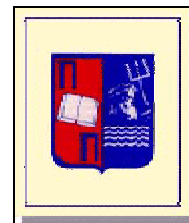


**Πανεπιστήμιο Πειραιώς**

**Τμήμα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής  
Διοικητικής  
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών**



## **Διπλωματική Διατριβή**

### **Ικανότητα Πρόβλεψης χρήσει Μοντέλων ARCH και GARCH**

Κατά πόσο μπορούμε να είμαστε  
«σίγουροι» για τις προβλέψεις μας;

Επιβλέπων Καθηγητής  
**Νικήτας Πιττής**

**Μήτραινας Χαράλαμπος**

**Ιανουάριος 2003**

## **Περιεχόμενα**

Εισαγωγή.....	1
---------------	---

### **Μέρος 1<sup>ο</sup>**

1) Περιγραφή Χαστικών Μοντέλων.....	4
2) Γιατί ένα χαστικό μοντέλο θα μπορούσε να ήταν χρήσιμο στα Οικονομικά και στην Χρηματοοικονομία ; .....	6
3) Πώς θα μπορούσε να προκύψει ένα χαστικό μοντέλο (στην Οικονομία) ; .....	8
4) Τρόποι ανίχνευσης δομών χάους σε οικονομικές / χρηματοοικονομικές χρονοσειρές ;.....	12
5) The Brock, Dechert, Scheinkman (BDS) test .....	13

### **Μέρος 2<sup>ο</sup>**

1) Μοντέλα ετεροσκεδαστικότητας GARCH .....	16
2) Monte Carlo Simulations .....	18
3) Εναλλακτικά μοντέλα παραγωγής ετεροσκεδαστικότητας .....	22
4) Εναλλακτικό μοντέλο του ARCH(1).....	25
5) Μη γραμμικότητα και volatility clustering .....	28
6) Παραγωγή ετεροσκεδαστικότητας χρήσει μοντέλων Park .....	36
7) Συμπεράσματα .....	38

### **Παράρτημα Α**

### **Παράρτημα Β**

### **Παράρτημα Γ**

### **Βιβλιογραφία**

## Εισαγωγή

Στον αιώνα που αφήσαμε πίσω μας έγιναν πολλά και εντυπωσιακά επιστημονικά άλματα τα οποία συνετέλεσαν στην αλλαγή του τρόπου σκέψης. Η Θεωρία Πιθανοτήτων, η οποία σε εβρυνδική κατάσταση χρησιμοποιούνταν κατά κόρον για την μελέτη τυχερών παιγνίων, αναπτύχθηκε για την πλήρωση κενών που άφηνε η ντετερμινιστική θεώρηση των πραγμάτων. Κατ' αυτόν τον τρόπο θεμελιώθηκε η επιστήμη της στατιστικής καθώς και άλλοι κλάδοι των φυσικών επιστημών όπως η κβαντομηχανική.

Καθώς η Θεωρία Πιθανοτήτων κέρδιζε ολοένα και μεγαλύτερο έδαφος εφοδιάζοντας τους επιστήμονες με ισχυρότερα εργαλεία μοντελοποίησης, η θεωρία του Χάους έκανε την εμφάνισή της στην δεκαετία το 1960. Η άνθηση αυτής της νέας επιστήμης πιθανότατα εξηγείται από την εξέλιξη ισχυρών υπολογιστικών μέσων τα οποία βοήθησαν στη μελέτη των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων. Ενώ τα γραμμικά δυναμικά συστήματα είχαν μελετηθεί εκτεταμένα εδώ και αιώνες, τόσο σε θεωρητικό όσο και σε εφαρμοσμένο επίπεδο, τα αντίστοιχα μη γραμμικά δεν μελετήθηκαν αρκετά λόγω της εγγενούς πολυπλοκότητάς τους που ήταν σχεδόν αδύνατο να αντιμετωπιστεί με τα τότε διαθέσιμα μέσα.

Το εφαλτήριο για την γένεση της Θεωρίας του Χάους αποτέλεσε η μελέτη φυσικών συστημάτων (φυσική ατμόσφαιρας, μηχανική υγρών και αερίων, θερμοδυναμική κ.ά.) τα οποία δεν μπορούσαν να περιγραφούν ικανοποιητικά με την κλασσική μηχανική αλλά ούτε και με στατιστικά μέσα. Στη δεκαετία του '60, η επιστήμη των υπολογιστών και της πληροφορικής έπαιξε σημαντικό ρόλο στην διαχείριση και επεξεργασία των υπό εξέταση συστημάτων καθώς επίσης και στην θεωρητική μελέτη τους με προγραμματιστικά μέσα.

Το σημαντικότερο βέβαια είναι η αλλαγή του τρόπου σκέψης και η έκπληξη της επιστημονικής κοινότητας όταν αντιλήφθηκε ότι αυτή η θεωρία δεν έχει αμιγώς τα χαρακτηριστικά του ντετερμινιστικού τρόπου θεώρησης των πραγμάτων, αλλά εκ φύσεως εμπλέκει και συμπεριφορές στοχαστικότητας.

Δεν ήταν τυχαίο λοιπόν που πολλοί ερευνητές από διάφορους επιστημονικούς τομείς στράφηκαν προς την μελέτη μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων με την ελπίδα εύρεσης ανεκμετάλλευτης ως τότε κρυμμένης ντετερμινιστικής δομής. Το αντικείμενο αυτό απασχόλησε επίσης πολλούς οικονομολόγους και οικονομέτρους τους οποίους γοήτευσε η ιδέα πιθανής ύπαρξης ντετερμινιστικής δομής, καλυμμένη από στοχαστικότητα στα οικονομικά δεδομένα και χρονοσειρές. Ωστόσο, στις οικονομικές επιστήμες η νέα επιστήμη δεν γνώρισε παρόμοια άνθιση και εφαρμογή όπως σε άλλους τομείς και ολοένα παραγκωνίζεται.

Παρ' όλα αυτά, μία μεγάλη συνεισφορά της Θεωρίας του Χάους στις Οικονομικές επιστήμες και γενικότερα στην στατιστική αποτελεί ο στατιστικός έλεγχος των Brock, Dechert και Scheinkman (BDS test). Η αφορμή για την κατασκευή του ελέγχου αυτού ήταν η δημιουργία ενός ισχυρού εργαλείου για την ανίχνευση χαοτικών δομών σε χρονοσειρές και βασίστηκε κατά κύριο λόγο σε έννοιες που γεννήθηκαν και αναπτύχθηκαν μαζί με την Θεωρία του Χάους. Η εφαρμοσιμότητα του ελέγχου αυτού σε στοχαστικά συστήματα ήταν τυχαία και παρ' όλα αυτά αποτελεί πολύ ισχυρό μέσο για την μοντελοποίηση οικονομικών χρονοσειρών.

Συγκεκριμένα, η στατιστική BDS (1987) χρησιμοποιείται κυρίως για τον έλεγχο ύπαρξης εξάρτησης (όχι μόνο γραμμικής) στις τιμές μιας χρονοσειράς και είναι βασισμένη στην έννοια της χωρικής συσχέτισης των δεδομένων όπως αυτή υπολογίζεται μέσω του ολοκληρώματος συσχέτισης. Η τελευταία έννοια είναι

κληροδοτημένη από την μελέτη πάνω στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα και αποτελεί γενίκευση της γραμμικής αυτοσυσχέτισης (autocorrelation). Η μηδενική υπόθεση του ελέγχου BDS είναι ότι οι όροι της υπό έλεγχο χρονοσειράς είναι ανεξάρτητα και ταυτόνομα καταναμημένοι (IID) έναντι οποιαδήποτε άλλης εναλλακτικής. Ωστόσο, πολλοί συγγραφείς ως εναλλακτική υπόθεση αναφέρουν την ύπαρξη μη γραμμικής συσχέτισης χωρίς αυτό να αντιφάσκει με τον προηγούμενο ορισμό αφού η στατιστική αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί μετά από το γραμμικό φιλτράρισμα των αρχικών δεδομένων.

Η δομή της παρούσας εργασίας έχει ως εξής:

Αρχικά παρουσιάζεται συνοπτικά η φύση και οι προϋποθέσεις ύπαρξης χαοτικών συστημάτων καθώς και κάποια χαοτικά μοντέλα που είτε έχουν προταθεί για οικονομικές χρονοσειρές είτε προκύπτουν από τροποποιήσεις στις υποθέσεις ήδη υπάρχοντων μοντέλων. Κατόπιν γίνεται λεπτομερής περιγραφή του ελέγχου BDS και της κατασκευής του καθώς επίσης και των προϋποθέσεων που πρέπει να τηρούν οι χρονοσειρές προς εξέταση έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η ασυμπτωτική συμπεριφορά του ελέγχου αυτού.

Κύριο μέλημα της εργασίας αυτής είναι η έρευνα γύρω από τον τρόπο που λειτουργούν και προσαρμόζονται τα μοντέλα ετεροσκεδαστικότητας GARCH στις χρονοσειρές που παρουσιάζουν ετεροσκεδαστικότητα. Για πληρέστερη εικόνα παρατίθεται μία συνοπτική περιγραφή των μοντέλων αυτών καθώς και κάποιοι εναλλακτικοί τρόποι παραγωγής ετεροσκεδαστικών χρονοσειρών. Ο σκοπός είναι η διερεύνηση κατά πόσο τα GARCH μοντέλα έχουν την ιδιότητα να προσαρμόζονται στα δεδομένα με τέτοιο τρόπο ώστε τα κανονικοποιημένα κατάλοιπα (standardized residuals) να εμφανίζονται ως ανεξάρτητα και ταυτόνομα όπως απαιτείται από τις υποθέσεις των μοντέλων αυτών.

Γι' αυτό τον λόγο, αρχικά γίνεται έλεγχος της συμπεριφοράς του BDS test στις αρχικές χρονοσειρές όσο και στα εκτιμημένα κατάλοιπα GARCH μοντέλων. Το αποτέλεσμα είναι ότι εν γένει η στατιστική αυτή έχει ισχύ έναντι αυτού του είδους εξάρτησης στα αρχικά δεδομένα καθώς επίσης παρουσιάζεται ως oversized όταν εφαρμόζεται στα κανονικοποιημένα κατάλοιπα. Παρόμοιος έλεγχος γίνεται και σε άλλες χρονοσειρές που εμφανίζουν ετεροσκεδαστικότητα, εν συνεχεία εκτιμώνται με GARCH μοντέλα και γίνεται έλεγχος πάνω στα κανονικοποιημένα κατάλοιπα. Το BDS test δεν εμφανίζει ικανοποιητική ισχύ σε κάποιες από τις περιπτώσεις αυτές, επομένως δύο τινα μπορούν να συμβαίνουν:

α) είτε τα GARCH μοντέλα αποτελούν ικανοποιητική προσέγγιση των πραγματικών μοντέλων που επιλέχθηκαν για την παραγωγή των αρχικών χρονοσειρών

β) είτε τα GARCH μοντέλα έχουν την ιδιότητα να προσαρμόζονται στο δείγμα χωρίς ωστόσο να γίνεται φανερή η ακαταλληλότητά τους στον έλεγχο των καταλοίπων, δηλαδή εντός δείγματος να προσαρμόζονται ικανοποιητικά αλλά εκτός αυτού να έχουν φτωχή προβλεπτική ικανότητα.

Στην περίπτωση που ισχύει το τελευταίο, δημιουργούνται αυτομάτως αμφιβολίες ως προς την χρησιμότητα των GARCH μοντέλων και την προβλεπτική τους ικανότητα, αφού ακόμα και με ένα ισχυρό στατιστικό έλεγχο (όπως το BDS test) για το στάδιο του misspecification testing δεν μπορούμε να αποφανθούμε κατά πόσο είμαστε «κοντά» ή όχι στον πραγματικό τρόπο που παράγονται οι υπό εξέταση χρονοσειρές.

Για τον παραπάνω σκοπό, σχεδιάστηκαν Monte Carlo προσομοιώσεις για τον έλεγχο της προβλεπτικής ικανότητας των μοντέλων αυτών όταν ο πραγματικός τρόπος παραγωγής των χρονοσειρών είναι α) GARCH και β) κάποιος άλλος που παράγει ετεροσκεδαστικότητα ενώ ταυτόχρονα υπάρχει κάποιο GARCH μοντέλο που προσαρμόζεται «ικανοποιητικά».

Για τον έλεγχο της προβλεπτικής ικανότητας, σε καθεμία περίπτωση του είδους του DGP που χρησιμοποιείται (Data Generating Process), υπολογίζονται τα μέσα τετραγωνικά σφάλματα (Mean Square Errors) για τις προβλέψεις της διακύμανσης, πρώτον με βάση το εκτιμημένο GARCH μοντέλο ( $MSE^G$ ) και δεύτερον θεωρώντας την διακύμανση σταθερή (δηλαδή σαν να είχαμε αρχικά ένα ομοσκεδαστικό μοντέλο) ( $MSE^U$ ).

Το τετραγωνικό σφάλμα  $MSE^U$  χρησιμοποιείται ως σημείο αναφοράς για την εξαγωγή ενός μέτρου σύγκρισης μεταξύ της προβλεπτικής ικανότητας των GARCH μοντέλων για τους δύο τρόπους παραγωγής ετεροσκεδαστικότητας (GARCH και εναλλακτικού). Συγκεκριμένα, κατασκευάζεται το εξής μέτρο σύγκρισης :

$$\text{Mean}[\text{Ln}(\text{SE}^U / \text{SE}^G)]$$

για κάθε DGP του οποίου το πρόσημο υποδηλώνει ποιος από τους δύο τρόπους πρόβλεψης είναι καλύτερος δηλαδή ποιος δημιουργεί μικρότερο σφάλμα κατά την πρόβλεψη της διακύμανσης.

## **ΜΕΡΟΣ 1<sup>ο</sup>**

**Ανασκόπηση εφαρμογών της θεωρίας του Χάους  
στη  
Χρηματοοικονομική και Οικονομική Επιστήμη**

# Έχουν βρεθεί χρήσιμες εφαρμογές της θεωρίας του Χάους και των Δυναμικών συστημάτων στις Οικονομικές Επιστήμες και στην Χρηματοοικονομία ;

## 1) Τί ακριβώς είναι ένα Χαοτικό Μοντέλο ;

Καινούργιο πλαίσιο αντίληψης του κόσμου : Έως και την εποχή του Pierre – Simon Laplace επικρατούσε η «αφελής» αντίληψη ότι μια ολοκληρωμένη γνώση του κόσμου ήταν κατ' αρχήν δυνατή και ότι η εξέλιξή του ήταν προβλέψιμη, εφόσον η φύση φαινόταν να ακολουθεί πιστά ορισμένα πρότυπα τάξης. Η εντύπωση αυτή κατέρρευσε οριστικά όταν παρατηρήθηκε πως μη γραμμικά δυναμικά συστήματα όχι μόνο ήταν ικανά να δημιουργήσουν λύσεις με «ακανόνιστη» συμπεριφορά αλλά υπήρχαν ενδείξεις ότι αποτελούσαν καλύτερους περιγραφείς κάποιων φυσικών φαινομένων από τα αντίστοιχα στοχαστικά και παρόλο που χαρακτηρίζονταν από ντετερμινισμό, η αδυναμία πρόβλεψης μακρινών τιμών ήταν συνυφασμένη στην φύση τους. Αυτή η αναπάντεχη παρατήρηση αυτού του είδους πολυπλοκότητας (που ονομάστηκε Χάος) – τόσο σε μη γραμμικά συστήματα διαφορών όσο και σε μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις – άνοιξε έναν νέο δρόμο στην μοντελοποίηση κάποιων «περίεργων» συμπεριφορών που παρατηρούνται στην φύση. Ο πυρήνας της επαναστατικής ανακάλυψης του νέου τομέα των μαθηματικών έγκειται στο εξής : τάξη και χάος μετατρέπονται το ένα στο άλλο – η τάξη μπορεί να εκφυλιστεί σε χάος και αντίστροφα, από το χάος μπορεί να προκύψει τάξη. Έπεται ότι το χάος δεν είναι συνώνυμο της εντελώς τυχαίας συμπεριφοράς αλλά αντιθέτως ενσωματώνει κρυφές δομές τάξης, αν και εκ πρώτης όψης πλησιάζει περισσότερο μία στοχαστική συμπεριφορά.

Συνοπτικά, ένα χαοτικό μοντέλο είναι ένα μη γραμμικό ντετερμινιστικό μοντέλο και χαρακτηρίζεται από :

- α) « απλότητα », υπό την έννοια του μικρού – συνήθως – αριθμού εμπλεκόμενων παραμέτρων και του απλού, σχετικά, τύπου που παράγει τις τιμές των μεταβλητών (για εμάς χρονοσειρές) και
- β) ικανότητα παραγωγής αρκετά πολύπλοκης συμπεριφοράς των μεταβλητών (των χρονοσειρών) του συστήματος.

Για να είναι ένα χαοτικό σύστημα (ή γενικότερα ένα ντετερμινιστικό δυναμικό σύστημα) ακριβώς καθορισμένο πρέπει να γίνονται γνωστά τα εξής :

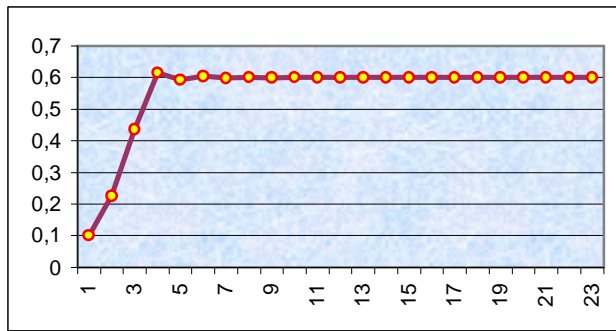
- (i) οι αρχικές συνθήκες (αρχικές τιμές)
- (ii) οι τιμές των εμπλεκόμενων παραμέτρων, και
- (iii) ο ακριβής τρόπος εξέλιξης στον χρόνο

Ένα κλασσικό παράδειγμα ενός τέτοιου συστήματος αποτελεί η λογιστική εξίσωση :

$$y_{t+1} = \lambda y_t(1-y_t), \quad y_0 \in [0, 1], \quad \lambda \in [0, 4]$$

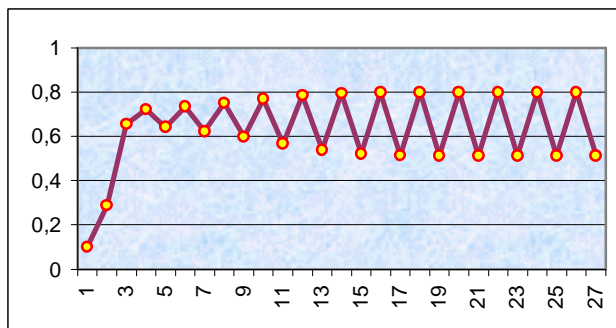
όπου, ξεκινώντας από μία αρχική τιμή  $y_0$  (seed), κατασκευάζουμε επαναληπτικά τους επόμενους όρους της ακολουθίας με την παραπάνω παραβολική σχέση. Για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ , παρατηρείται και διαφορετική συμπεριφορά της ακολουθίας  $y_t$ . Ενδεικτικά παρατίθενται πραγματοποιήσεις της ακολουθίας αυτής για τρεις τιμές της παραμέτρου ( $\lambda=2,5$ ,  $\lambda=3,2$  και  $\lambda=4$ ) ξεκινώντας από  $y_0=0,1$ :

$\lambda=2,5$



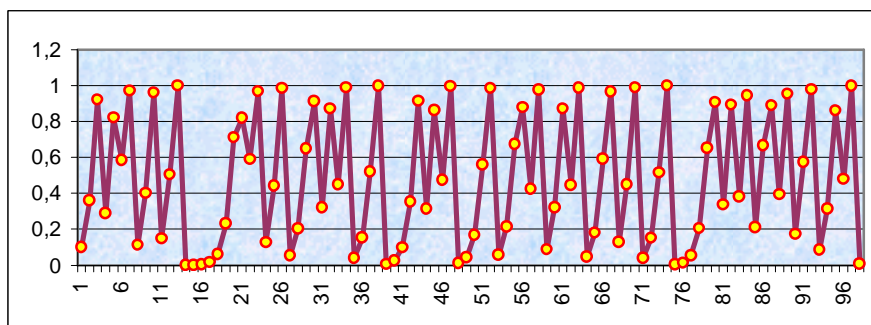
Η ακολουθία παρουσιάζει ομαλή ασυμπτωτική συμπεριφορά· για οποιαδήποτε αρχική τιμή της  $y_0$  στο  $(0, 1)$  η ακολουθία συγκλίνει στο  $(\lambda-1)/\lambda = 0,6$ .

$\lambda=3,2$



Για  $\lambda = 3,2$ , η ακολουθία παύει να είναι συγκλίνουσα υπό την κλασσική έννοια της σύγκλισης, ωστόσο ασυμπτωτικά «εγκλωβίζεται» σε δύο σημεία μεταξύ των οποίων και παλινδρομεί, δημιουργώντας κατ' αυτόν τον τρόπο έναν (σταθερό) κύκλο περιόδου 2 (για  $\lambda < 3,57$ ). Για τιμές της παραμέτρου  $\lambda > 3,57$ , η ακολουθία κατασταλάζει σε ένα (σταθερό) κύκλο σημείων περιόδου  $2^k$ , όπου το  $k$  εξαρτάται από το  $\lambda$ . Κατ' αυτόν τον τρόπο, δηλαδή, αυξάνοντας την τιμή του  $\lambda$  από  $3^+$  στο  $3,57^-$  παρατηρούμε ότι ο κύκλος που διαδέχεται έναν προηγούμενο, έχει διπλάσια περίοδο.

$\lambda=4$



Για  $\lambda=4$ , η τιμή αυτή ανήκει στην χαοτική παραμετρική περιοχή  $\subset [0, 4]$  και όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα, η ακολουθία χάνει την περιοδικότητά της, μπορώντας να πάρει σχεδόν όλες τις τιμές στο  $(0,1)$  με «ακαθόριστο» τρόπο (τόσο τα δύο σύνολα των αρχικών τιμών  $y_0$  για τα οποία η  $y_t$  συγκλίνει είτε στο 0 είτε στο  $3/4$  αντίστοιχα, όσο και για τα σύνολα που περιέχουν τα στοιχεία τα οποία ανήκουν σε κύκλους περιόδου 2, 3, 4,... αν και πυκνά στο  $[0,1]$ , η ένωσή τους είναι μηδενικού



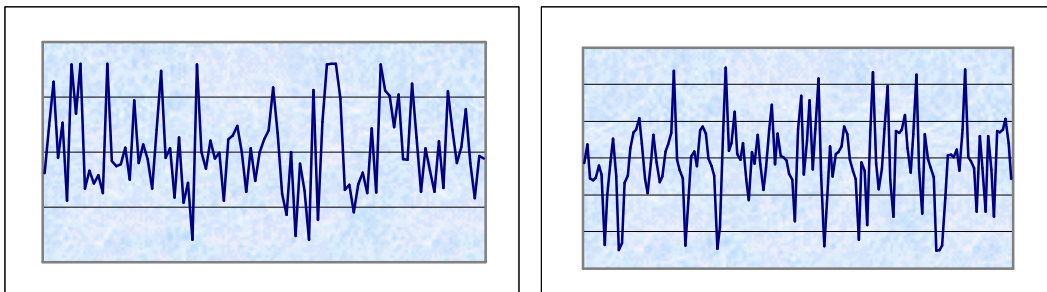
μέτρου Lebesgue). Έτσι, ενώ το μοντέλο αυτό είναι ντετερμινιστικό, εκ πρώτης όψεως το αποτέλεσμα φαίνεται σαν να προήλθε από ένα στοχαστικό μοντέλο.

Από το απλό αυτό παράδειγμα διαφαίνονται κάποια συμπεράσματα :

- Ένα μοντέλο δεν χρειάζεται να έχει ούτε πολλές παραμέτρους ούτε πολύπλοκο τύπο για να παρουσιάσει πολύπλοκη συμπεριφορά
- Η έννοια της σύγκλισης διευρύνεται· το όριο μιας ακολουθίας (ή γενικότερα μιας συνάρτησης) δεν είναι απαραίτητα ένα σημείο. Το ρόλο του ορίου μπορεί να παίξει ένα σύνολο  $A$  που είναι το μικρότερο δυνατό για το οποίο, αν κάποιος όρος της ακολουθίας βρίσκεται σ' αυτό, τότε και οι επόμενοι όροι θα βρίσκονται στο  $A$  (δηλαδή το  $A$  μπορούμε να το δούμε σαν μαύρη τρύπα). Υπεισέρχεται κατ' αυτόν τον τρόπο η έννοια του fractal που γενικεύει την Ευκλείδεια γεωμετρία, εισάγοντας μη ακέραιες διαστάσεις.

## 2) Γιατί ένα χαοτικό μοντέλο θα μπορούσε να ήταν χρήσιμο στα Οικονομικά και στην Χρηματοοικονομία ;

Η Θεωρία του Χάους, ως αυτόνομο πεδίο θεωρητικής έρευνας, έχει γνωρίσει ιδιαίτερη άνθηση τις τελευταίες δεκαετίες και πολλά μοντέλα βασισμένα σ' αυτήν έχουν εφαρμοστεί στις φυσικές επιστήμες (μηχανική ρευστών, κβαντομηχανική, μετεωρολογία, βιολογία, οικολογία κ.ά.) τότε με μεγάλη και τότε με μικρή επιτυχία. Πριν εξεταστεί κατά πόσο μπορεί η θεωρία του Χάους να εφαρμοστεί στις οικονομικές επιστήμες με επιτυχία, ας παρατηρήσουμε προσεκτικά τα παρακάτω διαγράμματα τα οποία απεικονίζουν μία χρονοσειρά ημερησίων αποδόσεων μιας μετοχής και μία χαοτική ακολουθία διάστασης 2 :



Και στα δύο διαγράμματα παρουσιάζεται μία «τυχαία» (erratic) χρονοσειρά. Από αυτό διαφαίνεται πως ένα χαοτικό μοντέλο είναι ένας περιγραφέας κάποιου είδους συμπεριφοράς που, αν και ντετερμινιστικό, «πλησιάζει» ποιοτικά περισσότερο ένα στοχαστικό. Αυτό γεννά κατ' ευθείαν την υποψία ότι μπορεί κάτω από την φαινομενική στοχαστικότητα να κρύβεται μία καλά καμουφλαρισμένη χαοτική δομή και επειδή οι οικονομικές χρονοσειρές παρουσιάζουν «τυχαία» συμπεριφορά και είναι δύσκολο να προβλεφθούν ικανοποιητικά, είναι φυσικό οι οικονομόμετρος να έχουν υπ' όψιν τους την θεωρία του Χάους ως εναλλακτική ή συμπληρωματική επιλογή.

