



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ**

**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ  
ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΜΕΤΑΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΕ  
ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ:  
ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ**

**Νικόλαος Τσότσολας**

*Διδακτορική Διατριβή*

**Υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς**

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2009

Η ΠΑΡΟΥΣΑ ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΕΧΕΙ ΕΚΠΟΝΗΘΕΙ ΜΕ ΤΗΝ ΥΠΟΣΤΗΡΙΞΗ ΤΟΥ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟΥ  
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ "ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΑΡΧΙΚΗ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗ" ΙΙ (ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ)  
ΚΑΙ ΕΙΔΙΚΑ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ "ΗΡΑΚΛΕΙΤΟΣ".



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ  
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΤΑΜΕΙΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ



Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ  
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα  
Εκπαίδευσης και Αρχικής  
Επαγγελματικής Κατάρτισης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ

## **ΜΕΛΗ ΕΠΤΑΜΕΛΟΥΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ**

### ***Προεδρεύων***

**Βασίλειος Μπένος**, Καθηγητής  
Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

### ***Μέλη***

**Ιωάννης Σίσκος**, Καθηγητής  
Τμήμα Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

**Αθανάσιος Μυγδαλάς**, Καθηγητής  
Γενικό Τμήμα Πολυτεχνικής Σχολής, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

**Νικόλαος Ματσατσίνης**, Καθηγητής  
Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης, Πολυτεχνείο Κρήτης

**Ιωάννης Θεοδωρίδης**, Αναπλ. Καθηγητής  
Τμήμα Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

**Δημήτριος Στέγγος**, Επίκουρος Καθηγητής  
Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

**Ευάγγελος Γρηγορούδης**, Επίκουρος Καθηγητής  
Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης, Πολυτεχνείο Κρήτης

**Ημερομηνία υποστήριξης:** 1 Οκτωβρίου 2009

## **ΜΕΛΗ ΤΡΙΜΕΛΟΥΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ**

### ***Επιβλέπων***

**Βασίλειος Μπένος**, Καθηγητής  
Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

### ***Μέλη***

**Ιωάννης Σίσκος**, Καθηγητής  
Τμήμα Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

**Αθανάσιος Μυγδαλάς**, Καθηγητής  
Γενικό Τμήμα Πολυτεχνικής Σχολής, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

# РАНЕЕЗНАМО ПЕРПАА

# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΠΑ

Στη Σάσα

# РАНЕЕЗНАМО ПЕРПАА

## Ευχαριστίες

Η παρούσα διδακτορική διατριβή είναι η κατάληξη ενός μοναδικού ταξιδιού στη διάρκεια του οποίου είχα την τύχη να συνεργαστώ και να υποστηριχτώ από ανθρώπους που συνέβαλαν καθοριστικά στην ολοκλήρωση αυτού του εγχειρήματος.

Νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω τον Καθηγητή Γιάννη Σίσκο με τον οποίο δουλεύω από το 1995 και είναι εκείνος που με έκανε να αγαπήσω της επιστήμη της Επιχειρησιακής Έρευνας. Τις βαθύτερες ευχαριστίες μου προς τον Καθηγητή Βασίλειο Μπένο για την επιστημονική του καθοδήγηση και την ουσιαστική συμβολή του στην εκπόνηση της διατριβής μου, καθώς και προς τον Επίκουρο Καθηγητή Βαγγέλη Γρηγορούδη για τις καίριες και ουσιώδεις υποδείξεις του.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα, συνεργάτη και φίλο Νίκο Χριστοδουλάκη για την πολύτιμη βοήθειά του στον προγραμματισμό του συστήματος υποστήριξης αποφάσεων καθώς και τους Νικήτα Αναστόπουλο και Δημήτρη Κρικρή με τους οποίους συνεργάστηκα στο πλαίσιο εκπόνησης των πτυχιακών τους εργασιών για την προγραμματιστική υλοποίηση αλγορίθμων του Κεφαλαίου 3. Ακόμα θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν στο σχεδιασμό και την υλοποίηση των 18 ερευνών ικανοποίησης που παρατίθενται στο Κεφάλαιο 9.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, την αδελφή μου Βούλα και τη φίλη μου Ελένη Κουτσουράκη για την ηθική και πρακτική υποστήριξή τους καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής μου.

Το μεγαλύτερο ευχαριστώ θέλω να το εκφράσω στη Σάσα για την τεράστια υπομονή της και τη αμέριστη συμπαράστασή της τις αμέτρητες ημέρες και νύχτες μελέτης που ζήσαμε μαζί.

*Νίκος Τσότσολας*

# РАНЕЕЗНАМО ПЕРПАА



## Περίληψη

### **ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΜΕΤΑΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ: Εφαρμογή στα Συστήματα Ποιότητας**

από Νικόλαο Τσότσολα

Ο γραμμικός προγραμματισμός αποτελεί αναμφίβολα το δημοφιλέστερο εργαλείο της επιχειρησιακής έρευνας αλλά και γενικότερα της διοικητικής επιστήμης. Η μεγάλη επιτυχία των εφαρμογών του σε προβλήματα λήψης αποφάσεων θα πρέπει να αποδοθεί, από τη μια πλευρά, στα επιτεύγματα της έρευνας των μαθηματικών και των οικονομολόγων σε θεωρητικό επίπεδο και, από την άλλη πλευρά, στην επαναστατική ανάπτυξη της πληροφορικής επιστήμης και τεχνολογίας.

Σε μεγάλο αριθμό προβλημάτων απόφασης όπως είναι η κατανομή πόρων, η εφοδιαστική, η μέτρηση της ικανοποίησης του πελάτη, κλπ. των οποίων η μοντελοποίηση γίνεται με χρήση μοντέλων γραμμικού προγραμματισμού, η αξία της βέλτιστης λύσης αμφισβητείται τόσο από τους μάντζερ όσο και τους μοντελοποιούς, διότι δεν μπορεί η λύση αυτή να ικανοποιήσει τις υποσχέσεις της. Απαιτείται λοιπόν η αναζήτηση νέων λύσεων (μεταβελτιστοποίηση) όχι μακριά από τη βέλτιστη (near optimal solutions) με νέες προδιαγραφές, και με δεδομένο ότι ο αριθμός τους είναι μη μετρήσιμος εκ των προτέρων.

Η παρούσα διατριβή έχει ως θέμα τη μελέτη υφιστάμενων μεθόδων μεταβελτιστοποίησης (post optimal analysis - robustness analysis) σε προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού και την πρόταση μίας νέας προσέγγισης. Προκειμένου να καταστεί δυνατή η σύγκριση και αξιολόγηση των υφιστάμενων μεθόδων μεταξύ τους και σε σχέση με τη νέα προσέγγιση οι μέθοδοι αυτοί υλοποιήθηκαν προγραμματιστικά (με χρήση της γλώσσας προγραμματισμού C#) και στη συνέχεια ενσωματώθηκαν σε ένα ολοκληρωμένο σύστημα υποστήριξης αποφάσεων το οποίο περιλαμβάνει τη πολυκριτήρια μέθοδο MUSA των Γρηγορούδη και Σίσκου για τη μέτρηση της ικανοποίησης του πελάτη. Για τη διενέργεια των σχετικών πειραμάτων αξιολόγησης των διαφορετικών μεθόδων χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα πραγματικών ερευνών ικανοποίησης καθώς και συνθετικά δεδομένα με παράγοντα με χρήση γεννήτριας που αναπτύχθηκε επίσης στα πλαίσια της παρούσας διατριβής και η οποία ενσωματώθηκε στο προαναφερθέν σύστημα υποστήριξης αποφάσεων.

Το σύστημα υποστήριξης αποφάσεων που αναπτύχθηκε αποτελεί εργαλείο υποβοήθησης των αναλυτών που χρησιμοποιούν τη μέθοδο MUSA αφενός στην επιλογή της κατάλληλης κατά περίπτωση μεθόδου μεταβελτιστοποίησης και αφετέρου στην επιλογή των δύο βασικών παραμέτρων της μεθόδου.

РАНЕЕ НЕ ПЕРПА

## Περιεχόμενα

Εισαγωγή.....	20
<b>Κεφάλαιο 1: Ανάλυση Ευστάθειας - Μεταβελτιστοποίηση .....</b>	<b>24</b>
1.1 Η Ανάλυση Ευστάθειας στην Επιχειρησιακή Έρευνα .....	25
1.1.1 Έννοιες της Ανάλυσης Ευστάθειας στην Επιχειρησιακή Έρευνα.....	27
1.1.2 Προσεγγίσεις της Ανάλυσης Ευστάθειας.....	33
1.1.3 Η Ανάλυση Ευστάθειας στη Διαδικασία Υποστήριξης της Απόφασης .....	39
1.2 Μεταβελτιστοποίηση στο Γραμμικό Προγραμματισμό.....	42
1.2.1 Πολλαπλές Βέλτιστες Λύσεις.....	48
1.2.2 Ημιβέλτιστες ή Σχεδόν Βέλτιστες Λύσεις.....	50
1.2.3 Υπολογισμός αριθμού μεταβέλτιστων λύσεων.....	52
1.3 Πολυκριτήρια Αναλυτική-Συνθετική Προσέγγιση .....	55
1.3.1 Πολυκριτήρια Ανάλυση.....	55
1.3.2 Η θεωρία της πολυκριτήριας χρησιμότητας-αξίας .....	57
1.3.3 Αναλυτικά – Συνθετικά Μοντέλα Προτίμησης.....	61
1.4 Η προτεινόμενη προσέγγιση .....	64
<b>Κεφάλαιο 2: Αλγόριθμοι εύρεσης λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης .....</b>	<b>68</b>
2.1 Μέθοδοι εύρεσης λύσεων κυρτών πολυέδρων .....	69
2.1.1 Περιστροφικές μέθοδοι.....	71
2.1.2 Μη περιστροφικές μέθοδοι .....	71
2.1.3 Ευρετικές Μέθοδοι .....	72
2.2 Ιστορική αναδρομή των περιστροφικών μεθόδων .....	73
2.3 Αναλυτική παρουσίαση αλγορίθμων .....	79
2.3.1 Ο Αλγόριθμος του Tarry .....	81
2.3.2 Ο Αλγόριθμος των Manas - Nedoma .....	85
2.3.3 Η Μέθοδος της Αντίστροφης Simplex .....	98
2.3.4 Ένας Ευρετικός Αλγόριθμος .....	114
<b>Κεφάλαιο 3: Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση .....</b>	<b>122</b>
3.1 Περιγραφή του Αλγορίθμου.....	123
3.2 Ένα Αριθμητικό Παράδειγμα .....	132
3.3 Κριτική του Αλγορίθμου.....	144
<b>Κεφάλαιο 4: Συστήματα Ποιότητας και Πολυκριτήρια Ανάλυση .....</b>	<b>146</b>
4.1 Αξιολόγηση της Ποιότητας .....	147
4.1.1 Η Έννοια της Ποιότητας .....	147

4.1.2 Ποιότητα και καταναλωτής .....	151
4.1.3 Μελέτη της συμπεριφοράς του καταναλωτή.....	152
4.1.4 Μέτρηση της ικανοποίησης του πελάτη .....	154
4.2 Αναλυτική – Συνθετικά Μοντέλα και Συμπεριφορά Καταναλωτή.....	157
4.3 Η Μέθοδος UTA και οι παραλλαγές της .....	159
4.3.1 Στόχοι της μεθόδου .....	159
4.3.2 Η Μέθοδος UTA .....	161
4.3.3 Ο Αλγόριθμος UTASTAR .....	165
4.3.4 UTA και Ανάλυση Συμπεριφοράς Καταναλωτή .....	168
4.4 Η Μέθοδος MUSA .....	171
4.4.1 Στόχοι της μεθόδου .....	171
4.4.2 Βασικές Αρχές .....	173
4.4.3 Μαθηματική ανάπτυξη του μοντέλου.....	176
4.4.4 Μία Επέκταση του Μοντέλου MUSA .....	179
4.4.5 Παρουσίαση Αποτελεσμάτων του MUSA.....	182
<b>Κεφάλαιο 5: Μεταβελτιστοποίηση στα Αναλυτικά – Συνθετικά Μοντέλα .....</b>	<b>186</b>
5.1 Η Ανάλυση Μεταβελτιστοποίησης στη Μέθοδο UTA .....	187
5.1.1 Η ανάγκη για ανάλυση μεταβελτιστοποίησης.....	187
5.1.2 Εφαρμογή της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης.....	189
5.1.3 Μοντέλα ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης .....	191
5.2 Η Ανάλυση Μεταβελτιστοποίησης στη Μέθοδο MUSA .....	195
5.2.1 Μοντελοποίηση της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης.....	195
5.2.2 Μοντέλα ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης .....	197
5.2.3 Έλεγχος Αξιοπιστίας .....	200
5.2.4 Επιλογή Παραμέτρων της MUSA.....	209
5.2.5 Προς ένα ΣΥΑ Ανάλυσης Μεταβελτιστοποίησης της MUSA .....	210
<b>Κεφάλαιο 6: Σύστημα Υποστήριξης Αποφάσεων για τη MUSA .....</b>	<b>212</b>
6.1 Η φιλοσοφία των Συστημάτων Υποστήριξης Αποφάσεων .....	213
6.2 Αρχές σχεδιασμού των ΣΥΑ.....	214
6.3 Σχεδιάζοντας ένα ΣΥΑ Μεταβελτιστοποίησης.....	217
6.4 Υλοποίηση του ΣΥΑ .....	221
6.5 Δομή του ΣΥΑ .....	229
6.6 Παράδειγμα εφαρμογής .....	230
<b>Κεφάλαιο 7: Γεννήτρια Συνόλων Δεδομένων για Έρευνες Ικανοποίησης.....</b>	<b>238</b>
7.1 Εισαγωγή .....	239
7.2 Γεννήτριες Τεχνητών Δεδομένων .....	241
7.3 Στόχοι της γεννήτριας δεδομένων .....	242
7.4 Περιγραφή της γεννήτριας δεδομένων .....	244

7.5 Λογισμικό γεννήτριας δεδομένων.....	249
7.6 Συμπεράσματα.....	252
<b>Κεφάλαιο 8: Πειράματα με τεχνητά δεδομένα.....</b>	<b>254</b>
8.1 Εισαγωγή.....	255
8.2 Τα πειράματα.....	255
<b>Κεφάλαιο 9: 18 Έρευνες Ικανοποίησης.....</b>	<b>260</b>
9.1 Εισαγωγή.....	261
9.2 Έρευνα Ικανοποίησης Πολιτών από την Ελληνική Αστυνομία.....	262
9.2.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης.....	262
9.2.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα.....	263
9.3 Έρευνα Ικανοποίησης Εργαζομένων στην Ελληνική Αστυνομία από τον Οργανισμό τους.....	264
9.3.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης.....	264
9.3.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα.....	265
9.4 Έρευνα Ικανοποίησης Φοιτητών από το Πανεπιστήμιο Πειραιά.....	266
9.4.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης.....	266
9.4.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα.....	267
9.5 Έρευνα Ικανοποίησης Φοιτητών από το Τμήμα Πληροφορικής του ΤΕΙ Αθηνών.....	268
9.5.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης.....	268
9.5.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα.....	269
9.6 Έρευνα Ικανοποίησης Φοιτητών από το Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων του ΤΕΙ Πειραιά.....	270
9.6.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης.....	270
9.6.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα.....	270
9.7 Έρευνα Ικανοποίησης Φοιτητών από το Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων του ΤΕΙ Αθήνας.....	271
9.7.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης.....	271
9.7.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα.....	272
9.8 Έρευνα Ικανοποίησης Ασθενών από το Γενικό Κρατικό Νοσοκομείο Νίκαιας.....	273
9.8.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης.....	273
9.8.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα.....	273
9.9 Έρευνα Ικανοποίησης Πελατών από μεγάλη αλυσίδα Super Market.....	274
9.9.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης.....	274
9.9.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα.....	275
9.10 Έρευνα Ικανοποίησης Εργαζομένων σε μεγάλη αλυσίδα Super Market.....	276
9.10.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης.....	276
9.10.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα.....	277
9.11 Έρευνα Ικανοποίησης Τουριστών από τις τουριστικές υπηρεσίες στη Σκόπελο.....	278
9.11.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης.....	278

9.11.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα .....	279
9.12 Έρευνα Ικανοποίησης Τηλεθεατών από Παιδικές Εκπομπές .....	280
9.12.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης .....	280
9.12.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα .....	281
9.13 Έρευνα Ικανοποίησης Επιβατών από το ΤΡΑΜ .....	281
9.13.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης .....	281
9.13.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα .....	282
9.14 Έρευνα Ικανοποίησης Επιβατών από το ΜΕΤΡΟ .....	283
9.14.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης .....	283
9.14.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα .....	284
9.15 Έρευνα Ικανοποίησης Πελατών από χορήγηση Στεγαστικού Δανείου από το Ταμείο Παρακαταθηκών και Δανείων .....	284
9.15.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης .....	284
9.15.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα .....	285
9.16 Έρευνα Ικανοποίησης Επισκεπτών από τις Υπηρεσίες στα Ιαματικά Κέντρα στην Ελλάδα .....	286
9.16.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης .....	286
9.16.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα .....	287
9.17 Έρευνα Ικανοποίησης Εταιρικών Πελατών Εταιρίας Logistics.....	288
9.17.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης .....	288
9.17.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα .....	288
9.18 Έρευνα Ικανοποίησης Επισκεπτών από το Αεροδρόμιο Ελευθέριος Βενιζέλος .....	289
9.18.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης .....	289
9.18.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα .....	290
9.19 Έρευνα Ικανοποίησης Αναγνωστών από το Περιοδικό RAM.....	291
9.19.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης .....	291
9.19.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα .....	292
<b>Επίλογος.....</b>	<b>294</b>
<b>Βιβλιογραφία.....</b>	<b>298</b>
<b>Παράρτημα I: Η Μέθοδος Simplex .....</b>	<b>318</b>
<b>Παράρτημα II: Όρια του αριθμού των κορυφών υπερπολυέδρων.....</b>	<b>324</b>
<b>Παράρτημα III: Παράδειγμα Αλγόριθμου του Tarry.....</b>	<b>326</b>
<b>Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων .....</b>	<b>330</b>
<b>Παράρτημα V: Εγχειρίδιο χρήσης του ΣΥΑ .....</b>	<b>366</b>

## Ευρετήριο Πινάκων

Πίνακας 2-1: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για $s=0$ .....	91
Πίνακας 2-2: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για $s=1$ .....	91
Πίνακας 2-3: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για $s=2$ .....	92
Πίνακας 2-4: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για $s=3$ .....	92
Πίνακας 2-5: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για $s=5$ .....	93
Πίνακας 2-6: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για $s=6$ .....	93
Πίνακας 2-7: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για $s=6$ .....	94
Πίνακας 2-8: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για $s=7$ .....	94
Πίνακας 2-9: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για $s=8$ .....	95
Πίνακας 2-10: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για $s=9$ .....	95
Πίνακας 2-11: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για $s=10$ .....	96
Πίνακας 2-12: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για $s=11$ .....	96
Πίνακας 2-13: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για $s=12$ .....	97
Πίνακας 2-14: Πίνακας Simplex μετά από την $p$ επανάληψη .....	99
Πίνακας 2-15: Πίνακας Simplex μετά από την $p+1$ επανάληψη .....	100
Πίνακας 2-16: Αρχικός ( $s=0$ ) για τη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex .....	102
Πίνακας 2-17: Επανάληψη $s$ για τη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex .....	102
Πίνακας 2-18: Πίνακας Φάσης A της μεθόδου της Αντίστροφης Simplex .....	112
Πίνακας 2-19: Ιεραρχημένες βασικές λύσεις με τη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex.....	113
Πίνακας 2-20: Επαυξημένος Πίνακας Simplex.....	118
Πίνακας 2-21: Αποτελέσματα Ευρετικού Αλγορίθμου .....	121
Πίνακας 3-1: Ο πίνακας Simplex της βέλτιστης λύσης του ΓΠ 1.1 .....	126
Πίνακας 3-2: Ο πίνακας Simplex με $s = 0$ .....	127
Πίνακας 3-3: Επανάληψη $s$ για τον αλγόριθμο της Ρεαλιστικής Προσέγγισης .....	129
Πίνακας 3-4: Πίνακας Simplex Βέλτιστης Λύσης Παραδείγματος .....	132
Πίνακας 3-5: Πίνακας αποτελεσμάτων παραδείγματος.....	143
Πίνακας 4-1: Πολυκριτήριος πίνακας .....	169
Πίνακας 4-2: Μεταβλητές της Μεθόδου MUSA .....	174
Πίνακας 5-1: Σύγκριση διαφορετικών μοντέλων ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης της UTA .....	194
Πίνακας 5-2: Εναλλακτικές προσεγγίσεις ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης της MUSA .....	199
Πίνακας 6-1: Πίνακας αποτελεσμάτων παραδείγματος.....	230
Πίνακας 8-1: Ταυτότητα συνόλων τεχνητών δεδομένων.....	256

Πίνακας 8-2: Ενδεικτικά αποτελέσματα πειραματικής διαδικασίας.....	257
Πίνακας 8-3: Ενδεικτικά αποτελέσματα πειραματικής διαδικασίας.....	258
Πίνακας II-1: Άνω όριο $\bar{r}$ του αριθμού των κορυφών .....	324
Πίνακας II-2: Ελάχιστο όριο $\underline{r}$ του αριθμού των κορυφών .....	325
Πίνακας V-1: Ταυτότητα συνόλων τεχνητών δεδομένων .....	333
Πίνακας V-2: Αποτελέσματα δεικτών αξιοπιστίας, ευστάθειας & υπολογιστικού φόρτου.....	349
Πίνακας V-3: Αποτελέσματα δεικτών $WV_i$ .....	364

## Ευρετήριο Σχημάτων, Διαγραμμάτων και Εικόνων

### Σχήματα

Σχήμα 1-1: Παράδειγμα 2 διαστάσεων.....	46
Σχήμα 1-2: Ένα 3-διάστατο simplex.....	48
Σχήμα 1-3: Ένα περίπατος προς τη βέλτιστη λύση .....	48
Σχήμα 1-4: Παραδείγματα 2 και 3 διαστάσεων .....	49
Σχήμα 1-5: Περιοχή ημιβέλτιστων λύσεων σε 2 διαστάσεις .....	51
Σχήμα 1-6: Η ευστάθεια των λύσεων .....	52
Σχήμα 1-7: Πολυκριτήρια απεικόνιση του συνόλου A (Σίσκος, 2008).....	58
Σχήμα 1-8: Κανονικοποιημένη μερική συνάρτηση αξίας.....	60
Σχήμα 1-9: Παραδοσιακή προσέγγιση προβλημάτων απόφασης (Γρηγορούδης & Σίσκος, 2000) .....	61
Σχήμα 1-10: Αναλυτική-Συνθετική προσέγγιση προβλημάτων απόφασης (Jacquet-Lagrèze & Siskos, 2001) .....	62
Σχήμα 1-11: Φάσεις της Αναλυτικής-Συνθετικής προσέγγισης (Σπυριδάκος, 1996). 64	
Σχήμα 2-1: Γράφημα (V,U).....	86
Σχήμα 2-2: Λογικό Διάγραμμα Αλγόριθμου Manas-Nedoma .....	89
Σχήμα 2-3: Λογικό Διάγραμμα Αλγόριθμου Αντίστροφης Simplex.....	107
Σχήμα 2-4: Ο περίπατος του αλγορίθμου των Manas-Nedoma στις λύσεις 0-1-2-7-8-5-6-11-4-3-9-10-12.....	113
Σχήμα 2-5: Λογικό Διάγραμμα Ευρετικού Αλγόριθμου.....	119
Σχήμα 3-1: Λογικό Διάγραμμα Αλγόριθμου της Ρεαλιστικής Προσέγγισης .....	130
Σχήμα 4-1: Διάγραμμα κριτηρίων για το βραβείο ποιότητας Malcolm Baldrige.....	149
Σχήμα 4-2: Διάγραμμα κριτηρίων του Ευρωπαϊκού βραβείου ποιότητας.....	150
Σχήμα 4-3: Καμπύλη ποιοτικής ανάλυσης παλινδρόμησης .....	163



Σχήμα 4-4: Καμπύλη ποιοτικής ανάλυσης παλινδρόμησης με διπλό σφάλμα (Jacquet-Lagrèze and Siskos, 2001).....	166
Σχήμα 4-5: Σύνθεση προτιμήσεων του πελάτη (Γρηγορούδης <i>et al.</i> , 1997) .....	174
Σχήμα 4-6: Ενδεικτική ποιοτική κλίμακα ικανοποίησης.....	175
Σχήμα 4-7: Μεταβλητές σφάλματος για τον $j$ πελάτη (Grigoroudis & Siskos, 2002).....	176
Σχήμα 4-8: Οι μεταβλητές μετασχηματισμού $z_m$ και $w_{ik}$ (Grigoroudis & Siskos, 2002) .....	177
Σχήμα 4-9: Κατώφλια προτίμησης για τη συνάρτηση $Y^*$ (Grigoroudis & Siskos, 2002) .....	180
Σχήμα 4-10: Συναρτήσεις Ικανοποίησης για διαφορετικά επίπεδα απαιτήσεων (Grigoroudis & Siskos, 2002) .....	182
Σχήμα 5-1: Ανάλυση Μεταβελτιστοποίησης και ημιβέλτιστες λύσεις (Grigoroudis & Siskos, 2002) .....	196
Σχήμα 5-2: Πίνακας πρόβλεψης ολικής ικανοποίησης (Γρηγορούδης & Σίσκος, 2000) .....	203
Σχήμα 6-1: Δομικό διάγραμμα ενός Συστήματος Υποστήριξης Λήψης Αποφάσεων (Sage, 1991).....	216
Σχήμα 6-2: Λογικό Διάγραμμα ΣΥΑ Ανάλυσης Μεταβελτιστοποίησης.....	228

### Διαγράμματα

Διάγραμμα 1: άνω όριο κορυφών $\bar{r}$ .....	54
Διάγραμμα 2: ελάχιστο όριο κορυφών $\underline{r}$ .....	55

### Εικόνες

Εικόνα 6-1: Ανάγνωση δεδομένων από ΣΥΑ.....	231
Εικόνα 6-2: Επιλογή των τιμών των παραμέτρων.....	232
Εικόνα 6-3: Εμφάνιση των μεταβέλτιστων λύσεων .....	232
Εικόνα 6-4: Εμφάνιση δεικτών MUSA.....	233
Εικόνα 6-5: Διάγραμμα δράσης με δυνατότητα zoom .....	233
Εικόνα 6-6: Δείκτες OPL και ASI .....	234
Εικόνα 6-7: Χρόνος επίλυσης κάθε μεθόδου μεταβελτιστοποίησης.....	234
Εικόνα 6-8: Επιλογή εύρους τιμών και βήματος για τις τιμές των παραμέτρων .....	234
Εικόνα 6-9: Τιμές μεταβέλτιστων λύσεων για συγκεκριμένο συνδυασμό παραμέτρων .....	235
Εικόνα 6-10: Μέσες τιμές βαρών κριτηρίων .....	235
Εικόνα 6-11: Πίνακας με τιμές δεικτών αξιοπιστίας και ευστάθειας.....	236
Εικόνα 6-12: Γράφημα δεικτών αξιοπιστίας και ευστάθειας με δυνατότητα zoom... ..	236
Εικόνα 6-13: Επιλογή τιμών παραμέτρων και μεθόδου μεταβελτιστοποίησης.....	237
Εικόνα 6-14: Αποτελέσματα ανάλυσης MUSA .....	237

Εικόνα 7-1: Δημιουργία συνάρτησης ολικής ικανοποίησης.....	246
Εικόνα 7-2: Δημιουργία μερικών συναρτήσεων ικανοποίησης.....	247
Εικόνα 7-3: Δημιουργία συνόλου δεδομένων.....	248
Εικόνα 7-4: 1 <sup>ο</sup> Βήμα Γεννήτριας Δεδομένων.....	249
Εικόνα 7-5: 2 <sup>ο</sup> Βήμα Γεννήτριας Δεδομένων.....	250
Εικόνα 7-6: 3 <sup>ο</sup> Βήμα Γεννήτριας Δεδομένων.....	250
Εικόνα 7-7: 4 <sup>ο</sup> και 5 <sup>ο</sup> Βήμα Γεννήτριας Δεδομένων.....	251
Εικόνα 7-8: Γέννηση 10000 Εγγραφών.....	251
Εικόνα 7-9: Τροποποίηση Συναρτήσεων Ικανοποίησης.....	252

## Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια, ο ρόλος της μοντελοποίησης στα συστήματα απόφασης έχει πάρει ιδιαίτερες διαστάσεις για την υποστήριξη αποφάσεων στο χώρο του ιδιωτικού και δημόσιου τομέα. Η ανάγκη διαχείρισης μεγάλου όγκου ετερογενών δεδομένων, οι συνθήκες αβεβαιότητας, η συναρμοδιότητα πολλών αποφασιζόντων καθώς και ο έντονος ανταγωνισμός των επιχειρήσεων είναι παράγοντες που προσδίδουν στη μοντελοποίηση τον ειδικό ρόλο-κλειδί του επιστημονικού μάνατζμεντ.

Κατά το Σίσκο (2008) «Για να προσεγγιστεί επιστημονικά ένα πρόβλημα απόφασης, η πολυκριτήρια ανάλυση αποτελεί μονόδρομο. Δεν υπάρχουν αποφάσεις των οποίων τα αποτελέσματα μπορούν να αξιολογηθούν με έναν μόνο δείκτη, ένα μόνο κριτήριο και τούτο επειδή απλά κάθε απόφαση δεν έχει μόνο οφέλη αλλά και κόστη, είτε αυτή αφορά νέες επενδύσεις, είτε επιλογή ανθρώπων, είτε την προστασία του περιβάλλοντος. Ακόμα και όταν βελτιστοποιείται ένας μοναδικός δείκτης για τον εξορθολογισμό αποφάσεων, όπως συμβαίνει στη μικροοικονομία ή την επιχειρησιακή έρευνα, ο δείκτης αυτός αποτελεί τον συγκερασμό πολλαπλών κριτηρίων-δεικτών που αξιολογούν το σύνολο των επιπτώσεων που θα έχουν οι υποψήφιες αποφάσεις. Κατά συνέπεια, κάθε αναλυτής ή μελετητής ενός προβλήματος απόφασης είναι υποχρεωμένος να καταγράψει, αναλύσει και μετρήσει κάθε δυνατή επίπτωση, κάθε πιθανό αποτέλεσμα, κάθε κριτήριο επιλογής εναλλακτικών λύσεων και δράσεων που εσωκλείει το πρόβλημα».

Στα πολυκριτήρια μοντέλα απόφασης τίθεται συχνά το ερώτημα: «τι είναι προτιμότερο να επιλέξει ο αποφασίζων: μοντέλο εξαγωγής λύσεων ή τις ίδιες τις λύσεις;». Στα λεγόμενα αναλυτικά μοντέλα απόφασης (disaggregation models) οι αναλυτές αποφάσεων καταβάλλουν τεράστιες προσπάθειες για να ανοίξουν στους μάνατζερς τα «μαύρα κουτιά» της πολυκριτήριας ανάλυσης. Πιο συγκεκριμένα, η αναλυτική-συνθετική προσέγγιση (aggregation-disaggregation approach) των Jacquet-Lagrèze & Siskos (1982) δέχεται ότι η απόφαση και τα κριτήρια επιδέχονται προοδευτική επεξεργασία αλληλοδομούμενα μέσα στο χρόνο. Στις μεθόδους της προσέγγισης αυτής εκτιμώνται ή συμπεραίνονται οι παράμετροι εκείνες ενός μοντέλου απόφασης οι οποίες επιτρέπουν την βέλτιστη ανασύσταση μιας απόφασης. Σε τελική ανάλυση, πρόκειται για το γνωστό στους στατιστικούς παράδειγμα της επαγωγής (inference paradigm). Η φιλοσοφία αυτή προϋποθέτει ότι το αποτέλεσμα μιας απόφασης μπορεί, είτε να παρατηρηθεί (σε περιπτώσεις αποφάσεων με επαναληπτικό χαρακτήρα), είτε να εξωτερικευτεί από τον αποφασίζοντα μέσα από διαλογικές διαδικασίες. Βέβαια, όταν προσδιοριστεί το μοντέλο απόφασης, ο απώτερος σκοπός είναι η επέκταση του (extrapolation) στο υπό μελέτη σύνολο των δράσεων του προβλήματος. Τέτοιες μέθοδοι είναι για παράδειγμα η UTA των Jacquet-Lagrèze & Siskos (1982) η οποία εκτιμά μία ή περισσότερες συναρτήσεις αξίας για έναν αποφασίζοντα και η μέθοδος MUSA των Γρηγορούδη και Σίσκου

## Εισαγωγή

(2000) η οποία εκτιμά μια συλλογική προσθετική συνάρτηση αξίας για ένα σύνολο πελατών μιας επιχείρησης.

Βασικό εργαλείο για την επαγωγή μοντέλων απόφασης στις αναλυτικές μεθόδους είναι ο γραμμικός προγραμματισμός. Στη δημοφιλή αυτή μεθοδολογία της επιχειρησιακής έρευνας προτείνεται ένα σύνολο γραμμικών περιορισμών, οι οποίοι υπαγορεύονται από συγκρίσεις δράσεων αναφοράς, των οποίων επιδιώκεται η συμβατότητα. Όταν τούτο δεν είναι εφικτό, αναζητείται εκείνο το μοντέλο απόφασης που αποφέρει το ελάχιστο σφάλμα συμβατότητας των περιορισμών. Όπως όμως θα τονιστεί στη συνέχεια και αποτελεί αντικείμενο έρευνας της παρούσης διδακτορικής διατριβής, οι λύσεις-μοντέλα που παράγονται από τα γραμμικά προγράμματα ελέγχου συμβατότητας παρουσιάζουν προβλήματα ευστάθειας, είτε οι λύσεις έχουν μηδενικό σφάλμα (πλήρης συμβατότητα), είτε όχι.

Πιο συγκεκριμένα, η μέθοδος UTA των Jacquet-Lagrèze & Siskos (1982), προκειμένου να εκτιμήσει εκείνη την προσθετική συνάρτηση αξίας που θα περιγράψει τη στάση ενός συγκεκριμένου αποφασίζοντος, απαιτεί από τον αποφασίζοντα αυτόν μια κατάταξη ενός συνόλου δράσεων αναφοράς. Η UTA, καθώς και διάφορες παραλλαγές της, έχουν ενσωματωθεί σε διάφορα πληροφοριακά συστήματα και έχουν χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση και επίλυση μεγάλου αριθμού πραγματικών προβλημάτων, τόσο στον τομέα της ανάλυσης της συμπεριφοράς του καταναλωτή όσο και σε άλλους τομείς της επιστήμης αποφάσεων (Siskos *et al.*, 2005). Μία ακόμα μέθοδος που υιοθετεί τις αρχές της αναλυτικής-συνθετικής προσέγγισης είναι η MUSA των Γρηγορούδη και Σίσκου (2000), η οποία εστιάζει στην μετα-αγοραστική συμπεριφορά του καταναλωτή και πιο συγκεκριμένα μετρά και αναλύει την ικανοποίηση των πελατών. Η μέθοδος χρησιμοποιεί δεδομένα που προέρχονται από έρευνες ικανοποίησης, όπου ένα σύνολο πελατών εκφράζει το επίπεδο ικανοποίησης του, τόσο σε σχέση με τα επιμέρους χαρακτηριστικά του προϊόντος ή της υπηρεσίας, όσο και σε σχέση με τη συνολική εικόνα που αποκόμισε. Στη συνέχεια, η μέθοδος εκτιμά εκείνη την προσθετική συνάρτηση αξίας που αναπαριστά με τα λιγότερα δυνατά σφάλματα τη στάση του συνόλου των ερωτώμενων πελατών. Η μέθοδος αυτή έχει επίσης χρησιμοποιηθεί με επιτυχία σε σημαντικό αριθμό πραγματικών προβλημάτων (Siskos & Grigoroudis, 2002).

Οι παραπάνω μέθοδοι διαθέτουν ως αναπόσπαστο μέρος των αλγοριθμικών διαδικασιών τους την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης (post-optimality analysis) προκειμένου να ελέγξουν και μετρήσουν την ευστάθεια (robustness) των μοντέλων απόφασης που προσδιορίζουν. Η ανάλυση αυτή είναι γενικότερη από την κλασική ανάλυση ευαισθησίας (sensitivity analysis) του γραμμικού προγραμματισμού (Van de Panne, 1975; Σίσκος, 1998) και θεωρείται απαραίτητη σε κάθε μέθοδο πολυκριτήριας ανάλυσης, λόγω του χαμηλού βαθμού δόμησης των προς επίλυση προβλημάτων. Επιπρόσθετα, η χρήση τεχνικών γραμμικού προγραμματισμού στα πλαίσια της εφαρμογής των UTA και MUSA ενισχύει το ρόλο της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης.

Κατά τις διαδικασίες της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης αναζητούνται οι λύσεις εκείνες που δίνουν ίδια ή λίγο χειρότερα αποτελέσματα σε σχέση με τη λύση που έχει υπολογιστεί ως η βέλτιστη. Βεβαίως, ο αριθμός των λύσεων αυτών είναι πολλές φορές άπειρος. Στις συγκεκριμένες αναλυτικές μεθόδους, η ανάλυση αυτή επιτρέπει τη βελτίωση άλλων κριτηρίων που πιθανόν να μην έχουν μοντελοποιηθεί στα πλαίσια του αρχικού προβλήματος καθώς επίσης και τη μέτρηση της ευστάθειας των παραγόμενων αποτελεσμάτων.

Το θέμα της ευστάθειας (robustness) βρέθηκε στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος των εργασιών της 68<sup>ης</sup> Συνάντησης της Ευρωπαϊκής Ομάδας Εργασίας Υποστήριξης Πολυκριτήριων Αποφάσεων (MCDA) στις 2-3 Οκτωβρίου 2008 στα Χανιά της Κρήτης. Στο πλαίσιο ενός γενικότερου προβληματισμού, ο Roy (2008) αποδίδει στην ευστάθεια ένα ρόλο εργαλείου αντίστασης των αναλυτών στα φαινόμενα των «προσεγγίσεων» και των «ζωνών άγνοιας» προκειμένου εκείνοι να προστατευθούν από ενδεχόμενες αρνητικές επιπτώσεις των αποφάσεων. Είναι επομένως επιβεβλημένο, οι αναλυτές να λάβουν υπ' όψη ότι οι αποφάσεις που προσπαθούν να υποστηρίξουν θα είναι:

- υλοποιήσιμες μέσα σε ένα πραγματικό περιβάλλον το οποίο δεν θα μπορέσει να είναι αυστηρά συμβατό με το μοντέλο στο οποίο στηρίζεται η υποστήριξη,
- αξιολογήσιμες αναφορικά σε ένα σύστημα αξιών το οποίο δεν θα είναι απαραίτητα σε πλήρη συμφωνία με εκείνο που θα έχει χρησιμοποιηθεί για τη σύλληψη και διαχείριση του μοντέλου.

Στόχος της παρούσας διδακτορικής διατριβής είναι η διεξοδική ανάλυση και αποτελεσματική διαχείριση της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης στον γραμμικό προγραμματισμό και η εφαρμογή της στις αναλυτικές πολυκριτήριες μεθόδους και ειδικότερα στη μέθοδο μέτρησης της ικανοποίησης MUSA.

Η διατριβή δομείται σε εννέα κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο τοποθετεί σε θεωρητική βάση το πρόβλημα της μεταβελτιστοποίησης και ως εκ τούτου εκείνο της ευστάθειας της βέλτιστης λύσης στον γραμμικό προγραμματισμό, ενώ στο δεύτερο παρουσιάζονται οι κυριότερες αλγοριθμικές προσεγγίσεις στο πρόβλημα αυτό. Το τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζει ένα νέο αλγόριθμο διαχείρισης μεταβέλτιστων/πολλαπλών λύσεων στα γραμμικά προγράμματα του οποίου αναλύεται ο τρόπος εφαρμογής τους. Η μεθοδολογία MUSA για τη μέτρηση της ποιότητας υπηρεσιών με τη μορφή δεικτών ικανοποίησης του πελάτη/αποδέκτη των υπηρεσιών αυτών αποτελεί το αντικείμενο του τέταρτου κεφαλαίου, μαζί με μια αναφορά στα συστήματα ποιότητας που αξιοποιούν την πολυκριτήρια ανάλυση. Τα δύο επόμενα κεφάλαια 5 και 6 πραγματεύονται το θέμα της ορθολογικής επιλογής των παραμέτρων της μεθοδολογίας MUSA για το οποίο προτείνονται πρωτότυπες τεχνικές υποστήριξης (κεφάλαιο 5) καθώς και λογισμικό με τη μορφή συστήματος υποστήριξης αποφάσεων για τη άρτια διευκόλυνση του χρήστη (κεφάλαιο 6). Τα κεφάλαια 8 και 9

## Εισαγωγή

αναπτύσσουν μια εμπειρική αξιολόγηση του ΣΥΑ. Νωρίτερα, στο κεφάλαιο 7 αναπτύσσεται ειδική γεννήτρια συνθετικών δεδομένων του συστήματος ενώ στο κεφάλαιο 8 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της αξιολόγησης πάνω σε πειράματα με τεχνητά δεδομένα. Στο κεφάλαιο 9 παρουσιάζονται πραγματικές εφαρμογές με τη χρήση του προτεινόμενου ΣΥΑ. Τέλος, στον επίλογο, σκιαγραφούνται επιγραμματικά τα βασικότερα συμπεράσματα της διδακτορικής διατριβής και δρομολογούνται νέοι άξονες για περαιτέρω έρευνα.

## **Κεφάλαιο 1: Ανάλυση Ευστάθειας - Μεταβελτιστοποίηση**

Στο πρώτο αυτό κεφάλαιο της διατριβής γίνεται αρχικά μια προσπάθεια περιγραφής των εννοιών της ανάλυσης ευστάθειας (ή ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης, ή αλλιώς ενασχόλησης με την ευστάθεια) στο πεδίο της επιχειρησιακής έρευνας. Παρουσιάζονται διαφορετικές προσεγγίσεις που καλύπτουν διαφορετικές οπτικές γωνίες ενώ ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην σύνδεση της μεταβελτιστοποίησης με τη διαδικασία υποστήριξης της απόφασης. Στη συνέχεια, γίνεται μια περισσότερο εξειδικευμένη αναφορά στη μεταβελτιστοποίηση στα πλαίσια του γραμμικού προγραμματισμού, του δημοφιλέστερου ίσως εργαλείου της επιχειρησιακής έρευνας. Η αναφορά αυτή εστιάζει αφενός στη διαδικασία εύρεσης των πολλαπλών ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων ενός γραμμικού προγράμματος και αφετέρου στην προσπάθεια υπολογισμού του αριθμού των λύσεων αυτών πριν ξεκινήσει η διαδικασία αναζήτησής τους. Στην τρίτη παράγραφο παραθέτονται τα απαραίτητα στοιχεία των αναλυτικών – συνθετικών μοντέλων προτίμησης ξεκινώντας από τους ορισμούς της πολυκριτήριας ανάλυσης και της θεωρία της πολυκριτήριας χρησιμότητας-αξίας. Στην τελευταία παράγραφο συνοψίζονται τα ερευνητικά ζητήματα που παρουσιάζονται στο συγκεκριμένο θεματικό πεδίο και περιγράφονται σε αδρές γραμμές οι λύσεις που προτείνονται στο υπόλοιπο της διατριβής.

## 1.1 Η Ανάλυση Ευστάθειας στην Επιχειρησιακή Έρευνα

Ο όρος «Επιχειρησιακή Έρευνα» προέρχεται από την απόδοση του αγγλικού όρου «Operational Research» ή όπως συνηθίζεται στην Αμερική «Operations Research». Ίσως η απόδοση του όρου στα ελληνικά ως «Λειτουργική Έρευνα» θα θεωρούνταν περισσότερο πετυχημένη αφού θα απέδιδε με καλύτερο τρόπο και πληρέστερα το περιεχόμενο του θέματος, δηλαδή έρευνα πάνω στις λειτουργίες ή στη λειτουργία πολύπλοκων συστημάτων αποτελούμενων από ανθρώπους και μηχανές. Εν τούτοις, στο στρατιωτικό τομέα, όπου οι κυριότερες λειτουργίες ονομάζονται επιχειρήσεις, ο όρος είναι ο πλέον κατάλληλος και ίσως για το λόγο αυτό καθιερώθηκε γενικότερα στην Ελλάδα, αφού όπως συνέβη και σε άλλες χώρες, έτσι και στην Ελλάδα, το θέμα αναπτύχθηκε και εφαρμόστηκε πρώτα στα στρατιωτικό πεδίο (Σίσκος, 2008).

Η Εταιρία Επιχειρησιακής Έρευνας της Μεγάλης Βρετανίας έχει δώσει ένα απλό και περιεκτικό ορισμό για τη συγκεκριμένη επιστήμη: *«Η Επιχειρησιακή Έρευνα είναι η εφαρμογή της σύγχρονης επιστήμης πάνω σε πολύπλοκα προβλήματα που ανακύπτουν στη διεύθυνση και διοίκηση μεγάλων συστημάτων, αποτελούμενων από ανθρώπους, μηχανές υλικά και κεφάλαια, στη βιομηχανία, τις επιχειρήσεις, τις Κυβερνητικές Υπηρεσίες και την Άμυνα. Η χαρακτηριστική της μεθοδολογία συνίσταται στην ανάπτυξη επιστημονικού μοντέλου του υπό μελέτη συστήματος, που περιλαμβάνει μετρήσεις τυχαίων παραγόντων και με το οποίο προβλέπει και συγκρίνει τα αποτελέσματα εναλλακτικών αποφάσεων, στρατηγικών και ελέγχων. Ο σκοπός της είναι να βοηθήσει τη διοίκηση να καθορίσει την πολιτική και τις ενέργειές της επιστημονικά (κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο)».*

Στην επιχειρησιακή έρευνα τίθεται όλο και περισσότερο το θέμα της ευστάθειας τόσο σε εργασίες που έχουν δημοσιευθεί στα μεγάλα επιστημονικά περιοδικά όσο και σε αυτά (συνήθως λιγότερο επίσημα) που έχουν εκπονηθεί στα πλαίσια λειτουργίας μιας επιχείρησης για το χειρισμό ενός συγκεκριμένου προβλήματος. Οι τελευταίες ωστόσο είναι συνήθως άγνωστες διότι, όταν εκδίδονται (κάτι σχετικά σπάνιο), αυτό γίνεται σε περιοδικά τα οποία η επιστημονική κοινότητα τείνει να αγνοεί καθώς τα κρίνει υποδεέστερα. Ο όρος «ευστάθεια (robustness ή stability)» χρησιμοποιείται σύμφωνα με το Roy (2007) στη επιχειρησιακή έρευνα με πολλαπλές έννοιες που προσφέρονται για συζήτηση. Αυτή η συζήτηση αποκαλύπτει τον πολύσημο χαρακτήρα της έννοιας της ευστάθειας, ο οποίος προέρχεται κυρίως από το γεγονός ότι αυτή η έννοια μπορεί, ανάλογα με την περίπτωση, να συνδέεται (ακόμη και να αφομοιώνεται) από αυτή της ευελιξίας, της σταθερότητας, ή και της ευαισθησίας.

Ο όρος ευστάθεια χρησιμοποιείται σε μία προσπάθεια αντίστασης στα θέματα που προκύπτουν από τις «προσεγγίσεις των παραμέτρων» και τις «ζώνες άγνοιας» προκειμένου να προστατευτεί ο αναλυτής από ατυχείς επιπτώσεις, κυρίως από αυτές που αφορούν στην υποβάθμιση των ιδιοτήτων που ωστόσο θα πρέπει με κάποιο



τρόπο να διατηρηθούν και να μην αγνοηθούν (Roy, 2005). Πολλές επιστημονικές εργασίες, όπως και η παρούσα διατριβή, που πραγματεύονται την ευστάθεια θέλουν να ικανοποιήσουν (όσο είναι δυνατόν) αυτή την ανάγκη. Επομένως η ευστάθεια θα πρέπει να θεωρηθεί ως μία ενασχόληση που αφορά στην αντίσταση, όπως περιγράφηκε παραπάνω, και την προστασία του αναλυτή ώστε να μπορεί να αξιολογεί την απόσταση μεταξύ πραγματικού και εκτιμώμενου μοντέλου απόφασης.

Η ανάλυση ευστάθειας (ή μεταβελτιστοποίηση) είναι μια ολοένα και πιο δημοφιλής απάντηση στη δυσκολία καθορισμού των τιμών των παραμέτρων σε μοντέλα επιχειρησιακής έρευνας που χρησιμοποιούνται για την υποστήριξη ατομικών ή ομαδικών αποφάσεων. Αναλογιζόμενοι τις δυσκολίες καθορισμού των τιμών για παραμέτρους σχετιζόμενες με την εκφρασμένη προτίμηση των αποφασιζόντων είναι σαφή τα πιθανά οφέλη από τη χρήση της ανάλυσης ευστάθειας κατά τη διάρκεια όλης της διαδικασίας λήψης αποφάσεων, σαν εργαλείο καθοδήγησης αυτής της διαδικασίας. Σε αυτό το πλαίσιο ιδιαίτερη έμφαση δίδεται από τον Dias (2007) στην έννοια της ευστάθειας του συμπεράσματος έναντι της ευστάθειας της λύσης, καθώς και στην ιδέα της μοντελοποίησης ως διαρκή διαδικασία μάθησης.

Τα τυπικά μοντέλα που αναπτύσσονται για την επίλυση προβλημάτων επιχειρησιακής έρευνας διέπονται από πολλές πηγές αβεβαιότητας, ανακρίβειας και άγνοιας (Roy, 1989). Ας θεωρηθεί ότι ένα τυπικό μοντέλο ορίζεται από μία δομή και ένα συνδυασμό τιμών των παραμέτρων. Για παράδειγμα, η δομή ενός γραμμικού προγράμματος αποτελείται από μια γραμμική αντικειμενική συνάρτηση για την εύρεση της μέγιστης (ή της ελάχιστης) τιμής και ένα σύνολο γραμμικών περιορισμών· οι παράμετροί του είναι οι συντελεστές κόστους, οι τεχνολογικοί συντελεστές και οι τιμές των δεύτερων μελών των περιορισμών. Από την άλλη πλευρά, ένα πολυκριτήριο μοντέλο στήριξης αποφάσεων μπορεί να δομηθεί ως μοντέλο σχέσεων υπεροχής (π.χ. ELECTRE), πολυκριτήριας χρησιμότητας, πολυκριτηρίου προγραμματισμού, ή άλλης δομής· οι παράμετροι συνδέονται με το αποτέλεσμα κάθε εναλλακτικής σε κάθε κριτήριο, τη βαρύτητα των κριτηρίων, κ.λ.π. Για μια δεδομένη δομή μοντέλου, διαφορετικοί συνδυασμοί των τιμών των παραμέτρων θα οδηγήσουν σε διαφορετική «μορφή - έκδοση» του μοντέλου (έκφραση που χρησιμοποιήθηκε πρόσφατα και προτάθηκε από τον Roy (2003, 2007)).

Είναι ευρέως γνωστό ότι ο καθορισμός των τεχνικών και των οικονομικών τιμών των παραμέτρων είναι συχνά προβληματικός: οι διαδικασίες μέτρησης και οι στατιστικές εκτιμήσεις μπορεί να είναι ανακριβείς (π.χ. ανοχές στην ακρίβεια της μέτρησης, διαστήματα αξιοπιστίας στα στατιστικά δεδομένα), η μέτρηση μπορεί να είναι αυθαίρετη και υποκειμενική (π.χ. μέτρηση ηχορύπανσης ή επίτευξη στόχων εταιρείας), κάποιες πληροφορίες μπορεί να είναι αντιφατικές ή αλληλοσυγκρουόμενες (π.χ. δεδομένα κλινικών δοκιμών) για να μην αναφερθούμε σε αβεβαιότητες για τις μελλοντικές τιμές.

Η ανάλυση ευστάθειας προκύπτει ως ανάγκη για την αντιμετώπιση των δυσκολιών που αφορούν στην επιλογή των τιμών παραμέτρων στα μοντέλα της επιχειρησιακής έρευνας, π.χ. τη δυσχέρεια απομόνωσης και επιλογής μιας έκδοσης μοντέλου το οποίο θα αποτελέσει τη βάση για να προταθεί μια απόφαση. Η γενική ιδέα πίσω από την προσέγγιση της ανάλυσης ευστάθειας είναι να γίνουν αποδεκτές πολλαπλές εκδόσεις του μοντέλου απόφασης (π.χ. με διαφορετικές τιμές παραμέτρων) και να γίνει προσπάθεια εξέλιξης κατά τη διαδικασία υποστήριξης αποφάσεων, παρά την ποικιλία των εκδόσεων, και πιθανώς να αναγνωριστεί μία λύση η οποία να εμφανίζεται ως καλή (ή τουλάχιστον αποδεκτή) σε κάθε έκδοση του μοντέλου (ή τουλάχιστον στις περισσότερες εκδόσεις). Στην πραγματικότητα μπορούμε να βρούμε αναφορές για την «ευστάθεια» υπό αυτή την έννοια σε ένα από τα πρωτοποριακά βιβλία της Επιχειρησιακής Έρευνας όπου περιγράφεται ένα διάσημο πρόβλημα επιχειρησιακής έρευνας, το οποίο αναφέρεται στην ανάγκη εύρεσης λύσεων «οι οποίες να παρουσιάζουν ευστάθεια κάτω από διαφορετικές συνθήκες» (Beer, 1966: σελ.44). Πρέπει να σημειωθεί ότι η ενασχόληση με την ευστάθεια (Roy 2007) μπορεί επίσης να συνδέεται με την υλοποίηση διαφορετικών εκδόσεων της μεθόδου ή του αλγόριθμου που εφαρμόζεται για την άντληση των λύσεων (Vincke, 1999a,b). Στην παρούσα διατριβή η προσέγγιση αυτή θα μας απασχολήσει αρκετά με δεδομένο ότι το ΣΥΑ που θα παρουσιαστεί στο Κεφάλαιο 6 υλοποιεί διαφορετικές εκδόσεις των ίδιων μοντέλων.

Ο ρόλος της ανάλυσης ευστάθειας μελετάται αρκετά στη διαδικασία υποστήριξης αποφάσεων. Στις επόμενες παραγράφους θα δοθεί έμφαση στη λέξη απόφαση σε μία δράση ή διαδικασία (όπως στην πρόταση «ήταν μια δύσκολη απόφαση») παρά σαν την επιλογή μιας εναλλακτικής ή μιας λύσης (όπως στην πρόταση «ήταν μια καλή απόφαση»). Φυσικά με δεδομένες τις πολλαπλές έννοιες που δίδονται στην ανάλυση ευστάθειας, θα ακολουθήσει μία σύντομη επισκόπηση μερικών από αυτές τις έννοιες της ανάλυσης ευστάθειας.

### **1.1.1 Έννοιες της Ανάλυσης Ευστάθειας στην Επιχειρησιακή Έρευνα**

Σύμφωνα με τον Roy (2007) Κατά τη διάρκεια της σύσκεψης μιας ομάδας εργασίας το 2004, ο Philippe Vincke σημείωσε ότι η έκφραση «ανάλυση της ευστάθειας», παρότι χρησιμοποιείται συχνά, του φαινόταν πολύ περιοριστική. Προτάθηκε να αντικατασταθεί με την έκφραση «ενασχόληση με την ευστάθεια», θεωρώντας το ότι να μιλάμε για ανάλυση μας κάνει να σκεφτούμε μια δουλειά που γίνεται εκ των υστέρων. Είναι για παράδειγμα αυτό που συμβαίνει με μια ανάλυση ευαισθησίας. Αντιθέτως, η ευστάθεια απαντά στην ενασχόληση που θα πρέπει να υφίσταται εκ των προτέρων, ήδη από τη στιγμή της διαμόρφωσης του προβλήματος. Στην παρούσα διατριβή οι όροι «μεταβελτιστοποίηση» και «ανάλυση της ευστάθειας» θα

χρησιμοποιούνται συμπεριλαμβάνοντας και τις έννοιες της έκφρασης «ενασχόληση με την ευστάθεια» όπως παρουσιάζονται στη συνέχεια του κεφαλαίου.

Σε μια προοπτική της υποστήριξης της απόφασης υπάρχει η ανάγκη να ληφθεί υπόψη, όσο αυτό είναι δυνατό, η έννοια της «άγνοιας» που είναι ο βασικός λόγος ενασχόλησης με την ευστάθεια. Σε αυτή την προοπτική, δεν πρέπει να παραβλέπεται ποτέ ότι οι αποφάσεις που θα προταθούν από ένα μοντέλο:

1. θα εκτελεστούν σε ένα πραγματικό πλαίσιο που δεν μπορεί να είναι απόλυτα σύμφωνο με το μοντέλο (το οποίο δημιουργήθηκε στα πλαίσια μίας διαδικασίας αφαίρεσης της πραγματικότητας) πάνω στο οποίο στηρίζεται η διαδικασία απόφασης
2. θα κριθούν κάνοντας αναφορά σε ένα σύστημα αξιών που θα φαίνεται ορθό (και όχι απαραίτητα σταθερό) σε ένα μέλλον που μπορεί να μην είναι καλά προσδιορισμένο, σύστημα αξιών που, κατά συνέπεια, κινδυνεύει να μην είναι σε απόλυτη συμφωνία με αυτό που χρησιμοποιήθηκε κατά την επίλυση του μοντέλου.

Επομένως σύμφωνα με τον Roy (2007) υπάρχουν δυο λόγοι ύπαρξης της έλλειψης σύμπτωσης και επομένως διαφοράς ανάμεσα:

- στην τυπική αναπαράσταση από τη μια μεριά, που αποτελείται από το μοντέλο και τις διαδικασίες αφαίρεσης της πραγματικότητας που εφαρμόζει
- στη βιωματική πραγματικότητα από την άλλη μεριά, στο πλαίσιο της οποίας οι αποφάσεις που θα ληφθούν θα εκτελεστούν και θα κριθούν.

Κατά τη διαδικασία υποστήριξης της απόφασης λοιπόν, είναι σημαντικό να ληφθούν υπόψη τα περίπου (προσεγγιστικές εκτιμήσεις παραμέτρων) και οι ζώνες άγνοιας, στοιχεία που είναι υπεύθυνα για το γεγονός ότι η τυπική αναπαράσταση δεν μπορεί να είναι απόλυτα συμβατή με τη βιωματική πραγματικότητα.

Τα «περίπου» και οι «ζώνες άγνοιας» έναντι των οποίων η ενασχόληση με την ευστάθεια στοχεύει να προστατεύσει τον αναλυτή, στη τυπική αναπαράσταση εμφανίζονται ως σημεία αδυναμίας σύμφωνα με την πρότασή του Roy (2005). Η τυπική αναπαράσταση που έχει υιοθετηθεί ως μοντελοποίηση του προβλήματος μπορεί να εξεταστεί σύμφωνα με τις τέσσερις παρακάτω όψεις για να αποκαλυφθούν αυτά τα σημεία αδυναμίας.

- i) Ο τρόπος με τον οποίο πραγματεύεται η κακή γνώση: είτε αδιαφορώντας για αυτή (δεδομένα που χειριζόμαστε ως βέβαια), είτε τροποποιώντας την με ένα μέρος αυθαιρεσίας με χρήση κατανομών πιθανοτήτων, ασαφών αριθμών, ορίων,...

- ii) Αμφίβολη, επιλεκτική ερμηνεία, ακόμη και καταχρηστική, που αποδίδεται σε ορισμένα δεδομένα: αδικαιολόγητη μετατροπή ποιοτικών δεδομένων σε ποσοτικά, ερμηνεία ανάρμοστη που αποδίδεται στις λεγόμενες αντικειμενικές μετρήσεις, δεδομένα που αναπτύσσονται στο πλαίσιο μιας διαδικασίας ερωτήσεων,...
- iii) Τρόπος διαμόρφωσης (κυρίως στην επιλογή παραμέτρων) που χρησιμοποιείται για να ληφθεί υπόψη μια σύνθετη πλευρά της πραγματικότητας που είναι δύσκολο να γίνει κατανοητή διότι ο ορισμός της είναι ελλιπής: μετρήσεις ικανοτήτων, συναρτήσεις αξίας ή χρησιμότητας, επίπεδα αναφοράς ή προσδοκίας,...
- iv) Παρουσία κυρίως τεχνικών παραμέτρων που δεν έχουν ή έχουν σε μικρό βαθμό συγκεκριμένη ερμηνεία (για παράδειγμα αυτές που έχουν επιβληθεί από τη διαδικασία επεξεργασίας): ελάχιστη απόκλιση που εξυπηρετεί τον απόλυτο χαρακτήρα μιας ανισότητας ενός περιορισμού, όρια που εξυπηρετούν την οριοθέτηση ενός συνόλου εφικτών λύσεων, παράμετροι που παρεμβάλλονται στη ροή μιας μετά-ευρετικής προσέγγισης,...

Η ενασχόληση με την ευστάθεια εξυπηρετεί αρχικά την ταυτοποίηση των σημείων αδυναμίας στην τυπική αναπαράσταση. Αυτά εξαρτώνται προφανώς από τον τρόπο με τον οποίο μοντελοποιήθηκε κι έπειτα ίσως τροποποιήθηκε το πρόβλημα υποστήριξης της απόφασης. Μπορούν επίσης να εξαρτηθούν από τις διαδικασίες επεξεργασίας που θα χρησιμοποιηθούν. Κατά μια γενική έννοια, αυτά τα σημεία αδυναμίας φαίνεται να συνδέονται με πηγές πιθανότητας, αβεβαιότητας ή αυθαιρεσίας (Roy, 1989; Roy, 2005).

Ο όρος «αβεβαιότητα» δεν καλύπτει, παρά ελλιπώς, όλες τις μορφές των «περίπου» και των «ζωνών άγνοιας» έναντι των οποίων θα πρέπει να θωρακιστεί ο αναλυτής. Είναι για παράδειγμα η περίπτωση των «περίπου» που απορρέουν από τις απλοποιήσεις, τους κακούς προσδιορισμούς ή των αυθαίρετων επιλογών. Είναι επίσης η περίπτωση των «ζωνών άγνοιας» που προέρχονται από κακές γνώσεις σχετικές με την πολυπλοκότητα των φαινομένων ή των συστημάτων αξιών.

Ο περιορισμός της ενασχόλησης με την ευστάθεια στην αντίληψη των αβεβαιοτήτων, ταυτίζεται με τον τρόπο προσέγγισης των σχέσεων ανάμεσα στην τυπική αναπαράσταση και τη βιωματική πραγματικότητα που βασίζεται στην έννοια του σεναρίου. Αντιμετωπίζοντάς την υπό αυτή την κάπως περιορισμένη οπτική, η ενασχόληση με την ευστάθεια έγκειται στον ορισμό μιας οικογένειας σεναρίων πεπερασμένων ή άπειρων. Αυτή η οικογένεια θα πρέπει να επιτρέπει τη θεώρηση διαφορετικών βιωματικών πραγματικοτήτων που αξίζει να ληφθούν υπόψη: η αβεβαιότητα που υπάρχει στο να αποδοθεί μια αληθινή αξία σε ορισμένα δεδομένα ή παραμέτρους, είναι που απαιτεί τη θεώρηση αυτών των διαφορετικών

πραγματικοτήτων. Έτσι κάθε σενάριο προκύπτει αποδίδοντας μια συγκεκριμένη αξία σε καθένα από αυτά τα δεδομένα και τις παραμέτρους.

Ο Roy (2004, 2005) έδειξε ότι, για να απαντηθεί σωστά ο λόγος ύπαρξης της ενασχόλησης με την ευστάθεια, είναι επιθυμητό να ξεπεράσουμε αυτή την περιοριστική άποψη. Αν δε θέλουμε να περιορίσουμε την ανάλυση ευστάθειας μόνο στην αντίληψη των αβεβαιοτήτων, το σωστό είναι να απαλλαγούμε από την έννοια του σεναρίου (το οποίο μπορεί επιπλέον να είναι πηγή παρεξηγήσεων σε ορισμένους επαγγελματικούς χώρους). Πρότεινε λοιπόν να αντικατασταθεί με την «έκδοση» του μοντέλου του προβλήματος απόφασης. Κάθε έκδοση ορίζεται από ένα συνδυασμό επιλογών σχετικών με τα σημεία αδυναμίας του μοντέλου. Αντιπροσωπεύει μια πραγματικότητα που αξίζει να ληφθεί υπόψη. Η οικογένεια των εκδόσεων που ορίζονται κατά αυτό τον τρόπο μπορεί επίσης, σε ορισμένες περιπτώσεις, να είναι αρκετή για να γίνουν κατανοητές οι σχέσεις ανάμεσα στην τυπική αναπαράσταση και τη βιωματική πραγματικότητα. Τα σημεία αδυναμίας που καθιστούν απαραίτητο τον υπολογισμό μιας τέτοιας οικογένειας εκδόσεων μπορούν να προέρχονται τόσο από την ύπαρξη τεχνικών παραμέτρων που εισχωρούν στον ορισμό των διαδικασιών, όσο και από την προσωπικότητα των αναλυτών στους οποίους απευθυνόμαστε για να πραγματοποιήσουμε την επεξεργασία του μοντέλου (Roy, 2005). Μπορεί ακόμα η ενασχόληση με την ευστάθεια να περιλαμβάνει μόνο μια έκδοση μοντελοποίησης του προβλήματος στην οποία θα πρέπει να εφαρμοστεί μια οικογένεια διαφορετικών διαδικασιών. Σε αυτή τη διευρυμένη άποψη της ενασχόλησης με την ευστάθεια, ταιριάζει λοιπόν να αντικαταστήσουμε την οικογένεια των σεναρίων με μια οικογένεια (ένα σύνολο) που αποτελείται από όλα τα ζεύγη (*διαδικασία, έκδοση*) που κρίνονται ορθά. Η προσέγγιση αυτή της ενασχόλησης με την ευστάθεια συνδέεται και με την προσέγγιση του Vincke (1999a,b).

Συμπληρωματικά με τα παραπάνω, σύμφωνα με τον Dias (2007) η ανάλυση ευαισθησίας είναι μια παραδοσιακή απάντηση στη δυσκολία επιλογής των τιμών παραμέτρων στα μοντέλα. Κατά τη δόμηση ενός μοντέλου καταδεικνύει ποιες παράμετροι συμβάλλουν περισσότερο στη διακύμανση του αποτελέσματος. Στη βελτιστοποίηση, δείχνει πόσο μπορεί να ποικίλουν οι παράμετροι χωρίς να αλλάξουν κάποια αποτελέσματα που μας ενδιαφέρουν. Η ανάλυση ευστάθειας θεωρείται συχνά ως η αντίθετη όψη της ανάλυσης ευαισθησίας, αλλά αυτό εξαρτάται από την έννοια που δίδεται στην ανάλυση ευστάθειας. Πράγματι μπορεί να βρούμε διαφορετικές οπτικές της έννοιας αυτής (Roy, 2002).

Στον Rosenhead (2001a), η ανάλυση ευστάθειας χρησιμοποιείται προκειμένου να επιλεγεί μία ενέργεια (μία πρώτη επιλογή σε μία διαδοχή επιλογών) η οποία είναι αρκετά ευέλικτη, ώστε να αφήνει πολλές καλές εναλλακτικές αναφορικά με τις επιλογές που θα γίνουν στο μέλλον. Οι Kouvelis and Yu (1997) ορίζουν ως ευσταθή λύση σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης ως αυτή η οποία έχει την καλύτερη απόδοση στη χειρότερη περίπτωση (π.χ. κανόνας max-min), και η οποία θα

μπορούσε να αντικατασταθεί από το κριτήριο που προτείνεται από τους Aloulou *et al.* (2005) για παράδειγμα. Οι Mulvey *et al.* (1995) διαχωρίζουν την ποιότητα της ευστάθειας της λύσης, για μια λύση της οποίας η τιμή είναι πάντα κοντά στη βέλτιστη (σχεδόν βέλτιστη) για κάθε αποδεκτή έκδοση του μοντέλου, έναντι της ποιότητας της ευστάθειας του μοντέλου, για μια λύση η οποία είναι πάντα εφικτή ή σχεδόν εφικτή για κάθε έκδοση. Οι Sevaux & Sorensen (2004) εισάγουν μια έννοια της ευστάθειας της λύσης υπό την έννοια ότι η λύση (ή ένα σχέδιο λύσης) δεν αλλάζει πολύ σε διαδικασίες βελτιστοποίησης που επαναλαμβάνονται σε τακτά χρονικά διαστήματα. Γενικότερα, οι Hites *et al.* (2003) προτείνουν μια πολυκριτήρια αξιολόγηση της ευστάθειας της λύσης.

Οι οπτικές που βρίσκονται πιο κοντά στον αντίποδα της ανάλυσης ευαισθησίας είναι αυτές που συναντώνται στους (Roy, 1998; Roy & Bouyssou, 1993), που ορίζουν το αποτέλεσμα ευστάθειας ως έναν ισχυρισμό που είναι έγκυρος για μια ομάδα αποτελεσμάτων συμβατών με τις διαφορετικές εκδόσεις των υπό μελέτη μοντέλων και ο ορισμός του Vincke (1999a) για την ευσταθή λύση ως αυτή που είναι πάντα κοντά (ή που δεν αντιφάσκει) σε κάθε άλλη λύση η οποία έχει παραχθεί με τη χρήση αποδεκτής έκδοσης των μοντέλων (ο Vincke έχει επίσης εισάγει την έννοια της ευσταθούς μεθόδου). Ο Roy (1998) εισήγαγε τις έννοιες του σχεδόν ευσταθούς συμπεράσματος (αν είναι αληθές «σχεδόν παντού») και του ψευδο-ευσταθούς συμπεράσματος (αν δεν είναι απόλυτα τυποποιημένο). Ενδιαφέρον ενδεχομένως παρουσιάζει η διάκριση των απόλυτων έναντι των σχετικών αποτελεσμάτων, όπως επίσης και η διάκριση ανάμεσα στα ενδιάμεσα αποτελέσματα έναντι των τελικών αποτελεσμάτων μιας μεθόδου (Dias & Climaco, 2002).

Ως πλέον αποδεκτός ορισμός στα πλαίσια της παρούσας διατριβής, θεωρείται αυτός σύμφωνα με τον οποίο η Ανάλυση Ευστάθειας στην επιχειρησιακή έρευνα είναι μία διαδικασία ο σκοπός της οποίας είναι να ορίσει ποια αποτελέσματα είναι ευσταθή για μια ομάδα εκδόσεων μοντέλων (και σε ορισμένες περιπτώσεις μια ομάδα εκδόσεων μεθόδων/αλγορίθμων). Στα πλαίσια μίας ευρείας θεώρησης αυτός ο ορισμός περιλαμβάνει τη διαδικασία ορισμού μιας ομάδας εκδόσεων μοντέλων και τη διαδικασία εξακρίβωσης της ευστάθειάς τους (και των συμπερασμάτων τους), και η αλληλεπίδραση με τους αποφασίζοντες. Πρέπει να σημειωθεί ότι η έμφαση στα συμπεράσματα είναι πιο γενική από την έμφαση στις λύσεις. Παρά ταύτα κάθε ισχυρισμός για ευσταθή λύση μπορεί να αναδιατυπωθεί ως μια παραδοχή ευστάθειας του συμπεράσματος που αφορά αυτή τη λύση. Οι ακόλουθες παραδοχές είναι παραδείγματα του ποια λύση θα μπορούσε να θεωρηθεί ως ευσταθής ακολουθώντας την κατηγοριοποίηση που εισήχθη από τους Dias and Climaco (1999).

- Ένα απόλυτο ευσταθές αποτέλεσμα είναι μια εσωτερική παραδοχή για μια από τις εναλλακτικές δράσεις ή λύσεις, έγκυρη για κάθε έκδοση του μοντέλου.

## Κεφάλαιο 1: Ανάλυση Ευστάθειας - Μεταβελτιστοποίηση

Για παράδειγμα, «η τιμή του  $x$  είναι μεγαλύτερη από 0.7» ή «το κόστος της διαδρομής  $y$  ενός δικτύου δεν υπερβαίνει το 10»

- Ένα (σχετικό) δυαδικό ευσταθές αποτέλεσμα είναι μια παραδοχή που σχετίζει ένα ζεύγος δράσεων ή λύσεων, εγκύρων για κάθε έκδοση του μοντέλου. Για παράδειγμα, «η λύση  $x$  είναι καλύτερη από τη λύση  $y$  ή η δράση  $x$  ξεπερνά την ενέργεια  $y$  με αξιοπιστία μεγαλύτερη του 0.7» είναι πιθανά δυαδικά ευσταθή αποτελέσματα.
- Ένα (σχετικό) μοναδιαίο ευσταθές αποτέλεσμα είναι μια παραδοχή που αφορά μία δράση ή λύση σχετική με τις εναπομείνουσες δράσεις ή λύσεις, έγκυρη για κάθε έκδοση του μοντέλου. Για παράδειγμα, «η ενέργεια  $x$  είναι ανάμεσα στις τρεις κορυφαίες ενέργειες στην κατάταξη» ή «το  $x$  είναι η λύση που επιτυγχάνει το χαμηλότερο κόστος στο χειρότερο σενάριο (έκδοση)» είναι πιθανά μοναδιαία ευσταθή αποτελέσματα.

Το επίρρημα *μερικώς* μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επεκτείνει την ταξινόμηση για να χαρακτηρίσει αποτελέσματα τα οποία είναι έγκυρα μόνο για μια μερίδα των εκδόσεων μοντέλου (αυτό εμπερικλείει τα μετρήσιμα και τα μη μετρήσιμα, ωστόσο φραγμένα, σύνολα των διαφορετικών εκδόσεων). Για παράδειγμα, «η λύση  $x$  είναι καλύτερη από τη λύση  $y$  για 99% των εκδόσεων του μοντέλου» θα μπορούσε να είναι ένα παράδειγμα μερικώς δυαδικού ευσταθούς αποτελέσματος και «από όλες τις λύσεις η αναλογία των εκδόσεων όπου η τιμή λύσης είναι υψηλότερη από 0.8 είναι 95% για τη λύση  $x$ » θα μπορούσε να είναι ένα παράδειγμα μοναδιαίου ευσταθούς αποτελέσματος.

Συνήθως, οι εκδόσεις μοντέλου θεωρούνται ισότιμα αποδεκτές, χωρίς προσπάθεια να αποδοθούν διαφορετικοί βαθμοί πιθανότητας (ή σημαντικότητας...) σε διαφορετικές εκδόσεις (ένα είδος μετά-μοντέλου). Πράγματι, μία προσπάθεια διάκρισης ανάμεσα σε διαφορετικά μοντέλα σε σχέση με τη σημαντικότητα ή την πιθανοφάνειά τους θα επέφερε νέες δυσκολίες που θα έπρεπε να ξεπεραστούν: καινούργιες παράμετροι θα έπρεπε να εισαχθούν (κατανομή πιθανοτήτων ή άλλες) και ένα μοντέλο το οποίο ήταν αρχικά απλό θα μπορούσε να γίνει πολύ περίπλοκο για να χρησιμοποιηθεί από τον αποφασίζοντα με ξεκάθαρο τρόπο. Επιπλέον, πρέπει να σημειωθεί ότι μερικά μετά-μοντέλα είναι ανεπαρκή για κάποιους τύπου παραμέτρων, π.χ. θα ήταν ασύνηθες να θεωρήσουμε τη βαρύτητα κριτηρίων ως τυχαίες μεταβλητές. Για αυτούς τους λόγους, η πιο κοινή εκδοχή είναι να εκλάβουμε ένα σύνολο των εκδόσεων του μοντέλου που θα αναλυθούν, θεωρώντας τις ως ίσης αξίας (δημιουργώντας έτσι ένα απλό μετά-μοντέλο για το σύνολο των εκδόσεων χωρίς συμπληρωματικές πληροφορίες/παραμέτρους).

### 1.1.2 Προσεγγίσεις της Ανάλυσης Ευστάθειας

Θα μπορούσε να επιχειρηθεί μια κατηγοριοποίηση των διαφορετικών προσεγγίσεων της ανάλυσης ευστάθειας ανάλογα με τον τρόπο που πραγματεύονται το πρόβλημα αυτό. Οι προτεινόμενες κατηγορίες είναι τρεις: η *τυπική*, η *ειδική* και η *μικτή*. Οι δύο πρώτες παρουσιάζουν χαρακτηριστικά στοιχεία που τις φέρνουν σε αντίθεση μεταξύ τους από πολλές απόψεις, η δε τρίτη προορίζεται να χαρακτηρίσει αυτές τις προσεγγίσεις που παρουσιάζουν χαρακτηριστικά στοιχεία που θα μπορούσαν να τις τοποθετήσουν σε οποιαδήποτε από τις δυο προηγούμενες κατηγορίες. Πιο συγκεκριμένα για κάθε κατηγορία έχουμε:

1) Στην *τυπική κατηγορία*, τοποθετούνται οι προσεγγίσεις που μπαίνουν στο πλαίσιο μιας τυπικής μοντελοποίησης προερχόμενη από τα τυπικά μοντέλα της επιχειρησιακής έρευνας και που λαμβάνουν υπόψη τις σχέσεις ανάμεσα στην τυπική αναπαράσταση και τη βιωματική πραγματικότητα (γενικά ασαφής) θεωρώντας μια οικογένεια σεναρίων, καθορισμένη με παραπομπή στο σταθερό υπό εξέταση μοντέλο. Γενικά, αυτά τα μοντέλα εισάγουν ένα κριτήριο βελτιστοποίησης. Η προσέγγιση έγκειται κυρίως στην έρευνα και τη μελέτη των λεγόμενων ευσταθών λύσεων παίρνοντας υπόψη την οικογένεια των σεναρίων: ευσταθείς χαρακτηρίζονται οι λύσεις οι οποίες είτε μεγιστοποιούν ένα κριτήριο ευστάθειας (στενά συνδεδεμένο με το κριτήριο της βελτιστοποίησης), είτε διαθέτουν ορισμένες ιδιότητες που απαιτούνται (εξίσου συνδεδεμένες με το κριτήριο της βελτιστοποίησης). Όταν το πρόβλημα βελτιστοποίησης που σχετίζεται με το σταθερό μοντέλο δέχεται επίλυση με αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου, ένα από τα ερωτήματα που τίθεται συχνά έγκειται στο να εξεταστεί αν συμβαίνει το ίδιο και με το πρόβλημα της ευστάθειας.

Μεταξύ πολλών άλλων, μερικές προσεγγίσεις που φαίνεται σύμφωνα με τον Roy (2007) ότι μπορούν να τοποθετηθούν σε αυτή την κατηγορία είναι οι εξής: Aissi *et al.* (2005a, 2007), Aloulou, Della Croce (2005), Averbach, Berman (1997), Averbach, Lebedev (2004, 2005), Ben-Tal, Nemirovski (1999), Bertsimas, Sim (2003, 2004), Briand *et al.* (2005), Deineko, Woeginger (2006), Gutiérrez *et al.* (1996), Hites (2000), Kalai *et al.* (2005), Kouvelis, Yu (1997), Montemanni *et al.* (2004), Mulvey *et al.* (1995), Snyder (2006), Soyster (1973, 1979), Vallin (1999), Yaman *et al.* (2001), Yu, Yang (1998).

Η ποικιλία των προβλημάτων που αντιμετωπίζονται από τις προσεγγίσεις της τυπικής κατηγορίας απορρέει από τους πιθανούς συνδυασμούς που προσφέρουν οι τέσσερις πηγές διαφοροποίησης όπως περιγράφονται παρακάτω:

- i. Το *τυπικό μοντέλο*. Στην πραγματικότητα μπορεί να αφορά οποιοδήποτε από τα τυπικά μοντέλα της επιχειρησιακής έρευνας. Οι εργασίες που έχουν δημοσιευθεί και αφορούν κυρίως τα παρακάτω προβλήματα: προγραμματισμός παραγωγής, ροή εργασιών, προβλήματα μίξης, προβλήματα γράφων, πιο σύντομος δρόμος,



του περιπλανώμενου πωλητή, μέγιστης ροής, p-median και p-centre προβλήματα χωροθέτησης και βέβαια, τα τυπικά μοντέλα μαθηματικού προγραμματισμού (κυρίως γραμμικού).

- ii. *Τα κριτήρια βελτιστοποίησης.* Το κάθε κριτήριο θα αποτελεί ζευγάρι με το εν λόγω τυπικό μοντέλο, εκφρασμένο με διάφορες παραλλαγές. Πάντως επί του παρόντος δεν υπάρχουν πολλές εργασίες στις οποίες να λαμβάνονται υπόψη παράλληλα πολλά κριτήρια.
- iii. *Την οικογένεια των σεναρίων.* Αυτή η οικογένεια προσδιορίζεται γενικά θεωρώντας την αξία ορισμένων παραμέτρων ως αβέβαιη. Ως παράμετροι θεωρούνται είτε αυτές που μπαίνουν στον ορισμό του κριτηρίου της βελτιστοποίησης, είτε αυτές που καθορίζουν τους περιορισμούς. Υποθέτουμε ότι αυτές οι παράμετροι μπορούν να πάρουν είτε ένα μικρό αριθμό διακριτών αξιών, είτε όλες αυτές τις αξίες που ανήκουν σε ένα διάστημα. Ένα σενάριο ορίζεται αποδίδοντας σε κάθε μια από τις αβέβαιες παραμέτρους μια από τις πιθανές αξίες. Μπορούμε είτε να το θεωρήσουμε είτε όχι ότι όλοι οι συνδυασμοί επιτρέπονται. Σε ορισμένες περιπτώσεις, τα σενάρια πιθανολογούνται ή διατάσσονται κατά φθίνουσα πιθανοφάνεια.
- iv. *Η μορφή των απαντήσεων που ζητούνται.* Εδώ πρόκειται κυρίως για αλγόριθμους που επιτρέπουν να ανακαλύψουμε ή να προσεγγίσουμε μία ή ενδεχομένως όλες τις λύσεις που, αναλογικά με την οικογένεια των σεναρίων μπορούν να χαρακτηριστούν ευσταθείς.

Αρκετές εργασίες υπάρχουν σχετικές με το θέμα, συμπεριλαμβανομένων των πλέον πρόσφατων (Kalaï *et al.*, 2005; Perny & Spanjaard & 2003; Rosenblatt & Lee, 1987; Snyder, 2006; Snyder & Daskin, 2006; Bertsimas & Sim, 2003, 2004; Beuthe & Scannella, 2001; Kalaï, 2006; Mulvey *et al.*, 1995; Soyster, 1973, 1979).

2) *Στην ειδική κατηγορία*, τοποθετούνται προσεγγίσεις των οποίων το σημείο εκκίνησης είναι ένα συγκεκριμένο πραγματικό πρόβλημα υποστήριξης της απόφασης το οποίο πρόκειται, κατά το αρχικό στάδιο της μοντελοποίησης, να μοντελοποιηθεί και σε σχέση με την ανάλυση ευστάθειας: η τυπική αναπαράσταση εδώ θα πρέπει να απορρέει από αυτό το αρχικό μοντέλο. Οι σχέσεις που πρέπει να ληφθούν υπόψη ανάμεσα στην τυπική αναπαράσταση και τη βιωματική πραγματικότητα δεν προσεγγίζονται εδώ απαραίτητα μέσα από μια οικογένεια σεναρίων που θα ορίζονταν με εμφανή τρόπο. Ο προσδιορισμός των σημείων αδυναμίας, η σύλληψη μιας οικογένειας εκδόσεων, ενδεχομένως ζεύγους (*διαδικασία, έκδοση*) αποτελούν αναπόσπαστο μέρος της μοντελοποίησης του κάθε ειδικού προβλήματος. Αυτό μπορεί ακόμη να περιέχει (όπως και στην τυπική κατηγορία) και την έρευνα και τη μελέτη των λύσεων που χαρακτηρίζονται ως ευσταθείς. Ωστόσο, ο τρόπος που θα δοθεί νόημα σε αυτό το χαρακτηρισμό εξαρτάται από το εκάστοτε πρόβλημα που μελετάται. Αυτό μπορεί να οδηγήσει στη δημιουργία πολλαπλών κριτηρίων-μέτρων

ευστάθειας. Δηλαδή η ευστάθεια δεν είναι απαραίτητα συνδεδεμένη με την παρουσία ενός μόνο κριτηρίου-μέτρου προς βελτιστοποίησης. Υπάρχει η δυνατότητα, με τρόπο λίγο ή περισσότερο περίπλοκο, να εισαχθούν εκτιμήσεις ευελιξίας ή σταθερότητας των λύσεων. Επιπλέον, η εκτίμηση των ευσταθών λύσεων μπορεί να μην είναι το κεντρικό αντικείμενο της έρευνας: η εκτίμηση μπορεί να αφορά στην προβολή συμπερασμάτων τα οποία, ανάλογα με την περίπτωση, μπορεί να χαρακτηριστούν απόλυτα ευσταθή, ευσταθή κατά προσέγγιση ή ψευδο-ευσταθή (Roy, 1998, 2005).

Οι επιστημονικές δημοσιεύσεις που αναφέρονται σε αυτή την κατηγορία είναι ολιγάριθμες γιατί, όπως είναι γνωστό, οι πραγματικές εφαρμογές δεν εκδίδονται, παρά σε εξαιρετικές περιπτώσεις, σε άρθρα αποδεκτά από τα καλά επιστημονικά περιοδικά. Ορισμένες εργασίες είναι αυτές των Aissi (2005c), Aissi *et al.*, (2005a), Aloulou, Portmann (2005), Carr and al. (2006), Chang, Yeh (2002), Durieux (2003), Espinouse *et al.* (2005), Gabrel (1994), Kazakci and al. (2006), Rosenblatt, Lee (1987), Roy, Bouyssou (1993), Roy and al. (1986), Sevaux, Sørensen (2002, 2004b). Σίγουρα δεν είναι σπάνιο προσεγγίσεις που τοποθετούνται στην τυπική ή την μικτή κατηγορία να γίνονται αντικείμενο εκμετάλλευσης στο πλαίσιο εφαρμογών σε επιχειρήσεις χωρίς ωστόσο το γεγονός αυτό να τις κατατάσσει στην ειδική κατηγορία. Για παράδειγμα η περίπτωση των έργων των Bertsimas και Sim που εφαρμόστηκαν στην EDF (Roy, 2007) ή ακόμη αυτά του Aloulou που εφαρμόστηκαν σε ένα εργαστήριο συναρμολόγησης (Aloulou & Portmann, 2005).

Οι προσεγγίσεις της ανάλυσης ευστάθειας που υλοποιούνται στα ειδικά πλαίσια λήψης αποφάσεων είναι άκρως διαφοροποιημένες. Ακόμη πιο διαφοροποιημένες είναι οι προσδοκίες αποφασιζόντων όσον αφορά τη μορφή των απαντήσεων που επιθυμούν να λάβουν από τους αναλυτές. Συνήθως, δεν είναι προετοιμασμένοι να επεξηγήσουν τα «περίπου» και τις «ζώνες άγνοιας» που θα περιπλέξουν τη δουλειά των αναλυτών και δεν γνωρίζουν απαραίτητα να προσδιορίσουν μέχρι ποιο βαθμό επιθυμούν να αποφύγουν ορισμένες επιπτώσεις που κρίνουν ατυχείς και να δουν να φθίνουν ορισμένες κρίσιμες ιδιότητες που ήθελαν να διατηρήσουν. Για να γίνουν εν μέρει αντιληπτές οι πολλαπλές πτυχές της ενασχόλησης με την ευστάθεια που παρουσιάζονται στην ειδική κατηγορία, προσεγγίζονται διαδοχικά αμέσως από τον Roy (2007) τρεις μεγάλοι τύποι πλαισίων αποφάσεων και επεξηγούνται ο καθένας, μέσα από πολύ συγκεκριμένα παραδείγματα, σε σχέση με τις αναμενόμενες προσδοκίες των αποφασιζόντων (με αυτό τον όρο ορίζεται το σύνολο, για λογαριασμό του οποίου ή στο όνομα του οποίου υλοποιείται η υποστήριξη της απόφασης Roy, 1985). Ο Roy (2005) αναφέρει επίσης μια σειρά από βιβλιογραφικές παραπομπές που αναφέρονται σε αυτούς τους τρεις τύπους των πλαισίων αποφάσεων και κυρίως στα παραδείγματα για τα οποία θα γίνει λόγος στη συνέχεια.

α) *Η απόφαση έχει ένα συγκεκριμένο και εξαιρετικό χαρακτήρα (δε κλιμακώνεται ούτε επαναλαμβάνεται στο χρόνο)*

- i. Επιλογή ενός προμηθευτή έπειτα από μειοδοτικό διαγωνισμό για την απόκτηση και εγκατάσταση νέου εξοπλισμού: ας υποθέσουμε ότι δόθηκαν περίπου δεκαπέντε απαντήσεις και καθεμιά εκτιμήθηκε σύμφωνα με τα πέντε ακόλουθα κριτήρια: κόστος, προθεσμία, επίπεδα ικανοποίησης σε δυο τύπους επιδόσεων, εμπιστοσύνη προς τον προμηθευτή όσον αφορά την ικανότητά του να σεβαστεί τις προθεσμίες και τους όρους σύμβασης (ή εργολαβίας). Τα «περίπου» και οι «ζώνες άγνοιας» επηρεάζουν εδώ τον τρόπο εκτίμησης των απαντήσεων που έχουν ληφθεί πάνω στα πέντε αυτά κριτήρια (ειδικότερα στα τρία τελευταία) καθώς και το ρόλο που ταιριάζει στο καθένα από αυτά να παίξει (διαφορετικά αντίστοιχο βάρος και πιθανό βέτο). Ο αποφασίζων μπορεί εδώ να περιμένει από τον αναλυτή να του προτείνει την επιλογή ενός αριθμού προσφορών τόσο περιορισμένων όσο τα «περίπου» και οι «ζώνες άγνοιας» το επιτρέπουν, συνοδευόμενες, κάθε μια από αυτές, από επιχειρήματα που δικαιολογούν την επιλογή τους. Ο αναλυτής πρέπει για παράδειγμα να επιτρέψει στον αποφασίζοντα να καταλάβει κάτω από ποιες συνθήκες (σχετικές υποθέσεις για τα «περίπου» και τις «ζώνες άγνοιας») η προσφορά αποδεικνύεται τουλάχιστον εξίσου καλή με οποιαδήποτε άλλη εξηγώντας παράλληλα τους κινδύνους που μπορεί να διατρέξει σε περίπτωση που οι συνθήκες δεν είναι ικανοποιητικές.
- ii. Καθορισμός των διαρθρωτικών χαρακτηριστικών ενός δικτύου αποχέτευσης σε μια κοινότητα που είναι υποβαθμισμένη: το να εκτιμηθεί με άριστο τρόπο η αξία που θα δοθεί σε αυτά τα χαρακτηριστικά, απαιτεί την επαρκή γνώση των αναγκών οι οποίες πρόκειται να καλυφθούν σε όλη τη διάρκεια της ζωής που έχει υπολογιστεί για το δίκτυο. Αυτές οι ανάγκες, στην πραγματικότητα, δεν είναι πολύ γνωστές διότι εξαρτώνται από πολλούς παράγοντες: εξέλιξη του πληθυσμού, των καταναλωτικών του συνηθειών, καθιέρωση νέων δραστηριοτήτων, εξέλιξη της νομοθεσίας για τα απόβλητα, κ.α. Αν ο αναλυτής σκοπεύει να διατυπώσει το πρόβλημα με όρους βελτιστοποίησης ενός μόνο κριτηρίου, δεν μπορεί να περιορίσει αυτό το κριτήριο μόνο στο να λάβει υπόψη τα προβλεπόμενα κόστη κατασκευής και συντήρησης του δικτύου. Θα πρέπει επίσης να λάβει υπόψη του τα κόστη που μπορεί να επιφέρει η προσαρμογή του σε ανάγκες που θα ήταν αδύνατον να ικανοποιηθούν χωρίς να τροποποιηθούν τα διαρθρωτικά χαρακτηριστικά που συγκεντρώθηκαν εξ αρχής. Θα πρέπει επίσης να λάβει υπόψη τις ζημιές που θα προέκυπταν από τις επιπλέον κόστη της αρχικής κατασκευής και συντήρησης αν οι ανάγκες αποδεικνύονταν άσκοπα υπερεκτιμημένες. Αυτό δείχνει ότι η διατύπωση ενός μόνο κριτηρίου βελτιστοποίησης προσκρούει εδώ σε σοβαρές δυσκολίες. Ακόμη κι αν ο επιχειρησιακός ερευνητής μπορεί να βρει τον τρόπο να τις ξεπεράσει και να συλλάβει μια αρμόζουσα οικογένεια σεναρίων, δεν είναι προφανές ότι αυτός ο τρόπος διατύπωσης του προβλήματος υποστήριξης της απόφασης θα είναι καλύτερα προσαρμοσμένος ώστε να ανταποκριθεί στις προσδοκίες του αποφασίζοντα. Στην πραγματικότητα, μια ευσταθής απόφαση τη δεδομένη στιγμή, θα ήταν αυτή που πέρα από απρόβλεπτες συνθήκες, δε θα οδηγούσε σε

κάθε περίπτωση σε σοβαρή μη ικανοποίηση των αναγκών. Αυτό το παράδειγμα δείχνει ότι, σε ορισμένες περιπτώσεις, η ενασχόληση με την ευστάθεια μπορεί να χρειαστεί να παίξει καθοριστικό ρόλο ακόμη και στη διατύπωση του προβλήματος υποστήριξης της απόφασης.

*β) Η απόφαση έχει χαρακτήρα επαναλαμβανόμενο και / ή διαδοχικό*

i. Σχεδιασμός πρόσληψης ιπτάμενου προσωπικού σε πτήσεις μιας αεροπορικής εταιρείας: η ενασχόληση με την ευστάθεια ενισχύει για παράδειγμα την έρευνα ώστε να υπάρξει δυνατότητα αντιμετώπισης της απρόβλεπτης μη διαθεσιμότητας των πληρωμάτων (ασθένεια, ακινητοποίηση κατά τη διάρκεια πτήσης,...) καθώς και των τροποποιήσεων σχεδίων πτήσεων (αεροσκάφος διαφορετικού τύπου από αυτό που είχε αρχικά προβλεφτεί,...). Πώς θα αντιμετωπιστούν αυτά τα απρόοπτα μέσα σε οικονομικές αλλά και νομικές συνθήκες ώστε να είναι αποδεκτά χωρίς ωστόσο να επιφέρουν στο σχεδιασμό σκαμπανεβάσματα που θα προκαλέσουν ενδεχομένως κακή εμπειρία στο προσωπικό; Αυτό είναι το ερώτημα στο οποίο θα πρέπει να προσπαθήσει να απαντήσει ο αναλυτής μέσω της ενασχόλησης με την ευστάθεια.

ii. Σχέδιο προμήθειας εξοπλισμού με προοπτική να εκτελεστεί σε στάδια: σε κάθε στάδιο, η ενασχόληση με την ευστάθεια υποχρεώνει να ενδιαφερθούμε για τον τρόπο με τον οποίο επηρεάζει η ληφθείσα απόφαση σε αυτό το στάδιο, τα πλαίσια στα οποία θα χαραχθούν τα μελλοντικά στάδια. Η επίδραση αυτής της απόφασης που πάρθηκε στο στάδιο  $n$  πάνω στο τι μπορεί να συμβεί στα επόμενα στάδια, μπορεί να μην είναι επαρκώς γνωστό και να είναι δύσκολο να μοντελοποιηθεί (ας αναλογιστούμε για παράδειγμα την περίπτωση ενός εργοστασίου που πρέπει να παραδοθεί με το κλειδί στο χέρι κι έπειτα να το εκμεταλλευτεί ο κατασκευαστής για δέκα χρόνια σε μια ξένη χώρα). Ωστόσο ο αναλυτής θα πρέπει να λάβει υπόψη τις δυνατότητες προσαρμογής και αντίδρασης που επιφυλάσσει η ληφθείσα σε κάθε στάδιο απόφαση για τα επόμενα στάδια. Όσο άγνωστες κι αν είναι οι συνθήκες στις οποίες θα ληφθούν οι επόμενες αποφάσεις, είναι σημαντική η λήψη, σε κάθε στάδιο, μιας απόφασης που δεν θα καθιστά αδύνατες ή δε θα φθίνει πάρα πολύ τις μελλοντικές καλύτερες δυνατότητες επιλογής. Επομένως εδώ, η ενασχόληση με την ευστάθεια συνδέεται με την ενασχόληση με την ελαστικότητα.

*γ) Η απόφαση έγκειται στην επιλογή μιας διαδικασίας που προορίζεται να χρησιμοποιηθεί επαναληπτικά σε περιβάλλοντα (τόπος, χρόνος,...) των οποίων τα χαρακτηριστικά μπορεί να έχουν έντονες διαφορές.*

i. Διαδικασία υποστήριξης στη διαχείριση του ανεφοδιασμού ενός μαγαζιού: ας θεωρήσουμε την περίπτωση όπου οι ποσότητες που βγαίνουν από το μαγαζί, για κάθε προϊόν, είναι αντικείμενο προβλέψεων για τις περιόδους που έπονται. Αυτές οι προβλέψεις δεν μπορούν να υπολογιστούν παρά στο περίπου. Το ίδιο ισχύει

και για τις προθεσμίες παράδοσης που ανακοινώνονται από τους προμηθευτές. Ο διαχειριστής προσδοκεί μια εύρωστη διαδικασία που θα τον προστατέψει τόσο από υπερβολικά αποθέματα όσο και από ρήξεις που θα μπορούσαν να κριθούν οικονομικά και ψυχολογικά απαράδεκτες.

- ii. Διαδικασία που καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο κατανέμεται ένας συνολικός προϋπολογισμός μεταξύ των δικαιούχων που είναι διασκορπισμένοι σε μια επικράτεια: ας υποθέσουμε ότι αυτοί οι δικαιούχοι είναι οντότητες (για παράδειγμα συνεταιρισμοί) των οποίων το μέγεθος και οι ανάγκες ενδέχεται να έχουν μεγάλες διαφορές, τόσο στη διάρκεια του χρόνου όσο και του χώρου. Ενώπιον αυτών των διαφορών, μια διαδικασία δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ευσταθής παρά μόνο αν κριθεί δίκαιη σε όλες τις περιπτώσεις που θα πρέπει να εφαρμοστεί.
- iii. Διαδικασία προσαρμογής ενός μοντέλου που έχει ως αντικείμενο την προβολή, μέσα από διαδοχικές έρευνες, του τρόπου με τον οποίο διάφοροι παράγοντες, που λαμβάνουν υπόψη μια πραγματικότητα, εξελίσσονται και προσαρμόζονται στο χρόνο: ας υποτεθεί για παράδειγμα ότι αυτή η πραγματικότητα έχει χαρακτηριστικό την ικανοποίηση των καταναλωτών, σε ορισμένα αγαθά ή υπηρεσίες. Οι εν λόγω διαδικασίες προσαρμογής, συνήθως, συνίστανται στο να προσδιοριστούν, έπειτα από κάθε έρευνα, η πρόβλεψη αξία που θα αποδοθεί σε κάθε παράγοντα, ώστε το μοντέλο να προσαρμοστεί όσο το δυνατόν καλύτερα στα αποτελέσματα της έρευνας. Ας υποθέσουμε πάλι ότι αυτό το «δυνατόν καλύτερα» επηρεάζεται από ένα κριτήριο βελτιστοποίησης που παρεμβάλλει τις αποκλίσεις ανάμεσα στην παρατήρηση και τη θεωρητική αξία που έχει εισάγει το μοντέλο. Τα σημεία αδυναμίας τα οποία πρέπει να λάβει υπόψη της η ενασχόληση με την ευστάθεια, προέρχονται όχι μόνο από το γεγονός ότι οι απαντήσεις των ερευνών αντανakλούν λίγο πολύ αυτό που προσπαθούμε να προσεγγίσουμε, αλλά επίσης ορισμένες πιο τεχνικές πλευρές:
  - παρουσία στο μοντέλο παραμέτρων που στερούνται συγκεκριμένης ερμηνείας όπως οι μεταβλητές απόκλισης, οι οποίες θα πρέπει να εισαχθούν για να μπορέσουμε να λάβουμε υπόψη τις ανισότητες που θα πρέπει να εκφράζουν κατά το δυνατόν ισότητες·
  - μη μοναδικότητα της τέλει λύσης ή / και παρουσία γειτονικών της βέλτιστης λύσεων, καθώς όλες αυτές οι λύσεις μπορούν να κριθούν κατάλληλες για να επιλεγούν.

Η αντίληψη αυτών των τεχνικών απόψεων για να εκτιμηθεί η ευστάθεια της διαδικασίας, μπορεί να θεωρηθεί εδώ στενά συνδεδεμένη με τις αναλύσεις για τη σταθερότητα.

3) Στην *μικτή κατηγορία*, τοποθετούνται όλες εκείνες οι προσεγγίσεις που δεν παρουσιάζουν, παρά με μεγάλη ασάφεια, όλα τα απαιτούμενα χαρακτηριστικά για να μπορέσουν να τοποθετηθούν ξεκάθαρα σε μία από τις δυο προηγούμενες κατηγορίες. Αυτή η ανεπάρκεια για μια ξεκάθαρη τοποθέτηση σε μια από τις κατηγορίες παρουσιάζεται συχνά ταυτόχρονα με την παρουσία ορισμένων χαρακτηριστικών στοιχείων σχετικών με την άλλη κατηγορία. Μπορεί για παράδειγμα να πρόκειται για προσεγγίσεις που, μην έχοντας ως σημείο εκκίνησης ένα πραγματικό πρόβλημα που είναι πρωτίστως απαραίτητο για την τοποθέτηση στην ειδική κατηγορία, στηρίζονται ωστόσο σε ένα τύπο συγκεκριμένων προβλημάτων που είναι αρκετά ειδικός. Αυτός ο τύπος προβλήματος οδηγεί στο ενδιαφέρον μιας τυπικής μοντελοποίησης που απομακρύνεται από τα τυπικά μοντέλα. Σε αυτές τις συνθήκες, η αναγνώριση των σημείων αδυναμίας, η σύλληψη μιας οικογένειας εκδόσεων ή ζευγών (διαδικασία, έκδοση) δεν μπορούν παρά να απορρέουν από διατυπωμένες εκ των προτέρων υποθέσεις που δε στηρίζονται σε ένα συγκεκριμένο καλά καθορισμένο πλαίσιο. Μπορεί επίσης να πρόκειται για προσεγγίσεις που ασχολούνται με την έρευνα και τη μελέτη λύσεων και / ή ευσταθών συμπερασμάτων, χωρίς η τυπική μοντελοποίηση να εισάγει ένα συγκεκριμένο σταθερό μοντέλο της επιχειρησιακής έρευνας. Είναι κυρίως η περίπτωση όπου υπάρχει ενδιαφέρον για μια τελική λίστα πιθανών δράσεων που έχουν εκτιμηθεί με πολλά κριτήρια, ακόμη και από πολλούς κριτές.

Παραδείγματα τέτοιων προσεγγίσεων αναφέρονται από τους Aloulou, Artigues (2006), Beuthe, Scannella (2001), Billaut, Roubellat (1996), Dias *et al.* (2002), Elkhyari *και.* (2005), Gupta, Rosenhead (1972), Gutiérrez, Kouvelis, (1995), Kouvelis *et al.* (1992), Malcolm, Zenios (1994), Pierreval, Durieux (2007), Rosenhead (2001a,b), Rosenhead *et al.* (1972), Sengupta (1991), Sevaux *et al.* (2005).

Οι μορφές απαντήσεων στις οποίες οδηγούν ή θα μπορούσαν να οδηγήσουν οι προσεγγίσεις που τοποθετούνται στη *μεικτή κατηγορία*, μπορούν να ειπωθούν σαν υβριδικές μορφές αυτών που προκαλούν ή θα έπρεπε να προκαλέσουν οι προσεγγίσεις που τοποθετούνται στις κατηγορίες *τυπική* ή *ειδική*.

### **1.1.3 Η Ανάλυση Ευστάθειας στη Διαδικασία Υποστήριξης της Απόφασης**

Ο ρόλος της ανάλυσης ευστάθειας στην υποστήριξη αποφάσεων δε φαίνεται να έχει μελετηθεί εκτενώς μέχρι τώρα. Σε μια προσπάθεια να ταξινομηθούν οι περισσότερες από τις προσεγγίσεις της ανάλυσης ευστάθειας θα μπορούσαμε να τις διαχωρίσουμε σύμφωνα με την τοποθέτησή τους, στις «εκ των προτέρων» έναντι των «εκ των υστέρων», κατά τη χρήση μιας μεθόδου για την εξεύρεση λύσης.

## Κεφάλαιο 1: Ανάλυση Ευστάθειας - Μεταβελτιστοποίηση

Μια από τις πιθανότητες είναι να θεωρήσουμε την Ανάλυση Ευστάθειας ως μια εκ των προτέρων ενασχόληση, που σημαίνει την ενσωμάτωση αυτής της ενασχόλησης σε ένα μοντέλο για να αναλυθεί. Σε αυτές τις περιπτώσεις, συνήθως προβλήματα βελτιστοποίησης, ένα μοντέλο χτίζεται και ένας αλγόριθμος χρησιμοποιείται για να εξευρεθεί μια λύση η οποία είναι ευσταθής σύμφωνα με ορισμένα προκαθορισμένα κριτήρια. Η επικρατέστερη λύση θα είναι βέλτιστη σύμφωνα με αυτό το κριτήριο (π.χ. ελαχιστοποιεί το μέγιστο κόστος ή τη μέγιστη απώλεια). Μπορεί να συμβεί ακόμα, η βέλτιστη λύση για το μοντέλο στο οποίο έχει ενσωματωθεί η ανάλυση ευστάθειας να μην ήταν ποτέ η βέλτιστη λύση για καμία από τις εκδόσεις αυτές που λήφθηκαν υπόψιν για το αρχικό μοντέλο. Παραδείγματα για αυτές τις προσεγγίσεις παραθέτουν οι: Kouvelis and Yu (1997), και Mulvey *et al.* (1995). Μία προσέγγιση που φαίνεται ιδιαίτερα υποσχόμενη είναι να χρησιμοποιούνται διάφορα κριτήρια αντί ενός κριτηρίου το οποίο θα βελτιστοποιηθεί (όπως προτείνεται από τους Hites *et al.*, 2003), πιθανώς χρησιμοποιώντας εργαλεία ανάλογα με εκείνα που χρησιμοποιούνται στο διαδραστικό πολυκριτήριο προγραμματισμό για να διερευνηθεί το σύνολο των εφικτών λύσεων. Σύμφωνα με μια άλλη προσέγγιση που θεωρεί την ανάλυση ευστάθειας εκ των προτέρων ενασχόληση είναι να προσδιοριστεί ένα υποσύνολο ευσταθών λύσεων (πιθανώς κενό) σύμφωνα με κάποια κριτήρια ευστάθειας, αντί της μίας και μόνης βέλτιστης ευσταθούς λύσης (Aloulou *et al.*, 2005, Roy, 2007).

Μια δεύτερη πιθανότητα είναι να θεωρηθεί η ανάλυση ευστάθειας ως εκ των υστέρων ενασχόληση υποκαθιστώντας ή συμπληρώνοντας την ανάλυση ευαισθησίας, προκειμένου να αξιολογηθεί πόσο ευσταθής είναι μια λύση η οποία προέρχεται από μια διαδικασία υποστήριξης αποφάσεων και να παράσχει συμπληρωματικά αποτελέσματα ευστάθειας. Το πρώτο παράδειγμα αυτού του τύπου προσέγγισης βρίσκεται στους (Roy and Bouyssou, 1993). Αυτή η προσέγγιση μπορεί να είναι χρήσιμη για να εξετάσουμε την εγκυρότητα μιας πρότασης και το πως η αξιολόγησή της μπορεί να αλλάξει από έκδοση σε έκδοση, πιθανώς καθορίζοντας τα όριά της και εμπλουτίζοντας την πληροφορία που μπορεί να παρασχεθεί στον αποφασίζοντα.

Για παράδειγμα, από το να λέμε ότι η  $x$  είναι η καλύτερη εναλλακτική σε ένα πρόβλημα επιλογής, μπορούμε να πληροφορήσουμε τον αποφασίζοντα ότι όλες οι εναλλακτικές υστερούν είτε απέναντι στη  $x$  είτε στην  $y$ , εξηγώντας ποιες είναι οι βασικές διαφορές ανάμεσα στις εκδόσεις που προκρίνουν τη  $x$  και αυτές που προκρίνουν την  $y$  και προσθέτοντας ότι η  $y$  είναι πάντα μια σχετικά καλή επιλογή ενώ υπάρχουν εκδόσεις όπου η  $x$  βρίσκεται χαμηλά στην αξιολόγηση. Στην περίπτωση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης, αφού βρεθεί η βέλτιστη λύση, ο αποφασίζων μπορεί να θελήσει να υπολογίσει πόσο λανθασμένη μπορεί να είναι αυτή για κάποιες ακραίες εκδόσεις των μοντέλων.

Πριν αναλύσουμε μια τρίτη πιθανότητα, πρέπει να σημειώσουμε ότι για τις προσεγγίσεις που προαναφέρθηκαν, το σύνολο των εκδόσεων των μοντέλων θεωρείται ότι έχει καθοριστεί εκ των προτέρων. Όπως επισημαίνει ο Roy (2002) αυτό

## Κεφάλαιο 1: Ανάλυση Ευστάθειας - Μεταβελτιστοποίηση

μπορεί να προκαλέσει δίλημμα ανάμεσα στην επιθυμία να ληφθεί υπ' όψιν κάθε κατανοητή έκδοση και την επιθυμία να εξασφαλιστούν ορισμένα χρήσιμα αποτελέσματα. Πιθανόν λόγω αυτού του ενδεχόμενου διλήμματος ο Roy (1998) είχε προτείνει την έννοια του σχεδόν ευσταθούς αποτελέσματος. Μια τυπική παραδοχή η οποία επιβεβαιώνεται από όλες τις εκδόσεις, εκτός από μερικές, που θεωρούνται αμελητέες.

Όταν λαμβάνουμε υπ' όψιν προτιμησιακά σχετιζόμενες παραμέτρους, μία τρίτη πιθανότητα βασίζεται στην ιδέα να χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση ευστάθειας, δηλ. προσδιορίζοντας ποια αποτελέσματα είναι ευσταθή για ένα σύνολο εκδόσεων του μοντέλου, καθ' όλη τη διάρκεια της διαδικασίας απόφασης σαν ένα εργαλείο που οδηγεί τη διαδικασία αυτή. Κατά την έναρξη της διαδικασίας, οι συμμετέχοντες θα είναι ανοιχτοί να αποδεχτούν ένα ευρύ σύνολο εκδόσεων μοντέλου, το οποίο θα προσπαθήσουν να μειώσουν καθώς η διαδικασία προχωρά. Αντί μιας διαδικασίας που ξεκινά με εξαγωγή τιμών παραμέτρων η οποία ακολουθείται από υπολογισμό της λύσης και την εκ των υστέρων ανάλυση ευστάθειας, θα έχουμε μια επανάληψη της εξαγωγής και των φάσεων της ανάλυσης ευστάθειας.

Στη φάση της εκμείευσης του μοντέλου απόφασης ο αποφασίζων θα ερωτηθεί για τις τιμές των παραμέτρων, χωρίς να ζητούνται ακριβή νούμερα (π.χ. η απάντηση μπορεί να είναι ένα διάστημα ή μια σχέση σύγκρισης μεταξύ δύο παραμέτρων). Η εκμείευση μπορεί ακόμα να προχωρήσει έμμεσα όπως στις προσεγγίσεις σύνθεσης - αποσύνθεσης (Jacquet-Lagrèze & Siskos, 2001), όπου ο αποφασίζων μπορεί να υποδείξει αποτελέσματα που το μοντέλο θα πρέπει να αναπαράγει. Οι απαντήσεις του αποφασίζοντα στις φάσεις εκμείευσης θα χρησιμοποιηθούν για να περιορίσουν το σύνολο των εκδόσεων που λήφθηκαν υπ' όψιν στις φάσεις της ανάλυσης ευστάθειας. Στις πρώτες φάσεις εκμείευσης οι πιο δύσκολες ερωτήσεις μπορούν να αποφευχθούν, επιτρέποντας στον αποφασίζοντα να μάθει για τις χρησιμοποιούμενες μεθόδους και τις προτιμήσεις του/της πριν απαντήσει στις δυσκολότερες ερωτήσεις. Στην περίπτωση των ομαδικών αποφάσεων, αυτός ο τρόπος συνέχισης της διαδικασίας επιτρέπει την αναβολή (ή ακόμα την αποφυγή) των ερωτήσεων εκμείευσης που ρέπουν προς τη δημιουργία συγκρούσεων μεταξύ των μελών της ομάδας.

Στις φάσεις της ανάλυσης ευστάθειας, τα συμπεράσματα ευστάθειας που ανταποκρίνονται στην τρέχουσα ομάδα εκδόσεων είναι υπό συζήτηση. Προφανώς θα προκύπτει ότι μερικά αποτελέσματα είναι ευσταθή, όταν άλλα αποτελέσματα εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από την επιλεγμένη έκδοση του μοντέλου. Στις ομαδικές αποφάσεις, αυτό θα αναδείξει που υπάρχει συμφωνία και που η ασυμφωνία είναι μεγαλύτερη. Αυτό με τη σειρά του μπορεί να παρακινήσει νέες ερωτήσεις εκμείευσης ή θέματα για συζήτηση, όταν επιστρέφουμε σε μια φάση εκμείευσης.



## 1.2 Μεταβελτιστοποίηση στο Γραμμικό Προγραμματισμό

Τα μοντέλα που αναπτύσσονται για την επίλυση προβλημάτων Επιχειρησιακής Έρευνας εμπεριέχουν την έννοια της βελτιστοποίησης (optimisation problems). Η ακριβής μοντελοποίηση επιστημονικών προβλημάτων συχνά οδηγεί στη μορφοποίηση προβλημάτων βελτιστοποίησης που περιλαμβάνουν συνεχείς ή/και διακριτές μεταβλητές. Στα συνεχή προβλήματα συνήθως αναζητούμε ένα σύνολο από πραγματικούς αριθμούς ή έστω μία συνάρτησή τους. Στα προβλήματα με διακριτές μεταβλητές (συνδυαστική βελτιστοποίηση) αναζητούμε ένα αντικείμενο (π.χ. ακέραιος αριθμός, σύνολο, συνδυασμός, γράφημα) που ανήκει σε ένα πεπερασμένο σύνολο εναλλακτικών αντικειμένων ή έστω σε ένα μετρήσιμο μη πεπερασμένο σύνολο. Η συνδυαστική βελτιστοποίηση είναι η μαθηματική μελέτη της τακτοποίησης, της ομαδοποίησης, της κατάταξης ή επιλογής των διακριτών αντικειμένων.

Τα τελευταία χρόνια η βελτιστοποίηση παρουσίασε μία δραματική αύξηση σε δραστηριότητες. Αυτό είναι μία φυσική συνέπεια των νέων αλγοριθμικών εξελίξεων και της αυξημένης δύναμης των υπολογιστών. Πολλά από αυτά τα προβλήματα μπορεί να είναι πολύ μεγάλα, αν και ότι είναι μεγάλο στη βελτιστοποίηση, αντανακλά όχι μόνο το μέγεθος αλλά επίσης και την ενυπάρχουσα πολυπλοκότητα του προβλήματος (Du *et al.*, 2001).

Η έννοια της βελτιστοποίησης για προβλήματα συνεχών μεταβλητών αντιστοιχεί στη μεγιστοποίηση ή την ελαχιστοποίηση μίας ή περισσότερων αριθμητικών συναρτήσεων ενός αριθμού μεταβλητών, οι τιμές των οποίων ικανοποιούν ένα σύνολο περιορισμών. Τα προβλήματα βελτιστοποίησης διακρίνονται σε προβλήματα κλασσικής βελτιστοποίησης (περιορισμοί που εκφράζονται με εξισώσεις μόνο και επιλύονται με τη χρήση εργαλείων κλασσικής μαθηματικής ανάλυσης, δηλαδή διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού) και σε προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού (περιορισμοί που περιλαμβάνουν σύνολο εξισώσεων και ανισοτήτων). Τα τελευταία πενήντα χρόνια όλο και περισσότερα πρακτικά προβλήματα, οικονομικής κυρίως φύσεως, δεν μπορούσαν να επιλυθούν με τη χρήση τεχνικών κλασσικής βελτιστοποίησης, με αποτέλεσμα να αναπτυχθούν διαφορετικές προσεγγίσεις μαθηματικού προγραμματισμού.

Τα κύρια χαρακτηριστικά κάθε μοντέλου μαθηματικού προγραμματισμού είναι τα εξής:

- υπάρχει ένα σύνολο δραστηριοτήτων σε κάθε μία εκ των οποίων αντιστοιχεί μία μεταβλητή έστω  $x_j$  που καλούνται μεταβλητές απόφασης

## Κεφάλαιο 1: Ανάλυση Ευστάθειας - Μεταβελτιστοποίηση

- υπάρχει ένα σύνολο περιορισμένων οικονομικών πόρων ή μέσων που δημιουργούν ένα σύνολο περιορισμών που εκφράζονται με αντίστοιχες συναρτήσεις των μεταβλητών απόφασης
- τέλος, υπάρχει ένα μη κενό σύνολο αντικειμενικών συναρτήσεων, η βελτιστοποίηση (μεγιστοποίηση – ελαχιστοποίηση) των οποίων επιδιώκεται από την επίλυση του προβλήματος του μαθηματικού προγραμματισμού. Ανάλογα με την ύπαρξη μίας ή περισσότερων αντικειμενικών συναρτήσεων έχουμε τις περιπτώσεις του μονοκριτήριου ή πολυκριτήριου μαθηματικού προγραμματισμού

Ανάλογα με τις διάφορες μορφές των αντικειμενικών συναρτήσεων και των συναρτήσεων των περιορισμών ο μαθηματικός προγραμματισμός ταξινομείται στις εξής βασικές κατηγορίες:

- Γραμμικός Προγραμματισμός (ΓΠ) – όπου οι αντικειμενικές συναρτήσεις και οι περιοριστικές συναρτήσεις είναι γραμμικές συναρτήσεις
- Μη γραμμικός Προγραμματισμός – όπου από τις αντικειμενικές συναρτήσεις και τις περιοριστικές συναρτήσεις τουλάχιστον μία συνάρτηση είναι μη γραμμική
- Αμιγής Ακέραιος Προγραμματισμός – όπου όλες οι μεταβλητές του προβλήματος παίρνουν ακέραιες μόνο τιμές
- Μικτός Ακέραιος Προγραμματισμός – όπου οι μεταβλητές ενός γνήσιου μη κενού υποσυνόλου του συνόλου των μεταβλητών παίρνουν ακέραιες τιμές και οι υπόλοιπες μεταβλητές είναι συνεχείς

Τα σημαντικότερα ίσως μοντέλα στο χώρο της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι τα μοντέλα του Γραμμικού Προγραμματισμού (*Linear Programming*). Το επιστημονικό περιοδικό *Computing in Science and Engineering* κατέταξε τον αλγόριθμο Simplex (Dantzig & Thapa, 1997a, 1997b) ανάμεσα στους 10 κορυφαίους αλγόριθμους του αιώνα (*Computing in Science and Engineering*, volume 2, no. 1, 2000). Μέσα στα 52 χρόνια από τότε που τον ανακάλυψαν οι G. Dantzig και L. Kantorowitz το 1947, ο γραμμικός προγραμματισμός έχει αποτελέσει ένα κύριο αντικείμενο θεωρητικής και εφαρμοσμένης έρευνας και έχει χρησιμοποιηθεί σαν τη βάση για την εξέλιξη άλλων συγγενών προτύπων και τεχνικών. Παράλληλα, με την εμφάνιση των αυτοματοποιημένων Συστημάτων Υποστήριξης Αποφάσεων - ΣΥΑ (*Decision Support Systems - DSS*) έχει κωδικοποιηθεί σε εφαρμογές λογισμικού και έχει με αυτό το τρόπο εφαρμοσθεί σε ένα τεράστιο φάσμα προβλημάτων για επιχειρήσεις και φορείς του ιδιωτικού και δημόσιου φορέα (Πραστάκος, 1986).

Ο γραμμικός προγραμματισμός αποτελεί αναμφίβολα το δημοφιλέστερο εργαλείο της επιχειρησιακής έρευνας αλλά και γενικότερα της διοικητικής επιστήμης. Η μεγάλη επιτυχία των εφαρμογών του σε προβλήματα λήψης αποφάσεων θα πρέπει να αποδοθεί, από τη μια πλευρά, στα επιτεύγματα της έρευνας των μαθηματικών και των οικονομολόγων σε θεωρητικό επίπεδο και, από την άλλη πλευρά, στην επαναστατική ανάπτυξη της πληροφορικής επιστήμης και τεχνολογίας. Κυριαρχεί σήμερα η αντίληψη ότι, τρεις στις τέσσερις εφαρμογές μοντέλων επιχειρησιακής έρευνας σε πραγματικά προβλήματα διοίκησης παραπέμπουν στο γραμμικό προγραμματισμό.

Στη μαθηματική γλώσσα ο γραμμικός προγραμματισμός ορίζεται σαν το μοντέλο το οποίο στοχεύει στη βελτιστοποίηση (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση) μιας γραμμικής συνάρτησης αγνώστων, υπό εκτίμηση, πραγματικών μεταβλητών, των οποίων το πεδίο τιμών οριοθετείται έμμεσα από γραμμικούς περιορισμούς (ανισοεξισώσεις), που είναι συναρτήσεις των μεταβλητών αυτών. Η βελτιστοποίηση είναι πηγή τεχνητής ευφυΐας με την έννοια του προσδιορισμού βέλτιστων λύσεων σε πολύπλοκα προβλήματα. Οι άγνωστες μεταβλητές πρέπει να επιλέγονται από τον μελετητή με τρόπο ώστε να αντανakλούν απόλυτα (να μοντελοποιούν) το αντικείμενο της απόφασης στο εκάστοτε συγκεκριμένο πρόβλημα και ονομάζονται γι' αυτό μεταβλητές απόφασης (Παπαγεωργίου, 1996; Σίσκος, 1992).

Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι ο γραμμικός προγραμματισμός μοντελοποιεί προβλήματα κατανομής περιορισμένων πόρων, μέσων ή χρήσιμων αγαθών σε διάφορες εναλλακτικές και ανταγωνιστικές μεταξύ τους δραστηριότητες, με τρόπο ώστε να βελτιστοποιείται το τελικό αποτέλεσμα.

Η αντιμετώπιση ενός πραγματικού προβλήματος με τη μέθοδο του γραμμικού προγραμματισμού δεν τελειώνει με το προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης. Η απλή επίλυση-εύρεση της βέλτιστης λύσης, με εφαρμογή της μεθόδου Simplex (Παράρτημα Ι), προσκρούει στις εξής παρακάτω κριτικές:

Από τη μαθηματική του φύση ένα γραμμικό πρόβλημα που περιλαμβάνει  $n$  μεταβλητές απόφασης και  $m$  περιορισμούς, γεγονός που συνεπάγεται την εισαγωγή  $m$  μεταβλητών απόκλισης, θα έχει βέλτιστη λύση που περιλαμβάνει τουλάχιστον:

$$(n + m) - m = n$$

μηδενικές μεταβλητές. Συνάγεται λοιπόν ότι από τις αρχικά προτεινόμενες δραστηριότητες ένας σημαντικός αριθμός ίσως αγνοηθεί, κάτι που ενδέχεται σε ορισμένες περιπτώσεις να προκαλέσει οικονομικές δυσχέρειες σε μια επιχείρηση.

Η αποκαλούμενη «βέλτιστη λύση» θεωρείται συχνά ότι είναι μια λύση προνομιούχα, απομονωμένη από κάθε γειτονική της λύση, χωρίς αυτό να είναι κοινά αποδεκτή θέση από τον κόσμο της επιχείρησης. Από την άλλη μεριά οι ηλεκτρονικοί

υπολογιστές έχουν συγκεκριμένη ακρίβεια και στην περίπτωση διαχείρισης πολύ μικρών τιμών που αντιστοιχούν στα οριακά καθαρά εισοδήματα της μεθόδου Simplex ( $\Delta_j$ ) μπορούν να δώσουν αποτελέσματα που δεν ανταποκρίνονται επακριβώς στην πραγματικότητα.

Κατά τη διαμόρφωση του προβλήματος γίνονται ορισμένες παραδοχές, ανάμεσα στις οποίες είναι και η προϋπόθεση των ντετερμινιστικών συντελεστών. Σύμφωνα με αυτή την προϋπόθεση οι συντελεστές  $c_j$ ,  $b_i$  και  $a_{ij}$  του προβλήματος είναι γνωστές σταθερές. Στην πραγματικότητα όμως, οι συντελεστές αυτοί δεν είναι συνήθως ούτε γνωστοί, ούτε σταθεροί, αλλά συνήθως προσδιορίζονται κατά προσέγγιση. Με άλλα λόγια, η διαμόρφωση ενός πραγματικού προβλήματος σε μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού αποτελεί, σχεδόν πάντα μια προσέγγιση της πραγματικότητας. Είναι σαφές πως κάθε τροποποίηση των τιμών των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης ( $c_j$ ), του δεύτερου μέλους ( $b_i$ ) ή της τεχνολογικής μήτρας ( $a_{ij}$ ) είναι ικανή να επιφέρει κάποια αλλαγή της βέλτιστης λύσης.

Οι αριθμητικοί αυτοί συντελεστές είναι συνήθως:

- στοιχεία λογιστικών καταλόγων (μοναδιαίο κέρδος ή κόστος, ποσότητες πρώτης ύλης, ...)
- αποτελέσματα ειδικών τεχνικών αναλύσεων (χρόνος κατασκευής, χημικής αντίδρασης, ...)
- στοιχεία δημοσκοπήσεων ή ερευνών αγοράς (προτιμήσεις των καταναλωτών, κατώτερα ή ανώτερα φράγματα ζήτησης, ...).

Είναι λοιπόν προφανές ότι τα χρησιμοποιούμενα στην πράξη αριθμητικά δεδομένα δεν μπορούν με κανένα τρόπο να θεωρηθούν ως απόλυτα, ακριβή ή βέβαια ώστε να εγγυηθούν την ύπαρξη μιας και μόνης, απομονωμένης λύσης, με τη σφραγίδα της βέλτιστης (Ξηρόκωστας, 1991; Σίσκος, 1992). Επίσης, σε περιπτώσεις ύπαρξης πολλαπλών κριτηρίων απόφασης υπάρχει η περίπτωση αδυναμίας ποσοτικοποίησης και μοντελοποίησης του συνόλου αυτών.

Προκειμένου να αντιμετωπίσουμε τις παραπάνω κριτικές μπορούμε να προχωρήσουμε μετά τη λήψη της βέλτιστης λύσης, σε ανάλυση ευαισθησίας και ανάλυση ευστάθειας. Η δεύτερη είναι το βασικό αντικείμενο που θα διαπραγματευτούμε στην παρούσα διδακτορική διατριβή. Παράλληλα, γίνεται προσπάθεια κάλυψης του κενού υπάρχει αυτή τη στιγμή σε ότι αφορά τα εργαλεία που έχει στη διάθεσή του ο επιχειρησιακός ερευνητής προκειμένου να μελετήσει αποτελεσματικά την ανάλυση ευστάθειας των γραμμικών προβλημάτων.

Με την ανάλυση ευστάθειας (μεταβελτιστοποίηση ή γειτονική βελτιστοποίηση) ελέγχουμε τόσο τη μοναδικότητα της λύσης όσο και το ενδεχόμενο ύπαρξης

## Κεφάλαιο 1: Ανάλυση Ευστάθειας - Μεταβελτιστοποίηση

εναλλακτικών λύσεων, των οποίων οι τιμές  $z$  της αντικειμενικής συνάρτησης δε διαφέρουν της βέλτιστης τιμής  $z^*$  παρά κατά μια μικρή (αμελητέα) ποσότητα.

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός μπορεί να συσχετισθεί άμεσα με τη γεωμετρία και τη θεωρία γραφημάτων.

Ως προς τη γεωμετρία η συσχέτιση έγκειται στο γεγονός ότι ένα σύστημα ανισοτήτων (περιορισμοί του ΓΠ) ορίζουν ένα κυρτό υπερπολυέδρο (το οποίο τις περισσότερες φορές είναι φραγμένο). Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση η αναζήτηση των λύσεων του ΓΠ ισοδυναμεί με την μετάβαση από μία κορυφή του υπερπολυέδρου στην άλλη. Με άλλα λόγια οι βασικές εφικτές λύσεις του ΓΠ αντιστοιχούν στις κορυφές του υπερπολυέδρου.

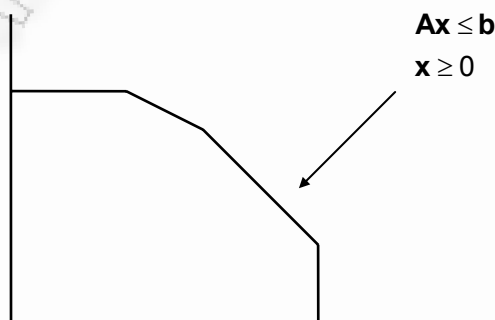
Ας θεωρήσουμε το εξής γραμμικό πρόγραμμα :

$$\text{ΓΠ 1.1} \begin{cases} [\max] z = \mathbf{c}^t \mathbf{x} \\ \text{υ.π.} \\ \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

όπου  $A$ ,  $x$ ,  $b$  και  $c$  είναι πίνακες διαστάσεων  $m \times n$ ,  $n \times 1$ ,  $m \times 1$  και  $n \times 1$  αντίστοιχα.

Το παραπάνω ΓΠ έχει λύση στο χώρο  $R^n$  (δηλαδή διάσταση  $n$ ) και οι περιορισμοί αποτελούν υπερεπίπεδα (διάστασης  $n-1$ ) που το καθένα χωρίζει το χώρο σε ημι-χώρο. Η τομή των ημι-χώρων αυτών ορίζει το κυρτό υπερπολυέδρο των εφικτών λύσεων. Οι βασικές εφικτές λύσεις βρίσκονται στα όρια του υπερπολυέδρου που ορίζονται από την τομή κάποιων  $p$  υπερεπιπέδων. Η τομή θα έχει διάσταση  $n-p$  (Dantzig, 1997b; Saaty, 1955).

Στην περίπτωση ενός ΓΠ διάστασης  $n=2$  τα υπερεπίπεδα (δηλαδή οι περιορισμοί) είναι διάστασης  $n-1=1$ , δηλαδή γραμμές. Η τομή  $p=2$  υπερεπιπέδων μας δίνει ένα σημείο (διάσταση τομής  $n-p=2-2=0$ ). Το επόμενο σχήμα δείχνει τις σχέσεις αυτές:



Σχήμα 1-1: Παράδειγμα 2 διαστάσεων

## Κεφάλαιο 1: Ανάλυση Ευστάθειας - Μεταβελτιστοποίηση

Στην περίπτωση ενός ΓΠ διάστασης  $n=3$  τα υπερεπίπεδα είναι διάστασης  $n-1=2$ , δηλαδή επίπεδα. Η τομή  $p=2$  υπερεπιπέδων μας δίνει μία γραμμή (διάσταση τομής  $n-p=3-2=1$ ). Η τομή  $p=3$  υπερεπιπέδων μας δίνει ένα σημείο (διάσταση τομής  $n-p=3-3=0$ ).

Σύμφωνα με τη θεωρία η αναζήτηση όλων των βασικών εφικτών λύσεων ισοδυναμεί με την μετάβαση σε όλες τις κορυφές του φραγμένου υπερπολυέδρου που ορίζεται από τα υπερεπίπεδα των περιορισμών. Κάθε εφικτή λύση στο εσωτερικό του κυρτού υπερπολυέδρου μπορεί στη συνέχεια να υπολογιστεί ως ο κυρτός συνδυασμός δύο ή περισσότερων κορυφών.

Σε αυτό ακριβώς το σημείο εμπλέκεται η θεωρία των γραφημάτων. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ένα κυρτό υπερπολυέδρο μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα συνεκτικό γράφημα  $(V,U)$  όπου  $V$  είναι το σύνολο των κόμβων (κορυφών) και  $U$  το σύνολο των τόξων που συνδέουν τους κόμβους, και που μπορούμε να τα διαβούμε ακολουθώντας τα βήματα της Simplex (Manas & Nedoma, 1968). Έτσι, δύο κόμβοι είναι γειτονικοί αν αντιστοιχούν σε δύο βάσεις της Simplex που διαφέρουν κατά μία και μόνη μεταβλητή· κάθε τόξο μπορούμε τότε να το διαβούμε κατά τις δύο κατευθύνσεις (φορά) αφού, όπως αποδεικνύεται κάθε βήμα της Simplex είναι αντιστρέψιμο (Van de Panne, 1975). Επομένως η εξαντλητική αναζήτηση αυτών των κορυφών μας εγγυάται την εξεύρεση όλων των δυνατών βασικών λύσεων.

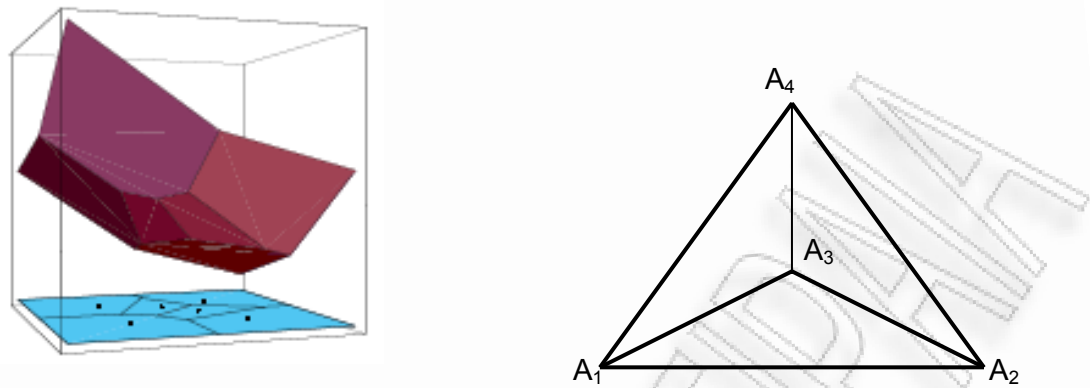
Ως γνωστόν ένα γραμμικό σύστημα  $m$  μεταβλητών μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα κυρτό πολυέδρο  $m$ -διαστάσεων. Υπάρχει στενή σχέση μεταξύ της *Μεθόδου Simplex* και των απλών πολυέδρων υψηλών-διαστάσεων, που καλούνται *simplex*. Σε υψηλές διαστάσεις, έστω  $m$ , το κυρτό περίβλημα (χώρος) των  $m+1$  σημείων σε γενική θέση καλείται ως  *$m$ -διαστάσεων simplex* (Dantzig, 1997b). Ισχύουν επίσης τα εξής:

ένα μηδενικής-διάστασης simplex είναι ένα σημείο

ένα μοναδιαίας-διάστασης simplex είναι μία γραμμή

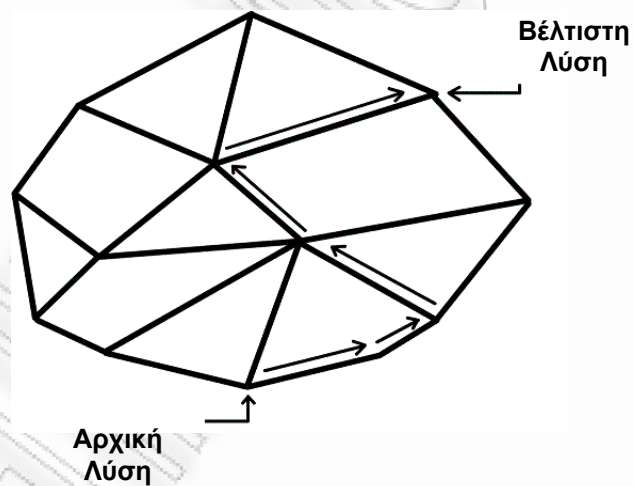
ένα 2-διάστατο simplex είναι ένα τρίεδρο

ένα 3-διάστατο simplex είναι τετράεδρο (βλ. Σχήμα 1-2)



Σχήμα 1-2: Ένα 3-διάστατο simplex

Τα σημεία  $x=A_j$  καλούνται κορυφές ή ακραία σημεία του  $n$ -διάστατου simplex. Η Μέθοδος Simplex θα μπορούσε να περιγραφεί σαν τον περίπατο από κορυφή σε κορυφή του υπερπολυέδρου με στόχο να πετύχουμε ένα συνολικό μέγιστο ή ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης του προς επίλυση προβλήματος (βλ. Σχήμα 1-3).



Σχήμα 1-3: Ένα περίπατος προς τη βέλτιστη λύση

Επειδή το υπερπολύεδρο είναι κυρτό σύνολο, αυτός ο περίπατος θα σταματήσει σε μία κορυφή πέραν της οποίας δεν υπάρχει άλλη βελτίωση, δηλαδή σε μία βέλτιστη λύση του γ.π.

### 1.2.1 Πολλαπλές Βέλτιστες Λύσεις

Η λύση των γραμμικών προβλημάτων που βρίσκεται με τη χρήση της μεθόδου Simplex είναι μοναδική μόνο στην περίπτωση που τα οριακά καθαρά εισοδήματα του βέλτιστου πίνακα Simplex που αντιστοιχούν σε μη βασικές μεταβλητές δεν ισούνται με μηδέν. Στην αντίθετη περίπτωση έχουμε πολλαπλές βέλτιστες λύσεις (Siskos, 1984).

Ας θεωρήσουμε το εξής γραμμικό πρόγραμμα :

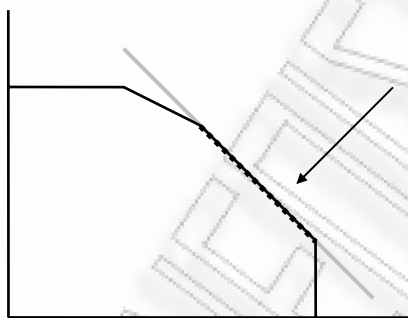
$$\text{ΓΠ 1.1} \begin{cases} [\max] z = \mathbf{c}' \mathbf{x} \\ \text{υ.π.} \\ \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

όπου  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{b}$  και  $\mathbf{c}$  είναι πίνακες διαστάσεων  $m \times n$ ,  $n \times 1$ ,  $m \times 1$  και  $n \times 1$  αντίστοιχα.

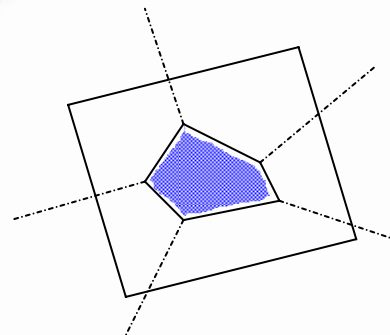
Το πρόβλημα των πολλαπλών βέλτιστων λύσεων (*multiple optimal solutions*) πιστοποιείται, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, όταν εμφανίζονται μηδενικά καθαρά οριακά εισοδήματα στον βέλτιστο πίνακα Simplex για μη βασικές μεταβλητές. Σύμφωνα με τη σχέση (Π.Ι.9) του Παραρτήματος Ι θα πρέπει δηλαδή να ισχύει:

$$\Delta_j = c_j - \sum_{i=1}^m c_i y_{ij} = 0 \quad \text{για } j \text{ εκτός βάσης.}$$

Γεωμετρικά, το φαινόμενο των πολλαπλών βέλτιστων λύσεων αντιστοιχεί στην περίπτωση που το υπερπολυέδρο της αντικειμενικής συνάρτησης  $z$  είναι παράλληλο μιας πλευράς του υπερπολυέδρου των δυνατών λύσεων (βλέπε σχήματα) Σίσκος, 1992).



Παράδειγμα 2 διαστάσεων



Παράδειγμα 3 διαστάσεων

**Σχήμα 1-4:** Παραδείγματα 2 και 3 διαστάσεων

Σε αυτή τη συγκεκριμένη περίπτωση είναι γνωστό ότι η εισαγωγή στη βάση μιας μεταβλητής  $j$  μας δίνει μια καινούργια λύση, με  $z = z^*$ , αφού από τη σχέση (Π.Ι.16) του Παραρτήματος Ι για  $\Delta_k = 0$  έχουμε  $z' = z^* + \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \Delta_k \Rightarrow z' = z^*$ . Όμως δεν μπορούμε

εκ των προτέρων να υπολογίσουμε τον αριθμό και τον τύπο των πολλαπλών βέλτιστων λύσεων του γ.π.. Η αυθαίρετη εξακολούθηση του αλγορίθμου Simplex, μετά την εύρεση της πρώτης βέλτιστης λύσης, μπορεί να μας δώσει άλλες βέλτιστες



λύσεις αλλά αυτή η ενέργεια σε καμία περίπτωση δε μπορεί να θεωρηθεί σαν μια μέθοδο συστηματικού ελέγχου όλων των βέλτιστων λύσεων.

Το σύνολο των πολλαπλών βέλτιστων λύσεων οριοθετείται μαθηματικά από το υπερπολύεδρο (ΥΠ) 1.1:

$$\text{ΥΠ 1.1} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^t \mathbf{x} = z^* \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \right.$$

που προκύπτει από την προσθήκη του περιορισμού  $z=z^*$  ( $z^*$  η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης) στο σύνολο των δυνατών λύσεων.

Στην περίπτωση που η βέλτιστη λύση είναι μοναδική το ΥΠ 1.1 δεν περιέχει παρά μόνο ένα σημείο. Στην αντίθετη περίπτωση, περιέχει άπειρα σημεία (άπειρες λύσεις) και αρκεί να υπολογίσουμε όλες τις κορυφές του ΥΠ 1.1 (δυνατές βασικές βέλτιστες λύσεις). Κάθε άλλη λύση είναι κυρτός συνδυασμός των λύσεων που αντιστοιχούν στις κορυφές (Siskos, 1984; Ξηρόκωστας, 1991).

### 1.2.2 Ημιβέλτιστες ή Σχεδόν Βέλτιστες Λύσεις

Σε μεγάλο αριθμό περιπτώσεων η βέλτιστη ή οι βέλτιστες λύσεις δεν είναι οι μόνες που ενδιαφέρουν τον αποφασίζοντα. Απεναντίας, ενδεχομένως ο αποφασίζων να ενδιαφέρεται εξίσου και για τις ημιβέλτιστες λύσεις. Αυτό ισχύει, επειδή συχνά είναι αδύνατον να ορίσουμε με μεγάλη ακρίβεια τις τιμές των συντελεστών του γραμμικού μας προβλήματος. Ακόμη, η αντικειμενική συνάρτηση δεν αντικατοπτρίζει πάντα επακριβώς τις προτιμήσεις του αποφασίζοντος (Van de Panne, 1975).

Στις παραπάνω περιπτώσεις μπορεί να λεχθεί ότι το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού ενός προβλήματος εκφράζει τους πλέον βασικούς στόχους και περιορισμούς, ενώ κάποιοι παράγοντες συχνά μένουν έξω από το μοντέλο, είτε γιατί είναι δύσκολο να τους διαχειριστεί κανείς, είτε γιατί ο αποφασίζων έχει μόνο μια γενική ιδέα σχετικά με αυτούς. Γι' αυτό το λόγο η βέλτιστη λύση μπορεί να χαρακτηριστεί είτε ως αδύνατη να πραγματοποιηθεί είτε, αρκετές φορές, έως και επικίνδυνη.

Ο μόνος τρόπος να αντιμετωπίσουμε την παραπάνω προβληματική κατάσταση είναι να θέσουμε υπόψη του αποφασίζοντα εναλλακτικές λύσεις και να του δώσουμε τη δυνατότητα να αποφασίσει ποια τελικά θα επιλέξει. Το ερώτημα είναι ποιες θα είναι

## Κεφάλαιο 1: Ανάλυση Ευστάθειας - Μεταβελτιστοποίηση

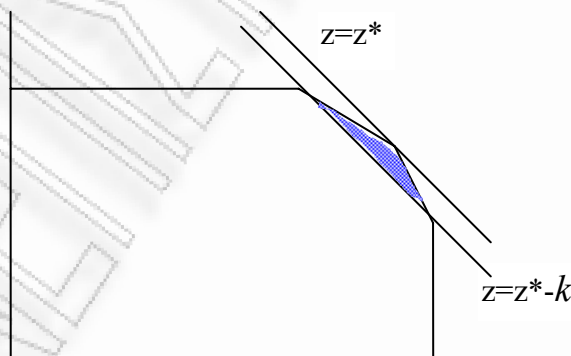
αυτές οι εναλλακτικές λύσεις. Μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση που θα μας βοηθήσει να δώσουμε απάντηση στο παραπάνω ερώτημα είναι η ακόλουθη.

Αρχικά υπολογίζουμε τη βέλτιστη λύση. Στη συνέχεια βρίσκουμε όλες τις βασικές δυνατές λύσεις για τις οποίες η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης διαφέρει της βέλτιστης τιμής  $z^*$  κατά μία μικρή (πρακτικά αμελητέα) προκαθορισμένη ποσότητα  $k$ . Οι λύσεις αυτές ονομάζονται σχεδόν βέλτιστες ή ημιβέλτιστες λύσεις (*near optimal solutions*). Ο αποφασίζων είναι ο υπεύθυνος τόσο για την επιλογή της ποσότητας  $k$ , όσο και για την τελική επιλογή ανάμεσα από τις ημιβέλτιστες λύσεις, αυτής που τον ικανοποιεί περισσότερο (Siskos, 1984; Van de Panne, 1975; Σίσκος, 1992).

Ο χώρος των ημιβέλτιστων λύσεων οριοθετείται από το σύνολο - υπερπολύεδρο ΥΠ 1.2:

$$\text{ΥΠ 1.2} \begin{cases} \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{c}'\mathbf{x} \geq z^* - k \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \quad \text{όπου } k \text{ μικρή θετική ποσότητα (αναφερόμαστε πάντα για την περίπτωση μεγιστοποίησης)}$$

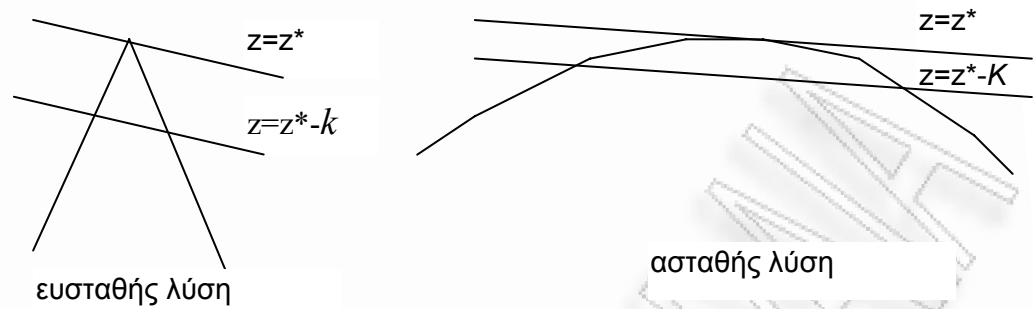
Το ΥΠ 1.2 προκύπτει από το ΥΠ 1.1 με την αντικατάσταση του περιορισμού  $z=z^*$  με τον περιορισμό  $z \geq z^*-k$ . Στο παρακάτω σχήμα το γραμμοσκιασμένο κομμάτι αντιστοιχεί στο σύνολο των ημιβέλτιστων λύσεων (στις 2 διαστάσεις).



**Σχήμα 1-5:** Περιοχή ημιβέλτιστων λύσεων σε 2 διαστάσεις

Για  $k=0$  έχουμε  $z=z^*$  και το πρόβλημά μας ταυτίζεται με αυτό των πολλαπλών βέλτιστων λύσεων.

Η αναζήτηση των ημιβέλτιστων λύσεων βοηθάει στην ανάλυση της ευστάθειας της βέλτιστης λύσης.



**Σχήμα 1-6:** Η ευστάθεια των λύσεων

Όταν το εύρος των τιμών που παίρνουν οι μεταβλητές στις διάφορες ημιβέλτιστες λύσεις είναι μεγάλο, τότε λέμε ότι η βέλτιστη λύση μας είναι ευσταθής ενώ στην αντίθετη περίπτωση ότι η λύση μας είναι ασταθής. Το φαινόμενο της αστάθειας της βέλτιστης λύσης είναι αρκετά συνηθισμένο στις πρακτικές εφαρμογές (Σίσκος, 1992).

Στη συνέχεια της διδακτορικής διατριβής θα αναπτυχθούν ειδικότερα θέματα που αφορούν στη συστηματική αναζήτηση των κορυφών του υπερπολυέδρου ΥΠ 1.2.. Οι κορυφές αυτές αντιστοιχούν στις βασικές δυνατές, πολλαπλές βέλτιστες ή ημιβέλτιστες λύσεις.

### 1.2.3 Υπολογισμός αριθμού μεταβέλτιστων λύσεων

Η περιοχή των ημιβέλτιστων λύσεων (Σχήμα 1-5) ουσιαστικά ορίζει ένα νέο υπερπολυέδρου του οποίου οι κορυφές αντιστοιχούν στις υπό αναζήτηση ημιβέλτιστες λύσεις. Δηλαδή έχουμε ένα νέο γ.π. προς επίλυση του οποίου μας ενδιαφέρουν όμως όλες οι εφικτές λύσεις και όχι μόνο αυτή (ή αυτές) που βελτιστοποιούν μία αντικειμενική συνάρτηση.

Το πρόβλημα της αναζήτησης όλων των κορυφών ενός κυρτού υπερπολυέδρου έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές. Πολύ σημαντική σε αυτό το χώρο θεωρείται η εργασία των Matheiss και Rubin (1980) οι οποίοι αναφέρθηκαν στις μέχρι τότε προσεγγίσεις του συγκεκριμένου προβλήματος. Ήδη από το 1952 ο Charnes (Charnes, 1952; Charnes *et al.*, 1953; Charnes & Cooper, 1961) συσχέτισαν την αναζήτηση όλων των βέλτιστων λύσεων ενός γ.π. (περίπτωση πολλαπλών βέλτιστων λύσεων) με τη συστηματική αναζήτηση όλων των κορυφών ενός υπερπολυέδρου. Αναφορά στις διαφορετικές προσεγγίσεις που έχουν προταθεί γίνεται στο Κεφάλαιο 2 της παρούσας διδακτορικής διατριβής.

Σκόπιμη, προκειμένου να προχωρήσουμε στη συστηματική αναζήτηση των κορυφών του ΥΠ 1.2., είναι η διαθεσιμότητα των μέσων που θα μας επιτρέψουν μια αρχική εκτίμηση του αριθμού αυτών των κορυφών. Ο αριθμός των κορυφών δεν μπορεί να

υπολογιστεί με ακρίβεια αλλά έχουν προταθεί μαθηματικές σχέσεις που προσεγγίζουν τον αριθμό αυτό. Με πρώτο το Saaty (1955) ο οποίος ξεκίνησε αποδεικνύοντας ότι ο συνδυασμός των  $m+n$  ανά  $n$   $\binom{m+n}{m}$  δεν αποτελεί ικανοποιητική εκτίμηση του αριθμού των κορυφών. Το ζητούμενο ήταν να εκτιμηθεί ένα άνω όριο του αριθμού των λύσεων με δεδομένα τους  $m$  περιορισμούς και τις  $n$  μεταβλητές απόφασης.

Ο Klee (1964) πρότεινε μια σχέση που μας δίνει ένα άνω όριο, το οποίο ονομάζουμε  $\bar{r}$ , των κορυφών ενός υπερπολυέδρου που ορίζεται από ένα σύστημα  $m$  εξισώσεων με  $n$  μεταβλητές απόφασης όπου ισχύει ότι  $m+n$  ο αριθμός των υπερεπιπέδων διάστασης  $n-1$  που ορίζουν οι  $m$  περιορισμοί:

$$\bar{r} = \begin{cases} \frac{2(n+m)}{2m+n} \binom{\frac{1}{2}(2m+n)}{m} & \text{αν } n \text{ ζυγός αριθμός} \\ 2 \binom{\frac{1}{2}(2m+n-1)}{m} & \text{αν } n \text{ περιττός αριθμός} \end{cases} \quad (1.1)$$

Τα αποτελέσματα είναι αποθαρρυντικά. Η τιμή του ορίου  $\bar{r}$  αυξάνει με αστρονομική ταχύτητα: για  $(m=3, n=4)$ ,  $\bar{r}=14$  για  $(m=10, n=6)$ ,  $\bar{r}=352$  για  $(m=10, n=7)$ ,  $\bar{r}=572$  και αυτά τα μεγέθη δεν περιγράφουν παρά μικρά γραμμικά προβλήματα (Klee, 1964).

Η σχέση 1.1 βελτιώθηκε από τον ίδιο τον Klee (1971) και έλαβε την εξής μορφή:

$$\bar{r} = \binom{n+m - \text{int}\left(\frac{n+1}{2}\right)}{m} + \binom{n+m - \text{int}\left(\frac{n+2}{2}\right)}{m} \quad (1.2)$$

Υπό αυτή τη μορφή χρησιμοποιήθηκε και σε επόμενες εργασίες (Amaní, 1977; Burton et al., 1987).

Αρχικά ο Klee είχε αποδείξει ότι η σχέση (1.1) ίσχυε για  $m+n \geq n^2/4 - 1$  αλλά στη συνέχεια αποδείχτηκε ότι η σχέση ήταν ισχυρή για κάθε  $m$  και  $n$  (McMullen, 1970).

Έστω  $\underline{r}$  το κάτω όριο του αριθμού των κορυφών. Ο Grunbaum (1967) πρότεινε την παρακάτω υπόθεση για τα απλά υπερπολυέδρα:

$$\underline{r} = (n-1)m - (n-2)(n+1) \quad \text{για } m \geq n-1 \quad (1.3)$$

Ο Barnette (1971) απέδειξε τη σχέση (1.3) δείχνοντας ότι τελικά μπορεί να υπάρχουν υπερπολυέδρα με πολύ λίγες κορυφές.

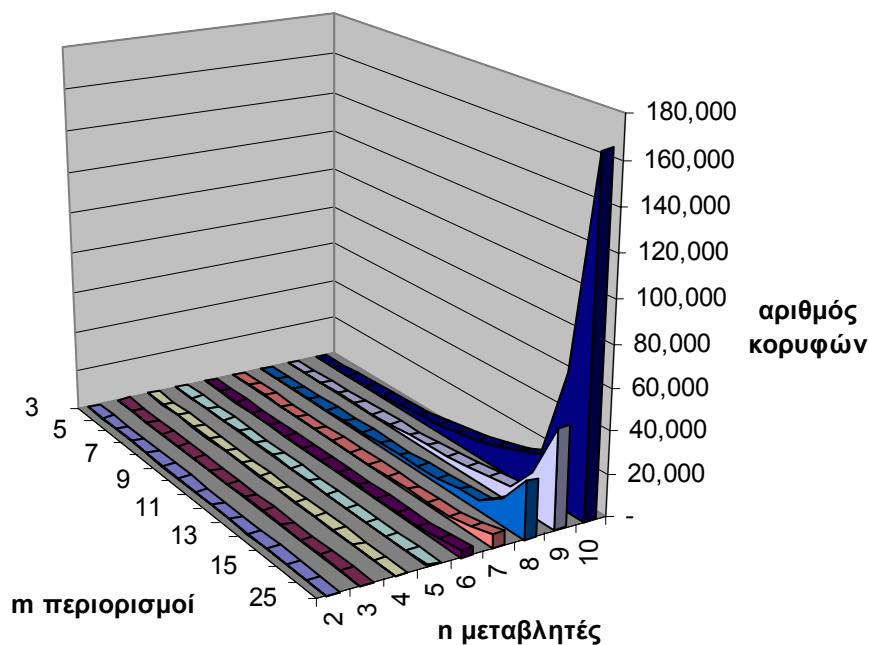
## Κεφάλαιο 1: Ανάλυση Ευστάθειας - Μεταβελτιστοποίηση

Με τον καθορισμό και την επέκταση των παραπάνω ορίων ασχολήθηκαν επίσης οι Berenguer και Smith (1986), Armand (1993), Avis και Bremmer (1995) Εκτός από τις παραπάνω σχέσεις που υπολογίζουν προσεγγιστικά άνω και κάτω όρια, υπάρχουν και αλγόριθμοι που στοχεύουν στον ακριβή υπολογισμό του αριθμού των κορυφών των υπερπολυέδρων (Cohen & Hickey, 1979; Lasserre, 1983).

Έχει δειχθεί ότι σε πληθώρα προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού μεγάλων διαστάσεων, μεταβλητές και περιορισμούς, οι κορυφές των προκυπτουσών υπερπολυέδρων είναι μικρές τον αριθμό. Μάλιστα, καλεί αυτά τα υπερπολύεδρα ως «καλοπροαίρετα» και πιστώνει την υπολογιστική επιτυχία του αλγόριθμου Simplex στην υψηλή συχνότητα τέτοιων προβλημάτων στον πραγματικό κόσμο. Από πρακτικής άποψης σε εργασία τους οι Schmidt και Mattheiss (1975, 1977, 1980) υπολόγισαν τον αριθμό των κορυφών για 9,867 τυχαία υπερπολύεδρα διαστάσεων 4, 7 και 10. Αντίστοιχη δουλειά έχει επίσης γίνει από τον Dunham et al. (1977).

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.2) και (1.3) υπολογίστηκαν για προβλήματα διαφορετικών διαστάσεων το άνω όριο  $\bar{r}$  και το ελάχιστο όριο  $\underline{r}$  του αριθμού των κορυφών των υπερπολυέδρων. Οι υπολογισμοί αυτοί παρουσιάζονται αντίστοιχα στα επόμενα τρία διαγράμματα.

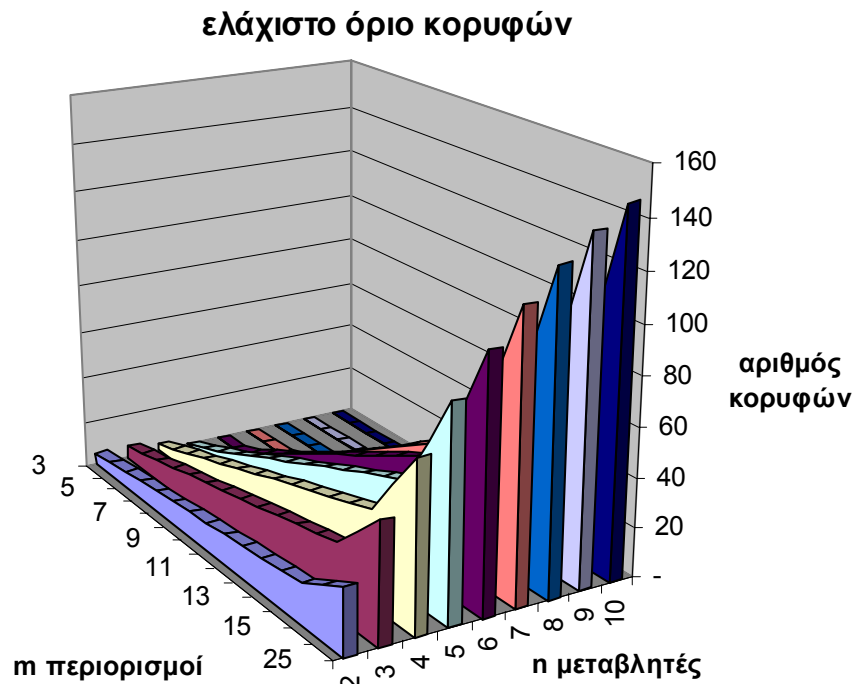
### άνω όριο κορυφών



Διάγραμμα 1: άνω όριο κορυφών  $\bar{r}$

Είναι εμφανές ότι ο ρυθμός ανόδου των ορίων, ειδικά του άνω ορίου  $\bar{r}$ , είναι ραγδαίος (π.χ. για 25 περιορισμούς και 10 μεταβλητές το όριο ανέρχεται σε 166,257 κορυφές), γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο υπολογισμός του συνόλου

των κορυφών ακόμα και προβλημάτων μεσαίων διαστάσεων είναι υπολογιστικά ασύμφορη έως σχεδόν αδύνατη.



Διάγραμμα 2: ελάχιστο όριο κορυφών  $r$

## 1.3 Πολυκριτήρια Αναλυτική-Συνθετική Προσέγγιση

### 1.3.1 Πολυκριτήρια Ανάλυση

Από το 1972, έτος πραγματοποίησης του πρώτου επίσημου συνεδρίου στο πανεπιστήμιο της Νότιας Καρολίνας των Η.Π.Α. με θέμα την πολυκριτήρια ανάλυση αποφάσεων, αναπτύχθηκε με ταχύ ρυθμό μία νέα θεωρία της επιχειρησιακής έρευνας με βασικό αντικείμενο τη λήψη αποφάσεων υπό το καθεστώς πολλαπλών κριτηρίων απόφασης. Η νέα αυτή αντίληψη των προβλημάτων απόφασης βοήθησε στο να αναθεωρηθούν / γενικευθούν πολλές από τις κλασικές μεθόδους βελτιστοποίησης της επιχειρησιακής έρευνας. Παράλληλα, ο ρεαλισμός που διέπει τα μοντέλα της πολυκριτήριας ανάλυσης οδήγησε σε πληθώρα εφαρμογών σε πραγματικά προβλήματα οργάνωσης και διοίκησης (Σίσκος, 1986).

Πριν την εμφάνιση της πολυκριτήριας ανάλυσης ο ορισμός μίας εναλλακτικής δράσης ως 'καλή' ή ως 'η καλύτερη' στηριζόταν, σε γενικές γραμμές, σε ένα και μοναδικό κριτήριο, που συνήθως αναπαρασταίνονταν μέσω μίας συνάρτησης  $g$  (αντικειμενικής

συνάρτησης, συνάρτησης αξιών, συνάρτησης χρησιμότητας) η οποία συνέδεε κάθε δράση με κάποια βαθμολογία τέτοια ώστε,  $\forall a, b \in A$ :

$a$  είναι καλύτερη της  $b$  αν και μόνο αν  $g(a) > g(b)$ .

Σύμφωνα με τη θεώρηση αυτή έχουμε τη δημιουργία σαφώς καθορισμένων μαθηματικών προβλημάτων. Πάντως είναι σχεδόν αδύνατο να βρεθούν πραγματικά προβλήματα στα οποία η απόφαση να προκύπτει από ένα και μοναδικό κριτήριο. Για το λόγο αυτό προχωρήσαμε στην ανάπτυξη της πολυκριτήριας ανάλυσης (Roy & Vincke, 1981).

Η πολυκριτήρια ή πολυκριτηριακή ανάλυση (multicriteria analysis) περιλαμβάνει ένα σύνολο μεθόδων, μοντέλων και προσεγγίσεων που έχουν ως στόχο να βοηθήσουν έναν ή περισσότερους αποφασίζοντας να χειριστούν ημιδομημένα προβλήματα απόφασης με πολλαπλά κριτήρια απόφασης (Siskos & Spyridakos, 1999). Τα πολυκριτήρια προβλήματα ανήκουν στην κατηγορία των προβλημάτων με χαμηλό βαθμό δόμησης (ill-structured problems), δεδομένου ότι ορθολογική λύση δεν προϋπάρχει, αλλά αποτελεί αντικείμενο αναζήτησης, συνήθως μέσω αλληλεπιδραστικής διαδικασίας (Σίσκος, 1986, 1998, 2008).

Τα κυριότερα θεωρητικά ρεύματα της πολυκριτήριας ανάλυσης είναι τέσσερα (Siskos & Spyridakos, 1999; Σίσκος, 1986):

1. Η βελτιστοποίηση πολυκριτηρίου (ή πολυστοχικού) προγραμματισμού (multiobjective optimization approach) αποτελεί μία επέκταση του μαθηματικού προγραμματισμού, με στόχο την επίλυση προβλημάτων με συνεχείς εναλλακτικές ενέργειες και περισσότερες από μία αντικειμενικές συναρτήσεις. Η έρευνα βέλτιστης λύσης σε ένα πολυκριτήριο σύστημα, δηλαδή λύσης που βελτιστοποιεί ταυτόχρονα όλες τις αντικειμενικές συναρτήσεις-κριτήρια είναι μάταιη, αφού τα κριτήρια παίζουν συνήθως ανταγωνιστικό ρόλο, ώστε η βέλτιστη λύση ως προς ένα κριτήριο να μην είναι βέλτιστη ως προς τα άλλα. Οι μέθοδοι που έχουν επινοηθεί για τέτοια συστήματα έχουν για στόχο την ανεύρεση μιας κάποιας «ενδιάμεσης» λύσης που ικανοποιεί τον αποφασίζοντα. Για το λόγο αυτό συνήθως η τελική λύση εκτιμάται μέσω μιας αλληλεπιδραστικής διαδικασίας. Οι διαδικασίες αυτές συνίστανται στην αλληλοδιαδοχή φάσεων υπολογισμών και διαλόγου ανθρώπου-μηχανής. Στην επιτυχία των μεθόδων για την ανεύρεση ικανοποιητικών λύσεων έχει συντελέσει αποτελεσματικά η ραγδαία εξέλιξη τόσο των υπολογιστών όσο και του εξειδικευμένου λογισμικού (Σίσκος, 1986).
2. Η θεωρία των σχέσεων υπεροχής (outranking relation approach), η οποία έχει ως στόχο τη δημιουργία σχέσεων υπεροχής μεταξύ δράσεων απόφασης. Βασικό χαρακτηριστικό της συγκεκριμένης προσέγγισης είναι η σύγκριση ανά ζεύγος των εναλλακτικών λύσεων με στόχο τον καθορισμό σχέσεων προτίμησης,

αδιαφορίας αλλά και ασυγκριτικότητας. Από τις πιο αντιπροσωπευτικές μεθόδους της συγκεκριμένης θεωρίας είναι αυτές της οικογένειας ELECTRE που παρουσιάζονται από τον Roy (1990).

3. Η θεωρία των πολυκριτήριων συστημάτων αξιών ή χρησιμότητας (value system approach, multiattribute utility theory), η οποία έχει ως στόχο την κατασκευή ενός συστήματος αξιών, το οποίο συνθέτει τις προτιμήσεις του αποφασίζοντος στο σύνολο των κριτηρίων. Το εκτιμώμενο σύστημα αξιών προσφέρει έναν ποσοτικό τρόπο υποστήριξης της τελικής απόφασης.
4. Η αναλυτική-προσθετική προσέγγιση (aggregation-disaggregation approach) που έχει ως στόχο την αναζήτηση και προσέγγιση της συλλογιστικής του αποφασίζοντος με τελικό αποτέλεσμα την πληρέστερη διερεύνηση της συλλογιστικής αυτής. Στη προσέγγιση αυτή ουσιαστικά στηρίζεται η φιλοσοφία ανάπτυξης των μεθόδων UTA και MUSA που θα εξεταστούν αναλυτικότερα στο κεφάλαιο 4. Με βασική αναφορά στους Jacquet-Lagrèze and Siskos (2001) θα παρουσιαστούν στη συνέχεια τα βασικά χαρακτηριστικά της προσέγγισης αυτής.

### **1.3.2 Η θεωρία της πολυκριτήριας χρησιμότητας-αξίας**

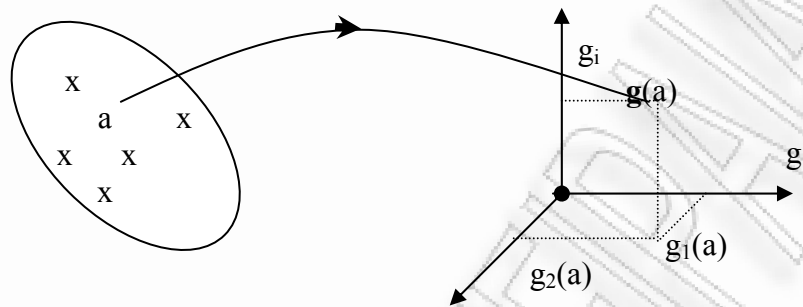
Το γενικό πλαίσιο μοντελοποίησης προβλημάτων στο πεδίο της πολυκριτήριας ανάλυσης αποφάσεων οριοθετείται από τέσσερα διαδοχικά αλλά και αλληλεπιδρώντα στάδια: **Στάδιο I:** Αντικείμενο της απόφασης, **Στάδιο II:** Μοντελοποίηση μιας συνεπούς οικογένειας κριτηρίων με ορισμένα χαρακτηριστικά, **Στάδιο III:** Ανάπτυξη ενός μοντέλου ολικής προτίμησης, **Στάδιο IV:** Υποστήριξη της απόφασης (Roy, 1985, Σίσκος 1986, Jacquet-Lagrèze and Siskos 2001).

Κάθε εναλλακτική δράση που έχει οριστεί στο Στάδιο I αντανακλά «ένα νέφος στοιχειωδών επιπτώσεων» ή σύνολο ιδιοτήτων που τη χαρακτηρίζουν, μέσω του οποίου είναι δυνατή η εκτίμησή της από τον αποφασίζοντα. Η ανάλυση των στοιχειωδών επιπτώσεων για κάθε ενέργεια, καθοδηγεί τον αναλυτή στην επινόηση και μοντελοποίηση των κριτηρίων απόφασης, Στάδιο II.

Μία συνεπής οικογένεια κριτηρίων απεικονίζει το σύνολο των δραστηριοτήτων του συνόλου εναλλακτικών  $A$  μέσα σε ένα  $n$ -διάστατο χώρο  $R^n$  όπως φαίνεται και στο

Σχήμα 1-7:





**Σχήμα 1-7:** Πολυκριτήρια απεικόνιση του συνόλου A (Σίσκος, 2008)

Η θεωρία της πολυκριτήριας χρησιμότητας-αξίας βασίζεται στην ακόλουθη υπόθεση: για κάθε πρόβλημα απόφασης υπάρχει μία πραγματική συνάρτηση  $u$ , που ορίζεται στο σύνολο  $A$ , της οποίας ο αποφασίζων, συνειδητά ή όχι, επιθυμεί την βελτιστοποίησή της. Η συνάρτηση αυτή συνθέτει τα κριτήρια  $g_1, g_2, \dots, g_n$ . Ο ρόλος του αναλυτή είναι να καθορίσει τη συνάρτηση αυτή. (Roy and Vincke, 1981). Η νέα αυτή συνάρτηση καλείται συνάρτηση αξίας ή αξιών (value function) ή χρησιμότητας, όταν σε κάποια κριτήρια (τουλάχιστον ένα) οι αξιολογήσεις είναι αβέβαιες, αλλά με πιθανότητα γνωστές (πιθανοτικά κριτήρια):

$$u(\mathbf{g})=u(g_1, g_2, \dots, g_n) \quad (1.4)$$

Ας ονομάσουμε  $P$  την αυστηρή προτιμησησική σχέση και  $I$  την σχέση αδιαφορίας ανάμεσα σε δύο εναλλακτικές δραστηριότητες  $a$  και  $b$ .

Αν το διάνυσμα  $\mathbf{g}(a)=[g_1(a), g_2(a), \dots, g_n(a)]$  είναι η πολυκριτήρια αξιολόγηση της δραστηριότητας  $a$ , τότε οι ακόλουθες ιδιότητες χαρακτηρίζουν τη συνάρτηση αξίας  $u$ :

$$u[\mathbf{g}(a)]>u[\mathbf{g}(b)] \Leftrightarrow a P b \quad (1.5.a)$$

$$u[\mathbf{g}(a)]=u[\mathbf{g}(b)] \Leftrightarrow a I b \quad (1.5.β)$$

και η σχέση  $R=P \cup I$  δηλώνει μια ασθενής κατάταξη (Jacquet-Lagreze & Siskos, 1982).

Η ύπαρξη της συνάρτησης  $u(\cdot)$ , υπό καθεστώς βεβαιότητας, θεμελιώνεται με βάση τις εξής παραδοχές (Γρηγορούδης & Σίσκος, 2000):

1. πλήρης συγκρισιμότητα των εναλλακτικών ενεργειών
2. μεταβατικότητα των προτιμήσεων των εναλλακτικών ενεργειών

## Κεφάλαιο 1: Ανάλυση Ευστάθειας - Μεταβελτιστοποίηση

Επιπρόσθετα, η ύπαρξη αθροιστικής συνάρτησης αξίας, υπό καθεστώς βεβαιότητας, προϋποθέτει την αμοιβαία ανεξαρτησία προτιμήσεων για το σύνολο των κριτηρίων. Θεωρώντας ότι έχουμε ένα σύνολο κριτηρίων  $F=\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  οι δύο παρακάτω ορισμοί των Keeney and Raiffa (1976) θα μας βοηθήσουν στην κατανόηση της έννοιας αυτής.

**Ορισμός 1 (ανεξαρτησία προτιμήσεων – preferential independence):** Οι προτιμήσεις για ένα ζεύγος κριτηρίων  $\{g_1, g_2\}$  είναι ανεξάρτητες των προτιμήσεων για τα υπόλοιπα κριτήρια  $\{g_3, g_4, \dots, g_n\}$  για  $n \geq 3$ , αν και μόνο αν η υποθετική δομή των προτιμήσεων πάνω στα κριτήρια  $g_1$  και  $g_2$  δεν εξαρτάται από τις τιμές των άλλων κριτηρίων.

**Ορισμός 2 (αμοιβαία ανεξαρτησία προτιμήσεων – mutual preferential independence):** Αν οι προτιμήσεις για κάθε ζεύγος κριτηρίων  $\{g_i, g_j\}$  είναι ανεξάρτητες των προτιμήσεων του συμπληρωματικού συνόλου των κριτηρίων  $F \setminus \{g_i, g_j\} \forall i, j$ , τότε ισχύει για το σύνολο των κριτηρίων αμοιβαία ανεξαρτησία προτιμήσεων.

Σε συνέχεια των προηγουμένων ο Σίσκος (1998) αναφέρει το ακόλουθο θεώρημα: Η συνάρτηση αξιών ενός αποφασίζοντος είναι γραμμική όταν για κάθε ζεύγος κριτηρίων  $(g_i, g_j)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  οι βαθμοί παραχωρήσεων (βάρη) είναι ανεξάρτητοι των τιμών που παίρνουν τα υπόλοιπα κριτήρια στο χώρο των κριτηρίων και σταθεροί.

Η συνάρτηση αξίας είναι προσθετική αν είναι της μορφής:

$$u[\mathbf{g}(a)] = \sum_{i=1}^n u_i(g_i(a)) \quad (1.6),$$

όπου  $a \in A$ ,  $u(a)$  η συνάρτηση αξίας της  $a$  και  $g_i(a)$  αύξουσα συνάρτηση του κριτηρίου  $g_i$ .

Στην πράξη η πιο συνηθισμένη μορφή είναι η σταθμισμένη αθροιστική μορφή:

$$u[\mathbf{g}(a)] = \sum_{i=1}^n p_i g_i(a) \quad (1.7)$$

όπου κάθε μερική αξία  $u_i(g_i(a))$  καθορίζεται από το κριτήριο  $g_i$  και από το βάρος  $p_i$ .

Σε πολλές περιπτώσεις, κανονικοποιούμε τη συνάρτηση αξίας. Ας υποθέσουμε ότι (Jacquet-Lagrèze & Siskos, 1982):

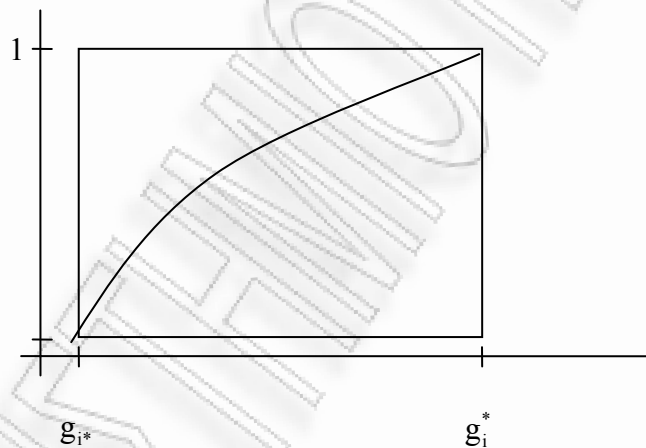
$$u[\mathbf{g}(a)] = \sum_{i=1}^n p_i w_i(g_i(a)), \quad \text{όπου } w_i(g_i(a)) = \frac{1}{p_i} u_i(g_i(a)) \text{ για κάθε κριτήριο } i. \quad (1.8)$$

Έστω  $g_i^*$  και  $g_{i*}$ , είναι αντίστοιχα η καλύτερη και η χειρότερη τιμή του κριτηρίου  $i$ . Οι πιο συνηθισμένες συνθήκες κανονικοποίησης είναι οι επόμενες:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n p_i = 1 \\ w_i(g_{i*}) = 0 \quad \forall i \\ w_i(g_i^*) = 1 \quad \forall i \end{cases} \quad (1.9)$$

Οπότε έχουμε κανονικοποίηση στο διάστημα  $[0,1]$  (Jacquet-Lagrèze & Siskos, 1982). Στο

Σχήμα 1-8 που ακολουθεί δίνεται η κανονικοποιημένη μερική συνάρτηση αξίας ενός κριτηρίου  $i$ :



**Σχήμα 1-8:** Κανονικοποιημένη μερική συνάρτηση αξίας

Αν υποθέσουμε ότι κάθε κριτήριο έχει μη-φθίνουσα χρησιμότητα, που είναι και το πιο σύνηθες, οι μερικές χρησιμότητες  $u_i$  και  $w_i$  είναι τότε μονότονες μη-φθίνουσες συναρτήσεις του  $g_i$ . Όταν χρησιμοποιούμε την προσθετική μορφή (1.6), οι συνθήκες κανονικοποίησης γράφονται ως εξής:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n u_i(g_i^*) = 1 \\ u_i(g_{i*}) = 0 \quad \forall i \end{cases} \quad (1.10)$$

Είναι αρκετά σημαντικό να τονισθεί η φυσική σημασία των συντελεστών σημαντικότητας – βαρών  $p_i$  (σχέση 1.7). Το βάρος ενός κριτηρίου είναι η ποσότητα που παραχωρείται σε κάποιο κριτήριο αναφοράς για να υπάρξει κέρδος ακριβώς μίας μονάδας στο συγκεκριμένο κριτήριο. Συνεπώς, τα βάρη είναι βαθμοί παραχωρήσεων (trade-offs) μεταξύ των κριτηρίων και του κριτηρίου αναφοράς. (Σίσκος, 1998)

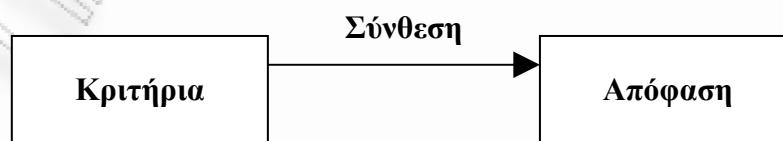
Οπότε ο υπολογισμός των βαρών είναι μία διαδικασία πολύ σημαντική αφού πρέπει να αποτυπώνει την πραγματική σημασία του κάθε κριτηρίου, ώστε το τελικό αποτέλεσμα να είναι συμβατό με τις στάσεις του αποφασίζοντα. Σε αρκετές περιπτώσεις ακολουθούνται αναλυτικοί αλληλεπιδραστικοί διάλογοι για την κατά το δυνατή ορθή εκτίμηση του συνόλου των βαρών. Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν και οι μέθοδοι που ανήκουν στην αναλυτική – συνθετική προσέγγιση και που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση των βαρών μέσα από εκφρασμένες συνολικές αξιολογήσεις ή δράσεις των αποφασιζόντων.

### 1.3.3 Αναλυτικά – Συνθετικά Μοντέλα Προτίμησης

Στις διαδικασίες λήψεως αποφάσεων που εμπλέκονται πολλαπλά κριτήρια, το βασικό πρόβλημα που καλούνται να αντιμετωπίσουν οι αναλυτές και οι αποφασίζοντες σχετίζεται με τον τρόπο με τον οποίο τα διάφορα κριτήρια συνθέτονται ώστε να οδηγηθούμε στην τελική απόφαση (Στάδιο III). Σε πολλές όμως περιπτώσεις, το πρόβλημα τίθεται από την αντίθετη διάσταση: δεδομένης της απόφασης, πώς είναι δυνατό να βρούμε την ορθολογική εκείνη βάση που οδήγησε στη συγκεκριμένη απόφαση; Ή ισοδύναμα, πώς είναι δυνατό να εκτιμήσουμε το μοντέλο προτίμησης του αποφασίζοντα που θα οδηγούσε σε ακριβώς ίδια με την πραγματική απόφαση ή τουλάχιστον στην περισσότερο παρόμοια απόφαση;

Η φιλοσοφία της αναλυτικής-συνθετικής προσέγγισης στα πλαίσια της πολυκριτηριας ανάλυσης έγκειται στην εκτίμηση ενός μοντέλου προτίμησης, που προκύπτει ως συμπέρασμα από μία δοσμένη έκφραση συνολικής προτίμησης πάνω σε εναλλακτικές δραστηριότητες. Στόχος είναι η παροχή υποστήριξης σε δράσεις λήψης απόφασης μέσα από τη χρήση επιχειρησιακών μοντέλων στα πλαίσια της παραπάνω προβληματικής που θέσαμε (Jacquet-Lagrèze & Siskos, 2001).

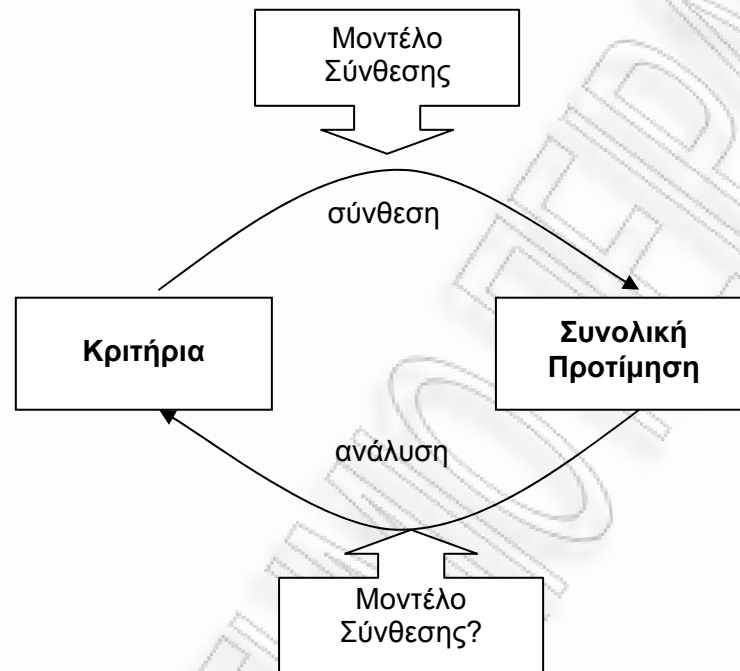
Στην παραδοσιακή μορφή της συνθετικής προσέγγισης που ακολουθείται στην πλειοψηφία των προβλημάτων πολυκριτηριας ανάλυσης, το μοντέλο σύνθεσης των επιμέρους κριτηρίων είναι a priori γνωστό, ενώ η συνολική προτίμηση είναι άγνωστη. Σύμφωνα με αυτή τη προσέγγιση ισχύει η αρχή της γραμμικότητας και της αιτιότητας, δηλαδή η λογική ότι η απόφαση καθορίζεται από τα κριτήρια και τον τρόπο σύνθεσης αυτών.



**Σχήμα 1-9:** Παραδοσιακή προσέγγιση προβλημάτων απόφασης (Γρηγορούδης & Σίσκος, 2000)

Η φιλοσοφία της αναλυτικής – συνθετικής προσέγγισης από την άλλη πλευρά, στηρίζεται στην εκτίμηση των μοντέλων προτίμησης, δεδομένων των ολικών προτιμήσεων όπως φαίνεται και στο

Σχήμα 1-10 (Jacquet-Lagrèze & Siskos, 2001).



