα 2.2 όταν δ=0**

Το επόμενο βήμα είναι η εύρεση των φραγμάτων με βάση το Θεώρημα 2.2. Οι ποσότητες που πρέπει να υπολογίσουμε είναι η $\tau(z)$ και η $\sigma(z)$. Αρχικά η συνάρτηση $\tau(z)$ ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση

$$\tau(z) = \frac{\overline{F}_e(z) - \overline{F}_e(z+y)}{\overline{F}_e(z)} \tag{7.7}$$

Στη περίπτωση που το $y = 2$ και μετά από πράξεις προκύπτει ότι

$$\tau(z) = \frac{0.015837(62.9872 + e^{2+z} + e^{4+z} + e^{4+2z})}{1 + e^{z} + e^{2z}}$$

Η συνάρτηση $\sigma(z)$ είναι ανεξάρτητη του $y = 2$ οπότε η συμπεριφορά της δεν αλλάζει για οποιαδήποτε τιμή πάρει το y

$$\sigma(z) = \frac{e^{\kappa z}\overline{F}_e(z)}{\int_z^{\infty} e^{\kappa y} f_e(y)\mathrm{d}y} \tag{7.8}$$

οπότε με αντικατάσταση των σχέσεων στη σχέση (7.3) έχουμε ότι

$$\sigma(z) = \frac{\frac{1}{3}e^{-2.314z}(1 + e^{z} + e^{2z})}{2\int_z^{\infty} e^{0.686y}\left(\frac{1}{2}e^{-2y} + \frac{1}{3}e^{-3y} + \frac{1}{6}e^{-y}\right)\mathrm{d}y}$$

$$= \frac{0.3333 \cdot e^{1.627z}(1 + e^{z} + e^{2z})}{0.288101 \cdot e^{1.628z} + 0.761035 \cdot e^{2.628z} + 1.06157 \cdot e^{3.628z}}$$

Ακολούθως θα υπολογίσουμε τη μονοτονία των δύο συναρτήσεων για να βρούμε τα ακρότατα τους. Αναφορικά με τη συνάρτηση $\tau(z)$ θέτουμε τη πρώτη παράγωγο ίση με το μηδέν, $\tau'(z) = 0$

$$\frac{-0.9975 \cdot e^{z} - 1.99504e^{2z} + 0.01583 \cdot e^{2+z} + 0.01583 \cdot e^{4+z} + 0.03167 \cdot e^{4+2z} - 0.01583 \cdot e^{2+3z}}{(1+e^{z}+e^{2z})^2} = 0$$

Η συνάρτηση $\tau(z)$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $[0, \infty)$ αφού η παράγωγος της είναι παντού αρνητική και δεν έχει καμία ρίζα στο διάστημα αυτό που να τη μηδενίζει. Ομοίως για τη συνάρτηση $\sigma(z)$ αν θέσουμε $\sigma(z) = 0$ προκύπτει

$$\frac{-0.000096 \cdot e^{z} - 0.15799 \cdot e^{4.255z} - 0.5164 \cdot e^{5.255z} - 0.10078 \cdot e^{6.255z} - 0.0003549 \cdot e^{7.255z}}{(0.288101 \cdot e^{1.628z} + 0.761035 \cdot e^{2.628z} + 1.06157 \cdot e^{3.628z})^2} = 0$$

Ομοίως η $\sigma'(z)$ είναι αρνητική σ' όλο το διάστημα $[0, \infty)$ χωρίς να υπάρχει κάποια ρίζα που να τη μηδενίζει, άρα η συνάρτηση $\sigma(z)$ μια φθίνουσα συνάρτηση. Συνεπώς το *μέγιστο* των δύο συναρτήσεων βρίσκεται στο 0

$$\tau_U(x) = \sup_{0 \le z \le x, F_e(z)>0} \frac{0.0158369(62.9872 + e^{2+z} + e^{4+z} + e^{4+2z})}{1+e^{z}+e^{2z}} = 0.947957 \tag{7.9}$$

$$\sigma_U(x) = \sup_{0 \le z \le x, F_e(z)>0} \frac{0.3333 \cdot e^{1.627z}(1+e^{z}+e^{2z})}{0.288101 \cdot e^{1.628z} + 0.761035 \cdot e^{2.628z} + 1.06157 \cdot e^{3.628z}} = 0.473775 \tag{7.10}$$

ενώ το *ελάχιστο* των δύο συναρτήσεων βρίσκεται στο x

$$\begin{aligned} \tau_L(x) &= \inf_{0 \le z \le x, F_e(z)>0} \frac{0.0158369(62.9872 + e^{2+z} + e^{4+z} + e^{4+2z})}{1+e^{z}+e^{2z}} \\ &= \frac{0.0158369(62.9872 + e^{2+x} + e^{4+x} + e^{4+2x})}{1+e^{x}+e^{2x}} \end{aligned} \tag{7.11}$$

και επίσης

$$\sigma_L(x) = \inf_{0\le z\le x, F_e(z)>0} \frac{0.3333e^{1.627z}(1+e^z+e^{2z})}{0.288101\cdot e^{1.628z}+0.761035\cdot e^{2.628z}+1.06157\cdot e^{3.628z}}$$
$$= \frac{0.3333\cdot e^{1.627x}(1+e^x+e^{2x})}{0.288101\cdot e^{1.628x}+0.761035\cdot e^{2.628x}+1.06157\cdot e^{3.628x}} \tag{7.12}$$

Με βάση όλα τα παραπάνω θα καταλήξουμε στους εξής τύπους για τα φράγματα.

Το *άνω φράγμα* για τη συνάρτηση $G(u,2)$ με βάση τις σχέσεις (7.3) και (7.3) είναι

$$G(u,2) \le 0.449\cdot e^{-0.685u}, \quad u>0$$

και αντίστοιχα το *κάτω φράγμα* για τη συνάρτηση $G(u,2)$ με βάση τις σχέσεις (7.3) και (7.3)

$$G(u,2) \ge \frac{0.0052789\,(62.9872+61.9872\cdot e^u+54.5982\cdot e^{2u})}{0.287977\cdot +0.760456\cdot e^u+1.0582\cdot e^{2u}}\cdot e^{-0.686u}, \quad u>0$$

Παρατήρηση: αν παρατηρήσουμε τα φράγματα των Θεωρημάτων 2.1 και 2.2 εύκολα θα διαπιστώσουμε ότι τα δύο άνω και κάτω φράγματα συμπίπτουν για μείξη εκθετικών κατανομών.

- **Φράγματα για τη Κατανομή του Ελλείμματος με βάση το Θεώρημα 7.1 όταν δ=0**

Τέλος, θα μελετήσουμε τα φράγματα που προκύπτουν με βάση το Θεώρημα 2.4. Σύμφωνα με τον G. Psarrako (2008)* υπάρχει ένα βελτιωμένο *φράγμα* για τη συνάρτηση της ουράς κατανομής του ελλείμματος που ικανοποιεί το Θεώρημα 2.4 όταν ο συντελεστής προεξόφλησης είναι μηδέν. Στη συνέχεια θα αναφέρουμε τον ορισμό της κλάσης κατανομών αξιοπιστίας που θα χρησιμοποιηθεί στην εύρεση του φράγματος. Περισσότερες πληροφορίες για τις κλάσεις αξιοπιστίας κατανομών μπορούμε να δούμε στους Willmot et Lin (2001), Ψαρράκος (2007)

Ορισμός 7.1. *Μια κατανομή F είναι IFR (DFR) όταν για κάθε $x, y \geq 0$ η συνάρτηση $\dfrac{\overline{G}(x+y)}{\overline{G}(x)}$ είναι φθίνουσα (αύξουσα) ως προς x. Επιπλέον, αν η κατανομή F είναι απολύτως συνεχής, τότε είναι IFR (DFR) όταν η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda_G(x) = \dfrac{g(x)}{\overline{G}(x)}$ είναι αύξουσα (φθίνουσα) συνάρτηση του x.*

Αναφορικά με τις ιδιότητες των κλάσεων κατανομών έχει αποδειχθεί ότι:

1. η μείξη εκθετικών κατανομών είναι DFR ένω

2. η $Erlang$ κατανομή είναι IFR όταν $\alpha \geq 1$

Με βάση το Θεώρημα 2.4 και υποθέτοντας ότι η συνάρτηση $\lambda(y)$ ακολουθεί τη παρακάτω συνάρτηση

$$\lambda(y) = \phi \frac{\overline{F}(u+y)}{\overline{F}(y)} \frac{\psi(u)}{\overline{F}(u)}$$

προκύπτει ότι το φράγμα θα πάρει τη παρακάτω μορφή. Συνεπώς, σύμφωνα με το παρακάτω Θεώρημα θα έχουμε:

*η αποδειξη της παρακάτω πρότασης βρίσκεται αναλυτικά στο paper του Tail bounds for the distribution of the deficit in the renewal risk model, Insurance: Mathematics and Economics 43 (2008) 197-202

Θεώρημα 7.1. *Αν η κατανομή των αποζημιώσεων F(x) έχει φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας, είναι δηλαδή* DFR [α΄] *τότε υπάρχει ένα μοναδικό κάτω φράγμα για τη συνάρτηση* $G(u,y)$ *το οποίο ικανοποιεί τη παρακάτω ανισότητα*

$$\overline{G}(u,y) \geq \frac{1}{1-\phi}\Big[\psi(u+y)-\psi(u)\psi(y)\Big] - \left(\frac{\overline{F}_e(u+y)\psi(u)}{\phi\overline{F}_e(u)\overline{F}_e(y)}\left(\psi(y)-\phi\overline{F}_e(y)\right)\right) \tag{7.13}$$

ενώ όταν η κατανομή των αποζημιώσεων F(x) είναι IFR *τότε ισχύει η αντίστροφη σχέση.*

[α΄] περισσότερες πληροφορίες για τις DFR κατανομές υπάρχουν στο βιβλίο των Willmot et Lin (2001)

Η μείξη εκθετικών κατανομών όπως αναφέραμε παραπάνω έχει φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας (DFR) συνεπώς ψάχνουμε ένα *κάτω φράγμα* για τη ουρά της κατανομής του Ελλείμματος. Εφαρμόζοντας τη σχέση (7.4) και με αντικατάσταση της κατανομής ισορροπίας των αποζημιώσεων (4.5) και της πιθανότητας χρεοκοπίας (4.3) στη περίπτωση που το $y = 2$ έχουμε ότι το *κάτω φράγμα* είναι

$$\begin{aligned}\overline{G}(u,2) \geq -\frac{1}{1+e^{u}+e^{2u}}(&0.00619 \cdot e^{-2.6847u} + 0.007594 \cdot e^{-1.68469u} + 0.01234 \cdot e^{-1.62958u} \\ &+ 0.00252 \cdot e^{-0.6857u} - 0.1153 \cdot e^{-0.6857u} + 0.01794 \cdot e^{-0.6847u} + 0.01663 \cdot e^{-0.6296u} \\ &+ 0.018629 \cdot e^{0.3143u} - 0.1153 \cdot e^{0.3143u} + 0.04836 \cdot e^{0.3704u} + 0.13765 \cdot e^{1.3143u} - 0.1153 \cdot e^{1.3143u})\end{aligned} \tag{7.14}$$

Με αυτό το τρόπο βρήκαμε ένα *κάτω φράγμα* για την ουρά της κατανομής του ελλείμματος. Για τη κατανομή του ελλείμματος με βάση τη σχέση (7.2) ισχύει ότι

$$\overline{G}(u,y) = \psi(u) - G(u,y)$$

Συνεπώς από αυτή τη σχέση προκύπτει εύλογα με αντικατάσταση στη σχέση (7.3) ένα *άνω φράγμα* για τη συνάρτηση $G(u,y)$

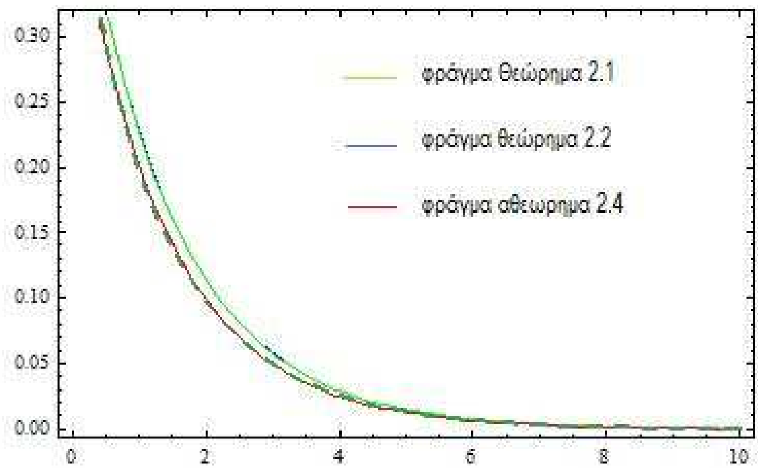
$$G(u,2) \leq 0.032116 \cdot e^{-2.6847u} + 0.09847 \cdot e^{-1.6296u} + 0.36942 \cdot e^{-0.68573u} + \frac{1}{1+e^{u}+e^{2u}}(0.00619$$

$$e^{-2.6847u} + 0.00759 \cdot e^{-1.6847u} + 0.01234 \cdot e^{-1.62958u} + 0.00252 \cdot e^{-0.6857u} - 0.1153 \cdot e^{-0.685727u}$$

$$+ 0.01794 \cdot e^{-0.68469u} + 0.01663 \cdot e^{-0.62958u} + 0.01863 \cdot e^{0.31427u} - 0.1153 \cdot e^{0.31427u}$$

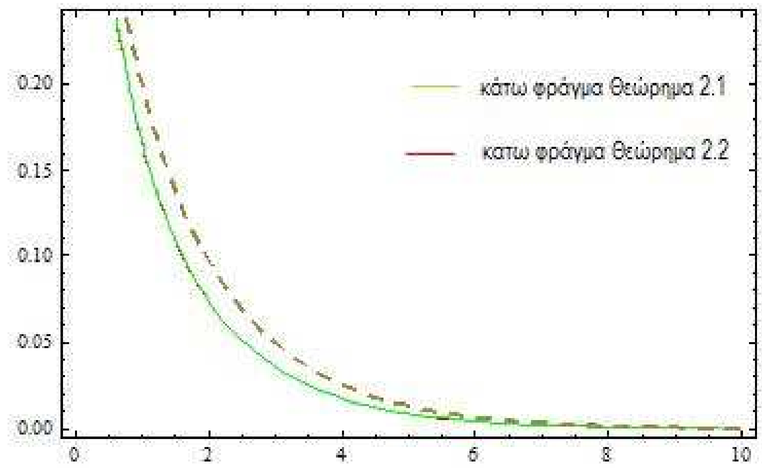
$$+ 0.04836 \cdot e^{0.3704u} + 0.0223 \cdot e^{1.3143u})$$

Στη συνέχεια ακολουθεί η διαγραμματική απεικόνιση όλων των φραγμάτων που υπολογίσαμε σε δύο ξεχωριστά διαγράμματα, έτσι ώστε να μπορέσουμε να συγκρίνουμε και να επιλέξουμε το καλύτερο φράγμα σε κάθε περίπτωση. Συγκρίνοντας όλα τα *άνω* και τα *κάτω φράγματα* διαπιστώνουμε ότι το καλύτερο *άνω φράγμα* είναι αυτό που προκύπτει από το Θεώρημα 7.1 αφού είναι αυτό που πλησιάζει περισσότερο τη συνάρτηση $G(u,2)$. Γενικά το φράγμα με βάση το Θεώρημα 7.1 είναι ένα άριστο φράγμα αφού σχεδόν τέμνει σ' όλη τη διάρκεια του διαστήματος τη $G(u,2)$. Προφανώς τα φράγματα των Θεωρημάτων 2.1 και 2.2 φράσσουν στον ίδιο βαθμό τη συνάρτηση, αφού όπως έχουμε αναφέρει και προηγουμένως συμπίπτουν μεταξύ τους.



Σχήμα 7.1: *Άνω φράγματα για τη συνάρτηση $G(u,2)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη εκθετικών κατανομών και $\delta = 0$ στο διάστημα [0,10]*

Στη συνέχεια ακολουθεί η απεικόνιση των δύο *κάτω φραγμάτων*. Και στο Σχήμα 7.2, παρατηρούμε ότι προσεγγίζουν στον ίδιο βαθμό τη συνάρτηση $G(u, 2)$ αφού όπως έχουμε αποδείξει συμπίπτουν μεταξύ τους. Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι το *κάτω φράγμα* πλησιάζει σε πολύ ικανοποιητικό βαθμό τη συνάρτηση αφού για μικρά αποθεματικά παρατηρούμε ότι φράσσει τη συνάρτηση πολύ καλά χωρίς όμως να τη τέμνει ενώ στη συνέχεια για μεγαλύτερα αποθεματικά τη τέμνουν καθώς τείνουν προς το μηδέν. Αν παρατηρήσουμε περισσότερο τα σχήματα θα διαπιστώσουμε ότι τα *άνω φράγματα* γενικά είναι καλύτερα από τα *κάτω φράγματα* αφού φράσσουν σε μεγαλύτερο βαθμό τη συνάρτηση $G(u, 2)$.