Έπειτα, κάνοντας μία χονδρική ιστορική αναδρομή, παρατηρούμε ότι αρχικά τέτοιες συμπεριφορές αντιμετωπίστηκαν με την χρήση της θεωρίας Πιθανοτήτων, προσδίδοντας στοχαστική φύση, κατ' αυτόν τον τρόπο, στο παρατηρούμενο φαινόμενο.

Από την άλλη πλευρά, θεωρήθηκε ότι η αντιμετώπιση τέτοιων συμπεριφορών θα μπορούσε να περιγραφεί με χρήση πολύπλοκων ντετερμινιστικών μοντέλων (long – scale models) με μεγάλο αριθμό βαθμών ελευθερίας.

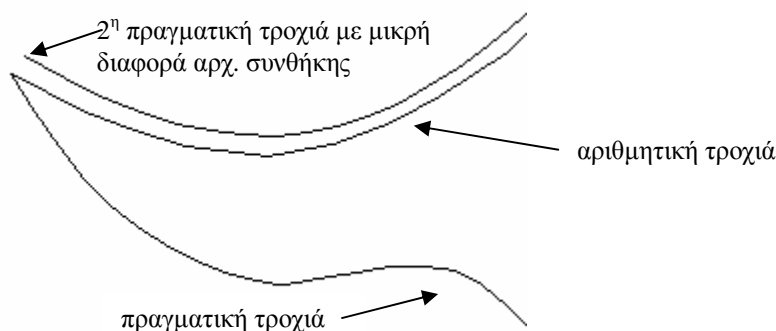
Τέλος, με την εισαγωγή του Χάους στο «οπλοστάσιο» των μοντελοποιών, γίνεται εφικτή η χρησιμοποίηση απλούστερων μοντέλων που, ωστόσο, μπορούν να περιγράψουν ακανόνιστες (erratic) συμπεριφορές, παρά την απλή τους δομή.

Επίσης, το γεγονός ότι υπάρχουν ντετερμινιστικά δυναμικά συστήματα μικρής «πολυπλοκότητας» (υπό την έννοια της διάστασης) ικανά να παράγουν «τυχαίους» αριθμούς, οι οποίοι ξεγελούν πολλά στατιστικά tests, δίνει έδαφος στην ελπίδα πως είναι πιθανή η εύρεση στατιστικών ελέγχων ικανών να εξιχνιάσουν καλά κρυμμένα patterns σε διάφορες χρονοσειρές (π.χ. συναλλάγματος, μακροοικονομικών μεταβλητών, χρηματιστηριακές αποδόσεις κ.ά.). Αν αυτό επιτευχθεί, θα βοηθούσε αρκετά στην πρόβλεψη, ειδικά βραχυχρόνια.

Συγκρίνοντας τα δύο βασικά είδη αντιμετώπισης των χρονοσειρών, στοχαστικότητα και χάος, έχουμε κατ' αρχάς ότι ένα χαοτικό μοντέλο δεν μπορεί να αποτελεί καλό περιγραφέα μακροπρόθεσμα και αυτό γιατί από την ίδια του την φύση (ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες και στις τιμές των παραμέτρων) ένα τέτοιο μοντέλο, ακόμη και αν είναι το πραγματικό που γεννά τις παρατηρήσεις μας, παρουσιάζει σχετικά γρήγορα μεγάλη απόκλιση όταν π.χ. μία εκτιμημένη παράμετρος διαφέρει έστω και ελάχιστο από την πραγματική τιμή. Επομένως, εύλογη είναι η υποψία ότι τα στοχαστικά μοντέλα είναι καλύτεροι περιγραφείς για σημεία ισορροπίας μακροχρόνια, ενώ τα ντετερμινιστικά είναι πιο ικανά στον καθορισμό μιας βραχυχρόνιας δομής μικρής διάστασης.

Όσον αφορά στα οικονομικά δεδομένα, τα οποία είναι διαθέσιμα προς επεξεργασία, επειδή είναι συνήθως μικρού σχετικά μεγέθους, αυτό καθιστά πιο δύσκολη την διερεύνηση ντετερμινιστικής δομής, ειδικά όταν αυτή είναι μεγάλης διάστασης ή είναι καλά «καμουφλαρισμένη» (Ο Ruelle (1990) υποστηρίζει ότι η ανίχνευση χάους σε ένα δείγμα μεγέθους  $N$  είναι δυνατή όταν η διάστασή του είναι αρκετά μικρότερη του  $2\log_{10}N$ ). Αντίθετα, σε άλλους επιστημονικούς τομείς αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα όταν ο αριθμός των πειραμάτων που διεξάγονται ελέγχεται από τον ίδιο τον παρατηρητή.

Όταν ένα μοντέλο επιδεικνύει χαοτική συμπεριφορά (σε κάποιο υποσύνολο του παραμετρικού χώρου) η μεταφορά και επεξεργασία σε υπολογιστικά μέσα, μετατρέπει αυτόματα το αρχικό μοντέλο σε ένα καινούριο, λόγω στρογγυλοποιήσεων. Σε συνδυασμό με την ευαισθησία των μοντέλων αυτών στις αρχικές τιμές έπεται ότι η εκτίμηση των παραμέτρων γίνεται ακόμα πιο δύσκολη. Ωστόσο, η ποιοτική συμπεριφορά δεν εξανεμίζεται, διότι η (αριθμητική) χρονοσειρά βρίσκεται κοντά (σκιάζει) μία πραγματική χρονοσειρά η οποία όμως έχει μικρή διαφορά στην αρχική τιμή της (Anosov, 1967, Bowen, 1970, Hammel, Yorke and Grebogi, 1987).



Τέλος, ένα ακόμα μειονέκτημα των χαοτικών μοντέλων είναι ο περιορισμός στην ευελιξία ως προς την γενίκευσή τους. Μελετώντας, παραδείγματος χάριν ένα μονοπαραμετρικό και μονοδιάστατο μοντέλο, μετά την γενίκευσή του (εισάγοντας δηλαδή και άλλη μεταβλητή που αλληλεπιδρά με την προηγούμενη καθώς επίσης και κάποια άλλη παράμετρο), για τον αποκλεισμό των λύσεων που εκρήγνυνται καταλήγουμε σε έναν αρκετά «στενό» διπαραμετρικό χώρο.

Σκιαγραφώντας τα δύο βασικά ρεύματα στις οικονομικές επιστήμες, παρατηρείται ότι στα μεν νέο – κλασσικά οικονομικά, όπου γίνεται η υπόθεση της ασυμπτωτικής σταθερότητας της μακροοικονομίας όσο δεν υπάρχουν εξωγενείς διαταραχές, δεν έχει θέση η θεωρία του χάους (όπου εδώ ο όρος «σταθερότητα» χρησιμοποιείται με την κλασσική της έννοια). Και αυτό, γιατί αν γινόταν ρητή υπόθεση ύπαρξης χάους σε μακροοικονομικούς παράγοντες, θα καταλύονταν αυτόματα η υπόθεση της ασυμπτωτικής ισορροπίας. Από την άλλη πλευρά, η νέο – Κεϊνσιανή θεώρηση προϋποθέτει πως τα οικονομικά συστήματα είναι από την φύση τους ασταθή. Ωστόσο, δεν διασαφηνίζεται κατά πόσο αυτή η αστάθεια προκύπτει από την παρουσία χάους ή από την επίδραση τυχαίων διαταραχών. Όπως έδειξαν οι Day και Shafer (1992), υπό την παρουσία μη γραμμικότητας, ένα απλό Κεϊνσιανό μοντέλο θα μπορούσε κάλλιστα να παρουσιάσει χαοτική συμπεριφορά. Επομένως, η χρησιμότητα μη γραμμικών μοντέλων έγκειται και στη δυνατότητά τους να έχουν διαφορετικά ποιοτικά χαρακτηριστικά αναλόγως τις τιμές των παραμέτρων (π.χ. ασυμπτωτική σύγκλιση ή περιοδικούς κύκλους, ακόμα και χάος), καλύπτοντας ταυτόχρονα και τα δύο προαναφερθέντα ρεύματα.

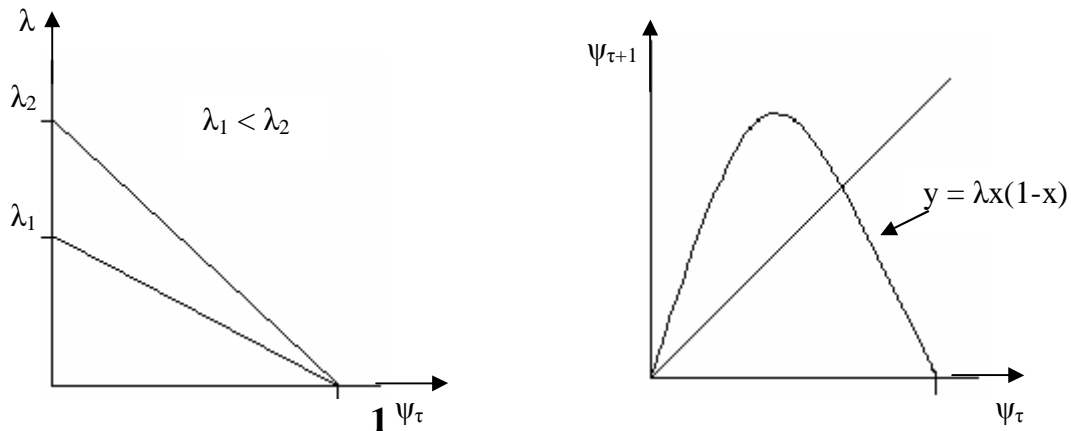
Από τα παραπάνω έπεται ότι τα χαοτικά μοντέλα θα ήταν χρήσιμα στις οικονομικές επιστήμες μόνο υπό το δεύτερο πλαίσιο θεώρησης των πραγμάτων. Επίσης, πρέπει να διαλευκανθεί ότι ακόμη και με την υπόθεση ντετερμινιστικής δομής, η έννοια της ασυμπτωτικής ισορροπίας δεν διαγράφεται, αλλά διευρύνεται : το σύστημα θα μπορούσε να κατασταλάξει σε ένα σύνολο τιμών, εξακολουθώντας ωστόσο να παρουσιάζει ακανόνιστη συμπεριφορά.

### **3) Πώς θα μπορούσε να προκύψει ένα χαοτικό μοντέλο(στην Οικονομία) ;**

Πριν δείξουμε κάποιους τρόπους για να φτάσουμε σε χαοτική συμπεριφορά, ξεκινώντας από ένα παραμετρικό οικονομικό μοντέλο, προτιμότερο θα ήταν να εξετάζαμε ένα απλό μονοπαραμετρικό μοντέλο δανεισμένο από την οικολογία. Έστω ένας πληθυσμός χορτοφάγων ζώων ο οποίος ζει απομονωμένος σε μία περιοχή στην οποία θεωρείται αδύνατη τόσο η μετανάστευση μελών του σε άλλες περιοχές όσο και η άφιξη άλλων ζώων. Με άλλα λόγια, το πλήθος του εξαρτάται αποκλειστικά από τις γεννήσεις και τους θανάτους. Τα δύο αυτά ποσοστά  $\gamma$  και  $\theta$  (γεννήσεων και θανάτου αντίστοιχα) είναι εν γένει συναρτήσεις του πληθυσμού κάθε περιόδου  $t$ . Επομένως, αν με  $\Psi_t$  συμβολίζεται ο αριθμός των ατόμων την χρονική στιγμή  $t$ , έπεται η αναγωγική σχέση :  $\Psi_{t+1} = \Psi_t(1 + \gamma(\Psi_t) - \theta(\Psi_t))$ . Θέτοντας ως  $\lambda(\Psi_t)$  την ποσότητα στην παρένθεση και υποθέτοντας ότι υπάρχει ένα άνω φράγμα  $\Phi$  στον πληθυσμό λόγω περιορισμένων αποθεμάτων τροφής ή και χώρου, έπεται :

$\psi_{t+1} = \lambda(\psi_t)\psi_t$  όπου  $\psi_t = \Psi_t / \Phi$  το ποσοστό του πληθυσμού ως προς το μέγιστο επιτρεπτό όριο. Λόγω του φράγματος αυτού, εύλογη είναι η υπόθεση ότι η  $\lambda(\cdot)$  είναι φθίνουσα, δηλαδή, όσο μεγαλύτερος είναι ο πληθυσμός, τόσο μικρότερη η δυνατότητα αύξησής του. Την πιο απλή μορφή για την  $\lambda(\cdot)$ , σ' αυτή την περίπτωση, αποτελεί η γραμμική :  $\lambda(\psi_t) = \lambda(1 - \psi_t)$  όπου το  $\lambda$  συμβολίζει την μέγιστη δυνατή

ικανότητα αύξησης του πληθυσμού ( $\lambda \in [0, 4]$ ). Το τελευταίο απλό μονοπαραμετρικό μοντέλο είναι η λογιστική εξίσωση που παρουσιάστηκε αρχικά.



### Larrain's K-Z interest rate model

Ο Larrain (1986, 1988, 1991) πρότεινε ένα μοντέλο για τα επιτόκια το οποίο συνδυάζει ένα μη γραμμικό μοντέλο βασισμένο στις προηγούμενες τιμές των επιτοκίων και ένα behavioral map βασισμένο στη Κεϊνσιανή Οικονομία. Το πρώτο κομμάτι ονομάζεται K - map και το δεύτερο Z - map.

$$r_{t+1} = \underbrace{f(r_t)}_{\text{K - map}} + \underbrace{g(Z_t)}_{\text{Z - map}} \quad \text{όπου :}$$

$r_t$  : η τιμή του επιτοκίου κατά την χρονική περίοδο  $t$

$Z = (y, M, P, Y, c)$

$y$  : the real GNP

$M$  : the nominal M2 measure of money supply

$P$  : the Consumption Price Index

$Y$  : the real personal income

$c$  : the real personal consumption

Η συνάρτηση  $g(\cdot)$  είναι γραμμική ως προς την  $Z$  (με τέσσερις παραμέτρους) ενώ η  $f(\cdot)$  είναι γενικά ένα πολυώνυμο του  $r$ . Αν το  $f(\cdot)$  είναι της μορφής :  $f(r_t) = a - br_t + cr_t^2$  και  $b=c$ , τότε  $r_{t+1} = a - cr_t(1-r_t)$  που δεν είναι τίποτα άλλο από μία παραλλαγή της λογιστικής εξίσωσης που παρουσιάστηκε παραπάνω.

### The Cobweb model : it's instability and the onset of chaos (Chiarella)

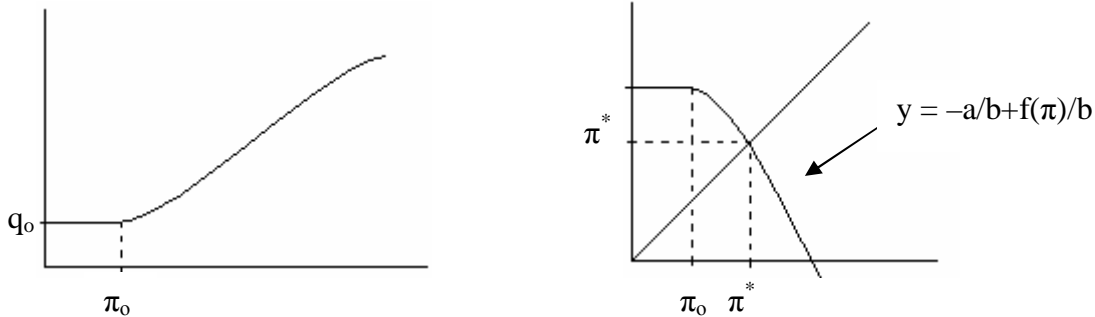
Εδώ, το κλασικό μοντέλο με γραμμικές καμπύλες ζήτησης και προσφοράς παραλλάσσεται με την εισαγωγή μιας γενικής, μη γραμμικής συνάρτησης προσφοράς :

$$q_t^d = a + bp_t \quad (a > 0, b < 0)$$

$$q_t^s = f(\pi_t)$$

όπου  $p_t$  και  $\pi_t$  είναι η τιμή του αγαθού και η αναμενόμενη τιμή του αντίστοιχα. και η συνάρτηση  $f$  έχει κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά :

- i) για αναμενόμενη τιμή μικρότερη του  $\pi_0$  θα προσφερθεί η μικρότερη δυνατή ποσότητα  $q_0$
- ii) είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη για τιμές  $\pi > \pi_0$  και επιπλέον η κλίση της μηδενίζεται στο  $K$ .



Θέτοντας ως  $h$  το χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών καταστάσεων (time step) και ως  $\theta$  μια σταθερά (που περιγράφει το expectation lag και έχει φυσική ερμηνεία όταν  $\theta/h \geq 1$ ) θεωρούμε την εξής σχέση :

$(\pi_{t+h} - \pi_t)/h = (r_t - \pi_t)/\theta$  έχουμε σε συνδυασμό με την εξίσωση ισορροπίας :

$$\pi_{t+h} = -(ah/b\theta) + (1 - h/\theta)\pi_t + h/(\theta b)f(\pi_t) \downarrow g(\pi_{t+h})$$

Παίρνοντας ως  $G(\cdot)$  την τετραγωνική προσέγγιση της  $g$  η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο  $(\pi^*, g(\pi^*))$  και ικανοποιεί την  $G'(\pi^*) = g'(\pi^*)$ , έχουμε ότι

$$G(\pi_{t+h}) = \pi_t(\alpha - \beta\pi_t) \quad (\#)$$

και ότι έχει την ίδια ποιοτική συμπεριφορά με την αρχική  $g(\cdot)$ . Όμως η (#) δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια παραλλαγή της λογιστικής εξίσωσης.

### Chaotic implications of the natural rate of unemployment (Bhaduri)

Έστω ότι η καμπύλη Phillips δίνεται από την σχέση

$$\Delta w_t/w_t = a(L_t/N) - b, \quad a, b > 0 \quad (1)$$

όπου  $L$  the level of employment και  $N$  the level of full employment.

Η ακριβής πρόβλεψη του πληθωρισμού από τους εργάτες βραχυχρονίως υποδηλώνει ότι ζητούν τον πραγματικό μισθό. Αυτή η υπόθεση μετατρέπει την (1) σε μία καμπύλη Phillips πραγματικών μισθών. Το ποσοστό ανεργίας  $u^*$  για το οποίο ο πραγματικός μισθός διατηρείται σε στάσιμο επίπεδο είναι μοναδικό και δίνεται απ'ο την σχέση :

$$L^*/N = (1 - u^*) = b/a, \quad a > b > 0 \quad (2)$$

Η ακριβής πρόβλεψη από την πλευρά των επιχειρήσεων, βεβαιώνει ότι υπολογίζουν και αυτές σωστά τους πραγματικούς μισθούς και κατ' αυτόν τον τρόπο μεγιστοποιούν τα κέρδη τους, ισοσκελίζοντας τον μισθό με την οριακή χρησιμότητα η οποία υποτίθεται ότι φθίνει γραμμικά. Αυτό συνεπάγεται ότι :

$$w_t = \alpha - \beta L_t, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (3)$$

Από την (3) έπεται :

$$L_t = (\alpha - w_t) / \beta \quad (4) \quad N = (\alpha - w_f) / \beta \quad (5)$$

$$L_t / N = (\alpha - w_t) / (\alpha - w_f) \quad (6)$$

όπου  $w_f$  είναι ο πραγματικός μισθός που αντιστοιχεί σε πλήρη απασχόληση του εργατικού δυναμικού και είναι θετικό αν  $\alpha/\beta > N$ . Από την (1) και (6) έχουμε :

$$w_{t+1} = (1 + k\alpha - \beta)w_t - kw_t^2$$

$$k = \alpha/(\alpha - w_f) = \alpha/(\beta N) > 0 \quad (7)$$

Εκτός από το εκφυλισμένο μηδενικό σημείο ισορροπίας  $w = 0$ , έχουμε από την (7) :

$$w^* = \alpha - (\beta / k) = \alpha u^* + (1 - u^*)w_f > 0 \quad (8)$$

και από την (3) παίρνουμε την τιμή ισορροπίας  $L^*$  :  $w^* = \alpha - \beta L^*$   
(9)

Κάνοντας τον εξής μετασχηματισμό :  $x_t = kw_t / A$  ,  $A = (1 + k\alpha - \beta)$   
καταλήγουμε στην λογιστική εξίσωση :  $x_t = Ax_t(1 - x_t)$ .

## A Kaldor business – cycle model

Ως παράδειγμα πολυμεταβλητού διακριτού μη γραμμικού μοντέλου στα οικονομικά, παρατίθεται η παρακάτω παραλλαγή του μοντέλου για επιχειρησιακούς κύκλους του Kaldor :

$$Y_{t+1} - Y_t = \alpha [I_t(Y_t, K_t) - S_t(Y_t)]$$

$$K_{t+1} - K_t = I_t(Y_t, K_t) - \delta K_t$$

$$I_t(Y_t, K_t) = c2^{-1/[dY_t + \varepsilon]^{2}} + eY_t + a(f/K_t)^g$$

$$S_t = sY_t$$

$Y_t$  : output,  $K_t$  : the stock of capital,  $I_t$  : gross investment,  $S_t$  : savings,  $\alpha = 20$ ,  $\delta = 0,05$   
:the depreciation rate on capital,  $c = 20$ ,  $d = 0,01$ ,  $\varepsilon = 0,00001$ ,  $e = 0,05$ ,  $a = 5$ ,  $f = 280$ ,  
 $g = 4,5$  ,  $s=0,21$  : parameters.

Η πρώτη εξίσωση δηλώνει ότι υπάρχει αλλαγή στο εισόδημα όταν υπάρχει διαφορά μεταξύ επένδυσης και αποταμίευσης, ενώ η δεύτερη ότι οι καθαρές προσθήκες στο κεφάλαιο ισοδυναμούν με το πλεόνασμα των επενδύσεων όταν αφαιρεθούν από αυτές οι επενδύσεις αντικατάστασης. Η τέταρτη εξίσωση απλά παραθέτει μια γραμμική σχέση μεταξύ εισοδήματος και αποταμίευσης. Μόνο στην τρίτη εξίσωση υπεισέρχεται η μη γραμμική δομή του μοντέλου αυτού, η οποία και του προσδίδει χαοτική συμπεριφορά.

#### 4) Πώς μπορούμε να ανιχνεύσουμε δομές χάους σε οικονομικές / χρηματοοικονομικές χρονοσειρές ;

Το προαναφερόμενο ερώτημα είναι μεγάλης σημασίας, διότι για την διαπίστωση τέτοιων δομών σε χρονοσειρές απαιτείται η ύπαρξη κάποιων ισχυρών στατιστικών ελέγχων, ικανών να διαχωρίζουν την ύπαρξη χάους από μορφές στοχαστικότητας. Χωρίς την ύπαρξη test με ισχύ εναντίον εναλλακτικών υποθέσεων, ειδικά για δείγματα μικρού σχετικά μεγέθους, δεν θα ήταν δυνατή η εξακρίβωση της ορθότητας των χασοτικών μοντέλων και θα παρέμεναν στα πλαίσια του αυτόνομου θεωρητικού τομέα (τουλάχιστον για τις οικονομικές επιστήμες). Έως τώρα έχουν προταθεί κάποιοι τρόποι ανίχνευσης τόσο χασοτικών συμπεριφορών όσο και μη γραμμικών σχέσεων γενικότερα.

Ενδεικτικά σκιαγραφήσουμε μερικά από τα βασικότερα :

**BDS test** (Brock, Dechert, Scheinkman (1996)) : είναι ένας μη παραμετρικός έλεγχος με μηδενική υπόθεση την ανεξαρτησία και ταυτονομία των παρατηρήσεων. Βασίζεται πάνω στο correlation dimension, μία έννοια γεννημένη από την έρευνα πάνω στους παράξενους ελκυστές, και εν συνεχεία ορίζεται η ελεγχοσυνάρτηση (βασισμένη στο correlation integral των Grassberger και Procaccia (1983)). Η ελεγχοσυνάρτηση αυτή ακολουθεί ασυμπτωτικά την κανονική τυποποιημένη κατανομή.

Ενδιαφέρον έχει να τονιστεί ότι ενώ αρχικά αυτό το test κατασκευάστηκε με σκοπό τον έλεγχο για χασοτική δομή (μικρής σχετικά διάστασης) διαπιστώθηκε η μεγάλη του ισχύς και σε στοχαστικά μοντέλα. Κατ' αυτόν τον τρόπο, αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο των οικονομετρών για την διαπίστωση π.χ. αν όντως τα κατάλοιπα μιας παλινδρόμησης είναι white noise. Παρατίθεται πιο αναλυτικά αμέσως μετά.

**NEGM test** (Nychka, Ellner, Gallant and McCaffrey (1992)) : βασίζεται πάνω στην ιδέα των εκθετών Liapunov οι οποίοι υποδηλώνουν την φύση των παρατηρήσεων (χασοτική ή όχι). Συγκεκριμένα, ένα θετικός εκθέτης Liapunov, δηλώνει ότι υπάρχει ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες (εκθετική απόκλιση από την πραγματική τροχιά για έστω και μικρή διαφορά στις αρχικές συνθήκες) που είναι ένα χαρακτηριστικό χασοτικών συστημάτων. Επομένως αρκεί η εκτίμηση του μεγαλύτερου εκθέτη ο οποίος και θα καθορίσει την δυναμική του υπό εξέταση συστήματος. Η μηδενική υπόθεση είναι η ύπαρξη χάους. Μία πολύ θετική ιδιότητα αυτού του ελέγχου είναι ότι μένει ανεπηρέαστος από τον πιθανό θόρυβο (πειραματικό ή του συστήματος).