**Σχήμα 1-10:** Αναλυτική-Συνθετική προσέγγιση προβλημάτων απόφασης (Jacquet-Lagrèze & Siskos, 2001)

Προκειμένου να αποσαφηνιστεί η ολική προτίμηση του αποφασίζοντα υπάρχει η ανάγκη για την χρήση ενός συνόλου δραστηριοτήτων αναφοράς  $A_R$ . Συνήθως αυτό το σύνολο μπορεί να είναι:

1. ένα σύνολο παρελθουσών εναλλακτικών απόφασης ( $A_R$  – past actions)
2. ένα υποσύνολο εναλλακτικών απόφασης, ειδικά όταν το σύνολο του συνόλου των εναλλακτικών  $A$  είναι μεγάλο ( $A_R \subset A$ )
3. ένα σύνολο φανταστικών δράσεων, τέτοιων ώστε οι αξιολογήσεις πάνω στα διαφορετικά κριτήρια να βοηθούν τον αποφασίζοντα να πραγματοποιήσει ολικές συγκρίσεις ( $A_R$  – fictitious actions)

Σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις ζητείται από τον αποφασίζοντα να εξωτερικεύσει ή/και να επιβεβαιώσει τις ολικές του προτιμήσεις πάνω στο σύνολο  $A_R$ , λαμβάνοντας υπόψη τις αξιολογήσεις των εναλλακτικών του συνόλου πάνω σε όλα

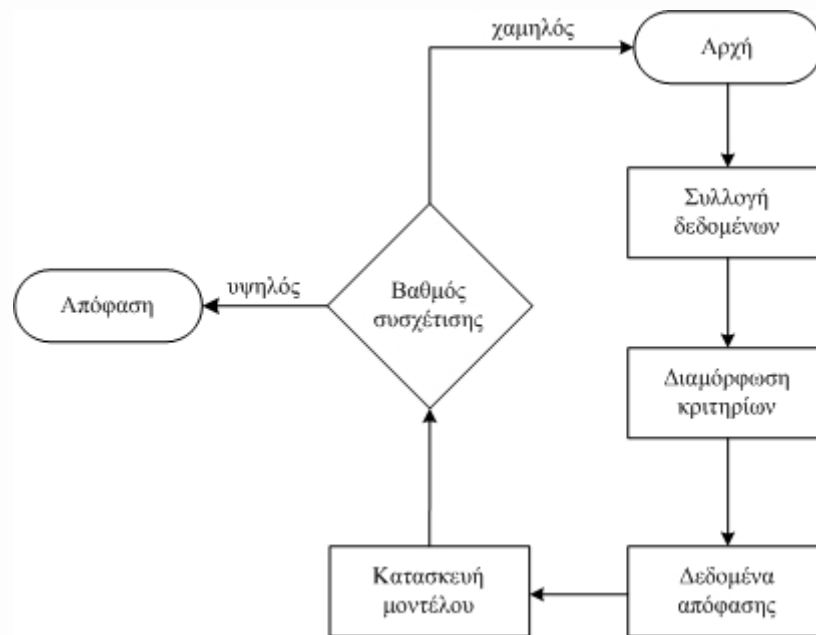
τα κριτήρια. Συνήθως η ολική προτίμηση εφαρμόζεται με τις παρακάτω μορφές (Jacquet-Lagrèze & Siskos, 2001):

- μετρήσιμες κρίσεις για τις εναλλακτικές του  $A_R$
- κατάταξη (ασθενής) (weak order relation) στο  $A_R$ , προβληματική  $\gamma$
- σύγκριση κατά ζεύγη εναλλακτικών
- ταξινόμηση των εναλλακτικών αναφοράς, προβληματική  $\beta$

Η αναλυτική-συνθετική προσέγγιση εστιάζεται στη συσχέτιση των πραγματικών δεδομένων και του μοντέλου απόφασης, έτσι ώστε να επιτυγχάνεται η μεγαλύτερη δυνατή συμβατότητα μοντέλου-πραγματικότητας. Ουσιαστικά, στις διαδικασίες των μεθόδων της συγκεκριμένης προσέγγισης, γνωστού όντως του μοντέλου απόφασης, εκτιμώνται οι παράμετροι του μοντέλου με τις οποίες θα επιτευχθεί μία βέλτιστη ανασύσταση των δεδομένων της απόφασης. (Σίσκος, 1981)

Τα μοντέλα της συγκεκριμένης κατηγορίας βασίζονται στην αρχή ότι το αποτέλεσμα μίας απόφασης μπορεί είτε να παρατηρηθεί (σε περιπτώσεις αποφάσεων με επαναληπτικό χαρακτήρα), είτε να συλλεχθεί από τον αποφασίζοντα (μέσα από διαλογικές διαδικασίες). Ο απώτερος σκοπός είναι η επέκταση (extrapolation) γνωστών καταστάσεων συμπεριφοράς από το σύνολο  $A_R$  στο υπό μελέτη σύνολο  $A$  των ενεργειών απόφασης. (Γρηγορούδης και Σίσκος, 2000)

Η διαδικασία ανάδρασης της αναλυτικής-συνθετικής προσέγγισης παρουσιάζεται στο Σχήμα 1-11, όπου πρέπει να σημειωθεί ότι, σε περίπτωση που διαπιστωθεί ασυνέπεια ανάμεσα στον αποφασίζοντα και το εκτιμώμενο μοντέλο απόφασης, αναθεωρείται είτε η συνεπής οικογένεια κριτηρίων είτε η αξιοπιστία των δεδομένων της απόφασης.



**Σχήμα 1-11:** Φάσεις της Αναλυτικής-Συνθετικής προσέγγισης (Σπυριδάκος, 1996)

Η αναλυτική-συνθετική προσέγγιση θεμελιώθηκε αρχικά από τους Hammont *et al.* (1977), και προωθήθηκε περαιτέρω μέσω της υιοθέτησής της στις μεθόδους UTA (Jacquet-Lagrèze & Siskos, 2001), UTASTAR (Siskos & Yannacopoulos, 1985), UTA II (Siskos, 1980) και MUSA (Γρηγορούδης & Σίσκος, 2000). Μεγάλος αριθμός δημοσιεύσεων αφορά στις εφαρμογές της αναλυτικής – συνθετικής προσέγγισης (Despotis *et al.*, 1990; Despotis & Zorounidis, 1995; Jacquet-Lagrèze, 1990; Jacquet-Lagrèze & Siskos, 2001; Matsatsinis & Siskos, 1999; Siskos, 1980; Siskos *et al.*, 1999; Siskos & Zorounidis, 1987; Stewart, 1987). Στις παραπάνω μεθόδους ο γραμμικός προγραμματισμός χρησιμοποιείται ως βασικό μέσο επίλυσης των μοντέλων.

#### 1.4 Η προτεινόμενη προσέγγιση

Αναλύθηκε στις προηγούμενες παραγράφους η ανάγκη ολοκληρωμένης προσέγγισης της ανάλυσης ευστάθειας στα μοντέλα επιχειρησιακής έρευνας καθώς επίσης και ο ρόλος της στις διαδικασίες υποστήριξης των αποφάσεων. Πιο συγκεκριμένα δόθηκε έμφαση στην έννοια των ευσταθών αποτελεσμάτων (Roy και Bouyssou 1993; Roy 1998) σε αντιδιαστολή με την ευσταθή λύση. Για παράδειγμα, μια ευσταθής λύση σε ένα πρόβλημα ιεράρχησης θα είναι μια ιεράρχηση  $R$  των εναλλακτικών που πληρούν κάποιο χαρακτηριστικό  $P$ , αλλά αυτό είναι το ίδιο σαν να δηλώνεται ότι το αποτέλεσμα 'η  $R$  ικανοποιεί το  $P$ ' είναι ευσταθές. Η έννοια του ευσταθούς αποτελέσματος είναι για το λόγο αυτό πιο γενική από την έννοια της ευσταθούς λύσης και μπορεί να επιτρέψει μια βαθύτερη ανάλυση. Αυτό που

ενδιαφέρει τελικά τον αναλυτή είναι να προτείνει στον αποφασίζοντα ένα ευσταθές αποτέλεσμα.

Μια άλλη σημαντική σκοπιά που προσεγγίστηκε είναι η έμφαση που δίδεται στην ιδέα της μοντελοποίησης σαν μια εποικοδομητική διαδικασία μάθησης. Η ανάλυση ευστάθειας συχνά συνδέεται με την ανάγκη προστασίας σε δυσμενείς συνθήκες ή άγνωστες πλευρές της πραγματικότητας. Ωστόσο, όλες οι όψεις ενός μοντέλου δεν αντικατοπτρίζουν μια προϋπάρχουσα (ή μελλοντική) πραγματικότητα· μερικές όψεις δομούνται κατά τη διάρκεια της διαδικασίας απόφασης (Roy 1993, Dias & Tsoukias 2004). Ιδιαίτερως αυτή είναι η περίπτωση πολλών παραμέτρων ενός μοντέλου που συνδέονται με τις προτιμήσεις του αποφασίζοντα. Η ενασχόληση με την εκμείωση παραμέτρων που συνδέονται με την προτίμηση, όπως τα βάρη κριτηρίων στην αναλυτική-συνθετική προσέγγιση, στοχεύει στην υποστήριξη του αποφασίζοντος ώστε να μπορέσει να αντιληφθεί σε μεγαλύτερο βάθος το προς επίλυση πρόβλημα και να μπορέσει με άνεση να παράσχει κάποιες πληροφορίες για την εκτίμηση των τιμών αυτών των παραμέτρων. Η διαδικασία διευκολύνεται περισσότερο όταν παρέχεται στον αποφασίζοντα η δυνατότητα να δώσει πληροφορίες με τη μορφή διαστημάτων τιμών, σχέσεων αλληλουχίας ή παραδείγματα αποτελεσμάτων, παρά ακριβείς αριθμητικές τιμές.

Επίσης, τονίσθηκε η ανάγκη υλοποίησης διαδικασιών ανάλυσης ευστάθειας σε μοντέλα πολυκριτήριας ανάλυσης που χρησιμοποιούν την αναλυτική-συνθετική προσέγγιση και επιλύονται με χρήση τεχνικών γραμμικού προγραμματισμού. Με δεδομένη την ολοένα και αυξανόμενη χρήση τέτοιων προσεγγίσεων στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων υπάρχει η ανάγκη ανάπτυξης μίας ολοκληρωμένης προσέγγισης για την ενασχόληση με την ευστάθεια η οποία θα έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- Θα εστιάζει στη μελέτη της ευστάθειας των συμπερασμάτων (π.χ. το συμπέρασμα ότι «οι συναρτήσεις αξιών που προέκυψαν από την επίλυση ενός μοντέλου αναλυτικής-συνθετικής προσέγγισης αποτυπώνουν ορθά τη βιωματική πραγματικότητα» είναι ευσταθές).
- Θα υποστηρίζει τη μελέτη της ευστάθειας του μοντέλου, δηλαδή τον ορισμό των αποτελεσμάτων που είναι ευσταθή για μια ομάδα εκδόσεων μοντέλων, μεθόδων/αλγορίθμων.
- Θα εξετάζεται οικογένεια ζευγών (διαδικασία, έκδοση) δηλαδή διαφορετικές εκδόσεις ενός μοντέλου (που θα προκύπτουν π.χ. από διαφορετικούς συνδυασμούς των τιμών των παραμέτρων) και διαφορετικές διαδικασίες επίλυσης αυτών, προκειμένου να αξιολογηθεί η ευστάθεια του μοντέλου.
- Θα οδηγεί την διαδικασία απόφασης και δε θα αποτελεί ούτε «εκ των προτέρων» ούτε «εκ των υστέρων» διαδικασία. Δηλαδή το σύνολο των



διαφορετικών εκδόσεων των μοντέλων δε θα καθορίζεται εκ των προτέρων αλλά θα εξελίσσεται διαρκώς μέχρι τη λήψη της απόφασης. Κατά την έναρξη της διαδικασίας, οι συμμετέχοντες (αναλυτές) θα είναι ανοιχτοί να αποδεχτούν ένα ευρύ σύνολο εκδόσεων του μοντέλου, το οποίο θα προσπαθούν να μειώσουν καθώς η διαδικασία προχωρά. Αντί μιας διαδικασίας που ξεκινά με εξαγωγή τιμών παραμέτρων η οποία ακολουθείται από υπολογισμό της λύσης και την εκ των υστέρων ανάλυση ευστάθειας, θα έχουμε μια επανάληψη της εξαγωγής και των φάσεων της ανάλυσης ευστάθειας.

- Θα υποστηρίζει την ενεργή συμμετοχή των αναλυτών θέτοντας ερωτήσεις εκμείευσης που θα είναι απλές στην κατανόηση επιτρέποντας στον αναλυτή να απαντά μόνο στο μέτρο που αυτός/αυτή αισθάνεται άνετα. Οι φάσεις εκμείευσης και ανάλυσης ευστάθειας θα επαναλαμβάνονται μέχρι ο αναλυτής να αποδεχθεί μία ομάδα αποτελεσμάτων – συμπερασμάτων ως ευσταθή. Επιπροσθέτως, η ανάλυση ευστάθειας θα καταδείξει ποια στοιχεία της κάθε λύσης είναι σταθερά και ποια στοιχεία ποικίλουν περισσότερο από έκδοση σε έκδοση, βοηθώντας τον αναλυτή να εστιάσει την ανάλυση στις πτυχές που θεωρούνται ως οι πιο σημαντικές.
- Θα ανήκει στην *τυπική* κατηγορία των προσεγγίσεων υποστηρίζοντας μοντελοποιήσεις που προέρχονται από τυπικό μοντέλο αναλυτικής-συνθετικής προσέγγισης. Ωστόσο για την επαλήθευσή της η προσέγγιση θα υλοποιηθεί στο πλαίσιο της μεθόδου MUSA που ανήκει στην κατηγορία των μεθόδων πολυκριτήριας ανάλυσης αποφάσεων υιοθετώντας την αναλυτική-συνθετική προσέγγιση με βασικό εργαλείο για την επαγωγή των μοντέλων απόφασης το γραμμικό προγραμματισμό. Αυτή η συγκεκριμένη υλοποίηση δεν κατατάσσει την προτεινόμενη προσέγγιση στην *ειδική* κατηγορία (βλ. § 1.1.2).
- Θα χρησιμοποιεί ευρετικούς αλγόριθμους που θα επιλύουν αποδοτικά το πρόβλημα της αναζήτησης μετα-βέλτιστων λύσεων των γραμμικών συστημάτων προκειμένου να αποφευχθεί η εξαντλητική αναζήτηση του τεράστιου αριθμού των κορυφών του προς μελέτη υπερπολυέδρου (βλ. § 1.2.2 και § 1.2.3).
- Θα υλοποιηθεί στα πλαίσια ενός σύγχρονου, πλήρους και εύχρηστου Συστήματος Υποστήριξης Αποφάσεων

Στα επόμενα Κεφάλαια της παρούσας διατριβής θα περιγραφεί ο τρόπος ανάπτυξης της προτεινόμενης προσέγγισης ανάλυσης ευστάθειας και η ενσωμάτωσή της σε Σύστημα Υποστήριξης Αποφάσεων, ενώ θα επιχειρηθεί και η επαλήθευσή της με συνθετικά και πραγματικά δεδομένα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΔΑΛΙΑ

## Κεφάλαιο 2: Αλγόριθμοι εύρεσης λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης

Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά παρουσιάζονται οι δύο βασικές κατηγορίες αλγορίθμων εύρεσης των λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι αλγόριθμοι που υπόσχονται πλήρη αναζήτηση όλων των βασικών εφικτών λύσεων ενός υπερπολυέδρου. Εντός της πρώτης αυτής κατηγορίας συναντάμε δύο υποκατηγορίες αλγορίθμων. Στη μεν πρώτη οι αλγόριθμοι χρησιμοποιούν περιστροφικές μεθόδους (pivotting) ενώ στη δεύτερη υποκατηγορία μη κυκλικές. Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν μέθοδοι που δεν σκοπεύουν στην εύρεση όλων των βασικών δυνατών λύσεων ενός υπερπολυέδρου αλλά ενός αντιπροσωπευτικού συνόλου αυτών με χρήση ευρετικών προσεγγίσεων.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται και αξιολογούνται τέσσερις αντιπροσωπευτικές μέθοδοι-αλγόριθμοι που μπορούν να θεωρηθούν ως κατάλληλες προσεγγίσεις αντιμετώπισης του προβλήματος της μεταβελτιστοποίησης. Οι τρεις πρώτες ανήκουν στην κατηγορία των αναλυτικών περιστροφικών μεθόδων ενώ η τέταρτη ανήκει στην κατηγορία των ευρετικών προσεγγίσεων. Στις αναλυτικές μεθόδους εξετάζεται αρχικά ο αλγόριθμος του Tarry που αποτελεί ίσως την πρώτη ιστορικά προσέγγιση στο πρόβλημά μας, και στη συνέχεια ο αλγόριθμος της Αντίστροφης Simplex του C. Van de Panne και ο αλγόριθμος των Manas - Nedoma. Τέλος, εξετάζεται μία ευρετική προσέγγιση του Siskos που προσπαθεί να προσεγγίσει τα αποτελέσματα των αναλυτικών μεθόδων με την εύρεση αξιόπιστου αντιπροσωπευτικού συνόλου λύσεων.

Το ερευνητικό ερώτημα που τίθεται στο κεφάλαιο αυτό είναι η αξιολόγηση της ποιότητας του αντιπροσωπευτικού δείγματος των μεταβελτιστων λύσεων που παράγονται μέσω ευρετικών μεθόδων σε σχέση με το σύνολο αυτών των λύσεων που παράγονται μέσω των αναλυτικών μεθόδων. Το ερώτημα απαντάται στα Κεφάλαια 8 και 9 μέσα από την χρήση - αξιολόγηση του σχετικού Συστήματος Υποστήριξης Αποφάσεων στο οποίο έχουν υλοποιηθεί οι σχετικοί προς αξιολόγηση αλγόριθμοι.

## 2.1 Μέθοδοι εύρεσης λύσεων κυρτών πολυέδρων

Η αναζήτηση και εύρεση των σχεδόν βέλτιστων ή πολλαπλών βέλτιστων λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης αντιμετωπίζεται με σειρά αλγορίθμων που ακολουθούν διαφορετικές κατά περίπτωση προσεγγίσεις.

Όπως ειπώθηκε στις § 1.2.1 και §1.2.2 το σύνολο των πολλαπλών ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων οριοθετείται μαθηματικά από κυρτά υπερπολύεδρα τύπου (ΥΠ) 1.2 στο χώρο με διάσταση  $n$ :

$$\text{ΥΠ 1.2} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{c}'\mathbf{x} \geq z^* - k \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{όπου } k \text{ μικρή θετική ποσότητα και στην περίπτωση των} \\ \text{πολλαπλών βέλτιστων λύσεων } k=0 \text{ (αναφερόμαστε πάντα} \\ \text{για την περίπτωση μεγιστοποίησης)}$$

Το πρόβλημα της εύρεσης των κορυφών των υπερπολύεδρων αυτών που ουσιαστικά αντιστοιχούν σε εφικτές (δυνατές) βασικές λύσεις του αντίστοιχου γραμμικού προβλήματος έχει εκτενώς μελετηθεί ήδη από τη δεκαετία του '50. Οι Kaibel και Pfetsch (2003) θεωρούν ως πιθανότερη αιτία της ραγδαίας αύξησης του ερευνητικού ενδιαφέροντος για τη θεωρία των πολυέδρων το δεύτερο μισό του 20<sup>ου</sup> αιώνα την εξέλιξη του γραμμικού προγραμματισμού ως ένα δημοφιλές εργαλείο για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων στη βιομηχανία και το στρατό. Ο αλγόριθμος Simplex του Dantzig που αναπτύχθηκε στα τέλη του '40 ανέδειξε τη χρησιμότητα της γεωμετρικής και συνδυαστικής γνώσης των πολυέδρων στην αναζήτηση και ανάλυση των λύσεων των γραμμικών προβλημάτων.

Μέχρι την ανάπτυξη του αλγόριθμου Simplex η μελέτη των πολυέδρων παρέμενε στο πεδίο της αφηρημένης σκέψης και της φαντασίας. Η έρευνα του Dantzig έφερε την υπολογιστική διάσταση στη μελέτη αυτών (Grunbaum, 1967). Πριν από την έρευνά του, η αποτύπωση ήταν εφικτή μόνο για 2-διάστατα πολύεδρα. Οι τεχνικές που ξεκίνησαν να εφαρμόζονται στη Simplex έκαναν εφικτό τον υπολογισμό οποιουδήποτε μέρους ενός κυρτού πολυέδρου και την αποτύπωση αυτού. Από το 1947 και μετά το πρόβλημα της αναζήτησης του συνόλου των κορυφών ενός κυρτού πολυέδρου που ορίζεται από γραμμικούς περιορισμούς θεωρήθηκε ως πολύ σημαντικό.

Έχει αναπτυχθεί πληθώρα αλγορίθμων για την επίλυση του προβλήματος, οι περισσότεροι εκ των οποίων βασίζονται στην απαρίθμηση όλων των διαθέσιμων εφικτών βάσεων του Γ.Π. 1.1. Ωστόσο σε όλους αυτούς τους αλγόριθμους, μετά τον υπολογισμό των  $r$  πρώτων κορυφών, ο υπολογιστικό φόρτος υπολογισμού της

επόμενης κορυφής αυξάνεται εκθετικά κατά  $r$  στην χειρότερη περίπτωση. Ένας αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος θεωρείται ως αποδοτικός, ή πολυωνυμικού χρόνου, αν ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

1. Θα πρέπει να υπολογίζει τα ακραία σημεία ενός πολυέδρου  $K$  διαδοχικά το ένα μετά το άλλο και να δημιουργεί μία λίστα.
2. Όταν η λίστα των γνωστών κορυφών του  $K$ ,  $\{d_1, \dots, d_r\}$ , περιλαμβάνει  $r$  κορυφές, ο φόρτος ελέγχου για το αν η λίστα περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του  $K$ , και αν όχι, ο φόρτος υπολογισμού της νέας κορυφής, θα πρέπει να φράσσεται άνω από πολυώνυμο βαθμού  $r$  εξαρτώμενου και από το μέγεθος του Γ.Π.

Σύμφωνα με τον Murty (2009) ο στόχος της ανάπτυξης ενός αποδοτικού αλγορίθμου για το πρόβλημα της εύρεσης των κορυφών είναι περισσότερο μία μαθηματική πρόκληση παρά μία πρακτική.

Οπότε ένα από τα βασικά θέματα του προβλήματος της εύρεσης των κορυφών είναι ο τεράστιος αριθμός των κορυφών των υπερπολυέδρων ακόμα και για μικρά μεγέθους προβλήματα όπως παρουσιάστηκε στην § 1.2.3. Έτσι το ερευνητικό ενδιαφέρον εστιάστηκε στην ανάπτυξη αλγορίθμων που λειτουργούσαν αποδοτικά από άποψη υπολογιστικής πολυπλοκότητας, συνδέοντας την απόδοση με το υπερμέγεθος του εγχειρήματος. Η εκτίμηση της πολυπλοκότητας των αλγορίθμων αυτών έχει απασχολήσει πολύ την ερευνητική κοινότητα και εν τέλει έχει αποδειχθεί ότι το πρόβλημα της εύρεσης του συνόλου των κορυφών ενός πολυέδρου είναι NP-hard, σε κάθε περίπτωση (Khachiyan *et al.*, 2006). Ένα πρόσθετο θέμα εκτός της πολυπλοκότητας των σχετικών αλγορίθμων είναι οι τεράστιες απαιτήσεις σε μνήμη από τη στιγμή που όχι μόνο οι κορυφές αλλά και πληροφορίες για αυτές, π.χ. ποιες είναι οι γειτονικές αυτών, πρέπει να διατηρούνται κατά την δημιουργία των λιστών των κορυφών (Provan, 1994).

Παράλληλα με το πρόβλημα της εύρεσης όλων των εφικτών λύσεων του γραμμικού συστήματος μελετήθηκε και το σχετιζόμενο πρόβλημα της κατάταξης κατά φθίνουσα ή αύξουσα τάξη των τιμών των λύσεων σε σχέση με μία πρόσθετη αντικειμενική συνάρτηση οριζόμενη στο ίδιο υπερπολυέδρο. Το πρόβλημα αυτό όπως θα φανεί στη συνέχεια παρουσιάζει επιπρόσθετο ενδιαφέρον στο πλαίσιο της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης όπου το ρόλο της αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να παίζει η αρχική αντικειμενική συνάρτηση του γραμμικού προγράμματος.

Ανάλογα με τον τρόπο που προσεγγίζουν το πρόβλημα οι διαφορετικοί αλγόριθμοι μπορούν να καταταχθούν δύο βασικές κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι αναλυτικοί αλγόριθμοι που υπόσχονται πλήρη αναζήτηση όλων των βασικών εφικτών λύσεων ενός υπερπολυέδρου. Εντός της πρώτης αυτής κατηγορίας συναντάμε δύο υποκατηγορίες αλγορίθμων. Στη μεν πρώτη οι αλγόριθμοι

χρησιμοποιούν περιστροφικές μεθόδους (pivotting) ενώ στη δεύτερη υποκατηγορία μη περιστροφικές ή γεωμετρικές.

Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν μέθοδοι που δεν σκοπεύουν στην εύρεση όλων των βασικών δυνατών λύσεων ενός υπερπολυέδρου αλλά ενός αντιπροσωπευτικού συνόλου αυτών με χρήση ευρετικών προσεγγίσεων.

### **2.1.1 Περιστροφικές μέθοδοι**

Οι πιο ενδιαφέρουσες προσεγγίσεις, από την πλευρά της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης, για την εξαντλητική αναζήτηση όλων των κορυφών ενός πολυέδρου είναι αυτές που βασίζονται στη φιλοσοφία της Simplex του Dantzig. Οι μέθοδοι αυτοί υλοποιούν την αναζήτηση των κορυφών με τεχνικές μετάβασης από μία βασική εφικτή λύση σε γειτονική βασική εφικτή λύση και ονομάζονται περιστροφικές. Πιο συγκεκριμένα μία περιστροφική μέθοδος ξεκινάει από την εύρεση μίας αρχικής εφικτής βάσης στο Γ.Π. 1.1 επιλύοντας το γραμμικό πρόγραμμα και στη συνέχεια από την αντίστοιχη κορυφή και υλοποιώντας διαδικασίες αναζήτησης ψάχνει τις γειτονικές κορυφές μέσω διαδοχικών αλλαγών βάσης.

Τα πολυέδρα στις περισσότερες μεθόδους θεωρούνται ως φραγμένα, γεγονός που συμβαδίζει με τη μορφή των προβλημάτων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης. Επιπρόσθετα, οι περισσότερες από τις μεθόδους αυτής της υποκατηγορίας θεωρούν ότι τα πολυέδρα είναι μη-εκφυλισμένα. Ωστόσο, ακόμα και στην περίπτωση ύπαρξης εκφυλισμένων λύσεων υπάρχει η δυνατότητα τροποποιήσεων για την αντιμετώπιση του προβλήματος με χρήση τεχνικών perturbation και λεξικογραφικών τεχνικών.

Λόγω του ιδιαίτερου ενδιαφέροντος που παρουσιάζουν οι περιστροφικές μέθοδοι για τη μελέτη της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης λόγω της άμεσης σχέσης που έχουν με τον αλγόριθμο Simplex στην § 2.3 παρουσιάζονται κάποιες χαρακτηριστικές εξ αυτών.

### **2.1.2 Μη περιστροφικές μέθοδοι**

Οι μη περιστροφικές μέθοδοι δε χρησιμοποιούν τη προσέγγιση της Simplex αλλά χρησιμοποιούν αποκλειστικά στοιχεία της θεωρίας της γεωμετρίας βασιζόμενες στις ιδιότητες των τομών μεταξύ υπερεπιπέδων και υπερπολυέδρων.

Σύμφωνα με τους Matheiss και Rubin (1980) όλες οι μη περιστροφικές μέθοδοι μπορούν να θεωρηθούν σαν παραλλαγές της Διπλής Περιγραφικής Μεθόδου των

Motzkin, Thompson, Raiffa και Thrall που πρωτοδημοσιεύθηκε το 1953. Μάλιστα πρόκειται ουσιαστικά για την πρώτη προσέγγιση του προβλήματος της απαρίθμησης των κορυφών ενός πολυέδρου χωρίς τη χρήση περιστροφής. Η προσέγγισή τους βασίζεται στην προσθήκη ανισοτήτων (περιορισμών) με βηματικό τρόπο, σημειώνοντας σε κάθε βήμα ποια νέα ακραία σημεία έχουν δημιουργηθεί και ποια παλαιά έχουν αποκλεισθεί. Αν και η προσέγγιση αυτή έχει πολλά πλεονεκτήματα, ένα βασικό της μειονέκτημα στην περίπτωση ύπαρξης πολλών πλεοναζόντων περιορισμών είναι ο υπερβολικός φόρτος για τον υπολογισμό ακραίων σημείων που στη συνέχεια της διαδικασίας θα εξαιρεθούν.

Επίσης, σύμφωνα με τον Duffin (1974) και τους Dantzig και Eaves (1973) μπορεί να ειπωθεί ότι όλες οι μη περιστροφικές μέθοδοι μπορούν να θεωρηθούν ως δυαδικές στη τεχνική απαλοιφής για την επίλυση γραμμικών συστημάτων ανισοτήτων των Fourier-Motzkin.

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι περισσότερες από τις μη περιστροφικές μεθόδους αρχικά περιγράφηκαν με σκοπό την ανεύρεση όλων των ακραίων ακμών των κυρτών κωνικών υπερπολυέδρων. Αν και οι μέθοδοι αυτοί είχαν ως κίνητρο τη θεωρία της γεωμετρίας παρουσιάστηκαν και αρκετές αλγεβρικές εκφράσεις τους (Bik & Wijshoff, 1995).

### **2.1.3 Ευρετικές Μέθοδοι**

Ο αριθμός των κορυφών ενός υπερπολυέδρου που αντιπροσωπεύει ένα γραμμικό πρόγραμμα είναι συχνά μεγάλος και η εξαντλητική αναζήτησή τους απαιτεί πολύ χρόνο. Οι ευρετικές μέθοδοι μας προσφέρουν μια πολύ καλή διέξοδο στο πρόβλημα αναζήτησης των χιλιάδων λύσεων που πολλές φορές μας είναι αδιάφορες. Συχνότερα μπορεί να υπάρξει ενδιαφέρον για πληροφορίες όπως για παράδειγμα: για την ευστάθεια μιας εκφυλισμένης λύσης, τη στατιστική διασπορά των μεταβλητών των πολλαπλών ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων, την επιλογή ενός συνόλου λύσεων αντιπροσωπευτικών κατά κάποια έννοια του υπό μελέτη υπερπολυέδρου, η πιθανή συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών του γραμμικού προγράμματος. Είναι γεγονός όμως, ότι δεν υπάρχουν παρά ελάχιστες αναφορές σε τέτοιες ευρετικές προσεγγίσεις.

Μία τέτοια ευρετική μέθοδος προτάθηκε από τον Winkels (1982), σύμφωνα με την οποία η αναζήτηση των λύσεων δεν περιορίζεται στις κορυφές του υπερπολυέδρου αλλά προχωράει σε πιο συστηματικό τρόπο υπολογισμού των λύσεων μέσα από τη διακριτοποίηση των μεταβλητών χρησιμοποιώντας σταθερό βήμα. Θα μπορούσε το βήμα αυτό να καθοριστεί αυτόματα εφόσον ο επιθυμητός αριθμός των μεταβέλτιστων λύσεων είναι γνωστός στον αναλυτή εξ αρχής.

Μία δεύτερη ευρετική μέθοδος προτάθηκε το 1984 από τον Siskos με στόχο τη μελέτη της ευστάθειας της λύσης και της μελέτης της στατιστικής συμπεριφοράς των μεταβλητών ενός γραμμικού προγράμματος. Βασικό στοιχείο της μεθόδου είναι με απαρχή τη βέλτιστη λύση ενός γραμμικού προγράμματος η επίλυση σειράς γραμμικών προγραμμάτων με κοινή περιοχή εφικτών λύσεων και με αντικειμενικές συναρτήσεις που μεγιστοποιούν και ελαχιστοποιούν έναν ή περισσότερους κυρτούς συνδυασμούς των μεταβλητών του προβλήματος.

## 2.2 Ιστορική αναδρομή των περιστροφικών μεθόδων

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστεί μία ιστορική αναδρομή ορισμένων χαρακτηριστικών περιστροφικών μεθόδων, που αποτέλεσαν τη βάση για πλήθος ερευνών και οι οποίες οδήγησαν στη δημιουργία πλήθους διαφορετικών εκδόσεων από τη δεκαετία του '50 μέχρι σήμερα, αναφέροντας αφενός τα βασικά τους γνωρίσματα και αφετέρου την κριτική που δέχονται σύμφωνα με τη σχετική βιβλιογραφία.

Αρχικά οι περιστροφικές μέθοδοι συνέδεσαν τη Simplex με το κλασσικό πρόβλημα του λαβυρίνθου της θεωρίας των γραφημάτων, δηλαδή την αναζήτηση ενός μονοπατιού που θα επιτρέπει την επίσκεψη κάθε βασικής δυνατής λύσης, που ως γνωστό αντιστοιχεί σε κορυφή του υπερπολυέδρου, δεδομένου ότι το σύνολο των κορυφών αυτών αποτελούν ένα συνεκτικό γράφημα. Οι Charnes και Coopers (1953, 1961) παρουσίασαν ένα αλγόριθμο που προσαρμόζει την προσέγγιση του Tarry (1896) για το πρόβλημα του λαβυρίνθου στη μέθοδο Simplex. Η μέθοδος αποδείχθηκε σε θεωρητικό επίπεδο από τους Remez και Shteinberg (1966). Η προσέγγισή τους στηρίζεται στην παρατήρηση ότι η εξεύρεση όλων των δυνατών βασικών λύσεων είναι μια ειδική περίπτωση του κλασσικού «προβλήματος του λαβύρινθου» που συναντούμε στη θεωρία γραφημάτων. Έχοντας συγκεκριμένη - φτωχή σε ποιότητα και ποσότητα- πληροφορία σχετικά με τον πεπερασμένο αριθμό κόμβων ενός συνεκτικού γραφήματος, το πρόβλημα του λαβύρινθου έγκειται στην εύρεση μια διαδρομής που θα μας επιτρέψει να επισκεφτούμε, τουλάχιστον από μία φορά, τον κάθε κόμβο. Η προσέγγιση αυτή ουσιαστικά είναι υπολογιστικά ανέφικτη λόγω του τεράστιου όγκου της πληροφορίας που θα πρέπει να αποθηκεύεται δεδομένου ότι απαιτείται για κάθε κορυφή η καταγραφή πληροφορίας που αφορά στον αριθμό και τη φορά των επισκέψεων σε κάθε ακμή που ξεκινάει από την κορυφή αυτή. Στο πλαίσιο της προσέγγισης αυτής υπάρχει η απαίτηση για διπλή διέλευση από κάθε ακμή και για  $n$  επισκέψεις σε κάθε κορυφή.

Μία σειρά μεθόδων που στηρίζονται στη δυνατότητα τομής των υπερπολυεδρών χρησιμοποιώντας τα υπερεπίπεδα των περιορισμών των γραμμικών προγραμμάτων που επιτρέπουν τον καθορισμό ημι-χώρων (half-spaces) περιγράφηκαν από τον



Gomory (1963). Ο Balinski (1961) σχολίασε ότι οι μέθοδοι αυτές δεν ήταν υπολογιστικά εφικτές εξαιτίας του γεγονότος ότι η προσθήκη καινούργιων απαιτήσεων από τους ημι-χώρους δημιουργεί κορυφές που δεν ανήκουν στο αρχικό υπερπολύεδρο. Επιπλέον, η προσθήκη των νέων περιορισμών αύξανε την πολυπλοκότητα του προβλήματος. Στην ίδια εργασία ο Balinski αναφέρθηκε σε μία προσέγγιση που χρησιμοποιούσε μία ψευδο-γραμμική αντικειμενική συνάρτηση ως μέσο για την κατάταξη των κορυφών. Ωστόσο η προσέγγιση αυτή παρουσιάζει δυσκολίες στην προσπάθεια καθορισμού του σημείου τερματισμού της διαδικασίας, δηλαδή το σημείο κατά το οποίο όλες οι κορυφές έχουν βρεθεί. Επίσης, διαπιστώθηκε ότι η αντικειμενική συνάρτηση δεν κατέτασσε απαραίτητα όλες τις κορυφές σε μονοπάτι που θα μπορούσε να ακολουθεί από διαδοχικές αλλαγές βάσης της Simplex.

Στην προσπάθεια αντιμετώπισης των παραπάνω κριτικών ο Balinski στηριζόμενος στη γεωμετρία των γραμμικών προγραμμάτων και κάνοντας για πρώτη φορά χρήση της μορφής του πίνακα simplex πρότεινε έναν αλγόριθμο εύρεσης όλων των κορυφών ο οποίος μάλιστα αποτέλεσε τον πρώτο αλγόριθμο που προγραμματίστηκε σε ηλεκτρονικό υπολογιστή. Ο αλγόριθμος αυτός έβρισκε όλες τις κορυφές ενός πολυέδρου αρχικά επιλέγοντας και ορίζοντας ένα υπερεπίπεδο, έστω  $H_i$ . Όλες οι κορυφές που βρίσκονταν στο  $H_i$  βρίσκονται μέσω διαδοχικών τομών-εδρών (faces) μέχρι τη δεικτοδότηση κάποιας 2-διάστατης έδρας, της οποίας οι κορυφές με σιγουριά μπορούν να υπολογισθούν μέσω διαδοχικών βημάτων της simplex. Όταν όλες οι 2-διάστατες έδρες που ανήκουν  $H_i$  στο έχουν υπολογισθεί ο αλγόριθμος εγκαταλείπει τον ημι-χώρο που ορίζεται από το  $H_i$  και επιλέγει ένα διαφορετικό υπερεπίπεδο, έστω το  $H_j$ , και προχωράει να βρει όλες τις κορυφές του  $H_j$  που δεν ανήκουν στο  $H_i$ . Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι όταν εγκαταλείπεται ένας ημι-χώρος που ορίζεται από ένα υπερεπίπεδο (δηλ. χαλάρωση των περιορισμών), ο αλγόριθμος μπορεί να επισκεφτεί κορυφές του πολυέδρου που ορίζεται από μειωμένο σύνολο των περιορισμών – ανισοτήτων οι οποίες όμως ενδέχεται να μην είναι κορυφές του αρχικού υπό μελέτη πολυέδρου. Αυτό το ενδεχόμενο δημιουργεί ιδιαίτερα προβλήματα στις περιπτώσεις ύπαρξης μεγάλου αριθμού πλεοναζόντων περιορισμών γιατί τότε ο αλγόριθμος επισκέπτεται μη εφικτές βασικές λύσεις. Βασικό πλεονέκτημα του αλγόριθμου του Balinski είναι οι χαμηλές απαιτήσεις σε μνήμη.

Ο αλγόριθμος του Murty (1968) ήταν ο πρώτος που ασχολήθηκε όχι μόνο με την παραγωγή όλων των βασικών εφικτών λύσεων αλλά και με την κατάταξη των παραγόμενων λύσεων σε μη φθίνουσα σειρά σύμφωνα με κάποια αντικειμενική συνάρτηση. Ο αλγόριθμος σχεδιάστηκε για την επίλυση το προβλήματος σταθερού κόστους (fixed charge) και δουλεύει αποδοτικά όταν το πρόβλημα δεν έχει εκφυλισμένες λύσεις και όταν το εύρος των τιμών του μεταβλητού κόστους είναι μεγάλο σε σύγκριση με το σταθερό κόστος. Η μέθοδος βασίζεται στο διαισθητικό συμπέρασμα του ότι αν έχουμε ένα σύνολο από κορυφές  $V_1, V_2, \dots, V_{k-1}$  ταξινομημένες σε μη φθίνουσα τάξη σύμφωνα με κάποια αντικειμενική συνάρτηση  $c$ ,

τότε η επόμενη στη σειρά κορυφή, η  $v_k$ , πρέπει να είναι γειτονική σε μία εκ των κορυφών που ήδη έχουν βρεθεί. Το γενικό βήμα της μεθόδου στο στάδιο κατά το οποίο οι κορυφές  $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$  έχουν ήδη υπολογιστεί απαιτεί τη γνώση των οδηγών στοιχείων του πίνακα simplex και την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε γειτονική λύση της λύσης  $v_j$  για  $j=1,2,\dots,k-1$ . Η λύση-κορυφή  $v_k$  είναι γειτονική σε μία εκ των ήδη υπολογισμένων και μέσα από σύγκριση των τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης επιλέγεται ως  $v_k$  εκείνη η λύση με τη μέγιστη τιμή που είναι μικρότερη ή ίση με την τιμή της  $v_{k-1}$  για πρόβλημα μεγιστοποίησης. Στη συνέχεια όλες οι νέες γειτονικές κορυφές πρέπει να καταγραφούν ώστε να προχωρήσει ο αλγόριθμος στην αναζήτηση της λύσης  $v_{k+1}$ . Η μέθοδος από υπολογιστικής άποψης απαιτεί τον υπολογισμό τόσων πινάκων όσες είναι και οι βασικές εφικτές λύσεις, μειωμένους κατά έναν, ο οποίος αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση του γραμμικού προγράμματος. Οι απαιτήσεις σε υπολογιστική μνήμη είναι μεγάλες με δεδομένο ότι απαιτείται η διατήρηση πληροφορίας που αφορά: α) τις τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων όλων των γειτονικών εφικτών βασικών λύσεων, β) τις ίδιες τις γειτονικές εφικτές βασικές λύσεις γ) όλες τις ήδη υπολογισμένες λύσεις. Βελτιωμένη έκδοση της παραπάνω μεθόδου παρουσιάστηκε το 1992 (Murty & Chung, 1992).

Το 1968 οι Manas και Nedoma παρουσίασαν το δικό τους αλγόριθμο που θεωρείται η πιο ευθεία προσέγγιση στην προσπάθεια υπολογισμού όλων των κορυφών του υπερπολυέδρου που ορίζει ένα γραμμικό πρόγραμμα. Βασικό στοιχείο του αλγόριθμου είναι η δημιουργία και ενημέρωση μίας λίστας που περιλαμβάνει όλες τις κορυφές μέσα από την οποία οδηγούμαστε στον υπολογισμό του συνόλου των κορυφών. Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί τον πίνακα Simplex για τη δημιουργία μόνο εφικτών λύσεων. Στόχος είναι ο εντοπισμός ενός μονοπατιού που θα περνάει από όλες τις κορυφές, και αν είναι δυνατό μόνο από μία φορά (Hamiltonian Path) (Manas & Nedoma, 1968).

Υπολογιστικά η μέθοδος απαιτεί την αποδοτική διαχείριση μίας λίστας αυξανόμενου μεγέθους. Ο αριθμός των στοιχείων της λίστας θα αυξάνεται μέχρι να φτάσει να ισούται με τον αριθμό των κορυφών του πολυέδρου. Για κάθε κορυφή τουλάχιστον ένας πίνακας simplex θα πρέπει να παράγεται. Επομένως η πολυπλοκότητα του αλγόριθμου εξαρτάται άμεσα από τον αριθμό των κορυφών ενώ είναι μικρές οι απαιτήσεις σε μνήμη.

Βασιζόμενοι στο σκεπτικό του Balinski οι Pollatschek και Avi-Itzhak παρουσίασαν το 1969 ένα αλγόριθμο ταξινόμησης των λύσεων που ξεκινώντας από μία βέλτιστη λύση αναζητάει τη γειτονική λύση με τη μικρότερη απόσταση (σε όρους αντικειμενικής συνάρτησης) η οποία ορίζει έναν νέο περιορισμό γύρω από τον οποίο αναζητούμε νέες γειτονικές λύσεις. Πιο συγκεκριμένα μετά την εύρεση τη βέλτιστης λύσης  $v_1$  μεγιστοποιείται μία αντικειμενική συνάρτηση  $c^T x$  στο πολυέδρο. Το ακραίο σημείο που είναι γειτονικό στο  $v_1$  και παίρνει τη μέγιστη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση ορίζεται ως  $v_2$  και ο περιορισμό  $c^T x \leq c^T v_2$  προστίθεται στο σύστημα. Αυτή η

διαδικασία εισάγει τεχνητές βασικές λύσεις στην περίπτωση απουσίας εκφυλισμένων λύσεων, οι οποίες τεχνητές λύσεις δεν αποτελούν κορυφές του αρχικού πολυέδρου. Η μέθοδος ουσιαστικά υλοποιεί διαδικασίες περιστροφής (pivoting) όπως περίπτωση και η μέθοδος του Balinski κρατώντας όμως και τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης των γειτονικών λύσεων. Κάθε φορά που μία κορυφή  $v_i$  υπολογίζεται ένας νέος περιορισμός  $c'x \leq c'v_i$  προστίθεται στο σύστημα. Έστω ότι ένα σύνολο κορυφών  $v_1, v_2, \dots, v_j$  έχει καταταχθεί. Γενικά, ο αριθμός των τεχνητών βασικών λύσεων στο υπερεπίπεδο  $c'x = c'v_j$  θα ισούται με τον αριθμό των ζευγών  $(v_i, v_r)$  όπου  $v_r$  είναι μία κορυφή που βρίσκεται ήδη καταταγμένη με  $c'v_r > c'v_j$  και  $v$  έστω μία γειτονική της  $v_r$  κορυφή στο αρχικό πολυέδρο με  $c'v < c'v_j$  (Murty, 1971). Αυτός ο αριθμός των τεχνητών βασικών λύσεων μπορεί να είναι πολύ μεγάλος, ακόμα στις περιπτώσεις απουσίας εκφυλισμένων λύσεων. Έτσι, ενώ ο αλγόριθμος έχει χαμηλές απαιτήσεις σε μνήμη, ο υπολογισμός ενός μεγάλου αριθμού κορυφών που εν τέλει δεν χρειάζονται από τη στιγμή που δεν αποτελούν κορυφές του αρχικού πολυέδρου καθιστά τη μέθοδο μη ελκυστική από υπολογιστικής απόψεως (Matheiss and Rubin, 1980).

Το 1971 ο Silverman σε συνέχεια του αλγόριθμου των Manas και Nedoma όρισαν μία διαφοροποίηση του *Hamiltonian* μονοπατιού το οποίο ονόμασε *G*-μονοπάτι. Ένα *G*-μονοπάτι αντιστοιχεί σε μία σειρά από περιστροφές του πίνακα simplex τέτοια ώστε κάθε κορυφή του πολυέδρου να είναι πάνω στο μονοπάτι ή να είναι γειτονική μίας κορυφής που είναι στο μονοπάτι. Για το λόγο ότι δεν είναι εξασφαλισμένη η ύπαρξη του *G*-μονοπατιού υπάρχει η ανάγκη ύπαρξης διαδικασίας οπισθοδρόμησης, δηλαδή επιστροφής σε προηγούμενες κορυφές. Με το δεδομένο αυτό η μέθοδος απαιτεί περισσότερη μνήμη για διατήρηση των ήδη υπολογισμένων κορυφών σε σχέση με τη μέθοδο των Manas και Nedoma (Silverman, 1971).

Οι Matheiss and Rubin (1980) αναφέρονται επίσης σε μία ακόμα παραλλαγή του αλγόριθμου των Manas και Nedoma που παρουσιάστηκε από τους Dahl και Storoy το 1973. Η μέθοδος αυτή κατέτασε όλες τις κορυφές που αντιστοιχούν στις  $v_1, v_2, \dots, v_p$  κορυφές (που αντιστοιχούν στις λύσεις  $x_1, x_2, \dots, x_p$  ενός γραμμικού προγράμματος με διάνυσμα αντικειμενικής συνάρτησης  $c$ ) σε σειρά τέτοια ώστε  $c'x_1 \leq c'x_2 \leq \dots \leq c'x_p$ . Η διαφοροποίηση σε σχέση με τον αλγόριθμο των Manas και Nedoma είναι ότι σε αυτή τη μέθοδο το κριτήριο της απόστασης μεταξύ δύο κορυφών  $v_i$  και  $v_j$  προκειμένου να επιλεγεί η πλέον κοντινή ορίζεται ως  $d(v_i, v_j) = c'(x_i - x_j)$ . Αντίθετα οι Manas και Nedoma θεωρούν ως απόσταση τον απαιτούμενο αριθμό περιστροφών του πίνακα simplex ώστε να παραχθεί η λύση  $v_j$  ξεκινώντας από την  $v_i$ . Το γεγονός ότι η κάθε κορυφή αντιστοιχείται με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης επιτρέπει την περισσότερο αποδοτική αναζήτηση σε σχέση με τη μέθοδο των Manas και Nedoma. Στον αντίποδα όμως η κατάταξη σύμφωνα με τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να απαιτεί υπερβολικό αριθμό περιστροφών της simplex από τη μία άκρη του πολυέδρου στην άλλη.

Διαφορετική προσέγγιση ακολουθήθηκε από τον Mattheiss (1973) ο αλγόριθμος του οποίου ενσωματώνει ένα δοσμένο υπερπολύεδρο διάστασης  $n$  σε ένα χώρο διάστασης  $n+1$  εισάγοντας μία νέα τεχνητή μεταβλητή. Οι προβολές των νέων κορυφών στον αρχικό  $n$ -διάστατο χώρο βρίσκονται στο εσωτερικό του υπερπολυέδρου δίνοντας τη δυνατότητα σχηματισμού ενός συνεκτικού γραφήματος. Η διαδικασία της ενσωμάτωσης αντιστοιχεί επίσης έναν αριθμό με κάθε εσωτερικό κόμβο που δημιουργείται από τις προβολές, γεγονός που επιτρέπει τη δημιουργία ενός συνδετικού δέντρου που περιλαμβάνει το σύνολο των εσωτερικών κόμβων. Κάθε εσωτερικός κόμβος αναπαρίσταται από έναν πίνακα simplex, έτσι όλοι αυτοί οι πίνακες πρέπει να παραχθούν και να αναλυθούν. Οι πίνακες που αντιστοιχούν στις υπό αναζήτηση κορυφές του αρχικού υπερπολυέδρου δεν χρειάζονται να υπολογισθούν από τη στιγμή που οι κορυφές αυτές είναι γειτονικές των εσωτερικών κόμβων και άρα μπορούν να παραχθούν από τους ήδη υπολογισμένους πίνακες. Η απόδοση της μεθόδου αυτής δεν επηρεάζεται από την ύπαρξη πλεονάζοντων περιορισμών. Ωστόσο, οι Dyer και Proll (1977) υποστήριξαν για την υπόθεση του Mattheiss ότι οι εσωτερικοί κόμβοι που δημιουργούνται είναι λιγότεροι από τις κορυφές του αρχικού πολυέδρου, ότι δεν έχει αποδειχθεί. Επανερχόμενος ο Mattheiss με τον Rubin (1980) έδειξαν μέσω γεννήτριας τυχαίων πολυέδρων ότι η υπόθεση αυτή είναι ισχυρή.

Μία διαφορετική προσέγγιση παρουσιάστηκε επίσης από τον Burdet (1974) ο οποίος όρισε τις κορυφές του υπερπολυέδρου σαν έδρες με διάσταση 0 (δηλαδή σημεία) και τις παράστησε σε δένδροειδή μορφή. Ως ρίζα του δέντρου θεωρήθηκε το ίδιο το υπερπολυέδρο (έστω διάστασης  $n$ ) και κάθε επόμενο κλαδί θα είχε διάσταση  $d-1$ , μέχρι να φτάσουμε σε διάσταση 0. Σε κάθε κόμβο του δέντρου απαιτείται η επίλυση μεγάλου αριθμού γραμμικών προγραμμάτων (ένα γ.π. ανά μη πλεονάζοντα περιορισμό που ορίζει το όριο κάθε πρόγονου κόμβου) ώστε να οριστεί το όριο της τρέχουσας έδρας και οι σχετιζόμενοι κλάδοι με το επόμενο επίπεδο. Οι δείκτες που αντιστοιχούν στους κλάδους δημιουργούνται με χρήση λεξικογραφικής αύξουσας τάξης. Όλες οι κορυφές του πολυέδρου παράγονται τουλάχιστον από μία φορά και το πολύ  $n$  φορές. Οι απαιτήσεις σε μνήμη είναι περιορισμένες, αφού χρειάζονται δύο πίνακες simplex και το σύνολο των δεικτών που ορίζουν τη δομή του δέντρου. Οι υπολογισμοί πάντως που απαιτούνται για τον υπολογισμό των κορυφών καθιστά τη μέθοδο αυτή ως μη αποδοτική από υπολογιστικής άποψης δεδομένου της ανάγκης επίλυσης τεράστιου αριθμού γ.π. και υλοποίησης περιστροφών για πολλαπλές επισκέψεις στις κορυφές. Σύμφωνα πάντως με τους Dyer και Proll (1977) η μέθοδος αυτή θα μπορούσε να αποδειχθεί αποδοτική σε περιπτώσεις υπάρξεως μεγάλου αριθμού εκφυλισμένων λύσεων.

Μια εντελώς διαφορετική προσέγγιση παρουσιάστηκε από τον Van De Panne (1975) η οποία αν και σχεδιάστηκε για διαδικασίες ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν μέθοδος εύρεσης όλων των λύσεων ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων. Ο τίτλος της μεθόδου, Αντίστροφη Simplex, είναι

αποκαλυπτικός για τον τρόπο που προσεγγίζεται το πρόβλημα. Ο Van De Panne έδειξε ότι κάθε βήμα (περιστροφή) της simplex είναι αντιστρέψιμο και σύμφωνα με αυτό το σκεπτικό η Αντίστροφη Simplex ξεκινάει από τη βέλτιστη λύση του γ.π. και πηγαίνοντας προς τα πίσω μεταφέρεται από κορυφή σε κορυφή κατατάσσοντας αυτές κατά φθίνουσα (αύξουσα) τάξη εφόσον έχουμε προς μεγιστοποίηση (ελαχιστοποίηση) αντικειμενική συνάρτηση χωρίς να αγνοείται καμία. Η εύρεση των λύσεων πραγματοποιείται μέσω των αναγκαίων περιστροφών της simplex και από τους διαδοχικούς πίνακες που παράγονται υπολογίζονται και οι γειτονικές σε αυτούς λύσεις.

Η κατάταξη των λύσεων μπορεί να αποτυπωθεί και σε δένδροειδή μορφή (Siskos, 1984). Αρνητικό της μεθόδου είναι οι μεγάλες απαιτήσεις σε μνήμη. Από την άλλη μεριά η χρησιμότητά της σε διαδικασίες ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης είναι έκδηλη από τη στιγμή που δίνει τη δυνατότητα καθορισμού του εύρους των μεταβελτιστων λύσεων που ενδιαφέρουν τον αναλυτή.

Το 1977 ο Amani παρουσίασε δύο αλγόριθμους από τους οποίους ο πρώτος αναζητά όλες τις κορυφές ενός υπερπολυέδρου ανά έδρα ενώ ο δεύτερος αναζητά όλες τις κορυφές που αποτελούν τους κόμβους ενός δένδρου διατηρώντας όμως, σε αντίθεση με τον αλγόριθμο των Manas και Nedoma, όχι μόνο ένα πίνακα Simplex αλλά περισσότερους (Amani, 1977).

Χρησιμοποιώντας πάλι τη θεωρία των δένδρων πιο πρόσφατα οι Dyer και Proll (1977) παρουσίασαν ένα αλγόριθμο που δημιουργεί ένα συνδετικό δένδρο (spanning tree) που περιγράφει το γράφημα ακμών – κορυφών ενός κυρτού υπερπολυέδρου. Αν θεωρήσουμε ότι το μήκος ενός τόξου του γραφήματος έχει μήκος 1, μπορεί να ειπωθεί ότι δύο κόμβοι είναι  $k$ -γείτονες αν το μικρότερο μονοπάτι σύνδεσης των δύο κόμβων έχει μήκος  $k$ . Δύο 1-γείτονες κόμβοι του δέντρου αντιπροσωπεύουν δύο γειτονικές κορυφές του πολυέδρου και ο αλγόριθμος περιγράφει τη διαδικασία επίσκεψης του κάθε κόμβου. Ένας κόμβος έχει ύψος  $k$  αν είναι  $k$ -γείτονας με τη ρίζα του δέντρου.

Ο αλγόριθμος έχει πεπερασμένο αριθμό βημάτων από τη στιγμή που το γράφημα είναι πεπερασμένο και συνεκτικό, και χρησιμοποιεί το γεγονός ότι κάθε κόμβος γειτονικός σε ένα κόμβο με ύψος  $k$  έχει ύψος  $k-1$ , ή ύψος  $k+1$ , ή αντίστοιχα κάθε κόμβος με ύψος  $k+1$  είναι γειτονικός σε τουλάχιστον ένα κόμβο με ύψος  $k$ .

Σύμφωνα με τους Mattheiss και Rubin (1977) η μέθοδος δεν αποτελεί κάποια καινοτόμα προσέγγιση αλλά στηρίζεται σε κλασικές προσεγγίσεις αναζήτησης συνδετικών δέντρων και ελάχιστων μονοπατιών. Η καινοτομία του έγκειται στη χρήση της αναθεωρημένης μεθόδου simplex και στον τρόπο οργάνωσης της πληροφορίας για την υλοποίηση της κατά-πλάτος (breadth first) αναζήτησης του δέντρου. Το 1982 οι Dyer και Proll πρότειναν βελτιώσεις του αλγορίθμου τους, ο οποίος είχε

χαρακτηριστεί ως μη αποδοτικός από τους Mattheiss και Rubin (1977) μέσω νέας δεικτοδότησης και αφαίρεσης των πλεοναζόντων κόμβων (Dyer & Proll, 1982).

Τα επόμενα χρόνια παρουσιάστηκαν μέθοδοι που στηρίζονταν σε αυτές που αναφέρθηκαν παραπάνω χωρίς να υπάρχει κάποια καινοτόμα προσέγγιση. Οι προσπάθειες εστιάστηκαν στην ανάπτυξη αλγορίθμων που προσπαθούν να μειώσουν κατά το δυνατόν τον υπολογιστικό φόρτο σε ένα πρόβλημα που αποδεδειγμένα είναι NP-hard. Ένας τέτοιος αλγόριθμος προτάθηκε από τους Avis και Fukuda (1992) που χρησιμοποιεί συνδυαστικά δέντρα, όπως οι Dyer και Proll (1977), για την περιγραφή του γραφήματος του πολυέδρου με ρίζα τη βέλτιστη λύση του αντίστοιχου γραμμικού προγράμματος. Ξεκινώντας από τη βέλτιστη λύση η αναζήτηση γίνεται κατά-πλάτος χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bland (1977) σε διαδικασία αντίστροφης περιστροφής όπως ο Van De Panne (1975).

Επίσης, αρκετές εργασίες χρησιμοποιούν τις προσεγγίσεις της αναζήτησης όλων των κορυφών ενός πολυέδρου για να επιλύσουν συγγενή προβλήματα όπως για παράδειγμα την αποδοτική απαρίθμηση των κορυφών πολυέδρου που σχετίζονται με το δικτυακό γραμμικό προγραμματισμό (network linear programming) (Provan, 1994).

### 2.3 Αναλυτική παρουσίαση αλγορίθμων

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται και αξιολογούνται τέσσερις αντιπροσωπευτικές μέθοδοι-αλγόριθμοι που μπορούν να θεωρηθούν ως κατάλληλες προσεγγίσεις αντιμετώπισης του προβλήματος της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης. Οι τρεις πρώτες ανήκουν στην κατηγορία των αναλυτικών περιστροφικών μεθόδων ενώ η τέταρτη ανήκει στην κατηγορία των ευρετικών προσεγγίσεων.

Στις αναλυτικές μεθόδους εξετάζεται αρχικά ο αλγόριθμος του Tarry που αποτελεί ίσως την πρώτη ιστορικά προσέγγιση στο πρόβλημά μας ενώ ταυτόχρονα έθεσε και τις βάσεις για επόμενες προσεγγίσεις που αξιοποιούν τη θεωρία γραφημάτων. Ακολουθεί η παρουσίαση του αλγόριθμου των Manas και Nedoma που αξιοποιεί επίσης τη θεωρία των γραφημάτων προσπαθώντας όμως να αποφύγει την αναπαραγωγή (εφόσον αυτό είναι δυνατόν) λύσεων που έχουν ήδη υπολογιστεί.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο αλγόριθμος της Αντίστροφης Simplex του Van De Panne ο οποίος αποτελεί μια προσέγγιση με ιδιαίτερο ενδιαφέρον για το λόγο ότι η αναζήτηση των μεταβέλτιστων λύσεων γίνεται κατά φθίνουσα ή αύξουσα τάξη ξεκινώντας από τη βέλτιστη λύση και χρησιμοποιώντας τη δυνατότητα αντιστροφής των βημάτων της simplex για την αναζήτηση των κορυφών του πολυέδρου. Τέλος, εξετάζεται μία ευρετική προσέγγιση του Siskos που προσπαθεί να προσεγγίσει τα

## Κεφάλαιο 2: Αλγόριθμοι εύρεσης λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης

αποτελέσματα των αναλυτικών μεθόδων με την εύρεση ενός αντιπροσωπευτικού πλην όμως αξιόπιστου συνόλου λύσεων μειώνοντας με αυτό τον τρόπο δραστικά τον υπολογιστικό φόρτο χωρίς να υπάρχει απώλεια πληροφορίας.

Προκειμένου να διευκολυνθεί αφενός η παρουσίαση των μεθόδων και αφετέρου ο συγκριτικός σχολιασμός των διαφορετικών προσεγγίσεων θα χρησιμοποιηθεί για τις τρεις τελευταίες μεθόδους το ίδιο παράδειγμα γραμμικό προγράμματος το οποίο ακολουθεί:

Ας θεωρηθεί το εξής γραμμικό πρόγραμμα:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\max] z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \\ \text{υ.π.} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 18 \\ 2x_3 + 3x_4 \leq 6 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4 \end{array} \right. \quad (\Gamma\text{Π } 2.1)$$

Το οποίο στην πρότυπή του μορφή γράφεται ως εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\max] z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 0x_1 + 0x_2 \\ \text{υ.π.} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_1 = 18 \\ 2x_3 + 3x_4 + x_2 = 6 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4, \bar{1}, \bar{2} \end{array} \right.$$

όπου  $x_1, x_2$  οι μεταβλητές απόκλισης.

Ο αρχικός πίνακας Simplex με την εισαγωγή των μεταβλητών απόκλισης έχει ως εξής:

$c_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$x_B$
0	$\bar{1}$	1	1	1	1	1	0	18
0	$\bar{2}$	0	0	2	3	0	1	6
$c_j$		3	4	5	6	0	0	
$\Delta_j$		3	4	5	6	0	0	$z = 0$

Ύστερα από δύο επαναλήψεις του αλγορίθμου Simplex λαμβάνεται ο βέλτιστος πίνακας Simplex που είναι ο ακόλουθος:

$c_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$x_B$
4	2	1	1	1/3	0	1	-1/3	16
6	4	0	0	2/3	1	0	1/3	2
$c_j$		3	4	5	6	0	0	
$\Delta_j$		-1	0	-1/3	0	-4	-2/3	$z^*=76$

Για να ορίσουμε το υπερπολύεδρο ΥΠ.1.2 θέτουμε  $k=20$ , οπότε το σύνολο των λύσεων, για τις οποίες η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης απέχει (είναι μικρότερη) κατά 20 μονάδες από την τιμή της βέλτιστης λύσης (76 μονάδες), οριοθετείται από το υπερπολύεδρο:

$$\text{ΥΠ 2.1} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 18 \\ 2x_3 + 3x_4 \leq 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \geq 56 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Για τον αλγόριθμο του Tarry θα χρησιμοποιηθεί είναι απλούστερο παράδειγμα από τη στιγμή που ο σκοπός της παράθεσής του δεν είναι ο συγκριτικός σχολιασμός σε σχέση με τις άλλες μεθόδους αλλά η παρουσίαση της προσέγγισης της θεωρίας γραφημάτων.

### 2.3.1 Ο Αλγόριθμος του Tarry

Οι Charnes και Cooper παρατήρησαν ότι η διαχείριση πολλαπλών ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων μπορεί να θεωρηθεί ως μια ειδική περίπτωση του κλασικού «προβλήματος του λαβύρινθου» που συναντάται στη θεωρία γραφημάτων. Αρκεί να παρατηρηθεί ότι ένα κυρτό υπερπολύεδρο μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα συνεκτικό γράφημα  $(V,U)$  όπου  $V$  είναι το σύνολο των κόμβων (κορυφών) και  $U$  το σύνολο των τόξων που συνδέουν τους κόμβους, και που μπορούμε να τα διαβούμε



## Κεφάλαιο 2: Αλγόριθμοι εύρεσης λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης

ακολουθώντας τα βήματα της Simplex. Έτσι, δύο κόμβοι είναι γειτονικοί αν αντιστοιχούν σε δύο βάσεις τις Simplex που διαφέρουν κατά μία και μόνη μεταβλητή. Κάθε τόξο μπορούμε τότε να το διαβούμε κατά τις δύο κατευθύνσεις (φορά) αφού, όπως έχει αποδειχθεί, κάθε βήμα της Simplex είναι αντιστρέψιμο (Charnes, 1952; Charnes & Cooper, 1961).

Όπως ήδη έχει αναφερθεί, οι κορυφές ενός υπερπολυέδρου, για παράδειγμα του ΥΠ 1.2, αντιστοιχούν στις βασικές δυνατές λύσεις ενός γ.π. που οριοθετείται από το υπερπολύεδρο. Επομένως η εξαντλητική αναζήτηση αυτών των κορυφών μας εγγυάται την εξεύρεση όλων των δυνατών βασικών λύσεων.

Ο Tarry (1895) παρουσίασε την πρώτη μέθοδο που επέτρεψε τη λύση του προβλήματος της διαδρομής ενός λαβύρινθου, γνωστού και ως «πρόβλημα του λαβύρινθου».

Έχοντας συγκεκριμένη - φτωχή σε ποιότητα και ποσότητα- πληροφορία σχετικά με τον πεπερασμένο αριθμό κόμβων ενός συνεκτικού γραφήματος, το πρόβλημα του λαβύρινθου έγκειται στην εύρεση μια διαδρομής που θα μας επιτρέψει να επισκεφτούμε, τουλάχιστον από μία φορά, τον κάθε κόμβο (Charnes, 1952).

Σύμφωνα με τον Tarry για κάθε λαβύρινθο μπορεί να βρεθεί η διαδρομή του περνώντας από κάθε 'μονοπάτι' (αντίστοιχο της ακμής του γραφήματος) δύο φορές, την πρώτη κατά τη μία κατεύθυνση και τη δεύτερη κατά την αντίθετη. Για να επιλυθεί το «πρόβλημα του λαβύρινθου», προσαρμόζοντας το στην περίπτωση του υπερπολυέδρου, αρκεί να ακολουθηθεί ο παρακάτω κανόνας:

«Από κάθε κορυφή πηγαίνετε σε μία άλλη γειτονική κορυφή ακολουθώντας μια ακμή που δεν την έχετε ακόμα διαβεί κατά την αυτή κατεύθυνση αλλά, μην διαβείτε την ακμή που σας οδήγησε αρχικά σε αυτή την κορυφή, εκτός και αν δεν μπορείτε να κάνετε διαφορετικά.» (Siskos, 1984)

Πριν προχωρήσουμε, είναι σκόπιμο να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις. Σε κάθε στιγμή, πριν φτάσουμε σε μία κορυφή ή αφού έχουμε μόλις φύγει από αυτή, η συγκεκριμένη κορυφή, εκτός και αν πρόκειται για την κορυφή εκκίνησης, περιέχει απαραίτητως ένα ζυγό αριθμό ακμών που τις έχουμε διαβεί κατά τη μία κατεύθυνση. Επίσης, όσες φορές έχουμε επισκεφτεί αυτή την κορυφή τόσες φορές έχουμε αναχωρήσει.

Από τη στιγμή που φτάνουμε σε μία κορυφή ο αριθμός των ακμών της, που έχουμε διαβεί μία φορά και κατά την κατεύθυνση άφιξης στην κορυφή, είναι μεγαλύτερος κατά μία μονάδα από τον αριθμό των ακμών της που έχουμε διαβεί μία φορά και κατά τη διεύθυνση αναχώρησης.

## Κεφάλαιο 2: Αλγόριθμοι εύρεσης λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης

Αν δεν υπάρχει παρά μόνο μία ακμή της που έχουμε διαβεί μόνο μία φορά, αυτή δεν μπορεί να είναι άλλη από την αρχική και απαραίτητως όλες τις άλλες ακμές της τις έχουμε διαβεί από δύο φορές και κατά αντίθετη κατεύθυνση.

Δεν μπορούμε λοιπόν να σταματήσουμε σε ένα τέτοιο σταυροδρόμι (κορυφή), και είμαστε υποχρεωμένοι να διαβούμε την αρχική ακμή στην περίπτωση μόνο που όλες τις υπόλοιπες ακμές της τις έχουμε διαβεί από δύο φορές.

Ας θεωρήσουμε τώρα την κορυφή εκκίνησης. Τη στιγμή της άφιξης σε αυτή την κορυφή ο αριθμός των ακμών της που έχουμε διαβεί μία και μοναδική φορά και με κατεύθυνση άφιξης είναι ίσος με τον αριθμό των ακμών της που έχουμε διαβεί μία και μοναδική φορά με κατεύθυνση αναχώρησης. Επομένως, δεν μπορούμε να σταματήσουμε, παρά μόνο αν δεν υπάρχει ούτε μια ακμή της την οποία δεν έχουμε διαβεί. Έτσι, τη στιγμή που αναγκαζόμαστε να σταματήσουμε στην κορυφή εκκίνησης, όλες της ακμές της τη έχουμε διαβεί δύο φορές.

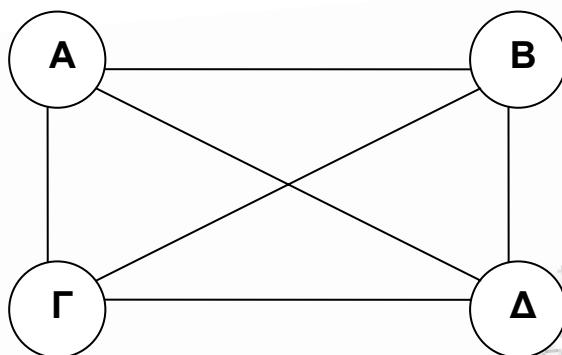
Προκειμένου να διευκολυνθούμε στη διαδικασία επίλυσης του προβλήματός μας θα αναπαραστήσουμε το υπερπολύεδρο με κάποιο γράφημα που θα αποτυπώνει το πολύεδρο και θα προχωρήσουμε στη χρήση χαρακτηριστικών σημάδιων. Κάθε φορά που θα διαβαίνουμε μια ακμή για πρώτη φορά θα βάζουμε στην αρχή της δύο σημάδια και στο τέλος της ένα σημάδι (αν οδηγούμαστε σε μία κορυφή που έχουμε ξαναεπισκεφτεί) ή τρία σημάδια (αν οδηγούμαστε σε μία κορυφή για πρώτη φορά). Όταν διαβαίνουμε μία ακμή όπου βρίσκεται ένα σημάδι στην άλλη άκρη της, που σημαίνει ότι τη διαβαίνουμε για δεύτερη φορά κατά αντίθετη όμως κατεύθυνση, αρκεί να προσθέσουμε ένα σημάδι στη άκρη από τη οποία ξεκινάμε να τη διαβαίνουμε. Κατά την άφιξή μας σε μία κορυφή πρέπει πάντα να μπορούμε να διακρίνουμε τις ακμές που δεν έχουμε διαβεί ούτε μία φορά και δεν έχουν κανένα σημάδι, την αρχική ακμή που οδήγησε σε αυτή την κορυφή και που έχει τρία σημάδια, καθώς και τις άλλες ακμές που έχουμε διαβεί μόνο μία φορά, με κατεύθυνση άφιξης και που έχουν ένα σημάδι.

Σύμφωνα με τα παραπάνω ο αρχικός κανόνας γράφεται ως εξής:

«Φτάνοντας σε μία κορυφή, ακολουθήστε υποχρεωτικά μία ακμή που έχει ένα ή κανένα σημάδι και μόνο κατά την περίπτωση που δεν υπάρχει καμία τέτοια ακμή ακολουθήστε την ακμή που έχει τρία σημάδια. » (Tarry, 1895)

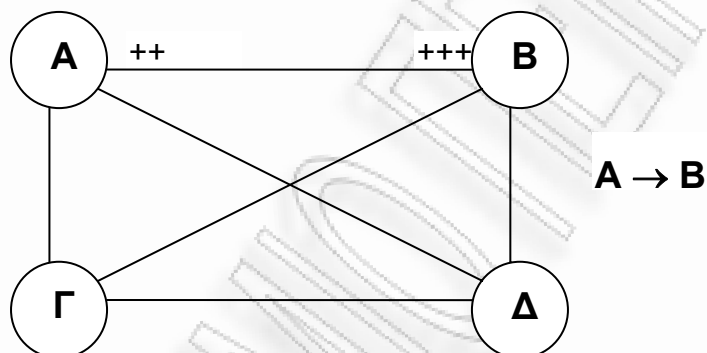
Έστω ότι έχουμε ένα υπερπολύεδρο με 4 κορυφές και 6 ακμές, το οποίο το αναπαριστάνουμε με το παρακάτω γράφημα (ΑΒΓΔ):

Κεφάλαιο 2: Αλγόριθμοι εύρεσης λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης

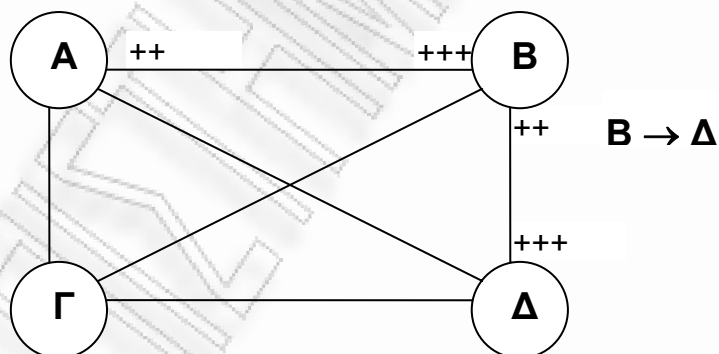


Ακολουθώντας τη μεθοδολογία που προτείνει ο Tarry προκειμένου να επισκεφτούμε εξαντλητικά όλες τις κορυφές έχουμε τα παρακάτω βήματα:

**Βήμα 1**

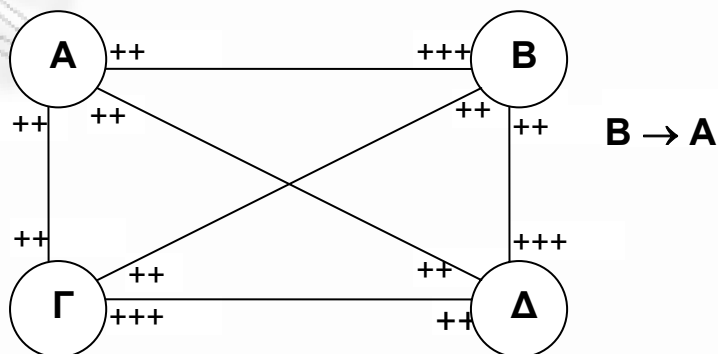


**Βήμα 2**



..... (τα υπόλοιπα βήματα 3-11 βρίσκονται στο Παράρτημα III)

**Βήμα 12**



ΤΕΛΟΣ

Παρατηρούμε ότι φτάσαμε στην κορυφή **A** από όπου ξεκινήσαμε χωρίς να μπορούμε πλέον να διαβούμε οποιαδήποτε ακμή. Είναι φανερό πως όλες τις ακμές τις έχουμε διαβεί από δύο φορές κατά αντίθετη κατεύθυνση.

Ακολουθώντας την παραπάνω πρακτική μέθοδο, κάποιος ο οποίος έχει χαθεί μέσα σε ένα λαβύρινθο ή μέσα σε κατακόμβες, θα ξαναβρεί σίγουρα την είσοδο αφού έχει διαβεί πρώτα όλες τις διαδρομές και χωρίς να διαβεί περισσότερο από δύο φορές την κάθε διαδρομή. (Tarry, 1895)

Προκειμένου να βρούμε όλες τις βασικές δυνατές λύσεις ενός γ.π. αρκεί να ξέρουμε για κάθε βασική δυνατή λύση ποιες από τις γειτονικές της λύσεις έχουμε εξετάσει και ακολουθώντας ποια διαδρομή (ακμή και κατεύθυνση διέλευσης) (Van De Panne, 1975; Charnes, 1952).

Κάθε ακμή του γραφήματος  $(V,U)$  δηλώνεται από κάποια μεταβλητή που βρίσκεται εκτός βάσης του πίνακα Simplex. Προκειμένου να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο του Tarry χρειάζεται να εκτελέσουμε τόσες επαναλήψεις της Simplex όσο είναι το γινόμενο του αριθμού των διανυσμάτων εκτός βάσης,  $n$  για το ΓΠ 1.1, επί του αριθμού των πιθανών κορυφών (δυνατών βασικών λύσεων),  $r$  για το ΓΠ 1.1, δηλαδή  $n \times r$ . Για το παράδειγμα ΥΠ 2.1 θα έπρεπε να πραγματοποιηθούν  $4 \times 13 = 52$  επαναλήψεις της Simplex. Οπότε ο αλγόριθμος αυτός από υπολογιστική άποψη δεν είναι αρκετά ελκυστικός για την επίλυση του προβλήματος εύρεσης όλων των πιθανών δυνατών βασικών λύσεων. (Siskos, 1984; Van de Panne, 1975)

### 2.3.2 Ο Αλγόριθμος των Manas - Nedoma

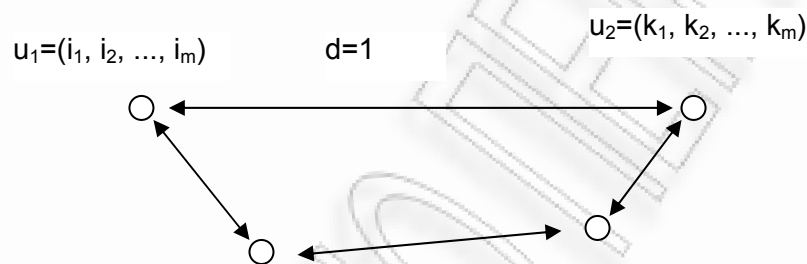
Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη παράγραφο, ένα κυρτό υπερπολύεδρο που ορίζεται μέσα από ένα Γραμμικό Πρόγραμμα (με  $m$ : περιορισμούς και  $n$ : μεταβλητές απόφασης) μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα συνεκτικό γράφημα (*graph connected*)  $(V,U)$  όπου  $V$  είναι το σύνολο των κόμβων και  $U$  το σύνολο των τόξων που συνδέουν ανά δύο τους κόμβους, και που μπορούμε να τα διαβούμε ακολουθώντας τα βήματα της Simplex. Έτσι, δύο κόμβοι είναι γειτονικοί αν αντιστοιχούν σε δύο βάσεις της Simplex που διαφέρουν κατά μία και μόνη μεταβλητή.

Η αναζήτηση όλων των κορυφών του υπερπολυέδρου ισοδυναμεί με την εξερεύνηση όλων των κόμβων του γραφήματος  $(V,U)$ . Προκειμένου να μοντελοποιηθούν οι γενικές αυτές ιδέες ορίζονται τα παρακάτω μεγέθη:

- Το  $V$  (σύνολο των κόμβων του γραφήματος) περιέχει διανύσματα διάστασης  $m$  των οποίων τα στοιχεία είναι ακέραιοι αριθμοί (δείκτες των βάσεων της Simplex)  $u=(i_1, i_2, \dots, i_m)$  με  $1 \leq i_j \leq m, j=1,2,\dots,m$ .

## Κεφάλαιο 2: Αλγόριθμοι εύρεσης λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης

- Δύο διαφορετικοί κόμβοι  $u_1=(i_1, i_2, \dots, i_m)$  και  $u_2=(k_1, k_2, \dots, k_m)$  απέχουν μεταξύ τους κατά μία απόσταση  $d \leq m$  αν  $d$  ακριβώς στοιχεία του  $u_2$  είναι διαφορετικά από αυτά του  $u_1$ . Οι  $u_1$  και  $u_2$  είναι γειτονικές εφόσον έχουν  $d=1$  (Σχ. 6.1).
- Ένα τόξο  $(u_1, u_2) \in U$  αν και μόνο αν  $u_1$  και  $u_2$  είναι γειτονικοί. Οι γειτονικοί κόμβοι του  $u_i$  απαρτίζουν το σύνολο  $N(u_i)$



Σχήμα 2-1: Γράφημα  $(V,U)$

Το πρόβλημα της αναζήτησης όλων των κόμβων ενός γραφήματος  $(V,U)$  τίθεται πλέον διαφορετικά. Αρκεί να βρούμε ένα 'μονοπάτι' που περνάει από όλους τους κόμβους ενός γραφήματος χωρίς να χρειάζεται να κρατάμε στον υπολογιστή, παρά ένα και μοναδικό πίνακα Simplex, προκειμένου να παράξουμε τους νέους κόμβους (Manas & Nedoma, 1968).

Οι Manas και Nedoma το 1968 πρότειναν ένα αλγόριθμο του οποίου σκοπός είναι η πραγματοποίηση ενός 'περιπάτου' μέσα στο γράφημα  $(V,U)$  που θα έχει δύο χαρακτηριστικές ιδιότητες:

- 1) να αποφεύγει την αναπαραγωγή (εφόσον αυτό είναι δυνατό) λύσεων που έχουν ήδη υπολογιστεί,
- 2) να κρατάει στη μνήμη του υπολογιστή ένα και μοναδικό πίνακα Simplex.

Ο αλγόριθμος, που επιτρέπει την εύρεση όλων των κόμβων του συνεκτικού γραφήματος, με ορισμένες λειτουργικές τροποποιήσεις ώστε να μπορεί να υλοποιηθεί αποδοτικά σε λογισμικό, δουλεύει ως ακολούθως:

- Ξεκινάμε από ένα αρχικό κόμβο - λύση ( $u_0$ ) για παράδειγμα από τη βέλτιστη λύση του γραμμικού προγράμματος και κατασκευάζουμε δύο πεπερασμένες ακολουθίες συνόλων που περιέχουν κόμβους του γραφήματος.

## Κεφάλαιο 2: Αλγόριθμοι εύρεσης λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης

- Η πρώτη ακολουθία συνόλων ( $R_1, R_2, \dots, R_s$ ) περιλαμβάνει τους κόμβους που έχουν ήδη υπολογιστεί (με τον όρο «υπολογισμός κόμβων» εννοούμε τον καθορισμό των συντεταγμένων των αντίστοιχων διανυσμάτων των βασικών δυνατών λύσεων του γραμμικού προγράμματος).
- Η δεύτερη ακολουθία συνόλων ( $W_1, W_2, \dots, W_s$ ) περιλαμβάνει τους κόμβους που δεν έχουν ακόμα υπολογιστεί αλλά που μπορούν να υπολογιστούν ξεκινώντας από ένα ή περισσότερους κόμβους που ανήκουν στο σύνολο  $R_s$  πραγματοποιώντας μία και μόνη επανάληψη της μεθόδου Simplex.

Η κατασκευή των συνόλων  $R$  και  $W$  γίνεται με τον παρακάτω τρόπο:

- Κάθε φορά που παράγεται μία καινούργια λύση  $u_s$  (δηλαδή ένας καινούργιος πίνακας SIMPLEX) ενημερώνουμε την ακολουθία  $R_s$  και την ακολουθία  $RX_s$  η οποία περιέχει τα διανύσματα ( $x_{B1}, x_{B2}, \dots, x_{Bm+1}$ ) για κάθε λύση  $u_s$ . Δηλαδή:

$$R_s = R_{s-1} \cup u_s, \quad RX_s = RX_{s-1} \cup u_s$$

- Στη συνέχεια ελέγχουμε αν οι γειτονικές λύσεις  $N(u_s)$  έχουν ήδη υπολογιστεί (δηλαδή αν  $\in$  στο  $R_s$ ) ή αν έχουν ήδη ενταχθεί στο σύνολο  $W_s$ . Αν δεν ισχύει τίποτα από τα δύο τότε εισάγουμε τα διανύσματα που αποτελούνται από τους δείκτες ( $i_1, i_2, \dots, i_m$ ) των γειτονικών λύσεων  $N(u_s)$  στο  $W_s$ . Δηλαδή:

$$W_s = W_{s-1} \cup N(u_s) - R_s$$

- Στη συνέχεια εξετάζουμε αν υπάρχει λύση στο  $W_s$  που να είναι **γειτονική** στη **λύση**  $u_s$  (δηλαδή  $d=1$ ). Αν υπάρχει επιλέγουμε να την υπολογίσουμε (αφαιρώντας την από το  $W_s$ ) και παράγοντας τη νέα βάση SIMPLEX. Αλλιώς επιλέγουμε τη λύση εκείνη με το μικρότερο  $d \leq m$  και την υπολογίζουμε πάλι μέσω SIMPLEX.
- Ο αλγόριθμος περατώνεται όταν  $W_s = \emptyset$ . Τότε προχωράμε στην εξαγωγή των συνόλων  $R_s$  και  $RX_s$ .

Σύμφωνα με τους Manas και Nedoma ισχύει η ακόλουθη πρόταση: Αν  $W_s = \emptyset$  τότε  $R_k = V$  (δηλαδή έχουν υπολογιστεί όλες οι συντεταγμένες όλων των διανυσμάτων των πιθανών δυνατών βασικών λύσεων), την οποία μάλιστα αποδεικνύουν στην εργασία τους (Manas & Nedoma, 1968).

Ο αλγόριθμος όπως υλοποιήθηκε στο ΣΥΑ που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 6 αποτελείται από έξι βασικά βήματα που απαιτούνται για την εξερεύνηση του συνόλου κορυφών του υπερπολυέδρου του ΓΠ.

**Βήμα 0:** Επίλυση του ΓΠ και εύρεση της βέλτιστης λύσης  $u_0$ .

**Βήμα 1:** Διαβάζουμε τις διαστάσεις του προβλήματος (αριθμός περιορισμών, μεταβλητών) και υπολογίζουμε το μέγιστο αριθμό λύσεων (κορυφές υπερπολυέδρου) σύμφωνα με τη σχέση 1.2. Ορίζουμε τους απαραίτητους πίνακες και διαβάζουμε τα στοιχεία του πίνακα Simplex της λύσης  $u_0$ . Επίσης προσθέτουμε τον νέο περιορισμό που ορίζει το ΥΠ 1.2:

$$c^T x - Y = z^* - k$$

όπου  $Y$  είναι η μεταβλητή απόκλισης του περιορισμού. Οι συντελεστών των στοιχείων του νέου περιορισμού στον επαυξημένο πίνακα υπολογίζονται εύκολα όπως θα παρουσιασθεί στην § 2.3.4.

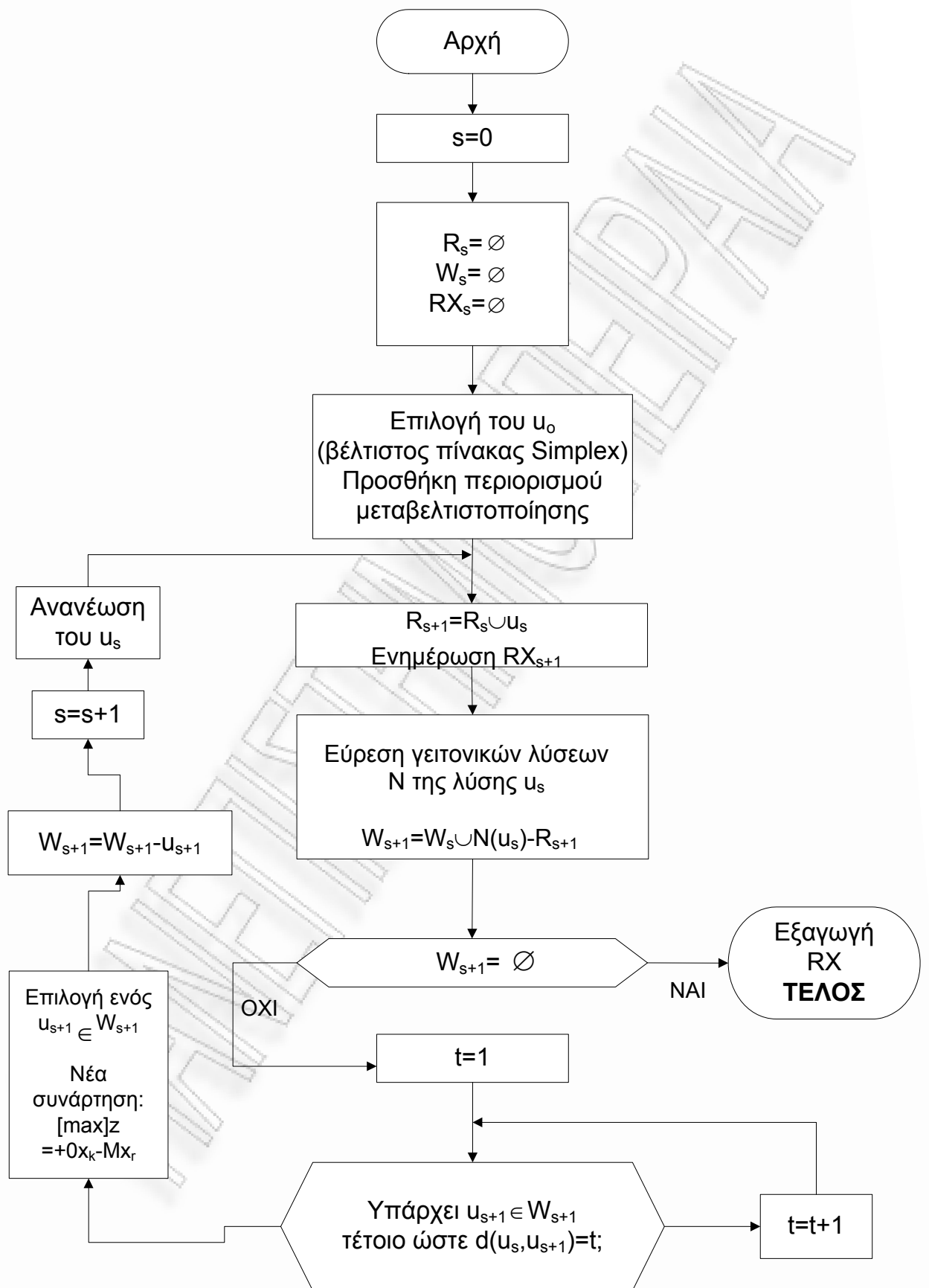
**Βήμα 2:** Ενημερώνουμε το σύνολο λύσεων  $R$  με το διάνυσμα των δεικτών των βασικών μεταβλητών της τρέχουσας λύσης καθώς και το σύνολο  $R_X$  με το διάνυσμα των τιμών  $x_B$ .

**Βήμα 3:** Προχωράμε στην εύρεση των γειτονικών λύσεων – κορυφών της τρέχουσας λύσης και ενημερώνουμε την ακολουθία  $W$ .

**Βήμα 4:** Ελέγχουμε αν ο πίνακας  $W$  είναι κενός. Αν όχι, επιλέγουμε την επόμενη λύση-κορυφή. Προκειμένου να οδηγηθούμε στην επιλεγμένη κορυφή ορίζουμε νέα αντικειμενική συνάρτηση. Δίνοντας πολύ μεγάλες αρνητικές τιμές ( $M$ ) στα στοιχεία που είναι εκτός βάσης και μηδέν στα στοιχεία της βάσης.

**Βήμα 5:** Τέλος, αφαιρούμε την νέα λύση  $u_{new}$  από την ακολουθία  $W$  και προχωράμε με χρήση του Xpress στην παραγωγή της νέας λύσης και επιστρέφουμε στο βήμα 2.

Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζεται το λογικό διάγραμμα του αλγορίθμου όπως υλοποιήθηκε στο ΣΥΑ:



Σχήμα 2-2: Λογικό Διάγραμμα Αλγόριθμου Manas-Nedoma



## Κεφάλαιο 2: Αλγόριθμοι εύρεσης λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης

Ο συνολικός αριθμός των επαναλήψεων της Simplex που απαιτούνται προκειμένου να εφαρμοσθεί ο αλγόριθμος των Manas-Nedoma είναι σαφώς μικρότερος, συγκρινόμενος με το συνολικό αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται κατά την εφαρμογή της μεθόδου του Tarry. Για ένα γραμμικό πρόγραμμα, έστω με  $r$  βασικές δυνατές λύσεις,  $m$  περιορισμούς και  $n$  κύριες μεταβλητές απόφασης ( $l=n+m$  οι συνολικές μεταβλητές απόφασης όπου έχουμε προσθέσει και  $m$  μεταβλητές απόκλισης, οπότε ο  $n$  εκφράζει παράλληλα και τον αριθμό των μεταβλητών εκτός βάσης), η μέθοδος του Tarry χρειάζεται ακριβώς  $n \times r$  επαναλήψεις της Simplex ώστε να ολοκληρωθεί. Αντίθετα στον αλγόριθμο που εξετάζουμε ο αριθμός των επαναλήψεων που πραγματοποιούμε κυμαίνεται από  $r$  μέχρι  $m \times r$ , στην περίπτωση που υποθέσουμε ότι δεν έχουμε εκφυλισμένες λύσεις. (Siskos, 1984)

Ο τύπος των υπερπολυέδρων όπου ο αριθμός των επαναλήψεων είναι ακριβώς  $r$  (Hamiltonian μονοπάτι μέσα στο γράφημα) δεν έχει ακόμα οριστεί από τους θεωρητικούς. Hamiltonian μονοπάτι σε ένα γράφημα είναι το 'μονοπάτι' εκείνο που μας επιτρέπει να επισκεφτούμε όλους τους κόμβους από μία και μοναδική φορά τον κάθε ένα (Mattheis & Rubin, 1980).

Από άποψη υπολογιστικού φόρτου ο αλγόριθμος των Manas-Nedoma χρειάζεται κάθε στιγμή να υπάρχει αποθηκευμένος ένας πίνακας Simplex και ένας πίνακας διαστάσεων  $r \times m$  για τα σύνολα  $R_s$  και  $W_s$ . Επίσης ο αλγόριθμος στηρίζεται στην αποτελεσματική διαχείριση μιας λίστας αυξανόμενου μεγέθους.

Ο αριθμός των στοιχείων της λίστας θα αυξάνεται μέχρι να γίνει ίσος με το συνολικό αριθμό των κορυφών του υπερπολυέδρου. Συνολικά χρειάζεται να υπολογίσουμε  $r$  πίνακες Simplex, όπου  $r$  ο αριθμός των βασικών δυνατών λύσεων του Γ.Π. 1.1. (Siskos, 1984).

Θα χρησιμοποιήσουμε το παράδειγμα ΥΠ 2.1 για να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο των Manas-Nedoma ώστε να γίνουν κατανοητά τα βήματά του. Προκειμένου να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο έχει θεωρηθεί  $k=20$ , και έχει εισαχθεί ο νέος περιορισμός  $3x_1+4x_2+5x_3+6x_4 \geq 56 \Rightarrow 3x_1+4x_2+5x_3+6x_4 -Y=56$  και έστω:  $x_{\bar{1}} = x_5$ ,  $x_{\bar{2}} = x_6$  και  $Y = x_7$ . Θέτουμε ακόμα,  $s=0$ ,  $R_s=\emptyset$  και  $W_s=\emptyset$ .

Ας θεωρήσουμε ως αρχική λύση τη βέλτιστη λύση του γ.π.,  $u_0=\{(2,4,7)\}$  με  $z^*=76$ . Ο Πίνακας 2-1 είναι ο πίνακας Simplex που αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση, όπου έχουμε προσθέσει μια γραμμή, που εκφράζει το νέο περιορισμό, με στοιχεία τις αντίθετες τιμές των οριακών καθαρών εισοδημάτων ( $\Delta_j$ ) του βέλτιστου πίνακα (στην § 2.3.4. παρουσιάζεται ο τρόπος υπολογισμού των στοιχείων αυτών).

Κεφάλαιο 2: Αλγόριθμοι εύρεσης λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_2$	1	1	1/3	0	1	-1/3	0	16
$x_4$	0	0	2/3	1	0	1/3	0	2
$x_7$	1	0	1/3	0	4	2/3	1	20

**Πίνακας 2-1:** Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για  $s=0$

Θέτουμε  $R_1=\{(2,4,7)\}$  και βρίσκουμε από τον πίνακα τις λύσεις που μπορούν να προκύψουν πραγματοποιώντας μία και μόνη αλλαγή βάσης, βρίσκουμε δηλαδή τους γειτονικούς κόμβους. Οπότε έχουμε:

$$N(u_0)=\{(1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7)\}$$

και ακόμα

$$W_1=W_0 \cup N(u_0) - u_0 = \{(1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7)\}.$$

Στο  $W_1$  υπάρχουν γειτονικές λύσεις στη  $u_0$  ( $d=1$ ) και μπορούμε να επιλέξουμε αυθαίρετα μία από αυτές για να συνεχίσουμε τον αλγόριθμο. Επιλέγουμε ως επόμενη λύση τον κόμβο  $u_1=(2,3,7)$  και την υπολογίζουμε.

**Θέτουμε  $s=1$ .** Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_2$	1	1	0	-1/2	1	-1/2	0	15
$x_3$	0	0	1	3/2	0	1/2	0	3
$x_7$	1	0	0	-1/2	4	1/2	1	19

**Πίνακας 2-2:** Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για  $s=1$

Και έχουμε:  $R_2=R_1 \cup \{u_1\} = \{(2,4,7), (2,3,7)\}$

$$N(u_1)=\{(1,3,7), (2,4,7), (2,3,5), (2,6,7)\}$$

$$W_2=W_1 \cup N(u_1) - R_2 = \{(1,3,7), (1,4,7), (2,3,5), (2,4,5), (2,6,7)\}$$

Επιλέγουμε  $u_2=\{(2,6,7)\}$ .

Κεφάλαιο 2: Αλγόριθμοι εύρεσης λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης

**Θέτουμε  $s=2$ .** Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_2$	1	1	1	1	1	0	0	18
$x_6$	0	0	2	3	0	1	0	6
$x_7$	1	0	-1	-2	4	0	1	16

**Πίνακας 2-3:** Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για  $s=2$

Και έχουμε:  $R_3=R_2 \cup \{u_2\} = \{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7)\}$

$$N(u_2) = \{(2,6,1), (2,3,7), (2,4,7), (2,6,5)\}$$

$$W_3 = W_2 \cup N(u_2) - R_3 = \{(1,3,7), (1,4,7), (2,3,5), (2,4,5), (2,6,1), (2,6,5)\}$$

Επιλέγουμε  $u_3 = \{(2,6,1)\}$ .

**Θέτουμε  $s=3$ .** Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_2$	0	1	2	3	-3	0	-1	2
$x_6$	0	0	2	3	0	1	0	6
$x_1$	1	0	-1	-2	4	0	1	16

**Πίνακας 2-4:** Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για  $s=3$

Και έχουμε:  $R_4=R_3 \cup \{u_3\} = \{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1)\}$

$$N(u_3) = \{(3,6,1), (4,6,1), (2,6,5), (2,6,7)\}$$

$$W_4 = W_3 \cup N(u_3) - R_4 = \{(1,3,7), (1,4,7), (2,3,5), (2,4,5), (2,6,5), (3,6,1), (4,6,1)\}$$

Επιλέγουμε  $u_4 = \{(2,6,5)\}$ .

**Θέτουμε  $s=4$ .** Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_2$	3/4	1	5/4	3/2	0	0	-1/4	14
$x_6$	0	0	2	3	0	1	0	6
$x_5$	1/4	0	-1/4	-1/2	1	0	1/4	4

**Πίνακας 2-5:** Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για  $s=5$

Και έχουμε:  $R_5=R_4 \cup \{u_4\} = \{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5)\}$

$$N(u_4) = \{(2,6,1), (2,3,5), (2,4,5), (2,6,7)\}$$

$$W_5 = W_4 \cup N(u_4) - R_5 = \{(1,3,7), (1,4,7), (2,3,5), (2,4,5), (3,6,1), (4,6,1)\}$$

Επιλέγουμε  $u_5 = \{(2,4,5)\}$ .

**Θέτουμε  $s=5$ .** Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_2$	3/4	1	1/4	0	0	-1/2	-1/4	11
$x_4$	0	0	2/3	1	0	1/3	0	2
$x_5$	1/4	0	1/12	0	1	1/6	1/4	5

**Πίνακας 2-6:** Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για  $s=6$

Και έχουμε:  $R_6=R_5 \cup \{u_5\} = \{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5), (2,4,5)\}$

$$N(u_5) = \{(1,4,5), (2,3,5), (2,6,5), (2,4,7)\}$$

$$W_6 = W_5 \cup N(u_5) - R_6 = \{(1,3,7), (1,4,7), (2,3,5), (3,6,1), (4,6,1), (1,4,5)\}$$

Επιλέγουμε  $u_6 = \{(2,3,5)\}$ .

**Θέτουμε s=6.** Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_2$	3/4	1	0	-3/8	0	-5/8	-1/4	41/4
$x_3$	0	0	1	3/2	0	1/2	0	3
$x_5$	1/4	0	0	-1/8	1	1/8	1/4	19/4

**Πίνακας 2-7:** Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για s=6

Και έχουμε:  $R_7=R_6 \cup \{u_6\} = \{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5), (2,4,5), (2,3,5)\}$

$N(u_6) = \{(1,3,5), (2,4,5), (2,6,5), (2,3,7)\}$

$W_7=W_6 \cup N(u_6) - R_7 = \{(1,3,7), (1,4,7), (3,6,1), (4,6,1), (1,4,5), (1,3,5)\}$

Επιλέγουμε  $u_7 = \{(1,3,5)\}$ .

**Θέτουμε s=7.** Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_1$	1	4/3	0	-1/2	0	-5/6	-1/3	41/3
$x_3$	0	0	1	3/2	0	1/2	0	3
$x_5$	0	-1/3	0	0	1	1/3	1/3	4/3

**Πίνακας 2-8:** Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για s=7

Και έχουμε:  $R_8=R_7 \cup \{u_7\} = \{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5), (2,4,5), (2,3,5), (1,3,5)\}$

$N(u_7) = \{(2,3,5), (1,4,5), (1,3,6), (1,3,7)\}$

$W_8=W_7 \cup N(u_7) - R_8 = \{(1,3,7), (1,4,7), (3,6,1), (4,6,1), (1,4,5)\}$

Επιλέγουμε  $u_8 = \{(1,3,7)\}$ .

**Θέτουμε  $s=8$ .** Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_1$	1	1	0	-1/2	1	-1/2	0	15
$x_3$	0	0	1	3/2	0	1/2	0	3
$x_7$	0	-1	0	0	3	1	1	4

**Πίνακας 2-9:** Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για  $s=8$

Και έχουμε:  $R_9=R_8 \cup \{u_8\} = \{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5), (2,4,5), (2,3,5), (1,3,5), (1,3,7)\}$

$N(u_8) = \{(2,3,7), (1,4,7), (1,3,5), (1,3,6)\}$

$W_9 = W_8 \cup N(u_8) - R_9 = \{(1,4,7), (3,6,1), (4,6,1), (1,4,5)\}$

Επιλέγουμε  $u_9 = \{(1,4,7)\}$ .

**Θέτουμε  $s=9$ .** Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_1$	1	1	1/3	0	1	-1/3	0	16
$x_4$	0	0	2/3	1	0	1/3	0	2
$x_7$	0	-1	0	0	3	1	1	4

**Πίνακας 2-10:** Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για  $s=9$

Και έχουμε:  $R_{10} = R_9 \cup \{u_9\} = \{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5), (2,4,5), (2,3,5), (1,3,5), (1,3,7), (1,4,7)\}$

$N(u_9) = \{(2,4,7), (1,3,7), (1,4,5), (1,4,6)\}$

$W_{10} = W_9 \cup N(u_9) - R_{10} = \{(3,6,1), (4,6,1), (1,4,5)\}$

Επιλέγουμε  $u_{10} = \{(1,4,5)\}$ .

**Θέτουμε  $s=10$ .** Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_1$	1	4/3	1/3	0	0	-2/3	-1/3	44/3
$x_4$	0	0	2/3	1	0	1/3	0	2
$x_5$	0	-1/3	0	0	1	1/3	1/3	4/3

**Πίνακας 2-11:** Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για  $s=10$

Και έχουμε:  $R_{11}=R_{10} \cup \{u_{10}\} = \{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5), (2,4,5), (2,3,5), (1,3,5), (1,3,7), (1,4,7), (1,4,5)\}$

$N(u_{10}) = \{(2,4,5), (1,3,5), (1,4,6), (1,4,7)\}$

$W_{11} = W_{10} \cup N(u_{10}) - R_{11} = \{(3,6,1), (4,6,1)\}$

Επιλέγουμε  $u_{11} = \{(1,4,6)\}$ .

**Θέτουμε  $s=11$ .** Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_1$	1	2/3	1/3	0	2	0	1/3	52/3
$x_4$	0	1/3	2/3	1	-1	0	-1/3	2/3
$x_6$	0	-1	0	0	3	1	1	4

**Πίνακας 2-12:** Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για  $s=11$

Και έχουμε:  $R_{12}=R_{11} \cup \{u_{11}\} = \{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5), (2,4,5), (2,3,5), (1,3,5), (1,3,7), (1,4,7), (1,4,5), (1,4,6)\}$

$\Gamma(u_{11}) = \{(1,2,6), (1,3,6), (1,4,5), (1,4,7)\}$

$W_{12} = W_{11} \cup \Gamma(u_{11}) - R_{12} = \{(3,6,1)\}$

Επιλέγουμε  $u_{12} = \{(1,3,6)\}$ .

**Θέτουμε  $s=12$ .** Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_1$	1	1/2	0	-1/2	5/2	0	1/2	17
$x_3$	0	1/2	1	3/2	-3/2	0	-1/2	1
$x_6$	0	-1	0	0	3	1	1	4

**Πίνακας 2-13:** Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για  $s=12$

Και έχουμε:  $R_{13}=R_{12} \cup \{u_{12}\} = \{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5), (2,4,5), (2,3,5), (1,3,5), (1,3,7), (1,4,7), (1,4,5), (1,4,6), (1,3,6)\}$

$\Gamma(u_{12}) = \{(1,2,6), (1,4,6), (1,3,5), (1,3,7)\}$

$W_{13} = W_{12} \cup \Gamma(u_{12}) - R_{12} = \{\emptyset\}$

Οπότε ο αλγόριθμος περατώνεται.

Στο παράδειγμα που παρουσιάστηκε, το 'μονοπάτι' που ακολουθήθηκε προκειμένου να επισκεφτούμε όλους τους κόμβους του γραφήματος είναι ένα 'Hamiltonian μονοπάτι' αφού δε χρειάστηκε να επισκεφτούμε για δεύτερη φορά ένα κόμβο που ήδη είχαμε υπολογίσει.

Οπότε πραγματοποιήσαμε  $s=12$  επαναλήψεις του αλγορίθμου και χρειάστηκε να υπολογίσουμε 12 διαφορετικούς πίνακες Simplex. Παρατηρείται ότι ο συγκεκριμένος αλγόριθμος ενώ κάνει οικονομία μνήμης στον υπολογιστή, αφού χρειάζεται η αποθήκευση ενός και μόνου πίνακα Simplex σε κάθε επανάληψη του, υπάρχει όμως μεγάλος υπολογιστικός φόρτος προκειμένου να υπολογιστούν  $s$  πίνακες Simplex όπου  $r \leq s \leq r \times m$ .



### 2.3.3 Η Μέθοδος της Αντίστροφης Simplex

Η μέθοδος της Αντίστροφης Simplex (*Simplex Inverse*) παρουσιάστηκε από τον Van de Panne ο οποίος παρατήρησε ότι κάθε επανάληψη του αλγορίθμου Simplex είναι αντιστρέψιμη αντικαθιστώντας το ρόλο της μεταβλητής που εισέρχεται στη βάση με το ρόλο της μεταβλητής που εξέρχεται (Van de Panne, 1975).

Με άλλα λόγια, αν σε μία βάση της Simplex εισαχθεί η μεταβλητή  $x_j$  στη θέση της μεταβλητής  $x_{B_r}$ , κατά την εκτέλεση της Αντίστροφης Simplex εισάγεται η  $x_{B_r}$  στη θέση της  $x_j$ . Ακολουθώντας αυτή τη διαδικασία μειώνουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης  $z$  κατά μία ποσότητα ίση με αυτή κατά την οποία αυξήθηκε η  $z$  όταν πραγματοποιήσαμε το βήμα της Simplex (Siskos, 1984).

Η μέθοδος της Αντίστροφης Simplex σχεδιάστηκε για να χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση ευστάθειας (μεταβελτιστοποίηση) αλλά χρησιμοποιήθηκε και σαν γενική μέθοδος εύρεσης όλων των ακραίων σημείων ενός συστήματος ανισοτήτων. Όπως ήδη έχει αναφερθεί το σύνολο σχεδόν των βέλτιστων λύσεων να οριοθετείται από το υπερπολύεδρο ΥΠ 1.2

$$\text{ΥΠ 1.2} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^t \mathbf{x} \geq z^* - k \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \right. \text{ όπου } k \text{ μικρή θετική ποσότητα και στην περίπτωση των} \\ \text{πολλαπλών βέλτιστων λύσεων } k=0 \text{ (αναφερόμαστε πάντα} \\ \text{για την περίπτωση μεγιστοποίησης)}$$

Αυξάνοντας την τιμή του  $k$  αυξάνουμε και τον αριθμό των σχεδόν βέλτιστων λύσεων. Στην πράξη το  $k$  παίρνει τιμές σχετικά μικρές αλλά ακόμα και σε αυτές τις περιπτώσεις ο αριθμός των σχεδόν βέλτιστων λύσεων μπορεί να είναι πολύ μεγάλος (Van de Panne, 1975).

Η ιδέα στην οποία βασίζεται η μέθοδος της Αντίστροφης Simplex είναι αρκετά απλή. Στη μέθοδο Simplex εισάγονται μεταβλητές στη βάση οι οποίες αυξάνουν την τιμή αντικειμενικής συνάρτησης μέχρι να βρεθεί η βέλτιστη λύση. Στη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex η βέλτιστη λύση θεωρείται ως σημείο εκκίνησης για την παραγωγή σχεδόν βέλτιστων λύσεων. Σε αυτή και σε επόμενες λύσεις εισάγονται μεταβλητές στη βάση που μειώνουν την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης· ο ποσότητα  $k$  ορίζει το οριακό σημείο μέχρι το οποίο μπορεί να μειωθεί η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Η βασική διαφορά ανάμεσα στη μέθοδο Simplex και σε αυτή της Αντίστροφης Simplex είναι ότι στην πρώτη μόνο μια μεταβλητή εισάγεται στη βάση σε κάθε επανάληψη, ενώ στη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex όλες οι τιμές που μειώνουν την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης εισάγονται αργά η γρήγορα στη βάση.

## Κεφάλαιο 2: Αλγόριθμοι εύρεσης λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης

Επίσης, στη μέθοδο Simplex η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αυξάνεται σε κάθε επανάληψη, ενώ αντίθετως στη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex μειώνεται ή παραμένει τα ίδια σε κάθε επανάληψη, δεδομένου ότι δεν υπάρχουν εκφυλισμένες λύσεις (Van de Panne, 1975).

Ας θεωρήσουμε μία επανάληψη της μεθόδου Simplex σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης. Ο Πίνακας 2-14 παριστάνει ένα πίνακα Simplex, έστω μετά τη  $p$  επανάληψη.

$c_B$	Βάση	1	...	k	...	r	...	m+n	$x_B$
$c_{B1}$	1	1	...	$y_{1k}$	...	0	...	$y_{1(m+n)}$	$x_{B1}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$c_{Br}$	r	0	...	$y_{rk}$	...	1	...	$y_{r(m+n)}$	$x_{Br}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$c_{Bj}$	j	0	...	$y_{jk}$	...	0	...	$y_{j(m+n)}$	$x_{Bj}$
$c_j$		$c_1$	...	$c_k$	...	$c_r$	...	$c_n$	
$\Delta_j$		-	...	$\Delta_k$	...	-	...	$\Delta_n$	Z

**Πίνακας 2-14:** Πίνακας Simplex μετά από την  $p$  επανάληψη

Έστω ότι κατά την επανάληψη  $p+1$  επανάληψη της μεθόδου Simplex εισάγεται η μεταβλητή  $x_k$  θεωρώντας φυσικά ότι το οριακό καθαρό εισόδημα της μεταβλητής που θα εισαχθεί είναι το μεγαλύτερο θετικό (δηλ.  $\Delta_k = \max_j \Delta_j \quad \forall \Delta_j > 0$ ).

Έστω ακόμα ότι απομακρύνεται από τη βάση την μεταβλητή  $x_{Br}$  θεωρώντας φυσικά ότι ισχύει:

$$\frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min_i \left( \frac{x_{Bi}}{y_{ik}}, y_{ik} > 0 \right) \quad (2.1)$$

Ο Πίνακας 2-15 είναι ο πίνακας Simplex μετά από την  $p+1$  επανάληψη:

Κεφάλαιο 2: Αλγόριθμοι εύρεσης λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης

$c_B$	Βάση	1	...	k	...	r	...	m+n	$x_B$
$c_{B1}$	1	1	...	0	...	$-y_{1k}/y_{rk}$	...	$y_{1(m+n)} - y_{1k}(y_{r(m+n)}/y_{rk})$	$x_{B1} - y_{1k}(x_{Br}/y_{rk})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$c_{Bk}$	k	0	...	1	...	$1/y_{rk}$	...	$y_{r(m+n)}/y_{rk}$	$x_{Br}/y_{rk}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$c_{Bj}$	j	0	...	0	...	$-y_{jk}/y_{rk}$	...	$y_{j(m+n)} - y_{jk}(y_{r(m+n)}/y_{rk})$	$x_{Bj} - y_{jk}(x_{Br}/y_{rk})$
$c_j$		$c_1$	...	$c_k$	...	$c_r$	...	$c_n$	
$\Delta_j$		-	...	-	...	$-\Delta_k/y_{rk}$	...	$\Delta n - \Delta_k(y_{r(m+n)}/y_{rk})$	$z + \Delta_k(x_{Br}/y_{rk})$

Πίνακας 2-15: Πίνακας Simplex μετά από την  $\rho+1$  επανάληψη

Παρατηρείται ότι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αυξάνεται κατά  $\Delta_k(x_{Br}/y_{rk})$  και ότι η τιμή του οριακού καθαρού εισοδήματος της μεταβλητής είναι αρνητική και ίση με  $-\Delta_k/y_{rk}$ . Έστω τώρα ότι εισάγεται στη βάση κατά τρόπο αντίστροφο η μεταβλητή  $x_r$ . Από τη στιγμή που η ποσότητα  $-\Delta_k/y_{rk}$  είναι αρνητική η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα μειωθεί. Ειδικότερα για την καινούργια τιμή  $z'$  θα ισχύει:

$$z' = z + \Delta_k \frac{x_{Br}}{y_{rk}} - \frac{\Delta_k}{y_{rk}} \frac{x_{Br}}{y_{rk}} y_{rk} = z \quad (2.2)$$

Για να εντοπιστεί το διάνυσμα που θα εγκαταλείψει τη βάση εργαζόμαστε ως ακολούθως.

Οι νέες τιμές  $x'_B$  δίνονται από το γενικό τύπο:

$$x'_{Bi} = x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} - \left( \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \right) \quad (2.3)$$

που πρέπει να είναι θετική ποσότητα προκειμένου η νέα λύση να είναι δυνατή.

Οπότε αν τεθεί  $x_{Bi} - y_{ik} \frac{x_{Br}}{y_{rk}} = x_{Bi}^*$  και μέσω της σχέσης (2.3) ισχύει:

$$x_{Bi}^* + \frac{y_{ik}}{1} \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \geq 0 \quad (2.4)$$

Παρατηρείται ότι η (2.4) πληρείται αυτόματα για κάθε  $y_{ik} > 0$ . (Σημ. Η ποσότητα  $y_{rk}$  είναι θετική γιατί η μεταβλητή  $x_k$  έχει εισέλθει προηγουμένως στη βάση.) Οπότε είμαστε σε θέση να απομακρύνουμε τη μεταβλητή  $x_k$  από τη βάση και να εισάγουμε τη μεταβλητή  $x_r$  λαμβάνοντας και πάλι τον Πίνακα 2-14.

Έτσι αποδείχθηκε ότι για κάθε επανάληψη της μεθόδου Simplex υπάρχει μια επανάληψη αντιστροφής η οποία υλοποιείται με την εισαγωγή μιας μη βασικής μεταβλητής με αρνητικό καθαρό οριακό εισόδημα στη βάση και βρίσκοντας τη μεταβλητή που φεύγει από τη βάση με το γνωστό τρόπο που εξασφαλίζει τη θετικότητα των τιμών των βασικών μεταβλητών (Van de Panne, 1975).

Η μέθοδος της Αντίστροφης Simplex θα περιγραφεί τώρα με περισσότερες λεπτομέρειες. Για τους σκοπούς μας θα θεωρήσουμε πάλι την προσθήκη του περιορισμού:

$$z - Y = z^* - k \quad (2.5), \text{ όπου } Y \text{ η μεταβλητή απόκλισης.}$$

Οι τιμές που λαμβάνει η μεταβλητή  $Y$  κατά τις επαναλήψεις της μεθόδου της Αντίστροφης Simplex θα πρέπει να είναι θετικές ή μηδέν:  $Y = z - (z^* - k) \geq 0 \quad (2.6)$

Ορίζουμε την ποσότητα  $k_s$  ως την τιμή της  $Y$  κατά την  $s$  επανάληψη. Οι  $k_s$  θα μετράνε την παρέκκλιση που θα έχουμε σε κάθε επανάληψη από το ελάχιστο όριο  $z^* - k$ .

Σαν σημείο εκκίνησης για τη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex λαμβάνουμε το βέλτιστο πίνακα Simplex στον οποίο έχουμε προσθέσει τον περιορισμό (2.5). Όπως παρουσιάζεται παρακάτω στην παράγραφο 2.3.4 οι συντελεστές του νέου περιορισμού στον αρχικό βέλτιστο πίνακα Simplex είναι οι αντίθετες τιμές των καθαρών οριακών εισοδημάτων, για τις οποίες ισχύει:  $\Delta_j^0 = -\Delta_j \geq 0$ .

Ο ακόλουθος πίνακας είναι ο αρχικός ( $s=0$ ) για τη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex.

Βάση	Μη Βασικές Μεταβλητές			Βασικές Μεταβλητές						Τιμές Βασικών
$x_1$	$a_{1i}^o$	...	$a_{1j}^o$	1	...	0	...	0	0	$x_{B1}^o$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
$x_i$	$a_{ii}^o$	...	$a_{ij}^o$	0	...	1	...	0	0	$x_{Bi}^o$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
$x_m$	$a_{mi}^o$	...	$a_{mj}^o$	0	...	0	...	1	0	$x_{Bm}^o$
$Y$	$\Delta_i^o$	...	$\Delta_j^o$	0	...	0	...	0	1	$k_o (=k)$

Πίνακας 2-16: Αρχικός (s=0) για τη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex

Σε κάθε επανάληψη s της μεθόδου ο πίνακας θα έχει τη γενική μορφή:

Βάση	Μη Βασικές Μεταβλητές			Βασικές Μεταβλητές						Τιμές Βασικών Μεταβλητών
$x_1$	$a_{1i}^s$	...	$a_{1j}^s$	1	...	0	...	0	0	$x_{B1}^s$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
$x_i$	$a_{il}^s$	...	$a_{ij}^s$	0	...	1	...	0	0	$x_{Bi}^s$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
$x_m$	$a_{ml}^s$	...	$a_{mj}^s$	0	...	0	...	1	0	$x_{Bm}^s$
$Y$	$\Delta_l^s$	...	$\Delta_j^s$	0	...	0	...	0	1	$k_s$

Πίνακας 2-17: Επανάληψη s για τη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex

Στον αρχικό πίνακα έχουμε  $x_{Bi}^o > 0$  για κάθε i και  $\Delta_j^o > 0$  για κάθε j· αν δεν είχαμε θεωρήσει ότι η βέλτιστη λύση  $z^*$  είναι μοναδική θα ίσχυε  $\Delta_j^o \geq 0$ . Η εισαγωγή μιας μη βασικής μεταβλητής, έστω της  $x_k$ , στη βάση θα οδηγούσε σε μείωση  $\Delta_k^o$  (σύμφωνα με τις σχέσεις (Π.1.16) και (Π.1.20) του Παραρτήματος Ι) της τιμής της  $k_o$ .

Η μεταβλητή  $x_r$  που θα εγκαταλείψει τη βάση καθορίζεται, όπως και κατά την εφαρμογή της Simplex, από την παρακάτω σχέση:

$$\theta_j = \frac{x_{Br}^o}{a_{rj}^o} = \min_i \left( \frac{x_{Bi}^o}{a_{ij}^o}, a_{ij}^o > 0 \right) \quad (2.5)$$

## Κεφάλαιο 2: Αλγόριθμοι εύρεσης λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης

Προκειμένου να βρούμε τη μεταβλητή  $x_k$  που θα εισάγουμε στη βάση εργαζόμαστε ως ακολούθως. Υπολογίζουμε την ποσότητα  $k_{oj} = k - \Delta^o_j (x^o_{Bj} / a^o_{rj})$  (2.6) για κάθε  $j$ . Επειδή οι λύσεις  $y_s$  που θα βρούμε πρέπει να είναι ταξινομημένες κατά φθίνουσα σειρά θα επιλέξουμε το μεγαλύτερο  $k_{oj}$ . Από τη στιγμή που η τιμή της  $Y$  δεν μπορεί να είναι αρνητική, η δεύτερη τιμή ( $k_1$ ) θα οριστεί από τη σχέση:

$$k_1 = \max_j (k_{oj}, 0) = k_{ok} \quad (2.7)$$

και υποθέτουμε ότι το ελάχιστο είναι μοναδικό.

Αν το  $k_1 \neq 0$ , ο επόμενος πίνακας λαμβάνεται από την εισαγωγή της αντίστοιχης μη βασικής μεταβλητής  $x_k$  στη βάση, ενώ η βασική μεταβλητή που φεύγει από τη βάση βρίσκεται από τη σχέση (2.5). Η περίπτωση όπου  $k_1=0$  θα εξεταστεί παρακάτω. Αν στη σχέση (2.5) για κάποια  $j$  ίσχυε  $a^o_{ij} \leq 0$  για όλα τα  $i$ , καμία αντίστοιχη κορυφή-λύση δε θα μπορούσε να βρεθεί γιατί σε αυτή τη περίπτωση το  $x_k$  θα αυξανόταν αόριστα και η απώλεια από τη βέλτιστη τιμή  $z^*$  θα αυξανόταν και αυτή αόριστα. Όμως, η μέγιστη απώλεια  $k$  που θα μας δώσει  $k_s=0$  μας ορίζει ένα όριο για τη λύση, έτσι ώστε αυτή η περίπτωση να είναι όμοια με την περίπτωση όπου  $k_1=0$ , και να μπορεί να αντιμετωπιστεί με τον ίδιο τρόπο.

Έχουμε βρει, σύμφωνα με τα παραπάνω, μία μεταβέλτιστη λύση με  $Y=k_1$ . Όλες οι άλλες λύσεις που θα βρούμε θα έχουν τιμές μικρότερες ή ίσες με την τιμή  $k_1$ . Δεν υπάρχει καμία άλλη δυνατή λύση με  $k_s$  ανάμεσα στο  $k$  και στο  $k_1$  γιατί αν υπήρχε μια τέτοια λύση, η βέλτιστη λύση  $z^*$ , που είναι και η αρχική για τη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex, θα μπορούσε να παραχθεί από αυτή τη λύση σε μία ή περισσότερες επαναλήψεις της μεθόδου Simplex. Αν μπορούσε να παραχθεί σε μία επανάληψη τότε, εκτελώντας την αντίστοιχη επανάληψη στη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex, σύμφωνα με τη σχέση 2.7) η λύση αυτή θα είχε επιλεχθεί.

Αν μπορούσε να παραχθεί σε περισσότερες από μία επαναλήψεις, η τελευταία λύση πριν τη βέλτιστη θα είχε μεγαλύτερη τιμή από  $k_1$ . Τότε όμως από αυτή τη λύση η βέλτιστη λύση θα μπορούσε να παραχθεί σε μία επανάληψη και εκτελώντας την αντίστοιχη επανάληψη της μεθόδου της Αντίστροφης Simplex θα βρίσκαμε πρώτα αυτή τη λύση.

Έχοντας βρει μία δεύτερη δυνατή λύση (μετά από την βέλτιστη που θεωρείται ως αρχική) θα ψάξουμε να βρούμε την επόμενη στη σειρά  $k_s$ , αντιμετωπίζοντας δύο πιθανές περιπτώσεις. Πρώτον, υπάρχουν και άλλες λύσεις που μπορούν να παραχθούν από τον πρώτο πίνακα. Δεύτερον, υπάρχουν λύσεις που μπορούν να παραχθούν από το δεύτερο πίνακα, που είναι αποτέλεσμα της εισαγωγής στη βάση της μεταβλητής  $x_k$ . Οι τελευταίες αυτές λύσεις προκύπτουν από την εισαγωγή στη βάση των μη βασικών μεταβλητών  $x_j$  με  $\Delta^1_j > 0$ . Αν εισάγουμε στη βάση μη βασικές μεταβλητές με  $\Delta^1_j < 0$  θα είχαμε  $k_s > k_1$  και σε αυτή την περίπτωση θα παίρναμε ως

αποτέλεσμα τη βέλτιστη λύση. Όπως αναφέραμε και παραπάνω δεν υπάρχει περίπτωση να υπάρχει λύση με  $k_s$  ανάμεσα σε ανάμεσα στο  $k$  και στο  $k_1$ , γιατί εφόσον μία μεταβλητή  $x_j$  με  $\Delta_j^1 > 0$  εισαχθεί στη βάση η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μειώνεται, έτσι ώστε η παρέκκλιση από την ελάχιστη τιμή  $z^* - k$  θα είναι μικρότερη από  $k_1$ .

Έτσι, στο δεύτερο πίνακα ( $s=1$ ) για κάθε  $x_j$  με  $\Delta_j^1 > 0$ , έχουμε:

$$\theta_j^1 = \frac{x_{Br}^1}{a_{rj}^1} = \min_i \left( \frac{x_{Bi}^1}{a_{ij}^1}, a_{ij}^1 > 0 \right) \quad (2.8)$$

Οι τιμές των  $y_1$  που θα παραχθούν από την εισαγωγή της μεταβλητής  $x_j$  στη βάση βρίσκεται από τη σχέση:

$$k_{1j} = k - \Delta_j^1 (x_{Br}^1 / a_{rj}^1) \quad (2.9)$$

Η επόμενη στην ταξινόμηση κατά φθίνουσα σειρά τιμή των  $k_s$  βρίσκεται από τη σχέση:

$$k_2 = \max_j (k_{0j}, k_{1j}, 0 | k_{0j} < k_1, k_{1j} > 0) \quad (2.10)$$

υποθέτοντας πάλι ότι το ελάχιστο είναι μοναδικό. Αν η ελάχιστη τιμή αντιστοιχεί σε ένα από τα  $k_{0j}$  η επόμενη λύση παράγεται από τον πίνακα  $s=0$ , ενώ αν αντιστοιχεί σε ένα από τα  $k_{1j}$  η επόμενη λύση παράγεται από τον πίνακα  $s=1$ . Η περίπτωση όπου  $k_2=0$  θα εξεταστεί παρακάτω.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο αλγόριθμος της μεθόδου της Αντίστροφης Simplex όπως υλοποιήθηκε στο ΣΥΑ που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 6, παραθέτοντας τα συγκεκριμένα βήματα που ακολουθούνται χωρίζοντας την όλη διαδικασία σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση υπολογίζουμε τις λύσεις για τις οποίες  $0 < Y \leq k$ , ενώ στη δεύτερη φάση υπολογίζουμε τις λύσεις τις πλέον απομακρυσμένες από τη βέλτιστη με  $Y=0$ .

### Φάση 1

**Βήμα 0:** Ξεκινάμε από το βέλτιστο πίνακα Simplex ( $s=0$ ) αφού πρώτα προσθέσουμε μία γραμμή συμπληρωματική που αποτελείται από τις αντίθετες τιμές των οριακών καθαρών εισοδημάτων ( $\Delta_j$ ) του βέλτιστου πίνακα,  $\Delta_j^0 = -\Delta_j \geq 0$ .

Θέτουμε  $Y=k$  (ορίζουμε  $k_0=k$ ).

Υποθέτουμε ότι δεν έχουμε πολλαπλές βέλτιστες λύσεις ( $\Delta_j > 0, \forall j$ ).

Δημιουργούμε δύο σύνολα για την καταγραφή των κορυφών-λύσεων και των τιμών  $x_B$  των λύσεων αυτών. Κατ' αντιστοιχία με τον αλγόριθμο των Manas-Nedoma ονομάζουμε τα σύνολα αυτά  $R_s$  και  $RX_s$ .

**Βήμα 1:** Θεωρούμε ένα πίνακα Simplex  $s$ . Δημιουργούμε ένα κλάδο για κάθε μεταβλητή  $x_j$  που βρίσκεται εκτός βάσης και για τις οποίες ισχύει  $\Delta_j^s > 0$ . Καθορίζουμε τα στοιχεία-οδηγούς  $a_{ij}^s$  (για κάθε  $j$  με  $\Delta_j^s > 0$ ) από τη σχέση:

$$\frac{x_{Br}^s}{a_{rj}^s} = \min_i \left( \frac{x_{Bi}^s}{a_{ij}^s}, a_{ij}^s > 0 \right) \quad (2.11)$$

**Βήμα 2:** Υπολογίζουμε τις τιμές που θα πάρει η μεταβλητή απόκλισης  $Y$  για κάθε μεταβλητή  $x_j$  που δύναται να εισέλθει στη βάση:

$$k_{sj} = k_s - \Delta_j^s (x_{Br}^s / a_{rj}^s) \quad (2.12)$$

και προσθέτουμε στο σύνολο  $K_s$  όλα τα  $k_{sj} > 0$ .

**Βήμα 3:** Καθορίζουμε τη μεταβλητή  $x_j$  που θα εισέλθει στη βάση σύμφωνα με τη σχέση:

$$k_{s+1} = \max_j (k_{oj}, k_{1j}, \dots, k_{sj}, 0 | k_{ij} > 0) \quad (2.13)$$

και αφαιρούμε αυτή την τιμή από το σύνολο  $K_s$  των  $k_{ij} > 0$ .

Ενημερώνουμε το σύνολο λύσεων  $R$  με το διάνυσμα των δεικτών των βασικών μεταβλητών της τρέχουσας λύσης καθώς και το σύνολο  $RX$  με το διάνυσμα των τιμών  $x_B$ .

Σε περίπτωση που έχουμε  $k_{s+1} = 0$ , πηγαίνουμε στη **Φάση 2**.

**Βήμα 4:** Εισάγουμε τη μεταβλητή  $x_j$  και απομακρύνουμε τη μεταβλητή  $x_r$  ( $x_j \uparrow$   $x_r \downarrow$ ) στον πίνακα Simplex που αντιστοιχεί η τιμή που θα βρούμε από τη σχέση (2.13).

Πηγαίνουμε στο Βήμα 1 θέτοντας  $s = s + 1$ .

## Φάση 2

Στην περίπτωση που πλέον δεν υπάρχουν άλλες θετικές τιμές  $k_{1j}, \dots, k_{sj}$  όλες οι υπόλοιπες λύσεις, που μπορούν να παραχθούν από τους πίνακες Simplex δίνουν  $z = z^* - k$ .



## Κεφάλαιο 2: Αλγόριθμοι εύρεσης λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης

Αυτά τα ακραία σημεία (λύσεις) μπορούν να βρεθούν εισάγοντας στη βάση μη βασικές μεταβλητές με  $\Delta_j^s > 0$ , που δεν έχουν ακόμα εισαχθεί στους πίνακες Simplex που έχουν παραχθεί μέχρι τώρα. Αυτές οι μεταβλητές παίρνουν τέτοιες τιμές ώστε οι λύσεις που θα παραχθούν, θα δίνουν τιμές στην αντικειμενική συνάρτηση ακριβώς ίσες με  $z^*-k$ .

Θέλουμε δηλαδή η μείωση της τιμής της  $z$  να είναι ίση με  $k_s$  για κάθε πίνακα Simplex  $s$ . Οπότε πρέπει να ισχύει:

$$k_s = \Delta_j^s \frac{x_{Br}^s}{a_{rj}^s} \Rightarrow \frac{k_s}{\Delta_j^s} = \frac{x_{Br}^s}{a_{rj}^s} \quad (2.14)$$

Από τον πίνακα 2.15 παρατηρούμε ότι η τιμή της νεοεισερχόμενης μεταβλητής δίνεται από τη σχέση  $x_j = \frac{x_{Br}}{a_{rj}}$ , οπότε σύμφωνα και με τη σχέση (2.14) έχουμε:

$$x_{Bj} = \frac{k_s}{\Delta_j^s} \quad (2.15)$$

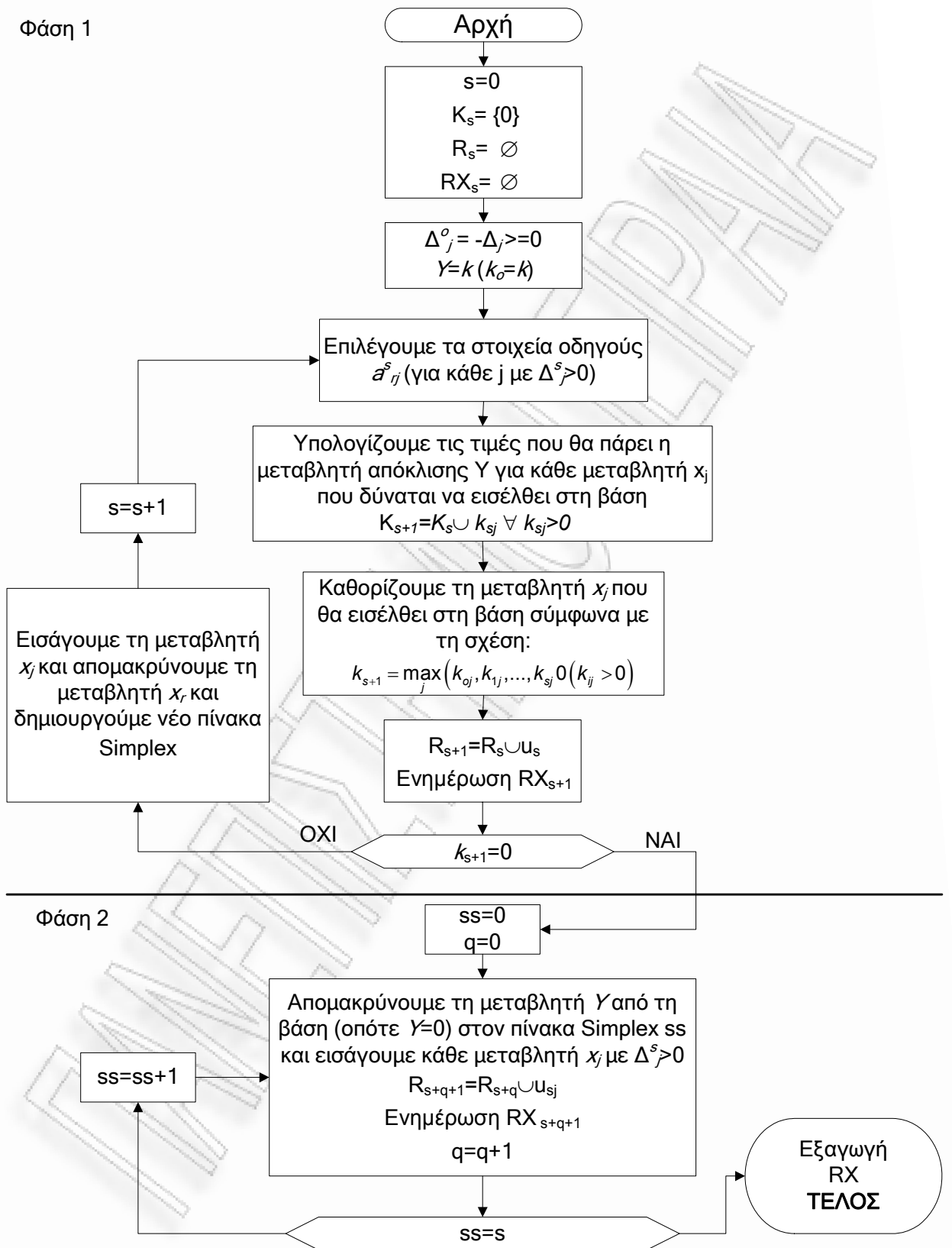
Ακόμα θα ισχύει για τις αντίστοιχες τιμές των βασικών μεταβλητών που παραμένουν στη βάση:

$$x_{Bi} = x_{Bi}^s - a_{ij}^s x_{Bj}, \quad \forall i \neq j \quad (2.16)$$

Στον κάθε πίνακα Simplex  $s$ , αυτές οι λύσεις μπορούν να παραχθούν απομακρύνοντας τη μεταβλητή  $Y$  από τη βάση (οπότε  $Y=0$ ) και εισάγοντας κάθε μεταβλητή  $x_j$  με  $\Delta_j^s > 0$ .

Επειδή καμία περαιτέρω επανάληψη δε χρειάζεται να πραγματοποιηθεί, δεν είναι απαραίτητο να παράγουμε όλα τα στοιχεία του πίνακα Simplex αυτών των λύσεων. Χρειάζεται μόνο να παραχθούν οι τιμές των βασικών μεταβλητών και πιθανώς οι τιμές των  $\Delta_j^{s+1}$ .

Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζεται το λογικό διάγραμμα του αλγορίθμου όπως υλοποιήθηκε στο ΣΥΑ:



Σχήμα 2-3: Λογικό Διάγραμμα Αλγόριθμου Αντίστροφης Simplex

Όλες οι μεταβέλτιστες λύσεις, που δίνουν διαφορετική τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση του γ.π. παράγονται ακολουθώντας αυτή τη μέθοδο και αυτό αποδεικνύεται ως ακολούθως. Από κάθε λύση που βρίσκουμε μπορούμε να φτάσουμε στη βέλτιστη λύση με ένα πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων της μεθόδου Simplex. Η μέθοδος της Αντίστροφης Simplex ξεκινώντας από τη βέλτιστη λύση κατά την αντίθετη κατεύθυνση εξετάζει κάθε λύση κατά φθίνουσα σειρά. Αν υπάρχει μονοπάτι που πηγαίνει προς τα πάνω, σίγουρα θα υπάρχει μονοπάτι που πηγαίνει και προς τα κάτω (Siskos, 1984; Van de Panne, 1975).

Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex θα χρησιμοποιήσουμε το παράδειγμα ΓΠ 2.1.

### Φάση 1

Θέτουμε  $s=0$ ,  $K_s=\{0\}$ ,  $R_s=\emptyset$  και  $RX_s=\emptyset$ .

Ο αρχικός πίνακας της Simplex συμβολίζεται ως 00 στον Πίνακα 2-18. Θεωρούμε  $k=20$ , οπότε εισάγουμε το νέο περιορισμό:  $3x_1+4x_2+5x_3+6x_4 \geq 56 \Rightarrow 3x_1+4x_2+5x_3+6x_4 - Y=56$ , και έστω:  $x_{\bar{1}} = x_5$ ,  $x_{\bar{2}} = x_6$  και  $Y = x_7$ .

Βήμα 0: Ο αλγόριθμος ξεκινάει από το βέλτιστο πίνακα όπου προσθέτουμε μία γραμμή που εκφράζει το νέο περιορισμό και τα στοιχεία της είναι οι αντίθετες τιμές των οριακών καθαρών εισοδημάτων ( $\Delta_j$ ) του βέλτιστου πίνακα. Ο πίνακας Simplex που προκύπτει είναι ο **s=0**.

Βήμα 1: Οι μεταβλητές που μπορούν να εισαχθούν στη βάση είναι αυτές οι οποίες αντιστοιχούν  $\Delta_j^s$  θετικά (τελευταία γραμμή του πίνακα Simplex). Στην περίπτωσή μας:  $x_1, x_5, x_3, x_6$ . Τα στοιχεία - οδηγού  $\alpha_{ij}^o$  βρίσκονται από τη σχέση (2.11):

$$\text{Για } j=1, \min\{16/1\}=16/1, \quad \alpha_{21}^o=1$$

$$\text{Για } j=5, \min\{16/1\}=16/1, \quad \alpha_{25}^o=1$$

$$\text{Για } j=3, \min \left\{ \begin{array}{l} 16 \\ \frac{1}{3} \end{array}, \begin{array}{l} 2 \\ \frac{2}{3} \end{array} \right\} = \frac{2}{\frac{2}{3}}, \quad \alpha_{43}^o=2/3$$

$$\text{Για } j=3, \min \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ \frac{1}{3} \end{array} \right\} = \frac{2}{\frac{1}{3}}, \quad \alpha_{46}^o=1/3$$

## Κεφάλαιο 2: Αλγόριθμοι εύρεσης λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης

**Βήμα 2:** Υπολογίζουμε τις τιμές  $k_{0j}$  από τη σχέση (2.12):

$$k_{01}=20-1 \times 16/1=4, \quad k_{05}=-44, \quad k_{03}=19, \quad k_{06}=16.$$

$$K_0=\{k_{01}, k_{03}, k_{06}, 0\}$$

**Βήμα 3:** Σύμφωνα με τη σχέση (2.13) έχουμε:

$$k_1=\max\{k_{01}, k_{03}, k_{06}, 0\}=k_{03}=19.$$

Οπότε η μεταβλητή  $x_3$  εισέρχεται στη νέα βάση και η σχεδόν βέλτιστη λύση δίνει τιμή στο  $z$  μειωμένη κατά μία μονάδα από τη βέλτιστη τιμή  $z^*$  ( $z=76-1=75$ ). Η τιμή  $k_{03}$  δε θα συμπεριληφθεί ξανά στο σύνολο της σχέσης (2.13).

$$R_1=\{(2,4,7)\}$$

**Βήμα 4:** Η είσοδος στη βάση της  $x_3$  και η έξοδος της  $x_4$  μας δίνει τον επόμενο πίνακα Simplex,  $n^{\circ}1$ .

**Θέτουμε  $s=1$**  και επιστρέφουμε στο Βήμα 1.

**Βήμα 1:** Οι μεταβλητές που μπορούν να εισαχθούν στη νέα βάση είναι:  $x_1, x_5, x_6$ . Τα στοιχεία - οδηγοί  $a^1_{ij}$  βρίσκονται από τη σχέση (2.11):

$$a^1_{21}=1 \quad a^1_{25}=1 \quad a^1_{36}=1/2$$

**Βήμα 2:** Υπολογίζουμε τις τιμές  $k_{1j}$  από τη σχέση (2.12):

$$k_{11}=4, \quad k_{15}=-41, \quad k_{16}=16.$$

$$K_1=\{k_{01}, k_{06}, k_{11}, k_{16}, 0\}$$

**Βήμα 3:** Σύμφωνα με τη σχέση (2.13) έχουμε:

$k_2=\max\{k_{01}, k_{06}, k_{11}, k_{16}, 0\}=16$  που αντιστοιχεί στις τιμές  $k_{06}$  και  $k_{16}$ . Οπότε μπορούμε να εισάγουμε τη μεταβλητή  $x_6$  μέσα στη βάση είτε από τον πίνακα Simplex  $n^{\circ}0$  είτε από το  $n^{\circ}1$ .

$$R_2=\{(2,4,7), (2,3,7)\}$$

**Βήμα 4:** Η είσοδος στη βάση του πίνακα  $n^{\circ}0$  της  $x_6$  και η έξοδος της  $x_4$  μας δίνει τον επόμενο πίνακα Simplex,  $n^{\circ}2$ .

**Θέτουμε  $s=2$**  και επιστρέφουμε στο Βήμα 1.

**Βήμα 1:** Οι μεταβλητές που μπορούν να εισαχθούν στη νέα βάση είναι:  $x_1, x_5$ . Τα στοιχεία - οδηγοί  $a^2_{ij}$  βρίσκονται από τη σχέση (2.11):

## Κεφάλαιο 2: Αλγόριθμοι εύρεσης λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης

$$a^2_{21}=1 \quad a^2_{25}=1$$

**Βήμα 2:** Υπολογίζουμε τις τιμές  $k_{2i}$  από τη σχέση 2.12):

$$k_{21}=-2, \quad k_{25}=-56.$$

$$K_2=\{k_{01}, k_{11}, 0\}$$

**Βήμα 3:** Σύμφωνα με τη σχέση 2.13) έχουμε:

$$k_3=\max\{k_{01}, k_{11}, 0\}=k_{01}=k_{11}=4$$

Οπότε μπορούμε να εισάγουμε τη μεταβλητή  $x_1$  μέσα στη βάση είτε από τον πίνακα Simplex n<sup>ο</sup>1 είτε από το n<sup>ο</sup>1.

$$R_3=\{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7)\}$$

**Βήμα 4:** Η είσοδος στη βάση του πίνακα n<sup>ο</sup>0 της  $x_1$  και η έξοδος της  $x_2$  μας δίνει τον επόμενο πίνακα Simplex, n<sup>ο</sup>3.

**Θέτουμε  $s=3$**  και επιστρέφουμε στο Βήμα 1.

**Βήμα 1:** Οι μεταβλητές που μπορούν να εισαχθούν στη νέα βάση είναι:  $x_3, x_5, x_6$ . Τα στοιχεία - οδηγού  $a^3_{ij}$  βρίσκονται από τη σχέση (2.11):

$$a^3_{15}=1 \quad a^3_{43}=2/3 \quad a^3_{46}=1/3$$

**Βήμα 2:** Υπολογίζουμε τις τιμές  $k_{3j}$  από τη σχέση 2.12):

$$k_{35}=-44, \quad k_{33}=4, \quad k_{36}=-2.$$

$$K_3=\{k_{33}, 0\}$$

**Βήμα 3:** Σύμφωνα με τη σχέση (2.13) έχουμε:

$$k_4=\max\{k_{33}, 0\}=k_{33}=4$$

Οπότε μπορούμε να εισάγουμε τη μεταβλητή  $x_3$  μέσα στη βάση από τον πίνακα Simplex n<sup>ο</sup>3.

$$R_4=\{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (1,4,7)\}$$

**Βήμα 4:** Η είσοδος στη βάση του πίνακα n<sup>ο</sup>3 της  $x_3$  και η έξοδος της  $x_4$  μας δίνει τον επόμενο πίνακα Simplex, n<sup>ο</sup>4.

**Θέτουμε  $s=4$**  και επιστρέφουμε στο Βήμα 1.

## Κεφάλαιο 2: Αλγόριθμοι εύρεσης λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης

**Βήμα 1:** Οι μεταβλητές που μπορούν να εισαχθούν στη νέα βάση είναι:  $x_5, x_6$ . Τα στοιχεία - οδηγοί  $a^4_{ij}$  βρίσκονται από τη σχέση (2.11):

$$a^4_{15}=1 \quad a^4_{36}=1/2$$

**Βήμα 2:** Υπολογίζουμε τις τιμές  $k_{4j}$  από τη σχέση (2.12):

$$k_{45} = -41, \quad k_{46} = -2.$$

$$K_4 = \{0\}$$

**Βήμα 3:** Σύμφωνα με τη σχέση (2.13) έχουμε:

$$k_5 = \max\{0\} = 0$$

$$R_5 = \{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (1,4,7), (1,3,7)\}$$

Πηγαίνουμε στη Φάση 2.

### **Φάση 2**

Έχουμε κρατήσει τους πίνακες Simplex n° 0, 1, 2, 3, 4 που κατασκευάσαμε στη Φάση 1 (Πίνακας 2-18) και εφαρμόζουμε τις σχέσεις (2.15) και (2.16) χωρίς να επαναλάβουμε τις ίδιες λύσεις με αυτές της Φάσης 1.

Οι νέες αυτές λύσεις αντιστοιχούν σε εισαγωγή στη βάση των  $x_j$  στη θέση της μεταβλητής  $Y(x_7)$ , η οποία αφού εξέρχεται από τη βάση μηδενίζεται ( $Y=0$ ), δίνοντάς μας σύμφωνα με την 2.15),  $z=z^*-k=56$ . Οκτώ νέες λύσεις υπολογίζονται στη Φάση 2 (Πίνακας 2-19, n° 5-12).

Η λύση n° 5 για παράδειγμα υπολογίζεται σύμφωνα με τις σχέσεις (2.15) και (1.16) από τον πίνακα Simplex n° 0 (όπου  $k_{05}<0$ ):

$$x_5 = 20/4 = 5, \quad x_2 = 16 - 1 \times 5 = 11, \quad x_4 = 2 - 0 \times 5 = 2$$

$$R_6 = \{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (1,4,7), (1,3,7), (5,2,4)\}$$

Παρόμοια υπολογίζεται και η λύση n° 6 από τον πίνακα Simplex n° 1 (όπου  $k_{15}<0$ ):

$$x_5 = 19/4, \quad x_2 = 15 - 1 \times 19/4 = 41/4, \quad x_3 = 3 - 0 \times 19/4 = 3$$

$$R_7 = \{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (1,4,7), (1,3,7), (5,2,4), (5,2,3)\}$$

Κεφάλαιο 2: Αλγόριθμοι εύρεσης λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης

Πίνακας Simplex (N°)	Βασικές Μεταβλητές	Μη Βασικές Μεταβλητές			
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
00	$x_5 = 18$	1	1	1	1
	$x_6 = 6$	0	0	2	3
		$x_1$	$x_5$	$x_3$	$x_6$
0	$x_2 = 16$	1	1	1/3	-1/3
	$x_4 = 2$	0	0	2/3	1/3
	$x_7 (Y) = 20$	1	4	1/3	2/3
	$k_{0j}$	4	-44	19	16
		$x_1$	$x_5$	$x_4$	$x_6$
1	$x_2 = 15$	1	1	-1/2	-1/2
	$x_3 = 3$	0	0	3/2	1/2
	$x_7 = 19$	1	4	-1/2	1/2
	$k_{1j}$	4	-41	-	16
		$x_1$	$x_5$	$x_3$	$x_4$
2	$x_2 = 18$	1	1	1	1
	$x_6 = 6$	0	0	2	3
	$x_7 = 16$	1	4	-1	-2
	$k_{2j}$	-2	-56	-	-
		$x_2$	$x_5$	$x_3$	$x_6$
3	$x_1 = 16$	1	1	1/3	-1/3
	$x_4 = 2$	0	0	2/3	1/3
	$x_7 = 4$	-1	3	0	1
	$k_{3j}$	-	-44	4	-2
		$x_2$	$x_5$	$x_4$	$x_6$
4	$x_1 = 15$	1	1	-1/2	-1/2
	$x_3 = 3$	0	0	3/2	1/2
	$x_7 = 4$	-1	3	0	1
	$k_{4j}$	-	-41	-	-2

Πίνακας 2-18: Πίνακας Φάσης A της μεθόδου της Αντίστροφης Simplex

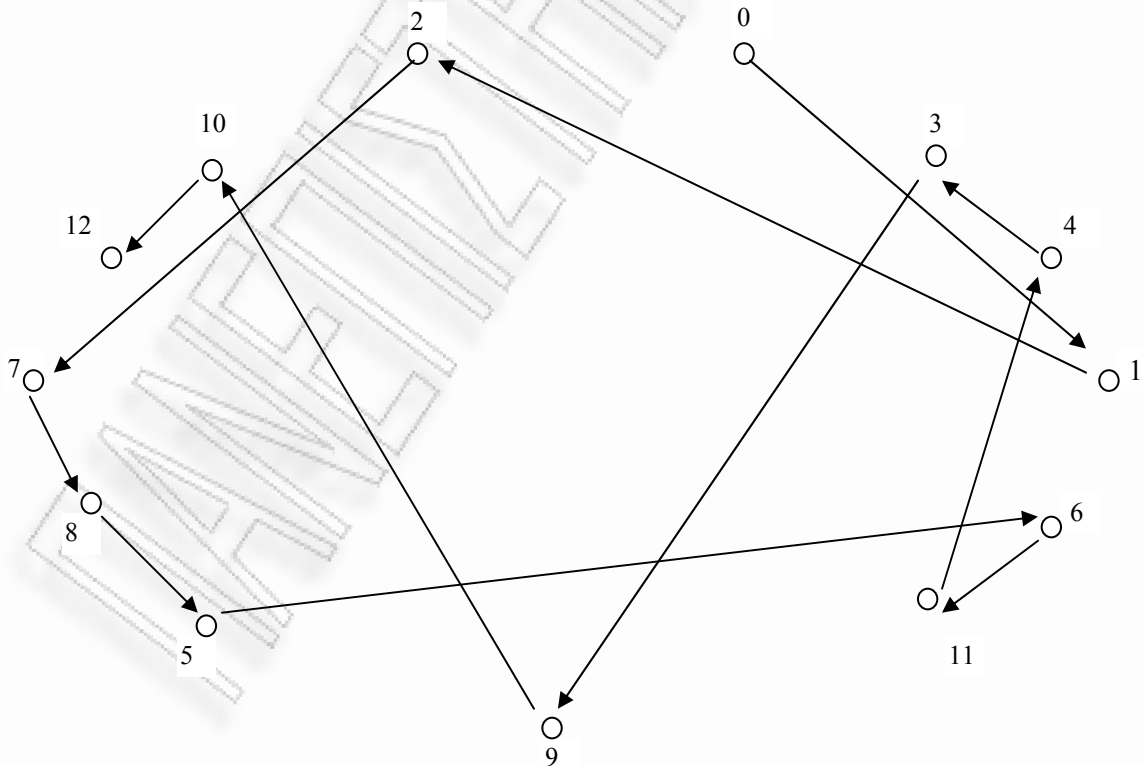
Ακολουθεί ο πίνακας με το σύνολο των 13 ιεραρχημένων λύσεων από τις φάσεις A και B της μεθόδου της Αντίστροφης Simplex.

Κεφάλαιο 2: Αλγόριθμοι εύρεσης λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης

Λύσεις N <sup>ο</sup>	Τιμή της z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
0	76	0	16	0	2	0	0
1	75	0	15	3	0	0	0
2	72	0	18	0	0	0	6
3	60	16	0	0	2	0	0
4	60	15	0	3	0	0	0
5	56	0	11	0	2	5	0
6	56	0	41/4	3	0	19/4	0
7	56	16	2	0	0	0	6
8	56	0	14	0	0	4	6
9	56	44/3	0	0	2	4/3	0
10	56	52/3	0	0	2/3	0	4
11	56	41/3	0	3	0	4/3	0
12	56	17	0	1	0	0	4

**Πίνακας 2-19:** Ιεραρχημένες βασικές λύσεις με τη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex

Μπορούμε τώρα να αποτυπώσουμε στο Σχήμα 2-4 τη σειρά με την οποία εκτιμήθηκαν οι παραπάνω 13 κορυφές-λύσεις του ΥΠ 2.1 μέσω του αλγορίθμου των Manas και Nedoma.



**Σχήμα 2-4:** Ο περίπατος του αλγορίθμου των Manas-Nedoma στις λύσεις 0-1-2-7-8-5-6-11-4-3-9-10-12



Η μέθοδος της Αντίστροφης Simplex χαρακτηρίζεται από το σχετικά γρήγορο έλεγχο των σχεδόν βέλτιστων λύσεων αφού κάθε επανάληψη του αλγορίθμου πραγματοποιείται από μία φορά. Ένα άλλο πλεονέκτημα της μεθόδου, ίσως το πιο σημαντικό, είναι ότι η αναζήτηση των λύσεων γίνεται βαθμιδών καθώς η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μειώνεται. Έτσι, μας δίνεται η δυνατότητα να μελετήσουμε την ευστάθεια της βέλτιστης λύσης ενός γραμμικού προγράμματος για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου  $k$ . Είναι λυπηρό το γεγονός ότι η μέθοδος της Αντίστροφης Simplex (σε αυτή ακριβώς τη μορφή της) δε μας εγγυάται την εξαντλητική αναζήτηση όλων των κορυφών του υπερπολυέδρου ΥΠ 1.2.

Με τη μέθοδο αυτή, επιτρέπεται στους αναλυτές, κυρίως γραμμικών προγραμμάτων μεγάλων διαστάσεων, να αποκτήσουν αρχικά τις σχεδόν βέλτιστες λύσεις τις λιγότερο απομακρυσμένες από τη βέλτιστη  $z^*$ , έτσι ώστε να έχουν τη δυνατότητα να σταματήσουν την αναζήτηση των υπολοίπων λύσεων-κορυφών του ΥΠ 1.2 σε μία δεδομένη στιγμή.

Το βασικό μειονέκτημα της μεθόδου είναι ο μεγάλος χώρος μνήμης που καταλαμβάνουν στον υπολογιστή όλοι οι πίνακες Simplex που παρήχθησαν κατά την εκτέλεση της πρώτης φάσης. Στο παράδειγμα που παρουσιάσαμε χρειάζεται η αποθήκευση πέντε πινάκων Simplex παρόλο που το γραμμικό πρόγραμμα είναι πολύ μικρών διαστάσεων. Υπάρχουν κάποιες τεχνικές που μειώνουν τις απαιτήσεις σε μνήμη αλλά από την άλλη μεριά αυξάνουν τον όγκο των υπολογισμών (Siskos, 1984).

### **2.3.4 Ένας Ευρετικός Αλγόριθμος**

Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν στην § 1.2.3, ο αριθμός των κορυφών του υπερπολυέδρου των πολλαπλών ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων είναι συχνά μεγάλος και η εξαντλητική αναζήτησή τους απαιτεί τεράστιο υπολογιστικό φόρτο. Οι ευρετικές μέθοδοι προσφέρουν μια πολύ καλή διέξοδο στο πρόβλημα αναζήτησης των χιλιάδων λύσεων που πολλές φορές είναι ουσιαστικά αδιάφορες για τον αναλυτή. Συχνότερα μπορεί να ενδιαφέρεται μόνο για τις πληροφορίες εκείνες που θα τον βοηθήσουν να εξετάσει την ευστάθεια της βέλτιστης λύσης μας ή τη στατιστική διασπορά των υπολοίπων λύσεων. Για παράδειγμα σύμφωνα με τον Siskos (1984) η ανάλυση ευστάθειας μπορεί να πραγματοποιηθεί με την επίλυση γραμμικών προγραμμάτων (γ.π.) του τύπου:

$$(ΓΠ 2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\max] \text{ ή } [\min] \psi = \sum_{j=1}^n p_j x_j \\ \text{υ.π.} \\ \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^t \mathbf{x} \geq z^* - k \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \right.$$

όπου  $p_j, j=1,2,\dots,n$  αριθμητικοί συντελεστές που επιλέγονται κατάλληλα για τον προσδιορισμό χαρακτηριστικών πολλαπλών (για  $k=0$ ) ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων. Αν θέσουμε  $p_i=1$  και  $p_j=0$  για  $j \neq i$  θα προσδιοριστούν οι σχεδόν βέλτιστες λύσεις που μεγιστοποιούν και ελαχιστοποιούν την τιμή της μεταβλητής  $x_i$ .

Η επίλυση του παραπάνω γραμμικού προγράμματος μπορεί να επιτευχθεί με απαρχή το βέλτιστο πίνακα Simplex του αρχικού γραμμικού προγράμματος. Με τον τρόπο αυτό θα επιτευχθεί πολύ μεγάλη οικονομία στον υπολογιστικό φόρτο δεδομένου ότι σε αντίθετη περίπτωση θα έπρεπε να υλοποιηθούν ξανά και ξανά το σύνολο των βημάτων της Simplex που μας οδηγούν στον υπολογισμό λύσεων που βρίσκονται κοντά στην βέλτιστη λύση.

Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε την αρχική βέλτιστη λύση θα πρέπει να υλοποιηθεί ένας αλγόριθμος που θα χρησιμοποιεί έναν επαυξημένο πίνακα Simplex με την προσθήκη του νέου περιορισμού όπως αυτός εμφανίζεται στο ΓΠ 2.2. Απομένει λοιπόν να προσδιοριστούν οι συντελεστές των στοιχείων του επαυξημένου πίνακα με την προσθήκη του νέου περιορισμού:

$$\mathbf{c}^t \mathbf{x} - Y = z^* - k \quad (2.17)$$

όπου  $Y$  είναι η μεταβλητή απόκλισης του περιορισμού αυτού.

Το σύστημα των περιορισμών του γραμμικού προγράμματος (ΓΠ 2.2) γράφεται ως:

$$Y - \mathbf{c}^t \mathbf{x} = -(z^* - k) \quad (2.18)$$

$$\mathbf{A}' \mathbf{x} + \mathbf{I} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, Y \geq 0$$

όπου  $\bar{\mathbf{x}}$  το διάνυσμα των μεταβλητών απόκλισης του αρχικού γ.π. μεγιστοποίησης.

Το παραπάνω σύστημα μπορεί να γραφεί σε μορφή μήτρας ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{c}^t & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{A}' & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z^* + k \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Εφ' όσον ο πρόσθετος περιορισμός επαληθεύεται από τη βέλτιστη λύση  $\mathbf{x}^*$  του αρχικού γ.π. η μεταβλητή  $Y$  είναι βασική. Η τιμή της σύμφωνα με τη σχέση (2.18) θα είναι:

$$Y = \mathbf{c}^t \mathbf{x}^* - (z^* - k) = z^* - z^* + k \Rightarrow Y = k \quad (2.20)$$

Η επαυξημένη βάση γράφεται:

$$\mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{c}_B^t \\ 0 & \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

όπου  $\mathbf{c}_B$  το διάνυσμα των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχούν σε βασικές μεταβλητές του βέλτιστου πίνακα Simplex του αρχικού γ.π. και  $\mathbf{B}$  η βάση του αρχικού γ.π..

Από τη σχέση  $\mathbf{B}_o \mathbf{B}_o^{-1} = \mathbf{I}$  υπολογίζουμε  $\mathbf{B}_o^{-1}$  την που είναι η αντίστροφη της επαυξημένης βάσης και για την οποία έχουμε:

$$\mathbf{B}_o^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B^t \mathbf{B}^{-1} \\ 0 & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Ξέρουμε ότι για κάθε βασική λύση ισχύει: (Παράρτημα I, σχέση (Π.1.4))

$$\mathbf{I} \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{x}' = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \quad \text{ή} \quad \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$$

Στην περίπτωση μας η επαυξημένη μήτρα  $\mathbf{A}_o$  ισούται με:

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{c}^t & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{A}' & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

όπου  $\mathbf{c}^t$  το διάνυσμα των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχούν σε μη βασικές μεταβλητές του αρχικού πίνακα Simplex του αρχικού γ.π..

Οι συντελεστές του βέλτιστου πίνακα Simplex που αντιστοιχούν στο νέο περιορισμό (1<sup>η</sup> γραμμή) υπολογίζονται απλά από το γινόμενο:

$$\mathbf{B}_o^{-1} \mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B^t \\ 0 & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{c}^t & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{A}' & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B^t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{c}^t & \mathbf{c}_B^t \mathbf{B}^{-1} \\ 0 & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Από τη σχέση (Π.1.9) του Παραρτήματος I έχουμε ότι:

$$\mathbf{c}_B^t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}' - \mathbf{c}^t = -\Delta'$$

όπου  $\Delta'$  το διάνυσμα των οριακών καθαρών εισοδημάτων που αντιστοιχούν στις μη βασικές μεταβλητές του αρχικού πίνακα Simplex του αρχικού γ.π. και

$$c_B^t B^{-1} - \theta = -\Delta$$

όπου  $\Delta$  το διάνυσμα των οριακών καθαρών εισοδημάτων που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές του αρχικού πίνακα Simplex, δηλαδή στις μεταβλητές απόκλισης του αρχικού γ.π. οι οποίες έχουν μηδενικούς συντελεστές στην αντικειμενική συνάρτηση.

Επομένως, **οι συντελεστές του νέου περιορισμού στον αρχικό βέλτιστο πίνακα Simplex είναι οι αντίθετες τιμές των καθαρών οριακών εισοδημάτων**, για τις οποίες ισχύει:

$$-\Delta' \geq 0 \quad (2.25)$$

$$-\Delta \geq 0 \quad (2.26)$$

Παρόμοια, για το δεύτερο μέλος ισχύει:

$$\begin{aligned} B_o^{-1} b_o &= \begin{bmatrix} 1 & -c_B^t \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(z^* - k) \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B^t B^{-1} b - z^* + k \\ B^{-1} b \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} c_B^t x_B^* - z^* + k \\ x_B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^* - z^* + k \\ x_B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ x_B^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Συμπεπώς, **η τιμή για τη μεταβλητή  $Y$ , στο βέλτιστο πίνακα Simplex του αρχικού γ.π., είναι  $k$**  (Siskos, 1984).

Σύμφωνα με τις σχέσεις 2.24 – 2.27 και αν υποθέσουμε ότι κατά την επανάληψη  $p$  έχουμε λάβει το βέλτιστο πίνακα Simplex (Πίνακας 2-14) τότε ο νέος επαυξημένος πίνακας Simplex θα έχει τη μορφή του Πίνακα 2-20.

Ο ευρετικός αλγόριθμος όπως υλοποιήθηκε στο ΣΥΑ που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 6 αποτελείται από πέντε βασικά βήματα που απαιτούνται για την εύρεση των μεταβέλτιστων λύσεων.

**Βήμα 0:** Επίλυση του αρχικού ΓΠ και εύρεση της βέλτιστης λύσης  $u_o$ .

**Βήμα 1:** Διαβάζουμε τις διαστάσεις του προβλήματος (αριθμός περιορισμών, μεταβλητών) και υπολογίζουμε το μέγιστο αριθμό λύσεων ως  $2 \times n$ . Ορίζουμε τους απαραίτητους πίνακες και διαβάζουμε τα στοιχεία του πίνακα Simplex της λύσης  $u_o$ . Επίσης προσθέτουμε τον νέο περιορισμό όπως παρουσιάζεται στον επαυξημένο πίνακα Simplex.

Κεφάλαιο 2: Αλγόριθμοι εύρεσης λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης

$c_{oB}$	Βάση	1	...	k	...	r	...	m+n	$x_B$
$c_{B1}$	1	1	...	$y_{1k}$	...	0	...	$y_{1(m+n)}$	$x_{B1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$c_{Br}$	r	0	...	$y_{rk}$	...	1	...	$y_{r(m+n)}$	$x_{Br}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$c_{Bj}$	j	0	...	$y_{jk}$	...	0	...	$y_{j(m+n)}$	$x_{Bj}$
0	$\gamma$	-	...	$-\Delta k$	...	-	...	$-\Delta n$	k
$c_j$		$c_1$	...	$c_k$	...	$c_r$	...	$c_n$	
$\Delta_j$		-	...	$\Delta k$	...	-	...	$\Delta n$	Z

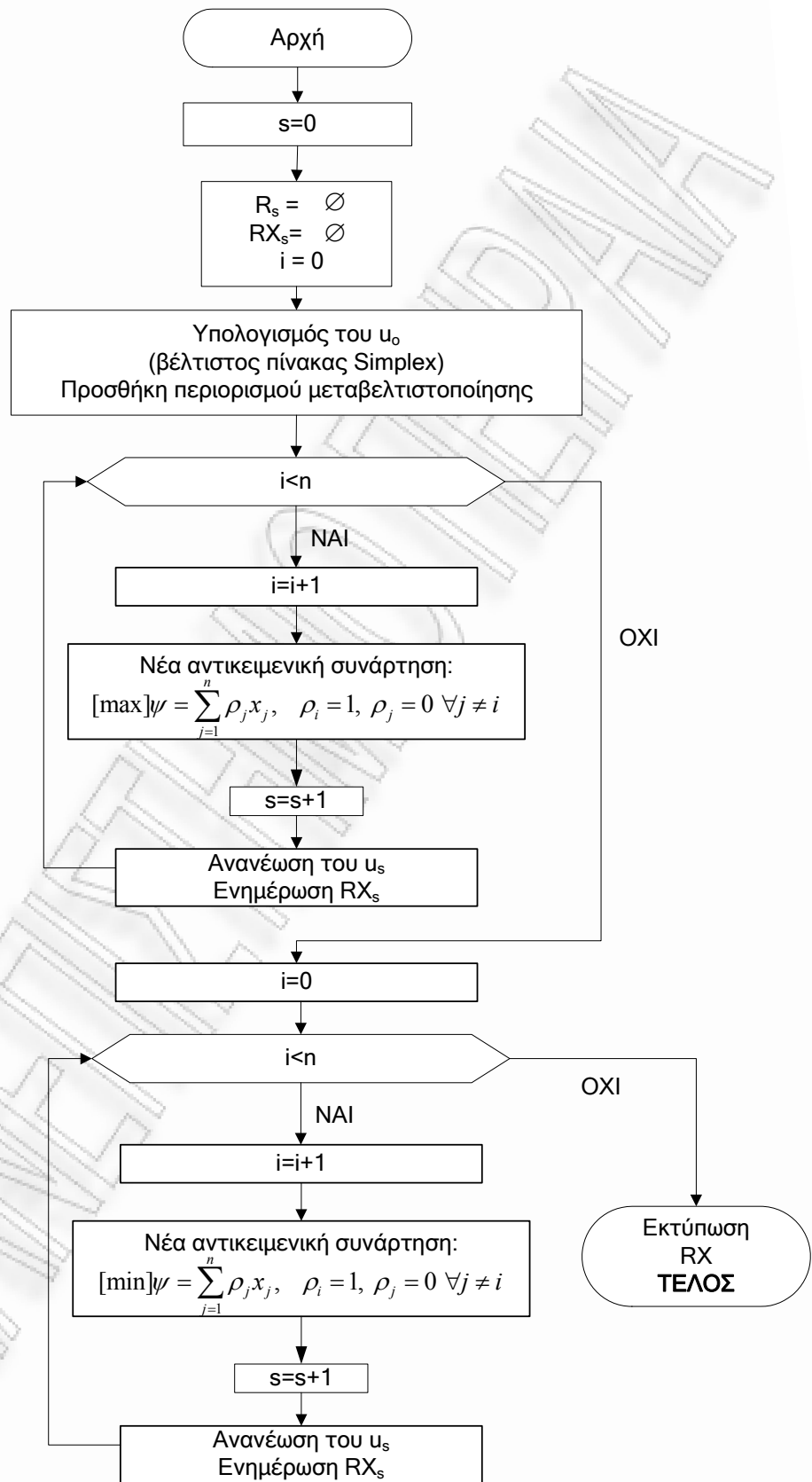
Πίνακας 2-20: Επαυξημένος Πίνακας Simplex

**Βήμα 2:** Υπολογίζουμε τις λύσεις των  $n$  γ.π. (ΓΠ 2.1) για  $[\max] \psi$  με  $n$  διαφορετικές αντικειμενικές συναρτήσεις. Ενημερώνουμε το σύνολο λύσεων R με το διάνυσμα των δεικτών των βασικών μεταβλητών της τρέχουσας λύσης καθώς και το σύνολο RX με το διάνυσμα των τιμών  $x_B$ .

**Βήμα 3:** Υπολογίζουμε τις λύσεις των  $n$  γ.π. (ΓΠ 2.1) για  $[\min] \psi$  με  $n$  διαφορετικές αντικειμενικές συναρτήσεις. Ενημερώνουμε το σύνολο λύσεων R με το διάνυσμα των δεικτών των βασικών μεταβλητών της τρέχουσας λύσης καθώς και το σύνολο RX με το διάνυσμα των τιμών  $x_B$ .

**Βήμα 4:** Εξαγωγή των λύσεων των  $2 \times n$  γ.π.

Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζεται το λογικό διάγραμμα του αλγορίθμου όπως υλοποιήθηκε στο ΣΥΑ:



Σχήμα 2-5: Λογικό Διάγραμμα Ευρετικού Αλγόριθμου

Κεφάλαιο 2: Αλγόριθμοι εύρεσης λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης

Χρησιμοποιώντας πάλι το υπερπολύεδρο ΥΠ.1.2 θα παρουσιαστεί μέσω του παραδείγματος η διαδικασία υλοποίησης του αλγορίθμου.

$$\text{ΥΠ 2.1} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 18 \\ 2x_3 + 3x_4 \leq 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \geq 56 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array} \right.$$

Ας υποθέσουμε ότι αναζητούμε εκείνη τη σχεδόν βέλτιστη λύση που μεγιστοποιεί την τιμή της μεταβλητής  $x_1$  ( $p_1=1, p_2=p_3=p_4=0$ ). Χρησιμοποιώντας τη νέα μεταβλητή απόκλισης  $Y = z - 56 \geq 0$  και παίρνοντας σαν απαρχή τον παραπάνω βέλτιστο πίνακα Simplex, όπου συντελεστές του νέου περιορισμού είναι οι αντίθετες τιμές των οριακών καθαρών εισοδημάτων και το  $Y^*$  ισούται με την ποσότητα  $k = 20$ , καταλήγουμε εύκολα στη ζητούμενη λύση ( $x_1=52/3, x_2=0, x_3=0, x_4=2/3, x_1=0, x_2=4$ ) μετά από 2 αλλαγές βάσης. Οι υπολογισμοί δίνονται παρακάτω:

$c_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	Y	$x_B$
0	2	1	1	1/3	0	1	-1/3	0	16
0	4	0	0	2/3	1	0	1/3	0	2
0	Y	1	0	1/3	0	4	2/3	1	20

0

$$c_j \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\Delta_j \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad z=0$$

$c_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	Y	$x_B$
1	1	1	1	1/3	0	1	-1/3	0	16
0	4	0	0	2/3	1	0	1/3	0	2
0	Y	0	-1	0	0	3	1	1	4

1

$$c_j \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\Delta_j \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & -1 & -1/3 & 0 & -1 & 1/3 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad z=16$$

Κεφάλαιο 2: Αλγόριθμοι εύρεσης λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης

$c_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	Y	$x_B$
1	1	1	2/3	1/3	0	2	0	1/3	52/3
0	4	0	1/3	2/3	1	-1	0	1/3	2/3
0	$\bar{2}$	0	-1	0	0	3	1	1	4
$c_j$		1	0	0	0	0	0	0	
$\Delta_j$		0	-2/3	-1/3	0	-2	0	-1/3	z = 52/3

Υπολογίζοντας αντίστοιχα τις υπόλοιπες λύσεις για max και min των  $p_j, j=1,2,\dots,n$  στο ΓΠ 2.2 έχουμε τον παρακάτω πίνακα για τις  $2 \times n = 8$  μεταβελτιστες λύσεις:

Μεταβλητές	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	z	Y
ΓΠ (i)						
max $x_1$ (i=1)	17.33	0.00	0.00	0.67	17.33	0.00
max $x_2$ (i=2)	0.00	18.00	0.00	0.00	18.00	16.00
max $x_3$ (i=3)	0.00	15.00	3.00	0.00	3.00	19.00
max $x_4$ (i=4)	0.00	16.00	0.00	2.00	2.00	20.00
min $x_1$ (i=5)	0.00	16.00	0.00	2.00	0.00	20.00
min $x_2$ (i=6)	13.67	0.00	3.00	0.00	0.00	0.00
min $x_3$ (i=7)	15.07	0.00	0.00	1.80	0.00	0.00
min $x_4$ (i=8)	15.71	0.86	1.08	0.00	0.00	0.00

Πίνακας 2-21: Αποτελέσματα Ευρετικού Αλγορίθμου



## Κεφάλαιο 3: Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση

Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά προτείνεται μία ρεαλιστική προσέγγιση του προβλήματος της μεταβελτιστοποίησης με την ανάπτυξη ενός αλγορίθμου που είναι οικονομικός από άποψη υπολογιστικού φόρτου και που εγγυάται την εφικτή εύρεση, αν όχι όλων, τουλάχιστον ενός πολύ μεγάλου ποσοστού των πιθανών μεταβελτιστων λύσεων.

Ο όρος 'ρεαλιστική προσέγγιση' ισοδυναμεί με την εφαρμογή ενός αλγορίθμου εύρεσης των πολλαπλών ή των ημιβέλτιστων λύσεων ενός γραμμικού προγράμματος, που χαρακτηρίζεται: i) από ορθή διαχείριση της μνήμης του υπολογιστή, ii) από τον περιορισμό του όγκου των απαιτούμενων υπολογισμών και iii) από την εύρεση, αν όχι όλων, τότε όσο το δυνατόν περισσότερων πολλαπλών ή ημιβέλτιστων λύσεων.

Με δεδομένη την βασική απαίτηση των αναλυτών, κυρίως γραμμικών προγραμμάτων μεγάλων διαστάσεων, για εξαντλητική αναζήτηση όλων των πολλαπλών ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων στον ελάχιστο δυνατό χρόνο ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε έχει σα βάση του τη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex ελαττώνοντας όμως τις απαιτήσεις σε μνήμη στο ελάχιστο, αφού χρειάζεται σε κάθε επανάληψη του η αποθήκευση ενός και μοναδικού πίνακα Simplex. Παράλληλα αποδεικνύεται ότι η εφαρμογή του αλγορίθμου απαιτεί σαφώς μικρότερο αριθμό υπολογισμών σε σύγκριση με τον αλγόριθμο των Manas-Nedoma. Έτσι επιτυγχάνεται ταχύτερη αναζήτηση των μεταβελτιστων λύσεων, ενώ παράλληλα αυξάνεται η πιθανότητα εύρεσης περισσότερων των λύσεων σε σύγκριση με τη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex.

### 3.1 Περιγραφή του Αλγορίθμου

Σε συνέχεια των όσων παρουσιάστηκαν στις § 2.3.2 και § 2.3.3, σχετικά με τον αλγόριθμο των Manas και Nedoma και τη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex, στο παρόν κεφάλαιο θα γίνει παρουσίαση μιας ρεαλιστικής προσέγγισης του προβλήματος της μεταβελτιστοποίησης των γραμμικών προγραμμάτων.

Ο όρος **‘ρεαλιστική προσέγγιση’** ισοδυναμεί με την εφαρμογή ενός αλγορίθμου εύρεσης των πολλαπλών ή των ημιβέλτιστων λύσεων ενός γραμμικού προγράμματος, που θα έχει τα εξής χαρακτηριστικά: i) ορθή διαχείριση της μνήμης του υπολογιστή, ii) τον περιορισμό του όγκου των απαιτούμενων υπολογισμών και iii) από την εύρεση, αν όχι όλων, τότε όσο το δυνατόν περισσότερων πολλαπλών ή ημιβέλτιστων λύσεων.

Όπως σχολιάστηκε και στην § 2.3.3 το βασικό μειονέκτημα της μεθόδου της Αντίστροφης Simplex είναι οι μεγάλες απαιτήσεις σε μνήμη ώστε να αποθηκεύονται στον υπολογιστή όλοι οι πίνακες Simplex που παράγονται κατά την εκτέλεση της πρώτης φάσης της μεθόδου. Από την άλλη μεριά η εφαρμογή του αλγορίθμου των Manas και Nedoma απαιτεί την πραγματοποίηση μεγάλου αριθμού υπολογισμών.

Βασική απαίτηση των αναλυτών, κυρίως γραμμικών προγραμμάτων μεγάλων διαστάσεων είναι η εξαντλητική αναζήτηση όλων των πολλαπλών ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων στον ελάχιστο δυνατό χρόνο. Ο αλγόριθμος που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια έχει σα βάση του τη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex ελαττώνοντας όμως τις απαιτήσεις σε μνήμη στο ελάχιστο, αφού χρειάζεται σε κάθε επανάληψη του η αποθήκευση ενός και μοναδικού πίνακα Simplex. Παράλληλα η εφαρμογή του αλγορίθμου, όπως θα δειχθεί, απαιτεί σαφώς μικρότερο αριθμό υπολογισμών σε σύγκριση με τον αλγόριθμο των Manas και Nedoma.

Έτσι επιτυγχάνεται ταχύτερη αναζήτηση των μεταβέλτιστων λύσεων, ενώ παράλληλα ελαττώνεται η πιθανότητα μη εύρεσης όλων των λύσεων σε σύγκριση με τη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex, από τη στιγμή που η αναζήτηση βασικών δυνατών λύσεων συνεχίζεται και μετά τη στιγμή που η μεταβλητή  $Y$  (βλ. Σχέση (2-17)) βγαίνει εκτός βάσης, δηλαδή όταν  $z=z^*-k$ .

Ο αλγόριθμος που προτείνεται εκτελείται ως ακολούθως:

Ξεκινάμε από τον βέλτιστο πίνακα Simplex που αντιστοιχεί στην λύση  $u_0^*$ . Η λύση αυτή αποτελεί το μοναδικό στοιχείο του συνόλου  $R_s=R_0$ . Το  $R_0$  είναι το πρώτο σύνολο από μία ακολουθία συνόλων  $(R_0, R_1, R_2, \dots)$  που περιλαμβάνει τις λύσεις που έχουν ήδη υπολογιστεί. Αντίστοιχα δημιουργούμε μία ακολουθία  $RX_s$  η οποία περιέχει τα διανύσματα  $(x_{B1}, x_{B2}, \dots, x_{Bm})$  για κάθε λύση  $u_s$ .

### Κεφάλαιο 3: Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση

Στο βέλτιστο πίνακα Simplex προσθέτουμε μία νέα γραμμή που αντιστοιχεί στον περιορισμό  $z-Y = z^*-k$  όπου  $k$  μία θετική ποσότητα που εκφράζει την παραχώρηση στην οποία είναι διατεθειμένος να προχωρήσει ο αναλυτής, σύμφωνα με την § 2.3.4. Έστω ότι έχουμε κατασκευάσει σύμφωνα με τα παραπάνω τον πίνακα  $s=0$  (Πίνακας 3-2).

Στη συνέχεια βρίσκουμε τις γειτονικές βασικές δυνατές λύσεις από τον πίνακα  $s$  και οι οποίες αποτελούν τα στοιχεία του συνόλου  $W_s$  που περιλαμβάνει τις λύσεις εκείνες που δεν έχουμε ακόμα υπολογίσει αλλά που μπορούν να υπολογιστούν ξεκινώντας από τον πίνακα  $s$  πραγματοποιώντας μία και μόνη επανάληψη του αλγορίθμου Simplex. Με τον όρο 'υπολογίζουμε' εννοούμε τον καθορισμό των συντεταγμένων των αντίστοιχων διανυσμάτων των βασικών δυνατών λύσεων του γραμμικού μας προγράμματος. Κάθε λύση που υπολογίζουμε την αφαιρούμε από το σύνολο  $W_s$  και την προσθέτουμε στο σύνολο  $R_s$ . Μετά από ορισμένο αριθμό επαναλήψεων θα έχουμε υπολογίσει όλες τις λύσεις του συνόλου  $W_s$ , οπότε το σύνολο  $W_s$  θα είναι κενό ( $W_s = \emptyset$ ).

Τότε επιλέγουμε από τις ήδη υπολογισμένες λύσεις εκείνη την οποία μας δίνει την μεγαλύτερη τιμή  $z$  και για την οποία δεν έχουμε υπολογίσει ακόμα τον πίνακα Simplex που της αντιστοιχεί. Αν αυτή η λύση είναι γειτονική του πίνακα  $s$  υπολογίζουμε τον πίνακα  $s+1$  εισάγοντας στη βάση του πίνακα  $s$  το διάνυσμα που αντιστοιχεί στη μεταβλητή εκείνη, που δεν περιέχεται στη λύση  $u_s$ , αλλά περιέχεται στη γειτονική της λύση που έχουμε ήδη επιλέξει.

Σε περίπτωση που δεν είναι γειτονική η συγκεκριμένη λύση, πραγματοποιούμε τις απαραίτητες αλλαγές βάσεων μέχρι να υπολογίσουμε τον πίνακα  $s+1$  που θα αντιστοιχεί στη λύση που επιλέξαμε.

Ο αλγόριθμος περατώνεται εφόσον μετά τον υπολογισμό κάποιου πίνακα  $s+1$  διαπιστώσουμε ότι δεν υπάρχουν κάποιες γειτονικές λύσεις που να μην έχουμε ήδη υπολογίσει, έχοντας όμως προηγουμένως ήδη υπολογίσει όλες τις λύσεις για τις οποίες  $z > z^*-k$ , δηλαδή λύσεις στις οποίες περιέχεται η μεταβλητή απόκλισης  $Y$ .

Προκειμένου να προχωρήσουμε στην εκτέλεση του αλγορίθμου θα πρέπει να ορίσουμε κάποια μεγέθη σε αντιστοιχία με τα μεγέθη που ορίσαμε στην § 2.3.2.

- 1)  $u_s$ : Η λύση που αντιστοιχεί στον πίνακα Simplex με δείκτη  $s$ .
- 2)  $u_{sj}$ : Οι λύσεις που γειτονεύουν με τη λύση  $u_s$ . Με τον όρο 'γειτονεύουν' εννοούμε ότι μπορούν να υπολογιστούν ξεκινώντας από τον πίνακα Simplex  $s$  εκτελώντας ένα και μόνο βήμα του αλγορίθμου Simplex. Οι  $u_{sj}$  είναι διανύσματα διάστασης  $m+1$  των οποίων τα στοιχεία είναι ακέραιοι αριθμοί (δείκτες των διανυσμάτων των βάσεων της Simplex).  $u_{sj} = (i_1, i_2, \dots, i_m, i_{m+1})$  με  $1 \leq i_j \leq m+1, j=1, 2, \dots, m, m+1$ .