Σχήμα 7.2: *Κάτω φράγματα για τη συνάρτηση $G(u, 2)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη εκθετικών κατανομών και $\delta = 0$ στο διάστημα [0,10]*

2. φράγματα στη περίπτωση που το y=3

Όταν το y πάρει τη τιμή y=3 τότε οι συναρτήσεις που μελετάμε εμφανίζουν τα παρακάτω αποτελέσματα, τα οποία φαίνονται αναλυτικότερα στο *Παράρτημα* Γ. Συγκεκριμένα η συνάρτηση της κατανομής του ελλείμματος, με αντικατάσταση στη σχέση (7.3), θα πάρει τη παρακάτω μορφή

$$\widehat{G}(s, 3) = \frac{0.491268(1.40978 + s)(2.57337 + s)}{(0.656728 + s)(1.53785 + s)(2.80542 + s)}$$

Με χρήση του $Mathematica$ αντιστρέφουμε το μετασχηματισμό Laplace και έτσι προκύπτει το παρακάτω αποτέλεσμα

$$G(u, 3) = 0.0584152 \cdot e^{-2.80542u} + 0.0583342 \cdot e^{-1.53785u} + 0.374519 \cdot e^{-0.656728u}$$

Ακολουθεί η μελέτη των φραγμάτων σύμφωνα με τα Θεωρήματα 2.1, 2.2 και 7.1.

- **Φράγματα για τη Κατανομή του Ελλείμματος με βάση το Θεώρημα 2.1 όταν δ=0**

Η συνάρτηση $a(z)$ ικανοποιεί τη παρακάτω σχέση

$$a(z) = \frac{0.33329 + 0.33251 \cdot e^z + 0.31674 \cdot e^{2z}}{0.2881 + 0.761035 \cdot e^z + 1.0616 \cdot e^{2z}}$$

και αποτελεί μια φθίνουσα συνάρτηση σ' όλο το διάστημα $[0, \infty)$. Συνεπώς το *μέγιστο* της συνάρτησης $a(z)$ ορίζεται στο 0

$$a_U(x) = \sup_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{0.33329 + 0.332507 \cdot e^z + 0.31674 \cdot e^{2z}}{0.2881 + 0.761035 \cdot e^z + 1.0616 \cdot e^{2z}} = 0.46$$

και το *ελάχιστο* ορίζεται στο x

$$a_L(x) = \inf_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{0.33329 + 0.332507 \cdot e^z + 0.31674 \cdot e^{2z}}{0.2881 + 0.761035 \cdot e^z + 1.0616 \cdot e^{2z}}$$

$$= \frac{0.33329 + 0.332507 \cdot e^x + 0.31674 \cdot e^{2x}}{0.2881 + 0.761035 \cdot e^x + 1.0616 \cdot e^{2x}}$$

Το *άνω φράγμα* ικανοποιεί τη σχέση

$$G(u, 3) \le 0.466 \cdot e^{-0.686u}, \quad u > 0$$

ενώ αντίστοιχα η σχέση ικανοποιεί το *κάτω φράγμα* είναι

$$G(u, 3) \ge \frac{0.33329 + 0.3325 \cdot e^u + 0.31674 \cdot e^{2u}}{0.2881 + 0.761035 \cdot e^u + 1.0616 e^{2u}} \cdot e^{-0.686u}, \quad u > 0$$

- **Φράγματα για τη Κατανομή του Ελλείμματος με βάση το Θεώρημα 2.2 όταν δ=0**

Οι ποσότητες που χρησιμοποιούμε για την εύρεση των φραγμάτων με βάση το Θεώρημα 2.2 είναι η $\tau(z)$ και η $\sigma(z)$. Αρχικά η συνάρτηση $\tau(z)$ ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση (7.3), οπότε με απλοποίηση προκύπτει το αποτέλεσμα

$$\tau(z) = \frac{0.999875 + 0.997519 \cdot e^z + 0.950212 \cdot e^{2z}}{1 + e^z + e^{2z}}$$

η οποία είναι μια φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0, \infty)$ και έχει *μέγιστο* στο 0

$$\tau_U(x) = \sup_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{0.999875 + 0.997519 \cdot e^z + 0.950212 \cdot e^{2z}}{1 + e^z + e^{2z}} = 0.982537$$

και το *ελάχιστο* στο x

$$\tau_L(x) = \inf_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{0.999875 + 0.997519 \cdot e^z + 0.950212 \cdot e^{2z}}{1 + e^z + e^{2z}}$$

$$= \frac{0.999875 + 0.997519 \cdot e^x + 0.950212 \cdot e^{2x}}{1 + e^x + e^{2x}}$$

Όπως έχουμε ήδη υπολογίσει η συνάρτηση $\sigma(z)$ ορίζεται από το τύπο (7.3)

$$\sigma(z) = \frac{0.3333 \cdot e^{1.627z}(1 + e^z + e^{2z})}{0.2881 \cdot e^{1.628z} + 0.761035 \cdot e^{2.628z} + 1.06157 \cdot e^{3.628z}}$$

Συνεπώς τα φράγματα που προκύπτουν ικανοποιούν τις παρακάτω ανισότητες. Το *άνω φράγμα* για τη συνάρτηση G(u,3) με βάση τις σχέσεις (;;) και (7.3) είναι

$$G(u, 3) \le 0.466 \cdot e^{-0.686u}$$

και αντίστοιχα το *κάτω φράγμα* για τη συνάρτηση $G(u, 3)$ με βάση τις σχέσεις (;;) και (7.3)

$$G(u, 3) \ge \frac{0.000785 \cdot e^{1.627u}(424.514 + 423.514 \cdot e^u + 403.429 \cdot e^{2u})}{(0.288101 \cdot e^{1.628u} + 0.761035 \cdot e^{2.628u} + 1.06157 \cdot e^{3.628u})} \cdot e^{-0.686u}$$

- **Φράγματα για τη Κατανομή του Ελλείμματος με βάση το Θεώρημα 7.1 όταν δ=0**

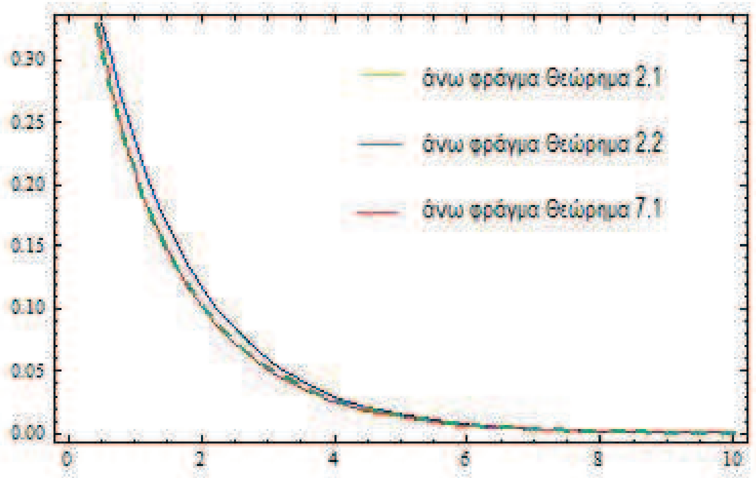
Σύμφωνα με το Θεώρημα 7.1 και με αντικατάσταση στη σχέση (7.4) προκύπτει το εξής *κάτω φράγμα* για την ουρά της κατανομής του ελλείμματος

$$\begin{aligned}\overline{G}(u,3) \geq & -0.0030606 \cdot e^{-2.68469u} - 0.007963 \cdot e^{-1.62958u} + 0.05899 \cdot e^{-0.685727u} \\ & - \frac{1}{1+e^{u}+e^{2u}} 0.0005545(1+20.0855 \cdot e^{u} + 403.429 \cdot e^{2u}) \cdot e^{-5u}(0.032115 \cdot e^{2.31531u} \\ & + 0.09846 \cdot e^{3.37042u} + 0.36942 \cdot e^{4.31427u})\end{aligned} \tag{7.15}$$

Στη συγκεκριμένη εφαρμογή μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε φράγματα για τη κατανομή του ελλείμματος. Γι' αυτό με βάση τη σχέση (7.2) και με αντικατάσταση στη σχέση (7.3) που δίνει ένα *κάτω φράγμα* για την ουρά της κατανομής του ελλείμματος έχουμε ότι

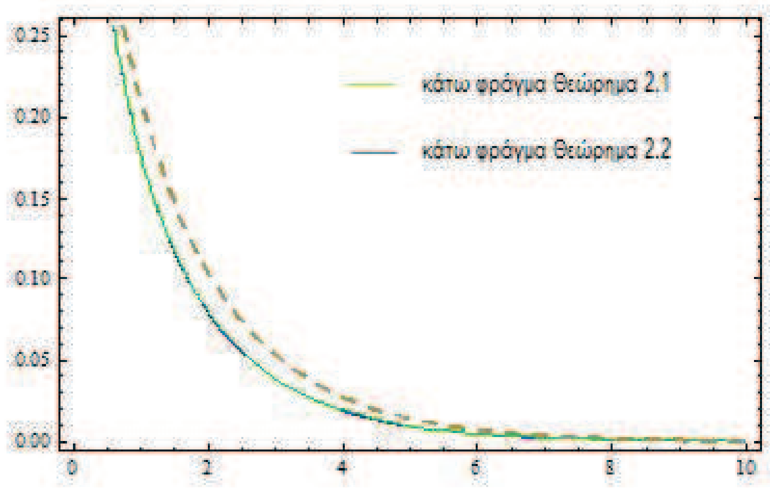
$$\begin{aligned}G(u,3) \leq & \ 0.0351765 \cdot e^{-2.68469u} + 0.106431 \cdot e^{-1.62958u} + 0.310425 \cdot e^{-0.685727u} \\ & + \frac{1}{1+e^{u}+e^{2u}}(1+e^{3+u}+e^{6+2u}) \cdot e^{-5u}(0.0321158 \cdot e^{2.31531u} \\ & + 0.098467 \cdot e^{3.37042u} + 0.369417 \cdot e^{4.31427u})0.0005545\end{aligned}$$

Παρατηρώντας τη διαγραμματική απεικόνιση των φραγμάτων με τη συνάρτηση $G(u,3)$ στο Σχήμα 7.3 και 7.4 διαπιστώνουμε ότι όλα τα φράγματα είναι αρκετά ικανοποιητικά. Το *άνω φράγμα* που προκύπτει από το Θεώρημα 7.1 όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε και στο Σχήμα είναι το καλύτερο *άνω φράγμα* ανάμεσα στα φράγματα που έχουν προκύψει. Συμπίπτει ακριβώς με τη κατανομή του ελλείμματος για όλο το πλήθος των αποθεματικών που έχουμε επιλέξει και έχει σαφές προβάδισμα έναντι των άλλων φραγμάτων. Στη περίπτωση των *άνω φραγμάτων* και από τα αποτελέσματα γνωρίζουμε ότι τα φράγματα των δύο Θεωρημάτων 2.1 και 2.2 συμπίπτουν.



Σχήμα 7.3: *Άνω φράγματα για τη συνάρτηση $G(u, 3)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη εκθετικών κατανομών και $\delta = 0$ στο διάστημα [0,10]*

Συνεπώς δεν μπορούμε να επιλέξουμε το καλύτερο ανάμεσα στα δύο φράγματα. Αυτό που εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε είναι ότι το φράγμα που έχει προκύψει είναι ένα πολύ καλό φράγμα, σχεδόν τόσο καλό όσο αυτό του Θεωρήματος 7.1, διότι πλησιάζει σε πολύ μεγάλο βαθμό τη συνάρτηση και για μεγαλύτερα αποθεματικά τη τέμνει. Συνεπώς το *άνω φράγμα* με βάση τα Θεωρήματα 2.1 και 2.2 είναι αρκετά ικανοποιητικό φράγμα . Αναφορικά με τα *κάτω φράγματα* που προκύπτουν με βάση τα Θεωρήματα 2.1, 2.2 μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα δύο φράγματα συμπίπτουν μεταξύ τους οπότε και δεν μπορούμε να επιλέξουμε το καλύτερο *κάτω φράγμα* για τη συνάρτηση $G(u, 3)$. Κοιτώντας προσεκτικά τα Σχήματα 7.4 διαπιστώνουμε ότι τα άνω φράγματα προσεγγίζουν καλύτερα τη συνάρτηση $G(u, 3)$ σε σχέση με τα κάτω φράγματα και αυτό τα κάνει πιο ικανοποιητικά φράγματα.



Σχήμα 7.4: *Κάτω φράγματα για τη συνάρτηση $G(u, 3)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη εκθετικών κατανομών και $\delta = 0$ στο διάστημα [0,10]*

3. φράγματα στη περίπτωση που το y=4

Τέλος όταν το y=4 τότε η συνάρτηση της κατανομής του ελλείμματος, με αντικατάσταση στη σχέση (7.3), θα πάρει τη παρακάτω μορφή

$$\widehat{G}(s,4) = \frac{0.49689(1.41786+s)(2.57599+s)}{(0.656728+s)(1.53785+s)(2.80542+s)}$$

Με χρήση του $Mathematica$ αντιστρέφουμε το μετασχηματισμό Laplace και έτσι προκύπτει η συνάρτηση της κατανομής του ελλείμματος

$$G(u,4) = 0.0580785 \cdot e^{-2.80542u} + 0.0554181 \cdot e^{-1.53785u} + 0.383393 \cdot e^{-0.656728u}$$

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε φράγματα σύμφωνα με τα Θεωρήματα 2.1, 2.2 και 2.4.

- **Φράγματα για τη Κατανομή του Ελλείμματος με βάση το Θεώρημα 2.1 όταν δ=0**

Η συνάρτηση $a(z)$ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση σ' όλο το διάστημα $[0, \infty)$ και δίνεται τη σχέση

$$a(z) = \frac{0.3333 + 0.3332 \cdot e^{z} + 0.32723 \cdot e^{2z}}{0.2881 + 0.761035 \cdot e^{z} + 1.0616 \cdot e^{2z}}$$

Το *μέγιστο* της συνάρτησης $a(z)$ ορίζεται στο 0

$$a_U(x) = \sup_{0 \le z \le x, F_e(z)>0} \frac{0.3333 + 0.3332 \cdot e^z + 0.32723 \cdot e^{2z}}{0.2881 + 0.761035 \cdot e^z + 1.0616 \cdot e^{2z}} = 0.47083 \tag{7.16}$$

και το *ελάχιστο* ορίζεται στο x

$$\begin{aligned} a_L(x) &= \inf_{0 \le z \le x, F_e(z)>0} \frac{0.3333 + 0.3332 \cdot e^z + 0.32723 \cdot e^{2z}}{0.2881 + 0.761035 \cdot e^z + 1.0616 \cdot e^{2z}} \\ &= \frac{0.3333 + 0.3332 \cdot e^x + 0.32723 \cdot e^{2x}}{0.2881 + 0.761035 \cdot e^x + 1.0616 \cdot e^{2x}} \end{aligned} \tag{7.17}$$

Συνεπώς το *άνω φράγμα* με βάση τη σχέση (7.3) θα γίνει

$$G(u,4) \le 0.47083 \cdot e^{-0.686u}, \quad u > 0$$

ενώ αντίστοιχα το *κάτω φράγμα* με βάση τη σχέση (7.3)

$$G(u,4) \ge \frac{0.3333 + 0.3332 \cdot e^x + 0.32723 \cdot e^{2x}}{0.2881 + 0.761035 \cdot e^x + 1.0616 \cdot e^{2x}} \cdot e^{-0.686u}, \quad u > 0$$

- **Φράγματα για τη Κατανομή του Ελλείμματος με βάση το Θεώρημα 2.2 όταν δ=0**

Οι συναρτήσεις $\tau(z)$ και η $\sigma(z)$ που χρησιμοποιούμε για την εύρεση των φραγμάτων με βάση το Θεώρημα 2.2 ορίζονται ως εξής:

Η συνάρτηση $\tau(z)$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$ και ικανοποιεί τη παρακάτω σχέση

$$\tau(z) = \frac{0.000329\,(3036.56 + 3035.56 \cdot e^z + e^{8+2z})}{1 + e^z + e^{2z}}$$