**White test**(1989): Ως μηδενική του υπόθεση έχει την γραμμικότητα του δεσμευμένου μέσου ως προς το παρελθόν. Ο έλεγχος αυτός μπορεί να χωριστεί σε δύο βήματα : (α) Χρήση νευρωνικού δικτύου για την παραγωγή μιας μετρήσιμης συνάρτησης της ιστορίας της υπό μελέτη ανέλιξης και ενός Auto – Regressive γραμμικού φίλτρου (β) Έλεγχος αν κάτω από την μηδενική υπόθεση η ενσωματωμένη συνάρτηση δεν συσχετίζεται με τα κατάλοιπα του Auto – Regressive μοντέλου.

**Kaplan test** (1994): έχει ως μηδενική του υπόθεση την γραμμικότητα που ελέγχεται με την σύγκριση ενός test απ' ευθείας από τις παρατηρήσεις και ενός άλλου από τεχνικώς παραγόμενα δεδομένα τα οποία όμως έχουν το ίδιο ιστόγραμμα σχεδόν όμοια συνάρτηση αυτοσυσχέτισης με τα πραγματικά δεδομένα. Και αυτός ο στατιστικός έλεγχος βασίζεται στην βιβλιογραφία της θεωρίας του χάους, κάνοντας χρήση της ιδέας των χώρων φάσεων.

## 5) The Brock, Dechert, Scheinkman (BDS) test

Η ελεγχοσυνάρτηση των Brock, Dechert, Scheinkman και LeBaron (1996, έκτοτε γνωστή ως BDS λόγω του αρχικού άρθρου των τριών πρώτων συγγραφέων) είναι μη παραμετρική και κάνει χρήση του correlation integral μετασχηματίζοντάς το σε μία στατιστική που ασυμπτωτικά κατανέμεται ως τυποποιημένη κανονική κατανομή, κάτω από την μηδενική υπόθεση της ανεξαρτησίας και ταυτονομίας. Η εναλλακτική υπόθεση παραμένει γενική καλύπτοντας κατ' αυτόν τον τρόπο ευρύ φάσμα εναλλακτικών περιπτώσεων στις οποίες είτε δεν υπάρχει ανεξαρτησία, είτε ταυτονομία είτε και τα δύο αυτά χαρακτηριστικά συγχρόνως. Ωστόσο, πρέπει να πληρούνται κάποιες υποθέσεις από τις υπό μελέτη χρονοσειρές έτσι ώστε η ελεγχοσυνάρτηση αυτή να έχει την θεωρητική ασυμπτωτική συμπεριφορά.

Παρακάτω γίνεται περιγραφή της κατασκευής του ελέγχου BDS και των προαναφερθέντων υποθέσεων.

### Ορισμός της στατιστικής BDS

Έστω  $\{u_t\}$  μία μονοδιάστατη χρονοσειρά πραγματικών τυχαίων μεταβλητών (βαθμωτή στοχαστική ανέλιξη). Η  $m$  – ιστορία της  $\{u_t\}$  ορίζεται ως εξής:

$$u_t^m \stackrel{\text{def}}{=} (u_t, u_{t+1}, \dots, u_{t+m-1})$$

δηλαδή είναι το  $m$  – διάστατο διάνυσμα που αποτελείται από τις  $m$  πιο «πρόσφατες» τιμές.

Το correlation integral με διάσταση εμβύθισης  $m$  και για  $\varepsilon > 0$ , δίνεται ως εξής:

$$C_{m,\varepsilon} = \iint \chi_\varepsilon(x^m, y^m) dF(x^m) dF(y^m)$$

όπου η  $\chi_\varepsilon(\dots)$  είναι μία συμμετρική δείκτρια συνάρτηση με  $\chi_\varepsilon(x, y) = 1$  αν  $\|x - y\| < \varepsilon$  και 0 διαφορετικά,  $\|\cdot\|$  είναι η νόρμα – άπειρο (που επιστρέφει την μέγιστη κατ' απόλυτη τιμή συντεταγμένη του διανύσματος) και  $F(\cdot)$  η συνάρτηση κατανομής της  $u_t^m$ . Για διακριτά δείγματα μεγέθους  $T$  της ανέλιξης  $\{u_t\}$  χρησιμοποιείται η παρακάτω εκτίμηση του ολοκληρώματος αυτού (U-statistic) :

$$C_{m,\varepsilon} = \frac{1}{\binom{\bar{T}}{2}} \sum_{1 \leq s \leq t \leq \bar{T}} \chi_\varepsilon(u_t^m, u_s^m)$$

όπου  $\bar{T} = T - (m - 1)$  και η τιμή που επιστρέφει δηλώνει το κλάσμα των  $m$  – ιστοριών που βρίσκονται μεταξύ τους σε απόσταση το πολύ  $\varepsilon$  (βάσει της προαναφερθείσας νόρμας) προς το συνολικό αριθμό των ζευγών  $(0,5 * (T - m + 1) * (T - m))$  που σχηματίζονται.

Στην περίπτωση που η  $\{u_t\}$  είναι μία ανεξάρτητη και ταυτόνομη ανέλιξη (iid process), τότε αποδεικνύεται ότι ισχύει  $C_{m,\varepsilon} = C_{1,\varepsilon}^m$ , a.s. για κάθε  $\varepsilon > 0$  και  $m = 1, 2, \dots$ . Βασισμένοι σ' αυτό το συμπέρασμα, οι Brock et al (1987) παρουσίασαν το εξής συμπέρασμα :



### Θεώρημα (Brock, Dechert, Scheinkman, 1987)

Αν η ανέλιξη  $u_t$  είναι iid τότε

$$V_{m,\varepsilon} = \sqrt{T} \cdot \frac{C_{m,\varepsilon} - (C_{1,\varepsilon})^m}{s_{m,\varepsilon}} \xrightarrow{d} N(0,1), \quad \varepsilon > 0, m=2, 3, \dots$$

όπου  $s_{m,\varepsilon}$  είναι ένας εκτιμητής της ασυμπτωτικής διακύμανσης  $\sigma_{m,\varepsilon}$  της ποσότητας  $\sqrt{T} \cdot (C_{m,\varepsilon} - (C_{1,\varepsilon})^m)$  κάτω από την μηδενική υπόθεση. Η ασυμπτωτική διακύμανση  $\sigma_{m,\varepsilon}^2$  είναι συνάρτηση των δύο σταθερών  $C$  και  $K$  (για συγκεκριμένο  $\varepsilon$ ).

$$s_m^2 = 4 \cdot \left[ K^m + 2 \cdot \sum_{j=1}^{m-1} K^{m-j} C^{2j} + (m-1)^2 C^{2m} - m^2 \cdot K \cdot C^{2m-2} \right]$$

$$C=C(\varepsilon)= \int [F(z+\varepsilon) - F(z-\varepsilon)] dF(z), \quad K=K(\varepsilon)= \int [F(z+\varepsilon) - F(z-\varepsilon)]^2 dF(z)$$

Οι δύο σταθερές αυτές μπορούν να εκτιμηθούν από τις παρακάτω  $V$  - στατιστικές:

$$C = \frac{1}{T^2} \sum_{s=1}^T \sum_{t=1}^T \chi_\varepsilon(u_s, u_t), \quad K = \frac{1}{T^3} \sum_{r=1}^T \sum_{s=1}^T \sum_{t=1}^T \chi_\varepsilon(u_r, u_s) \chi_\varepsilon(u_s, u_t)$$

Μέχρι στιγμής δεν αναφέρθηκε καμία υπόθεση πάνω στην ύπαρξη ή μη των ροπών της αρχικής ανέλιξης  $u_t$ . Σύμφωνα με τους Brock et al (1991) και De Lima (1997) δεν επιβάλλεται κανένας περιορισμός στην ύπαρξη ροπών για την καλή συμπεριφορά του BDS test εκτός από την περίπτωση που η  $\{u_t\}$  είναι iid: η συνάρτηση κατανομής  $F$  της ανέλιξης πρέπει να υπάρχει, να μην είναι εκφυλισμένη και να είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη.

### **Υποθέσεις που καθιστούν το BDS test nuisance parameter free**

Είναι πολύ σημαντικό, στην εφαρμογή στατιστικών μεθόδων στις διάφορες χρονοσειρές, η στατιστική επεξεργασία να αφήσει ανεπηρέαστα τα κατάλοιπα (ή τουλάχιστον κάποια βασικά τους χαρακτηριστικά) υπό την έννοια της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς τους. Ωστόσο, ακόμα κι αν οι πραγματικές innoations είναι iid, η στατιστική επεξεργασία των δεδομένων μπορούν να παράξουν εκτιμημένα κατάλοιπα τα οποία παρουσιάζουν κάποιου είδους εξάρτησης.

Επειδή το BDS test χρησιμοποιείται επίσης και για τον σκοπό της επαλήθευσης εκτιμημένων στατιστικών μοντέλων, πρέπει να εξασφαλιστεί τουλάχιστον ότι η ασυμπτωτική συμπεριφορά και κατανομή των καταλοίπων δεν επηρεάζονται. Οι ελεγχουσυναρτήσεις με αυτή την ιδιότητα ονομάζονται nuisance-parameter free tests. Πιο αυστηρά :

Μια στατιστική καλείται nuisance-parameter free όταν το ενδιάμεσο στάδιο της εκτίμησης των παραμέτρων δεν επηρεάζει την ασυμπτωτική συμπεριφορά του ελέγχου αυτού.

Έχοντας κατά νου τα ανωτέρω, θεωρείται απαραίτητη η παρουσίαση κάποιων υποθέσεων που εξασφαλίζουν αυτήν την ιδιότητα για το BDS test. Κατά τους Brock

et al (1991) και De Lima (1996) μπορούμε να συνοψίσουμε τις βασικές υποθέσεις που πρέπει να τηρούνται έτσι ώστε το BDS test να έχει την ιδιότητα nuisance-parameter free και η ασυμπτωτική του κατανομή να υπάρχει και να ισούται με την θεωρητική ( $N(0,1)$ ).

Έστω η ανέλιξη  $\{y_t\}_t$  με:  $y_t = G(Y_{t-1}, \theta) + u_t$

Πρέπει να έχουμε τα εξής:

1.  $\{u_t\}$  είναι IID με μη τετριμμένη κατανομή  $F$
2. Υπάρχει η αδέσμευτη κατανομή των  $m$  – ιστοριών  $\{u_t^m\}$
3.  $\{y_t\}$  είναι στάσιμη και εργοδική
4. Οι παράμετροι μπορούν να εκτιμηθούν από συνεπείς εκτιμητές
5. Η ανέλιξη  $\{u_t\}$  πρέπει να ικανοποιεί τις υποθέσεις (a)-(c) στο θεώρημα 1 (Denker & Keller (1983)).
6. Η  $G$  είναι μία μετρήσιμη συνάρτηση
7. Ο πυρήνας (συνάρτηση μετασχηματισμού) πρέπει να μην είναι τετριμμένος (να έχει θετική διακύμανση)
8. Η επιλογή των  $m$ ,  $\varepsilon$  είναι αρκετά σημαντική. Μεγάλες τιμές για την διάσταση εμπύθισης  $m$  απαιτούν και μεγάλο δείγμα, καθώς επίσης μεγάλες τιμές του  $\varepsilon$  είναι πιθανό να εμφανίζουν τους όρους πιο κοντά τον έναν στον άλλον απ' ότι στην πραγματικότητα. Προσομοιώσεις με Monte Carlo δείχνουν ότι για  $\varepsilon = 0.5, 1, 1.5$  φορές της τυπικής απόκλισης και για  $m$  τέτοιο ώστε  $T/m > 200$  είναι αρκετό.

## **ΜΕΡΟΣ 2<sup>ο</sup>**

**Μοντέλα ετεροσκεδαστικότητας  
και  
ικανότητα πρόβλεψης**

## 1) Μοντέλα ετεροσκεδαστικότητας GARCH

Από τα πλέον γνωστά μη γραμμικά μοντέλα είναι τα GARCH (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity models) τα οποία προτάθηκαν από τον Bollerslev (1986) με σκοπό την μοντελοποίηση της ετεροσκεδαστικότητας που παρατηρείται σε πολλές χρηματοοικονομικές χρονοσειρές. Η μοντελοποίηση της (δεσμευμένης) διακύμανσης κρίνεται επιτακτική αφού στα οικονομικά δεδομένα κρύβεται επιπλέον πληροφορία σε όρους δεύτερης ροπής και φυσικά η παράμετρος της διακύμανσης (εφ' όσον αυτή υπάρχει) υπεισέρχεται σε μία πληθώρα οικονομικών μοντέλων. Επομένως, τόσο σε πρακτικό όσο και σε θεωρητικό επίπεδο έχει γίνει και συνεχίζεται να γίνεται έρευνα με απώτερο σκοπό την εξαγωγή συμπερασμάτων πάνω στην εφαρμοσιμότητα και την συμπεριφορά αυτών των μοντέλων.

Η γενική μορφή των μοντέλων αυτών ( GARCH(p,q) ) είναι η εξής:

$$\chi_t = h_t \cdot u_t$$

$$h_t^2 = w + \sum_{s=1}^p \alpha_s \cdot \chi_{t-s}^2 + \sum_{s=1}^q \beta_s \cdot h_{t-s}^2$$

όπου  $u_t$  είναι IID μη τετριμμένη ανέλιξη μηδενικού μέσου, για την οποία συνήθως γίνεται επιπλέον υπόθεση ύπαρξης δεύτερης ροπής, ίση με την μονάδα :  $u_t \sim \text{IID}(0,1)$ . Οι παράμετροι του μοντέλου αυτού προς εκτίμηση είναι :  $w$ ,  $\alpha_s$ ,  $s=1,\dots,p$  και  $\beta_s$ ,  $s=1,\dots,q$  και πρέπει να είναι μη αρνητικοί (εκτός από ένα τουλάχιστον  $\alpha_s$  το οποίο πρέπει να είναι γνήσια θετικό) έτσι ώστε να εξασφαλίζεται θετική τιμή για την ανέλιξη της δεσμευμένης διακύμανσης  $h_t^2$ . Λεκτικά, η δεσμευμένη διακύμανση την χρονική στιγμή  $t$  είναι μια γραμμική συνάρτηση κάποιων προηγούμενων τιμών της μέχρι βάθος  $q$  και προηγούμενων τετραγωνικών τιμών της υπό εξέταση χρονοσειράς μέχρι βάθος  $p$ . Για να είναι η ανέλιξη  $h_t^2$  στάσιμη πρώτης τάξης, με άμεση συνέπεια την ύπαρξη της αδέσμευτης διακύμανσης της  $\chi_t$ , ικανή συνθήκη αποτελεί η εξής:

$$\sum_{s=1}^p \alpha_s + \sum_{s=1}^q \beta_s < 1$$

φυσικά με την υπόθεση ύπαρξης δεύτερης ροπής της  $u_t$  ( $\text{Var}(u_t) < \infty$ ).

Στην παρούσα εργασία ειδικό βάρος θέτουμε κυρίως στα GARCH(1,1) μοντέλα καθώς επίσης και στα ARCH(1) μοντέλα. Στην ειδικότερη περίπτωση των GARCH(1,1) έχουμε την παρακάτω μορφή:

$$\chi_t = h_t \cdot u_t$$

$$h_t^2 = w + \alpha \cdot \chi_{t-1}^2 + \beta \cdot h_{t-1}^2$$

όπου  $w, \beta \geq 0$  και  $\alpha > 0$ .

## Ιδιότητες των GARCH (1, 1) μοντέλων

Μία επιπλέον υπόθεση που απαιτείται είναι η ύπαρξη της ποσότητας  $E[\ln(\beta + \alpha u_t^2)]$  όχι υπό την έννοια του πεπερασμένου αλλά τουλάχιστον μία μέση τιμή από το θετικό και αρνητικό τμήμα του  $\ln(\beta + \alpha u_t^2)$  να είναι πεπερασμένο.

Σύμφωνα με τον Nelson (1990), αναλόγως τις τιμές των παραμέτρων  $\alpha$  και  $\beta$  λαμβάνουμε και διαφορετική συμπεριφορά του GARCH (1, 1) όσον αφορά τα χαρακτηριστικά στασιμότητας και ύπαρξης ροπών για τις αδέσμευτες ανελίξεις  $\{\chi_t\}$  και  $\{h_t^2\}$ .

Συνοπτικά, αν ισχύει  $E[\ln(\beta + \alpha u_t^2)] > 0$  τότε η δεσμευμένη στο  $\sigma$  - Field  $F_s$  ανελίξη  $\{h_{s+t}^2\}_{t \geq 1}$  είναι μη στάσιμη και εκρήγνυται. Αν  $E[\ln(\beta + \alpha u_t^2)] < 0$ , τότε οι (αδέσμευτες) ανελίξεις  $\{\chi_t\}$  και  $\{h_t^2\}$  είναι αυστηρώς στάσιμες και εργοδικές. Αν επιπλέον  $E[(\beta + \alpha u_t^2)^{1/2}] < 1$ , η χρονοσειρά  $\{\chi_t\}$  έχει μηδενικό μέσο (ύπαρξη πρώτης ροπής) αλλά η αδέσμευτη διακύμανση απειρίζεται. Εάν τέλος έχουμε την πιο αυστηρή συνθήκη:  $E[(\beta + \alpha u_t^2)] < 1$ , τότε υπάρχει και η αδέσμευτη δεύτερη ροπή της αρχικής ανελίξης.

Ωστόσο, στην τελευταία περίπτωση, σύμφωνα με το θεώρημα 4(a) του Nelson (1990), δεν αρκεί μόνο η ύπαρξη της δεύτερης ροπής του innovation  $\{u_t\}$ , αλλά απαιτείται η ύπαρξη ροπής (κλασματικής) άνω το 2. Παράδειγμα ύπαρξης δεύτερης ροπής αλλά όχι κλασματικής, αποτελεί η t-student με τρεις βαθμούς ελευθερίας.

Για τον σκοπό της παρούσας εργασίας, θα χρειαστεί πιο αυστηρή υπόθεση έτσι ώστε να εξασφαλιστεί η ύπαρξη τέταρτης αδέσμευτης ροπής της ανελίξης  $\{\chi_t\}$ . Αυτό απαιτείται για την εξαγωγή ασφαλών αποτελεσμάτων από τις προσομοιώσεις Monte Carlo τα οποία σχεδιάστηκαν για τον έλεγχο της προβλεπτικής ικανότητας των GARCH μοντέλων. Σύμφωνα με τους He και Teräsvirta (1999), ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη τέταρτης ροπής (εκτός φυσικά από την ύπαρξη της αντίστοιχης ροπής για την innovation  $\{u_t\}$ ), αποτελεί η συνθήκη:

$$\eta_4 \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 < 1$$

( $E(u_t^2) = 1$ ) το οποίο υποδηλώνει και στασιμότητα τέταρτης τάξης για την  $\{\chi_t\}$ .

Για τις ανάγκες των προσομοιώσεων που παρουσιάζονται παρακάτω, η ανελίξη (innovation) είναι η τυποποιημένη κανονική  $(N(0,1))$ , επομένως  $\eta_4 = 3$  και ως παράμετροι του GARCH(1,1) χρησιμοποιήθηκαν οι εξής :

$w = 1$ ,  $\alpha = 0,4$  και  $\beta = 0,2$  για τους οποίους εύκολα επαληθεύεται ότι πληρείται η παραπάνω συνθήκη.

## 2) Monte Carlo simulations

Η κεντρική ιδέα της παρούσας εργασίας, όπως προαναφέρθηκε στην εισαγωγή, είναι η μελέτη της συμπεριφοράς των GARCH μοντέλων, τόσο στο στάδιο της εκτίμησης των παραμέτρων σειρών που δημιουργούνται με διαφορετικό τρόπο όσο και στην πρόβλεψη μελλοντικών όρων της εκτιμημένης χρονοσειράς. Δηλαδή, πρώτον, ελέγχεται κατά πόσο προσαρμόζονται τα GARCH μοντέλα σε χρονοσειρές παραγμένες με εντελώς διαφορετικό τρόπο (κατά πόσο κάνουν καλό fit στο δείγμα) και δεύτερον, πώς συμπεριφέρονται εκτός δείγματος (κατά το στάδιο της πρόβλεψης). Ο σκοπός είναι προφανής και συνοψίζεται στην εξής ερώτηση : στην πράξη, όταν χειριζόμαστε μοντέλα GARCH για την εκτίμηση και πρόβλεψη της (δεσμευμένης) διακύμανσης, είμαστε εξασφαλισμένοι για την εγκυρότητα των προβλέψεών μας ακόμη και αν μέσα στο δείγμα τα μοντέλα αυτά φαίνονται ως καλοί περιγραφείς ;

Προς απάντηση αυτού του ερωτήματος σχεδιάστηκαν προσομοιώσεις Monte Carlo στα οποία δημιουργούνται σειρές που παρουσιάζουν σαφώς volatility clustering, ωστόσο ο τρόπος παραγωγής διαφέρει από GARCH. Το συνολικό μέγεθος των παρατηρήσεων χωρίζεται σε δύο τμήματα εκ των οποίων το πρώτο χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του κατάλληλου GARCH μοντέλου ενώ το δεύτερο χρησιμοποιείται για την σύγκριση των προβλέψεων που λαμβάνουμε μέσω αυτού του εκτιμημένου μοντέλου και των πραγματικών «μελλοντικών» τιμών της δεσμευμένης διακύμανσης.

Επίσης ελέγχεται κατά πόσο στις αρχικές χρονοσειρές η στατιστική BDS έχει ισχύ, δηλαδή κατά πόσο διακρίνει την χρονική εξάρτηση (δεύτερης τάξης) απορρίπτοντας κατ' αυτόν τον τρόπο την μηδενική υπόθεση.

Για κάθε περίπτωση του πραγματικού τρόπου παραγωγής (DGP) των σειρών, γίνεται επιλογή μικρού, μεσαίου και μεγάλου δείγματος για την εκτίμηση του «αντίστοιχου» GARCH μοντέλου. Πρόκειται για δείγματα 250, 500 και 1000 παρατηρήσεων αντίστοιχα τα οποία συνοδεύονται από προβλέψεις με χρονικό ορίζοντα 50 για το μικρό δείγμα και 100 για τα δύο τελευταία. Κάθε προσομοίωση περιλαμβάνει 2000 επαναλήψεις (iterations ή replications) ενώ στην περίπτωση που το πραγματικό DGP είναι όπως περιγράφεται από τον Park (βλ. παραπάνω) απορρίπτονται αυτές οι επαναλήψεις που σαν αποτέλεσμα εκτιμημένου μοντέλου δίνουν είτε μη στάσιμα GARCH είτε με αρνητικούς συντελεστές (κάτι που αντιφάσκει με τον γενικό ορισμό των μοντέλων αυτών καθώς επίσης, όπως σχολιάζεται και παρακάτω, είναι μία ακόμη ένδειξη της «προσαρμοστικότητάς» τους μέσα στο δείγμα).

Όσον αφορά στην εξιχνίαση του βαθμού που τα GARCH μοντέλα προσεγγίζουν τα πραγματικά DGP έχουμε τις εξής δύο περιπτώσεις: είτε αυτά τα μοντέλα προσαρμόζονται ικανοποιητικά (μόνο) εντός δείγματος στις υπό μελέτη χρονοσειρές, είτε τις περιγράφουν πειστικά και εκτός αυτού. Στην πρώτη περίπτωση, κατά πάσα πιθανότητα έχουμε να κάνουμε με μία εικονική προσέγγιση που συνοδεύεται με φτωχή ικανότητα πρόβλεψης μελλοντικών τιμών. Στην δεύτερη περίπτωση μπορούμε να μιλήσουμε για πραγματική προσέγγιση του πραγματικού τρόπου δημιουργίας, με απώτερη συνέπεια την πιο ασφαλή χρήση των προβλέψεών μας.

Για την μέτρηση της προβλεπτικής ικανότητας των εκτιμημένων GARCH μοντέλων, για κάθε χρονικό ορίζοντα μπροστά, γίνεται χρήση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (Mean Squared Error) που αντιστοιχεί στη μέση τιμή από κάθε επανάληψη της προσομοίωσης των τετραγώνων των διαφορών μεταξύ της εκτιμημένης και πραγματικής δεσμευμένης διακύμανσης. Χονδρικά, όσο μεγαλύτερο

είναι αυτό το μέτρο, τόσο χειρότερη είναι η προβλέψεις που λαμβάνονται από το εκτιμημένο μοντέλο και κατ' επέκταση, ακόμη και αν το μοντέλο αυτό παρουσιάζεται ως καλός εκτιμητής του πραγματικού DGP εντός δείγματος, δεν αποτελεί εν γένει καλό περιγραφέα.

Το παραπάνω μέτρο, ωστόσο, δεν δύναται να χρησιμοποιηθεί μόνο του, αφού απλά ένα βαθμωτό αποτέλεσμα δεν δίνει κάποια συγκεκριμένη πληροφορία. Μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί ως μέτρο σύγκρισης μεταξύ των σφαλμάτων στις προβλέψεις όταν την μία φορά είναι γνωστό ότι το DGP είναι όντως GARCH ενώ την δεύτερη είναι κάποιος άλλος τρόπος παραγωγής ετεροσκεδαστικότητας. Αναμένεται, κατ' αυτόν τον τρόπο, ότι γενικά το MSE στην πρώτη περίπτωση θα είναι μικρότερο από το δεύτερο MSE. Δυστυχώς όμως, προκύπτουν δύο βασικά προβλήματα :

1. Εκ κατασκευής, το μέσω τετραγωνικό σφάλμα τονίζει αρκετά τις κακές προβλέψεις (ίσως και πέραν του δέοντος) επειδή βεβαίως αυτές υψώνονται στο τετράγωνο, δημιουργώντας εκρήξεις που επηρεάζουν αρκετά την μέση τιμή και
2. Για διαφορετικούς τρόπους δημιουργίας των αρχικών χρονοσειρών (εδώ GARCH και κάποιος εναλλακτικός) προκύπτει και το πρόβλημα κλίμακας, δηλαδή, τα δύο MSE δεν μπορούν να συγκριθούν απ' ευθείας μεταξύ τους, χωρίς προηγουμένως να μεσολαβήσει κάποια μετατροπή τους.

Επιπλέον, για την ευστάθεια αυτού του μέτρου πρέπει να υπάρχει και η τέταρτη ροπή της αρχικής σειράς το οποίο εξασφαλίζεται τόσο για τα GARCH και ARCH μοντέλα που χρησιμοποιούνται στις προσομοιώσεις όσο και για τα εναλλακτικά DGP.