### Κεφάλαιο 3: Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση

- 3)  $u_{sj}$ : Το διάνυσμα των συντεταγμένων της  $u_{sj}$ .
- 4)  $R_s$ : Το σύνολο των λύσεων  $u_{sj}$  που έχουμε ήδη υπολογίσει μέχρι και τη στιγμή παραγωγής του πίνακα Simplex με δείκτη  $s$ .
- 5)  $RX_s$ : Το σύνολο που περιέχει τα διανύσματα  $(x_{B1}, x_{B2}, \dots, x_{Bm+1})$  των λύσεων  $u_{sj}$  που έχουμε ήδη υπολογίσει μέχρι και τη στιγμή παραγωγής του πίνακα Simplex με δείκτη  $s$ .
- 6)  $N_s$ : Το σύνολο των τιμών  $x_{Bm+n+1}^s$  για κάθε  $u_{sj}$ , εφόσον η  $x_{Bm+n+1}$  είναι βασική μεταβλητή. (Δηλ. για τις  $u_{usj}$  όπου  $x_{Bm+n+1} \in u_{sj}$ .)
- 7)  $K_s$ : Το σύνολο των λύσεων  $u_{sj}$  στις οποίες η μεταβλητή  $x_{Bm+n+1}$  δεν είναι βασική. Κάθε φορά που υπολογίζουμε ένα νέο πίνακα το  $K_s$  γίνεται κενό ( $K_s = \emptyset$ )
- 8)  $\Gamma(u_s)$ : Το σύνολο των λύσεων που γειτονεύουν με τη λύση  $u_s$ .
- 9)  $W(u_s)$ : Το σύνολο των λύσεων που γειτονεύουν με τη λύση  $u_s$  και δεν έχουμε ακόμα υπολογίσει.
- 10)  $d$ : Η απόσταση όπως ακριβώς την ορίσαμε στην § 2.3.2.
- 11)  $Y_{sj}$ : Η τιμή της μεταβλητής απόκλισης  $Y$  που αντιστοιχεί στη λύση  $u_{sj}$ .

Πιο συγκεκριμένα ο αλγόριθμος έχει ως εξής:

Έστω το παρακάτω γ.π. που οριοθετείται από το υπερπολύεδρο ΥΠ 1.2:

$$\text{ΥΠ 1.2} \begin{cases} \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{c}'\mathbf{x} \geq z^* - k \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}$$

όπου  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{b}$  και  $\mathbf{c}$  είναι πίνακες διαστάσεων  $m \times n$ ,  $n \times 1$ ,  $m \times 1$  και  $n \times 1$  αντίστοιχα (αναφερόμαστε πάντα για την περίπτωση μεγιστοποίησης).

Όταν το  $k$  είναι θετικός αριθμός το ΥΠ 1.2 οριοθετεί τις ημιβέλτιστες λύσεις ενός γ.π. τύπου ΓΠ 1.1. Όταν  $k=0$  το ΥΠ 1.2 οριοθετεί τις πολλαπλές βέλτιστες λύσεις. Έστω ακόμα ο πίνακας Simplex της βέλτιστης λύσης του ΓΠ 1.1:

Βάση	Μη Βασικές Μεταβλητές	Βασικές Μεταβλητές	Τιμές Βασικών Μεταβλητών
$x_1$	$a_{1l} \dots a_{1j} \dots$	$1 \dots 0 \dots 0 \dots 0$	$x_{B1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_i$	$a_{il} \dots a_{ij} \dots$	$0 \dots 1 \dots 0 \dots 0$	$x_{Bi}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_r$	$a_{rl} \dots a_{rj} \dots$	$0 \dots 0 \dots 1 \dots 0$	$x_{Br}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_m$	$a_{ml} \dots a_{mj} \dots$	$0 \dots 0 \dots 0 \dots 1$	$x_{Bm}$
Οριακά Καθαρά Εισοδήματα	$\Delta_l \dots \Delta_j \dots$	$0 \dots 0 \dots 0 \dots 0$	$z=z^*$

Πίνακας 3-1: Ο πίνακας Simplex της βέλτιστης λύσης του ΓΠ 1.1

**Βήμα 0:** Ξεκινάμε από τον πίνακα Simplex της βέλτιστης λύσης και προσθέτουμε τον περιορισμό (2.17),  $z - Y = z^* - k$ , όπου  $Y$  η μεταβλητή απόκλισης.

Για εξυπηρέτησή μας θα θέσουμε:  $Y = x_{m+n+1}$  (3.1),  $x_i = x_{n+1}$  με  $i=1, \dots, m$  όπου  $x_i$  η μεταβλητή απόκλισης του  $i$  περιορισμού.

Οι συντελεστές του νέου περιορισμού στον βέλτιστο πίνακα Simplex είναι οι αντίθετες τιμές των καθαρών οριακών εισοδημάτων. (βλ. § 2.3.4). Οπότε θα ισχύει:

$$a_{m+n+1j}^o = -\Delta_j \quad \forall j \quad (3.2)$$

Για τα διανύσματα εκτός βάσης θα ισχύει:  $a_{m+n+1}^o \geq 0$ , ενώ για τα διανύσματα της βάσης θα ισχύει:  $a_{m+n+1}^o = 0$ .

$$\text{Ακόμα σύμφωνα με τον πίνακα 2.17 έχουμε: } x_{Bm+n+1}^o = k \quad (3.3)$$

$$a_{ij}^o = a_{ij} \quad \forall i, j \quad (3.4)$$

$$x_{Bi}^o = x_{Bi} \quad \forall i, j \quad (3.5)$$

Θέτουμε  $s=0$ .

Ο αρχικός πίνακας, με δείκτη  $s=0$ , του αλγορίθμου θα είναι ο ακόλουθος:

Βάση	Μη Βασικές Μεταβλητές				Βασικές Μεταβλητές				Τιμές Βασικών Μεταβλητών	
$x_1$	$a^{s_{1l}}$	...	$a^{s_{1j}}$	...	1	...	0	...	0	$x_{B1}^o$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
$x_i$	$a^{s_{il}}$	...	$a^{s_{ij}}$	...	0	...	1	...	0	$x_{Bi}^o$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
$x_r$	$a^{s_{rl}}$	...	$a^{s_{rj}}$	...	0	...	0	...	1	$x_{Br}^o$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
$x_m$	$a^{s_{ml}}$	...	$a^{s_{mj}}$	...	0	...	0	...	0	$x_{Bm}^o$
$x_{m+n+1}$	$a^{o_{m+n+1l}}$	...	$a^{o_{m+n+1j}}$	...	0	...	0	...	0	$x_{Bm+n+1}^o (=k)$

Πίνακας 3-2: Ο πίνακας Simplex με  $s = 0$

Θέτουμε  $u_s = u_o = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_{m+n+1})$ ,  $R_s = \{u_o\}$ ,  $N_s = \{0\}$ ,  $vu_o = (x_{Bi}^o \ \forall i)$ .

**Βήμα 1:** Βρίσκουμε τις λύσεις  $u_{sj}$  από την ακόλουθη σχέση:

$$u_{sj} = \min_i \left\{ \frac{x_{Bi}^s}{a_{ij}^s}, a_{ij}^s > 0 \right\} = \frac{x_{Br}^s}{a_{rj}^s} \quad \forall j \quad (3.6)$$

όπου  $j$  οι δείκτες των διανυσμάτων βρίσκονται εκτός βάσης.

Κατασκευάζουμε το σύνολο  $\Gamma(u_s)$ :  $\Gamma(u_s) = \{\cup u_{sj}\}$ ,  $\forall j$  εκτός βάσης

Θέτουμε:  $K_s = \emptyset$ ,  $W_s = \Gamma(u_s) - R_s$

Αν  $W_s \neq \emptyset$  πηγαίνουμε στο Βήμα 2.

Αν  $W_s = \emptyset$  και  $N_s = \{0\}$  πηγαίνουμε στο Βήμα 7.

**Βήμα 2:** Επιλέγουμε τυχαία μία λύση  $u_{sj}$  από το σύνολο  $W_s$ .

Υπολογίζουμε τη λύση  $u_{sj}$ .

$$x_{Bj}^{s+1} = \frac{x_{Br}^s}{a_{rj}^s} \quad (3.7)$$

### Κεφάλαιο 3: Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση

$$x_{Bi}^{s+1} = x_{Bi}^s - a_{ij}^s x_{Bj}^{s+1} \quad \forall i \neq j \quad (3.8)$$

$$u_{sj} = (x_{Bi}^{s+1} \quad \forall i)$$

$$R_s = R_s \cup u_{sj}$$

$K_s = K_s \cup u_{sj}$ , για κάθε λύση  $u_{sj}$  όπου η μεταβλητή  $x_{Bm+n+1}$  δεν είναι βασική, δηλαδή  $\forall u_{sj}$  με  $m+n+1 \notin u_{sj}$ .

$$\text{Αν η μεταβλητή } x_{Bm+n+1} \in u_{sj} \text{ τότε } Y_{sj} = x_{Bm+n+1}^{s+1} \quad (3.9)$$

$$N_s = N_s \cup Y_{sj}$$

Δηλαδή αν η μεταβλητή  $x_{Bm+n+1}$  είναι βασική στη συγκεκριμένη λύση τότε αυτή προστίθεται στο σύνολο  $N_s$ .

$$\text{Θέτουμε } W_s = W_s - u_{sj}$$

Αν  $W_s \neq 0$ , επαναλαμβάνουμε το Βήμα 2.

Αν  $W_s = 0$ , πηγαίνουμε στο Βήμα 3 για να υπολογίσουμε το νέο πίνακα Simplex.

**Βήμα 3:** Επιλέγουμε το μέγιστο  $Y_{sj}$  από το σύνολο  $N_s$ .

$$Y_{qk} = \max\{Y_{sj}, 0, \forall s, \forall j\} = \max N_s \quad (3.10)$$

$$Y_{qk} \rightarrow u_{qk} \text{ από το } R_s$$

Αν τα μέγιστα είναι περισσότερα από ένα επιλέγουμε αυτό το  $Y_{qk}$  για το οποίο έχουμε τη μικρότερη απόσταση  $d(u_s, u_{qk})$ . Αν υπάρχουν περισσότερα από ένα με την ίδια ελάχιστη απόσταση τότε διαλέγουμε τυχαία.

$$N_s = N_s - Y_{qk}$$

Αν  $\max N_s = 0$  τότε επιλέγουμε ένα  $u_{qk}$  από το σύνολο  $K_s$  για το οποίο έχουμε τη μικρότερη απόσταση  $d(u_s, u_{qk})$ . Αν υπάρχουν περισσότερα από ένα με την ίδια ελάχιστη απόσταση τότε διαλέγουμε τυχαία.

**Βήμα 4:** Αν  $d(u_s, u_{qk}) = 1$  τότε πηγαίνουμε στο Βήμα 5 αλλιώς, αν  $d(u_s, u_{qk}) > 1$  πηγαίνουμε στο Βήμα 6.

### Κεφάλαιο 3: Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση

**Βήμα 5:** Πραγματοποιούμε αλλαγή βάσης στον πίνακα Simplex  $s$  εισάγοντας τη μεταβλητή  $x_k$  και απομακρύνοντας την μεταβλητή  $x_r$  ώστε να λάβουμε τον παρακάτω πίνακα Simplex.

Βάση	Μη Βασικές Μεταβλητές				Βασικές Μεταβλητές						Τιμές Βασικών Μεταβλητών		
$x_1$	$a^{s_{1l}}$	...	$a^{s_{1j}}$	...	1	...	0	...	0	...	0	0	$x^{s_{B1}}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
$x_i$	$a^{s_{il}}$	...	$a^{s_{ij}}$	...	0	...	1	...	0	...	0	0	$x^{s_{Bi}}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
$x_k$	$a^{s_{kl}}$	...	$a^{s_{kj}}$	...	0	...	0	...	1	...	0	0	$x^{s_{Bk}}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
$x_m$	$a^{s_{ml}}$	...	$a^{s_{mj}}$	...	0	...	0	...	0	...	1	0	$x^{s_{Bm}}$
$x_{m+n+1}$	$a^{s_{m+n+1}}$	...	$a^{s_{m+n+1j}}$	...	0	...	0	...	0	...	0	1	$x^{s_{Bm+n+1}}$

**Πίνακας 3-3:** Επανάληψη  $s$  για τον αλγόριθμο της Ρεαλιστικής Προσέγγισης

Θέτουμε  $s=s+1$

Όπου στη θέση του  $x_r$  είναι πλέον το  $x_k$ . Θέτουμε  $u_s=u_{qk}$ ,  $N_s=N_{s-1}$ ,  $R_s=R_{s-1}$   
Πηγαίνουμε στο Βήμα 1.

**Βήμα 6:** Πραγματοποιούμε αλλαγή βάσης εισάγοντας στον πίνακα Simplex  $s$  κάποια μεταβλητή  $x_j \neq x_k$  η οποία δεν υπάρχει στη βάση του  $s$  αλλά περιέχεται στη λύση  $u_{sk}$ .

$$d(u_s, u_{sk}) = d(u_s, u_{sk}) - 1$$

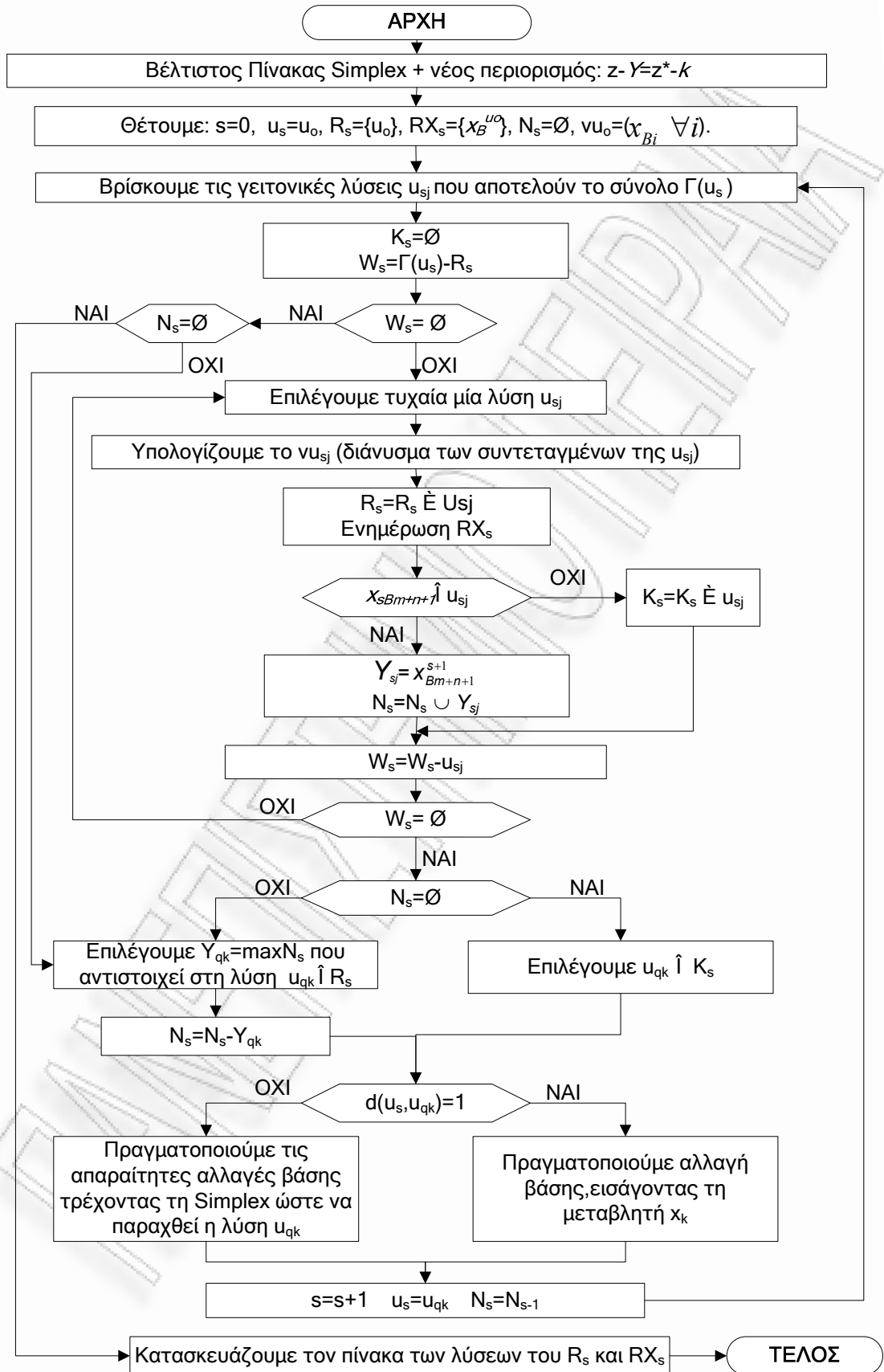
Πηγαίνουμε στο Βήμα 4.

**Βήμα 7:** Κατασκευάζουμε τον πίνακα των λύσεων  $R_s$  και  $RX_s$ . **ΤΕΛΟΣ**

Στο Σχήμα 3-1 παρουσιάζεται το λογικό διάγραμμα του αλγορίθμου:



### Κεφάλαιο 3: Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση



Σχήμα 3-1: Λογικό Διάγραμμα Αλγόριθμου της Ρεαλιστικής Προσέγγισης

### Κεφάλαιο 3: Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση

Όπως παρατηρούμε στο Βήμα 1 όταν το σύνολο  $W_s$  των λύσεων  $u_{sj}$ , οι οποίες γειτονεύουν με τη λύση  $u_s$  και δεν έχουμε ακόμα υπολογίσει, είναι κενό τότε περατώνεται η διαδικασία αναζήτησης νέων λύσεων και το σύνολο  $R_s$  περιλαμβάνει όλες τις λύσεις που έχουμε υπολογίσει.

Σύμφωνα με τη σχέση (3.10), όπως και στη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex, κάθε φορά παράγεται ένας νέος πίνακας Simplex,  $s+1$ , του οποίου η βάση αντιστοιχεί σε μία λύση  $u_{s+1}$  η οποία είναι κάθε φορά αυτή με την αμέσως μικρότερη τιμή της μεταβλητής  $x_{m+n+1}$  από αυτή της  $u_s$ .

Αυτή η συνθήκη μας εξασφαλίζει την εύρεση όλων των λύσεων με  $Y > 0$  και αυτό αποδεικνύεται αμέσως παρακάτω:

Ο αλγόριθμος έχει ως σημείο εκκίνησης τη λύση  $u_0$  με  $x_{m+n+1} = k$ . Στη συνέχεια σύμφωνα με τη σχέση (3.10) βρίσκουμε τη λύση  $u_1$  με  $x_{m+n+1} = Y_{0k}$ . Όλες οι άλλες λύσεις  $u_{sj}$  που θα υπολογίσουμε στη συνέχεια θα έχουν τιμές της μεταβλητής  $x_{m+n+1}$  μικρότερες ή το πολύ ίσες με την τιμή  $Y_{0k}$ . Δεν υπάρχει καμία άλλη βασική δυνατή λύση με  $Y_{sk}$  ανάμεσα σε  $k$  και  $Y_{0k}$  γιατί αν υπήρχε μια τέτοια λύση, η βέλτιστη λύση, που είναι και το σημείο εκκίνησης για τον αλγόριθμο, θα μπορούσε να παραχθεί από αυτή τη λύση σε μία ή περισσότερες επαναλήψεις της μεθόδου της Simplex.

Αν μπορούσε να παραχθεί σε μία επανάληψη τότε, εκτελώντας την επανάληψη του αλγορίθμου μας σύμφωνα με τη σχέση (3.10), η λύση αυτή θα είχε επιλεγεί. Αν μπορούσε να παραχθεί σε περισσότερες από μία επαναλήψεις, η τελευταία λύση πριν τη βέλτιστη θα είχε τιμή μεγαλύτερη από  $Y_{0k}$ . Τότε όμως από αυτή τη λύση η βέλτιστη λύση θα μπορούσε να παραχθεί σε μία επανάληψη της Simplex και εκτελώντας την αντίστοιχη επανάληψη του αλγορίθμου μας θα βρίσκαμε πρώτα αυτή τη λύση. Μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να θέσουμε ως σημείο εκκίνησης τη λύση με  $Y_{0k}$  και συνεχίζοντας με το ίδιο σκεπτικό να αποδείξουμε ότι τα παραπάνω ισχύουν για κάθε  $x_{m+n+1} = Y_{sj} > 0$ .

Οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω όταν περατωθεί ο αλγόριθμος τότε θα έχουμε υπολογίσει όλες τις λύσεις  $u_{sj}$  με  $x_{m+n+1} = Y_{sj} > 0$ . Παράλληλα έχουμε υπολογίσει και λύσεις  $u_{sj}$  με  $x_{m+n+1} = 0$ , δηλαδή λύσεις για τις οποίες η μεταβλητή  $x_{m+n+1}$  δεν ανήκει στη βάση και για τις οποίες ισχύει:  $z = z^* - k$ . Δεν μπορούμε να εγγυηθούμε ότι έχουμε βρει όλες αυτές τις λύσεις αλλά σύμφωνα με το Βήμα 4 του αλγορίθμου η αναζήτηση συνεχίζεται και μετά την εύρεση όλων των  $u_{sj}$  με  $x_{m+n+1} = Y_{sj} > 0$  αφού παράγουμε νέους πίνακες Simplex που αντιστοιχούν σε λύσεις με  $x_{m+n+1} = 0$ . Έτσι ο αλγόριθμος που προτείνουμε μας παρέχει τη δυνατότητα εύρεσης περισσότερων λύσεων από ότι η μέθοδος της Αντίστροφης Simplex.

### 3.2 Ένα Αριθμητικό Παράδειγμα

Ο αλγόριθμος θα εφαρμοσθεί στο ίδιο παράδειγμα που ορίζει το υπερπολύεδρο ΥΠ.1.2. ώστε να είμαστε σε θέση να συγκρίνουμε στη συνέχεια τα αποτελέσματα.

Το γραμμικό πρόγραμμα είναι το ακόλουθο:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\max] z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 0x_{\bar{1}} + 0x_{\bar{2}} \\ \text{υ.π.} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{\bar{1}} = 18 \\ 2x_3 + 3x_4 + x_{\bar{2}} = 6 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \bar{1}, \bar{2} \end{array} \right.$$

Η βέλτιστη λύση δίνει  $z^*=76$  και είμαστε διατεθειμένοι να κάνουμε μία παραχώρηση 20 μονάδων ( $k=20$ ). Οπότε έχουμε το νέο περιορισμό  $z-Y=z^*-k$  όπου  $Y$  η μεταβλητή απόκλισης. Προκειμένου να διευκολυνθούμε στην εφαρμογή του αλγορίθμου θα θέσουμε  $x_{\bar{1}} = x_5$ ,  $x_{\bar{2}} = x_6$  και  $Y = x_7$ .

Ο βέλτιστος πίνακας Simplex του γραμμικού προγράμματος είναι ο ακόλουθος:

$c_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$x_B$
4	2	1	1	1/3	0	1	-1/3	16
6	4	0	0	2/3	1	0	1/3	2
	$c_j$	3	4	5	6	0	0	
	$\Delta_j$	-1	0	-1/3	0	-4	-2/3	$z^*=76$

**Πίνακας 3-4:** Πίνακας Simplex Βέλτιστης Λύσης Παραδείγματος

όπου  $\Delta_j$  τα οριακά καθαρά εισοδήματα.

**Βήμα 0:** Ξεκινάμε από τον πίνακα Simplex 3-4 και προσθέτουμε τον περιορισμό:

$$z - x_7 = z^* - k \Rightarrow x_7 = z - 56$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) και με τους πίνακες (2.24) και (2.27) κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα Simplex για  $s=0$ .

### Κεφάλαιο 3: Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_2$	1	1	1/3	0	1	-1/3	0	16
$x_4$	0	0	2/3	1	0	1/3	0	2
$x_7$	1	0	1/3	0	4	2/3	1	20

Θέτουμε  $u_0=(2,4,7)$ ,  $R_0=\{(2,4,7)\}$ ,  $N_0=\{0\}$

$vu_0=(16,2,20)$  για την ενημέρωση του  $RX_0$ .

**Βήμα 1:** Βρίσκουμε τις γειτονικές λύσεις  $u_{0i}$  από τη σχέση (3.6) και κατασκευάζουμε το σύνολο  $\Gamma(u_0)$ :

$\Gamma(u_0)=\{(1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7)\}$ , θέτουμε:  $K_0=\emptyset$

$W_0=\Gamma(u_0)-R_0=\{(1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7)\}$

$W_0 \neq \emptyset$ , οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 2.

**Βήμα 2:** Επιλέγουμε τυχαία τη λύση  $u_{01}=(1,4,7)$ . Υπολογίζουμε τη λύση  $u_{01}$ .

$x_{B1}=16/1=16$ ,  $x_{B4}=2-0 \times 16=2$ ,  $x_{B7}=20-1 \times 16=4$

$vu_{01}=(16,2,4)$

$R_0=R_0 \cup u_{01}=\{(2,4,7), (1,4,7)\}$ ,  $K_0=\emptyset$

$x_7 \in$  στη βάση της  $u_{01}$  οπότε  $Y_{01}=4$  και  $N_0=\{Y_{01}=4, 0\}$

$W_0=\{(2,3,7), (2,4,5), (2,6,7)\}$

$W_0 \neq \emptyset$ , οπότε επαναλαμβάνουμε το Βήμα 2.

**Βήμα 2:** Επιλέγουμε τυχαία τη λύση  $u_{03}=(2,3,7)$ . Υπολογίζουμε τη λύση  $u_{03}$ .

$x_{B2}=16-1/3 \times 3=15$ ,  $x_{B3}=\frac{2}{2/3}=3$ ,  $x_{B7}=20-1/3 \times 3=19$

### Κεφάλαιο 3: Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση

$$v_{u_3}=(15,3,19)$$

$$R_o=R_o \cup u_3=\{(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7)\}, K_o=\emptyset$$

$x_7 \in$  στη βάση της  $u_3$  οπότε  $Y_{03}=19$  και  $N_o=\{Y_{01}=4, Y_{03}=19, 0\}$

$$W_o=\{(2,4,5), (2,6,7)\}$$

$W_o \neq \emptyset$ , οπότε επαναλαμβάνουμε το Βήμα 2.

Βήμα 2: Επιλέγουμε τυχαία τη λύση  $u_{05}=(2,4,5)$ . Υπολογίζουμε τη λύση  $u_{05}$ .

$$x_{B2}=16-5=11, x_{B4}=2-0 \times 5=2, x_{B5}=20/4=5$$

$$v_{u_5}=(11,2,5)$$

$$R_o=R_o \cup u_5=\{(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5)\}, K_o=\{(2,4,5)\}$$

$x_7 \notin$  στη βάση της  $u_5$ .

$$W_o=\{(2,6,7)\}$$

$W_o \neq \emptyset$ , οπότε επαναλαμβάνουμε το Βήμα 2.

Βήμα 2: Επιλέγουμε τυχαία τη λύση  $u_{06}=(2,6,7)$ . Υπολογίζουμε τη λύση  $u_{06}$ .

$$x_{B2}=16+1/3 \times 6=18, x_{B6}=\frac{2}{1/3}=6, x_{B7}=20-2/3 \times 6=16$$

$$v_{u_6}=(18,6,16)$$

$$R_o=R_o \cup u_6=\{(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7)\}, K_o=\{(2,4,5)\}$$

$x_7 \in$  στη βάση της  $u_6$  οπότε  $Y_{06}=16$  και  $N_o=\{Y_{01}=4, Y_{03}=19, Y_{06}=16, 0\}$

$W_o=\emptyset$ , οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 3.

Βήμα 3: Επιλέγουμε το μέγιστο  $Y_{qj}$  από το σύνολο  $N_o$ .

$$Y_{03}=\max N_o$$

$$Y_{03} \rightarrow u_{03}=(2,3,7)$$

$$N_o=N_o - Y_{03}=\{Y_{01}=4, Y_{06}=16, 0\}$$

### Κεφάλαιο 3: Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση

Βήμα 4:  $d(u_0, u_{03})=1$  οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 5.

Βήμα 5: Πραγματοποιούμε αλλαγή βάσης στον πίνακα Simplex  $s=0$  εισάγοντας τη μεταβλητή  $x_3$  και απομακρύνοντας τη μεταβλητή  $x_4$  και λαμβάνουμε τον παρακάτω πίνακα Simplex.

Θέτουμε:  $s=0+1=1$ . Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_2$	1	1	0	-1/2	1	-1/2	0	15
$x_3$	0	0	1	3/2	0	1/2	0	3
$x_7$	1	0	0	-1/2	4	1/2	1	19

Θέτουμε:  $u_1=u_{03}$

$$R_1=R_0=\{(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7)\}$$

$$N_1=N_0=\{Y_{01}=4, Y_{06}=16, 0\}$$

Πηγαίνουμε στο Βήμα 1.

Βήμα 1: Βρίσκουμε τις γειτονικές λύσεις  $u_{1j}$  από τη σχέση (3.6) και κατασκευάζουμε το σύνολο  $\Gamma(u_1)$ :

$$\Gamma(u_1)=\{(1,3,7), (2,4,7), (2,3,5), (2,6,7)\}, \text{ θέτουμε: } K_1=\emptyset$$

$$W_1=\{(1,3,7), (2,3,5)\}$$

$W_1 \neq \emptyset$ , οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 2.

Βήμα 2: Επιλέγουμε τυχαία τη λύση  $u_{11}=(1,3,7)$ . Υπολογίζουμε τη λύση  $u_{11}$ .

$$x_{B1}=15/1=15, x_{B3}=3-0 \times 15=3, x_{B7}=19-15=4$$

$$v_{u_{11}}=(11,2,5)$$

$$R_1=R_1 \cup u_{11}=\{(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7), (1,3,7)\}, K_1=\emptyset$$

$$x_7 \in \text{στη βάση της } u_{11} \text{ οπότε } Y_{11}=4 \text{ και } N_1=\{Y_{01}=4, Y_{06}=16, Y_{11}=4, 0\}$$

### Κεφάλαιο 3: Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση

$$W_1 = \{(2,3,5)\}$$

$W_1 \neq \emptyset$ , οπότε επαναλαμβάνουμε το Βήμα 2.

**Βήμα 2:** Επιλέγουμε τυχαία τη λύση  $u_{15} = (2,3,5)$ . Υπολογίζουμε τη λύση  $u_{15}$ .

$$x_{B2} = 15 - 1 \times 19/4 = 41/9, \quad x_{B3} = 3 - 0 \times 19/4 = 3, \quad x_{B5} = 19/4$$

$$v_{u_{15}} = (41/9, 3, 19/4)$$

$$R_1 = R_1 \cup u_{15} = \{(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7), (1,3,7), (2,3,5)\}, \quad K_1 = \{(2,3,5)\}$$

$x_7 \notin$  στη βάση της  $u_{11}$

$W_1 = \emptyset$ , οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 3.

**Βήμα 3:** Επιλέγουμε το μέγιστο  $Y_{qj}$  από το σύνολο  $N_1$ .

$$Y_{06} = \max N_1$$

$$Y_{06} \rightarrow u_{06} = (2,6,7)$$

$$N_1 = N_1 - Y_{06} = \{Y_{01} = 4, Y_{11} = 4, 0\}$$

**Βήμα 4:**  $d(u_1, u_{06}) = 1$  οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 5.

**Βήμα 5:** Πραγματοποιούμε αλλαγή βάσης στον πίνακα Simplex  $s=1$  εισάγοντας τη μεταβλητή  $x_6$  και απομακρύνοντας τη μεταβλητή  $x_3$  και λαμβάνουμε τον παρακάτω πίνακα Simplex.

Θέτουμε:  $s=1+1=2$ . Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_2$	1	1	1	1	1	0	0	18
$x_6$	0	0	2	3	0	1	0	6
$x_7$	1	0	-1	-2	4	0	1	16

### Κεφάλαιο 3: Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση

Θέτουμε:  $u_2 = u_{06}$

$$R_2 = R_1 = \{(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7), (1,3,7), (2,3,5)\}$$

$$N_2 = N_1 = \{Y_{01}=4, Y_{11}=4, 0\}$$

Πηγαίνουμε στο Βήμα 1.

Βήμα 1: Βρίσκουμε τις γειτονικές λύσεις  $u_{2j}$  από τη σχέση (3.6) και κατασκευάζουμε το σύνολο  $\Gamma(u_2)$ :

$$\Gamma(u_2) = \{(2,6,1), (2,3,7), (2,4,7), (2,6,5)\}, \text{ θέτουμε: } K_2 = \emptyset$$

$$W_2 = \{(2,6,1), (2,6,5)\}$$

$W_2 \neq \emptyset$ , οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 2.

Βήμα 2: Επιλέγουμε τυχαία τη λύση  $u_{21} = (2,6,1)$ . Υπολογίζουμε τη λύση  $u_{21}$ .

$$x_{B2} = 18 - 1 \times 16 = 2, x_{B6} = 6 - 0 \times 16 = 6, x_{B7} = 16/1 = 16$$

$$v_{u_{21}} = (2,6,16)$$

$$R_2 = R_2 \cup u_{21} = \{(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7), (1,3,7), (2,3,5), (2,6,1)\}$$

$$K_2 = \{(2,6,1)\}$$

$x_7 \notin$  στη βάση της  $u_{21}$

$$W_2 = \{(2,6,5)\}$$

$W_2 \neq \emptyset$ , οπότε επαναλαμβάνουμε το Βήμα 2.

Βήμα 2: Επιλέγουμε τυχαία τη λύση  $u_{25} = (2,6,5)$ . Υπολογίζουμε τη λύση  $u_{25}$ .

$$x_{B2} = 18 - 1 \times 4 = 14, x_{B6} = 6 - 0 \times 4 = 6, x_{B7} = 16/4 = 4$$

$$v_{u_{25}} = (14,6,4)$$

$$R_2 = R_2 \cup u_{25} = \{(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7), (1,3,7), (2,3,5), (2,6,1), (2,6,5)\}$$

$$K_2 = \{(2,6,1), (2,6,5)\}$$



### Κεφάλαιο 3: Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση

$x_7 \notin$  στη βάση της  $u_{25}$

$W_2 = \emptyset$ , οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 3.

**Βήμα 3:** Επιλέγουμε το μέγιστο  $Y_{qj}$  από το σύνολο  $N_2$ . Στο σύνολο  $N_2$  έχουμε δύο μέγιστα το  $Y_{01}$  και το  $Y_{11}$  στα οποία αντιστοιχούν οι λύσεις  $u_{01}=(1,4,7)$  και  $u_{11}=(1,3,7)$ . Παρατηρούμε ότι  $d(u_2, u_{01})=2$  και  $d(u_2, u_{11})=2$ . Οπότε επιλέγουμε τυχαία το  $Y_{01} \rightarrow u_{11}=(1,4,7)$

$$N_2 = N_2 - Y_{01} = \{Y_{11}=4, 0\}$$

**Βήμα 4:**  $d(u_1, u_{01})=2$  οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 6.

**Βήμα 6:** Πραγματοποιούμε αλλαγή βάσης στον πίνακα Simplex  $s=2$  εισάγοντας τη μεταβλητή  $x_4$  και απομακρύνοντας την μεταβλητή  $x_6$ .

Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_2$	1	0	1/3	0	1	-1/3	0	16
$x_4$	0	0	2/3	1	0	1/3	0	2
$x_7$	1	0	1/3	0	4	2/3	1	20

$$d(u_2, u_{01}) = d(u_2, u_{01}) - 1 = 1$$

Πηγαίνουμε στο Βήμα 4.

**Βήμα 4:**  $d(u_2, u_{01})=1$  οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 5.

**Βήμα 5:** Πραγματοποιούμε αλλαγή βάσης στον πίνακα Simplex  $s=2$  εισάγοντας τη μεταβλητή  $x_1$  και απομακρύνοντας τη μεταβλητή  $x_2$  και λαμβάνουμε τον παρακάτω πίνακα Simplex.

### Κεφάλαιο 3: Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση

Θέτουμε:  $s=2+1=3$ . Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_1$	1	1	1/3	0	1	-1/3	0	16
$x_6$	0	0	2/3	1	0	1/3	0	2
$x_7$	0	-1	0	0	3	1	1	4

Θέτουμε:  $u_3=u_{01}$

$R_3=R_2=\{(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7), (1,3,7), (2,3,5), (2,6,1), (2,6,5)\}$

$N_3=N_2=\{Y_{11}=4, 0\}$

Πηγαίνουμε στο Βήμα 1.

**Βήμα 1:** Βρίσκουμε τις γειτονικές λύσεις  $u_{3j}$  από τη σχέση (3.6) και κατασκευάζουμε το σύνολο  $\Gamma(u_3)$ :

$\Gamma(u_3)=\{(2,4,7), (1,3,7), (1,4,5), (1,4,6)\}$ , θέτουμε:  $K_3=\emptyset$

$W_3=\{(1,4,5), (1,4,6)\}$

$W_3 \neq \emptyset$ , οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 2.

**Βήμα 2:** Επιλέγουμε τυχαία τη λύση  $u_{35}=(1,4,5)$ .

Υπολογίζουμε τη λύση  $u_{35}$ .

$$x_{B1}=16-1 \times 4/3=44/3$$

$$x_{B6}=2-0 \times 4/3=2$$

$$x_{B7}=4/3$$

$$v_{u_{35}}=(44/3, 2, 4/3)$$

$R_3=R_3 \cup u_{35}=\{(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7), (1,3,7), (2,3,5), (2,6,1), (2,6,5), (1,4,5)\}$

### Κεφάλαιο 3: Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση

$$K_3 = \{(1,4,5)\}$$

$x_7 \notin$  στη βάση της  $u_{35}$

$$W_3 = \{(1,4,6)\}$$

$W_3 \neq \emptyset$ , οπότε επαναλαμβάνουμε το Βήμα 2.

Βήμα 2: Επιλέγουμε τυχαία τη λύση  $u_{36} = (1,4,6)$ . Υπολογίζουμε τη λύση  $u_{36}$ .

$$x_{B1} = 16 + 1/3 \times 4 = 52/3, \quad x_{B4} = 2 - 1/3 \times 4 = 2/3, \quad x_{B6} = 4/1 = 4$$

$$v_{u_{36}} = (52/3, 2/3, 4)$$

$$R_3 = R_3 \cup u_{36} = \{(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7), (1,3,7), (2,3,5), (2,6,1), (2,6,5), (1,4,5), (1,4,6)\}$$

$$K_3 = \{(1,4,5), (1,4,6)\}$$

$x_7 \notin$  στη βάση της  $u_{36}$

$W_3 = \emptyset$ , οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 3.

Βήμα 3: Επιλέγουμε το μέγιστο  $Y_{aj}$  από το σύνολο  $N_3$ .

$$Y_{11} = \max N_3 \quad Y_{11} \rightarrow u_{11} = (1,3,7)$$

$$N_3 = N_3 - Y_{11} = \{0\}$$

Βήμα 4:  $d(u_3, u_{11}) = 1$  οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 5.

Βήμα 5: Πραγματοποιούμε αλλαγή βάσης στον πίνακα Simplex  $s=3$  εισάγοντας τη μεταβλητή  $x_3$  και απομακρύνοντας τη μεταβλητή  $x_4$  και λαμβάνουμε τον παρακάτω πίνακα Simplex.

Θέτουμε:  $s=3+1=4$ . Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

### Κεφάλαιο 3: Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_1$	1	1	0	-1/2	1	-1/2	0	15
$x_3$	0	0	1	3/2	0	1/2	0	3
$x_7$	0	-1	0	0	3	1	1	4

Θέτουμε:  $u_4 = u_{11}$

$R_4 = R_3 = \{(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7), (1,3,7), (2,3,5), (2,6,1), (2,6,5), (1,4,5), (1,4,6)\}$

$N_4 = N_3 = \{0\}$

Πηγαίνουμε στο Βήμα 1.

**Βήμα 1:** Βρίσκουμε τις γειτονικές λύσεις  $u_{4j}$  από τη σχέση (3.6) και κατασκευάζουμε το σύνολο  $\Gamma(u_4)$ :

$\Gamma(u_4) = \{(2,3,7), (1,4,7), (1,3,5), (1,3,6)\}$ , θέτουμε:  $K_4 = \emptyset$

$W_4 = \{(2,6,1), (2,6,5)\}$

$W_4 \neq \emptyset$ , οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 2.

**Βήμα 2:** Επιλέγουμε τυχαία τη λύση  $u_{45} = (1,3,5)$ . Υπολογίζουμε τη λύση  $u_{45}$ .

$x_{B1} = 15 - 1 \times 4/3 = 41/3$ ,  $x_{B3} = 3 - 0 \times 4/3 = 3$ ,  $x_{B5} = 4/3$

$vu_{45} = (41/3, 2, 4/3)$

$R_4 = R_4 \cup u_{45} = \{(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7), (1,3,7), (2,3,5), (2,6,1), (2,6,5), (1,4,5), (1,4,6), (1,3,5)\}$

$K_4 = \{(1,3,5)\}$

$x_7 \notin$  στη βάση της  $u_{45}$

$W_4 = \{(1,3,6)\}$

### Κεφάλαιο 3: Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση

$W_4 \neq \emptyset$ , οπότε επαναλαμβάνουμε το Βήμα 2.

**Βήμα 2:** Επιλέγουμε τυχαία τη λύση  $u_{46}=(1,3,6)$ . Υπολογίζουμε τη λύση  $u_{46}$ .

$$x_{B7}=15+1/2 \times 4=17, \quad x_{B3}=3-1/2 \times 4=1, \quad x_{B6}=4/1=4$$

$$v_{u_{46}}=(17,1,4)$$

$$R_4=R_4 \cup u_{46}=\{(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7), (1,3,7), (2,3,5), (2,6,1), (2,6,5), (1,4,5), (1,4,6), (1,3,5), (1,3,6)\}$$

$$K_4=\{(1,3,5), (1,3,6)\}$$

$x_7 \notin$  στη βάση της  $u_{46}$

$W_4=\emptyset$ , οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 3.

**Βήμα 3:** Επιλέγουμε το μέγιστο  $Y_{aj}$  από το σύνολο  $N_4$ .

$\max N_3=0$ , οπότε επιλέγουμε τυχαία από το σύνολο την  $u_{45}=(1,3,5)$

**Βήμα 4:**  $d(u_4, u_{45})=1$  οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 5.

**Βήμα 5:** Πραγματοποιούμε αλλαγή βάσης στον πίνακα Simplex  $s=4$  εισάγοντας τη μεταβλητή  $x_5$  και απομακρύνοντας τη μεταβλητή  $x_7$  και λαμβάνουμε τον παρακάτω πίνακα Simplex.

Θέτουμε:  $s=4+1=5$ . Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_1$	1	4/3	0	-1/2	0	-5/6	-1/3	41/3
$x_3$	0	0	1	3/2	0	1/2	0	3
$x_5$	0	-1/3	0	0	1	1/3	1/3	4/3

Θέτουμε:  $u_5=u_{45}$

### Κεφάλαιο 3: Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση

$$R_5=R_4=\{(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7), (1,3,7), (2,3,5), (2,6,1), (2,6,5), (1,4,5), (1,4,6), (1,3,5), (1,3,6)\}$$

$$N_5=N_4=\{0\}$$

Πηγαίνουμε στο Βήμα 1.

**Βήμα 1:** Βρίσκουμε τις γειτονικές λύσεις  $u_{sj}$  από τη σχέση (3.6) και κατασκευάζουμε το σύνολο  $\Gamma(u_5)$ :

$$\Gamma(u_5)=\{(2,3,5), (1,4,5), (1,3,6), (1,3,7)\}, \text{ θέτουμε: } K_5=\emptyset$$

$$W_5=\Gamma(u_5)-R_5=\emptyset$$

$W_5=\emptyset$  και  $N_5=\{0\}$ , οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 7.

**Βήμα 7:** Κατασκευάζουμε τον πίνακα των λύσεων. **ΤΕΛΟΣ**

$u_{sj} (R_s)$	$vu_{sj}(RX_s)$	$z_{sj}$
$u_0=(2,4,7)$	$vu_0=(16,2,20)$	$z_0=76$
$u_{01}=(1,4,7)$	$vu_{01}=(16,2,4)$	$z_{01}=60$
$u_{03}=(2,3,7)$	$vu_{03}=(15,3,19)$	$z_{03}=75$
$u_{05}=(2,4,5)$	$vu_{05}=(11,2,5)$	$z_{05}=56$
$u_{06}=(2,6,7)$	$vu_{06}=(18,6,16)$	$z_{06}=72$
$u_{11}=(1,3,7)$	$vu_{11}=(15,3,4)$	$z_{11}=60$
$u_{15}=(2,3,5)$	$vu_{15}=(41/9,3,19/4)$	$z_{15}=56$
$u_{21}=(2,6,1)$	$vu_{21}=(2,6,16)$	$z_{21}=56$
$u_{25}=(2,6,5)$	$vu_{25}=(14,6,4)$	$z_{25}=56$
$u_{35}=(1,4,5)$	$vu_{35}=(44/3,2,4/3)$	$z_{35}=56$
$u_{36}=(1,4,6)$	$vu_{36}=(52/3,2/3,4)$	$z_{36}=56$
$u_{45}=(1,3,5)$	$vu_{45}=(41/3,2,4/3)$	$z_{45}=56$
$u_{46}=(1,3,6)$	$vu_{46}=(17,1,4)$	$z_{46}=56$

**Πίνακας 3-5:** Πίνακας αποτελεσμάτων παραδείγματος

### 3.3 Κριτική του Αλγορίθμου

Το σύνολο  $R_5$  περιλαμβάνει όλες τις σχεδόν βέλτιστες λύσεις  $u_{sj}$  για  $s=0,1,2,3,4$  που αντιστοιχούν στα διανύσματα  $nu_{sj}$  των συντεταγμένων της κάθε λύσης. Όπως παρατηρούμε από τη διαδικασία εφαρμογής του αλγορίθμου στο παραπάνω παράδειγμα χρειάστηκε να υπολογίσουμε 6 νέους πίνακες Simplex, εκτός του αρχικού, προκειμένου να βρούμε τις 12 νέες λύσεις.

Στην περίπτωση των πολλαπλών βέλτιστων λύσεων (όπου θέτουμε  $k=0$ ) υπάρχει κίνδυνος χρησιμοποιώντας τον παραπάνω αλγόριθμο να υπολογίσουμε μικρό αριθμό λύσεων. Ένας τρόπος αποφυγής αυτού του κινδύνου είναι ο μη μηδενισμός του συνόλου  $K_s$  κατά την πραγματοποίηση του Βήματος 1 σε κάθε επανάληψη.

Παράλληλα σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου είναι απαραίτητη η διατήρηση στη μνήμη του υπολογιστή ενός και μοναδικού πίνακα Simplex. Αντίθετα, εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο των Manas-Nedoma στο ίδιο παράδειγμα χρειάστηκε να υπολογίσουμε 12 νέους πίνακες Simplex, εκτός του αρχικού, προκειμένου να υπολογίσουμε τις 12 νέες λύσεις ενώ σε κάθε επανάληψη χρειάστηκε, ομοίως, η διατήρηση στη μνήμη του υπολογιστή ενός και μοναδικού πίνακα Simplex.

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου της Αντίστροφης Simplex, στο ίδιο παράδειγμα στην § 2.3.3, παρατηρήσαμε ότι χρειάστηκε να υπολογίσουμε 4 νέους πίνακες Simplex, εκτός του αρχικού, προκειμένου να βρούμε τις 12 νέες λύσεις αλλά ήταν απαραίτητη και η αποθήκευση των 4 αυτών πινάκων, συν του αρχικού, ώστε να ολοκληρωθεί η μέθοδος.

Ένα ακόμα πλεονέκτημα του αλγορίθμου είναι το γεγονός ότι η αναζήτηση των λύσεων γίνεται βαθμηδόν καθώς κάθε πίνακας  $s$ , που υπολογίζεται, αντιστοιχεί σε λύση που μας δίνει κάθε φορά την αμέσως μικρότερη τιμή  $z$  της αντικειμενικής συνάρτησης. Έτσι, δίνεται η δυνατότητα στον αναλυτή να μελετήσει την ευστάθεια της βέλτιστης λύσης ενός γραμμικού προγράμματος για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου  $k$ . Ωστόσο και μετά την επιλογή ενός συγκεκριμένου  $k$ , ο αποφασίζων θα μπορεί να έχει τη δυνατότητα, κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου, να σταματήσει την αναζήτηση νέων λύσεων, αν πραγματοποιώντας συγκεκριμένους ελέγχους με τις ήδη υπολογισμένες λύσεις διαπιστώσει ότι είναι σε θέση να εξάγει τα ζητούμενα συμπεράσματα ως προς την ευστάθεια της λύσης.

Από τα παραπάνω προκύπτει το συμπέρασμα ότι ο αλγόριθμος που προτάθηκε στο παρόν κεφάλαιο ελαττώνει πράγματι τον απαιτούμενο υπολογιστικό φόρτο κατά τη διαδικασία εύρεσης των πολλαπλών ή ημιβέλτιστων λύσεων ενός γραμμικού προγράμματος και παράλληλα δίνει τη δυνατότητα στον αποφασίζοντα να σταματήσει την αναζήτηση νέων λύσεων στο σημείο που επιθυμεί.

ΓΑΛΕΡΙΣΤΗΜΟ ΓΕΡΑΝΑ



## Κεφάλαιο 4: Συστήματα Ποιότητας και Πολυκριτήρια Ανάλυση

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται οι βασικές έννοιες των συστημάτων ποιότητας και πως συνδέεται η ποιότητα με την καταναλωτική συμπεριφορά και την ικανοποίηση του πελάτη. Ακολουθεί σύνδεση των συστημάτων αυτών με την προσέγγιση της πολυκριτήριας ανάλυσης μέσα από την παρουσίαση του μεθοδολογικού πλαισίου των αναλυτικών-συνθετικών μεθόδων όπως είναι η UTA και η MUSA.

Περιγράφεται η μέθοδος UTA και η πιο δημοφιλής παραλλαγή της, η UTASTAR και συνδέεται η εφαρμογή της με την ανάλυση της συμπεριφοράς του καταναλωτή.

Επικεντρώνοντας στη συνέχεια στο πεδίο των συστημάτων πολυκριτήριας ανάλυσης ικανοποίησης πελάτη, παρουσιάζεται η μέθοδος MUSA με εστίαση στα μοντέλα γραμμικού προγραμματισμού που απαιτούνται για την υλοποίησή της. Η μέθοδος MUSA αποτελεί μία πολυκριτήρια αναλυτική-συνθετική προσέγγιση για το πρόβλημα της μέτρησης και της ανάλυσης της ικανοποίησης. Η πρωτότυπη αυτή μεθοδολογία βασίζεται στην πολυκριτήρια ανάλυση αποφάσεων, υιοθετώντας τις βασικές αρχές της αναλυτικής-συνθετικής προσέγγισης και της θεωρίας των συστημάτων αξιών ή χρησιμότητας. Βασικός σκοπός της μεθόδου MUSA είναι η σύνθεση των προτιμήσεων ενός συνόλου πελατών σε μία ποσοτική μαθηματική συνάρτηση αξιών-χρησιμότητας. Πιο συγκεκριμένα, η μέθοδος θεωρεί ότι η συνολική ικανοποίηση ενός μεμονωμένου πελάτη εξαρτάται από ένα σύνολο μεταβλητών, οι οποίες αντιπροσωπεύουν τα χαρακτηριστικά-κριτήρια του προσφερόμενου προϊόντος ή υπηρεσίας.

## 4.1 Αξιολόγηση της Ποιότητας

### 4.1.1 Η Έννοια της Ποιότητας

Η έννοια της ποιότητας αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης καθ' όλη τη διάρκεια της ανθρώπινης ιστορίας και συνεχίζει ακόμη και σήμερα να αποτελεί θέμα εξαιρετικού ενδιαφέροντος. Η έννοια αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική είτε πρόκειται για αγαθά, είτε για υπηρεσίες. Αξίζει να αναφερθεί ότι στα τέλη του 20ου αιώνα η ποιότητα βρέθηκε στο επίκεντρο της προσοχής και του ενδιαφέροντος τόσο των επιστημόνων του χώρου της διοίκησης των επιχειρήσεων, όσο και των ίδιων των επιχειρήσεων, κυρίως μέσα από την ανάπτυξη της επιστημονικής σκέψης για ολική ποιότητα.

Σήμερα η ποιότητα αποτελεί έναν από τους πιο συχνά χρησιμοποιούμενους όρους μεταξύ των μάνατζερ και των στελεχών στις σύγχρονες επιχειρήσεις και οργανισμούς. Κι' αυτό γιατί η έννοια της είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με καλύτερα οικονομικά αποτελέσματα, διατήρηση πελατολογίου, υψηλότερο μερίδιο αγοράς και με άλλες μορφές της απόδοσης μιας επιχείρησης. Είναι πλέον αποδεκτό ότι η ποιότητα ενός προϊόντος ή μιας υπηρεσίας επηρεάζει το επίπεδο ικανοποίησης του καταναλωτή, γεγονός που με τη σειρά του υποκινεί σε συμπεριφορές, όπως οι επαναλαμβανόμενες αγορές (του ίδιου προϊόντος ή υπηρεσίας), η διάδοση θετικών μηνυμάτων σε άλλους καταναλωτές για το προϊόν ή την υπηρεσία (word of mouth) κλπ (Γούναρης, 2003). Αξίζει να αναφερθεί ότι η ποιότητα έχει χαρακτηριστεί ως «*η μοναδική πιο σημαντική δύναμη που μπορεί να οδηγήσει σε οικονομική μεγέθυνση τις επιχειρήσεις που δραστηριοποιούνται στις διεθνείς αγορές*» (Reeves & Bednar, 1994).

Τι σημαίνει, όμως ποιότητα; Αρχικά θα πρέπει να επισημανθεί ότι ο όρος ποιότητα σημαίνει διαφορετικά πράγματα για κάθε άνθρωπο. Ωστόσο, όμως, η ανάγκη ορισμού της συγκεκριμένης έννοιας είναι σημαντική όχι μόνο από σημειολογικής πλευράς. Η ανάγκη αυτή κρίνεται ακόμη πιο σημαντική αν ληφθεί υπόψη ότι ο ορισμός της ποιότητας ουσιαστικά αποτελεί το πρώτο βήμα για τη βελτίωσή της. Κάνοντας μια ανασκόπηση από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα παρατηρείται ότι η έννοια της ποιότητας έχει ερμηνευτεί με διάφορους τρόπους.

Ενδεικτικά, η ποιότητα σύμφωνα με αναφορές των Reeves & Bednar (1994) έχει οριστεί ως:

- «*αρετή*», «*υπεροχή*». Ορισμοί, οι οποίοι αποδόθηκαν από τους αρχαίους Έλληνες φιλοσόφους, όπως ο Σωκράτης, ο Πλάτωνας και ο Αριστοτέλης. Αν και την εποχή εκείνη η αρετή είχε εφαρμογή σε διάφορα φαινόμενα, ως έννοια ήταν απόλυτη. Σήμαινε το καλό στην υψηλότερη μορφή του, την υψηλότερη ιδέα όλων.

#### Κεφάλαιο 4: Συστήματα Ποιότητας και Πολυκριτήρια Ανάλυση

- «αξία».
- «συμμόρφωση στους προσδιορισμούς» - “conformance to specifications”- και ως «συμμόρφωση στις προδιαγραφές» - “conformance to requirements”. Ορισμοί, οι οποίοι εξετάζουν την ποιότητα σε σχέση με το κατά πόσο ένα προϊόν ανταποκρίνεται σε συγκεκριμένες προδιαγραφές και πρότυπα που η ίδια η επιχείρηση έχει ορίσει.
- «η καταλληλότητα για χρήση» (“fitness for use”), δηλαδή η έκταση στην οποία ένα προϊόν ικανοποιεί επιτυχώς τους σκοπούς του χρήστη.
- «ο βαθμός στον οποίο ένα προϊόν ή μια υπηρεσία ανταποκρίνεται ή / και υπερβαίνει τις προσδοκίες των πελατών» (Grönroos, 1984; Parasuraman A. et al., 1985)
- «η ολότητα των γνωρισμάτων και των χαρακτηριστικών ενός προϊόντος ή μιας υπηρεσίας που έχουν να κάνουν με την ικανότητά του να ικανοποιεί δεδηλωμένες ή υπονοούμενες ανάγκες» (Kotler, 1994). Ορισμός που έχει δώσει ο Αμερικανικός Σύλλογος Ποιοτικών Ελέγχων και ο οποίος έχει υιοθετηθεί παγκοσμίως.

Αυτό που θα μπορούσε να ειπωθεί συμπερασματικά για τον ορισμό της ποιότητας είναι ότι, παρά τις πολυάριθμες προσπάθειες στην πραγματικότητα δεν υπάρχει ένας παγκόσμιος ορισμός της. Αντίθετα, αυτό που συμβαίνει είναι ότι ανάλογα με τις εκάστοτε συνθήκες που επικρατούν επιλέγεται και ο αντίστοιχα κατάλληλος ορισμός. Κι' αυτό γιατί η φύση της συγκεκριμένης έννοιας είναι τέτοια που απαιτεί την ύπαρξη πολυάριθμων ορισμών ή/και μοντέλων ποιότητας προκειμένου να αποτυπωθεί το εύρος και η πολυπλοκότητα της.

Τα βραβεία ποιότητας (Øvretveit 1993; Kotler 1994) δεν είναι τίποτα άλλο πέρα από μία εξέταση των μεθόδων που ακολουθεί μια επιχείρηση για να ελέγξει και να διασφαλίσει την ποιότητα των προϊόντων ή των υπηρεσιών της. Τα βραβεία ποιότητας αρχικά αναπτύχθηκαν μέσα στα πλαίσια της παραγωγής, όπου το βασικό ενδιαφέρον ήταν η ποιότητα των προϊόντων και η προσαρμογή (conformance).

Ωστόσο, σήμερα η ανάπτυξη των συστημάτων για τη διασφάλιση της ποιοτικής απόδοσης, καλύπτει όχι μόνο την παραγωγή, αλλά όλες τις λειτουργίες της επιχείρησης, όπως για παράδειγμα τα χρηματοοικονομικά, τη διοίκηση του προσωπικού και το μάρκετινγκ. Τα συστήματα ποιότητας σχεδιασμένα να ενισχύσουν την απόδοση στους συγκεκριμένους τομείς χρησιμοποιούν κριτήρια (ή αλλιώς πρότυπα) με τα οποία αξιολογούν στοιχεία των συστημάτων και της απόδοσης μιας επιχείρησης. Τα κριτήρια αυτά βασίζονται σε θεωρίες ποιότητας, καθώς και σε ένα πλαίσιο, το οποίο τονίζει τους τομείς μιας επιχείρησης που οι ειδικοί της ποιότητας θεωρούν ως βασικούς για την ικανότητα της να παρέχει με

## Κεφάλαιο 4: Συστήματα Ποιότητας και Πολυκριτήρια Ανάλυση

συνέπεια ποιοτικές υπηρεσίες. Σήμερα υπάρχουν τόσο εθνικά, όσο και διεθνή βραβεία ποιότητας, εκ των οποίων μερικά από τα πιο σημαντικά είναι:

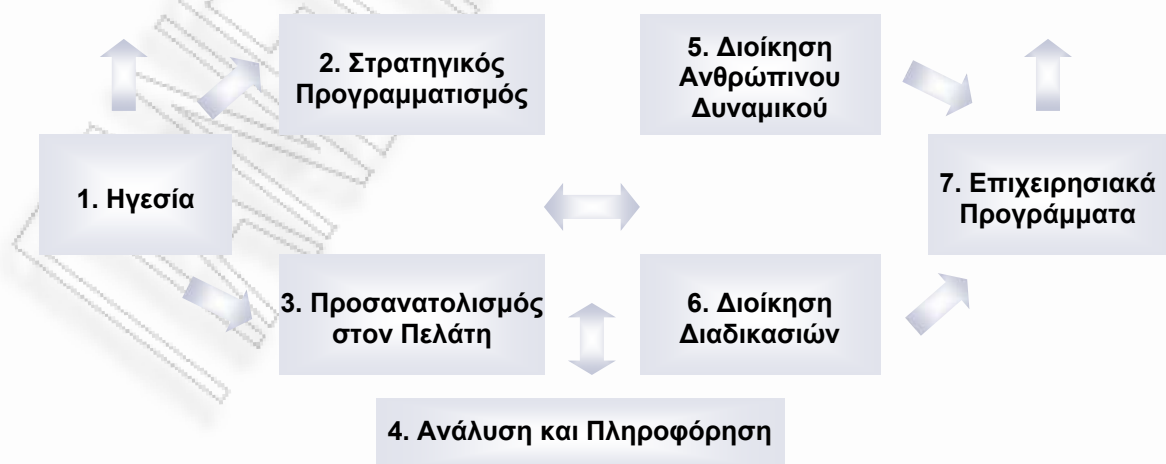
### Το Βραβείο Deming

Το 1951 η Ιαπωνία έγινε η πρώτη χώρα που απέμεινε ένα εθνικό βραβείο ποιότητας, το βραβείο Deming, το οποίο πήρε το όνομα του από τον Αμερικανό στατιστικολόγο W. Edward Deming, ο οποίος δίδαξε τη σπουδαιότητα και τη μεθοδολογία της βελτίωσης της ποιότητας στη μεταπολεμική Ιαπωνία. Το έργο του Deming αποτέλεσε τη βάση πάνω στην οποία χτίστηκαν πολλές πρακτικές του μάνατζμεντ ολικής ποιότητας.

### Το Βραβείο Malcolm Baldrige

Στα μέσα της δεκαετίας του 1980 οι ΗΠΑ καθιέρωσαν το εθνικό βραβείο ποιότητας με σκοπό να προωθηθεί η αφύπνιση αναφορικά με την ποιότητα, να αναγνωριστούν τα ποιοτικά επιτεύγματα των αμερικανικών επιχειρήσεων, καθώς και να δημοσιοποιηθούν οι επιτυχημένες ποιοτικές στρατηγικές. Τα κριτήρια για την απονομή του βραβείου Baldrige, τα οποία παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.1 συνίστανται από επτά μέτρα, το καθένα από τα οποία έχει ένα συγκεκριμένο πλήθος βαθμών. Τα μέτρα αυτά είναι: η εστίαση του ενδιαφέροντος στον πελάτη και η ικανοποίηση του (έχει τους περισσότερους βαθμούς σημαντικότητας), η ποιότητα και τα αποτελέσματα των λειτουργιών, το μάνατζμεντ της ποιότητας της διαδικασίας, η ανάπτυξη και το μάνατζμεντ ανθρωπίνων πόρων, στρατηγικός σχεδιασμός ποιότητας, πληροφόρηση και ανάλυση και ο ηγετικός ρόλος ανώτερων διοικητικών στελεχών.

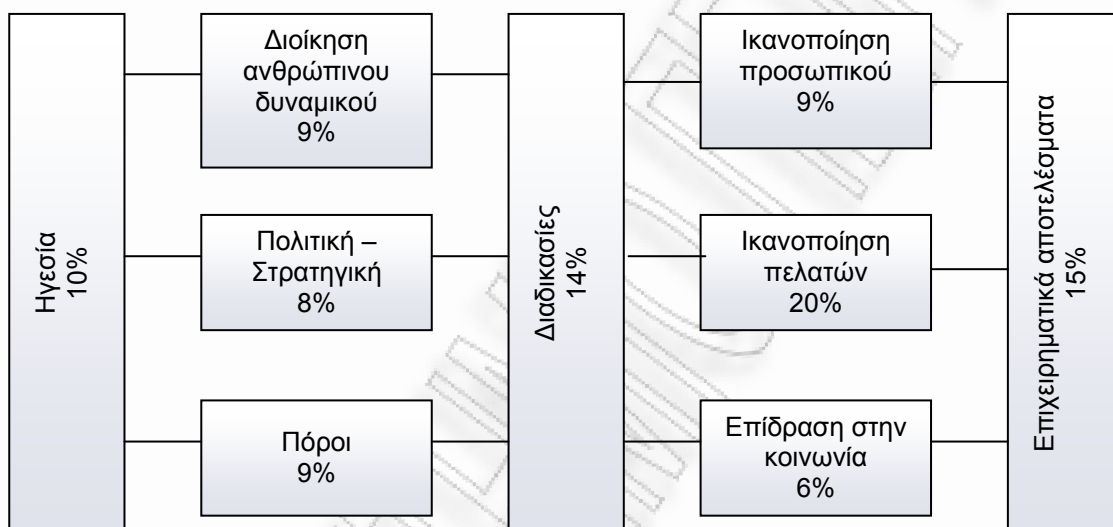
**Στρατηγικές και προγράμματα δράσης προσανατολισμένα στον πελάτη και την αγορά**



**Σχήμα 4-1:** Διάγραμμα κριτηρίων για το βραβείο ποιότητας Malcolm Baldrige

### Το Ευρωπαϊκό Βραβείο Ποιότητας

Το 1991 το Ευρωπαϊκό Ίδρυμα για τη Διοίκηση της Ποιότητας (European Foundation for Quality Management - EFQM) καθιέρωσε το Ευρωπαϊκό Βραβείο Ποιότητας, το οποίο όπως και το βραβείο Baldrige απονέμεται σε εταιρίες που έχουν επιτύχει υψηλή βαθμολογία σε ορισμένα κριτήρια: ηγεσία (ηγετικό ρόλο), μάνατζμεντ προσωπικού, πολιτική και στρατηγική, πόρους, διαδικασίες, ικανοποίηση του κόσμου, ικανοποίηση του πελάτη, αντίκτυπο στην κοινωνία και αποτελέσματα της επιχείρησης.



**Σχήμα 4-2:** Διάγραμμα κριτηρίων του Ευρωπαϊκού βραβείου ποιότητας

### Διεθνή Πρότυπα Διασφάλισης Ποιότητας ISO 9000

Τα πρότυπα διασφάλισης ποιότητας αποτελούν εξέλιξη των Αμερικανικών στρατιωτικών προτύπων AQAP (Allied Quality Assurance Publications), πάνω στα οποία βασίστηκε η δημιουργία της Βρετανική σειράς προτύπων BS 5750, η οποία το 1987 εξελίχθηκε από τον διεθνή οργανισμό Τυποποίησης (International Organization for Standardization) στη σειρά προτύπων ISO 9000 (ISO 9001, ISO 9002, ISO 9003, ISO 9004, ISO 9004-1, ISO 9004-2). Το γενικό πρότυπο ISO αναφέρεται σε βασικές οδηγίες για διασφάλιση ποιότητας. Συγκεκριμένα, καθορίζει κανόνες επιλογής και χρήσης συστημάτων διασφάλισης ποιότητας σε συνδυασμό και με τα επόμενα πρότυπα της σειράς, ενώ αναφέρεται και στην ανάπτυξη, προμήθεια και συντήρηση λογισμικού.

Σύμφωνα με τα όσα αναφέρονται στα διαφορετικά βραβεία ποιότητας ο ανθρώπινος παράγοντας κυρίως μέσω της ικανοποίησης πελατών και προσωπικού αποτελούν βασικά συστατικά στοιχεία της αριστείας των επιχειρήσεων και οργανισμών.

#### **4.1.2 Ποιότητα και καταναλωτής**

Σύμφωνα με τις προσεγγίσεις της Διοίκησης Ολικής Ποιότητας ο καταναλωτής έρχεται στο κέντρο του ενδιαφέροντος με δεδομένο ότι λειτουργεί σαν τελικός κριτής μέσω της αγοραστικής του συμπεριφοράς.

Η Συμπεριφορά του Καταναλωτή αποτελεί μία πολυεπίπεδη επιστήμη που ερευνά τη διαδικασία λήψεως καταναλωτικών αποφάσεων. Η γνώση όλων των πληροφοριών, οι οποίες αφορούν στη διαδικασία που ακολουθεί ο καταναλωτής για να αποφασίσει την αγορά ενός προϊόντος ή μίας υπηρεσίας, είναι εξαιρετικά χρήσιμη για τους αποφασίζοντες τη στρατηγική μάρκετινγκ (Ματσατσίνης, 1995).

Είναι κοινώς αποδεκτό ότι η ψυχολογία του καταναλωτή θεωρείται ως ένα 'μαύρο κουτί' στο οποίο επεξεργάζονται οι προσλαμβάνουσες πληροφορίες που αφορούν τόσο στα χαρακτηριστικά του προϊόντος ή της υπηρεσίας, όσο και στην ικανοποίηση του πελάτη μετά την αγορά ή χρήση. Η επεξεργασία αυτή οδηγεί στην απόφαση για αγορά ή επαναγορά του προϊόντος. Τα διάφορα μοντέλα συμπεριφοράς καταναλωτή προσπαθούν να περιγράψουν και να εξηγήσουν τι ακριβώς συμβαίνει σε αυτό το 'μαύρο κουτί' (Γρηγορούδης & Σίσκος, 2000).

Ας επισημανθεί εδώ ότι η εμπλοκή του καταναλωτή με την ποιότητα δεν επικεντρώνεται μόνο στην απόκτηση του προϊόντος, αλλά επεκτείνεται και σε δραστηριότητες του καταναλωτή μετά την αγορά του προϊόντος, όπως χρήση αξιολόγηση και απόρριψη του προϊόντος, της υπηρεσίας, των ιδεών, κ.λ.π. Είναι σημαντικό το γεγονός ότι ο χώρος της ανάλυσης της συμπεριφοράς του καταναλωτή έχει επικεντρώσει το ενδιαφέρον του στην μετά-αγοραστική συμπεριφορά του πελάτη, αναδεικνύοντας με αυτό τον τρόπο τη σπουδαιότητα της μέτρησης της ικανοποίησης του πελάτη (Kotler, 1994).

Η ικανοποίηση του πελάτη μπορεί να οριστεί είτε ως ένα αποτέλεσμα (outcome), είτε ως μία διαδικασία (process). Ο πρώτος τρόπος καθορίζει την ικανοποίηση ως μία τελική κατάσταση ή ως ένα αποτέλεσμα της εμπειρίας κατανάλωσης ή χρήσης ενός προϊόντος ή μίας υπηρεσίας. Σε γενικές γραμμές, οι πλέον δημοφιλείς ορισμοί της ικανοποίησης πελατών βασίζονται στην εκπλήρωση των προσδοκιών του πελάτη. Η ικανοποίηση είναι ένα μέτρο για το κατά πόσο το προσφερόμενο προϊόν ή υπηρεσία εκπληρώνει τις προσδοκίες του πελάτη.

Μπορεί να ειπωθεί, ότι η συμπεριφορά του καταναλωτή είτε πριν την κατανάλωση είτε μετά από αυτή πηγάζει από τις διαμορφωμένες στάσεις του κάθε καταναλωτή. Οι στάσεις του καταναλωτή είναι ουσιαστικά εκτιμήσεις ή αξιολογήσεις του καταναλωτή, που εκφράζουν τη δυνατότητα που έχουν τα διαφορετικά εναλλακτικά προϊόντα να ικανοποιήσουν συγκεκριμένες ανάγκες του. Επομένως, οι ανάγκες του καταναλωτή επηρεάζουν τις στάσεις του, και αυτές με τη σειρά τους επηρεάζουν τις αγοραστικές

του αποφάσεις. Γνωρίζοντας ποιες είναι οι στάσεις των καταναλωτών, τα στελέχη του μάρκετινγκ θα πρέπει να είναι σε θέση να: α) προβλέψουν τις μελλοντικές αγορές, β) κατανοήσουν γιατί οι πωλήσεις ενός προϊόντος είναι ικανοποιητικές ή όχι, και γ) βελτιώσουν το μίγμα μάρκετινγκ προκειμένου να βελτιώσουν τις στάσεις των καταναλωτών (Σιώμκος, 1994).

Χρήσιμο σε αυτό το σημείο είναι ο καθορισμός της έννοιας «καταναλωτής – πελάτης». Σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό, οι πελάτες μιας επιχείρησης ή ενός οργανισμού είναι τα άτομα που λαμβάνουν τις αποφάσεις αγοράς των προϊόντων ή των υπηρεσιών που διαθέτει ο φορέας αυτός (Engel *et al.*, 1978; Engel & Blackwell, 1982; Διακόπουλος, 1986; Κεχαγιάς, 1990; Μαγνήσαλης, 1981; Σιώμκος, 1994).

Ο Edosomwan (1993) προτείνει έναν εναλλακτικό ορισμό των πελατών: «... *Πελάτης είναι το άτομο ή η ομάδα ατόμων που λαμβάνει το παραγόμενο αποτέλεσμα (output) μιας εργασίας (work) ...*»

Οι θεωρίες του μάνατζμεντ ποιότητας (Gale, 1963; Kano *et al.*, 1984; Levitt, 1986; Lowenstein, 1995; Mittal *et al.*, 1998) τονίζουν ότι πολλές ιδιότητες-κλειδιά προϊόντων και υπηρεσιών δεν έχουν μια απόλυτα γραμμική σχέση με τις αποφάσεις του καταναλωτή και την ικανοποίησή του. Κάποιες ιδιότητες, ορισμένες ως «Must-be» ιδιότητες από τον Kano, έχουν δραματικά αρνητική επιρροή στην ικανοποίηση όταν δεν προσδίδονται, αλλά έχουν μια ελάχιστα θετική επιρροή όταν βελτιώνονται σε σχέση με ένα αποδεκτό επίπεδο. Η μη-γραμμική φύση της σχέσης μεταξύ των «Must-be» ιδιοτήτων και της συνολικής ικανοποίησης καθιστά δύσκολη την αναγνώριση τέτοιων ιδιοτήτων με τις κλασικές τεχνικές γραμμικής μοντελοποίησης. Επιπλέον, η σχέση μεταξύ των «Must-be» ιδιοτήτων και της συνολικής ικανοποίησης του πελάτη είναι αλληλοεξαρτώμενη, γιατί αποτυχία σε κάποια από τις «Must-be» ιδιότητες προκαλεί την μείωση της συνολικής ικανοποίησης και δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει μείωση της απόδοσης όλων των «Must-be» ιδιοτήτων. Οι ιδιότητες αυτές ορίζονται ως τα κλειδιά δυσαρέσκειας (key dissatisfiers).

### **4.1.3 Μελέτη της συμπεριφοράς του καταναλωτή**

Στις μέρες μας είναι πλέον κοινώς αποδεκτό στα πλαίσια της φιλοσοφίας του μάρκετινγκ ότι ο πελάτης είναι το κεντρικό και αρχικό σημείο αναφοράς κάθε επιτυχημένης στρατηγικής ποιότητας. Οι ανάγκες και επιθυμίες του πελάτη πρέπει να είναι η κεντρική δύναμη για την εταιρία που επιθυμεί να διαφοροποιηθεί από τους ανταγωνιστές της (Morgan & Piercy, 1994).

Η συμπεριφορά του καταναλωτή είτε πριν την κατανάλωση είτε μετά από αυτή πηγάζει από τις διαμορφωμένες στάσεις του. Οπότε είναι αναγκαίο για τα στελέχη

## Κεφάλαιο 4: Συστήματα Ποιότητας και Πολυκριτήρια Ανάλυση

του μάρκετινγκ να παρακολουθούν τις μεταβολές στις στάσεις των καταναλωτών τόσο για τα δικά τους προϊόντα, όσο και γι' αυτά των ανταγωνιστών. Να σημειωθεί εδώ ότι είναι γεγονός πως, εκτός από τις πωλήσεις, οι στάσεις είναι η περισσότερο συχνά μετρούμενη όψη της συμπεριφοράς του καταναλωτή.

Έτσι, αποδεχόμενοι τη σχέση αίτιου – αποτελέσματος ανάμεσα στις στάσεις και τη συμπεριφορά του καταναλωτή οι μελετητές έχουν αναπτύξει μοντέλα μέτρησης και ανάλυσης των στάσεων απέναντι στα διαφορετικά προϊόντα. Κάποια τέτοια μοντέλα είναι: τα πολυκριτήρια (ή πολυχαρακτηριστικά) μοντέλα (Multiattribute Attitude Models), το μοντέλο του Rosenberg, το βασικό πολυχαρακτηριστικό μοντέλο (Basic Multiattribute Model), το μοντέλο του Fishbein, τα μεικτά μοντέλα (Hybrid Models), το μοντέλο των συμπεριφορικών προθέσεων του Fishbein κλπ (Σιώμκος, 1994).

Αρκετά μοντέλα έχουν ως κοινή βάση τη θεώρηση ότι ο κάθε καταναλωτής συνδέει το κάθε προϊόν με μία σειρά από χαρακτηριστικά (attributes), στα οποία αποδίδει διαφορετική σημαντικότητα. Κάποιοι καταναλωτές θα αποδίδουν παρόμοια βαρύτητα στα διάφορα χαρακτηριστικά μιας ομάδας προϊόντων, οπότε αυτοί θα μπορούσαν να συστήσουν ένα ομοιογενές τμήμα της υπό εξέταση αγοράς. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να προβούμε σε μία τμηματοποίηση της αγοράς (Ματσατσίνης, 1995).

Η τμηματοποίηση της αγοράς (market segmentation) είναι μια συστηματική διαδικασία εντοπισμού εσωτερικά ομοιογενών ομάδων αγοραστών οι οποίοι απαιτούν διαφορετικές στρατηγικές μάρκετινγκ, προκειμένου να επηρεασθεί η κατανάλωσή τους. Η τμηματοποίηση σαν αναλυτική μέθοδος συνδέεται με τη στρατηγική μάρκετινγκ μέσα από την τοποθέτηση του προϊόντος (*product positioning*) στη αγορά, σε σχέση με την τοποθέτηση των ανταγωνιστών (Σιώμκος, 1994).

Οι Hauser and Urban (1978), έδειξαν ότι η θεωρία χρησιμότητας των Von Neumann – Morgenstern (1947), είναι σύμφωνη με τα περιγραφικά μοντέλα (descriptive models) που αναφέρονται στη λήψη αποφάσεων από καταναλωτές. Στα μοντέλα αυτά οι προτιμήσεις και η τελική επιλογή προκύπτουν από τη σύγκριση των προϊόντων μιας 'αγοράς' με βάση μια οικογένεια κριτηρίων και ως εκ τούτου είναι δυνατή η μοντελοποίηση των σχέσεων τους με βάση τη συνάρτηση χρησιμότητας των Von Neumann – Morgenstern (1947). Αυτό σημαίνει ότι η περιγραφική θεωρία χρησιμότητας μπορεί να εφαρμοσθεί για τη μελέτη της καταναλωτικής συμπεριφοράς. Σύμφωνα με τη θεωρία χρησιμότητας ένα προϊόν A θα προτιμάται από κάποιο άλλο B και θα επιλέγεται από τον καταναλωτή αν και μόνο αν η χρησιμότητα (αξία) που προσδοκά από το A είναι μεγαλύτερη αυτής του B.

Με βάση τις αντιλήψεις τους οι καταναλωτές διαμορφώνουν τις προτιμήσεις τους. Μέσω μοντέλων μπορεί να αποδοθεί στους καταναλωτές μια συνάρτηση αξίας (utility function), η οποία προσδιορίζει την προσδοκώμενη από αυτούς αξία από την αγορά



ενός προϊόντος ή τη χρήση μιας υπηρεσίας. Η συνάρτηση αξίας περιγράφει την εκτίμηση ενός προϊόντος πάνω σε ένα σύνολο χαρακτηριστικών – κριτηρίων, των οποίων τα επίπεδα συμμετοχής ποικίλουν. Τα βάρη που ένας καταναλωτής αποδίδει στα κριτήρια, βάση των οποίων παίρνει μία απόφαση, είναι ενδεικτικά της σχετικής σημαντικότητας που τους αποδίδει. Στα πλαίσια της ίδιας προσέγγισης ο καταναλωτής αποδίδει σε κάθε χαρακτηριστικό του προϊόντος μια αξία (utility function) (Ματσατσίνης, 1995).

Η παρουσία πολλών προϊόντων, τα οποία εκτιμώνται από τους καταναλωτές βάσει συγκεκριμένων κριτηρίων και για τα οποία οι καταναλωτές εκφράζουν τις προτιμήσεις τους, εισάγει την έννοια της πολυκριτήριας λήψης αποφάσεων στη μελέτη της συμπεριφοράς του καταναλωτή και παρέχει τη δυνατότητα να εφαρμογής σχετικών μοντέλων τα οποία θα περιγραφούν στη συνέχεια του κεφαλαίου.

### **4.1.4 Μέτρηση της ικανοποίησης του πελάτη**

Στα πλαίσια της πελατοκεντρικής προσέγγισης που έχουν επιλέξει οι σύγχρονες επιχειρήσεις και οργανισμοί θεωρούν ως έναν από τους βασικούς δείκτες απόδοσης τη βαθμό ικανοποίησης των πελατών. Είναι λοιπόν ζωτικής σημασίας για μία επιχείρηση να γνωρίζει το βαθμό ικανοποίησης που αποκομίζουν οι πελάτες της από τη χρήση των προϊόντων ή των υπηρεσιών της (Γρηγορούδης *et al.*, 1997).

Εκτεταμένη έρευνα για την ικανοποίηση του πελάτη έχει πραγματοποιηθεί τα τελευταία χρόνια (Cadotte *et al.*, 1987; Churchill & Surprenant, 1982; Fornell, 1992; Oliver, 1980, 1997; Oliver & Swan, 1989; Tse & Wilton, 1988; Westbrook, 1987). Μια ανασκόπηση στην πληθώρα των εργασιών αποκαλύπτει δυο διαφορετικές προσεγγίσεις. Η πρώτη προσέγγιση δίνει έμφαση στην ικανοποίηση που αφορά συγκεκριμένες συναλλαγές, την ικανοποίηση που απαντάται με ένα προϊόν ή μια υπηρεσία (Oliver, 1980; Oliver & DeSarbo, 1988). Η άλλη προσέγγιση επικεντρώνεται στη συσσωρευμένη ικανοποίηση (Bolton & Drew, 1991; Fornell, 1992). Υποθέτει ότι η ικανοποίηση καθορίζεται από δείκτες ικανοποίησης ή μη ικανοποίησης από μια υπηρεσία ή ένα προϊόν με την πάροδο του χρόνου. Και στις δύο περιπτώσεις, η ικανοποίηση είτε ορίζεται ως μια συνολική (αθροιστική) κρίση για την ικανοποίηση, είτε αποσυντίθεται σε ιδιότητες απόδοσης ή ποιότητας (Cronin & Taylor, 1992; Gotlieb *et al.*, 1994).

Τι σημαίνει όμως ικανοποίηση; Εξετάζοντας τη διεθνή βιβλιογραφία προκύπτει το συμπέρασμα ότι ο ορισμός της συγκεκριμένης έννοιας δεν είναι τόσο απλός. Ωστόσο, ορισμένοι εναλλακτικοί ορισμοί περιγράφουν την ικανοποίηση ως:

#### Κεφάλαιο 4: Συστήματα Ποιότητας και Πολυκριτήρια Ανάλυση

- «το αποτέλεσμα που προκύπτει όταν τα χαρακτηριστικά της υπηρεσίας ή του προϊόντος ανταποκρίνονται στις ανάγκες του πελάτη και όταν η επιχείρηση συναντά ή υπερβαίνει τις προσδοκίες των πελατών κατά τη διάρκεια ζωής του προϊόντος ή της υπηρεσίας»
- «τα συναισθήματα ευχαρίστησης ή δυσαρέσκειας ενός ατόμου που προκύπτουν από την υποκειμενική σύγκριση της απόδοσης (ή του αποτελέσματος) ενός προϊόντος σε σχέση με τις προσδοκίες του» (Kotler, 1994)
- «μια ψυχολογική έννοια που περιλαμβάνει το αίσθημα του να είναι κάποιος καλά, καθώς και το αίσθημα της ικανοποίησης που προκύπτει από την απόκτηση αυτού που ελπίζει και προσμένει από ένα ελκυστικό προϊόν ή/και μια υπηρεσία»

Με δεδομένα τα παραπάνω προκύπτει ότι η ικανοποίηση είναι μια λειτουργία υποκειμενικής απόδοσης και εκπλήρωσης προσδοκιών. Επομένως, αποτελεί λογική συνέπεια το γεγονός ότι σήμερα πολλές επιχειρήσεις, οι οποίες επιθυμούν την υψηλή αφοσίωση του πελάτη στοχεύουν στην υψηλή ικανοποίηση. Κι' αυτό γιατί η υψηλή ικανοποίηση μπορεί δημιουργήσει ένα συναισθηματικό δεσμό με τη μάρκα, και όχι απλώς μια προτίμηση που στηρίζεται στη λογική (Kotler, 1994).

Η μέτρηση της ικανοποίησης πελατών έχει τις ρίζες της στο χώρο της Διοίκησης Ολικής Ποιότητας, ενώ έχει επίσης απασχολήσει αρκετούς θεωρητικούς ερευνητές της επιστήμης του μάρκετινγκ. Η σχολή της Διοίκησης Ολικής Ποιότητας εστιάζεται κυρίως στον τρόπο υλοποίησης των αποτελεσμάτων, τα οποία βασίζονται σε αναλύσεις δεδομένων της ικανοποίησης των πελατών, μέσα στην επιχείρηση (Γρηγορούδης και Σίσκος, 2000).

Αν και ο ορισμός της ποιότητας μπορεί να είναι ξεκάθαρος στο μυαλό του αγοραστή, το να ορίσουμε και να μετρήσουμε την ποιότητα είναι πολύ δύσκολο. Βασικό συστατικό στη δόμηση της, είναι η ποιότητα όπως την αντιλαμβάνεται ο καταναλωτής. Αυτή είναι η κρίση του καταναλωτή σχετικά με την συνολική ανωτερότητα ή όχι ενός αγαθού ή μιας υπηρεσίας. Η σύγκριση των προσδοκιών του πελάτη με το προϊόν και τις δραστηριότητες υποστήριξης, παρέχει τη βάση για τη μέτρηση της ποιότητας (Czarnecki, 1999; Dutka, 1995; Gerson, 1993; Morgan & Piercy, 1994).

Η μέτρηση της ικανοποίησης του πελάτη υπηρετεί δύο σκοπούς, να παρέχει πληροφορίες και να καθιστά εφικτή την επικοινωνία με τους πελάτες. Ίσως, ο πρωταρχικός σκοπός της συγκεκριμένης μέτρησης είναι η συλλογή πληροφοριών, είτε για το τι θεωρεί ο πελάτης ότι πρέπει να γίνει διαφορετικά, είτε για να εκτιμηθεί το κατά πόσο καλά η επιχείρηση ανταποκρίνεται στις ανάγκες των πελατών της.

#### Κεφάλαιο 4: Συστήματα Ποιότητας και Πολυκριτήρια Ανάλυση

Η προσέγγιση που προτείνεται στα πλαίσια της Διοίκησης Ολικής Ποιότητας είναι η παραδοσιακή περιγραφική μέθοδος μέτρησης της ικανοποίησης του πελάτη βασίζεται σε αναφορές πωλητών, αριθμό τηλεφωνητών ή παραπόνων που αφορούν τα προϊόντα ή τις υπηρεσίες, κόστος αποζημιώσεων ή ικανοποίησης εγγυήσεων καλής λειτουργίας του προϊόντος (Γρηγορούδης *et al.*, 1997).

Όσο αφορά στο χώρο του μάρκετινγκ, η μέτρηση της ικανοποίησης πελατών θεωρήθηκε αρχικά, κατά τις δεκαετίες 1960-1980, ως ένα πρόβλημα ανάλυσης της συμπεριφοράς του καταναλωτή. Οι σημαντικότερες προσπάθειες είναι το μοντέλο του Cardoso, το μοντέλο των Howard and Sheth και το μοντέλο του Oliver (Γρηγορούδης και Σίσκος, 2000).

Στα πλαίσια της σύγχρονης προσέγγισης της επιστήμης του μάρκετινγκ, ένα πρώτο μέτρο εκτίμησης της ικανοποίησης των πελατών είναι η απόφαση των τελευταίων για την επαναγορά ή όχι ενός προϊόντος. Με αυτό τον τρόπο και χρησιμοποιώντας μεθόδους έρευνας αγοράς, μπορεί να εκτιμηθεί ή πίστη ενός συνόλου καταναλωτών σε μία μάρκα προϊόντων (brand loyalty) και κατά συνέπεια ο βαθμός ικανοποίησης που αυτοί αποκομίζουν από τη χρήση του. Μία άλλη προσέγγιση από το χώρο του μάρκετινγκ στο συγκεκριμένο πρόβλημα βασίζεται στην υπόθεση ότι κάθε καταναλωτής διαμορφώνει μία αναμενόμενη αξία (χρησιμότητα) για κάθε προϊόν ή υπηρεσία που πρόκειται να αγοράσει ή να χρησιμοποιήσει. Η αναμενόμενη αυτή αξία συγκρίνεται με την πραγματική αξία που τελικά αποκομίζει ο καταναλωτής και ο βαθμός ικανοποίησης του πελάτη υπολογίζεται από το αποτέλεσμα της σύγκρισης αυτής (Γρηγορούδης *et al.*, 1997).

Μια διαφορετική προσέγγιση εκτίμησης της ικανοποίησης των καταναλωτών μιας επιχείρησης είναι η χρησιμοποίηση ονομομετρικών μοντέλων, με τα οποία εκτιμάται η συσχέτιση ανάμεσα σε μεταβλητές απόδοσης της επιχείρησης που βασίζονται στους καταναλωτές και σε κλασικές οικονομικές μεταβλητές. Μία ακόμα προσέγγιση είναι μέσω των κλασικών στατιστικών μεθόδων, όπως η γραμμική ανάλυση πολλαπλής παλινδρόμησης (multiple linear regression analysis) αλλά και μέσω των μεθόδων της ανάλυσης δεδομένων κατηγορικών μεταβλητών (categorical data analysis), όπου περιλαμβάνονται τεχνικές όπως logit analysis και loglinear models και οι οποίες προσπαθούν να υπολογίσουν τις απαιτούμενες συσχετίσεις ανάμεσα σε ποιοτικές μεταβλητές, ώστε να αναλύσουν τη συμπεριφορά των καταναλωτών. Στην ευρύτερη κατηγορία των στατιστικών μεθόδων που προσπαθούν να λύσουν το συγκεκριμένο πρόβλημα εντάσσονται και οι τεχνικές της ανάλυσης δεδομένων, όπως η conjoint analysis, καθώς και οι γραφικές μέθοδοι απεικόνισης δεδομένων, όπως τα ιστογράμματα διαφορών και τα διαγράμματα πιθανοτήτων (Γρηγορούδης *et al.*, 1997).

Σύμφωνα πάλι με τους Γρηγορούδη, Σίσκο και Saurais (1997) η κριτική που γίνεται στις μεθοδολογικές αυτές προσεγγίσεις εστιάζεται κυρίως στα εξής σημεία:

1. Τα περισσότερα στατιστικά μοντέλα ανάλυσης συμπεριφοράς των καταναλωτών δεν συμβιβάζονται με ποιοτικές μεταβλητές και όταν αυτό συμβαίνει, γίνεται με αυθαίρετη α priori κωδικοποίησή τους με αποτέλεσμα τη διαστρέβλωση της φυσικής πληροφορίας, όπως αυτή εξωτερικεύεται από τον καταναλωτή. Έτσι, με αυτόν τον τρόπο, τα αποτελέσματα εξαρτώνται, κατά μεγάλο ποσοστό, από την ποιότητα της ποσοτικοποίησης των μεταβλητών αυτών.
2. Σε αρκετές μεθοδολογικές προσεγγίσεις γίνονται ισχυρές υποθέσεις που είναι δύσκολο να αποδειχθούν. Οι υποθέσεις αυτές αφορούν είτε στη συμπεριφορά των καταναλωτών (συσχέτιση πίστης με ικανοποίηση πελατών) είτε στο μοντέλο εκτίμησης (προσέγγιση ικανοποίησης με συγκεκριμένη συνάρτηση πιθανότητας, συσχέτιση ικανοποίησης με οικονομικά μεγέθη εταιρίας).
3. Σε αρκετές περιπτώσεις δίνεται μεγαλύτερη βαρύτητα στην περιγραφή των χαρακτηριστικών εκείνων (από την εταιρία, τον καταναλωτή ή το προϊόν) που επηρεάζουν την ικανοποίηση του πελάτη παρά στη σύνθεση και την εκτίμηση των χαρακτηριστικών αυτών σε ένα ολικό βαθμό ικανοποίησης.
4. Επίσης, μπορεί να παρατηρηθεί ότι η απαιτούμενη πληροφορία σε αρκετές προσεγγίσεις είναι αρκετά δύσκολο να συλλεχθεί (π.χ. αναμενόμενη χρησιμότητα πελατών, βαθμοί παραχώρησης κλπ).

Ως απάντηση στην παραπάνω κριτική προτάθηκε ένα νέο μοντέλο από τους Γρηγορούδη και Σίσκο (2000). Πρόκειται για τη μεθοδολογία MUSA που έχει ως θεωρητικό υπόβαθρο την πολυκριτήρια ανάλυση και ανήκει στην ευρύτερη κατηγορία των 'Αναλυτικών – Συνθετικών Μοντέλων Προτίμησης' (Preference Aggregation – Disaggregation Models).

Η μεθοδολογία MUSA βασίζεται στη λογική ότι ενώ η σύνθεση των κριτηρίων οδηγεί σε μια απόφαση, η ανάλυση μιας απόφασης οδηγεί στην ανεύρεση της βαρύτητας των κριτηρίων που οδήγησαν στη λήψη της. Με αυτό τον τρόπο, το μοντέλο εκτίμησης της ικανοποίησης των πελατών προσπαθεί να αναλύσει την πολυκριτήρια συμπεριφορά ενός συνόλου καταναλωτών δεδομένου των προτιμήσεων των τελευταίων. Η μεθοδολογία αυτή παρουσιάζεται στην § 4.4.

## **4.2 Αναλυτική – Συνθετικά Μοντέλα και Συμπεριφορά Καταναλωτή**

Η φιλοσοφία της αναλυτικής-συνθετικής προσέγγισης που παρουσιάστηκε στην § 1.3.3 έχει χρησιμοποιηθεί και για τη μελέτη της συμπεριφοράς καταναλωτή, όπου γίνεται προσπάθεια διερεύνησης των στάσεων του καταναλωτή πριν και μετά την

## Κεφάλαιο 4: Συστήματα Ποιότητας και Πολυκριτήρια Ανάλυση

αγορά ενός προϊόντος. Οι καταναλωτές επιλέγοντας την αγορά ενός προϊόντος ουσιαστικά χρησιμοποιούν ένα ολικό κριτήριο πάνω στις εναλλακτικές δραστηριότητες, που στην συγκεκριμένη περίπτωση μπορεί είναι διάφορες μάρκες ίδιων ή ομοειδών προϊόντων. Φυσικά, για να προχωρήσουν οι καταναλωτές στην επιλογή τους αυτή έχουν προηγουμένως αξιολογήσει, έστω και υποσυνείδητα, τα προϊόντα με βάση κάποια κριτήρια. Η αξιολόγηση των εναλλακτικών προϊόντων πάνω σε αυτά τα κριτήρια είναι είτε αντικειμενική (όταν τα κριτήρια είναι μετρήσιμα-ποσοτικά), είτε υποκειμενική (κυρίως στην περίπτωση που έχουμε να αντιμετωπίσουμε ποιοτικά κριτήρια).

Καθοριστικός παράγοντας απόφασης είναι ουσιαστικά η βαρύτητα που δίνει ο κάθε καταναλωτής ξεχωριστά σε καθένα από τα κριτήρια. Γνωρίζοντας αυτό το στοιχείο, που είναι δηλωτικό της αγοραστικής συμπεριφοράς για συγκεκριμένες ομάδες καταναλωτών με παρόμοια κίνητρα, είμαστε σε θέση να διαμορφώσουμε ένα μοντέλο ολικής προτίμησης και με βάση αυτό να μπορέσουμε να εκτιμήσουμε τις πιθανές αγοραστικές αντιδράσεις των καταναλωτών σε αλλαγές συγκεκριμένων χαρακτηριστικών των προϊόντων (Ματσατσίνης, 1995).

Στην § 4.3 θα παρουσιασθεί εν συντομία η οικογένεια των μεθόδων UTA που στηρίζονται στην αναλυτική-συνθετική προσέγγιση και που χρησιμοποιούνται τα τελευταία χρόνια για την επίλυση πολυκριτήριων προβλημάτων αποφάσεων. Μάλιστα η χρήση τους σε προβλήματα ανάλυσης συμπεριφοράς καταναλωτή είναι αρκετά εκτεταμένη ενώ έχουν ενσωματωθεί σε πληροφοριακά συστήματα υποστήριξης αποφάσεων μάρκετινγκ.

Στην ίδια προσέγγιση στηρίζεται και η πολυκριτήρια μέθοδος MUSA (Multicriteria Satisfaction Analysis) που στοχεύει στην μέτρηση της ικανοποίησης του πελάτη, δηλαδή στην ανάλυση της μετα-αγοραστικής συμπεριφοράς του καταναλωτή. Στα πλαίσια της συγκεκριμένης μεθόδου συλλέγονται δεδομένα που αφορούν στην ικανοποίηση ενός συνόλου πελατών από ένα προϊόν ή μία υπηρεσία τόσο συνολικά όσο και επιμέρους για κάθε ένα κριτήριο-χαρακτηριστικό του προϊόντος ή της υπηρεσίας αυτής. Οι προτιμήσεις των καταναλωτών αυτών εκφράζονται σύμφωνα με μία μονότονη, προκαθορισμένη από τον αναλυτή, ποιοτική κλίμακα. Σύμφωνα με την προτεινόμενη μεθοδολογία, το μοντέλο MUSA προσπαθεί να εκτιμήσει τη συνολική και τις επιμέρους συναρτήσεις ικανοποίησης. Θα αναφερθούμε αναλυτικά στη μέθοδο αυτή στην § 4.4.

Κοινό χαρακτηριστικό τόσο των μοντέλων που ανήκουν στην οικογένεια των UTA όσο και στη MUSA είναι η επίλυση με χρήση προχωρημένων τεχνικών γραμμικού προγραμματισμού. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στην ανάγκη χρήσης τεχνικών ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης (post optimality analysis) με στόχο την ανάλυση της ευστάθειας των λύσεων των προκυπτουσών γραμμικών προγραμμάτων. Στο

Κεφάλαιο 5 θα παρουσιασθούν διάφορες τεχνικές μεταβελτιστοποίησης για τα μοντέλα της οικογένειας UTA και για τη MUSA.

### 4.3 Η Μέθοδος UTA και οι παραλλαγές της

#### 4.3.1 Στόχοι της μεθόδου

Η μέθοδος UTA<sup>1</sup> που προτάθηκε από τους Jacquet-Lagrèze και Sisko (1982) στοχεύει στην εκτίμηση μίας ή περισσοτέρων προσθετικών συναρτήσεων αξίας (ή χρησιμότητας) που προκύπτουν από μία δοσμένη κατάταξη εναλλακτικών ενός συνόλου αναφοράς  $A_R$  (ορίστηκε στην § 1.3.3). Η μέθοδος κάνει χρήση προχωρημένων τεχνικών γραμμικού προγραμματισμού για τον υπολογισμό των συναρτήσεων αυτών, ώστε οι κατατάξεις που θα προκύπτουν από τις εκτιμημένες συναρτήσεις πάνω στο  $A_R$ , να είναι κατά το δυνατό συνεπείς με αυτές που έχουν δοθεί αρχικά.

Η μέθοδος υιοθετεί βασικές αρχές της θεωρίας της πολυκριτήριας χρησιμότητας (multiattribute utility theory, MAUT) αφού δέχεται την ύπαρξη μίας προσθετικής συνάρτησης αξίας που συνθέτει όλα τα επιμέρους κριτήρια. Ακολουθώντας όμως τη Γαλλική προσέγγιση, η μέθοδος, σε τελικό στάδιο, εκτιμάει ένα σύνολο συναρτήσεων αξίας που αναπαριστούν τις προτιμήσεις που έχει εκφράσει ο αποφασίζων, αντί για μία και μοναδική συνάρτηση (Jacquet-Lagrèze & Siskos, 1982).

Όμως η βασική φιλοσοφία της μεθόδου την εντάσσει στο θεωρητικό ρεύμα της αναλυτικής-προσθετικής προσέγγισης (aggregation-disaggregation approach) που ανήκει στην ευρύτερη κατηγορία των προβλημάτων πολυκριτήριας ανάλυσης. Οι συναρτήσεις αξίας στη UTA δεν υπολογίζονται μέσω πληροφορίας που συλλέγεται με ευθύ τρόπο από τον αποφασίζοντα, όπως προβλέπεται στη θεωρία της πολυκριτήριας χρησιμότητας. Αντίθετα, οι συναρτήσεις προκύπτουν με έμμεσο τρόπο, μέσα από την ανάλυση των υποκειμενικών προτιμήσεων του αποφασίζοντα, όπως αυτές εξωτερικεύονται πάνω σε εναλλακτικές αναφοράς, που προϋπάρχουν της διαδικασίας εκτίμησης, ή πάνω σε σχετικές παρελθούσες αποφάσεις, αν τέτοια ιστορικά στοιχεία είναι διαθέσιμα (Despotis *et al.*, 1990).

Η UTA χρησιμοποιεί τεχνικές γραμμικού προγραμματισμού σε συνδυασμό με ανάλυση ποιοτικής παλινδρόμησης (ordinal regression) για μονότονες μεταβλητές.

---

<sup>1</sup> Utilité Additive

Ειδικότερα, ο γραμμικός προγραμματισμός είναι το μαθηματικό εκείνο εργαλείο που ωθεί την ανάλυση παλινδρόμησης στην εκτίμηση συναρτήσεων με την ελάχιστη δυνατή απόκλιση (ελαχιστοποίηση σφαλμάτων) σε σχέση με την υφιστάμενη πληροφορία. Με άλλα λόγια, και ειδικότερα για την περίπτωση εξέτασης της συμπεριφοράς του καταναλωτή, έχοντας δοσμένη την πρόθεσή του για την πραγματοποίηση μιας αγοράς, πρέπει να αποσυντεθεί στα επιμέρους κριτήρια τα οποία συντέλεσαν στη δεδομένη απόφαση και στη συνέχεια να εκτιμηθεί η συνάρτηση εκείνη, που συνθέτοντας τα κριτήρια αυτά θα οδηγούσε στην ίδια αγοραστική συμπεριφορά.

Το μοντέλο που συνθέτει τα κριτήρια στη UTA είναι μία προσθετική συνάρτηση της μορφής που περιγράφουν οι σχέσεις από 1.6 ως 1.10 στην § 1.3.2. Ειδικότερα, υπολογίζει μία προσθετική συνάρτηση αξίας, χωρίς βάρη, ισοδύναμη με τη μορφή που ορίζουν οι σχέσεις 1.8 και 1.9 και η οποία ορίζεται ως εξής:

$$u(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^n u_i(g_i) \quad (4.1)$$

που υπόκειται στους περιορισμούς κανονικοποίησης:

$$u_i(g_i^*) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^n u_i(g_i^*) = 1 \quad (4.3)$$

Φυσικά, η ύπαρξη ενός τέτοιου προτιμησιακού μοντέλου προϋποθέτει την ύπαρξη αμοιβαίας ανεξαρτησίας προτιμήσεων για το σύνολο των κριτηρίων από τον αποφασίζοντα, αν και η παραδοχή αυτή δεν συνιστά σημαντικά προβλήματα σε προσεγγίσεις όπως η αναλυτική – συνθετική προσέγγιση (Jacquet-Lagrèze & Siskos, 2001).

Τα πλεονεκτήματα της UTA είναι σε σύγκριση με τις τυπικές μεθόδους γραμμικής παλινδρόμησης είναι: (i) η ικανότητα διαχείρισης ποιοτικών όσο και ποσοτικών κριτηρίων στην αξιολόγηση των εναλλακτικών, (ii) η εκτίμηση ενός συνόλου από προσθετικές συναρτήσεις αξίας αντί για μία και μοναδική, (iii) η χρήση τυπικών τεχνικών γραμμικού προγραμματισμού, και (iv) η φύση των προτιμήσεων που εκφράζεται σαν ολοκληρωμένη ασθενής κατάταξη αντί να εκφράζεται μέσω αριθμητικών τιμών (Despotis *et al.*, 1990).

### 4.3.2 Η Μέθοδος UTA

Η UTA (Jacquet-Lagrèze & Siskos, 2001) για να εκτιμήσει τις προσθετικές συναρτήσεις αξίας χρειάζεται προς επεξεργασία ένα σύνολο πληροφορίας που αφορά στα κριτήρια, που έχει επιλέξει ο αναλυτής για την αξιολόγηση των εναλλακτικών, καθώς και στις εκφρασμένες αξιολογήσεις πάνω στις εναλλακτικές ενός συνόλου αναφοράς.

Έστω ότι ο αναλυτής ή/και ο αποφασίζων έχουν επιλέξει  $n$  κριτήρια σύμφωνα με τα οποία θα αξιολογήσουν τις εναλλακτικές. Έστω  $G_i = [g_{i^*}, g_i^*]$ ,  $i=1,2,\dots,n$  είναι τα διαστήματα στα οποία βρίσκονται οι τιμές του κάθε κριτηρίου  $i$  οπότε, καλούμε διάστημα σημαντικότητας του προϊόντος το σύνολο  $G = \bigtimes_{i=1}^n G_i$  (Jacquet-Lagrèze & Siskos, 1982).

Όταν ένα ή περισσότερα σύνολα  $G_i$  είναι συνεχή ή όταν περιλαμβάνουν ένα πολύ μεγάλο αριθμό τιμών  $g_i^k$ , είναι εφικτό να υπολογίσουμε την αντίστοιχη μερική χρησιμότητα με τη χρήση γραμμικού προγράμματος.

Θεωρούμε ότι οι ακραίες τιμές  $g_{i^*}, g_i^*$  για κάθε κριτήριο  $i$  είναι πεπερασμένες και χωρίζουμε το διάστημα  $[g_{i^*}, g_i^*]$  σε  $(\alpha_i - 1)$  ίσα διαστήματα  $[g_i^j, g_i^{k+1}]$ . Τα  $\alpha_i$  δίνονται από τον αναλυτή που ορίζει με αυτό τον τρόπο τον αριθμό των εκτιμώμενων σημείων κάθε μερικής χρησιμότητας  $u_i$ . Τα τελικά σημεία  $g_i^k$  δίνονται τότε από τον τύπο:

$$g_i^k = g_{i^*} + \frac{j-1}{\alpha_i - 1} (g_i^* - g_{i^*}) \quad \forall j = 1, 2, \dots, \alpha_i \quad (4.4)$$

Οι μεταβλητές που υπολογίζουμε είναι οι  $u_i(g_i^k)$ . Η μερική χρησιμότητα μιας δραστηριότητας  $a_j$  προσεγγίζεται από μια γραμμική παρεμβολή. Έτσι, για  $g_i(a_j) \in [g_i^j, g_i^{j+1}]$ , έχουμε:

$$u_i[g_i(a_j)] = u_i(g_i^k) + \frac{g_i(a_j) - g_i^k}{g_i^{k+1} - g_i^k} [u_i(g_i^{k+1}) - u_i(g_i^k)] \quad (4.5)$$

Όταν το διάστημα  $G_i$  είναι διακριτό, με λίγες τιμές, μπορούμε να διαλέξουμε  $\alpha_i$  ίσο με τον αριθμό των τιμών. Αν για παράδειγμα  $G_i = [5, 6, 7, 8, 9, 10]$ , θέτουμε  $\alpha_i = 6$  ώστε να υπολογίσουμε τις χρησιμότητες  $u_i(5), u_i(6), \dots, u_i(10)$ .

Οι υποκειμενικές προτιμήσεις του αποφασίζοντα εκφράζονται μέσω μιας ασθενούς κατάταξης  $R = (P, I)$ , όπου το  $P$  εκφράζει προτίμηση και το  $I$  αδιαφορία, πάνω σε ένα σύνολο αναφοράς, έστω το σύνολο  $A_R = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  πραγματικών ή φανταστικών δραστηριοτήτων με πολυκριτήριες εκτιμήσεις στο  $G$ . Τα στοιχεία του συνόλου  $A_R$  έχουν αναδιαταχθεί με τέτοιο τρόπο ώστε η  $a_1$  να είναι η πρώτη επιλογή του



αποφασίζοντα και  $a_m$  η τελευταία επιλογή. Τα δεδομένα μας τότε αποτελούνται από τις πολυκριτήριες εκτιμήσεις και από την ασθενή κατάταξη  $R$  ορισμένη στο  $A_R$ .

Από τη στιγμή που οι προτιμήσεις εκφράζονται μέσω ασθενούς κατάταξης, για κάθε ζευγάρι διαδοχικών εναλλακτικών ( $a_j, a_{j+1}$ ) του  $A_R$  θα ισχύει μία από τις παρακάτω δύο συνθήκες:

$$\begin{cases} u[\mathbf{g}(a_j)] > u[\mathbf{g}(a_{j+1})] \Leftrightarrow a_j \succ a_{j+1} \text{ (προτίμηση)} & (4.6) \\ u[\mathbf{g}(a_j)] = u[\mathbf{g}(a_{j+1})] \Leftrightarrow a_j \sim a_{j+1} \text{ (αδιαφορία)} & (4.7) \end{cases}$$

Ακολουθεί η περιγραφή της αλγοριθμικής διαδικασίας της UTA όπως έχει δοθεί από τους Jacquet-Lagrèze and Siskos (2001) και η οποία χωρίζεται σε τέσσερα διακριτά βήματα:

**Βήμα 1<sup>ο</sup>:** Εκφράζουμε τη συνολική χρησιμότητα  $u[\mathbf{g}(a_j)]$  της κάθε εναλλακτικής  $a_j$  ως συνάρτηση των συναρτήσεων μερικής χρησιμότητας  $u_i(g_i)$  μέσω της σχέσης (4.5).

Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση της μονοτονίας για τις συναρτήσεις χρησιμότητας  $u_i(g_i)$  των  $n$  κριτηρίων απαιτούμε την ικανοποίηση των παρακάτω περιορισμών:

$$u_i(g_i^{k+1}) - u_i(g_i^k) \geq s_i \quad \forall k = 1, 2, \dots, \alpha_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.8)$$

όπου  $s_i \geq 0$  είναι ένα κατώφλι αδιαφορίας που ορίζεται για κάθε κριτήριο  $i$ . Δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούνται κατώφλια αδιαφορίας σε αυτό το μοντέλο (αυτό γίνεται θέτοντας  $s_i=0$ ). Ωστόσο, όταν η αξιολόγηση των  $g_i$  και η υποκειμενική κατάταξη των εναλλακτικών έχουν δοθεί από το ίδιο άτομο, θεωρείται καλή ιδέα η εισαγωγή του κατωφλίου ώστε να αποφύγουμε φαινόμενα όπως:  $u_i(g_i^{k+1}) = u_i(g_i^k)$  όταν  $g_i^{k+1} \succ g_i^k$ . Στο επόμενο κεφάλαιο θα εξετάσουμε, στα πλαίσια της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης την επίδραση των διαφορετικών  $s_i$  στο σύνολο των λύσεων.

Επίσης, για τις μερικές χρησιμότητες πρέπει να ισχύουν οι περιορισμοί της (2.7):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n u_i(g_i^*) = 1 \\ u_i(g_i^*) = 0 \quad \forall i \end{cases} \quad (4.9)$$

**Βήμα 2<sup>ο</sup>:** Σύμφωνα με τις σχέσεις (4.6), (4.7) και (2.3) που περιγράφει τη γενική μορφή των προσθετικών συναρτήσεων θέτουμε:

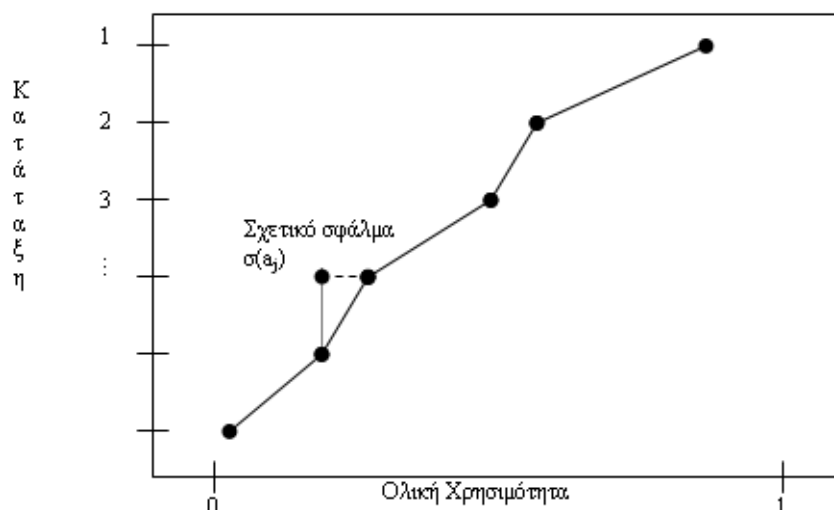
$$u[\mathbf{g}(a_j)] = \sum_{i=1}^n u_i[g_i(a_j)] + \sigma(a_j) \quad \text{για όλες τις } a \in A_R. \quad (4.10)$$

## Κεφάλαιο 4: Συστήματα Ποιότητας και Πολυκριτήρια Ανάλυση

όπου  $\sigma(a_j)$  είναι το σχετικό σφάλμα (Σχήμα 4-3) της συνάρτησης χρησιμότητας:

$$u[\mathbf{g}(a_j)] = \sum_{i=1}^n u_i[g_i(a_j)] \quad (4.11)$$

Το σφάλμα  $\sigma(a_j)$  είναι η ποσότητα που πρέπει να προστεθεί στην εκτιμώμενη χρησιμότητα  $u[\mathbf{g}(a_j)]$  κάποιας δράσης  $a$  ώστε να γίνει εφικτή η επανάκτηση της σειράς κατάταξης της στην ασθενή προκατάταξη.



**Σχήμα 4-3:** Καμπύλη ποιοτικής ανάλυσης παλινδρόμησης

Ξεκινώντας από την πρώτη θέση της κατάταξης,  $a_1$ , και πηγαίνοντας μέχρι την τελευταία,  $a_m$  γράφουμε για το κάθε ζευγάρι διαδοχικών εναλλακτικών τις επόμενες σχέσεις:

$$\Delta(a_j, a_{j+1}) = u'[\mathbf{g}(a_j)] - u'[\mathbf{g}(a_{j+1})] \quad (4.12)$$

Το πλήθος των σχέσεων που περιγράφονται από τον αναδρομικό τύπο (4.12) ισούται με  $m-1$ , δηλαδή τον αριθμό των εναλλακτικών μείον 1. Ας σημειώσουμε ότι δεν απαιτείται η εφαρμογή του παραπάνω αναδρομικού τύπου παρά μόνο για τις διαδοχικές στην κατάταξη εναλλακτικές και όχι για το σύνολο των εναλλακτικών ανά δύο εξαιτίας της ιδιότητας της μεταβατικότητας που ισχύει στο μοντέλο (Jacquet-Lagèze & Siskos, 1982)

Οι σχέσεις (4.12) μετατρέπονται μέσω των (4.10) και (4.11):

$$\Delta(a_j, a_{j+1}) = u[\mathbf{g}(a_j)] + \sigma(a_j) - u[\mathbf{g}(a_{j+1})] - \sigma(a_{j+1}) \quad (4.13)$$

**Βήμα 3<sup>ο</sup>:** Προχωράμε στην επίλυση του παρακάτω γραμμικού προγράμματος που ως κριτήριο θεωρεί την ελαχιστοποίηση του συνόλου των σχετικών σφαλμάτων  $\sigma(a_j)$ :

$$[\min]z = \sum_{j=1}^m \sigma(a_j) \quad (4.14)$$

υπό τους περιορισμούς :

$$\left. \begin{aligned} \Delta(\alpha_j, \alpha_{j+1}) &\geq \delta \text{ αν } \alpha_j \succ \alpha_{j+1} \\ \Delta(\alpha_j, \alpha_{j+1}) &= 0 \text{ αν } \alpha_j \sim \alpha_{j+1} \end{aligned} \right\} \forall j = 1, 2, \dots, m-1 \quad (4.15)$$

$$u_i(g_i^{k+1}) - u_i(g_i^k) \geq 0 \quad \forall i \text{ και } k \quad (4.16)$$

$$\sum_{i=1}^n u_i(g_i^*) = 1 \quad (4.17)$$

$$u_i(g_i^*) = 0, u_i(g_i^k) \geq 0, \sigma(a_j) \geq 0 \quad \forall i, k \text{ και } j$$

όπου  $\delta$  ένας μικρός αριθμός που επιλέγει ο αναλυτής και που εξαρτάται από το πλήθος των εναλλακτικών στο  $A_R$  καθώς και από το επίπεδο του  $s_j$ , και υποδηλώνει το ελάχιστο βήμα ανάμεσα στις ολικές χρησιμότητες δύο διαδοχικών εναλλακτικών.

Οι σχέσεις (4.15) προκύπτουν από την υποκειμενική ασθενή κατάταξη (weak order) των εναλλακτικών του συνόλου αναφοράς από τον αποφασίζοντα, και οι σχέσεις (4.16) και (4.17) προκύπτουν από τον τρόπο με τον οποίο έχουν οριστεί παραπάνω τα κριτήρια.

Το παραπάνω γραμμικό πρόβλημα έχει  $\sum_{i=1}^n (\alpha_i - 1)$  μεταβλητές απόφασης τύπου  $u_i(g_i^k)$  και  $|A_R|=m$  μεταβλητές  $\sigma(a_j)$ . Επίσης, έχει  $m-1$  περιορισμούς της μορφής (4.15) και  $\sum_{i=1}^n (\alpha_i - 1)$  της μορφής (4.16). Το γραμμικό πρόγραμμα συμπληρώνεται από τους  $1+n$  περιορισμούς (4.17) καθώς και από τους αναγκαίους περιορισμούς μη αρνητικότητας.

**Βήμα 4<sup>ο</sup>:** Όπως ήδη έχει αναφερθεί η UTA εκτιμάει ένα σύνολο από προσθετικές συναρτήσεις χρησιμότητας, και αυτό επιτυγχάνεται στο τελευταίο αυτό βήμα, το οποίο ουσιαστικά αποτελεί μία ανάλυση μεταβελτιστοποίησης, που είναι αναπόσπαστο κομμάτι της όλης διαδικασίας. Ανάλογα με την αρχική βέλτιστη λύση  $z^*$  που θα υπολογίσουμε με την επίλυση του γραμμικού προγράμματος στο 3<sup>ο</sup> βήμα αναζητούμε πολλαπλές ή/και ημιβέλτιστες λύσεις κατά τη γνωστή έννοια.

Οι νέες λύσεις αναζητούνται σε μία υποπεριοχή του υπερπολυέδρου (4.15)-(4.17) που οριοθετείται από το νέο περιορισμό:

$$z \leq z^* + \varepsilon \quad (4.18)$$

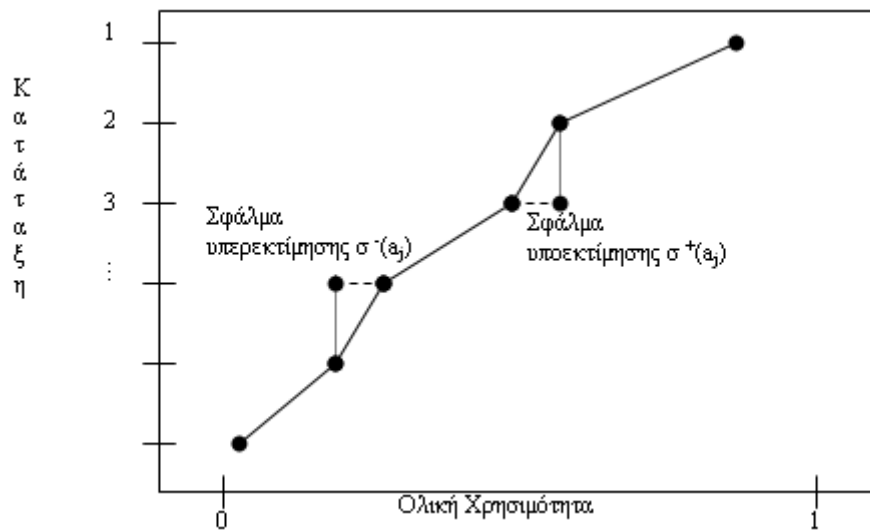
όπου  $z^*$  η αρχική βέλτιστη λύση και  $\varepsilon$  μία πολύ μικρή θετική ποσότητα, επιλογής του αναλυτή, πολλές φορές εκφρασμένη ως ποσοστό της  $z^*$ .

Στο Κεφάλαιο 5 θα παρουσιαστούν αναλυτικότερα οι διαφορετικές προσεγγίσεις που σχετίζονται με το τελευταίο αυτό βήμα και θα εστιάσουμε στα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της κάθε μίας. Οι διαφορές στις προσεγγίσεις συνίστανται κυρίως στην επιλογή διαφορετικών αντικειμενικών συναρτήσεων για τα γραμμικά προγράμματα που δημιουργούνται κατά τις διαδικασίες της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης. Η αξία της κάθε προσέγγισης ελέγχεται με βάση συγκεκριμένους δείκτες που αναπαριστούν αντίστοιχα κριτήρια που θέτει ο αναλυτής.

### 4.3.3 Ο Αλγόριθμος UTASTAR

Το 1985 οι Siskos και Yannacopoulos πρότειναν ένα βελτιωμένο αλγόριθμο της UTA, ο οποίος χρησιμοποιούσε καλύτερη μοντελοποίηση των μεταβλητών του γραμμικού προγράμματος. Η βασική του διαφοροποίηση ήταν η εισαγωγή της έννοιας του διπλού σφάλματος στην ποιοτική ανάλυση παλινδρόμησης.

Η έννοια του διπλού σφάλματος χρησιμοποιήθηκε στη UTASTAR για να καλύψει το κενό που δημιουργούσε το ένα και μοναδικό σφάλμα  $\sigma(a_j)$  στην αρχική έκδοση της UTA. Στη UTA το σφάλμα  $\sigma(a_j)$  ήταν η ποσότητα που έπρεπε να προστεθεί στην εκτιμώμενη χρησιμότητα  $u[g(a_j)]$  κάποιας δράσης  $a_j$  ώστε να γίνει εφικτή η επανάκτηση της σειράς κατάταξης της στην ασθενή διάταξη (Σχήμα 4-3). Αυτή η συνάρτηση σφάλματος δεν είναι αρκετή για να ελαχιστοποιήσει πλήρως τη διασπορά των σημείων γύρω από την μονότονη καμπύλη του σχήματος 4.3. Το πρόβλημα τίθεται για τα σημεία που βρίσκονται δεξιά από την καμπύλη και για τα οποία πρέπει να αφαιρέσουμε μια ποσότητα χρησιμότητας και όχι να αυξήσουμε την χρησιμότητα των άλλων σημείων.



**Σχήμα 4-4:** Καμπύλη ποιοτικής ανάλυσης παλινδρόμησης με διπλό σφάλμα (Jacquet-Lagrèze and Siskos, 2001)

Στη UTASTAR το σφάλμα υπερεκτίμησης  $\sigma^-(a_j)$  είναι η ποσότητα που πρέπει να προστεθεί στην εκτιμώμενη χρησιμότητα  $u[\mathbf{g}(a_j)]$  κάποιας δράσης  $a_j$  ώστε να γίνει εφικτή η επανάκτηση της σειράς κατάταξης της στην ασθενή διάταξη, ενώ το σφάλμα υποεκτίμησης  $\sigma^+(a_j)$  είναι η ποσότητα που πρέπει να αφαιρεθεί από την εκτιμώμενη χρησιμότητα  $u[\mathbf{g}(a_j)]$  κάποιας δράσης  $a_j$  ώστε να γίνει εφικτή η επανάκτηση της σειράς κατάταξης της στην ασθενή διάταξη (Σχήμα 4-4).

Ας δούμε τις αλλαγές στα διάφορα βήματα:

**Βήμα 1<sup>ο</sup>:** Οι περιορισμοί μονοτονίας (4.8) αντικαθίστανται από μεταβλητές ως εξής:

$$w_{ik} = u_i(g_i^{k+1}) - u_i(g_i^k) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, \alpha_i - 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.19)$$

όπου το  $s_i$  το θεωρούμε μηδενικό.

Επίσης, προχωράμε σε αντικατάσταση των περιορισμών (4.9) ως εξής:

$$\sum_{i=1}^n u_i(g_i^*) = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\alpha_i-1} w_{ik} = 1 \quad (4.20)$$

Εκφράζουμε πλέον τη συνολική χρησιμότητα  $u[\mathbf{g}(a_j)]$  της κάθε εναλλακτικής  $a_j$  ως συνάρτηση των  $w_{ik}$ . Οι συναρτήσεις μερικής χρησιμότητας  $u_i(g_i)$  προκύπτουν από τις σχέσεις:

#### Κεφάλαιο 4: Συστήματα Ποιότητας και Πολυκριτήρια Ανάλυση

$$u_i(g_i^t) = \sum_{k=1}^{t-1} w_{ik} \text{ με } t=2,3,\dots,\alpha_i \quad (4.21)$$

Για  $t=1$  έχουμε:  $u_i(g_i^t) = 0$ .

Η μερική χρησιμότητα μιας δραστηριότητας  $a_j$  πάνω σε ένα κριτήριο  $i$  για το οποίο ισχύει  $g_i(a_j) \in [g_i^j, g_i^{j+1}]$  που προσεγγίζεται από μια γραμμική παρεμβολή θα εκφράζεται πλέον ως εξής:

$$\begin{aligned} u_i[g_i(a_j)] &= u_i(g_i^t) + \frac{g_i(a_j) - g_i^t}{g_i^{t+1} - g_i^t} [u_i(g_i^{t+1}) - u_i(g_i^t)] \Rightarrow \\ u_i[g_i(a_j)] &= \sum_{k=1}^{t-1} w_{ik} + \frac{g_i(a_j) - g_i^t}{g_i^{t+1} - g_i^t} \left[ \sum_{k=1}^t w_{ik} - \sum_{k=1}^{t-1} w_{ik} \right] \Rightarrow \quad (4.21\alpha) \\ u_i[g_i(a_j)] &= \sum_{k=1}^{t-1} w_{ik} + \frac{g_i(a_j) - g_i^t}{g_i^{t+1} - g_i^t} [w_{it}] \end{aligned}$$

**Βήμα 2<sup>ο</sup>:** Η εισαγωγή του διπλού σφάλματος επιφέρει τις εξής αλλαγές στις σχέσεις (4.10):

$$u[\mathbf{g}(a_j)] = \sum_{i=1}^n u_i[g_i(a_j)] + \sigma^-(a_j) - \sigma^+(a_j) \text{ για όλες τις } a_j \in A_R. \quad (4.22)$$

Και κατά συνέπεια οι σχέσεις (4.13) γίνονται:

$$\Delta(a_j, a_{j+1}) = u[\mathbf{g}(a_j)] + \sigma^-(a_j) - \sigma^+(a_j) - u[\mathbf{g}(a_{j+1})] - \sigma^-(a_{j+1}) + \sigma^+(a_{j+1}) \quad (4.23)$$

**Βήμα 3<sup>ο</sup>:** Προχωράμε στην επίλυση του παρακάτω γραμμικού προγράμματος όπου έχουν ενσωματωθεί οι αλλαγές των δύο προηγούμενων βημάτων. Η αντικειμενική συνάρτηση εκφράζει το άθροισμα των σφαλμάτων υπερεκτίμησης και υποεκτίμησης:

$$\text{minimize } z = \sum_{j=1}^m [\sigma^-(a_j) + \sigma^+(a_j)] \quad (4.24)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\Delta(a_j, a_{j+1}) \geq \delta \text{ αν } a_j \succ a_{j+1}$$

$$\Delta(a_j, a_{j+1}) = 0 \text{ αν } a_j \sim a_{j+1}, \quad \forall j=1,2,\dots,m-1 \quad (4.25)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\alpha_i-1} w_{ik} = 1, \quad k = 1, 2, \dots, \alpha_i - 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.26)$$

$$w_{ik} \geq 0, \quad \forall i=1, 2, \dots, n \text{ και } k = 1, 2, \dots, \alpha_i - 1,$$

$$\sigma^-(a_j) \geq 0, \quad \sigma^+(a_j) \geq 0 \quad \forall j=1, 2, \dots, m$$

Το παραπάνω γραμμικό πρόβλημα έχει  $\sum_{i=1}^n (\alpha_i - 1)$  μεταβλητές απόφασης τύπου  $w_{ik}$  και  $2 \cdot m$  μεταβλητές  $\sigma^-(a_j)$  και  $\sigma^+(a_j)$ . Επίσης, έχει  $m-1$  περιορισμούς της μορφής (4.25) και έναν της μορφής (4.26). Το γραμμικό πρόγραμμα συμπληρώνεται από τους αναγκαίους περιορισμούς μη αρνητικότητας. Στην περίπτωση που είχαμε  $s_i > 0$  τότε θα είχαμε  $\sum_{i=1}^n (\alpha_i - 1)$  περισσότερους περιορισμούς του τύπου  $w_{ik} \geq s_i \quad \forall i=1, 2, \dots, n$  και  $k = 1, 2, \dots, \alpha_i - 1$ .

Άλλες σημαντικές παραλλαγές της UTA οι οποίες αναπτύχθηκαν για να καλύψουν διάφορες ευρύτερες κατηγορίες προβλημάτων αποφάσεων είναι: η UTA II (Siskos *et al.*, 1999), η UTA2 (Jacquet-Lagrèze & Siskos, 1982), η UTAKMEN (Jacquet-Lagrèze & Siskos, 1982), η στοχαστική UTA (Jacquet-Lagrèze & Siskos, 2001) και η UTADIS (Zorounidis & Doumpos, 2001).

#### 4.3.4 UTA και Ανάλυση Συμπεριφοράς Καταναλωτή

Η μέθοδος UTA χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων πολυκριτήριας ανάλυσης. Όπως ήδη έχει αναφερθεί η ανάλυση της συμπεριφοράς του καταναλωτή μπορεί να αντιμετωπιστεί ως πρόβλημα πολυκριτήριας ανάλυσης και η χρήση των αλγορίθμων της UTA προσεγγίζει το πρόβλημα με έναν έξυπνο και ολοκληρωμένο τρόπο στηριζόμενη σε αποφάσεις των καταναλωτών και χειριζόμενη ποιοτικά και ποσοτικά κριτήρια το ίδιο αποδοτικά.

Στόχος της ανάλυσης συμπεριφοράς καταναλωτή είναι η διερεύνηση του τρόπου που ο καταναλωτής συμπεριφέρεται κατά τη στιγμή που επιλέγει ένα προϊόν. Γίνεται προσπάθεια ανακάλυψης των κινήτρων που τον παρακινούν, να προτιμήσει ένα προϊόν από ένα σύνολο ομοειδών προϊόντων, καθώς και των κριτηρίων με βάση τα οποία προχωρεί σε αυτή την επιλογή (Ματσατσίνης, 1995).

Ουσιαστικά γίνεται προσπάθεια ανάλυσης της στάσης του καταναλωτή απέναντι σε συγκεκριμένα χαρακτηριστικά ενός προϊόντος ή μιας υπηρεσίας. Μας ενδιαφέρει το πόσο σημαντικό (χρησιμότητα) είναι ένα χαρακτηριστικό (κριτήριο) για την τελική απόφασή του, σημαντικότητα η οποία εξαρτάται και από το επίπεδο αξιολόγησης του

#### Κεφάλαιο 4: Συστήματα Ποιότητας και Πολυκριτήρια Ανάλυση

κάθε χαρακτηριστικού. Η αξιολόγηση αυτή είτε ζητείται, για ένα σύνολο προϊόντων αναφοράς που γνωρίζει καλά ο καταναλωτής, από τον ίδιο τον καταναλωτή μέσα από τη διεξαγωγή ερευνών αγοράς, είτε θεωρούνται δεδομένες και ίδιες για το σύνολο των καταναλωτών. Και στις δύο περιπτώσεις δημιουργείται ένας πολυκριτήριος πίνακας της παρακάτω μορφής:

Προϊόντα	1 <sup>ο</sup> Ποιοτικό Κριτήριο	2 <sup>ο</sup> Ποιοτικό Κριτήριο	1 <sup>ο</sup> Ποσοτικό Κριτήριο	2 <sup>ο</sup> Ποσοτικό Κριτήριο
Προϊόν Α	Πολύ Υψηλό	3	123	12
Προϊόν Β	Πολύ Χαμηλό	4	113	11
Προϊόν Γ	Χαμηλό	2	99	11
Προϊόν Δ	Υψηλό	2	125	9
Προϊόν Ε	Μεσαίο	1	102	13

**Πίνακας 4-1:** Πολυκριτήριος πίνακας

Ο παραπάνω πίνακας μπορεί να εκφράζει είτε την αξιολόγηση κάποιου καταναλωτή είτε κάποια μορφή αντικειμενικής αξιολόγησης. Για κάθε κριτήριο  $i$  θα πρέπει να οριστούν από τον αναλυτή τα διαστήματα τιμών  $[g_i^*, g_i^*]$  καθώς και να χωριστούν τα διαστήματα αυτά σε  $(a_i - 1)$  ίσα υποδιαστήματα  $[g_i^j, g_i^{k+1}]$ . Τα  $a_i$  δίνονται από τον αναλυτή προκειμένου με αυτό τον τρόπο να οριστεί ο αριθμός των εκτιμώμενων σημείων κάθε μερικής χρησιμότητας  $u_i$ . Οι  $u_i$  εκτιμώνται με τέτοιο τρόπο από τη UTA ώστε να μην παίζει ρόλο το σύστημα μονάδων στο οποίο εκφράζεται το κάθε κριτήριο. Έτσι, δε χρειάζεται κάποια αριθμητική αυθαίρετη κωδικοποίησή των ποιοτικών κριτηρίων που πιθανόν να οδηγούσε σε διαστρέβλωση της φυσικής πληροφορίας, όπως αυτή εξωτερικεύεται από τον καταναλωτή.

Στη συνέχεια ζητείται από τον καταναλωτή να κατατάξει τα προϊόντα ως προς τη σειρά με τα οποία θα τα αγόραζε, δίνοντάς μας έτσι μία φθίνουσα κατάταξη  $R$ . Αυτή η κατάταξη των προϊόντων αναφοράς μπορεί εναλλακτικά να αντληθεί και από ιστορικά στοιχεία πωλήσεων.

Έχοντας στη διάθεσή του ο αναλυτής αυτή την κατάταξη και τον πολυκριτήριο πίνακα μπορεί να εκτιμήσει μία ή περισσότερες προσθετικές συναρτήσεις χρησιμότητας, που θα συνθέτουν τις μερικές χρησιμότητες  $u_i$  κάθε κριτηρίου  $i$ . Έχοντας διαθέσιμες τις επιμέρους χρησιμότητες για κάθε καταναλωτή ξεχωριστά, μπορούν να εξαχθούν στατιστικά συμπεράσματα για τα ποσοστά των καταναλωτών που θεωρούν τα ίδια κριτήρια σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο σημαντικότητας ώστε αφενός να εντοπιστούν τα πιο σημαντικά από τα χαρακτηριστικά των προϊόντων και να υπάρχει εστίαση σε αυτά, και αφετέρου να ομαδοποιηθούν οι καταναλωτές με βάση τις στάσεις τους απέναντι στα προς έλεγχο χαρακτηριστικά. Ο διαχωρισμός της αγοράς με αυτό τον τρόπο δημιουργεί τμήματα των οποίων τα μέλη παρουσιάζουν παρόμοια



#### Κεφάλαιο 4: Συστήματα Ποιότητας και Πολυκριτήρια Ανάλυση

συμπεριφορά και αντιδρούν με παρόμοιο τρόπο σε τυχόν μεταβολές των χαρακτηριστικών των προϊόντων της συγκεκριμένης αγοράς που μελετάται (Siskos *et al.*, 2001, Ματσατσίνης, 1995).

Παράλληλα, η εκτιμώμενη προσθετική συνάρτηση χρησιμότητας, που ουσιαστικά μοντελοποιεί ένα ολικό κριτήριο, συνθέτοντας τις μερικές χρησιμότητες των κριτηρίων, παρέχει τη δυνατότητα υπολογισμού της συνολικής χρησιμότητας που θα έδινε ο καταναλωτής σε ένα νέο προϊόν ή σε κάποιο υφιστάμενο προϊόν στο οποίο θα υπήρχε τροποποίηση κάποιου ή κάποιων από τα χαρακτηριστικά του. Επίσης, επιτρέπεται σε συνδυασμό με τη χρήση Μοντέλων Προσωπικής Επιλογής των Καταναλωτών να εκτιμηθούν μερίδια αγοράς για παλαιά και νέα προϊόντα (Ματσατσίνης, 1995)

Έχει αναπτυχθεί από τον Ματσατσίνη (1995) ένα Έμπειρο Σύστημα Υποστήριξης Αποφάσεων Μάρκετινγκ που ονομάστηκε MARKEΧ, και το οποίο κάνοντας χρήση της UTASTAR υποστηρίζει δυναμικά τους αποφασίζοντες στο πλαίσιο που ορίστηκε παραπάνω σε αυτή την παράγραφο, παρέχοντας:

- επεξεργασία αποτελεσμάτων έρευνας αγοράς
- ανάλυση αγοράς και καθορισμός των γενικών χαρακτηριστικών της
- μελέτη της καταναλωτικής συμπεριφοράς
- ανάλυση προϊόντος και ανταγωνισμού
- τμηματοποίηση της αγοράς
- σχεδίαση, ανάπτυξη και έλεγχος προϊόντος μέσω του υπολογισμού των πιθανοτήτων αγοράς προϊόντων και της προσομοίωσης της αγοράς
- εφαρμογή απλών και σύνθετων σεναρίων, και
- επιλογή στρατηγικής διείσδυσης του υπό ανάπτυξη νέου προϊόντος μέσω της εφαρμογής εναλλακτικών στρατηγικών

Το MARKEΧ έχει με επιτυχία εφαρμόσει την UTASTAR για την ανάλυση των αγορών λαδιού (Baourakis, 1994) και κρασιού (Siskos *et al.*, 2001) σε διάφορες χώρες της Ευρώπης.

Γενικότερα πάντως, ο αλγόριθμος της UTASTAR είναι εκείνος που χρησιμοποιείται περισσότερο για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων, κυρίως λόγω του σχετικά μικρού του υπολογιστικού του φόρτου, καθώς και της υιοθέτησης των δύο σφαλμάτων, υπερεκτίμησης και υποεκτίμησης, που μοντελοποιούν πιο αξιόπιστα την στάση του αποφασίζοντα.

## 4.4 Η Μέθοδος MUSA

### 4.4.1 Στόχοι της μεθόδου

Όπως έχει ήδη αναφερθεί η ικανοποίηση του πελάτη είναι ένα από τα σημαντικότερα θέματα που αφορούν το σύνολο των επιχειρήσεων, γεγονός που αποδεικνύεται από την πελατοκεντρική φιλοσοφία και το στόχους για συνεχή βελτίωση που υιοθετούν οι σύγχρονες επιχειρήσεις. Για το λόγο αυτό η ικανοποίηση του πελάτη πρέπει να μετρείται και να μεταφράζεται σε απόλυτα μετρήσιμους δείκτες. Η μέτρηση της ικανοποίησης του πελάτη μπορεί να θεωρηθεί ως το πλέον αξιόπιστο σύστημα ανάδρασης για την εταιρία, δεδομένου ότι παρέχει με αποτελεσματικό, ευθύ, ουσιαστικό και αντικειμενικό τρόπο τις προτιμήσεις και προσδοκίες των πελατών. Με αυτό τον τρόπο, η μέτρηση της ικανοποίησης των πελατών παρέχει ένα συνολικό βαθμό απόδοσης για την εταιρία και προσδιορίζει την πιθανή υπεροχή της σε σχέση με τον ανταγωνισμό (Grigoroudis & Siskos, 2002).

Στα πλαίσια της παραπάνω φιλοσοφίας οι Γρηγορούδης και Σίσκος (2000) ανέπτυξαν μία πρωτότυπη πολυκριτήρια μεθοδολογία για τη μέτρηση και την ανάλυση της ικανοποίησης. Βασική αρχή της μεθοδολογίας αποτελεί το γεγονός ότι η ικανοποίηση αναλύεται σε ένα σύνολο επιμέρους κριτηρίων ικανοποίησης. Ταυτόχρονα δε, απαντάει απόλυτα ικανοποιητικά στις κριτικές των Γρηγορούδη, Σίσκο και Saurais (1997) σε σχέση με άλλες μεθοδολογικές προσεγγίσεις του προβλήματος της ικανοποίησης του πελάτη και οι οποίες παρατίθενται στην § 4.1.4.

Η μεθοδολογία αυτή καλείται MUSA (Multicriteria Satisfaction Analysis) και έχει τρεις κυρίους στόχους που είναι:

1. Ο προσδιορισμός του βαθμού ικανοποίησης των πελατών, τόσο συνολικά όσο και επιμέρους για καθένα από τα χαρακτηριστικά του προσφερόμενου προϊόντος ή υπηρεσίας.
2. Η παροχή ενός ολοκληρωμένου συνόλου αποτελεσμάτων που μπορεί να αναλύσει σε βάθος τις ανάγκες και τις προσδοκίες των πελατών και να εξηγήσει το επίπεδο ικανοποίησής τους.
3. Η ανάπτυξη ενός εργαλείου υποστήριξης αποφάσεων, στο οποίο θα δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην κατανόηση και εφαρμοσιμότητα των αποτελεσμάτων.

Η μέθοδος MUSA αποτελεί την πολυκριτήρια ή πολυκριτηριακή αναλυτική-συνθετική προσέγγιση για το πρόβλημα της μέτρησης και της ανάλυσης της ικανοποίησης. Η πρωτότυπη αυτή μεθοδολογία βασίζεται στην πολυκριτήρια ανάλυση αποφάσεων, υιοθετώντας τις βασικές αρχές της αναλυτικής-συνθετικής προσεγγίσης και της θεωρίας των συστημάτων αξιών ή χρησιμότητας (§ 1.3.3 και § 1.3.2).

## Κεφάλαιο 4: Συστήματα Ποιότητας και Πολυκριτήρια Ανάλυση

Οι κύριες παραδοχές που αφορούν την ανάπτυξη του μοντέλου των Γρηγορούδη και Σίσκο (2000) εστιάζονται στα εξής σημεία:

- Ύπαρξη ορθολογικών (rational) καταναλωτών.
- Ύπαρξη ενός συνόλου χαρακτηριστικών του εξεταζόμενου προϊόντος ή υπηρεσίας, σύμφωνα με τα οποία οι πελάτες αντιλαμβάνονται την ικανοποίησή τους. Το σύνολο αυτών των χαρακτηριστικών αποτελεί τα κριτήρια ικανοποίησης των πελατών και οφείλει να πληροί συγκεκριμένες ιδιότητες μίας συνεπούς οικογένειας κριτηρίων (Roy, 1985).
- Ύπαρξη ενός προσθετικού μοντέλου σύνθεσης του συνόλου των κριτηρίων ικανοποίησης και ειδικότερα μίας προσθετικής συνάρτησης αξιών (additive value function)(§ 1.3.2)

Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι η MUSA βασίζεται σε πρωτογενή δεδομένα που προέρχονται άμεσα από το σύνολο των πελατών μιας εταιρίας και για το λόγο αυτό κρίνεται απαραίτητη η ενσωμάτωση της σε μια γενικότερη μεθοδολογία εφαρμογής προγραμμάτων μέτρησης ικανοποίησης. Σύμφωνα με τους Mihelis et al. (2001) η μεθοδολογία διεξαγωγής ερευνών ικανοποίησης, στα πλαίσια της οποίας εφαρμόζεται και το παρόν μοντέλο, χωρίζεται σε τέσσερα διακριτά στάδια:

1. Προκαταρκτική ανάλυση: Καθορίζονται οι στόχοι της έρευνας ικανοποίησης του πελάτη, και μέσω προκαταρκτικής ανάλυσης της αγοράς και της συμπεριφοράς του καταναλωτή καθορίζονται οι διαστάσεις του συστήματος μέτρησης της ικανοποίησης (συνεπής οικογένεια κριτηρίων των προϊόντων για τους πελάτες).
2. Σχεδιασμός ερωτηματολογίου και διεξαγωγή έρευνας ικανοποίησης: Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του προηγούμενου βήματος, προχωράμε στο σχεδιασμό και την ανάπτυξη του ερωτηματολογίου, στον καθορισμό των παραμέτρων της έρευνας ικανοποίησης (δείγμα έρευνας, τρόπος συλλογής δεδομένων, κλπ) και τέλος στην διεξαγωγή της έρευνας ικανοποίησης.
3. Αναλύσεις: Η εφαρμογή του μοντέλου πραγματοποιείται στα πλαίσια αυτού του σταδίου παρέχοντας διάφορους δείκτες που αναλύουν το επίπεδο ικανοποίησης των πελατών. Μερικοί από τους δείκτες ικανοποίησης είναι οι εξής:
  - i. Δείκτης Ολικής Ικανοποίησης: Είναι ένας μέσος δείκτης που δείχνει σε κλίμακα 0-100% το επίπεδο της συνολικής ικανοποίησης των πελατών. Μπορεί να θεωρηθεί ως ο βασικός μέσος δείκτης επίδοσης για μία εταιρία.

- ii. Καμπύλη Χρησιμότητας: Η καμπύλη αυτή δείχνει την πραγματική αξία (0-100) που οι καταναλωτές δίνουν σε κάθε επίπεδο της ποιοτικής κλίμακας που εκφράζει την ολική ικανοποίηση. Η μορφή της καμπύλης δείχνει το βαθμό απαιτητικότητας των καταναλωτών
- iii. “Εύθραυστοι” πελάτες: Το ποσοστό (%) των καταναλωτών για τους οποίους η ολική ικανοποίηση είναι χαμηλότερη από μία καθορισμένη τιμή, και το οποίο υπολογίζεται μέσω της καμπύλης συνολικής χρησιμότητας. Η καμπύλη αυτή εκφράζει την κατανομή πιθανότητας της καμπύλης χρησιμότητας.
- iv. Δείκτης Ικανοποίησης Κριτηρίων/Υποκριτηρίων: Οι δείκτες αυτοί δείχνουν στο διάστημα (0-100%) το επίπεδο της μερικής ικανοποίησης των καταναλωτών σε σχέση με κάποιο συγκεκριμένο κριτήριο/υποκριτήριο, με όμοιο τρόπο όπως ο Δείκτης Ολικής Ικανοποίησης.
- v. Βάρη των κριτηρίων/υποκριτηρίων: Δείχνουν τη σχετική σημασία στα πλαίσια του δεδομένου συνόλου κριτηρίων ή υποκριτηρίων.

Οι παραπάνω δείκτες προκύπτουν τόσο από την εφαρμογή του μοντέλου της MUSA όσο και από τη χρήση βασικών μοντέλων περιγραφικής στατιστικής.

4. Αποτελέσματα: Στηριζόμενοι στους δείκτες ανάλυσης του προηγούμενου σταδίου, μορφοποιούνται οι τελικές προτάσεις για μία βελτιωμένη εταιρική στρατηγική. Το στάδιο αυτό περιλαμβάνει και έναν έλεγχο αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων.

#### **4.4.2 Βασικές Αρχές**

Σύμφωνα με τους Γρηγορούδη και Σίσκο (2000), ο βασικός σκοπός της μεθόδου MUSA είναι η σύνθεση των προτιμήσεων ενός συνόλου πελατών σε μία ποσοτική μαθηματική συνάρτηση αξιών-χρησιμότητας. Πιο συγκεκριμένα, η μέθοδος θεωρεί ότι η συνολική ικανοποίηση ενός μεμονωμένου πελάτη εξαρτάται από ένα σύνολο μεταβλητών, οι οποίες αντιπροσωπεύουν τα χαρακτηριστικά-κριτήρια του προσφερόμενου προϊόντος ή υπηρεσίας (Σχήμα 4-5).

Τα απαιτούμενα δεδομένα για την εφαρμογή του μοντέλου συλλέγονται από ένα απλό αλλά εξειδικευμένο ερωτηματολόγιο (Γρηγορούδης και Σίσκος, 2000; Mihelis *et al.*, 2001; Γρηγορούδης *et al.*, 1997) σύμφωνα με το οποίο ζητείται από κάθε πελάτη να αξιολογήσει τα προϊόντα που κατανάλωσε ή τις υπηρεσίες που του προσφέρθηκαν.



**Σχήμα 4-5:** Σύνθεση προτιμήσεων του πελάτη (Γρηγορούδης *et al.*, 1997)

Η αξιολόγηση αυτή εκφράζεται τόσο συνολικά, όσο και στα επιμέρους κριτήρια-χαρακτηριστικά του κάθε προϊόντος ή υπηρεσίας. Οι προτιμήσεις αυτές των καταναλωτών εκφράζονται σύμφωνα με μία μονότονη προκαθορισμένη κλίμακα (Σχήμα 4-6). Στα πλαίσια της μεθόδου MUSA γίνεται προσπάθεια εκτίμησης της συνολικής και των επιμέρους συναρτήσεων ικανοποίησης. Στη θεωρία της πολυκριτήριας ανάλυσης οι συναρτήσεις ικανοποίησης αναφέρονται ως προσθετικές και μερικές συναρτήσεις χρησιμότητας-αξιών αντίστοιχα. Η εκτίμηση αυτή στηρίζεται στις προτιμήσεις που έχει εκφράσει το σύνολο των πελατών μέσω του ερωτηματολογίου. Στον Πίνακα 4-2 ορίζονται όλες οι μεταβλητές που θα μετέχουν στην εφαρμογή του μοντέλου.

$Y$ :	συνολική ικανοποίηση πελάτη
$a$ :	αριθμός επιπέδων της κλίμακας συνολικής ικανοποίησης
$y^m$ :	το $m$ επίπεδο συνολικής ικανοποίησης ( $m=1,2,\dots,a$ )
$n$ :	αριθμός κριτηρίων
$X_i$ :	ικανοποίηση του πελάτη σύμφωνα με το $i$ κριτήριο ( $i=1,2,\dots,n$ )
$\alpha_i$ :	αριθμός επιπέδων της κλίμακας ικανοποίησης του κριτηρίου $i$
$x_i^k$ :	το $k$ επίπεδο ικανοποίησης του κριτηρίου $i$ ( $k=1,2,\dots,\alpha_i$ )
$Y^*$ :	συνάρτηση αξιών του $Y$ (συνάρτηση ολικής ικανοποίησης)
$y^{*m}$ :	αξία του $y^m$ επιπέδου ικανοποίησης
$X_i^*$ :	συνάρτηση αξιών του $X$ (συνάρτηση μερικής ικανοποίησης)
$x_i^{*k}$ :	αξία του $x_i^k$ επιπέδου ικανοποίησης

**Πίνακας 4-2:** Μεταβλητές της Μεθόδου MUSA

Απόλυτα Ικανοποιημένος	<input type="checkbox"/>
Πολύ Ικανοποιημένος	<input type="checkbox"/>
Ικανοποιημένος	<input type="checkbox"/>
Λίγο Ικανοποιημένος	<input type="checkbox"/>
Καθόλου Ικανοποιημένος	<input type="checkbox"/>

**Σχήμα 4-6:** Ενδεικτική ποιοτική κλίμακα ικανοποίησης

Η εκτίμηση της ικανοποίησης ενός συνόλου πελατών μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα πρόβλημα στο επιστημονικό πεδίο της Πολυκριτήριας Ανάλυσης, υποθέτοντας ότι η συνολική ικανοποίηση ενός πελάτη εξαρτάται από ένα σύνολο  $n$  κριτηρίων:

$$\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n)$$

όπου κάθε  $X_i$  είναι μονότονη μεταβλητή του κριτηρίου  $g_i$ . Τα κριτήρια αυτά ονομάζονται διαστάσεις ικανοποίησης και αιτιολογούν την έννοια της αναλυτικής-συνθετικής προσέγγισης της μεθοδολογίας (Γρηγορούδης και Σίσκος, 2000).

Η μέθοδος MUSA εκτιμάει τη συνολική και τις μερικές συναρτήσεις ικανοποίησης  $Y^*$  και  $X_i^*$  αντίστοιχα, δεδομένων των απόψεων  $Y$  και  $X_i$  των πελατών. Οι εκτιμήσεις αυτές ακολουθούν τις γενικές αρχές της ποιοτικής ανάλυσης παλινδρόμησης υπό περιορισμούς, χρησιμοποιώντας τεχνικές γραμμικού προγραμματισμού για την επίλυσή της (Jaquet-Lagrèze & Siskos, 1982, Siskos & Yannacopoulos, 1985).

Η βασική εξίσωση της ποιοτικής ανάλυσης παλινδρόμησης είναι η:

$$\begin{cases} Y^* = \sum_{i=1}^n b_i X_i^* \\ \sum_{i=1}^n b_i = 1 \end{cases} \quad (4.27)$$

όπου  $b_i$  είναι το βάρος του  $i$ -th κριτηρίου και οι συναρτήσεις  $Y^*$  και  $X_i^*$  είναι κανονικοποιημένες στο διάστημα  $[0,100]$ , έτσι ώστε  $y^{*1} = x_i^{*1} = 0$  (4.27.α) και  $y^{*\alpha} = x_i^{*\alpha} = 100$  (6.1.β) για  $i=1,2,\dots,n$ .

Επιπρόσθετα, η μονοτονία των συναρτήσεων  $Y^*$  και  $X_i^*$  μοντελοποιείται ως εξής:

$$\begin{cases} y^{*m} \leq y^{*(m+1)} \Leftrightarrow y^m \preceq y^{m+1} & \text{για } m = 1, 2, \dots, \alpha - 1 \\ x_i^{*k} \leq x_i^{*(k+1)} \Leftrightarrow x_i^k \preceq y^{m+1} & \text{για } k = 1, 2, \dots, \alpha_i - 1 \text{ και } i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (4.28)$$

όπου  $\preceq$  σημαίνει “μη προτίμηση ή αδιαφορία”. (Grigoroudis & Siskos, 2002)

#### 4.4.3 Μαθηματική ανάπτυξη του μοντέλου

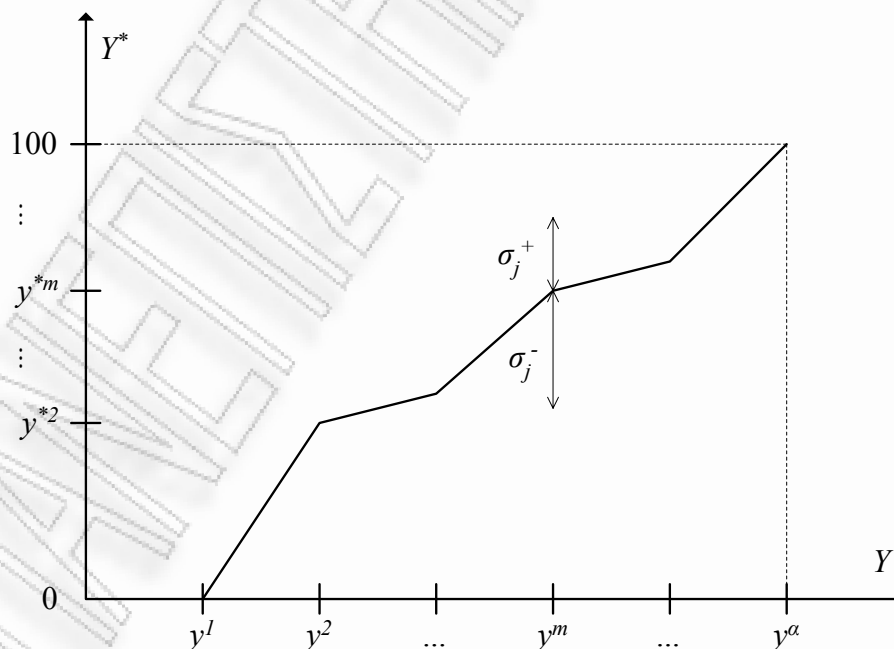
Σύμφωνα με τους Γρηγορούδη και Σίσκο (2000), η MUSA προσπαθεί να εκτιμήσει μια συλλογική προσθετική συνάρτηση αξιών (additive collective value function)  $Y^*$  και ένα σύνολο μερικών συναρτήσεων ικανοποίησης  $X_i^*$  με βάση τις γνώμες των πελατών, έχοντας σαν αντικειμενικό σκοπό την επίτευξη της μεγαλύτερης δυνατής συμφωνίας ανάμεσα στη συνάρτηση  $Y^*$  και στις απόψεις των πελατών  $Y$ .

Με βάση τη μέχρι τώρα μοντελοποίηση και εισάγοντας μία διπλή μεταβλητή σφάλματος, η βασική εξίσωση της ποιοτικής ανάλυσης παλινδρόμησης (4.27) παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\tilde{Y}^* = \sum_{i=1}^n b_i X_i^* - \sigma^+ + \sigma^- \quad (4.29)$$

όπου  $\tilde{Y}^*$  είναι η εκτίμηση της συλλογικής συνάρτησης αξιών  $Y^*$ ,  $\sigma^+$  και  $\sigma^-$  είναι αντίστοιχα το σφάλμα υπερεκτίμησης και υποεκτίμησης, αντίστοιχα.

Η εξίσωση (4.29) ισχύει για κάθε ένα πελάτη που έχει εκφράσει μια συγκεκριμένη άποψη ικανοποίησης, και για το λόγο αυτό οι μεταβλητές σφάλματος θα πρέπει να ορισθούν για κάθε πελάτη χωριστά, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4-7.



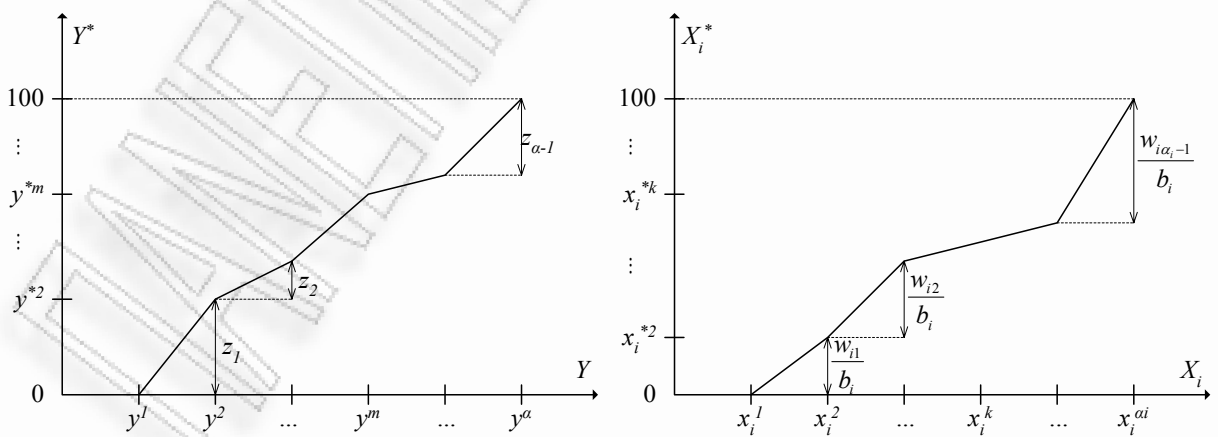
**Σχήμα 4-7:** Μεταβλητές σφάλματος για τον j πελάτη  
(Grigoroudis & Siskos, 2002)

Εξετάζοντας προσεκτικά την εξίσωση (4.29) είναι εύκολο να παρατηρηθεί η ομοιότητα της μεθόδου MUSA είτε με τις βασικές αρχές του γραμμικού προγραμματισμού στόχων (goal programming), είτε με τη μεθοδολογία της ποιοτικής ανάλυσης παλινδρόμησης υπό περιορισμούς (ordinal regression analysis) και ειδικότερα με την οικογένεια των μοντέλων προσθετικής χρησιμότητας UTA (Jaquet-Lagrèze & Siskos, 1982, Siskos & Yannacopoulos, 1985, Despotis *et al.*, 1990).

Σύμφωνα με τις παραπάνω υποθέσεις και ορισμούς που έχουν αναφερθεί, το πρόβλημα της εκτίμησης της ικανοποίησης πελατών μπορεί πλέον να μορφοποιηθεί σαν ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με στόχο την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των μεταβλητών σφάλματος υπό τους περιορισμούς: (i) την εξίσωση της ποιοτικής ανάλυσης παλινδρόμησης (4.29) για κάθε πελάτη, (ii) τους περιορισμούς κανονικοποίησης για τις συναρτήσεις  $Y^*$  και  $X_i^*$  στο διάστημα  $[0,100]$ , και (iii) τους περιορισμούς μονοτονίας των  $Y^*$  και  $X_i^*$ .

Το μέγεθος του γραμμικού προγράμματος θα ήταν χρήσιμο μπορεί να μειωθεί με στόχο τη μείωση της υπολογιστικής δυσκολίας εύρεσης της βέλτιστης λύσης, εξαλείφοντας το σύνολο των περιορισμών μονοτονίας. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την εισαγωγή νέων μεταβλητών, οι οποίες εκφράζουν τα διαδοχικά βήματα αύξησης των συναρτήσεων  $Y^*$  και  $X_i^*$  (Siskos & Yannacopoulos, 1985) και ορίζονται ως εξής (Σχήμα 4-8):

$$\begin{cases} z_m = y^{*m+1} - y^{*m} & \text{για } m = 1, 2, \dots, \alpha - 1 \\ w_{ik} = b_i x_i^{*k+1} - b_i x_i^{*k} & \text{για } k = 1, 2, \dots, \alpha_i - 1 \text{ και } i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (4.30)$$



**Σχήμα 4-8:** Οι μεταβλητές μετασχηματισμού  $z_m$  και  $w_{ik}$  (Grigoroudis & Siskos, 2002)



#### Κεφάλαιο 4: Συστήματα Ποιότητας και Πολυκριτήρια Ανάλυση

Είναι πολύ σημαντικό να τονισθεί ότι η εισαγωγή των νέων αυτών μεταβλητών επιτυγχάνει τη γραμμικότητα του μοντέλου, δεδομένου ότι η εξίσωση (4.29) είναι μη γραμμική (τόσο οι μεταβλητές  $Y^*$  και  $X_i^*$ , όσο και οι συντελεστές  $b_i$  πρέπει να εκτιμηθούν).

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.30) οι αρχικές μεταβλητές του γραμμικού προγράμματος γράφονται ως εξής:

$$\begin{cases} y^{*m} = \sum_{t=1}^{m-1} z_t & \text{για } m = 2, 3, \dots, \alpha \\ b_i x_i^{*k} = \sum_{t=1}^{k-1} w_{it} & \text{για } k = 2, 3, \dots, \alpha_i \text{ και } i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (4.31)$$

Οπότε η τελική μορφή του γραμμικού προγράμματος για  $M$  πελάτες έχει ως εξής:

$$\begin{aligned} [\min] F &= \sum_{j=1}^M \sigma_j^+ + \sigma_j^- \\ \text{υπό τους περιορισμούς} \\ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{t_{ij}-1} w_{ik} - \sum_{m=1}^{t_j-1} z_m - \sigma_j^+ + \sigma_j^- &= 0 \quad \text{για } j = 1, 2, \dots, M \\ \sum_{m=1}^{\alpha-1} z_m &= 100 \\ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\alpha_i-1} w_{ik} &= 100 \\ z_m \geq 0, w_{ik} \geq 0 &\quad \forall m, i, k \\ \sigma_j^+ \geq 0, \sigma_j^- \geq 0 &\quad \text{για } j = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (4.32)$$

όπου  $t_j$  και  $t_{ij}$  είναι οι κρίσεις του  $j$ -th πελάτη για την ολική και μερική ικανοποίησή του με  $y^{t_j} \in Y = \{y^1, y^2, \dots, y^{t_j}, \dots, y^\alpha\}$  και  $x_i^{t_{ji}} \in X_i = \{x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{t_{ji}}, \dots, x_i^{\alpha_i}\}$  για  $i=1, 2, \dots, n$ .

Το παραπάνω γ.π. έχει  $M+2$  περιορισμούς και  $2 \cdot M + (\alpha-1) + \sum_{i=1}^n (\alpha_i - 1)$  μεταβλητές, οπότε η βέλτιστη λύση έχει πολλούς βαθμούς ελευθερίας. Για το λόγο αυτό, θεωρείται απαραίτητη η ανάλυση ευστάθειας (μεταβελτιστοποίησης), στην οποία θα αναφερθούμε αναλυτικά στο 5<sup>ο</sup> Κεφάλαιο (Grigoroudis & Siskos, 2002).

Οι αρχικές μεταβλητές του προβλήματος υπολογίζονται με βάση τη βέλτιστη λύση του προηγμένου γραμμικού προγράμματος, αφού εύκολα αποδεικνύεται ότι:

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{*m} = \sum_{t=1}^{m-1} z_t \quad \text{για } m = 2,3,\dots,\alpha \\ b_i = \sum_{t=1}^{\alpha_i-1} w_{it} \quad \text{για } i = 1,2,\dots,n \\ x_i^{*k} = 100 \frac{\sum_{t=1}^{k-1} w_{it}}{\sum_{t=1}^{\alpha_i-1} w_{it}} \quad \text{για } i = 1,2,\dots,n \text{ και } k = 2,3,\dots,\alpha_i \end{array} \right. \quad (4.33)$$

Τα οριακά σημεία των συναρτήσεων ικανοποίησης  $y^{*1}$ ,  $x_i^{*1}$  υπολογίζονται με βάση τους περιορισμούς κανονικοποίησης (4.27.α).

#### 4.4.4 Μία Επέκταση του Μοντέλου MUSA

Το βασικό μοντέλο MUSA (4.32) υποθέτει ότι τόσο η ολική όσο και οι μερικές συναρτήσεις ικανοποίησης είναι προτιμησιακά αύξουσες, όπως υποδεικνύουν και οι περιορισμοί μονοτονίας (4.28). Σε αρκετές όμως περιπτώσεις απαιτούνται «αυστηρές» σχέσεις προτίμησης έτσι ώστε να αποφεύγονται τα φαινόμενα του τύπου:  $y^{*m} = y^{*m+1}$  ή  $x_i^{*k} = x_i^{*k+1}$  (Jaquet-Lagrèze & Siskos, 1982).

Οι «αυστηρές» σχέσεις προτίμησης έχουν την ακόλουθη μορφή (Γρηγορούδης & Σίσκος, 2000, Grigoroudis & Siskos, 2002):

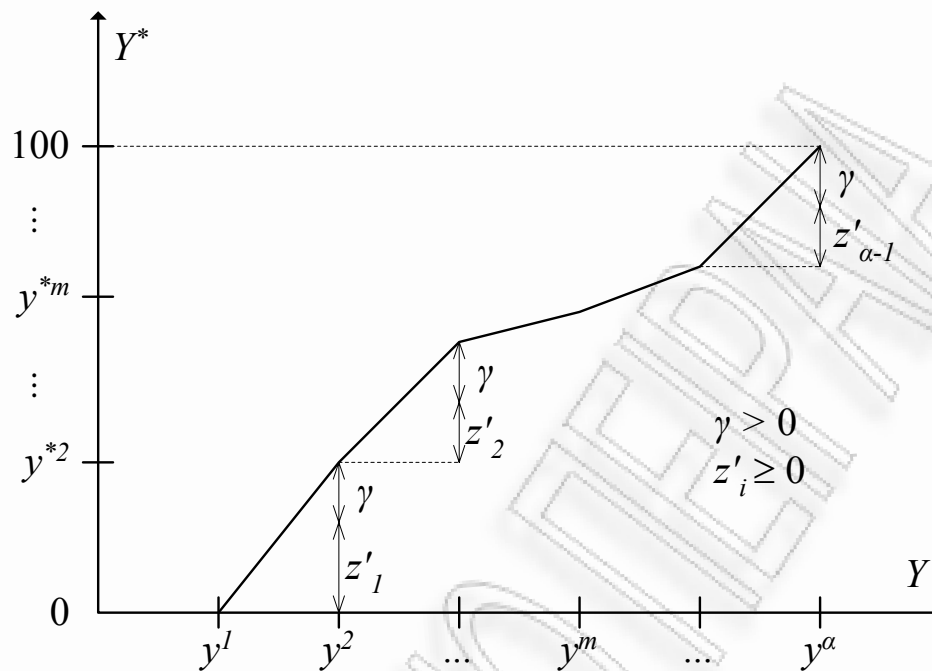
$$\left\{ \begin{array}{l} y^{*m} < y^{*m+1} \Leftrightarrow y^m < y^{m+1} \quad \text{για } m = 1,2,\dots,\alpha - 1 \\ x_i^{*k} < x_i^{*k+1} \Leftrightarrow x_i^k < y^{m+1} \quad \text{για } k = 1,2,\dots,\alpha_i - 1 \text{ και } i = 1,2,\dots,n \end{array} \right. \quad (4.34)$$

όπου  $<$  σημαίνει “αυστηρή προτίμηση” του δεξιού μέρους.

Σύμφωνα με τις σχέσεις (4.34) και τον ορισμό των μεταβλητών  $z_m$  και  $w_{ik}$  οι ακόλουθες ανισότητες πρέπει να ικανοποιούνται:

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{*m+1} - y^{*m} \geq \gamma \\ x_i^{*k+1} - x_i^{*k} \geq \gamma_i \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_m \geq \gamma \\ w_{ik} \geq \gamma_i \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_m - \gamma \geq 0 \\ w_{ik} - \gamma_i \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z'_m \geq 0 \quad \text{για } m = 1,2,\dots,\alpha - 1 \\ w'_{ik} \geq 0 \quad \text{για } k = 1,2,\dots,\alpha_i - 1 \text{ και } i = 1,2,\dots,n \end{array} \right. \quad (4.35)$$

όπου  $\gamma$  και  $\gamma_i$  είναι τα κατώφλια προτίμησης για τις συναρτήσεις  $Y^*$  και  $X_i^*$  αντίστοιχα με  $\gamma, \gamma_i > 0$ , και  $z'_m = z_m - \gamma$ ,  $w'_{ik} = w_{ik} - \gamma_i$  οι νέες μεταβλητές που εξυπηρετούν την μείωση των διαστάσεων του γ.π..



**Σχήμα 4-9:** Κατώφλια προτίμησης για τη συνάρτηση  $Y^*$   
(Grigoroudis & Siskos, 2002)

Στο Σχήμα 4-9 παρουσιάζεται παραστατικά η φυσική ερμηνεία για το κατώφλι προτίμησης της ολικής συνάρτησης ικανοποίησης, όπου αξίζει να παρατηρηθεί ότι:

- Το κατώφλι προτίμησης  $\gamma$  εκφράζει το ελάχιστο 'βήμα' αύξησης της συνάρτησης  $Y^*$ .
- Η «αυστηρή» σχέση υπεροχής υποδηλώνει ότι η ολική αξία ενός πελάτη που δηλώνει ότι ανήκει στο  $y^m$  επίπεδο ικανοποίησης είναι αυστηρά μικρότερη από την αντίστοιχη αξία ενός άλλου πελάτη  $y^{m+1}$  επιπέδου ικανοποίησης.
- Οι συγκεκριμένες παρατηρήσεις ισχύουν αντίστοιχα και για τα κατώφλια  $\gamma_i$  των μερικών συναρτήσεων ικανοποίησης  $X_i^*$ .
- Αποδεικνύεται εύκολα ότι με την εισαγωγή των νέων μεταβλητών στο μοντέλο, το ελάχιστο βάρος ενός κριτηρίου  $X_i^*$  είναι  $\gamma_i(\alpha-1)$ .

Με βάση τις προηγούμενες σχέσεις, το γενικευμένο μοντέλο MUSA παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$[\min]F = \sum_{j=1}^M \sigma_j^+ + \sigma_j^-$$

υπό τους περιορισμούς

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{t_{ij}-1} w'_{ik} - \sum_{m=1}^{t_j-1} z'_m - \sigma_j^+ + \sigma_j^- = \gamma(t_j - 1) - \sum_{i=1}^n \gamma_i(t_{ji} - 1) \quad \text{για } j = 1, 2, \dots, M$$

$$\sum_{m=1}^{\alpha-1} z'_m = 100 - \gamma(\alpha - 1) \quad (4.36)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\alpha_i-1} w_{ik} = 100 - \sum_{i=1}^n \gamma_i(\alpha_i - 1)$$

$$z'_m \geq 0, w'_{ik} \geq 0 \quad \forall m, i, k$$

$$\sigma_j^+ \geq 0, \sigma_j^- \geq 0 \quad \text{για } j = 1, 2, \dots, M$$

όπου  $t_j$  και  $t_{ij}$  είναι οι κρίσεις του  $j$ -th πελάτη για την ολική και μερική ικανοποίησή του με  $y^{t_j} \in Y = \{y^1, y^2, \dots, y^{t_j}, \dots, y^\alpha\}$  και  $x_i^{t_{ji}} \in X_i = \{x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{t_{ji}}, \dots, x_i^{\alpha_i}\}$  για  $i=1, 2, \dots, n$ .

Πρέπει να δοθεί έμφαση στο ότι τα  $\gamma$  και  $\gamma_i$  πρέπει να επιλεγούν με τέτοιο τρόπο ώστε  $\gamma(\alpha-1) \leq 100$  και  $\sum_{i=1}^n \gamma_i(\alpha_i - 1) \leq 100$ , προκειμένου να αποφευχθούν αρνητικές τιμές στο δεξιό μέλος των περιορισμών του γ.π. (4.36). Για παράδειγμα στην περίπτωση όπου  $\gamma = \gamma_i \forall i$ , οι προηγούμενες ανισότητες παίρνουν τη μορφή:

$$\gamma \leq \min \left\{ \frac{100}{\alpha - 1}, \frac{100}{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - 1)} \right\} \quad (4.37)$$

Η προτεινόμενη επέκταση αποτελεί τη γενικευμένη μορφή της μεθόδου MUSA, δεδομένου ότι η βασική μορφή της (4.32) είναι μια ειδική περίπτωση για  $\gamma = \gamma_i = 0, \forall i$ . Η επίδραση διαφορετικών  $\gamma$  και  $\gamma_i$  στο σύνολο των λύσεων του γραμμικού προγράμματος θα εξεταστεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Μία διαφορετική επέκταση της μεθόδου MUSA, η οποία όμως δε θα εξεταστεί στην παρούσα διατριβή, είναι αυτή που διαχειρίζεται πολλαπλά επίπεδα κριτηρίων ικανοποίησης (Γρηγορούδης & Σίσκος, 2000; Grigoroudis & Siskos, 2002).

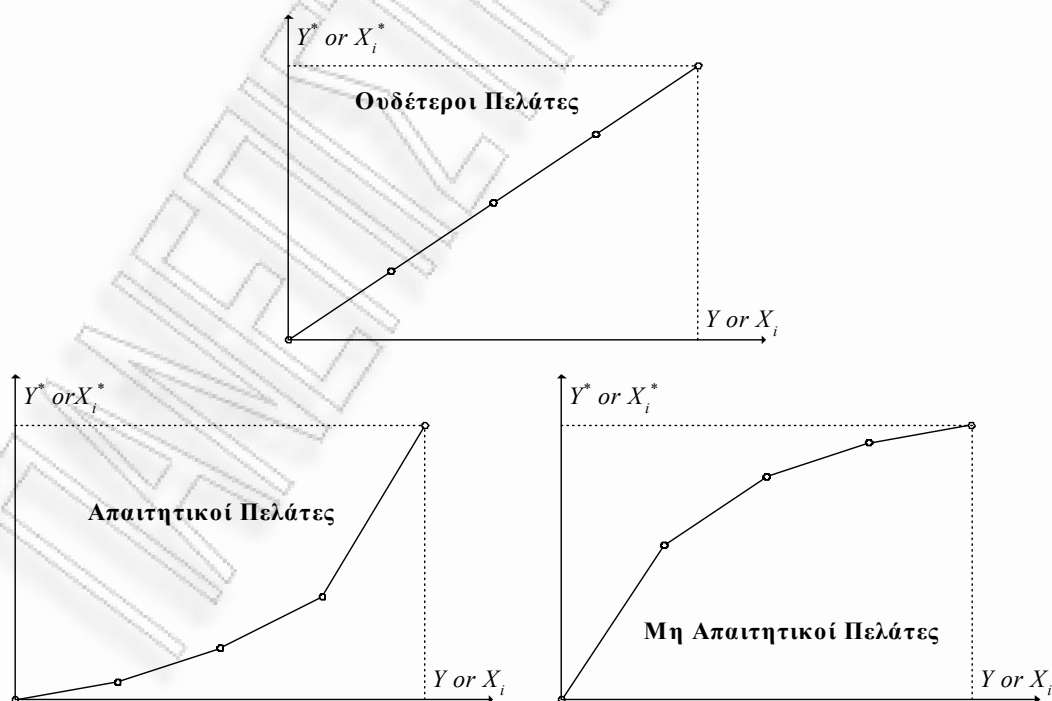
Η βασική μέθοδος MUSA που παρουσιάστηκε εξετάζει το πρόβλημα της σύνθεσης της ικανοποίησης πάνω σε ένα σύνολο βασικών κριτηρίων. Όμως σε αρκετές περιπτώσεις, ιδίως κατά τη διαδικασία καθορισμού μίας συνεπούς οικογένειας κριτηρίων, κρίνεται ιδιαίτερα χρήσιμος ο καθορισμός ενός επιπλέον επιπέδου ικανοποίησης, όπου:

- Το πρώτο επίπεδο των κριτηρίων περιλαμβάνει τις βασικές διαστάσεις της ικανοποίησης των πελατών σε μία γενική μορφή (π.χ. προσωπικό).

- Το δεύτερο επίπεδο των κριτηρίων (υποκριτήρια) αφορά λεπτομερείς διαστάσεις των βασικών κριτηρίων ικανοποίησης (π.χ. συμπεριφορά, γνώσεις προσωπικού, κλπ)
- Τόσο το σύνολο των βασικών κριτηρίων, όσο και κάθε ένα από τα σύνολα των υποκριτηρίων πρέπει να ικανοποιεί τις ιδιότητες της συνεπούς οικογένειας κριτηρίων.

#### 4.4.5 Παρουσίαση Αποτελεσμάτων του MUSA

Οι εκτιμώμενες συναρτήσεις ικανοποίησης αποτελούν τα σημαντικότερα αποτελέσματα της μεθόδου MUSA, δεδομένου ότι εκφράζουν την πραγματική αξία, σε κανονικοποιημένο διάστημα τιμών  $[0,100]$ , που προσδίδει το σύνολο των πελατών σε ένα καθορισμένο ποιοτικό επίπεδο ολικής και μερικής ικανοποίησης. Η μορφή των συναρτήσεων αυτών προσδιορίζει το βαθμό της απαιτητικότητας των πελατών. Στο Σχήμα 6.6 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα 3 (ολικών ή μερικών) συναρτήσεων ικανοποίησης που χαρακτηρίζουν διαφορετικές ομάδες πελατών (Γρηγορούδης & Σίσκος, 2000; Grigoroudis & Siskos, 2002):



**Σχήμα 4-10:** Συναρτήσεις Ικανοποίησης για διαφορετικά επίπεδα απαιτήσεων (Grigoroudis & Siskos, 2002)

#### Κεφάλαιο 4: Συστήματα Ποιότητας και Πολυκριτήρια Ανάλυση

- «Ουδέτεροι» πελάτες: η συνάρτηση ικανοποίησης έχει γραμμική μορφή, γεγονός που σημαίνει ότι οι συγκεκριμένοι πελάτες όσο περισσότερο ικανοποιημένοι δηλώνουν ότι είναι, τόσο μεγαλύτερο είναι το ποσοστό των προσδοκιών τους που εκπληρώνεται.
- «Απαιτητικοί» πελάτες: η συνάρτηση ικανοποίησης έχει κυρτή μορφή, δεδομένου ότι η ομάδα αυτή των πελατών δεν είναι κανονικοποιημένη παρά μόνο αν τους προσφέρεται το βέλτιστο επίπεδο υπηρεσιών.
- «Μη-απαιτητικοί» πελάτες: η συνάρτηση ικανοποίησης έχει κοίλη μορφή, γεγονός που υποδηλώνει ότι οι συγκεκριμένοι πελάτες δηλώνουν ότι είναι ικανοποιημένοι παρόλο που ένα μικρό ποσοστό των προσδοκιών τους εκπληρώνεται.

Η ολική  $Y^*$  και οι μερικές συναρτήσεις  $X_i^*$  ικανοποίησης των πελατών, στο πλαίσιο της πολυκριτήριας ανάλυσης αναφέρονται ως προσθετική συνάρτηση αξιών-χρησιμότητας (additive value/utility function) και ως μερικές ή περιθώριες συναρτήσεις αξιών-χρησιμότητας (marginal value/utility functions), αντίστοιχα. Ειδικά, για την προσθετική συλλογική συνάρτηση αξιών  $Y^*$ , θα πρέπει να σημειωθεί ότι αντιπροσωπεύει τη δομή των προτιμήσεων του πελάτη και υποδεικνύει τις επιπτώσεις των κριτηρίων ικανοποίησης. Η βασική μορφή της MUSA υποθέτει ότι οι συναρτήσεις ικανοποίησης  $Y^*$  και  $X_i^*$  είναι διακριτές (τμηματικά γραμμικές), μονότονες και μη φθίνουσες συναρτήσεις.

Τα βάρη των κριτηρίων ικανοποίησης υποδηλώνουν το σχετικό βαθμό σπουδαιότητας που δίνει το σύνολο των πελατών στις αξίες των διαστάσεων ικανοποίησης που έχουν καθοριστεί, δεδομένου ότι  $\sum_{i=1}^n b_i = 1$ . Το γεγονός αυτό υποδηλώνει ότι η απόφαση για να θεωρηθεί κάποιο κριτήριο ως «σημαντικό», σε ένα βαθμό, εξαρτάται και από το πλήθος των κριτηρίων που χρησιμοποιούνται. Οι ιδιότητες των βαρών καθορίζονται στο πλαίσιο της Πολυκριτήριας Ανάλυσης, ενώ δε θα πρέπει να λησμονείται η φυσική ερμηνεία των συντελεστών βαρύτητας, ότι τα βάρη είναι βαθμοί παραχώρησης (trade-offs) μεταξύ των αξιών στα κριτήρια.

Σε αρκετές περιπτώσεις κρίνεται ιδιαίτερα χρήσιμο να εκτιμηθεί ένα μέτρο αποδοτικότητας της επιχείρησης όσον αφορά στην ικανοποίηση των πελατών της. Οι μέσοι δείκτες ολικής και μερικής ικανοποίησης χρησιμοποιούνται γι' αυτόν ακριβώς το λόγο και ορίζονται ως εξής:

$$S = \sum_{m=1}^{\alpha} p^m y^{*m} \quad \text{και} \quad s_i = \sum_{k=1}^{\alpha_i} p_i^k x_i^{*k}$$

#### Κεφάλαιο 4: Συστήματα Ποιότητας και Πολυκριτήρια Ανάλυση

όπου  $S$  ο μέσος δείκτης ολικής ικανοποίησης,  $p^m$  το ποσοστό πελατών στο  $y^m$  επίπεδο ικανοποίησης,  $s_i$  ο μέσος δείκτης μερικής ικανοποίησης του  $i$  κριτηρίου και  $p_i^k$  το ποσοστό των πελατών στο  $x_i^k$  επίπεδο ικανοποίησης (Γρηγορούδης *et al.*, 1997).

Τα αποτελέσματα της μεθόδου MUSA μπορούν επίσης να εκφραστούν και μέσω άλλων δεικτών όπως οι Μέσοι Δείκτες Αποδοτικότητας και οι Μέσοι Δείκτες Βελτίωσης.

Επιπρόσθετα, συνδυάζοντας τα βάρη των κριτηρίων ικανοποίησης με τους μέσους δείκτες ικανοποίησης είναι δυνατός ο υπολογισμός μιας σειράς διαγραμμάτων δράσης (action diagrams) τα οποία μπορούν να προσδιορίσουν ποια είναι τα δυνατά και τα αδύνατα σημεία της ικανοποίησης των πελατών, καθώς και το που πρέπει να στραφούν οι προσπάθειες βελτίωσης. Τα διαγράμματα δράσης μπορούν να υποδείξουν ποιες διαστάσεις ικανοποίησης πρέπει να βελτιωθούν, αλλά δεν είναι σε θέση να προσδιορίσουν ποιο θα είναι το αποτέλεσμα των ενεργειών βελτίωσης. Για το λόγο αυτό χρειάζονται και τα Διαγράμματα Βελτίωσης, τα οποία προσδιορίζουν και το μέγεθος της προσπάθειας που χρειάζεται για να επιτευχθεί η προσδοκώμενη βελτίωση (Γρηγορούδης & Σίσκος, 2000; Grigoroudis & Siskos, 2001).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΔΙΑ



## **Κεφάλαιο 5: Μεταβελτιστοποίηση στα Αναλυτικά – Συνθετικά Μοντέλα**

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα διάφορα μοντέλα μεταβελτιστοποίησης στη UTA και στη MUSA που βασίζονται σε ευρετικούς αλγόριθμους. Τα μοντέλα αυτά μας επιτρέπουν τη μελέτη της ευστάθειας των λύσεων των δύο μεθόδων.

Ειδικότερα για τη μέθοδο MUSA παρέχεται επιπλέον στον αναλυτή χρήσιμη πληροφορία αναφορικά με το βαθμό ομοιογένειας του υπό εξέταση δείγματος. Η μελέτη της ευστάθειας και της αξιοπιστίας των λύσεων της μεθόδου εξετάζει επίσης τη επίδραση στα αποτελέσματα δύο βασικών παραμέτρων, των κατωφλίων προτίμησης  $\gamma_i$  και του βαθμού παραχώρησης  $\varepsilon$  κατά τη φάση της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης.

