

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΣΥΝΘΕΤΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ
ΕΛΕΓΧΟΥ**

ΑΝΤΡΙΑΝΑ Π. ΚΑΡΑΒΙΩΤΗ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Φεβρουάριος 2009

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΣΥΝΘΕΤΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ
ΕΛΕΓΧΟΥ**

ΑΝΤΡΙΑΝΑ Π. ΚΑΡΑΒΙΩΤΗ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Φεβρουάριος 2009

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. 5/ 17-3-2008 συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Δημήτριος Αντζουλάκος, Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Μάρκος Κούτρας, Καθηγητής
- Μιχαήλ Μπούτσικας, Επίκουρος Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS**

SYNTHETIC CONTROL CHARTS

By
ANTRIANA P. KARAVIOTI

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of
the requirements for the degree of Master of Science in
Applied Statistics

Piraeus, Greece
February 2009

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Στη μητέρα μου
Θεοδώρα
και την αδελφή μου
Μαριέττα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τη μητέρα μου και την αδελφή μου για την φροντίδα, την αγάπη και την υποστήριξη τους σε όλες μου τις επιλογές, επιστημονικές, επαγγελματικές και προσωπικές, τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Αντζουλάκο Δημήτριο για τη βοήθεια και την καθοδήγησή του, χωρίς τις οποίες δεν θα είχα καταφέρει να φέρω σε πέρας αυτή τη διπλωματική εργασία, αλλά και τα μέλη της τριμελούς επιτροπής κ.κ. Κούτρα Μάρκο και Μπούτσικα Μιχαήλ για την επίβλεψη της.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Περίληψη

Σε κάθε παραγωγική διεργασία θα υπάρχει πάντα μια μορφή φυσικής μεταβλητότητας, η οποία αποτελεί συνισταμένη πολλών μικρών αιτιών που αναφέρονται ως κοινές ή τυχαίες αιτίες μεταβλητότητας. Η φυσική μεταβλητότητα είναι συνήθως μικρή σε μέγεθος και δεν μπορεί να μειωθεί ή να εξαφανιστεί. Μια διεργασία η οποία λειτουργεί μόνο με την παρουσία φυσικής μεταβλητότητας λέμε ότι είναι εντός στατιστικού ελέγχου. Όμως σε μια διεργασία μπορεί να εμφανίζονται και άλλες μορφές μεταβλητότητας οι οποίες δεν οφείλονται σε τυχαίες αιτίες αλλά αφορούν τη συστηματική αλλαγή στο επίπεδο κάποιου ή κάποιων παραγόντων που καθορίζουν την ποιότητα του προϊόντος. Αυτή η μεταβλητότητα είναι σε μέγεθος πολύ μεγαλύτερη της φυσικής και η παρουσία της οδηγεί συνήθως σε μη αποδεκτά επίπεδα λειτουργίας της παραγωγικής διεργασίας, αναφέρεται δε ως ειδική μεταβλητότητα και οι αιτίες που την προκαλούν ονομάζονται ειδικές ή συστηματικές αιτίες μεταβλητότητας. Τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart για την παρακολούθηση του μέσου μ μιας διεργασίας δίνουν σήμα ότι μια διεργασία είναι εκτός ελέγχου όταν ένα σημείο του διαγράμματος βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου που ορίζονται από το κάτω (LCL) και το άνω (UCL) όριο του διαγράμματος. Το Shewhart \bar{X} διάγραμμα ελέγχου έχει ευρέως χρησιμοποιηθεί στη βιομηχανία για τον έλεγχο του μέσου μιας διεργασίας. Αυτό το διάγραμμα είναι αρκετά αποτελεσματικό στο να ανιχνεύει μεγάλης κλίμακας μετατοπίσεις του μέσου. Παρ' όλα αυτά δεν είναι ευαίσθητο σε μικρές έως μέτριες μετατοπίσεις του μέσου. Το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου αποτελεί συνδυασμό του κλασσικού διαγράμματος Shewhart \bar{X} και του διαγράμματος συμμορφούμενου μήκους ροής (CRL) και αποτελείται από ένα \bar{X} / S υπο-διάγραμμα και ένα CRL/S υπο-διάγραμμα. Τα διαγράμματα αυτά έχουν προταθεί για την παρακολούθηση του μέσου μιας παραγωγικής διεργασίας, της διασποράς αυτής αλλά και για διακριτά χαρακτηριστικά. Είναι δε αποδοτικότερα στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων του μέσου της διεργασίας έναντι των κλασσικών διαγραμμάτων τύπου Shewhart.

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η καταγραφή και η παρουσίαση των συνθετικών διαγραμμάτων ελέγχου, αλλά και η σύγκρισή τους με τα διαγράμματα τύπου Shewhart.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Abstract

In each manufacturing process will there always exists a form of natural variation, which constitutes of many small causes that can be reported as “common” or “chance” causes of variation. The natural variation is usually small in size and it cannot further decrease or vanish. A manufacturing process which functions only with the presence of natural variation we say that it is in-control. However, in manufacturing processes may also appear other forms of variation which reflect a systematic change in levels of certain factors that determine the quality of the product. This variation is much larger and its presence usually leads to unacceptable levels of operation in a manufacturing process. It is reported as “special variation” and the causes are called “special” or “assignable” causes of variation. The Shewhart type control charts for monitoring the mean of a manufacturing process give a signal of an out of control process when a plotted point falls outside the control limits. These are specified by the lower (*LCL*) and the upper (*UCL*) control limit of chart. The Shewhart \bar{X} control chart has been widely used in industry to monitor the process mean. This chart is quite effective in detecting large shifts in process mean. However, it may be insensitive to small or moderate shifts. The synthetic control chart integrates the Shewhart \bar{X} and the conforming run length (*CRL*) chart and consists of a \bar{X}/S sub-chart and a *CRL/S* sub-chart. These charts have been suggested for monitoring the process mean of a manufacturing process, the variance. They are more efficient in the detection of small shifts than the classical Shewhart type control charts.

The main purpose of this dissertation is the recording and the presentation of these synthetic control charts and their comparison to the Shewhart type control charts.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων	xv
Κατάλογος Σχημάτων	xviii
Κατάλογος Συντομογραφιών	xx
1. Διαγράμματα Ελέγχου	1
1.1 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart	1
1.2 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart για μεταβλητές	3
1.2.1 Διαγράμματα ελέγχου για την μέση τιμή	3
1.2.2 Διαγράμματα ελέγχου για τη διασπορά	8
1.2.3 Διαγράμματα ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις	12
1.3 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart για ιδιότητες	14
1.3.1 Διαγράμματα ελέγχου για το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων	15
1.3.2 Διαγράμματα ελέγχου για τον αριθμό και το μέσο αριθμό των Ελαττωμάτων	18
1.4 Κανόνες ευαισθητοποίησης ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart	21
1.5 Διαγράμματα ελέγχου CUSUM	22
1.6 Διαγράμματα ελέγχου EWMA	26
2. Συνθετικά διαγράμματα ελέγχου για τη μέση τιμή και τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων	32
2.1 Συνθετικό διάγραμμα ελέγχου για την ανίχνευση μετατοπίσεων του μέσου μιας διεργασίας	32
2.1.1 Εισαγωγή	32
2.1.2 Shewhart \bar{X} και CRL διάγραμμα ελέγχου	34
2.1.3 Το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου $\bar{X} - CRL$	36
2.1.4 Παραδείγματα	40
2.1.5 Πρόγραμμα σχεδιασμού του συνθετικού διαγράμματος ελέγχου $\bar{X} - CRL$	47
2.1.6 Ανθεκτικότητα του συνθετικού διαγράμματος ελέγχου $\bar{X} - CRL$ στη μη κανονικότητα	50
2.1.7 Συμπεράσματα	62
2.2 Συνθετικό διάγραμμα ελέγχου για την ανίχνευση αυξήσεων του αριθμού μη συμμορφούμενων μονάδων μιας διεργασίας	63
2.2.1 Διαγράμματα ελέγχου np και CRL	63
2.2.2 Το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου $np - CRL$	64
2.2.3 Παραδείγματα	70
2.2.4 Πρόγραμμα σχεδιασμού του συνθετικού διαγράμματος ελέγχου $np - CRL$	75
2.2.5 Συμπεράσματα	76
3. Συνθετικά διαγράμματα ελέγχου για τον έλεγχο της διασποράς	79
3.1 Συνθετικό διάγραμμα ελέγχου για τον έλεγχο της διασποράς μιας διεργασίας με τη δειγματική τυπική απόκλιση	79

3.1.1	Εισαγωγή	79
3.1.2	S και CRL διάγραμμα ελέγχου	81
3.1.3	Το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου $S - CRL$	83
3.1.4	Συγκρίσεις ARL μεταξύ του συνθετικού $S - CRL$ διαγράμματος ελέγχου και άλλων διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς	91 96
3.1.5	Σχέδια VSI για το συνθετικό $S - CRL$ διάγραμμα ελέγχου	98
3.1.6	Μέσος χρόνος σήματος	100
3.1.7	Σύγκριση των διαγραμμάτων ελέγχου	101
3.1.8	Παράδειγμα	104
3.1.9	Συμπεράσματα	
3.2	Συνθετικό διάγραμμα ελέγχου για τον έλεγχο της διασποράς μιας διεργασίας με το δειγματικό εύρος	105
3.2.1	Εισαγωγή	105
3.2.2	Διαγράμματα R και CRL	105
3.2.3	Το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου $R - CRL$	107
3.2.4	Συγκρίσεις ARL μεταξύ του συνθετικού $R - CRL$ διαγράμματος ελέγχου και άλλων διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς	114
3.2.5	Σχέδια VSI για το συνθετικό R και CRL διάγραμμα ελέγχου	115
3.2.6	Μέσος χρόνος σήματος	116
3.2.7	Σύγκριση των διαγραμμάτων ελέγχου	117
3.2.8	Παράδειγμα	119
3.2.9	Συμπεράσματα	120
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	122

Κατάλογος Πινάκων

1-1	Συσσωρευμένα αθροίσματα για $K = 0.5$	24
1-2	Δεδομένα για την επίδειξη ενός διαγράμματος ελέγχου EWMA	29
2-1	Ζεύγη (L, k) και ARL για $d_d = 1$ και $ARL(0) = 370$ (συνθετικό διάγραμμα $\bar{X} - CRL$)	39
2-2	Τιμές $ARL(d)$ για το συνθετικό $\bar{X} - CRL$ και το Shewhart \bar{X} διάγραμμα ελέγχου $ARL(0) = 200$, $d_d = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$	41
2-3	Τιμές $ARL(d)$ για το συνθετικό $\bar{X} - CRL$ και το Shewhart \bar{X} διάγραμμα ελέγχου $ARL(0) = 370$, $d_d = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$	42
2-4	Τιμές $ARL(d)$ για το συνθετικό $\bar{X} - CRL$ και το Shewhart \bar{X} διάγραμμα ελέγχου $ARL(0) = 500$, $d_d = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$	42
2-5	Βελτιστοποιημένα συνθετικά διαγράμματα ελέγχου $\bar{X} - CRL$ για $ARL(0) = 370$	51
2-6	Εντός ελέγχου τιμές ARL για τα βελτιστοποιημένα συνθετικά διάγραμμα ελέγχου του Πίνακα 2.5 για δεδομένα από διάφορες κατανομές t	54
2-7	(Μέγεθος δείγματος $n = 4$) Εκτός ελέγχου τιμές ARL για τα βελτιστοποιημένα συνθετικά διάγραμμα ελέγχου του Πίνακα 2.5 για διάφορες κατανομές t	55
2-8	(Μέγεθος δείγματος $n = 5$) Εκτός ελέγχου τιμές ARL για τα βελτιστοποιημένα συνθετικά διάγραμμα ελέγχου του Πίνακα 2.5 για διάφορες κατανομές t	56
2-9	(Μέγεθος δείγματος $n = 6$) Εκτός ελέγχου τιμές ARL για τα βελτιστοποιημένα συνθετικά διάγραμμα ελέγχου του Πίνακα 2.5 για διάφορες κατανομές t	57
2-10	Εντός ελέγχου τιμές ARL για τα βελτιστοποιημένα συνθετικά διάγραμμα ελέγχου του Πίνακα 2.5 για δεδομένα από διάφορες κατανομές Γάμμα.	58
2-11	(Μέγεθος δείγματος $n = 4$) Εκτός ελέγχου τιμές ARL για τα βελτιστοποιημένα συνθετικά διάγραμμα ελέγχου του Πίνακα 2.5	59

	για διάφορες κατανομές Γάμμα	
2-12	(Μέγεθος δείγματος $n = 4$) Εκτός ελέγχου τιμές ARL για τα βελτιστοποιημένα συνθετικά διάγραμμα ελέγχου του Πίνακα 2.5 για διάφορες κατανομές Γάμμα	60
2-13	(Μέγεθος δείγματος $n = 6$) Εκτός ελέγχου τιμές ARL για τα βελτιστοποιημένα συνθετικά διάγραμμα ελέγχου του Πίνακα 2.5 για διάφορες κατανομές Γάμμα	61
3-1	Ζεύγη (L, k^+) και ARL για $d_d = 1.4$ (συνθετικό διάγραμμα $S - CRL$)	87
3-2	Βέλτιστοι σχεδιασμοί συνθετικών διαγραμμάτων $S - CRL$ για $d_d > 1$	89
3-3	Βέλτιστοι σχεδιασμοί συνθετικών διαγραμμάτων $S - CRL$ για $d_d < 1$	90
3-4	Συγκρίσεις των ARL διάφορων διαγραμμάτων για την παρακολούθηση της διασποράς όταν $n = 5$ και $d_d = 1.2$	93
3-5	Συγκρίσεις των ARL διάφορων διαγραμμάτων για την παρακολούθηση της διασποράς όταν $n = 5$ και $d_d = 0.8$	94
3-6	Προσομοιωμένα δεδομένα για επίδειξη του $S - CRL$ διαγράμματος ελέγχου	103
3-7	Ζεύγη (L, k^+) και ARL για $d_d = 1.4$ και $ARL_0 = 370$ (συνθετικό διάγραμμα $R - CRL$)	110
3-8	Βέλτιστοι σχεδιασμοί συνθετικών διαγραμμάτων $R - CRL$ για $d_d > 1$	112
3-9	Βέλτιστοι σχεδιασμοί συνθετικών διαγραμμάτων $R - CRL$ για $d_d < 1$	113

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Κατάλογος Σχημάτων

1-1	Τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart	2
1-2	Διάγραμμα ελέγχου Shewhart και προειδοποιητικά όρια	21
1-3	Διάγραμμα ελέγχου CUSUM για τα δεδομένα του Πίνακα 1.1 για $K = 0.5$ και $H = 5$	25
1-4	Διάγραμμα ελέγχου EWMA για τα δεδομένα του Πίνακα 1.2	29
2-1	Συμμορφούμενο μήκος ροής	35
2-2	Γραφική Παράσταση του $ARL(\delta)$ για $ARL(0) = 200$, $d_d = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$	43
2-3	Γραφική Παράσταση του $ARL(\delta)$ για $ARL(0) = 370$, $d_d = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$	43
2-4	Γραφική Παράσταση του $ARL(\delta)$ για $ARL(0) = 500$, $d_d = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$	44
2-5	Καμπύλες ARL για διάφορα διαγράμματα ελέγχου	45
2-6	Καμπύλες ARL με χρήση γνωστών και εκτιμώμενων παραμέτρων	47
2-7	Κατανομές t_n και $N(0, \sigma^2)$ με κοινό μέσο και διακύμανση	52
2-8	Κατανομές $G(a, b)$ και $N(0, \sigma^2)$ με κοινό μέσο και διακύμανση	53
2-9	Η λειτουργία του συνθετικού διαγράμματος $np-CRL$ για ανίχνευση αυξήσεων του αριθμού των μη συμμορφούμενων μονάδων μιας διεργασίας.	66
2-10	Καμπύλες Κανονικοποιημένο ATS	72
2-11	Περιθώριες καμπύλες του κανονικοποιημένου ATS του συνθετικού διαγράμματος $np-CRL$	74
3-1	Συμμορφούμενο μήκος ροής	82
3-2	Η λειτουργία του συνθετικού διαγράμματος S και CRL για τον έλεγχο της διασποράς μιας διεργασίας	85
3-3	Ένα παράδειγμα για το $VSI S$ και το $VSI CRL$ σχέδιο	98
3-4	Το VSI σχέδιο για τα δεδομένα του Πίνακα 3.6	104
3-5	Η λειτουργία του συνθετικού διαγράμματος R και CRL για τον έλεγχο της διασποράς μιας διεργασίας	108

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Κατάλογος Συντομογραφιών

τ.μ.	Τυχαία μεταβλητή
σ.π.π.	Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
α.σ.κ.	Αθροιστική συνάρτηση κατανομής
<i>CL</i>	(Center Line) Κεντρική γραμμή
<i>UCL</i>	(Upper Control Limit) Άνω όριο ελέγχου
<i>LCL</i>	(Lower Control Limit) Κάτω όριο ελέγχου
<i>ARL</i>	(Average Run Length) Μέσο μήκος ροής
<i>ARL_{in}</i>	(In Control Average Run Length) Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής
<i>ARL_{out}</i>	(Out of Control Average Run Length) Εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής
<i>EWMA</i>	(Exponentially Weighted Moving Average) Εκθετικά σταθμισμένος κινούμενος μέσος
<i>CUSUM</i>	(Cumulative Sum) Αθροιστικά ή συσσωρευμένα αθροίσματα
<i>CRL</i>	(Conforming Run Length) Συμμορφούμενο μήκος ροής
<i>ATS</i>	(Average Time to Signal) Μέσος χρόνος σήματος
<i>ATS₀</i>	Εντός ελέγχου μέσος χρόνος σήματος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Διαγράμματα Ελέγχου

1.1 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart

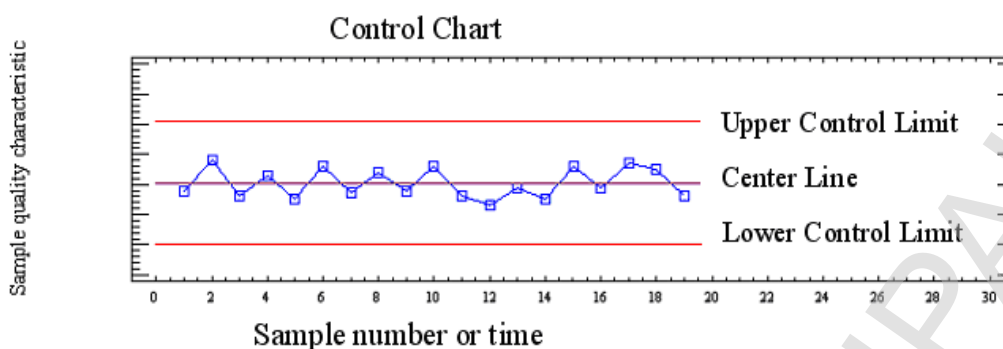
Στις παραγωγικές διεργασίες μας ενδιαφέρει η παρακολούθηση της συμπεριφοράς μιας κρίσιμης ποσότητας ενός (μετρήσιμου) χαρακτηριστικού X των προϊόντων που παράγονται. Η διαδικασία παρακολούθησης της κρίσιμης ποσότητας βασίζεται σε μετρήσεις αυτού του χαρακτηριστικού, όπως προκύπτουν από την επιλογή τυχαίων δειγμάτων $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$. Χρησιμοποιώντας τα τυχαία αυτά δείγματα υπολογίζουμε την τιμή $W_t = g(\mathbf{X}_t)$, $t = 1, 2, \dots$, μιας κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης (τυχαίας μεταβλητής) που εκτιμά (συνήθως χρησιμοποιούμε αμερόληπτη εκτιμήτρια) την ποσότητα που μας ενδιαφέρει (π.χ. μέση τιμή ή διακύμανση της X).

Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε να παρακολουθήσουμε τη συμπεριφορά της μέσης τιμής της διαμέτρου X των κυλίνδρων που παράγει μια μηχανή. Για το σκοπό αυτό επιλέγονται τυχαία δείγματα μεγέθους n ($n \geq 1$) κυλίνδρων από την παραγωγή της μηχανής σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη στατιστική συνάρτηση $W_t = g(\mathbf{X}_t) = (X_{t1} + X_{t2} + \dots + X_{tn})/n$ (η οποία είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του μέσου της X) για την παρακολούθηση της συμπεριφοράς της μέσης τιμής.

Ένα τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart είναι μια γραφική παράσταση με την ακόλουθη μορφή

ΣΧΗΜΑ 1.1

Τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart



όπου στο Σχήμα 1.1, εκτός από τις παρατηρούμενες τιμές W_t , που έχουν απεικονιστεί με σημεία τα οποία έχουν συνδεθεί με μια τεθλασμένη γραμμή, έχουν σχεδιαστεί και άλλες τρεις γραμμές. Η κεντρική γραμμή (*center line*, *CL*) παριστάνει συνήθως τη μέση τιμή (*mean value*) της W όπως προκύπτει από τη λειτουργία μιας εντός ελέγχου διεργασίας, δηλαδή μιας διεργασίας που λειτουργεί μόνο με την παρουσία φυσικής μεταβλητότητας. Οι δύο άλλες γραμμές που εμφανίζονται στο παραπάνω διάγραμμα ονομάζονται άνω και κάτω όριο ελέγχου του διαγράμματος. Όσο οι τιμές της W βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου και η συμπεριφορά τους είναι “τυχαία” μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου. Αν όμως κάποιο σημείο βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου λέμε ότι υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου και πρέπει να προχωρήσουμε σε έρευνα για να ανακαλύψουμε τις ειδικές αιτίες μεταβλητότητας που είναι υπεύθυνες για αυτή τη συμπεριφορά και αν κριθεί απαραίτητο να προβούμε σε διορθωτικές ενέργειες. Ωστόσο, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι ακόμη και στην περίπτωση που όλα τα σημεία του διαγράμματος βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου αλλά συμπεριφέρονται με ένα συστηματικό ή μη τυχαίο τρόπο τότε και αυτό αποτελεί ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου.

Στο ακόλουθο πλαίσιο δίνεται ένα γενικό μοντέλο, το μοντέλο ορίων σίγμα (*sigma limits model*), για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart

Μοντέλο ορίων σίγμα	
UCL	$= m_w + LS_w$
$Center\ Line$	$= m_w$
LCL	$= m_w - LS_w$

Οι ποσότητες m_w και s_w δηλώνουν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της στατιστικής συνάρτησης W που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου (συνήθως γίνεται η υπόθεση ότι ακολουθεί κανονική κατανομή). Η ποσότητα L δηλώνει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Συνήθως $L=3$, οπότε ομιλούμε για διαγράμματα ελέγχου Shewhart με $3s$ όρια ελέγχου.

Στα διαγράμματα ελέγχου Shewhart διακρίνουμε δύο μεγάλες κατηγορίες ανάλογα με το αν το χαρακτηριστικό X είναι συνεχής ή διακριτή τυχαία μεταβλητή. Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής με μέση τιμή m και διακύμανση s^2 , τότε υπάρχουν διαγράμματα ελέγχου Shewhart για την παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διασποράς της X . Στην περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή υπάρχουν διαγράμματα ελέγχου Shewhart για την παρακολούθηση του ποσοστού (και του αριθμού) των ελαττωματικών προϊόντων που αποδίδει η παραγωγική διεργασία, καθώς επίσης και για τον αριθμό (και το μέσο αριθμό) των ελαττωμάτων (ατελειών) σε μια μονάδα ελέγχου (Αντζουλάκος (2003), Δαμιανού (1996), Καφφές (1996)).

Το πιο απλό και πλέον διαδεδομένο διάγραμμα ελέγχου Shewhart είναι το διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της μέσης τιμής ενός συνεχούς χαρακτηριστικού X το οποίο θα αναπτύξουμε εν συντομία στην επόμενη παράγραφο μέσω ενός παραδείγματος.

1.2 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart για μεταβλητές

Στην παρούσα παράγραφο θα αναπτύξουμε την κατασκευή διαγράμματος τύπου Shewhart για την παρακολούθηση της συμπεριφοράς της μέσης τιμής m ενός συνεχούς ποιοτικού χαρακτηριστικού.

1.2.1 Διαγράμματα ελέγχου για την μέση τιμή

1.2.1.1 Διαγράμματα ελέγχου φάσης II (μ, σ γνωστά)

Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού X ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(m, s^2)$. Αν $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ είναι ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από την X τότε είναι γνωστό ότι ο δειγματικός μέσος \bar{X}_i ακολουθεί την κατανομή $N(m, s^2/n)$, και είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της μέσης τιμής m του ποιοτικού χαρακτηριστικού X . Επομένως

χρησιμοποιώντας ένα διάγραμμα ελέγχου στο οποίο θα απεικονίζεται η τιμή του δειγματικού μέσου $W_i = \bar{X}_i$ στα δείγματα που επιλέγουμε από την παραγωγή με

$$LCL = m_{W_i} - 3s_{W_i} = m - 3 \frac{S}{\sqrt{n}}, \quad CL = m_{W_i} = m, \quad UCL = m_{W_i} + 3s_{W_i} = m + 3 \frac{S}{\sqrt{n}}$$

και με την υπόθεση ότι η διακύμανση (ή γενικότερα η διασπορά) του χαρακτηριστικού X σε όλη τη διαδικασία παραμένει σταθερή μπορούμε να πούμε τα εξής: (α) εφόσον τα σημεία του διαγράμματος βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου θεωρούμε ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου οπότε η μέση τιμή m του χαρακτηριστικού X δεν έχει αλλάξει (μετατοπιστεί) και επομένως το 99.73% των σημείων του διαγράμματος ελέγχου θα βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου, και (β) στην περίπτωση που ένα σημείο του διαγράμματος βρεθεί εκτός των ορίων του διαγράμματος και επειδή η πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου είναι πολύ μικρή (0.0027), τότε υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου λόγω μετατόπισης της μέσης τιμής του χαρακτηριστικού X .

Τα $3s$ όρια του διαγράμματος ελέγχου για τη μέση τιμή του χαρακτηριστικού X συνοψίζονται στο ακόλουθο πλαίσιο

Πλαίσιο 1 (\bar{X} διάγραμμα)	
Phase II control limits (3σ)	
UCL	$= m + As$
$Center Line$	$= m$
LCL	$= m - As$

όπου

$$A = \frac{3}{\sqrt{n}}$$

1.2.1.2 Διαγράμματα ελέγχου φάσης I (μ, σ άγνωστα)

Στην πράξη οι ποσότητες m , s είναι άγνωστες οπότε πρέπει να εκτιμηθούν. Για το σκοπό αυτό παίρνουμε m ανεξάρτητα προκαταρκτικά τυχαία δείγματα μεγέθους n το καθένα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $1 \leq i \leq m$, για να εκτιμήσουμε τις ποσότητες m και s , υποθέτοντας ότι η επιλογή των προκαταρκτικών δειγμάτων έγινε όταν η διεργασία ήταν εντός ελέγχου (τα m και s σταθερά καθ' όλη τη διάρκεια της δειγματοληψίας). Οι εκτιμήσεις \hat{m} και \hat{s} προκύπτουν συνήθως από 20 έως 25 προκαταρκτικά δείγματα μεγέθους 4 έως 6.

Στην ανάλυση που ακολουθεί υποθέτουμε ότι το χαρακτηριστικό X ακολουθεί κατανομή $N(m, s^2)$ (m, s άγνωστα) και ότι έχουμε m το πλήθος ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους n το καθένα.

- **Εκτίμηση του μ**

Έστω $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$ οι δειγματικοί μέσοι των m δειγμάτων και ας θέσουμε

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m}{m} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}}{mn}$$

Η ποσότητα $\bar{\bar{X}}$ ακολουθεί κατανομή $N(m, s^2 / nm)$ και χρησιμοποιείται ως εκτίμηση της ποσότητας m (αμερόληπτη και συνεπής εκτιμήτρια του m), δηλαδή

$$\hat{m} = \bar{\bar{X}}$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι

$$E(\bar{\bar{X}}) = m, \quad V(\bar{\bar{X}}) = s^2 / nm$$

ανεξάρτητα από την κατανομή του χαρακτηριστικού X .

- **Εκτίμηση του σ (Μέθοδος R)**

Έστω R_1, R_2, \dots, R_m τα εύρη των m δειγμάτων, δηλαδή

$$R_i = X_{i(n)} - X_{i(1)}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Μπορεί να δειχθεί ότι

$$m_{R_i} = E(R_i) = s d_2$$

όπου d_2 είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος n . Θέτοντας

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m}$$

έχουμε ότι $E(\bar{R}) = s d_2$, οπότε η ποσότητα \bar{R} / d_2 είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της ποσότητας s , και χρησιμοποιείται ως εκτίμηση της ποσότητας s , δηλαδή

$$\hat{s} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

- **Εκτίμηση του σ (Μέθοδος S)**

Έστω S_1, S_2, \dots, S_m οι ποσότητες που ορίζονται από τη σχέση

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Αν και η ποσότητα S_i^2 είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της διακύμανσης S^2 , η ποσότητα $S_i = \sqrt{S_i^2}$ δεν αποτελεί αμερόληπτη εκτιμήτρια της τυπικής απόκλισης S . Μπορεί ναδειχθεί ότι

$$m_{S_i} = E(S_i) = S c_4$$

όπου c_4 είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος n . Θέτοντας

$$\bar{S} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_m}{m}$$

έχουμε ότι $E(\bar{S}) = S c_4$, οπότε η ποσότητα \bar{S}/c_4 είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της ποσότητας S , και χρησιμοποιείται ως εκτίμηση της ποσότητας S , δηλαδή

$$\hat{S} = \frac{\bar{S}}{c_4}$$

- **Εκτίμηση του σ (Μέθοδος S^2)**

Έστω $S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2$ οι ποσότητες που ορίζονται από τη σχέση

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, \quad 1 \leq i \leq m$$

για τις οποίες είναι γνωστό ότι

$$m_{S_i^2} = E(S_i^2) = S^2.$$

Η ποσότητα $\sqrt{S^2}$ όπου

$$\overline{S^2} = \frac{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_m^2}{m}$$

αν και δεν είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του S χρησιμοποιείται αρκετές φορές (λόγω του ότι έχει μικρότερη διακύμανση από την \bar{S}/c_4) ως εκτίμηση της ποσότητας S , δηλαδή

$$\hat{S} = \sqrt{\overline{S^2}}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση του m την ποσότητα $\hat{m} = \bar{X}$ και ως εκτίμηση του S την ποσότητα $\hat{S} = \bar{R}/d_2$, το Πλαίσιο 1 παίρνει την ακόλουθη μορφή

Πλαίσιο 2 (\bar{X} διάγραμμα)
Phase I control limits (3σ)
R Method
$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R}$
$Center\ Line = \bar{\bar{X}}$
$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R}$

όπου η ποσότητα A_2 είναι ίση με $A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}$.

Χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση του m την ποσότητα $\hat{m} = \bar{\bar{X}}$ και ως εκτίμηση του S την ποσότητα $\hat{S} = \bar{S}/c_4$ τότε το Πλαίσιο 1 παίρνει την ακόλουθη μορφή

Πλαίσιο 3 (\bar{X} διάγραμμα)
Phase I control limits (3σ)
S Method
$UCL = \bar{\bar{X}} + A_3\bar{S}$
$Center\ Line = \bar{\bar{X}}$
$LCL = \bar{\bar{X}} - A_3\bar{S}$

όπου $A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}}$.

Χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση του m την ποσότητα $\hat{m} = \bar{\bar{X}}$ και ως εκτίμηση του S την ποσότητα $\hat{S} = \sqrt{\bar{S}^2}$, το Πλαίσιο 1 παίρνει την ακόλουθη μορφή

Πλαίσιο 4 (\bar{X} διάγραμμα)
Phase I control limits (3σ)
S² Method
$UCL = \bar{\bar{X}} + A\sqrt{\bar{S}^2}$
$Center\ Line = \bar{\bar{X}}$
$LCL = \bar{\bar{X}} - A\sqrt{\bar{S}^2}$

1.2.2 Διαγράμματα ελέγχου για τη διασπορά

1.2.2.1 Διαγράμματα ελέγχου φάσης II (σ γνωστό)

Στην προηγούμενη παράγραφο αναφέραμε ότι στην περίπτωση που ένα σημείο του διαγράμματος ελέγχου για τη μέση τιμή του χαρακτηριστικού X βρεθεί εκτός των ορίων του διαγράμματος τότε υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου με την προϋπόθεση ότι η διασπορά του ποιοτικού χαρακτηριστικού X είχε παραμείνει σταθερή σε όλη τη διάρκεια της διαδικασίας. Στην παρούσα παράγραφο θα αναπτύξουμε την κατασκευή διαγραμμάτων ελέγχου τύπου *Shewhart* για την παρακολούθηση της συμπεριφοράς της διασποράς ενός συνεχούς χαρακτηριστικού X .

Στην ανάλυση που ακολουθεί υποθέτουμε ότι το χαρακτηριστικό X ακολουθεί κατανομή $N(m, s^2)$ και ότι έχουμε στη διάθεσή μας ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από τη X τα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $i \geq 1$, μεγέθους n το καθένα.

- **R διάγραμμα ελέγχου**

Έστω $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από τη X και ας θέσουμε $W_i = R_i = X_{i(n)} - X_{i(1)}$. Είναι γνωστό ότι

$$m_{R_i} = E(R_i) = s d_2, \quad s_{R_i} = \sqrt{V(R_i)} = s d_3$$

όπου οι ποσότητες d_2 και d_3 εξαρτώνται μόνο από το μέγεθος n του δείγματος.

Συνεπώς ένα διάγραμμα ελέγχου για τη διασπορά του ποιοτικού χαρακτηριστικού X μπορεί να βασιστεί σε ένα διάγραμμα όπου η απεικονιζόμενη ποσότητα θα είναι το εύρος R_i των δειγμάτων που ως γνωστό είναι ένα μέτρο διασποράς της X . Το μοντέλο με όρια $3s$ θα έχει τη μορφή

$$LCL = m_{R_i} - 3s_{R_i} = (d_2 - 3d_3)s, \quad CL = m_{R_i} = d_2s, \quad UCL = m_{R_i} + 3s_{R_i} = (d_2 + 3d_3)s.$$

Θέτοντας $D_1 = d_2 - 3d_3$, $D_2 = d_2 + 3d_3$ προκύπτει το ακόλουθο πλαίσιο

Πλαίσιο 5 (R διάγραμμα)	
Phase II control limits (3σ)	
UCL	$= D_2s$
Center Line	$= d_2s$
LCL	$= D_1s$

Επειδή $D_1 < 0$ για $n \leq 6$, σε αυτές τις περιπτώσεις θέτουμε $D_1 = 0$.

- **S διάγραμμα ελέγχου**

Έστω $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από τη X και ας θέσουμε

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$m_{S_i} = E(S_i) = s c_4, \quad s_{S_i} = \sqrt{V(S_i)} = s \sqrt{1 - c_4^2}$$

Συνεπώς ένα διάγραμμα ελέγχου για τη διασπορά του χαρακτηριστικού X μπορεί να βασιστεί σε ένα διάγραμμα όπου η απεικονιζόμενη ποσότητα θα είναι οι δειγματικές τυπικές αποκλίσεις S_i που είναι το πιο σύνηθες μέτρο διασποράς της X . Το μοντέλο με όρια $3s$ θα έχει τη μορφή

$$LCL = m_{S_i} - 3s_{S_i} = (c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2})s,$$

$$CL = m_{S_i} = c_4s, \quad UCL = m_{S_i} + 3s_{S_i} = (c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2})s.$$

Θέτοντας

$$B_5 = c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2}, \quad B_6 = c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2}$$

προκύπτει το ακόλουθο πλαίσιο

Πλαίσιο 6 (S διάγραμμα)	
Phase II control limits (3σ)	
UCL	$= B_6s$
$Center Line$	$= c_4s$
LCL	$= B_5s$

Επειδή $B_5 < 0$ για $n \leq 5$, σε αυτές τις περιπτώσεις θέτουμε $B_5 = 0$.

- **S² διάγραμμα ελέγχου**

Έστω $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ είναι ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από τη X ας θέσουμε

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Είναι γνωστό ότι

$$E(S_i^2) = s^2 \quad \text{και} \quad \frac{(n-1)S_i^2}{s^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

Επιπρόσθετα

$$P\left(c_{n-1;1-a/2}^2 \leq \frac{(n-1)S_i^2}{S^2} \leq c_{n-1;a/2}^2\right) = 1 - a$$

οπότε

$$P\left(\frac{S^2}{n-1} c_{n-1;1-a/2}^2 \leq S_i^2 \leq \frac{S^2}{n-1} c_{n-1;a/2}^2\right) = 1 - a.$$

Συνεπώς ένα διάγραμμα ελέγχου για τη διασπορά του χαρακτηριστικού X μπορεί να βασιστεί σε ένα διάγραμμα όπου η απεικονιζόμενη ποσότητα θα είναι η δειγματική διακύμανση S_i^2 που είναι μέτρο διασποράς της X , το οποίο περιγράφεται στο ακόλουθο πλαίσιο

Πλαίσιο 7 (S^2 διάγραμμα)	
Phase II control limits ($a/2$)	
UCL	$= \frac{S^2}{n-1} c_{n-1;a/2}^2$
$Center\ Line$	$= S^2$
LCL	$= \frac{S^2}{n-1} c_{n-1;1-a/2}^2$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι τα παραπάνω όρια ελέγχου είναι όρια πιθανότητας (*probability limits*) αφού δεν συνηθίζεται η ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου ορίων $3S$ για την ποσότητα S^2 .

1.2.2.2 Διαγράμματα ελέγχου φάσης I (σ άγνωστο)

Στην πράξη η ποσότητα S είναι άγνωστη οπότε πρέπει να εκτιμηθεί παίρνοντας προκαταρκτικά ανεξάρτητα τυχαία δείγματα.

Στην ανάλυση που ακολουθεί υποθέτουμε ότι το χαρακτηριστικό X ακολουθεί κατανομή $N(m, S^2)$ και ότι έχουμε m το πλήθος ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από τη X τα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $1 \leq i \leq m$, μεγέθους n το καθένα.

- **R διάγραμμα ελέγχου**

Χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση του S την ποσότητα $\hat{S} = \bar{R} / d_2$ τότε το Πλαίσιο 5 παίρνει την ακόλουθη μορφή

Πλαίσιο 8 (R διάγραμμα)	
Phase I control limits (3σ)	
UCL	$= D_4 \bar{R}$
<i>Center Line</i>	$= \bar{R}$
LCL	$= D_3 \bar{R}$

όπου

$$D_3 = 1 - 3 \frac{d_3}{d_2}, \quad D_4 = 1 + 3 \frac{d_3}{d_2}$$

Επειδή $D_3 < 0$ για $n \leq 6$, σε αυτές τις περιπτώσεις θέτουμε $D_3 = 0$.

- **S διάγραμμα ελέγχου**

Χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση του S την ποσότητα $\hat{S} = \bar{S} / c_4$ τότε το Πλαίσιο 6 παίρνει την ακόλουθη μορφή

Πλαίσιο 9 (S διάγραμμα)	
Phase I control limits (3σ)	
UCL	$= B_4 \bar{S}$
<i>Center Line</i>	$= \bar{S}$
LCL	$= B_3 \bar{S}$

όπου

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}, \quad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}.$$

Επειδή $B_3 < 0$ για $n \leq 5$, σε αυτές τις περιπτώσεις θέτουμε $B_3 = 0$.

- **S² διάγραμμα ελέγχου**

Χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση του S^2 την ποσότητα $\hat{S}^2 = \bar{S}^2$ το Πλαίσιο 7 παίρνει την ακόλουθη μορφή

Πλαίσιο 10 (S^2 διάγραμμα)	
Phase I control limits ($\alpha/2$)	
UCL	$= \frac{\overline{S^2}}{n-1} c_{n-1;\alpha/2}^2$
$Center\ Line$	$= \overline{S^2}$
LCL	$= \frac{\overline{S^2}}{n-1} c_{n-1;1-\alpha/2}^2$

Σημειώσουμε πάλι ότι τα παραπάνω όρια ελέγχου είναι όρια πιθανότητας (*probability limits*).

Κλείνοντας την παρούσα παράγραφο σημειώνουμε ότι σύμφωνα με όσα έχουν προηγηθεί μπορούμε εύκολα να αναπτύξουμε R και S διαγράμματα ελέγχου Φάσης I με όρια πιθανότητας $\alpha/2$.

1.2.3 Διαγράμματα ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις

Σε ορισμένες περιπτώσεις το μέγεθος του δείγματος είναι ίσο με 1 (αυτόματη επιθεώρηση παραγόμενων προϊόντων, μικρός ρυθμός παραγωγής, κτλ.). Σε αυτή την περίπτωση ομιλούμε για διαγράμματα ελέγχου για μεμονωμένες ή ατομικές παρατηρήσεις (*individual observations*). Οι μέθοδοι που αναπτύξαμε στις προηγούμενες παραγράφους χρειάζονται τροποποίηση. Σε ότι ακολουθήσει στην παρούσα παράγραφο υποθέτουμε ότι το χαρακτηριστικό X ακολουθεί κατανομή $N(m, S^2)$ και ότι έχουμε στη διάθεσή μας m ανεξάρτητες παρατηρήσεις X_1, X_2, \dots, X_m από την X για την ανάλυση Φάσης I .

1.2.3.1 Διαγράμματα ελέγχου φάσης II (μ, σ γνωστά)

Σε αυτή την περίπτωση το Πλαίσιο 1 παίρνει τη μορφή

Πλαίσιο 11 (X διάγραμμα)	
Phase II control limits (3σ)	
UCL	$= m + 3s$
$Center\ Line$	$= m$
LCL	$= m - 3s$

αφού $n=1$, και ομιλούμε για X διάγραμμα ελέγχου αφού στο διάγραμμα απεικονίζονται οι μεμονωμένες παρατηρήσεις X_i ($i \geq 1$).

Για τη συμπεριφορά της διασποράς του χαρακτηριστικού X το αντίστοιχο R διάγραμμα ελέγχου δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί επειδή για $n=1$ δεν έχει νόημα η ποσότητα R . Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε το κινούμενο εύρος (*moving range*) των μεμονωμένων παρατηρήσεων που ορίζεται από τη σχέση

$$MR_i = |X_i - X_{i-1}|, \quad 2 \leq i \leq m.$$

Προφανώς, για το κινούμενο εύρος MR_i ισχύει ότι

$$m_{MR_i} = E(MR_i) = s d_2, \quad s_{MR_i} = \sqrt{V(MR_i)} = s d_3.$$

Πρέπει να προσεχθεί ότι οι πιο πάνω σταθερές d_2 , d_3 υπολογίζονται για $n=2$. Συνεπώς ένα διάγραμμα ελέγχου για τη διασπορά του χαρακτηριστικού X μπορεί να βασιστεί σε ένα διάγραμμα όπου η απεικονιζόμενη ποσότητα θα είναι το κινούμενο εύρος MR_i των παρατηρήσεων. Το μοντέλο με όρια $3s$ θα έχει τη μορφή

$$LCL = m_{MR_i} - 3s_{MR_i} = (d_2 - 3d_3)s, \quad CL = m_{MR_i} = d_2s, \quad UCL = m_{MR_i} + 3s_{MR_i} = (d_2 + 3d_3)s.$$

Για $D_1 = d_2 - 3d_3$, $D_2 = d_2 + 3d_3$ προκύπτει το ακόλουθο πλαίσιο

Πλαίσιο 12 (<i>MR</i> διάγραμμα)	
Phase II control limits (3σ)	
<i>UCL</i>	= D_2s
<i>Center Line</i>	= d_2s
<i>LCL</i>	= D_1s

1.2.3.2 Διαγράμματα ελέγχου φάσης I (μ, σ άγνωστα)

Στην περίπτωση που οι ποσότητες m και s είναι άγνωστες πρέπει να εκτιμηθούν. Η εκτίμηση του μέσου δίνεται από τη σχέση

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{m}.$$

Η ποσότητα \bar{X} ακολουθεί κατανομή $N(m, s^2/m)$ και χρησιμοποιείται ως εκτίμηση της ποσότητας m (αμερόληπτη και συνεπής εκτιμήτρια του m), δηλαδή

$$\hat{m} = \bar{X}$$

Για την εκτίμηση του s , θέτοντας

$$\overline{MR} = \frac{MR_2 + MR_3 + \dots + MR_m}{m-1}$$

έχουμε ότι $E(\overline{MR}) = S d_2$, οπότε η ποσότητα \overline{MR}/d_2 είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της ποσότητας S , και χρησιμοποιείται ως εκτίμηση της ποσότητας S , δηλαδή

$$\hat{S} = \frac{\overline{MR}}{d_2}$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εκτιμήσεις το Πλαίσιο 11 παίρνει την ακόλουθη μορφή

Πλαίσιο 13 (X διάγραμμα)	
Phase I control limits (3σ)	
UCL	$= \bar{X} + 3 \frac{\overline{MR}}{d_2}$
$Center\ Line$	$= \bar{X}$
LCL	$= \bar{X} - 3 \frac{\overline{MR}}{d_2}$

ενώ το Πλαίσιο 12, για $D_3 = 1 - 3 \frac{d_3}{d_2}$, $D_4 = 1 + 3 \frac{d_3}{d_2}$ παίρνει τη μορφή

Πλαίσιο 14 (MR διάγραμμα)	
Phase I control limits (3σ)	
UCL	$= D_4 \overline{MR}$
$Center\ Line$	$= \overline{MR}$
LCL	$= D_3 \overline{MR}$

Πρέπει να προσεχθεί ότι οι πιο πάνω σταθερές D_3, D_4 υπολογίζονται για $n = 2$.

