ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΟ ΔΙΩΝΥΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Θεοφάνης – Εμμανουήλ Δ. Τράντας

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Οκτώβριος 2008

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΟ ΔΙΩΝΥΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Θεοφάνης – Εμμανουήλ Δ. Τράντας

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Οκτώβριος 2008

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον εσωτερικό κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Μπούτσικας Μιχαήλ (Επιβλέπων)
- Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος
- Πανοπούλου Αικατερίνη

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN APPLIED STATISTICS

PRICING AMERICAN OPTIONS IN A *n*-PERIOD BINOMIAL MODEL

By

Theofanis – Emmanouil D. Trantas

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece
October 2008

Στους γονείς μου

Δημήτριο και Βασιλική

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Μ. Μπούτσικα για την αμέριστη υποστήριξη και βοήθεια που μου προσέφερε καθ' όλη τη διάρκεια της συγγραφής αυτής της εργασίας. Με την ενθάρρυνση και καθοδήγησή του κατάφερα να αποκτήσω πολύτιμη γνώση στο συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο. Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω τον αδερφό μου, Θωμά, τη νονά μου, Ουρανία, και τη φίλη μου, Ειρήνη, για τη συμπαράσταση και εμψύχωσή τους στα δύο χρόνια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Περίληψη

Σκοπός της Διπλωματικής Εργασίας αυτής είναι η μελέτη και ανάλυση των Δικαιωμάτων Προαίρεσης Αμερικανικού τύπου, που αποτελούν μια ιδιαίτερη και πολύ ενδιαφέρουσα, πρακτικά και ερευνητικά, περιοχή των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων. Ως γνωστό, τα Δικαιώματα αυτά μπορούν να εξασκηθούν οποιαδήποτε στιγμή πριν τον χρόνο λήξης τους. Συνεπώς, εκτός από την εύρεση της no-arbitrage αξίας τους, είναι πολύ ενδιαφέρον και το πρόβλημα της εύρεσης του βέλτιστου χρόνου εξάσκησής τους. Δεδομένου ότι δεν υπάρχει κλειστός τύπος για την αντιμετώπιση του συγκεκριμένου προβλήματος, η τιμολόγηση θα γίνει προσεγγιστικά χρησιμοποιώντας μεθόδους (στοχαστικού) δυναμικού προγραμματισμού στο διωνυμικό μοντέλο *n* περιόδων. Το διωνυμικό μοντέλο αποτίμησης είναι μοντέλο διακριτού χρόνου που όμως με την κατάλληλη παραμετροποίηση αποτελεί ικανοποιητική προσέγγιση του κλασικού μοντέλου συνεχούς χρόνου των Black and Scholes.

Αρχικά (στο Κεφάλαιο 1) θα γίνει μια εισαγωγή στην πρακτική πλευρά των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων με έμφαση στα Δικαιώματα Προαίρεσης. Κυρίως θα μας απασχολήσουν τα απλά (*vanilla*) Δικαιώματα, δηλαδή τα Δικαιώματα αγοράς και πώλησης Ευρωπαϊκού και Αμερικανικού τύπου. Ωστόσο θα αναφερθούμε και στα εξωτικά (*exotic*) Δικαιώματα που παρουσιάζουν ιδιαίτερες προκλήσεις στην τιμολόγησή τους. Έπειτα, στο Κεφάλαιο 2, θα οριστεί και θα θεμελιωθεί η θεωρία του διωνυμικού μοντέλου που αποτελεί το κύριο εργαλείο στην ανάλυσή μας. Πρώτα θα δοθεί το απλό διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου το οποίο θα επεκτείνουμε αργότερα για πολλές περιόδους. Μέσω του μοντέλου αυτού θα παρουσιαστεί η στρατηγική αγοράς και πώλησης μετοχών που πρέπει να ακολουθήσει ο πωλητής ενός Δικαιώματος, ώστε να είναι εξασφαλισμένος σε περίπτωση που ο κάτοχός του το εξασκήσει. Στο Κεφάλαιο 3 θα γίνει μια περιληπτική αναφορά στις μεθόδους αποτίμησης Δικαιωμάτων Προαίρεσης σε μοντέλα συνεχούς χρόνου, καθώς επίσης και σε άλλα μοντέλα που έχουν προταθεί. Θα παρουσιάσουμε τις βασικές αρχές του μοντέλου των Black and Scholes που αποτελεί τη βάση για περαιτέρω έρευνα στο συγκεκριμένο επιστημονικό πεδίο.