Για την αντιμετώπιση του δεύτερου προβλήματος – διαφορά κλίμακας – υπολογίζεται επιπλέον και το MSE που προκύπτει θεωρώντας ότι υπάρχει ομοσκεδαστικότητα στην αρχική χρονοσειρά. Με άλλα λόγια, η ομοσκεδαστικότητα χρησιμοποιείται ως σημείο αναφοράς (benchmark). Συνοπτικά, έχουμε τον εξής συμβολισμό :

$MSE^G$  το μέσο τετραγωνικό σφάλμα όταν το πραγματικό DGP είναι GARCH

$MSE^A$  το μέσο τετραγωνικό σφάλμα όταν το πραγματικό DGP είναι κάποιος εναλλακτικός τρόπος παραγωγής volatility clustering, και

$MSE^U$  το μέσο τετραγωνικό σφάλμα του ομοσκεδαστικού μοντέλου και για τις δύο περιπτώσεις του πραγματικού DGP.

Αντί της κατασκευής αυτών των μέσων τετραγωνικών σφαλμάτων, πρέπει να κατασκευαστεί ένα νέο μέτρο για την προβλεπτική ικανότητα που δεν θα έχει πλέον το πρόβλημα της κλίμακας. Ένα τέτοιο μέτρο είναι το μέσο ποσοστό που προκύπτει ως εξής:

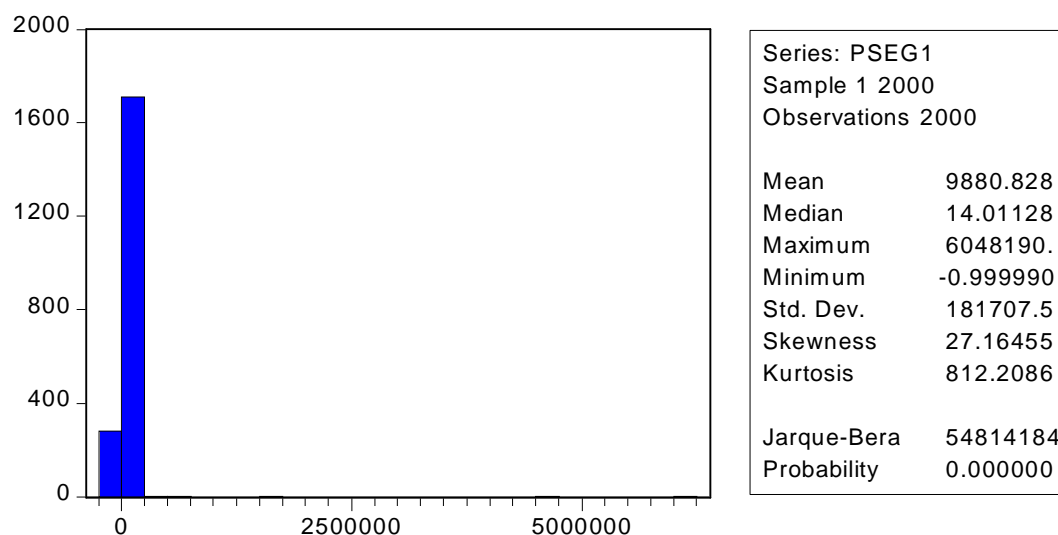
$$MPSE_t^G = \text{Mean} [ (SE_{t,i}^U - SE_{t,i}^G) / SE_{t,i}^G ] * 100\%$$

$$MPSE_t^A = \text{Mean} [ (SE_{t,i}^U - SE_{t,i}^A) / SE_{t,i}^A ] * 100\% , t \geq 1$$

όπου  $i = 1, 2, \dots, 2000$  ο αριθμός της επανάληψης στην προσομοίωση Monte Carlo και  $t$  ο χρονικός ορίζοντας πρόβλεψης ( $t = 1, 2, \dots, 50$  για μέγεθος δείγματος 250 και  $t = 1, 2, \dots, 100$  για μέγεθος δείγματος 500 και 1000)

τα οποία πλέον είναι συγκρίσιμα και το πρόσημό τους υποδηλώνει σαφώς ποια από τις δύο προβλέψεις είναι καλύτερη (αρνητικό για το ομοσκεδαστικό μοντέλο). Παρ' όλα αυτά όμως εξακολουθούν να φέρουν το πρώτο πρόβλημα (των ακραίων τιμών) και εκτός αυτού, ενώ από την μία πλευρά (θετικός ημίξονας) αυτό το μέτρο δεν

φράσσεται, παρατηρούμε ότι στις περιπτώσεις που το αποτέλεσμα έχει αρνητικό πρόσημο, οι τιμές «στριμώνονται» στο διάστημα (-1,0). Αυτές οι παρατηρήσεις το καθιστούν αναξιόπιστο μέτρο σύγκρισης. Ενδεικτικά, παρατίθεται η κατανομή του  $PSE^G$  για ορίζοντα πρόβλεψης 1 όπου φαίνεται καθαρά η μεγάλη ασυμμετρία και ότι η μέση τιμή τους (το  $MPSE^G_1$ ) «παρασύρεται» στην ουσία από λίγες ακραίες θετικές τιμές, την στιγμή που οι αρνητικές τιμές περιορίζονται, εκ κατασκευής του μέτρου αυτού, στο προαναφερόμενο διάστημα.



Το πρόβλημα αυτό θα μπορούσε να αντιμετωπιστεί αποκόπτοντας τις ακραίες τιμές, θεωρώντας ότι δεν χρειάζεται να ληφθούν υπ' όψιν. Ωστόσο, εκτός ότι οι προς αποκοπή τιμές πιθανότατα εμπεριέχουν κάποια πληροφορία, με άμεση συνέπεια την στρέβλωση της πραγματικότητας, αυτή η διαδικασία δεν φάνηκε χρήσιμη διότι, ακόμη και μετά το φιλτράρισμα αυτό, παρατηρούνται επίσης ακραίες τιμές (βέβαια φραγμένες εκ κατασκευής) που «παρασύρουν» την τιμή του μέσου.

Τέλος, το μέτρο σύγκρισης που χρησιμοποιήθηκε τελικώς προκύπτει από την μέση τιμή του νεπέριου λογαρίθμου του λόγου των δύο τετραγωνικών σφαλμάτων :

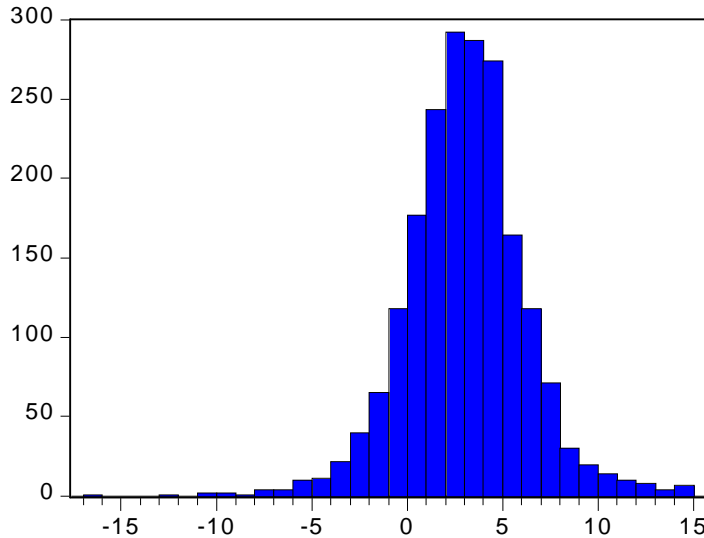
$$MLSE_t^G = \text{Mean} [\text{Ln}(\text{SE}_{t,i}^U / \text{SE}_{t,i}^G)]$$

$$MLSE_t^A = \text{Mean} [\text{Ln}(\text{SE}_{t,i}^U / \text{SE}_{t,i}^A)] \quad , t \geq 1$$

όπου  $i = 1, 2, \dots, 2000$  ο αριθμός της επανάληψης στην προσομοίωση Monte Carlo και  $t$  ο χρονικός ορίζοντας πρόβλεψης ( $t = 1, 2, \dots, 50$  για μέγεθος δείγματος 250 και  $t = 1, 2, \dots, 100$  για μέγεθος δείγματος 500 και 1000)

Η αρχική ιδέα ήταν ότι οι ακραίες τιμές που αναφέρθηκαν παραπάνω πρέπει να «μαζευτούν» προς το 0 ενώ ταυτόχρονα οι αρνητικές τιμές που ήταν πυκνές στο (-1,0) πρέπει να απλωθούν προς τα αριστερά έτσι ώστε να αποκτήσουν την κατάλληλη βαρύτητα στην μέση τιμή. Με άλλα λόγια, πριν την εξαγωγή του μέσου των τετραγωνικών σφαλμάτων, πρέπει οι τιμές να κατανέμονται όσο το δυνατόν πιο συμμετρικά γύρω από το 0, το οποίο αποτελεί και το σύνολο των δύο περιοχών που χαρακτηρίζουν την ακριβέστερη πρόβλεψη. Για λόγους σύγκρισης παρατίθεται η αντίστοιχη κατανομή για το νέο μέτρο ( $LSE^G_1$ ) :





Series: LSEG1  
 Sample 1 2000  
 Observations 2000

Mean 3.002446  
 Median 3.018414  
 Maximum 14.73091  
 Minimum -16.37117  
 Std. Dev. 3.152674  
 Skewness -0.108812  
 Kurtosis 5.312555

Jarque-Bera 449.6060  
 Probability 0.000000

Η επίδραση του λογαριθμικού μετασχηματισμού των τετραγωνικών σφαλμάτων είναι ολοφάνερη, εξαλείφοντας τις ακραίες τιμές και μετατρέποντας την κατανομή σε (σχεδόν) συμμετρική. Την ίδια εικόνα λαμβάνουμε επίσης και για τους υπόλοιπους χρονικούς ορίζοντες καθώς και για τους εναλλακτικούς τρόπους DGP.

Το αριθμητικό αποτέλεσμα που λαμβάνουμε για κάθε ορίζοντα μπορεί πλέον να μετασχηματιστεί εύκολα σε ποσοστό ( $\exp\{\text{MLSE}\} - 1$ ), χωρίς τα προαναφερθέντα προβλήματα, με σκοπό την καλύτερη εποπτεία αφού ως ποσοστό είναι καλύτερα αντιληπτό. Επίσης, μετά από τον λογαριθμικό μετασχηματισμό, αντί της μέσης τιμής (δημιουργώντας έτσι το MLSE) θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε ένα παρόμοιο μέτρο σύγκρισης υπολογίζοντας την συχνότητα που λαμβάνουμε θετικό λογαριθμικό τετραγωνικό σφάλμα :

$$\text{DMLSE}_t = [\sum_i I\{\text{LSE}_{t,i} > 0\}] / 2000$$

όπου  $i = 1, 2, \dots, 2000$  ο αριθμός της επανάληψης στην προσομοίωση Monte Carlo και  $t$  ο χρονικός ορίζοντας πρόβλεψης ( $t = 1, 2, \dots, 50$  για μέγεθος δείγματος 250 και  $t = 1, 2, \dots, 100$  για μέγεθος δείγματος 500 και 1000)

όπου  $I$  δείκτρια συνάρτηση και το άθροισμα γίνεται πάνω στον αριθμό των επαναλήψεων.

Με αυτόν τον τρόπο, λαμβάνεται η συχνότητα των καλύτερων προβλέψεων με χρήση GARCH μοντέλων εν συγκρίσει με το ομοσκεδαστικό μοντέλο. Δηλαδή, είναι ένας τρόπος μέτρησης της προβλεπτικής ικανότητας που λαμβάνει υπ' όψιν μόνο την φορά της πρόβλεψης και όχι κατά πόσο είναι καλύτερη η πρόβλεψη με GARCH μοντέλα.

Στο παράρτημα Α για στις αναλύσεις των αποτελεσμάτων των προσομοιώσεων, παρατίθενται οι γραφικές αναπαραστάσεις των μέτρων  $\text{MLSE}_t^G$  και  $\text{MLSE}_t^A$  στο ίδιο γράφημα, για λόγους σύγκρισης, καθώς και των μέτρων  $\text{DMLSE}_t^G$  και  $\text{DMLSE}_t^A$  για κάθε περίπτωση DGP. (Για την συμπεριφορά των μέτρων MLSE και DMLSE και για τα υπόλοιπα DGP που χρησιμοποιούνται παρακάτω, βλ. Παράρτημα Β).

### 3) Εναλλακτικά μοντέλα παραγωγής ετεροσκεδαστικότητας

Μια μεγάλη οικογένεια μοντέλων που παρουσιάζουν volatility clustering έχει προταθεί από τον Joon Park (2000) ο οποίος μελέτησε χρονοσειρές με δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα, κάτω από πολύ ευρύ φάσμα υποθέσεων. Πιο συγκεκριμένα, η ανέλιξη της δεσμευμένης διακύμανσης δίνεται από μία μη γραμμική συνάρτηση μιας χρονοσειράς με μοναδιαία ρίζα (integrated series). Οι εν λόγω σειρές λέγεται ότι έχουν μη γραμμική, μη στάσιμη ετεροσκεδαστικότητα (Nonlinear Nonstationary Heteroskedasticity) και οι μη γραμμικές συναρτήσεις από τις οποίες παράγεται η δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα καλούνται HGF (Heterogeneity Generating Functions). Απ' αυτόν τον τρόπο παραγωγής χρονοσειρών βασισμένων σε αυτά τα μοντέλα, διαφαίνεται κατ' ευθείαν η «κατασκευαστική» διαφορά τους από τα προαναφερθέντα GARCH μοντέλα, τα οποία δίνονται από μία αναδρομική σχέση που εμπλέκει τόσο τους προηγούμενους όρους της σειράς όσο και τις προηγούμενες δεσμευμένες διακυμάνσεις της. Αντιθέτως, στα NNH μοντέλα, η δεσμευμένη διακύμανση εξηγείται πλήρως από την χρονοσειρά με μοναδιαία ρίζα (επεξηγηματική μεταβλητή), αφού φιλτραριστεί μέσω μιας μη γραμμικής συνάρτησης.

Το προτεινόμενο μοντέλο έχει ως εξής :

$$y_t = \sigma_t \cdot \varepsilon_t$$

όπου  $\varepsilon_t$  : innovation process και  $\sigma_t$  : η δεσμευμένη διακύμανση. Έστω  $\{F_t\}$  μία αύξουσα ακολουθία  $\sigma$  – αλγεβρών (increasing filtration) που υποδηλώνει την διαθέσιμη πληροφόρηση μέχρι την χρονική στιγμή  $t$ .

Η πρώτη υπόθεση αφορά τις ανεξίτητες  $\{\sigma_t\}$  και  $\{\varepsilon_t\}$ :

- α) η  $\{\varepsilon_t\}$  είναι IID(0,1) στοχαστική ανέλιξη, προσαρμοσμένη στο  $\{F_t\}$
- β) η  $\{\sigma_t\}$  είναι προβλέψιμη ( δηλαδή προσαρμοσμένη στο  $\{F_t\}$  )

Οι ανωτέρω υποθέσεις είναι οι ελάχιστες και για κάποια πορίσματα που αποδεικνύονται στο άρθρο του Park λαμβάνονται αυστηρότερες υποθέσεις πάνω στην ύπαρξη ροπών της  $\{\varepsilon_t\}$ . Ωστόσο, μέχρι στιγμής έπεται ότι η  $\{y_t\}$  είναι μία Martingale difference ανέλιξη και η  $\{\sigma_t\}$  είναι η δεσμευμένη διακύμανση της  $\{y_t\}$  πάνω στο  $F_{t-1}$  :

$$E(y_t | F_t) = 0 \quad \text{και} \quad E(y_t^2 | F_{t-1}) = \sigma_t^2$$

Έστω τώρα η σειρά  $\{\chi_t\}$  είναι μία AR(1) (Autoregressive) τάξης 1:

$$\chi_t = \rho\chi_{t-1} + w_t$$

και η  $f(\cdot)$  – που σύντομα αναφέρεται ως HGF – είναι μία πραγματική, μη αρνητική (και μη γραμμική) συνάρτηση :

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+ \quad \text{και} \quad \sigma_t^2 = f(\chi_t)$$

Η  $\{w_t\}$  είναι προσαρμοσμένη στο  $F_t$  και  $|\rho| \leq 1$ . Η  $\chi_t$  καλείται επεξηγηματική μεταβλητή και για  $|\rho| = 1$  έχει μοναδιαία ρίζα (είναι integrated και άρα μη στάσιμη). Στην περίπτωση που η παράμετρος  $\rho$  είναι γνήσια μικρότερη κατ' απόλυτη τιμή από το 1, έχουμε τα στάσιμα μη γραμμικά ετεροσκεδαστικά μοντέλα (SNH models).

Κατόπιν αυτών των βασικών υποθέσεων ακολουθεί η κατάταξη των HGF συναρτήσεων σε τρεις γενικές κλάσεις για την εξαγωγή γενικών συμπερασμάτων όσον αφορά την ασυμπτωτική συμπεριφορά της  $\{y_t\}$  :

1. I – regular συναρτήσεις
2. H – regular συναρτήσεις και
3. εκθετικές συναρτήσεις

Στην πρώτη κλάση ανήκουν οι (πραγματικές) φραγμένες συναρτήσεις οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες\* και κατά τμήματα Lipschitz, δηλαδή

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|^k$$

σε κάθε τμήμα της διαμέρισης, όπου  $c, k$  σταθερές. Το  $k$  εξαρτάται από την μέγιστη τάξη της ροπής  $q$  που υποθέτουμε για την  $\{w_i\}$  :  $k > 6/(q-2)$ . (\*)Ολοκληρώσιμη συνάρτηση εδώ χρησιμοποιείται με την εξής έννοια :  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx < +\infty$ . Χονδρικά, μία I – regular συνάρτηση είναι μία φραγμένη, ολοκληρώσιμη (υπό την προαναφερθείσα έννοια) συνάρτηση η οποία είναι κατά τμήματα λεία. Το πόσο λεία επιτρέπεται να είναι εξαρτάται από το  $q$ . Όσο μεγαλύτερης τάξεως ροπές της  $\{w_i\}$  υπάρχουν τόσο μπορούμε να επιτρέψουμε στην  $f$  να είναι και λιγότερο λεία.

Μερικά κατατοπιστικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι οι δείκτριες συναρτήσεις σε συνεκτικά διαστήματα (δηλαδή κλειστά και φραγμένα διαστήματα), η Λαπλασιανή ( $e^{-|x|}$ ) και η Γκαουσιανή συνάρτηση ( $e^{-x^2}$ ).

Στην δεύτερη κλάση ανήκουν αυτές οι συναρτήσεις που μπορούν να γραφούν υπό την μορφή :

$$f(\lambda x) = v(\lambda)h(x) + r(x,\lambda)$$

όπου η  $h(\cdot)$  είναι ομογενής πραγματική συνάρτηση και η  $r(\cdot, \cdot)$  μπορεί να πάρει μία από τις παρακάτω μορφές :

$$r(x,\lambda) = \alpha(\lambda)\rho(x) \quad \text{ή} \quad r(x,\lambda) = \beta(\lambda)\rho(x)q(\lambda x)$$

με  $\alpha(\cdot), \beta(\cdot)$  συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει  $\alpha(\lambda)/v(\lambda) \rightarrow 0$  και  $\beta(\lambda)/v(\lambda) < \infty$  καθώς  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\rho(\cdot)$  τέτοια ώστε να είναι το πολύ της τάξης  $e^{c|x|}$ ,  $c$  σταθερά, και  $q(\cdot)$  μηδενική, δηλαδή  $q(\lambda) \rightarrow \infty$  καθώς  $|\lambda| \rightarrow \infty$ .

Με απλά λόγια, οι H – regular συναρτήσεις είναι αυτές που συμπεριφέρονται ως ομογενείς ασυμπτωτικά επειδή τότε ο όρος  $r(x,\lambda)$  γίνεται αμελητέος :  $f(\lambda x) \approx v(\lambda)h(x)$  για μεγάλα  $\lambda$ . Παραδείγματα αυτής της ομάδας αποτελούν σταθερές συναρτήσεις, όλες οι συναρτήσεις που μοιάζουν με συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας, λογαριθμικές συναρτήσεις και όλες αυτές που ασυμπτωτικά συμπεριφέρονται ως πολυωνυμικές. Οι φραγμένες συναρτήσεις αυτής της οικογένειας έχουν ως οριακή ομογενή συνάρτηση  $h(\cdot)$  τάξης 0 :

$$h(x) = c_1 I\{x \geq 0\} + c_2 I\{x < 0\}$$

με  $c_1, c_2$  πραγματικές σταθερές (όπου  $I\{\cdot\}$  : δείκτριες συναρτήσεις).

Τέλος, η κλάση των εκθετικών συναρτήσεως δεν μελετώνται από τον συγγραφέα, επειδή ο ρυθμός με τον οποίο απειρίζονται είναι τόσο μεγάλος που δεν έχει ενδιαφέρον για πρακτική εφαρμογή.

## Γενικά χαρακτηριστικά των NNH – SNH μοντέλων

Τα μοντέλα αυτά παρουσιάζουν volatility clustering και λεπτοκύρτωση όπως και τα ARCH, GARCH μοντέλα, μπορεί να είναι αδέσμευτα ετεροσκεδαστικές (όπως τα μη στάσιμα ARCH), μπορεί αδέσμευτα να εκρήγνυνται (όπως τα IGARCH) και επίσης αδέσμευτα είναι ετεροσκεδαστικές αλλά ωστόσο να μην εκρήγνυνται. Τα πρώτα χαρακτηριστικά είναι κοινά με τα GARCH μοντέλα και τις γενικεύσεις τους ενώ το τελευταίο όχι, κάτι που υποδηλώνει ότι τα μοντέλα που προτείνει ο Park αποτελούν γενίκευση για την μοντελοποίηση της διακύμανσης χρονοσειρών. Τα χαρακτηριστικά αυτά πηγάζουν κυρίως από την μη γραμμικότητα αλλά και από την μη στασιμότητα. Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει από την σύγκριση μεταξύ των NNH και SNH μοντέλων.

Χωρίς να εμμείνουμε σε αλγεβρικούς χειρισμούς και αυστηρή παρουσίαση των υποθέσεων, παρουσιάζουμε κάποια συμπεράσματα για την ασυμπτωτική συμπεριφορά των δειγματικών ροπών :

Η δειγματική αυτοσυσχέτιση (autocorrelation) των NNH σειρών με I – regular HGF τείνει κατά πιθανότητα σε έναν πραγματικό αριθμό που εξαρτάται από την χρονική καθυστέρηση των δύο όρων της χρονοσειράς, καθώς επίσης και από την κατανομή της  $\{w_t\}$ . Αντιθέτως, για H – regular HGF, το όριο λαμβάνεται κατά νόμο και είναι μία τυχαία μεταβλητή της οποίας η κατανομή δεν εξαρτάται από την χρονική υστέρηση ούτε και από την κατανομή της  $\{w_t\}$ .

Όσον αφορά στην δειγματική διακύμανση, για I – regular HGF αυτή τείνει κατά νόμο σε μία τυχαία μεταβλητή που εξαρτάται από το ολοκλήρωμα της  $f(\cdot)$  σε όλο το P και από την διακύμανση της  $\{w_t\}$  αλλά όσο αυξάνεται το δείγμα, η διακύμανση της  $\{y_t\}$  τείνει στο μηδέν. Για  $f(\cdot)$  H – regular επίσης έχουμε ότι το όριο κατά νόμο της δειγματικής διακύμανσης είναι τυχαία μεταβλητή, ωστόσο εξαρτάται από την συγκεκριμένη μορφή που έχει η  $f(\cdot)$ . Παραδείγματος χάριν, για φραγμένη H – regular HGF το όριο είναι μία πεπερασμένη τυχαία μεταβλητή ενώ για λογαριθμική, δεν υπάρχει το όριο (αποκλίνει).

Τέλος, όσον αφορά στην δειγματική κύρτωση, στην περίπτωση των I – regular HGF αποκλίνει καθώς το μέγεθος του δείγματος αυξάνεται, κάτι που υποδηλώνει λεπτοκύρτωση της  $\{y_t\}$ , ενώ για H – regular HGF το όριο (κατά νόμο) είναι τυχαία μεταβλητή κάτω φραγμένη από την κύρτωση της  $\{\varepsilon_t\}$  (innovation). Και στην δεύτερη περίπτωση αναμένεται λεπτοκύρτωση και στην ειδική περίπτωση όπου η συνάρτηση  $h(\cdot)$  είναι σταθερή, το όριο συμπίπτει στην κύρτωση της  $\{\varepsilon_t\}$ .

#### 4) Εναλλακτικό μοντέλο του ARCH(1)

Σκόπιμη θεωρείται η παρουσίαση ενός μοντέλου που προσεγγίζεται από GARCH μοντέλα, συγχρόνως εντός και εκτός δείγματος, πριν προχωρήσουμε σε περιπτώσεις όπου η εγγύτητα τους είναι απλώς φαινομενική.

Έστω ότι η αρχική χρονοσειρά δημιουργείται ως εξής (το πραγματικό DGP) :

$$y_t = (z + ry_{t-1})e_t$$

όπου  $e_t$  μία IID(0,1) ανέλιξη (innovation) προσαρμοσμένη στην αύξουσα ακολουθία  $\sigma -$  πεδίων  $\{F_t\}$ . Η δυναμική του στοχαστικού συστήματος αυτού περιγράφεται πλήρως από τις τιμές των παραμέτρων  $z$  και  $r$ , οι οποίοι δεν είναι απαραίτητα θετικοί, καθώς επίσης και από τις υποθέσεις που γίνονται πάνω στην ύπαρξη ροπών της  $\{e_t\}$ . Αν η παραπάνω αναδρομική σχέση γραφεί ως εξής :

$$\begin{aligned} y_t &= s_t \cdot e_t \\ s_t &= z + ry_{t-1} \end{aligned}$$

τότε το παραπάνω θυμίζει πολύ τα μοντέλα ARCH(1), με την διαφορά ότι η  $\{s_t\}$  δεν αντιπροσωπεύει την ανέλιξη της δεσμευμένης τυπικής απόκλισης, αφού μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές. Τα πρώτα συμπεράσματα είναι ότι η  $\{y_t\}$  είναι Martingale difference ως προς το  $\{F_t\}$  και ότι η δεσμευμένη διακύμανση της  $\{y_t\}$  ως προς  $\{F_{t-1}\}$  είναι η  $\{s_t^2\}$ .