Προκειμένου οι αναλυτές που χρησιμοποιούν τη μέθοδο MUSA να έχουν τη δυνατότητα ολοκληρωμένης μελέτης της ευστάθειας και αξιοπιστίας της μεθόδου καταγράφηκε η ανάγκη ανάπτυξης ενός Συστήματος Υποστήριξης Αποφάσεων (ΣΥΑ) που αξιοποιώντας 4 ευρετικές μεθόδους μεταβελτιστοποίησης και 3 αναλυτικές μεθόδους θα υποστηρίζει τον αναλυτή στην επιλογή των βέλτιστων κατά περίπτωση παραμέτρων με στόχο τη βελτίωση των εσωτερικών δεικτών ποιότητας της μεθόδου MUSA και συγκεκριμένα των ASI, AFI και OPL. Το ΣΥΑ θα αποτελέσει επίσης εργαλείο συγκριτικής αξιολόγησης μεταξύ ευρετικών και αναλυτικών μεθόδων μεταβελτιστοποίησης.

## 5.1 Η Ανάλυση Μεταβελτιστοποίησης στη Μέθοδο UTA

### 5.1.1 Η ανάγκη για ανάλυση μεταβελτιστοποίησης

Η μέθοδος UTA, όπως και κάθε άλλη πολυκριτήρια μέθοδος πρέπει να θεωρείται απλά ως ένα εργαλείο που βοηθά στη λήψη αποφάσεων, και σε καμία περίπτωση οι προτεινόμενη λύση δεν πρέπει να θεωρείται ως η μοναδική καλή λύση, ενώ και σε κάποιες περιπτώσεις δεν πρέπει να θεωρείται ούτε ως η καλύτερη. Το σωστότερο είναι να θεωρείται ως μία ενδεικτικά καλή λύση που θα μπορεί να αποτελέσει τη βάση για ένα σύνολο λύσεων εξίσου καλών, ή και καλύτερων, σύμφωνα με κάποια κριτήρια τα οποία δεν είχαν συμπεριληφθεί στο αρχικό πρόβλημα.

Η μαθηματική μοντελοποίηση ενός πολυκριτήριου προβλήματος εμπεριέχει και τον καθορισμό των κριτηρίων τα οποία θα πρέπει να βελτιστοποιηθούν συνολικά. Κάποια όμως κριτήρια δεν έχουν συμπεριληφθεί στο σχηματισμό του ολικού κριτηρίου είτε γιατί ήταν δύσκολη η μοντελοποίησή τους, είτε γιατί δεν είναι άμεσα αντιληπτά και παίζουν το ρόλο των παράπλευρων συνεπειών, είτε τέλος γιατί σε ορισμένες περιπτώσεις είναι αρκετά τεχνικά με δυσδιάκριτη φυσική ερμηνεία, όπως για παράδειγμα διάφοροι στατιστικοί δείκτες.

Παράλληλα, πρέπει να σημειωθεί ότι ένα πολυκριτήριο πρόβλημα απόφασης ανήκει στην κατηγορία των προβλημάτων χαμηλού βαθμού δόμησης (ill-structured), είναι δηλαδή πρόβλημα στο οποίο η ορθολογική λύση δεν προϋπάρχει αλλά αποτελεί αντικείμενο προοδευτικής αναζήτησης (Σίσκος, 1998).

Στη UTA υπάρχουν πρόσθετοι λόγοι που καθιστούν την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης επιτακτική. Οι λόγοι αυτοί πηγάζουν από τη χρήση προχωρημένων τεχνικών γραμμικού προγραμματισμού προκειμένου να εκτιμηθούν οι προσθετικές συναρτήσεις χρησιμότητας με τη βοήθεια της ποιοτικής ανάλυσης παλινδρόμησης. Στο Κεφάλαιο 1 αναφέρθηκαν οι βασικοί λόγοι που επιτάσσουν την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης για την ολοκληρωμένη επίλυση γραμμικών προγραμμάτων.

Οπότε στις αναλύσεις μεταβελτιστοποίησης στη UTA θα πρέπει να ικανοποιήσουμε τόσο τις ανάγκες που προκύπτουν από τη θεωρία της πολυκριτήριας ανάλυσης, που σχετίζονται με την ελλιπή μοντελοποίηση κριτηρίων, όσο και τις ανάγκες της θεωρίας του γραμμικού προγραμματισμού, που σχετίζονται με την ποιότητα της πληροφορίας καθώς και προβλήματα μαθηματικής υφής.

Σύμφωνα με το προηγούμενο Κεφάλαιο οι διάφοροι αλγόριθμοι που ανήκουν την οικογένεια UTA οδηγούν στην εκτίμηση μίας βέλτιστης προσθετικής συνάρτησης

αξίας  $u^*(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^n u_i [g_i(a)]$  η οποία είναι μία ‘βέλτιστη’ αριθμητική αναπαράσταση

της προτιμησιακής σχέσης  $R$  που έχει δοθεί από τον αποφασίζοντα. Η επίλυση ενός γραμμικού προγράμματος μας οδηγεί στην εύρεση της λύσης ελαχιστοποιώντας μια αντικειμενική συνάρτηση υπό συγκεκριμένους περιορισμούς. Όμως, αν η βέλτιστη τιμή  $z^*$  της αντικειμενικής συνάρτησης που ελαχιστοποιεί τα σφάλματα  $\sigma(a)$  (4.14) είναι ίση με μηδέν, αυτό σημαίνει ότι το πολύεδρο των παραδεκτών λύσεων του γραμμικού προγράμματος για τα  $u_i(g_i)$  δεν είναι κενό και ότι πολλές άλλες προσθετικές συναρτήσεις χρησιμότητας μας δίνουν μία ακριβή αναπαράσταση της σχέσης  $R$  (Jaquet-Lagrèze & Siskos, 1982).

Ακόμα όμως και στην περίπτωση που η βέλτιστη τιμή  $z^*$  είναι αυστηρά θετική είναι δυνατόν τιμές για την  $z$ , χειρότερες από την  $z^*$ , να μπορούν να βελτιώσουν άλλα τεχνικά κριτήρια που ανήκουν στο χώρο της στατιστικής όπως για παράδειγμα το συντελεστή συσχέτισης του Spearman ή το συντελεστή συσχέτισης του Kendal (‘τ’ του Kendal) (Μπένος, 1997; Παπαϊωάννου & Λουκά, 1990).

Αναφορικά με το συντελεστή συσχέτισης του Spearman, έστω ότι έχουμε μία ομάδα εναλλακτικών τα οποία έχουμε κατατάξει κατά δύο διαφορετικούς τρόπους ( $R$  και  $R'$ ). Ο συντελεστής συσχέτισης του Spearman, όταν έχουμε  $m$  εναλλακτικές δίνεται από τη σχέση:

$$P_s = 1 - \frac{6 \sum \delta_i^2}{m^3 - m} \quad (5.1)$$

όπου  $\delta_i$  η διαφορά που υπάρχει ανάμεσα στις δύο τάξεις της  $i$  εναλλακτικής στις  $R$  και  $R'$ .

Ο συντελεστής συσχέτισης του Kendal δίνεται από τη σχέση:

$$\tau(R', R) = 1 - \frac{2a}{\binom{m}{2}} \in [-1, 1] \quad (5.2)$$

όπου  $a$  είναι το πλήθος των αντιστροφών που παρατηρούνται στη διάταξη  $R'$  σε σχέση με την  $R$  (Παπαδημητρίου, 1989).

Στην περίπτωση που  $z^*=0$  η προκύπτουσα διάταξη  $R'$  ταιριάζει απόλυτα με την αρχική διάταξη  $R$ , γεγονός που συνεπάγεται ότι  $\tau(R', R)=1$ . Στην περίπτωση όμως που έχουμε  $z^*>0$  αξίζει να εξετάσουμε την συμπεριφορά ημιβέλτιστων λύσεων (§ 1.2.2) που πιθανόν να δίνουν  $\tau(R_j', R) > \tau(R_0', R)$ , όπου  $R_j'$  η διάταξη που προκύπτει από την  $j$  λύσης του προβλήματος κατά τη φάση της μεταβελτιστοποίησης, και  $R_0'$  η διάταξη που προκύπτει από την επίλυση του αρχικού γραμμικού προγράμματος.

Ο συντελεστής συσχέτισης του Kendal θεωρείται ως κριτήριο προς βελτιστοποίηση στον αλγόριθμο UTAKMEN (Jacquet-Lagrèze & Siskos, 1982). Όμως η επίλυση του γραμμικού προγράμματος που προκύπτει απαιτεί τη χρήση τεχνικών μεικτού γραμμικού προγραμματισμού γεγονός που οδηγεί σε υπερβολική αύξηση του υπολογιστικού φόρτου, τόσο από άποψη υπολογισμών όσο και από άποψη αποθήκευσης της πληροφορίας. Έτσι παρατηρούμε ότι η ανάλυση μεταβελτιστοποίησης αποτελεί λύση και στις περιπτώσεις που η μοντελοποίηση ενός κριτηρίου, παρότι εφικτή, δημιουργεί άλλα προβλήματα.

Η εμπειρία που έχει αποκτηθεί από τη χρήση του μοντέλου της UTA επιβεβαιώνει ότι μπορεί να υπάρχουν μη βέλτιστες τιμές της συνάρτησης  $u(\mathbf{g})$ , για τις οποίες  $z > z^*$ , μας δίνουν ασθενείς διατάξεις  $R'$ , που πλησιάζουν περισσότερο στην  $R$  (σύμφωνα με την απόσταση του Spearman ή του Kendal) από ότι η ασθενής διάταξη που συνάγεται από τις βέλτιστες τιμές  $u^*(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^n u_i [g_i(a)]$ .

Επίσης μερικά κλασικά φαινόμενα στο μαθηματικό προγραμματισμό, όπως ο πρωτεύον και ο δυϊκός εκφυλισμός, καθώς και φαινόμενα κριτηρίων συσχέτισης στη στατιστική, δε λαμβάνονται υπόψη κατά την αναζήτηση της βέλτιστης λύσης. Οπότε είναι απαραίτητο να εξετάσουμε τις σχεδόν βέλτιστες λύσεις.

### 5.1.2 Εφαρμογή της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης

Στο προηγούμενο κεφάλαιο περιγράφηκε η αλγοριθμική διαδικασία της UTA σύμφωνα με στους Jacquet-Lagrèze και Siskos (2001) οι οποίοι τη χωρίζουν σε τέσσερα διακριτά βήματα. Στην παρούσα παράγραφο εστιάζουμε στο 4<sup>ο</sup> βήμα.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η UTA εκτιμάει ένα σύνολο από προσθετικές συναρτήσεις χρησιμότητας, και αυτό επιτυγχάνεται στο 4<sup>ο</sup> και τελευταίο αυτό βήμα το οποίο ουσιαστικά αποτελεί μία ανάλυση μεταβελτιστοποίησης, η οποία είναι αναπόσπαστο κομμάτι της όλης διαδικασίας. Ανάλογα με την αρχική βέλτιστη λύση  $z^*$  που θα υπολογιστεί με την επίλυση του γραμμικού προγράμματος στο 3<sup>ο</sup> βήμα αναζητούνται πολλαπλές ή/και ημιβέλτιστες λύσεις.

Οι νέες λύσεις αναζητούνται σε μία υποπεριοχή του νέου υπερπολυέδρου που οριοθετείται από το νέο περιορισμό:

$$z \leq z^* + \varepsilon \quad (5.3)$$

όπου  $z^*$  η αρχική βέλτιστη λύση και  $\varepsilon$  μία πολύ μικρή θετική ποσότητα παραχώρησης από τη  $z^*$ , επιλογής του αποφασίζοντα, πολλές φορές εκφρασμένη ως ποσοστό της  $z^*$ . Το  $z$  εξαρτάται από τον αλγόριθμο που θα χρησιμοποιηθεί για την εύρεση της

αρχικής βέλτιστης λύσης. Για παράδειγμα για τον αλγόριθμο UTASTAR η (5.3) γίνεται:

$$z = \sum_{j=1}^m [\sigma^-(a_j) + \sigma^+(a_j)] \leq z^* + \varepsilon(z^*) \quad (5.4)$$

όπου το  $\varepsilon$  εκφράζεται ως συνάρτηση της  $z^*$ .

Οπότε τον νέο υπερπολύεδρο (ΥΠ 5.1) αναζήτησης των λύσεων περιγράφεται από το επόμενο γραμμικό πρόγραμμα:

$$\sum_{j=1}^m [\sigma^-(a_j) + \sigma^+(a_j)] \leq z^* + \varepsilon(z^*)$$

$$\Delta(a_j, a_{j+1}) \geq \delta \text{ αν } a_j > a_{j+1}$$

$$\Delta(a_j, a_{j+1}) = 0 \text{ αν } a_j \sim a_{j+1}, \quad \forall j=1,2,\dots,m-1 \quad (5.5)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{a_i-1} w_{ik} = 1, \quad k=1,2,\dots,a_i-1, \quad i=1,2,\dots,n \quad (5.6)$$

$$w_{ik} \geq 0, \quad \forall i=1,2,\dots,n \text{ και } k=1,2,\dots,a_i-1,$$

$$\sigma^-(a_j) \geq 0, \quad \sigma^+(a_j) \geq 0 \quad \forall j=1,2,\dots,m$$

$$\text{όπου } \Delta(a_j, a_{j+1}) = u[g(a_j)] + \sigma^-(a_j) - \sigma^+(a_j) - u[g(a_{j+1})] - \sigma^-(a_{j+1}) + \sigma^+(a_{j+1}) \quad (5.7)$$

Στην περίπτωση που έχουμε  $z^*=0$  έχουμε τη δυνατότητα να αναζητήσουμε τις πολλαπλές βέλτιστες λύσεις θέτοντας  $\varepsilon=0$  ή μία μικρή σταθερή τιμή.

Από την άλλη μεριά, μεταβάλλοντας την τιμή του  $\varepsilon$  σε ένα διάστημα τιμών που θα ορίσει ο αναλυτής θα μπορέσει να αποκτήσει μία σαφή εικόνα για την ευστάθεια της

$u^*(g) = \sum_{i=1}^n u_i [g_i(a)]$ . Όσο μικρότερο είναι το διάστημα των τιμών των μεταβλητών

κατά την επίλυση των γραμμικών προγραμμάτων της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης, τόσο πιο ευσταθής θεωρείται η αρχική μας βέλτιστη λύση.

Στη συνέχεια θα εξεταστούν αναλυτικότερα οι διαφορετικές προσεγγίσεις που σχετίζονται με το τελευταίο βήμα των αλγορίθμων της UTA και θα υπάρξει εστίαση στα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της κάθε μίας. Οι διαφορές στις προσεγγίσεις συνίστανται κυρίως στην επιλογή διαφορετικών αντικειμενικών συναρτήσεων για τα γραμμικά προγράμματα που δημιουργούνται κατά τις διαδικασίες της ανάλυσης

μεταβελτιστοποίησης. Η αξία της κάθε προσέγγισης ελέγχεται με βάση συγκεκριμένους δείκτες που αναπαριστούν αντίστοιχα κριτήρια που θέτει ο αναλυτής.

### 5.1.3 Μοντέλα ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης

Μία πρώτη προσέγγιση στην ανάλυση μεταβελτιστοποίησης της UTA έχουμε από τους Jaquet-Lagrèze και Siskos (1982), και την οποία θα ονομάσουμε MAXMIN για λόγους ευκολίας αναφοράς σε αυτή. Σύμφωνα με την προσέγγισή τους επιδιώκεται η ανάλυση μεταβελτιστοποίησης μέσα από την επίλυση γραμμικών προγραμμάτων που μεγιστοποιούν και ελαχιστοποιούν διαδοχικά για κάθε κριτήριο  $i$  ξεχωριστά την αξία  $u_i(g_i^*)$  της ακραίας τιμής αξιολόγησης του κριτηρίου:

$$[\min] u_i(g_i^*) \text{ και } [\max] u_i(g_i^*), \quad i=1,2,\dots,n$$

Η γενική μορφή των  $2 \cdot n$ , όπου  $n$  ο αριθμός των κριτηρίων, μεταβέλτιστων γραμμικών προγραμμάτων έχει ως εξής:

$$\Gamma\text{Π } 5.1 \left\{ \begin{array}{l} [\min] \sum_{i=1}^n p_i \sum_{k=1}^{a_i-1} w_{ik} \\ \text{ΥΠ } 5.1 \end{array} \right. \quad \Gamma\text{Π } 5.2 \left\{ \begin{array}{l} [\max] \sum_{i=1}^n p_i \sum_{k=1}^{a_i-1} w_{ik} \\ \text{ΥΠ } 5.1 \end{array} \right.$$

Για κάθε κριτήριο  $j$  με  $j=1,2,\dots,n$  θέτουμε  $p_i=1$  για  $i=j$  και  $p_i=0$  για  $i \neq j$ . Οπότε σε κάθε περίπτωση ελαχιστοποιούμε ή μεγιστοποιούμε την αξία  $\sum_{k=1}^{a_i-1} w_{ik} = u_i(g_i^*)$  της βέλτιστης τιμής  $g_i^*$  του κριτηρίου  $j$ .

Από την παραπάνω διαδικασία μπορούμε να ορίσουμε τα διαστήματα μέσα στα οποία θα κυμαίνονται οι τιμές  $u_i[g_i(a)]$ , και ως βέλτιστες τιμές που θα συνθέτουν την προσθετική συνάρτηση αξίας  $u^*(g) = \sum_{i=1}^n u_i[g_i(a)]$ , θα θεωρήσουμε το μέσο όρο των τιμών που θα βρούμε από την επίλυση των  $2 \cdot n$  παραπάνω γραμμικών προγραμμάτων.

Μία παραλλαγή του παραπάνω μοντέλου είναι η επίλυση μόνο  $n$  γραμμικών προγραμμάτων της γενικής μορφής  $\Gamma\text{Π } 5.1$  κατά τη διαδικασία της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης. Δηλαδή, βρίσκουμε μόνο εκείνες τις μεταβέλτιστες λύσεις που μεγιστοποιούν τις αξίες  $u_i(g_i^*)$  των ακραίων τιμών αξιολόγησης των  $n$  κριτηρίων. Η προσέγγιση έχει υιοθετηθεί τόσο σε θεωρητικό επίπεδο (Siskos & Yannacopoulos, 1985; Jaquet\_Lagrèze & Siskos, 2001) όσο και σε πρακτικές εφαρμογές όπως για παράδειγμα στο Έμπειρο Πληροφοριακό Σύστημα Υποστήριξης Αποφάσεων MARKEX (Ματσατσίνης, 1995).

Μια αρκετά διαφορετική προσέγγιση έχουμε από τους Despotis, Yannacopoulos και Zorounidis (1990), που χρησιμοποιείται μόνο στην περίπτωση που  $z^* > 0$ , είναι η προσπάθεια ελαχιστοποίησης των μέγιστων και ελάχιστων λαθών  $\sigma(a)$  του αρχικού γραμμικού προγράμματος. Για το μοντέλο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το όνομα MIME από τους Beuthe and Scannella, (1996).

Στα παραδείγματα που εφαρμόστηκε η MIME επιβεβαιώθηκε ότι η διασπορά των επιμέρους λαθών είναι καθοριστικός παράγοντας για τη διαμόρφωση του  $\tau(R', R)$  (Despotis *et al.*, 1990). Για το λόγο αυτό η προσέγγιση αυτή εξετάζει ημιβέλτιστες λύσεις που ελαχιστοποιούν τη διαφορά  $d$  μεταξύ του μέγιστου και του ελάχιστου σφάλματος. Από τη στιγμή που τα σφάλματα  $\sigma(a)$  παίρνουν τιμές μη αρνητικές η απαίτηση για ελαχιστοποίηση της διαφοράς ισοδυναμεί με την ελαχιστοποίηση του μέγιστου σφάλματος  $\sigma(a)$  σύμφωνα με το παρακάτω γραμμικό πρόγραμμα:

$$\text{ΓΠ 5.3 } \begin{cases} [\min] d \\ \text{υπό τους περιορισμούς :} \\ \text{περιορισμοί του ΥΠ 5.1} \\ d - \sigma^+(a_j) \geq 0 \\ d - \sigma^-(a_j) \geq 0, \quad j=1,2,\dots,m, \quad d \geq 0 \end{cases}$$

Στη UTA χρησιμοποιούμε στους περιορισμούς των γραμμικών προγραμμάτων δύο πολύ μικρές αριθμητικές ποσότητες, τις  $\delta$  και  $s_i$ , όπου  $i$  το κάθε κριτήριο. Οι ποσότητες αυτές μπορούν έχουν συγκεκριμένη φυσική σημασία.

Η ποσότητα  $\delta$  δηλώνει την ελάχιστη διαφορά ανάμεσα στις ολικές αξίες δύο οποιονδήποτε, διαδοχικών στην κατάταξη  $R$ , εναλλακτικών του συνόλου αναφοράς. Έτσι, για δύο διαδοχικές εναλλακτικές  $a_j$  και  $a_{j+1}$  ισχύει:

$$u'[g(a_j)] - u'[g(a_{j+1})] \geq \delta \quad (5.8)$$

Η ποσότητα  $s_i$  δηλώνει την ελάχιστη διαφορά ανάμεσα στις αξίες δύο διαδοχικών τιμών αξιολόγησης του κριτηρίου. Έτσι, για δύο διαδοχικές τιμές  $g_i^k$  και  $g_i^{k+1}$  του διαστήματος  $i$  έχουμε:

$$u_i(g_i^{k+1}) - u_i(g_i^k) \geq s_i, \quad k=1,2,\dots,a_i-1, \quad i=1,2,\dots,n \quad (5.9)$$

Η επιλογή των  $\delta$  και  $s_i$  σε κάποιο βαθμό μπορεί να θεωρηθεί ως αυθαίρετη από τη στιγμή που κατά την επιλογή τους από τον αποφασίζοντα δεν μπορεί να προβλεφθεί με ακρίβεια η επίδρασή του επιπέδου τους στις λύσεις που θα προκύψουν.

Μία από τις προσεγγίσεις, η οποία καλείται MP1 από τους Beuthe and Scannella (1996), θέτει ως κριτήριο την μεγιστοποίηση του  $\delta$ , με στόχο τον καλύτερο

διαχωρισμό των διαδοχικών εναλλακτικών. Οπότε το γραμμικό πρόγραμμα θα έχει ως εξής:

$$\text{ΓΠ 5.4 } \begin{cases} [\max] \delta \\ \text{ΥΠ 5.1} \\ \delta \geq 0 \end{cases}$$

Οι Beuthe and Scannella (1996) πρότειναν ένα ακόμα μοντέλο ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης που κινείται στην ίδια φιλοσοφία με το MP1. Πρόκειται για το μοντέλο MP2 στα πλαίσια του οποίου επιδιώκεται η μεγιστοποίηση του αθροίσματος  $(\delta+s)$ , με στόχο τον καλύτερο διαχωρισμό τόσο των διαδοχικών εναλλακτικών, όσο και των διαδοχικών τιμών αξιολόγησης των κριτηρίων. Στην προσέγγιση αυτή θεωρούμε ότι  $s=s_i \quad \forall i = 1,2,\dots,n$ . Η απλή άθροιση, χωρίς ύπαρξη βαρών, των δύο παραμέτρων είναι εφικτή από μαθηματικής άποψης από τη στιγμή που εκφράζονται σε ίδιες μονάδες αξίας.

Στην περίπτωση που έχουμε  $z^*=0$ , οι δύο τελευταίες προσεγγίσεις μεταβελτιστοποίησης δικαιολογούνται από τη δυϊκή σχέση της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος προβλήματος της UTA και της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού προβλήματος σε κατάσταση βελτιστότητας:

$$z^* = \sum_{j=1}^m [\sigma^- * (a_j) + \sigma^+ * (a_j)] = \delta \sum_j y_j^* + s \sum_k x_k^* + r^* = 0 \quad (5.10)$$

όπου  $y_i$  είναι οι δυϊκές μεταβλητές που αντιστοιχούν στους περιορισμούς αυστηρής προτίμησης (5.5),  $x_i$  οι δυϊκές μεταβλητές των περιορισμών (5.9) και  $r$  η δυϊκή μεταβλητή του περιορισμού  $\sum_{i=1}^n u_i(g_i^*) = 1$ . Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή

( $z^*=0$ ) οι διαφορετικές τιμές των  $\delta$  και  $s$  δεν αυξάνουν την τιμή του  $z^*$ . Ωστόσο, στις περιπτώσεις που  $z^*>0$ , κάποιες από τις δυϊκές τιμές θα είναι θετικές με αποτέλεσμα οι διαφορετικές τιμές των  $\delta$  και  $s$  να δίνουν χειρότερο αποτέλεσμα για το  $z^*$ .

Το γραμμικό πρόγραμμα αυτής της προσέγγισης θα έχει την εξής μορφή:

$$\text{ΓΠ 5.5 } \begin{cases} [\max] (\delta + s) \\ \text{ΥΠ 5.1} \\ \delta \geq 0, s \geq 0 \end{cases}$$

Στον επόμενο πίνακα δίνονται ο αριθμός των πρόσθετων μεταβλητών, ο αριθμός των πρόσθετων περιορισμών, καθώς και ο αριθμός των γραμμικών προγραμμάτων που θα πρέπει να επιλυθούν στα πλαίσια των διαφορετικών προσεγγίσεων που απαιτούνται για την υλοποίηση της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης:



Μοντέλο	Πρόσθετος Αριθμός Μεταβλητών	Πρόσθετος Αριθμός Περιορισμών	Αριθμός Γραμμικών Προγραμμάτων
MAXMIN	-	1	2*n
UTAMIME	1	1+m	1
UTASTARMIME	1	1+2*m	1
UTA2MIME	1	1+ P +2* I	1
MP1	1	1	1
MP2	2	1	1

**Πίνακας 5-1:** Σύγκριση διαφορετικών μοντέλων ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης της UTA

Στην περίπτωση του μοντέλου MIME παρατέθηκαν τους διαφορετικούς αριθμούς που αντιστοιχούν σε τρεις αλγορίθμους της οικογένειας των UTA. Για τα μοντέλα MAXMIN, MP1 και MP2 οι αριθμοί είναι ίδιοι ανεξάρτητα του αλγορίθμου που θα επιλεγεί για την επίλυση του αρχικού γραμμικού προγράμματος.

Οι Beuthe and Scannella (2001) πραγματοποίησαν μία μελέτη διαφορετικών αλγορίθμων της οικογένειας των UTA σε συνδυασμό με την εφαρμογή διαφορετικών μοντέλων ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης και κατέληξαν σε συγκεκριμένα συμπεράσματα.

Αρχικά, διαπίστωσαν ότι στην περίπτωση που έχουμε  $z^*=0$  η UTAMAXMIN των Jaquet-Lagrèze και Siskos (1982) παρέχει μία πρακτική και αποδοτική μέθοδος εκτίμησης. Καλά αποτελέσματα παρουσίασε επίσης και η UTAMP2. Στην περίπτωση που έχουμε  $z^*=0$ , η UTASTARMAXMIN παρουσιάζει τα καλύτερα αποτελέσματα.

Τέλος, διαπίστωσαν ότι οι παράμετροι  $\delta$ ,  $s$  και  $\epsilon$  παίζουν καθοριστικό ρόλο στην ικανότητα παροχής σωστών εκτιμήσεων από τα γραμμικά προγράμματα. Μέσα από ένα σημαντικό αριθμό προσομοιώσεων κατέληξαν στο γενικό συμπέρασμα ότι μικρές τιμές για τις  $\delta$ ,  $s$  και  $\epsilon$  οδηγούν σε καλύτερα αποτελέσματα στις περιπτώσεις που έχουμε  $z^*>0$ .

Αντιθέτως, όταν  $z^*=0$ , μεγαλύτερες τιμές για τα  $\delta$  και  $s$  δίνουν καλύτερα αποτελέσματα. Στην περίπτωση αυτή η χρήση των μοντέλων MP1 και MP2 μπορεί να μας παράσχει με πρακτικό τρόπο τα άνω όρια των τιμών που θα μπορούσαν να πάρουν οι παράμετροι αυτές.

## 5.2 Η Ανάλυση Μεταβελτιστοποίησης στη Μέθοδο MUSA

### 5.2.1 Μοντελοποίηση της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης

Στο Κεφάλαιο 1 αναφέρθηκαν οι λόγοι που καθιστούν αναγκαία την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης στην πολυκριτήρια ανάλυση και στον γραμμικό προγραμματισμό, αντίστοιχα. Προφανώς οι ίδιοι λόγοι υφίστανται και στην περίπτωση της μεθόδου MUSA, από τη στιγμή που πρόκειται για μέθοδο που υιοθετεί τις αρχές της πολυκριτήριας ανάλυσης και χρησιμοποιεί προχωρημένες τεχνικές γραμμικού προγραμματισμού.

Επιπρόσθετα στη μέθοδο MUSA η ανάλυση μεταβελτιστοποίησης εξυπηρετεί και ένα ακόμα σκοπό. Κατά τη διεξαγωγή μίας έρευνας ικανοποίησης των πελατών μπορεί να προκύψουν ομάδες πελατών με διαφορετικές στάσεις ως προς τα προϊόντα ή τις υπηρεσίες. Αυτές οι διαφορετικές στάσεις μεταφράζονται σε διαφορετικές συναρτήσεις προτίμησης, με διαφορετικά βάση στα κριτήρια, κλπ.. Κατά τη διεξαγωγή της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης μπορούν να παρατηρηθούν οι σημαντικές αυτές διαφορές, εφόσον υφίστανται, και οι οποίες οφείλονται στη συλλογική φύση της μεθόδου. Στην περίπτωση αυτή, θα ήταν χρήσιμη μία *a posteriori* τμηματοποίηση του αρχικού συνόλου των πελατών σε μικρότερες και πιο ομογενοποιημένες ομάδες (Grigoroudis & Siskos, 2002).

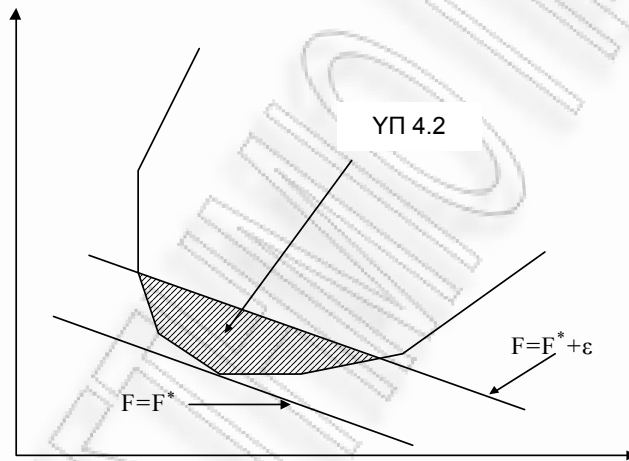
Οι μέθοδοι ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια της παραγράφου στηρίζονται στην ευρετική μέθοδο (Siskos, 1984; Σίσκος, 1998) που παρουσιάστηκε στην § 2.3.4. Ο λόγος που επιλέχθηκε η μέθοδος αυτή είναι κυρίως ο περιορισμένος υπολογιστικός φόρτος σε σχέση με άλλες μεθόδους που επιδιώκουν την εξαντλητική αναζήτηση του συνόλου των μεταβέλτιστων λύσεων. Η υπεροχή της συγκεκριμένης μεθόδου είναι ιδιαίτερα εμφανής κυρίως σε πολύ μεγάλα προβλήματα, όπως είναι τα προβλήματα που καλείται να αντιμετωπίσει η μέθοδος MUSA.

Οι μεταβέλτιστες λύσεις θα αναζητούνται στο υπερπολύεδρο ΥΠ 4.2 (Σχήμα 5-1) το οποίο οριοθετείται από τους αρχικούς περιορισμούς του προβλήματος και από τον επόμενο νέο περιορισμό:

$$F \leq F^* + \varepsilon \quad (5.11)$$

όπου  $F^*$  η βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος και  $\varepsilon$  μία μικρή (πρακτικά αμελητέα) προκαθορισμένη θετική ποσότητα. Οπότε το υπερπολύεδρο μοντελοποιείται ως εξής:

$$\text{ΥΠ 5.2} \left\{ \begin{array}{l} F \leq F^* + \varepsilon \\ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{t_{ij}-1} w'_{ik} - \sum_{m=1}^{t_j-1} z'_m - \sigma_j^+ + \sigma_j^- = \gamma(t_j-1) - \sum_{i=1}^n \gamma_i(t_{ji}-1) \quad \text{για } j=1,2,\dots,M \\ \sum_{m=1}^{\alpha-1} z'_m = 100 - \gamma(\alpha-1) \\ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\alpha_i-1} w_{ik} = 100 - \sum_{i=1}^n \gamma_i(\alpha_i-1) \\ z'_m \geq 0, w'_{ik} \geq 0 \quad \forall m,i,k \\ \sigma_j^+ \geq 0, \sigma_j^- \geq 0 \quad \text{για } j=1,2,\dots,M \end{array} \right.$$



**Σχήμα 5-1:** Ανάλυση Μεταβελτιστοποίησης και ημιβέλτιστες λύσεις (Grigoroudis & Siskos, 2002)

Η φάση της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης ολοκληρώνει τον αλγόριθμο της μεθοδολογίας MUSA και περιλαμβάνει την μορφοποίησης και επίλυση συγκεκριμένου αριθμού γραμμικών προβλημάτων. Ο αριθμός των προβλημάτων εξαρτάται από το μοντέλο που τελικά θα επιλεγεί από τον αναλυτή. Η βασική διαφορά των διαφόρων μοντέλων είναι οι αντικειμενικές συναρτήσεις που ολοκληρώνουν την μοντελοποίηση των νέων γραμμικών προγραμμάτων.

Στην επόμενη παράγραφο ακολουθεί παρουσίαση 5 μοντέλων ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης. Για τα μοντέλα αυτά θα παρατεθεί η μορφή των γραμμικών προγραμμάτων τους ενώ θα γίνει αναφορά και στην υπολογιστική δυσκολία επίλυσής τους, στοιχείο που σχετίζεται τόσο με τον αριθμό των προς επίλυση γ.π. όσο και με τον αριθμό των περιορισμών και των μεταβλητών. (Γρηγορούδης & Σίσκος, 2000; Grigoroudis & Siskos, 2002).

### 5.2.2 Μοντέλα ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης

Το πρώτο μοντέλο που θα περιγραφεί είναι αυτό που θεωρείται από τους Γρηγορούδη και Σίσκο (2000) ως μέρος του Γενικευμένου Μοντέλου της MUSA. Οι αντικειμενικές συναρτήσεις που συνιστούν τα  $n$  (όσος και ο αριθμός των κριτηρίων ικανοποίησης) γραμμικά προγράμματα, στοχεύουν στην μεγιστοποίηση των βαρών  $b_i$  κάθε κριτηρίου  $i$ . Τα προς επίλυση γραμμικά προγράμματα έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$\text{ΓΠ 5.6} \left\{ \begin{array}{l} [\max] F' = \sum_{k=1}^{\alpha_i-1} w_{ik} \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, n \\ \text{υπό τους περιορισμούς που οριοθετούν το} \\ \text{ΥΠ 5.2} \end{array} \right.$$

όπου  $n$  ο αριθμός των κριτηρίων,  $\alpha_i$  ο αριθμός επιπέδων της κλίμακας ικανοποίησης του κριτηρίου  $i$  και  $w$  οι μεταβλητές που ορίζονται από τη σχέση (4.30).

Μία αντιπροσωπευτική τελική λύση για τις μεταβλητές της μεθόδου MUSA υπολογίζεται από τη μέση τιμή των μεταβέλτιστων λύσεων που δίνουν τα γραμμικά προγράμματα ΓΠ 5.6. Στην περίπτωση όμως που έχουμε ασταθή λύση, που ισοδυναμεί με μεγάλη διακύμανση των μεταβέλτιστων λύσεων, η μέση τιμή δεν είναι απαραίτητα αντιπροσωπευτική των λύσεων.

Εναλλακτικά, θα μπορούσε να εξεταστεί ταυτόχρονα και η επίλυση  $n$  γραμμικών προγραμμάτων τα οποία ελαχιστοποιούν το βάρος  $b_i$  κάθε κριτηρίου  $i$ . Το δεύτερο αυτό μοντέλο ονομάζεται MUSA I και στην περίπτωση αυτή τα  $2 \cdot n$  γραμμικά προγράμματα θα έχουν την παρακάτω μορφή:

$$\text{ΓΠ 5.7} \left\{ \begin{array}{l} [\max] F' = \sum_{k=1}^{\alpha_i-1} w_{ik} \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, n \\ \text{υπό τους περιορισμούς που} \\ \text{οριοθετούν το ΥΠ 5.2} \end{array} \right. \quad \text{και} \quad \left\{ \begin{array}{l} [\min] F' = \sum_{k=1}^{\alpha_i-1} w_{ik} \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, n \\ \text{υπό τους περιορισμούς που} \\ \text{οριοθετούν το ΥΠ 5.2} \end{array} \right.$$

Ένα τρίτο μοντέλο ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης είναι το MUSA II. Στα πλαίσια της εναλλακτικής αυτής προσέγγισης αναζητούμε τις μεταβέλτιστες εκείνες λύσεις, οι οποίες μεγιστοποιούν τα κατώφλια προτίμησης  $\gamma$  και  $\gamma_i$  όπως αυτά έχουν οριστεί στην § 4.4.4. Με την εφαρμογή του μοντέλου αυτού αντιμετωπίζουμε και το πρόβλημα της επιλογής κατάλληλων τιμών για τις συγκεκριμένες παραμέτρους, οι οποίες επηρεάζουν ως σε ένα βαθμό την ευστάθεια των λύσεων, γεγονός που θα

επιβεβαιωθεί και από αριθμητικά παραδείγματα στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου.

Τα γραμμικά προγράμματα που πρέπει να επιλυθούν κατά την εφαρμογή του συγκεκριμένου μοντέλου είναι  $n+1$  και έχουν την εξής γενική μορφή:

$$\text{ΓΠ 5.8} \quad \left\{ \begin{array}{l} [\max] F' = \gamma \\ \text{υπό τους περιορισμούς που} \\ \text{οριοθετούν το ΥΠ 5.2} \end{array} \right. \quad \text{και} \quad \left\{ \begin{array}{l} [\max] F' = \gamma_i \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, n \\ \text{υπό τους περιορισμούς που} \\ \text{οριοθετούν το ΥΠ 5.2} \end{array} \right.$$

Παρόμοια με την προηγούμενη μέθοδο είναι και η MUSA III όπου πλέον εξετάζεται η μεγιστοποίηση των διαδοχικών βημάτων αύξησης των συναρτήσεων  $Y^*$  και  $X^*$  δηλαδή των βασικών μεταβλητών της μεθόδου MUSA  $w_{ik}$  και  $z_m$ . Το μοντέλο αυτό απαιτεί την επίλυση  $(\alpha - 1) + \sum_{i=1}^n (\alpha_i + 1)$  γραμμικών προγραμμάτων της μορφής:

$$\text{ΓΠ 5.9} \quad \left\{ \begin{array}{l} [\max] F' = z_m \quad \text{για } m = 1, 2, \dots, \alpha - 1 \\ \text{υπό τους περιορισμούς που} \\ \text{οριοθετούν το ΥΠ 5.2} \end{array} \right. \quad \text{και} \quad \left\{ \begin{array}{l} [\max] F' = w_{ik} \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, n \\ \quad \quad \quad \quad \quad k = 1, 2, \dots, \alpha_i - 1 \\ \text{υπό τους περιορισμούς που} \\ \text{οριοθετούν το ΥΠ 5.2} \end{array} \right.$$

Τα δύο τελευταία μοντέλα στηρίζονται στην ίδια φιλοσοφία με τα μοντέλα μεταβελτιστοποίησης της UTA, MP1 και MP2, των Beuthe and Scannella (1996) που παρουσιάστηκαν στην § 5.2.2.

Μία αντιπροσωπευτική τελική λύση για τις μεταβλητές των μεθόδων MUSA I, MUSA II και MUSA III υπολογίζεται από τη μέση τιμή των βέλτιστων λύσεων που δίνουν τα γραμμικά προγράμματα ΓΠ 5.7, ΓΠ 5.8 και ΓΠ 5.9, αντίστοιχα.

Ένα τελευταίο μοντέλο που θα εξεταστεί είναι το MUSA IV που στηρίζεται στην προσέγγιση των Despotis et al. (1990) (μέθοδος MIME § 5.2.2), και η οποία αφορά την ελαχιστοποίηση της διαφοράς ανάμεσα στη μεγαλύτερη και στη μικρότερη τιμή των μεταβλητών σφάλματος  $\sigma_j^+$  και  $\sigma_j^-$  στην περίπτωση που  $F^* > 0$ . Δεδομένης της μη-αρνητικότητας των μεταβλητών σφάλματος, η συγκεκριμένη προσέγγιση ισοδυναμεί με την ελαχιστοποίηση της μεγαλύτερης τιμής των σφαλμάτων. Έτσι, το ένα και μοναδικό γραμμικό πρόγραμμα που θα πρέπει να επιλυθεί στα πλαίσια εφαρμογής του συγκεκριμένου μοντέλου θα έχει την εξής μορφή:

$$\text{ΓΠ 5.10} \left\{ \begin{array}{l} [\min] F' = m_e \\ \text{υπό τους περιορισμούς} \\ m_e - \sigma_j^+ \geq 0 \text{ για } j = 1, 2, \dots, M \\ m_e - \sigma_j^- \geq 0 \text{ για } j = 1, 2, \dots, M \\ \text{και αυτούς που οριοθετούν το ΥΠ 5.2} \end{array} \right.$$

όπου  $M$  είναι ο αριθμός των ερωτώμενων πελατών.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω πέντε μοντέλα ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης στον πίνακα που ακολουθεί παραθέτονται τα χαρακτηριστικά τους εκείνα που διαμορφώνουν μία σαφή εικόνα για τον απαιτούμενο υπολογιστικό φόρτο.

Όνομασία Μοντέλου	Περιγραφή	Αντικειμενική Συνάρτηση	Αριθμός γ.π. ανάλυσης μετα/ποίησης	Αριθμός περιορισμών	Αριθμός Μεταβλητών
Γενικευμέν ο MUSA	Μεγιστοποίηση Βαρών	$[\max] F' = b_i$	$n$	$M+3$	$2 * M + (\alpha - 1) + \sum_{i=1}^n (\alpha_i + 1)$
MUSA I	Μεγιστοποίηση Ελαχιστοποίηση Βαρών	$[\max] F' = b_i$ $[\min] F' = b_i$	$2 * n$	$M+3$	$2 * M + (\alpha - 1) + \sum_{i=1}^n (\alpha_i + 1)$
MUSA II	Μεγιστοποίηση κατωφλίων προτίμησης	$[\max] F' = \gamma$ $[\max] F' = \gamma_i$	$n+1$	$M+3$	$2 * M + \alpha + \sum_{i=1}^n \alpha_i$
MUSA III	Μεγιστοποίηση βημάτων αύξησης	$[\max] F' = z_m$ $[\max] F' = w_{ik}$	$(\alpha - 1) + \sum_{i=1}^n (\alpha_i + 1)$	$M+3$	$2 * M + (\alpha - 1) + \sum_{i=1}^n (\alpha_i + 1)$
MUSA IV	Ελαχιστοποίηση διακύμανσης σφαλμάτων	$[\min] F' = m_e$	$1$	$3 * M + 3$	$2 * M + \alpha + \sum_{i=1}^n (\alpha_i + 1)$

**Πίνακας 5-2:** Εναλλακτικές προσεγγίσεις ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης της MUSA

Παρατηρώντας τα διαφορετικά μοντέλα μπορούμε να καταλήξουμε στα παρακάτω γενικά συμπεράσματα (Grigoroudis & Siskos, 2002; Γρηγορούδης & Σίσκος, 2000):

1. Τα κριτήρια ικανοποίησης είναι συνήθως ανταγωνιστικά μεταξύ τους οπότε ίσως είναι περιττή η ταυτόχρονη μεγιστοποίηση και ελαχιστοποίηση των βαρών των κριτηρίων. Έτσι, θα μπορεί να χρησιμοποιείται το Γενικευμένο MUSA αντί του MUSA I χωρίς απώλεια πληροφορίας.
2. Το μοντέλο MUSA III αποτελεί ουσιαστικά επέκταση του μοντέλου MUSA II δεδομένου ότι ισχύει:

$$\begin{cases} \gamma \leq \min_m \{z_m\} \\ \gamma_i \leq \min_k \{w_{ik}\} \end{cases} \quad \forall i \quad (5.12)$$

3. Στο μοντέλο MUSA IV επιδιώκεται η ελαχιστοποίηση της διαφοράς ανάμεσα στη μεγαλύτερη και στη μικρότερη τιμή των μεταβλητών σφάλματος. Η προσέγγιση αυτή αν και θεωρείται σημαντικό εργαλείο της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης στο χώρο της ποιοτικής ανάλυσης παλινδρόμησης, δεν κρίνεται απαραίτητη στη συγκεκριμένη περίπτωση. Όπως έχει αναλυθεί και στο 5ο Κεφάλαιο το μοντέλο MUSA είναι μία μέθοδος προσδιορισμού και ανάλυσης της συλλογικής συμπεριφοράς ενός συνόλου πελατών (collective model). Με αυτό τον τρόπο το μοντέλο διορθώνει τους πελάτες (μη μηδενικές τιμές των μεταβλητών σφάλματος) η συμπεριφορά των οποίων διαφοροποιείται από το γενικό σύνολο. Το μοντέλο MUSA IV αναιρεί αυτή ακριβώς την ιδιότητα της μεθόδου, δεδομένου ότι ισοκατανέμει τα σφάλματα στο σύνολο των πελατών. Επιπρόσθετα, πρέπει να σημειωθεί ότι δεν αντιμετωπίζεται το πρόβλημα ύπαρξης πολλαπλών βέλτιστων ή ημιβέλτιστων λύσεων από τη στιγμή που επιλύεται μόνο ένα γραμμικό πρόγραμμα.

### 5.2.3 Έλεγχος Αξιοπιστίας

Η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων που παράγονται από την εφαρμογή κάποιου από τα παραπάνω μοντέλα της MUSA σχετίζεται με τα ακόλουθα σημεία (Grigoroudis & Siskos, 2002, Γρηγορούδης & Σίσκος, 2000):

- βαθμός προσαρμογής του μοντέλου στα δεδομένα του προβλήματος αξιολόγησης της ικανοποίησης πελατών (μέσος δείκτης προσαρμογής, δείκτης επιπέδου ολικής πρόβλεψης),
- ευστάθεια των αποτελεσμάτων της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης (μέσος δείκτης ευστάθειας, εύρος διακύμανσης βαρών))

### 5.2.3.1 Μέσος δείκτης προσαρμογής

Η προσαρμογή του μοντέλου αφορά στην εύρεση ενός συστήματος αξιών (συναρτήσεις ικανοποίησης, βάρη κριτηρίων) για το σύνολο των πελατών, με τα ελάχιστα δυνατά σφάλματα. Για το λόγο αυτό, οι βέλτιστες τιμές των μεταβλητών σφάλματος υποδηλώνουν την αξιοπιστία του συστήματος αξιών που εκτιμάται. Ο ορισμός ενός κανονικοποιημένου δείκτη προσαρμογής κρίνεται απαραίτητος, δεδομένου ότι η συνολική ποσότητα των σφαλμάτων εκτίμησης, εξαρτάται από τον αριθμό των πελατών. Έτσι, ο μέσος δείκτης προσαρμογής (Average Fitting Index) της μεθόδου MUSA ορίζεται ως εξής:

$$AFI = 1 - \frac{F^*}{100 \cdot M} \quad (5.13)$$

όπου  $F^*$  είναι βέλτιστη τιμή του σφάλματος του αρχικού γραμμικού προγράμματος του μοντέλου MUSA και  $M$  είναι ο αριθμός των πελατών.

Ο μέσος δείκτης προσαρμογής παίρνει την τιμή 100% μόνο όταν  $F^*=0$ , δηλαδή όταν το μοντέλο είναι σε θέση να εκτιμήσει ένα σύνολο αξιών για τους πελάτες με μηδενικά σφάλματα. Όμοια, ο μέσος δείκτης προσαρμογής παίρνει την τιμή 0 μόνο όταν  $F^*=100 \cdot M$ , δηλαδή όταν τα ζεύγη των μεταβλητών σφάλματος  $\sigma_j^+$  και  $\sigma_j^-$  παίρνουν την μέγιστη δυνατή τιμή τους. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι  $\sigma_j^+ \cdot \sigma_j^- = 0 \quad \forall j$ , δηλαδή η βέλτιστη λύση περιλαμβάνει μια τουλάχιστον μηδενική μεταβλητή σφάλματος για κάθε πελάτη, δεδομένη ότι η συγκεκριμένη μοντελοποίηση είναι όμοια με αυτή του προγραμματισμού στόχων (Charnes & Cooper, 1961).

### 5.2.3.2 Δείκτης επιπέδου ολικής πρόβλεψης

Για τον υπολογισμό αυτού του δείκτη πρέπει πρώτα να κατασκευαστεί ο πίνακας πρόβλεψης ή εκτίμησης της ολικής ικανοποίησης σύμφωνα με τα ακόλουθα βήματα:

1. Για κάθε πελάτη  $j$  υπολογίζεται η εκτίμηση της αξίας ικανοποίησης  $\tilde{y}_j^{*m}$  με βάση τη σχέση
2. Με βάση την προηγούμενη τιμή, για κάθε πελάτη  $j$  υπολογίζεται η εκτίμηση του επιπέδου ικανοποίησης  $\tilde{y}_j^m$  σύμφωνα με τη σχέση:



$$\tilde{y}_j^m = \begin{cases} y_j^1 & \text{if } \tilde{y}_j^{*m} \leq \frac{y^{*2}}{2} \\ y_j^2 & \text{if } \frac{y^{*2}}{2} < \tilde{y}_j^{*m} \leq \frac{y^{*3} + y^{*2}}{2} \\ \vdots & \\ y_j^\alpha & \text{if } \tilde{y}_j^{*m} > \frac{100 + y^{*\alpha-1}}{2} \end{cases} \quad (5.14)$$

3. Έτσι για κάθε πελάτη  $j$  είναι διαθέσιμο το πραγματικό επίπεδο ολικής ικανοποίησης  $y_j^m$  όπως έχει εκφραστεί από τους ίδιους του πελάτες, καθώς και το εκτιμώμενο επίπεδο ολικής ικανοποίησης  $\tilde{y}_j^m$  όπως έχει υπολογιστεί από τη σχέση (5.14).
4. Με βάση αυτές τις τιμές είναι δυνατό να υπολογιστεί ο αριθμός των πελατών που ανήκουν σε κάθε εκτιμώμενο και πραγματικό επίπεδο ικανοποίησης και να κατασκευαστεί ο πίνακας πρόβλεψης της ολικής ικανοποίησης.
5. Η γενική μορφή ενός πίνακα πρόβλεψης παρουσιάζεται στο Σχήμα 5-2 και περιλαμβάνει τα εξής αποτελέσματα, για κάθε πραγματικό και εκτιμώμενο επίπεδο ικανοποίησης:
  - $N_{m_1, m_2}$ : αριθμός πελατών που έχουν δηλώσει ότι ανήκουν στο επίπεδο  $m_1$  ολικής ικανοποίησης και το μοντέλο τους κατατάσσει στο  $m_2$  επίπεδο ολικής ικανοποίησης.
  - $R_{m_1, m_2}$ : ποσοστό των πελατών του  $m_1$  πραγματικού επιπέδου ολικής ικανοποίησης που το μοντέλο τους κατατάσσει στο  $m_2$  επίπεδο ολικής ικανοποίησης, με  $R_{m_1, m_2} = N_{m_1, m_2} / \sum_{m_1=1}^{\alpha} N_{m_1, m_2} \quad \forall m_1, m_2$
  - $C_{m_1, m_2}$ : ποσοστό των πελατών του  $m_2$  εκτιμώμενου επιπέδου ολικής ικανοποίησης που έχουν δηλώσει ότι ανήκουν στο  $m_1$  επίπεδο ολικής ικανοποίησης, με  $C_{m_1, m_2} = N_{m_1, m_2} / \sum_{m_2=1}^{\alpha} N_{m_1, m_2} \quad \forall m_1, m_2$

Ο δείκτης του επιπέδου της ολικής πρόβλεψης (Overall Prediction Level - OPL) εκτιμάται με βάση τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του πίνακα πρόβλεψης:

$$OPL = \sum_{m_1=1}^{\alpha} N_{m_1, m_1} / \sum_{m_1=1}^{\alpha} \sum_{m_2=1}^{\alpha} N_{m_1, m_2} \quad (5.15)$$

		Προβλεπόμενο επίπεδο ολικής ικανοποίησης					
		$\tilde{y}^1$	$\tilde{y}^2$	...	$\tilde{y}^j$	...	$\tilde{y}^a$
Πραγματικό επίπεδο ολικής ικανοποίησης	$y^1$	$N_{11} \quad R_{11}$ $C_{11}$	$N_{12} \quad R_{12}$ $C_{12}$	...	$N_{1j} \quad R_{1j}$ $C_{1j}$	...	$N_{1a} \quad R_{1a}$ $C_{1a}$
	$y^2$	$N_{21} \quad R_{21}$ $C_{21}$	$N_{22} \quad R_{22}$ $C_{22}$	...	$N_{2j} \quad R_{2j}$ $C_{2j}$	...	$N_{2a} \quad R_{2a}$ $C_{2a}$
		⋮					⋮
	$y^i$	$N_{i1} \quad R_{i1}$ $C_{i1}$	$N_{i2} \quad R_{i2}$ $C_{i2}$	...	$N_{ij} \quad R_{ij}$ $C_{ij}$	...	$N_{ia} \quad R_{ia}$ $C_{ia}$
		⋮					⋮
$y^a$	$N_{a1} \quad R_{a1}$ $C_{a1}$	$N_{a2} \quad R_{a2}$ $C_{a2}$	...	$N_{aj} \quad R_{aj}$ $C_{aj}$	...	$N_{aa} \quad R_{aa}$ $C_{aa}$	

**Σχήμα 5-2:** Πίνακας πρόβλεψης ολικής ικανοποίησης  
(Γρηγορούδης & Σίσκος, 2000)

Γενικά, θα μπορούσε να αναφερθεί ότι η προσαρμογή της μεθόδου MUSA δεν είναι ικανοποιητική όταν υπάρχουν υψηλά ποσοστά πελατών "μακριά" από την κύρια διαγώνιο του πίνακα πρόβλεψης της ολικής ικανοποίησης (δηλαδή σημαντικός αριθμός πελατών που ενώ έχουν δηλώσει ότι είναι πολύ ικανοποιημένοι, το μοντέλο προβλέπει ότι έχουν χαμηλό επίπεδο ικανοποίησης, ή το ακριβώς αντίθετο).

Άλλο χρήσιμο εργαλείο που αφορά στην προσαρμογή των αποτελεσμάτων της μεθόδου και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση και την κατανομή των σφαλμάτων είναι το διάγραμμα διακύμανσης της ολικής συνάρτησης ικανοποίησης (Grigoroudis & Siskos, 2002; Γρηγορούδης & Σίσκος, 2000).

### 5.2.3.3 Μέσος δείκτης ευστάθειας

Η ευστάθεια των αποτελεσμάτων της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης αποτελεί ένα πρόβλημα ανεξάρτητο από το βαθμό προσαρμογής της μεθόδου MUSA και αποτελεί το βασικό αντικείμενο της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης. Η προτεινόμενη ανάλυση μεταβελτιστοποίησης είναι μία διαδικασία αναζήτησης ημιβέλτιστων λύσεων με συγκεκριμένες επιθυμητές ιδιότητες, η οποία είναι σε θέση να μετρήσει την ευστάθεια των αποτελεσμάτων του μοντέλου.

Πιο συγκεκριμένα, κατά τη διάρκεια της φάσης μεταβελτιστοποίησης έστω ότι επιλύονται  $n_{sol}$  τον αριθμό γραμμικά προγράμματα, τα οποία εκτιμούν  $n_{sol}$  σύνολα λύσεων. Ως τελική λύση για τα βάρη των κριτηρίων υπολογίζεται η μέση τιμή των βαρών που προκύπτουν από την επίλυση των γραμμικών αυτών προγραμμάτων.

Μία αρχική ένδειξη για το μέτρο της αστάθειας των λύσεων είναι η τυπική απόκλιση των λύσεων που προκύπτει από την τετραγωνική ρίζα της μέσης τετραγωνικής απόκλισης (Μπένος, 1991; Παπαϊωάννου & Λουκά, 1990).

Ο τύπος τυπικής απόκλισης των εκτιμώμενων τιμών του βάρους του κριτηρίου  $i$  ορίζεται ως εξής:

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n_{sol} - 1} \sum_{j=1}^{n_{sol}} \left( b_i^j - \frac{\sum_{j=1}^{n_{sol}} b_i^j}{n_{sol}} \right)^2} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n_{cr} \quad (5.16)$$

όπου  $S_i$  η τυπική απόκλιση των εκτιμώμενων τιμών του βάρους του κριτηρίου  $i$ ,  $b_i^j$  το βάρος του  $i$  κριτηρίου που προκύπτει από την επίλυση του  $j$  γραμμικού προγράμματος μεταβελτιστοποίησης,  $n_{cr}$  το πλήθος των κριτηρίων και τέλος  $n_{sol}$  ο συνολικός αριθμός των προς επίλυση γραμμικών προγραμμάτων στα πλαίσια της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης.

Η σχέση (5.16) έπειτα από πράξεις καταλήγει στην παρακάτω μορφή:

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n_{sol} - 1} \left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} (b_i^j)^2 - \frac{\left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} b_i^j \right)^2}{n_{sol}} \right)} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n_{cr} \quad (5.17)$$

Στη συνέχεια η τυπική απόκλιση των βαρών χρησιμοποιείται για να εξαχθεί ο δείκτης εκείνος μέσω του οποίου θα εκφράσουμε το βαθμό ευστάθειας των λύσεων. Έτσι, ο μέσος δείκτης ευστάθειας (Average Stability Index - ASI) θα μπορούσε να οριστεί ως

η μέση τιμή της κανονικοποιημένης τυπικής απόκλισης των εκτιμώμενων βαρών  $b_i$  των κριτηρίων του προβλήματος:

$$ASI = 1 - \frac{1}{n_{cr}} \sum_{i=1}^{n_{cr}} \frac{S_i}{Norm} \quad (5.18),$$

όπου  $Norm$  είναι ο συντελεστής κανονικοποίησης, τέτοιος ώστε να επιτρέπει στο δείκτη ASI να λάβει τιμές στο διάστημα  $[0,1]$  και πιο συγκεκριμένα :

1. Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση που ο δείκτης αυτός γίνεται μέγιστος έχουμε (Παπαδημητρίου, 1989):

$$ASI = 1 \Leftrightarrow b_i^j = b_i \quad \forall i, j \quad (5.19)$$

Δηλαδή, στην καλύτερη περίπτωση έχουμε μηδενική τυπική απόκλιση:

$$S_i = 0 \Leftrightarrow b_i^j = b_i \quad \forall i, j \quad (5.20),$$

όπου  $b_i = \frac{1}{n_{sol}} \sum_{j=1}^{n_{sol}} b_i^j$  (5.21) δηλαδή οι τελικές τιμές των βαρών  $b_i$  είναι οι υπολογιζόμενες μέσες τιμές των  $b_i^j$ . Οπότε ανεξάρτητα του συντελεστή  $Norm$  ο ASI παίρνει τη μέγιστη τιμή του:

$$ASI = 1 - \frac{1}{n_{cr}} \sum_{i=1}^{n_{cr}} \frac{0}{Norm} \Rightarrow ASI = 1 \quad (5.22).$$

2. Στη χειρότερη περίπτωση που ο δείκτης γίνεται ελάχιστος ( $ASI=0$ ) το άθροισμα των τυπικών αποκλίσεων θα παίρνει τη μέγιστη τιμή του  $S_{max}$ . Σε αυτή την περίπτωση ισχύει:

$$ASI = 1 - \frac{1}{n_{cr}} \sum_{i=1}^{n_{cr}} \frac{S_i}{Norm} \Rightarrow ASI = 1 - \frac{1}{n_{cr}} * \frac{S_{max}}{Norm} \Rightarrow ASI = 0 \quad (5.23)$$

Επομένως αρκεί να βρεθεί ένας συντελεστής κανονικοποίησης  $Norm$  που θα ισούται με το  $S_{max}/n_{cr}$ .

Κατά τη χειρότερη περίπτωση οι τιμές των  $b_i^j$  θα παίρνουν τιμές ως εξής:

$$b_i^j = \begin{cases} 100 & \text{για } j=k=1+(i-1)\frac{n_{sol}}{n_{cr}}, \dots, (i-1)\frac{n_{sol}}{n_{cr}} + \frac{n_{sol}}{n_{cr}} \quad \text{για } i = 1, \dots, n_{cr} \\ 0 & \text{για } j \neq k \end{cases} \quad (5.24)$$

Δηλαδή για το  $1/n_{cr}$  του συνόλου των λύσεων  $n_{sol}$  η τιμή του βάρους για το κάθε ένα κριτήριο θα παίρνει την τιμή 100 και την τιμή 0 για τα υπόλοιπα  $(n_{cr}-1)$  κριτήρια. Οπότε σε κάθε κριτήριο θα έχουμε  $n_{sol}/n_{cr}$  τιμές 100 και  $\frac{n_{sol}(n_{cr}-1)}{n_{cr}}$  τιμές 0. Στην περίπτωση αυτή η μέση τιμή των βαρών των κριτηρίων  $i$  θα ισούται με:

$$b_i = \frac{1}{n_{sol}} \left( 100 \frac{n_{sol}}{n_{cr}} + 0 \frac{n_{sol}(n_{cr}-1)}{n_{cr}} \right) \Rightarrow b_i = \frac{100}{n_{cr}} \quad \forall i \quad (5.25)$$

Από τη σχέση (5.16) έχουμε για την τυπική απόκλιση κάθε κριτηρίου  $i$ :

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n_{sol}-1} \left( \sum_{b'_j=100} \left( 100 - \frac{100}{n_{cr}} \right)^2 + \sum_{b'_j=0} \left( -\frac{100}{n_{cr}} \right)^2 \right)} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n_{cr} \Rightarrow$$

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n_{sol}-1} \left( \frac{n_{sol}}{n_{cr}} \left( 100 - \frac{100}{n_{cr}} \right)^2 + (n_{cr}-1) \frac{n_{sol}}{n_{cr}} \left( -\frac{100}{n_{cr}} \right)^2 \right)} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n_{cr} \quad (5.26)$$

Επομένως για τον συντελεστή κανονικοποίησης *Norm* έχουμε:

$$Norm = \frac{S_{max}}{n_{cr}} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{cr}} S_i}{n_{cr}} \Rightarrow$$

$$Norm = \frac{\sum_{i=1}^{n_{cr}} \sqrt{\frac{1}{n_{sol}-1} \left( \frac{n_{sol}}{n_{cr}} \left( 100 - \frac{100}{n_{cr}} \right)^2 + (n_{cr}-1) \frac{n_{sol}}{n_{cr}} \left( -\frac{100}{n_{cr}} \right)^2 \right)}}{n_{cr}} \Rightarrow$$

$$Norm = \frac{n_{cr} \sqrt{\frac{1}{n_{sol}-1} \left( \frac{n_{sol}}{n_{cr}} \left( 100 - \frac{100}{n_{cr}} \right)^2 + (n_{cr}-1) \frac{n_{sol}}{n_{cr}} \left( -\frac{100}{n_{cr}} \right)^2 \right)}}{n_{cr}} \Rightarrow$$

$$Norm = \sqrt{\frac{1}{n_{sol}-1} \left( \frac{n_{sol}}{n_{cr}} \left( 100 - \frac{100}{n_{cr}} \right)^2 + (n_{cr}-1) \frac{n_{sol}}{n_{cr}} \left( -\frac{100}{n_{cr}} \right)^2 \right)} \quad (5.27)$$

Και αντικαθιστώντας στην (5.18) και με χρήση της (5.17) μετά από πράξεις προκύπτει ο τελικός τύπος ASI:

$$\begin{aligned}
 ASI &= 1 - \frac{1}{n_{cr}} \sum_{i=1}^{n_{cr}} \frac{S_i}{\sqrt{\frac{1}{n_{sol}-1} \left( \frac{n_{sol}}{n_{cr}} \left( 100 - \frac{100}{n_{cr}} \right)^2 + (n_{cr}-1) \frac{n_{sol}}{n_{cr}} \left( -\frac{100}{n_{cr}} \right)^2 \right)}} \Rightarrow \\
 & \sum_{i=1}^{n_{cr}} \sqrt{\left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} (b_i^j)^2 \right) - \frac{\left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} b_i^j \right)^2}{n_{sol}}} \\
 ASI &= 1 - \frac{1}{n_{cr}} \frac{1}{\sqrt{\frac{100^2 + \frac{100^2}{n_{cr}^2} - 2 * \frac{100^2}{n_{cr}} + \frac{100^2}{n_{cr}^2} (n_{cr}-1)}{n_{cr}} n_{sol}}} \Rightarrow \\
 & \sqrt{\frac{1}{n_{sol}} \sum_{i=1}^{n_{cr}} \left( n_{sol} \left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} (b_i^j)^2 \right) - \left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} b_i^j \right)^2 \right)} \\
 ASI &= 1 - \frac{1}{n_{cr}} \frac{1}{\sqrt{\frac{100^2 n_{cr}^2 + 100^2 - 2 * 100^2 n_{cr} + 100^2 (n_{cr}-1)}{n_{cr}^2} n_{sol}}} \Rightarrow \\
 & \sum_{i=1}^{n_{cr}} \sqrt{\left( n_{sol} \left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} (b_i^j)^2 \right) - \left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} b_i^j \right)^2 \right)} \\
 ASI &= 1 - \frac{1}{n_{cr}} \frac{1}{\sqrt{\frac{100^2 n_{cr}^2 - 100^2 n_{cr} n_{sol}^2}{n_{cr}^3}}} \Rightarrow \\
 & \sum_{i=1}^{n_{cr}} \sqrt{\left( n_{sol} \left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} (b_i^j)^2 \right) - \left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} b_i^j \right)^2 \right)} \\
 ASI &= 1 - \frac{1}{n_{cr}} \frac{1}{\sqrt{\frac{100^2 n_{cr} (n_{cr}-1) n_{sol}^2}{n_{cr}^3}}} \Rightarrow \\
 & \sum_{i=1}^{n_{cr}} \sqrt{\left( n_{sol} \left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} (b_i^j)^2 \right) - \left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} b_i^j \right)^2 \right)} \\
 ASI &= 1 - \frac{1}{n_{cr}} \frac{1}{\frac{n_{sol}}{n_{cr}} 100 \sqrt{(n_{cr}-1)}} \quad (5.28)
 \end{aligned}$$

Η σχέση (5.28) στην περίπτωση της Γενικευμένης MUSA όπου  $n_{cr} = n_{sol} = n$  ο ASI γίνεται:

$$ASI = 1 - \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{\left( n \left( \sum_{j=1}^n (b_i^j)^2 \right) - \left( \sum_{j=1}^n b_i^j \right)^2 \right)}}{100\sqrt{(n-1)}} \quad (5.29),$$

ο οποίος με την ειδική αυτή μορφή αναφέρεται και από τους Γρηγορούδη και Σίσκο (2000).

#### 5.2.3.4 Εύρος διακύμανσης βαρών

Το εύρος της διακύμανσης βαρών παρέχει ένα διάστημα τιμών για την εκτίμηση της σημαντικότητας των κριτηρίων ικανοποίησης. Το εύρος  $WV$  υπολογίζεται για το κάθε κριτήριο  $i$  ως εξής:

$$WV_i = \max\{b_i^j\} - \min\{b_i^j\} \text{ for } j = 1, 2, \dots, n_{sol} \quad (5.30)$$

όπου  $b_i^j$  το βάρος του  $i$  κριτηρίου που προκύπτει από την επίλυση του  $j$  γραμμικού προγράμματος μεταβελτιστοποίησης και τέλος  $n_{sol}$  ο συνολικός αριθμός των προς επίλυση γραμμικών προγραμμάτων στα πλαίσια της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης. Το εύρος αυτό μπορεί να αποτυπωθεί και γραφικά παρέχοντας ένα διάγραμμα διακύμανσης βαρών. Επίσης μέσα από την επίλυση των διαφορετικών γραμμικών προγραμμάτων και τον υπολογισμό των διαφορετικών  $b_i^j$  προκύπτει ο πίνακας διακύμανσης βαρών στον οποίο αποτυπώνονται το σύνολο των τιμών για κάθε κριτήριο  $i$  (στήλες) ανά γραμμικό πρόγραμμα  $j$  (γραμμές).

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι εκτός από το μέσο δείκτη ευστάθειας ASI το εύρος διακύμανσης των βαρών  $WV_i$  είναι σε θέση να δώσει πολύτιμες πληροφορίες για την ανάλυση της ευστάθειας των αποτελεσμάτων της μεθόδου MUSA. Πιο συγκεκριμένα ο δείκτης υπολογίζει ένα «διάστημα εμπιστοσύνης» για τα εκτιμώμενα βάρη των κριτηρίων. Από την άλλη μεριά ο πίνακας διακύμανσης των βαρών δίνει τη δυνατότητα προσδιορισμού πιθανής ανταγωνιστικότητας των κριτηρίων, δηλαδή ύπαρξης ομάδων πελατών με διαφορετικό επίπεδο σημαντικότητας των κριτηρίων ικανοποίησης.

#### 5.2.4 Επιλογή Παραμέτρων της MUSA

Η επιλογή των παραμέτρων της μεθόδου MUSA εστιάζεται κυρίως στον καθορισμό των κατωφλίων προτίμησης  $\gamma$ ,  $\gamma_i$  (βλ. § 4.4.4) και στην επιλογή του βαθμού παραχώρησης  $\varepsilon$  (βλ. § 5.2.1) κατά τη φάση της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης (Γρηγορούδης & Σίσκος, 2000).

Η επιλογή διαφορετικών τιμών για τις παραπάνω παραμέτρους έχει σημαντική επίδραση στις τιμές των δεικτών αξιοπιστίας AFI, OPL, ASI και  $WV_i$  και επομένως στην ευστάθεια των αποτελεσμάτων. Πειράματα έχουν δείξει ότι όσο αυξάνεται το  $\gamma$  ο δείκτης AFI παίρνει χειρότερες τιμές. Αυτό είναι λογικό αφού τα κατώφλια προτίμησης αποτελούν ουσιαστικά ένα κάτω φράγμα των μεταβλητών  $w_{ik}$  και  $z_m$  της μεθόδου MUSA. Έτσι, αυξάνοντας τις τιμές των κατωφλίων προτίμησης, το μοντέλο 'αναγκάζεται' να δώσει υποχρεωτικά σε κάθε κριτήριο ένα ελάχιστο βάρος ίσο με  $\gamma_i(\alpha_i-1)$ . Με αυτό τον τρόπο αναιρείται η αρχική καλή προσαρμογή της μεθόδου. Στην περίπτωση όμως του δείκτη ASI παρατηρείται μια αυξομείωση, με τις μέγιστες τιμές, κοντά στη μονάδα, να εμφανίζονται στα άκρα του διαστήματος  $[0, \gamma_{max}]$ . Επίσης, η αυξομείωση γίνεται εμφανέστερη για μεγαλύτερο αριθμό κριτηρίων και μεγαλύτερο αριθμό επιπέδων ικανοποίησης (Tsotsolas & Siskos, 2004).

Από την άλλη μεριά η τιμή της παραμέτρου  $\varepsilon$  δηλώνει το βαθμό παραχώρησης, σε σχέση με την αρχική τιμή του αθροίσματος των επιμέρους σφαλμάτων  $s_i(a)$  των πελατών, που υπολογίζονται στα πλαίσια της εφαρμογής της μεθόδου MUSA. Η παραχώρηση αυτή πραγματοποιείται με σκοπό την αναζήτηση και μελέτη των ημιβέλτιστων λύσεων του αρχικού γραμμικού προγράμματος.

Η επιλογή του  $\varepsilon$ , όπως ήδη έχει αναφερθεί, εξαρτάται από την τιμή  $F^*$  του αρχικού γραμμικού προγράμματος και πολλές φορές εκφράζεται ως ποσοστό της. Η τιμή του  $\varepsilon$  δεν πρέπει να είναι ούτε πολύ υψηλή, ώστε να μην διαστρεβλώνεται η πληροφορία που δίνει η ανάλυση μεταβελτιστοποίησης, αλλά ούτε και πολύ χαμηλή, ώστε να υπάρχει η δυνατότητα διερεύνησης ενός ικανοποιητικά μεγάλου χώρου για εύρεση των μεταβέλτιστων λύσεων.

Σύμφωνα με τους Γρηγορούδη και Σίσκο (2000) τόσο στην περίπτωση των ευσταθών αποτελεσμάτων όσο και σε αυτή των ασταθών ο δείκτης ASI που εκφράζει την ευστάθεια των αποτελεσμάτων μειώνεται καθώς αυξάνεται ο βαθμός παραχώρησης  $\varepsilon$  με σχεδόν γραμμική εξάρτηση.

Η επιλογή πάντως των σωστών κατά περίπτωση τιμών των παραμέτρων της MUSA είναι ένα ανοιχτό θέμα και χωρίς το κατάλληλο λογισμικό αντιμετωπίζεται με διαδικασία δοκιμής – λάθους με χρήση συνδυασμών διαφορετικών τιμών για τα  $\gamma$ ,  $\gamma_i$  και  $\varepsilon$ .



### 5.2.5 Προς ένα ΣΥΑ Ανάλυσης Μεταβελτιστοποίησης της MUSA

Παρατηρώντας τα μοντέλα ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης της MUSA που εξετάστηκαν στο Κεφάλαιο αυτό προκύπτει το συμπέρασμα ότι εφαρμόζοντας αυτές τις ευρετικές προσεγγίσεις δε υπολογίζονται όλες οι πολλαπλές ή σχεδόν βέλτιστες λύσεις του υπερπολυέδρου ΥΠ 5.2 αλλά μόνο κάποιες ακραίες τιμές με αποτέλεσμα να υπάρχει ο κίνδυνος εξαγωγής λάθος συμπερασμάτων αφού υπάρχει ελλιπής πληροφορία. Ο κίνδυνος αυτός είναι σημαντικός αν παρατηρηθεί ότι γενικά η μέση τιμή των βαρών μπορεί να είναι ευαίσθητη στην ύπαρξη λίγων ασυνήθιστα μικρών ή μεγάλων μετρήσεων (Παπαϊωάννου και Λουκά, 1990).

Θα ήταν ίσως χρήσιμη η εφαρμογή κάποιων από τις μεθόδους ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης που παρουσιάστηκαν στα Κεφάλαια 2 και 3 και οι οποίες θα επιτρέπανε τον υπολογισμό, αν όχι όλων, τουλάχιστον ενός μεγάλου αριθμού πολλαπλών ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων, ώστε η μέση τιμή που θα προέκυπτε από αυτές να ανταποκρινόταν περισσότερο στην πραγματικότητα. Τελικός στόχος θα έπρεπε να είναι η αύξηση της ποσότητας και της ποιότητας της διαθέσιμης πληροφορίας χωρίς σημαντική αύξηση του υπολογιστικού φόρτου.

Σύμφωνα με τους Du, Pardalos και Wu (2001) τα τελευταία χρόνια η βελτιστοποίηση παρουσίασε μία δραματική αύξηση σε δραστηριότητες. Αυτό είναι μία φυσική συνέπεια των νέων αλγοριθμικών εξελίξεων και της αυξημένης δύναμης των υπολογιστών. Πολλά από αυτά τα προβλήματα μπορεί να είναι πολύ μεγάλα, αν και ότι είναι μεγάλο στη βελτιστοποίηση, αντανακλά όχι μόνο το μέγεθος αλλά και επίσης και την ενυπάρχουσα πολυπλοκότητα του προβλήματος. Γι' αυτά τα προβλήματα, η ακριβής βέλτιστη λύση δεν είναι πάντα υπολογίσιμη σε πραγματικό χρόνο. Συνήθως υπολογίζεται μία προσεγγιστική λύση με διαφόρων ειδών ευρετικούς αλγόριθμους.

Το ερώτημα στο οποίο θα γίνει προσπάθεια να δοθεί απάντηση μέσα από το σχεδιασμό και την ανάπτυξη ενός Συστήματος Υποστήριξης Αποφάσεων είναι κατά πόσο οι ευρετικοί αλγόριθμοι της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης της MUSA παρέχουν πληροφορία ανταγωνιστική ως προς την ποιότητά της σε σύγκριση με τους αναλυτικούς αλγόριθμους των Κεφαλαίων 2 και 3. Η αξιολόγηση αυτή θα γίνει μέσα από τη σύγκριση του μέσου δείκτη ευστάθειας ASI και του εύρους διακύμανσης των βαρών  $WV_i$  που θα δίνουν οι διαφορετικοί αναλυτικοί και ευρετικοί αλγόριθμοι.

Για το λόγο αυτό το ΣΥΑ που σχεδιάστηκε και αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της παρούσας διατριβής και που παρουσιάζεται στο επόμενο Κεφάλαιο περιλαμβάνει τους εξής αλγόριθμους:

- Αναλυτικοί Αλγόριθμοι
  - Manas and Nedoma

- Αντίστροφη Simplex
- Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση
- Ευρετικοί Αλγόριθμοι
  - Γενικευμένο MUSA
  - MUSA I
  - MUSA II
  - MUSA III

Το ΣΥΑ επιλύει πλήρως τη μέθοδο MUSA και στο πλαίσιο αυτό υπολογίζει τις τιμές των δεικτών ευστάθειας και των δεικτών αξιοπιστίας. Παράλληλα παρέχει χρήσιμα στοιχεία για την εκτίμηση της απόδοσης του κάθε αλγόριθμου. Τα στοιχεία αυτά είναι ο πραγματικός χρόνος επίλυσης του προβλήματος, ο αριθμός των περιστροφών του πίνακα Simplex, η χρησιμοποιούμενη μνήμη RAM και τέλος ο αριθμός των μεταβελτιστων λύσεων.

Με άλλα λόγια, με βάση την άποψη του Čebyšev ότι: *«Τα περισσότερα πρακτικά προβλήματα μπορούν να μειωθούν σε προβλήματα μεγαλύτερης και μικρότερης σημασίας ... και μόνο λύνοντας αυτά τα προβλήματα μπορούμε να ικανοποιήσουμε τις απαιτήσεις της πράξης η οποία πάντοτε ψάχνει το καλύτερο, το πιο βολικό»* θα δειχθεί κατά πόσο οι ευρετικές μέθοδοι μπορούν να αντικαταστήσουν επαρκώς τις ακριβές, από άποψη υπολογιστικού κόστους (φόρτου), αναλυτικές μεθόδους.

Τέλος, το ΣΥΑ θα παρέχει στους αναλυτές τη δυνατότητα εκτίμησης των κατάλληλων κατά περίπτωση παραμέτρων  $\gamma$ ,  $\gamma_i$  και  $\varepsilon$ . της MUSA μέσω της επίλυσης του προβλήματος για ένα συγκεκριμένο εύρος τιμών των παραμέτρων και την επιλογή των κατάλληλων τιμών μέσω της αξιολόγησης των δεικτών ευστάθειας και προσαρμογής.

## Κεφάλαιο 6: Σύστημα Υποστήριξης Αποφάσεων για τη MUSA

Στο Κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται το ΣΥΑ το οποίο υλοποιήθηκε με χρήση της γλώσσας C#. Το ΣΥΑ επιτρέπει την εισαγωγή δεδομένων ερευνών ικανοποίησης μέσω αρχείων κειμένου ακολουθώντας την ίδια γραμμογράφηση με αυτή που απαιτείται για το λογισμικό MUSA ώστε να μην απαιτούνται πρόσθετοι μετασχηματισμοί δεδομένων. Για την επίλυση των γραμμικών προγραμμάτων αναπτύχθηκαν δύο διαφορετικές διαδικασίες, εκ των οποίων η μία βασίζεται στον *Ip\_solve* 5.5.0.14, μίας εφαρμογής ανοιχτού κώδικα που κάνει χρήση της αναθεωρημένης μεθόδου *simplex* εμπλουτισμένη με τεχνικές επιτάχυνσης και διόρθωσης σφαλμάτων. Η δεύτερη διαδικασία περιλαμβάνει μία νέα υλοποίηση του αλγόριθμου *Simplex* σε C# η οποία παρέχει την αναγκαία πρόσβαση κάθε στιγμή στα στοιχεία του πίνακα *Simplex*, πρόσβαση η οποία δεν παρέχεται μέσω του *Ip\_solve* 5.5.0.14 αλλά είναι απαραίτητη για την επίλυση των 3 αναλυτικών μεθόδων μεταβελτιστοποίησης.

Στο ΣΥΑ έχουν υλοποιηθεί 4 ευρετικές μέθοδοι μεταβελτιστοποίησης (*General MUSA*, *MUSA I*, *MUSA II* και *MUSA III*) και 3 αναλυτικές μέθοδοι μεταβελτιστοποίησης (*Reverse Simplex*, *Manas-Nedoma*, *Real-Approach*) δίνοντας τη δυνατότητα σύγκρισης και αξιολόγησης των διαφορετικών μεθόδων. Οι 3 αναλυτικές μέθοδοι υλοποιούνται μόνο με τη χρήση της δεύτερης διαδικασίας επίλυσης των ΓΠ.

Συγκεκριμένα το ΣΥΑ που αναπτύχθηκε παρέχει στον αναλυτή τρεις βασικές επιλογές υλοποίησης των διαδικασιών μεταβελτιστοποίησης. Η πρώτη του δίνει τη δυνατότητα να επιλέξει συγκεκριμένες παραμέτρους MUSA και να επιλύσει το πρόβλημα με διαφορετικές μεθόδους μεταβελτιστοποίησης ώστε να μπορέσει να τις αξιολογήσει βάσει των αποτελεσμάτων που παράγονται. Η δεύτερη επιτρέπει την επιλογή εύρους τιμών για τις δύο παραμέτρους  $\gamma$  και  $\epsilon$  με συγκεκριμένο βήμα αύξησης με στόχο την αξιολόγηση των εσωτερικών δεικτών ποιότητας της μεθόδου MUSA μέσα από την διαδοχική μείωση του εύρους και αλλαγή του βήματος, κάνοντας χρήση συγκεκριμένης μεθόδου μεταβελτιστοποίησης που επιλέγει ο χρήστης. Η γραφική αναπαράσταση των αποτελεσμάτων βοηθάει τον χρήστη στην καλύτερη επιλογή εύρους τιμών και βήματος προκειμένου να οδηγηθεί ταχύτερα στις τελικές τιμές των  $\gamma$  και  $\epsilon$ . Η τρίτη και τελευταία επιλογή επιλύει πλήρως τη μέθοδο MUSA παράγοντας το σύνολο των αποτελεσμάτων και των δεικτών για συγκεκριμένες τιμές των  $\gamma$  και  $\epsilon$  και με χρήση συγκεκριμένης μεθόδου μεταβελτιστοποίησης επιλογής του χρήστη.

Το ΣΥΑ παρέχει πλήρως γραφικό και εύχρηστο περιβάλλον επικοινωνίας με το χρήστη τόσο για την εισαγωγή δεδομένων και παραμέτρων όσο και για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων.

## 6.1 Η φιλοσοφία των Συστημάτων Υποστήριξης Αποφάσεων

Η ραγδαία εξέλιξη της πληροφορικής σε συνδυασμό με την αναθεώρηση του τρόπου προσέγγισης των προβλημάτων απόφασης είχε ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη των «**Συστημάτων Υποστήριξης Αποφάσεων**» (ΣΥΑ, αγγλ. Decision Support Systems ή DSS, γαλλ. SIAD ή Systèmes Interactifs d'Aide à la Décision). Ο όρος αυτός πρωτοεμφανίζεται στις αρχές της δεκαετίας του '70 και αντανακλά μια νέα αντίληψη, στα πλαίσια της Επιστήμης των Αποφάσεων, η οποία αφορά στο χειρισμό και την αντιμετώπιση σύνθετων προβλημάτων απόφασης. Στόχος των ΣΥΑ είναι η ενίσχυση του ρόλου του αποφασίζοντος μέσα στην επιχείρηση και η διευκόλυνση του έργου του για μία αποτελεσματικότερη διοίκηση (Σίσκος, 2008).

Η ερμηνεία του όρου δεν είναι πάντα η ίδια στην βιβλιογραφία, είναι όμως κοινά αποδεκτό ότι τα ΣΥΑ αντιπροσωπεύουν μία αντίληψη του ρόλου των ηλεκτρονικών υπολογιστών στις διαδικασίες αποφάσεων. Ο Little (1970) όρισε ότι ένα σύστημα υποστήριξης αποφάσεων είναι ένα σύνολο διαδικασιών για την επεξεργασία δεδομένων και κρίσεων με στόχο να υποβοηθήσουν τους μάνατζερ στη διαδικασία λήψης μιας απόφασης. Ένα τέτοιο σύστημα θεωρείται επιτυχημένο αν είναι: απλό, εύρωστο, προσαρμόσιμο, πλήρες, εύκολο στη χρήση και με καλό σύστημα επικοινωνίας με το χρήστη.

Οι Keen και Scott-Morton (1978) έδωσαν τον ακόλουθο κλασικό ορισμό: Τα ΣΥΑ συνδυάζουν τις διανοητικές ικανότητες των ανθρώπων με αυτές των ηλεκτρονικών υπολογιστών με αντικειμενικό στόχο τη βελτίωση της ποιότητας των λαμβανομένων αποφάσεων. Είναι βασισμένα στους Η/Υ συστήματα υποστήριξης των αποφασιζόντων σε θέματα, που αφορούν την αντιμετώπιση ημιδομημένων προβλημάτων. Την ίδια θεώρηση για τα Σ.Υ.Α με τους Keen και Scott-Morton (1978) έχουν και οι Alter (1977) και Huber (1980).

Οι Sprague και Carlson (1982) αναφέρουν ότι τα Σ.Υ.Α είναι ένα σύνολο διαδικασιών, οι οποίες με την βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή έχουν σαν στόχο τη διεύρυνση του γνωστικού πεδίου του αποφασίζοντα, στο τομέα του προβλήματος που αντιμετωπίζει. Ο ορισμός αυτός διευρύνθηκε από τους Andriole (1989), Sage (1986) και Adelman (1992), και η τελική του διατύπωση μπορεί να είναι η ακόλουθη:

Συστήματα υποστήριξης αποφάσεων είναι αλληλεπιδραστικά συστήματα (προγράμματα- software) που χρησιμοποιούν αναλυτικές μεθόδους, όπως ανάλυση αποφάσεων, αλγόριθμους βελτιστοποίησης κ.α., για την ανάπτυξη κατάλληλων μοντέλων, με στόχο την υποβοήθηση των αποφασιζόντων στη διαμόρφωση εναλλακτικών λύσεων, στην ανάλυση των μεταξύ των αντιδράσεων, στην αναπαράστασή τους και τελικά στην επιλογή της καταλληλότερης από αυτές για εφαρμογή (Matsatsinis & Siskos, 2003).

Κατά τον Zeleny (1982) ο ρόλος των Σ.Υ.Α είναι να αναπτύσσουν τις ικανότητες των αποφασιζόντων έτσι, ώστε οι προτεινόμενες από αυτούς λύσεις να γίνονται με τη πάροδο του χρόνου καλύτερες και όχι να προτείνουν αυτά λύσεις καλύτερες από αυτές που μπορεί να αντιληφθούν οι αποφασίζοντες.

Οι παραπάνω απόψεις για τα Σ.Υ.Α αντανakλούν τις ιδέες του Simon, που είχαν ήδη διατυπωθεί από το 1960 και αφορούσαν τον τρόπο προσέγγισης των προβλημάτων απόφασης. Στο βιβλίο του αυτό ο Simon υποστήριζε ότι στη πραγματικότητα δεν έχει νόημα ο προβληματισμός για την επιλογή μιας λύσης μεταξύ μιας ικανοποιητικής και της βέλτιστης λύσης ενός προβλήματος, δεδομένου ότι η δεύτερη δεν είναι δυνατόν να προσδιορισθεί και επομένως πρέπει απλά να προσανατολιζόμαστε στην αναζήτηση μιας εφικτής λύσης. Στην πραγματικότητα οι γνώσεις και οι ικανότητες των αποφασιζόντων είναι πεπερασμένες και επομένως θα πρέπει να γίνεται προσπάθεια προς τη διεύρυνση του γνωστικού πεδίου και της ανάπτυξης των ικανοτήτων των έτσι, ώστε να βελτιώνονται οι αποφάσεις που λαμβάνουν.

Ο χώρος των Συστημάτων Υποστήριξης Αποφάσεων έχει να επιδείξει μια πληθώρα εφαρμογών για τις ανάγκες των οργανισμών μετά τις πρώτες ευρείας χρήσης προσεγγίσεις της δεκαετίας του '70 (Shim *et al.*, 2002). Μέρος των εφαρμογών αυτών προσεγγίζει γενικά το πρόβλημα της λήψης αποφάσεων, είτε μέσα από εναλλακτικές θεωρητικές προσεγγίσεις, είτε με τη χρήση διαφορετικής τεχνολογίας. Άλλες έχουν αναπτυχθεί με σκοπό την εφαρμογή τους σε εξειδικευμένα προβλήματα και περιβάλλοντα εργασίας.

### 6.2 Αρχές σχεδιασμού των ΣΥΑ

Γενικά, ο σχεδιασμός ενός Συστήματος Υποστήριξης Αποφάσεων αφορά στην ανάπτυξη βάσεων δεδομένων και εργαλείων για τη διαχείριση αυτών, τα οποία προσφέρουν πρόσβαση σε εσωτερικά και εξωτερικά δεδομένα, πληροφορία και γνώση, μοντέλα για την ανάλυση ή/και λήψη αποφάσεων και διεπαφών οι οποίες επιτρέπουν αλληλεπιδραστικές αναζητήσεις, αναφορές και γραφικές αναπαραστάσεις σχετικές με την απόφαση (Sprague & Carlson, 1982; Gerrity, 1971).

Σύμφωνα με τον Σίσκο (2008) τα βασικά ερωτήματα που τίθενται κατά τον σχεδιασμό ενός ΣΥΑ είναι:

- Ποιοί είναι οι στόχοι που πρέπει να επιτευχθούν;
- Πώς θα διαπιστωθεί ότι το σύστημα έχει ολοκληρωθεί, δηλαδή πότε η διαδικασία σχεδιασμού έχει προσεγγίσει τους τεθέντες στόχους;

Ο σχεδιασμός ενός ΣΥΑ είναι μία σύνθετη διαδικασία που περιλαμβάνει το ρόλο της ανάλυσης και της τεχνικής σχεδίασης. Οι αναλυτές ΣΥΑ παίρνοντας ως αφετηρία παραστατικά μοντέλα καλούνται να προτείνουν αναλυτικές μεθόδους και τακτικές στα προβλήματα των αποφασιζόντων, χωρίς να τα παραβιάζουν ή να τα εξιδανικεύουν. Έτσι, ένας αναλυτής ΣΥΑ πρέπει από τη μία πλευρά να είναι τεχνικά καταρτισμένος, από την άλλη να αντιλαμβάνεται και ο ίδιος ότι ο ρόλος του είναι να υποστηρίξει τους αποφασίζοντες κατανοώντας τις ανάγκες και το περιβάλλον τους. Η σχεδίαση περιλαμβάνει τα εξής στάδια:

*Σχεδιασμός βάσεων δεδομένων:* Τα δεδομένα που απαιτούνται για τις υποστηριζόμενες αποφάσεις αποτελούν συνήθως μέρος ενός ευρύτερου συνόλου δεδομένων. Έτσι, απαιτείται συλλογή των δεδομένων αυτών και η κατάλληλη οργάνωσή τους.

*Σχεδιασμός και σύνθεση υποσυστήματος διαχείρισης των δεδομένων,* με τρόπο που να εξασφαλίζει αμεσότητα στην προσπέλαση και ευελιξία στο χειρισμό τους.

*Επιλογή υπαρχόντων ή/και επινοήση και σχεδιασμός νέων μοντέλων* ικανών να βοηθήσουν στη λήψη των αποφάσεων (model base). Τα ΣΥΑ είναι περισσότερο συνδεδεμένα με μικρά και ευέλικτα μοντέλα (heuristic models) παρά με τα κλασσικά μοντέλα βελτιστοποίησης.

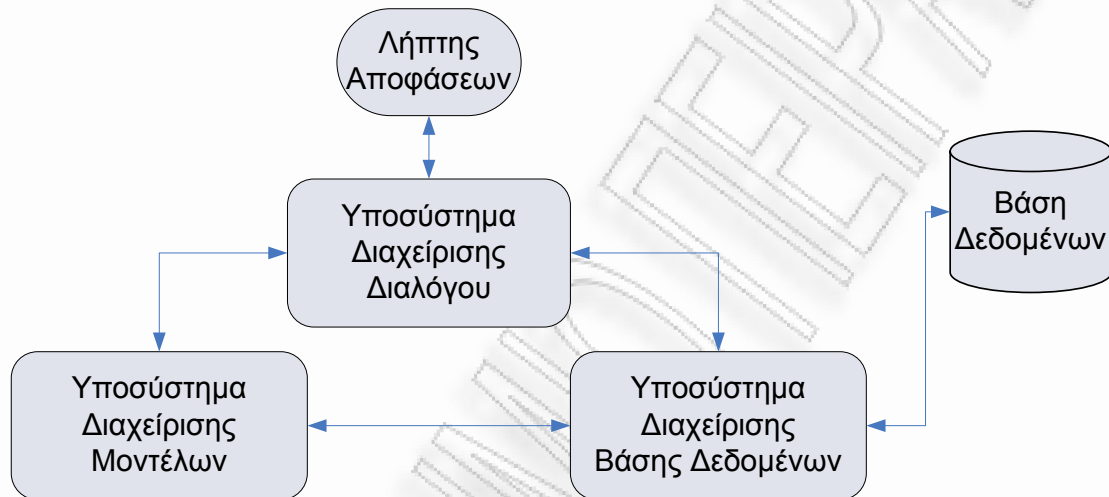
*Σχεδιασμός και σύνθεση υποσυστήματος διαχείρισης των μοντέλων* που να εγγυάται την αποτελεσματική χρησιμοποίησή τους.

*Σχεδιασμός και σύνθεση υποσυστήματος διαχείρισης διαλόγου:* Το στάδιο αυτό είναι ίσως το σημαντικότερο στον σχεδιασμό ενός ΣΥΑ. Το λογισμικό διαχείρισης διαλόγου είναι το μέσο που επιτρέπει την αμφίδρομη επικοινωνία χρήστη-συστήματος. Συνεπώς, ο κατάλληλος σχεδιασμός του συμβάλλει αποφασιστικά στην αύξηση της αποτελεσματικότητας του όλου συστήματος.

Το Σχήμα 6-1 παρουσιάζει ένα κλασσικό δομικό διάγραμμα των βασικών ψηφίδων (modules) που απαρτίζουν ένα ΣΥΑ. Αυτό απαρτίζεται από τη Βάση Δεδομένων, το Υποσύστημα Διαχείρισης Βάσης Δεδομένων, το Υποσύστημα Διαχείρισης Μοντέλων και το Υποσύστημα Διαχείρισης Διαλόγου.

Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με την Ευαγγέλου (2005), η *Βάση Δεδομένων* είναι μια συλλογή από αρχεία εγγραφών και αρχεία τα οποία είναι οργανωμένα έτσι ώστε να εξυπηρετούν ένα συγκεκριμένο σκοπό. Για παράδειγμα, μια Βάση Δεδομένων μπορεί να περιέχει ένα σύνολο αρχείων στοιχεία ερευνών ικανοποίησης, τα οποία περιέχουν πληροφορία σχετική με τη λήψη αποφάσεων. Το *Υποσύστημα Διαχείρισης Βάσης Δεδομένων* είναι το τμήμα εκείνο του συστήματος που διαχειρίζεται τη Βάση Δεδομένων. Μέσω αυτού ο χρήστης αποκτά πρόσβαση στις πληροφορίες που του είναι απαραίτητες για να διαμορφώσει και να αναλύσει μία απόφαση. Το Σύστημα

Διαχείρισης Βάσης Δεδομένων πρέπει να είναι ικανό να διαχειρίζεται εσωτερικά και εξωτερικά δεδομένα του ΣΥΑ. Το *Υποσύστημα Διαχείρισης Μοντέλων* είναι το τμήμα εκείνο του συστήματος που διαχειρίζεται τα μοντέλα απόφασης και υποστηρίζει το λήπτη της απόφασης με σχετικές μεθόδους ανάλυσης και αλγορίθμους αξιολόγησης. Η κύρια λειτουργία του Συστήματος Διαχείρισης Μοντέλων είναι διαχείριση των μοντέλων από το χώρο των μαθηματικών για την ανάλυση, επεξεργασία και αξιολόγηση προβλημάτων απόφασης.



**Σχήμα 6-1:** Δομικό διάγραμμα ενός Συστήματος Υποστήριξης Λήψης Αποφάσεων (Sage, 1991)

Τέλος, το *Υποσύστημα Διαχείρισης Διαλόγου* είναι υπεύθυνο για την παρουσίαση των εξόδων πληροφορίας του Υποσυστήματος Διαχείρισης Βάσης Δεδομένων και του Υποσυστήματος Διαχείρισης Μοντέλων στο λήπτη αποφάσεων και, αντίστροφα, για την εισαγωγή των απαιτήσεων και των αποφάσεων του χρήστη ως εισόδων σε αυτά. Καθώς το *Υποσύστημα Διαχείρισης Διαλόγου* είναι αυτό που επιτρέπει την επικοινωνία του χρήστη με το σύστημα θεωρείται ως το σπουδαιότερο κομμάτι του, γιατί καθορίζει το πόσο εύκολη και αποδοτική είναι η διαχείριση του συστήματος, και κατά συνέπεια η εκμετάλλευση των δυνατοτήτων που παρέχει. Γι' αυτό το λόγο θα πρέπει να είναι σχεδιασμένο για να αναπαριστά γνώση και να ελέγχει τις λειτουργίες του συστήματος μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένα παράθυρα διαπροσωπείας (user interfaces). Ακόμη, θα πρέπει να είναι φιλικό στο χρήστη και να παρέχει βοήθεια σχετικά με τις λειτουργίες που υποστηρίζει.

Ο χρήστης συνήθως δεν γνωρίζει τίποτε ούτε για την δομή του ΣΥΑ, ούτε για τους αλγορίθμους, ούτε για τις τεχνικές προγραμματισμού, ούτε για τις δομές, την οργάνωση και τους τρόπους επεξεργασίας των βάσεων δεδομένων του. Η γνώμη, επομένως, που σχηματίζει για ένα πρόγραμμα εξαρτάται κυρίως από το *Υποσύστημα Διαχείρισης Διαλόγου* και λιγότερο από την τελειότητα της σχεδίασης και της ανάπτυξης των αλγορίθμων του (Matsatsinis & Siskos, 2003).

Επομένως, οι ιδιότητες που θα πρέπει να διαθέτει ένα Υποσύστημα Διαχείρισης Διαλόγου συνοψίζονται στα ακόλουθα (Σίσκος, 2008):

1. Φιλικότητα – Ευκολία στη χρήση: Κατάλληλα σχεδιασμένα και περιεκτικά menus θα πρέπει να επιτρέπουν τη μετάβαση του χρήστη σε όλες τις περιοχές του συστήματος. Το σύστημα να πληροφορεί τον χρήστη με σχετικά διαγνωστικά μηνύματα για ενδεχόμενους εσφαλμένους χειρισμούς του. Ενσωματωμένα βοηθητικά προγράμματα (on-line help functions) να παρέχουν κάθε στιγμή τη δυνατότητα στον χρήστη να ανατρέχει σε πληροφορίες, συνοπτικές ή λεπτομερείς, σχετικά με τον χειρισμό, την εισαγωγή και την διευθέτηση δεδομένων.
2. Προσανατολισμός: Ο χρήστης να πληροφορείται κάθε στιγμή για την περιοχή του συστήματος στην οποία βρίσκεται και τον τρόπο με τον οποίο θα μεταβεί σε «λογικά» επόμενες περιοχές.
3. Ευρωστία – αξιοπιστία: Οι χειρισμοί του χρήστη, οι απαντήσεις του σε διάφορα ερωτήματα και τα δεδομένα που εισάγει να ελέγχονται από το σύστημα ώστε να αποφεύγονται εμπλοκές που ενδεχομένως θα οδηγούσαν σε «πτώση» του συστήματος ή σε εξαγωγή εσφαλμένων και άτοπων αποτελεσμάτων.

Τέλος, η εφαρμογή και η αξιολόγηση ενός ΣΥΑ, με παρεμβολή του στις διαδικασίες λήψης αποφάσεων, δεν μπορούν να θεωρηθούν στάδια ανεξάρτητα του σχεδιασμού. Η ανάλυση των προβλημάτων που εμφανίζονται κατά την εφαρμογή-χρήση ενός ΣΥΑ αποτελεί σημαντική πηγή πληροφορίας για ένα νέο και αποτελεσματικότερο σχεδιασμό.

### 6.3 Σχεδιάζοντας ένα ΣΥΑ Μεταβελτιστοποίησης

Στην παρούσα παράγραφο θα γίνει προσπάθεια να δοθούν οι κατάλληλες απαντήσεις στα δύο βασικά ερωτήματα που τίθενται κατά τον σχεδιασμό ενός ΣΥΑ σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο.

Αναφορικά με τους στόχους που πρέπει να επιτευχθούν μέσω του ΣΥΑ ξεκινάμε με την ανάγκη ολοκληρωμένης προσέγγισης της ανάλυσης ευστάθειας στα μοντέλα επιχειρησιακής έρευνας και ειδικότερα στα μοντέλα που υιοθετούν τις αρχές της συνθετικής – αναλυτικής προσέγγισης. Προκειμένου το ΣΥΑ να μπορέσει να δοκιμαστεί ώστε να διαπιστωθεί ότι είναι ολοκληρωμένο και έχει προσεγγίσει τους τεθέντες στόχους, το πεδίο εφαρμογής του περιορίστηκε σε μία συγκεκριμένη μέθοδο αναλυτικής-συνθετικής προσέγγισης, τη MUSA (αναλυτική περιγραφή στο Κεφάλαιο 5). Αν και το πεδίο εφαρμογής της φαντάζει περιορισμένο, δεδομένης της ύπαρξης



## Κεφάλαιο 6: Σύστημα Υποστήριξης Αποφάσεων για τη MUSA

σημαντικού αριθμού μεθόδων που έχουν ως βάση τους την αναλυτική-συνθετική προσέγγιση, το ΣΥΑ σχεδιάστηκε ώστε να δώσει γενικότερα τεκμηριωμένες απαντήσεις στο ερώτημα:

*« ...κατά πόσο οι ευρετικοί αλγόριθμοι της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης παρέχουν πληροφορία για τις μεταβέλτιστες λύσεις ανταγωνιστική ως προς την ποιότητά της σε σύγκριση με τους αναλυτικούς αλγόριθμους των Κεφαλαίων 2 και 3, πάντα όμως σε σχέση και με τον απαιτούμενο υπολογιστικό φόρτο;»*

Με άλλα λόγια θα πρέπει να εξεταστεί η υπόθεση οι ευρετικοί αλγόριθμοι να παράγουν μεταβέλτιστες λύσεις που θα περιγράφουν με ικανοποιητική ακρίβεια τα όρια του υπερπολυέδρου και μάλιστα με ελάχιστο υπολογιστικό φόρτο.

Και οι απαντήσεις σε αυτό το ερώτημα δε θα αφορούν μόνο τη μεταβελτιστοποίηση στο πλαίσιο της MUSA αλλά γενικότερα τη μεταβελτιστοποίηση στο πλαίσιο της αναλυτικής – συνθετικής προσέγγισης δεδομένου ότι οι συγκεκριμένοι ευρετικοί αλγόριθμοι έχουν εφαρμογή -με κατάλληλη προσαρμογή τους- σε πλήθος συγγενών μεθόδων (π.χ. στη UTA, βλ. § 5.1.3)

Επομένως ο πρώτος στόχος είναι η τεκμηριωμένη απάντηση στο παραπάνω ερώτημα. Για να δοθεί αυτή η απάντηση, στο ΣΥΑ θα πρέπει να υλοποιηθούν ευρετικοί και αναλυτικοί αλγόριθμοι μεταβελτιστοποίησης που θα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την συγκριτική επίλυση προβλημάτων. Δηλαδή θα πρέπει να δίνεται η δυνατότητα επιλογής των αλγορίθμων εκείνων που θα επιλύουν το ίδιο πρόβλημα ώστε να υπάρχει η δυνατότητα της άμεσης και ορθής σύγκρισης. Η συγκριτική αξιολόγηση προϋποθέτει την ύπαρξη μέτρων σύγκρισης που στην προκειμένη περίπτωση χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

- Ακρίβεια αποτελεσμάτων, που περιλαμβάνει τις μέσες τιμές των μεταβέλτιστων λύσεων, τη διακύμανση μέσω της τυπικής απόκλιση των τιμών αυτών (δείκτης ASI) και το εύρος των τιμών αυτών (δείκτης WV<sub>i</sub>).
- Υπολογιστικός φόρτος, που περιλαμβάνει το χρόνο επίλυσης, τη χρήση RAM και τον αριθμό των επαναλήψεων της Simplex

Για την εφαρμογή των διαδικασίας σύγκρισης θα πρέπει να υλοποιηθούν αναλυτικές μέθοδοι μεταβελτιστοποίησης που θα επιτρέπουν τον υπολογισμό, αν όχι όλων, τουλάχιστον ενός μεγάλου αριθμού πολλαπλών ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων, ώστε οι μέσες τιμές που θα προέκυπτες από αυτές να ανταποκρίνονται περισσότερο στην πραγματική αποτύπωση του δημιουργούμενων υπερπολυέδρων. Η υλοποίηση των αναλυτικών μεθόδων θα δώσει επιπρόσθετα τη δυνατότητα στους ερευνητές να συγκρίνουν τον πραγματικό αριθμό των κορυφών – λύσεων ενός υπερπολυέδρου (κυρίως μέσω της μεθόδου των Manas και Nedoma που εγγυάται την εύρεση όλων

των κορυφών) και τη σύγκριση αυτού του αριθμού με τα θεωρητικά όρια που παρουσιάζονται στην § 1.2.3.

Για την επίτευξη του παραπάνω στόχου το ΣΥΑ περιλαμβάνει τους εξής αλγόριθμους στη βάση μοντέλων του:

- Αναλυτικοί Αλγόριθμοι
  - Manas and Nedoma
  - Αντίστροφη Simplex
  - Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση
- Ευρετικοί Αλγόριθμοι
  - Γενικευμένο MUSA
  - MUSA I
  - MUSA II
  - MUSA III

Ο χρήστης έχει τη δυνατότητα επιλογής όλων ή μερικών εκ των παραπάνω αλγορίθμων κατά τη διαδικασία της συγκριτικής επίλυσης ενός προβλήματος.

Ένας δεύτερος στόχος του ΣΥΑ θα είναι η υποστήριξη των ερευνητών στην επιλογή των παραμέτρων της μεθόδου MUSA καλύπτοντας τις ανάγκες που περιγράφονται στην § 5.2.4. Η επιλογή διαφορετικών τιμών για τις παραμέτρους  $\gamma$ ,  $\gamma_i$  και  $\varepsilon$  έχει σημαντική επίδραση στις τιμές των δεικτών αξιοπιστίας AFI, OPL, ASI και  $WV_i$  και επομένως στην ευστάθεια των αποτελεσμάτων. Για παράδειγμα, πειράματα έχουν δείξει ότι όσο αυξάνεται το  $\gamma$  ο δείκτης AFI παίρνει χειρότερες τιμές. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η επιλογή των σωστών κατά περίπτωση τιμών των παραμέτρων της MUSA είναι ένα ανοιχτό θέμα και χωρίς το κατάλληλο λογισμικό αντιμετωπίζεται με διαδικασία δοκιμής – λάθους με χρήση συνδυασμών διαφορετικών τιμών για τα  $\gamma$ ,  $\gamma_i$  και  $\varepsilon$ .

Το ΣΥΑ θα πρέπει να καλύψει το κενό αυτό παρέχοντας τη δυνατότητα στον χρήστη να επιλέγει ένα εύρος τιμών για τις παραμέτρους αυτές υπολογίζοντας τις τιμές των δεικτών AFI, OPL και ASI για το εύρος αυτό. Με διαδοχικά βήματα θα μειώνει συνεχώς το εύρος των τιμών μέχρι να καταλήξει στον καλύτερο συνδυασμό τιμών για τις παραμέτρους. Η υλοποίηση της διαδικασίας αυτής θα πρέπει να υποστηρίζεται από γραφικό περιβάλλον που αποτυπώνει με εύληπτο για τον χρήστη τρόπο την επίδραση των τιμών των παραμέτρων στη διαμόρφωση των τιμών των δεικτών.

## Κεφάλαιο 6: Σύστημα Υποστήριξης Αποφάσεων για τη MUSA

Ο τρίτος και τελευταίος στόχος είναι η δημιουργία ενός συστήματος ολοκληρωμένης επίλυσης προβλημάτων ερευνών ικανοποίησης πελάτη με χρήση της μεθόδου MUSA.

Προκειμένου να καλύπτεται η απαίτηση της ολοκληρωμένης επίλυσης το ΣΥΑ θα πρέπει να έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- Να επιλύει αποδοτικά τη μέθοδο MUSA
- Να υπολογίζει το σύνολο των δεικτών που αφορούν στο επίπεδο ικανοποίησης των πελατών και συγκεκριμένα:
  - Δείκτες Ολικής και Μερικής Ικανοποίησης
  - Βάρη Κριτηρίων
  - Δείκτες Απαιτητικότητας
- Να συνδυάζει τους δείκτες αυτούς για τη δημιουργία των διαγραμμάτων δράσης και βελτίωσης.
- Να χρησιμοποιεί ευρετικούς αλγόριθμους που θα επιλύουν αποδοτικά το πρόβλημα της αναζήτησης μετα-βέλτιστων λύσεων των γραμμικών συστημάτων προκειμένου να αποφευχθεί η εξαντλητική αναζήτηση του τεράστιου αριθμού των κορυφών του προς μελέτη υπερπολυέδρου. Στόχος μίας επιτυχημένης-αποδοτικής αντιμετώπισης του προβλήματος της ανάλυσης ευστάθειας είναι η καλύτερη ποιότητα της πληροφορίας στον ελάχιστο χρόνο και με τις λιγότερες επαναλήψεις.
- Να εστιάζει στην αξιολόγηση της ευστάθειας των λύσεων υπολογίζοντας με ακρίβεια τις τιμές των δεικτών AFI, OPL και ASI.
- Να υποστηρίζει τη μελέτη της ευστάθειας του μοντέλου της MUSA, με υλοποίηση και επίλυση διαφορετικών ζευγών (διαδικασία, έκδοση) υπό την εξής έννοια. Κάθε διαφορετικός αλγόριθμος μεταβελτιστοποίησης ορίζει και μία διαφορετική διαδικασία, και κάθε διαφορετικός συνδυασμός των παραμέτρων της MUSA ορίζει και μία διαφορετική έκδοση.

Χρησιμοποιώντας τη συλλογιστική που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 1 για τις προσεγγίσεις της ανάλυσης ευστάθειας μπορεί να ειπωθεί ότι το ΣΥΑ μεταβελτιστοποίησης που θα ικανοποιεί τους παραπάνω στόχους ουσιαστικά θα οδηγεί την διαδικασία απόφασης και δε θα αποτελεί ούτε «εκ των προτέρων» ούτε «εκ των υστέρων» διαδικασία. Δηλαδή των σύνολο των διαφορετικών εκδόσεων των μοντέλων δε θα καθορίζεται εκ των προτέρων αλλά θα εξελίσσεται διαρκώς μέχρι τη λήψη της απόφασης. Κατά την έναρξη της διαδικασίας, οι συμμετέχοντες (αναλυτές) θα είναι ανοιχτοί να αποδεχτούν ένα ευρύ σύνολο εκδόσεων του μοντέλου (εύρος

τιμών παραμέτρων), το οποίο θα προσπαθούν να μειώσουν καθώς η διαδικασία προχωρά. Αντί μιας διαδικασίας που ξεκινά με εξαγωγή τιμών παραμέτρων η οποία ακολουθείται από υπολογισμό της λύσης και την εκ των υστέρων ανάλυση ευστάθειας, θα δίνεται η δυνατότητα επανάληψης της εξαγωγής και των φάσεων της ανάλυσης ευστάθειας.

Επίσης, μπορεί να ειπωθεί ότι το ΣΥΑ θα ανήκει στην *τυπική* κατηγορία των προσεγγίσεων υποστηρίζοντας μοντελοποιήσεις που προέρχονται από τυπικό μοντέλο αναλυτικής-συνθετικής προσέγγισης.

Το ΣΥΑ μεταβελτιστοποίησης θα αποτελείται από τα εξής υποσυστήματα – ψηφίδες σύμφωνα με τα οριζόμενα στην § 6.2:

- *Βάση Δεδομένων*: θα υπάρχει μια συλλογή από αρχεία που θα περιέχουν τα δεδομένα των ερευνών ικανοποίησης και μία συλλογή από αρχεία που θα περιέχουν τα αποτελέσματα των αναλύσεων.
- *Υποσύστημα Διαχείρισης Βάσης Δεδομένων*: θα διαχειρίζεται τα δεδομένα των ερευνών ικανοποίησης και την εξαγωγή των αποτελεσμάτων με τρόπο που να εξασφαλίζει αμεσότητα στην προσπέλαση και ευελιξία στο χειρισμό τους. Επίσης θα διαχειρίζεται εσωτερικά δεδομένα του ΣΥΑ και τιμές που δίνει ο χρήστης μέσω του Υποσυστήματος Διαχείρισης Διαλόγου.
- *Υποσύστημα Διαχείρισης Μοντέλων*: θα διαχειρίζεται αποτελεσματικά το μοντέλο της MUSA, τα 2 εναλλακτικά μοντέλα επίλυσης της Simplex και τα 7 μοντέλα μεταβελτιστοποίησης (4 ευρετικά και 3 αναλυτικά).
- *Υποσύστημα Διαχείρισης Διαλόγου*: θα επιτρέπει την αμφίδρομη επικοινωνία μεταξύ χρήστη και συστήματος. Θα χρησιμοποιεί παραθυρικό περιβάλλον με κατάλληλα σχεδιασμένα παράθυρα διεπαφής (user interfaces) και θα περιλαμβάνει κατάλληλα σχεδιασμένα και περιεκτικά menus που θα επιτρέπουν τη μετάβαση του χρήστη σε όλες τις περιοχές του συστήματος. Ο χρήστης θα πληροφορείται κάθε στιγμή για την περιοχή του συστήματος στην οποία βρίσκεται και τον τρόπο με τον οποίο θα μεταβεί σε «λογικά» επόμενες περιοχές. Επίσης, το σύστημα θα πληροφορεί τον χρήστη με σχετικά διαγνωστικά μηνύματα για ενδεχόμενους εσφαλμένους χειρισμούς του.

### 6.4 Υλοποίηση του ΣΥΑ

Σύμφωνα με τον σχεδιασμό της προηγούμενης παραγράφου υλοποιήθηκε ένα σύγχρονο και πρωτότυπο ΣΥΑ Μεταβελτιστοποίησης με εφαρμογή στη MUSA.

Η γλώσσα που επιλέξαμε για τον προγραμματισμό είναι η C# και χρησιμοποιήθηκε το περιβάλλον ανάπτυξης Microsoft Visual Studio .NET. Η επιλογή της C++ δεν είναι τυχαία αλλά θεωρήθηκε ως η πιο κατάλληλη γλώσσα για την ικανοποίηση των απαιτήσεών μας. Χρειαζόμασταν μία γλώσσα προγραμματισμού που θα χειριζόταν με ταχύτητα σημαντικό αριθμό μαθηματικών πράξεων, χωρίς να χρειάζεται η ανάπτυξη μεγάλης έκτασης κώδικα. Η C# είναι μία δομημένη γλώσσα, η οποία επιτρέπει σε μεγάλα προγράμματα να συντίθενται από μικρότερα, ευκολονόητα τμήματα κώδικα. Έχει πολλά των χαρακτηριστικών μιας γλώσσας υψηλού επιπέδου, αλλά μπορεί επίσης να χειριστεί τις ίδιες προγραμματιστικές λεπτομέρειες, σε συμβολική γλώσσα.

Η C# είναι μια σχετικά νέα αντικειμενοστραφής γλώσσα προγραμματισμού η οποία δημιουργήθηκε από την Microsoft. Ακολουθεί σε γενικές γραμμές τη σύνταξη της C++. αλλά έχει και πολλά κοινά στοιχεία με την Java. Αποτελεί μέρος των γλωσσών που μεταφράζονται στο .Net Framework. Βασικό χαρακτηριστικό της είναι ότι δεν παράγει απευθείας κώδικα μηχανής όπως η C++, άλλα ένα ενδιάμεσο κώδικα που στοχεύει το .NET. Ο μεταγλωττιστής της γλώσσας παράγει ένα ενδιάμεσο κώδικα, ανάλογα με τον object code της Java, την Microsoft Intermediate Language. Κατά την εκτέλεση της εφαρμογής, το Common Language Runtime, το περιβάλλον δηλαδή μέσα στο οποίο θα τρέξει το πρόγραμμα, διαβάζει τον ενδιάμεσο κώδικα (MSIL) και τον μεταγλωττίζει σε κώδικα Windows.

Μια σημαντική διαφορά μεταξύ C++ και C# είναι ότι τη διαχείριση της μνήμης στην C++ την κάνει ο ίδιος ο προγραμματιστής ενώ στην C# την αναλαμβάνει το .NET Framework με τον garbage collector και τις λοιπές διαδικασίες. Το πλεονέκτημα αυτό της C# ήταν ένας από τους βασικούς λόγους επιλογής της συγκεκριμένης γλώσσας για την υλοποίηση του ΣΥΑ με δεδομένη την ανάγκη για βέλτιστη διαχείριση της μνήμης κατά την εκτέλεση των αναλυτικών μεθόδων μεταβελτιστοποίησης.

Το ΣΥΑ επιτρέπει την ικανοποίηση των τριών στόχων που τέθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο και συγκεκριμένα:

- i. Συγκριτική αξιολόγηση μεθόδων μεταβελτιστοποίησης
- ii. Επιλογή παραμέτρων τη MUSA
- iii. Αναλυτική επίλυση προβλημάτων MUSA

Θα ακολουθήσει παρουσίαση των βημάτων του ΣΥΑ και θα γίνεται αναφορά στο πως ικανοποιούνται οι στόχοι στο πλαίσιο αυτών των βημάτων.

**Βήμα 1:** Ανάγνωση των δεδομένων έρευνας ικανοποίησης από αρχεία κειμένου (ASCII αρχεία σε μορφή PRN) που παίζουν το ρόλο της βάσης δεδομένων. Η επιλογή των ASCII αρχείων έγινε με το σκεπτικό ότι είναι πλήρως συμβατά με το σύνολο σχεδόν των εφαρμογών λογισμικού (λογιστικά φύλλα, προγράμματα διαχείρισης βάσεων δεδομένων, επεξεργαστές κειμένου, στατιστικά πακέτα, κλπ).

Η γραμμογράφηση που ακολουθείται είναι ίδια με αυτή που χρησιμοποιεί το Λογισμικό MUSA (Γρηγορούδης και Σίσκος, 2000 – § 8.5) ώστε να μπορούν να επιλυθούν από το ΣΥΑ ένα μεγάλο πλήθος ερευνών ικανοποίησης τα δεδομένα των οποίων έχουν ήδη αναλυθεί από το Λογισμικό MUSA.

Τα δεδομένα εισόδου αφορούν τον τίτλο της έρευνας, τον αριθμό  $j$  των πελατών, τον αριθμό  $n$  των κριτηρίων και τον τίτλο τους, τα επίπεδα ικανοποίησης  $m$  για κάθε κριτήριο και τις απαντήσεις του κάθε πελάτη ως προς τη συνολική τους ικανοποίηση και την μερική τους ικανοποίηση ανά κριτήριο.

Εναλλακτικά, τα δεδομένα μπορούν να προκύψουν από τη γεννήτρια συνόλων τεχνητών δεδομένων (βλ. Κεφάλαιο 7).

**Βήμα 2:** Παράγονται αποτελέσματα περιγραφικής στατιστικής και πιο συγκεκριμένα οι συχνότητες των απαντήσεων ανά επίπεδο ικανοποίησης για το σύνολο των ερωτηματολογίων.

**Βήμα 3:** Τα δεδομένα του προβλήματος μετατρέπονται αυτόματα σε μεταβλητές της μεθόδου MUSA και μορφοποιούνται τα κατάλληλα αρχικά γραμμικά προγράμματα.

**Βήμα 4:** Επιλογή της μεθόδου Simplex που θα χρησιμοποιηθεί για την επίλυση των γραμμικών προγραμμάτων. Στο ΣΥΑ έχουν υλοποιηθεί δύο αλγόριθμοι επίλυσης γραμμικών προγραμμάτων.

Ο πρώτος αλγόριθμος έχει υλοποιηθεί εξ αρχής για το ΣΥΑ και βασίζεται στο βασικό αλγόριθμο Simplex (Dantzig and Thapa, 1997). Ο αλγόριθμος αυτό χρησιμοποιεί τον επαυξημένο πίνακα Simplex για την επίλυση των γ.π. κατά το στάδιο της μεταβελτιστοποίησης σύμφωνα με τη διαδικασία που περιγράφηκε στην § 2.3.4.

Ο δεύτερος αλγόριθμος έχει υλοποιηθεί χρησιμοποιώντας το λογισμικό `lp_solve 5.5.0.11` (<http://lpsolve.sourceforge.net/>) που υλοποιεί τον αναθεωρημένο αλγόριθμο Simplex – Revised Simplex (Dantzig and Thapa, 1997) εμπλουτισμένο με τεχνικές επιτάχυνσης και διόρθωσης σφαλμάτων.

Πρόκειται για λογισμικό ανοιχτού κώδικα (open source) του οποίου η ανάπτυξη ξεκίνησε από το Τεχνολογικό Πανεπιστήμιο του Αϊντχόφεν στην Ολλανδία. Για την επίλυση των γ.π. στο στάδιο της μεταβελτιστοποίησης χρησιμοποιούνται οι συναρτήσεις `set_basis` και `set-basis` οι οποίες ουσιαστικά ορίζουν τη βάση της Simplex από την οποία ξεκινάει η επίλυση ενός γ.π. Οπότε κατά τη διαδικασία της μεταβελτιστοποίησης η αναζήτηση των μεταβέλτιστων λύσεων ξεκινάει από τον πίνακα της βέλτιστης λύσης, εφόσον το επιθυμεί ο χρήστης, επιλέγοντας το φόρτωμα (load) της αντίστοιχης βάσης.

Ο πρώτος αλγόριθμος είναι σαφώς πιο αργός από τον δεύτερο αλλά κρίθηκε απαραίτητη η ανάπτυξή του και η ενσωμάτωσή του στο ΣΥΑ επειδή επιτρέπει τη απ' ευθείας διαχείριση των στοιχείων του πίνακα Simplex που απαιτείται για την υλοποίηση των 3 αναλυτικών μεθόδων μεταβελτιστοποίησης. Δυστυχώς ο `lp_solve 5.5.0.11` δε δίνει τη δυνατότητα αυτή οπότε δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση των 3 αναλυτικών μεθόδων.

**Βήμα 5:** Επιλογή από τον χρήστη σεναρίου ανάλογα με το στόχο που θέλει να ακολουθήσει: (i). Σύγκριση Μεθόδων, (ii). Επιλογή Παραμέτρων, (iii). Επίλυση MUSA.

---

**Βήμα i.1:** Επιλογή των τιμών των παραμέτρων  $\gamma$ ,  $\gamma_i$  και  $\epsilon$ .

**Βήμα i.2:** Επιλογή μεθόδων μεταβελτιστοποίησης προς σύγκριση μεταξύ των:

- Γενικευμένο MUSA
- MUSA I
- MUSA II
- MUSA III
- Manas and Nedoma
- Αντίστροφη Simplex
- Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση

**Βήμα i.3:** Εφαρμογή της μεθόδου MUSA για κάθε μέθοδο.

**Βήμα i.4:** Εμφάνιση όλων των μεταβέλτιστων λύσεων ανά μέθοδο μεταβελτιστοποίησης.

**Βήμα i.5:** Υπολογισμός του συνόλου των δεικτών MUSA ανά μέθοδο μεταβελτιστοποίησης και συγκεκριμένα:

- Δείκτες Ολικής και Μερικής Ικανοποίησης
- Βάρη Κριτηρίων
- Δείκτες Απαιτητικότητας

Σύγκριση των δεικτών αυτών.

**Βήμα i.6:** Συνδυασμός των παραπάνω δεικτών για τη δημιουργία των διαγραμμάτων δράσης και βελτίωσης ανά μέθοδο μεταβελτιστοποίησης και σύγκριση αυτών.

**Βήμα i.7:** Υπολογισμός των δεικτών αξιοπιστίας και ευστάθειας ανά μέθοδο μεταβελτιστοποίησης και συγκεκριμένα:

- Μέσος δείκτη προσαρμογής – AFI
- Δείκτης επιπέδου ολικής πρόβλεψης - OPL
- Μέσος δείκτη ευστάθειας - ASI

**Βήμα i.8:** Υπολογισμός των δεικτών υπολογιστικού φόρτου ανά μέθοδο μεταβελτιστοποίησης και συγκεκριμένα:

- Πραγματικός χρόνος επίλυσης προβλήματος μεταβελτιστοποίησης
- Ο αριθμός των περιστροφών του πίνακα Simplex μέσα από την χρήση του απλού ή του αναθεωρημένου αλγόριθμου Simplex
- Η χρησιμοποιούμενη μνήμη RAM
- Ο αριθμός των μεταβέλτιστων λύσεων

Σύγκριση των δεικτών αυτών.



**Βήμα ii.1:** Επιλογή του εύρους των τιμών των παραμέτρων  $\gamma$ ,  $\gamma_i$  και  $\epsilon$  και του αντίστοιχου βήματος. Αν για παράδειγμα το εύρος της παραμέτρου  $\gamma$  είναι  $[\gamma_0, \gamma_{mx}]$  και το βήμα είναι  $\gamma\_step$  τότε θα επιλυθούν

**Βήμα ii.2:** Επιλογή μεθόδου μεταβελτιστοποίησης.

**Βήμα ii.3:** Εφαρμογή της μεθόδου MUSA για κάθε διαφορετικό συνδυασμό των τιμών των παραμέτρων.

**Βήμα ii.4:** Εμφάνιση όλων των μεταβέλτιστων για κάθε διαφορετικό συνδυασμό των τιμών των παραμέτρων.

**Βήμα ii.5:** Υπολογισμός του συνόλου των δεικτών MUSA με βάση τις μέσες τιμές των αποτελεσμάτων για το σύνολο των τιμών των παραμέτρων και συγκεκριμένα:

- Δείκτες Ολικής και Μερικής Ικανοποίησης
- Βάρη Κριτηρίων
- Δείκτες Απαιτητικότητας

**Βήμα ii.6:** Συνδυασμός των παραπάνω δεικτών για τη δημιουργία των διαγραμμάτων δράσης και βελτίωσης.

**Βήμα ii.7:** Υπολογισμός των δεικτών αξιοπιστίας και ευστάθειας για κάθε διαφορετικό συνδυασμό των τιμών των παραμέτρων και γραφική απεικόνισή τους για ευκολότερη σύγκριση. Οι δείκτες συγκεκριμένα είναι:

- Μέσος δείκτη προσαρμογής – AFI
- Δείκτης επιπέδου ολικής πρόβλεψης - OPL
- Μέσος δείκτη ευστάθειας - ASI

**Βήμα ii.8:** Υπολογισμός των δεικτών υπολογιστικού φόρτου με βάση τις μέσες τιμές των αποτελεσμάτων των παραμέτρων και συγκεκριμένα:

- Πραγματικός χρόνος επίλυσης προβλήματος μεταβελτιστοποίησης
- Ο αριθμός των περιστροφών του πίνακα Simplex
- Η χρησιμοποιούμενη μνήμη RAM
- Ο αριθμός των μεταβέλτιστων λύσεων.

**Βήμα ii.9:** Βρέθηκε ικανοποιητικός συνδυασμός των παραμέτρων  $\gamma$ ,  $\gamma_i$  και  $\epsilon$ ; Αν **ΝΑΙ**, τότε πηγαίνουμε στο **βήμα iii.1**. Αν **ΟΧΙ**, τότε επιστρέφουμε στο **βήμα ii.1**.

**Βήμα iii.1:** Επιλογή των τιμών των παραμέτρων  $\gamma$ ,  $\gamma_i$  και  $\epsilon$ .

**Βήμα iii.2:** Επιλογή μεθόδου μεταβελτιστοποίησης.

**Βήμα iii.3:** Εφαρμογή της μεθόδου MUSA.

**Βήμα iii.4:** Εμφάνιση όλων των μεταβέλτιστων λύσεων.

**Βήμα iii.5:** Υπολογισμός του συνόλου των δεικτών MUSA και συγκεκριμένα:

- Δείκτες Ολικής και Μερικής Ικανοποίησης
- Βάρη Κριτηρίων
- Δείκτες Απαιτητικότητας

**Βήμα iii.6:** Συνδυασμός των παραπάνω δεικτών για τη δημιουργία των διαγραμμάτων δράσης και βελτίωσης.

**Βήμα iii.7:** Υπολογισμός των δεικτών αξιοπιστίας και ευστάθειας και συγκεκριμένα:

- Μέσος δείκτη προσαρμογής – AFI
- Δείκτης επιπέδου ολικής πρόβλεψης - OPL
- Μέσος δείκτη ευστάθειας - ASI

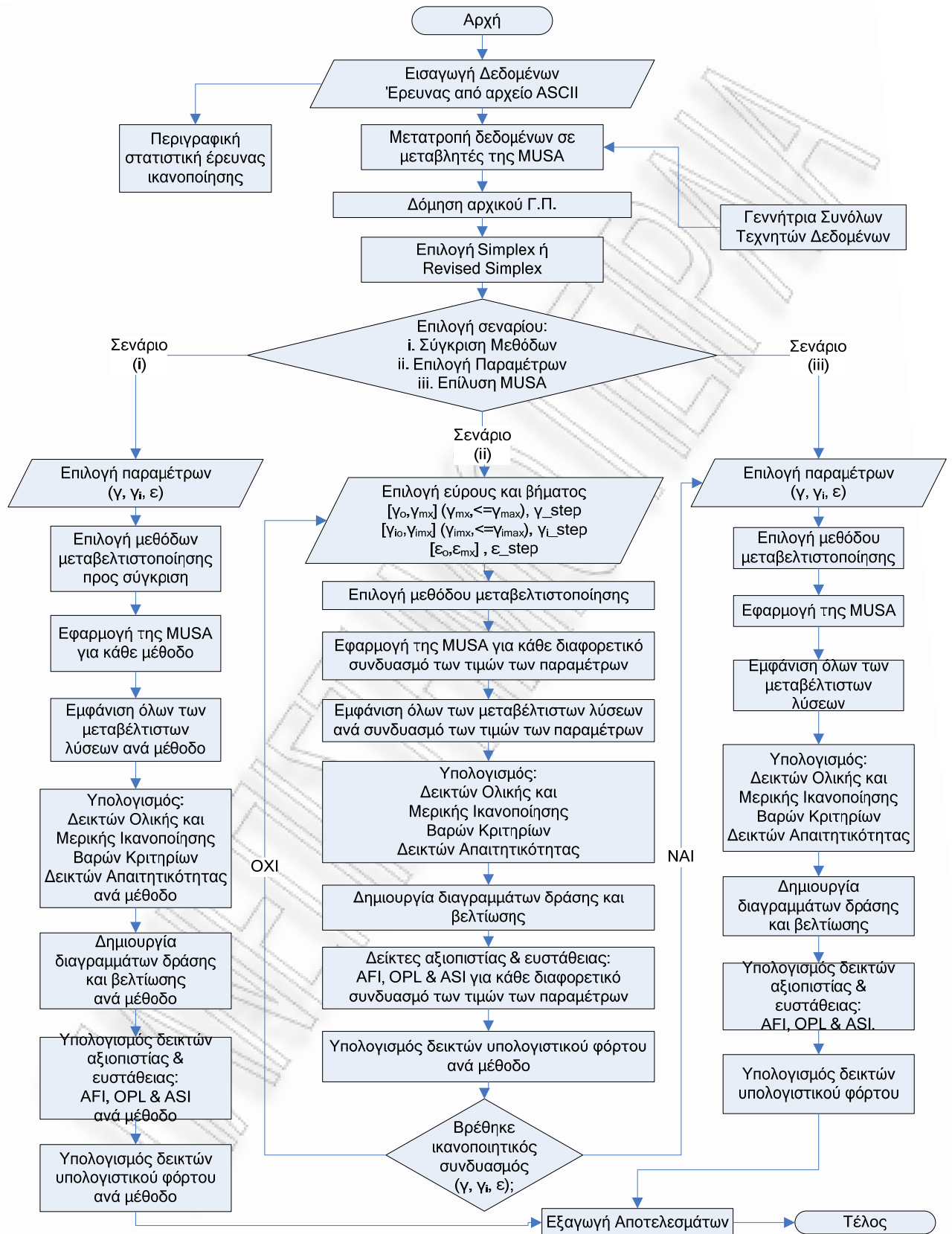
**Βήμα iii.8:** Υπολογισμός των δεικτών υπολογιστικού φόρτου και συγκεκριμένα:

- Πραγματικός χρόνος επίλυσης προβλήματος μεταβελτιστοποίησης
- Ο αριθμός των περιστροφών του πίνακα Simplex
- Η χρησιμοποιούμενη μνήμη RAM
- Ο αριθμός των μεταβέλτιστων λύσεων

**Βήμα 6:** Εξαγωγή των αποτελεσμάτων σε αρχεία εικόνας και excel. **ΤΕΛΟΣ**

Ακολουθεί το διάγραμμα λειτουργίας του Συστήματος Υποστήριξης Αποφάσεων Μεταβελτιστοποίησης της MUSA όπου αποτυπώνονται καθαρά οι διαδρομές των τριών διαφορετικών σεναρίων χρήσης που καλύπτουν τους αντίστοιχους σκοπούς του ΣΥΑ.

## Κεφάλαιο 6: Σύστημα Υποστήριξης Αποφάσεων για τη MUSA



Σχήμα 6-2: Λογικό Διάγραμμα ΣΥΑ Ανάλυσης Μεταβελτιστοποίησης

## 6.5 Δομή του ΣΥΑ

Τα κυριότερα χαρακτηριστικά της διεπαφής του ΣΥΑ είναι η φιλικότητα που παρέχεται στους χρήστες με τη βοήθεια που δίνει το εξελιγμένο γραφικό περιβάλλον λειτουργίας και η απλότητα της χρήσης του μέσω των μενού επιλογών.

Το μενού επιλογών έχει την παρακάτω δομή:

- *Επιλογή File*: Άνοιγμα PRN αρχείου, κλείσιμο τρέχοντος PRN αρχείου, αποθήκευση όλων των αποτελεσμάτων και των γραφημάτων που προκύπτουν κατά την λύση των προβλημάτων. Τα αρχεία αυτά (.xls, .jrg) αποθηκεύονται σε ένα φάκελο ο οποίος ανοίγει μόλις ολοκληρωθεί η διαδικασία Έξοδος από την εφαρμογή.
- *Επιλογή View*: Προβολή απόκρυψη του toolbar και του statusbar. Προβολή σε νέο παράθυρο των δεδομένων που εισήχθησαν στο σύστημα. Καθώς και προβολή των αποτελεσμάτων από την επίλυση των γραμμικών προβλημάτων με μια ή περισσότερες μεθόδους.
- *Επιλογή Solver*: Έναρξη, προσωρινή παύση και τερματισμός της επίλυσης προβλήματος. Επίσης άνοιγμα παραθύρου επιλογής ρυθμίσεων του τρόπου (μέθοδοι και παράμετροι) λύσης των προβλημάτων.
- *Επιλογή Analysis*: Προβολή σε παράθυρο με γραφήματα, των συναρτήσεων ικανοποίησης (ολική, μερική), απαιτητικότητας (ολική, μερική), και των βαρών των κριτηρίων που προέκυψαν ύστερα από ανάλυση των απαντήσεων των συγκεκριμένων ερωτηθέντων. Επίσης, προβολή χαρτών δράσης και βελτίωσης καθώς και περιβάλλον σύγκρισης δεικτών αξιοπιστίας και ευστάθειας.
- *Επιλογή Statistical*: Προβολή των αποτελεσμάτων περιγραφικής στατιστικής και εμφάνιση γραφημάτων δεικτών απόδοσης.
- *Επιλογή Tools*: Πρόσβαση στο περιβάλλον της γεννήτριας συνόλων τεχνητών δεδομένων
- *Επιλογή Window*: Διαχείριση παραθύρων της εφαρμογής
- *Επιλογή Help*: Προβολή βοήθειας για τις λειτουργίες της εφαρμογής.

Στο Παράρτημα V παρουσιάζεται το εγχειρίδιο χρήσης του Συστήματος Υποστήριξης Αποφάσεων όπου παρατίθενται και οι βασικές συναρτήσεις του.

## 6.6 Παράδειγμα εφαρμογής

Θα χρησιμοποιηθεί ένα παράδειγμα μιας έρευνας ικανοποίησης πελατών προκειμένου να παρουσιασθούν οι λειτουργίες του ΣΥΑ. Το ίδιο παράδειγμα έχει επίσης χρησιμοποιηθεί από τους Γρηγορούδη και Σίσκο (2000) για την παρουσίαση της μεθόδου MUSA και του αντίστοιχου λογισμικού. Χρησιμοποιώντας το ίδιο παράδειγμα θα υπάρχει και η δυνατότητα σύγκρισης των αποτελεσμάτων.

Θα υποθέσουμε ότι πρέπει να αναλύσουμε με τη μέθοδο MUSA τα δεδομένα μίας έρευνας ικανοποίησης πελατών για μία εταιρία παροχής υπηρεσιών με τα εξής δεδομένα:

- Η ολική ικανοποίηση των πελατών εξαρτάται από 3 βασικά κριτήρια: Προϊόν, Διαδικασία Αγοράς και Πρόσθετες Υπηρεσίες
- Η ποιοτική κλίμακα της έρευνας ικανοποίησης τόσο για τη συνολική όσο και για τα κριτήρια χωρίζεται σε τρία επίπεδα:
  - Επίπεδο 1<sup>ο</sup> : Λίγο Ικανοποιημένος
  - Επίπεδο 2<sup>ο</sup> : Ικανοποιημένος
  - Επίπεδο 3<sup>ο</sup> : Πολύ Ικανοποιημένος

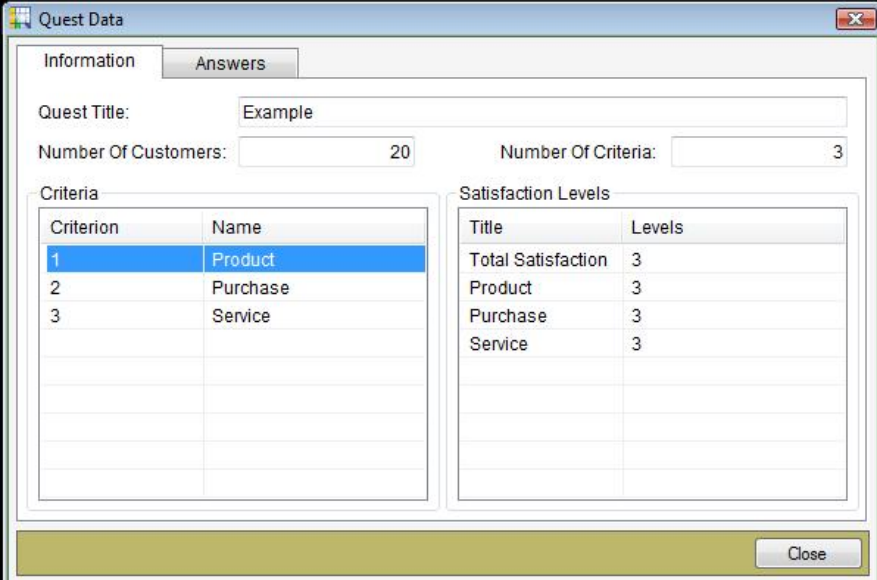
Ολική ικανοποίηση	Προϊόν	Διαδικασία Αγοράς	Πρόσθετες υπηρεσίες
Ικανοποιημένος	Πολύ ικανοποιημένος	Ικανοποιημένος	Λίγο ικανοποιημένος
Λίγο ικανοποιημένος	Λίγο ικανοποιημένος	Λίγο ικανοποιημένος	Λίγο ικανοποιημένος
Πολύ ικανοποιημένος	Πολύ ικανοποιημένος	Πολύ ικανοποιημένος	Πολύ ικανοποιημένος
Ικανοποιημένος	Πολύ ικανοποιημένος	Λίγο ικανοποιημένος	Ικανοποιημένος
Λίγο ικανοποιημένος	Λίγο ικανοποιημένος	Λίγο ικανοποιημένος	Λίγο ικανοποιημένος
Πολύ ικανοποιημένος	Πολύ ικανοποιημένος	Πολύ ικανοποιημένος	Πολύ ικανοποιημένος
Ικανοποιημένος	Πολύ ικανοποιημένος	Λίγο ικανοποιημένος	Πολύ ικανοποιημένος
Ικανοποιημένος	Πολύ ικανοποιημένος	Λίγο ικανοποιημένος	Πολύ ικανοποιημένος
Ικανοποιημένος	Ικανοποιημένος	Ικανοποιημένος	Ικανοποιημένος
Λίγο ικανοποιημένος	Λίγο ικανοποιημένος	Λίγο ικανοποιημένος	Λίγο ικανοποιημένος
Ικανοποιημένος	Ικανοποιημένος	Πολύ ικανοποιημένος	Λίγο ικανοποιημένος
Λίγο ικανοποιημένος	Λίγο ικανοποιημένος	Λίγο ικανοποιημένος	Λίγο ικανοποιημένος
Πολύ ικανοποιημένος	Πολύ ικανοποιημένος	Πολύ ικανοποιημένος	Πολύ ικανοποιημένος
Ικανοποιημένος	Ικανοποιημένος	Πολύ ικανοποιημένος	Λίγο ικανοποιημένος
Λίγο ικανοποιημένος	Λίγο ικανοποιημένος	Λίγο ικανοποιημένος	Λίγο ικανοποιημένος
Πολύ ικανοποιημένος	Πολύ ικανοποιημένος	Πολύ ικανοποιημένος	Ικανοποιημένος
Πολύ ικανοποιημένος	Πολύ ικανοποιημένος	Πολύ ικανοποιημένος	Πολύ ικανοποιημένος
Πολύ ικανοποιημένος	Πολύ ικανοποιημένος	Πολύ ικανοποιημένος	Ικανοποιημένος
Ικανοποιημένος	Ικανοποιημένος	Ικανοποιημένος	Ικανοποιημένος
Λίγο ικανοποιημένος	Ικανοποιημένος	Λίγο ικανοποιημένος	Λίγο ικανοποιημένος

Πίνακας 6-1: Πίνακας αποτελεσμάτων παραδείγματος

## Κεφάλαιο 6: Σύστημα Υποστήριξης Αποφάσεων για τη MUSA

Τα δεδομένα της έρευνας ικανοποίησης παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.1 ο οποίος δείχνει την άποψη ικανοποίησης ενός συνόλου 20 πελατών (ευσταθές δείγμα).

Δημιουργείται το PRN αρχείο με την κατάλληλη γραμμογράφηση και τα δεδομένα εισάγονται στο ΣΥΑ. Το πρόβλημα θα επιλυθεί ακολουθώντας τα τρία διαφορετικά σενάρια.



The screenshot shows a window titled "Quest Data" with two tabs: "Information" and "Answers". The "Information" tab is active. It contains the following fields and tables:

Quest Title: Example  
Number Of Customers: 20  
Number Of Criteria: 3

Criterion	Name
1	Product
2	Purchase
3	Service

Title	Levels
Total Satisfaction	3
Product	3
Purchase	3
Service	3

A "Close" button is located at the bottom right of the window.

**Εικόνα 6-1:** Ανάγνωση δεδομένων από ΣΥΑ

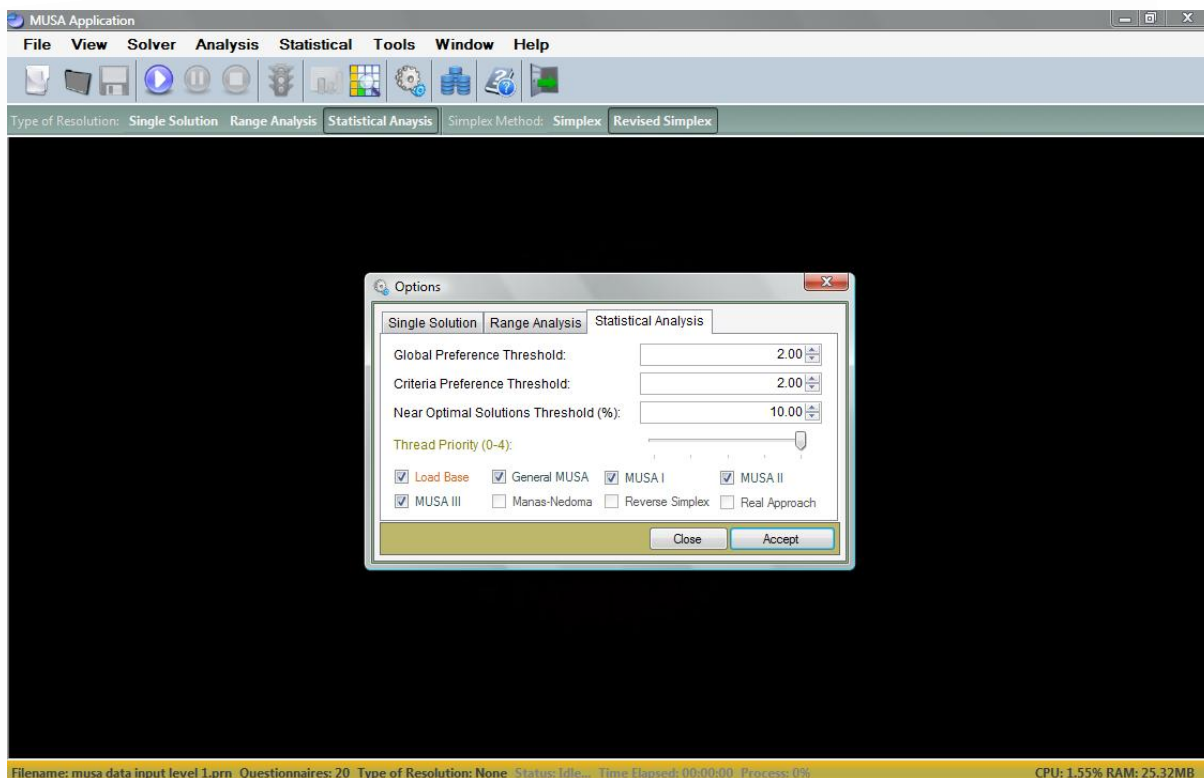
1<sup>ο</sup> Σενάριο: Σύγκριση των ευρετικών μεθόδων: Γενικευμένο MUSA, MUSA I, MUSA II, MUSA III.

Οι αναλυτικές μέθοδοι δεν μετέχουν στην παρούσα σύγκριση λόγω του μεγάλου μεγέθους του γραμμικού προγράμματος που προκύπτει μέσω της μοντελοποίησης της MUSA. Σύμφωνα με τον Πίνακα 5-2 ο αριθμός των περιορισμών του προβλήματος είναι 23 και ο αριθμός των μεταβλητών είναι 48. Σύμφωνα με τη σχέση (1.2) το άνω όριο των κορυφών του υπερπολυέδρου θα ισούται με: 24,357,232,569,150 (πραγματικά πολύ μεγάλος αριθμός!).

Από τη στιγμή που στη σύγκριση δεν μετέχουν αναλυτικές μέθοδοι θα επιλεγεί η χρήση του αναθεωρημένου αλγόριθμου Simplex. Οι παράμετροι της MUSA θα πάρουν τις εξής τιμές:  $\gamma=2$ ,  $\gamma_i=2$ ,  $\epsilon=10\%$ .

Επίσης επιλέγουμε τις προς αξιολόγηση μεθόδους καθώς τη χρήση της βάσης της βέλτιστης λύσης ("Load Base") για την επίλυση των γ.π. της μεταβελτιστοποίησης, όπως φαίνεται και στην επόμενη εικόνα.

## Κεφάλαιο 6: Σύστημα Υποστήριξης Αποφάσεων για τη MUSA



**Εικόνα 6-2:** Επιλογή των τιμών των παραμέτρων

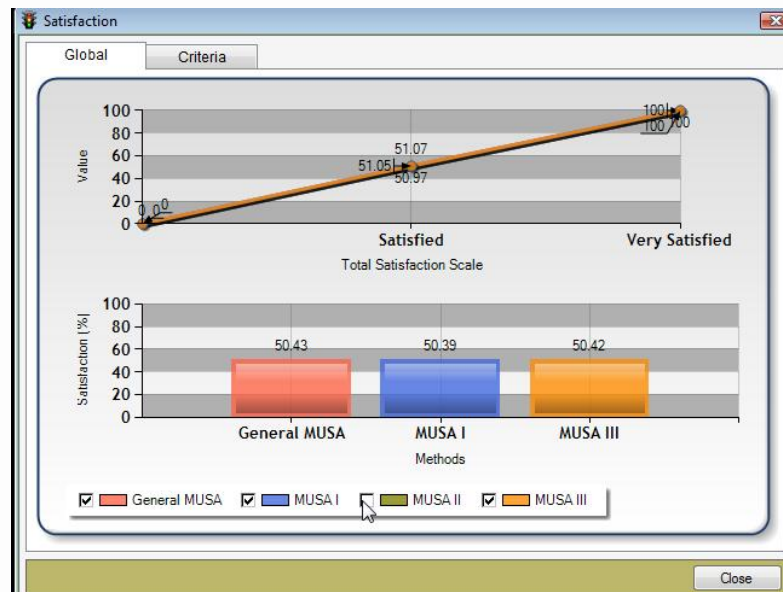
Εφαρμόζοντας τη MUSA, το ΣΥΑ παράγει όλες τις μεταβέλτιστες λύσεις για κάθε μέθοδο. Στις ευρετικές μεθόδους ο αριθμός των λύσεων είναι ήδη γνωστός (Πίνακας 5-2) ενώ στις αναλυτικές είναι ένα από τα ζητούμενα.

	Average	min_b[1]	max_b[1]	min_b[2]	max_b[2]	min_b[3]	max_b[3]
z[1]	50.97	51	51.4	50.6	50.8	51	51
z[2]	49.03	49	48.6	49.4	49.2	49	49
w[1][1]	2.13	2	2.8	2	2	2	2
w[1][2]	23.42	23.1	23.3	23.7	23.4	23.9	23.1
b[1]	25.55	25.1	26.1	25.7	25.4	25.9	25.1
w[2][1]	25.28	25.1	25.3	24.9	25.4	25.9	25.1
w[2][2]	23.62	23.9	23.3	23.7	23.8	23.1	23.9
b[2]	48.9	49	48.6	48.6	49.2	49	49
w[3][1]	23.55	23.9	23.3	23.7	23.4	23.1	23.9
w[3][2]	2	2	2	2	2	2	2
b[3]	25.55	25.9	25.3	25.7	25.4	25.1	25.9

**Εικόνα 6-3:** Εμφάνιση των μεταβέλτιστων λύσεων

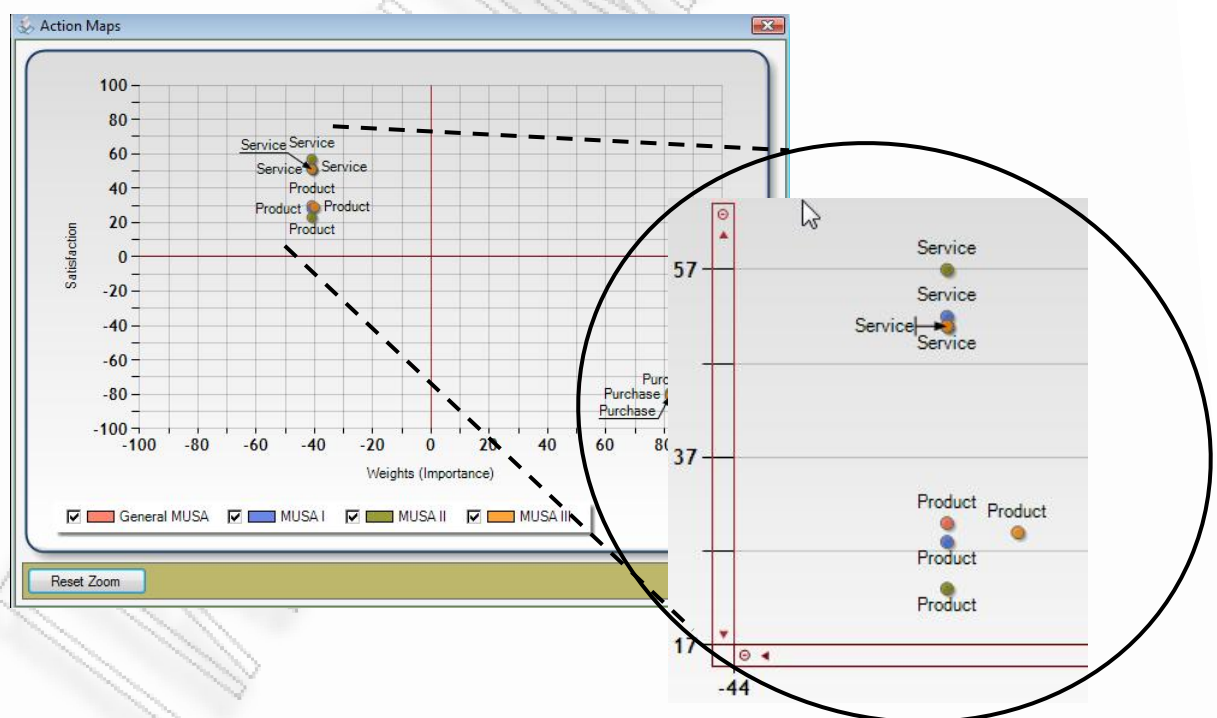
Το ΣΥΑ υπολογίζει το σύνολο των δεικτών MUSA ανά μέθοδο μεταβελτιστοποίησης και με γραφικό τρόπο επιτρέπει τη σύγκριση των τιμών που προκύπτουν από τις διαφορετικές μεθόδους.

## Κεφάλαιο 6: Σύστημα Υποστήριξης Αποφάσεων για τη MUSA



**Εικόνα 6-4:** Εμφάνιση δεικτών MUSA

Ο συνδυασμός των παραπάνω δεικτών επιτρέπει τη δημιουργία των διαγραμμάτων δράσης και βελτίωσης ανά μέθοδο μεταβελτιστοποίησης και σύγκριση αυτών. Μία λειτουργία που βοηθάει το χρήστη στη σύγκριση είναι η δυνατότητα εστίασης (zoom).

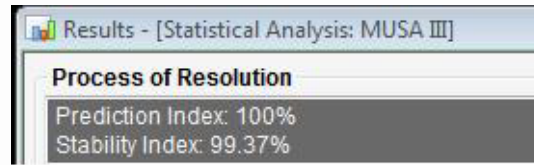


**Εικόνα 6-5:** Διάγραμμα δράσης με δυνατότητα zoom

Το ΣΥΑ υπολογίζει επίσης τους δείκτες αξιοπιστίας AFI και OPL και το δείκτη ευστάθειας ASI ανά μέθοδο μεταβελτιστοποίησης.

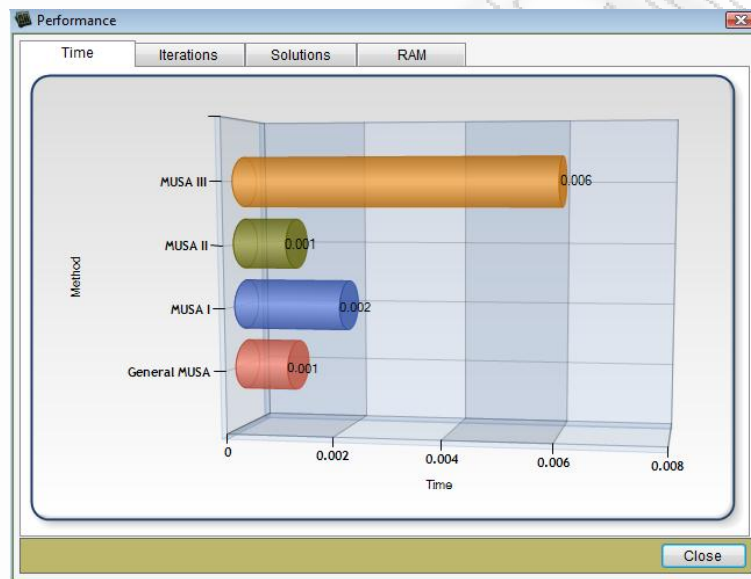


## Κεφάλαιο 6: Σύστημα Υποστήριξης Αποφάσεων για τη MUSA



**Εικόνα 6-6:** Δείκτες OPL και ASI

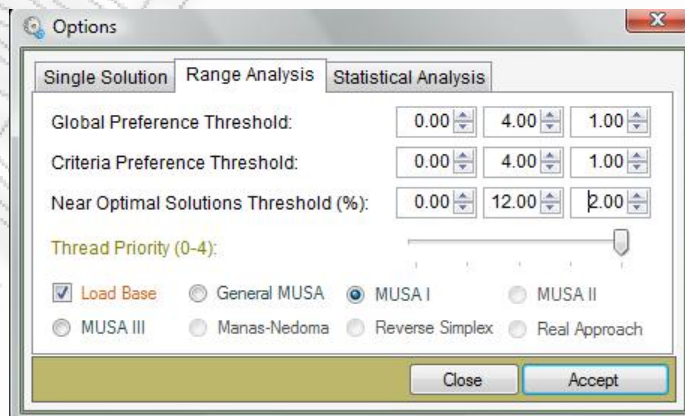
Τέλος, υπολογίζονται οι δείκτες υπολογιστικού φόρτου ανά μέθοδο. Ενδεικτικά στην επόμενη εικόνα παρουσιάζεται το γράφημα που αναφέρεται στον πραγματικό χρόνο επίλυσης (σε min) κάθε προβλήματος μεταβελτιστοποίησης.



**Εικόνα 6-7:** Χρόνος επίλυσης κάθε μεθόδου μεταβελτιστοποίησης

2<sup>ο</sup> Σενάριο: Επιλογή παραμέτρων  $\gamma$ ,  $\gamma_i$  και  $\epsilon$  με χρήση της μεθόδου MUSA I

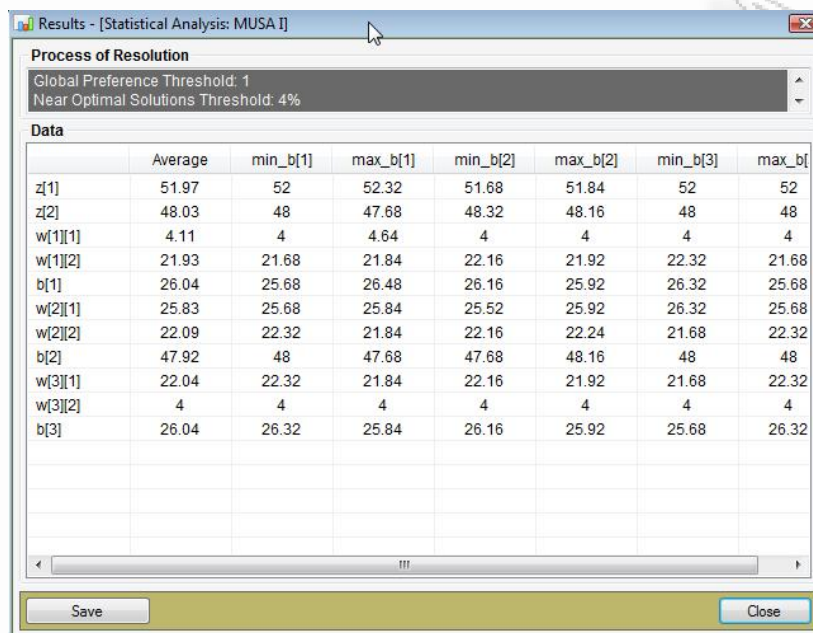
Ο χρήστης αφού επιλέξει πρώτα τη μέθοδο, επιλέγει στη συνέχεια το εύρος και το βήμα ελέγχου του διαστημάτων τιμών των τριών παραμέτρων.



**Εικόνα 6-8:** Επιλογή εύρους τιμών και βήματος για τις τιμές των παραμέτρων

## Κεφάλαιο 6: Σύστημα Υποστήριξης Αποφάσεων για τη MUSA

Στη συνέχεια εφαρμόζεται η MUSA και δίνει τις μεταβέλιστες λύσεις για κάθε συνδυασμό των τιμών των παραμέτρων.

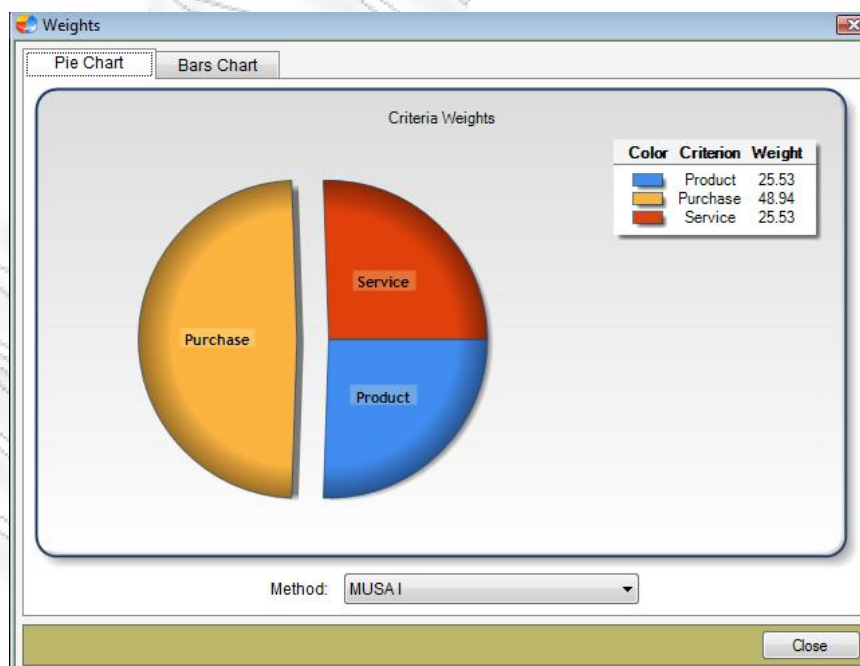


The screenshot shows a window titled "Results - [Statistical Analysis: MUSA I]". It displays the "Process of Resolution" section with a "Global Preference Threshold: 1" and a "Near Optimal Solutions Threshold: 4%". Below this is a table of data with the following columns: Average, min\_b[1], max\_b[1], min\_b[2], max\_b[2], min\_b[3], and max\_b[3].

	Average	min_b[1]	max_b[1]	min_b[2]	max_b[2]	min_b[3]	max_b[3]
z[1]	51.97	52	52.32	51.68	51.84	52	52
z[2]	48.03	48	47.68	48.32	48.16	48	48
w[1][1]	4.11	4	4.64	4	4	4	4
w[1][2]	21.93	21.68	21.84	22.16	21.92	22.32	21.68
b[1]	26.04	25.68	26.48	26.16	25.92	26.32	25.68
w[2][1]	25.83	25.68	25.84	25.52	25.92	26.32	25.68
w[2][2]	22.09	22.32	21.84	22.16	22.24	21.68	22.32
b[2]	47.92	48	47.68	47.68	48.16	48	48
w[3][1]	22.04	22.32	21.84	22.16	21.92	21.68	22.32
w[3][2]	4	4	4	4	4	4	4
b[3]	26.04	26.32	25.84	26.16	25.92	25.68	26.32

**Εικόνα 6-9:** Τιμές μεταβέλιστων λύσεων για συγκεκριμένο συνδυασμό παραμέτρων

Υπολογισμός του συνόλου των δεικτών MUSA με βάση τις μέσες τιμές των αποτελεσμάτων για το σύνολο των τιμών των παραμέτρων. Στην επόμενη εικόνα παρουσιάζεται το γράφημα των βαρών των κριτηρίων.



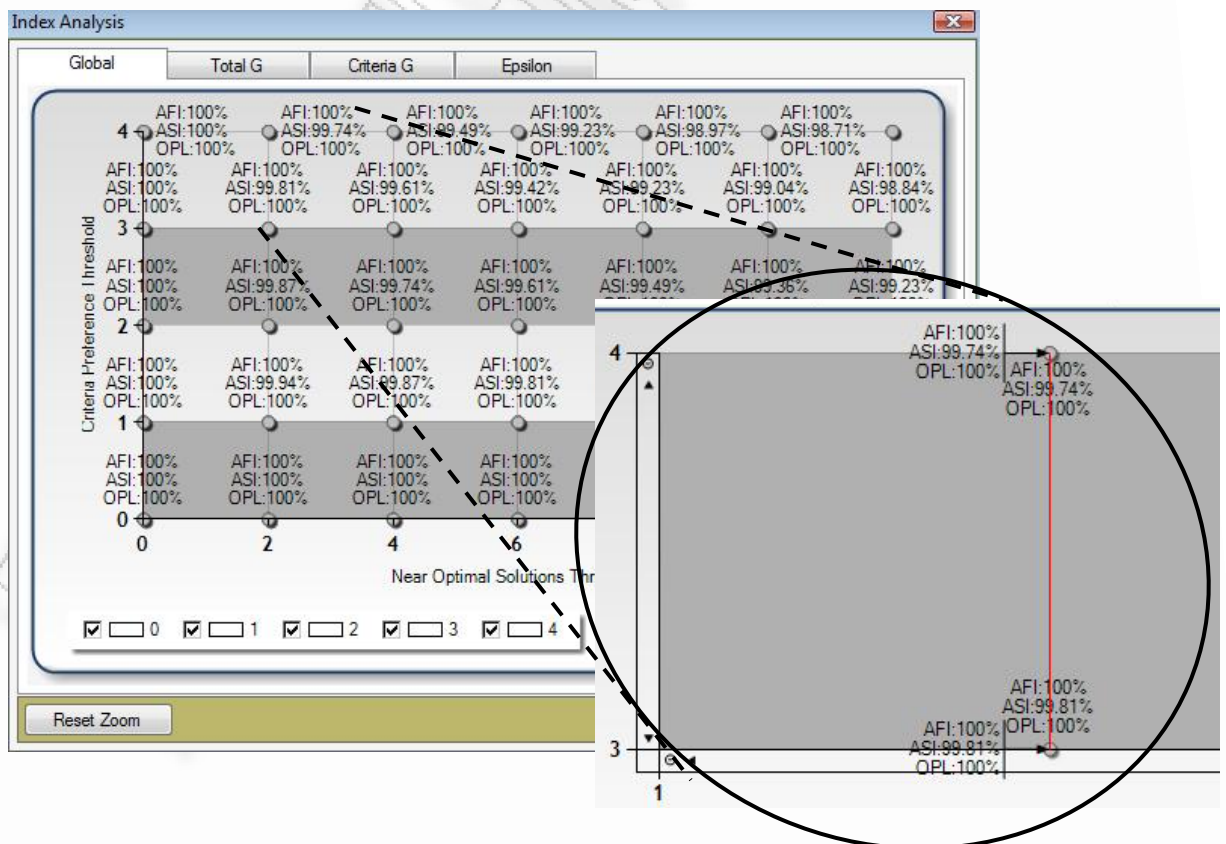
**Εικόνα 6-10:** Μέσες τιμές βαρών κριτηρίων

## Κεφάλαιο 6: Σύστημα Υποστήριξης Αποφάσεων για τη MUSA

Υπολογίζονται οι δείκτες αξιοπιστίας AFI και OPL και ο δείκτης ευστάθειας ASI για κάθε συνδυασμό των τιμών των παραμέτρων. Για να διευκολυνθεί ο χρήστης στην επιλογή του καλύτερου συνδυασμού τιμών οι τιμές αυτές δίνονται και σε μορφή πίνακα και σε γραφήματα με μεγάλες δυνατότητες διάδρασης.

Global_T	Crit_T	Epsilon_T	Fitting	Stability	Prediction
0	0	0%	100%	100%	100%
0	0	2%	100%	100%	100%
0	0	4%	100%	100%	100%
0	0	6%	100%	100%	100%
0	0	8%	100%	100%	100%
0	0	10%	100%	100%	100%
0	0	12%	100%	100%	100%
0	1	0%	100%	100%	100%
0	1	2%	100%	99.94%	100%
0	1	4%	100%	99.87%	100%
0	1	6%	100%	99.81%	100%
0	1	8%	100%	99.74%	100%
0	1	10%	100%	99.68%	100%
0	1	12%	100%	99.61%	100%
0	2	0%	100%	100%	100%
0	2	2%	100%	99.87%	100%
0	2	4%	100%	99.74%	100%

Εικόνα 6-11: Πίνακας με τιμές δεικτών αξιοπιστίας και ευστάθειας

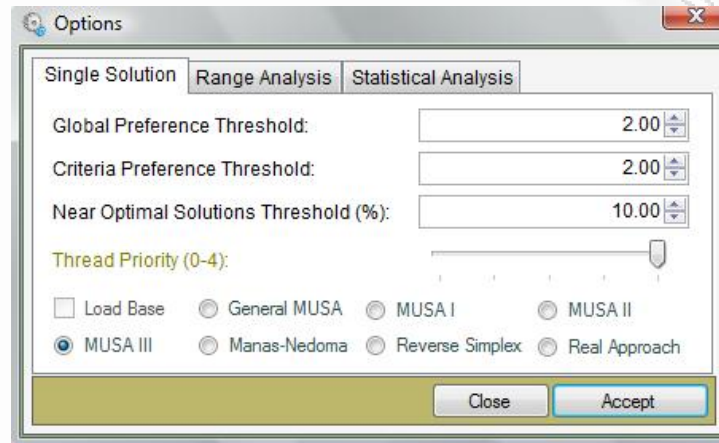


Εικόνα 6-12: Γράφημα δεικτών αξιοπιστίας και ευστάθειας με δυνατότητα zoom

## Κεφάλαιο 6: Σύστημα Υποστήριξης Αποφάσεων για τη MUSA

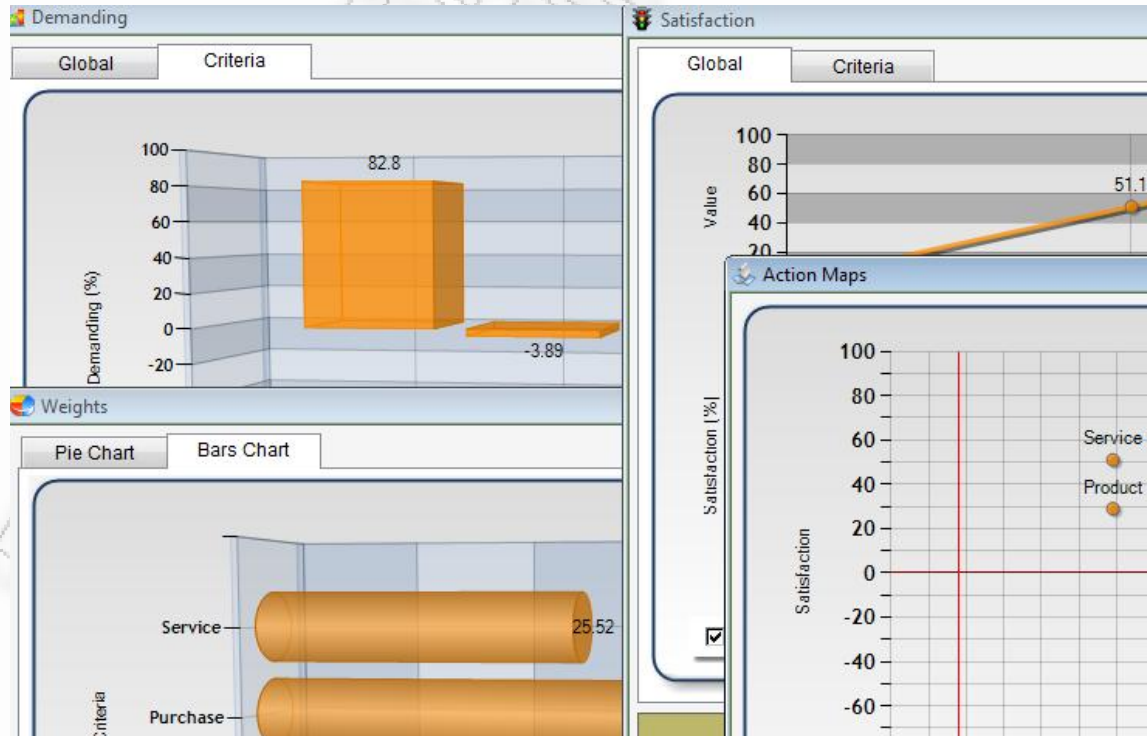
### 3<sup>ο</sup> Σενάριο: Ανάλυση έρευνας ικανοποίησης με χρήση της μεθόδου MUSA III

Ο χρήστης τη μέθοδο μεταβελτιστοποίησης και τις τιμές των τριών παραμέτρων. Για το παράδειγμα θα χρησιμοποιηθεί ο βασικός αλγόριθμος Simplex.



**Εικόνα 6-13:** Επιλογή τιμών παραμέτρων και μεθόδου μεταβελτιστοποίησης

Εφαρμόζεται η MUSA και παράγονται το σύνολο των αποτελεσμάτων της μεθόδου παρέχοντας στο χρήστη ένα πλήρες σύνολο από γραφήματα, πίνακες και διαγράμματα.



**Εικόνα 6-14:** Αποτελέσματα ανάλυσης MUSA

## Κεφάλαιο 7: Γεννήτρια Συνόλων Δεδομένων για Έρευνες Ικανοποίησης

Προκειμένου να σχεδιαστούν με τον καλύτερο τρόπο οι αλγόριθμοι μεταβελτιστοποίησης και να αξιολογηθούν σε αρχικό επίπεδο τα παραγόμενα αποτελέσματα παρουσιάστηκε η ανάγκη δοκιμής τους με χρήση πλήθους συνόλων δεδομένων. Η παραγωγή ενός μεγάλου αριθμού πραγματικών τέτοιων συνόλων αφενός θα ήταν χρονικά και οικονομικά ανέφικτη και αφετέρου δε θα υπήρχε η βεβαιότητα ότι τα σύνολα αυτά θα κάλυπταν δεδομένα με μεγάλο εύρος χαρακτηριστικών. Έτσι παρουσιάστηκε η ανάγκη για τη δημιουργία τεχνητών δεδομένων.

Για το σκοπό αυτό σχεδιάστηκε και αναπτύχθηκε μία μεθοδολογία δημιουργίας συνόλων τεχνητών (συνθετικών) δεδομένων (data set generator) για έρευνες ικανοποίησης με χρήση δομημένων ερωτηματολογίων. Παράλληλα αναπτύχθηκε ένα ολοκληρωμένο σύστημα λογισμικού για τη δημιουργία τεχνητών δεδομένων το οποίο επιτρέπει τη δημιουργία συνόλων δεδομένων που ανταποκρίνονται σε εικονικούς πελάτες με συγκεκριμένη συμπεριφορά. Το λογισμικό αυτό επιτρέπει την εξέταση της συμπεριφοράς της μεθόδου MUSA κάτω από ειδικές-προκαθορισμένες συνθήκες.

Με χρήση της γεννήτριας σχεδιάστηκαν πειράματα-δοκιμές για το επόμενο Κεφάλαιο μέσω της παραγωγής συνθετικών δεδομένων. Τα πειράματα αυτά θα επιτρέψουν την εξέταση και επιβεβαίωση της αξιοπιστίας των μεθόδων μεταβελτιστοποίησης και του ίδιου του ΣΥΑ.

## 7.1 Εισαγωγή

Υπάρχει διαρκώς αυξανόμενη ανάγκη να διασφαλιστεί ότι το λογισμικό που χρησιμοποιείται από τους ερευνητές ανταποκρίνεται στο συγκεκριμένο σκοπό για τον οποίο προορίζεται και κυρίως ότι τα αποτελέσματα που παράγει είναι ορθά, στα πλαίσια μιας προκαθορισμένης ακρίβειας, για τα προς επίλυση προβλήματα (Cox & Harris, 1998).

Τα λογισμικά ανάλυσης δεδομένων βασίζονται σε συγκεκριμένα μοντέλα και έχουν σχεδιαστεί για να διαχειρίζονται μεγάλο μέγεθος δεδομένων, προσπαθώντας να παράξουν ενδιαφέροντα αποτελέσματα για τον ερευνητή. Τα πεδία εφαρμογής για τα λογισμικά ανάλυσης δεδομένων είναι πολυάριθμα και απευθύνονται και στον ερευνητικό χώρο της ανάλυσης δεδομένων ερευνών ικανοποίησης πελάτη (Mc Daniel & Gates, 2001).

Συνήθως, ένας ερευνητής επιλέγει το μοντέλο και το αντίστοιχο λογισμικό που θεωρεί ότι είναι το καταλληλότερο για την ανάλυση που θέλει να υλοποιήσει, θεωρώντας δεδομένη την αξιοπιστία του. Παρ' όλα αυτά θα ήταν πολύ χρήσιμο για τον ερευνητή αν διέθετε τα ανάλογα εργαλεία, ώστε να ελέγξει και να αξιολογήσει το επίπεδο αξιοπιστίας κάθε μοντέλου και λογισμικού.

Ορισμένοι λόγοι που οδηγούν ένα λογισμικό σε αποτυχία ή παραγωγή αναξιόπιστων αποτελεσμάτων είναι οι παρακάτω:

- (α) εφαρμογή πολλών αλγορίθμων οι οποίοι είναι ασταθείς
- (β) αποτυχία να κανονικοποιήσει, να μεταφράσει, να τυποποιήσει ή αλλιώς να μετασχηματίσει τα εισηγμένα δεδομένα ορθά πριν τη λύση
- (γ) η χρήση μιας διαδικασίας λύσης που επιτείνει μία πιθανώς έμφυτη παθολογία του προβλήματος, και
- (δ) η κακή επιλογή του σωστού τύπου από μια ομάδα μαθηματικά (αλλά όχι αριθμητικά) ισότιμων μοντέλων (Cox, 1997).

Ένα κρίσιμο τεχνικό θέμα σχετικά με τα εργαλεία ανάλυσης δεδομένων είναι η ικανότητά τους να παράσχουν ακριβή συμπεράσματα. Με δεδομένη την ποικιλία των τεχνικών που χρησιμοποιούνται για την ανάπτυξη ενός εργαλείου ανάλυσης δεδομένων, είναι επιθυμητό να υπάρχει μια βασική προσέγγιση για τον έλεγχο της δυνατότητάς να παράγει ακριβή συμπεράσματα και αποτελέσματα, αλλά και την δυνατότητά του να ανταπεξέρχεται σε μεγάλο αριθμό ομάδων δεδομένων με συγκεκριμένο βαθμό ακρίβειας (Jeske *et al.*, 2005).

Η εμπειρική ερευνητική δραστηριότητα αξιολόγησης μεθόδων/λογισμικού προσφέρει ισχυρά συμπεράσματα και υποστηρίζει τους χρήστες στις επιλογές τους για το χειρισμό υπαρκτών προβλημάτων. Σύμφωνα με τους Despotis, Siskos και Yannacopoulos (1991) οι εμπειρικές μελέτες σε αυτό τον τομέα ακολουθούν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις:

(α) Συγκριτική αξιολόγηση μεθόδων/λογισμικού σε μια ομάδα προκαθορισμένων κριτηρίων, και

(β) Έλεγχοι για την απόδοση μιας συγκεκριμένης μεθόδου/λογισμικού για τη διάκριση και αξιολόγηση των χαρακτηριστικών της ιδιοτήτων

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η διεξαγωγή ενός πειράματος αναφορικά με την αξιολόγηση μιας συγκεκριμένης μεθόδου/λογισμικού μπορεί να οδηγήσει σε έντονη κριτική για την υπό αξιολόγηση μέθοδο. Τέτοιο παράδειγμα κριτικής που αφορά στην Analytic Hierarchy Process (AHP), παρουσιάζεται από τους Bana e Costa και Vansnick (2006).

Η υλοποίηση διαδικασιών ελέγχου ενός εργαλείου ανάλυσης δεδομένων απαιτεί σύνολα δεδομένων τα οποία μπορούν να υποστηρίξουν διαφορετικά υποθετικά σενάρια. Τέτοιες περιπτώσεις ελέγχου απαιτούν ρεαλιστικές ομάδες δεδομένων, που τις περισσότερες φορές δεν είναι άμεσα διαθέσιμες, λόγω θεμάτων προσωπικών δεδομένων ή θεμάτων περιορισμένης πρόσβασης ή επειδή η συγκέντρωση των διαφορετικών δεδομένων είναι επίπονο και κοστοβόρο έργο (Jeske *et al.*, 2005).

Έτσι αρκετές φορές ένας ερευνητής μπορεί να υποχρεωθεί να "γεννήσει" αρκετές διαφορετικές ομάδες δεδομένων ελέγχου για να πάρει μια ιδέα της συμπεριφοράς συγκεκριμένων αλγορίθμων σε διαφορετικές συνθήκες.

Τα σύνολα τεχνητών δεδομένων μπορούν επίσης να βοηθήσουν τον ερευνητή να προχωρήσει με κάποιου είδους συγκριτική ανάλυση (benchmarking) ανάμεσα σε δύο ή περισσότερα διαφορετικά μοντέλα ή μεταξύ ενός μοντέλου και των διαφορετικών του εκδόσεων (Lozier, 1997).

Οι Γρηγορούδης και Σίσκος (2002) προχώρησαν για παράδειγμα σε σύγκριση ανάμεσα στην μέθοδο MUSA και Logit-Probit. Για αυτή τη σύγκριση 16 περιπτώσεις ελέγχου εφαρμόστηκαν με τη χρήση ομάδων τεχνητών (συνθετικών) δεδομένων. Κατά τη διαδικασία αυτή τα δύο μοντέλα συγκρίθηκαν με τη βοήθεια συγκεκριμένων παραγόντων-μέτρων αξιοπιστίας.

## 7.2 Γεννήτριες Τεχνητών Δεδομένων

Ένα σημαντικό μέρος της διαδικασίας δοκιμής και ελέγχου λογισμικού και μεθόδων ανάλυσης δεδομένων είναι η δημιουργία τεχνητών δεδομένων τα οποία χρησιμοποιούνται για να υλοποιηθούν διαδικασίες δοκιμών. Τα τεχνητά δεδομένα πρέπει να έχουν παρόμοιες ιδιότητες με τα πραγματικά.

Για την δημιουργία αυτών των δεδομένων χρησιμοποιούνται προγράμματα που ονομάζονται *Γεννήτριες Τεχνητών Δεδομένων (Data Generators)*. Αυτή η προσέγγιση επιτρέπει τη δημιουργία δεδομένων με χρήση διαφορετικών συναρτήσεων. Επιπρόσθετα, τα σετ των δεδομένων θα πρέπει να ανταποκρίνονται σε διαφορετικούς βαθμούς δυσκολίας του προβλήματος καθώς και σε διαφορετικές ρυθμίσεις που δύνανται να γίνουν κατά τη χρήση του προς έλεγχο λογισμικού.

Τα παραγόμενα συνθετικά δεδομένα επιτρέπουν τη σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων που επιστρέφονται από τη γεννήτρια, με χρήση των συνθετικών δεδομένων, και με τα αποτελέσματα αναφοράς που παράγονται από το προς έλεγχο λογισμικό με τη χρήση των ίδιων δεδομένων. Η σύγκριση γίνεται με αντικειμενικό τρόπο με τη χρήση μεθόδων μέτρησης της ποιότητας που λαμβάνουν υπόψη τις απόλυτες διαφορές μεταξύ των δοκιμαστικών και των αποτελεσμάτων αναφοράς, την υπολογισμένη ακρίβεια του hardware και το «βαθμό δυσκολίας» των συνθετικών σετ δεδομένων (Cox & Harris, 1998).