η οποία έχει *μέγιστο* στο x

$$\tau_U(x) = \sup_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{0.000329\,(3036.56 + 3035.56 \cdot e^z + e^{8+2z})}{1 + e^z + e^{2z}} = 0.993781$$

και το *ελάχιστο* στο 0

$$\tau_L(x) = \inf_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{0.000329\,(3036.56 + 3035.56 \cdot e^z + e^{8+2z})}{1 + e^z + e^{2z}}$$

$$= \frac{0.000329\,(3036.56 + 3035.56 \cdot e^x + e^{8+2x})}{1 + e^x + e^{2x}}$$

Συνεπώς τα φράγματα που προκύπτουν ικανοποιούν τις παρακάτω ανισότητες. Το *άνω φράγμα* για τη συνάρτηση G(u,4) με βάση τις σχέσεις (;;) και (7.3) είναι

$$G(u,4) \le 0.470829 \cdot e^{-0.686u}$$

και αντίστοιχα το *κάτω φράγμα* για τη συνάρτηση $G(u,4)$ με βάση τις σχέσεις (;;) και (7.3)

$$G(u,4) \ge \frac{0.0001097e^{1.627u}(3036.56 + 3035.56e^u + e^{8+2u})}{(0.288101e^{1.628u} + 0.761035e^{2.628u} + 1.06157e^{3.628u})} \cdot e^{-0.686u}$$

- **Φράγματα για τη Κατανομή του Ελλείμματος με βάση το Θεώρημα 7.1 όταν δ=0**

Για την εύρεση του φράγματος που προκύπτει από το Θεώρημα 7.1 αντικαθιστούμε στη σχέση (7.4) την ουρά της κατανομής του ελλείμματος

$$\overline{G}(u,4) \ge -0.001535 \cdot e^{-2.68469u} - 0.004422 \cdot e^{-1.62958u} + 0.02988 \cdot e^{-0.685727u} - \frac{1}{1 + e^u + e^{2u}}$$

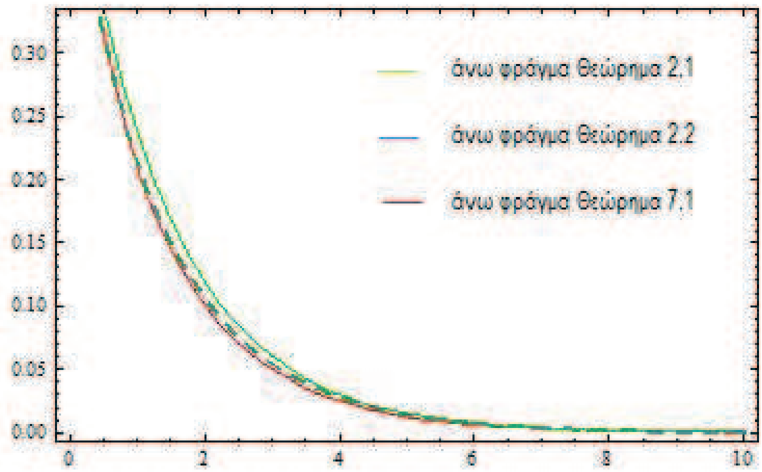
$$0.000041(1 + e^{4+u} + e^{8+2u})e^{-5u}(0.032116 \cdot e^{2.31531u} + 0.09846 \cdot e^{3.37042u} + 0.36942 \cdot e^{4.3143u}) \tag{7.18}$$

Με βάση τη σχέση (7.2) και με αντικατάσταση στη σχέση (7.3) που δίνει ένα *κάτω φράγμα* για την ουρά της κατανομής του ελλείμματος έχουμε ότι

$$G(u,4) \leq 0.0336515 \cdot e^{-2.68469u} + 0.102889 \cdot e^{-1.62958u} + 0.339529 \cdot e^{-0.685727u} + \frac{1}{1+e^{u}+e^{2u}}$$

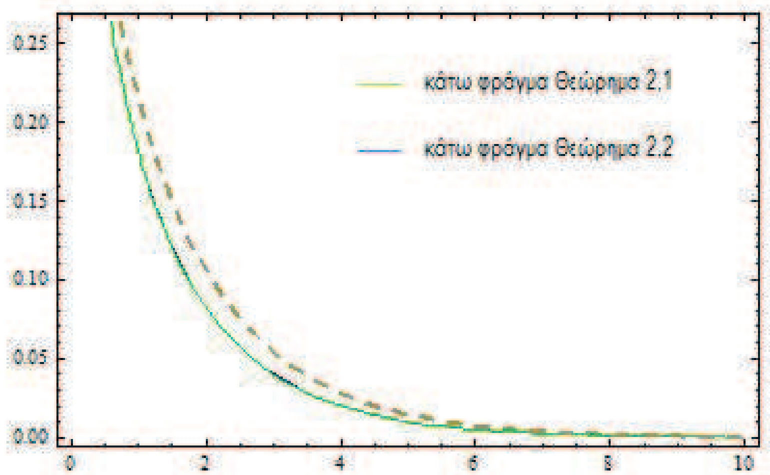
$$0.000041(1+e^{4+u}+e^{8+2u}) \cdot e^{-5u}(0.0321158 \cdot e^{2.31531u} + 0.098467 \cdot e^{3.37042u} + 0.369417 \cdot e^{4.31427u})$$

Στη συνέχεια θα απεικονίσουμε διαγραμματικά τη συνάρτηση $G(u,4)$ τα *κάτω φράγματα* και τα *άνω φράγματα* που προέκυψαν από τα παραπάνω αποτελέσματα. Παρατηρούμε ότι το καλύτερο *άνω φράγμα* είναι αυτό που προκύπτει από το Θεώρημα 7.1. Το φράγμα αυτο συμπίπτει καθ' όλη τη διάρκεια του διαστήματος με τη συνάρτηση $G(u,4)$. Τα *άνω φράγματα* με βάση το Θεώρημα 2.1 και 2.2 όπως έχουμε δείξει συμπίπτουν μεταξύ τους. Παρατηρούμε ότι το φράγμα που προέκυψε με βάση αυτά τα Θεωρήματα είναι εξίσου ένα πολύ καλό φράγμα αφού και αυτό πλησιάζει σε πολύ μεγάλο βαθμό τη συνάρτηση.



Σχήμα 7.5: *Άνω φράγματα για τη συνάρτηση $G(u,4)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη εκθετικών κατανομών και $\delta = 0$ στο διάστημα [0,10]*

Παρατηρώντας τώρα τα δύο *κάτω φράγματα* στο επόμενο Σχήμα και γνωρίζοντας ήδη ότι τα δύο *κάτω φράγματα* συμπίπτουν μεταξύ τους διαπιστώνουμε ότι δίνουν ένα αρκετά καλό φράγμα. Το φράγμα που παράγεται από τα δύο Θεωρήματα είναι ένα πολύ καλό ικανοποιητικό αφού όπως βλέπουμε προσεγγίζει αρκετά τη $G(u,4)$. Στη συνέχεια καθώς το αποθεματικό αυξάνεται τόσο περισσότερο πλησιάζει τη συνάρτηση σε σημείο που να την τέμνει. Και σ' αυτή τη περίπτωση τα άνω φράγματα είναι σχετικά καλύτερα από τα κάτω φράγματα αφού πλησιάζουν περισσότερο τη συνάρτηση.



Σχήμα 7.6: *Κάτω φράγματα για τη συνάρτηση $G(u, 4)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη εκθετικών κατανομών και $\delta = 0$ στο διάστημα [0,10]*

7.4 Κατανομή του Ελλείμματος όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang Κατανομή (συνέχεια Εφαρμογής 6.3)

Η εφαρμογή που ακολουθεί αποτελεί τη συνέχεια της Εφαρμογής 6.1.1 όταν το $\delta = 0$. Οι αποζημιώσεις ακολουθούν τη συνάρτηση (6.3).

$$f(x) = 4x^2 e^{-2x}, \quad x > 0$$

Ο συντελεστής προσαρμογής αποτελεί λύση της εξίσωσης (2.7), η οποία με αντικατάσταση θα γίνει

$$(\frac{2}{2-\kappa})^3 = 1 + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \kappa$$

Οι ρίζες που προκύπτουν από τη λύση αυτής της συνάρτησης είναι οι

$$\kappa_{1,2} = 2.55318 \pm 0.787481i \quad \text{και} \quad \kappa_3 = 0.560316$$

Στην εφαρμογή αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τη μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης δηλαδή $\kappa = 0.560316$. Στόχος μας είναι ο υπολογισμός της κατανομής του ελλείμματος που ικανοποιεί τη συνάρτηση $G(u, y)$ όπως έχουμε αναφέρει ήδη.

Ο μετασχηματισμός Laplace της κατανομής του ελλείμματος $G(u, y)$ όπως φαίνεται στη σχέση (7.2) δίνεται με βάση την κατανομή ισορροπίας $F_e(x)$ και την πυκνότητα της κατανομής ισορροπίας $f_e(x)$:

Ο μετασχηματισμός Laplace της $F_e(x)$ δίνεται από τη σχέση

$$\widehat{\overline{F}}_e(s) = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{(s+2)^3} + \frac{4}{(s+2)^2} + \frac{3}{s+2}\right) = \frac{24+16s+3s^2}{3(2+s)^3} \tag{7.19}$$

ενώ της συνάρτησης $F_e(x+y)$ από τη σχέση

$$\widehat{\overline{F}}_e(s+y) = \frac{1}{3}e^{-2y}\left(\frac{8(3+2y+2y^2)+s^2(3+4y+2y^2)+4s(4+4y+3y^2)}{(2+s)^3}\right) \tag{7.20}$$

αντίστοιχα ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f_e(x)$ είναι

$$\widehat{f}_e(s) = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{(s+2)^3} + \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{1}{s+2}\right) = \frac{2(12+6s+s^2)}{32+s^3} \tag{7.21}$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (7.4), (7.4) και (7.4) στη σχέση (7.2), όταν το περιθώριο ασφαλείας $\theta = 1$, έχουμε ότι

$$\widehat{G}(u,y) = \frac{e^{-2y}\left(-24-16s-3s^2+e^{2y}(24+s(16+3s))-4(2+s)^2y-2(2+s)(4+s)y^2\right)}{12+s(30+s(17+3s))} \tag{7.22}$$

Το y όμως αποτελεί μια σταθερά για την οποία, στη συνέχεια του Κεφαλαίου, θα ορίσουμε συγκεκριμένες τιμές για να μελετήσουμε πως κυμαίνεται η συνάρτηση της κατανομής του ελλείμματος και τα φράγματα καθώς το αποθεματικό μεταβάλλεται, για κάθε τιμή του y.

1. φράγματα στην περίπτωση που το y=2

Αν θεωρήσουμε ότι $y = 2$ τότε μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $G(u, y)$ θα γίνει με βάση τη σχέση (7.4)

$$\widehat{G}(u,2) = \frac{0.0030526\left(-120-s(96+19s)+54.598\left(72+48s+9s^2\right)\right)}{12+s(30+s(17+3s)}$$

Με τη βοήθεια του προγράμματος $Mathematica$ αντιστρέφουμε το μετασχηματισμό Laplace και έτσι προκύπτει ότι

$$G(u,2) = (-0.03997 - 0.02913i) \cdot e^{(-2.553-0.7875i)u} - (0.03997 - 0.02913i)$$

$$e^{(-2.553+0.7875i)u} + 0.57976 \cdot e^{-0.5603u}$$

Παρατηρούμε ότι η Κατανομή του ελλείμματος $G(u,y)$ ακολουθεί μια μείξη εκθετικών κατανομών. Τώρα όμως κάποιες από τις παραμέτρους και τους συντελεστές είναι *μιγαδικοί.*

- **Φράγματα για τη Κατανομή του Ελλείμματος με βάση το Θεώρημα 2.1 όταν δ=0**

Αρχικά θα υπολογίσουμε τα πρώτα φράγματα που προκύπτουν από το *Θεώρημα* 2.1. Θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση $a(z)$, όταν ο συντελεστής προσαρμογής ισούται με $\kappa = 0.560316$. Με αντικατάσταση στη σχέση (7.2) που ικανοποιεί τη συνάρτηση, προκύπτει ότι

$$a(z) = \frac{e^{0.560316z}\left(\frac{1}{3}e^{-2z}(3+4z+2z^2) - \frac{1}{3}e^{-2(z+2)}(3+4(z+2)+2(z+2)^2)\right)}{\frac{2}{3}\cdot\int_z^{\infty} e^{0.560316y}e^{-2y}(1+2y+2y^2)\mathrm{d}y}$$

Με απλοποίηση η παραπάνω συνάρτηση θα πάρει τη μορφή

$$a(z) = \frac{0.884001 + 1.26007z + 0.654456z^2}{2 + 2.2127z + 0.926129z^2}$$

Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης. Θέτουμε τη πρώτη παράγωγο ίση με το μηδέν όπως φαίνεται παρακάτω :

$$a'(z) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3.16117\cdot 10^{-6}(-88932.7+z)(0.726872+z)(2.76056+z)}{(2.+2.2127z+0.926129z^2)^2} = 0$$

Οι ρίζες που προκύπτουν από τη λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι οι εξής:

$$z_1 = -3.17522, \quad z_2 = -0.824779 \quad \text{και} \quad z_3 = 88932.7$$

Στο διάστημα $[0, \infty)$ η παράγωγος έχει μία θετική ρίζα που τη μηδενίζει. Βλέπουμε δηλαδή ότι στο διάστημα $[0, 88932.7] \subseteq [0, \infty)$ η συνάρτηση $a(z)$ είναι αύξουσα, ενώ για μεγαλύτερες τιμές του z είναι φθίνουσα.

Συνεπάγεται ότι το *μέγιστο* της συνάρτησης είναι στο 88932.7 οπότε $a_U(x) = \sup_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} a(z) = a(88932.7)$

$$a_U(x) = \sup_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} \frac{0.884001 + 1.26007z + 0.654456z^2}{2. + 2.2127z + 0.926129z^2} = 0.706654 \tag{7.23}$$

ενώ το *ελάχιστο* της συνάρτησης είναι στο 0 οπότε $a_L(x) = \inf_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} a(z) = a(0)$

$$a_L(x) = \inf_{0\leq z\leq x, F_e(z)>0} \frac{0.884001 + 1.26007z + 0.654456z^2}{2. + 2.2127z + 0.926129z^2} = 0.44$$

Συνεπώς το *άνω φράγμα* για τη συνάρτηση $G(u, 2)$ είναι

$$G(u, 2) \leq 0.706654 \cdot e^{-0.560316u}$$

ενώ το *κάτω φράγμα* για τη συνάρτηση $G(u, 2)$ είναι

$$G(u, 2) \geq 0.44 \cdot e^{-0.560316u}$$

- **Φράγματα για τη Κατανομή του Ελλειμματος με βάση το Θεώρημα 2.2 όταν δ=0**

Στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στη μελέτη του Θεωρήματος 2.2 Η συνάρτηση $\tau(z)$ ορίζεται από τη σχέση (7.3) και με αντικατάσταση της κατανομής ισορροπίας είναι η εξής

$$\tau(z) = \frac{2.652 + 3.78021z + 1.96337z^2}{3 + 4z + 2z^2}$$

Από τον υπολογισμό της μονοτονίας της συνάρτησης, όπως φαίνεται παρακάτω,

$$\tau'(z) = 0 \Rightarrow \frac{0.29306(0.775249 + z)(3.22468 + z)}{(3 + 4z + 2z^2)^2} = 0$$

προκύπτουν δύο αρνητικές ρίζες για την παράγωγο.

$$z_1 = -3.22474 \quad \text{και} \quad z_2 = -0.775255$$

Στο διάστημα $[0, \infty)$ η συνάρτηση $\tau(z)$ είναι αύξουσα αφού η παράγωγος της είναι παντού θετική. Οπότε το *μέγιστο* της συνάρτησης είναι στο x συνεπώς

$$\begin{aligned} \tau_U(x) &= \sup_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{2.652 + 3.78021z + 1.96337z^2}{3 + 4z + 2z^2} \\ &= \frac{2.652 + 3.78021x + 1.96337x^2}{3 + 4x + 2x^2} \end{aligned} \tag{7.24}$$

ενώ το *ελάχιστο* είναι στο 0 οπότε

$$\tau_L(x) = \inf_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{2.652 + 3.78021z + 1.96337z^2}{3 + 4z + 2z^2} = 0.884001 \tag{7.25}$$

Αναφορικά με τη συνάρτηση $\sigma(z)$ παρατηρούμε μετά από πράξεις τα παρακάτω αποτελέσματα. Η συνάρτηση $\sigma(z)$ ορίζεται σύμφωνα με το τύπο (7.3)

Με αντικατάσταση έχουμε

$$\sigma(z) = \frac{\frac{1}{3} \cdot e^{-(2-0.560316)z} \left(3 + 4z + 2z^2\right)}{\int_z^\infty \frac{2}{3} \cdot e^{-(2-0.560316)y}(1 + 2y + 2y^2)\mathrm{d}y}$$

$$= \frac{0.3333(3 + 4z + 2z^2)}{2 + 2.2127z + 0.926129z^2}$$

Θέτωντας τη πρώτη παράγωγο της συνάρτησης ίση με το μηδέν για να βρούμε τη μονοτονία της συνάρτησης διαπιστώνουμε τα παρακάτω

$$\sigma'(z) = 0 \Rightarrow -\frac{1.333 \cdot 10^{-6}(-180222 + z)(0.703407 + z)(2.68578 + z)}{(2 + 2.2127z + 0.926129z^2)^2} = 0$$

Οι ρίζες που προκύπτουν αν θέσουμε τη συνάρτηση ίση με μηδέν είναι οι εξής

$$z_1 = -2.68579, \quad z_2 = -0.703407 \quad \text{και} \quad z_3 = 180221$$

Παρατηρούμε ότι έχει μόνο μια θετική ρίζα που μηδενίζει τη συνάρτηση στο διάστημα $[0, \infty)$. Παίρνοντας ένα μικρότερο διάστημα στο οποίο, $[0, 180221]$, στο οποίο η συνάρτηση $\sigma(z)$ είναι αύξουσα, τότε:

Η συνάρτηση $\sigma(z)$ θα έχει *μέγιστο* στο 180221

$$\sigma_U(x) = \sup_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{0.3333(3 + 4z + 2z^2)}{2 + 2.2127z + 0.926129z^2} = 0.717059 \tag{7.26}$$

ενώ το *ελάχιστο* είναι στο 0 οπότε

$$\sigma_L(x) = \inf_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{0.3333(3 + 4z + 2z^2)}{2 + 2.2127z + 0.926129z^2} = 0.5 \tag{7.27}$$

Η συνάρτηση $\sigma(z)$ είναι ανεξάρτητη του y. Συνεπώς δε μεταβάλλεται με τη πραγματοποίηση οποιαδήποτε αλλαγής στη τιμή του y συνεπώς η συνάρτηση μένει ίδια σε κάθε περίπτωση που θα εξετάσουμε στη συνέχεια του Κεφαλαίου.

