

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ
ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Προσεγγίσεις για τον μετασχηματισμό
Laplace του χρόνου χρεοκοπίας

Δημήτρης Μ. Μαλαξιανάκης

Τριμελής Επιτροπή:

Κ. Πολίτης

Μ. Κούτρας

Μ. Μπούτσινας

Πειραιάς,
Σεπτέμβριος 2009

Στη γυναίκα της ζωής μου,
την μητέρα μου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΔΑΛΗ

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω πολύ τους γονείς μου που μου στάθηκαν και με βοήθησαν όχι μόνο με την Διπλωματική εργασία, αλλά και όλα αυτά τα χρόνια που σπουδάζω στο Πανεπιστήμιο Πειραιώς. Η στήριξη τους και η αγάπη τους μου έδιναν δύναμη να προχωράω και να ξεπερνάω ότι με στεναχωρούσε και με απογοήτευε. Επίσης θέλω να ευχαριστήσω τους κοντινούς μου ανθρώπους που έδειξαν υπομονή τις μέρες που ήμουν μακριά τους. Τις θερμές μου ευχαριστίες θα ήθελα να δώσω στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Κ. Πολίτη για την πολύτιμη βοήθεια και τις συμβουλές που μου έδινε. Είναι ένας άνθρωπος που με έκανε να αισθάνομαι άνετα και να νιώθω δημιουργικός καθ' όλη τη διάρκεια συγγραφής της παρούσας εργασίας. Είναι τιμή μου που συνεργαστήκαμε και θα είναι πολύ μεγάλη χαρά για μένα να συνεργαστούμε ξανά στο μέλλον. Τέλος θέλω να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής κ. Μ. Κούτρα και κ. Μ. Μπούτσινα, όχι μόνο για την επίβλεψη της Διπλωματικής εργασίας αλλά και για τη βοήθειά τους τα χρόνια που σπούδαζα στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς.

Δημήτρης Μ. Μαλαξιανάκης

Περίληψη

Μία ειδική περίπτωση της συνάρτησης των *Gerber* και *Shiu* στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων είναι ο μετασχηματισμός *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, T , στο μοντέλο. Μία βασική ιδιότητα της παραπάνω συνάρτησης είναι ότι, όπως και η πιθανότητα χρεοκοπίας, αποτελεί την ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Στην παρούσα εργασία μελετάμε, τόσο από θεωρητική άποψη, αλλά και εμπειρικά με τη χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων, διάφορες προσεγγίσεις για την παραπάνω συνάρτηση. Παραδείγματα τέτοιων προσεγγίσεων, που έχουν χρησιμοποιηθεί για την πιθανότητα χρεοκοπίας, είναι η προσέγγιση του *Tijms* και η προσέγγιση του *DeVylder*. Επίσης κάνουμε χρήση και δύο νέων προσεγγίσεων, την ιδέα των οποίων αναλύουμε διεξοδικά, και στη συνέχεια συγκρίνουμε αυτές τις νέες προσεγγίσεις με τις άλλες δύο που αναφέραμε παραπάνω. Έτσι μπορούμε να εξετάσουμε εάν οι νέες προσεγγίσεις είναι καλύτερες και αν ναι, σε ποιες περιπτώσεις. Για να μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι προσεγγίσεις αυτές, απαιτείται επίσης ο υπολογισμός των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας, ο οποίος γίνεται συνήθως βάσει αναδρομικών τύπων. Κατά συνέπεια, μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε την συμπεριφορά των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας για διάφορες περιπτώσεις και μέσω των ροπών αυτών να δούμε το πόσο καλά λειτουργούν οι νέες προσεγγίσεις για όλες αυτές τις περιπτώσεις της κατανομής των αποζημιώσεων.

Abstract

A special case of the Gerber and Shiu function in the classical model of risk theory is the Laplace transform at the time of ruin, T , in the model. A basic characteristic of the above function is that it can be expressed as the tail of a compound geometric distribution. The present thesis studies several approximations for the above function, in a theoretical as well as an empirical basis with the use of numerical examples. Examples of such approximations, which have been used for the probability of ruin, are Tijms and DeVyllder approximations. Furthermore, we propose two new approximations and we explain in detail their use in the present context. These two new approximations are compared with the ones referred to above. Thus, we study in which cases the new approximations perform better than the existing ones. For the use of these approximations, the calculation of the moments of time of ruin is required. This calculation is usually based on recursive relations. Consequently we study the behaviour of the moments of the time to ruin in order to examine the performance of the new approximations in various cases. For the claim-size distribution in the model.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων	vii
Κατάλογος Πινάκων	xiv
0 Εισαγωγή	1
1 Εισαγωγή στη Θεωρία Χρεοκοπίας.	5
1.1 Το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου	5
1.2 Ανανεωτικές εξισώσεις και πιθανότητα χρεοκοπίας.	15
1.3 Ανανεωτικό μοντέλο	21
1.4 Συνελίξεις και μετασχηματισμοί Laplace	26
1.5 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu	30
2 Οι προσεγγίσεις DeVulder και Tijms για το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας.	43
2.1 Οι προσεγγίσεις DeVulder και Tijms	43
2.2 Οι προσεγγίσεις Tijms και DeVulder για μείξη εκθετικών κατανομών. . . .	47
2.3 Οι προσεγγίσεις DeVulder και Tijms για κατανομή Γάμμα.	66
3 Ροπές σύνθετων κατανομών και ροπές του χρόνου χρεοκοπίας.	86
3.1 Ροπές Σύνθετων Κατανομών	86
3.2 Οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας	92
3.3 Οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας για μείξη τριών εκθετικών κατανομών . .	97
3.4 Οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας για κατανομή Γάμμα	119
4 Νέες προσεγγίσεις για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας.	141
4.1 Οι νέες προσεγγίσεις μέσω αρνητικής διωνυμικής κατανομής και κατανομής Poisson	141
4.2 Οι νέες προσεγγίσεις $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ και $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ για μείξη τριών εκθετικών κατανομών.	156

4.3	Οι νέες προσεγγίσεις $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$ και $\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$ για κατανομή Gamma(3,3). . .	172
5	Επιπλέον αριθμητικά παραδείγματα για την εφαρμογή των νέων προσεγγίσεων.	185
5.1	Οι νέες προσεγγίσεις $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$ και $\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$ για μείξη πέντε εκθετικών κατανομών.	185
5.2	Οι νέες προσεγγίσεις $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$ και $\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$ για κατανομή Gamma(10,10). .	194
A'	Περιγραφή εντολών στο πρόγραμμα Mathematica.	203
B'	Οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας για μείξη πέντε εκθετικών κατανομών.	210
Γ'	Οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας για Γάμμα(10,10) κατανομή.	221
	Βιβλιογραφία	234

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Ανέλιξη πλεονάσματος στο χρόνο.	7
1.2	Γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας.	10
1.3	Γραφική παράσταση της πιθανότητας μη-χρεοκοπίας.	10
1.4	Γραφική παράσταση των <i>ladder heights</i> και των <i>ladder epochs</i>	14
1.5	Γραφική παράσταση της εξίσωσης για το Συντελεστή Προσαρμογής R . . .	20
1.6	Γραφική παράσταση της γενικευμένης εξίσωσης <i>Lundberg</i>	32
2.1	Γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας.	49
2.2	Γραφική παράσταση της προσέγγισης <i>DeVylder</i> για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$	50
2.3	Γραφική παράσταση της προσέγγισης <i>Tijms</i> για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$	51
2.4	Γραφική παράσταση του μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, για $\delta = 0.05$	54
2.5	Γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi_\delta(u) = \bar{K}_\delta(u)$, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών για $\delta = 0.05$	57
2.6	Γραφική παράσταση της προσέγγισης <i>DeVylder</i> για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_\delta(u)$	58
2.7	Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων των πιθανοτήτων $\psi_\delta(u)$, $\psi_{\delta,DV}(u)$, για $\delta = 0.05$	58
2.8	Γραφική παράσταση της προσέγγισης <i>Tijms</i> για την πιθανότητα χρεοκοπίας.	60
2.9	Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων των πιθανοτήτων $\psi_\delta(u)$, $\psi_{\delta,T}(u)$, για $\delta = 0.05$	60
2.10	Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων των πιθανοτήτων $\psi_\delta(u)$, $\psi_{\delta,DV}(u)$, για $\delta = 2$	63
2.11	Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων των πιθανοτήτων $\psi_\delta(u)$, $\psi_{\delta,T}(u)$ για $\delta = 2$	64
2.12	Γραφική παράσταση του ποσοστιαίου σφάλματος για την προσέγγιση $\psi_{\delta,DV}(u)$, για $\delta = 0$, $\delta = 0.05$, $\delta = 2$	65
2.13	Γραφική παράσταση του ποσοστιαίου σφάλματος για την προσέγγιση $\psi_{\delta,T}(u)$, για $\delta = 0$, $\delta = 0.05$, $\delta = 2$	66

2.14	Γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας.	68
2.15	Γραφική παράσταση της προσέγγισης <i>DeVylder</i> για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$	69
2.16	Γραφική παράσταση της προσέγγισης <i>Tijms</i> για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$	70
2.17	Γραφική παράσταση του μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, όταν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι $Ga(3, 3)$ και $\delta = 0.05$	74
2.18	Γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi_\delta(u) = \bar{K}_\delta(u)$, για $Gamma(3, 3)$ κατανομή και για $\delta = 0.05$	76
2.19	Γραφική παράσταση της προσέγγισης <i>DeVylder</i> για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_\delta(u)$	77
2.20	Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων των πιθανοτήτων $\psi_\delta(u)$, $\psi_{\delta,DV}(u)$, για $\delta = 0.05$	77
2.21	Γραφική παράσταση της προσέγγισης του <i>Tijms</i> για την πιθανότητα χρεοκοπίας.	79
2.22	Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων των πιθανοτήτων $\psi_\delta(u)$, $\psi_{\delta,T}(u)$, για $\delta = 0.05$	79
2.23	Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων των πιθανοτήτων $\psi_\delta(u)$, $\psi_{\delta,DV}(u)$, για $\delta = 2$	82
2.24	Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων των πιθανοτήτων $\psi_\delta(u)$, $\psi_{\delta,T}(u)$ για $\delta = 2$	83
2.25	Γραφική παράσταση του ποσοστιαίου σφάλματος για την προσέγγιση $\psi_{\delta,DV}(u)$, για $\delta = 0$, $\delta = 0.05$, $\delta = 2$	84
2.26	Γραφική παράσταση του ποσοστιαίου σφάλματος για την προσέγγιση $\psi_{\delta,T}(u)$, για $\delta = 0$, $\delta = 0.05$, $\delta = 2$	84
3.1	Γραφική παράσταση της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = \frac{7}{11}$	99
3.2	Γραφική παράσταση της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = \frac{7}{11}$	99
3.3	Γραφική παράσταση της δεύτερης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = \frac{7}{11}$	101
3.4	Γραφική παράσταση της δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = \frac{7}{11}$	102
3.5	Γραφική παράσταση της τυπικής απόκλισης του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας T_c , για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 7/11$	103
3.6	Γραφική παράσταση της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 0.145455$	105
3.7	Γραφική παράσταση της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 0.145455$	106

3.8	Γραφική παράσταση της δεύτερης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 0.145455$	107
3.9	Γραφική παράσταση της δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 0.145455$	108
3.10	Γραφική παράσταση της τυπικής απόκλισης του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 0.145455$	109
3.11	Γραφική παράσταση της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.45455$	111
3.12	Γραφική παράσταση της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.45455$	112
3.13	Γραφική παράσταση της δεύτερης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.45455$	113
3.14	Γραφική παράσταση της δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.45455$	114
3.15	Γραφική παράσταση της τυπικής απόκλισης του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.45455$	115
3.16	Κοινό διάγραμμα της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας για $\theta = \frac{7}{11}$, $\theta = 0.145455$ και $\theta = 1.45455$	116
3.17	Κοινό διάγραμμα της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας για $\theta = \frac{7}{11}$, $\theta = 0.145455$ και $\theta = 1.45455$	116
3.18	Κοινό διάγραμμα της τυπικής απόκλισης του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας, για $\theta = \frac{7}{11}$, $\theta = 0.145455$ και $\theta = 1.45455$	117
3.19	Κοινό διάγραμμα του συντελεστή μεταβλητότητας της τ.μ T_c , για $\theta = \frac{7}{11}$, $\theta = 0.145455$ και $\theta = 1.45455$	118
3.20	Γραφική παράσταση της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 0.5$	120
3.21	Γραφική παράσταση της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 0.5$	121
3.22	Γραφική παράσταση της δεύτερης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 0.5$	123
3.23	Γραφική παράσταση της δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 0.5$	123
3.24	Γραφική παράσταση της τυπικής απόκλισης του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 0.5$	124
3.25	Γραφική παράσταση της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 0.1$	126
3.26	Γραφική παράσταση της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 0.1$	127

3.27	Γραφική παράσταση της δεύτερης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 0.1$	128
3.28	Γραφική παράσταση της δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 0.1$	130
3.29	Γραφική παράσταση της τυπικής απόκλισης του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 0.1$	130
3.30	Γραφική παράσταση της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 1.5$	132
3.31	Γραφική παράσταση της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 1.5$	133
3.32	Γραφική παράσταση της δεύτερης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 1.5$	135
3.33	Γραφική παράσταση της δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 1.5$	136
3.34	Γραφική παράσταση της τυπικής απόκλισης του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 1.5$	137
3.35	Κοινό διάγραμμα της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας για $\theta = 0.5$, $\theta = 0.1$ και $\theta = 1.5$	138
3.36	Κοινό διάγραμμα της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας για $\theta = 0.5$, $\theta = 0.1$ και $\theta = 1.5$	138
3.37	Κοινό διάγραμμα της τυπικής απόκλισης του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας, για $\theta = 0.5$, $\theta = 0.1$ και $\theta = 1.5$	139
3.38	Κοινό διάγραμμα του συντελεστή μεταβλητότητας της τ.μ T_c , για $\theta = 0.5$, $\theta = 0.1$ και $\theta = 1.5$	140
4.1	Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων του πραγματικού μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta(u)$, και του προσεγγιστικού, $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 7/11$ και $\delta = 0.05$. .	159
4.2	Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων του πραγματικού μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta(u)$, και του προσεγγιστικού, $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 7/11$ και $\delta = 0.05$. .	162
4.3	Ποσοστιαίο σφάλμα των προσεγγίσεων $\bar{K}_\delta^{Tijms}(u)$, $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ και $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 7/11$ και $\delta = 0.05$	163
4.4	Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων του πραγματικού μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta(u)$, και του προσεγγιστικού, $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.45455$ και $\delta = 0.05$. .	167
4.5	Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων του πραγματικού μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta(u)$, και του προσεγγιστικού, $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.45455$ και $\delta = 0.05$. .	168

4.6	Ποσοστιαίο σφάλμα των προσεγγίσεων $\bar{K}_\delta^{Tijms}(u)$, $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ και $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.45455$ και $\delta = 0.05$	168
4.7	Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων του πραγματικού μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta(u)$, και του προσεγγιστικού, $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, για <i>Gamma</i> (3, 3) κατανομή με $\theta = 0.5$ και $\delta = 0.05$	173
4.8	Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων του πραγματικού μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta(u)$, και του προσεγγιστικού, $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για <i>Gamma</i> (3, 3) κατανομή με $\theta = 0.5$ και $\delta = 0.05$	174
4.9	Ποσοστιαίο σφάλμα των προσεγγίσεων $\bar{K}_\delta^{Tijms}(u)$, $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ και $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για <i>Gamma</i> (3, 3) κατανομή με $\theta = 0.5$ και $\delta = 0.05$	178
4.10	Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων του πραγματικού μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta(u)$, και του προσεγγιστικού, $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, για <i>Gamma</i> (3, 3) κατανομή με $\theta = 1.5$ και $\delta = 0.05$	179
4.11	Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων του πραγματικού μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta(u)$, και του προσεγγιστικού, $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για <i>Gamma</i> (3, 3) κατανομή με $\theta = 1.5$ και $\delta = 0.05$	181
4.12	Ποσοστιαίο σφάλμα των προσεγγίσεων $\bar{K}_\delta^{Tijms}(u)$, $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ και $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για <i>Gamma</i> (3, 3) κατανομή με $\theta = 1.5$ και $\delta = 0.05$	181
5.1	Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων του πραγματικού μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta(u)$, και του προσεγγιστικού, $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για μείξη πέντε εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.18978$ και $\delta = 0.05$	188
5.2	Ποσοστιαίο σφάλμα των προσεγγίσεων $\bar{K}_\delta^{Tijms}(u)$, $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για μείξη πέντε εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.18978$ και $\delta = 0.05$	189
5.3	Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων του πραγματικού μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta(u)$, και του προσεγγιστικού, $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για μείξη πέντε εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.40876$ και $\delta = 0.05$	190
5.4	Ποσοστιαίο σφάλμα των προσεγγίσεων $\bar{K}_\delta^{Tijms}(u)$, $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για μείξη πέντε εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.40876$ και $\delta = 0.05$	191
5.5	Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων του πραγματικού μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta(u)$, και του προσεγγιστικού, $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για <i>Gamma</i> (10, 10) κατανομή με $\theta = 0.5$ και $\delta = 0.05$	196
5.6	Ποσοστιαίο σφάλμα των προσεγγίσεων $\bar{K}_\delta^{Tijms}(u)$ και $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για <i>Gamma</i> (10, 10) κατανομή με $\theta = 0.5$ και $\delta = 0.05$	197
5.7	Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων του πραγματικού μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta(u)$, και του προσεγγιστικού, $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για <i>Gamma</i> (10, 10) κατανομή με $\theta = 1.5$ και $\delta = 0.05$	199
5.8	Ποσοστιαίο σφάλμα των προσεγγίσεων $\bar{K}_\delta^{Tijms}(u)$ και $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για <i>Gamma</i> (10, 10) κατανομή με $\theta = 1.5$ και $\delta = 0.05$	200

Γ'.8	Γραφική παράσταση της δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(10,10) κατανομή με $\theta = 0.1$.	229
Γ'.9	Γραφική παράσταση της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(10,10) κατανομή με $\theta = 1.5$.	231
Γ'.10	Γραφική παράσταση της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(10,10) κατανομή με $\theta = 1.5$.	231
Γ'.11	Γραφική παράσταση της δεύτερης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(10,10) κατανομή με $\theta = 1.5$.	232
Γ'.12	Γραφική παράσταση της δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(10,10) κατανομή με $\theta = 1.5$.	232

Κατάλογος Πινάκων

4.1	Πίνακας τιμών του μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, της νέας προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ και των παραμέτρων της προσεγγιστικής <i>NB</i> κατανομής, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών και $\theta = 7/11$	161
4.2	Πίνακας τιμών του μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, της νέας προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ και της παραμέτρου της προσεγγιστικής κατανομής <i>Poisson</i> , για μείξη τριών εκθετικών κατανομών και $\theta = 7/11$	165
4.3	Πίνακας τιμών του μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, της νέας προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ και των παραμέτρων της προσεγγιστικής <i>NB</i> κατανομής, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών και $\theta = 1.45455$	170
4.4	Πίνακας τιμών του μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, της νέας προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ και της παραμέτρου της προσεγγιστικής κατανομής <i>Poisson</i> , για μείξη τριών εκθετικών κατανομών και $\theta = 1.45455$	171
4.5	Πίνακας τιμών του μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, της νέας προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ και των παραμέτρων της προσεγγιστικής <i>NB</i> κατανομής, για Γάμμα(3, 3) κατανομή και $\theta = 0.5$	176
4.6	Πίνακας τιμών του μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, της νέας προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ και της παραμέτρου της προσεγγιστικής κατανομής <i>Poisson</i> , για Γάμμα(3, 3) κατανομή και $\theta = 0.5$	177
4.7	Πίνακας τιμών του μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, της νέας προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ και των παραμέτρων της προσεγγιστικής <i>NB</i> κατανομής, για Γάμμα(3, 3) κατανομή και $\theta = 1.5$	183
4.8	Πίνακας τιμών του μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, της νέας προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ και της παραμέτρου της προσεγγιστικής κατανομής <i>Poisson</i> , για Γάμμα(3, 3) κατανομή και $\theta = 1.5$	184
5.1	Πίνακας τιμών του μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, της νέας προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ και της παραμέτρου της προσεγγιστικής κατανομής <i>Poisson</i> , για μείξη πέντε εκθετικών κατανομών και $\theta = 1.18978$	192
5.2	Πίνακας τιμών του μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, της νέας προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ και της παραμέτρου της προσεγγιστικής κατανομής <i>Poisson</i> , για μείξη πέντε εκθετικών κατανομών και $\theta = 1.40876$	193

5.3	Πίνακας τιμών του μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, της νέας προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ και της παραμέτρου της προσεγγιστικής κατανομής <i>Poisson</i> , για Γάμμα(10, 10) κατανομή και $\theta = 0.5$	201
5.4	Πίνακας τιμών του μετασχηματισμού <i>Laplace</i> του χρόνου χρεοκοπίας, της νέας προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ και της παραμέτρου της προσεγγιστικής κατανομής <i>Poisson</i> , για Γάμμα(10, 10) κατανομή και $\theta = 1.5$	202

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΑΙΑ

Κεφάλαιο 0

Εισαγωγή

Όπως όλοι γνωρίζουμε ο σκοπός της ύπαρξης μιας ασφαλιστικής εταιρείας είναι να αναλάβει να φέρνει εις πέρας κάποιους κινδύνους με αντάλλαγμα κάποιο χρηματικό ποσό που ονομάζεται ασφάλιστρο. Έτσι με αυτά τα ποσά που συγκεντρώνει η εταιρεία, μέσα σε κάποιο χρονικό διάστημα, προσπαθεί να καλύψει τις ζημιές που μπορεί να προκύψουν από αυτούς τους κινδύνους. Η κάθε ασφαλιστική εταιρεία έχει στη διάθεσή της ένα αποθεματικό το οποίο το χρειάζεται αν επέλθει κάποια πολύ μεγάλη ζημιά. Επομένως αρμοδιότητα της εταιρείας είναι να ελέγχει αν αυτό το αποθεματικό είναι επαρκές για να καλύψει τέτοιου είδους ζημιές καθώς και να προσπαθεί με την εφαρμογή κάποιων μοντέλων να βρει έστω κατά προσέγγιση ποια είναι η πιθανότητα να γίνει το πλεόνασμα της εταιρείας αρνητικό. Για να μπορεί να βρει αυτή η πιθανότητα, θα πρέπει να γίνεται μία ταξινόμηση των χαρτοφυλακίων που έχει στη διάθεσή της η εταιρεία ανάλογα με το τι περίπου κατανομή ακολουθεί το μέγεθος της ζημιάς των αποζημιώσεων. Βέβαια στην πράξη αυτό είναι αρκετά δύσκολο καθώς δεν ξέρουμε πολλές φορές αυτή την κατανομή και στις περισσότερες περιπτώσεις θεωρούμε για διευκόλυνση στους υπολογισμούς κάποια κατανομή με ελαφριά ουρά, κάτι που στην πραγματικότητα δεν είναι τόσο ρεαλιστικό. Όλα αυτά αποτελούν κομμάτι της Θεωρίας Χρεοκοπίας που είναι ένας κλάδος της Θεωρίας Κινδύνου. Όταν εδώ μιλάμε για χρεοκοπία, δηλαδή μία εταιρεία να έχει έλλειμμα, δεν εννοούμε χρεοκοπία της εταιρείας με την κυριολεκτική έννοια, καθώς μπορεί να καλυφθεί το συγκεκριμένο έλλειμμα μέσω άλλων χαρτοφυλακίων, ανασφάλισης ή περισσότερο κερδοφόρων επενδύσεων. Στην εργασία που μελετάμε παρακάτω ασχολούμαστε με το κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας όπου εκεί οι χρόνοι ανάμεσα σε δύο ζημιές ακολουθεί πάντα εκθετική κατανομή, εν αντιθέσει με το ανανεωτικό μοντέλο το οποίο είναι δυσκολότερο καθώς αυτοί οι χρόνοι μπορούν να ακολουθούν οποιαδήποτε κατανομή, λόγω του γεγονότος ότι όταν συμβαίνει μία ζημιά τότε η διαδικασία ανανεώνεται. Πολύ σημαντικές ποσότητες στη θεωρία χρεοκοπίας με τις οποίες θα ασχοληθούμε εδώ, είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας που αναφέραμε παραπάνω καθώς και ο μετασχηματισμός *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας. Οι συγκεκριμένες ποσότητες προκύπτουν πολύ εύκολα ως ειδικές περιπτώσεις μίας συνάρτησης που εισήγαγαν το 1998 οι *Gerber* και *Shiu*. Η συγκεκριμένη

συνάρτηση έχει μεγάλο ενδιαφέρον καθώς μέσα από αυτή είναι δυνατή η εύρεση πάρα πολλών ποσοτήτων που είναι πολύ σημαντικές για μία ασφαλιστική εταιρεία αλλά και για την ανάπτυξη της θεωρίας γενικότερα. Τα τελευταία χρόνια πάρα πολλοί μελετητές δουλεύουν πάνω στην αρχική συνάρτηση με σκοπό να βρουν κάποιες καινούριες ποσότητες και αποτελέσματα με μεγάλο ενδιαφέρον. Γενικότερος σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η εύρεση του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας για διάφορα αριθμητικά παραδείγματα, όπου οι αποζημιώσεις ακολουθούν κάποιες γνωστές κατατανομές, και στη συνέχεια η εύρεση κάποιων προσεγγίσεων για αυτή την ποσότητα που είναι ήδη γνωστές, για την εφαρμογή τους όμως στην πιθανότητα χρεοκοπίας. Όπως καταλαβαίνουμε είναι πολύ σημαντικό να βρούμε μία πολύ καλή προσέγγιση καθώς έτσι η εταιρεία μπορεί να προβλέπει με μεγαλύτερη ακρίβεια τις τιμές που παίρνει ο μετασχηματισμός *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, για οποιαδήποτε τιμή αποθεματικού διαλέγει η εταιρεία. Τέλος θέλουμε να κατασκευάσουμε κάποιες καινούριες προσεγγίσεις με τη βοήθεια των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας, τις οποίες θέλουμε να συγκρίνουμε με τις προηγούμενες προσεγγίσεις και στη συνέχεια να ελέγξουμε το ποια από όλες είναι καλύτερη για τις τιμές του αποθεματικού που κρατάει η κάθε εταιρεία. Όλες αυτές οι ποσότητες δίνονται αναλυτικά κατά τη διάρκεια της εργασίας με τέτοιο τρόπο, ώστε να γίνονται κατανοητές όχι μόνο στους καθηγητές μου αλλά και στους ανθρώπους που κάποια μέρα μπορεί να διαβάσουν την εργασία μου.

Δομή της Διπλωματικής εργασίας

Η δομή που ακολουθούμε στην παρούσα εργασία είναι η εξής:

Στο Κεφάλαιο 1 δίνουμε κάποιες βασικές έννοιες που εμφανίζονται στη θεωρία χρεοκοπίας και οι οποίες θα βοηθήσουν τους αναγνώστες να μπουν στο κλίμα της εργασίας καθώς και κάποιες ποσότητες οι οποίες δεν είναι κομμάτι της θεωρίας χρεοκοπίας, αλλά είναι απαραίτητες για να μπορέσουμε να προχωρήσουμε και να αναπτύξουμε κάποιες άλλες ποσότητες. Έτσι θυμίζουμε το πώς ορίζονται αυτές οι ποσότητες. Στη συνέχεια δίνουμε τη συνάρτηση των *Gerber & Shiu* και εστιάζομαστε στις ειδικές περιπτώσεις της που μας δίνουν κάποιες ποσότητες πολύ σημαντικές όπως είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας και ο μετασχηματισμός *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας. Έτσι βρίσκοντας αναλυτικούς τύπους για αυτές τις ποσότητες, μπορούμε να προχωρήσουμε στην εφαρμογή αριθμητικών παραδειγμάτων.

Στο Κεφάλαιο 2 δίνουμε την ιδέα και τις σχέσεις που ισχύουν για τις προσεγγίσεις *DeVylder* και *Tijms* αντίστοιχα. Οι συγκεκριμένες προσεγγίσεις είναι πολύ γνωστές στη θεωρία χρεοκοπίας για την εφαρμογή τους στην προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας. Εμάς στόχος μας είναι να εφαρμόσουμε τις συγκεκριμένες προσεγγίσεις για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, κάτι που φαίνεται αρκετά δύσκολο καθώς εμείς γνωρίζουμε μόνο ότι προσεγγίζουν την πιθανότητα χρεοκοπίας. Κάτι τέτοιο όμως δεν μας

απασχολεί καθόλου καθώς δίνουμε αναλυτικά τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να προσεγγίσουμε την ποσότητα που μας ενδιαφέρει. Τέλος αυτές τις προσεγγίσεις τις χρησιμοποιούμε στην εφαρμογή δύο αριθμητικών παραδειγμάτων, όπου οι αποζημιώσεις ακολουθούν δύο διαφορετικές κατανομές, και μέσω διαφορετικών τιμών κάποιων παραμέτρων που αναλύουμε στο πρώτο κεφάλαιο, προσπαθούμε να δούμε το κατά πόσο καλά προσεγγίζουν τις πραγματικές τιμές του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας.

Στο Κεφάλαιο 3 δίνουμε κάποιες σχέσεις που ισχύουν για τις ροπές μιας σύνθετης τυχαίας μεταβλητής, οι οποίες είναι πολύ χρήσιμες για το τέταρτο κεφάλαιο, και στη συνέχεια δίνουμε το πως ορίζονται οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας καθώς και κάποιες σχέσεις που ισχύουν για την εύρεση των ροπών. Σκοπός του κεφαλαίου είναι να υπολογίσουμε τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας για τα αριθμητικά παραδείγματα που χρησιμοποιήσαμε στο δεύτερο κεφάλαιο, αφού πρώτα βρούμε την πιθανότητα χρεοκοπίας, και να δούμε το πως συμπεριφέρονται οι συγκεκριμένες ροπές για διάφορες τιμές των παραμέτρων που έχουμε υποθέσει. Τέλος το συγκεκριμένο κεφάλαιο είναι η εισαγωγή για το τέταρτο κεφάλαιο όπου εκεί θα μας χρειαστούν οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας που έχουμε υπολογίσει εδώ. Επίσης αναφέρουμε ότι στο τέλος της εργασίας, σε παράρτημα, δίνονται ακόμα δύο παραδείγματα για τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας.

Στο Κεφάλαιο 4 δημιουργούμε δύο νέες προσεγγίσεις για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας. Η μεθοδολογία και κάποια πρώτα παραδείγματα δίνονται αναλυτικά στο συγκεκριμένο κεφάλαιο. Βασικό για να υπολογιστούν οι νέες προσεγγίσεις είναι η εύρεση της πρώτης και δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας καθώς και η γνώση των σχέσεων για τις ροπές μιας σύνθετης τ.μ, που δίνονται στο τρίτο κεφάλαιο. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τις δύο νέες προσεγγίσεις στα αριθμητικά παραδείγματα που πήραμε και πριν, για να δούμε κατά πόσο καλά λειτουργούν οι συγκεκριμένες προσεγγίσεις όχι μόνο όσον αφορά το πόσο κοντά είναι με τιμές της παραγματικής συνάρτησης, αλλά και σε σχέση με τις προσεγγίσεις *DeVylder* και *Tijms*. Οι τύποι και οι τιμές των νέων προσεγγίσεων δίνονται αναλυτικά σε κάθε παράδειγμα και με την εφαρμογή διάφορων μεθόδων συγκρίνουμε τις προσεγγίσεις που έχουμε αναφέρει έως τώρα, μεταξύ τους.

Τέλος στο Κεφάλαιο 5 δίνουμε δύο επιπλέον αριθμητικά παραδείγματα, αντίστοιχα με αυτά που υπάρχουν στα παραρτήματα για την εύρεση των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας, όπου σε αυτά υποθέτουμε ότι οι ζημιές ακολουθούν πολυπλοκότερες κατανομές σε σχέση με τα προηγούμενα παραδείγματα. Η δημιουργία αυτών των παραδειγμάτων γίνεται με σκοπό την εφαρμογή των δύο νέων προσεγγίσεων καθώς και της προσέγγισης *Tijms*, για να δούμε το πως συμπεριφέρονται και σε άλλες περιπτώσεις. Η εφαρμογή των προσεγγίσεων σε πολλά παραδείγματα και για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων, μας δίνει την ευκαιρία να οδη-

γρηθούμε σε κάποια ενδιαφέροντα συμπεράσματα όσον αφορά τη δημιουργία των δύο νέων προσεγγίσεων.

Πολύ σημαντική ποσότητα στη θεωρία χρεοκοπίας είναι ο δεσμευμένος χρόνος χρεοκοπίας και συγκεκριμένα η κατανομή που ακολουθεί. Το συγκεκριμένο είναι ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα αλλά με πολύ ενδιαφέρον, καθώς δεν υπάρχουν αναλυτικοί τύποι για την εύρεση της κατανομής στις περισσότερες περιπτώσεις. Επομένως μία λύση για αυτό το πρόβλημα είναι η εύρεση κάποιων μεθόδων που να προσεγγίζουν όσο καλύτερα γίνεται αυτή την κατανομή. Στη βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετές τέτοιες προσεγγίσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για αυτό το σκοπό. Ενδιαφέρον όμως θα ήταν η δημιουργία μίας νέας προσέγγισης για την κατανομή του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας, η οποία μπορεί μετά από κάποια σκέψη να προκύψει μέσω των προσεγγίσεων που εισαγάγαμε στο τέταρτο κεφάλαιο. Άρα αυτή η διαδικασία θα μπορούσε να εφαρμοστεί και να αποτελεί τη συνέχεια αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στη Θεωρία Χρεοκοπίας.

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας δίνουμε κάποιες βασικές έννοιες που ισχύουν στο κλασικό και ανανεωτικό μοντέλο της Θεωρίας Χρεοκοπίας καθώς ορίζουμε και κάποιες ποσότητες, μόνο για το κλασικό μοντέλο, οι οποίες είναι πολύ βασικές και χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό δύο πολύ σημαντικών ποσοτήτων, όπως είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας και ο μετασχηματισμός *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας. Έτσι αφού δείξουμε αναλυτικά το τι εκφράζουν όλες αυτές οι ποσότητες, στόχος μας είναι να μπορούμε να υπολογίσουμε, για διάφορες περιπτώσεις, τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας με τον οποίο θα ασχοληθούμε σε όλη την εργασία.

1.1 Το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου

Στη θεωρία χρεοκοπίας στόχος μας είναι να εξετάσουμε και να αναλύσουμε τις συνολικές αποζημιώσεις, από ένα χαρτοφυλάκιο, όπως αυτές καταγράφονται στο χρόνο. Οι συνολικές αποζημιώσεις συμβολίζονται με $S(t)$ και εκφράζονται μέσω μιας στοχαστικής ανέλιξης $\{S(t): t \geq 0\}$. Επίσης για κάθε χρονική στιγμή t , θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή(τ.μ) $N(t)$ που δηλώνει το πλήθος των απαιτήσεων προς την ασφαλιστική εταιρεία στο χρονικό διάστημα $[0, t]$. Έτσι, η οικογένεια τ.μ $\{N(t): t \geq 0\}$ είναι μια στοχαστική ανέλιξη. Κατά συνέπεια, βλέπουμε ότι οι συνολικές αποζημιώσεις στο διάστημα $[0, t]$ είναι

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & N(t) \geq 1 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases}$$

όπου X_i είναι θετικές, ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, με κοινή συνάρτηση κατανομής F , που δηλώνουν το ύψος της ζημιάς από την i -απαίτηση.

Στη συνέχεια εισάγουμε μία συνάρτηση $P(t)$ η οποία εκφράζει τα συνολικά ασφάλιστρα που έχει ως έσοδα η ασφαλιστική εταιρεία στο χρονικό διάστημα $[0, t]$. Η συνάρτηση $P(t)$ είναι

μία αύξουσα ντετερμινιστική συνάρτηση και όχι μία στοχαστική διαδικασία. Επίσης υποθέτουμε ότι για κάθε χαρτοφυλάκιο υπάρχει ένα αρχικό αποθεματικό, έστω ότι το συμβολίζουμε με u , το οποίο το χρειαζόμαστε για να καλύψει η ασφαλιστική εταιρεία την πιθανότητα να έρθει μια μεγάλη ζημιά (αποζημίωση) στην αρχή της ύπαρξης του χαρτοφυλακίου. Με την βοήθεια των παραπάνω σχέσεων και εννοιών, ορίζουμε την ποσότητα με το μεγαλύτερο ενδιαφέρον στη Θεωρία Χρεοκοπίας η οποία είναι η **πιθανότητα χρεοκοπίας**, δηλαδή η πιθανότητα το πλεόνασμα της ασφαλιστικής εταιρείας να γίνει κάποια στιγμή αρνητικό. Το αποθεματικό ή πλεόνασμα συμβολίζεται με $U(t)$, εκφράζεται μέσω μιας στοχαστικής ανέλιξης $\{U(t): t \geq 0\}$ και ορίζεται $\forall t \geq 0$ από τη σχέση

$$U(t) = u + P(t) - S(t),$$

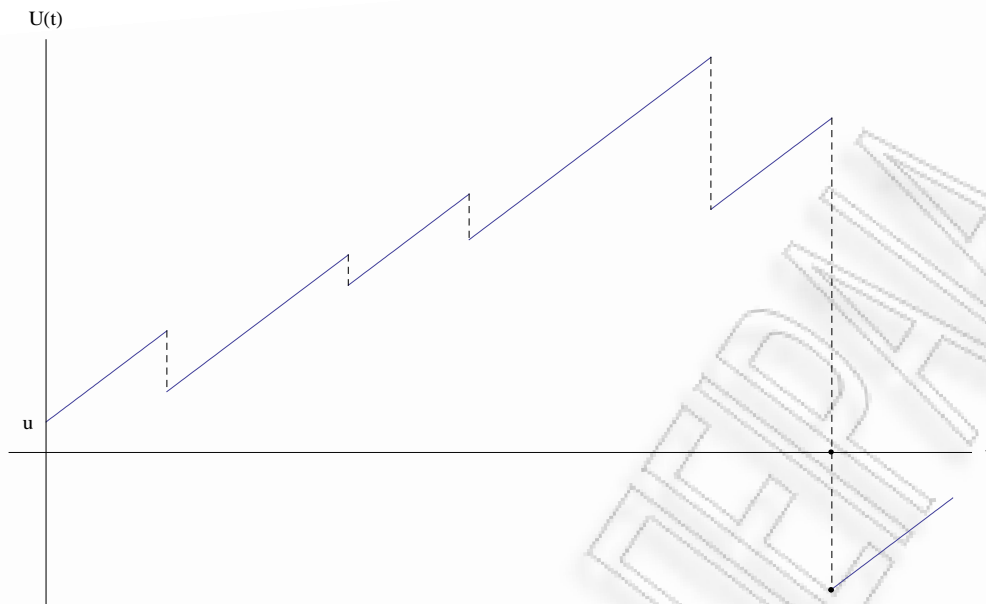
όπου για $t = 0$, $U(0) = u$ είναι το αρχικό αποθεματικό το οποίο ορίζεται από την κάθε ασφαλιστική εταιρεία.

Αν ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις:

- i) $P(t) = c t$, $c \geq 0$, $t \geq 0$ δηλαδή $P(t)$ να είναι μια γραμμική συνάρτηση του χρόνου.
- ii) Οι τυχαίες μεταβλητές X_i που εκφράζουν το μέγεθος των αποζημιώσεων, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και είναι επίσης ανεξάρτητες από τον αριθμό των αποζημιώσεων, σε ένα διάστημα, $N(t)$.
- iii) Η $\{N(t): t \geq 0\}$ είναι μια ανέλιξη *Poisson*, έτσι ώστε η ανέλιξη $\{S(t): t \geq 0\}$ να είναι μια σύνθετη ανέλιξη *Poisson*,

τότε μιλάμε για το **κλασικό μοντέλο** της Θεωρίας Κινδύνου ή αλλιώς **μοντέλο των Cramér-Lundberg**.

Στο παρακάτω Σχήμα 1.1, παριστάνεται γραφικά η ανέλιξη πλεονάσματος $U(t)$. Αναφέρουμε ότι οι παράλληλες μπλε γραμμές, οι οποίες έχουν κλίση c , εκφράζουν την αύξηση του πλεονάσματος λόγω της εισροής ασφαλιστρών και οι κάθετες διακεκομμένες γραμμές εκφράζουν το ύψος των αποζημιώσεων. Επίσης φαίνεται και η χρονική στιγμή στην οποία το πλεόνασμα γίνεται για πρώτη φορά αρνητικό, δηλαδή η στιγμή κατά την οποία επέρχεται χρεοκοπία.



Σχήμα 1.1: Ανέλιξη πλεονάσματος στο χρόνο.

Στο κλασικό μοντέλο έχουμε ότι $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$, όπου $\lambda > 0$ είναι η ένταση της ανέλιξης *Poisson* δηλαδή εκφράζει τον μέσο αριθμό απαιτήσεων στην μονάδα του χρόνου. Ορίζουμε ως Y_i την **στιγμή έλευσης** της i -απαίτησης και ως T_i τον **ενδιάμεσο χρόνο** μεταξύ της έλευσης δύο απαιτήσεων. Έχουμε δηλαδή ότι

$$Y_i = \min\{t: N(t) = i\},$$

και ισχύουν τα εξής:

$$T_1 = Y_1,$$

$$T_j = Y_j - Y_{j-1}, \quad j = 2, 3, \dots$$

Είναι γνωστό ότι επειδή η ανέλιξη *Poisson* έχει την αμνήμονα ιδιότητα, ισχύει ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την Εκθετική κατανομή με παράμετρο, την ένταση της ανέλιξης *Poisson*, λ . Προκύπτει δηλαδή ότι

$$f_{T_i}(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0$$

$$\text{με } E(T_i) = \frac{1}{\lambda} \text{ και } Var(T_i) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Με βάση τον τύπο¹ (βλέπε Κεφάλαιο 3)

$$E[S(t)] = E(X_i) \cdot E[N(t)],$$

μια πολύ σημαντική υπόθεση που κάνουμε στο κλασικό μοντέλο είναι ότι

$$c > \lambda p_1 \quad (1.1)$$

Στο αριστερό μέλος έχουμε την μέση τιμή των εσόδων της εταιρείας στην μονάδα του χρόνου η οποία ορίζεται ως

$$c = \frac{P(t)}{t}$$

και ονομάζεται **ένταση του ασφαλιστρού** (*premium rate*).

Στο δεξιό μέλος της (1.1), έχουμε τον μέσο ρυθμό αποζημιώσεων στην μονάδα του χρόνου πολλαπλασιασμένο με την μέση αποζημίωση η οποία ορίζεται ως

$$p_1 = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} \bar{F}(x) = E(X_i)$$

Επομένως συμπεραίνουμε ότι η συνθήκη (1.1), δηλώνει ότι τα έσοδα θα πρέπει να είναι μεγαλύτερα κατά μέσο όρο από τα έξοδα, στην μονάδα του χρόνου.

Η παραπάνω σχέση είναι λογικό να ισχύει καθώς σε άλλη περίπτωση η χρεοκοπία θα ήταν βέβαιη, δηλαδή θα ίσχυε $\psi(u) = 1$ (βλέπε *Asmussen* (2000)).

Γενικά αναφέρουμε ότι η k -ροπή της κατανομής των αποζημιώσεων, βρίσκεται από τη σχέση

$$p_k = \int_0^{\infty} x^k f(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

Εκτός όμως από τη συνθήκη της σχέσης (1.1), η ασφαλιστική εταιρεία επιδιώκει να έχει κέρδος από την ασφάλιση ενός κινδύνου. Επομένως ορίζουμε το **συντελεστή ή περιθώριο ασφαλείας** (*premium loading factor*) θ , το οποίο δηλώνει το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους της εταιρείας και δίνεται από την σχέση

$$\theta = \frac{c}{\lambda p_1} - 1, \quad \theta > 0 \quad (1.3)$$

¹Ο συγκεκριμένος τύπος χρησιμοποιείται για την εύρεση της πρώτης ροπής μιας σύνθετης κατανομής και αποδεικνύεται αναλυτικά στην Ενότητα 3.1.

Από την σχέση (1.3), προκύπτει η ισοδύναμη σχέση

$$c = (1 + \theta) \cdot \lambda p_1, \quad (1.4)$$

για το λόγο αυτό το c ονομάζεται και επιβαρυσμένο ασφάλιστρο.

Οι τιμές που παίρνει το θ στην πράξη είναι $\theta \in (0, 1)$ καθώς αν παίρνει τιμές πάνω από 1 τότε το προϊόν της εταιρείας δεν θα είναι ανταγωνιστικό στην αγορά λόγω της υψηλής του τιμής.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u ορίζεται από τη σχέση

$$\psi(u) = Pr(U(t) < 0, \text{ για κάποιο } t)$$

Η $\psi(u)$ μικραίνει καθώς μεγαλώνει το θ . Επίσης η $\psi(u)$ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση ως προς u και ισχύει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0.$$

Εκτός όμως από την πιθανότητα χρεοκοπίας σημαντικό ρόλο παίζει και η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας, την οποία συμβολίζουμε με $\delta(u)$ και δίνεται από την σχέση

$$\delta(u) = 1 - \psi(u).$$

Η $\delta(u)$ αντίστοιχα είναι μια αύξουσα συνάρτηση και ισχύει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \delta(u) = 1,$$

άρα η δ η οποία είναι και δεξιά συνεχής, είναι μία συνάρτηση κατανομής. Επίσης η κατανομή $\delta(u)$ είναι μεικτού τύπου, δηλαδή έχει μάζα πιθανότητας στο μηδέν, αφού ισχύει ότι η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας με μηδέν αρχικό αποθεματικό είναι θετική ($\delta(0) > 0$), και είναι συνεχής στο $(0, \infty)$.

Το πλεόνασμα στο κλασικό μοντέλο αναφέραμε ότι δίνεται από τη σχέση

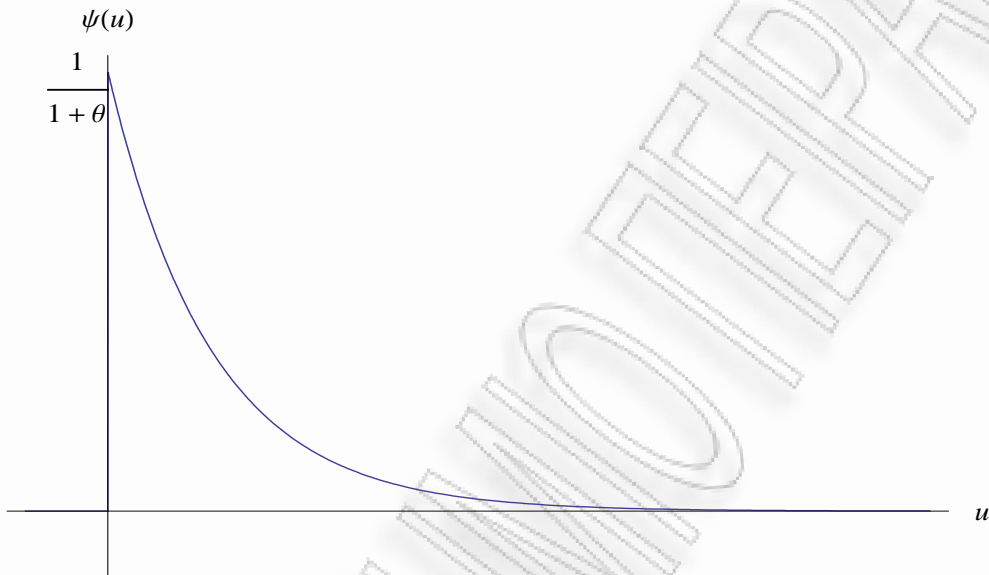
$$U(t) = u + (1 + \theta) \lambda p_1 t - S(t) \quad t, u \geq 0$$

Αν το αρχικό αποθεματικό ισούται με μηδέν δηλαδή αν $U(0) = 0$, τότε για τις πιθανότητες

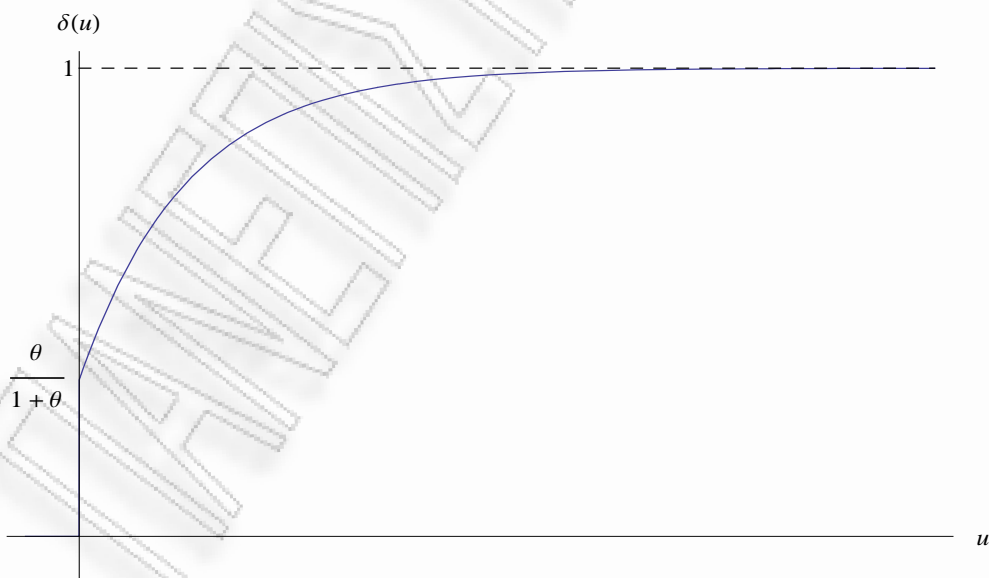
που ορίσαμε παραπάνω ισχύουν τα εξής (βλέπε *Bowers et al* (1997))

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta} \quad \text{και} \quad \delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta}. \quad (1.5)$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνονται ξεκάθαρα στα διαγράμματα 1.2 και 1.3 που ακολουθούν



Σχήμα 1.2: Γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας.



Σχήμα 1.3: Γραφική παράσταση της πιθανότητας μη-χρεοκοπίας.

Σύμφωνα με την ανέλιξη πλεονάσματος, το πλεόνασμα μπορεί να γίνει κάποια στιγμή αρνητικό μόνο όμως στα χρονικά σημεία που εμφανίζεται η αποζημίωση. Όταν το πλεόνασμα για πρώτη φορά γίνει αρνητικό τότε λέμε ότι επέρχεται χρεοκοπία. Το **χρόνο χρεοκοπίας** τον εκφράζουμε μέσω της τυχαίας μεταβλητής T και δίνεται από την μαθηματική σχέση

$$T = \begin{cases} \inf\{t: U(t) < 0\} \\ \infty, & \text{αν } U(t) > 0 \quad \forall t \end{cases} \quad (1.6)$$

Την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ μπορούμε να την εκφράσουμε συναρτήσει του χρόνου χρεοκοπίας μέσω της σχέσης

$$\psi(u) = Pr(T < \infty | U(0) = u) = E[I(T < \infty)], \quad (1.7)$$

καθώς το $T < \infty$ δηλώνει ότι ο χρόνος χρεοκοπίας είναι πεπερασμένος, δηλαδή ότι κάποια χρονική στιγμή επέρχεται χρεοκοπία. Επίσης η T είναι μια ελλειμματική τυχαία μεταβλητή καθώς παίρνει την τιμή ∞ με θετική πιθανότητα, δηλαδή ισχύει ότι $Pr(T = \infty) > 0$.

Μία ακόμα σημαντική τυχαία μεταβλητή για τη θεωρία χρεοκοπίας είναι το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό, δοθέντος ότι εμφανίζεται πτώση, ή αλλιώς το **κλιμακωτό ύψος** (*ladder height*). Αυτή την τυχαία μεταβλητή τη συμβολίζουμε με L_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ και παίρνει θετικές τιμές καθώς μελετάμε την πτώση του πλεονάσματος σε απόλυτη τιμή.

Οι χρονικές στιγμές κατά τις οποίες εμφανίζεται το κλιμακωτό ύψος, ονομάζονται **κλιμακωτές στιγμές** (*ladder epochs*), είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ και συμβολίζονται με t_i , $i = 1, 2, 3, \dots, N$. Για την πρώτη κλιμακωτή στιγμή, ισχύει ότι

$$t_1 = \min\{t: u - U(t) > 0\} = \min\{t: S(t) - ct > 0\}$$

Επομένως για την τυχαία μεταβλητή L_1 , δηλαδή την πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό, ισχύει ότι

$$L_1 = u - U(t_1)$$

Γενικεύοντας τα παραπάνω, η ακολουθία των κλιμακωτών υψών L_i ορίζεται ως εξής

$$L_i = \begin{cases} U(t_{i-1}) - U(t_i), & \text{Απώλεια στο } (t_{i-1}, t_i) \\ 0, & \text{αν } U(t) < U(t_{i-1}) \quad \forall t > t_{i-1} \end{cases}$$

Τα $L_1, L_2, L_3, \dots, L_N$, όπου η τυχαία μεταβλητή N δηλώνει τον αριθμό των “κατεγραμμένων”² πτώσεων (βλέπε σχέση (1.11)), είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κοινή συνάρτηση κατανομής $F_e(x)$, όπου με $F_e(x)$ συμβολίζουμε την **κατανομή ισορροπίας** των αποζημιώσεων και η οποία ισούται με

$$F_e(x) = \frac{\int_0^x \bar{F}(t) dt}{p_1} = Pr(L_1 \leq y), \quad (1.8)$$

όπου $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$ είναι η δεξιά ουρά των αποζημιώσεων (βλέπε *Bowers et al (1997)*).

Αντίστοιχα ορίζουμε την ουρά της κατανομής ισορροπίας η οποία δίνεται από τον τύπο

$$\bar{F}_e(x) = \frac{\int_x^\infty \bar{F}(t) dt}{p_1}, \quad (1.9)$$

και την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που έχει η παραπάνω κατανομή

$$f_e(x) = \frac{\bar{F}(x)}{p_1}. \quad (1.10)$$

Μία κατεγραμμένη πτώση εμφανίζεται τη χρονική στιγμή t , αν

$$U(t) < U(s), \quad \forall s < t \quad (1.11)$$

δηλαδή η ανάλιξη $\{U(s)\}$ παρουσιάζει ελάχιστο τη χρονική στιγμή t .

Η πιθανότητα ξεκινώντας με αρχικό αποθεματικό u , να υπάρξει πτώση κάτω από το u , ισούται με $\psi(0)$ δηλαδή κάθε κατεγραμμένη πτώση ισοδυναμεί με χρεοκοπία για $u = 0$.

Η τυχαία μεταβλητή N ακολουθεί την Γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p = 1 - \psi(0)$ και έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$Pr(N = n) = [1 - \psi(0)][\psi(0)]^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

Εδώ επειδή αναφερόμαστε στο κλασικό μοντέλο, ισχύει η (1.5), οπότε έχουμε ότι

²Με την λέξη κατεγραμμένη αναφερόμαστε σε μία πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό, δοθέντος ότι υπάρχει πτώση, δηλαδή στην τ.μ $L_i | L_i > 0, i = 1, 2, \dots$

$$N \sim Geo\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right),$$

και επομένως η σχέση (1.12), γράφεται ως

$$Pr(N = n) = \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right) \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Μέσω των τυχαίων μεταβλητών L_i που ορίσαμε παραπάνω, μπορούμε να μελετήσουμε ακόμα μια τυχαία μεταβλητή η οποία θα εκφράζει τη **μέγιστη σωρευτική απώλεια** (*maximal aggregate loss*), δηλαδή την συνολική πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό. Την συγκεκριμένη τυχαία μεταβλητή την συμβολίζουμε με L και δίνε-ται από τη σχέση (βλέπε Χατζηκωνσταντινίδης (2008))

$$\begin{aligned} L &= u - U(T_N) = u - \{u - c \cdot t_N - S(t_N)\} = S(t_N) - c \cdot t_N \\ &= \{u - U(t_1)\} + \{U(t_1) - U(t_2)\} + \{U(t_2) - U(t_3)\} + \dots + \{U(t_{N-1}) - U(t_N)\} \\ &= L_1 + L_2 + \dots + L_N. \end{aligned}$$

Επομένως ισχύει ότι

$$L = \begin{cases} L_1 + L_2 + \dots + L_N = \sum_{i=1}^N L_i \\ 0, \quad \text{αν } N = 0 \end{cases}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω παρατηρούμε ότι η κατανομή της L είναι μεικτού τύπου, αφού παίρνει την τιμή μηδέν με θετική πιθανότητα και συγκεκριμένα έχουμε

$$Pr(L = 0) = Pr(N = 0) = \delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta},$$

και είναι συνεχής στο $(0, \infty)$.

Επίσης η κατανομή που ακολουθεί είναι Σύνητη Γεωμετρική, αφού το πλήθος N των κατεγραμμένων πτώσεων ακολουθεί Γεωμετρική κατανομή. Όμως υπάρχουν και σχέσεις οι οποίες συνδέουν την μέγιστη σωρευτική απώλεια με την πιθανότητα χρεοκοπίας. Όπως παρατηρούμε, εάν η μέγιστη σωρευτική απώλεια είναι μεγαλύτερη από το αρχικό αποθεματικό,

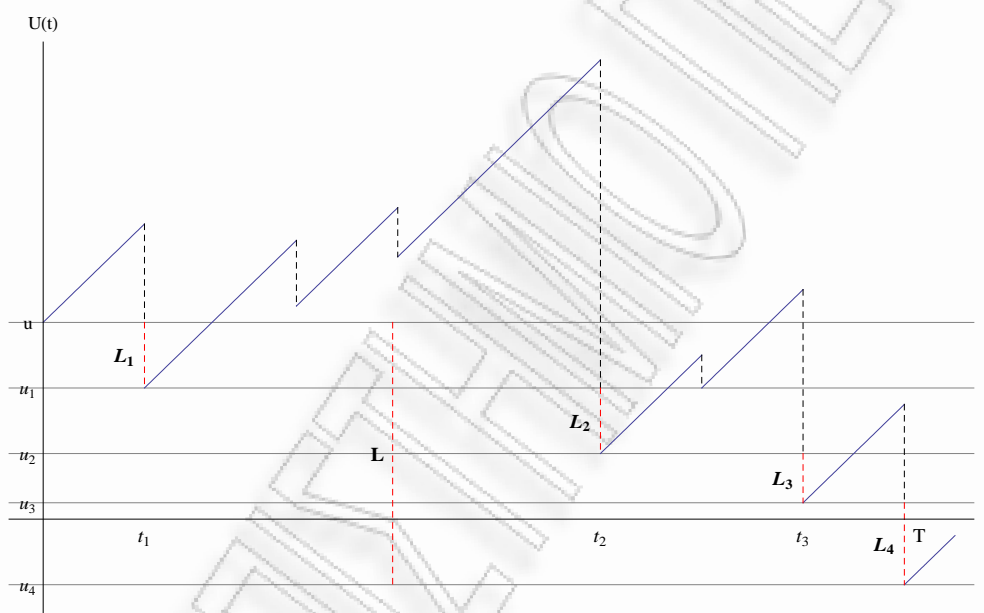
τότε λέμε ότι συμβαίνει χρεοκοπία. Δηλαδή ισχύει ότι

$$Pr(L \leq u) = \delta(u)$$

και επίσης

$$Pr(L > u) = Pr\left(\max_{t \geq 0}\{S(t) - ct\} > u\right) = \psi(u) \quad (1.13)$$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η δεξιά ουρά μιας σύνθετης Γεωμετρικής κατανομής στο σημείο u .



Σχήμα 1.4: Γραφική παράσταση των *ladder heights* και των *ladder epochs*.

Στο παραπάνω Σχήμα 1.4, απεικονίζονται γραφικά τα κλιμακωτά ύψη L_i (κόκκινες διακεκομμένες γραμμές), οι κλιμακωτές στιγμές t_i καθώς και η μέγιστη σωρευτική απώλεια L . Εδώ στο παράδειγμα που χρησιμοποιήσαμε για την κατασκευή του γραφήματος, παρατηρούμε ότι

1. υπάρχουν τέσσερα κλιμακωτά ύψη τα οποία είναι:

$$L_1 = u - u_1,$$

$$L_2 = u_1 - u_2,$$

$$L_3 = u_2 - u_3,$$

και τέλος

$$L_4 = u_3 - u_4.$$

2. υπάρχουν τέσσερις κλιμακωτές στιγμές (όσα και τα κλιμακωτά ύψη), από τις οποίες η μία είναι ο χρόνος χρεοκοπίας T , καθώς είναι η χρονική στιγμή κατά την οποία το πλεόνασμα γίνεται για πρώτη φορά αρνητικό,
3. η μέγιστη σωρευτική απώλεια ισούται με τη μέγιστη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u , δηλαδή

$$L = u - u_4.$$

1.2 Ανανεωτικές εξισώσεις και πιθανότητα χρεοκοπίας.

Η γενική μορφή μιας ανανεωτικής εξίσωσης είναι

$$m(x) = \phi \int_0^x m(x-y) dF(y) + r(x), \quad x \geq 0 \quad (1.14)$$

όπου F είναι μια συνάρτηση κατανομής στο $[0, \infty)$, με $F(0) = 0$, και $r(x)$ είναι μία φραγμένη συνάρτηση σε πεπερασμένα διαστήματα.

Όταν $\phi = 1$, τότε η (1.14) ονομάζεται **κανονική ανανεωτική εξίσωση** (*proper renewal equation*), ενώ όταν $\phi < 1$ ονομάζεται **ελλειμματική ή ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση** (*defective renewal equation*) (βλέπε Willmot & Lin (2001)). Εμάς στη συγκεκριμένη εργασία θα μας αποσχολήσουν οι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις.

Στο κλασικό μοντέλο με $u \geq 0$, ισχύουν τα εξής: (βλέπε Bowers et al (1997))

1. Η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας ικανοποιεί την ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c} \delta(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \delta(u-x) f(x) dx,$$

2. και την ανανεωτική εξίσωση

$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \delta(u-x) \bar{F}(x) dx.$$

3. Παρόμοια, για την πιθανότητα χρεοκοπίας ισχύουν τα εξής

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c} \psi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \psi(u-x) f(x) dx - \frac{\lambda}{c} \bar{F}(u),$$

4. και

$$\psi(u) = \psi(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \psi(u-x) \bar{F}(x) dx - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \bar{F}(x) dx.$$

Όμως από τις σχέσεις (1.4), (1.5) παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\psi(0) = \frac{\lambda p_1}{c}$$

Επίσης προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \psi(0) - \frac{\lambda}{c} \int_0^t \bar{F}(x) dx &= \frac{\lambda p_1}{c} - \frac{\lambda}{c} \int_0^t \bar{F}(x) dx \\ &= \frac{\lambda}{c} \left[\int_0^\infty \bar{F}(x) dx - \int_0^t \bar{F}(x) dx \right] \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_t^\infty \bar{F}(x) dx. \end{aligned}$$

Οπότε καταλήγουμε στην ολοκληρωτική εξίσωση

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_0^u \psi(u-x) \bar{F}(x) dx + \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \bar{F}(x) dx, \quad (1.15)$$

για την οποία μπορούμε

- Να βρούμε μία γενική λύση, η οποία όμως στις περισσότερες περιπτώσεις είναι πολύ δύσκολο να υπολογιστεί αναλυτικά και για αυτό τον λόγο γίνεται προσπάθεια για τον υπολογισμό μίας προσεγγιστικής πιθανότητας χρεοκοπίας.
- Να βρούμε έναν ασυμπτωτικό τύπο για την πιθανότητα χρεοκοπίας, που να μας δίνει την οριακή συμπεριφορά της για μεγάλο αρχικό αποθεματικό, u .

Μέσω της εξίσωσης (1.15), μπορούμε να δημιουργήσουμε μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που να ικανοποιεί την πιθανότητα χρεοκοπίας. Για να γίνει αυτό, θα πρέπει να συνδέσουμε την κατανομή ισορροπίας, που έχουμε ορίσει στη σχέση (1.8), με την ουρά των αποζημιώσεων. Ισχύει ότι

$$\frac{\lambda}{c} \bar{F}(x) = \frac{1}{p_1} \bar{F}(x) \psi(0) = f_e(x) \psi(0).$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση στην ολοκληρωτική ανανεωτική εξίσωση (1.15), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \psi(0) \int_0^u \psi(u-x) f_e(x) dx + \psi(0) \int_t^\infty f_e(x) dx \Rightarrow \\ \psi(u) &= \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi(u-x) f_e(x) dx + \frac{1}{1+\theta} \bar{F}_e(x) \\ &= \frac{\lambda p_1}{c} \int_0^u \psi(u-x) f_e(x) dx + \frac{\lambda p_1}{c} \bar{F}_e(x) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση καθώς έχουμε υποθέσει

$$c > \lambda p_1 \Rightarrow \frac{\lambda p_1}{c} < 1.$$

Αναφέραμε προηγουμένως ότι η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας ακολουθεί μία Σύνθετη Γεωμετρική κατανομή. Δηλαδή ισχύει

$$\delta(u) = Pr(L \leq u)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} Pr(L \leq u | N = n) Pr(N = n)$$

Αφού σπάσουμε το άθροισμα στο διακριτό και στο συνεχές μέρος, προκύπτει

$$\begin{aligned}
\delta(u) &= Pr(N = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} Pr(L_1 + L_2 + \dots + L_n \leq u) Pr(N = n) \\
&= \delta(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta}{1+\theta} \left(\frac{1}{1+\theta} \right)^n F_e^{*n}(u) \\
&= \frac{\theta}{1+\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta}{1+\theta} \left(\frac{1}{1+\theta} \right)^n F_e^{*n}(u) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta}{1+\theta} \left(\frac{1}{1+\theta} \right)^n F_e^{*n}(u), \tag{1.17}
\end{aligned}$$

όπου F_e^{*n} είναι η n -συνέλιξη της κατανομής ισορροπίας με τον εαυτό της. Για $n = 0$ ισχύει

$$F_e^{*0}(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \geq 0 \\ 0, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Αφού ορίσαμε την $\delta(u)$, μπορούμε να βρούμε μία αντίστοιχη σχέση και για την πιθανότητα χρεοκοπίας, αφού έχουμε αναφέρει παραπάνω ότι η $\psi(u)$ είναι η ουρά μιας Σύνθετης Γεωμετρικής κατανομής και ξέρουμε επίσης ότι ισχύει

$$\psi(u) = 1 - \delta(u).$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta}{1+\theta} \left(\frac{1}{1+\theta} \right)^k \bar{F}_e^{*k}(u). \tag{1.18}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε μία άλλη σημαντική ποσότητα στη θεωρία χρεοκοπίας, η οποία ονομάζεται **συντελεστής προσαρμογής** (*adjustment coefficient*). Ο συντελεστής προσαρμογής R είναι η μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης *Lundberg*

$$1 + (1 + \theta)p_1 r = M_X(r), \tag{1.19}$$

όπου $M_X(r)$ είναι η **ροπογεννήτρια** της κατανομής F των αποζημιώσεων, η οποία πρέπει να είναι πεπερασμένη σε κάποιο διάστημα για να υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής, και ισούται με

$$M_X(r) = E(e^{rX}) = \int_0^{\infty} e^{rx} f(x) dx.$$

Ονομάζουμε το αριστερό μέλος της εξίσωσης (1.19) με $y_1(r)$, η οποία είναι μια γραμμική συνάρτηση του r και το δεξιό μέλος με $y_2(r)$, η οποία είναι αύξουσα και κυρτή συνάρτηση καθώς:

$$y_1'(r) = E(Xe^{rX}) = \int_0^{\infty} x e^{rx} f(x) dx > 0,$$

και

$$y_2''(r) = E(X^2 e^{rX}) = \int_0^{\infty} x^2 e^{rx} f(x) dx > 0.$$

Επίσης ισχύουν τα εξής:

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1$$

και

$$y_1'(r) = (1 + \theta)p_1 \Rightarrow y_1'(0) = (1 + \theta)p_1,$$

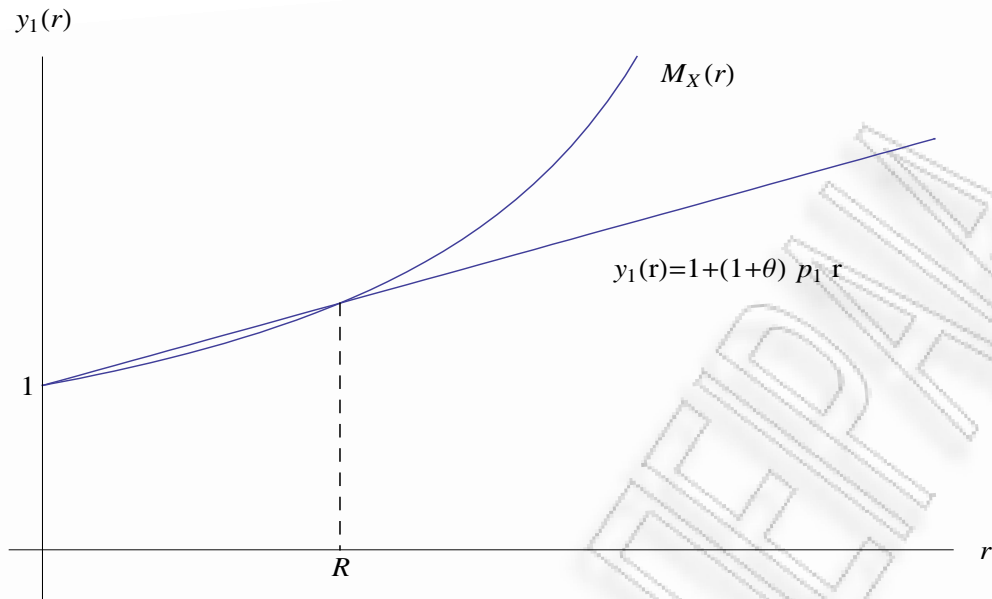
$$y_2'(r) = M_X'(r) \Rightarrow y_2'(0) = E(X).$$

Άρα στο σημείο μηδέν έχουμε ότι η κλίση της $(1 + \theta)p_1$ είναι μεγαλύτερη από αυτή της p_1 , δηλαδή ισχύει ότι

$$y_2'(0) < y_1'(0),$$

και επίσης ότι πάντα μία λύση του συντελεστή προσαρμογής είναι το $R = 0$ η οποία και απορρίπτεται (βλέπε *Bowers et al (1997)*). Όλα τα παραπάνω φαίνονται ξεκάθαρα στο παρακάτω Σχήμα 1.5.

Τέλος μία πολύ σημαντική παρατήρηση είναι ότι ο συντελεστής προσαρμογής δεν υπάρχει όταν τα μεγέθη των αποζημιώσεων ακολουθούν κατανομές με βαριές ουρές, για τις οποίες δεν υπάρχει ροπογεννήτρια. Τέτοιες κατανομές είναι για παράδειγμα η *Pareto*(λ, α) και η *Weibull*(τ, γ), για $\gamma < 1$.



Σχήμα 1.5: Γραφική παράσταση της εξίσωσης για το Συντελεστή Προσαρμογής R .

Την εξίσωση του *Lundberg* μπορούμε να την εκφράσουμε και μέσω της κατανομής ισορροπίας, με τη σχέση

$$1 + (1 + \theta)p_1 r = M_X(r) \Rightarrow$$

$$1 + (1 + \theta)p_1 r = 1 + r \int_0^{\infty} e^{rx} \bar{F}(x) dx \Rightarrow$$

$$1 + \theta = \int_0^{\infty} e^{rx} \frac{\bar{F}(x)}{p_1} dx.$$

Άρα ο συντελεστής προσαρμογής είναι η μικρότερη θετική λύση, ως προς R , της εξίσωσης

$$1 + \theta = \int_0^{\infty} e^{Rx} f_e(x) dx.$$

Αν υποθέσουμε το κλασικό μοντέλο με την συνθήκη $c > \lambda p_1$ να ισχύει και επίσης να $\exists R > 0$, τότε ισχύουν τα εξής:

1. $\psi(u) \leq e^{-Ru}, \forall u \geq 0$

Η σχέση αυτή ονομάζεται **ανισότητα του Lundberg**.

2. Υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει ο ασυμπτωτικός τύπος των Cramér-Lundberg,

$$\psi(u) \sim Ce^{-Ru}, \text{ καθώς } u \rightarrow \infty$$

δηλαδή

$$\exists C > 0: \lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u)e^{Ru} = C$$

και η οποία σταθερά ισούται με

$$C = \frac{\theta p_1}{R \int_0^{\infty} x e^{Rx} \bar{F}(x) dx}.$$

Ο ασυμπτωτικός τύπος είναι ακριβής όταν το μέγεθος των αποζημιώσεων ακολουθεί Εκθετική κατανομή, π.χ με παράμετρο β , δηλαδή όταν έχουμε

$$F_X(x) = 1 - e^{-\beta x}.$$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι (βλέπε Πολίτη (2008))

$$R = \frac{\theta\beta}{1+\theta} \text{ και } C = \psi(0) = \frac{1}{1+\theta}.$$

1.3 Ανανεωτικό μοντέλο

Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου με ανέλιξη πλεονάσματος

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

είχαμε υποθέσει τα εξής:

1. $c > \lambda p_1$ για να ισχύει ότι $\psi(u) < 1$,
2. η απαριθμητρία στοχαστική ανέλιξη $\{N(t): t \geq 0\}$ η οποία εκφράζει το πλήθος των απαιτήσεων που καταφθάνουν στο χρόνο, ακολουθεί μια ανέλιξη *Poisson* με ένταση

λ. Επομένως οι ενδιαμέσοι χρόνοι έλευσης των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την Εκθετική κατανομή με παράμετρο λ της ανέλιξης *Poisson*.

Επίσης είδαμε ότι ισχύουν τα εξής:

α)

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta} \quad \text{και} \quad \delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta},$$

β) τα κλιμακωτά ύψη L_i ακολουθούν την κατανομή ισορροπίας $F_e(x)$ και η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η ουρά μιας σύνθετης Γεωμετρικής κατανομής που δίνεται από τη σχέση

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-\phi) \phi^k \bar{F}_e^{*k}(u),$$

$$\text{όπου } \phi = \frac{1}{1+\theta} = \psi(0).$$

Τέλος ο συντελεστής προσαρμογής R ορίστηκε ως η μικρότερη θετική λύση της εξίσωσης (1.19).

Μια γενίκευση του κλασικού μοντέλου είναι το **Ανανεωτικό μοντέλο** ή αλλιώς **Sparre Andersen model**, με ανέλιξη πλεονάσματος

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

Η βασική διαφορά του συγκεκριμένου μοντέλου, σε σχέση με το κλασικό, είναι ότι

- Η απαριθμητρία συνάρτηση $N(t)$ δεν ακολουθεί ανέλιξη *Poisson* αλλά μπορεί να ακολουθεί οποιαδήποτε ανανεωτική διαδικασία. Συνεπώς οι ενδιαμέσοι χρόνοι T_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που τώρα όμως μπορούν να ακολουθούν οποιαδήποτε κατανομή εκτός από την εκθετική.

- Η αντίστοιχη υπόθεση της (1.1), στο ανανεωτικό μοντέλο είναι η εξής:

$$c > \frac{1}{E(T_i)} p_1, \quad (1.20)$$

όπου $E(T_i)$ είναι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής των ενδιάμεσων χρόνων και p_1 είναι η μέση τιμή του μεγέθους των αποζημιώσεων, έτσι όπως ήταν και στο κλασικό μοντέλο. Επομένως και το περιθώριο ασφαλείας σε αυτή την περίπτωση, δίνεται από τη σχέση

$$\theta = \frac{c E(T_i)}{p_1} - 1.$$

Άρα στο ανανεωτικό μοντέλο, ισχύουν τα εξής:

1.

$$\psi(0) \neq \frac{1}{1+\theta} \quad \text{και} \quad \delta(0) \neq \frac{\theta}{1+\theta}.$$

Οι συγκεκριμένες ποσότητες είναι άγνωστες και επομένως είναι πολύ δύσκολο να υπολογιστεί αναλυτικά η πιθανότητα χρεοκοπίας.

2. Τα κλιμακωτά ύψη L_i ορίζονται με τον ίδιο τρόπο όπως και στο κλασικό μοντέλο, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, μόνο που τώρα η κατανομή τους δεν είναι η κατανομή ισορροπίας αλλά μια άλλη άγνωστη κατανομή, έστω H , η οποία είναι γενικά δύσκολο να βρεθεί.

Άρα η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι και σε αυτή την περίπτωση η ουρά μιας σύνθετης κατανομής, μόνο που τώρα έχει την μορφή

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-\phi) \phi^k \bar{H}^{*k}(u),$$

$$\text{όπου } \phi = \psi(0) \neq \frac{1}{1+\theta}.$$

Στη συνέχεια θέλουμε να δείξουμε ποια είναι η εξίσωση του *Lundberg* για το ανανεωτικό μοντέλο (βλέπε *Rolski et al (1999)*). Έστω ότι X_i είναι η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το ύψος της i -απαίτησης και T_i η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το χρόνο που επέρχεται

η i -απαίτηση. Επομένως το πλεόνασμα τη στιγμή της έλευσης της n -αποζημίωσης, ισούται με

$$U(Y_n) = u - \sum_{i=1}^n (X_i - cT_i)$$

Ορίζουμε την τ.μ

$$W_i = X_i - cT_i,$$

με $E(W_i) < 0$ για να ισχύει η (1.20).

Υποθέτουμε ότι η πρώτη ροπή, $E(W_i)$, υπάρχει και επίσης ότι η τ.μ W_i , $\forall i \geq 1$ δεν συγκεντρώνεται στο 0, δηλαδή ισχύει ότι $Pr(W = 0) < 1$.

Εμάς μας ενδιαφέρει όμως το άθροισμα των τ.μ W_i . Έτσι έχουμε ότι

$$S_n = \begin{cases} \sum_{i=1}^n W_i \\ 0, \text{ αν } n = 0 \end{cases}$$

Η συγκεκριμένη στοχαστική ανάλιξη $\{S_n : n \geq 0\}$ των μερικών αθροισμάτων $S_n = \sum_{i=1}^n W_i$ ονομάζεται **τυχαίος περίπατος** (*random walk*), αν υποθέσουμε ότι η ακολουθία $\{W_n, n \geq 1\}$ αποτελείται από ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ (βλέπε *Grimmet & Stirzaker (2001)*).

Έστω τώρα ότι G είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της μεταβλητής W_i . Τότε ο συντελεστής προσαρμογής R είναι η μικρότερη θετική λύση της εξίσωσης (βλέπε *Grandell (1991)*)

$$M_G(R) = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{Rx} dG(x)$$

Αν οι ροπογεννήτριες των μεταβλητών X_i, T_i είναι $M_{X_i}(R)$ και $M_{T_i}(R)$ αντίστοιχα, τότε

$$M_G(R) = M_{T_i}(-cR)M_{X_i}(R)$$

Άρα η εξίσωση του *Lundberg*, γίνεται

$$M_{T_i}(-cR)M_{X_i}(R) = 1. \quad (1.21)$$

Ο τυχαίος περίπατος έχει πολλές εφαρμογές στη θεωρία πιθανοτήτων και στη θεωρία χρεοκοπίας ειδικότερα. Αυτό συμβαίνει γιατί μέσω τυχαίου περιπάτου, μπορούμε να υπολογίσου-

με την πιθανότητα χρεοκοπίας, που εδώ ισούται με:

$$\psi(u) = Pr(\{S_1 > u\} \cup \{S_2 > u\} \cup \dots) = Pr(\max\{S_1, S_2, \dots\} > u) \quad (1.22)$$

Όμως σύμφωνα με τον νόμο των μεγάλων αριθμών, ισχύει ότι

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = E(Y_i) < 0$$

Επομένως καταλήγουμε στο ότι ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$$

Άρα το $\max\{S_1, S_2, \dots\}$ είναι πεπερασμένο με πιθανότητα 1 και συνεπώς ισχύει ότι $\psi(u) < 1, \forall u \geq 0$.

Αν θέσουμε τώρα

$$M = \max_{n \geq 0} \sum_{i=1}^n (X_i - cT_i),$$

από τη σχέση (1.22), παίρνουμε ότι

$$\psi(u) = Pr(M > u).$$

Εδώ αναφέραμε έναν τρίτο τρόπο για το πώς μπορεί να εκφραστεί η πιθανότητα χρεοκοπίας. Οι άλλοι δύο τρόποι, αναφέρθηκαν λεπτομερώς παραπάνω και δίνονται από τις σχέσεις (1.16), (1.18).

Επίσης είναι γνωστό ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας, στο ανανεωτικό μοντέλο, ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (βλέπε Gerber & Shiu (2005))

$$\psi(u) = \phi \int_0^u \psi(u-x)h(x)dx + \phi \bar{H}(u),$$

όπου $h(x)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και $\bar{H}(x)$ είναι η ουρά της συνάρτησης κατανομής αντίστοιχα, της τυχαίας μεταβλητής $L_i, \forall i$.

1.4 Συνελίξεις και μετασχηματισμοί Laplace

Έστω X, Y ανεξάρτητες, συνεχείς, θετικές τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ και $g_Y(y)$ αντίστοιχα. Για να υπολογίσουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $Z = X + Y$, χρησιμοποιούμε την **συνέλιξη** των δύο συναρτήσεων, η οποία συμβολίζεται με $f_X * g_Y$ και ισούται με

$$\begin{aligned}(f_X * g_Y)(x) &= f(x) * g(x) \\ &= \int_0^x f_X(x-y) g_Y(y) dy \\ &= \int_0^x f_X(y) g_Y(x-y) dy\end{aligned}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(t)$ που ορίζεται $\forall t \geq 0$. Το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

το οποίο είναι συνάρτηση της παραμέτρου s , ονομάζεται **μετασχηματισμός Laplace** της συνάρτησης $f(t)$ και συμβολίζεται ως $\hat{f}(s)$ ή με $\mathcal{L}\{f(t)\}$. Έτσι έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Σε αντίθεση με τη ροπογεννήτρια, ο μετασχηματισμός *Laplace* ορίζεται $\forall s \geq 0$ αρκεί η f να είναι ολοκληρώσιμη. Αυτό ισχύει αφού

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx < \int_0^{\infty} f(x) dx < \infty$$

Οι ιδιότητες του μετασχηματισμού *Laplace* είναι πολλές, αλλά εδώ θα περιοριστούμε σε αυτές που θα μας χρειαστούν στη συνέχεια. Οι συγκεκριμένες ιδιότητες είναι οι εξής: (βλέπε Γκαρούτσος (2007))

i. Αν $f'(t)$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης $f(t)$ ως προς t , τότε ισχύει η σχέση

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\hat{f}(s) - f(0) \tag{1.23}$$

όπου $f(0)$ είναι μια σταθερά (η τιμή της συνάρτησης στο μηδέν).

ii. Έστω οι συναρτήσεις $f(t), g(t)$ με συνέλιξη $f(t)*g(t)$. Για τον μετασχηματισμό *Laplace* της συγκεκριμένης συνέλιξης, έχουμε

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \mathcal{L}\{g(t)\} = \widehat{f}(s) \widehat{g}(s) \quad (1.24)$$

Ισχύει όμως και το αντίστροφο, δηλαδή

$$\mathcal{L}^{-1}\{\widehat{f}(s) \widehat{g}(s)\} = f(t) * g(t) = \int_0^t f(x)g(t-x) dx = \int_0^t f(t-x)g(x) dx.$$

iii. Αν $f(t) = \alpha e^{-\beta t}$, τότε ο μετασχηματισμός *laplace* της $f(t)$ ισούται με

$$\widehat{f}(s) = \frac{\alpha}{\beta + s}. \quad (1.25)$$

Αντίθετα στον αντίστροφο του μετασχηματισμού *Laplace*, δίνεται η $\widehat{f}(s)$ και γίνεται προσπάθεια για την εύρεση της αρχικής συνάρτησης $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\widehat{f}(s)\}$. Βέβαια η εύρεση του αντιστρόφου είναι μια αρκετά δύσκολη υπόθεση και για αυτό τον λόγο μπορούμε να τον υπολογίσουμε μόνο σε ειδικές περιπτώσεις. Η περίπτωση που θα χρειαστούμε παρακάτω είναι

- Αν έχουμε μία ρητή συνάρτηση όπου το πολυώνυμο του παρανομαστή έχει βαθμό μεγαλύτερο από αυτό του αριθμητή τότε γίνεται χρήση της μεθόδου των απλών κλασμάτων, βρίσκουμε δηλαδή τον αντίστροφο μετασχηματισμό *Laplace* του κάθε κλάσματος και στο τέλος τον αντίστροφο της $\widehat{f}(s)$.

Επίσης ορίζουμε τον **μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes**, που χρησιμοποιείται για τις συναρτήσεις κατανομής και δίνεται από την παρακάτω σχέση (βλέπε *Rolski et al (1999)*)

$$\widehat{F}_\ell(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x).$$

Αν τώρα η συνάρτηση κατανομής F είναι συνεχής και έχει πυκνότητα f , τότε ο μετασχηματισμός *Laplace – Stieltjes* ισούται με τον μετασχηματισμό *Laplace* της f . Δηλαδή ο μετασχηματισμός *Laplace* είναι μία ειδική περίπτωση του μετασχηματισμού *Laplace – Stieltjes*.

Στη θεωρία κινδύνου πολύ σημαντική είναι η σχέση που συνδέει το μετασχηματισμό *Laplace* της ουράς μιας κατανομής με το μετασχηματισμό *Laplace* της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας που έχει αυτή η κατανομή. Έστω ότι

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx,$$

και

$$\hat{F}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{F}(x) dx.$$

Από την δεύτερη σχέση, κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \hat{F}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{F}(x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{s} e^{-sx} \bar{F}(x) \right]_0^{\infty} - \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \\ &= -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{s} e^{-sx} \bar{F}(x) + \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \hat{f}(s) \\ &= 0 + \frac{1}{s} (1 - \hat{f}(s)) \\ &= \frac{1 - \hat{f}(s)}{s}. \end{aligned}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και αν χρησιμοποιήσουμε την πρώτη ιδιότητα που δώσαμε στον μετασχηματισμό *Laplace*, σχέση (1.23). Έτσι βλέπουμε ότι

$$\mathcal{L}\{-\bar{F}'(t)\} = \bar{F}(0) - s\hat{F}(s) \Rightarrow$$

$$\hat{f}(s) = 1 - s\hat{F}(s) \Rightarrow$$

$$\hat{F}(s) = \frac{1 - \hat{f}(s)}{s} \tag{1.26}$$

Όπως έχουμε δει έως τώρα οι ποσότητες που μας ενδιαφέρουν σχετίζονται με την σύνθετη

γεωμετρική κατανομή. Επομένως χρειάζεται να δώσουμε ένα γενικό τύπο για μετασχηματισμό Laplace σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Εστω ότι παίρνουμε την πιθανότητα μη-χρεοκοπίας $\delta(u)$, η οποία όπως έχουμε αναφέρει είναι μια σύνθετη γεωμετρική κατανομή μεικτού τύπου. Άρα αν πάρουμε μετασχηματισμό Laplace – Stieltjes στην $\delta(u)$, έχουμε:

$$\int_{0^-}^{\infty} e^{-su} d\delta(u) = \delta(0) + \int_{0^+}^{\infty} e^{-su} d\delta(u)$$

Επειδή η $\delta(u)$ είναι μια φορά παραγωγίσιμη μπορούμε να γράψουμε την προηγούμενη σχέση και σαν απλό μετασχηματισμό Laplace.

Η άλλη ποσότητα που μας ενδιαφέρει είναι ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας. Αν πάρουμε μετασχηματισμό Laplace, χρησιμοποιώντας την δεύτερη ιδιότητα στην ολοκληρωτική ανανεωτική εξίσωση (1.16) και χρησιμοποιήσουμε την σχέση (1.26), που συνδέει τον Laplace της ουράς με την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(s) &= \frac{1}{1+\theta} \widehat{\psi}(s) \widehat{f}_e(s) + \frac{1}{1+\theta} \widehat{F}_e(s) \\ &= \frac{\frac{1}{1+\theta} \widehat{F}_e(s)}{1 - \frac{1}{1+\theta} \widehat{f}_e(s)} \Rightarrow \\ \widehat{\psi}(s) &= \frac{\frac{1}{1+\theta} (1 - \widehat{f}_e(s))}{s \left(1 - \frac{1}{1+\theta} \widehat{f}_e(s)\right)} \\ &= \frac{(1 - \widehat{f}_e(s))}{s (1 + \theta - \widehat{f}_e(s))}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Μια δεύτερη σχέση που ισχύει για τον μετασχηματισμό Laplace της $\psi(u)$, στο κλασικό μοντέλο, είναι η εξής: (βλέπε Rolski et al (1999))

$$\widehat{\psi}(s) = \frac{1}{s} - \frac{c - \lambda p_1}{cs - \lambda (1 - \widehat{f}(s))}. \tag{1.28}$$

Τέλος η εξίσωση του Lundberg για το ανανεωτικό μοντέλο, σχέση (1.21), μπορεί να γρα-

φτεί συναρτήσει του μετασχηματισμού *Laplace* ως:

$$\mathcal{L}_{T_i}(cR)\mathcal{L}_{X_i}(-R) = 1.$$

1.5 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu

Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου μία πολύ σημαντική ποσότητα που έχει μελετηθεί τα τελευταία χρόνια είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής (*discounted expected penalty function*) που μελετήθηκε για πρώτη φορά από τους *Gerber – Shiu* το 1998 και η οποία εκφράζεται ως:

$$\phi_\delta(u) = E [e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty) | U(0) = u],$$

όπου

- Το $\delta \geq 0$ μπορεί να ερμηνευτεί ως η παράμετρος του μετασχηματισμού *Laplace* ή ως η ένταση του επιτοκίου (*force of interest*).
- Η $w(x, y)$, $x, y \in [0, \infty)$ είναι μια θετική συνάρτηση.
- $U(T-)$ εκφράζει το πλεόνασμα λίγο πριν την έλευση της απαίτησης που φέρνει τη χρεοκοπία και $|U(T)|$ εκφράζει το έλλειμμα, σε απόλυτη τιμή, την χρονική στιγμή T που επέρχεται η χρεοκοπία.
- Επίσης $I(A)$ είναι μια δείτρια συνάρτηση του ενδεχομένου A , δηλαδή ισχύει ότι

$$I(A) = \begin{cases} 1, & \text{αν συμβαίνει το } A \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (1.29)$$

Η ποσότητα με την οποία θα ασχοληθούμε στα επόμενα κεφάλαια είναι μία ειδική περίπτωση της συνάρτησης των *Gerber – Shiu* για $w(x, y) = 1 \quad \forall x, y$ και $\delta > 0$. Συγκεκριμένα³

³Εδώ δίνουμε έναν δεύτερο συμβολισμό για την ειδική περίπτωση των *Gerber – Shiu*, στον οποίο βάζουμε την παύλα γιατί όπως θα δούμε αργότερα η συνάρτηση αυτή είναι η ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

$$\phi_\delta(u) = \bar{K}_\delta(u) = E [e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = u] .$$

Δηλαδή βλέπουμε ότι στην περίπτωση αυτή, η $\bar{K}_\delta(u)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας.