Το λογισμικό που είναι υπό δοκιμή αναλαμβάνει να υλοποιήσει έναν αλγόριθμο και να επιτύχει ένα δεδομένο υπολογιστικό σκοπό. Η βάση της συγκεκριμένης προσέγγισης είναι ο σχεδιασμός και η χρήση συνθετικών σετ δεδομένων αναφοράς για να περάσουν με επιτυχία το τεστ του “μαύρου κουτιού” του λογισμικού. Ως «μαύρο κουτί» του λογισμικού θεωρούμε το κομμάτι του κώδικα το οποίο εκτελεί τη βασική υπολογιστική διαδικασία επεξεργασίας κάποιων δεδομένων. Τα σετ δεδομένων αναφοράς δημιουργούνται με ένα είδος συνέπειας προς τον δεδομένο υπολογιστικό σκοπό του λογισμικού. Σύμφωνα με το Εθνικό Εργαστήριο Μετρήσεων της Μεγάλης Βρετανίας (National Measurement Laboratory, 2006) υπάρχουν δυο τρόποι χρήσης των Γεννητριών Δεδομένων οι οποίοι αναλύονται παρακάτω:

### Τρόπος 1 - Δημιουργία σετ δεδομένων σε αντιστοιχία με τα αποτελέσματα αναφοράς:

Ο χρήστης ορίζει τιμές σαν παραμέτρους στη γεννήτρια οι οποίες ορίζουν τα αποτελέσματα αναφοράς καθώς και άλλες ιδιότητες των δεδομένων αναφοράς. Η γεννήτρια δεδομένων καλείται να δημιουργήσει ένα σετ δεδομένων που ανταποκρίνεται στα ζητούμενα αποτελέσματα αναφοράς χρησιμοποιώντας και άλλες πληροφορίες απαραίτητες για τον υπολογισμό των μέτρων απόδοσης. Με αυτόν τον τρόπο ο χρήστης είναι σε θέση να εξασφαλίσει ένα σετ δεδομένων το οποίο να μιμείται ένα πραγματικό σύνολο δεδομένων και για το οποίο σετ δεδομένων τα αποτελέσματα αναφοράς είναι γνωστά.



Αυτός ο τρόπος χρήσης της γεννήτριας δεδομένων, με τον οποίο τα αποτελέσματα αναφοράς είναι τμήμα των εξερχόμενων μαζί με τα συνθετικά δεδομένα, συνήθως είναι χρήσιμος σε πρώιμα στάδια δοκιμής του λογισμικού. Με αυτό τον τρόπο χρήσης, οι μετρήσεις ποιότητας και απόδοσης γίνονται από τον χρήστη χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που του παρέχονται.

Τρόπος 2 - Δημιουργία σετ δεδομένων αλλά όχι αποτελεσμάτων αναφοράς: Σύμφωνα με το δεύτερο τρόπο ο χρήστης εισάγει τιμές σαν εισερχόμενες παραμέτρους οι οποίες ορίζουν τις ιδιότητες του σετ δεδομένων. Ωστόσο, ακολουθώντας αυτό τον τρόπο η γεννήτρια δεδομένων παρέχει σαν μοναδικό εξερχόμενο ένα σετ δεδομένων. Τα αποτελέσματα αναφοράς δεν παρέχονται σαν εξερχόμενα της γεννήτριας. Για να αποκτηθούν δοκιμαστικά αποτελέσματα, το λογισμικό δημιουργεί τα δεδομένα και τότε ο χρήστης μπορεί να φορτώσει τα δοκιμαστικά αποτελέσματα στο υπό αξιολόγηση λογισμικό για τον υπολογισμό της απόδοσης.

Αυτός ο τρόπος χρήσης της γεννήτριας δεδομένων, με τον οποίο τα αποτελέσματα δεν είναι μέρος των εξερχόμενων, αλλά οι παράμετροι απόδοσης μπορούν να υπολογιστούν μέσω της γεννήτριας, παρέχει τη δυνατότητα ανεξάρτητων δοκιμών για το λογισμικό.

Και με τους δυο τρόπους, η δυνατότητα να δημιουργηθούν σετ δεδομένων τα οποία να είναι αντιπροσωπευτικά αυτών που πιθανώς να αντιτίθενται στην πράξη είναι σημαντική προκειμένου να εγκαθιδρυθούν «έλεγχοι κατά περίπτωση» για το υπό δοκιμή λογισμικό. Αν και το επιστημονικό λογισμικό χρησιμοποιείται ευρέως, είναι σπάνια δοκιμασμένο με αντικειμενικό και αμερόληπτο τρόπο. Μερικές προσεγγίσεις για διαδικασίες δοκιμών λογισμικού έχουν αναπτυχθεί, όμως, σε διαφορετικές περιοχές έρευνας. Αυτές αναφέρονται σε προσωπικό λογισμικό το οποίο χρησιμοποιείται απευθείας από τους επιστήμονες ή σαν κομμάτι πακέτων λογισμικού που χρησιμοποιούνται σε διάφορες επιστήμες (Butler *et al.*, 1996; Lozier, 1997; Rogers *et al.*, 2003; Van Snyder, 1997; Varga & Bunke, 2003).

### 7.3 Στόχοι της γεννήτριας δεδομένων

Όταν ένας ερευνητής επιλέξει ένα εργαλείο για να αναλύσει τα δεδομένα του, είτε αποδέχεται πλήρως είτε δεν αποδέχεται την αξιοπιστία αυτού του λογισμικού και των αντίστοιχων μοντέλων. Πολλά μοντέλα περιλαμβάνουν διάφορα είδη μέτρων για την αξιοπιστία των παρεχόμενων αποτελεσμάτων τα οποία βοηθούν τον ερευνητή να αποδεχθεί μια λύση ή να προσπαθήσει να εκτελέσει την διαδικασία ξανά, πιθανώς δίνοντας διαφορετικές τιμές στις παραμέτρους.

Στην μέθοδο MUSA η αποτίμηση της αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων σχετίζεται με τους ακόλουθους ποσοτικούς δείκτες (Grigoroudis & Siskos, 2002):

- το μέσο δείκτη προσαρμογής και το μέσο δείκτη πρόβλεψης επιπέδου που μετράνε το βαθμό προσαρμογής του μοντέλου στα δεδομένα του προβλήματος αξιολόγησης της ικανοποίησης πελατών (Average Fitting Index – *AFI* and Overall Prediction Level – *OPL*),
- το μέσο δείκτη ευστάθειας που μετράει την ευστάθεια των αποτελεσμάτων της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης (Average Stability Index – *ASI*).

Έχει ήδη αναφερθεί στο Κεφάλαιο 5 ότι μια σημαντική εργασία στη μέθοδο MUSA είναι η επιλογή από τον ερευνητή των κατάλληλων κατά περίπτωση τιμών για τις παραμέτρους:  $\gamma$  (το ελάχιστο βήμα αύξησης των συναρτήσεων ολικής και μερικής ικανοποίησης) και  $\epsilon$  (μία μικρή -πρακτικά αμελητέα- προκαθορισμένη θετική ποσότητα που χρησιμοποιείται στη διαδικασία της μεταβελτιστοποίησης). Αυτή η επιλογή επιδρά άμεσα στην ποιότητα των παραπάνω δεικτών.

Πολυάριθμες υλοποιήσεις του μοντέλου για ανάλυση δεδομένων από πραγματικές μετρήσεις ικανοποίησης πελατών χρησιμοποιούνται για την τεκμηρίωση της αξιοπιστίας του μοντέλου (Grigoroudis & Siskos, 2004; Mihelis *et al.*, 2001; Politis & Siskos, 2004; Siskos *et al.*, 2005). Σε κάθε μια από αυτές τις υλοποιήσεις, επιλέγονται διαφορετικά σύνολα από κριτήρια, χρησιμοποιούνται διαφορετικά ερωτηματολόγια για να εξαχθούν αποτελέσματα πάνω σε διαφορετικούς πληθυσμούς και πάνω σε παραδείγματα με διαφορετικές παραμέτρους. Η διαφορετικότητα των εισερχόμενων δεδομένων οδηγεί σε διαφορετικά επίπεδα τους δείκτες αξιοπιστίας.

Προκειμένου να μελετηθεί εξαντλητικά η επίδραση των εισερχόμενων δεδομένων στην αξιοπιστία του μοντέλου, καθώς και διαφορετικών εκδόσεων του ίδιου μοντέλου ή διαφορετικών μοντέλων, ανάγκη που υπάρχει στο ΣΥΑ του Κεφαλαίου 6, ένας μεγάλος αριθμός από δοκιμαστικές περιπτώσεις για το ίδιο πρόβλημα (ίδια κριτήρια, ίδια επίπεδα ικανοποίησης, ίδιο πληθυσμό) θα πρέπει να εκτελεσθεί. Σε αυτές τις δοκιμαστικές περιπτώσεις διαφορετικά επίπεδα στην κλίμακα ικανοποίησης όπως επίσης και μεγέθη δείγματος πρέπει να δοκιμασθούν. Επιπροσθέτως, ένα μεγάλο εύρος από τιμές για τις παραμέτρους πρέπει να επιλεγεί. Αυτές οι δοκιμαστικές περιπτώσεις χρειάζονται ένα μεγάλο πλήθος από δεδομένα. Όμως, είναι αρκετά δύσκολο να βρεθούν και να χρησιμοποιηθούν πραγματικά σύνολα δεδομένων. Ακόμα, είναι δυσκολότερο να βρεθεί ένα ικανοποιητικό φάσμα από σύνολα δεδομένων διαφορετικής ποιότητας για να μπορεί να γίνει σύγκριση της ανάλυσης των αποτελεσμάτων. Η λύση σε αυτό το πρόβλημα είναι η δημιουργία τεχνητών δεδομένων χρησιμοποιώντας γεννήτρια δεδομένων.

Τα τεχνητά δεδομένα μπορούν να διαδραματίσουν έναν σημαντικό ρόλο στην αποτίμηση της MUSA. Στις προτιμώμενες μεθόδους ανάλυσης ικανοποίησης η περιγραφή της συμπεριφοράς του πελάτη απορρέει από τα παραγόμενα σύνολα αποτελεσμάτων. Η μέθοδος MUSA παρέχει μια ολική συνάρτηση  $Y^*$ , και ένα σύνολο από μερικές συναρτήσεις ικανοποίησης  $X_i^*$  που έχουν σχέση με τις απόψεις των πελατών. Θα ήταν χρήσιμο για τον ερευνητή να θεωρεί εκ των προτέρων κάποια χαρακτηριστικά για την συμπεριφορά κάποιων υποθετικών πελατών, να παράγει τεχνητά δεδομένα ικανοποίησης για τους υποθετικούς αυτούς πελάτες ως απαντήσεις σε ερωτηματολόγια και στη συνέχεια να μπορεί να ελέγχει αν τα παραγόμενα αποτελέσματα της επιλεγμένης μεθόδου επαληθεύουν τα χαρακτηριστικά αυτά.

#### 7.4 Περιγραφή της γεννήτριας δεδομένων

Ο σκοπός ήταν να αναπτυχθεί μία γεννήτρια συνόλου δεδομένων για τον έλεγχο των διαδικασιών “μαύρου κουτιού” ο οποίος να ικανοποιεί τις απαιτήσεις ελέγχου λογισμικού και μεθόδου που περιγράφηκαν παραπάνω. Χρησιμοποιήθηκε η προσέγγιση του τρόπου 2 που περιγράφηκε παραπάνω στην § 7.2. Σύμφωνα με αυτόν τον τρόπο η γεννήτρια δεδομένων έχει σαν μόνο εξερχόμενο ένα σύνολο δεδομένων και όχι κάποια δοκιμαστικά αποτελέσματα. Ο χρήστης της γεννήτριας ορίζει κάποιες μεταβλητές σαν εισερχόμενες παραμέτρους που καθορίζουν τις ιδιότητες του συνόλου δεδομένων.

Ακολουθώντας τις Monte Carlo τεχνικές προσομοίωσης, παράγονται πραγματικά σύνολα δεδομένων, τα οποία βασίζονται στην αναλυτική - συνθετική προσέγγιση (aggregation-disaggregation). Αυτά τα σύνολα δεδομένων έχουν κάποιες ιδιότητες σύμφωνα με το σενάριο που ο χρήστης θέλει να υλοποιηθεί. Η γεννήτρια του συνόλου δεδομένων ακολουθεί μια διαδικασία που αποτελείται από πέντε βήματα:

##### **Βήματα 1, 2 & 3: Σχεδιασμός σεναρίου – Ορισμός παραμέτρων**

Σε αυτά τα τρία αρχικά βήματα ο ερευνητής καλείται να ορίσει μερικά από τα βασικά χαρακτηριστικά των δεδομένων της μεθόδου MUSA που θα δημιουργηθούν. Αναπτύσσεται ένα συνολικό σενάριο το οποίο περιλαμβάνει τα κριτήρια, τα οποία ακολουθούν τη δομή δένδρου και τις κλίμακες ικανοποίησης. Σύμφωνα με το μοντέλο, κάθε πελάτης καλείται να εκφράσει τις προτιμήσεις του, δηλαδή την ολική ικανοποίηση και την μερική ικανοποίησή του για κάθε κριτήριο ξεχωριστά, επιλέγοντας το κατάλληλο επίπεδο σε μια κλίμακα ικανοποίησης.

Οι αρχικές παράμετροι που ορίζονται στον γεννήτορα δεδομένων είναι:

- $n$ : αριθμός κριτηρίων ικανοποίησης. Ο χρήστης μπορεί να δώσει ακέραιους αριθμούς.
- $a$ : αριθμός των επιπέδων στην κλίμακα ολικής ικανοποίησης. Ο χρήστης μπορεί να τροποποιήσει τα προεπιλεγμένα ονόματα για τα επίπεδα.
- $a_i$ : αριθμός επιπέδων στην κλίμακα ικανοποίησης για κάθε κριτήριο  $i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ).

Μπορούν επίσης σε αυτό το σημείο να δοθούν τα απαραίτητα στοιχεία για υποκριτήρια.

#### **Βήμα 4: Δημιουργία Συναρτήσεων Ικανοποίησης**

Ένα σύνολο συναρτήσεων ικανοποίησης (ολικής ικανοποίησης και μερικής ικανοποίησης για κάθε κριτήριο) δημιουργείται αλληλεπιδραστικά. Ο χρήστης μπορεί προαιρετικά να ορίσει τα επίπεδα απαιτητικότητας  $D$  και  $D_i$  για τους πελάτες όπως επίσης και τα βάρη  $b_i$  για κάθε κριτήριο. Εναλλακτικά το πρόγραμμα μπορεί να δημιουργήσει τις συναρτήσεις χωρίς κανένα περιορισμό. Και στις δυο περιπτώσεις χρησιμοποιείται μια Monte Carlo προσομοίωση για τη δημιουργία των  $y^{*k}$  και  $x_i^*$  τιμών ακολουθώντας ομοιόμορφη κατανομή ( $\sim U(a,b)$ ).

Συγκεκριμένα, σε αυτό το επίπεδο ο χρήστης καλείται να ορίσει τις παρακάτω παραμέτρους:

- $D$  (προαιρετικά): ολικό επίπεδο απαιτητικότητας παίρνοντας τρεις διαφορετικές τιμές (Απαιτητικός, Κανονικός, Μη-Απαιτητικός).
- $D_i$  (προαιρετικά): μερικό επίπεδο απαιτητικότητας παίρνοντας τρεις διαφορετικές τιμές, όπως παραπάνω, για κάθε  $i$ -οστό κριτήριο.
- $b_i$  (προαιρετικά): το βάρος για το  $i$ -οστό κριτήριο.
- $\gamma$  (προαιρετικά): ελάχιστο βήμα κατά το οποίο αυξάνει η συνάρτηση ολικής ικανοποίησης ( $\gamma \leq 100/2*(\alpha-1)$ ).
- $\gamma_i$  (προαιρετικά): ελάχιστο βήμα κατά το οποίο αυξάνουν οι συναρτήσεις μερικής ικανοποίησης για κάθε κριτήριο και υποκριτήριο  
( $\gamma_i \leq \min \left\{ \frac{100}{2 * (a_i - 1)} \forall i = 1, \dots, n \right\}$ ).

Οι συναρτήσεις δημιουργούνται ακολουθώντας τους κανόνες μονοτονίας και κανονικοποιούνται στο διάστημα  $[0,100]$ . Αρχικά δημιουργείται η συνάρτηση ολικής ικανοποίησης  $Y^*$ . Η δημιουργία τυχαίων αριθμών  $y^{*m}$  (όπου  $y^m$  είναι η τιμή του επιπέδου ικανοποίησης) ικανοποιεί το ακόλουθο σύνολο περιορισμών:

$$\begin{cases}
 y^{*1} = 0 \\
 y^{*a} = 100 \\
 \\
 \text{If } D \text{ has been given then} \\
 \quad \text{Generate } y^{*\text{int}[(a+1)/2]} \\
 \quad \text{if } D: \text{ Demanding then } y^{*\text{int}[(a+1)/2]} \sim U(0 + [(a-1)/2]\gamma, 33) \\
 \quad \text{if } D: \text{ Neutral then } y^{*\text{int}[(a+1)/2]} \sim U(33, 66) \\
 \quad \text{if } D: \text{ Non-Demanding then } y^{*\text{int}[(a+1)/2]} \sim U(66, 100 - [(a-1)/2]\gamma) \\
 \quad \text{Generate } y^{*m} \text{ for } m = a-1, \dots, 3, 2 \\
 \quad \text{for } m > (\text{int}[a+1]/2): y^{*m} \sim U(y^{*\text{int}[(a+1)/2]} + (m - \text{int}[(a+1)/2])\gamma, y^{*m+1} - \gamma) \\
 \quad \text{for } m = (\text{int}[a+1]/2): y^{*m} = y^{*\text{int}[(a+1)/2]} \\
 \quad \text{for } m < (\text{int}[a+1]/2): y^{*m} \sim U((m-1)\gamma, y^{*m+1} - \gamma) \\
 \text{else} \\
 \quad \text{Generate } y^{*m} : y^{*m} \sim U((m-1)\gamma, y^{*m+1} - \gamma) \text{ for } m = a-1, \dots, 3, 2
 \end{cases}$$

**Εικόνα 7-1:** Δημιουργία συνάρτησης ολικής ικανοποίησης

Μετά τη δημιουργία της συνάρτησης ολικής ικανοποίησης ο χρήστης μπορεί να αλλάξει κάποιες από τις τιμές  $y^{*m}$  της συνάρτησης που επιθυμεί χωρίς να παραβιάσει τους παραπάνω κανόνες.

Το επόμενο στάδιο είναι η δημιουργία των μερικών συναρτήσεων ικανοποίησης σύμφωνα με την αναλυτική – συνθετική προσέγγιση. Η δημιουργία των τυχαίων αριθμών  $x_i^{*k}$  (όπου  $x_i^k$  είναι η τιμή του επιπέδου ικανοποίησης) ικανοποιεί το ακόλουθο σύνολο περιορισμών. Για την δημιουργία αυτών των αριθμών χρησιμοποιούνται προσωρινές μεταβλητές  $tx_i^m$ .

If  $b_i$  were not given then Generate  $b_i: b_i \sim U(0,100)$  for  $i=1, 2, \dots, n$

$$b_i = \frac{b_i}{\sum_{i=1}^n b_i}$$

$tx_i^{*1} = 0$  for  $i=1, 2, \dots, n$

$tx_i^{*a} = 100$  for  $i=1, 2, \dots, n$

$\forall i = 1, 2, \dots, n$  (generation of values)

If  $D_i$  has been given

Generate  $tx_i^{*\text{int}[(a+1)/2]}$

if  $D_i$ : Demanding then  $tx_i^{*\text{int}[(a+1)/2]} \sim U(0 + [(a-1)/2]\gamma_i, 33)$

if  $D_i$ : Neutral then  $tx_i^{*\text{int}[(a+1)/2]} \sim U(33, 66)$

if  $D_i$ : Non-Demanding then  $tx_i^{*\text{int}[(a+1)/2]} \sim U(66, 100 - [(a-1)/2]\gamma_i)$

Generate  $tx_i^{*m}$  for  $m = a-1, \dots, 3, 2$

for  $m > (\text{int}[a+1]/2)$ :  $tx_i^{*m} \sim U(tx_i^{*\text{int}[(a+1)/2]} + (m - \text{int}[(a+1)/2])\gamma_i, tx_i^{*m+1} - \gamma_i)$

for  $m = (\text{int}[a+1]/2)$ :  $tx_i^{*m} = tx_i^{*\text{int}[(a+1)/2]}$

for  $m < (\text{int}[a+1]/2)$ :  $tx_i^{*m} \sim U((m-1)\gamma_i, tx_i^{*m+1} - \gamma_i)$

else

Generate  $tx_i^{*m} : tx_i^{*m} \sim U((m-1)\gamma_i, tx_i^{*m+1} - \gamma_i)$  for  $m = a-1, \dots, 3, 2$

(check the consistence of the partial satisfaction functions)

If  $\left| \sum_{i=1}^n b_i tx_i^{*m} - y^{*m} \right| < D_e \quad \forall m = 1, 2, \dots, a-1$  then

(calculation of  $x_i^{*k}$  as in relation to  $tx_i^{*m}$  by using linear interpolation)

$\forall i = 1, 2, \dots, n$

$x_i^{*1} = 0, \quad x_i^{*a} = 100$

$$x_i^{*k} = tx_i^{*\left[\text{int}\left(1+(k-1)\left(\frac{a-1}{a_i-1}\right)\right)\right]} + \left[1 + (k-1)\left(\frac{a-1}{a_i-1}\right) - \text{int}\left(1 + (k-1)\left(\frac{a-1}{a_i-1}\right)\right)\right] *$$

$$\left[ tx_i^{*\left[\text{int}\left(1+(k-1)\left(\frac{a-1}{a_i-1}\right)\right)+1\right]} - tx_i^{*\left[\text{int}\left(1+(k-1)\left(\frac{a-1}{a_i-1}\right)\right)\right]} \right]$$

for  $k = 2, \dots, a_i-1$

else

generate again the values  $tx_i^{*m}$

Εικόνα 7-2: Δημιουργία μερικών συναρτήσεων ικανοποίησης

Μετά τη δημιουργία των συναρτήσεων μερικής ικανοποίησης ο χρήστης της γεννήτριας μπορεί να αναμορφώσει τις συναρτήσεις αλλάζοντας μερικές εκ των τιμών  $x_i^{*k}$  χωρίς να παραβιάζονται οι παραπάνω περιορισμοί.

### Βήμα 5: Δημιουργία συνόλου δεδομένων

Το σύνολο δεδομένων πρέπει να έχει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά τα οποία να βασίζονται στις συναρτήσεις ικανοποίησης που δημιουργήθηκαν στο Βήμα 4. Το κύριο θέμα είναι η δημιουργία συνεπών δεδομένων. Οπότε ζητείται η εξής παράμετρος:

- $D_{dis}$ : μέγιστη επιτρεπόμενη διαφορά (λάθος) για τις τιμές των συναρτήσεων ικανοποίησης [0...100%].

Η τιμή της παραμέτρου  $D_{dis}$  είναι υπεύθυνη για την ποιότητα και την ορθότητα των αποτελεσμάτων που πρόκειται να δημιουργηθούν. Μια μικρή τιμή για την  $D_{dis}$  πλησιάζει περισσότερο τα χαρακτηριστικά ενός ομοιογενούς δείγματος, αλλά στην πραγματικότητα τα ομοιογενή δείγματα είναι σπάνια.

Η γενική υπόθεση της ομοιόμορφης κατανομής δεν μειώνει την αξιοπιστία της γεννήτριας επειδή στις πραγματικές περιπτώσεις οι απαντήσεις δεν ακολουθούν μια ορισμένη στατιστική κατανομή. Στο σημείο αυτό δίνεται η παράμετρος  $M$  που δηλώνει το μέγεθος του δείγματος. Το σύνολο  $M$  των απαντήσεων για κάθε κριτήριο δημιουργείται ακολουθώντας τους παρακάτω κανόνες:

For  $c = 1, 2, 3, \dots, M$   
 Generate the answers of the  $c$  customer simulating his/her satisfaction on the  $n$  criteria  
 $(v_1^c, v_2^c, \dots, v_n^c) : v_i^c \sim U(1, a_i) \quad \forall i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

If  $\exists k : \left| \sum_{i=1}^n b_i x_i^{v_i^c} - y^{*k} \right| \leq D_{dis}$  then  
 $(v_1^c, v_2^c, \dots, v_n^c)$  is accepted and  $y^{c^*m}$  is calculated  
 $\left| \sum_{i=1}^n b_i x_i^{v_i^c} - y^{c^*m} \right| = \min_k \left| \sum_{i=1}^n b_i x_i^{v_i^c} - y^{*k} \right|$

else  
 $(v_1^c, v_2^c, \dots, v_n^c)$  is rejected and the answers of the  $c$  customer shall be generated again.

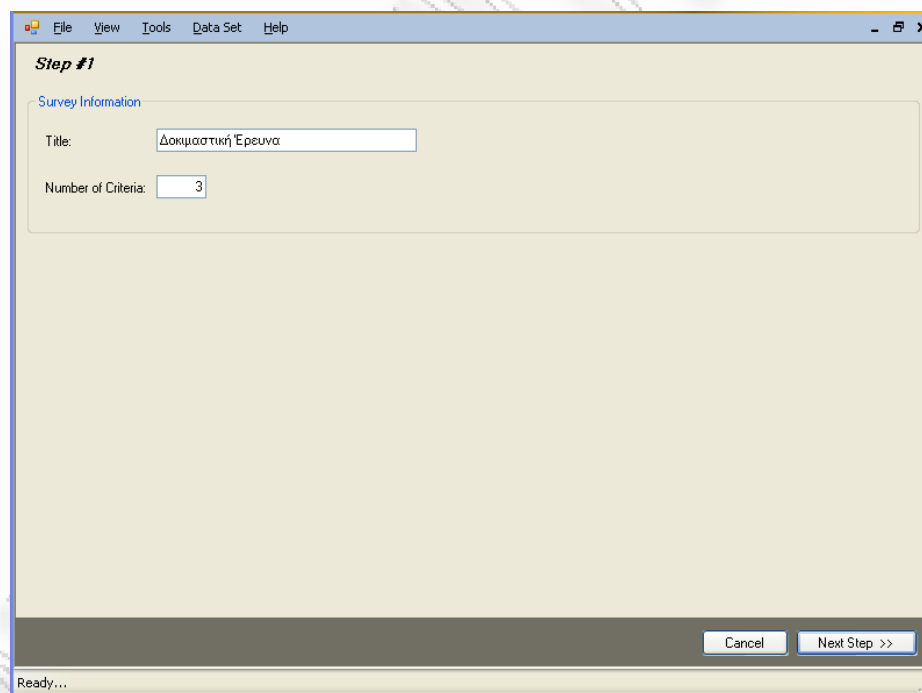
Εικόνα 7-3: Δημιουργία συνόλου δεδομένων

## 7.5 Λογισμικό γεννήτριας δεδομένων

Στη συνέχεια ακολουθεί η παρουσίαση του λογισμικού που δημιουργήθηκε βασιζόμενο στην παραπάνω μέθοδο. Η υλοποίηση του προγράμματος έγινε στο Microsoft Visual Studio .NET με χρήση της γλώσσας προγραμματισμού C# και το οποίο στη συνέχεια ενσωματώθηκε στο ΣΥΑ του Κεφαλαίου 6, κάτω από το menu “Tools”.

Στην τελική μορφή του λογισμικού υπάρχει μια κύρια φόρμα που περιέχει το menu επιλογών και το statusbar. Κάθε νέα φόρμα που περιέχει τις λειτουργίες της γεννήτριας, ανοίγει μέσα σε αυτή την κύρια φόρμα.

Η δημιουργία ενός νέου σεναρίου (έρευνας) γίνεται σε πέντε βήματα όπως αποτυπώνεται και στο παρακάτω παράδειγμα:



**Εικόνα 7-4:** 1<sup>ο</sup> Βήμα Γεννήτριας Δεδομένων

Στο πρώτο βήμα ορίζονται τα κριτήρια ( $n=3$ ) και το όνομα της έρευνας («Δοκιμαστική Έρευνας»).

Στο δεύτερο βήμα ορίζονται τα ονόματα των κριτηρίων και ο αριθμός των υποκριτηρίων εφόσον επιθυμούμε τη δημιουργία και υποκριτηρίων.



## Κεφάλαιο 7: Γεννήτρια Συνόλων Δεδομένων για Έρευνες Ικανοποίησης

Στο τρίτο βήμα ορίζεται ο αριθμός των επιπέδων ικανοποίησης ( $\alpha=\alpha_i=5$ ) και το λεκτικό τους για κάθε κριτήριο/υποκριτήριο.

**Step #2**

Survey Structure

- Total Satisfaction
  - Κριτήριο 1
  - Κριτήριο 2
  - Κριτήριο # 3

Edit Criteria/Subcriteria

Criterion Title:

Number of Subcriteria:

Expand Quest  
 Collapse Quest

Ready...

Εικόνα 7-5: 2<sup>ο</sup> Βήμα Γεννήτριας Δεδομένων

**Step #3**

Survey Structure

- Total Satisfaction
  - Κριτήριο 1
  - Κριτήριο 2
  - Κριτήριο 3

Component's Satisfaction Levels

- Πολύ Δυσασραστημένος
- Δυσασραστημένος
- Ούτε Δυσασραστημένος / Ούτε Ικανοποιημένος
- Ικανοποιημένος
- Πολύ Ικανοποιημένος

Edit levels of quest components

Criterion Name: *Κριτήριο 1*

Number of Satisfaction Levels:

Edit levels names

Level Name:

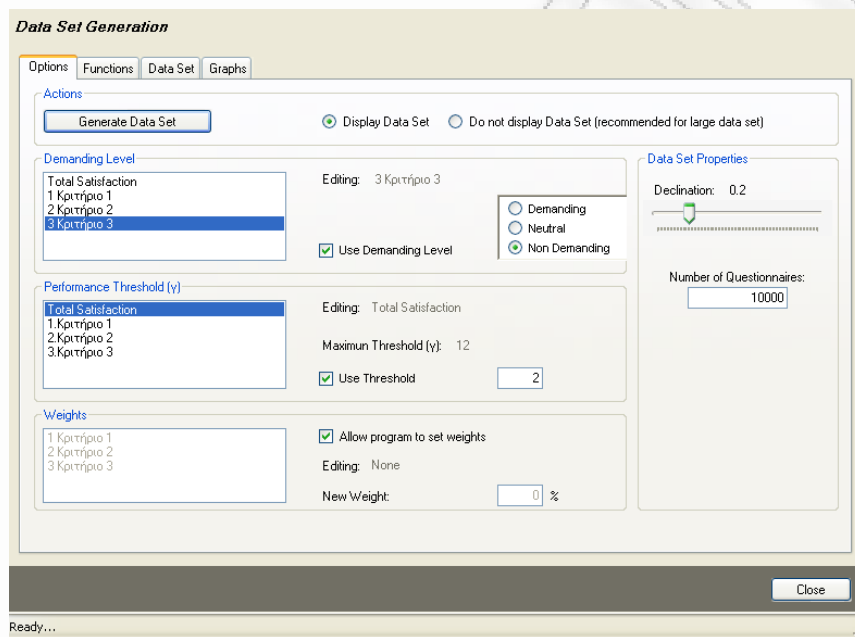
Ready...

Εικόνα 7-6: 3<sup>ο</sup> Βήμα Γεννήτριας Δεδομένων

## Κεφάλαιο 7: Γεννήτρια Συνόλων Δεδομένων για Έρευνες Ικανοποίησης

Στο τέταρτο βήμα δίνονται τα στοιχεία για τις συναρτήσεις  $b_i X_i$  με την βοήθεια των οποίων δημιουργούνται τα δεδομένα. Τα στοιχεία αυτά είναι: το ολικό επίπεδο απαιτητικότητας ( $D$ ), τα μερικά επίπεδα απαιτητικότητας ( $D_i$ ), τα ελάχιστα βήματα  $\gamma$  και  $\gamma_i$  και τα βάρη  $b_i$ . εφόσον ο χρήστης το επιθυμεί. Εναλλακτικά μπορεί να αφήσει ελεύθερο το σύστημα να καθορίσει τις τιμές αυτές με τυχαίο τρόπο.

Στο πέμπτο και τελευταίο βήμα δηλώνεται το μέγεθος  $M$  ( $M=10000$ ) του δείγματος και το μέγιστο επιτρεπόμενο λάθος  $D_{dis}$  ( $D_{dis}=0.2$ ) και προχωράμε στη γέννηση των δεδομένων.



Εικόνα 7-7: 4<sup>ο</sup> και 5<sup>ο</sup> Βήμα Γεννήτριας Δεδομένων

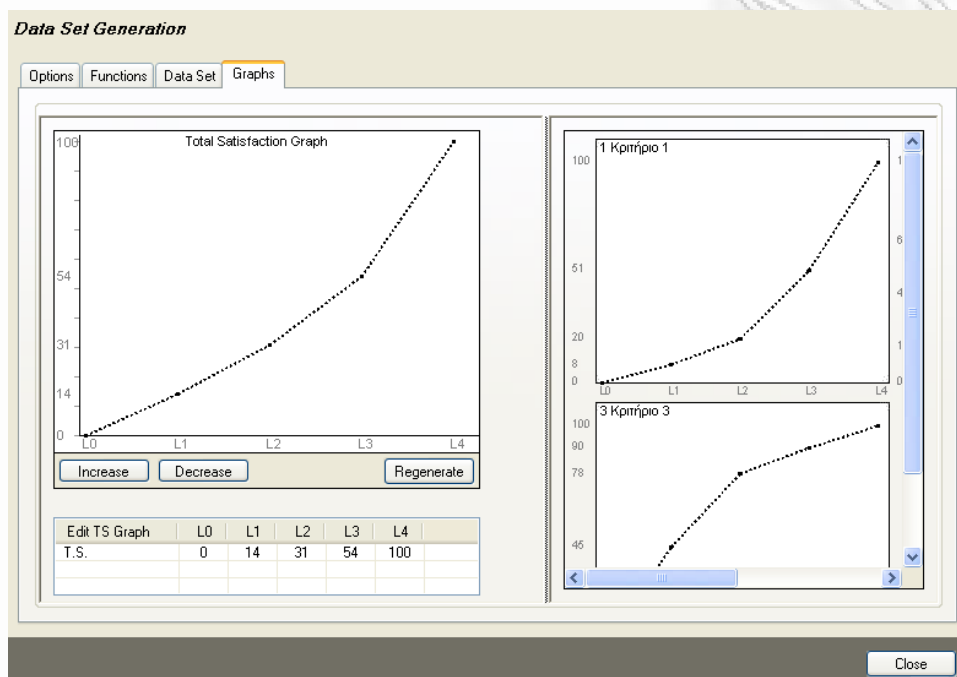
Η γέννηση των 10000 απαντημένων ερωτηματολογίων διήρκεσε λιγότερο από 5 sec.

The screenshot shows the 'Data Set Generation' dialog box with the 'Data Set' tab selected. It displays a table of generated data points:

Range	TS	C#1	C#2	C#3
1	4	4	3	2
2	3	2	2	3
3	4	3	4	4
4	1	2	1	0
5	3	3	1	3
6	3	4	3	0
7	3	1	2	1
8	3	0	3	1
9	3	0	0	2
10	3	0	1	3
11	3	2	2	1
12	3	2	2	3
13	3	2	2	2

Εικόνα 7-8: Γέννηση 10000 Εγγραφών

Μετά τη δημιουργία των συναρτήσεων ολικής και μερικής ικανοποίησης ο χρήστης της γεννήτριας μπορεί να προχωρήσει σε αλλαγή της μορφής των συναρτήσεων αυτών και να ζητήσει τη δημιουργία καινούργιων σετ δεδομένων.



**Εικόνα 7-9:** Τροποποίηση Συναρτήσεων Ικανοποίησης

Τα δεδομένα που παράγονται από τη γεννήτρια μπορούν να αποθηκευτούν με δυο τρόπους. Είτε σε Excel μορφή είτε στον MS SQL Server επιλέγοντας αντίστοιχα Save To Excel ή Save To SQL Server από το μενού Data.

### 7.6 Συμπεράσματα

Παρουσιάστηκε ένα ολοκληρωμένο πλαίσιο για τον έλεγχο μεθόδων και λογισμικού που βασίζονται στη θεωρία της αναλυτικής προσθετικής προσέγγισης, όπως είναι η μέθοδος και το λογισμικό MUSA. Η γεννήτρια σχεδιάστηκε σύμφωνα με τη φιλοσοφία των μοντέλων αναλυτικής προσθετικής προσέγγισης στην ανάλυση ικανοποίησης πελάτη και μπορεί με κατάλληλες προσαρμογές να χρησιμοποιηθεί για την αξιολόγηση διαφορετικών λογισμικών και μοντέλων που χρησιμοποιούν αυτή τη συγκεκριμένη προσέγγιση για την ανάλυση της συμπεριφοράς του καταναλωτή.

Η γεννήτρια παράγει ομάδες δεδομένων από απαντήσεις σε ερωτηματολόγια ικανοποίησης πελατών. Το εργαλείο επιτρέπει τη δημιουργία ερωτηματολογίων ζητώντας από τον ερευνητή να παράσχει τον αριθμό των κριτηρίων (και υποκριτηρίων) και τον αριθμό των διαφορετικών επιπέδων για τις ερωτήσεις ολικής και μερικής ικανοποίησης. Οι εξαγόμενες απαντήσεις συμφωνούν με ένα συγκεκριμένο προφίλ συμπεριφοράς πελάτη, το οποίο εκφράζεται από τις συναρτήσεις αξιών αναφορικά με την ολική και ανά κριτήριο ικανοποίηση.

Η γεννήτρια δεδομένων παράγει αυτές τις συναρτήσεις ακολουθώντας μια διαδραστική διαδικασία μέσω της οποίας ο ερευνητής μπορεί να ζητήσει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά για τις συναρτήσεις αξιών ολικής και μερικής ικανοποίησης. Μετά την οριστική επιλογή της μορφής των συναρτήσεων η γεννήτρια παράγει τις ομάδες δεδομένων των απαντήσεων. Το μέγεθος του δείγματος ορίζεται από τον ερευνητή ο οποίος μπορεί επίσης να αποφασίζει για το επίπεδο των αποδεκτών λαθών ανά εικονικό πελάτη. Οι εξαγόμενες ερωτήσεις αποθηκεύονται σε μια βάση δεδομένων και μπορούν να εξαχθούν σε διαφορετικές μορφές για επιπλέον χρήση στην MUSA ή άλλο λογισμικό.

Η γεννήτρια μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη υποστήριξη διαφορετικών διαδικασιών ελέγχου που θα βοηθήσουν τους ερευνητές να αξιολογήσουν τα αποτελέσματα της MUSA συγκριτικά με άλλες μεθόδους ή χρησιμοποιώντας μερικούς εσωτερικούς δείκτες. Αυτές οι διαδικασίες ελέγχου μπορούν επίσης να βοηθήσουν στην επιλογή των κατάλληλων τιμών για τις παραμέτρους  $\gamma$  και  $\epsilon$ , κάτι που ενδιαφέρει τους χρήστες του ΣΥΑ που αναπτύχθηκε στην παρούσα διατριβή.

Η γεννήτρια είναι φιλική προς τον χρήστη επιτρέποντας υψηλού επιπέδου διάδραση σε όλα τα στάδια, δίνοντας στον ερευνητή την δυνατότητα να περιγράψει κάθε σενάριο με λεπτομέρειες και με σαφήνεια.

Μερικές μελλοντικές βελτιώσεις αναφορικά με τη γεννήτρια δεδομένων σχετίζονται με τη δυνατότητα επιλογής άλλων κατανομών, εκτός από την ομοιόμορφη, για τη διαδικασία της Monte Carlo προσομοίωσης και αφήνοντας το χρήστη να επιλέξει τις τιμές των παραμέτρων για κάθε κατανομή.

Η γεννήτρια στην μορφή που παρουσιάστηκε στο παρόν Κεφάλαιο χρησιμοποιείται στο αμέσως επόμενο για την γέννηση σημαντικού αριθμού συνόλων τεχνητών δεδομένων με στόχο τη χρήση τους στο ΣΥΑ για την αξιολόγηση των εναλλακτικών μεθόδων μεταβελτιστοποίησης που παρέχει. Τέλος, η γεννήτρια ενσωματώθηκε στο ΣΥΑ ώστε τα συνθετικά δεδομένα να φορτώνονται απ' ευθείας προς επίλυση και μελέτη.

## Κεφάλαιο 8: Πειράματα με τεχνητά δεδομένα

Στο Κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται μια εμπειρική αξιολόγηση των μεθόδων μεταβελτιστοποίησης μέσω του ΣΥΑ με χρήση συνόλων συνθετικών δεδομένων που παράγει η γεννήτρια.

Στα συμπεράσματα της αξιολόγησης των διαφορετικών μεθόδων καταγράφεται η πολύ καλή προσέγγιση των αποτελεσμάτων των ευρετικών μεθόδων σε σύγκριση με αυτά των αναλυτικών μεθόδων. Με δεδομένο μάλιστα τον ελάχιστο υπολογιστικό φόρτο που απαιτούν είναι σαφές ότι αποτελούν την καλύτερη επιλογή για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων ανάλυσης ικανοποίησης πελάτη.

Σε ότι αφορά στις αναλυτικές μεθόδους τα πειράματα ανέδειξαν την υπεροχή της μεθόδου «Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση» που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 3 σε σχέση με τις άλλες δύο αναλυτικές μεθόδους.

## 8.1 Εισαγωγή

Η εμπειρική έρευνα αποτελεί σήμερα μια ικανοποιητική μέθοδο, ίσως τη μόνη, για τη σύγκριση εναλλακτικών προσεγγίσεων του ίδιου προβλήματος (Κοΐλιας, 2006). Σε αυτό το Κεφάλαιο γίνεται μια συγκριτική ανάλυση των 3 αναλυτικών (Manas-Nedoma, Αντίστροφη Simplex, Ρεαλιστική Προσέγγιση) και 3 ευρετικών αλγορίθμων (Γενικευμένο MUSA, MUSA I, MUSA III) μεταβελτιστοποίησης που παρουσιάστηκαν στην παρούσα διατριβή.

Η συγκριτική ανάλυση εναλλακτικών μεθόδων ανάλυσης δεδομένων που προέρχονται από τη διεξαγωγή ερευνών ικανοποίησης βασίζεται στο σχεδιασμό και την εφαρμογή μιας συγκεκριμένης πειραματικής διαδικασίας, η οποία έχει ως κύριο στόχο τη δημιουργία ενός τυχαίου συνόλου δεδομένων με προκαθορισμένες ιδιότητες. Η πειραματική αυτή διαδικασία αυτή στηρίζεται στη βασική υπόθεση ότι οι κρίσεις και η συμπεριφορά των πελατών μπορούν να εξηγηθούν με βάση ένα σαφώς καθορισμένο σύνολο συναρτήσεων αξιών πάνω σε ένα σύνολο κριτηρίων ικανοποίησης (Κοΐλιας, 2006).

Τα 6 υπό αξιολόγηση μοντέλα εκτελέστηκαν σε "τυχαία" δεδομένα που παρήχθησαν μέσω της γεννήτριας συνόλων δεδομένων που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο και έπειτα αξιολογήθηκαν οι επιδόσεις τους όσον αφορά:

- Στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων, που περιλαμβάνει τις μέσες τιμές των μεταβελτιστων λύσεων, τη διακύμανση μέσω της τυπικής απόκλιση των τιμών αυτών (δείκτης ASI) και το εύρος των τιμών αυτών (δείκτης WV<sub>i</sub>) καθώς και των τιμών των δεικτών αξιοπιστίας, AFI και OPL.
- Στον υπολογιστικό φόρτο, που περιλαμβάνει το χρόνο επίλυσης, τη χρήση RAM και τον αριθμό των περιστροφών της Simplex

Μέσω του ΣΥΑ επιλέχθηκε το σενάριο (i) Συγκριτική αξιολόγηση μεθόδων μεταβελτιστοποίησης, όπως αυτό περιγράφεται στο Σχήμα 6-2.

## 8.2 Τα πειράματα

Η διαδικασία των πειραμάτων ξεκίνησε με τη δημιουργία ερευνών με 5 έως 8 ερωτηματολόγια για τη σύγκριση των 6 εναλλακτικών αλγορίθμων μεταβελτιστοποίησης. Η εκκίνηση των πειραμάτων ξεκίνησε με τόσο χαμηλό αριθμό ερωτηματολογίων δεδομένου ότι ακόμα και για τόσο μικρές έρευνες τα δημιουργούμενα γραμμικά προγράμματα της μεθόδου MUSA έχουν τέτοιο αριθμό περιορισμών και μεταβλητών (βλ. Πίνακα 5-2) που οδηγούν σε υπερπολύεδρα με

## Κεφάλαιο 8: Πειράματα με τεχνητά δεδομένα

τεράστιο αριθμό κορυφών - λύσεων σύμφωνα με τη σχέση (1-2). Δημιουργήθηκαν 9 σύνολα δεδομένων για κάθε διαφορετικό πλήθος ερωτηματολογίων και το κάθε σύνολο διέφερε στον αριθμό των κριτηρίων και στο ελάχιστο βήμα  $\gamma$  (με  $\gamma_i = \gamma$ ). Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν 2 σύνολα (με κωδ. Π\_9 και Π\_10) που προέρχονται από το παράδειγμα της § 3.6 του βιβλίου των Γρηγορούδη & Σίσκου (2000). Σε όλα τα σύνολα των πειραμάτων έχουν χρησιμοποιηθεί 5 επίπεδα για την ολική ικανοποίηση και για την μερική ικανοποίηση κάθε κριτηρίου, με εξαίρεση τα σύνολα Π\_9, Π\_10, στα οποία έχουν χρησιμοποιηθεί 3 επίπεδα για την ολική ικανοποίηση και για την μερική ικανοποίηση κάθε κριτηρίου. Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά μερικών εκ των 36 συνόλων.

No	Πελάτες	Αριθμ. Κριτηρίων	$\gamma = \gamma_i$	Περιορισμοί	Μεταβλητές	Ανω Όριο Κορυφών (σχέση 1.2)
1	5	3	1	8	26	329,460
2	5	3	2	8	26	329,460
3	5	3	4	8	26	329,460
4	5	5	1	8	34	1,817,046
5	5	5	2	8	34	1,817,046
6	5	5	4	8	34	1,817,046
10	6	3	1	9	28	1,314,610
11	6	3	2	9	28	1,314,610
12	6	3	4	9	28	1,314,610
13	6	5	1	9	36	7,811,375
14	6	5	2	9	36	7,811,375
15	6	5	4	9	36	7,811,375
19	7	3	1	10	30	5,230,016
20	7	3	2	10	30	5,230,016
21	7	3	4	10	30	5,230,016
22	7	5	1	10	38	33,153,120
23	7	5	2	10	38	33,153,120
24	7	5	4	10	38	33,153,120
28	8	3	1	11	32	20,764,055
29	8	3	2	11	32	20,764,055
30	8	3	4	11	32	20,764,055
31	8	5	1	11	40	139,299,615
32	8	5	2	11	40	139,299,615
33	8	5	4	11	40	139,299,615
37	9	3	1	12	34	82,317,690
38	9	3	2	12	34	82,317,690
39	9	3	4	12	34	82,317,690
40	9	5	1	12	42	580,610,160
42	9	5	4	12	42	580,610,160
47	10	3	2	13	36	326,012,925
48	10	3	4	13	36	326,012,925
49	10	5	1	13	44	2,404,321,560
50	10	5	2	13	44	2,404,321,560
51	10	5	4	13	44	2,404,321,560

**Πίνακας 8-1:** Ταυτότητα συνόλων τεχνητών δεδομένων

## Κεφάλαιο 8: Πειράματα με τεχνητά δεδομένα

Τα παραπάνω σύνολα τεχνητών δεδομένων εισήχθησαν στο ΣΥΑ και επιλύθηκαν με χρήση του βασικού αλγόριθμου Simplex με κατώφλι  $\varepsilon = 5\% \times F^*$  ακολουθώντας το Σενάριο (i).

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τα πέντε ενδεικτικά σύνολα τεχνητών δεδομένων, αναφορικά με τους δείκτες ποιότητας και ευστάθειας και αναφορικά με τον υπολογιστικό φόρτο. Ο δείκτης και οι τιμές του εύρους διακύμανσης των βαρών (δείκτης  $WV_i$ ) για τα σύνολα αυτά καθώς τα αποτελέσματα των υπολοίπων συνόλων τεχνητών δεδομένων παρουσιάζονται στο Παράρτημα IV.

No (μέγεθος)	Μέθοδος	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
1 (5)	GM	100%	41.22%	0.001	7	24.953	3
1 (5)	M-I	100%	41.28%	0.001	13	24.953	6
1 (5)	M-III	100%	42.65%	0.001	223	24.953	16
1 (5)	M-N	100%	56.00%	40.015	97367	77.551	58969
1 (5)	R-S	100%	46.45%	0.015	180	213.695	960
1 (5)	R-A	100%	46.45%	0.047	180	75.168	960
10 (6)	GM	83.33%	33.56%	0.001	15	37.273	3
10 (6)	M-I	100%	34.96%	0.001	20	37.273	6
10 (6)	M-III	100%	39.08%	0.001	286	37.273	16
10 (6)	M-N	100%	46.90%	0.413	10874	41.781	5496
10 (6)	R-S	100%	44.67%	0.003	23	61.230	224
10 (6)	R-A	100%	44.67%	0.002	23	41.023	224
11 (6)	GM	100%	50.26%	0.001	8	30.445	3
11 (6)	M-I	100%	47.53%	0.001	21	30.445	6
11 (6)	M-III	100%	51.40%	0.001	328	30.445	16
11 (6)	M-N	100%	55.36%	19.66	62102	57.078	31332
11 (6)	R-S	100%	54.76%	0.012	94	158.855	503
11 (6)	R-A	100%	54.76%	0.011	94	128.91	503
24 (7)	GM	100%	97.08%	0.001	40	57.852	5
24 (7)	M-I	100%	97.52%	0.001	28	57.852	10
24 (7)	M-III	100%	97.62%	0.002	540	57.852	24
24 (7)	M-N	100%	98.07%	30.463	84040	98.914	45131
24 (7)	R-S	100%	98.14%	0.042	67	259.859	984
24 (7)	R-A	100%	98.14%	0.017	67	77.852	984
27 (7)	GM	100%	96.49%	0.002	46	121.691	7
27 (7)	M-I	100%	97.02%	0.002	40	121.691	14
27 (7)	M-III	100%	97.27%	0.003	688	121.691	32
27 (7)	M-N	85.71%	97.48%	41.705	106284	175.227	54107
27 (7)	R-S	100%	97.57%	0.038	32	393.883	576
27 (7)	R-A	100%	97.57%	0.031	32	204.656	576

**Πίνακας 8-2:** Ενδεικτικά αποτελέσματα πειραματικής διαδικασίας

(GM: Γενικευμένο MUSA, M-I: MUSA I, M-III: MUSA III, M-N: Manas-Nedoma, R-S: Αντίστροφη Simplex, R-A: Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση)

Η διαδικασία των πειραμάτων συνεχίστηκε με τη δημιουργία 36 ερευνών με 8 έως 20 ερωτηματολόγια (συμπεριλαμβάνονται και 4 σύνολα με κωδ. Π\_12, Π\_13, Π\_15 και



## Κεφάλαιο 8: Πειράματα με τεχνητά δεδομένα

Π\_20, τα οποία προέρχονται από το παράδειγμα της § 3.6 του βιβλίου των Γρηγορούδη & Σίσκο (2000)), για τη σύγκριση και των 4 ευρετικών αλγορίθμων μεταβελτιστοποίησης και των 2 αναλυτικών, Αντίστροφη Simplex και Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση. Στον πίνακα 8.1 παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά μερικών εκ των 36 συνόλων.

Στη συνέχεια εξετάστηκαν άλλα 36 σύνολα για συγκριτική αξιολόγηση των 4 ευρετικών αλγορίθμων με εναλλακτική χρήση της βασικής ή της αναθεωρημένης Simplex και η πειραματική διαδικασία ολοκληρώθηκε με την συγκριτική αξιολόγηση των 4 ευρετικών αλγορίθμων με 27 ακόμα σύνολα τεχνητών δεδομένων και με εναλλακτική χρήση της διαδικασίας “Load Base” (βλ. § 6.6).

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται ενδεικτικά αποτελέσματα για τα παραπάνω σύνολα τεχνητών δεδομένων.

No (μέγεθος)	Μέθοδος	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
56 (12)	GM	100%	98.07%	0.001	17	24.617	3
56 (12)	M-I	100%	98.15%	0.001	17	24.617	6
56 (12)	M-III	100%	98.34%	0.002	223	24.617	16
56 (12)	R-S	100%	98.99%	0.037	169	29.141	1920
56 (12)	R-A	100%	98.99%	0.039	169	27.812	1920
65 (15)	GM	86.67%	96.60%	0.004	14	24.324	3
65 (15)	M-I	86.67%	97.05%	0.01	16	24.461	6
65 (15)	M-III	86.67%	97.47%	0.004	272	24.461	16
65 (15)	R-S	93.33%	98.22%	0.352	476	72.316	4572
65 (15)	R-A	93.33%	98.22%	0.303	476	37.973	4572
88 (50)	GM	94%	94.29%	0.002	368	40.008	7
88 (50)	M-I	94%	93.89%	0.004	455	40.008	14
88 (50)	M-III	94%	95.63%	0.009	6690	43.656	32
88 (50)	GM (R.)	90%	92.48%	0.001	217	40.445	7
88 (50)	M-I (R.)	90%	92.47%	0.002	325	40.445	14
88 (50)	M-III (R.)	94%	94.41%	0.004	624	40.445	32
97 (100)	GM	80%	95.03%	0.007	608	52.945	7
97 (100)	M-I	81%	95.29%	0.015	749	55.957	14
97 (100)	M-III	81%	97.18%	0.032	10891	55.957	32
97 (100)	GM (R.)	90%	93.08%	0.002	518	54438	7
97 (100)	M-I (R.)	90%	93.48%	0.003	721	54438	14
97 (100)	M-III (R.)	89%	95.95%	0.007	1617	54438	32
118 (1000)	GM (R.)	75.10%	90.43%	0.019	5372	40.391	3
118 (1000)	M-I (R.)	75.80%	90.34%	1.035	9279	40.238	6
118 (1000)	M-III (R.)	76.60%	93.43%	0.115	23246	39.555	16
118 (1000)	GM (LB.)	75.10%	90.43%	0.004	1649	39.035	3
118 (1000)	M-I (LB.)	75.80%	90.34%	0.008	1125	39.035	6
118 (1000)	M-III (LB.)	76.60%	93.43%	0.021	2343	41.359	16

**Πίνακας 8-3:** Ενδεικτικά αποτελέσματα πειραματικής διαδικασίας

(R: Αναθεωρημένη (Revised) Simplex, LB: Αναθεωρημένη με “Load Base”)

## Κεφάλαιο 8: Πειράματα με τεχνητά δεδομένα

Το σύνολο των αποτελεσμάτων της συγκριτικής αξιολόγησης με τη χρήση των 135 πειραμάτων παρουσιάζεται στο Παράρτημα IV.

Από την ανάλυση των τιμών των πειραμάτων προκύπτει το συμπέρασμα ότι οι αναλυτικοί αλγόριθμοι δεν μπορούν να τρέξουν σε πραγματικό χρόνο για την επίλυση μεγάλων προβλημάτων. Ακόμα και για τα σύνολα των δεδομένων των πειραμάτων με ανάγκη ανάλυσης ελάχιστου αριθμού ερωτηματολογίων (5-20) οι απαιτούμενος χρόνος ήταν σημαντικά μεγάλος. Οπότε η χρήση των ευρετικών αλγορίθμων θεωρείται μονόδρομος για την ανάλυση πραγματικών ερευνών ικανοποίησης με τη χρήση της μεθόδου MUSA θεωρώντας ότι οι μικρότερες εξ αυτών θα περιλαμβάνουν τουλάχιστον 100 ερωτηματολόγια. Μάλιστα, για τις μεγάλες έρευνες η χρήση ευρετικών αλγορίθμων με τη Revised Simplex και με τη διαδικασία "Load Base" θεωρείται η οικονομικότερη, από άποψη υπολογιστικού φόρτου, επιλογή.

Τα πειράματα όμως οδήγησαν και σε ένα πολύ χρήσιμο επιπλέον συμπέρασμα. Η εξαντλητική αναζήτηση όλων των κορυφών του υπερπολυέδρου που εγγυάται ο αλγόριθμος των Manas και Nedoma ή η αναζήτηση σημαντικού αριθμού κορυφών που υλοποιούν οι άλλοι δύο αναλυτικοί αλγόριθμοι δεν βελτιώνουν σημαντικά την ποιότητα της πληροφορίας γεγονός που αποτυπώνεται στις τιμές των δεικτών. Επομένως τα πειράματα δείχνουν ότι οι ευρετικοί αλγόριθμοι μεταβελτιστοποίησης που χρησιμοποιούνται στην εφαρμογή της MUSA αποδίδουν εξαιρετικά, δεδομένου ότι περιγράφουν ικανοποιητικά τα όρια του υπερπολυέδρου με τον ελάχιστο υπολογιστικό φόρτο.

Τέλος, σε ότι αφορά στις αναλυτικές μεθόδους τα πειράματα έδειξαν ότι ο αλγόριθμος των Manas-Nedoma απαιτεί τεράστιο υπολογιστικό φόρτο ακόμα και για πολύ μικρά προβλήματα, δεδομένου ότι υπολογίζει κάθε κορυφή των υπερπολυέδρων των σχηματιζόμενων γραμμικών προγραμμάτων με αλλαγή βάσης της Simplex. Στον αντίποδα, οι δύο άλλες αναλυτικές μέθοδοι, η Αντίστροφη Simplex και η *Ρεαλιστική Προσέγγιση* βρίσκουν ένα σημαντικό αριθμό κορυφών περιγράφοντας ακριβέστερα, σε σχέση με τους ευρετικούς αλγόριθμους, το υπερπολυέδρο σε χρόνο σημαντικά μικρότερο από αυτόν που απαιτείται για τον Manas-Nedoma. Ωστόσο ο αλγόριθμος της Αντίστροφης Simplex απαιτεί τη χρήση μεγάλου όγκου μνήμης RAM χωρίς η απαίτηση αυτή να αντισταθμίζεται από εξοικονόμηση χρόνου σε σχέση με την *Ρεαλιστική Προσέγγιση*.

## Κεφάλαιο 9: 18 Έρευνες Ικανοποίησης

Στο Κεφάλαιο αυτό ολοκληρώνεται η αξιολόγηση του ΣΥΑ και των μεθόδων μεταβελτιστοποίησης μέσα από την ανάλυση δεδομένων 18 πραγματικών ερευνών ικανοποίησης που υλοποιήθηκαν από το 2003 μέχρι το 2008. Το ΣΥΑ εφαρμόζεται για την υποστήριξη του επιχειρησιακού ερευνητή στην επιλογή των παραμέτρων του MUSA ώστε να επιτυγχάνονται οι καλύτερες τιμές για τους δείκτες αξιοπιστίας και ευστάθειας της μεθόδου.

## 9.1 Εισαγωγή

Σύμφωνα με τα συμπεράσματα του προηγούμενου Κεφαλαίου για την αποδοτική εφαρμογή της μεθόδου MUSA αρκεί η χρήση των ευρετικών αλγορίθμων μεταβελτιστοποίησης σε σχέση με τις υπερβολικά κοστοβόρες από άποψη υπολογιστικού φόρτου αναλυτικές μεθόδους. Επομένως για την χρήση του ΣΥΑ σε εφαρμογές ανάλυσης πραγματικών ερευνών ικανοποίησης θα χρησιμοποιούνται οι ευρετικοί αλγόριθμοι και πιο συγκεκριμένα οι MUSA I για και MUSA III οι οποίοι πάλι σύμφωνα με τα πειράματα που έγιναν υπερέχουν μεταξύ των ευρετικών. Επίσης προτείνεται η επιλογή της χρήσης του αναθεωρημένου αλγόριθμου Simplex που είναι σαφώς ταχύτερος από τον απλό.

Συνοψίζοντας, για την ανάλυση πραγματικών ερευνών ο χρήστης του ΣΥΑ θα πρέπει να υλοποιεί διαδοχικά τα σενάρια (ii) και (iii), ως εξής:

- Σενάριο (ii): Επιλογή παραμέτρων  $\gamma$ ,  $\gamma_i$  και  $\epsilon$  μέσω της επιλογής εύρους τιμών για τις παραμέτρους αυτές, δίνοντας συγκεκριμένο βήμα αύξησης με στόχο την αξιολόγηση των εσωτερικών δεικτών ποιότητας της μεθόδου MUSA. Η διαδοχική μείωση του εύρους με παράλληλη μείωση του βήματος, κάνοντας χρήση συγκεκριμένης μεθόδου μεταβελτιστοποίησης, θα οδηγήσει τον χρήστη σε καλύτερη επιλογή τιμών για τις παραμέτρους.
- Σενάριο (iii): Πλήρης ανάλυση του δείγματος με τη μέθοδο MUSA παράγοντας το σύνολο των αποτελεσμάτων και των δεικτών για συγκεκριμένες τιμές των  $\gamma$  και  $\epsilon$  και με χρήση συγκεκριμένης μεθόδου μεταβελτιστοποίησης επιλογής του χρήστη.

Στη συνέχεια του Κεφαλαίου θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα από την εφαρμογή των παραπάνω σεναρίων σε 18 έρευνες ικανοποίησης που υλοποιήθηκαν από το 2003 μέχρι το 2007:

1. Πολιτών από την Ελληνική Αστυνομία (1729 ερωτηματολόγια)
2. Εργαζομένων στην Ελληνική Αστυνομία από τον Οργανισμό τους (1813 ερωτηματολόγια)
3. Φοιτητών από το Πανεπιστήμιο Πειραιά (2629 ερωτηματολόγια)
4. Φοιτητών από το Τμήμα Πληροφορικής του ΤΕΙ Αθηνών (942 ερωτηματολόγια)
5. Φοιτητών από το Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων του ΤΕΙ Πειραιά (612 ερωτηματολόγια)

6. Φοιτητών από το Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων του ΤΕΙ Αθήνας (661 ερωτηματολόγια)
7. Ασθενών από το Γενικό Νοσοκομείο Νίκαιας (214 ερωτηματολόγια)
8. Πελατών από μεγάλη αλυσίδα Super Market (685 ερωτηματολόγια)
9. Εργαζομένων σε μεγάλη αλυσίδα Super Market (1953 ερωτηματολόγια)
10. Τουριστών από τις τουριστικές υπηρεσίες στη Σκόπελο (755 ερωτηματολόγια)
11. Τηλεθεατών από παιδικές εκπομπές (250 ερωτηματολόγια)
12. Επιβατών από το ΤΡΑΜ (760 ερωτηματολόγια)
13. Επιβατών από το ΜΕΤΡΟ (250 ερωτηματολόγια)
14. Πελατών από χορήγηση Στεγαστικού Δανείου από το Ταμείο Παρακαταθηκών και Δανείων (300 ερωτηματολόγια)
15. Επισκεπτών από τις υπηρεσίες στα ιαματικά κέντρα στην Ελλάδα (300 ερωτηματολόγια)
16. Εταιρικών πελατών εταιρίας logistics (150 ερωτηματολόγια)
17. Επισκεπτών από το Αεροδρόμιο Ελευθέριος Βενιζέλος (318 ερωτηματολόγια)
18. Αναγνωστών από το περιοδικό RAM (893 ερωτηματολόγια)

## **9.2 Έρευνα Ικανοποίησης Πολιτών από την Ελληνική Αστυνομία**

### **9.2.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης**

Προκειμένου να εκτιμηθεί ο βαθμός ικανοποίησης των πολιτών από την Ελληνική Αστυνομία, το Ινστιτούτο Αστυνομικών Μελετών, Επιμόρφωσης & Τεκμηρίωσης (ΙΝ.Α.ΜΕ.ΤΕ) σε συνεργασία με την Ελληνική Εταιρία Επιχειρησιακών Ερευνών σχεδίασαν και υλοποίησαν έρευνα για την μέτρηση της ικανοποίησης.

Η έρευνα ικανοποίησης πραγματοποιήθηκε το χρονικό διάστημα Δεκεμβρίου 2006-Μαΐου 2007. Για λόγους αξιοπιστίας και εγκυρότητας της έρευνας επιλέχθηκε η ανώνυμη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου από τους πολίτες με χρήση κάλπης έξω από αστυνομικά τμήματα σε 39 νομούς της επικράτειας. Το τελικό δείγμα

αποτελείται από 1729 ερωτηματολόγια από όλη την Ελλάδα, μετά τον έλεγχο ορθής συμπλήρωσής τους.

Τα κριτήρια ικανοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν για την έρευνα είναι τα εξής 10:

- *Αίσθημα ασφάλειας*: Το κριτήριο αυτό εξετάζει την επάρκεια της αστυνομικής δύναμης στους δρόμους της γειτονιάς του κάθε πολίτη και κατά πόσο είναι αισθητή η παρουσία της αστυνομίας το βράδυ.
- *Άμεση Ανταπόκριση*: Εξετάζεται η αμεσότητα της ανταπόκρισης της αστυνομίας σε εκκλήσεις για παροχή βοήθειας.
- *Αποτελεσματικότητα*: Η συγκεκριμένη διάσταση ικανοποίησης αναφέρεται στο βαθμό αποτελεσματικότητας της αστυνομίας στη διαλεύκανση των εγκλημάτων/παραβάσεων.
- *Ενημέρωση Πολίτη*: Το κριτήριο αυτό αφορά στο επίπεδο ενημέρωσης που λαμβάνει ο πολίτης από την αστυνομία για τις υποθέσεις του.
- *Δίκαιη Μεταχείριση*: Αξιολογείται η αίσθηση που έχει ο πολίτης σχετικά με τη μεταχείριση των πολιτών από την αστυνομία.
- *Γραφειοκρατία*: Το κριτήριο αυτό εξετάζει το επίπεδο της γραφειοκρατίας που συναντάει ο πολίτης στις αστυνομικές υπηρεσίες.
- *Υποδομή*: Το συγκεκριμένο κριτήριο αφορά στο βαθμό πληρότητας της υποδομής (περιπολικά εξοπλισμός) της αστυνομίας.
- *Πρόσβαση στο Τμήμα*: Εξετάζεται η ευκολία πρόσβασης των πολιτών στο αστυνομικό τμήμα της γειτονιάς τους.
- *Συμπεριφορά Αστυνομικών*: Η διάσταση αυτή σχετίζεται με την ποιότητα της συμπεριφοράς των αστυνομικών προς τους πολίτες.
- *Γνώση και Εμπειρία*: Το κριτήριο αυτό εστιάζει στο επίπεδο των γνώσεων και της εμπειρίας που έχουν οι αστυνομικοί, όπως αυτό το αντιλαμβάνονται οι πολίτες.

### **9.2.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα**

Χρειάστηκαν 3 επαναλήψεις του σεναρίου (ii) για αποφασισθεί ο συνδυασμός των τιμών των παραμέτρων. Οι 3 αυτές επαναλήψεις παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

Επανάληψη	Παράμετρος	Ελάχιστο	Μέγιστο	Βήμα
1	$\gamma$	0	5	1
	$\gamma_i$	0	2	0.5
	$\varepsilon$ (%)	0	10	2
2	$\gamma$	1	4	0.25
	$\gamma_i$	1	2	0.25
	$\varepsilon$ (%)	0	4	0.5
3	$\gamma$	1.5	2.5	0.1
	$\gamma_i$	1.4	2.4	0.1
	$\varepsilon$ (%)	1.2	2.2	0.1

Η τελική επιλογή των τιμών των παραμέτρων της MUSA είναι:

$$\gamma = 2.1 \quad \gamma_i = 1.8 \quad \varepsilon = 1.9\%$$

Με χρήση αυτών των παραμέτρων και χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο MUSA I επιτυγχάνουμε τις εξής τιμές για τους δείκτες:

$$AFI = 92.17\% \quad OPL = 57.72\% \quad ASI = 93,66\%$$

### 9.3 Έρευνα Ικανοποίησης Εργαζομένων στην Ελληνική Αστυνομία από τον Οργανισμό τους

#### 9.3.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης

Προκειμένου να εκτιμηθεί ο βαθμός ικανοποίησης των εργαζομένων σε σχέση με τον Οργανισμό της Ελληνικής Αστυνομίας, το ΙΝ.Α.ΜΕ.ΤΕ σε συνεργασία με την Ελληνική Εταιρία Επιχειρησιακών Ερευνών σχεδίασαν και υλοποίησαν έρευνα για την μέτρηση της ικανοποίησης εσωτερικών πελατών.

Η έρευνα ικανοποίησης πραγματοποιήθηκε το χρονικό διάστημα Δεκεμβρίου 2005-Μαρτίου 2006 μέσω προσωπικών συνεντεύξεων. Για λόγους αξιοπιστίας και εγκυρότητας της έρευνας επιλέχθηκε η ανώνυμη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου από τους αστυνομικούς. Το τελικό δείγμα αποτελείται από 1813 ερωτηματολόγια από όλη την Ελλάδα, μετά τον έλεγχο ορθής συμπλήρωσής τους.

Τα κριτήρια ικανοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν για την έρευνα είναι τα εξής 8:

- *Περιεχόμενο εργασίας:* Το κριτήριο αυτό περιλαμβάνει τα χαρακτηριστικά που συνιστούν το γενικότερο περιεχόμενο εργασίας. Πιο συγκεκριμένα, αναφέρεται στον όγκο της γραφειοκρατίας που καλούνται να αντιμετωπίσουν καθημερινά οι αστυνομικοί, στο επίπεδο ενημέρωσης για το καθήκοντά τους,

στο βαθμό που τους παρέχεται στους αστυνομικούς η απαραίτητη εξουσία από το νόμο ώστε να εκτελούν αποτελεσματικά τα καθήκοντά τους.

- *Φόρτος εργασίας:* Η συγκεκριμένη διάσταση ικανοποίησης αναφέρεται στην ένταση του ρυθμού της εργασίας και στον πραγματικό αριθμό των ωρών που πρέπει να εργάζεται ο αστυνομικός σε σχέση με το τυπικό ωράριό του ώστε να ανταποκρίνεται στις υποχρεώσεις που του αναθέτονται.
- *Συνθήκες εργασίας:* Το κριτήριο αυτό αφορά κυρίως στα χαρακτηριστικά που σχετίζονται με το περιβάλλον εργασίας, με τις συνθήκες ασφάλειας κάτω από τις οποίες ο αστυνομικός εκτελεί το έργο του και με τον παρεχόμενο εξοπλισμό που του παρέχεται από την υπηρεσία του.
- *Προϊστάμενοι:* Το συγκεκριμένο κριτήριο αφορά τα χαρακτηριστικά των προϊσταμένων των υπηρεσιών κυρίως σε σχέση με την επιβράβευση που λαμβάνει ο αστυνομικός, την απαραίτητη υποστήριξη που του παρέχεται από την υπηρεσία του, τη δυνατότητα ανάληψης πρωτοβουλιών, η λαμβανόμενη καθοδήγηση και τέλος σε σχέση με τη συμπεριφορά των προϊσταμένων προς τους υφιστάμενους.
- *Συνάδελφοι:* Το κριτήριο αυτό αφορά κυρίως τις σχέσεις με τους συναδέλφους αστυνομικούς και τη δυνατότητα να βασιστεί ο αστυνομικός σε αυτούς.
- *Εικόνα-Φήμη:* Η διάσταση αυτή σχετίζεται με την αίσθηση υπερηφάνειας του αστυνομικού για το σώμα που υπηρετεί και με το βαθμό εκτίμησης που τρέφουν οι πολίτες για το έργο της Ελληνικής Αστυνομίας.
- *Προοπτικές εξέλιξης:* Το κριτήριο αυτό εστιάζει στο πόσο δίκαιη θεωρείται η διαδικασία εξέλιξης στην Ελληνική Αστυνομία, στην επάρκεια της βασικής εκπαίδευσης και στην χρησιμότητα των προγραμμάτων επιμόρφωσης.
- *Οικονομικές απολαβές:* Η τελευταία αυτή διάσταση ικανοποίησης αναφέρεται επίπεδο ικανοποίησης του αστυνομικού από το ύψος των αποδοχών του σε σχέση με την εργασία που παρέχει.

### **9.3.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα**

Χρειάστηκαν 4 επαναλήψεις του σεναρίου (ii) για αποφασισθεί ο συνδυασμός των τιμών των παραμέτρων. Οι 4 αυτές επαναλήψεις παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:



Επανάληψη	Παράμετρος	Ελάχιστο	Μέγιστο	Βήμα
1	$\gamma$	0	10	1
	$\gamma_i$	0	2	0.5
	$\varepsilon$ (%)	0	10	2
2	$\gamma$	1	5	0.5
	$\gamma_i$	1	2	0.25
	$\varepsilon$ (%)	2	8	0.5
3	$\gamma$	1.5	2.5	0.2
	$\gamma_i$	1.6	2.4	0.2
	$\varepsilon$ (%)	4	7	0.25
4	$\gamma$	1.8	2.2	0.1
	$\gamma_i$	1.8	2.2	0.1
	$\varepsilon$ (%)	5	7	0.2

Η τελική επιλογή των τιμών των παραμέτρων της MUSA είναι:

$$\gamma = 1.9 \quad \gamma_i = 2.0 \quad \varepsilon = 5.7\%$$

Με χρήση αυτών των παραμέτρων και χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο MUSA III επιτυγχάνουμε τις εξής τιμές για τους δείκτες:

$$AFI = 92.97\% \quad OPL = 54.97\% \quad ASI = 87.92\%$$

## 9.4 Έρευνα Ικανοποίησης Φοιτητών από το Πανεπιστήμιο Πειραιά

### 9.4.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης

Η έρευνα ικανοποίησης αποσκοπούσε στη μέτρηση της ικανοποίησης των προπτυχιακών φοιτητών/τριών του Πανεπιστημίου Πειραιώς από την ποιότητα του εκπαιδευτικού έργου και των υπηρεσιών που τους προσφέρει.

Η έρευνα ικανοποίησης πραγματοποιήθηκε την άνοιξη του 2003 μέσω ανώνυμης συμπλήρωσης δομημένου ερωτηματολογίου. Η επιλογή του δείγματος έγινε με διαστρωματική τυχαία δειγματοληψία θεωρώντας ως στρώμα επιλογής του δείγματος το τμήμα φοίτησης.

Ο συνολικός αριθμός των ερωτηματολογίων που συμπληρώθηκαν 2629 που αποτελεί περίπου το 14.5% του συνολικού πληθυσμού.

Τα κριτήρια ικανοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν για την έρευνα είναι τα εξής 4:

- *Εκπαίδευση*: η διάσταση αυτή αφορά στο πρόγραμμα σπουδών (πχ. σχεδίαση προγράμματος σποδών, αλληλουχία μαθημάτων, αριθμός

μαθημάτων ανά εξάμηνο κλπ.) και στη διδασκαλία (κατάρτιση και μεταδοτικότητα διδακτικού προσωπικού, μέθοδοι αξιολόγησης της απόδοσης των φοιτητών κλπ.).

- *Υλικο-τεχνική Υποδομή:* αναφέρεται στις εγκαταστάσεις (αίθουσες διδασκαλίας, εργαστήρια, βιβλιοθήκη κλπ.) και τον εξοπλισμό που διαθέτει και βρίσκεται σε λειτουργία στους χώρους του (ηλεκτρονικούς υπολογιστές, λογισμικό, μέσα παρουσιάσεων, φωτοτυπικά μηχανήματα κλπ).
- *Διοικητική Υποστήριξη:* εξετάζει τη γνώση και την ικανότητα του προσωπικού του Πανεπιστημίου να παρέχει με ευγένεια, ταχύτητα και προθυμία την αναμενόμενη από τον φοιτητή/τρια υπηρεσία. Ως προσωπικό νοούνται όλοι οι εργαζόμενοι του Πανεπιστημίου που έρχονται σε επαφή με τον φοιτητή/τρια και του παρέχουν υποστηρικτικές υπηρεσίες. Τέτοιου είδους υπηρεσίες παρέχονται στους φοιτητές/τριες στη βιβλιοθήκη, στα εργαστήρια Η/Υ, στις γραμματείες των Τμημάτων, στην φοιτητική εστία, στο συμβουλευτικό κέντρο, στο γραφείο φοιτητικής μέριμνας, διεθνών σχέσεων και διανομής συγγραμμάτων.
- *Φήμη – Εικόνα πανεπιστημίου:* αναφέρεται στην αξιοπιστία, το κύρος και την αναγνωρισιμότητα του πανεπιστημίου καθώς και τις διαδικασίες προβολής και σύνδεσης του με την αγορά εργασίας.

#### 9.4.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα

Χρειάστηκαν 4 επαναλήψεις του σεναρίου (ii) για αποφασισθεί ο συνδυασμός των τιμών των παραμέτρων. Οι 4 αυτές επαναλήψεις παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

Επανάληψη	Παράμετρος	Ελάχιστο	Μέγιστο	Βήμα
1	$\gamma$	0	10	2
	$\gamma_i$	0	5	2
	$\epsilon$ (%)	0	10	2
2	$\gamma$	1	6	1
	$\gamma_i$	1	5	1
	$\epsilon$ (%)	1	8	1
3	$\gamma$	1	4	0.5
	$\gamma_i$	1	4	0.5
	$\epsilon$ (%)	2	6	0.5
4	$\gamma$	3	4	0.1
	$\gamma_i$	2	3	0.1
	$\epsilon$ (%)	3	5	0.2

Η τελική επιλογή των τιμών των παραμέτρων της MUSA είναι:

$$\gamma = 3.5 \quad \gamma_i = 2.7 \quad \varepsilon = 3 \%$$

Με χρήση αυτών των παραμέτρων και χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο MUSA I επιτυγχάνουμε τις εξής τιμές για τους δείκτες:

$$AFI = 93.46\% \quad OPL = 53.10\% \quad ASI = 69.86\%$$

## 9.5 Έρευνα Ικανοποίησης Φοιτητών από το Τμήμα Πληροφορικής του ΤΕΙ Αθηνών

### 9.5.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης

Πρόκειται για έρευνα ικανοποίησης των φοιτητών του Τμήματος Πληροφορικής του ΤΕΙ Αθήνας στα πλαίσια υλοποίησης ενός αποτελεσματικού μηχανισμού διαρκούς αξιολόγησης της εκπαιδευτικής διαδικασίας του Τμήματος σε σχέση με τις απαιτούμενες γνώσεις/δεξιότητες και η χρήση των αποτελεσμάτων της αξιολόγησης για την περιοδική αναμόρφωση του προγράμματος προπτυχιακών σπουδών.

Η έρευνα ικανοποίησης πραγματοποιήθηκε εντός πέντε ημερών κατά την περίοδο των εγγραφών των φοιτητών στο εαρινό εξάμηνο του 2004. Είχε προηγηθεί κατά τη διάρκεια της εξεταστικής περιόδου του Ιανουαρίου ενημέρωση των φοιτητών σχετικά με τους σκοπούς της έρευνας.

Ο συνολικός αριθμός των ερωτηματολογίων που συμπληρώθηκαν ανήλθε στα 950 από τα οποία αξιοποιήσιμα ήταν τα 942.

Τα κριτήρια ικανοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν για την έρευνα είναι τα εξής 5:

- *Εκπαιδευτικό πρόγραμμα:* η διάσταση αυτή αναφέρεται στη συνολική σύλληψη και σχεδίαση του προγράμματος σπουδών του Τμήματος Πληροφορικής (ποικικλία μαθημάτων και γνωστικών αντικειμένων, ποιότητα των μαθημάτων, επικαλύψεις της ύλης, βαθμός ανταπόκρισης στις απαιτήσεις της αγοράς, ωρολόγιο πρόγραμμα μαθημάτων θεωρίας και εργαστηρίων).
- *Διδακτικό προσωπικό:* η διάσταση αυτή αφορά στην υλοποίηση των σπουδών στο Τμήμα Πληροφορικής (κατάρτιση και μεταδοτικότητα διδασκόντων μόνιμου και έκτακτου εκπαιδευτικού προσωπικού, προσιτότητα στους φοιτητές, μέθοδοι αξιολόγησης).

- *Υλικο-τεχνική Υποδομή:* αναφέρεται στις κτιριακές εγκαταστάσεις στον εξοπλισμό των εργαστηρίων, στις κλιματιστικές συνθήκες, στο έντυπο υλικό, στη βιβλιοθήκη του ΤΕΙ και στους χώρους αυτής, καθώς και στο ηλεκτρονικό σύστημα αναζήτησης βιβλίων.
- *Διοικητική Υποστήριξη:* η διάσταση αυτή αναφέρεται στο ωράριο λειτουργίας όλων των σχετικών υπηρεσιών, στην αξιοπιστία και στην ταχύτητα εξυπηρέτησης.
- *Εικόνα - Φήμη Τμήματος:* αναφέρεται στην αξιοπιστία, το κύρος και την αναγνωρισιμότητα του Τμήματος Πληροφορικής καθώς και στις διαδικασίες προβολής και σύνδεσης του με την αγορά εργασίας.

### 9.5.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα

Χρειάστηκαν 3 επαναλήψεις του σεναρίου (ii) για αποφασισθεί ο συνδυασμός των τιμών των παραμέτρων. Οι 3 αυτές επαναλήψεις παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

Επανάληψη	Παράμετρος	Ελάχιστο	Μέγιστο	Βήμα
1	$\gamma$	0	5	1
	$\gamma_i$	0	4	1
	$\epsilon$ (%)	0	10	2
2	$\gamma$	2	4	0.5
	$\gamma_i$	1	3	0.5
	$\epsilon$ (%)	0	4	1
3	$\gamma$	2	4	0.5
	$\gamma_i$	1.4	2.6	0.2
	$\epsilon$ (%)	0	1.5	0.5

Η τελική επιλογή των τιμών των παραμέτρων της MUSA είναι:

$$\gamma = 2.5 \quad \gamma_i = 2.0 \quad \epsilon = 0.5\%$$

Με χρήση αυτών των παραμέτρων και χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο MUSA I επιτυγχάνουμε τις εξής τιμές για τους δείκτες:

$$AFI = 94.47\% \quad OPL = 60.03\% \quad ASI = 97,54\%$$

## 9.6 Έρευνα Ικανοποίησης Φοιτητών από το Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων του ΤΕΙ Πειραιά

### 9.6.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης

Στόχος της έρευνας ήταν η αξιολόγηση του βαθμού ικανοποίησης των φοιτητών του Τμήματος Διοίκησης Επιχειρήσεων του ΤΕΙ Πειραιά. Η έρευνα ικανοποίησης πραγματοποιήθηκε το φθινόπωρο του 2004 μέσω ανώνυμης συμπλήρωσης δομημένου ερωτηματολογίου. Συμπληρώθηκαν συνολικά 612 ερωτηματολόγια που αποτελεί σχεδόν το 50% του συνολικού πληθυσμού του ακαδημαϊκού τμήματος αναφοράς. Το δείγμα περιέλαβε σπουδαστές όλων των εξαμήνων, καθώς και αναλογία γυναικών και ανδρών αντιπροσωπευτική του συνολικού πληθυσμού.

Τα κριτήρια ικανοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν για την έρευνα είναι τα εξής 4:

- *Εκπαίδευση*: αυτό το κριτήριο αφορά το πρόγραμμα σπουδών.
- *Παροχές - Υποδομές*: με κύρια αναφορά στις κτιριακές υποδομές, στη στέγαση και την τεχνική υποστήριξη.
- *Διοικητική Υποστήριξη*: εξετάζει τις γνώσεις και τις δεξιότητες του διοικητικού προσωπικού.
- *Εικόνα του τμήματος*: αναφέρεται στην αξιοπιστία, το γόητρο και την αναγνώριση του τμήματος από την ακαδημαϊκή κοινότητα και την κοινωνία.

### 9.6.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα

Χρειάστηκαν 3 επαναλήψεις του σεναρίου (ii) για αποφασισθεί ο συνδυασμός των τιμών των παραμέτρων. Οι 3 αυτές επαναλήψεις παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

Επανάληψη	Παράμετρος	Ελάχιστο	Μέγιστο	Βήμα
1	$\gamma$	0	10	1
	$\gamma_i$	0	5	1
	$\epsilon$ (%)	0	12	2
2	$\gamma$	2.5	4.5	0.25
	$\gamma_i$	0.5	2	0.25
	$\epsilon$ (%)	1	6	0.5
3	$\gamma$	3.2	3.8	0.1
	$\gamma_i$	0.6	1.2	0.1
	$\epsilon$ (%)	3	5	0.25

Η τελική επιλογή των τιμών των παραμέτρων της MUSA είναι:

$$\gamma = 3.6 \quad \gamma_i = 0.8 \quad \varepsilon = 3.6\%$$

Με χρήση αυτών των παραμέτρων και χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο MUSA III επιτυγχάνουμε τις εξής τιμές για τους δείκτες:

$$AFI = 96.11\% \quad OPL = 61.76\% \quad ASI = 95.12\%$$

## 9.7 Έρευνα Ικανοποίησης Φοιτητών από το Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων του ΤΕΙ Αθήνας

### 9.7.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης

Πρόκειται για έρευνα ικανοποίησης των φοιτητών του Τμήματος Διοίκησης Επιχειρήσεων του ΤΕΙ Αθήνας στα πλαίσια υλοποίησης ενός αποτελεσματικού μηχανισμού διαρκούς αξιολόγησης της εκπαιδευτικής διαδικασίας του Τμήματος σε σχέση με τις απαιτούμενες γνώσεις/δεξιότητες και η χρήση των αποτελεσμάτων της αξιολόγησης για την περιοδική αναμόρφωση του προγράμματος προπτυχιακών σπουδών.

Η έρευνα ικανοποίησης πραγματοποιήθηκε το φθινόπωρο του 2006. Ο συνολικός αριθμός των ερωτηματολογίων που συμπληρώθηκαν ανήλθε στα 661.

Τα κριτήρια ικανοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν για την έρευνα είναι τα εξής 5:

- *Πρόγραμμα Σπουδών:* η διάσταση αυτή αναφέρεται στη συνολική σύλληψη και σχεδίαση του προγράμματος σπουδών του Τμήματος Διοίκησης Επιχειρήσεων (ποικιλία μαθημάτων και γνωστικών αντικειμένων, ποιότητα των μαθημάτων, επικαλύψεις της ύλης, βαθμός ανταπόκρισης στις απαιτήσεις της αγοράς, ωρολόγιο πρόγραμμα μαθημάτων θεωρίας και εργαστηρίων).
- *Εκπαιδευτικό Προσωπικό:* η διάσταση αυτή αφορά στην υλοποίηση των σπουδών στο Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων (κατάρτιση και μεταδοτικότητα διδασκόντων μόνιμου και έκτακτου εκπαιδευτικού προσωπικού, προσιτότητα στους φοιτητές, μέθοδοι αξιολόγησης).
- *Υποδομές του τμήματος:* αναφέρεται στις κτιριακές εγκαταστάσεις στον εξοπλισμό των εργαστηρίων, στις κλιματιστικές συνθήκες, στο έντυπο υλικό, στη βιβλιοθήκη του ΤΕΙ και στους χώρους αυτής, καθώς και στο ηλεκτρονικό σύστημα αναζήτησης βιβλίων.

- *Διοικητική Υποστήριξη*: η διάσταση αυτή αναφέρεται στο ωράριο λειτουργίας όλων των σχετικών υπηρεσιών, στην αξιοπιστία και στην ταχύτητα εξυπηρέτησης.
- *Εικόνα - Φήμη Τμήματος*: αναφέρεται στην αξιοπιστία, το κύρος και την αναγνωρισιμότητα του Τμήματος Διοίκησης Επιχειρήσεων καθώς και στις διαδικασίες προβολής και σύνδεσης του με την αγορά εργασίας.

### 9.7.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα

Χρειάστηκαν 3 επαναλήψεις του σεναρίου (ii) για αποφασισθεί ο συνδυασμός των τιμών των παραμέτρων. Οι 3 αυτές επαναλήψεις παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

Επανάληψη	Παράμετρος	Ελάχιστο	Μέγιστο	Βήμα
1	$\gamma$	0	5	1
	$\gamma_i$	0	4	0.5
	$\epsilon$ (%)	0	10	2
2	$\gamma$	3	5	0.5
	$\gamma_i$	0	2	0.25
	$\epsilon$ (%)	2	6	0.5
3	$\gamma$	3.5	4.5	0.1
	$\gamma_i$	0.5	1.5	0.1
	$\epsilon$ (%)	3	5	0.1

Η τελική επιλογή των τιμών των παραμέτρων της MUSA είναι:

$$\gamma = 3.9 \quad \gamma_i = 1.1 \quad \epsilon = 4.0\%$$

Με χρήση αυτών των παραμέτρων και χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο MUSA III επιτυγχάνουμε τις εξής τιμές για τους δείκτες:

$$AFI = 95.91\% \quad OPL = 61.88\% \quad ASI = 95.05\%$$

## 9.8 Έρευνα Ικανοποίησης Ασθενών από το Γενικό Κρατικό Νοσοκομείο Νίκαιας

### 9.8.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης

Ο σκοπός της συγκεκριμένης ερευνητικής προσπάθειας ήταν διττός. Αφενός μεν να εκτιμηθεί η ικανοποίηση των χρηστών από τις δομές και τις υπηρεσίες του νοσοκομείου όπως αυτές λειτουργούν στην παρούσα φάση και αφετέρου δε, σε δεύτερο χρόνο, την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων των παρεμβάσεων που θα υλοποιούνταν από τη διοίκηση του νοσοκομείου, ώστε να γίνουν οι αναγκαίες διορθωτικές αλλαγές και να εκτιμηθεί η επίδραση της κάθε παρέμβασης στο βαθμό αύξησης της ικανοποίησης των χρηστών.

Η έρευνα ικανοποίησης πραγματοποιήθηκε το φθινόπωρο του 2006. Ο συνολικός αριθμός των ερωτηματολογίων που συμπληρώθηκαν ανήλθε στα 214.

Τα κριτήρια ικανοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν για την έρευνα είναι τα εξής 5:

- *Ξενοδοχειακές υπηρεσίες:* Το κριτήριο αυτό καλύπτει τις υπηρεσίες φιλοξενίας των ασθενών στο νοσοκομείο κατά την παραμονή τους σε αυτό.
- *Ιατρικές υπηρεσίες:* Η διάσταση αυτή αφορά στην ποιότητα των υπηρεσιών που παρέχονταν από το ιατρικό προσωπικό του νοσοκομείου.
- *Νοσηλευτικές υπηρεσίες:* Η διάσταση αυτή αφορά στην ποιότητα των υπηρεσιών που παρέχονταν από το νοσηλευτικό προσωπικό του νοσοκομείου.
- *Διοικητικές υπηρεσίες:* Κριτήριο που αναφέρεται στην αξιοπιστία και στην ταχύτητα εξυπηρέτησης από τις διοικητικές υπηρεσίες του νοσοκομείου.
- *Εικόνα - Φήμη του Νοσοκομείου:* αναφέρεται στην αξιοπιστία, το κύρος και την αναγνωρισιμότητα του νοσοκομείου.

### 9.8.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα

Χρειάστηκαν 3 επαναλήψεις του σεναρίου (ii) για αποφασισθεί ο συνδυασμός των τιμών των παραμέτρων. Οι 3 αυτές επαναλήψεις παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:



Επανάληψη	Παράμετρος	Ελάχιστο	Μέγιστο	Βήμα
1	$\gamma$	0	5	1
	$\gamma_i$	0	4	1
	$\epsilon$ (%)	0	10	2
2	$\gamma$	2	5	0.5
	$\gamma_i$	0	2	0.2
	$\epsilon$ (%)	0	5	0.5
3	$\gamma$	3.2	4.2	0.1
	$\gamma_i$	0.8	1.6	0.1
	$\epsilon$ (%)	1.2	2.0	0.1

Η τελική επιλογή των τιμών των παραμέτρων της MUSA είναι:

$$\gamma = 3.8 \quad \gamma_i = 1.4 \quad \epsilon = 1.7\%$$

Με χρήση αυτών των παραμέτρων και χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο MUSA III επιτυγχάνουμε τις εξής τιμές για τους δείκτες:

$$AFI = 97.10\% \quad OPL = 81.31\% \quad ASI = 94.58\%$$

## 9.9 Έρευνα Ικανοποίησης Πελατών από μεγάλη αλυσίδα Super Market

### 9.9.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης

Η συγκεκριμένη έρευνα ικανοποίησης αναφέρεται στους πελάτες μεγάλης αλυσίδας super-market και είχε ως στόχο να αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο στα χέρια της διοίκησης της εταιρείας. Πιο συγκεκριμένα, σκοπός της έρευνας αυτής ήταν να εντοπιστούν τα δυνατά και αδύνατα σημεία των προσφερόμενων υπηρεσιών της αλυσίδας, εκφρασμένα μέσα από την συνολική ικανοποίηση των πελατών της, να διερευνηθεί η συμπεριφορά συγκεκριμένων ομάδων πελατών απέναντι στις υπηρεσίες που προσφέρει και να βγουν συμπεράσματα για την πολιτική που πρέπει να ακολουθηθεί στους μελλοντικούς της σχεδιασμούς.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε το χρονικό διάστημα Μαρτίου-Απριλίου 2005 μέσω προσωπικών συνεντεύξεων σε Κόρινθο και Αθήνα. Για λόγους αξιοπιστίας και εγκυρότητας της έρευνας επιλέχθηκε η ανώνυμη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου από πελάτες των super-markets. Το τελικό δείγμα αποτελείται από 685 ερωτηματολόγια, μετά τον έλεγχο ορθής συμπλήρωσής τους.

Τα κριτήρια ικανοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν για την έρευνα είναι τα εξής 4:

- *Προσωπικό*: Το κριτήριο αυτό περιλαμβάνει τα χαρακτηριστικά εξυπηρέτησης από το προσωπικό των καταστημάτων. Πιο συγκεκριμένα, αναφέρεται στη συμπεριφορά του προσωπικού (φιλικότητα, κατανόηση των αναγκών του πελάτη), την εξυπηρέτηση του προσωπικού (ταχύτητα και ακρίβεια εξυπηρέτησης), την επάρκεια και διαθεσιμότητα του προσωπικού όποτε χρειάζεται, καθώς και στην ενημέρωση/πληροφόρηση που δίνεται από το προσωπικό.
- *Εξυπηρέτηση*: Η συγκεκριμένη διάσταση ικανοποίησης αναφέρεται στα γενικά χαρακτηριστικά του συστήματος εξυπηρέτησης των καταστημάτων και περιλαμβάνει τον χρόνο αναμονής στην ουρά (στο ταμείο, τα φρέσκα προϊόντα, κλπ), τα διαθέσιμα καλάθια και καρότσια του καταστήματος, την τοποθεσία του καταστήματος (πόσο βολική είναι για τον πελάτη), καθώς και το διαθέσιμο πάρκινγκ (χώρος, μέγεθος, ασφάλεια, κλπ).
- *Προϊόντα*: Το κριτήριο αυτό αφορά κυρίως τα χαρακτηριστικά των προϊόντων που πωλούνται από τα καταστήματα. Περιλαμβάνει τόσο την ποιότητα όσο και την ποικιλία των προσφερόμενων προϊόντων (συσκευασμένων ή φρέσκων), καθώς επίσης και τα χαρακτηριστικά της τιμής (σε σύγκριση με άλλα super-markets), των ειδικών προσφορών που γίνονται σε διάφορα προϊόντα και των δώρων/κληρώσεων που πραγματοποιούνται ανάλογα με τις αγορές των πελατών.
- *Εγκαταστάσεις*: Το συγκεκριμένο κριτήριο αφορά τα χαρακτηριστικά των εγκαταστάσεων των super-markets, όπως το μέγεθος των καταστημάτων, τη διαρρύθμιση του χώρου και την ταξινόμηση των προϊόντων στα ράφια, την καθαριότητα, την ατμόσφαιρα του καταστήματος (φωτισμός, μουσική, κλιματισμός, κλπ), όπως επίσης και τη σήμανση που υπάρχει για ευκολότερη εύρεση των προϊόντων.

### **9.9.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα**

Χρειάστηκαν 3 επαναλήψεις του σεναρίου (ii) για αποφασισθεί ο συνδυασμός των τιμών των παραμέτρων. Οι 3 αυτές επαναλήψεις παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

Επανάληψη	Παράμετρος	Ελάχιστο	Μέγιστο	Βήμα
1	$\gamma$	0	10	1
	$\gamma_i$	0	5	1
	$\epsilon$ (%)	0	10	2
2	$\gamma$	2	5	0.3
	$\gamma_i$	3	5	0.2
	$\epsilon$ (%)	2	6	0.4
3	$\gamma$	3.4	4.7	0.1
	$\gamma_i$	3.4	4.7	0.1
	$\epsilon$ (%)	3	5	0.2

Η τελική επιλογή των τιμών των παραμέτρων της MUSA είναι:

$$\gamma = 3,4 \quad \gamma_i = 4.4 \quad \epsilon = 4.0\%$$

Με χρήση αυτών των παραμέτρων και χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο MUSA III επιτυγχάνουμε τις εξής τιμές για τους δείκτες:

$$AFI = 95.84\% \quad OPL = 66.72\% \quad ASI = 79.95\%$$

## 9.10 Έρευνα Ικανοποίησης Εργαζομένων σε μεγάλη αλυσίδα Super Market

### 9.10.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης

Η έρευνα αφορούσε στην ικανοποίηση εργαζομένων, υπό την έννοια των εσωτερικών πελατών, μεγάλης αλυσίδας super-market και είχε ως στόχο να αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο στα χέρια της διοίκησης της εταιρείας. Πιο συγκεκριμένα, σκοπός της έρευνας αυτής ήταν να εντοπίσει τα δυνατά και αδύνατα σημεία του γενικότερου περιβάλλοντος εργασίας στα κατά τόπους καταστήματα, εκφρασμένα μέσα από την συνολική ικανοποίηση των εργαζομένων τους, να διερευνήσει την συμπεριφορά συγκεκριμένων ομάδων εργαζομένων και να βγάλει συμπεράσματα για την πολιτική που πρέπει να ακολουθήσει στους μελλοντικούς της σχεδιασμούς.

Η έρευνα ικανοποίησης πραγματοποιήθηκε το χρονικό διάστημα Απριλίου-Μαΐου 2005 μέσω προσωπικών συνεντεύξεων. Για λόγους αξιοπιστίας και εγκυρότητας της έρευνας επιλέχθηκε η ανώνυμη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου από εργαζόμενους των super-markets. Το τελικό δείγμα αποτελούνταν από 1953 ερωτηματολόγια από όλη την Ελλάδα, μετά τον έλεγχο ορθής συμπλήρωσής τους.

Τα κριτήρια ικανοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν για την έρευνα είναι τα εξής 5:

- *Εργασία*: Το κριτήριο αυτό περιλαμβάνει τα χαρακτηριστικά που συνιστούν τις γενικότερες συνθήκες εργασίας. Πιο συγκεκριμένα, αναφέρεται στο περιεχόμενο της εργασίας που ανατίθεται σε κάθε εργαζόμενο, στο περιβάλλον εργασίας της εταιρίας, στις συνθήκες υγιεινής και ασφάλειας που επικρατούν στο χώρο εργασίας, στο βαθμό εκχώρησης αρμοδιοτήτων από τους προϊσταμένους και τη διοίκηση, καθώς και στις δυνατότητες που παρέχονται για πρωτοβουλίες.
- *Αμοιβές*: Η συγκεκριμένη διάσταση ικανοποίησης αναφέρεται στο ύψος των αμοιβών που λαμβάνει κάθε εργαζόμενος και οι οποίες περιλαμβάνουν το μισθό, τις παροχές ασφάλισης και διάφορες άλλες οικονομικές παροχές (bonus αποδοτικότητας, κλπ).
- *Ευκαιρίες*: Το κριτήριο αυτό αφορά κυρίως στα χαρακτηριστικά των ευκαιριών που παρέχονται στους εργαζόμενους. Περιλαμβάνει τόσο την αναγνώριση και την αντικειμενική αξιολόγηση από τη διοίκηση, καθώς επίσης και τις ευκαιρίες για περαιτέρω εξέλιξη αλλά και οι δυνατότητες κατάρτισης και εκπαίδευσης που παρέχονται από την εταιρεία .
- *Επικοινωνία*: Το συγκεκριμένο κριτήριο αφορά τα χαρακτηριστικά της επικοινωνίας που βιώνουν οι εργαζόμενοι όπως οι δυνατότητες επικοινωνίας και ενημέρωσης, οι σχέσεις με τους συναδέλφους και οι σχέσεις με τη διοίκηση.
- *Εταιρεία*: Η τελευταία αυτή διάσταση ικανοποίησης σχετίζεται με την εικόνα που έχουν σχηματίσει οι εργαζόμενοι για την εταιρεία. Η εικόνα καλύπτει τα προσφερόμενα προϊόντα και υπηρεσίες των super-market της εταιρείας, την γενικότερη εικόνα που δίνεται στην αγορά, το σύστημα διοίκησης που εφαρμόζεται και τέλος η πολιτική της εταιρείας σχετικά με το προσωπικό.

### **9.10.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα**

Χρειάστηκαν 3 επαναλήψεις του σεναρίου (ii) για αποφασισθεί ο συνδυασμός των τιμών των παραμέτρων. Οι 3 αυτές επαναλήψεις παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

Επανάληψη	Παράμετρος	Ελάχιστο	Μέγιστο	Βήμα
1	$\gamma$	0	10	1
	$\gamma_i$	0	4	1
	$\varepsilon$ (%)	0	10	2
2	$\gamma$	0	4	0.5
	$\gamma_i$	0	3	0.5
	$\varepsilon$ (%)	1	5	0.5
3	$\gamma$	0	2	0.25
	$\gamma_i$	0	2	0.25
	$\varepsilon$ (%)	1	3	0.25

Η τελική επιλογή των τιμών των παραμέτρων της MUSA είναι:

$$\gamma = 0.75$$

$$\gamma_i = 1.25$$

$$\varepsilon = 2.0\%$$

Με χρήση αυτών των παραμέτρων και χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο MUSA I επιτυγχάνουμε τις εξής τιμές για τους δείκτες:

$$AFI = 94.23\%$$

$$OPL = 62.01\%$$

$$ASI = 95.58\%$$

## 9.11 Έρευνα Ικανοποίησης Τουριστών από τις τουριστικές υπηρεσίες στη Σκόπελο

### 9.11.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης

Σκοπός της έρευνας ήταν ο καθορισμός του βαθμού ικανοποίησης των τουριστών της Σκοπέλου αναφορικά με τις υπηρεσίες που απολάμβαναν από τις επιχειρήσεις και τους φορείς του νησιού.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε το χρονικό διάστημα Ιουνίου - Σεπτεμβρίου 2006 μέσω προσωπικών συνεντεύξεων. Στην έρευνα συμμετείχαν 755 τουρίστες από τους οποίους οι 599 ήταν Έλληνες και οι 156 ξένοι.

Τα κριτήρια ικανοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν για την έρευνα είναι τα εξής 5:

- *Κατάλυμα*: αναφορικά με την τοποθεσία, τη πρόσβαση, τις παρεχόμενες υπηρεσίες, την άνεση, την εξυπηρέτηση και τις τιμές.
- *Φαγητό*: αναφορικά με την ποιότητα και την ποικιλία, την καθαριότητα, την εξυπηρέτηση, το περιβάλλον και τις τιμές.
- *Μεταφορές*: αναφορικά με το χρόνο αναμονής, τη συμπεριφορά του προσωπικού, την ασφάλεια, την ποιότητα και τις τιμές.

- *Τουριστικά Αξιοθέατα – Αναψυχή*: αναφορικά με την ποιότητα των εγκαταστάσεων, τις παρεχόμενες υπηρεσίες, την καθαριότητα των χώρων και τις τιμές.
- *Υποδομές*: αναφορικά με τους δρόμους, τις τηλεπικοινωνίες και τις υπηρεσίες υγείας.

### 9.11.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα

Χρειάστηκαν 3 επαναλήψεις του σεναρίου (ii) για αποφασισθεί ο συνδυασμός των τιμών των παραμέτρων. Οι 3 αυτές επαναλήψεις παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

Επανάληψη	Παράμετρος	Ελάχιστο	Μέγιστο	Βήμα
1	$\gamma$	0	5	1
	$\gamma_i$	0	4	1
	$\epsilon$ (%)	0	10	2
2	$\gamma$	1	3	0.25
	$\gamma_i$	0	2	0.25
	$\epsilon$ (%)	0	4	0.5
3	$\gamma$	2	3	0.1
	$\gamma_i$	0.5	1.5	0.1
	$\epsilon$ (%)	1	2.6	0.05

Η τελική επιλογή των τιμών των παραμέτρων της MUSA είναι:

$$\gamma = 2.2 \quad \gamma_i = 1.3 \quad \epsilon = 1.25 \%$$

Με χρήση αυτών των παραμέτρων και χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο MUSA I επιτυγχάνουμε τις εξής τιμές για τους δείκτες:

$$AFI = 95.42\% \quad OPL = 55.23\% \quad ASI = 89.95\%$$

## 9.12 Έρευνα Ικανοποίησης Τηλεθεατών από Παιδικές Εκπομπές

### 9.12.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης

Η παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκε με στόχο να διερευνηθούν τα επίπεδα ικανοποίησης των τηλεθεατών από τις παιδικές εκπομπές που προβλήθηκαν στην ελληνική τηλεόραση τον χειμώνα 2006-2007. Προκειμένου να πραγματοποιηθεί η εργασία αυτή δημιουργήθηκε ειδικό ερωτηματολόγιο το οποίο συμπληρώθηκε από τους τηλεθεατές μέσω ιστοσελίδας που δημιουργήθηκε για αυτό το σκοπό και «αναρτήθηκε» στο site της εταιρίας παραγωγής τηλεοπτικών εκπομπών «Φαίδων και Μπριγκίτε Σοφιανού» σε συνεργασία με την οποία διεξήχθη η έρευνα.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε την περίοδο από τον Οκτώβριο του 2006 έως τον Ιανουάριο του 2007. Στην έρευνα συμμετείχαν 250 τηλεθεατές.

Τα κριτήρια ικανοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν για την έρευνα είναι τα εξής 3:

- *Ψυχαγωγία:* Μια παιδική τηλεοπτική εκπομπή όπως και πολλές άλλες εκπομπές που προβάλλονται έχουν ως στόχο να διασκεδάσουν το κοινό που τις παρακολουθεί. Επομένως η ψυχαγωγία είναι ένα κριτήριο που αξιολογεί κατά πόσο επιτυγχάνεται αυτός ο στόχος.
- *Ποιότητα:* Οι παιδικές εκπομπές απευθύνονται ως επί το πλείστον σε παιδιά, άτομα δηλαδή που βρίσκονται σε ευαίσθητες ηλικίες τόσο για να κρίνουν όσο και να αξιολογήσουν τα ερεθίσματα που λαμβάνουν. Επομένως το κριτήριο της ποιότητας αξιολογεί ακριβώς αυτή την διάσταση των παιδικών εκπομπών.
- *Πρόσωπα:* Το κριτήριο των προσώπων αναφέρεται στα πρόσωπα που εμπλέκονται σε μια παιδική εκπομπή, εννοώντας τους παρουσιαστές. Οι παρουσιαστές είναι σημαντικό κομμάτι μιας εκπομπής καθώς γίνονται οι πρωταγωνιστές και τα παιδιά επηρεάζονται τόσο από τους ίδιους όσο και από τις ιδέες τους. Απευθύνονται στο παιδικό κοινό και το επηρεάζουν με τον ίδιο ίσως και με πιο έντονο τρόπο από τους ήρωες των κινουμένων σχεδίων ή των εκπομπών με κούκλες δεδομένου ότι η επαφή τους με τα παιδιά είναι σχεδόν άμεση.

### 9.12.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα

Χρειάστηκαν 3 επαναλήψεις του σεναρίου (ii) για αποφασισθεί ο συνδυασμός των τιμών των παραμέτρων. Οι 3 αυτές επαναλήψεις παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

Επανάληψη	Παράμετρος	Ελάχιστο	Μέγιστο	Βήμα
1	$\gamma$	0	5	0.5
	$\gamma_i$	0	5	0.5
	$\varepsilon$ (%)	0	10	1
2	$\gamma$	1	5	0.25
	$\gamma_i$	1	4	0.25
	$\varepsilon$ (%)	0	4	0.5
3	$\gamma$	2	4	0.1
	$\gamma_i$	2	4	0.1
	$\varepsilon$ (%)	1	3	0.2

Η τελική επιλογή των τιμών των παραμέτρων της MUSA είναι:

$$\gamma = 2.4 \quad \gamma_i = 3.6 \quad \varepsilon = 2.0\%$$

Με χρήση αυτών των παραμέτρων και χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο MUSA III επιτυγχάνουμε τις εξής τιμές για τους δείκτες:

$$AFI = 91.81\% \quad OPL = 66.40\% \quad ASI = 89.32\%$$

## 9.13 Έρευνα Ικανοποίησης Επιβατών από το ΤΡΑΜ

### 9.13.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης

Σκοπός της συγκεκριμένης έρευνας ήταν η αποτίμηση της ανταπόκρισης των υπηρεσιών του τραμ στις προσδοκίες των επιβατών του.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε τον Οκτώβριο του 2005 και συμμετείχαν 760 επιβάτες.

Τα κριτήρια ικανοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν για την έρευνα είναι τα εξής 8:

- *Διαθεσιμότητα*: αναφορικά με το ωράριο, τη συχνότητα των δρομολογίων, την απόσταση μεταξύ των στάσεων και τη σύνδεση με άλλα μέσα μαζικής μεταφοράς.
- *Προσβασιμότητα*: αναφορικά με την πρόσβαση στη στάση και το όχημα, την ευκολία αγοράς εισιτηρίου από τα εκδοτικά μηχανήματα και την τιμή αυτού.



- *Πληροφόρηση*: στη στάση και στο όχημα
- *Χρόνος*: αναφορικά με τη διάρκεια της διαδρομής και την αναμονή στη στάση
- *Μέριμνα Πελατών*: αναφορικά με τη συμπεριφορά και την εμφάνιση του προσωπικού, την επάρκεια και τη διαθεσιμότητα αυτού.
- *Άνεση*: αναφορικά με την καθαριότητα σε όχημα και στάση, την ποιότητα & τη θερμοκρασία του αέρα στο όχημα, και την άνεση του ταξιδιού.
- *Ασφάλεια*: αναφορικά με την παρουσία προσωπικού ασφαλείας, το φωτισμό στις στάσεις, την παρεχόμενη ασφάλεια κατά τη μετακίνηση μέσα στο όχημα και την ασφάλεια στον τροχιοδρόμο
- *Προστασία Περιβάλλοντος*: αναφορικά με την αισθητική του τροχιοδρόμου (γκαζόν, διαμορφώσεις), την αισθητική του οχήματος, το θόρυβο και τις δονήσεις.

### 9.13.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα

Χρειάστηκαν 3 επαναλήψεις του σεναρίου (ii) για αποφασισθεί ο συνδυασμός των τιμών των παραμέτρων. Οι 3 αυτές επαναλήψεις παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

Επανάληψη	Παράμετρος	Ελάχιστο	Μέγιστο	Βήμα
1	$\gamma$	0	5	1
	$\gamma_i$	0	2.5	0.5
	$\epsilon$ (%)	0	10	2
2	$\gamma$	1	4	0.25
	$\gamma_i$	1	2	0.2
	$\epsilon$ (%)	1	8	1
3	$\gamma$	1.6	2.6	0.1
	$\gamma_i$	1.5	2.0	0.1
	$\epsilon$ (%)	2	3	0.2

Η τελική επιλογή των τιμών των παραμέτρων της MUSA είναι:

$$\gamma = 2.0 \quad \gamma_i = 1.8 \quad \epsilon = 2.8\%$$

Με χρήση αυτών των παραμέτρων και χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο MUSA III επιτυγχάνουμε τις εξής τιμές για τους δείκτες:

$$AFI = 94.57\% \quad OPL = 72.37\% \quad ASI = 89.30\%$$

## 9.14 Έρευνα Ικανοποίησης Επιβατών από το ΜΕΤΡΟ

### 9.14.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης

Η ποσοτική έρευνα που πραγματοποιήθηκε είχε σαν βασικό στόχο την εξαγωγή συγκεκριμένων μέτρων της ικανοποίησης των επιβατών του μετρό, που βασίζονται σε στατιστικά αξιόπιστα δεδομένα. Γι' αυτό και η γενίκευση των αποτελεσμάτων της έρευνας στο σύνολο του πληθυσμού ήταν δυνατή. Κατόπιν της δημιουργίας ενός δομημένου ερωτηματολογίου, έγινε κυρίως ταχυδρομική έρευνα (μέσω e-mail) σε χρήστες του μέσου, καθώς και προσωπικές συνεντεύξεις στους χώρους του μετρό.

Η εφαρμογή της έρευνας έλαβε χώρα κατά την περίοδο Μαΐου – Ιουνίου 2005 στην Αθήνα και τον Πειραιά και το δείγμα που συγκεντρώθηκε έφτασε τα 250 ερωτηματολόγια.

Τα κριτήρια ικανοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν για την έρευνα είναι τα εξής 5:

- *Ταχύτητα και Συνέπεια:* Οι επιβάτες του μετρό προσδοκούν να εξοικονομήσουν χρόνο από τη μεταφορά τους με το μετρό και απαιτούν την τήρηση του ωραρίου που αναγγέλλεται από τις ηλεκτρονικές πινακίδες που είναι αναρτημένες στους σταθμούς και την ελαχιστοποίηση του χρόνου αναμονής..
- *Ασφάλεια:* Η αίσθηση της ασφάλειας τόσο κατά τη διάρκεια της αναμονής των συρμών όσο και κατά τη μεταφορά με αυτούς είναι πολύ σημαντική για τους επιβάτες. Η παρουσία προσωπικού στους χώρους του μετρό και τα κατάλληλα μέτρα ασφαλείας παίζουν καθοριστικό ρόλο σε συνδυασμό, μάλιστα, και με τις παροχές μέσα στους συρμούς (όπως οι χειρολαβές, τα καθίσματα, το αυτόματο άνοιγμα-κλείσιμο των πόρτων) που εξασφαλίζουν μια άνετη και ασφαλή παραμονή στις εγκαταστάσεις του μετρό.
- *Συνθήκες Μετακίνησης:* Για κάθε επιβάτη η άνετη μεταφορά σε ένα καθαρό περιβάλλον είναι σημαντική. Απαιτήση της πλειοψηφίας είναι η ύπαρξη κατάλληλης υποδομής για τα άτομα με ειδικές ικανότητες, πόσο μάλλον σε πρόσφατες και σύγχρονες εγκαταστάσεις, η απόλυτη εξυπηρέτηση από το προσωπικό και η σωστή καθοδήγηση από τις ενημερωτικές πινακίδες.
- *Οργάνωση Συγκοινωνιακού Δικτύου:* Σημαντικός παράγοντας στην ικανοποίηση του επιβάτη αποτελούν η κάλυψη των περιοχών από τις γραμμές του μετρό και ο αριθμός των μετεπιβιβάσεων που απαιτείται για να φτάσει κάποιος στον προορισμό του. Οι ισχύουσες τιμές και αυτές σε σύγκριση με τις παρεχόμενες υπηρεσίες επηρεάζουν πολύ την γνώμη των επιβατών, όπως επίσης και το ωράριο λειτουργίας του μέσου.

- *Επίδραση στο Φυσικό Περιβάλλον:* Κατά πόσο έχει ανακουφίσει η λειτουργία του μετρό το κυκλοφοριακό και το νέφος της Αθήνας είναι ένα θέμα που έχει απασχολήσει τόσο τους ειδικούς όσο και τους ίδιους τους επιβάτες. Επίσης το αν αυτό έχει βοηθήσει στην εμπορική ανάπτυξη των περιοχών με σταθμούς σε συνδυασμό με την απουσία πολεοδομικών προβλημάτων.

### 9.14.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα

Χρειάστηκαν 3 επαναλήψεις του σεναρίου (ii) για αποφασισθεί ο συνδυασμός των τιμών των παραμέτρων. Οι 3 αυτές επαναλήψεις παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

Επανάληψη	Παράμετρος	Ελάχιστο	Μέγιστο	Βήμα
1	$\gamma$	0	6	1
	$\gamma_i$	0	4	0.5
	$\epsilon$ (%)	0	12	2
2	$\gamma$	0	2	0.2
	$\gamma_i$	2	4.2	0.2
	$\epsilon$ (%)	6	10	0.5
3	$\gamma$	0.3	1.2	0.1
	$\gamma_i$	3.1	3.8	0.1
	$\epsilon$ (%)	8.2	9.6	0.2

Η τελική επιλογή των τιμών των παραμέτρων της MUSA είναι:

$$\gamma = 1.0 \quad \gamma_i = 3.6 \quad \epsilon = 9.0\%$$

Με χρήση αυτών των παραμέτρων και χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο MUSA III επιτυγχάνουμε τις εξής τιμές για τους δείκτες:

$$AFI = 92.36\% \quad OPL = 58.40\% \quad ASI = 78.04\%$$

## 9.15 Έρευνα Ικανοποίησης Πελατών από χορήγηση Στεγαστικού Δανείου από το Ταμείο Παρακαταθηκών και Δανείων

### 9.15.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης

Κύριος στόχος της έρευνας ήταν η εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με το επίπεδο ικανοποίησης των συναλλασσομένων για τη χορήγηση στεγαστικού δανείου από το Ταμείο Παρακαταθηκών και Δανείων.

Το δείγμα της έρευνας επιλέχθηκε με βάση στρωματοποιημένη τυχαία δειγματοληψία. Η έρευνα διεξήχθη κατά το χρονικό διάστημα από 20 Αυγούστου έως 20 Οκτωβρίου 2005, με επισκέψεις στο σύνολο των καταστημάτων του Ταμείου Παρακαταθηκών & Δανείων, σε Αθήνα, Πειραιά, Πάτρα και Θεσσαλονίκη. Το αρχικά σχεδιασμένο μέγεθος του δείγματος ανερχόταν σε 330 ερωτηματολόγια, όμως αποκλείστηκαν και δεν συμμετείχαν στην έρευνα 30 ερωτηματολόγια λόγω ελλείψεων και λαθών στη συμπλήρωση. Το τελικό δείγμα ανήλθε σε 300 «ολοκληρωμένες» απαντήσεις στα ερωτηματολόγια.

Τα κριτήρια ικανοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν για την έρευνα είναι τα εξής 4:

- *Προσωπικό του Ταμείου Παρακαταθηκών και Δανείων*: η διάσταση αυτή αξιολογεί τις επιδόσεις του προσωπικού στην εξυπηρέτηση του κοινού. Περιλαμβάνει χαρακτηριστικά που αναφέρονται στις γνώσεις και τις ικανότητες ανταπόκρισης στα αιτήματα των συναλλασσομένων, στην ταχύτητα και ακρίβεια εξυπηρέτησης καθώς και στην ευγένεια και προθυμία του προσωπικού. Πρέπει να τονισθεί ότι το κριτήριο αυτό αναφέρεται κατά βάση στο προσωπικό επαφής (front office) του Τ.Π. και Δανείων.
- *Παρεχόμενη υπηρεσία (Στεγαστικά Δάνεια)*: το κριτήριο αυτό αναφέρεται στην υπό εξέταση παρεχόμενη υπηρεσία (στεγαστικά δάνεια) που χορηγεί το Ταμείο. Περιλαμβάνει το χορηγούμενο ποσό για την κάλυψη των στεγαστικών αναγκών του συναλλασσομένου, τους παρεχόμενους όρους δανειοδότησης και τα έξοδα για την κατάρτιση της δανειακής σύμβασης.
- *Εικόνα*: αξιολογεί την εμφάνιση των χώρων των καταστημάτων του Ταμείου, την τεχνολογική υποδομή που διαθέτει, καθώς και την τοποθεσία των καταστημάτων.
- *Εξυπηρέτηση*: αναφέρεται στις διαδικασίες που απαιτούνται από την αίτηση για χορήγηση του στεγαστικού δανείου μέχρι την εκταμίευσή του (γραφειοκρατία), τους χρόνους αναμονής (ουρά στα ταμεία, αναμονή για τηλεφωνική πληροφόρηση κ.λ.π.) και την εμφάνιση και σαφήνεια στη συμπλήρωση των παρεχόμενων εγγράφων και εντύπων.

### **9.15.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα**

Χρειάστηκαν 3 επαναλήψεις του σεναρίου (ii) για αποφασισθεί ο συνδυασμός των τιμών των παραμέτρων. Οι 3 αυτές επαναλήψεις παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

Επανάληψη	Παράμετρος	Ελάχιστο	Μέγιστο	Βήμα
1	$\gamma$	0	8	1
	$\gamma_i$	0	5	1
	$\epsilon$ (%)	0	10	2
2	$\gamma$	1	3	0.4
	$\gamma_i$	2	5	0.4
	$\epsilon$ (%)	0	4	0.4
3	$\gamma$	1.5	2.5	0.1
	$\gamma_i$	4	5	0.1
	$\epsilon$ (%)	0	2	0.1

Η τελική επιλογή των τιμών των παραμέτρων της MUSA είναι:

$$\gamma = 2.0 \quad \gamma_i = 4.6 \quad \epsilon = 1.2 \%$$

Με χρήση αυτών των παραμέτρων και χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο MUSA I επιτυγχάνουμε τις εξής τιμές για τους δείκτες:

$$AFI = 96.44\% \quad OPL = 88.67\% \quad ASI = 81.20\%$$

## 9.16 Έρευνα Ικανοποίησης Επισκεπτών από τις Υπηρεσίες στα Ιαματικά Κέντρα στην Ελλάδα

### 9.16.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης

Η παρούσα έρευνα είχε ως στόχο να αξιολογήσει την ποιότητα των προσφερόμενων υπηρεσιών στα διάφορα ιαματικά κέντρα της χώρας, και κατ' επέκταση να μετρήσει την ικανοποίηση των χρηστών ιαματικών πηγών.

Για τη διεξαγωγή της συγκεκριμένης έρευνας επιλέχθηκε δείγμα με βάση τυχαία δειγματοληψία. Στη συγκεκριμένη έρευνα ο πληθυσμός αποτελείται από όλους τους χρήστες ιαματικών πηγών, οι οποίοι δεν ξεπερνούν τους 100.000. Τα ερωτηματολόγια που συγκεντρώθηκαν ανήλθαν στα 300, αριθμός ο οποίος είναι ικανοποιητικός για τη εξαγωγή αξιόπιστων αποτελεσμάτων.

Η διεξαγωγή της έρευνας διήρκησε από τον Απρίλιο έως και τον Αύγουστο του 2005. Ωστόσο, θα πρέπει να σημειωθεί ότι η συγκέντρωση των ερωτηματολογίων ξεκίνησε από την πρώτη μέρα του Ιουνίου, καθώς αυτή είναι η ημερομηνία αρχής λειτουργίας των περισσότερων ιαματικών κέντρων. Για τη συγκέντρωση των απαιτούμενων στοιχείων πραγματοποιήθηκε επίσκεψη στο ιαματικό κέντρο Λουτρακίου, ενώ στάλθηκαν ερωτηματολόγια και στο υδροθεραπευτήριο του Λαγκαδά.

Τα κριτήρια ικανοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν για την έρευνα είναι τα εξής 4:

- *Ποιότητα θεραπευτικών προγραμμάτων:* η διάσταση αυτή αναφέρεται στις εγκαταστάσεις του θεραπευτηρίου και το κατά πόσο αυτές ανταποκρίνονται στις ανάγκες του χρήστη, καθώς επίσης, και αν τα θεραπευτικά αποτελέσματα είναι ικανοποιητικά.
- *Προσωπικό:* αναφέρεται στην επάρκεια γνώσεων του προσωπικού, στην άριστη επικοινωνία του προσωπικού με τον χρήστη και την κατανόηση των προβλημάτων του, καθώς επίσης, και στη φιλικότητα που επιδεικνύει το προσωπικό.
- *Εξυπηρέτηση:* έχει να κάνει με το αν είναι ικανοποιητική η πρόσβαση στις πηγές (δηλαδή αν παρέχεται η δυνατότητα τις κράτησης θέσεων), όπως επίσης και το αν είναι αποτελεσματικές οι εσωτερικές διαδικασίες εξυπηρέτησης.
- *Τιμές:* η διάσταση αυτή περιλαμβάνει το λογικό κόστος των θεραπευτικών προγραμμάτων, τις ικανοποιητικές τιμές στα ξενοδοχεία, στις λογικές τιμές στα φαγητά και ποτά και τέλος την επάρκεια των παρεχόμενων εκπνώσεων.

### 9.16.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα

Χρειάστηκαν 3 επαναλήψεις του σεναρίου (ii) για αποφασισθεί ο συνδυασμός των τιμών των παραμέτρων. Οι 3 αυτές επαναλήψεις παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

Επανάληψη	Παράμετρος	Ελάχιστο	Μέγιστο	Βήμα
1	$\gamma$	0	5	1
	$\gamma_i$	0	5	1
	$\epsilon$ (%)	0	10	2
2	$\gamma$	2	3.8	0.2
	$\gamma_i$	0	2	0.2
	$\epsilon$ (%)	1	5	0.25
3	$\gamma$	2.2	3.4	0.1
	$\gamma_i$	0.1	0.9	0.1
	$\epsilon$ (%)	2	3	0.1

Η τελική επιλογή των τιμών των παραμέτρων της MUSA είναι:

$$\gamma = 2.9 \quad \gamma_i = 0.6 \quad \epsilon = 2.8\%$$

Με χρήση αυτών των παραμέτρων και χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο MUSA I επιτυγχάνουμε τις εξής τιμές για τους δείκτες:

AFI = 98.96%            OPL = 73.00%            ASI = 93.43%

## 9.17 Έρευνα Ικανοποίησης Εταιρικών Πελατών Εταιρίας Logistics

### 9.17.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε ανώνυμη εταιρεία υπηρεσιών logistics με συμπλήρωση ερωτηματολογίων προκειμένου να μετρηθεί η ικανοποίηση των πελατών και να μπορέσει να προχωρήσει η επιχείρηση στη βελτίωση του συστήματος ποιότητας.

Η μέτρηση ικανοποίησης έγινε στην έδρα της εταιρείας που βρίσκεται στην Αθήνα. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε το μήνα Ιανουάριο του 2006. Ο συνολικός αριθμός ερωτηματολογίων που συγκεντρώθηκε ανέρχεται στα 150 (μικρό δείγμα για τη διεξαγωγή της μέτρησης της ικανοποίησης ωστόσο αριθμός ικανοποιητικών αναλογίζοντας το όγκο της πελατείας), σε διάστημα 20 ημερών.

Τα κριτήρια ικανοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν για την έρευνα είναι τα εξής 4:

- *Προσωπικό*: η διάσταση αυτή αναφέρεται στη συμπεριφορά του προσωπικού και στην επάρκεια γνώσεών του.
- *Εγκαταστάσεις*: αναφέρεται στην επάρκεια, καταλληλότητα και καθαριότητα των χώρων.
- *Εξυπηρέτηση*: έχει να κάνει με βαθμό εξυπηρέτησης σε καθημερινό επίπεδο αλλά και στις περιπτώσεις αντιμετώπισης προβλημάτων.
- *Προϊόντα*: η διάσταση αυτή περιλαμβάνει την ποιότητα των υπηρεσιών και την τιμολογιακή πολιτική.

### 9.17.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα

Χρειάστηκαν 3 επαναλήψεις του σεναρίου (ii) για αποφασισθεί ο συνδυασμός των τιμών των παραμέτρων. Οι 3 αυτές επαναλήψεις παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

Επανάληψη	Παράμετρος	Ελάχιστο	Μέγιστο	Βήμα
1	$\gamma$	0	5	1
	$\gamma_i$	0	5	1
	$\varepsilon$ (%)	0	10	2
2	$\gamma$	1.5	3.5	0.2
	$\gamma_i$	3	5	0.2
	$\varepsilon$ (%)	8	12	0.2
3	$\gamma$	2	3	0.1
	$\gamma_i$	4	5	0.1
	$\varepsilon$ (%)	2	3	0.1

Η τελική επιλογή των τιμών των παραμέτρων της MUSA είναι:

$$\gamma = 2.2 \quad \gamma_i = 4.5 \quad \varepsilon = 9.6\%$$

Με χρήση αυτών των παραμέτρων και χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο MUSA I επιτυγχάνουμε τις εξής τιμές για τους δείκτες:

$$AFI = 91.11\% \quad OPL = 30.00\% \quad ASI = 77.21\%$$

## 9.18 Έρευνα Ικανοποίησης Επισκεπτών από το Αεροδρόμιο Ελευθέριος Βενιζέλος

### 9.18.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης

Στόχος της παρούσας έρευνας ήταν η μέτρηση της ικανοποίησης των επισκεπτών από το Αεροδρόμιο Ελευθέριος Βενιζέλος, με σκοπό την εξαγωγή συμπερασμάτων για την πορεία, το μέλλον του αεροδρομίου και την παράθεση βελτιωτικών προτάσεων. Η μέτρηση της ικανοποίησης επιχειρήθηκε με τη συμπλήρωση ενός απλού αλλά ειδικά διαμορφωμένου ερωτηματολογίου που διερευνούσε και επιμέριζε τη συνολική ικανοποίηση.

Ο πληθυσμός της έρευνας είναι όλοι οι χρήστες του αεροδρομίου στην Ελλάδα άνω των 18 ετών, που έχουν πραγματοποιήσει μία ή περισσότερες επισκέψεις στο αεροδρόμιο μέσα στο χρόνο. Το δείγμα της έρευνας επιλέχθηκε με βάση διαστρωματική τυχαία δειγματοληψία. Η χορήγηση των ερωτηματολογίων έγινε στο αεροδρόμιο Ελευθέριος Βενιζέλος και ηλεκτρονικά μέσω internet. Ο συνολικός αριθμός ερωτηματολογίων που χαρακτηρίζονταν από πληρότητα και δεν εμφάνιζαν λάθη ανήλθε σε 318, δείγμα αρκετά ικανοποιητικό (5% περιθώριο λάθους) για το δεδομένο πληθυσμό.

Τα κριτήρια ικανοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν για την έρευνα είναι τα εξής 6:



- *Ασφάλεια*: η διάσταση αυτή αναφέρεται στο αίσθημα ασφάλειας που νιώθουν οι επισκέπτες στο κτίριο του αεροδρομίου και στους περιβάλλοντες χώρους.
- *Τιμές*: αναφέρεται στο κόστος των parking και στο κόστος πρόσβασης.
- *Εξυπηρέτηση*: αναφέρεται στην παρεχόμενη από το προσωπικό εξυπηρέτηση.
- *Πρόσθετες Παροχές*: αφορούν στα καταστήματα που υπάρχουν στο χώρο.
- *Άνεση & Ποιότητα*: η διάσταση αυτή περιλαμβάνει την καθαριότητα, τη σήμανση, τον φωτισμό αλλά και την ιστοσελίδα του αεροδρομίου.
- *Πρόσβαση*: η διάσταση αυτή αφορά στο χρόνο πρόσβασης και στην κυκλοφοριακή σύνδεση με την πόλη.

### 9.18.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα

Χρειάστηκαν 3 επαναλήψεις του σεναρίου (ii) για αποφασισθεί ο συνδυασμός των τιμών των παραμέτρων. Οι 3 αυτές επαναλήψεις παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

Επανάληψη	Παράμετρος	Ελάχιστο	Μέγιστο	Βήμα
1	$\gamma$	0	5	1
	$\gamma_i$	0	3.2	0.5
	$\epsilon$ (%)	0	10	2
2	$\gamma$	1	3	0.25
	$\gamma_i$	1.2	3.2	0.2
	$\epsilon$ (%)	2	6	0.25
3	$\gamma$	1.3	2.3	0.1
	$\gamma_i$	2.4	3.2	0.1
	$\epsilon$ (%)	4	5	0.1

Η τελική επιλογή των τιμών των παραμέτρων της MUSA είναι:

$$\gamma = 1.9 \quad \gamma_i = 3.1 \quad \epsilon = 4.8\%$$

Με χρήση αυτών των παραμέτρων και χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο MUSA III επιτυγχάνουμε τις εξής τιμές για τους δείκτες:

$$AFI = 96.55\% \quad OPL = 70.44\% \quad ASI = 75.66\%$$

## 9.19 Έρευνα Ικανοποίησης Αναγνωστών από το Περιοδικό RAM

### 9.19.1 Ταυτότητα έρευνας-κριτήρια ικανοποίησης

Το έντυπο που αξιολογήθηκε στο πλαίσιο της έρευνας είναι το RAM, μηνιαίο περιοδικό για την πληροφορική και τους υπολογιστές που εκδίδεται από το ΔΟΛ. Το πρώτο τεύχος του RAM κυκλοφόρησε στις αρχές του 1988.

Στόχος της έρευνας ήταν η μέτρηση, αποτύπωση και ανάλυση της ικανοποίησης και της απαιτητικότητας των αναγνωστών καθώς και η ανίχνευση για την ύπαρξη ιδιαίτερων προφίλ απαιτητικότητας και ικανοποίησης σε υποομάδες του συνολικού πληθυσμού αναγνωστών - συγκεκριμένα στις ομάδες «μαθητές-φοιτητές», «γυναίκες», «αναγνώστες με χαμηλό εισόδημα» και «αναγνώστες με υψηλό εισόδημα»

Για τη διεξαγωγή της έρευνας επιλέχθηκε η αποστολή ερωτηματολογίου στους αναγνώστες μέσα στο τεύχος Μαΐου 2005 του RAM. Για αύξηση της ανταπόκρισης και συμμετοχής το ερωτηματολόγιο είχε προπληρωμένο τέλος (η αποστολή ήταν δωρεάν για τον αναγνώστη). Παράλληλα στην εισαγωγή του ερωτηματολογίου προβαλλόταν μια προσφορά δέκα ετήσιων συνδρομών στο περιοδικό σε ισάριθμους αναγνώστες, η επιλογή των οποίων θα γινόταν μετά από κλήρωση μεταξύ όσων θα συμμετείχαν στο διαγωνισμό. Συνολικά επιστράφηκαν απαντημένα από αναγνώστες 893 ερωτηματολόγια.

Τα κριτήρια ικανοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν για την έρευνα είναι τα εξής 7:

- *Εκδοτικές Αρχές:* αξιοπιστία, αντικειμενικότητα και εκδοτική ανεξαρτησία, ανταπόκριση στις ανάγκες και τις προσδοκίες του αναγνώστη, ποικιλία, σφαιρικότητα και πληρότητα στην κάλυψη της ύλης, ευελιξία & διαχείριση αλλαγής, καλλιέργεια αισθήματος συμμετοχής
- *Ύλη:* η ποιότητα της ύλης αναφορικά με τις μόνιμες στήλες, την επικαιρότητα και το πρόσθετο υλικό.
- *Συνοδευτικό υλικό:* δώρα, εφαρμογές λογισμικού
- *Χρηστικότητα & Καλαισθησία:* λειτουργικότητα του όλου πακέτου (τεύχους), χρηστικότητα δομής του εντύπου (περιεχόμενα-ενότητες), αισθητική σελίδων/εξώφυλλων, ποιότητα χαρτιού και εκτύπωσης
- *Τιμή:* τιμή τεύχους, κόστος συνδρομής

- *Διάθεση*: έκταση δικτύου διανομής (γεωγραφική κάλυψη), αποδοτικότητα δικτύου διανομής (έγκαιρη διακίνηση / Διαθεσιμότητα), συνδρομητικές υπηρεσίες.
- *Εξυπηρέτηση*: τηλεφωνική εξυπηρέτηση αναγνωστών για επίλυση προβλημάτων, διαχείριση παραπόνων / αντικατάσταση ελαττωματικών εντύπων / CD-ROM

### 9.19.2 Επιλογή παραμέτρων - Αποτελέσματα

Χρειάστηκαν 3 επαναλήψεις του σεναρίου (ii) για αποφασισθεί ο συνδυασμός των τιμών των παραμέτρων. Οι 3 αυτές επαναλήψεις παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

Επανάληψη	Παράμετρος	Ελάχιστο	Μέγιστο	Βήμα
1	$\gamma$	0	5	1
	$\gamma_i$	0	2.8	0.5
	$\epsilon$ (%)	0	10	2
2	$\gamma$	3	5	0.5
	$\gamma_i$	1.5	2.8	0.5
	$\epsilon$ (%)	0	4	0.5
3	$\gamma$	3.8	4.6	0.1
	$\gamma_i$	1.9	2.7	0.1
	$\epsilon$ (%)	1	3	0.1

Η τελική επιλογή των τιμών των παραμέτρων της MUSA είναι:

$$\gamma = 4.0 \quad \gamma_i = 2.5 \quad \epsilon = 2.0\%$$

Με χρήση αυτών των παραμέτρων και χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο MUSA I επιτυγχάνουμε τις εξής τιμές για τους δείκτες:

$$AFI = 93.38\% \quad OPL = 72.00\% \quad ASI = 82.73\%$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΔΑΛΙΑΣ

## Επίλογος

Στην παρούσα διατριβή παρουσιάστηκε η ανάγκη ολοκληρωμένης προσέγγισης της ανάλυσης ευστάθειας στα μοντέλα επιχειρησιακής έρευνας καθώς επίσης και ο ρόλος της στις διαδικασίες υποστήριξης των αποφάσεων.

Επίσης, τονίσθηκε η ανάγκη υλοποίησης διαδικασιών ανάλυσης ευστάθειας σε μοντέλα πολυκριτήριας ανάλυσης που χρησιμοποιούν την αναλυτική-συνθετική προσέγγιση και επιλύονται με χρήση τεχνικών γραμμικού προγραμματισμού. Με δεδομένη την ολοένα και αυξανόμενη χρήση τέτοιων προσεγγίσεων στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων υπάρχει η ανάγκη ανάπτυξης μίας ολοκληρωμένης προσέγγισης για την ενασχόληση με την ευστάθεια.

Ειδικότερα παρατηρώντας τα μοντέλα ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης της MUSA που εξετάστηκαν στο Κεφάλαιο 5 προέκυψε το συμπέρασμα ότι εφαρμόζοντας ευρετικές προσεγγίσεις δε υπολογίζονται όλες οι πολλαπλές ή σχεδόν βέλτιστες λύσεις του υπερπολυέδρου του γραμμικού προγράμματος της μεθόδου αλλά μόνο κάποιες ακραίες τιμές με αποτέλεσμα να υπάρχει ο κίνδυνος εξαγωγής λάθος συμπερασμάτων δεδομένης της ελλιπούς πληροφορίας. Ο κίνδυνος αυτός θα μπορούσε να είναι σημαντικός αν παρατηρηθεί ότι γενικά η μέση τιμή των βαρών που υπολογίζει η μέθοδος μπορεί να είναι ευαίσθητη στην ύπαρξη λίγων ασυνήθιστα μικρών ή μεγάλων μετρήσεων.

Για να αξιολογηθεί η ποιότητα της πληροφορίας των ευρετικών μεθόδων μεταβελτιστοποίησης υλοποιήθηκαν σε λογισμικό τρεις αναλυτικές μέθοδοι οι οποίες επιτρέπουν τον υπολογισμό, αν όχι όλων, τουλάχιστον ενός μεγάλου αριθμού πολλαπλών ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων, ώστε η μέση τιμή που θα προκύπτει μέσω αυτών να ανταποκρίνεται περισσότερο στις πραγματικές διαστάσεις του υπερπολυέδρου. Με τον τρόπο αυτό επιχειρήθηκε να δοθεί απάντηση στο ερώτημα: *Κατά πόσο οι ευρετικοί αλγόριθμοι της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης παρέχουν πληροφορία για τις μεταβέλτιστες λύσεις ανταγωνιστική ως προς την ποιότητά της σε σύγκριση με τους αναλυτικούς αλγόριθμους, πάντα όμως σε σχέση και με τον απαιτούμενο υπολογιστικό φόρτο;*

Για να δοθεί απάντηση στο παραπάνω ερώτημα σχεδιάστηκε και αναπτύχθηκε ένα ΣΥΑ που εμπειρεύει τους εξής αλγόριθμους:

- Αναλυτικοί Αλγόριθμοι (Manas and Nedoma, Αντίστροφη Simplex, Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση)
- Ευρετικοί Αλγόριθμοι (Γενικευμένο MUSA, MUSA I, MUSA II, MUSA III)

Το ΣΥΑ που αναπτύχθηκε διαθέτει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

## Επίλογος

- Υποστηρίζει τη μελέτη της ευστάθειας του μοντέλου της MUSA, δηλαδή τον καθορισμό των αποτελεσμάτων που είναι ευσταθή για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων της.
- Χρησιμοποιεί ευρετικούς αλγόριθμους που επιλύουν αποδοτικά το πρόβλημα της αναζήτησης μεταβέλτιστων λύσεων των γραμμικών συστημάτων προκειμένου να αποφευχθεί η εξαντλητική αναζήτηση του τεράστιου αριθμού των κορυφών του προς μελέτη υπερπολυέδρου.
- Επιλύει αποδοτικά τη μέθοδο MUSA.
- Υπολογίζει το σύνολο των δεικτών που αφορούν στο επίπεδο ικανοποίησης των πελατών και συνδυάζει τους δείκτες αυτούς για τη δημιουργία των διαγραμμάτων δράσης και βελτίωσης.
- Εστιάζει στην αξιολόγηση της ευστάθειας των λύσεων υπολογίζοντας με ακρίβεια τις τιμές των δεικτών AFI, OPL και ASI.

Το ΣΥΑ επιλύει πλήρως τη μέθοδο MUSA και στο πλαίσιο αυτό υπολογίζει τις τιμές των δεικτών ευστάθειας και των δεικτών αξιοπιστίας. Παράλληλα παρέχει χρήσιμα στοιχεία για την εκτίμηση της απόδοσης του κάθε αλγόριθμου. Τα στοιχεία αυτά είναι ο πραγματικός χρόνος επίλυσης του προβλήματος, ο αριθμός των περιστροφών του πίνακα Simplex, η χρησιμοποιούμενη μνήμη RAM και τέλος ο αριθμός των μεταβέλτιστων λύσεων.

Επίσης, το ΣΥΑ παρέχει στους αναλυτές τη δυνατότητα εκτίμησης των κατάλληλων κατά περίπτωση παραμέτρων  $\gamma$ ,  $\gamma_i$  και  $\epsilon$ . της MUSA μέσω της επίλυσης του προβλήματος για ένα συγκεκριμένο εύρος τιμών των παραμέτρων και την επιλογή των κατάλληλων τιμών μέσω της αξιολόγησης των δεικτών ευστάθειας και προσαρμογής.

Χρησιμοποιώντας τη συλλογιστική που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 1 για τις προσεγγίσεις της ανάλυσης ευστάθειας μπορεί να ειπωθεί ότι το ΣΥΑ μεταβελτιστοποίησης που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της παρούσας διατριβής ουσιαστικά οδηγεί την διαδικασία απόφασης και δε θα αποτελεί ούτε «εκ των προτέρων» ούτε «εκ των υστέρων» διαδικασία. Δηλαδή των σύνολο των διαφορετικών εκδόσεων της MUSA (η χρήση διαφορετικών τιμών για τις παραμέτρους) δε καθορίζεται εκ των προτέρων αλλά εξελίσσεται διαρκώς μέχρι τη λήψη της απόφασης. Κατά την υλοποίησης της διαδικασίας, οι συμμετέχοντες (αναλυτές) είναι ανοιχτοί να αποδεχτούν ένα ευρύ σύνολο εκδόσεων του μοντέλου (εύρος τιμών παραμέτρων), το οποίο προσπαθούν να μειώσουν καθώς η διαδικασία προχωράει.

## Επίλογος

Προκειμένου να μελετηθεί εξαντλητικά η απόδοση των ευρετικών αλγορίθμων έναντι των αναλυτικών καθώς και η επίδραση των παραμέτρων στην αξιοπιστία του μοντέλου, δημιουργήθηκε με τη βοήθεια ειδικής γεννήτριας δεδομένων ένας μεγάλος αριθμός από δοκιμαστικές περιπτώσεις. Σε αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικές συναρτήσεις ικανοποίησης όπως επίσης και διαφορετικά μεγέθη δείγματος. Επιπροσθέτως επιλέχθηκε ένα μεγάλο εύρος από τιμές για τις παραμέτρους.

Από την ανάλυση των τιμών των πειραμάτων προέκυψε το συμπέρασμα ότι οι αναλυτικοί αλγόριθμοι δεν μπορούν να τρέξουν σε πραγματικό χρόνο για την επίλυση μεγάλων προβλημάτων. Ακόμα και για τα σύνολα των δεδομένων των πειραμάτων με ανάγκη ανάλυσης ελάχιστου αριθμού ερωτηματολογίων (5-20) οι απαιτούμενος χρόνος πολλές φορές ήταν υπέρογκος. Οπότε η χρήση των ευρετικών αλγορίθμων θεωρείται μονόδρομος για την ανάλυση πραγματικών ερευνών ικανοποίησης με τη χρήση της μεθόδου MUSA.

Από την άλλη μεριά διαπιστώθηκε ότι η εξαντλητική αναζήτηση όλων των κορυφών του υπερπολυέδρου που εγγυάται ο αλγόριθμος των Manas και Nedoma ή η αναζήτηση σημαντικού αριθμού κορυφών που υλοποιούν οι άλλοι δύο αναλυτικοί αλγόριθμοι δεν βελτιώνουν σημαντικά την ποιότητα της πληροφορίας γεγονός που αποτυπώνεται στην μικρή επίδραση των διαφορετικών αλγορίθμων στις τιμές των δεικτών της MUSA. Επομένως τα πειράματα έδειξαν ότι οι ευρετικοί αλγόριθμοι μεταβελτιστοποίησης που χρησιμοποιούνται στην εφαρμογή της MUSA αποδίδουν εξαιρετικά, δεδομένου ότι περιγράφουν ικανοποιητικά τα όρια του υπερπολυέδρου με τον ελάχιστο υπολογιστικό φόρτο.

Μέσα από τη χρήση του ΣΥΑ παρατηρήθηκε ότι σε αρκετές περιπτώσεις η δυνατότητα επιλογής καλύτερων συνδυασμών για τις τιμές των παραμέτρων δεν οδηγεί σε σημαντική βελτίωση των δεικτών αξιοπιστίας και ευστάθειας της μεθόδου MUSA. Το γεγονός αυτό πιθανόν να είναι απόρροια της συλλογικής φύσης του μοντέλου στις περιπτώσεις που εφαρμόζεται σε ανομοιογενή δείγματα (π.χ. οι μισοί πελάτες να είναι απαιτητικοί και οι μισοί μη-απαιτητικοί υπό την έννοια του MUSA).

Επομένως μία σημαντική εξέλιξη του ΣΥΑ θα ήταν ο έλεγχος της υπόθεσης ότι σε ένα ανομοιογενές δείγμα ερωτηματολογίων ικανοποίησης πελατών υπάρχουν πελάτες με όμοιες συμπεριφορές που θα μπορούσαν να ομαδοποιηθούν ώστε η μέθοδος MUSA να εφαρμοσθεί αποδοτικότερα. Η ομαδοποίηση αυτή θα μπορούσε να υλοποιηθεί με τεχνικές εξόρυξης γνώσης που θα υποστηρίζονταν από το ΣΥΑ.

Επίσης, σε σχέση με την ανάλυση ευστάθειας και σε συνέχεια της παρούσας διατριβής η μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να εστιάσει στους εξής άξονες:

- Πρόταση νέων μέτρων ευστάθειας και αξιοπιστίας των πολυκριτήριων μοντέλων και ειδικότερα αυτών που βασίζονται στην αναλυτική – συνθετική

## Επίλογος

προσέγγιση και κάνουν χρήση τεχνικών γραμμικού προγραμματισμού (π.χ. UTA, UTA<sup>GMS</sup>, ELECCALC, MACBETH, GRIP).

- Μέθοδοι υπολογισμού κεντροβαρικών λύσεων.
- Δημιουργία νέων προτιμησιακών μοντέλων βάσει των αποτελεσμάτων της ανάλυσης ευστάθειας.
- Ανάπτυξη τεχνικών οπτικής απεικόνισης των ευστάθειας διαφορετικών μοντέλων ώστε να υποστηριχθούν αναλυτής και αποφασίζων.

Τέλος, στο ΣΥΑ θα μπορούσαν να ενσωματωθούν νέες διαδικασίες και αλγόριθμοι μεταβελτιστοποίησης ώστε να καλυφθούν και άλλα μοντέλα αναλυτικής συνθετικής προσέγγισης, όπως η οικογένεια των μεθόδων UTA, στοχεύοντας στην ανάλυση της ευστάθειας και στην εύρεση κεντροβαρικών ευσταθών λύσεων.



## Βιβλιογραφία

Adelman,L., 1992. Evaluating decision support and expert systems, John Wiley, New York

Aissi,H., 2005c. Approximation et resolution des version min-max et min-max regret de problemes d' optimisation combinatoire. PhD. Thesis, Paris-Dauphine.

Aissi,H., Bazgan,C., Vanderpooten,D., 2005a. Complexity of the min-max and min-max regret assignment problem. Operations Research Letters, 33 (6), 634-640.

Aissi,H., Bazgan,C., Vanderpooten,D., 2007. Approximation of min-max and min-max regret versions of some combinatorial optimization problems. European Journal of Operational Research, 179 (2), 281-290.

Aloulou, M.A, Portmann, M.C., 2005. Une approche proactive reactive efficace, cas d' un atelier d' assemblage. In: Billaut J.C., Moukrim A., Sanlaville E. (ed.). Flexibilite et robustesse en ordonnancement. Lavoisier, Paris, 243-261.

Aloulou,M.A., Artigues,C., 2006. Worst-case evaluation of flexible solutions in disjunctive scheduling problems. In: ICCSA 2006, May 8-11, 2006, Glasgow, UK.

Aloulou,M.A., Della Croce,F., 2005. On the complexity of single machine scheduling problems under scenario-based uncertainty. Annales du LAMSADE, 4-5, 1-14.

Aloulou,M.A., Kalai,R., Vanderpooten,D., 2005. Une nouvelle approach de robustesse: a robustesse lexicographique. Newsletter of the EURO Working Group MCDA, 3 (12, Fall 2005).

Alter,S., 1977. A taxonomy of decision support systems. Management Review, 19 (1), 39-56.

Amani,O., 1977. Finding all extreme points and extremereays of a convex polyhedral set. Ekonomicko-Matematcky, 3, 331-342.

Armand,A., 1993. Bounds on the number of vertices of perturbed polyhedra. Annals of Operations Research, 47, 249-269.

Averbakh,I., Berman,O., 1997. Minimax regret p-center location on a network with demand uncertainty. Location Science, 5 (4), 247-254.

## Βιβλιογραφία

Averbakh,I., Lebedev,V., 2004. Interval data minmax regret network optimization problems. *Discrete Applied Mathematics*, 138, 289-301.

Averbakh,I., Lebedev,V., 2005. On the complexity of minmax regret linear programming. *European Journal of Operational Research*, 160 (1), 227-231.

Avis,D., Bremner,D., 1995. How good are convex hull algorithms?. In: *Proceedings of the eleventh annual symposium on Computational geometry*, New York, NY, USA. 20-28 p.

Avis,D., Fukuda,K., 1992. A pivoting algorithm for convex hulls and vertex enumeration of arrangements and polyhedra. *Discrete & Computational Geometry*, 8 (3), 377-386.

Balinski,M. L., 1961. An Algorithm for Finding all Vertices of Convex Polyhedral Sets. In: *SIAM IX*. 72-78 p.

Bana e Costa,C.A., Vansnick,J-C., 2008. A critical analysis of the eigenvalue method used to derive priorities in AHP. *European Journal of Operational Research*, 187 (3), 1422-1428.

Baourakis,G., 1994. Agricultural product design methodology: The case of olive oil. Ph.D Thesis, Technical University of Crete, Chania.

Barnette,D. W., 1971. The Minimum Number of Vertices of a Simple Polytope. *Israel J. Math*, X, 121-125.

Beer,S., 1966. *Decision and control: the meaning of operational research and management cybernetics*, Wiley, Chchester

Ben-Tal,A., Nemirovski,A., 1999. Robust solutions of uncertainty linear program. *Operations Research Letters*, 25, 1-13.

Berenguer,S.E., Smith,R.L., 1986. The expected number of extreme points of a random liner program. *Mathematical Programming*, 35, 129-134.

Bertsimas,D., Sim,M., 2003. Robust discrete optimization and network flows. *Mathematical Programming B*, 98, 49-71.

## Βιβλιογραφία

- Bertsimas,D., Sim,M., 2004. The price of robustness. *Oper. Res.*, 52 (1), 35-53.
- Beuthe,M., Scannella,G., 1996. Applications comparées des méthodes d'analyse multicritère UTA. *R.A.I.R.O. Operations Research* , 30 (3), 293-315.
- Beuthe,M., Scannella,G., 2001. Comparative analysis of UTA multicriteria methods. *European Journal of Operational Research*, 130 (2), 246-262.
- Bik,A., Wijshoff,H., 1995. Implementation of Fourier-Motzkin Elimination. In: *Proc. First Ann. Conf. Advanced School for Computing and Imaging*. 377-386 p.
- Billaut,J.C., Roubellat,F., 1996. A new method for workshop real time scheduling. *International Journal of Production Research*, 34 (6), 1555-1579.
- Bland,R. G., 1977. New finite pivoting rules for the simplex method. *Mathematics of Operations Research*, 2, 103-107.
- Bolton,R.N., Drew,J.H., 1991. A multistage model of consumers assessments of service quality and value. *Journal of Consumer Research*, 17, 375-384.
- Briand, C., Huguet, M.J., La H.T., Lopez, P., 2005. Approches par contraintes pour l'ordonnancement robuste. In: Billaut J.C., Moukrim A., Sanlaville E. (ed.). *Flexibilité et robustesse en ordonnancement*. Lavoisier, Paris, 191-218.
- Burdet,C.A., 1974. Generating All the Faces of a Polyhedron . In: *SIAM* . 479-489 p.
- Burton,R.O., Gidley,J.S., Baker,B.S., Reda-Wilson K.J., 1987. Nearly Optimal Linear Programming Solutions: Some Conceptual Issues and a Farm Management Application. *American Journal of Agricultural Economics*, 69 (4, Nov.,1987), 813-818.
- Butler,B.P., Cox,M.G., Ellison,S.L.R., Hardcastle,W.A., 1996. *Statistics Software Qualification: Reference Data Sets*, Royal Society of Chemistry, Cambridge
- Cadotte,E.R., Woodruff,R.B., Jenkins,R. L., 1987. Expectations and norms in models of consumer satisfaction. *Journal of Marketing Research*, 24, 305-314.
- Carr,R.D., Greenberg,H.J., Hart,W.E., Lauer,K.E., Lin,H., Morrison,T., Phillips,C.A., 2006. Robust optimisation of contaminant sensor placement for community water system. *Mathematical Programming, serie B*, 106, 337-356.

## Βιβλιογραφία

- Chang,Y.H., Yeh,C.H., 2002. A survey analysis of service quality for domestic airlines . *European Journal of Operational Research*, 139, 166-177.
- Charnes,A., 1952. Optimality and Degeneracy in Linear Programming. *Econometrica*, 20, 160-170.
- Charnes,A., Cooper,W.W., 1961. *Management Models and Industrial Applications of Linear Programing*, Wiley, New York
- Charnes,A., Cooper,W.W., Henderson,A., 1953. *An Introduction to Linear Programming*, Wiley, New York
- Churchill,G.A., Surprenant,C., 1982. An investigation into the determinants of customer satisfaction. *Journal of Marketing Research*, 19, 491-504.
- Cohen,J., Hickey,T., 1979. Two Algorithms for Determining Volumes of Convex Polyhedra. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 26 (3), 401-414.
- Cox,M.G., 1997. Graded reference data sets and performance profiles for testing software used in metrology.In: In P. Ciarlini, M. G. Cox, F. Pavese, and D. Richter (ed.). *Advanced Mathematical Tools in Metrology III*. World Scientific, 43-55.
- Cox,M.G., Harris,P.M., 1998. The design and use of reference data sets for testing scientific software  
(Downloadable from <http://www.npl.co.uk/ssfm/download/documents/>)
- Cronin,J.J., Taylor,S. A., 1992. Measuring service quality: A reexamination and extension. *Journal of Marketing*, 56, 55-68.
- Czarnecki,M.T., 1999. *Managing by measuring: How to improve your organization's performance through effective benchmarking*, AMACOM, New York
- Dahl,G., Storoy,S., 1973. *Enumeration of Vertices in the Linear Programming Problem*, University of Bergen
- Dantzig,G.B., Thapa,M.N., 1997a. *Linear programming: Introduction*, Springer, New York
- Dantzig,G.B., Thapa,M.N., 1997b. *Linear programming: Theory and Extensions*, Springer, Series Title

## Βιβλιογραφία

- Dantzing, G. B., Eaves, B. C., 1973. Fourier-Motzkin Elimination and its Dual. J. Combinatorial Theory Ser. A, XIV, 228-297.
- Deineko, V. G., Woeginger, G. J., 2006. On the robust assignment problem under a fixed number of cost scenarios. Operations Research Letters, 34 (2), 175-179.
- Despotis, D. K., Zopounidis, C., 1995. Building additive utilities in the presence of non-monotone preferences. In: Pardalos, P. M., Siskos, Y., Zopounidis, C. (ed.). Advances in multicriteria analysis. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Despotis, D., Yannacopoulos, D., Zopounidis, C., 1990. A Review of the UTA Multicriteria Method and Some Improvements. Foundation of computing and Decision Science, 15 (2), 63-76.
- Despotis, D. K., Siskos, Y., Yannacopoulos, D., 1991. Experimental Evaluation of a Multiobjective Linear Programming Software. Operations Research, 25 (4), 365-380.
- Dias, L. C., Climaco, J. N., 2002. Exploring the consequences of imprecise information in choice problems using ELECTRE. In: Bouyssou, D., Jacquet-Lagrange, E., Perny, P., Slowinsky, R., Vanderpooten, D., Vincke, P. (ed.). Aiding Decisions with Multiple Criteria - Essays in Honor of Bernard Roy. Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts, 175-193.
- Dias, L., Mousseau, V., Figueira, J., Climaco, J., 2002. An aggregation/disaggregation approach to obtain robust conclusions with ELECTRE TRI. European Journal of Operational Research, 138, 332-348.
- Dias, L. C., 2007. A note on the role of robustness analysis in decision-aiding processes. Annales du LAMSADE, 7, 53-70.
- Dias, L. C., Climaco, J. N., 1999. On computing ELECTRE's credibility indices under partial information. Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, 8, 74-92.
- Du, D-Z, Pardalos, P. M., Wu, W., 2001. Mathematical Theory of Optimization, Kluwer Academic Publishers
- Duffin, R. J., 1974. On Fourier's Analysis of Linear Inequality Systems. In: (ed.). Mathematical Programming Study I. American Elsevier Publishing Company, New York.

## Βιβλιογραφία

Dunham,J.R., Kelly,D.G, Tolle,J.W., 1977. Some Experimental Results Concerning thw Expected Number of Pivots for Solving Randomly Generated Linear Programs, University of North Carolina at Chapel Hill

Durieux,S., 2003. Analyse de performance par simulation et conception de systemes de production robustes. PhD. Thesis, Universite Blaise Pascal Clermont II.

Dutka,A., 1995. AMA Handbook of Customer Satisfaction: A Complete Guide to Research, Planning and Implementation, NTC Business Books, Illinois

Dyer,M. E, Proll,L. G., 1982. An improved vertex enumeration algorithm. European Journal of Operational Research, 9 (4), 359-368.

Dyer,M.E., Proll,L.G., 1977. An Algorithm for Determining All Extreme Points of a Convex Polytope. Math. Programming , XII, 81-96.

Edosomwan,J. A., 1993. Customer and market-driven quality management, ASQC Quality Press, Milwaukee

Elkhyari, A., Gueret, C., Jussien, N., 2005. Ordonnancement dynamique de projet. In: Billaut J.C., Moukrim A., Sanlaville E. (ed.). Flexibilite et robustesse en ordonnancement. Lavoisier, Paris, 325-344.

Engel,J., Kollat,D., Blackwell,R., 1978. Consumer Behavior, Dryden Press, Illinois

Engel,J.F., Blackwell,R. D., 1982. Consumer behavior, Holt, Rinehart and Winston, New York

Espinousse, M.L., Jacomino, M., Rossi, A., 2005. Robustesse de la configuration d' un parc de machines. In: Billaut J.C., Moukrim A., Sanlaville E. (ed.). Flexibilite et robustesse en ordonnancement. Lavoisier, Paris, 51-59.

Fornell,C., 1992. A national customer satisfaction barometer: the Swedish experience. Journal of Marketing, 56, 6-21.

Gabrel,V., 1994. Methodologie pour la planification de production de systemes d' observation de la terre par satellites - Aspects algorithmiques et multicriteres. PhD. Thesis, Universite Paris-Dauphine.

## Βιβλιογραφία

- Gerrity, T. P., 1971. The design of man-machine Decision Systems. Sloan Management Review, 12 (2), 59-75.
- Gerson, R.F., 1993. Measuring customer satisfaction: A guide to managing quality service, Crisp Publications, Menlo Park
- Gomory, R.E., 1963. An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs. In: Graves, R.I., Wolfe, P. (ed.). Recent Advances in Mathematical Programming. McGraw - Hill, New York.
- Gottlieb, J.B., Dhruv, G., Brown, S.W., 1994. Consumer satisfaction and perceived quality: complementary or divergent constructs?. Journal of Applied Psychology, 79, 875-885.
- Grigoroudis, E., Siskos, Y., 2002. Preference disaggregation for measuring and analysing customer satisfaction: The MUSA method. European Journal of Operational Research, 143, 148-170.
- Grigoroudis, E., Siskos, Y., 2004. A survey of customer satisfaction barometers: Results from the transportation-communications sector. European Journal of Operational Research, 152 (2), 334-353.
- Grönroos, C., 1984. A Service Quality Model and its Marketing Implications. European Journal of Marketing, 18 (4), 36-44.
- Grunbaum, B., 1967. Convex Polytopes, Wiley, New York
- Gupta, S.K., Rosenhead, J., 1972. Robustness in sequential investment decision . Management Science, 15 (2), 18-29.
- Gutierrez, G.J., Kouvelis, P., 1995. A robustness approach to international sourcing. Annals of Operations Research, 59, 165-193.
- Gutierrez, G.J., Kouvelis, P., Kurawarwala, S.A., 1996. A robustness approach to uncapacitated network design problem. European Journal of Operational Research, 94 (2), 362-376.
- Hammond K.R., Cook, R.L., Adelman, L., 1977. POLICY: An aid for decision making and international communication. Columbia Journal of World Business, 12, 79-83.

## Βιβλιογραφία

Hauser, J.R., Urban, G.L., 1978. Consumer preference axioms: Behavioral postulates for describing and predicting stochastic choice. *Management Science*, 24 (13), 1331-1341.

Hites, R., 2000. The robust shortest path problem. Ph.D. Thesis, Université Libre de Bruxelles, Bruxelles, Belgique.

Hites, R., De Smet, Y., Salazar-Neumann, M., Vincke, P., 2003. A comparison between multicriteria and robustness frameworks, Preprint SMG/ULB 2003/16. .

Huber, J.G., 1980. Organisational science contributions to the design of decision support systems. In: Proceedings of an international task force meeting, June 23-25.

Jacquet-Lagrèze, E., 1990. Interactive assessment of preferences using holistic judgments: The PREFCALC system. In: Carlos Bana e Costa (ed.). *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*. Springer-Verlag.

Jacquet-Lagrèze, E., Siskos, Y., 1982. Assessing a Set of Additive Utility Functions for Multicriteria Decision-Making, the UTA Method. *European Journal of Operational Research*, 10 (2), 151-164.

Jacquet-Lagrèze, E., Siskos, Y., 2001. Preference disaggregation: 20 years of MCDA experience.. *European Journal of Operational Research*, 130 (2), 233-245.

Jeske, D., Samadi, B., Lin, P., 2005. Generation of Synthetic Data Sets for Evaluating the Accuracy of Knowledge Discovery Systems  
(Downloadable from <http://www.collaboratory.ucr.edu/publications/>)

Kaibel, V., Pfetsch, M.E., 2003. Some algorithmic problems in polytope theory. In: Joswig, M., Takayama, N. (ed.). *Algebra, Geometry, and Software Systems*. Springer-Verlag, 23-47.

Kalai, R., 2006. Une nouvelle approche de robustesse: Application a quelques problemes d' optimisation. Université Paris-Dauphine.

Kalai, R., Aloulou M.A., Vallin, P., Vanderpooten, D., 2005. Robust 1-median location problem on a tree. In: A EURO conference for Young OR Researchers and Practitioners, Valencia, Spain. 201-212 p.

Kano, N., Seraku, N., Takahashi, F., Tsuji, S., 1984. Attractive quality and must be quality. *Quality*, 14 (2), 39-48.



## Βιβλιογραφία

- Kazakci,A., Rozakis,S., Vanderpooten,D., 2006. Energy crop supply in France: a min-max regret approach. *Journal of the Operational Research Society*, 58 (11), 1470-1479.
- Keen,P.G.W., Scott-Morton,M.S., 1978. *Decision support systems: An organizational perspective*, Addison-Wesley, Reading
- Keeney,R., Raiffa,H., 1976. *Decisions with multiple objectives: Preferences and value trade-offs*, Wiley, New York
- Khachiyan,L., Boros,E., Borys,K., Elbassioni,K., 2006. Generating all vertices of a polyhedron is hard. In: *SODA '06*, January 22-26, Miami.
- Klee,V., 1964. On the Number of Vertices of a Convex Polytope. *Canadian Journal of Mathematics*, 16, 701-720.
- Kotler,P., 1994. *Marketing Management: Analysis, planning, implementation and control*, Prentice-Hall, London
- Kouvelis,P., Kurawarwala,A.A., Gutierrez,G.J., 1992. Algorithms for robust single and multiple period layout planning for manufacturing systems. *European Journal of Operational Research*, 63 (2), 287-303.
- Kouvelis,P., Yu,G., 1997. *Robust discrete optimization and its applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht
- Lasserre,J.B., 1983. An Analytical Expression and an Algorithm for the Volume of a Convex Polyhedron in R. *Journal of Optimization Theory and Applications* , 39 (3), 363-377.
- Levitt,Th., 1986. *The Marketing imagination*, Free Press, New York
- Little,J.D.C., 1970. Models and managers: The concept of decision calculus. *Management Science*, 16 (8), 466-489.
- Lowenstein,M.W., 1995. *Customer retention*, ASQC Quality Press, Milwaukee
- Lozier, D.W., 1997. A proposed software test service for special functions.In: In R.F. Boisvert, editor (ed.). *The Quality of Numerical Software: Assessment and Enhancement*. Chapman and Hall, London, 167-178.

## Βιβλιογραφία

- Malcom,S.A., Zenios,S.A., 1994. Robust optimization for power systems capacity expansion under uncertainty. *Journal of the Operational Research Society*, 45, 1040-1049.
- Manas,M., Nedoma,J., 1968. Finding all Vertices of a Convex Polyedron. *Numerische Mathematik*, 12, 226-229.
- Matsatsinis,N.F., Siskos,Y., 1999. MARKEX: An intelligent decision support system for product development decisions. *European Journal of Operational Research*, 113 (2), 336-354.
- Matsatsinis,N.F., Siskos,Y., 2003. *Intelligent Support Systems for Marketing Decision*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht
- Mattheis,T.H., 1973. An Algorithm for Determining Irrelevant Constraints and All Vertices in Systems of Linear Inequalities. *Operations Res.*, 21, 247-260.
- Mattheiss,T. H., Rubin,D. S., 1980. A Survey and Comparison of Methods for Finding all Vertices of Convex Polyhedral Sets. *Mathematics of Operations Research*, 5, 167-185.
- Mattheiss,T.H., Rubin,D.S.,1977. Comments on Dyer and Proll's Vertex Generating Algorithm., University of North Carolina at Chapel Hill, Technical Report 77-11, Curriculum in Operations Research
- Mattheiss,T.H., Schmidt,B.K., 1977. The Probability that a Random Prototype is Bounded. *Math. Oper. Res.*, 2, 292-296.
- Mattheiss,T.H., Schmidt,B.K., 1980. Computational Results on an Algorithm for Finding All Vertices of a Polytope. *Mathematical Programming*, 18, 308-329.
- Mc Daniel,C., Gates,R., 2001. *Marketing Research Essentials*, South Western College Publishing
- McMullen,P., 1970. The Maximum Number of Faces of a Convex Polytope. *Mathematika*, XVII, 179-184.
- Mihelis,G., Grigoroudis,E., Siskos,Y., Politis,Y., Malandrakis,Y., 2001. Customer satisfaction measurement in the private bank sector. *European Journal of Operational Research*, 113 (2), 347-360.

## Βιβλιογραφία

- Mittal,V., Kumar,P., Jain,D., 1998. The non-linear and asymmetric nature of satisfaction & repurchase behavior link. In: The 9th Annual Advanced Research Techniques Forum of the American Marketing Association, Heystone CO.
- Montemanni,R., Gambardella,L.M., Donati,A.V., 2004. A branch and bound algorithm for the robust shortest path problem with interval data. *Operations Research Letters*, 32, 225-232.
- Morgan,N., Piercy,N., 1994. Towards an Understanding of Quality Strategy. *Marketing Theory and Applications*, 5.
- Mulvey,J.M., Vanderbei,R.J., Zenios,S.A., 1995. Robust optimization of large-scale systems. *Operations Research*, 43, 264-281.
- Murty,K.G, 1968. Solving the Fixed Charge Problem by Ranking the Extreme Points. *Operations Res.*, XVI, 268-279.
- Murty,K.G., 1971. Adjacency on Convex Polyhedra. In: SIAM. 377-386 p.
- Murty,K.G., 2009. A problem in enumerating extreme points, and an efficient algorithm for one class of polytopes. *Optimization Letters*, 3 (2), 211-237.
- Murty,K.G., Chung,S.J.,1992. Extreme point enumeration, College of Engineering, University of Michigan, Technical Report 92-21, 1992, available online: <http://deepblue.lib.umich.edu/handle/2027.42/6731>
- National Measurement Laboratory, 2006. Data Generators for Testing the Numerical Correctness of Software (Downloadable from [http://www.npl.co.uk/ssfm/ssfm3/theme3/numerical\\_software\\_testing/project3\\_2/milestone3/](http://www.npl.co.uk/ssfm/ssfm3/theme3/numerical_software_testing/project3_2/milestone3/)), New York
- Oliver,R.L., 1980. A cognitive model of the antecedents and consequences of satisfaction decisions. *Journal of Marketing Research*, 17, 460-469.
- Oliver,R.L., 1997. Satisfaction, a behavioral perspective on the consumer, McGraw-Hill, New York
- Oliver,R.L., DeSarbo,W.S., 1988. Response determinants in satisfaction judgements. *Journal of Consumer Research*, 14, 495-507.

## Βιβλιογραφία

- Oliver, R.L., Swan, J.E., 1989. Consumer perceptions of interpersonal equity and satisfaction in transaction. A field survey approach. *Journal of Marketing*, 53, 21-35.
- Øvretveit, J.A., 1993. Auditing and Awards for Service Quality. *International Journal of Service Industry Management*, 4 (2), 74-84.
- Parasuraman A., Zeithaml, V.A., and Berry, L.L., 1985. Conceptual Model of Service Quality and Its Implications for Future Research. *Journal of Marketing*, 49 (fall 1985), 41-50.
- Perny, P., Spanjaard, O., 2003. An axiomatic approach to robustness in search problems with multiple scenarios. In: *Proceedings of the 19th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, Acapulco, Mexico. 469-476 p.
- Pierreval, H., Durieux, S., 2007. Robust simulation with a base environmental scenario. *European Journal of Operational Research*, 182 (2), 783-793.
- Politis, Y., Siskos, Y., 2004. Multicriteria methodology for the evaluation of a Greek engineering department. *European Journal of Operational Research*, 156 (1), 223-240.
- Pollatschek, M., Avi-Itzhak, B., 1969. Sorting Extreme Point Solutions of a Linear Program. In: *Third Annual Israel Conference on Operations Research*, Israel.
- Provan, J.S., 1994. Efficient enumeration of the vertices of polyhedra associated with network LP's. *Mathematical Programming*, 63, 47-64.
- Reeves, C., Bednar, D.A., 1994. Defining Quality: Alternatives and implications. *The Academy of Management Review*, 19 (3), 419-445.
- Rogers, M., Graham, J., Tonge, R.P., 2003. Using Statistical Image Models for Objective Evaluation of Spot Detection in Two-Dimensional Gels. *Proteomics*, 3 (6), 879-886.
- Rosenblatt, M.J., Lee, H.L., 1987. A robustness approach to facilities design. *International Journal of Production Research*, 25 (4), 479-486.
- Rosenhead, J., 2001a. Robustness analysis: keeping your options open. In: Rosenhead, J., Mingers, J. (ed.). *Rational analysis for a problematic world revisited: problem structuring methods for complexity, uncertainty and conflicts*. Wiley, Chichester, 181-207.

## Βιβλιογραφία

- Rosenhead, J., 2001b. Robustness to the first degree. In: Rosenhead, J., Mingers, J. (ed.). Rational analysis for a problematic world revisited: problem structuring methods for complexity, uncertainty and conflicts. Wiley, Chichester, 209-222.
- Rosenhead, J., Elton, M., Gupta, S.K., 1972. Robustness and optimality criteria for strategic decisions. *Operational Research Quarterly*, 23 (4), 413-423.
- Roy, B., 1985. *Méthodologie d' aide à la decision multicritère*, Economica, Paris
- Roy, B., 1989. Main sources of inaccurate determination, uncertainty and imprecision in decision models. *Mathematical and Computer Modelling*, 12 (10/11), 1245-1254.
- Roy, B., 1990. The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods. In: Carlos Bana e Costa (ed.). *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*. Springer-Verlag, Berlin.
- Roy, B., 1998. A missing link in OR-DA, Robustness analysis. *Foundations of Computer and Decision Sciences*, 23 (3), 141-160.
- Roy, B., 2002. Robustesse de quoi, mais aussi robustesse pourquoi en aide a la decision?. *Newsletter of the EURO Working Group MCDA*, 3 (6, Fall 2002).
- Roy, B., 2003. Commentaires sur l' article 'Robustness Analysis' par J. Rosenhead. *Newsletter of the EURO Working Group MCDA*, 3 (8, Fall 2003).
- Roy, B., 2004. Robustesse de quoi et vis-à-vis de quoi mais aussi robustesse pourquoi en aide à la décision ?. In: Henggeler Antunes, C., Figueira, J., Clímaco, J. (ed.). *Aide Multicritère à la Décision – Multiple Criteria Decision Aiding*, 56e Journées du Groupe de Travail Européen «Aide Multicritère à la Décision» – 56th Meeting of the European Working Group «Multiple Criteria Decision Aiding», Coimbra, Portugal, October 3-5, 2002, Comissão de Coordenação e Desenvolvimento Regional do Centro, INESC Coimbra, Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra, 29-39.
- Roy, B., 2005. A propos de robustesse en recherche operationnelle et aide a la decision . In: Billaut, J.C., Moukrim, A., Sanlaville, E. (ed.). *Flexibilite et robustesse en ordonnancement*. Lavoisier, Paris, 35-50.
- Roy, B., 2007. La robustess en recherche operationnelle et aide a la decision: Une preoccupation multi facettes. *Annales du LAMSADE*, 7, 209-235.

## Βιβλιογραφία

- Roy,B., 2008. Comment répondre à la préoccupation de robustesse en aide à la décision? Quelques propositions suite à un double constat. In: 68th Meeting of the European Working Group "Multiple Criteria Decision Aiding", October 2-3, 2008, Chania, Greece.
- Roy,B., Bouyssou,D., 1993. Aide multicritere a la decision: methodes et cas, Economica, Paris
- Roy,B., Present,M., Silhol,D., 1986. A programming method for determining which Paris metro station should be renovated. European Journal of Operational Research, 24, 318-334.
- Roy,B., Vincke,P., 1981. Multicriteria analysis: Survey and new directions. European Journal of Operational Research, 8 (207-218).
- Saaty,T.L., 1955. The Number of Vertices of a Polyhedron. The American Mathematical Monthly, 62, 326-331.
- Sage, A.P., 1986. An overview of contemporary issues in the design and development of microcomputer decision support systems.In: S.J. Andriole (ed.). Micro Computer Decision Support Systems: Design, Implementation, and Evaluation. QED Information Sciences, Wellesley, MA.
- Sage,A.P., 1991. Decision Support Systems Engineering, Wiley, New York
- Schmidt,B.K., Mattheiss,T.H., 1975. On the Expected Value of the Number of Vertices of a Convex Polytope. In: ORSA/TIMS Joint National Meeting.
- Sengupta,J.K., 1991. Robust decisions in economics models. Computers and Operations Research, 18 (2), 221-232.
- Sevaux, M., Sørensen, K., Le Quéré, Y., 2005. Métaheuristiques pour la planification et l'ordonnancement robuste. In: Billaut, J.C., Moukrim, A., Sanlaville, E. (ed.). Flexibilité et robustesse en ordonnancement. Lavoisier, Paris, 115-133.
- Sevaux,M., Sorensen,K., 2002. Genetic algorithm for robust schedules . In: Proceedings of the 8th International Workshop on Project Management and Scheduling (PMS' 2002), Valencia, Spain. 330-333 p.
- Sevaux,M., Sorensen,K., 2004a. Robustness analysis: optimisation. Newsletter of the EURO Working Group MCDA, 3 (10, Fall 2004).

## Βιβλιογραφία

Seveaux,M., Sorensen,K., 2004b. A genetic algorithm for robust scheduling in a non-machine environment with ready times and due dates. 4OR, 2, 129-147.

Shim,J.P., Warkentin,M., Courtney,J.F., Power,D.J., Sharda,R., Carlsson,C., 2002. Past, present and future of decision support technology. Decision Support Systems, 33 (2), 111-126.

Silverman,G.J.,1971. Computational Considerations in Extreme Point Enumeration, IBM Los Angeles Scientific Center, Report G320-2649

Simon,H., 1960. The new science of management decision, Harper and Row, New York

Siskos, Y., Grigoroudis, E., 2002. Measuring customer satisfaction for various services. In: Bouyssou, D., Jacquet-Lagrange, E., Perny, P., Slowinsky, R., Vanderpooten, D., Vincke P. (ed.). Aiding Decisions with Multiple Criteria - Essays in Honor of Bernara Roy. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 457-482.

Siskos, Y., Grigoroudis, E., Matsatsinis, N.F., 2005. UTA Methods. In: J. Figueira and S. Greco and M. Ehrgott (ed.). Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys. Springer Verlag, Boston, Dordrecht, London, 297-344.

Siskos,Y., 1980. Comment modéliser les préférences au moyen de fonctions d'utilité additives. RAIRO Recherche Opérationnelle, 14, 53-82.

Siskos,Y., 1984. Le Traitement des Solutions Quasi Optimales en Programmation Linéaire Continue: Une Synthèse. R.A.I.R.O., Recherche Opérationnelle , 18 (4 ) , 381-401.

Siskos,Y., Bouranta,N., Tsotsolas,N., 2005. Measuring service quality for students in higher education: The case of a business university. Foundations of Computing and Decision Sciences, 30 (2 ) , 163.

Siskos,Y., Matsatsinis,N.F., Baourakis,G., 2001. Multicriteria analysis in agricultural marketing: The case of French olive oil market. . European Journal of Operational Research, 130 (2 ) , 315-331.

Siskos,Y., Spiridakos,A., Yannacopoulos,D., 1999. Using artificial intelligence and visual techniques into preference disaggregation analysis: The MIIDAS system. . European Journal of Operational Research , 113, 236-246.

## Βιβλιογραφία

- Siskos,Y., Spyridakos,A., 1999. Intelligent multicriteria decision support: Overview and perspectives. *European Journal of Operation Research*, 113, 236-246.
- Siskos,Y., Yannacopoulos,D., 1985. UTASTAR: An Ordinal Regression Method for Building Additive Value Functions. *Investigacao Operacional*, 5 (1 ).
- Siskos,Y., Yannacopoulos,D., 1985. UTASTAR: An Ordinal Regression Method for Building Additive Value Functions.. *Investigacao Operacional*, 5 (1 ), 39-53.
- Siskos,Y., Zopounidis,C., 1987. The evaluatin criteria of the venture capital investment activity: An interactive assessment. *European Journal of Operational Research*, 31, 304-313.
- Snyder,L.V., 2006. Facility location under uncertainty: A review. *IIE Trans.*, 38 (7 ), 547-564.
- Snyder,L.V., Daskin,M.S., 2006. Stochastic p-robust location problem. *IIE Trans.*, 38 (11 ), 971-985.
- Soyster,A.L., 1973. Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Oper. Res.*, 21, 1154-1157.
- Soyster,A.L., 1979. Inexact linear programming with generalized resource sets. *European Journal of Operational Research*, 3, 316-321.
- Sprague,R.H, Carlson,E.D., 1982. Building effective decision support systems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
- Stewart,T.J., 1987. Pruning of decision alternatives in multiple criteria decision making based on the UTA method for estimating utilities. *European Journal of Operational Research*, 28, 79-88.
- Tarry,G., 1895. Le Probleme des Labyrinthes. *Nouvelles Annales de Mathematiques*, XIV, 187-190.
- Tse,D.K., Wilton,P.C., 1988. Models of consumer satisfaction formation :an extension. *Journal of Marketing Research*, 15, 204-212.
- Tsotsolas,N., Siskos,Y., 2004. Improving the quality of satisfaction measurements using LP post-optimality analysis. In: 20th European Conference on Operational Research, July, 2004, Rhodes, Greece.



## Βιβλιογραφία

V.L.Klee, 1963. Neighborly and Cyclic Polytopes, Rhode Island.

Vallin,P., 1999. Determination d' une periode economique robuste dans le cadre du modele de Wilson. *RAIRO Recherche Operationnelle*, 33 (1 ), 47-67.

Van de Panne,C., 1975. *Methods for Linear and Quadratic Programming*, North Holland Publishing Company, Amsterdam

Van Snyder, W. , 1997. Testing functions of one and two arguments.In: In R. F. Boisvert (ed.). *The Quality of Numerical Software: Assessment and Enhancement*, London, 155-166.

Varga,T., Bunke,H., 2003. Generation of Synthetic Training Data for an HMM-based Handwriting Recognition System.. In: *Seventh International Conference on Document Analysis and Recognition (ICDAR 2003) 0-7695-1960-1/03 IEEE Computer Society*.

Vincke,P., 1999a. Robust solutions and methods in decision aid. *Journal of Multi-Criteria Analysis*, 8, 181-187.

Vincke,P., 1999b. Robust and neutral methods for aggregating preferences into an outranking relation. *European Journal of Operational Research*, 112 (2 ), 405-412.

Von Neumann,J., Morgenstern,O., 1947. *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton, N.J.

Westbrook,R.A., 1987. Product/consumption-based affective responses and postpurchase processes. *Journal of Marketing Research*, 24, 258-270.

Winkels, H.M., 1982. A Flexible Decision Aid Method for Linear Multicriteria Systems.In: Grauer, M., Lewandowski, A; Wierzbicki, A.P. (ed.). *Multiobjective and Stochastic Optimization, I.I.A.S.A. Collaborative Series CP-82-182, Laxenburg (Austria)*, 377-410.

Yaman,H., Karasan,O.E., Pinar,M.C., 2001. The robust spanning tree problem with interval data. *Operations Research* , 29, 31-40.

Yu,G.J., Yang,J., 1998. On the robust shortest path problem. *Computers and Operations Research*, 25, 457-468.

## Βιβλιογραφία

Zeleny,M., 1982. Multiple Criteria Decision Making, Springer-Verlag, New York

Zorounidis,C., Doumpos,M., 2001. A preference disaggregation decision support system for financial classification problems. European Journal of Operational Research, 130 (2 ), 402-413.

Γούναρης,Σ., 2003. Μάρκετινγκ Υπηρεσιών, Rosili και Σπύρος Γούναρης, Αθήνα

Γρηγορούδης,Ε., Σίσκος,Ι, 2000. Ποιότητα Υπηρεσιών και Μέτρηση Ικανοποίησης του Πελάτη, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα

Γρηγορούδης,Ε., Σίσκος,Ι., Saurais,O., 1997. Μία πολυκριτήρια προσέγγιση για την αξιολόγηση της ικανοποίησης πελατών . In: 11ο Εθνικό Συνέδριο Ελληνικής Εταιρίας Επιχειρησιακών Ερευνών.

Διακόπουλος,Χ. Δ., 1986. Marketing: Έρευνα αγοράς και ανάπτυξη πωλήσεων, Εκδόσεις Σμπίλιας, Αθήνα

Ευαγγέλου,Χ., 2005. Ολοκλήρωση Συστημάτων Υποστήριξης Ομαδικών Αποφάσεων και Διαχείρισης Οργανωσιακής Γνώσης. Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα.

Κεχαγιάς,Ι., 1990. Σημειώσεις συμπεριφοράς καταναλωτή, Εκδόσεις Σταμούλης, Πειραιάς

Κοίλιας,Χ., 2006. Ένας αλγόριθμος μέτρησης ικανοποίησης του πελάτη. Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Σάμος.

Μαγνήσαλης,Κ. Γ., 1981. Καταναλωτική: Η τεχνική γνώσεως της συμπεριφοράς του καταναλωτή, Interbooks, Αθήνα

Ματσατσίνης,Ν.Φ., 1995. Ένα Έμπειρο Σύστημα Υποστήριξης Αποφάσεων Μάρκετινγκ: Μεθοδολογία Υποστήριξης και Ολοκληρωμένη Αρχιτεκτονική. Διδακτορική Διατριβή, Χανιά.