Οπότε, σύμφωνα με τις σχέσεις (7.4), (7.4) το *άνω φράγμα* ικανοποιεί τη σχέση

$$G(u, 2) \le \frac{1.90164 + 2.71063u + 1.40785u^2}{3 + 4u + 2u^2} \cdot e^{-0.560316u}$$

ενώ το *κάτω φράγμα* σύμφωνα με τις σχέσεις (7.4), (7.4) για τη συνάρτηση $G(u, 2)$ όταν $\kappa = 0.560316$ είναι

$$G(u,2) \geq 0.44 \cdot e^{-0.560316u} \tag{7.28}$$

- **Φράγματα για τη Κατανομή του Ελλειμματος με βάση το Θεώρημα 7.1 όταν δ=0**

Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε τα φράγματα που προκύπτουν με βάση το Θεώρημα 7.1. Όπως είπαμε και στη προηγούμενη παράγραφο στη περίπτωση όπου το $\delta = 0$ υπάρχει ένας τύπος που ορίζει τον ακριβή τύπο του φράγματος για την ουρά της κατανομής του ελλείμματος και δίνεται από τη σχέση (7.4). Από τη σχέση αυτή παρατηρούμε ότι λαμβάνεται υπόψη και η πιθανότητα χρεοκοπίας την οποία και θα πρέπει να υπολογίσουμε. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.18) με αντικατάσταση της σχέσης (7.4) που δίνει το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτηση $f_e(x)$ προκύπτει ότι

$$\widehat{\psi}(s) = \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{2(12+6s+s^2)}{32+s^3})}{s(1 - \frac{1}{2}\frac{2(12+6s+s^2)}{32+s^3})} = \frac{24+16s+3s^2}{24+60s+34s^2+6s^3}$$

Με αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace προκύπτει ο ακριβής τύπος της πιθανότητας χρεοκοπίας

$$\psi(u) = (-0.0399635 - 0.0290749i) \cdot e^{(-2.55318-0.787481i)u} - (0.0399635 - 0.0290749i) \cdot e^{(-2.55318+0.787481i)u}$$

$$+0.579927 \cdot e^{-0.560316u}$$

τον οποίο και θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια για την εύρεση του φράγματος. Γνωρίζουμε ότι η $Erlang$ κατανομή είναι μια IFR κατανομή, δηλαδή έχει αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας (βλ. Willmot and Lin 2001). Συνεπώς ψάχνουμε ένα *άνω φράγμα* για την ουρά της κατανομής του ελλείμματος. Με αντικατάσταση στη σχέση (7.4) προκύπτει το παρακάτω άνω φράγμα

$$\overline{G}(u,2) \geq \frac{1}{3+4u+2u^2} \cdot e^{(-3.1135-0.78748i)u}((0.03277+0.025324i) \cdot e^{0.560316u}$$

$$((1.19205-0.930492i)+u)((1.2019+0.91909i)+u)+(0.032772-0.025323i)$$

$$e^{(0.560316+1.57496i)u}((1.19205+0.93049i)+u)((1.2019-0.91909i)+u)$$

$$+0.270665 \cdot e^{(2.55318+0.78748i)u}(0.069117+u)(1.22315+u))$$

Παρατηρούμε ότι αν και το άνω φράγμα στη περίπτωση αυτή έχει μιγαδικούς όρους, στη πραγματικότητα είναι μια πραγματική συνάρτηση του αρχικού αποθεματικού u εφόσον το μιγαδικό κομμάτι απλοποιείται. Διατηρούμε όμως τη συνάρτηση σε μιγαδική μορφή για να διευκολύνονται οι πράξεις στο $Mathematica$. Με αντικατάσταση στη σχέση (7.2) που συνδέει την ουρά της κατανομής του ελλείμματος με τη κατανομή του ελλείμματος που φαίνεται παρακάτω

$$\overline{G}(u,y) = \psi(u) - G(u,y)$$

θα προκύψει εύκολα ένα *κάτω φράγμα* για τη κατανομή του ελλείμματος.

$$G(u,2) \geq (-0.0399633-0.0290748i)e^{(-2.55318-0.787481i)u} - (0.0399633-0.0290748i)$$

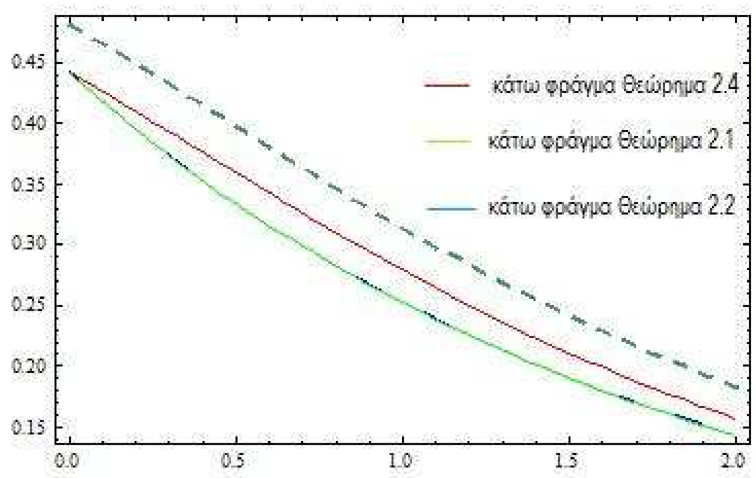
$$e^{(-2.55318+0.787481i)u} + 0.579927e^{-0.560316u} - \frac{1}{3+4u+2u^2} \cdot e^{(-3.11349-0.78748i)u}((0.0327717$$

$$- 0.0253236i) \cdot e^{(0.560316+1.57496i)u}((1.19205 + 0.930492i) + u)((1.20194 - 0.919094i) + u)$$

$$+ (0.0327717 + 0.0253236i) \cdot e^{0.560316u}((1.19205 - 0.930492i) + u)((1.20194 + 0.919094i) + u)$$

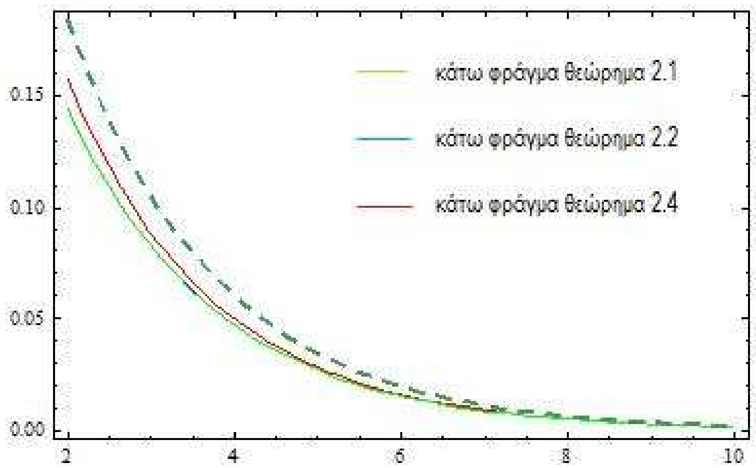
$$+ 0.270665 \cdot e^{(2.55318+0.78748i)u}(0.069117 + u)(1.22315 + u))$$

Στη συνέχεια θα συγκεντρώσουμε όλα τα *άνω* και *κάτω φράγματα* σε δύο διαγράμματα για να μελετήσουμε τη συμπεριφορά τους και να τα συγκρίνουμε έτσι ώστε να καταλήξουμε στο καλύτερο *άνω* και *κάτω φράγμα*. Απεικονίζουμε διαγραμματικά στο διάστημα $[0, 10]$ το *κάτω φράγμα* με βάση το Θεώρημα 7.1, κόκκινη γραμμή, το *κάτω φράγμα* με βάση το Θεώρημα 2.1, πράσινη γραμμή, το *κάτω φράγμα* με βάση το Θεώρημα 2.2, μπλε γραμμή. Παρατηρώντας τα δύο Σχήματα εύκολα διαπιστώνουμε ότι το καλύτερο *κάτω φράγμα* είναι αυτό που προκύπτει από το Θεώρημα 7.1. Το *κάτω φράγμα* του Θεωρήματος 2.2 συμπίπτει με αυτό του Θεωρήματος 2.1

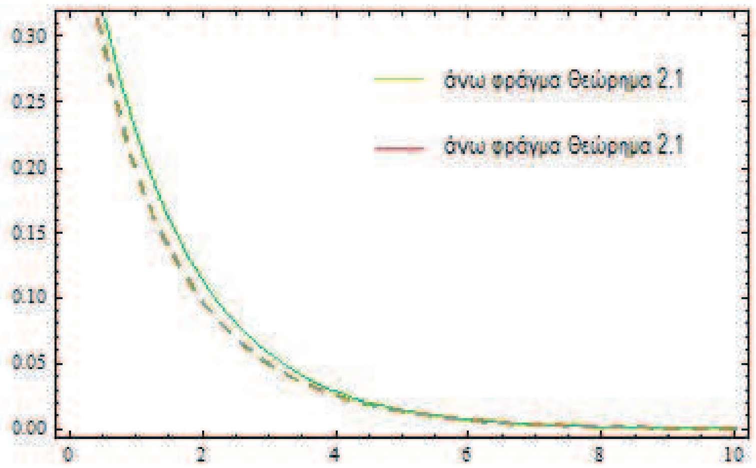


Σχήμα 7.7: *Κάτω φράγματα για τη συνάρτηση $G(u, 2)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang κατανομή και $\delta = 0$ και το αποθεματικό κυμαίνεται από $[0, 2]$*

Απομονώνοντας το διάστημα $[0, 2]$ μπορούμε να παρατηρήσουμε τη διαφορά που έχουν τα τρία φράγματα μεταξύ τους. Στη συνέχεια όμως και καθώς το αποθεματικό αυξάνεται τα φράγματα πλησιάζουν πολύ μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.8.



Σχήμα 7.8: *Κάτω φράγματα για τη συνάρτηση* $G(u, 2)$ *όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang κατανομή και* $\delta = 0$ *και το αποθεματικό κυμαίνεται από* $[2, 10]$



Σχήμα 7.9: *Άνω φράγματα για τη συνάρτηση* $G(u, 2)$ *όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang κατανομή και* $\delta = 0$ *και το αποθεματικό κυμαίνεται από* $[2, 10]$

Αυτό που παρατηρούμε και διαγραμματικά για τα δύο *άνω φράγματα* είναι ότι συμπίπτουν όπως έχουμε ήδη αποδείξει και στα αποτελέσματα παραπάνω. Κοιτώντας προσεκτικά το φράγμα που προέκυψε μπορούμε να πούμε ότι είναι ένα αρκετά καλό φράγμα αφού παρατηρούμε ότι πλησιάζει πολύ τη συνάρτηση και για μεγαλύτερα αποθεματικά τη τέμνει.

2. φράγματα στην περίπτωση που το y=5

Με όμοιο τρόπο προκύπτουν και τα αποτελέσματα στη περίπτωση όπου το $y = 5$. Οι σχέσεις και οι υπολογισμοί στα οποία βασίζονται τα αποτελέσματα που αναγράφονται στη συνέχεια αναφέρονται αναλυτικότερα στο Παράρτημα Γ1 με τη μορφή κώδικα του $Mathematica$. Συνεπώς έχουμε ότι η κατανομή του ελλείμματος θα πάρει τη παρακάτω μορφή

$$G(u, 5) = (-0.0399718 - 0.0291331i) \cdot e^{(-2.55318-0.78748i)u} - (0.0399718 - 0.0291331i)$$

$$e^{(-2.55318+0.78748i)u} + 0.57976 \cdot e^{-0.560316u}$$

- **Φράγματα για τη Κατανομή του Ελλείμματος με βάση το Θεώρημα 2.1 όταν δ=0**

Με βάση το *Θεώρημα* 2.1 προκύπτει ότι η συνάρτηση $a(z)$ ικανοποιεί τη παρακάτω σχέση

$$a(z) = \frac{0.998885 + 1.33296z + 0.66663z^2}{2 + 2.2127z + 0.926129z^2}$$

Όπως θα παρατηρήσουμε υπολογίζοντας τη μονοτονία της συνάρτησης διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν τρεις τιμές που μηδενίζουν τη πρώτη παράγωγο της συνάρτησης και αυτές είναι οι εξής:

$$r_1 = -0.704453, \quad r_2 = -2.68892 \quad \text{και} \quad r_3 = 75518.7$$

Στο διάστημα $[0, \infty)$ υπάρχει μια θετική ρίζα. Ορίζουμε το διάστημα $[0, 75518.7]$ στο οποίο η συνάρτηση $a(z)$ είναι αύξουσα.