Θα ακολουθήσει στο Κεφάλαιο 4 μια εισαγωγή στο δυναμικό προγραμματισμό, όπου μέσω κατάλληλων παραδειγμάτων θα περιγραφεί η μεθοδολογία με την οποία αντιμετωπίζονται προβλήματα ελαχιστοποίησης του κόστους ή μεγιστοποίησης του κέρδους. Στο Κεφάλαιο 5 θα αναφερθούμε στα martingales και τους χρόνους διακοπής για διακριτό χρόνο, η θεωρία

των οποίων είναι εξαιρετικά χρήσιμη για την κατανόηση της μεθόδου αποτίμησης Δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου.

Τα δύο τελευταία κεφάλαια αποτελούν το κύριο μέρος αυτής της εργασίας που είναι τα Δικαιώματα Προαίρεσης Αμερικανικού τύπου. Μεγάλο μέρος της θεωρίας που αναπτύσσεται αφορά γενικότερα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα με Αμερικανικό τρόπο εξάσκησης. Στο Κεφάλαιο 6 μελετώνται ξεχωριστά τα Δικαιώματα Αγοράς και τα Δικαιώματα Πώλησης. Επίσης γίνεται διαχωρισμός μεταξύ εκείνων των Δικαιωμάτων των οποίων η αξία εξαρτάται από τη διαδρομή της τιμής της υποκείμενης μετοχής (*path-dependent*) και εκείνων στα οποία δεν συμβαίνει αυτό. Τέλος, στο Κεφάλαιο 7 δίνονται οι κατάλληλοι αναδρομικοί αλγόριθμοι για την τιμολόγηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης Αμερικανικού και Ασιατικού-Αμερικανικού τύπου, ενώ μελετάται αριθμητικά και η επίδραση που έχει στην εκτιμώμενη αξία η αλλαγή των τιμών διαφόρων παραμέτρων του μοντέλου. Οι αλγόριθμοι αυτοί εφαρμόζονται για την (no-arbitrage) τιμολόγηση συγκεκριμένων Αμερικανικών Δικαιωμάτων με τη χρήση ιστορικών δεδομένων.

Abstract

The aim of this MSc Dissertation is the study and analysis of American Options, which constitute a particular and very interesting (both in practice and in theory) region of financial derivatives. This type of Options can be exercised at any time before their expiry date. Consequently, apart from the calculation of their no-arbitrage value, the problem of finding their optimal exercise time is also quite interesting. Since a closed form formula for the confrontation of this particular problem does not exist, we shall employ appropriate (stochastic) dynamic programming recursive algorithms in the n-period binomial model. The binomial asset pricing model is a discrete time model which (with appropriate parameterization) approximates satisfactorily the classical continuous time model of Black and Scholes.

Initially (Chapter 1) there will be an introduction to the practice of financial derivatives focusing on Options. We will mainly study vanilla Options, i.e. European and American call and put Options. However, we will also mention particular types of exotic Options that are very challenging in their pricing. In Chapter 2, the binomial asset pricing model, which is the main tool in our analysis, will be defined. First, the one-period binomial model will be presented, which we later extend to an n period binomial model. Employing this model, we will present the hedging strategy that should be followed by the writer of an Option, in order to be secured in case the holder decides to exercise it. In Chapter 3, there will be a brief introduction to Option pricing in continuous time models. We will study the basic principles of the Black and Scholes model that constitute the basis for further research in this particular scientific field.

An introduction to dynamic programming will follow (Chapter 4), where, with the use of appropriate illustrating examples, we will describe the methodology that enables us to confront problems of cost minimization or profit maximization. Next, we will state and prove important definitions and theorems from discrete time martingales and stopping times theory, which are exceptionally useful for developing the American Option pricing method.