Οι Gerber και Shiu (1998) βρήκαν ότι, στη γενική περίπτωση, η $\phi_\delta(u)$ ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\phi_\delta(u) = \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi_\delta(u-x) \int_x^\infty e^{-r(y-x)} dF(y) dx + \frac{\lambda}{c} e^{\rho u} \int_u^\infty e^{-\rho y} \int_x^\infty w(y-x) dF(y) dx,$$

όπου $\rho = \rho(\delta)$ είναι η θετική λύση, ως προς s , της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg

$$\lambda + \delta - cs = \lambda \hat{f}(s). \quad (1.30)$$

Ονομάζουμε το αριστερό μέλος της γενικευμένης εξίσωσης με $\ell(s)$, η οποία είναι μια γραμμική (με αρνητική κλίση), φθίνουσα συνάρτηση ως προς s , διότι

$$\ell'(s) = -c < 0,$$

και το δεξιό μέλος της (1.30) με $\tau(s)$ η οποία, όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν οικογένειες κατανομών με πεπερασμένο μετασχηματισμό Laplace, είναι φθίνουσα και κυρτή συνάρτηση καθώς ισχύει

$$\tau'(s) = \lambda \hat{f}'(s) < 0,$$

ενώ η δεύτερη παράγωγος ισούται με

$$\tau''(s) = \lambda \hat{f}''(s) > 0.$$

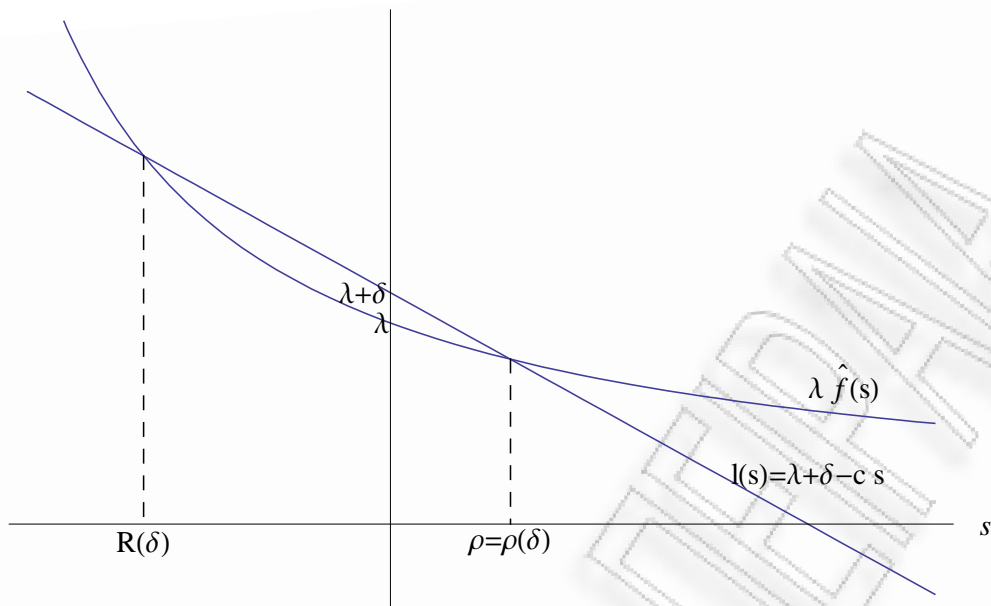
Επίσης ισχύει ότι υπάρχει μόνο μία θετική λύση, ρ , με τις υπόλοιπες να είναι όλες αρνητικές και για $s = 0$, παίρνουμε

$$\ell(0) = \lambda + \delta,$$

και

$$\tau(0) = \lambda.$$

Έτσι όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, τα παρουσιάζουμε στο Σχήμα 1.6.



Σχήμα 1.6: Γραφική παράσταση της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg.

Παρατήρηση 1.5.1 Στην ειδική περίπτωση που έχουμε $\delta = 0$, ισχύουν τα εξής:

- Η λύση της εξίσωσης (1.30), είναι

$$\rho = \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\delta) = 0$$

- Η εξίσωση (1.30) έχει μία αρνητική λύση η οποία ισούται με τον συντελεστή προσαρμογής, δηλαδή ισχύει ότι

$$R(\delta) = R \quad \text{για } \delta = 0$$

Είναι επίσης εύκολο να δείχτεί ότι για $\delta = 0$, η (1.30) συμπίπτει με την (1.19).

Στη περίπτωση που $\delta > 0$ και $w(x, y) = 1$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (βλέπε Willmot & Lin (2001))

$$\bar{K}_\delta(u) = \frac{1}{1+\beta} \int_0^u \bar{K}_\delta(u-x) dG_\delta(x) + \frac{1}{1+\beta} \bar{G}_\delta(u), \quad u \geq 0 \quad (1.31)$$

όπου $\bar{G}_\delta(x)$ είναι μία κατανομή ισορροπίας και ισούται με

$$\bar{G}_\delta(x) = \frac{e^{\rho x} \int_x^\infty e^{-\rho y} \bar{F}(y) dy}{\int_0^\infty e^{-\rho y} \bar{F}(y) dy}, \quad x \geq 0 \quad (1.32)$$

με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$\bar{G}'_\delta(x) = \frac{e^{\rho x} \int_x^\infty e^{-\rho y} dF(y)}{\int_0^\infty e^{-\rho y} \bar{F}(y) dy}, \quad x \geq 0 \quad (1.33)$$

και η σταθερά⁴ β ισούται με

$$\beta = \frac{1 + \theta}{\int_0^\infty e^{-\rho y} dF_e(y)} - 1. \quad (1.34)$$

Πρόταση 1 (βλέπε Willmot & Lin (2001, κεφ. 9)). Όταν $w(x, y) = 1$ και $\delta > 0$, τότε η ποσότητα $\bar{K}_\delta(u)$ είναι η δεξιά ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής, δηλαδή έχουμε

$$\bar{K}_\delta(u) = Pr(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_M > u),$$

$$\text{όπου } M \sim Geo\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right) \text{ με } Pr(M = n) = \frac{\beta}{1+\beta} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n, \quad n \geq 0$$

Εδώ τα Z_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κοινή συνάρτηση κατανομής την $G_\delta(x)$ και ισχύει ότι

$$\frac{1}{1+\beta} = \frac{\lambda}{c} \frac{1 - \hat{f}(\rho)}{\rho} = 1 - \frac{\delta}{c\rho} = \frac{1}{1+\theta} \hat{f}_e(\rho)$$

⁴Εδώ η σταθερά β δεν έχει καμία απολύτως σχέση με την παράμετρο που χρησιμοποιούμε για την εκθετική κατανομή και δεν πρέπει να συγχέουμε τις δύο ποσότητες.

Επειδή η $K_\delta(u)$ είναι μία σύνθετη γεωμετρική κατανομή, όπως είναι και η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας, μπορεί να γραφτεί ως

$$K_\delta(u) = \frac{\beta}{1+\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\beta} \right)^k G_\delta^{*k}(u), \quad (1.35)$$

με

$$K_\delta(0) = \frac{\beta}{1+\beta}.$$

Σπάμε το άθροισμα στο διακριτό και στο συνεχές μέρος και παίρνουμε

$$K_\delta(u) = \frac{\beta}{1+\beta} + \frac{\beta}{1+\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\beta} \right)^k G_\delta^{*k}(u) \Rightarrow$$

$$K_\delta(u) - K_\delta(0) = \frac{\beta}{1+\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\beta} \right)^k G_\delta^{*k}(u)$$

Ορίζοντας τη συνάρτηση,

$$\begin{aligned} K_0(u) &= K_\delta(u) - K_\delta(0) \\ &= \frac{\beta}{1+\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\beta} \right)^k G_\delta^{*k}(u) \end{aligned} \quad (1.36)$$

και παραγωγίζοντας την $K_0(u)$, ως προς u , προκύπτει

$$K'_0(u) = \frac{\beta}{1+\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\beta} \right)^k G_\delta'^{*k}(u)$$

Στη συνέχεια, επειδή έχουμε αναφέρει στη σχέση (1.24) ότι η συνέλιξη k -τάξης μίας συνάρτησης με τον εαυτό της ισούται με τον μετασχηματισμό *Laplace* της συνάρτησης k -φορές, παίρνοντας μετασχηματισμό *Laplace* στην $K'_0(u)$, προκύπτει

$$\begin{aligned} \widehat{K}'_0(s) &= \frac{\beta}{1+\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\beta} \right)^k \left[\widehat{G}'_\delta(s) \right]^k \\ &= \frac{\beta}{1+\beta} \frac{\frac{1}{1+\beta} \left(\widehat{G}'_\delta(s) \right)}{1 - \frac{1}{1+\beta} \left(\widehat{G}'_\delta(s) \right)} \end{aligned} \quad (1.37)$$

Για να βρεθεί η $K'_0(u)$, παίρνουμε αντίστροφο μετασχηματισμό *Laplace* στη σχέση (1.37) και στη συνέχεια, μέσω της ποσότητας $K'_0(u)$, μπορούμε να υπολογίσουμε την $K_\delta(u)$ από τη σχέση

$$K_\delta(u) = K_\delta(0) + \int_{0^+}^u K'_0(x) dx \quad (1.38)$$

Άρα μετά τον υπολογισμό της σχέσης (1.38), μπορούμε με ευκολία να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας από τη σχέση

$$\bar{K}_\delta(u) = 1 - K_\delta(u).$$

Επίσης για τον μετασχηματισμό *Laplace* της $\bar{K}_\delta(u)$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$\begin{aligned} \widehat{\bar{K}}_\delta(s) &= \frac{\frac{1}{1+\beta} (1 - \widehat{g}_\delta(s))}{s \left(1 - \frac{1}{1+\beta} \widehat{g}_\delta(s)\right)} \\ &= \frac{(1 - \widehat{g}_\delta(s))}{s(1 + \beta - \widehat{g}_\delta(s))}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Έτσι παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό *Laplace* της σχέσης (1.39), καταλήγουμε σε έναν δεύτερο τρόπο υπολογισμού του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta(u)$.

Στη συνέχεια δίνουμε ένα αποτέλεσμα για την ειδική περίπτωση που οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία μείξη ή ένα συνδυασμό Εκθετικών κατανομών.

Πρόταση 2 (βλέπε *Lin & Willmot (1999)*). Όταν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι μία μείξη ή ένας συνδυασμός n Εκθετικών κατανομών, δηλαδή όταν έχουμε ότι

$$\bar{F}(x) = \sum_{i=1}^n A_i e^{-\beta_i x},$$

όπου $\sum_{i=1}^n A_i = 1$, τότε και η ποσότητα $\bar{G}_\delta(x)$ θα είναι μια μείξη ή ένας συνδυασμός αντίστοιχα, n Εκθετικών κατανομών με διαφορετικά βάρη και με ίδιες παραμέτρους με την $\bar{F}(x)$.

Δηλαδή έχουμε ότι

$$\bar{G}_\delta(x) = \sum_{i=1}^n A'_i e^{-\beta_i x}, \text{ όπου } \sum_{i=1}^n A'_i = 1 \text{ με}$$

$$A'_i = \frac{\frac{A_i}{\beta_i + \rho}}{\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\beta_i + \rho}}, \quad (1.40)$$

όπου ρ είναι η θετική λύση της εξίσωσης (1.30).

Απόδειξη

Για μείξη ή συνδυασμό n Εκθετικών κατανομών, από τη σχέση (1.32), έχουμε:

$$\begin{aligned} \bar{G}_\delta(x) &= \frac{e^{\rho x} \int_x^\infty e^{-\rho y} \bar{F}(y) dy}{\int_0^\infty e^{-\rho y} \bar{F}(y) dy} \\ &= \frac{e^{\rho x} \int_x^\infty e^{-\rho y} \sum_{i=1}^n A_i e^{-\beta_i y} dy}{\int_0^\infty e^{-\rho y} \sum_{i=1}^n A_i e^{-\beta_i y} dy} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n A_i e^{\rho x} \int_x^\infty e^{-(\beta_i + \rho) y} dy}{\sum_{i=1}^n A_i \int_0^\infty e^{-(\beta_i + \rho) y} dy} \end{aligned}$$

Κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, προκύπτει

$$\begin{aligned}\bar{G}_\delta(x) &= \frac{\sum_{i=1}^n A_i e^{\rho x} \left(-\frac{1}{\beta_i + \rho}\right) \left[e^{-(\beta_i + \rho)y}\right]_x^\infty}{\sum_{i=1}^n A_i \left(-\frac{1}{\beta_i + \rho}\right) \left[e^{-(\beta_i + \rho)y}\right]_0^\infty} \\ &= \frac{-\sum_{i=1}^n \frac{A_i e^{\rho x}}{\beta_i + \rho} \left(0 - e^{-(\beta_i + \rho)x}\right)}{-\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\beta_i + \rho} (0 - 1)}\end{aligned}$$

Επομένως καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned}\bar{G}_\delta(x) &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{A_i e^{-\beta_i x}}{\beta_i + \rho}}{\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\beta_i + \rho}} \\ &= \frac{\frac{A_1}{\beta_1 + \rho} e^{-\beta_1 x} + \frac{A_2}{\beta_2 + \rho} e^{-\beta_2 x} + \dots + \frac{A_n}{\beta_n + \rho} e^{-\beta_n x}}{\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\beta_i + \rho}},\end{aligned}$$

που είναι και το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 1.5.2 (βλέπε *Badier & Chan (1992)*). Έστω ότι έχουμε μία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δύο εκθετικών κατανομών με παραμέτρους β_1, β_2 , όπου ισχύει ότι $\beta_1 < \beta_2$, και βάρη $A, 1 - A$, τα οποία αθροίζουν πάντα στην μονάδα. Δηλαδή έχουμε ότι

$$f(x) = A \beta_1 e^{-\beta_1 x} + (1 - A) \beta_2 e^{-\beta_2 x} \quad \text{για } x \geq 0$$

Στη γενική περίπτωση, δηλαδή όταν δεν ισχύει απαραίτητα ότι $A \in (0, 1)$, για να είναι η $f(x)$ συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα πρέπει να ισχύει κάποιος περιορισμός για το βάρος A , έτσι ώστε η $f(x)$ να είναι μη-αρνητική συνάρτηση $\forall x \geq 0$. Η αναγκαία και ικανή

συνθήκη για να ισχύει το παραπάνω, είναι η εξής:

$$0 \leq A \leq \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1},$$

αφού αν $A < 0$, τότε η $f(x)$ θα ήταν αρνητική για μεγάλες τιμές του x και αν $A > \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1}$,

τότε η $f(x)$ θα ήταν αρνητική για μικρές τιμές του x . Αφού καταλήξαμε στο ότι πρέπει να ισχύει αυτός ο περιορισμός, στη συνέχεια διαχωρίζουμε την διαφορά ανάμεσα στην μείξη και στο συνδυασμό δύο εκθετικών κατανομών. Όταν ισχύει

$$0 \leq A \leq 1,$$

τότε έχουμε μία μείξη δύο εκθετικών κατανομών, ενώ όταν ισχύει

$$1 \leq A \leq \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1},$$

έχουμε έναν συνδυασμό δύο εκθετικών κατανομών. Ο παραπάνω περιορισμός μπορεί να γενικευτεί και για την περίπτωση που εξετάζουμε συνδυασμό n εκθετικών κατανομών.

Από την Πρόταση 2, παρατηρούμε ότι:

- Ισχύει και για θετικά και για αρνητικά βάρη, A_i , με την προϋπόθεση όμως να έχουμε

$$\sum_{i=1}^n A_i = 1$$

- Για $n = 1$, δηλαδή όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία εκθετική κατανομή, προκύπτει από την σχέση (1.40) ότι

$$\bar{G}_\delta(x) = A'_1 e^{-\beta_1 x} = A_1 e^{-\beta_1 x} = \bar{F}(x)$$

δηλαδή έχουμε ότι οι δύο κατανομές είναι ακριβώς οι ίδιες.

Πρόταση 3 (βλέπε Lin & Willmot (1999)). Όταν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι μία μείξη n κατανομών Γάμμα με ακέραιες⁵ παραμέτρους (α_i, β_i) , δηλαδή με συνάρτηση

⁵Στον αναλογισμό, επειδή χρησιμοποιείται πολύ η κατανομή Γάμμα με ακέραιες και τις δύο παραμέτρους, συνηθίζεται να ονομάζουν τη συγκεκριμένη κατανομή ως *Erlang*. Εμείς στη συγκεκριμένη εργασία όταν αναφερόμαστε στην κατανομή Γάμμα, θα μιλάμε πάντα για ακέραιες τιμές των παραμέτρων.

πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \sum_{i=1}^n A_i \frac{\beta_i^{\alpha_i} x^{\alpha_i-1} e^{-\beta_i x}}{(\alpha_i - 1)!},$$

και με ουρά

$$\bar{F}(x) = \sum_{i=1}^n A_i \sum_{k=0}^{\alpha_i-1} \frac{(\beta_i x)^k}{k!} e^{-\beta_i x},$$

όπου $\sum_{i=1}^n A_i = 1$, τότε και η ποσότητα $\bar{G}_\delta(x)$ θα είναι μια μείξη n κατανομών Γάμμα με διαφορετικά βάρη και με τις ίδιες παραμέτρους με την $\bar{F}(x)$.

Προκύπτει δηλαδή ότι

$$\bar{G}_\delta(x) = \sum_{i=1}^n A'_i \sum_{k=0}^{\alpha_i-1} \frac{(\beta_i x)^k}{k!} e^{-\beta_i x}, \quad \text{όπου } \sum_{i=1}^n A'_i = 1 \text{ με}$$

$$A'_i = \frac{\sum_{j=i}^n A_j \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + \rho} \right)^{j-i}}{\sum_{j=1}^n A_j \sum_{k=0}^{j-1} \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + \rho} \right)^k}. \quad (1.41)$$

Απόδειξη

Εδώ για να υπολογίσουμε την $\bar{G}_\delta(x)$, μπορούμε για μεγαλύτερη ευκολία να βρούμε πρώτα την $G'_\delta(x)$, με την οποία αποφεύγουμε την χρησιμοποίηση της ουράς της *Gamma* κατανομής. Άρα για τον αριθμητή της σχέσης (1.33), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} e^{\rho x} \int_x^\infty e^{-\rho y} dF(y) &= e^{\rho x} \int_x^\infty e^{-\rho y} \sum_{j=1}^n A_j \frac{\beta_j^j y^{j-1} e^{-\beta_j y}}{(j-1)!} dy \\ &= e^{\rho x} \int_x^\infty \sum_{j=1}^n A_j \frac{\beta_j^j y^{j-1} e^{-(\beta_j + \rho)y}}{(j-1)!} dy \\ &= e^{\rho x} \sum_{j=1}^n A_j \beta_j^j \int_x^\infty \frac{y^{j-1} e^{-(\beta_j + \rho)y}}{(j-1)!} dy \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα που υπάρχει μέσα στο ολοκλήρωμα μπορεί, μέσω κατάλληλων πράξεων, να μας οδηγήσει σε μία κατανομή *Gamma* με παραμέτρους $(j, \beta + \rho)$. Επομένως στη συνέχεια το ολοκλήρωμα, στο διάστημα (x, ∞) , της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας που έχει, είναι η δεξιά ουρά της κατανομής *Gamma* $(j, \beta + \rho)$. Δηλαδή έχουμε ότι

$$\begin{aligned} e^{\rho x} \int_x^{\infty} e^{-\rho y} dF(y) &= e^{\rho x} \sum_{j=1}^n A_j \frac{\beta_i^j}{(\beta_i + \rho)^j} \int_x^{\infty} \frac{y^{j-1} e^{-(\beta_i + \rho)y} (\beta_i + \rho)^j}{(j-1)!} dy \\ &= e^{\rho x} \sum_{j=1}^n A_j \frac{\beta_i^j}{(\beta_i + \rho)^j} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{((\beta_i + \rho)x)_i^\alpha}{\alpha_i!} e^{-(\beta_i + \rho)x} \\ &= e^{\rho x} \sum_{j=1}^n A_j \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + \rho} \right)^j \sum_{i=1}^j \frac{((\beta_i + \rho)x)^{\alpha_i - 1}}{(\alpha_i - 1)!} e^{-(\beta_i + \rho)x} \end{aligned}$$

Τέλος, κάνοντας αλλαγή στα όρια των αθροισμάτων, καταλήγουμε στο παρακάτω αποτέλεσμα

$$e^{\rho x} \int_x^{\infty} e^{-\rho y} dF(y) = \frac{1}{\beta_i + \rho} \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=i}^n A_j \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + \rho} \right)^{j-i} \right] \frac{\beta_i^{\alpha_i} x^{\alpha_i - 1} e^{-\beta_i x}}{(\alpha_i - 1)!}$$

Αντίστοιχα για τον παρανομαστή της σχέσης (1.33), με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\rho y} \bar{F}(y) dy &= \left[-\frac{1}{\rho} e^{-\rho y} \bar{F}(y) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} e^{-\rho y} dF(y) \\ &= -\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} e^{-\rho y} \bar{F}(y) + \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho} \int_0^{\infty} e^{-\rho y} dF(y) \\ &= 0 + \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho} \int_0^{\infty} e^{-\rho y} dF(y) \\ &= \frac{1}{\rho} \left(1 - \int_0^{\infty} e^{-\rho y} \sum_{j=1}^n A_j \frac{\beta_i^j y^{j-1} e^{-\beta_i y}}{(j-1)!} dy \right) \end{aligned}$$

Εδώ όπως και πριν, μπορούμε να σχηματίσουμε μέσα στο ολοκλήρωμα μία κατανομή *Gamma* με παραμέτρους $(j, \lambda + \rho)$. Επομένως το ολοκλήρωμα, στο διάστημα $(0, \infty)$, της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας που έχει, θα ισούται με 1. Δηλαδή προκύπτει

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} e^{-\rho y} \bar{F}(y) dy &= \frac{1}{\rho} \left(1 - \sum_{j=1}^n A_j \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + \rho} \right)^j \int_0^{\infty} \frac{y^{j-1} e^{-(\beta_i + \rho)y} (\beta_i + \rho)^j}{(j-1)!} dy \right) \\
 &= \frac{1}{\rho} \left(1 - \sum_{j=1}^n A_j \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + \rho} \right)^j \right) \\
 &= \frac{1}{\beta_i + \rho} \sum_{j=1}^n A_j \left(\frac{1 - \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + \rho} \right)^j}{1 - \frac{\beta_i}{\beta_i + \rho}} \right) \\
 &= \frac{1}{\beta_i + \rho} \sum_{j=1}^n A_j \sum_{k=0}^{j-1} \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + \rho} \right)^k
 \end{aligned}$$

Άρα η σχέση (1.33), γράφεται:

$$\begin{aligned}
 G'_\delta(x) &= \frac{\frac{1}{\beta_i + \rho} \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=i}^n A_j \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + \rho} \right)^{j-i} \right] \frac{\beta_i^{\alpha_i} x^{\alpha_i-1} e^{-\beta_i x}}{(\alpha_i - 1)!}}{\frac{1}{\beta_i + \rho} \sum_{j=1}^n A_j \sum_{k=0}^{j-1} \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + \rho} \right)^k} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{j=i}^n A_j \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + \rho} \right)^{j-i}}{\sum_{j=1}^n A_j \sum_{k=0}^{j-1} \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + \rho} \right)^k} \frac{\beta_i^{\alpha_i} x^{\alpha_i-1} e^{-\beta_i x}}{(\alpha_i - 1)!}
 \end{aligned}$$

Αφού υπολογίσαμε την $G'_\delta(x)$, μπορούμε τώρα να βρούμε και την ουρά $\bar{G}_\delta(x)$. Επομένως καταλήγουμε ότι

$$\bar{G}_\delta(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{j=i}^n A_j \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + \rho}\right)^{j-i}}{\sum_{j=1}^n A_j \sum_{k=0}^{j-1} \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + \rho}\right)^k} \sum_{k=0}^{\alpha_i-1} \frac{(\beta_i x)^k}{k!} e^{-\beta_i x}$$

που είναι και το ζητούμενο. □

Επομένως όταν το μέγεθος των αποζημιώσεων ακολουθεί κάποια κατανομή από αυτές που αναφέρονται στις Προτάσεις 2 και 3, τότε για τον υπολογισμό της ποσότητας $\bar{G}_\delta(x)$ μπορούμε για ευκολία να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις που αποδείξαμε στις συγκεκριμένες προτάσεις και όχι την πιο δύσκολη στον υπολογισμό της, σχέση (1.32).

Κεφάλαιο 2

Οι προσεγγίσεις DeVylder και Tijms για το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας.

Με τη βοήθεια των τύπων που αναπτύξαμε αναλυτικά στο προηγούμενο κεφάλαιο, θέλουμε να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας για δύο διαφορετικά αριθμητικά παραδείγματα και στη συνέχεια να υπολογίσουμε κάποιες γνωστές προσεγγίσεις που ισχύουν για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Όμως επειδή ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η εύρεση κάποιων προσεγγίσεων για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, χρησιμοποιούμε αυτές τις προσεγγίσεις όχι για την πιθανότητα χρεοκοπίας που είναι ήδη γνωστές, αλλά για να προσεγγίσουμε αυτή την ποσότητα που μας ενδιαφέρει, δηλαδή την $\bar{K}_\delta(u)$.

2.1 Οι προσεγγίσεις DeVylder και Tijms

Επειδή στη γενική περίπτωση, ο ακριβής υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας δεν είναι δυνατός αναλυτικά, χρησιμοποιούνται διάφορες προσεγγίσεις. Δύο από τις κυριότερες τέτοιες προσεγγίσεις παρουσιάζονται στη συνέχεια (βλέπε *Grandell* (1991) και *Πολίτης* (2008)).

Προσέγγιση DeVylder

Σκοπός της προσέγγισης *DeVylder* είναι η αντικατάσταση της ανέλιξης πλεονάσματος $\{U(t) : t \geq 0\}$, με μία άλλη καινούρια ανέλιξη πλεονάσματος $\{U'(t) : t \geq 0\}$, με τύπο:

$$U'(t) = u + ct - S'(t),$$

όπου $S'(t)$ είναι το άθροισμα του ύψους των αποζημιώσεων, που τώρα ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέση τιμή p'_1 . Το πλήθος των απαιτήσεων που φθάνουν στο χρόνο, $N'(t)$, ακολουθεί μια στοχαστική ανέλιξη *Poisson* με ένταση λ' , θ' είναι το περιθώριο ασφαλείας της ανέλιξης και R' ο συντελεστής προσαρμογής. Με την χρήση της προσέγγισης *DeVylder*, στόχος μας είναι να προσεγγίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$, της ανέλιξης $U(t)$ με οποιαδήποτε κατανομή αποζημιώσεων, μέσω της πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi_{DV}(u)$, της ανέλιξης $U'(t)$ με εκθετικές αποζημιώσεις.

Η πιθανότητα $\psi_{DV}(u)$ δίνεται από τη σχέση

$$\psi_{DV}(u) = \frac{1}{1 + \theta'} e^{-R' u} = \frac{1}{1 + \theta'} e^{-\frac{\theta'}{(1+\theta')p'_1} u} \quad (2.1)$$

Στην εκθετική κατανομή, με παράμετρο β , οι ροπές συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση

$$E(X^k) = p_k = \frac{k!}{\beta^k} \quad (2.2)$$

Άρα ισχύουν τα εξής:

$$p'_2 = 2p_1^2 \quad (2.3)$$

και

$$p'_3 = 6p_1^3 \quad (2.4)$$

Για να υπολογιστούν τα θ' , p'_1 , λ' που χρησιμοποιούνται για την εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας της προσέγγισης *DeVylder*, $\psi_{DV}(u)$, πρέπει να λυθεί το σύστημα:

$$\theta' \lambda' p'_1 = \theta \lambda p'_1$$

$$\lambda' p'_2 = \lambda p_2$$

$$\lambda' p'_3 = \lambda p_3$$

το οποίο σύμφωνα με τις σχέσεις (2.3), (2.4), γίνεται

$$\theta' \lambda' p_1' = \theta \lambda p_1$$

$$2\lambda' p_1'^2 = \lambda p_2 \quad (2.5)$$

$$6\lambda' p_1'^3 = \lambda p_3$$

Λύνοντας το σύστημα (2.5), ως προς θ' , p_1' και λ' , καταλήγουμε στα εξής:

Για το p_1' παίρνουμε ότι

$$p_1' = \frac{p_3}{3p_2}, \quad (2.6)$$

για το λ' αντίστοιχα

$$\lambda' = \frac{9\lambda p_2^3}{2p_3^2}, \quad (2.7)$$

και τέλος για το θ' , παίρνουμε

$$\theta' = \frac{2p_1 p_3 \theta}{3p_2^2}. \quad (2.8)$$

Προσέγγιση Tijms

Όπως έχουμε αναφέρει η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η ουρά μίας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής και μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά μόνο σε ορισμένες περιπτώσεις. Η προσέγγιση του Tijms προσπαθεί μέσω της χρήσης μίας μείξης δύο εκθετικών κατανομών, να προσεγγίσει την $\psi(u)$. Βέβαια για να χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση αυτή, θα πρέπει οι παράμετροι που θα επιλεχθούν να ικανοποιούν τα εξής:

1.

$$\psi_T(0) = \psi(0) = \frac{1}{1 + \theta}.$$

Εδώ, και στη συνέχεια, η συνάρτηση $\psi_T(u)$, δηλώνει την πιθανότητα χρεοκοπίας που χρησιμοποιείται για την προσέγγιση Tijms.

2. Η μέση τιμή για τη μέγιστη σωρευτική απώλεια στα δύο μοντέλα να είναι η ίδια.

ή ισοδύναμα,

Η μέση τιμή της κατανομής που δηλώνει την πιθανότητα μη-χρεοκοπίας για κάθε μοντέλο, να είναι η ίδια.

Από τη σχέση (1.13), παίρνουμε ότι¹

$$\int_0^{\infty} \psi(u) du = E(L)$$

Επομένως πρέπει να ισχύει

$$\int_0^{\infty} \psi(u) du = \int_0^{\infty} \psi_T(u) du = E(L_T),$$

όπου L_T είναι η μέγιστη σωρευτική απώλεια στην προσέγγιση του *Tijms*.

3. Η πραγματική πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ και η προσέγγιση του *Tijms* έχουν την ίδια ασυμπτωτική συμπεριφορά για $u \rightarrow \infty$.

Δηλαδή ισχύει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\psi_T(u)} = 1.$$

Έτσι αν ισχύουν οι παραπάνω υποθέσεις, σύμφωνα με τον *Tijms* η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση

$$\psi_T(u) = \left(\frac{1}{1+\theta} - C \right) e^{-\gamma u} + C e^{-Ru}, \quad (2.9)$$

όπου C είναι η ίδια σταθερά που χρησιμοποιείται και στον ασυμπτωτικό τύπο του *Lundberg*, δηλαδή

$$C = \frac{\theta p_1}{R \int_0^{\infty} x e^{Rx} \bar{F}(x) dx}, \quad (2.10)$$

¹Η μέση τιμή της μέγιστης σωρευτικής απώλειας παρουσιάζεται αναλυτικά στην Ενότητα 3.1.

και η σταθερά γ στη σχέση (2.9) επιλέγεται από τη σχέση

$$\gamma = \left(\frac{1}{1+\theta} - C \right) \left(\frac{1}{\theta p_1} \int_0^\infty x \bar{F}(x) dx - \frac{C}{R} \right)^{-1}. \quad (2.11)$$

Παρατηρούμε ότι αν ισχύει η τρίτη συνθήκη, τότε για $u \rightarrow \infty$, ο δεύτερος όρος της $\psi_T(u)$ συγκλίνει πιο αργά στο μηδέν από ότι ο πρώτος όρος και έτσι έχουμε ότι

$$\psi_T(u) \sim C e^{-Ru},$$

δηλαδή η προσέγγιση έχει πάντα τη σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά.

Η προσέγγιση του *Tijms* έχει αποδειχθεί ότι είναι ακριβής με την πραγματική $\psi(u)$, $\forall u \geq 0$, όταν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι:

i) Εκθετική,

ii) μείξη ή συνδυασμός δύο Εκθετικών κατανομών,

iii) συνέλιξη δύο Εκθετικών κατανομών, δηλαδή κατανομή *Gamma* με πρώτη παράμετρο το πλήθος των συνελίξεων ($X_i \sim \text{Gamma}(2, \beta)$).

2.2 Οι προσεγγίσεις Tijms και DeVyllder για μείξη εκθετικών κατανομών.

Στη συνέχεια θα πάρουμε ένα παράδειγμα, όπου οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία μείξη τριών εκθετικών κατανομών και μέσω των σχέσεων που αναφέρθηκαν παραπάνω στη θεωρία, θα υπολογίσουμε τις προσεγγίσεις *Tijms* και *DeVyllder* για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας ($\delta \geq 0$) και όχι απλώς για την πιθανότητα χρεοκοπίας ($\delta = 0$). Σκοπός μας είναι επίσης, να συγκρίνουμε τον πραγματικό μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας με τις προσεγγίσεις του, να δούμε ποια προσέγγιση λειτουργεί καλύτερα και γιατί, και τέλος να παρατηρήσουμε αν οι προσεγγίσεις αλλάζουν και πόσο, όταν αλλάζει η τιμή του δ . Επίσης πρέπει να αναφερθεί ότι για να γίνουν όλες οι πράξεις που ακολουθούν,

έχει χρησιμοποιηθεί το πρόγραμμα *Mathematica* (βλέπε Παράρτημα Α').

Παράδειγμα 2.2.1 Έστω ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν μια μείξη τριών εκθετικών κατανομών, με βάρη $A_i = \frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$ και παραμέτρους $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 4$, $\beta_3 = 6$. Δηλαδή η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι

$$f(x) = \frac{1}{3} 2 e^{-2x} + \frac{1}{3} 4 e^{-4x} + \frac{1}{3} 6 e^{-6x},$$

και η ουρά της κατανομής

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{3} e^{-2x} + \frac{1}{3} e^{-4x} + \frac{1}{3} e^{-6x}.$$

Υποθέτουμε ότι $c = 1$, $\lambda = 2$ και $\delta = 0.05$, επομένως από τη σχέση (1.3) προκύπτει ότι

$$\theta = \frac{7}{11}.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις τρεις πρώτες ροπές της $f(x)$, από τη σχέση (1.2), και παίρνουμε

$$p_1 = E(X) = 0.305556,$$

$$p_2 = E(X^2) = 0.226852,$$

και

$$p_3 = E(X^3) = 0.290509.$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής ισορροπίας, υπολογίζεται από τη σχέση (1.10), και ισούται με

$$f_e(x) = \frac{12}{11} e^{-2x} + \frac{12}{11} e^{-4x} + \frac{12}{11} e^{-6x},$$

επίσης η ουρά της κατανομής ισορροπίας βρίσκεται μέσω της σχέσης (1.9) και ισούται με

$$\bar{F}_e(x) = \frac{6}{11} e^{-2x} + \frac{3}{11} e^{-4x} + \frac{2}{11} e^{-6x}.$$

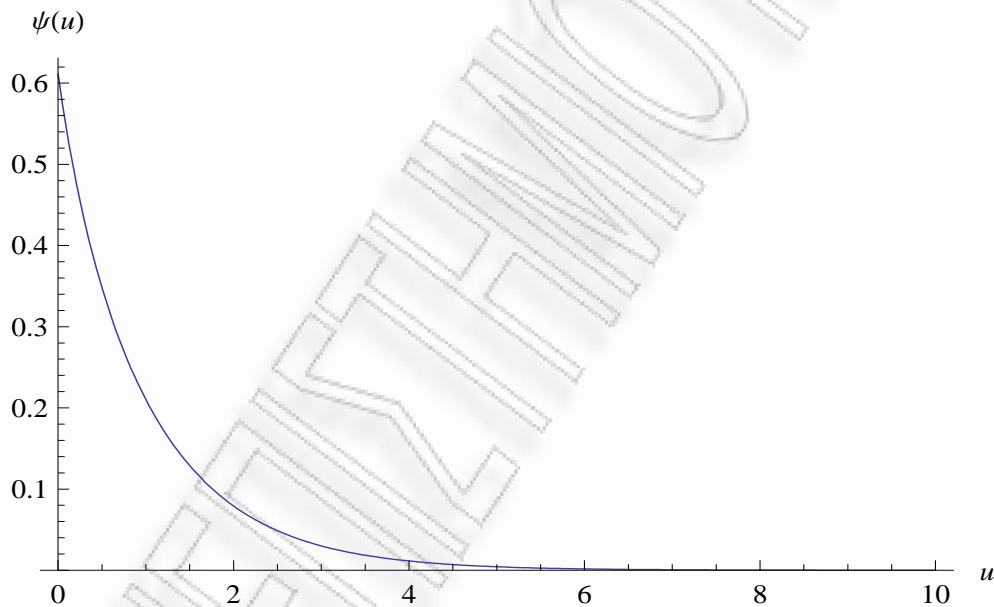
Επειδή η κατανομή των αποζημιώσεων είναι της μορφής $\alpha e^{-\beta x}$, ο μετασχηματισμός *Laplace* της $f(x)$ βρίσκεται μέσω της σχέσης² (1.25). Επομένως προκύπτει ότι

$$\hat{f}(s) = \frac{2}{3(2+s)} + \frac{4}{3(4+s)} + \frac{2}{6+s}$$

Για την εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας, θα πρέπει πρώτα να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός *Laplace* της $\psi(u)$, που δίνεται από τη σχέση (1.28), και στη συνέχεια με αντιστροφή του μετασχηματισμού *Laplace*, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$\psi(u) = 0.0166231 e^{-5.58503u} + 0.0436979 e^{-3.4447u} + 0.55079 e^{-0.970262u} \quad (2.12)$$

Οι εκθέτες που εμφανίζονται είναι οι ρίζες της εξίσωσης του *Lundberg*, που βρίσκονται από τη σχέση (1.19) και ισχύει ότι $R = 0.970262$, διότι είναι η μικρότερη θετική λύση.



Σχήμα 2.1: Γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Για την πιθανότητα χρεοκοπίας, σχέση (2.12), μπορούμε να εφαρμόσουμε τις προσεγγίσεις *DeVylder* και *Tijms* σύμφωνα με τις σχέσεις που δόθηκαν στην Ενότητα 2.1.

Για την προσέγγιση *DeVylder*, μέσω των λύσεων (2.6), (2.7), (2.8), παίρνουμε:

²Η συγκεκριμένη σχέση είναι αποτέλεσμα της τρίτης ιδιότητας του μετασχηματισμού *Laplace* που είχαμε αναφέρει στην Ενότητα 1.4.

$$p'_1 = \frac{p_3}{3p_2} = 0.426871,$$

$$\lambda' = \frac{9\lambda p_2^3}{2p_3^2} = 1.24494,$$

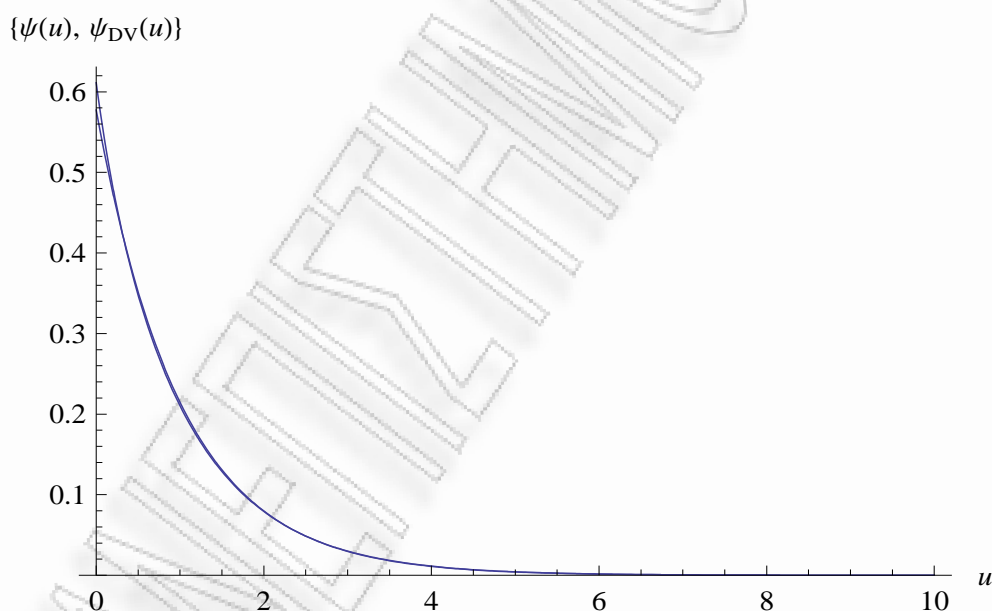
και

$$\theta' = \frac{2p_1 p_3 \theta}{3p_2^2} = 0.731778.$$

Επομένως σύμφωνα με τη σχέση (2.1), προκύπτει ότι

$$\psi_{DV}(u) = 0.577441 e^{-0.989898 u}. \quad (2.13)$$

Συγκρίνοντας την πραγματική πιθανότητα χρεοκοπίας, της σχέσης (2.12), με την προσεγγιστική, σχέση (2.13), έχουμε το παρακάτω κοινό διάγραμμα 2.2.



Σχήμα 2.2: Γραφική παράσταση της προσέγγισης *DeVylder* για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$.

Βλέπουμε από το διάγραμμα 2.2, ότι η προσέγγιση $\psi_{DV}(u)$ βρίσκεται πάρα πολύ κοντά στις πραγματικές τιμές του $\psi(u)$, εκτός από τις πολύ μικρές τιμές του u .

Αντίστοιχα για την προσέγγιση *Tijms*, από τις σχέσεις (2.10), (2.11), (2.9), προκύπτει

$$C = \frac{\theta p_1}{R \int_0^{\infty} x e^{Rx} \bar{F}(x) dx} = 0.55079,$$

και

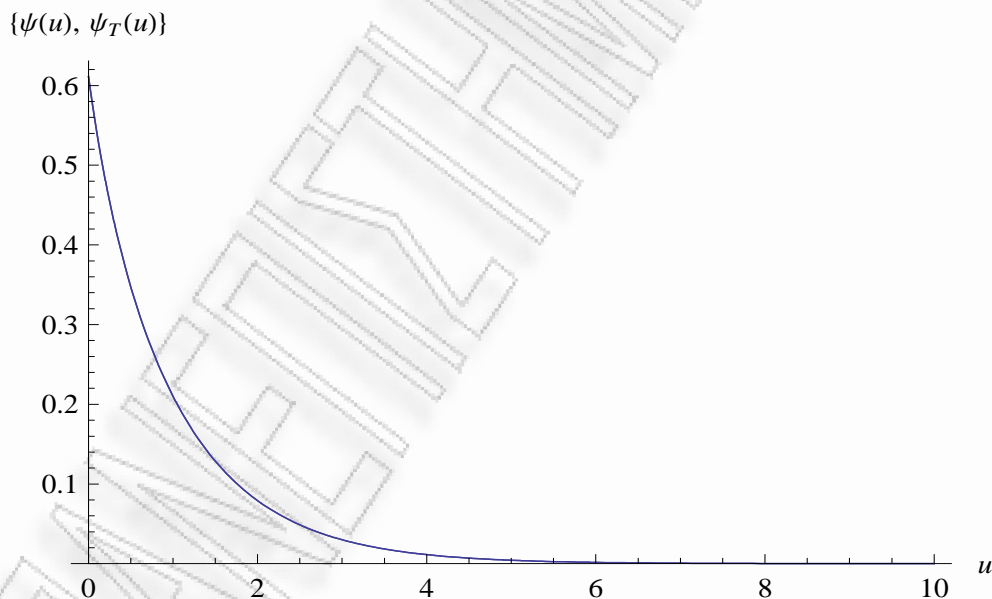
$$\gamma = \left(\frac{1}{1+\theta} - C \right) \left(\frac{1}{\theta p_1} \int_0^{\infty} x \bar{F}(x) dx - \frac{C}{R} \right)^{-1} = 3.8515.$$

Επομένως

$$\psi_T(u) = 0.0603208 e^{-3.8515 u} + 0.55079 e^{-0.970262 u}. \quad (2.14)$$

Συγκρίνοντας την πραγματική πιθανότητα χρεοκοπίας, σχέση (2.12), με την προσεγγιστική του *Tijms*, σχέση (2.14), έχουμε το παρακάτω διάγραμμα 2.3.

Στο διάγραμμα 2.3, είναι σαφές ότι η συνάρτηση $\psi_T(u)$ προσεγγίζει πάρα πολύ καλά τη συνάρτηση $\psi(u)$ για όλες τις τιμές του u .



Σχήμα 2.3: Γραφική παράσταση της προσέγγισης *Tijms* για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$.

Παράδειγμα 2.2.2 Σε συνέχεια του προηγούμενου παραδείγματος, στόχος μας τώρα είναι η εύρεση του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας.

Για να υπολογίσουμε την ποσότητα $\bar{K}_\delta(u)$, θα πρέπει πρώτα να βρούμε την θετική λύση της γενικευμένης εξίσωσης του *Lundberg* για $\delta = 0.05$, που δίνεται από τη σχέση (1.30) και η οποία μετά από πράξεις στο *Mathematica*, βρίσκουμε ότι ισούται με

$$\rho = 0.120512.$$

Στη συνέχεια, πρέπει να υπολογιστούν οι ποσότητες $\bar{G}_\delta(x)$ και β , οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις (1.32) και (1.34) αντίστοιχα.

Όμως, σύμφωνα με την Πρόταση 2, για την $\bar{G}_\delta(x)$, αναλυτικά έχουμε:

$$\begin{aligned} \bar{G}_\delta(x) &= \frac{\frac{A_1}{\beta_1+\rho}}{\frac{A_1}{\beta_1+\rho} + \frac{A_2}{\beta_2+\rho} + \frac{A_3}{\beta_3+\rho}} e^{-2x} + \frac{\frac{A_2}{\beta_2+\rho}}{\frac{A_1}{\beta_1+\rho} + \frac{A_2}{\beta_2+\rho} + \frac{A_3}{\beta_3+\rho}} e^{-4x} + \frac{\frac{A_3}{\beta_3+\rho}}{\frac{A_1}{\beta_1+\rho} + \frac{A_2}{\beta_2+\rho} + \frac{A_3}{\beta_3+\rho}} e^{-6x} \\ &= 0.537321 e^{-2x} + 0.276518 e^{-4x} + 0.18616 e^{-6x}, \end{aligned}$$

και η σταθερά β ισούται με

$$\beta = \frac{1 + \theta}{\int_0^\infty e^{-\rho y} dF_e(y)} - 1 = 0.709095.$$

Παραγωγίζοντας την $\bar{G}_\delta(x)$, βρίσκουμε την $g_\delta(x)$ ως:

$$g_\delta(x) = 1.07464 e^{-2x} + 1.10607 e^{-4x} + 1.11696 e^{-6x}$$

Ο μετασχηματισμός *Laplace* της $g_\delta(x)$, χρησιμοποιώντας και πάλι τη σχέση (1.25), ισούται με

$$\hat{g}_\delta(s) = \frac{1.07464}{2+s} + \frac{1.10607}{4+s} + \frac{1.11696}{6+s}.$$

Τώρα υπάρχουν δύο τρόποι για να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας. Σύμφωνα με τον πρώτο τρόπο, επειδή είναι πολύ δύσκολο να εργαστούμε με συνελίξεις, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (1.39), δηλαδή να βρούμε τον μετασχηματισμό *Laplace* της $\bar{K}_\delta(u)$. Στη συνέχεια παίρνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό *Laplace* στην $\hat{K}_\delta(s)$, καταλήγουμε στην ποσότητα που μας ενδιαφέρει, δηλαδή στον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας.

Για τον δεύτερο τρόπο, θα πρέπει πρώτα να βρούμε τον μετασχηματισμό *Laplace* της ποσότητας $K'_0(u)$, η οποία προήλθε παραγωγίζοντας τη σχέση (1.36). Στη συνέχεια παίρνοντας

αντίστροφο μετασχηματισμό *Laplace*, βρίσκουμε την ποσότητα $K'_0(u)$. Επομένως μέσω των σχέσεων (1.37), και

$$\bar{K}_\delta(u) = 1 - K_\delta(u), \quad (2.15)$$

καταλήγουμε στον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας.

Όποιον τρόπο και να πάρουμε θα οδηγηθούμε στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα. Εμείς εδώ επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε τον δεύτερο τρόπο.

Έτσι από τη σχέση (1.37), παίρνουμε

$$\hat{K}'_0(s) = \frac{0.242757 \left(\frac{1.07464}{2+s} + \frac{1.10607}{4+s} + \frac{1.11696}{6+s} \right)}{1 - 0.585105 \left(\frac{1.07464}{2+s} + \frac{1.10607}{4+s} + \frac{1.11696}{6+s} \right)}$$

Παίρνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό *Laplace* στην $\hat{K}'_0(s)$, προκύπτει

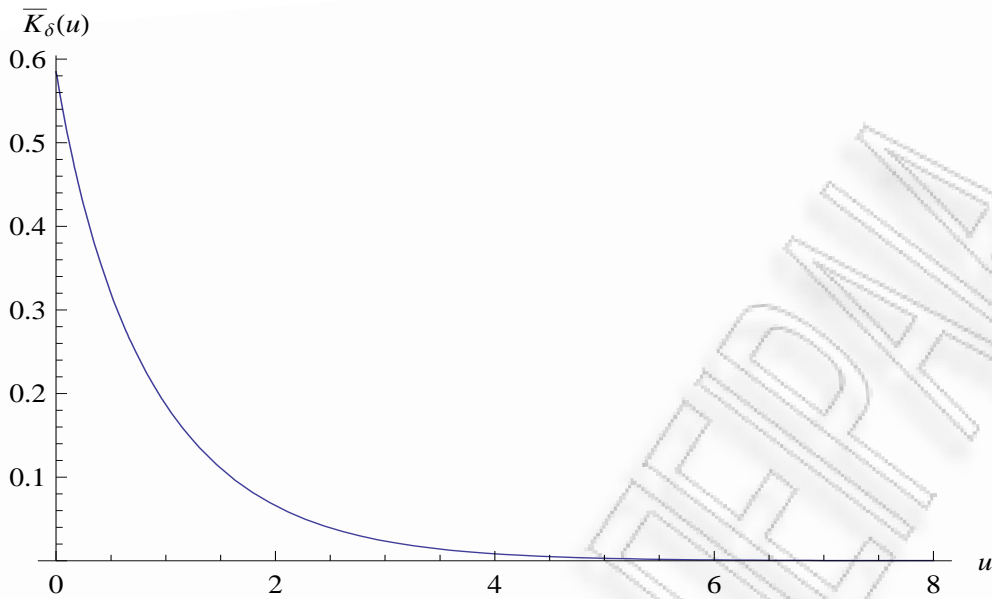
$$K'_0(u) = 0.100209 e^{-5.58716u} + 0.163282 e^{-3.45027u} + 0.537043 e^{-1.03308u}.$$

Μέσω της σχέσης (1.38), βρίσκουμε την ποσότητα $K_\delta(u)$ και επομένως, σύμφωνα με τη σχέση (2.15), καταλήγουμε στο ότι ο μετασχηματισμός *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας ισούται με

$$\bar{K}_\delta(u) = 0.0179356 e^{-5.58716u} + 0.0473246 e^{-3.45027u} + 0.519845 e^{-1.03308u}. \quad (2.16)$$

Η γραφική παράσταση της $\bar{K}_\delta(u)$ παρουσιάζεται στο παρακάτω διάγραμμα 2.4.

Στο Σχήμα 2.4 παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της $\bar{K}_\delta(u)$, έχει την ίδια συμπεριφορά με αυτή της $\psi(u)$. Αυτό θέλουμε να συμβαίνει, καθώς έχουμε αναφέρει στο Κεφάλαιο 1 ότι και οι δύο ποσότητες είναι δεξιές ουρές μίας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.



Σχήμα 2.4: Γραφική παράσταση του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, για $\delta = 0.05$.

Στη συνέχεια στόχος μας είναι να χρησιμοποιήσουμε τις προσεγγίσεις *DeVylder* και *Tijms*, για να προσεγγίσουμε την $\bar{K}_\delta(u)$ και να εξετάσουμε πόσο καλές είναι οι συγκεκριμένες προσεγγίσεις, δηλαδή πόσο κοντά είναι οι προσεγγίσεις σε σχέση με τον πραγματικό μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, που δίνεται από τη σχέση (2.16).

Παρατηρώντας την αναλογία που υπάρχει ανάμεσα στη σχέση (1.17) και στη σχέση (1.35), βλέπουμε ότι η $\bar{K}_\delta(u)$ μπορεί να θεωρηθεί ως μία συνάρτηση που δίνει την πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο. Η πιθανότητα χρεοκοπίας αυτή αντιστοιχεί στην κατανομή G_δ , αν αυτή θεωρηθεί ως μία κατανομή ισορροπίας η οποία όμως δεν προέρχεται από την κατανομή αποζημιώσεων που θεωρήσαμε στην αρχή. Εμείς έχουμε αναφέρει λεπτομερώς το πώς λειτουργούν οι προσεγγίσεις για την πιθανότητα χρεοκοπίας και όχι για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας. Επομένως έχουμε να αντιμετωπίσουμε εξ αρχής ένα δύσκολο πρόβλημα. Για αυτό το λόγο θα προσπαθήσουμε να μεταφέρουμε αυτό το πρόβλημα σε ένα άλλο, πολύ ευκολότερο. Έτσι αν βρούμε την καινούρια κατανομή αποζημιώσεων μέσω της $\bar{G}_\delta(x)$, υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας που αντιστοιχεί σε αυτή την καινούρια κατανομή και στη συνέχεια εφαρμόσουμε τις προσεγγίσεις πάνω στη συγκεκριμένη $\psi(u)$, τότε θα είναι σαν να έχουμε βρει την $\bar{K}_\delta(u)$ και την προσέγγισή της, για το αρχικό μας πρόβλημα δηλαδή για την αρχική κατανομή αποζημιώσεων. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί αρκετά εύκολα, αφού ισχύει ότι:

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi(u-x) dF_e(x) + \frac{1}{1+\theta} \bar{F}_e(u),$$

και

$$\bar{K}_\delta(u) = \frac{1}{1+\beta} \int_0^u \bar{K}_\delta(u-x) dG_\delta(x) + \frac{1}{1+\beta} \bar{G}_\delta(u).$$

Επίσης έχουμε αναφέρει ότι και οι δύο ποσότητες είναι δεξιές ουρές σύνθετης γεωμετρικής κατανομής και επίσης ότι $\bar{F}_e(x)$, $\bar{G}_\delta(x)$ είναι δύο διαφορετικές κατανομές ισορροπίας. Άρα η πιθανότητα χρεοκοπίας για την νέα κατανομή των αποζημιώσεων θα είναι η ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής και θα ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\psi_\delta(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi_\delta(u-x) dG_\delta(x) + \frac{1}{1+\theta} \bar{G}_\delta(u)$$

Για το λόγο αυτό, για να δείξουμε ότι η \bar{K}_δ μπορεί να θεωρηθεί ως μία συνάρτηση που μας δίνει την πιθανότητα χρεοκοπίας, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό ψ_δ για τη συνάρτηση αυτή, δηλαδή $\psi_\delta = \bar{K}_\delta$.

Έτσι αν θέσουμε $\theta = \beta$, παρατηρούμε ότι η $\bar{K}_\delta(u)$ που μας ενδιαφέρει, ισούται με την πιθανότητα χρεοκοπίας της καινούριας κατανομής αποζημιώσεων. Άρα καταλήξαμε σε ένα εύκολο πρόβλημα καθώς το μόνο που χρειάζεται είναι η χρήση των προσεγγίσεων σε αυτή τη $\psi_\delta(u)$ και στη συνέχεια να γίνει η σύγκριση των πιθανοτήτων.

Για την εύρεση της νέας κατανομής των αποζημιώσεων θα πρέπει πρώτα να θεωρήσουμε ότι

$$\theta = \beta = 0.709095$$

Επίσης θα πρέπει να υπολογίσουμε την πρώτη ροπή της κατανομής και στη συνέχεια τη δεξιά ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων. Δηλαδή έχουμε

$$g_\delta(x) = \frac{\bar{F}_\delta(x)}{p_1} \Rightarrow g_\delta(0) = \frac{1}{p_1} \Rightarrow$$

$$p_1 = \frac{1}{g_\delta(0)} \Rightarrow p_1 = 0.303244$$

και

$$\bar{F}_\delta(x) = f_{\delta,e}(x) p_1 = g_\delta(x) 0.303244$$

$$= 0.325879 e^{-2x} + 0.33541 e^{-4x} + 0.338711 e^{-6x}.$$

Μέσω της ουράς της κατανομής, παραγωγίζοντας, καταλήγουμε στη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των αποζημιώσεων

$$f_{\delta}(x) = 0.651757 e^{-2x} + 1.34164 e^{-4x} + 2.03227 e^{-6x}.$$

Οι ροπές της κατανομής βρίσκονται από τη σχέση

$$p_k = \int_0^{\infty} x^k f_{\delta}(x) dx,$$

και εδώ μας ενδιαφέρουν οι τρεις πρώτες ροπές. Η πρώτη ροπή έχει υπολογιστεί παραπάνω, ενώ για τις άλλες δύο έχουμε

$$p_2 = 0.223683,$$

και

$$p_3 = 0.285262.$$

Ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας θα γίνει με τον ίδιο τρόπο που έγινε και για την αρχική κατανομή των αποζημιώσεων. Ο μετασχηματισμός *Laplace* της $f_{\delta}(x)$ ισούται με

$$\widehat{f}_{\delta}(s) = \frac{0.651757}{2+s} + \frac{1.34164}{4+s} + \frac{2.03227}{6+s},$$

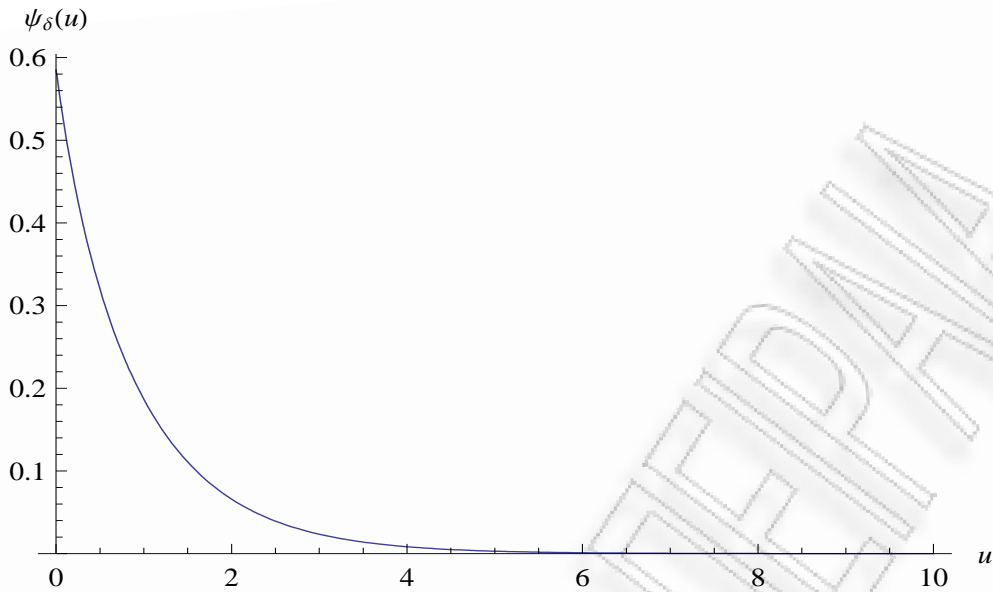
και της ουράς της κατανομής ισορροπίας αντίστοιχα, με

$$\widehat{\overline{F}}_{\delta,e}(s) = \frac{0.537325}{2+s} + \frac{0.276515}{4+s} + \frac{0.18616}{6+s}.$$

Επομένως καταλήγουμε στο ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας, η οποία στο παράδειγμά μας προσεγγίζει με ακρίβεια την $\overline{K}_{\delta}(u)$, ισούται με

$$\psi_{\delta}(u) = 0.0179356 e^{-5.58716u} + 0.0473239 e^{-3.45027u} + 0.519842 e^{-1.03308u},$$

όπου οι εκθέτες είναι οι θετικές λύσεις της εξίσωσης (1.19) και ισχύει ότι $R = 1.03308$, επειδή είναι η μικρότερη θετική λύση.



Σχήμα 2.5: Γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi_\delta(u) = \bar{K}_\delta(u)$, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών για $\delta = 0.05$.

Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τις δύο προσεγγίσεις που έχουμε αναφέρει, για την $\psi_\delta(u) = \bar{K}_\delta(u)$, και θα συγκρίνουμε τις πραγματικές τιμές με τις προσεγγιστικές, με την βοήθεια κοινών διαγραμμάτων καθώς και διαγραμμάτων που θα απεικονίζουν το ποσοστιαίο σφάλμα που υπάρχει σε αυτές τις τιμές, για κάθε τιμή του u .

Για την προσέγγιση *DeVylder*, λύνοντας το σύστημα (2.5) καταλήγουμε στα εξής:

$$p'_1 = \frac{p_3}{3p_2} = 0.425099,$$

$$\lambda' = \frac{9\lambda p_2^3}{3p_3^2} = 0.618902,$$

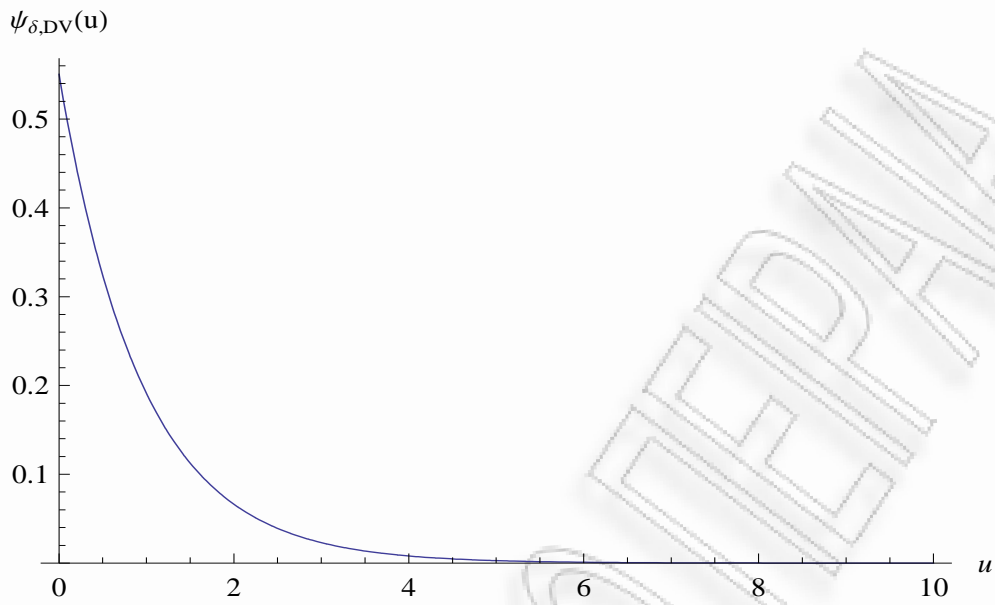
και

$$\theta' = \frac{2p_1 p_3 \theta}{3p_2^2} = 0.817304.$$

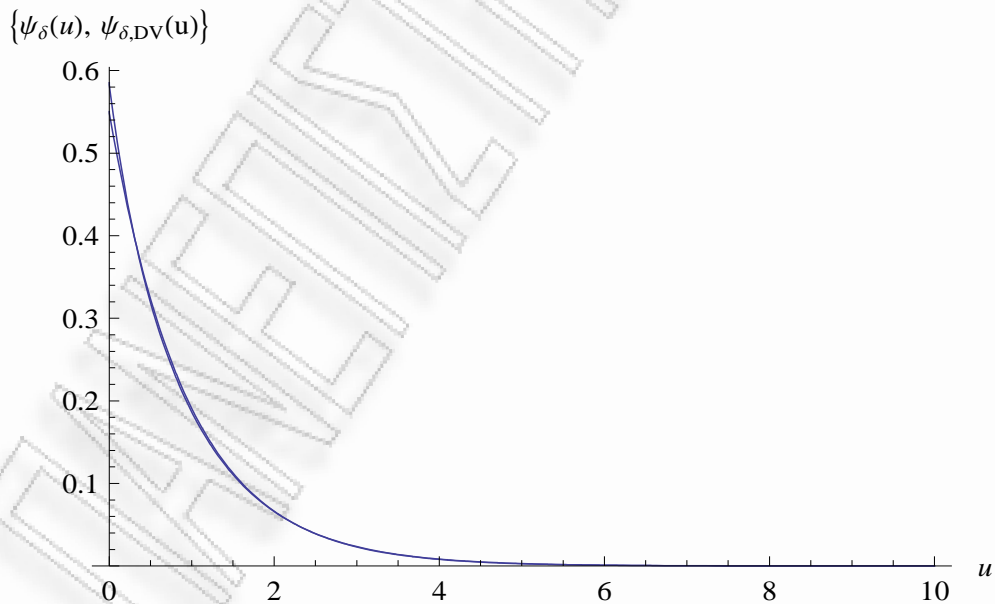
Τέλος χρησιμοποιώντας τον τύπο (2.1), παίρνουμε ότι

$$\psi_{\delta,DV}(u) = \bar{K}_\delta^{DV}(u) = 0.550266 e^{-1.05795 u}.$$

Η γραφική παράσταση της $\psi_{\delta,DV}(u)$, δίνεται στο παρακάτω Σχήμα 2.6. Για να συγκρίνουμε την $\psi_\delta(u)$ με την $\psi_{\delta,DV}(u)$ μπορούμε να βάλουμε σε ένα διάγραμμα τις γραφικές τους παραστάσεις για να δούμε πόσο κοντά είναι. Οπότε προκύπτει το παρακάτω Σχήμα 2.7.



Σχήμα 2.6: Γραφική παράσταση της προσέγγισης *DeVyllder* για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_{\delta}(u)$.



Σχήμα 2.7: Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων των πιθανοτήτων $\psi_{\delta}(u)$, $\psi_{\delta,DV}(u)$, για $\delta = 0.05$.

Από το Σχήμα 2.7, βγάζουμε το συμπέρασμα ότι η προσέγγιση *DeVylder* για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, για μεγάλες τιμές του u , είναι αρκετά κοντά σε σχέση με τις πραγματικές τιμές της $\bar{K}_\delta(u)$. Το πρόβλημα της προσέγγισης εντοπίζεται για πολύ μικρές τιμές του u , όπου εκεί φαίνεται μία αισθητή διαφορά.

Θα εξετάσουμε τώρα πόσο ικανοποιητική είναι η προσέγγιση *Tijms* για την συνάρτηση $\psi_\delta(u) = \bar{K}_\delta(u)$, για την ίδια κατανομή αποζημιώσεων και για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων όπως πριν. Επομένως μέσω των σχέσεων (2.10), (2.11), προκύπτουν

$$C = \frac{\theta p_1}{R \int_0^\infty x e^{Rx} \bar{F}(x) dx} = 0.51985,$$

και

$$\gamma = \left(\frac{1}{1+\theta} - C \right) \left(\frac{1}{\theta p_1} \int_0^\infty x \bar{F}(x) dx - \frac{C}{R} \right)^{-1} = 3.85675.$$

Επειδή ισχύει ότι $R < \gamma$, δηλαδή υπάρχει σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά για $u \rightarrow \infty$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση και σύμφωνα με τον τύπο (2.9), παίρνουμε

$$\psi_{\delta,T}(u) = \bar{K}_\delta^{Tijms}(u) = 0.065255 e^{-3.85675u} + 0.51985 e^{-1.03308u}. \quad (2.17)$$

Επίσης συμπεραίνουμε ότι

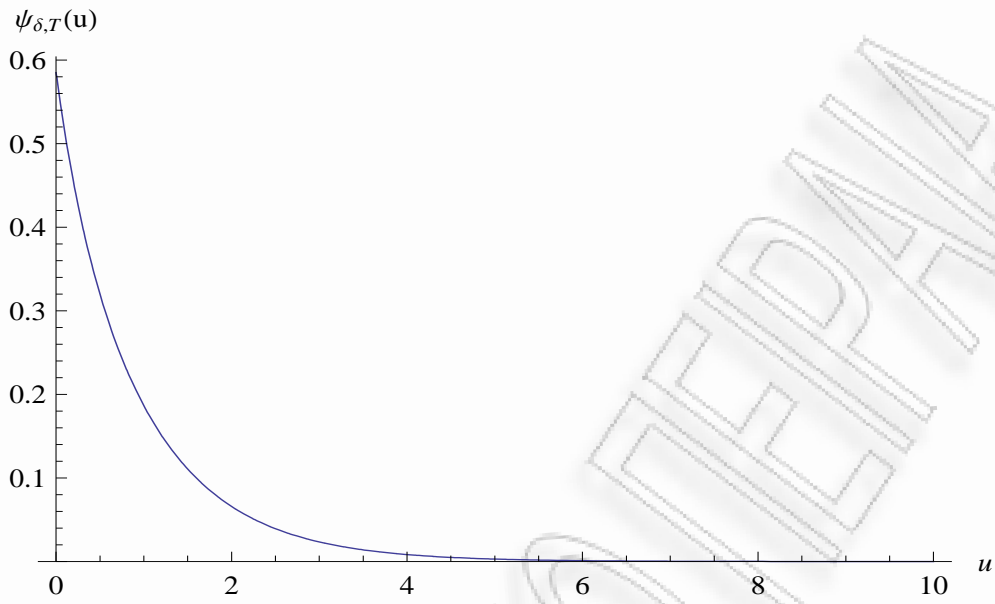
$$\psi_{\delta,T}(0) = \psi_\delta(0) = 0.585105,$$

και

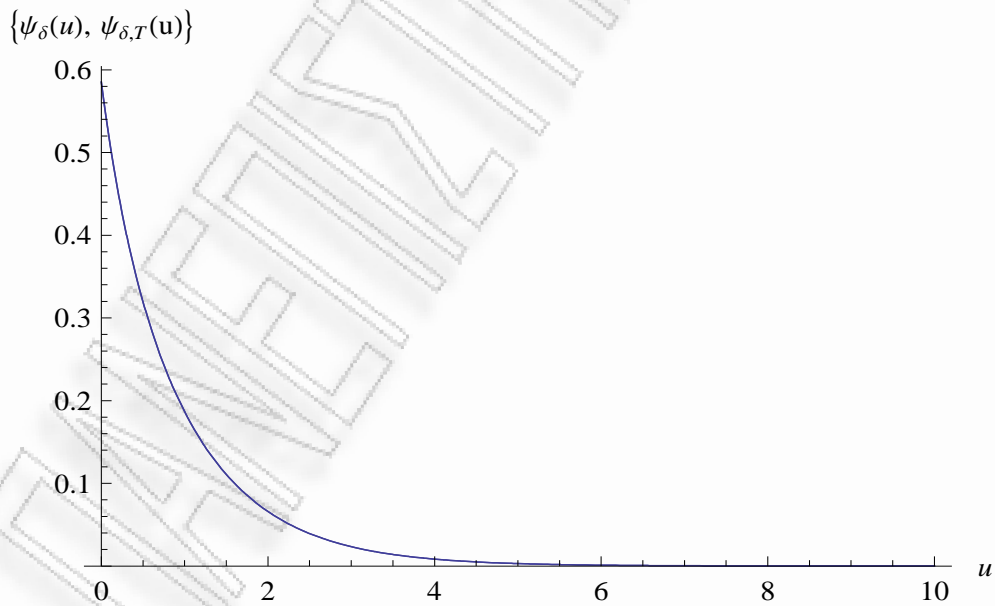
$$\int_0^\infty \psi_{\delta,T}(u) du = \int_0^\infty \psi_\delta(u) du = 0.520124.$$

Η γραφική παράσταση της προσέγγισης *Tijms* για την $\psi_\delta(u) = \bar{K}_\delta(u)$, δίνεται στο παρακάτω Σχήμα 2.8. Για να συγκρίνουμε την $\psi_\delta(u)$ με την $\psi_{\delta,T}(u)$, θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία που κάναμε και στην προσέγγιση *DeVylder*. Επομένως έχουμε το παρακάτω κοινό διάγραμμα 2.9.

Στο Σχήμα 2.9, δεν μπορούμε να διακρίνουμε τη διαφορά μεταξύ της προσέγγισης *Tijms* και των πραγματικών τιμών, και αυτό συμβαίνει γιατί η συγκεκριμένη προσέγγιση είναι πάρα πολύ κοντά με τις πραγματικές τιμές, για όλες τις τιμές του αποθεματικού, u .



Σχήμα 2.8: Γραφική παράσταση της προσέγγισης *Tijms* για την πιθανότητα χρεοκοπίας.



Σχήμα 2.9: Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων των πιθανοτήτων $\psi_{\delta}(u)$, $\psi_{\delta,T}(u)$, για $\delta = 0.05$.

Την ίδια διαδικασία ακολουθούμε και στην περίπτωση που το δ παίρνει άλλες τιμές. Εδώ επειδή θεωρήσαμε ότι $\delta = 0.05$ το οποίο ως προεξοφλητικός παράγοντας είναι αρκετά μικρός, θα θεωρήσουμε και μία δεύτερη περίπτωση όπου το $\delta = 2$. Αυτό το κάνουμε έτσι ώστε να δούμε κατά πόσο η τιμή του δ επηρεάζει την αποτελεσματικότητα της προσέγγισης του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας. Επομένως για την ίδια κατανομή αποζημιώσεων, $f(x)$, συνοπτικά αυτά που αλλάζουν είναι τα εξής:

Από το *Mathematica*, έχουμε ότι η θετική λύση της (1.30), είναι

$$\rho = 2.89043.$$

Η ουρά της κατανομής ισορροπίας της καινούριας κατανομής των αποζημιώσεων, $f_\delta(x)$, ισούται με

$$\bar{G}_\delta(x) = 0.442513 e^{-2x} + 0.31407 e^{-4x} + 0.243417 e^{-6x},$$

και η σταθερά β ισούται με

$$\beta = 2.24612.$$

Παραγωγίζοντας την $\bar{G}_\delta(x)$, παίρνουμε

$$g_\delta(x) = 0.885026 e^{-2x} + 1.25628 e^{-4x} + 1.4605 e^{-6x}$$

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό *Laplace* της $g_\delta(x)$ καθώς και τον μετασχηματισμό *Laplace* της $K'_0(u)$ από τη σχέση (1.37), καταλήγουμε στο ότι ο μετασχηματισμός *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας ισούται με

$$\bar{K}_\delta(u) = 0.0308491 e^{-5.65609u} + 0.0717303 e^{-3.60584u} + 0.205481 e^{-1.6285u}.$$

Η καινούρια κατανομή των αποζημιώσεων ισούται με

$$f_\delta(x) = 0.491434 e^{-2x} + 1.39517 e^{-4x} + 2.43295 e^{-6x},$$

με τρεις πρώτες ροπές

$$p_1 = 0.277638,$$

$$p_2 = 0.188985,$$

και

$$p_3 = 0.228251.$$

Στη συνέχεια βρίσκοντας τον μετασχηματισμό *Laplace* της $f_\delta(x)$, μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας εάν πάρουμε αντίστροφο μετασχηματισμό *Laplace* στη σχέση (1.28). Επομένως καταλήγουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με

$$\psi_\delta(u) = 0.0308491 e^{-5.65609 u} + 0.0717303 e^{-3.60584 u} + 0.205481 e^{-1.6285 u},$$

όπου οι εκθέτες είναι οι θετικές λύσεις της εξίσωσης (1.19) και ισχύει ότι $R = 1.6285$, επειδή είναι η μικρότερη θετική ρίζα.

Και σε αυτή την περίπτωση μας ενδιαφέρει να βρούμε προσεγγίσεις για την $\psi_\delta(u) = \bar{K}_\delta(u)$, καθώς και να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των προσεγγίσεων που έχουμε βρει, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου δ .

Για την προσέγγιση *DeVylder* ακολουθώντας ακριβώς τα ίδια βήματα με πριν, προκύπτει ότι

$$p'_1 = 0.402591,$$

$$\lambda' = 0.583001,$$

και

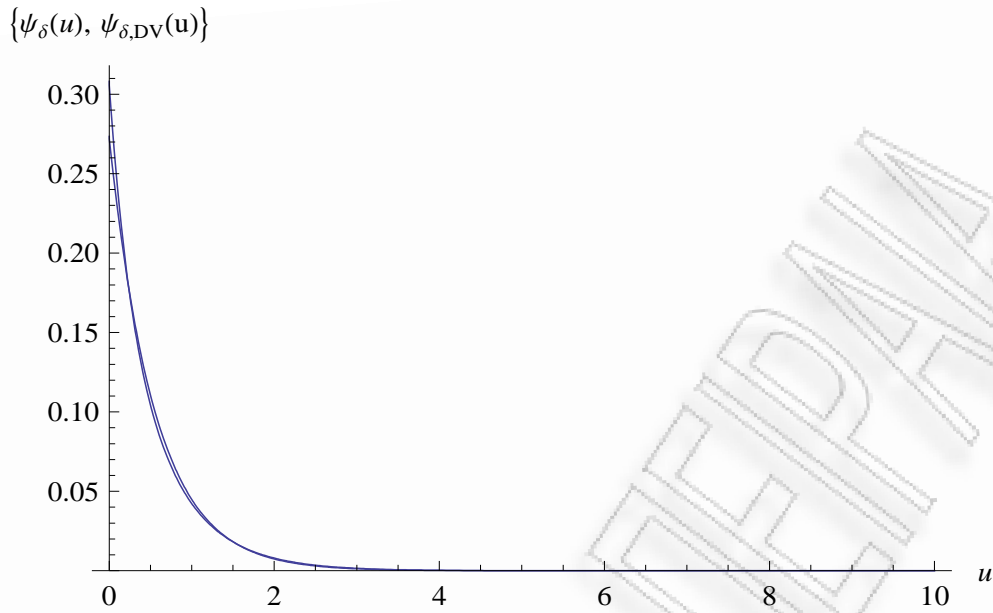
$$\theta' = 2.65692.$$

Επομένως η προσέγγιση *DeVylder* της συνάρτησης $\psi_\delta(u) = \bar{K}_\delta(u)$ για $\delta = 2$, ισούται με

$$\psi_{\delta,DV}(u) = 0.273454 e^{-1.80467 u},$$

και το κοινό διάγραμμα των πιθανοτήτων $\psi_\delta(u)$, $\psi_{\delta,DV}$, δίνεται στο παρακάτω Σχήμα 2.10.

Στο Σχήμα 2.10, παρατηρούμε ότι η προσέγγιση *DeVylder* γίνεται λιγότερο καλή όσο μεγαλώνει η παράμετρος δ . Επομένως συμπεραίνουμε ότι η προσέγγιση *DeVylder* δεν είναι ιδιαίτερα ικανοποιητική σε αυτή την περίπτωση, πράγμα που θα γίνει αμέσως αντιληπτό και στη συνέχεια.



Σχήμα 2.10: Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων των πιθανοτήτων $\psi_\delta(u)$, $\psi_{\delta,DV}(u)$, για $\delta = 2$.

Ακολουθώντας τώρα τις σχέσεις που ισχύουν στην προσέγγιση του *Tijms* για τις τιμές των παραμέτρων C, γ , καταλήγουμε στα εξής

$$C = 0.205477,$$

και

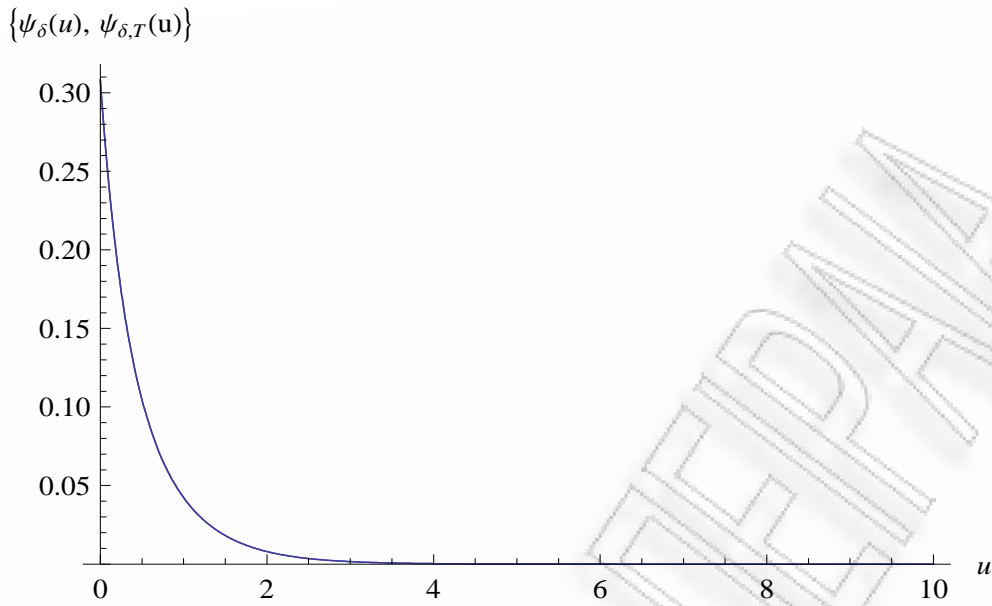
$$\gamma = 4.04673.$$

Επομένως η προσέγγιση *Tijms* της συνάρτησης $\psi_\delta(u) = \bar{K}_\delta(u)$ για $\delta = 2$, ισούται με

$$\psi_{\delta,T}(u) = 0.102583 e^{-4.04673u} + 0.205477 e^{-1.6285u}.$$

Συγκρίνουμε τις πιθανότητες $\psi_\delta(u)$, $\psi_{\delta,T}(u)$, με το ακόλουθο Σχήμα 2.11.

Στο Σχήμα 2.11, παρατηρούμε ότι η προσέγγιση *Tijms* μπορεί να επηρεάζεται λίγο από μεγάλες τιμές του δ , αλλά παραμένει πάρα πολύ καλή για όλες τις τιμές του αποθεματικού u . Επομένως βλέπουμε, από μία πρώτη ματιά, ότι η προσέγγιση *Tijms* είναι καλύτερη από την προσέγγιση *DeVylder*. Αυτό θα φανεί καλύτερα και στη συνέχεια.



Σχήμα 2.11: Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων των πιθανοτήτων $\psi_\delta(u)$, $\psi_{\delta,T}(u)$ για $\delta = 2$.

Περισσότερο για μικρές τιμές του δ , από την προηγούμενη ανάλυση και τα σχήματα συμπερασματικά προκύπτει ότι τόσο η προσέγγιση *DeVylder*, αλλά ιδιαίτερα η προσέγγιση του *Tijms* βρίσκονται εξαιρετικά κοντά στις πραγματικές τιμές της συνάρτησης που προσεγγίζουμε.

Στα προηγούμενα σχήματα και ειδικά για την προσέγγιση του *Tijms* η διαφορά ανάμεσα στην πραγματική συνάρτηση και την προσέγγισή της διακρίνεται με δυσκολία στο διάγραμμα. Συνεπώς και για να έχουμε μία καλύτερη εικόνα για την αποτελεσματικότητα των δύο προσεγγίσεων, τόσο συγκριτικά μεταξύ τους (*DeVylder* έναντι του *Tijms*) αλλά και σαν ποσοστό σφάλματος % από την πραγματική τιμή, αλλά και για να δούμε το πώς επηρεάζεται η κάθε προσέγγιση όταν μεταβάλλεται το δ , εργαζόμαστε ως εξής.

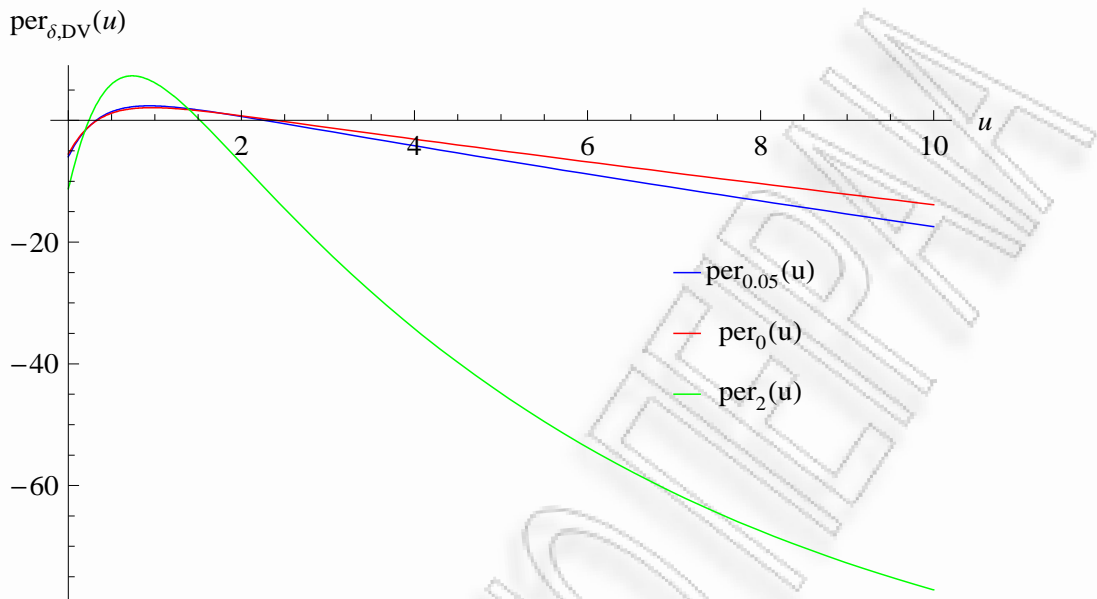
Δημιουργούμε μία νέα συνάρτηση η οποία εκφράζει το ποσοστιαίο σφάλμα (*percentage error*) που υπάρχει ανάμεσα στην πραγματική τιμή του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας και στην προσεγγιστική τιμή του.

Δηλαδή για την προσέγγιση *DeVylder*, έχουμε ότι

$$per_{\delta,DV}(u) = \frac{\psi_{\delta,DV}(u) - \psi_\delta(u)}{\psi_\delta(u)} \cdot 100$$

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση της $per_{\delta,DV}(u)$, για τις περιπτώσεις που $\delta = 0$, δηλαδή για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$, καθώς και για $\delta = 0.05$, $\delta = 2$,

δηλαδή για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας $\psi_\delta(u) = \bar{K}_\delta(u)$.



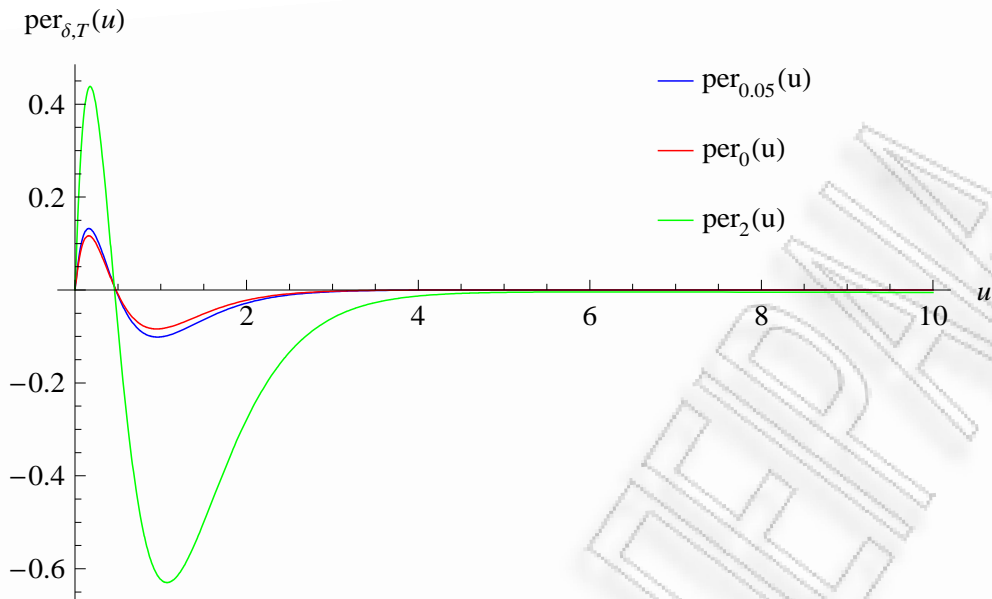
Σχήμα 2.12: Γραφική παράσταση του ποσοστιάου σφάλματος για την προσέγγιση $\psi_{\delta, DV}(u)$, για $\delta = 0$, $\delta = 0.05$, $\delta = 2$.

Αντίστοιχα για την προσέγγιση *Tijms*, έχουμε ότι

$$per_{\delta, T}(u) = \frac{\psi_{\delta, T}(u) - \psi_\delta(u)}{\psi_\delta(u)} \cdot 100$$

και το κοινό διάγραμμα του ποσοστιάου σφάλματος της προσέγγισης, για $\delta = 0$, $\delta = 0.05$ και $\delta = 2$, παρουσιάζεται στο παρακάτω Σχήμα 2.13.

Από τα διαγράμματα 2.12 και 2.13, συμπεραίνουμε ότι για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, η προσέγγιση του *Tijms* είναι σαφώς καλύτερη από την προσέγγιση *DeVylder*. Επίσης παρατηρούμε ότι για $\delta = 0$, δηλαδή για την πιθανότητα χρεοκοπίας όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία μείξη τριών εκθετικών κατανομών, οι προσεγγιστικές τιμές είναι πιο κοντά με τις πραγματικές από ότι για $\delta > 0$, δηλαδή για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας. Τέλος σαν τελευταία παρατήρηση έχουμε ότι όσο αυξάνεται η τιμή του δ τόσο “χαλάνε” και οι δύο προσεγγίσεις που αναφέραμε. Αξίζει να σημειωθεί όμως, ότι η τιμή του δ επηρεάζει περισσότερο την προσέγγιση *DeVylder*, καθώς για μεγάλο δ αυξάνεται απότομα και το ποσοστιαίο σφάλμα. Αντίθετα η προσέγγιση *Tijms* επηρεάζεται λιγότερο από μία μεγάλη τιμή του δ , καθώς βλέπουμε ότι το ποσοστιαίο σφάλμα παραμένει σε χαμηλά επίπεδα (κάτω από 1%).