Οπότε η συνάρτηση $a(z)$ έχει *μέγιστο* στο 75518.7

$$a_U(x) = \sup_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{0.998885 + 1.33296z + 0.66663z^2}{2 + 2.2127z + 0.926129z^2} = 0.719805$$

ενώ το *ελάχιστο* είναι στο 0

$$a_L(x) = \inf_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{0.998885 + 1.33296z + 0.66663z^2}{2 + 2.2127z + 0.926129z^2} = 0.499447$$

Συνεπώς το *άνω φράγμα* για τη συνάρτηση $G(u,5)$ είναι

$$G(u,5) \leq 0.719805 \cdot e^{-0.560316u}$$

ενώ το *κάτω φράγμα* για τη συνάρτηση $G(u,5)$ είναι

$$G(u,5) \geq 0.4994 \cdot e^{-0.560316u}$$

- **Φράγματα για τη Κατανομή του Ελλείμματος με βάση το Θεώρημα 2.2 όταν δ=0**

Αντίστοιχα με βάση το *Θεώρημα* 2.2 οι συναρτήσεις $\sigma(z)$ και $\tau(z)$ ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις

Η συνάρτηση $\sigma(z)$ σύμφωνα με τη σχέση (7.3) είναι

$$\sigma(z) = \frac{0.3333(3 + 4z + 2z^2)}{2 + 2.2127z + 0.926129z^2}$$

ενώ για τη συνάρτηση $\tau(z)$

$$\tau(z) = \frac{2.99669 + 3.99891z + 1.99991z^2}{3 + 4z + 2z^2}$$

Υπολογίζοντας τη μονοτονία της συνάρτησης διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση $\tau(z)$ είναι αύξουσα στο διάστημα $[0,x]$ για $\forall x \geq 0$.
Συνεπώς έχει *μέγιστο* στο x οπότε

$$\tau_U(x) = \sup_{0 \leq z \leq x, F_e(z)>0} \frac{2.99669 + 3.99891z + 1.99991z^2}{3 + 4z + 2z^2}$$

$$= \frac{2.99669 + 3.99891x + 1.99991x^2}{3 + 4x + 2x^2}$$

ενώ έχει *ελάχιστο* στο 0 οπότε

$$\tau_L(x) = \inf_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{2.99669 + 3.99891z + 1.99991z^2}{3 + 4z + 2z^2} = 0.998897$$

Συνεπώς † το *άνω φράγμα* για τη συνάρτηση $G(u,5)$ με βάση τις σχέσεις (7.4) (7.3) είναι

$$G(u,5) \le \frac{e^{-0.560316u}(2.15714 + 2.87858u + 1.43962u^2)}{3 + 4u + 2u^2}$$

ενώ το *κάτω φράγμα* για τη συνάρτηση $G(u,5)$ με βάση τις σχέσεις (7.4), (7.3) είναι

$$G(u,5) \ge 0.4994 \cdot e^{-0.560316u}$$

† Η μελέτη της συνάρτησης $\sigma(z)$ έγινε στη προηγούμενη περίπτωση

- **Φράγματα για τη Κατανομή του Ελλείμματος με βάση το Θεώρημα 7.1 όταν δ=0**

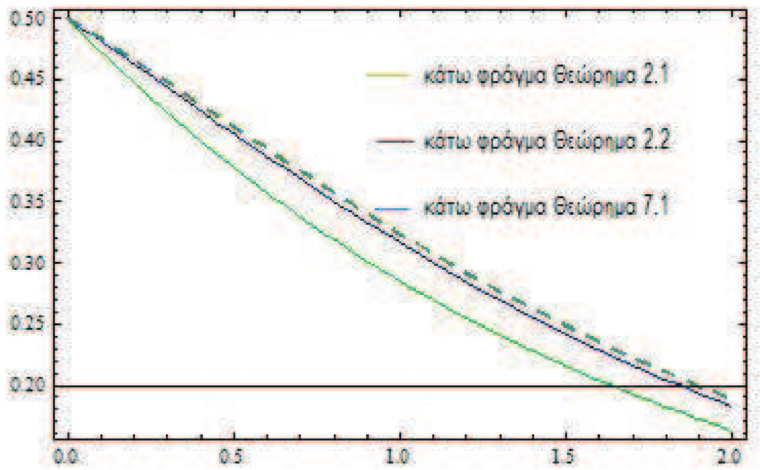
Τέλος θα υπολογίσουμε το φράγμα που προκύπτει με αντικατάσταση στη σχέση (7.4) σύμφωνα με το Θεώρημα 7.1 για την ουρά της κατανομής του ελλείμματος. Έτσι το *άνω φράγμα* ικανοποιεί τη παρακάτω ανισότητα

$$\overline{G}(u,5) \leq \frac{1}{3+4u+2u^2} \cdot e^{(-3.11349-0.78748i)u}((0.00585667+0.00426045i) \cdot e^{0.560316u}$$
$$((1.19436+1.19756i)+u)((1.1944-1.19754i)+u)+(0.00585667-0.00426045i)$$
$$e^{(0.560316+1.57496i)u}((1.19436-1.19756i)+u)((1.1944+1.19754i)+u)$$
$$+e^{(2.55318+0.78748i)u}(-0.0318498+0.0786773u+0.0558582u^2)) \tag{7.29}$$

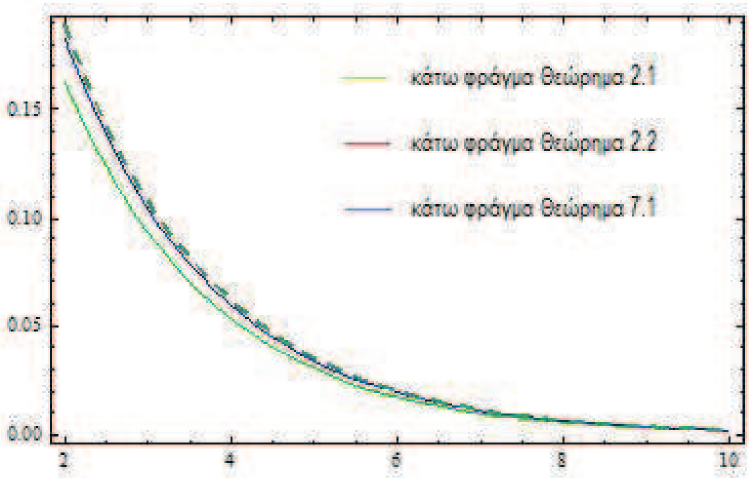
Χρησιμοποιώντας το *άνω φράγμα* για την ουρά της κατανομής του ελλείμματος (7.4) σε συνδυασμό με τη σχέση (7.2) προκύπτει ο εξής τύπος για το φράγμα.

$$G(u,5) \geq (-0.0399633-0.0290748i)e^{(-2.55318-0.787481i)u} - (0.0399633-0.0290748i)e^{(-2.55318+0.787481i)u}$$
$$+0.579927e^{-0.560316u} - \frac{1}{3+4u+2u^2}e^{(-3.11349-0.78748i)u}((0.00585667+0.00426045i)e^{0.560316u}$$
$$((1.19436+1.19756i)+u)((1.1944-1.19754i)+u)+(0.00585667-0.00426045i)$$
$$e^{(0.560316+1.57496i)u}((1.19436-1.19756i)+u)((1.1944+1.19754i)+u)$$
$$+e^{(2.55318+0.78748i)u}(-0.0318498+0.0786773iu+0.0558582u^2))$$

Στο Σχήμα 7.10 μπορούμε να παρατηρήσουμε τη συμπεριφορά των τριών *κάτω φραγμάτων* που προκύπτουν από τα Θεωρήματα 2.1, 2.2 και 7.1. Κοιτώντας προσεκτικά το Σχήμα διαπιστώνουμε ότι το καλύτερο *κάτω φράγμα* είναι αυτό που προκύπτει με βάση το Θεώρημα 7.1. Το φράγμα αυτό πλησιάζει πολύ ικανοποιητικά τη συνάρτηση $G(u,5)$ σε σχέση με τα άλλα δύο φράγματα τα οποία συμπίπτουν μεταξύ τους όπως φαίνεται και στο διάγραμμα. Για μικρά αποθεματικά διαπιστώνουμε ότι υπάρχει μεγάλη απόκλιση μεταξύ των φραγμάτων, κάτι που παρατηρούμε εύκολα και στο Σχήμα 7.10 αλλά καθώς το αποθεματικό αυξάνεται τόσο τα φράγματα πλησιάζουν και να τείνουν να συμπίπτουν με τη συνάρτηση $G(u,5)$ Σχήμα 7.11. Από το Σχήμα 7.10 μπορούμε επίσης να διαπιστώσουμε



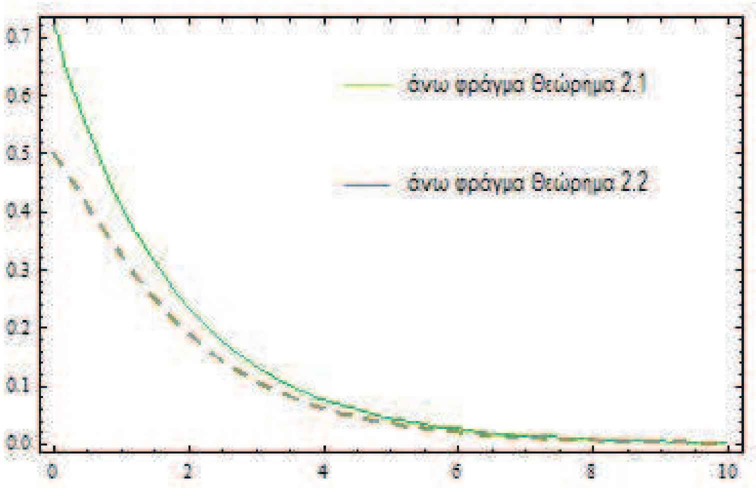
Σχήμα 7.10: *Κάτω φράγματα για τη συνάρτηση $G(u, 5)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang κατανομή και $\delta = 0$ στο διάστημα [0,2]*



Σχήμα 7.11: *Κάτω φράγμα για τη συνάρτηση $G(u, 5)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang κατανομή και $\delta = 0$ στο διάστημα [2,10]*

ότι και τα δύο κάτω φράγματα είναι αρκετα καλά φράγματα αφού οι διαφορά τους είναι ελάχιστη.

Γνωρίζουμε ήδη από τα αποτελέσματα ότι το *άνω φράγμα* του Θεωρήματος 2.1 συμπίπτει με αυτό του Θεωρήματος 2.2. Κοιτώντας προσεκτικά το διάγραμμα διαπιστώνουμε ότι το φράγμα είναι ένα αρκετά καλό φράγμα αφού πλησιάζει σε μεγάλο βαθμό τη συνάρτηση που μελετάμε. Επίσης μπορούμε να πούμε ότι τα *κάτω φράγματα* φράσουν σε μεγαλύτερο βαθμό τη συνάρτηση σε σχέση με το άνω φράγμα που φαίνεται λιγάκι απομακρυσμένο.



Σχήμα 7.12: *Άνω φράγμα για τη συνάρτηση $G(u,5)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang κατανομή και $\delta = 0$ στο διάστημα [2,10]*

3. φράγματα στη περίπτωση που το y=10

Τέλος, θα μελετήσουμε πως κυμαίνονται τα φράγματα όταν η τιμή του y διαφοροποιείται σε $y = 10$. Η συνάρτηση της κατανομής του ελλείμματος θα γίνει

$$G(u,10) = (-0.0399633 - 0.029075i) \cdot e^{(-2.55318-0.78748i)u} - (0.0399633 - 0.029075i) \cdot e^{(-2.55318+0.78748i)u}$$

$$+0.579925 \cdot e^{-0.560316u}$$

- **Φράγματα για τη Κατανομή του Ελλείμματος με βάση το Θεώρημα 2.1 όταν δ=0**

Σύμφωνα με το *Θεώρημα* 2.1 προκύπτει ότι η συνάρτηση $a(z)$ ικανοποιεί τη παρακάτω σχέση

$$a(z) = \frac{1 + 1.33333z + 0.666667z^2}{2 + 2.2127z + 0.926129z^2}$$

Αναζητώντας τη μονοτονία της συνάρτησης $a(z)$ διαπιστώνουμε ότι η παράγωγος είναι θετική σ' όλο το διάστημα $[0, \infty)$ χωρίς να υπάρχει κάποια θετική ρίζα. Συνεπώς η συνάρτηση $a(z)$ έχει *μέγιστο* στο x

$$a_U(x) = \sup_{0 \leq z \leq x, F_e(z) > 0} \frac{1 + 1.3333z + 0.66667z^2}{2 + 2.2127z + 0.926129z^2} = 0.719838$$

ενώ το *ελάχιστο* είναι στο 0 οπότε

$$a_L(x) = \inf_{0 \leq z \leq x, F_e(z) > 0} \frac{1 + 1.3333z + 0.66667z^2}{2 + 2.2127z + 0.926129z^2} = 0.5$$

Το *άνω φράγμα* για τη συνάρτηση $G(u, 10)$ είναι

$$G(u, 10) \leq 0.719838 \cdot e^{-0.560316u}$$

ενώ το *κάτω φράγμα* για τη συνάρτηση $G(u, 10)$ είναι

$$G(u, 10) \geq 0.5 \cdot e^{-0.560316u}$$

- **Φράγματα για τη Κατανομή του Ελλείμματος με βάση το Θεώρημα 2.2 όταν δ=0**

Οι συναρτήσεις $\sigma(z)$ και $\tau(z)$ εκφράζονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$\sigma(z) = \frac{0.333333(3 + 4z + 2z^2)}{2 + 2.2127z + 0.926129z^2}$$

$$\tau(z) = \frac{2.9999 + 3.9999z + 2z^2}{3 + 4z + 2z^2}$$

Η συνάρτηση $\tau(z)$ είναι μία αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0, \infty)$ αφού δεν υπάρχει καμία θετική ρίζα. Οπότε το το *μέγιστο* της συνάρτησης $\tau(x)$ θα είναι στο x

$$\tau_U(x) = \sup_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{2.9999 + 3.9999z + 2z^2}{3 + 4z + 2z^2}$$

$$= \sup_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{2.9999 + 3.9999x + 2x^2}{3 + 4x + 2x^2}$$

ενώ το *ελάχιστο* είναι στο 0 οπότε

$$\tau_L(x) = \inf_{0 \le z \le x, F_e(z) > 0} \frac{2.9999 + 3.9999z + 2z^2}{3 + 4z + 2z^2} = 0.999997$$

Συνεπώς το *άνω φράγμα* για τη συνάρτηση $G(u, 10)$ είναι

$$G(u, 10) \le \frac{2.15117 + 2.86823u + 1.43412u^2}{3 + 4u + 2u^2} \cdot e^{-0.560316u}$$

ενώ το *κάτω φράγμα* για τη συνάρτηση $G(u, 10)$ είναι

$$G(u, 10) \ge 0.5 \cdot e^{-0.560316u}$$

- **Φράγματα για τη Κατανομή του Ελλείμματος με βάση το Θεώρημα 7.1 όταν δ=0**

Στο τελευταίο κομματι θα υπολογίσουμε το φράγμα με βάση το Θεώρημα 7.1. Με βάση τη σχέση (7.4) προκύπτει ένα *άνω φράγμα* για την ουρά της κατανομής του ελλείμματος το οποίο δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}\overline{G}(u, 10) \le{}& \frac{1}{3 + 4u + 2u^2} e^{(-3.11349 - 0.78748i)u}((0.000345941 - 0.000251685i)e^{(0.560316 + 1.57496i)u} \\ & ((1.12195 + 1.3056i) + u)((1.12195 - 1.3056i) + u) + (0.000345941 + 0.000251685i) \\ & e^{0.560316u}((1.12195 - 1.3056i) + u)((1.12195 + 1.3056i) + u) \\ & + 0.00353081e^{(2.55318 + 0.78748i)u}(-0.297614 + u)(1.95085 + u))\end{aligned} \tag{7.30}$$

Χρησιμοποιώντας το *άνω φράγμα* για την ουρά της κατανομής του ελλείμματος (7.4) σε συνδυασμό με τη σχέση (7.2) προκύπτει ο εξής τύπος του *κάτω φράγματος* για τη κατανομή του ελλείμματος.