The last two chapters deal with the main subject of the dissertation, which is the American Options pricing. Large part of the theory we present applies to American financial derivatives in general. In Chapter 6, call Options and put Options are studied separately. We also present the methodology for the study of path-depended and non-path-depended Options. Finally, in

Chapter 7 we offer appropriate recursive algorithms for American and Asian-American Option pricing. We also numerically study the effect of various parameters of the model in the estimated value. These algorithms are being employed in order to find the no-arbitrage value of specific American Options using historical data.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή στα Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα

1.1 Τα Κυριότερα Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα

Όπως είναι γνωστό, στα Χρηματιστήρια Αξιών διαπραγματεύονται μετοχές και ομολογίες των εισηγμένων σε αυτά εταιριών και ο κάθε επενδυτής κάνει τις επιλογές του με βάση την πληροφόρηση που διαθέτει. Ένας πολύ καλός τρόπος για να αντισταθμιστούν οι κίνδυνοι που προκύπτουν συνθέτοντας ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών, είναι να προστεθούν σε αυτό παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα τα οποία γίνονται αντικείμενα συναλλαγών στα Χρηματιστήρια Παραγώγων. Ωστόσο, λόγω της φύσης τους, τα προϊόντα αυτά συχνά χρησιμοποιούνται για κερδοσκοπία, δεδομένου ότι μπορεί να αποκομίσουν σημαντικά κέρδη στον κάτοχό τους με τη διάθεση λίγων μόνο κεφαλαίων, αρκεί να γίνει επιτυχημένη πρόβλεψη του επιπέδου των τιμών των τίτλων στα οποία αναφέρονται τα παράγωγα. Αυτό θα γίνει πιο εύκολα αντιληπτό παρακάτω όπου θα εξηγήσουμε τον τρόπο με τον οποίο αποδίδουν κέρδη στους επενδυτές.

Στην Ελλάδα, το Χρηματιστήριο Παραγώγων Αθηνών (Χ.Π.Α.) ξεκίνησε τη λειτουργία του το 1999, ενώ το 2002 έγινε συγχώνευση με απορρόφηση του Χ.Π.Α. από το Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών υπό την επωνυμία «Χρηματιστήριο Αθηνών Α.Ε.». Σκοπός του Χ.Π.Α. είναι η οργάνωση και η υποστήριξη των συναλλαγών στη χρηματιστηριακή αγορά παραγώγων, η οργάνωση της λειτουργίας του συστήματος των συναλλαγών αυτών, καθώς και κάθε συναφής δραστηριότητα. Τη διασφάλιση της εκπλήρωσης των συναλλαγών εκ μέρους των συμβαλλόμενων ώστε να διατηρείται εύρυθμη η λειτουργία της αγοράς, έχει αναλάβει η Εταιρία Εκκαθάρισης Συναλλαγών επί Παραγώγων (ΕΤ.Ε.Σ.Ε.Π.). Τόσο το Χ.Π.Α. όσο και η ΕΤ.Ε.Σ.Ε.Π. εποπτεύονται από την Επιτροπή Κεφαλαιαγοράς ως προς την τήρηση των διατάξεων και της νομοθεσίας που τους διέπει.

Ας εξετάσουμε όμως πιο αναλυτικά τα παράγωγα. Ως παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν μπορεί να θεωρηθεί μια σύμβαση μεταξύ δύο συμβαλλόμενων μερών, η οποία συνδέεται με έναν ή περισσότερους τίτλους που ονομάζονται υποκειμενικές αξίες. Τέτοιοι τίτλοι μπορεί να είναι μετοχές, χρηματιστηριακοί δείκτες, ομόλογα, ακόμη και εμπορεύματα. Με απλά λόγια, όταν κάποιος επενδυτής αγοράζει ένα παράγωγο προϊόν, στην ουσία αγοράζει την πρόβλεψη για τη μελλοντική τιμή της υποκειμενικής αξίας του. Οι κυριότερες κατηγορίες παραγώγων είναι τα Προθεσμιακά Συμβόλαια, τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης, τα Προϊόντα Δανεισμού Τίτλων και τα Δικαιώματα Προαίρεσης.

Τα **Προθεσμιακά Συμβόλαια** (*Forward Contracts*) είναι μια συμφωνία μεταξύ του αγοραστή και του πωλητή, κατά την οποία ο πρώτος υπόσχεται να αγοράσει και ο δεύτερος υπόσχεται να πωλήσει συγκεκριμένη ποσότητα ενός αγαθού ή χρηματοοικονομικού τίτλου. Η συναλλαγή πραγματοποιείται σε προκαθορισμένη ημερομηνία και η τιμή συναλλαγής είναι επίσης συμφωνημένη από πριν.