Μπένος,Β., 1997. Στατιστική Τόμος Α΄ Περιγραφική Στατιστική, Εκδόσεις Σταμούλη, Πειραιάς

Ξηρόκωστας,Δ., 1991. Επιχειρησιακή Έρευνα, Συμμετρία, Αθήνα

Παπαγεωργίου,Μ.,1996. Μη Γραμμικός Προγραμματισμός, Πολυτεχνείο Κρήτης

## Βιβλιογραφία

Παπαδημητρίου,Γ., 1989. Στατιστική, Παρατηρητής, Θεσσαλονίκη

Παπαϊωάννου,Τ., Λουκά,Σ., 1990. Εισαγωγή στη Στατιστική, Ιωάννινα

Πραστάκος,Γ., 1986. Επιχειρησιακή Έρευνα για τη Λήψη Επιχειρηματικών Αποφάσεων, Α. Σταμούλης, Αθήνα

Σίσκος,Ι., 1981. Μεθοδολογία ποιοτικού marketing: Η ανάλυση αγοράς. ΣΠΟΥΔΑΙ, τόμος ΛΔ΄, 361-385 .

Σίσκος, Ι., 1986. Πολυκριτήρια ανάλυση. (ed.). Εγκυκλοπαίδεια Πληροφορικής και Τεχνολογίας Υπολογιστών.. Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα, 84-92.

Σίσκος,Ι.,1992. Συμπληρωματικές Σημειώσεις Παραδόσεων Γραμμικού Προγραμματισμού, Πολυτεχνείο Κρήτης

Σίσκος,Ι., 1998. Γραμμικός Προγραμματισμός, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα

Σίσκος,Ι., 2008. Μοντέλα Αποφάσεων, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα

Σιώμος,Γ., 1994. Συμπεριφορά καταναλωτή και στρατηγική marketing, Εκδόσεις Σταμούλης, Αθήνα-Πειραιάς

Σπυριδάκος Α., 1996. Ένα ολοκληρωμένο ευφυές και αλληλεπιδραστικό πολυκριτήριο σύστημα υποστήριξης αποφάσεων. Διδακτορική Διατριβή, Χανιά.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΔΑ

## Παράρτημα Ι: Η Μέθοδος Simplex

Έστω ότι έχουμε την παρακάτω γραμμική συνάρτηση προς μεγιστοποίηση:

$$[\max] z = \mathbf{c}' \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

υπό τους γραμμικούς περιορισμούς:

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \Rightarrow x_j \geq 0, \forall j = 1, 2, \dots, n$$

όπου  $\mathbf{A}$  η μήτρα τεχνολογικών συντελεστών ( $a_{ij}$ ) διαστάσεων  $m \times n$ ,  $\mathbf{b}$  το διάνυσμα μήτρα των  $b_i$  διαστάσεων  $m \times 1$ ,  $\mathbf{c}'$  ο ανάστροφος πίνακας του  $\mathbf{c}$  διαστάσεων  $n \times 1$  και  $\mathbf{x}$  ο πίνακας - διάνυσμα των  $x_j$  διαστάσεων  $n \times 1$ .

Η μέθοδος simplex απαιτεί, κατ' αρχή, τον μετασχηματισμό όλων των ανισοτήτων του γραμμικού προβλήματος σε ισότητες, και η μορφή που προκύπτει λέγεται **πρότυπη μορφή**:

$$[\max] z = \mathbf{c}' \mathbf{x} \quad (\text{Π.Ι.1})$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (\text{Π.Ι.2})$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \Rightarrow \quad (\text{Π.Ι.3})$$

Για να μετασχηματιστεί ένα οποιοδήποτε γραμμικό πρόβλημα στην πρότυπη μορφή (Π.Ι.1) - (Π.Ι.3), εισάγεται για κάθε υπάρχουσα ανισότητα μια θετική μεταβλητή απόκλισης  $x_j, \forall j = 1, 2, \dots, m$ .

Για κάθε τρέχουσα βασική δυνατή λύση θα ισχύει η σχέση (Π.Ι.2).

Η μήτρα  $\mathbf{A}$  θα περιέχει τη βάση  $\mathbf{B}$  και ένα πίνακα  $\mathbf{A}'$ , το συμπλήρωμα της  $\mathbf{B}$  μέσα στην  $\mathbf{A}$ . Οπότε η σχέση (Π.Ι.2) μπορεί να γραφεί και ως:

Παράρτημα I: Η Μέθοδος Simplex

$$[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}'] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix} = \mathbf{b} \text{ όπου } \mathbf{x}_B \text{ και } \mathbf{x}' \text{ είναι αντίστοιχα τα διανύσματα των βασικών και μη}$$

βασικών μεταβλητών. Η εξίσωση γράφεται πιο αναλυτικά:

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{A}'\mathbf{x}' = \mathbf{b}, \text{ και πολλαπλασιάζοντας με } \mathbf{B}^{-1} \text{ έχουμε:}$$

$$\mathbf{I}\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{x}' = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \quad (\text{Π.1.4})$$

Εάν λοιπόν, σύμφωνα με τον ορισμό της βασικής δυνατής, λύσης θέσουμε  $\mathbf{x}'=0$  τότε η σχέση (Π.1.4) γράφεται ως:

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \quad (\text{Π.1.5})$$

Παρόμοια η σχέση (Π.1.1) και σύμφωνα με τους παραπάνω συλλογισμούς γράφεται:

$z = \mathbf{c}'\mathbf{x} = \mathbf{c}'_B\mathbf{x}_B + \mathbf{c}''\mathbf{x}'$  και θέτοντας  $\mathbf{x}'=0$  τότε έχουμε:  $z = \mathbf{c}'_B\mathbf{x}_B$  (Π.1.6), όπου  $\mathbf{c}'_B$  οι συντελεστές στην αντικειμενική συνάρτηση των βασικών μεταβλητών και  $\mathbf{c}''$  οι συντελεστές των μη βασικών μεταβλητών.

Στη συνέχεια ακολουθεί η παρουσίαση του αλγορίθμου Simplex. Προκειμένου για την καλύτερη παρουσίασή του θα παραθέσουμε και την πινακοποιημένη μορφή του.

**Στάδιο 0:** (αρχικό στάδιο) Δημιουργία μιας πρώτης βάσης  $\mathbf{B}$ .

$\mathbf{c}_B$	Βάση	$x_1$	$x_j$	...	$x_n$	$x_{-1}$	...	$x_i$	...	$x_{-m}$	$\mathbf{x}_B$
0	$x_{-1}$	$a_{11}$	$a_{1j}$	...	$a_{1n}$	1	...	0	...	0	$b_1$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
0	$x_i$	$a_{i1}$	$a_{ij}$	...	$a_{in}$	0	...	1	...	0	$b_i$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
0	$x_{-m}$	$a_{m1}$	$a_{mj}$	...	$a_{mn}$	0	...	0	...	1	$b_m$

**ΠΗΓΑΙΝΕ ΣΤΟ ΣΤΑΔΙΟ 1.**

Παράρτημα Ι: Η Μέθοδος Simplex

**Στάδιο 1:** Επιλογή εισερχόμενης μεταβλητής. Υπολογίζονται τα **οριακά καθαρά εισοδήματα** (Ο.Κ.Ε.)  $\Delta_j = \bar{c}_j$  ως ακολούθως:

Θέτω μια μήτρα **Y** τέτοια ώστε :

$\mathbf{Y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}'$  (Π.Ι.7) όπου η **Y** αποτελείται από n+m διανύσματα - κολόνες  $\mathbf{y}_j$  για τα οποία ισχύει:

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j \text{ (Π.Ι.8) όπου } \mathbf{a}_j \text{ διάνυσμα - κολόνα της μήτρας } \mathbf{A}.$$

Ισχύει:  $\mathbf{y}_j = [y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{ij}, \dots, y_{mj}]$

Η ποσότητα  $\Delta_j = \bar{c}_j$  υπολογίζεται ως εξής:

$$\Delta_j = \bar{c}_j = c_j - z_j \text{ όπου } z_j = \mathbf{c}'_B \mathbf{y}_j = \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j \text{ (Π.Ι.9)}$$

Το οριακό εισόδημα  $\Delta_j$  εκφράζει την ποσότητα (σε μονάδες της αντικειμενικής συνάρτησης) κατά την οποία αυξάνει η αντικειμενική συνάρτηση εάν εισέλθει στην βάση η αντίστοιχη μεταβλητή  $x_j$  σε μοναδιαία στάθμη.

Προφανώς για τις μεταβλητές που είναι ήδη στη βάση το Ο.Κ.Ε. είναι μηδέν. Ακολουθεί η πινακοποιημένη έκφραση του Ο.Κ.Ε.:

$\mathbf{c}_B$	Βάση	$x_1$	$x_j$	...	$x_n$	$x_{-1}$	...	$x_i$	...	$x_m$	$\mathbf{x}_B$
$c_{B1}$	$\beta_1$	$y_{11}$	$y_{1j}$	...	$y_{1n}$	$y_{1(n+1)}$	...	$y_{1(n+i)}$	...	$y_{1(n+m)}$	$x_{B1}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$c_{Bi}$	$\beta_i$	$y_{i1}$	$y_{ij}$	...	$y_{in}$	0	...	$y_{i(n+i)}$	...	$y_{i(n+m)}$	$x_{Bi}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$c_{Bm}$	$\beta_m$	$y_{m1}$	$y_{mj}$	...	$y_{mn}$	0	...	$y_{m(n+i)}$	...	$y_{m(n+m)}$	$x_{Bm}$
$\mathbf{c}_j$		$c_1$	$c_j$	...	$c_n$	$c$	...	$c$	...	$c$	
$\Delta_j$		$c_1 - z_1$	$c_j - z_j$	...	$c_n - z_n$	$c$	...	$c$	...	$c$	$z = \mathbf{c}'_B \mathbf{x}_B$

## Παράρτημα Ι: Η Μέθοδος Simplex

Στην παραπάνω μήτρα  $\mathbf{Y}$  υπάρχει ένας τετραγωνικός πίνακας διαστάσεων  $m \times m$  που αποτελείται από τα διανύσματα - κολόνες των μεταβλητών  $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_j, \dots, \mathbf{B}_m$  που αποτελούν τη βάση ( $\mathbf{B}$ ) της τρέχουσας λύσης. Εάν  $\Delta_j \leq 0 \quad \forall j$  (στην περίπτωση του προβλήματος μεγιστοποίησης), η τρέχουσα λύση είναι η βέλτιστη και ισχύει :

$$z^* = \mathbf{c}'_B \mathbf{x}'_B \text{ και ο αλγόριθμος περατώνεται. (ΤΕΛΟΣ).}$$

Αλλιώς επιλέγουμε κάποια μεταβλητή  $x_j$  η οποία εισέρχεται στη βάση, στη θέση  $r$ . Οπότε η νέα τιμή  $z'$  της αντικειμενικής μας συνάρτησης γίνεται:

$$z = \mathbf{c}'_B \mathbf{x}'_B = \sum_{i=1}^m c'_{B_i} x'_{B_i} \quad (\text{Π.Ι.10})$$

όπου  $\mathbf{x}'_B$  το διάνυσμα της νέας βασικής δυνατής λύσης.

Ας δούμε πως υπολογίζεται το διάνυσμα  $\mathbf{x}'_B$ . Έστω ότι βάζουμε στη βάση το μη βασικό διάνυσμα  $\mathbf{a}'_k$  και απομακρύνουμε το  $\mathbf{B}_r$ . Από την αρχική βάση έχουμε για κάθε μη βασικό διάνυσμα  $\mathbf{a}'_j$  τη σχέση:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'_j = \mathbf{B} \mathbf{y}_j &\Rightarrow \mathbf{a}'_j = \sum_{i=1}^m y_{ij} \mathbf{B}_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m y_{ij} \mathbf{B}_i + y_{rj} \mathbf{B}_r \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{B}_r &= \frac{1}{y_{rj}} \mathbf{a}'_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \mathbf{B}_i \quad (\forall y_{rj} \neq 0) \end{aligned} \quad (\text{Π.Ι.11})$$

Με την αντικατάσταση του  $\mathbf{B}_r$  με το  $\mathbf{a}'_k$  έχουμε:

$$\mathbf{B} \mathbf{x}_B = \mathbf{b} \Rightarrow \sum_{i=1}^m x_{B_i} \mathbf{B}_i = \mathbf{b} \Rightarrow \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m x_{B_i} \mathbf{B}_i + x_{B_r} \mathbf{B}_r = \mathbf{b} \quad (\text{Π.Ι.12})$$

και αντικαθιστώντας το  $\mathbf{B}_r$  με τη βοήθεια της σχέσης (Π.Ι.11) έχουμε:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m \left\{ x_{B_i} - x_{B_r} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \right\} \mathbf{B}_i + \frac{x_{B_r}}{y_{rk}} \mathbf{a}'_k = \mathbf{b} \Rightarrow \sum_{i=1}^m x'_{B_i} \mathbf{B}_i = \mathbf{b} \quad \text{όπου για τα διανύσματα } \mathbf{x}'_{B_i}$$

της νέας βασικής λύσης ισχύει:

$$x'_{B_r} = \frac{x_{B_r}}{y_{rk}} \quad (\text{Π.Ι.13})$$



Παράρτημα I: Η Μέθοδος Simplex

$$x'_{Bi} = x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \Rightarrow x'_{Bi} = x_{Bi} - y_{ik} x'_{Br} \quad (\text{Π.Ι.14})$$

Τώρα επιστρέφουμε στη σχέση (Π.Ι.10) από την οποία σύμφωνα με τις σχέσεις (Π.Ι.13) και (Π.Ι.14) έχουμε:

$$z' = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m c_{Bi} x'_{Bi} + c_{Br} x'_{Br} \Rightarrow z' = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m c_{Bi} \left\{ x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \right\} + c_{Br} \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \quad (\text{Π.Ι.15})$$

Στην παραπάνω σχέση για λόγους ευκολίας προσθέτουμε τον μηδενικό όρο:

$$c_{Br} \left\{ x_{Br} - x_{Br} \frac{y_{rk}}{y_{rk}} \right\} = 0$$

Οπότε από τη σχέση (Π.Ι.15) έχουμε:

$$\begin{aligned} z' &= \sum_{i=1}^m c_{Bi} \left\{ x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \right\} + c_{Br} \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \\ \Rightarrow z' &= \sum_{i=1}^m c_{Bi} x_{Bi} + \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \left\{ c_{Br} - \sum_{i=1}^m c_{Bi} y_{ik} \right\} \end{aligned}$$

Θέτω  $c_{Br} = c_k$  και έχουμε λόγω της σχέσης (Π.Ι.9):

$$z' = z + \frac{x_{Br}}{y_{rk}} (c_k - z_k) \Rightarrow z' = z + \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \Delta_k \quad (\text{Π.Ι.16})$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η μεταβλητή  $x_k$  που θα εισέλθει στη βάση ( $x_k \uparrow$ ) επιλέγεται σύμφωνα με τον τύπο:

$$\Delta_k = \max_j \Delta_j$$

**ΠΗΓΑΙΝΕ ΣΤΟ ΣΤΑΔΙΟ 2.**

**Στάδιο 2:** Καθορισμός της εξερχόμενης μεταβλητής.

Η νέα βασική λύση πρέπει να είναι δυνατή. Επομένως σύμφωνα με τις σχέσεις (Π.Ι.13) και (Π.Ι.14) πρέπει να ισχύει:

## Παράρτημα I: Η Μέθοδος Simplex

$$x'_{Br} = x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \geq 0 \quad \forall i \neq r \quad (\text{Π.Ι.17})$$

$$x'_{Br} = \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \quad (\text{Π.Ι.18})$$

Από τη σχέση (Π.Ι.18) συμπεραίνουμε ότι πρέπει να ισχύει  $y_{rk} \geq 0$ . Τότε η σχέση (Π.Ι.17) ισχύει για κάθε  $y_{ik} \leq 0$  με  $i \neq r$ . Έτσι αρκεί να μας απασχολήσουν εκείνα μόνο τα  $i \neq r$  για τα οποία  $y_{ik} > 0$ . Στην περίπτωση αυτή η (Π.Ι.17) μπορεί να γραφεί:

$$\frac{x_{Bi}}{y_{ik}} - \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \geq 0 \quad (\text{Π.Ι.19})$$

Επομένως είναι φανερό ότι για να ισχύει η (Π.Ι.19) θα πρέπει η βασική μεταβλητή  $x_{Br}$  που θα εξέλθει της βάσης ( $x_{Br} \downarrow$ ) να βρίσκεται από τη σχέση:

$$\theta = \frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min_i \left( \frac{x_{Bi}}{y_{ik}}, y_{ik} > 0 \right) \quad (\text{Π.Ι.20}), \quad \text{όπου } k \text{ ο δείκτης της εισερχόμενης}$$

μεταβλητής. Εάν ισχύει  $y_{ik} \leq 0 \quad \forall i$  τότε το πρόβλημα δεν έχει πεπερασμένη λύση (απειρίζεται), αλλιώς **ΠΗΓΑΙΝΕ ΣΤΟ ΣΤΑΔΙΟ 3.**

**Στάδιο 3:** Αλλαγή βάσης.

Δημιουργείται μια νέα βάση με την είσοδο στη βάση της μεταβλητής  $x_k$  σε αντικατάσταση της  $x_{Br}$  ( $x_k \uparrow$   $x_{Br} \downarrow$ ).

**ΠΗΓΑΙΝΕ ΣΤΟ ΣΤΑΔΙΟ 1.**

## Παράρτημα II: Όρια του αριθμού των κορυφών υπερπολυέδρων

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.2) υπολογίστηκε στον επόμενο πίνακα το άνω όριο  $\bar{r}$  του αριθμού των κορυφών των υπερπολυέδρων για προβλήματα διαφορετικών διαστάσεων  $m$  (περιορισμών)  $\times$   $n$  (μεταβλητών), όπου #NUM!, πολύ μεγάλος αριθμός.

m	n								
	2	5	10	15	20	25	50	100	1000
3	5	20	91	240	506	910	6201	45526	42042751
4	6	30	196	660	1716	3640	44226	609076	5.292E+09
5	7	42	378	1584	5005	12376	261261	6641271	5.34E+11
6	8	56	672	3432	13013	37128	1330056	61458111	4.50E+13
7	9	72	1122	6864	30888	100776	5995431	496303236	3.26E+15
8	10	90	1782	12870	68068	251940	24402456	3.569E+09	2.07E+17
9	11	110	2717	22880	140998	587860	91018356	2.321E+10	1.17E+19
10	12	132	4004	38896	277134	1293292	3.15E+08	1.38E+11	5.94E+20
11	13	156	5733	63648	520676	2704156	1.02E+09	7.61E+11	2.76E+22
12	14	182	8008	100776	940576	5408312	3.1E+09	3.90E+12	1.18E+24
13	15	210	10948	155040	1641486	10400600	8.98E+09	1.88E+13	4.64E+25
14	16	240	14688	232560	2778446	19315400	2.48E+10	8.52E+13	1.70E+27
15	17	272	19380	341088	4576264	34767720	6.54E+10	3.67E+14	5.83E+28
20	22	462	63756	1776060	40060020	4.52E+08	4.93E+12	2.78E+17	1.16E+36
25	27	702	166257	6731712	2.36E+08	3.7E+09	1.90E+14	8.76E+19	7.11E+42
30	32	992	371008	20590944	1.06E+09	2.21E+10	4.49E+15	1.44E+22	1.70E+49
35	37	1332	740259	53956656	3.9E+09	1.05E+11	7.35E+16	1.42E+24	1.87E+55
40	42	1722	1357510	1.26E+08	1.23E+10	4.13E+11	9.02E+17	9.31E+25	1.06E+61
45	47	2162	2330636	2.68E+08	3.46E+10	1.41E+12	8.76E+18	4.33E+27	3.40E+66
50	52	2652	3795012	5.29E+08	8.8E+10	4.32E+12	7.01E+19	1.51E+29	6.58E+71
60	62	3782	8895264	1.74E+09	4.53E+11	3.07E+13	2.82E+21	9.13E+31	6.67E+81
70	72	5112	18410016	4.81E+09	1.85E+12	1.66E+14	7.02E+22	2.60E+34	1.54E+91
80	82	6642	34731018	1.17E+10	6.36E+12	7.26E+14	1.21E+24	4.11E+36	1.02E+100
90	92	8372	60990020	2.57E+10	1.90E+13	2.70E+15	1.55E+25	4.04E+38	2.30E+108
100	102	10302	1.01E+08	5.22E+10	5.12E+13	8.83E+15	1.56E+26	2.68E+40	2.04E+116
200	202	40602	2.94E+09	5.83E+12	3.87E+16	2.51E+19	1.14E+33	1.62E+53	4.31E+180
300	302	90902	2.16E+10	9.52E+13	2.01E+18	2.87E+21	1.69E+37	1.52E+61	3.36E+228
400	402	161202	8.97E+10	6.97E+14	3.39E+19	8.50E+22	1.70E+40	9.89E+66	1.34E+267
500	502	251502	2.71E+11	3.28E+15	3.06E+20	1.19E+24	3.81E+42	3.76E+71	4.05E+299
1000	1002	1003002	8.50E+12	4.08E+17	2.94E+23	4.51E+27	9.12E+49	1.21E+86	#NUM!
1500	1502	2254502	6.41E+13	6.91E+18	1.66E+25	5.71E+29	2.05E+54	5.02E+94	#NUM!
2000	2002	4006002	2.69E+14	5.15E+19	2.91E+26	1.78E+31	2.57E+57	7.14E+100	#NUM!
2500	2502	6257502	8.20E+14	2.45E+20	2.70E+27	2.57E+32	6.58E+59	4.39E+105	#NUM!
3000	3002	9009002	2.04E+15	8.76E+20	1.66E+28	2.28E+33	6.14E+61	3.66E+109	#NUM!
3500	3502	12260502	4.40E+15	2.57E+21	7.74E+28	1.44E+34	2.85E+63	7.65E+112	#NUM!
4000	4002	16012002	8.58E+15	6.55E+21	2.94E+29	7.14E+34	7.92E+64	5.80E+115	#NUM!
4500	4502	20263502	1.54E+16	1.49E+22	9.52E+29	2.93E+35	1.49E+66	2.02E+118	#NUM!
5000	5002	25015002	2.61E+16	3.12E+22	2.73E+30	1.04E+36	2.06E+67	3.80E+120	#NUM!

Πίνακας II-1: Άνω όριο  $\bar{r}$  του αριθμού των κορυφών

Παράρτημα II: Όρια του αριθμού των κορυφών υπερπολυέδρων

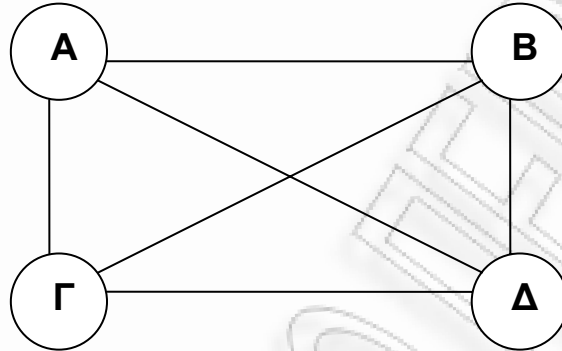
Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.3) υπολογίστηκε στον επόμενο πίνακα το ελάχιστο όριο  $r$  του αριθμού των κορυφών των υπερπολυέδρων για προβλήματα διαφορετικών διαστάσεων.

m	n								
	2	5	10	15	20	25	50	100	1000
3	5	0	0	0	0	0	0	0	0
4	6	3	0	0	0	0	0	0	0
5	7	7	0	0	0	0	0	0	0
6	8	11	0	0	0	0	0	0	0
7	9	15	0	0	0	0	0	0	0
8	10	19	0	0	0	0	0	0	0
9	11	23	3	0	0	0	0	0	0
10	12	27	12	0	0	0	0	0	0
11	13	31	21	0	0	0	0	0	0
12	14	35	30	0	0	0	0	0	0
13	15	39	39	0	0	0	0	0	0
14	16	43	48	3	0	0	0	0	0
15	17	47	57	17	0	0	0	0	0
20	22	67	102	87	22	0	0	0	0
25	27	87	147	157	117	27	0	0	0
30	32	107	192	227	212	147	0	0	0
35	37	127	237	297	307	267	0	0	0
40	42	147	282	367	402	387	0	0	0
45	47	167	327	437	497	507	0	0	0
50	52	187	372	507	592	627	52	0	0
60	62	227	462	647	782	867	542	0	0
70	72	267	552	787	972	1107	1032	0	0
80	82	307	642	927	1162	1347	1522	0	0
90	92	347	732	1067	1352	1587	2012	0	0
100	102	387	822	1207	1542	1827	2502	102	0
200	202	787	1722	2607	3442	4227	7402	10002	0
300	302	1187	2622	4007	5342	6627	12302	19902	0
400	402	1587	3522	5407	7242	9027	17202	29802	0
500	502	1987	4422	6807	9142	11427	22102	39702	0
1000	1002	3987	8922	13807	18642	23427	46602	89202	1002
1500	1502	5987	13422	20807	28142	35427	71102	138702	500502
2000	2002	7987	17922	27807	37642	47427	95602	188202	1000002
2500	2502	9987	22422	34807	47142	59427	120102	237702	1499502
3000	3002	11987	26922	41807	56642	71427	144602	287202	1999002
3500	3502	13987	31422	48807	66142	83427	169102	336702	2498502
4000	4002	15987	35922	55807	75642	95427	193602	386202	2998002
4500	4502	17987	40422	62807	85142	107427	218102	435702	3497502
5000	5002	19987	44922	69807	94642	119427	242602	485202	3997002

Πίνακας II-2: Ελάχιστο όριο  $r$  του αριθμού των κορυφών

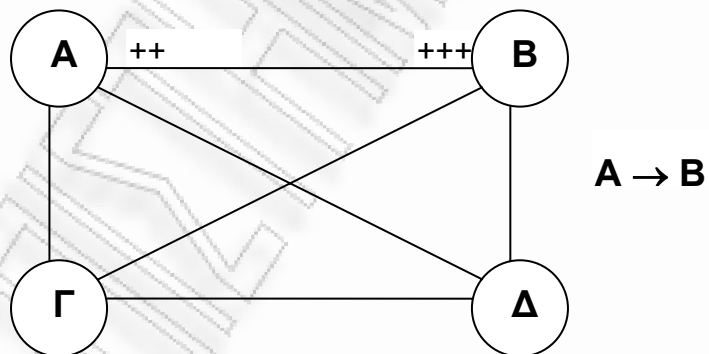
### Παράρτημα III: Παράδειγμα Αλγόριθμου του Tarry

Έστω ότι έχουμε ένα υπερπολύεδρο με 4 κορυφές και 6 ακμές, το οποίο το αναπαριστάμε με το παρακάτω γράφημα (ΑΒΓΔ):

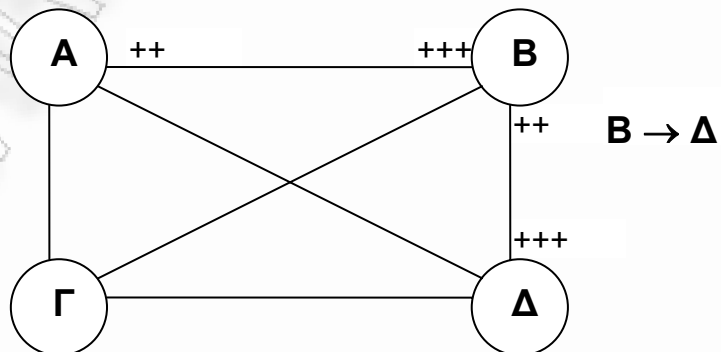


Ακολουθώντας τη μεθοδολογία που προτείνει ο Tarry προκειμένου να επισκεφτούμε εξαντλητικά όλες τις κορυφές έχουμε τα παρακάτω βήματα:

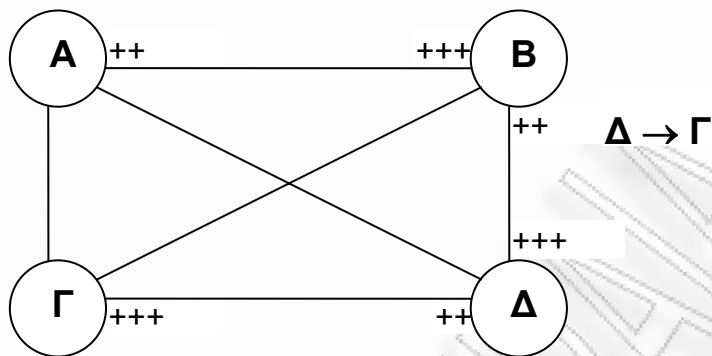
#### Βήμα 1



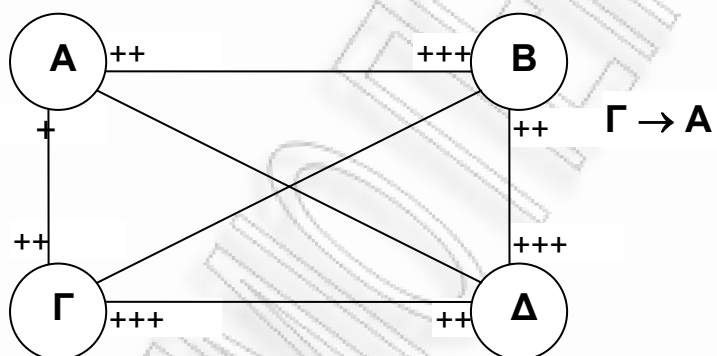
#### Βήμα 2



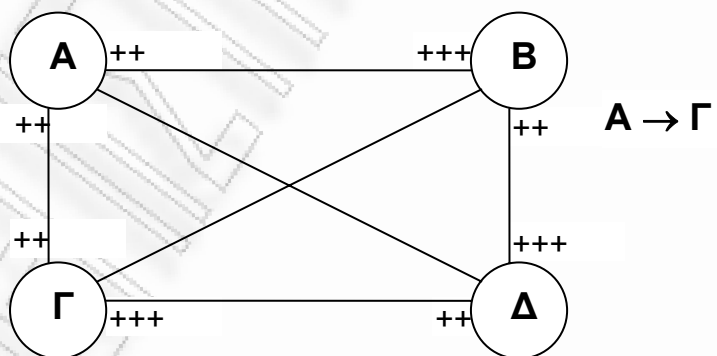
**Βήμα 3**



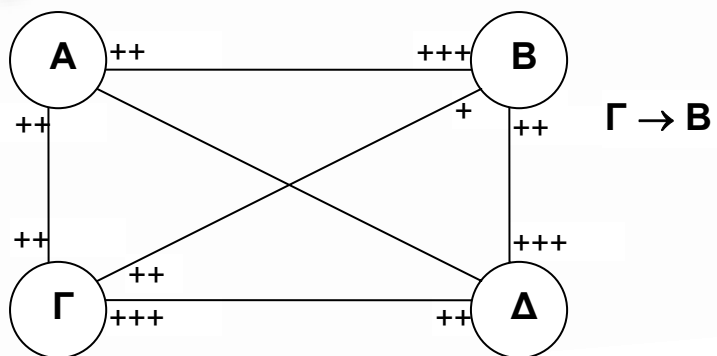
**Βήμα 4**



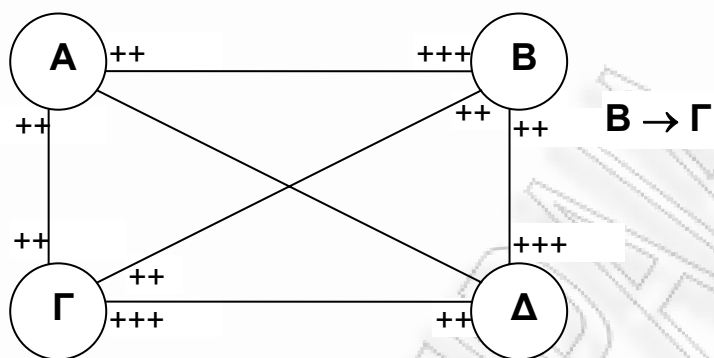
**Βήμα 5**



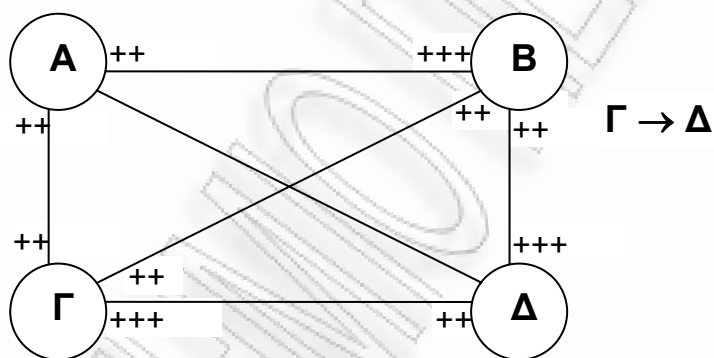
**Βήμα 6**



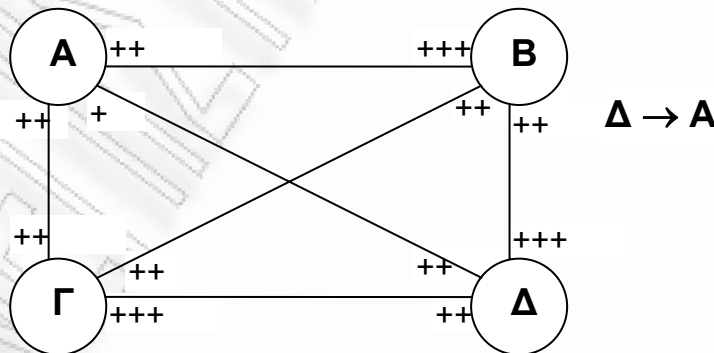
**Βήμα 7**



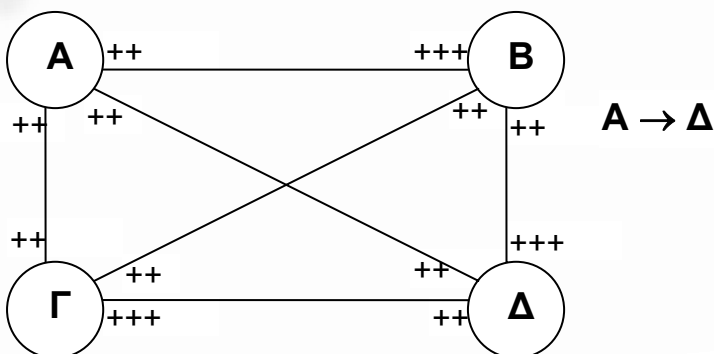
**Βήμα 8**



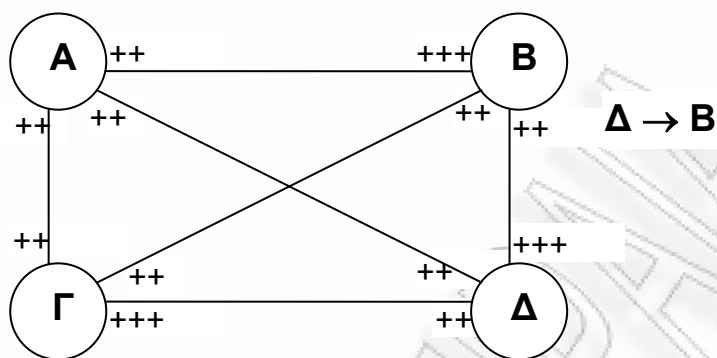
**Βήμα 9**



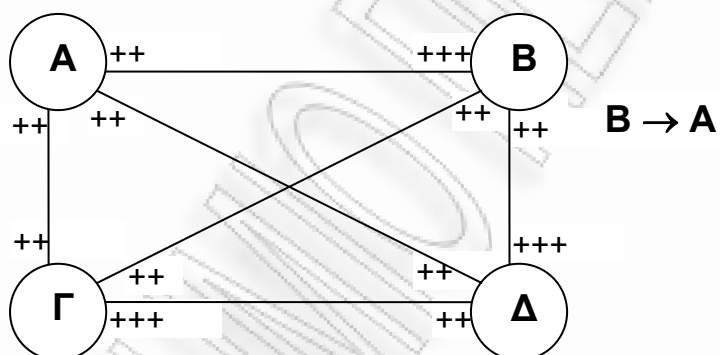
**Βήμα 10**



**Βήμα 11**



**Βήμα 12**



**ΤΕΛΟΣ**



**Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΑΙΑ

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

Σε όλα τα σύνολα των πειραμάτων έχουν χρησιμοποιηθεί 5 επίπεδα για την ολική ικανοποίηση και για την μερική ικανοποίηση κάθε κριτηρίου, με εξαίρεση τα σύνολα Π\_9, Π\_10, Π\_12, Π\_13, Π\_15 και Π\_20, στα οποία έχουν χρησιμοποιηθεί 3 επίπεδα για την ολική ικανοποίηση και για την μερική ικανοποίηση κάθε κριτηρίου.

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά των 135 συνόλων:

No	Πελάτες	Αριθμ. Κριτηρίων	$\gamma=\gamma_i$	Περιορισμοί	Μεταβλητές	Άνω Όριο Κορυφών (σχέση 1.2)
1	5	3	1	8	26	329460
2	5	3	2	8	26	329460
3	5	3	4	8	26	329460
4	5	5	1	8	34	1817046
5	5	5	2	8	34	1817046
6	5	5	4	8	34	1817046
7	5	7	1	8	42	7400250
8	5	7	2	8	42	7400250
9	5	7	4	8	42	7400250
10	6	3	1	9	28	1314610
11	6	3	2	9	28	1314610
12	6	3	4	9	28	1314610
13	6	5	1	9	36	7811375
14	6	5	2	9	36	7811375
15	6	5	4	9	36	7811375
16	6	7	1	9	44	34467225
17	6	7	2	9	44	34467225
18	6	7	4	9	44	34467225
19	7	3	1	10	30	5230016
20	7	3	2	10	30	5230016
21	7	3	4	10	30	5230016
22	7	5	1	10	38	33153120
23	7	5	2	10	38	33153120
24	7	5	4	10	38	33153120
25	7	7	1	10	46	157073280
26	7	7	2	10	46	157073280
27	7	7	4	10	46	157073280
28	8	3	1	11	32	20764055
29	8	3	2	11	32	20764055
30	8	3	4	11	32	20764055
31	8	5	1	11	40	139299615
32	8	5	2	11	40	139299615
33	8	5	4	11	40	139299615
34	8	7	1	11	48	703323660
35	8	7	2	11	48	703323660
36	8	7	4	11	48	703323660
Π_9	9	3	2	12	26	7904456
37	9	3	1	12	34	82317690
38	9	3	2	12	34	82317690
39	9	3	4	12	34	82317690
40	9	5	1	12	42	580610160
41	9	5	2	12	42	580610160

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No	Πελάτες	Αριθμ. Κριτηρίων	$\gamma=\gamma_i$	Περιορισμοί	Μεταβλητές	Άνω Όριο Κορυφών (σχέση 1.2)
42	9	5	4	12	42	580610160
43	9	7	1	12	50	3104160696
44	9	7	2	12	50	3104160696
45	9	7	4	12	50	3104160696
Π_10	10	3	2	13	28	30458900
46	10	3	1	13	36	326012925
47	10	3	2	13	36	326012925
48	10	3	4	13	36	326012925
49	10	5	1	13	44	2404321560
50	10	5	2	13	44	2404321560
51	10	5	4	13	44	2404321560
52	10	7	1	13	52	13537375740
53	10	7	2	13	52	13537375740
54	10	7	4	13	52	13537375740
Π_12	12	3	2	15	32	455657715
55	12	3	1	15	40	5103910680
56	12	3	2	15	40	5103910680
57	12	3	4	15	40	5103910680
58	12	5	1	15	48	40612127220
59	12	5	2	15	48	40612127220
60	12	5	4	15	48	40612127220
61	12	7	1	15	56	2.50205E+11
62	12	7	2	15	56	2.50205E+11
63	12	7	4	15	56	2.50205E+11
Π_13	13	3	2	16	34	1767883500
Π_15	15	3	2	18	38	26747767200
64	15	3	1	18	46	3.15493E+11
65	15	3	2	18	46	3.15493E+11
66	15	3	4	18	46	3.15493E+11
Π_20	20	3	2	23	48	2.43572E+13
73	20	3	1	23	56	3.04836E+14
74	20	3	2	23	56	3.04836E+14
75	20	3	4	23	56	3.04836E+14
76	20	5	1	23	64	2.95237E+15
77	20	5	2	23	64	2.95237E+15
78	20	5	4	23	64	2.95237E+15
79	20	7	1	23	72	2.32202E+16
80	20	7	2	23	72	2.32202E+16
81	20	7	4	23	72	2.32202E+16
82	50	3	1	53	116	2.67121E+32
83	50	3	2	53	116	2.67121E+32
84	50	3	4	53	116	2.67121E+32
85	50	5	1	53	124	3.34653E+33
86	50	5	2	53	124	3.34653E+33
87	50	5	4	53	124	3.34653E+33
88	50	7	1	53	132	3.72425E+34
89	50	7	2	53	132	3.72425E+34
90	50	7	4	53	132	3.72425E+34
91	100	3	1	103	216	2.57343E+62
92	100	3	2	103	216	2.57343E+62
93	100	3	4	103	216	2.57343E+62
94	100	5	1	103	224	3.60845E+63

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No	Πελάτες	Αριθμ. Κριτηρίων	$\gamma=\gamma_i$	Περιορισμοί	Μεταβλητές	Άνω Όριο Κορυφών (σχέση 1.2)
95	100	5	2	103	224	3.60845E+63
96	100	5	4	103	224	3.60845E+63
97	100	7	1	103	232	4.72593E+64
98	100	7	2	103	232	4.72593E+64
99	100	7	4	103	232	4.72593E+64
100	200	3	1	203	416	3.0392E+122
101	200	3	2	203	416	3.0392E+122
102	200	3	4	203	416	3.0392E+122
103	200	5	1	203	424	4.5398E+123
104	200	5	2	203	424	4.5398E+123
105	200	5	4	203	424	4.5398E+123
106	200	7	1	203	432	6.536E+124
107	200	7	2	203	432	6.536E+124
108	200	7	4	203	432	6.536E+124
109	500	3	1	503	996	7.9908E+299
110	500	3	2	503	996	7.9908E+299
111	500	3	4	503	996	7.9908E+299
112	500	5	1	503	994	3.9741E+299
113	500	5	2	503	994	3.9741E+299
114	500	5	4	503	994	3.9741E+299
115	500	7	1	503	992	1.9745E+299
116	500	7	2	503	992	1.9745E+299
117	500	7	4	503	992	1.9745E+299
118	1000	3	1	1003	1996	#NUM!
119	1000	3	2	1003	1996	#NUM!
120	1000	3	4	1003	1996	#NUM!
121	1000	5	1	1003	1994	#NUM!
122	1000	5	2	1003	1994	#NUM!
123	1000	5	4	1003	1994	#NUM!
124	1000	7	1	1003	1992	#NUM!
125	1000	7	2	1003	1992	#NUM!
126	1000	7	4	1003	1992	#NUM!
127	2000	3	1	2003	3996	#NUM!
128	2000	3	2	2003	3996	#NUM!
129	2000	3	4	2003	3996	#NUM!
130	2000	5	1	2003	3994	#NUM!
131	2000	5	2	2003	3994	#NUM!
132	2000	5	4	2003	3994	#NUM!
133	2000	7	1	2003	3992	#NUM!
134	2000	7	2	2003	3992	#NUM!
135	2000	7	4	2003	3992	#NUM!

**Πίνακας V-3:** Ταυτότητα συνόλων τεχνητών δεδομένων

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.2) υπολογίστηκε στον προηγούμενο πίνακα το άνω όριο  $\bar{r}$  του αριθμού των κορυφών των υπερολπολυέδρων για προβλήματα διαφορετικών διαστάσεων  $m$  (περιορισμών)  $\times$   $n$  (μεταβλητών), όπου #NUM!, πολύ μεγάλος αριθμός.

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τα 135 τεχνητά σύνολα τεχνητών δεδομένων, αναφορικά με τους δείκτες ποιότητας και ευστάθειας και αναφορικά με τον υπολογιστικό φόρτο.

No (μέγεθος)	Μέθοδος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
1 (5)	GM	97.40%	100.00%	41.22%	0.001	7	24.953	3
1 (5)	M-I	97.40%	100.00%	41.28%	0.001	13	24.953	6
1 (5)	M-III	97.40%	100.00%	42.65%	0.001	223	24.953	16
1 (5)	M-N	97.40%	100.00%	56.00%	40.015	97367	77.551	58969
1 (5)	R-S	97.40%	100.00%	46.45%	0.015	180	213.695	960
1 (5)	R-A	97.40%	100.00%	46.45%	0.047	180	75.168	960
2 (5)	GM	99.60%	100.00%	27.80%	0.001	13	34.207	3
2 (5)	M-I	99.60%	100.00%	35.17%	0.001	19	34.207	6
2 (5)	M-III	99.60%	100.00%	53.21%	0.001	299	34.207	16
2 (5)	M-N	99.60%	100.00%	46.72%	10.765	65710	67.715	34222
2 (5)	R-S	99.60%	100.00%	48.35%	0.24	113	143.461	768
2 (5)	R-A	99.60%	100.00%	48.35%	0.17	113	93.461	768
3 (5)	GM	100.00%	100.00%	76.00%	0.001	16	24.750	3
3 (5)	M-I	100.00%	100.00%	78.55%	0.001	20	24.750	6
3 (5)	M-III	100.00%	100.00%	82.95%	0.001	321	24.750	16
3 (5)	M-N	100.00%	100.00%	83.39%	0.289	9405	30.422	4712
3 (5)	R-S	100.00%	100.00%	83.82%	0.003	29	42.738	234
3 (5)	R-A	100.00%	100.00%	83.82%	0.002	29	32.458	234
4 (5)	GM	100.00%	100.00%	41.88%	0.001	60	65.398	5
4 (5)	M-I	100.00%	100.00%	52.05%	0.001	45	65.398	10
4 (5)	M-III	100.00%	100.00%	50.14%	0.002	813	65.398	24
4 (5)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
4 (5)	R-S	100.00%	100.00%	51.26%	0.046	319	73.812	2184
4 (5)	R-A	100.00%	100.00%	51.26%	0.042	319	65.375	2184
5 (5)	GM	99.20%	100.00%	58.37%	0.002	37	52.570	5
5 (5)	M-I	99.20%	100.00%	64.27%	0.001	39	52.570	10
5 (5)	M-III	99.20%	100.00%	66.23%	0.002	771	52.770	24
5 (5)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
5 (5)	R-S	99.20%	100.00%	70.93%	0.024	241	54.387	1588
5 (5)	R-A	99.20%	100.00%	70.93%	0.028	241	53.191	1588
6 (5)	GM	96.80%	80.00%	89.84%	0.003	56	48.297	5
6 (5)	M-I	96.80%	100.00%	91.12%	0.001	39	48.297	10
6 (5)	M-III	96.80%	100.00%	92.91%	0.002	857	48.297	24
6 (5)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
6 (5)	R-S	96.80%	100.00%	91.68%	0.123	629	66.324	4032
6 (5)	R-A	96.80%	100.00%	91.68%	0.124	629	55.422	4032
7 (5)	GM	100.00%	100.00%	41.79%	0.001	82	27.160	7
7 (5)	M-I	100.00%	100.00%	53.48%	0.001	61	27.160	14
7 (5)	M-III	100.00%	100.00%	47.80%	0.003	1555	27.160	32
7 (5)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
7 (5)	R-S	100.00%	100.00%	45.13%	1.007	1550	89.199	8802
7 (5)	R-A	100.00%	100.00%	45.13%	1.098	1550	44.281	8802
8 (5)	GM	100.00%	100.00%	70.23%	0.002	93	24.504	7
8 (5)	M-I	100.00%	100.00%	75.39%	0.001	67	24.504	14
8 (5)	M-III	100.00%	100.00%	76.93%	0.002	1921	28.828	32
8 (5)	M-N	-	-	-	-	-	-	-

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
8 (5)	R-S	100.00%	100.00%	78.32%	8.877	5200	248.234	30160
8 (5)	R-A	100.00%	100.00%	78.32%	12.726	5200	87.723	30160
9 (5)	GM	95.89%	80.00%	96.63%	0.005	53	402.227	7
9 (5)	M-I	95.89%	100.00%	96.94%	0.016	51	404.457	14
9 (5)	M-III	95.89%	100.00%	98.02%	0.017	868	409.871	32
9 (5)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
9 (5)	R-S	95.89%	100.00%	97.20%	0.051	110	419.219	1560
9 (5)	R-A	95.89%	100.00%	97.20%	0.031	110	414.445	1560
10 (6)	GM	99.33%	83.33%	33.56%	0.001	15	37.273	3
10 (6)	M-I	99.33%	100.00%	34.96%	0.001	20	37.273	6
10 (6)	M-III	99.33%	100.00%	39.08%	0.001	286	37.273	16
10 (6)	M-N	99.33%	100.00%	46.90%	0.413	10874	41.781	5496
10 (6)	R-S	99.33%	100.00%	44.67%	0.003	23	61.230	224
10 (6)	R-A	99.33%	100.00%	44.67%	0.002	23	41.023	224
11 (6)	GM	98.00%	100.00%	50.26%	0.001	8	30.445	3
11 (6)	M-I	98.00%	100.00%	47.53%	0.001	21	30.445	6
11 (6)	M-III	98.00%	100.00%	51.40%	0.001	328	30.445	16
11 (6)	M-N	98.00%	100.00%	55.36%	19.66	62102	57.078	31332
11 (6)	R-S	98.00%	100.00%	54.76%	0.012	94	158.855	503
11 (6)	R-A	98.00%	100.00%	54.76%	0.011	94	128.910	503
12 (6)	GM	96.00%	100.00%	72.67%	0.001	16	67.594	3
12 (6)	M-I	96.00%	100.00%	73.77%	0.002	25	67.594	6
12 (6)	M-III	96.00%	100.00%	79.43%	0.002	332	67.594	16
12 (6)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
12 (6)	R-S	96.00%	100.00%	80.25%	0.087	799	75.719	3456
12 (6)	R-A	96.00%	100.00%	80.25%	0.084	799	72.176	3456
13 (6)	GM	99.00%	100.00%	32.84%	0.001	26	24.734	5
13 (6)	M-I	99.00%	100.00%	39.01%	0.001	42	24.734	10
13 (6)	M-III	99.00%	100.00%	44.47%	0.002	597	24.734	24
13 (6)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
13 (6)	R-S	99.00%	100.00%	35.52%	0.222	1494	62.051	5508
13 (6)	R-A	99.00%	100.00%	35.52%	0.233	1494	34.398	5508
14 (6)	GM	100.00%	100.00%	75.77%	0.004	71	84.219	5
14 (6)	M-I	100.00%	100.00%	79.02%	0.002	53	84.219	10
14 (6)	M-III	100.00%	100.00%	80.25%	0.003	1432	84.219	24
14 (6)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
14 (6)	R-S	100.00%	100.00%	82.87%	0.693	1397	100.590	8712
14 (6)	R-A	100.00%	100.00%	82.87%	0.697	1397	91.621	8712
15 (6)	GM	86.00%	100.00%	93.94%	0.002	31	118.781	5
15 (6)	M-I	86.00%	100.00%	94.40%	0.004	29	120.523	10
15 (6)	M-III	86.00%	100.00%	94.68%	0.004	685	120.523	24
15 (6)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
15 (6)	R-S	86.00%	100.00%	95.91%	0.367	870	113.266	6480
15 (6)	R-A	86.00%	100.00%	95.91%	0.365	870	109.574	6480
16 (6)	M-I	100.00%	100.00%	37.82%	0.004	138	26.488	7
16 (6)	M-III	100.00%	100.00%	51.19%	0.002	91	26.488	14
16 (6)	M-N	100.00%	100.00%	54.61%	0.003	2284	27.125	32
16 (6)		-	-	-	-	-	-	-
16 (6)	R-S	100.00%	100.00%	55.29%	5.355	4301	234.703	24480
16 (6)	R-A	100.00%	100.00%	55.29%	7.442	4301	75.188	24480
17 (6)	GM	98.42%	100.00%	98.45%	0.001	37	47.023	7

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
17 (6)	M-I	98.42%	100.00%	98.76%	0.002	50	47.023	14
17 (6)	M-III	98.42%	100.00%	98.76%	0.002	682	47.023	32
17 (6)	M-N	98.42%	83.33%	98.96%	0.104	3939	51.051	2110
17 (6)	R-S	98.42%	100.00%	99.00%	0.001	1	51.051	76
17 (6)	R-A	98.42%	100.00%	99.00%	0.001	1	51.051	76
18 (6)	GM	99.76%	100.00%	97.39%	0.002	44	31.441	7
18 (6)	M-I	99.76%	100.00%	97.43%	0.003	50	31.441	14
18 (6)	M-III	99.76%	100.00%	98.66%	0.002	753	31.441	32
18 (6)	M-N	99.76%	100.00%	96.10%	1.111	16535	45.172	9493
18 (6)	R-S	99.76%	100.00%	96.61%	0.008	6	97.480	216
18 (6)	R-A	99.76%	100.00%	96.61%	0.002	6	67.436	216
19 (7)	GM	100.00%	100.00%	84.13%	0.002	22	24.422	3
19 (7)	M-I	100.00%	100.00%	82.39%	0.001	33	24.422	6
19 (7)	M-III	100.00%	100.00%	83.94%	0.002	596	24.422	16
19 (7)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
19 (7)	R-S	100.00%	100.00%	85.48%	0.025	225	37.363	1822
19 (7)	R-A	100.00%	100.00%	85.48%	0.026	225	29.555	1822
20 (7)	GM	99.14%	100.00%	40.37%	0.001	21	42.535	3
20 (7)	M-I	99.14%	100.00%	40.45%	0.002	35	42.539	6
20 (7)	M-III	99.14%	100.00%	50.04%	0.002	464	42.539	16
20 (7)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
20 (7)	R-S	99.14%	100.00%	41.60%	1.645	4203	99.641	13650
20 (7)	R-A	99.14%	100.00%	41.60%	1.84	4203	70.316	13650
21 (7)	GM	97.14%	100.00%	76.81%	0.001	9	25.688	3
21 (7)	M-I	97.14%	100.00%	76.62%	0.001	15	25.688	6
21 (7)	M-III	97.14%	100.00%	80.98%	0.001	233	25.688	16
21 (7)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
21 (7)	R-S	97.14%	100.00%	79.03%	0.02	259	35.914	1568
21 (7)	R-A	97.14%	100.00%	79.03%	0.02	259	27.523	1568
22 (7)	GM	99.29%	100.00%	39.91%	0.002	57	41.230	5
22 (7)	M-I	99.29%	100.00%	46.10%	0.001	36	41.230	10
22 (7)	M-III	99.29%	100.00%	43.65%	0.002	1028	41.230	24
22 (7)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
22 (7)	R-S	99.29%	100.00%	41.26%	0.551	1201	80.906	8158
22 (7)	R-A	99.29%	100.00%	41.26%	0.574	1201	53.559	8158
23 (7)	GM	98.86%	100.00%	72.65%	0.002	72	107.477	5
23 (7)	M-I	98.86%	100.00%	75.43%	0.006	69	110.270	10
23 (7)	M-III	98.86%	100.00%	76.88%	0.003	1446	110.270	24
23 (7)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
23 (7)	R-S	98.86%	100.00%	78.24%	4.057	2750	211.773	20857
23 (7)	R-A	98.86%	100.00%	78.24%	4.757	2750	160.590	20857
24 (7)	GM	95.14%	100.00%	97.08%	0.001	40	57.852	5
24 (7)	M-I	95.14%	100.00%	97.52%	0.001	28	57.852	10
24 (7)	M-III	95.14%	100.00%	97.62%	0.002	540	57.852	24
24 (7)	M-N	95.14%	100.00%	98.07%	30.463	84040	98.914	45131
24 (7)	R-S	95.14%	100.00%	98.14%	0.042	67	259.859	984
24 (7)	R-A	95.14%	100.00%	98.14%	0.017	67	77.852	984
25 (7)	GM	100.00%	100.00%	45.00%	0.002	195	103.707	7
25 (7)	M-I	100.00%	100.00%	54.48%	0.003	106	103.707	14
25 (7)	M-III	100.00%	100.00%	50.65%	0.004	3445	103.707	32
25 (7)	M-N	-	-	-	-	-	-	-

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
25 (7)	R-S	100.00%	100.00%	53.98%	7.101	3565	274.469	24444
25 (7)	R-A	100.00%	100.00%	53.98%	9.887	3565	148.609	24444
26 (7)	GM	100.00%	100.00%	73.78%	0.005	191	427.477	7
26 (7)	M-I	100.00%	100.00%	78.14%	0.016	101	431.309	14
26 (7)	M-III	100.00%	100.00%	77.41%	0.018	2849	437.098	32
26 (7)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
26 (7)	R-S	100.00%	100.00%	79.45%	3.901	1697	446.395	12400
26 (7)	R-A	100.00%	100.00%	79.45%	3.583	1697	435.090	12400
27 (7)	GM	93.47%	100.00%	96.49%	0.002	46	121.691	7
27 (7)	M-I	93.47%	100.00%	97.02%	0.002	40	121.691	14
27 (7)	M-III	93.47%	100.00%	97.27%	0.003	688	121.691	32
27 (7)	M-N	93.47%	85.71%	97.48%	41.705	106284	175.227	54107
27 (7)	R-S	93.47%	100.00%	97.57%	0.038	32	393.883	576
27 (7)	R-A	93.47%	100.00%	97.57%	0.031	32	204.656	576
28 (8)	GM	98.75%	87.50%	42.17%	0.01	19	265.223	3
28 (8)	M-I	98.75%	87.50%	42.16%	0.004	27	265.223	6
28 (8)	M-III	98.75%	100.00%	59.52%	0.011	431	270.277	16
28 (8)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
28 (8)	R-S	98.75%	100.00%	47.57%	0.031	325	277.051	1224
28 (8)	R-A	98.75%	100.00%	47.57%	0.022	325	270.191	1224
29 (8)	GM	96.25%	100.00%	55.87%	0.003	9	252.160	3
29 (8)	M-I	96.25%	100.00%	55.97%	0.004	14	252.160	6
29 (8)	M-III	96.25%	100.00%	65.66%	0.004	212	254.727	16
29 (8)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
29 (8)	R-S	96.25%	100.00%	52.87%	0.134	502	293.789	2896
29 (8)	R-A	96.25%	100.00%	52.87%	0.113	502	274.273	2896
30 (8)	GM	96.00%	100.00%	80.22%	0.01	13	236.082	3
30 (8)	M-I	96.00%	100.00%	79.81%	0.004	20	236.082	6
30 (8)	M-III	96.00%	87.50%	79.48%	0.011	303	240.949	16
30 (8)	M-N	96.00%	100.00%	87.28%	23.652	60854	260.148	26746
30 (8)	R-S	96.00%	100.00%	85.33%	0.018	106	149.613	631
30 (8)	R-A	96.00%	100.00%	85.33%	0.011	106	150.191	631
31 (8)	GM	99.13%	100.00%	52.66%	0.003	48	157.965	5
31 (8)	M-I	99.13%	100.00%	55.45%	0.002	64	157.965	10
31 (8)	M-III	99.13%	100.00%	64.18%	0.003	877	157.965	24
31 (8)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
31 (8)	R-S	99.13%	100.00%	60.27%	0.041	322	164.277	1700
31 (8)	R-A	99.13%	100.00%	60.27%	0.037	322	155.844	1700
32 (8)	GM	99.81%	100.00%	99.76%	0.006	24	140.328	5
32 (8)	M-I	99.81%	100.00%	99.79%	0.002	42	140.328	10
32 (8)	M-III	99.81%	100.00%	99.82%	0.003	478	140.328	24
32 (8)	M-N	99.81%	100.00%	98.07%	318.089	154300	261.520	78332
32 (8)	R-S	99.81%	100.00%	99.88%	0.069	35	474.809	648
32 (8)	R-A	99.81%	100.00%	99.88%	0.065	35	380.027	648
33 (8)	GM	91.50%	75.00%	95.25%	0.016	24	414.703	5
33 (8)	M-I	91.50%	75.00%	95.91%	0.017	36	415.852	10
33 (8)	M-III	91.50%	75.00%	96.58%	0.017	391	421.148	24
33 (8)	M-N	91.50%	75.00%	97.03%	0.712	7759	430.461	4159
33 (8)	R-S	91.50%	75.00%	97.07%	0.005	4	89.664	124
33 (8)	R-A	91.50%	75.00%	97.07%	0.001	4	89.664	124
34 (8)	GM	97.14%	87.50%	96.23%	0.002	52	22.891	7



Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
34 (8)	M-I	97.14%	87.50%	96.36%	0.001	52	22.891	14
34 (8)	M-III	97.14%	87.50%	97.37%	0.003	888	22.891	32
34 (8)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
34 (8)	R-S	97.14%	87.50%	95.69%	0.228	482	74.305	5952
34 (8)	R-A	97.14%	87.50%	95.69%	0.25	482	33.391	5952
35 (8)	GM	100.00%	100.00%	91.18%	0.002	134	25.996	7
35 (8)	M-I	100.00%	100.00%	91.85%	0.002	133	25.996	14
35 (8)	M-III	100.00%	100.00%	93.08%	0.004	2019	25.996	32
35 (8)	R-S	100.00%	100.00%	93.04%	0.985	1678	44.270	9272
35 (8)	R-A	100.00%	100.00%	93.04%	1.145	1678	34.434	9272
36 (8)	GM	95.36%	100.00%	88.83%	0.002	116	132.062	7
36 (8)	M-I	95.36%	100.00%	90.36%	0.004	73	132.062	14
36 (8)	M-III	95.36%	100.00%	91.50%	0.005	1493	135.227	32
36 (8)	R-S	95.36%	100.00%	91.77%	1.435	1193	175.246	12001
36 (8)	R-A	95.36%	100.00%	91.60%	1.755	1308	157.688	13025
Π_9 (9)	GM	99.78%	100.00%	39.77%	0.016	18	177.145	3
Π_9 (9)	M-I	99.78%	100.00%	37.35%	0.007	25	177.145	6
Π_9 (9)	M-III	99.78%	100.00%	45.64%	0.007	92	148.262	8
Π_9 (9)	M-N	99.78%	100.00%	38.49%	71.192	76864	186.273	39734
Π_9 (9)	R-S	99.78%	100.00%	37.59%	0.029	318	193.254	1192
Π_9 (9)	R-A	99.78%	100.00%	37.59%	0.023	318	170.348	1192
37 (9)	GM	99.22%	88.89%	95.66%	0.002	9	84.453	3
37 (9)	M-I	99.22%	88.89%	95.42%	0.002	24	84.438	6
37 (9)	M-III	99.22%	88.89%	97.00%	0.002	248	84.438	16
37 (9)	R-S	99.22%	100.00%	97.65%	0.102	438	93.496	3528
37 (9)	R-A	99.22%	100.00%	97.65%	0.116	438	88.738	3528
38 (9)	GM	99.33%	88.89%	25.85%	0.004	22	111.754	3
38 (9)	M-I	99.33%	88.89%	29.65%	0.001	29	111.754	6
38 (9)	M-III	99.33%	100.00%	58.94%	0.003	334	111.754	16
38 (9)	R-S	99.33%	100.00%	33.25%	0.155	804	117.574	3481
38 (9)	R-A	99.33%	100.00%	33.25%	0.151	804	113.578	3481
39 (9)	GM	96.89%	100.00%	88.36%	0.001	13	104.074	3
39 (9)	M-I	96.89%	100.00%	88.60%	0.002	29	104.074	6
39 (9)	M-III	96.89%	100.00%	91.92%	0.002	312	105.676	16
39 (9)	R-S	96.89%	100.00%	90.23%	0.016	165	111.707	1304
39 (9)	R-A	96.89%	100.00%	90.23%	0.016	165	102.613	1304
40 (9)	GM	99.78%	100.00%	47.51%	0.001	35	95.734	5
40 (9)	M-I	99.78%	100.00%	55.97%	0.001	37	95.734	10
40 (9)	M-III	99.78%	100.00%	58.05%	0.002	688	95.734	24
40 (9)	R-S	99.78%	100.00%	56.46%	0.061	214	99.906	2568
40 (9)	R-A	99.78%	100.00%	56.46%	0.071	214	118.316	2568
41 (9)	GM	98.00%	88.89%	69.14%	0.001	59	106.551	5
41 (9)	M-I	98.00%	88.89%	71.98%	0.002	42	106.551	10
41 (9)	M-III	98.00%	88.89%	77.88%	0.003	816	106.551	24
41 (9)	R-S	98.00%	100.00%	75.98%	0.031	227	116.898	1850
41 (9)	R-A	98.00%	100.00%	75.98%	0.033	227	108.756	1850
42 (9)	GM	94.00%	88.89%	95.62%	0.001	53	100.410	5
42 (9)	M-I	94.00%	88.89%	96.04%	0.001	47	100.410	10
42 (9)	M-III	94.00%	88.89%	96.57%	0.002	971	100.410	24
42 (9)	R-S	94.00%	88.89%	96.48%	1.722	2053	131.414	10946
42 (9)	R-A	94.00%	88.89%	96.48%	2.217	2053	124.117	10946

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
43 (9)	GM	99.64%	100.00%	99.89%	0.001	64	23.750	7
43 (9)	M-I	99.64%	100.00%	99.90%	0.001	64	23.750	14
43 (9)	M-III	99.64%	100.00%	99.90%	0.002	1120	23.750	32
43 (9)	R-S	99.64%	100.00%	99.86%	0.242	334	35.355	5483
43 (9)	R-A	99.64%	100.00%	99.86%	0.253	334	73.223	5483
44 (9)	GM	98.75%	87.50%	97.82%	0.002	52	22.930	7
44 (9)	M-I	98.75%	87.50%	97.88%	0.002	54	22.930	14
44 (9)	M-III	98.75%	87.50%	98.03%	0.003	863	23.363	32
44 (9)	R-S	98.75%	100.00%	97.85%	0.032	157	27.387	2208
44 (9)	R-A	98.75%	100.00%	97.85%	0.038	157	24.988	2208
45 (9)	GM	98.10%	100.00%	96.06%	0.002	95	25.617	7
45 (9)	M-I	98.10%	88.89%	96.42%	0.002	69	25.617	14
45 (9)	M-III	98.10%	88.89%	96.91%	0.003	1092	26.473	32
45 (9)	R-S	98.10%	100.00%	97.10%	0.673	737	43.504	8554
45 (9)	R-A	98.10%	100.00%	97.10%	0.763	737	34.395	8554
Π_10 (10)	GM	99.80%	100.00%	39.77%	0.003	18	208.961	3
Π_10 (10)	M-I	99.80%	100.00%	37.35%	0.003	25	208.961	6
Π_10 (10)	M-III	99.80%	100.00%	45.64%	0.008	92	173.652	8
Π_10 (10)	M-N	99.80%	100.00%	38.83%	56.393	81405	220.414	43256
Π_10 (10)	R-S	99.80%	100.00%	37.58%	0.075	318	309.469	1296
Π_10 (10)	R-A	99.80%	100.00%	37.58%	0.045	318	208.582	1296
46 (10)	GM	99.30%	100.00%	43.16%	0.002	18	196.957	3
46 (10)	M-I	99.30%	100.00%	43.37%	0.003	25	196.957	6
46 (10)	M-III	99.30%	100.00%	58.41%	0.005	316	196.957	16
46 (10)	R-S	99.30%	100.00%	48.56%	12.822	5390	232.824	30722
46 (10)	R-A	99.30%	100.00%	48.56%	14.098	5390	219.715	30722
47 (10)	GM	99.40%	100.00%	52.04%	0.005	16	281.086	3
47 (10)	M-I	99.40%	100.00%	50.15%	0.012	34	282.602	6
47 (10)	M-III	99.40%	100.00%	68.12%	0.012	378	287.273	16
47 (10)	R-S	99.40%	100.00%	57.61%	0.032	107	297.848	1156
47 (10)	R-A	99.40%	100.00%	57.61%	0.021	107	179.816	1156
48 (10)	GM	96.80%	100.00%	94.88%	0.001	14	96.512	3
48 (10)	M-I	96.80%	100.00%	95.16%	0.001	21	96.512	6
48 (10)	M-III	96.80%	100.00%	96.01%	0.002	313	96.512	16
48 (10)	R-S	96.80%	100.00%	96.56%	0.089	377	103.281	3168
48 (10)	R-A	96.80%	100.00%	96.56%	0.096	377	100.828	3168
49 (10)	GM	97.50%	60.00%	97.60%	0.001	29	23.062	5
49 (10)	M-I	97.50%	60.00%	97.87%	0.001	38	23.062	10
49 (10)	M-III	97.50%	60.00%	98.22%	0.002	598	23.668	24
49 (10)	R-S	97.50%	100.00%	98.22%	0.092	316	30.098	3456
49 (10)	R-A	97.50%	100.00%	98.22%	0.094	316	25.629	3456
50 (10)	GM	96.80%	90.00%	80.61%	0.001	43	24.582	5
50 (10)	M-I	96.80%	90.00%	79.22%	0.001	71	24.582	10
50 (10)	M-III	96.80%	90.00%	86.67%	0.002	711	24.582	24
50 (10)	R-S	96.80%	100.00%	84.65%	0.184	451	33.898	4792
50 (10)	R-A	96.80%	100.00%	84.65%	0.18	451	27.148	4792
51 (10)	GM	89.20%	100.00%	90.04%	0.003	47	78.168	5
51 (10)	M-I	89.20%	100.00%	90.90%	0.002	54	78.168	10
51 (10)	M-III	89.20%	100.00%	91.61%	0.002	835	78.168	24
51 (10)	R-S	89.20%	100.00%	91.01%	0.12	419	83.965	3514
51 (10)	R-A	89.20%	100.00%	90.91%	0.13	443	80.852	3682

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
52 (10)	GM	98.76%	70.00%	98.66%	0.001	55	23.004	7
52 (10)	M-I	98.76%	70.00%	98.73%	0.001	71	23.004	14
52 (10)	M-III	98.76%	70.00%	99.07%	0.003	1205	23.004	32
52 (10)	R-S	98.76%	70.00%	99.34%	0.306	383	35.703	5984
52 (10)	R-A	98.76%	100.00%	98.04%	7.586	3060	26.441	29498
53 (10)	GM	98.39%	100.00%	98.28%	0.001	57	23.988	7
53 (10)	M-I	98.39%	100.00%	98.42%	0.001	83	23.988	14
53 (10)	M-III	98.39%	100.00%	98.57%	0.002	1084	23.988	32
53 (10)	R-S	98.39%	100.00%	97.83%	0.738	1043	39.645	7964
53 (10)	R-A	98.39%	100.00%	97.83%	0.786	1043	32.883	7964
54 (10)	GM	99.43%	100.00%	98.95%	0.002	74	22.762	7
54 (10)	M-I	99.43%	100.00%	98.83%	0.001	67	22.762	14
54 (10)	M-III	99.43%	100.00%	99.05%	0.003	1312	22.762	32
54 (10)	R-S	99.43%	100.00%	98.76%	3.673	2352	62.938	15745
54 (10)	R-A	99.43%	100.00%	98.76%	4.43	2352	56.242	15745
Π_12 (12)	GM	99.83%	100.00%	56.92%	0.001	17	51.961	3
Π_12 (12)	M-I	99.83%	100.00%	54.36%	0.001	20	51.961	6
Π_12 (12)	M-III	99.83%	100.00%	60.44%	0.001	102	52.332	8
Π_12 (12)	R-S	99.83%	100.00%	63.14%	0.035	340	56.867	1824
Π_12 (12)	R-A	99.83%	100.00%	66.00%	0.048	405	55.277	2243
55 (12)	GM	99.75%	100.00%	56.27%	0.004	31	252.059	3
55 (12)	M-I	99.75%	100.00%	58.47%	0.011	31	254.148	6
55 (12)	M-III	99.75%	100.00%	69.95%	0.01	477	258.902	16
55 (12)	R-S	99.75%	100.00%	64.48%	0.256	616	270.656	4009
55 (12)	R-A	99.75%	100.00%	64.48%	0.211	616	156.246	4009
56 (12)	GM	97.67%	100.00%	98.07%	0.001	17	24.617	3
56 (12)	M-I	97.67%	100.00%	98.15%	0.001	17	24.617	6
56 (12)	M-III	97.67%	100.00%	98.34%	0.002	223	24.617	16
56 (12)	R-S	97.67%	100.00%	98.99%	0.037	169	29.141	1920
56 (12)	R-A	97.67%	100.00%	98.99%	0.039	169	27.812	1920
57 (12)	GM	96.67%	83.33%	83.85%	0.001	14	43.047	3
57 (12)	M-I	96.67%	83.33%	83.83%	0.001	23	43.047	6
57 (12)	M-III	96.67%	83.33%	88.57%	0.002	278	43.047	16
57 (12)	R-S	96.67%	91.67%	84.79%	0.021	276	44.484	1499
57 (12)	R-A	96.67%	91.67%	84.79%	0.022	276	44.188	1499
58 (12)	GM	99.53%	100.00%	99.53%	0.004	36	23.277	5
58 (12)	M-I	99.53%	100.00%	99.54%	0.001	53	23.277	10
58 (12)	M-III	99.53%	100.00%	99.60%	0.002	607	23.277	24
58 (12)	R-S	99.53%	100.00%	99.73%	0.027	109	27.371	1740
58 (12)	R-A	99.53%	100.00%	95.82%	10.542	3931	24.168	34679
59 (12)	GM	99.94%	100.00%	99.84%	0.003	29	208.895	5
59 (12)	M-I	99.94%	100.00%	99.83%	0.004	41	208.895	10
59 (12)	M-III	99.94%	100.00%	99.87%	0.004	453	216.266	24
59 (12)	R-S	99.94%	100.00%	99.93%	0.005	1	216.266	72
59 (12)	R-A	99.94%	100.00%	89.41%	15.595	3759	216.266	35346
60 (12)	GM	99.17%	100.00%	98.25%	0.001	45	23.418	5
60 (12)	M-I	99.17%	100.00%	98.34%	0.001	55	23.418	10
60 (12)	M-III	99.17%	100.00%	98.58%	0.002	864	23.418	24
60 (12)	R-S	99.17%	100.00%	98.67%	0.908	1002	41.891	9984
60 (12)	R-A	99.17%	100.00%	98.67%	0.999	1002	34.145	9984
61 (12)	GM	96.19%	91.67%	97.13%	0.002	69	23.246	7

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
61 (12)	M-I	96.19%	83.33%	97.37%	0.001	65	23.246	14
61 (12)	M-III	96.19%	83.33%	97.66%	0.003	901	23.246	32
61 (12)	R-S	96.19%	91.67%	98.53%	0.41	493	37.469	6811
61 (12)	R-A	96.19%	91.67%	97.93%	1.048	824	26.109	10537
62 (12)	GM	97.54%	83.33%	99.46%	0.002	54	23.242	7
62 (12)	M-I	97.54%	83.33%	99.47%	0.001	57	23.508	14
62 (12)	M-III	97.54%	83.33%	99.61%	0.003	668	23.508	32
62 (12)	R-S	97.54%	83.33%	99.50%	0.003	18	23.508	500
62 (12)	R-A	97.54%	83.33%	99.50%	0.003	18	23.508	500
63 (12)	GM	94.26%	66.67%	99.26%	0.002	63	23.707	7
63 (12)	M-I	94.26%	66.67%	99.31%	0.001	71	23.707	14
63 (12)	M-III	94.26%	66.67%	99.45%	0.003	842	24.516	32
63 (12)	R-S	94.26%	91.67%	98.67%	1.251	1491	42.094	8702
63 (12)	R-A	94.26%	91.67%	98.67%	1.38	1491	32.180	8702
Π_13 (13)	GM	99.85%	100.00%	56.92%	0.002	17	56.066	3
Π_13 (13)	M-I	99.85%	100.00%	54.24%	0.001	24	56.066	6
Π_13 (13)	M-III	99.85%	100.00%	60.44%	0.002	102	56.980	8
Π_13 (13)	R-S	99.85%	100.00%	63.72%	0.15	648	64.191	3522
Π_13 (13)	R-A	99.85%	100.00%	63.72%	0.151	648	62.477	3522
Π_15 (15)	GM	99.73%	100.00%	99.68%	0.001	9	64.547	3
Π_15 (15)	M-I	99.73%	100.00%	99.67%	0.001	15	64.547	6
Π_15 (15)	M-III	99.73%	100.00%	99.65%	0.001	57	64.547	8
Π_15 (15)	R-S	99.73%	100.00%	98.90%	0.03	215	68.234	1520
Π_15 (15)	R-A	99.73%	100.00%	98.90%	0.028	215	61.426	1520
64 (15)	GM	96.03%	100.00%	95.84%	0.001	6	24.504	3
64 (15)	M-I	96.03%	100.00%	95.67%	0.001	10	24.797	6
64 (15)	M-III	96.03%	100.00%	96.51%	0.002	260	24.797	16
64 (15)	R-S	96.03%	100.00%	98.36%	5.412	2644	62.652	20935
64 (15)	R-A	96.03%	100.00%	98.36%	6.451	2644	148.832	20395
65 (15)	GM	96.98%	86.67%	96.60%	0.004	14	24.324	3
65 (15)	M-I	96.98%	86.67%	97.05%	0.01	16	24.461	6
65 (15)	M-III	96.98%	86.67%	97.47%	0.004	272	24.461	16
65 (15)	R-S	96.98%	93.33%	98.22%	0.352	476	72.316	4572
65 (15)	R-A	96.98%	93.33%	98.22%	0.303	476	37.973	4572
66 (15)	GM	95.00%	100.00%	76.74%	0.002	21	23.723	3
66 (15)	M-I	95.00%	100.00%	76.87%	0.001	25	23.723	6
66 (15)	M-III	95.00%	100.00%	85.72%	0.002	384	23.723	16
66 (15)	R-S	95.00%	93.33%	82.73%	4.206	3627	66.082	18341
66 (15)	R-A	95.00%	93.33%	82.73%	5.165	3627	41.711	18341
Π_20 (20)	GM	99.60%	100.00%	99.36%	0.002	11	54.613	3
Π_20 (20)	M-I	99.60%	100.00%	99.33%	0.001	13	54.613	6
Π_20 (20)	M-III	99.60%	100.00%	99.34%	0.001	80	54.613	8
Π_20 (20)	R-S	99.60%	100.00%	98.34%	12.377	4314	107.820	27509
Π_20 (20)	R-A	99.60%	100.00%	98.34%	14.651	4314	70.551	27509
73 (20)	GM	95.78%	90.00%	96.84%	0.002	8	24.676	3
73 (20)	M-I	95.78%	90.00%	97.04%	0.001	12	24.676	6
73 (20)	M-III	95.78%	90.00%	97.56%	0.001	242	24.676	16
73 (20)	GM (R.)	95.78%	95.00%	97.34%	0.001	49	28.531	3
73 (20)	M-I (R.)	95.78%	95.00%	97.27%	0.001	36	28.531	6
73 (20)	M-III (R.)	95.78%	95.00%	98.01%	0.002	60	28.531	16
74 (20)	GM	97.90%	95.00%	95.80%	0.002	11	29.453	3

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
74 (20)	M-I	97.90%	95.00%	95.88%	0.001	12	29.453	6
74 (20)	M-III	97.90%	95.00%	97.24%	0.002	236	29.453	16
74 (20)	GM (R.)	97.90%	90.00%	95.04%	0.001	43	30.043	3
74 (20)	M-I (R.)	97.90%	90.00%	94.20%	0.001	15	30.043	6
74 (20)	M-III (R.)	97.90%	80.00%	96.46%	0.002	61	30.043	16
75 (20)	GM	95.80%	95.00%	93.46%	0.001	10	30.480	3
75 (20)	M-I	95.80%	95.00%	93.88%	0.002	24	30.480	6
75 (20)	M-III	95.80%	95.00%	95.16%	0.002	497	30.480	16
75 (20)	GM (R.)	95.80%	90.00%	93.38%	0.002	40	30.949	3
75 (20)	M-I (R.)	95.80%	90.00%	93.42%	0.001	14	30.949	6
75 (20)	M-III (R.)	95.80%	95.00%	95.93%	0.001	70	30.949	16
76 (20)	GM	96.52%	85.00%	96.04%	0.002	51	31.621	5
76 (20)	M-I	96.52%	85.00%	96.14%	0.001	80	31.621	10
76 (20)	M-III	96.52%	85.00%	97.38%	0.002	896	31.621	24
76 (20)	GM (R.)	96.52%	95.00%	95.50%	0.002	45	31.980	5
76 (20)	M-I (R.)	96.52%	95.00%	95.49%	0.002	42	32.168	10
76 (20)	M-III (R.)	96.52%	95.00%	97.14%	0.002	79	32.168	24
77 (20)	GM	97.30%	95.00%	96.69%	0.002	52	32.543	5
77 (20)	M-I	97.30%	95.00%	97.03%	0.002	65	32.543	10
77 (20)	M-III	97.30%	95.00%	97.55%	0.003	1386	32.543	24
77 (20)	GM (R.)	97.30%	90.00%	96.29%	0.001	60	33.047	5
77 (20)	M-I (R.)	97.30%	90.00%	95.98%	0.001	61	33.047	10
77 (20)	M-III (R.)	97.30%	100.00%	96.80%	0.002	144	33.047	24
78 (20)	GM	94.00%	85.00%	94.77%	0.002	73	33.098	5
78 (20)	M-I	94.00%	85.00%	95.28%	0.001	88	33.098	10
78 (20)	M-III	94.00%	85.00%	96.17%	0.002	1234	33.098	24
78 (20)	GM (R.)	94.00%	80.00%	94.81%	0.002	57	33.617	5
78 (20)	M-I (R.)	94.00%	80.00%	94.97%	0.002	49	33.617	10
78 (20)	M-III (R.)	94.00%	75.00%	96.23%	0.002	124	33.617	24
79 (20)	GM	98.90%	100.00%	92.59%	0.002	100	33.723	7
79 (20)	M-I	98.90%	100.00%	92.52%	0.002	156	33.723	14
79 (20)	M-III	98.90%	100.00%	93.88%	0.004	1868	34.883	32
79 (20)	GM (R.)	98.90%	100.00%	93.09%	0.002	67	35.414	7
79 (20)	M-I (R.)	98.90%	100.00%	81.63%	0.002	62	35.602	14
79 (20)	M-III (R.)	98.90%	100.00%	94.57%	0.003	139	35.602	32
80 (20)	GM	96.20%	95.00%	95.13%	0.001	230	34.590	7
80 (20)	M-I	96.20%	90.00%	95.37%	0.002	203	34.590	14
80 (20)	M-III	96.20%	95.00%	96.42%	0.004	3498	34.590	32
80 (20)	GM (R.)	96.20%	90.00%	94.84%	0.001	81	34.938	7
80 (20)	M-I (R.)	96.20%	90.00%	94.71%	0.003	76	34.957	14
80 (20)	M-III (R.)	96.20%	90.00%	96.06%	0.004	184	34.957	32
81 (20)	GM	96.43%	100.00%	96.15%	0.001	170	35.871	7
81 (20)	M-I	96.43%	100.00%	96.62%	0.002	139	35.871	14
81 (20)	M-III	96.43%	100.00%	97.09%	0.003	2627	35.871	32
81 (20)	GM (R.)	96.43%	90.00%	95.28%	0.001	72	35.992	7
81 (20)	M-I (R.)	96.43%	90.00%	94.74%	0.002	59	35.992	14
81 (20)	M-III (R.)	96.43%	90.00%	96.16%	0.003	121	35.992	32
82 (50)	GM	94.97%	88.00%	94.95%	0.001	26	35.805	3
82 (50)	M-I	94.97%	94.00%	94.96%	0.002	45	35.805	6
82 (50)	M-III	94.97%	96.00%	96.43%	0.003	691	37.812	16
82 (50)	GM (R.)	94.97%	92.00%	94.82%	0.001	86	36.305	3

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
82 (50)	M-I (R.)	94.97%	92.00%	93.91%	0.001	50	36.305	6
82 (50)	M-III (R.)	94.97%	92.00%	95.79%	0.002	189	36.305	16
83 (50)	GM	95.05%	96.00%	90.57%	0.001	24	37.449	3
83 (50)	M-I	95.05%	96.00%	90.62%	0.001	31	37.449	6
83 (50)	M-III	95.05%	96.00%	92.51%	0.002	741	37.449	16
83 (50)	GM (R.)	95.05%	92.00%	89.48%	0.001	90	36.621	3
83 (50)	M-I (R.)	95.05%	92.00%	89.31%	0.001	57	36.621	6
83 (50)	M-III (R.)	95.05%	92.00%	92.76%	0.002	189	36.621	16
84 (50)	GM	94.71%	76.00%	93.42%	0.001	39	37.238	3
84 (50)	M-I	94.71%	78.00%	93.88%	0.002	50	38.066	6
84 (50)	M-III	94.71%	80.00%	96.53%	0.003	718	38.066	16
84 (50)	GM (R.)	94.71%	78.00%	88.28%	0.001	92	37.910	3
84 (50)	M-I (R.)	94.71%	78.00%	87.64%	0.001	61	37.910	6
84 (50)	M-III (R.)	94.71%	92.00%	93.65%	0.002	165	37.789	16
85 (50)	GM	95.97%	86.00%	95.32%	0.002	149	37.629	5
85 (50)	M-I	95.97%	86.00%	95.59%	0.002	167	37.629	10
85 (50)	M-III	95.97%	86.00%	97.06%	0.006	3054	39.973	24
85 (50)	GM (R.)	95.97%	96.00%	93.17%	0.002	150	38.285	5
85 (50)	M-I (R.)	95.97%	96.00%	92.89%	0.002	180	38.285	10
85 (50)	M-III (R.)	95.97%	98.00%	95.06%	0.005	460	38.508	24
86 (50)	GM	96.31%	94.00%	96.21%	0.002	130	38.500	5
86 (50)	M-I	96.31%	94.00%	96.21%	0.003	187	40.125	10
86 (50)	M-III	96.31%	94.00%	97.74%	0.005	2374	41.141	24
86 (50)	GM (R.)	96.31%	90.00%	93.98%	0.002	138	39.500	5
86 (50)	M-I (R.)	96.31%	88.00%	94.20%	0.002	142	39.500	10
86 (50)	M-III (R.)	96.31%	90.00%	96.81%	0.004	403	39.711	24
87 (50)	GM	93.93%	88.00%	94.36%	0.002	177	39.613	5
87 (50)	M-I	93.93%	88.00%	95.33%	0.002	123	39.613	10
87 (50)	M-III	93.93%	88.00%	96.22%	0.006	3384	42.031	24
87 (50)	GM (R.)	93.93%	80.00%	94.55%	0.001	153	39.688	5
87 (50)	M-I (R.)	93.93%	76.00%	94.78%	0.002	167	39.688	10
87 (50)	M-III (R.)	93.93%	76.00%	96.37%	0.003	344	39.688	24
88 (50)	GM	97.33%	94.00%	94.29%	0.002	368	40.008	7
88 (50)	M-I	97.33%	94.00%	93.89%	0.004	455	40.008	14
88 (50)	M-III	97.33%	94.00%	95.63%	0.009	6690	43.656	32
88 (50)	GM (R.)	97.33%	90.00%	92.48%	0.001	217	40.445	7
88 (50)	M-I (R.)	97.33%	90.00%	92.47%	0.002	325	40.445	14
88 (50)	M-III (R.)	97.33%	94.00%	94.41%	0.004	624	40.445	32
89 (50)	GM	95.45%	88.00%	93.48%	0.004	543	41.809	7
89 (50)	M-I	95.45%	86.00%	93.81%	0.005	592	41.809	14
89 (50)	M-III	95.45%	90.00%	95.73%	0.011	8440	44.746	32
89 (50)	GM (R.)	95.45%	90.00%	93.06%	0.002	220	42.246	7
89 (50)	M-I (R.)	95.45%	90.00%	93.54%	0.002	320	42.246	14
89 (50)	M-III (R.)	95.45%	90.00%	95.45%	0.005	662	42.246	32
90 (50)	GM	95.79%	84.00%	94.06%	0.003	488	50.254	7
90 (50)	M-I	95.79%	84.00%	94.81%	0.005	405	51.453	14
90 (50)	M-III	95.79%	84.00%	95.76%	0.012	7564	54.180	32
90 (50)	GM (R.)	95.79%	84.00%	93.05%	0.001	221	50.176	7
90 (50)	M-I (R.)	95.79%	84.00%	93.72%	0.002	240	50.176	14
90 (50)	M-III (R.)	95.79%	84.00%	95.30%	0.004	497	50.176	32
91 (100)	GM	94.94%	82.00%	94.59%	0.002	53	50.285	3

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
91 (100)	M-I	94.94%	83.00%	94.61%	0.004	97	53.480	6
91 (100)	M-III	94.94%	86.00%	96.11%	0.01	1824	55.172	16
91 (100)	GM (R.)	94.94%	87.00%	90.41%	0.001	233	51.156	3
91 (100)	M-I (R.)	94.94%	89.00%	90.40%	0.002	280	50.094	6
91 (100)	M-III (R.)	94.94%	86.00%	94.60%	0.003	604	50.094	16
92 (100)	GM	95.11%	99.00%	87.21%	0.001	16	50.074	3
92 (100)	M-I	95.11%	100.00%	89.40%	0.002	41	50.074	6
92 (100)	M-III	95.11%	100.00%	92.75%	0.006	707	54.996	16
92 (100)	GM (R.)	95.11%	90.00%	95.09%	0.001	174	51.520	3
92 (100)	M-I (R.)	95.11%	90.00%	94.96%	0.001	70	51.520	6
92 (100)	M-III (R.)	95.11%	90.00%	96.84%	0.002	194	51.520	16
93 (100)	GM	94.92%	78.00%	93.91%	0.002	49	50.727	3
93 (100)	M-I	94.92%	78.00%	94.01%	0.003	83	50.727	6
93 (100)	M-III	94.92%	77.00%	96.40%	0.006	787	53.762	16
93 (100)	GM (R.)	94.92%	92.00%	93.00%	0.001	148	51.242	3
93 (100)	M-I (R.)	94.92%	92.00%	92.59%	0.001	121	51.242	6
93 (100)	M-III (R.)	94.92%	91.00%	96.12%	0.003	309	51.242	16
94 (100)	GM	94.45%	85.00%	93.49%	0.005	331	51.277	5
94 (100)	M-I	94.45%	87.00%	93.60%	0.011	446	54.613	10
94 (100)	M-III	94.45%	86.00%	96.27%	0.024	6733	55.051	24
94 (100)	GM (R.)	94.45%	86.00%	90.92%	0.002	307	51.887	5
94 (100)	M-I (R.)	94.45%	85.00%	91.45%	0.002	377	51.887	10
94 (100)	M-III (R.)	94.45%	84.00%	94.85%	0.006	1011	53.699	24
95 (100)	GM	94.44%	88.00%	93.29%	0.005	236	54.773	5
95 (100)	M-I	94.44%	92.00%	93.73%	0.01	374	54.773	10
95 (100)	M-III	94.44%	89.00%	96.00%	0.02	5113	56.109	24
95 (100)	GM (R.)	94.44%	91.00%	90.77%	0.001	299	53.219	5
95 (100)	M-I (R.)	94.44%	89.00%	90.55%	0.002	405	53.219	10
95 (100)	M-III (R.)	94.44%	91.00%	95.44%	0.004	908	53.219	24
96 (100)	GM	93.44%	80.00%	95.39%	0.003	164	55.312	5
96 (100)	M-I	93.44%	80.00%	96.00%	0.005	109	55.312	10
96 (100)	M-III	93.44%	81.00%	97.30%	0.017	4005	65.453	24
96 (100)	GM (R.)	93.44%	74.00%	93.82%	0.002	227	52.535	5
96 (100)	M-I (R.)	93.44%	75.00%	93.59%	0.002	196	52.535	10
96 (100)	M-III (R.)	93.44%	75.00%	96.67%	0.004	484	52.535	24
97 (100)	GM	95.86%	80.00%	95.03%	0.007	608	52.945	7
97 (100)	M-I	95.86%	81.00%	95.29%	0.015	749	55.957	14
97 (100)	M-III	95.86%	81.00%	97.18%	0.032	10981	55.957	32
97 (100)	GM (R.)	95.86%	90.00%	93.08%	0.002	518	54.027	7
97 (100)	M-I (R.)	95.86%	90.00%	93.48%	0.003	721	54.027	14
97 (100)	M-III (R.)	95.86%	89.00%	95.95%	0.007	1617	54.438	32
98 (100)	GM	94.50%	85.00%	93.59%	0.009	737	57.102	7
98 (100)	M-I	94.50%	86.00%	94.35%	0.016	849	57.102	14
98 (100)	M-III	94.50%	84.00%	96.02%	0.039	14555	57.207	32
98 (100)	GM (R.)	94.50%	87.00%	91.44%	0.002	447	54.180	7
98 (100)	M-I (R.)	94.50%	88.00%	92.22%	0.003	541	55.969	14
98 (100)	M-III (R.)	94.50%	90.00%	94.89%	0.006	1250	55.969	32
99 (100)	GM	95.03%	80.00%	95.78%	0.009	829	55.078	7
99 (100)	M-I	95.03%	78.00%	96.15%	0.017	602	57.195	14
99 (100)	M-III	95.03%	79.00%	95.89%	0.042	15321	58.531	32
99 (100)	GM (R.)	95.03%	84.00%	94.39%	0.002	419	54.375	7

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
99 (100)	M-I (R.)	95.03%	84.00%	94.64%	0.002	439	54.375	14
99 (100)	M-III (R.)	95.03%	84.00%	96.68%	0.006	1074	56.867	32
100 (200)	GM	98.89%	83.50%	99.60%	0.005	41	60.043	3
100 (200)	M-I	98.89%	83.50%	99.61%	0.009	63	60.043	6
100 (200)	M-III	98.89%	80.00%	99.71%	0.036	1415	65.996	16
100 (200)	GM (R.)	98.89%	72.00%	99.37%	0.001	267	58.578	3
100 (200)	M-I (R.)	98.89%	72.00%	99.37%	0.002	156	58.578	6
100 (200)	M-III (R.)	98.89%	75.50%	99.53%	0.004	384	58.578	16
101 (200)	GM	94.60%	85.50%	94.89%	0.013	152	63.410	3
101 (200)	M-I	94.60%	85.50%	94.15%	0.022	195	64.125	6
101 (200)	M-III	94.60%	86.00%	96.91%	0.049	2537	68.004	16
101 (200)	GM (R.)	94.60%	81.00%	90.89%	0.002	328	57.441	3
101 (200)	M-I (R.)	94.60%	81.00%	90.86%	0.002	276	57.441	6
101 (200)	M-III (R.)	94.60%	81.00%	93.90%	0.004	647	59.867	16
102 (200)	GM	90.17%	91.50%	92.10%	0.008	92	63.184	3
102 (200)	M-I	90.17%	91.50%	92.14%	0.016	147	64.648	6
102 (200)	M-III	90.17%	91.50%	96.94%	0.032	1712	73.543	16
102 (200)	GM (R.)	90.17%	91.50%	92.90%	0.001	331	58.195	3
102 (200)	M-I (R.)	90.17%	91.50%	92.93%	0.002	260	58.195	6
102 (200)	M-III (R.)	90.17%	93.50%	96.08%	0.004	457	58.195	16
103 (200)	GM	94.15%	98.50%	94.45%	0.029	574	66.523	5
103 (200)	M-I	94.15%	98.50%	94.56%	0.055	685	73.676	10
103 (200)	M-III	94.15%	97.50%	97.01%	0.115	9484	75.125	24
103 (200)	GM (R.)	94.15%	93.50%	91.35%	0.002	692	59.785	5
103 (200)	M-I (R.)	94.15%	92.50%	91.87%	0.003	766	59.785	10
103 (200)	M-III (R.)	94.15%	93.50%	95.60%	0.009	1746	60.145	24
104 (200)	GM	92.07%	70.50%	95.84%	0.022	385	67.867	5
104 (200)	M-I	92.07%	71.50%	95.69%	0.039	418	68.793	10
104 (200)	M-III	92.07%	71.00%	96.71%	0.123	10449	72.215	24
104 (200)	GM (R.)	92.07%	72.00%	93.33%	0.003	589	63.707	5
104 (200)	M-I (R.)	92.07%	72.50%	93.75%	0.003	517	63.707	10
104 (200)	M-III (R.)	92.07%	71.50%	96.13%	0.007	1172	63.707	24
105 (200)	GM	94.12%	91.00%	94.79%	0.03	531	72.199	5
105 (200)	M-I	94.12%	91.50%	95.18%	0.05	519	79.422	10
105 (200)	M-III	94.12%	91.50%	96.50%	0.126	9437	71.746	24
105 (200)	GM (R.)	94.12%	90.50%	93.97%	0.002	542	61.887	5
105 (200)	M-I (R.)	94.12%	88.50%	94.24%	0.003	588	61.887	10
105 (200)	M-III (R.)	94.12%	88.00%	96.02%	0.008	1534	63.941	24
106 (200)	GM	95.94%	91.50%	95.29%	0.054	1370	70.023	7
106 (200)	M-I	95.94%	90.50%	95.42%	0.109	1362	73.230	14
106 (200)	M-III	95.94%	92.00%	97.13%	0.236	23649	73.781	32
106 (200)	GM (R.)	95.94%	96.50%	93.54%	0.003	943	63.695	7
106 (200)	M-I (R.)	95.94%	96.50%	93.76%	0.006	1270	64.859	14
106 (200)	M-III (R.)	95.94%	96.00%	96.33%	0.013	2907	65.441	32
107 (200)	GM	94.27%	83.00%	94.68%	0.046	1120	69.941	7
107 (200)	M-I	94.27%	83.50%	95.07%	0.085	1381	73.723	14
107 (200)	M-III	94.27%	83.00%	96.81%	0.192	20047	73.078	32
107 (200)	GM (R.)	94.27%	85.50%	92.12%	0.003	824	64.141	7
107 (200)	M-I (R.)	94.27%	84.50%	92.47%	0.005	950	64.141	14
107 (200)	M-III (R.)	94.27%	85.50%	95.57%	0.011	2205	65.004	32
108 (200)	GM	93.04%	78.00%	95.50%	0.44	1023	75.727	7



Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
108 (200)	M-I	93.04%	77.50%	96.10%	0.057	668	75.164	14
108 (200)	M-III	93.04%	77.50%	96.67%	0.182	20859	75.609	32
108 (200)	GM (R.)	93.04%	76.00%	94.32%	0.002	624	65.719	7
108 (200)	M-I (R.)	93.04%	76.50%	94.50%	0.005	523	67.082	14
108 (200)	M-III (R.)	93.04%	76.50%	95.97%	0.009	1402	67.082	32
109 (500)	GM (R.)	92.90%	81.20%	95.03%	0.005	2567	28.949	3
109 (500)	M-I (R.)	92.90%	82.20%	95.38%	0.008	4282	32.102	6
109 (500)	M-III (R.)	92.90%	82.00%	96.40%	0.025	10921	32.859	16
109 (500)	GM (LB.)	92.90%	82.20%	95.03%	0.001	854	35.840	3
109 (500)	M-I (LB.)	92.90%	82.20%	95.31%	0.002	515	35.840	6
109 (500)	M-III (LB.)	92.90%	82.00%	96.40%	0.006	1281	40.961	16
110 (500)	GM (R.)	93.97%	86.80%	86.88%	0.006	2982	42.230	3
110 (500)	M-I (R.)	93.97%	91.20%	87.21%	0.01	5120	42.230	6
110 (500)	M-III (R.)	93.97%	91.20%	93.69%	0.03	13007	40.086	16
110 (500)	GM (LB.)	93.97%	86.80%	86.88%	0.001	861	39.094	3
110 (500)	M-I (LB.)	93.97%	91.20%	87.21%	0.003	712	39.094	6
110 (500)	M-III (LB.)	93.97%	91.20%	93.61%	0.009	2132	47.203	16
111 (500)	GM (R.)	95.43%	76.00%	93.98%	0.003	2231	45.898	3
111 (500)	M-I (R.)	95.43%	76.00%	94.34%	0.006	3629	45.742	6
111 (500)	M-III (R.)	95.43%	76.00%	96.17%	0.02	9987	45.742	16
111 (500)	GM (LB.)	95.43%	76.00%	93.98%	0.001	780	44.895	3
111 (500)	M-I (LB.)	95.43%	76.00%	94.06%	0.002	388	44.895	6
111 (500)	M-III (LB.)	95.43%	76.00%	96.23%	0.005	1073	46.859	16
112 (500)	GM (R.)	92.38%	85.80%	86.34%	0.015	5638	47.613	5
112 (500)	M-I (R.)	92.38%	85.60%	87.07%	0.026	9457	44.695	10
112 (500)	M-III (R.)	92.38%	85.60%	93.66%	0.063	21065	45.129	24
112 (500)	GM (LB.)	92.38%	85.80%	86.34%	0.004	1553	44.672	5
112 (500)	M-I (LB.)	92.38%	85.60%	87.19%	0.009	1988	49.926	10
112 (500)	M-III (LB.)	92.38%	85.80%	93.68%	0.02	4312	50.797	24
113 (500)	GM (R.)	92.44%	91.40%	90.71%	0.012	5038	50.461	5
113 (500)	M-I (R.)	92.44%	91.40%	90.97%	0.021	8821	48.316	10
113 (500)	M-III (R.)	92.44%	90.80%	95.57%	0.047	19073	50.008	24
113 (500)	GM (LB.)	92.44%	91.60%	90.72%	0.003	1345	49.051	5
113 (500)	M-I (LB.)	92.44%	92.00%	90.98%	0.007	1738	53.117	10
113 (500)	M-III (LB.)	92.44%	90.80%	95.58%	0.015	3192	54.105	24
114 (500)	GM (R.)	91.32%	85.40%	94.83%	0.008	4191	53.918	5
114 (500)	M-I (R.)	91.32%	83.00%	95.21%	0.014	7174	54.453	10
114 (500)	M-III (R.)	91.32%	86.00%	96.47%	0.041	17657	54.406	24
114 (500)	GM (LB.)	91.32%	83.80%	94.67%	0.002	1188	54.656	5
114 (500)	M-I (LB.)	91.32%	84.20%	94.63%	0.004	997	54.656	10
114 (500)	M-III (LB.)	91.32%	85.60%	96.29%	0.01	2045	52.410	24
115 (500)	GM (R.)	95.72%	95.20%	93.52%	0.031	9127	53.926	7
115 (500)	M-I (R.)	95.72%	95.00%	93.80%	0.051	15805	54.875	14
115 (500)	M-III (R.)	95.72%	95.20%	97.15%	0.12	34283	55.910	32
115 (500)	GM (LB.)	95.72%	95.20%	93.52%	0.008	2313	55.001	7
115 (500)	M-I (LB.)	95.72%	95.00%	93.69%	0.017	3439	55.781	14
115 (500)	M-III (LB.)	95.72%	95.20%	97.15%	0.042	7886	57.066	32
116 (500)	GM (R.)	94.17%	86.00%	90.43%	0.018	7008	61.625	7
116 (500)	M-I (R.)	94.17%	85.20%	91.96%	0.034	12207	58.547	14
116 (500)	M-III (R.)	94.17%	85.80%	94.87%	0.089	28376	69.832	32
116 (500)	GM (LB.)	94.17%	86.20%	90.43%	0.004	1674	60.301	7

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
116 (500)	M-I (LB.)	94.17%	86.20%	91.29%	0.008	1558	60.301	14
116 (500)	M-III (LB.)	94.17%	85.80%	94.87%	0.021	4738	63.969	32
117 (500)	GM (R.)	92.96%	77.40%	92.62%	0.021	7271	29.465	7
117 (500)	M-I (R.)	92.96%	74.40%	94.01%	0.032	12200	30.336	14
117 (500)	M-III (R.)	92.96%	77.80%	95.53%	0.089	29561	30.391	32
117 (500)	GM (LB.)	92.96%	77.40%	92.62%	0.006	2064	44.906	7
117 (500)	M-I (LB.)	92.96%	74.40%	94.01%	0.009	1686	46.501	14
117 (500)	M-III (LB.)	92.96%	77.80%	95.53%	0.023	4580	46.098	32
118 (1000)	GM (R.)	90.67%	75.10%	90.43%	0.019	5372	40.391	3
118 (1000)	M-I (R.)	90.67%	75.80%	90.34%	1.035	9279	40.238	6
118 (1000)	M-III (R.)	90.67%	76.60%	93.43%	0.115	23246	39.555	16
118 (1000)	GM (LB.)	90.67%	75.10%	90.43%	0.004	1649	39.035	3
118 (1000)	M-I (LB.)	90.67%	75.80%	90.34%	0.008	1125	39.035	6
118 (1000)	M-III (LB.)	90.67%	76.60%	93.43%	0.021	2343	41.359	16
119 (1000)	GM (R.)	95.16%	81.30%	88.60%	0.018	6073	53.383	3
119 (1000)	M-I (R.)	95.16%	87.40%	88.54%	0.083	8783	53.355	6
119 (1000)	M-III (R.)	95.16%	83.40%	92.30%	0.087	20500	54.980	16
119 (1000)	GM (LB.)	95.16%	81.30%	88.60%	0.004	1484	51.641	3
119 (1000)	M-I (LB.)	95.16%	81.30%	87.65%	0.005	844	51.641	6
119 (1000)	M-III (LB.)	95.16%	83.40%	92.30%	0.022	2977	52.445	16
120 (1000)	GM (R.)	92.19%	85.40%	90.25%	0.015	4833	63.484	3
120 (1000)	M-I (R.)	92.19%	84.40%	89.86%	0.027	8243	63.367	6
120 (1000)	M-III (R.)	92.19%	86.80%	95.09%	0.078	20511	63.656	16
120 (1000)	GM (LB.)	92.19%	85.40%	90.25%	0.003	1463	54.438	3
120 (1000)	M-I (LB.)	92.19%	85.70%	89.48%	0.007	832	53.094	6
120 (1000)	M-III (LB.)	92.19%	86.80%	95.09%	0.018	1533	53.723	16
121 (1000)	GM (R.)	92.14%	90.90%	86.58%	0.058	10690	61.340	5
121 (1000)	M-I (R.)	92.14%	90.10%	87.68%	0.097	18336	63.270	10
121 (1000)	M-III (R.)	92.14%	92.00%	94.00%	0.248	41661	62.181	24
121 (1000)	GM (LB.)	92.14%	91.10%	86.58%	0.014	2750	62.660	5
121 (1000)	M-I (LB.)	92.14%	90.30%	87.59%	0.026	3333	63.105	10
121 (1000)	M-III (LB.)	92.14%	92.20%	94.04%	0.071	8419	63.160	24
122 (1000)	GM (R.)	96.06%	97.30%	90.91%	0.049	9597	75.723	5
122 (1000)	M-I (R.)	96.06%	96.40%	91.33%	0.08	16310	72.961	10
122 (1000)	M-III (R.)	96.06%	96.50%	91.39%	0.23	40764	73.996	24
122 (1000)	GM (LB.)	96.06%	96.70%	91.03%	0.011	2723	65.223	5
122 (1000)	M-I (LB.)	96.06%	97.00%	86.73%	0.158	16528	67.500	10
122 (1000)	M-III (LB.)	96.06%	96.50%	91.29%	0.652	81260	64.949	24
123 (1000)	GM (R.)	93.27%	82.20%	95.73%	0.035	8558	58.965	5
123 (1000)	M-I (R.)	93.27%	83.40%	95.91%	0.062	14776	60.012	10
123 (1000)	M-III (R.)	93.27%	82.10%	96.93%	0.181	38447	60.578	24
123 (1000)	GM (LB.)	93.27%	81.60%	95.73%	0.009	2371	67.742	5
123 (1000)	M-I (LB.)	93.27%	82.10%	95.77%	0.014	1928	69.609	10
123 (1000)	M-III (LB.)	93.27%	82.10%	96.86%	0.046	6877	69.039	24
124 (1000)	GM (R.)	94.83%	85.50%	92.27%	0.111	17455	81.109	7
124 (1000)	M-I (R.)	94.83%	84.80%	92.75%	0.194	30231	78.840	14
124 (1000)	M-III (R.)	94.83%	85.10%	96.59%	0.444	65953	81.457	32
124 (1000)	GM (LB.)	94.83%	85.30%	87.13%	0.691	72367	77.152	7
124 (1000)	M-I (LB.)	94.83%	85.10%	92.60%	0.054	6408	78.219	14
124 (1000)	M-III (LB.)	94.83%	85.10%	96.59%	0.165	18756	78.270	32
125 (1000)	GM (R.)	-	-	-	-	-	-	-

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
125 (1000)	M-I (R.)	-	-	-	-	-	-	-
125 (1000)	M-III (R.)	97.27%	1.80%	92.76%	1.574	213034	32.281	32
125 (1000)	GM (LB.)	97.27%	83.90%	89.84%	0.017	3453	86.652	7
125 (1000)	M-I (LB.)	97.27%	85.00%	89.36%	0.027	3782	87.234	14
125 (1000)	M-III (LB.)	97.27%	89.70%	92.60%	1.894	232465	85.840	32
126 (1000)	GM (R.)	-	-	-	-	-	-	-
126 (1000)	M-I (R.)	-	-	-	-	-	-	-
126 (1000)	M-III (R.)	-	-	-	-	-	-	-
126 (1000)	GM (LB.)	93.87%	86.40%	91.70%	0.021	3823	30.344	7
126 (1000)	M-I (LB.)	93.87%	86.50%	91.73%	0.028	3447	30.871	14
126 (1000)	M-III (LB.)	93.87%	85.90%	94.95%	0.079	9736	31.777	32
127 (2000)	GM (R.)	95.78%	84.50%	92.48%	0.076	10679	40.574	3
127 (2000)	M-I (R.)	95.78%	84.50%	92.50%	0.0134	18745	41.004	6
127 (2000)	M-III (R.)	95.78%	83.40%	95.80%	0.377	44362	40.199	16
127 (2000)	GM (LB.)	95.78%	86.70%	92.48%	0.014	3082	33.395	3
127 (2000)	M-I (LB.)	95.78%	84.50%	92.62%	0.028	1730	32.340	6
127 (2000)	M-III (LB.)	95.78%	83.40%	95.80%	0.095	6744	33.266	16
128 (2000)	GM (R.)	94.67%	86.90%	88.34%	0.075	11015	47.719	3
128 (2000)	M-I (R.)	94.67%	89.15%	88.45%	0.137	19357	49.012	6
128 (2000)	M-III (R.)	94.67%	87.20%	92.61%	0.438	51181	47.961	16
128 (2000)	GM (LB.)	94.67%	86.90%	88.34%	0.012	3087	42.805	3
128 (2000)	M-I (LB.)	94.67%	89.15%	88.38%	0.031	2557	44.082	6
128 (2000)	M-III (LB.)	94.67%	87.20%	92.61%	0.083	6453	45.508	16
129 (2000)	GM (R.)	95.62%	100.00%	93.43%	0.074	10741	54.309	3
129 (2000)	M-I (R.)	95.62%	100.00%	93.63%	0.128	18481	55.086	6
129 (2000)	M-III (R.)	95.62%	100.00%	97.55%	0.425	49044	55.418	16
129 (2000)	GM (LB.)	95.62%	100.00%	93.43%	0.022	3649	51.555	3
129 (2000)	M-I (LB.)	95.62%	100.00%	93.63%	0.042	3852	50.758	6
129 (2000)	M-III (LB.)	95.62%	100.00%	97.55%	0.115	9577	51.699	16
130 (2000)	GM (R.)	91.58%	89.15%	86.47%	0.206	20325	35.512	5
130 (2000)	M-I (R.)	91.58%	88.55%	87.28%	0.358	34622	36.418	10
130 (2000)	M-III (R.)	91.58%	89.15%	76.18%	10.627	549392	38.414	24
130 (2000)	GM (LB.)	91.58%	89.15%	86.47%	0.054	5803	67.719	5
130 (2000)	M-I (LB.)	91.58%	89.20%	87.16%	0.107	7040	67.512	10
130 (2000)	M-III (LB.)	91.58%	89.20%	90.07%	0.089	45844	68.293	24
131 (2000)	GM (R.)	92.99%	86.85%	89.04%	0.232	21262	47.645	5
131 (2000)	M-I (R.)	92.99%	86.55%	89.60%	0.392	37058	50.199	10
131 (2000)	M-III (R.)	92.99%	86.55%	95.28%	1.037	86196	47.332	24
131 (2000)	GM (LB.)	92.99%	86.85%	89.04%	0.059	5787	35.934	5
131 (2000)	M-I (LB.)	92.99%	86.85%	84.06%	1.223	60194	37.176	10
131 (2000)	M-III (LB.)	92.99%	86.80%	90.26%	1.093	55765	38.270	24
132 (2000)	GM (R.)	93.52%	82.35%	92.95%	0.179	18774	41.328	5
132 (2000)	M-I (R.)	93.52%	82.70%	93.82%	0.323	32352	41.816	10
132 (2000)	M-III (R.)	93.52%	82.30%	96.13%	1.069	91288	43.809	24
132 (2000)	GM (LB.)	93.52%	82.35%	92.95%	0.179	18774	41.328	5
132 (2000)	M-I (LB.)	93.52%	82.70%	93.82%	0.323	32352	41.816	10
132 (2000)	M-III (LB.)	93.52%	82.30%	96.13%	1.069	91288	43.809	24
133 (2000)	GM (R.)	-	-	-	-	-	-	-
133 (2000)	M-I (R.)	-	-	-	-	-	-	-
133 (2000)	M-III (R.)	93.80%	85.05%	95.66%	3.287	188934	37.902	32
133 (2000)	GM (LB.)	93.80%	85.20%	90.54%	0.124	9334	35.844	7
133 (2000)	M-I (LB.)	93.80%	84.75%	90.94%	0.217	12144	36.512	14

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
133 (2000)	M-III (LB.)	93.78%	85.05%	95.66%	0.496	28375	45.254	32
134 (2000)	GM (R.)	94.91%	87.20%	92.99%	0.401	32517	39.285	7
134 (2000)	M-I (R.)	94.91%	86.75%	93.42%	0.64	52203	39.176	14
134 (2000)	M-III (R.)	-	-	-	-	-	-	-
134 (2000)	GM (LB.)	94.91%	87.10%	92.99%	0.113	10441	36.711	7
134 (2000)	M-I (LB.)	-	-	-	-	-	-	-
134 (2000)	M-III (LB.)	-	-	-	-	-	-	-
135 (2000)	GM (R.)	94.50%	85.05%	92.47%	0.424	32435	50.562	7
135 (2000)	M-I (R.)	94.50%	85.15%	92.83%	0.714	55269	50.887	14
135 (2000)	M-III (R.)	94.50%	85.35%	96.74%	1.789	125843	53.102	32
135 (2000)	GM (LB.)	94.50%	85.10%	92.47%	0.119	9196	36.547	7
135 (2000)	M-I (LB.)	94.50%	85.10%	92.67%	0.222	12718	38.410	14
135 (2000)	M-III (LB.)	94.50%	85.35%	96.74%	0.565	30434	37.270	32

**Πίνακας V-4:** Αποτελέσματα δεικτών αξιοπιστίας, ευστάθειας & υπολογιστικού φόρτου

(GM: Γενικευμένο MUSA, M-I: MUSA I, M-III: MUSA III, M-N: Manas-Nedoma, R-S: Αντίστροφη Simplex, R-A: Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση, R: Αναθεωρημένη (Revised) Simplex, LB: Αναθεωρημένη με "Load Base")

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τα 135 τεχνητά σύνολα τεχνητών δεδομένων, αναφορικά με τις τιμές του εύρους διακύμανσης των βαρών (δείκτης WV<sub>i</sub>).

No (μέγεθος)	Μέθοδος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
1 (5)	GM	88.00	0.65	88.00				
1 (5)	M-I	88.00	0.65	88.00				
1 (5)	M-III	86.67	0.00	86.67				
1 (5)	M-N	88.00	0.65	88.00				
1 (5)	R-S	88.00	0.65	88.00				
1 (5)	R-A	88.00	0.65	88.00				
2 (5)	GM	72.20	72.20	72.20				
2 (5)	M-I	72.20	72.20	72.20				
2 (5)	M-III	72.20	72.20	0.00				
2 (5)	M-N	72.50	72.50	72.50				
2 (5)	R-S	72.20	72.20	72.20				
2 (5)	R-A	72.20	72.20	72.20				
3 (5)	GM	24.00	24.00	24.00				
3 (5)	M-I	24.00	24.00	24.00				
3 (5)	M-III	24.00	24.00	8.00				
3 (5)	M-N	24.50	24.50	24.50				
3 (5)	R-S	24.00	24.00	24.00				
3 (5)	R-A	24.00	24.00	24.00				
4 (5)	GM	36.50	75.00	73.00	35.00	75.00		
4 (5)	M-I	36.50	75.00	73.00	35.00	75.00		
4 (5)	M-III	35.00	70.00	73.00	22.33	67.00		
4 (5)	M-N	-	-	-	-	-		
4 (5)	R-S	36.50	75.00	73.00	35.00	75.00		

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
4 (5)	R-A	36.50	75.00	73.00	35.00	75.00		
5 (5)	GM	46.20	46.40	23.10	46.40	46.20		
5 (5)	M-I	46.20	46.40	23.10	46.40	46.20		
5 (5)	M-III	46.20	46.00	0.00	4.00	38.20		
5 (5)	M-N	-	-	-	-	-		
5 (5)	R-S	46.00	46.00	23.00	46.00	46.00		
5 (5)	R-A	46.00	46.00	23.00	46.00	46.00		
6 (5)	GM	16.40	16.80	2.93	8.80	9.60		
6 (5)	M-I	16.40	16.80	2.93	8.80	9.60		
6 (5)	M-III	12.20	8.00	2.67	0.00	8.00		
6 (5)	M-N	-	-	-	-	-		
6 (5)	R-S	16.40	16.80	2.93	8.80	9.60		
6 (5)	R-A	16.40	16.80	2.93	8.80	9.60		
7 (5)	GM	67.00	67.00	67.00	33.50	67.00	67.00	33.50
7 (5)	M-I	67.00	67.00	67.00	33.50	67.00	67.00	33.50
7 (5)	M-III	67.00	0.00	22.33	33.50	67.00	0.00	22.33
7 (5)	M-N	-	-	-	-	-		
7 (5)	R-S	67.38	67.25	67.38	33.56	67.13	67.25	33.56
7 (5)	R-A	67.38	67.25	67.38	33.56	67.13	67.25	33.56
8 (5)	GM	34.00	34.00	22.00	16.00	32.00	32.00	38.00
8 (5)	M-I	34.00	38.00	22.00	16.00	32.00	32.00	38.00
8 (5)	M-III	34.00	14.00	8.00	8.00	32.00	8.00	0.00
8 (5)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
8 (5)	R-S	34.50	38.25	22.13	16.25	32.50	32.50	38.25
8 (5)	R-A	34.50	38.25	22.13	16.25	32.50	32.50	38.25
9 (5)	GM	2.06	1.03	2.06	2.06	7.77	7.77	2.06
9 (5)	M-I	2.06	1.03	2.06	2.06	7.77	7.77	2.06
9 (5)	M-III	1.03	0.00	0.46	0.00	0.00	1.03	0.00
9 (5)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
9 (5)	R-S	2.06	1.03	2.06	2.06	7.77	7.77	2.06
9 (5)	R-A	2.06	1.03	2.06	2.06	7.77	7.77	2.06
10 (6)	GM	84.20	84.20	42.20				
10 (6)	M-I	84.20	84.30	42.20				
10 (6)	M-III	84.20	84.30	28.07				
10 (6)	M-N	84.36	84.54	42.36				
10 (6)	R-S	84.20	84.30	42.20				
10 (6)	R-A	84.20	84.30	42.20				
11 (6)	GM	37.30	37.90	74.60				
11 (6)	M-I	37.30	37.90	74.60				
11 (6)	M-III	37.30	37.00	74.00				
11 (6)	M-N	35.30	35.30	70.00				
11 (6)	R-S	37.30	37.30	74.00				
11 (6)	R-A	37.30	37.30	74.00				
12 (6)	GM	34.40	17.80	34.40				
12 (6)	M-I	34.40	17.80	34.40				
12 (6)	M-III	30.40	17.20	30.40				
12 (6)	M-N	-	-	-	-	-		
12 (6)	R-S	34.40	17.80	34.40				
12 (6)	R-A	34.40	17.80	34.40				
13 (6)	GM	74.60	37.45	74.60	74.60	74.60		
13 (6)	M-I	74.60	37.45	74.60	74.60	74.60		
13 (6)	M-III	74.60	37.23	0.00	0.00	74.60		

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
13 (6)	M-N	-	-	-	-	-		
13 (6)	R-S	74.72	37.54	74.72	74.72	74.72		
13 (6)	R-A	74.72	37.54	74.72	74.72	74.72		
14 (6)	GM	6.40	32.00	36.00	36.00	16.00		
14 (6)	M-I	6.40	32.00	36.00	36.00	16.00		
14 (6)	M-III	6.40	32.00	36.00	36.00	12.80		
14 (6)	M-N	-	-	-	-	-		
14 (6)	R-S	6.54	32.72	36.72	36.72	16.54		
14 (6)	R-A	6.54	32.72	36.72	36.72	16.54		
15 (6)	GM	2.10	8.20	8.20	8.20	4.10		
15 (6)	M-I	2.10	8.20	8.20	8.20	4.10		
15 (6)	M-III	2.10	8.20	8.20	6.15	0.00		
15 (6)	M-N	-	-	-	-	-		
15 (6)	R-S	2.18	8.36	8.20	8.36	4.10		
15 (6)	R-A	2.18	8.36	8.20	8.36	4.10		
16 (6)	M-I	69.00	65.00	65.00	69.00	65.00	33.50	69.00
16 (6)	M-III	70.00	65.00	65.00	69.00	65.00	33.50	69.00
16 (6)	M-N	69.00	4.00	65.00	4.00	31.50	2.00	0.00
16 (6)		-	-	-	-	-	-	-
16 (6)	R-S	70.72	66.08	66.08	69.72	66.08	33.68	69.72
16 (6)	R-A	70.72	66.08	66.08	69.72	66.08	33.68	69.72
17 (6)	GM	1.90	1.90	1.90	0.96	0.38	1.91	1.90
17 (6)	M-I	1.90	1.90	1.90	0.96	0.38	1.91	1.90
17 (6)	M-III	1.90	1.90	0.00	0.96	0.00	1.91	0.96
17 (6)	M-N	1.91	1.90	1.90	0.96	0.38	1.91	1.91
17 (6)	R-S	1.90	1.90	1.90	0.96	0.38	1.91	1.90
17 (6)	R-A	1.90	1.90	1.90	0.96	0.38	1.91	1.90
18 (6)	GM	0.14	8.71	0.14	0.14	0.14	0.29	8.71
18 (6)	M-I	0.14	8.71	0.14	0.14	0.14	0.29	8.71
18 (6)	M-III	0.14	0.18	0.14	0.14	0.00	0.15	0.00
18 (6)	M-N	0.72	9.29	0.72	0.72	0.72	1.44	9.29
18 (6)	R-S	0.14	8.71	0.14	0.14	0.14	0.29	8.71
18 (6)	R-A	0.14	8.71	0.14	0.14	0.14	0.29	8.71
19 (7)	GM	26.66	18.11	8.56				
19 (7)	M-I	26.66	23.34	8.56				
19 (7)	M-III	21.20	22.17	7.78				
19 (7)	M-N	-	-	-				
19 (7)	R-S	26.66	23.34	8.56				
19 (7)	R-A	26.66	23.34	8.56				
20 (7)	GM	76.00	37.07	76.00				
20 (7)	M-I	76.00	37.07	76.00				
20 (7)	M-III	49.13	36.93	24.57				
20 (7)	M-N	-	-	-				
20 (7)	R-S	76.00	37.12	76.00				
20 (7)	R-A	76.00	37.12	76.00				
21 (7)	GM	19.50	18.50	37.00				
21 (7)	M-I	19.50	18.50	38.00				
21 (7)	M-III	17.00	18.00	35.00				
21 (7)	M-N	-	-	-				
21 (7)	R-S	19.50	18.50	38.00				
21 (7)	R-A	19.50	18.50	38.00				
22 (7)	GM	79.08	79.08	79.08	26.50	40.71		

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
22 (7)	M-I	79.08	79.08	79.08	26.50	40.71		
22 (7)	M-III	79.08	0.00	79.08	0.00	39.54		
22 (7)	M-N	-	-	-	-	-		
22 (7)	R-S	79.16	79.16	79.16	26.66	40.66		
22 (7)	R-A	79.16	79.16	79.16	26.66	40.66		
23 (7)	GM	31.20	23.20	46.80	23.20	15.60		
23 (7)	M-I	31.20	23.20	46.80	23.20	15.60		
23 (7)	M-III	31.20	23.20	46.40	15.20	11.60		
23 (7)	M-N	-	-	-	-	-		
23 (7)	R-S	31.29	23.20	46.89	23.20	15.60		
23 (7)	R-A	31.29	23.20	46.89	23.20	15.60		
24 (7)	GM	3.70	3.40	3.40	1.13	3.40		
24 (7)	M-I	3.70	3.40	3.40	1.13	3.40		
24 (7)	M-III	3.40	3.40	0.00	0.00	3.40		
24 (7)	M-N	3.70	3.40	3.40	1.13	3.40		
24 (7)	R-S	3.70	3.40	3.40	1.13	3.40		
24 (7)	R-A	3.70	3.40	3.40	1.13	3.40		
25 (7)	GM	66.00	68.00	33.00	33.00	66.00	67.00	33.50
25 (7)	M-I	66.00	68.00	33.00	33.00	66.00	67.00	33.50
25 (7)	M-III	66.00	68.00	20.67	0.00	65.00	3.00	22.33
25 (7)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
25 (7)	R-S	66.49	68.49	33.25	33.25	66.49	67.98	34.24
25 (7)	R-A	66.49	68.49	33.25	33.25	66.49	67.98	34.24
26 (7)	GM	18.00	32.49	16.00	20.00	32.00	32.00	32.00
26 (7)	M-I	18.00	32.49	16.00	20.00	32.00	32.00	32.00
26 (7)	M-III	18.00	32.00	14.00	14.00	8.00	14.00	16.00
26 (7)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
26 (7)	R-S	18.00	32.49	16.00	20.25	32.49	32.49	32.98
26 (7)	R-A	18.00	32.49	16.00	20.25	32.49	32.49	32.98
27 (7)	GM	4.57	4.57	4.58	1.52	2.28	1.52	6.86
27 (7)	M-I	4.57	4.57	4.58	1.52	2.28	1.52	6.86
27 (7)	M-III	4.57	4.57	2.29	0.00	0.00	0.00	4.57
27 (7)	M-N	4.57	4.57	4.58	1.52	2.28	1.52	6.86
27 (7)	R-S	4.57	2.29	4.58	1.52	2.28	1.52	6.86
27 (7)	R-A	4.57	2.29	4.58	1.52	2.28	1.52	6.86
28 (8)	GM	86.75	86.75	0.50				
28 (8)	M-I	86.75	86.75	0.50				
28 (8)	M-III	86.75	86.75	0.00				
28 (8)	M-N	-	-	-				
28 (8)	R-S	86.96	86.96	0.64				
28 (8)	R-A	86.96	86.96	0.64				
29 (8)	GM	0.75	76.00	76.00				
29 (8)	M-I	0.75	76.00	76.00				
29 (8)	M-III	0.75	76.00	76.00				
29 (8)	M-N	-	-	-				
29 (8)	R-S	0.75	76.00	76.00				
29 (8)	R-A	0.75	76.00	76.00				
30 (8)	GM	16.53	29.87	15.73				
30 (8)	M-I	16.53	30.40	15.73				
30 (8)	M-III	16.53	30.40	15.20				
30 (8)	M-N	14.13	28.00	15.73				
30 (8)	R-S	16.53	30.40	15.73				

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
30 (8)	R-A	16.53	30.40	15.73				
31 (8)	GM	22.92	18.45	68.40	68.40	68.40		
31 (8)	M-I	22.92	18.45	68.40	68.40	68.40		
31 (8)	M-III	22.80	2.35	68.40	68.40	23.35		
31 (8)	M-N	-	-	-	-	-		
31 (8)	R-S	23.21	18.39	69.56	69.56	69.56		
31 (8)	R-A	23.21	18.39	69.56	69.56	69.56		
32 (8)	GM	0.30	0.04	0.30	0.30	0.30		
32 (8)	M-I	0.38	0.04	0.30	0.30	0.30		
32 (8)	M-III	0.30	0.00	0.30	0.15	0.30		
32 (8)	M-N	5.70	0.65	3.28	4.56	4.56		
32 (8)	R-S	0.38	0.04	0.30	0.30	0.30		
32 (8)	R-A	0.38	0.04	0.30	0.30	0.30		
33 (8)	GM	2.27	6.80	6.80	6.80	2.27		
33 (8)	M-I	2.27	6.80	6.80	6.80	2.27		
33 (8)	M-III	2.27	4.53	2.91	0.00	0.00		
33 (8)	M-N	2.27	6.80	6.80	6.80	2.27		
33 (8)	R-S	2.27	6.80	6.80	6.80	2.27		
33 (8)	R-A	2.27	6.80	6.80	6.80	2.27		
34 (8)	GM	0.57	12.00	1.14	1.14	3.43	12.57	1.14
34 (8)	M-I	0.57	12.00	1.14	1.14	3.43	13.72	1.14
34 (8)	M-III	0.57	1.72	1.14	1.14	1.14	1.14	0.00
34 (8)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
34 (8)	R-S	0.57	12.00	1.14	1.14	3.43	13.72	1.14
34 (8)	R-A	0.57	12.00	1.14	1.14	3.43	13.72	1.14
35 (8)	GM	8.00	14.00	7.00	10.00	8.00	8.00	5.00
35 (8)	M-I	8.00	14.00	7.00	10.00	8.00	8.00	5.00
35 (8)	M-III	8.00	14.00	4.00	6.00	8.00	8.00	4.00
35 (8)	R-S	9.92	15.07	7.96	11.92	9.28	8.64	5.96
35 (8)	R-A	9.92	15.07	7.96	11.92	9.28	8.64	5.96
36 (8)	GM	13.28	6.33	6.64	13.28	18.07	8.07	13.28
36 (8)	M-I	13.28	6.33	6.64	13.28	18.07	8.07	13.28
36 (8)	M-III	13.28	0.00	1.93	13.28	12.36	2.86	12.36
36 (8)	R-S	13.28	6.50	6.64	13.28	17.14	8.07	13.28
36 (8)	R-A	13.28	6.50	6.64	13.28	17.14	8.07	13.28
Π_9 (9)	GM	86.10	86.10	28.80				
Π_9 (9)	M-I	86.10	86.10	28.80				
Π_9 (9)	M-III	86.10	86.10	28.60				
Π_9 (9)	M-N	87.22	87.21	30.29				
Π_9 (9)	R-S	86.10	86.10	28.80				
Π_9 (9)	R-A	86.10	86.10	28.80				
37 (9)	GM	3.70	2.82	6.52				
37 (9)	M-I	3.70	2.82	6.52				
37 (9)	M-III	3.70	2.82	6.52				
37 (9)	R-S	3.70	2.82	6.52				
37 (9)	R-A	3.70	2.82	6.52				
38 (9)	GM	74.15	74.15	74.15				
38 (9)	M-I	74.15	74.15	74.15				
38 (9)	M-III	74.15	74.15	24.77				
38 (9)	R-S	74.40	74.41	74.41				
38 (9)	R-A	74.40	74.41	74.41				
39 (9)	GM	8.35	11.75	17.40				



Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
39 (9)	M-I	8.35	11.75	17.40				
39 (9)	M-III	8.35	11.75	17.40				
39 (9)	R-S	8.35	11.75	17.40				
39 (9)	R-A	8.35	11.75	17.40				
40 (9)	GM	69.30	34.65	23.13	69.30	69.30		
40 (9)	M-I	69.40	34.65	23.13	69.30	69.30		
40 (9)	M-III	69.30	34.65	23.10	69.30	0.10		
40 (9)	R-S	69.40	34.65	23.13	69.30	69.30		
40 (9)	R-A	69.40	34.65	23.13	69.30	69.30		
41 (9)	GM	18.35	36.70	18.35	36.70	36.70		
41 (9)	M-I	18.35	36.70	18.35	36.70	36.70		
41 (9)	M-III	18.35	36.70	18.35	36.70	1.80		
41 (9)	R-S	18.35	36.70	18.35	36.70	36.70		
41 (9)	R-A	18.35	36.70	18.35	36.70	36.70		
42 (9)	GM	8.35	1.08	4.70	4.93	4.70		
42 (9)	M-I	8.35	1.08	4.70	4.93	4.70		
42 (9)	M-III	8.35	0.00	4.70	4.11	4.81		
42 (9)	R-S	8.41	1.08	4.81	5.08	4.81		
42 (9)	R-A	8.41	1.08	4.81	5.08	4.81		
43 (9)	GM	0.14	0.14	0.07	0.07	0.14	0.05	0.21
43 (9)	M-I	0.14	0.14	0.07	0.07	0.14	0.05	0.21
43 (9)	M-III	0.14	0.07	0.00	0.00	0.00	0.00	0.14
43 (9)	R-S	0.64	0.64	0.09	0.32	0.64	0.21	0.71
43 (9)	R-A	0.64	0.64	0.09	0.32	0.64	0.21	0.71
44 (9)	GM	1.00	1.00	4.78	3.82	1.93	2.00	1.00
44 (9)	M-I	1.00	1.00	4.78	3.82	2.00	2.00	1.00
44 (9)	M-III	1.00	0.00	4.78	3.82	1.96	1.96	0.96
44 (9)	R-S	1.92	1.92	4.78	4.13	3.99	3.51	2.23
44 (9)	R-A	1.92	1.92	4.78	4.13	3.99	3.51	2.23
45 (9)	GM	0.86	9.43	0.86	9.00	0.43	0.86	6.57
45 (9)	M-I	0.86	9.43	0.86	9.00	0.43	0.86	6.57
45 (9)	M-III	0.86	9.00	0.00	9.00	0.00	0.86	0.00
45 (9)	R-S	0.86	9.43	0.86	9.00	0.43	0.86	6.57
45 (9)	R-A	0.86	9.43	0.86	9.00	0.43	0.86	6.57
Π_10 (10)	GM	86.10	86.10	28.80				
Π_10 (10)	M-I	86.10	86.10	28.80				
Π_10 (10)	M-III	86.10	86.10	28.60				
Π_10 (10)	M-N	87.50	87.50	30.67				
Π_10 (10)	R-S	86.10	86.10	28.80				
Π_10 (10)	R-A	86.10	86.10	28.80				
46 (10)	GM	0.35	85.35	85.35				
46 (10)	M-I	0.35	85.35	85.35				
46 (10)	M-III	0.35	82.70	82.70				
46 (10)	R-S	3.00	87.67	87.67				
46 (10)	R-A	3.00	87.67	87.67				
47 (10)	GM	68.60	68.60	22.87				
47 (10)	M-I	68.60	68.60	22.87				
47 (10)	M-III	68.60	68.60	22.87				
47 (10)	R-S	69.50	69.50	23.33				
47 (10)	R-A	69.50	69.50	23.33				
48 (10)	GM	7.20	1.60	7.20				
48 (10)	M-I	7.20	1.60	7.20				

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
48 (10)	M-III	7.20	1.60	7.20				
48 (10)	R-S	7.20	1.60	7.20				
48 (10)	R-A	7.20	1.60	7.20				
49 (10)	GM	2.50	0.50	4.37	1.25	4.38		
49 (10)	M-I	2.50	0.50	4.37	1.25	4.38		
49 (10)	M-III	2.50	0.00	4.37	0.00	2.29		
49 (10)	R-S	2.50	0.50	4.37	1.25	4.38		
49 (10)	R-A	2.50	0.50	4.37	1.25	4.38		
50 (10)	GM	23.40	23.40	41.20	12.88	1.60		
50 (10)	M-I	23.40	23.40	41.20	12.88	1.60		
50 (10)	M-III	22.60	23.40	41.20	5.60	0.00		
50 (10)	R-S	23.40	23.81	41.20	12.88	1.60		
50 (10)	R-A	23.40	23.81	41.20	12.88	1.60		
51 (10)	GM	17.40	17.40	5.40	8.70	5.40		
51 (10)	M-I	17.40	17.40	5.40	8.70	5.40		
51 (10)	M-III	17.40	17.40	1.40	5.90	0.00		
51 (10)	R-S	17.40	17.40	5.40	8.70	5.40		
51 (10)	R-A	17.40	17.40	6.33	8.70	6.33		
52 (10)	GM	0.67	0.46	1.86	1.87	1.87	1.00	1.86
52 (10)	M-I	0.67	0.46	1.86	1.87	1.87	1.00	1.86
52 (10)	M-III	0.67	0.00	0.79	0.94	1.87	0.14	1.86
52 (10)	R-S	0.67	0.46	1.86	1.87	1.87	1.00	1.86
52 (10)	R-A	2.86	1.11	4.93	5.21	3.91	3.36	5.86
53 (10)	GM	1.15	2.21	1.30	1.91	2.01	1.60	2.21
53 (10)	M-I	1.15	2.21	1.90	1.91	2.01	1.60	2.21
53 (10)	M-III	1.01	2.01	0.80	1.47	2.01	1.60	1.20
53 (10)	R-S	3.00	4.50	3.00	4.00	4.50	3.00	4.50
53 (10)	R-A	3.00	4.50	3.00	4.00	4.50	3.00	4.50
54 (10)	GM	0.28	3.24	1.67	0.28	1.76	0.28	0.28
54 (10)	M-I	0.28	3.29	1.81	0.28	1.91	0.28	0.28
54 (10)	M-III	0.28	3.24	1.57	0.00	1.76	0.28	0.00
54 (10)	R-S	1.00	4.35	2.77	1.00	3.09	0.00	0.50
54 (10)	R-A	1.00	4.35	2.77	1.00	3.09	0.00	0.50
Π_12 (12)	GM	64.67	43.10	21.60				
Π_12 (12)	M-I	64.67	43.10	21.60				
Π_12 (12)	M-III	64.67	43.07	21.60				
Π_12 (12)	R-S	64.67	43.10	21.60				
Π_12 (12)	R-A	65.56	43.99	21.60				
55 (12)	GM	27.43	55.87	55.87				
55 (12)	M-I	27.43	62.48	55.87				
55 (12)	M-III	27.43	54.87	40.73				
55 (12)	R-S	27.63	63.41	56.92				
55 (12)	R-A	27.63	63.41	56.92				
56 (12)	GM	2.80	0.70	2.80				
56 (12)	M-I	2.80	0.70	2.80				
56 (12)	M-III	2.80	0.70	2.80				
56 (12)	R-S	2.80	0.70	2.80				
56 (12)	R-A	2.80	0.70	2.80				
57 (12)	GM	24.00	24.00	2.00				
57 (12)	M-I	24.00	24.00	2.00				
57 (12)	M-III	24.00	24.00	0.00				
57 (12)	R-S	24.00	24.00	2.00				

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
57 (12)	R-A	24.00	24.00	2.00				
58 (12)	GM	0.42	0.45	0.30	0.42	0.72		
58 (12)	M-I	0.42	0.45	0.30	0.42	0.79		
58 (12)	M-III	0.42	0.45	0.24	0.42	0.67		
58 (12)	R-S	0.42	0.45	0.30	0.42	0.79		
58 (12)	R-A	15.13	6.81	4.37	11.77	12.79		
59 (12)	GM	0.15	0.30	0.30	0.05	0.08		
59 (12)	M-I	0.15	0.30	0.30	0.05	0.08		
59 (12)	M-III	0.15	0.30	0.30	0.05	0.05		
59 (12)	R-S	0.15	0.30	0.30	0.05	0.08		
59 (12)	R-A	18.29	26.58	36.06	9.48	12.79		
60 (12)	GM	3.17	1.00	1.00	3.33	1.00		
60 (12)	M-I	3.17	1.00	1.00	3.33	1.00		
60 (12)	M-III	3.17	1.00	1.00	3.33	1.00		
60 (12)	R-S	3.17	1.00	1.00	3.33	1.00		
60 (12)	R-A	3.17	1.00	1.00	3.33	1.00		
61 (12)	GM	1.14	8.28	3.71	4.58	2.28	0.76	1.14
61 (12)	M-I	1.14	8.28	5.14	4.58	2.28	0.76	1.14
61 (12)	M-III	1.14	8.28	3.71	4.58	2.28	0.00	0.00
61 (12)	R-S	1.14	8.28	5.14	4.58	2.28	0.76	1.14
61 (12)	R-A	3.22	11.72	6.43	9.31	2.28	2.15	2.15
62 (12)	GM	0.44	0.13	0.22	0.13	1.78	0.18	1.42
62 (12)	M-I	0.44	0.13	0.22	0.13	1.78	0.18	1.42
62 (12)	M-III	0.44	0.00	0.22	0.00	1.78	0.18	1.42
62 (12)	R-S	0.44	0.13	0.22	0.13	1.78	0.18	1.42
62 (12)	R-A	0.44	0.13	0.22	0.13	1.78	0.18	1.42
63 (12)	GM	0.92	1.38	0.46	0.69	1.38	0.34	0.17
63 (12)	M-I	0.92	1.38	0.46	0.69	1.38	0.34	0.17
63 (12)	M-III	0.92	1.38	0.00	0.00	1.38	0.00	0.00
63 (12)	R-S	7.45	4.02	1.34	3.72	7.74	1.05	0.93
63 (12)	R-A	7.45	4.02	1.34	3.72	7.74	1.05	0.93
Π_13 (13)	GM	64.67	43.10	21.60				
Π_13 (13)	M-I	65.16	43.59	21.60				
Π_13 (13)	M-III	64.67	43.07	21.60				
Π_13 (13)	R-S	65.91	43.84	22.35				
Π_13 (13)	R-A	65.91	43.84	22.35				
Π_15 (15)	GM	0.50	0.27	0.30				
Π_15 (15)	M-I	0.50	0.27	0.40				
Π_15 (15)	M-III	0.50	0.20	0.40				
Π_15 (15)	R-S	2.82	1.50	2.26				
Π_15 (15)	R-A	2.82	1.50	2.26				
64 (15)	GM	1.98	5.95	5.95				
64 (15)	M-I	1.98	5.95	5.95				
64 (15)	M-III	1.98	5.95	5.95				
64 (15)	R-S	2.17	6.50	6.50				
64 (15)	R-A	2.17	6.50	6.50				
65 (15)	GM	3.40	3.40	3.40				
65 (15)	M-I	3.40	3.40	3.40				
65 (15)	M-III	3.40	3.40	2.40				
65 (15)	R-S	5.38	4.05	5.38				
65 (15)	R-A	5.38	4.05	5.38				
66 (15)	GM	40.00	0.50	40.00				

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
66 (15)	M-I	40.00	0.50	40.00				
66 (15)	M-III	40.00	0.00	40.00				
66 (15)	R-S	40.00	0.75	40.00				
66 (15)	R-A	40.00	0.75	40.00				
Π_20 (20)	GM	1.00	0.53	0.60				
Π_20 (20)	M-I	1.00	0.53	0.80				
Π_20 (20)	M-III	1.00	0.40	0.80				
Π_20 (20)	R-S	5.00	2.67	4.00				
Π_20 (20)	R-A	5.00	2.67	4.00				
73 (20)	GM	2.54	3.67	3.80				
73 (20)	M-I	2.54	3.67	4.47				
73 (20)	M-III	2.54	2.60	4.47				
73 (20)	GM (R.)	1.46	3.65	3.65				
73 (20)	M-I (R.)	1.46	3.65	3.65				
73 (20)	M-III (R.)	1.46	3.65	3.65				
74 (20)	GM	2.10	4.20	6.30				
74 (20)	M-I	2.10	4.20	6.30				
74 (20)	M-III	2.10	4.20	6.30				
74 (20)	GM (R.)	2.10	6.10	8.20				
74 (20)	M-I (R.)	2.10	6.10	8.20				
74 (20)	M-III (R.)	2.10	6.10	8.20				
75 (20)	GM	8.27	8.27	4.20				
75 (20)	M-I	8.27	8.27	4.20				
75 (20)	M-III	8.20	8.20	4.20				
75 (20)	GM (R.)	8.40	8.40	4.20				
75 (20)	M-I (R.)	8.40	8.40	4.20				
75 (20)	M-III (R.)	8.40	4.40	4.20				
76 (20)	GM	4.31	1.58	4.35	4.85	6.20		
76 (20)	M-I	4.31	1.58	4.35	4.85	6.31		
76 (20)	M-III	3.81	0.00	1.62	3.66	4.72		
76 (20)	GM (R.)	4.85	2.36	4.35	4.85	7.27		
76 (20)	M-I (R.)	4.85	2.36	4.35	5.35	7.28		
76 (20)	M-III (R.)	4.35	0.00	3.85	4.85	5.80		
77 (20)	GM	2.33	2.62	4.52	5.02	3.43		
77 (20)	M-I	2.80	2.62	4.52	5.02	4.07		
77 (20)	M-III	2.72	2.23	2.67	4.21	0.52		
77 (20)	GM (R.)	3.25	2.25	6.75	4.50	3.55		
77 (20)	M-I (R.)	3.86	2.25	8.50	4.50	6.25		
77 (20)	M-III (R.)	2.19	0.05	4.06	2.19	3.98		
78 (20)	GM	8.50	6.00	3.00	7.33	3.00		
78 (20)	M-I	8.50	6.00	3.00	7.83	3.00		
78 (20)	M-III	8.00	4.00	2.67	4.00	0.00		
78 (20)	GM (R.)	8.80	5.90	3.00	7.73	3.00		
78 (20)	M-I (R.)	8.80	6.83	3.00	7.83	3.00		
78 (20)	M-III (R.)	8.33	4.33	2.50	4.00	0.00		
79 (20)	GM	0.55	3.73	10.78	8.35	1.10	23.45	0.73
79 (20)	M-I	0.55	3.73	10.78	9.53	1.10	23.45	0.73
79 (20)	M-III	0.55	3.13	9.00	9.53	1.10	22.27	0.00
79 (20)	GM (R.)	0.60	3.40	8.23	10.76	2.05	22.67	1.05
79 (20)	M-I (R.)	0.60	3.40	8.23	10.78	2.05	22.67	1.05
79 (20)	M-III (R.)	0.60	3.07	7.69	10.30	1.22	21.67	0.00
80 (20)	GM	7.32	3.40	1.27	8.40	5.23	8.02	3.42

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
80 (20)	M-I	8.16	5.50	1.27	8.40	5.23	8.48	3.42
80 (20)	M-III	2.60	3.76	0.00	5.00	5.23	6.26	0.54
80 (20)	GM (R.)	7.87	3.97	1.27	8.71	6.18	7.04	3.42
80 (20)	M-I (R.)	8.27	7.20	1.27	8.71	6.18	8.55	3.42
80 (20)	M-III (R.)	4.83	3.07	0.00	5.00	4.67	6.26	1.00
81 (20)	GM	3.57	3.09	8.81	1.19	1.19	1.78	9.76
81 (20)	M-I	3.57	3.09	9.70	1.19	1.19	1.78	9.76
81 (20)	M-III	1.79	2.86	8.57	0.00	0.89	1.19	8.57
81 (20)	GM (R.)	5.36	3.09	10.12	1.19	1.78	3.57	10.95
81 (20)	M-I (R.)	6.07	3.09	10.71	1.19	1.78	3.57	10.95
81 (20)	M-III (R.)	2.38	2.86	9.16	0.00	0.00	1.19	9.76
82 (50)	GM	5.11	4.43	7.16				
82 (50)	M-I	5.46	4.43	7.80				
82 (50)	M-III	5.11	3.70	7.70				
82 (50)	GM (R.)	6.71	4.15	6.23				
82 (50)	M-I (R.)	8.52	5.56	8.62				
82 (50)	M-III (R.)	4.50	3.74	7.50				
83 (50)	GM	13.23	12.81	3.88				
83 (50)	M-I	13.77	12.81	6.56				
83 (50)	M-III	11.21	11.60	4.51				
83 (50)	GM (R.)	14.47	5.70	14.47				
83 (50)	M-I (R.)	14.47	5.70	14.77				
83 (50)	M-III (R.)	11.38	4.70	10.61				
84 (50)	GM	8.81	3.53	8.59				
84 (50)	M-I	9.07	3.53	8.59				
84 (50)	M-III	6.00	0.08	6.00				
84 (50)	GM (R.)	17.39	4.67	17.38				
84 (50)	M-I (R.)	17.39	4.67	17.38				
84 (50)	M-III (R.)	10.78	0.00	10.78				
85 (50)	GM	5.68	4.66	5.02	5.35	4.60		
85 (50)	M-I	6.70	4.66	6.26	6.36	6.92		
85 (50)	M-III	3.23	1.05	3.51	3.14	2.41		
85 (50)	GM (R.)	5.72	10.24	4.57	9.51	8.16		
85 (50)	M-I (R.)	8.95	11.56	7.63	11.53	11.24		
85 (50)	M-III (R.)	5.21	6.70	4.60	6.61	5.24		
86 (50)	GM	3.35	2.00	3.95	5.50	6.20		
86 (50)	M-I	5.00	2.00	4.68	5.96	7.08		
86 (50)	M-III	2.10	0.00	2.24	3.82	4.16		
86 (50)	GM (R.)	6.28	2.17	5.50	9.61	9.87		
86 (50)	M-I (R.)	7.81	2.17	6.78	11.53	10.57		
86 (50)	M-III (R.)	4.37	1.18	2.08	5.94	2.20		
87 (50)	GM	3.22	6.43	6.41	6.43	6.71		
87 (50)	M-I	3.22	6.43	8.49	7.97	6.71		
87 (50)	M-III	3.15	4.00	3.75	3.15	5.61		
87 (50)	GM (R.)	2.25	3.93	7.70	8.97	7.07		
87 (50)	M-I (R.)	2.25	3.93	9.58	10.63	7.07		
87 (50)	M-III (R.)	2.10	0.00	4.02	5.37	4.17		
88 (50)	GM	4.63	6.60	7.98	5.22	4.71	9.05	6.31
88 (50)	M-I	6.86	6.95	8.28	9.00	5.63	10.28	6.89
88 (50)	M-III	3.56	4.60	6.20	2.25	3.18	8.25	3.60
88 (50)	GM (R.)	5.74	9.53	10.53	11.81	6.47	9.87	7.01
88 (50)	M-I (R.)	7.82	10.41	11.66	14.41	7.61	13.14	8.69

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
88 (50)	M-III (R.)	3.83	3.34	6.87	6.57	5.28	8.02	5.75
89 (50)	GM	6.60	9.35	6.92	9.77	6.09	6.60	6.20
89 (50)	M-I	7.69	11.61	9.67	11.39	6.09	8.67	6.72
89 (50)	M-III	5.59	7.01	5.22	5.86	3.12	3.89	2.12
89 (50)	GM (R.)	7.45	8.00	8.93	9.68	6.29	7.02	6.65
89 (50)	M-I (R.)	9.53	10.88	11.14	11.62	6.29	9.90	7.59
89 (50)	M-III (R.)	5.76	3.01	4.68	5.65	2.43	3.87	3.87
90 (50)	GM	5.95	8.73	1.57	7.08	10.41	5.86	5.57
90 (50)	M-I	7.16	10.67	1.57	7.08	11.59	5.86	5.57
90 (50)	M-III	5.08	7.46	0.00	4.81	7.23	5.59	4.62
90 (50)	GM (R.)	7.81	8.67	1.61	6.30	12.39	6.77	8.68
90 (50)	M-I (R.)	8.76	11.10	1.61	7.15	12.39	6.77	8.68
90 (50)	M-III (R.)	6.83	7.37	0.00	3.53	10.96	4.42	5.88
91 (100)	GM	5.63	7.07	4.99				
91 (100)	M-I	7.84	7.07	6.00				
91 (100)	M-III	6.70	6.11	3.70				
91 (100)	GM (R.)	9.61	8.68	12.92				
91 (100)	M-I (R.)	10.84	9.31	14.32				
91 (100)	M-III (R.)	8.71	4.70	11.89				
92 (100)	GM	2.36	20.19	20.19				
92 (100)	M-I	2.36	20.19	20.19				
92 (100)	M-III	2.36	15.37	13.06				
92 (100)	GM (R.)	1.88	7.10	7.10				
92 (100)	M-I (R.)	1.88	7.10	7.09				
92 (100)	M-III (R.)	1.88	6.18	6.17				
93 (100)	GM	8.98	8.97	2.42				
93 (100)	M-I	8.98	8.97	2.42				
93 (100)	M-III	6.58	6.58	2.42				
93 (100)	GM (R.)	10.33	10.33	2.67				
93 (100)	M-I (R.)	10.33	10.33	2.67				
93 (100)	M-III (R.)	7.20	7.20	0.00				
94 (100)	GM	6.84	6.63	9.41	7.43	6.16		
94 (100)	M-I	7.89	10.45	10.98	8.17	7.44		
94 (100)	M-III	3.70	2.82	6.76	4.87	5.00		
94 (100)	GM (R.)	12.63	8.69	9.07	11.33	8.37		
94 (100)	M-I (R.)	13.60	11.65	11.55	14.71	9.49		
94 (100)	M-III (R.)	11.34	3.96	5.29	7.62	5.20		
95 (100)	GM	8.44	11.15	5.21	7.34	5.51		
95 (100)	M-I	10.54	11.75	6.03	9.05	6.85		
95 (100)	M-III	7.68	6.36	3.24	4.38	1.89		
95 (100)	GM (R.)	11.00	14.05	7.83	9.23	8.41		
95 (100)	M-I (R.)	15.87	16.32	11.75	14.36	8.41		
95 (100)	M-III (R.)	6.14	6.46	2.63	3.84	1.59		
96 (100)	GM	2.63	4.24	2.73	7.53	7.53		
96 (100)	M-I	2.63	4.24	2.73	8.23	7.53		
96 (100)	M-III	2.63	0.00	0.00	5.61	2.98		
96 (100)	GM (R.)	2.83	4.93	2.73	12.32	12.32		
96 (100)	M-I (R.)	2.83	4.93	2.73	12.47	12.47		
96 (100)	M-III (R.)	2.81	0.00	0.00	3.68	5.09		
97 (100)	GM	5.96	5.70	5.78	3.69	6.58	5.58	6.01
97 (100)	M-I	7.07	6.99	6.52	5.15	8.44	7.28	6.94
97 (100)	M-III	4.25	2.42	2.37	2.56	2.87	2.47	3.32

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
97 (100)	GM (R.)	9.18	8.98	6.79	6.82	7.34	7.90	6.85
97 (100)	M-I (R.)	11.94	10.88	8.58	8.32	11.24	9.58	9.05
97 (100)	M-III (R.)	6.00	4.01	2.52	2.66	4.30	2.24	2.98
98 (100)	GM	7.51	7.13	8.57	4.85	8.57	8.37	5.74
98 (100)	M-I	8.86	8.17	10.89	4.85	9.60	8.43	6.06
98 (100)	M-III	6.15	3.95	5.11	0.11	4.02	3.52	3.17
98 (100)	GM (R.)	9.27	9.68	12.11	4.89	11.41	10.87	6.91
98 (100)	M-I (R.)	12.31	12.66	14.61	4.89	12.67	10.87	6.91
98 (100)	M-III (R.)	6.58	4.83	6.00	0.00	4.08	2.76	3.26
99 (100)	GM	4.21	3.17	2.00	5.63	5.06	6.86	6.90
99 (100)	M-I	4.21	3.17	2.00	6.35	7.51	8.02	7.79
99 (100)	M-III	3.66	1.56	0.31	1.91	3.58	4.33	2.80
99 (100)	GM (R.)	4.08	4.12	2.08	6.96	8.27	9.07	9.02
99 (100)	M-I (R.)	4.08	4.12	2.08	9.70	9.80	9.07	9.02
99 (100)	M-III (R.)	3.91	0.95	0.00	2.46	3.22	3.60	4.38
100 (200)	GM	0.41	0.41	0.38				
100 (200)	M-I	0.41	0.53	0.38				
100 (200)	M-III	0.41	0.41	0.00				
100 (200)	GM (R.)	0.41	0.80	0.80				
100 (200)	M-I (R.)	0.41	0.80	0.80				
100 (200)	M-III (R.)	0.41	0.80	0.80				
101 (200)	GM	4.31	5.58	6.66				
101 (200)	M-I	6.04	7.74	8.45				
101 (200)	M-III	4.19	4.38	4.66				
101 (200)	GM (R.)	9.29	11.68	8.51				
101 (200)	M-I (R.)	9.29	13.67	10.31				
101 (200)	M-III (R.)	8.12	11.51	5.92				
102 (200)	GM	9.57	8.66	7.04				
102 (200)	M-I	10.96	10.77	9.31				
102 (200)	M-III	6.06	3.03	3.03				
102 (200)	GM (R.)	6.83	8.62	7.48				
102 (200)	M-I (R.)	9.52	9.54	8.79				
102 (200)	M-III (R.)	6.29	4.58	3.04				
103 (200)	GM	3.53	4.87	8.30	6.41	6.61		
103 (200)	M-I	6.38	5.15	10.59	8.24	8.62		
103 (200)	M-III	2.50	2.37	2.20	3.54	2.93		
103 (200)	GM (R.)	7.32	7.28	12.57	8.19	12.45		
103 (200)	M-I (R.)	10.07	7.28	16.96	11.93	13.68		
103 (200)	M-III (R.)	4.51	2.40	6.27	4.83	3.36		
104 (200)	GM	4.88	4.49	2.63	4.16	5.95		
104 (200)	M-I	4.88	7.31	2.63	7.35	7.89		
104 (200)	M-III	3.14	3.43	0.00	4.00	2.74		
104 (200)	GM (R.)	6.22	7.93	2.77	9.55	9.94		
104 (200)	M-I (R.)	6.22	9.73	2.77	11.64	10.76		
104 (200)	M-III (R.)	6.04	2.29	0.00	4.00	3.90		
105 (200)	GM	6.32	3.46	6.23	5.96	6.04		
105 (200)	M-I	6.32	3.46	8.38	8.54	8.23		
105 (200)	M-III	5.24	0.00	6.17	2.05	1.33		
105 (200)	GM (R.)	7.04	3.48	7.54	7.87	6.40		
105 (200)	M-I (R.)	7.04	3.48	9.47	10.62	8.40		
105 (200)	M-III (R.)	7.04	0.00	2.63	4.96	0.80		
106 (200)	GM	5.79	5.24	6.46	5.01	6.33	3.76	4.65

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
106 (200)	M-I	6.90	5.86	9.00	6.95	8.75	6.16	6.06
106 (200)	M-III	3.88	3.13	3.90	1.62	3.01	2.47	2.51
106 (200)	GM (R.)	6.70	5.20	7.33	6.06	11.12	7.85	6.38
106 (200)	M-I (R.)	9.36	5.89	11.52	6.06	13.00	10.47	8.50
106 (200)	M-III (R.)	5.39	3.92	3.80	1.93	5.49	2.57	2.20
107 (200)	GM	4.92	7.29	5.96	7.39	5.33	4.65	5.47
107 (200)	M-I	6.98	7.71	8.17	9.28	7.60	7.63	5.47
107 (200)	M-III	5.47	3.37	4.74	3.75	2.96	2.11	1.47
107 (200)	GM (R.)	8.78	9.28	8.50	9.64	8.80	7.94	6.23
107 (200)	M-I (R.)	11.78	9.80	13.00	14.72	12.23	10.44	6.23
107 (200)	M-III (R.)	7.05	1.76	4.84	2.84	3.05	3.42	1.57
108 (200)	GM	6.32	8.42	2.58	2.31	5.13	7.06	2.02
108 (200)	M-I	6.32	11.47	2.58	2.31	5.13	7.06	2.02
108 (200)	M-III	5.30	4.89	0.00	0.00	1.14	2.72	0.00
108 (200)	GM (R.)	9.97	10.67	2.84	2.61	5.71	8.75	2.17
108 (200)	M-I (R.)	9.97	12.74	2.84	2.61	5.71	8.75	2.17
108 (200)	M-III (R.)	9.35	6.14	0.00	0.00	1.53	5.71	0.00
109 (500)	GM (R.)	4.21	7.18	5.09				
109 (500)	M-I (R.)	4.21	7.93	5.09				
109 (500)	M-III (R.)	4.21	6.42	3.08				
109 (500)	GM (LB.)	4.21	7.18	5.09				
109 (500)	M-I (LB.)	4.21	7.93	5.09				
109 (500)	M-III (LB.)	4.21	6.42	3.08				
110 (500)	GM (R.)	13.73	15.95	12.26				
110 (500)	M-I (R.)	16.74	17.10	16.02				
110 (500)	M-III (R.)	8.36	10.35	5.92				
110 (500)	GM (LB.)	13.73	15.95	12.26				
110 (500)	M-I (LB.)	16.74	17.10	16.02				
110 (500)	M-III (LB.)	8.36	10.35	5.92				
111 (500)	GM (R.)	4.15	7.48	7.48				
111 (500)	M-I (R.)	4.15	8.73	7.48				
111 (500)	M-III (R.)	4.14	6.55	4.00				
111 (500)	GM (LB.)	4.15	7.48	7.48				
111 (500)	M-I (LB.)	4.15	8.73	7.48				
111 (500)	M-III (LB.)	4.14	5.24	4.00				
112 (500)	GM (R.)	14.20	14.25	20.35	14.85	12.03		
112 (500)	M-I (R.)	17.91	19.09	26.77	19.69	14.71		
112 (500)	M-III (R.)	9.30	2.00	12.94	7.69	3.65		
112 (500)	GM (LB.)	14.20	14.25	20.35	14.85	12.03		
112 (500)	M-I (LB.)	17.91	19.09	26.77	19.69	14.71		
112 (500)	M-III (LB.)	9.30	2.00	12.94	7.69	3.65		
113 (500)	GM (R.)	9.25	10.67	10.04	9.90	9.34		
113 (500)	M-I (R.)	13.92	14.54	13.70	15.18	14.21		
113 (500)	M-III (R.)	7.46	3.56	2.99	3.00	1.88		
113 (500)	GM (LB.)	8.93	10.67	10.04	9.90	9.34		
113 (500)	M-I (LB.)	13.92	14.54	13.70	15.18	14.21		
113 (500)	M-III (LB.)	7.46	3.38	2.99	3.00	2.24		
114 (500)	GM (R.)	2.38	2.47	10.34	10.34	4.11		
114 (500)	M-I (R.)	2.38	2.47	10.56	10.34	4.11		
114 (500)	M-III (R.)	2.38	0.00	6.00	6.00	0.00		
114 (500)	GM (LB.)	2.38	2.47	10.34	10.34	4.11		
114 (500)	M-I (LB.)	2.38	2.47	10.56	10.34	4.11		



Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
114 (500)	M-III (LB.)	2.38	0.00	6.00	6.00	0.00		
115 (500)	GM (R.)	8.05	6.67	5.93	6.49	8.09	6.88	6.80
115 (500)	M-I (R.)	11.59	10.86	6.11	10.25	11.96	10.61	10.20
115 (500)	M-III (R.)	4.41	1.81	1.50	1.36	1.41	1.30	1.29
115 (500)	GM (LB.)	8.05	6.67	5.93	6.49	8.09	6.88	6.80
115 (500)	M-I (LB.)	11.59	10.86	6.11	10.25	11.96	10.61	10.20
115 (500)	M-III (LB.)	4.41	1.81	1.50	1.36	1.41	1.30	1.29
116 (500)	GM (R.)	13.65	7.25	10.06	17.24	4.73	16.04	4.03
116 (500)	M-I (R.)	15.21	7.25	13.00	19.49	4.73	19.63	4.03
116 (500)	M-III (R.)	12.08	2.16	3.72	6.28	1.47	7.33	0.26
116 (500)	GM (LB.)	13.65	7.25	10.06	17.24	4.73	16.04	4.03
116 (500)	M-I (LB.)	15.21	7.25	13.00	19.49	4.73	19.63	4.03
116 (500)	M-III (LB.)	12.08	2.07	3.72	6.28	1.47	7.33	0.26
117 (500)	GM (R.)	7.16	10.51	8.96	2.80	3.63	10.23	11.90
117 (500)	M-I (R.)	7.16	14.17	8.96	2.80	3.63	11.55	13.65
117 (500)	M-III (R.)	6.25	4.88	2.90	0.00	0.00	1.94	5.72
117 (500)	GM (LB.)	7.16	10.51	8.96	2.80	3.63	10.23	11.90
117 (500)	M-I (LB.)	7.16	14.17	8.96	2.80	3.63	11.55	13.65
117 (500)	M-III (LB.)	6.25	4.88	2.90	0.00	0.00	1.94	5.72
118 (1000)	GM (R.)	8.44	12.00	10.47				
118 (1000)	M-I (R.)	13.59	12.77	11.36				
118 (1000)	M-III (R.)	12.10	9.05	6.96				
118 (1000)	GM (LB.)	8.44	12.00	10.47				
118 (1000)	M-I (LB.)	13.59	12.77	11.36				
118 (1000)	M-III (LB.)	12.10	9.05	6.96				
119 (1000)	GM (R.)	6.12	12.58	18.30				
119 (1000)	M-I (R.)	6.12	12.58	18.30				
119 (1000)	M-III (R.)	4.97	8.59	12.42				
119 (1000)	GM (LB.)	6.12	12.58	18.30				
119 (1000)	M-I (LB.)	6.12	12.58	18.30				
119 (1000)	M-III (LB.)	4.97	8.59	12.42				
120 (1000)	GM (R.)	2.06	15.61	15.61				
120 (1000)	M-I (R.)	0.00	15.61	15.61				
120 (1000)	M-III (R.)	2.06	9.62	9.62				
120 (1000)	GM (LB.)	2.06	15.61	15.61				
120 (1000)	M-I (LB.)	2.06	15.61	15.61				
120 (1000)	M-III (LB.)	2.06	9.62	9.62				
121 (1000)	GM (R.)	13.06	14.00	15.39	12.28	16.03		
121 (1000)	M-I (R.)	18.55	19.76	22.27	18.63	16.03		
121 (1000)	M-III (R.)	5.47	3.61	3.41	3.68	5.64		
121 (1000)	GM (LB.)	13.06	14.00	15.39	12.28	16.03		
121 (1000)	M-I (LB.)	18.55	19.76	22.27	18.63	16.03		
121 (1000)	M-III (LB.)	5.28	3.42	3.09	3.65	5.39		
122 (1000)	GM (R.)	7.93	14.96	20.96	5.18	2.43		
122 (1000)	M-I (R.)	7.93	14.96	22.11	5.18	2.43		
122 (1000)	M-III (R.)	6.33	8.46	18.29	2.75	0.75		
122 (1000)	GM (LB.)	7.93	14.96	19.82	5.18	2.43		
122 (1000)	M-I (LB.)	7.93	14.96	60.00	5.18	0.60		
122 (1000)	M-III (LB.)	6.05	10.05	58.13	3.03	1.03		
123 (1000)	GM (R.)	1.93	2.42	7.44	7.44	3.40		
123 (1000)	M-I (R.)	1.93	2.42	7.44	7.44	3.40		
123 (1000)	M-III (R.)	1.88	0.00	3.05	3.05	0.00		

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
123 (1000)	GM (LB.)	1.93	2.42	7.44	7.44	3.40		
123 (1000)	M-I (LB.)	1.93	2.42	7.44	7.44	3.40		
123 (1000)	M-III (LB.)	1.93	0.00	3.17	3.17	0.00		
124 (1000)	GM (R.)	7.05	10.13	7.87	8.84	7.28	8.79	7.56
124 (1000)	M-I (R.)	8.51	15.14	13.05	13.06	12.07	9.63	11.60
124 (1000)	M-III (R.)	4.51	2.99	1.48	1.63	1.40	1.67	1.85
124 (1000)	GM (LB.)	8.51	27.17	18.28	19.20	7.00	9.63	21.71
124 (1000)	M-I (LB.)	8.51	15.14	13.05	13.06	12.07	9.63	11.60
124 (1000)	M-III (LB.)	4.51	2.99	1.48	1.63	1.40	1.67	1.85
125 (1000)	GM (R.)	-	-	-	-	-	-	-
125 (1000)	M-I (R.)	-	-	-	-	-	-	-
125 (1000)	M-III (R.)	40.63	9.82	5.82	4.03	0.00	0.00	4.00
125 (1000)	GM (LB.)	31.07	20.44	13.10	8.75	0.95	2.81	8.90
125 (1000)	M-I (LB.)	32.66	20.81	14.47	8.75	0.95	2.81	8.90
125 (1000)	M-III (LB.)	20.28	7.82	4.45	4.03	0.00	0.00	4.00
126 (1000)	GM (R.)	-	-	-	-	-	-	-
126 (1000)	M-I (R.)	-	-	-	-	-	-	-
126 (1000)	M-III (R.)	-	-	-	-	-	-	-
126 (1000)	GM (LB.)	4.26	7.52	14.64	2.92	9.65	8.86	14.64
126 (1000)	M-I (LB.)	4.26	7.52	14.64	2.92	9.65	8.86	20.00
126 (1000)	M-III (LB.)	3.87	0.00	4.68	0.00	3.67	1.43	9.16
127 (2000)	GM (R.)	11.63	3.75	7.98				
127 (2000)	M-I (R.)	11.63	3.75	7.98				
127 (2000)	M-III (R.)	7.60	1.46	6.60				
127 (2000)	GM (LB.)	11.63	3.75	7.98				
127 (2000)	M-I (LB.)	11.63	3.75	7.98				
127 (2000)	M-III (LB.)	7.60	1.46	6.60				
128 (2000)	GM (R.)	13.75	12.31	10.76				
128 (2000)	M-I (R.)	16.85	12.31	13.85				
128 (2000)	M-III (R.)	11.39	9.27	6.91				
128 (2000)	GM (LB.)	13.75	12.31	10.76				
128 (2000)	M-I (LB.)	16.85	12.31	13.85				
128 (2000)	M-III (LB.)	11.39	9.27	6.91				
129 (2000)	GM (R.)	6.28	6.80	7.60				
129 (2000)	M-I (R.)	8.76	8.05	8.02				
129 (2000)	M-III (R.)	4.46	2.01	2.44				
129 (2000)	GM (LB.)	6.28	6.80	7.60				
129 (2000)	M-I (LB.)	8.76	8.05	8.02				
129 (2000)	M-III (LB.)	4.46	2.01	2.44				
130 (2000)	GM (R.)	14.17	12.80	14.58	14.05	15.53		
130 (2000)	M-I (R.)	20.68	17.85	21.02	20.75	19.98		
130 (2000)	M-III (R.)	7.64	4.35	3.38	2.93	4.45		
130 (2000)	GM (LB.)	14.17	12.80	14.58	14.05	15.53		
130 (2000)	M-I (LB.)	20.68	17.85	21.02	20.75	19.98		
130 (2000)	M-III (LB.)	19.07	27.39	25.39	11.45	10.45		
131 (2000)	GM (R.)	11.11	10.91	11.10	11.33	11.91		
131 (2000)	M-I (R.)	17.83	10.91	16.91	17.54	17.48		
131 (2000)	M-III (R.)	7.15	3.93	2.28	2.27	3.81		
131 (2000)	GM (LB.)	11.11	10.91	11.10	11.33	11.91		
131 (2000)	M-I (LB.)	32.30	4.88	20.75	23.42	36.35		
131 (2000)	M-III (LB.)	7.15	3.93	2.28	2.27	3.81		
132 (2000)	GM (R.)	9.46	9.49	4.29	9.89	4.41		

Παράρτημα IV: Αποτελέσματα Πειραμάτων

No (μέγεθος)	Μέθοδος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
132 (2000)	M-I (R.)	11.76	9.49	4.29	12.02	4.41		
132 (2000)	M-III (R.)	4.44	6.00	0.00	3.36	0.00		
132 (2000)	GM (LB.)	9.46	9.49	4.29	9.89	4.41		
132 (2000)	M-I (LB.)	11.76	9.49	4.29	12.02	4.41		
132 (2000)	M-III (LB.)	4.44	6.00	0.00	3.36	0.00		
133 (2000)	GM (R.)	-	-	-	-	-	-	-
133 (2000)	M-I (R.)	-	-	-	-	-	-	-
133 (2000)	M-III (R.)	5.62	1.71	2.05	1.72	2.51	6.06	2.00
133 (2000)	GM (LB.)	9.99	9.85	9.64	9.09	10.17	11.31	8.77
133 (2000)	M-I (LB.)	16.15	15.56	14.97	14.85	11.27	18.71	8.77
133 (2000)	M-III (LB.)	5.62	1.71	2.05	1.72	2.51	6.06	2.00
134 (2000)	GM (R.)	7.77	7.36	7.54	8.29	7.57	7.87	4.76
134 (2000)	M-I (R.)	11.79	11.81	11.87	12.88	10.06	12.25	4.76
134 (2000)	M-III (R.)	-	-	-	-	-	-	-
134 (2000)	GM (LB.)	7.77	7.36	7.54	8.29	7.57	7.87	4.76
134 (2000)	M-I (LB.)	-	-	-	-	-	-	-
134 (2000)	M-III (LB.)	-	-	-	-	-	-	-
135 (2000)	GM (R.)	8.15	8.24	8.17	7.70	7.62	7.65	7.71
135 (2000)	M-I (R.)	13.19	13.01	13.01	8.31	10.20	12.41	12.56
135 (2000)	M-III (R.)	4.35	0.93	1.70	1.84	1.75	2.14	0.99
135 (2000)	GM (LB.)	8.15	8.24	8.17	7.70	7.62	7.65	7.71
135 (2000)	M-I (LB.)	13.19	13.01	13.01	8.31	10.20	12.41	12.56
135 (2000)	M-III (LB.)	4.34	0.93	1.69	1.84	1.75	2.14	0.99

Πίνακας V-3: Αποτελέσματα δεικτών WV<sub>i</sub>

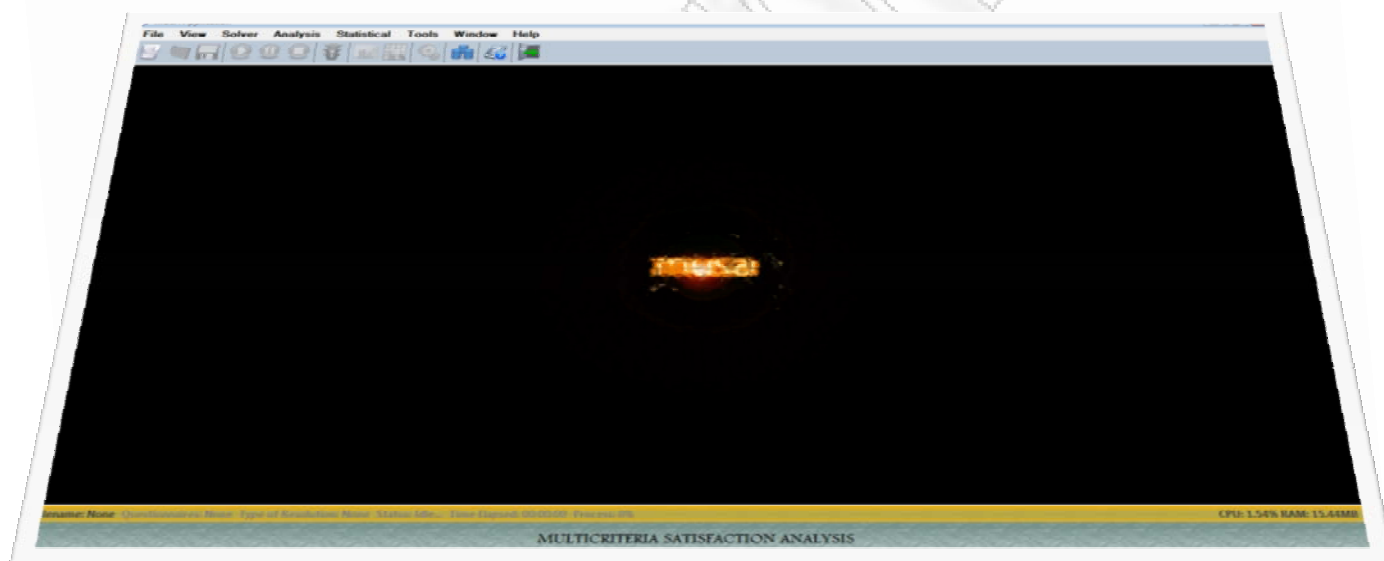
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΔΑ

**Παράρτημα V: Εγχειρίδιο χρήσης του ΣΥΑ**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΔΑΛΗ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΔΙΑ

# ΣΥΑ για Μεταβελτιστοποίηση στην ΜΥΣΑ



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b> .....	<b>4</b>
<b>ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΦΟΡΜΑ</b> .....	<b>5</b>
ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΕΣ ΜΕΝΟΥ ΕΠΙΛΟΓΩΝ .....	5
<i>Επιλογή File</i> .....	5
<i>Επιλογή View</i> .....	6
<i>Επιλογή Solver</i> .....	8
<i>Επιλογή Analysis</i> .....	9
<i>Επιλογή Statistical</i> .....	14
<i>Επιλογή Tools</i> .....	16
<i>Επιλογή Window</i> .....	17
<i>Επιλογή Help</i> .....	18
<b>ΤΡΟΠΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ</b> .....	<b>19</b>
SINGLE SOLUTION.....	19
<i>Ικανοποίηση ερωτηθέντων</i> .....	20
<i>Απαιτητικότητα ερωτηθέντων</i> .....	22
<i>Βάρη κριτηρίων</i> .....	24
<i>Διάγραμμα Δράσης</i> .....	26
<i>Διάγραμμα Βελτίωσης</i> .....	27
<i>Γραφήματα Απόδοσης</i> .....	28
RANGE ANALYSIS .....	32
<i>Ικανοποίηση ερωτηθέντων</i> .....	35
<i>Απαιτητικότητα ερωτηθέντων</i> .....	37
<i>Βάρη κριτηρίων</i> .....	39
<i>Διάγραμμα Δράσης</i> .....	41
<i>Διάγραμμα Βελτίωσης</i> .....	42
<i>Ανάλυση Δεικτών</i> .....	43
<i>Γραφήματα Απόδοσης</i> .....	47
STATISTICAL ANALYSIS.....	51
<i>Ικανοποίηση ερωτηθέντων</i> .....	54
<i>Απαιτητικότητα ερωτηθέντων</i> .....	56
<i>Βάρη κριτηρίων</i> .....	58
<i>Διάγραμμα Δράσης</i> .....	60
<i>Διάγραμμα Βελτίωσης</i> .....	61
<i>Γραφήματα Απόδοσης</i> .....	62
<b>DATASET GENERATOR</b> .....	<b>67</b>
<i>Σχεδιασμός σεναρίου</i> .....	67
<i>Δημιουργία Συναρτήσεων Ικανοποίησης</i> .....	67



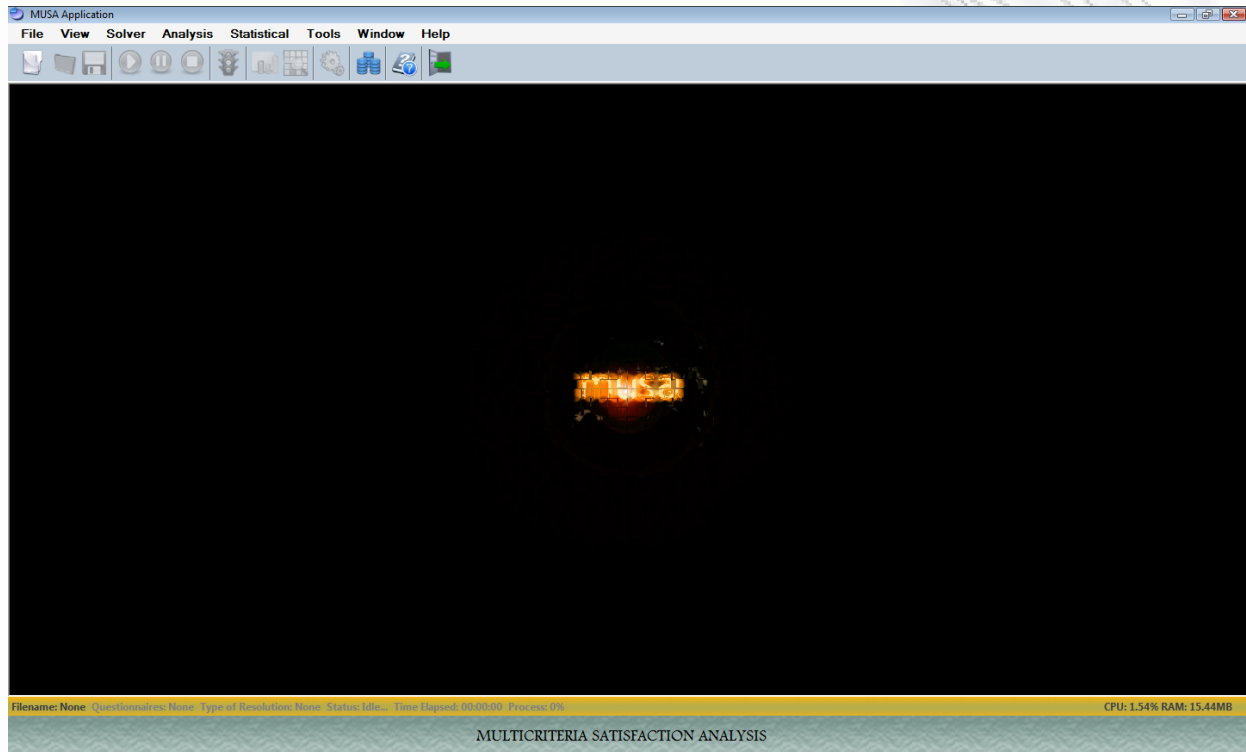
<i>Δημιουργία συνόλου δεδομένων</i> .....	68
ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕΝΑΡΙΟΥ .....	68
<i>Δημιουργία ερωτηματολογίου</i> .....	69
<i>Ορισμός παραμέτρων</i> .....	73
<i>Δημιουργία συνόλου δεδομένων</i> .....	74
<b>ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX</b> .....	<b>78</b>
CLASSICAL SIMPLEX .....	78
REVISED SIMPLEX .....	78
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: ΣΥΝΤΟΜΕΥΣΕΙΣ - ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ</b> .....	<b>80</b>
ΣΥΝΤΟΜΕΥΣΕΙΣ .....	80
ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ .....	81
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: ΑΝΑΛΥΣΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ</b> .....	<b>83</b>
ΔΙΑΒΑΣΜΑ PRN ΑΡΧΕΙΟΥ .....	83
ΓΕΝΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ (CLASSICAL SOLVER) .....	89
ΜΕΤΑΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ MUSA .....	94
ΜΕΤΑΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΜΑΝΑΣ-ΝΕΔΟΜΑ .....	106
ΜΕΤΑΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ REVERSE SIMPLEX .....	116
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΟΛΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ .....	126
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΧΡΗΣΗΣ</b> .....	<b>136</b>

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το ΣΥΑ-ΜΥΣΑ έχει δημιουργηθεί στο Microsoft Visual Studio.NET 2008. Η γλώσσα προγραμματισμού που χρησιμοποιήθηκε είναι η Visual C#. Αποτελείται συνολικά από 17,278 γραμμές κώδικα. Για να μπορεί να λειτουργήσει σε κάποιον υπολογιστή είναι απαραίτητο να υπάρχει εγκατεστημένο το λειτουργικό σύστημα Microsoft Windows (έκδοση 98 και μετά). Ακόμα ανάλογα την έκδοση του λειτουργικού συστήματος απαιτείται η εγκατάσταση του .NET Framework 3.5. Ακόμα λόγω της χρήσης Charts, είναι απαραίτητη και η εγκατάσταση του Microsoft Charting Control.

Η όλη εφαρμογή έχει δημιουργηθεί για την μελέτη ικανοποίησης διαφόρων ερευνών που έχουν ένα επίπεδο κριτηρίων, δηλαδή χωρίς υποκριτήρια. Για την μελέτη της ικανοποίησης χρησιμοποιούνται οι μέθοδοι Γενικευμένο ΜΥΣΑ, ΜΥΣΑ I, ΜΥΣΑ II, ΜΥΣΑ III, Manas-Nedoma, Reverse Simplex και Real Approach.

## ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΦΟΡΜΑ



**Εικόνα 1: Κεντρική Φόρμα**

Στην κεντρική φόρμα υπάρχει το μενού της εφαρμογής καθώς επίσης και ένα εσωτερικό πλαίσιο μέσα στο οποίο εμφανίζονται όλες οι άλλες φόρμες της εφαρμογής. Είναι δηλαδή τύπου MDIParent και οι άλλες φόρμες MDIChild.