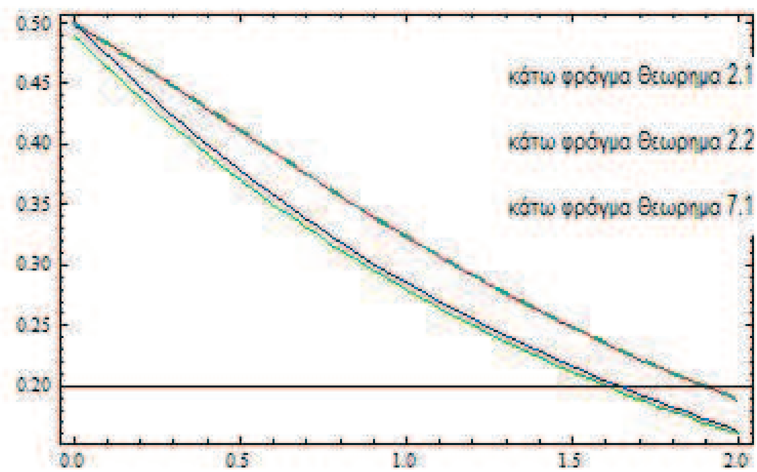
$$G(u,10) \geq (-0.0399633 - 0.0290748i)e^{(-2.55318-0.787481i)u} - (0.0399633 - 0.0290748i)$$

$$e^{(-2.55318+0.787481i)u} + 0.579927e^{-0.560316u} - \frac{1}{3. + 4.u + 2.u^2}e^{(-3.11349-0.78748i)u}$$

$$((0.000345941 + 0.000251685i)e^{0.560316u}((1.12195 - 1.3056i) + u)((1.12195 + 1.3056i) + u)$$

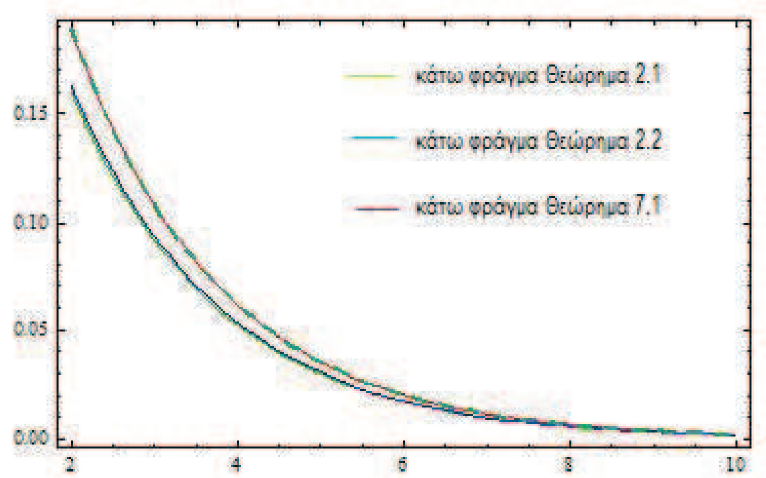
$$+ (0.000345941 - 0.000251685i)e^{(0.560316+1.57496i)u}((1.12195 - 1.3056i) + u)((1.12195 + 1.3056i) +$$

$$+ 0.00353081e^{(2.55318+0.78748i)u}(-0.297614 + u)(1.95085 + u))$$



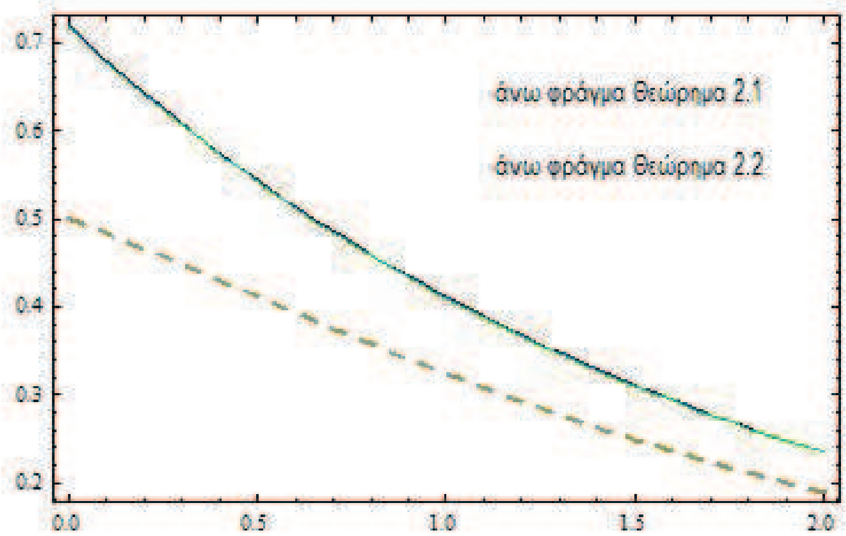
Σχήμα 7.13: *Κάτω φράγματα για τη συνάρτηση $G(u,10)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang κατανομή και $\delta = 0$ στο διάστημα [2,10]*

Το Σχήμα 7.13 και 7.14 απεικονίζει τα τρία *κάτω φράγματα* που προκύπτουν με βάση τα Θεωρήματα 2.1, 2.2 και 7.1. Το καλύτερο *κάτω φράγμα* είναι αυτό που αποτελεί λύση

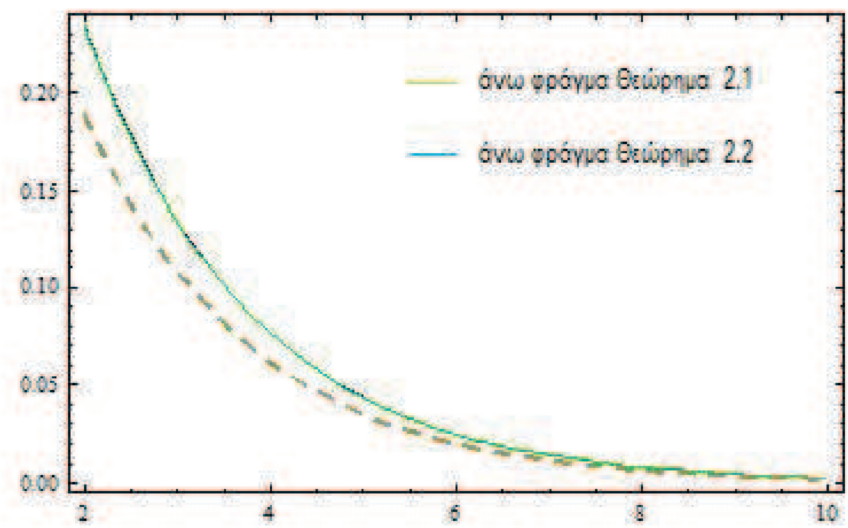


Σχήμα 7.14: *Κάτω φράγμα για τη συνάρτηση $G(u, 10)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang κατανομή και $\delta = 0$ στο διάστημα [2,10]*

του Θεωρήματος 7.1, αφού όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε και στα Σχήματα είναι αυτό που πλησιάζει σε πολύ μεγάλο βαθμό τη συνάρτηση $G(u, 10)$ τόσο που να τη τέμνει. Επειδή παρατηρήσαμε μια απότομη μεταβολή των συναρτήσεων καθώς το αποθεματικό αρχίζει να αυξάνεται απομονώσαμε το διάστημα $[0, 2]$ σε ένα διαφορετικό διάγραμμα. Μελετώντας αναλυτικά τη συμπεριφορά των φραγμάτων παρατηρούμε ότι το *κάτω φράγμα* που προκύπτει από το Θεώρημα 2.1 (πράσινη γραμμή) είναι ελάχιστα καλύτερο από αυτό του Θεωρήματος 2.2 αφού συμβαίνει να συμπίπτουν στο μεγαλύτερο βαθμό τους. Ειδικά στο διάγραμμα 7.13 παρατηρούμε τη μεγάλη απόκλιση που έχει το φράγμα του Θεωρήματος 7.1 με τα υπόλοιπα *κάτω φράγματα.* Στη συνέχεια καθώς το αποθεματικό εξελίσσεται τα τρία φράγματα αρχίζουν να πλησιάζουν και ακολούθως να τέμνουν τη συνάρτηση $G(u, 10)$.Αναφορικά με τα *άνω φράγματα* που προκύπτουν από το Θεώρημα 2.1 και 2.2 όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.15 τα δύο φράγματα συμπίπτουν μεταξύ τους κάτι που διαπιστώσαμε και στις τρεις προηγούμενες περιπτώσεις. Απομονώσαμε το διάστημα [0,2] για να δούμε πως συμπεριφέρονται για μικρά αποθεματικά. Το φράγμα που προκύπτει με βάση το Θεώρημα 2.1 έχει μία σχετική απόκλιση από τη συνάρτηση $G(u, 10)$. Στο επόμενο Σχήμα διαπιστώνουμε όμως ότι καθώς το αποθεματικό αυξάνεται το φράγμα πλησιάζει τη συνάρτηση $G(u, 10)$ και για μεγάλα αποθεματικά τη τέμνει. Συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι το φράγμα που προέκυψε είναι αρκετά ικανοποιητικό.



Σχήμα 7.15: *Άνω φράγματα για τη συνάρτηση $G(u, 10)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang κατανομή και $\delta = 0$ στο διάστημα [0,2]*



Σχήμα 7.16: *Άνω φράγματα για τη συνάρτηση $G(u, 10)$ όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang κατανομή και $\delta = 0$ στο διάστημα [2,10]*

Παρατηρήσεις....

Τέλος θα διατυπώσουμε επιγραμματικά τα συμπεράσματα που προκύπτουν από το Κεφάλαιο αυτό.

1. Τα φράγματα που προκύπτουν για τη κατανομή του ελλείμματος με βάση το Θεώρημα 2.1 και 2.2 όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη εκθετικών κατανομών ισούται μεταξύ τους.

2. Όταν αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη εκθετικών κατανομών τότε η κατανομή του ελλείμματος ακολουθεί και αυτή μείξη εκθετικών κατανομών.

3. Όταν αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang κατανομή τότε η κατανομή του ελλείμματος φαίνεται να ακολουθεί μείξη εκθετικών κατανομών. Στη πραγματικότητα η κατανομή του ελλείμματος αποτελείται από ένα πλήθος συνημίτονων και ημίτονων που μετά από πολλές απλοποιήσεις προκύπτει μια ελλειμματική συνάρτηση.

4. Το Θεώρημα 7.1 παράγει το καλύτερο άνω (κάτω) φράγμα για μείξη εκθετικών κατανομών (Erlang κατανομή) σε σχέση με τα δύο άλλα φράγματα για την κατανομή ελλείμματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία μελετήσαμε φράγματα για συναρτήσεις που ικανοποιούν μια ανανεωτική ελλειμματική εξίσωση όπως η πιθανότητα χρεοκοπίας, ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και η κατανομή του ελλείμματος με στόχο να δούμε ποσό καλά μπορούν να φράξουν μια συνάρτηση αυτής της μορφής όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν κατανομές με ελαφριά δεξιά ουρά, όπως εκθετική κατανομή, μείξη εκθετικών κατανομών και Erlang κατανομής.

Με βάση συγκριμένα παραδείγματα που ορίσαμε για τις συναρτήσεις, άλλες πιο απλές και άλλες περισσότερο περίπλοκες καταλήξαμε σε πολύ ενδιαφέροντα συμπεράσματα για τον τρόπο με τον οποίο φράσσονται οι συναρτήσεις αυτές.

Στη μελέτη αυτή χρησιμοποιήσαμε τρία πολύ σημαντικά Θεωρήματα για την εύρεση των φραγμάτων, αυτά των Wiimot et Lin(2001) και του G. Psarrakos(2008) τα οποία και βοήθησαν σημαντικά στην λήψη των αποτελεσμάτων.

Εύκολα διαπιστώσαμε ότι όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή σε οποιαδήποτε από τις τρεις περιπτώσεις τα φράγματα που προκύπτουν με βάση το Θεώρημα 2.1 και 2.2 των Wiimot et Lin(2001), είναι ακριβή και συμπίπτουν με τη πραγματική τιμή της συνάρτησης καθώς και μεταξύ τους.

Στη συνέχεια μελετώντας τις συναρτήσεις όταν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι μείξη εκθετικών κατανομών τα αποτελέσματα διαφοροποιούνται. Γενικά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το άνω και το κάτω φράγμα είναι αρκετά ικανοποιητικά σε κάθε περίπτωση. Στη περίπτωση της πιθανότητας χρεοκοπίας παρατηρούμε ότι και τα δύο φράγματα φράσσουν ικανοποιητικά τη συνάρτηση. Στη δεύτερη περίπτωση, του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, που εξαρτάται από τον συντελεστή προεξόφλησης, παρατηρούμε ότι καθώς ο συντελεστής προεξόφλησης αυξάνεται τόσο καλύτερα γίνονται τα φράγματα. Το ίδιο συμβαίνει και για τη συνάρτηση της κατανομής του ελλείμματος που είναι συνάρτηση του ελλείμματος. Όσο το έλλειμμα αυξάνει τόσο τα φράγματα πλησιάζουν τη συνάρτηση.

Τέλος, όμοια αποτελέσματα συναντούμε και στη περίπτωση που οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang κατανομή. Παρατηρώντας τη διαγραμματική απεικόνιση διαπιστώνουμε ότι τα φράγματα πλησιάζουν πολύ τη συνάρτηση της πιθανότητας χρεοκοπίας. Ενώ για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας τα φράγματα γίνονται καλύτερα όσο ο συντελεστής προεξόφλησης αυξάνεται. Και για τη συνάρτηση της κατανομής του ελλείμματος τα πράγματα δε διαφοροποιούνται αφού τα φράγματα προσεγγίζουν πολύ ικανοποιητικά τη συνάρτηση. Αυτό που παρατηρούμε στη περίπτωση που οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang κατανομή είναι ότι έχουν γρήγορη πτώση καθώς το αποθεματικό αυξάνεται. Ένα ακόμα αποτέλεσμα που προκύπτει από τη μελέτη των φραγμάτων είναι ότι τα φράγματα με βάση το Θεώρημα του G. Psarrakos είναι αρκετά καλύτερα σε σχέση με τα φράγματα των των Wiimot et Lin. Επίσης μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι στη περίπτωση που ο συντελεστής προεξόφλησης είναι μηδενικός και όταν $w(x, y) = 1$ τα φράγματα του Θεωρήματος 2.1 και 2.2 δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα σε κάθε περίπτωση.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Παράρτημα Α

Α. ERLANG ΚΑΤΑΝΟΜΗ - ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

Υπολογισμός της κατανομής των αποζημιώσεων

$$f[x\_] := \frac{8}{3}x^3 e^{-2x};$$

$$ouraF[x\_] := \int_x^{\infty} \frac{8}{3}y^3 e^{-2y} dy;$$

$$Solve[ouraF[x]]$$

$$ouraF[x] := \frac{e^{-2x}(3 + 2x(3 + x(3 + 2x)))}{8}$$

Υπολογισμός της κατανομής ισορροπίας

$$\bar{F}e[x\_] := \frac{1}{2}\int_x^{\infty} \frac{1}{3}e^{-2y}(3 + 2y(3 + y(3 + 2y)))dy;$$

$$Solve[\bar{F}e[x]]$$

$$\bar{F}e[x_] := \frac{e^{-2x}(3 + (3 + 6x) + (3 + 6x + 6x^2) + (3 + 6x + 6x^2 + 4x^3))}{6}$$

Υπολογισμός της πυκνότητας κατανομής ισορροπίας, με την εύρεση της παραγώγου

$$D[1 - \frac{1}{6}e^{-2x}(6 + 9x + 6x^2 + 2x^3), x]$$

$$-\frac{1}{6}e^{-2x}(9 + 12x + 6x^2) + \frac{1}{3}e^{-2x}(6 + 9x + 6x^2 + 2x^3)$$

Απλοποιήση της πυκνότητας κατανομής ισορροπίας

$$Simplify[-\frac{1}{6}e^{-2x}(9+12x+6x^2)+\frac{1}{3}e^{-2x}(6+9x+6x^2+2x^3)]$$

$$\frac{1}{6}e^{-2x}(3+6x+6x^2+4x^3)$$

Εύρεση του συντελεστή προσαρμογής

$$NSolve[(\frac{2}{2-r})^4-1-4r==0,r]$$

$$\{\{r\to 3.04932\},\{r\to 2.12104+1.10539i\},\{r\to 2.12104-1.10539i\},\{r\to 0.458605\}\}$$

Εύρεση μετασχηματισμού Laplace της πυκνότητας κατανομής ισορροπίας

$$LaplaceTransform[\frac{1}{6}e^{-2x}(3+6x+6x^2+4x^3),x,s]$$

$$\frac{1}{6}(\frac{24}{(s+2)^4}+\frac{12}{(s+2)^3}+\frac{6}{(s+2)^2}+\frac{3}{s+2})$$

Μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας

$$LPsi[s\_]:=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{6}(\frac{24}{(s+2)^4}+\frac{12}{(s+2)^3}+\frac{6}{(s+2)^2}+\frac{3}{s+2}))}{s(1-\frac{1}{2}\frac{1}{6}(\frac{24}{(s+2)^4}+\frac{12}{(s+2)^3}+\frac{6}{(s+2)^2}+\frac{3}{s+2}))};$$

$$Simplify[LPsi[s]]$$

$$\frac{40+40s+15s^2+2s^3}{32+104s+88s^2+31s^3+4s^4}$$

Αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας

$$InverseLaplaceTransform[\frac{40+40s+15s^2+2s^3}{32+104s+88s^2+31s^3+4s^4},s,t]//N$$

$$-0.00525617i(-7.00644ie^{-3.04932u}+(7.70613-5.63291i)e^{(-2.12104-1.10539i)u}$$

$$-(7.70613+5.63291i)e^{(-2.12104+1.10539i)t}+113.398ie^{-0.458605u})$$

Θεώρημα 2.1

Υπολογισμός ολοκληρώματος

$$a(z) = \frac{e^{\kappa z}\overline{F}_e(z)}{\int_z^\infty e^{\kappa y} f_e(y)\mathrm{d}y}, \quad z > 0$$

Υπολογισμός άνω άκρου και απλοποίηση

$$Simplify[e^{0.4586x}\frac{1}{6}e^{-2x}(6+9x+6x^2+2x^3)]$$

$$\frac{1}{6}e^{-1.5414x}(6+9x+6x^2+2x^3)$$

Υπολογισμός κάτω άκρου και απλοποίηση

$$ab[z\_] := \int_z^\infty e^{0.4586x}\frac{1}{6}e^{-2x}(3+6x+6x^2+4x^3)dx;$$

$$Solve[ab[z]]$$

$$e^{-1.5414z}0.708596 + (0.546115 + 1.09223z) + (0.420891 + 0.841781z + (0.841781)z^2)$$

$$+ (0.32438 + 0.648761z + 0.648761z^2 + (0.432507)z^3)$$

Απλοποιήση της πυκνότητας κατανομής ισορροπίας

$$Simplify\Big[(\frac{1}{6}e^{-1.5414z}(6+9z+6z^2+2z^3))/(e^{-1.5414z}$$

$$(0.708595 + (0.5461147 + 1.092229z) + (0.42089 + 0.841781z + (0.84178)z^2) +$$

$$(0.32438 + 0.64876z + 0.64876z^2 + (0.4325)z^3)))\Big]$$

$$a[z\_] = \frac{(0.333333(1.31291+z)(2.285+1.68709z+z^2))}{(1.99998+2.58277z+1.49054z^2+0.4325z^3)}$$