Σχήμα 2.13: Γραφική παράσταση του ποσοστιαίου σφάλματος για την προσέγγιση $\psi_{\delta,T}(u)$, για $\delta = 0$, $\delta = 0.05$, $\delta = 2$.

2.3 Οι προσεγγίσεις DeVylder και Tijms για κατανομή Γάμμα.

Σε αυτή την ενότητα θα πάρουμε ένα δεύτερο παράδειγμα, όπου εδώ οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία κατανομή *Gamma* και μέσω των σχέσεων που έχουμε αναφέρει αναλυτικά, θα υπολογίσουμε τις προσεγγίσεις *Tijms* και *DeVylder* για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας ($\delta > 0$). Επίσης όπως και στο πρώτο παράδειγμα, στόχος μας είναι να συγκρίνουμε τον πραγματικό μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας με τις προσεγγίσεις του, να δούμε ποια προσέγγιση λειτουργεί καλύτερα και γιατί, και τέλος να παρατηρήσουμε αν οι προσεγγίσεις αλλάζουν και πόσο, όταν αλλάζει η τιμή του δ . Επίσης και σε αυτό το παράδειγμα όλες οι πράξεις έχουν γίνει μέσω του προγράμματος *Mathematica*.

Παράδειγμα 2.3.1 Έστω ότι τώρα οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία $Gamma(\alpha, \beta)$ κατανομή με παραμέτρους $\alpha = 3$ και $\beta = 3$. Δηλαδή έχουμε μία κατανομή η οποία προέρχεται από μία συνέλιξη τριών εκθετικών κατανομών, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{27}{2} x^2 e^{-3x},$$

και ουρά

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{2} e^{-3x} (2 + 6x + 9x^2).$$

Επίσης υποθέτουμε ότι $c = 1.5$, $\lambda = 1$ και $\delta = 0.05$. Άρα από τη σχέση (1.3), προκύπτει ότι το περιθώριο ασφαλείας ισούται με

$$\theta = 0.5$$

Οι τρεις πρώτες ροπές της $f(x)$, υπολογίζονται μέσω της σχέσης (1.2) και ισούνται με

$$p_1 = E(X) = 1,$$

$$p_2 = E(X^2) = \frac{4}{3},$$

και

$$p_3 = E(X^3) = \frac{20}{9}.$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής ισορροπίας, σχέση (1.10), εφόσον $p_1 = 1$ είναι ίδια με την δεξιά ουρά των αποζημιώσεων, δηλαδή

$$f_e(x) = \frac{1}{2} e^{-3x} (2 + 6x + 9x^2),$$

και η ουρά της κατανομής ισορροπίας, μέσω της σχέσης (1.9), ισούται με

$$\bar{F}_e(x) = \frac{1}{2} e^{-3x} (2 + 4x + 3x^2).$$

Ο μετασχηματισμός *Laplace* της $f(x)$, χρησιμοποιώντας το *Mathematica*, προκύπτει ότι ισούται με

$$\hat{f}(s) = \frac{27}{(3+s)^3}.$$

Γνωρίζοντας τώρα τις παραπάνω ποσότητες, μπορούμε μέσω του *Mathematica* να λύσουμε³ την εξίσωση (1.19) ως προς R . Άρα προκύπτει ότι ο συντελεστής προσαρμογής ισούται με

$$R = 0.534774.$$

³Για να λυθεί η εξίσωση (1.19), θα πρέπει να υπάρχει η ροπογεννήτρια της κατανομής των αποζημιώσεων, δηλαδή να είναι πεπερασμένη. Για να ισχύει αυτό θα πρέπει να πάρουμε ως υπόθεση, ότι $R < 3$.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας, η οποία υπολογίζεται από τη σχέση (1.28), είναι μία πραγματική συνάρτηση. Όμως το *Mathematica* μας την εμφανίζει στη παρακάτω μιγαδική μορφή:

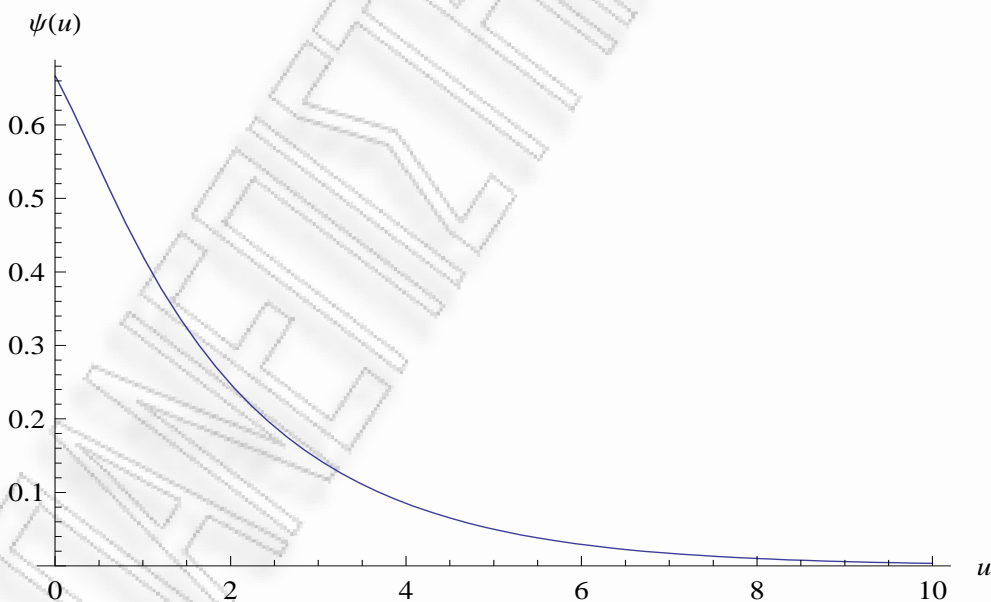
$$\psi(u) = 0.721398 e^{-0.534774 u} + (-0.0273655 - 0.0195514 i) e^{(-3.89928 - 1.27481 i) u} - (0.0273655 - 0.0195514 i) e^{(-3.89928 + 1.27481 i) u}$$

Οι εκθέτες που εμφανίζονται στη παραπάνω σχέση είναι οι ρίζες της εξίσωσης του *Lundberg*. Επειδή όμως οι μιγαδικές ρίζες είναι συζυγείς μπορούμε να μετατρέψουμε την $\psi(u)$ σε τριγωνομετρική μορφή (βλέπε *Kaas et al (1987)*). Για να γίνει αυτό θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις:

$$e^{iu} = \cos u + i \sin u \quad \text{και} \quad e^{-iu} = \cos u - i \sin u \quad (2.18)$$

Επομένως παίρνουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με

$$\psi(u) = 0.721398 e^{-0.534774 u} - e^{-3.89928 u} [0.054731 \cos(1.27481 u) + 0.0391028 \sin(1.27481 u)]. \quad (2.19)$$



Σχήμα 2.14: Γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Για την προσέγγιση *DeVylder* της πιθανότητας χρεοκοπίας, μέσω των σχέσεων (2.6), (2.7) και (2.8), προκύπτουν τα εξής:

$$p'_1 = \frac{p_3}{3p_2} = 0.555556,$$

$$\lambda' = \frac{9\lambda p_2^3}{2p_3^2} = 2.16,$$

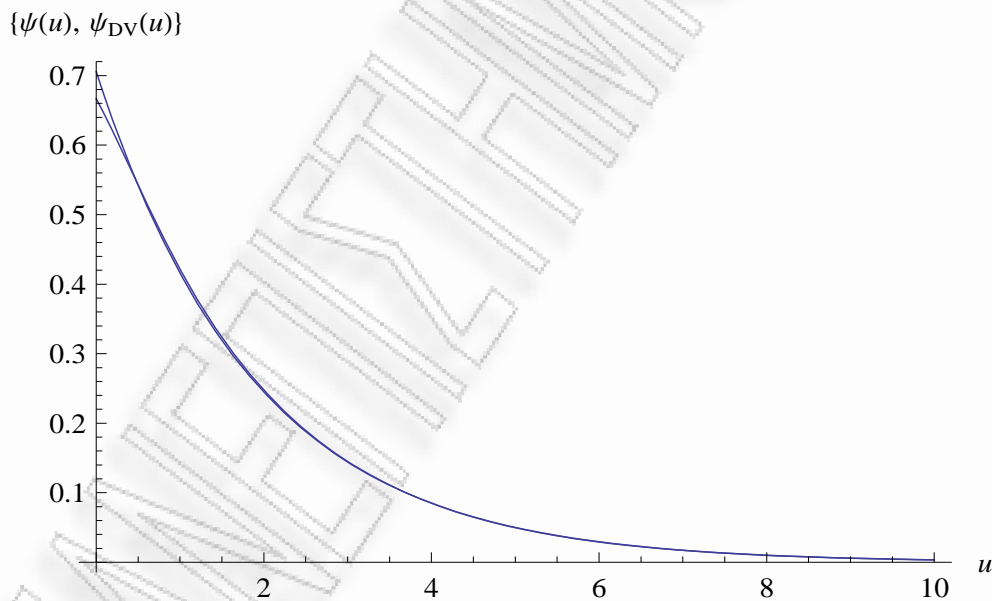
και

$$\theta' = \frac{2p_1 p_3 \theta}{3p_2^2} = 0.416667.$$

Επομένως σύμφωνα με τη σχέση (2.1), ισχύει ότι

$$\psi_{DV}(u) = 0.705882 e^{-0.529412 u}. \quad (2.20)$$

Συγκρίνοντας την πραγματική πιθανότητα χρεοκοπίας, της σχέσης (2.19), με την προσεγγιστική, σχέση (2.20), έχουμε το παρακάτω κοινό διάγραμμα 2.15.



Σχήμα 2.15: Γραφική παράσταση της προσέγγισης *DeVylder* για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$.

Από το Σχήμα 2.15, παρατηρούμε ότι η προσέγγιση *DeVylder*, για την πιθανότητα χρεοκοπίας, είναι πάρα πολύ καλή προσέγγιση, ιδίως για μεγαλύτερες τιμές του αποθεματικού u , καθώς βρίσκεται πολύ κοντά με τις πραγματικές τιμές της πιθανότητας χρεοκοπίας που δίνεται από τη σχέση (2.19).

Αντίστοιχα για την προσέγγιση *Tijms*, από τις σχέσεις (2.10), (2.11), (2.9), προκύπτουν

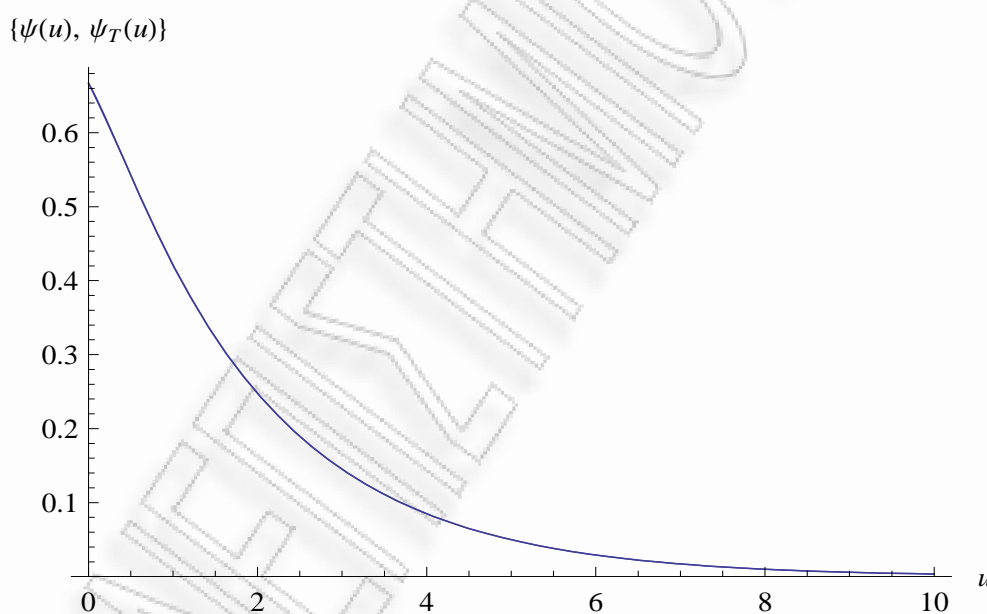
$$C = \frac{\theta p_1}{R \int_0^{\infty} x e^{Rx} \bar{F}(x) dx} = 0.721398,$$

$$\gamma = \left(\frac{1}{1+\theta} - C \right) \left(\frac{1}{\theta p_1} \int_0^{\infty} x \bar{F}(x) dx - \frac{C}{R} \right)^{-1} = 3.49846,$$

και

$$\psi_T(u) = 0.721398 e^{-0.534774 u} - 0.0547316 e^{-3.49846 u}. \quad (2.21)$$

Για να συγκρίνουμε την πραγματική πιθανότητα χρεοκοπίας, σχέση (2.19), με την προσεγγιστική του *Tijms*, σχέση (2.21), κατασκευάζουμε το παρακάτω κοινό διάγραμμα 2.16.



Σχήμα 2.16: Γραφική παράσταση της προσέγγισης *Tijms* για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$.

Στο διάγραμμα 2.16, είναι σχεδόν αδύνατο να ξεχωρίσουμε την προσέγγιση $\psi_T(u)$ από την πραγματική πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$. Αυτό σημαίνει ότι η προσέγγιση *Tijms* είναι μία πάρα πολύ καλή προσέγγιση για όλες τις τιμές του u .

Παράδειγμα 2.3.2 Συνεχίζουμε το προηγούμενο παράδειγμα, και σκοπός μας τώρα είναι να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας.

Για να βρούμε την $\bar{K}_\delta(u)$, θα πρέπει να εργαστούμε όπως και στο Παράδειγμα 2.2.2. Δηλαδή θα πρέπει πρώτα να βρούμε τον μετασχηματισμό *Laplace* της ποσότητας $K'_0(u)$ και στη συνέχεια, παίρνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό *Laplace*, καταλήγουμε στην ποσότητα $K'_0(u)$.

Για να υπολογίσουμε τώρα τις ποσότητες που δίνονται από τις σχέσεις (1.32), (1.34), θα πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα, με τη βοήθεια του *Mathematica*, τη λύση της γενικευμένης εξίσωσης *Lundberg* (1.30), ως προς s . Επομένως για $\delta = 0.05$, παίρνουμε ότι

$$\rho = 0.0897683.$$

Από την Πρόταση 3, αναλυτικά παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \bar{G}_\delta(x) &= \sum_{i=1}^3 A'_i \sum_{k=0}^2 \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^3 A_j \left(\frac{\lambda}{\lambda + \rho}\right)^{j-1}}{\sum_{j=1}^3 A_j \sum_{k=0}^{j-1} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \rho}\right)^k} e^{-\lambda x} \\ &\quad + \frac{\sum_{j=2}^3 A_j \left(\frac{\lambda}{\lambda + \rho}\right)^{j-2}}{\sum_{j=1}^3 A_j \sum_{k=0}^{j-1} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \rho}\right)^k} (e^{-\lambda x} + \lambda x e^{-\lambda x}) \\ &\quad + \frac{\sum_{j=3}^3 A_j \left(\frac{\lambda}{\lambda + \rho}\right)^{j-3}}{\sum_{j=1}^3 A_j \sum_{k=0}^{j-1} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \rho}\right)^k} \left(e^{-\lambda x} + \lambda x e^{-\lambda x} + \frac{(\lambda x)^2}{2} e^{-\lambda x} \right) \end{aligned}$$

Μετά από πράξεις, πάνω στα βάρη, καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned}\bar{G}_\delta(x) &= \frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda+\rho}\right)^2}{1 + \frac{\lambda}{\lambda+\rho} + \left(\frac{\lambda}{\lambda+\rho}\right)^2} e^{-\lambda x} + \frac{\frac{\lambda}{\lambda+\rho}}{1 + \frac{\lambda}{\lambda+\rho} + \left(\frac{\lambda}{\lambda+\rho}\right)^2} (e^{-\lambda x} + \lambda x e^{-\lambda x}) \\ &+ \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\lambda+\rho} + \left(\frac{\lambda}{\lambda+\rho}\right)^2} \left(e^{-\lambda x} + \lambda x e^{-\lambda x} + \frac{(\lambda x)^2}{2} e^{-3x} \right)\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των παραμέτρων και του ρ , προκύπτει ότι

$$\bar{G}_\delta(x) = e^{-3x} (1 + 2.02933 x + 1.54444 x^2).$$

Επίσης έχουμε ότι η σταθερά β , ισούται με

$$\beta = \frac{1 + \theta}{\int_0^\infty e^{-\rho y} dF_e(y)} - 1 = 0.59065$$

Παραγωγίζοντας την $\bar{G}_\delta(x)$, ως προς x , παίρνουμε

$$g_\delta(x) = e^{-3x} (0.970665 + 2.99913 x + 4.63331 x^2)$$

Όπως είχαμε περιγράψει και στη περίπτωση που οι αποζημιώσεις ακολουθούσαν μία μείξη τριών εκθετικών κατανομών, η $g_\delta(x)$ μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας άλλης κατανομής ισορροπίας, με άλλη κατανομή αποζημιώσεων από αυτή που έχουμε θεωρήσει. Ωστόσο, κάτι τέτοιο δεν ισχύει αυστηρά εδώ, γιατί η συνάρτηση $g_\delta(x)$ δεν είναι φθίνουσα στο $(0, \infty)$, επομένως δεν μπορεί να είναι η πυκνότητα μιας κατανομής ισορροπίας (βλέπε σχέση 1.10), αφού η αντίστοιχη κατανομή των αποζημιώσεων δεν είναι στην πραγματικότητα μία ανθροιστική συνάρτηση κατανομής κάποιας τ.μ. Παρόλα αυτά, θα δούμε ότι η προσέγγιση του *Tijms* δουλεύει πάρα πολύ καλά στην περίπτωση μιας κατανομής Γάμμα, όπως και στην προηγούμενη ενότητα για τη μείξη εκθετικών.

Ο λόγος είναι ότι η προσέγγιση *Tijms* μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσεγγίσει την ουρά μιας οποιασδήποτε σύνθετης γεωμετρικής κατανομής (βλέπε *Tijms* (1994)) και όχι μόνο για την πιθανότητα χρεοκοπίας, η οποία είναι στην πραγματικότητα η ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής που αντιστοιχεί σε κάποια κατανομή ισορροπίας, βλέπε σχέση (1.18).

Ο μετασχηματισμός *Laplace* της $g_\delta(x)$, με χρήση του *Mathematica* καταλήγουμε ότι ισούται με

$$\widehat{g}_\delta(s) = \frac{9.26662}{(3+s)^3} + \frac{2.99913}{(3+s)^2} + \frac{0.970665}{3+s},$$

και επομένως, από τη σχέση (1.37), παίρνουμε

$$\widehat{K}'_0(s) = \frac{0.233443 \left(\frac{9.26662}{(3+s)^3} + \frac{2.99913}{(3+s)^2} + \frac{0.970665}{3+s} \right)}{1 - 0.628674 \left(\frac{9.26662}{(3+s)^3} + \frac{2.99913}{(3+s)^2} + \frac{0.970665}{3+s} \right)}$$

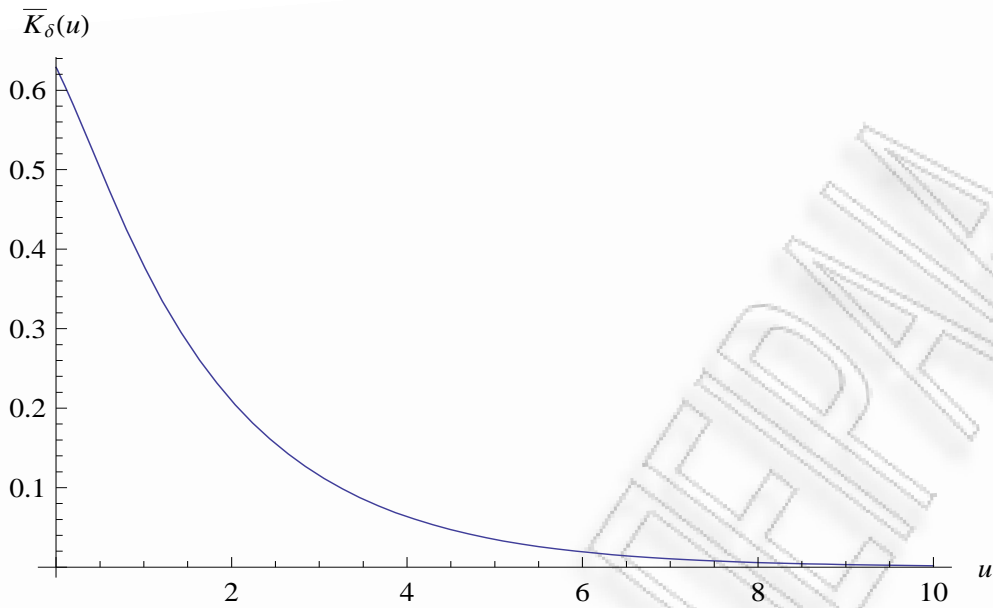
Παίρνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό *Laplace* στη $\widehat{K}'_0(s)$, καταλήγουμε πάλι σε αποτέλεσμα που φαίνεται να έχει μιγαδική μορφή. Οι μιγαδικές ρίζες που προκύπτουν από την εξίσωση του *Lundberg* είναι συζυγείς, και έτσι, χρησιμοποιώντας τους τύπους στη σχέση (2.18) και μετά από πράξεις (στο *Mathematica*) βλέπουμε ότι το μιγαδικό κομμάτι απλοποιείται και όπως αναμένεται η f_δ είναι μία πραγματική συνάρτηση. Συγκεκριμένα, το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήγουμε είναι

$$K'_0(u) = 0.412062 e^{-0.596656 u} - e^{-3.89656 u} [0.185467 \cos(1.27286 u) + 0.249994 \sin(1.27286 u)]$$

Μέσω της σχέσης (1.38), βρίσκουμε την ποσότητα $K_\delta(u)$ και επομένως, σύμφωνα με τη σχέση (2.15), καταλήγουμε στο ότι ο μετασχηματισμός *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας ισούται με

$$\overline{K}_\delta(u) = 0.690619 e^{-0.596656 u} - e^{-3.89656 u} [0.0619455 \cos(1.27286 u) + 0.0439222 \sin(1.27286 u)]. \quad (2.22)$$

Στο διάγραμμα 2.17, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας.



Σχήμα 2.17: Γραφική παράσταση του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, όταν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι $Ga(3, 3)$ και $\delta = 0.05$.

Στη συνέχεια για να υπολογίσουμε τις προσεγγίσεις του *DeVylder* και του *Tijms*, θα κάνουμε ακριβώς την ίδια διαδικασία που είχαμε κάνει και στο Παράδειγμα 2.2.2. Επομένως θεωρούμε ότι

$$\theta = \beta = 0.59065$$

και

$$g_{\delta}(x) = \frac{\bar{F}_{\delta}(x)}{p_1} \Rightarrow g_{\delta}(0) = \frac{1}{p_1} \Rightarrow$$

$$p_1 = \frac{1}{g_{\delta}(0)} \Rightarrow p_1 = 1.03022$$

Επομένως έχουμε ότι η ουρά των αποζημιώσεων είναι

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\delta}(x) &= f_{\delta,e}(x) p_1 = g_{\delta}(x) 1.03022 \\ &= e^{-3x} (1 + 3.08977 x + 4.77333 x^2) \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας την $\bar{F}_{\delta}(x)$, έχουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των αποζημιώσεων ισούται με

$$f_{\delta}(x) = 14.32 e^{-3x} (-0.0894499 + x) (0.070081 + x)$$

Για τη δεύτερη και τρίτη ροπή της $f_{\delta}(x)$, έχουμε ότι

$$p_2 = 1.38713,$$

και

$$p_3 = 2.32316.$$

Ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας θα γίνει με τον ίδιο τρόπο που έγινε και για την αρχική κατανομή των αποζημιώσεων. Χρησιμοποιώντας το *Mathematica*, προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Laplace της $f_{\delta}(x)$ ισούται με

$$\widehat{f}_{\delta}(s) = 14.32 \left(\frac{2}{(3+s)^3} - \frac{0.0193689}{(3+s)^2} - \frac{0.00626874}{3+s} \right),$$

και της $\overline{F}_{\delta,e}(x)$ αντίστοιχα, με

$$\widehat{\overline{F}}_{\delta,e}(s) = \frac{3.08887}{(3+s)^3} + \frac{2.02933}{(3+s)^2} + \frac{1}{3+s}.$$

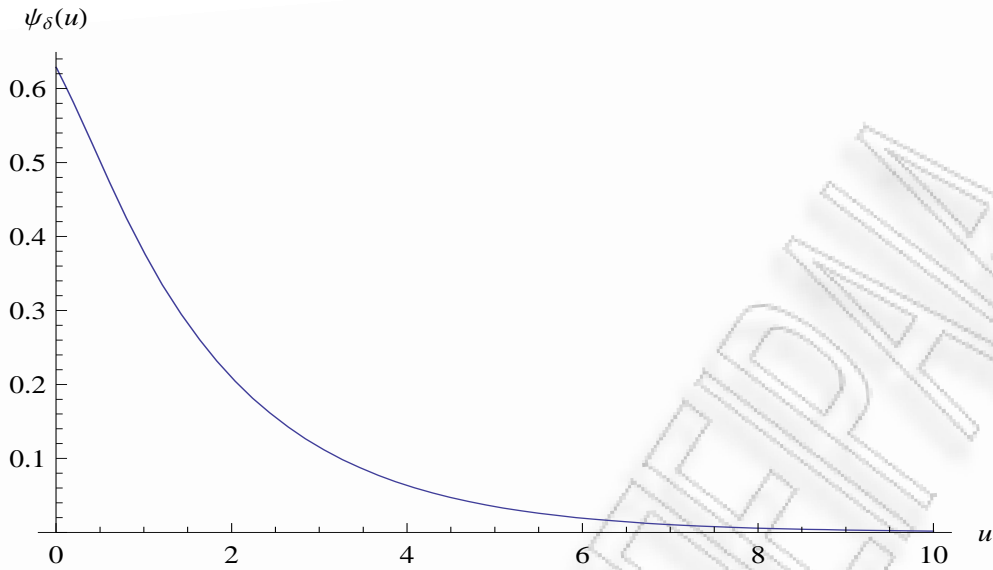
Άρα συμπεραίνουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας, $\psi_{\delta}(u)$, ισούται με την $\overline{K}_{\delta}(u)$, δηλαδή

$$\psi_{\delta}(u) = 0.690619 e^{-0.596656 u} - e^{-3.89656 u} [0.0619448 \cos(1.27286 u) + 0.0439226 \sin(1.27286 u)].$$

Από τον τύπο της $\psi_{\delta}(u)$, αλλά και από τη λύση της εξίσωσης (1.19), έχουμε ότι ο συντελεστής προσαρμογής ισούται με

$$R = 0.596656.$$

Στο παρακάτω Σχήμα 2.18, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της $\psi_{\delta}(u)$, η οποία όπως παρατηρούμε είναι ίδια με την γραφική παράσταση της $\overline{K}_{\delta}(u)$, του Σχήματος 2.17.



Σχήμα 2.18: Γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi_\delta(u) = \bar{K}_\delta(u)$, για $Gamma(3, 3)$ κατανομή και για $\delta = 0.05$.

Αφού υπολογίσαμε την πιθανότητα χρεοκοπίας της καινούργιας κατανομής των αποζημιώσεων, $\psi_\delta(u)$, η οποία όπως έχουμε αποδείξει ισούται με τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, για την αρχική κατανομή των αποζημιώσεων, μπορούμε τώρα με μεγάλη ευκολία να εφαρμόσουμε τις προσεγγίσεις *DeVylder* και *Tijms*, πάνω στην $\psi_\delta(u) = \bar{K}_\delta(u)$.

Οπότε για την προσέγγιση *DeVylder*, λύνοντας το σύστημα (2.5), καταλήγουμε στα εξής:

$$p'_1 = \frac{p_3}{3p_2} = 0.558267,$$

$$\lambda' = \frac{9\lambda p_2^3}{2p_3^2} = 2.22537,$$

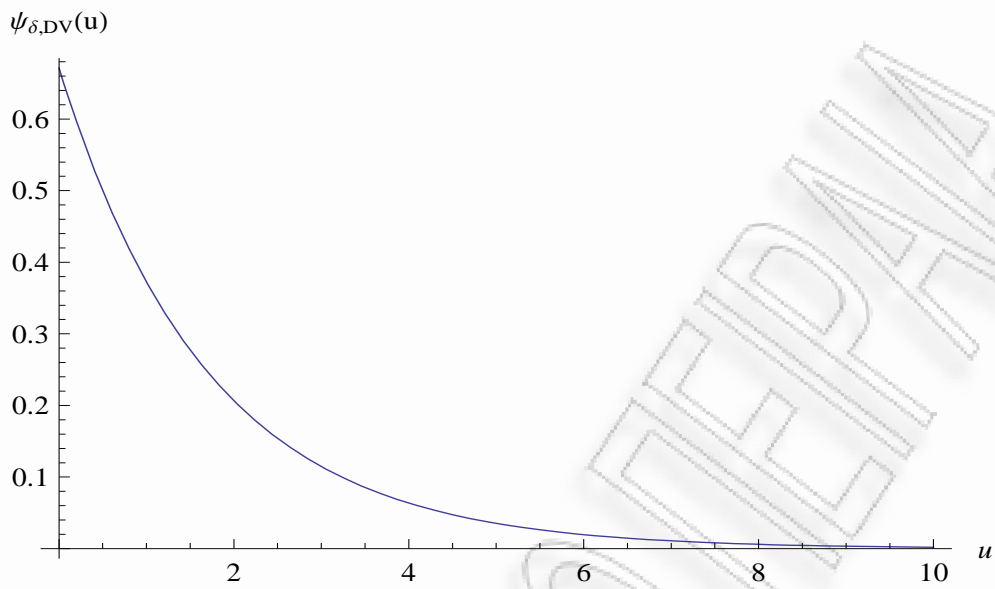
και

$$\theta' = \frac{2p_1 p_3}{3p_2^2} = 0.489797.$$

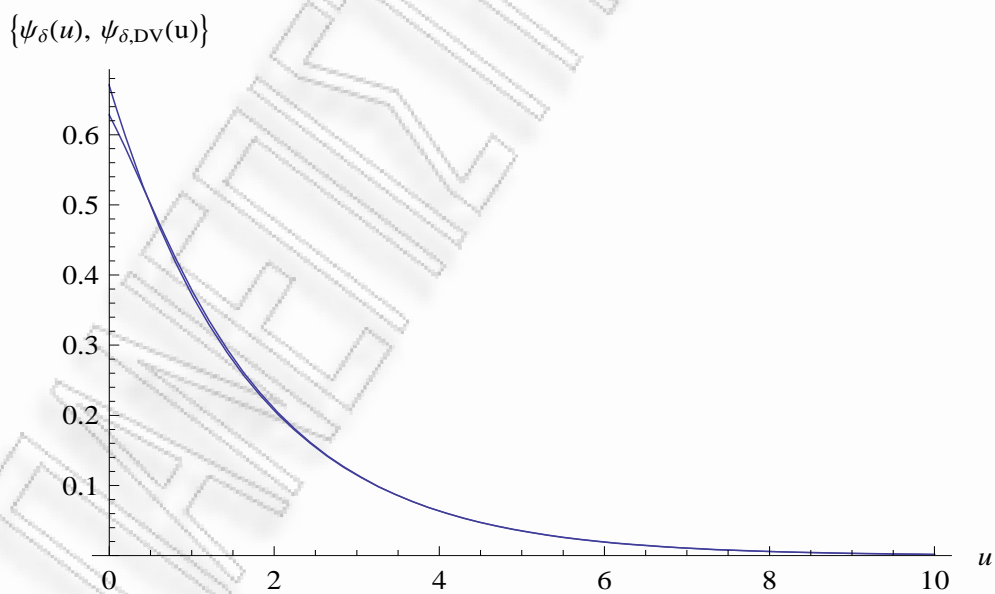
Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τον τύπο (2.1), παίρνουμε

$$\psi_{\delta, DV}(u) = \bar{K}_\delta^{DV}(u) = 0.671232 e^{-0.588907 u}.$$

Η γραφική παράσταση της $\psi_{\delta, DV}(u)$, παρουσιάζεται στο παρακάτω Σχήμα 2.19. Για την σύγκριση των $\psi_\delta(u)$, $\psi_{\delta, DV}(u)$, κατασκευάζουμε τις γραφικές τους παραστάσεις και στη συνέχεια τις παρουσιάζουμε στο παρακάτω κοινό διάγραμμα 2.20.



Σχήμα 2.19: Γραφική παράσταση της προσέγγισης *DeVyllder* για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_{\delta}(u)$.



Σχήμα 2.20: Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων των πιθανοτήτων $\psi_{\delta}(u)$, $\psi_{\delta,DV}(u)$, για $\delta = 0.05$.

Από το Σχήμα 2.20, παρατηρούμε ότι η προσέγγιση *DeVylder* για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας βρίσκεται πολύ κοντά με τις πραγματικές τιμές της $\bar{K}_\delta(u)$, εκτός από κάποιες πολύ μικρές τιμές του u .

Στην προσέγγιση του *Tijms*, από τους τύπους (2.10),(2.11), προκύπτουν

$$C = \frac{\theta p_1}{R \int_0^\infty x e^{Rx} \bar{F}(x) dx} = 0.69062,$$

και

$$\gamma = \left(\frac{1}{1+\theta} - C \right) \left(\frac{1}{\theta p_1} \int_0^\infty x \bar{F}(x) dx - \frac{C}{R} \right)^{-1} = 3.50126.$$

Επειδή ισχύει ότι $R < \gamma$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση και σύμφωνα με τον τύπο (2.9), παίρνουμε

$$\psi_{\delta,T}(u) = \bar{K}_\delta^{Tijms}(u) = 0.69062 e^{-0.596656 u} - 0.0619457 e^{-3.50126 u}. \quad (2.23)$$

Ακόμα παρατηρούμε ότι

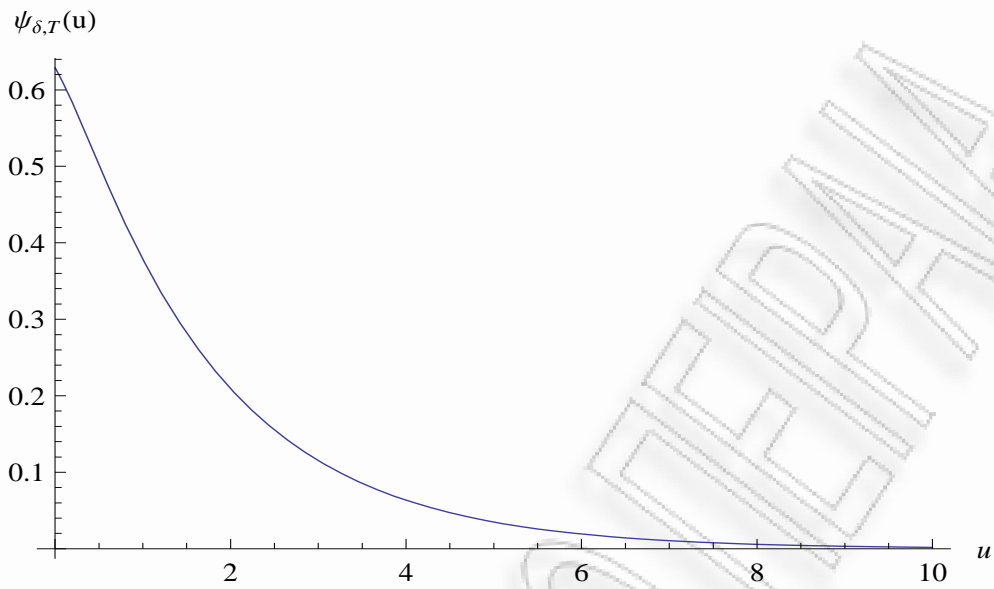
$$\psi_{\delta,T}(0) = \psi_\delta(0) = 0.628674,$$

και

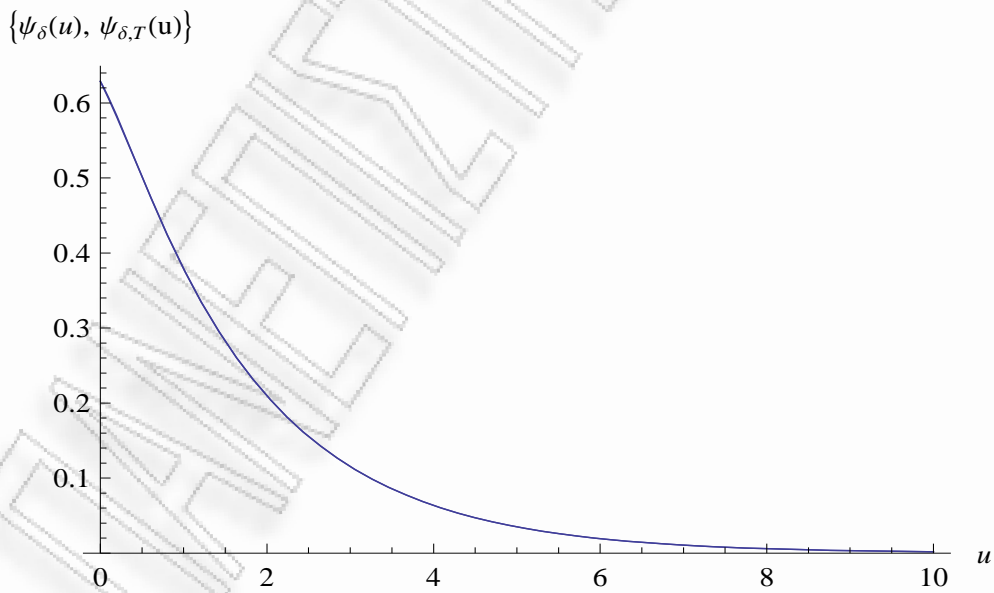
$$\int_0^\infty \psi_{\delta,T}(u) du = \int_0^\infty \psi_\delta(u) du = 1.13979.$$

Η γραφική παράσταση της προσέγγισης *Tijms* για την $\psi_\delta(u) = \bar{K}_\delta(u)$, δίνεται στο παρακάτω Σχήμα 2.21. Για τη σύγκριση των $\psi_\delta(u)$ και $\psi_{\delta,T}(u)$, θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία που κάναμε και στην προσέγγιση *DeVylder*. Το κοινό διάγραμμα των δύο πιθανοτήτων, δίνεται στο Σχήμα 2.22.

Στο Σχήμα 2.22, παρατηρούμε ότι η προσέγγιση *Tijms* βρίσκεται πάρα πολύ κοντά με την $\bar{K}_\delta(u)$, για όλες τις τιμές του u . Αυτός είναι ο λόγος βέβαια για τον οποίο δεν μπορούμε να διακρίνουμε ότι υπάρχουν δύο διαγράμματα στο σχήμα.



Σχήμα 2.21: Γραφική παράσταση της προσέγγιση του Tijms για την πιθανότητα χρεοκοπίας.



Σχήμα 2.22: Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων των πιθανοτήτων $\psi_{\delta}(u)$, $\psi_{\delta,T}(u)$, για $\delta = 0.05$.

Επίσης εδώ μας ενδιαφέρει και η περίπτωση που το δ παίρνει και άλλες τιμές εκτός από αυτή που έχουμε θεωρήσει. Εμείς θα πάρουμε την περίπτωση που το $\delta = 2$. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που κάναμε και στην περίπτωση που το $\delta = 2$, με την ίδια κατανομή των αποζημιώσεων $f(x)$, δίνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

Από το *Mathematica*, έχουμε ότι η θετική λύση της (1.30), είναι

$$\rho = 1.84138$$

Η ουρά της κατανομής ισορροπίας της καινούργιας κατανομής των αποζημιώσεων, $f_\delta(x)$, ισούται με

$$\bar{G}_\delta(x) = e^{-3x} (1 + 2.42508x + 2.24592x^2),$$

και η σταθερά β ισούται με

$$\beta = 2.62445.$$

Παραγωγίζοντας την $\bar{G}_\delta(x)$, προκύπτει

$$g_\delta(x) = e^{-3x} (0.574919 + 2.7834x + 6.73776x^2).$$

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό *Laplace* της $g_\delta(x)$ καθώς και τον μετασχηματισμό *Laplace* της $K'_0(u)$ από τη σχέση (1.37), υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, ο οποίος είναι σε μιγαδική μορφή. Χρησιμοποιώντας την σχέση (2.18), έχουμε και πάλι ότι το μιγαδικό κομμάτι απλοποιείται και η συνάρτηση $\bar{K}_\delta(u)$ ισούται με

$$\bar{K}_\delta(u) = 0.406344 e^{-1.22642u} - e^{-3.80748u} [0.13044 \cos(1.20178u) + 0.0941572 \sin(1.20178u)].$$

Η καινούρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των αποζημιώσεων έτσι ώστε η g_δ να είναι η πυκνότητα της κατανομής ισορροπίας, ισούται με

$$f_\delta(x) = 35.1584 e^{-3x} (-0.388405 + x) (0.134843 + x),$$

με τρεις πρώτες ροπές

$$p_1 = 1.73937,$$

$$p_2 = 2.67568,$$

και

$$p_3 = 4.77052.$$

Στη συνέχεια βρίσκοντας τον μετασχηματισμό *Laplace* της $f_\delta(x)$, μέσω της σχέσης (1.28), υπολογίζουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας. Χρησιμοποιώντας πάλι την σχέση (2.18), προκύπτει ότι

$$\psi_\delta(u) = 0.406344 e^{-1.22642u} - e^{-3.80748u} [0.13044 \cos(1.20178u) + 0.0941572 \sin(1.20178u)],$$

όπου οι εκθέτες είναι οι θετικές λύσεις της εξίσωσης (1.19) και ισχύει ότι $R = 1.22642$, επειδή είναι η μικρότερη θετική λύση.

Όπως στο Παράδειγμα 2.2.2 έτσι και εδώ, μας ενδιαφέρει να εφαρμόσουμε τις προσεγγίσεις *DeVylder* και *Tijms* για την $\psi_\delta(u) = \bar{K}_\delta(u)$, και στη συνέχεια να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που βρήκαμε στις συγκεκριμένες προσεγγίσεις, για $\delta = 0$, $\delta = 0.05$ και $\delta = 2$.

Για την προσέγγιση *DeVylder* ακολουθώντας ακριβώς τα ίδια βήματα με πριν, προκύπτει ότι

$$p'_1 = 0.594306,$$

$$\lambda' = 3.78778,$$

και

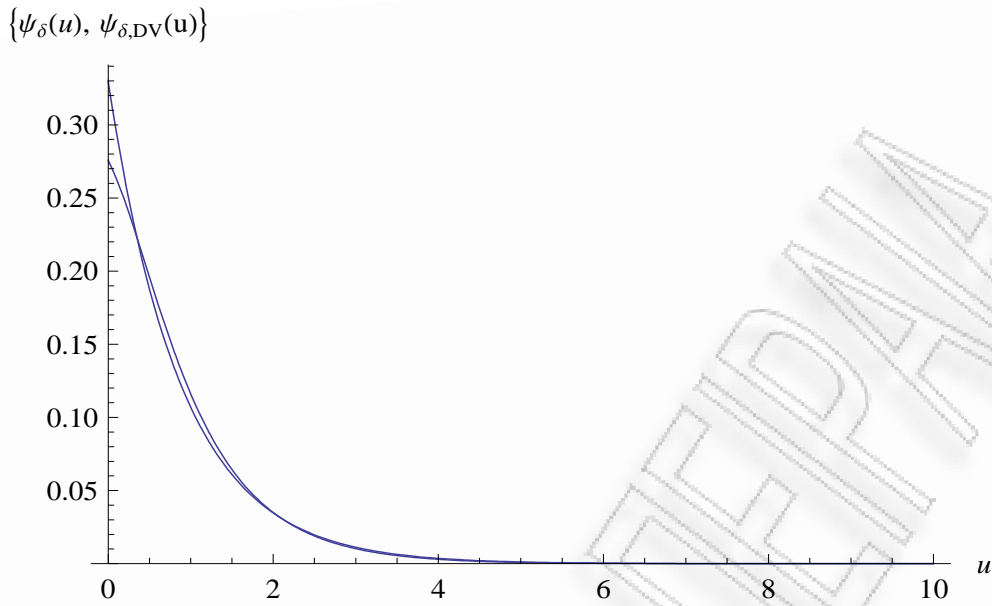
$$\theta' = 2.02785.$$

Επομένως η προσέγγιση *DeVylder* της συνάρτησης $\psi_\delta(u) = \bar{K}_\delta(u)$ για $\delta = 2$, ισούται με

$$\psi_{\delta,DV}(u) = 0.330267 e^{-1.12692u},$$

και το κοινό διάγραμμα των πιθανοτήτων $\psi_\delta(u)$, $\psi_{\delta,DV}$, δίνεται στο παρακάτω Σχήμα 2.23.

Στο Σχήμα 2.23, παρατηρούμε ότι η προσέγγιση *DeVylder*, για μεγάλες τιμές του δ , δεν είναι τόσο καλή όσο στις περιπτώσεις που εξετάσαμε παραπάνω, δηλαδή για $\delta = 0$ και $\delta = 0.05$. Αυτό θα φανεί περισσότερο στη συνέχεια που θα συγκρίνουμε αυτές τις προσεγγίσεις, δημιουργώντας ένα κοινό διάγραμμα με το ποσοστιαίο σφάλμα της προσέγγισης που υπάρχει σε κάθε περίπτωση.



Σχήμα 2.23: Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων των πιθανοτήτων $\psi_\delta(u)$, $\psi_{\delta,DV}(u)$, για $\delta = 2$.

Ακολουθώντας τις σχέσεις που ισχύουν στην προσέγγιση του *Tijms*, προκύπτουν τα εξής

$$C = 0.406346,$$

και

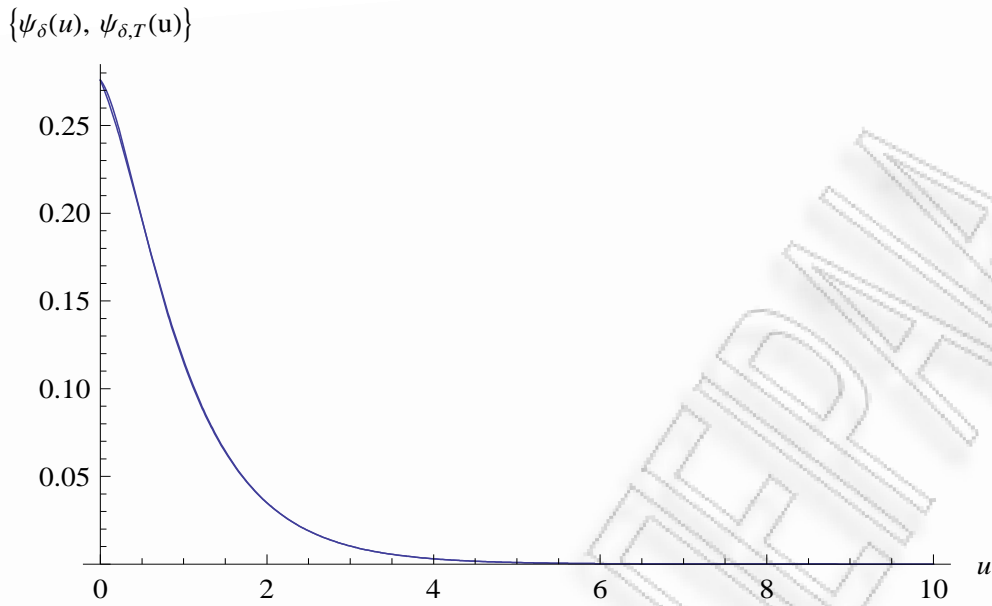
$$\gamma = 3.40975.$$

Επομένως η προσέγγιση *Tijms* της συνάρτησης $\psi_\delta(u) = \bar{K}_\delta(u)$ για $\delta = 2$, ισούται με

$$\psi_{\delta,T}(u) = 0.406346 e^{-1.22642u} - 0.130442 e^{-3.40975u}.$$

Συγκρίνουμε τις πιθανότητες $\psi_\delta(u)$, $\psi_{\delta,T}(u)$, με το ακόλουθο Σχήμα 2.24.

Από το Σχήμα 2.24, εκτός από τις πολύ μικρές του u , είναι αρκετά δύσκολο να διακρίνουμε ότι υπάρχουν δύο γραφικές παραστάσεις στο ίδιο διάγραμμα, πράγμα που δείχνει το πόσο καλή είναι η προσέγγιση του *Tijms* ακόμα και για μεγάλες τιμές της παραμέτρου δ . Επίσης παρατηρούμε ότι η προσέγγιση *Tijms* γίνεται όλο και καλύτερη (συγκριτικά) από την προσέγγιση *DeVylder*, όσο η παράμετρος δ μεγαλώνει. Την αλλαγή στην τιμή του δ την κάναμε έτσι ώστε να δούμε κατά πόσο επηρεάζονται οι προσεγγίσεις του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας που έχουμε αναφέρει.



Σχήμα 2.24: Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων των πιθανοτήτων $\psi_\delta(u)$, $\psi_{\delta,T}(u)$ για $\delta = 2$.

Επειδή όμως από τα κοινά διαγράμματα δεν βγάλαμε κάποια ασφαλή συμπεράσματα για το πόσο καλές είναι οι δύο προσεγγίσεις, δημιουργούμε και σε αυτό το παράδειγμα μία συνάρτηση η οποία εκφράζει το ποσοστιαίο σφάλμα που υπάρχει ανάμεσα στην πραγματική τιμή του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας και στην προσεγγιστική τιμή του. Για την προσέγγιση *DeVylder*, παίρνουμε ότι

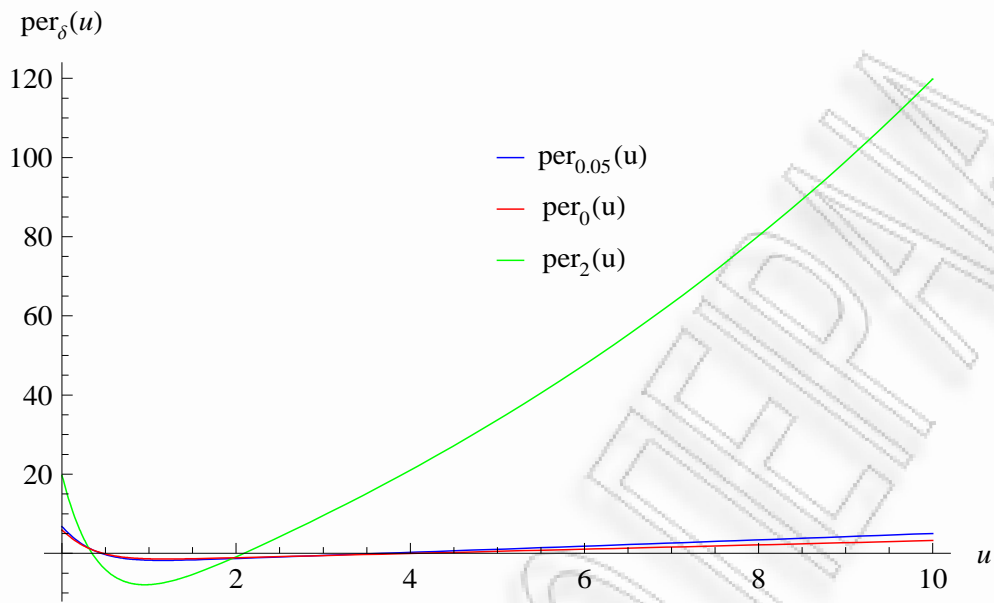
$$per_{\delta,DV}(u) = \frac{\psi_{\delta,DV}(u) - \psi_\delta(u)}{\psi_\delta(u)} \cdot 100$$

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση της $per_{\delta,DV}(u)$, Σχήμα 2.25, για τις περιπτώσεις που $\delta = 0$, δηλαδή για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$, καθώς και για $\delta = 0.05$, $\delta = 2$, δηλαδή για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας $\psi_\delta(u) = \bar{K}_\delta(u)$.

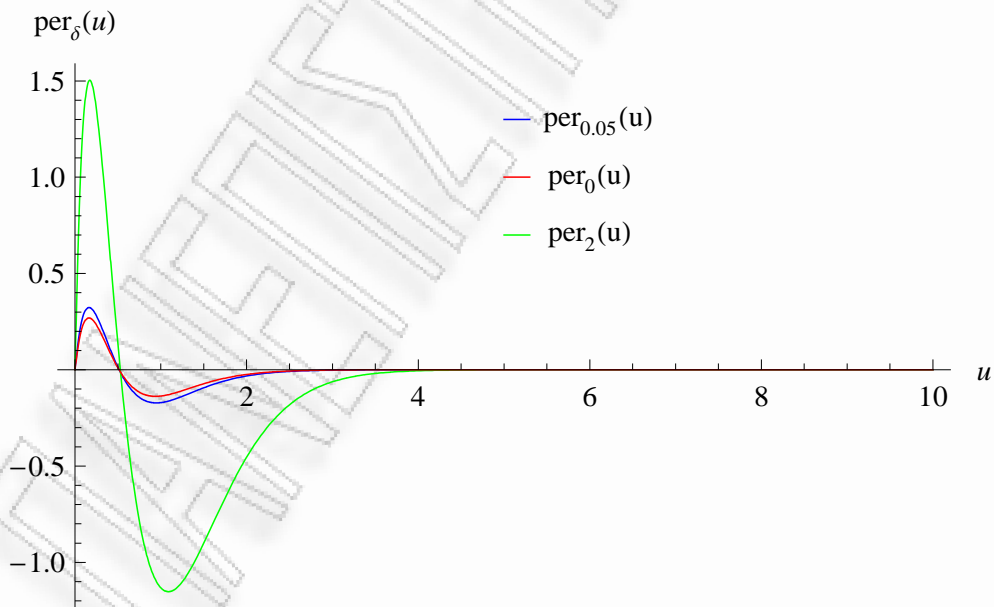
Αντίστοιχα για την προσέγγιση *Tijms*, παίρνουμε ότι

$$per_{\delta,T}(u) = \frac{\psi_{\delta,T}(u) - \psi_\delta(u)}{\psi_\delta(u)} \cdot 100,$$

και το κοινό διάγραμμα του ποσοστιαίου σφάλματος της προσέγγισης, για $\delta = 0$, $\delta = 0.05$ και $\delta = 2$, παρουσιάζεται στο παρακάτω Σχήμα 2.26.



Σχήμα 2.25: Γραφική παράσταση του ποσοστιάου σφάλματος για την προσέγγιση $\psi_{\delta,DV}(u)$, για $\delta = 0, \delta = 0.05, \delta = 2$.



Σχήμα 2.26: Γραφική παράσταση του ποσοστιάου σφάλματος για την προσέγγιση $\psi_{\delta,T}(u)$, για $\delta = 0, \delta = 0.05, \delta = 2$.

Από τα Σχήματα 2.25 και 2.26 αντίστοιχα, βγάζουμε το συμπέρασμα ότι για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, η προσέγγιση του *Tijms* είναι καλύτερη από την προσέγγιση *DeVylder*. Επίσης παρατηρούμε ότι για $\delta = 0$, δηλαδή για την πιθανότητα χρεοκοπίας όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία Γάμμα κατανομή, οι προσεγγιστικές τιμές είναι πιο κοντά με τις πραγματικές από ότι για $\delta > 0$, δηλαδή για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας. Ακόμα αξίζει να σημειωθεί ότι όσο αυξάνεται η τιμή του δ τόσο χαλάνε και οι δύο προσεγγίσεις που αναφέραμε. Όμως η τιμή του δ επηρεάζει περισσότερο την προσέγγιση *DeVylder*, καθώς για μεγάλο δ αυξάνεται απότομα και το ποσοστιαίο σφάλμα. Αντίθετα η προσέγγιση *Tijms* επηρεάζεται λιγότερο από μία μεγάλη τιμή του δ , καθώς βλέπουμε ότι το ποσοστιαίο σφάλμα παραμένει σε χαμηλά επίπεδα. Τέλος σαν τελευταία παρατήρηση έχουμε ότι για μικρές τιμές του δ , η προσέγγιση *DeVylder* είναι καλύτερη για αποζημιώσεις που ακολουθούν μία Γάμμα κατανομή παρά μια μείξη τριών εκθετικών κατανομών και επίσης η προσέγγιση *Tijms* είναι καλύτερη, για οποιαδήποτε θετική τιμή του δ , στην περίπτωση που οι αποζημιώσεις ακολουθούν μια μείξη τριών εκθετικών κατανομών.

Κεφάλαιο 3

Ροπές σύνθετων κατανομών και ροπές του χρόνου χρεοκοπίας.

Μία άλλη συνάρτηση με μεγάλο ενδιαφέρον στη θεωρία χρεοκοπίας είναι η κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας. Η μελέτη της κατανομής του χρόνου χρεοκοπίας είναι ένα πολύπλοκο πρόβλημα και για αυτό τον λόγο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποιες προσεγγίσεις, ήδη γνωστές, για την εύρεση της κατανομής ή να δημιουργήσουμε μία νέα προσέγγιση, με τη βοήθεια της προσέγγισης που εισάγουμε στο κεφάλαιο 4, με την οποία δεν θα ασχοληθούμε στην παρούσα εργασία αλλά έχει ενδιαφέρον για περαιτέρω έρευνα καθώς υπάρχει η ιδέα πίσω από αυτή την προσέγγιση. Επειδή η κατανομή αυτή είναι σχεδόν πάντα άγνωστη¹, υπάρχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας, βλέπε για παράδειγμα το άρθρο των *Lin & Willmot* (2000).

Στόχος του τρίτου κεφαλαίου είναι να ορίσουμε και να μελετήσουμε τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας για διάφορες περιπτώσεις κατανομών αλλά και για διάφορες τιμές του περιθωρίου ασφαλείας, θ . Για να αρχίσουμε όμως να μελετάμε τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας, θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε το πώς βρίσκονται οι ροπές των σύνθετων κατανομών.

3.1 Ροπές Σύνθετων Κατανομών

Για να δούμε πώς εκφράζονται οι ροπές μίας σύνθετης κατανομής, θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε κάποιες βασικές σχέσεις που ισχύουν στη Θεωρία Πιθανοτήτων. Έτσι έχουμε ότι: (βλέπε Κουτσόπουλος (1999))

Πρόταση 4 Αν X, Y είναι δύο οποιεσδήποτε μη-αρνητικές τ.μ με από κοινού συνάρτηση

¹Αφού η κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας είναι πολύπλοκη και σε πολλές περιπτώσεις άγνωστη, η υλοποίηση της ιδέας που έχουμε για την δημιουργία μίας νέας προσέγγισης, για την κατανομή αυτή, είναι αρκετά πιο δύσκολη από το πρόβλημα που εξετάζουμε στο παρόν κεφάλαιο.

πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x, y) = f_Y(y) f_{X|Y}(x, y),$$

τότε για την μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ X , ισχύουν αντίστοιχα τα εξής:

$$E(X) = E_Y [E_X (X|Y)], \quad (3.1)$$

και

$$Var(X) = E_Y [Var_X (X|Y)] + Var_Y [E_X (X|Y)]. \quad (3.2)$$

Έτσι τώρα με τη βοήθεια των σχέσεων (3.1) και (3.2), θέλουμε να βρούμε τις ροπές των σύνθετων κατανομών που έχουμε αναφέρει μέχρι στιγμής στην παρούσα εργασία.

Στο Κεφάλαιο 1 είχαμε εξηγήσει λεπτομερώς ότι οι συνολικές αποζημιώσεις, που προκύπτουν από ένα χαρτοφυλάκιο, ακολουθούν μία σύνθετη κατανομή η οποία εξαρτάται από την κατανομή που ακολουθεί το πλήθος, K , των απαιτήσεων για αποζημίωση. Συνήθως οι συνολικές αποζημιώσεις S , όταν ο χρονικός ορίζοντας θεωρείται σταθερός, όπως για παράδειγμα στο συλλογικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνων, ακολουθούν μία σύνθετη κατανομή *Poisson* και εκφράζονται μέσα από τη σχέση

$$S = \sum_{i=1}^K X_i, \quad (3.3)$$

όπου X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ που εκφράζουν το μέγεθος της i -απαίτησης και K είναι το πλήθος των απαιτήσεων, το οποίο είναι ανεξάρτητο από το μέγεθος της ζημίας που υπάρχει σε κάθε απαίτηση. Στη σχέση (3.3) θέτουμε $S = 0$ όταν το πλήθος των απαιτήσεων $K = 0$.

Για να βρούμε τώρα τις ροπές² της τ.μ S , θα πρέπει να δεσμεύσουμε ως προς K . Επομένως μέσω της σχέσης (3.1), για την μέση τιμή της S , ισχύει

$$E(S) = E_K [E_S (S|K)] = E_K [E (X_1 + X_2 + \dots + X_K | K = k)]$$

Επειδή όμως τα X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ, ισχύει ότι

²Οι τύποι για τις ροπές των σύνθετων κατανομών παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά από τον *Abraham Wald* και για αυτό τον λόγο αναφέρονται στην βιβλιογραφία και ως εξισώσεις του *Wald*.

$$E(S) = E(K \cdot E(X)) = E(X) \cdot E(K), \quad (3.4)$$

όπου $E(X)$ είναι το αναμενόμενο ύψος αποζημίωσης και $E(K)$ είναι ο αναμενόμενος αριθμός απαιτήσεων.

Αντίστοιχα για την διακύμανση της τ.μ S , μέσω της σχέσης (3.2), έχουμε

$$Var(S) = E_K [Var(S|K)] + Var_K [E(S|K)]$$

Όμως και πάλι έχουμε ότι τα X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, επομένως ισχύει ότι

$$\begin{aligned} Var(S) &= E[K \cdot Var(X)] + Var[K \cdot E(X)] \\ &= Var(X) \cdot E(K) + E^2(X) \cdot Var(K), \end{aligned} \quad (3.5)$$

όπου $Var(X)$ είναι ένας σταθερός αριθμός που εκφράζει την μεταβλητότητα του μεγέθους της απαίτησης και $Var(K)$ εκφράζει την μεταβλητότητα του αριθμού των απαιτήσεων.

Έτσι σύμφωνα με τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι το $Var(S)$ εκφράζει την μεταβλητότητα των συνολικών απαιτήσεων (αποζημιώσεων).

Η δεύτερη μεταβλητή που ακολουθεί σύνθετη κατανομή από αυτές που μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 1, είναι η μέγιστη σωρευτική απώλεια, L , η οποία ακολουθεί μία σύνθετη γεωμετρική κατανομή και εκφράζεται μέσω της σχέσης

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_N, \quad (3.6)$$

όπου τα L_i , $i = 1, 2, \dots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ που εκφράζουν τα κλιμακωτά ύψη (*ladder heights*) και η τ.μ N είναι το πλήθος των κλιμακωτών υψών που εμφανίζονται. Στη σχέση (3.6) θέτουμε $L = 0$ όταν το πλήθος των κλιμακωτών υψών $N = 0$. Η τ.μ N ακολουθεί μία γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p = \theta \cdot (1 + \theta)^{-1}$,

μέση τιμή

$$E(N) = \frac{q}{p} = \frac{1}{\frac{1+\theta}{\theta}} = \frac{1}{1+\theta}, \quad (3.7)$$

και διασπορά

$$Var(N) = \frac{q}{p^2} = \frac{1}{\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^2} = \frac{1+\theta}{\theta^2}. \quad (3.8)$$

Για να υπολογίσουμε τώρα τις ροπές του τυχαίου αθροίσματος L , θα πρέπει πρώτα να βρούμε μία σχέση για τις ροπές των τ.μ L_i . Ξέρουμε όμως ότι η τ.μ L_i ακολουθεί την κατανομή ισορροπίας με πυκνότητα $f_e(x)$, η οποία δίνεται από τη σχέση (1.10). Επομένως παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} E(L_i^r) &= \int_0^\infty x^r f_e(x) dx \\ &= \int_0^\infty x^r \frac{\bar{F}(x)}{p_1} dx \\ &= \frac{1}{p_1} \int_0^\infty x^r [1 - F(x)] dx \end{aligned}$$

Κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, προκύπτει

$$\begin{aligned} E(L_i^r) &= \left[\frac{x^{r+1}}{p_1 (r+1)} [1 - F(x)] \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{x^{r+1}}{p_1 (r+1)} f(x) dx \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{r+1}}{p_1 (r+1)} [1 - F(x)] - 0 + \int_0^\infty \frac{x^{r+1}}{p_1 (r+1)} f(x) dx \\ &= 0 + \frac{p_{r+1}}{p_1 (r+1)} \\ &= \frac{p_{r+1}}{p_1 (r+1)}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

όπου p_{r+1} είναι η $(r+1)$ ροπή της τ.μ X_i .

Επομένως για την μέση τιμή του τυχαίου αθροίσματος L , μέσω της σχέσης (3.4), ισχύει ότι

$$E(L) = E(L_i) E(N) = \frac{p_2}{2 p_1} \frac{1}{\theta} = \frac{p_2}{2\theta p_1}, \quad (3.10)$$

και για την διακύμανση του L , μέσω της σχέσης (3.5), ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(L) &= E(N) \text{Var}(L_i) + E^2(L_i) \text{Var}(N) \\
 &= \frac{1}{\theta} \left(\frac{p_3}{3p_1} - \left(\frac{p_2}{2p_1} \right)^2 \right) + \left(\frac{p_2}{2p_1} \right)^2 \frac{1+\theta}{\theta^2} \\
 &= \frac{p_3}{3\theta p_1} + \left(\frac{p_2}{2p_1} \right)^2 \left(\frac{1+\theta}{\theta^2} - \frac{1}{\theta} \right) \\
 &= \frac{p_3}{3\theta p_1} + \left(\frac{p_2}{2p_1} \right)^2 \left(\frac{1+\theta-\theta}{\theta^2} \right) \\
 &= \frac{p_3}{3\theta p_1} + \left(\frac{p_2}{2\theta p_1} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Αν θέλουμε να βρούμε ροπές μεγαλύτερης τάξης για σύνθετες κατανομές, τότε μπορούμε να καταφύγουμε στην ροπογεννήτρια της σύνθετης κατανομής. Είναι γνωστό από τη Θεωρία Πιθανοτήτων ότι μέσω της ροπογεννήτριας μιας τ.μ μπορούμε να υπολογίσουμε τις ροπές k -τάξης, $k = 1, 2, \dots$, της συγκεκριμένης τ.μ. Αυτό γίνεται αν παραγωγίσουμε για παράδειγμα τη ροπογεννήτρια μίας τ.μ X , $M_X(t)$, k -φορές ως προς t και θέσουμε στην k -παράγωγο όπου $t = 0$ (βλέπε Κούτρας (2004)).

Για να δείξουμε πώς γίνεται η συγκεκριμένη διαδικασία, θα πάρουμε την σύνθετη τ.μ S των συνολικών αποζημιώσεων, που δίνεται από τη σχέση (3.3), και παίρνοντας την ροπογεννήτρια της S , προκύπτει

$$M_S(t) = \int_0^{\infty} e^{ts} dF(t) = E(e^{tS})$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.1) και δεσμεύοντας ως προς K , παίρνουμε

$$M_S(t) = E_K [E(e^{tS} | K = k)]. \quad (3.11)$$

Παίρνοντας τώρα τη δεσμευμένη μέση τιμή στη σχέση (3.11), προκύπτει

$$E(e^{tS} | K = k) = E(e^{t(X_1 + X_2 + \dots + X_k)})$$

Επειδή όμως γνωρίζουμε ότι τα X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες³ τ.μ, η δεσμευμένη μέση τιμή γίνεται

$$\begin{aligned} E(e^{tS} | K = k) &= E(e^{tX_1}) E(e^{tX_2}) \dots E(e^{tX_k}) \\ &= M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \dots M_{X_k}(t) \\ &= M_{X_1}(t)^k. \end{aligned}$$

Επομένως αντικαθιστώντας τη δεσμευμένη μέση τιμή στη σχέση (3.11), παίρνουμε ότι η ροπογεννήτρια της τ.μ S ισούται με

$$\begin{aligned} M_S(t) &= E_K [M_{X_1}(t)^K] = E_K [e^{\ln M_{X_1}(t)^K}] \\ &= E_K [e^{K \ln M_{X_1}(t)}] = M_K(\ln M_{X_1}(t)), \end{aligned}$$

όπου $M_K(t)$ είναι η ροπογεννήτρια της τ.μ K . Στη συγκεκριμένη περίπτωση, επειδή όπως έχουμε αναφέρει η τ.μ K , στο χρονικό διάστημα $[0, t]$, ακολουθεί κατανομή $Poisson(\lambda)$, προκύπτει ότι η τ.μ S ακολουθεί μία σύνθετη κατανομή $Poisson$. Για την ροπογεννήτρια της τ.μ K ισχύει

$$M_K(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}, \quad \lambda, t > 0$$

Επομένως η ροπογεννήτρια της σύνθετης τ.μ S θα ισούται με

$$\begin{aligned} M_S(t) &= M_K(\ln M_{X_1}(t)) = e^{\lambda(e^{\ln M_{X_1}(t)} - 1)} \\ &= e^{\lambda(M_{X_1}(t) - 1)}. \end{aligned}$$

Έτσι γνωρίζοντας την κατανομή των X_i , μπορούμε να βρούμε την ροπογεννήτρια της S καθώς και τις ροπές της, παραγωγίζοντας την $M_S(t)$ στο σημείο $t = 0$.

³Επειδή τα X_i είναι ισόνομες τ.μ έχουν την ίδια ροπογεννήτρια, $M_{X_1}(t)$.

3.2 Οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας

Εφόσον η ακριβής κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας δεν είναι γνωστή, υπάρχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τις ροπές του χρόνου αυτού. Επειδή όπως έχουμε δει, ο χρόνος αυτός, T , είναι μία ελλειμματική τ.μ, είναι προφανές ότι ισχύει

$$E(T^k) = \infty \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

εφόσον $Pr(T = \infty) > 0$.

Συνεπώς για να μελετήσουμε τις ροπές του T , θα πρέπει είτε να εξετάσουμε τις δεσμευμένες ροπές δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, δηλαδή $T < \infty$, είτε να εξετάσουμε τις ροπές της τ.μ $T \cdot I(T < \infty)$, όπου $I(A)$ η δείτρια συνάρτηση ενός ενδεχομένου A , σχέση (1.29), όπου εδώ συγκεκριμένα το ενδεχόμενο A είναι το ενδεχόμενο να συμβεί χρεοκοπία.

Τα κυριότερα αποτελέσματα για τις δύο αυτές περιπτώσεις, μελετώντας κάθε φορά τη συνάρτηση που εξετάζουμε σα συνάρτηση του αρχικού αποθεματικού u , παρουσιάζονται στη συνέχεια, όπως αυτά δίνονται στο άρθρο των *Lin & Willmot* (2000).

Για να μελετήσουμε τις δεσμευμένες ροπές δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία, θα πρέπει να δώσουμε μία πολύ σημαντική σχέση που ισχύει για τις δεσμευμένες πιθανότητες, στη θεωρία πιθανοτήτων (βλέπε Κούτρας (2004)).

Έτσι αν Ω είναι ένας δειγματικός χώρος και $B \subseteq \Omega$ είναι ένα ενδεχόμενο του Ω και ισχύει ότι $Pr(B) > 0$, τότε για οποιοδήποτε ενδεχόμενο A του δειγματικού χώρου Ω , η δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος ότι πραγματοποιείται το B δίνεται από τον τύπο

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(AB)}{Pr(B)}. \quad (3.12)$$

Ο μέσος χρόνος μέχρι την έλευση της χρεοκοπίας, δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία⁴ χρησιμοποιώντας τον τύπο (3.12) προκύπτει ότι δίνεται από τη σχέση⁵:

$$E(T|T < \infty) = \frac{E[T \cdot I(T < \infty)]}{E[I(T < \infty)]} = \frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}, \quad (3.13)$$

όπου το $\psi_1(u) = E[T \cdot I(T < \infty)]$ ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

⁴ Συνήθως στην βιβλιογραφία, ο χρόνος μέχρι τη χρεοκοπία, δοθέντος ότι κάποια χρονική στιγμή επέρχεται χρεοκοπία, εκφράζεται μέσω της κανονικής τ.μ $T_c = T|T < \infty$, την οποία αναλύουμε διεξοδικά στο επόμενο Κεφάλαιο και θα την χρησιμοποιούμε για ευκολία από εδώ και πέρα.

⁵ Θυμίζουμε ότι η $E[I(T < \infty)]$ ισούται με την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$, πράγμα που δείξαμε και στο Κεφάλαιο 1, στη σχέση (1.7).

$$\psi_1(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi_1(u-x) dF_e(x) + \frac{1}{c} \int_u^\infty \psi(x) dx,$$

και δίνεται αναλυτικά από τον τύπο

$$\psi_1(u) = \frac{1}{\lambda p_1 \theta} \left[\int_0^u \psi(u-x)\psi(x) dx + \int_u^\infty \psi(x) dx - \frac{p_2}{2p_1 \theta} \psi(u) \right]. \quad (3.14)$$

Επίσης σύμφωνα με αυτά που έχουμε ορίσει μέχρι τώρα και τη σχέση (3.10), η σχέση (3.14) γράφεται και ως

$$\begin{aligned} \psi_1(u) &= \frac{1}{\lambda p_1 \theta} \left[\int_0^u \psi(u-x)\psi(x) dx + \int_0^\infty \psi(x) dx - \int_0^u \psi(x) dx - \frac{p_2}{2p_1 \theta} \psi(u) \right] \\ &= \frac{1}{\lambda p_1 \theta} \left[\int_0^u \psi(u-x)\psi(x) dx + E(L) - \int_0^u \psi(x) dx - E(L)\psi(u) \right] \\ &= \frac{1}{\lambda p_1 \theta} \left[\int_0^u \psi(u-x)\psi(x) dx + E(L)\delta(u) - \int_0^u \psi(x) dx \right]. \end{aligned}$$

Η $\psi_1(u)$, όπως είδαμε, ισούται με τη μέση τιμή του γινομένου $E[T \cdot I(T < \infty)]$, από το οποίο βλέπουμε διασθητικά ότι ο μέσος χρόνος μέχρι τη χρεοκοπία είναι μία αύξουσα συνάρτηση ως προς το αρχικό αποθεματικό u και η μέση τιμή της δείκτριας συνάρτησης $I(T < \infty)$, δηλαδή η $\psi(u)$, είναι μία φθίνουσα συνάρτηση ως προς u , όπως είχαμε δείξει και στο πρώτο κεφάλαιο. Επομένως έχουμε ένα γινόμενο μίας αύξουσας συνάρτησης με μία φθίνουσα συνάρτηση. Επειδή όμως η πιθανότητα χρεοκοπίας φθίνει με ταχύτερο ρυθμό στο μηδέν από ότι αυξάνει ο μέσος χρόνος χρεοκοπίας στο $+\infty$, η πρώτη μη-δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας προκύπτει ότι είναι μία συνάρτηση, η οποία για μεγάλο αρχικό αποθεματικό φθίνει⁶ στο μηδέν.

Γενικότερα, χρησιμοποιώντας τον τύπο (3.12), βρίσκουμε ότι η k -ροπή του χρόνου χρεοκοπίας, δοθέντος ότι θα υπάρξει χρεοκοπία, δίνεται από τη σχέση

$$E(T^k | T < \infty) = \frac{E[T^k \cdot I(T < \infty)]}{E[I(T < \infty)]} = \frac{\psi_k(u)}{\psi(u)},$$

⁶Όπως θα δούμε και στις επόμενες ενότητες με τα αριθμητικά παραδείγματα, η $\psi_1(u)$ δεν είναι πάντα μία μονότονη (φθίνουσα) συνάρτηση ως προς u , αλλά συνήθως είναι αύξουσα μέχρι το σημείο που η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο και φθίνουσα πέρα από αυτό το σημείο, μέχρι το μηδέν που φθάνει για μεγάλες τιμές του u .

όπου οι ροπές $\psi_k(u) = E [T^k I(T < \infty)]$ ικανοποιούν μια σειρά από ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις

$$\psi_k(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi_k(u-x) dF_e(x) + \frac{k}{c} \int_u^\infty \psi_{k-1}(x) dx,$$

για $k = 1, 2, \dots$, με $\psi_0(u) = \psi(u)$.

Επιπλέον η $\psi_k(u)$ δίνεται από τον αναδρομικό τύπο

$$\psi_k(u) = \frac{k}{\lambda p_1 \theta} \left[\int_0^u \psi(u-x) \psi_{k-1}(x) dx + \int_u^\infty \psi_{k-1}(x) dx - \psi(u) \int_0^\infty \psi_{k-1}(x) dx \right], \quad (3.15)$$

όπου $\psi_{k-1}(u)$ είναι η $(k-1)$ ροπή του χρόνου χρεοκοπίας και το ολοκλήρωμα

$$\int_0^u \psi(u-x) \psi_{k-1}(x) dx,$$

εκφράζει την συνέλιξη δύο συναρτήσεων, της πιθανότητας χρεοκοπίας και της $(k-1)$ ροπής του χρόνου χρεοκοπίας. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε διαβάζοντας προσεκτικά τον ορισμό που είχαμε δώσει στην Ενότητα 1.4, για την συνέλιξη δύο συναρτήσεων.

Σαν παράδειγμα, η δεύτερη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας, δοθέντος ότι υπάρχει χρεοκοπία, δίνεται από τη σχέση

$$E(T^2 | T < \infty) = \frac{E [T^2 \cdot I(T < \infty)]}{E [T < \infty]} = \frac{\psi_2(u)}{\psi(u)}, \quad (3.16)$$

όπου η $\psi_2(u) = E [T^2 \cdot I(T < \infty)]$ ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\psi_2(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi_2(u-x) dF_e(x) + \frac{1}{1+\theta} H_2(u),$$

με

$$H_2(u) = \frac{2}{\lambda^2 p_1^2 \theta} \left[\int_0^u \psi(u-x) \int_x^\infty \psi(t) dt dx + \int_u^\infty (x-u) \psi(x) dx \right].$$

Η $\psi_2(x)$ μπορεί να υπολογιστεί από τον αναδρομικό τύπο που δόθηκε παραπάνω για $k = 2$, σχέση (3.15), αλλά μπορεί να υπολογιστεί και κατευθείαν, χωρίς τη χρήση της πρώτης ροπής

$\psi_1(u)$, από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \psi_2(u) = & \frac{2}{\lambda^2 p_1^2 \theta^2} \int_0^u \psi(u-x) \int_0^x \psi(x-t) \psi(t) dt dx \\ & + \frac{4}{\lambda^2 p_1^2 \theta^2} \int_0^u \psi(u-x) \int_x^\infty \psi(t) dt dx + \frac{2}{\lambda^2 p_1^2 \theta^2} \int_u^\infty (x-u) \psi(x) dx \\ & - \frac{p_2}{\lambda^2 p_1^3 \theta^3} \int_0^u \psi(u-x) \psi(x) dx - \frac{2p_1 p_3 \theta + 3p_2^2}{6\lambda^2 p_1^4 \theta^4} \psi(u) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Στις παρακάτω ενότητες θα δώσουμε κάποια παραδείγματα για διάφορες κατανομές αποζημιώσεων και θα υπολογίσουμε τις πρώτες και δεύτερες ροπές του χρόνου χρεοκοπίας που έχουν οι συγκεκριμένες κατανομές. Επίσης μεγάλο ενδιαφέρον έχουν και οι γραφικές παραστάσεις των ροπών, καθώς μέσα από αυτές μπορούμε να διακρίνουμε για ποιο αρχικό αποθεματικό παρουσιάζουν οι μη-δεσμευμένες ροπές μέγιστο. Βέβαια θα περιμέναμε όλοι, οι μη-δεσμευμένες ροπές να παρουσιάζουν μέγιστο για αρχικό αποθεματικό $u = 0$. Όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις. Το σημείο στο οποίο παρουσιάζεται μέγιστο, επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από την τιμή του περιθωρίου ασφαλείας θ . Για αυτό το λόγο θέλουμε να δείξουμε στα παρακάτω παραδείγματα τι αλλαγές γίνονται στην μονοτονία των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας και τότε η $\psi_k(u)$, για $k = 1, 2$, παρουσιάζει μέγιστο για $u = 0$ και τότε για $u > 0$, για διάφορες τιμές του θ . Όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία εκθετική κατανομή με παράμετρο β , τότε υπάρχει αναλυτικός τύπος για το αρχικό αποθεματικό στο οποίο η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο (βλέπε *Dermitzakis et al (2009)*). Όμως για τις κατανομές των αποζημιώσεων που μελετάμε εδώ, το να βρεθεί κάποιος αναλυτικός τύπος για το u είναι ένα πάρα πολύ δύσκολο πρόβλημα. Για αυτό τον λόγο εμείς θα μελετήσουμε γραφικά και μέσω του *Mathematica* για ποια τιμή του u , παρουσιάζει η $\psi_k(u)$, για $k = 1, 2$, μέγιστο. Συγκεκριμένα παίρνουμε τέσσερις διαφορετικές κατανομές αποζημιώσεων, οι οποίες είναι:

1. μείξη τριών εκθετικών, ίδια με αυτή που είχαμε εξετάσει στο Παράδειγμα 2.2.1,
2. μείξη πέντε εκθετικών, για την οποία όλοι οι τύποι για την πιθανότητα χρεοκοπίας και τις δύο πρώτες ροπές του χρόνου χρεοκοπίας, για τις διάφορες τιμές του θ , δίνονται στο τέλος της εργασίας στο Παράρτημα Β',
3. κατανομή Γάμμα(3,3), ίδια με αυτή που είχαμε αναλύσει στο Παράδειγμα 2.3.1,

4. και τέλος, κατανομή Γάμμα(10,10) για την οποία δίνονται οι τύποι αναλυτικά και τα διαγράμματα των ροπών στο Παράρτημα Γ'.

Τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας για τις δύο επιπλέον κατανομές που διαλέξαμε να εξετάσουμε, τις χρησιμοποιούμε στο Κεφάλαιο 4, όπου εκεί θα εισάγουμε μία καινούρια προσέγγιση για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας η οποία χρησιμοποιεί τη πρώτη και δεύτερη δεσμευμένη ροπή. Για τον λόγο αυτό παίρνουμε την ευκαιρία να δείξουμε το πώς συμπεριφέρονται οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας, για πιο περίπλοκες κατανομές αποζημιώσεων, σε κάθε αλλαγή του περιθωρίου ασφαλείας θ . Επειδή όμως οι τύποι των ροπών έχουν πολλούς όρους δεν είναι δόκιμο να εξετασθούν εδώ, καθώς θα επεκταθεί πάρα πολύ το κεφάλαιο και θα είναι κουραστικό για τους αναγνώστες. Ούτως ή άλλως, δίνοντας αναλυτικά και γραφικά τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας για τις δύο κατανομές που αναφέραμε, είναι αρκετά έτσι ώστε να οδηγηθούμε σε κάποια ουσιαστικά συμπεράσματα.

Επίσης πρέπει να επισημάνουμε εδώ, ότι σκοπός μας στην επιλογή των θ είναι να πάρουμε τρεις τιμές, μία μικρή, μία μεσαία και μία μεγάλη τιμή έτσι ώστε να έχουμε μία γενική άποψη για το τι συμβαίνει σε κάθε σημαντική αλλαγή στην τιμή του θ . Οι τιμές του θ που διαλέγουμε, έχουν επιλεγεί τυχαία και κοιτάμε περισσότερο να δούμε τι συμβαίνει μόνο στα παραδείγματα που παίρνουμε στη συνέχεια. Για αυτό τον λόγο, όπως θα δούμε και στη συνέχεια παίρνουμε κάποιες μεγάλες τιμές του θ , οι οποίες στην πραγματικότητα⁷ δεν υφίστανται.

Εκτός όμως από τις δύο κεντρικές ροπές του χρόνου χρεοκοπίας, μπορούμε να υπολογίσουμε και την μεταβλητότητα (τυπική απόκλιση) που υπάρχει στο χρόνο χρεοκοπίας, δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία, δηλαδή στην τ.μ $T_c = T|T < \infty$, καθώς και τον συντελεστή ασυμμετρίας και κύρτωσης που υπάρχει, υπολογίζοντας βέβαια πρώτα τις τρίτες και τέταρτες ροπές του χρόνου χρεοκοπίας. Εδώ θα ασχοληθούμε μόνο με την μεταβλητότητα που υπάρχει όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία μείξη τριών εκθετικών κατανομών και μία Γάμμα κατανομή με παραμέτρους $\alpha_i = 3$, $\beta_i = 3$, για να δείξουμε περισσότερο το πώς συμπεριφέρεται η μεταβλητότητα του χρόνου χρεοκοπίας για διαφορετικές κατανομές αποζημιώσεων και για διάφορες τιμές του θ . Όμως μερικές φορές, μέσω της τυπικής απόκλισης δεν μπορούμε να βγάλουμε κάποια ασφαλή συμπεράσματα. Για αυτό τον λόγο παίρνουμε το συντελεστή μεταβλητότητας (*coefficient of variation*), ο οποίος γενικά εκφράζει τη σχετική διασπορά των τιμών μίας μεταβλητής από τον μέσο όρο της μεταβλητής και ισούται με το πηλίκο της τυπικής απόκλισης με την μέση τιμή που έχει μία μεταβλητή.

⁷Είχαμε αναφέρει και στο πρώτο κεφάλαιο ότι οι ασφαλιστικές εταιρίες διαλέγουν να έχουν περιθώριο κέρδους κάτω από 1, $\theta \in (0, 1)$, καθώς θέλουν το ασφαλιστικό προϊόν που πουλάνε να είναι ανταγωνιστικό στην αγορά.

Τέλος, καλό είναι να υπολογίσουμε τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας για κατανομές αποζημιώσεων που έχουν την ίδια πρώτη ροπή, καθώς και τις ίδιες τιμές των παραμέτρων c , λ και αντίστοιχα του θ , για να δούμε πως συμπεριφέρονται οι ροπές όταν αλλάζει μόνο η κατανομή των αποζημιώσεων ή μόνο οι παράμετροι κάποιας ίδια κατανομής. Κάτι τέτοιο εδώ γίνεται για τις δύο κατανομές Γάμμα που παίρνουμε, οι οποίες έχουν τη ίδια μέση τιμή, $p_1 = 1$, καθώς και τις ίδιες τιμές του περιθωρίου ασφαλείας, $\theta = 0.5$, $\theta = 0.1$ και $\theta = 1.5$.

3.3 Οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας για μείξη τριών εκθετικών κατανομών

Σε συνέχεια του Παραδείγματος 2.2.1, όπου η κατανομή των αποζημιώσεων είναι μία μείξη τριών εκθετικών κατανομών με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{3} 2 e^{-2x} + \frac{1}{3} 4 e^{-4x} + \frac{1}{3} 6 e^{-6x},$$

θέλουμε να υπολογίσουμε τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας, όπως αυτές δόθηκαν στην Ενότητα 3.1. Στη συνέχεια παίρνουμε τρεις διαφορετικές τιμές του θ , έτσι ώστε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για την μονοτονία των μη-δεσμευμένων ροπών του χρόνου χρεοκοπίας, να δούμε για ποιο αρχικό αποθεματικό παρουσιάζει η συνάρτηση μέγιστο, καθώς και για ποιες τιμές του θ έχουμε μετακίνηση του μέγιστου σημείου. Επίσης μας ενδιαφέρει να ελέγξουμε πόσο γρήγορα φθίνουν στο μηδέν καθώς και να δούμε γραφικά τις τιμές του αναμενόμενου χρόνου χρεοκοπίας $\forall u \geq 0$.

Αντίθετα, από την πρώτη δεσμευμένη ροπή μπορούμε να διακρίνουμε μετά από πόσες χρονικές μονάδες, κατά μέσο όρο, επέρχεται χρεοκοπία, δοθέντος ότι κάποια χρονική στιγμή θα συμβεί χρεοκοπία. Η δεύτερη δεσμευμένη ροπή χρησιμοποιείται στο να υπολογίσουμε την μεταβλητότητα των ροπών, για κάθε τιμή του u , μέγεθος το οποίο μας βοηθάει να δούμε τι τυπική απόκλιση υπάρχει στο χρόνο που περιμένουμε μέχρι να επέλθει χρεοκοπία.

Επίσης πρέπει να αναφερθεί ότι για όλες τις παρακάτω πράξεις, αποτελέσματα και γραφικές παραστάσεις, έχει χρησιμοποιηθεί το πρόγραμμα *Mathematica*.

Στην αρχή υποθέτουμε ότι $c = 1$ και $\lambda = 2$. Επομένως προκύπτει ότι το θ είναι ίδιο με αυτό που είχαμε και στο Παράδειγμα 2.2.1, δηλαδή

$$\theta = \frac{7}{11}.$$

Για την πρώτη μη-δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας, χρησιμοποιώντας την πιθανότητα χρεοκοπίας που έχει δοθεί στο δεύτερο κεφάλαιο από τη σχέση (2.12), στη σχέση (3.14), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \psi_1(u) = & e^{-10u} [e^{4.41497u} (-0.0292302 + 0.000710558u) + e^{6.5553u} (-0.081205 + 0.00491016u) \\ & + e^{9.02974u} (0.693768 + 0.780094u)] \end{aligned}$$

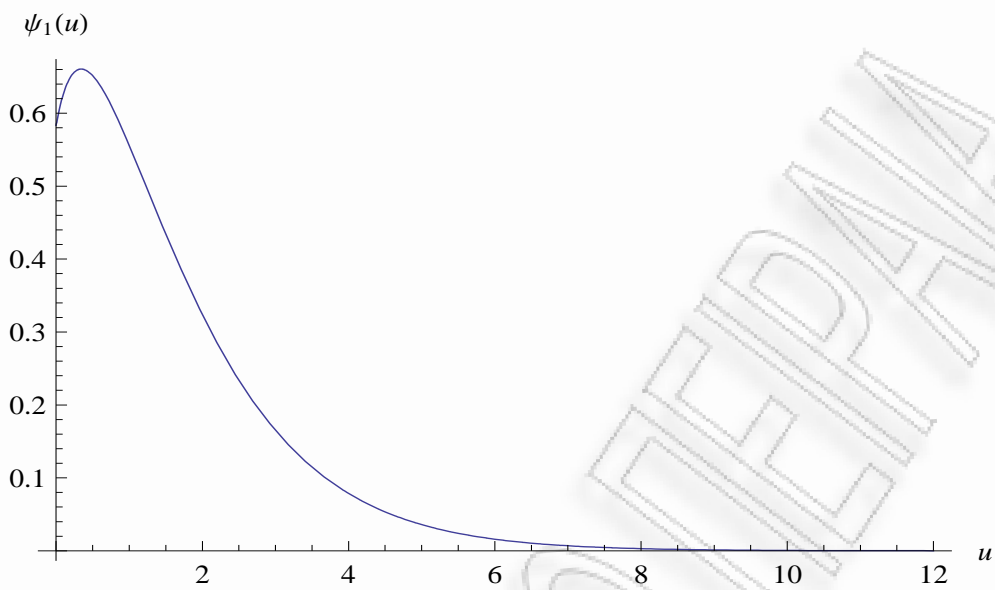
Παρατηρούμε ότι η $\psi_1(u)$ έχει τρεις εκθετικούς όρους πολλαπλασιασμένους με ισάριθμα πολυώνυμα πρώτου βαθμού, όσο δηλαδή είναι και ο βαθμός της ροπής που υπολογίσαμε.