1.3 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart για ιδιότητες

Σε αρκετές περιπτώσεις ταξινομούμε ένα προϊόν σαν ελαττωματικό ή μη συμμορφούμενο (*defective or nonconforming*) αν τουλάχιστον ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό του έχει τιμή η οποία βρίσκεται εκτός των ορίων προδιαγραφών. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το προϊόν παρουσιάζει τουλάχιστον ένα ελάττωμα ή ατέλεια (*defect or nonconformity*).

Ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων μιας παραγωγικής διεργασίας, όπως και ο αριθμός των ελαττωμάτων ενός προϊόντος, είναι ποιοτικά χαρακτηριστικά που περιγράφονται με διακριτές τυχαίες μεταβλητές οι οποίες στα πλαίσια του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας ονομάζονται ιδιότητες (*attributes*).

Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιάσουμε τρία βασικά είδη διαγραμμάτων ελέγχου (*attribute control charts*) που χρησιμοποιούνται σε αυτές τις περιπτώσεις. Το πρώτο διάγραμμα αφορά το ποσοστό p των ελαττωματικών προϊόντων μιας παραγωγικής διεργασίας, γνωστό ως p διάγραμμα. Το δεύτερο διάγραμμα ελέγχου αφορά το συνολικό αριθμό των ελαττωμάτων σε μια μονάδα επιθεώρησης (*inspection unit*) γνωστό ως c διάγραμμα. Το τρίτο διάγραμμα αφορά το μέσο αριθμό των ελαττωμάτων ανά μονάδα επιθεώρησης γνωστό ως u διάγραμμα.

Ο όρος μονάδα επιθεώρησης δεν σημαίνει απαραίτητα ένα προϊόν. Η μονάδα επιθεώρησης ή απλά μονάδα μπορεί να είναι είτε το ίδιο το προϊόν (π.χ. ένα τόπι ύφασμα), είτε τμήμα του προϊόντος (π.χ. 2 τρέχοντα μέτρα από το τόπι), είτε ένα σύνολο προϊόντων (π.χ. 10 τόπια ύφασμα). Επίσης τα ελαττώματα που παρουσιάζει μια μονάδα επιθεώρησης δεν είναι αναγκαστικά του ίδιου τύπου (π.χ. σε ένα Η/Υ ελάττωμα μπορεί χαρακτηριστεί η απουσία κάποιων εξαρτημάτων, αστοχίες συγκολλήσεων, ελαττωματική RAM, απουσία αυτοκόλλητου του σειριακού αριθμού, κτλ.).

1.3.1 Διαγράμματα ελέγχου για το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων

Στην παρούσα παράγραφο θα αναπτύξουμε την κατασκευή διαγράμματος τύπου *Shewhart* για την παρακολούθηση της συμπεριφοράς του ποσοστού p των ελαττωματικών ή μη συμμορφούμενων προϊόντων μιας παραγωγικής διεργασίας. Με τον όρο ποσοστό ελαττωματικών προϊόντων ορίζουμε το πηλίκο του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων δια του συνολικού αριθμού των παραγόμενων προϊόντων.

1.3.1.1 Διαγράμματα ελέγχου φάσης II (p γνωστό)

Η κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου για το ποσοστό p των ελαττωματικών προϊόντων μιας διεργασίας βασίζεται στη Διωνυμική κατανομή. Ας υποθέσουμε ότι το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων είναι γνωστό και ίσο με p και ότι από την παραγωγή επιλέγουμε ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους n προϊόντων το καθένα. Ας συμβολίσουμε με X_{ij} , $i \geq 1$, $1 \leq j \leq n$, την τυχαία μεταβλητή με τιμές 1 και 0 ανάλογα με το

αν το αντίστοιχο προϊόν (i, j) είναι ελαττωματικό ή όχι. Για την τυχαία μεταβλητή X_{ij} έχουμε ότι $X_{ij} \sim B(1, p)$, ενώ για την τυχαία μεταβλητή $X_i = X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}$ που δηλώνει τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων στο i δείγμα έχουμε ότι $X_i \sim B(n, p)$.

Αν $X \sim B(n, p)$ είναι γνωστό ότι

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} I_A(x), \quad A = \{0, 1, \dots, n\}$$

και $m_x = np$, $s_x^2 = np(1-p)$.

Για την τυχαία μεταβλητή

$$W_i = p_i = \frac{X_i}{n}, \quad i \geq 1$$

που δηλώνει το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων στο i δείγμα ισχύει ότι

$$m_{w_i} = p, \quad s_{w_i}^2 = \frac{p(1-p)}{n}, \quad i \geq 1.$$

Έτσι μπορούμε να αναπτύξουμε ένα διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων στο οποίο θα απεικονίζεται η τιμή της $W_i = p_i = X_i/n$ στα διάφορα δείγματα που επιλέγουμε από την παραγωγή. Τα όρια του διαγράμματος ελέγχου συνοψίζονται στο ακόλουθο πλαίσιο

Πλαίσιο 15 (p διάγραμμα)	
Phase II control limits (3σ)	
UCL	$= p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
$Center Line$	$= p$
LCL	$= p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

Η κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου για την παρακολούθηση του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της τυχαίας μεταβλητής X_i . Στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζεται η τιμή της $X_i (= W_i)$ στα διάφορα δείγματα που επιλέγουμε από την παραγωγή και τα όρια του διαγράμματος ελέγχου δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο

Πλαίσιο 16 (np διάγραμμα)	
Phase II control limits (3σ)	
UCL	$= np + 3\sqrt{np(1-p)}$
$Center\ Line$	$= np$
LCL	$= np - 3\sqrt{np(1-p)}$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι στην πράξη αρκεί να κατασκευάσουμε ένα από τα δύο παραπάνω διαγράμματα αφού είναι “ισοδύναμα”.

1.3.1.2 Διαγράμματα ελέγχου φάσης I (p άγνωστο)

Όταν το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων της διεργασίας είναι άγνωστο πρέπει να εκτιμηθεί από τις πληροφορίες που θα μας δώσουν m ανεξάρτητα προκαταρκτικά δείγματα μεγέθους n το καθένα, έστω τα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $1 \leq i \leq m$. Θέτοντας

$$p_i = \frac{X_i}{n} = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}}{n}, \quad 1 \leq i \leq m$$

$$\bar{P} = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_m}{m} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{mn} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}}{mn}$$

έχουμε ότι $E(\bar{P}) = p$ αφού $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} \sim B(nm, p)$. Η ποσότητα \bar{P} χρησιμοποιείται ως εκτίμηση της ποσότητας p , δηλαδή $\hat{p} = \bar{P}$. Συνεπώς το Πλαίσιο 15 παίρνει τη μορφή

Πλαίσιο 17 (p διάγραμμα)	
Phase I control limits (3σ)	
UCL	$= \bar{P} + 3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}$
$Center\ Line$	$= \bar{P}$
LCL	$= \bar{P} - 3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}$

ενώ το Πλαίσιο 16 παίρνει τη μορφή

Πλαίσιο 18 (np διάγραμμα)	
Phase I control limits (3σ)	
UCL	$= n\bar{P} + 3\sqrt{n\bar{P}(1-\bar{P})}$
$Center\ Line$	$= n\bar{P}$
LCL	$= n\bar{P} - 3\sqrt{n\bar{P}(1-\bar{P})}$

1.3.2 Διαγράμματα ελέγχου για τον αριθμό και το μέσο αριθμό των ελαττωμάτων

Στην παρούσα παράγραφο θα αναπτύξουμε την κατασκευή διαγράμματος τύπου Shewhart για τον (συνολικό) αριθμό των ελαττωμάτων σε μια μονάδα επιθεώρησης και για το μέσο αριθμό των ελαττωμάτων ανά μονάδα επιθεώρησης. Η βασική υπόθεση που θα κάνουμε είναι ότι ο (συνολικός) αριθμός των ελαττωμάτων (πιθανόν διαφορετικών τύπων) σε μια μονάδα επιθεώρησης ακολουθεί την κατανομή *Poisson*. Σύμφωνα με αυτή την υπόθεση θα πρέπει η πιθανότητα εμφάνισης ελαττώματος σε οποιοδήποτε σημείο (περιοχή) μιας μονάδας να είναι μικρή και σταθερή και φυσικά ο αριθμός των ελαττωμάτων είναι θεωρητικά μη πεπερασμένος αριθμός. Επιπλέον απαιτείται οι μονάδες επιθεώρησης στα δείγματα να είναι ίδιες.

1.3.2.1 Διαγράμματα ελέγχου φάσης II (c γνωστό)

Ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός X των ελαττωμάτων που εμφανίζονται σε μια μονάδα επιθεώρησης ακολουθεί την κατανομή *Poisson* με παράμετρο c (συμβολικά $X \sim P(c)$), δηλαδή

$$P(X = x) = e^{-c} \frac{c^x}{x!} I_A(x), \quad \text{όπου } A = \{0,1,\dots\} \text{ και } I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Είναι γνωστό ότι $m_X = S_X^2 = c$. Συνεπώς μπορούμε να αναπτύξουμε ένα διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του αριθμού των ελαττωμάτων των μονάδων επιθεώρησης στο οποίο θα απεικονίζεται η τιμή της $W_i = X_i$ στις διάφορες μονάδες επιθεώρησης που επιλέγουμε από την παραγωγή. Τα όρια του διαγράμματος ελέγχου συνοψίζονται στο ακόλουθο πλαίσιο

Πλαίσιο 19 (c διάγραμμα)	
Phase II control limits (3σ)	
UCL	$= c + 3\sqrt{c}$
$Center\ Line$	$= c$
LCL	$= c - 3\sqrt{c}$

Έστω τώρα ότι από την παραγωγή επιλέγουμε ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους n μονάδων το καθένα. Ας συμβολίσουμε με X_{ij} , $i \geq 1$, $1 \leq j \leq n$, την τυχαία μεταβλητή που δηλώνει τον αριθμό των ελαττωμάτων της αντίστοιχης μονάδας επιθεώρησης (i, j) . Για την τυχαία μεταβλητή X_{ij} έχουμε ότι $X_{ij} \sim P(c)$, ενώ για την τυχαία μεταβλητή $X_i = X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}$ που δηλώνει το συνολικό αριθμό των ελαττωμάτων στο i δείγμα έχουμε ότι $X_i \sim P(nc)$.

Για την τυχαία μεταβλητή $U_i = X_i / n$ που δηλώνει το μέσο αριθμό των ελαττωμάτων ανά μονάδα επιθεώρησης στο i δείγμα έχουμε ότι

$$m_{U_i} = c, \quad s_{U_i}^2 = \frac{c}{n}, \quad i \geq 1.$$

Συνεπώς μπορούμε να αναπτύξουμε ένα διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του μέσου αριθμού των ελαττωμάτων ανά μονάδα επιθεώρησης σε κάθε δείγμα στο οποίο θα απεικονίζεται η τιμή της $U_i = X_i / n$ στα διάφορα δείγματα που επιλέγουμε από την παραγωγή. Τα όρια του διαγράμματος ελέγχου συνοψίζονται στο ακόλουθο πλαίσιο

Πλαίσιο 20 (u διάγραμμα)	
Phase II control limits (3σ)	
UCL	$= c + 3\sqrt{\frac{c}{n}}$
$Center\ Line$	$= c$
LCL	$= c - 3\sqrt{\frac{c}{n}}$

Στα Πλαίσια 19 και 20, αν το LCL είναι αρνητικό το θέτουμε ίσο με 0. Βέβαια στο Πλαίσιο 20 αυτό μπορεί να αποφευχθεί αυξάνοντας το μέγεθος του δείγματος.

1.3.2.2 Διαγράμματα ελέγχου φάσης I (c άγνωστο)

Σχετικά με το c διάγραμμα, όταν η παράμετρος c της κατανομής Poisson είναι άγνωστη θα πρέπει να εκτιμηθεί από τις πληροφορίες που θα μας δώσουν m προκαταρκτικές μονάδες επιθεώρησης. Ας συμβολίσουμε με X_i τον αριθμό των ελαττωμάτων της i μονάδος επιθεώρησης, $1 \leq i \leq m$. Θέτοντας

$$\bar{C} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{m}, \quad 1 \leq i \leq m$$

έχουμε ότι $E(\bar{C}) = c$. Η ποσότητα \bar{C} χρησιμοποιείται ως εκτίμηση της ποσότητας c , δηλαδή

$$\hat{c} = \bar{C}.$$

Συνεπώς το Πλαίσιο 19 παίρνει τη μορφή

Πλαίσιο 21 (c διάγραμμα)	
Phase I control limits (3σ)	
UCL	$= \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}}$
$Center\ Line$	$= \bar{C}$
LCL	$= \bar{C} - 3\sqrt{\bar{C}}$

Στην περίπτωση του u διαγράμματος η παράμετρος c της κατανομής Poisson θα εκτιμηθεί από τις πληροφορίες που θα μας δώσουν m ανεξάρτητα προκαταρκτικά δείγματα μεγέθους n μονάδων επιθεώρησης το καθένα, έστω τα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $1 \leq i \leq m$. Θέτοντας

$$U_i = \frac{X_i}{n} = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}}{n}, \quad 1 \leq i \leq m$$

και

$$\bar{U} = \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_m}{m} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{mn} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}}{mn}$$

έχουμε ότι $E(\bar{U}) = c$ αφού $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} \sim P(mnc)$. Η ποσότητα \bar{U} χρησιμοποιείται ως

εκτίμηση της ποσότητας c , δηλαδή $\hat{c} = \bar{U}$. Συνεπώς το Πλαίσιο 20 παίρνει τη μορφή

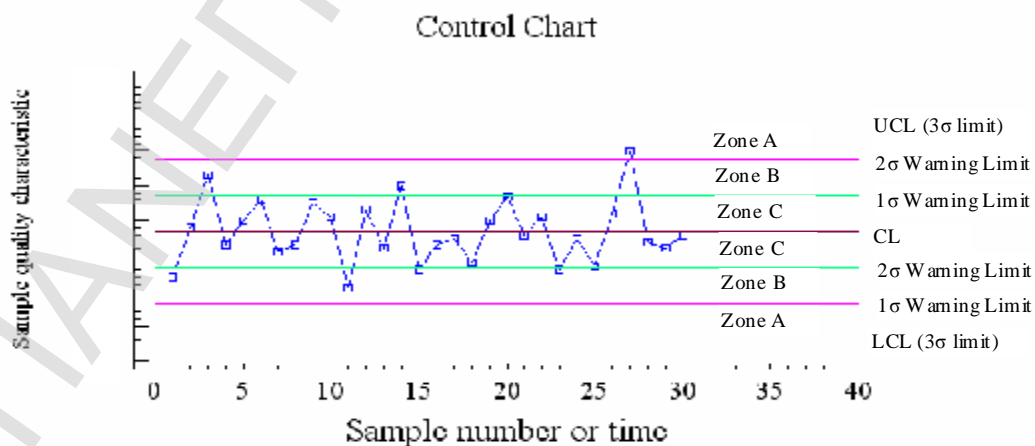
Πλαίσιο 22 (u διάγραμμα)	
Phase I control limits (3σ)	
UCL	$= \bar{U} + 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n}}$
Center Line	$= \bar{U}$
LCL	$= \bar{U} - 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n}}$

1.4 Κανόνες ευαισθητοποίησης ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart

Από μελέτες έχει διαπιστωθεί ότι για μικρές μετατοπίσεις του μέσου m της W (έως και $1.5s$) το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής ARL του διαγράμματος ελέγχου Shewhart δεν είναι ικανοποιητικό (δηλαδή είναι αρκετά μεγάλος αριθμός). Για να γίνει περισσότερο ευαίσθητο ένα διάγραμμα ελέγχου Shewhart με $3s$ όρια ως προς την ικανότητά του να ανιχνεύει πιο γρήγορα εκτός ελέγχου διεργασίες, εκτός από τη σχεδίαση των ορίων ελέγχου, σχεδιάζουμε επίσης και προειδοποιητικά όρια εσωτερικά των ορίων ελέγχου όπως δείχνει το ακόλουθο διάγραμμα

ΣΧΗΜΑ 1.2

Διάγραμμα ελέγχου Shewhart και προειδοποιητικά όρια



Τα προειδοποιητικά όρια χρησιμοποιούνται για την ανάπτυξη κανόνων ευαισθητοποίησης (*sensitizing rules*) οι οποίοι περιγράφουν ενδεχόμενα που σχετίζονται με την εμφάνιση ειδικών ακολουθιών σημείων (*patterns*) σε ένα διάγραμμα ελέγχου. Στην περίπτωση που συμβεί το ενδεχόμενο που περιγράφει ο κανόνας τότε θεωρούμε ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου χωρίς απαραίτητα να έχουμε κάποιο σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου (*UCL* και *LCL*).

Οι σημαντικότεροι κανόνες που χρησιμοποιούνται για την ευαισθητοποίηση ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart είναι οι ακόλουθοι:

- Κανόνας 1. Ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου (κανόνας 1-από-1)
- Κανόνας 2. Δύο από τρία συνεχόμενα σημεία σε μια από τις δύο ζώνες *A* (κανόνας 2 από-3)
- Κανόνας 3. Τέσσερα από πέντε συνεχόμενα σημεία σε μια από τις δύο περιοχές, πέραν της Ζώνης *C* (κανόνας 4-από-5)
- Κανόνας 4. Πέντε συνεχόμενα σημεία, όλα πέραν της ολικής Ζώνης *C* (και στις δύο περιοχές)
- Κανόνας 5. Έξι συνεχόμενα σημεία σε αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη
- Κανόνας 6. Δεκαπέντε συνεχόμενα σημεία στην ολική Ζώνη *C*
- Κανόνας 7. Δεκατέσσερα συνεχόμενα σημεία σε εναλλασσόμενη μορφή “πάνω-κάτω”
- Κανόνας 8. Εννέα συνεχόμενα σημεία στην ίδια μεριά (επάνω ή κάτω) της κεντρικής γραμμής (κανόνας 9-από-9)

1.5 Διαγράμματα ελέγχου CUSUM

Στα διαγράμματα ελέγχου Shewhart απεικονίζονται τιμές που βασίζονται στις μετρήσεις κάθε δείγματος χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τους μετρήσεις από προηγούμενα δείγματα. Για το λόγο αυτό τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart χαρακτηρίζονται ως διαγράμματα ελέγχου χωρίς μνήμη (*control charts without memory*). Τα διαγράμματα Shewhart είναι πολύ χρήσιμα στην ανίχνευση μετατοπίσεων του μέσου για τιμές μεγαλύτερες του 1.5σ.

Τα διαγράμματα ελέγχου τύπου CUSUM έχουν μη περιορισμένη και ομοιόμορφη μνήμη αφού λαμβάνουν πληροφορία από όλα τα προηγούμενα δείγματα και το καθένα από αυτά έχει την ίδια βαρύτητα. Χρησιμοποιούνται για να εντοπίζουν γρήγορα μικρές μετατοπίσεις του μέσου και ανήκουν στην κατηγορία των διαγραμμάτων με μνήμη (*control charts with memory*).

Ας θεωρήσουμε μια εντός ελέγχου διεργασία η οποία παράγει προϊόντα στα οποία το ποιοτικό χαρακτηριστικό X που θέλουμε να παρακολουθήσουμε έχει μέση τιμή m_0 και τυπική απόκλιση S . Από τη διεργασία λαμβάνονται μεμονωμένες παρατηρήσεις $X_i, i \geq 1$, και μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας της μορφής $m_1 = m_0 \pm ds$ ($d > 0$). Τα δίπλευρα (συμμετρικά) διαγράμματα ελέγχου CUCUM (*two-sided CUSUMS*) με διαστήματα απόφασης εισήχθησαν από τον Page (1954). Στα διαγράμματα αυτά απεικονίζονται ταυτόχρονα οι δύο ακόλουθες στατιστικές συναρτήσεις

$$S_i^+ = \max[0, X_i - (m_0 + K) + S_{i-1}^+], \quad S_0^+ = 0,$$

$$S_i^- = \min[0, X_i - (m_0 - K) + S_{i-1}^-], \quad S_0^- = 0.$$

Οι τιμές των ποσοτήτων S_0^+ και S_0^- ονομάζονται τιμές εκκίνησης (*headstart values*). Η ποσότητα K (≥ 0) ονομάζεται τιμή αναφοράς (*reference value*) και η πιο συνήθης τιμή της δίνεται από τη σχέση

$$K = \frac{ds}{2} = \frac{|m_1 - m_0|}{2} = ks, \quad k = d/2.$$

Η ποσότητα S_i^+ συσσωρεύει τις αποκλίσεις των παρατηρήσεων X_i από την ποσότητα $m_0 + K$ από τη στιγμή που θα εμφανιστεί θετική απόκλιση και μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλη για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0 : m = m_0 \quad H_1 : m = m_1 = m_0 + ds, \quad d > 0$$

αφού μεγάλες θετικές τιμές της S_i^+ οδηγούν στην αποδοχή της υπόθεσης H_1^+ . Ανάλογα, η ποσότητα S_i^- συσσωρεύει τις αποκλίσεις των παρατηρήσεων X_i από την ποσότητα $m_0 - K$ από τη στιγμή που θα εμφανιστεί αρνητική απόκλιση και συνεπώς η ποσότητα S_i^- μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλη για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0 : m = m_0 \quad H_1 : m = m_1 = m_0 - ds, \quad d > 0$$

αφού μικρές αρνητικές τιμές της S_i^- οδηγούν στην αποδοχή της υπόθεσης H_1^- .

Για το ποια από τις δύο εναλλακτικές υποθέσεις H_1^+ και H_1^- θα αποδεχθούμε ή όχι σε κάθε βήμα της διαδικασίας η απόφασή μας θα εξαρτηθεί από το αν ισχύει η σχέση $S_i^+ > H$ ή η σχέση $S_i^- < -H$, όπου H μια θετική σταθερά ($H > 0$). Η πιο συνήθης τιμή για το διάστημα απόφασης είναι η

$$H = hs, \quad h = 4,5.$$

Η ποσότητα H ονομάζεται διάστημα απόφασης (*decision interval*). Φυσικά αν μια από τις δύο εναλλακτικές υποθέσεις H_1^+ ή H_1^- γίνει αποδεκτή τότε θεωρούμε ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου λόγω μετατόπισης του μέσου της διεργασίας σε υψηλότερο ή χαμηλότερο επίπεδο αντίστοιχα.

Για τα δεδομένα του Πίνακα 1.1 έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα για $K = |m_1 - m_0|/2 = |10 - 11|/2 = 0.5$ (επίσης $k = 0.5$)

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1

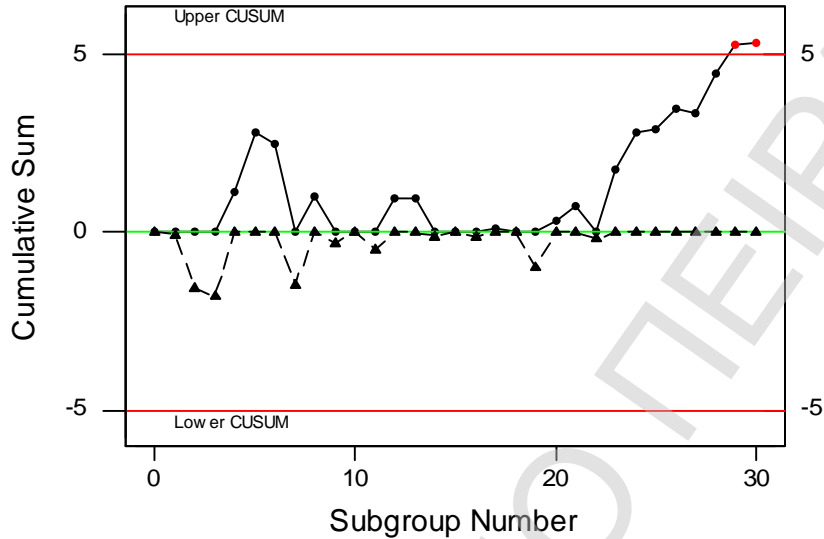
Συσσωρευμένα αθροίσματα για $K = 0.5$

Παρατήρηση	X_i	$X_i - (m_0 + K)$	S_i^+	$X_i - (m_0 - K)$	S_i^-
1	9.45	-1.05	0	-0.05	-0.05
2	7.99	-2.51	0	-1.51	-1.56
3	9.29	-1.21	0	-0.21	-1.77
4	11.66	1.16	1.16	2.16	0
5	12.16	1.66	2.82	2.66	0
6	10.18	-0.32	2.5	0.68	0
7	8.04	-2.46	0.04	-1.46	-1.46
8	11.46	0.96	1	1.96	0
9	9.2	-1.3	0	-0.3	-0.3
10	10.34	-0.16	0	0.84	0
11	9.03	-1.47	0	-0.47	-0.47
12	11.47	0.97	0.97	1.97	0
13	10.51	0.01	0.98	1.01	0
14	9.4	-1.1	0	-0.1	-0.1
15	10.08	-0.42	0	0.58	0
16	9.37	-1.13	0	-0.13	-0.13
17	10.62	0.12	0.12	1.12	0
18	10.31	-0.19	0	0.81	0
19	8.52	-1.98	0	-0.98	-0.98
20	10.84	0.34	0.34	1.34	0
21	10.9	0.4	0.74	1.4	0
22	9.33	-1.17	0	-0.17	-0.17
23	12.29	1.79	1.79	2.79	0
24	11.5	1	2.79	2	0
25	10.6	0.1	2.89	1.1	0
26	11.08	0.58	3.47	1.58	0
27	10.38	-0.12	3.35	0.88	0
28	11.62	1.12	4.47	2.12	0
29	11.31	0.81	5.28	1.81	0
30	10.52	0.02	5.3	1.02	0

Για $H = 5s = 5$ (επίσης $h = 5$), το διάγραμμα ελέγχου CUSUM (S_i^+ και S_i^- στο ίδιο διάγραμμα) είναι το ακόλουθο

ΣΧΗΜΑ 1.3

Διάγραμμα ελέγχου CUSUM για τα δεδομένα του Πίνακα 1.1 για $K = 0.5$ και $H = 5$



Από το παραπάνω διάγραμμα προκύπτει ότι $S_{29}^+ > 5$ και συνεπώς η διεργασία είναι εκτός ελέγχου λόγω μετατόπισης του μέσου της διεργασίας σε υψηλότερο επίπεδο.

Στη γενική περίπτωση, τόσο η τιμή αναφοράς K όσο και το διάστημα απόφασης H μπορούν να διαφέρουν σε ένα δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου CUSUM. Τότε ομιλούμε για μη συμμετρικό διάγραμμα ελέγχου CUSUM. Επίσης οι τιμές εκκίνησης S_0^+ και S_0^- δεν είναι υποχρεωτικό να είναι ίσες με το 0. Όταν $0 < S_0^+ < H$ ή/και $-H < S_0^- < 0$ ομιλούμε για εφαρμογή της μέθοδου της άμεσης αρχικής αντίδρασης (*fast initial response*). Συνεπώς στη γενική περίπτωση σε ένα δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου CUSUM απεικονίζονται οι ποσότητες

$$S_t^+ = \max[0, X_t - (m_0 + K^+) + S_{t-1}^+], \quad 0 \leq S_0^+ < H^+,$$

$$S_t^- = \min[0, X_t - (m_0 + K^-) + S_{t-1}^-], \quad H^- < S_0^- \leq 0$$

όπου

$$K^+ > 0, \quad H^+ > 0, \quad K^- < 0, \quad H^- < 0.$$

Το παραπάνω διάγραμμα δίνει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας τη χρονική στιγμή t αν $S_t^+ > H^+ > 0$ ή $S_t^- < H^- < 0$. Φυσικά αν μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε μετατοπίσεις του μέσου σε υψηλότερο (χαμηλότερο) επίπεδο στο διάγραμμα ελέγχου CUSUM θα απεικονιστεί μόνο η ποσότητα S_t^+ (S_t^-) και το διάστημα απόφασης H^+ (H^-). Σε αυτή την περίπτωση

ομιλούμε για μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου συσσωρευμένων αθροισμάτων (*one-sided CUSUM*).

Τα διαγράμματα ελέγχου CUSUM μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στην περίπτωση που δεν έχουμε μεμονωμένες παρατηρήσεις αλλά δείγματα μεγέθους $n > 1$. Σε αυτή την περίπτωση η ποσότητα X_t θα πρέπει να αντικατασταθεί με την ποσότητα \bar{X}_t (δηλαδή με το μέσο του t δείγματος) και η ποσότητα S με την ποσότητα S/\sqrt{n} . Έτσι στο δίπλευρο συμμετρικό διάγραμμα ελέγχου CUSUM απεικονίζονται οι στατιστικές συναρτήσεις

$$S_t^+ = \max[0, \bar{X}_t - (m_0 + K) + S_{t-1}^+]$$

$$S_t^- = \min[0, \bar{X}_t - (m_0 - K) + S_{t-1}^-]$$

όπου

$$K = k \frac{S}{\sqrt{n}}, \quad H = h \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

1.6 Διαγράμματα ελέγχου EWMA

Ας θεωρήσουμε μια εντός ελέγχου διεργασία η οποία παράγει προϊόντα στα οποία η τιμή X ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού τους που θέλουμε να παρακολουθήσουμε έχει μέση τιμή m_0 και τυπική απόκλιση S . Από τη διεργασία λαμβάνονται ανεξάρτητες μεμονωμένες παρατηρήσεις X_i , $i \geq 1$, και μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας της μορφής $m_1 = m_0 \pm dS$. Στα διαγράμματα ελέγχου εκθετικά σταθμισμένου κινούμενου μέσου ή απλά διαγράμματα ελέγχου EWMA (*exponentially weighted moving average*) τα οποία εισήχθησαν από τον Roberts (1959), απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση

$$Z_t = (1-I)Z_{t-1} + I X_t, \quad t \geq 1, \quad 0 < I \leq 1.$$

Για την εκκίνηση του παραπάνω σχεδίου EWMA απαιτείται ο καθορισμός της τιμής εκκίνησης Z_0 η οποία συνήθως λαμβάνεται ίση με m_0 ($Z_0 = m_0$), ή γενικότερα λαμβάνεται ίση με μια τιμή στόχο (*target value*) T ($Z_0 = T$). Χρησιμοποιώντας διαδοχικά τον παραπάνω τύπο παίρνουμε

$$Z_t = (1-I)^t Z_0 + I \sum_{i=1}^t (1-I)^{t-i} X_i.$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα Z_t αποτελεί ένα σταθμισμένο μέσο των παρατηρήσεων $Z_0, X_1, X_2, \dots, X_{t-1}, X_t$ με αντίστοιχα βάρη $(1-I)^t, I(1-I)^{t-1}, I(1-I)^{t-2}, \dots, I(1-I)^1, I$

(τα βάρη αθροίζονται στη μονάδα). Τα βάρη $I(1-I)^{t-i}$ των ποσοτήτων X_i φθίνουν γεωμετρικά καθώς προχωρούμε από την παρατήρηση X_t προς την παρατήρηση X_1 και συνεπώς η τιμή της παραμέτρου I απεικονίζει τη σπουδαιότητα που δίνουμε στις νέες (μεγάλη τιμή για το I) ή στις παλαιότερες (μικρή τιμή για το I) παρατηρήσεις. Για αυτό το λόγο, ο Roberts (1959) ονόμασε τα διαγράμματα που βασίζονται στη ποσότητα Z_t ως διαγράμματα ελέγχου γεωμετρικού κινούμενου μέσου (*geometric moving average control charts*). Στις μέρες μας βέβαια έχει επικρατήσει ο όρος διαγράμματα ελέγχου EWMA.

Για το μέσο και τη διακύμανση της στατιστικής συνάρτησης Z_t έχουμε ότι ($Z_0 = m_0$)

$$m_{Z_t} = m_0$$

$$s_{Z_t}^2 = \text{Var}\left((1-I)^t Z_0 + I \sum_{i=1}^t (1-I)^{t-i} X_i\right) = I^2 s^2 \sum_{i=1}^t [(1-I)^2]^{t-i} = s^2 \left(\frac{I}{2-I}\right) [1 - (1-I)^{2t}].$$

Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψη τη φιλοσοφία κατασκευής ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart, στο διάγραμμα ελέγχου EWMA απεικονίζεται η τιμή της στατιστικής συνάρτησης Z_t και τα όρια ελέγχου θα δίνονται από τους τύπους

$$UCL = m_{Z_t} + LS_{Z_t} = m_0 + LS \sqrt{\frac{I}{2-I} [1 - (1-I)^{2t}]}$$

$$CL = m_{Z_t} = m_0$$

$$LCL = m_{Z_t} - LS_{Z_t} = m_0 - LS \sqrt{\frac{I}{2-I} [1 - (1-I)^{2t}]}$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι για $I=1$ το διάγραμμα ελέγχου EWMA ανάγεται στο αντίστοιχο διάγραμμα ελέγχου Shewhart. Επίσης παρατηρούμε ότι τα όρια ελέγχου του παραπάνω διαγράμματος είναι μεταβλητά ($I \neq 1$). Ωστόσο η ποσότητα $(1-I)^{2t}$ τείνει στο μηδέν καθώς το t αυξάνει, οπότε σε σχετικά σύντομο χρονικό διάστημα τα όρια ελέγχου σταθεροποιούνται και δίνονται από τη σχέση

$$UCL = m_{Z_t} + LS_{Z_t} = m_0 + LS \sqrt{\frac{I}{2-I}}$$

$$LCL = m_{Z_t} - LS_{Z_t} = m_0 - LS \sqrt{\frac{I}{2-I}}$$

Αν και η μέθοδος των διαγραμμάτων ελέγχου EWMA αναπτύχθηκε για μεμονωμένες παρατηρήσεις μπορεί να τροποποιηθεί άμεσα έτσι ώστε να καλύψει και την περίπτωση όπου έχουμε δείγματα μεγέθους $n > 1$. Σε αυτή την περίπτωση η ποσότητα X_t θα πρέπει να αντικατασταθεί με την ποσότητα \bar{X}_t (δηλαδή με το μέσο του t δείγματος) και η ποσότητα S με την ποσότητα s / \sqrt{n} . Συνεπώς στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζεται η ποσότητα

$$Z_t = (1-I)Z_{t-1} + I \bar{X}_t, \quad 0 < I \leq 1$$

με όρια ελέγχου $UCL = m_{z_t} + Ls_{z_t} = m_0 + L \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{I}{2-I} [1 - (1-I)^{2t}]}$

$$Center\ Line = m_{z_t} = m_0$$

$$LCL = m_{z_t} - Ls_{z_t} = m_0 - L \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{I}{2-I} [1 - (1-I)^{2t}]}$$

Τα διαγράμματα ελέγχου EWMA χρησιμοποιούνται, όπως και τα διαγράμματα ελέγχου CUSUM, όταν θέλουμε να εντοπίσουμε μικρές μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας. Το πλεονέκτημα των διαγραμμάτων ελέγχου EWMA έναντι των CUSUM είναι ότι δεν είναι ευαίσθητα στην υπόθεση της κανονικότητας των παρατηρήσεων και για το λόγο αυτό είναι ιδανικά στην περίπτωση που έχουμε μεμονωμένες παρατηρήσεις.

Για την επίδειξη ενός διαγράμματος ελέγχου EWMA θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα του Πίνακα 1.2. Για $Z_0 = m_0 = 10$, $s = 1$, $I = 0.1$ και $L = 2.7$ προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας για τις τιμές Z_t που θα απεικονιστούν στο διάγραμμα

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2

Δεδομένα για την επίδειξη ενός διαγράμματος ελέγχου EWMA

Παρατήρηση	X_i	Z_i	Παρατήρηση	X_i	Z_i
1	9.45	9.4500	16	9.37	9.98426
2	7.99	9.4950	17	10.62	10.0478
3	9.29	9.0355	18	10.31	10.0740
4	11.66	9.9920	19	8.52	9.9186
5	12.16	10.2530	20	10.84	10,0108
6	10.18	10.3070	21	10.90	10.0997
7	8.04	9.2167	22	9.33	10.0227
8	11.46	10.755	23	12.29	10.2495
9	9.20	9.8796	24	11.50	10.3745
10	10.34	10.232	25	10.60	10.3971
11	9.03	9.2384	26	11.08	10.4654
12	11.47	10.9785	27	10.38	10.4568
13	10.51	10.1216	28	11.62	10.5731
14	9.40	10.0495	29	11.31	10.6468
15	10.08	10.0525	30	10.52	10.6341

Τα σταθεροποιημένα όρια ελέγχου ($t \rightarrow \infty$) είναι ίσα με

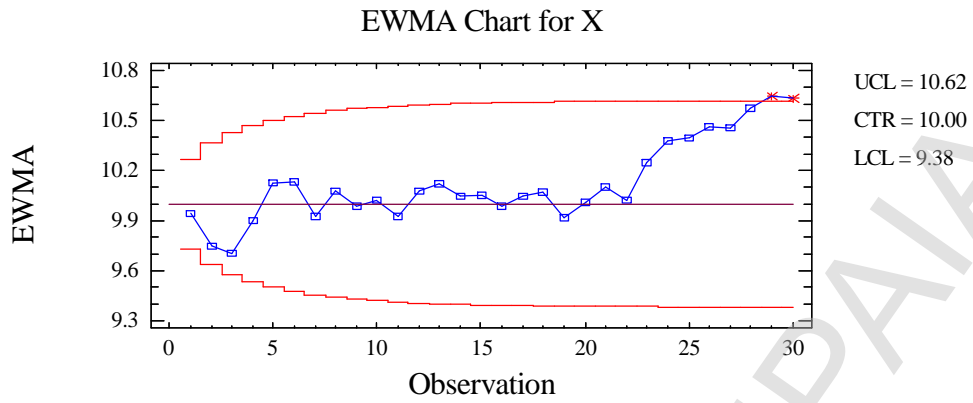
$$UCL = m_0 + Ls \sqrt{\frac{I}{2-I}} = 10 + 2.7 \cdot 1 \cdot \sqrt{\frac{0.1}{(2-0.1)}} = 10.62$$

$$LCL = m_0 - Ls \sqrt{\frac{I}{2-I}} = 10 - 2.7 \cdot 1 \cdot \sqrt{\frac{0.1}{(2-0.1)}} = 9.38$$

και το διάγραμμα ελέγχου EWMA είναι το ακόλουθο

ΣΧΗΜΑ 1.4

Διάγραμμα ελέγχου EWMA για τα δεδομένα του Πίνακα 1.2



Στο συγκεκριμένο διάγραμμα παρατηρούμε ότι μετά την 23^η παρατήρηση διαφαίνεται μια μετατόπιση του μέσου της διεργασίας σε υψηλότερο επίπεδο η οποία γίνεται αντιληπτή στην 29^η παρατήρηση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Συνθετικά διαγράμματα ελέγχου για τη μέση τιμή και τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων

2.1 Συνθετικό διάγραμμα ελέγχου για την ανίχνευση μετατοπίσεων του μέσου μιας διεργασίας

Σε αυτό το μέρος παρουσιάζουμε ένα συνθετικό (synthetic) διάγραμμα ελέγχου κατάλληλο για την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων του μέσου μιας διεργασίας. Η κατασκευή του βασίζεται στο Shewhart \bar{X} και στο *CRL* (comforming run length) διάγραμμα ελέγχου. Το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου αποτελείται από ένα \bar{X}/S υποδιάγραμμα και ένα *CRL/S* υποδιάγραμμα ελέγχου. Επομένως κρίνεται σκόπιμο να αναφέρουμε αρχικά κάποια χαρακτηριστικά των διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart \bar{X} και των διαγραμμάτων ελέγχου *CRL*. Στο τέλος της παραγράφου παρουσιάζεται ένα πρόγραμμα σε C, το SYNTH, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να σχεδιάσουμε ένα συνθετικό διάγραμμα ελέγχου που ελαχιστοποιεί το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής για συγκεκριμένη μετατόπιση του μέσου

της διεργασίας. Τα αποτελέσματα της παρούσας παραγράφου έχουν παρουσιαστεί στην εργασία των Wu & Spedding (2000a).

2.1.1 Εισαγωγή

Το Shewhart \bar{X} διάγραμμα ελέγχου έχει ευρέως χρησιμοποιηθεί στη βιομηχανία για τον έλεγχο του μέσου μιας διεργασίας και είναι αρκετά αποτελεσματικό στο να ανιχνεύει μεγάλης κλίμακας μετατοπίσεις του μέσου. Ωστόσο δεν είναι αρκετά ευαίσθητο στην ανίχνευση μικρών έως μέτριων μετατοπίσεων του μέσου.

Για την ανίχνευση μικρών έως μέτριων μετατοπίσεων του μέσου μιας διεργασίας κατάλληλα είναι τα EWMA και τα CUSUM διαγράμματα ελέγχου. Αρκετοί συγγραφείς μελέτησαν τα EWMA και CUSUM διαγράμματα ελέγχου και κατέληξαν στο ότι υπάρχει μικρή πρακτική διαφορά ανάμεσα στις δύο τεχνικές. Ενώ και τα δύο αυτά διαγράμματα αποδίδουν καλύτερα από το Shewhart \bar{X} διάγραμμα ελέγχου για μικρές μετατοπίσεις του μέσου, είναι κατώτερα από το τελευταίο όταν προκύπτει μεγάλη μετατόπιση. Μια από κοινού \bar{X} - EWMA προσέγγιση προτάθηκε από τους Albin, Kang & Shea (1997), στην οποία ένα εκτός ελέγχου σήμα προκύπτει όταν μία \bar{X} τιμή βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου του Shewhart \bar{X} διαγράμματος ή όταν μια τιμή της στατιστικής συνάρτησης Z που απεικονίζεται στο EWMA διάγραμμα ελέγχου βρεθεί πέρα από τα όρια ελέγχου του EWMA διαγράμματος. Το από κοινού \bar{X} - EWMA διάγραμμα βελτιώνει το EWMA διάγραμμα ελέγχου στο να ανιχνεύει μεγάλες μετατοπίσεις στο μέσο, αλλά εις βάρος της αποτελεσματικότητάς του για μικρές μετατοπίσεις.