Παραγώγιση και απλοποίηση της συνάρτησης $a(z)$

$$Simplify[D[\frac{(0.333333(1.31291+z)(2.285+1.68709z+z^2))}{(1.99998+2.58277z+1.49054z^2+0.4325z^3)},z]]$$

$$-3.28\cdot 10^{-16}e^{1.5414z}(-0.602275+z)z(2.00828+z)(0.842606+z(0.593729+z))$$

$$(3.5323+z(2.50012+z))+5.551\cdot 10^{-17}(1.15827\cdot 10^{15}+z)(0.808773+z(1.45696+z))$$

$$(8.01115+z(5.13688+z))-2.5327\cdot 10^{-16}e^{1.5414z}(-0.93784+z)z^2(1.3129+z)$$

$$(1.27954+z(0.93784+z))(2.285+z(1.687+z))\backslash(4.9343\cdot 10^{-16}e^{1.5414z}(-0.93784+z)$$

$$z^2(1.27954+z(0.93784+z))+0.4325(1.51902+z)(3.04409+z(1.92731+z)))^2$$

Υπολογισμός ακροτάτων της συνάρτησης $a'(z)$

$$NSolve[-3.28\cdot 10^{-16}e^{1.5414z}(-0.602275+z)z(2.00828+z)(0.842606+z(0.593729+z))$$

$$(3.5323+z(2.50012+z))+5.551\cdot 10^{-17}e^{0.z}(1.15827\cdot 10^{15}+z)(0.808773+z(1.45696+z))$$

$$(8.01115+z(5.13688+z))-2.5327\cdot 10^{-16}e^{1.5414z}(-0.93784+z)z^2(1.3129+z)$$

$$(1.27954+z(0.93784+z))(2.285+z(1.687+z))/(4.9343\cdot 10^{-16}e^{1.5414z}(-0.93784+z)$$

$$z^2(1.27954+z(0.93784+z))+0.4325(1.51902+z)(3.04409+z(1.92731+z)))^2==0,z]$$

$$\{\{z\to -2.56844-1.18923i\},\{z\to -2.56844+1.18923i\},\{z\to -0.72848-0.527342i\}$$

$$,\{z\to -0.72848+0.527342i\}\}$$

Διαγραμματική απεικόνιση φραγμάτων

$$Anwfragma[u\_] := \frac{(0.333333(1.31291+u)(2.285+1.68709u+u^2))}{(1.99998+2.58277u+1.49054u^2+0.4325u^3)}e^{-0.4586u};$$

$$Katwfragma[u\_] := 0.499521e^{-0.4586u};$$

$$Psi[u_] := -0.036827e^{-3.0493u} - (0.0296+0.0405i)e^{(-2.121-1.10539i)u} -$$

$$(0.0296-0.0405i)e^{(-2.121+1.10539i)u} + 0.596042e^{-0.4586u};$$

$$Plot[\{Anwfragma[u], Katwfragma[u], Psi[u]\}, \{u, 0, 10\}, PlotStyle \rightarrow$$

$$RGBColor[0,1,0], RGBColor[1,0,0], \{Dashing[\{0.02, 0.02\}]\}, Frame \rightarrow True,$$

$$AxesLabel \rightarrow u]$$

Παράρτημα Β

Β. ΜΕΙΞΗ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ - ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ LAPLACE ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

Υπολογισμός της κατανομής ισορροπίας

$$\overline{F}[x\_] := \frac{1}{2}e^{-3x} + \frac{1}{2}e^{-7x};$$

$$\overline{F}_e[x\_] := \frac{\int_x^{\infty}(\frac{1}{2}e^{-3y} + \frac{1}{2}e^{-7y}), dy}{\frac{5}{21}};$$

$$Solve[\overline{F}_e[x]]$$

$$\frac{21}{5}\frac{e^{-7x}(3+7e^{4x})}{42}$$

Υπολογισμός της πυκνότητας της κατανομής ισορροπίας

$$D[1 - \frac{21}{5}(\frac{1}{6}e^{-3x} + \frac{1}{14}e^{-7x}), x]$$

$$-\frac{21}{5}(-\frac{1}{2}e^{-7x} - \frac{1}{2}e^{-3x})$$

Υπολογισμός της συνάρτησης $\overline{G}_\delta(x) = \frac{Ga(x)}{Gb(x)}$

$$OuraG[x\_] := \frac{\int_x^{\infty}(\frac{1}{2}e^{-(p+3)y} + \frac{1}{2}e^{-(p+7)y})dy}{\int_0^{\infty}(\frac{1}{2}e^{-(p+3)y} + \frac{1}{2}e^{-(p+7)y})dy};$$

$$Solve[OuraG[x]]$$

$$OuraG[x] := \frac{\frac{\frac{e^{-3x}}{3+p} + \frac{e^{-7x}}{7+p}}{2}}{\frac{5+p}{(3+p)(7+p)}};$$

$$Simplify[OuraG[x]]$$

$$\frac{e^{-7x}(3+p+e^{4x}(7+p))}{2(5+p)}$$

Υπολογισμός της συνάρτησης $g_\delta(x)$

$$Simplify[D[1 - OuraG[x], x]]$$

$$\frac{e^{-7x}(7(3+p) + 3e^{4x}(7+p))}{2(5+p)}$$

Υπολογισμός της συνάρτησης $\xi_\delta(x)$

$$xid := \frac{1+\frac{2}{5}}{\frac{21}{5}\int_0^\infty(\frac{1}{2}e^{-(p+7)x} + \frac{1}{2}e^{-(p+3)x})dx} - 1;$$

$$Solve[xid]$$

$$\frac{(3+p)(7+p)}{3(5+p)} - 1$$

Μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\widehat{g}_\delta(s)$ και $\widehat{H}_\delta(s)$

$$LaplaceTransform[\frac{e^{-7x}(7(3+p) + 3e^{4x}(7+p))}{2(5+p)}, x, s]$$

$$\frac{\frac{3(7+p)}{s+3} + \frac{7(3+p)}{s+7}}{2(5+p)}$$

$$LaplaceTransform[\frac{e^{-7u}(3+p+e^{4u}(7+p))}{2(5+p)}, u, s]$$

$$\frac{\frac{7+p}{s+3} + \frac{3}{s+7} + \frac{p}{s+7}}{2(5+p)}$$

Μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\widehat{\varphi}(s)$

$$Lpsi[u\_] := \frac{\frac{3}{2}(\frac{1}{(3+p)(3+s)} + \frac{1}{(7+p)(7+s)})}{1 - \frac{3}{2}(\frac{3}{(3+p)(3+s)} + \frac{7}{(7+p)(7+s)})};$$

$$FullSimplify[Lpsi[u]]$$

$$\frac{3(29+5s+p(5+s))}{21(1+s)(6+s)+p^2(3+s)(7+s)+p(147+5s(17+2s))}$$

Έυρεση της λύσης της εξίσωσης Lundberg

$$Ri[p\_] := 1 + d - \frac{1}{3}p - (\frac{3}{2(p+3)} + \frac{7}{2(p+7)});$$

$$d = 0.5;$$

$$Print[Ri[p]]$$

$$3.5 - p - 3(\frac{3}{2(3+p)} + \frac{7}{2(7+p)})$$

$$NSolve[3.5 - p - 3(\frac{3}{2(3+p)} + \frac{7}{2(7+p)}) == 0, p]$$

$$\{\{p \to -7.87859\}, \{p \to 3.4572\}, \{p \to -2.42861\}\}$$

Αντιστριφή του μετασχηματισμού Laplace της συνάρτησης $\varphi_\delta(s)$

$$\varphi_\delta[s\_] := \frac{(3(29+5s+p(5+s)))}{(21(1+s)(6+s)+p^2(3+s)(7+s)+p(147+5s(17+2s)))};$$

$$p := 3.4572;$$

$$Simplify[\varphi_\delta[s]]$$

$$\frac{2.05642+0.375741s}{13.1094+8.29901s+s^2}$$

$$InverseLaplaceTransform[(2.05642+0.375741s)/(13.1094+8.29901s+s^2), s, u]$$

$$0.0652102e^{-6.17657u}+0.310531e^{-2.12244u}$$

Αντιστριφή του μετασχηματισμού Laplace της συνάρτησης $\varphi_\delta(s)$

$$Solve[\int_0^\infty 0.0591212e^{-(7-k)x}(-41.8288e^{4x}+7(6.4572+10.4572e^{4x}))dx]$$

$$NSolve[Lki] := \frac{21.-4.59238k}{(-7.+k)(-3.+k)} - 1 - 1.66141 == 0, k]$$

$$\{\{k \to 6.17656\}, \{k \to 2.12245\}\}$$

Θεώρημα 2.1

Υπολογισμός της συνάρτησης $a(z)$

$$a[z\_] := \frac{0.0509534e^{-(7-2.29005)u}(7.81289 + 11.8129e^{4u})}{0.0509534 \int_z^\infty e^{-(7-2.29005)x}(-47.2516e^{4x} + 7(7.81289 + 11.8129e^{4x}))dx};$$

$Solve[a[z]]$

$$a[z\_] := \frac{(e^{-4.70995z}(0.398093 + 0.601907e^{4z}))}{(0.0509534(11.6116e^{-4.70995z} + 49.9172e^{-0.70995z}))};$$

$Simplify[a[z]]$

$$\frac{7.81288e^{0.70995z} + 11.8129e^{4.70995z}}{11.6116e^{0.70995z} + 49.9172e^{4.70995z}}$$

Παραγώγιση της συνάρτησης $a(z)$ και απλοποίηση

$$Simplify[D[\frac{7.81288e^{0.70995z} + 11.8129e^{4.70995z}}{11.6116e^{0.70995z} + 49.9172e^{4.70995z}}, z]$$

$$\frac{-0.0000840408e^{1.4199z} - 1011.33e^{5.4199z} - 0.00413616e^{9.4199z}}{(11.6116e^{0.70995z} + 49.9172e^{4.70995z})^2}$$

Εύρεση ριζών της παραγώγου. Η παράγωγος δεν έχει ρίζες που να τη μηδενίζουν και είναι παντού αρνητική

$$NSolve[\frac{-0.0000840408e^{1.4199z} - 1011.33e^{5.4199z} - 0.00413616e^{9.4199z}}{(11.6116e^{0.70995z} + 49.9172e^{4.70995z})^2} == 0, z]$$

Άνω και κάτω φράγμα

$$Anwfragma[u\_] := 0.102202e^{-2.80202u}$$

$$KatwFragma[u_] := \frac{7.81288e^{0.19798u} + 11.8129e^{4.19798u}}{13.0277e^{3u} + 179.001e^{7u}}$$

Παράρτημα Γ

Γ. ΜΕΙΞΗ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ - ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΕΛΛΕΙΜΜΑΤΟΣ

Υπολογισμός μετασχηματισμού Laplace της κατανομής ισορροπίας και της πυκνότητας κατανομής ισορροπίας

$$LaplaceTransform[2(\frac{1}{6}e^{-2x}+\frac{1}{6}e^{-3x}+\frac{1}{6}e^{-x}),x,s]$$

$$2(\frac{1}{6(s+1)}+\frac{1}{6(s+2)}+\frac{1}{6(s+3)})$$

$$LaplaceTransform[2(\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{3}e^{-3x}+\frac{1}{6}e^{-x}),x,s]$$

$$2(\frac{1}{6(s+1)}+\frac{1}{2(s+2)}+\frac{1}{3(s+3)})$$

Μετασχηματισμός Laplace $\overline{F}_e[x,y] := 2(\frac{1}{6}e^{-2(x+y)}+\frac{1}{6}e^{-3(x+y)}+\frac{1}{6}e^{-(x+y)})$

$$2\frac{1}{6}(e^{-2y}LaplaceTransform[e^{-2x},x,s]+e^{-3y}LaplaceTransform[e^{-3x},x,s]$$

$$+e^{-y}LaplaceTransform[e^{-x},x,s])$$

$$\frac{1}{3}(\frac{e^{-y}}{s+1}+\frac{e^{-2y}}{s+2}+\frac{e^{-3y}}{s+3})$$

Απλοποίηση του μετασχηματισμού Laplace της κατανομής του ελλείμματος

$$LG[u,y\_] := \frac{(\frac{1}{2}(2(\frac{1}{6(s+1)}+\frac{1}{6(s+2)}+\frac{1}{6(s+3)})-\frac{1}{3}(\frac{e^{-y}}{s+1}+\frac{e^{-2y}}{s+2}+\frac{e^{-3y}}{s+3})))}{(1-\frac{1}{2}(2(\frac{1}{6(s+1)}+\frac{1}{2(s+2)}+\frac{1}{3(s+3)})))};$$

$$Simplify[LG[u,y]]$$

$$\frac{(e^{-3y}(-1+e^{y})(2+3s+s^2+e^{y}(5+7s+2s^2)+e^{2y}(11+12s+3s^2)))}{(17+43s+30s^2+6s^3)}$$

Περίπτωση που το $y = 2$

$$LGa[u,y\_] := \frac{e^{-3y}(-1+e^{y})(2+3s+s^2+e^{y}(5+7s+2s^2)+e^{2y}(11+12s+3s^2))}{17+43s+30s^2+6s^3};$$

$y := 2;$

$Print["LGa[u,y] === ", LGa[u,y]]$

$$LGa[u,y] = \frac{(-1+e^2)(2+3s+s^2+e^2(5+7s+2s^2)+e^4(11+12s+3s^2))}{e^6(17+43s+30s^2+6s^3)}$$

Αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace της κατανομής του ελλείμματος

$$InverseLaplaceTransform[\frac{(-1+e^2)(2+3s+s^2+e^2(5+7s+2s^2)+e^4(11+12s+3s^2))}{e^6(17+43s+30s^2+6s^3)}$$

$, s, u]//N$

$- 0.00109985(-0.971729e^{2.-2.80542u} - 0.833641e^{4.-2.80542u} - 2.22387e^{2.-1.53785u}$

$- 0.771925e^{4.-1.53785u} - 1.6041e^{2.-0.656728u} - 5.59397e^{4.-0.656728u} - 1.28126e^{-2.80542u}$

$- 0.534095e^{-1.53785u} - 0.584487e^{-0.656728u})$

Θεώρημα 2.1

Υπολογισμός της συνάρτησης $a(z)$ όταν $y = 2$

$$a(z) = \frac{e^{\kappa z}[\overline{F}_e(z) - \overline{F}_e(z+y)]}{\int_z^{\infty} e^{\kappa y} f_e(y)\mathrm{d}y} = \frac{aa(z)}{ab(z)}$$

Υπολογισμός άνω άκρου και απλοποίηση

$$aa[z\_] := e^{0.686z} 2(\frac{1}{6}e^{-2z} + \frac{1}{6}e^{-3z} + \frac{1}{6}e^{-z}) - 2(\frac{1}{6}e^{-2(z+y)} + \frac{1}{6}e^{-3(z+y)} + \frac{1}{6}e^{-(z+y)});$$

$$y := 2;$$

$$Print[aa[z] ===, aa[z]]$$

$$e^{0.686z}(2(\frac{e^{-3z}}{6} + \frac{e^{-2z}}{6} + \frac{e^{-z}}{6}) - 2(\frac{e^{-2-z}}{6} + \frac{1}{6}e^{-3(2+z)} + \frac{1}{6}e^{-2(2+z)}))$$

$$Simplify[e^{0.686z}(2(\frac{e^{-3z}}{6} + \frac{e^{-2z}}{6} + \frac{e^{-z}}{6}) - 2(\frac{e^{-2-z}}{6} + \frac{1}{6}e^{-3(2+z)} + \frac{1}{6}e^{-2(2+z)}))]$$

Υπολογισμός κάτω άκρου και απλοποίηση

$$ab[z\_] := \int_z^{\infty} e^{0.686x} 2(\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{1}{6}e^{-x})dx;$$

$$Solve[ab[z]]$$

$$0.288101e^{-2.314z} + 0.761035e^{-1.314z} + 1.06157e^{-0.314z}$$

$$a[z\_] := \frac{(\frac{1}{3}e^{-6}e^{-2.314z}(-1+e^2)(1+e^2+e^4+e^{2+z}+e^{4+z}+e^{4+2z}))}{(0.288101e^{-2.314z} + 0.761035e^{-1.314z} + 1.06157e^{-0.314z})};$$

$$Simplify[a[z]]$$

$$\frac{0.00527896e^{1.628z}(62.9872 + 61.9872e^{z} + 54.5982e^{2z})}{0.288101e^{1.628z} + 0.761035e^{2.628z} + 1.06157e^{3.628z}}$$