Με περαιτέρω αλγεβρική επεξεργασία της αρχικής σχέσης, έχουμε και θεωρητικά ότι η ανέλιξη  $\{y_t\}$  έχει πολλά κοινά με μία ARCH(1) χρονοσειρά  $\{x_t\}$  της οποίας οι δύο παράμετροι  $w$  και  $a$  (σταθερά και συντελεστής arch αντίστοιχα) συνδέονται ως εξής με τις παραμέτρους  $z$  και  $r$  :

$$w = z^2 \quad \text{και} \quad a = r^2$$

$$E(y_{t+s} | F_t) = 0, \quad E(x_{t+s} | F_t) = 0 \quad \text{άρα και οι αδέσμευτες είναι ίσες με 0}$$

$$E(y_{t+s}^2 | F_t) = z^2(1 - r^{2s}) / (1 - r^2) + r^{2s} y_t^2 \quad \text{για } r^2 < 1$$

$$E(x_{t+s}^2 | F_t) = w(1 - a^s) / (1 - a) + a^s x_t^2 \quad \text{για } a < 1$$

$$E(y_t^2) = z^2 / (1 - r^2), \quad E(x_t^2) = w / (1 - a)$$

$$\text{Cov}(y_{t+s}, y_t) = 0, \quad \text{Cov}(x_{t+s}, x_t) = 0$$

Πράγματι, οι δύο πρώτες ροπές της  $\{y_t\}$  – δεσμευμένες και αδέσμευτες – συμπίπτουν με τις αντίστοιχες ροπές της ARCH(1) σειράς, όπως φαίνεται από τα παραπάνω. Αν η  $\{e_t\}$  είναι συμμετρική και έχει 3<sup>η</sup> ροπή (δηλαδή  $E(e_t) = 0$ ) τότε και οι τρίτες ροπές συμπίπτουν. Η συνθήκη ύπαρξης 2<sup>ης</sup> ροπής για αυτή την ανέλιξη είναι, εκτός φυσικά από την ύπαρξη της ίδιας ροπής για την innovation :  $r^2 < 1$  (κατ' αντιστοιχία :  $a < 1$  για την ARCH(1) ) και για την 4<sup>η</sup>, αφού εξασφαλιστεί ότι  $\eta_4 \equiv E(e_t^4) < \infty$ , :  $\eta_4 \cdot r^4 < 1$  (για την ARCH(1) :  $\eta_4 \cdot a^2 < 1$ ). Στο εξής θεωρούμε ότι η innovation έχει μηδενική τρίτη ροπή (εξ' άλλου στις προσομοιώσεις που παρουσιάζονται αργότερα χρησιμοποιείται για την  $\{e_t\}$  η κανονική κατανομή).

Η διαφορά των δύο μοντέλων υπεισέρχεται στις ροπές μεγαλύτερης τάξης :

$$E(x_t^4) = (1 + a)\eta_4 w^2 / (1 - a)(1 - \eta_4 a^2) \quad , \eta_4 \cdot a^2 < 1$$

$$E(y_t^4) = (1 + 5r^2)\eta_4 z^4 / (1 - r^2)(1 - \eta_4 r^4) \quad , \eta_4 \cdot r^4 < 1$$

απ' όπου φαίνεται καθαρά ότι ο αριθμητής στην περίπτωση της ARCH(1) ανέλιξης  $\{x_t^4\}$  είναι μικρότερος, δηλαδή η διακύμανση της δεσμευμένης διακύμανσης στην πρώτη περίπτωση είναι μικρότερη από αυτή της δεύτερης (αφού  $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$  και ο δεύτερος όρος είναι κοινός και για τις δύο processes). Επίσης :

$$\text{Cov}(x_t^2, x_{t+s}^2) = w^2 a^s (\eta_4 - 1) / [(1 - a)^2 (1 - \eta_4 a^2)]$$

$$\text{Cov}(y_t^2, y_{t+s}^2) = z^4 r^{2s} (\eta_4 - 1 + 4\eta_4 r^2 (1 - r^2)) / [(1 - r^2)^2 (1 - \eta_4 r^4)]$$

που δηλώνει ότι η αυτοσυνδιακύμανση του εναλλακτικού μοντέλου είναι μεγαλύτερη από του αντίστοιχου ARCH(1). Η ίδια σχέση ισχύει και για την αυτοσυσχέτιση :

$$\text{Corr}(x_t^2, x_{t+s}^2) = a^s (\eta_4 - 1) / [(1 - a^2) \eta_4]$$

$$\text{Corr}(y_t^2, y_{t+s}^2) = r^{2s} (\eta_4 - 1 + 4\eta_4 r^2 (1 - r^2)) / [(1 - r^2) (1 + 5r^2) \eta_4]$$

Στις προσομοιώσεις, ως παραμέτρους χρησιμοποιούμε τις τιμές  $z=1$  και  $r=\sqrt{0,5}$ ,  $e_t \sim \text{NIID}(0,1)$ . Οι αντίστοιχες παράμετροι του ARCH(1) είναι  $w=1$  και  $a=0,5$ . Η αντιστοιχία αυτή επαληθεύεται από τα Monte Carlo simulations και για τα τρία μεγέθη του δείγματος.

Μέγεθος δείγματος	Εκτιμημένες παράμετροι		Στατιστικά σημαντικοί συντελεστές
	w	a	
250	<b>1,012</b>	<b>0,478</b>	<b>96,4 %</b>
500	<b>1,005</b>	<b>0,491</b>	<b>99,95 %</b>
1000	<b>1,002</b>	<b>0,495</b>	<b>100 %</b>
αριθμός επαναλήψεων : 2000			

Όπως φαίνεται καθαρά από τον ανωτέρω πίνακα, το εναλλακτικό μοντέλο συμπεριφέρεται όπως αναμενόταν και θεωρητικά. Παρατηρείται ωστόσο μία μικρή μεροληψία στις εκτιμήσεις, ειδικά για μικρό σχετικά αριθμό παρατηρήσεων.

Για κάθε μέγεθος δείγματος, εφαρμόστηκε ο έλεγχος BDS τόσο στις αρχικές σειρές όσο και στα κανονικοποιημένα κατάλοιπα για διάσταση εμβύθισης  $m=2, \dots, 6$  και καταγράφηκαν οι φορές που απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση της ανεξαρτησίας και ταυτονομίας.

Μέγεθος δείγματος	250	500	1000
Ποσοστό απόρριψης $H_0$ (IID)			
Αρχική σειρά			
Διάσταση Εμβύθισης			
m = 2	<b>98 %</b>	<b>100 %</b>	<b>100 %</b>
m = 3	<b>96 %</b>	<b>100 %</b>	<b>100 %</b>
m = 4	<b>95 %</b>	<b>99,9 %</b>	<b>100 %</b>
m = 5	<b>92 %</b>	<b>99,5 %</b>	<b>100 %</b>
m = 6	<b>89 %</b>	<b>99 %</b>	<b>100 %</b>
Κανονικοποιημένα κατάλοιπα			
m = 2	<b>13 %</b>	<b>19 %</b>	<b>36 %</b>
m = 3	<b>10 %</b>	<b>16 %</b>	<b>30 %</b>
m = 4	<b>9 %</b>	<b>13 %</b>	<b>23 %</b>
m = 5	<b>8 %</b>	<b>12 %</b>	<b>19 %</b>
m = 6	<b>7 %</b>	<b>10 %</b>	<b>17 %</b>
αριθμός επαναλήψεων : 2000			

Ακόμα και για μικρά σχετικά δείγματα, το BDS test έχει υψηλό power και στην περίπτωση αυτή. Για την αντιπαράθεση των αποτελεσμάτων με αυτά μιας σειράς ARCH(1) παρουσιάζεται και ο αντίστοιχος πίνακας για αυτήν τη σειρά.

	ARCH(1)		
Μέγεθος δείγματος	250	500	1000
	Ποσοστό απόρριψης $H_0$ (IID)		
Διάσταση Εμβύθισης	Αρχική σειρά		
m = 2	99,3 %	100 %	100 %
m = 3	98,8 %	100 %	100 %
m = 4	97,4 %	99,9 %	100 %
m = 5	95,3 %	99,9 %	100 %
m = 6	92,9 %	99,8 %	100 %
	Κανονικοποιημένα κατάλοιπα		
m = 2	0,6 %	0,15 %	0,05 %
m = 3	0,5 %	0,15 %	0,05 %
m = 4	0,9 %	0,2 %	0,05 %
m = 5	1,3 %	0,9 %	0,3 %
m = 6	1,9 %	1,6 %	0,8 %
αριθμός επαναλήψεων : 2000			

Παρατηρούμε ότι ο έλεγχος BDS έχει περίπου την ίδια ισχύ και στην περίπτωση του (αντίστοιχου) ARCH(1) μοντέλου, ωστόσο, στα κανονικοποιημένα κατάλοιπα το εμπειρικό size είναι πολύ μικρότερο του πραγματικού (το επίπεδο σημαντικότητας έχει τεθεί στο 5%). Αυτό υποδηλώνει ότι BDS test έχει την τάση να δέχεται την μηδενική υπόθεση (την στιγμή που αυτή είναι σωστή) για τα κανονικοποιημένα κατάλοιπα των ARCH μοντέλων πιο συχνά. Θα ανέμενε κανείς μία τιμή κοντά στο πραγματικό size ( $\alpha = 5\%$ ). Δηλαδή, η ελεγχοσυνάρτηση παρουσιάζεται ως oversized στην περίπτωση των καταλοίπων ARCH και GARCH μοντέλων – όπως θα αναφερθεί και παρακάτω – (Brock, Hsieh, LeBaron (1991)).

Όσον αφορά την προβλεπτική συμπεριφορά του ARCH μοντέλου όταν το πραγματικό DGP είναι το εναλλακτικό, συγκρίνονται τα LMSE (βλ. παραπάνω για ορισμό) που λαμβάνονται με τα αντίστοιχα που προκύπτουν όταν το πραγματικό DGP είναι όντως ARCH. Τα LMSE στην πρώτη περίπτωση είναι σαφώς μικρότερα από τα αντίστοιχα LMSE της δεύτερης περίπτωσης, ειδικά στις προβλέψεις μικρών οριζόντων (μέχρι τις 3 – 5 πρώτες προβλέψεις). Όσο μεγαλώνει το δείγμα πάνω στο οποίο γίνεται η εκτίμηση, η διαφορά τους μικραίνει, χωρίς ωστόσο να εξανεμίζεται (βλ. παράρτημα Α).

Συμπερασματικά, αν και οι δύο χρονοσειρές παράγονται με παρόμοιο τρόπο (οι διαφορές τους εμφανίζονται στις ροπές 4<sup>ου</sup> και άνω βαθμού) το μέτρο σύγκρισης LMSE παρέχει σαφή αποτελέσματα για την προβλεπτική συμπεριφορά και κατ' επέκταση για την «προσέγγιση» που λαμβάνουμε κάνοντας χρήση ενός μοντέλου ARCH για περιγραφή της αρχικής σειράς.

## 5) Μη γραμμικότητα και volatility clustering

Στο σημείο αυτό εξετάζονται κάποια απλά μη γραμμικά μοντέλα τα οποία παρουσιάζουν volatility clustering παρ' όλο που η δεσμευμένη διακύμανση παραμένει σταθερή. Τα μοντέλα αυτά ανήκουν στην οικογένεια των μη γραμμικών moving average μοντέλων που αντιπροσωπεύουν μία ευρεία κλάση μη γραμμικών μοντέλων.

Έστω δύο χρονοσειρές  $\{x_t\}$  και  $\{e_t\}$  όπου η δεύτερη συνήθως υποτίθεται ότι είναι IID. Η κεντρική ιδέα είναι να παρασταθεί κάθε όρος της  $\{x_t\}$  συναρτήσει των  $e_s$ ,  $s$  : ακέραιος. Μία επιπλέον υπόθεση είναι ότι στην αναπαράσταση κάθε  $x_t$  λαμβάνουν μέρος μόνο οι όροι της  $\{e_s\}$  με  $s \leq t$  (non – anticipative ιδιότητα) το οποίο έχει την φυσική ερμηνεία ότι η  $\{x_t\}$  δεν επηρεάζεται από μελλοντικές τιμές της  $\{e_t\}$  αλλά μόνο από τις παρελθούσες. Η γενική μορφή είναι

$$x_t = h(e_t, e_{t-1}, e_{t-2}, e_{t-3}, \dots)$$

για την οποία χωρίς περαιτέρω υποθέσεις δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα. Αν η συνάρτηση  $h$  συμπεριφέρεται «καλά», υπό την έννοια ότι μπορεί να αναπτυχθεί σε μία σειρά Taylor γύρω από ένα σταθερό σημείο – χωρίς βλάβη της γενικότητας γύρω από το μηδενικό διάνυσμα  $\mathbf{0} = (0,0,0,\dots)$  – τότε η σειρά  $\{x_t\}$  παίρνει την εξής μορφή :

$$x_t = \mu + \sum \alpha_s e_{t-s} + \sum \sum \alpha_{su} e_{t-s} e_{t-u} + \sum \sum \sum \alpha_{suw} e_{t-s} e_{t-u} e_{t-w} + \dots$$

$s, u, w, \dots = 0, 1, 2, \dots$

Η μορφή αυτή είναι γνωστή ως σειρά Volterra (1959) και παρέχει πιο εύχρηστη αναπαράσταση (κάποιων) μη γραμμικών μοντέλων. Όσον αφορά την ευστάθεια της παραπάνω μορφής, αν τουλάχιστον ένα άθροισμα δεν είναι πεπερασμένο, πρέπει να ληφθούν κάποιοι περιορισμοί πάνω στις τιμές που μπορούν να πάρουν οι αντίστοιχοι συντελεστές. Οι ακολουθίες  $\{\alpha_s\}$ ,  $\{\alpha_{su}\}$ ,  $\{\alpha_{suw}\}$ , ... ονομάζονται πυρήνες της σειράς Volterra. Μέχρι και το πρώτο άθροισμα του παραπάνω αναπτύγματος, η αναπαράσταση αυτή δεν είναι τίποτα άλλο από τα (γραμμικά) moving average μοντέλα.

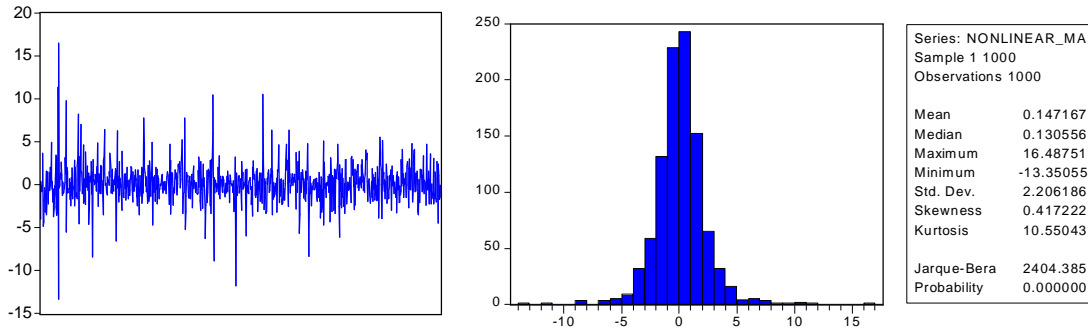
Στις προσομοιώσεις γίνεται χρήση των εξής τριών μη γραμμικών MA μοντέλων :

1.  $x_t = e_t + a e_{t-1} e_{t-2}$ ,  $e_t \sim \text{NIID}(0,1)$ ,  $a = 2$
2.  $x_t = e_t + a e_{t-1} e_{t-3}$ ,  $e_t \sim \text{NIID}(0,1)$ ,  $a = 1$
3.  $x_t = e_t + a e_{t-1} e_{t-2}$ ,  $e_t \sim \text{AR}(1) : e_t = \rho e_{t-1} + u_t$ ,  $u_t \sim \text{NIID}(0,1)$   
 $a = 2, \rho = -0,3$

και καλούνται μοντέλα A, B και Γ αντίστοιχα. Παρουσιάζονται παρακάτω οι ιδιότητές τους και από μία τυπική πραγματοποίηση.



**A.**  $x_t = e_t + 2e_{t-1} e_{t-2}, \quad e_t \sim \text{NIID}(0,1)$



Οι θεωρητικές ροπές του πρώτου μη γραμμικού MA μοντέλου είναι οι εξής:

$$E(x_{t+s} | F_t) = 0, \quad s \geq 2$$

$$E(x_{t+1} | F_t) = a e_t e_{t-1}$$

$$E(x_t) = 0 \quad \text{για κάθε } t$$

$$E(x_{t+s}^2 | F_t) = 1 + a^2, \quad s \geq 3$$

$$E(x_{t+2}^2 | F_t) = 1 + a^2 e_t^2$$

$$E(x_{t+1}^2 | F_t) = 1 + a^2 e_t^2 e_{t-1}^2$$

$$E(x_t^2) = 1 + a^2 \quad \text{για κάθε } t$$

$$\text{Var}(x_{t+s} | F_t) = 1 + a^2, \quad s \geq 3$$

$$\text{Var}(x_{t+2} | F_t) = 1 + a^2 e_t^2$$

$$\text{Var}(x_{t+1} | F_t) = 1 \quad \text{για κάθε } t \quad (\text{ομοσκεδαστικότητα})$$

$$\text{Var}(x_t) = 1 + a^2$$

$$E(x_t \cdot x_{t+s}) = 0 \quad \text{για κάθε } t \neq s$$

$$\text{Cov}(x_t, x_{t+s}) = 0 \quad \text{για κάθε } t \neq s \quad (\text{γραμμική ανεξαρτησία})$$

Στο εξής θεωρείται ότι  $E(e^3) = 0, \eta_4 \equiv E(e^4)$

$$E(x_t^2 \cdot x_{t+s}^2) = (1 + a^2)^2, \quad s \geq 3$$

$$E(x_t^2 \cdot x_{t+2}^2) = 1 + a^2 + a^2 \eta_4$$

$$E(x_t^2 \cdot x_{t+1}^2) = (1 + a^2) \cdot (1 + a^2 \cdot \eta_4) + 2a \cdot \eta_4^2$$

$$\text{Cov}(x_t^2, x_{t+s}^2) = 0, \quad s \geq 3$$

$$\text{Cov}(x_t^2, x_{t+2}^2) = a^2 \cdot (\eta_4 - 1 - a^2)$$

$$\text{Cov}(x_t^2, x_{t+1}^2) = 2a \cdot \eta_4^2 + a^2 \cdot (1 + a^2) \cdot (\eta_4 - 1)$$

$$E(x_t^4) = \eta_4 + 6a^2 + a^4 \eta_4^2$$

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω, η σειρά  $\{x_t\}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητη αλλά όχι και γενικώς ανεξάρτητη το οποίο υποδηλώνει ο δεσμευμένος μέσος. Η τέταρτη ροπή υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχει η αντίστοιχη ροπή της δομικής ανελίξης  $\{e_t\}$  και γενικότερα η υπόθεση ύπαρξης ροπών  $r$  - τάξης της  $\{x_t\}$  ισοδυναμεί με την υπόθεση ύπαρξης των αντίστοιχων ροπών της  $\{e_t\}$ .

Εφαρμόστηκε το BDS test στις αρχικές τιμές των ανελίξεων αυτών και το αποτέλεσμα ήταν η συντριπτική απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης :

Μέγεθος δείγματος	250	500	1000
Ποσοστό απόρριψης $H_0$ (IID)			
<b>Διάσταση Εμβύθισης</b>	<b>Αρχική σειρά</b>		
m = 2	<b>99,8 %</b>	<b>100 %</b>	<b>100 %</b>
m = 3	<b>100 %</b>	<b>100 %</b>	<b>100 %</b>
m = 4	<b>99,8 %</b>	<b>100 %</b>	<b>100 %</b>
m = 5	<b>99,2 %</b>	<b>99,95 %</b>	<b>100 %</b>
m = 6	<b>98 %</b>	<b>99,95 %</b>	<b>100 %</b>
<b>Κανονικοποιημένα κατάλοιπα</b>			
m = 2	<b>9 %</b>	<b>19 %</b>	<b>36 %</b>
m = 3	<b>18 %</b>	<b>40 %</b>	<b>75 %</b>
m = 4	<b>19 %</b>	<b>42 %</b>	<b>75 %</b>
m = 5	<b>20 %</b>	<b>40 %</b>	<b>71 %</b>
m = 6	<b>20 %</b>	<b>37 %</b>	<b>67 %</b>
αριθμός επαναλήψεων : 2000			

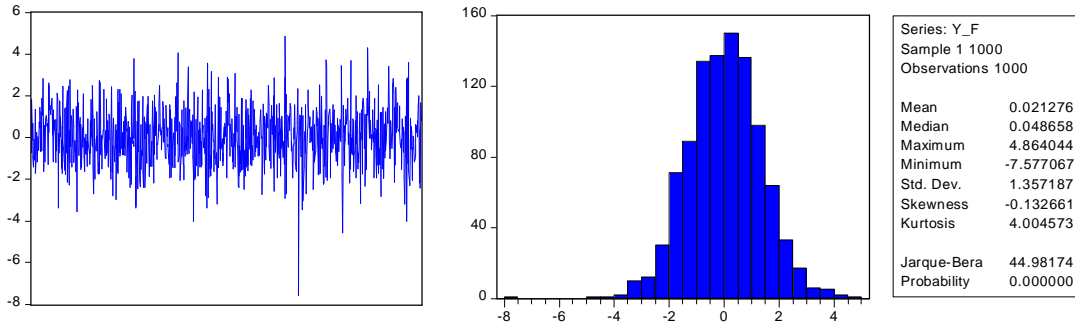
Στο δεύτερο τμήμα του παραπάνω πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου αυτού πάνω στο εκτιμημένα κανονικοποιημένα κατάλοιπα, έπειτα από το φιλτράρισμα με ARCH(1) μοντέλο. Ειδικά για μεγάλο δείγμα παρατηρήσεων, το BDS test φαίνεται να απορρίπτει αρκετά συχνά την μηδενική υπόθεση για τα κατάλοιπα, υποδηλώνοντας κατ' αυτόν τον τρόπο ότι υπάρχει δομή ανεκμετάλλευτη προς μοντελοποίηση. Οι εκτιμημένες παράμετροι που λαμβάνονται από το ARCH(1) μοντέλο είναι σχεδόν πάντα στατιστικά σημαντικές ενώ ταυτόχρονα άλλα GARCH και ARCH μοντέλα δεν παρέχουν στατιστικά σημαντικούς συντελεστές.

Μέγεθος δείγματος	Εκτιμημένες παράμετροι		Στατιστικά σημαντικοί συντελεστές
	$w$	$a$	
250	<b>2,88</b>	<b>0,48</b>	<b>97 %</b>
500	<b>2,92</b>	<b>0,47</b>	<b>100 %</b>
1000	<b>2,89</b>	<b>0,47</b>	<b>100 %</b>
αριθμός επαναλήψεων : 2000			

Αυτό που αξίζει να αναφερθεί ως πόρισμα είναι ότι, παρ' όλο που ο έλεγχος BDS έχει κάποια ισχύ πάνω στα κανονικοποιημένα κατάλοιπα του εκτιμημένου μοντέλου ARCH(1), υπάρχει σαφώς η πολύ πιθανή περίπτωση να δεχτούμε ως περιγραφέα αυτά τα μοντέλα την στιγμή που το πραγματικό DGP είναι πολύ διαφορετικό.

Όσον αφορά στις προβλέψεις, φαίνεται καθαρά η διαφορά των δύο μοντέλων (ARCH(1) και του A) αφού για κάθε ορίζοντα πρόβλεψης το λογαριθμικό μέσο σφάλμα όταν το DGP είναι όντως ARCH είναι μικρότερο από το λογαριθμικό μέσο σφάλμα όταν το DGP είναι το μοντέλο A. Ωστόσο, ακόμα και στην δεύτερη περίπτωση παρατηρείται ότι έχει κάποια προβλεπτική ικανότητα αλλά σαφώς μικρότερη και για πιο βραχυχρόνιες προβλέψεις (βλ. παράρτημα A).

**B.**  $x_t = e_t + e_{t-1} e_{t-3}, \quad e_t \sim \text{NIID}(0,1)$



Οι θεωρητικές ροπές του δεύτερου μη γραμμικού MA μοντέλου έχουν ως εξής:

$$E(x_{t+s} | F_t) = 0, \quad s \geq 2$$

$$E(x_{t+1} | F_t) = a e_t e_{t-2}$$

$$E(x_t) = 0 \quad \text{για κάθε } t$$

$$E(x_{t+s}^2 | F_t) = 1 + a^2, \quad s \geq 4$$

$$E(x_{t+3}^2 | F_t) = 1 + a^2 e_t^2$$

$$E(x_{t+2}^2 | F_t) = 1 + a^2 e_{t-1}^2$$

$$E(x_{t+1}^2 | F_t) = 1 + a^2 e_t^2 e_{t-2}^2$$

$$E(x_t^2) = 1 + a^2 \quad \text{για κάθε } t$$

$$\text{Var}(x_{t+s} | F_t) = 1 + a^2, \quad s \geq 4$$

$$\text{Var}(x_{t+3} | F_t) = 1 + a^2 e_t^2$$

$$\text{Var}(x_{t+2} | F_t) = 1 + a^2 e_{t-1}^2$$

$$\text{Var}(x_{t+1} | F_t) = 1 \quad \text{για κάθε } t \quad (\text{ομοσκεδαστικότητα})$$

$$\text{Var}(x_t) = 1 + a^2$$

$$E(x_t \cdot x_{t+s}) = 0 \quad \text{για κάθε } t \neq s$$

$$\text{Cov}(x_t, x_{t+s}) = 0 \quad \text{για κάθε } t \neq s \quad (\text{γραμμική ανεξαρτησία})$$

Στο εξής θεωρείται ότι  $E(e_t^3) = 0, \eta_4 \equiv E(e_t^4)$

$$E(x_t^2 \cdot x_{t+s}^2) = (1 + a^2)^2, \quad s \geq 4$$

$$E(x_t^2 \cdot x_{t+3}^2) = 1 + a^2 + a^2 \cdot (a^2 + \eta_4)$$

$$E(x_t^2 \cdot x_{t+2}^2) = 1 + a^2 + a^2 \cdot (1 + a^2 \eta_4)$$

$$E(x_t^2 \cdot x_{t+1}^2) = 1 + a^2 + a^2 \cdot (a^2 + \eta_4)$$

$$\text{Cov}(x_t^2, x_{t+s}^2) = 0, \quad s \geq 4$$

$$\text{Cov}(x_t^2, x_{t+3}^2) = a^2 \cdot (\eta_4 - 1)$$

$$\text{Cov}(x_t^2, x_{t+2}^2) = a^4 \cdot (\eta_4 - 1)$$

$$\text{Cov}(x_t^2, x_{t+1}^2) = a^2 \cdot (\eta_4 - 1)$$

$$E(x_t^4) = \eta_4 + 6a^2 + a^4 \eta_4^2$$

Όπως γίνεται φανερό από τα παραπάνω, υπάρχουν πολλές ομοιότητες με το προηγούμενο μη γραμμικό MA και η βασική τους διαφορά είναι ότι η γραμμική εξάρτηση στην τετραγωνική σειρά  $\{x_t^2\}$  είναι πιο «βαθιά», φτάνοντας ως και το τρίτο lag αντί για το δεύτερο στο πρώτο μοντέλο. Η σειρά  $\{x_t\}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητη αλλά όχι και γενικώς ανεξάρτητη το οποίο υποδηλώνει ο δεσμευμένος μέσος. Η τέταρτη ροπή υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχει η αντίστοιχη ροπή της δομικής

ανέλιξης  $\{e_t\}$  και γενικότερα η υπόθεση ύπαρξης ροπών  $r$  – τάξης της  $\{x_t\}$  ισοδυναμεί με την υπόθεση ύπαρξης των αντίστοιχων ροπών της  $\{e_t\}$ .