Η πρώτη δεσμευμένη ροπή, $\psi_1(u)/\psi(u)$, σύμφωνα με τη σχέση (3.13) και μετά από πράξεις στο *Mathematica*, ισούται με:

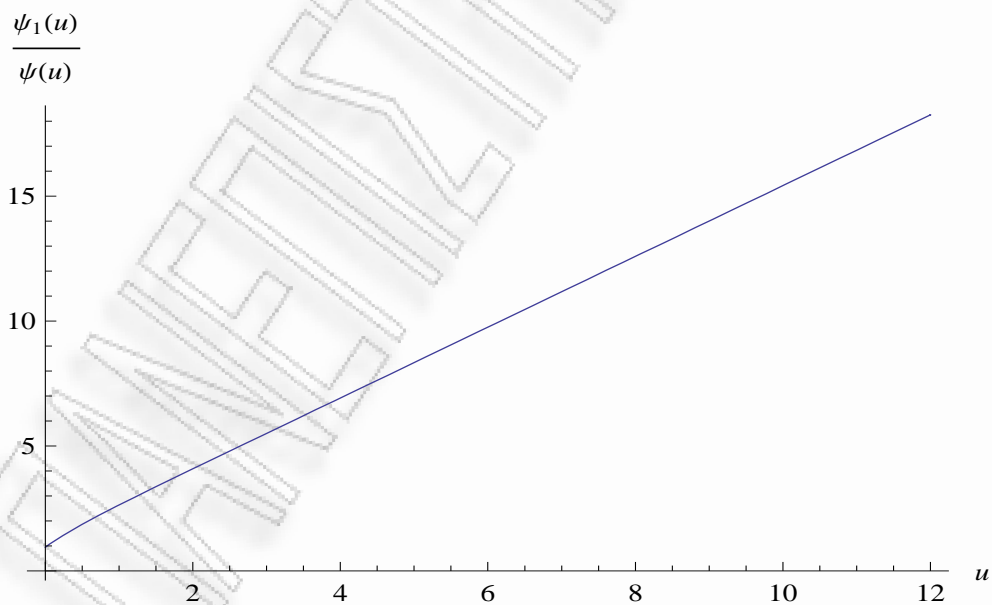
$$\begin{aligned} & [e^{4.41497u}(12.8591 - 0.312594u) + e^{6.5553u}(35.7243 - 2.16011u) \\ & + e^{9.02974u}(-305.208 - 343.184u)] \times (-7.31296e^{-4.41497u} - 19.2239e^{-6.5553u} \\ & - 242.308e^{-9.02974u}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Οι γραφικές παραστάσεις της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας και της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, δίνονται στα Σχήματα 3.1 και 3.2 αντίστοιχα.

Για να βρούμε το σημείο που μία συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο, πρέπει να παραγωγίσουμε τη συγκεκριμένη συνάρτηση και στη συνέχεια να θέσουμε την παράγωγο ίση με μηδέν. Έτσι εδώ παραγωγίζοντας τις μη-δεσμευμένες ροπές, μπορούμε να βρούμε τα σημεία στα οποία παρουσιάζουν μέγιστο. Βέβαια αν μία συνάρτηση είναι μονότονη και στη συγκεκριμένη περίπτωση που μελετάμε φθίνουσα, τότε η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο μηδέν.



Σχήμα 3.1: Γραφική παράσταση της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = \frac{7}{11}$.



Σχήμα 3.2: Γραφική παράσταση της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = \frac{7}{11}$.

Στο Σχήμα 3.1 παρατηρούμε ότι η $\psi_1(u)$ δεν είναι μονότονη για $u \geq 0$, αλλά είναι αύξουσα μέχρι το σημείο $u = 0.343055$, όπου εκεί παρουσιάζει μέγιστο, και φθίνουσα από εκεί και πέρα. Το μέγιστο σημείο της $\psi_1(u)$, έτσι όπως φαίνεται και από το διάγραμμα, είναι το

$$\psi_1(0.343055) = 0.660532$$

Επίσης παρατηρούμε ότι για $u > 8$ η πρώτη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας παίρνει σχεδόν μηδενικές τιμές. Όσο μεγαλύτερες τιμές παίρνει ο αναμενόμενος χρόνος χρεοκοπίας για κάθε τιμή του u , τόσο πιο πολύ αργεί να επέλθει η χρεοκοπία. Δηλαδή μία ασφαλιστική εταιρεία θέλει να έχει στην κατοχή της ένα χαρτοφυλάκιο με όσο το δυνατόν μεγαλύτερο αναμενόμενο χρόνο χρεοκοπίας. Για να δούμε αν οι τιμές που παίρνει στη συγκεκριμένη περίπτωση η $\psi_1(u)$ είναι ικανοποιητικές, θα πρέπει να τις συγκρίνουμε με τις αντίστοιχες τιμές της $\psi_1(u)$ που υπολογίζονται για τις υπόλοιπες τιμές του θ .

Στο Σχήμα 3.2 διακρίνουμε ότι η πρώτη δεσμευμένη ροπή είναι μία αύξουσα συνάρτηση ως προς u . Αυτό επιβεβαιώνεται και μέσω του *Mathematica*, όπου παίρνουμε ότι η πρώτη παράγωγος της $\psi_1(u)/\psi(u)$ παίρνει θετικές τιμές $\forall u \geq 0$. Αυτό σημαίνει ότι όσο πιο μεγάλο είναι το αρχικό αποθεματικό τόσο πιο μεγάλος είναι και ο αναμενόμενος χρόνος χρεοκοπίας, δοθέντος ότι κάποια στιγμή συμβαίνει χρεοκοπία. Για παράδειγμα, γνωρίζοντας ότι κάποια στιγμή θα έρθει χρεοκοπία, αν $u = 10$ τότε πρέπει να περιμένουμε, κατά μέσο όρο, 15.4228 χρονικές μονάδες μέχρι να επέλθει η χρεοκοπία.

Για τη δεύτερη μη-δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας, παίρνουμε τον αναδρομικό τύπο (3.15) για $k = 2$ και αντικαθιστώντας στον τύπο την $\psi_1(u)$ που βρήκαμε παραπάνω, προκύπτει

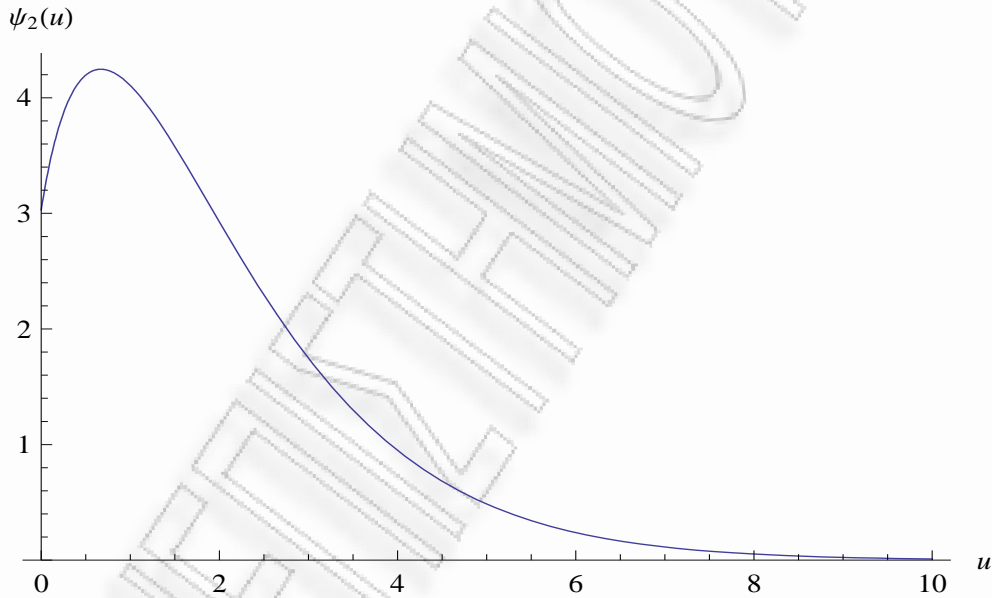
$$\begin{aligned} \psi_2(u) = & e^{-10u} [0.0000303729 e^{4.41497u} (-117.346 + u) (39.7982 + u) \\ & + 0.000551735 e^{6.5553u} (-45.8261 + u) (16.2042 + u) \\ & + 1.10486 e^{9.02974u} (0.656005 + u) (4.94232 + u)] \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η $\psi_2(u)$ έχει τρεις εκθετικούς όρους πολλαπλασιασμένους με ισάριθμα πολυώνυμα δευτέρου βαθμού, όσο δηλαδή είναι και ο βαθμός της ροπής που υπολογίσαμε.

Αντίστοιχα η δεύτερη δεσμευμένη ροπή, $\psi_2(u)/\psi(u)$, δίνεται από τη σχέση (3.16) και μετά από πράξεις στο *Mathematica*, βρίσκουμε ότι ισούται με:

$$\begin{aligned}
& [-486.058 e^{19.0297 u} (0.656005 + u) (4.94232 + u) \\
& - 0.242723 e^{16.5553 u} (-45.8261 + u) (16.2042 + u) \\
& - 0.0133619 e^{14.415 u} (-117.346 + u) (39.7982 + u)] \\
& \times (-7.31296 e^{-14.415 u} - 19.2239 e^{-16.5553 u} - 242.308 e^{-19.0297 u})
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Οι γραφικές παραστάσεις της δεύτερης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας και της δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, δίνονται στα Σχήματα 3.3 και 3.4 αντίστοιχα.



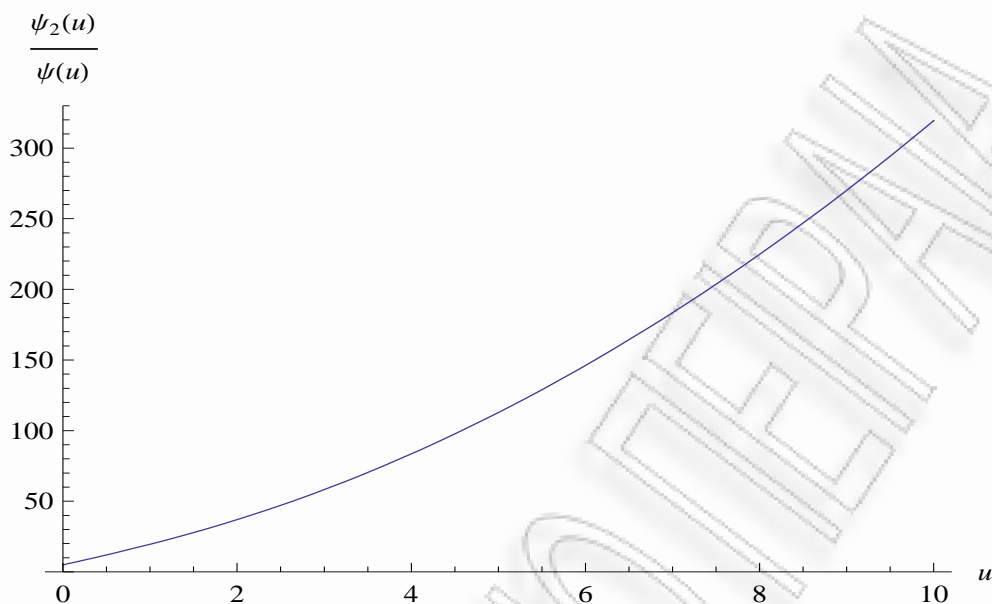
Σχήμα 3.3: Γραφική παράσταση της δεύτερης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = \frac{7}{11}$.

Στο Σχήμα 3.3 παρατηρούμε ότι η δεύτερη μη-δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας είναι αύξουσα μέχρι το σημείο $u = 0.669555$, όπου παρουσιάζεται το μέγιστο, και φθίνουσα από εκεί και πέρα. Το μέγιστο σημείο της $\psi_2(u)$ είναι το

$$\psi_2(0.669555) = 4.24689$$

Επίσης παρατηρούμε ότι η δεύτερη μη-δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας παίρνει μεγαλύτερες τιμές $\forall u \geq 0$ από ότι η πρώτη μη-δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας,

καθώς και ότι η $\psi_2(u)$ φθίνει πιο αργά στο μηδέν από ότι η $\psi_1(u)$.



Σχήμα 3.4: Γραφική παράσταση της δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = \frac{7}{11}$.

Στο Σχήμα 3.4 βλέπουμε ότι η δεύτερη δεσμευμένη ροπή είναι μία αύξουσα και κυρτή συνάρτηση. Αυτό προκύπτει και από το *Mathematica*, καθώς παίρνουμε ότι η πρώτη και δεύτερη παράγωγος της $\psi_2(u)/\psi(u)$ είναι θετικές συναρτήσεις για u στο διάστημα $[0, \infty)$. Οι συγκεκριμένες παράγωγοι δεν δίνονται αναλυτικά διότι είναι τύποι με πολλούς όρους και δεν θα ήταν εύκολο να παρουσιάσουμε όλες τις παραγώγους των ροπών για τόσες πολλές περιπτώσεις που εξετάζουμε. Επίσης παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερο είναι το αρχικό αποθεματικό, τόσο με μεγαλύτερο ρυθμό αυξάνει και η τιμή της δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας. Επιπλέον βλέπουμε ότι η δεύτερη δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας παίρνει μεγαλύτερες τιμές από ότι η πρώτη δεσμευμένη ροπή, για κάθε θετική τιμή του αρχικού αποθεματικού u . Αυτό είναι σαφές καθώς πάντα η δεύτερη ροπή μίας κανονικής τ.μ, όπως εδώ είναι η τ.μ T_c , πρέπει να παίρνει μεγαλύτερες τιμές, για κάθε τιμή της παραμέτρου, από το τετράγωνο της πρώτης ροπής της ίδιας τ.μ, έτσι ώστε η διακύμανσή της να είναι μη-αρνητική για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου. Επομένως στη συγκεκριμένη περίπτωση θα πρέπει να ισχύει ότι

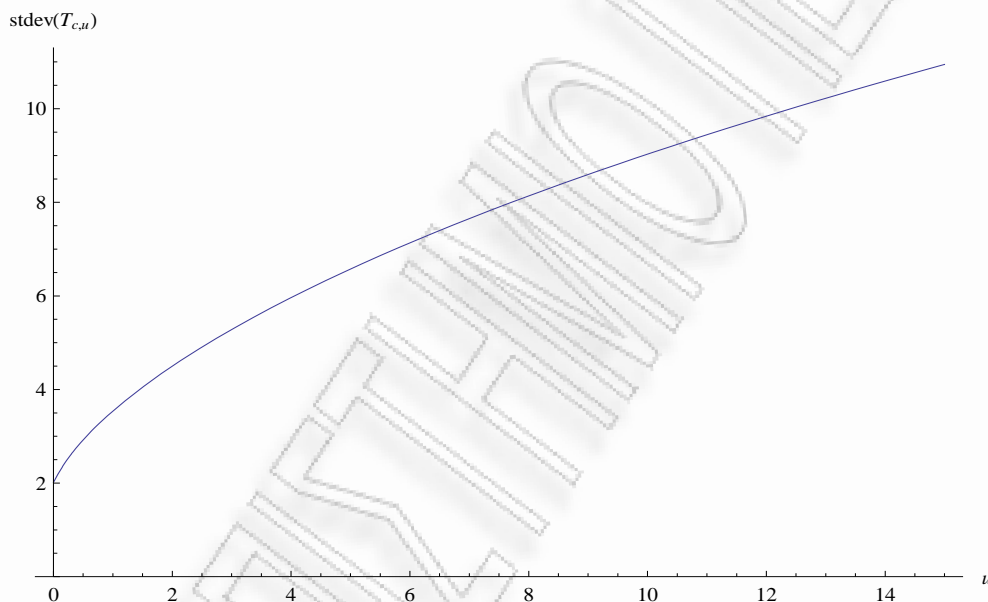
$$\frac{\psi_2(u)}{\psi(u)} \geq \left(\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)} \right)^2,$$

για κάθε τιμή του αρχικού αποθεματικού u .

Εφόσον υπολογίσαμε τις δύο πρώτες δεσμευμένες ροπές του χρόνου χρεοκοπίας, μπορούμε να βρούμε την μεταβλητότητα του χρόνου χρεοκοπίας, έχοντας εκ των προτέρων την πληροφορία ότι κάποια στιγμή θα επέλθει η χρεοκοπία, δηλαδή την μεταβλητότητα της τ.μ T_c . Για να υπολογίσουμε την τυπική απόκλιση (*standard deviation*), κατασκευάζουμε την εξής συνάρτηση⁸

$$stdev(T_{c,u}) = \sqrt{\frac{\psi_2(u)}{\psi(u)} - \left(\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}\right)^2} \quad (3.20)$$

Δημιουργώντας αυτή τη νέα συνάρτηση στο *Mathematica*, παίρνουμε ότι η τυπική απόκλιση του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας, για $\theta = 7/11$, δίνεται από το παρακάτω διάγραμμα 3.5.



Σχήμα 3.5: Γραφική παράσταση της τυπικής απόκλισης του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας T_c , για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 7/11$.

Εκ πρώτης όψεως, δεν μπορούμε να βγάλουμε κάποια ασφαλή συμπεράσματα για τις τιμές που παίρνει η τυπική απόκλιση της τ.μ T_c , καθώς δεν μπορούμε να πούμε εάν αυτό το επίπεδο των τιμών είναι ικανοποιητικό ή όχι. Για αυτό τον λόγο χρησιμοποιούμε το συντελεστή μεταβλητότητας ο οποίος στη συγκεκριμένη περίπτωση, εκφράζει την μεταβλητότητα που υπάρχει στο χρόνο χρεοκοπίας ανά τις χρονικές μονάδες που περιμένουμε κατά μέσο όρο μέχρι να επέλθει η χρεοκοπία, δοθέντος ότι κάποια χρονική στιγμή συμβαίνει χρεοκοπία. Ο συντελεστής μεταβλητότητας εδώ ισούται με

⁸Η μεταβλητότητα της τ.μ T_c εξαρτάται από τις τιμές που παίρνει το αρχικό αποθεματικό και για αυτό τον λόγο βάζουμε το u ως υποδείκτη στην τ.μ T_c .

$$CV(T_{c,u}) = \frac{\text{stdev}(T_{c,u})}{\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}}, \quad (3.21)$$

και αφού υπολογίσουμε για κάθε τιμή του θ το συντελεστή μεταβλητότητας που δίνεται από τη παραπάνω σχέση (3.21), κατασκευάζουμε σε ένα κοινό διάγραμμα τις γραφικές τους παραστάσεις. Αυτό μας βοηθάει πολύ, καθώς βλέποντας γραφικά το συντελεστή μεταβλητότητας που υπάρχει για κάθε τιμή του θ , μπορούμε να πούμε σε ποια περίπτωση ο δεσμευμένος χρόνος χρεοκοπίας έχει μεγαλύτερη σχετική διασπορά.

Στη συνέχεια σκοπός μας είναι να αλλάξουμε τις τιμές του περιθωρίου ασφαλείας θ και να δούμε σε αυτή τη περίπτωση πώς συμπεριφέρονται οι γραφικές παραστάσεις των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας. Έτσι αν πάρουμε $c = 0.7$ και ίδιο λ με πριν, δηλαδή $\lambda = 2$, προκύπτει από τη σχέση (1.3) ότι

$$\theta = 0.145455.$$

Αφού άλλαξε η τιμή του θ θα έχουμε και διαφορετική πιθανότητα χρεοκοπίας καθώς και διαφορετικές ροπές για τον χρόνο χρεοκοπίας από ότι είχαμε στην περίπτωση που $\theta = 7/11$. Η εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας γίνεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως έγινε και στα παραδείγματα του δευτέρου κεφαλαίου. Έτσι προκύπτει ότι

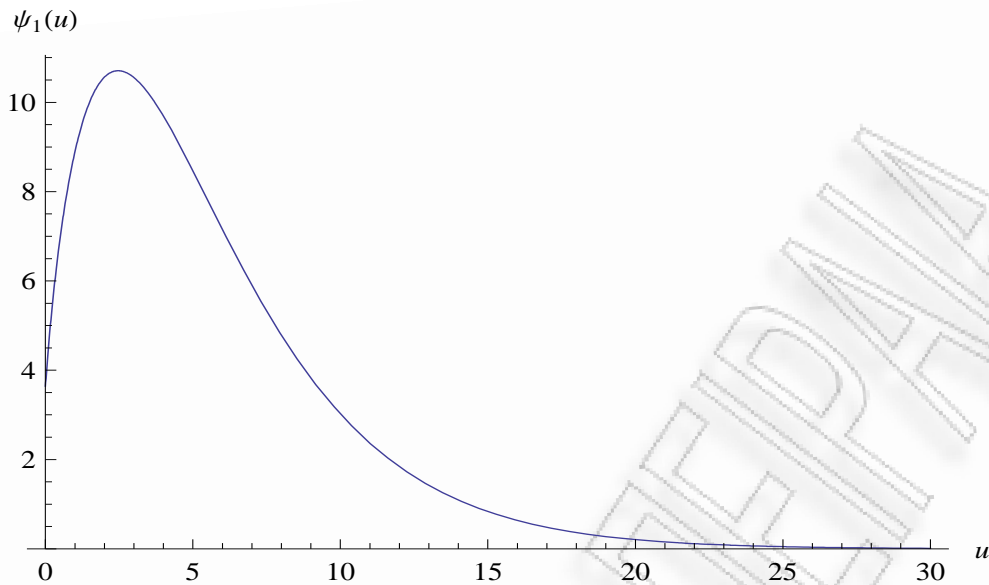
$$\psi(u) = 0.0053461 e^{-5.50053 u} + 0.0143625 e^{-3.30728 u} + 0.853307 e^{-0.335055 u}$$

Παρακάτω βρίσκουμε τις πρώτες και δεύτερες ροπές του χρόνου χρεοκοπίας έτσι όπως κάναμε και προηγουμένως.

Για την πρώτη μη-δεμευμένη ροπή, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \psi_1(u) = & e^{-9.14286 u} (e^{3.64233 u} (-0.163216 + 0.000321534 u) + e^{5.83558 u} (-0.455493 + 0.00232065 u)) \\ & + e^{8.8078 u} (4.26454 + 8.1915 u) \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$ παρουσιάζεται στο παρακάτω διάγραμμα 3.6.



Σχήμα 3.6: Γραφική παράσταση της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 0.145455$.

Από το Σχήμα 3.6, βλέπουμε ότι η πρώτη μη-δεσμευμένη ροπή είναι μία αύξουσα συνάρτηση έως το σημείο $u = 2.46434$, όπου παρουσιάζεται το μέγιστο, και φθίνουσα πέρα από αυτό το σημείο. Η μέγιστη τιμή της $\psi_1(u)$ είναι η

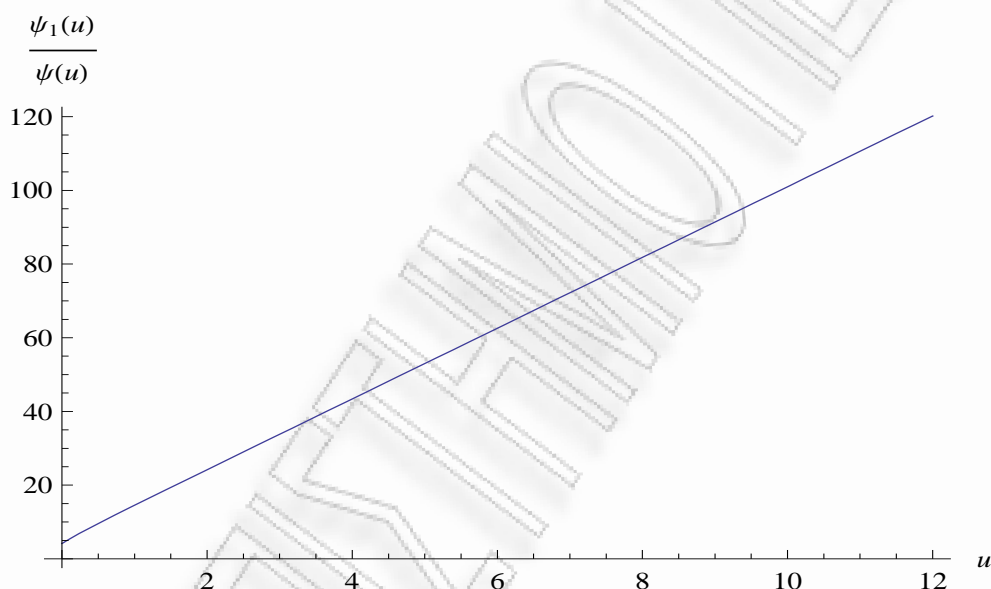
$$\psi_1(2.46434) = 10.7079$$

Επίσης παρατηρούμε ότι σε αυτό το παράδειγμα που έχουμε υποθέσει μικρότερη τιμή για το θ , η $\psi_1(u)$ παίρνει πολύ μεγαλύτερες τιμές $\forall u \geq 0$, από ότι έπαιρνε στην περίπτωση που είχαμε $\theta = 7/11$. Αυτό δηλώνει ότι για μικρότερες τιμές του θ , ο αναμενόμενος χρόνος έως τη χρεοκοπία είναι μεγαλύτερος, για κάθε τιμή του αρχικού αποθεματικού u , από ότι είναι για μεγαλύτερες τιμές του θ . Κάτι τέτοιο θα επιβεβαιωθεί και στη συνέχεια που θα πάρουμε μία αρκετά μεγάλη τιμή για το περιθώριο ασφαλείας θ . Επιπλέον, η $\psi_1(u)$ φθίνει πάρα πολύ αργά στο μηδέν και συγκεκριμένα παίρνει σχεδόν μηδενικές τιμές για $u > 25$. Πρέπει να αναφέρουμε ότι όσο πιο αργά φθίνει στο μηδέν η $\psi_1(u)$ και η $\psi_2(u)$ αντίστοιχα, τόσο πιο αργά, κατά μέσο όρο, μπορεί να επέλθει η χρεοκοπία. Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι στην περίπτωση που $\theta = 0.145455$, φαίνεται ξεκάθαρα από το διάγραμμα ότι ο αναμενόμενος χρόνος έως τη χρεοκοπία είναι αρκετά μεγαλύτερος από ότι στη περίπτωση που ίσχυε ότι $\theta = 7/11$. Κάτι τέτοιο όμως φαίνεται να είναι ασύμφορο με την πραγματικότητα, γιατί λογικά θα περιμέναμε ο αναμενόμενος χρόνος έως τη χρεοκοπία να παίρνει μεγαλύτερες τιμές όσο μεγαλύτερο είναι το περιθώριο κέρδους, θ , για την κάθε ασφαλιστική εταιρεία. Για να μπορούμε να πούμε κάποια πράγματα παραπάνω, θα πρέπει να υπολογίσουμε και τις δεσμευμένες ροπές του χρόνου χρεοκοπίας.

Αντίστοιχα η πρώτη δεσμευμένη ροπή $\psi_1(u)/\psi(u)$, μετά από πράξεις στο *Mathematica*, παίρνουμε ότι ισούται με

$$\begin{aligned} & [e^{3.64233u} (-0.163216 + 0.000321534u) + e^{5.83558u} (-0.455493 + 0.00232065u) \\ & + e^{8.8078u} (4.26454 + 8.1915u)] \times (0.0053461 e^{-3.64233u} + 0.0143625 e^{-5.83558u} \\ & + 0.853307 e^{-8.8078u}) \end{aligned}$$

Η πρώτη δεσμευμένη ροπή παρουσιάζεται γραφικά στο επόμενο διάγραμμα 3.7.



Σχήμα 3.7: Γραφική παράσταση της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείζη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 0.145455$.

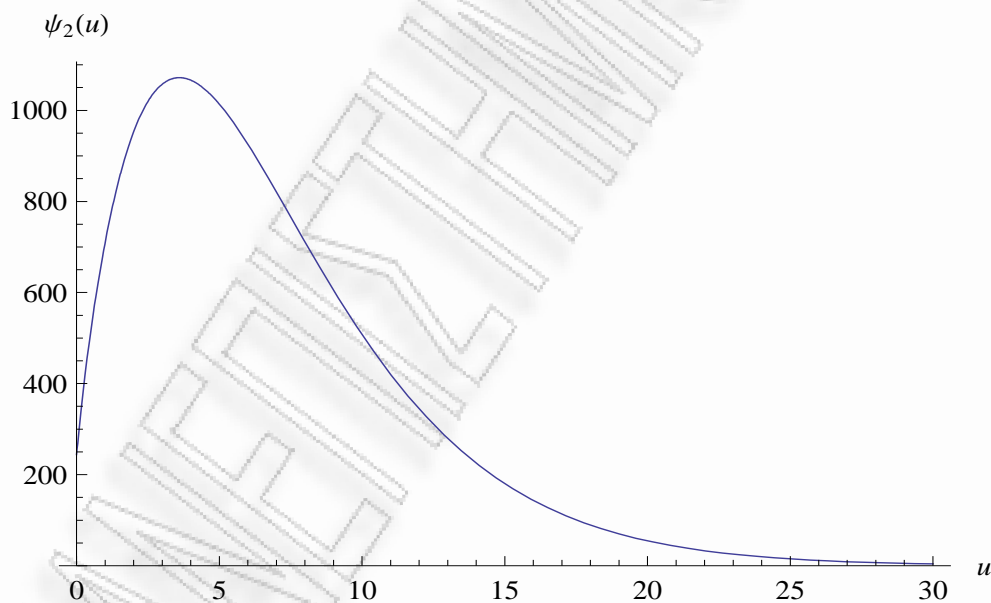
Όπως είχαμε δει και στο Σχήμα 3.2, έτσι και από το Σχήμα 3.7 παίρνουμε ότι η $\psi_1(u)/\psi(u)$ είναι μία αύξουσα συνάρτηση ως προς u , καθώς η πρώτη παράγωγος είναι θετική $\forall u \geq 0$. Επίσης όσο μεγαλύτερο είναι το αρχικό αποθεματικό u , τόσο περισσότερες χρονικές μονάδες χρειάζονται μέχρι να επέλθει χρεοκοπία, δοθέντος ότι κάποια στιγμή συμβαίνει χρεοκοπία. Για παράδειγμα, αν $u = 10$ και ξέρουμε από πριν ότι κάποια στιγμή θα έρθει χρεοκοπία, τότε ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι την χρεοκοπία ισούται με 100.995 χρονικές μονάδες. Επομένως για το ίδιο αρχικό αποθεματικό $u = 10$, βλέπουμε ότι ο αναμενόμενος χρόνος χρεοκοπίας, δοθέντος ότι θα επέλθει χρεοκοπία, είναι περίπου 6.5 φορές μεγαλύτερος από αυτόν που είχαμε στην περίπτωση που $\theta = 7/11$. Οπότε και εδώ καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα που βγάλαμε παραπάνω. Για να ελέγξουμε όμως αν το συμπέρασμα που

βγάλαμε είναι σωστό, θα πρέπει να συγκρίνουμε την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβλητότητας του χρόνου χρεοκοπίας, που έχουμε στην κάθε περίπτωση.

Για να υπολογίσουμε τώρα την δεύτερη μη-δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας, μας βολεύει περισσότερο να χρησιμοποιήσουμε την σχέση (3.17). Επομένως προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \psi_2(u) = & e^{-18.2857u} [e^{14.9784u} (-28.8773 - 0.101681u) + e^{12.7852u} (-10.4813 - 0.0158326u) \\ & + 0.0000193382 e^{12.7852u} (-152.368 + u) (-40.3812 + u) + 0.000374966 e^{14.9784u} \\ & \times (-94.3762 + u) (-24.5407 + u) + 78.636 e^{17.9507u} (-0.092378 + u) (0.131207 + u) \\ & + e^{17.9507u} (283.693 + 629.99u)] \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση της $\psi_2(u)$ απεικονίζεται στο παρακάτω Σχήμα 3.8.



Σχήμα 3.8: Γραφική παράσταση της δεύτερης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 0.145455$.

Από το Σχήμα 3.8 προκύπτει ότι η $\psi_2(u)$ παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $u = 3.59777$, δηλαδή είναι αύξουσα συνάρτηση μέχρι εκείνο το σημείο και φθίνουσα από εκεί και πέρα. Η μέγιστη τιμή της $\psi_2(u)$ είναι η

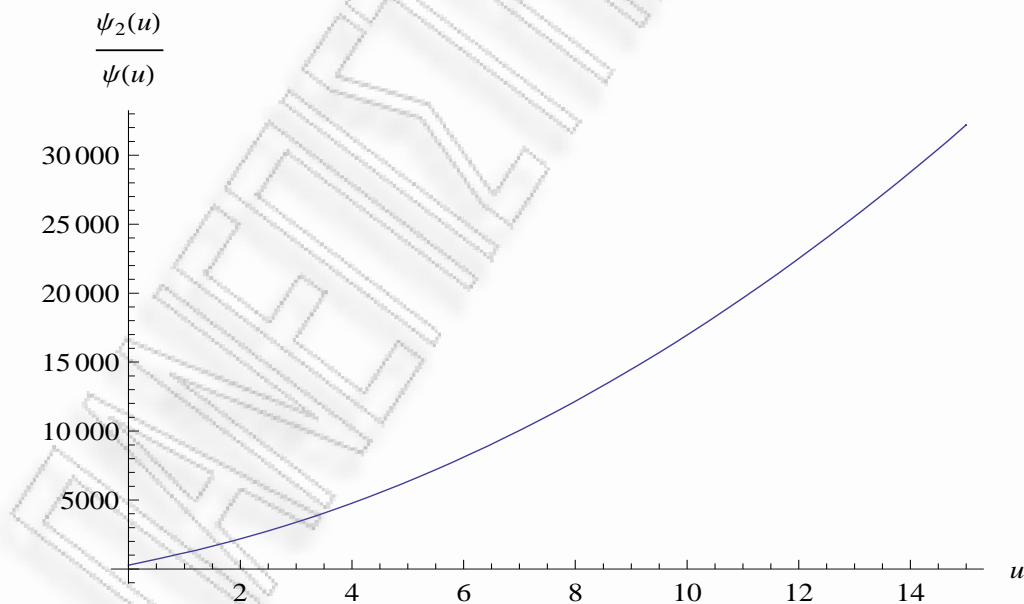
$$\psi_2(3.59777) = 1039.64$$

Όπως και στη πρώτη δεσμευμένη ροπή έτσι και εδώ η $\psi_2(u)$ παίρνει πολύ μεγαλύτερες τιμές για $u \in [0, \infty)$, από ότι έπαιρνε στην περίπτωση που είχαμε $\theta = 7/11$. Ανάλογα, παρατηρούμε ότι φθίνει πάρα πολύ αργά στο μηδέν και παίρνει πρακτικά μηδενικές τιμές για $u > 30$.

Αφού υπολογίσαμε την $\psi_2(u)$, βρίσκουμε μετά από πράξεις ότι η δεύτερη δεσμευμένη ροπή $\psi_2(u)/\psi(u)$ ισούται με

$$\begin{aligned} & [e^{14.9784u} (-28.8773 - 0.101681u) + e^{12.7852u} (-10.4813 - 0.0158326u) \\ & + 0.0000193382 e^{12.7852u} (-152.368 + u) (-40.3812 + u) + 0.000374966 e^{14.9784u} \\ & \times (-94.3762 + u) (-24.5407 + u) + 78.636 e^{17.9507u} (-0.092378 + u) (0.131207 + u) \\ & + e^{17.9507u} (283.693 + 629.99u)] \times (0.0053461 e^{-12.7852u} + 0.0143625 e^{-14.9784u} \\ & + 0.853307 e^{-17.9507u}) \end{aligned}$$

Η δεύτερη δεσμευμένη ροπή απεικονίζεται γραφικά στο διάγραμμα 3.9.

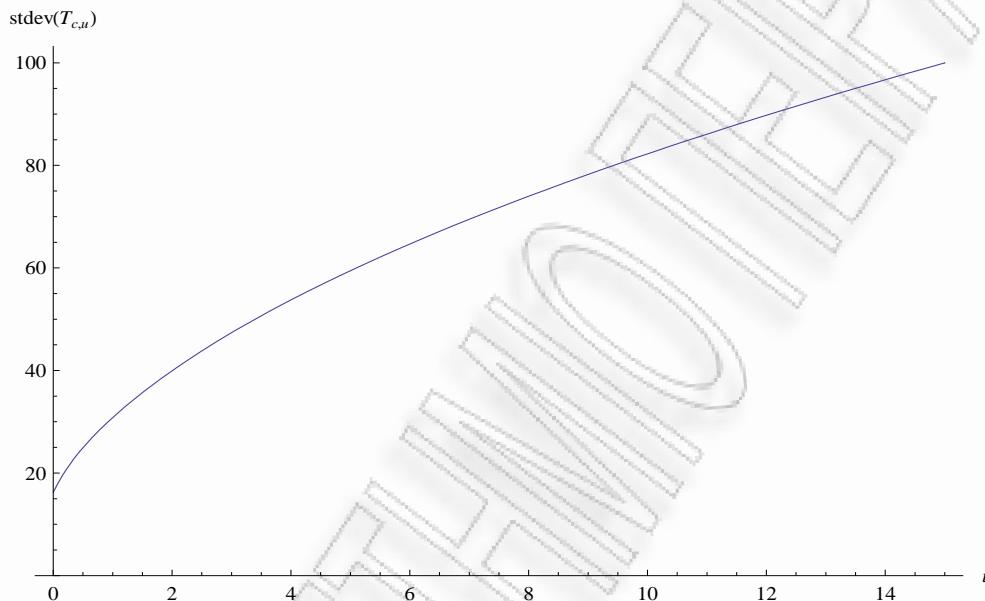


Σχήμα 3.9: Γραφική παράσταση της δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 0.145455$.

Όπως είχαμε δει και στο Σχήμα 3.4, έτσι και από το Σχήμα 3.9 παρατηρούμε ότι η $\psi_2(u)/\psi(u)$

είναι μία αύξουσα και κυρτή συνάρτηση καθώς μέσω του *Mathematica* βρήκαμε ότι η πρώτη και δεύτερη παράγωγος είναι θετικές $\forall u \geq 0$. Ισχύει και εδώ ότι η $\psi_2(u)/\psi(u)$ παίρνει μεγαλύτερες τιμές από ότι η $\psi_1(u)/\psi(u)$ που υπολογίσαμε παραπάνω.

Για να υπολογίσουμε πάλι την μεταβλητότητα του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας, δηλαδή του χρόνου έως τη χρεοκοπία δοθέντος ότι αυτή θα συμβεί, για την περίπτωση που $\theta = 0.145455$, χρησιμοποιούμε τη σχέση (3.20). Έτσι από το αποτέλεσμα παίρνουμε το παρακάτω διάγραμμα 3.10.



Σχήμα 3.10: Γραφική παράσταση της τυπικής απόκλισης του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 0.145455$.

Από το Σχήμα 3.10, μπορούμε να καταλάβουμε ότι για μικρές τιμές του θ , η μεταβλητότητα του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας είναι αρκετά μεγαλύτερη από ότι για μεγαλύτερες τιμές του θ . Επομένως μπορεί για $\theta = 0.145455$ η πιθανότητα χρεοκοπίας να αυξάνεται, αλλά τόσο ο αναμενόμενος χρόνος έως τη χρεοκοπία όσο και η τυπική απόκλιση του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας αυξάνονται, σε σύγκριση με την περίπτωση που $\theta = 7/11$, γεγονός που δηλώνει ότι αν ξέρουμε ότι κάποτε θα συμβεί χρεοκοπία, είμαστε αρκετά σίγουροι ότι αυτή θα αργήσει να επέλθει (βλέπε *Dickson & Hipp* (2001), *Chan & Zhang* (2007)).

Όμως η εύρεση της τυπικής απόκλισης δεν δίνει πάντα ασφαλή συμπεράσματα αφού δεν μπορούμε έτσι εύκολα να συγκρίνουμε τις τιμές που παίρνει η τυπική απόκλιση του χρόνου χρεοκοπίας για κάθε τιμή του θ . Αυτό συμβαίνει εξαιτίας του ότι οι τιμές του αναμενόμενου χρόνου χρεοκοπίας, $\psi_1(u)/\psi(u)$, είναι ανάλογες με αυτές της τυπικής απόκλισης για κάθε τιμή του θ και του u . Δηλαδή για παράδειγμα όταν υποθέσουμε μία μικρή τιμή για το περιθώριο ασφάλειας θ , τότε δεν μπορούμε να συγκρίνουμε το επίπεδο των τιμών της

τυπικής απόκλισης με αυτό για την περίπτωση που έχουμε επιλέξει μία μεγαλύτερη τιμή για το θ , διότι υπάρχει πολύ μεγάλη διαφορά, στις δύο περιπτώσεις, και στο επίπεδο τιμών του αναμενόμενου χρόνου χρεοκοπίας. Για αυτό τον λόγο υπολογίζουμε το συντελεστή μεταβλητότητας του χρόνου χρεοκοπίας, για $\theta = 0.145455$, που δίνεται από τη σχέση (3.21).

Τώρα θέλουμε να δούμε τι γίνεται αν πάρουμε μία μεγάλη τιμή του θ . Αν αλλάξουμε την τιμή της έντασης του ασφαλιστρού παίρνοντας $c = 1.5$ και κρατήσουμε την ίδια τιμή για την ένταση της ανέλιξης *Poisson*, $\lambda = 2$, τότε προκύπτει ότι

$$\theta = 1.45455,$$

και επομένως παίρουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με

$$\psi(u) = 0.0231392 e^{-5.67921 u} + 0.0559842 e^{-3.5938 u} + 0.328284 e^{-1.39366 u}. \quad (3.22)$$

Παίρνοντας πάλι τις σχέσεις που έχουμε δώσει για τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας, για τη πρώτη μη-δεσμευμένη ροπή καταλήγουμε ότι ισούται με

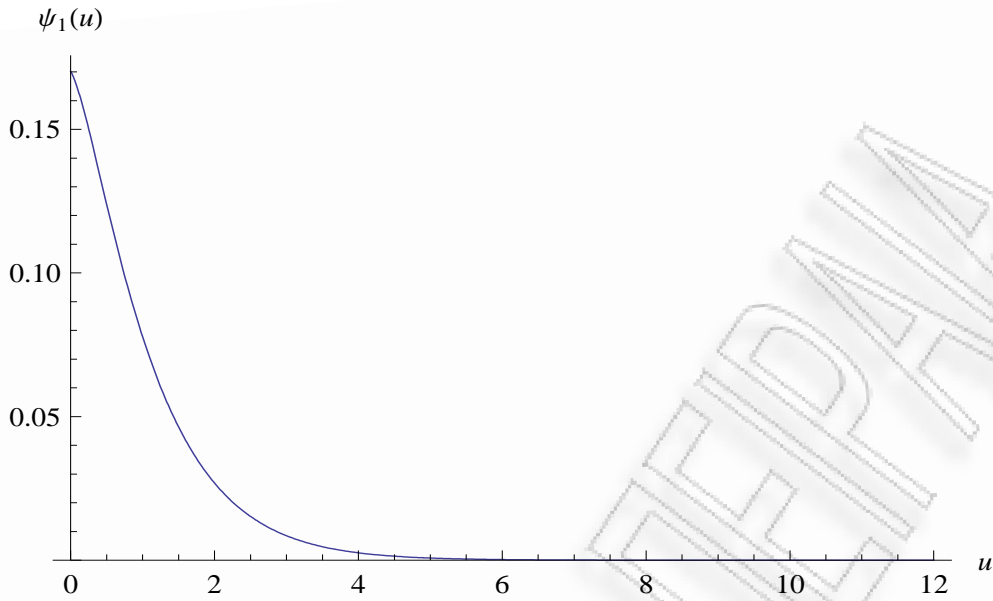
$$\begin{aligned} \psi_1(u) = & e^{-10.6667 u} [e^{4.98746 u} (-0.00744566 + 0.000602351 u) \\ & + e^{7.07287 u} (-0.0159459 + 0.00352601 u) + e^{9.27301 u} (0.19353 + 0.121242 u)] \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$, για $\theta = 1.45455$, παρουσιάζεται στο ακόλουθο διάγραμμα 3.11.

Στο Σχήμα 3.11 παρατηρούμε ότι η $\psi_1(u)$ είναι μία μονότονη συνάρτηση και συγκεκριμένα φθίνουσα για $u \geq 0$. Επομένως ισχύει ότι σε αυτή την περίπτωση το μέγιστο σημείο της συνάρτησης είναι το $u = 0$. Συγκεκριμένα παίρουμε ότι η μέγιστη τιμή στο σημείο μηδέν είναι

$$\psi_1(0) = 0.170139.$$

Επίσης βλέπουμε ότι η $\psi_1(u)$ φθίνει πολύ γρήγορα στο μηδέν και παίρνει μηδενικές τιμές για $u \geq 6$. Επιπλέον οι τιμές που παίρνει είναι αρκετά μικρότερες από αυτές που είχαμε στις προηγούμενες δύο περιπτώσεις, πράγμα που σημαίνει ότι για μεγάλες τιμές του θ , ο αναμενόμενος χρόνος έως τη χρεοκοπία είναι πολύ μικρός. Αυτό θα το δούμε και στη συνέχεια που θα παρουσιάσουμε σε ένα κοινό διάγραμμα την πρώτη μη-δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας που ισχύει σε κάθε τιμή του θ .



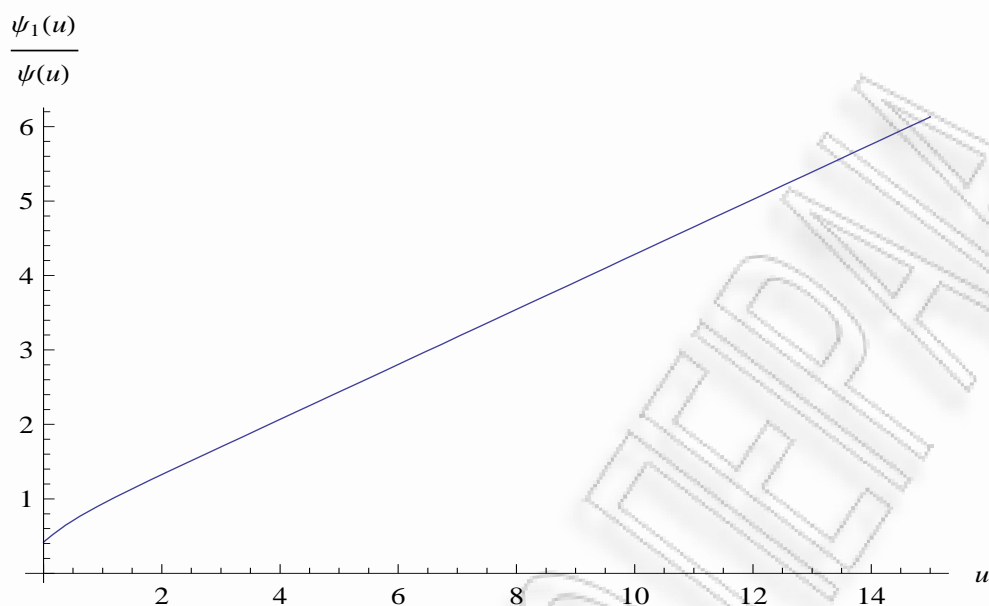
Σχήμα 3.11: Γραφική παράσταση της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.45455$.

Αντίστοιχα, η πρώτη δεσμευμένη ροπή προκύπτει ότι ισούται με

$$\begin{aligned}
 & [e^{4.98746 u} (-0.00744566 + 0.000602351 u) \\
 & + e^{7.07287 u} (-0.0159459 + 0.00352601 u) + e^{9.27301 u} (0.19353 + 0.121242 u)] \quad (3.23) \\
 & \times (0.0231392 e^{-4.98746 u} + 0.0559842 e^{-7.07287 u} + 0.328284 e^{-9.27301 u})
 \end{aligned}$$

Η $\psi_1(u)/\psi(u)$ απεικονίζεται γραφικά στο παρακάτω Σχήμα 3.12.

Από το Σχήμα 3.12 και με τη βοήθεια του *Mathematica*, παίρνουμε ότι η $\psi_1(u)/\psi(u)$ είναι μία αύξουσα συνάρτηση, καθώς η πρώτη της παράγωγος είναι θετική $\forall u \geq 0$. Για να την συγκρίνουμε με τις προηγούμενες, παίρνοντας $u = 10$, από το *Mathematica* προκύπτει ότι χρειάζονται κατά μέσο όρο 4.28272 χρονικές μονάδες μέχρι την έλευση της χρεοκοπίας, γνωρίζοντας από την αρχή ότι κάποια στιγμή συμβαίνει χρεοκοπία. Αυτή η τιμή συνηγορεί σε αυτά που είπαμε παραπάνω, καθώς είναι αρκετά μικρότερη από αυτή που είχαμε στην περίπτωση που $\theta = 7/11$ και πάρα πολύ μικρότερη από αυτή που είχαμε για $\theta = 0.145455$. Αυτά φαίνονται καλύτερα στο Σχήμα 3.17, όπου παρουσιάζονται σε ένα κοινό διάγραμμα οι γραφικές παραστάσεις της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας για τις τρεις τιμές του θ που παίρνουμε.



Σχήμα 3.12: Γραφική παράσταση της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείζη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.45455$.

Χρησιμοποιώντας και πάλι τη σχέση (3.17), παίρνουμε ότι η δεύτερη μη-δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας ισούται με

$$\begin{aligned} \psi_2(u) = & e^{-16.3459 u} \left[e^{10.6667 u} (0.00309265 - 0.000345881 u) + 0.0447769 e^{14.9522 u} (1.03823 + u) \right. \\ & \times (6.7136 + u) + 0.000222076 e^{12.7521 u} (-15.2583 u) (11.2201 + u) \\ & \left. + 0.0000156802 e^{10.6667 u} (-30.259 + u) (33.8734 + u) \right] \end{aligned}$$

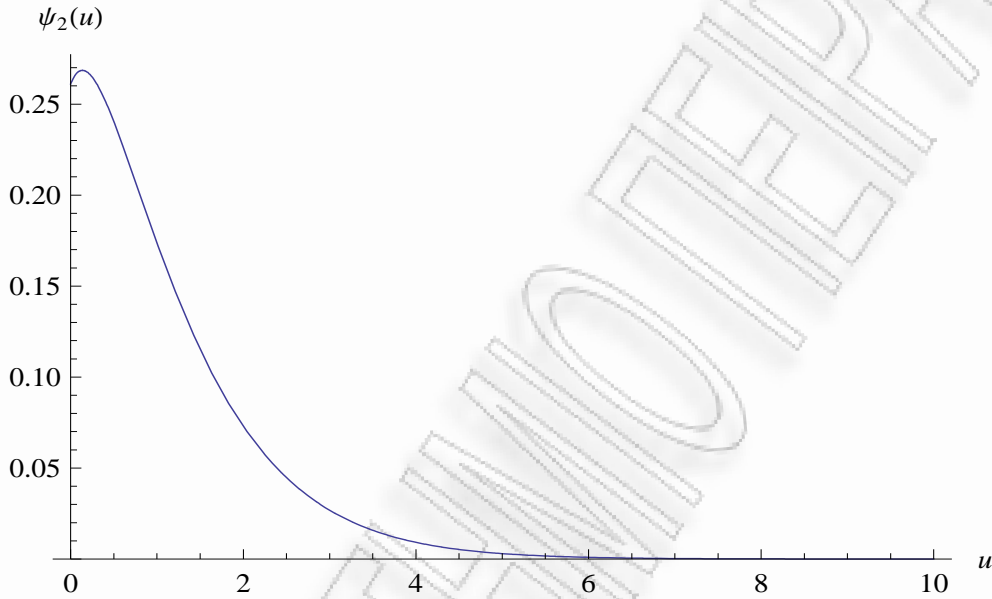
Η γραφική παράσταση της $\psi_2(u)$ παρουσιάζεται στο παρακάτω Σχήμα 3.13.

Από το Σχήμα 3.13 παρατηρούμε ότι η $\psi_2(u)$ είναι μία αύξουσα συνάρτηση μέχρι το σημείο $u = 0.135358$, όπου είναι το σημείο στο οποίο παρατηρείται ολικό μέγιστο, και φθίνουσα για τις υπόλοιπες μεγαλύτερες τιμές του u . Η μέγιστη τιμή της δεύτερης μη-δεσμευμένης ροπής ισούται με

$$\psi_2(0.135358) = 0.268554,$$

και η τιμή του αρχικού αποθεματικού στην οποία η $\psi_2(u)$ παίρνει σχεδόν μηδενική τιμή είναι για $u > 6$. Επίσης σε σχέση με τις προηγούμενες τιμές του θ που δοκιμάσαμε, βλέπουμε ότι η $\psi_2(u)$ παίρνει μικρότερες τιμές από ότι έπαιρνε στις προηγούμενες περιπτώσεις,

καθώς και ότι φθίνει γρηγορότερα στο μηδέν. Εδώ μιλάμε για ολικό μέγιστο καθώς αν εξισώσουμε την πρώτη παράγωγο της $\psi_2(u)$ με το μηδέν, παίρνουμε μόνο μία λύση για $\forall u \in (-\infty, \infty)$ και συγκεκριμένα τη λύση $u = 0.135358$. Επίσης πρέπει να ξεκαθαρίσουμε ότι όταν η μη-δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας δεν είναι μία μονότονη συνάρτηση, τότε παρουσιάζει μοναδικό μέγιστο για θετική τιμή του u ενώ όταν είναι μονότονη για $u \geq 0$ και συγκεκριμένα φθίνουσα, τότε παρουσιάζει μοναδικό μέγιστο σε αρνητική τιμή του u και επομένως για τον θετικό άξονα, ισχύει ότι παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $u = 0$.

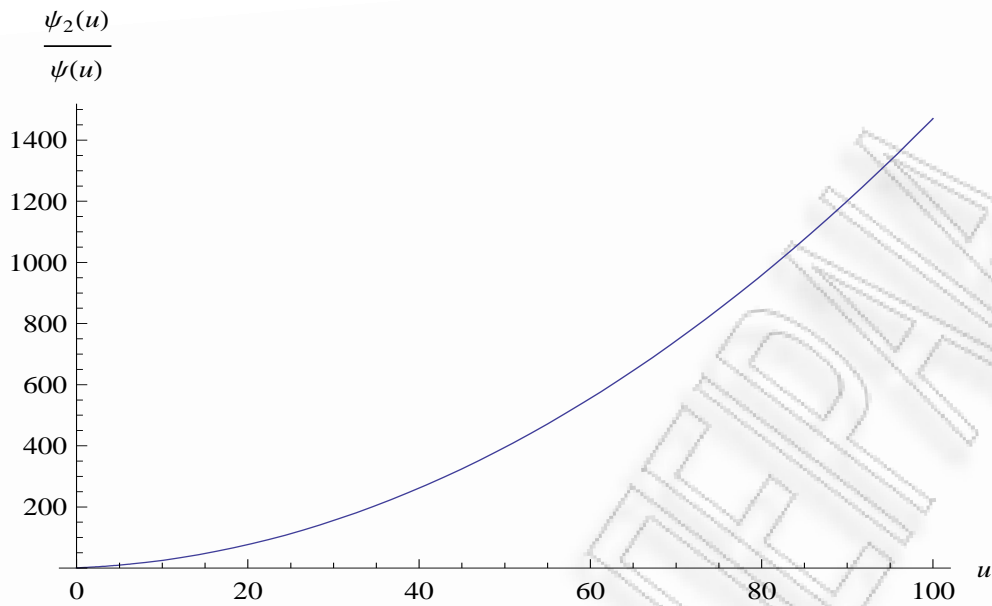


Σχήμα 3.13: Γραφική παράσταση της δεύτερης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.45455$.

Τέλος για τη δεύτερη δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας, $\psi_2(u)/\psi(u)$, καταλήγουμε μετά από πράξεις ότι ισούται με

$$\begin{aligned}
 & [e^{10.6667u} (0.00309265 - 0.000345881u) + 0.0447769 e^{14.9522u} (1.03823 + u) \\
 & \times (6.7136 + u) + 0.000222076 e^{12.7521u} (-15.2583u) (11.2201 + u) \\
 & + 0.0000156802 e^{10.6667u} (-30.259 + u) (33.8734 + u)] \\
 & \times (0.0231392 e^{-10.6667u} + 0.0559842 e^{-12.7521u} + 0.328284 e^{-14.9522u}),
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

και η γραφική της παράσταση παρουσιάζεται στο παρακάτω διάγραμμα 3.14.

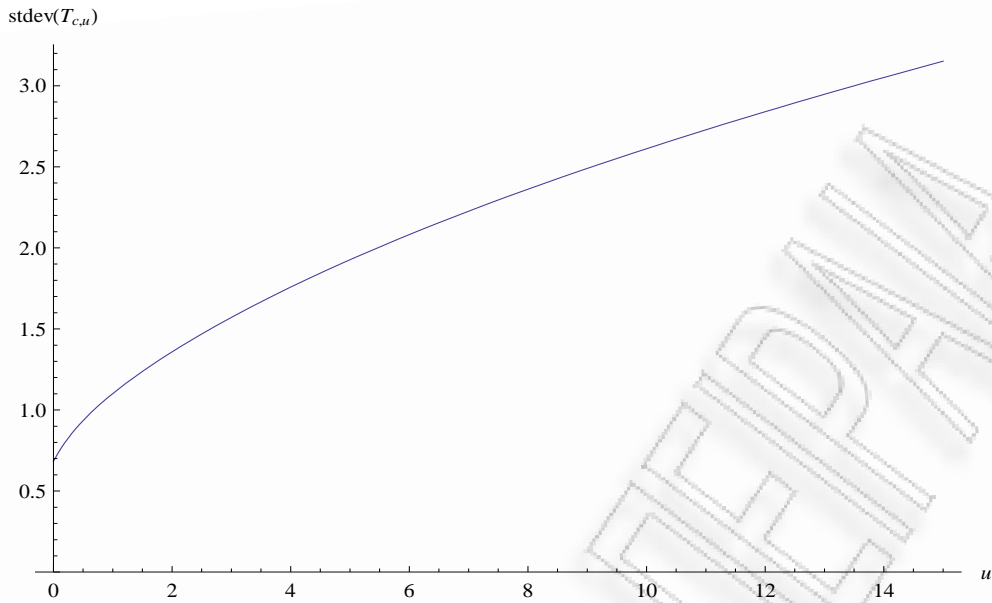


Σχήμα 3.14: Γραφική παράσταση της δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.45455$.

Από το Σχήμα 3.14 και παίρνοντας από το *Mathematica* ότι οι δύο πρώτες παράγωγοι της $\psi_2(u)/\psi(u)$ είναι θετικές για κάθε μη-αρνητικό u , καταλήγουμε πάλι στο συμπέρασμα ότι η δεύτερη δεσμευμένη ροπή είναι μία αύξουσα και κυρτή συνάρτηση.

Η τυπική απόκλιση του αναμενόμενου χρόνου χρεοκοπίας, στην περίπτωση που έχουμε $\theta = 1.45455$, υπολογίζεται πάλι από τη σχέση (3.20) και παρουσιάζεται γραφικά στο ακόλουθο Σχήμα 3.15.

Από το Σχήμα 3.15, παρατηρούμε ότι η μεταβλητότητα του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας, δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία, είναι αρκετά μικρότερη από αυτή που είχαμε στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις. Επομένως για $\theta = 1.45455$ και γνωρίζοντας ότι κάποια στιγμή επέρχεται χρεοκοπία, είμαστε αρκετά σίγουροι ότι η χρεοκοπία θα έρθει σχετικά γρήγορα, δηλαδή γρηγορότερα από ότι πιστεύουμε ότι θα συμβεί για $\theta = 7/11$ και πολύ περισσότερο για $\theta = 0.145455$. Επειδή όμως μόνο με την μελέτη της τυπικής απόκλισης της τ.μ T_c δεν μπορούμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για το επίπεδο των τιμών που παίρνει, υπολογίζουμε το συντελεστή μεταβλητότητας που έχει η συγκεκριμένη τ.μ, μέσω της σχέσης (3.21), και στη συνέχεια δίνουμε τη γραφική του παράσταση στο Σχήμα 3.19.



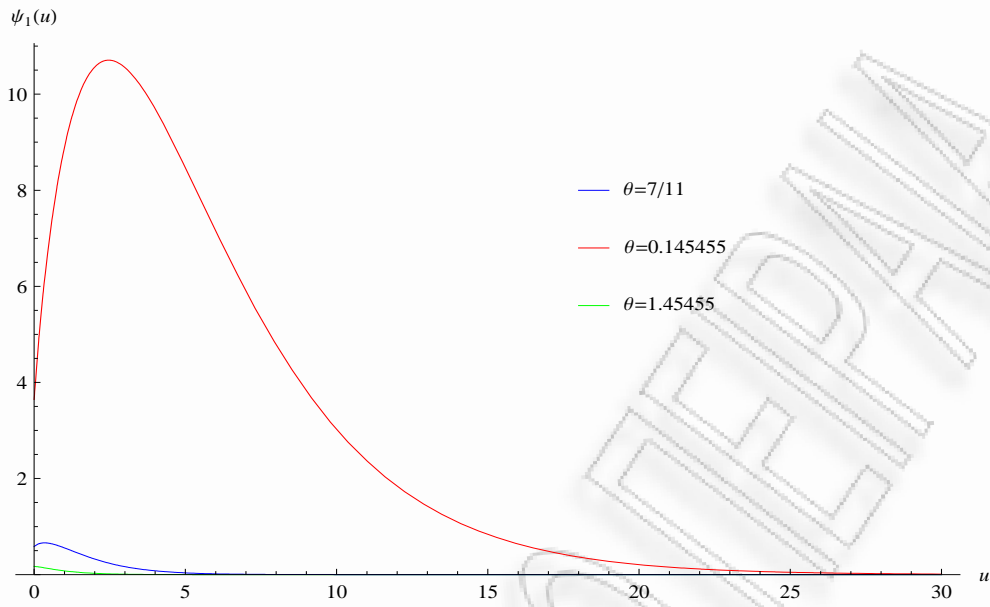
Σχήμα 3.15: Γραφική παράσταση της τυπικής απόκλισης του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας, για μείζη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.45455$.

Τέλος για να δούμε ποια είναι η επίπτωση της τιμής του θ στις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας, παρουσιάζουμε σε κοινό διάγραμμα τις ροπές που υπολογίσαμε παραπάνω⁹, σε κάθε περίπτωση. Η πρώτη μη-δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας για την κάθε τιμή του θ , δίνεται γραφικά από το παρακάτω Σχήμα 3.16.

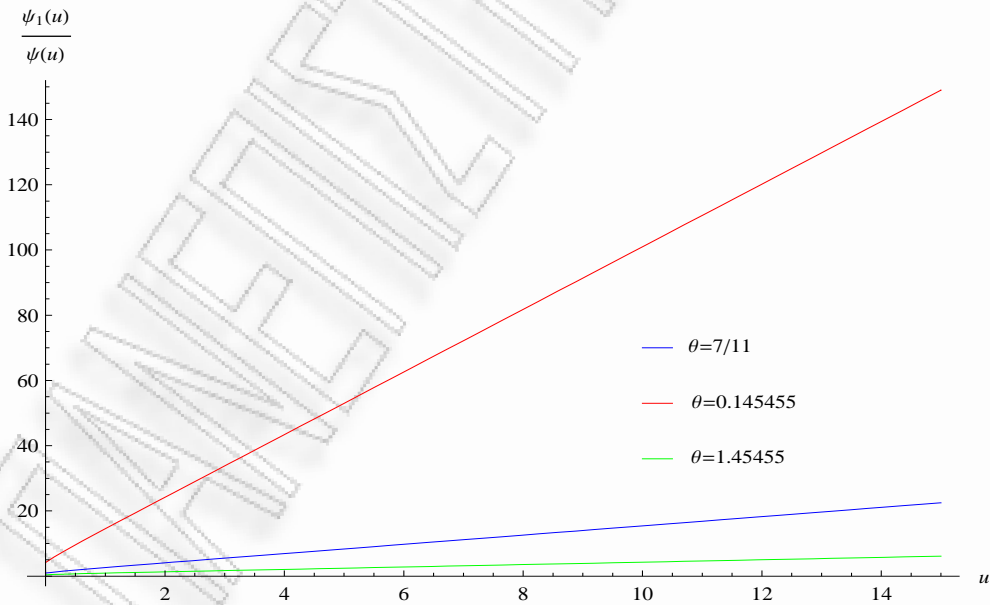
Από το κοινό διάγραμμα 3.16, παρατηρούμε ότι όσο πιο μικρή είναι η τιμή του θ , τόσο μεγαλύτερος είναι ο αναμενόμενος χρόνος χρεοκοπίας για κάθε τιμή του αρχικού αποθεματικού u . Αυτή η μεγάλη διαφορά φαίνεται και από το γεγονός ότι για τις μεγαλύτερες τιμές του θ που υπάρχουν στο διάγραμμα, διακρίνουμε με δυσκολία τις γραφικές τους παραστάσεις (σε σχέση με την μικρότερη τιμή του θ). Επίσης βλέπουμε ότι όσο μικρότερη είναι η τιμή του θ , τόσο πιο δεξιά μετατοπίζεται και η τιμή του u , στο οποίο η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο. Αντίστοιχα για μεγάλες τιμές του θ παρατηρούμε ότι η $\psi_1(u)$ γίνεται μία φθίνουσα συνάρτηση για κάθε $u \in [0, \infty)$. Επομένως σε αυτές τις περιπτώσεις ισχύει ότι η τιμή του u στην οποία παρουσιάζει η συνάρτηση μέγιστο, είναι η τιμή μηδέν.

Αντίστοιχα η πρώτη δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου θ , η οποία μπορεί να μας δώσει ασφαλέστερα συμπεράσματα, παρουσιάζεται γραφικά στο παρακάτω διάγραμμα 3.17.

⁹Εδώ παρουσιάζουμε σε κοινό διάγραμμα μόνο τις $\psi_1(u)$ και $\psi_1(u)/\psi(u)$ αντίστοιχα, διότι μας ενδιαφέρουν περισσότερο σαν ποσότητες από ότι οι δεύτερες ροπές του χρόνου χρεοκοπίας.



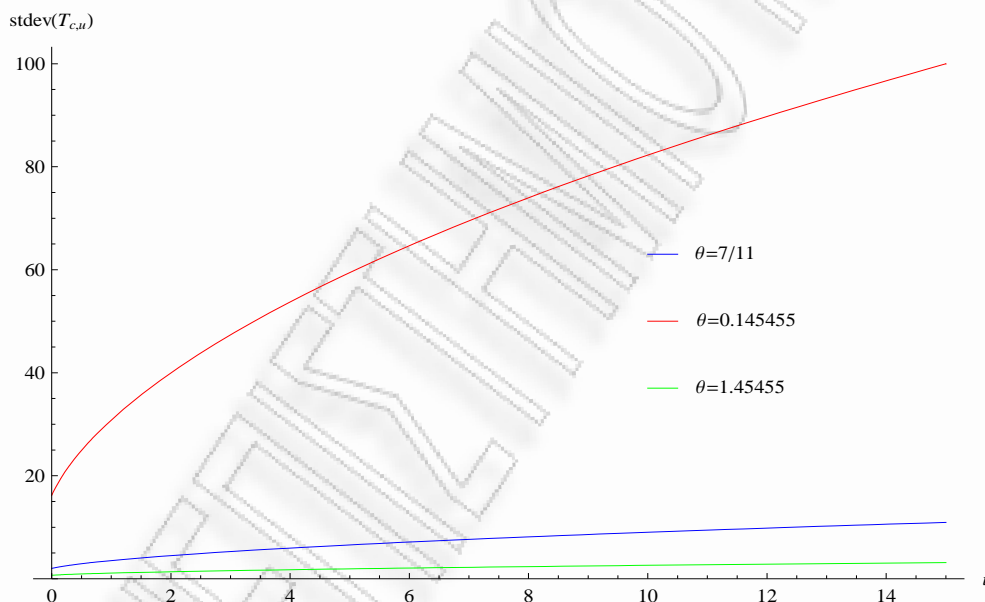
Σχήμα 3.16: Κοινό διάγραμμα της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας για $\theta = \frac{7}{11}$, $\theta = 0.145455$ και $\theta = 1.45455$.



Σχήμα 3.17: Κοινό διάγραμμα της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας για $\theta = \frac{7}{11}$, $\theta = 0.145455$ και $\theta = 1.45455$.

Από το Σχήμα 3.17, παίρνουμε ότι ο αναμενόμενος χρόνος χρεοκοπίας, δοθέντος ότι κάποια χρονική στιγμή επέρχεται η χρεοκοπία, είναι μεγαλύτερος για κάθε τιμή του αρχικού αποθεματικού u , όσο μικρότερη είναι η τιμή του περιθωρίου ασφαλείας θ . Επίσης παρατηρούμε ότι και οι τρεις γραφικές παραστάσεις είναι αύξουσες συναρτήσεις, με τη διαφορά όμως ότι όσο πιο μεγάλο είναι το θ , τόσο μεγαλύτερη είναι και η κλίση της $\psi_1(u)/\psi(u)$.

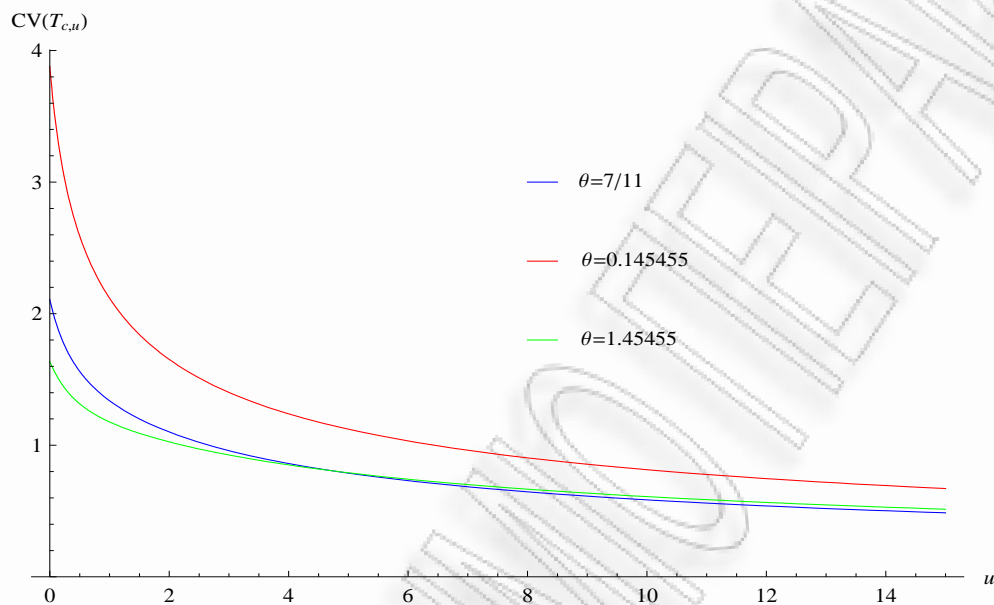
Τα διαγράμματα 3.16 και 3.17, δείχνουν κάτι τελείως αντίθετο από αυτό που περιμέναμε. Επομένως σύμφωνα με αυτά, μία ασφαλιστική εταιρεία θα πρέπει να διαλέγει χαρτοφυλάκια με μικρό θ έτσι ώστε να είναι μεγάλος ο αναμενόμενος χρόνος έως τη χρεοκοπία. Αυτό όμως έρχεται σε σύγκρουση με όσα έχουμε πεί έως τώρα, αφού ξέρουμε ότι όσο μεγαλύτερο είναι το περιθώριο κέρδους για έναν ασφαλιστή, τόσο ευκολότερα μπορεί να καλύψει τις απαιτήσεις για αποζημίωση. Για να φανεί αυτή η ασυμφωνία, παρουσιάζουμε παρακάτω στο κοινό διάγραμμα 3.18 την τυπική απόκλιση του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας, που έχουμε βρεί για την κάθε μία περίπτωση που έχουμε μελετήσει.



Σχήμα 3.18: Κοινό διάγραμμα της τυπικής απόκλισης του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας, για $\theta = \frac{7}{11}$, $\theta = 0.145455$ και $\theta = 1.45455$.

Στο Σχήμα 3.18, παρατηρούμε ότι η τυπική απόκλιση της μεταβλητής T_c αυξάνεται όσο μικραίνει η τιμή του θ . Οπότε καταλήγουμε, για παράδειγμα για $\theta = 0.145455$, ότι ο δεσμευμένος αναμενόμενος χρόνος χρεοκοπίας αλλά και η μεταβλητότητα του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας είναι μεγαλύτερα σαν μεγέθη από ότι για τις άλλες δύο μεγαλύτερες τιμές του θ . Άρα το συμπέρασμα που βγάζουμε είναι ότι για $\theta = 0.145455$ και γνωρίζοντας ότι η χρεοκοπία θα συμβεί, είμαστε σχεδόν βέβαιοι ότι κατά μέσο όρο θα περιμένουμε περισσότερες χρονικές μονάδες μέχρι να επέλθει η χρεοκοπία.

Επειδή όμως μόνο με τη μελέτη της τυπικής απόκλισης της μεταβλητής T_c δεν μπορούμε να πούμε με σιγουριά κάποια πράγματα επειδή οι τιμές που παίρνει η τυπική απόκλιση εξαρτώνται με τα επίπεδα των τιμών του αναμενόμενου χρόνου χρεοκοπίας, κατασκευάζουμε σε ένα κοινό διάγραμμα τις γραφικές παραστάσεις του συντελεστή μεταβλητότητας που έχουμε υπολογίσει παραπάνω για κάθε τιμή του θ .



Σχήμα 3.19: Κοινό διάγραμμα του συντελεστή μεταβλητότητας της τ.μ T_c , για $\theta = \frac{7}{11}$, $\theta = 0.145455$ και $\theta = 1.45455$.

Από το Σχήμα 3.19, παρατηρούμε ότι ο δεσμευμένος χρόνος χρεοκοπίας έχει μεγαλύτερο συντελεστή μεταβλητότητας στην περίπτωση που ισχύει ότι $\theta = 0.145455$. Βλέπουμε ότι για μικρές τιμές του αρχικού αποθεματικού u , οι τιμές του συντελεστή μεταβλητότητας είναι υψηλές ενώ στη συνέχεια φθίνουν απότομα και καταλήγουν με πολύ μικρό ρυθμό μείωσης για μεγάλες τιμές του u . Ειδικά για $u = 0$ υπάρχει μεγάλη διαφορά στις τιμές του συντελεστή, ιδίως στην περίπτωση που $\theta = 0.145455$, ενώ όσο αυξάνεται το u διακρίνουμε ότι και στις τρεις περιπτώσεις είναι κοντά οι τιμές. Τέλος ενώ για $\theta = 7/11$ υπάρχει μεγαλύτερη σχετική διασπορά για μικρές τιμές του αρχικού αποθεματικού από ότι για $\theta = 1.45455$, για μεγαλύτερες τιμές του u η σχετική διασπορά για $\theta = 7/11$ μειώνεται απότομα με αποτέλεσμα ο συντελεστής μεταβλητότητας να γίνεται μικρότερος, έστω και για λίγο, σε σχέση με την περίπτωση που $\theta = 1.45455$.

3.4 Οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας για κατανομή Γάμμα

Σε συνέχεια του Παραδείγματος 2.3.1, όπου οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία κατανομή Γάμμα(3, 3) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{27}{2}x^2 e^{-3x},$$

θέλουμε να υπολογίσουμε τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας για διάφορες τιμές του περιθωρίου ασφαλείας θ . Όπως και πριν, έτσι και εδώ παίρνουμε τρεις τιμές του θ και προσπαθούμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα τα οποία θα μας βοηθήσουν να καταλάβουμε το πώς συμπεριφέρονται οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας σε κάθε αλλαγή του θ , καθώς και να εξετάσουμε για ποιες τιμές του θ είναι μεγαλύτερος ο αναμενόμενος χρόνος χρεοκοπίας, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία. Επίσης μας ενδιαφέρει να βρούμε για ποιο αρχικό αποθεματικό u παρουσιάζουν μέγιστο η πρώτη και δεύτερη μη-δεσμευμένη ροπή αντίστοιχα. Πολύ μεγάλη σημασία στο να μην οδηγηθούμε σε λάθος συμπεράσματα, έχει το πόσο μεγάλη είναι η μεταβλητότητα του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας, για κάθε τιμή του θ . Όπως και στην Ενότητα 3.3 έτσι και εδώ, όλες οι παρακάτω πράξεις, αποτελέσματα και γραφικές παραστάσεις, έχουν γίνει μέσω του προγράμματος *Mathematica*.

Ως πρώτο παράδειγμα υποθέτουμε ότι $\mu = 1.5$ και $\lambda = 1$. Επομένως παίρνουμε ότι το περιθώριο ασφαλείας θ είναι ίδιο με αυτό του Παραδείγματος 2.3.1, δηλαδή

$$\theta = 0.5.$$

Μέσω της σχέσης (3.14), η πρώτη μη-δεσμευμένη ροπή $\psi_1(u)$, ισούται με

$$\begin{aligned} \psi_1(u) = & e^{-0.534774 u} (0.722066 + 1.04083 u) \\ & + e^{-3.89928 u} [0.166823 \cos(1.27481 u) + 0.111769 \sin(1.27481 u)] \\ & + e^{-3.89928 u} u [0.00146645 \cos(1.27481 u) + 0.00428027 \sin(1.27481 u)] \end{aligned}$$

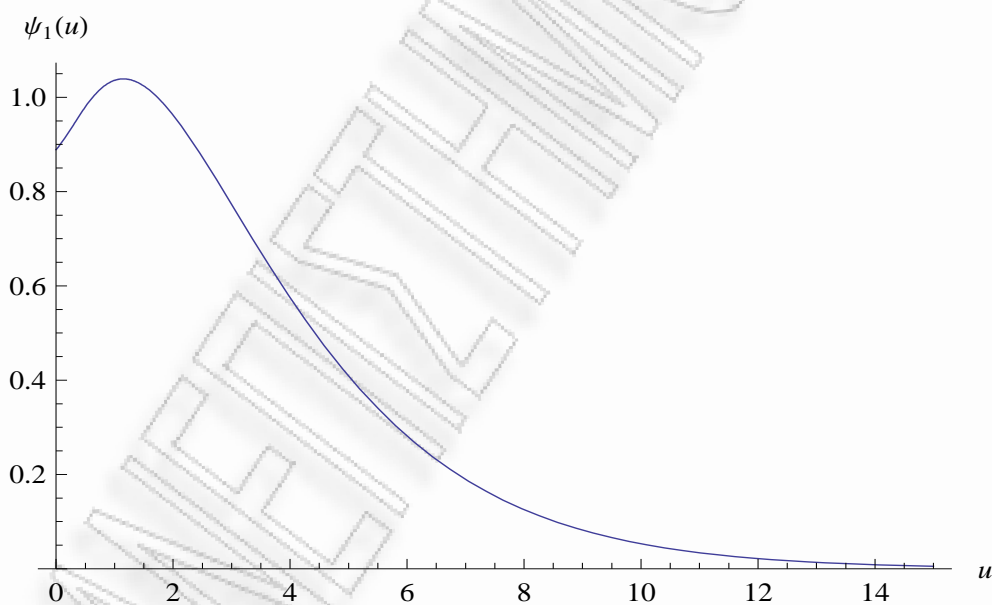
Πρέπει να αναφερθεί ότι για να υπολογιστεί η $\psi_1(u)$ στο *Mathematica*, στον τύπο (3.14) πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την μιγαδική μορφή της $\psi(u)$, έτσι όπως μας την έδινε στην αρχή το *Mathematica*. Αν χρησιμοποιηθεί η τριγωνομετρική μορφή, τότε τα ολοκληρώματα δεν συγκλίνουν με αποτέλεσμα να μην μπορεί να βρεθεί λύση για την $\psi_1(u)$.

Στη συνέχεια επειδή η $\psi_1(u)$ βγαίνει και αυτή σε μιγαδική μορφή ενώ είναι μία πραγματική συνάρτηση, μέσω κατάλληλων εντολών στο *Mathematica* μπορεί να μετατραπεί σε τριγωνομετρική μορφή, δηλαδή στη μορφή που της δώσαμε παραπάνω.

Αντίστοιχα, μέσω της σχέσης (3.13), η πρώτη δεσμευμένη ροπή, $\psi_1(u)/\psi(u)$, ισούται με

$$\begin{aligned} & [e^{3.89928u} (0.722066 + 1.04083u) + e^{0.534774u} [(0.166823 + 0.0014664u) \cos(1.27481u) \\ & + (0.111769 + 0.00428027u) \sin(1.27481u)]] \quad (3.25) \\ & \times [0.721398 e^{-3.89928u} + e^{-0.534774u} [-0.054731 \cos(1.27481u) - 0.0391028 \sin(1.27481u)]] \end{aligned}$$

Οι γραφικές παραστάσεις της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας και της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, δίνονται στα Σχήματα 3.20 και 3.21 αντίστοιχα.



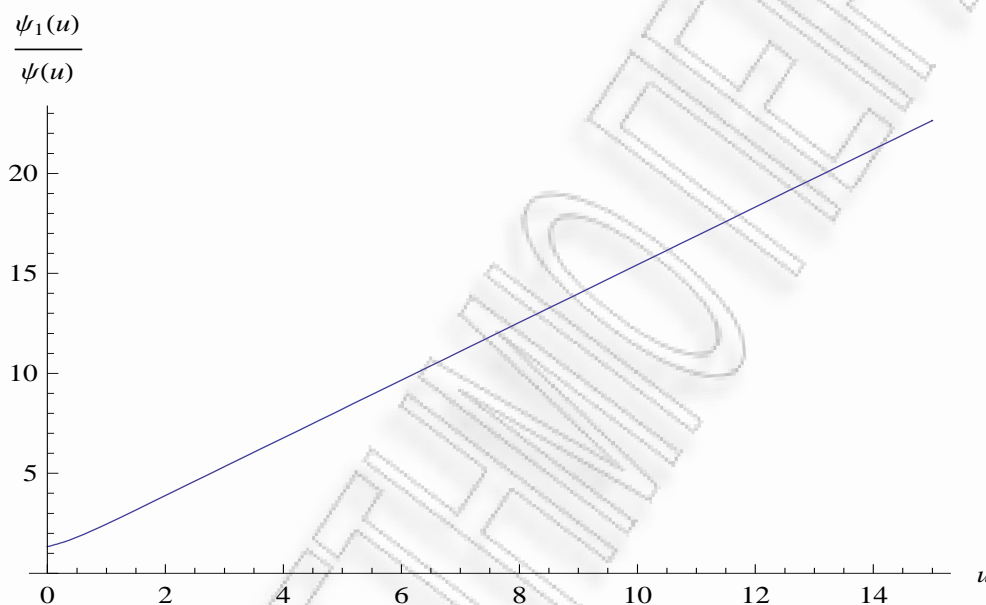
Σχήμα 3.20: Γραφική παράσταση της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 0.5$.

Στο Σχήμα 3.20, παρατηρούμε ότι η $\psi_1(u)$ είναι αύξουσα συνάρτηση μέχρι το σημείο $u = 1.14932$, όπου εκεί παρουσιάζει η συνάρτηση μέγιστο, και είναι φθίνουσα από εκεί και πέρα. Το μέγιστο σημείο της $\psi_1(u)$ είναι το

$$\psi_1(1.14932) = 1.03902$$

Επίσης βλέπουμε ότι φθίνει πολύ αργά στο μηδέν και μόνο για τιμές του αρχικού αποθεματικού πάνω από 15, παίρνει η $\psi_1(u)$ μηδενικές τιμές.

Στο Σχήμα 3.21 βλέπουμε ότι η πρώτη δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας είναι μία αύξουσα συνάρτηση του αρχικού αποθεματικού, γεγονός που σημαίνει ότι όσο μεγαλύτερο είναι το αρχικό αποθεματικό τόσο μεγαλώνει και ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι τη χρεοκοπία, δοθέντος ότι κάποια στιγμή συμβαίνει χρεοκοπία. Για παράδειγμα αν $u = 10$, τότε πρέπει να περιμένουμε 15.4289 χρονικές μονάδες, κατά μέσο όρο, μέχρι να επέλθει χρεοκοπία, δοθέντος ότι κάποια στιγμή συμβαίνει χρεοκοπία.



Σχήμα 3.21: Γραφική παράσταση της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 0.5$.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την δεύτερη μη-δεσμευμένη ροπή, $\psi_2(u)$, που δίνεται από τον τύπο (3.17). Επειδή όμως είναι αρκετά δύσκολος ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων και επειδή εδώ δεν είναι εφικτό να δώσουμε την $\psi_2(u)$ στην πραγματική της μορφή, δίνουμε το αποτέλεσμα σε μιγαδική μορφή, όπως αυτό προκύπτει στο *Mathematica*. Συγκεκριμένα, έχουμε

$$\begin{aligned} \psi_2(u) = & e^{(-4.43405 - 2.54963i)u} [(-0.000252141 - 0.000665453i) e^{(0.534774 + 1.27481i)u} \\ & + 0.000504282 e^{(3.89928 + 2.54963i)u} + 1.5017 e^{(3.89928 + 2.54963i)u} (0.627045 + u) (5.89456 + u) \\ & + (0.000043552 + 0.000145803i) e^{(0.534774 + 3.82444i)u} ((-30.3799 - 21.8785i) + u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times ((99.7858 + 73.6168 i) + u) + e^{(0.534774+1.27481 i) u} ((0.582763 + 0.400329 i) \\ & + ((-0.00452061 - 0.0123731 i) + (0.0000435552 - 0.000145803 i) u) u) \end{aligned}$$

Επίσης και η δεύτερη δεσμευμένη ροπή, $\psi_2(u)/\psi(u)$, δίνεται σε μιγαδική μορφή έτσι όπως υπολογίστηκε από το *Mathematica*, μετά από πράξεις, και ισούται με

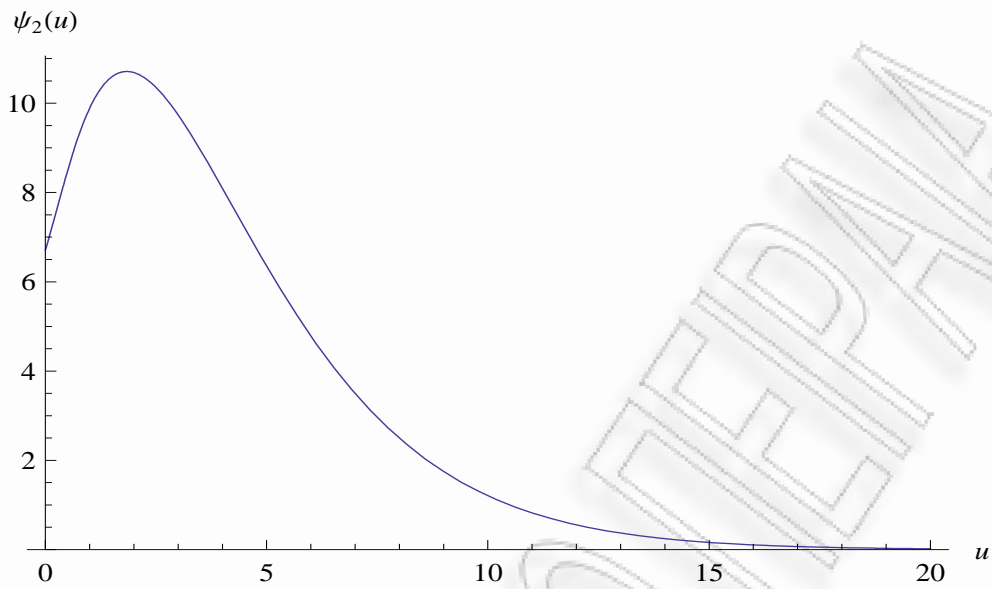
$$\begin{aligned} & [(-0.000252141 - 0.000665453 i) e^{(0.53474+1.27481 i) u} + 0.000504282 e^{(3.89928+2.54963 i) u} \\ & + 1.5017 e^{(3.89928+2.54963 i) u} (0.627045 + u) (5.89456 + u) + (0.0000435552 + 0.000145803 i) \\ & \times e^{(0.534774+3.82444 i) u} ((-30.3799 - 21.8785 i) + u) ((99.7858 + 73.6168 i) + u) \\ & + e^{(0.534774+1.27481 i) u} ((0.582763 + 0.400329 i) ((-0.00452061 - 0.0123731 i) \\ & + (0.000435552 - 0.000145803 i) u) u)] \quad (3.26) \\ & \times [(-0.0273655 - 0.0195514 i) e^{-(0.534774+1.27481 i) u} - (0.0273655 - 0.0195514 i) e^{-(0.534774+3.82444 i) u} \\ & + 0.721398 e^{-(3.89928+2.54963 i) u}] \end{aligned}$$

Οι γραφικές παραστάσεις της δεύτερης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας και της δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, δίνονται στα Σχήματα 3.22 και 3.23 αντίστοιχα.