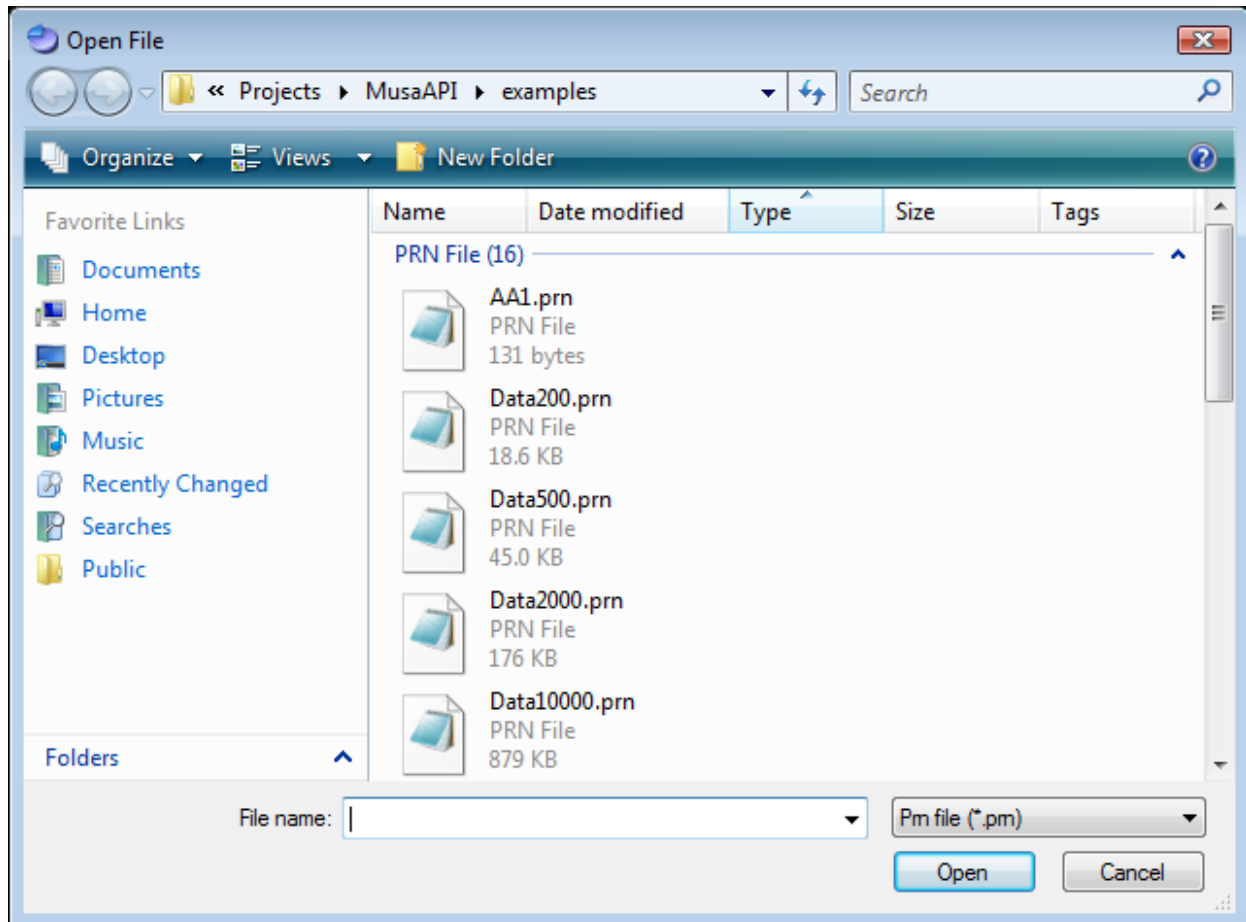
Αποτελείται από ένα Top-Menu, ένα Toolbar, ένα Bottom-Menu και ένα λογότυπο στο κάτω μέρος του παραθύρου. Επίσης το κύριο λογότυπο βρίσκεται στο κέντρο του παραθύρου.

### Λειτουργίες Μενού Επιλογών

#### Επιλογή File

##### *Open*

Άνοιγμα PRN αρχείου από πηγή αποθήκευσης και φόρτωση των ερωτηματολογίων στην εφαρμογή.



Εικόνα 2: Άνοιγμα αρχείου

**Close**

Κλείσιμο τρέχοντος PRN αρχείου και επαναφορά των λειτουργιών της εφαρμογής στις αρχική του κατάσταση. Καθάρισμα επίσης της μνήμης από στοιχεία παλιότερης χρήσης.

**Save**

Αποθήκευση όλων των αποτελεσμάτων και των γραφημάτων που προέκυψαν κατά την λύση των προβλημάτων. Τα αρχεία αυτά (.xls, .jpg) αποθηκεύονται σε ένα φάκελο ο οποίος ανοίγει μόλις ολοκληρωθεί η διαδικασία.

**Exit**

Τερματισμός λειτουργίας της εφαρμογής.

**Επιλογή View****Toolbar**

Προβολή απόκρυψη του toolbar που βρίσκεται κάτω από το κύριο Menu.



Εικόνα 3: Toolbar

**Statusbar**

Προβολή ή απόκρυψη του statusbar που βρίσκεται κάτω στο κάτω μέρος του παραθύρου.

Filename: Quest\_Dataset.Phd.prn Questionnaires: 6 Type of Resolution: Single Solution Status: Completed Time Elapsed: 00:00:01 Process: 100%

CPU: 1.55% RAM: 20.67MB

**Εικόνα 4: Statusbar**

**Data**

Προβολή σε νέο παράθυρο των δεδομένων που εισήχθησαν στο σύστημα. Αυτά είναι γενικά στοιχεία που αφορούν την έρευνα και οι απαντήσεις των ερωτηθέντων.

The screenshot shows a window titled "Quest Data" with two tabs: "Information" and "Answers". The "Information" tab is active. It contains the following fields and tables:

Quest Title:

Number Of Customers:       Number Of Criteria:

**Criteria**

Criterion	Name
1	Criterion # 1
2	Criterion # 2
3	Criterion # 3

**Satisfaction Levels**

Title	Levels
Total Satisfaction	4
Criterion # 1	4
Criterion # 2	4
Criterion # 3	4

At the bottom right of the window is a "Close" button.

**Εικόνα 5: Προβολή δεδομένων**

**Results**

Προβολή των αποτελεσμάτων από την επίλυση των γραμμικών προβλημάτων με μια ή περισσότερες μεθόδους.



Εικόνα 6: Παράθυρο προβολής αποτελεσμάτων (λίστα)

Επιλέγοντας μια μέθοδο (πατώντας το αντίστοιχο κουμπί), ανοίγει το παράθυρο με τα αντίστοιχα αποτελέσματα.

**Process of Resolution**

Global Preference Threshold: 2  
Near Optimal Solutions Threshold: 10%

**Data**

	Average	min_b[1]	max_b[1]	min_b[2]	max_b[2]	min_b[3]	max_b[3]
z[1]	53.11	36.67	49	86	12	49	86
z[2]	24.44	32.67	45	8	8	45	8
z[3]	22.44	30.67	6	6	80	6	6
w[1][1]	14.33	2	39	2	2	39	2
w[1][2]	2	2	2	2	2	2	2
w[1][3]	2	2	2	2	2	2	2
b[1]	18.33	6	43	6	6	43	6
w[2][1]	26.44	34.67	47	10	10	47	10
w[2][2]	6.11	26.67	2	2	2	2	2
w[2][3]	14.33	2	2	2	76	2	2
b[2]	46.89	63.33	51	14	88	51	14
w[3][1]	26.67	2	2	76	2	2	76
w[3][2]	6.11	26.67	2	2	2	2	2
w[3][3]	2	2	2	2	2	2	2
b[3]	34.78	30.67	6	80	6	6	80

Εικόνα 7: Παράθυρο προβολής αποτελεσμάτων

Επιλογή Solver

*Start*

Έναρξη επίλυσης προβλήματος. Ανάλογα με την επιλεγμένη μέθοδο (επιλεγμένες μεθόδους) εκτελούνται και οι αντίστοιχες συναρτήσεις.

### **Pause**

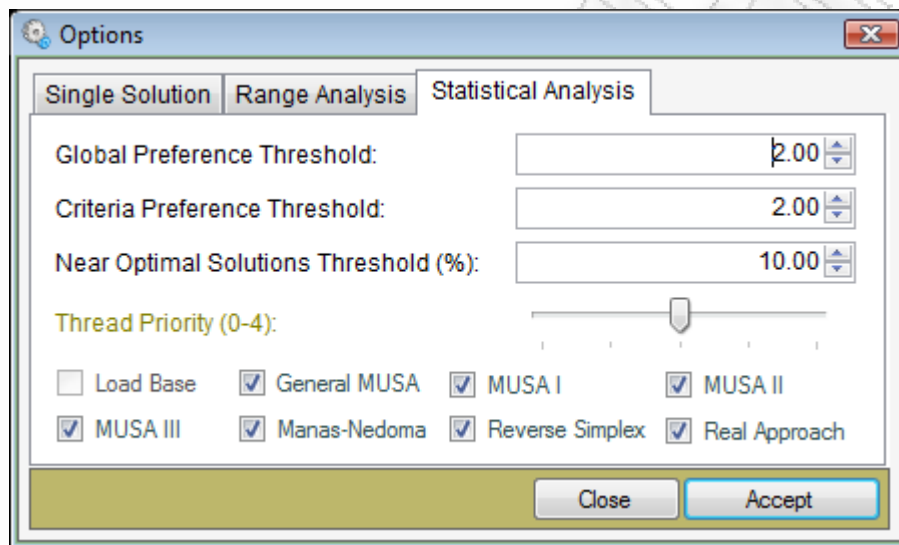
Προσωρινή παύση της διαδικασίας επίλυσης.

### **Stop**

Τερματισμός της διαδικασίας επίλυσης των προβλημάτων χωρίς προβολή αποτελεσμάτων.

### **Options**

Παράθυρο επιλογής ρυθμίσεων του τρόπου λύσης των προβλημάτων.

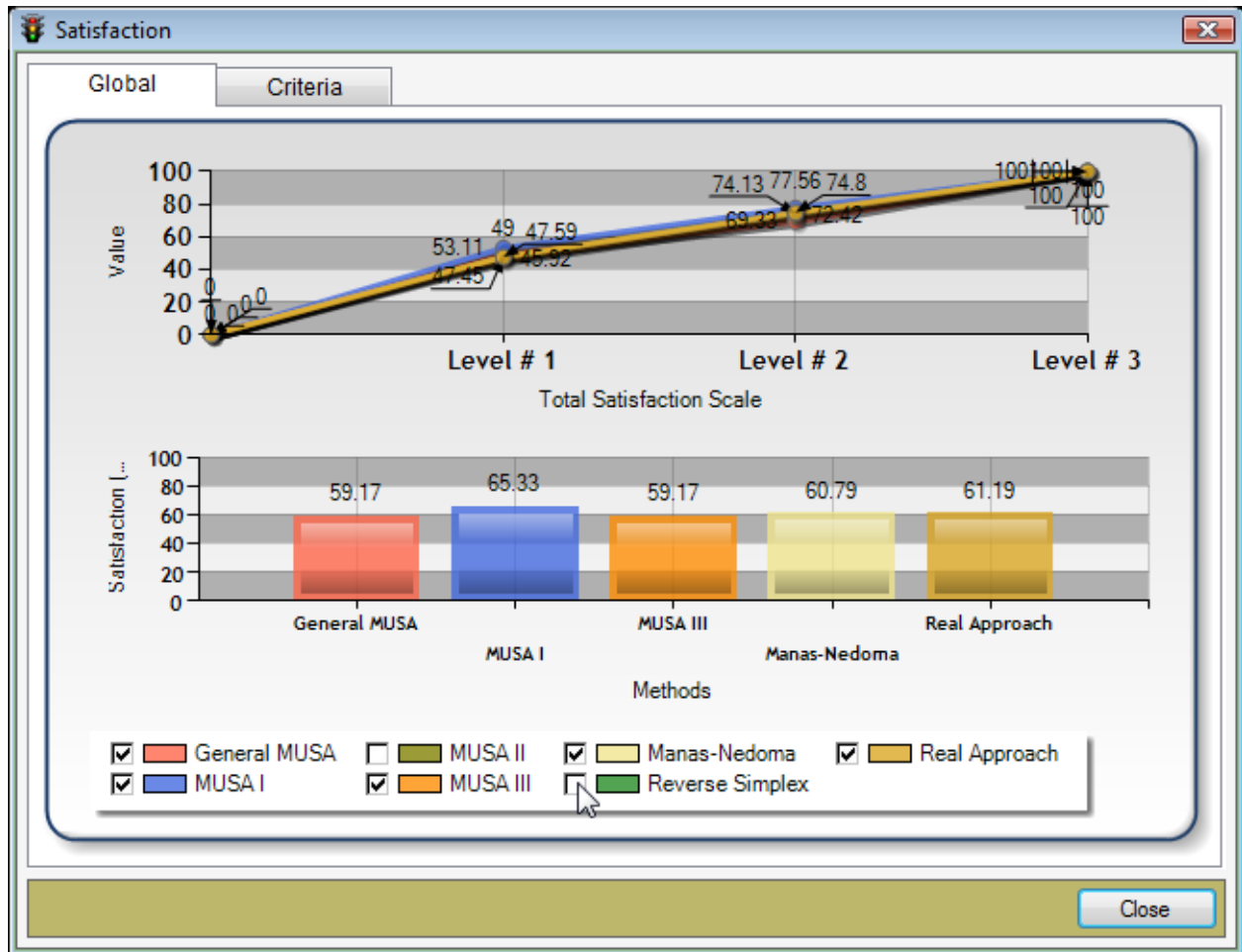


Εικόνα 8: Ρυθμίσεις συστήματος

### **Επιλογή Analysis**

#### **Satisfaction**

Προβολή σε παράθυρο με γραφήματα, των συναρτήσεων ικανοποίησης (ολική, μερική) των συγκεκριμένων ερωτηθέντων.

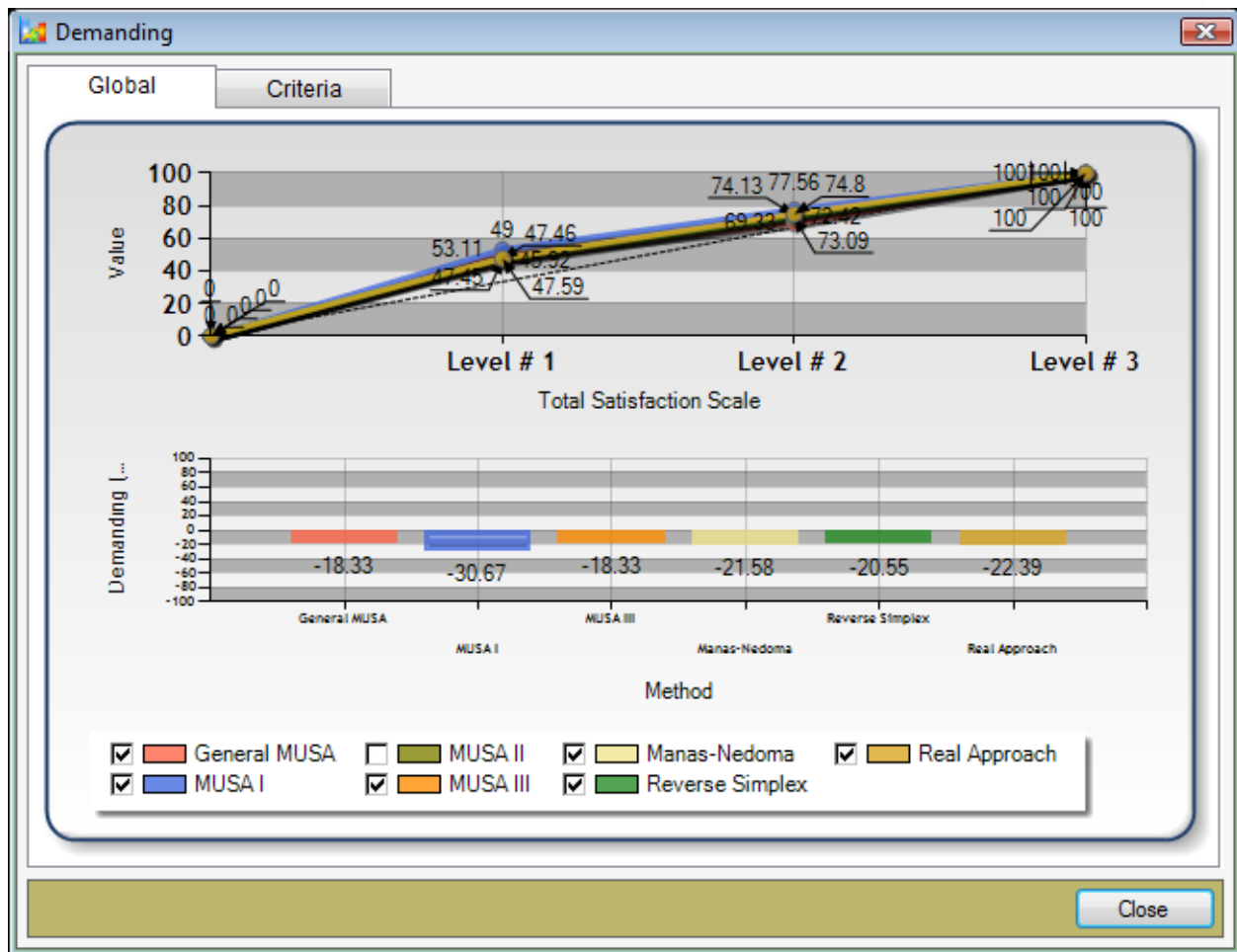


Εικόνα 9: Ικανοποίηση ερωτηθέντων

***Demanding***

Προβολή σε παράθυρο με γραφήματα, των συναρτήσεων απαιτητικότητας (ολική, μερική) των συγκεκριμένων ερωτηθέντων.

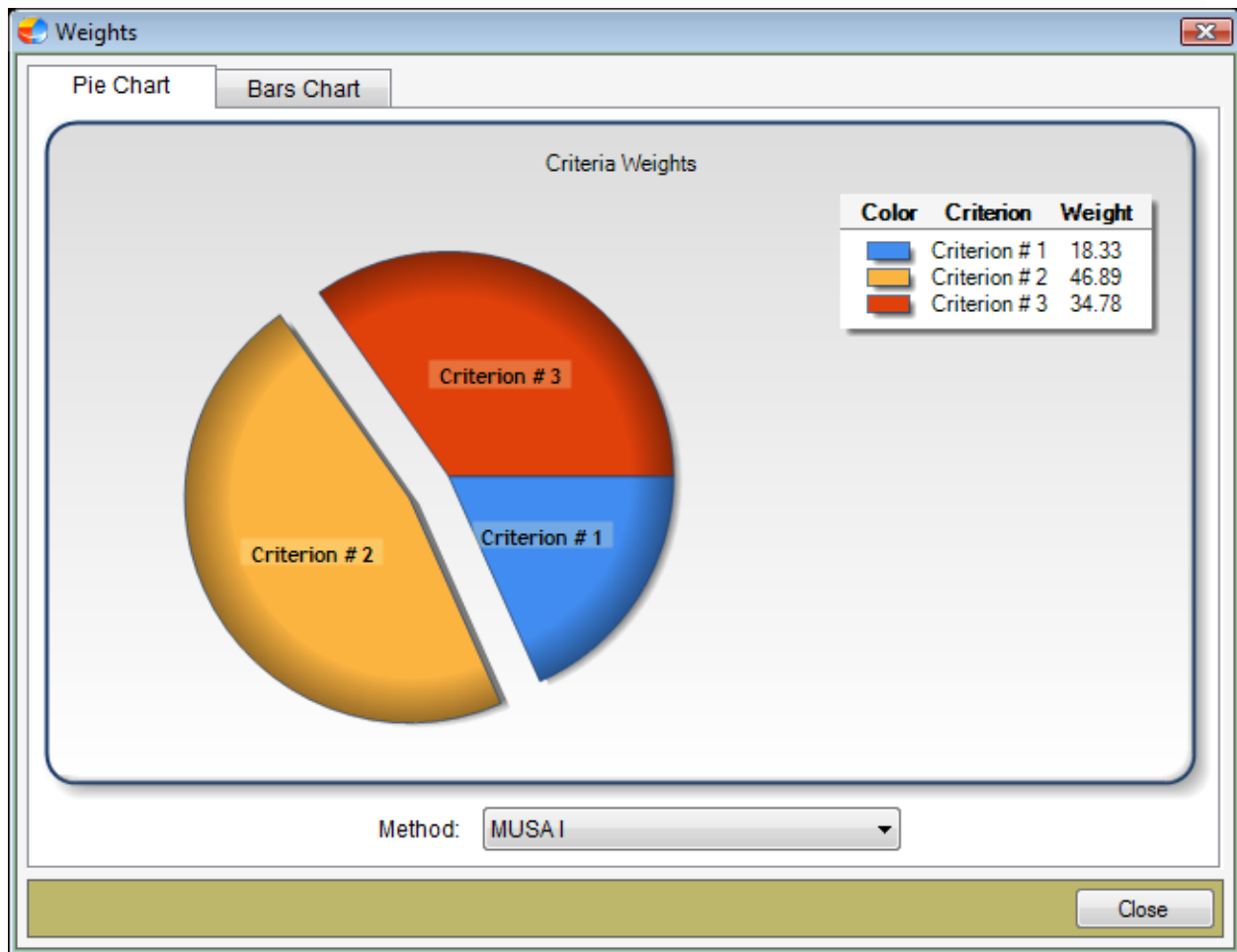




Εικόνα 10: Απαιτητικότητα ερωτηθέντων

### Weights

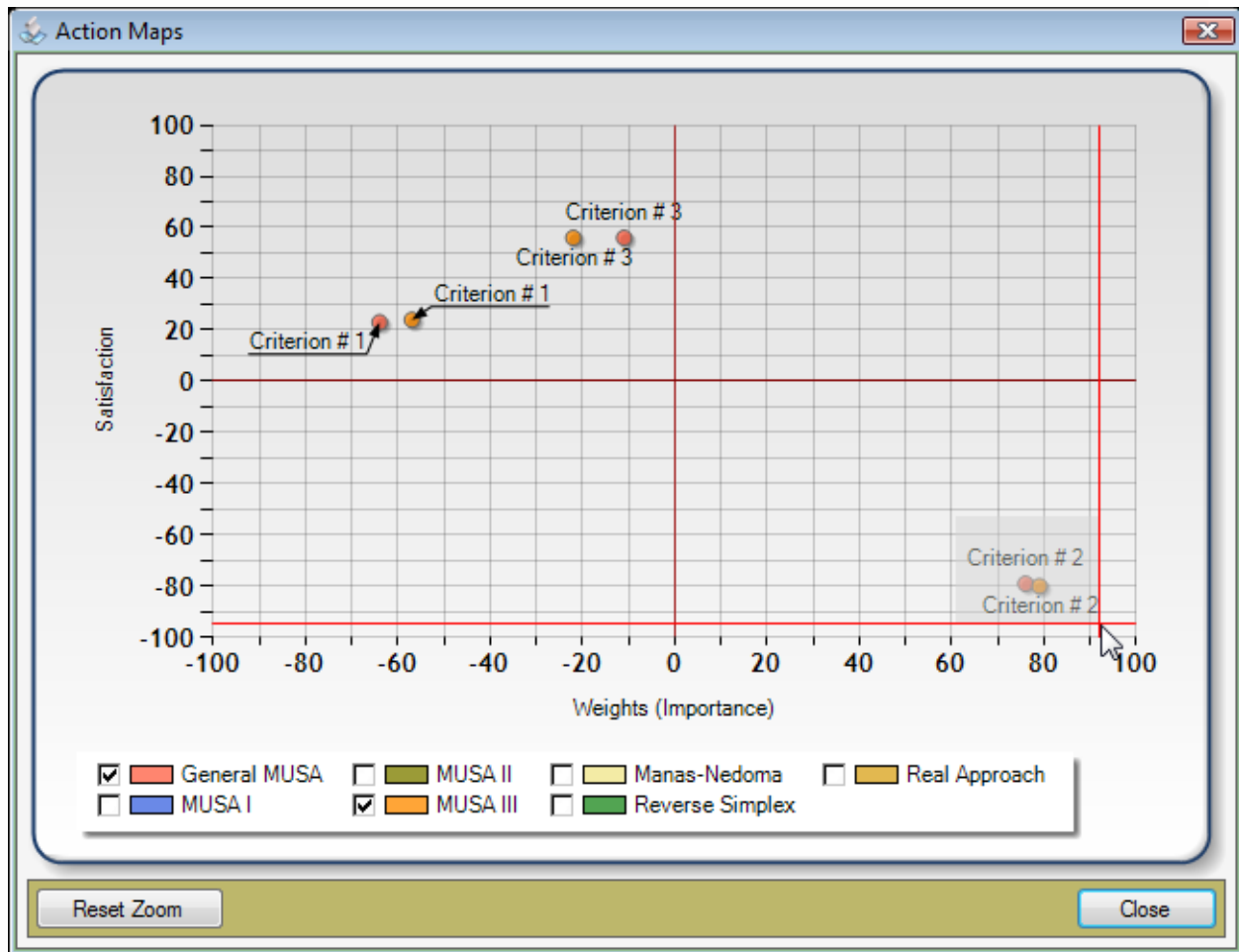
Προβολή σε παράθυρο με γραφήματα, των βαρών των κριτηρίων που προέκυψαν ύστερα από ανάλυση των απαντήσεων των συγκεκριμένων ερωτηθέντων.



Εικόνα 11: Βάρη κριτηρίων

### ***Action Maps***

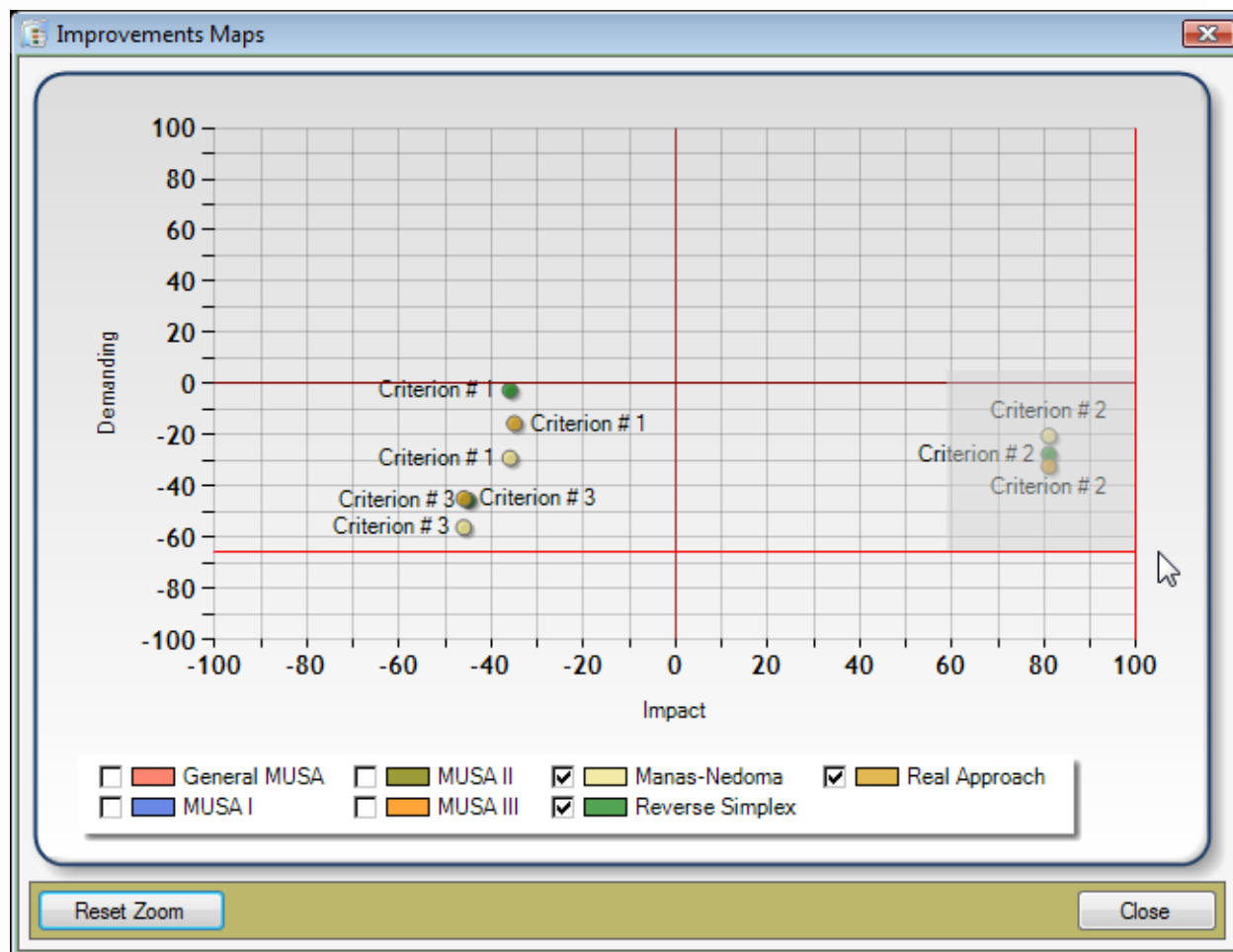
Προβολή χαρτών δράσης που προέκυψαν ύστερα από ανάλυση των απαντήσεων των συγκεκριμένων ερωτηθέντων.



Εικόνα 12: Action Maps

**Index Analysis**

Προβολή χαρτών βελτίωσης που προέκυψαν ύστερα από ανάλυση των απαντήσεων των συγκεκριμένων ερωτηθέντων.

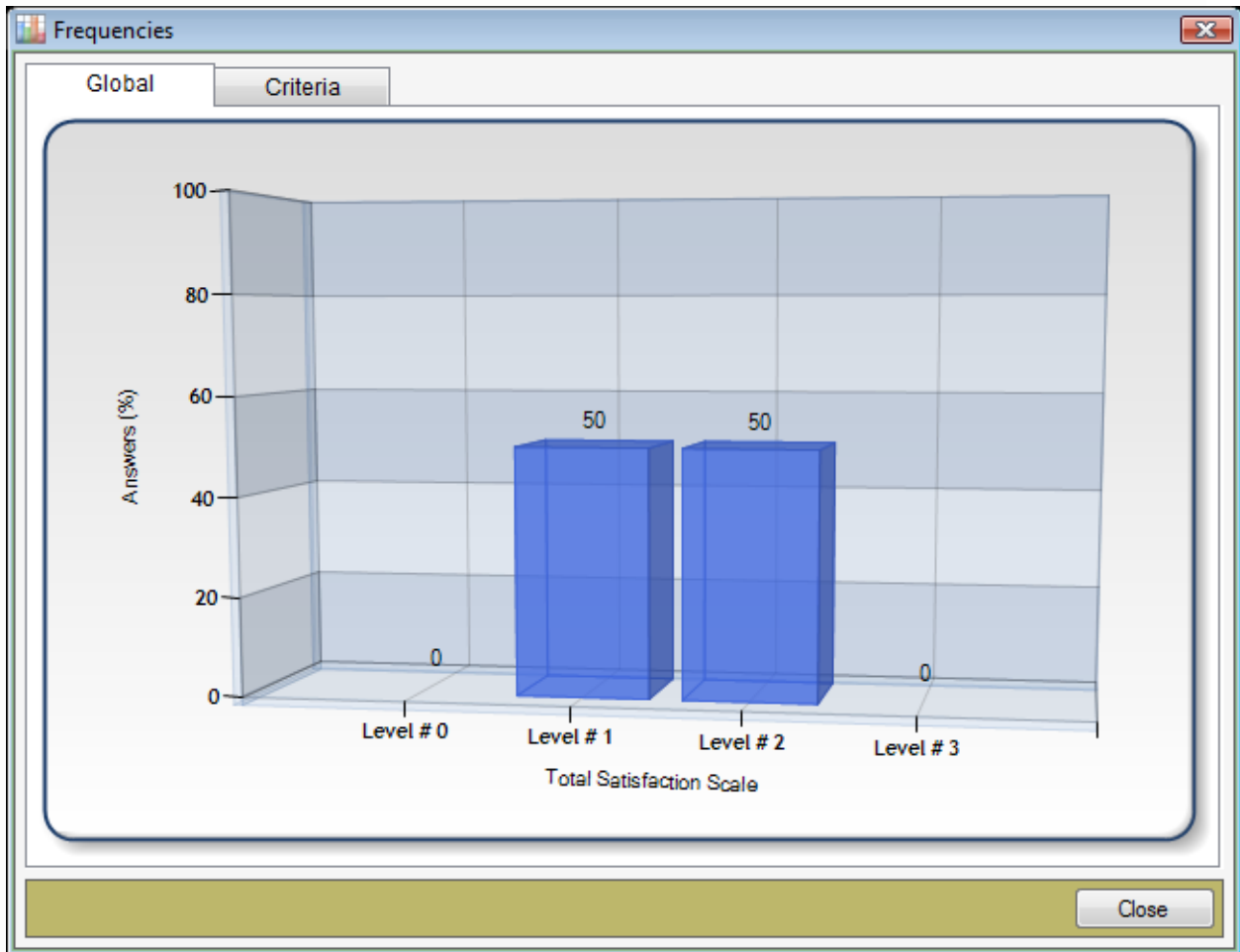


Εικόνα 13: Improvement Maps

### Επιλογή Statistical

#### *Frequencies*

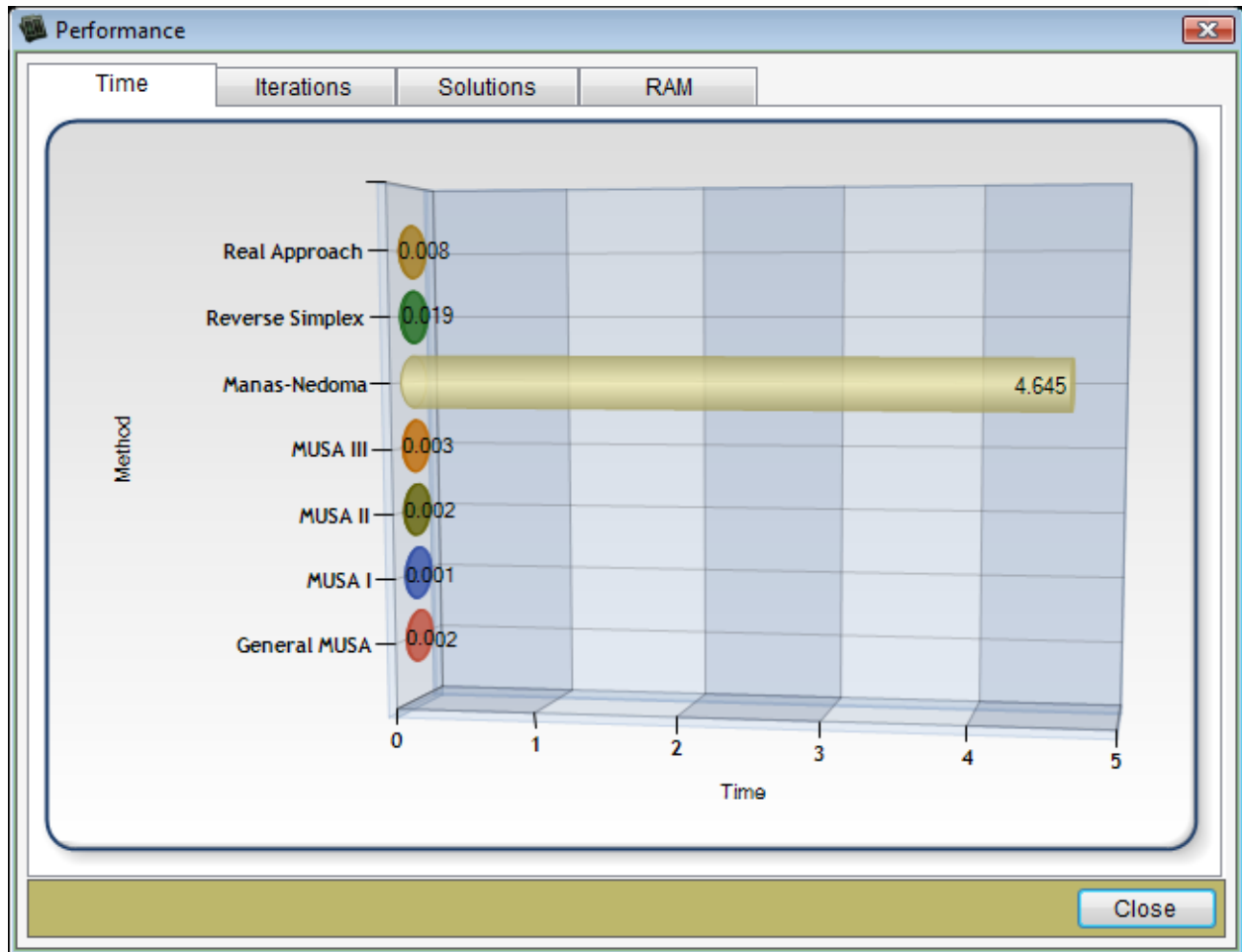
Προβολή με γραφικό τρόπο των απαντήσεων των συμμετεχόντων στην έρευνα.



Εικόνα 14: Προβολή απαντήσεων

### *Performance*

Προβολή του χρόνου, των iterations, των συνολικών λύσεων και της μνήμης που χρησιμοποιήθηκε κατά την διάρκεια επίλυσης των προβλημάτων.

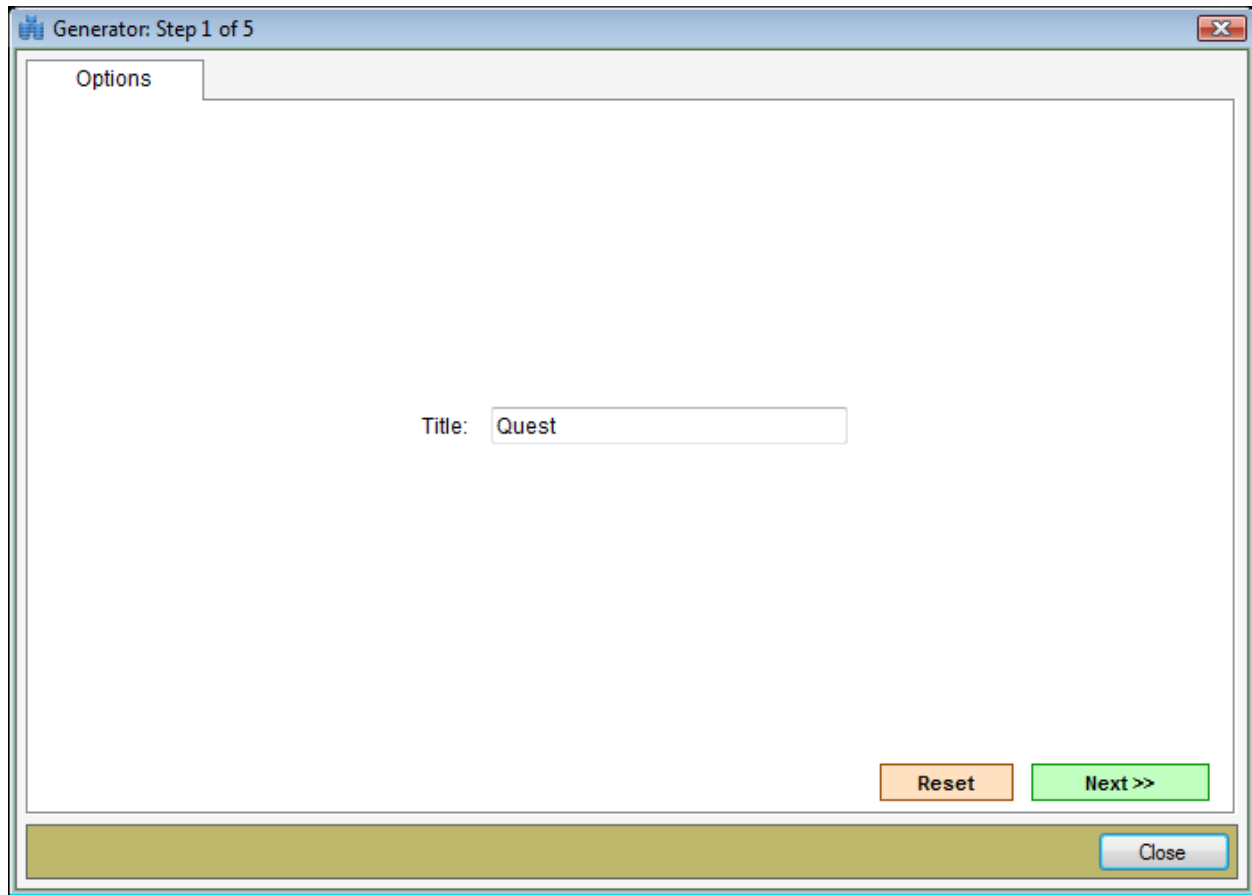


Εικόνα 15: Προβολή σχετικών στοιχείων επίλυσης

## Επιλογή Tools

### *Generator*

Πρόγραμμα δημιουργίας δεδομένων για δοκιμαστική χρήση σε προγράμματα Πολυκριτήριας Ανάλυσης.



Εικόνα 16: Πρόγραμμα δημιουργίας δεδομένων

### Επιλογή Window

#### ***Tile Horizontal***

Στοίχιση των ανοικτών παραθύρων σε οριζόντια διάταξη.

#### ***Tile Vertical***

Στοίχιση των ανοικτών παραθύρων σε κάθετη διάταξη.

#### ***Cascade***

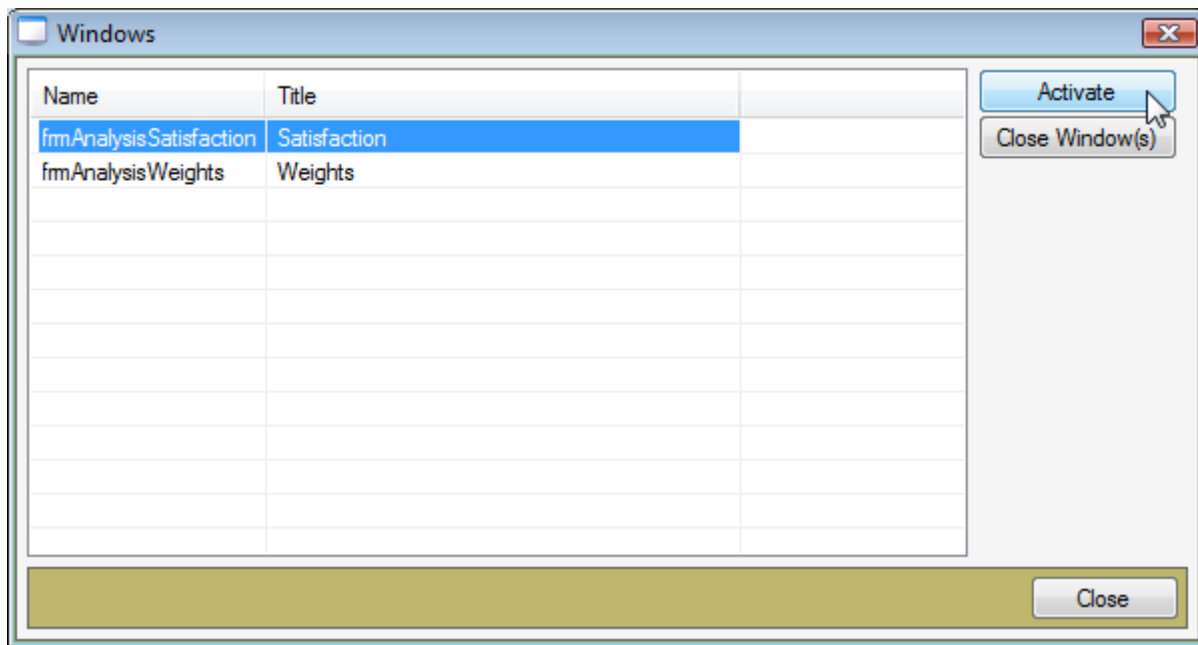
Στοίχιση των ανοικτών παραθύρων σε συνεχή σειρά.

#### ***Close All Windows***

Κλείσιμο όλων των ανοικτών παραθύρων.

#### ***Windows ...***

Άνοιγμα φόρμας το οποίο εμφανίζει όλα τα ανοικτά παράθυρα και επιτρέπει ορισμένες λειτουργίες.



Εικόνα 17: Φόρμα προβολής των ανοικτών παραθύρων

## Επιλογή Help

### *Contents*

Προβολή βοήθειας για τις λειτουργίες της εφαρμογής.

### *About ...*

Σχετικά χαρακτηριστικά της εφαρμογής.



## ΤΡΟΠΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ



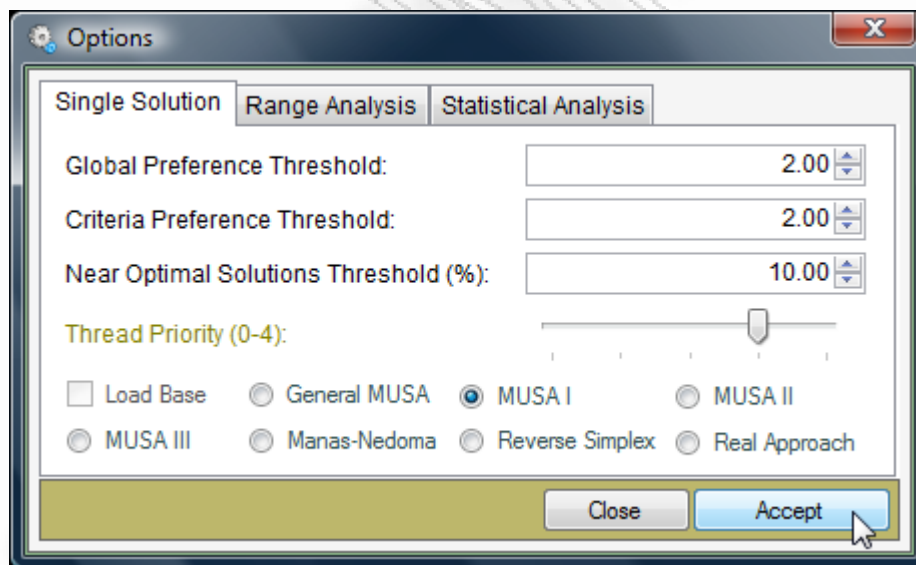
Εικόνα 18: Τρόπος επίλυσης

Υπάρχουν τρεις δυνατές επιλογές για την ανάλυση ικανοποίησης:

1. Single Solution (Απλή επίλυση)
2. Range Analysis (Ανάλυση εύρους)
3. Statistical Analysis (Επίλυση πάνω από μιας μεθόδου)

### Single Solution

Επιλέγοντας αυτόν τον τρόπο επίλυσης, θα χρησιμοποιηθεί μια μόνο μέθοδος στη διαδικασία μεταβελτιστοποίησης. Οι ρυθμίσεις που μπορεί να γίνουν στο σύστημα υπάρχουν στο παράθυρο “Options” από το μενού “Solver”.



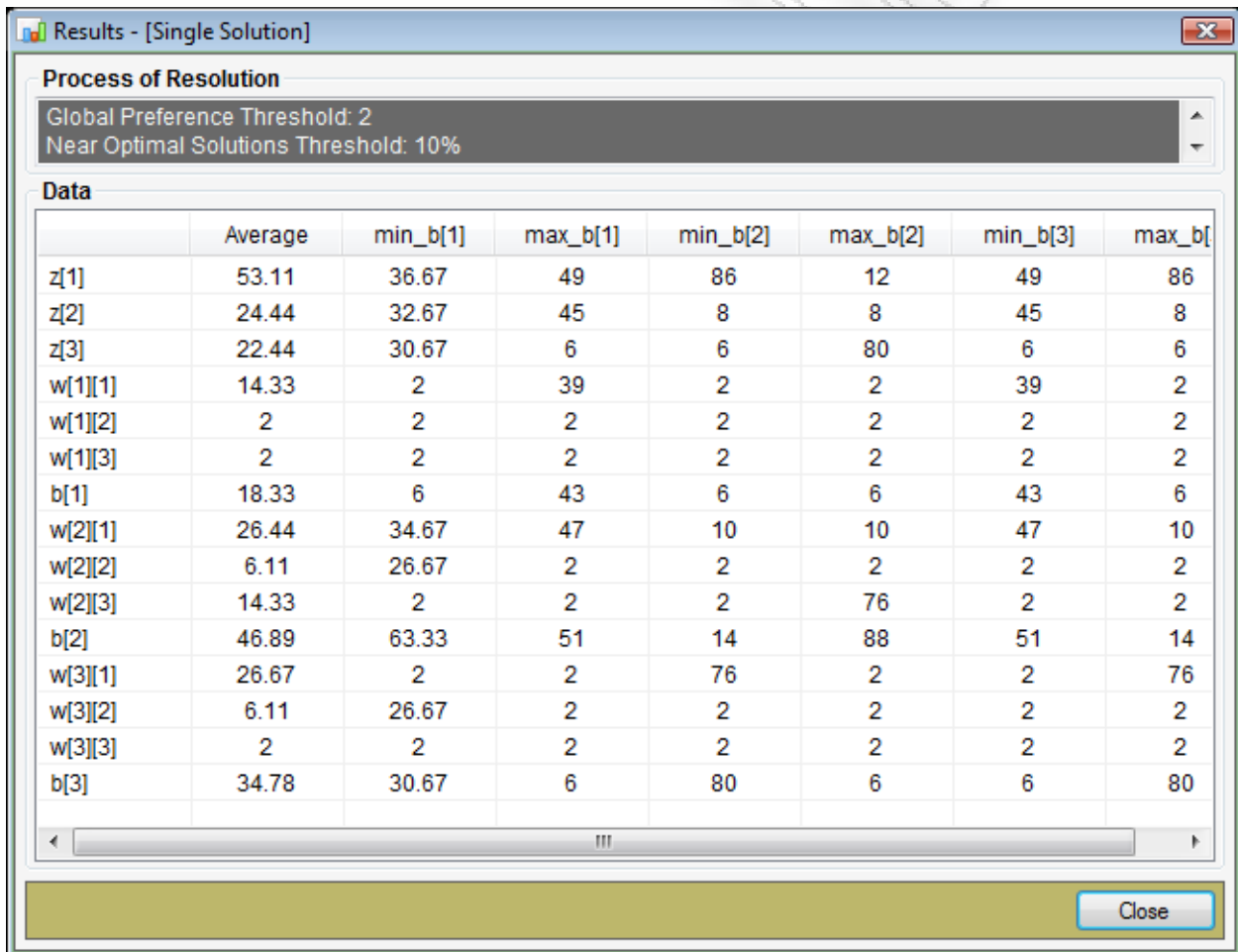
Εικόνα 19: Ρυθμίσεις Single Solution

- **Global Preference Threshold:** είναι το «βήμα» για τη συνάρτηση ολικής ικανοποίησης.
- **Criteria Preference Threshold:** είναι το «βήμα» για τις μερικές συναρτήσεις ικανοποίησης των κριτηρίων.
- **Near Optimal Solution Threshold:** εύρος τιμών στις οποίες θα αναζητηθούν οι λύσεις της μεταβελτιστοποίησης. Ο αριθμός αυτός πολλαπλασιάζεται με την τιμή της βέλτιστης λύσης.
- **Thread Priority:** ρύθμιση για το τι προτεραιότητα θα δώσει ο υπολογιστής στην εκτέλεση λειτουργιών της εφαρμογής.

- **Load Base:** φόρτωση ή όχι της βάσης της βέλτιστης λύσης στον solver κατά την διαδικασία μεταβελτιστοποίησης.
- **Method:** επιλογή μιας μεθόδου για μεταβελτιστοποίηση.

Για να αρχίσει η διαδικασία ανάλυσης της ικανοποίησης των ερωτηθέντων με βάση το συγκεκριμένο ερωτηματολόγιο, πρέπει να πατήσουμε το κουμπί “Start” (ή “F5” στο πληκτρολόγιο). Υπάρχει η δυνατότητα προσωρινής παύσης της διαδικασίας (πατώντας το κουμπί “Pause) καθώς επίσης και τερματισμού πριν από την ολοκλήρωσή της (πατώντας το κουμπί “Stop” ή “Shift + F5” στο πληκτρολόγιο). Στην τελευταία περίπτωση δεν εμφανίζονται αποτελέσματα ανάλυσης ικανοποίησης στον χρήστη.

Μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας εμφανίζεται ένα παράθυρο το οποίο έχει τα αποτελέσματα από όλες τις λύσεις των γραμμικών προβλημάτων.



The screenshot shows a window titled "Results - [Single Solution]". It contains a section "Process of Resolution" with the following text: "Global Preference Threshold: 2" and "Near Optimal Solutions Threshold: 10%". Below this is a table titled "Data" with the following columns: "Average", "min\_b[1]", "max\_b[1]", "min\_b[2]", "max\_b[2]", "min\_b[3]", and "max\_b[3]". The rows represent various variables and their values across different constraints.

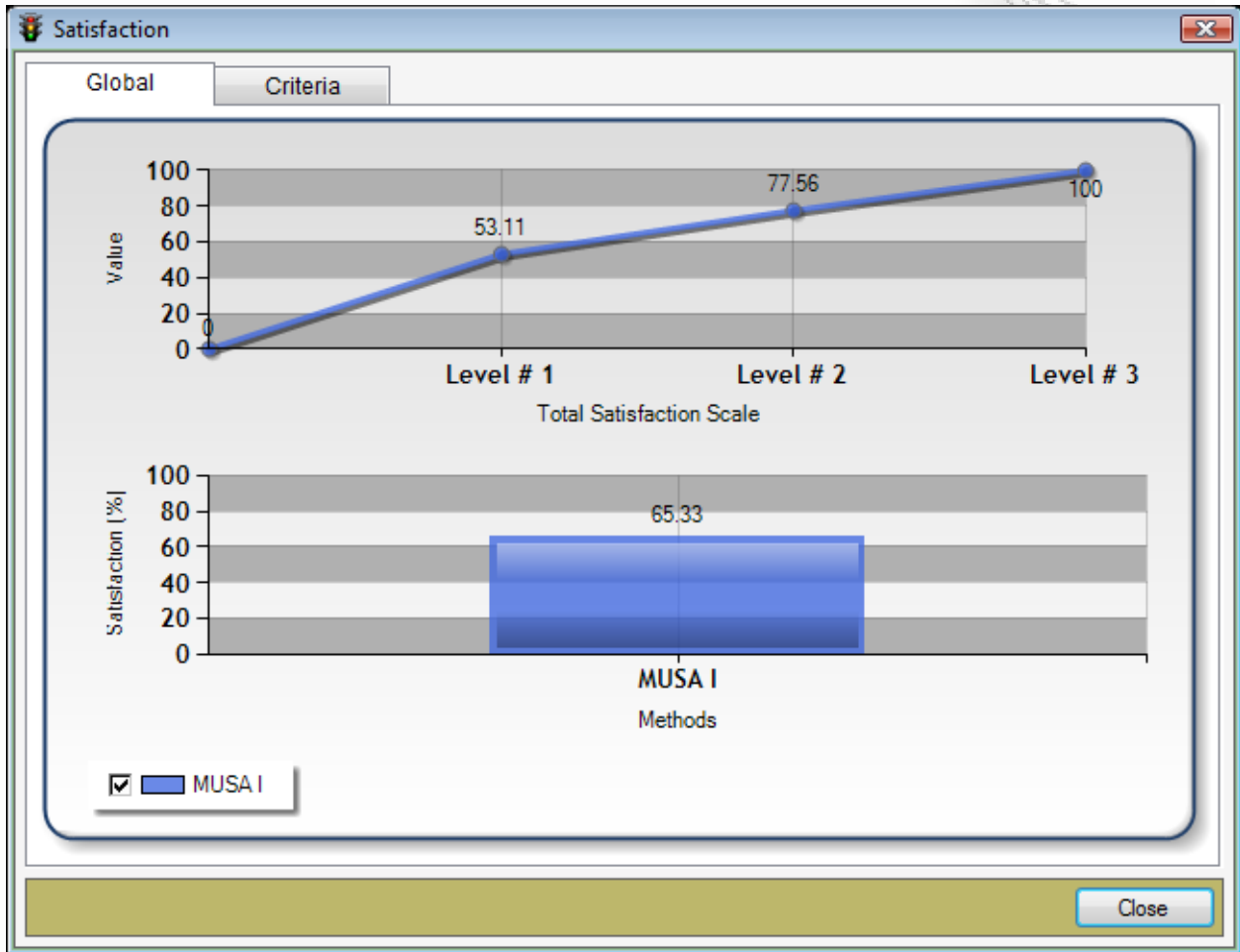
	Average	min_b[1]	max_b[1]	min_b[2]	max_b[2]	min_b[3]	max_b[3]
z[1]	53.11	36.67	49	86	12	49	86
z[2]	24.44	32.67	45	8	8	45	8
z[3]	22.44	30.67	6	6	80	6	6
w[1][1]	14.33	2	39	2	2	39	2
w[1][2]	2	2	2	2	2	2	2
w[1][3]	2	2	2	2	2	2	2
b[1]	18.33	6	43	6	6	43	6
w[2][1]	26.44	34.67	47	10	10	47	10
w[2][2]	6.11	26.67	2	2	2	2	2
w[2][3]	14.33	2	2	2	76	2	2
b[2]	46.89	63.33	51	14	88	51	14
w[3][1]	26.67	2	2	76	2	2	76
w[3][2]	6.11	26.67	2	2	2	2	2
w[3][3]	2	2	2	2	2	2	2
b[3]	34.78	30.67	6	80	6	6	80

Εικόνα 20: Προβολή των αποτελεσμάτων

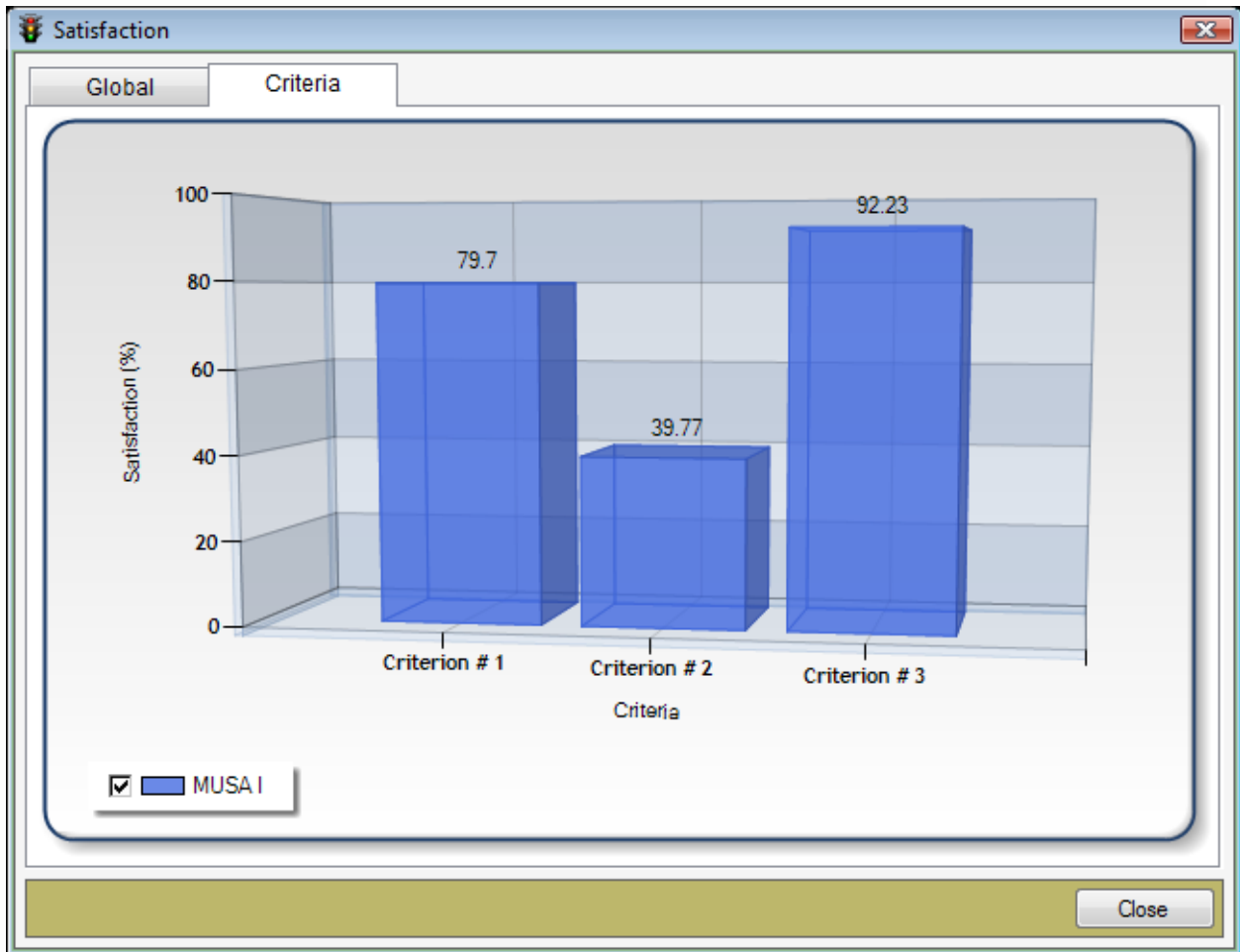
Υπάρχει η δυνατότητα προβολής γραφημάτων που απεικονίζουν την ικανοποίηση (ολική και μερική), την απαιτητικότητα (ολική και μερική) και τα βάρη των κριτηρίων.

### Ικανοποίηση ερωτηθέντων

Πατώντας το κουμπί “Satisfaction” (“Analysis” → “Satisfaction”) ανοίγει το παράθυρο προβολής με γραφήματα της ολικής και μερικής ικανοποίησης.



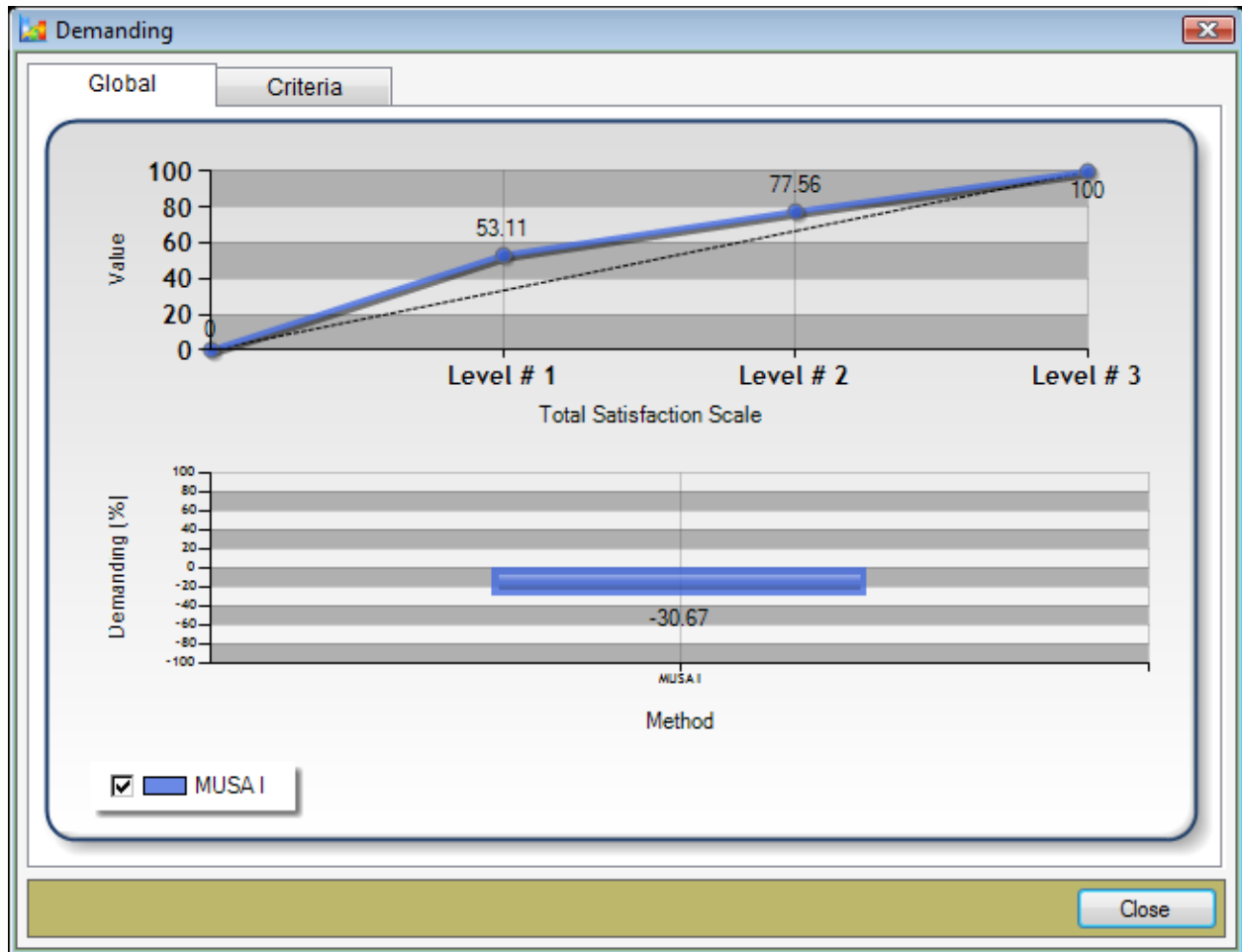
Εικόνα 21: Παράθυρο προβολής της ικανοποίησης (Ολική)



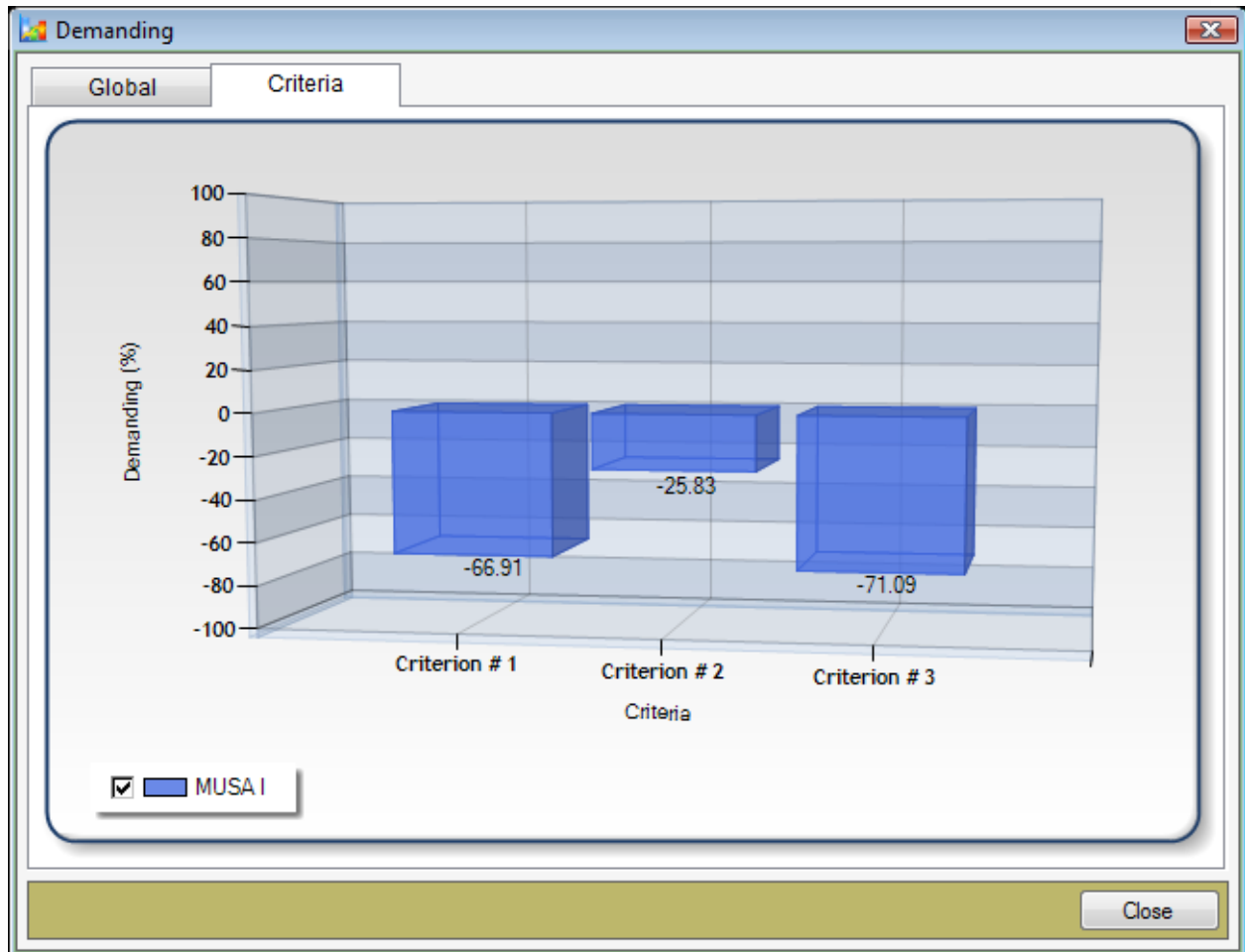
Εικόνα 22: Παράθυρο προβολής της ικανοποίησης (Μερική)

### Απαιτητικότητα ερωτηθέντων

Πατώντας το κουμπί “Demanding” (“Analysis” → “Demanding”) ανοίγει το παράθυρο προβολής, με γραφήματα, της ολικής και μερικής απαιτητικότητας.



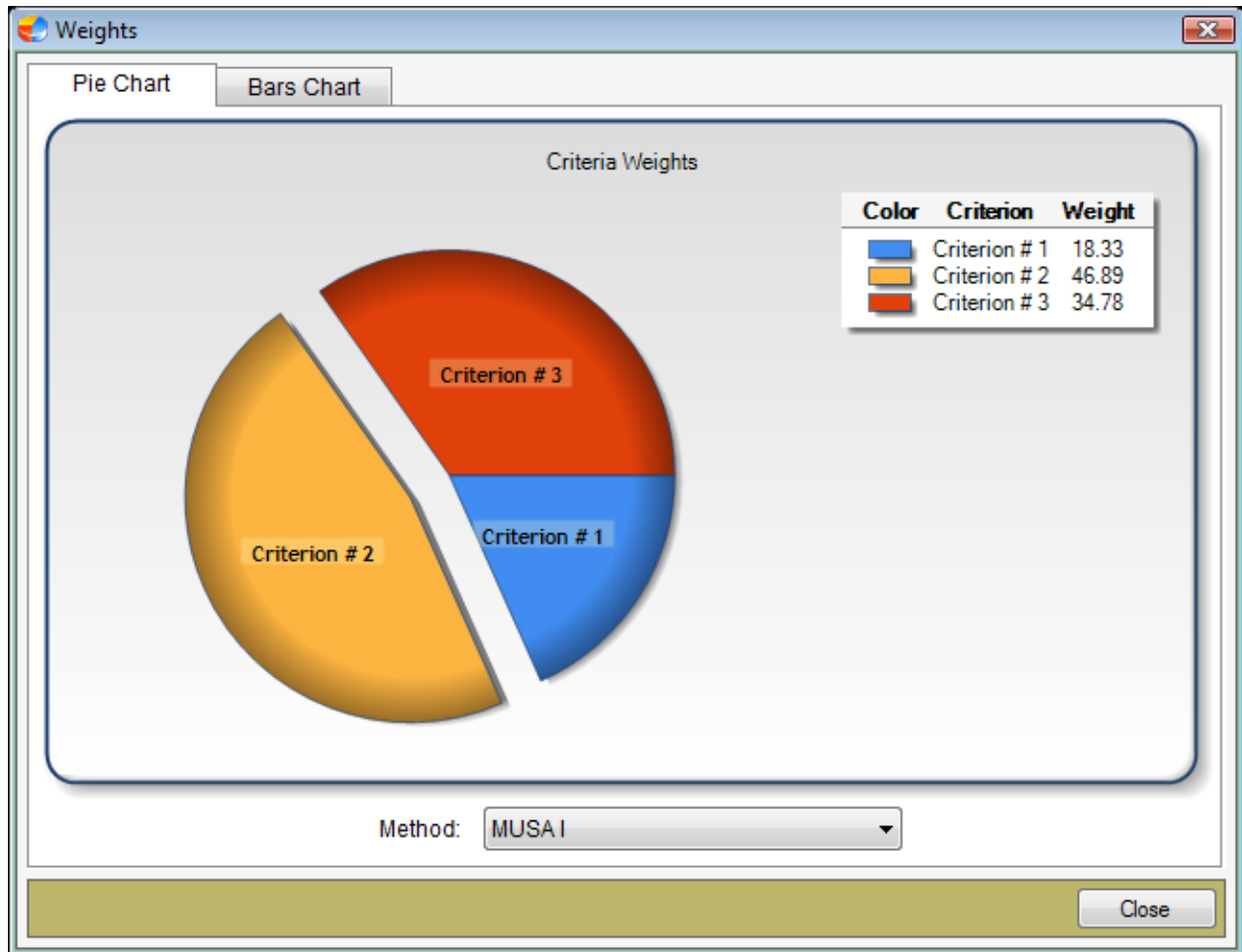
Εικόνα 23: Παράθυρο προβολής της απαιτητικότητας (Ολική)



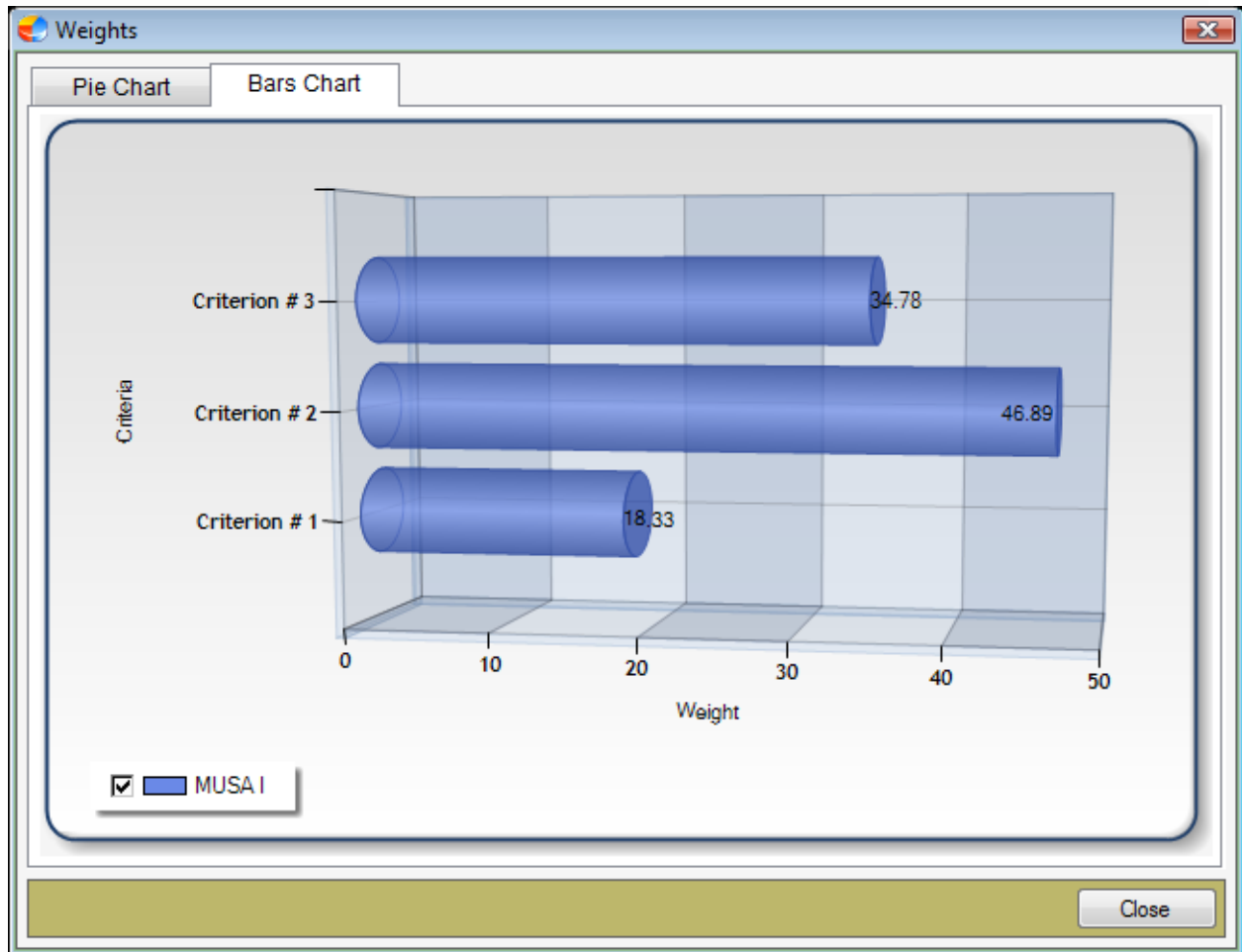
Εικόνα 24: Παράθυρο προβολής της απαιτητικότητας (Μερική)

### Βάρη κριτηρίων

Πατώντας το κουμπί "Weights" ("Analysis" → "Weights") ανοίγει το παράθυρο προβολής, με γραφήματα, των βαρών των κριτηρίων.



Εικόνα 25: Παράθυρο προβολής των βαρών των κριτηρίων (Πίτα)

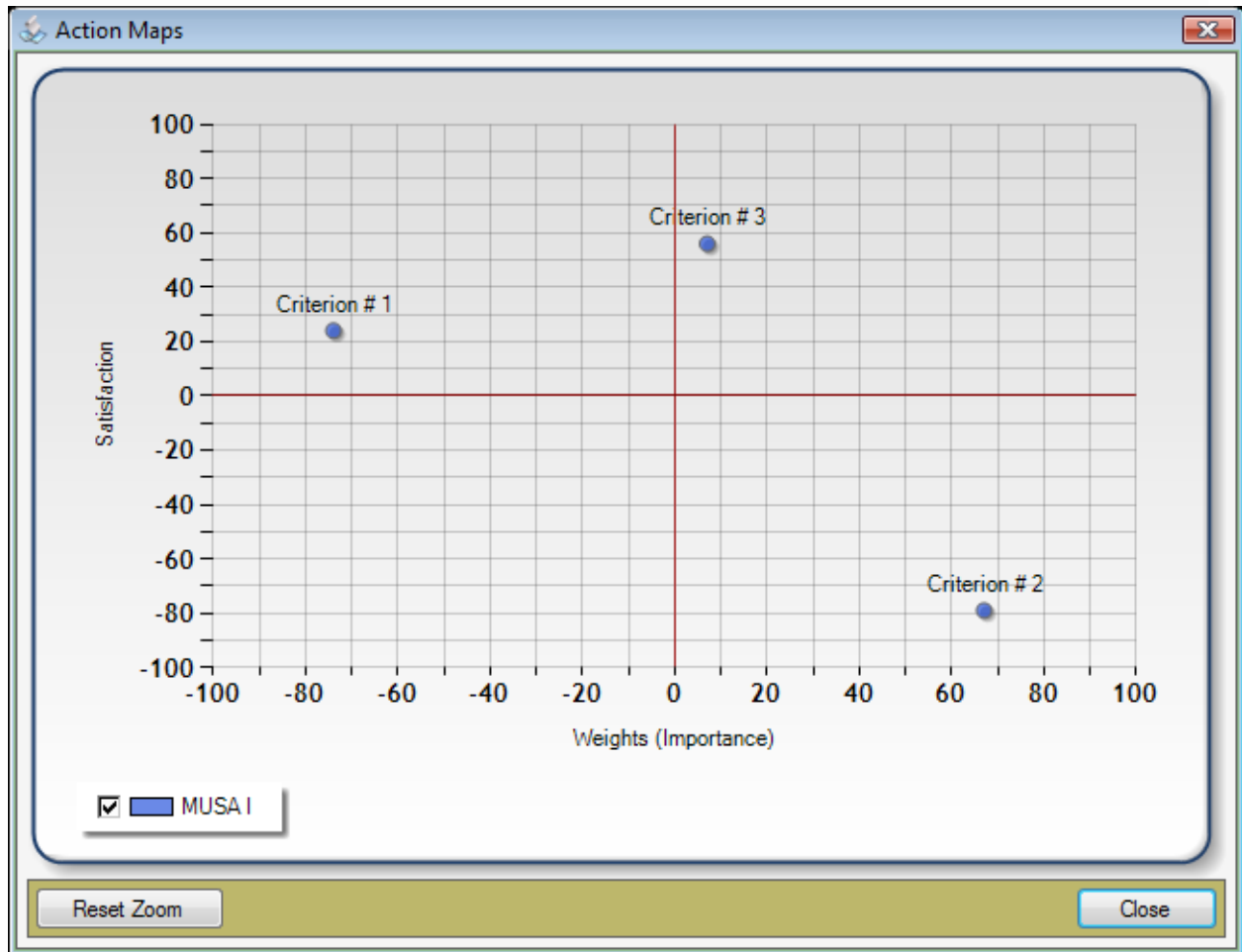


Εικόνα 26: Παράθυρο προβολής των βαρών των κριτηρίων (Μπάρες)

### Διάγραμμα Δράσης

Πατώντας το κουμπί “Action Maps” (“Analysis” → “Action Maps”) ανοίγει το παράθυρο προβολής, με γράφημα, του διαγράμματος δράσης.

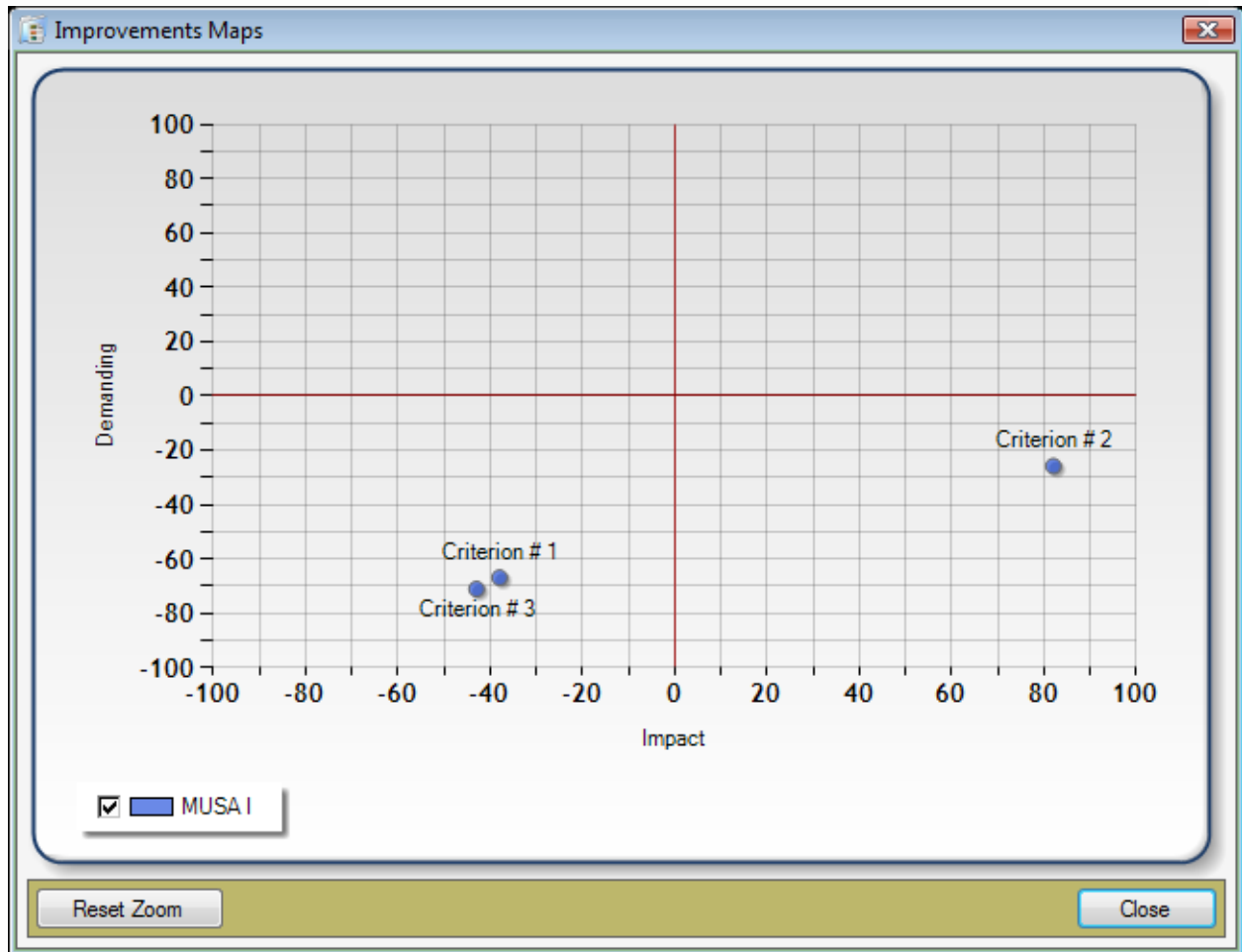




Εικόνα 27: Διάγραμμα Δράσης

### Διάγραμμα Βελτίωσης

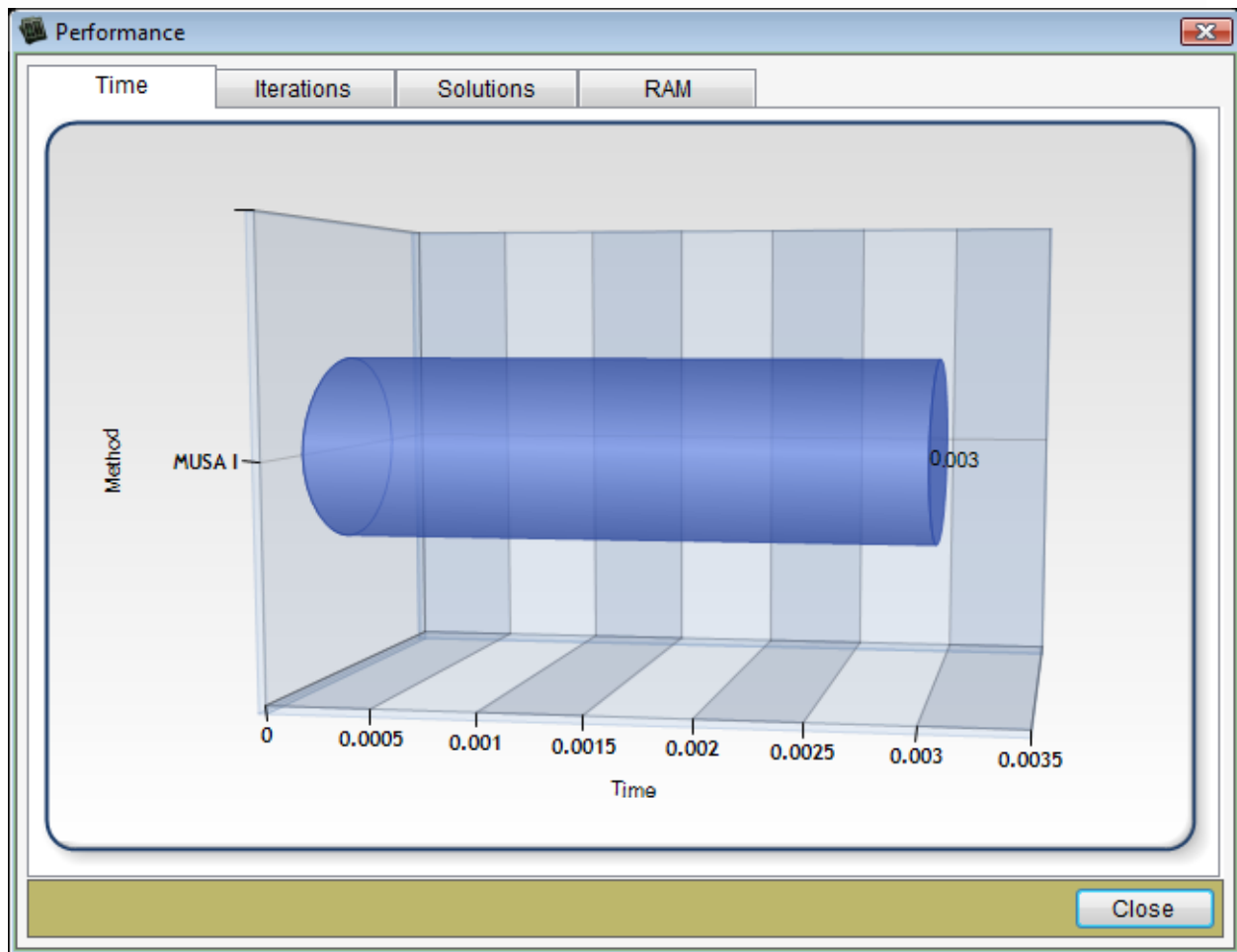
Πατώντας το κουμπί "Improvement Maps" ("Analysis" → "Improvement Maps") ανοίγει το παράθυρο προβολής, με γράφημα, του διαγράμματος βελτίωσης.



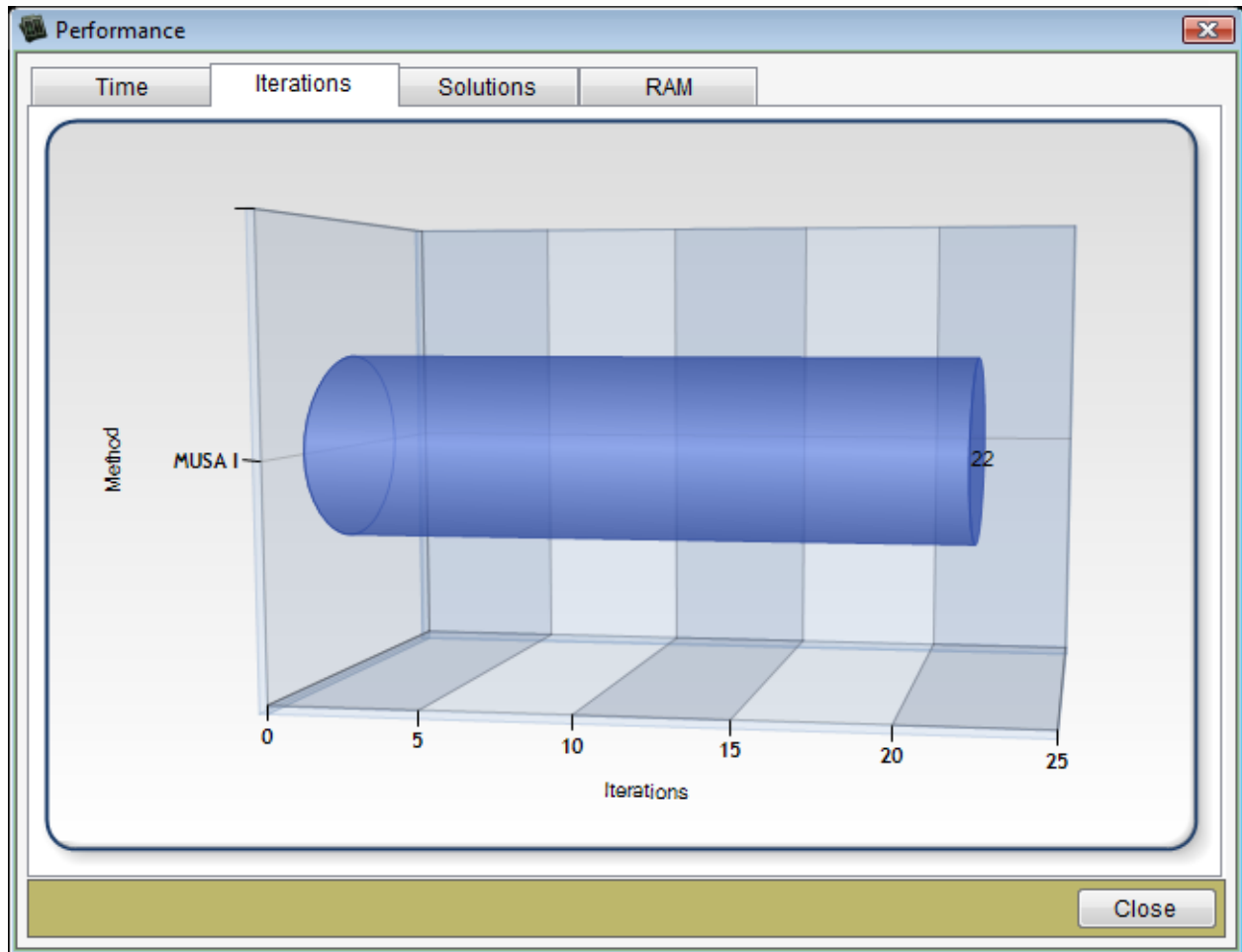
Εικόνα 28: Διάγραμμα Βελτίωσης

### Γραφήματα Απόδοσης

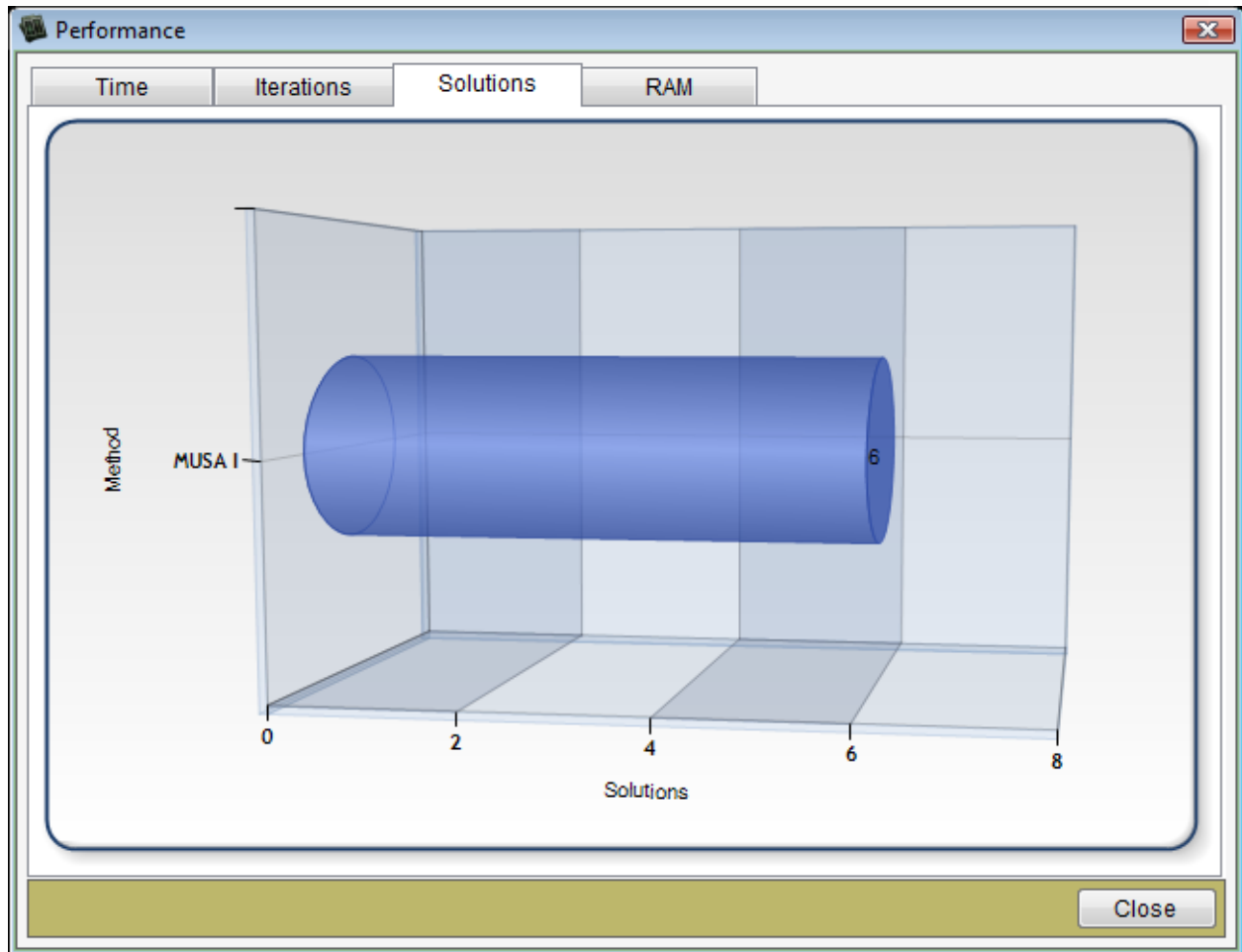
Πατώντας το κουμπί "Performance" ("Statistical" → "Performance") ανοίγει το παράθυρο προβολής, με γράφημα, της απόδοσης του συστήματος.



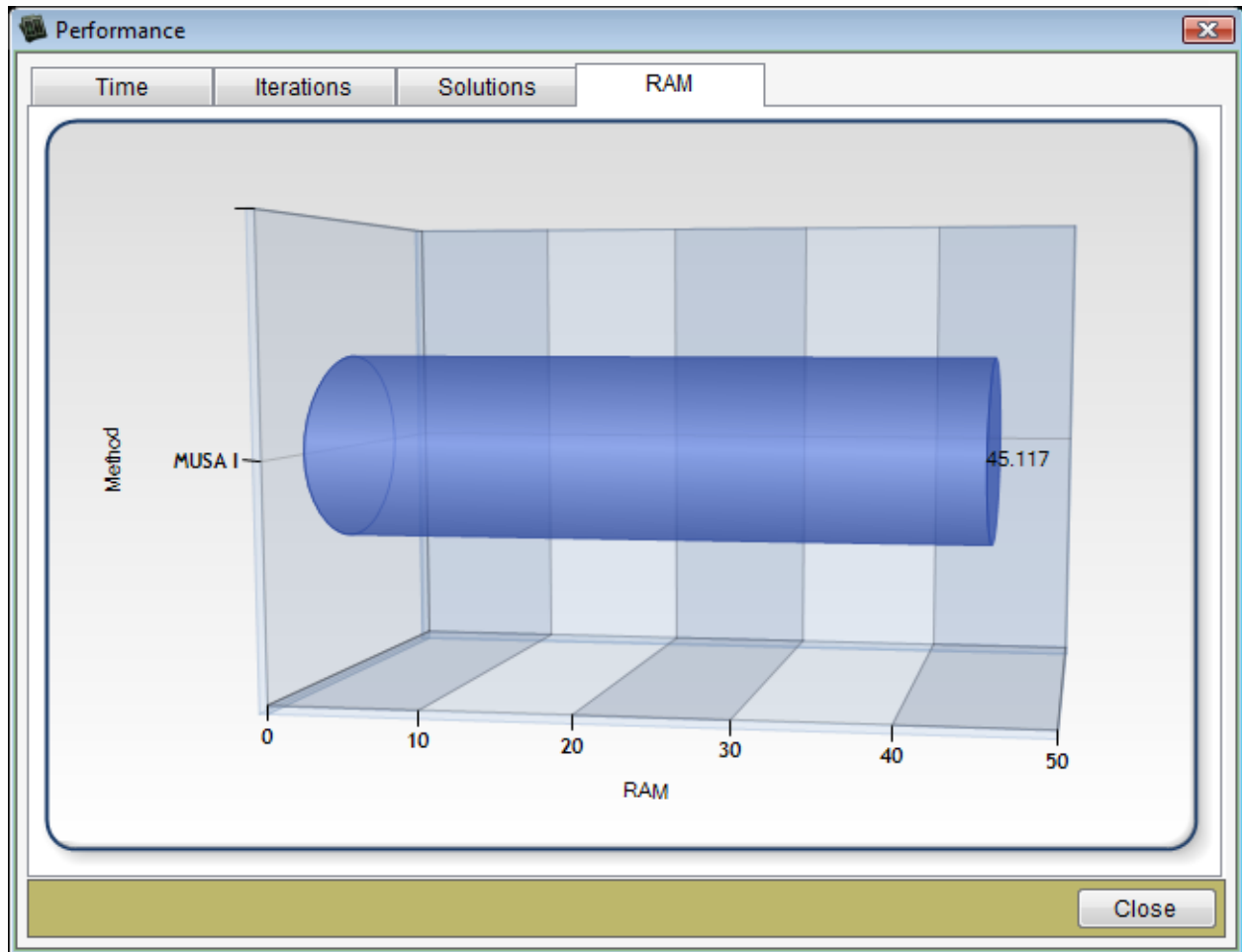
Εικόνα 29: Γράφημα Απόδοσης (χρόνος επίλυσης σε min)



Εικόνα 30: Γράφημα Απόδοσης (συνολικός αριθμός iterations)



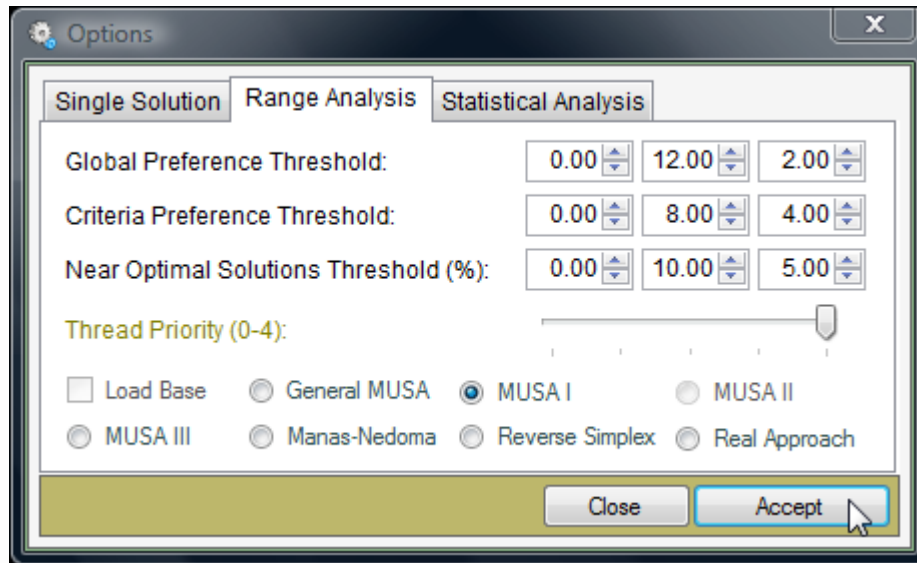
Εικόνα 31: Γράφημα Απόδοσης (συνολικός αριθμός λύσεων)



Εικόνα 32: Γράφημα Απόδοσης (μνήμη που χρησιμοποιήθηκε για την λύση του προβλήματος)

### Range Analysis

Επιλέγοντας αυτόν τον τρόπο επίλυσης, θα χρησιμοποιηθεί μια μόνο μέθοδος στη διαδικασία μεταβελτιστοποίησης. Οι ρυθμίσεις που μπορεί να γίνουν στο σύστημα υπάρχουν στο παράθυρο "Options" από το μενού "Solver".



Εικόνα 33: Ρυθμίσεις Range Analysis

- **Global Preference Threshold:** είναι το «βήμα» για τη συνάρτηση ολικής ικανοποίησης.
  - Στο πρώτο πλαίσιο είναι η τιμή από την οποία θα ξεκινάει το GPT.
  - Στο μεσαίο πλαίσιο είναι η τιμή στην οποία θα τελειώνει το GPT.
  - Στο τελευταίο πλαίσιο είναι ο ρυθμός αύξησης του GPT.
- **Criteria Preference Threshold:** είναι το «βήμα» για τις μερικές συναρτήσεις ικανοποίησης των κριτηρίων.
  - Στο πρώτο πλαίσιο είναι η τιμή από την οποία θα ξεκινάει το CPT.
  - Στο μεσαίο πλαίσιο είναι η τιμή στην οποία θα τελειώνει το CPT.
  - Στο τελευταίο πλαίσιο είναι ο ρυθμός αύξησης του CPT.
- **Near Optimal Solution Threshold:** εύρος τιμών στις οποίες θα αναζητηθούν οι λύσεις της μεταβελτιστοποίησης. Ο αριθμός αυτός πολλαπλασιάζεται με την τιμή της βέλτιστης λύσης.
  - Στο πρώτο πλαίσιο είναι η τιμή από την οποία θα ξεκινάει το NOST.
  - Στο μεσαίο πλαίσιο είναι η τιμή στην οποία θα τελειώνει το NOST.
  - Στο τελευταίο πλαίσιο είναι ο ρυθμός αύξησης του NOST.
- **Thread Priority:** ρύθμιση για το τι προτεραιότητα θα δώσει ο υπολογιστής στην εκτέλεση λειτουργιών της εφαρμογής.
- **Load Base:** φόρτωση η όχι της βάσης της βέλτιστης λύσεις στον solver κατά την διαδικασία μεταβελτιστοποίησης.
- **Method:** επιλογή μιας μεθόδου για μεταβελτιστοποίηση.

Για να αρχίσει η διαδικασία ανάλυσης της ικανοποίησης των ερωτηθέντων με βάση το συγκεκριμένο ερωτηματολόγιο, πρέπει να πατήσουμε το κουμπί “Start” (ή “F5” στο πληκτρολόγιο). Υπάρχει η δυνατότητα προσωρινής παύσης της διαδικασίας (πατώντας το κουμπί “Pause) καθώς επίσης και τερματισμού πριν από την ολοκλήρωσή της (πατώντας το κουμπί “Stop” ή “Shift + F5” στο πληκτρολόγιο). Στην τελευταία περίπτωση δεν εμφανίζονται αποτελέσματα ανάλυσης ικανοποίησης στον χρήστη.

Μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας εμφανίζεται ένα παράθυρο το οποίο έχει τα αποτελέσματα για τους δείκτες Fitting Index, Stability Index και Prediction Index ανά συνδυασμό GPT, CPT και NOST.

The screenshot shows a window titled "Results - [Range Analysis]". It contains a section "Process of Resolution" with the text "Method used: MUSA I" and "Double Click a row to see further details.". Below this is a table with the following data:

Global_T	Crit_T	Epsilon_T	Fitting	Stability	Prediction
0	0	0%	99.33%	26.51%	100%
0	0	5%	99.33%	26.51%	100%
0	0	10%	99.33%	26.51%	100%
0	4	0%	99.33%	64.72%	100%
0	4	5%	99.33%	64.72%	100%
0	4	10%	99.33%	64.72%	100%
0	8	0%	99.33%	100%	100%
0	8	5%	99.33%	99.84%	100%
0	8	10%	99.33%	99.69%	100%
2	0	0%	99.33%	25.51%	100%
2	0	5%	99.33%	25.51%	100%
2	0	10%	99.33%	25.51%	100%
2	4	0%	99.33%	64.72%	100%
2	4	5%	99.33%	64.72%	100%
2	4	10%	99.33%	64.72%	100%
2	8	0%	99.33%	100%	100%
2	8	5%	99.33%	99.84%	100%

Εικόνα 34: Συνολικά αποτελέσματα Range Analysis

Πατώντας διπλό κλικ σε κάποιον από αυτούς τους συνδυασμούς στην λίστα, ανοίγει ένα νέο παράθυρο με τα πλήρη αποτελέσματα από την λύση των γραμμικών προβλημάτων.



**Process of Resolution**  
 Global Preference Threshold: 0  
 Near Optimal Solutions Threshold: 0%

**Data**

	Average	min_b[1]	max_b[1]	min_b[2]	max_b[2]	min_b[3]	max_b[3]
z[1]	55.56	33.33	50	100	0	50	100
z[2]	22.22	33.33	50	0	0	50	0
z[3]	22.22	33.33	0	0	100	0	0
w[1][1]	16.67	0	50	0	0	50	0
w[1][2]	0	0	0	0	0	0	0
w[1][3]	0	0	0	0	0	0	0
b[1]	16.67	0	50	0	0	50	0
w[2][1]	22.22	33.33	50	0	0	50	0
w[2][2]	5.56	33.33	0	0	0	0	0
w[2][3]	16.67	0	0	0	100	0	0
b[2]	44.44	66.67	50	0	100	50	0
w[3][1]	33.33	0	0	100	0	0	100
w[3][2]	5.56	33.33	0	0	0	0	0
w[3][3]	0	0	0	0	0	0	0
b[3]	38.89	33.33	0	100	0	0	100

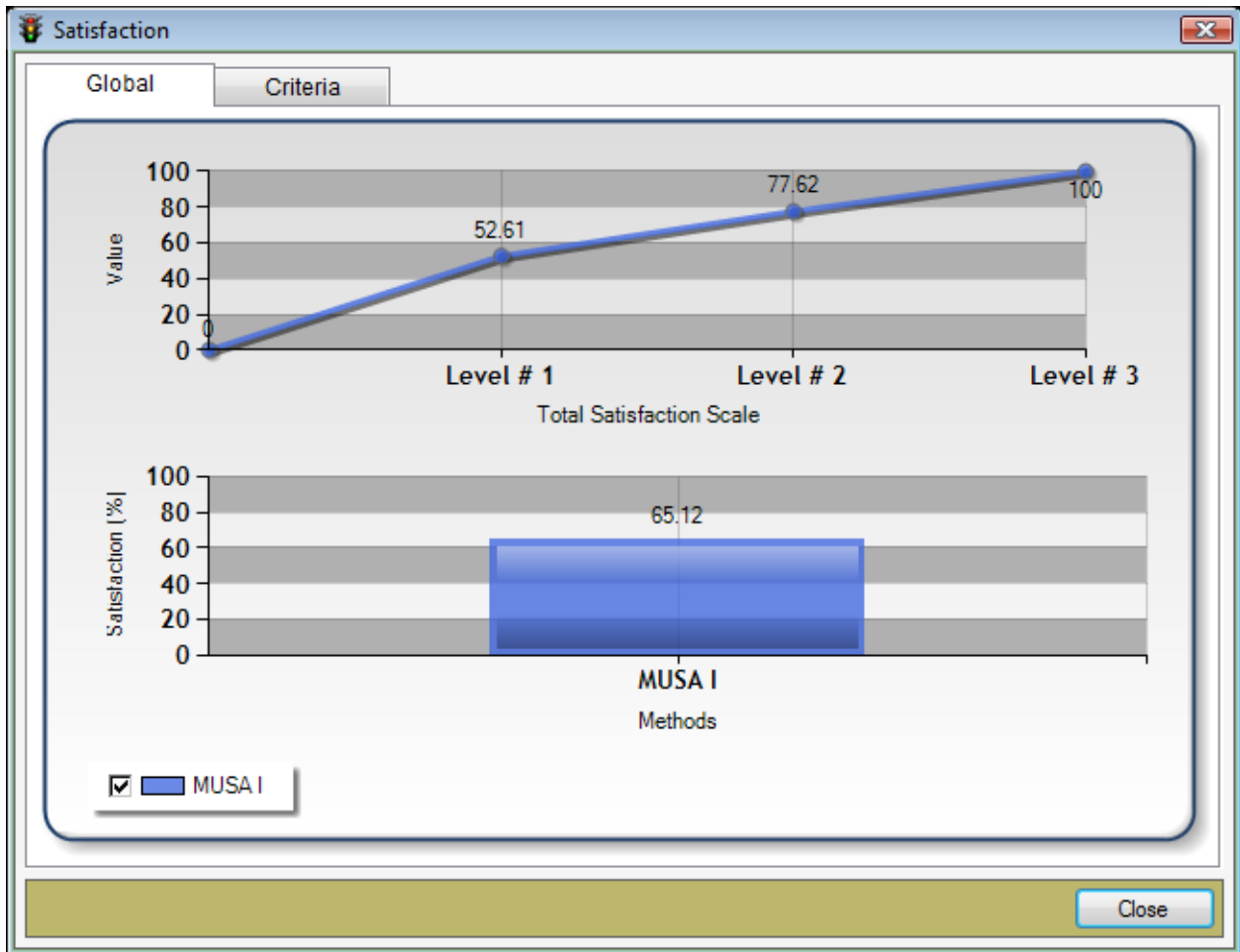
Buttons: Save, Close

**Εικόνα 35: Μερικά αποτελέσματα Range Analysis**

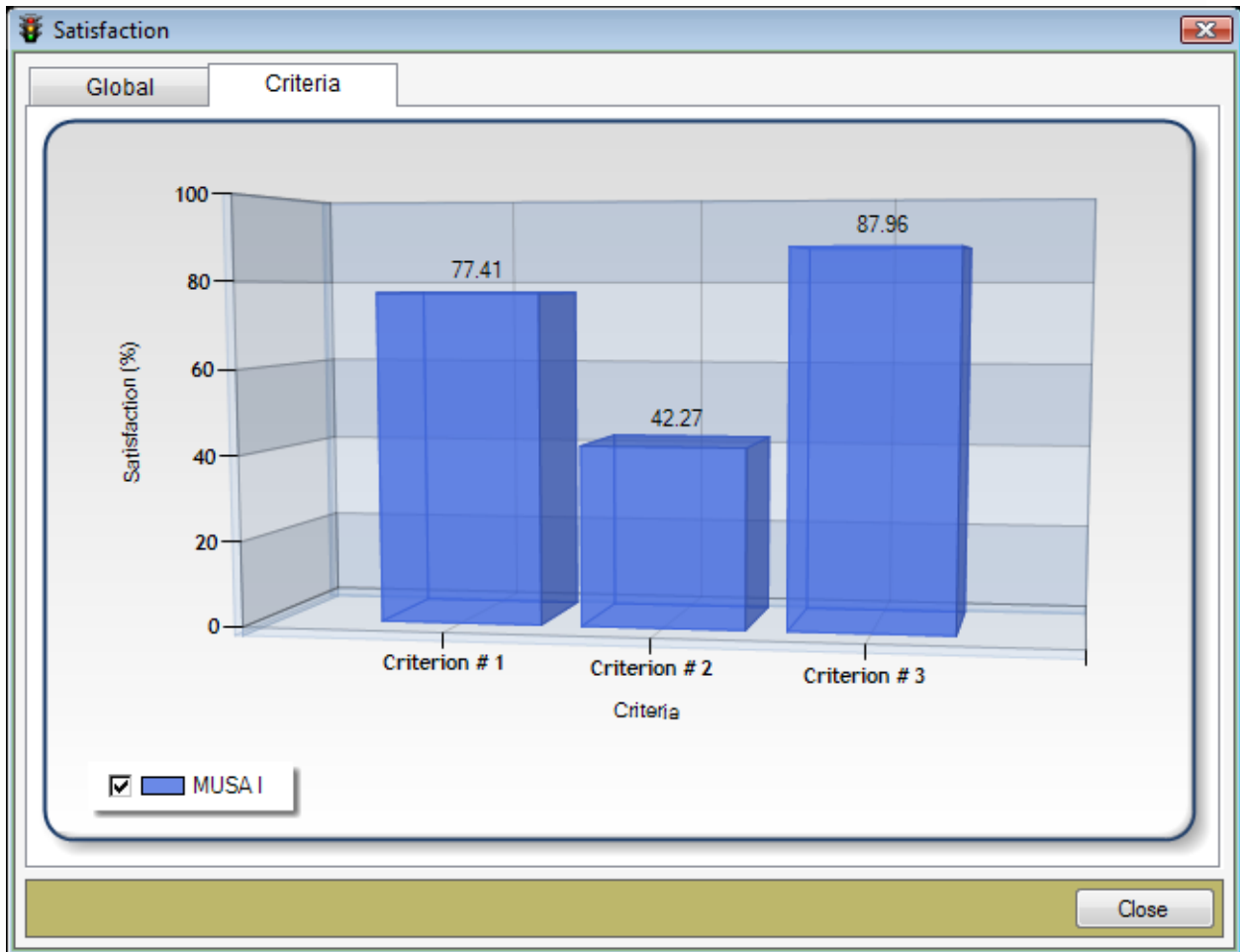
Υπάρχει η δυνατότητα προβολής γραφημάτων που απεικονίζουν την ικανοποίηση (ολική και μερική), την απαιτητικότητα (ολική και μερική) και τα βάρη των κριτηρίων.

### **Ικανοποίηση ερωτηθέντων**

Πατώντας το κουμπί “Satisfaction” (“Analysis” → “Satisfaction”) ανοίγει το παράθυρο προβολής με γραφήματα της ολικής και μερικής ικανοποίησης (μέσος όρος όλων των λύσεων).



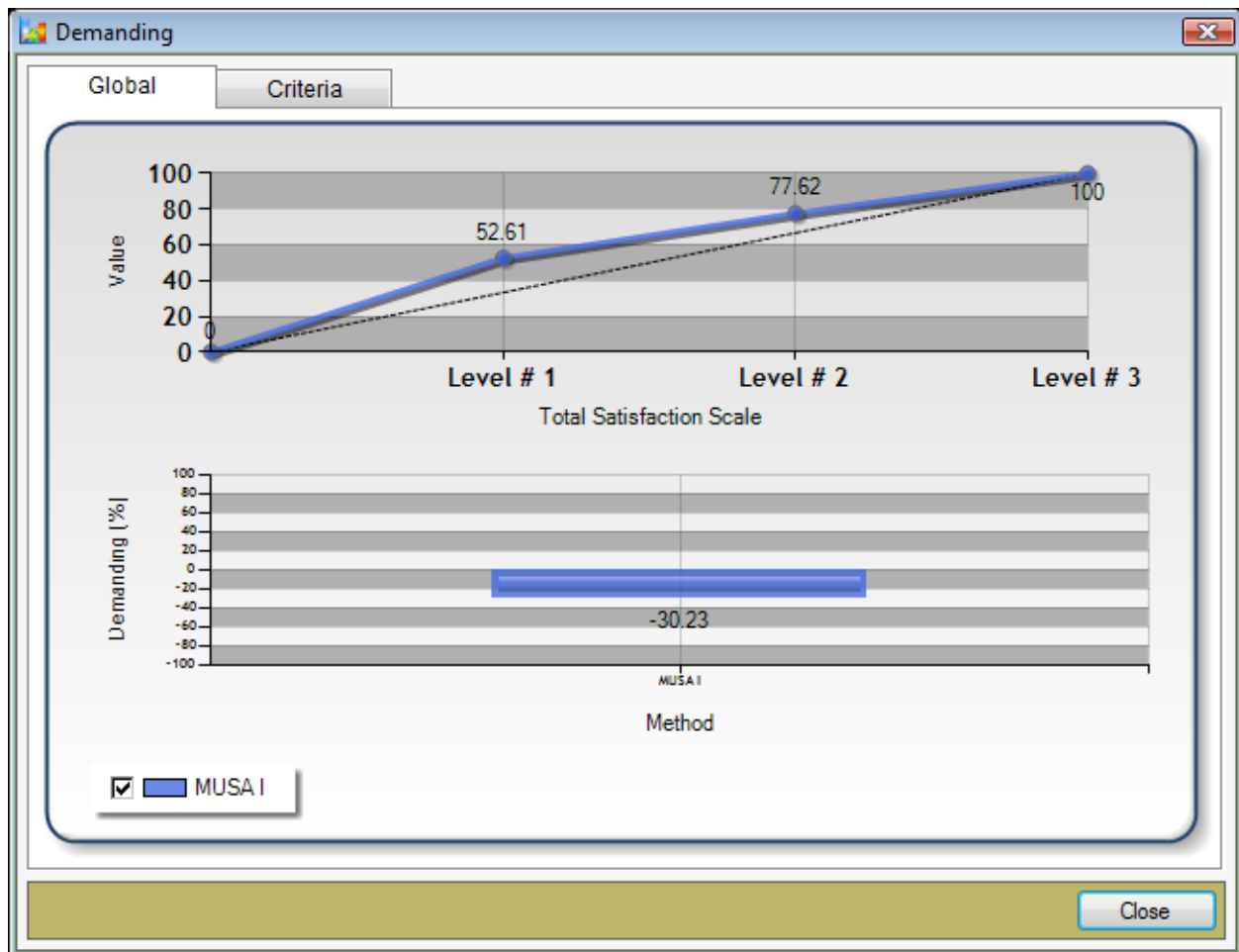
Εικόνα 36: Παράθυρο προβολής της ικανοποίησης (Ολική)



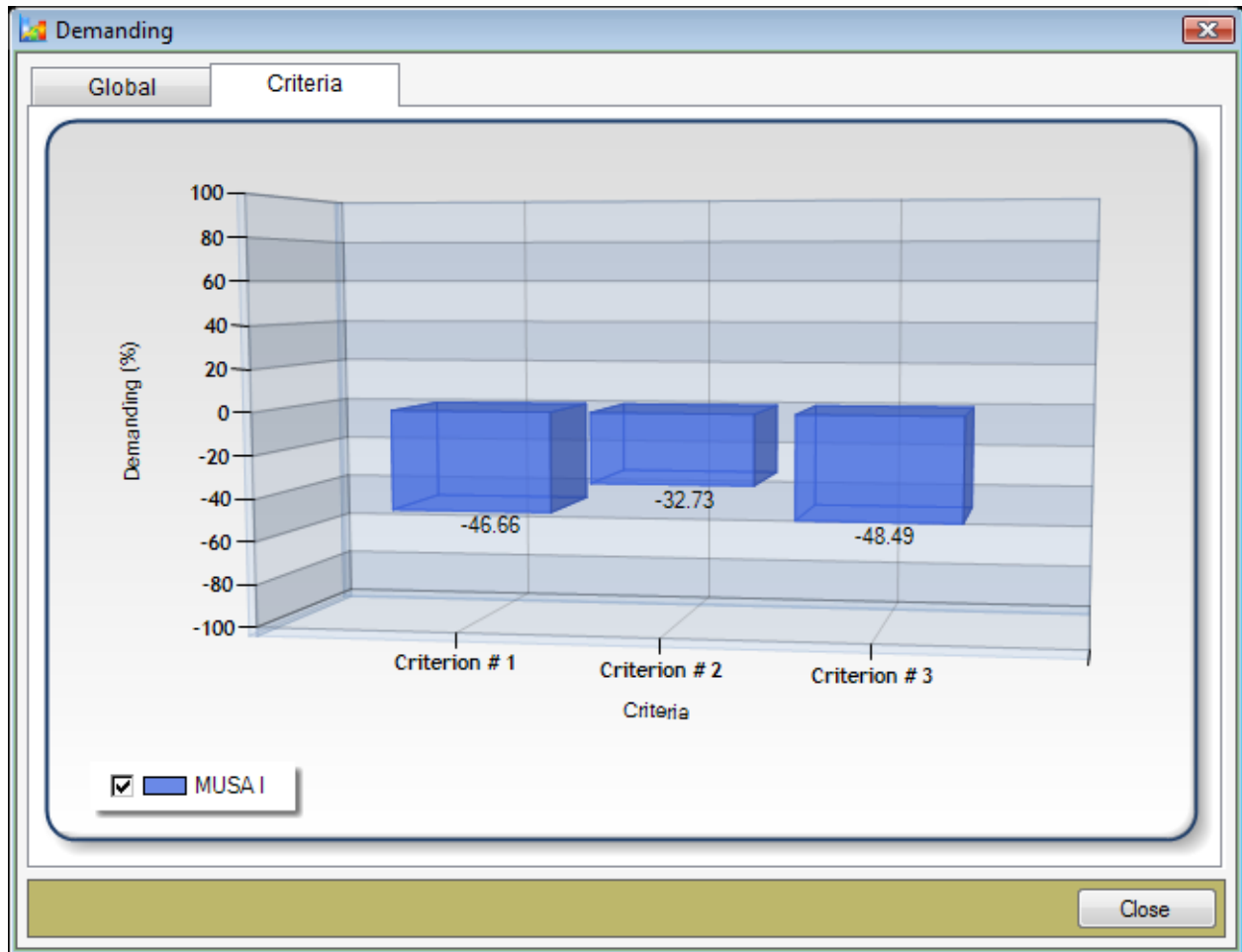
Εικόνα 37 Παράθυρο προβολής της ικανοποίησης (Μερική)

#### Απαιτητικότητα ερωτηθέντων

Πατώντας το κουμπί “Demanding” (“Analysis” → “Demanding”) ανοίγει το παράθυρο προβολής, με γραφήματα, της ολικής και μερικής απαιτητικότητας (μέσος όρος όλων των λύσεων).



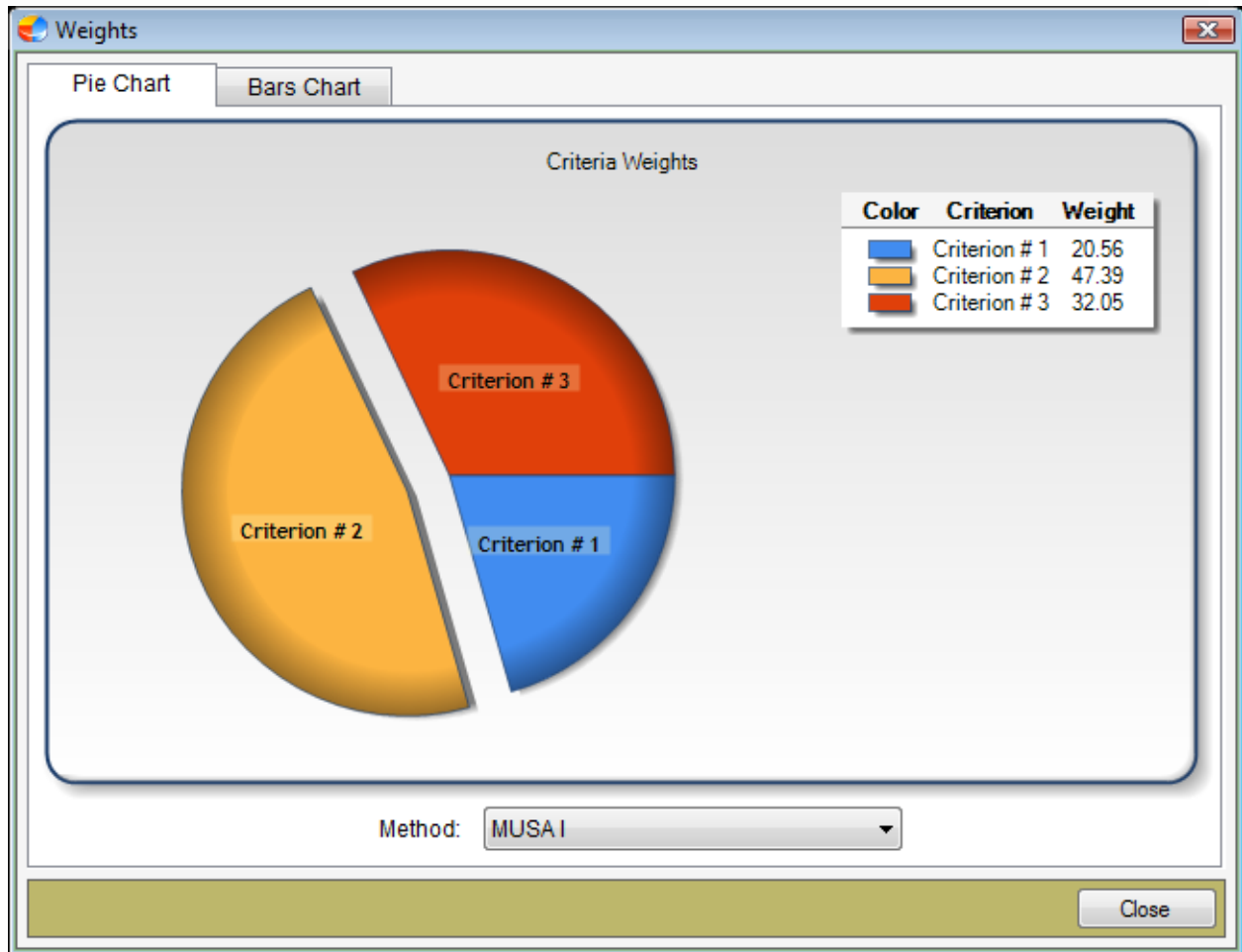
Εικόνα 38: Παράθυρο προβολής της απαιτητικότητας (Ολική)



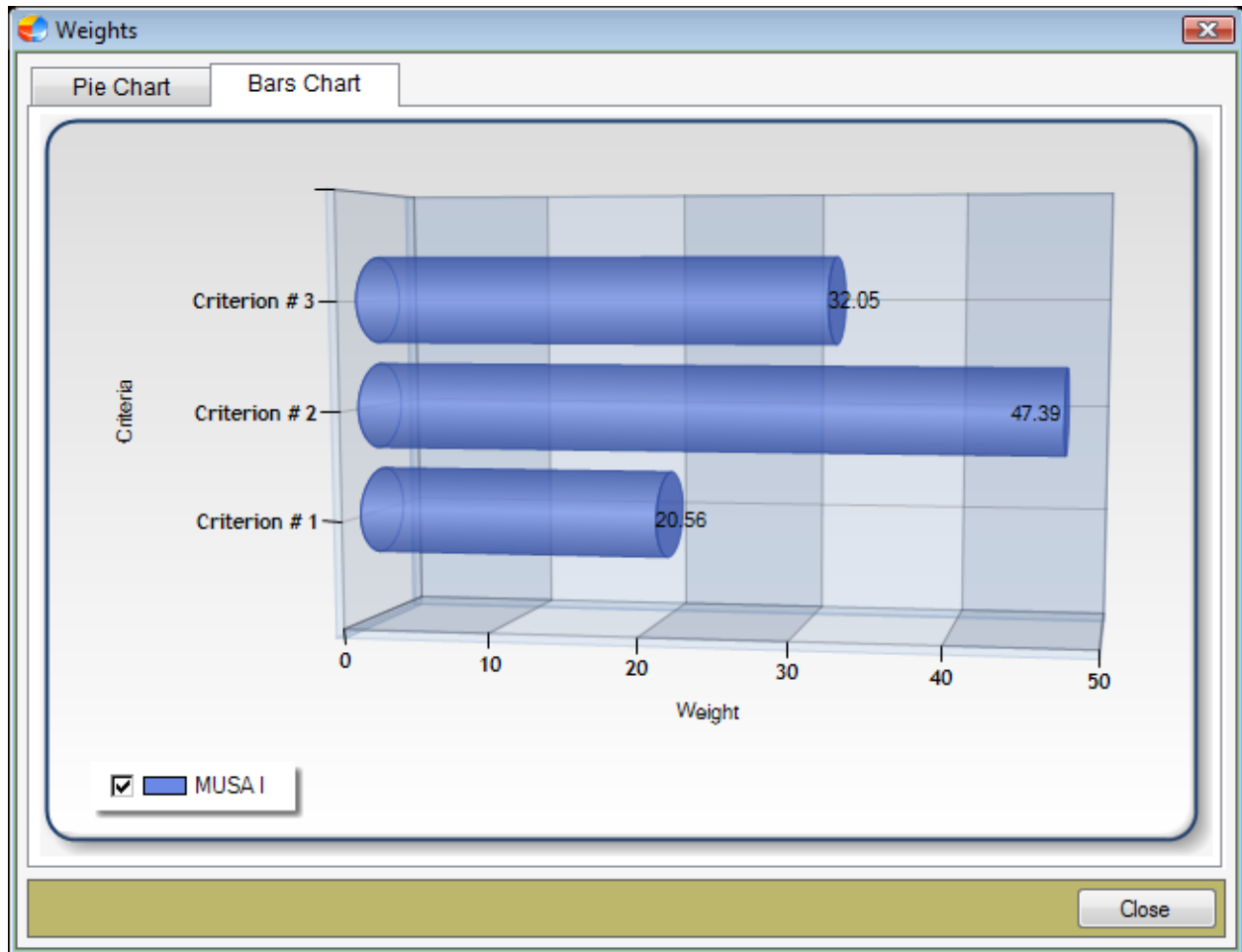
Εικόνα 39: Παράθυρο προβολής της απαιτητικότητας (Μερική)

### Βάρη κριτηρίων

Πατώντας το κουμπί "Weights" ("Analysis" → "Weights") ανοίγει το παράθυρο προβολής, με γραφήματα, των βαρών των κριτηρίων (μέσος όρος όλων των λύσεων).



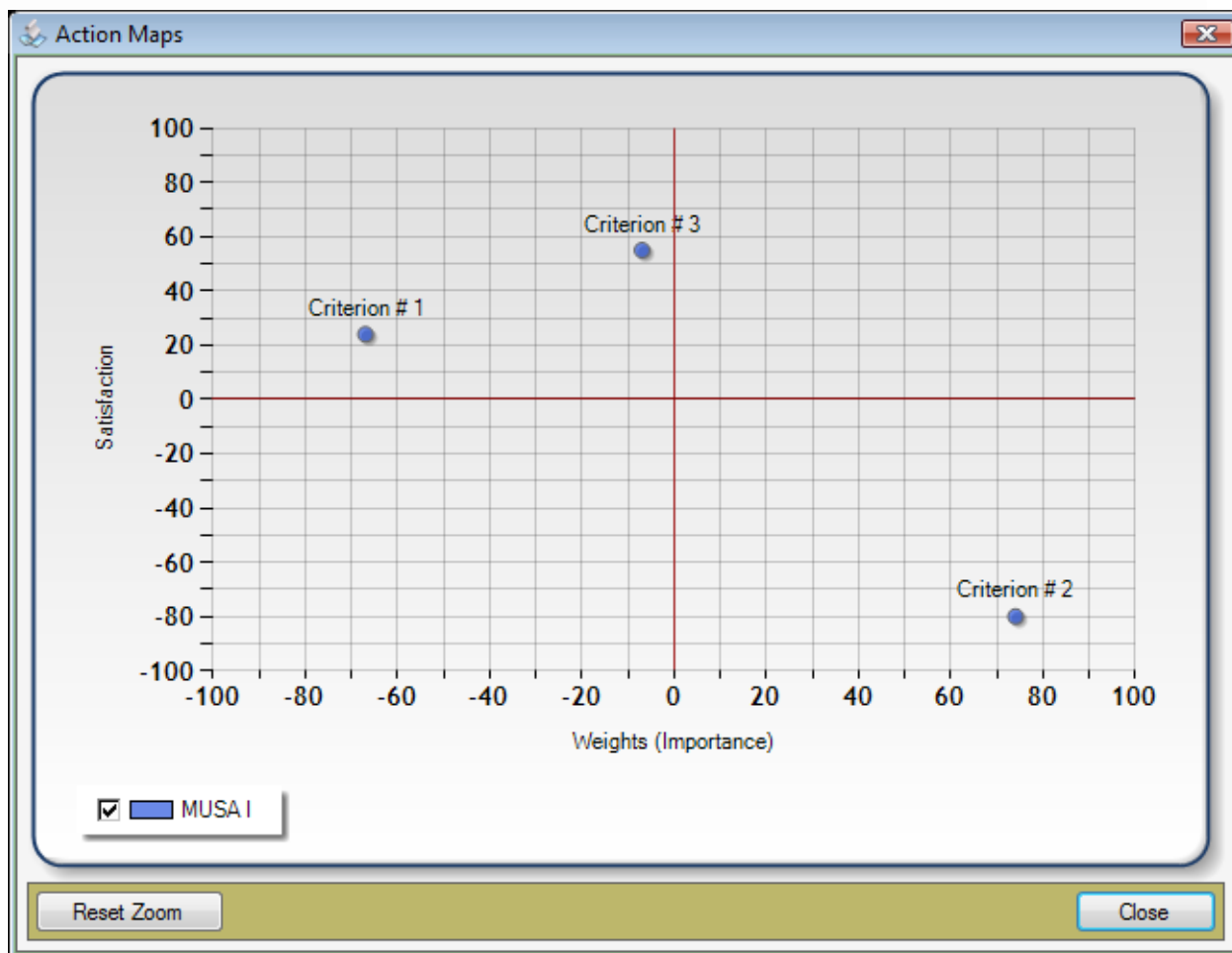
Εικόνα 40: Παράθυρο προβολής των βαρών των κριτηρίων (Πίτα)



Εικόνα 41: Παράθυρο προβολής των βαρών των κριτηρίων (Μπάρες)

### Διάγραμμα Δράσης

Πατώντας το κουμπί “Action Maps” (“Analysis” → “Action Maps”) ανοίγει το παράθυρο προβολής, με γράφημα, του διαγράμματος δράσης (μέσος όρος όλων των λύσεων).

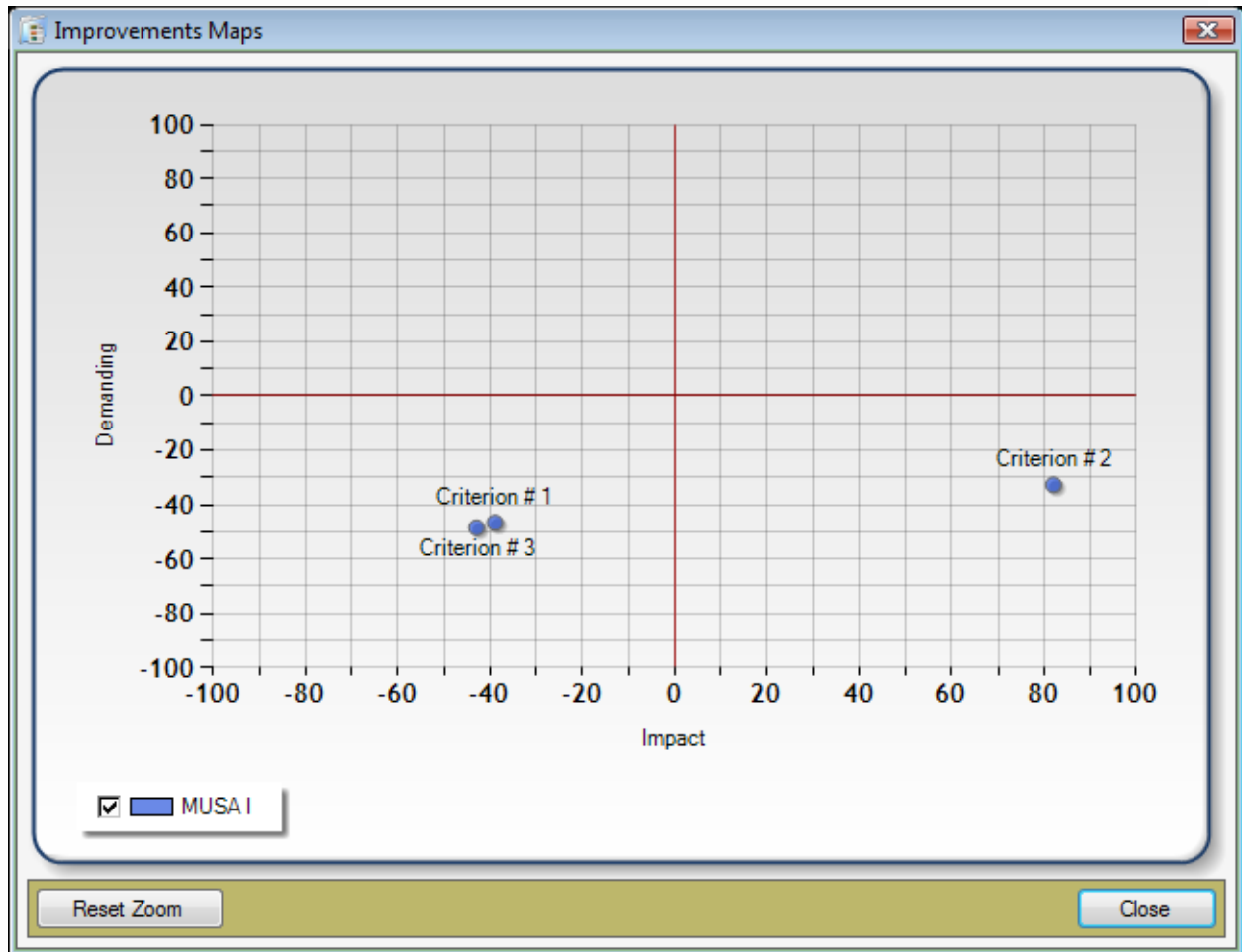


Εικόνα 42: Διάγραμμα Δράσης

### Διάγραμμα Βελτίωσης

Πατώντας το κουμπί "Improvement Maps" ("Analysis" → "Improvement Maps") ανοίγει το παράθυρο προβολής, με γράφημα, του διαγράμματος βελτίωσης (μέσος όρος όλων των λύσεων).

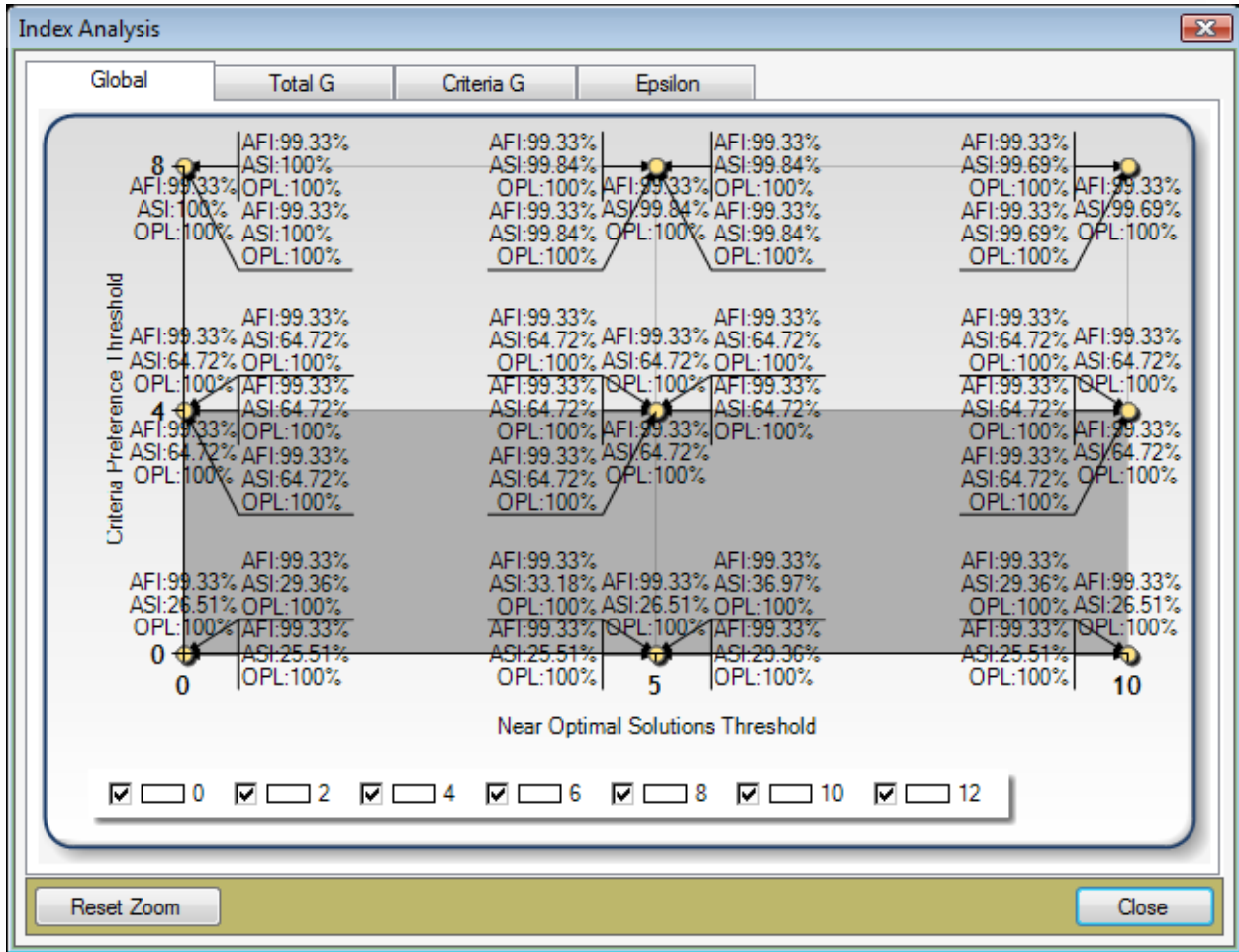




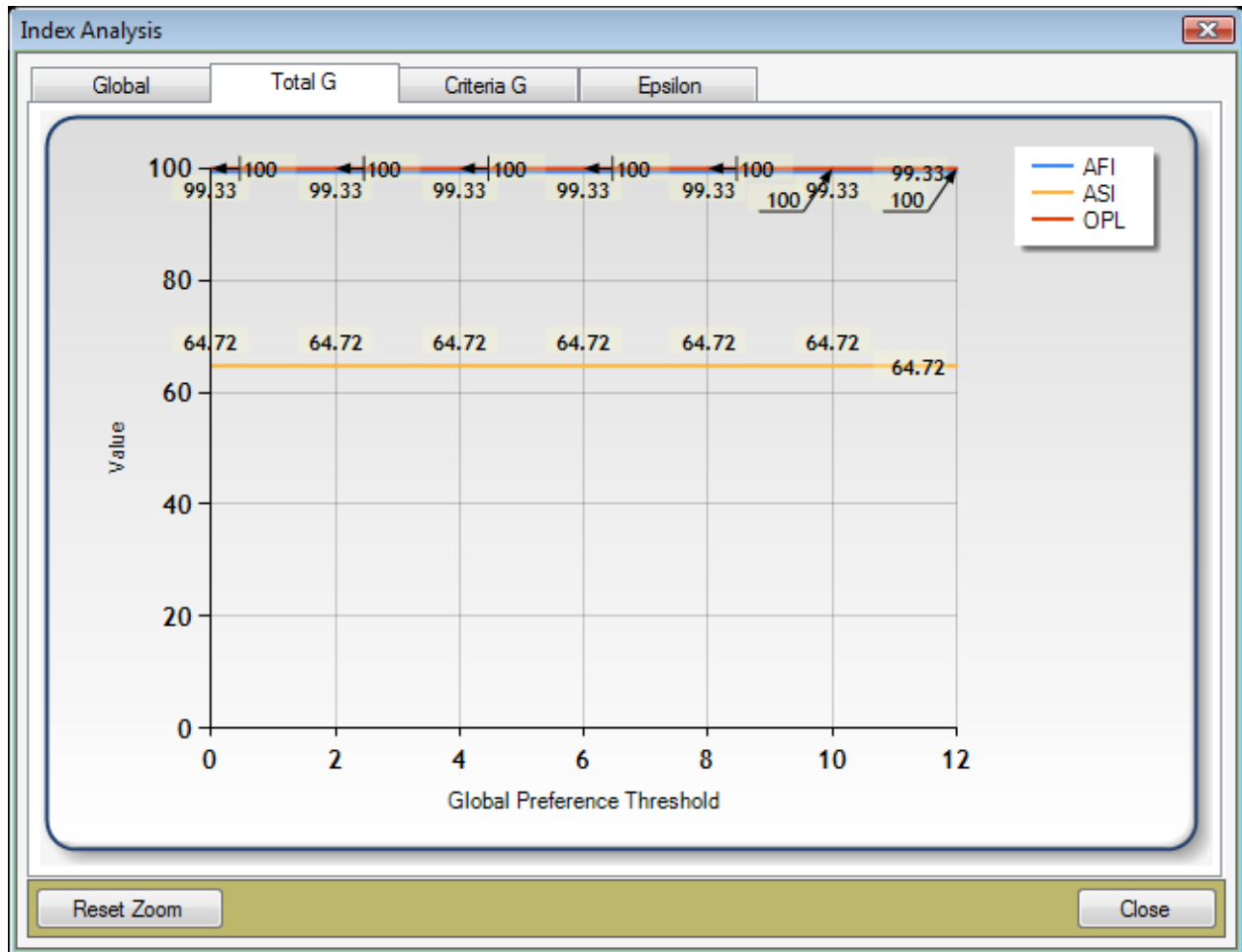
Εικόνα 43: Διάγραμμα Βελτίωσης

### Ανάλυση Δεικτών

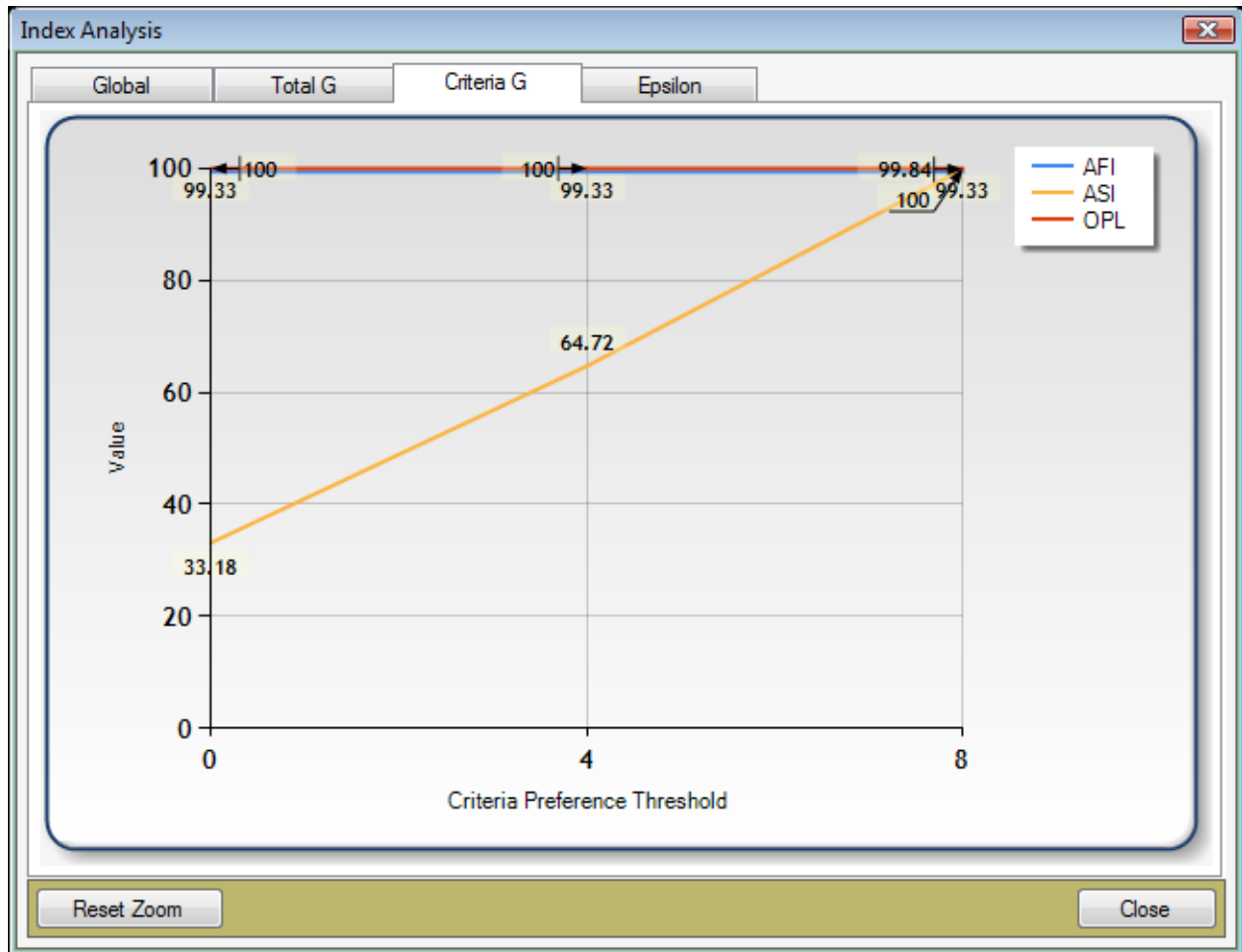
Πατώντας το κουμπί "Index Analysis" ("Statistical" → "Index Analysis") ανοίγει το παράθυρο προβολής, με γράφημα, των δεικτών που προέκυψαν για τα διάφορα GPT, CPT και NOST.



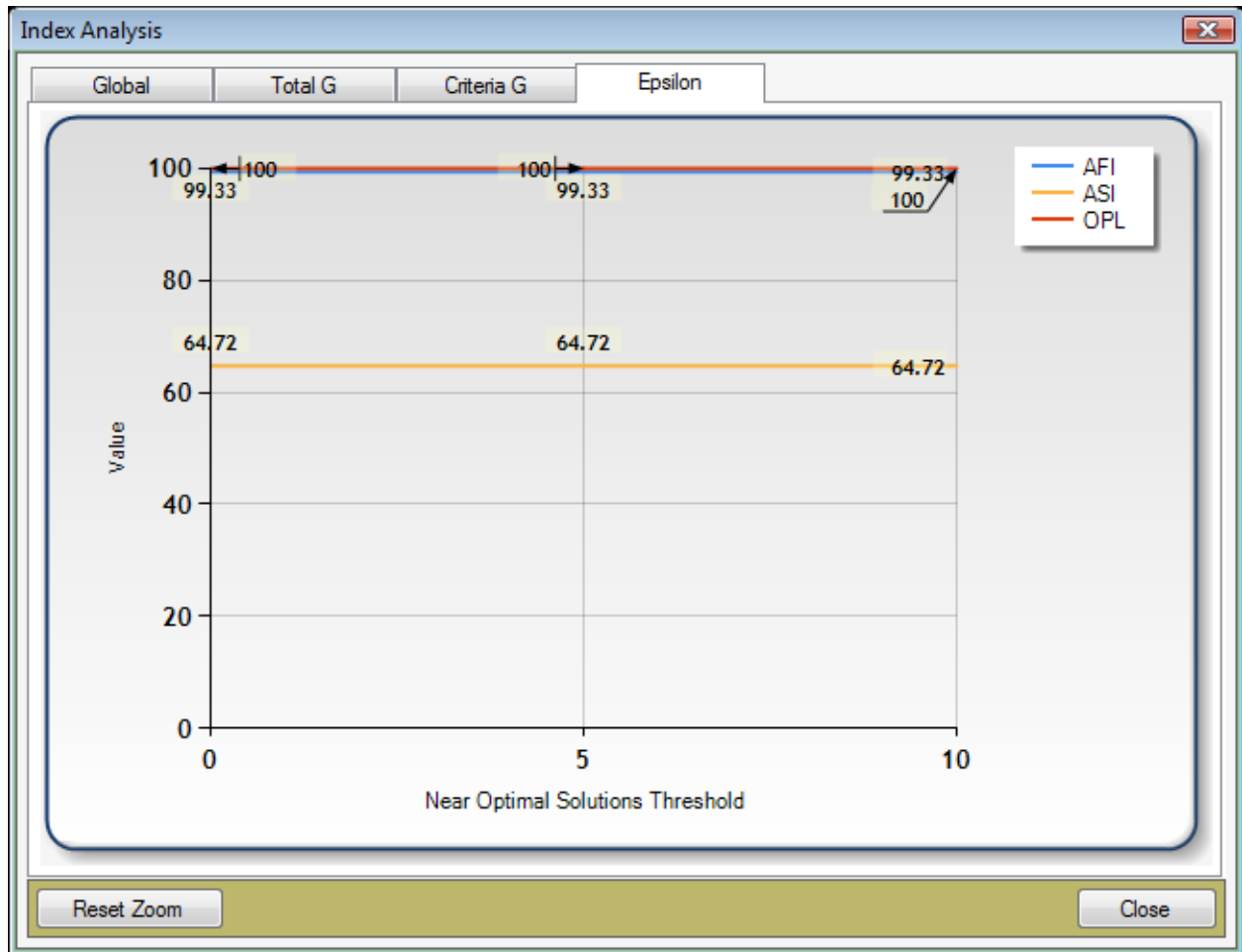
Εικόνα 46: Ανάλυση δεικτών (Global)



Εικόνα 47: Ανάλυση δεικτών (GPT)



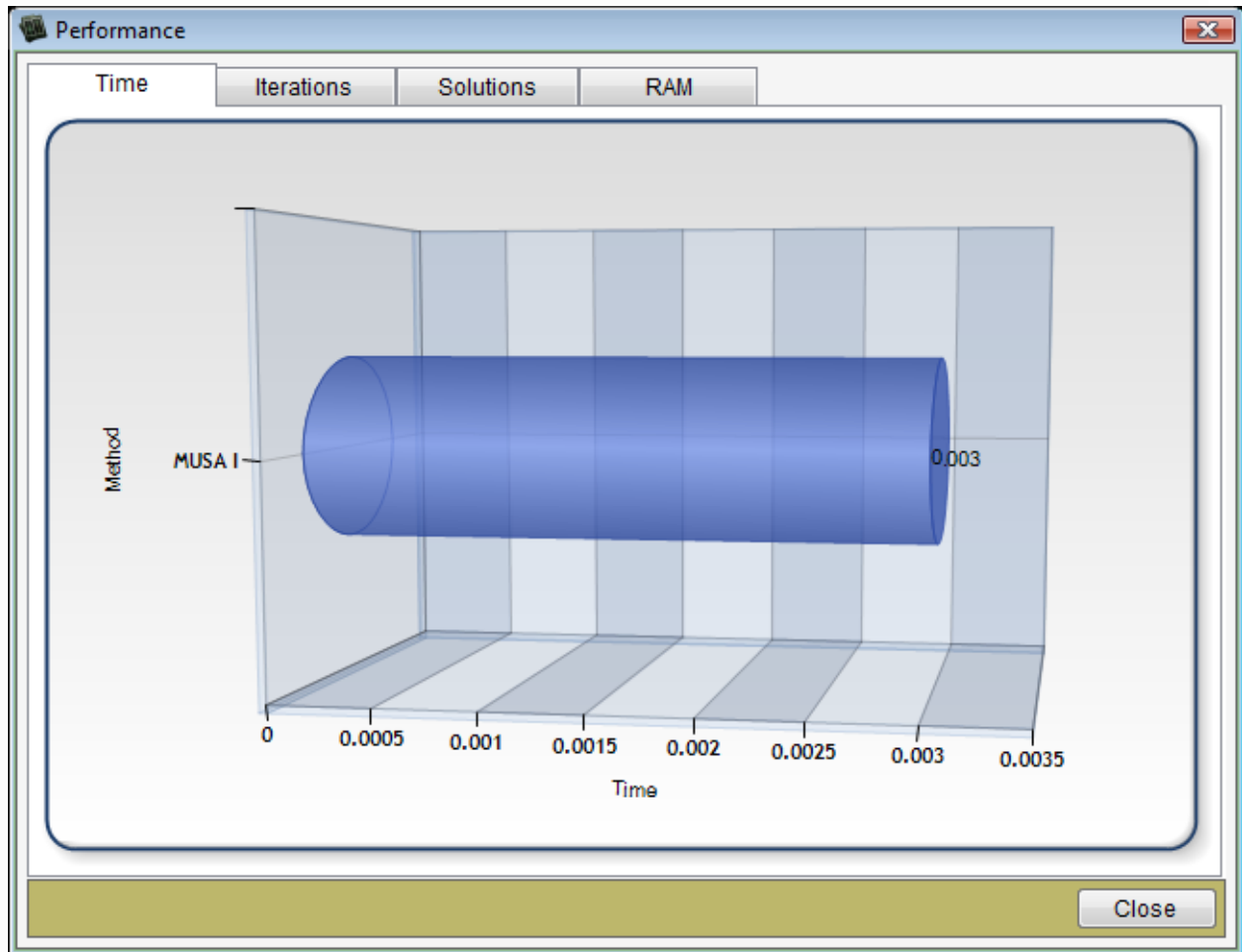
Εικόνα 48: Ανάλυση δεικτών (CPT)



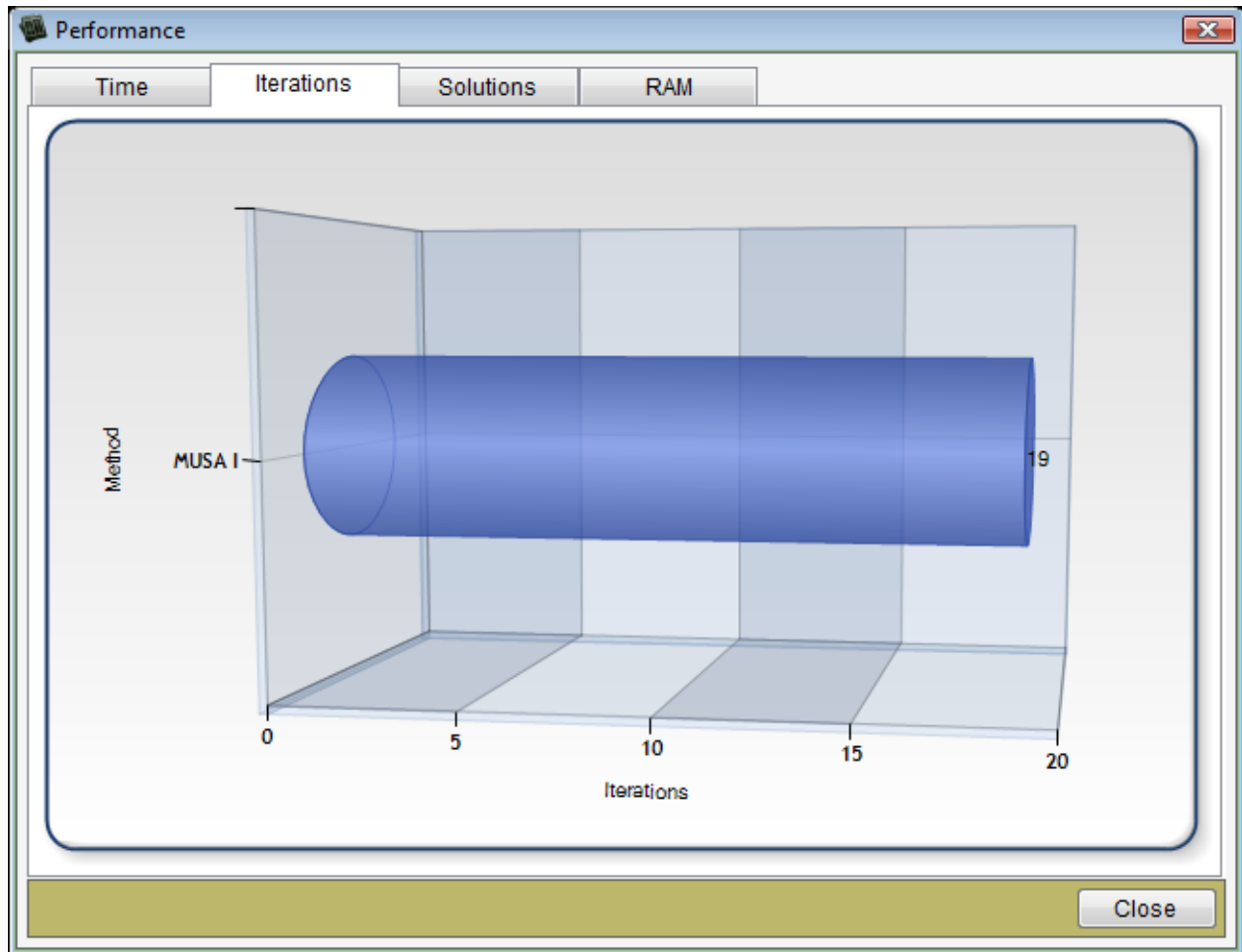
Εικόνα 49: Ανάλυση δεικτών (NOST)

### Γραφήματα Απόδοσης

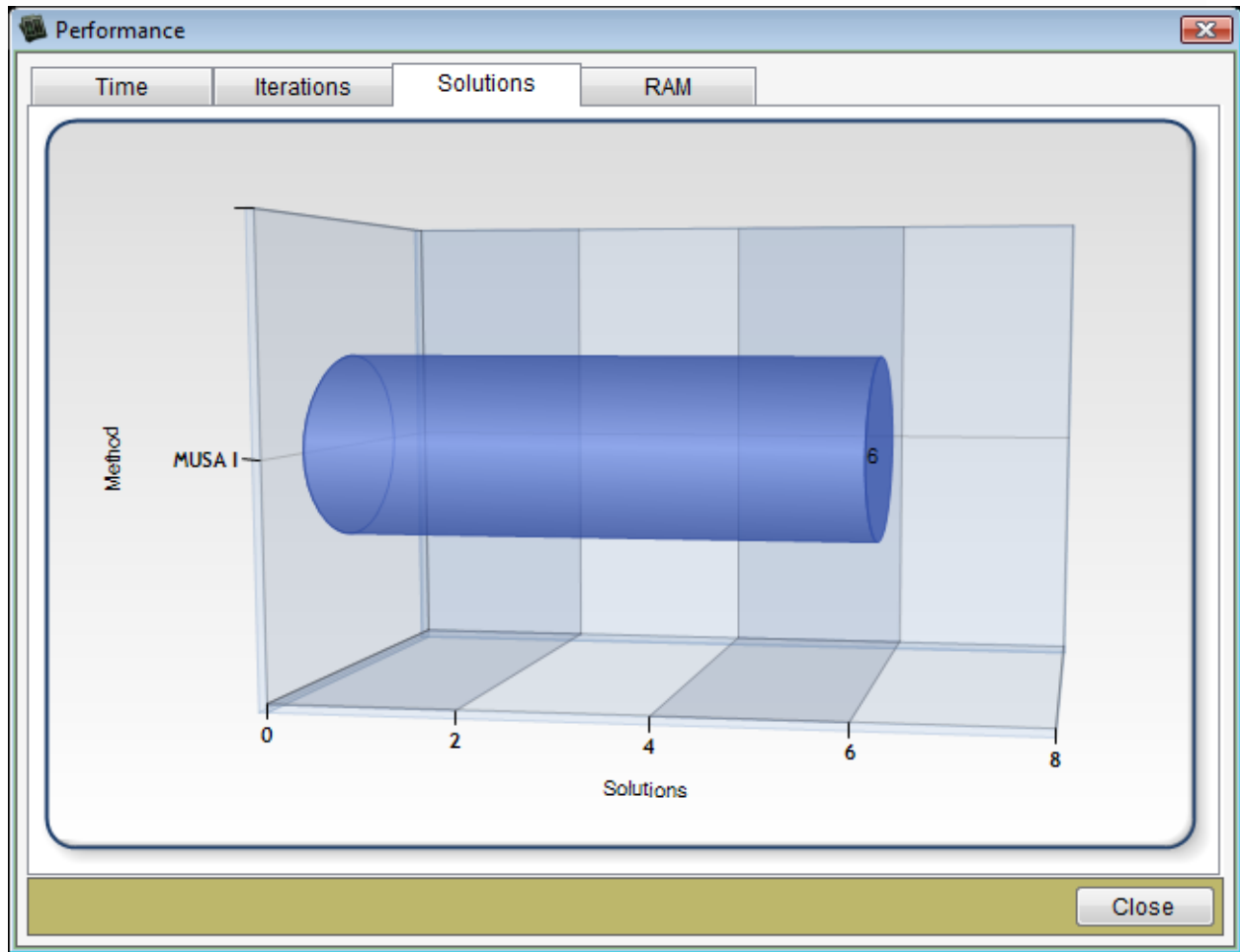
Πατώντας το κουμπί "Performance" ("Statistical" → "Performance") ανοίγει το παράθυρο προβολής, με γράφημα, της απόδοσης του συστήματος (μέσος όρος όλων των λύσεων).



Εικόνα 50: Γράφημα Απόδοσης (χρόνος επίλυσης σε min)

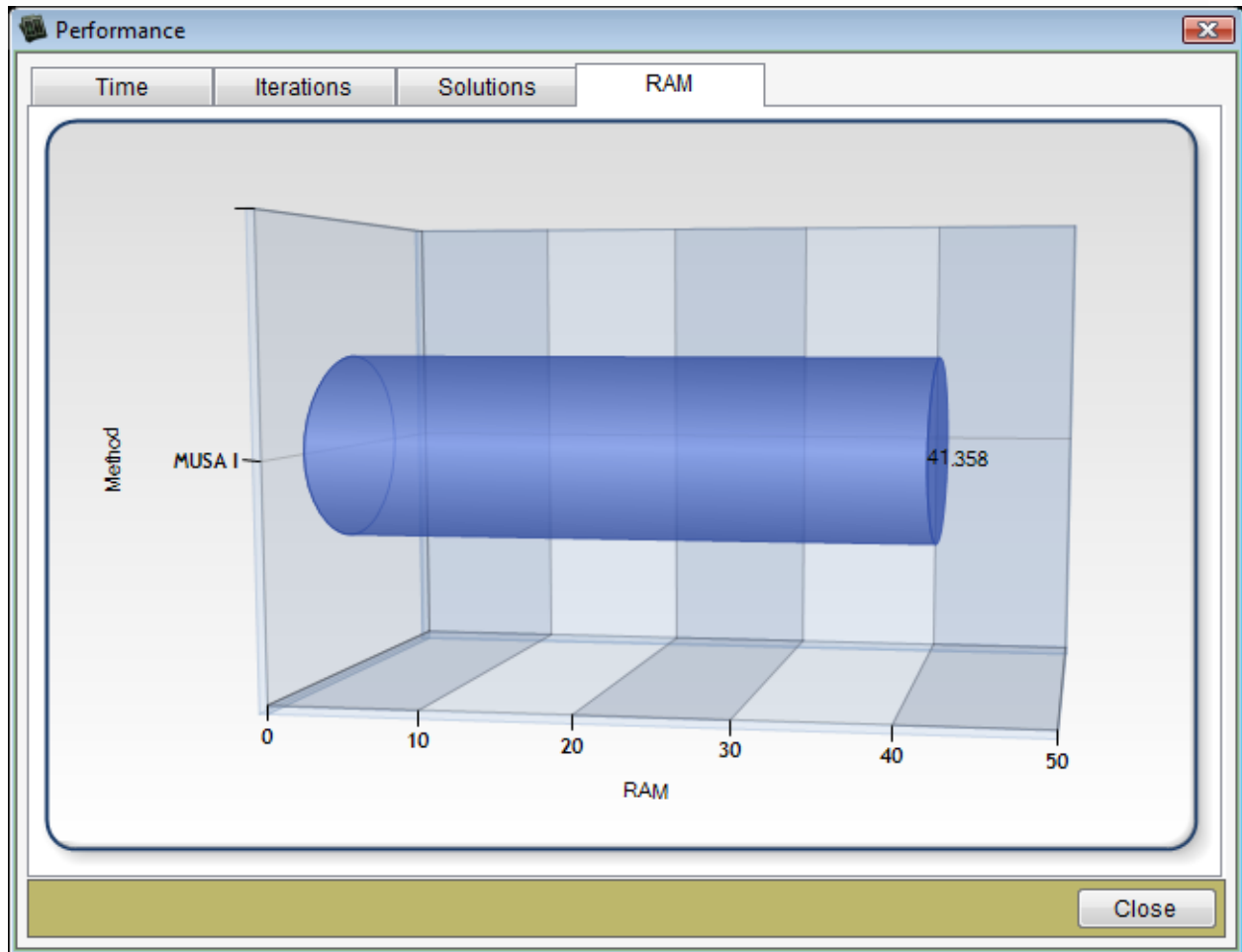


Εικόνα 51: Γράφημα Απόδοσης (συνολικός αριθμός iterations)



Εικόνα 52: Γράφημα Απόδοσης (συνολικός αριθμός λύσεων)

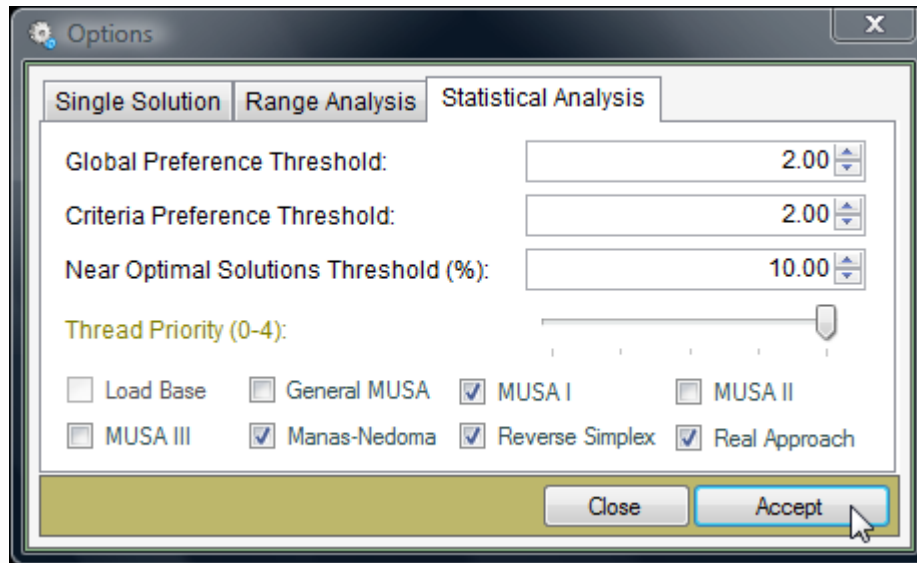




Εικόνα 52: Γράφημα Απόδοσης (μνήμη που χρησιμοποιήθηκε για την λύση του προβλήματος)

### Statistical Analysis

Επιλέγοντας αυτόν τον τρόπο επίλυσης, θα χρησιμοποιηθούν πάνω από μια μέθοδοι στη διαδικασία μεταβελτιστοποίησης. Οι ρυθμίσεις που μπορεί να γίνουν στο σύστημα υπάρχουν στο παράθυρο "Options" από το μενού "Solver".

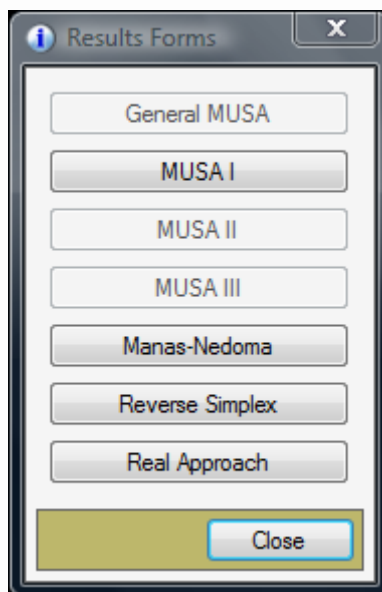


Εικόνα 53: Ρυθμίσεις Statistical Analysis

- **Global Preference Threshold:** είναι το «βήμα» για τη συνάρτηση ολικής ικανοποίησης.
- **Criteria Preference Threshold:** είναι το «βήμα» για τις μερικές συναρτήσεις ικανοποίησης των κριτηρίων.
- **Near Optimal Solution Threshold:** εύρος τιμών στις οποίες θα αναζητηθούν οι λύσεις της μεταβελτιστοποίησης. Ο αριθμός αυτός πολλαπλασιάζεται με την τιμή της βέλτιστης λύσης.
- **Thread Priority:** ρύθμιση για το τι προτεραιότητα θα δώσει ο υπολογιστής στην εκτέλεση λειτουργιών της εφαρμογής.
- **Load Base:** φόρτωση η όχι της βάσης της βέλτιστης λύσεις στον solver κατά την διαδικασία μεταβελτιστοποίησης.
- **Method:** επιλογή πάνω από μιας μεθόδων για μεταβελτιστοποίηση.

Για να αρχίσει η διαδικασία ανάλυσης της ικανοποίησης των ερωτηθέντων με βάση το συγκεκριμένο ερωτηματολόγιο, πρέπει να πατήσουμε το κουμπί “Start” (ή “F5” στο πληκτρολόγιο). Υπάρχει η δυνατότητα προσωρινής παύσης της διαδικασίας (πατώντας το κουμπί “Pause) καθώς επίσης και τερματισμού πριν από την ολοκλήρωσή της (πατώντας το κουμπί “Stop” ή “Shift + F5” στο πληκτρολόγιο). Στην τελευταία περίπτωση δεν εμφανίζονται αποτελέσματα ανάλυσης ικανοποίησης στον χρήστη.

Μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας εμφανίζεται ένα παράθυρο το οποίο έχει τα αποτελέσματα από όλες τις λύσεις των γραμμικών προβλημάτων.



Εικόνα 54: Προβολή των αποτελεσμάτων (λίστα)

Results - [Statistical Analysis: Reverse Simplex]

**Process of Resolution**

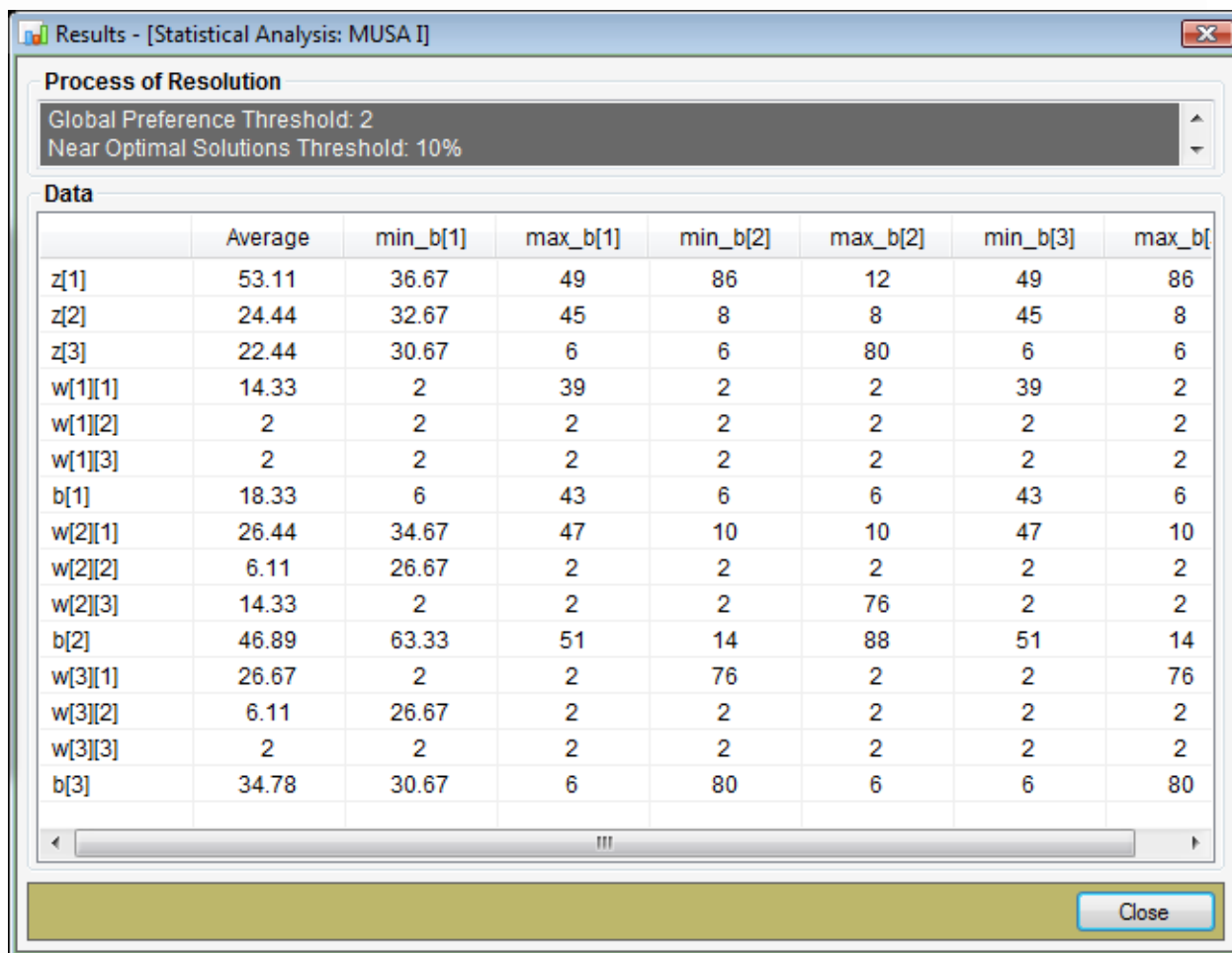
Global Preference Threshold: 2  
Near Optimal Solutions Threshold: 10%

**Data**

	z[1]	z[2]	z[3]	w[1][1]	w[1][2]	w[1][3]	b[1]	w[2][1]	w[2][2]	w[2][3]	t
Average	47.46	25.63	26.91	6.11	9.4	5.56	21.07	31.2	4.56	16.79	5.0
sol#1	49	26.5	24.5	2	2	20.5	24.5	47	2	2	
sol#2	49	26.5	24.5	2	2	20.5	24.5	47	2	2	
sol#3	49	26.5	24.5	2	2	20.5	24.5	47	2	2	
sol#4	49	26.5	24.5	2	2	20.5	24.5	47	2	2	
sol#5	49	26.5	24.5	2	2	20.5	24.5	47	2	2	
sol#6	49	26.5	24.5	2	2	20.5	24.5	47	2	2	
sol#7	49	26.5	24.5	2	2	20.5	24.5	47	2	2	
sol#8	49	26.5	24.5	2	2	20.5	24.5	47	2	2	
sol#9	49	26.5	24.5	2	2	20.5	24.5	47	2	2	
sol#10	49	26.5	24.5	2	2	20.5	24.5	47	2	2	
sol#11	49	26.5	24.5	2	2	20.5	24.5	47	2	2	
sol#12	49	45	6	39	2	2	43	47	2	2	
sol#13	49	45	6	2	39	2	43	47	2	2	
sol#14	36.67	32.67	30.67	2	2	2	6	34.67	26.67	2	6.0
sol#15	12	8	80	2	2	2	6	10	2	76	

Close

Εικόνα 55: Προβολή των αποτελεσμάτων Reverse Simplex



**Process of Resolution**

Global Preference Threshold: 2  
Near Optimal Solutions Threshold: 10%

**Data**

	Average	min_b[1]	max_b[1]	min_b[2]	max_b[2]	min_b[3]	max_b[3]
z[1]	53.11	36.67	49	86	12	49	86
z[2]	24.44	32.67	45	8	8	45	8
z[3]	22.44	30.67	6	6	80	6	6
w[1][1]	14.33	2	39	2	2	39	2
w[1][2]	2	2	2	2	2	2	2
w[1][3]	2	2	2	2	2	2	2
b[1]	18.33	6	43	6	6	43	6
w[2][1]	26.44	34.67	47	10	10	47	10
w[2][2]	6.11	26.67	2	2	2	2	2
w[2][3]	14.33	2	2	2	76	2	2
b[2]	46.89	63.33	51	14	88	51	14
w[3][1]	26.67	2	2	76	2	2	76
w[3][2]	6.11	26.67	2	2	2	2	2
w[3][3]	2	2	2	2	2	2	2
b[3]	34.78	30.67	6	80	6	6	80

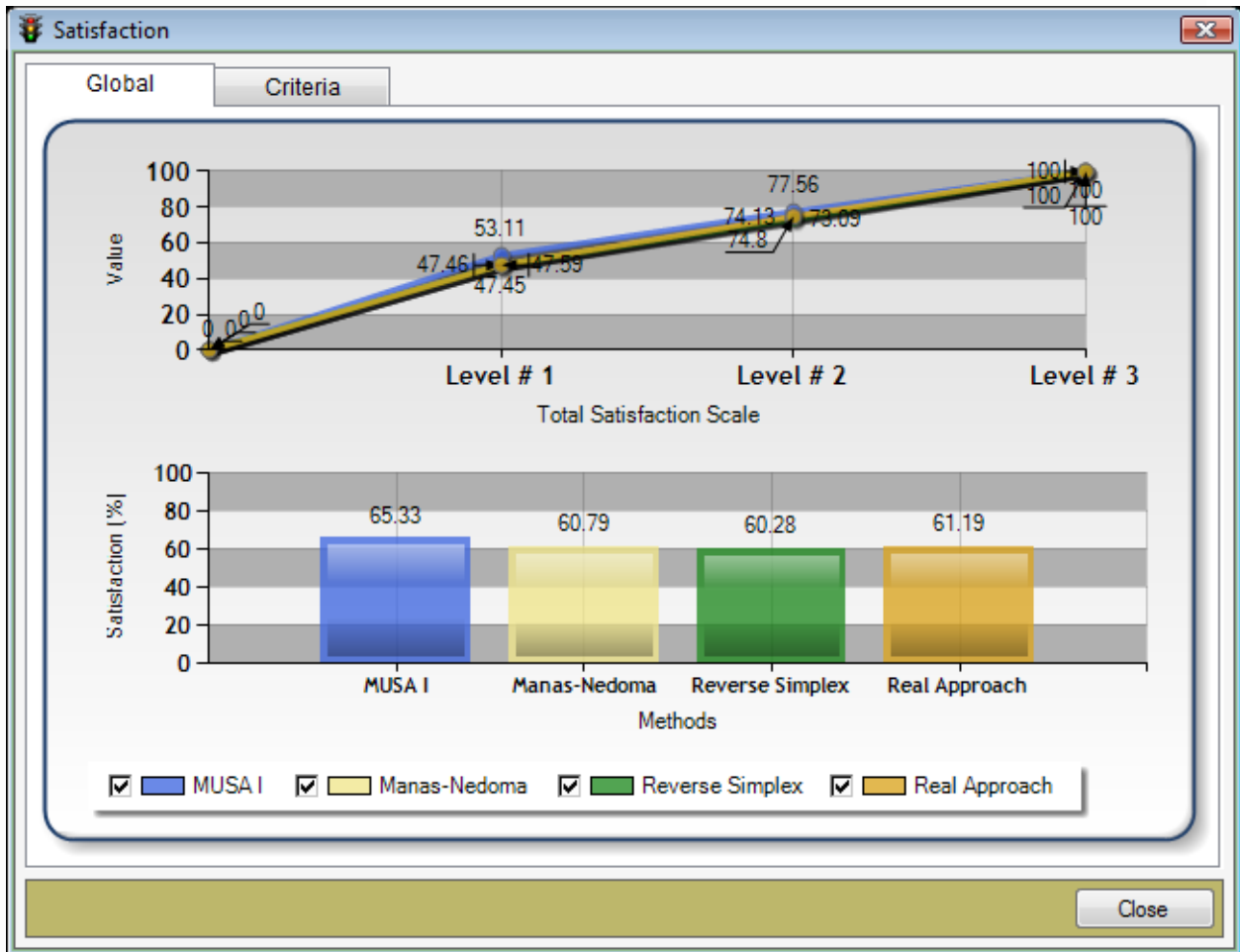
Close

Εικόνα 56: Προβολή των αποτελεσμάτων MUSA I

Υπάρχει η δυνατότητα προβολής γραφημάτων που απεικονίζουν την ικανοποίηση (ολική και μερική), την απαιτητικότητα (ολική και μερική) και τα βάρη των κριτηρίων.

### Ικανοποίηση ερωτηθέντων

Πατώντας το κουμπί “Satisfaction” (“Analysis” → “Satisfaction”) ανοίγει το παράθυρο προβολής με γραφήματα της ολικής και μερικής ικανοποίησης.