Το Shewhart \bar{X} διάγραμμα ελέγχου μερικές φορές ενισχύεται με συμπληρωματικούς κανόνες ροών. Για παράδειγμα, αν χρησιμοποιείται ένας 2-από-3 κανόνας ροών μια διεργασία κρίνεται να είναι εκτός ελέγχου όταν μία \bar{X} τιμή είναι εκτός των 3σ ορίων ελέγχου ή όταν δύο από τρεις \bar{X} τιμές βρεθούν πέρα από τα 2σ προειδοποιητικά όρια ελέγχου. Οι Champ & Woodall (1987) και ο Nelson (1984) έδειξαν ότι το Shewhart \bar{X} διάγραμμα με συμπληρωματικούς κανόνες ροών είναι πιο ευαίσθητο σε μικρές μετατοπίσεις του μέσου απ' ό,τι το Shewhart \bar{X} μόνο του, αλλά όχι τόσο ευαίσθητο όσο το CUSUM και το EWMA διάγραμμα ελέγχου. Οι Albin, Kang & Shea (1997) σύγκριναν την απόδοση του από κοινού \bar{X} - EWMA διαγράμματος ελέγχου με το Shewhart \bar{X} διάγραμμα ελέγχου με κανόνες ροών και χωρίς κανόνες ροών. Σύστησαν τη χρήση του από κοινού \bar{X} - EWMA διαγράμματος εκτός της περίπτωσης που χρειάζεται να ανιχνευτούν μικρές αλλαγές στην τυπική απόκλιση.

Ο Ncube (1990) πρότεινε μια συνδυασμένη Shewhart συσσωρευτική διαδικασία βασισμένη στους εκθετικούς σταθμισμένους μέσους των δειγμάτων και έδειξε ότι αυτή η διαδικασία είναι ομοιόμορφα ανώτερη αυτής του Shewhart \bar{X} διαγράμματος. Οι Shamma & Shamma (1992) πρότειναν ένα διπλό EWMA διάγραμμα το οποίο αποδίδει καλύτερα από το Shewhart \bar{X} για μικρές και μέτριες μετατοπίσεις του μέσου. Επιπλέον η βέλτιστη απόδοση αυτού του διαγράμματος δεν είναι τόσο ευαίσθητη στην επιλογή των παραμέτρων του όσο το κλασικό EWMA διάγραμμα ελέγχου. Έστω ότι το m_0 δείχνει την εντός ελέγχου τιμή για το μέσο m . Το $ARL(d)$ δείχνει το μέσο αριθμό δειγμάτων που απαιτείται για να δοθεί σήμα για μετατόπιση του μέσου από m_0 σε $m_0 \pm ds$. Το $ARL(d)$ έχει ευρέως χρησιμοποιηθεί για να αξιολογήσει την απόδοση των διαγραμμάτων ελέγχου και μπορεί να υπολογιστεί από την πιθανότητα P που συμβολίζει την πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος ελέγχου εκτός των ορίων ελέγχου.

2.1.2 Shewhart \bar{X} και CRL διάγραμμα ελέγχου

Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή των παρατηρήσεων που παίρνουμε από τη διεργασία είναι η κανονική κατανομή με μέση τιμή m και διακύμανση s^2 , και επιπλέον έστω m_0 η τιμή στόχος για το μέσο. Από τη διεργασία επιλέγουμε τυχαία δείγματα μεγέθους n και έστω $\mathbf{X}_i = (X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n})$ το δείγμα που πήραμε στην i -οστή δειγματοληψία. Όταν επιλέγουμε το i -οστό δείγμα, υπολογίζουμε τη δειγματική μέση τιμή του \bar{X}_i και την αναπαριστούμε σε ένα Shewhart \bar{X} διάγραμμα ελέγχου με κεντρική γραμμή ίση με m_0 και όρια ελέγχου $m_0 \pm ks / \sqrt{n}$ (συνήθως επιλέγουμε το k να είναι ίσο με 3). Ας υποθέσουμε ότι ο μέσος m_0 της διεργασίας μετατοπίζεται στη θέση $m_0 \pm ds$. Τότε ως γνωστόν το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL(d)$ δίνεται από τη σχέση

$$ARL(d) = \frac{1}{P} \quad (1)$$

$$P = 1 - b = 1 - [\Phi(k - d\sqrt{n}) - \Phi(-k - d\sqrt{n})],$$

όπου b είναι το σφάλμα τύπου II, n είναι το μέγεθος δείγματος και k είναι ο συντελεστής που καθορίζει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή. Το εντός ελέγχου

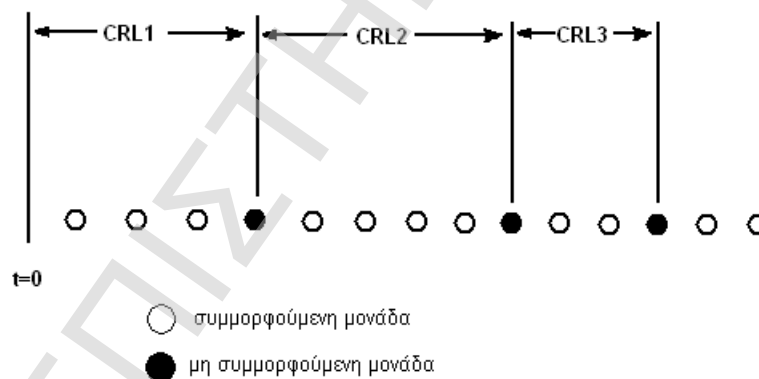
ARL , $ARL(0)$, συνήθως είναι καθορισμένο από το χρήστη με βάση το ρυθμό των λανθασμένων συναγεργμών που επιθυμεί να έχει.

Ένα άλλο διάγραμμα ελέγχου μεγάλης σημασίας είναι το CRL (conforming run length) διάγραμμα ελέγχου, το οποίο προτάθηκε από τον Bourke (1991) και μελετήθηκε τα τελευταία χρόνια από πολλούς ερευνητές (Kaminsky, Benneyan & Devis (1992), Nelson (1994), Glushkovsky (1994), Xie, Xie & Goh (1995)). Το CRL διάγραμμα ελέγχου αναπτύχθηκε αρχικά για ποιοτικό έλεγχο ιδιοτήτων. Σε 100% επιθεώρηση, το συμμορφούμενο μήκος ροής είναι ο αριθμός των επιθεωρημένων μονάδων μεταξύ δύο διαδοχικών μη συμμορφούμενων μονάδων (συμπεριλαμβανομένης της τελικής μη συμμορφούμενης μονάδας).

Στο Σχήμα 1.1, οι άσπροι και οι μαύροι κύκλοι παριστάνουν τις συμμορφούμενες και μη συμμορφούμενες μονάδες αντίστοιχα. Στο Σχήμα 1.1 επιδεικνύονται τρία δείγματα του CRL (η διεργασία ξεκινά όταν $t=0$), τα $CRL_1 = 4$, $CRL_2 = 5$ και $CRL_3 = 3$. Η ιδέα πίσω από το CRL διάγραμμα είναι ότι το συμμορφούμενο μήκος ροής θα αλλάξει όταν η αναλογία p των μη συμμορφούμενων μονάδων σε μια διεργασία αλλάξει. Δηλαδή, το CRL μικραίνει, όσο το p αυξάνεται, και μεγαλώνει όσο το p μειώνεται.

ΣΧΗΜΑ 2.1

Συμμορφούμενο μήκος ροής.



Είναι προφανές ότι η τυχαία μεταβλητή CRL ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα “επιτυχίας” p . Συνεπώς, η μέση τιμή του CRL (ο αναμενόμενος αριθμός των επιθεωρημένων μονάδων σε ένα CRL δείγμα) είναι

$$m_{CRL} = \frac{1}{p} \quad (2)$$

ενώ η αθροιστική συνάρτηση κατανομή του CRL δίνεται από τη σχέση

$$F_p(CRL) = 1 - (1 - p)^{CRL}, \quad CRL = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Αν η μόνη ανησυχία μας είναι η ανίχνευση αυξήσεων του p , ένα μοναδικό κάτω όριο ελέγχου L είναι ικανοποιητικό για το CRL διάγραμμα ελέγχου. Το σφάλμα τύπου I, a_{CRL} , του CRL διαγράμματος ελέγχου δίνεται από τη σχέση

$$a_{CRL} = P(CRL \leq L) = F_{p_0}(L) = 1 - (1 - p_0)^L,$$

όπου p_0 είναι η εντός ελέγχου αναλογία p των μη συμμορφούμενων μονάδων.

Επομένως για δεδομένο a_{CRL} , το L μπορεί να βρεθεί από την εξίσωση

$$L = \frac{\ln(1 - a_{CRL})}{\ln(1 - p_0)} \quad (4)$$

Το L πρέπει να στρογγυλοποιηθεί σε έναν ακέραιο. Αν η τιμή του CRL σε ένα δείγμα είναι μικρότερη ή ίση με το L , είναι πολύ πιθανό ότι η αναλογία p των μη συμμορφούμενων μονάδων να έχει αυξηθεί και επομένως λαμβάνουμε σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας.

Για το CRL διάγραμμα ελέγχου, με ARL_{CRL} συμβολίζουμε τον αναμενόμενο αριθμό των CRL δειγμάτων που απαιτούνται για να λάβουμε σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας (αύξηση της τιμής του p), οπότε

$$ARL_{CRL} = \frac{1}{F_p(L)} = \frac{1}{1 - (1 - p)^L}. \quad (5)$$

Τέλος, με ANS_{CRL} συμβολίζουμε την αναμενόμενη τιμή του αριθμού των επιθεωρημένων μονάδων μέχρις ότου το CRL διάγραμμα ελέγχου δώσει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας. Έτσι

$$ANS_{CRL} = m_{CRL} \times ARL_{CRL} = \frac{1}{p} \times \frac{1}{1 - (1 - p)^L}. \quad (6)$$

2.1.3 Το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου $\bar{X} - CRL$

Το συνθετικό (synthetic) διάγραμμα ελέγχου αποτελεί ένα συνδυασμό του Shewhart \bar{X} και του CRL διαγράμματος ελέγχου. Τα ακόλουθα βήματα περιγράφουν τη λειτουργία του συνθετικού διαγράμματος ελέγχου.

1. Αποφασίζουμε το κάτω και το άνω όριο ελέγχου, $LCL_{\bar{X}/S}$ και $UCL_{\bar{X}/S}$, του \bar{X}/S υποδιαγράμματος, και το κάτω όριο ελέγχου, L , του CRL/S υποδιαγράμματος. Το $LCL_{\bar{X}/S}$ και $UCL_{\bar{X}/S}$ μπορούν να υπολογιστούν όπως και τα αντίστοιχα όρια του Shewhart \bar{X} διαγράμματος ελέγχου, δηλαδή

$$\begin{aligned} LCL_{\bar{X}/S} &= m - k s_{\bar{X}} \\ UCL_{\bar{X}/S} &= m + k s_{\bar{X}} \end{aligned} \quad (7)$$

όπου m είναι ο εντός ελέγχου μέσος και $s_{\bar{X}}$ είναι η τυπική απόκλιση του δειγματικού μέσου. Ο συντελεστής k των ορίων ελέγχου του \bar{X}/S υποδιαγράμματος είναι συνήθως μικρότερος από τον αντίστοιχο για το Shewhart \bar{X} διάγραμμα ελέγχου. Ο προσδιορισμός του k και του L θα περιγραφεί αργότερα.

2. Σε κάθε σημείο επιθεώρησης, παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα \mathbf{X}_i από n παρατηρήσεις και υπολογίζουμε το δειγματικό μέσο \bar{X}_i .
3. Αν το \bar{X}_i είναι μεγαλύτερο από το κάτω όριο $LCL_{\bar{X}/S}$ και μικρότερο από το άνω όριο $UCL_{\bar{X}/S}$ του \bar{X}/S υποδιαγράμματος, τότε αυτό το δείγμα καλείται συμμορφούμενο δείγμα και επιστρέφουμε πίσω στο βήμα (2). Διαφορετικά το δείγμα καλείται μη συμμορφούμενο και προχωρούμε στο επόμενο βήμα.
4. Ελέγχουμε τον αριθμό των \bar{X} δειγμάτων μεταξύ του τρέχοντος και του τελευταίου μη συμμορφούμενου δείγματος. Αυτός ο αριθμός λαμβάνεται ως ένα CRL δείγμα του CRL/S υποδιαγράμματος στο συνθετικό διάγραμμα.
5. Αν το CRL δείγμα είναι μεγαλύτερο από κάτω όριο ελέγχου του CRL/S υποδιαγράμματος, τότε η διεργασία θεωρείται εντός ελέγχου και επιστρέφουμε πίσω στο βήμα (2). Διαφορετικά, η διεργασία θεωρείται εκτός ελέγχου και προχωρούμε στο επόμενο βήμα.
6. Στέλνουμε σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας.
7. Λαμβάνουμε μέτρα για την εύρεση και την απομάκρυνση της ειδικής αιτίας μεταβλητότητας. Έπειτα επιστρέφουμε πίσω στο βήμα (2).

Γενικά, το συνθετικό διάγραμμα δουλεύει με τον ίδιο τρόπο όπως το συνηθισμένο CRL διάγραμμα, εκτός του ότι η μονάδα του CRL διαγράμματος είναι πλέον ένας δειγματικός μέσος \bar{X} στο συνθετικό διάγραμμα. Είναι αξιοσημείωτο, σε αντίθεση με το Shewhart \bar{X} διάγραμμα, ότι μια δειγματική τιμή \bar{X} πέρα από τα όρια ελέγχου του \bar{X}/S υποδιαγράμματος στο συνθετικό διάγραμμα δεν δίνει σήμα μιας εκτός ελέγχου διεργασίας. Απλά επισημαίνει ένα μη συμμορφούμενο δείγμα. Μόνον όταν το CRL μεταξύ δυο διαδοχικών μη συμμορφούμενων δειγμάτων είναι μικρότερο ή ίσο με το κάτω όριο ελέγχου L του CRL/S υποδιαγράμματος έχουμε σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας.

Στο συνθετικό διάγραμμα το $ARL_s(d)$ παριστάνει το μέσο αριθμό των δειγμάτων που απαιτούνται για να ανιχνευθεί μια μετατόπιση του μέσου της διεργασίας. Έτσι το $ARL_s(d)$ ουσιαστικά είναι ίσο με το ANS_{CRL} της εξίσωση (6), με τη διαφορά ότι η αναλογία p των μη συμμορφούμενων μονάδων θα πρέπει να αντικατασταθεί από την πιθανότητα $P=1-b$ του \bar{X}/S υποδιαγράμματος στο συνθετικό διάγραμμα. Αυτό συμβαίνει επειδή ένας δειγματικός μέσος \bar{X} στο συνθετικό διάγραμμα αντιστοιχεί σε μια μονάδα στο συνηθισμένο CRL διάγραμμα.

Αυτό το σημείο μπορεί να γίνει καλύτερα κατανοητό αν το Σχήμα 1.1 θεωρηθεί ως ένα συνθετικό διάγραμμα που κάθε κύκλος παριστάνει ένα δείγμα αντί μιας μονάδας. Επομένως, οι άσπροι και οι μαύροι κύκλοι παριστάνουν τους συμμορφούμενους και του μη συμμορφούμενους δειγματικούς μέσους \bar{X} , αντίστοιχα. Στο διάγραμμα για ιδιότητες, το p παριστάνει την πιθανότητα να εμφανιστεί μια μη συμμορφούμενη μονάδα. Στο συνθετικό διάγραμμα, αυτή η πιθανότητα πρέπει να αντικατασταθεί από την πιθανότητα να εμφανιστεί ένας μη συμμορφούμενος δειγματικός μέσος εκτός των ορίων ελέγχου του \bar{X}/S υποδιαγράμματος, δηλαδή με την πιθανότητα ανίχνευσης P του \bar{X}/S υποδιαγράμματος. Συνεπώς σύμφωνα με την εξίσωση (6)

$$ARL_s(d) = \frac{1}{P} \times \frac{1}{1 - (1-P)^L} \quad (8)$$

$$P = 1 - b = 1 - [\Phi(k - d\sqrt{n}) + \Phi(-k - d\sqrt{n})].$$

Από τη στιγμή που ίσες θετικές και αρνητικές μετατοπίσεις στο μέσο θα προκαλέσουν το ίδιο ποσό μεταβολής στην τιμή του P , μόνο θετικές μετατοπίσεις του μέσου θα αναλυθούν. Επιπλέον, δεδομένου ότι το P ποτέ δεν μειώνεται κάτω από την εντός ελέγχου τιμή του, το CRL/S υποδιάγραμμα χρειάζεται ένα χαμηλότερο όριο ελέγχου.

Ιδιαίτερη αναφορά απαιτούν οι επόμενες δύο τιμές του $ARL_s(d)$:

1. $ARL_s(d_d)$: Η μετατόπιση d_d του μέσου παριστάνει τη μετατόπιση “σχεδιασμού” του μέσου, το μέγεθος της οποίας θεωρείται αρκετά μεγάλο ώστε να χειροτερεύσει σοβαρά την ποιότητα των παραγόμενων προϊόντων. Επομένως, η μετατόπιση d_d πρέπει να ανιχνεύεται και να αφαιρείται το συντομότερο δυνατό. Κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού του συνθετικού διαγράμματος το d_d αντιμετωπίζεται ως προδιαγραφή από το χρήστη. Το συνθετικό διάγραμμα σχεδιάζεται έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το $ARL_s(d_d)$.

2. $ARL_s(0) \equiv ARL(0)$: Αν $d = 0$, τότε χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (8) παίρνουμε,

$$ARL(0) = \frac{1}{2\Phi(-k)} \times \frac{1}{1 - [1 - 2\Phi(-k)]^L} \quad (9)$$

Η εξίσωση (9) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καθορίσει τις δύο σχεδιαστικές παραμέτρους k και L για το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου. Αν το $ARL(0)$ έχει τεθεί στη τιμή που καθορίζεται από το χρήστη, τότε κάθε ζεύγος τιμών των k και L που ικανοποιεί την εξίσωση (9) θα οδηγήσει σε ένα συνθετικό διάγραμμα το οποίο μπορεί να καλύψει την απαίτηση για το $ARL(0)$ δηλαδή το προκαθορισμένο ποσοστό των λανθασμένων συναγεργμών. Ο Πίνακας 2.1 δίνει 10 ζεύγη τιμών k και L για ένα παράδειγμα σχεδιασμού στο οποίο είναι καθορισμένα το $ARL(0) = 370$ και το $d_d = 1$. Η τιμή του L αυξάνεται από το 1 μέχρι το 10, και το αντίστοιχο k λαμβάνεται λύνοντας (με αριθμητικές μεθόδους) την εξίσωση (9). Αν και στα 10 ζεύγη τιμών k και L αντιστοιχεί το ίδιο $ARL(0) = 370$, παρατηρούμε ότι αντιστοιχούν διαφορετικές τιμές του $ARL_s(d_d)$. Για το ζεύγος τιμών ($L=4$, $k=2.218$), το $ARL_s(d_d)$ παίρνει την ελάχιστη τιμή του 2.734. Επομένως, ο συνδυασμός $L=4$ και $k=2.218$ αντιπροσωπεύει τον τελικό σχεδιασμό του συνθετικού διαγράμματος.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1

Ζεύγη (L , k) και ARL για $d_d = 1$ και $ARL(0) = 370$ (συνθετικό διάγραμμα $\bar{X} - CRL$)

L	k	$ARL_s(d_d)$
1	1.944	3.676
2	2.088	3.002
3	2.164	2.798
4	2.218	2.734
5	2.263	2.737
6	2.295	2.746
7	2.322	2.773
8	2.349	2.819
9	2.367	2.848
10	2.385	2.887

Ο Πίνακας 2.1 στην πραγματικότητα δείχνει ένα “μονοκόρυφο” πρόβλημα βελτιστοποίησης, στο οποίο ελαχιστοποιείται η αντικειμενική συνάρτηση $ARL_s(d_d)$. Η μοναδική ανεξάρτητη παράμετρος σχεδιασμού είναι η L . Η παράμετρος k είναι συνάρτηση

του L και η τιμή της προκύπτει από την εξίσωση (9). Η βέλτιστη λύση μπορεί να βρεθεί αυξάνοντας συνεχώς το L ξεκινώντας από την τιμή ένα. Από τη στιγμή που η αντικειμενική συνάρτηση είναι μονοκόρυφη (κυρτή), η αναζήτηση της βέλτιστης τιμής του k σταματά όταν το $ARL_S(d_d)$ δεν μπορεί να μειωθεί περαιτέρω. Εκτενείς μελέτες έχουν δείξει ότι το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου είναι ανθεκτικό σε σχέση με την τιμή του L . Για το παράδειγμα στον Πίνακα 2.1, όταν το L παίρνει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ του 3 και του 10, το συνθετικό διάγραμμα δουλεύει σχεδόν το ίδιο καλά όσο το βέλτιστο σχέδιο και είναι πάντα ανώτερο του Shewhart \bar{X} διαγράμματος.

Η ολοκληρωμένη διαδικασία σχεδιασμού του συνθετικού διαγράμματος ελέγχου μπορεί να συνοψιστεί ως ακολούθως:

1. Προσδιορίζουμε τα m , s , n , d_d και $ARL(0)$.
2. Θέτουμε $L = 1$
3. Λύνουμε την εξίσωση (9) ως προς k .
4. Υπολογίζουμε το $ARL_S(d_d)$ χρησιμοποιώντας τις τρέχουσες τιμές των k , L και τις εξισώσεις (8).
5. Αν το $ARL_S(d_d)$ έχει μειωθεί, τότε αυξάνουμε το L κατά 1 μονάδα και πηγαίνουμε πίσω στο βήμα 3. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα.
6. Επιλέγουμε το τελευταίο L και k σαν τελικές τιμές για το συνθετικό διάγραμμα.
7. Χρησιμοποιώντας την τελική τιμή του k , υπολογίζουμε το $LCL_{\bar{X}/S}$ και το $UCL_{\bar{X}/S}$ του \bar{X}/S υποδιαγράμματος χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (7).

2.1.4 Παραδείγματα

Στη συνέχεια δίνουμε τρία παραδείγματα που διαφωτίζουν τη λειτουργία του συνθετικού διαγράμματος ελέγχου.

Παράδειγμα 1

Σε αυτό το παράδειγμα πραγματοποιείται ένα πείραμα παρόμοιο με ένα παραγοντικό σχέδιο. Η παράμετρος $ARL(0)$ έχει τρία επίπεδα και η παράμετρος d_d έχει πέντε επίπεδα (σε όρους s), οδηγώντας σε 15 πιθανούς συνδυασμούς

$$ARL(0) : 200, 370, 500$$

$$d_d : 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$$

Το μέγεθος δείγματος, n , καθορίζεται στο τέσσερα. Οι παράμετροι m και s δεν ορίζονται, αφού δεν έχουν επίδραση στην τιμή του ARL . Για κάθε συνδυασμό $ARL(0)$ και d_d , το αντίστοιχο Shewhart \bar{X} διάγραμμα και το συνθετικό διάγραμμα αναπτύσσονται σύμφωνα με προαναφερθείσες διαδικασίες. Τα $ARL_S(d)$ και $ARL_{\bar{X}}(d)$ υπολογίζονται για 13 διαφορετικές μετατοπίσεις στο μέσο ($d = 0(0.25)3$). Όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου ($d = 0$), το συνθετικό και το Shewhart \bar{X} διάγραμμα είναι σχεδιασμένα ώστε και τα δύο να παράγουν ίδια τιμή $ARL(0)$ που είναι απαραίτητη συνθήκη για να συγκριθούν τιμές του εκτός ελέγχου μήκους ροής δύο ή περισσότερων διαγραμμάτων ελέγχου. Αρκετά ενδιαφέροντα ευρήματα αποκαλύφθηκαν από αυτό το πείραμα (αλλά και από άλλα πειράματα) όπως προκύπτει από τους Πίνακες 2.2 – 2.4.

1. Όταν $d > 0$, το $ARL_S(d)$ είναι πάντα μικρότερο του $ARL_{\bar{X}}(d)$. Αυτό σημαίνει ότι το συνθετικό διάγραμμα μπορεί να ανιχνεύει μετατοπίσεις του μέσου κάθε μεγέθους γρηγορότερα από το Shewhart \bar{X} διάγραμμα ελέγχου. Παρά το γεγονός ότι ο βέλτιστος σχεδιασμός του συνθετικού διαγράμματος βασίστηκε σε μια συγκεκριμένη μετατόπιση του μέσου ($d_d=1$), η υπεροχή του συνθετικού διαγράμματος είναι γεγονός και για τις υπόλοιπες μετατοπίσεις του μέσου.
2. Η βελτίωση στην ισχύ της ανίχνευσης εκτός ελέγχου διεργασίας είναι ουσιώδης για πολλές περιπτώσεις. Ιδιαίτερα, όταν η μετατόπιση του μέσου είναι μεταξύ $0.5s$ και $1.5s$, το $ARL_S(d)$ είναι σχεδόν το μισό του $ARL_{\bar{X}}(d)$.
3. Όταν το $ARL(0)$ είναι μεγάλο, η βελτίωση στην ισχύ της ανίχνευσης εκτός ελέγχου διεργασίας είναι σημαντική. Ένα μεγάλο $ARL(0)$ χρησιμοποιείται όταν ο χειρισμός ενός λανθασμένου συναγερμού είναι χρονοβόρος και δαπανηρός.
4. Όταν η μετατόπιση σχεδιασμού d_d είναι ίση ή μεγαλύτερη από $1.5s$ το βέλτιστο συνθετικό διάγραμμα παραμένει σταθερό. Δηλαδή, ούτε το L , ούτε το k θα αλλάξουν άλλο από τη στιγμή που το d_d ξεπεράσει μια συγκεκριμένη τιμή.
5. Η ανωτερότητα του συνθετικού διαγράμματος σε σχέση με το Shewhart \bar{X} διάγραμμα ελαττώνεται όταν η μετατόπιση του μέσου γίνεται πολύ μεγάλη γιατί η ανίχνευση της μετατόπισης είναι εξαιρετικά εύκολη, ακόμη και για το λιγότερο ισχυρό Shewhart \bar{X} διάγραμμα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.2

Τιμές $ARL(d)$ για το συνθετικό $\bar{X} - CRL$ και το Shewhart \bar{X} διάγραμμα ελέγχου

$$ARL(0) = 200, d_d = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$$

d	\bar{X}	Συνθετικό διάγραμμα ελέγχου				
		$d_d = 0.5$	$d_d = 1.0$	$d_d = 1.5$	$d_d = 2.0$	$d_d = 2.5$
0.00	200.01	200.02	200.00	200.01	200.01	200.01
0.25	90.93	67.53	75.26	81.46	81.46	81.46
0.50	28.21	14.37	16.15	18.60	18.60	18.60
0.75	10.46	5.08	4.98	5.65	5.65	5.65
1.00	4.77	2.68	2.36	2.51	2.51	2.51
1.25	2.64	1.75	1.54	1.55	1.55	1.55
1.50	1.73	1.33	1.22	1.20	1.20	1.20
1.75	1.32	1.14	1.09	1.07	1.07	1.07
2.00	1.13	1.05	1.03	1.02	1.02	1.02
2.25	1.05	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01
2.50	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
2.75	1.00	1.00	1.17	1.00	1.00	1.00
3.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.3

Τιμές $ARL(d)$ για το συνθετικό $\bar{X} - CRL$ και το Shewhart \bar{X} διάγραμμα ελέγχου

$$ARL(0) = 370, d_d = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$$

d	\bar{X}	Συνθετικό διάγραμμα ελέγχου				
		$d_d = 0.5$	$d_d = 1.0$	$d_d = 1.5$	$d_d = 2.0$	$d_d = 2.5$
0.00	370.02	369.98	370.00	370.00	370.00	370.00
0.25	155.08	109.61	122.08	136.81	136.81	136.81
0.50	43.86	20.04	22.62	27.40	27.40	27.40
0.75	14.96	6.43	6.23	7.44	7.44	7.44
1.00	6.30	3.19	2.73	3.00	3.00	3.00
1.25	3.24	1.98	1.70	1.71	1.71	1.71
1.50	2.00	1.44	1.30	1.26	1.26	1.26
1.75	1.45	1.18	1.12	1.09	1.09	1.09
2.00	1.19	1.07	1.04	1.03	1.03	1.03
2.25	1.07	1.02	1.01	1.01	1.01	1.01
2.50	1.02	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
2.75	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
3.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

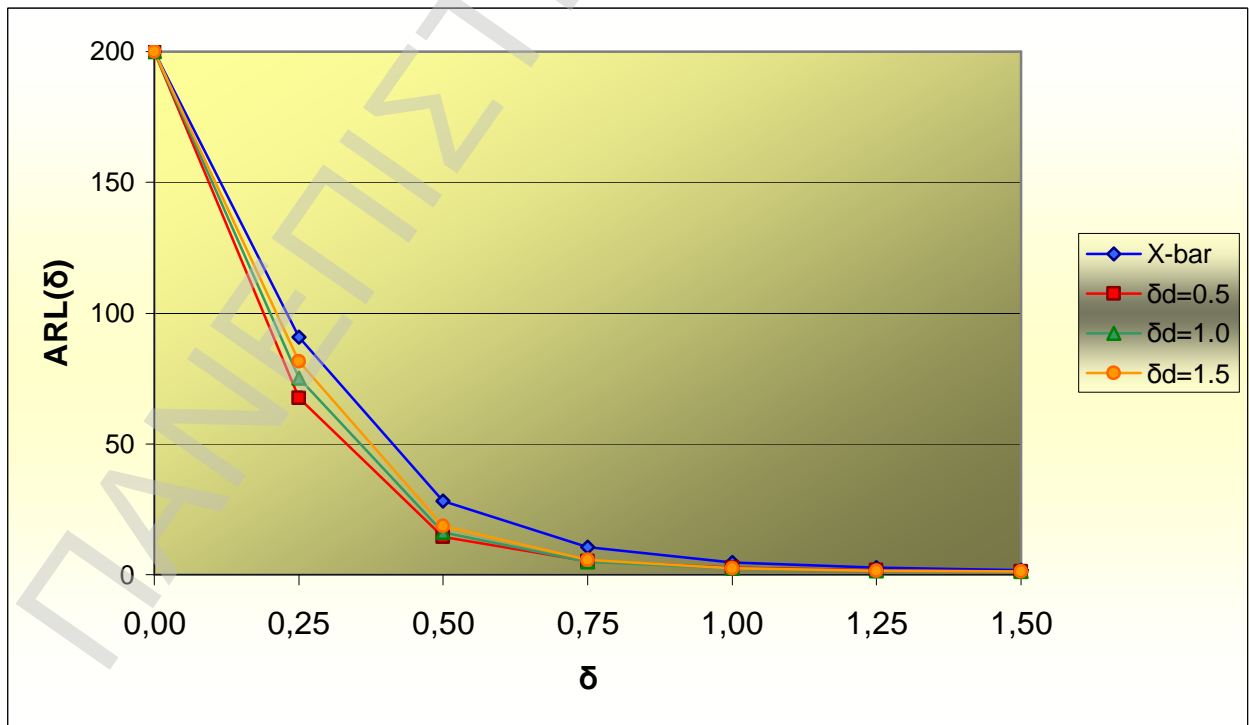
ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4

Τιμές $ARL(d)$ για το συνθετικό $\bar{X} - CRL$ και το Shewhart \bar{X} διάγραμμα ελέγχου
 $ARL(0) = 500, d_d = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$

d	\bar{X}	Συνθετικό διάγραμμα ελέγχου				
		$d_d = 0.5$	$d_d = 1.0$	$d_d = 1.5$	$d_d = 2.0$	$d_d = 2.5$
0.00	500.03	500.04	499.98	499.99	500.02	500.02
0.25	201.58	138.78	158.20	167.86	176.48	176.48
0.50	54.58	23.46	27.26	30.22	33.24	33.24
0.75	17.89	7.27	7.06	7.72	8.54	8.54
1.00	7.26	3.51	2.95	3.05	3.29	3.29
1.25	3.60	2.11	1.77	1.75	1.80	1.80
1.50	2.15	1.50	1.33	1.29	1.29	1.29
1.75	1.52	1.21	1.13	1.11	1.10	1.10
2.00	1.22	1.08	1.05	1.04	1.03	1.03
2.25	1.09	1.03	1.01	1.01	1.01	1.01
2.50	1.03	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
2.75	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
3.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

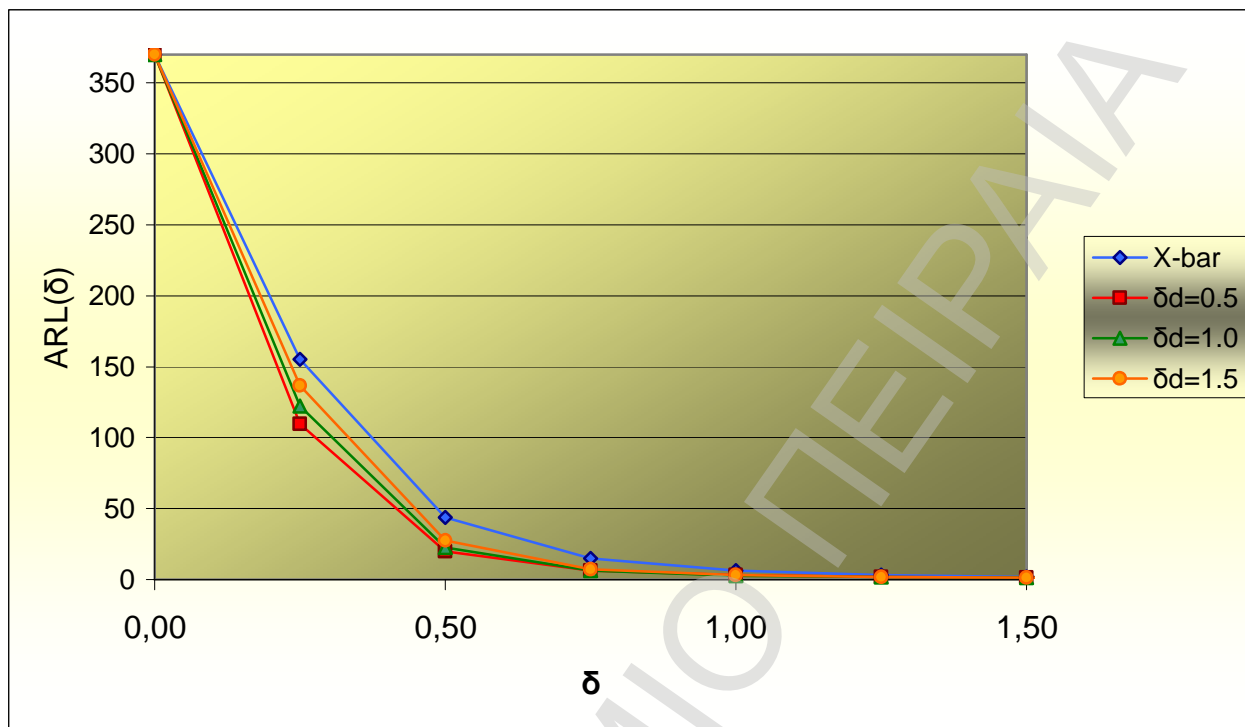
ΣΧΗΜΑ 2.2

Γραφική Παράσταση του $ARL(\delta)$ για $ARL(0) = 200, d_d = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$



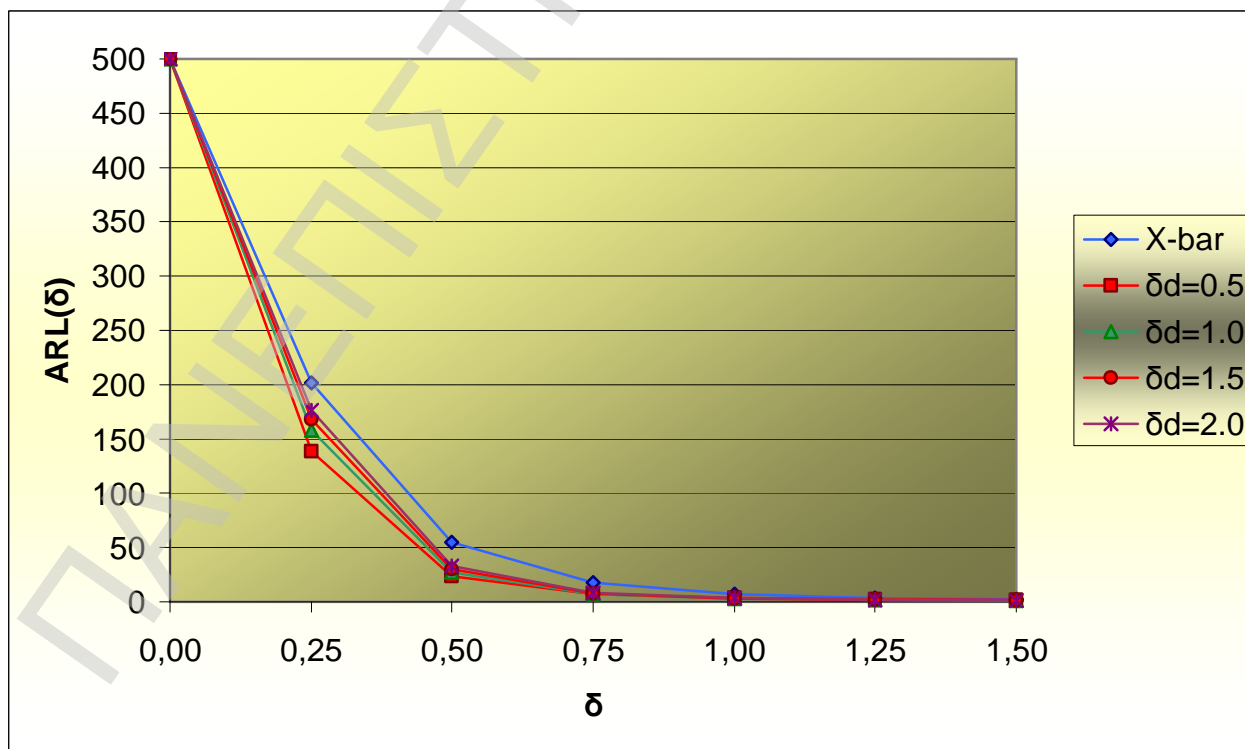
ΣΧΗΜΑ 2.3

Γραφική Παράσταση του $ARL(\delta)$ για $ARL(0) = 370$, $d_d = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$



ΣΧΗΜΑ 2.4

Γραφική Παράσταση του $ARL(\delta)$ για $ARL(0) = 500$, $d_d = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$



Παράδειγμα 2

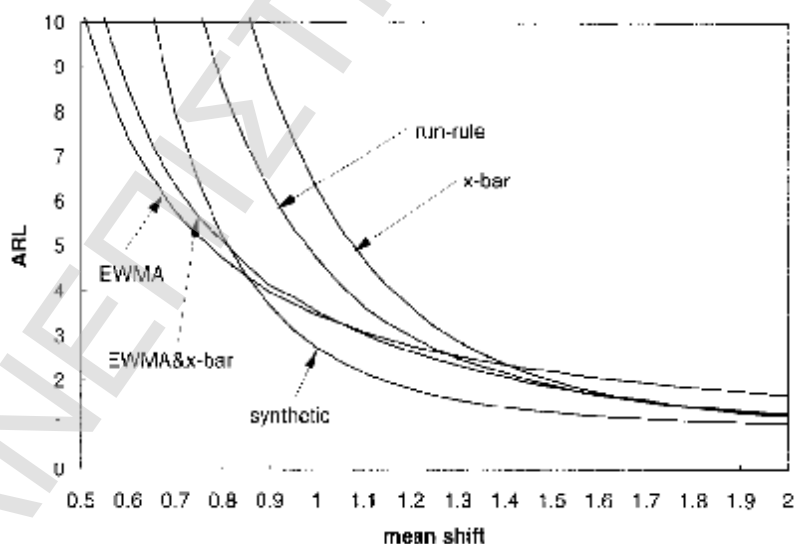
Ας υποθέσουμε ότι ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο $m = 200$ και τυπική απόκλιση $s = 0.02$. Θέλουμε να παρακολουθήσουμε τη μέση τιμή του ποιοτικού χαρακτηριστικού λαμβάνοντας περιοδικά δείγματα μεγέθους $n = 4$. Σκοπεύουμε να χρησιμοποιήσουμε διαγράμματα ελέγχου με $ARL(0)$ ίσο με 370 το οποίο αντιστοιχεί σε ένα Shewhart \bar{X} διάγραμμα ελέγχου με $3s$ όρια ελέγχου. Επιθυμούμε να ανιχνευτεί μετατόπιση του μέσου κατά $1s$ (0.02) όσο το δυνατόν συντομότερα. Συνεπώς, το d_d έχει τεθεί ίσο με 1.

Στο Σχήμα 2.5 δίνονται καμπύλες ARL έναντι του d για τα ακόλουθα πέντε διαγράμματα ελέγχου:

1. Το συνθετικό διάγραμμα.
2. Το Shewhart \bar{X} διάγραμμα.
3. Το Shewhart \bar{X} διάγραμμα εφοδιασμένο με τον 2-από-3 κανόνα ροών.
4. Το EWMA διάγραμμα.
5. Το από κοινού \bar{X} - EWMA διάγραμμα.

ΣΧΗΜΑ 2.5

Καμπύλες ARL για διάφορα διαγράμματα ελέγχου



Ο οριζόντιος άξονας εκτείνεται στην πιο σημαντική ζώνη για το d από $0.5s$ έως $2.0s$. Τα όρια ελέγχου των διαγραμμάτων έχουν ρυθμιστεί κατάλληλα, ώστε η τιμή $ARL(0)$ όλων των διαγραμμάτων να είναι ίση με την καθορισμένη τιμή 370. Ο σταθερός όρος, I , για το

EWMA και το \bar{X} - EWMA διάγραμμα επιλέχθηκε από το συνηθισμένο εύρος $0.5 \leq I \leq 2.5$ έτσι ώστε το $ARL(d_d)$ να ελαχιστοποιείται.

Το Σχήμα 2.5 δηλώνει ότι το ARL που παράγεται από το συνθετικό διάγραμμα είναι πάντα μικρότερο από αυτό που παράγεται από το Shewhart \bar{X} με ή χωρίς πρόσθετους κανόνες ροών. Είναι επίσης φανερό ότι το συνθετικό διάγραμμα ξεπερνάει το EWMA και το από κοινού \bar{X} - EWMA διάγραμμα όταν το d είναι μεγαλύτερο από $0.8S$ περίπου.

Ειδικότερα, όταν το $d = d_d = 1.0S$, έχουμε:

1. $ARL_s = 2.73$
2. $ARL_{\bar{X}} = 6.29$
3. $ARL_{runs\ rules} = 4.73$
4. $ARL_{EWMA} = 3.45$
5. $ARL_{\bar{X}-EWMA} = 3.54$

Το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου είναι πιο αποτελεσματικό από τα άλλα διαγράμματα.

Από το Σχήμα 2.5 προκύπτει ότι όταν το d είναι αρκετά μικρό το συνθετικό διάγραμμα είναι λιγότερο ευαίσθητο από το EWMA και το από κοινού \bar{X} - EWMA διάγραμμα. Παρ' όλα αυτά αυτό μπορεί να μην θεωρηθεί μειονέκτημα του συνθετικού διαγράμματος επειδή συνήθως δεν δίνεται μεγάλη βαρύτητα σε πολύ μικρές μετατοπίσεις του μέσου.