Παραγώγιση της ποσότητας $a(z)$ και απλοποίηση

$$Simplify[D[\frac{(0.00527896e^{1.628z}(62.9872 + 61.9872e^{z} + 54.5982e^{2z}))}{(0.288101e^{1.628z} + 0.761035e^{2.628z} + 1.06157e^{3.628z})}, z]]$$

$$\frac{1.9893 \cdot 10^{-7}e^{3.256z} - 0.158774e^{4.256z} - 0.539886e^{5.256z} - 0.128031e^{6.256z} - 3.225 \cdot 10^{-6}e^{7.256z}}{(0.288101e^{1.628z} + 0.761035e^{2.628z} + 1.06157e^{3.628z})^2}$$

Υπολογισμός ριζών της πρώτης παραγώγου

$$NSolve[\frac{(-0.539886e^{5.256z} - 0.128031e^{6.256z})}{(0.288101e^{1.628z} + 0.761035e^{2.628z} + 1.06157e^{3.628z})^2} == 0, z]$$

$$\{\{z \to 1.43909 + 3.14159i\}\}$$

Υπολογισμός ακροτάτων της $a'(z)$ και $a(z)$

$$Paragwgosa[z\_] := \frac{(-0.539886e^{5.256z} - 0.128031e^{6.256z})}{(0.288101e^{1.628z} + 0.761035e^{2.628z} + 1.06157e^{3.628z})^2};$$

$$a[z\_] := \frac{(0.00527896e^{1.628z}(62.9872 + 61.9872e^{z} + 54.5982e^{2z}))}{(0.288101e^{1.628z} + 0.761035e^{2.628z} + 1.06157e^{3.628z})};$$

$z := 0;$

$Print[Paragwgosa[z]]$

$Print[a[z]]$

-0.149923

0.449118

Θεώρημα 2.2

Υπολογισμός της συνάρτησης $t(z)$ όταν $y = 2$ και απλοποίηση

$$t[z\_] := \frac{2((\frac{1}{6}e^{-2z} + \frac{1}{6}e^{-3z} + \frac{1}{6}e^{-z}) - (\frac{1}{6}e^{-2(z+y)} + \frac{1}{6}e^{-3(z+y)} + \frac{1}{6}e^{-(z+y)}))}{2(\frac{1}{6}e^{-2z} + \frac{1}{6}e^{-3z} + \frac{1}{6}e^{-z})};$$

$$y := 2;$$

$$Simplify[t[z]]$$

$$\frac{(-1+e^2)(1+e^2+e^4+e^{2+z}+e^{4+z}+e^{4+2z})}{e^6(1+e^z+e^{2z})}$$

Υπολογισμός ακέραιου κλάσματος

$$N[\frac{(-1+e^2)(1+e^2+e^4+e^{2+z}+e^{4+z}+e^{4+2z})}{e^6(1+e^z+e^{2z})}]$$

$$\frac{0.0158369(62.9872+e^{2.+z}+e^{4.+z}+e^{4+2z})}{1+e^z+e^{2z}}$$

Παραγώγιση και απλοποίηση για τη συνάρτηση $t(z)$

$$D[\frac{(0.0158369(62.9872+e^{2+z}+e^{4+z}+e^{4+2z}))}{(1+e^z+e^{2z})}, z]$$

$$\frac{0.0158369(62.9872+e^{2+z}+e^{4+z}+e^{4+2z})(e^z+2e^{2z})}{(1+e^z+e^{2z})^2} + \frac{0.0158369(e^{2+z}+e^{4+z}+2e^{4+2z})}{1+e^z+e^{2z}}$$

$$Simplify[$$

$$\frac{0.0158369(62.9872+e^{2+z}+e^{4+z}+e^{4+2z})(e^z+2e^{2z})}{(1+e^z+e^{2z})^2} + \frac{0.0158369(e^{2+z}+e^{4+z}+2e^{4+2z})}{1+e^z+e^{2z}}]$$

$$-0.997522e^z - 1.99504e^{2z} + 0.0158369e^{2+z} + 0.0158369e^{4+z} + 0.0316738e^{4+2z}$$

$$-0.0158369e^{2+3z}/(1+e^z+e^{2z})^2$$

Εύρεση της συνάρτησης $\sigma(z)$

$$\sigma(z) = \frac{e^{\kappa z}\overline{F}_e(z)}{\int_z^\infty e^{\kappa y} f_e(y)\mathrm{d}y}$$

Υπολογισμός του άνω άκρου

$$sigma[z\_] := e^{0.685z} 2(\frac{1}{6}e^{-2z} + \frac{1}{6}e^{-3z} + \frac{1}{6}e^{-z});$$

$$Simplify[sigma[z]]$$

$$\frac{1}{3}e^{-2.315z}(1 + e^z + e^{2z})$$

Υπολογισμός του κάτω άκρου

$$sigmab[z\_] := \int_z^\infty e^{0.685x} 2(\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{1}{6}e^{-x})dz;$$

$$Solve[sigmab[z]]$$

$$0.287977e^{-2.315z} + 0.760456e^{-1.315z} + 1.0582e^{-0.315z}$$

Απλοποίηση της συνάρτησης $Sigma(z)$

$$Sigma[z\_] := \frac{\frac{1}{3}e^{-2.315z}(1 + e^z + e^{2z})}{0.287977e^{-2.315z} + 0.760456e^{-1.315z} + 1.0582e^{-0.315z}};$$

$$Simplify[Sigma[z]]$$

$$\frac{0.333333e^{(}1.63z)(1. + e^z + e^{(}2z))}{0.287977e^{1.63z} + 0.760456e^{2.63z} + 1.0582e^{3.63z}}$$

Παραγώγιση της συνάρτησης $Sigma(z)$ και απλοποίηση της $Sigma'(z)$

$$Simplify[D[\frac{0.333333e^{(}1.63z)(1. + e^z + e^{(}2z))}{0.287977e^{1.63z} + 0.760456e^{2.63z} + 1.0582e^{3.63z}}, z]]$$

$$\frac{(-0.157493e^{4.26z} - 0.513481e^{5.26z} - 0.0992479e^{6.26z})}{(0.287977e^{1.63z} + 0.760456e^{2.63z} + 1.0582e^{3.63z})}$$

Υπολογισμός ριζών της παραγώγου $Sigma'(z)$

$$NSolve[\frac{(-0.157493e^{4.26z} - 0.513481e^{5.26z} - 0.0992479e^{6.26z})}{(0.287977e^{1.63z} + 0.760456e^{2.63z} + 1.0582e^{3.63z})} == 0, z]$$

Οι συναρτήσεις $Sigma(z)$ και $\tau(z)$ είναι φθίνουσες. Υπολόγιμός άνω και κάτω φράγματος και διαγραμματική απεικόνιση

$$Anwfragma[u\_] := 0.449987e^{-0.685u}$$

$$Katwfragma[u\_] := \frac{0.00527896e^{0.945u}(62.9872 + 61.9872.71828^{u} + 54.598e^{2.u})(1. + e^{u} + e^{2u})}{(1. + 2.71828^{u} + e^{2.u})(0.287977e^{1.63u} + 0.760456e^{2.63u} + 1.0582e^{3.63u})};$$

$$Plot[\{Anwfragma[u], Katwfragma[u]\}, \{u, 0, 2\}, PlotStyle \rightarrow$$

$$\{RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0]\}, Frame \rightarrow True,$$

$$AxesLabel \rightarrow u]$$

Παράρτημα Δ

Δ1. ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

$$\text{συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας :}\quad f(x) = \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}, \quad \lambda > 0$$

$$\text{συνάρτηση κατονομής :}\quad F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}, \quad \lambda > 0$$

$$\text{μέση τιμή :} E(X) = \lambda, \quad \lambda > 0$$

$$\text{διακύμανση :} V(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \lambda > 0$$

$$\text{ροπογεννήτρια :} M(X) = \frac{1}{1-\lambda}, \quad \lambda > 0$$

$$\text{πιθανογεννήτρια :} P(X) = \quad -, \quad \lambda > 0$$

$$\text{κ-ροπή :} E(X^k) = \lambda^k \Gamma(k+1), \quad k > -1$$

Α.2 ΜΕΙΞΗ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

$$\text{συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας :}\quad f(x) = \sum_{k=1}^{n} q_k e^{-x\mu_k}, \quad \lambda > 0$$

$$\text{συνάρτηση κατονομής :}\quad F(x) = 1 - \sum_{k=1}^{n} q_k \mu_k e^{-x\mu_k}, \quad \lambda > 0$$

$$\text{μέση τιμή :} E(X) = \sum_{k=1}^{n} q_k (\mu_k)^{-1}, \quad \lambda > 0$$

$$\text{διακύμανση :} V(X) = \sum_{k=1}^{n} q_k (\mu_k)^{-2}, \quad \lambda > 0$$

$$\text{ροπογεννήτρια :} M_x(r) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{\mu_k - r}, \quad \lambda > 0$$

$$\text{πιθανογεννήτρια :} P(X) = \quad -, \quad \lambda > 0$$

Α.3 ERLANG ΚΑΤΑΝΟΜΗ

$$\text{συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας :}\quad f(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x\lambda}, \quad \lambda > 0$$

$$\text{μέση τιμή :} E(X) = \frac{n}{\lambda}, \quad \lambda > 0$$

$$\text{διακύμανση :} V(X) = \frac{n}{\lambda^2}, \quad \lambda > 0$$

$$\text{ροπογεννήτρια :} M_x(r) = (\frac{\lambda}{\lambda - r})^n, \quad \lambda > 0$$

$$\text{πιθανογεννήτρια :} P(X) = \quad -, \quad \lambda > 0$$

Παράρτημα Ε

Ε.1 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ - ΜΕΙΞΗ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Η λύση της ανανεωτικής εξίσωσης, $\varphi_\delta(u)$, όπως υπολογίστηκε στο $Mathematica$ δίνεται από τη σχέση

$$
\begin{aligned}
&(1.5(-483.e^{(-\frac{73.5}{21.+10.p+p^2}-\frac{42.5p}{21.+10.p+p^2}-\frac{5.p^2}{21.+10.p+p^2}-\frac{0.5\sqrt{11025.+7602.p+2017.p^2+272.p^3+16.p^4}}{21.+10.p+p^2})t}\\
&+483.e^{(-\frac{73.5}{21.+10.p+p^2}-\frac{42.5p}{21.+10.p+p^2}-\frac{5.p^2}{21.+10.p+p^2}+\frac{0.5\sqrt{11025.+7602.p+2017.p^2+272.p^3+16.p^4}}{21.+10.p+p^2})t}\\
&-218.e^{(-\frac{73.5}{21.+10.p+p^2}-\frac{42.5p}{21.+10.p+p^2}-\frac{5.p^2}{21.+10.p+p^2}-\frac{0.5\sqrt{11025.+7602.p+2017.p^2+272.p^3+16.p^4}}{21.+10.p+p^2})t}p\\
&+218.e^{(-\frac{73.5}{21.+10.p+p^2}-\frac{42.5p}{21.+10.p+p^2}-\frac{5.p^2}{21.+10.p+p^2}+\frac{0.5\sqrt{11025.+7602.p+2017.p^2+272.p^3+16.p^4}}{21.+10.p+p^2})t}p\\
&-23.e^{(-\frac{73.5}{21.+10.p+p^2}-\frac{42.5p}{21.+10.p+p^2}-\frac{5.p^2}{21.+10.p+p^2}-\frac{0.5\sqrt{11025.+7602.p+2017.p^2+272.p^3+16.p^4}}{21.+10.p+p^2})t}p^2\\
&+23.e^{(-\frac{73.5}{21.+10.p+p^2}-\frac{42.5p}{21.+10.p+p^2}-\frac{5.p^2}{21.+10.p+p^2}+\frac{0.5\sqrt{11025.+7602.p+2017.p^2+272.p^3+16.p^4}}{21.+10.p+p^2})t}p^2\\
&5.e^{(-\frac{73.5}{21.+10.p+p^2}-\frac{42.5p}{21.+10.p+p^2}-\frac{5.p^2}{21.+10.p+p^2}-\frac{0.5\sqrt{11025.+7602.p+2017.p^2+272.p^3+16.p^4}}{21.+10.p+p^2})t}\\
&\qquad\cdot\sqrt{11025.+7602.p+2017.p^2+272.p^3+16.p^4}\\
&+5.e^{(-\frac{73.5}{21.+10.p+p^2}-\frac{42.5p}{21.+10.p+p^2}-\frac{5.p^2}{21.+10.p+p^2}+\frac{0.5\sqrt{11025.+7602.p+2017.p^2+272.p^3+16.p^4}}{21.+10.p+p^2})t}\\
&\qquad\cdot\sqrt{11025.+7602.p+2017.p^2+272.p^3+16.p^4}\\
&+e^{(-\frac{73.5}{21.+10.p+p^2}-\frac{42.5p}{21.+10.p+p^2}-\frac{5.p^2}{21.+10.p+p^2}-\frac{0.5\sqrt{11025.+7602.p+2017.p^2+272.p^3+16.p^4}}{21.+10.p+p^2})t}\\
&\qquad\cdot\sqrt{11025.+7602.p+2017.p^2+272.p^3+16.p^4}\\
&+e^{(-\frac{73.5}{21.+10.p+p^2}-\frac{42.5p}{21.+10.p+p^2}-\frac{5.p^2}{21.+10.p+p^2}+\frac{0.5\sqrt{11025.+7602.p+2017.p^2+272.p^3+16.p^4}}{21.+10.p+p^2})t}\\
&\qquad\cdot\sqrt{11025.+7602.p+2017.p^2+272.p^3+16.p^4}\\
&/((21.+10.p+p^2)\sqrt{11025.+7602.p+2017.p^2+272.p^3+16.p^4})))
\end{aligned}
$$

Βιβλιογραφία

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Stathis Chadjiconstantinidis, Konstadinos Politis, (2007). Two-sided bounds for the distribution of the deficit at ruin in the renewal risk model, Insurance: Mathematics and Economics, 41, 41-52

[2] Hans U. Gerber and Elias S.W. Shiu, (1998), on the time value of ruin.

[3] Stuart A Klugman , Harry H. Panjer , Gordon E. Willmot , (1998), Loss Models From Data to Decisions, Publication John Wiley and Sons, Inc.

[4] X. Sheldon Lin, Gordon E. Willmot, (1999), Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory.

[5] Georgios Psarrakos, (2008), Tail bounds for the distribution of the deficit in the renewal risk model, Insurance: Mathematics and Economics 43 (2008) 197-202.

[6] Georgios Psarrakos , Konstadinos Politis, (2009) A Generalization of the Lundberg Condition in the Sparre Andersen model and some applications, Stochastic Models, 25: 90-109.

[7] Gordon E. Willmot a, X. Sheldon Lin, (1998) Exact and approximate properties of the distribution of surplus before and after ruin, Insurance: Mathematics and Economics 23 91-110.

[8] Gordon E. Willmot (2007) On the discounted penalty function in the renewal risk model with general interclaim times , Insurance: Mathematics and Economics 41 (1998) 17-31.

[9] Gordon E. Willmot, Jun Cai , X. Sheldon Lin, (2001) Lundberg inequalities for renewal equations, Adv. Appl. Prob. 33,674-689.

[10] Gordon E. Willmot, Lin, X. Sheldon, (2001), Lundberg Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications, Springer.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[11] Κ.Ι. Κουτσόπουλου, Αναλογιστικά Μαθηματικά, Μέρος Ι, Θεωρία των Κινδύνων, Αθήνα 2009, Εκδόσεις Συμμετρία.

[12] Σημειώσεις Κ. Πολίτη, μάθημα Θεωρίας Χρεοκοπίας, τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιά.

[13] Σημειώσεις Ε. Χατζηκωνσταντινίδη, μάθημα Θεωρία Κινδύνου Ι, μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου, τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιά.

[14] Σημειώσεις Ε. Χατζηκωνσταντινίδη, μάθημα Θεωρία Κινδύνου ΙΙ, μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου, τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιά.

[15] Γ. Ψαρράκος , Φράγματα προσεγγίσεις και ιδιότητες μονοτονίας στη Θεωρία Κινδύνου, Αθήνα 2007, Διπλωματική Εργασία.

Ευρετήριο ελληνικών όρων

Ευρετήριο ξενόγλωσσων όρων