Τα **Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης** (*Future Contracts*) έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά με τα Προθεσμιακά Συμβόλαια που αναφέραμε. Πρόκειται και πάλι δηλαδή για συμφωνία μεταξύ των αντισυμβαλλόμενων, κατά την οποία ο ένας θα αγοράσει και ο άλλος θα πωλήσει συγκεκριμένη ποσότητα ενός αγαθού ή τίτλου, ενώ η ημερομηνία και η τιμή συναλλαγής είναι γνωστές εκ των προτέρων. Η διαφορά μεταξύ των δύο έγκειται στο γεγονός ότι τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης είναι αντικείμενα διαπραγμάτευσης στα Χρηματιστήρια Παραγώγων, κάτι που συνεπάγεται μεγαλύτερη εγγύηση για την πραγματοποίηση της συναλλαγής. Αντίθετα, τα Προθεσμιακά Συμβόλαια χρησιμοποιούνται στην εξωχρηματιστηριακή αγορά και πρέπει ο κάθε συμβαλλόμενος να ελέγχει τη φερεγγυότητα του άλλου προτού συνάψει ένα τέτοιο συμβόλαιο. Οι δύο τύποι συμβολαίων που αναφέραμε είναι εξαιρετικά χρήσιμοι σε ένα περιβάλλον αβεβαιότητας ιδίως για επιχειρήσεις, οι οποίες χρησιμοποιώντας τα μπορούν να κάνουν τον προγραμματισμό των μελλοντικών εξόδων τους, εξασφαλίζοντας για παράδειγμα πρώτες ύλες σε συγκεκριμένη τιμή.

Τα **Προϊόντα Δανεισμού Τίτλων** είναι προϊόντα μέσω των οποίων οι επενδυτές μπορούν να δανείσουν μετοχές στο Χρηματιστήριο Παραγώγων (*Stock Repo* ή *Stock Lending*), αλλά και να δανειστούν από αυτό (*Reverse Stock Repo* ή *Stock Borrowing*). Δίνεται έτσι η δυνατότητα να καλυφθούν υποχρεώσεις παράδοσης μετοχών, οι οποίες μπορεί να οφείλονται σε διάφορους λόγους. Το Χ.Π. (Χρηματιστήριο Παραγώγων) συγκεντρώνει μετοχές από επενδυτές που επιθυμούν να δανείσουν και σχηματίζει το λεγόμενο *pool*. Όταν οι μετοχές δανείζονται σε άλλους επενδυτές, το Χ.Π. λαμβάνει σε ημερήσια βάση ένα έσοδο ως τόκο, το οποίο στη συνέχεια μοιράζει σε αυτούς που δάνεισαν τις μετοχές τους. Το κίνητρο για να δανείσει κάποιος τις μετοχές του είναι ότι στην περίπτωση που δεν πρόκειται να τις πωλήσει για ένα διάστημα, αποκομίζει ένα έσοδο χωρίς καθόλου ρίσκο, πλέον της μερισματικής απόδοσης την οποία συνεχίζει να απολαμβάνει. Βασική προϋπόθεση για να έχει εισόδημα ένας επενδυτής που δάνεισε τις μετοχές του, είναι να υπάρχει ζήτηση για τις συγκεκριμένες μετοχές. Ωστόσο, ακόμη και στην περίπτωση που κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει, ο επενδυτής δεν διακινδυνεύει απολύτως τίποτα και μάλιστα μπορεί να πάρει πίσω τις μετοχές του σε τέσσερις εργάσιμες ημέρες. Αξίζει τέλος να σημειώσουμε ότι τα Προϊόντα Δανεισμού Τίτλων είναι τα μόνα παράγωγα προϊόντα που δύναται να αποφέρουν έσοδα χωρίς καθόλου κίνδυνο.