Παράδειγμα 3

Σκοπός αυτού του παραδείγματος είναι να μελετήσει την απόδοση του συνθετικού διαγράμματος όταν οι παράμετροι m και S εκτιμώνται. Εξήντα δείγματα μεγέθους τέσσερα ($n = 4$) παράγονται με Monte Carlo προσομοίωση από την κανονική κατανομή όπως αυτή του Παραδείγματος 2 ($m = 200$ και $S = 0.02$). Από αυτά τα 60 δείγματα, προέκυψε ότι οι εκτιμήσεις του μέσου και της τυπικής απόκλιση του ποιοτικού χαρακτηριστικού είναι οι $\hat{m} = 200.00065$ και $\hat{S} = 0.01930$. Το εντός ελέγχου $ARL(0)$ και η τιμή του d_d έχουν καθοριστεί στην ίδια τιμή όπως στο Παράδειγμα 2 ($ARL(0) = 370$, $d_d = 1$). Ο συντελεστής ορίων ελέγχου k του \bar{X}/S υποδιαγράμματος και το κάτω όριο ελέγχου L του CRL/S υποδιαγράμματος έχουν επίσης τις ίδιες τιμές με το Παράδειγμα 2 ($k = 2.219$, $L = 4$) επειδή αυτές οι δύο παράμετροι εξαρτώνται από τα n , $ARL(0)$ και d_d . Επομένως, τα όρια ελέγχου του \bar{X}/S υποδιαγράμματος μπορούν να καθοριστούν χρησιμοποιώντας την εξίσωση (7).

Έτσι

$$L\hat{C}L_{\bar{x}/s} = \hat{m} - k \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} = 199.97923$$

$$U\hat{C}L_{\bar{x}/s} = \hat{m} + k \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} = 200.02206.$$

Τα παραπάνω όρια είναι ελαφρώς διαφορετικά από τα όρια ελέγχου $LCL_{\bar{x}/s} = 199.97781$ και $UCL_{\bar{x}/s} = 200.02219$ του Παραδείγματος 2, όπου οι παράμετροι m και s είναι υποθετικά γνωστές. Όταν οι παράμετροι εκτιμώνται, το $ARL(d)$ για ένα δεδομένο d υπολογίζεται από τις εξισώσεις (8) ως ακολούθως:

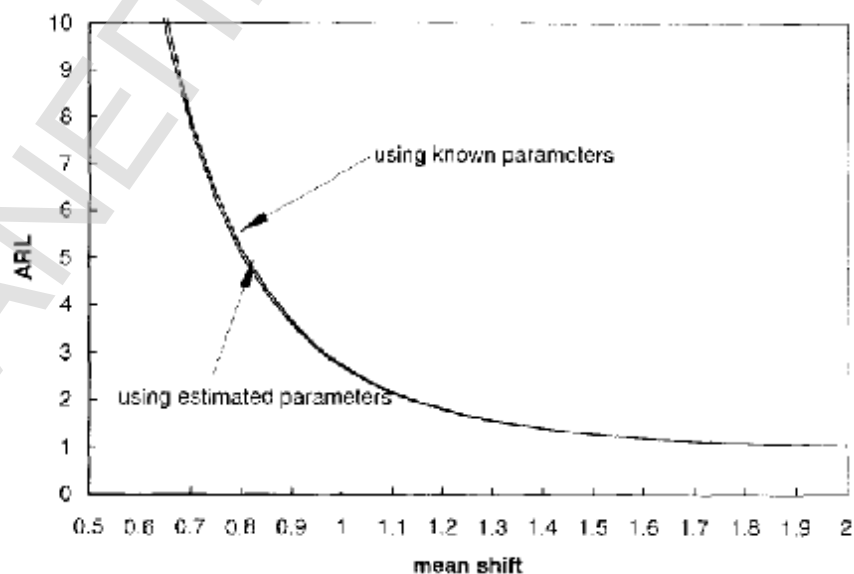
$$ARL(d) = \frac{1}{P} \times \frac{1}{1 - (1 - P)^L},$$

$$P = 1 - \Phi\left(\frac{U\hat{C}L_{\bar{x}/s} - (m + ds)}{s / \sqrt{n}}\right) + \Phi\left(\frac{L\hat{C}L_{\bar{x}/s} - (m + ds)}{s / \sqrt{n}}\right).$$

Το Σχήμα 1.3 παρουσιάζει τις καμπύλες $ARL(d)$ για τα δύο συνθετικά διαγράμματα, ένα εκ των οποίων έχει βασιστεί σε γνωστές παραμέτρους m και s και το άλλο στις εκτιμώμενες παραμέτρους \hat{m} και \hat{s} . Οι δύο καμπύλες σχεδόν συμπίπτουν, το οποίο δείχνει ότι η εκτίμηση των παραμέτρων του διαγράμματος ελέγχου από τα δοκιμαστικά δείγματα δίνει ως αποτέλεσμα ένα συνθετικό διάγραμμα παρόμοιο με εκείνο με γνωστές παραμέτρους.

ΣΧΗΜΑ 2.6

Καμπύλες ARL με χρήση γνωστών και εκτιμώμενων παραμέτρων



2.1.5 Πρόγραμμα σχεδιασμού του συνθετικού διαγράμματος ελέγχου $\bar{X} - CRL$

Τα περισσότερα αποτελέσματα που δόθηκαν στα παραδείγματα της Παραγράφου 2.1.4 προέκυψαν με τη χρήση του προγράμματος SYNTH που αναπτύχθηκε από τους Wu & Spedding (2000). Το πρόγραμμα (αρχείο JQT_32-1) είναι διαθέσιμο στην ιστοσελίδα <http://www.stat.cmu.edu/> ακολουθώντας τη διαδρομή Statlib, Get Software, Journal of Quality Technology Archive, 32-1.

Για τη λειτουργία του προγράμματος απαιτείται ο καθορισμός των ακόλουθων εισερχόμενων παραμέτρων:

mu	Ο εντός ελέγχου μέσος μ της διεργασίας
sigma	Η τυπική απόκλιση σ ($\sigma > 0$) της διεργασίας
n	Το μέγεθος δείγματος n ($n > 0$)
delta	Η μετατόπιση “σχεδιασμού” d_d (σε όρους σ)
ARL(0) ή το alpha	Το εντός ελέγχου ARL(0) ($ARL(0) > 0$) ή το σφάλμα τύπου I a ($0 < a < 1$)

Οι εξερχόμενες μεταβλητές του συνθετικού διαγράμματος ελέγχου είναι οι ακόλουθες:

LCL	Το κάτω όριο ελέγχου του \bar{X}/S υποδιαγράμματος
UCL	Το άνω όριο ελέγχου του \bar{X}/S υποδιαγράμματος
L	Το κάτω όριο ελέγχου του CRL/S υποδιαγράμματος
ARL _s	Το εκτός ελέγχου ARL στο d_d

Επίσης παρέχεται η δυνατότητα να συγκριθούν οι τιμές του ARL_s με τις αντίστοιχες τιμές των διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart \bar{X} και EWMA.

Παράδειγμα 1

Το ακόλουθο παράδειγμα διαφωτίζει τη χρήση του προγράμματος για το σχεδιασμό ενός συνθετικού διαγράμματος ελέγχου στο οποίο είναι γνωστό ότι $m=0$, $s=1.0$ και $n=4$ και είναι καθορισμένο ότι $ARL(0)=370$ και $d_d=0.8$. Η έξοδος του προγράμματος είναι η ακόλουθη:

SYNTHETIC CONTROL CHART DESIGN [1]

INPUT

```

in-control process mean mu          0.000000
process standard deviation sigma     1.000000
sample size n                        4
design mean shift (in terms of sigma) delta 0.800000

```

in-control ARL ARL0 370.00000

OUTPUT

SYNTHETIC CHART

Lower control limit for x-bar sub-chart LCL: -1.160812
Upper control limit for x-bar sub-chart UCL: 1.160812
Lower control limit for CRL sub-chart L: 7
Out-of-control ARL ARLs: 5.016853

XBAR CHART

Lower control limit LCL: -1.499836
Upper control limit UCL: 1.499836

EWMA CHART

Lower control limit LCL: -0.547601
Upper control limit UCL: 0.547601
Constant LAMBDA: 0.250000

p SHIFT	ARL		
	SYNTH	XBAR	EWMA
0.00	370.01	370.02	369.98
0.25	118.66	155.08	41.11
0.50	21.48	43.86	10.25
0.75	6.07	14.96	5.17
1.00	2.78	6.30	3.46
1.25	1.76	3.24	2.65
1.50	1.33	2.00	2.19
1.75	1.14	1.45	1.89
2.00	1.05	1.19	1.67
2.25	1.01	1.07	1.46
2.50	1.00	1.02	1.27
2.75	1.00	1.01	1.13
3.00	1.00	1.00	1.05

Από τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι οι παραγόμενες εντός ελέγχου τιμές *ARL* για τα τρία διαγράμματα (SYNTH, XBAR και EWMA) είναι πολύ κοντά στο προκαθορισμένο $ARL(0) = 370$. Το διάγραμμα Shewhart \bar{X} είναι υποδεέστερο του EWMA όταν το $d \leq 1.25s$ και είναι ανώτερο του τελευταίου όταν $d \geq 1.50s$. Το συνθετικό διάγραμμα είναι πάντα καλύτερο από το διάγραμμα Shewhart \bar{X} και επίσης είναι καλύτερο από το EWMA όταν το $d \geq 1.00s$.

Παράδειγμα 2

Το ακόλουθο παράδειγμα διαφωτίζει το σχεδιασμό ενός συνθετικού διαγράμματος ελέγχου που ανιχνεύει αρνητικές μετατοπίσεις του μέσου. Υποθέτουμε ότι $m=100$, $s=1.0$, $n=6$, $a=0.004$ ($ARL(0)=1/0.004=250$) και $d_d=-1.5s$. Η έξοδος του προγράμματος είναι η ακόλουθη:

SYNTHETIC CONTROL CHART DESIGN

INPUT

```

in-control process mean mu          100.000000
process standard deviation sigma     1.000000
sample size n                        6
design mean shift (in terms of sigma) delta -1.500000
type I error probability alpha       0.004000

```

OUTPUT

SYNTHETIC CHART

```

Lower control limit for x-bar sub-chart LCL: 99.182508
Upper control limit for x-bar sub-chart UCL: 100.817492
Lower control limit for CRL sub-chart L: 2
Out-of-control ARL ARLs: 1.051981

```

XBAR CHART

```

Lower control limit LCL: 98.824995
Upper control limit UCL: 101.175005

```

EWMA CHART

```

Lower control limit LCL: 99.573928
Upper control limit UCL: 100.426072
Constant LAMBDA: 0.250000

```

p SHIFT	ARL		
	SYNTH	XBAR	EWMA
0.00	249.98	250.01	249.96
0.25	69.50	83.52	22.81
0.50	11.71	20.35	6.55
0.75	3.38	6.71	3.64
1.00	1.67	2.99	2.58
1.25	1.19	1.75	2.05
1.50	1.05	1.27	1.73
1.75	1.01	1.09	1.46
2.00	1.00	1.02	1.23
2.25	1.00	1.00	1.09
2.50	1.00	1.00	1.03

2.75	1.00	1.00	1.01
3.00	1.00	1.00	1.00

Σε αυτό το παράδειγμα, το $ARL(0)$ είναι μικρότερο και το n μεγαλύτερο από τα αντίστοιχα στο Παράδειγμα 1. Επομένως, τα όρια ελέγχου για το \bar{X}/S υποδιάγραμμα γίνονται στενότερα. Επιπλέον, οι τιμές του εκτός ελέγχου ARL είναι πολύ μικρότερες σε σύγκριση με αυτές του Παραδείγματος 1. Σε αυτό το παράδειγμα, το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου είναι καλύτερο από το EWMA για $d \geq 0.75s$.

2.1.6 Ανθεκτικότητα του συνθετικού διαγράμματος ελέγχου $\bar{X}-CRL$ στη μη κανονικότητα

Για τη μελέτη της ανθεκτικότητας του συνθετικού διαγράμματος στην περίπτωση που παραβιάζεται η υπόθεση της κανονικότητας των δεδομένων εφαρμόζουμε τα συνθετικά διαγράμματα που αναφέρονται στον Πίνακα 2.5 σε δεδομένα που προέρχονται από μη κανονικές κατανομές (δείτε Calzada & Scariano (2001)).

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.5

Βελτιστοποιημένα συνθετικά διαγράμματα ελέγχου $\bar{X}-CRL$ για $ARL(0) = 370$

d_d	n	L	k
1	4	5	2.2601
1.25	4	3	2.1638
1.5	4	2	2.0846
1	5	4	2.2186
1.25	5	3	2.1638
1.5	5	2	2.0846
1	6	3	2.1638
1.25	6	2	2.0846
1.5	6	2	2.0846

Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιήσαμε t κατανομές (συμμετρικές κατανομές) και Γάμμα κατανομές (λοξές κατανομές). Η κατανομή t με n βαθμούς ελευθερίας (συμβ. t_n) έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f_{t_n}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{pn}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

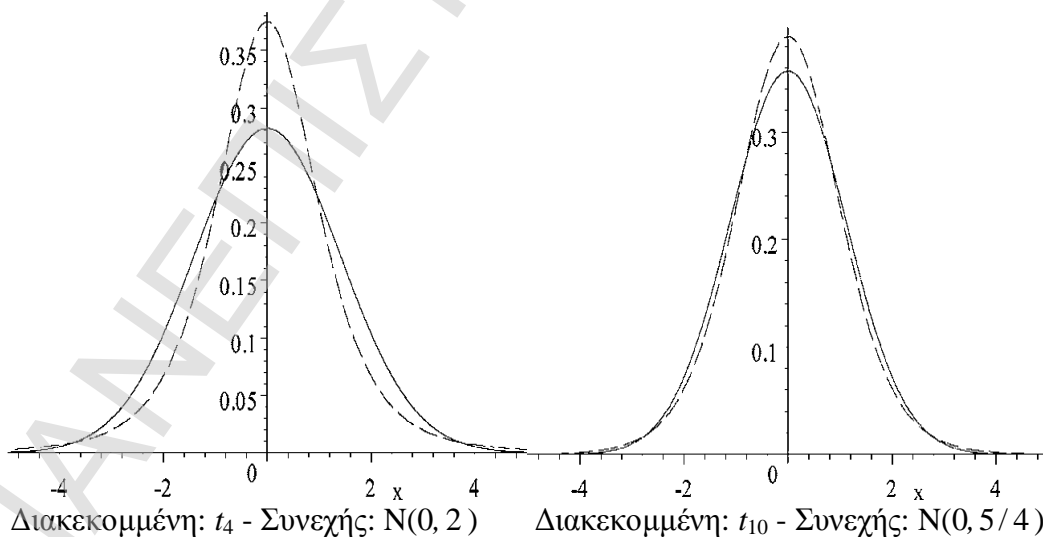
ενώ η κατανομή Γάμμα με παραμέτρους a και b (συμβ. $G(a, b)$) έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

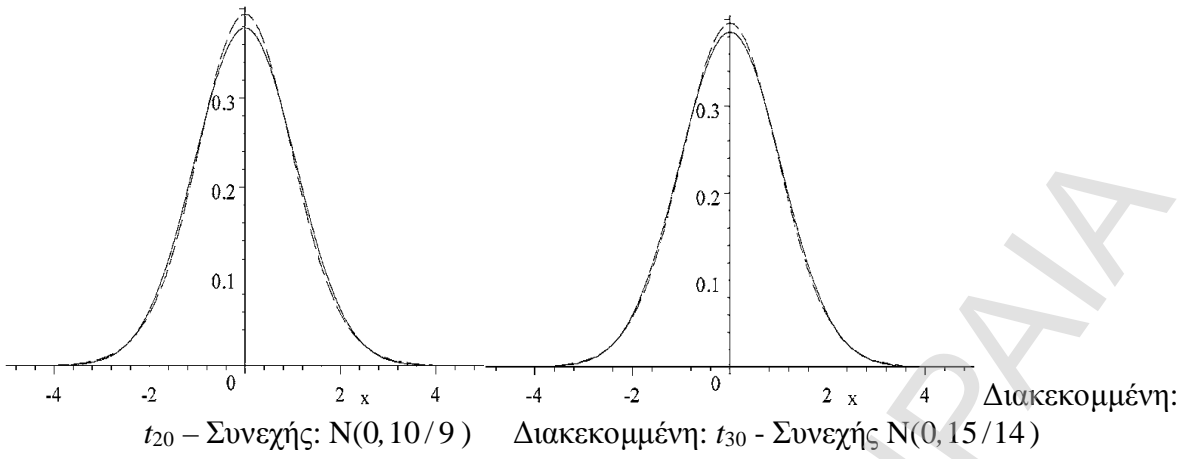
$$f_{G(a,b)}(x) = \frac{1}{b^a \Gamma(a)} x^{a-1} e^{-xb}, \quad x > 0.$$

Ειδικότερα για την κατανομή t_n χρησιμοποιήσαμε τις τιμές 50, 40, 30, 20, 15, 10, 8, 6 και 4 για τους βαθμούς ελευθερίας, και για την κατανομή $G(a, b)$ χρησιμοποιήσαμε τις τιμές $b = 1$ και $a = 0.5, 1, 2, 3$ και 4. Στο Σχήμα 2.7 δίνονται ενδεικτικές γραφικές παραστάσεις για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας διάφορων κατανομών t , ενώ στο Σχήμα 2.8 δίνονται ανάλογες γραφικές παραστάσεις για την κατανομή Γάμμα.

ΣΧΗΜΑ 2.7

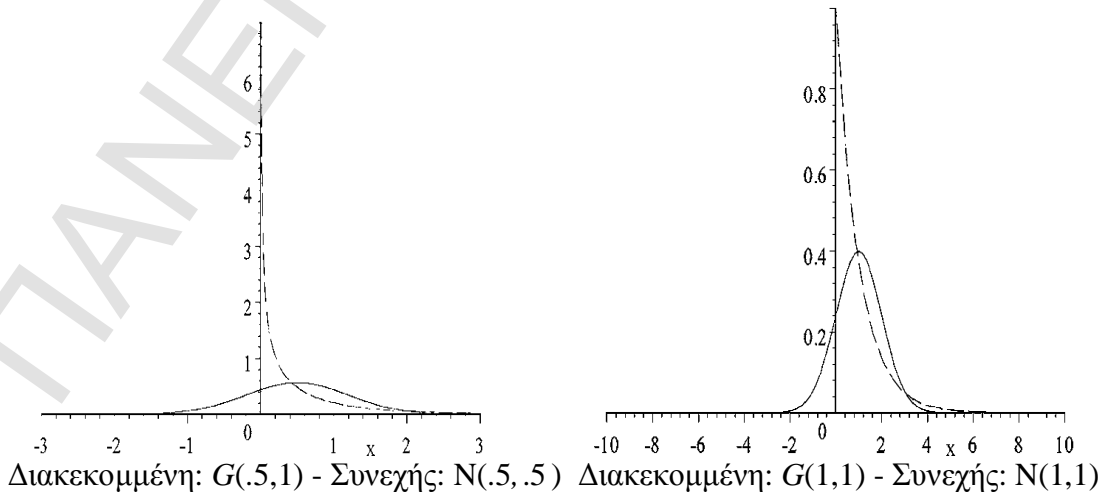
Κατανομές t_n και $N(0, \sigma^2)$ με κοινό μέσο και διακύμανση

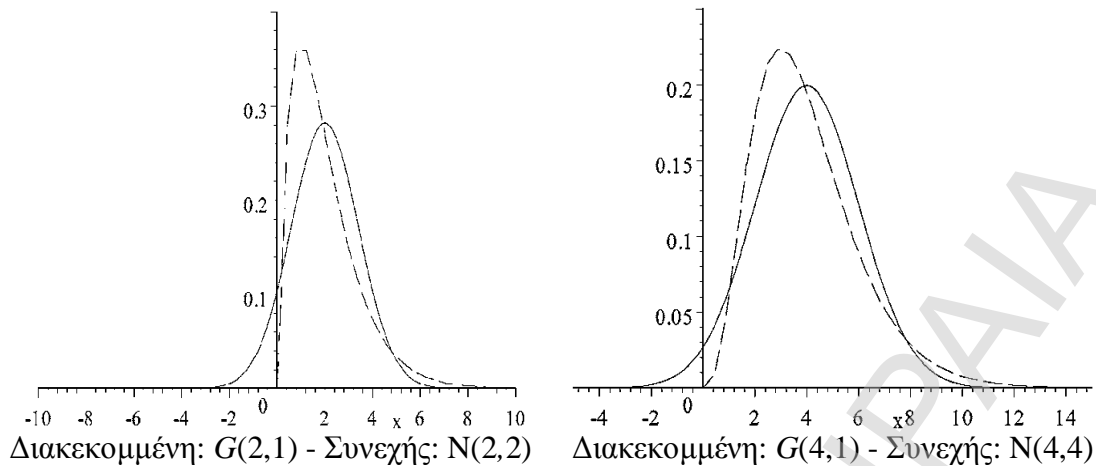




ΣΧΗΜΑ 2.8

Κατανομές $G(a, b)$ και $N(0, s^2)$ με κοινό μέσο και διακύμανση





Ο Πίνακας 2.6 παρουσιάζει εντός ελέγχου τιμές του ARL για τα βελτιστοποιημένα συνθετικά διάγραμμα ελέγχου του Πίνακα 2.5 για δεδομένα από διάφορες κατανομές t . Παρατηρούμε ότι για τα μεγέθη δειγμάτων $n = 4, 5, 6$ και για βαθμούς ελευθερίας 15 ή περισσότερους, το εντός ελέγχου ARL του συνθετικού διαγράμματος είναι περίπου το 90% της «κανονικής» τιμής του 370. Για $n = 4$ και 5 και για βαθμούς ελευθερίας 10 ή λιγότερο, οι τιμές του εντός ελέγχου ARL είναι αρκετά μικρότερες με συνέπεια ο αριθμός των λανθασμένων συναγεργμών σε αυτές τις περιπτώσεις να υπερβαίνουν κατά πολύ τον προσδοκώμενο αριθμό.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.6

Εντός ελέγχου τιμές ARL για τα βελτιστοποιημένα συνθετικά διάγραμμα ελέγχου του Πίνακα 2.5 για δεδομένα από διάφορες κατανομές t

n	4	4	4	5	5	5	6	6	6
d_d	1	1.25	1.5	1	1.25	1.5	1	1.25	1.5
Normal	370.0	370.02	370.0	370.01	370.02	370.00	370.02	370.0	370.00
t_{50}	358.09	359.19	365.66	365.14	364.26	368.32	379.75	369.17	369.17
t_{40}	354.75	358.17	365.01	363.41	363.1	365.63	368.95	372.93	372.93
t_{30}	358.93	368.78	351.72	359.44	361.38	363.78	362.82	371.56	371.56
t_{20}	343.93	350.82	352.92	351.09	351.83	356.42	355.43	364.76	364.76
t_{15}	332.8	342.88	350.56	342.84	345.69	352.97	350.89	357.18	357.18
t_{10}	311.75	325.66	338.49	325.46	333.86	344.81	342.95	350.55	350.55

t_8	295.22	312.56	326.2	312.4	322.11	337.49	328.08	335.21	335.21
t_6	269.88	296.66	315.12	288.39	303.51	321.83	312.54	323.76	323.76
t_4	234.89	270.66	299.55	265.35	285.27	312.61	288.25	313.96	313.96

Στους Πίνακες 2.7-2.9 δίνονται εκτός ελέγχου τιμές *ARL* για τα βελτιστοποιημένα συνθετικά διάγραμμα ελέγχου του Πίνακα 2.5 για διάφορες κατανομές *t* και διάφορες μετατοπίσεις του μέσου από $0.25s$ έως $3s$. Οι τιμές προέκυψαν από ανάλυση προσομοιωμένων δεδομένων. Από τους πίνακες προκύπτει ότι οι τιμές του εκτός ελέγχου *ARL* είναι συγκρίσιμες με αυτές που ισχύουν στην «κανονική» περίπτωση.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.7

(Μέγεθος δείγματος $n = 4$) Εκτός ελέγχου τιμές ARL για τα βελτιστοποιημένα συνθετικά
διάγραμμα ελέγχου του Πίνακα 2.5 για διάφορες κατανομές t

Κατανομή	Μετατόπιση											
	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5	2.75	3.0
Normal	122.88	22.62	6.23	2.73	1.70	1.30	1.12	1.04	1.01	1.00	1.00	1.00
t_{50}	121.49	22.65	6.25	2.74	1.70	1.30	1.12	1.04	1.01	1.01	1.01	1.01
t_{40}	121.19	22.60	6.30	2.74	1.70	1.29	1.12	1.04	1.01	1.01	1.01	1.01
t_{30}	122.00	22.76	6.28	2.73	1.70	1.30	1.12	1.04	1.01	1.01	1.01	1.01
t_{20}	120.35	22.76	6.33	2.75	1.70	1.29	1.12	1.04	1.01	1.01	1.01	1.01
t_{15}	119.82	22.92	6.34	2.75	1.70	1.29	1.12	1.04	1.01	1.01	1.01	1.01
t_{10}	118.33	23.39	6.43	2.76	1.69	1.29	1.12	1.04	1.01	1.01	1.01	1.01
t_8	118.14	23.88	6.51	2.77	1.69	1.29	1.12	1.04	1.01	1.01	1.01	1.01
t_6	114.86	24.76	6.68	2.79	1.68	1.28	1.11	1.04	1.01	1.01	1.01	1.01
t_4	117.01	28.51	7.38	2.84	1.66	1.26	1.10	1.04	1.02	1.01	1.01	1.01
$d_d = 1$												
Normal	130.23	24.97	6.75	2.81	1.67	1.26	1.10	1.03	1.01	1.00	1.00	1.00
t_{50}	128.86	24.99	6.76	2.82	1.66	1.26	1.10	1.03	1.01	1.00	1.00	1.00
t_{40}	128.92	24.99	6.77	2.81	1.66	1.26	1.10	1.03	1.01	1.00	1.00	1.00
t_{30}	128.45	25.07	6.81	2.81	1.66	1.26	1.10	1.03	1.01	1.00	1.00	1.00
t_{20}	128.3	25.26	6.80	2.82	1.66	1.26	1.10	1.03	1.01	1.00	1.00	1.00
t_{15}	128.08	25.52	6.86	2.81	1.66	1.26	1.10	1.03	1.01	1.00	1.00	1.00
t_{10}	128.0	25.84	6.99	2.82	1.66	1.25	1.10	1.03	1.01	1.00	1.00	1.00
t_8	127.97	26.43	7.06	2.83	1.65	1.25	1.10	1.03	1.01	1.00	1.00	1.00
t_6	127.37	27.47	7.27	2.83	1.65	1.24	1.09	1.03	1.01	1.00	1.00	1.00
t_4	133.73	31.77	7.90	2.89	1.61	1.22	1.08	1.03	1.01	1.01	1.00	1.00
$d_d = 1.25$												
Normal	136.81	27.4	7.44	3.00	1.71	1.26	1.09	1.03	1.01	1.00	1.00	1.00
t_{50}	135.31	27.33	7.48	3.00	1.71	1.26	1.09	1.03	1.01	1.00	1.00	1.00
t_{40}	135.53	27.37	7.49	3.01	1.71	1.26	1.09	1.03	1.01	1.00	1.00	1.00
t_{30}	135.53	27.66	7.47	3.00	1.70	1.26	1.09	1.03	1.01	1.00	1.00	1.00
t_{20}	135.62	27.76	7.51	3.01	1.71	1.26	1.09	1.03	1.01	1.00	1.00	1.00
t_{15}	135.81	27.96	7.53	3.00	1.70	1.26	1.09	1.03	1.01	1.00	1.00	1.00
t_{10}	136.58	28.55	7.64	3.00	1.70	1.25	1.09	1.03	1.01	1.00	1.00	1.00
t_8	136.17	28.98	7.76	3.03	1.68	1.25	1.09	1.03	1.01	1.00	1.00	1.00
t_6	138.31	30.08	7.95	3.03	1.67	1.24	1.09	1.03	1.01	1.00	1.00	1.00
t_4	148.03	34.78	8.60	3.04	1.63	1.21	1.08	1.03	1.01	1.01	1.00	1.00
$d_d = 1.5$												

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.8

(Μέγεθος δείγματος $n = 5$) Εκτός ελέγχου τιμές ARL για τα βελτιστοποιημένα συνθετικά
διάγραμμα ελέγχου του Πίνακα 2.5 για διάφορες κατανομές t

Κατανομή	Μετατόπιση											
	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5	2.75	3.0
Normal	102.85	16.61	4.52	2.10	1.40	1.15	1.05	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{50}	101.23	16.56	4.53	2.10	1.40	1.15	1.05	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{40}	101.47	16.64	4.55	2.10	1.40	1.15	1.05	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{30}	101.58	16.59	4.55	2.10	1.40	1.15	1.05	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{20}	101.35	16.78	4.55	2.10	1.40	1.15	1.05	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{15}	101.66	16.91	4.59	2.10	1.40	1.15	1.05	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{10}	101.06	17.21	4.63	2.10	1.39	1.14	1.05	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_8	100.7	17.54	4.64	2.10	1.39	1.14	1.05	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_6	100.15	18.17	4.70	2.10	1.39	1.14	1.05	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_4	106.57	20.45	4.99	2.09	1.36	1.13	1.04	1.02	1.01	1.00	1.00	1.00
$d_d = 1$												
Normal	106.83	17.63	4.72	2.11	1.38	1.13	1.04	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{50}	104.92	17.61	4.74	2.12	1.39	1.13	1.04	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{40}	105.03	17.7	4.75	2.12	1.38	1.13	1.04	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{30}	105.07	17.67	4.75	2.11	1.38	1.13	1.04	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{20}	105.71	17.83	4.75	2.12	1.38	1.13	1.04	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{15}	105.67	17.89	4.77	2.12	1.38	1.13	1.04	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{10}	105.97	18.22	4.8	2.11	1.38	1.13	1.04	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_8	105.5	18.63	4.86	2.11	1.37	1.13	1.04	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_6	107.53	19.16	4.93	2.11	1.37	1.13	1.04	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_4	113.39	21.66	5.17	2.09	1.34	1.11	1.04	1.01	1.01	1.00	1.00	1.00
$d_d = 1.25$												
Normal	113.05	19.44	5.16	2.21	1.39	1.13	1.04	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{50}	111.57	19.33	5.17	2.22	1.39	1.12	1.04	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{40}	111.46	19.43	5.18	2.21	1.39	1.12	1.04	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{30}	111.6	19.49	5.18	2.22	1.39	1.12	1.04	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{20}	111.7	19.57	5.18	2.22	1.39	1.13	1.04	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{15}	112.29	19.75	5.21	2.21	1.38	1.12	1.04	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{10}	112.94	20.08	5.23	2.21	1.38	1.12	1.04	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_8	113.21	20.42	5.29	2.21	1.38	1.12	1.04	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_6	116.32	21.06	5.36	2.19	1.37	1.12	1.04	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
t_4	124.23	23.77	5.61	2.17	1.34	1.11	1.03	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
$d_d = 1.5$												

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.9

(Μέγεθος δείγματος $n = 6$) Εκτός ελέγχου τιμές ARL για τα βελτιστοποιημένα συνθετικά
διάγραμμα ελέγχου του Πίνακα 2.5 για διάφορες κατανομές t

Κατανομή	Μετατόπιση											
	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5	2.75	3.0
Normal	89.11	13.14	3.57	1.73	1.23	1.07	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{50}	88.61	13.14	3.58	1.74	1.23	1.07	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{40}	87.47	13.18	3.59	1.74	1.23	1.07	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{30}	87.92	13.16	3.59	1.73	1.23	1.07	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{20}	88.12	13.23	3.6	1.73	1.23	1.07	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{15}	87.96	13.34	3.6	1.73	1.23	1.07	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{10}	89.01	13.49	3.62	1.73	1.23	1.07	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_8	89.25	13.67	3.64	1.73	1.23	1.07	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_6	89.84	14.03	3.65	1.72	1.22	1.07	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_4	97.08	15.58	3.75	1.69	1.21	1.06	1.02	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
$d_d = 1$												
Normal	94.87	14.51	3.87	1.78	1.23	1.06	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{50}	92.24	14.55	3.87	1.79	1.23	1.06	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{40}	93.61	14.57	3.88	1.8	1.23	1.06	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{30}	93.57	14.65	3.88	1.79	1.23	1.06	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{20}	93.68	14.61	3.89	1.78	1.23	1.06	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{15}	94.18	14.66	3.89	1.78	1.23	1.06	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{10}	94.97	14.88	3.9	1.77	1.23	1.06	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_8	95.49	15.04	3.92	1.77	1.22	1.06	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_6	97.05	15.47	3.94	1.77	1.22	1.06	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_4	106.17	17.12	4.03	1.73	1.20	1.06	1.02	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
$d_d = 1.25$												
Normal	94.87	14.51	3.87	1.78	1.23	1.06	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{50}	92.24	14.55	3.87	1.79	1.23	1.06	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{40}	93.61	14.57	3.88	1.8	1.23	1.06	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{30}	93.57	14.65	3.88	1.79	1.23	1.06	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{20}	93.68	14.61	3.89	1.78	1.23	1.06	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{15}	94.18	14.66	3.89	1.78	1.23	1.06	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_{10}	94.97	14.88	3.9	1.77	1.23	1.06	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_8	95.49	15.04	3.92	1.77	1.22	1.06	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_6	97.05	15.47	3.94	1.77	1.22	1.06	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_4	106.17	17.12	4.03	1.73	1.20	1.06	1.02	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
$d_d = 1.5$												

Ο Πίνακας 2.10 παρουσιάζει εντός ελέγχου τιμές του *ARL* για τα βελτιστοποιημένα συνθετικά διάγραμμα ελέγχου του Πίνακα 2.5 για δεδομένα από διάφορες κατανομές Γάμμα. Παρατηρούμε ότι για $a = 2, 3, 4$ οι εντός ελέγχου τιμές *ARL* του συνθετικού διαγράμματος είναι τουλάχιστον το 86% της «κανονικής» τιμής του 370. Για $n = 6$ και $a = 1, 2, 3$ και 4 οι τιμές του εντός ελέγχου *ARL* υπερβαίνουν σε ποσοστό 93% τουλάχιστον την «κανονική» τιμή ενώ σε ορισμένες περιπτώσεις έχουμε τιμές μεγαλύτερες του 370. Ωστόσο στις ιδιαίτερα «λοξές» περιπτώσεις $a = 0.5$ και $a = 1$ ο ρυθμός των εσφαλμένων συναγερμών είναι σημαντικά μεγαλύτερος από τον «κανονικό» ρυθμό.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.10

Εντός ελέγχου τιμές *ARL* για τα βελτιστοποιημένα συνθετικά διάγραμμα ελέγχου του Πίνακα 2.5 για δεδομένα από διάφορες κατανομές Γάμμα.

n	4	4	4	5	5	5	6	6	6
d_d	1	1.25	1.5	1	1.25	1.5	1	1.25	1.5
Normal	370.0	370.02	370.0	370.01	370.02	370.00	370.02	370.0	370.00
$G(4, 1)$	367.2	397.57	418.34	386.10	395.81	411.92	394.86	400.63	400.84
$G(3, 1)$	352.44	398.17	417.57	369.03	382.32	421.70	392.78	416.69	316.70
$G(2, 1)$	319.82	372.41	417.21	353.51	379.48	415.34	389.16	415.38	415.39
$G(1, 1)$	241.54	302.97	357.04	289.41	326.04	387.44	345.99	400.02	400.16
$G(.5, 1)$	180.74	232.98	286.59	220.22	253.05	307.09	270.29	326.52	326.52

Στους Πίνακες 2.11-2.13 δίνονται εκτός ελέγχου τιμές *ARL* για τα βελτιστοποιημένα συνθετικά διάγραμμα ελέγχου του Πίνακα 2.5 για διάφορες κατανομές Γάμμα και διάφορες μετατοπίσεις του μέσου από $0.25s$ έως $3s$. Από τους πίνακες προκύπτει ότι οι τιμές του εκτός ελέγχου *ARL* είναι συγκρίσιμες με αυτές που ισχύουν στην «κανονική» περίπτωση για μετατοπίσεις του μέσου μεγαλύτερες ή ίσες του $0.5s$. Ωστόσο για μικρές μετατοπίσεις ($0.25s$) είναι σημαντικά μικρότερες από την «κανονική» τιμή.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.11

(Μέγεθος δείγματος $n = 4$) Εκτός ελέγχου τιμές ARL για τα βελτιστοποιημένα συνθετικά
διάγραμμα ελέγχου του Πίνακα 2.5 για διάφορες κατανομές Γάμμα

Κατανομή	Μετατόπιση											
	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5	2.75	3.0
Normal	122.88	22.62	6.23	2.73	1.70	1.30	1.12	1.04	1.01	1.00	1.00	1.00
$G(4, 1)$	84.41	20.87	6.78	3.03	1.80	1.32	1.11	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(3, 1)$	80.32	20.51	6.82	3.07	1.82	1.32	1.10	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(2, 1)$	74.79	20.29	6.98	3.17	1.85	1.32	1.10	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(1, 1)$	66.24	20.32	7.45	3.38	1.92	1.33	1.07	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(.5, 1)$	59.58	20.03	8.26	3.73	2.03	1.33	1.03	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$d_d = 1$												
Normal	130.23	24.97	6.75	2.81	1.67	1.26	1.10	1.03	1.01	1.00	1.00	1.00
$G(4, 1)$	99.59	24.04	7.50	3.16	1.77	1.27	1.08	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(3, 1)$	95.80	23.94	7.70	3.22	1.79	1.27	1.08	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(2, 1)$	90.35	24.09	7.90	3.32	1.81	1.27	1.07	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(1, 1)$	80.61	24.82	8.55	3.56	1.89	1.27	1.05	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(.5, 1)$	75.51	25.71	9.52	3.99	2.01	1.25	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$d_d = 1.25$												
Normal	136.81	27.4	7.44	3.00	1.71	1.26	1.09	1.03	1.01	1.00	1.00	1.00
$G(4, 1)$	112.78	27.48	8.42	3.4	1.81	1.27	1.07	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(3, 1)$	109.14	27.53	8.75	3.46	1.82	1.26	1.06	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(2, 1)$	104.45	27.90	8.94	3.57	1.86	1.26	1.06	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(1, 1)$	98.53	28.40	9.64	3.90	1.94	1.25	1.03	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(.5, 1)$	91.67	30.68	10.96	4.42	2.04	1.22	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$d_d = 1.5$												

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.12

(Μέγεθος δείγματος $n = 4$) Εκτός ελέγχου τιμές ARL για τα βελτιστοποιημένα συνθετικά
διάγραμμα ελέγχου του Πίνακα 2.5 για διάφορες κατανομές Γάμμα

Κατανομή	Μετατόπιση											
	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5	2.75	3.0
Normal	102.85	16.61	4.52	2.10	1.40	1.15	1.05	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(4, 1)$	78.36	16.46	4.99	2.27	1.43	1.14	1.03	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(3, 1)$	75.64	16.35	4.99	2.3	1.45	1.13	1.03	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(2, 1)$	71.24	16.45	5.23	2.34	1.45	1.13	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(1, 1)$	64.53	16.73	5.58	2.45	1.47	1.12	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(.5, 1)$	59.05	17.58	6.17	2.66	1.51	1.08	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$d_d = 1$												
Normal	106.83	17.63	4.72	2.11	1.38	1.13	1.04	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(4, 1)$	85.43	17.85	5.27	2.28	1.42	1.12	1.03	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(3, 1)$	83.18	17.87	5.36	2.33	1.42	1.12	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(2, 1)$	78.81	18.0	5.53	2.38	1.43	1.11	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(1, 1)$	72.20	18.6	5.98	2.49	1.44	1.10	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(.5, 1)$	67.04	19.59	6.59	2.71	1.47	1.06	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$d_d = 1.25$												
Normal	113.05	19.44	5.16	2.21	1.39	1.13	1.04	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(4, 1)$	95.82	20.09	5.87	2.40	1.42	1.11	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(3, 1)$	93.34	20.48	5.94	2.45	1.43	1.11	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(2, 1)$	90.93	20.71	6.14	2.52	1.44	1.10	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(1, 1)$	84.87	21.58	6.65	2.65	1.44	1.08	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(.5, 1)$	80.69	23.06	7.45	2.88	1.45	1.04	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$d_d = 1.5$												

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.13

(Μέγεθος δείγματος $n = 6$) Εκτός ελέγχου τιμές ARL για τα βελτιστοποιημένα συνθετικά
διάγραμμα ελέγχου του Πίνακα 2.5 για διάφορες κατανομές Γάμμα

Κατανομή	Μετατόπιση											
	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5	2.75	3.0
Normal	89.11	13.14	3.57	1.73	1.23	1.07	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(4, 1)$	73.66	13.68	3.96	1.82	1.24	1.05	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(3, 1)$	71.51	13.72	4.01	1.84	1.24	1.05	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(2, 1)$	68.41	13.92	4.16	1.86	1.23	1.05	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(1, 1)$	64.05	14.40	4.39	1.94	1.23	1.03	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(.5, 1)$	60.00	15.38	4.83	2.04	1.22	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$d_d = 1$												
Normal	94.87	14.51	3.87	1.78	1.23	1.06	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(4, 1)$	82.43	15.45	4.33	1.89	1.23	1.05	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(3, 1)$	81.07	15.69	4.39	1.90	1.23	1.04	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(2, 1)$	78.95	15.84	4.52	1.93	1.22	1.04	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(1, 1)$	75.19	16.69	4.83	2.00	1.21	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(.5, 1)$	71.87	17.87	5.41	2.10	1.19	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$d_d = 1.25$												
Normal	94.87	14.51	3.87	1.78	1.23	1.06	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(4, 1)$	82.46	15.46	4.33	1.89	1.22	1.05	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(3, 1)$	81.07	15.70	4.38	1.90	1.23	1.04	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(2, 1)$	78.67	16.04	4.49	1.92	1.23	1.04	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(1, 1)$	75.17	16.68	4.83	2.00	1.21	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$G(.5, 1)$	71.87	17.88	5.41	2.10	1.19	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$d_d = 1.5$												

Συμπερασματικά έχουμε ότι το συνθετικό διάγραμμα είναι αρκετά ανθεκτικό στην παραβίαση της υπόθεσης της κανονικότητας των δεδομένων. Ωστόσο για μεγέθη δειγμάτων μικρότερο του 6 συνιστάται η διερεύνηση της κανονικότητας των δεδομένων. Επίσης η ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων του μέσου της διεργασίας (μικρότερη του $0.8s$) καλό είναι να γίνεται με τη χρήση διαγραμμάτων τύπου *EWMA*.

2.1.7 Συμπεράσματα

Παρουσιάσαμε ένα συνθετικό διάγραμμα ελέγχου βασισμένο στο Shewhart \bar{X} διάγραμμα και το *CRL* διάγραμμα ελέγχου. Ο σχεδιασμός, η αξιολόγηση και η λειτουργία του νέου διαγράμματος έχουν περιγραφεί λεπτομερώς. Δοκιμές απόδοσης έδειξαν ότι το συνθετικό διάγραμμα έχει μεγαλύτερη ισχύ στην ανίχνευσης μετατοπίσεων του μέσου μιας διεργασίας απ' ότι το Shewhart \bar{X} και άλλα διαγράμματα ελέγχου. Η βελτίωση είναι ακόμη πιο σημαντική όταν η μετατόπιση είναι μεταξύ του $0.5s$ και $1.5s$, διάστημα στο οποίο το εκτός ελέγχου *ARL* είναι πιθανό να μειωθεί τουλάχιστον στο μισό σε σχέση με το $ARL_{\bar{X}}$. Το γεγονός ότι αυτό το εύρος είναι συνήθως το πιο σημαντικό στους στατιστικούς ελέγχους διεργασιών κάνει το συνθετικό διάγραμμα πολύτιμο. Επιπλέον, αν χρησιμοποιείται ένα μεγάλο $ARL(0)$ (ίσως λόγω δυσκολιών στο χειρισμό λανθασμένων συναγερμών), η βελτίωση που επιτυγχάνεται με το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου στις τιμές του *ARL* είναι ακόμη πιο αξιόλογη.