Εφαρμόστηκε το BDS test στις αρχικές τιμές των ανελιξέων αυτών και το αποτέλεσμα ήταν η συντριπτική απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης στις περιπτώσεις μεγέθους δείγματος 500 και 1000 :

Μέγεθος δείγματος	250	500	1000
	Ποσοστό απόρριψης $H_0$ (IID)		
<b>Διάσταση Εμβύθισης</b>	<b>Αρχική σειρά</b>		
m = 2	76 %	96 %	99,95 %
m = 3	83 %	98 %	99,95 %
m = 4	92 %	99,9 %	100 %
m = 5	94 %	99,95 %	100 %
m = 6	94 %	99,95 %	100 %
	<b>Κανονικοποιημένα κατάλοιπα</b>		
m = 2	1 %	1 %	2 %
m = 3	1 %	2 %	4 %
m = 4	1 %	1 %	0,2 %
m = 5	3 %	2 %	3 %
m = 6	4 %	3 %	6 %
αριθμός επαναλήψεων : 2000			

Στο δεύτερο τμήμα του παραπάνω πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου αυτού πάνω στο εκτιμημένα κανονικοποιημένα κατάλοιπα, έπειτα από το φιλτράρισμα με GARCH(1,1) μοντέλο. Αντίθετα με το πρώτο μη γραμμικό MA, ακόμα και για μεγάλο δείγμα παρατηρήσεων, το BDS test φαίνεται να απορρίπτει αρκετά συχνά την μηδενική υπόθεση για τα κατάλοιπα, υποδηλώνοντας κατ' αυτόν τον τρόπο ότι η επιλογή GARCH(1,1) μοντέλου για την μοντελοποίηση της χρονοσειράς αυτής είναι «ικανοποιητική». Οι εκτιμημένες παράμετροι που λαμβάνονται από το GARCH(1,1) μοντέλο είναι σχεδόν πάντα στατιστικά σημαντικές ενώ ταυτόχρονα άλλα GARCH μοντέλα (μεγαλύτερης τάξης) δεν παρέχουν στατιστικά σημαντικούς συντελεστές.

Μέγεθος δείγματος	Εκτιμημένες παράμετροι					
	$w$		$a$		$\beta$	
250	<b>0,63</b>	60%	<b>0,28</b>	84%	<b>0,42</b>	63%
500	<b>0,61</b>	96,5%	<b>0,29</b>	99%	<b>0,43</b>	90,5%
1000	<b>0,6</b>	100%	<b>0,29</b>	100%	<b>0,43</b>	99%
αριθμός επαναλήψεων : 2000						

Το ποσοστό δηλώνει την συχνότητα των στατιστικά σημαντικών συντελεστών

Παρ' όλο που ο έλεγχος BDS δεν είναι σε θέση να διακρίνει κάποια επιπλέον (μη γραμμική) δομή πάνω στα κανονικοποιημένα κατάλοιπα του εκτιμημένου μοντέλου GARCH(1,1), ή καλύτερα το φιλτράρισμα αυτό μετασχηματίζει τα κατάλοιπα με τέτοιο τρόπο ώστε να φαίνονται καθαρά, υπάρχει σαφής διαφορά στους δύο τρόπους παραγωγής χρονοσειρών.

Όπως και στην περίπτωση του A μοντέλου έτσι και εδώ η πρόβλεψη χρήσει GARCH μοντέλου αντί του πραγματικού, παρέχει σαφώς φτωχότερα αποτελέσματα (βλ. παράρτημα Α).

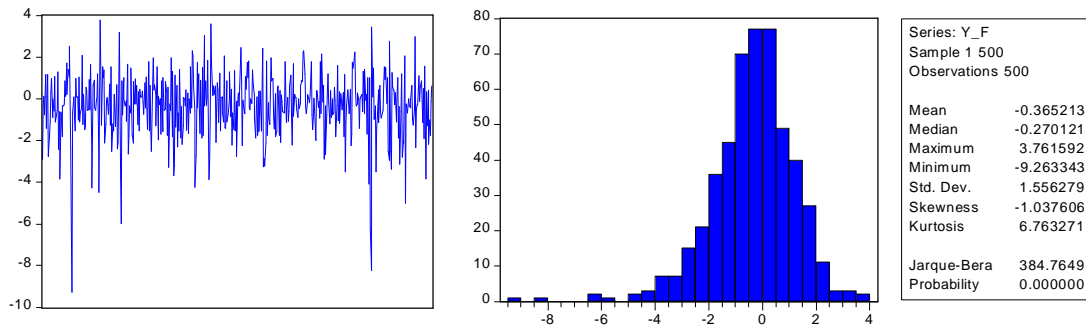
Για αντιπαράθεση με τα αποτελέσματα του ελέγχου BDS πάνω σε GARCH(1,1) σειρά και στα κανονικοποιημένα κατάλοιπά της, παρατίθεται ο παρακάτω συνοπτικός

πίνακας. Φαίνεται καθαρά ότι έχει μεγάλη ισχύ έναντι της μηδενικής υπόθεσης για την αρχική χρονοσειρά αλλά εμφανίζεται oversized στα κανονικοποιημένα κατάλοιπα. Η προσομοίωση έγινε σε GARCH(1,1) με παραμέτρους  $w=1$ ,  $a=0,4$  και  $\beta=0,2$ , για επίπεδο σημαντικότητας 5% και περιελάμβανε 2000 επαναλήψεις.

<b>GARCH(1,1)</b>			
<b>Μέγεθος δείγματος</b>	250	500	1000
Ποσοστό απόρριψης $H_0$ (IID)			
<b>Διάσταση Εμβύθισης</b>	<b>Αρχική σειρά</b>		
m = 2	<b>96,6 %</b>	<b>100 %</b>	<b>100 %</b>
m = 3	<b>97,4 %</b>	<b>99,9 %</b>	<b>100 %</b>
m = 4	<b>96,8 %</b>	<b>100 %</b>	<b>100 %</b>
m = 5	<b>95,5 %</b>	<b>100 %</b>	<b>100 %</b>
m = 6	<b>93 %</b>	<b>99,9 %</b>	<b>100 %</b>
<b>Κανονικοποιημένα κατάλοιπα</b>			
m = 2	<b>0,8 %</b>	<b>0,2 %</b>	<b>0 %</b>
m = 3	<b>0,9 %</b>	<b>0,1 %</b>	<b>0,05 %</b>
m = 4	<b>0,7 %</b>	<b>0,3 %</b>	<b>0,05 %</b>
m = 5	<b>1,4 %</b>	<b>0,5 %</b>	<b>0,05 %</b>
m = 6	<b>1,8 %</b>	<b>0,7 %</b>	<b>0,15 %</b>
αριθμός επαναλήψεων : 2000			

Παρόμοια εικόνα λαμβάνουμε και εδώ όπως στην περίπτωση σειράς ARCH(1) (βλ. σελίδα 27) με την διαφορά ότι το power είναι σαφώς μεγαλύτερο ενώ συγχρόνως το εμπειρικό size αποκλίνει ακόμα περισσότερο από το πραγματικό. Το τελευταίο υποδηλώνει την απόκλιση της ασυμπτωτικής κατανομής του ελέγχου από την θεωρητική  $N(0,1)$ , όπως επισημαίνεται λεπτομερέστερα από τους Brock, Hsieh, LeBaron (1991).

Γ.  $x_t = e_t + 2e_{t-1} e_{t-2}, \quad e_t \sim \text{AR}(1) : e_t = -0,3e_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim \text{NIID}(0,1)$



Μία τυπική πραγματοποίηση του τρίτου μη γραμμικού MA είναι η παραπάνω όπου φαίνεται καθαρά ότι είναι λεπτόκυρτη, όπως και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις. Η βασική διαφορά του σε σχέση με τα προηγούμενα δύο μοντέλα είναι ότι στην αναπαράσταση της σειράς  $\{x_t\}$ , λαμβάνουν μέρος όλοι οι παρελθόντες όροι της αρχικής (δομικής) innovation  $\{u_t\}$  (μέσω της αυτοπαλίνδρομης σειράς  $\{e_t\}$ ). Επιπλέον, παρουσιάζει εξάρτηση στην πρώτη ροπή η οποία όμως δεν μπορεί να προσεγγιστεί από μη μηδενική γραμμική εξάρτηση, όπως και στις δύο πρώτες που είναι γραμμικά ανεξάρτητες στην 1<sup>η</sup> ροπή. Οι συνθήκες ύπαρξης ροπών της  $\{x_t\}$  περιλαμβάνουν την υπόθεση  $|\rho| < 1$  (εδώ ίσο με  $-0,3$ ) καθώς επίσης και την ύπαρξη κάποιων ροπών της  $\{e_t\}$  ή ισοδύναμα της  $\{u_t\}$ . Συγκεκριμένα, για να εξασφαλιστεί η ύπαρξη ροπών της  $\{x_t\}$  τάξεως  $\tau$ , πρέπει να ισχύει  $E(u_t^{2\tau}) < \infty$ , το οποίο στις προσομοιώσεις Monte Carlo τηρείται, δημιουργώντας την  $u_t$  ως NIID(0,1).

Λόγω μακροσκελών τύπων, δεν παρατίθενται οι λεπτομερείς τύποι των πρώτων δεσμευμένων και αδέσμευτων ροπών της σειράς αυτής, ωστόσο σκιαγραφούνται κάποιες βασικές ιδιότητές της. Εν γένει, έχει μη μηδενικό μέσο και παρουσιάζει αυτοσυσχέτιση (μη γραμμική). Για τον λόγο αυτό, στις προσομοιώσεις το φιλτράρισμα γίνεται με GARCH(1,1) μοντέλο, αφού αφαιρεθεί η (γραμμική) συσχέτιση στην πρώτη ροπή.

Επίσης, μία πολύ βασική ιδιότητα (ανεξάρτητα της επιλογής των παραμέτρων  $\alpha$  και  $\rho$ ) είναι ότι  $\text{Var}(x_{t+1} | F_t) = \text{Var}(u_{t+1} | F_t) = \sigma_u^2 (= 1)$  (ομοσκεδαστικότητα) (βλ. Παράρτημα Γ για απόδειξη). Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου BDS πάνω στην αρχική σειρά και στα κανονικοποιημένα κατάλοιπα του εκτιμημένου GARCH(1,1).

Μέγεθος δείγματος	250	500	1000
Ποσοστό απόρριψης $H_0$ (IID)			
Αρχική σειρά			
Διάσταση Εμβύθισης			
m = 2	96 %	99,95 %	100 %
m = 3	99,5 %	100 %	100 %
m = 4	99,5 %	100 %	100 %
m = 5	99,4 %	100 %	100 %
m = 6	99 %	100 %	100 %
Κανονικοποιημένα κατάλοιπα			
m = 2	3 %	3 %	3,6 %
m = 3	15 %	35 %	72 %
m = 4	21 %	46 %	84 %
m = 5	22 %	47 %	85 %
m = 6	21 %	43 %	81 %
αριθμός επαναλήψεων : 2000			

Ο έλεγχος BDS στα κατάλοιπα παρουσιάζει μεγάλη σχετικά ισχύ, μηδαμινή για διάσταση εμπύθισης 2, αλλά ικανοποιητική στις μεγαλύτερες. Όσο το δείγμα αυξάνεται, τόσο καλύτερη η προσαρμογή του GARCH(1,1), υπό την έννοια των στατιστικά σημαντικών συντελεστών, όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα, αλλά συγχρόνως η ισχύς του BDS test αυξάνει κάτι που υποδηλώνει ότι κρύβεται κάποια ανεκμετάλλευτη δομή στα εκτιμημένα κατάλοιπα και επομένως στην πραγματικότητα μάλλον πρόκειται για όχι και τόσο καλή προσέγγιση.

Μέγεθος δείγματος	Εκτιμημένες παράμετροι			
	ar(1)	w	a	β
250	<b>-0,21</b> 73%	<b>0,86</b> 85%	<b>0,36</b> 90%	<b>0,31</b> 48%
500	<b>-0,2</b> 95%	<b>0,84</b> 99%	<b>0,36</b> 99%	<b>0,31</b> 80%
1000	<b>-0,2</b> 99,5%	<b>0,82</b> 100%	<b>0,37</b> 100%	<b>0,32</b> 98%
αριθμός επαναλήψεων : 2000				

Το ποσοστό δηλώνει την συχνότητα των στατιστικά σημαντικών συντελεστών

Την ίδια εικόνα όπως και προηγουμένως λαμβάνουμε και στην περίπτωση αυτή για την προβλεπτική ικανότητα (βλ. παράρτημα Α). Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι αν και  $\text{Var}(x_{t+1} | F_t) = 1$  για κάθε t και για κάθε ένα από τα τρία παραπάνω μοντέλα Α, Β και Γ, η εικόνα που λαμβάνουμε μέσω της εκτίμησης με ARCH και GARCH μοντέλα είναι εντελώς διαφορετική. Συγκεκριμένα, φαίνεται ξεκάθαρα ότι έχοντας όλη την πληροφόρηση μέχρι σήμερα, στην πραγματικότητα η αυριανή διακύμανση που προβλέπεται δεν εξαρτάται από παρελθούσες τιμές (ωστόσο είναι μικρότερη από την αδέσμευτη διακύμανση). Παρ' όλα αυτά, το αντίθετο υποδηλώνουν τα ARCH και GARCH μοντέλα, δείχνοντας ότι οι τιμές του παρελθόντος καθορίζουν την δεσμευμένη διακύμανση, όντας η τελευταία συνάρτηση (μη σταθερή) των πρώτων. Αυτό συμβαίνει επειδή αδυνατούμε να καθορίσουμε το δεσμευμένο μέσο και οι αρχικές σειρές είναι μεν ασυσχέτιστες (γραμμικά ανεξάρτητες) αλλά όχι ανεξάρτητες. Κατά συνέπεια, η πληροφορία που χάνεται προκαλεί την εμφάνιση των χρονοσειρών ως ετεροσκεδαστικές.

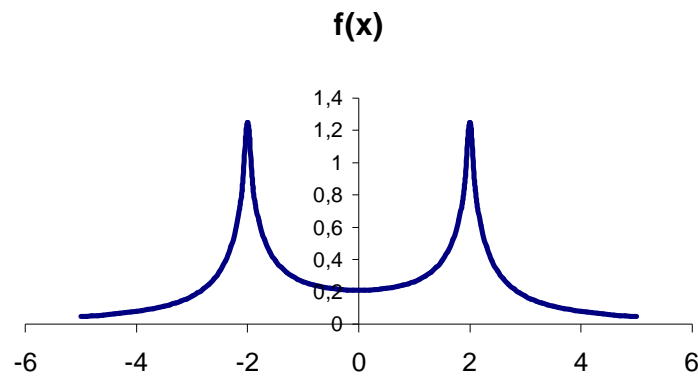
Εδώ, πρέπει να τονιστεί ότι για τον παραπάνω ακριβώς λόγο λαμβάνουμε την εικόνα της πολύ φτωχής προβλεπτικής ικανότητας των ARCH και GARCH μοντέλων για μακρινούς σχετικά ορίζοντες πρόβλεψης.

## 6) Παραγωγή ετεροσκεδαστικότητας χρήσει μοντέλων Park

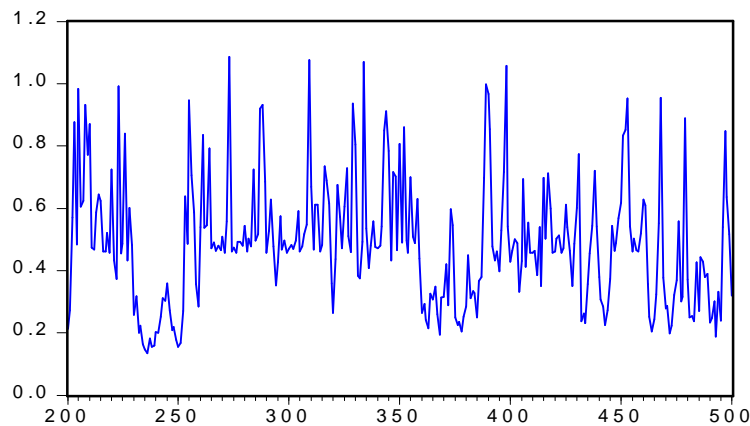
Για τους σκοπούς των προσομοιώσεων, έγινε χρήση μίας SNH σειράς (Stationary Nonlinear Heteroskedasticity) όπως περιγράφηκε ανωτέρω (στο τμήμα 3 του 2<sup>ου</sup> μέρους). Αρχικά παράγεται η στάσιμη AR(1) χρονοσειρά  $\{x_t\}$  η οποία εν συνεχεία φιλτράρεται μέσω μιας μη γραμμικής, συμμετρικής, θετικής συνάρτησης  $f$ . Η εικόνα της  $\{x_t\}$  μέσω της  $f$  είναι η δεσμευμένη διακύμανσης  $\{\sigma_t^2\}$  της υπό μελέτη σειράς  $\{y_t\}$ . Η  $f$  δίνεται από τον εξής τύπο :

$$f(x) = a \cdot (|x^2 - b| + c)^{-1}$$

όπου ως παράμετροι επιλέχθηκαν  $a = 1$ ,  $b = 4$  και  $c = 0,8$  :



και μια τυπική πραγματοποίηση της  $\sigma_t$  είναι η παρακάτω :



Εύκολα αποδεικνύεται ότι η ανέλιξη  $\{y_t\}$ , παραγόμενη κατ' αυτόν τον τρόπο, έχει πεπερασμένη 4<sup>η</sup> ροπή :

$$E(y_t^4) = E(\sigma_t^4) = E[f(x_t)^2]$$

όμως

$$0 < f(x_t)^2 \leq (a/c)^2 \Rightarrow 0 < E[f(x_t)^2] < (a/c)^2$$

και επομένως  $E(y_t^4) < (a/c)^2 < \infty$ .

Στις προσομοιώσεις Monte Carlo, μετά την παραγωγή της σειράς  $\{y_t\}$  κατ' αυτόν τον τρόπο, λαμβάνονταν υπ' όψιν, για την εξαγωγή στατιστικών αποτελεσμάτων, μόνο αυτές των οποίων οι συντελεστές arch και garch ( $a$ ,  $b$  αντίστοιχα) ήταν στατιστικά σημαντικοί. Ο συντελεστής arch εμφανίζεται σχετικά μικρός (της τάξης



του 0,1 για μέγεθος δείγματος 250) και φθίνει όσο αυξάνεται το δείγμα (περίπου 0,05 για μέγεθος δείγματος 1000). Ο συντελεστής garch παραμένει σταθερός κατά μέσο όρο, ανεξάρτητα του μεγέθους δείγματος, ίσος με 0,68 περίπου. Το γεγονός ότι το persistence της δεσμευμένης διακύμανσης είναι σαφώς μεγαλύτερο, ίσως αναμενόταν λόγω της κατασκευής της χρονοσειράς  $\{y_t\}$  με τον τρόπο αυτό, κατά τον οποίο τα τετράγωνα των όρων της δεν λαμβάνουν (τουλάχιστον άμεσα) μέρος στην παραγωγή της δεσμευμένης διακύμανσης.

Το BDS test εφαρμόστηκε τόσο στις αρχικές σειρές όσο και στα κανονικοποιημένα κατάλοιπα. Τα αποτελέσματα έχουν ως εξής :

Μέγεθος δείγματος	250	500	1000
Ποσοστό απόρριψης $H_0$ (IID)			
Διάσταση Εμβύθισης	Αρχική σειρά		
m = 2	28 %	38 %	53 %
m = 3	41 %	51 %	68 %
m = 4	48 %	60 %	76 %
m = 5	53 %	64 %	80 %
m = 6	57 %	67 %	83 %
Κανονικοποιημένα κατάλοιπα			
m = 2	3 %	4 %	7 %
m = 3	3 %	5 %	11 %
m = 4	4 %	7 %	16 %
m = 5	6 %	11 %	22 %
m = 6	9 %	15 %	28 %
αριθμός επαναλήψεων : 2000			

Όσο αυξάνει το δείγμα, ο έλεγχος BDS στα κατάλοιπα απορρίπτει όλο και συχνότερα την μηδενική υπόθεση, ειδικά για τις μεγαλύτερες διαστάσεις εμβύθισης. Όσον αφορά την προβλεπτική ικανότητα των μοντέλων GARCH όταν το πραγματικό DGP είναι το παραπάνω, αντίθετα από τις προηγούμενες περιπτώσεις τρόπων παραγωγής χρονοσειρών, το μέτρο  $MLSE^A$  παρουσιάζεται σταθερά κοντά στο 0 ανεξάρτητα του χρονικού ορίζοντα και μάλιστα μικρότερο του μηδενός. Παρόμοια εικόνα λαμβάνουμε και από το μέτρο  $DMLSE^A$ , με την διαφορά ότι φαίνεται πιο καθαρά η αναποτελεσματικότητα των GARCH μοντέλων για την πρόβλεψη στην περίπτωση αυτή. Και τα δύο μέτρα, ακόμα και για μικρό ορίζοντα μπροστά (μέχρι 5) δίνουν σχεδόν πανομοιότυπη προβλεπτική ικανότητα με αυτήν του ομοσκεδαστικού μοντέλου. Με άλλα λόγια, αν και φαινομενικά ένα μοντέλο GARCH περιγράφει ικανοποιητικά τον αληθινό τρόπο παραγωγής ετεροσκεδαστικότητας, στην πραγματικότητα δεν προσεγγίζει την πραγματική δυναμική του συστήματος (βλ. παράρτημα Α). Συμπερασματικά, πρέπει να τονιστεί ότι στην πραγματικότητα, αν και φαινομενικά όλα συνηγορούν στην επιλογή GARCH για μοντελοποίηση, ούτε εξηγείται ο αληθινός τρόπος παραγωγής ετεροσκεδαστικότητας ούτε – το βασικότερο – βοηθά στην διαδικασία της πρόβλεψης.

## 7) Συμπεράσματα

Ο κύριος άξονας της εργασίας αυτής ήταν η συμπεριφορά των μοντέλων GARCH στην διαδικασία της πρόβλεψης. Έχοντας κατά νου ότι αυτά τα μοντέλα γνώρισαν μεγάλη αποδοχή από την επιστημονική κοινότητα από την στιγμή που προτάθηκαν και αποτελούν τον πλέον διαδεδομένο τρόπο μοντελοποίησης της δεσμευμένης διακύμανσης, θεωρήθηκε ουσιώδης η μελέτη γύρω από την φύση τους. Αυτό δεν περιλαμβάνει, φυσικά, μόνο τα θεωρητικά τους χαρακτηριστικά – τα οποία έχουν εξερευνηθεί συστηματικά και εκτεταμένα μέχρι σήμερα – αλλά και ο τρόπος που ανταποκρίνονται στην «πραγματικότητα». Δηλαδή, από την στιγμή που παρατηρείται η εκτεταμένη χρήση τους στην πράξη, για λόγους κυρίως πρόβλεψης, θα πρέπει να γνωρίζουμε κατά πόσο είμαστε σίγουροι για τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε.

Για το σκοπό αυτό, μελετήθηκαν συγκεκριμένα μοντέλα τα οποία θα μπορούσαν να μοντελοποιηθούν με GARCH μοντέλα, υπό την έννοια ότι παρουσιάζουν ετεροσκεδαστικότητα μεν, καθώς μετά το φιλτράρισμα με τα μοντέλα αυτά δεν έχουμε σαφή εικόνα για την επιτυχία της μοντελοποίησης αυτής. Αυτόματα γεννιέται η έννοια της εγγύτητας, της «απόστασης» μεταξύ δύο τρόπων παραγωγής χρονοσειρών και εν συνεχεία η έννοια του σφάλματος, του κόστους, στην περίπτωση που προσπαθούμε να εκτιμήσουμε τον πραγματικό τρόπο με κάποιο διαφορετικό.