1.2 Δικαιώματα Προαίρεσης

Τα **Δικαιώματα Προαίρεσης** (*Options*) είναι διαπραγματεύσιμα συμβόλαια μεταξύ δύο μερών, τα οποία παρέχουν στον κάτοχό τους το δικαίωμα (αλλά όχι την υποχρέωση) να αγοράσει (ή να πωλήσει) κάποιο περιουσιακό στοιχείο (μετοχές, ομολογίες, νομίσματα, χρηματιστηριακούς δείκτες κ.α.) σε προκαθορισμένη τιμή και η συναλλαγή θα λάβει χώρα είτε σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή T, είτε κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου $[0, T]$. Για την απόκτηση ενός Δικαιώματος, ο ενδιαφερόμενος πρέπει να καταβάλλει συγκεκριμένο ποσό το οποίο είναι η τιμή αγοράς και αντιπροσωπεύει ένα ασφάλιστρο που λαμβάνει ο πωλητής του Δικαιώματος, δεδομένου ότι ο τελευταίος αναλαμβάνει ρίσκο. Στην αγορά υπάρχει ένα μεγάλο πλήθος από διαθέσιμα Δικαιώματα Προαίρεσης, τα χαρακτηριστικά των οποίων διαφέρουν λίγο ή πολύ. Πιο συγκεκριμένα, ένα Δικαίωμα χαρακτηρίζεται από:

- *Το είδος.* Μπορεί να είναι είτε Δικαίωμα Αγοράς (*Call Option*) είτε Δικαίωμα Πώλησης (*Put Option*).
- *Την υποκειμενική αξία.* Πρόκειται για τον συνδεδεμένο με το Δικαίωμα τίτλο (συνήθως μετοχή ή χρηματιστηριακός δείκτης).
- *Την ποσότητα των τίτλων που θα συναλλαχθούν* (εάν εξασκηθεί το Δικαίωμα).
- *Την τιμή εξάσκησης* (*strike price* ή *exercise price*). Είναι η τιμή στην οποία ο κάτοχος του Δικαιώματος θα αγοράσει (ή θα πωλήσει) τον υποκείμενο τίτλο.

- *Το ασφάλιστρο* ή *τιμή του Δικαιώματος* (*option price* ή *option premium*). Είναι το αντίτιμο που καταβάλει ο αγοραστής προκειμένου να αποκτήσει το Δικαίωμα.
- *Τον χρόνο εξάσκησης* (*exercise date*). Εδώ διακρίνονται δύο κατηγορίες Δικαιωμάτων: (α) *Αμερικανικού τύπου* (*American Option*), όπου η εξάσκηση μπορεί να γίνει οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέχρι την ημερομηνία λήξης και (β) *Ευρωπαϊκού τύπου* (*European Option*) όπου το Δικαίωμα μπορεί να εξασκηθεί μόνο κατά την ημερομηνία λήξης του.

Ανάλογα με το είδος του Δικαιώματος, ένας επενδυτής μπορεί να λάβει τις ακόλουθες θέσεις:

- Αγορά Δικαιώματος Αγοράς (*long call*),
- Πώληση Δικαιώματος Αγοράς (*short call*),
- Αγορά Δικαιώματος Πώλησης (*long put*),
- Πώληση Δικαιώματος Πώλησης (*short put*).

Καθεμία από αυτές, σε συνδυασμό με την κατάλληλη στρατηγική, μπορεί να μειώσει τις ενδεχόμενες απώλειες αλλά και να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα αποκομιδής κερδών.

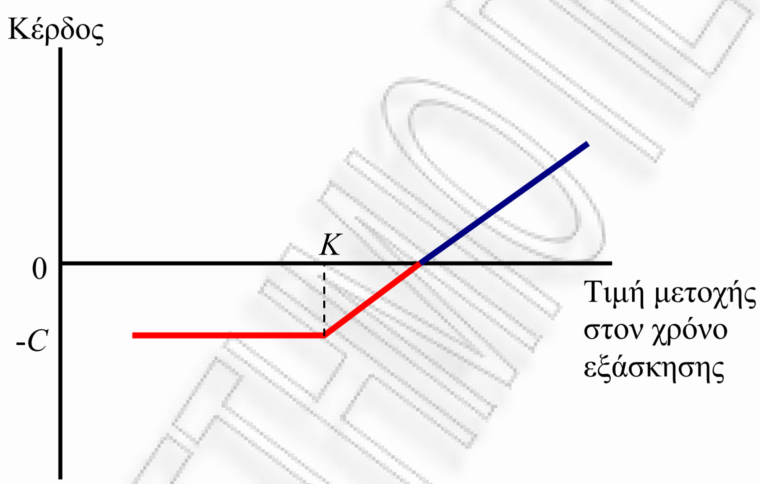
Στη συνέχεια θα εξηγήσουμε μέσω απλών παραδειγμάτων τον τρόπο με τον οποίο αποδίδουν κέρδη τα Δικαιώματα Προαίρεσης. Για να γίνει πιο κατανοητός, θα αναφερθούμε σε Δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου. Έστω $S(T)$ η τιμή της μετοχής στον χρόνο εξάσκησης, K η τιμή εξάσκησης και C η τιμή του Δικαιώματος.