Η χρήση του συνθετικού διαγράμματος μπορεί να είναι πιο περίπλοκη από τη χρήση του Shewhart \bar{X} διαγράμματος ελέγχου, παρ' όλα αυτά η ουσιαστική βελτίωση που παρέχει στη δυνατότητα ανίχνευσης μετατοπίσεων του μέσου μιας διεργασίας θα δικαιολογούσε την εφαρμογή του, ειδικά αν χρησιμοποιούνται H/Y στο στατιστικό έλεγχο διεργασιών.

2.2 Συνθετικό διάγραμμα ελέγχου για την ανίχνευση αυξήσεων του αριθμού μη συμμορφούμενων μονάδων μιας διεργασίας

Σκοπός αυτού του μέρους είναι να παρουσιάσουμε ένα συνθετικό διάγραμμα ελέγχου για την ανίχνευση των αυξήσεων της αναλογίας p των μη συμμορφούμενων μονάδων μιας διεργασίας και να περιγράψουμε τη λειτουργία και την απόδοση αυτού του συνθετικού διαγράμματος ελέγχου. Το συνθετικό διάγραμμα που θα παρουσιάσουμε είναι ένας συνδυασμός του np διαγράμματος ελέγχου και του διαγράμματος του συμμορφούμενου μήκους ροής CRL (conforming run length). Ο σχεδιασμός του διαγράμματος παρέχει στον ερευνητή κάποια ελευθερία στη ρύθμιση των παραμέτρων του διαγράμματος ελέγχου έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται ο μέσος χρόνος σήματος για ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας. Αριθμητικές μελέτες δείχνουν ότι το νέο διάγραμμα έχει αυξημένη ισχύ ανίχνευσης αυξήσεων της αναλογίας p των μη συμμορφούμενων μονάδων μιας διεργασίας εν συγκρίσει με το np διάγραμμα ελέγχου και το CRL διάγραμμα ελέγχου. Θα δούμε ότι η βελτίωση στο μέσο χρόνο σήματος είναι σημαντική σε όλες τις περιπτώσεις σε ποσοστό τουλάχιστον 50%. Συνεπώς η εφαρμογή του νέου συνθετικού διαγράμματος μπορεί να ενισχύσει ουσιαστικά την αποτελεσματικότητα του στατιστικού ελέγχου διεργασιών ιδιοτήτων.

2.2.1 Διαγράμματα ελέγχου np και CRL

Το np διάγραμμα ελέγχου έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως στη βιομηχανία για να ελέγξει τον αριθμό d των μη συμμορφούμενων μονάδων σε δείγματα μεγέθους n επιθεωρημένων μονάδων και είναι ένα από τα βασικότερα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart για ιδιότητες. Μια μη συμμορφούμενη μονάδα είναι ένα προϊόν που αποτυγχάνει να καλύψει τουλάχιστον μια προδιαγραφή. Το np διάγραμμα ελέγχου είναι ισοδύναμο με το p διάγραμμα ελέγχου, αλλά είναι ευκολότερο να ερμηνευτεί όταν τα μεγέθη των δειγμάτων είναι σταθερά (Montgomery (1997)). Η παράμετρος p ορίζεται ως η αναλογία του αριθμού μη συμμορφούμενων μονάδων σε έναν πληθυσμό προς το συνολικό αριθμό μονάδων του πληθυσμού.

Στο np διάγραμμα ελέγχου εάν το d σε ένα δείγμα n μονάδων ικανοποιεί τη σχέση: $LCL_{np} \leq d \leq UCL_{np}$, τότε η διεργασία θεωρείται εντός ελέγχου. Εδώ, τα LCL_{np} και UCL_{np} είναι το κάτω και το άνω όριο ελέγχου του np διαγράμματος ελέγχου. Εάν $d < LCL_{np}$, τότε

ανιχνεύεται μια προς τα κάτω μετατόπιση του αριθμού των μη συμμορφούμενων μονάδων, και εάν $d > UCL_{np}$, τότε ανιχνεύεται μια ανοδική μετατόπιση.

Οι βασικές αρχές λειτουργίας ενός CRL διαγράμματος ελέγχου περιγράφηκαν στην Παράγραφο 2.1.2. Εδώ τονίζουμε ότι εάν μια τιμή CRL ικανοποιεί τη σχέση: $LCL_{CRL} \leq CRL \leq UCL_{CRL}$, τότε η διεργασία θεωρείται εντός ελέγχου, όπου LCL_{CRL} και UCL_{CRL} είναι το κάτω και άνω όριο ελέγχου του διαγράμματος CRL. Αν $CRL < LCL_{CRL}$, τότε ανιχνεύεται μια ανοδική μετατόπιση της διεργασίας, ενώ αν $CRL > UCL_{CRL}$, τότε ανιχνεύεται μια προς τα κάτω μετατόπιση της διεργασίας.

Σε αντίθεση με το np διάγραμμα ελέγχου, το κάτω όριο ελέγχου στο διάγραμμα CRL χρησιμοποιείται για να ανιχνεύει ανοδικές μετατοπίσεις, και το άνω όριο ελέγχου χρησιμοποιείται για να ανιχνεύει καθοδικές μετατοπίσεις. Η περιγραφή του διαγράμματος CRL βασίζεται συνήθως στην υπόθεση ότι γίνεται 100% επιθεώρηση των μονάδων, επειδή κάθε μονάδα πρέπει να επιθεωρηθεί και να ταξινομηθεί είτε ως συμμορφούμενη μονάδα είτε ως μη συμμορφούμενη. Η αποτελεσματικότητα ενός διαγράμματος ελέγχου μπορεί να μετρηθεί με το μέσο χρόνο σήματος (ATS, average time to signal). Για τα διαγράμματα ελέγχου για ιδιότητες, το ATS ορίζεται ως ο μέσος αριθμός των μονάδων (προϊόντων) που επιθεωρήθηκαν μέχρις ότου λάβουμε σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας. Όσο μικρότερο είναι το ATS, τόσο νωρίτερα ανιχνεύεται η μετατόπιση της διεργασίας και τόσο αποτελεσματικότερο είναι το διάγραμμα ελέγχου για ιδιότητες που χρησιμοποιούμε.

2.2.2 Το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου np -CRL

Το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου που θα παρουσιάσουμε προτάθηκε από τους Wu & Spedding (2000b) και είναι ένας συνδυασμός των διαδικασιών που χρησιμοποιούνται στα np διαγράμματα ελέγχου και στα CRL διαγράμματα ελέγχου. Αποδεικνύεται ότι το εκτός ελέγχου ATS μπορεί να μειωθεί δραστικά αν σχεδιάσουμε κατάλληλα τις παραμέτρους αυτού του νέου διαγράμματος. Κατά συνέπεια η αποτελεσματικότητα του στατιστικού ελέγχου διεργασιών για ιδιότητες μπορεί να βελτιωθεί. Το προτεινόμενο διάγραμμα σχετίζεται αρκετά με το διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του μέσου μιας διεργασίας (process mean) που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

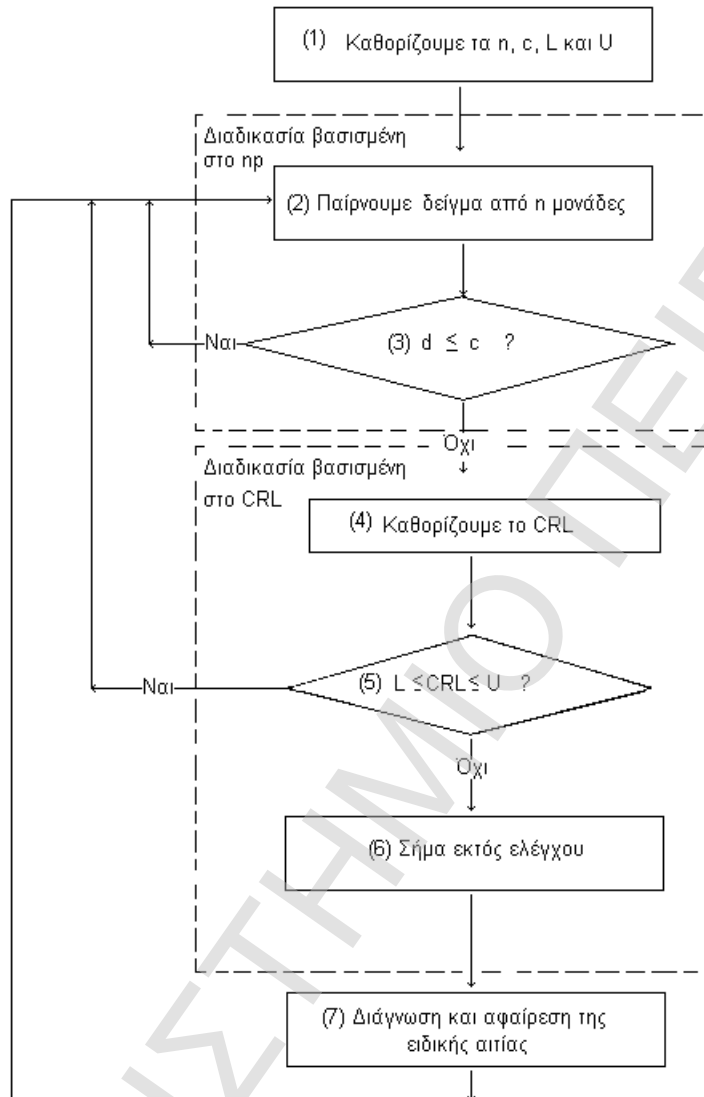
Η παρουσίαση του νέου διαγράμματος είναι βασισμένη στην 100% επιθεώρηση των μονάδων που παράγονται. που είναι μια συνήθης τακτική για ένα διάγραμμα ελέγχου για

ιδιότητες (ειδικά για το διάγραμμα CRL). Εντούτοις, όπως αναφέρεται στο Bourke (1991), η προσέγγιση που θα παρουσιάσουμε μπορεί να εφαρμοστεί εύκολα και στην περίπτωση της μη-100% επιθεώρησης. Σε αυτές τις περιπτώσεις, κάποιος χρησιμοποιεί το συνθετικό διάγραμμα για να ελέγξει τον αριθμό των συμμορφούμενων μονάδων που παρατηρούνται μεταξύ των διαδοχικών μη συμμορφούμενων μονάδων, αγνοώντας τις μονάδες που παράγονται κατά τη διάρκεια των περιόδων μη-επιθεώρησης.

Η λειτουργία του συνθετικού διαγράμματος έχει ως ακολούθως (δείτε επίσης, Σχήμα 2.7):

1. Καθορίζουμε ένα np -βασισμένο αριθμό αποδοχής c (ισοδύναμος με το άνω όριο ελέγχου του np διαγράμματος ελέγχου), το μέγεθος δείγματος n , και το κάτω όριο ελέγχου L του CRL διαγράμματος ελέγχου. Η κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων θα περιγραφτεί αργότερα.
2. Παίρνουμε ένα δείγμα n μονάδων για επιθεώρηση.
3. Εάν ο αριθμός d των μη συμμορφούμενων μονάδων σε αυτό το δείγμα είναι μικρότερος ή ίσος με τον αριθμό αποδοχής c , τότε το δείγμα είναι συμμορφούμενο και το διάγραμμα ροής επιστρέφει στο βήμα (2). Διαφορετικά, το δείγμα είναι ένα μη συμμορφούμενο και το διάγραμμα ροής συνεχίζεται στο επόμενο βήμα.
4. Ελέγχουμε τον αριθμό των δειγμάτων μεταξύ του τρέχοντος και του προηγούμενου μη συμμορφούμενου δείγματος. Αυτός ο αριθμός λαμβάνεται ως μια τιμή CRL του συνθετικού διαγράμματος.
5. Εάν για αυτή την τιμή CRL ικανοποιείται η σχέση $L \leq CRL$ τότε η διαδικασία λέμε ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου και το διάγραμμα ροής επιστρέφει στο βήμα (2). Διαφορετικά, η διεργασία θεωρείται εκτός ελέγχου, και το διάγραμμα ροής συνεχίζεται στο επόμενο βήμα.
6. Εφόσον $CRL < L$, τότε έχουμε ανίχνευση μιας ανοδικής μετατόπισης της αναλογίας p των μη συμμορφούμενων μονάδων.
7. Λαμβάνουμε μέτρα ώστε να βρεθεί και να αφαιρεθεί η ειδική αιτία μεταβλητότητας. Μόλις η διεργασία τεθεί ξανά σε λειτουργία το διάγραμμα ροής επιστρέφει στο βήμα (2).

ΣΧΗΜΑ 2.9 Η λειτουργία του συνθετικού διαγράμματος *np-CRL* για ανίχνευση αυξήσεων του αριθμού των μη συμμορφούμενων μονάδων μιας διεργασίας.



Το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου λειτουργεί με τον ίδιο τρόπο όπως ένα συνηθισμένο διάγραμμα *CRL*, εκτός από το ότι κάθε μονάδα στο διάγραμμα *CRL* αντιστοιχεί σε ένα δείγμα n μονάδων στο συνθετικό διάγραμμα. Σε ένα συμβατικό διάγραμμα *CRL*, η αναλογία p των μη συμμορφούμενων μονάδων είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί μια μη συμμορφούμενη μονάδα. Εντούτοις, στο συνθετικό διάγραμμα παριστάνει την πιθανότητα να εμφανιστεί ένα μη συμμορφούμενο δείγμα.

Πρέπει να σημειωθεί ότι, σε αντίθεση με το σύνηθες *np* διάγραμμα ελέγχου, μια τιμή του d μεγαλύτερη από τον αριθμό αποδοχής c στο συνθετικό διάγραμμα δεν σηματοδοτεί ένα εκτός ελέγχου σήμα. Απλά, το δείγμα χαρακτηρίζεται ως μη συμμορφούμενο. Ένα εκτός

ελέγχου σήμα λαμβάνεται μόνο όταν η τιμή του CRL (αριθμός δειγμάτων μεταξύ δύο διαδοχικών μη συμμορφούμενων δειγμάτων) βρεθεί χαμηλότερη από το CRL όριο ελέγχου L .

Για το σχεδιασμό ενός συνθετικού διαγράμματος ελέγχου προαπαιτείται η γνώση των τιμών των ακόλουθων ποσοτήτων:

1. p_0 : η εντός ελέγχου αναλογία των μη συμμορφούμενων μονάδων.
2. p_1 : η απορριπτέα εκτός ελέγχου αναλογία των μη συμμορφούμενων μονάδων ($p_1 > p_0$)
3. t : η απαιτούμενη ελάχιστη τιμή της εντός ελέγχου τιμής του ATS , δηλαδή του ATS_0 .

Η τιμή p_0 εκτιμάται συνήθως από ιστορικά δεδομένα της διεργασίας. Για τον καθορισμό των p_1 και t βασιζόμαστε σε τυχόν πληροφορίες που έχουμε για τη λειτουργία της διεργασίας. Έτσι η τιμή του p_1 είναι η απορριπτέα αναλογία των μη συμμορφούμενων μονάδων στην οποία αν μετατοπιστεί η διεργασία τότε αυτό θα βλάψει σοβαρά την ποιότητα των προϊόντων που παράγονται, και η τιμή του t αποφασίζεται ανάλογα με την απαίτηση του ρυθμού λανθασμένων συναγεργμών που είμαστε διατεθειμένοι να ανεχτούμε. Το ATS πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο όταν $p = p_1$. Εάν ο χειρισμός λανθασμένου συναγεργμού είναι πολύ δύσκολος, τότε το t πρέπει να είναι μεγάλο. Διαφορετικά, το t μπορεί να τεθεί ίσο με μια χαμηλή τιμή προκειμένου να αυξηθεί η αποτελεσματικότητα του διαγράμματος ελέγχου.

Ο σχεδιασμός του συνθετικού διαγράμματος βασίζεται στο ακόλουθο μοντέλο βελτιστοποίησης:

- Αντικειμενική συνάρτηση: $ATS = \text{ελάχιστο}$
- Περιορισμός: $ATS_0 \geq t$

με δύο παραμέτρους σχεδιασμού, τις n και c . Εδώ, το ATS είναι ο (εκτός ελέγχου) μέσος χρόνος σήματος για $p = p_1$, ATS_0 είναι ο (εντός ελέγχου) μέσος χρόνος σήματος για $p = p_0$, n είναι το μέγεθος δείγματος, και c είναι ο αριθμός αποδοχής της διαδικασίας που βασίζεται στο np διάγραμμα ελέγχου.

Για τη διαδικασία βελτιστοποίησης έχουμε τα ακόλουθα:

Η πιθανότητα Q να βρεθεί ένα μη συμμορφούμενο δείγμα στο συνθετικό διάγραμμα όταν η αναλογία των μη συμμορφούμενων μονάδων είναι p_1 δίνεται από τον τύπο

$$Q = \sum_{i=c+1}^n \binom{n}{i} p_1^i (1-p_1)^{n-i} = 1 - \sum_{i=0}^c \binom{n}{i} p_1^i (1-p_1)^{n-i} \quad (10)$$

αφού ο αριθμός των μη συμμορφούμενων μονάδων σε ένα δείγμα μεγέθους n ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p_1 . Επίσης αφού η κατανομή ενός CRL δείγματος είναι η γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα “επιτυχίας” Q , προκύπτει ότι η μέση τιμή m_{CRL} ενός CRL δείγματος είναι ίση με $1/Q$. Συνεπώς ο μέσος χρόνος σήματος του συνθετικού διαγράμματος ελέγχου (όταν $p = p_1$) ικανοποιεί τη σχέση

$$ATS = \frac{1}{Q} \cdot n \cdot ARL_{CRL} \quad (11)$$

όπου με ARL_{CRL} συμβολίζουμε τον αναμενόμενο αριθμό των CRL δειγμάτων που απαιτούνται για να λάβουμε σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας.

Στην εξίσωση (11), ο πρώτος παράγοντας $1/Q$ προκύπτει από το γεγονός ότι ένα μη συμμορφούμενο δείγμα θα εμφανίζεται κατά μέσο όρο ανά $1/Q$ δείγματα, ο δεύτερος παράγοντας n απεικονίζει το γεγονός ότι κάθε δείγμα έχει n μονάδες και ο τελευταίος παράγοντας ARL_{CRL} απεικονίζει ότι, κατά μέσο όρο, ARL_{CRL} τιμές δειγμάτων του CRL απαιτούνται προκειμένου να ανιχνευθεί μια εκτός ελέγχου διεργασία. Σημειώνουμε ότι η εξίσωση (11) ισχύει για 100% επιθεώρηση των μονάδων που παράγονται. Εάν μόνο ένα μέρος των μονάδων επιθεωρείται, τότε η εξίσωση πρέπει να τροποποιηθεί κατάλληλα. Για παράδειγμα, εάν επιθεωρείται μία μόνο ανά πέντε μονάδες που παράγονται σε μια γραμμή παραγωγής, τότε ο δεύτερος όρος n στην Εξίσωση (11) πρέπει να αντικατασταθεί με το $5n$.

Όμως

$$ARL_{CRL} = \frac{1}{1-b}$$

όπου

$$\begin{aligned} b &= P(CRL \geq L | p = p_1) = 1 - P(CRL < L | p = p_1) \\ &= 1 - F_{CRL}(L-1) = 1 - [1 - (1-Q)^{L-1}] = (1-Q)^{L-1} \end{aligned} \quad (12)$$

αφού η κατανομή του ενός CRL δείγματος είναι η γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα “επιτυχίας” Q . Έτσι

$$ATS = \frac{n}{Q(1-b)} = \frac{n}{Q[1 - (1-Q)^{L-1}]} \quad (13)$$

Με την ίδια λογική έχουμε ότι ο εντός ελέγχου μέσος χρόνος σήματος ATS_0 (για $p = p_0$) προκύπτει από τη σχέση

$$ATS_0 = \frac{n}{Q_0 a} = \frac{n}{Q_0 [1 - (1-Q_0)^{L-1}]} \quad (14)$$

όπου

$$Q_0 = \sum_{i=c+1}^n \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i} = 1 - \sum_{i=0}^c \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i} \quad (15)$$

και

$$a = P(CRL < L | p = p_0) = 1 - (1 - Q_0)^{L-1}. \quad (16)$$

Από την παραπάνω εξίσωση για το a παίρνουμε ότι το CRL όριο ελέγχου L μπορεί να γραφτεί ως

$$L = \frac{\ln(1-a)}{\ln(1-Q_0)} + 1. \quad (17)$$

Επειδή η τιμή του L δεν είναι ακέραια θα πρέπει να στρογγυλοποιηθεί στον πλησιέστερο ακέραιο αριθμό που δεν υπερβαίνει το L προκειμένου να εξασφαλιστεί ότι το ATS_0 δεν είναι μικρότερο από το προκαθορισμένο τ .

Συνοψίζοντας, τα παραπάνω για την αξιολόγηση της αντικειμενικής συνάρτησης ATS , για δεδομένες τιμές των n και c , έχουμε τα ακόλουθα:

1. Οι παράμετροι p_0 , p_1 και τ πρέπει να καθοριστούν.
2. Υπολογίζουμε τη np -βασισμένη πιθανότητα Q_0 να είναι ένα δείγμα μη συμμορφούμενο όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (15).
3. Υπολογίζουμε το σφάλμα τύπου I, a , του CRL διαγράμματος χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (16).
4. Υπολογίστε το CRL όριο ελέγχου L χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (17), και έπειτα το στρογγυλοποιούμε στον πλησιέστερο ακέραιο αριθμό που δεν το υπερβαίνει
5. Υπολογίζουμε τη np -βασισμένη πιθανότητα Q να είναι ένα δείγμα μη συμμορφούμενο όταν η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (10).
6. Υπολογίζουμε το σφάλμα τύπου II, b , του CRL διαγράμματος την Εξίσωση (12).
7. Τελικά, το εκτός ελέγχου ATS υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (13).

Η διαδικασία βελτιστοποίηση πραγματοποιείται σε δύο στάδια. Στο πρώτο (κατώτερο) στάδιο ψάχνουμε τη βέλτιστη τιμή του n αρχίζοντας από την τιμή $n=1$ και αυξάνοντας σταδιακά την τιμή του κατά μία μονάδα κάθε φορά. Για κάθε τιμή του n προσπαθούμε να βρούμε τη βέλτιστη τιμή για τον αριθμό αποδοχής c στο διάστημα $0 \leq c < n$ (αυξάνοντας σταδιακά την τιμή του κατά μία μονάδα). Η αντικειμενική συνάρτηση ATS είναι γενικά κυρτή συνάρτηση του c (όταν το n είναι σταθερό). Το ATS βαίνει μειούμενο αρχικά καθώς το c αυξάνει και από κάποιο σημείο και πέρα αρχίζει να αυξάνεται. Συνεπώς η διαδικασία

βελτιστοποίησης σε σχέση με το c μπορεί να τερματιστεί όταν η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης δεν μπορεί να μειωθεί περαιτέρω σε z διαδοχικές αυξήσεις του c . Από μελέτες έχει προκύψει ότι μια τιμή του z της τάξης του 50 μπορεί εξασφαλίσει το πραγματικό ελάχιστο ATS σε κάθε περίπτωση. Στο δεύτερο (ανώτερο) επίπεδο βελτιστοποίησης του ATS σε σχέση με το n χρησιμοποιούμε και πάλι το γεγονός ότι η αντικειμενική συνάρτηση ATS είναι γενικά κυρτή συνάρτηση του n . Παρόμοια με την βελτιστοποίηση στο πρώτο στάδιο, η διαδικασία βελτιστοποίησης μπορεί να ολοκληρωθεί όταν η αντικειμενική συνάρτηση ATS δεν μπορεί να μειωθεί περαιτέρω σε m διαδοχικές αυξήσεις του n . Για το m συστήνεται η τιμή 50.

2.2.3 Παραδείγματα

Στη συνέχεια δίνουμε δύο παραδείγματα που διαφωτίζουν τη λειτουργία του συνθετικού διαγράμματος ελέγχου.

Παράδειγμα 1

Θα συγκρίνουμε την απόδοση τριών διαγραμμάτων, του np -διαγράμματος ελέγχου, του διαγράμματος ελέγχου CRL , και του προτεινόμενου συνθετικού διαγράμματος για την ανίχνευση των αυξήσεων στην αναλογία των μη συμμορφούμενων μονάδων.

Σε μια διεργασία, ο αριθμός των μη συμμορφούμενων μονάδων, d , ελέγχεται με χρήση ενός np -διαγράμματος ελέγχου βασισμένο στις ακόλουθες προδιαγραφές:

- $p_0 = 0.01$, η εντός ελέγχου αναλογία των μη συμμορφούμενων μονάδων.
- $p_1 = 0.05$, η απορριπτέα εκτός ελέγχου αναλογία των μη συμμορφούμενων μονάδων
- $t = 10000$, η απαιτούμενη ελάχιστη τιμή του ATS_0

Ελαχιστοποιώντας το εκτός ελέγχου ATS για $p_1 = 0.05$ στο np -διάγραμμα ελέγχου προκύπτει οι ακόλουθες βέλτιστες τιμές

$$n = 77, \quad UCL_{np} = 3.$$

Το ATS που προκύπτει από αυτό το βέλτιστο np -διάγραμμα ελέγχου είναι περίπου ίσο με 142 για $p_1 = 0.05$, αφού

$$ATS = n \cdot \frac{1}{1-b} = 142.3 \quad \left(p_1 = 0.05, \quad n = 77, \quad b = \sum_{i=0}^3 \binom{n}{i} p_1^i (1-p_1)^{n-i} \right).$$

Η τιμή του ATS_0 είναι περίπου ίση με 10152, για $p_0 = 0.01$, αφού

$$ATS = n \cdot \frac{1}{a} = 10151.53 \quad (p_0 = 0.01, \quad n = 77, \quad a = \sum_{i=4}^{77} \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i}).$$

Η τιμή του ATS_0 είναι μόνο ελαφρώς μεγαλύτερη από τη καθορισμένη τιμή 10000, και είναι ικανοποιητική, αλλά το ATS θεωρείται αρκετά μεγάλο.

Ένα εναλλακτικό διάγραμμα είναι το CRL διάγραμμα ελέγχου. Το κάτω όριο ελέγχου του καθορίζεται από τον τύπο

$$LCL_{CRL} = \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{t p_0}\right)}{\ln(1-p_0)} + 1.$$

Το LCL_{CRL} πρέπει να στρογγυλοποιηθεί στον πλησιέστερο ακέραιο αριθμό που δεν υπερβαίνει το υπολογισμένο LCL_{CRL} (στρογγυλοποίηση προς τα κάτω). Σε αυτό το παράδειγμα, η τελική τιμή του LCL_{CRL} είναι 2, και το αντίστοιχο ATS_0 είναι ίσο με τη καθορισμένη τιμή 10000. Εντούτοις, το εκτός ελέγχου ATS που προκύπτει από αυτό το CRL διάγραμμα ελέγχου είναι περίπου ίσο με 400 για $p_1 = 0.05$, αφού

$$ATS = \frac{1}{p_1} \times \frac{1}{1 - (1-p_1)^{L-1}} = 400 \quad (p_1 = 0.05, \quad L = 2).$$

Η τιμή του εκτός ελέγχου ATS είναι κατά πολύ χειρότερη έναντι της αντίστοιχης τιμής του np -διαγράμματος ελέγχου (142).

Τέλος, για το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου που περιγράψαμε έχουμε ότι

$$n = 20, \quad c = 1, \quad L = 8.$$

Το ATS που προκύπτει από αυτό το βέλτιστο συνθετικό διάγραμμα ελέγχου είναι περίπου ίσο με 86 για $p_1 = 0.05$, αφού

$$ATS = \frac{n}{Q(1-b)} = \frac{n}{Q[1 - (1-Q)^{L-1}]} = 85.726$$

$$(n = 20, \quad L = 8, \quad p_1 = 0.05, \quad Q = 1 - \sum_{i=0}^1 \binom{n}{i} p_1^i (1-p_1)^{n-i} = 0.264)$$

Η τιμή του ATS_0 είναι περίπου ίση με 10572, για $p_0 = 0.01$, αφού

$$ATS_0 = \frac{n}{Q_0 a} = \frac{n}{Q_0 [1 - (1-Q_0)^{L-1}]} = 10571.96$$

$$(n = 20, \quad L = 8, \quad p_0 = 0.01, \quad Q_0 = 1 - \sum_{i=0}^1 \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i} = 0.01686)$$

Η συχνότητα των λανθασμένων ψεύτικων συναγερμών είναι ικανοποιητική, και η αποτελεσματικότητα του συνθετικού διαγράμματος είναι πολύ καλύτερη σε σχέση με το βέλτιστο np διάγραμμα και το CRL διάγραμμα ελέγχου. Ιδιαίτερα, το εκτός ελέγχου ATS που του συνθετικού διαγράμματος είναι μόνο το 60% από αυτό του βέλτιστου np διαγράμματος.

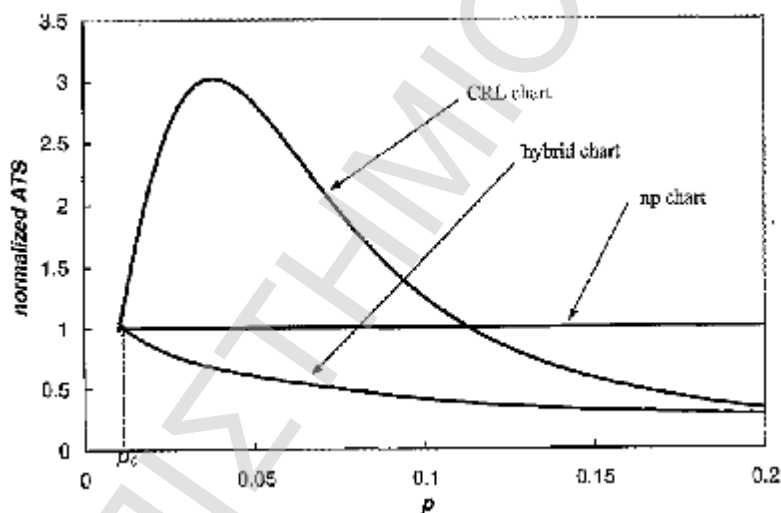
Με τον όρο κανονικοποιημένο (normalized) ATS (συμβολισμός $ATS_{normalized}$) εννοούμε το πηλίκο

$$ATS_{normalized} = \frac{ATS_{chart}}{ATS_{np-chart}}$$

Οι καμπύλες του κανονικοποιημένου ATS έναντι της αναλογίας p για τα τρία διαγράμματα που μελετήσαμε δίνονται στο ακόλουθο σχήμα

ΣΧΗΜΑ 2.10

Καμπύλες κανονικοποιημένων ATS



Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι αν και το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου σχεδιάστηκε για να είναι βέλτιστο για μια συγκεκριμένη τιμή της αναλογίας p των μη συμμορφούμενων μονάδων ($p_1 = 0.05$), εντούτοις είναι καλύτερο για κάθε μετατόπιση του p .

Παράδειγμα 2

Σε αυτό το παράδειγμα πραγματοποιούμε ένα 3^3 παραγοντικό πείραμα. Σκοπός είναι να συγκριθεί η απόδοση του np -διαγράμματος ελέγχου, του διαγράμματος ελέγχου CRL , και του προτεινόμενου συνθετικού διαγράμματος κάτω από διάφορους συνδυασμούς των τιμών

των τριών παραμέτρων εισόδου p_0 , p_1 και t . Κάθε παράμετρος έχει τρία επίπεδα οπότε υπάρχουν συνολικά 27 συνδυασμοί για

- p_0 : 0.01, 0.005, 0.001
- p_1 : $5 p_0$, $20 p_0$, $50 p_0$
- t : $10/p_0$, $50/p_0$, $100/p_0$

Σημειώνουμε ότι το p_1 και το t εκφράζονται μέσω του p_0 . Για τη μελέτη των 27 περιπτώσεων χρησιμοποιήσαμε τη μεθοδολογία που περιγράφηκε στο Παράδειγμα 1. Για παράδειγμα, όταν

$$p_0 = 0.01, \quad p_1 = 5p_0 = 0.05, \quad t = 50/p_0 = 5000$$

Παίρνουμε

np διάγραμμα ελέγχου: $n = 41, UCL_{np} = 2$

$$ATS = 122, \quad ATS_0 = 5106$$

$$\text{Κανονικοποιημένο } ATS = 122/122 = 1$$

CRL διάγραμμα ελέγχου: $LCL_{CRL} = 3$

$$ATS = 205, \quad ATS_0 = 5025$$

$$\text{Κανονικοποιημένο } ATS = 205/122 = 1.68$$

Συνθετικό διάγραμμα ελέγχου: $n = 26, c = 1, L = 8$

$$ATS = 72, \quad ATS_0 = 5250$$

$$\text{Κανονικοποιημένο } ATS = 205/122 = 1.68$$

Στο σύνολο των 27 περιπτώσεων, το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου έχει πάντα το μικρότερο ATS έναντι των άλλων δύο διαγραμμάτων. Για τις 27 περιπτώσεις, το μέσο κανονικοποιημένο ATS καθενός διαγράμματος είναι

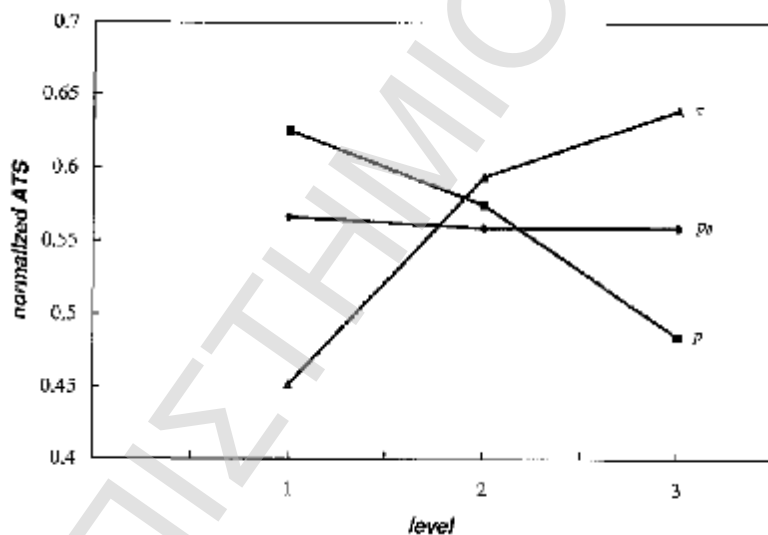
- np διάγραμμα ελέγχου: $ATS_{normalized} = 1$
- CRL διάγραμμα ελέγχου: $ATS_{normalized} = 0.98$
- Συνθετικό διάγραμμα ελέγχου: $ATS_{normalized} = 0.56$

Δεδομένου ότι οι 27 περιπτώσεις είναι μια λογική αντιπροσώπευση διαφορετικών καταστάσεων που αντιμετωπίζονται στην πράξη, μπορεί να προκύψει το συμπέρασμα ότι το συνθετικό διάγραμμα έχει την καλύτερη απόδοση και ότι η μέση απόδοση του διαγράμματος *CRL* και του *np* διαγράμματος είναι σχεδόν η ίδια. Κατά μέσον όρο, το *ATS* του συνθετικού διαγράμματος είναι σχεδόν το μισό από εκείνα των διαγραμμάτων *np* και *CRL*. Πρέπει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση $n=1$ και $c=0$, το συνθετικό διάγραμμα ανάγεται στο διάγραμμα *CRL*.

Οι περιθώριες καμπύλες του κανονικοποιημένου *ATS* (Taguchi (1986)) για το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου για κάθε μια από τις τρεις παραμέτρους εισόδου p_0 , p_1 και t δίνονται στο ακόλουθο σχήμα.

ΣΧΗΜΑ 2.11

Περιθώριες καμπύλες του κανονικοποιημένου *ATS* του συνθετικού διαγράμματος *np-CRL*



Η t -καμπύλη στο παραπάνω σχήμα απεικονίζει την επιρροή της παραμέτρου t στο κανονικοποιημένο *ATS* του συνθετικού διαγράμματος ελέγχου. Η t -καμπύλη καθορίζεται από τρία σημεία. Το πρώτο σημείο (το αριστερό) απεικονίζει το μέσο όρο των κανονικοποιημένων *ATS* τιμών σε εννέα διαφορετικές περιπτώσεις που αντιστοιχούν στους 9 διαφορετικούς συνδυασμούς των p_0 και p_1 για το πρώτο επίπεδο τιμών του t ($t = 10/p_0$). Ομοίως, τα άλλα δύο σημεία στην t -καμπύλη απεικονίζουν τους μέσους όρους των κανονικοποιημένων *ATS* όταν το t παίρνει το δεύτερο και τρίτο επίπεδο τιμών του, αντίστοιχα. Έτσι, εάν εξετάζεται μόνο η παράμετρος t , κατά μέσον όρο, όσο μικρότερη είναι η τιμή του t , τόσο μικρότερο είναι το κανονικοποιημένο *ATS* του συνθετικού διαγράμματος.

Με άλλα λόγια, το συνθετικό διάγραμμα είναι αποτελεσματικότερο (έναντι του np διαγράμματος ελέγχου) όταν το τ είναι μικρό. Ομοίως, από την p -καμπύλη και τη p_0 -καμπύλη, είναι φανερό ότι το συνθετικό διάγραμμα είναι αποτελεσματικότερο όταν το p_1 είναι μεγάλο και η απόδοσή του δεν επηρεάζεται σημαντικά από το p_0 .

2.2.4 Πρόγραμμα σχεδιασμού του συνθετικού διαγράμματος ελέγχου np -CRL

Τα περισσότερα αποτελέσματα που δόθηκαν στα παραδείγματα της Παραγράφου 2.2.3 σχετικά με τα συνθετικά διαγράμματα προέκυψαν με τη χρήση του προγράμματος `a_synth.c` που αναπτύχθηκε από τους Wu & Spedding (2001). Το πρόγραμμα (αρχείο JQT_33-1) είναι διαθέσιμο στην ιστοσελίδα <http://www.stat.cmu.edu/> ακολουθώντας τη διαδρομή Statlib, Get Software, Journal of Quality Technology Archive, 33-1.

Για τη λειτουργία του προγράμματος απαιτείται ο καθορισμός των ακόλουθων εισερχόμενων παραμέτρων:

p_0	Εντός ελέγχου αναλογία των μη συμμορφούμενων μονάδων
p_1	Απορριπτέα εκτός ελέγχου αναλογία των μη συμμορφούμενων μονάδων
t	Η απαιτούμενη ελάχιστη τιμή της εντός ελέγχου τιμής του μέσου χρόνου σήματος ATS_0

Οι εξερχόμενες μεταβλητές του συνθετικού διαγράμματος ελέγχου είναι οι ακόλουθες:

n	Το μέγεθος του δείγματος
c	Ο αριθμός αποδοχής
L	Το κάτω όριο ελέγχου του συνθετικού διαγράμματος
ATS	Ο εκτός ελέγχου μέσος χρόνος σήματος (για $p = p_1$)
ATS_0	Ο εντός ελέγχου μέσος χρόνος σήματος (για $p = p_0$)

Παράδειγμα

Το ακόλουθο παράδειγμα (δείτε Παράδειγμα 1 της Παραγράφου 2.2.3) διαφωτίζει τη χρήση του προγράμματος για το σχεδιασμό ενός συνθετικού διαγράμματος ελέγχου στο οποίο έχει καθοριστεί $p_0 = 0.01$, $p_1 = 0.05$, $t = 10000$. Η έξοδος του προγράμματος είναι η ακόλουθη:

ATTRIBUTE SYNTHETIC CONTROL CHART

DESING 1

INPUT

```
in-control fraction nonconforming  p0:  0.010000
rejectable fraction nonconforming  p1:  0.050000
minimum in-control ATS             tau:  10000
```

OUTPUT

```
Sample size      n:      20
Acceptance number c:      1
Lower control limit L:    8

ATS at p0        ATS0:   10572
ATS at p1        ATS:    86
```

2.2.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το μέρος παρουσιάσαμε τη λειτουργία, το σχεδιασμό και την απόδοση του συνθετικού διαγράμματος ελέγχου που αποτελεί συνδυασμό του np και του CRL διαγράμματος ελέγχου. Ο σχεδιασμός του διαγράμματος παρέχει στον ερευνητή κάποια ελευθερία στην επιλογή των παραμέτρων c , n και L του συνθετικού διαγράμματος ελέγχου έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το εκτός ελέγχου ATS . Από διάφορες αριθμητικές μελέτες και παραδείγματα προκύπτει ότι το νέο διάγραμμα έχει αυξημένη ισχύ ανίχνευσης αυξήσεων της αναλογίας p των μη συμμορφούμενων μονάδων μιας διεργασίας σε σχέση με το np διάγραμμα ελέγχου και το CRL διάγραμμα ελέγχου. Η βελτίωση στο μέσο χρόνο σήματος είναι σημαντική σε όλες τις περιπτώσεις σε ποσοστό τουλάχιστον 50%. Συνεπώς η εφαρμογή του νέου συνθετικού διαγράμματος μπορεί να ενισχύσει ουσιαστικά την αποτελεσματικότητα του στατιστικού ελέγχου διεργασιών ιδιοτήτων. Ωστόσο πρέπει να σημειωθεί ότι τα CUSUM διαγράμματα ελέγχου ιδιοτήτων, όπως εκείνα που προτάθηκαν από τον Lucas (1985) και τους Reynolds & Stoumbos (1999), μπορεί να είναι αποτελεσματικότερα.

Αν και η ανάλυση που παρουσιάσαμε είναι βασισμένη σε 100% επιθεώρηση των μονάδων, το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου μπορεί επίσης να εφαρμοστεί στις περιπτώσεις μη-100% επιθεώρησης εάν υιοθετείται «ομοιόμορφη» δειγματοληψία. Με τον όρο ομοιόμορφη δειγματοληψία εννοούμε επιθεώρηση των μονάδων σε ίσα χρονικά διαστήματα μεταξύ των (από την άποψη του αριθμού των μονάδων).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Συνθετικά διαγράμματα ελέγχου για τον έλεγχο της διασποράς

3.1 Συνθετικό διάγραμμα ελέγχου για τον έλεγχο της διασποράς μιας διεργασίας με τη δειγματική τυπική απόκλιση.

3.1.1 Εισαγωγή

Οι τεχνικές των διαγραμμάτων ελέγχου στον ποιοτικό έλεγχο εστιάζονται κυρίως στην παρακολούθηση των μετατοπίσεων του μέσου της διεργασίας. Διάφορες διαδικασίες, όπως το διάγραμμα Shewhart \bar{X} , το διάγραμμα Shewhart \bar{X} με συμπληρωματικούς κανόνες ροών, το διάγραμμα CUSUM και το διάγραμμα EWMA έχουν προταθεί για αυτόν το λόγο. Εκτός όμως από την ανίχνευση των μετατοπίσεων του μέσου μιας διεργασίας, είναι σημαντικό να ελεγχθούν και οι αλλαγές στη διασπορά της. Οι Collani & Sheil (1989) έδειξαν ότι σε μερικές φάσεις κατασκευής ενός προϊόντος, όπως η ελαττωματική πρώτη ύλη, οι ανειδίκευτοι / απρόσεκτοι χειριστές, και η χαλάρωση των ρυθμίσεων των μηχανών μπορούν να οδηγήσουν σε μια αύξηση της μεταβλητότητας της διεργασίας χωρίς απαραίτητα να επηρεάσουν το επίπεδο του μέσου της διεργασίας. Μια αύξηση στην τυπική απόκλιση της διεργασίας, S , πρέπει να ανιχνευθεί εγκαίρως επειδή έχει σαν αποτέλεσμα η διεργασία να είναι περισσότερο «απλωμένη». Επίσης μια μείωση του S , που έχει σαν αποτέλεσμα η διεργασία να είναι περισσότερο «συγκεντρωμένη», πρέπει να ανιχνεύεται επειδή μπορεί να είναι ένδειξη βελτίωσης της διεργασίας. Η μείωση στη διασπορά της διεργασίας μπορεί να δείξει τους τρόπους για να βελτιωθεί η διεργασία (Lowry, Champ, & Woodall (1995), Nelson (1990)).