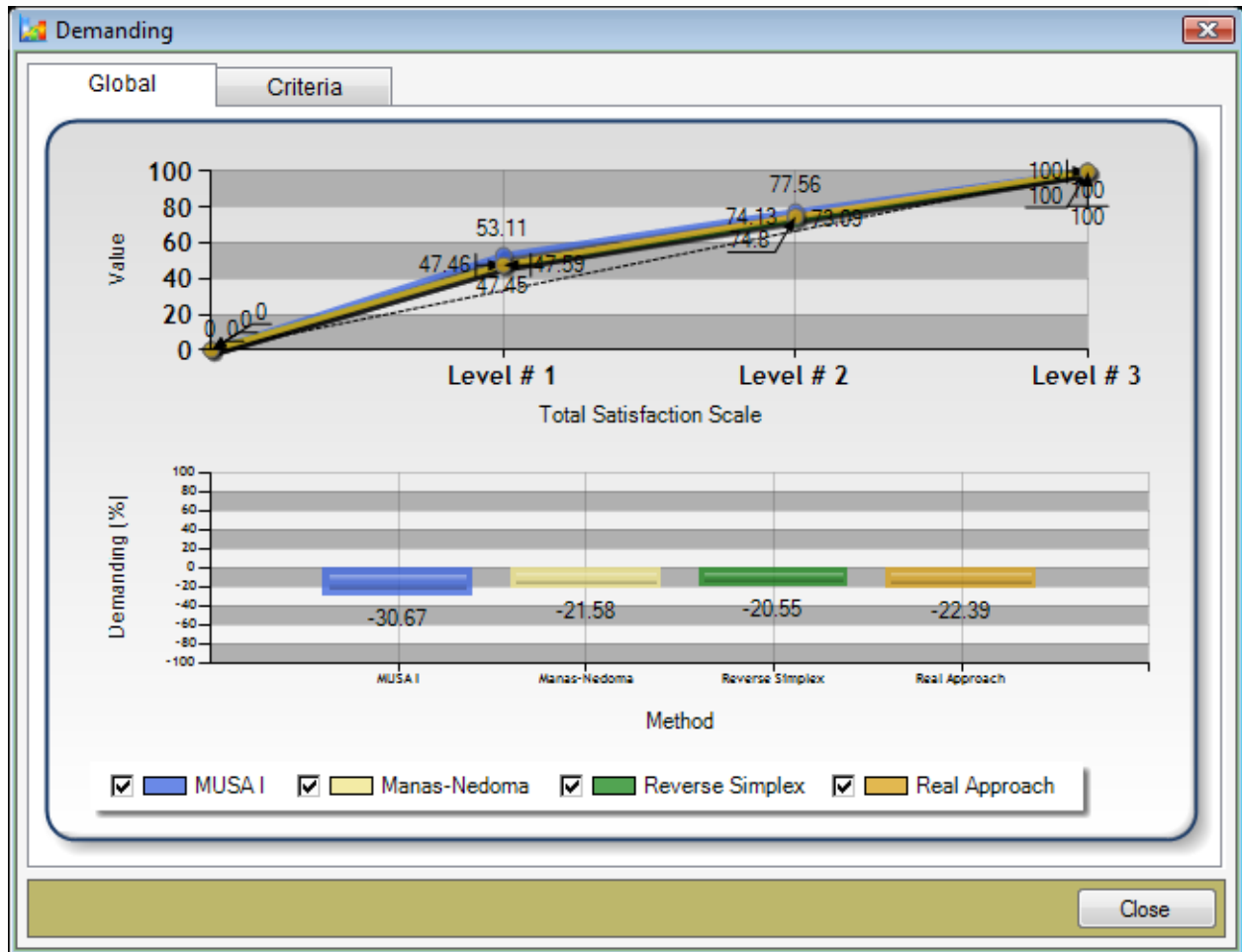
Εικόνα 57: Παράθυρο προβολής της ικανοποίησης (Ολική)



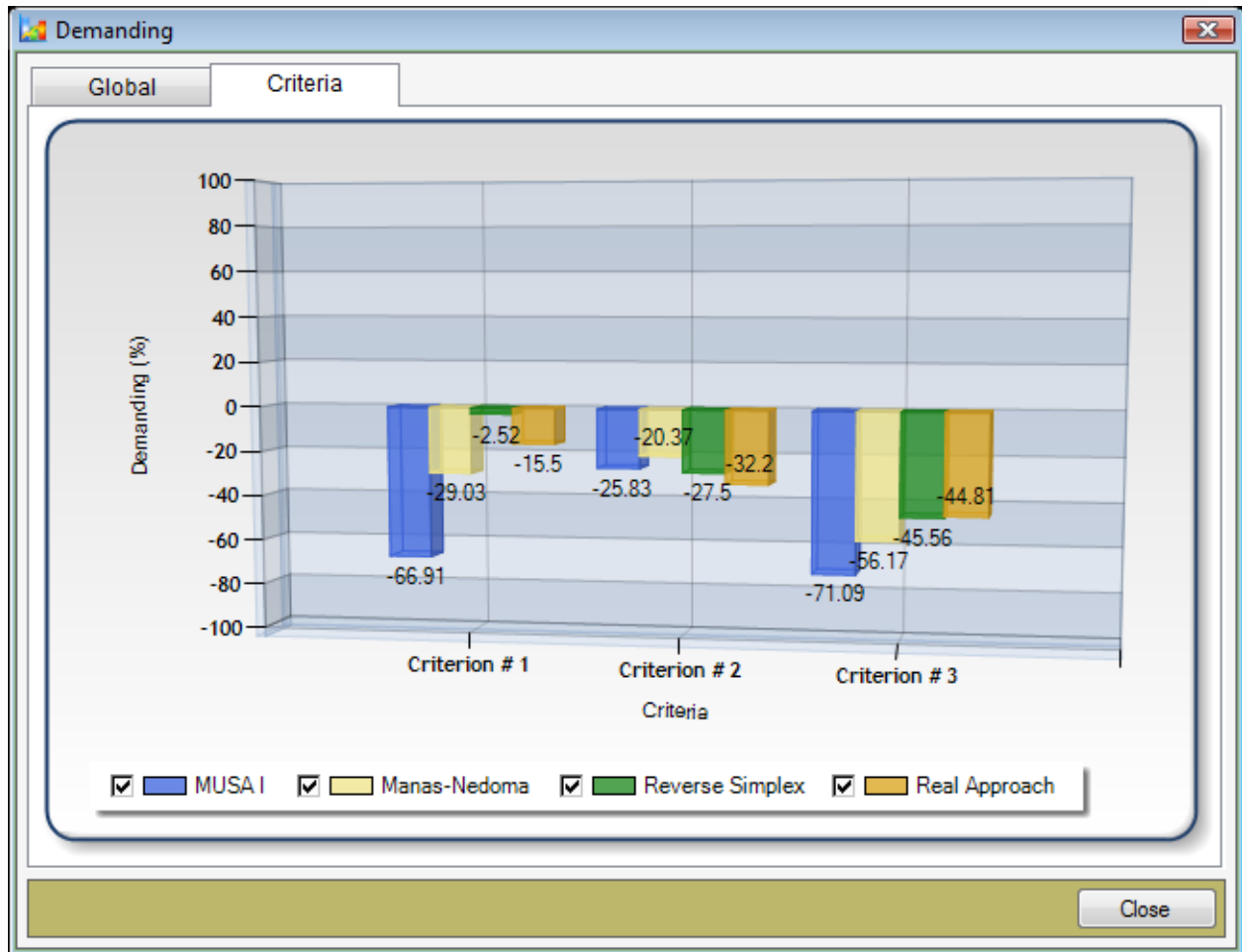
Εικόνα 58: Παράθυρο προβολής της ικανοποίησης (Μερική)

### Απαιτητικότητα ερωτηθέντων

Πατώντας το κουμπί “Demanding” (“Analysis” → “Demanding”) ανοίγει το παράθυρο προβολής, με γραφήματα, της ολικής και μερικής απαιτητικότητας.



Εικόνα 59: Παράθυρο προβολής της απαιτητικότητας (Ολική)

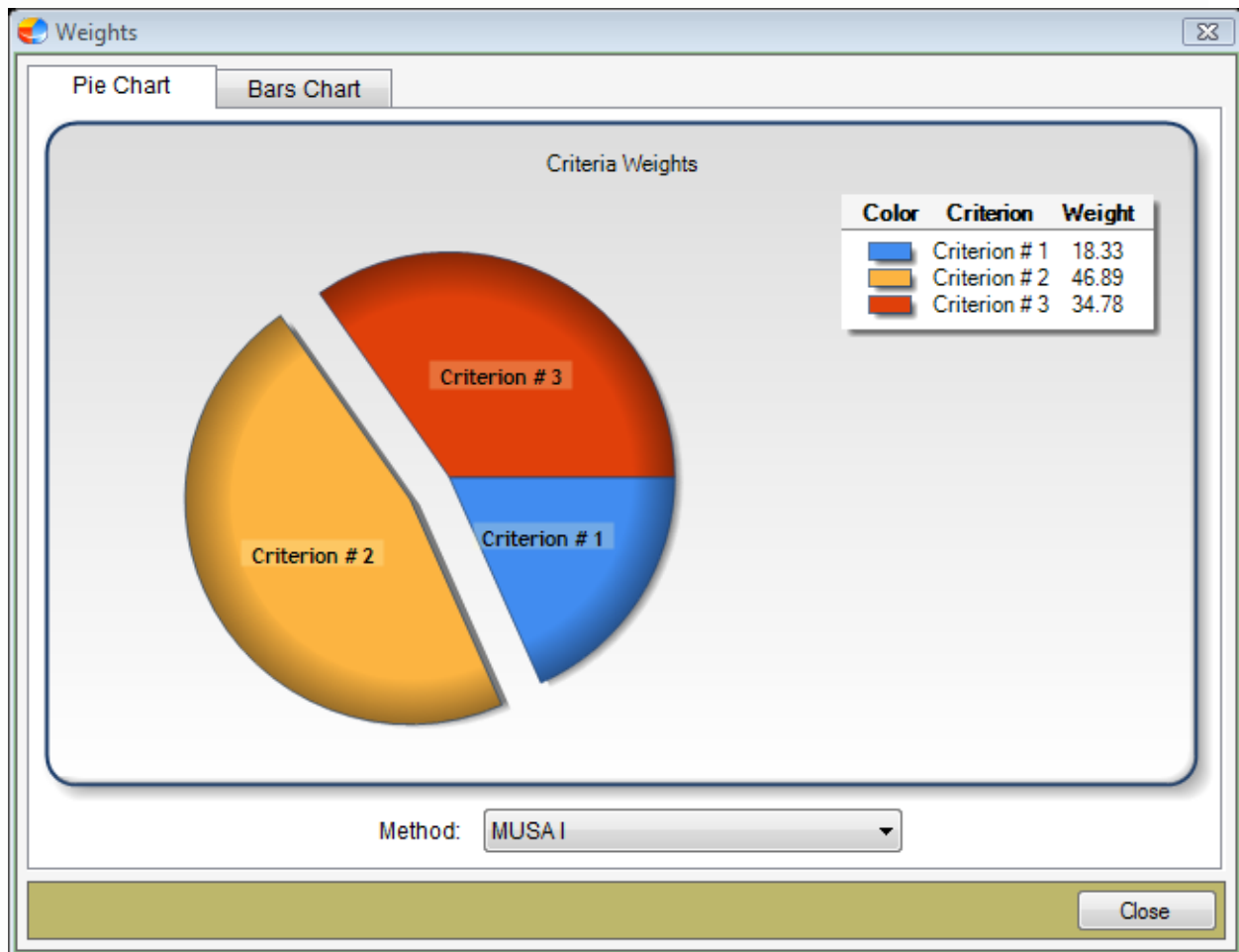


Εικόνα 60: Παράθυρο προβολής της απαιτητικότητας (Μερική)

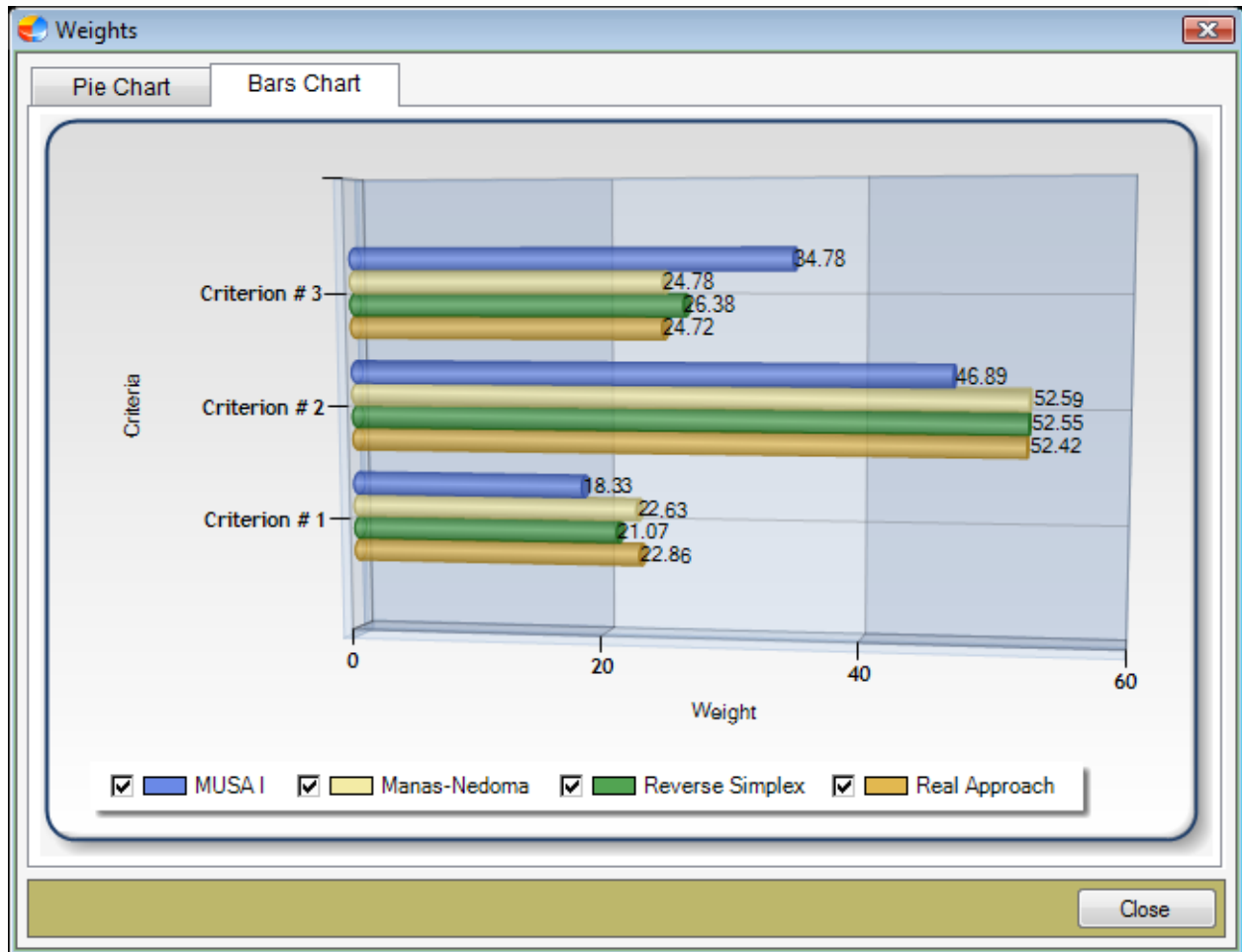
### Βάρη κριτηρίων

Πατώντας το κουμπί “Weights” (“Analysis” → “Weights”) ανοίγει το παράθυρο προβολής, με γραφήματα, των βαρών των κριτηρίων.





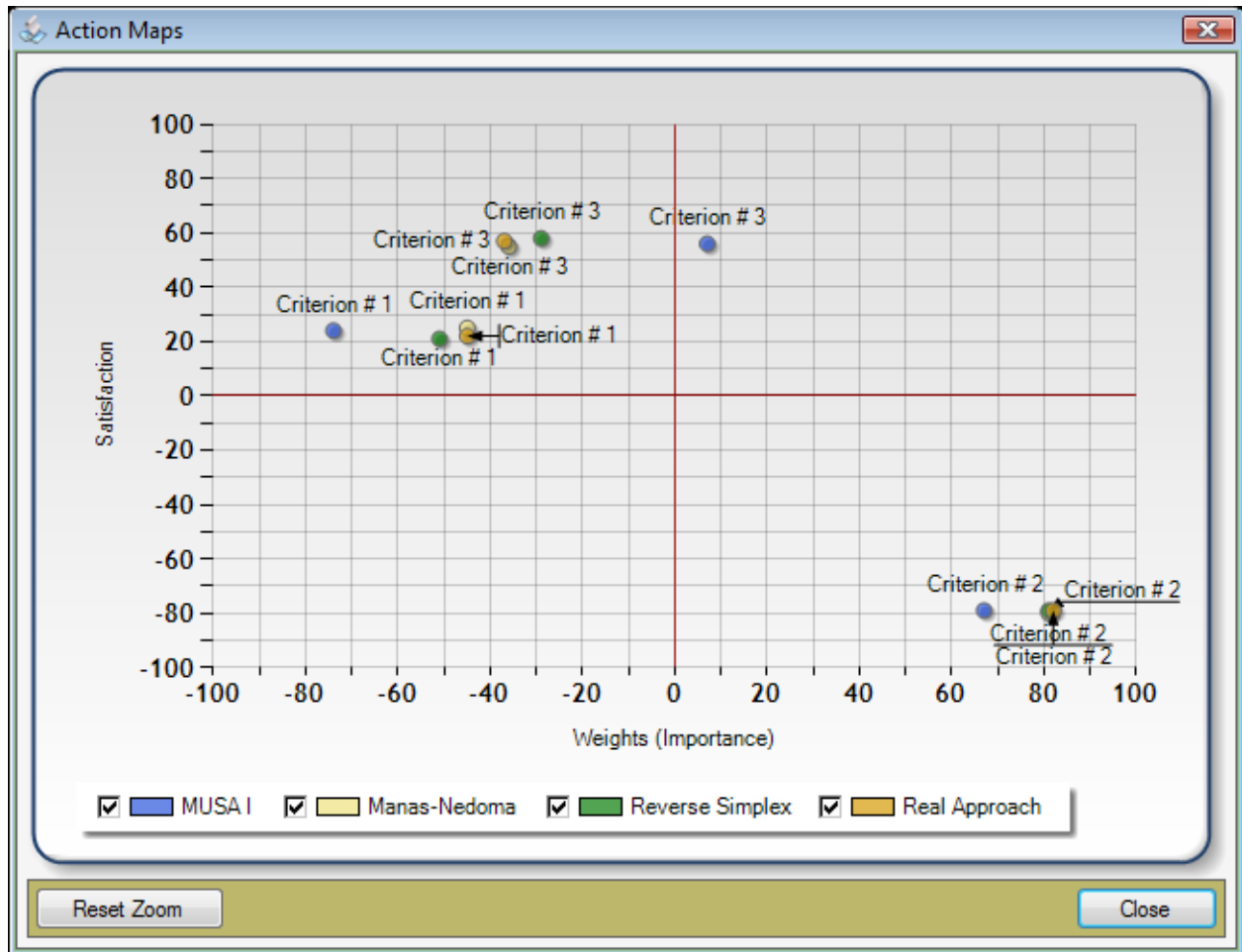
Εικόνα 61: Παράθυρο προβολής των βαρών των κριτηρίων (Πίτα)



Εικόνα 62: Παράθυρο προβολής των βαρών των κριτηρίων (Μπάρες)

### Διάγραμμα Δράσης

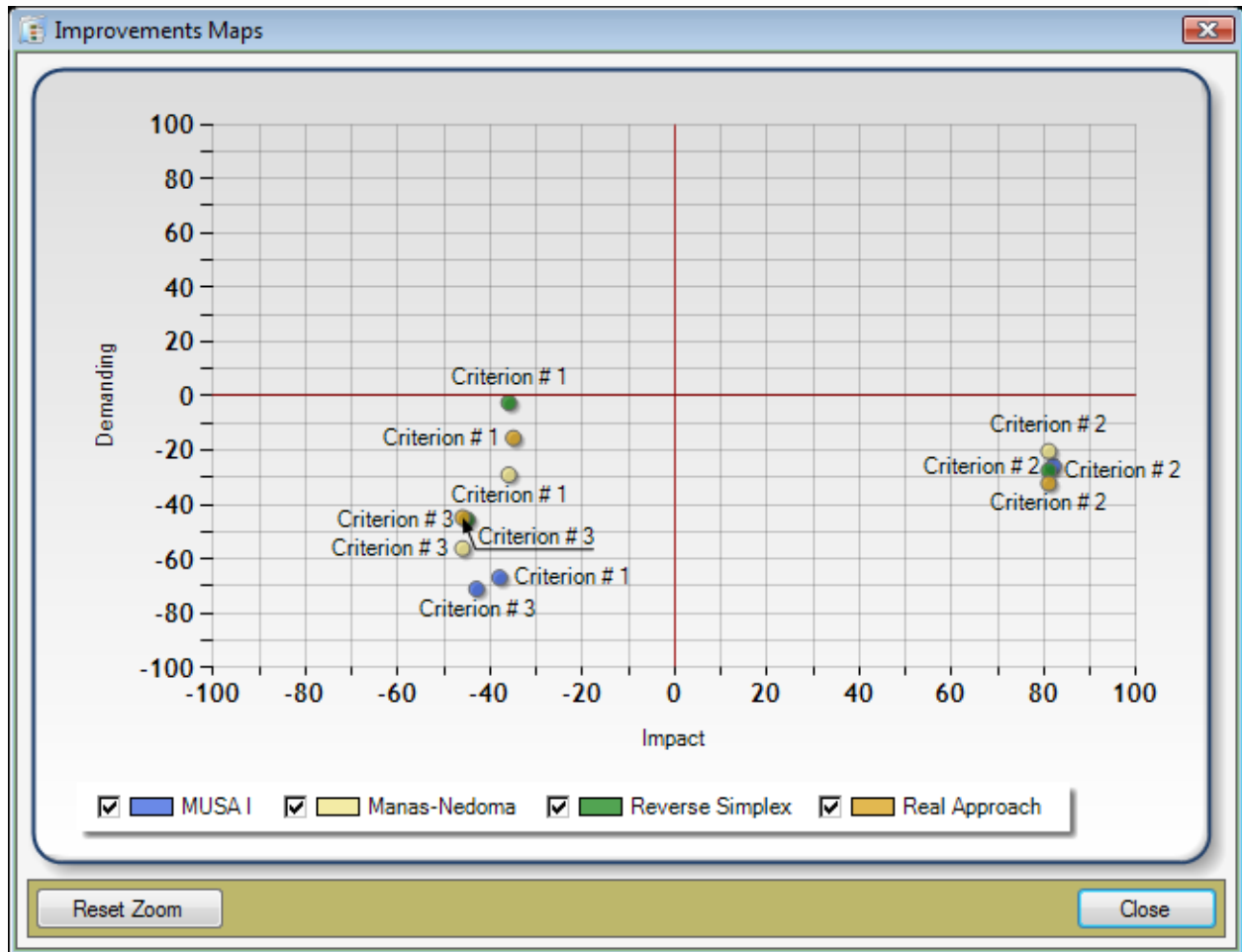
Πατώντας το κουμπί “Action Maps” (“Analysis” → “Action Maps”) ανοίγει το παράθυρο προβολής, με γράφημα, του διαγράμματος δράσης.



Εικόνα 63: Διάγραμμα Δράσης

### Διάγραμμα Βελτίωσης

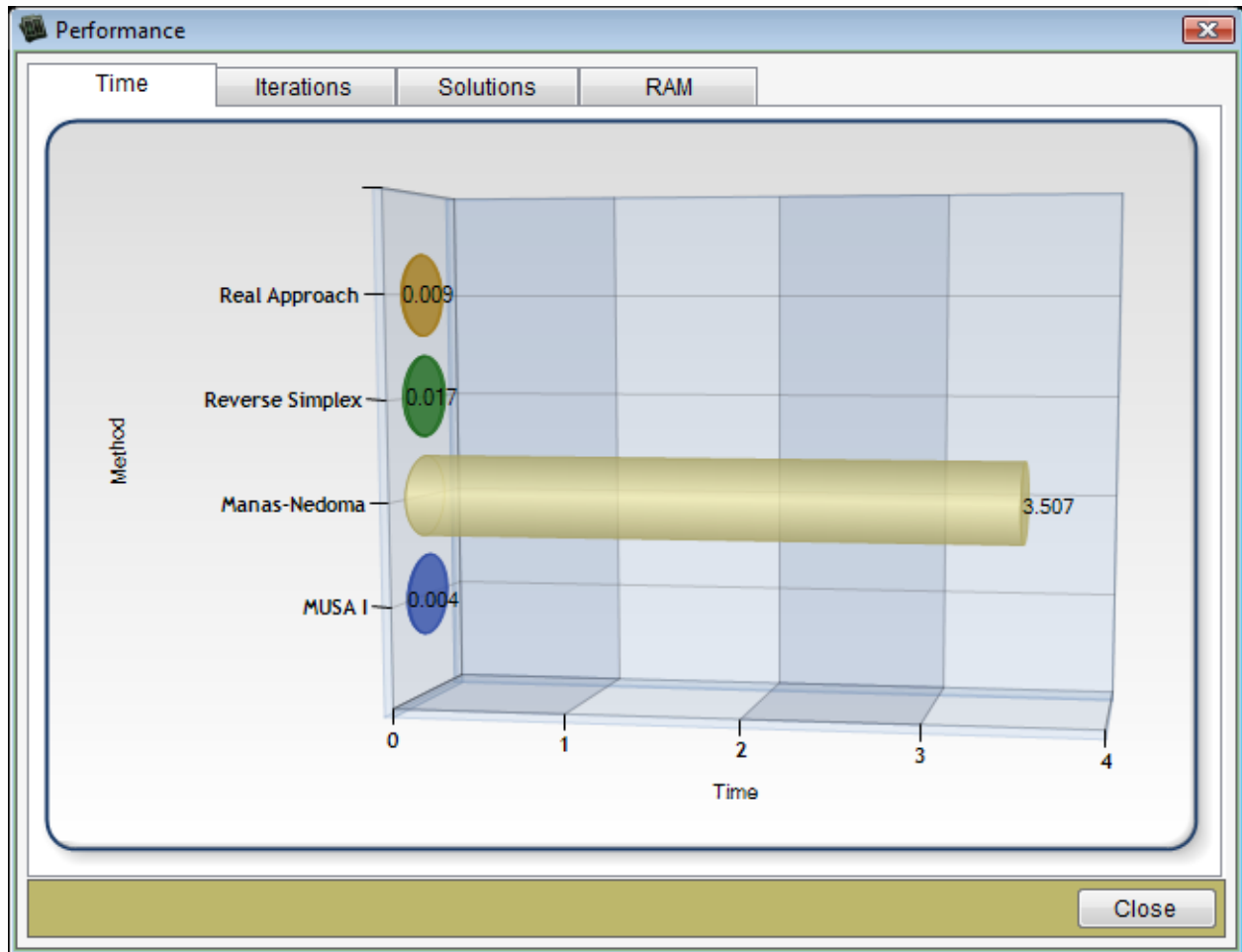
Πατώντας το κουμπί "Improvement Maps" ("Analysis" → "Improvement Maps") ανοίγει το παράθυρο προβολής, με γράφημα, του διαγράμματος βελτίωσης.



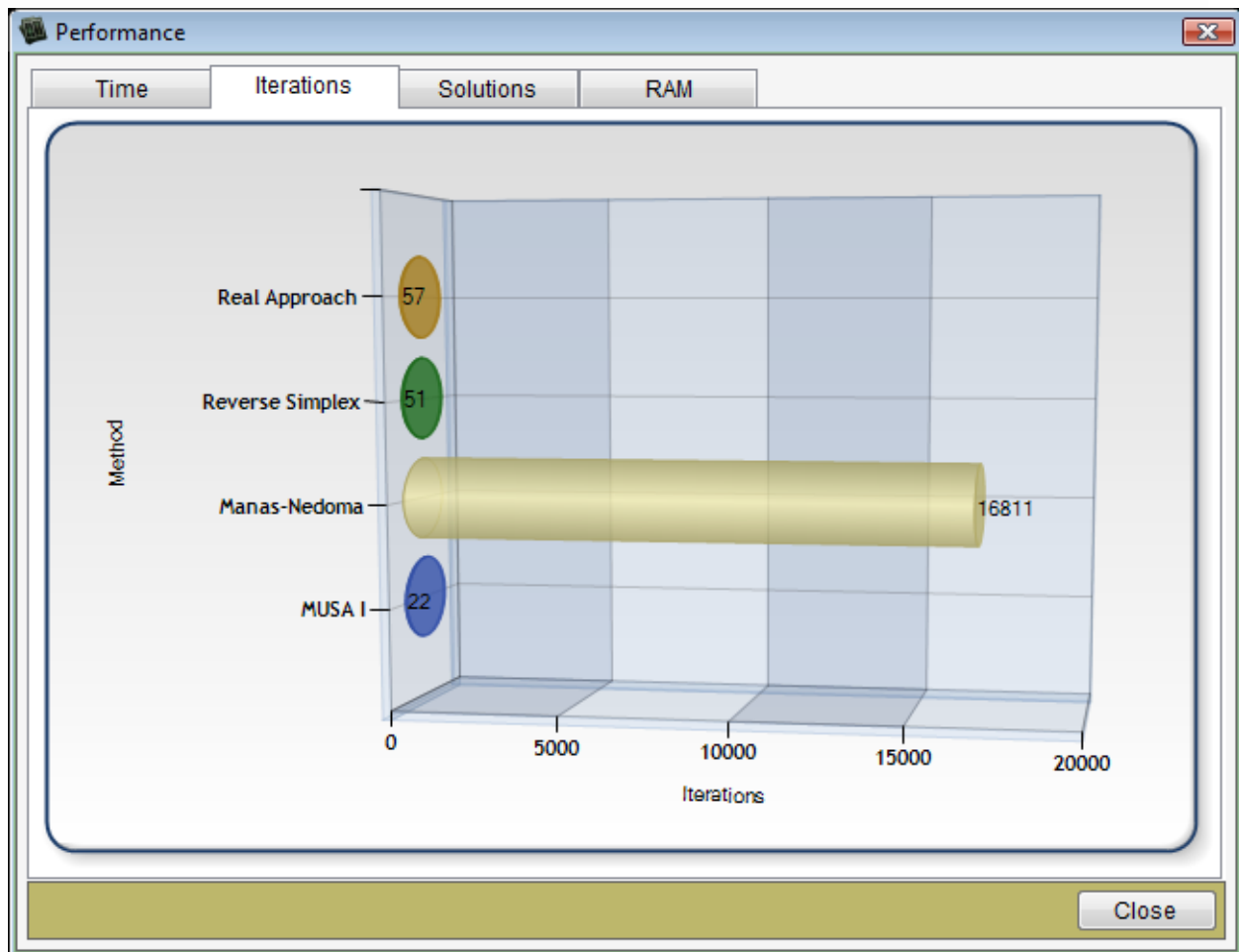
Εικόνα 64: Διάγραμμα Βελτίωσης

### Γραφήματα Απόδοσης

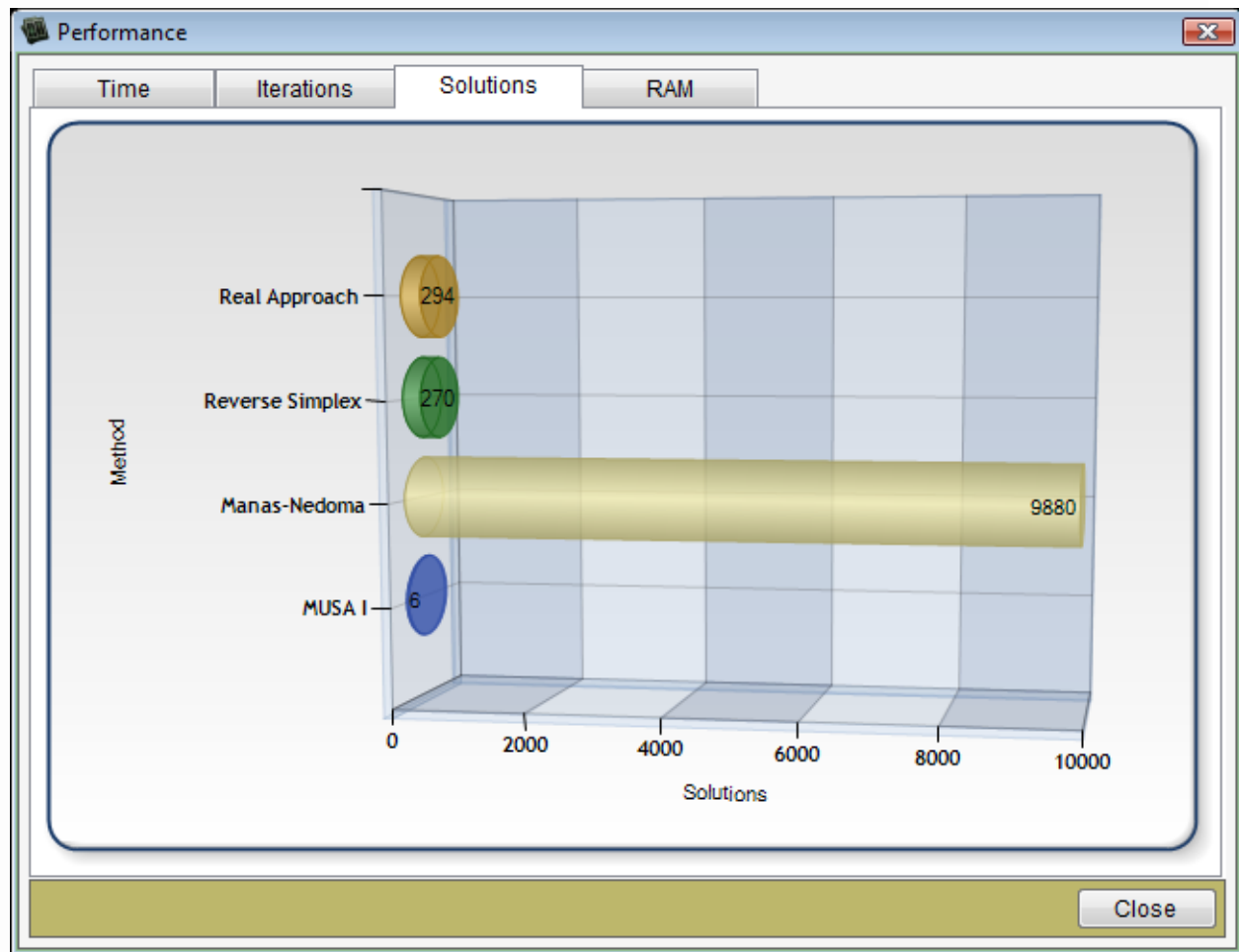
Πατώντας το κουμπί “Performance” (“Statistical” → “Performance”) ανοίγει το παράθυρο προβολής, με γράφημα, της απόδοσης του συστήματος.



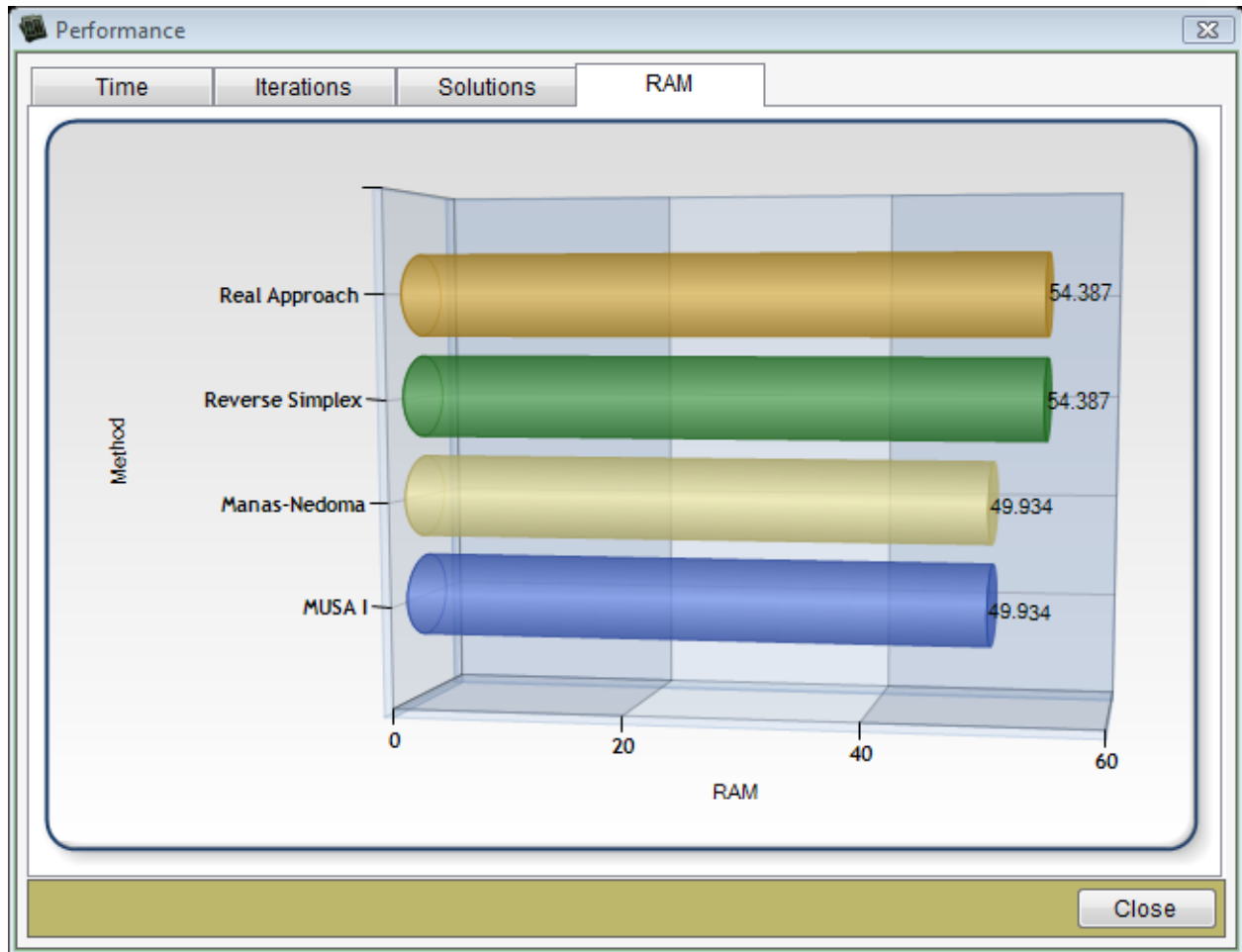
Εικόνα 65: Γράφημα Απόδοσης (χρόνος επίλυσης σε min)



Εικόνα 66: Γράφημα Απόδοσης (συνολικός αριθμός iterations – περιστροφών Simplex)



Εικόνα 67: Γράφημα Απόδοσης (συνολικός αριθμός λύσεων)



Εικόνα 68: Γράφημα Απόδοσης (μνήμη που χρησιμοποιήθηκε για την λύση του προβλήματος)



## DATASET GENERATOR

### Σχεδιασμός σεναρίου

Σε αυτό το αρχικό επίπεδο ο ερευνητής καλείται να ορίσει ποια θέλει να είναι τα χαρακτηριστικά των δεδομένων που θα δημιουργηθούν. Αναπτύσσεται ένα συνολικό σενάριο το οποίο περιλαμβάνει τα κριτήρια, τα οποία ακολουθούν τη δομή δένδρου, την κλίμακα ικανοποίησης και το μέγεθος δείγματος. Σύμφωνα με το μοντέλο, κάθε πελάτης καλείται να εκφράσει τις προτιμήσεις του, δηλαδή την ολική ικανοποίηση και την μερική ικανοποίησή του για κάθε κριτήριο ξεχωριστά, επιλέγοντας το κατάλληλο επίπεδο σε μια κλίμακα ικανοποίησης.

Έτσι οι αρχικές παράμετροι που ορίζονται στον γεννήτορα δεδομένων είναι:

- $n$ : αριθμός κριτηρίων ικανοποίησης. Ο χρήστης μπορεί να δώσει ακέραιους αριθμούς.
- $a$ : αριθμός των επιπέδων στην κλίμακα ολικής ικανοποίησης. Ο χρήστης μπορεί να τροποποιήσει τα προεπιλεγμένα ονόματα για τα επίπεδα.
- $a_i$ : αριθμός επιπέδων στην κλίμακα ικανοποίησης για κάθε κριτήριο  $i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ).
- $M$ : μέγεθος δείγματος.
- $D_{dis}$ : μέγιστη επιτρεπόμενη διαφορά (λάθος) για τις τιμές των συναρτήσεων ικανοποίησης  $[0\dots 1]$ . Είναι μια μέτρηση της ποιότητας και της ορθότητας των δεδομένων που πρόκειται να δημιουργηθούν. Μικρό  $D_{dis}$  δημιουργεί δεδομένα που ανταποκρίνονται σε ένα περισσότερο ομοιογενές δείγμα.

### Δημιουργία Συναρτήσεων Ικανοποίησης

Ένα σύνολο συναρτήσεων ικανοποίησης (ολικής ικανοποίησης και μερικής ικανοποίησης για κάθε κριτήριο) δημιουργείται αλληλεπιδραστικά. Ο χρήστης μπορεί προαιρετικά να ορίσει τα επίπεδα απαιτητικότητας  $D$  και  $D_i$  για τους πελάτες όπως επίσης και τα βάρη  $b_i$  για κάθε κριτήριο. Εναλλακτικά το πρόγραμμα μπορεί να δημιουργήσει τις συναρτήσεις χωρίς κανένα περιορισμό. Και στις δυο περιπτώσεις χρησιμοποιείται μια Monte Carlo προσομοίωση για τη δημιουργία των  $y^{*k}$  και  $x_i^*$  τιμών ακολουθώντας ομοιόμορφη κατανομή ( $\sim U(a,b)$ ).

Συγκεκριμένα, σε αυτό το επίπεδο ο χρήστης καλείται να ορίσει τις παρακάτω παραμέτρους:

- $D$  (προαιρετικά): ολικό επίπεδο απαιτητικότητας παίρνοντας τρεις διαφορετικές τιμές (Απαιτητικός, Κανονικός, Μη-Απαιτητικός).
- $D_i$  (προαιρετικά): μερικό επίπεδο απαιτητικότητας παίρνοντας τρεις διαφορετικές τιμές, όπως παραπάνω, για κάθε  $i$ -οστό κριτήριο.
- $b_i$  (προαιρετικά): το βάρος για το  $i$ -οστό κριτήριο.
- $\gamma$  (προαιρετικά): ελάχιστο βήμα κατά το οποίο αυξάνει η συνάρτηση ολικής ικανοποίησης ( $\gamma \leq 100/2^*(\alpha-1)$ ).

- $\gamma_c$  (προαιρετικά): ελάχιστο βήμα κατά το οποίο αυξάνουν οι συναρτήσεις μερικής ικανοποίησης για κάθε κριτήριο και υποκριτήριο ( $\gamma_c \leq \min \left\{ \frac{100}{2 * (a_i - 1)} \forall i = 1, \dots, n \right\}$ ).

Οι συναρτήσεις δημιουργούνται ακολουθώντας τους κανόνες μονοτονίας και κανονικοποιούνται στο διάστημα  $[0,100]$ . Αρχικά δημιουργείται η συνάρτηση ολικής ικανοποίησης  $Y^*$ .

Μετά τη δημιουργία της συνάρτησης ολικής ικανοποίησης ο χρήστης μπορεί να αλλάξει κάποιες από τις τιμές  $\gamma^{*m}$  της συνάρτησης που επιθυμεί χωρίς να παραβιάσει τους παραπάνω κανόνες. Το επόμενο βήμα είναι η δημιουργία των μερικών συναρτήσεων ικανοποίησης σύμφωνα με την προσέγγιση της σύνθεσης-αποσύνθεσης. Η δημιουργία των τυχαίων αριθμών  $x_i^{*k}$  (όπου  $x_i^k$  είναι η τιμή του επιπέδου ικανοποίησης) ικανοποιεί το ακόλουθο σύνολο περιορισμών. Για την δημιουργία αυτών των αριθμών χρησιμοποιούνται προσωρινές μεταβλητές  $tx_i^m$ .

### Δημιουργία συνόλου δεδομένων

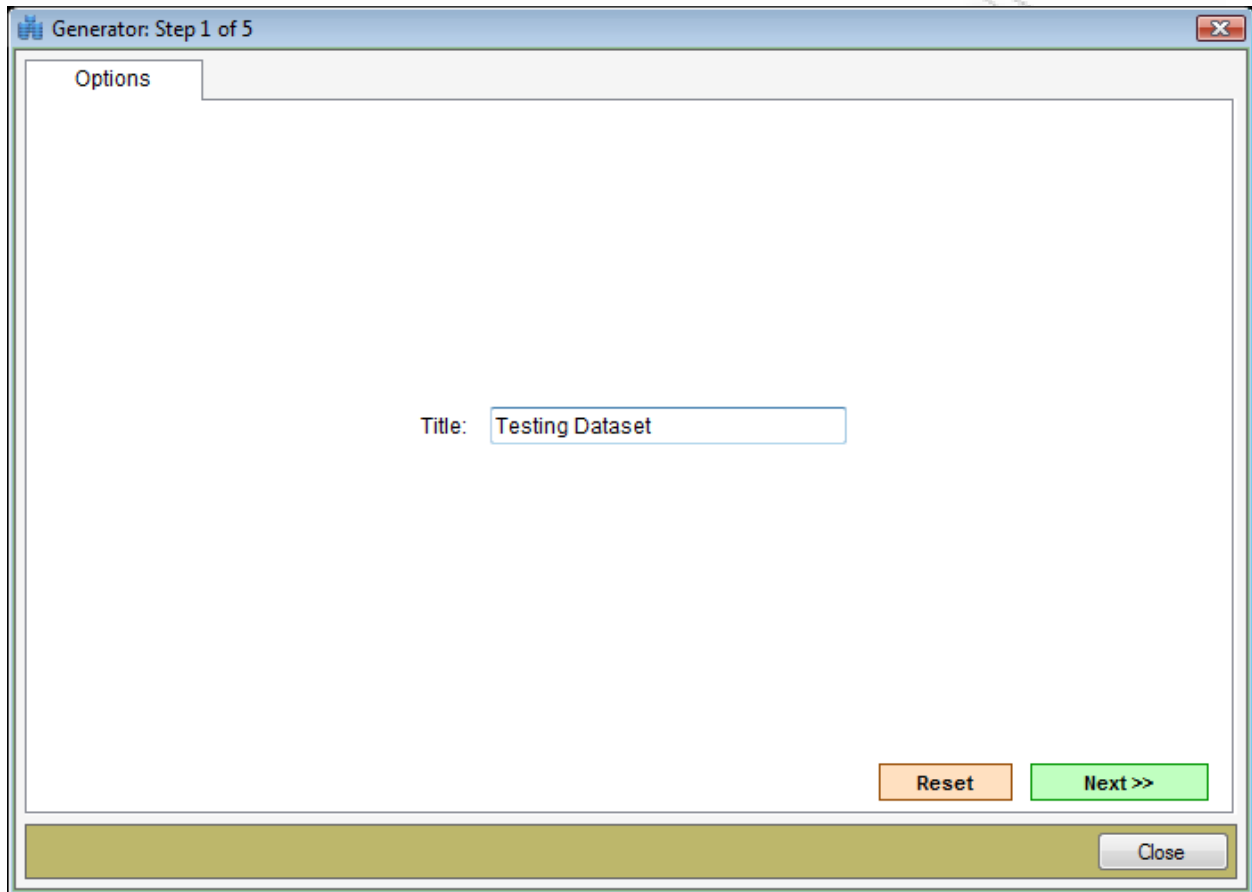
Το σύνολο δεδομένων πρέπει να έχει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά τα οποία να βασίζονται στις συναρτήσεις ικανοποίησης που δημιουργήθηκαν στο Επίπεδο 2. Το κύριο θέμα είναι η δημιουργία συνεπών δεδομένων. Η τιμή της παραμέτρου  $D_{dis}$  είναι υπεύθυνη για την ποιότητα και την ορθότητα των αποτελεσμάτων που πρόκειται να δημιουργηθούν. Μια μικρή τιμή για την  $D_{dis}$  πλησιάζει περισσότερο τα χαρακτηριστικά ενός ομοιογενούς δείγματος, αλλά στην πραγματικότητα τα ομοιογενή δείγματα είναι σπάνια.

Η γενική υπόθεση της ομοιόμορφης κατανομής δεν μειώνει την αξιοπιστία του γεννήτορα επειδή στις πραγματικές περιπτώσεις οι απαντήσεις δεν ακολουθούν μια ορισμένη στατιστική κατανομή.

### Υλοποίηση σεναρίου

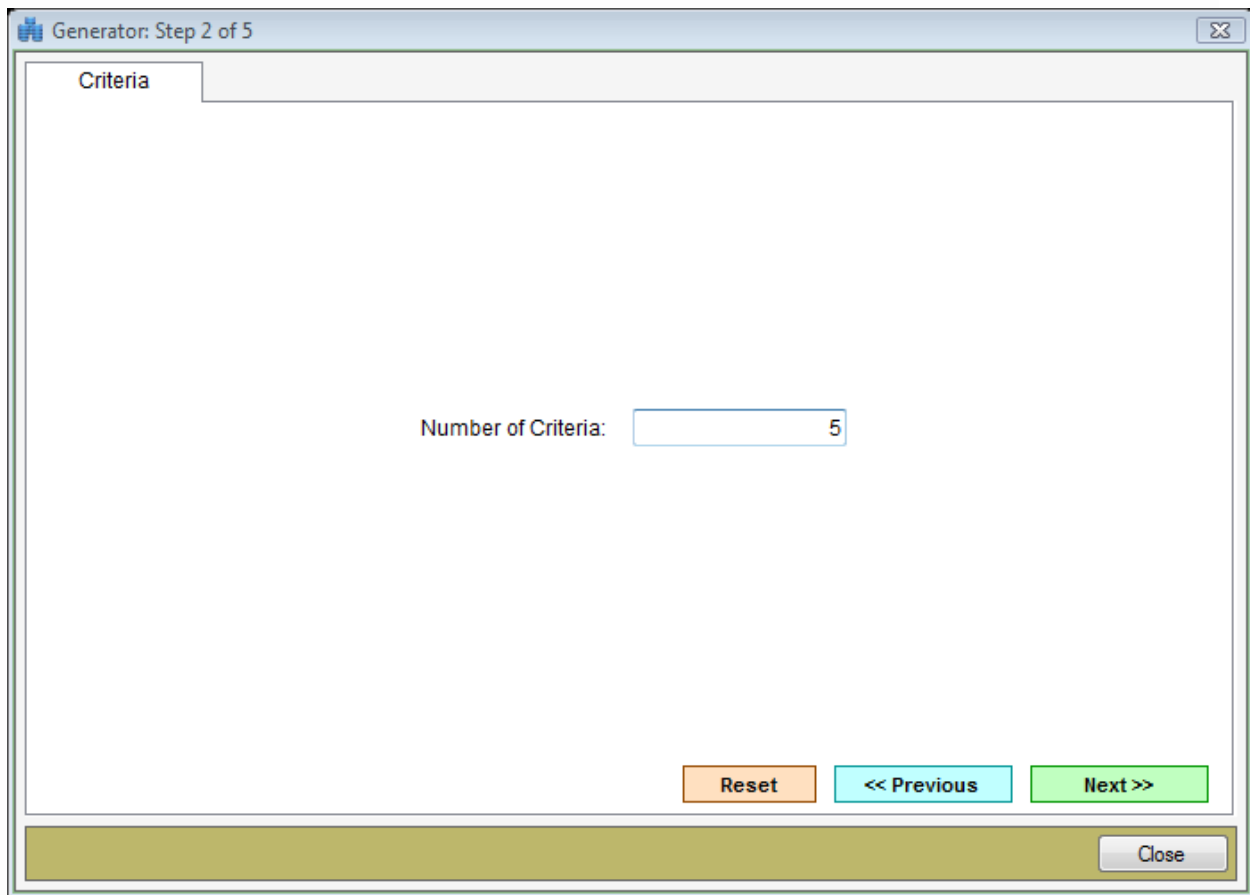
Στο παράδειγμα παρακάτω δημιουργήσουμε ένα σύνολο δεδομένων (200 απαντήσεις) σε ένα ερωτηματολόγιο με 5 κριτήρια και 4 επίπεδα ικανοποίησης για κάθε ένα από αυτά. Οι απαντήσεις θεωρείται ότι προήλθαν από δείγμα απαιτητικών ερωτηθέντων. Σε όλα τα κριτήρια θα χρησιμοποιηθεί «βήμα» ίσο με 4.

## Δημιουργία ερωτηματολογίου



Εικόνα 69: Dataset generator (Options) – 1/5

Αρχικά συμπληρώνουμε τον τίτλο του συνόλου δεδομένων. Πατώντας το κουμπί “Next” πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα.



Generator: Step 2 of 5

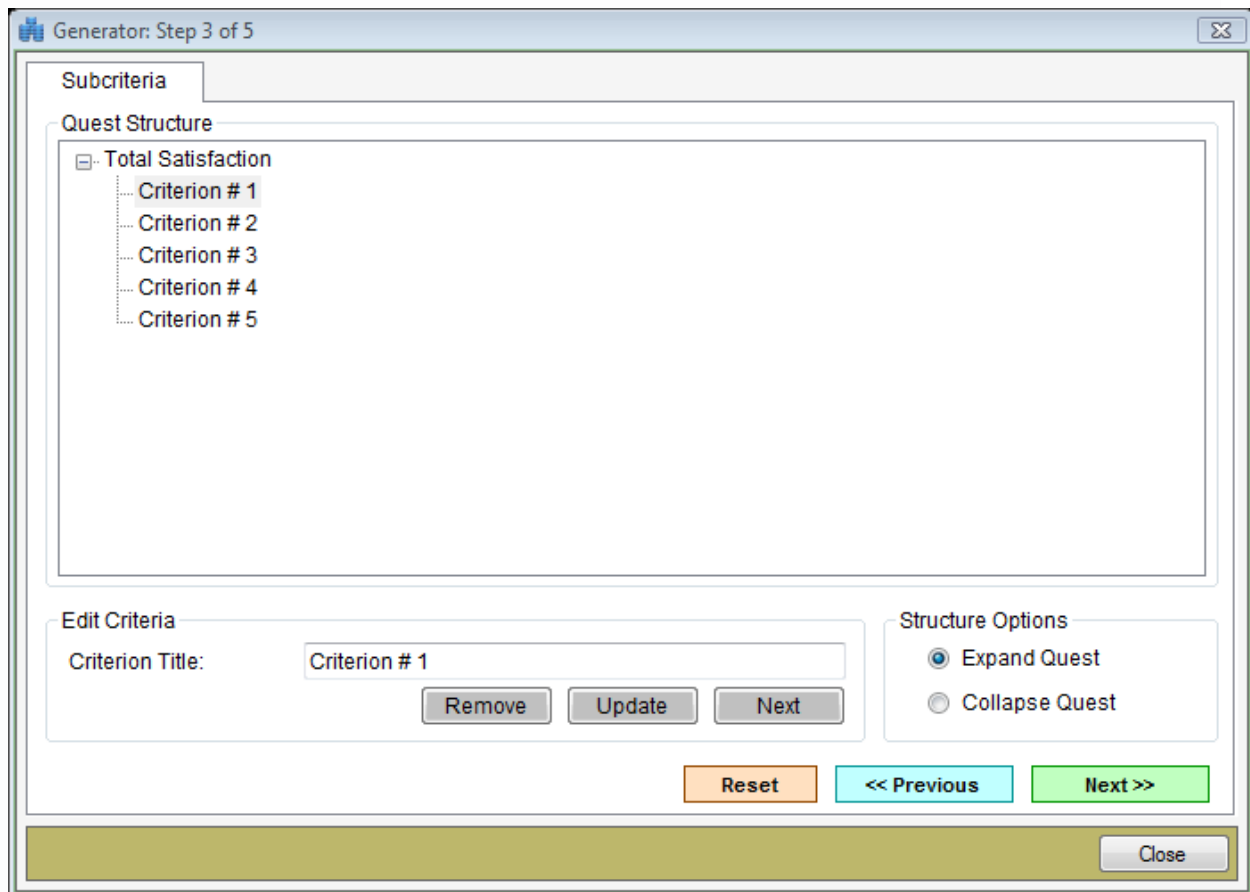
Criteria

Number of Criteria:

Reset << Previous Next >> Close

**Εικόνα 70: Dataset generator (Criteria) – 2/5**

Στη συνέχεια συμπληρώνουμε τον αριθμό των κριτηρίων της έρευνας. Πατώντας το κουμπί “Next” πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα και “Previous” γυρίζουμε ένα βήμα πίσω.

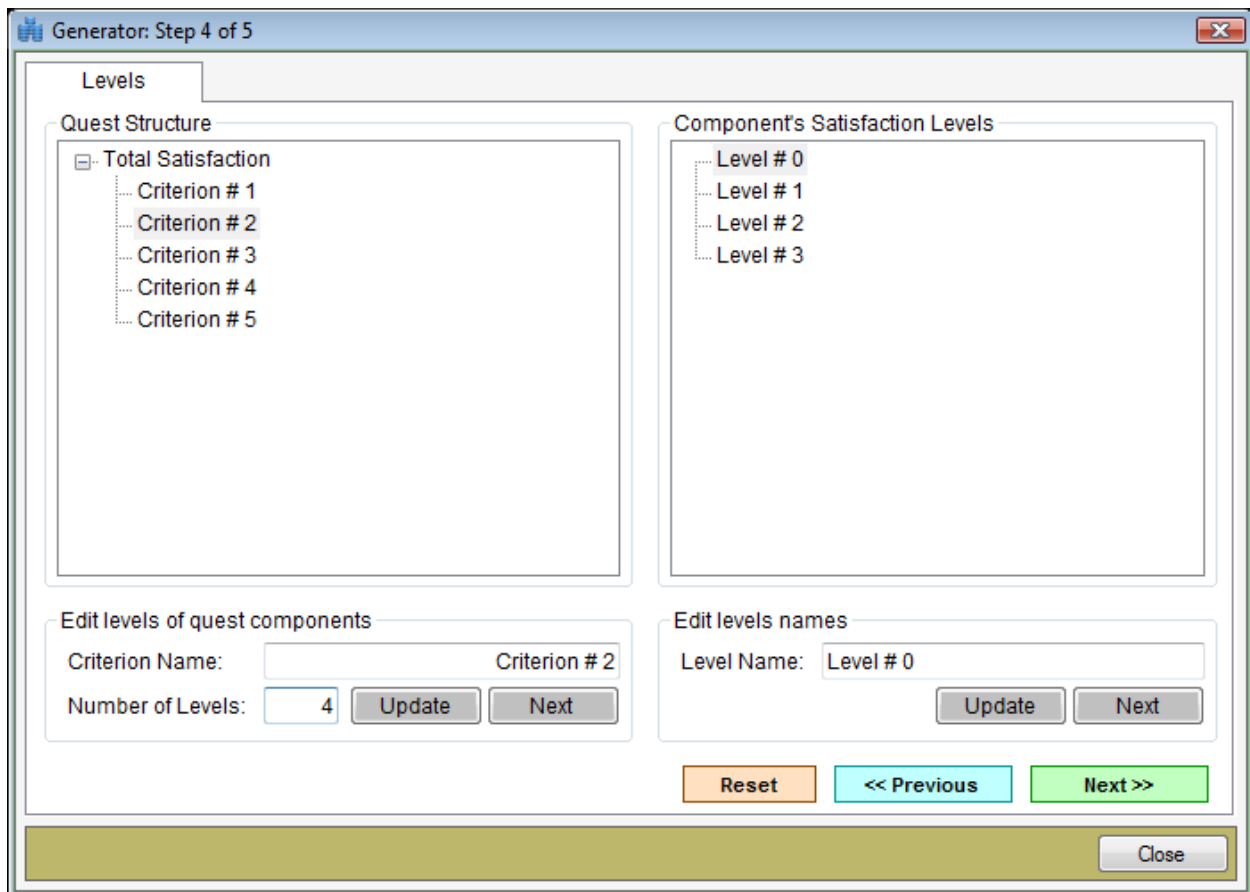


**Εικόνα 71: Dataset generator (Subcriteria) – 3/5**

Το τρίτο βήμα είναι η δημιουργία υποκριτηρίων (η υπηρεσία είναι διαθέσιμη σε άλλη έκδοση του generator). Εδώ, επίσης, δίνεται η δυνατότητα για αλλαγή των τίτλων των κριτηρίων. Αυτό γίνεται αν επιλέξουμε ένα κριτήριο από την λίστα, στη συνέχεια στο πλαίσιο “Criterion Title” πληκτρολογήσουμε τον νέο τίτλο και τέλος πατήσουμε το κουμπί “Update”. Τέλος, μπορούμε να διαγράψουμε ένα κριτήριο από το ερωτηματολόγιο.

Το κουμπί “Next” μας μεταφέρει στο επόμενο κριτήριο για να το επεξεργαστούμε. Ακόμα υπάρχει η δυνατότητα «ανάπτυξης» ή «σύμπτυξης» του ερωτηματολογίου με τα κουμπιά “Expand Quest” και “Collapse Quest”.

Πατώντας το κουμπί “Next” πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα και “Previous” γυρίζουμε ένα βήμα πίσω.



**Εικόνα 72: Dataset generator (Labels) – 4/5**

Στο τέταρτο βήμα γίνεται ο καθορισμός των επιπέδων ικανοποίησης για τα κριτήρια (ή και τα υποκριτήρια). Για να αλλάξουμε τα επίπεδα ικανοποίησης ενός κριτηρίου θα πρέπει πρώτα να επιλέξουμε ένα από την λίστα, στη συνέχεια να πληκτρολογήσουμε τον νέο αριθμό επιπέδων στο πλαίσιο “Number of Levels” και τέλος να πατήσουμε το κουμπί “Update”. Με το κουμπί “Next” πηγαίνουμε στο επόμενο κριτήριο.

Ακόμα υπάρχει η δυνατότητα αλλαγής των τίτλων των επιπέδων ικανοποίησης στο πλαίσιο δεξιά. Για να μετονομάσουμε ένα επίπεδο ικανοποίησης θα πρέπει πρώτα να επιλέξουμε ένα από την λίστα. Στη συνέχεια να πληκτρολογήσουμε το νέο όνομα στο πλαίσιο “Label Name” και τέλος να πατήσουμε το κουμπί “Update”. Με το κουμπί “Next” μεταφερόμαστε στο επόμενο επίπεδο για επεξεργασία.

Πατώντας το κουμπί “Next” πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα και “Previous” γυρίζουμε ένα βήμα πίσω.

## Ορισμός παραμέτρων

Εικόνα 73: Dataset generator (Generator) – 5/5

Στο πέμπτο βήμα ορίζουμε τις παραμέτρους για το σύνολο δεδομένων. Όπως ορίσαμε το πρόβλημα στην αρχή, θέλουμε οι το σύνολο δεδομένων να έχει απαντήσεις από απαιτητικούς ερωτηθέντες και τα κριτήρια να έχουν βήμα 4.

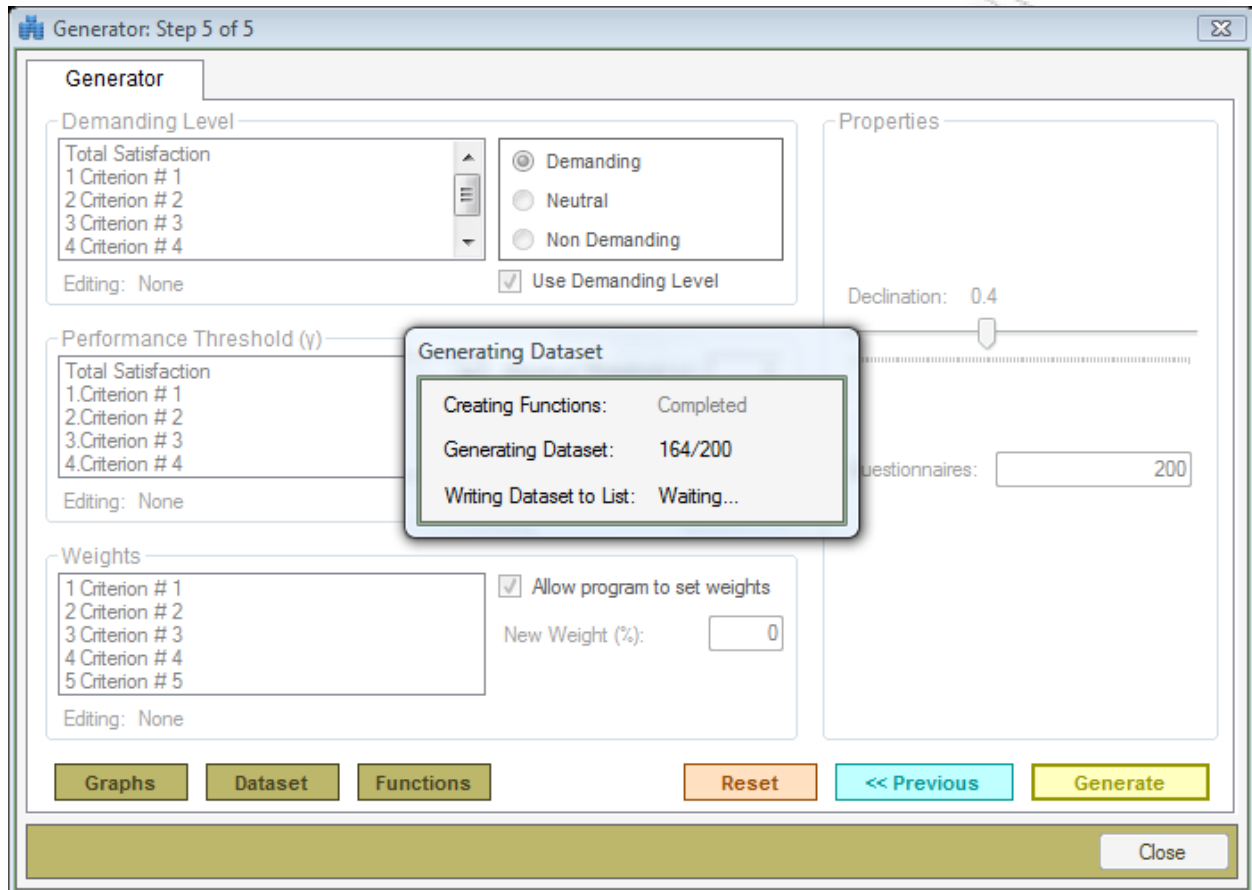
Για να ορίσουμε το επίπεδο απαιτητικότητας, θα πρέπει να επιλέξουμε “Demanding” από την ομάδα “Demanding Level” για την ολική ικανοποίηση και τα κριτήρια.

Για να ορίσουμε το βήμα των κριτηρίων, θα πρέπει να πληκτρολογήσουμε στο πλαίσιο “Threshold (γ)” της ομάδας “Performance Threshold (γ)” την τιμή 4 για την ολική ικανοποίηση και όλα τα κριτήρια.

Στην ομάδα “Properties” υπάρχει η επιλογή “Declination” με την οποία ρυθμίζουμε πόσο «κλειστά» ή «ελεύθερα» θέλουμε να είναι τα δεδομένα μας (μηδέν για «κλειστά» και ένα για «ελεύθερα»). Στην ίδια ομάδα, επίσης, μπορούμε να ορίζουμε τον αριθμό των απαντήσεων που θέλουμε να μας δημιουργήσει το generator (για το παράδειγμά μας 200).

Τέλος, υπάρχει η ομάδα «Weights» στην οποία μπορούμε να προσθέσουμε εμείς τα βάρη των κριτηρίων αντί να τα δημιουργήσει αυτόματα το σύστημα.

## Δημιουργία συνόλου δεδομένων



**Εικόνα 74: Dataset generator (Generator) – Δημιουργία δεδομένων**

Πατώντας το κουμπί “Generate” αρχίζει η διαδικασία δημιουργίας του συνόλου δεδομένων.

Μπορούμε να δούμε τις συναρτήσεις με βάση τις οποίες δημιουργήθηκαν τα δεδομένα πατώντας το κουμπί “Graphs”.

Τα δεδομένα μπορούμε να τα δούμε αν πατήσουμε το κουμπί “Dataset”. Με το κουμπί “Load” φορτώνονται τα δεδομένα στην εφαρμογή MUSA Application.

Τέλος, μπορούμε να δούμε τις συναρτήσεις σε κανονική και κανονικοποιημένη μορφή πατώντας το κουμπί “Functions”.



Generator - [Functions]

Normalization

Normalized Functions  Unnormalized Functions

Quest components	L0	L1	L2	L3	L4
Total Satisfaction	0	5	12	67	100
1 Criterion # 1	0	16.3	44.8	100	
2 Criterion # 2	0	6.6	59.5	100	
3 Criterion # 3	0	10.6	67.5	100	
4 Criterion # 4	0	14.3	41.5	100	
5 Criterion # 5	0	7.3	19.3	100	

Close

Εικόνα 75: Συναρτήσεις ικανοποίησης (κανονικοποιημένες)

Generator - [Functions]

Normalization

Normalized Functions  Unnormalized Functions

Quest components	L0	L1	L2	L3	L4
Total Satisfaction	0	5	12	67	100
1 Criterion # 1	0	2.4	6.7	15	
2 Criterion # 2	0	2.4	22	37	
3 Criterion # 3	0	0.5	3.4	5	
4 Criterion # 4	0	5.9	17	41	
5 Criterion # 5	0	0.1	0.4	2	

Close

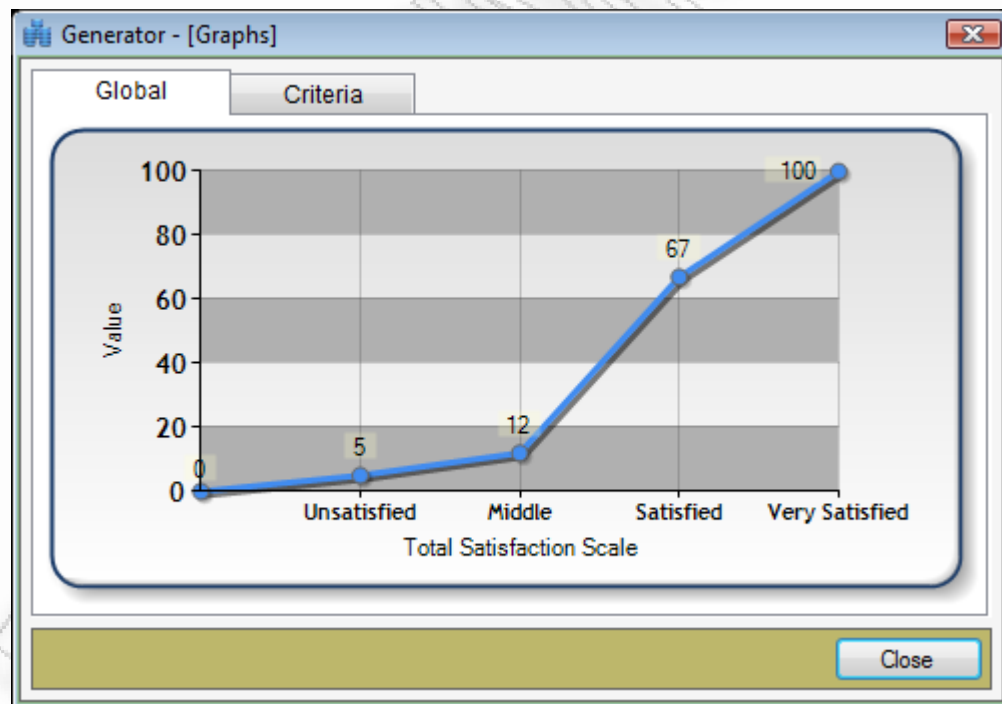
Εικόνα 76: Συναρτήσεις ικανοποίησης (μη κανονικοποιημένες)

Generator - [Dataset]

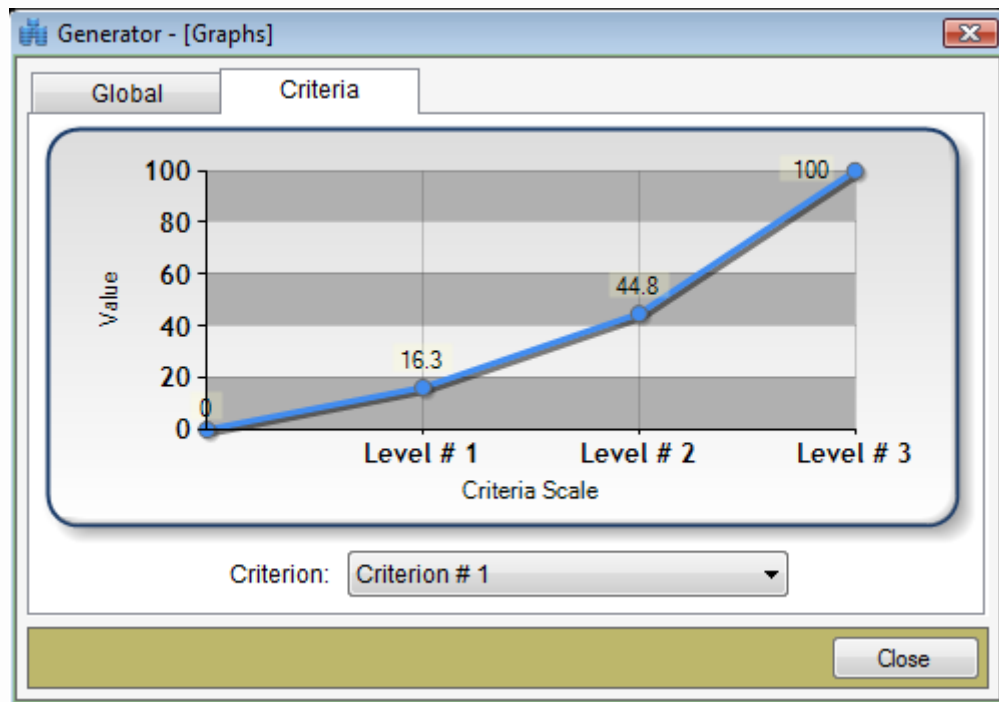
No	TS	C#1	C#2	C#3	C#4	C#5
1	3	3	2	0	1	1
2	4	2	3	2	3	3
3	3	2	1	0	3	2
4	3	1	3	1	1	0
5	3	3	3	2	2	2
6	2	3	1	2	0	3
7	2	3	0	2	2	3
8	2	0	2	3	1	0
9	2	3	1	3	1	1
10	2	2	0	1	2	3
11	3	0	0	2	3	1
12	4	3	3	2	3	2
13	1	0	1	1	0	3

Import Save Close

Εικόνα 77: Σύνολο δεδομένων

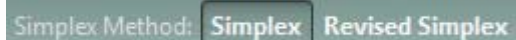


Εικόνα 78: Συναρτήσεις ικανοποίησης σε γραφική μορφή (ολική ικανοποίηση)



Εικόνα 78: Συναρτήσεις ικανοποίησης σε γραφική μορφή (μερική ικανοποίηση)

## ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX



Εικόνα 79: Επιλογή μεθόδου simplex

Το σύστημα MUSA Application δίνει την δυνατότητα χρησιμοποίησης δυο διαφορετικών εκδόσεων simplex για την λύση των γραμμικών προβλημάτων. Αυτές είναι:

- Classical Simplex (κουμπί Simplex)
- Revised Simplex (κουμπί Revised Simplex)

### Classical Simplex

Η μέθοδος αυτή υλοποιεί την κλασική simplex (θεωρητική ανάπτυξη στο βιβλίο «Γραμμικός Προγραμματισμός», Ι. Σίσκος, 2000). Προγραμματίστηκε σε C# για να χρησιμοποιηθεί στο σύστημα MUSA Application.

Όλες οι συναρτήσεις της μεθόδου βρίσκονται στο αρχείο danSolver.cs. Η μέθοδος αυτή μπορεί να λύσει προβλήματα μεταβελτιστοποίησης με τις μεθόδους Global MUSA, MUSA I, MUSA II, MUSA III, Manas-Nedoma, Reverse Simplex και Real Approach.

Συνολικά αποτελείται από 1,372 γραμμές κώδικα οι οποίες είναι μοιρασμένες σε 106 συναρτήσεις.

Σε αυτή την έκδοση της εφαρμογής παρέχεται μόνο η δυνατότητα για φόρτωση της βάσης της βέλτιστης λύσης κατά τη διαδικασία της μεταβελτιστοποίησης.

Ακολουθεί τα βήματα της μεθόδου simplex ένα προς ένα. Ο κώδικας είναι πολύ καλά βελτιστοποιημένος όσο αφορά το τεχνικό μέρος. Στο μέλλον υπάρχει η πρόθεση για θεωρητική βελτίωση της μεθόδου έτσι ώστε να αυξηθεί η ταχύτητα επίλυσης των γραμμικών προβλημάτων.

### Revised Simplex

Η μέθοδος αυτή υλοποιεί την revised simplex. Έχει προγραμματιστεί από τον Henri Gourvest και παρέχεται δωρεάν από την ηλεκτρονική διεύθυνση [http://tech.groups.yahoo.com/group/lp\\_solve/](http://tech.groups.yahoo.com/group/lp_solve/). Για την επίλυση των γραμμικών χρησιμοποιεί το αρχείο lpsolve55.dll το οποίο διατίθεται για x64 και x86 επεξεργαστές.

Η μέθοδος αυτή μπορεί να λύσει προβλήματα μεταβελτιστοποίησης με τις μεθόδους Global MUSA, MUSA I, MUSA II και MUSA III. Δεν μπορούμε να ορίσουμε προβλήματα με τις μεθόδους Manas-

Nedoma, Reverse Simplex και Real Approach, γιατί δεν μπορούμε να ορίσουμε εμείς τον αριθμό των slack variables και την τιμή τους στην αντικειμενική συνάρτηση.

Παρέχεται η δυνατότητα για φόρτωση ή όχι της βάσης της βέλτιστης λύσης κατά τη διαδικασία της μεταβελτιστοποίησης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑΣ

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: ΣΥΝΤΟΜΕΥΣΕΙΣ - ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

### Συντομεύσεις



Εικόνα 80: Συντομεύσεις εφαρμογής

- Κουμπί “Open”  
  
 Άνοιγμα και φόρτωση αρχείου PRN στην εφαρμογή.
- Κουμπί “Close”  
  
 Κλείσιμο τρέχοντος αρχείου PRN και επαναφορά της εφαρμογής στην αρχική της κατάσταση.
- Κουμπί “Save”  
  
 Αποθήκευση αποτελεσμάτων από την ανάλυση ικανοποίησης των ερωτηθέντων.
- Κουμπί “Start”  
  
 Έναρξη επίλυσης προβλημάτων
- Κουμπί “Pause”  
  
 Προσωρινή παύση επίλυσης των προβλημάτων. Για να συνεχιστεί η διαδικασία πρέπει να πατήσουμε ξανά το κουμπί “Pause”.
- Κουμπί “Stop”  
  
 Γενική διακοπή της διαδικασίας επίλυσης. Δεν εμφανίζονται αποτελέσματα.
- Κουμπί “Satisfaction”  
  
 Προβολή παραθύρου με τα γραφήματα ολικής και μερικής ικανοποίησης των ερωτηθέντων.
- Κουμπί “Results”  


Προβολή παραθύρου με τα αποτελεσμάτων όλων των λύσεων των γραμμικών προβλημάτων μεταβελτιστοποίησης.

- Κουμπί “Data”



Προβολή των δεδομένων που εισέρχονται στο σύστημα.

- Κουμπί “Options”



Προβολή παραθύρου με τις ρυθμίσεις για τον τρόπο εφαρμογής των μεθόδων της μεταβελτιστοποίησης.

- Κουμπί “Generator”



Ενσωματωμένη εφαρμογή η οποία δημιουργεί δοκιμαστικά δεδομένα (απαντήσεις σε κάποια έρευνα) τα οποία στη συνέχεια εισέρχονται στο σύστημα ή αποθηκεύονται για άλλη χρήση.

- Κουμπί “Help”



Προβολή παραθύρου το οποίο περιέχει βοήθεια για την λειτουργικότητα του συστήματος.

- Κουμπί “Exit”



Ολικός τερματισμός της εφαρμογής.

## Επεξηγήσεις

Filename: Quest\_Dataset.PhD.prn Questionnaires: 6 Type of Resolution: Statistical Analysis Status: Completed Time Elapsed: 00:06:48 Process: 100%

### Εικόνα 81: Επεξήγηση κειμένων

- Κείμενο “Filename”

**Filename: Quest\_Dataset.PhD.prn**

Όνομα αρχείου με δεδομένα, το οποίο έχει φορτωθεί στο σύστημα.

- Κείμενο “Questionnaires”

**Questionnaires: 6**

Αριθμός ερωτηματολογίων που είναι φορτωμένα.

- Κείμενο “Type of Resolution”

**Type of Resolution: Statistical Analysis**

Τρόπος μελέτης της ικανοποίησης.

- Κείμενο “Status”

**Status: Completed**

Προβολή της τρέχουσας διαδικασίας που εκτελείται εσωτερικά στο σύστημα

- Κείμενο “Time”

**Time Elapsed: 00:06:48**

Χρόνος που έχει περάσει από την έναρξη της διαδικασίας επίλυσης.

- Κείμενο “Process”

**Process: 100%**

Ποσοστό επί τοις εκατό της διαδικασίας που έχει ήδη εκτελεστεί.

- Κείμενο “CPU/RAM”

**CPU: 6.17% RAM: 44.09MB**

Ποσοστό επί τοις εκατό από την CPU του υπολογιστή καθώς και αριθμός των MB RAM που χρησιμοποιούνται από το σύστημα.



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: ΑΝΑΛΥΣΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

### Διάβασμα PRN αρχείου

Για να φορτώσουμε ένα PRN αρχείο στο σύστημα, εκτελείται η συνάρτηση

```
<!--
public void openFileFunction(String fileNameE)
{
    closeAllActions(true);

    String tmp;
    clsVariables.maximumTotalThreshold_SA = 0;
    clsVariables.maximumTotalThreshold_RA = 0;
    clsVariables.maximumTotalThreshold_SR = 0;

    clsVariables.maximumCriteriaThreshold_SA = 0;
    clsVariables.maximumCriteriaThreshold_RA = 0;
    clsVariables.maximumCriteriaThreshold_SR = 0;

    fileName = fileNameE;
    fileNameOnly = Path.GetFileName(fileName);
    clsText.setText(this.fileToolStripStatusLabel, "Filename: " +
    fileNameOnly);
    tmp = fileName;

    lpBase lpCurrent = new lpBase(tmp);
    clsData.fillDataDialog(lpCurrent, comForms.viewDataForm);

    for (int i = 0; i < lpCurrent.numberOfCriteria; i++)
    {
        clsVariables.maximumCriteriaThreshold_SA +=
        lpCurrent.criteriaLevels[i];
        clsVariables.maximumCriteriaThreshold_RA +=
        lpCurrent.criteriaLevels[i];
        clsVariables.maximumCriteriaThreshold_SR +=
        lpCurrent.criteriaLevels[i];
    }

    clsVariables.maximumCriteriaThreshold_SA = 100.0 /
    clsVariables.maximumCriteriaThreshold_SA;
    clsVariables.maximumCriteriaThreshold_RA = 100.0 /
    clsVariables.maximumCriteriaThreshold_RA;
    clsVariables.maximumCriteriaThreshold_SR = 100.0 /
    clsVariables.maximumCriteriaThreshold_SR;
}
```

```

clsVariables.maximumTotalThreshold_RA = 100.0 / (2.0 *
lpCurrent.totalSatisfactionLevels);

clsVariables.maximumTotalThreshold_SA = 100.0 / (2.0 *
lpCurrent.totalSatisfactionLevels);

clsVariables.maximumTotalThreshold_SR = 100.0 / (2.0 *
lpCurrent.totalSatisfactionLevels);

clsVariables.globalPreferenceThreshold_SA =
Convert.ToDouble(clsVariables.maximumTotalThreshold_SA) / 2.0;
clsVariables.criteriaPreferenceThreshold_SA =
Convert.ToDouble(clsVariables.maximumCriteriaThreshold_SA) / 2.0;

clsVariables.globalPreferenceThreshold_Max_RA =
clsVariables.maximumTotalThreshold_RA;
clsVariables.criteriaPreferenceThreshold_Max_RA =
clsVariables.maximumCriteriaThreshold_RA;

clsVariables.globalPreferenceThreshold_SR =
Convert.ToDouble(clsVariables.maximumTotalThreshold_SR) / 2.0;
clsVariables.criteriaPreferenceThreshold_SR =
Convert.ToDouble(clsVariables.maximumCriteriaThreshold_SR) / 2.0;

clsText.setText(this.numberOfQuestsToolStripStatusLabel,
"Questionnaires: " + lpCurrent.numberOfCustomers.ToString());

this.timerHideToolbar.Enabled = false;
this.timerShowToolbar.Enabled = true;
}
--!>

```

Ουσιαστικά το αρχείο αρχίζει να διαβάζεται από την εντολή `lpBase lpCurrent = new lpBase(tmp)`. Η εντολή αυτή δημιουργεί μια καινούργια κλάση μέσα στην οποία υπάρχουν όλα τα στοιχεία του PRN αρχείου, καθώς και το γραμμικό πρόβλημα.

#### Κλάση lpBase

```

<!--
public class lpBase
{
    public readonly string surveyTitle;
    public readonly int numberOfCustomers;
    public readonly int numberOfCriteria;
    public readonly string[] criteriaNames;
    public readonly int totalSatisfactionLevels;
    public readonly int[] criteriaLevels;
    public readonly int[] totalSatisfactionAnswers;
    public readonly int[,] criteriaAnswers;
}

```

```
public readonly string[] totalSatisfactionLevelNames;
public readonly string[][] criteriaLevelNames;

double totalThreshold;
double criteriaThreshold;

public string getLP()
{
    double tmp;
    StringBuilder linearstring = new StringBuilder();
    linearstring.Append("min:");

    for (int j = 0; j < numberOfCustomers; j++)
    {
        linearstring.AppendFormat(" +s_p{0} +s_n{0}", j + 1);
    }

    linearstring.Append(";\r\n");

    for (int j = 0; j < numberOfCustomers; j++)
    {
        tmp = totalThreshold * totalSatisfactionAnswers[j];

        for (int i = 0; i < numberOfCriteria; i++)
        {
            for (int k = 0; k < criteriaAnswers[j, i]; k++)
            {
                linearstring.AppendFormat("+w{0}.{1} ", i + 1, k +
                    1);
            }

            tmp -= criteriaThreshold * criteriaAnswers[j, i];
        }

        for (int m = 0; m < totalSatisfactionAnswers[j]; m++)
        {
            linearstring.AppendFormat("-z{0} ", m + 1);
        }

        linearstring.AppendFormat("-s_p{0} +s_n{0} = {1};\r\n", j +
            1, tmp.ToString().Replace(",", "."));
    }

    for (int m = 1; m < totalSatisfactionLevels; m++)
    {
        linearstring.AppendFormat("+z{0} ", m);
    }
}
```

```

    tmp = 100 - (totalThreshold * (totalSatisfactionLevels - 1));
    linearstring.AppendFormat("={0};\r\n",
    tmp.ToString().Replace(",", "."));
    tmp = 100;

    for (int i = 0; i < numberOfCriteria; i++)
    {
        tmp -= criteriaThreshold * (criteriaLevels[i] - 1);

        for (int k = 1; k < criteriaLevels[i]; k++)
        {
            linearstring.AppendFormat("+w{0}.{1} ", i + 1, k);
        }
    }

    linearstring.AppendFormat("={0};\r\n",
    tmp.ToString().Replace(",", "."));

    return linearstring.ToString();
}

public string getLP(double Gtotal, double Gcrit)
{
    totalThreshold = Gtotal;
    criteriaThreshold = Gcrit;
    return getLP();
}

public lpBase(string prnFile)
{
    clsFile prnCurrent = new clsFile(prnFile);

    surveyTitle = prnCurrent.currentLine;
    numberOfCustomers = prnCurrent.numberOfCustomers;
    numberOfCriteria = prnCurrent.numberOfCriteria;
    criteriaNames = prnCurrent.criteriaNames;
    totalSatisfactionLevels = prnCurrent.totalSatisfactionLevels;
    criteriaLevels = prnCurrent.criteriaLevels;
    totalSatisfactionAnswers = prnCurrent.totalSatisfactionAnswers;
    criteriaAnswers = prnCurrent.criteriaAnswers;

    totalSatisfactionLevelNames =
    prnCurrent.totalSatisfactionLevelNames;
    criteriaLevelNames = prnCurrent.criteriaLevelNames;

    totalThreshold = 0;
}
}
--!>

```

Το αρχείο αρχίζει να διαβάζεται με την συνάρτηση `lpBase(string prnFile)`.

```
<!--
public lpBase(string prnFile)
{
    clsFile prnCurrent = new clsFile(prnFile);

    surveyTitle = prnCurrent.currentLine;
    numberOfCustomers = prnCurrent.numberOfCustomers;
    numberOfCriteria = prnCurrent.numberOfCriteria;
    criteriaNames = prnCurrent.criteriaNames;
    totalSatisfactionLevels = prnCurrent.totalSatisfactionLevels;
    criteriaLevels = prnCurrent.criteriaLevels;
    totalSatisfactionAnswers = prnCurrent.totalSatisfactionAnswers;
    criteriaAnswers = prnCurrent.criteriaAnswers;

    totalSatisfactionLevelNames = prnCurrent.totalSatisfactionLevelNames;
    criteriaLevelNames = prnCurrent.criteriaLevelNames;

    totalThreshold = 0;
}
--!>
```

Στην κλάση `clsFile(prnFile)` αποθηκεύονται όλα τα στοιχεία του προβλήματος. Όπως για παράδειγμα ο αριθμός των επιπέδων ικανοποίησης, τα ονόματα των κριτηρίων καθώς και οι απαντήσεις των ερωτηματολογίων.

```
<!--
class clsFile
{
    string currentFile;
    public readonly string currentLine;
    public readonly int numberOfCustomers;
    public readonly int numberOfCriteria;
    public readonly string[] criteriaNames;
    public readonly int totalSatisfactionLevels;
    public readonly int[] criteriaLevels;
    public readonly int[] totalSatisfactionAnswers;
    public readonly int[,] criteriaAnswers;

    public readonly string[] totalSatisfactionLevelNames;
    public readonly string[][] criteriaLevelNames;

    public clsFile(string fileName)
    {
        currentFile = fileName;
    }
}
```

```
StreamReader linesReader = new StreamReader(currentFile);

currentLine = linesReader.ReadLine();

numberOfCustomers = ReadInt(linesReader);
numberOfCriteria = ReadInt(linesReader);

criteriaNames = new string[numberOfCriteria];

linesReader.ReadLine();

for (int i = 0; i < numberOfCriteria; i++)
    criteriaNames[i] = linesReader.ReadLine();

criteriaLevels = new int[numberOfCriteria];
totalSatisfactionLevels = ReadInt(linesReader);

for (int i = 0; i < numberOfCriteria; i++)
{
    criteriaLevels[i] = ReadInt(linesReader);
}

linesReader.ReadLine();

totalSatisfactionLevelNames = new
string[totalSatisfactionLevels];

for (int i = 0; i < totalSatisfactionLevels; i++)
{
    totalSatisfactionLevelNames[i] = linesReader.ReadLine();
}

criteriaLevelNames = new string[numberOfCriteria][];

for (int i = 0; i < numberOfCriteria; i++)
{
    criteriaLevelNames[i] = new string[criteriaLevels[i]];
    for (int j = 0; j < criteriaLevels[i]; j++)
        criteriaLevelNames[i][j] = linesReader.ReadLine();
}

totalSatisfactionAnswers = new int[numberOfCustomers];
criteriaAnswers = new int[numberOfCustomers, numberOfCriteria];

for (int i = 0; i < numberOfCustomers; i++)
{
    totalSatisfactionAnswers[i] = ReadInt(linesReader);

    for (int j = 0; j < numberOfCriteria; j++)
```

```

        criteriaAnswers[i, j] = ReadInt(linesReader);

        linesReader.ReadLine();
    }
    linesReader.Close();
}

int ReadInt(StreamReader str)
{
    string tmp = string.Empty;
    char cn = (char)str.Read();
    while ((cn < '0') || (cn > '9'))
    {
        cn = (char)str.Read();
    }
    while ((cn >= '0') && (cn <= '9'))
    {
        tmp += cn;
        cn = (char)str.Read();
    }
    return Convert.ToInt32(tmp.Trim());
}
}
--!>

```

## Γενική επίλυση γραμμικού προβλήματος (Classical Solver)

Ξεκινώντας η επίλυση του γραμμικού καλείται η συνάρτηση `lp_solve()`.

```

public void lp_solve()
{
    int _iters = 0;
    int matrix_var_up = 0;
    int basis_var_down = 0;

    exec_marginal_net_incomes();

    do
    {
        _iters++;
        set_iterations(_iters);
        set_total_iterations(ITERATIONS_TOT + 1);

        if (clsVariables.solvingOptimal)
            set_total_solutions(TOTAL_SOLUTIONS + 1);

        matrix_var_up = exec_matrix_var_up();
        Application.DoEvents();
        basis_var_down = exec_basis_var_down(matrix_var_up);
        Application.DoEvents();
    }
}

```

```

        exec_change_rhs(basis_var_down, matrix_var_up);
        Application.DoEvents();
        exec_change_basis(basis_var_down, matrix_var_up);
        Application.DoEvents();
        OBJECTIVE_VALUE = calculate_objective();
        Application.DoEvents();
        exec_marginal_net_incomes();
        Application.DoEvents();
    } while (check_marginal_net_incomes());
    solving = false;
    clsVariables.solvingOptimal = false;
}

```

Πρώτα γίνεται η αρχικοποίηση των μεταβλητών `iterations`, `matrix_var_up`, `basis_var_down`. Η `iterations` μετράει πόσα γραμμικά θα επιλυθούν, η `matrix_var_up` αποθηκεύει ποια μεταβλητή θα βγει από την μήτρα και θα πάει στη βάση και, τέλος, η `basis_var_down` αποθηκεύει ποια μεταβλητή θα βγει από την βάση και θα πάει στην μήτρα.

Το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός των οριακών καθαρών εισοδημάτων με τη συνάρτηση `exec_marginal_net_incomes()`.

```

<!--
private void exec_marginal_net_incomes()
{
    double[] matrix_col;
    for (int i = 0; i < cols; i++)
    {
        matrix_col = MATRIX.GetColumnVector(i).CopyToArray();
        MARGINAL_NET_INCOMES[i] = OBJECTIVE_FUNCTION[i] -
        exec_matrix_col_multiplation(rows, matrix_col);
    }
}

```

Ο υπολογισμός των οριακών καθαρών εισοδημάτων γίνεται αφαιρώντας από κάθε στοιχείο της μήτρας `OBJECTIVE_FUNCTION` (τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης), το άθροισμα των γινομένων των τιμών των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης επί των τιμών της συγκεκριμένης στήλης του πίνακα (`matrix`). Ο υπολογισμός του αθροίσματος των γινομένων γίνεται από την συνάρτηση `exec_matrix_col_multiplation(int rows, double[] col1)`.

```

private double exec_matrix_col_multiplation(int rows, double[] col1)
{
    double ret = 0;
    for (int i = 0; i < rows; i++)
        ret += col1[i] * OBJECTIVE_FUNCTION[BASIS[i]];
    return ret;
}

```



```
}
--!>
```

Στη συνέχεια μέσα στη συνάρτηση `lp_solve()` εκτελείται ένα `loop` (`do - while`) το οποίο σταματάει όταν οι τιμές των οριακών καθαρών εισοδημάτων γίνουν μικρότερες ή ίσες με μηδέν. Αυτό γίνεται μέσω της συνάρτησης `check_marginal_net_incomes()`.

```
<!--
public bool check_marginal_net_incomes()
{
    for (int i = 0; i < MARGINAL_NET_INCOMES.Length; i++)
        if (MARGINAL_NET_INCOMES[i] > 0 && !check_if_in_base(i))
            return true;
    return false;
}
--!>
```

Μέσα στο `loop` υπάρχουν όλες εκείνες οι συναρτήσεις οι οποίες σε κάθε επανάληψη λύνουν ένα γραμμικό πρόβλημα. Οι βασικές συναρτήσεις επίλυσης του προβλήματος είναι: `exec_matrix_var_up()`, `exec_basis_var_down(matrix_var_up)`, `exec_change_rhs(basis_var_down, matrix_var_up)`, `exec_change_basis(basis_var_down, matrix_var_up)`, `calculate_objective()`, `exec_marginal_net_incomes()`.

Η συνάρτηση `exec_matrix_var_up()` βρίσκει ποιο στοιχείο από την μήτρα θα βγει για να αντικαταστήσει το στοιχείο που θα κατέβει από την βάση.

```
<!--
private int exec_matrix_var_up()
{
    int ret = 0;
    double curr_mni = MARGINAL_NET_INCOMES[0];
    for (int i = 0; i < MARGINAL_NET_INCOMES.Length; i++)
        if (MARGINAL_NET_INCOMES[i] > curr_mni)
            if (!check_if_in_base(xAXIS_HEADER[i]))
                { ret = i; curr_mni = MARGINAL_NET_INCOMES[i]; }
    return ret;
}
--!>
```

Το στοιχείο που θα φύγει από την μήτρα είναι αυτό το οποίο έχει το μεγαλύτερο θετικό οριακό καθαρό εισόδημα. Επίσης, ελέγχεται αν αυτό το στοιχείο δεν είναι ήδη στην βάση μέσω της συνάρτησης `check_if_in_base(int _value)`.

```
<!--
```

```

public bool check_if_in_base(int _value)
{
    for (int i = 0; i < BASIS.Length; i++)
        if (BASIS[i] == _value)
            return true;
    return false;
}
--!>

```

Το στοιχείο που θα βγει από την μήτρα αποθηκεύεται στη μεταβλητή `matrix_var_up`. Στη συνέχεια, με βάση το στοιχείο που θα βγει από την μήτρα, υπολογίζεται ποιο στοιχείο θα κατέβει από την βάση με την συνάρτηση `exec_basis_var_down(int _matrix_up)`.

```

<!--
private int exec_basis_var_down(int _matrix_up)
{
    int theta = 0;
    double[] tmp = new double[rows];
    double less_vall = 0;
    for (int i = 0; i < rows; i++)
        if (MATRIX[i, _matrix_up] > 0)
            tmp[i] = RIGHT_HARD_SIDE[i] / MATRIX[i, _matrix_up];
        else
            tmp[i] = double.MaxValue;
    less_vall = double.MaxValue;
    for (int i = 0; i < rows; i++)
        if (tmp[i] < less_vall)
        {
            theta = i;
            less_vall = tmp[i];
        }
    return theta;
}
}

```

Το στοιχείο που θα κατέβει από την βάση (αποθηκεύεται στην μεταβλητή `basis_var_down`) είναι αυτό που έχει τον μικρότερο λόγο  $RHS(val) / Col(val, \_matrix\_up)$ . Όπου RHS (Right Hand Side) είναι οι τιμές  $x_B$  και όπου  $Col(val, \_matrix\_up)$  είναι η τιμή της γραμμής `val` και της στήλης `\_matrix\_up`.

```

--!>

```

Έχοντας υπολογίσει το στοιχείο που θα ανέβει στην βάση και αυτό που θα κατέβει, προχωράμε στην αλλαγή των τιμών του RHS και στη συνέχεια στην αλλαγή της βάσης. Αυτό γίνεται με τις συναρτήσεις `exec_change_rhs(int \_basis_var_down, int \_matrix_var_up)` και `exec_change_basis(int \_basis_var_down, int \_matrix_var_up)` αντίστοιχα.

```

<!--
private void exec_change_rhs(int _basis_var_down, int _matrix_var_up)

```

```

{
    int tmp_driver_row = _basis_var_down;
    int tmp_driver_col = _matrix_var_up;

    double _rhs_val = RIGHT_HARD_SIDE[tmp_driver_row] /
MATRIX[tmp_driver_row, tmp_driver_col];
    RIGHT_HARD_SIDE[tmp_driver_row] = _rhs_val;

    for (int i = 0; i < rows; i++)
    {
        if (i != tmp_driver_row)
            RIGHT_HARD_SIDE[i] = RIGHT_HARD_SIDE[i] - (MATRIX[i,
tmp_driver_col] * _rhs_val);
        if (RIGHT_HARD_SIDE[i] < 0.000001)
            RIGHT_HARD_SIDE[i] = 0.000001;
    }
}

```

Τα νέα RHS, εκτός του στοιχείου που μπαίνει στην βάση, υπολογίζονται αφαιρώντας από το τρέχων RHS την τιμή της μήτρας της συγκεκριμένης γραμμής και την στήλης του νέου στοιχείου της βάσης πολλαπλασιασμένη με την τιμή του RHS του νέου στοιχείου που μπαίνει στην βάση. Η τιμή του RHS του νέου στοιχείου που μπαίνει στην βάση υπολογίζεται διαιρώντας την τρέχουσα τιμή του RHS με το στοιχείο οδηγό. Αν κάποιο από τα νέα υπολογισμένα RHS είναι μικρότερο από 0.000001 τότε παίρνει την τιμή 0.000001.

```

private void exec_change_basis(int _basis_var_down, int _matrix_var_up)
{
    int tmp_driver_row = _basis_var_down;
    int tmp_driver_col = _matrix_var_up;

    int tmp_basis_item = BASIS[_basis_var_down];

    Matrix tmp_matrix = (Matrix)MATRIX.Clone();

    BASIS[_basis_var_down] = xAXIS_HEADER[_matrix_var_up];

    for (int i = 0; i < cols; i++)
        tmp_matrix[tmp_driver_row, i] /= MATRIX[tmp_driver_row,
tmp_driver_col];

    for (int i = 0; i < rows; i++)
    {
        if (i != tmp_driver_row)
            for (int ii = 0; ii < cols; ii++)
                tmp_matrix[i, ii] = tmp_matrix[tmp_driver_row, ii] *
-MATRIX[i, tmp_driver_col] + MATRIX[i, ii];
    }
    MATRIX = (Matrix)tmp_matrix.Clone();
}

```

```
}
```

Για την αλλαγή της βάσης, βγάζουμε από την τρέχουσα βάση το στοιχείο που βρίσκεται στην θέση `_basis_var_down` και ανεβάζουμε το στοιχείο `_matrix_var_up` από την αντικειμενική συνάρτηση.

```
--!>
```

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την νέα αντικειμενική τιμή με την συνάρτηση `calculate_objective()` και την αποθηκεύουμε στη μεταβλητή `OBJECTIVE_VALUE`.

```
<!--
private double calculate_objective()
{
    double ret = 0;
    for (int i = 0; i < rows; i++)
        ret += OBJECTIVE_FUNCTION[BASIS[i]] * RIGHT_HARD_SIDE[i];
    return ret;
}
```

Η τιμή της αντικειμενικής υπολογίζεται αθροίζοντας τα γινόμενα των τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης των στοιχείων που βρίσκονται στην βάση επί τις αντίστοιχες τιμές του RHS.

```
--!>
```

Τέλος υπολογίζονται τα νέα οριακά καθαρά εισοδήματα με την συνάρτηση `exec_marginal_net_incomes()`.

Όταν όλα τα οριακά καθαρά εισοδήματα πάρουν τιμές μικρότερες ή ίσες με μηδέν, ο αλγόριθμος ολοκληρώνεται. Το γραμμικό πρόβλημα έχει λυθεί.

## Μεταβελτιστοποίηση με τις μεθόδους ΜΥΣΑ

Ξεκινώντας η επίλυση του γραμμικού προβλήματος μεταβελτιστοποίησης καλείται η συνάρτηση `solveSingleResolution(lpBase lp, frmMain frm)`.

```
public static void solveSingleResolution(lpBase lp, frmMain frm)
{
    danSolver solveOptimal = new danSolver(true);
    solveOptimal.set_total_solutions(0);

    clsText.setText(frm.resolutionTypeToolStripStatusLabel, "Type of
Resolution: Single Solution");

    clsCalculate.countTotalSteps_SR(lp);

    clsVariables.tmpGlobalPreferenceThresholdValue =
Convert.ToDouble(clsVariables.globalPreferenceThreshold_SR);
```

```
clsVariables.tmpCriteriaPreferenceThresholdValue =
Convert.ToDouble(clsVariables.criteriaPreferenceThreshold_SR);
clsVariables.tmpStablilityValue =
Convert.ToDouble(clsVariables.nearOptimalSolutionsThreshold_SR) / 100;

solveOptimal.initialize_optimal(lp,
clsVariables.tmpGlobalPreferenceThresholdValue,
clsVariables.tmpCriteriaPreferenceThresholdValue,
clsVariables.threadPriority_SR);

clsText.setText(frm.statusMethodToolStripStatusLabel, "Status: Solving
for Optimal Solution");

solveOptimal.set_wait(frm.unblock);
solveOptimal.set_on_iter(frm.iteration);

Thread current_thread = new Thread(solveOptimal.lp_solve);
current_thread.Priority = ThreadPriority.AboveNormal;
solveOptimal.solving = true;
current_thread.Start();
while (solveOptimal.solving)
    solveOptimal.wait();
current_thread = null;

solveOptimal.save_optimal_lp();

clsVariables.OBJECTIVE_VALUE = solveOptimal.get_objective();

Int32 ticks = System.Environment.TickCount;
clsVariables.solverResultsArray = new ArrayList();

frm.initializeProgressBar_Function(clsVariables.totalNumberOfStepsValue
);

if (clsVariables.solveMUSA_SR)
{
    clsText.setText(frm.statusMethodToolStripStatusLabel, "Status:
Solving General MUSA");

    ticks = System.Environment.TickCount;
    solveOptimal.post_solve(lp,
clsVariables.tmpGlobalPreferenceThresholdValue,
clsVariables.tmpCriteriaPreferenceThresholdValue,
clsVariables.nearOptimalSolutionsThreshold_SR,
solverMethod.GeneralMUSA, clsVariables.OBJECTIVE_VALUE);

    ResultsArray result = new ResultsArray(solveOptimal,
System.Environment.TickCount - ticks);
    clsVariables.solverResultsArray.Add(result);
}
```

```
        clsResults.fillMUSAGlobal(result,
        comForms.viewResultsSingleResolutionForm);
        clsVariables.solvedMUSA = true;
    }
else if (clsVariables.solveMUSA_I_SR)
{
    clsText.setText(frm.statusMethodToolStripStatusLabel, "Status:
    Solving MUSA I");

    ticks = System.Environment.TickCount;
    solveOptimal.post_solve(lp,
    clsVariables.tmpGlobalPreferenceThresholdValue,
    clsVariables.tmpCriteriaPreferenceThresholdValue,
    clsVariables.nearOptimalSolutionsThreshold_SR,
    solverMethod.MUSA_I, clsVariables.OBJECTIVE_VALUE);

    ResultsArray result = new ResultsArray(solveOptimal,
    System.Environment.TickCount - ticks);
    clsVariables.solverResultsArray.Add(result);

    clsResults.fillMUSA_I(result,
    comForms.viewResultsSingleResolutionForm);
    clsVariables.solvedMUSA_I = true;
}
else if (clsVariables.solveMUSA_II_SR)
{
    clsText.setText(frm.statusMethodToolStripStatusLabel, "Status:
    Solving MUSA II");

    ticks = System.Environment.TickCount;
    solveOptimal.post_solve(lp,
    clsVariables.tmpGlobalPreferenceThresholdValue,
    clsVariables.tmpCriteriaPreferenceThresholdValue,
    clsVariables.nearOptimalSolutionsThreshold_SR,
    solverMethod.MUSA_II, clsVariables.OBJECTIVE_VALUE);

    ResultsArray result = new ResultsArray(solveOptimal,
    System.Environment.TickCount - ticks);
    clsVariables.solverResultsArray.Add(result);

    clsResults.fillMUSA_II(result,
    comForms.viewResultsSingleResolutionForm);
    clsVariables.solvedMUSA_II = true;
}
else if (clsVariables.solveMUSA_III_SR)
{
    clsText.setText(frm.statusMethodToolStripStatusLabel, "Status:
    Solving MUSA III");
```

```

ticks = System.Environment.TickCount;
solveOptimal.post_solve(lp,
clsVariables.tmpGlobalPreferenceThresholdValue,
clsVariables.tmpCriteriaPreferenceThresholdValue,
clsVariables.nearOptimalSolutionsThreshold_SR,
solverMethod.MUSA_III, clsVariables.OBJECTIVE_VALUE);

ResultsArray result = new ResultsArray(solveOptimal,
System.Environment.TickCount - ticks);
clsVariables.solverResultsArray.Add(result);

clsResults.fillMUSA_III(result,
comForms.viewResultsSingleResolutionForm);
clsVariables.solvedMUSA_III = true;
}
else if (clsVariables.solveManasNedoma_SR)
{
clsText.setText(frm.statusMethodToolStripStatusLabel, "Status:
Solving Manas-Nedoma");

ticks = System.Environment.TickCount;
solveOptimal.post_solve(lp,
clsVariables.tmpGlobalPreferenceThresholdValue,
clsVariables.tmpCriteriaPreferenceThresholdValue,
clsVariables.nearOptimalSolutionsThreshold_SR,
solverMethod.ManasNedoma, clsVariables.OBJECTIVE_VALUE);

ResultsArray result = new ResultsArray(solveOptimal,
System.Environment.TickCount - ticks);
clsVariables.solverResultsArray.Add(result);

clsResults.fillManasNedoma(result,
comForms.viewResultsSingleResolutionForm);
clsVariables.solvedManasNedoma = true;
}
else if (clsVariables.solveReverseSimplex_SR)
{
clsText.setText(frm.statusMethodToolStripStatusLabel, "Status:
Solving Reverse Simplex");

ticks = System.Environment.TickCount;
solveOptimal.post_solve(lp,
clsVariables.tmpGlobalPreferenceThresholdValue,
clsVariables.tmpCriteriaPreferenceThresholdValue,
clsVariables.nearOptimalSolutionsThreshold_SR,
solverMethod.ReverseSimplex, clsVariables.OBJECTIVE_VALUE);

```

```

ResultsArray result = new ResultsArray(solveOptimal,
System.Environment.TickCount - ticks);
clsVariables.solverResultsArray.Add(result);

clsResults.fillReverseSimplex(result,
comForms.viewResultsSingleResolutionForm);
clsVariables.solvedReverseSimplex = true;
}
else if (clsVariables.solveRealApproach_SR)
{
clsText.setText(frm.statusMethodToolStripStatusLabel, "Status:
Solving Real Approach");

ticks = System.Environment.TickCount;
solveOptimal.post_solve(lp,
clsVariables.tmpGlobalPreferenceThresholdValue,
clsVariables.tmpCriteriaPreferenceThresholdValue,
clsVariables.nearOptimalSolutionsThreshold_SR,
solverMethod.RealApproach, clsVariables.OBJECTIVE_VALUE);

ResultsArray result = new ResultsArray(solveOptimal,
System.Environment.TickCount - ticks);
clsVariables.solverResultsArray.Add(result);

clsResults.fillRealApproach(result,
comForms.viewResultsSingleResolutionForm);
clsVariables.solvedRealApproach = true;
}
clsCharts.fillGraph(clsVariables.solverResultsArray,
comForms.analysisSatisfactionForm);
clsCharts.fillGraph(clsVariables.solverResultsArray,
comForms.analysisDemandingForm);
clsCharts.fillWeights(clsVariables.solverResultsArray,
comForms.analysisWeightsForm);
clsMaps.drawMap(clsVariables.solverResultsArray,
comForms.analysisActionMapsForm);
clsMaps.drawMap(clsVariables.solverResultsArray,
comForms.analysisImprovementsMapsForm);
clsCharts.fillPerformance(clsVariables.solverResultsArray,
comForms.statisticalPerformanceForm);
clsCharts.fillFreqs(clsVariables.solverResultsArray,
comForms.statisticalFrequenciesForm);
clsCharts.fillVariationsMethod((ResultsArray)clsVariables.solverResults
Array[0], comForms.statisticalVariationsForm.crtGlo);

clsVariables.typeOfResolutionValue = 2;
comForms.viewResultsSingleResolutionForm.Show();
}

```



Πρώτα γίνεται η μεταφορά των `globalPreferenceThreshold`, `criteriaPreferenceThreshold` και `nearOptimalSolutionsThreshold` στον `solver`.

```
<!--
    clsVariables.tmpGlobalPreferenceThresholdValue =
    Convert.ToDouble(clsVariables.globalPreferenceThreshold_SR);
    clsVariables.tmpCriteriaPreferenceThresholdValue =
    Convert.ToDouble(clsVariables.criteriaPreferenceThreshold_SR);
    clsVariables.tmpStablilityValue =
    Convert.ToDouble(clsVariables.nearOptimalSolutionsThreshold_SR) / 100;
--!>
```

Στη συνέχεια αρχικοποιείται ο `solver` για να επιλύσει την `optimal solution`

```
<!--
    solveOptimal.initialize_optimal(lp,
    clsVariables.tmpGlobalPreferenceThresholdValue,
    clsVariables.tmpCriteriaPreferenceThresholdValue,
    clsVariables.threadPriority_SR);
--!>
```

Το σύστημα ΜΥΣΑ για την καλύτερη λειτουργία του χρησιμοποιεί `threads` κατά τη διαδικασία επίλυσης γραμμικών προβλημάτων. Οπότε για την `optimal solution` έχουμε:

```
<!--
    solveOptimal.set_wait(frm.unblock);
    solveOptimal.set_on_iter(frm.iteration);

    Thread current_thread = new Thread(solveOptimal.lp_solve);
    current_thread.Priority = ThreadPriority.AboveNormal;
    solveOptimal.solving = true;
    current_thread.Start();
    while (solveOptimal.solving)
        solveOptimal.wait();
    current_thread = null;
--!>
```

Δημιουργείται ένα νέο `thread` μέσα στο οποίο εκτελείται η συνάρτηση `lp_solve()` της κλάσης `solveOptimal`.

Μετά την εύρεση της βέλτιστης λύσης, ξεκινάει η διαδικασία μεταβελτιστοποίησης.

### Μεταβελτιστοποίηση

Στο παράδειγμά μας θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο ΜΥΣΑ Ι. Η ΜΥΣΑ Ι με την αντικειμενική συνάρτησή της, μεγιστοποιεί και ελαχιστοποιεί την αξία όλων των κριτηρίων του προβλήματος.

Για να ξεκινήσει η διαδικασία μεταβελτιστοποίησης εκτελείται ο παρακάτω κώδικας:

```
<!--
    clsText.setText(frm.statusMethodToolStripStatusLabel, "Status: Solving
    MUSA I");

    ticks = System.Environment.TickCount;
    solveOptimal.post_solve(lp,
    clsVariables.tmpGlobalPreferenceThresholdValue,
    clsVariables.tmpCriteriaPreferenceThresholdValue,
    clsVariables.nearOptimalSolutionsThreshold_SR, solverMethod.MUSA_I,
    clsVariables.OBJECTIVE_VALUE);

    ResultsArray result = new ResultsArray(solveOptimal,
    System.Environment.TickCount - ticks);
    clsVariables.solverResultsArray.Add(result);

    clsResults.fillMUSA_I(result,
    comForms.viewResultsSingleResolutionForm);
    clsVariables.solvedMUSA_I = true;
--!>
```

Αρχικοποιείται ο solver για να ξεκινήσει η επίλυση του προβλήματος καλώντας την συνάρτηση `post_solve(lpBase bs, double globalThres, double criteriaThres, double nearOptimalSol, solverMethod method, double obj)`.

```
<!--
public void post_solve(lpBase bs, double globalThres, double criteriaThres,
double nearOptimalSol, solverMethod method, double obj)
{
    nearOptimalSolutionsThreshold = nearOptimalSol / 100.0F;
    currentMethod = method;
    switch (method)
    {
        case solverMethod.GeneralMUSA:
            post_solve_global_musa(bs, globalThres, criteriaThres,
            obj);
            break;
        case solverMethod.MUSA_I:
            post_solve_musa_i(bs, globalThres, criteriaThres, obj);
            break;
        case solverMethod.MUSA_II:
            post_solve_musa_ii(bs, globalThres, criteriaThres, obj);
            break;
        case solverMethod.MUSA_III:
            post_solve_musa_iii(bs, globalThres, criteriaThres, obj);
            break;
        case solverMethod.ManasNedoma:

```

```

        post_solve_manas_nedoma(bs, globalThres, criteriaThres,
        obj);
        break;
    case solverMethod.ReverseSimplex:
        post_solve_reverse_simpelx(bs, globalThres, criteriaThres,
        obj);
        break;
    case solverMethod.RealApproach:
        post_solve_real_approach(bs, globalThres, criteriaThres,
        obj);
        break;
}

calculate_satisfaction(true);
calculate_demanding();
calculate_prediction();
calculate_stability();
}
--!>

```

Στη συνέχεια καλείται η συνάρτηση `post_solve_musa_i(lpBase bs, double globalThres, double criteriaThres, double obj)`.

```

<!--
private void post_solve_musa_i(lpBase bs, double globalThres, double
criteriaThres, double obj)
{
    Thread tmp_thread;
    set_total_iterations(0);
    values = new musaResults("LP NAME", ITERATIONS_TOT,
    clsVariables.OBJECTIVE_VALUE, pos);

    postValues = new musaResults("LP NAME", ITERATIONS_TOT,
    clsVariables.OBJECTIVE_VALUE, pos);
    postValuesArray = new musaResults[pos.numberofCriteria * 2];

    double[] bmax = values.criteriaWeights;
    set_total_solutions(0);
    clear_memory();
    for (int i = 0; i < pos.numberofCriteria; i++)
    {
        reset_solver(baselp);
        initialize_post_solve(nearOptimalSolutionsThreshold);

        set_total_solutions(clsVariables.solutions + 1);

        VARIABLES_VALUES = make_variables_values(cols);

        solving = true;
    }
}
--!>

```

```

OBJECTIVE_FUNCTION = new double[cols];

for (int j = 0; j < pos.numberOfCriteriaLevels[i]; j++)
    set_objective_function_item(pos.w[i][j], -1);

for (int ii = 0; ii < pos.slacks.Length-1; ii++)
    set_objective_function_item(pos.slacks[ii], -BigM);

on_iter("Min. Criterion #" + (i + 1).ToString());
tmp_thread = new Thread(lp_solve);
tmp_thread.Priority = get_thread_priority(theadPriority);
current_thread = tmp_thread;

tmp_thread.Start();

while (solving)
    wait();

for (int ii = 0; ii < RIGHT_HARD_SIDE.Length; ii++)
    VARIABLES_VALUES[BASIS[ii]] = RIGHT_HARD_SIDE[ii];

current_thread = null;
postValuesArray[i] = new musaResults("LP NAME", cols, rows,
VARIABLES_VALUES, clsVariables.OBJECTIVE_VALUE, ITERATIONS_TOT,
totalGamma, criteriaGamma, pos, clsVariables.solutions,
clsVariables.currentRAM);
bmax = postValues.Add("LP NAME", cols, rows, VARIABLES_VALUES,
ITERATIONS_TOT, totalGamma, criteriaGamma, pos,
clsVariables.solutions, clsVariables.currentRAM);
}
for (int i = 0; i < pos.numberOfCriteria; i++)
{
    reset_solver(baselp);
    initialize_post_solve(nearOptimalSolutionsThreshold);
    VARIABLES_VALUES = make_variables_values(cols);

    set_total_solutions(clsVariables.solutions + 1);

    solving = true;
    OBJECTIVE_FUNCTION = new double[cols];

    for (int j = 0; j < pos.numberOfCriteriaLevels[i]; j++)
        set_objective_function_item(pos.w[i][j], 1);

    for (int ii = 0; ii < pos.slacks.Length - 1; ii++)
        set_objective_function_item(pos.slacks[ii], -BigM);

    on_iter("Max. Criterion #" + (i + 1).ToString());
    tmp_thread = new Thread(lp_solve);

```

```

tmp_thread.Priority = get_thread_priority(theadPriority);
current_thread = tmp_thread;

tmp_thread.Start();

while (solving)
    wait();

for (int ii = 0; ii < RIGHT_HARD_SIDE.Length; ii++)
    VARIABLES_VALUES[BASIS[ii]] = RIGHT_HARD_SIDE[ii];

current_thread = null;
postValuesArray[pos.numberOfCriteria + i] = new musaResults("LP
NAME", cols, rows, VARIABLES_VALUES, OBJECTIVE_VALUE, ITERATIONS,
totalGamma, criteriaGamma, pos, clsVariables.solutions,
clsVariables.currentRAM);
bmax = postValues.Add("LP NAME", cols, rows, VARIABLES_VALUES,
ITERATIONS, totalGamma, criteriaGamma, pos,
clsVariables.solutions, clsVariables.currentRAM);
}
postValues.Div(2 * pos.numberOfCriteria);
}
--!>

```

Η συνάρτηση αυτή δημιουργεί τους πίνακες simplex οι οποίοι θα λυθούν από τον solver κατά την διαδικασία ελαχιστοποίησης και μεγιστοποίησης των κριτηρίων. Στη φάση της ελαχιστοποίησης εκτελείται ο παρακάτω κώδικας:

```

<!--
for (int i = 0; i < pos.numberOfCriteria; i++)
{
    reset_solver(baselp);
    initialize_post_solve(nearOptimalSolutionsThreshold);

    set_total_solutions(clsVariables.solutions + 1);

    VARIABLES_VALUES = make_variables_values(cols);

    solving = true;
    OBJECTIVE_FUNCTION = new double[cols];

    for (int j = 0; j < pos.numberOfCriteriaLevels[i]; j++)
        set_objective_function_item(pos.w[i][j], -1);

    for (int ii = 0; ii < pos.slacks.Length-1; ii++)
        set_objective_function_item(pos.slacks[ii], -BigM);

    on_iter("Min. Criterion #" + (i + 1).ToString());
}

```

```

tmp_thread = new Thread(lp_solve);
tmp_thread.Priority = get_thread_priority(theadPriority);
current_thread = tmp_thread;

tmp_thread.Start();

while (solving)
    wait();

for (int ii = 0; ii < RIGHT_HARD_SIDE.Length; ii++)
    VARIABLES_VALUES[BASIS[ii]] = RIGHT_HARD_SIDE[ii];

current_thread = null;
postValuesArray[i] = new musaResults("LP NAME", cols, rows,
VARIABLES_VALUES, clsVariables.OBJECTIVE_VALUE, ITERATIONS_TOT,
totalGamma, criteriaGamma, pos, clsVariables.solutions,
clsVariables.currentRAM);
bmax = postValues.Add("LP NAME", cols, rows, VARIABLES_VALUES,
ITERATIONS_TOT, totalGamma, criteriaGamma, pos, clsVariables.solutions,
clsVariables.currentRAM);
}
--!>

```

Για κάθε ένα κριτήριο γίνεται reset στον solver χρησιμοποιώντας την συνάρτηση `reset_solver(lpBase bs)`. Δηλαδή επανέρχεται στην κατάσταση στην οποία ήταν κατά την βέλτιστη λύση.

```

<!--
public void reset_solver(lpBase bs)
{
    VARIABLES = VARIABLES_BU;
    SLACK_VARIABLES = SLACK_VARIABLES_BU;
    BASIS = BASIS_BU;
    BASIS_CONSTRAINTS = BASIS_CONSTRAINTS_BU;
    xAXIS_HEADER = xAXIS_HEADER_BU;
    MATRIX = MATRIX_BU;
    RIGHT_HARD_SIDE = RIGHT_HARD_SIDE_BU;
    OBJECTIVE_FUNCTION = OBJECTIVE_FUNCTION_BU;
    MARGINAL_NET_INCOMES = MARGINAL_NET_INCOMES_BU;
    OBJECTIVE_VALUE = OBJECTIVE_VALUE_BU;
    VARIABLES_VALUES = VARIABLES_VALUES_BU;
    ITERATIONS = ITERATIONS_BU;
    _variables = _variables_BU;
    _bounds = _bounds_BU;
    rows = rows_BU;
    cols = cols_BU;
    BigM = BigM_BU;
    pos = new musaLPPosition(bs, 0);
}
--!>

```

```
}
--!>
```

Στη συνέχεια καλείται η συνάρτηση `initialize_post_solve(double nearOptimalSolutionThresholdTmp)` η οποία προσθέτει μια επιπλέον γραμμή στον πίνακα με τα αντεστραμμένα οριακά καθαρά εισοδήματα και μια επιπλέον στήλη η οποία έχει όλα τα στοιχεία της μηδέν εκτός από το τελευταίο το οποίο παίρνει την τιμή 1. Ακόμα στις μεταβλητές RHS το τελευταίο στοιχείο παίρνει την απόλυτη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης επί την μεταβλητή `nearOptimalSolutions`.

```
<!--
public void initialize_post_solve(double nearOptimalSolutionThresholdTmp)
{
    double[] rowex = new double[cols + 1];
    for (int j = 0; j < cols; j++)
        rowex[j] = -MARGINAL_NET_INCOMES[j];
    double temp = clsVariables.OBJECTIVE_VALUE *
nearOptimalSolutionThresholdTmp;
    add_column();
    add_row(rowex, Math.Abs(temp));
}

public void add_column()
{
    cols++;
    _variables++;

    Array.Resize(ref OBJECTIVE_FUNCTION, cols);
    OBJECTIVE_FUNCTION[cols - 1] = -BigM;

    Array.Resize(ref MARGINAL_NET_INCOMES, cols);
    MARGINAL_NET_INCOMES[cols - 1] = 0;

    Matrix tmp_matrix = new Matrix(rows, cols);
    Double[] tmp_column = new double[rows];

    Array.Resize(ref xAXIS_HEADER, cols);
    xAXIS_HEADER[cols - 1] = cols - 1;

    for (int i = 0; i < MATRIX.RowCount; i++)
    {
        tmp_matrix[i, cols - 1] = 0;
        for (int ii = 0; ii < MATRIX.ColumnCount; ii++)
            tmp_matrix[i, ii] = MATRIX[i, ii];
    }

    MATRIX = tmp_matrix;
}
}
```

```

public void add_row(double[] _row, double _value)
{
    rows++;
    _bounds++;
    Matrix tmp_matrix = new Matrix(rows, cols);

    Array.Resize(ref BASIS, rows);
    BASIS[rows - 1] = cols - 1;

    Array.Resize(ref RIGHT_HARD_SIDE, rows);
    RIGHT_HARD_SIDE[rows - 1] = _value;

    Array.Resize(ref SLACK_VARIABLES, SLACK_VARIABLES.Length + 1);
    SLACK_VARIABLES[SLACK_VARIABLES.Length - 1] = cols - 1;

    Array.Resize(ref BASIS_CONSTRAINTS, BASIS_CONSTRAINTS.Length + 1);
    BASIS_CONSTRAINTS[BASIS_CONSTRAINTS.Length - 1] = 0;

    Array.Resize(ref pos.slacks, pos.slacks.Length + 1);
    pos.slacks[pos.slacks.Length - 1] = cols - 1;

    for (int i = 0; i < MATRIX.RowCount; i++)
        for (int ii = 0; ii < MATRIX.ColumnCount; ii++)
            tmp_matrix[i, ii] = MATRIX[i, ii];
    for (int ii = 0; ii < tmp_matrix.ColumnCount - 1; ii++)
        tmp_matrix[tmp_matrix.RowCount - 1, ii] = _row[ii];
        tmp_matrix[tmp_matrix.RowCount - 1, tmp_matrix.ColumnCount - 1] =
            1;
    MATRIX = tmp_matrix;
}
--!>

```

Το επόμενο βήμα είναι η αλλαγή της αντικειμενικής συνάρτησης. Η νέα αντικειμενική συνάρτηση παίρνει την τιμή  $-1$  ή  $1$  (αν θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε ή να μεγιστοποιήσουμε) στις τιμές των εκτιμώμενων σημείων του κριτηρίου και  $-BigM$  στις θέσεις των slack variables.

Αφού έχει οριστεί η νέα αντικειμενική συνάρτηση, καλείται η συνάρτηση `lp_solve` για την επίλυση του προβλήματος.

Όταν λυθεί το πρόβλημα, τα στοιχεία του RHS (Right Hand Side) αποθηκεύονται σαν τις τιμές λύσης των μεταβλητών που είναι στην βάση.

Τέλος, όλα τα στοιχεία την επίλυσης του προβλήματος αποθηκεύονται στις μεταβλητές: `postValues = new musaResults("LP NAME", ITERATIONS_TOT, clsVariables.OBJECTIVE_VALUE, pos)` και `double[] bmax = values.criteriaWeights` που θα χρησιμοποιηθούν αργότερα για την προβολή των αποτελεσμάτων.

## Μεταβελτιστοποίηση με την μέθοδο Manas-Nedoma



Ξεκινώντας η επίλυση του γραμμικού προβλήματος μεταβελτιστοποίησης καλείται η συνάρτηση `solveSingleResolution(lpBase lp, frmMain frm)`.

Μετά την εύρεση της βέλτιστης λύσης, ξεκινάει η διαδικασία μεταβελτιστοποίησης.

### Μεταβελτιστοποίηση

Στο παράδειγμά μας θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο `Manas-Nedoma`. Η μέθοδος αρχίζει να υλοποιείται με τον παρακάτω κώδικα:

```
<!--
    clsText.setText(frm.statusMethodToolStripStatusLabel, "Status: Solving
    Manas-Nedoma");

    ticks = System.Environment.TickCount;
    solveOptimal.post_solve(lp,
    clsVariables.tmpGlobalPreferenceThresholdValue,
    clsVariables.tmpCriteriaPreferenceThresholdValue,
    clsVariables.nearOptimalSolutionsThreshold_SR,
    solverMethod.ManasNedoma, clsVariables.OBJECTIVE_VALUE);

    ResultsArray result = new ResultsArray(solveOptimal,
    System.Environment.TickCount - ticks);
    clsVariables.solverResultsArray.Add(result);

    clsResults.fillManasNedoma(result,
    comForms.viewResultsSingleResolutionForm);
    clsVariables.solvedManasNedoma = true;
--!>
```

Η εντολή `solveOptimal.post_solve` μεταφέρει τις μεταβλητές `globalPreferenceThreshold`, `criteriaPreferenceThreshold`, `nearOptimalSolutionsThreshold` και την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (`clsVariables.OBJECTIVE_VALUE`) στον `solver` καθώς επίσης και την μέθοδο με βάση την οποία θα γίνει η μεταβελτιστοποίηση (`solverMethod.ManasNedoma`).

Στη συνέχεια, και αφού η μεταβελτιστοποίηση θα γίνει με βάση την μέθοδο `Manas-Nedoma`, εκτελείται η συνάρτηση `post_solve_manas_nedoma(lpBase bs, double globalThres, double criteriaThres, double obj)`.

```
<!--
private void post_solve_manas_nedoma(lpBase bs, double globalThres, double
criteriaThres, double obj)
{
    Thread tmp_thread;
    clear_memory();
    set_total_iterations(0);
    set_total_solutions(0);
}
```

```

values = new musaResults("LP NAME", ITERATIONS_TOT,
clsVariables.OBJECTIVE_VALUE, pos);

postValues = new musaResults("LP NAME", ITERATIONS_TOT,
clsVariables.OBJECTIVE_VALUE, pos);
postValuesArray = new musaResults[0];

reset_solver(baselp);
initialize_post_solve(nearOptimalSolutionsThreshold);

double[] criteriaWeights = new double[0];
VARIABLES_VALUES = make_variables_values(cols);

CONSESSION_MAN = clsVariables.OBJECTIVE_VALUE *
nearOptimalSolutionsThreshold;
GAMMA_ARRAY = new ArrayList();
W_ARRAY = new ArrayList();
R_ARRAY = new ArrayList();

solvingF = true;

on_iter("Manas Nedoma");
tmp_thread = new Thread(lp_solve_manas_nedoma);
tmp_thread.Priority = get_thread_priority(theadPriority);
current_thread = tmp_thread;

tmp_thread.Start();

while (solvingF)
    wait();

current_thread = null;

postValues.Div(postValuesArray.Length);
}
--!>

```

Αφού δημιουργηθεί ένα νέο thread μέσα στο οποίο θα γίνει η επίλυση της μεθόδου, στη συνέχεια εκτελείται η συνάρτηση `clear_memory()` η οποία αρχικοποιεί τις μεταβλητές και τις μήτρες και στην συνέχεια με την εντολή `GC.Collect()` καθαρίζει την μνήμη του υπολογιστή από στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν κατά την επίλυση προηγούμενων μεθόδων.

```

<!--
public void clear_memory()
{
    REV_MARGINAL_NET_INCOMES = new double[0];
    KAPPA_VALUES = new double[0];

```

```

GAMMA_ARRAY = new ArrayList();
THETA_ARRAY = new ArrayList();
GAMMA_IN_ARRAY = new ArrayList();
GAMMA_OU_ARRAY = new ArrayList();
W_ARRAY = new ArrayList();
R_ARRAY = new ArrayList();
BASIS_ARRAY = new ArrayList();

N_ARRAY = new ArrayList();
N_ARRAY_BASIS = new ArrayList();
K_ARRAY = new ArrayList();
RESULTS_ARRAY_VALUES = new ArrayList();
RESULTS_ARRAY_NAMES = new ArrayList();

BASIS_CONSTRAINTS_ARRAY = new ArrayList();
MATRIX_ARRAY = new ArrayList();
RIGHT_HAND_SIDE_ARRAY = new ArrayList();

GC.Collect();
Application.DoEvents();
}
--!>

```

Στη συνέχεια γίνεται reset στον solver με την εντολή `reset_solver(baselp)`. Η συνάρτηση `reset_solver(lpBase bs)` επαναφέρει τον solver στην κατάσταση στην οποία βρισκόταν στο τέλος της διαδικασίας εύρεσης της βέλτιστης λύσης.

```

<!--
public void reset_solver(lpBase bs)
{
    VARIABLES = VARIABLES_BU;
    SLACK_VARIABLES = SLACK_VARIABLES_BU;
    BASIS = BASIS_BU;
    BASIS_CONSTRAINTS = BASIS_CONSTRAINTS_BU;
    xAXIS_HEADER = xAXIS_HEADER_BU;
    MATRIX = MATRIX_BU;
    RIGHT_HARD_SIDE = RIGHT_HARD_SIDE_BU;
    OBJECTIVE_FUNCTION = OBJECTIVE_FUNCTION_BU;
    MARGINAL_NET_INCOMES = MARGINAL_NET_INCOMES_BU;
    OBJECTIVE_VALUE = OBJECTIVE_VALUE_BU;
    VARIABLES_VALUES = VARIABLES_VALUES_BU;
    ITERATIONS = ITERATIONS_BU;
    _variables = _variables_BU;
    _bounds = _bounds_BU;
    rows = rows_BU;
    cols = cols_BU;
    BigM = BigM_BU;
    pos = new musaLPPosition(bs, 0);
}
--!>

```

```
}
--!>
```

Το επόμενο βήμα είναι η προσθήκη μιας νέας στήλης και μιας νέας γραμμής στον πίνακα simplex μέσω της εντολής `initialize_post_solve(nearOptimalSolutionsThreshold)`.

```
<!--
public void initialize_post_solve(double nearOptimalSolutionThresholdTmp)
{
    double[] rowex = new double[cols + 1];
    for (int j = 0; j < cols; j++)
        rowex[j] = -MARGINAL_NET_INCOMES[j];
    double temp = clsVariables.OBJECTIVE_VALUE *
nearOptimalSolutionThresholdTmp;
    add_column();
    add_row(rowex, Math.Abs(temp));
}
}
```

Στην αρχή αντιστρέφονται τα οριακά καθαρά εισοδήματα της βέλτιστης λύσης. Μετά προστίθεται μια νέα στήλη (`add_column()`) και, τέλος, προστίθεται μια νέα γραμμή (`add_row(rowex, Math.Abs(temp))`).

```
--!>
```

Ακολουθεί η δημιουργία `ArrayLists` στα οποία θα αποθηκευτούν τα arrays με τις μεταβλητές `G`, `w` και `R`.

```
<!--
    GAMMA_ARRAY = new ArrayList();
    W_ARRAY = new ArrayList();
    R_ARRAY = new ArrayList();
--!>
```

Γίνεται αρχικοποίηση του `thread` με το οποίο θα εκτελεστεί η διαδικασία μεταβελτιστοποίησης της `Manas-Nedoma`.

```
<!--
    on_iter("Manas Nedoma");
    tmp_thread = new Thread(lp_solve_manas_nedoma);
    tmp_thread.Priority = get_thread_priority(threadPriority);
    current_thread = tmp_thread;

    tmp_thread.Start();
--!>
```

Κατά την διάρκεια επίλυσης της μεθόδου εκτελείται η συνάρτηση `wait()` η οποία εκτελεί την εντολή `Application.DoEvents()` διαρκώς. Αυτό γίνεται γιατί ο υπολογιστής μπορεί να κολλήσει κατά τη

διάρκεια λύσης μεγάλων προβλημάτων. Η `Application.DoEvents()` βοηθάει να εκτελούνται άμεσα όλες οι τρέχουσες εντολές.

Μετά την λύση του προβλήματος γίνεται η διαίρεση των αποτελεσμάτων των μεταβλητών με τον αριθμό των λύσεων (`postValues.Div(postValuesArray.Length)`).

### ΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΑΝΑΣ-NEDOMA

Function: `lp_solve_manas_nedoma()`

```
<!--
private void lp_solve_manas_nedoma()
{
    int _iters = 0;
    _iters++;
    set_iterations_man(_iters);
    for (int ii = 0; ii < RIGHT_HARD_SIDE.Length; ii++)
        VARIABLES_VALUES[BASIS[ii]] += RIGHT_HARD_SIDE[ii];

    Array.Resize(ref postValuesArray, postValuesArray.Length + 1);
    postValuesArray[postValuesArray.Length - 1] = new musaResults("LP
NAME", cols, rows, VARIABLES_VALUES, clsVariables.OBJECTIVE_VALUE,
ITERATIONS_TOT, totalGamma, criteriaGamma, pos, 1,
clsVariables.currentRAM);
    criteriaWeights = postValues.Add("LP NAME", cols, rows,
VARIABLES_VALUES, ITERATIONS_TOT, totalGamma, criteriaGamma, pos, 1,
clsVariables.currentRAM);
    set_total_iterations(0);
    set_total_solutions(TOTAL_SOLUTIONS + 1);

    extraVariable = xAXIS_HEADER[xAXIS_HEADER.Length - 1];
do
{
    _iters++;
    set_iterations_man(_iters);
    calc_r_array();
    calc_g_array();
    calc_w_array();
    exec_iteration();
    VARIABLES_VALUES = new double[cols];
    for (int ii = 0; ii < RIGHT_HARD_SIDE.Length; ii++)
        VARIABLES_VALUES[BASIS[ii]] = RIGHT_HARD_SIDE[ii];
    Array.Resize(ref postValuesArray, postValuesArray.Length + 1);
    postValuesArray[postValuesArray.Length - 1] = new musaResults("LP
NAME", cols, rows, VARIABLES_VALUES,
clsVariables.OBJECTIVE_VALUE, ITERATIONS_TOT, totalGamma,
criteriaGamma, pos, clsVariables.solutions,
clsVariables.currentRAM);
}
```

```

        criteriaWeights = postValues.Add("LP NAME", cols, rows,
        VARIABLES_VALUES, ITERATIONS_TOT, totalGamma, criteriaGamma, pos,
        clsVariables.solutions, clsVariables.currentRAM);
        set_total_iterations(0);
        set_total_solutions(TOTAL_SOLUTIONS + 1);
    } while (check_if_completed());
    solvingF = false;
}
--!>

```

Με τον παρακάτω κώδικα αποθηκεύεται σαν πρώτη λύση του προβλήματος οι τιμές του RHS (Right Hand Side).

```

<!--
    for (int ii = 0; ii < RIGHT_HARD_SIDE.Length; ii++)
        VARIABLES_VALUES[BASIS[ii]] += RIGHT_HARD_SIDE[ii];
--!>

```

Αφού γίνει η αρχικοποίηση των μεταβλητών και των μητρών, ξεκινάει η λύση του προβλήματος.

```

<!--
    Array.Resize(ref postValuesArray, postValuesArray.Length + 1);
    postValuesArray[postValuesArray.Length - 1] = new musaResults("LP
    NAME", cols, rows, VARIABLES_VALUES, clsVariables.OBJECTIVE_VALUE,
    ITERATIONS_TOT, totalGamma, criteriaGamma, pos, 1,
    clsVariables.currentRAM);
    criteriaWeights = postValues.Add("LP NAME", cols, rows,
    VARIABLES_VALUES, ITERATIONS_TOT, totalGamma, criteriaGamma, pos, 1,
    clsVariables.currentRAM);
    set_total_iterations(0);
    set_total_solutions(TOTAL_SOLUTIONS + 1);
--!>

```

Η λύση του προβλήματος γίνεται μέσω ενός loop (do-while) το οποίο τερματίζεται όταν η W\_ARRAY μείνει κενή. Δηλαδή δεν υπάρχουν άλλες διαθέσιμες βάσεις για να γίνει αλλαγή και να βρεθεί νέα λύση.

```

<!--
public bool check_if_completed()
{
    if (W_ARRAY.Count == 0)
        return false;
    return true;
}
--!>

```

Το loop της επίλυσης προβάλλεται παρακάτω:

```

<!--
do
{
    _iters++;
    set_iterations_man(_iters);
    calc_r_array();
    calc_g_array();
    calc_w_array();
    exec_iteration();
    VARIABLES_VALUES = new double[cols];
    for (int ii = 0; ii < RIGHT_HARD_SIDE.Length; ii++)
        VARIABLES_VALUES[BASIS[ii]] = RIGHT_HARD_SIDE[ii];
    Array.Resize(ref postValuesArray, postValuesArray.Length + 1);
    postValuesArray[postValuesArray.Length - 1] = new musaResults("LP
NAME", cols, rows, VARIABLES_VALUES, clsVariables.OBJECTIVE_VALUE,
ITERATIONS_TOT, totalGamma, criteriaGamma, pos, clsVariables.solutions,
clsVariables.currentRAM);
    criteriaWeights = postValues.Add("LP NAME", cols, rows,
VARIABLES_VALUES, ITERATIONS_TOT, totalGamma, criteriaGamma, pos,
clsVariables.solutions, clsVariables.currentRAM);
    set_total_iterations(0);
    set_total_solutions(TOTAL_SOLUTIONS + 1);
} while (check_if_completed());
--!>

```

Πρώτα προστίθεται στην R\_Array η τρέχουσα βάση.

```

<!--
private void calc_r_array()
{
    int[] tmpR = (int[])BASIS.Clone();
    Array.Sort(tmpR);
    R_ARRAY.Add(tmpR);
}
--!>

```

Μετά υπολογίζονται οι γειτονικές λύσεις της τρέχουσας βάσης με την συνάρτηση calc\_g\_array().

```

<!--
private void calc_g_array()
{
    int[] tmpGamma;
    int basis_var_down = 0;
    GAMMA_ARRAY = new ArrayList();

    for (int i = 0; i < MATRIX.ColumnCount; i++)

```

```

        if (!check_if_in_base(xAXIS_HEADER[i]) &&
            check_if_has_positive_item(MATRIX.GetColumnVector(i)))
        {
            tmpGamma = (int[])BASIS.Clone();
            basis_var_down = exec_basis_var_down(i, MATRIX,
                RIGHT_HARD_SIDE);
            tmpGamma[basis_var_down] = xAXIS_HEADER[i];
            if (!check_if_inserted(R_ARRAY, (int[])tmpGamma.Clone()))
                GAMMA_ARRAY.Add(tmpGamma);
        }
    }
}

```

Οι γειτονικές λύσεις υπολογίζονται για κάθε στοιχείο την αντικειμενικής συνάρτησης αρκεί να έχει στην αντίστοιχη στήλη του πίνακα τουλάχιστον ένα θετικό στοιχείο. Η λογική είναι ότι βγάζοντας αυτό το στοιχείο από τον πίνακα ποιο στοιχείο θα φύγει από την βάση. Ακόμα, με την συνάρτηση `check_if_inserted(R_ARRAY, (int[])tmpGamma.Clone())`, ελέγχεται να μην έχει υπάρξει ξανά τέτοια βάση (να μην είναι δηλαδή στο `R_Array`).

```

public bool check_if_inserted(ArrayList r_list, int[] basis)
{
    Array.Sort(basis);
    for (int i = r_list.Count - 1; i >= 0 ; i--)
    {
        int counter = 0;
        for (int ii = 0; ii < ((int[])r_list[i]).Length; ii++)
            if (((int[])r_list[i])[ii] == basis[ii])
                counter++;
        if (counter == ((int[])r_list[i]).Length)
            return true;
    }
    return false;
}
--!>

```

Στη συνέχεια προστίθενται στην μήτρα `W_ARRAY` όλες οι γειτονικές λύσεις που βρέθηκαν.

```

<!--
private void calc_w_array()
{
    ArrayList tmpW_ARRAY = (ArrayList)W_ARRAY.Clone();
    int[] tmpW = (int[])BASIS.Clone();

    for (int i = 0; i < GAMMA_ARRAY.Count; i++)
        W_ARRAY.Add((int[])GAMMA_ARRAY[i]);
}
--!>

```



Αφού ολοκληρωθεί η παραπάνω διαδικασία, εκτελείται ένα iteration με την εντολή `exec_iteration()`.

```
<!--
private void exec_iteration()
{
    OBJECTIVE_FUNCTION = new double[cols];
    int[] D_ARRAY = new int[W_ARRAY.Count];
    int d = 0;

    for (int i = 0; i < W_ARRAY.Count; i++)
    {
        d = BASIS.Length;
        int[] curr_w = (int[])W_ARRAY[i];

        for (int ii = 0; ii < curr_w.Length; ii++)
        {
            for (int iii = 0; iii < BASIS.Length; iii++)
                if (curr_w[ii] == BASIS[iii])
                    d--;
        }
        D_ARRAY[i] = d;
        if (d == 1)
            i = W_ARRAY.Count;
    }

    int curr_pos = 0;
    int min_d = int.MaxValue;
    for (int i = 0; i < D_ARRAY.Length; i++)
        if (D_ARRAY[i] <= min_d)
        {
            curr_pos = i;
            min_d = D_ARRAY[i];

            if (min_d == 1)
                i = D_ARRAY.Length;
        }

    for (int i = 0; i < OBJECTIVE_FUNCTION.Length; i++)
        OBJECTIVE_FUNCTION[i] = -1000000;

    for (int i = 0; i < ((int[])W_ARRAY[curr_pos]).Length; i++)
        OBJECTIVE_FUNCTION[((int[])W_ARRAY[curr_pos])[i]] = 0;

    for (int i = 0; i < BASIS_CONSTRAINTS.Length; i++)
        BASIS_CONSTRAINTS[i] =
        OBJECTIVE_FUNCTION[((int[])W_ARRAY[curr_pos])[i]];

    lp_solve();
}
```

```

        W_ARRAY.RemoveAt(curr_pos);
    }

```

Υπολογίζεται ποια βάση που βρίσκεται μέσα στην `W_ARRAY` έχει δείκτη  $d = 1$ , δηλαδή διαφέρει με την τρέχουσα βάση κατά ένα στοιχείο. Με αυτή την βάση θα γίνει η αλλαγή για να εκτελεστεί το `iteration`. Για να γίνει η αλλαγή της βάσης θα πρέπει στην αντικειμενική συνάρτηση του solver να μπουκν μηδέν στις θέσεις των στοιχείων της νέας βάσης, ενώ να δοθεί  $-1000000$  στις θέσεις όλων των άλλων στοιχείων. Στη συνέχεια με την εντολή `lp_solve()` γίνεται η αλλαγή της βάσης. Αφού ολοκληρωθεί η διαδικασία, η βάση που χρησιμοποιήθηκε αφαιρείται από την μήτρα `W_ARRAY`.

Η νέα λύση που προέκυψε από την εκτέλεση του `iteration`, αποθηκεύεται με τον παρακάτω κώδικα:

```

<!--
    VARIABLES_VALUES = new double[cols];
    for (int ii = 0; ii < RIGHT_HARD_SIDE.Length; ii++)
        VARIABLES_VALUES[BASIS[ii]] = RIGHT_HARD_SIDE[ii];
--!>

```

Στη συνέχεια αποθηκεύονται τα στοιχεία εκτέλεσης του πρώτου `iteration` με τις παρακάτω εντολές:

```

<!--
    Array.Resize(ref postValuesArray, postValuesArray.Length + 1);
    postValuesArray[postValuesArray.Length - 1] = new musaResults("LP
    NAME", cols, rows, VARIABLES_VALUES, clsVariables.OBJECTIVE_VALUE,
    ITERATIONS_TOT, totalGamma, criteriaGamma, pos, clsVariables.solutions,
    clsVariables.currentRAM);
    criteriaWeights = postValues.Add("LP NAME", cols, rows,
    VARIABLES_VALUES, ITERATIONS_TOT, totalGamma, criteriaGamma, pos,
    clsVariables.solutions, clsVariables.currentRAM);
--!>

```

Όταν η `W_ARRAY` δεν έχει άλλες βάσεις, η μέθοδος `Manas-Nedoma` ολοκληρώνεται.

## Μεταβελτιστοποίηση με την μέθοδο Reverse Simplex

Ξεκινώντας η επίλυση του γραμμικού προβλήματος μεταβελτιστοποίησης καλείται η συνάρτηση `solveSingleResolution(lpBase lp, frmMain frm)`.

Μετά την εύρεση της βέλτιστης λύσης, ξεκινάει η διαδικασία μεταβελτιστοποίησης.

### Μεταβελτιστοποίηση

Στο παράδειγμά μας θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο `Reverse Simplex`. Η μέθοδος αρχίζει να υλοποιείται με τον παρακάτω κώδικα:

```

<!--
    clsText.setText(frm.statusMethodToolStripStatusLabel, "Status: Solving
    Reverse Simplex");

    ticks = System.Environment.TickCount;
    solveOptimal.post_solve(lp,
    clsVariables.tmpGlobalPreferenceThresholdValue,
    clsVariables.tmpCriteriaPreferenceThresholdValue,
    clsVariables.nearOptimalSolutionsThreshold_SR,
    solverMethod.ReverseSimplex, clsVariables.OBJECTIVE_VALUE);

    ResultsArray result = new ResultsArray(solveOptimal,
    System.Environment.TickCount - ticks);
    clsVariables.solverResultsArray.Add(result);

    clsResults.fillReverseSimplex(result,
    comForms.viewResultsSingleResolutionForm);
    clsVariables.solvedReverseSimplex = true;
--!>

```

Η εντολή `solveOptimal.post_solve` μεταφέρει τις μεταβλητές `globalPreferenceThreshold`, `criteriaPreferenceThreshold`, `nearOptimalSolutionsThreshold` και την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (`clsVariables.OBJECTIVE_VALUE`) στον `solver` καθώς επίσης και την μέθοδο με βάση την οποία θα γίνει η μεταβελτιστοποίηση (`solverMethod.ReverseSimplex`).

Στη συνέχεια, και αφού η μεταβελτιστοποίηση θα γίνει με βάση την μέθοδο `Reverse Simplex`, εκτελείται η συνάρτηση `post_solve_reverse_simplex(lpBase bs, double globalThres, double criteriaThres, double obj)`.

```

<!--
private void post_solve_reverse_simplex(lpBase bs, double globalThres, double
criteriaThres, double obj)
{
    Thread tmp_thread;
    clear_memory();
    set_iterations_rea(0);
    set_total_iterations(0);
    set_total_solutions(0);
    clear_memory();

    values = new musaResults("LP NAME", ITERATIONS_TOT,
    clsVariables.OBJECTIVE_VALUE, pos);

    postValues = new musaResults("LP NAME", ITERATIONS_TOT,
    clsVariables.OBJECTIVE_VALUE, pos);
    postValuesArray = new musaResults[0];

```

```

reset_solver(baselp);
initialize_post_solve(nearOptimalSolutionsThreshold);

criteriaWeights = new double[0];
VARIABLES_VALUES = make_variables_values(cols);

CONSESSION_MAN = clsVariables.OBJECTIVE_VALUE *
nearOptimalSolutionsThreshold;

solvingF = true;

on_iter("Reverse Simplex");
tmp_thread = new Thread(lp_solve_reverse_simplex);
tmp_thread.Priority = get_thread_priority(theadPriority);
current_thread = tmp_thread;

tmp_thread.Start();

while (solvingF)
    wait();

current_thread = null;

postValues.Div(postValuesArray.Length);
}
--!>

```

Αφού δημιουργηθεί ένα νέο thread μέσα στο οποίο θα γίνει η επίλυση της μεθόδου, στη συνέχεια εκτελείται η συνάρτηση `clear_memory()` η οποία αρχικοποιεί τις μεταβλητές και τις μήτρες και στην συνέχεια με την εντολή `GC.Collect()` καθαρίζει την μνήμη του υπολογιστή από στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν κατά την επίλυση προηγούμενων μεθόδων.

```

<!--
public void clear_memory()
{
    REV_MARGINAL_NET_INCOMES = new double[0];
    KAPPA_VALUES = new double[0];

    GAMMA_ARRAY = new ArrayList();
    THETA_ARRAY = new ArrayList();
    GAMMA_IN_ARRAY = new ArrayList();
    GAMMA_OU_ARRAY = new ArrayList();
    W_ARRAY = new ArrayList();
    R_ARRAY = new ArrayList();
    BASIS_ARRAY = new ArrayList();

    N_ARRAY = new ArrayList();
    N_ARRAY_BASIS = new ArrayList();

```

```

K_ARRAY = new ArrayList();
RESULTS_ARRAY_VALUES = new ArrayList();
RESULTS_ARRAY_NAMES = new ArrayList();

BASIS_CONSTRAINTS_ARRAY = new ArrayList();
MATRIX_ARRAY = new ArrayList();
RIGHT_HAND_SIDE_ARRAY = new ArrayList();

GC.Collect();
Application.DoEvents();
}
--!>

```

Στη συνέχεια γίνεται reset στον solver με την εντολή `reset_solver(baselp)`. Η συνάρτηση `reset_solver(lpBase bs)` επαναφέρει τον solver στην κατάσταση στην οποία βρισκόταν στο τέλος της διαδικασίας εύρεσης της βέλτιστης λύσης.

```

<!--
public void reset_solver(lpBase bs)
{
    VARIABLES = VARIABLES_BU;
    SLACK_VARIABLES = SLACK_VARIABLES_BU;
    BASIS = BASIS_BU;
    BASIS_CONSTRAINTS = BASIS_CONSTRAINTS_BU;
    xAXIS_HEADER = xAXIS_HEADER_BU;
    MATRIX = MATRIX_BU;
    RIGHT_HARD_SIDE = RIGHT_HARD_SIDE_BU;
    OBJECTIVE_FUNCTION = OBJECTIVE_FUNCTION_BU;
    MARGINAL_NET_INCOMES = MARGINAL_NET_INCOMES_BU;
    OBJECTIVE_VALUE = OBJECTIVE_VALUE_BU;
    VARIABLES_VALUES = VARIABLES_VALUES_BU;
    ITERATIONS = ITERATIONS_BU;
    _variables = _variables_BU;
    _bounds = _bounds_BU;
    rows = rows_BU;
    cols = cols_BU;
    BigM = BigM_BU;
    pos = new musaLPPosition(bs, 0);
}
--!>

```

Το επόμενο βήμα είναι η προσθήκη μιας νέας στήλης και μιας νέας γραμμής στον πίνακα simplex μέσω της εντολής `initialize_post_solve(nearOptimalSolutionsThreshold)`.

```

<!--
public void initialize_post_solve(double nearOptimalSolutionThresholdTmp)
{
    double[] rowex = new double[cols + 1];

```

```

    for (int j = 0; j < cols; j++)
        rowex[j] = -MARGINAL_NET_INCOMES[j];
    double temp = clsVariables.OBJECTIVE_VALUE *
    nearOptimalSolutionThresholdTmp;
    add_column();
    add_row(rowex, Math.Abs(temp));
}

```

Στην αρχή αντιστρέφονται τα οριακά καθαρά εισοδήματα της βέλτιστης λύσης. Μετά προστίθεται μια νέα στήλη (add\_column()) και, τέλος, προστίθεται μια νέα γραμμή (add\_row(rowex, Math.Abs(temp))).

--!>

Γίνεται αρχικοποίηση του thread με το οποίο θα εκτελεστεί η διαδικασία μεταβελτιστοποίησης της Reverse Simplex.

```

<!--
    on_iter("Reverse Simplex");
    tmp_thread = new Thread(lp_solve_reverse_simplex);
    tmp_thread.Priority = get_thread_priority(threadPriority);
    current_thread = tmp_thread;

    tmp_thread.Start();
--!>

```

Κατά την διάρκεια επίλυσης της μεθόδου εκτελείται η συνάρτηση wait() η οποία εκτελεί την εντολή Application.DoEvents() διαρκώς. Αυτό γίνεται γιατί ο υπολογιστής μπορεί να κολλήσει κατά τη διάρκεια λύσης μεγάλων προβλημάτων. Η Application.DoEvents() βοηθάει να εκτελούνται άμεσα όλες οι τρέχουσες εντολές.

Μετά την λύση του προβλήματος γίνεται η διαίρεση των αποτελεσμάτων των μεταβλητών με τον αριθμό των λύσεων (postValues.Div(postValuesArray.Length)).

### ΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΕ ΤΗ REVERSE SIMPLEX

*Function: lp\_solve\_reverse\_simplex()*

```

<!--
private void lp_solve_reverse_simplex()
{
    _iters = 0;
    STEP = 0;
    _iters++;

    set_iterations_rea(_iters);
    for (int ii = 0; ii < RIGHT_HARD_SIDE.Length; ii++)
        VARIABLES_VALUES[BASIS[ii]] += RIGHT_HARD_SIDE[ii];
}

```

```

Array.Resize(ref postValuesArray, postValuesArray.Length + 1);
postValuesArray[postValuesArray.Length - 1] = new musaResults("LP
NAME", cols, rows, VARIABLES_VALUES, clsVariables.OBJECTIVE_VALUE,
ITERATIONS_TOT, totalGamma, criteriaGamma, pos, 1,
clsVariables.currentRAM);
criteriaWeights = postValues.Add("LP NAME", cols, rows,
VARIABLES_VALUES, ITERATIONS_TOT, totalGamma, criteriaGamma, pos, 1,
clsVariables.currentRAM);
set_total_iterations(0);
set_total_solutions(TOTAL_SOLUTIONS + 1);

extraVariable = xAXIS_HEADER[xAXIS_HEADER.Length - 1];
calc_r_array(0);
// Solve Reverse Simplex
while (true)
{
    K_ARRAY = new ArrayList();
    int todo = step_1();
    if (todo == -1)
        break;
    else if (todo == 1)
        goto step3;
    step_2(-1);
step3:
    if (step_3(-1))
        break;

    STEP++;
}
solvingF = false;
}
--!>

```

Με τον παρακάτω κώδικα αποθηκεύεται σαν πρώτη λύση του προβλήματος οι τιμές του RHS (Right Hand Side).

```

<!--
for (int ii = 0; ii < RIGHT_HARD_SIDE.Length; ii++)
    VARIABLES_VALUES[BASIS[ii]] += RIGHT_HARD_SIDE[ii];
--!>

```

Αφού γίνει η αρχικοποίηση των μεταβλητών και των μητρών, ξεκινάει η λύση του προβλήματος.

```

<!--
Array.Resize(ref postValuesArray, postValuesArray.Length + 1);
postValuesArray[postValuesArray.Length - 1] = new musaResults("LP
NAME", cols, rows, VARIABLES_VALUES, clsVariables.OBJECTIVE_VALUE,

```

```

ITERATIONS_TOT, totalGamma, criteriaGamma, pos, 1,
clsVariables.currentRAM);
criteriaWeights = postValues.Add("LP NAME", cols, rows,
VARIABLES_VALUES, ITERATIONS_TOT, totalGamma, criteriaGamma, pos, 1,
clsVariables.currentRAM);
set_total_iterations(0);
set_total_solutions(TOTAL_SOLUTIONS + 1);
--!>

```

Για την λύση χρησιμοποιείται ένα loop (do-while) το οποίο σταματάει σε δυο περιπτώσεις:

- Όταν οι W\_ARRAY, K\_ARRAY και R\_ARRAY μείνουν κενές εκτελώντας την συνάρτηση check\_if\_completed\_W\_R:
 

```

<!--
public bool check_if_completed_W_R()
{
    if (W_ARRAY.Count == 0 && N_ARRAY.Count == 0 && K_ARRAY.Count ==
0)
        return false;
    return true;
}
--!>

```
- Όταν η N\_Array μείνει κενή.

Αρχίζοντας την επίλυση του προβλήματος, η πρώτη συνάρτηση που εκτελείται είναι η step\_1().

```

<!--
private int step_1()
{
    calc_g_array(0);
    calc_w_array(0);

    set_results_arrays((int[])BASIS.Clone(),
(double[])RIGHT_HARD_SIDE.Clone());

    if (!check_if_completed_W_R())
        return -1;

    if (!check_if_completed())
        return 1;

    BASIS_ARRAY.Add((int[])BASIS.Clone());
    return 0;
}

```

Μέσα σε αυτή τη συνάρτηση, υπολογίζονται οι γειτονικές λύσεις της τρέχουσας βάσης (calc\_g\_array(0)) οι οποίες στη συνέχεια προστίθενται στην W\_ARRAY (calc\_w\_array(0)) για να χρησιμοποιηθούν στον αλγόριθμο.



```

public void calc_g_array(int wi)
{
    int[] tmpGamma;
    int basis_var_down = 0;
    GAMMA_ARRAY = new ArrayList();

    for (int i = 0; i < MATRIX.ColumnCount; i++)
        if (!check_if_in_base(xAXIS_HEADER[i]) &&
            check_if_has_positive_item(MATRIX.GetColumnVector(i)))
            {
                tmpGamma = (int[])BASIS.Clone();
                basis_var_down = exec_basis_var_down(i, MATRIX,
                    RIGHT_HARD_SIDE);
                tmpGamma[basis_var_down] = xAXIS_HEADER[i];
                if (!check_if_inserted(R_ARRAY, (int[])tmpGamma.Clone()))
                {
                    GAMMA_IN_ARRAY.Add(i);
                    GAMMA_OU_ARRAY.Add(basis_var_down);
                    GAMMA_ARRAY.Add(tmpGamma);
                }
            }
}

public void calc_w_array(int wi)
{
    ArrayList tmpW_ARRAY = (ArrayList)W_ARRAY.Clone();
    int[] tmpW = (int[])BASIS.Clone();

    for (int i = 0; i < GAMMA_ARRAY.Count; i++)
        W_ARRAY.Add((int[])GAMMA_ARRAY[i]);
}
--!>

```

Το επόμενο βήμα του αλγορίθμου εκτελείται μέσα στη συνάρτηση `step_2(int fr)`.

```

<!--
private void step_2(int fr)
{
    int[] currBASIS = (int[])BASIS.Clone();
    int count_process = 0;
    MATRIX_ARRAY.Add(MATRIX_ARRAY.Count - 1);
    MATRIX_ARRAY[MATRIX_ARRAY.Count - 1] = new ArrayList();
    ((ArrayList)MATRIX_ARRAY[MATRIX_ARRAY.Count - 1]).Add(MATRIX);
    RIGHT_HAND_SIDE_ARRAY.Add(MATRIX_ARRAY.Count - 1);
    RIGHT_HAND_SIDE_ARRAY[MATRIX_ARRAY.Count - 1] = new ArrayList();
    ((ArrayList)RIGHT_HAND_SIDE_ARRAY[MATRIX_ARRAY.Count -
    1]).Add(RIGHT_HARD_SIDE);
    do

```

```

{
    _iters++;
    set_iterations_rea(_iters);

    count_process++;

    double theta = RIGHT_HARD_SIDE[(int)GAMMA_OU_ARRAY[0]] /
    MATRIX[(int)GAMMA_OU_ARRAY[0], (int)GAMMA_IN_ARRAY[0]];
    double[] tmpRIGHT_HARD_SIDE = (double[])RIGHT_HARD_SIDE.Clone();

    for (int i = 0; i < tmpRIGHT_HARD_SIDE.Length; i++)
    {
        if (i == (int)GAMMA_OU_ARRAY[0])
            tmpRIGHT_HARD_SIDE[i] = theta;
        else
            tmpRIGHT_HARD_SIDE[i] = RIGHT_HARD_SIDE[i] -
            MATRIX[i, (int)GAMMA_IN_ARRAY[0]] * theta;
    }

    int[] u_s = (int[])W_ARRAY[0];
    double[] vu_s = (double[])tmpRIGHT_HARD_SIDE.Clone();
    double Y_s = 0;
    BASIS = (int[])u_s.Clone();

    set_results_arrays(u_s, vu_s);

    bool isInBase = false;
    for (int i = 0; i < u_s.Length; i++)
        if (u_s[i] == extraVariable)
        {
            isInBase = true;
            Y_s = vu_s[i];
            i = u_s.Length;
        }

    if (isInBase)
    {
        N_ARRAY.Add(new double[] { count_process, Y_s });
        N_ARRAY_BASIS.Add((int[])u_s.Clone());
    }
    else
        K_ARRAY.Add((int[])u_s.Clone());

    calc_r_array();

    VARIABLES_VALUES = new double[cols];

    for (int ii = 0; ii < tmpRIGHT_HARD_SIDE.Length; ii++)
        VARIABLES_VALUES[BASIS[ii]] = tmpRIGHT_HARD_SIDE[ii];
}

```

```

Array.Resize(ref postValuesArray, postValuesArray.Length + 1);
postValuesArray[postValuesArray.Length - 1] = new musaResults("LP
NAME", cols, rows, VARIABLES_VALUES,
clsVariables.OBJECTIVE_VALUE, ITERATIONS_TOT, totalGamma,
criteriaGamma, pos, 1, clsVariables.currentRAM);
criteriaWeights = postValues.Add("LP NAME", cols, rows,
VARIABLES_VALUES, ITERATIONS_TOT, totalGamma, criteriaGamma, pos,
1, clsVariables.currentRAM);
set_total_iterations(0);
set_total_solutions(TOTAL_SOLUTIONS + 1);
Application.DoEvents();
W_ARRAY.RemoveAt(0);
GAMMA_IN_ARRAY.RemoveAt(0);
GAMMA_OU_ARRAY.RemoveAt(0);
} while (W_ARRAY.Count > 0);
BASIS = (int[])currBASIS.Clone();
}

```

Στο βήμα αυτό υπάρχει ένα μεγάλο loop (do-while). Το loop αυτό εκτελείται μέχρι η μήτρα W\_ARRAY να αδειάσει τελείως. Σε κάθε επανάληψη γίνεται μια αλλαγή της βάσης του προβλήματος χωρίς να καλέσουμε τον solver και αποθηκεύουμε τις λύσεις που προκύπτουν (RHS).

--!>

Στη συνέχεια εκτελείται το τρίτο βήμα step\_3(int ft).

```

<!--
private bool step_3(int ft)
{
    int[] u_s = new int[] { };
    if (N_ARRAY.Count == 0)
        return true;
    if (N_ARRAY.Count != 0)
    {
        int max_i = 0;
        double max_value = double.MinValue;
        for (int i = 0; i < N_ARRAY.Count; i++)
            if (((double[])N_ARRAY[i])[1] > max_value)
            {
                max_i = i;
                max_value = ((double[])N_ARRAY[i])[1];
            }

        u_s = ((int[])N_ARRAY_BASIS[max_i]);
        N_ARRAY_BASIS.RemoveAt(max_i);
        N_ARRAY.RemoveAt(max_i);
    }
    else
        return true;
}

```

```

OBJECTIVE_FUNCTION = new double[cols];

for (int i = 0; i < OBJECTIVE_FUNCTION.Length; i++)
    OBJECTIVE_FUNCTION[i] = -1000000;

for (int i = 0; i < u_s.Length; i++)
    OBJECTIVE_FUNCTION[u_s[i]] = 0;

for (int i = 0; i < BASIS_CONSTRAINTS.Length; i++)
    BASIS_CONSTRAINTS[i] = OBJECTIVE_FUNCTION[u_s[i]];

lp_solve();

return false;
}

```

Στο τρίτο βήμα, αν η μήτρα `N_ARRAY` δεν είναι κενή, τότε επιλέγουμε για να βάλουμε στην βάση αυτή που βρίσκεται στην `N_ARRAY` και έχει το μεγαλύτερο  $N_s$ . Στη συνέχεια γίνονται οι απαραίτητες αλλαγές στον solver έτσι ώστε να εκτελέσει όσα `iterations` χρειάζονται για να καταλήξει σε αυτή την βάση. Η διαδικασία συνεχίζεται.

--!>

## Υπολογισμός και προβολή αποτελεσμάτων

### - Υπολογισμός -

#### Τιμή της Αντικειμενικής Συνάρτησης

```

<!--
private double calculate_objective()
{
    double ret = 0;
    for (int i = 0; i < rows; i++)
        ret += OBJECTIVE_FUNCTION[BASIS[i]] * RIGHT_HARD_SIDE[i];
    return ret;
}
--!>

```

#### Ολική και Μερική Ικανοποίηση

```

<!--
public void calculate_satisfaction(Boolean forPost)
{
    musaResults tmp;

    if (forPost)
        tmp = postValues;
    else
        tmp = values;
}

```

```

criteriaSatisfaction = new double[tmp.numberofCriteria];
globalSatisfaction = 0;

for (int i = 1; i < pGlobal.Length; i++)
    for (int j = 0; j < i; j++)
        globalSatisfaction += pGlobal[i] * tmp.z[j];

for (int i = 0; i < tmp.numberofCriteria; i++)
    for (int j = 0; j < tmp.numberofCriteriaLevels[i]; j++)
        for (int k = 0; k <= j; k++)
            criteriaSatisfaction[i] += 100 * pCriterion[i][j + 1]
            * (tmp.w[i][k] / tmp.criteriaWeights[i]);
}
--!>

```

### Ολική και Μερική Απαιτητικότητα

```

<!--
public void calculate_demanding()
{
    musaResults tmp = postValues;
    globalDemanding = 0;
    criteriaDemanding = new double[tmp.numberofCriteria];

    //Global

    double[] globalvals = get_total_satisfaction_levels_values();
    double div = 0;
    for (int m = 2; m < baselp.totalSatisfactionLevels; m++)
    {
        div += Convert.ToDouble(m - 1) /
        Convert.ToDouble(baselp.totalSatisfactionLevels - 1);
    }
    div *= 100;
    globalDemanding = div;
    for (int m = 1; m < baselp.totalSatisfactionLevels - 1; m++)
    {
        globalDemanding -= globalvals[m];
    }
    if (baselp.totalSatisfactionLevels >= 2)
        globalDemanding /= div;
    else
        globalDemanding = 0;
    globalDemanding *= 100;

    //criteria
    double[][] criteriavals = get_criteria_levels_values();
    for (int i = 0; i < tmp.numberofCriteria; i++)
    {
        if (baselp.criteriaLevels[i] < 2)

```

```

        {
            criteriaDemanding[i] = 0;
            continue;
        }
        div = 0;
        for (int k = 2; k < baselp.criteriaLevels[i]; k++)
        {
            div += Convert.ToDouble(k - 1) /
                Convert.ToDouble(baselp.criteriaLevels[i] - 1);
        }
        div *= 100;
        criteriaDemanding[i] = div;
        for (int k = 1; k < baselp.criteriaLevels[i] - 1; k++)
        {
            criteriaDemanding[i] -= (criteriaval[i][k] * 100) /
                tmp.criteriaWeights[i];
        }
        criteriaDemanding[i] /= div;
        criteriaDemanding[i] *= 100;
    }
}
--!>

```

#### Δείκτης Ευστάθειας

```

<!--
public void calculate_stability()
{
    double[] S_i = new double[baselp.numberOfCriteria];
    double STDEV = 0;
    double[] array = new double[postValuesArray.Length];
    double div = 0;
    double syntel = 0;

    stabilityIndex = 0;
    for (int i = 0; i < baselp.numberOfCriteria; i++)
    {
        for (int ii = 0; ii < postValuesArray.Length; ii++)
            array[ii] = postValuesArray[ii].criteriaWeights[i];

        STDEV = Maths.StandardDeviation(array);

        syntel = ((Math.Pow((100.0F / baselp.numberOfCriteria), 2) *
            (baselp.numberOfCriteria - 1.0F) + Math.Pow((-100.0F + 100.0F /
            baselp.numberOfCriteria), 2)) / baselp.numberOfCriteria) *
            postValuesArray.Length;
        div = Math.Sqrt((1.0F / (postValuesArray.Length - 1.0F)) *
            syntel);

        S_i[i] = STDEV / div;
    }
}

```

```

        stabilityIndex += S_i[i];
    }
    stabilityIndex /= baselp.numberofCriteria;
    stabilityIndex = 1 - stabilityIndex;
}
--!>

```

### Δείκτης Αποδοτικότητα

```

<!--
public void calculate_prediction()
{
    double[] yVal = get_total_satisfaction_levels_values();
    double[] yValLevels = new double[yVal.Length];
    for (int i = 1; i < yVal.Length; i++)
    {
        yValLevels[i - 1] = (yVal[i] + yVal[i - 1]) / 2;
    }
    yValLevels[yVal.Length - 1] = double.PositiveInfinity;
    int[] InitialSatisfactionValues = baselp.totalSatisfactionAnswers;
    int[] PredictedSatisfactionValues = new
    int[InitialSatisfactionValues.Length];
    int NNi = 0;
    for (int i = 0; i < baselp.numberofCustomers; i++)
    {
        double predictedyval = yVal[InitialSatisfactionValues[i]] +
        postValues.s_p[i] - postValues.s_n[i];
        for (int j = 0; j < yVal.Length; j++)
        {
            if (predictedyval <= yValLevels[j])
            {
                PredictedSatisfactionValues[i] = j;
                break;
            }
        }
        if (PredictedSatisfactionValues[i] ==
        InitialSatisfactionValues[i])
            NNi++;
    }
    predictionIndex = Convert.ToDouble(NNi) / baselp.numberofCustomers;
}
--!>

```

### **- Προβολή -**

Έχοντας ολοκληρωθεί η εύρεση της βέλτιστης λύσης και η διαδικασία μεταβελτιστοποίησης, αρχίζει η προετοιμασία και προβολή των αποτελεσμάτων στις διάφορες λίστες και τα γραφήματα.

```

<!--

```

```

clsResults.fillMUSA_I(result,
comForms.viewResultsSingleResolutionForm);

clsCharts.fillGraph(clsVariables.solverResultsArray,
comForms.analysisSatisfactionForm);
clsCharts.fillGraph(clsVariables.solverResultsArray,
comForms.analysisDemandingForm);
clsCharts.fillWeights(clsVariables.solverResultsArray,
comForms.analysisWeightsForm);
clsMaps.drawMap(clsVariables.solverResultsArray,
comForms.analysisActionMapsForm);
clsMaps.drawMap(clsVariables.solverResultsArray,
comForms.analysisImprovementsMapsForm);
clsCharts.fillPerformance(clsVariables.solverResultsArray,
comForms.statisticalPerformanceForm);
clsCharts.fillFreqs(clsVariables.solverResultsArray,
comForms.statisticalFrequenciesForm);
clsCharts.fillVariationsMethod((ResultsArray)clsVariables.solverResults
Array[0], comForms.statisticalVariationsForm.crtGlo);
--!>

```

Η συνάρτηση `fillMUSA_I(result, comForms.viewResultsSingleResolutionForm)` προβάλλει όλες τις λύσεις που προέκυψαν από τη διαδικασία της μεταβελτιστοποίησης. Προβάλλονται επίσης, σε ένα πλαίσιο κειμένου, οι μεταβλητές Global Preference Threshold, Near Optimal Solutions Threshold, Objective Value, Fitting Index, Prediction Index και Stability Index.

```

<!--
public static void fillMUSA_I(ResultsArray res, Form frm)
{
    ListView lvwRes =
    ((ListView)frm.Controls["pnBac"].Controls["pnMid"].Controls["pnMidMiddle"].Controls["gbData"].Controls["lvResults"]);

    musaResults getResults;
    resultsMUSA_I = res;

    ListViewItem newItem;
    ColumnHeader newColumn;

    getResults = res.postValues;

    lvwRes.Items.Clear();
    lvwRes.Columns.Clear();

    newColumn = new ColumnHeader();
    newColumn.Text = string.Empty;
    newColumn.Width = 80;
    lvwRes.Columns.Add(newColumn);

```



```

newColumn = new ColumnHeader();
newColumn.Text = "Average";
newColumn.Width = 80;
newColumn.TextAlign = HorizontalAlignment.Center;
lvwRes.Columns.Add(newColumn);

for (int i = 0; i < getResults.totalSatisfactionLevels; i++)
{
    newItem = new ListViewItem();
    newItem.Text = string.Format("z[{0}]", i + 1);
    newItem.SubItems.Add(clsConvert.convertDoubleToString_Function(getResults.z[i]));
    for (int rowID = 0; rowID < getResults.numberOfCriteria; rowID++)
    {
        newItem.SubItems.Add(clsConvert.convertDoubleToString_Function(res.postValuesArray[rowID].z[i]));
        newItem.SubItems.Add(clsConvert.convertDoubleToString_Function(res.postValuesArray[rowID + getResults.numberOfCriteria].z[i]));
    }
    lvwRes.Items.Add(newItem);
}

for (int i = 0; i < getResults.numberOfCriteria; i++)
{
    newColumn = new ColumnHeader();
    newColumn.Text = string.Format("min_b[{0}]", i + 1);
    newColumn.Width = 80;
    newColumn.TextAlign = HorizontalAlignment.Center;
    lvwRes.Columns.Add(newColumn);

    newColumn = new ColumnHeader();
    newColumn.Text = string.Format("max_b[{0}]", i + 1);
    newColumn.Width = 80;
    newColumn.TextAlign = HorizontalAlignment.Center;
    lvwRes.Columns.Add(newColumn);
}

for (int i = 0; i < getResults.numberOfCriteria; i++)
{
    for (int j = 0; j < getResults.numberOfCriteriaLevels[i]; j++)
    {
        newItem = new ListViewItem();
        newItem.Text = string.Format("w[{0}][{1}]", i + 1, j + 1);
        newItem.SubItems.Add(clsConvert.convertDoubleToString_Function(getResults.w[i][j]));
    }
}

```

```

        for (int rowID = 0; rowID <
            getResults.numberOfCriteria; rowID++)
        {
            newItem.SubItems.Add(clsConvert.convertDoubleTo
                String_Function(res.postValuesArray[rowID].w[i]
                    [j]));
            newItem.SubItems.Add(clsConvert.convertDoubleTo
                String_Function(res.postValuesArray[rowID +
                    getResults.numberOfCriteria].w[i][j]));
        }
        lvwRes.Items.Add(newItem);
    }

    newItem = new ListViewItem();
    newItem.Text = string.Format("b[{0}]", i + 1);
    newItem.SubItems.Add(clsConvert.convertDoubleToString_Funct
        ion(getResults.criteriaWeights[i]));
    for (int rowID = 0; rowID < getResults.numberOfCriteria;
        rowID++)
    {
        newItem.SubItems.Add(clsConvert.convertDoubleToString
            _Function(res.postValuesArray[rowID].criteriaWeights[
                i]));
        newItem.SubItems.Add(clsConvert.convertDoubleToString
            _Function(res.postValuesArray[rowID +
                getResults.numberOfCriteria].criteriaWeights[i]));
    }

    lvwRes.Items.Add(newItem);
}

((TextBox)frm.Controls["pnBac"].Controls["pnMid"].Controls["gbPro
cessOfResoltion"].Controls["tbProcessOfResolution"]).Text =
"Global Preference Threshold: " +
clsConvert.convertDoubleToString_Function(res.GlobalPreferenceThr
eshold);
((TextBox)frm.Controls["pnBac"].Controls["pnMid"].Controls["gbPro
cessOfResoltion"].Controls["tbProcessOfResolution"]).Text +=
"\r\nNear Optimal Solutions Threshold: " +
clsConvert.convertDoubleToString_Function(res.nearOptimalSolution
sThreshold * 100) + "%";
((TextBox)frm.Controls["pnBac"].Controls["pnMid"].Controls["gbPro
cessOfResoltion"].Controls["tbProcessOfResolution"]).Text +=
"\r\nObjective Value: " +
clsConvert.convertDoubleToString_Function(Math.Abs(clsVariables.O
BJECTIVE_VALUE));
((TextBox)frm.Controls["pnBac"].Controls["pnMid"].Controls["gbPro
cessOfResoltion"].Controls["tbProcessOfResolution"]).Text +=
"\r\nFitting Index: " +

```

```

        clsConvert.convertDoubleToString_Function(100 * (1 -
Math.Abs(clsVariables.OBJECTIVE_VALUE) / (100F *
getResults.numberOfQuestionnaires))) + "%";
        ((TextBox)frm.Controls["pnBac"].Controls["pnMid"].Controls["gbPro
cessOfResolution"].Controls["tbProcessOfResolution"]).Text +=
        "\r\nPrediction Index: " +
        clsConvert.convertDoubleToString_Function((res.predictionIndex) *
100) + "%";
        ((TextBox)frm.Controls["pnBac"].Controls["pnMid"].Controls["gbPro
cessOfResolution"].Controls["tbProcessOfResolution"]).Text +=
        "\r\nStability Index: " +
        clsConvert.convertDoubleToString_Function((res.stabilityIndex) *
100) + "%";
    }
    --!>

```

Ένα από τα γραφήματα που δημιουργεί το σύστημα είναι αυτό της προβολής των βαρών είτε σε σχήμα πίτας είτε σε σχήμα μπάρας. Αυτό γίνεται με την παρακάτω συνάρτηση.

```

<!--
public static void fillWeights(ArrayList currentMUSASolverArray, Form frm)
{
    frmAnalysisWeights frmWei = (frmAnalysisWeights)frm;

    Chart crtPie =
    (Chart)frm.Controls["pnBac"].Controls["pnMid"].Controls["tcWei"].Contro
ls["tpPie"].Controls["crtPie"];
    Chart crtBar =
    (Chart)frm.Controls["pnBac"].Controls["pnMid"].Controls["tcWei"].Contro
ls["tpBar"].Controls["crtBar"];

    LegendItem newLegItem;
    LegendCell newLegCell;
    Color serColor;

    string MusaAPIMethodTmp = string.Empty;
    double[] yValues;
    string[] xValues;

    // Bars Chart
    crtBar.Series.Clear();
    crtBar.Legends[0].CustomItems.Clear();
    frmWei.cbMethod.Items.Clear();
    for (Int32 totMet = 0; totMet < currentMUSASolverArray.Count; totMet++)
    {
        ResultsArray solverResults =
        (ResultsArray)currentMUSASolverArray[totMet];
        MusaAPIMethodTmp =
        clsSwitch.getMUSAStrng(solverResults.currentMethod);
    }
}

```

```

serColor = clsSwitch.getSeriesColor(MusaAPIMethodTmp);

crtBar.Series.Add(MusaAPIMethodTmp);
newLegItem = new LegendItem();
newLegItem.SeriesName = MusaAPIMethodTmp;

newLegItem.Cells.Clear();
newLegItem.Tag = crtBar.Series[MusaAPIMethodTmp];
newLegItem.Color = serColor;

newLegCell = new LegendCell();
newLegCell.Name = "Cell_A_" + totMet.ToString();
newLegCell.Tag = crtBar.Series[MusaAPIMethodTmp];
newLegCell.CellType = LegendCellType.Image;
newLegCell.Image = "checked";
newLegItem.Cells.Add(newLegCell);

newLegCell = new LegendCell();
newLegCell.Name = "Cell_B_" + totMet.ToString();
newLegCell.CellType = LegendCellType.SeriesSymbol;
newLegItem.Cells.Add(newLegCell);

newLegCell = new LegendCell();
newLegCell.Name = "Cell_C_" + totMet.ToString();
newLegCell.Text = MusaAPIMethodTmp;
newLegCell.Alignment = ContentAlignment.MiddleLeft;
newLegItem.Cells.Add(newLegCell);

crtBar.Legends[0].CustomItems.Add(newLegItem);

crtBar.Series[MusaAPIMethodTmp].ChartType = SeriesChartType.Bar;
crtBar.Series[MusaAPIMethodTmp].Color = serColor;
crtBar.Series[MusaAPIMethodTmp].ShadowOffset = 2;
crtBar.Series[MusaAPIMethodTmp].BorderWidth = 3;
crtBar.Series[MusaAPIMethodTmp].IsValueShownAsLabel = true;
crtBar.Series[MusaAPIMethodTmp].IsVisibleInLegend = false;
crtBar.Series[MusaAPIMethodTmp]["DrawingStyle"] = "Cylinder";

yValues = new
double[solverResults.postValues.criteriaWeights.Length];
for (Int32 crID = 0; crID <
solverResults.postValues.criteriaWeights.Length; crID++)
    yValues[crID] =
Math.Round(solverResults.postValues.criteriaWeights[crID], 2);

xValues = solverResults.baselp.criteriaNames;
crtBar.Series[MusaAPIMethodTmp].Points.DataBindXY(xValues,
yValues);

```

```
        frmWei.cbMethod.Items.Add(MusaAPIMethodTmp);  
    }  
    frmWei.cbMethod.SelectedIndex = 0;  
}  
--!>
```

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΧΡΗΣΗΣ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ  
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΧΡΗΣΗΣ