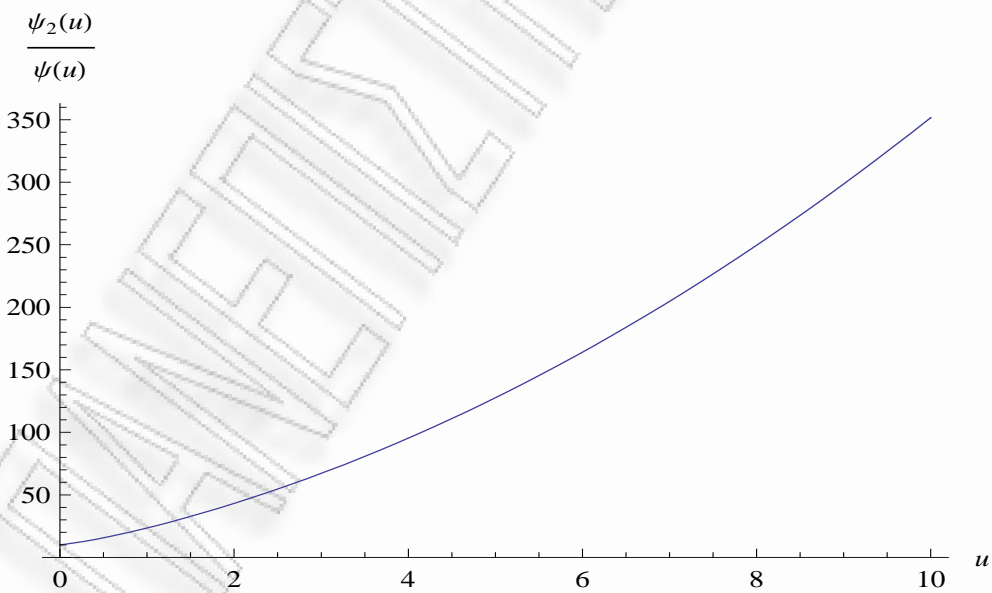
Στο Σχήμα 3.22 παρατηρούμε ότι η δεύτερη μη-δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας είναι αύξουσα μέχρι το σημείο $u = 1.83889$, όπου είναι το μέγιστο σημείο της συνάρτησης, και φθίνουσα από εκεί και πέρα. Το μέγιστο σημείο της $\psi_2(u)$ είναι το

$$\psi_2(1.83889) = 10.7117.$$

Επίσης η δεύτερη μη-δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας παίρνει μεγαλύτερες τιμές $\forall u \geq 0$ από ότι η πρώτη μη-δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας, καθώς και η $\psi_2(u)$ φθίνει πιο αργά στο μηδέν από ότι η $\psi_1(u)$.



Σχήμα 3.22: Γραφική παράσταση της δεύτερης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 0.5$.

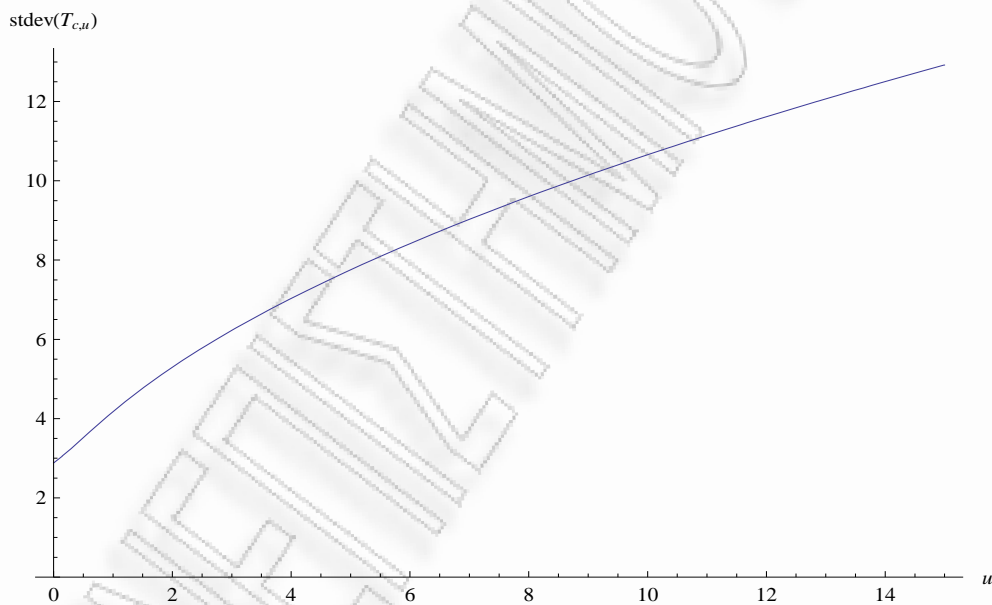


Σχήμα 3.23: Γραφική παράσταση της δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 0.5$.

Στο Σχήμα 3.23 βλέπουμε ότι η δεύτερη δεσμευμένη ροπή είναι μία αύξουσα και κυρτή συνάρτηση, καθώς η πρώτη και δεύτερη παράγωγος της $\psi_2(u)/\psi(u)$ είναι θετικές συναρτήσεις $\forall u \geq 0$. Επίσης παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερο είναι το αρχικό αποθεματικό, τόσο με μεγαλύτερο ρυθμό αυξάνει και η τιμή της δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας.

Εκτός όμως από τον αναμενόμενο χρόνο μέχρι την χρεοκοπία, μία άλλη ποσότητα που δείχνει μεγάλο ενδιαφέρον είναι η τυπική απόκλιση της τ.μ T_c . Ο υπολογισμός της τυπικής απόκλισης που έχει μία τ.μ, είναι πολύ σημαντικός καθώς μας βοηθάει να διακρίνουμε πόσο μεγάλη είναι η μεταβλητότητα των τιμών που παίρνει μία τ.μ από την μέση τιμή αυτών των τιμών. Όπως θα δούμε και παρακάτω, υπάρχουν μεγάλες διαφορές στην τυπική απόκλιση για κάθε διαφορετική τιμή του θ που χρησιμοποιούμε.

Έτσι χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.20), υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση για την περίπτωση που $\theta = 0.5$ και από το *Mathematica*, προκύπτει ότι η γραφική της παράσταση δίνεται από το επόμενο Σχήμα 3.24.



Σχήμα 3.24: Γραφική παράσταση της τυπικής απόκλισης του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 0.5$.

Από το Σχήμα 3.24 δεν μπορούμε να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα, καθώς δεν ξέρουμε ακριβώς εάν οι τιμές της τυπικής απόκλισης είναι ικανοποιητικές ή όχι. Στη συνέχεια θα συγκρίνουμε την συγκεκριμένη τυπική απόκλιση με αυτές που θα υπολογίσουμε στις επόμενες περιπτώσεις. Όμως όπως θα διαπιστώσουμε και στη συνέχεια, η σύγκριση της τυπικής απόκλισης και για τις τρεις διαφορετικές τιμές του θ δεν μας οδηγεί σε ασφαλή συμπεράσματα καθώς οι τιμές που παίρνει η τυπική απόκλιση συνδέονται με τις τιμές του αναμενόμενου

χρόνου χρεοκοπίας. Έτσι, για παράδειγμα, αν θέλουμε να συγκρίνουμε την τυπική απόκλιση μίας μεταβλητής για δύο διαφορετικές περιπτώσεις, δεν μπορούμε να ερμηνεύσουμε με σιγουριά το μέγεθος των τιμών, είτε είναι μεγάλο είτε όχι, καθώς είναι ανάλογο με την μέση τιμή που έχει αυτή η μεταβλητή στη κάθε περίπτωση. Επομένως εδώ μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε πόση είναι η μεταβλητότητα της μεταβλητής T_c ανά μέσο χρόνο αναμονής μέχρι την έλευση της χρεοκοπίας. Η ποσότητα που εκφράζει τα παραπάνω είναι ο συντελεστής μεταβλητότητας, ο οποίος υπολογίζεται στο *Mathematica* μέσω της σχέσης (3.21). Η γραφική παράσταση του συντελεστή μεταβλητότητας για κάθε μία περίπτωση δίνεται στο τέλος της ενότητας, στο Σχήμα 3.38.

Αφού ολοκληρώσαμε την εύρεση των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας για $\theta = 0.5$, στη συνέχεια θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία που έγινε και στην Ενότητα 3.3. Δηλαδή θα αλλάξουμε την τιμή του θ για να δούμε κατά πόσο επηρεάζονται οι γραφικές παραστάσεις των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας.

Αν υποθέσουμε ότι $c = 1.1$ και $\lambda = 1$, από τη σχέση (1.3) προκύπτει ότι

$$\theta = 0.1.$$

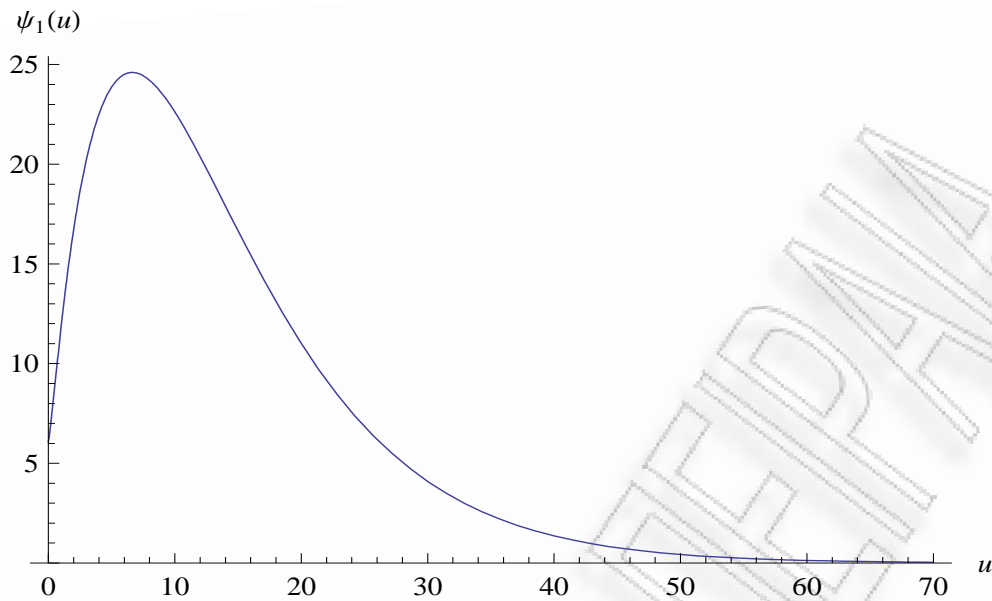
Χρησιμοποιώντας αυτές τις τιμές στη σχέση (1.28), μετά από πράξεις παίρνουμε ότι

$$\psi(u) = 0.924229 e^{-0.138546 u} - e^{-3.97618 u} [0.01513834 \cos(1.38072 u) + 0.0107109 \sin(1.38072 u)]$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.14), παίρνουμε από το *Mathematica* ότι η πρώτη μη-δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας ισούται με

$$\begin{aligned} \psi_1(u) &= e^{-0.138546 u} (5.01271 + 8.542 u) \\ &+ e^{-3.97618 u} [1.04789 \cos(1.38072 u) + 0.725516 \sin(1.38072 u)] \\ &+ e^{-3.97618 u} u [0.00057223 \cos(1.38072 u) + 0.00162145 \sin(1.38072 u)] \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$, δίνεται στο παρακάτω διάγραμμα 3.25.



Σχήμα 3.25: Γραφική παράσταση της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 0.1$.

Για να βρούμε για ποιο αρχικό αποθεματικό u , παρουσιάζει μέγιστο η συνάρτηση $\psi_1(u)$, παραγωγίζουμε μία φορά τη συνάρτηση και την εξισώνουμε με το μηδέν. Η συγκεκριμένη διαδικασία γίνεται πολύ απλά με τη χρήση του *Mathematica*. Έτσι καταλήγουμε ότι η λύση της εξίσωσης είναι το $u = 6.30735$ και συνεπώς ότι η μέγιστη τιμή της $\psi_1(u)$, ισούται με

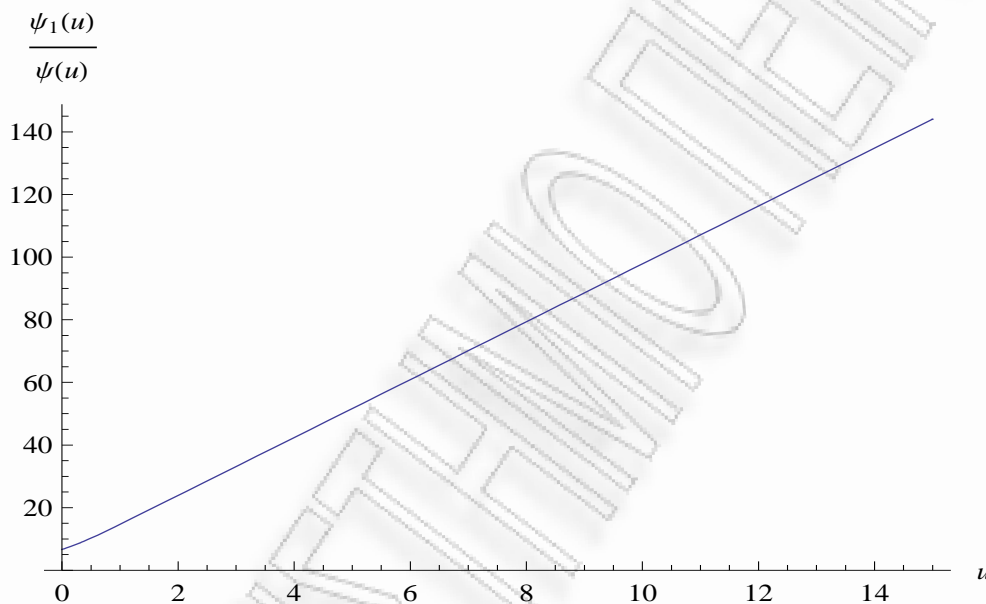
$$\psi_1(6.30735) = 24.577.$$

Τα παραπάνω φαίνονται ξεκάθαρα και στο Σχήμα 3.25. Επίσης παρατηρούμε ότι η πρώτη μη-δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας, για $\theta = 0.1$, είναι αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0, 6.30735]$ και φθίνουσα στο υπόλοιπο διάστημα του θετικού άξονα των u . Όπως στην μείξη των τριών εκθετικών κατανομών έτσι και εδώ, για μικρή τιμή του θ παίρνουμε μεγάλες τιμές για τον αναμενόμενο χρόνο χρεοκοπίας, $\psi_1(u)$. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα συγκρίνοντας τα διαγράμματα 3.20 και 3.25 μεταξύ τους. Επομένως συμπεραίνουμε ότι για $\theta = 0.1$, η $\psi_1(u)$ παίρνει αρκετά μεγαλύτερες τιμές, για κάθε τιμή του αρχικού αποθεματικού u , από ότι παίρνει για $\theta = 0.5$. Στη συνέχεια θέλουμε να δούμε αν ισχύει το ίδιο και για την πρώτη δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας, $\psi_1(u)/\psi(u)$.

Μέσω της $\psi_1(u)$ είναι πολύ εύκολο να υπολογίσει κάποιος την πρώτη δεσμευμένη ροπή. Έχουμε αναφέρει ότι η διαφορά της δεσμευμένης ροπής είναι ότι ξέρουμε ότι κάποια στιγμή θα επέλθει χρεοκοπία. Έτσι σύμφωνα με τον τύπο (3.12), πρέπει να υπολογίσουμε το πηλίκο της $\psi_1(u)$ που έχουμε ήδη υπολογίσει, προς την πιθανότητα χρεοκοπίας. Τελικά, μετά από πράξεις στο *Mathematica*, καταλήγουμε στο ότι η $\psi_1(u)/\psi(u)$ ισούται με

$$\begin{aligned}
& [e^{3.97618u} (5.01271 + 8.542u) + e^{0.138546u} [(1.04789 + 0.00057223u) \cos(1.38072u) \\
& + (0.725516 + 0.00162145u) \sin(1.38072u)]] \\
& \times [0.924229 e^{-3.97618u} + e^{-0.138548u} [-0.0151383 \cos(1.38072u) - 0.0107109 \sin(1.38072u)]]
\end{aligned}$$

Η πρώτη δεσμευμένη ροπή παρουσιάζεται στο παρακάτω διάγραμμα 3.26



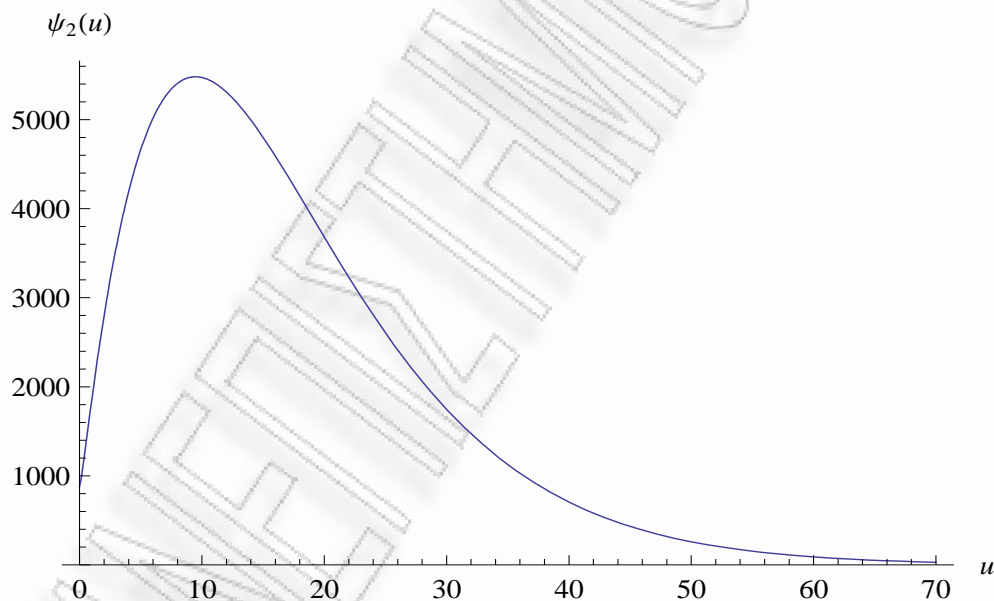
Σχήμα 3.26: Γραφική παράσταση της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 0.1$.

Μέσω του *Mathematica* βρίσκουμε ότι η πρώτη παράγωγος της πρώτης δεσμευμένης ροπής είναι θετική για κάθε μη αρνητική τιμή του u , πράγμα που υποδηλώνει ότι είναι μία αύξουσα συνάρτηση. Κάτι τέτοιο φαίνεται και από το Σχήμα 3.26, όπου όσο αυξάνεται το αρχικό αποθεματικό αυξάνεται και ο αναμενόμενος χρόνος που χρειάζεται μέχρι να συμβεί χρεοκοπία. Για να κάνουμε μία σύγκριση με τον αναμενόμενο χρόνο που είχαμε στην περίπτωση που $\theta = 0.5$, παίρνουμε ως αρχικό αποθεματικό την τιμή $u = 10$ και μέσω του *Mathematica* προκύπτει ότι κατά μέσο όρο χρειάζονται 97.8462 χρονικές μονάδες μέχρι να παρουσιαστεί η χρεοκοπία. Από αυτή τη σύγκριση καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα που είχαμε καταλήξει και στην Ενότητα 3.3 με την μείξη των τριών εκθετικών κατανομών. Δηλαδή η πρώτη δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας για $\theta = 0.1$, παίρνει μεγαλύτερες τιμές, για κάθε τιμή του u , από ότι για $\theta = 0.5$ και συγκεκριμένα για $u = 10$ παίρνει τιμή σχεδόν 6.3 φορές μεγαλύτερη.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.17), μετά από πράξεις στο *Mathematica* προκύπτει ότι η δεύτερη μη-δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας ισούται με

$$\begin{aligned} \psi_2(u) = & e^{(-4.11473-1.38072i)u} [78.9476 e^{(3.97618+1.38072i)u} \\ & \times (0.569631 + u)(16.2136 + u) + (0.0000217616 + 0.0000766881i) e^{(0.138546+2.76144i)u} \\ & \times ((-452.429 - 316.993i) + u)((1652.7 + 1183.68i) + u) + e^{0.138546u} ((73.1393 + 51.622i) \\ & + ((-0.0403451 - 0.110907i) + (0.0000217616 - 0.0000766881i)u)u)] \end{aligned}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα για την $\psi_2(u)$, παρουσιάζεται γραφικά στο παρακάτω Σχήμα 3.27.



Σχήμα 3.27: Γραφική παράσταση της δεύτερης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 0.1$.

Από το *Mathematica*, παραγωγίζοντας την $\psi_2(u)$ και θέτοντας την παράγωγο ίση με το μηδέν, προκύπτει ότι η τιμή του αρχικού αποθεματικού για την οποία η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο, είναι η $u = 9.46949$ και η τιμή της συνάρτησης στο συγκεκριμένο σημείο είναι

$$\psi_2(9.46949) = 5481.55.$$

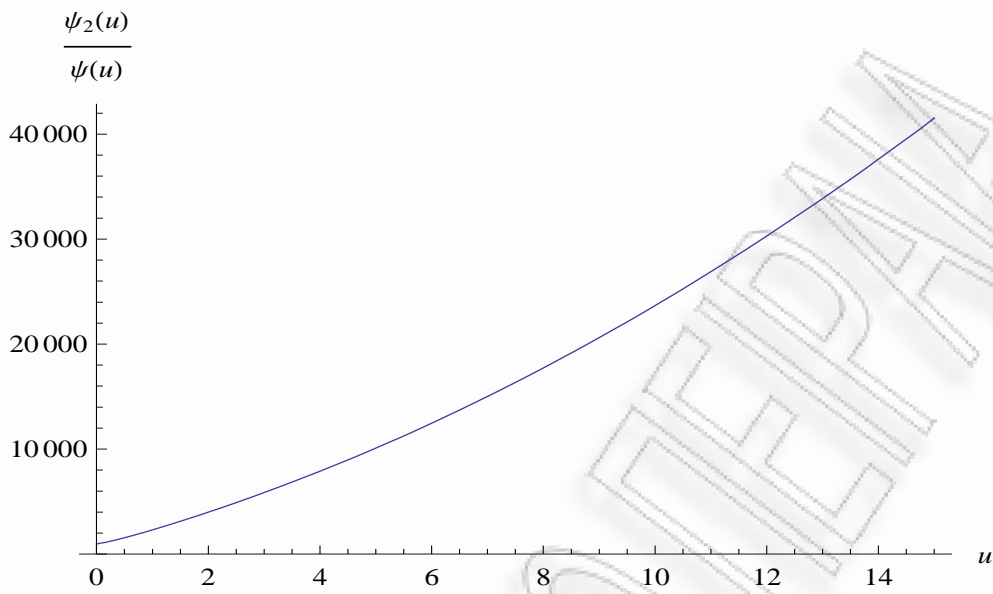
Παρατηρώντας τα Σχήματα 3.25 και 3.27, καταλήγουμε ότι η $\psi_2(u)$ παίρνει πολύ μεγαλύτερες τιμές από ότι η $\psi_1(u)$ και στο ότι φθίνει πιο αργά από ότι η $\psi_1(u)$. Επειδή η $\psi_2(u)$ παίρνει μεγάλες τιμές, λογικά και η δεσμευμένη δεύτερη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας θα παίρνει μεγάλες τιμές για κάθε τιμή του u .

Όπως και στη περίπτωση της πρώτης δεσμευμένης ροπής έτσι και εδώ, ο υπολογισμός της δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας είναι αρκετά εύκολος, καθώς το μόνο που πρέπει να κάνουμε είναι να διαιρέσουμε την $\psi_2(u)$ με την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ που έχουμε υπολογίσει για την περίπτωση που έχουμε $\theta = 0.1$. Επομένως, μετά από κάποιες απλοποιήσεις στο *Mathematica*, παίρνουμε ότι η $\psi_2(u)/\psi(u)$ ισούται με

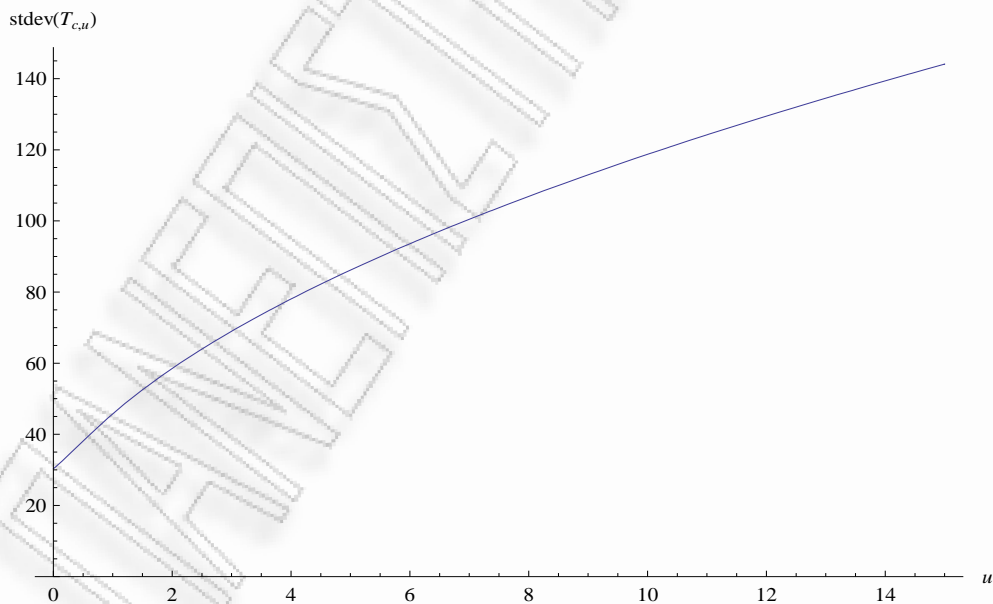
$$\begin{aligned} & [78.9476 e^{(3.97618+1.38072i)u} (0.569631 + u) (16.2136 + u) \\ & + (0.0000217616 + 0.0000766881i) e^{(0.138546+2.76144i)u} ((-452.429 - 316.993i) + u) \\ & \times ((1652.7 + 1183.68i) + u) + e^{0.138546u} ((73.1393 + 51.622i) \\ & + ((-0.0403451 - 0.110907i) + (0.0000217616 - 0.0000766881i)u)u)] \\ & \times [(-0.00756917 - 0.00535545i) e^{-0.138546u} - (0.00756917 - 0.00535545i) e^{-(0.138546+2.76144i)u} \\ & + 0.924229 e^{-(3.97618+1.38072i)u}] \end{aligned}$$

Η δεύτερη δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας δίνεται γραφικά από το παρακάτω διάγραμμα 3.28.

Παραγωγίζοντας δύο φορές τη δεύτερη δεσμευμένη ροπή, στο *Mathematica*, παίρνουμε ότι και οι δύο πρώτες παράγωγοι της συνάρτησης είναι θετικές $\forall u \geq 0$. Επειδή η $\psi_2(u)/\psi(u)$ παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, υποψιαζόμαστε ότι θα είναι μεγάλες και οι τιμές που παίρνει η τυπική απόκλιση για κάθε τιμή του u . Κάτι τέτοιο θα δούμε αν ισχύει στη συνέχεια, όταν θα κατασκευάσουμε την γραφική παράσταση της τυπικής απόκλισης. Για να υπολογίσουμε του τύπο της τυπικής απόκλισης συναρτήσεως του u , χρησιμοποιούμε τη σχέση (3.20). Για να παρουσιάσουμε γραφικά την συνάρτηση της τυπικής απόκλισης, γίνεται χρήση του *Mathematica* και προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα 3.29.



Σχήμα 3.28: Γραφική παράσταση της δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 0.1$.



Σχήμα 3.29: Γραφική παράσταση της τυπικής απόκλισης του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 0.1$.

Πραγματικά, παρατηρώντας το Σχήμα 3.29 διαπιστώνουμε ότι η τυπική απόκλιση είναι αρκετά μεγαλύτερη, για κάθε τιμή του u , από ότι στην προηγούμενη περίπτωση που είχαμε $\theta = 0.5$. Σε σύγκριση όμως με τον αναμενόμενο χρόνο χρεοκοπίας που βρήκαμε στην περίπτωση που $\theta = 0.1$, είναι λογικό να υπάρχει μεγαλύτερη μεταβλητότητα στις τιμές της μεταβλητής από ότι υπάρχει για $\theta = 0.5$ όπου εκεί ο αναμενόμενος χρόνος χρεοκοπίας είναι πολύ μικρότερος. Επομένως για $\theta = 0.1$, εάν γνωρίζουμε ότι κάποια στιγμή θα συμβεί χρεοκοπία, είμαστε αρκετά σίγουροι ότι αυτή θα αργήσει να συμβεί.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε και σε αυτή την περίπτωση τις τιμές του συντελεστή μεταβλητότητας για κάθε τιμή του u , μέσω της σχέσης (3.21). Εδώ δεν δίνουμε αναλυτικό τύπο για τον συντελεστή μεταβλητότητας καθώς μας βολεύει περισσότερο να κατασκευάσουμε τη γραφική του παράσταση για να μπορέσουμε κιόλας να συγκρίνουμε τις τιμές για τις τρεις διαφορετικές τιμές του θ που μελετάμε.

Τώρα μας απομένει να πάρουμε μία μεγαλύτερη τιμή για το θ . Υποθέτοντας ότι $c = 2.5$ και $\lambda = 1$, προκύπτει ότι

$$\theta = 1.5.$$

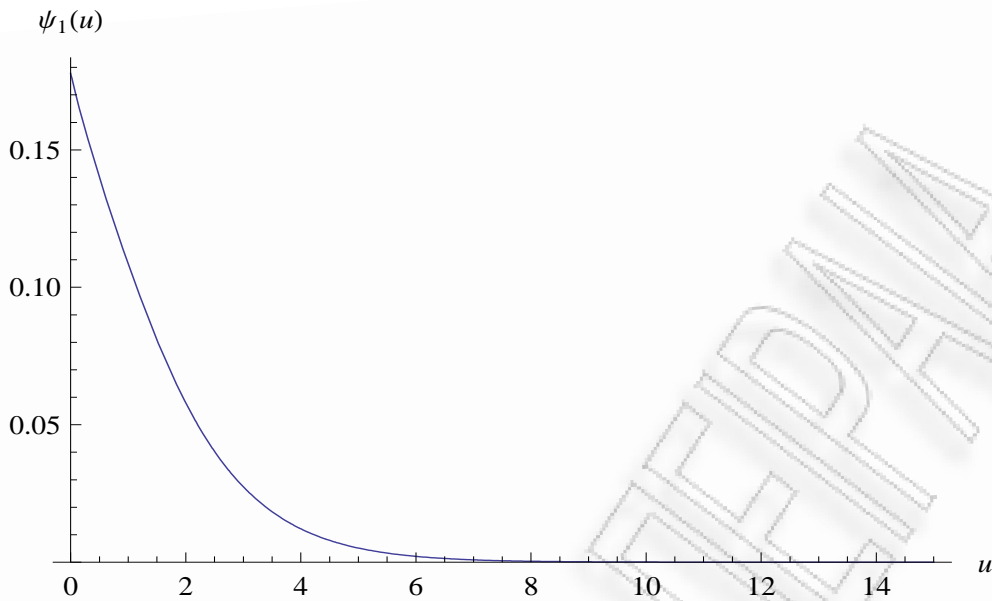
Η πιθανότητα χρεοκοπίας, που αντιστοιχεί για την συγκεκριμένη τιμή του θ , ισούται με

$$\psi(u) = 0.493199 e^{-1.04468 u} - e^{-3.77766 u} [0.0931988 \cos(1.11193 u) + 0.069102 \sin(1.11193 u)] \quad (3.27)$$

Όπως κάναμε και στις προηγούμενες περιπτώσεις έτσι και εδώ βρίσκουμε την πρώτη μη δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας, μέσω της σχέσης (3.14). Επομένως παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \psi_1(u) = & e^{-1.04468 u} (0.143558 + 0.162163 u) \\ & + e^{-3.77766 u} [0.0342195 \cos(1.11193 u) + 0.0241803 \sin(1.11193 u)] \\ & + e^{-3.77766 u} u [0.0013 \cos(1.11193 u) + 0.00429348 \sin(1.11193 u)], \end{aligned}$$

και την παρουσιάζουμε γραφικά στο επόμενο διάγραμμα 3.30.



Σχήμα 3.30: Γραφική παράσταση της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 1.5$.

Από το Σχήμα 3.30 φαίνεται ξεκάθαρα ότι η $\psi_1(u)$, για $\theta = 1.5$, είναι μία φθίνουσα συνάρτηση ως προς u . Επομένως το μέγιστο της συνάρτησης παρουσιάζεται στο σημείο $u = 0$, όπου η τιμή της συνάρτησης είναι

$$\psi_1(0) = 0.177778.$$

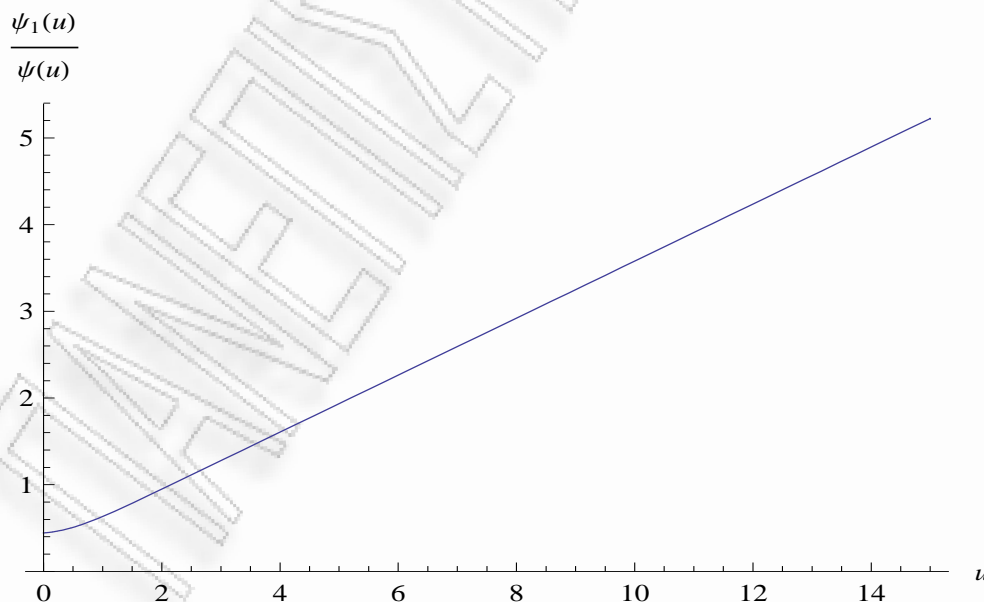
Τα παραπάνω επιβεβαιώνονται κάνοντας χρήση του *Mathematica*, καθώς από το πρόγραμμα προκύπτει ότι η πρώτη παράγωγος της $\psi_1(u)$ είναι αρνητική για κάθε $u \geq 0$. Συγκεκριμένα παίρνουμε ότι το μέγιστο της συνάρτησης παρατηρείται για μία αρνητική τιμή του u . Μετά από αυτό το σημείο η συνάρτηση γίνεται φθίνουσα για όλες τις τιμές του u , γεγονός που υποδηλώνει άμεσα ότι για μη-αρνητικές τιμές του u , η συνάρτηση $\psi_1(u)$ παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $u = 0$. Μία ακόμα παρατήρηση για την $\psi_1(u)$, είναι ότι παίρνει πολύ μικρές τιμές και ότι φθίνει πολύ γρήγορα στο μηδέν, πράγμα που δεν συνέβαινε στις προηγούμενες περιπτώσεις. Επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του θ , τόσο μικραίνει ο αναμενόμενος χρόνος χρεοκοπίας. Αλλά κάτι τέτοιο θα φανεί και αργότερα που θα συγκρίνουμε τις ροπές μεταξύ τους. Οι μικρές τιμές της ροπής, μας κάνουν να σκεφτούμε ότι κατά πάσα πιθανότητα και η πρώτη δεσμευμένη ροπή θα παίρνει μικρές τιμές, σε σχέση πάντα με τις τιμές που παίρνει στις προηγούμενες περιπτώσεις που εξετάσαμε.

Γνωρίζοντας την $\psi_1(u)$, που υπολογίσαμε προηγουμένως, και διαιρώντας με την πιθανότητα χρεοκοπίας που δώσαμε στην περίπτωση που έχουμε $\theta = 1.5$, προκύπτει ότι η $\psi_1(u)/\psi(u)$ ισούται με

$$\begin{aligned}
& [e^{3.77766 u} (0.143558 + 0.162163 u) + e^{1.04468 u} [(0.0342195 + 0.00130364 u) \cos(1.11193 u) \\
& + (0.0241803 + 0.00429348 u) \sin(1.11193 u)]] \quad (3.28) \\
& \times [0.493199 e^{-3.77766 u} + e^{-1.04468 u} [-0.0931988 \cos(1.11193 u) - 0.069102 \sin(1.11193 u)]] ,
\end{aligned}$$

και δίνεται από το παρακάτω Σχήμα 3.31.

Πάλι σε αυτή την περίπτωση προκύπτει ότι η πρώτη δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας είναι μία αύξουσα συνάρτηση, καθώς η πρώτη παράγωγος είναι θετική για κάθε μη-αρνητική τιμή του αρχικού αποθεματικού u . Συγκρίνοντας και τις τρεις περιπτώσεις μεταξύ τους, βρίσκουμε την τιμή του αναμενόμενου χρόνου χρεοκοπίας για $u = 10$. Αντικαθιστώντας αυτή την τιμή, παίρνουμε ότι χρειάζονται, κατά μέσο όρο, 3.57907 χρονικές μονάδες μέχρι να επέλθει η χρεοκοπία, γνωρίζοντας εκ των προτέρων ότι συμβαίνει σε κάποια χρονική στιγμή χρεοκοπία. Αυτή η τιμή είναι πολύ πιο μικρή από αυτές που είχαμε στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις και αυτό συνηγορεί στο ότι όσο μεγαλύτερο περιθώριο κέρδους διαλέξει να έχει μία ασφαλιστική εταιρεία σε ένα χαρτοφυλάκιο, τόσο πιο γρήγορα αναμένεται να χρεοκοπήσει το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο.



Σχήμα 3.31: Γραφική παράσταση της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 1.5$.

Συνοψίζοντας, καταλήγουμε και σε αυτή την περίπτωση στο ίδιο παράδοξο αποτέλεσμα που είχαμε καταλήξει και στην ενότητα 3.3. Όμως για να έχουν βάση όλα αυτά, σπουδαία σημασία έχει και η μελέτη της μεταβλητότητας του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας, καθώς όπως θα διαπιστώσουμε και στη συνέχεια στις περιπτώσεις που έχουμε μεγαλύτερες τιμές για την $\psi_1(u)/\psi(u)$, δηλαδή για μικρές τιμές του θ , υπάρχει μεγαλύτερη μεταβλητότητα (τυπική απόκλιση) στις τιμές αυτές από ότι για μεγάλες τιμές του θ .

Χρησιμοποιώντας τώρα τη σχέση (3.17), μέσω του *Mathematica* παίρνουμε ότι

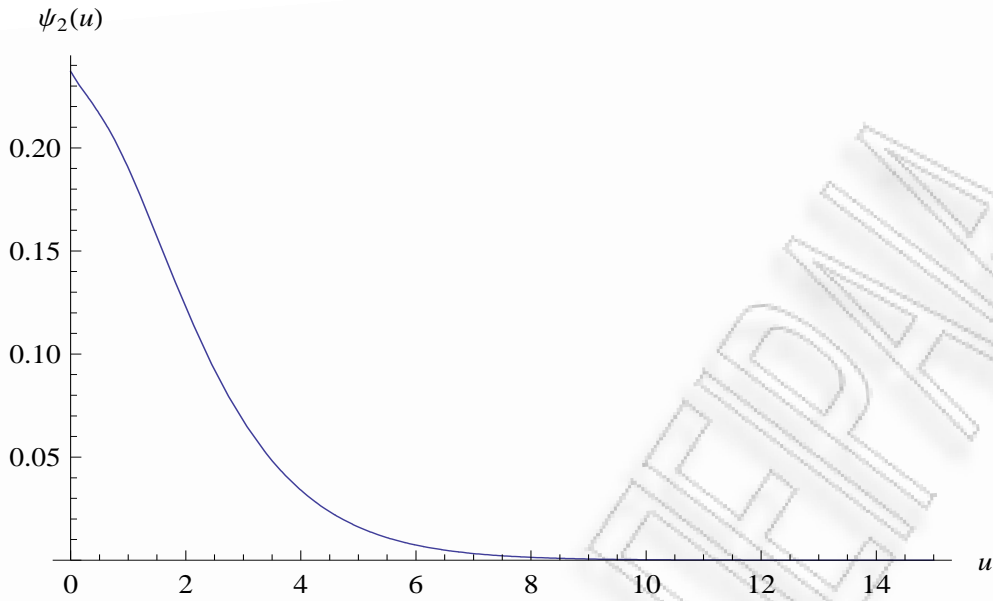
$$\begin{aligned} \psi_2(u) = & e^{(-4.82234 - 2.22385 i) u} \left[e^{(1.04468 + 1.11193 i) u} ((0.0278303 + 0.0149297 i) \right. \\ & - (0.000357543 + 0.00135555 i) u) + 0.0533192 e^{(3.77766 + 2.22385 i) u} (0.757486 + u) \\ & \times (4.74032 + u) + (0.0000292 + 0.0000817 i) e^{(1.04468 + 3.33578 i) u} ((-8.65899 - 7.33239 i) + u) \\ & \times (21.9842 + 16.4703 i) u) + e^{(1.04468 + 1.11193 i) u} ((-0.00503919 - 0.000372671 i) \\ & \left. + (0.0000291984 - 0.0000817054 i) u^2) \right] \end{aligned}$$

Η $\psi_2(u)$ δίνεται γραφικά στο παρακάτω Σχήμα 3.32.

Παραγωγίζοντας την $\psi_2(u)$ προκύπτει ότι η πρώτη παράγωγος είναι αρνητική για κάθε $u \geq 0$. Αυτό σημαίνει ότι είναι μονότονη συνάρτηση στον θετικό άξονα των u και συγκεκριμένα είναι μία φθίνουσα συνάρτηση ως προς u . Το μέγιστο σημείο της συνάρτησης παρουσιάζεται για αρνητικό u και από εκεί και πέρα είναι παντού φθίνουσα, γεγονός που σημαίνει ότι η συνάρτηση $\psi_2(u)$ παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $u = 0$. Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης στο σημείο $u = 0$ ισούται με

$$\psi_2(0) = 0.237037.$$

Τα παραπάνω διακρίνονται και από το Σχήμα 3.32. Απλά κάνουμε την όλη διαδικασία που χρειάζεται στο *Mathematica* για να δούμε ακριβώς αν ισχύουν αυτά τα οποία παρατηρούμε στο διάγραμμα.

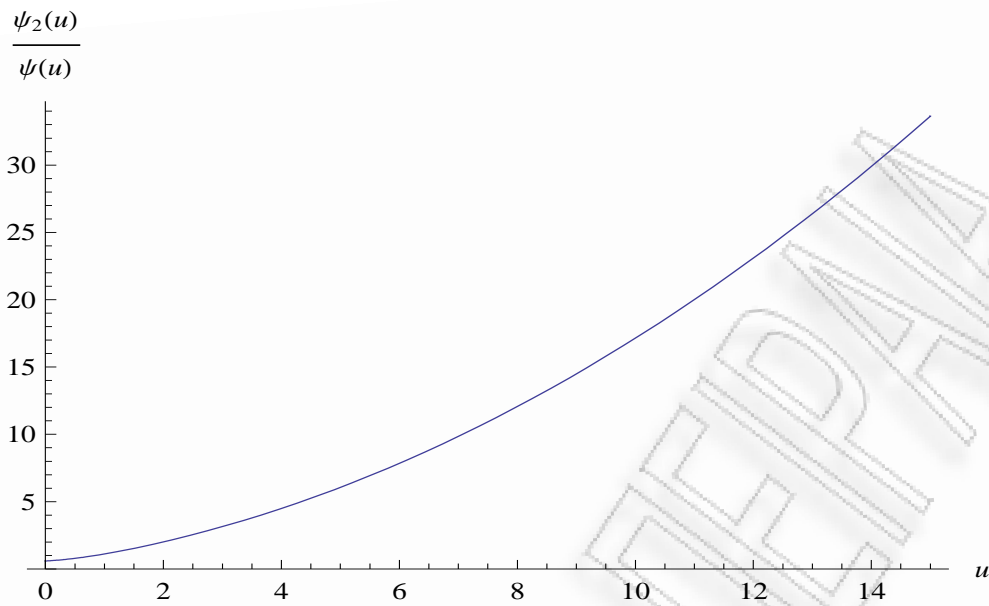


Σχήμα 3.32: Γραφική παράσταση της δεύτερης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 1.5$.

Διαιρώντας τώρα την $\psi_2(u)$, που υπολογίσαμε παραπάνω, με την πιθανότητα χρεοκοπίας για την περίπτωση που έχουμε $\theta = 1.5$, προκύπτει ότι η $\psi_2(u)/\psi(u)$ ισούται με

$$\begin{aligned}
 & [e^{(1.04468+1.11193i)u} ((0.0278303 + 0.0149297i) - (0.000357543 + 0.00135555i)u) \\
 & + 0.0533192 e^{(3.77766+2.22385i)u} (0.757486 + u) (4.74032 + u) \\
 & + (0.0000291984 + 0.0000817054i) e^{(1.04468+3.33578i)u} ((-8.65899 - 7.33239i) + u) \\
 & \times ((21.9842 + 16.4703i)u) + e^{(1.04468+1.11193i)u} ((-0.00503919 - 0.000372671i) \\
 & + (0.0000291984 - 0.0000817054i)u^2)] [(-0.0465994 - 0.034551i) e^{-(1.04468+1.11193i)u} \\
 & - (0.0465994 - 0.034551i) e^{-(1.04468+3.33578i)u} + 0.493199 e^{-(3.77766+2.22385i)u}]
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Η γραφική παράσταση της δεύτερης δεσμευμένης ροπής δίνεται από το παρακάτω διάγραμμα 3.33.



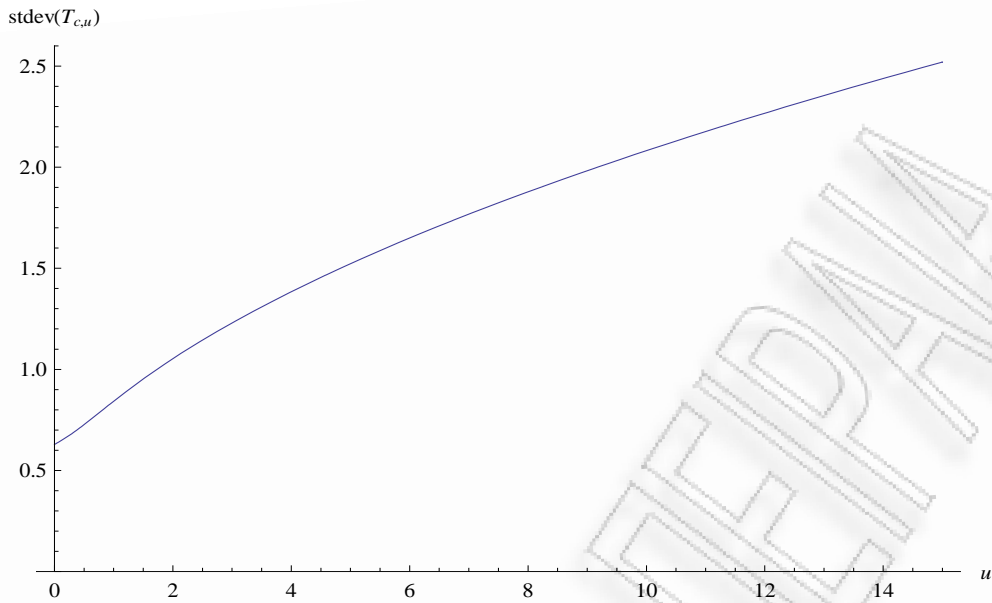
Σχήμα 3.33: Γραφική παράσταση της δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 1.5$.

Υπολογίζοντας την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της δεύτερης δεσμευμένης ροπής, στο *Mathematica*, προκύπτει ότι είναι μία αύξουσα και κυρτή συνάρτηση για κάθε $u \geq 0$. Αυτό σημαίνει ότι όσο μεγαλώνει το αρχικό αποθεματικό τόσο μεγαλώνει και ο ρυθμός αύξησης του αναμενόμενου χρόνου χρεοκοπίας. Κάτι τέτοιο ισχύει και στις προηγούμενες περιπτώσεις που εξετάσαμε.

Τέλος, υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση $stdev(T_{c,u})$ για την περίπτωση που $\theta = 1.5$, η οποία δίνεται από τη σχέση (3.20) και παρουσιάζεται γραφικά στο επόμενο Σχήμα 3.34.

Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 3.34, η τυπική απόκλιση για $\theta = 1.5$ είναι αρκετά μικρή για κάθε τιμή του u , σε σχέση με αυτή που είχαμε στις προηγούμενες περιπτώσεις και ειδικά στην περίπτωση που $\theta = 0.1$. Άρα συμπεραίνουμε ότι για μεγάλες τιμές του θ και έχοντας την πληροφορία ότι κάποια χρονική στιγμή θα επέλθει χρεοκοπία, είμαστε σχεδόν βέβαιοι ότι αυτή θα συμβεί γρηγορότερα από ότι για μικρές τιμές του θ . Για να εξετάσουμε όμως καλύτερα την τυπική απόκλιση που υπάρχει σε κάθε περίπτωση, δίνουμε στη συνέχεια ένα κοινό διάγραμμα και με τις τρεις τυπικές αποκλίσεις, όπου εκεί θα μπορούμε να δούμε καλύτερα αυτά που έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα.

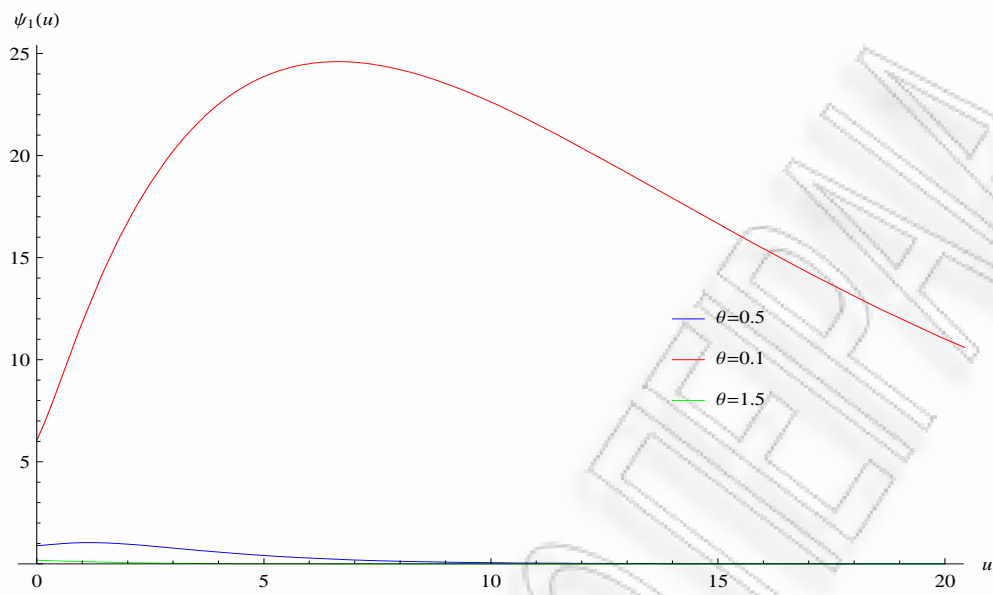
Αντίστοιχα όπως κάναμε και στις προηγούμενες περιπτώσεις, υπολογίζουμε τον συντελεστή μεταβλητότητας του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας για την περίπτωση που μελετάμε, δηλαδή για $\theta = 1.5$, και στη συνέχεια παρουσιάζουμε γραφικά τις τιμές του, για κάθε τιμή του u , στο κοινό διάγραμμα 3.38.



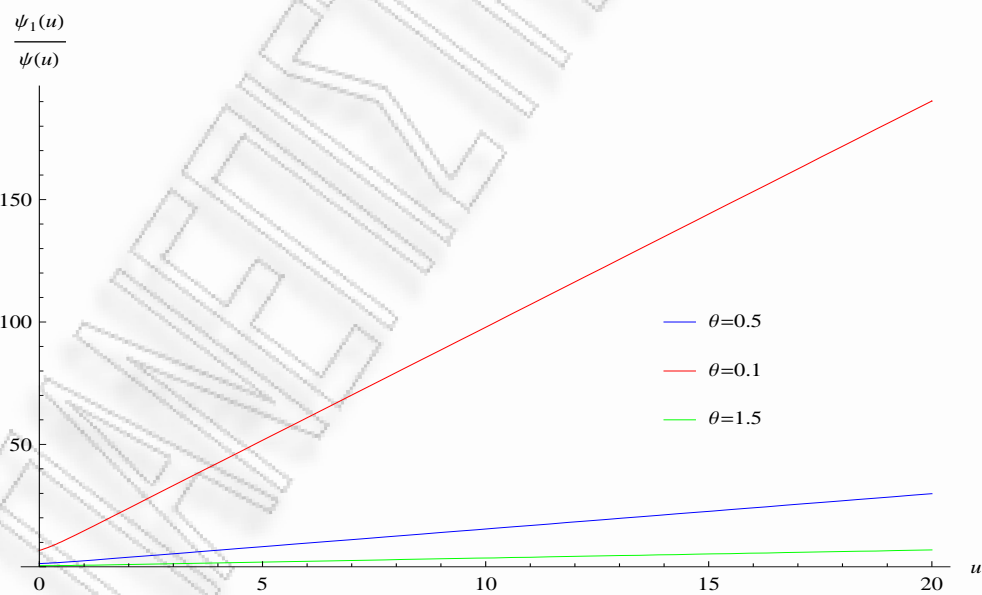
Σχήμα 3.34: Γραφική παράσταση της τυπικής απόκλισης του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(3,3) κατανομή με $\theta = 1.5$.

Τέλος για να δούμε με ποιον τρόπο επηρεάζει η τιμή του θ τις ποσότητες $\psi_1(u)$ και $\psi_1(u)/\psi(u)$ αντίστοιχα, κατασκευάζουμε δύο κοινά διαγράμματα που θα απεικονίζουν αυτές τις δύο συγκεκριμένες ποσότητες για όλες τις τιμές του θ που έχουμε πάρει στο παράδειγμά μας. Το πρώτο κοινό διάγραμμα της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για $\theta = 0.1, 0.5, 1.5$, δίνεται στο παρακάτω Σχήμα 3.35. Αντίστοιχα, το δεύτερο κοινό διάγραμμα της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για τις τρεις διαφορετικές τιμές που παίρνει το θ , παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.36.

Παρατηρώντας το κοινό διάγραμμα 3.35, μπορούμε να συνοψίσουμε τα συμπεράσματά μας όσον αφορά τον αναμενόμενο χρόνο έως τη χρεοκοπία. Γίνεται αντιληπτό ότι για μικρές τιμές του θ και στη συγκεκριμένη περίπτωση για $\theta = 0.1$, ο αναμενόμενος χρόνος χρεοκοπίας, $\psi_1(u)$, παίρνει μεγαλύτερες τιμές από ότι για μεγαλύτερες τιμές του θ . Αυτό σημαίνει ότι όσο μικρότερο είναι το περιθώριο κέρδους για έναν ασφαλιστή, τόσο περισσότερος χρόνος χρειάζεται, κατά μέσο όρο, για να συμβεί χρεοκοπία. Επίσης παρατηρούμε ότι όσο μικρότερη είναι η τιμή του θ , τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του αρχικού αποθεματικού u , στο οποίο παρουσιάζει η συνάρτηση $\psi_1(u)$ μέγιστο. Άρα όπως και στο παράδειγμα της Ενότητας 3.3 έτσι και εδώ, ισχύει ότι όσο πιο μικρό είναι το περιθώριο ασφαλείας, θ , τόσο δεξιότερα, προς το θετικό άξονα της γραφικής παράστασης της $\psi_1(u)$, μετατοπίζεται το σημείο u που παρουσιάζει μέγιστο η συνάρτηση. Τέλος, πρέπει να αναφέρουμε ότι για μεγάλες τιμές του θ και συγκεκριμένα εδώ για $\theta = 1.5$, η $\psi_1(u)$ είναι μία φθίνουσα συνάρτηση για κάθε μη-αρνητική τιμή του αρχικού αποθεματικού u . Επομένως λόγω αυτής της μονοτονίας, προκύπτει ότι ο αναμενόμενος χρόνος χρεοκοπίας παίρνει την μέγιστη τιμή του, για $u = 0$.



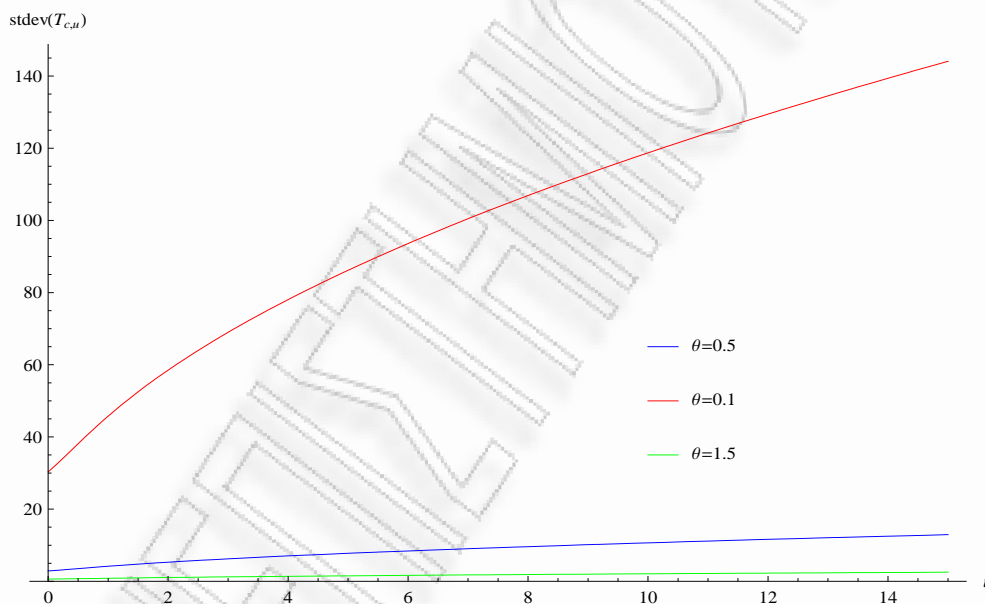
Σχήμα 3.35: Κοινό διάγραμμα της πρώτης μη-δεσμευμένης ροής του χρόνου χρεοκοπίας για $\theta = 0.5$, $\theta = 0.1$ και $\theta = 1.5$.



Σχήμα 3.36: Κοινό διάγραμμα της πρώτης δεσμευμένης ροής του χρόνου χρεοκοπίας για $\theta = 0.5$, $\theta = 0.1$ και $\theta = 1.5$.

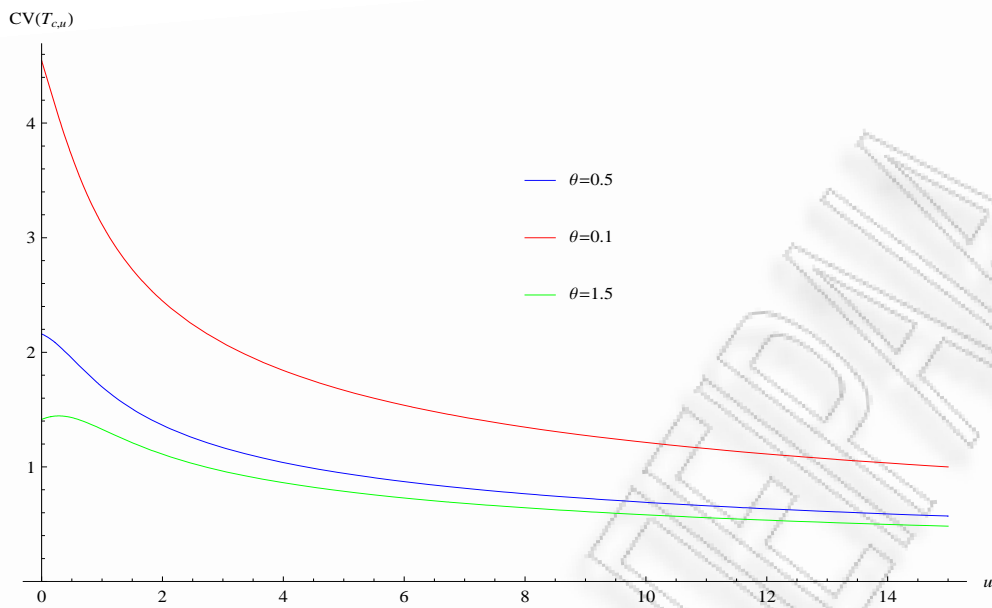
Όπως και στην περίπτωση της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής που αναλύσαμε παραπάνω, έτσι και εδώ στο Σχήμα 3.36 φαίνεται ξεκάθαρα ότι ο αναμενόμενος χρόνος χρεοκοπίας, δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία, είναι μεγαλύτερος στην περίπτωση που ισχύει $\theta = 0.1$. Όπως όμως έχουμε αναφέρει αρκετές φορές έως τώρα, αυτό είναι πολύ παράξενο σύμφωνα με αυτά που γνωρίζουμε στη θεωρία κινδύνου να ισχύει κάτι τέτοιο. Το αναμενόμενο ήταν να συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο. Όμως δεν μπορεί να πει κάποιος εδώ με σιγουριά ότι όσο μικρότερο είναι το περιθώριο ασφαλείας τόσο καλύτερο είναι για την ασφαλιστική εταιρεία. Για να δοθούν πιο ασφαλή συμπεράσματα θα πρέπει να γίνει και μία μελέτη της μεταβλητότητας που παρουσιάζει η ποσότητα $\psi_1(u)/\psi(u)$.

Επομένως, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που κάναμε και πριν, κατασκευάζουμε ένα ακόμα κοινό διάγραμμα που αυτή τη φορά θα περιέχει από κοινού τις γραφικές παραστάσεις της τυπικής απόκλισης για κάθε μία από τις περιπτώσεις που έχουν μελετηθεί. Το συγκεκριμένο διάγραμμα παρουσιάζεται στο παρακάτω Σχήμα 3.37 και μας βοηθάει να επιβεβαιώσουμε τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε παραπάνω.



Σχήμα 3.37: Κοινό διάγραμμα της τυπικής απόκλισης του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας, για $\theta = 0.5$, $\theta = 0.1$ και $\theta = 1.5$.

Τέλος παρουσιάζουμε στο παρακάτω Σχήμα 3.38, τις γραφικές παραστάσεις του συντελεστή μεταβλητότητας που υπολογίσαμε για κάθε μία περίπτωση. Έτσι με αυτό τον τρόπο μπορούμε να δούμε ξεκάθαρα σε ποια περίπτωση, ο δεσμευμένος χρόνος χρεοκοπίας έχει μεγαλύτερη μεταβλητότητα ανά χρονική μονάδα που αναμένουμε μέχρι να επέλθει η χρεοκοπία.



Σχήμα 3.38: Κοινό διάγραμμα του συντελεστή μεταβλητότητας της τ.μ T_c , για $\theta = 0.5$, $\theta = 0.1$ και $\theta = 1.5$.

Από το Σχήμα 3.38, παρατηρούμε ότι για $\theta = 0.1$ ο συντελεστής μεταβλητότητας του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας είναι αρκετά μεγαλύτερος σε σχέση με τις άλλες δύο περιπτώσεις. Συγκεκριμένα για πολύ μικρές τιμές του u , υπάρχει αισθητή διαφορά ανάμεσα σε αυτές τις τιμές ενώ όσο μεγαλώνει το αρχικό αποθεματικό τόσο μικραίνει και η διαφορά, καθώς οι τιμές του συντελεστή φθίνουν απότομα. Επίσης πρέπει να επισημάνουμε την μικρή διαφορά στις τιμές του συντελεστή, για μεγάλες τιμές του u , ανάμεσα στις περιπτώσεις που ισχύει ότι $\theta = 0.5$ και $\theta = 1.5$.

Τέλος μπορούμε να συγκρίνουμε τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας που εξετάσαμε σε αυτή την ενότητα, με τις ροπές που εξετάζουμε στο Παράρτημα Γ' καθώς η μόνη διαφορά στις δύο περιπτώσεις είναι η κατανομή των αποζημιώσεων. Και στα δύο παραδείγματα έχουμε υποθέσει τις ίδιες τιμές για το περιθώριο ασφαλείας θ , καθώς και οι δύο κατανομές των αποζημιώσεων έχουν μέση τιμή $p_1 = 1$. Έτσι συγκρίνοντας τα διαγράμματα που έχουμε κατασκευάσει σε κάθε περίπτωση, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση της Γάμμα(3,3) κατανομής ενώ η πρώτη μη-δεσμευμένη ροπή είναι αρκετά μεγαλύτερη και στις τρεις περιπτώσεις, ο αναμενόμενος χρόνος χρεοκοπίας δοθέντος όμως ότι αυτή θα συμβεί είναι λίγο μεγαλύτερος από ότι στην περίπτωση της Γάμμα(10,10). Επίσης παρατηρούμε ότι και η τυπική απόκλιση είναι μεγαλύτερη, λόγω της μεγάλης δεύτερης δεσμευμένης ροπής, στην περίπτωση της Γάμμα(3,3) κατανομής καθώς και το ότι για όλες τις τιμές του θ το αρχικό αποθεματικό για το οποίο παρουσιάζουν οι μη-δεσμευμένες ροπές μέγιστο, μετατοπίζεται προς τα δεξιά του θετικού άξονα δηλαδή οι τιμές του είναι μεγαλύτερες στην περίπτωση της Γάμμα(3,3) κατανομής.

Κεφάλαιο 4

Νέες προσεγγίσεις για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας.

Με τη βοήθεια των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας που δόθηκαν αναλυτικά στο προηγούμενο κεφάλαιο, προσπαθούμε μέσω μίας σκέψης που κάναμε να κατασκευάσουμε δύο νέες προσεγγίσεις για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας που να χρησιμοποιούν αυτές τις ροπές. Αφού για τα αριθμητικά παραδείγματα που έχουμε χρησιμοποιήσει υπολογίσαμε τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας, συναρτήσεως του u , η ιδέα των νέων προσεγγίσεων βασίζεται στο να προσεγγίσουμε την κατανομή που ακολουθεί το πλήθος των απαιτήσεων που φθάνουν σε μία ασφαλιστική εταιρεία, γνωρίζοντας ότι κάποια χρονική στιγμή η χρεοκοπία θα συμβεί.

4.1 Οι νέες προσεγγίσεις μέσω αρνητικής διωνυμικής κατανομής και κατανομής Poisson

Αναλύσαμε διεξοδικά στο Κεφάλαιο 2 το πώς λειτουργούν οι προσεγγίσεις *DeVylder* και *Tijms* για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, καθώς και δώσαμε δύο παραδείγματα έτσι ώστε να κατανοηθεί πλήρως το πώς χρησιμοποιούνται αλλά και να δούμε πόσο καλές είναι οι συγκεκριμένες προσεγγίσεις για τις κατανομές των αποζημιώσεων που μελετάμε, δηλαδή να δούμε πόσο κοντά πέφτουν οι προσεγγιστικές με τις πραγματικές τιμές. Στόχος του τέταρτου κεφαλαίου είναι να εισαγάγουμε μία καινούρια προσέγγιση η οποία να είναι σαφώς καλύτερη από την προσέγγιση *DeVylder*, καθώς και να είναι σε κάποιες περιπτώσεις καλύτερη από την προσέγγιση του *Tijms*. Όπως είχαμε αναφέρει και στο δεύτερο κεφάλαιο, η προσέγγιση *Tijms* είναι μία πάρα πολύ καλή προσέγγιση η οποία

δεν χρησιμοποιείται μόνο στη θεωρία κινδύνου, αλλά και σε άλλους επιστημονικούς τομείς όπως η Φυσική και η θεωρία αξιοπιστίας. Η προσέγγιση *Tijms* έχει πολλά πλεονεκτήματα, καθώς είναι κατανοητή και πολύ εύκολη στην εφαρμογή της, λειτουργεί πολύ καλά για τις κατανομές αποζημιώσεων που μελετάμε, για διάφορες τιμές της παραμέτρου δ , αλλά και για άλλες κατανομές που έχουν ελαφριά ουρά. Είναι επίσης ακριβής για μείξη δύο εκθετικών κατανομών και έχει σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά για $u \rightarrow \infty$. Αυτό είναι πολύ σημαντικό στοιχείο της προσέγγισης, καθώς με ένα πολύ εύκολο τρόπο καταφέρνει να προσεγγίζει με ακρίβεια τις πραγματικές τιμές του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, για μεγάλες τιμές του u . Κάτι τέτοιο φαίνεται ξεκάθαρα και στα διαγράμματα που είχαμε κατασκευάσει με το ποσοστό σφάλματος της προσέγγισης, όπου εκεί διακρίνουμε ότι για μεγάλες τιμές του u το ποσοστό σφάλματος είναι σχεδόν μηδενικό. Επομένως θα προσπαθήσουμε να φτιάξουμε μία καινούρια προσέγγιση η οποία να είναι καλύτερη για εκείνες τις τιμές του αρχικού αποθεματικού u , για τις οποίες η προσέγγιση δεν είναι τελείως ακριβής. Έτσι η δικιά μας προσέγγιση θα πρέπει να υπερτερεί για πολύ μικρές τιμές του αρχικού αποθεματικού u σε σχέση με την προσέγγιση *Tijms*. Είναι φανερό ότι αυτό που θέλουμε περισσότερο είναι να έχουμε μία προσέγγιση η οποία να είναι πολύ καλή για μικρές τιμές του u , δηλαδή εκεί όπου καμία προσέγγιση δεν ήταν ακριβής στα παραδείγματα των ενότητων 2.2 και 2.3, και αυτό γιατί μία ασφαλιστική εταιρεία συνήθως δεν κρατάει μεγάλα ποσά για αρχικό αποθεματικό. Οπότε πρέπει να γνωρίζει, έχοντας μικρότερο ποσοστό λάθους στην προσέγγιση, τις τιμές που παίρνει ο μετασχηματισμός *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, για κάθε τιμή του u . Η προσέγγιση που θα αναπτύξουμε στη συνέχεια έχει το πλεονέκτημα ότι είναι εύκολη στο να την κατανοήσει κάποιος και ότι είναι πάρα πολύ καλή για μικρές τιμές του u . Το κύριο μειονέκτημά της είναι ο αρκετά πολύπλοκος και χρονοβόρος υπολογισμός της καθώς και το ότι, λόγω επιπλέον δυσκολίας, δεν βάζουμε κάποια συνθήκη έτσι ώστε να έχει σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά για μεγάλες τιμές του u ή να είναι ίση με την πραγματική τιμή για $u = 0$. Κάτι τέτοιο δεν μας απασχολεί καθόλου, καθώς μπορούμε να συνδυάσουμε την νέα προσέγγιση με αυτή του *Tijms*. Έτσι εκεί που είναι καλύτερη του *Tijms*, δηλαδή για $u = 0$ και για $u \rightarrow \infty$, παίρνουμε αυτή την προσέγγιση, ενώ για μικρές τιμές του u επιλέγουμε την νέα προσέγγιση. Βέβαια κάτι τέτοιο ισχύει για τις κατανομές αποζημιώσεων που παίρνουμε στα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν στις επόμενες ενότητες και όχι για κατανομές αποζημιώσεων που η προσέγγιση *Tijms* είναι ακριβής. Επίσης πρέπει να αναφέρουμε ότι η νέα προσέγγιση λειτουργεί καλά μόνο για μικρές τιμές του δ , ενώ όπως θα δούμε στη συνέχεια είναι πολύ καλύτερη από την προσέγγιση *Tijms* για μεγάλες τιμές του θ , για τις οποίες η προσέγγιση *Tijms* “χαλαίει” περισσότερο από ότι η νέα προσέγγιση που επινοήσαμε (βλέπε *Tijms* (1986)).

Πριν ξεκινήσουμε με το να εξηγήσουμε την ιδέα που υπάρχει πίσω από αυτή τη προσέγγιση, θα πρέπει να ορίσουμε αναλυτικά την έννοια της τ.μ T_c που χρησιμοποιήσαμε για

πρώτη φορά στο προηγούμενο κεφάλαιο και η οποία εκφράζει τον χρόνο χρεοκοπίας δοθέντος ότι κάποια στιγμή επέρχεται χρεοκοπία. Εδώ η ελλειμματική τ.μ T που εκφράζει το χρόνο χρεοκοπίας και η οποία δίνεται από τη σχέση (1.6), δεν μας είναι χρήσιμη και επομένως δεν μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για αυτή την προσέγγιση. Για αυτό τον λόγο ορίζουμε την “κανονικοποιημένη” (*proper*)¹ τ.μ $T_c = T|T < \infty$, η οποία δηλώνει τον δεσμευμένο χρόνο μέχρι την χρεοκοπία. Η κανονική τ.μ T_c , στη γενική περίπτωση ισούται με

$$T_c = \sum_{i=1}^{K^*} T_i, \quad K^* = 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

όπου τα T_i εκφράζουν τους ενδιαμέσους χρόνους άφιξης των απαιτήσεων για αποζημίωση. Επίσης η τ.μ $K^* = K|$ συμβαίνει χρεοκοπία, εκφράζει τον αριθμό των αποζημιώσεων, που φθάνουν σε μία ασφαλιστική εταιρεία, έως ότου επέλθει η χρεοκοπία, δοθέντος² ότι κάποια στιγμή θα επέλθει η χρεοκοπία. Όπως έχουμε αναφέρει, για να υπάρξει χρεοκοπία θα πρέπει να έρθει μία αποζημίωση το μέγεθος της οποίας θα ρίξει το αποθεματικό κάτω από το μηδέν. Επομένως για να συμβεί χρεοκοπία, όταν ήδη γνωρίζουμε ότι κάποια χρονική στιγμή επέρχεται χρεοκοπία, θα πρέπει να συμβεί τουλάχιστον μία απαίτηση για αποζημίωση, δηλαδή προκύπτει ότι η τ.μ K^* , στη σχέση (4.1), δεν μπορεί να παίρνει την τιμή 0 γιατί αλλιώς δεν θα συνέβαινε ποτέ χρεοκοπία. Οπότε η αρχική ιδέα για την δημιουργία της προσέγγισης ήταν η τ.μ K^* να παίρνει τις τιμές $1, 2, \dots$. Κατασκευάζοντας όμως την νέα προσέγγιση διαπιστώσαμε ότι δεν λειτουργεί για τις συγκεκριμένες τιμές, αλλά αντιθέτως λειτουργεί εξαιρετικά για $K^* = 0, 1, 2, \dots$. Βέβαια, στην πράξη υπάρχει πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία χωρίς να έχει πραγματοποιηθεί αποζημίωση και αυτό μπορεί να συμβεί εξαιτίας κάποιων λανθασμένης διαχείρισης ή από την πραγματοποίηση κάποιων κινδύνων οι οποίοι είναι λιγότερο ορατοί αλλά καταστροφικοί όταν συμβούν, όπως είναι ο λειτουργικός κίνδυνος, είτε από την αβεβαιότητα γενικά που επικρατεί στην οικονομία. Με αυτούς τους παράγοντες δεν θα ασχοληθούμε στην παρούσα εργασία, καθώς δεν είναι μέρος της θεωρίας κινδύνου αλλά ενός άλλου μεγάλου τομέα όπως είναι η διαχείριση κινδύνων (*Risk Management*). Στη συνέχεια θα αναπτύξουμε την ιδέα που υπάρχει πίσω από αυτές τις προσεγγίσεις, παίρνοντας ότι η τ.μ K^* παίρνει ακέραιες θετικές τιμές, ενώ για την πρακτική εφαρμογή των προσεγγίσεων θεωρούμε ότι η τ.μ K^* παίρνει και την τιμή μηδέν, καθώς μετά από αρκετές δοκιμές, καταλήξαμε ότι έτσι λειτουργεί καλύτερα η προσέγγιση.

Αφού ορίσαμε ποια είναι η έννοια της τ.μ T_c , μπορούμε τώρα να εκφράσουμε με σύμβολα τι σημαίνει μετασχηματισμός *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας. Όπως είχαμε αναφέρει και στη σχέση (1.7), η πιθανότητα χρεοκοπίας εκφράζεται και ως αναμενόμενη τιμή μιας

¹Εδώ εννοούμε ότι η T_c είναι μία κανονική (*proper*) τ.μ, καθώς ισχύει ότι $Pr(T_c = \infty) = 0$.

²Όπως γίνεται αντιληπτό, λόγω της δέσμευσης που προσθέσαμε στην τ.μ K , η K^* είναι μία κανονικοποιημένη τ.μ, η δημιουργία της οποίας παίζει σημαντικό ρόλο στη συνέχεια που θα εξηγήσουμε μαθηματικά την ιδέα της νέας προσέγγισης.

δείκτριας συνάρτησης που έχει ως ενδεχόμενο ότι ο χρόνος χρεοκοπίας είναι πεπερασμένος, δηλαδή έχουμε την πληροφορία ότι κάποια στιγμή θα συμβεί χρεοκοπία. Αντίστοιχα ο μετασχηματισμός *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας εκφράζεται ως αναμενόμενη τιμή του παράγοντα *Laplace* δ , του χρόνου χρεοκοπίας T , πολλαπλασιασμένο με την δείκτρια συνάρτηση του ενδεχομένου ότι κάποια χρονική στιγμή επέρχεται χρεοκοπία. Επομένως ο μετασχηματισμός *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, εκφράζεται μαθηματικά ως

$$\bar{K}_\delta(u) = E(e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = u)$$

Δεσμεύοντας και ως προς την τ.μ του πλήθους των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεοκοπία, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, K^* , και αθροίζοντας το k στο διάστημα $[1, \infty)$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \bar{K}_\delta(u) &= E(e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = u) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} E(e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = u, K^* = k) Pr(K^* = k) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Όμως μέσω της σχέσης (4.1), μπορούμε να βρούμε μία σχέση που να συνδέει την κανονική τ.μ T_c με την ελλειμματική τ.μ T . Έτσι παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \bar{K}_\delta(u) &= E(e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = u) \\ &= \psi(u) E(e^{-\delta T_c} | U(0) = u), \end{aligned}$$

επειδή ισχύει ότι

$$e^{-\delta T} I(T < \infty) = e^{-\delta T_c} \quad (4.3)$$

Επομένως προκύπτει ότι μέσω της σχέσης (4.3), η σχέση (4.2) μπορεί να γραφτεί συναρτήσει της τ.μ T_c , ως

$$\bar{K}_\delta(u) = \sum_{k=1}^{\infty} E(e^{-\delta T_c} | U(0) = u, K^* = k) \psi(u) Pr(K^* = k) \quad (4.4)$$

Από τη σχέση (4.4), βλέπουμε πόσο χρήσιμη είναι η τ.μ K^* που ορίσαμε παραπάνω, καθώς

αν δεν υπήρχε η δέσμευση στην τ.μ K^* τότε στη θέση της θα είχαμε την ελλειμματική τ.μ K που θα είχε ως αποτέλεσμα να μην ισχύει η σχέση. Συγκεκριμένα για $\delta = 0$, το αριστερό μέλος της σχέσης (4.4) ισούται με την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$, ενώ και το δεξιό μέλος ισούται με την πιθανότητα χρεοκοπίας, αφού ισχύει ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(u) Pr(K^* = k) = \psi(u),$$

καθώς η τ.μ K^* είναι μία κανονικοποιημένη τ.μ και ισχύει ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} Pr(K^* = k) = 1.$$

Επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η σχέση (4.4) ισχύει μόνο στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε την δεσμευμένη τ.μ K^* .

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.1), η σχέση (4.4) γράφεται ως

$$\bar{K}_{\delta}(u) = \sum_{k=1}^{\infty} E \left[e^{-\delta \sum_{i=1}^{K^*} T_i} \mid U(0) = u, K^* = k \right] \psi(u) Pr(K^* = k)$$

Επειδή όμως τα T_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες³ τυχαίες μεταβλητές, ισχύει ότι

$$\bar{K}_{\delta}(u) = \sum_{k=1}^{\infty} [E(e^{-\delta T_1})]^k Pr(K^* = k) \psi(u) \quad (4.5)$$

Από τη σχέση (4.5), αυτό που δεν ξέρουμε είναι τι κατανομή ακριβώς ακολουθεί η τ.μ K^* . Όλα τα υπόλοιπα είναι γνωστά, καθώς ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό *Laplace* μιας εκθετικής κατανομής, ο οποίος υπολογίζεται εύκολα μέσω της σχέσης (1.25) και ο τρίτος όρος αντιστοιχεί στην πιθανότητα χρεοκοπίας, την εύρεση της οποίας έχουμε αναλύσει διεξοδικά στο Κεφάλαιο 2. Έτσι προσεγγίζοντας την κατανομή του K^* από κάποια γνωστή διακριτή κατανομή, αντιστοιχεί σαν να έχουμε βρεί μία προσέγγιση για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας. Επομένως το μόνο που χρειάζεται είναι να βρούμε μία κατάλληλη διακριτή κατανομή που να προσεγγίζει όσο το δυνατό καλύτερα την πραγματική κατανομή του K^* , η οποία είναι άγνωστη ως προς εμάς. Επειδή χρησιμοποιούμε δύο διαφορετικές διακριτές κατανομές για την προσέγγιση της τ.μ K^* , γενικά θα

³Επειδή είναι ισόνομες τ.μ, έχουν όλα τα T_i την ίδια κατανομή με την T_1 .

συμβολίζουμε την προσέγγιση της σχέσης (4.5) ως $\bar{K}_\delta^{MP}(u)$, λόγω του ότι δημιουργήθηκε από τους Μαλαξιανάκη και Πολίτη. Η συγκεκριμένη προσέγγιση, στην πράξη, δεν λειτουργεί έτσι ακριβώς όπως έχει δοθεί στη σχέση (4.5) και για αυτό τον λόγο στον υπολογισμό της προσέγγισης, για κάθε τιμή του u , στα αριθμητικά παραδείγματα που θα ακολουθήσουν παίρνουμε ότι το k αθροίζει από το 0 έως το $+\infty$. Εδώ πρέπει να αναφέρουμε ότι στην ουσία μιλάμε για μία νέα προσέγγιση καθώς η ιδέα είναι η ίδια και για τις δύο προσεγγίσεις. Το μόνο που αλλάζει είναι ότι επιλέγουμε δύο διαφορετικές διακριτές κατανομές οι οποίες όμως συνδέονται κατά κάποιο τρόπο μεταξύ τους. Η αρχική σκέψη ήταν η επιλογή μίας μόνο κατανομής, αλλά λόγω δυσκολιών που αναλύουμε στη συνέχεια της ενότητας, παίρνουμε ακόμα μία κατανομή. Για την κατασκευή της πρώτης προσέγγισης, η κατανομή που επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε στον τύπο (4.5), για τον όρο $Pr(K^* = k)$, είναι η αρνητική διωνυμική κατανομή. Να θυμίσουμε από τη θεωρία πιθανοτήτων, ότι η αρνητική διωνυμική κατανομή εκφράζει την κατανομή του αριθμού των αποτυχιών σε μία σειρά από δοκιμές *Bernoulli*, μέχρι την εμφάνιση της r επιτυχίας. Αν εδώ συμβολίσουμε ως αποτυχία την μη-εμφάνιση αποζημίωσης με σταθερή πιθανότητα q και ως επιτυχία την εμφάνιση αποζημίωσης με σταθερή πιθανότητα⁴ p , τότε μιλάμε για μία αρνητική διωνυμική κατανομή με δύο παραμέτρους r και p , η οποία συμβολίζεται ως $NB(r, p)$ και έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$\begin{aligned} Pr(K^* = k) &= \binom{r+k-1}{r-1} p^r q^k \\ &= \frac{(r+k-1)!}{k!(r-1)!} p^r q^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.6)$$

Άρα χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.6) και (1.25), από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού *Laplace*, καταλήγουμε ότι η νέα προσέγγιση μέσω αρνητικής διωνυμικής κατανομής, την οποία θα την συμβολίζουμε ως $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, ισούται με

$$\bar{K}_\delta^{NB}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta} \right)^k \frac{(r+k-1)!}{k!(r-1)!} p^r (1-p)^k \psi(u) \quad (4.7)$$

Επειδή στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με δύο προσεγγίσεις, οι οποίες ουσιαστικά έχουν την ίδια λογική ως προς την δημιουργία τους, δίνουμε διαφορετικό όνομα στην προσέγγιση για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, ανάλογα με το ποια προσεγγιστική κατανομή χρησιμοποιούμε για την τ.μ K^* .

Στην θεωρία πιθανοτήτων η αρνητική διωνυμική κατανομή χρησιμοποιείται συνήθως για

⁴Ισχύει ότι η πιθανότητα αποτυχίας και η πιθανότητα επιτυχίας πρέπει να αθροίζουν στην μονάδα, δηλαδή ισχύει ότι $p + q = 1$.

ακέραιες τιμές του r , εδώ όμως για την προσέγγιση που φτιάχνουμε χρησιμοποιούμε πραγματικές τιμές για το r , όπως αυτές δίνονται από την λύση ενός συστήματος το οποίο θα εξηγήσουμε αναλυτικά στη συνέχεια.

Με τη βοήθεια του *Mathematica* μπορούμε να υπολογίσουμε τις ήδη γνωστές, από τη θεωρία πιθανοτήτων, ροπές της αρνητικής διωνυμικής κατανομής. Έτσι παίρνουμε ότι η μέση τιμή της συνάρτησης πυκνότητας (4.6), ισούται με

$$\begin{aligned}
 E(K^*) &= \sum_{k=0}^{\infty} k Pr(K^* = k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(r+k-1)!}{k!(r-1)!} p^r q^k \\
 &= r \frac{1-p}{p}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Η δεύτερη κεντρική ροπή της αρνητικής διωνυμικής ισούται με

$$\begin{aligned}
 E(K^{*2}) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 Pr(K^* = k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{(r+k-1)!}{k!(r-1)!} p^r q^k \\
 &= \frac{qr(1+qr)}{p^2}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Επομένως από τις σχέσεις (4.8) και (4.9), προκύπτει ότι η διακύμανση της αρνητικής διωνυμικής ισούται με

$$\begin{aligned}
 Var(K^*) &= E(K^{*2}) - [E(K^*)]^2 \\
 &= r \frac{1-p}{p^2}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Στη συνέχεια αφού υπολογίσαμε τις ροπές της τ.μ K^* , θέλουμε να βρούμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους για να υπολογίσουμε τις παραμέτρους r και p που χρησιμοποιούνται στην συνάρτηση πυκνότητας $Pr(K^* = k)$, στη σχέση (4.5). Είχαμε αναφέρει στην Ενότητα 3.1, στην οποία αναπτύξαμε λεπτομερώς τις ροπές των σύνθετων κατανομών, ότι για την μέση τιμή και διακύμανση μίας σύνθετης τ.μ ισχύουν οι σχέσεις (3.4) και (3.5) αντίστοιχα. Η τ.μ T_c , που δίνεται από τη σχέση (4.1), είναι μία σύνθετη τ.μ καθώς τ.μ K^* έχουμε υποθέσει ότι ακολουθεί μία αρνητική διωνυμική κατανομή. Επομένως, προσεγγιστικά, η τ.μ T_c ακολουθεί μία σύνθετη αρνητική διωνυμική κατανομή.

Για την μέση τιμή της τ.μ T_c , ισχύει

$$E(T_c) = E(K^*) \cdot E(T_i) \quad (4.11)$$

Για να υπολογίσουμε τώρα την μέση τιμή της τ.μ K^* που μας ενδιαφέρει, θα πρέπει να λύσουμε τη σχέση (4.11) ως προς $E(K^*)$. Επομένως προκύπτει ότι

$$E(K^*) = \frac{E(T_c)}{E(T_i)}. \quad (4.12)$$

Όμως η μέση τιμή της σύνθετης τ.μ T_c είναι ισοδύναμη με την πρώτη δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας $\psi_1(u)/\psi(u)$, την οποία ορίσαμε αναλυτικά στην Ενότητα 3.2. Επομένως ισχύει ότι

$$\begin{aligned} E(T_c) &= E[T|I(T < \infty)] \\ &= \frac{E[T \cdot I(T < \infty)]}{E[I(T < \infty)]} \\ &= \frac{\psi_1(u)}{\psi(u)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4.13) στη σχέση (4.12), προκύπτει ότι η μέση τιμή της τ.μ K^* ισούται με

$$E(K^*) = \frac{\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}}{\frac{1}{\lambda}} = \lambda \frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}. \quad (4.14)$$

Αντίστοιχα για τη διακύμανση της τ.μ T_c , ισχύει

$$\text{Var}(T_c) = E(K^*) \text{Var}(T_i) + E^2(T_i) \text{Var}(K^*) \quad (4.15)$$

Για να υπολογίσουμε τη διακύμανση της τ.μ K^* , λύνουμε τη σχέση (4.15) ως προς το $\text{Var}(K^*)$. Επομένως παίρνουμε

$$\text{Var}(K^*) = \frac{\text{Var}(T_c) - E(K^*) \text{Var}(T_i)}{E^2(T_i)}$$

Όμως, η διακύμανση της τ.μ T_c ισούται με το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης, σχέση (3.20) που υπολογίσαμε στα Παραδείγματα των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας, στις Ενότητες 3.3 και 3.4. Συγκεκριμένα παίρνουμε⁵

$$\begin{aligned} \text{Var}(T_c) &= E(T_c^2) - E^2(T_c) \\ &= \frac{\psi_2(u)}{\psi(u)} - \left(\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)} \right)^2 \\ &= \frac{\psi_2(u) \psi(u) - \psi_1^2(u)}{\psi^2(u)} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Επομένως μέσω της σχέσης (4.16), προκύπτει

$$\begin{aligned} \text{Var}(K^*) &= \frac{\frac{\psi_2(u) \psi(u) - \psi_1^2(u)}{\psi^2(u)} - \frac{\lambda \psi_1(u)}{\psi(u)} \frac{1}{\lambda^2}}{\frac{1}{\lambda^2}} \\ &= \lambda^2 \frac{\psi_2(u) \psi(u) - \psi_1^2(u) - \frac{\psi_1(u) \psi(u)}{\lambda}}{\psi^2(u)} \\ &= \lambda^2 \left[\frac{\psi_2(u)}{\psi(u)} - \left(\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)} \right)^2 \right] - \lambda \frac{\psi_1(u)}{\psi(u)} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας όμως τις σχέσεις (4.13) και (4.16), καταλήγουμε στη σχέση

$$\text{Var}(K^*) = \lambda^2 \text{Var}(T_c) - \lambda E(T_c) \quad (4.17)$$

⁵Εδώ η δεύτερη κεντρική ροπή αφορά την τ.μ $T_c^2 = T^2|T < \infty$ και ισούται με τη δεύτερη δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας, $\psi_2(u)/\psi(u)$.

Επειδή όμως η διακύμανση είναι μία μη-αρνητική ποσότητα, θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\lambda \left[\frac{\psi_2(u)}{\psi(u)} - \left(\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)} \right)^2 \right] \geq \frac{\psi_1(u)}{\psi(u)} \Rightarrow$$

$$\lambda \text{Var}(T_c) \geq E(T_c)$$

Γνωρίζοντας τις σχέσεις (4.14) και (4.17), μπορούμε να υπολογίσουμε την δεύτερη κεντρική ροπή της τ.μ K^* και στη συνέχεια μέσω αυτής να δείξουμε κάποιες σχέσεις που πρέπει να ισχύουν. Επομένως καταλήγουμε ότι η δεύτερη κεντρική ροπή της τ.μ K^* , ισούται με

$$\begin{aligned} E(K^{*2}) &= \text{Var}(K^*) + E^2(K^*) \\ &= \lambda^2 \left[\frac{\psi_2(u)}{\psi(u)} - \left(\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)} \right)^2 \right] - \lambda \frac{\psi_1(u)}{\psi(u)} + \left(\lambda \frac{\psi_1(u)}{\psi(u)} \right)^2 \\ &= \lambda^2 \frac{\psi_2(u) - \frac{\psi_1(u)}{\lambda}}{\psi(u)}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Για να είναι θετική (> 0) η δεύτερη ροπή, θα πρέπει να ισχύει πάντα ότι

$$\psi_2(u) > \frac{\psi_1(u)}{\lambda}$$

Ένα άλλο σημαντικό ερώτημα που αφορά τις σχέσεις που αναπτύξαμε παραπάνω, είναι το πότε ισχύει ότι

$$E(K^{*2}) \geq 2E^2(K^*) \quad (4.19)$$

Ανισότητες αυτής της μορφής εμφανίζονται συχνά και έχουν ιδιαίτερη σημασία στη θεωρία αξιοπιστίας. Διαισθητικά μπορούμε να πούμε ότι αν ισχύει η σχέση (4.19), η κατανομή της K^* έχει βαριά ουρά ενώ αν ισχύει η αντίστροφη ανισότητα

$$E(K^{*2}) \leq 2E^2(K^*),$$

η κατανομή της K^* έχει ελαφριά ουρά. Ακριβέστερα, μία κλάση κατανομών αξιοπιστίας για την οποία ισχύει η σχέση (4.19) είναι η κλάση *NWUE* (*new worse than used in expectation*),

ενώ η αντίστροφη ανισότητα ισχύει για κατανομές που ανήκουν στην κλάση αξιοπιστίας *NBUE* (*new better than used in expectation*). Επίσης πρέπει να αναφέρουμε ότι για την περίπτωση της εκθετικής κατανομής με παράμετρο β ισχύει η ισότητα στη σχέση (4.19). Αυτό φαίνεται εύκολα καθώς γνωρίζουμε ότι η πρώτη κεντρική ροπή της $Exp(\lambda)$ ισούται με λ^{-1} και η δεύτερη κεντρική ροπή με $2\lambda^{-2}$. Επομένως αντικαθιστώντας τις ροπές της εκθετικής κατανομής στη σχέση (4.19), καταλήγουμε ότι ισχύει η ισότητα. Για περισσότερες λεπτομέρειες, βλέπε για παράδειγμα το βιβλίο των Müller & Stoyan (2002).

Παίρνοντας το δεύτερο μέλος της ανίσωσης (4.19), προκύπτει από την (4.14) ότι

$$2E^2(K^*) = 2\lambda^2 \frac{\psi_1^2(u)}{\psi^2(u)}$$

Από την άλλη, το πρώτο μέλος της (4.19) έχει υπολογιστεί στη σχέση (4.18), την οποία φέρνουμε στην μορφή που έχει το $2E^2(K^*)$ και πιο συγκεκριμένα

$$E(K^{*2}) = \lambda^2 \frac{\left(\psi_2(u) - \frac{\psi_1(u)}{\lambda}\right) \psi(u)}{\psi^2(u)}$$

Άρα ισχύει η ανισοτική σχέση (4.19), αν και μόνο αν ισχύει ότι

$$\left(\psi_2(u) - \frac{\psi_1(u)}{\lambda}\right) \psi(u) \geq 2\psi_1^2(u)$$

Αφού υπολογίσαμε την μέση τιμή και τη διακύμανση της τ.μ K^* , έτσι όπως προέκυψαν από τη σχέση (4.1) αλλά και από την προσέγγιση που πήραμε ότι η τ.μ $K^* \sim NB(r, p)$, στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των ροπών. Έτσι εξισώνουμε την πρώτη ροπή, σχέση (4.14), με την μέση τιμή της αρνητικής διωνυμικής, που δώσαμε στη σχέση (4.8), καθώς και τη διακύμανση, σχέση (4.17), με τη διακύμανση της αρνητικής διωνυμικής, που δίνεται από τη σχέση (4.10). Δηλαδή παίρνουμε ότι

$$\lambda E(T_c) = r \frac{1-p}{p} \tag{4.20}$$

$$\lambda^2 Var(T_c) - \lambda E(T_c) = r \frac{1-p}{p^2}$$

Με αυτό τον τρόπο καταλήξαμε σε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους οι οποίοι είναι οι παράμετροι r και p της αρνητικής διωνυμικής κατανομής. Έτσι αφού βρέθηκε ένας τρόπος στο να υπολογίζονται οι παράμετροι, χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.7) και με τη

βοήθεια του *Mathematica*, προκύπτουν οι προσεγγιστικές τιμές για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας για τις διάφορες τιμές του αρχικού αποθεματικού u . Πρέπει να επισημάνουμε ότι για να υπολογιστούν οι τιμές αυτής της νέας προσέγγισης, θα πρέπει να γίνει απαραίτητα χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή καθώς είναι πολύ δύσκολο να γίνουν οι πράξεις με το άθροισμα ως προς $k = 0, 1, 2, \dots$, του συνδυασμού

$$\binom{r+k-1}{r-1},$$

για πραγματικές τιμές της παραμέτρου r και για τις διάφορες τιμές του u . Για να φανεί η δυσκολία αυτών των πράξεων, αναφέρουμε ότι για να μπορέσει το *Mathematica* να υπολογίσει τις πράξεις της σχέσης (4.7), βάζουμε μόνο τέσσερα δεκαδικά ψηφία στις τιμές των r και p .

Στην αρχή της ενότητας σχολιάσαμε ότι η νέα προσέγγιση λειτουργεί καλά μόνο για μικρές τιμές του δ , γεγονός που φαίνεται και από τον παράγοντα

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta} \right)^k,$$

της σχέσης (4.7). Όσο μεγαλώνει ο συντελεστής προεξόφλησης δ , τόσο μικραίνει ο παραπάνω όρος με αποτέλεσμα η προσέγγιση να απομακρύνεται αρκετά, για κάθε τιμή του u , από τις πραγματικές τιμές του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta(u)$.

Για να είναι όμως καλή η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, θα πρέπει υποχρεωτικά να ισχύουν τα εξής:

- Η τιμή της παραμέτρου r να είναι θετική, δηλαδή να ανήκει στο διάστημα $(0, \infty)$,
- καθώς και η τιμή της παραμέτρου p να είναι θετική και να παίρνει τιμές στο διάστημα $(0, 1)$.

Έτσι αν από το σύστημα (4.20) προκύψουν τιμές των r και p οι οποίες δεν ικανοποιούν τα προηγούμενα, τότε η προσέγγιση για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, μέσω της αρνητικής διωνυμικής κατανομής, δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Επομένως λόγω της αδυναμίας αυτής που παρουσιάζει η προσέγγιση για ορισμένες παραμέτρους κατανομών αποζημιώσεων, εισάγουμε μία δεύτερη, ευκολότερη ως προς τις υπολογιστικές πράξεις, προσέγγιση η οποία χρησιμοποιεί ότι η τ.μ K^* ακολουθεί μία *Poisson* κατανομή με παράμετρο $\tilde{\lambda}$, την οποία συμβολίζουμε έτσι για να την ξεχωρίζουμε από την παράμετρο της ανέλιξης

Poisson, λ , που χρησιμοποιούμε για το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, καθώς οι δύο παράμετροι δεν έχουν καμία απολύτως σχέση μεταξύ τους. Η επιλογή της συγκεκριμένης διακριτής κατανομής προήλθε από το γεγονός ότι, μέσω του οριακού θεωρήματος (βλέπε *Feller* (1971)), για μεγάλες τιμές της παραμέτρου r , η αρνητική διωνυμική κατανομή προσεγγίζεται επαρκώς από την κατανομή *Poisson*($\tilde{\lambda}$), με $\tilde{\lambda} = r(p^{-1} - 1)$. Η συνάρτηση πυκνότητας της *Poisson*($\tilde{\lambda}$) δίνεται από τη σχέση

$$Pr(K^* = k) = e^{-\tilde{\lambda}} \frac{\tilde{\lambda}^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.21)$$

Αντίστοιχα όπως κάναμε και για την περίπτωση όπου ο αριθμός των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεοκοπία ακολουθούσε αρνητική διωνυμική κατανομή, έτσι και εδώ για να υπολογιστεί η τιμή της παραμέτρου $\tilde{\lambda}$ για κάθε τιμή του αρχικού αποθεματικού u , θα πρέπει να δώσουμε τον τύπο της μέσης τιμής και διακύμανσης για μία κατανομή *Poisson*($\tilde{\lambda}$). Είναι γνωστό από τη θεωρία πιθανοτήτων ότι η μέση τιμή μιας *Poisson* κατανομής συμπίπτει με τη διακύμανσή της. Δηλαδή στη συγκεκριμένη περίπτωση ισχύει ότι

$$E(K^*) = \tilde{\lambda}, \quad (4.22)$$

και

$$Var(K^*) = \tilde{\lambda}. \quad (4.23)$$

Τώρα αντικαθιστώντας τη σχέση (4.21) στο βασικό τύπο της προσέγγισης, σχέση (4.5), παίρνουμε ότι η προσέγγιση για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, μέσω της κατανομής *Poisson*, ισούται με

$$\bar{K}_\delta^{Poi}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta} \right)^k e^{-\tilde{\lambda}} \frac{\tilde{\lambda}^k}{k!}. \quad (4.24)$$

Και σε αυτή την περίπτωση ισχύει ο τύπος (4.1), μόνο που τώρα η σύνθετη τ.μ T_c ακολουθεί, προσεγγιστικά, μία σύνθετη *Poisson* κατανομή, λόγω του ότι έχουμε προσεγγίσει την τ.μ K^* μέσω μιας *Poisson*($\tilde{\lambda}$) κατανομής. Επομένως ισχύουν ακριβώς οι σχέσεις που είχαμε ορίσει παραπάνω για την μέση τιμή και διακύμανση της τ.μ K^* , που προκύπτουν από τις ροπές της σύνθετης τ.μ T_c , σχέσεις (4.14) και (4.17) αντίστοιχα. Το μόνο που αλλάζει σε σχέση με την προηγούμενη προσέγγιση, είναι οι ροπές που χρησιμοποιούμε για την τ.μ K^* τις οποίες υπολογίσαμε στις σχέσεις (4.22) και (4.23) αντίστοιχα. Επειδή όμως η κατανομή *Poisson* έχει μόνο μία παράμετρο θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι την μέθοδο των ροπών, αυτή την φορά όμως εξισώνοντας μόνο την πρώτη ροπή της κατανομής *Poisson*, σχέση (4.22), με την πρώτη ροπή που είχαμε βρει από τη σχέση (4.14). Επομένως η παράμετρος $\tilde{\lambda}$

προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης

$$\lambda E(T_c) = \tilde{\lambda} \Rightarrow$$

$$\lambda \frac{\psi_1(u)}{\psi(u)} = \tilde{\lambda}. \quad (4.25)$$

Θεωρητικά πρέπει να αναμένουμε ότι η προσέγγιση μέσω αρνητικής διωνυμικής κατανομής θα είναι καλύτερη, στις περιπτώσεις που οι τιμές των παραμέτρων r και p ικανοποιούν τα κριτήρια που θέσαμε παραπάνω, από ότι η προσέγγιση μέσω κατανομής *Poisson*, διότι όπως αναφέραμε και παραπάνω η κατανομή *Poisson* είναι μία προσέγγιση της αρνητικής διωνυμικής κατανομής με αποτέλεσμα να μην είναι τόσο ακριβής όσο η αρχική κατανομή. Όμως πρέπει να αναφέρουμε ότι η προσέγγιση μέσω κατανομής *Poisson* έχει το μεγάλο πλεονέκτημα ότι υπολογίζεται ευκολότερα και σε πολύ πιο σύντομο χρόνο από ότι η προσέγγιση μέσω αρνητικής διωνυμικής κατανομής. Επομένως εάν αποδείξουμε ότι η $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ είναι εξίσου καλή ή πολύ κοντά με την $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, τότε είναι προτιμότερο να χρησιμοποιείται, για λόγους ευκολίας, η κατανομή *Poisson*.

Μέσω των αριθμητικών παραδειγμάτων που ακολουθούν στις επόμενες ενότητες αυτού του κεφαλαίου, θα διαπιστώσουμε ότι η προσέγγιση μέσω αρνητικής διωνυμικής κατανομής λειτουργεί καλύτερα για κατανομές αποζημιώσεων με μικρές τιμές παραμέτρων, καθώς για μεγάλες τιμές ο υπολογισμός της προσέγγισης δεν είναι εφικτός λόγω του ότι οι τιμές των παραμέτρων r και p δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς που έχουμε θέσει. Επομένως σε τέτοιες περιπτώσεις είναι λογικό ότι δεν μπορούμε να κάνουμε σύγκριση μεταξύ των προσεγγίσεων καθώς γίνεται χρήση μόνο της προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$. Επίσης θα δούμε ότι για μεγάλες τιμές του περιθωρίου ασφαλείας θ , για την ίδια κατανομή αποζημιώσεων, η προσέγγιση για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ βελτιώνεται πολύ σε σχέση με μικρότερα θ και δίνει κάποιες φορές καλύτερα αποτελέσματα από ότι η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, καθώς οι τιμές της είναι πιο κοντά με τις πραγματικές τιμές του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας $\bar{K}_\delta(u)$. Τα παραπάνω θα τα δούμε και θα τα εξηγήσουμε αναλυτικότερα στα παραδείγματα που ακολουθούν, στα οποία παίρνουμε τις τέσσερις διαφορετικές κατανομές αποζημιώσεων που είχαμε πάρει και στο τρίτο κεφάλαιο με τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας. Για τις συγκεκριμένες κατανομές αποζημιώσεων, παίρνουμε την ίδια αρχική τιμή για το θ , που είχαμε πάρει και στα προηγούμενα παραδείγματα, για να συγκρίνουμε⁶ τις νέες προσεγγίσεις με την προσέγγιση του *Tijms*. Επειδή όμως σε αυτή την

⁶ Δεν συγκρίνουμε τις νέες προσεγγίσεις με την προσέγγιση *DeVylder*, καθώς όπως θα δούμε και στη συνέχεια είναι πολύ καλύτερες από αυτή, για κάθε τιμή του u και του θ , οπότε κάτι τέτοιο δεν θα είχε και νόημα να γίνει.

περίπτωση η νέα προσέγγιση μπορεί να είναι οριακά καλύτερη από αυτή του $Tijms$, για να γίνει πιο ορατή η διαφορά παίρνουμε και μία μεγάλη τιμή για το θ όπου εκεί περιμένουμε να μην είναι τόσο καλή η προσέγγιση του $Tijms$. Έτσι αν για μία μεγάλη τιμή του θ οι νέες προσεγγίσεις έχουν πολύ μικρότερο ποσοστό σφάλματος από ότι η προσέγγιση $Tijms$, για μικρές τιμές του u , τότε αυτό σημαίνει ότι εκτός από το ότι η ιδέα στην οποία βασίστηκε η προσέγγιση είναι σωστή, έχει δημιουργηθεί μία προσέγγιση για τον μετασχηματισμό $Laplace$ του χρόνου χρεοκοπίας η οποία φαίνεται ξεκάθαρα ότι είναι καλύτερη, για μικρές τιμές του u και για μεγάλες τιμές του θ , από την μέχρι τότε καλύτερη προσέγγιση που είχαμε, την προσέγγιση $Tijms$. Βέβαια τέτοιες μεγάλες τιμές για το θ δεν χρησιμοποιούνται στην πράξη, απλά τις παίρνουμε για να δείξουμε εάν η νέα προσέγγιση λειτουργεί σωστά. Για μικρές τιμές του θ δεν θα ασχοληθούμε καθώς η προσέγγιση του $Tijms$ είναι πάρα πολύ καλή και δεν πρόκειται να φανεί κάποια αισθητή διαφορά σε σύγκριση με τις νέες προσεγγίσεις. Επομένως στόχος μας εδώ είναι να δείξουμε για ποιές περιπτώσεις κάποια από τις δύο νέες προσεγγίσεις ή και οι δύο, είναι πολύ καλύτερες από την προσέγγιση $Tijms$, για μικρές τιμές του αρχικού αποθεματικού u .

Τέλος σαν παρατήρηση, επειδή η αρχική σκέψη για τον υπολογισμό των νέων προσεγγίσεων ήταν η τ.μ K^* να παίρνει αμέριστε θετικές τιμές, έτσι όπως δόθηκε στη σχέση (4.5), θα έπρεπε να τροποποιηθούν και οι δύο διακριτές κατανομές που επιλέξαμε, καθώς η συνάρτηση πυκνότητας και των δύο κατανομών ορίζεται για $K^* = 0, 1, 2, \dots$. Κάτι τέτοιο γίνεται αρκετά εύκολα αφού μπορούμε να ορίσουμε μία τ.μ \tilde{K} η οποία θα ισούται με

$$\tilde{K} = K^* | K^* > 0$$

Επειδή όμως ισχύει ότι

$$Pr(\tilde{K} = k) = Pr(K^* | K^* > 0)$$

$$= \frac{Pr(K^* = k)}{Pr(K^* > 0)}$$

$$= \frac{Pr(K^* = k)}{1 - Pr(K^* = 0)},$$

είναι αρκετά εύκολο να μετατρέψουμε τις δύο κατανομές έτσι ώστε η τ.μ K^* να παίρνει αμέριστε θετικές τιμές. Έτσι διαιρώντας τις σχέσεις (4.6) και (4.21) αντίστοιχα, με τον όρο $1 - Pr(K^* = 0)$, έχουμε καταφέρει να μετατοπίσουμε την αρνητική διωνυμική κατανομή και την κατανομή $Poisson$, για $\tilde{K} = 1, 2, \dots$. Οι δύο αυτές μετατοπισμένες κατανομές πρέπει να αναφερθεί ότι έχουν διαφορετική μέση τιμή και διακύμανση από αυτές που είχαν δοθεί στις σχέσεις (4.8), (4.10) και (4.22), (4.23) αντίστοιχα. Όμως όπως είπαμε και στην αρχή

της ενότητας, η συγκεκριμένη προσέγγιση δεν λειτουργεί καθώς δίνει εντελώς λανθασμένες τιμές και για αυτό τον λόγο χρησιμοποιείται η προσέγγιση $\overline{K}_\delta^{MP}(u)$ για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας.

Τα παραπάνω τα αναφέρουμε καθώς όταν υπάρχει κάποια σκέψη για το πώς μπορεί να δημιουργηθεί κάποια ποσότητα που μπορεί να έχει κάποιο σημαντικό ενδιαφέρον, και στη προκειμένη περίπτωση η προσέγγιση για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, είναι αρκετά δύσκολο να επιτευχθεί χωρίς ιδιαίτερη προσπάθεια και χωρίς δοκιμές. Έτσι μέσα από κάποια λάθη και αδυναμίες που ενδέχεται να έχει η αρχική ποσότητα που έχει κατασκευαστεί, μπορεί να βελτιωθεί και να μας οδηγήσει σε αποτελέσματα με μεγάλο ενδιαφέρον και χρησιμότητα.

4.2 Οι νέες προσεγγίσεις $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$ και $\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$ για μείξη τριών εκθετικών κατανομών.

Στόχος της συγκεκριμένης ενότητας αλλά και των υπολοίπων που θα ακολουθήσουν, είναι να παρουσιάσουμε για τις κατανομές αποζημιώσεων που έχουμε χρησιμοποιήσει έως τώρα, και στα προηγούμενα κεφάλαια αλλά και στα παραρτήματα που υπάρχουν στο τέλος της εργασίας, τις νέες προσεγγίσεις που εισαγάγαμε στην Ενότητα 4.1, δηλαδή να ελέγξουμε κατά πόσο καλά λειτουργούν και στη συνέχεια να τις συγκρίνουμε με την έως τώρα καλύτερη προσέγγιση που είναι αυτή του *Tijms*. Επίσης παίρνοντας δύο διαφορετικές τιμές για το περιθώριο ασφάλειας θ , μία μέτρια και μία μεγάλη τιμή, μπορούμε να δούμε ακριβώς σε ποιες περιπτώσεις λειτουργεί καλύτερα, σε σχέση με την προσέγγιση *Tijms*, έστω μία από τις δύο νέες προσεγγίσεις που έχουμε κατασκευάσει. Επομένως στο τέλος του κεφαλαίου θα έχουμε βγάλει αρκετά συμπεράσματα για τις νέες προσεγγίσεις $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$ και $\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$. Τέλος αναφέρουμε ότι επειδή οι δύο νέες προσεγγίσεις είναι δύσκολες στον υπολογισμό τους, ιδίως η προσέγγιση του μετασχηματισμού *Laplace* μέσω αρνητικής διωνυμικής κατανομής, έχουν χρησιμοποιηθεί για όλες τις πράξεις, αποτελέσματα και διαγράμματα το πρόγραμμα *Mathematica*, χωρίς το οποίο⁷ δεν θα είχαμε την δυνατότητα να υπολογίσουμε τις πράξεις που απαιτούνται για να δούμε το πώς λειτουργούν οι δύο νέες προσεγγίσεις.

Για αρχή, παίρνουμε την κατανομή αποζημιώσεων που είχαμε στο Παράδειγμα 2.2.1, δηλαδή μία μείξη τριών εκθετικών κατανομών με σ.π.π

⁷Φυσικά συμπεριλαμβάνουμε και κάποια άλλα προγράμματα που έχουν τις ίδιες δυνατότητες με το *Mathematica*, καθώς οποιοδήποτε τέτοιο πρόγραμμα μπορεί να επιλύσει τις συγκεκριμένες πράξεις.

$$f(x) = \frac{1}{3} 2 e^{-2x} + \frac{1}{3} 4 e^{-4x} + \frac{1}{3} 6 e^{-6x},$$

έχοντας υποθέσει ότι $c = 1$, $\lambda = 2$ και $\delta = 0.05$. Επομένως γνωρίζοντας ότι $\theta = 7/11$, προκύπτουν οι εξής βασικές ποσότητες που έχουν υπολογιστεί αναλυτικά στο Κεφάλαιο 2.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας ($\delta = 0$) δίνεται από τη σχέση (2.12), ενώ ο μετασχηματισμός *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας ($\delta > 0$), από τη σχέση (2.16).

Επίσης για τη συνέχεια θα χρειαστούμε και την προσέγγιση *Tijms* για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, την οποία θέλουμε να συγκρίνουμε με τις νέες προσεγγίσεις που θα κατασκευάσουμε στη συνέχεια της παρούσας ενότητας. Θυμίζουμε ότι με την εφαρμογή της προσέγγισης *Tijms* όχι στην αρχική κατανομή των αποζημιώσεων, αλλά στην καινούρια κατανομή αποζημιώσεων, $f_\delta(x)$, που προκύπτει από την ποσότητα $G_\delta(x)$,⁸ παίρνουμε μέσω του *Mathematica* ότι η $\bar{K}_\delta^{Tijms}(u)$ ισούται με τη σχέση (2.17).

Όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη Ενότητα, για να κατασκευάσουμε τις δύο νέες προσεγγίσεις θα πρέπει πρώτα να βρούμε την πρώτη και δεύτερη δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας για τη συγκεκριμένη κατανομή αποζημιώσεων, $f(x)$. Όμως οι δύο αυτές ροπές έχουν υπολογιστεί αναλυτικά, με τη βοήθεια του *Mathematica*, στην Ενότητα 3.3 και δίνονται από τις σχέσεις (3.18) και (3.19) αντίστοιχα. Για να υπολογίσουμε τώρα τις παραμέτρους των δύο κατανομών που μας ενδιαφέρουν, εξισώνουμε τις ροπές της σύνθετης τ.μ K^* με τις ροπές της κατανομής που μας ενδιαφέρει, σχέσεις (4.20) και (4.25) αντίστοιχα.

Για την πρώτη προσέγγιση, στην οποία προσεγγίζουμε την κατανομή του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία με μία αρνητική διωνυμική κατανομή, παίρνουμε το σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, σχέση (4.20). Στη συνέχεια μέσω κατάλληλης εντολής στο *Mathematica* βρίσκουμε τις λύσεις για τις παραμέτρους r και p , για κάθε τιμή του αρχικού αποθεματικού u . Άρα το μόνο που μένει τώρα είναι να γίνει χρήση του τύπου της προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, που δίνεται από τη σχέση (4.7) και εδώ για να υπολογιστεί παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} \bar{K}_\delta^{NB}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2 + 0.05} \right)^k \frac{(r + k - 1)!}{k!(r - 1)!} p^r (1 - p)^k \\ \times (0.0166231 e^{-5.58503 u} + 0.0436979 e^{-3.4447 u} + 0.55079 e^{-0.970262 u}), \end{aligned} \quad (4.26)$$

⁸Να θυμίσουμε ότι η συγκεκριμένη ποσότητα λειτουργεί ως κατανομή ισορροπίας σε μία καινούρια κατανομή αποζημιώσεων την οποία συμβολίζουμε με $f_\delta(x)$.

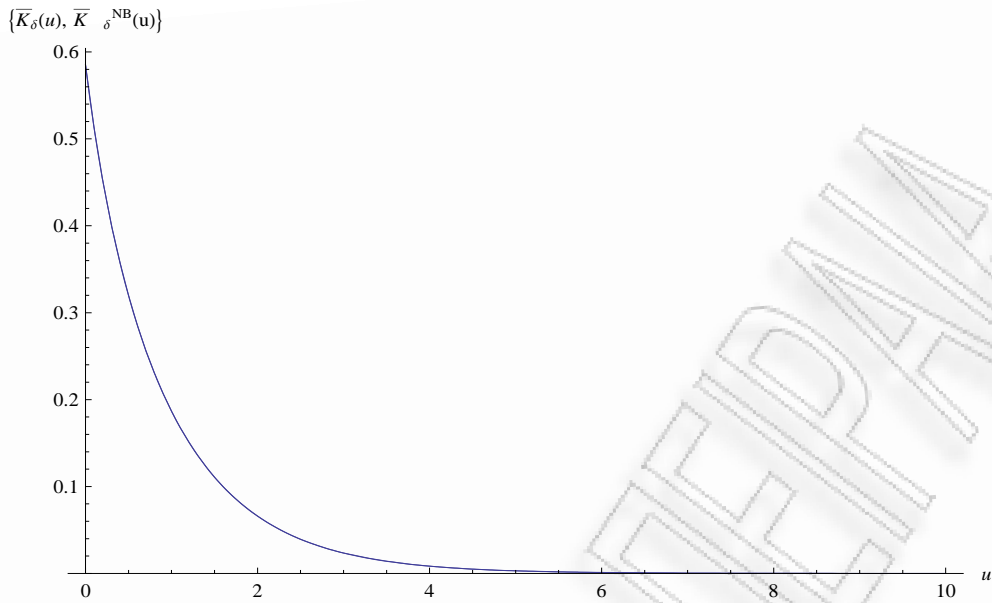
και να υπολογίσουμε για κάθε τιμή του u τις τιμές που παίρνει η παραπάνω προσέγγιση. Επειδή όμως πρέπει να αντικαθιστούμε στον τύπο της προσέγγισης, για κάθε τιμή του u , διαφορετικές τιμές των παραμέτρων r και p , που όπως είπαμε προέκυψαν από τη λύση του συστήματος (4.20), είναι αρκετά χρονοβόρος ο υπολογισμός αυτής της προσέγγισης. Επίσης στη σχέση (4.26), για να μπορέσει το *Mathematica* να υπολογίσει τις πράξεις χρησιμοποιούμε μόνο τέσσερα δεκαδικά ψηφία μετά την υποδιαστολή, για τις παραμέτρους r και p . Άρα καταλαβαίνουμε πόσο πιο δύσκολη⁹ είναι η εφαρμογή της προσέγγισης $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$, σε σχέση με την αρκετά πιο απλή προσέγγιση *Tijms*. Στη συνέχεια, έτσι όπως κάναμε και στην προσέγγιση *Tijms*, συγκρίνουμε τις προσεγγιστικές τιμές που υπολογίσαμε με τις πραγματικές τιμές του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, $\overline{K}_\delta(u)$. Για να γίνει αυτή η σύγκριση, κατασκευάζουμε για αρχή ένα κοινό διάγραμμα των $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$ και $\overline{K}_\delta(u)$. Όμως επειδή βρίσκουμε διακριτές τιμές για την νέα προσέγγιση, η γραφική της παράσταση δεν θα είναι μία συνεχής γραμμή αλλά θα είναι σημεία πάνω στο επίπεδο. Ο απλούστερος τρόπος για να μετατραπεί σε συνεχής, είναι να πάρουμε πολύ κοντινές τιμές για το u και να υπολογίσουμε τις τιμές της προσέγγισης για αυτά τα u . Έτσι έχοντας πολύ κοντινά¹⁰ διακριτά σημεία στο επίπεδο, με κατάλληλη εντολή στο *Mathematica* μπορούμε να ενώσουμε αυτά τα σημεία έτσι ώστε να φαίνεται η γραφική παράσταση ως συνεχής. Βέβαια για να γίνει κάτι τέτοιο απαιτείται αρκετή ώρα, καθώς θα πρέπει να βρούμε αρκετές τιμές της προσέγγισης $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$, για κοντινές τιμές του u .

Κατασκευάζοντας τη γραφική παράσταση της $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$, με τον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω, και συγκρίνοντάς την με τη γραφική παράσταση της $\overline{K}_\delta(u)$ που δίνεται από τη σχέση (2.16), παίρνουμε το παρακάτω κοινό διάγραμμα 4.1.

Από το Σχήμα 4.1, παρατηρούμε ότι οι τιμές της νέας προσέγγισης είναι πάρα πολύ κοντά με τις πραγματικές τιμές, γεγονός που συνηγορεί και το ότι δεν μπορούμε να διακρίνουμε κάποια διαφορά ανάμεσα στις δύο γραφικές παραστάσεις. Επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η νέα προσέγγιση $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$ είναι μία πολύ καλή προσέγγιση. Δεν μπορούμε όμως από εδώ να καταλάβουμε εάν είναι καλύτερη από αυτή του *Tijms*, αφού και σε εκείνη την περίπτωση δεν μπορούσαμε να διακρίνουμε τα διαγράμματα μεταξύ τους. Επομένως για να γίνει η σύγκριση μεταξύ των προσεγγίσεων ακολουθούμε και έναν δεύτερο τρόπο, όμοιο με αυτό που είχαμε ακολουθήσει και για την προσέγγιση *Tijms* στην Ενότητα 2.2.

⁹ Αυτό το μειονέκτημα το έχουμε αναφέρει και στην παρουσίαση της προσέγγισης $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$, που έγινε στην Ενότητα 4.1.

¹⁰ Θέλουμε τα σημεία να είναι αρκετά κοντά μεταξύ τους έτσι ώστε να είμαστε σίγουροι ότι αν ενώσουμε αυτά τα σημεία, δεν θα φαίνεται κάποια ασυνέχεια στο διάγραμμα.



Σχήμα 4.1: Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων του πραγματικού μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta(u)$, και του προσεγγιστικού, $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 7/11$ και $\delta = 0.05$.

Ο δεύτερος τρόπος για να δούμε την αποτελεσματικότητα της προσέγγισης, είναι να υπολογίσουμε το ποσοστιαίο σφάλμα που υπάρχει ανάμεσα στις τιμές της προσέγγισης του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, και στις πραγματικές τιμές του, που βρίσκονται για κάθε τιμή του u από τη σχέση (2.16). Έτσι παίρνοντας τη συνάρτηση

$$per(u) = \frac{\bar{K}_\delta^{NB}(u) - \bar{K}_\delta(u)}{\bar{K}_\delta(u)} \cdot 100, \quad (4.27)$$

και αντικαθιστώντας στον τύπο τις προσεγγιστικές και πραγματικές τιμές του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, για κάθε τιμή του u , μπορούμε να δούμε ακριβώς ποιο είναι το ποσοστιαίο σφάλμα (%) για κάθε τιμή του u . Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $per(u)$ παρουσιάζεται γραφικά μαζί με τις γραφικές παραστάσεις του ποσοστιαίου σφάλματος της προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ που θα υπολογιστεί στη συνέχεια, καθώς και της προσέγγισης *Tijms* που έχει υπολογιστεί στο κεφάλαιο 2 και δίνεται γραφικά από την μπλε γραμμή του σχήματος 2.13. Το συγκεκριμένο κοινό διάγραμμα παρουσιάζεται στη συνέχεια στο Σχήμα 4.3.

Για το συγκεκριμένο παράδειγμα, παίρνουμε τιμές για το u στο διάστημα $[0, 3]$ με βήμα 0.1 και από το 3.1 έως το 6 με διαφορετικό βήμα, έτσι ώστε να μπορέσουμε να φτιάξουμε το συνεχές διάγραμμα 4.1. Οι τιμές του u που έχουμε επιλέξει, οι τιμές της προσέγγισης για τα

συγκεκριμένα u , καθώς και οι τιμές των παραμέτρων της αρνητικής διωνυμικής κατανομής r και p , για την περίπτωση που έχουμε $\theta = 7/11$, δίνονται αναλυτικά στον παρακάτω πίνακα 4.1.

u	$\bar{K}_\delta^{NB}(u)$	$\bar{K}_\delta(u)$	r	p
0	0.585267	0.585105	0.294541	0.133662
0.1	0.512754	0.512595	0.346527	0.129999
0.2	0.452577	0.452409	0.395239	0.127569
0.3	0.401622	0.401472	0.440873	0.125724
0.4	0.357862	0.357705	0.483841	0.124199
0.5	0.319812	0.319658	0.524586	0.122877
0.6	0.286433	0.286288	0.56352	0.121697
0.7	0.256956	0.256825	0.600995	0.120628
0.8	0.230821	0.23068	0.637302	0.119652
0.9	0.207524	0.207391	0.672679	0.118755
1	0.186718	0.186586	0.707315	0.117928
1.1	0.168075	0.167959	0.741364	0.117165
1.2	0.151367	0.151255	0.774945	0.11646
1.3	0.136351	0.136256	0.808157	0.115806
1.4	0.122866	0.122775	0.841077	0.1152
1.5	0.110728	0.110649	0.873765	0.114638
1.6	0.0998122	0.0997355	0.906271	0.114115
1.7	0.0899795	0.0899089	0.938634	0.113628
1.8	0.0811295	0.0810578	0.970885	0.113175
1.9	0.0731535	0.0730832	1.00305	0.112751
2	0.0659604	0.0658969	1.03515	0.112356
2.1	0.0594761	0.0594197	1.0672	0.111986
2.2	0.0536282	0.053581	1.09921	0.111639
2.3	0.0483631	0.0483173	1.13119	0.111314
2.4	0.0436142	0.0435716	1.16315	0.111008
2.5	0.0393314	0.0392927	1.19509	0.110721
2.6	0.0354719	0.0354344	1.22703	0.11045
2.7	0.0319899	0.0319553	1.25896	0.110194

2.8	0.0288464	0.028818	1.29089	0.109953
2.9	0.0260169	0.0259889	1.32282	0.109725
3	0.023464	0.0234377	1.35476	0.109509
3.3	0.0173199	0.017191	1.45057	0.108423
3.5	0.0140894	0.0139818	1.51447	0.108582
3.8	0.0103347	0.0102556	1.61036	0.108125
4	0.00835401	0.00834116	1.67431	0.107853
4.2	0.00679386	0.0678411	1.73829	0.107604
4.5	0.00501541	0.00497615	1.83428	0.107266
4.8	0.00365629	0.00365001	1.93031	0.106965
5	0.00297372	0.00296867	1.99435	0.106783
5.5	0.00178562	0.00177105	2.1545	0.106379
5.8	0.00130945	0.00129907	2.25063	0.106166
6	0.00105842	0.00105657	2.31472	0.106035
7	0.000376877	0.000376042	2.6353	0.105484
8	0.000134185	0.000133836	2.95602	0.105061
9	0.0000477519	0.0000476334	3.27683	0.104725
10	0.0000170073	0.0000169531	3.59771	0.104453

Πίνακας 4.1: Πίνακας τιμών του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, της νέας προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ και των παραμέτρων της προσεγγιστικής NB κατανομής, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών και $\theta = 7/11$.

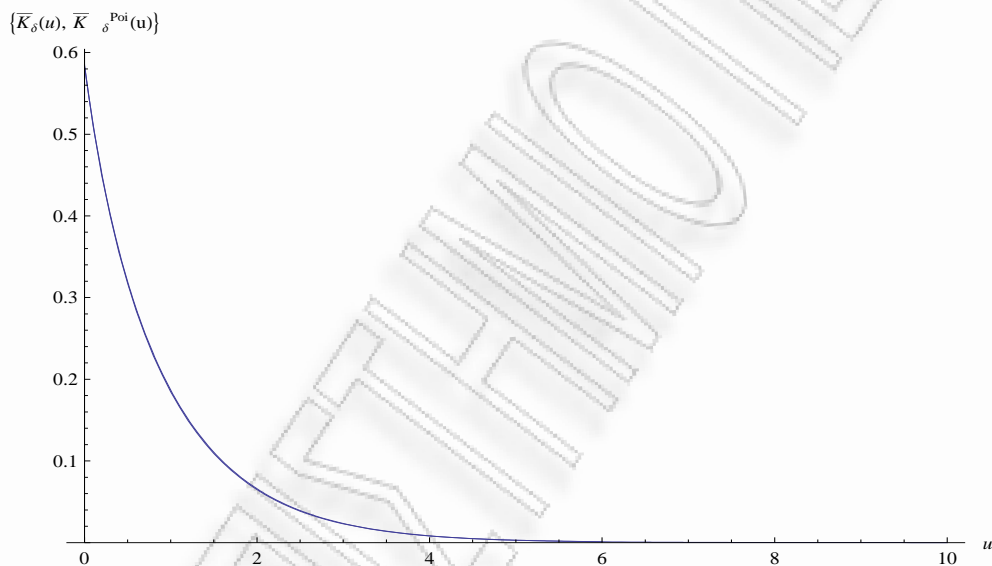
Αντίστοιχη είναι και η διαδικασία για την εύρεση των τιμών της προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για κάθε τιμή του αρχικού αποθεματικού u . Για αυτή την προσέγγιση, όπως έχουμε αναφέρει και στην Ενότητα 4.1, χρειαζόμαστε μόνο την πρώτη δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας για να βρούμε τις τιμές της παραμέτρου $\tilde{\lambda}$, μέσω της σχέσης (4.25), που χρειάζονται για την προσεγγιστική κατανομή *Poisson*. Έτσι αντικαθιστώντας τις τιμές του $\tilde{\lambda}$ για τις διάφορες τιμές του u , στη σχέση

$$\bar{K}_\delta^{Poi}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2 + 0.05} \right)^k e^{-\tilde{\lambda}} \frac{\tilde{\lambda}^k}{k!} \quad (4.28)$$

$$\times (0.0166231 e^{-5.58503 u} + 0.0436979 e^{-3.4447 u} + 0.55079 e^{-0.970262 u}),$$

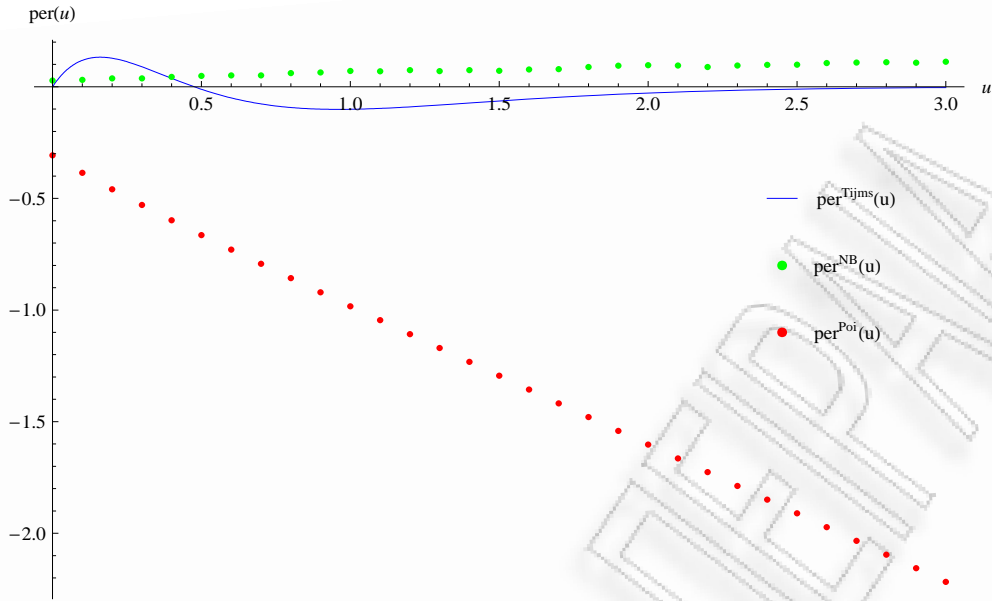
βρίσκουμε για κάθε τιμή του u τις προσεγγιστικές τιμές του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$. Ο υπολογισμός των πράξεων στη σχέση (4.28), για κάθε

τιμή των u και $\tilde{\lambda}$, είναι αρκετά πιο εύκολος και γρήγορος από ότι στην περίπτωση της προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ που είχε δοθεί από τη σχέση (4.26). Στη συνέχεια θέλουμε να δούμε κατά πόσο καλή είναι η προσέγγιση σε σχέση με τις πραγματικές τιμές, αλλά και σε σχέση με την προηγούμενη προσέγγιση που υπολογίσαμε. Όμως όπως θα δούμε και στη συνέχεια, κατασκευάζοντας σε κοινό διάγραμμα το ποσοστιαίο σφάλμα που έχει η κάθε προσέγγιση, η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ μπορεί να είναι ευκολότερη στον υπολογισμό, αλλά δεν προσεγγίζει τις πραγματικές τιμές με την ακρίβεια που τις προσεγγίζει η $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$. Επειδή και σε αυτή την περίπτωση βρίσκουμε διακριτά τις τιμές της προσέγγισης, για κάθε τιμή του u , κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση αυτών των τιμών ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με πριν, και στη συνέχεια τη συγκρίνουμε με τη γραφική παράσταση του πραγματικού μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας. Το κοινό διάγραμμα αυτών των δύο γραφημάτων δίνεται στο παρακάτω Σχήμα 4.2.



Σχήμα 4.2: Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων του πραγματικού μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta(u)$, και του προσεγγιστικού, $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 7/11$ και $\delta = 0.05$.

Από το Σχήμα 4.2, δεν μπορούμε να παρατηρήσουμε να υπάρχει κάποια διαφορά ανάμεσα στις δύο γραφικές παραστάσεις. Για αυτό τον λόγο για να δούμε ακριβώς πόσο κοντά ή μακριά αντίστοιχα, είναι οι τιμές της προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ σε σχέση με τις πραγματικές τιμές, αλλά και για να δούμε ποια προσέγγιση από τις τρεις είναι η καλύτερη, κατασκευάζουμε ένα διάγραμμα το οποίο περιέχει το ποσοστιαίο σφάλμα που έχει η κάθε προσέγγιση, για την ίδια τιμή του περιθωρίου ασφαλείας, $\theta = 7/11$. Το συγκεκριμένο διάγραμμα παρουσιάζεται στη συνέχεια, στο Σχήμα 4.3.



Σχήμα 4.3: Ποσοστιαίο σφάλμα των προσεγγίσεων $\bar{K}_\delta^{Tijms}(u)$, $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ και $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 7/11$ και $\delta = 0.05$.

Από το Σχήμα 4.3, καταρχάς παρατηρούμε ότι η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ είναι πολύ καλύτερη για όλες τις τιμές του u από ότι η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, καθώς είναι πιο κοντά με τις πραγματικές τιμές $\bar{K}_\delta(u)$. Επομένως είμαστε σίγουροι ότι για τη συγκεκριμένη περίπτωση η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ δεν είναι τόσο ικανοποιητική όσο είναι οι άλλες δύο που χρησιμοποιούμε. Στη συνέχεια βλέπουμε ότι για μικρές τιμές του αρχικού αποθεματικού u , η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ είναι καλύτερη από αυτή του *Tijms* και συγκεκριμένα περίπου μέχρι το $u = 1.5$. Από εκεί και πέρα η προσέγγιση *Tijms* είναι καλύτερη λόγω της σωστής ασυμπτωτικής συμπεριφοράς που τη διακρίνει για μεγάλες τιμές του u . Επομένως για τις μικρές τιμές του u , δηλαδή περίπου μέχρι την τιμή 1.5 επιλέγουμε να παίρνουμε τις τιμές της προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, ενώ για $u = 0$ και για $u > 1.5$ προτιμάμε την προσέγγιση *Tijms*. Άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για τη συγκεκριμένη κατανομή αποζημιώσεων και για τις τιμές των παραμέτρων που έχουμε υποθέσει, καταφέραμε να δημιουργήσουμε μία νέα προσέγγιση, $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, η οποία να είναι καλύτερη για τις τιμές του αρχικού αποθεματικού που μας ενδιαφέρουν περισσότερο, δηλαδή για τις μικρές τιμές του u από την μέχρι τώρα καλύτερη προσέγγιση που είχαμε, δηλαδή την προσέγγιση *Tijms*. Βέβαια επειδή η νέα προσέγγιση που κατασκευάσαμε δεν έχει τη σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά για μεγάλες τιμές του u ή την ακριβή τιμή για $u = 0$ όπως έχει η προσέγγιση *Tijms*, συνδυάζουμε τις δύο προσεγγίσεις για τις τιμές του u που εμφανίζεται κάποια από τις δύο προσεγγίσεις ως η καλύτερη. Επειδή όμως εδώ δεν φαίνεται τόσο πολύ η διαφορά των δύο προσεγγίσεων, θέλουμε να δώσουμε ένα παράδειγμα στο οποίο να φαίνεται ξεκάθαρα η υπεροχή κάποιας ή και των δύο νέων προσεγγίσεων σε σχέση με την προσέγγιση *Tijms*. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να μεγαλώσουμε την τιμή του περιθωρίου ασφαλείας θ

έτσι ώστε να μεγαλώσει το ποσοστιαίο σφάλμα της προσέγγισης *Tijms*. Υπενθυμίζουμε ότι για μεγάλες τιμές του θ το ποσοστιαίο σφάλμα των νέων προσεγγίσεων δεν επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό, σε αντίθεση με αυτό της προσέγγισης *Tijms*. Εκεί που δεν είναι καθόλου καλές οι νέες προσεγγίσεις είναι για μεγάλες τιμές του δ και για αυτό τον λόγο κρατάμε σε όλα τα παραδείγματα ότι $\delta = 0.05$.

Επίσης οι τιμές της προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ και η τιμή της παραμέτρου της *Poisson* κατανομής $\tilde{\lambda}$, για τις διάφορες τιμές του u , δίνονται αναλυτικά στον επόμενο πίνακα¹¹ 4.2.

u	$\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$	$\bar{K}_\delta(u)$	$\tilde{\lambda}$
0	0.583308	0.585105	1.90909
0.1	0.510619	0.512595	2.31908
0.2	0.450331	0.452409	2.703
0.3	0.399345	0.401472	3.06581
0.4	0.355566	0.357705	3.41184
0.5	0.317534	0.319658	3.74462
0.6	0.284199	0.286288	4.067
0.7	0.254788	0.256825	4.38122
0.8	0.228702	0.23068	4.68902
0.9	0.205482	0.207391	4.99176
1	0.184751	0.186586	5.29053
1.1	0.166203	0.167959	5.58614
1.2	0.149579	0.151255	5.87925
1.3	0.134662	0.136256	6.17037
1.4	0.121262	0.122775	6.45991
1.5	0.109217	0.110649	6.74819
1.6	0.098383	0.0997355	7.03546
1.7	0.0886342	0.0899089	7.32193
1.8	0.0798585	0.0810578	7.60776
1.9	0.0719568	0.0730832	7.89307
2	0.0648406	0.0658969	8.17797
2.1	0.0584307	0.0594197	8.46254
2.2	0.0526561	0.053581	8.74685
2.3	0.0474535	0.0483173	9.03095

¹¹ Εδώ παίρνουμε τιμές για το αρχικό αποθεματικό μέχρι την τιμή $u = 6$, καθώς από εκεί και πέρα οι τιμές είναι σχεδόν μηδενικές και δεν έχει νόημα να υπολογίζουμε κάθε φορά τόσες πολλές τιμές.

2.4	0.0427659	0.0435716	9.31488
2.5	0.038542	0.0392927	9.59868
2.6	0.0347356	0.0354344	9.88236
2.7	0.0313055	0.0319553	10.166
2.8	0.028214	0.028818	10.4495
2.9	0.0254286	0.0259889	10.733
3	0.022918	0.0234377	11.0164
3.3	0.0167783	0.017191	11.8665
3.5	0.013629	0.0139818	12.4332
3.8	0.00997804	0.0102556	13.2831
4	0.00810527	0.00834116	13.8496
4.2	0.00658399	0.0678411	14.4162
4.5	0.00482029	0.00497615	15.266
4.8	0.00352905	0.00365001	16.1158
5	0.00286669	0.00296867	16.6823
5.5	0.00170486	0.00177105	18.0987
6	0.0010139	0.00105657	19.515

Πίνακας 4.2: Πίνακας τιμών του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, της νέας προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ και της παραμέτρου της προσεγγιστικής κατανομής *Poisson*, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών και $\theta = 7/11$.

Στη συνέχεια αλλάζουμε την τιμή του θ υποθέτοντας ότι $c = 1.5$ και $\lambda = 2$. Έτσι γνωρίζοντας και ότι η πρώτη ροπή της $f(x)$ ισούται με $p_1 = 0.305556$, μέσω της σχέσης (1.3), προκύπτει ότι

$$\theta = 1.45455.$$

Μέσω της πιθανότητας χρεοκοπίας που έχει υπολογιστεί ήδη στην Ενότητα 3.3 και συγκεκριμένα δίνεται από τη σχέση (3.22), καταλήξαμε με τη βοήθεια του *Mathematica* ότι η πρώτη και δεύτερη δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας, δίνονται από τις σχέσεις (3.23) και (3.24) αντίστοιχα. Επίσης ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που έγινε και στην περίπτωση που ίσχυε $\theta = 7/11$ (βλέπε Ενότητα 2.2) για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, καταλήγουμε ότι

$$\bar{K}_\delta(u) = 0.023496 e^{-5.68051 u} + 0.0567362 e^{-3.59692 u} + 0.318978 e^{-1.41138 u} \quad (4.29)$$

Επίσης μέσω των σχέσεων (2.10), (2.11) και (2.9), καταλήγουμε ότι η προσέγγιση *Tijms* για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, ισούται με

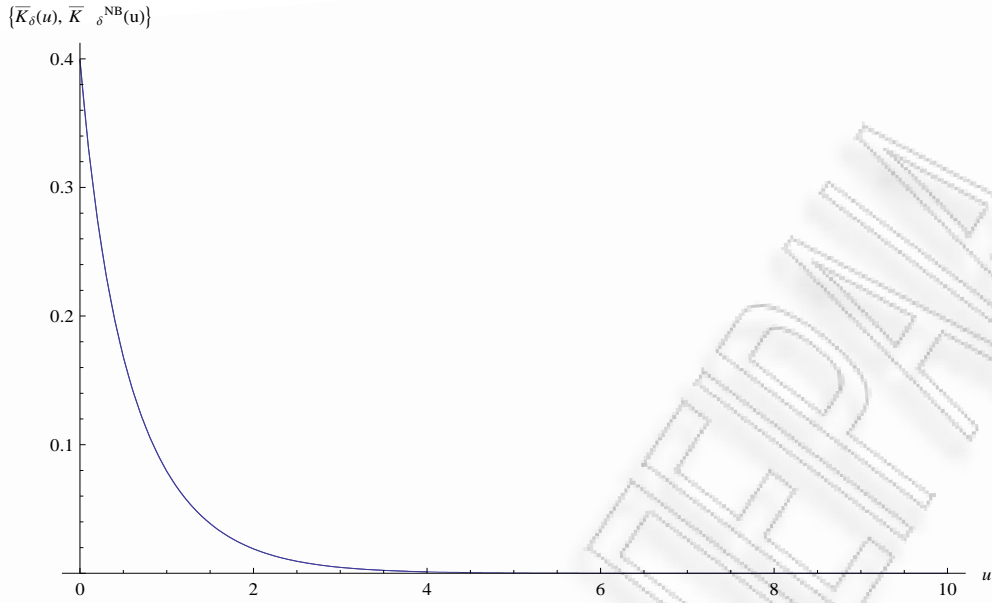
$$\overline{K}_\delta^{Tijms}(u) = 0.0802267 e^{-4.03045 u} + 0.318984 e^{-1.41138 u} \quad (4.30)$$

Ξεκινώντας με την προσέγγιση $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$, οι τιμές της οποίας δίνονται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \overline{K}_\delta^{NB}(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2+0.05} \right)^k \frac{(r+k-1)!}{k!(r-1)!} p^r (1-p)^k \\ &\times (0.0231392 e^{-5.67921 u} + 0.0559842 e^{-3.5938 u} + 0.328284 e^{-1.39366 u}), \end{aligned} \quad (4.31)$$

για κάθε τιμή του αρχικού αποθεματικού u και των παραμέτρων r και p που βρίσκονται λύνοντας το σύστημα (4.20). Για να κατασκευάσουμε το γράφημα των προσεγγιστικών τιμών που βρίσκουμε, παίρνουμε κοντινές τιμές για το u , έτσι ώστε να μπορούμε να ενώσουμε τα διακριτά σημεία και να μπορέσουμε στη συνέχεια να δούμε πόσο κοντά είναι με τις πραγματικές τιμές. Εδώ επειδή το θ είναι μεγαλύτερο από πριν, ο μετασχηματισμός *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας φθίνει γρηγορότερα στο μηδέν σε σχέση με την περίπτωση που ίσχυε $\theta = 7/11$. Για αυτό τον λόγο παίρνουμε τιμές έως το $u = 4$, αφού από εκεί και πέρα οι τιμές του $\overline{K}_\delta(u)$ γίνονται σχεδόν μηδενικές. Το κοινό διάγραμμα της $\overline{K}_\delta(u)$, που δίνεται από τη σχέση (4.29), και της προσέγγισης $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$, που δίνεται για κάθε τιμή του u από τη σχέση (4.31), χρησιμοποιείται για να δούμε κατά πόσο κοντά είναι οι δύο γραφικές παραστάσεις και δίνεται από το παρακάτω Σχήμα 4.4.

Από το Σχήμα 4.4, δεν μπορούμε να βγάλουμε ασφαλή συμπεράσματα στο να πούμε αν η προσέγγιση είναι καλή, καθώς παρατηρώντας το δεν μπορούμε να διακρίνουμε διαφορά ανάμεσα στα δύο διαγράμματα. Φυσιολογικά αυτό μας υποδεικνύει ότι η προσέγγιση είναι καλή, αλλά δεν ξέρουμε ακριβώς πόσο καλή και ακριβής είναι. Για αυτό τον λόγο κατασκευάζουμε ένα διάγραμμα που αναπαριστά το ποσοστιαίο σφάλμα που υπάρχει ανάμεσα στην προσέγγιση $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$ και στην πραγματική $\overline{K}_\delta(u)$. Επομένως για κάθε τιμή του u , αντικαθιστώντας τις προσεγγιστικές και πραγματικές τιμές στη σχέση (4.27), παίρνουμε ποιο είναι το ποσοστιαίο σφάλμα για κάθε τιμή του αρχικού αποθεματικού.



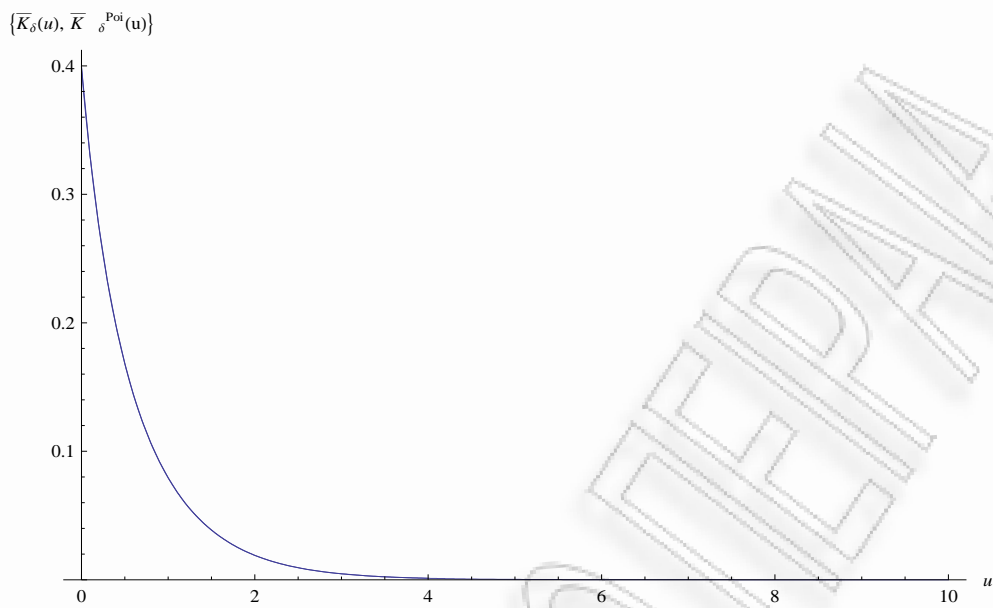
Σχήμα 4.4: Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων του πραγματικού μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta(u)$, και του προσεγγιστικού, $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.45455$ και $\delta = 0.05$.

Για την προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με πριν με μόνη διαφορά ότι οι τιμές της προσέγγισης δίνονται, για κάθε τιμή του u , από τη σχέση

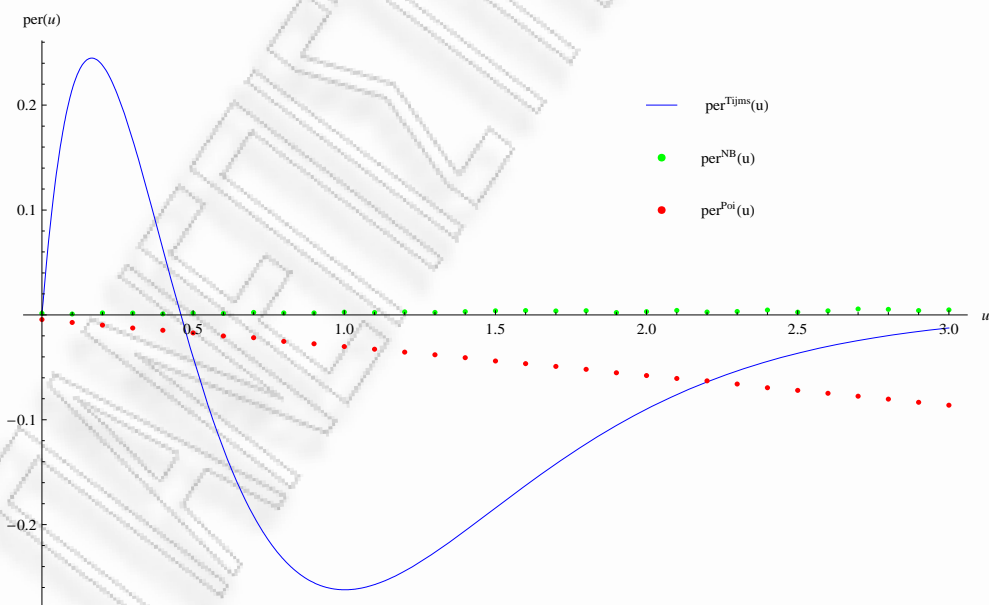
$$\begin{aligned} \bar{K}_\delta^{Poi}(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2 + 0.05} \right)^k e^{-\tilde{\lambda}} \frac{\tilde{\lambda}^k}{k!} \\ &\times (0.0231392 e^{-5.67921 u} + 0.0559842 e^{-3.5938 u} + 0.328284 e^{-1.39366 u}). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Συγκρίνοντας τις προσεγγιστικές τιμές, που βρίσκονται από τη παραπάνω σχέση (4.32), με τις πραγματικές τιμές της σχέσης (4.29), καταλήγουμε στο να κατασκευάσουμε το παρακάτω κοινό διάγραμμα 4.5 που περιέχει τις γραφικές παραστάσεις των δύο ποσοτήτων.

Όπως και προηγουμένως στην περίπτωση της προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ έτσι και εδώ, από το Σχήμα 4.5 βλέπουμε ότι η προσέγγιση είναι πολύ καλή καθώς οι γραφικές παραστάσεις είναι σχεδόν η μία πάνω στην άλλη. Για να φανεί ακριβώς κατά πόσο καλή είναι η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, κατασκευάζουμε μία γραφική παράσταση που να απεικονίζει το ποσοστιαίο σφάλμα της προσέγγισης σε σχέση με τις πραγματικές τιμές, για κάθε τιμή του u , και στη συνέχεια συγκρίνουμε το ποσοστιαίο σφάλμα των τριών προσεγγίσεων που μας ενδιαφέρουν, για να δούμε ποια είναι η καλύτερη, δημιουργώντας το παρακάτω κοινό διάγραμμα 4.6.



Σχήμα 4.5: Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων του πραγματικού μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta(u)$, και του προσεγγιστικού, $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.45455$ και $\delta = 0.05$.



Σχήμα 4.6: Ποσοστιαίο σφάλμα των προσεγγίσεων $\bar{K}_\delta^{Tijms}(u)$, $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ και $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.45455$ και $\delta = 0.05$.

Στο παραπάνω Σχήμα 4.6, βλέπουμε μαζί τις γραφικές παραστάσεις του ποσοστιαίου σφάλματος, για κάθε τιμή του u , των δύο νέων προσεγγίσεων καθώς και της προσέγγισης $Tijms$ που την είχαμε κατασκευάσει και στο δεύτερο κεφάλαιο. Όπως ξανααφέραμε, στόχος του συγκεκριμένου κεφαλαίου είναι να εξετάσουμε περιπτώσεις κατανομών αποζημιώσεων καθώς και τιμές παραμέτρων, για τις οποίες τουλάχιστον η μία νέα προσέγγιση να είναι σαφώς καλύτερη από την προσέγγιση $Tijms$. Στην προηγούμενη περίπτωση που ίσχυε $\theta = 7/11$, μόνο η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ ήταν καλύτερη από αυτή του $Tijms$ και αυτό για πολύ μικρές τιμές του u . Σε αυτή την περίπτωση που ισχύει ότι $\theta = 1.45455$, παρατηρούμε ότι και οι δύο προσεγγίσεις είναι πολύ καλύτερες από την προσέγγιση $Tijms$. Συγκεκριμένα η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ έχει βελτιωθεί σημαντικά σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση, καθώς είναι σαφώς καλύτερη από του $Tijms$ για τιμές του αρχικού αποθεματικού που φθάνουν μέχρι το $u = 2.1$ και στη συνέχεια γίνεται χειρότερη από την $\bar{K}_\delta^{Tijms}(u)$ λόγω της σωστής ασυμπτωτικής συμπεριφοράς που διέπει τη συγκεκριμένη προσέγγιση. Η καλύτερη όμως προσέγγιση είναι η $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, η οποία από το σχήμα φαίνεται ξεκάθαρα ότι είναι κατά πολύ καλύτερη από τις άλλες δύο προσεγγίσεις και ιδίως από την προσέγγιση $Tijms$. Η διαφορά είναι τόσο μεγάλη που το ποσοστιαίο σφάλμα της $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, στο σχήμα, διακρίνεται με δυσκολία σε σχέση με τον άξονα του x , γεγονός που δείχνει το πόσες φορές μικρότερο είναι το ποσοστιαίο σφάλμα που έχει η νέα προσέγγιση. Άρα από τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι όσο μεγαλώνει η τιμή του περιθωρίου ασφαλείας, θ , τόσο καλύτερες γίνονται και οι δύο νέες προσεγγίσεις σε σχέση με την προσέγγιση $Tijms$. Επίσης από ότι φαίνεται από τις δύο περιπτώσεις που μελετήσαμε παραπάνω, όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία μείξη τριών εκθετικών κατανομών, διαπιστώνουμε ότι και οι δύο νέες προσεγγίσεις μπορούν να υπολογιστούν και για φυσιολογικές και για μεγάλες τιμές του θ , καθώς και το ότι για κάθε περίπτωση τουλάχιστον μία από τις δύο προσεγγίσεις, και εδώ συγκεκριμένα η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, είναι καλύτερη για μικρές τιμές του u , από ότι η προσέγγιση $Tijms$. Οπότε καταφέραμε να δημιουργήσουμε μία προσέγγιση η οποία να είναι εμφανώς καλύτερη, για μικρές τιμές του u που μας ενδιαφέρουν περισσότερο, από την ήδη πάρα πολύ καλή προσέγγιση $Tijms$. Συνδυάζοντας τις προσεγγίσεις, στα σημεία του αρχικού αποθεματικού που είναι η κάθε μία καλύτερη, παίρνουμε κάποια πολύ σημαντικά αποτελέσματα τα οποία μπορούν στην πράξη να βοηθήσουν τις ασφαλιστικές εταιρείες στο να γνωρίζουν με μεγαλύτερη ακρίβεια τις τιμές του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας $\bar{K}_\delta(u)$, για όσο αρχικό αποθεματικό κρατάει η καθενμία εταιρεία.

Οι τιμές των $\bar{K}_\delta(u)$, $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ και των παραμέτρων της αρνητικής διωνυμικής και της *Poisson* κατανομής, για την περίπτωση που ισχύει $\theta = 1.45455$, δίνονται συνοπτικά στους Πίνακες 4.3 και 4.4 αντίστοιχα.

u	$\overline{K}_\delta^{NB}(u)$	$\overline{K}_\delta(u)$	r	p
0	0.399216	0.39921	3.56739	0.810288
0.1	0.329903	0.3299	3.20115	0.76744
0.2	0.275712	0.275707	3.10031	0.738992
0.3	0.232433	0.232429	3.07766	0.717599
0.4	0.197258	0.197256	3.08047	0.70007
0.5	0.168269	0.168266	3.09091	0.684901
0.6	0.144104	0.144102	3.1029	0.671341
0.7	0.123784	0.123781	3.11479	0.658996
0.8	0.106577	0.106575	3.12651	0.64764
0.9	0.0919284	0.0919267	3.13849	0.637136
1	0.0794059	0.0794038	3.15126	0.62739
1.1	0.068664	0.0686625	3.18073	0.609894
1.2	0.0594274	0.0594257	3.19793	0.602034
1.3	0.0514677	0.0514665	3.21695	0.594702
1.4	0.0445988	0.0445974	3.23783	0.587858
1.5	0.0386632	0.0386617	3.26055	0.581463
1.6	0.0335287	0.0335273	3.28509	0.575481
1.7	0.0290837	0.0290826	3.31137	0.569881
1.8	0.0252336	0.0252326	3.33931	0.564633
1.9	0.0218966	0.0218961	3.36882	0.559708
2	0.0190039	0.0190033	3.39982	0.555083
2.1	0.0164952	0.0164945	3.43222	0.550734
2.2	0.0143186	0.0143182	3.46592	0.54664
2.3	0.0124303	0.0124299	3.50084	0.542781
2.4	0.0107918	0.0107913	3.5369	0.539141
2.5	0.00936934	0.00936909	3.57401	0.535702
2.6	0.00813494	0.00813462	3.61212	0.53245
2.7	0.00706341	0.00706301	3.65113	0.529371
2.8	0.00613303	0.00613271	3.691	0.526453
2.9	0.00532527	0.00532505	3.73166	0.523684
3	0.00462404	0.00462382	3.77306	0.521054
3.3	0.0030275	0.00302734	3.90116	0.513905
3.5	0.00228278	0.00228271	3.9894	0.509678
3.8	0.00149473	0.00149467	4.12527	0.504012
4	0.00112712	0.00112706	4.21785	0.500622

Πίνακας 4.3: Πίνακας τιμών του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, της νέας προσέγγισης $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$ και των παραμέτρων της προσεγγιστικής NB κατανομής, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών και $\theta = 1.45455$.

u	$\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$	$\overline{K}_\delta(u)$	$\tilde{\lambda}$
0	0.399192	0.39921	0.835227
0.1	0.329876	0.3299	0.970057
0.2	0.27568	0.275707	1.09502
0.3	0.2324	0.232429	1.21117
0.4	0.197227	0.197256	1.31976
0.5	0.168237	0.168266	1.42202
0.6	0.144073	0.144102	1.51904
0.7	0.123754	0.123781	1.61178
0.8	0.106548	0.106575	1.70103
0.9	0.0919014	0.0919267	1.78744
1	0.0793798	0.0794038	1.87155
1.1	0.06864	0.0686625	1.95378
1.2	0.0594046	0.0594257	2.03449
1.3	0.0514469	0.0514665	2.11395
1.4	0.0445792	0.0445974	2.19239
1.5	0.0386447	0.0386617	2.27001
1.6	0.0335117	0.0335273	2.34695
1.7	0.0290683	0.0290826	2.42333
1.8	0.0252195	0.0252326	2.49926
1.9	0.021884	0.0218961	2.57482
2	0.0189923	0.0190033	2.65007
2.1	0.0164845	0.0164945	2.72507
2.2	0.0143092	0.0143182	2.79986
2.3	0.0124217	0.0124299	2.87449
2.4	0.0107838	0.0107913	2.94898
2.5	0.00936235	0.00936909	3.02335
2.6	0.00812854	0.00813462	3.09763
2.7	0.00705753	0.00706301	3.17184
2.8	0.00612778	0.00613271	3.24598
2.9	0.00532061	0.00532505	3.32008
3	0.00461984	0.00462382	3.39413
3.3	0.00302447	0.00302734	3.6161
3.5	0.00228041	0.00228271	3.76398
3.8	0.00149304	0.00149467	3.98571
4	0.00112577	0.00112706	4.13349

Πίνακας 4.4: Πίνακας τιμών του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, της νέας προσέγγισης $\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$ και της παραμέτρου της προσεγγιστικής κατανομής Poisson, για μείξη τριών εκθετικών κατανομών και $\theta = 1.45455$.

4.3 Οι νέες προσεγγίσεις $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$ και $\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$ για κατανομή $\text{Gamma}(3,3)$.

Συνεχίζουμε τα αριθμητικά παραδείγματα, παίρνοντας τώρα ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία $\text{Gamma}(3, 3)$ κατανομή ίδια με αυτή που είχαμε στο Παράδειγμα 2.3.1 της ενότητας 2.3. Θυμίζουμε ότι η σ.π.π μίας $\text{Gamma}(3, 3)$ κατανομής ισούται με

$$f(x) = \frac{27}{2} x^2 e^{-3x},$$

και ότι για αρχή είχαμε υποθέσει ότι $c = 1.5$ και $\lambda = 1$. Επειδή όμως η πρώτη κεντρική ροπή της $f(x)$ ισούται με $p_1 = 1$, από τη σχέση (1.3) προκύπτει ότι

$$\theta = 0.5.$$

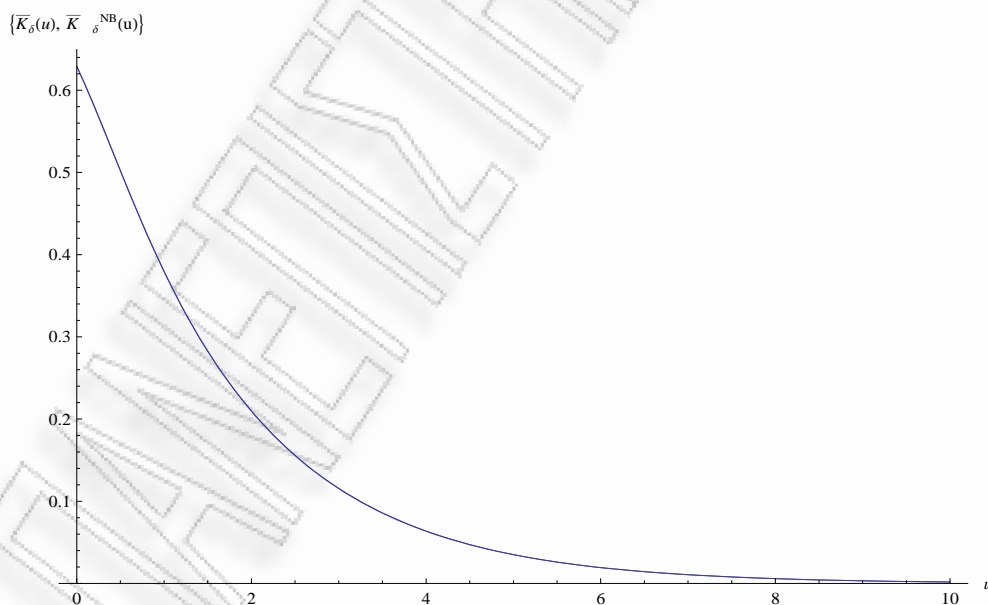
Οι ποσότητες που μας ενδιαφέρουν για τη συγκεκριμένη περίπτωση, έχουν υπολογιστεί στο Παράδειγμα 2.3.1. Επομένως έχουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση (2.19), ενώ ο μετασχηματισμός *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας από τη σχέση (2.22). Τέλος στο συγκεκριμένο παράδειγμα, μέσω της μεθόδου εύρεσης της προσέγγισης *Tijms* για $\delta > 0$ δηλαδή για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας που εξηγήσαμε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 2, είχαμε καταλήξει στο αποτέλεσμα ότι η $\overline{K}_\delta^{Tijms}(u)$ δίνεται από τη σχέση (2.23).

Για να υπολογίσουμε τώρα τις τιμές των δύο νέων προσεγγίσεων, για κάθε τιμή του u , θα πρέπει για την πρώτη περίπτωση της $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$ να εξισώσουμε τις ροπές της σύνθετης τ.μ K^* με τις ροπές της αρνητικής διωνυμικής κατανομής. Έτσι γνωρίζοντας την τιμή που παίρνει η ένταση της ανέλιξης *Poisson*, λ , και τις δύο δεσμευμένες ροπές του χρόνου χρεοκοπίας, οι οποίες έχουν υπολογιστεί στην Ενότητα 3.4 και δίνονται από τις σχέσεις (3.25) και (3.26) αντίστοιχα, βρίσκουμε τις τιμές που αντιστοιχούν για κάθε τιμή του u των παραμέτρων της αρνητικής διωνυμικής κατανομής r και p . Έτσι οι τιμές των παραμέτρων που προκύπτουν από το σύστημα εξισώσεων (4.20), αντικαθιστούνται στη σχέση

$$\begin{aligned} \overline{K}_\delta^{NB}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+0.05} \right)^k \frac{(r+k-1)!}{k!(r-1)!} p^r (1-p)^k \times (0.721398 e^{-0.534774 u} \\ - e^{-3.89928 u} [0.054731 \cos(1.27481 u) + 0.0391028 \sin(1.27481 u)]) , \end{aligned} \quad (4.33)$$

και με αυτό τον τρόπο προκύπτουν οι τιμές της προσέγγισης για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, μέσω αρνητικής διωνυμικής κατανομής, για οποιαδήποτε τιμή του αρχικού αποθεματικού που θέλει να κρατάει η κάθε ασφαλιστική εταιρεία. Επομένως μετά από αρκετή προσπάθεια και χρόνο, αφού όπως έχουμε ξαναφέρει είναι πολύ χρονοβόρες οι συγκεκριμένες πράξεις της σχέσης (4.33), βρίσκουμε τις τιμές της προσέγγισης για τις τιμές του u , που έχουμε επιλέξει και στα παραδείγματα των προηγούμενων ενοτήτων, και τις παρουσιάζουμε γραφικά μαζί με τη γραφική παράσταση της $\bar{K}_\delta(u)$, στο παρακάτω κοινό διάγραμμα 4.7.

Στο Σχήμα 4.7 παρατηρούμε ότι η διαφορά των δύο γραφικών παραστάσεων δε διακρίνεται εύκολα, γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι κατά πάσα πιθανότητα η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ είναι μία σχεδόν ακριβής προσέγγιση η οποία πιστεύουμε ότι θα είναι καλύτερη από του *Tijms* ιδίως για μικρές τιμές του αρχικού αποθεματικού. Για να ελέγξουμε όμως αναλυτικά το αν η προσέγγιση είναι όντως τόσο καλή όσο πιστεύουμε, κατασκευάζουμε ένα σχήμα που περιέχει το ποσοστιαίο σφάλμα των τιμών της προσέγγισης σε σχέση με τις πραγματικές, για τις τιμές του u που έχουμε επιλέξει, και στη συνέχεια το συγκρίνουμε με τη γραφική παράσταση του ποσοστιαίου σφάλματος της προσέγγισης *Tijms*, που δίνεται από την μπλε γραμμή του Σχήματος 2.26. Συνδυάζοντας αυτές τις δύο γραφικές παραστάσεις, καθώς και την αντίστοιχη που θα κατασκευάσουμε για την προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, καταλήγουμε στο κοινό διάγραμμα 4.9.

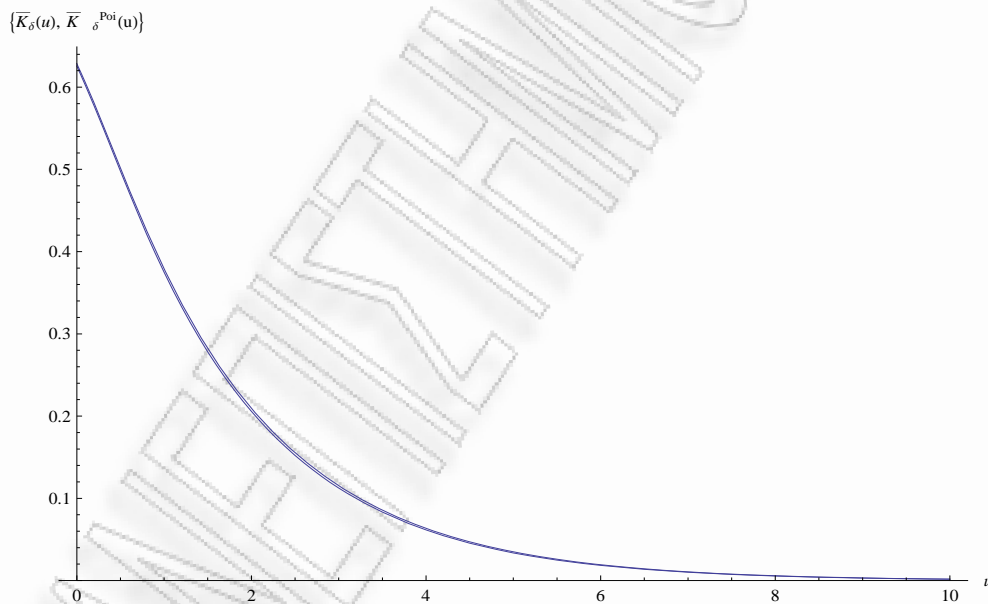


Σχήμα 4.7: Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων του πραγματικού μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta(u)$, και του προσεγγιστικού, $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, για $\text{Gamma}(3, 3)$ κατανομή με $\theta = 0.5$ και $\delta = 0.05$.

Στη συνέχεια εξισώνοντας το γινόμενο της έντασης της ανέλιξης *Poisson*, λ , και της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας με την πρώτη κεντρική ροπή της *Poisson* ($\tilde{\lambda}$), βρίσκουμε την τιμή της παραμέτρου $\tilde{\lambda}$ που αντιστοιχεί σε κάθε τιμή του u . Επομένως αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στη σχέση

$$\begin{aligned} \bar{K}_\delta^{Poi}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+0.05} \right)^k e^{-\tilde{\lambda}} \frac{\tilde{\lambda}^k}{k!} \times (0.721398 e^{-0.534774 u} - e^{-3.89928 u} \\ \times [0.054731 \cos(1.27481 u) + 0.0391028 \sin(1.27481 u)]), \end{aligned} \quad (4.34)$$

παίρνουμε τις τιμές που αντιστοιχούν στην προσέγγιση για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, μέσω μίας *Poisson* ($\tilde{\lambda}$) κατανομής, για διάφορες τιμές του u . Επιλέγοντας τις τιμές του αρχικού αποθεματικού που πήραμε και για την προηγούμενη προσέγγιση, καταλήγουμε στο επόμενο Σχήμα 4.8 το οποίο περιέχει εκτός από τις τιμές της προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, και τη γραφική παράσταση της $\bar{K}_\delta(u)$ που δίνεται από τη σχέση (2.22).



Σχήμα 4.8: Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων του πραγματικού μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta(u)$, και του προσεγγιστικού, $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για *Gamma*(3, 3) κατανομή με $\theta = 0.5$ και $\delta = 0.05$.

Από το Σχήμα 4.8, βλέπουμε ότι η γραφική παράσταση της προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ απέχει, έστω και λίγο, από τη γραφική παράσταση της $\bar{K}_\delta(u)$. Επομένως μόνο από αυτό το σχήμα μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ θα είναι καλύτερη, κατά πάσα πιθανότητα για όλες τις τιμές του u , αφού δείξαμε παραπάνω ότι οι αντίστοιχες

γραφικές παραστάσεις ήταν πολύ πιο κοντά η μία με την άλλη. Για να επαληθεύσουμε τα λεγόμενά μας, κατασκευάζουμε και σε αυτή την περίπτωση τη γραφική παράσταση του ποσοστιαίου σφάλματος της προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$. Τέλος για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τις τρεις προσεγγίσεις μεταξύ τους, κατασκευάζουμε σε ένα κοινό διάγραμμα τις γραφικές παραστάσεις με το ποσοστιαίο σφάλμα και των τριών προσεγγίσεων και το παρουσιάζουμε στη συνέχεια, στο Σχήμα 4.9.

Από το Σχήμα 4.9, βλέπουμε ότι αν και το ποσοστιαίο σφάλμα της προσέγγισης $Tijms$ είναι πολύ μικρό και παίρνει σχεδόν μηδενικές τιμές για $u > 2.5$, η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ καταλήγουμε ότι είναι καλύτερη για τιμές του αρχικού αποθεματικού, περίπου μέχρι την τιμή $u = 1.2$ και από εκεί και πέρα γίνεται καλύτερη η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Tijms}(u)$. Βέβαια ισχύει και ότι για $u = 0$ και $u = 0.5$, επιλέγουμε την προσέγγιση $Tijms$ καθώς έχει πολύ μικρότερο ποσοστιαίο σφάλμα για τις συγκεκριμένες τιμές. Εδώ παρατηρούμε ότι η προσέγγιση $Tijms$ λειτουργεί σχεδόν εξαιρετικά καθώς δεν είναι ακριβής μόνο για πολύ μικρές τιμές του u . Επομένως έχουμε οδηγηθεί σε μία σημαντική επιτυχία, καθώς δημιουργήσαμε μία προσέγγιση η οποία μπορεί και είναι καλύτερη από την ήδη πολύ καλή προσέγγιση $Tijms$, έστω και για πολύ μικρές τιμές του αρχικού αποθεματικού. Όμως στην αρχή του κεφαλαίου αναφερθήκαμε ότι στόχος μας είναι να δημιουργήσουμε μία προσέγγιση που να είναι καλύτερη από του $Tijms$ για μικρές τιμές του αρχικού αποθεματικού που μπορεί να κρατάει μία εταιρεία. Άρα μία ασφαλιστική εταιρεία που στην πράξη όπως έχουμε ξανααναφέρει επιλέγει μία τιμή για το $\theta < 1$, θέλει να κατέχει μία προσέγγιση¹² που να είναι όσο γίνεται πιο κοντά με τον πραγματικό μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, για οποιαδήποτε τιμή του αρχικού αποθεματικού επιθυμεί. Από την άλλη η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ δεν είναι ικανοποιητική καθώς έχει πολύ μεγαλύτερο ποσοστιαίο σφάλμα, για κάθε τιμή του u , σε σχέση με τις άλλες δύο προσεγγίσεις που μελετήσαμε. Όπως και στο παράδειγμα της Ενότητας 4.2 έτσι και εδώ, για τιμές του θ που χρησιμοποιούνται και στην πράξη, η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ είναι πολύ καλύτερη από την $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$. Αυτό που απομένει να δούμε είναι το τι γίνεται στην περίπτωση που το θ παίρνει μεγάλες τιμές, δηλαδή να δούμε εάν οι νέες προσεγγίσεις γίνονται καλύτερες, ποια από τις δύο είναι η καλύτερη και τέλος εάν κάποια από τις δύο νέες προσεγγίσεις γίνεται ακόμα καλύτερη από του $Tijms$, σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση.

Οι τιμές της $\bar{K}_\delta(u)$, των προσεγγίσεων $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ και οι τιμές των παραμέτρων r , p και $\tilde{\lambda}$, δίνονται στους Πίνακες 4.5 και 4.6 αντίστοιχα.

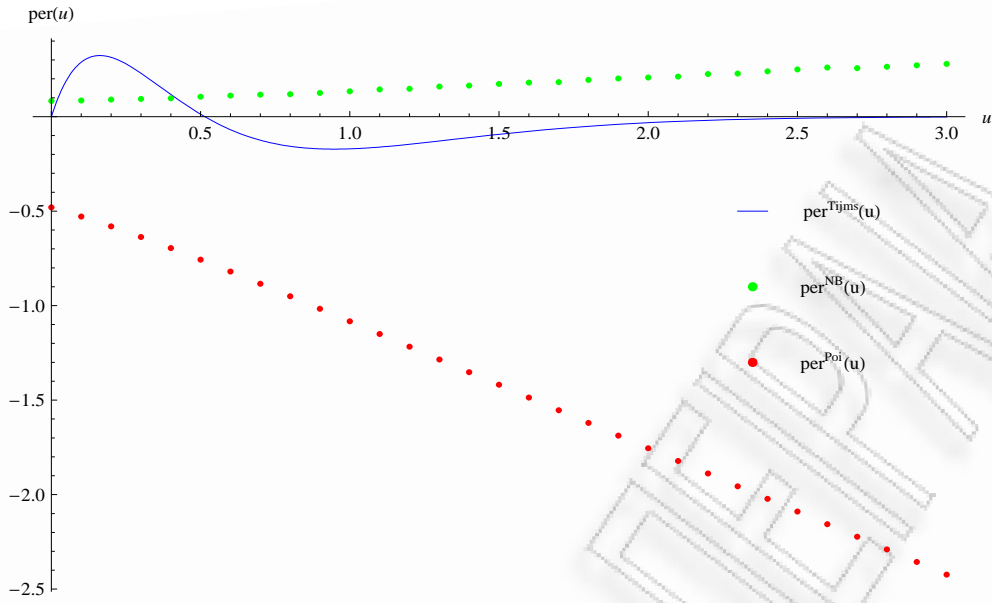
¹²Στη συγκεκριμένη περίπτωση το βέλτιστο είναι να κάνει έναν συνδυασμό των δύο προσεγγίσεων, στα σημεία που είναι η καθεμία καλύτερη, έτσι ώστε να επιτυγχάνει το βέλτιστο αποτέλεσμα.

u	$\overline{K}_\delta^{NB}(u)$	$\overline{K}_\delta(u)$	r	p
0	0.629193	0.628673	0.315789	0.191489
0.1	0.60574	0.605226	0.320198	0.185515
0.2	0.580882	0.58036	0.328408	0.180586
0.3	0.555008	0.554488	0.340112	0.176594
0.4	0.528613	0.528101	0.354852	0.173401
0.5	0.50219	0.501659	0.372141	0.170867
0.6	0.476076	0.475545	0.391528	0.168864
0.7	0.450578	0.450053	0.412612	0.16728
0.8	0.4259	0.425393	0.435051	0.166024
0.9	0.402209	0.401704	0.458557	0.165022
1	0.379574	0.379067	0.482892	0.164217
1.1	0.358037	0.357523	0.507863	0.163563
1.2	0.337576	0.337078	0.533315	0.163024
1.3	0.318225	0.31772	0.559127	0.162575
1.4	0.299911	0.299419	0.585202	0.162194
1.5	0.282626	0.282136	0.611468	0.161867
1.6	0.266307	0.265829	0.63787	0.161581
1.7	0.250908	0.250451	0.664366	0.161329
1.8	0.236412	0.235954	0.690927	0.161103
1.9	0.22274	0.222291	0.717532	0.160899
2	0.20985	0.209417	0.744164	0.160713
2.1	0.197705	0.197287	0.770814	0.160541
2.2	0.186278	0.185859	0.797474	0.160383
2.3	0.175492	0.175093	0.824140	0.160236
2.4	0.165345	0.16495	0.850809	0.160099
2.5	0.155783	0.155395	0.877479	0.159971
2.6	0.146774	0.146394	0.90415	0.159850
2.7	0.138268	0.137914	0.930819	0.159737
2.8	0.130269	0.129926	0.957489	0.15963
2.9	0.122732	0.1224	0.984158	0.159529
3	0.115632	0.11531	1.010826	0.159434
3.3	0.0967112	0.0964115	1.09083	0.159176
3.5	0.085837	0.0855664	1.144167	0.159026
3.8	0.0717851	0.0715428	1.224174	0.158825
4	0.0637226	0.0634952	1.277514	0.158705

Πίνακας 4.5: Πίνακας τιμών του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, της νέας προσέγγισης $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$ και των παραμέτρων της προσεγγιστικής NB κατανομής, για $\Gamma\alpha\mu\alpha(3, 3)$ κατανομή και $\theta = 0.5$.

u	$\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$	$\overline{K}_\delta(u)$	$\tilde{\lambda}$
0	0.625656	0.628673	1.33333
0.1	0.602028	0.605226	1.4058
0.2	0.576989	0.58036	1.49016
0.3	0.550957	0.554488	1.58585
0.4	0.524428	0.528101	1.69157
0.5	0.497863	0.501659	1.80581
0.6	0.471646	0.475545	1.92708
0.7	0.446073	0.450053	2.05399
0.8	0.421351	0.425393	2.18537
0.9	0.397621	0.401704	2.3202
1	0.374961	0.379067	2.45768
1.1	0.353411	0.357523	2.59714
1.2	0.332974	0.337078	2.73807
1.3	0.313638	0.31772	2.88007
1.4	0.295371	0.299419	3.02283
1.5	0.278133	0.282136	3.16613
1.6	0.261878	0.265829	3.3098
1.7	0.24656	0.250451	3.45372
1.8	0.23213	0.235954	3.5978
1.9	0.218539	0.222291	3.74199
2	0.205742	0.209417	3.88624
2.1	0.193693	0.197287	4.03053
2.2	0.182349	0.185859	4.17483
2.3	0.171668	0.175093	4.31915
2.4	0.161614	0.16495	4.46346
2.5	0.152148	0.155395	4.60778
2.6	0.143237	0.146394	4.75208
2.7	0.134848	0.137914	4.89639
2.8	0.126951	0.129926	5.04069
2.9	0.119516	0.1224	5.18498
3	0.112516	0.11531	5.32927
3.3	0.0938833	0.0964115	5.76213
3.5	0.0832089	0.0855664	6.0507
3.8	0.0694295	0.0715428	6.48354
4	0.0615355	0.0634952	6.7721

Πίνακας 4.6: Πίνακας τιμών του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, της νέας προσέγγισης $\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$ και της παραμέτρου της προσεγγιστικής κατανομής Poisson, για Γάμμα(3, 3) κατανομή και $\theta = 0.5$.



Σχήμα 4.9: Ποσοστιαίο σφάλμα των προσεγγίσεων $\bar{K}_\delta^{Tijms}(u)$, $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ και $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για $Gamma(3, 3)$ κατανομή με $\theta = 0.5$ και $\delta = 0.05$.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $c = 2.5$ και $\lambda = 1$, με αποτέλεσμα να αλλάζει η τιμή του περιθωρίου ασφαλείας και να γίνεται

$$\theta = 1.5.$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας σε αυτή την περίπτωση, έχει υπολογιστεί στην Ενότητα 3.4 και δίνεται από τη σχέση (3.27). Εδώ θα δώσουμε τους τύπους του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας και της προσέγγισης *Tijms* του μετασχηματισμού, καθώς δεν έχουν υπολογιστεί ξανά στη παρούσα εργασία. Επομένως, ακολουθώντας τις ήδη γνωστές διαδικασίες που ακολουθήσαμε και στα προηγούμενα παραδείγματα, για την πρώτη ποσότητα παίρνουμε ότι

$$\bar{K}_\delta(u) = 0.486249 e^{-1.06064 u} - e^{-3.77611 u} [0.0948552 \cos(1.11078 u) + 0.0702762 \sin(1.11078 u)], \quad (4.35)$$

ενώ για τη δεύτερη ποσότητα προκύπτει ότι

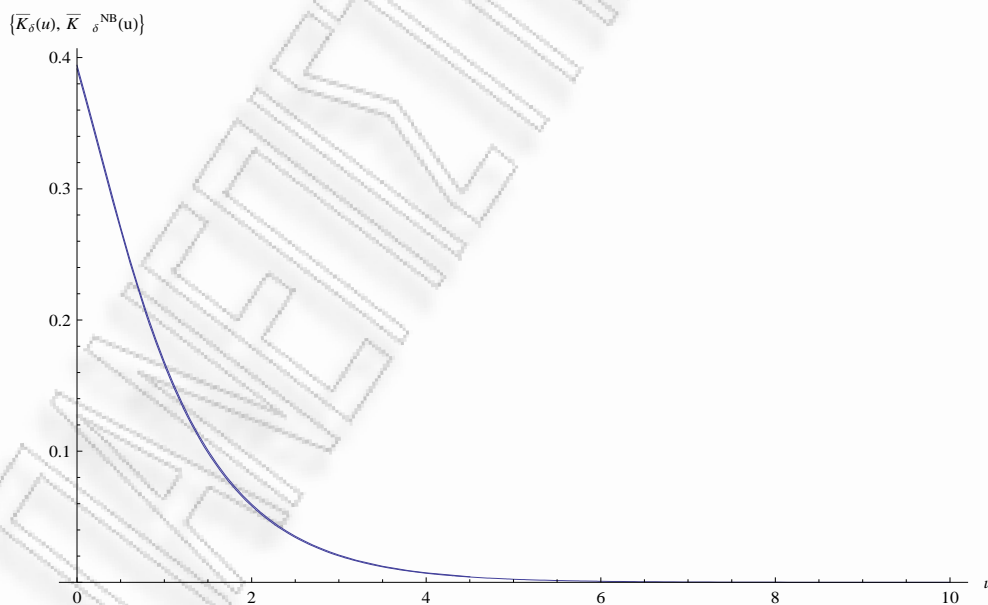
$$\bar{K}_\delta^{Tijms}(u) = 0.486253 e^{-1.06064 u} - 0.0948594 e^{-3.36821 u}. \quad (4.36)$$

Για να υπολογίσουμε τώρα τις τιμές που παίρνουν οι δύο νέες προσεγγίσεις, για τις τιμές του u που έχουμε επιλέξει και στα προηγούμενα παραδείγματα, θα πρέπει πρώτα να βρούμε τις τιμές των παραμέτρων που υπολογίζονται από την λύση των εξισώσεων (4.20) και (4.25) αντίστοιχα. Επομένως, για την προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, γνωρίζοντας την τιμή της έντα-

σης λ που υποθέσαμε παραπάνω καθώς και τις δεσμευμένες ροπές του χρόνου χρεοκοπίας $\psi_1(u)/\psi(u)$ και $\psi_2(u)/\psi(u)$ που δίνονται στην Ενότητα 3.4 από τις σχέσεις (3.28) και (3.29) αντίστοιχα, μπορούμε να βρούμε τις παραμέτρους r, p της αρνητικής διωνυμικής κατανομής. Κάνοντας την συγκεκριμένη διαδικασία στο πρόγραμμα *Mathematica*, παίρνουμε τιμές της παραμέτρου, για διάφορα u , που πληρούν όλους τους περιορισμούς που έχουμε θέσει για αυτές. Εφόσον είμαστε σίγουροι ότι η νέα προσέγγιση λειτουργεί, το μόνο που μένει να κάνουμε είναι να αντικαθιστήσουμε τις τιμές των παραμέτρων r και p , για οποιοδήποτε u επιθυμούμε, στη σχέση

$$\begin{aligned} \bar{K}_\delta^{NB}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+0.05} \right)^k \frac{(r+k-1)!}{k!(r-1)!} p^r (1-p)^k \times (0.493199 e^{-1.04468 u} \\ - e^{-3.77766 u} [0.0931988 \cos(1.11193 u) + 0.069102 \sin(1.11193 u)]) . \end{aligned} \quad (4.37)$$

Αφού υπολογίζουμε τις διάφορες τιμές της προσέγγισης, ακολουθούμε ακριβώς την ίδια διαδικασία που κάναμε και στα προηγούμενα παραδείγματα, δηλαδή κατασκευάζουμε ένα διάγραμμα που αποτελείται από το γράφημα των τιμών της προσέγγισης και από τη γραφική παράσταση της $\bar{K}_\delta(u)$, το οποίο το παρουσιάζουμε στο παρακάτω Σχήμα 4.10.



Σχήμα 4.10: Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων του πραγματικού μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta(u)$, και του προσεγγιστικού, $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, για *Gamma*(3, 3) κατανομή με $\theta = 1.5$ και $\delta = 0.05$.

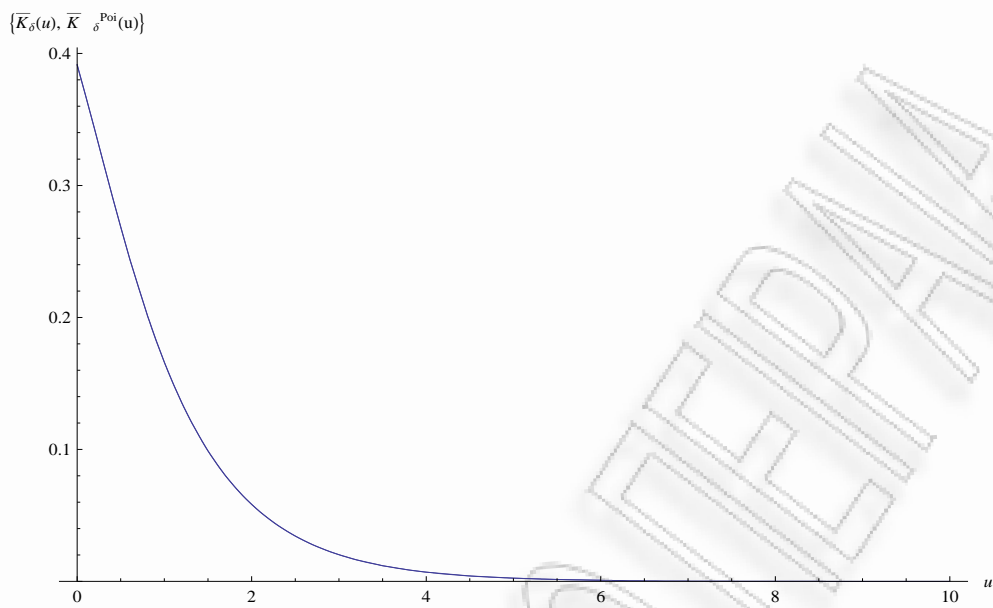
Παρατηρώντας το Σχήμα 4.10, καταλήγουμε ακριβώς στο ίδιο συμπέρασμα που είχαμε καταλήξει και στα προηγούμενα παραδείγματα που χρησιμοποιήσαμε την προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, δηλαδή στο συμπέρασμα ότι από μία πρώτη ματιά φαίνεται να είναι μία πολύ καλή προσέγγιση με τιμές κοντά στις πραγματικές. Το πόσο κοντά όμως είναι αυτές οι τιμές, το δείχνει η εύρεση του ποσοστιαίου σφάλματος που υπάρχει σε κάθε τιμή του u . Το γράφημα που απεικονίζει το ποσοστιαίο σφάλμα της συγκεκριμένης προσέγγισης, δίνεται προς το τέλος της ενότητας, στο Σχήμα 4.12. Στο ίδιο σχήμα παρουσιάζονται επίσης οι γραφικές παραστάσεις του ποσοστιαίου σφάλματος για τις προσεγγίσεις $\bar{K}_\delta^{Tijms}(u)$, $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ και επομένως με αυτό τον τρόπο θα συμπεράνουμε ποια από τις τρεις προσεγγίσεις είναι καλύτερη και για ποιές τιμές του u .

Για την προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, το μόνο που χρειάζεται είναι να εξισώσουμε το γινόμενο της έντασης λ και της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, με την πρώτη κεντρική ροπή μίας *Poisson*($\tilde{\lambda}$) κατανομής. Επομένως, με τη βοήθεια του *Mathematica*, βρίσκουμε την τιμή της παραμέτρου $\tilde{\lambda}$ που αντιστοιχεί σε κάθε τιμή του αρχικού αποθεματικού. Στη συνέχεια αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στον τύπο

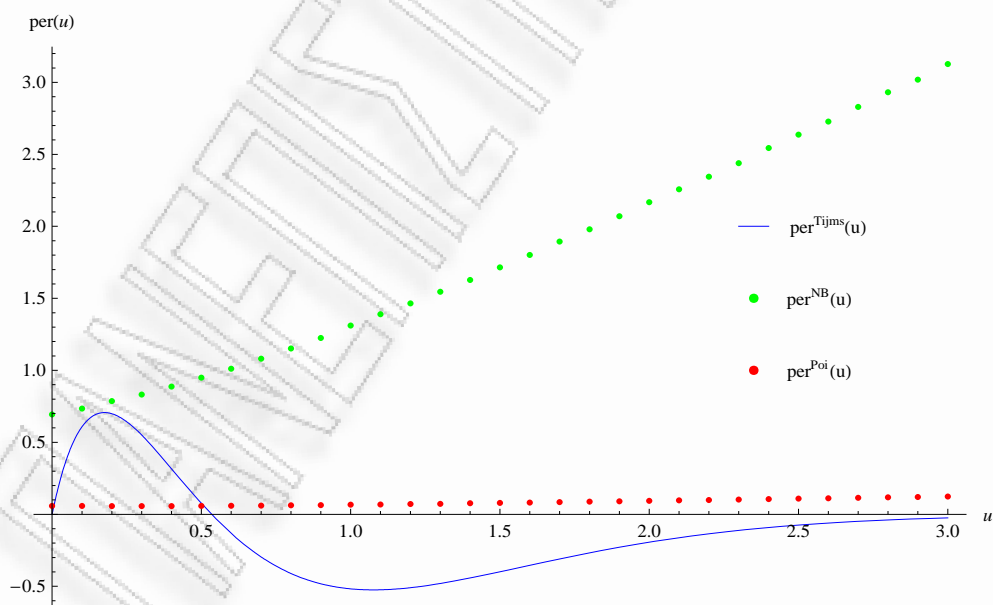
$$\begin{aligned} \bar{K}_\delta^{Poi}(u) = & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+0.05} \right)^k e^{-\tilde{\lambda}} \frac{\tilde{\lambda}^k}{k!} \times (0.493199 e^{-1.04468 u} - e^{-3.77766 u} \\ & \times [0.0931988 \cos(1.11193 u) + 0.069102 \sin(1.11193 u)]), \end{aligned} \quad (4.38)$$

παίρνουμε με τη βοήθεια του *Mathematica* την τιμή της προσέγγισης που αντιστοιχεί σε κάθε τιμή του u . Εδώ δηλαδή βρίσκουμε μία μία τις τιμές της προσέγγισης, κάνοντας την ίδια διαδικασία αρκετές φορές, και καταλήγουμε στο παρακάτω Σχήμα 4.11 όπου έχουμε συνδυάσει τις γραφικές παραστάσεις των $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ και $\bar{K}_\delta(u)$.

Από το Σχήμα 4.11, παρατηρούμε ότι οι τιμές της προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ είναι πάρα πολύ κοντά στις πραγματικές τιμές καθώς δεν μπορούμε να διακρίνουμε την διαφορά των δύο γραφημάτων. Επίσης συγκρίνοντάς το με το Σχήμα 4.10, βλέπουμε ότι κατά πάσα πιθανότητα η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ είναι καλύτερη από ότι η $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$. Όμως για κάτι τέτοιο δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι κοιτάζοντας μόνο τα κοινά διαγράμματα και θα πρέπει να κατασκευάσουμε ένα κοινό διάγραμμα με το ποσοστιαίο σφάλμα που έχει η κάθε προσέγγιση. Εφαρμόζουμε δηλαδή ακριβώς την ίδια διαδικασία που κάναμε και στα προηγούμενα παραδείγματα του κεφαλαίου. Το κοινό διάγραμμα που αναφέραμε, δίνεται στο ακόλουθο Σχήμα 4.12.



Σχήμα 4.11: Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων του πραγματικού μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta(u)$, και του προσεγγιστικού, $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για *Gamma*(3, 3) κατανομή με $\theta = 1.5$ και $\delta = 0.05$.



Σχήμα 4.12: Ποσοστιαίο σφάλμα των προσεγγίσεων $\bar{K}_\delta^{Tijms}(u)$, $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ και $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για *Gamma*(3, 3) κατανομή με $\theta = 1.5$ και $\delta = 0.05$.

Από το Σχήμα 4.12, επιβεβαιώνουμε ότι η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ είναι πολύ καλύτερη από την $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, για κάθε τιμή του αρχικού αποθεματικού u . Επομένως όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία $Gamma(3, 3)$ κατανομή και έχουμε υποθέσει μία μεγάλη τιμή για το θ , τότε φαίνεται ότι η $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ προσεγγίζει καλύτερα τον πραγματικό μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας. Επίσης για μεγάλες τιμές του θ ισχύει και εδώ ότι το ποσοστιαίο σφάλμα της προσέγγισης *Tijms* μεγαλώνει και προκύπτει ότι η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ είναι πολύ καλύτερη από του *Tijms* για αρκετές τιμές του u . Συγκεκριμένα για πολύ μικρές τιμές του u το ποσοστιαίο σφάλμα της νέας προσέγγισης γίνεται μέχρι και 6 φορές μικρότερο από αυτό της προσέγγισης *Tijms*, ενώ μέχρι την τιμή $u = 2.2$, η νέα προσέγγιση φαίνεται να είναι πολύ καλύτερη από του *Tijms*. Μέχρι το $u = 2.5$ οι δύο προσεγγίσεις έχουν περίπου το ίδιο ποσοστό σφάλματος, ενώ από εκεί και πέρα η προσέγγιση *Tijms* γίνεται καλύτερη αφού ισχύει ότι για μεγάλες τιμές του u προσεγγίζει την $\bar{K}_\delta(u)$ σχεδόν με ακρίβεια. Άρα το συμπέρασμα είναι ότι έστω μία από τις δύο νέες προσεγγίσεις λειτουργεί καλύτερα από του *Tijms*, ενώ όσο μεγαλώνει το θ τόσο αυτές βελτιώνονται σε σχέση πάντα με την προσέγγιση *Tijms*.

Τέλος οι τιμές των προσεγγίσεων $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, του πραγματικού μετασχηματισμού *Laplace* $\bar{K}_\delta(u)$ και των παραμέτρων r , p και $\tilde{\lambda}$ αντίστοιχα, για κάθε τιμή του u που έχουμε επιλέξει, δίνονται από τους Πίνακες 4.7 και 4.8 αντίστοιχα.

Για να ολοκληρώσουμε την Ενότητα 4.4, θυμίζουμε ότι στην πράξη η ασφαλιστική εταιρεία επιλέγει συνήθως μικρές τιμές για το θ . Για αυτές τις τιμές δείξαμε ότι η νέα προσέγγιση είναι στις περισσότερες περιπτώσεις ελαφρώς καλύτερη από του *Tijms* και αυτό για πολύ μικρές τιμές του θ . Εδώ δείχνουμε και τι γίνεται για μεγάλες τιμές του θ , μόνο και μόνο για να φανεί ότι υπάρχει αισθητή διαφορά ανάμεσα στις δύο προσεγγίσεις και όχι γιατί τέτοιες τιμές χρησιμοποιούνται στην πράξη.

u	$\overline{K}_\delta^{NB}(u)$	$\overline{K}_\delta(u)$	r	p
0	0.394107	0.391394	0.021978	0.0471204
0.1	0.370054	0.367354	0.020596	0.043715
0.2	0.345248	0.342554	0.019548	0.040752
0.3	0.320091	0.31745	0.018795	0.038206
0.4	0.295145	0.29255	0.018293	0.036035
0.5	0.270856	0.268308	0.017997	0.034191
0.6	0.247557	0.24508	0.017868	0.032623
0.7	0.225525	0.223114	0.017874	0.031284
0.8	0.204896	0.202564	0.017985	0.030134
0.9	0.185752	0.183504	0.018181	0.029137
1	0.168124	0.165948	0.01844	0.028266
1.1	0.15195	0.149867	0.018749	0.027495
1.2	0.137181	0.135201	0.019094	0.026808
1.3	0.123754	0.12187	0.019465	0.026187
1.4	0.111572	0.109785	0.019855	0.025621
1.5	0.100547	0.0988522	0.020256	0.0251
1.6	0.09058	0.0889771	0.020664	0.024617
1.7	0.0815844	0.0800681	0.021074	0.024166
1.8	0.0734637	0.0720377	0.021484	0.1023742
1.9	0.066146	0.0648041	0.02189	0.02334
2	0.059555	0.0582914	0.022293	0.022959
2.1	0.0536133	0.0524299	0.022688	0.022595
2.2	0.0482616	0.0471558	0.023077	0.022247
2.3	0.0434455	0.042411	0.023459	0.021913
2.4	0.0391135	0.038143	0.023833	0.021591
2.5	0.0352087	0.0343042	0.024199	0.021282
2.6	0.0316931	0.0308516	0.024557	0.020983
2.7	0.0285316	0.0277464	0.024907	0.020694
2.8	0.0256851	0.0249537	0.02525	0.020415
2.9	0.0231196	0.0224422	0.025585	0.020144
3	0.0208146	0.0201835	0.025912	0.019882
3.2	0.0168675	0.0163252	0.0265454	0.0193803
3.5	0.0123078	0.0118758	0.0274452	0.0186793
3.8	0.00897912	0.00863908	0.0282895	0.0180327
4	0.00727792	0.00698779	0.028824	0.0176284

Πίνακας 4.7: Πίνακας τιμών του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, της νέας προσέγγισης $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$ και των παραμέτρων της προσεγγιστικής NB κατανομής, για $\Gamma\alpha\mu\alpha(3, 3)$ κατανομή και $\theta = 1.5$.

u	$\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$	$\overline{K}_\delta(u)$	$\tilde{\lambda}$
0	0.391624	0.391394	0.444444
0.1	0.367566	0.367354	0.450542
0.2	0.34275	0.342554	0.460122
0.3	0.317631	0.31745	0.473143
0.4	0.292718	0.29255	0.48934
0.5	0.268464	0.268308	0.508367
0.6	0.245225	0.24508	0.529859
0.7	0.223249	0.223114	0.553468
0.8	0.20269	0.202564	0.578872
0.9	0.183622	0.183504	0.605783
1	0.166059	0.165948	0.633914
1.1	0.14997	0.149867	0.663134
1.2	0.135297	0.135201	0.693161
1.3	0.121959	0.12187	0.723862
1.4	0.109869	0.109785	0.7551
1.5	0.0989303	0.0988522	0.786762
1.6	0.0890499	0.0889771	0.818752
1.7	0.080136	0.0800681	0.850995
1.8	0.072101	0.0720377	0.88343
1.9	0.0648629	0.0648041	0.916008
2	0.058346	0.0582914	0.948691
2.1	0.0524805	0.0524299	0.98145
2.2	0.0472028	0.0471558	1.014262
2.3	0.0424547	0.042411	1.047111
2.4	0.0381834	0.038143	1.079984
2.5	0.0343415	0.0343042	1.112872
2.6	0.030886	0.0308516	1.145768
2.7	0.0277782	0.0277464	1.178669
2.8	0.0249831	0.0249537	1.211572
2.9	0.0224693	0.0224422	1.244474
3	0.0202085	0.0201835	1.277374
3.2	0.0163465	0.0163252	1.34317
3.5	0.0118923	0.0118758	1.44184
3.8	0.00865189	0.00863908	1.5405
4	0.00699857	0.00698779	1.60627

Πίνακας 4.8: Πίνακας τιμών του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, της νέας προσέγγισης $\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$ και της παραμέτρου της προσεγγιστικής κατανομής Poisson, για Γάμμα(3, 3) κατανομή και $\theta = 1.5$.

Κεφάλαιο 5

Επιπλέον αριθμητικά παραδείγματα για την εφαρμογή των νέων προσεγγίσεων.

Σε αυτό το κεφάλαιο δίνουμε δύο επιπλέον παραδείγματα όπου το μέγεθος των αποζημιώσεων ακολουθεί πιο πολύποκες κατανομές από πριν και στόχος μας είναι να εξετάσουμε το πώς λειτουργούν οι δύο νέες προσεγγίσεις για τις συγκεκριμένες περιπτώσεις. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να δούμε το ποια από τις δύο προσεγγίσεις λειτουργεί καλύτερα στην κάθε περίπτωση, καθώς και σε ποια περίπτωση μπορεί κάποια να είναι πολύ καλύτερη από την προσέγγιση *Tijms*. Βέβαια για να μπορεί να γίνει χρήση των δύο προσεγγίσεων, θα πρέπει πρώτα να έχουν υπολογιστεί οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας. Επειδή στο τρίτο κεφάλαιο δεν χρησιμοποιήσαμε τα συγκεκριμένα παραδείγματα, δίνουμε στα Παραρτήματα Β' και Γ' αντίστοιχα αναλυτικά και γραφικά τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας που είναι απαραίτητες για την εύρεση των τιμών των προσεγγίσεων.

5.1 Οι νέες προσεγγίσεις $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$ και $\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$ για μείξη πέντε εκθετικών κατανομών.

Στην Ενότητα 5.1 γενικεύουμε την κατανομή αποζημιώσεων που είχαμε στην προηγούμενη ενότητα, θεωρώντας τώρα ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία μείξη πέντε εκθετικών κατανομών με σ.π.π

$$f(x) = \frac{1}{5} 2e^{-2x} + \frac{1}{5} 4e^{-4x} + \frac{1}{5} 6e^{-6x} + \frac{1}{5} 8e^{-8x} + \frac{1}{5} 10e^{-10x}$$

Θέλουμε να δούμε εάν σε αυτή την περίπτωση, για δύο διαφορετικές τιμές του θ , λειτουργούν

εξίσου καλά οι δύο νέες προσεγγίσεις που έχουμε δημιουργήσει. Για αρχή, υποθέτουμε ότι $c = 1$, $\lambda = 2$ και επομένως προκύπτει ότι

$$\theta = 1.18978.$$

Στο Παράρτημα B' που υπάρχει στο τέλος της εργασίας, για τη συγκεκριμένη κατανομή αποζημιώσεων και την τιμή του θ , είχαμε καταλήξει ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση ($B'.1$). Επίσης ακολουθώντας τον τρόπο υπολογισμού του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, που έχει δοθεί αναλυτικά στο Κεφάλαιο 1, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \bar{K}_\delta(u) = & 0.0103896 e^{-9.72709 u} + 0.0175533 e^{-7.68031 u} + 0.030267 e^{-5.6371 u} \\ & + 0.0633029 e^{-3.57868 u} + 0.322453 e^{-1.41675 u} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Επίσης στο Κεφάλαιο 2 και συγκεκριμένα στα αριθμητικά παραδείγματα των ενότητων 2.2 και 2.3, αναλύουμε λεπτομερώς το πώς μπορεί να βρεθεί η προσέγγιση *Tijms* για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας. Επομένως, εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία που είχαμε περιγράψει στις παραπάνω ενότητες, προκύπτει ότι

$$\bar{K}_\delta^{Tijms}(u) = 0.088628 e^{-3.52959 u} + 0.442262 e^{-1.2385 u} \quad (5.2)$$

Παρατηρούμε ότι επειδή η προσέγγιση *Tijms* αποτελείται μόνο από δύο εκθετικούς όρους ενώ η πραγματική $\bar{K}_\delta(u)$ από πέντε όρους, ίσως να μην είναι τόσο ακριβής προσέγγιση όσο ήταν στην περίπτωση της μείξης των τριών εκθετικών κατανομών. Αυτό είναι λογικό καθώς όσο αυξάνονται οι όροι τόσο περισσότερο χειροτερεύει και η προσέγγιση *Tijms*. Κάτι τέτοιο όμως για να δούμε αν ισχύει θα πρέπει να υπολογίσουμε το ποσοστιαίο σφάλμα της και στη συνέχεια να το συγκρίνουμε με το ποσοστιαίο σφάλμα των νέων προσεγγίσεων. Η διαφορά εδώ είναι ότι δεν έχουμε κατασκευάσει σε προηγούμενο κεφάλαιο την γραφική παράσταση ή το ποσοστιαίο σφάλμα της $\bar{K}_\delta^{Tijms}(u)$, σε σχέση με την $\bar{K}_\delta(u)$. Επομένως θα κατασκευάσουμε ένα κοινό διάγραμμα το οποίο θα περιέχει το ποσοστιαίο σφάλμα, για κάθε τιμή του u , που έχουν οι προσεγγίσεις που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω. Τέλος είναι πολύ σημαντικό να δούμε αν λειτουργούν και οι δύο νέες προσεγγίσεις, καθώς και να ελέγξουμε αν και κατά πόσο καλύτερες είναι από την προσέγγιση *Tijms*. Βέβαια το πιο ενδιαφέρον θα ήταν να είχαμε πάρει μία μείξη πέντε εκθετικών η οποία να είχε την ίδια μέση τιμή και την ίδια τιμή για το θ , με αυτή των τριών εκθετικών που είχαμε στην προηγούμενη ενότητα. Έτσι με αυτό τον τρόπο θα μπορούσαμε να δούμε το πώς επηρεάζονται οι προσεγγίσεις μόνο όταν αλλάζει η κατανομή των αποζημιώσεων με όλες τις άλλες παραμέτρους, που μπορούν να τις επηρεάσουν, να μένουν σταθερές. Κάτι τέτοιο δεν γίνεται στη συγκεκριμένη

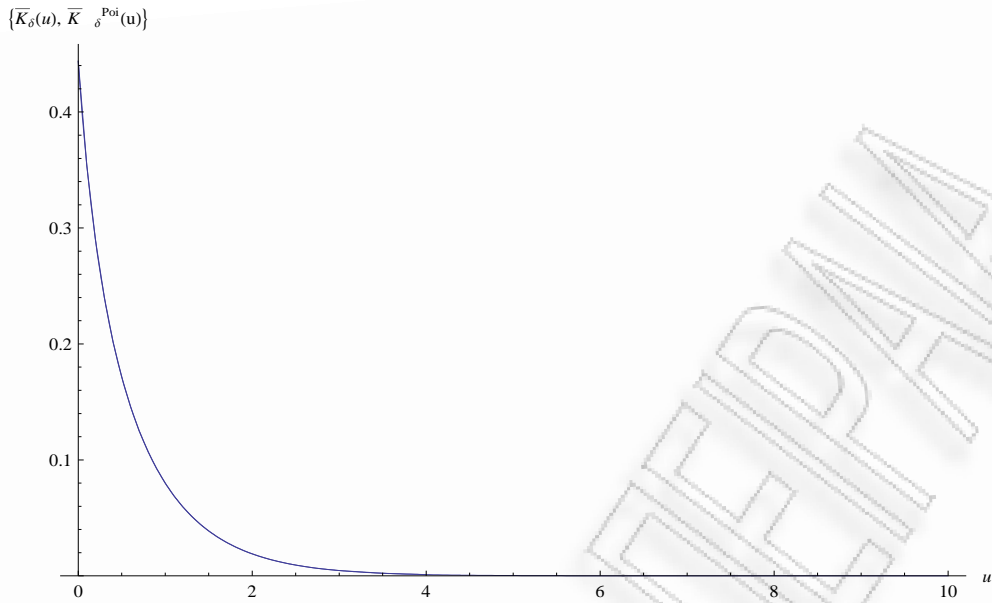
περίπτωση, αλλά θα το δούμε στη συνέχεια του κεφαλαίου όπου παίρνουμε δύο κατανομές *Gamma* με διαφορετικές παραμέτρους, αλλά με την ίδια μέση τιμή και τις ίδιες τιμές για το περιθώριο ασφάλειας, θ .

Δοκιμάζοντας την προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ που δίνεται από τη σχέση (4.7), θα διαπιστώσουμε ότι δεν μπορεί να εφαρμοστεί διότι λύνοντας το σύστημα (4.20), προκύπτουν λύσεις για τις παραμέτρους r και p της αρνητικής διωνυμικής κατανομής οι οποίες δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς που είχαμε θέσει για αυτές τις τιμές, στην Ενότητα 4.1. Επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία μείζη αρκετών εκθετικών κατανομών, υπάρχει πιθανότητα να μην είναι δυνατή η εύρεση της προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, καθαρά λόγω αδυναμίας εύρεσης κατάλληλων τιμών για τις παραμέτρους της αρνητικής διωνυμικής κατανομής.

Άρα από τα παραπάνω γίνεται κατανοητό ότι μόνο η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ μπορεί να εφαρμοστεί καθώς από τη λύση της εξίσωσης (4.25), προκύπτουν θετικές τιμές για την παράμετρο $\tilde{\lambda}$ για κάθε τιμή του u . Θυμίζουμε ότι για την εύρεση της παραμέτρου της προσεγγιστικής *Poisson* κατανομής, πρέπει να γνωρίζουμε την ένταση της ανέλιξης *Poisson*, που εδώ ισούται με $\lambda = 2$, και την πρώτη δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας η οποία έχει υπολογιστεί στο Παράρτημα B' και δίνεται από τη σχέση (B'.2). Στη συνέχεια, έχοντας υπολογίσει τις τιμές του $\tilde{\lambda}$ για κάθε τιμή του u , παίρνουμε τη σχέση (4.24) η οποία εδώ γράφεται ως

$$\begin{aligned} \bar{K}_\delta^{Poi}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2+0.05} \right)^k e^{-\tilde{\lambda}} \frac{\tilde{\lambda}^k}{k!} \times [0.0101273 e^{-9.72616 u} + 0.0171163 e^{-7.67875 u} \\ + 0.0295346 e^{-5.6344 u} + 0.0619662 e^{-3.57305 u} + 0.337922 e^{-1.38765 u}], \end{aligned} \quad (5.3)$$

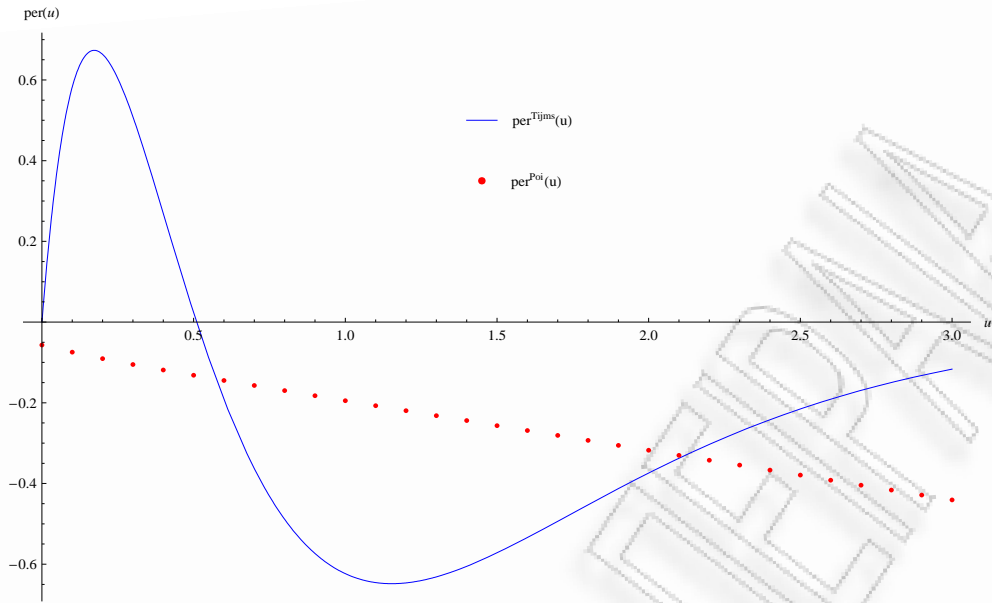
και αντικαθιστώντας τις τιμές της παραμέτρου $\tilde{\lambda}$ και του αρχικού αποθεματικού, βρίσκουμε τις τιμές της προσέγγισης για τις τιμές του u που επιλέγουμε να πάρουμε. Επομένως βλέπουμε και σε αυτό το παράδειγμα ότι οι τιμές της νέας προσέγγισης βρίσκονται με διακριτό τρόπο και αυτό είναι που κάνει αυτές τις προσεγγίσεις να υπολογίζονται σε περισσότερο χρόνο από ότι η προσέγγιση *Tijms*. Επιλέγοντας πολύ κοντινές τιμές για το u , μπορούμε να ενώσουμε τα διακριτά σημεία της προσέγγισης και να κατασκευάσουμε μία γραφική παράσταση η οποία να φαίνεται συνεχής, χωρίς να χρειάζεται να υπολογίσουμε την προσέγγιση για όλες τις τιμές του u , και στη συνέχεια να τη συγκρίνουμε με τη γραφική παράσταση της $\bar{K}_\delta(u)$. Το κοινό διάγραμμα των δύο αυτών γραφημάτων, δίνεται στο παρακάτω Σχήμα 5.1.



Σχήμα 5.1: Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων του πραγματικού μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta(u)$, και του προσεγγιστικού, $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για μείξη πέντε εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.18978$ και $\delta = 0.05$.

Από το Σχήμα 5.1 δεν μπορεί κάποιος να διακρίνει τη διαφορά που υπάρχει ανάμεσα στις δύο γραφικές παραστάσεις και φαίνεται να είναι το ένα γράφημα πάνω στο άλλο. Αυτό μας κάνει, με μία πρώτη ματιά, να πιστεύουμε ότι οι τιμές της προσέγγισης που κατασκευάσαμε μάλλον θα είναι πολύ κοντά με τις πραγματικές τιμές. Για να σιγουρευτούμε όμως, βρίσκουμε για κάθε τιμή του u το ποσοστιαίο σφάλμα που έχει η προσέγγιση σε σχέση με τις πραγματικές τιμές και στη συνέχεια για να μπορούμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα, κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση αυτών των τιμών που βρίσκουμε. Όπως καταλαβαίνουμε και αυτό το διάγραμμα έχει διακριτά σημεία, καθώς δεν έχουμε υπολογίσει ποιο είναι το ποσοστιαίο σφάλμα για οποιαδήποτε τιμή του u . Το κοινό διάγραμμα που περιέχει τις γραφικές παραστάσεις του ποσοστιαίου σφάλματος των προσεγγίσεων $\bar{K}_\delta^{Tijms}(u)$ και $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, δίνεται στο παρακάτω Σχήμα 5.2.

Από το Σχήμα 5.2, παρατηρούμε ότι η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ είναι καλύτερη από του $Tijms$ για τις περισσότερες τιμές του u μέχρι την τιμή 0.5, εκτός από την τιμή 0 και κάποιες τιμές κοντά στο διάστημα 0.4 έως 0.5. Μετά από αυτά τα σημεία είναι καλύτερη, ακόμα και 3 περίπου φορές καλύτερη, μέχρι την τιμή 2.1, όπου εκεί πλησιάζει την προσέγγιση $Tijms$, ενώ στη συνέχεια γίνεται καλύτερη η προσέγγιση $Tijms$ καθώς για τιμές του u μεγαλύτερες του 2.1, αποκτάει σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά με αποτέλεσμα για εκείνες τις τιμές να επιλέγουμε την προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Tijms}(u)$. Αυτός είναι και ο λόγος που έχουμε επιλέξει να πάρουμε τιμές για το u μέχρι την τιμή 3.



Σχήμα 5.2: Ποσοστιαίο σφάλμα των προσεγγίσεων $\bar{K}_\delta^{Tijms}(u)$, $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για μείξη πέντε εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.18978$ και $\delta = 0.05$.

Στη συνέχεια παίρνουμε μία μεγάλη τιμή για το θ για να δούμε κατά πόσο καλύτερη είναι, σε αυτή την περίπτωση, η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ από την προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Tijms}(u)$. Όπως και πριν έτσι και εδώ, η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ δεν μπορεί να υπολογιστεί καθώς και σε αυτή την περίπτωση, από τη λύση των δύο εξισώσεων της σχέσης (4.20), προκύπτουν τιμές για τις παραμέτρους r και p οι οποίες δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς που θέτει η αρνητική διωνυμική κατανομή. Επομένως θα ασχοληθούμε πάλι μόνο με την προσέγγιση για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, μέσω κατανομής *Poisson*.

Υποθέτουμε ότι $c = 1.1$ και $\lambda = 2$. Επομένως παίρνουμε ότι το περιθώριο ασφάλειας ισούται με

$$\theta = 1.40876.$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας στη συγκεκριμένη περίπτωση, έχουμε βρεί από το Παράρτημα B' , ότι ισούται με τη σχέση (B'.3) και ο μετασχηματισμός *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας ($\delta > 0$) βρίσκουμε μετά από πράξεις στο *Mathematica* ότι ισούται με

$$\begin{aligned} \bar{K}_\delta(u) = & 0.010768 e^{-9.74402 u} + 0.0179373 e^{-7.70271 u} + 0.0304945 e^{-5.66516 u} \\ & + 0.0623966 e^{-3.61533 u} + 0.28369 e^{-1.48559 u} \end{aligned} \quad (5.4)$$

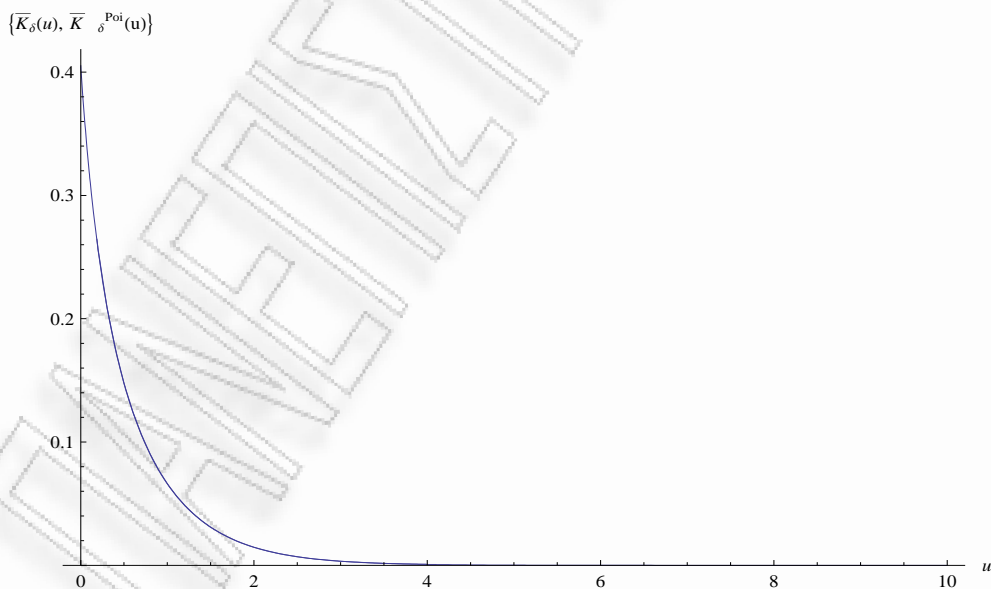
Τέλος μέσω της μεθοδολογίας που αναπτύξαμε στο δεύτερο κεφάλαιο, προκύπτει ότι η προσέγγιση *Tijms* για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, ισούται με

$$\overline{K}_\delta^{Tijms}(u) = 0.121599 e^{-4.66302 u} + 0.283688 e^{-1.48559 u} \quad (5.5)$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι η πρώτη δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας ισούται με τη σχέση (B'.4) που έχει δοθεί στο παράρτημα B'. Επομένως λύνοντας την εξίσωση (4.25), ως προς $\tilde{\lambda}$, βρίσκουμε την παράμετρο της *Poisson* κατανομής, για κάθε τιμή του u , με την οποία έχουμε προσεγγίσει την άγνωστη, ως προς εμάς, κατανομή της τ.μ K^* . Στη συνέχεια αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές της παραμέτρου, για κάθε αρχικό αποθεματικό, στο τύπο

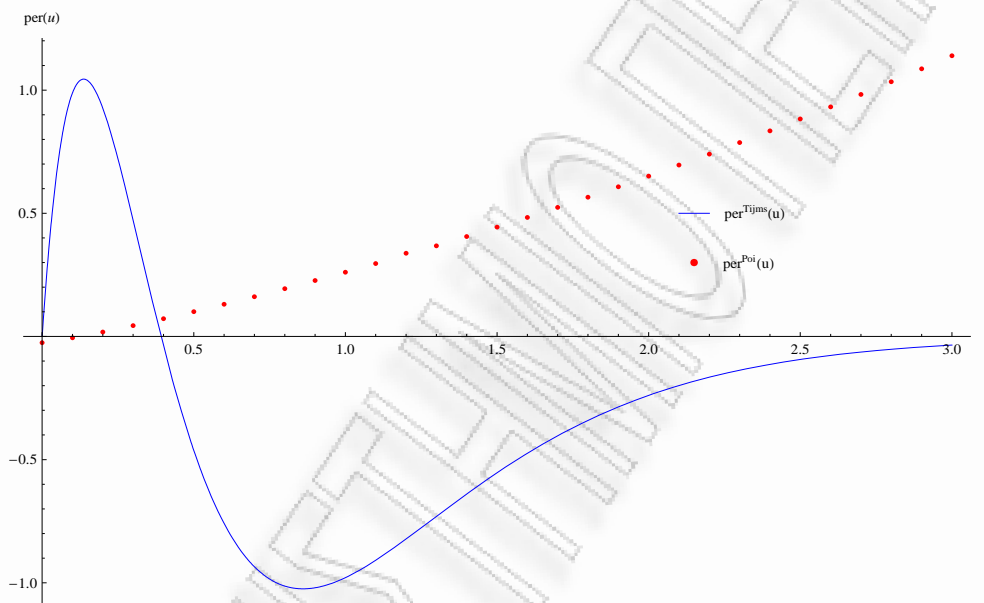
$$\begin{aligned} \overline{K}_\delta^{Poi}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2+0.05} \right)^k e^{-\tilde{\lambda}} \frac{\tilde{\lambda}^k}{k!} \times [0.0105739 e^{-9.7432 u} + 0.017624 e^{-7.70134 u} \\ + 0.0299932 e^{-5.66284 u} + 0.0615949 e^{-3.6106 u} + 0.295365 e^{-1.46384 u}] , \end{aligned} \quad (5.6)$$

παίρνουμε τις τιμές της προσέγγισης $\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$. Επιλέγοντας διάφορες τιμές για το αρχικό αποθεματικό που κρατά η κάθε εταιρεία, κατασκευάζουμε ένα κοινό διάγραμμα με τις γραφικές παραστάσεις των τιμών της νέας προσέγγισης, που υπολογίστηκε από τη σχέση (5.6), και του πραγματικού μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, $\overline{K}_\delta(u)$. Το συγκεκριμένο κοινό διάγραμμα δίνεται από το παρακάτω Σχήμα 5.3.



Σχήμα 5.3: Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων του πραγματικού μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, $\overline{K}_\delta(u)$, και του προσεγγιστικού, $\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$, για μείζη πέντε εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.40876$ και $\delta = 0.05$.

Στο Σχήμα 5.3, παρατηρούμε ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις φαίνονται σαν να είναι μία, δηλαδή σαν να είναι η μία πάνω στην άλλη. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ είναι μία παρά πολύ καλή προσέγγιση, καθώς φαίνεται ότι οι τιμές της είναι πολύ κοντά με τις πραγματικές τιμές που δίνονται, για κάθε τιμή του u , από τη σχέση (5.4). Για να επιβεβαιώσουμε όμως τα παραπάνω και για να δούμε ακριβώς πόσο κοντά είναι οι τιμές της προσέγγισης με τις πραγματικές, παίρνουμε το ποσοστιαίο σφάλμα που υπάρχει ανάμεσα σε αυτές τις τιμές, για κάθε τιμή του αρχικού αποθεματικού u . Κατασκευάζοντας και το ποσοστιαίο σφάλμα της προσέγγισης $Tijms$ σε σχέση με την $\bar{K}_\delta(u)$, παίρνουμε το κοινό διάγραμμα με τις γραφικές παραστάσεις του ποσοστιαίου σφάλματος των δύο προσεγγίσεων το οποίο δίνεται στη συνέχεια, στο Σχήμα 5.4.



Σχήμα 5.4: Ποσοστιαίο σφάλμα των προσεγγίσεων $\bar{K}_\delta^{Tijms}(u)$, $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για μείξη πέντε εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.40876$ και $\delta = 0.05$.

Από το Σχήμα 5.4, διακρίνουμε καθαρά για ποιες τιμές του u είναι καλύτερη η νέα προσέγγιση σε σχέση με την προσέγγιση $Tijms$ αλλά και το αντίθετο. Εδώ έχουμε επιλέξει να πάρουμε τιμές για το αρχικό αποθεματικό μέχρι την τιμή $u = 3$ καθώς από εκεί και πέρα το ποσοστιαίο σφάλμα παίρνει σχεδόν μηδενικές τιμές. Εκεί που μπορούμε να υπολογίσουμε ότι η νέα προσέγγιση που κατασκευάσαμε είναι καλύτερη, είναι για τιμές του u μέχρι την τιμή $u = 1.5$. Όμως ανάμεσα σε αυτά υπάρχουν τιμές του u για τις οποίες είναι καλύτερη η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Tijms}(u)$, όπως για παράδειγμα η τιμή $u = 0$ και η τιμή $u = 0.4$.

Τέλος οι τιμές της προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας $\bar{K}_\delta(u)$ και της παραμέτρου $\tilde{\lambda}$, για $\theta = 1.18978$ και $\theta = 1.40876$, δίνονται στους παρακάτω Πίνακες 5.1 και 5.2 αντίστοιχα.

u	$\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$	$\overline{K}_\delta(u)$	$\tilde{\lambda}$
0	0.443713	0.443966	1.17975
0.1	0.353149	0.353413	1.47344
0.2	0.288638	0.2889	1.72708
0.3	0.24008	0.240333	1.94996
0.4	0.202045	0.202285	2.14997
0.5	0.171404	0.17163	2.33308
0.6	0.14623	0.146442	2.50357
0.7	0.12526	0.125457	2.66451
0.8	0.107616	0.107799	2.81811
0.9	0.0926631	0.0928326	2.966
1	0.0799227	0.0800788	3.10938
1.1	0.0690233	0.0691667	3.24919
1.2	0.0596703	0.0598016	3.38613
1.3	0.051625	0.051745	3.52076
1.4	0.0446921	0.0448015	3.65352
1.5	0.038709	0.0388086	3.78475
1.6	0.0335399	0.0336303	3.91475
1.7	0.02907	0.0291519	4.04373
1.8	0.0252019	0.025276	4.17189
1.9	0.0218528	0.0219198	4.29937
2	0.0189517	0.0190121	4.42629
2.1	0.0164378	0.0164923	4.55276
2.2	0.0142588	0.0143078	4.67885
2.3	0.0123697	0.0124137	4.80464
2.4	0.0107315	0.010771	4.93017
2.5	0.00931074	0.00934619	5.0555
2.6	0.00807843	0.0081102	5.18066
2.7	0.00700945	0.00703789	5.30568
2.8	0.0060821	0.00610753	5.43058
2.9	0.00527755	0.00530027	5.55539
3	0.00457951	0.00459979	5.68013
3.3	0.00299233	0.0030067	6.054
3.5	0.00225331	0.00226469	6.30306
3.8	0.00147249	0.00148048	6.67648
4	0.00110887	0.00111516	6.92536

Πίνακας 5.1: Πίνακας τιμών του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, της νέας προσέγγισης $\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$ και της παραμέτρου της προσεγγιστικής κατανομής *Poisson*, για μείζη πέντε εκθετικών κατανομών και $\theta = 1.18978$.

u	$\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$	$\overline{K}_\delta(u)$	$\tilde{\lambda}$
0	0.405184	0.405286	0.996369
0.1	0.317647	0.317665	1.22081
0.2	0.256292	0.256246	1.41104
0.3	0.210789	0.210696	1.57458
0.4	0.175616	0.17549	1.71804
0.5	0.147617	0.147469	1.84649
0.6	0.124861	0.124698	1.96364
0.7	0.10609	0.105919	2.07213
0.8	0.090442	0.0902668	2.17388
0.9	0.0772946	0.0771195	2.2703
1	0.0661842	0.066012	2.36243
1.1	0.0567541	0.0565867	2.45107
1.2	0.0487232	0.0485622	2.53683
1.3	0.0418662	0.0417127	2.62019
1.4	0.0359998	0.0358544	2.70153
1.5	0.0309728	0.0308359	2.78115
1.6	0.0266598	0.0265316	2.85928
1.7	0.0229557	0.0228361	2.93613
1.8	0.0197719	0.0196608	3.01185
1.9	0.0170338	0.0169309	3.08656
2	0.0146776	0.0145827	3.16039
2.1	0.0126493	0.0125619	3.2334
2.2	0.0109026	0.0108225	3.30568
2.3	0.00939816	0.00932477	3.37728
2.4	0.00810198	0.00803494	3.44826
2.5	0.00698506	0.00692394	3.51864
2.6	0.00602247	0.00596685	3.58846
2.7	0.00519279	0.00514227	3.65775
2.8	0.0044776	0.00443178	3.72654
2.9	0.00386105	0.00381955	3.79485
3	0.00332949	0.00329197	3.86268
3.3	0.00213531	0.00210778	4.06349
3.5	0.00158815	0.00156588	4.19521
3.8	0.0010188	0.00100272	4.38973
4	0.000757841	0.000744958	4.51742

Πίνακας 5.2: Πίνακας τιμών του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, της νέας προσέγγισης $\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$ και της παραμέτρου της προσεγγιστικής κατανομής Poisson, για μείξη πέντε εκθετικών κατανομών και $\theta = 1.40876$.

Όπως είχαμε αναφέρει και στο Κεφάλαιο 4, για μεγάλες τιμές του θ έχει αποδειχθεί ότι η προσέγγιση $Tijms$ χειροτερεύει σε σχέση με μικρότερες τιμές του θ . Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα και από τα διαγράμματα 5.2 και 5.4 αντίστοιχα. Όμως στην περίπτωση που είχαμε ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία μείξη τριών εκθετικών κατανομών, για μεγάλες τιμές του θ είχαμε δείξει ότι και οι δύο νέες προσεγγίσεις βελτιωνόντουσαν σε σχέση με την προσέγγιση $Tijms$ και μάλιστα είδαμε κατά πόσο καλύτερη ήταν η προσέγγιση $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$ σε σχέση με την $\overline{K}_\delta^{Tijms}(u)$, για $\theta = 1.45455$. Στην περίπτωση που εξετάζουμε σε αυτή την ενότητα, βλέπουμε ότι μπορεί το ποσοστιαίο σφάλμα της προσέγγισης $Tijms$, για $\theta = 1.40876$, να παίρνει μεγαλύτερες τιμές από ότι για $\theta = 1.18978$ αλλά και η προσέγγιση $\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$ φαίνεται να χειροτερεύει για μεγαλύτερες τιμές του θ . Αυτός είναι ο λόγος που στην περίπτωση που ισχύει ότι $\theta = 1.18978$, η νέα προσέγγιση είναι καλύτερη από αυτή του $Tijms$ για περισσότερες τιμές του αρχικού αποθεματικού u . Σε αυτό μπορεί να ευθύνεται και το γεγονός ότι εδώ δεν μπορεί να εφαρμοστεί η προσέγγιση $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$, καθώς έχουμε αναφέρει ότι αυτή είναι η κύρια προσέγγιση και η $\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$ δημιουργήθηκε μόνο και μόνο επειδή σε μερικές περιπτώσεις, όπως αυτή που εξετάζουμε, δεν είναι δυνατή η εφαρμογή της αρνητικής διωνυμικής κατανομής ως προσεγγιστικής κατανομής για την τ.μ K^* . Συνήθως από τις δύο νέες προσεγγίσεις, καλύτερη είναι στις περισσότερες περιπτώσεις η προσέγγιση $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$, όταν ο υπολογισμός της είναι εφικτός, ενώ όπως θα δούμε και στη συνέχεια η προσέγγιση $\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$ μπορεί να είναι καλύτερη για ορισμένες κατανομές αποζημιώσεων και για μεγάλες τιμές του θ . Βέβαια για να γίνει η σύγκριση μεταξύ των δύο νέων προσεγγίσεων, θα πρέπει να μπορούν να υπολογιστούν και οι δύο και στη συνέχεια να δούμε ποια είναι καλύτερη και σε ποιές περιπτώσεις με την εύρεση του ποσοστιαίου σφάλματος που έχει η κάθε προσέγγιση, για διάφορες τιμές του u .

5.2 Οι νέες προσεγγίσεις $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$ και $\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$ για κατανομή $\text{Gamma}(10,10)$.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα υποθέτουμε ότι το μέγεθος των αποζημιώσεων ακολουθεί μία $\text{Gamma}(10,10)$ κατανομή με μεση τιμή $\mu = 1$ και έχουμε πάρει για αρχή ότι $c = 1.5$ και $\lambda = 1$. Επομένως από τη σχέση (1.3), παίρνουμε ότι

$$\theta = 0.5.$$

Το ίδιο παράδειγμα έχει μελετηθεί και στο Παράρτημα Γ', όπου εκεί έχουν δοθεί η πιθανότητα χρεοκοπίας και οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας που ισχύουν για κάθε διαφορετική τιμή του θ . Για $\theta = 0.5$, παίρνουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με τη σχέση (Γ'.1), ενώ

επιπλέον για $\delta = 0.05$ ο μετασχηματισμός *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας ισούται με

$$\begin{aligned} \bar{K}_\delta(u) = & 0.733858 e^{-0.743358 u} - 0.0142072 e^{-17.1964 u} - e^{-15.948 u} \\ & \times [0.028033 \cos(4.10547 u) + 0.01012534 \sin(4.10547 u)] - e^{-12.5931 u} \\ & \times [0.026604 \cos(6.85254 u) + 0.022337 \sin(6.85254 u)] - e^{-8.17293 u} \quad (5.7) \\ & \times [0.0226714 \cos(7.29731 u) + 0.0409218 \sin(7.29731 u)] - e^{-4.01177 u} \\ & \times [0.0079242 \cos(5.16178 u) + 0.0827798 \sin(5.16178 u)] \end{aligned}$$

Τέλος η προσέγγιση *Tijms* για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας ισούται με

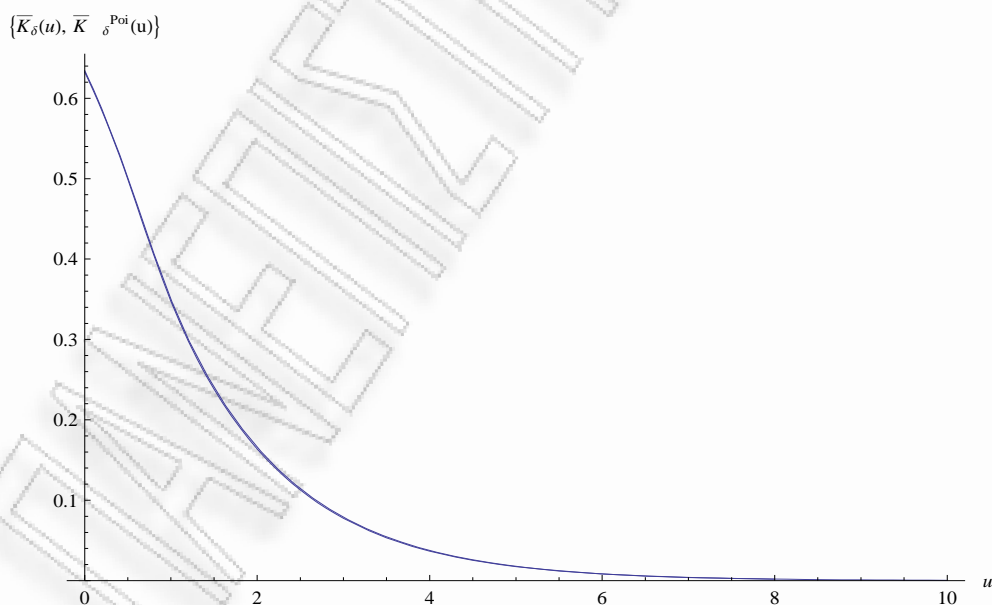
$$\bar{K}_\delta^{Tijms}(u) = 0.733858 e^{-0.743361 u} - 0.0994406 e^{-5.02832 u}. \quad (5.8)$$

Εδώ πρέπει να αναφέρουμε ότι χρησιμοποιούμε μόνο την προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ καθώς η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ δεν μπορεί να υπολογιστεί λόγω του ότι οι τιμές των παραμέτρων r και p της αρνητικής διωνυμικής κατανομής, που βρίσκονται από την λύση του συστήματος (4.20), δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς που έχουμε θέσει στην Ενότητα 4.1. Επομένως γνωρίζοντας ότι $\lambda = 1$ και την πρώτη δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας, $\psi_1(u)/\psi(u)$, που δίνεται στο Παράρτημα Γ' από τη σχέση (Γ'.2), βρίσκουμε, λύνοντας ως προς $\tilde{\lambda}$ την εξίσωση (4.25), την παράμετρο $\tilde{\lambda}$ της *Poisson* κατανομής που αντιστοιχεί για κάθε τιμή του αρχικού αποθεματικού u . Στη συνέχεια για κάθε u που επιλέγουμε, αντικαθιστούμε την τιμή της παραμέτρου $\tilde{\lambda}$ που αντιστοιχεί σε κάθε μία από αυτές τις τιμές, στον τύπο

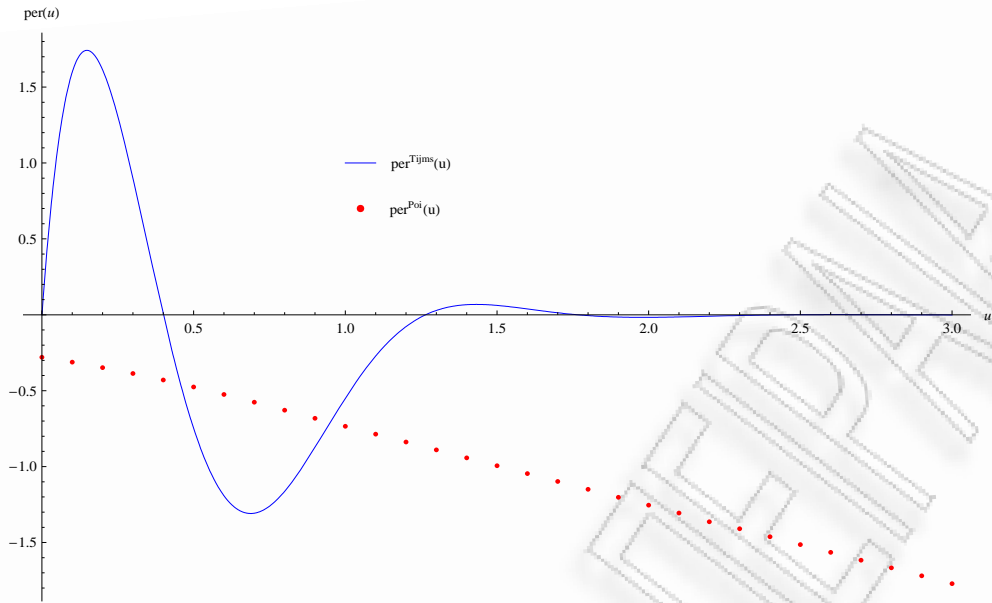
$$\begin{aligned} \bar{K}_\delta^{Poi}(u) = & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+0.05} \right)^k e^{-\tilde{\lambda}} \frac{\tilde{\lambda}^k}{k!} \times (0.75634 e^{-0.676577 u} - 0.0129101 e^{-17.1977 u} \\ & - e^{-15.9492 u} [0.0254646 \cos(4.10593 u) + 0.00922196 \sin(4.10593 u)] - e^{-12.5943 u} \\ & \times [0.0241322 \cos(6.85355 u) + 0.0203378 \sin(6.85355 u)] - e^{-8.17395 u} \quad (5.9) \\ & \times [0.0204626 \cos(7.29917 u) + 0.0372274 \sin(7.29917 u)] - e^{-4.0121 u} \\ & \times [0.00670382 \cos(5.16553 u) + 0.0750684 \sin(5.16553 u)]), \end{aligned}$$

παίρνουμε τις τιμές της νέας προσέγγισης για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, μέσω κατανομής *Poisson*. Οι τιμές της νέας προσέγγισης που προκύπτουν από τον τύπο (5.9) καθώς και η γραφική παράσταση της $\bar{K}_\delta(u)$, που δίνεται από τη σχέση (5.7), δίνονται από το παρακάτω κοινό διάγραμμα 5.5.

Από το Σχήμα 5.5, παρατηρούμε ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις είναι πάρα πολύ κοντά η μία στην άλλη αφού δεν διακρίνουμε κάποια διαφορά ανάμεσά τους. Όπως κάναμε και στις προηγούμενες ενότητες του κεφαλαίου, κατασκευάζουμε το ποσοστιαίο σφάλμα των τιμών της νέας προσέγγισης, για κάθε τιμή του u , και στη συνέχεια δίνουμε σε κοινό διάγραμμα τις γραφικές παραστάσεις του ποσοστιαίου σφάλματος των προσεγγίσεων $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ και $\bar{K}_\delta^{Tijms}(u)$. Σύμφωνα με το παρακάτω Σχήμα 5.6, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για *Gamma*(10, 10) κατανομή των αποζημιώσεων και $\theta = 0.5$, που είναι μία τιμή που χρησιμοποιείται στην πράξη από τις ασφαλιστικές εταιρείες, η νέα προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ είναι καλύτερη από του *Tijms* για λίγες τιμές του u και συγκεκριμένα για $u = 0.1$, $u = 0.2$, $u = 0.3$ και από $u = 0.5$ έως $u = 0.9$. Για τις υπόλοιπες τιμές του αρχικού αποθεματικού που έχουμε επιλέξει, πιο ακριβής είναι η προσέγγιση *Tijms*. Άρα εδώ καταφέραμε να δημιουργήσουμε μία προσέγγιση η οποία αν και δεν είναι, για φυσιολογικές τιμές του θ , τόσο καλή όσο η κύρια προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, είναι καλύτερη έστω και για πολύ μικρές τιμές του u από την ήδη πολύ καλή, για την συγκεκριμένη περίπτωση, προσέγγιση *Tijms*.



Σχήμα 5.5: Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων του πραγματικού μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta(u)$, και του προσεγγιστικού, $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για *Gamma*(10, 10) κατανομή με $\theta = 0.5$ και $\delta = 0.05$.



Σχήμα 5.6: Ποσοστιαίο σφάλμα των προσεγγίσεων $\overline{K}_\delta^{Tijms}(u)$ και $\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$, για $Gamma(10, 10)$ κατανομή με $\theta = 0.5$ και $\delta = 0.05$.

Στη συνέχεια θέλουμε να ξέρουμε τι γίνεται στην περίπτωση που υποθέτουμε μία μεγαλύτερη τιμή για το θ . Στα προηγούμενα παραδείγματα είχαμε συμπεράνει ότι για μεγάλες τιμές του θ οι νέες προσεγγίσεις γινόντουσαν πολύ καλύτερες από την προσέγγιση $Tijms$, αφού όπως έχουμε ξαναφέρει το ποσοστιαίο σφάλμα της προσέγγισης $Tijms$ αυξάνεται για μεγάλες τιμές του θ . Επομένως υποθέτοντας ότι $c = 2.5$ και $\lambda = 1$, παίρνουμε

$$\theta = 1.5.$$

Και σε αυτή την περίπτωση δεν είναι εφικτός ο υπολογισμός της προσέγγισης $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$, καθώς από την λύση του συστήματος (4.20) δεν προκύπτουν ικανοποιητικές τιμές για τις παραμέτρους της αρνητικής διωνυμικής κατανομής που χρησιμοποιούμε ως προσέγγιση της κατανομής της τ.μ K^* . Επομένως θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι μόνο την προσέγγιση $\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$ η οποία ελπίζουμε να είναι βελτιωμένη σε σχέση με την περίπτωση που ίσχυε ότι $\theta = 0.5$. Στο παράδειγμα της Ενότητας 4.3 όπου οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία Γάμμα(3,3) κατανομή, είδαμε ότι η προσέγγιση $\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$ βελτιώνεται για $\theta = 1.5$ και γίνεται καλύτερη από την κύρια προσέγγιση $\overline{K}_\delta^{NB}(u)$ η οποία είναι καλύτερη για $\theta = 0.5$.

Με την αλλαγή στην τιμή του θ αλλάζουν και οι βασικές ποσότητες που χρησιμεύουν στον υπολογισμό της νέας προσέγγισης καθώς και στη σύγκριση αυτής με την προσέγγιση $Tijms$. Επομένως παίρνουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση (Γ'3) του Παραρτήματος Γ', ενώ για $\delta = 0.05$ ο μετασχηματισμός *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας ισούται με

$$\begin{aligned}
\bar{K}_\delta(u) = & 0.548833 e^{-1.4112 u} - 0.0232321 e^{-16.8619 u} - e^{-15.6703 u} \\
& \times [0.0457638 \cos(3.91634 u) + 0.01675028 \sin(3.91634 u)] - e^{-12.468 u} \\
& \times [0.0431322 \cos(6.53533 u) + 0.0369122 \sin(6.53533 u)] - e^{-8.24969 u} \quad (5.10) \\
& \times [0.0358378 \cos(6.95474 u) + 0.0674236 \sin(6.95474 u)] - e^{-4.28189 u} \\
& \times [0.00801988 \cos(4.90463 u) + 0.1348476 \sin(4.90463 u)].
\end{aligned}$$

Τέλος για την προσέγγιση *Tijms* του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, παίρνουμε από το *Mathematica* ότι

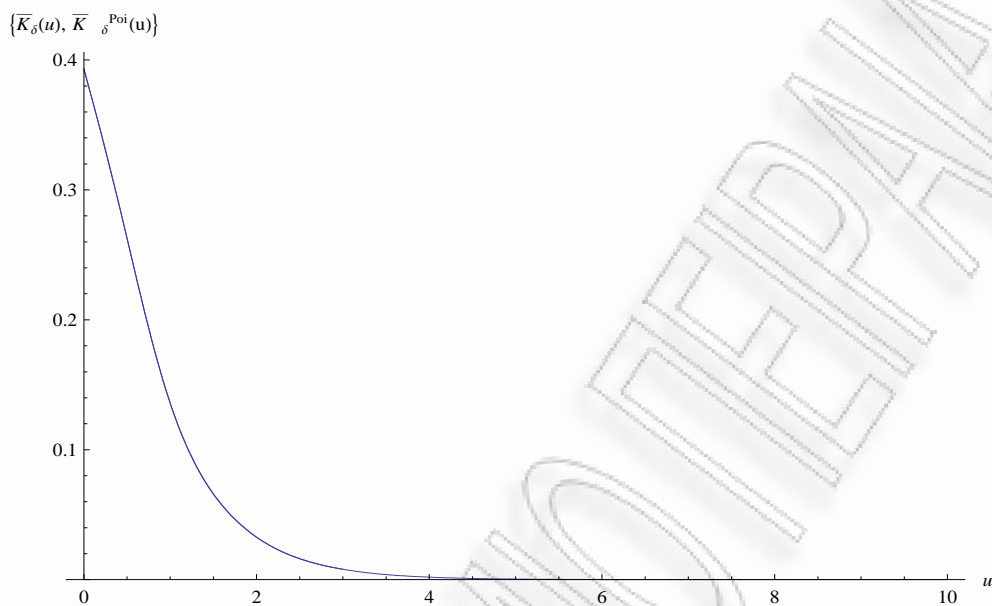
$$\bar{K}_\delta^{Tijms}(u) = 0.486253 e^{-1.06064 u} - 0.0948594 e^{-3.36821 u}, \quad (5.11)$$

ενώ η πρώτη δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας που χρησιμοποιείται στην εύρεση της παραμέτρου $\tilde{\lambda}$, δίνεται από τη σχέση (Γ'.4) του Παραρτήματος Γ'. Επομένως τώρα αντικαθιστώντας την τιμή της παραμέτρου $\tilde{\lambda}$ που αντιστοιχεί σε κάθε διαφορετική τιμή του αρχικού αποθεματικού, στον τύπο

$$\begin{aligned}
\bar{K}_\delta^{Poi}(u) = & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+0.05} \right)^k e^{-\tilde{\lambda}} \frac{\tilde{\lambda}^k}{k!} \times (0.553816 e^{-1.39315 u} - 0.0229407 e^{-16.8627 u} \\
& - e^{-15.671 u} [0.0451862 \cos(3.91662 u) + 0.01654748 \sin(3.91662 u)] - e^{-12.4688 u} \\
& \times [0.0425748 \cos(6.53594 u) + 0.036478 \sin(6.53594 u)] - e^{-8.25027 u} \quad (5.12) \\
& \times [0.0353376 \cos(6.95585 u) + 0.066584 \sin(6.95585 u)] - e^{-4.28202 u} \\
& \times [0.00777634 \cos(4.90685 u) + 0.133046 \sin(4.90685 u)]),
\end{aligned}$$

παίρνουμε τις τιμές της προσέγγισης για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεο-

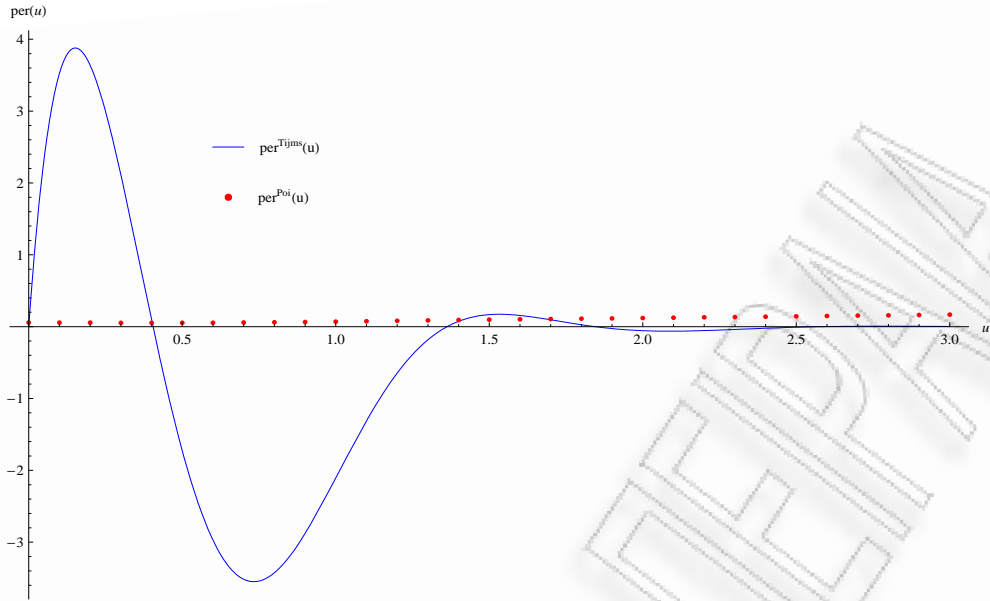
κοπίας, μέσω κατανομής *Poisson*, για τις διάφορες τιμές του u που έχουμε επιλέξει. Κατασκευάζοντας σε γράφημα τις τιμές που προκύπτουν από τη σχέση (5.12) καθώς και τη γραφική παράσταση της σχέσης (5.10), καταλήγουμε στο επόμενο κοινό διάγραμμα 5.7.



Σχήμα 5.7: Κοινό διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων του πραγματικού μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta(u)$, και του προσεγγιστικού, $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για *Gamma*(10, 10) κατανομή με $\theta = 1.5$ και $\delta = 0.05$.

Παρατηρώντας το Σχήμα 5.7, καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα που είχαμε και στα προηγούμενα παραδείγματα. Επομένως για να δούμε σε αυτή την περίπτωση εάν η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ είναι καλύτερη από του *Tijms* και για ποιές τιμές του u , κατασκευάζουμε σε κοινό γράφημα το ποσοστιαίο σφάλμα που έχει η κάθε προσέγγιση. Έτσι προκύπτει το παρακάτω Σχήμα 5.8.

Από το Σχήμα 5.8, παρατηρούμε ότι για $\theta = 1.5$ η νέα προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ γίνεται πολύ καλύτερη από την προσέγγιση *Tijms*, η οποία “χαλάει” πολύ σε αυτή την περίπτωση ενώ η νέα προσέγγιση δείχνει να μην επηρεάζεται. Επιπλέον για κάποιες τιμές του u φαίνεται ξεκάθαρα η διαφορά ανάμεσα στις δύο προσεγγίσεις, καθώς το ποσοστιαίο σφάλμα της νέας προσέγγισης γίνεται πολλές δεκάδες φορές μικρότερο από του *Tijms*. Συγκεκριμένα για u μέχρι την τιμή 1.7, εκτός από λίγα σημεία, η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ είναι σαφώς η καλύτερη και βλέπουμε ότι υπάρχει κάποια βελτίωση της προσέγγισης σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση που ίσχυε $\theta = 0.5$. Άρα καταλήξαμε σε μία προσέγγιση την οποία μπορεί να διαλέξει μία εταιρεία που κρατάει μικρό αρχικό αποθεματικό, ενώ μπορεί να την συνδυάσει με αυτή του *Tijms* όταν θέλει να αυξήσει το αρχικό αποθεματικό της.



Σχήμα 5.8: Ποσοστιαίο σφάλμα των προσεγγίσεων $\bar{K}_\delta^{Tijms}(u)$ και $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, για $Gamma(10, 10)$ κατανομή με $\theta = 1.5$ και $\delta = 0.05$.

Επίσης σε σχέση με το παράδειγμα της ενότητας 4.3 που το μόνο που αλλάζει είναι οι παράμετροι στην Γάμμα κατανομή που ακολουθούν οι αποζημιώσεις, παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ βελτιώνεται κατά πολύ στην περίπτωση που ισχύει $\theta = 1.5$ και επίσης ότι για μεγάλες τιμές των παραμέτρων της Γάμμα κατανομής, δεν είναι εφικτός ο υπολογισμός της προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$. Παρόλα αυτά φαίνεται ότι και να μπορούσε να υπολογιστεί η $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, για $\theta = 1.5$, δεν θα ήταν τόσο καλή όσο η νέα προσέγγιση που ήδη έχουμε υπολογίσει. Το αντίθετο φαίνεται να ισχύει για την περίπτωση που έχουμε υποθέσει φυσιολογικές τιμές του θ , που είναι εφαρμόσιμες και στην πράξη, καθώς κατά πάσα πιθανότητα θα ήταν καλύτερη η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, αν βέβαια ήταν εφικτός ο υπολογισμός της. Αυτό είναι ένα μειονέκτημα των κατανομών για τις οποίες δεν είναι δυνατός ο υπολογισμός της προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$, καθώς για μικρές τιμές του θ και του u δεν παίρνουμε την καλύτερη δυνατή προσέγγιση που θα μπορούσαμε. Οπότε μία ασφαλιστική εταιρεία που διαλέγει μικρό περιθώριο κέρδους, δεν έχει στα χέρια της έναν βέλτιστο συνδυασμό προσεγγίσεων για να είναι πιο κοντά με τις πραγματικές τιμές του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, για οποιαδήποτε τιμή διαλέξει ως αρχικό αποθεματικό.

Τέλος οι τιμές της προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, της $\bar{K}_\delta(u)$ και της παραμέτρου $\tilde{\lambda}$ που αντιστοιχεί σε κάθε u , όταν $\theta = 0.5$ και $\theta = 1.5$, δίνονται στους Πίνακες 5.3 και 5.4 αντίστοιχα.

u	$\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$	$\overline{K}_\delta(u)$	$\tilde{\lambda}$
0	0.632645	0.634418	1.1
0.1	0.609455	0.611363	1.147613
0.2	0.584596	0.586637	1.205061
0.3	0.557959	0.560127	1.274637
0.4	0.529497	0.531782	1.358978
0.5	0.499368	0.501755	1.460315
0.6	0.468069	0.470538	1.579357
0.7	0.436404	0.438933	1.714578
0.8	0.405294	0.407858	1.862412
0.9	0.375537	0.378115	2.018193
1	0.347662	0.350234	2.177372
1.1	0.321896	0.324448	2.336473
1.2	0.298226	0.300747	2.493519
1.3	0.276498	0.278981	2.647924
1.4	0.256504	0.258944	2.800054
1.5	0.238042	0.240432	2.95071
1.6	0.220941	0.223276	3.100721
1.7	0.205066	0.207343	3.2507
1.8	0.190317	0.192531	3.401022
1.9	0.17661	0.178759	3.55176
2	0.163877	0.165958	3.702867
2.1	0.152054	0.154066	3.85422
2.2	0.141081	0.143023	4.005674
2.3	0.1309	0.132771	4.15714
2.4	0.121454	0.123256	4.30856
2.5	0.112692	0.114424	4.459916
2.6	0.104564	0.106226	4.61121
2.7	0.0970219	0.0986159	4.76247
2.8	0.0900244	0.0915515	4.91371
2.9	0.0835317	0.0849933	5.06495
3	0.0775071	0.0789047	5.216192
3.3	0.0619167	0.0631325	5.669979
3.5	0.0533069	0.0544108	5.972523
3.8	0.0425842	0.0435345	6.426334
4	0.0366627	0.0375203	6.728869

Πίνακας 5.3: Πίνακας τιμών του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, της νέας προσέγγισης $\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$ και της παραμέτρου της προσεγγιστικής κατανομής Poisson, για Γάμμα(10, 10) κατανομή και $\theta = 0.5$.

u	$\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$	$\overline{K}_\delta(u)$	$\tilde{\lambda}$
0	0.393076	0.392848	0.366667
0.1	0.369054	0.368847	0.364357
0.2	0.344005	0.343816	0.364522
0.3	0.317891	0.317722	0.3758
0.4	0.290746	0.290592	0.408637
0.5	0.262802	0.262662	0.43467
0.6	0.234613	0.234485	0.466628
0.7	0.207008	0.20689	0.503286
0.8	0.180887	0.180777	0.543
0.9	0.156981	0.156879	0.584058
1	0.135717	0.135622	0.625037
1.1	0.117195	0.117107	0.665029
1.2	0.101266	0.101183	0.703689
1.3	0.0876373	0.0875613	0.741122
1.4	0.0759733	0.0759036	0.777686
1.5	0.0659538	0.0658899	0.813808
1.6	0.0573055	0.0572474	0.849851
1.7	0.0498097	0.0497569	0.886053
1.8	0.043294	0.0432463	0.922518
1.9	0.0376227	0.0375796	0.959246
2	0.0326853	0.0326462	0.996178
2.1	0.0283887	0.0283427	1.033228
2.2	0.0246525	0.0246207	1.070318
2.3	0.0214062	0.0213776	1.107392
2.4	0.018587	0.0185613	1.144422
2.5	0.0161394	0.0161163	1.181399
2.6	0.014048	0.0139941	1.218331
2.7	0.0121704	0.0121518	1.255235
2.8	0.010569	0.0105524	1.292126
2.9	0.00917857	0.00916369	1.329017
3	0.00797109	0.00795779	1.365914
3.3	0.00520244	0.00521134	1.476659
3.5	0.0039235	0.00392983	1.550512
3.8	0.00256961	0.00257339	1.661285
4	0.0019379	0.00194057	1.735126

Πίνακας 5.4: Πίνακας τιμών του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, της νέας προσέγγισης $\overline{K}_\delta^{Poi}(u)$ και της παραμέτρου της προσεγγιστικής κατανομής Poisson, για Γάμμα(10, 10) κατανομή και $\theta = 1.5$.

Παράρτημα Α΄

Περιγραφή εντολών στο πρόγραμμα Mathematica.

Σκοπός της δημιουργίας του συγκεκριμένου παραρτήματος, είναι να εξηγήσουμε αναλυτικά στους αναγνώστες μας τις εντολές που χρησιμοποιήσαμε για να υπολογίσουμε στο *Mathematica* όλες τις πράξεις, τις ποσότητες και τα διαγράμματα που χρειαζόμαστε, καθώς μπορεί να μην είναι σαφές πώς βρέθηκαν όλες αυτές οι ποσότητες τόσο εύκολα. Δίνουμε τις σπουδαιότερες εντολές που έχουμε χρησιμοποιήσει για τα κεφάλαια 2, 3, 4 και 5. Επειδή όμως έχουμε υπολογίσει τις ίδιες ποσότητες περισσότερες από μία φορές, δίνουμε μία φορά την κάθε εντολή η οποία θα ξέρουμε ότι χρησιμοποιείται ίδια για όλες τις περιπτώσεις που χρειάζεται. Έτσι εδώ θεωρούμε ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν την μείξη τριών εκθετικών κατανομών που έχουμε χρησιμοποιήσει στο Παραδείγμα 2.2.1.

Υπολογισμός ποσοτήτων στο Κεφάλαιο 2

Όταν ορίζουμε μία συνάρτηση στο *Mathematica* θα πρέπει για να διακρίνεται ποια είναι η παράμετρος της συνάρτησης, να χρησιμοποιούμε μετά το σύμβολο της παραμέτρου την κάτω παύλα (₋). Επίσης όταν θέλουμε να ορίσουμε μία συνάρτηση και να γίνεται ο υπολογισμός της όποτε ζητηθεί, χρησιμοποιούμε το σύμβολο ($:=$). Έτσι για να ορίσουμε την σ.π.π δίνουμε την εξής εντολή

$$f[x_] := \frac{1}{3} PDF [ExponentialDistribution[2], x] + \frac{1}{3} PDF [ExponentialDistribution[4], x] \\ + \frac{1}{3} PDF [ExponentialDistribution[6], x]$$

Αντίστοιχα για την περίπτωση που οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία Γάμμα(3,3) κατανομή,

η σ.π.π ορίζεται ως

$$f[x_] := PDF \left[\text{GammaDistribution} \left[3, \frac{1}{3} \right], x \right]$$

Το *Mathematica* χρησιμοποιεί μία δεύτερη μορφή της Γάμμα κατανομής της οποίας η σ.π.π είναι η εξής:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}$$

Επειδή όμως εμείς δεν χρησιμοποιούμε αυτή τη συγκεκριμένη μορφή, για να την μετατρέψουμε βάζουμε ως δεύτερη παράμετρο την αντίστροφη τιμή από αυτή θέλουμε.

Πριν συνεχίσουμε με τις άλλες συναρτήσεις θα πρέπει να έχουμε ορίσει και τις τιμές των βασικών παραμέτρων που μας ενδιαφέρουν, η χρήση των οποίων είναι αναγκαία για τον υπολογισμό όλων των ποσοτήτων. Έτσι ορίζουμε τις τιμές με τον εξής τρόπο

$$c = 1; \lambda = 2; \delta = 0.05;$$

όπου το ελληνικό ερωτηματικό (;), δηλώνει ότι το πρόγραμμα παίρνει τις τιμές που του ορίζουμε αλλά χωρίς να τις τυπώνει. Αυτό είναι πολύ βολικό καθώς θέλουμε μόνο να ορίζουμε τις τιμές που παίρνουν οι παράμετροι και όχι να μας δίνει πίσω αυτές τις τιμές. Εννοείται ότι σε κάποιο άλλο παράδειγμα που υποθέτουμε διαφορετικές τιμές για τις παραπάνω παραμέτρους, ορίζουμε ξανά με τον ίδιο τρόπο τις παραμέτρους αλλά αυτή τη φορά με τις τιμές που έχουμε υποθέσει. Επομένως τώρα από τη σχέση (1.3) βρίσκουμε εύκολα το περιθώριο ασφαλείας θ

Αφού τελειώσαμε με τις βασικές ποσότητες, συνεχίζουμε να υπολογίζουμε τις συναρτήσεις που μπορούμε να βρούμε μέσω της σ.π.π $f(x)$. Επομένως για να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής και η ουρά της κατανομής, δίνουμε τις αντίστοιχες εντολές

$$F[x_] := Integrate[f[t], \{t, 0, x\}]$$

και

$$S[x_] := Integrate[f[t], \{t, x, Infinity\}]$$

Η εντολή *Integrate* δηλώνει το ολοκλήρωμα, ο δεύτερος και τρίτος όρος που περιέχεται μέσα στα άγκιστρα δηλώνει τα όρια του ολοκληρώματος ενώ ο πρώτος όρος την μεταβλητή ολοκλήρωσης. Την ουρά της κατανομής την ονομάσαμε ως $S(x)$ καθώς στο *Mathematica* δεν είναι βολικό να χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\bar{F}(x)$.

Για να υπολογίσουμε τις ροπές της $f(x)$, μεταφράζουμε τη σχέση (1.2) στον εξής κώδικα

$$pk := Integrate [x^k f[x], \{x, 0, Infinity\}]$$

Όταν ορίζουμε μία ποσότητα καλό είναι να μην χρησιμοποιούμε δείκτες καθώς μπορεί να μη γίνονται δεκτές οι εντολές.

Αντίστοιχα υπολογίζεται και η σ.π.π της συνάρτησης ισορροπίας καθώς και η ουρά της, που δίνονται από τις σχέσεις (1.10) και (1.9) αντίστοιχα, με τις εντολές

$$fe[x_] := \frac{1}{p1} S[x]$$

και

$$Fet[x_] := \frac{1}{p1} Integrate [S[t], \{t, x, Infinity\}]$$

Η εντολή για να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό *Laplace* της $f(x)$, είναι

$$LTf[s_] := LaplaceTransform [f[x], x, s]$$

Επομένως τώρα, μέσω της σχέσης (1.28), υπολογίζουμε εύκολα τον μετασχηματισμό *Laplace* της πιθανότητας χρεοκοπίας. Για τον υπολογισμό τώρα της πιθανότητας χρεοκοπίας παίρνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό *Laplace* της $LT\psi(s)$, με την παρακάτω εντολή

$$\psi[u_] := InverseLaplaceTransform [LT\psi[s], s, u]$$

Η γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας, δίνεται από την εντολή

$$Plot [\psi[u], \{u, 0, 10\}, AxesLabel \rightarrow \{u, \psi[u]\}, PlotRange \rightarrow \{0, All\}]$$

όπου οι τιμές μέσα στο πρώτο άγκιστρο δηλώνουν για ποιες τιμές του u να σχεδιαστεί το γράφημα, η εντολή *AxesLabel* μας βοηθάει στο να ονομάσουμε τους άξονες του γραφήματος, ενώ τέλος με την εντολή *PlotRange* καθορίζουμε το εύρος των τιμών, είτε στον άξονα των y είτε και στους δύο άξονες, που θα εμφανιστούν στο γράφημα. Επειδή η εντολή για να σχεδιάσουμε ένα οποιοδήποτε γράφημα έχει την ίδια λογική με παραπάνω, δεν θα τη ξανααναφέρουμε εκτός από κάποιες περιπτώσεις που εισάγουμε και άλλες παραμέτρους μέσα στην εντολή *Plot*. Επίσης πρέπει να αναφέρουμε ότι για να κατασκευάσουμε ένα κοινό διάγραμμα με δύο ή περισσότερες γραφικές παραστάσεις, το κάνουμε μέσω της εντολής *Show*.

Η ροπογεννήτρια της τ.μ X υπολογίζεται μέσω της εντολής

$$Mx[r_] := Integrate [Exp[rx]f[x], \{x, 0, Infinity\}, Assumptions \rightarrow r < 2]$$

όπου με το *Assumptions* $\rightarrow r < 2$ δηλώνουμε την υπόθεση που κάνουμε ότι ο συντελεστής προσαρμογής πρέπει να είναι μικρότερος του 2. Αυτό πρέπει να ισχύει έτσι ώστε να μπορεί να συγκλίνει το ολοκλήρωμα που υπάρχει στον τύπο της ροπογεννήτριας.

Για τον υπολογισμό του συντελεστή προσαρμογής, λύνουμε την εξίσωση (1.19) ως προς r . Αυτό γίνεται με την εντολή

$$\text{Solve}[1 + (1 + \theta)p1r == Mx[r], r] // N$$

όπου το διπλό ίσον χρησιμοποιείται πάντα όταν θέλουμε να λύσουμε μία εξίσωση ως προς μία παράμετρο και το σύμβολο ($//N$) το χρησιμοποιούμε έτσι ώστε να υπολογίσει τη ρίζα r σε αριθμό με την ακρίβεια πράξεων του υπολογιστή. Ο συντελεστής προσαρμογής ισούται με την μικρότερη θετική ρίζα την οποία ονομάζουμε $r1$.

Αντίστοιχα για να λύσουμε τη γενικευμένη εξίσωση *Lundberg*, ως προς ρ , δίνουμε την εντολή

$$\text{Solve}[c\rho - \delta == \lambda - \lambda L T f[\rho], \rho] // N$$

όπου ορίζουμε ως ρ τη μόνη θετική λύση που θα βρεθεί από την λύση της παραπάνω εξίσωσης.

Τις ποσότητες που δίνονται από τις σχέσεις (1.32) και (1.34) αντίστοιχα, τις υπολογίζουμε ως εξής

$$Gt[x_] := \frac{\text{Exp}[\rho x] \text{Integrate}[\text{Exp}[-\rho y] S[y], \{y, x, \text{Infinity}\}]}{\text{Integrate}[\text{Exp}[-\rho y] S[y], \{y, 0, \text{Infinity}\}]}$$

και

$$\beta := \frac{1 + \theta}{\text{Integrate}[\text{Exp}[-\rho y] f e[y], \{y, 0, \text{Infinity}\}]} - 1$$

Η ποσότητα $G_\delta(x)$ υπολογίζεται μέσω της εντολής

$$G\delta[x_] := 1 - Gt[x]$$

ενώ η $g_\delta(x)$ παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση

$$g\delta[x_] := D[G\delta[x], x]$$

Ο μετασχηματισμός *Laplace* της $g_\delta(x)$ δίνεται με την εντολή

$$LTg\delta [s_]:= LaplaceTransform [LTf\delta [s], s, u]$$

ενώ ο μετασχηματισμός *Laplace* της $f_\delta(x)$ από την εντολή

$$LTf\delta [s_]:= \frac{\beta}{1+\beta} \left(\frac{\frac{1}{1+\beta}LTg\delta [s]}{1-\frac{1}{1+\beta}LTg\delta [s]} \right)$$

Παίρνουμε αντίστροφο μετασχηματισμό *Laplace* στην ποσότητα $LTf\delta [s_]$, έτσι όπως είχαμε πράξει και προηγουμένως με την πιθανότητα χρεοκοπίας. Επομένως έχουμε

$$f\delta [x_]:= InverseLaplaceTransform [LTf\delta [s], s, x]$$

Η ποσότητα $K_\delta(u)$ υπολογίζεται με την εντολή

$$K\delta [u_]:= \frac{\beta}{1+\beta} + Integrate [f\delta [x], \{x, 0, u\}]$$

ενώ τέλος ο μετασχηματισμός *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, η οποία είναι και η ποσότητα που μας ενδιαφέρει περισσότερο, υπολογίζεται εύκολα από τη σχέση (2.15).

Για την εφαρμογή των προσεγγίσεων *DeVylder* και *Tijms*, για την πιθανότητα χρεοκοπίας, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις που έχουμε δώσει στην Ενότητα 2.1. Για την προσέγγιση *DeVylder*, για να λύσουμε το σύστημα (2.5) χρησιμοποιούμε την εξής εντολή

$$Solve \left[\left\{ p11 == \frac{p3}{3p2}, \lambda11 == \frac{9p2^3}{2p3^2}, \theta1 == \frac{2p1p3\theta}{3p2^2} \right\}, \{\theta1, \lambda11, p11\} \right] //N$$

Οπότε με τις λύσεις που παίρνουμε από το πρόγραμμα για κάθε μία τιμή, βρίσκουμε τον τύπο της προσέγγισης μέσω της σχέσης (2.1).

Αντίστοιχα για την προσέγγιση *Tijms*, βρίσκουμε τις παραμέτρους C και γ μέσω των εντολών

$$Ccoef := \frac{\theta p1}{r Integrate [x Exp[r x] S[x], \{x, 0, Infinity\}]}$$

και

$$\gamma := \left(\frac{1}{1+\theta} - Ccoef \right) \left(\frac{1}{\theta p1} Integrate [x S[x], \{x, 0, Infinity\}] - \frac{Ccoef}{r} \right)^{-1}$$

Οπότε αντικαθιστώντας στη σχέση (2.9) τις παραπάνω παραμέτρους, βρίσκουμε την προσέγγιση *Tijms*.

Αντίστοιχα βρίσκοντας την καινούρια κατανομή αποζημιώσεων $f_{\delta}(u)$ έτσι όπως εξηγήσαμε στο δεύτερο κεφάλαιο, εφαρμόζουμε τις παραπάνω εντολές των προσεγγίσεων για την πιθανότητα χρεοκοπίας της $\psi_{\delta}(u)$ δηλαδή για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας της αρχικής κατανομής αποζημιώσεων.

Υπολογισμός ποσοτήτων στο Κεφάλαιο 3

Στο τρίτο κεφάλαιο έχουμε δώσει ακριβείς τύπους για τον υπολογισμό των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας. Επομένως έχοντας υπολογίσει όλες τις ποσότητες που χρειάζονται, βρίσκουμε εύκολα τις πρώτες και δεύτερες ροπές του χρόνου χρεοκοπίας. Εδώ δεν δίνουμε τις εντολές που χρειάζονται καθώς είναι εφαρμογή των τύπων που έχουμε δώσει. Το μόνο που θα δώσουμε είναι το πως βρίσκουμε την μονοτονία των ροπών καθώς και τις τιμές του u που παρουσιάζουν οι μη-δεσμευμένες ροπές μέγιστο. Έτσι για παράδειγμα παίρνοντας την πρώτη μη-δεσμευμένη ροπή και ορίζοντάς την για παράδειγμα ως $p[u_{-}]$, μπορούμε να βρούμε την μονοτονία της μέσω της παραγώγου της ροπής. Την παράγωγο την βρίσκουμε με την εντολή

$$pt[u_{-}] := D[p[u], u]$$

Για να βρούμε τώρα το σημείο u στο οποίο παρουσιάζει η ροπή μέγιστο, εξισώνουμε την πρώτη παράγωγο που υπολογίσαμε με το μηδέν. Άρα με την εντολή

$$FindRoot[pt[u] == 0, \{u, u0\}]$$

όπου στη θέση του $u0$ το οποίο εκφράζει μία αρχική τιμή για το u , βάζουμε την τιμή που αντιστοιχεί σε κάθε περίπτωση. Αντίστοιχα για την πρώτη δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας, παίρνουμε και τη δεύτερη παράγωγο της ροπής ενώ για να ελέγξουμε εάν οι παράγωγοι είναι θετικές ή αρνητικές, για μη-αρνητικές τιμές του u , μπορούμε να πάρουμε ότι το u παίρνει θετικές τιμές μέχρι ένα πολύ μεγάλο νούμερο, με την εντολή

$$u := Range[0, 10000, 1]$$

Έτσι υπολογίζοντας την παράγωγο της ροπής για αυτά τα u βρίσκουμε το πρόσημό της. Βέβαια υπάρχει και άλλος τρόπος για να το ελέγξουμε ο οποίος είναι μπορεί να είναι πιο απλός, αλλά εμείς χρησιμοποιούμε την διαδικασία που αναλύσαμε παραπάνω.

Τέλος στην περίπτωση που οι αποζημιώσεις ακολουθούν Γάμμα(3,3) κατανομή, για να μετατρέψουμε τις ροπές από μιγαδική σε τριγωνομετρική μορφή, δίνουμε την εντολή

$$FullSimplify[ComplexExpand[...]]$$

Υπολογισμός ποσοτήτων στα Κεφάλαια 4 και 5

Ορίζουμε την πρώτη και δεύτερη δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας ως $m[u_]$ και $v[u_]$ αντίστοιχα. Επομένως για να βρούμε τις παραμέτρους r και p , δίνουμε την εντολή

$$t[u_] := \text{Solve} \left[\left\{ \frac{r(1-p)}{p} == m[u], \frac{r(1-p)}{p^2} == v[u] \right\}, \{r, p\} \right] // N$$

Για να μπορούμε τώρα να βρίσκουμε τις τιμές της $t(u)$ για παράδειγμα από $u = 0$ μέχρι $u = 5$ με βήμα 0.1, κατασκευάζουμε τον πίνακα

$$lst := \text{Table}[t[u], u, 0, 5, 0.1]$$

Στη συνέχεια οι παράμετροι r και p δίνονται μέσω των εντολών

$$r[i_] := lst[[i, 1, 1, 2]]$$

και

$$p[i_] := lst[[i, 1, 2, 2]]$$

όπου στη θέση του i βάζουμε την τιμή του αρχικού αποθεματικού που θέλουμε. Επομένως ο τύπος της προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ θα είναι ο εξής

$$q[u_] := \text{Sum} \left[\left(\left(\frac{2}{2+0.05} \right)^k \left(\frac{(r[i]+k-1)!}{k!(r[i]-1)!} \right) (p[i])^{r[i]} (1-p[i])^k \right), \{k, 0, \text{Infinity}\} \right] [\psi(u)]$$

Άρα αντικαθιστώντας την τιμή του αρχικού αποθεματικού που θέλουμε, βρίσκουμε την τιμή της προσέγγισης για το συγκεκριμένο u . Για να κατασκευάσουμε γραφικά τις τιμές της προσέγγισης, δημιουργούμε μία λίστα με τις τιμές του u και της προσέγγισης σε ζεύγη, της οποίας η εντολή γενικά είναι

$$list1 := \text{List}[\{\{0, \dots\}, \{0.1, \dots\}, \dots\}]$$

και στη συνέχεια με την εντολή

$$\text{ListPlot}[list1, \text{Joined} \rightarrow \text{True}]$$

φτιάχνουμε το σχήμα που επιθυμούμε. Αντίστοιχα για την προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ η διαδικασία είναι ακριβώς η ίδια.

Παράρτημα Β΄

Οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας για μείξη πέντε εκθετικών κατανομών.

Εδώ σε αυτό το παράρτημα δίνουμε ένα ακόμα παράδειγμα για τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας, καθώς παίρνουμε ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία μείξη πέντε εκθετικών κατανομών. Οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας για την συγκεκριμένη κατανομή, υπολογίζονται από τους τύπους που δόθηκαν στην Ενότητα 3.2 και θα μας χρειαστούν για να σχολιάσουμε την συμπεριφορά των ροπών για διάφορες τιμές του θ , καθώς και στο Κεφάλαιο 5 όπου εκεί χρησιμοποιούμε την πρώτη και δεύτερη¹ δεσμευμένη ροπή για να υπολογίσουμε τις παραμέτρους των προσεγγιστικών κατανομών που χρησιμοποιούνται στις προσεγγίσεις για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ και $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$ αντίστοιχα. Επίσης αναφέρουμε ότι όλες οι πράξεις για την εύρεση των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας καθώς και οι γραφικές τους παραστάσεις, έχουν γίνει με τη βοήθεια του προγράμματος *Mathematica*.

Εστω ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των αποζημιώσεων ισούται με

$$f(x) = \frac{1}{5} 2 e^{-2x} + \frac{1}{5} 4 e^{-4x} + \frac{1}{5} 6 e^{-6x} + \frac{1}{5} 8 e^{-8x} + \frac{1}{5} 10 e^{-10x}$$

Υποθέτοντας ότι $c = 1$, $\lambda = 2$, προκύπτει ότι

$$\theta = 1.18978$$

Για να υπολογίσουμε τώρα τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας που μας ενδιαφέρουν, θα πρέπει να υπολογίσουμε τις τρεις πρώτες ροπές της $f(x)$ καθώς και την πιθανότητα χρεοκοπίας που

¹Εδώ δεν θα δοθεί ο αναλυτικός τύπος για τη δεύτερη ροπή, καθώς στο συγκεκριμένο παράδειγμα δεν είναι δυνατό να υπολογιστεί η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$.

αντιστοιχεί για τη συγκεκριμένη κατανομή των αποζημιώσεων και τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων. Για τις τρεις πρώτες κεντρικές ροπές της $f(x)$, μέσω της σχέσης (1.2), παίρνουμε ότι

$$p_1 = 0.228333,$$

$$p_2 = 0.146361,$$

και

$$p_3 = 0.177849.$$

Για την πιθανότητα χρεοκοπίας, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με τα παραδείγματα του δεύτερου κεφαλαίου, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \psi(u) = & 0.0101273 e^{-9.72616 u} + 0.0171163 e^{-7.67875 u} + 0.0295346 e^{-5.6344 u} \\ & + 0.0619662 e^{-3.57305 u} + 0.337922 e^{-1.38765 u} \end{aligned} \quad (\text{B'.1})$$

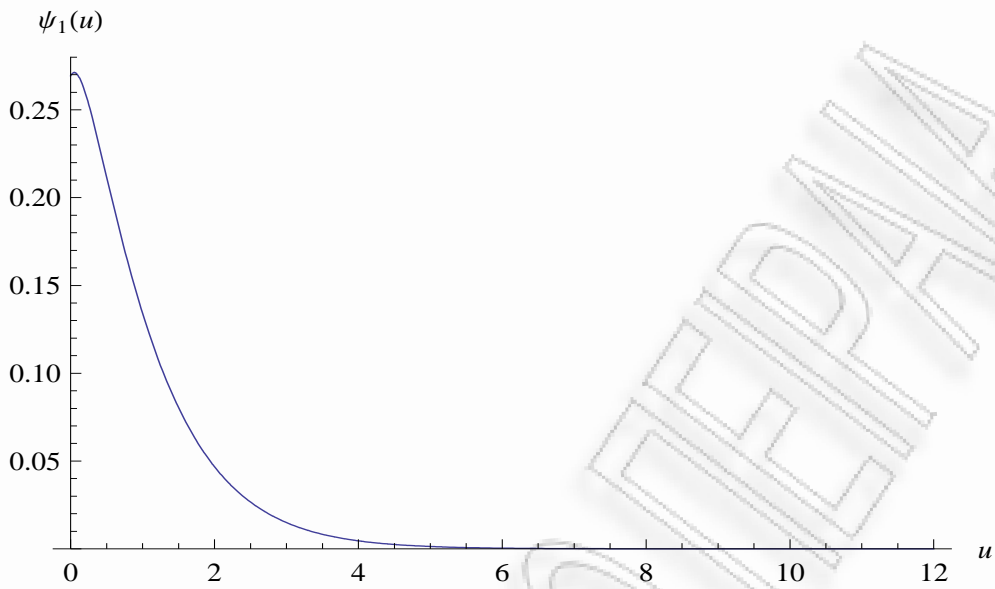
Επομένως τώρα αντικαθιστώντας την πιθανότητα χρεοκοπίας στη σχέση (3.14), προκύπτει

$$\begin{aligned} \psi_1(u) = & e^{-28 u} [e^{18.2738 u} (-0.00557142 + 0.000188764 u) + e^{20.3213 u} (-0.00931721 + 0.000539204 u) \\ & + e^{22.3656 u} (-0.0157348 + 0.00160545 u) + e^{24.427 u} (-0.0294783 + 0.00706714 u) \\ & + e^{26.6124 u} (0.329478 + 0.210168 u)] \end{aligned}$$

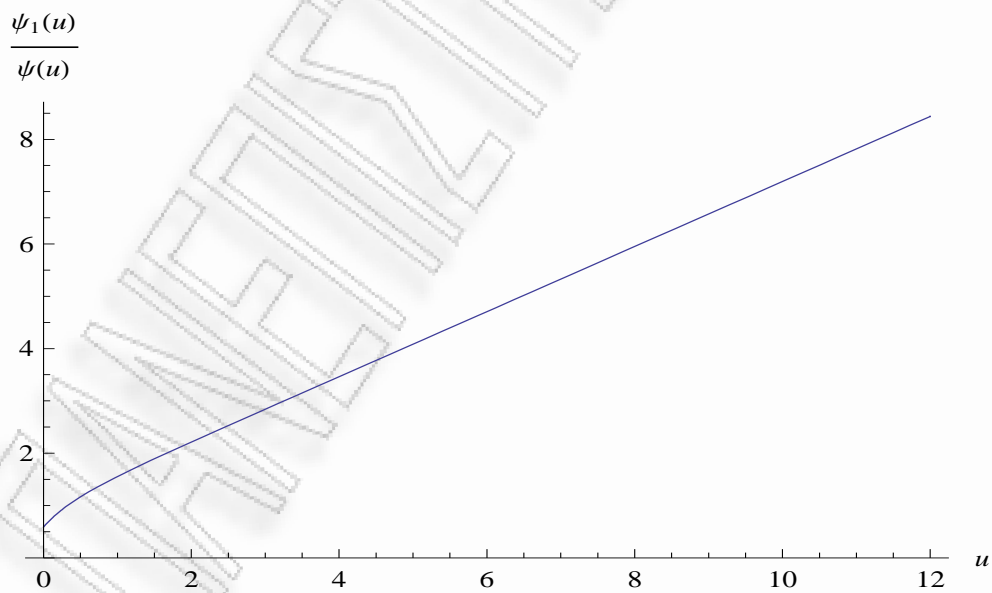
Για την πρώτη δεσμευμένη ροπή $\psi_1(u)/\psi(u)$, μετά από πράξεις στο *Mathematica*, παίρνουμε το αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} & [e^{18.2738 u} (-0.00557142 + 0.000188764 u) + e^{20.3213 u} (-0.00931721 + 0.000539204 u) \\ & + e^{22.3656 u} (-0.0157348 + 0.00160545 u) + e^{24.427 u} (-0.0294783 + 0.00706714 u) \\ & + e^{26.6124 u} (0.329478 + 0.210168 u)] \times [0.0101273 e^{-18.2738 u} + 0.0171163 e^{-20.3213 u} \\ & + 0.0295346 e^{-22.3656 u} + 0.0619662 e^{-24.427 u} + 0.337922 e^{-26.6124 u}] \end{aligned} \quad (\text{B'.2})$$

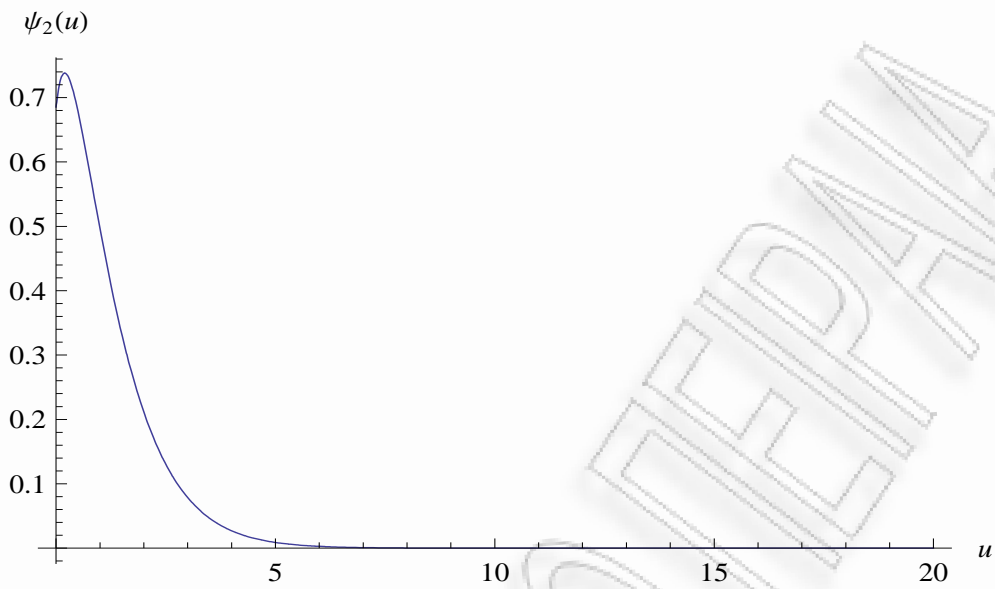
Οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω ροπών δίνονται στα Σχήματα Β'.1 και Β'.2.



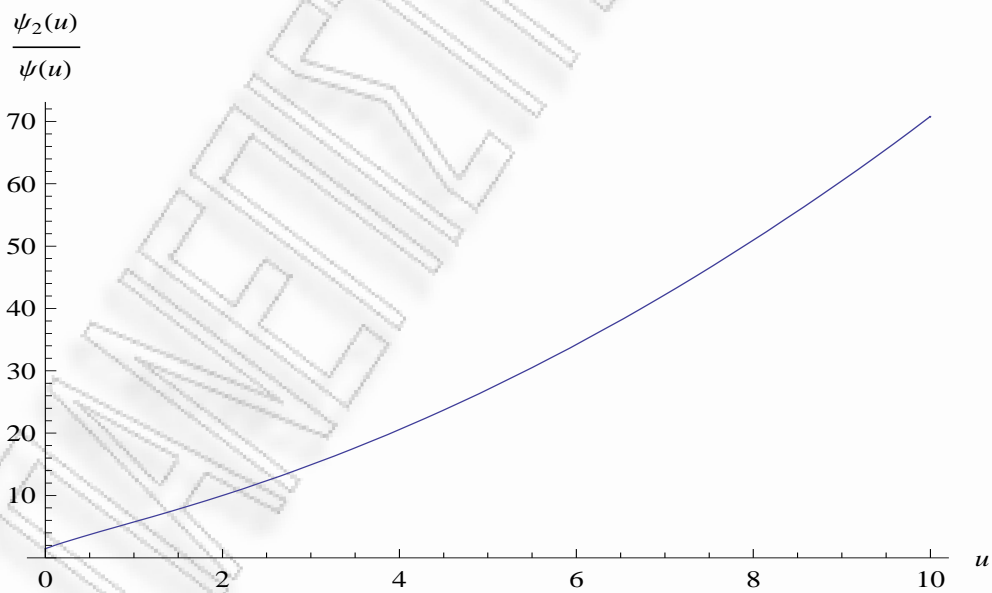
Σχήμα Β'.1: Γραφική παράσταση της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη πέντε εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.18978$.



Σχήμα Β'.2: Γραφική παράσταση της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη πέντε εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.18978$.



Σχήμα Β'.3: Γραφική παράσταση της δεύτερης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείζη πέντε εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.18978$.



Σχήμα Β'.4: Γραφική παράσταση της δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείζη πέντε εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.18978$.

Επειδή η δεύτερη δεσμευμένη ροπή δεν χρησιμοποιείται στην Ενότητα 4.3, λόγω του ότι είναι εφικτός μόνο ο υπολογισμός της προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$, παρουσιάζουμε μόνο γραφικά τις $\psi_2(u)$ και $\psi_2(u)/\psi(u)$ αντίστοιχα. Επομένως τα παραπάνω διαγράμματα Β'.3 και Β'.4, δίνονται με μοναδικό σκοπό να δούμε το πώς συμπεριφέρονται οι ροπές για τη συγκεκριμένη κατανομή αποζημιώσεων και τιμή του θ , καθώς επίσης και να διαπιστώσουμε αν υπάρχει κάποια ομοιότητα στην συμπεριφορά των ροπών, ίδια με αυτή που είχαμε παρατηρήσει στα παραδείγματα του Κεφαλαίου 3.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι $c = 0.7$ και $\lambda = 2$, προκύπτει ότι

$$\theta = 0.532847.$$

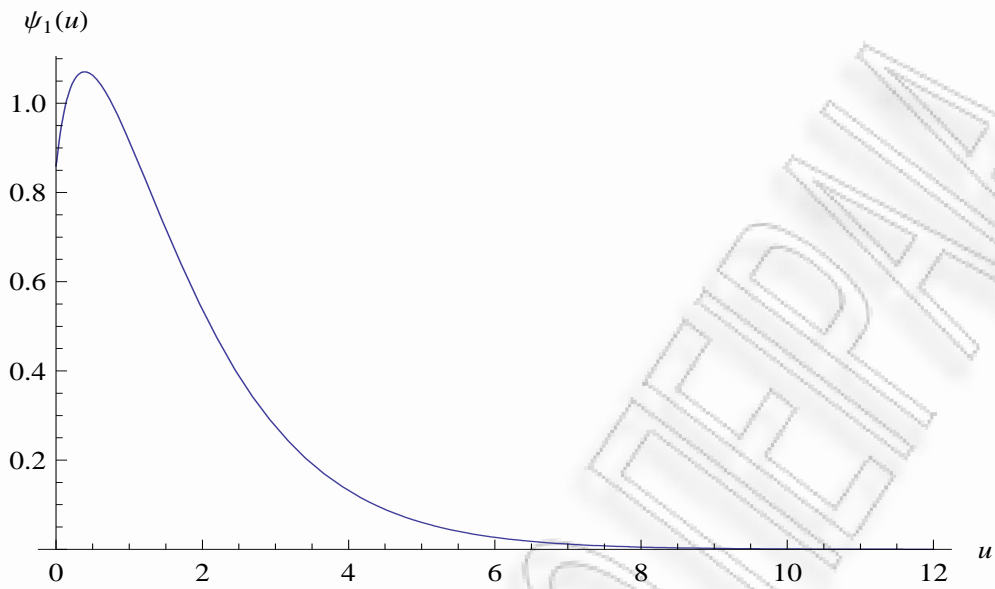
Χρησιμοποιώντας αυτές τις τιμές στη σχέση (1.28) και παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό *Laplace*, προκύπτει

$$\begin{aligned} \psi(u) = & 0.00692813 e^{-9.65909 u} + 0.0122398 e^{-7.58733 u} + 0.0220346 e^{-5.51647 u} \\ & + 0.0492834 e^{-3.41238 u} + 0.561895 e^{-0.967589 u} \end{aligned}$$

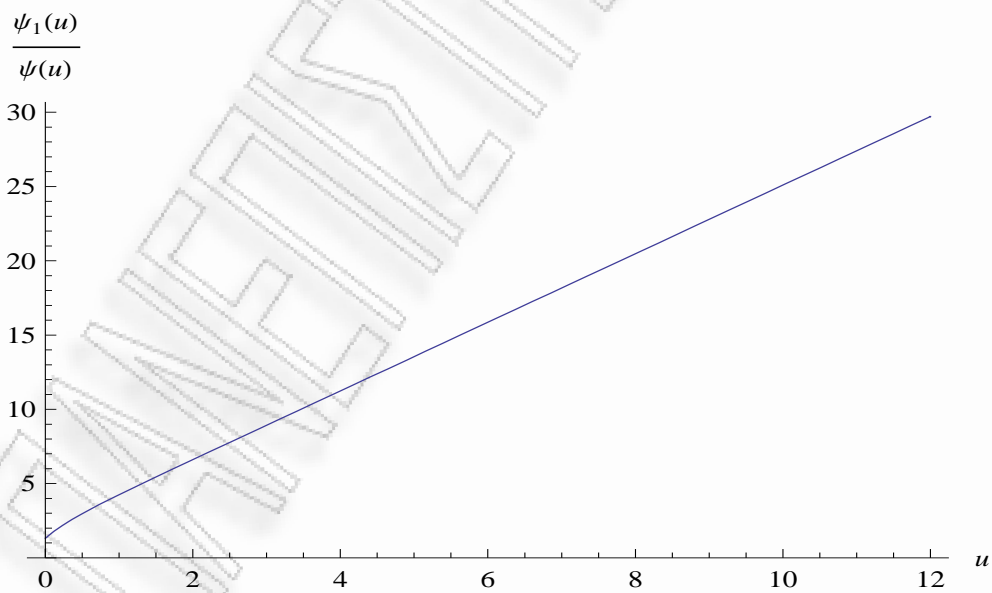
Για να βρεθούν οι παράμετροι των κατανομών που χρησιμοποιούνται για να προσεγγίσουν την κατανομή της τ.μ K^* , πρέπει εκτός από την ένταση της ανέλιξης *Poisson* να είναι γνωστές και οι δεσμευμένες ροπές του χρόνου χρεοκοπίας. Επειδή όμως στα παραδείγματα που παίρνουμε στο Κεφάλαιο 5 δεν χρησιμοποιούμε μικρές τιμές για το θ , καθώς στόχος μας είναι να δείξουμε τότε η νέα προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{MP}(u)$ είναι πολύ καλύτερη από την προσέγγιση *Tijms*, δίνουμε μόνο γραφικά τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας.

Όπως βλέπουμε από τα Σχήματα Β'.5 και Β'.6, η $\psi_1(u)$ και η $\psi_1(u)/\psi(u)$ έχουν την ίδια συμπεριφορά με τις ροπές που είχαμε βρεί στα παραδείγματα του τρίτου κεφαλαίου, για μικρές τιμές του θ . Επομένως και εδώ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για μικρές τιμές του θ , ο αναμενόμενος χρόνος χρεοκοπίας, δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία, είναι μεγαλύτερος από ότι είναι για μεγαλύτερες τιμές του θ .

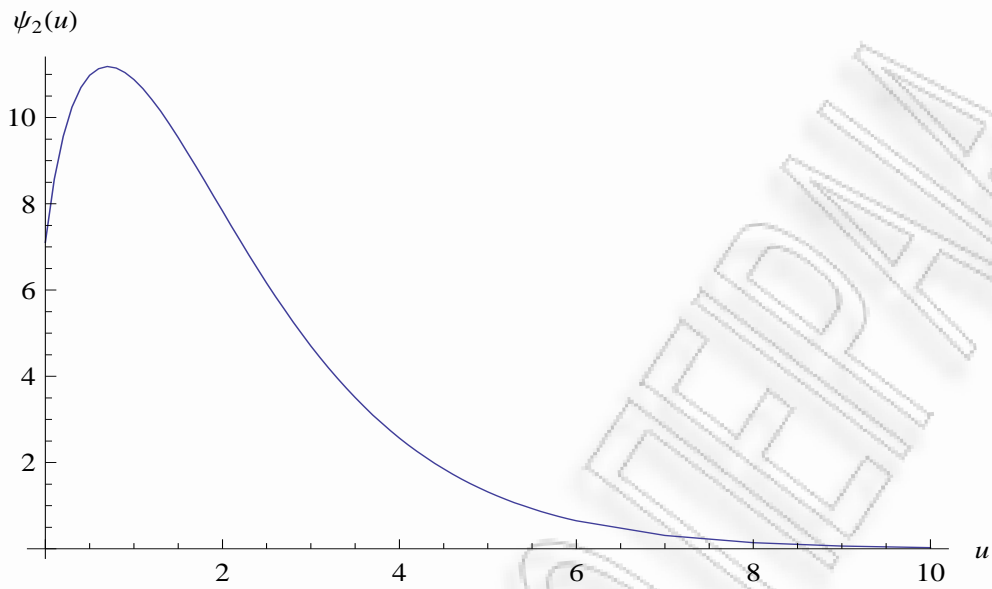
Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε γραφικά, στα Σχήματα Β'.7 και Β'.8, τις $\psi_2(u)$ και $\psi_2(u)/\psi(u)$ αντίστοιχα. Τα συμπεράσματα από την μελέτη των σχημάτων είναι ίδια με αυτά που έχουμε δώσει στα παραδείγματα των Ενότητων 3.3 και 3.4. Για αυτό τον λόγο δεν δίνουμε εδώ τη γραφική παράσταση της τυπικής απόκλισης αλλά ούτε του συντελεστή μεταβλητότητας της μεταβλητής T_c , καθώς οδηγούμαστε στα ίδια συμπεράσματα με πριν. Οπότε, λόγω ευκολίας και δικιά μας και του αναγνώστη, δεν θα ήταν χρήσιμο να γίνει κάτι τέτοιο και να εξηγήσουμε συνέχεια τα ίδια πράγματα. Αυτός είναι βέβαια και ο λόγος που το συγκεκριμένο παράδειγμα δίνεται σε Παράρτημα.



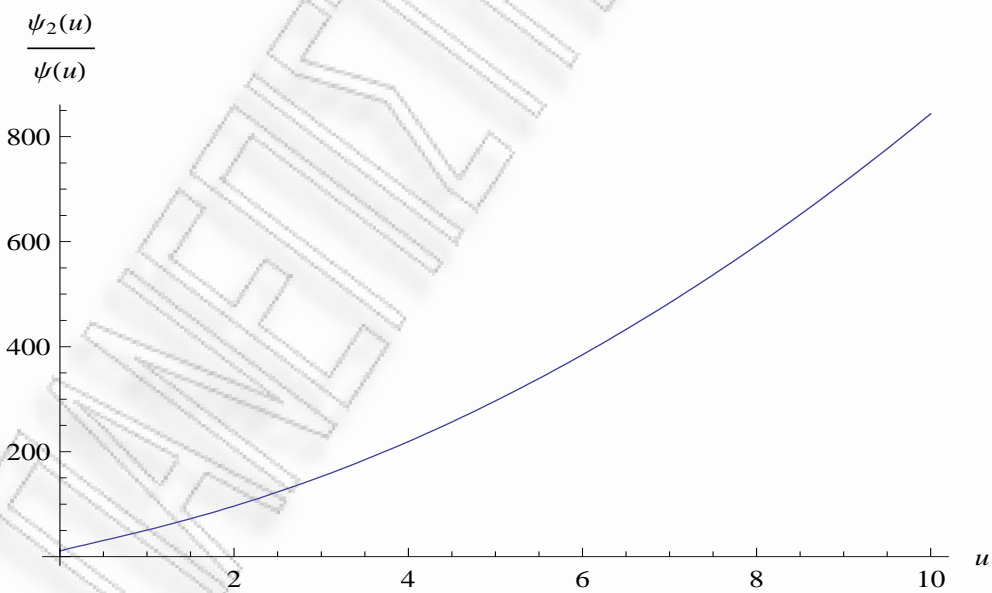
Σχήμα Β'.5: Γραφική παράσταση της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη πέντε εκθετικών κατανομών με $\theta = 0.532847$.



Σχήμα Β'.6: Γραφική παράσταση της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη πέντε εκθετικών κατανομών με $\theta = 0.532847$.



Σχήμα Β'.7: Γραφική παράσταση της δεύτερης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη πέντε εκθετικών κατανομών με $\theta = 0.532847$.



Σχήμα Β'.8: Γραφική παράσταση της δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη πέντε εκθετικών κατανομών με $\theta = 0.532847$.

Τέλος υποθέτοντας ότι $c = 1.1$ και $\lambda = 2$, προκύπτει μία μεγαλύτερη τιμή για το θ , από αυτές που έχουμε πάρει μέχρι στιγμής, και συγκεκριμένα

$$\theta = 1.40876.$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας, που αντιστοιχεί για την συγκεκριμένη τιμή του θ , ισούται με

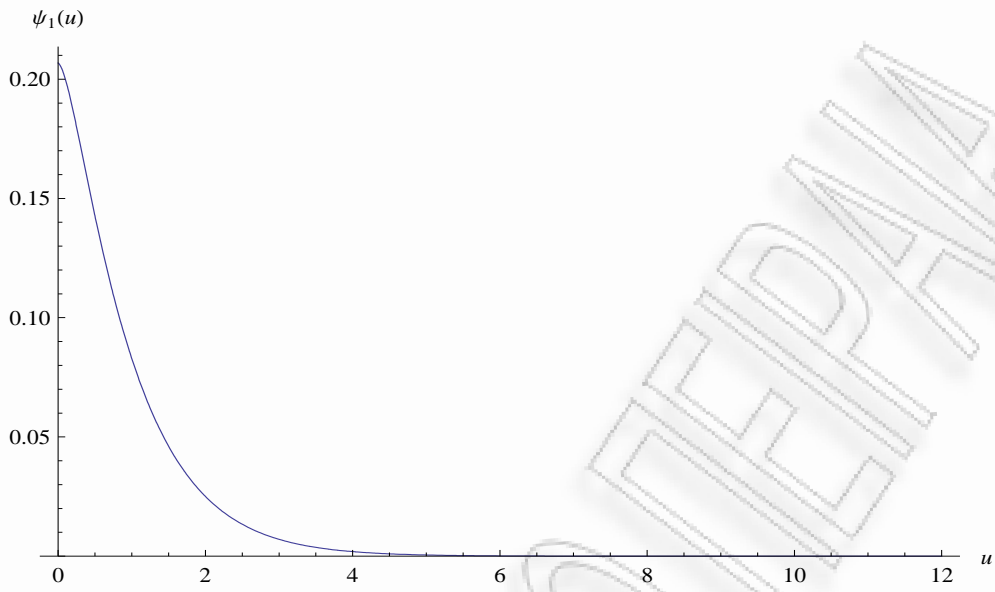
$$\begin{aligned} \psi(u) = & 0.0105739 e^{-9.7432u} + 0.017624 e^{-7.70134u} + 0.0299932 e^{-5.66284u} \\ & + 0.0615949 e^{-3.6106u} + 0.295365 e^{-1.46384u} \end{aligned} \quad (B'.3)$$

Επειδή τη συγκεκριμένη περίπτωση τη χρησιμοποιούμε στην Ενότητα 5.1, δίνουμε αναλυτικά τον τύπο της πρώτης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας καθώς θα χρειαστεί στην εύρεση της παραμέτρου $\tilde{\lambda}$ της νέας προσέγγισης $\bar{K}_\delta^{Poi}(u)$. Όπως είδαμε και στην Ενότητα 5.1, η προσέγγιση $\bar{K}_\delta^{NB}(u)$ δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί, καθώς από τη λύση του συστήματος (4.20) προκύπτουν τιμές για τις παραμέτρους r και p που δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς που έχουμε δώσει στην Ενότητα 5.1. Επομένως, αναλυτικά θα δοθούν μόνο οι ροπές $\psi_1(u)$ και $\psi_1(u)/\psi(u)$, ενώ οι δεύτερες ροπές $\psi_2(u)$ και $\psi_2(u)/\psi(u)$, δίνονται μόνο γραφικά και συγκεκριμένα από τα Σχήματα B'.11 και B'.12 αντίστοιχα.

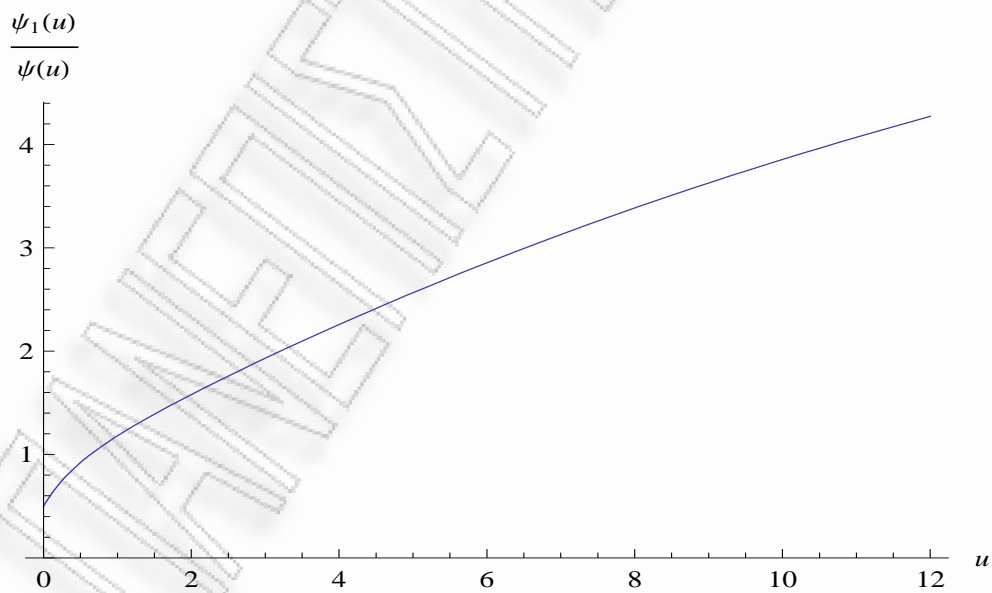
Γνωρίζοντας την πιθανότητα χρεοκοπίας που δώσαμε στη σχέση (B'.3), για την περίπτωση που ισχύει $\theta = 1.40876$, και χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.14), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \psi_1(u) = & -0.0128418 e^{-9.7583u} + 0.00880027 e^{-9.7432u} - 0.0266985 e^{-7.72112u} \\ & + 0.02020901 e^{-7.70134u} - 0.0608863 e^{-5.68745u} + 0.0505912 e^{-5.66284u} \\ & + 0.1921962 e^{-3.64258u} + 0.17533 e^{-3.6106u} - 1.98323 e^{-1.52389u} \\ & + 2.226938 e^{-1.46384u} \end{aligned}$$

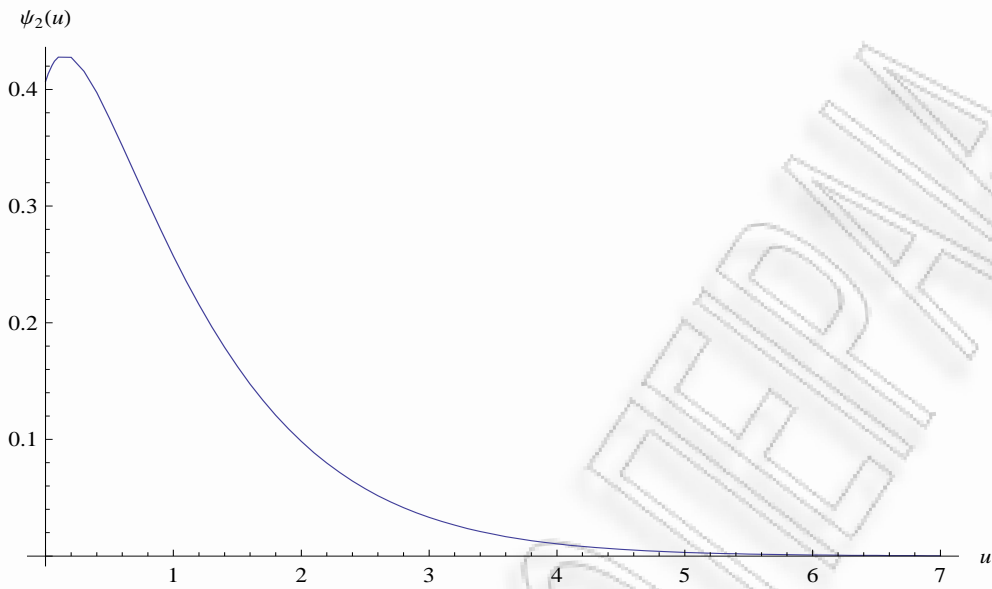
Η γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$ παρουσιάζεται στο σχήμα B'.9, ενώ ο αναλυτικός τύπος της $\psi_1(u)/\psi(u)$ δίνεται στη σχέση (B'.4) και παρουσιάζεται γραφικά στο Σχήμα B'.10.



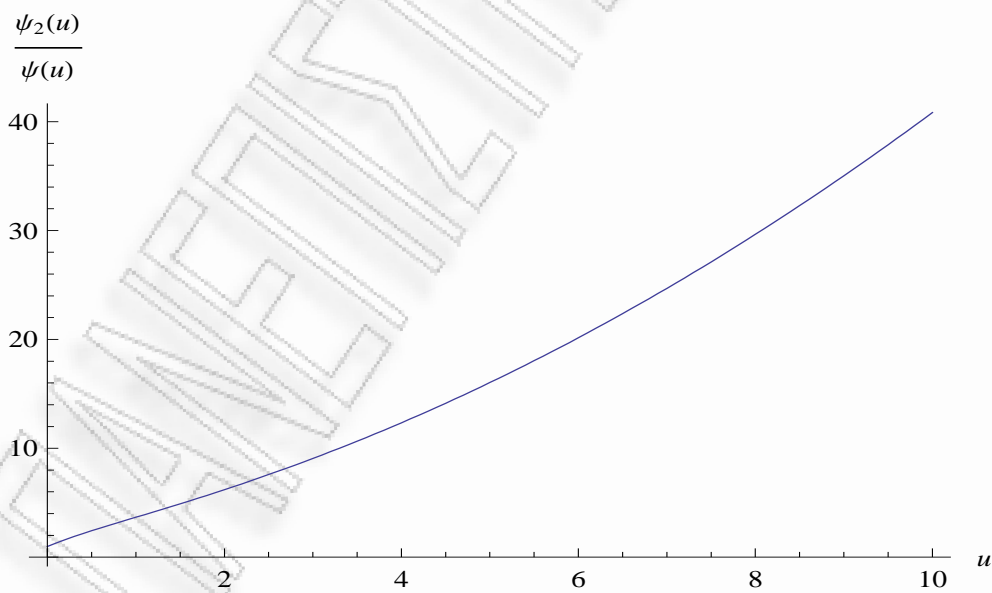
Σχήμα Β'.9: Γραφική παράσταση της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη πέντε εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.40876$.



Σχήμα Β'.10: Γραφική παράσταση της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη πέντε εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.40876$.



Σχήμα Β'.11: Γραφική παράσταση της δεύτερης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη πέντε εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.40876$.



Σχήμα Β'.12: Γραφική παράσταση της δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για μείξη πέντε εκθετικών κατανομών με $\theta = 1.40876$.

Διαιρώντας τώρα την πρώτη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας με την πιθανότητα χρεοκοπίας, βρίσκουμε μετά από κάποιες πράξεις στο *Mathematica* ότι η πρώτη δεσμευμένη ροπή $\psi_1(u)/\psi(u)$, ισούται με

$$\begin{aligned}
 & [-0.0128418 e^{-63.1752u} + 0.00880027 e^{-63.1903u} - 0.0266985 e^{-65.2124u} \\
 & + 0.02020901 e^{-65.2322u} - 0.0608863 e^{-67.2461u} + 0.0505912 e^{-67.2707u} \\
 & + 0.1921962 e^{-69.2909u} + 0.17533 e^{-69.3229u} - 1.98323 e^{-71.4697u} \quad (\text{B'.4}) \\
 & + 2.226938 e^{-1.46384u}] \times [0.0105739 e^{-63.1903u} + 0.017624 e^{-65.2322u} \\
 & + 0.0299932 e^{-67.2707u} + 0.0615949 e^{-69.3229u} + 0.295365 e^{-71.4697u}]
 \end{aligned}$$

Παράρτημα Γ'

Οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας για Γάμμα(10,10) κατανομή.

Στο συγκεκριμένο Παράρτημα υποθέτουμε τις ίδιες τιμές για τις παραμέτρους και την πρώτη κεντρική ροπή της κατανομής των αποζημιώσεων που είχαμε υποθέσει και στο Παράδειγμα 2.3.1, με την μόνη διαφορά ότι τώρα παίρνουμε ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία $Gamma(10, 10)$ κατανομή. Επομένως για την πρώτη περίπτωση έχουμε υποθέσει ότι $c = 1.5$, $\lambda = 1$ και η πρώτη ροπή της κατανομής των αποζημιώσεων ισούται με $p_1 = 1$, με αποτέλεσμα να ισχύει ότι

$$\theta = 0.5.$$

Επίσης η δεύτερη και τρίτη κεντρική ροπή της $f(x)$ ισούνται αντίστοιχα με

$$p_2 = 1.1,$$

και

$$p_3 = 1.32.$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας που αντιστοιχεί σε αυτό το παράδειγμα, βρίσκεται μέσω του *Mathematica* και ισούται με

$$\begin{aligned} \psi(u) = & 0.75634 e^{-0.676577 u} - 0.0129101 e^{-17.1977 u} - e^{-15.9492 u} \\ & \times [0.0254646 \cos(4.10593 u) + 0.00922196 \sin(4.10593 u)] - e^{-12.5943 u} \\ & \times [0.0241322 \cos(6.85355 u) + 0.0203378 \sin(6.85355 u)] - e^{-8.17395 u} \quad (\Gamma'.1) \\ & \times [0.0204626 \cos(7.29917 u) + 0.0372274 \sin(7.29917 u)] - e^{-4.0121 u} \\ & \times [0.00670382 \cos(5.16553 u) + 0.0750684 \sin(5.16553 u)] \end{aligned}$$

Επομένως γνωρίζοντας την πιθανότητα χρεοκοπίας, από τις σχέσεις που έχουν δοθεί στην Ενότητα 3.2, μπορούμε να υπολογίσουμε με τη βοήθεια του *Mathematica* τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας. Επειδή την περίπτωση που μελετάμε θα την χρησιμοποιήσουμε και στο πέμπτο κεφάλαιο, όπου εκεί μπορεί να εφαρμοστεί μόνο η προσέγγιση για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, μέσω *Poisson* κατανομής, δίνουμε αναλυτικά μόνο τις ροπές $\psi_1(u)$ και $\psi_1(u)/\psi(u)$. Η δεύτερη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας δεν χρησιμοποιείται στη συγκεκριμένη προσέγγιση, οπότε για ευκολία θα την παρουσιάσουμε μόνο γραφικά για να δείξουμε το πως συμπεριφέρονται οι ροπές σε μία αλλαγή του θ . Το παράδειγμα που μελετάμε σε αυτό το Παράρτημα έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς μπορούμε να συγκρίνουμε τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας καθώς και την νέα προσέγγιση για τον μετασχηματισμό *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας με τα αποτελέσματα που βρήκαμε στην περίπτωση που οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία Γάμμα(3,3) κατανομή, που μελετήσαμε στις Ενότητες 3.4 και 4.3 αντίστοιχα, αφού έχουμε πάρει τις ίδιες υποθέσεις και στα δύο παραδείγματα.

Στη συνέχεια δίνουμε τον τύπο της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας όπως αυτή υπολογίστηκε από το *Mathematica*. Σε αυτή την περίπτωση είναι αρκετά δύσκολο και χρονοβόρο στο να μετατρέψουμε την μιγαδική μορφή που μας δίνει το πρόγραμμα, σε τριγωνομετρική μορφή. Οπότε αν και οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας είναι πραγματικές συναρτήσεις, εδώ τις παρουσιάζουμε σε μιγαδική μορφή όπως αυτές προκύπτουν από το *Mathematica*.

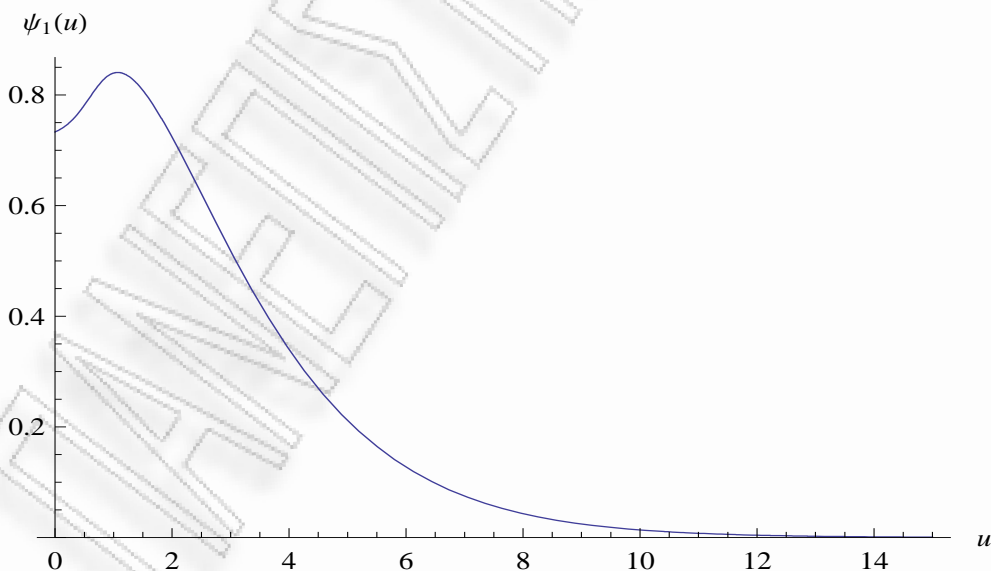
Η πρώτη μη-δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας, ισούται με

$$\begin{aligned} \psi_1(u) = & e^{(-80.0486 - 23.4242 i) u} [(0.024389 + 0.0219301 i) e^{(67.4543 + 16.5706 i) u} + (0.024389 - 0.0219301 i) \\ & \times e^{(67.4543 + 30.2777 i) u} + (0.0188534 + 0.03966 i) e^{(71.8746 + 16.125 i) u} + (0.0188534 - 0.03966 i) \\ & \times e^{(71.8746 + 30.7234 i) u} + 0.571837 e^{(79.372 + 23.4242 i) u} + e^{(76.0365 + 28.5897 i) u} \\ & \times ((0.0134739 - 0.0871996 i) - (0.00279516 + 0.000503245 i) u) + e^{(76.0365 + 18.2587 i) u} \\ & \times ((0.0134739 + 0.0871996 i) - (0.00279516 - 0.000503245 i) u) + e^{(71.8746 + 30.7234 i) u} \\ & \times ((0.00607419 - 0.0022474 i) - (0.000483582 + 0.000761769 i) u) + e^{(71.8746 + 16.125 i) u} \\ & \times ((0.00607419 + 0.0022474 i) - (0.000483582 - 0.000761769 i) u) + e^{(67.4543 + 30.2777 i) u} \end{aligned}$$

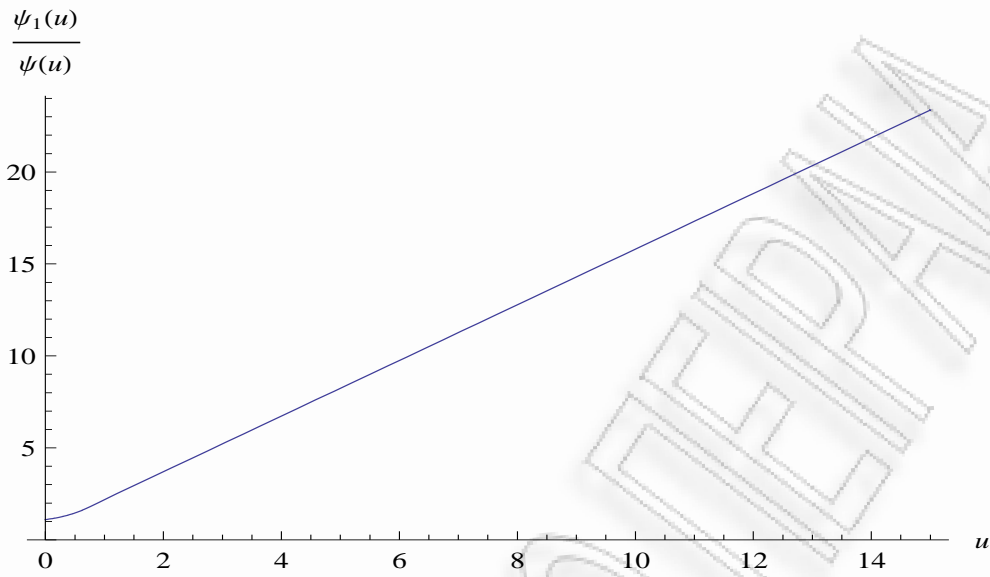
$$\begin{aligned}
& \times ((0.00360104 - 0.000767992 i) + (0.0000844 - 0.000491 i) u) + e^{(67.4543+16.5706 i) u} \\
& \times ((0.00360104 + 0.000767992 i) (0.0000844 + 0.000491 i) u) + e^{(64.0994+27.5301 i) u} \\
& \times ((0.0291128 - 0.0102599 i) + (0.0002817 - 0.000234833 i) u) + e^{(64.0994+19.3183 i) u} \\
& \times ((0.0291128 + 0.0102599 i) + (0.0002817 + 0.000234833 i) u) + e^{(62.8509+23.4242 i) u} \\
& \times (0.0294139 + 0.000333341 u) + e^{(79.372+23.4242 i) u} (-0.0589264 + 1.1441 u)
\end{aligned}$$

Διαίρωντας τώρα την $\psi_1(u)$ με την πιθανότητα χρεοκοπίας που υπολογίζεται σε μιγαδική μορφή από το *Mathematica*, προκύπτει η πρώτη δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας. Ο αναλυτικός τύπος της $\psi_1(u)/\psi(u)$, έτσι όπως υπολογίζεται από το *Mathematica*, δίνεται παρακάτω στη σχέση (Γ'.2).

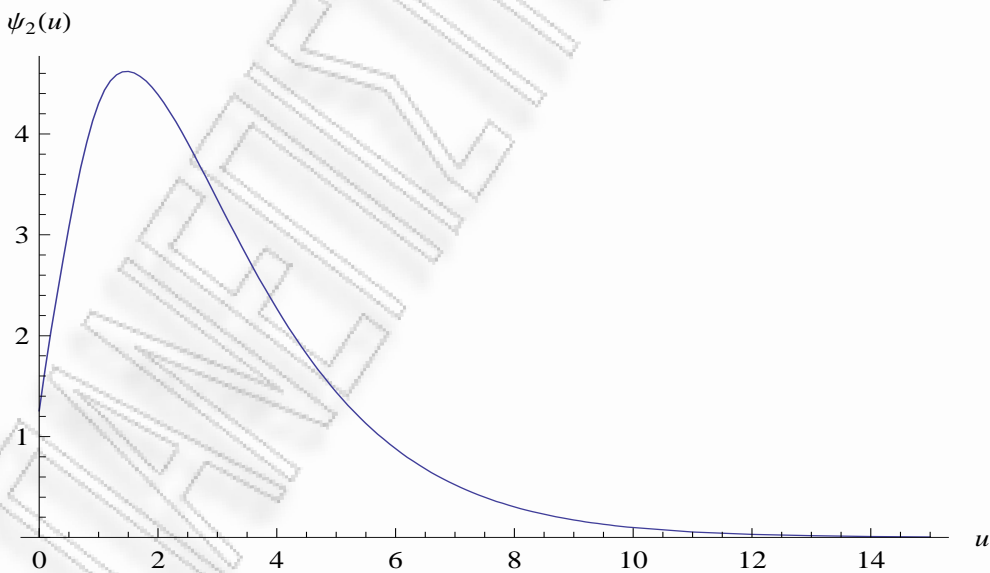
Τέλος οι γραφικές παραστάσεις των πρώτων και δεύτερων ροπών, για $\theta = 0.5$, δίνονται στη συνέχεια στα Σχήματα Γ'.1, Γ'.2, Γ'.3 και Γ'.4.



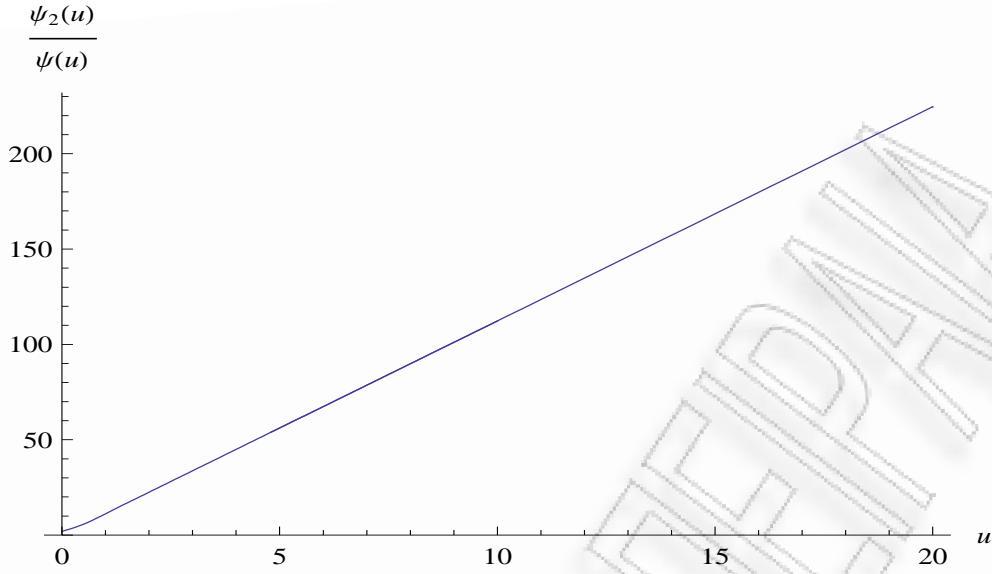
Σχήμα Γ'.1: Γραφική παράσταση της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για $\Gamma(\alpha, \beta)$ κατανομή με $\theta = 0.5$.



Σχήμα Γ'.2: Γραφική παράσταση της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(10,10) κατανομή με $\theta = 0.5$.



Σχήμα Γ'.3: Γραφική παράσταση της δεύτερης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(10,10) κατανομή με $\theta = 0.5$.



Σχήμα Γ.4: Γραφική παράσταση της δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(10,10) κατανομή με $\theta = 0.5$.

$$\begin{aligned}
& [(0.024389 + 0.0219301 i) e^{(67.4543+16.5706i)u} + (0.024389 - 0.0219301 i) \\
& \times e^{(67.4543+30.2777 i)u} + (0.0188534 + 0.03966 i) e^{(71.8746+16.125 i)u} + (0.0188534 - 0.03966 i) \\
& \times e^{(71.8746+30.7234 i)u} + 0.571837 e^{(79.372+23.4242 i)u} + e^{(76.0365+28.5897 i)u} \\
& \times ((0.0134739 - 0.0871996 i) - (0.00279516 + 0.000503245 i) u) + e^{(76.0365+18.2587 i)u} \\
& \times ((0.0134739 + 0.0871996 i) - (0.00279516 - 0.000503245 i) u) + e^{(71.8746+30.7234 i)u} \\
& \times ((0.00607419 - 0.0022474 i) - (0.000483582 + 0.000761769 i) u) + e^{(71.8746+16.125 i)u} \\
& \times ((0.00607419 + 0.0022474 i) - (0.000483582 - 0.000761769 i) u) + e^{(67.4543+30.2777 i)u} \\
& \times ((0.00360104 - 0.000767992 i) + (0.0000844 - 0.000491 i) u) + e^{(67.4543+16.5706 i)u} \\
& \times ((0.00360104 + 0.000767992 i) (0.0000844 + 0.000491 i) u) + e^{(64.0994+27.5301 i)u}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times ((0.0291128 - 0.0102599 i) + (0.0002817 - 0.000234833 i) u) + e^{(64.0994+19.3183 i) u} \\
& \hspace{15em} (\Gamma'.2) \\
& \times ((0.0291128 + 0.0102599 i) + (0.0002817 + 0.000234833 i) u) + e^{(62.8509+23.4242 i) u} \\
& \times (0.0294139 + 0.000333341 u) + e^{(79.372+23.4242 i) u} (-0.0589264 + 1.1441 u) \\
& \times [-0.0129101 e^{-(62.8509+23.4242 i) u} - (0.0127323 + 0.00461098 i) e^{-(64.0994+19.3183 i) u} \\
& - (0.0127323 - 0.00461098 i) e^{-(64.0994+27.5301 i) u} - (0.0120661 + 0.0101689 i) e^{-(67.4543+16.5706 i) u} \\
& - (0.0120661 - 0.0101689 i) e^{-(67.4543+30.2777 i) u} - (0.0102313 + 0.0186137 i) e^{-(71.8746+16.125 i) u} \\
& - (0.0102313 - 0.0186137 i) e^{-(71.8746+30.7234 i) u} - (0.00335191 + 0.0375342 i) e^{-(76.0365+18.2587 i) u} \\
& - (0.00335191 - 0.0375342 i) e^{-(76.0365+28.5897 i) u} + 0.75634 e^{-(79.372+23.4242 i) u}]
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $c = 1.1$ και $\lambda = 1$, με αποτέλεσμα να ισχύει ότι $\theta = 0.1$.

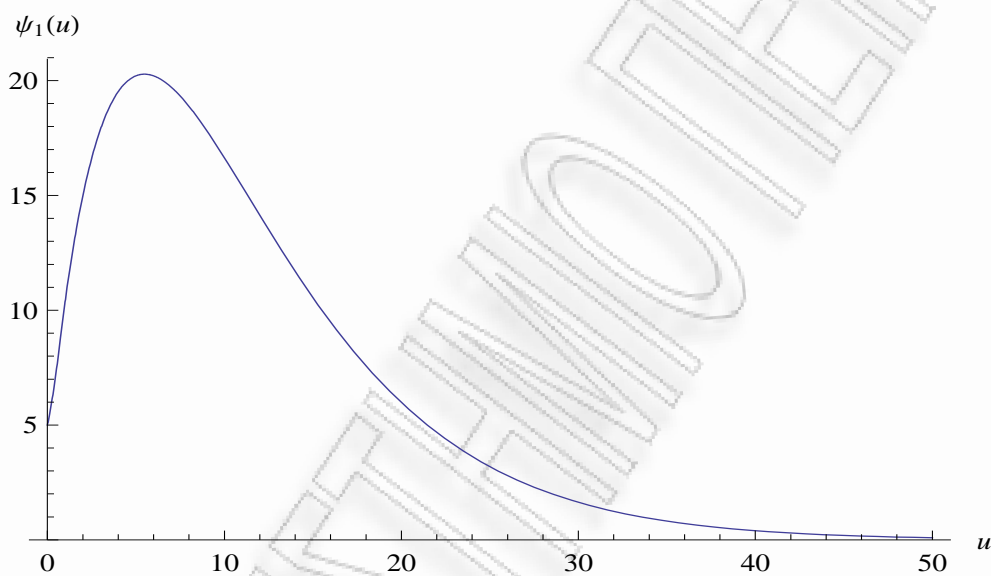
Για την πιθανότητα χρεοκοπίας σε αυτή την περίπτωση, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\psi(u) = & 0.933864 e^{-0.169641 u} - 0.00353317 e^{-17.4059 u} - e^{-16.1218 u} \\
& \times [0.00697164 \cos(4.22422 u) + 0.0025171 \sin(4.22422 u)] - e^{-12.6707 u} \\
& \times [0.00661706 \cos(7.05146 u) + 0.00555232 \sin(7.05146 u)] - e^{-8.12366 u} \\
& \times [0.00564258 \cos(7.5114 u) + 0.01016934 \sin(7.5114 u)] - e^{-3.84152 u} \\
& \times [0.00200864 \cos(5.32032 u) + 0.020552 \sin(5.32032 u)]
\end{aligned}$$

Γνωρίζοντας την πιθανότητα χρεοκοπίας, βρίσκουμε με χρήση του *Mathematica* και μέσω των σχέσεων που έχουμε δώσει στην Ενότητα 3.2, τις πρώτες και δεύτερες ροπές του

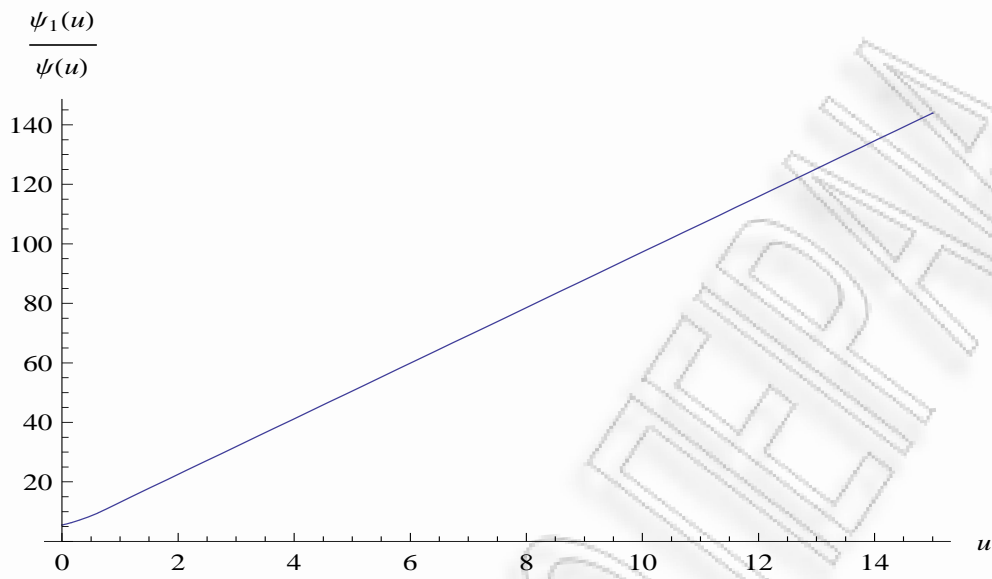
χρόνου χρεοκοπίας. Επειδή όμως τη συγκεκριμένη περίπτωση δεν θα την μελετήσουμε στο πέμπτο κεφάλαιο, αφού σε μία τέτοια περίπτωση δεν θα είναι τόσο πολύ αισθητή η διαφορά ανάμεσα στις νέες προσεγγίσεις και στην προσέγγιση *Tijms*, δίνουμε μόνο γραφικά τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας για να δούμε το πώς συμπεριφέρονται σε μία μικρότερη τιμή του θ . Τα συμπεράσματα που καταλήγουμε, για μικρή τιμή του θ , είναι ίδια με αυτά που είχαμε και στα προηγούμενα παραδείγματα. Το μόνο που αλλάζει είναι η τιμή του αναμενόμενου χρόνου χρεοκοπίας που υπάρχει σε κάθε περίπτωση.

Οι μη-δεσμευμένες και δεσμευμένες ροπές του χρόνου χρεοκοπίας δίνονται στα παρακάτω Σχήματα Γ'.5, Γ'.7 και Γ'.6, Γ'.8 αντίστοιχα.

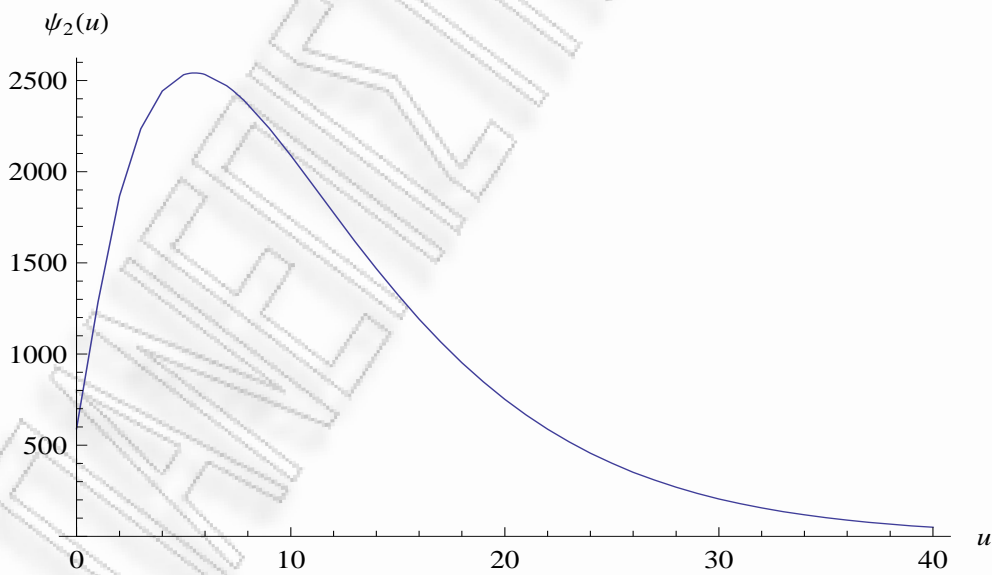


Σχήμα Γ'.5: Γραφική παράσταση της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(10,10) κατανομή με $\theta = 0.1$.

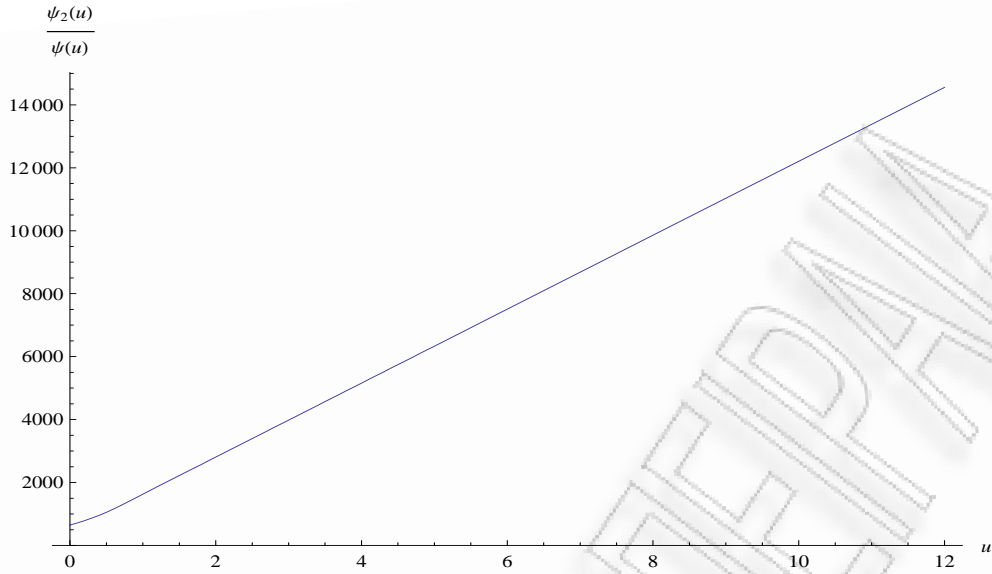
Ούτε εδώ υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβλητότητας του δεσμευμένου χρόνου χρεοκοπίας καθώς όπως έχουμε ξαναφέρει και στο προηγούμενο παράρτημα, οδηγούμαστε στα ίδια συμπεράσματα που είχαμε στα παραδείγματα του Κεφαλαίου 3.



Σχήμα Γ.6: Γραφική παράσταση της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(10,10) κατανομή με $\theta = 0.1$.



Σχήμα Γ.7: Γραφική παράσταση της δεύτερης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(10,10) κατανομή με $\theta = 0.1$.



Σχήμα Γ'.8: Γραφική παράσταση της δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(10,10) κατανομή με $\theta = 0.1$.

Τέλος εφαρμόζουμε στο παράδειγμά μας και μία μεγάλη τιμή για το θ . Έτσι αν υποθέσουμε ότι $c = 2.5$ και $\lambda = 1$, παίρνουμε ότι

$$\theta = 1.5.$$

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με

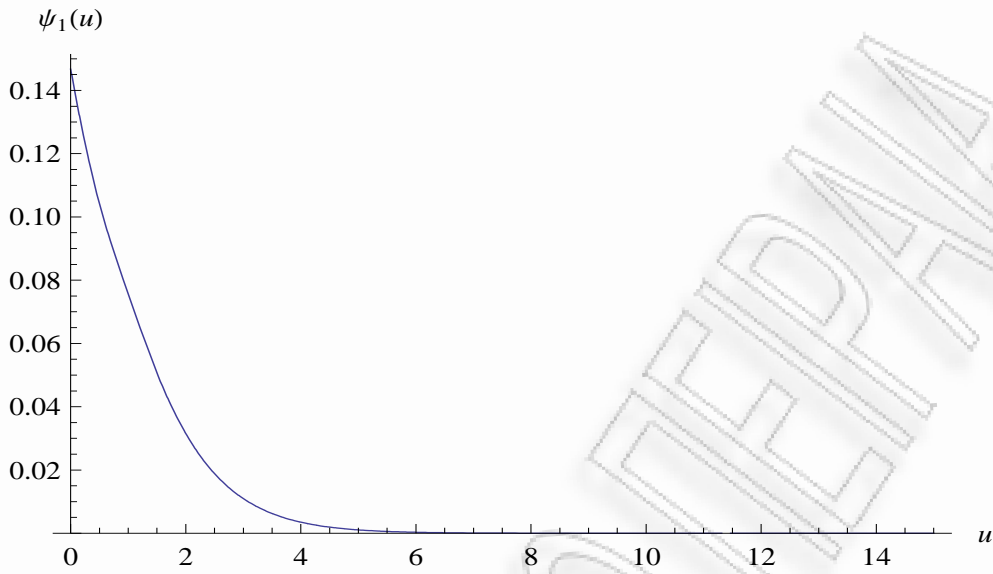
$$\begin{aligned} \psi(u) = & 0.553816 e^{-1.39315 u} - 0.0229407 e^{-16.8627 u} - e^{-15.671 u} \\ & \times [0.0451862 \cos(3.91662 u) + 0.01654748 \sin(3.91662 u)] - e^{-12.4688 u} \\ & \times [0.0425748 \cos(6.53594 u) + 0.036478 \sin(6.53594 u)] - e^{-8.25027 u} \quad (\Gamma'.3) \\ & \times [0.0353376 \cos(6.95585 u) + 0.066584 \sin(6.95585 u)] - e^{-4.28202 u} \\ & \times [0.00777634 \cos(4.90685 u) + 0.133046 \sin(4.90685 u)] \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη παραπάνω σχέση (Γ'.3), τις τιμές των δύο πρώτων ροπών της $f(x)$ και της έντασης της ανέλιξης Poisson, λ , στη σχέση (3.14), προκύπτει ότι η πρώτη μη-δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας ισούται με

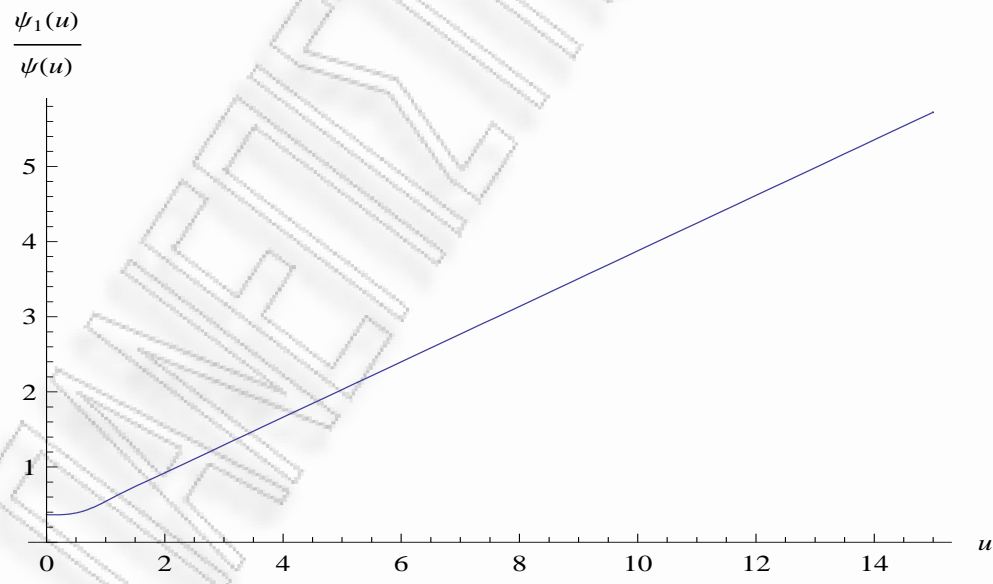
$$\begin{aligned}
\psi_1(u) = & e^{(-63.2099-26.2319i)u} [(0.00064589 + 0.000124714i) e^{(47.5389+22.3153i)u} + (0.00516 - 0.00207i) \\
& \times e^{(47.5389+30.1485i)u} + (0.000964334 - 0.0149595i) e^{(58.9279+21.325i)u} + (0.00348 - 0.00288i) \\
& \times e^{(58.9279+31.1387i)u} - (0.00444 + 0.012084i) e^{(58.9279+31.1387i)u} + e^{(58.9279+31.1387i)u} \\
& \times ((0.00347774 - 0.0034792i) - (0.00294013 + 0.00034487i)u) + e^{(58.9279+21.325i)u} \\
& \times ((0.00347774 + 0.0034792i) - (0.00294013 - 0.00034487i)u) + e^{(54.9597+33.1877i)u} \\
& \times ((0.0051269 - 0.00860124i) - (0.000530781 + 0.000784305i)u) + e^{(54.9597+19.276i)u} \\
& \times ((0.0051269 + 0.00860124i) - (0.000530781 - 0.000784305i)u) + e^{(50.7412+19.6959i)u} \\
& \times ((0.00571379 + 0.00461433i) + (0.0000805237 + 0.000517451i)u) + e^{(50.7412+32.7678i)u} \\
& \times ((0.00571379 - 0.00461433i) + (0.0000805237 - 0.000517451i)u) + e^{(47.5389+30.1485i)u} \\
& \times (0.000763823 + (0.000294663 - 0.000249239i)u) + e^{(47.5389+22.3153i)u} \\
& \times ((0.00527353 + 0.0019536i) + (0.000294663 + 0.000249239i)u) + e^{(46.3472+26.2319i)u} \\
& \times (0.00597382 + 0.000350851u) + e^{(61.8168+26.2319i)u} (0.102146 + 0.204474u)]
\end{aligned}$$

Αφού υπολογίσαμε την $\psi_1(u)$, μέσω του *Mathematica*, σχεδιάζουμε τη γραφική της παράσταση και την παρουσιάζουμε στο παρακάτω Σχήμα Γ'.9. Στη συνέχεια υπολογίζουμε την πρώτη δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας, $\psi_1(u)/\psi(u)$, η οποία δίνεται αναλυτικά στο τέλος του Παραρτήματος, στη σχέση (Γ'.4), και γραφικά από το Σχήμα Γ'.10.

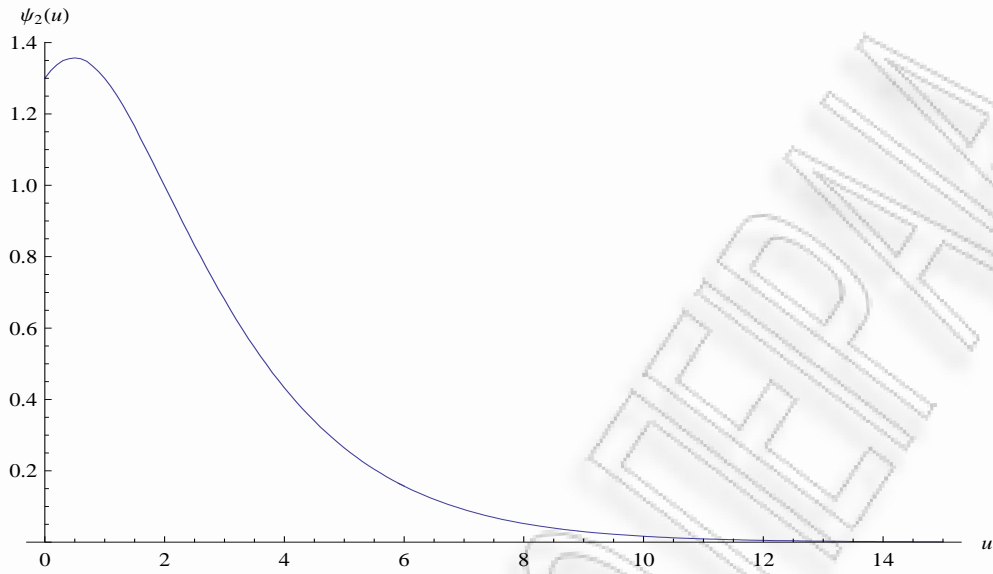
Για τις δεύτερες ροπές του χρόνου χρεοκοπίας, $\psi_2(u)$ και $\psi_2(u)/\psi(u)$ αντίστοιχα, παρουσιάζουμε μόνο τις γραφικές τους παραστάσεις οι οποίες δίνονται στα παρακάτω Σχήματα Γ'.11 και Γ'.12 αντίστοιχα.



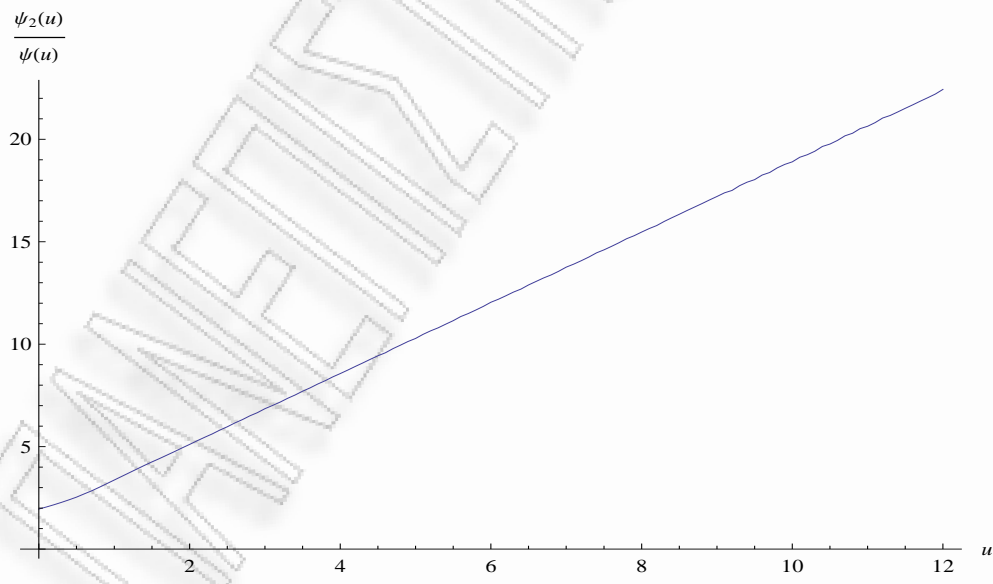
Σχήμα Γ'.9: Γραφική παράσταση της πρώτης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(10,10) κατανομή με $\theta = 1.5$.



Σχήμα Γ'.10: Γραφική παράσταση της πρώτης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(10,10) κατανομή με $\theta = 1.5$.



Σχήμα Γ'.11: Γραφική παράσταση της δεύτερης μη-δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(10,10) κατανομή με $\theta = 1.5$.



Σχήμα Γ'.12: Γραφική παράσταση της δεύτερης δεσμευμένης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, για Γάμμα(10,10) κατανομή με $\theta = 1.5$.

$$\begin{aligned}
& [(0.00064589 + 0.000124714 i) e^{(47.5389+22.3153i) u} + (0.00516 - 0.00207 i) \\
& \times e^{(47.5389+30.1485 i) u} + (0.000964334 - 0.0149595 i) e^{(58.9279+21.325 i) u} + (0.00348 - 0.00288 i) \\
& \times e^{(58.9279+31.1387 i) u} - (0.00444 + 0.012084) e^{(58.9279+31.1387 i) u} + e^{(58.9279+31.1387 i) u} \\
& \times ((0.00347774 - 0.0034792 i) - (0.00294013 + 0.00034487 i) u) + e^{(58.9279+21.325 i) u} \\
& \times ((0.00347774 + 0.0034792 i) - (0.00294013 - 0.00034487 i) u) + e^{(54.9597+33.1877 i) u} \\
& \times ((0.0051269 - 0.00860124 i) - (0.000530781 + 0.000784305 i) u) + e^{(54.9597+19.276 i) u} \\
& \times ((0.0051269 + 0.00860124 i) - (0.000530781 - 0.000784305 i) u) + e^{(50.7412+19.6959 i) u} \\
& \times ((0.00571379 + 0.00461433 i) + (0.0000805237 + 0.000517451 i) u) + e^{(50.7412+32.7678 i) u} \\
& \times ((0.00571379 - 0.00461433 i) + (0.0000805237 - 0.000517451 i) u) + e^{(47.5389+30.1485 i) u} \\
& \times (0.000763823 + (0.000294663 - 0.000249239 i) u) + e^{(47.5389+22.3153 i) u} \tag{\Gamma'.4} \\
& \times ((0.00527353 + 0.0019536 i) + (0.000294663 + 0.000249239 i) u) + e^{(46.3472+26.2319 i) u} \\
& \times (0.00597382 + 0.000350851 u) + e^{(61.8168+26.2319 i) u} (0.102146 + 0.204474 u) \\
& \times [-0.0229407 e^{-(46.3472+26.2319 i) u} - (0.0225931 + 0.00827374 i) e^{-(47.5389+22.3153 i) u} \\
& - (0.0225931 - 0.00827374 i) e^{-(47.5389+30.1485 i) u} - (0.0212874 + 0.0182309 i) e^{-(50.7412+19.6959 i) u} \\
& - (0.0212874 - 0.0182309 i) e^{-(50.7412+32.7678 i) u} - (0.0176688 + 0.033292 i) e^{-(54.9597+19.276 i) u} \\
& - (0.0176688 - 0.033292 i) e^{-(54.9597+33.1877 i) u} - (0.00388817 + 0.066523 i) e^{-(58.9279+21.325 i) u} \\
& - (0.00388817 - 0.066523 i) e^{-(58.9279+31.1387 i) u} + 0.553816 e^{-(61.8168+26.2319 i) u}]
\end{aligned}$$

Βιβλιογραφία

Α. ΕΛΛΗΝΙΚΗ

- [1] Γκαρούτσος Γ. (2007) *Συνήθειες διαφορικές εξισώσεις*, Εκδόσεις SPIN.
- [2] Δερμιτζάκης Β. (2005) *Φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση*, Διπλωματική Διατριβή, ΠΜΣ 'Εφαρμοσμένη Στατιστική', ΠΑΠΕΙ.
- [3] Κούτρας Μ.Β. (2004) *Εισαγωγή στις Πιθανότητες-Θεωρία και Εφαρμογές*, Β' Έκδοση, Εκδόσεις Αθ.Σταμούλης.
- [4] Κουτσόπουλος Κ.Ι. (1999) *Αναλογιστικά Μαθηματικά, Μέρος 1, Θεωρία των Κινδύνων*, Εκδόσεις Συμμετρία.
- [5] Πολίτης Κ. (2008) *Σημειώσεις στη Θεωρία Χρεοκοπίας*, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης.
- [6] Ψαράκος Γ. (2007) *Φράγματα, προσεγγίσεις και ιδιότητες μονοτονίας στη Θεωρία Κινδύνων*, Διδακτορική Διατριβή, ΠΑΠΕΙ.
- [7] Χατζηχωνσταντινίδης Ε. (2008) *Σημειώσεις στο μάθημα θεωρία κινδύνου 2*, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Π.Μ.Σ 'Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου', ΠΑΠΕΙ.

Β. ΞΕΝΟΓΛΩΣΗ

- [8] Asmussen S. (2000) *Ruin Probabilities*, World Scientific, Singapore.
- [9] Badier J., Chan B. (1992) *Approximations of Ruin Probablity by di-atomic or di-exponential claims*, Astin Bulletin, No.2 235-246.
- [10] Bowers N.L, Gerber H.U, Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J. (1997) *Actuarial mathematics*, The Society of Actuaries , Ithaca Illinois (2nd edition).
- [11] Chan W-S., Zhang L. (2007) *Direct derivation of finite-time ruin probabilities in the discrete risk model with exponentials or geometric claims*, North American Actuarial Journal, Volume 10, Number 4.

- [12] Dermitzakis V., Pitts S., Politis K. (2009) *Lundberg-type bounds and asymptotics for the moments of the time to ruin*, Methodology and Computing in Applied Probability, to appear.
- [13] Dickson D.C.M., Hipp C. (2001) *On the time to ruin for Erlang(2) risk processes*, Insurance Math. Economics, **29**, 333-344.
- [14] Feller W. (1971) *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol 2, 2nd ed., J. Willey N.Y.
- [15] Gerber H.U (1979) *An introduction to Mathematical Risk Theory*, Huebner Foundation Monograph Series.
- [16] Gerber H.U, Goovaerts M.J., Kaas R. (1987) *On the probability and severity of ruin*, Astin Bulletin, **17**, 151-163.
- [17] Gerber H.U, Shiu E.S.W (1998) *The time value of ruin*, North American Actuarial Journal, **2**, 48-78.
- [18] Gerber H.U, Shiu E.S.W (2005) *The time value of ruin in a Sparre Andersen model*, North American Actuarial Journal, 48-78.
- [19] Grandell J. (1991) *Aspects of Risk theory*, Springer, Berlin.
- [20] Grimmet G. and Stirzaker D. (2001) *Probability and random processes*, 3rd ed. Oxford University Press.
- [21] Lin X.S. and Willmot G.E (2000) *The Moments of the time of ruin the surplus before ruin and the deficit at ruin*, Insurance Math. Economics, **19**, 19-44.
- [22] Müller A., Stoyan D. (2002) *Comparison methods for stochastic models and risks*, Wiley series in probability and statistics.
- [23] Rolski T., Schmidli H., Schmidt V. and Teugels J. (1999) *Stochastic processes for insurance and finance*, Wiley.
- [24] Ross S. (2007) *Introduction to Probability Models*, 9nd ed. Academic Press.
- [25] Tijms H.C. (1986) *Stochastic Modeling and Analysis:a computational approach*, J. Willey N.Y.
- [26] Tijms H.C. (1994) *Stochastic Modeling and Analysis:an algorithmic approach*, J. Willey N.Y.
- [27] Willmot G.E. (1998) *On a class of approximations for ruin and waiting time probabilities*, Operations Research Letters, **22**, 27-32.

- [28] Willmot G.E., Lin X.S. (1999) *Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory*, Insurance Math. Economics, **25**, 63-84.
- [29] Willmot G.E., Lin X.S. (2001) *Lundberg Approximations for compound distributions with Insurance Applications*, Springer, New York.