Τα διαγράμματα R και S είναι βασικά εργαλεία για να ελέγξουμε τις αλλαγές στη διασπορά της διεργασίας. Και τα δύο διαγράμματα είναι αποτελεσματικά στην ανίχνευση των μεγάλων αλλαγών αλλά γίνονται λιγότερο αποτελεσματικά για τις μικρές αλλαγές επειδή

βασίζονται μόνο στην πιο πρόσφατη παρατήρηση. Διάφορα διαγράμματα διασποράς έχουν προταθεί για να βελτιώσουν αυτή την ανεπάρκεια. Ο Page (1963) πρότεινε ένα μονόπλευρο διάγραμμα CUSUM και ένα διάγραμμα Shewhart με προειδοποιητικά όρια βασισμένα στη στατιστική συνάρτηση του εύρους R για την ανίχνευση αυξήσεων του σ . Ο Alt (1984) πρότεινε τη χρήση διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart S^2 και S . Οι Tuprah & Ncube (1987) επέκτειναν την έρευνα του Page (1963) στα διαγράμματα CUSUM βασισμένα στις στατιστικές συναρτήσεις R και S για διάφορα μεγέθη δειγμάτων. Ο Nelson (1990) πρότεινε έναν κανόνα ροών για το διάγραμμα R για να ανιχνευθεί η μείωση του σ αλλά δεν αξιολόγησε την απόδοσή του. Οι Crowder & Hamilton (1992) πρότειναν ένα μονόπλευρο διάγραμμα EWMA βασισμένο στη στατιστική συνάρτηση $\ln S^2$ για την ανίχνευση αυξήσεων του σ . Οι Chang & Gan (1994) επέκτειναν την έρευνα των Crowder & Hamilton (1992) και πρότειναν ένα μονόπλευρο διάγραμμα EWMA που βασίστηκε στη στατιστική συνάρτηση $\ln S^2$ για την ανίχνευση μειώσεων του σ . Οι Lowry et al. (1995) εφοδίασαν το Shewhart R και S διάγραμμα ελέγχου με κανόνες ροών για να ανιχνεύσουν αυξήσεις και μειώσεις του σ . Οι Chang & Gan (1995) πρότειναν ένα διάγραμμα CUSUM βασισμένο στη στατιστική συνάρτηση $\ln S^2$ για να ανιχνεύσουν αυξήσεις και μειώσεις της τιμής του σ και συζήτησαν το χαρακτηριστικό της άμεσης αρχικής αντίδρασης (*FIR*). Ο Acosta-Mejia (1998) πρότεινε ένα CUSUM διάγραμμα ελέγχου βασισμένο στη στατιστική συνάρτηση R για να ανιχνεύσει τη μείωση του σ και αξιολόγησε την απόδοση του κανόνα ροών του Nelson (1990). Ο Srivastava (1997) και οι Acosta-Mejia et al. (1999), ανεξάρτητα, πρότειναν διαδικασίες CUSUM βασισμένες στον έλεγχο λόγου πιθανοφάνειας για να ανιχνεύσουν αυξήσεις και μειώσεις του σ , και κατέληξαν σε παρόμοια αποτελέσματα. Ο Klein (2000) χρησιμοποίησε τροποποιημένο Shewhart S διάγραμμα ελέγχου που δίνει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας όταν δύο διαδοχικά σημεία του διαγράμματος βρεθούν εκτός των ορίων ελέγχου για να βελτιώσει την ανίχνευση μικρών αλλαγών στην τιμή του σ . Επίσης μια συνήθης τακτική για την βελτίωση της απόδοσης των διαγραμμάτων ελέγχου είναι η χρησιμοποίηση μεταβλητού διαστήματος δειγματοληψίας (*VSI*, variable sampling interval). Τα σχέδια *VSI* προσαρμόζουν το διάστημα δειγματοληψίας μεταξύ δύο δειγμάτων ανάλογα με αυτό που παρατηρήθηκε στο προηγούμενο δείγμα. Μια περιεκτική έρευνα για αυτά τα σχέδια έχει πραγματοποιηθεί από τον Tagaras (1998).

Στην παρούσα παράγραφο παρουσιάζεται η έρευνα των Huang & Chen (2005) οι οποίοι ανέπτυξαν ένα συνθετικό διάγραμμα βασισμένο στη δειγματική τυπική απόκλιση S για την ανίχνευση μετατοπίσεων του σ . Επίσης θα μελετηθεί το αντίστοιχο σχέδιο *VSI*. Το

συνθετικό διάγραμμα είναι ένας συνδυασμός του διαγράμματος της δειγματικής τυπικής απόκλισης S και του CRL διαγράμματος ελέγχου. Η λειτουργία, ο σχεδιασμός και η απόδοση του νέου διαγράμματος θα περιγραφούν αναλυτικά. Θα δοθούν επίσης ARL συγκρίσεις μεταξύ του νέου διαγράμματος και άλλων ανταγωνιστικών διαγραμμάτων ελέγχου. Από τη μελέτη του συνθετικού διαγράμματος προκύπτει ότι αποτελεί μια καλή εναλλακτική λύση για τον έλεγχο της διασποράς μιας διεργασίας. Η χρησιμοποίηση μεταβλητού διαστήματος δειγματοληψίας στο συνθετικό διάγραμμα ενισχύει σημαντικά την απόδοση του διαγράμματος. Επίσης δίνονται και παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου.

3.1.2 S και CRL διάγραμμα ελέγχου

Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή των παρατηρήσεων που παίρνουμε από τη διεργασία είναι η κανονική κατανομή με μέση τιμή m και τυπική απόκλιση ds_0 . Από τη διεργασία επιλέγουμε τυχαία δείγματα μεγέθους n και έστω $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ το δείγμα που πήραμε στην i -οστή δειγματοληψία ($i = 1, 2, \dots$). Η δειγματική μέση τιμή, \bar{X}_i , και η δειγματική τυπική απόκλιση, S_i , του δείγματος υπολογίζονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις

$$\bar{X}_i = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}}{n}, \quad S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}.$$

Όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου έχουμε ότι $d = 1$. Όταν η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, το $d > 1$ δηλώνει μια αύξηση του s και απαιτείται ένα άνω όριο ελέγχου k^+s_0 για το S διάγραμμα. Αν $S_i > k^+s_0$ έχουμε ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας που οφείλεται πιθανόν σε αύξηση του s . Όταν η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, το $d < 1$ δηλώνει μια μείωση του s και απαιτείται ένα κάτω όριο ελέγχου k^-s_0 για το S διάγραμμα. Σε αυτή την περίπτωση, αν $S_i < k^-s_0$ έχουμε ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας που οφείλεται πιθανόν σε μείωση του s . Το ARL_s , το οποίο δηλώνει το μέσο αριθμό των S δειγμάτων που απαιτούνται για να ανιχνευτεί μια αλλαγή στην τιμή του s από το S διάγραμμα, για $d > 1$ και $d < 1$, μπορούν να υπολογιστούν αντίστοιχα ως ακολούθως:

- Όταν $d > 1$

$$P(S > k^+s_0 | s = ds_0) = P\left(c_{n-1}^2 > (n-1)\left(\frac{k^+}{d}\right)^2\right) = 1 - F\left((n-1)\left(\frac{k^+}{d}\right)^2\right) \quad (18)$$

$$ARL_S = \frac{1}{1 - F\left((n-1)\left(\frac{k^+}{d}\right)^2\right)} \quad (19)$$

- Όταν $d < 1$

$$P(S < k^- s_0 | S = d s_0) = P\left(c_{n-1}^2 < (n-1)\left(\frac{k^-}{d}\right)^2\right) = F\left((n-1)\left(\frac{k^-}{d}\right)^2\right) \quad (20)$$

$$ARL_S = \frac{1}{F\left((n-1)\left(\frac{k^-}{d}\right)^2\right)} \quad (21)$$

Οι εξισώσεις (18) και (20) παριστάνουν την πιθανότητα του να βρεθεί η στατιστική συνάρτηση S_i στο S διάγραμμα ελέγχου εκτός των ορίων ελέγχου του για $d > 1$ και $d < 1$, αντίστοιχα. Στους παραπάνω τύπους η συνάρτηση $F(\cdot)$ δηλώνει την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της κατανομής χ^2 τετράγωνο με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας (c_{n-1}^2).

Υπενθυμίζουμε ότι το CRL δηλώνει το συμμορφούμενο μήκος ροής, που είναι ο αριθμός των μονάδων μεταξύ δύο διαδοχικών μη συμμορφούμενων μονάδων (συμπεριλαμβανομένης της τελικής μη συμμορφούμενης μονάδας). Το Σχήμα 3.1 απεικονίζει τρία δείγματα CRL ίσα με 3, 5 και 4 κατά σειρά. Η ιδέα αυτού του διαγράμματος είναι ότι η κατανομή των CRL αλλάζει με το p (το p δηλώνει την αναλογία των μη συμμορφούμενων μονάδων σε μια διεργασία), δηλαδή η αναμενόμενη τιμή του CRL μειώνεται καθώς αυξάνεται το p και αυξάνεται καθώς το p μειώνεται.

ΣΧΗΜΑ

3.1 Συμμορφούμενο μήκος ροής.



- συμμορφούμενη μονάδα
- μη συμμορφούμενη μονάδα

Υπενθυμίζουμε επίσης ότι η αναμενόμενη τιμή $E(CRL)$ και η αθροιστική συνάρτηση κατανομής του $G(\cdot)$ δίνονται από τους τύπους

$$E(CRL) = \frac{1}{p} \quad (22)$$

$$G(CRL) = 1 - (1 - p)^{CRL}, \quad CRL = 1, 2, \dots \quad (23)$$

Στην περίπτωση της ανίχνευσης αυξήσεων του p , μόνο ένα κάτω όριο ελέγχου L απαιτείται για το διάγραμμα CRL , δηλαδή τα CRL διαγράμματα δίνουν σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας εάν $CRL < L$. Το ARL_{CRL} , το οποίο δείχνει το μέσο αριθμό των CRL δειγμάτων που απαιτούνται για να ανιχνευθεί μια αύξηση του p δίνεται από τον τύπο

$$ARL_{CRL} = \frac{1}{G(L-1)} = \frac{1}{1 - (1-p)^{L-1}} \quad (24)$$

Ο μέσος αριθμός επιθεωρημένων μονάδων ANI (average number inspected) που απαιτούνται για να ανιχνευθεί μια αλλαγή του p από το διάγραμμα CRL είναι ίσο με το γινόμενο των εξισώσεων (5) και (7), δηλαδή

$$ANI = E(CRL) \times ARL_{CRL} = \frac{1}{p} \times \frac{1}{1 - (1-p)^{L-1}} \quad (25)$$

3.1.3 Το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου $S - CRL$

Το συνθετικό διάγραμμα αποτελεί ένα συνδυασμό του διαγράμματος S και του διαγράμματος CRL . Το διάγραμμα προσπαθεί να παρακολουθήσει τη διασπορά μιας διεργασίας που κατανέμεται κανονικά. Τα ακόλουθα βήματα περιγράφουν τη λειτουργία του συνθετικού διαγράμματος ελέγχου

1. Καθορίζουμε το όριο ελέγχου του διαγράμματος S (ένα άνω όριο ελέγχου k^+s_0 , όταν $d > 1$, ένα κάτω όριο ελέγχου k^-s_0 όταν $d < 1$), το μέγεθος n των δειγμάτων του διαγράμματος S και το κάτω όριο ελέγχου L του CRL διαγράμματος. Ο σχεδιασμός των παραμέτρων του διαγράμματος k^+ (ή k^-) και L θα περιγραφούν αργότερα.
2. Παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n σε κάθε σημείο επιθεώρησης και υπολογίζουμε τη στατιστική συνάρτηση S που απεικονίζεται στο διάγραμμα S .
3. Εάν $S \leq k^+s_0$ όταν $d > 1$ (ή $S \geq k^-s_0$ όταν $d < 1$), τότε αυτό το δείγμα θεωρείται συμμορφούμενη μονάδα στο διάγραμμα CRL , και η ροή ελέγχου επιστρέφει στο βήμα (2).

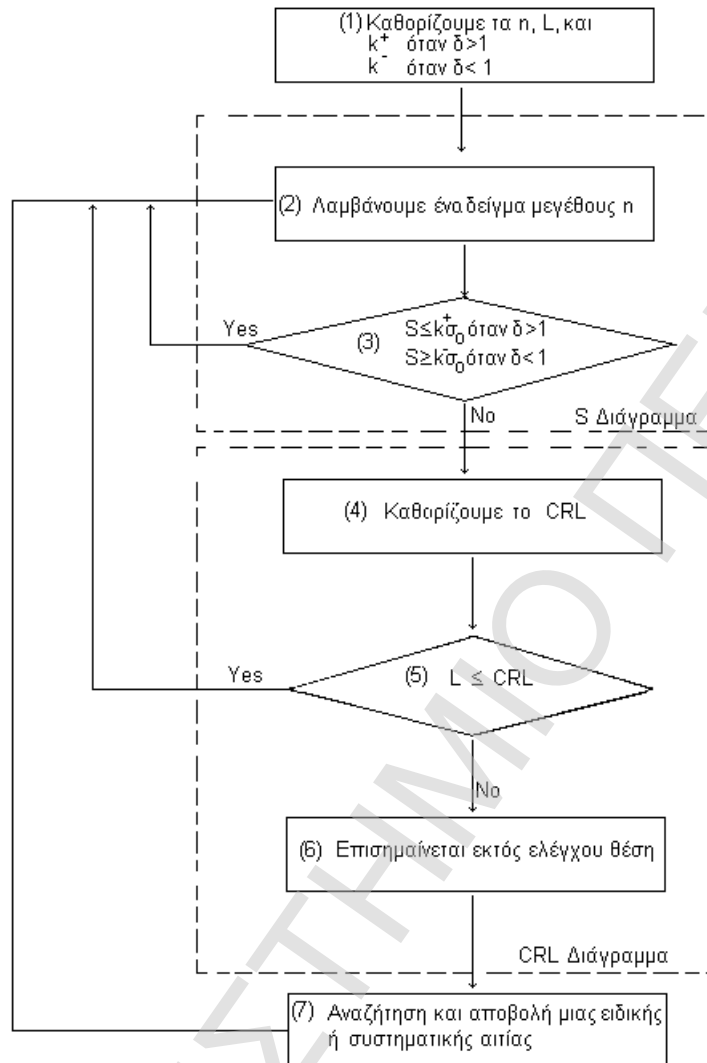
Διαφορετικά, το δείγμα θεωρείται μια μη συμμορφούμενη μονάδα, και η ροή ελέγχου προχωράει στο επόμενο βήμα.

4. Ελέγχουμε τον αριθμό των S δειγμάτων μεταξύ του τρέχοντος και του τελευταίου μη συμμορφούμενου δείγματος. Αυτός ο αριθμός λαμβάνεται ως ένα δείγμα CRL του διαγράμματος CRL .
5. Εάν $L \leq CRL$, η διεργασία θεωρείται εντός ελέγχου, και η ροή ελέγχου πηγαίνει πίσω στο βήμα (2). Διαφορετικά, η διεργασία θεωρείται εκτός ελέγχου και η ροή ελέγχου προχωράει στο επόμενο βήμα.
6. Στέλνουμε σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας.
7. Η ειδική αιτία μεταβλητότητας πρέπει να ερευνηθεί και να απομακρυνθεί.

Η ροή ελέγχου του συνθετικού διαγράμματος απεικονίζεται στο Σχήμα 3.2.

ΣΧΗΜΑ 3.2

Η λειτουργία του συνθετικού διαγράμματος $S - CRL$ για τον έλεγχο της διασποράς μιας διεργασίας.



Τα βήματα (2) και (3), και (4) - (6) είναι βασισμένα στο διάγραμμα S και το διάγραμμα CRL , αντίστοιχα. Βασικά, η λειτουργία του συνθετικού διαγράμματος για τον έλεγχο της διασποράς της διεργασίας είναι παρόμοια με αυτήν του συνθετικού διαγράμματος ελέγχου για τον έλεγχο του μέσου της διεργασίας (δείτε Wu & Spedding (2000a)), με τη διαφορά ότι το 200a διάγραμμα Shewhart \bar{X} έχει αντικατασταθεί από το διάγραμμα Shewhart S . Επίσης το σύνηθες διάγραμμα CRL διαφέρει από το νέο διάγραμμα CRL στο ότι κάθε επιθεωρημένη μονάδα στο διάγραμμα CRL αντικαθίσταται από ένα δείγμα μεγέθους n στο διάγραμμα S στο νέο διάγραμμα CRL . Η πιθανότητα να βρεθεί η στατιστική συνάρτησης S εκτός του διαγράμματος ελέγχου S αντιστοιχεί στη μη συμμορφούμενη αναλογία p στο σύνηθες διάγραμμα CRL . Μόνο ένα κάτω όριο ελέγχου απαιτείται για το διάγραμμα CRL στα πλαίσια

του συνθετικού διαγράμματος επειδή η πιθανότητα που προκύπτει όταν $S = dS_0$ ($d > 1$ ή $d < 1$) είναι πάντα μεγαλύτερη από εκείνη που προκύπτει όταν $S = S_0$.

Έστω N_S ο αριθμός των S δειγμάτων που απαιτούνται για να βρεθεί ένα δείγμα εκτός των ορίων ελέγχου στο διάγραμμα S , και N_{CRL} ο αριθμός των CRL δειγμάτων που απαιτούνται για να βρεθεί ένα δείγμα εκτός των ορίων ελέγχου στο διάγραμμα CRL . Το μέσο μήκος ροής ARL του συνθετικού διαγράμματος, το οποίο δηλώνει το μέσο αριθμό των S δειγμάτων που απαιτούνται για να ανιχνευτεί μια αλλαγή στην τιμή του S στο συνθετικό διάγραμμα ελέγχου για $d > 1$ και $d < 1$ μπορεί, αντίστοιχα, να υπολογιστεί με την αντικατάσταση του p στην εξίσωση (8) με την πιθανότητα των εξισώσεων (18) και (20). Έτσι

- Όταν $d > 1$

$$ARL = E(N_S)E(N_{CRL}) = \frac{1}{1 - F\left((n-1)\left(\frac{k^+}{d}\right)^2\right)} \times \frac{1}{F\left((n-1)\left(\frac{k^+}{d}\right)^2\right)^{L-1}} \quad (26)$$

- Όταν $d < 1$

$$ARL = E(N_S)E(N_{CRL}) = \frac{1}{1 - F\left((n-1)\left(\frac{k^-}{d}\right)^2\right)} \times \frac{1}{1 - \left[1 - F\left((n-1)\left(\frac{k^-}{d}\right)^2\right)\right]^{L-1}} \quad (27)$$

Ο σχεδιασμός ενός συνθετικού διαγράμματος είναι βασισμένος στο ARL , δηλαδή το εντός ελέγχου ARL πρέπει να είναι μεγάλο έτσι ώστε να διατηρηθεί ένα μικρό ποσοστό λανθασμένων συναγεργμών, ενώ το εκτός ελέγχου ARL πρέπει να είναι μικρό έτσι να μπορεί να γίνει έγκαιρη ανίχνευση οποιασδήποτε αλλαγής της τιμής του σ . Ο στόχος του σχεδιασμού ενός συνθετικού διαγράμματος είναι να ελαχιστοποιηθεί το εκτός έλεγχου ARL όταν το S_0 αλλάξει σε $d_d S_0$ με δεδομένο ότι το εντός ελέγχου ARL θα είναι ίσο με μια προκαθορισμένη τιμή. Το d_d αντιπροσωπεύει το μέγεθος της αλλαγής που θεωρείται κρίσιμο για την ποιότητα της διεργασίας και πρέπει έτσι να ανιχνευθεί το συντομότερο δυνατόν.

Για να διαφωτιστεί ο σχεδιασμός του συνθετικού διαγράμματος δίνουμε στη συνέχεια ένα παράδειγμα με $n = 10$, $d_d = 1.4$ και εντός ελέγχου $ARL = 200$. Σύμφωνα με την εξίσωση (26) (χρησιμοποιούμε $d = 1$), διάφοροι συνδυασμοί του L και k^+ μπορούν να καταστήσουν το εντός ελέγχου ARL ίσο με 200. Αφού επιλεγεί το ζεύγος (L, k^+) , το αντίστοιχο ARL για d_d μπορεί επίσης να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την εξίσωση (26) (χρησιμοποιούμε στη

θέση του d το d_d). Τα ζεύγη (L, k^+) και τα αντίστοιχα ARL τους για $d_d = 1.4$ παρατίθενται στον Πίνακα 3.1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1

Ζεύγη (L, k^+) και ARL για $d_d = 1.4$ και $ARL_0 = 200$ (συνθετικό διάγραμμα $S - CRL$)

(L, k^+)	ARL
(2, 1.326)	3.602
(3, 1.370)	2.918
(4, 1.394)	2.713
(5, 1.410)	2.641
(6, 1.423)	2.624
(7, 1.433)	2.634
(8, 1.442)	2.656
(9, 1.449)	2.685
(10, 1.455)	2.717

Ο Πίνακας 3.1 δείχνει ότι για κάθε ένα ζεύγος (L, k^+) προκύπτει ένα διαφορετικό ARL για το d_d . Παρατηρούμε ότι το ARL πρώτα μειώνεται και έπειτα αυξάνει καθώς το L αυξάνεται. Η συμπεριφορά αυτή της τιμής του ARL είναι η ίδια όπως αυτή στο συνθετικό διάγραμμα για τον έλεγχο του μέσου της διεργασίας (δείτε Wu & Spedding (2000a)). Το ARL για d_d φθάνει στην ελάχιστη τιμή του 2.624 όταν είναι το ζεύγος (L, k^+) είναι το (6, 1.423). Οπότε σε αυτήν την περίπτωση με $n=10$, $d_d=1.4$ και το εντός ελέγχου $ARL=200$ οι παράμετροι σχεδιασμού του συνθετικού διαγράμματος είναι $L=6$ και $k^+=1.423$. Η διαδικασία για το σχεδιασμό βέλτιστων συνθετικών διαγραμμάτων ελέγχου με άλλες τιμές του n , d_d και του εντός ελέγχου ARL είναι όπως περιγράφηκε πιο πάνω.

Οι βέλτιστοι σχεδιασμοί των συνθετικών διαγραμμάτων για $n=5, 10, 15, 20$, με εντός ελέγχου $ARL=200, 370, 500, 1000$, και με $d_d=1.1, 1.2, 1.4, 1.6, 2.0$ παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.2. Οι περιπτώσεις με $d_d=0.9, 0.8, 0.7, 0.5$, και 0.3 παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.3. Ο Πίνακας 3.2 δίνει τα L, k^+ και ARL για d_d όταν $d_d > 1$. Ο Πίνακας 3.3 δίνει τα L, k^- και ARL για d_d όταν $d_d < 1$. Το ARL_s για d_d δίνεται επίσης δίπλα από την αντίστοιχη στήλη του ARL για d_d ώστε να φανεί η ελκυστικότητα της εφαρμογής των συνθετικών διαγραμμάτων.

Από τους Πίνακες 3.2 και 3.3, προκύπτει ότι ο βέλτιστος σχεδιασμός του συνθετικού διαγράμματος παράγει πάντα μικρότερο ARL για d_d από το αντίστοιχο S διάγραμμα, ειδικά όταν το d_d είναι μικρό. Από περαιτέρω εξέταση προκύπτει ότι αυτά τα βέλτιστα σχέδια

παράγουν αρκετά μικρότερο εκτός ελέγχου ARL σε σχέση με το αντίστοιχο S διάγραμμα για $d = 1.1 - 2$ όταν $d_d > 1$, και για $d = 0.9 - 0.1$ όταν $d_d < 1$.

Η διαδικασία βέλτιστου σχεδιασμού για το συνθετικό διάγραμμα συνοψίζεται ως ακολούθως:

1. Καθορίζουμε τα n , d_d και το εντός ελέγχου ARL .
2. Θέτουμε το L ίσο με 2.
3. Όταν $d_d > 1$, λαμβάνουμε το k^+ με την επίλυση της εξίσωσης (26) (χρησιμοποιούμε $d = 1$) που τίθεται ίση με το εντός ελέγχου ARL . Όταν $d_d < 1$, λαμβάνουμε το k^- με την επίλυση της εξίσωσης (27) (χρησιμοποιούμε $d = 1$) που τίθεται ίση με το εντός ελέγχου ARL .
4. Όταν $d_d > 1$, υπολογίζουμε το ARL για d_d από το τρέχον L και k^+ χρησιμοποιώντας την εξίσωση (9) (χρησιμοποιούμε $d = d_d$). Όταν $d_d < 1$, υπολογίζουμε το ARL για d_d από το τρέχον L και k^- χρησιμοποιώντας την εξίσωση (27) (χρησιμοποιούμε $d = d_d$).
5. Εάν το τρέχον ARL για d_d είναι μεγαλύτερο από το προηγούμενο, πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε πίσω στο βήμα (3).
6. Παίρνουμε τα προηγούμενα L και k^+ (ή k^-) ως τις βέλτιστες παραμέτρους του συνθετικού διαγράμματος

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2

Βέλτιστοι σχεδιασμοί συνθετικών διαγραμμάτων $S - CRL$ για $d_d > 1$

n	d_d	200 ^α	370	500	1000
5	1.1	(30, 1.762) ^β , 42.05 ^γ , 65.03 ^δ	(42, 1.841), 64.54, 106.84	(51, 1.880), 79.56, 136.28	(74, 1.961), 128.75, 238.79
	1.2	(18, 1.722), 15.54, 28.27	(24, 1.799), 21.27, 42.46	(27, 1.834), 24.79, 51.84	(37, 1.913), 35.27, 82.19
	1.4	(10, 1.671), 5.00, 9.25	(11, 1.735), 6.04, 12.27	(13, 1.775), 6.62, 14.10	(15, 1.844), 8.19, 19.46
	1.6	(7, 1.637), 2.78, 4.67	(8, 1.706), 3.14, 5.72	(8, 1.732), 3.34, 6.33	(9, 1.801), 3.84, 8.00
	2.0	(5, 1.601), 1.61, 2.24	(5, 1.659), 1.71, 2.51	(5, 1.686), 1.76, 2.66	(6, 1.764), 1.89, 3.04
10	1.1	(21, 1.496), 27.06, 46.96	(30, 1.548), 40.15, 75.56	(35, 1.571), 48.72, 95.44	(51, 1.624), 76.11, 163.68
	1.2	(12, 1.465), 8.44, 16.85	(15, 1.513), 11.03, 24.43	(17, 1.536), 12.58, 29.33	(22, 1.585), 17.04, 44.83
	1.4	(6, 1.423), 2.62, 4.73	(7, 1.469), 3.01, 5.96	(7, 1.486), 3.22, 6.68	(8, 1.532), 3.76, 8.73
	1.6	(4, 1.394), 1.59, 2.39	(5, 1.447), 1.71, 2.77	(5, 1.464), 1.78, 2.97	(5, 1.503), 1.94, 3.53
	2.0	(3, 1.369), 1.13, 1.33	(3, 1.408), 1.16, 1.41	(4, 1.449), 1.17, 1.45	(4, 1.488), 1.20, 1.56
15	1.1	(18, 1.392), 20.10, 37.34	(24, 1.431), 29.11, 59.14	(28, 1.450), 34.92, 74.14	(40, 1.491), 53.17, 125.11
	1.2	(9, 1.362), 5.79, 11.92	(11, 1.399), 7.32, 16.82	(12, 1.416), 8.22, 19.94	(16, 1.456), 10.77, 29.65
	1.4	(5, 1.332), 1.88, 3.18	(5, 1.361), 2.09, 3.85	(6, 1.384), 2.20, 4.24	(6, 1.414), 2.48, 5.32
	1.6	(4, 1.319), 1.26, 1.70	(4, 1.348), 1.32, 1.89	(4, 1.362), 1.35, 1.99	(4, 1.392), 1.43, 2.27
	2.0	(3, 1.299), 1.03, 1.11	(3, 1.330), 1.04, 1.15	(3, 1.344), 1.05, 1.16	(3, 1.375), 1.06, 1.21
20	1.1	(15, 1.331), 15.95, 31.07	(20, 1.364), 22.66, 48.55	(23, 1.380), 26.93, 60.50	(33, 1.415), 40.17, 100.69
	1.2	(8, 1.307), 4.41, 9.13	(9, 1.335), 5.44, 12.60	(10, 1.351), 6.03, 14.78	(12, 1.382), 7.69, 21.47
	1.4	(4, 1.275), 1.54, 2.42	(4, 1.300), 1.67, 2.84	(5, 1.322), 1.73, 3.08	(5, 1.348), 1.90, 3.75
	1.6	(3, 1.258), 1.13, 1.39	(3, 1.284), 1.16, 1.50	(3, 1.296), .18, 1.56	(4, 1.338), 1.22, 1.72
	2.0	(3, 1.258), 1.01, 1.04	(3, 1.284), 1.01, 1.05	(3, 1.296), 1.01, 1.06	(3, 1.323), 1.02, 1.08

^α Εντός ελέγχου ARL

^β (L, k^+)

^γ ARL για d_d

^δ ARL_s για d_d

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3

Βέλτιστοι σχεδιασμοί συνθετικών διαγραμμμάτων $S - CRL$ για $d_d < 1$

n	d_d	200 ^a	370	500	1000
5	0.9	(6, 0.374) ^β , 96.63 ^γ , 133.34 ^δ	(7, 0.335), 175.06, 245.62	(7, 0.322), 234.48, 331.36	(9, 0.282), 460.92, 660.76
	0.8	(5, 0.386), 44.45, 85.13	(6, 0.343), 78.23, 155.86	(6, 0.329), 103.51, 209.79	(8, 0.287), 198.55, 416.60
	0.7	(4, 0.401), 19.55, 51.55	(5, 0.354), 33.02, 93.56	(5, 0.339), 42.92, 125.51	(6, 0.300), 79.45, 247.74
	0.5	(3, 0.423), 3.60, 15.30	(3, 0.388), 5.25, 26.82	(4, 0.352), 6.40, 35.50	(4, 0.321), 10.33, 68.38
	0.3	(2, 0.465), 1.10, 3.13	(2, 0.426), 1.20, 4.88	(3, 0.372), 1.28, 6.17	(3, 0.338), 1.50, 10.92
10	0.9	(9, 0.551), 54.16, 91.07	(12, 0.515), 93.86, 164.63	(14, 0.499), 123.19, 220.27	(20, 0.463), 231.76, 431.79
	0.8	(6, 0.570), 15.44, 39.47	(8, 0.531), 24.54, 69.12	(9, 0.515), 30.98, 91.22	(12, 0.480), 53.64, 173.94
	0.7	(5, 0.579), 5.01, 16.38	(5, 0.552), 7.14, 27.42	(6, 0.532), 8.57, 35.49	(7, 0.500), 13.30, 65.05
	0.5	(3, 0.609), 1.20, 2.80	(3, 0.581), 1.31, 3.97	(3, 0.568), 1.39, 4.77	(3, 0.539), 1.61, 7.52
	0.3	(2, 0.642), 1.00, 1.02	(2, 0.612), 1.00, 1.06	(2, 0.597), 1.00, 1.09	(2, 0.567), 1.00, 1.21
15	0.9	(10, 0.633), 36.02, 68.42	(13, 0.604), 60.13, 121.39	(16, 0.588), 77.54, 161.04	(22, 0.558), 140.27, 309.93
	0.8	(6, 0.653), 8.07, 22.93	(7, 0.625), 11.88, 38.43	(8, 0.610), 14.45, 49.71	(11, 0.578), 23.00, 90.78
	0.7	(4, 0.671), 2.56, 7.83	(4, 0.648), 3.28, 12.12	(5, 0.628), 3.72, 15.14	(6, 0.598), 5.10, 25.67
	0.5	(3, 0.686), 1.02, 1.42	(3, 0.662), 1.04, 1.70	(3, 0.651), 1.05, 1.88	(3, 0.627), 1.09, 2.46
	0.3	(2, 0.714), 1.00, 1.00	(2, 0.688), 1.00, 1.00	(2, 0.676), 1.00, 1.00	(2, 0.650), 1.00, 1.00
20	0.9	(10, 0.684), 26.21, 54.20	(13, 0.658), 42.41, 94.57	(15, 0.645), 53.87, 124.48	(22, 0.617), 94.24, 235.57
	0.8	(5, 0.708), 5.17, 15.09	(7, 0.677), 7.17, 24.33	(7, 0.668), 8.46, 30.90	(9, 0.641), 12.61, 54.25
	0.7	(3, 0.731), 1.77, 4.66	(4, 0.697), 2.09, 6.76	(4, 0.687), 2.29, 8.18	(5, 0.659), 2.88, 12.93
	0.5	(2, 0.755), 1.00, 1.11	(2, 0.732), 1.01, 1.19	(2, 0.722), 1.01, 1.25	(3, 0.678), 1.01, 1.44
	0.3	(2, 0.755), 1.00, 1.00	(2, 0.732), 1.00, 1.00	(2, 0.722), 1.00, 1.00	(2, 0.699), 1.00, 1.00

^a Εντός ελέγχου ARL

^β (L, k^-)

^γ ARL για d_d

^δ ARL_s για d_d

3.1.4 Συγκρίσεις *ARL* μεταξύ του συνθετικού *S - CRL* διαγράμματος ελέγχου και άλλων διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς

Σε αυτή την παράγραφο, διάφορα διαγράμματα για την παρακολούθηση της διασποράς μιας διεργασίας συγκρίνονται βάσει της απόδοσης του *ARL*. Τα διαγράμματα για τα οποία θα παρουσιαστούν αποτελέσματα είναι τα εξής:

1. Το *R* διάγραμμα.
2. Το *S* διάγραμμα.
3. Το *R* διάγραμμα με ένα προειδοποιητικό όριο (Page, (1963), συμβ. *WR*).
4. Το *S* διάγραμμα με ένα προειδοποιητικό όριο (Tuprah & Ncube (1987), συμβ. *WS*).
5. Το *CUSUM* διάγραμμα βασισμένο στο *R* (Acosta-Mejia (1998), Page (1963), συμβ. *CUSUM R*).
6. Το *CUSUM* διάγραμμα βασισμένο στο *S* (Lowry et al. (1995), συμβ. *CUSUM S*).
7. Το *EWMA* διάγραμμα βασισμένο στο $\ln S^2$ (Chang & Gan (1994), συμβ. *EWMA \ln S^2*).
8. Το *CUSUM* διάγραμμα βασισμένο στο $\ln S^2$ (Chang & Gan (1995), συμβ. *CUSUM \ln S^2*).
9. Το τροποποιημένο διάγραμμα *S* (Klein (2000), συμβ. *MS*).
10. Το τροποποιημένο διάγραμμα *R* (κατασκευασμένο με τη μεθοδολογία του *MS*, συμβ. *MR*).
11. Το *CP CUSUM* διάγραμμα (Acosta-Mejia et al. (1999), συμβ. *CP CUSUM*).
12. Το συνθετικό διάγραμμα βασισμένο στο *R* (θα παρουσιαστεί σε επόμενη παράγραφο, συμβ. *Syn R*).
13. Το συνθετικό διάγραμμα βασισμένο στο *S* (το διάγραμμα που παρουσιάσαμε, συμβ. *Syn S*).

Το διάγραμμα *MR* είναι ανάλογο του διαγράμματος *MS*, το οποίο κατασκευάζεται απλά με αντικατάσταση του στατιστικού *S* με το *R* χρησιμοποιώντας τη μέθοδο που προτείνεται από τον Klein (2000). Το διάγραμμα *Syn R* θα παρουσιαστεί σε επόμενη παράγραφο. Το διάγραμμα *CP CUSUM* που προτείνεται από τους Acosta-Mejia et al. (1999) θεωρεί ότι είναι γνωστός ο μέσος της διεργασίας, αλλά όλες οι υπόλοιπες 12 διαδικασίες που θα συγκρίνουμε δεν θεωρούν ότι είναι γνωστός ο μέσος της διεργασίας. Ως εκ τούτου, ο μέσος της διεργασίας που χρησιμοποιείται στο *CP CUSUM* διάγραμμα αντικαθίσταται από το δειγματικό μέσο. Όπως υποδείχθηκε από τους Acosta-Mejia et al. (1999) και τον Srivastava (1997), πρέπει να γνωρίζουμε ότι τα διαγράμματα που βασίζονται στις στατιστικές

συναρτήσεις S , S^2 ή $\ln S^2$ (συμπεριλαμβανομένου του διαγράμματος $\text{Syn } S$), εάν ο μέσος της διεργασίας είναι γνωστός και χρησιμοποιηθεί για να αντικαταστήσει το δειγματικό μέσο, δεν χάνουμε έναν βαθμό ελευθερίας για να εκτιμήσουμε το μέσο της διεργασίας. Ωστόσο, αυτά τα διαγράμματα μπορούν να επηρεαστούν από μια μετατόπιση του μέσου της διεργασίας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑΣ

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4

Συγκρίσεις *ARL* διάφορων διαγραμμάτων για την παρακολούθηση της διασποράς όταν $n = 5$ και $d_j = 1.2$

δ	R	MR	MS	S	WR	WS	CUSUM $\ln S^2$	CUSUM R	CUSUM S	EWMA $\ln S^2$	Syn R	CP CUSUM	Syn S
	k=4.88	k=3.655	k=1.462	k=1.927	k=5.169 w=3.810	k=2.024 w=1.527	k=0.068 w=2.66	k=2.559 w=4.91	k=1.034 w=1.90	$\lambda=0.11$ h=0.12	k=4.337 L=18	k=1.193 h=17.57	k=1.722 L=18
1	200.01	200	200	200	200	200	199.72 (5.41)	200.03 (6.11)	199.63 (5.06)	200.29 (5.82)	200.01	199.6 (6.34)	200
1.1	68.69	67.27	64.74	65.03	62.07	58.95	42.94 (1.11)	40.33 (0.88)	38.89 (1.14)	38.17 (1.04)	45.38	38.7 (0.9)	42.62
1.2	30.7	30.65	29.03	28.27	26.53	24.62	18.13 (0.48)	17.53 (0.37)	16.93 (0.42)	16.88 (0.34)	16.85	16.41 (0.38)	15.54
1.3	16.53	17.21	16.22	15.04	14.16	13.02	10.72 (0.24)	10.79 (0.2)	10.36 (0.23)	10.53 (0.2)	8.76	9.79 (0.18)	8.09
1.4	10.2	11.18	10.55	9.25	8.82	8.1	7.59 (0.16)	7.77 (0.13)	7.48 (0.12)	7.76 (0.11)	5.64	6.92 (0.13)	5.25
1.5	6.95	8.06	7.63	6.32	6.13	5.65	5.95 (0.09)	6.14 (0.11)	5.86 (0.07)	6.18 (0.09)	4.12	5.32 (0.09)	3.86
2	2.4	3.5	3.39	2.24	2.33	2.2	3.18 (0.04)	3.12 (0.06)	2.99 (0.04)	3.44 (0.03)	1.85	2.52 (0.04)	1.77

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5

Συγκρίσεις *ARL* διάφορων διαγραμμμάτων για την παρακολούθηση της διασποράς όταν $n = 5$ και $d_d = 0.8$

δ	R	S	WR	MR	WS	MS	Syn R	Syn S	CUSUM ln S ²	CUSUM R	EWMA ln S ²	CUSUM S	CP CUSUM
	k=0.555	k=0.227	k=0.145, w=1.149	k=1.150	k=0.059 w=0.470	k=0.470	k=0.942 L=5	k=0.386 L=5	k=0.43 h=5.49	k=2.093 h=4.32	$\lambda=0.10$ h=0.69	k=0.846 h=1.70	k=0.793 h=11.20
1	199.99	200	200	200	200	200	199.96	200	199.82 (6.37)	199.67 (5.85)	199.58 (5.28)	199.71 (5.7)	199.55 (5.82)
0.9	133.42	133.34	101.67	101.57	101.24	101.15	96.9	96.63	47.08 (1.09)	45.21 (1.01)	45.08 (0.94)	44.61 (1.31)	43.03 (1.04)
0.8	85.25	85.13	49.95	49.87	49.48	49.41	44.75	44.45	18.99 (0.37)	17.26 (0.34)	17.18 (0.36)	16.92 (0.27)	16.62 (0.24)
0.7	51.68	51.55	23.93	23.89	23.56	23.52	19.81	19.58	10.75 (0.14)	9.92 (0.11)	9.13 (0.13)	9.65 (0.11)	9.75 (0.07)
0.6	29.37	29.24	11.41	11.39	11.16	11.15	8.58	8.43	7.13 (0.07)	6.87 (0.07)	5.87 (0.06)	6.68 (0.04)	7.07 (0.05)
0.5	15.41	15.3	5.64	5.63	5.49	5.48	3.82	3.74	5.17 (0.04)	5.25 (0.04)	4.11 (0.03)	5.11 (0.03)	5.7 (0.02)
0.1	1	1	1.85	2	1.85	2	1	1	1.9 (0.01)	3 (0.00)	1.32 (0.01)	3 (0.00)	4 (0.00)

Οι Πίνακες 3.4 και 3.5 δίνουν το ARL για $d_d=1.2$ και 0.8 με $n=5$, αντίστοιχα. Για να συγκρίνουμε τα διάφορα διαγράμματα ελέγχου δίκαια, οι παράμετροι κάθε διαγράμματος επιλέγονται σύμφωνα με τις αντίστοιχες προτεινόμενες τιμές τους που προκύπτουν από τη διαδικασία σχεδιασμού τους προσαρμοσμένες στο d_d . Κάθε διάγραμμα έχει εντός ελέγχου ARL περίπου ίσο με 200. Τα διαγράμματα ελέγχου που παρουσιάζονται στους Πίνακες 3.4 και 3.5 διατάσσονται από αριστερά προς τα δεξιά βάσει της ικανότητάς τους να ανιχνεύσουν τα $d_d=1.2$ και 0.8 , αντίστοιχα. Το ARL για το R , το S , το WR , το WS , το MS , το MR , το $Syn R$, και το $Syn S$ υπολογίζονται ακριβώς χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες μεθόδους τους. Το ARL για το $CUSUM R$, το $CUSUM S$, το $EWMA \ln S^2$, το $CUSUM \ln S^2$ βρέθηκαν με μεθόδους προσομοίωσης και συνεπώς αποτελεί εκτίμηση του πραγματικού. Το τυπικό σφάλμα εκτίμησης του ARL δίνεται σε παρένθεση κάτω από την τιμή του ARL .

Από τον Πίνακα 3.4, φαίνεται ότι για την ανίχνευση αύξησης του S το $EWMA \ln S^2$, το $CUSUM S$, το $CUSUM R$, και το $CUSUM \ln S^2$ διαγράμματα ελέγχου ξεπερνούν σε απόδοση το WS , το WR , το S , το MS , το MR , και το R διάγραμμα ελέγχου. Το $Syn S$, το $CP CUSUM$, και το $Syn R$ διαγράμματα ελέγχου είναι τα αποτελεσματικότερα μεταξύ των διαγραμμάτων που παρουσιάζονται. Από τον Πίνακα 3.5, φαίνεται ότι για την ανίχνευση μείωσης του S το $CUSUM S$, το $EWMA \ln S^2$, το $CUSUM R$, και $CUSUM \ln S^2$ διαγράμματα ελέγχου ξεπερνούν σε απόδοση το $Syn S$, το $Syn R$, το MS , το WS , το MR , το WR , το S , και το R διάγραμμα ελέγχου. Το διάγραμμα $CP CUSUM$ είναι το αποτελεσματικότερο μεταξύ των διαγραμμάτων που παρουσιάζονται. Μια άλλη αξιολογική παρατήρηση είναι ότι και τα διαγράμματα $EWMA$ και $CUSUM$ παράγουν πολύ μικρότερο ARL από το S διάγραμμα όταν η μετατόπιση του σ είναι μικρή έως μέτρια, αλλά είναι μεγαλύτερο έναντι του S διαγράμματος όταν η μετατόπιση είναι μεγάλη. Στο διάγραμμα $Syn S$ αυτό δεν συμβαίνει, δηλαδή το διάγραμμα παράγει με συνέπεια μικρότερο ARL από το S διάγραμμα. Από τις ανωτέρω συγκρίσεις, φαίνεται ότι η ικανότητα του διαγράμματος $Syn S$ να ανιχνεύει την αύξησης του σ είναι καλύτερη από το να ανιχνεύει μειώσεις του σ , και το διάγραμμα είναι μια καλή εναλλακτική λύση για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας.

3.1.5 Σχέδια VSI για το συνθετικό S - CRL διάγραμμα ελέγχου

Σε αυτή την παράγραφο θα μας απασχολήσει το σχήμα VSI σε ένα συνθετικό διάγραμμα ελέγχου. Το συνθετικό διάγραμμα που περιγράφηκε ανωτέρω είναι βασισμένο σε ένα σχήμα FSI (fixed sampling interval, σταθερό διάστημα δειγματοληψίας). Σύμφωνα με πολλούς ερευνητές (Aparisi & Haro (2001); Reynolds et al. (1988); Runger & Pignatiello, (1991)), τα σχέδια μεταβλητού διαστήματος δειγματοληψίας είναι αποδοτικότερα σε σχέση με τα συμβατικά σχέδια FSI.

Η βασική ιδέα ενός σχεδίου VSI είναι ότι το διάστημα δειγματοληψίας στο επόμενο δείγμα πρέπει να είναι μικρό (λιγότερο από 1, όπου το 1 δηλώνει το μήκος του διαστήματος δειγματοληψίας που χρησιμοποιείται στο ανάλογο σχέδιο FSI) εάν το τρέχον δείγμα δείχνει μια πιθανή αλλαγή στη διεργασία (η στατιστική συνάρτηση ελέγχου πέφτει στο εξωτερικό μέρος της περιοχής αποδοχής) και πρέπει να είναι μεγάλο (περισσότερο από 1) εάν το τρέχον δείγμα δεν αποκαλύπτει αλλαγή στη διεργασία (η στατιστική συνάρτηση ελέγχου πέφτει στο εσωτερικό μέρος της περιοχής αποδοχής), και δίνει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας με τον ίδιο τρόπο όπως ένα σχέδιο FSI (η στατιστική συνάρτηση ελέγχου πέφτει στην κρίσιμη περιοχή).

Στη συνέχεια προβαίνουμε στη μελέτη σχεδίων VSI σε συνθετικά διαγράμματα ελέγχου που χρησιμοποιούν μικρά και μεγάλα διαστήματα δειγματοληψίας για τις στατιστικές συναρτήσεις S και CRL.

Έστω t_f το μήκος του αρχικού διαστήματος δειγματοληψίας μεταξύ της έναρξης μιας διεργασίας και του πρώτου S δείγματος. Έστω T_s το μήκος του διαστήματος δειγματοληψίας που αποφασίζεται με τη βοήθεια της στατιστικής συνάρτησης S μέσα στο συνθετικό διάγραμμα προτού λάβουμε σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας. Το σχέδιο VSI που αποφασίζεται με τη βοήθεια της στατιστικής συνάρτησης S καθορίζεται ως εξής

- Όταν $d > 1$

$$T_s = \begin{cases} a, & \text{αν } 0 \leq S \leq w^+ s_0 \\ b, & \text{αν } w^+ s_0 < S \leq k^+ s_0 \end{cases} \quad (28)$$

- Όταν $d < 1$

$$T_s = \begin{cases} a, & \text{αν } S \geq w^- s_0 \\ b, & \text{αν } k^- s_0 \leq S < w^- s_0 \end{cases} \quad (29)$$

Στους παραπάνω τύπους για το T_S , το a και το b αντιπροσωπεύουν τα μήκη του μεγάλου και του μικρού διαστήματος δειγματοληψίας, αντίστοιχα, με $a > 1 > b > 0$. Τα w^+s_0 και w^-s_0 αντιπροσωπεύουν τα προειδοποιητικά όρια του S διαγράμματος εντός του συνθετικού διαγράμματος που προσδιορίζουν πότε θα αλλάξει το διάστημα δειγματοληψίας για $d > 1$ και $d < 1$, αντίστοιχα.

Έστω τώρα T_{CRL} το μήκος του διαστήματος δειγματοληψίας που αποφασίζεται με τη βοήθεια της στατιστικής συνάρτησης CRL μέσα στο συνθετικό διάγραμμα προτού λάβουμε σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας. Το σχέδιο VSI που αποφασίζεται με τη βοήθεια της στατιστικής συνάρτησης CRL καθορίζεται ως εξής

$$T_{CRL} = \begin{cases} c, & \text{αν } CRL \geq w \\ d, & \text{αν } L \leq CRL < w \end{cases} \quad (30)$$

Στους παραπάνω τύπους για το T_{CRL} , το c και το d αντιπροσωπεύουν τα μήκη του μεγάλου και του μικρού διαστήματος δειγματοληψίας, αντίστοιχα, με $c > 1 > d > 0$. Το w αντιπροσωπεύει το προειδοποιητικό όριο του διαγράμματος CRL μέσα στο συνθετικό διάγραμμα και προσδιορίζει πότε θα αλλάξει το διάστημα δειγματοληψίας. Σύμφωνα με τις εξισώσεις (28) (ή (29)) και (30), μπορούν να εφαρμοστούν τέσσερις τύποι συνθετικών διαγραμμάτων:

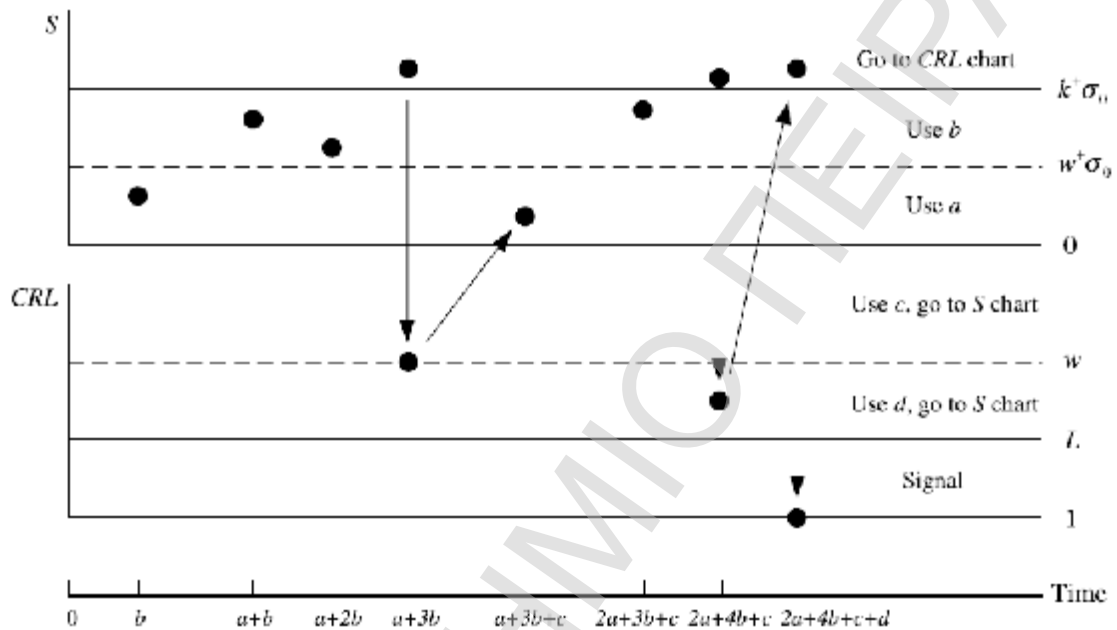
- (1) $FSI S$ και $FSI CRL$ σχέδιο: Κρατάμε τα a , b , c και το d να είναι ίσα με 1.
- (2) $VSI S$ και $FSI CRL$ σχέδιο: Κρατάμε το c και το d να είναι ίσα 1 αλλά μεταβάλλονται τα a και b .
- (3) $FSI S$ και $VSI CRL$ σχέδιο: Κρατάμε τα a και b να είναι ίσα με 1 αλλά μεταβάλλονται τα c και d .
- (4) $VSI S$ και $VSI CRL$ σχέδιο: Μεταβάλλονται τα a , b , c και d .

Στο Σχήμα 3.3 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα των σχεδίων $VSI S$ και $VSI CRL$ για $d > 1$. Σημειώνεται ότι όταν η στατιστική συνάρτηση S πέφτει στην κρίσιμη περιοχή ($S > k^+s_0$ για $d > 1$, ή $S < k^-s_0$ για $d < 1$) του S διαγράμματος μέσα στο συνθετικό διάγραμμα, τότε διαμορφώνεται ταυτόχρονα η τιμή της στατιστικής συνάρτησης CRL , και το διάστημα δειγματοληψίας για το επόμενο S δείγμα εξαρτάται από τη θέση αυτού του CRL στο CRL διάγραμμα μέσα στο συνθετικό διάγραμμα. Όταν η στατιστική συνάρτηση CRL πέφτει στην κρίσιμη περιοχή ($CRL < L$) του CRL διαγράμματος μέσα στο συνθετικό διάγραμμα, το διάγραμμα δίνει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας. Δεδομένου ότι δεν υπάρχει καμία

πληροφορία στην έναρξη μιας διαδικασίας, το μήκος του αρχικού διαστήματος δειγματοληψίας, t_f , μπορεί να επιλεγεί να είναι ένα σύντομο διάστημα δειγματοληψίας b ή d για να προφυλαχούμε από τυχόν στην εκκίνηση της διεργασίας, αλλά μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλες τιμές για το t_f εάν κριθεί απαραίτητο.

ΣΧΗΜΑ 3.3

Ένα παράδειγμα για το VSI S και το VSI CRL σχέδιο



3.1.6 Μέσος χρόνος σήματος

Το ARL του συνθετικού διαγράμματος για τη διασπορά διεργασίας στην εξίσωση (26) (ή (27)) μπορεί να αναδιαταχθεί ως εξής:

$$ARL = 1 + [E(N_S) - 1]E(N_{CRL}) + E(N_{CRL}) - 1 \quad (31)$$

Το πρώτο μέρος (το 1) αντιπροσωπεύει το αρχικό διάστημα δειγματοληψίας, το δεύτερο μέρος ($[E(N_S) - 1]E(N_{CRL})$) είναι ο αναμενόμενος αριθμός διαστημάτων δειγματοληψίας, των οποίων το μήκος αποφασίζεται από τη στατιστική συνάρτηση S , και το τελευταίο μέρος ($E(N_{CRL}) - 1$) είναι ο αναμενόμενος αριθμός διαστημάτων δειγματοληψίας, των οποίων το μήκος αποφασίζεται από τη στατιστική συνάρτηση CRL . Από τη λειτουργία των σχεδίων VSI, μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι ο αναμενόμενος αριθμός των διαστημάτων δειγματοληψίας που αποφασίζονται από τη στατιστική συνάρτηση S είναι πάντα μεγαλύτερος ή ίσος με αυτόν που αποφασίζεται από τη στατιστική συνάρτηση CRL . Έστω ATS (average time to signal) ο μέσος χρόνο που απαιτείται για να ανιχνευτεί μια αλλαγή στη τιμή του σ για το συνθετικό

διάγραμμα. Όταν το μήκος των διαστημάτων δειγματοληψίας λαμβάνεται υπόψη, το ARL στην εξίσωση (31) μετατρέπεται σε ATS ως ακολούθως:

$$ATS = t_f + [E(N_S) - 1]E(N_{CRL})E(T_S) + [E(N_{CRL}) - 1]E(T_{CRL}) \quad (32)$$

Όταν $d > 1$

$$\begin{aligned} E(T_S) &= \frac{a \Pr(S \leq w^+ s_0) + b \Pr(w^+ s_0 < S \leq k^+ s_0)}{\Pr(S \leq k^+ s_0)} \\ &= \frac{(a-b)F\left((n-1)\left(\frac{w^+}{d}\right)^2\right) + bF\left((n-1)\left(\frac{k^+}{d}\right)^2\right)}{F\left((n-1)\left(\frac{k^+}{d}\right)^2\right)} \\ E(T_{CRL}) &= \frac{c \Pr(CRL \geq w) + d \Pr(L \leq CRL < w)}{\Pr(CRL \geq L)}. \end{aligned} \quad (33)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την ιδιότητα της έλλειψης μνήμης της κατανομής του CRL , προκύπτει ότι

$$E(T_{CRL}) = c \Pr(CRL > w - L) + d \Pr(CRL \leq w - L) = c[1 - G_1(w - L)] + dG_1(w - L) \quad (34)$$

Στην παραπάνω σχέση το $G_1(\cdot)$ δηλώνει την αθροιστική συνάρτηση κατανομής του CRL με παράμετρο $1 - F((n-1)(k^+ / d)^2)$.

Όταν $d < 1$

$$\begin{aligned} E(T_S) &= \frac{a \Pr(S \geq w^- s_0) + b \Pr(k^- s_0 \leq S < w^- s_0)}{\Pr(S \geq k^- s_0)} \\ &= \frac{(a-b)F\left((n-1)\left(\frac{w^-}{d}\right)^2\right) - bF\left((n-1)\left(\frac{k^-}{d}\right)^2\right) + a}{1 - F\left((n-1)\left(\frac{k^-}{d}\right)^2\right)} \\ E(T_{CRL}) &= \frac{c \Pr(CRL \geq w) + d \Pr(L \leq CRL < w)}{\Pr(CRL \geq L)} = c[1 - G_2(w - L)] + dG_2(w - L). \end{aligned} \quad (35)$$

Στην παραπάνω σχέση το $G_2(\cdot)$ δηλώνει την αθροιστική συνάρτηση κατανομής του CRL με παράμετρο $F((n-1)(k^- / d)^2)$.

3.1.7 Σύγκριση των διαγραμμάτων ελέγχου

Τα συνθετικά διαγράμματα πρέπει να συγκριθούν σε όρους ATS κάτω από το ίδιο ARL και εντός ελέγχου ATS . Έτσι στα διαγράμματα απαιτείται ο ίδιος αριθμός δειγμάτων για να δώσουν σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας, και όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου απαιτείται να έχουν το ίδιο μέσο ρυθμό δειγματοληψίας και λανθασμένων συναγερμών. Μια λογική προσέγγιση για να επιτευχθεί το ίδιο ARL και εντός ελέγχου ATS για διαφορετικά σχέδια περιγράφεται στη συνέχεια.

Για να έχουμε το ίδιο ARL , το $E(N_s)$ στα διάφορα σχέδια, πρέπει οι παράμετροι των διαγραμμάτων L και k^+ (ή k^-) να είναι ταυτόσημοι. Για να έχουν το ίδιο εντός ελέγχου ATS αφού προηγουμένως έχουν το ίδιο ARL , στα διαφορετικά σχέδια το $E(T_s)$ και το $E(T_{CRL})$ πρέπει να τεθούν ίσα με 1, ενώ το t_f πρέπει να είναι παντού ίδια όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου.

Όταν το $d > 1$, θέτουμε τις εξισώσεις (33) και (34) να είναι ίσες με 1 (χρησιμοποιούμε $d = 1$) για να λάβουμε το w^+ και το w ως εξής:

$$w^+ = \sqrt{\frac{1}{n-1} F^{-1} \left(\frac{(1-b)F((n-1)k^{+2})}{a-b} \right)} \quad (37)$$

$$w = G_1^{-1} \left(\frac{c-1}{c-d} \right) + L \quad (38)$$

όπου η $G_1(\cdot)$ είναι με παράμετρο $1 - F((n-1)k^{+2})$.

Όταν το $d < 1$, θέτουμε τις εξισώσεις (35) και (36) να είναι ίσες με 1 (χρησιμοποιούμε $d = 1$) για να λάβουμε το w^- και το w ως εξής:

$$w^- = \sqrt{\frac{1}{n-1} F^{-1} \left(\frac{a-1+(1-b)F((n-1)k^{-2})}{a-b} \right)} \quad (39)$$

$$w = G_2^{-1} \left(\frac{c-1}{c-d} \right) + L$$

$$w = G_2^{-1} \left(\frac{c-1}{c-d} \right) + L \quad (40)$$

όπου η $G_2(\cdot)$ είναι με παράμετρο $F((n-1)k^{-2})$.

Δεδομένου ότι οι $G_1(\cdot)$ και $G_2(\cdot)$ είναι διακριτές αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής, το w στις εξισώσεις (38) και (40) μπορεί να μην υπάρχει για τα δοθέντα c και d . Μια

εναλλακτική λύση είναι ότι το w και ένα από τα c και d να προκαθορίζονται, και έπειτα θέτουμε την εξίσωση (34) (ή την (36)) ίση με 1 (χρησιμοποιούμε $d = 1$) για να λάβουμε το υπόλοιπο c ή d . Έχει προταθεί να προκαθορίζεται το d επειδή το σύντομο διάστημα δειγματοληψίας περιορίζεται συχνά στην πράξη. Ως εκ τούτου οι εξισώσεις (38) και (40) μπορούν, αντίστοιχα, να αντικατασταθούν από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$c = \frac{1 - dG_1(w - L)}{1 - G_1(w - L)} \quad (41)$$

όπου η α.σ.κ. $G_1(\cdot)$ είναι με παράμετρο $1 - F((n - 1)k^+)$, και

$$c = \frac{1 - dG_2(w - L)}{1 - G_2(w - L)} \quad (42)$$

όπου η α.σ.κ. $G_2(\cdot)$ είναι με παράμετρο $F((n - 1)k^-)$.

Αφού ικανοποιηθούν οι προαναφερθέντες περιορισμοί για τις συγκρίσεις, όταν η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου το $E(T_S)$ και το $E(T_{CRL})$ είναι μικρότερα του 1, και αυτό συνεπάγεται ότι χρησιμοποιείται ένας εντονότερο μέσο ρυθμός δειγματοληψίας. Ως εκ τούτου το σχέδιο VSI παράγει μικρότερο εκτός ελέγχου ATS συγκριτικά με το σχέδιο FSI. Όλα τα σχέδια VSI που παρουσιάσαμε μπορούν να εφαρμοστούν χωρίς τη μέθοδο σχεδιασμού μέσω του d_d που περιγράψαμε στην Παράγραφο 3.1.4, δηλ. οι παράμετροι των διαγραμμάτων L και k^+ (ή k^-) δεν παράγουν απαραίτητως το μικρότερο ARL για d_d . Προτείνεται ότι τα σχέδια VSI πρέπει να εφαρμόζονται αφού προηγουμένως εφαρμοστεί η μέθοδος σχεδιασμού μέσω του d_d που περιγράψαμε στην Παράγραφο 3.1.4 για να μειωθεί ταυτόχρονα και το ARL και το ATS για d_d .

3.1.8 Παράδειγμα

Έστω μια διαδικασία πλήρωσης κουτιών χυμού, όπου ο όγκος του χυμού σε κάθε φιάλη είναι το ποιοτικό χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει. Από προηγούμενα στοιχεία, ο μέσος της διεργασίας και η τυπική απόκλιση υπολογίζονται στα 250 cm^3 και 0.5 cm^3 , αντίστοιχα ($s_0 = 0.5$). Μια σημαντική ειδική αιτία μεταβλητότητας η οποία αυξάνει τη τυπική απόκλιση στην τιμή 0.7 cm^3 ($d_d = 0.7 / 0.5 = 1.4$), πρέπει να ανιχνευθεί το συντομότερο δυνατόν. Τα δείγματα που λαμβάνονται κάθε 10 λεπτά, είναι μεγέθους 5 ($n = 5$) και μια αποδεκτή τιμή για το εντός ελέγχου ARL είναι η 200. Η διαδικασία ελέγχεται αρχικά με ένα S διάγραμμα

ελέγχου με άνω όριο ελέγχου $k^+s_0 = 0.9635 \text{ cm}^3$ ($k^+ = 1.927$), και το διάγραμμα απαιτεί 92.5 λεπτά κατά μέσο όρο για να δώσει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας ($ARL_S = 9.25$). Δεδομένου ότι αυτό το αποτέλεσμα δεν είναι ικανοποιητικό, το συνθετικό διάγραμμα εφαρμόζεται στη συνέχεια. Από τον Πίνακα 3.2, προκύπτει ότι το άνω όριο ελέγχου του S διαγράμματος πρέπει να τεθεί ίσο με $k^+s_0 = 0.8355 \text{ cm}^3$ ($k^+ = 1.671$), και το κάτω όριο ελέγχου του διαγράμματος CRL πρέπει να τεθεί ίσο με $L = 10$. Το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου απαιτεί κατά μέσο όρο 50 λεπτά για να δώσει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας ($ARL = 5.00$). Ο μέσος χρόνος για το σήμα που προκύπτει με το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου είναι σχεδόν το μισό από αυτό που λαμβάνεται από το S διάγραμμα, αλλά απαιτεί ακόμα περίπου 1 ώρα για να δώσει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας. Ως εκ τούτου, το σχέδιο $VSI S$ και $VSI CRL$ του τρέχοντος συνθετικού διαγράμματος πρόκειται να εξεταστεί.

Υποθέτουμε ότι το μήκος του ελάχιστου διαστήματος δειγματοληψίας για τη διεργασία είναι 1 λεπτό, το μήκος του μικρού (σύντομου) διαστήματος δειγματοληψίας που αποφασίζεται χωριστά από τις στατιστικές συναρτήσεις S και CRL τίθεται να είναι 1 λεπτό. ($b = d = 0.1$). Εάν το μήκος του μεγάλου διαστήματος δειγματοληψίας που αποφασίζεται από τη στατιστική συνάρτηση S τεθεί ίση με 19 λεπτά ($a = 1.9$), για να λειτουργήσει αυτό το σχέδιο VSI με τη χαμηλότερη πολυπλοκότητα, το μήκος του μεγάλου διαστήματος δειγματοληψίας που αποφασίζεται τη στατιστική συνάρτηση CRL πρέπει να επιλεγεί κοντά στα 19 λεπτά. Έτσι για να καλύψουμε τις απαιτήσεις για τη σύγκριση που περιγράφηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, το μήκος του αρχικού διαστήματος δειγματοληψίας πρέπει να τεθεί ίσο με 10 λεπτά. ($t_f = 1$), το προειδοποιητικό όριο του S διαγράμματος πρέπει να τεθεί ίσο με $w^+s_0 = 0.4525 \text{ cm}^3$ ($w^+ = 0.905$), και το προειδοποιητικό όριο του CRL διαγράμματος πρέπει να τεθεί ίσο με $w = 38$ το οποίο συνεπάγεται ότι το μήκος του μεγάλου διαστήματος δειγματοληψίας που αποφασίζεται από τη στατιστική συνάρτηση CRL τίθεται ίσο με 19.2 λεπτά ($c = 1.92$). Αυτό το σχέδιο VSI απαιτεί κατά μέσο όρο 32.4 λεπτά για να δώσει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας ($ATS = 3.24$), το οποίο βελτιώνει ουσιαστικά την απόδοση του τρέχοντος συνθετικού διαγράμματος.

Επεξηγούμε τη λειτουργία αυτού του σχεδίου VSI με τα δεδομένα του Πίνακα 3.6 Τα πρώτα 15 δείγματα προέρχονται από την κατανομή $N(250, 0.5^2)$ που αντιστοιχεί στην εντός ελέγχου διεργασία, ενώ τα υπόλοιπα δείγματα προέρχονται από την κατανομή $N(250, 0.7^2)$ που αντιστοιχεί στην εκτός ελέγχου διεργασία. Αυτά τα δείγματα παρατίθενται στον Πίνακα 3.6, όπου δίνονται επίσης οι τιμές των στατιστικών συναρτήσεων S και CRL . Το Σχήμα 3.4

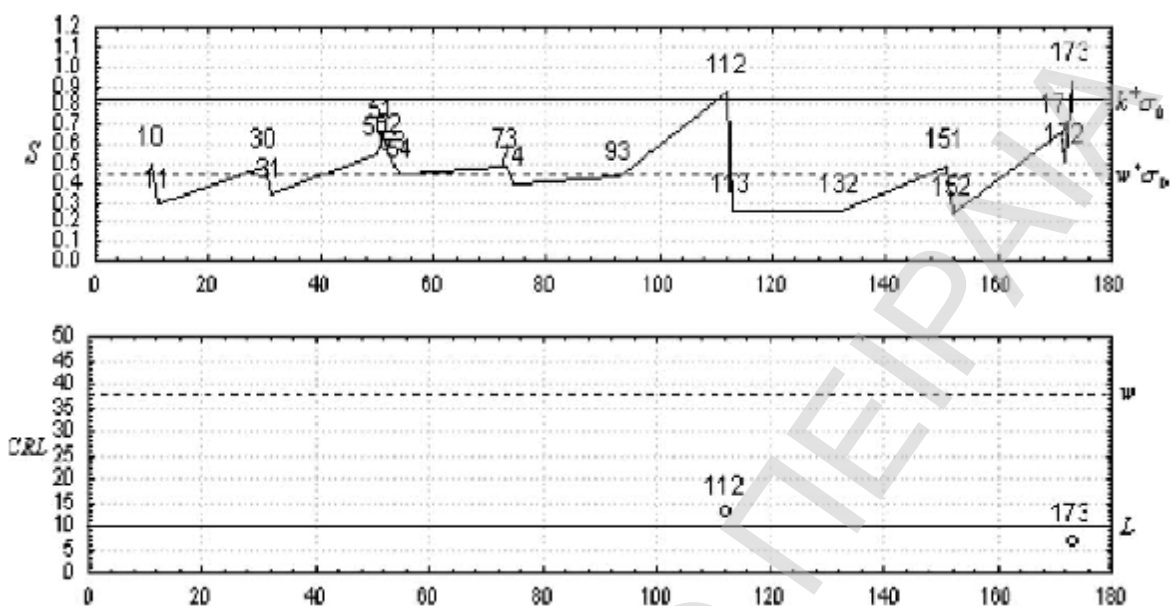
παρουσιάζει τη λειτουργία του σχεδίου VSI για το συνθετικό διάγραμμα που περιγράψαμε ανωτέρω. Η τιμή επάνω στο κάθε δείγμα δηλώνει το χρόνο που λήφθηκε το δείγμα. Το διάγραμμα χτυπά στο εικοστό δείγμα μετά από 173 λεπτά λειτουργίας της διεργασίας.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.6
Προσομοιωμένα δεδομένα για επίδειξη του $S - CRL$ διαγράμματος ελέγχου

Μέγεθος δείγματος	Παρατηρηθείσα X_1	ποσότητα X_2	περιεχομένου X_3	σε κάθε X_4	μπουκάλι X_5	S	CRL
1	250.492	249.388	250.377	249.957	249.507	0.4972	
2	249.875	249.963	249.489	250.126	250.251	0.2915	
3	250.349	249.6	250.932	250.502	250.138	0.4897	
4	250.112	249.356	250.155	249.814	249.583	0.3421	
5	250.287	249.677	251.163	250.01	250.251	0.5518	
6	250.372	251.192	249.568	249.784	249.988	0.6381	
7	250.794	249.315	250.588	250.309	250.378	0.5702	
8	249.376	250.054	249.627	250.325	250.535	0.4798	
9	249.792	250.311	249.536	249.872	249.11	0.4423	
10	249.734	249.854	249.756	250.893	250.136	0.4849	
11	250.51	250.481	249.529	250.128	250.103	0.3959	
12	250.361	249.66	249.679	250.467	250.517	0.4302	
13	250.656	249.966	248.764	251.018	250.466	0.8747	13
14	250.148	249.704	250.323	249.788	249.905	0.2573	
15	249.595	250.007	249.698	249.997	250.24	0.2596	
16	248.932	250.185	249.814	249.64	250.012	0.4841	
17	249.763	249.523	249.652	250.173	249.76	0.2435	
18	250.351	249.021	249.443	249.363	250.56	0.6695	
19	249.969	249.863	251.1	250.021	249.964	0.5157	
20	251.608	249.094	250.555	249.87	249.997	0.9324	7

ΣΧΗΜΑ 3.4

Το VSI σχέδιο για τα δεδομένα του Πίνακα 3.6



3.1.9 Συμπεράσματα

Το συνθετικό διάγραμμα που παρουσιάσαμε, το οποίο αποτελείται από ένα S διάγραμμα και ένα CRL διάγραμμα, αποδείχθηκε ότι είναι αποτελεσματικό για την παρακολούθηση της διασποράς μιας διεργασίας. Η ικανότητα του διαγράμματος να ανιχνεύει αυξήσεις στην τιμή του σ είναι καλύτερη από το να ανιχνεύει μειώσεις της τιμής του σ . Το κλασικό S διάγραμμα μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση του συνθετικού διαγράμματος (όταν το L τείνει στο άπειρο). Παρατέθηκε μια βέλτιστη διαδικασία σχεδιασμού του συνθετικού διαγράμματος με στόχο να ελαχιστοποιηθεί το ARL για μια σημαντική αλλαγή του σ με περιορισμούς το προκαθορισμένο μέγεθος δείγματος n και το εντός ελέγχου ARL . Οι Πίνακες 3.2 και 3.3 μπορούν βοηθήσουν σε αυτή την κατεύθυνση παρέχοντας τιμές για την κατασκευή των ορίων ελέγχου του συνθετικού διαγράμματος. Τα σχέδια VSI του συνθετικού διαγράμματος που παρουσιάσαμε μπορούν να εφαρμοστούν για να βελτιώσουν περαιτέρω την απόδοση των διαγραμμάτων εάν το τρέχον FSI σχήμα δεν είναι ικανοποιητικό.

3.2 Συνθετικό διάγραμμα ελέγχου για τον έλεγχο της διασποράς μιας διεργασίας με το δειγματικό εύρος.

3.2.1 Εισαγωγή

Εδώ θα μας απασχολήσει η κατασκευή ενός συνθετικού διαγράμματος παρόμοιο με το συνθετικό διάγραμμα βασισμένο στο S και το CRL διάγραμμα ελέγχου, μόνο που τώρα θα χρησιμοποιήσουμε ένα R διάγραμμα ελέγχου στη θέση του S διαγράμματος. Επίσης, το αντίστοιχο σχέδιο VSI θα μελετηθεί. Η λειτουργία, ο σχεδιασμός και η απόδοση του νέου διαγράμματος θα περιγραφούν αναλυτικά. Θα δοθούν επίσης ARL συγκρίσεις μεταξύ του νέου διαγράμματος και άλλων ανταγωνιστικών διαγραμμάτων ελέγχου. Από τη μελέτη του συνθετικού διαγράμματος προκύπτει ότι αποτελεί μια καλή εναλλακτική λύση για τον έλεγχο της διασποράς μιας διεργασίας. Η χρησιμοποίηση μεταβλητού διαστήματος δειγματοληψίας στο συνθετικό διάγραμμα ενισχύει σημαντικά την απόδοση του διαγράμματος.

3.2.2 Διαγράμματα R και CRL

Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή των παρατηρήσεων που παίρνουμε από τη διεργασία είναι η κανονική κατανομή με μέση τιμή m και τυπική απόκλιση ds_0 . Από τη διεργασία επιλέγουμε τυχαία δείγματα μεγέθους n και έστω $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ το δείγμα που πήραμε στην i -οστή δειγματοληψία ($i = 1, 2, \dots$). Το δειγματικό εύρος R_i δίνεται από τη σχέση

$$R_i = \max\{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}\} - \min\{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}\}.$$

Όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου έχουμε ότι $d = 1$. Όταν η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, το $d > 1$ δηλώνει μια αύξηση του S και απαιτείται ένα άνω όριο ελέγχου k^+s_0 για το R διάγραμμα. Αν $R_i > k^+s_0$ έχουμε ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας που οφείλεται πιθανόν σε αύξηση του S . Όταν η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, το $d < 1$ δηλώνει μια μείωση του S και απαιτείται ένα κάτω όριο ελέγχου k^-s_0 για το R διάγραμμα. Σε αυτή την περίπτωση, αν $R_i < k^-s_0$ έχουμε ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας που οφείλεται πιθανόν σε μείωση του S . Το ARL_r , το οποίο δηλώνει το μέσο αριθμό των R δειγμάτων που

απαιτούνται για να ανιχνευτεί μια αλλαγή στην τιμή του S από το R διάγραμμα, για $d > 1$ και $d < 1$, μπορούν να υπολογιστούν αντίστοιχα ως ακολούθως:

- Όταν $d > 1$

$$P(R > k^+ s_0 | S = d s_0) = P\left(W > \frac{k^+}{d}\right) = 1 - F\left(\frac{k^+}{d}\right) \quad (43)$$

$$ARL_R = \frac{1}{1 - F\left(\frac{k^+}{d}\right)} \quad (44)$$

- Όταν $d < 1$

$$P(R < k^- s_0 | S = d s_0) = P\left(W < \frac{k^-}{d}\right) = F\left(\frac{k^-}{d}\right) \quad (45)$$

$$ARL_R = \frac{1}{F\left(\frac{k^-}{d}\right)} \quad (46)$$

Οι εξισώσεις (43) και (45) παριστάνουν την πιθανότητα του να βρεθεί η στατιστική συνάρτηση R στο R διάγραμμα ελέγχου εκτός των ορίων ελέγχου του για $d > 1$ και $d < 1$, αντίστοιχα. Στους παραπάνω τύπους η συνάρτηση $F(\cdot)$ δηλώνει την αθροιστική συνάρτηση κατανομής του σχετικού εύρους $W = R/S$. Η μελέτη του σχετικού εύρους και η παρουσίαση πινάκων με την αθροιστική συνάρτηση κατανομής του εύρους μπορούν να βρεθούν στην εργασία των Pearson & Hartley (1942).

Επειδή η κατανομή του CRL είναι η γεωμετρική, η αναμενόμενη τιμή του, $E(CRL)$, και η αθροιστική συνάρτηση κατανομής του, $G(\cdot)$, δίνονται από τους τύπους

$$E(CRL) = \frac{1}{p} \quad (47)$$

$$G(CRL) = 1 - (1 - p)^{CRL}, \quad CRL = 1, 2, \dots \quad (48)$$

Στην περίπτωση της ανίχνευσης αυξήσεων του p , μόνο ένα κάτω όριο ελέγχου L απαιτείται για το διάγραμμα CRL , δηλαδή τα CRL διαγράμματα δίνουν σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας εάν $CRL < L$. Το ARL_{CRL} , το οποίο δείχνει το μέσο αριθμό των CRL δειγμάτων που απαιτούνται για να ανιχνευθεί μια αύξηση του p δίνεται από τον τύπο

$$ARL_{CRL} = \frac{1}{G(L-1)} = \frac{1}{1 - (1 - p)^{L-1}} \quad (49)$$

Ο μέσος αριθμός επιθεωρημένων μονάδων ANI (average number inspected) που απαιτούνται για να ανιχνευθεί μια αλλαγή του p από το διάγραμμα CRL είναι ίσο με το γινόμενο των εξισώσεων (47) και (49), δηλαδή

$$ANI = E(CRL) \times ARL_{CRL} = \frac{1}{p} \times \frac{1}{1 - (1-p)^{L-1}} \quad (33)$$

3.2.3 Το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου R - CRL

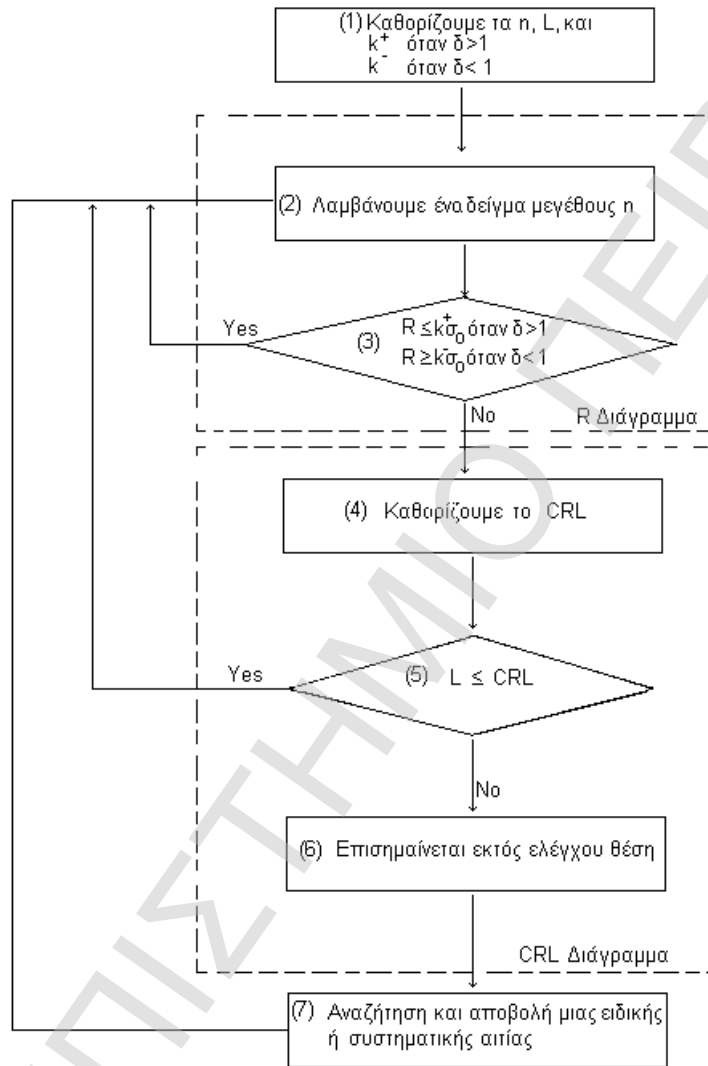
Το συνθετικό διάγραμμα αποτελείται από ένα συνδυασμό του διαγράμματος R και του διαγράμματος CRL . Το διάγραμμα προσπαθεί να παρακολουθήσει τη διασπορά μιας διεργασίας που κατανέμεται κανονικά με μέσο μ και τυπική απόκλιση $d\sigma_0$ όπου $d = 1$, $d > 1$ και $d < 1$ αντιπροσωπεύει τη μη μετατόπιση, μια αύξηση και μια μείωση του σ , αντίστοιχα. Τα ακόλουθα βήματα περιγράφουν τη λειτουργία του συνθετικού διαγράμματος ελέγχου

1. Καθορίζουμε το όριο ελέγχου του διαγράμματος R (ένα άνω όριο ελέγχου k^+s_0 , όταν $d > 1$, ένα κάτω όριο ελέγχου k^-s_0 όταν $d < 1$), το μέγεθος n των δειγμάτων του διαγράμματος R και το κάτω όριο ελέγχου L του CRL διαγράμματος. Ο σχεδιασμός των παραμέτρων του διαγράμματος k^+ (ή k^-) και L θα περιγραφούν αργότερα.
2. Παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n σε κάθε σημείο επιθεώρησης και υπολογίζουμε τη στατιστική συνάρτηση R που απεικονίζεται στο διάγραμμα R .
3. Εάν $R \leq k^+s_0$ όταν $d > 1$ (ή $R \geq k^-s_0$ όταν $d < 1$), τότε αυτό το δείγμα θεωρείται συμμορφούμενη μονάδα στο διάγραμμα CRL , και η ροή ελέγχου επιστρέφει στο βήμα (2). Διαφορετικά, το δείγμα θεωρείται μια μη συμμορφούμενη μονάδα, και η ροή ελέγχου προχωράει στο επόμενο βήμα.
4. Ελέγχουμε τον αριθμό των R δειγμάτων μεταξύ του τρέχοντος και του τελευταίου μη συμμορφούμενου δείγματος. Αυτός ο αριθμός λαμβάνεται ως ένα δείγμα CRL του διαγράμματος CRL .
5. Αν $L \leq CRL$, η διεργασία θεωρείται εντός ελέγχου, και η ροή ελέγχου επιστρέφει στο βήμα (2). Διαφορετικά, η διεργασία θεωρείται εκτός ελέγχου, και η ροή ελέγχου προχωράει στο επόμενο βήμα.
6. Στέλνουμε σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας.
7. Η ειδική αιτία μεταβλητότητας πρέπει να ερευνηθεί και να απομακρυνθεί..
- 8.

Η ροή ελέγχου του συνθετικού διαγράμματος απεικονίζεται στο Σχήμα. 3.5.

ΣΧΗΜΑ 3.5

Η λειτουργία του συνθετικού διαγράμματος R και CRL για τον έλεγχο της διασποράς μιας διεργασίας



Τα βήματα (2) και (3), και (4) - (6) είναι βασισμένα στο διάγραμμα R και το διάγραμμα CRL , αντίστοιχα. Επίσης το σύννηθες διάγραμμα CRL διαφέρει από το νέο διάγραμμα CRL στο ότι κάθε επιθεωρημένη μονάδα στο διάγραμμα CRL αντικαθίσταται από ένα δείγμα μεγέθους n στο διάγραμμα R στο νέο διάγραμμα CRL . Η πιθανότητα να βρεθεί η στατιστική συνάρτησης R εκτός των ορίων ελέγχου του διαγράμματος R αντιστοιχεί στη μη συμμορφούμενη αναλογία p στο κλασικό διάγραμμα CRL . Μόνο ένα κάτω όριο ελέγχου απαιτείται για το διάγραμμα CRL στα πλαίσια του συνθετικού διαγράμματος επειδή η

πιθανότητα που προκύπτει όταν $S = dS_0$ ($d > 1$ ή $d < 1$) είναι πάντα μεγαλύτερη από εκείνη που προκύπτει όταν $S = S_0$.

Έστω N_R ο αριθμό των R δειγμάτων που απαιτούνται για να βρεθεί ένα δείγμα εκτός των ορίων ελέγχου στο διάγραμμα R , και N_{CRL} ο αριθμός των CRL δειγμάτων που απαιτούνται για να βρεθεί ένα δείγμα εκτός των ορίων ελέγχου στο διάγραμμα CRL . Το μέσο μήκος ροής ARL του συνθετικού διαγράμματος, το οποίο δηλώνει το μέσο αριθμό των R δειγμάτων που απαιτούνται για να ανιχνευτεί μια αλλαγή στην τιμή του S στο συνθετικό διάγραμμα ελέγχου για $d > 1$ και $d < 1$ μπορεί, αντίστοιχα, να υπολογιστεί με την αντικατάσταση του p στην εξίσωση (50) με την πιθανότητα των εξισώσεων (43) και (45). Έτσι

- Όταν $d > 1$

$$ARL = E(N_R) \times E(N_{CRL}) = \frac{1}{1 - F\left(\frac{k^+}{d}\right)} \times \frac{1}{1 - F\left(\frac{k^+}{d}\right)^{L-1}} \quad (51)$$

- Όταν $d < 1$

$$ARL = E(N_R) \times E(N_{CRL}) = \frac{1}{F\left(\frac{k^-}{d}\right)} \times \frac{1}{1 - \left[1 - F\left(\frac{k^-}{d}\right)\right]^{L-1}} \quad (52)$$

Από τη ροή ελέγχου αλλά και από τις δύο παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι το κλασικό R διάγραμμα μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση του συνθετικού διαγράμματος (όταν το L τείνει στο άπειρο).

Ο σχεδιασμός ενός συνθετικού διαγράμματος είναι βασισμένος στο ARL , δηλαδή το εντός ελέγχου ARL πρέπει να είναι μεγάλο έτσι ώστε να διατηρηθεί ένα μικρό ποσοστό λανθασμένων συναγεμίων, ενώ το εκτός έλεγχου ARL πρέπει να είναι μικρό έτσι να μπορεί να γίνει έγκαιρη ανίχνευση οποιασδήποτε αλλαγής στην τιμή του σ . Ο στόχος του σχεδιασμού ενός συνθετικού διαγράμματος είναι να ελαχιστοποιηθεί το εκτός ελέγχου ARL όταν το S_0 αλλάξει σε $d_d S_0$ με δεδομένο ότι το εντός ελέγχου ARL θα είναι ίσο με μια προκαθορισμένη τιμή. Το d_d αντιπροσωπεύει το μέγεθος της αλλαγής που θεωρείται κρίσιμο για την ποιότητα της διεργασίας και πρέπει έτσι να ανιχνευθεί το συντομότερο δυνατόν.