(1). Θέση Long Call. Ο επενδυτής που λαμβάνει θέση long call, προβλέπει ότι η τιμή της υποκείμενης μετοχής θα κινηθεί ανοδικά. Εάν λοιπόν αγοράσει ένα Δικαίωμα Αγοράς και η πρόβλεψή του επαληθευτεί (συγκεκριμένα όταν $S(T) > K$), τότε εξασκεί το Δικαίωμα και αποκομίζει κέρδος $(S(T) - K) - C$ αφού θεωρητικά έχει τη δυνατότητα να πωλήσει αμέσως τις μετοχές του στο Χρηματιστήριο. Από την άλλη πλευρά, εάν πέσει έξω στην πρόβλεψή του ($S(T) \leq K$), δεν εξασκεί το Δικαίωμα και έχει ζημιά ίση με την τιμή αγοράς C του Δικαιώματος. Επομένως, ο γενικός τύπος του κέρδους από τη θέση long call θα είναι

$$\max\{S(T) - K, 0\} - C = (S(T) - K)^{+} - C.$$

- *Παράδειγμα* 1 (*ευνοϊκή περίπτωση*): Αγορά Δικαιώματος Αγοράς μίας μετοχής στην τιμή εξάσκησης $K = 15$€. Το Δικαίωμα αγοράστηκε προς $C = 3$€ και στον χρόνο εξάσκησης η τιμή της μετοχής είναι $S(T) = 20$€. Ο αγοραστής εξασκεί το Δικαίωμα και έχει κέρδος 2€.

- *Παράδειγμα* 2 (*μη-ευνοϊκή περίπτωση*): Ομοίως με το προηγούμενο παράδειγμα αλλά στον χρόνο εξάσκησης η τιμή της μετοχής είναι $S(T) = 10$€. Ο αγοραστής δεν εξασκεί το Δικαίωμα, αφού μπορεί να αγοράσει τη μετοχή φθηνότερα στο Χρηματιστήριο και επομένως έχει ζημιά 3€. Στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζεται η συνάρτηση του κέρδους ως προς την τιμή της μετοχής στον χρόνο εξάσκησης:



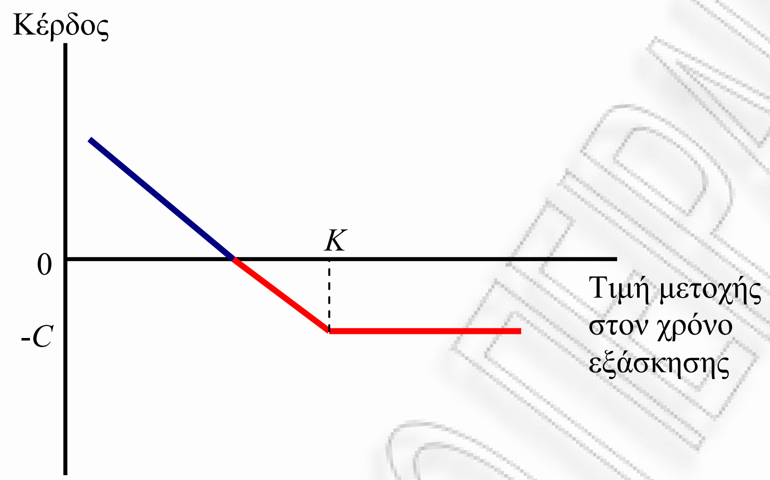
Σχήμα 1.2.1. Κέρδος από τη χρήση ενός Long Call