Από τα διαθέσιμα στοιχεία, κάποιος ερευνητής δύναται να αποφανθεί για τον μηχανισμό, το σύνολο των νόμων που κρύβονται στο υπό μελέτη φαινόμενο, που κυβερνά τον τρόπο παραγωγής των χρονοσειρών, αλλά μέσα στο πλαίσιο της προσέγγισης, της γειννίαςης. Η επαλήθευση του μοντέλου αυτού μέσα στο δείγμα είναι σαφώς περιορισμένη εκ φύσεως. Αν επιπλέον ο ερευνητής – μοντελοποιός έχει ως σκοπό την εξαγωγή συμπερασμάτων εκτός του δείγματος, το κόστος της «κακής» προσέγγισης τονίζεται ακόμα περισσότερο.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις παραπάνω παρατηρήσεις, γίνεται προσπάθεια στο 2<sup>ο</sup> μέρος της εργασίας αυτής να επιστήσουμε την προσοχή στην «άλογη» χρήση των GARCH μοντέλων παρουσιάζοντας το κόστος της εφαρμογής τους σε διάφορες περιπτώσεις. Σε συνδυασμό με την ελεγχοσυνάρτηση BDS, ένα πολύ ισχυρό εργαλείο, κληροδότημα της θεωρίας του Χάους, επικεντρωνόμαστε στην εντός δείγματος «επαλήθευση» της εφαρμογής των μοντέλων αυτών. Το κόστος αυτό μετριέται με την ικανότητα πρόβλεψης και υποδηλώνει την καλή ή όχι προσέγγισή μας στο πραγματικό τρόπο παραγωγής των χρονοσειρών.

Πρέπει να τονιστεί ότι η χρήση των συγκεκριμένων εναλλακτικών μοντέλων δεν είχε ως σκοπό την αντιπαράθεσή τους με τα GARCH μοντέλα υπό την έννοια της απόρριψης των τελευταίων. Αντίθετα, ο κύριος γνώμονας ήταν να τονιστεί ένα χαρακτηριστικό τους το οποίο μπορεί να συνοψίσουμε ως εξής: έχουν την ικανότητα να προσαρμόζονται στα δεδομένα, χωρίς ωστόσο να προσεγγίζουν ικανοποιητικά τον πραγματικό μηχανισμό.

Τέλος, το συμπέρασμα αυτό δεν ισχύει φυσικά μόνο για την περίπτωση της ετεροσκεδαστικότητας αλλά μπορεί να γενικευτεί, επιστώντας κατ' αυτόν τον τρόπο την προσοχή των μοντελοποιών στην χρήση των εκτιμημένων μοντέλων για την πρόβλεψη της μελλοντικής συμπεριφοράς και την εξαγωγή συμπερασμάτων.

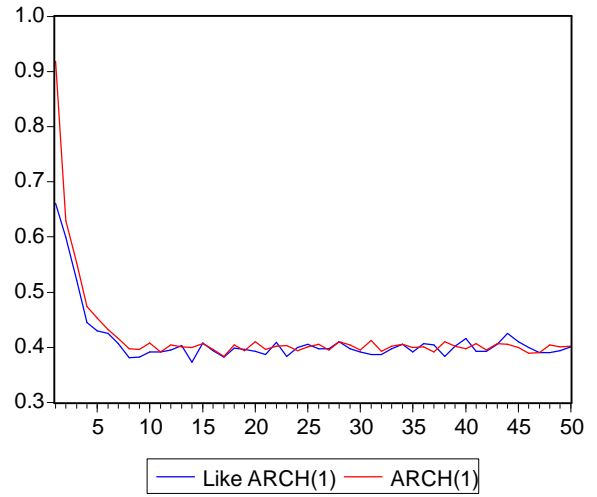
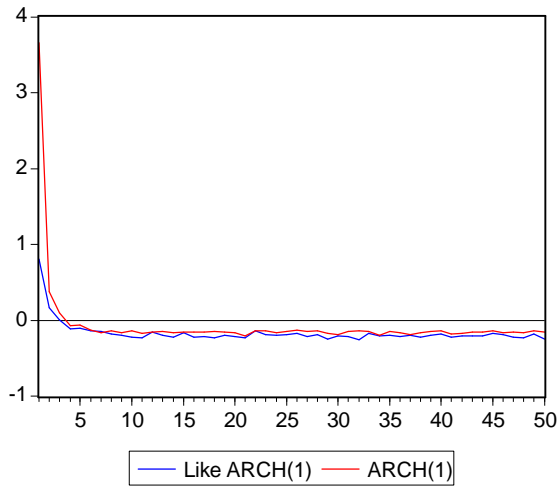
# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

## Like ARCH(1) (σελ. 25)

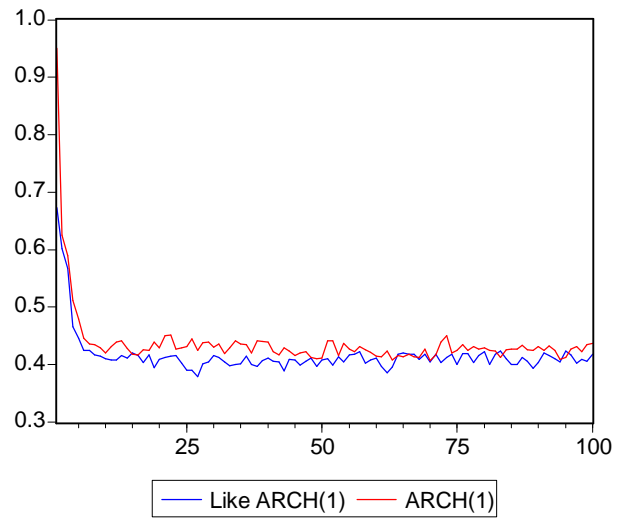
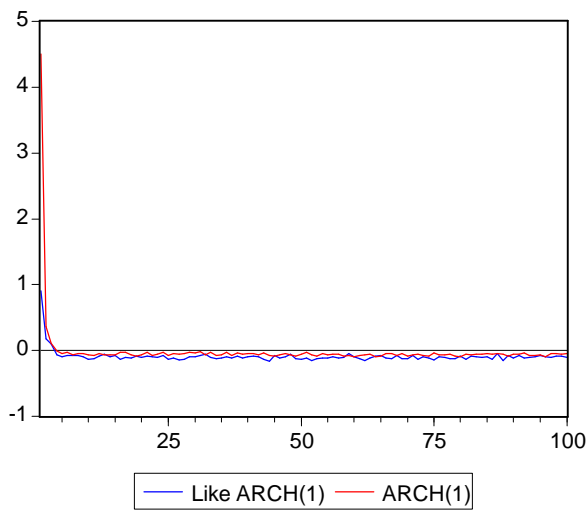
MLSE<sub>t</sub>

DMLSE<sub>t</sub>

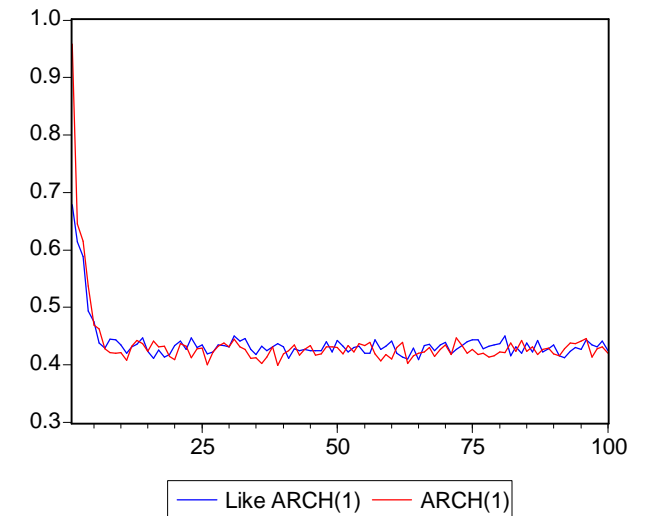
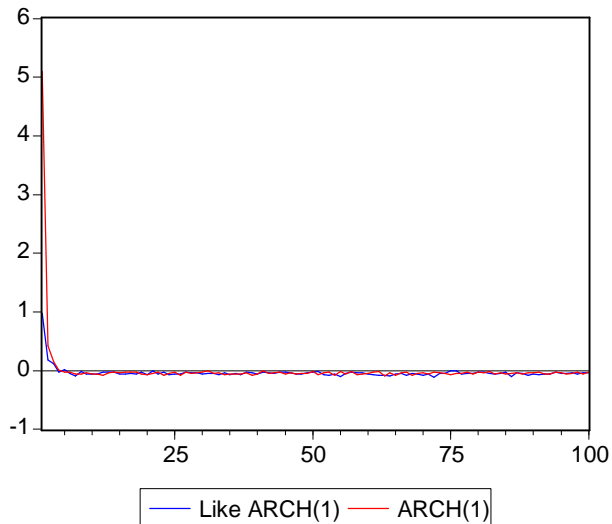
size = 250



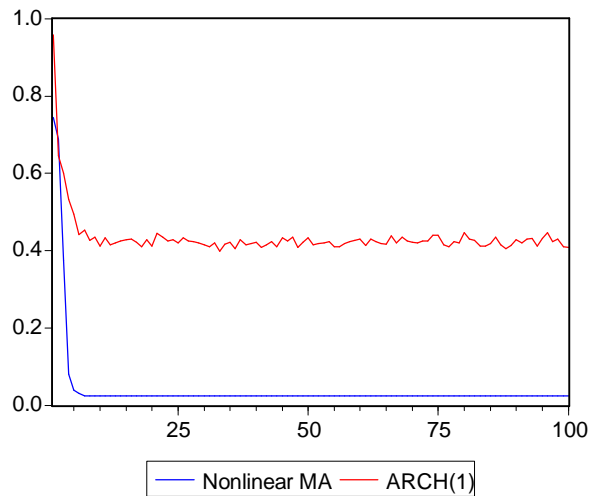
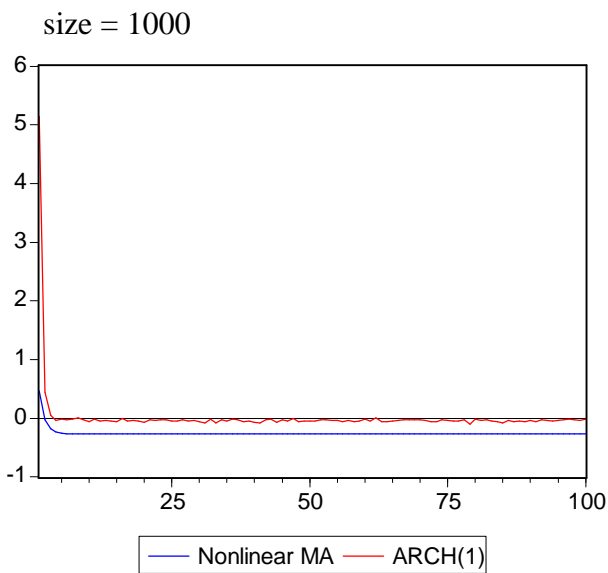
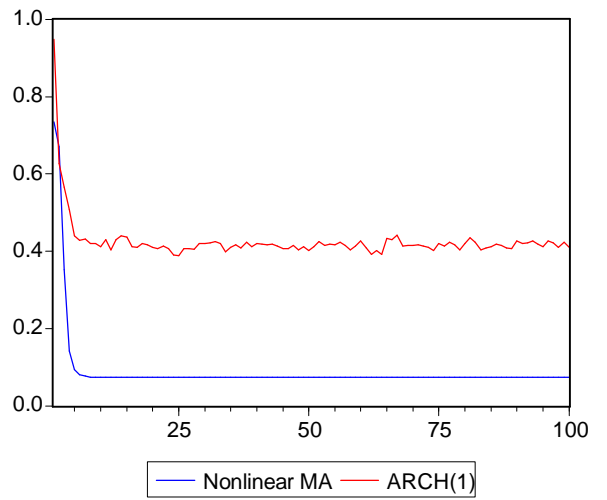
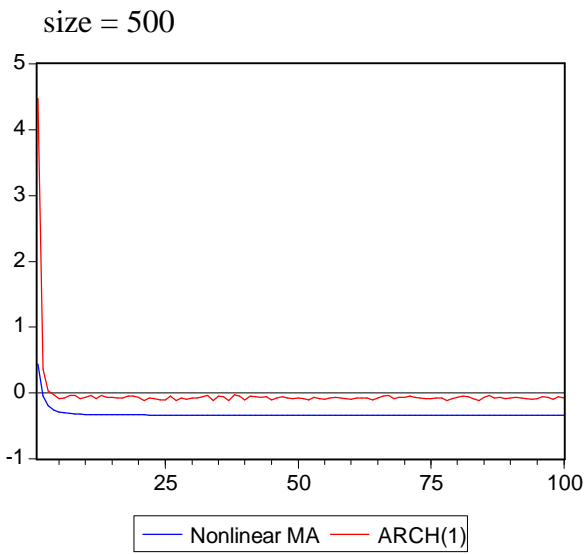
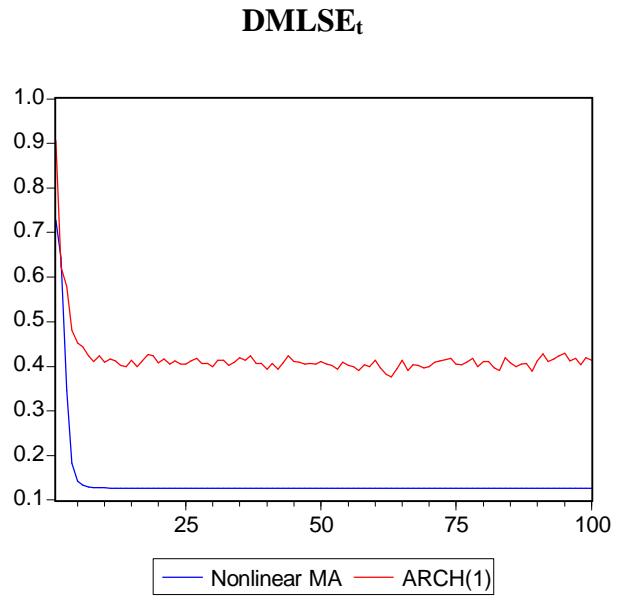
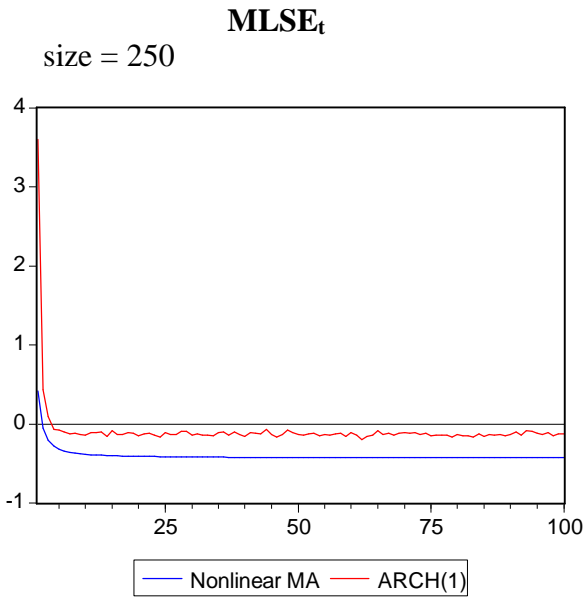
size = 500



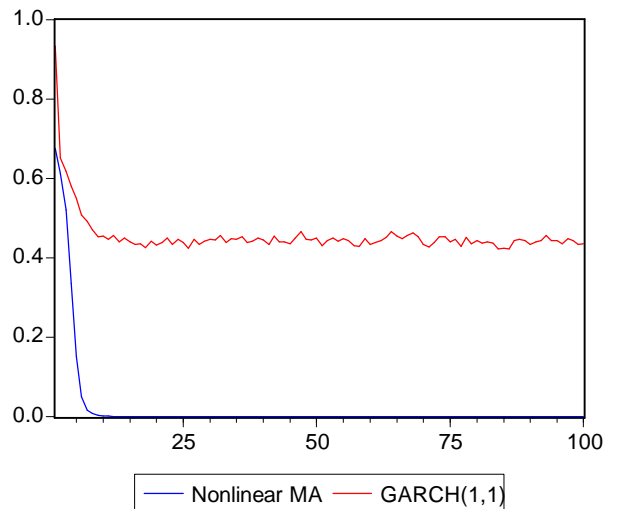
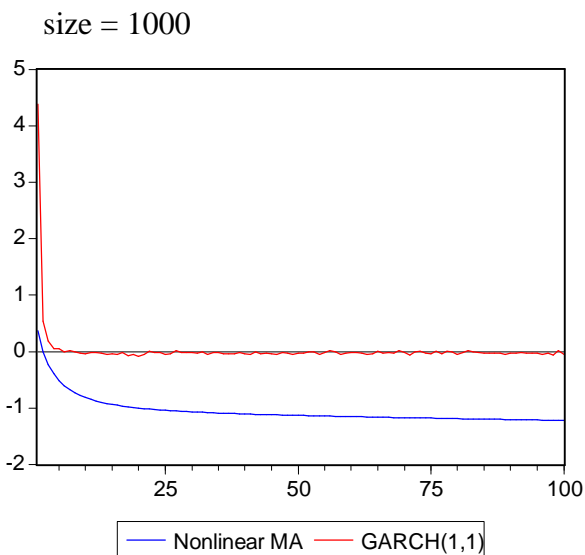
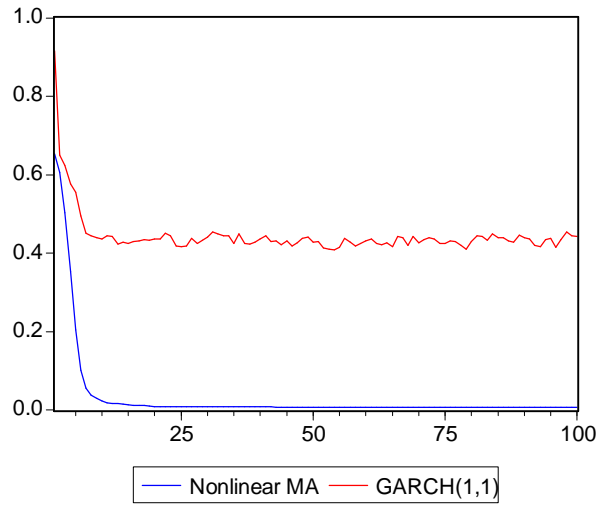
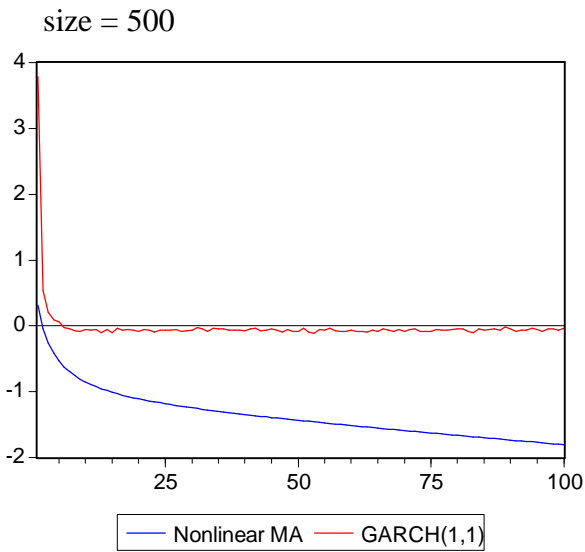
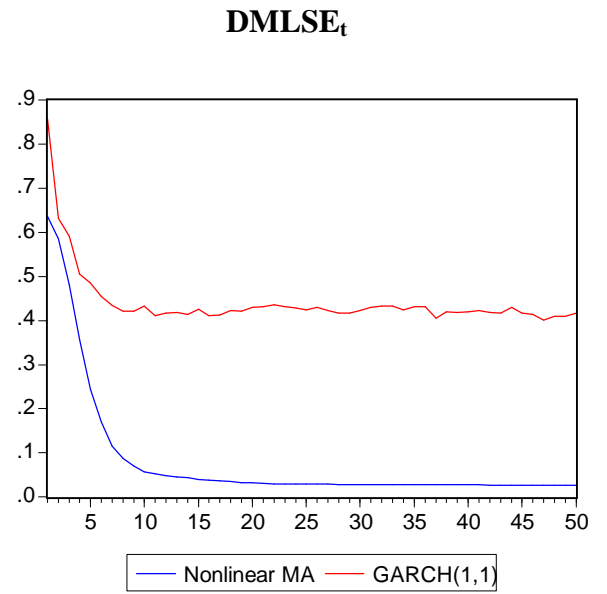
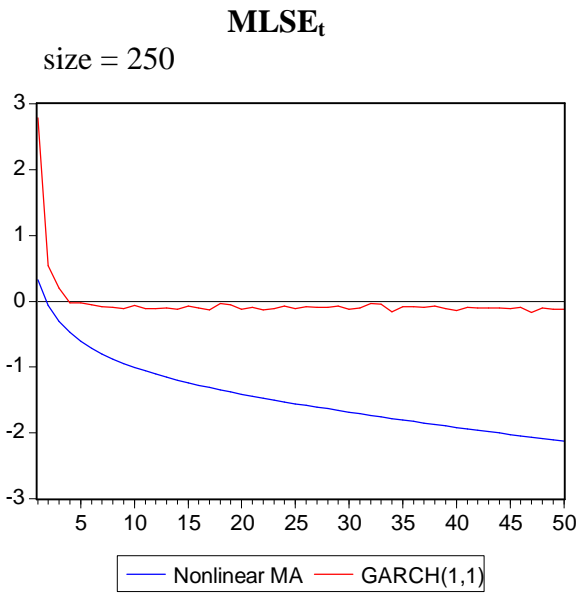
size = 1000



# Nonlinear Moving Average (Μοντέλο Α σελ. 29)



### Nonlinear Moving Average (Μοντέλο Β σελ. 31)

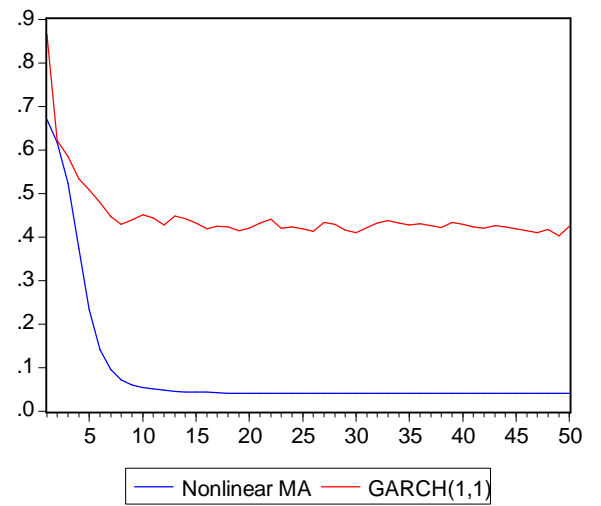
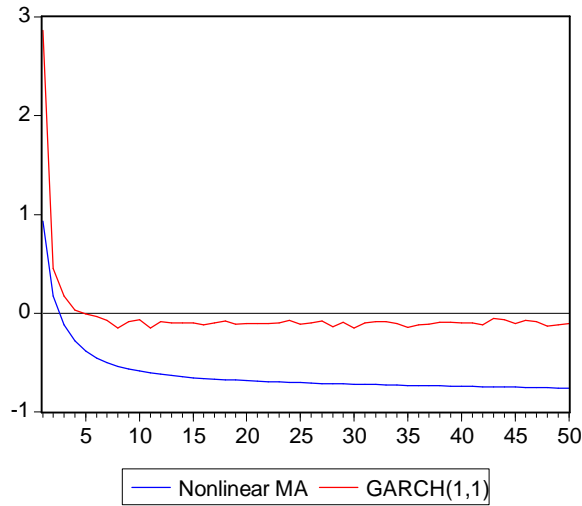


**Nonlinear Moving Average with correlated innovation**  
(Μοντέλο Γ σελ. 34)

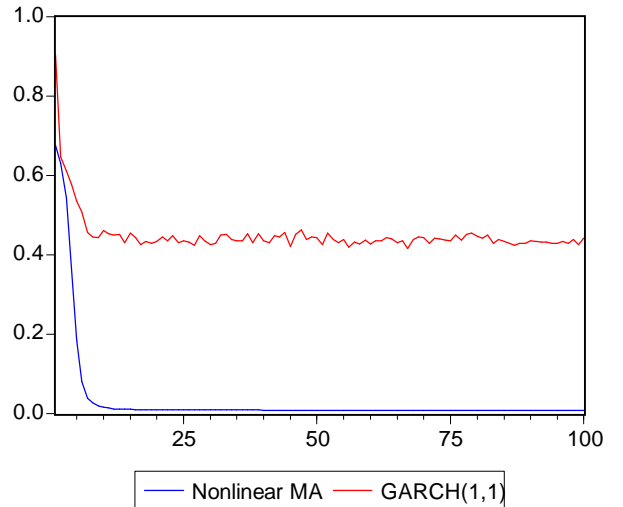
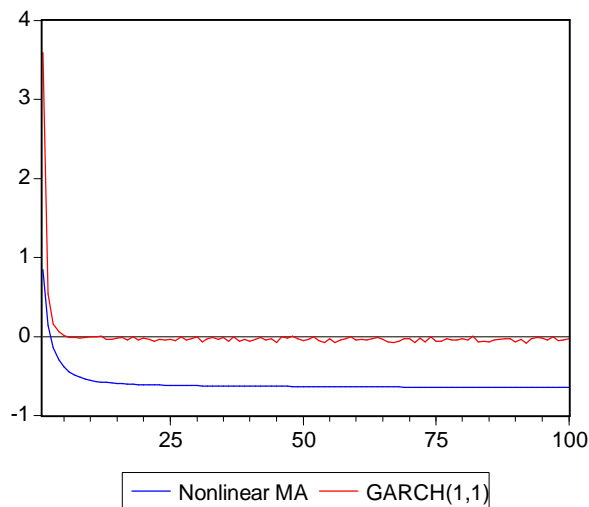
$MLSE_t$