Για να διαφωτιστεί ο σχεδιασμός του συνθετικού διαγράμματος δίνουμε στη συνέχεια ένα παράδειγμα με $n=15$, $d_d=1.4$ και εντός ελέγχου ARL ίσο με 370. Σύμφωνα με την εξίσωση (51) (χρησιμοποιούμε $d=1$), διάφοροι συνδυασμοί του L και k^+ μπορούν να καταστήσουν το εντός ελέγχου ARL ίσο με 370. Αφού επιλεγεί το ζεύγος (L, k^+) , το

αντίστοιχο ARL για d_d μπορεί επίσης να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την εξίσωση (51) (χρησιμοποιούμε στη θέση του d το d_d). Τα ζεύγη (L, k^+) και τα αντίστοιχα ARL τους για $d_d = 1.4$ παρατίθενται στον Πίνακα 3.7.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.7

Ζεύγη (L, k^+) και ARL για $d_d = 1.4$ και $ARL_0 = 370$ (συνθετικό διάγραμμα $R - CRL$)

(L, k^+)	ARL για d_d
(2, 4.779)	3.929
(3, 4.927)	3.200
(4, 5.010)	2.977
(5, 5.068)	2.897
(6, 5.112)	2.877
(7, 5.147)	2.885
(8, 5.177)	2.909
(9, 5.202)	2.941
(10, 5.25)	2.978

Ο Πίνακας 3.7 δείχνει ότι για κάθε ένα ζεύγος (L, k^+) προκύπτει ένα διαφορετικό ARL για το d_d . Παρατηρούμε ότι το ARL πρώτα μειώνεται και έπειτα αυξάνει καθώς το L αυξάνεται. Η συμπεριφορά αυτή της τιμής του ARL είναι η ίδια όπως αυτή στο συνθετικό διάγραμμα για τον έλεγχο του μέσου της διεργασίας (δείτε Wu & Spedding (2000a)) αλλά και με αυτή του συνθετικού διαγράμματος S και CRL . Το ARL για d_d φθάνει στην ελάχιστη τιμή του 2.877 όταν είναι το ζεύγος (L, k^+) είναι το (6, 5.112). Οπότε σε αυτήν την περίπτωση με $n = 15$, $d_d = 1.4$ και το εντός ελέγχου ARL ίσο με 370 οι παράμετροι σχεδιασμού του συνθετικού διαγράμματος είναι $L = 6$ και $k^+ = 1.423$. Η διαδικασία για το σχεδιασμό βέλτιστων συνθετικών διαγραμμάτων ελέγχου για άλλες τιμές του n , d_d και του εντός ελέγχου ARL είναι όπως μόλις περιγράφηκε πιο πάνω.

Οι βέλτιστοι σχεδιασμοί των συνθετικών διαγραμμάτων για $n = 5, 10, 15, 20$, με εντός ελέγχου ARL 200, 370, 500, 1000, και με $d_d = 1.1, 1.2, 1.4, 1.6, 2.0$ παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.8. Οι περιπτώσεις με $d_d = 0.9, 0.8, 0.7, 0.5$, και 0.3 παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.9. Ο Πίνακας 3.8 δίνει τα L, k^+ και ARL για d_d όταν $d_d > 1$. Ο Πίνακας 3.9 δίνει τα L, k^- και ARL για d_d όταν $d_d < 1$. Το ARL_R για d_d δίνεται επίσης δίπλα από την αντίστοιχη στήλη του ARL για d_d ώστε να φανεί η ελκυστικότητα της εφαρμογής των συνθετικών διαγραμμάτων

Από τους Πίνακες 3.8 και 3.9, προκύπτει ότι ο βέλτιστος σχεδιασμός του συνθετικού διαγράμματος παράγει πάντα μικρότερο ARL για d_d από το αντίστοιχο R διάγραμμα, ειδικά όταν το d_d είναι μικρό. Από περαιτέρω εξέταση προκύπτει ότι αυτά τα βέλιστα σχέδια παράγουν αρκετά μικρότερο εκτός ελέγχου ARL σε σχέση με το αντίστοιχο R διάγραμμα για $d = 1.1 - 2$ όταν $d_d > 1$, και για $d = 0.9 - 0.1$ όταν $d_d < 1$.

Η διαδικασία βέλτιστου σχεδιασμού για το συνθετικό διάγραμμα συνοψίζεται ως ακολούθως:

1. Καθορίζουμε τα n , d_d και το εντός ελέγχου ARL .
2. Θέτουμε το L ίσο με 2.
3. Όταν $d_d > 1$, λαμβάνουμε το k^+ με την επίλυση της εξίσωσης (51) (χρησιμοποιούμε $d = 1$) που τίθεται ίση με το εντός ελέγχου ARL . Όταν $d_d < 1$, λαμβάνουμε το k^- με την επίλυση της εξίσωσης (52) (χρησιμοποιούμε $d = 1$) που τίθεται ίση με το εντός ελέγχου ARL .
4. Όταν $d_d > 1$, υπολογίζουμε το ARL για d_d από το τρέχον L και k^+ χρησιμοποιώντας την εξίσωση (51) (χρησιμοποιούμε $d = d_d$). Όταν $d_d < 1$, υπολογίζουμε το ARL για d_d από το τρέχον L και k^- χρησιμοποιώντας την εξίσωση (52) (χρησιμοποιούμε $d = d_d$).
5. Εάν το L δεν είναι ίσο με 2, πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα. Διαφορετικά, το L αυξάνεται κατά μια μονάδα και επιστρέφουμε στο βήμα (3).
6. Εάν το τρέχον ARL για d_d είναι μεγαλύτερο από το προηγούμενο, πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά το L αυξάνεται κατά μια μονάδα και επιστρέφουμε στο βήμα (3).
7. Λαμβάνουμε το προηγούμενο L και k^+ (ή k^-) ως βέλτιστες παραμέτρους σχεδιασμού για το συνθετικό διάγραμμα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.8

Βέλτιστοι σχεδιασμοί συνθετικών διαγραμμάτων $R - CRL$ για $d_d > 1$

n	d_d	200 ^β	370	500	1000
5	1.1	^α (28, 4.430), 44.82 ^γ , 68.69 ^δ	(41, 4.649), 69.56, 113.84	(50, 4.755), 86.23, 145.81	(65, 4.952), 1141.60, 258.05
	1.2	(18, 4.337), 16.85, 30.70	(25, 4.551), 23.40, 46.74	(28, 4.641), 27.47, 57.44	(39, 4.856), 39.74, 92.50
	1.4	(10, 4.202), 5.39, 10.20	(12, 4.391), 6.60, 13.76	(13, 4.478), 7.28, 15.96	(16, 4.675), 9.15, 22.47
	1.6	(7, 4.112), 2.95, 5.12	(8, 4.294), 3.37, 6.38	(8, 4.364), 3.60, 7.12	(10, 4.572), 4.20, 9.17
	2.0	(5, 4.018), 1.66, 2.40	(5, 4.170), 1.78, 2.73	(5, 4.241), 1.84, 2.90	(6, 4.448), 1.99, 3.37
10	1.1	(22, 4.952), 33.26, 56.01	(31, 5.149), 50.86, 92.18	(35, 5.233), 62.65, 117.74	(54, 5.448), 101.31, 207.11
	1.2	(13, 4.845), 10.82, 21.82	(16, 5.021), 14.67, 32.78	(18, 5.107), 17.04, 40.05	(25, 5.309), 24.11, 63.72
	1.4	(7, 4.706), 3.21, 6.28	(8, 4.873), 3.80, 8.27	(8, 4.937), 4.13, 9.48	(10, 5.128), 5.02, 13.05
	1.6	(5, 4.621), 1.82, 3.04	(5, 4.759), 2.01, 3.66	(5, 4.824), 2.11, 4.03	(6, 5.014), 2.37, 5.02
	2.0	(3, 4.468), 1.19, 1.52	(4, 4.698), 1.23, 1.66	(4, 4.765), 1.25, 1.73	(4, 4.912), 1.31, 1.93
15	1.1	(19, 5.224), 28.11, 49.90	(27, 5.416), 42.65, 81.82	(31, 5.501), 52.34, 104.34	(45, 5.697), 84.01, 182.93
	1.2	(11, 5.116), 8.50, 18.03	(13, 5.278), 11.37, 26.88	(15, 5.366), 13.13, 32.74	(20, 5.554), 18.34, 51.72
	1.4	(5, 4.936), 2.48, 4.85	(6, 5.112), 2.8, 6.29	(7, 5.209), 3.10, 7.16	(8, 5.375), 3.70, 9.71
	1.6	(4, 4.876), 1.48, 2.34	(4, 5.010), 1.59, 2.77	(4, 5.073), 1.66, 3.01	(5, 5.270), 1.82, 3.68
	2.0	(3, 4.790), 1.07, 1.27	(3, 4.927), 1.09, 1.35	(3, 4.991), 1.10, 1.39	(3, 5.135), 1.13, 1.51
20	1.1	(17, 5.407), 25.005, 46.03	(25, 5.600), 37.73, 75.28	(27, 5.672), 46.19, 95.87	(42, 5.876), 73.73, 167.68
	1.2	(9, 5.281), 7.21, 15.80	(12, 5.464), 9.55, 23.42	(13, 5.538), 10.98, 28.45	(17, 5.719), 15.20, 44.74
	1.4	(5, 5.147), 2.11, 4.08	(5, 5.275), 2.41, 5.22	(6, 5.378), 2.58, 5.92	(7, 5.546), 3.04, 7.95
	1.6	(4, 5.090), 1.32, 1.99	(4, 5.219), 1.40, 2.31	(4, 5.281), 1.44, 2.50	(4, 5.418), 1.56, 3.01
	2.0	(3, 5.06), 1.03, 1.15	(3, 5.138), 1.04, 1.21	(3, 5.201), 1.05, 1.24	(3, 5.340), 1.07, 1.32

^α (L, k^+)

^β Εντός ελέγχου ARL

^γ ARL για d_d

^δ ARL_R για d_d

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.9

Βέλτιστοι σχεδιασμοί συνθετικών διαγραμμμάτων $R - CRL$ για $d_d < 1$

n	d_d	200 ^β	370	500	1000
5	0.9	^α (6, 0.914),	(7, 0.819)	(7, 0.785)	(6, 0.732)
		96.88 ^γ , 133.42 ^δ	175.41, 245.72	234.89, 331.48	461.76, 660.88
	0.8	(5, 0.942)	(6, 0.839)	(6, 0.804)	(8, 0.701)
		44.75, 85.25	78.67, 156.02	104.01, 209.98	199.30, 416.84
	0.7	(4, 0.979)	(5, 0.864)	(5, 0.828)	(6, 0.732)
		19.80, 51.68	33.35, 93.74	43.32, 125.72	80.03, 248.02
0.5	(3, 1.034)	(4, 0.897)	(4, 0.860)	(4, 0.782)	
	3.70, 15.41	5.39, 26.97	6.54, 35.66	10.55, 68.61	
0.3	(2, 1.138)	(3, 0.947)	(3, 0.908)	(3, 0.826)	
	1.12, 3.19	1.24, 4.95	1.31, 6.25	1.55, 11.03	
10	0.9	(11, 1.659)	(13, 1.563)	(14, 1.520)	(19, 1.415)
		56.11, 92.38	96.97, 166.76	127.17, 222.92	238.53, 436.30
	0.8	(7, 1.720)	(9, 1.607)	(10, 1.559)	(13, 1.454)
		16.62, 40.77	26.35, 71.17	33.18, 93.76	57.22, 178.18
	0.7	(5, 1.771)	(6, 1.662) 7.94,	(7, 1.603) 9.53,	(8, 1.508)
		5.57, 17.30	28.83	37.21	14.74, 67.84
0.5	(3, 1.867)	(3, 1.777)	(3, 1.736)	(4, 1.600)	
	1.30, 3.10	1.45, 4.38	1.55, 5.26	1.83, 8.25	
0.3	(2, 1.972)	(2, 1.875)	(2, 1.830)	(2, 1.734)	
	1.00, 1.06	1.00, 1.12	1.00, 1.16	1.00, 1.31	
15	0.9	(12, 2.111)	(15, 2.013)	(17, 1.966)	(26, 1.853)
		39.49, 71.56	65.73, 126.64	84.64, 167.72	152.52, 321.77
	0.8	(7, 2.181)	(9, 2.072)	(10, 2.024)	(13, 1.921)
		9.58, 25.25	14.11, 42.13	17.15, 54.34	27.24, 98.64
	0.7	(5, 2.231)	(5, 2.151)	(6, 2.088)	(7, 1.990)
		3.15, 9.08	4.07, 14.01	4.65, 17.45	6.41, 29.40
0.5	(3, 2.323)	(3, 2.237)	(3, 2.197)	(3, 2.111)	
	1.08, 1.68	1.12, 2.05	1.15, 2.29	1.22, 3.04	
0.3	(2, 2.424)	(2, 2.331)	(2, 2.288)	(2, 2.195)	
	1.00, 1.00	1.00, 1.01	1.00, 1.01	1.00, 1.02	
20	0.9	(12, 2.425)	(15, 2.329)	(19, 2.272)	(25, 2.177)
		30.66, 59.05	49.58, 102.66	62.93, 134.88	109.81, 254.12
	0.8	(7, 2.492)	(8, 2.401)	(9, 2.353)	(12, 2.248)
		6.73, 17.95	9.41, 28.84	11.15, 36.55	16.69, 63.76
	0.7	(4, 2.576)	(5, 2.463)	(5, 2.427)	(6, 2.326)
		2.31, 5.97	2.81, 8.67	3.11, 10.49	3.99, 16.56
0.5	(3, 2.629)	(3, 2.546)	(3, 2.508)	(3, 2.424)	
	1.03, 1.30	1.05, 1.46	1.05, 1.56	1.08, 1.87	
0.3	(2, 2.727)	(2, 2.637)	(2, 2.595)	(2, 2.506)	
	1.00, 1.00	1.00, 1.00	1.00, 1.00	1.00, 1.00	

^α (L, k^+)

^β Εντός ελέγχου ARL

^γ ARL για d_d

^δ ARL_R για d_d

3.2.4 Συγκρίσεις ARL μεταξύ του συνθετικού $R - CRL$ διαγράμματος ελέγχου και άλλων διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς

Σε αυτή την παράγραφο η απόδοση του συνθετικού $R - CRL$ διαγράμματος ελέγχου συγκρίνεται με την απόδοση ανταγωνιστικών διαγραμμάτων ελέγχου. Για τη σύγκριση θεωρούμε τους Πίνακες 3.4 και 3.5 της Παραγράφου 3.1.4.

Από τον Πίνακα 3.4, φαίνεται ότι για την ανίχνευση αύξησης του S το $EWMA \ln S^2$, το $CUSUM S$, το $CUSUM R$, και το $CUSUM \ln S^2$ διαγράμματα ελέγχου ξεπερνούν σε απόδοση το WS , το WR , το S , το MS , το MR , και το R διάγραμμα ελέγχου. Το $CP CUSUM$, και το $Syn R$ διαγράμματα ελέγχου είναι τα αποτελεσματικότερα μεταξύ των διαγραμμάτων που παρουσιάζονται.

Από τον Πίνακα 3.5, φαίνεται ότι για την ανίχνευση μείωσης του S το $CUSUM S$, το $EWMA \ln S^2$, το $CUSUM R$, και το $CUSUM \ln S^2$ διαγράμματα ελέγχου ξεπερνούν σε απόδοση το $Syn R$, το MS , το WS , το MR , το WR , το S , και το R διάγραμμα ελέγχου. Το διάγραμμα $CP CUSUM$ είναι το αποτελεσματικότερο μεταξύ των διαγραμμάτων που παρουσιάζονται. Μια άλλη αξιολογή παρατήρηση είναι ότι και τα διαγράμματα $EWMA$ και $CUSUM$ παράγουν πολύ μικρότερο ARL από το R διάγραμμα όταν η μετατόπιση του σ είναι μικρή έως μέτρια, αλλά είναι μεγαλύτερο έναντι του R διαγράμματος όταν η μετατόπιση είναι μεγάλη. Στο διάγραμμα $Syn R$ αυτό δεν συμβαίνει, δηλαδή το διάγραμμα παράγει με συνέπεια μικρότερο ARL από το R διάγραμμα. Από τις ανωτέρω συγκρίσεις, φαίνεται ότι η ικανότητα του διαγράμματος $Syn R$ να ανιχνεύει την αύξησης του σ είναι καλύτερη από το να ανιχνεύει μειώσεις του σ , και το διάγραμμα είναι μια καλή εναλλακτική λύση για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας.

3.2.5 Σχέδια VSI για το συνθετικό R και CRL διάγραμμα ελέγχου

Το συνθετικό διάγραμμα R και CRL που περιγράφηκε ανωτέρω είναι βασισμένο σε ένα σχήμα FSI. Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιάσουμε το συνθετικό διάγραμμα R και CRL στο οποίο εμφυτεύεται το χαρακτηριστικό VSI. Μια περιεκτική έρευνα για τα σχέδια VSI μπορεί να βρεθεί στον Tagaras (1998). Η βασική χρήση, ο σκοπός και τα αποτελέσματα ενός σχεδίου VSI περιγράφηκαν στην Παράγραφο 3.1.5 και 3.1.6.

Για την περίπτωση του συνθετικού R και CRL διαγράμματος, έστω t_f το μήκος του αρχικού διαστήματος δειγματοληψίας μεταξύ της έναρξης μιας διεργασίας και του πρώτου R δείγματος. Έστω T_R το μήκος του διαστήματος δειγματοληψίας που αποφασίζεται με τη βοήθεια της στατιστικής συνάρτησης R μέσα στο συνθετικό διάγραμμα προτού λάβουμε σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας. Το σχέδιο VSI που καθορίζεται με τη βοήθεια της στατιστικής συνάρτησης R έχει ως εξής:

- Όταν $d > 1$

$$T_R = \begin{cases} a, & \text{αν } 0 \leq R \leq w^+ s_0 \\ b, & \text{αν } w^+ s_0 < R \leq k^+ s_0 \end{cases} \quad (53)$$

- Όταν $d < 1$

$$T_R = \begin{cases} a, & \text{αν } R \geq w^- s_0 \\ b, & \text{αν } k^- s_0 \leq R < w^- s_0 \end{cases} \quad (54)$$

Στους παραπάνω τύπους για το T_R , το a και το b αντιπροσωπεύουν τα μήκη του μεγάλου και του μικρού διαστήματος δειγματοληψίας, αντίστοιχα, με $a > 1 > b > 0$. Τα $w^+ s_0$ και $w^- s_0$ αντιπροσωπεύουν τα προειδοποιητικά όρια του R διαγράμματος εντός του συνθετικού διαγράμματος και προσδιορίζουν πότε θα αλλάξει το διάστημα δειγματοληψίας για $d > 1$ και $d < 1$, αντίστοιχα.

Έστω τώρα T_{CRL} το μήκος του διαστήματος δειγματοληψίας που καθορίζεται με τη βοήθεια της στατιστικής συνάρτησης CRL μέσα στο συνθετικό διάγραμμα προτού λάβουμε σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας. Το σχέδιο VSI που καθορίζεται με τη βοήθεια της στατιστικής συνάρτησης CRL έχει ως εξής

$$T_{CRL} = \begin{cases} c, & \text{αν } CRL \geq w \\ d, & \text{αν } L \leq CRL < w \end{cases} \quad (55)$$

Στους παραπάνω τύπους για το T_{CRL} , το c και το d αντιπροσωπεύουν τα μήκη του μεγάλου και του μικρού διαστήματος δειγματοληψίας, αντίστοιχα, με $c > 1 > d > 0$. Το w αντιπροσωπεύει το προειδοποιητικό όριο του διαγράμματος CRL μέσα στο συνθετικό διάγραμμα και προσδιορίζει πότε θα αλλάξει το διάστημα δειγματοληψίας. Σύμφωνα με τις εξισώσεις (53) (ή (54)) και (55), μπορούν να εφαρμοστούν τέσσερις τύποι συνθετικών διαγραμμάτων:

- (1) $FSI S$ και $FSI CRL$ σχέδιο: Κρατάμε τα a, b, c και το d να είναι ίσα με 1.
- (2) $VSI S$ και $FSI CRL$ σχέδιο: Κρατάμε το c και το d να είναι ίσα 1 αλλά μεταβάλλονται τα a και b .
- (3) $FSI S$ και $VSI CRL$ σχέδιο: Κρατάμε τα a και b να είναι ίσα με 1 αλλά μεταβάλλονται τα c και d .
- (4) $VSI S$ και $VSI CRL$ σχέδιο: Μεταβάλλονται τα a, b, c και d .

Ως ένα παράδειγμα χρήσης του σχεδίου $VSI R$ και $VSI CRL$ για $d > 1$ μπορεί να θεωρηθεί το αντίστοιχο παράδειγμα χρήσης του $VSI S$ και $VSI CRL$ για $d > 1$ που δόθηκε στην Παράγραφο 3.1.5 (δείτε Σχήμα 3.3). Η μόνη διαφορά είναι ότι το S διάγραμμα και η στατιστική συνάρτηση S πρέπει να αντικατασταθούν με το R διάγραμμα και τη στατιστική συνάρτηση R , αντίστοιχα.

3.2.6 Μέσος χρόνος σήματος

Σύμφωνα με την ανάλυση της Παραγράφου 3.1.6 το ARL του συνθετικού διαγράμματος για τη διασπορά διεργασίας στην εξίσωση 51 (ή 52) μπορεί να γραφεί ως

$$ARL = 1 + [E(N_R) - 1] \times E(N_{CRL}) + E(N_{CRL}) - 1 \quad (56)$$

Έστω ATS ο μέσος χρόνο που απαιτείται για να ανιχνευτεί μια αλλαγή στη τιμή του σ για το συνθετικό διάγραμμα. Όταν το μήκος των διαστημάτων δειγματοληψίας λαμβάνεται υπόψη, το ARL στην εξίσωση (36) μετατρέπεται σε ATS ως ακολούθως:

$$ATS = t_f + [E(N_R) - 1] \times E(N_{CRL}) \times E(T_R) + [E(N_{CRL}) - 1] \times E(T_{CRL}) \quad (57)$$

- Όταν $d > 1$

$$E(T_R) = \frac{a \Pr(R \leq w^+ s_0) + b \Pr(w^+ s_0 < R \leq k^+ s_0)}{\Pr(R \leq k^+ s_0)} = \frac{(a-b)F\left(\frac{w^+}{d}\right) + bF\left(\frac{k^+}{d}\right)}{F\left(\frac{k^+}{d}\right)} \quad (58)$$

$$E(T_{CRL}) = \frac{c \Pr(CRL \geq w) + d \Pr(L \leq CRL < w)}{\Pr(CRL \geq L)}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη την ιδιότητα της έλλειψης μνήμης της κατανομής του CRL προκύπτει ότι

$$E(T_{CRL}) = c \Pr(CRL > w - L) + d \Pr(CRL \leq w - L) = c[1 - G_1(w - L)] + dG_1(w - L) \quad (59)$$

Στην παραπάνω σχέση το $G_1(\cdot)$ δηλώνει την αθροιστική συνάρτηση κατανομής του

CRL με παράμετρο $1 - F\left(\frac{k^+}{d}\right)$

- Όταν $d < 1$

$$E(T_R) = \frac{a \Pr(R \geq w^- s_0) + b \Pr(k^- s_0 \leq R < w^- s_0)}{\Pr(R \geq k^- s_0)} = \frac{(b-a)F\left(\frac{w^-}{d}\right) - bF\left(\frac{k^-}{d}\right) + a}{1 - F\left(\frac{k^-}{d}\right)} \quad (60)$$

$$E(T_{CRL}) = \frac{c \Pr(CRL \geq w) + d \Pr(L \leq CRL < w)}{\Pr(CRL \geq L)} = c[1 - G_2(w - L)] + dG_2(w - L) \quad (61)$$

Στην παραπάνω σχέση το $G_2(\cdot)$ δηλώνει την αθροιστική συνάρτηση κατανομής του

CRL με παράμετρο $F\left(\frac{k^-}{d}\right)$.

3.2.7 Σύγκριση των διαγραμμάτων ελέγχου

Τέσσερις τύποι σχεδίων συνθετικού διαγράμματος (δείτε Παράγραφο 3.2.5) μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους σε όρους ATS κάτω από το ίδιο ARL και εντός ελέγχου ATS . Έτσι στα διαγράμματα απαιτείται ο ίδιος αριθμός δειγμάτων για να δώσουν σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας, και όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου απαιτείται να έχουν το ίδιο μέσο ρυθμό δειγματοληψίας και λανθασμένων

συναγερμών. Στη συνέχεια θα περιγραφεί μια λογική προσέγγιση για να επιτευχθεί το ίδιο ARL και εντός ελέγχου ATS για τα τέσσερα διαφορετικά σχέδια.

Για να έχουμε το ίδιο ARL , το $E(N_R)$ και το $E(N_{CRL})$ στα διάφορα σχέδια πρέπει οι παράμετροι των διαγραμμάτων L και k^+ (ή k^-) να είναι ταυτόσημοι. Για να έχουν το ίδιο εντός ελέγχου ATS αφού προηγουμένως έχουν το ίδιο ARL , στα διαφορετικά σχέδια το $E(T_S)$ και το $E(T_{CRL})$ πρέπει να τεθούν ίσα με 1, ενώ το t_f πρέπει να είναι παντού ίδιο όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου.

Όταν το $d > 1$, θέτουμε τις εξισώσεις (58) και (59) να είναι ίσες με 1 (χρησιμοποιούμε $d = 1$) για να λάβουμε το w^+ και το w ως εξής:

$$w^+ = F^{-1}\left(\frac{(1-b)F(k^+)}{a-b}\right) \quad (62)$$

$$w = G_1^{-1}\left(\frac{c-1}{c-d}\right) + L \quad (63)$$

όπου η α.σ.κ. $G_1(\cdot)$ είναι με παράμετρο $1 - F(k^+)$

Όταν το $d < 1$, θέτουμε τις εξισώσεις (60) και (61) να είναι ίσες με 1 (χρησιμοποιούμε $d = 1$) για να λάβουμε το w^- και το w ως εξής:

$$w^- = F^{-1}\left(\frac{a-1+(1-b)F(k^-)}{a-b}\right) \quad (64)$$

$$w = G_2^{-1}\left(\frac{c-1}{c-d}\right) + L \quad (65)$$

όπου η α.σ.κ. $G_2(\cdot)$ είναι με παράμετρο $F(k^-)$.

Επειδή οι $G_1(\cdot)$ και $G_2(\cdot)$ είναι διακριτές αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής, το w στις εξισώσεις (63) και (65) μπορεί να μην υπάρχει για τις δεδομένες τιμές των c και d . Μια εναλλακτική λύση είναι ότι το w και ένα από τα c και d να προκαθορίζονται, και έπειτα θέτουμε την εξίσωση (59) (ή την (61)) ίση με 1 (χρησιμοποιούμε $d = 1$) για να λάβουμε το υπόλοιπο από τα c ή d . Έχει προταθεί να προκαθορίζεται η τιμή του d επειδή το σύντομο διάστημα δειγματοληψίας περιορίζεται συχνά στην πράξη. Ως εκ τούτου οι εξισώσεις (63) και (65) μπορούν, αντίστοιχα, να αντικατασταθούν από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$c = \frac{1 - dG_1(w - L)}{1 - G_1(w - L)}$$

όπου η α.σ.κ. $G_1(\cdot)$ είναι με παράμετρο $1 - F(k^+)$, και

$$c = \frac{1 - dG_2(w - L)}{1 - G_2(w - L)}$$

όπου η α.σ.κ. $G_2(\cdot)$ είναι με παράμετρο $F(k^-)$.

Αφού ικανοποιηθούν οι προαναφερθέντες περιορισμοί για τις συγκρίσεις, όταν η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου το $E(T_R)$ και το $E(T_{CRL})$ είναι μικρότερα του 1, και από αυτό προκύπτει ότι χρησιμοποιείται ένας εντονότερος μέσος ρυθμός δειγματοληψίας. Ως εκ τούτου το σχέδιο VSI παράγει μικρότερο εκτός ελέγχου ATS συγκριτικά με το σχέδιο FSI . Όλα τα σχέδια VSI που παρουσιάσαμε μπορούν να εφαρμοστούν χωρίς τη μέθοδο σχεδιασμού μέσω του d_d που περιγράψαμε στην Παράγραφο 3.1.3. Δηλαδή οι παράμετροι των διαγραμμάτων L και k^+ (ή k^-) δεν παράγουν απαραίτητως το μικρότερο ARL για d_d . Έχει προταθεί ότι τα σχέδια VSI πρέπει να εφαρμόζονται αφού προηγουμένως εφαρμοστεί η μέθοδος σχεδιασμού μέσω του d_d που περιγράψαμε στην Παράγραφο 3.1.3 για να μειωθεί ταυτόχρονα και το ARL και το ATS για d_d .

3.2.8 Παράδειγμα

Έστω μια διαδικασία πλήρωσης κυτίων χυμού, όπου η ποσότητα του χυμού σε κάθε φιάλη είναι το ποιοτικό χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει. Από προηγούμενα στοιχεία η τυπική απόκλιση έχει εκτιμηθεί και έχει βρεθεί ίση με 0.5 cm^3 ($s_0 = 0.5$). Η εμφάνιση μιας σημαντικής ειδικής αιτίας μεταβλητότητας η οποία αυξάνει τη τυπική απόκλιση στην τιμή 0.7 cm^3 ($d_d = 0.7 / 0.5 = 1.4$), πρέπει να ανιχνευθεί το συντομότερο δυνατόν. Τα δείγματα που λαμβάνονται κάθε 10 λεπτά είναι μεγέθους 5 ($n = 5$) και μια αποδεκτή τιμή για το εντός ελέγχου ARL είναι η 200. Η διαδικασία ελέγχεται αρχικά με ένα R διάγραμμα ελέγχου με άνω όριο ελέγχου $k^+s_0 = 2.443 \text{ cm}^3$ ($k^+ = 4.886$), και το διάγραμμα απαιτεί 102 λεπτά κατά μέσο όρο για να δώσει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας ($ARL_R = 10.20$). Επειδή η τιμή του εκτός ελέγχου ARL δεν είναι ικανοποιητική, αποφασίζεται να εφαρμοστεί το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου $R - CRL$. Από τον Πίνακα 3.8, προκύπτει ότι το άνω όριο ελέγχου του R διαγράμματος ελέγχου πρέπει να τεθεί ίσο με $k^+s_0 = 2.101 \text{ cm}^3$ ($k^+ = 4.202$), και το κάτω όριο ελέγχου του διαγράμματος CRL πρέπει να τεθεί ίσο με $L = 10$. Το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου απαιτεί κατά μέσο όρο 53.9 λεπτά. για να

δώσει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας ($ARL=5.39$). Ο μέσος χρόνος για το σήμα που προκύπτει με το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου είναι σχεδόν το μισό από αυτό που λαμβάνεται από το R διάγραμμα, αλλά απαιτεί ακόμα περίπου 1 ώρα για να δώσει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας. Ως εκ τούτου το σχέδιο $VSI S$ και $VSI CRL$ του τρέχοντος συνθετικού διαγράμματος πρόκειται να εξεταστεί.

Υποθέτουμε ότι το μήκος του ελάχιστου διαστήματος δειγματοληψίας για τη διεργασία είναι 1 λεπτό, το μήκος του μικρού (σύντομου) διαστήματος δειγματοληψίας που αποφασίζεται χωριστά από τις στατιστικές συναρτήσεις R και CRL τίθεται να είναι 1 λεπτό ($b = d = 0.1$). Εάν το μήκος του μεγάλου διαστήματος δειγματοληψίας που καθορίζεται από τη στατιστική συνάρτηση R τεθεί ίσο με 19 λεπτά ($a = 1.9$), και για να απλοποιήσουμε τη λειτουργία του σχεδίου VSI , το μήκος του μεγάλου διαστήματος δειγματοληψίας που αποφασίζεται από τη στατιστική συνάρτηση CRL πρέπει να επιλεγεί κοντά στα 19 λεπτά. Έτσι για να καλύψουμε τις απαιτήσεις για τη σύγκριση που περιγράφηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, το μήκος του αρχικού διαστήματος δειγματοληψίας πρέπει να τεθεί ίσο με 10 λεπτά. ($t_f = 1$), το προειδοποιητικό όριο του R διαγράμματος πρέπει να τεθεί ίσο με $w^+s_0 = 4.460 \text{ cm}^3$ ($w^+ = 2.230$), και το προειδοποιητικό όριο του CRL διαγράμματος πρέπει να τεθεί ίσο με $w = 38$ το οποίο συνεπάγεται ότι το μήκος του μεγάλου διαστήματος δειγματοληψίας που αποφασίζεται από τη στατιστική συνάρτηση CRL πρέπει να τεθεί ίσο με 19.2 λεπτά ($c = 1.92$). Αυτό το σχέδιο VSI απαιτεί κατά μέσο όρο 34.5 λεπτά για να δώσει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας ($ATS = 3.24$), το οποίος βελτιώνει ουσιαστικά την απόδοση του τρέχοντος συνθετικού διαγράμματος.

3.2.9 Συμπεράσματα

Το συνθετικό διάγραμμα που αποτελείται από ένα R και ένα CRL διάγραμμα αποδείχθηκε ότι είναι ένα αρκετά αποτελεσματικό διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς μιας διεργασίας. Το κλασικό R διάγραμμα μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση του συνθετικού διαγράμματος (όταν το L τείνει στο άπειρο). Η ικανότητα του συνθετικού διαγράμματος να ανιχνεύει αυξήσεις στην τιμή του σ είναι καλύτερη από το να ανιχνεύει μειώσεις της τιμής του σ . Επίσης παρατέθηκε μια βέλτιστη διαδικασία σχεδιασμού του συνθετικού διαγράμματος με στόχο να ελαχιστοποιηθεί το ARL για μια σημαντική αλλαγή του σ με περιορισμούς

το προκαθορισμένο μέγεθος δείγματος n και το εντός ελέγχου ARL . Οι Πίνακες 3.8 και 3.9 μπορούν βοηθήσουν σε αυτή την κατεύθυνση παρέχοντας τιμές για την κατασκευή των ορίων ελέγχου του συνθετικού διαγράμματος. Τα σχέδια VSI του συνθετικού διαγράμματος που παρουσιάσαμε μπορούν να εφαρμοστούν για να βελτιώσουν περαιτέρω την απόδοση των διαγραμμάτων εάν το σχήμα FSI δεν είναι ικανοποιητικό.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

- Αντζουλάκος, Δ. (2003). *Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας*, Σημειώσεις παραδόσεων, Πανεπιστήμιο Πειραιά, Πειραιάς.
- Δαμιανού, Χ. (1996). *Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας και Αξιοπιστία*, Σημειώσεις παραδόσεων, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα.
- Καφφές, Δ. Γ. (1996). *Στατιστικός Ποιοτικός Έλεγχος*, Σημειώσεις παραδόσεων, Πανεπιστήμιο Πειραιά, Πειραιάς.

Ξένη

- Acosta-Mejia CA (1998). Monitoring reduction in variability with the range. *IIE Trans*, **30**, 515–523.
- Acosta- Mejia CA (1999). Improved p Charts to Monitor Process Quality. *JIB Transactions*, **31**, 509-516.
- Acosta-Mejia CA, Pignatiello JJ Jr.& Rao BV (1999). A comparison of control charting procedures for monitoring process dispersion. *IIE*, **31**, 569–579.
- Acosta-Mejia, C. A., & Pignatiello, J. J. (2000). Monitoring process dispersion without subgrouping. *Journal of Quality Technology*, **32**, 89–102.
- Albin, S. L. , Kang, L. & Shea, G. (1997). An X and EWMA Chart for Individual Observations. *Journal of Quality Technology*, **29**, 41-48.
- Alt FB (1984) *Multivariate quality control*. In: Kotz S, Johnson NL, Read CR (eds) *The encyclopedia of statistical sciences*. Wiley, New York, 110–122.
- Amin, R. W., Schmid, W. & Frank, O. (1997). The effects of autocorrelation on the R-chart and the S2-charts. *Sankhya B*, **59**, 229–255.
- Aparisi, F. & Haro CL (2001). Hotelling's T2 control chart with variable sampling intervals. *Int. J. Prod. Res*, **39**, 3127–3140.
- Bourke PD (1991). Detecting a shift in fraction nonconforming using run-length control charts with 100% inspection. *Journal of Quality Technology*, **23**, 225–238.
- Calzada, M.E. & Scariano S.M. (2001). The robustness of the synthetic control chart to non-normality. *Commun Stat Simul Comput*, **30**, 311–326.
- Champ, C. W. & Woodall, W. H. (1987). Exact results for shewhart control charts with supplementary runs rules. *Technometrics*, **29**, 393-399.
- Chang, T.C. & Gan, F.F. (1994). Optimal designs of one-sided EWMA charts for monitoring a process variance. *J. Stat. Comput. Simul.*, **49**, 33–48.
- Chang, T.C. & Gan FF (1995). A cumulative sum control chart for monitoring process variance. *J Qual Technol*, **27**, 109–119.
- CHiu, W. K. (1975). Economic Design of Attribute Control Charts. *Technometrics*, **17**, 81-87.
- Chen, F.L. & Huang H.J. (2005). A synthetic control chart for monitoring process dispersion with sample range. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **26**, 7-8, 842-851.
- Clushkovsky, E. A. (1994). On-Line G-Control Chart for Attribute Data. *Quality and Reliability Engineering International*, **10**, 217-227.
- Collani, E. V. & Sheil, J. (1989). An approach to controlling process variability. *Journal of Quality Technology*, **21**, 87–96.
- Crowder, S.V. & Hamilton, M.D. (1992). An EWMA for monitoring a process standard deviation. *Journal of Quality Technology*, **24**, 12–21.

- Cui, R., & Reynolds, M.R. (1988). X charts with runs rules and variable sampling intervals. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **17**, 1073-1093.
- Davis, R.B. & Woodall W.H. (2002). Evaluating and improving the synthetic control chart. *Journal of Quality Technology*, **34**, 200–208.
- Dudewicz, E. J. & Mishra, S. N. (1988). *Modern Mathematical Statistics*. John Wiley & Sons, New York, NY.
- Duncan, A. J. (1956). The Economic Design of X-bar Chart to Maintain Current Control of a Process. *Journal of the American Statistical Association*, **51**, 228-241.
- Duncan, A. J. (1978). The Economic Design of p-Charts to Maintain Current Control of a Process: Some Numerical Results. *Technometrics*, **20**, 235-243.
- Huang, H.J. & Chen, F.L. (2005). A synthetic control chart for monitoring process dispersion with sample standard deviation. *Computers & Industrial Engineering*, **49**, 2, 221-240.
- Kaminsky F.C. , Benneyan J.C. & Davis R.D. (1992). Statistical control charts based on a geometric distribution. *Journal of Quality Technology*, **24**, 63–69.
- Klein, M. (2000). Modified S-charts for controlling process variability. *Communications in Statistics—Simulation and Computation*, **29**, 919–940.
- Lowry, C. A., Champ, C. W. & Woodall, W. H. (1995). The performance of control charts for monitoring process variation. *Communications in Statistics—Simulation and Computation*, **24**, 409–437.
- Lucas, J. M. (1985). Counted Data CUSUM's. *Technometrics*, **27**, 129-144.
- Montgomery, D. C. (1997). *Introduction to Statistical Quality Control*. John Wiley & Sons, New York, NY.
- Ncube, M. M. (1990). An Exponentially Weighted Moving Average Combined Shewhart Cumulative Score Control Procedure. *International Journal of Quality and Reliability Management*, **7**, 29-35.
- Nelson, L. S. (1982). Control charts for individual measurements. *Journal of Quality Technology*, **14**, 172–173.
- Nelson, L. S. (1984). The Shewhart Control Chart Tests for Special Causes. *Journal of Quality Technology*, **16**, 237-239.
- Nelson, L. S. (1990). Monitoring reduction in variation with a range chart. *Journal of Quality Technology*, **22**, 163–165.
- Nelson, L. S. (1994). A Control Chart for Parts-per-Million Nonconforming Items. *Journal of Quality Technology*, **26**, 239-240.
- Page, E. S. (1963). Controlling the standard deviation by CUSUM and warning lines. *Technometrics*, **5**, 307–315.
- Pearson, E. S. & Hartley, H.O. (1942). The probability integral of the range in samples of n observations from a normal population. *Biometrika*, **32**, 301–310.
- Reynolds, M. R. Jr., Amin, R.W., Arnold, J. C. & Nachlas, J. A. (1988). X charts with variable sampling intervals. *Technometrics*, **30**, 181–192.
- Reynolds, M. R., Amin, R. W., & Arnold, J. C. (1990). CUSUM charts with variable sampling intervals. *Technometrics*, **32**, 371–384.
- Reynolds, M. R., JR. & Stoumbos, Z. G. (1999). A CUSUM chart for monitoring a proportion when inspecting continuously. *Journal of Quality Technology*, **31**, 87-108.
- Ryan, T. P., and Schwertman, N. C. (1997). Optimal Limits for Attribute Control Charts. *Journal of Quality Technology*, **29**, 86-98.

- Runger, G. C., & Pignatiello, J. J. (1991). Adaptive sampling for process control. *Journal of Quality Technology*, **23**, 135–155.
- Saccucci, M. S., Amin, R. W., & Lucas, J. M. (1992). Exponentially weighted moving average control schemes with variable sampling intervals. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **21**, 627–657.
- Scariano, S. M., & Calzada, M. E. (2003). A note on the lower-sided synthetic chart for exponentials. *Quality Engineering*, **15**, 677–680.
- Shamma, W. E. & Shamma, A. K. (1992). Development and evaluation of control charts using double exponentially weighted moving averages. *International Journal of Quality And Reliability Management*, **9**, 18-25.
- Srivastava MS (1997). CUSUM procedure for monitoring variability. *Commun Stat Theory Methods*, **26**, 2905–2926.
- Tagaras, G. (1998) A survey of recent developments in the design of adaptive control charts. *Journal of Quality Technology*, **30**, 212–231.
- Taguchi, C. (1986). *Introduction to Quality Engineering*. Asian Productivity Organization, UNIPUB, White Plains, New York.
- Tuprah, K. & Ncube, M. (1987). A comparison of dispersion quality control charts. *Sequential Anal*, **6**, 155–163.
- Woodal, W. H. (1997). Control Charts Based on Attribute Data: Bibliography and Review. *Journal of Quality Technology*, **29**, 172-183.
- Wu Z, Yeo SH, Fan H(2000). A comparative study of the CRL-type control charts. *Qual. Reliabil. Eng. Int.*, **16**, 269–279.
- Wu, Z. & Spedding, T. A. (2000a). A Synthetic Control Chart for Detecting Small Shifts in the Process Mean. *Journal of Quality Technology*, **32**, 32-38.
- Wu, Z. & Spedding, T. A. (2001). Implementing Synthetic Control Charts. *Journal of Quality Technology*, **32**, 75-78.
- Wu, Z., Yeo, S. H.- & SPEDDING, T. A. (2001). A Synthetic Control Chart for Detecting Fraction Nonconforming Increases. *Journal of Quality Technology*, **33**, 105-112.
- Wu, Z. & Yeo, S. H. (2001). Implementing Synthetic Control Charts for Attributes. *Journal of Quality Technology*, **33**, 113-115.
- Xie, W. , Xie, M. & Goh, T. N. (1995). A Shewhart-Like Charting Technique for High Yield Processes. *Quality and Reliability Engineering International*, **11**, 189-196.
- Xie, M. , Goh, T. N. & Lu, X.S. (1998). A comparative study of CCC and CUSUM charts. *Qual. Reliabil. Eng. Int.*, **14**, 339–345.
- Yang, Z., Xie, M., Kuralmani, V. & Tsui, K. L. (2002). On the performance of geometric charts with estimated control limits. *Journal of Quality Technology*, **34**, 448–458.