(2). Θέση Long Put. Η θέση long put λαμβάνεται όταν ο επενδυτής προσδοκά καθοδική τάση της τιμής της μετοχής. Έτσι στην περίπτωση που συμβεί αυτό (συγκεκριμένα όταν $S(T) < K$), το κέρδος του θα είναι $(K - S(T)) - C$, ενώ αντίθετα εάν η τιμή της μετοχής ανέβει ($S(T) \geq K$), τότε δεν εξασκεί το Δικαίωμα και η ζημιά είναι ίση με C. Επομένως, ο γενικός τύπος του κέρδους από τη θέση long put θα είναι

$$\max\{K - S(T), 0\} - C = (K - S(T))^{+} - C.$$

- *Παράδειγμα* 1 (*ευνοϊκή περίπτωση*): Αγορά Δικαιώματος Πώλησης μίας μετοχής στην τιμή εξάσκησης $K = 15$€. Το Δικαίωμα αγοράστηκε προς $C = 3$€ και στον χρόνο εξάσκησης η τιμή της μετοχής είναι $S(T) = 10$€. Ο αγοραστής εξασκεί το Δικαίωμα και έχει κέρδος 2€.

- *Παράδειγμα* 2 (*μη-ευνοϊκή περίπτωση*): Ομοίως με το προηγούμενο παράδειγμα αλλά στον χρόνο εξάσκησης η τιμή της μετοχής είναι $S(T) = 20$€. Ο αγοραστής δεν εξασκεί το Δικαίωμα, αφού τον συμφέρει να πωλήσει τη μετοχή ακριβότερα στο Χρηματιστήριο κι έτσι έχει ζημιά 3€. Το αντίστοιχο διάγραμμα είναι:



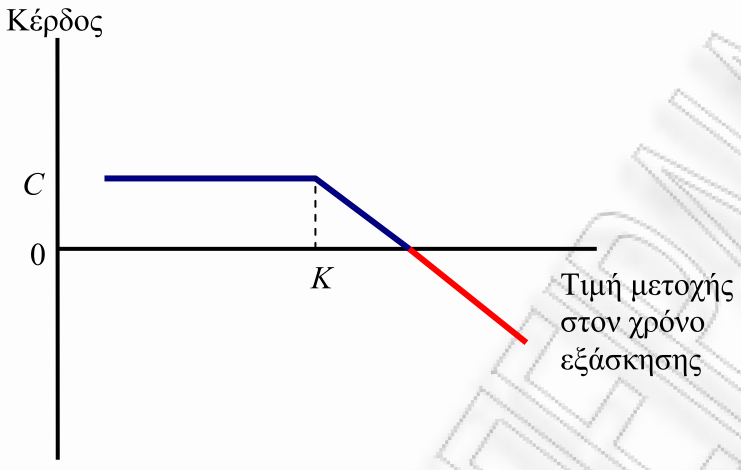
Σχήμα 1.2.2. Κέρδος από τη χρήση ενός Long Put

(3). Θέση Short Call. Η πώληση ενός Δικαιώματος Αγοράς ή Πώλησης έχει τα αντίθετα αποτελέσματα από την αγορά, δεδομένου ότι από την πλευρά του πωλητή του Δικαιώματος αντιστρέφονται οι προσδοκίες για την τιμή της υποκείμενης μετοχής. Γι' αυτό λοιπόν ένας επενδυτής λαμβάνει θέση short call όταν εκτιμά ότι η τιμή της μετοχής θα έχει στάσιμη ή ελαφρά καθοδική τάση. Τότε (συγκεκριμένα όταν $S(T) \leq K$) ο αγοραστής του Δικαιώματος δεν θα εξασκήσει το Δικαίωμα και ο πωλητής αποκομίζει κέρδος C, δηλαδή το αντίτιμο στο οποίο πούλησε το Δικαίωμα. Ωστόσο εάν η τιμή της μετοχής τελικά ανέβει ($S(T) > K$), τότε η ζημιά του πωλητή είναι $C - (S(T) - K)$. Επομένως, ο γενικός τύπος του κέρδους από τη θέση short call θα είναι

$$C - \max\{S(T) - K, 0\} = C - (S(T) - K)^{+}.$$

- *Παράδειγμα* 1 (*ευνοϊκή περίπτωση*): Πώληση Δικαιώματος Αγοράς μίας μετοχής στην τιμή εξάσκησης K = 15€. Το Δικαίωμα πωλήθηκε προς C = 3€ και στον χρόνο εξάσκησης η τιμή της μετοχής είναι $S(T)$ = 10€. Ο κάτοχος δεν εξασκεί το Δικαίωμα, άρα ο πωλητής έχει κέρδος 3€.