$DMLSE_t$

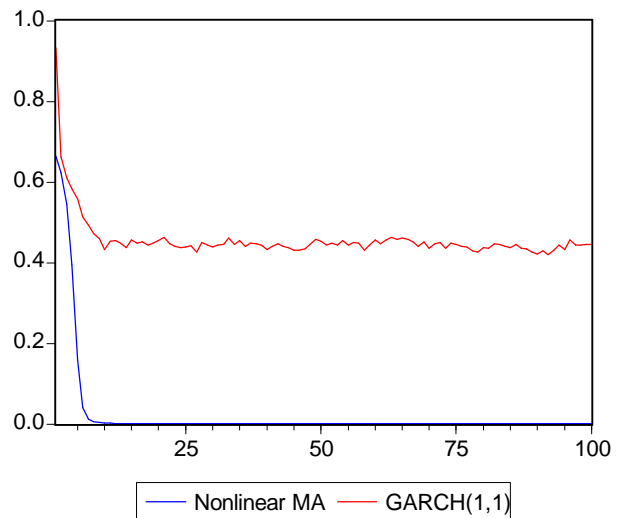
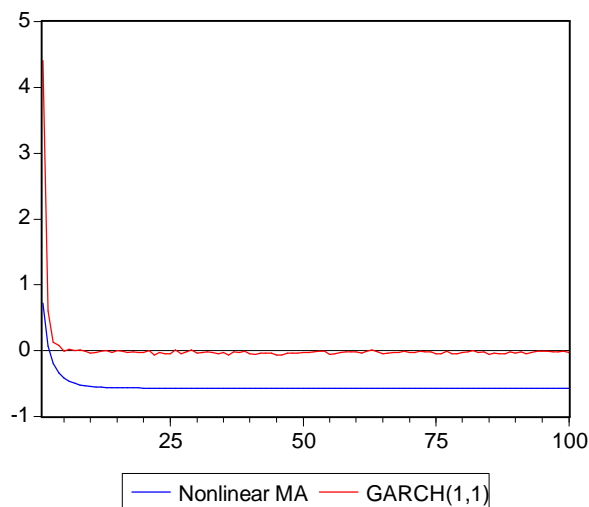
size = 250



size = 500



size = 1000

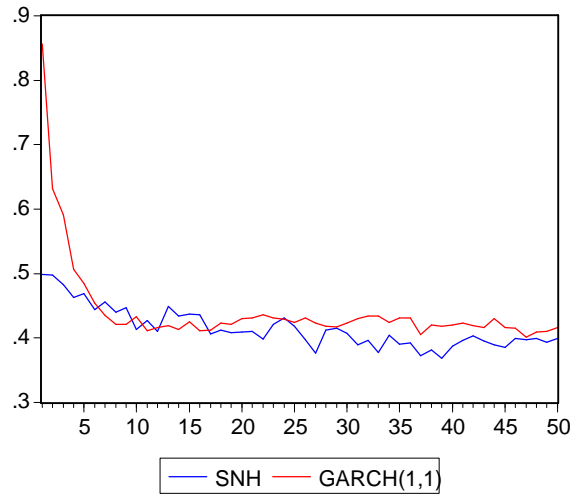
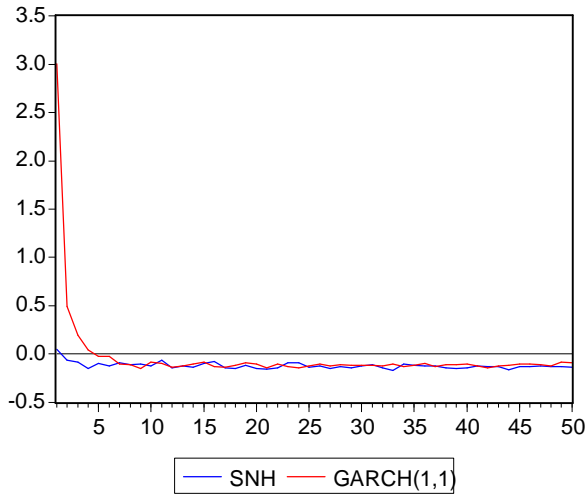


**Stationary Nonlinear Heteroskedasticity Model  
(Park σελ. 36)**

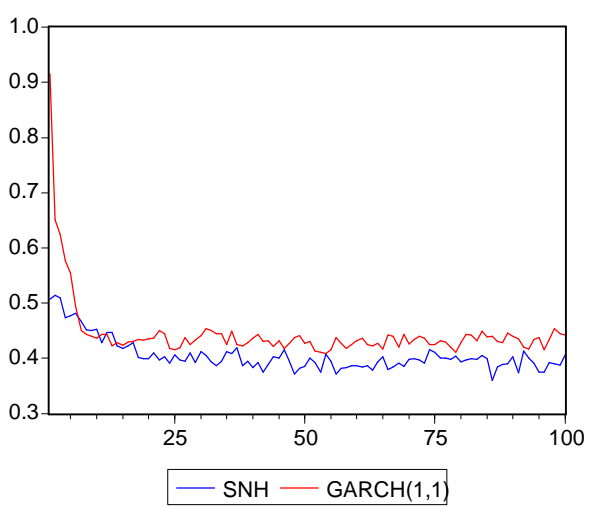
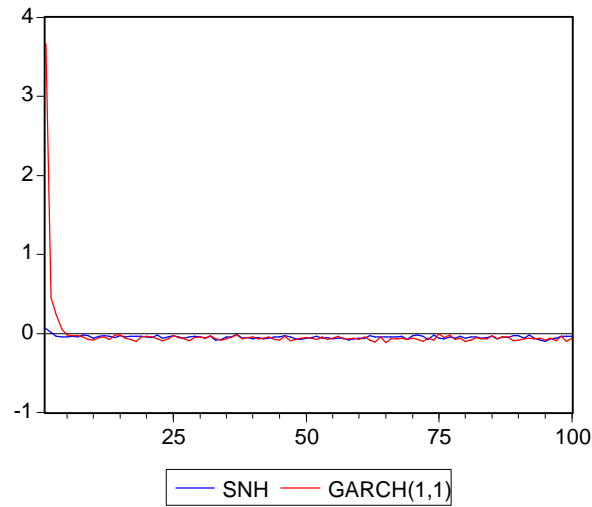
**MLSE<sub>t</sub>**

**DMLSE<sub>t</sub>**

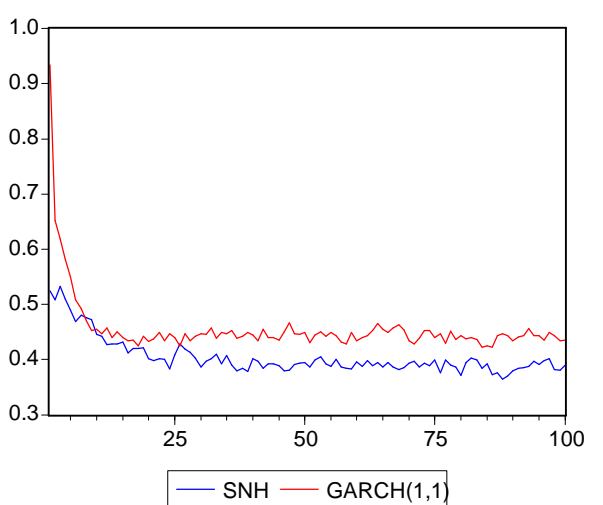
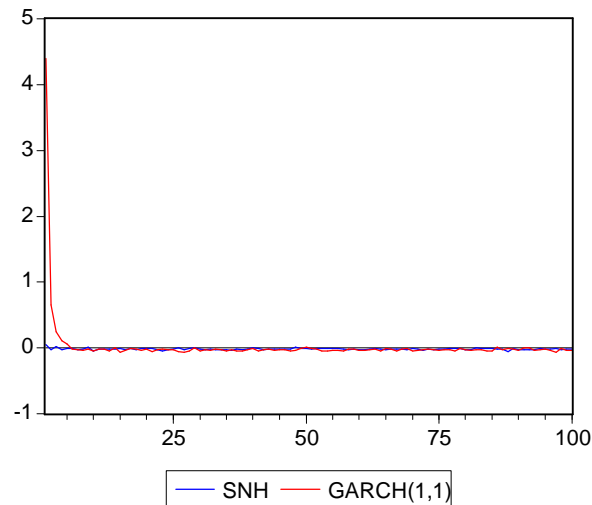
size = 250



size = 500



size = 1000

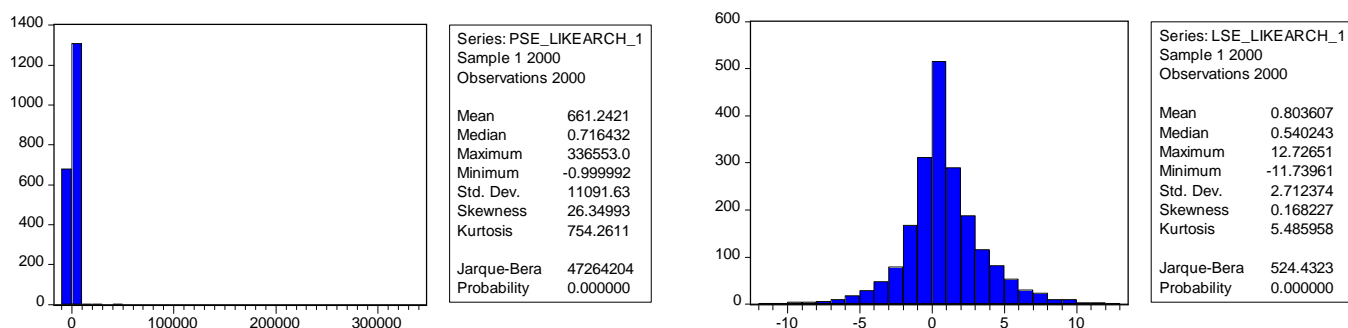


## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

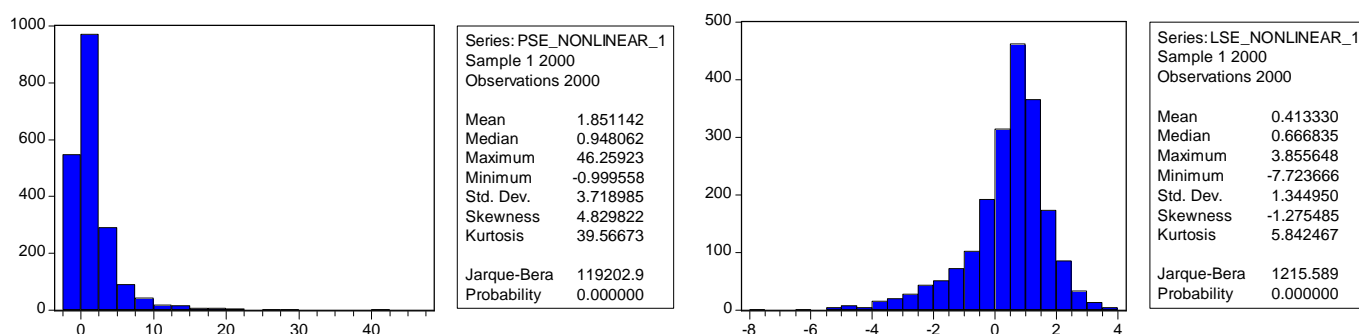
### Σύγκριση των δύο μέτρων : $MPSE_t$ και $MLSE_t$

(Εδώ παρατίθενται ενδεικτικά μόνο στην περίπτωση  $t=1$  αφού και για τους υπόλοιπους ορίζοντες πρόβλεψης έχουμε την ίδια εικόνα). Φαίνεται καθαρά ότι με τον λογαριθμικό μετασχηματισμό ( $2^o$  γράφημα σε κάθε περίπτωση DGP) εξομαλύνεται η ανεπιθύμητη ασυμμετρία.

Η κατανομή του  $PSE_1$  και του  $LSE_1$  αντίστοιχα, στην περίπτωση όπου το DGP είναι το μοντέλο που μοιάζει και θεωρητικά με το ARCH(1) (LikeARCH), όπως περιγράφεται στην σελίδα 25.

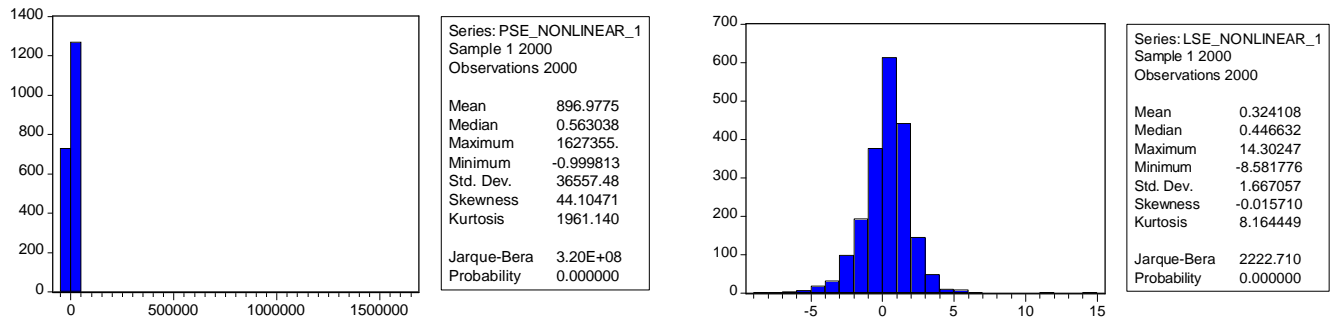


Η κατανομή του  $PSE_1$  και του  $LSE_1$  αντίστοιχα, στην περίπτωση όπου το DGP είναι το μη γραμμικό MA (μοντέλο A, σελίδα 29)

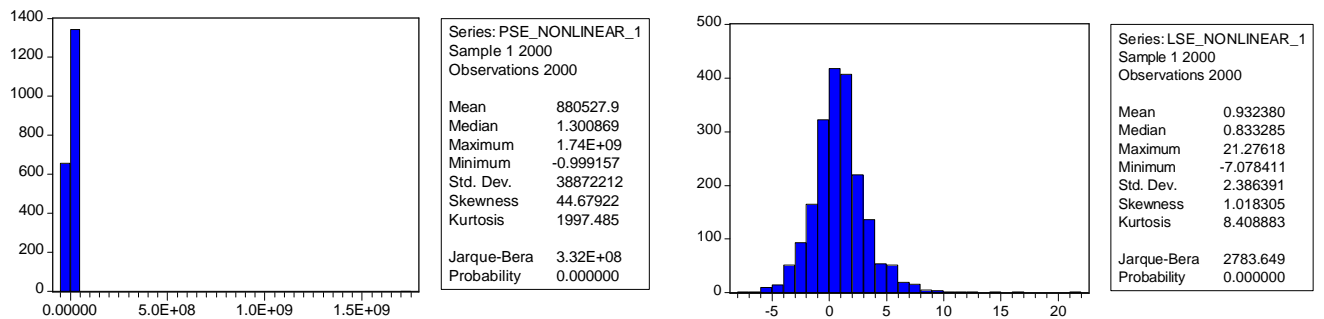




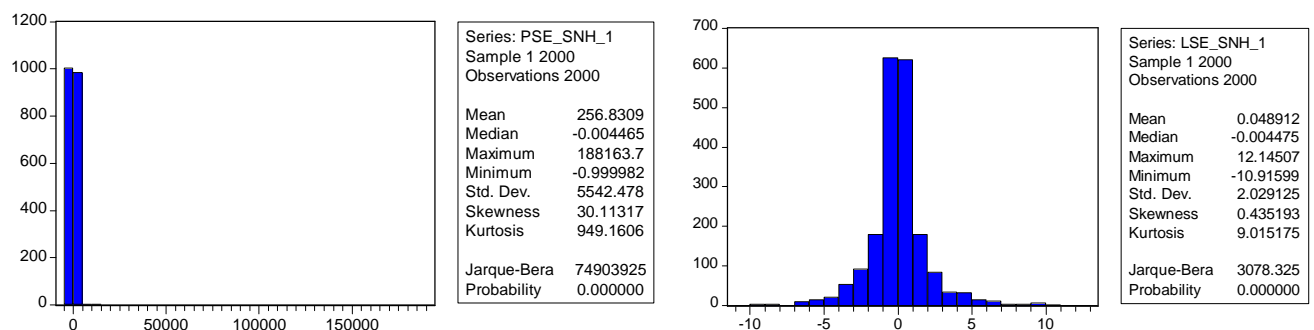
Η κατανομή του  $PSE_1$  και του  $LSE_1$  αντίστοιχα, στην περίπτωση όπου το DGP είναι το μη γραμμικό MA (μοντέλο Β, σελίδα 31)



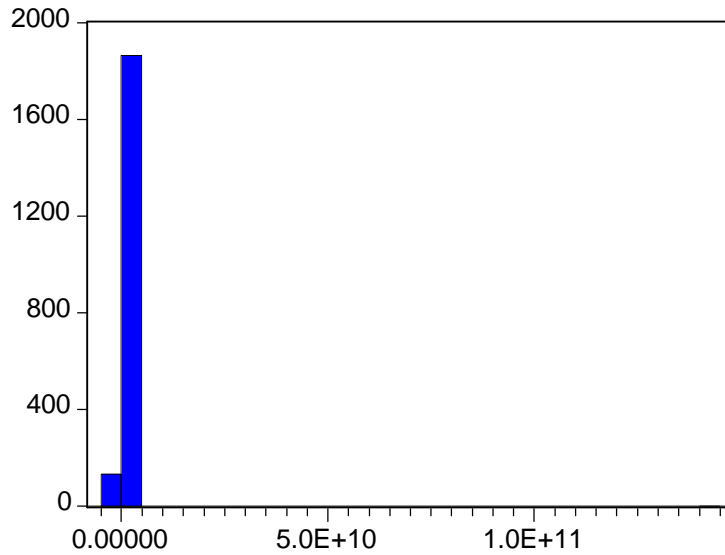
Η κατανομή του  $PSE_1$  και του  $LSE_1$  αντίστοιχα, στην περίπτωση όπου το DGP είναι το μη γραμμικό MA with correlated innovation (μοντέλο Γ, σελίδα 34)



Η κατανομή του  $PSE_1$  και του  $LSE_1$  αντίστοιχα, στην περίπτωση όπου το DGP είναι Stationary Nonlinear Heteroskedasticity Model, όπως περιγράφεται στην σελίδα 36.

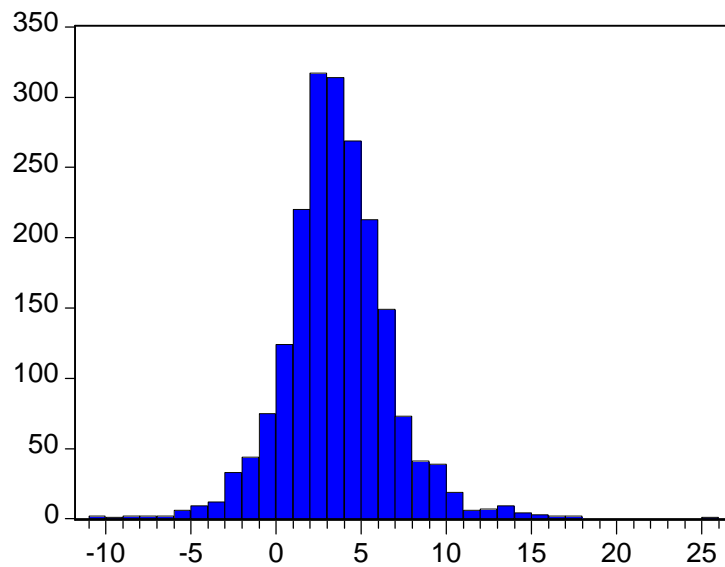


Η κατανομή του  $PSE_1$  και του  $LSE_1$  αντίστοιχα, στην περίπτωση όπου το DGP είναι το GARCH(1,1) με συντελεστές  $w = 1$ ,  $a = 0,4$  και  $b = 0,2$ .



Series: PSE_GARCH_1	
Sample 1 2000	
Observations 2000	
Mean	72008508
Median	30.36037
Maximum	1.44E+11
Minimum	-0.999972
Std. Dev.	3.22E+09
Skewness	44.68780
Kurtosis	1998.000
Jarque-Bera	3.32E+08
Probability	0.000000

Κατανομή του  $LSE_1$  στην ίδια περίπτωση για το DGP.



Series: LSE_GARCH_1	
Sample 1 2000	
Observations 2000	
Mean	3.602525
Median	3.445544
Maximum	25.69219
Minimum	-10.47861
Std. Dev.	3.122781
Skewness	0.364953
Kurtosis	6.321563
Jarque-Bera	963.7949
Probability	0.000000

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Απόδειξη της ισότητας:  $\text{Var}(x_{t+1} | F_t) = \text{Var}(u_{t+1} | F_t) = \sigma_u^2 (= 1)$  για το μη γραμμικό ΜΑ (μοντέλο Γ).

$$\begin{aligned} \text{Var}(x_{t+1} | F_t) &= E_t(x_{t+1}^2) - [E_t(x_{t+1})]^2 = E_t[(e_{t+1} + ae_t e_{t-1})^2] - [E_t(e_{t+1} + ae_t e_{t-1})]^2 \\ &= E_t(e_{t+1}^2 + 2ae_t e_t e_{t-1} + a^2 e_t^2 e_{t-1}^2) - [E_t(e_{t+1}) + aE_t(e_t e_{t-1})]^2 \end{aligned}$$

Επειδή όμως  $e_t$  είναι προσαρμοσμένη στο  $\{F_t\}$  έπεται ότι  $E_t[\varphi(e_{t-s})] = \varphi(e_{t-s})$  για κάθε  $s \geq 0$  :

$$\begin{aligned} &= E_t(e_{t+1}^2) + 2aE_t(e_{t+1} e_t e_{t-1}) + a^2 E_t(e_t^2 e_{t-1}^2) - \\ &\quad - [E_t(e_{t+1})]^2 - 2ae_t e_{t-1} E_t(e_{t+1}) - a^2 e_t^2 e_{t-1}^2 \\ &= E_t(e_{t+1}^2) + 2ae_t e_{t-1} E_t(e_{t+1}) + a^2 e_t^2 e_{t-1}^2 - \\ &\quad - [E_t(e_{t+1})]^2 - 2ae_t e_{t-1} E_t(e_{t+1}) - a^2 e_t^2 e_{t-1}^2 \\ &= E_t(e_{t+1}^2) - [E_t(e_{t+1})]^2 = \text{Var}(e_{t+1} | F_t) \end{aligned}$$

Όμως η  $\{e_t\}$  είναι η AR(1) :  $e_t = \rho e_{t-1} + u_t$ ,  $u_t \sim \text{NIID}(0,1)$ ,  $|\rho| < 1$ . Επομένως έχουμε :

$$\begin{aligned} \text{Var}(e_{t+1} | F_t) &= E_t(e_{t+1}^2) - [E_t(e_{t+1})]^2 \\ &= E_t(\rho^2 e_t^2 + 2\rho e_t u_{t+1} + u_{t+1}^2) - [E_t(\rho e_t + u_{t+1})]^2 \end{aligned}$$

Επειδή  $u_t \sim \text{IID}$  έπεται ότι  $E_t[\varphi(u_{t-s})] = \varphi(u_{t-s})$  για κάθε  $s \geq 0$  καθώς επίσης  $E_t[\varphi(u_{t+s})] = E[\varphi(u_{t+s})]$  για κάθε  $s \geq 1$  (ο δεσμευμένος μέσος ισούται με τον αδέσμευτο) :

$$\begin{aligned} &= \rho^2 e_t^2 + 2\rho e_t E_t(u_{t+1}) + E_t(u_{t+1}^2) - [\rho e_t + E_t(u_{t+1})]^2 \\ &= \rho^2 e_t^2 + 2\rho e_t E(u_{t+1}) + E(u_{t+1}^2) - \rho^2 e_t^2 - 2\rho e_t E(u_{t+1}) - [E(u_{t+1})]^2 \\ &= E(u_{t+1}^2) - [E(u_{t+1})]^2 (= E(u_{t+1}^2)) = \text{Var}(u_{t+1}) \end{aligned}$$

Τελικά :  $\text{Var}(x_{t+1} | F_t) = \text{Var}(u_{t+1}) = \sigma_u^2$

## Βιβλιογραφία

- Auray St., Collard F., Feve P.: Money and External Habit Persistence, A Tale For Chaos. *Economic letters* (2002).
- Barnett W., Serletis A. (1998) : Martingales, Nonlinearity and Chaos.
- Bhaduri A. : Chaotic Implications of the Natural Rate of Unemployment. *Structural Change and Economic Dynamics* (2002).
- Brock, W.A., Hsieh, D.A., LeBaron, B., 1991. *Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*. MIT Press, Cambridge, MA
- Chen P. : The Frisch Model of Business Cycles, A Spurious Doctrine but a Mysterious Success. China Center for Economic Research, Peking University (1999).
- Chen P. : Empirical and Theoretical Evidence of Economic Chaos. *System Dynamics Review* (1988).
- Chiarella C. : The Elements of a Nonlinear Theory of Economic Dynamics, / Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer – Verlag (1990).
- Creedy J., Martin V. : Chaos and Nonlinear Models in Economics – Theory and Applications (1994).
- De Lima P.J.F. Nuisance Parameter Free Properties of Correlation Integral Based Statistics. *Econometric Reviews*, 15(3), 237-259 (1996).
- Denker M. , Keller G.. On U-Statistics and v.Mises' Statistics for Weakly Dependent Processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 64, 504-522 (1983).
- Ford J. : How Random is a coin Toss?, *Physics Today*, 40 – 7, (1983).
- Hamilton, J.D.,. *Time Series Analysis*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1994).
- He C., Teräsvirta T.. Fourth moment structure of the GARCH(p,q) process. *Econometric Theory*, 15, 824-846 (1999).
- Jarsulic M. : Profits, Cycles and Chaos. Working Paper No. 20, Jerome Levy Economics Institute, Bard College.
- Johnson D., McClelland R.. A General Dependence Test and Applications. Discussion paper (1997).
- Lorenz H. – W. : *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion / Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer – Verlag (1989).
- Mouck T. : Capital Markets Research and Real World Complexity : The Emerging Challenge of Chaos Theory (1998). *Accounting, Organization and Society*.
- Ott Ed. : *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press (1993).
- Park Y. Joon : Nonstationary Nonlinear Heteroskedasticity : An Alternative to ARCH. Seoul National University/CIRJE, University of Tokyo (Discussion Papers). July 2000.
- Peters E. : *Chaos and Order in the Capital Markets* (1991)
- Priestley M. B.. *Nonlinear and Nonstationary Time Series Analysis*. Department of Mathematics, University of Manchester, Institute of Science and Technology. Academic Press (1988)
- Upadhyay R. Multiple Attractors and Crisis Route to Chaos in a Model Food – Chain. *Chaos, Solutions and Fractals*. Pergamon (2002).
- Γκέκας Β. : *Κοσμική Τάξη και Χάος*. Εκδόσεις Στάχυ (1995).
- Παπαϊωάννου Γ. : *Χαοτικές Χρονοσειρές, Θεωρία και Πράξη*. Εκδόσεις Leader Books (2000)