- *Παράδειγμα* 2 (*μη-ευνοϊκή περίπτωση*): Όμοια με το προηγούμενο παράδειγμα αλλά στον χρόνο εξάσκησης η τιμή της μετοχής είναι $S(T)$ = 20€. Ο κάτοχος εξασκεί το Δικαίωμα και ο πωλητής έχει ζημιά 2€. Το διάγραμμα του κέρδους τώρα έχει ως εξής:



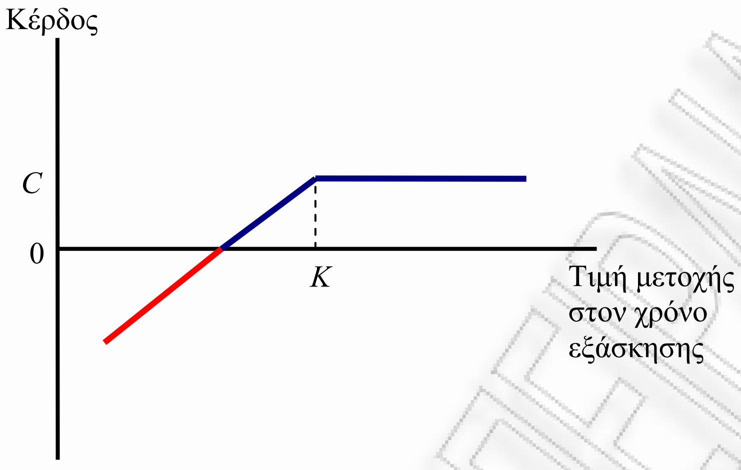
Σχήμα 1.2.3. Κέρδος από τη χρήση ενός Short Call

(4). Θέση Short Put. Αντίστοιχα με τα παραπάνω, η θέση short put λαμβάνεται όταν υπάρχει πρόβλεψη για στάσιμη ή ελαφρά ανοδική τάση της τιμής της μετοχής. Εάν αυτό συμβεί (συγκεκριμένα όταν $S(T) \geq K$), ο αγοραστής δεν έχει συμφέρον ώστε να εξασκήσει το Δικαίωμα και ο πωλητής έχει κέρδος C. Στην αντίθετη περίπτωση ($S(T) < K$) όπου το Δικαίωμα εξασκείται, ο πωλητής έχει ζημιά ίση με $C - (K - S(T))$. Επομένως, ο γενικός τύπος του κέρδους από τη θέση short put θα είναι

$$C - \max\{K - S(T), 0\} = C - (K - S(T))^{+}.$$

- *Παράδειγμα* 1 (*ευνοϊκή περίπτωση*): Πώληση Δικαιώματος Πώλησης μίας μετοχής στην τιμή εξάσκησης K = 15€. Το Δικαίωμα πωλήθηκε προς C = 3€ και στον χρόνο εξάσκησης η τιμή της μετοχής είναι $S(T)$ = 20€. Ο κάτοχος δεν εξασκεί το Δικαίωμα, άρα ο πωλητής έχει κέρδος 3€.

- *Παράδειγμα* 2 (*μη-ευνοϊκή περίπτωση*): Όμοια με το προηγούμενο παράδειγμα αλλά στον χρόνο εξάσκησης η τιμή της μετοχής είναι $S(T)$ = 10€. Ο κάτοχος εξασκεί το Δικαίωμα και ο πωλητής έχει ζημιά 2€. Το διάγραμμα για τη θέση αυτή είναι:



Σχήμα 1.2.4. Κέρδος από τη χρήση ενός Short Put

Παρατηρούμε ότι στις δύο περιπτώσεις όπου λαμβάνεται θέση short (πώληση), ο επενδυτής δύναται να έχει κέρδος ακόμη και στην περίπτωση κατά την οποία η τιμή της μετοχής παραμείνει στάσιμη. Αυτό ισχύει λόγω της ύπαρξης του αντιτίμου C που καταβάλλει ο αγοραστής του Δικαιώματος και είναι ουσιαστικά η «αμοιβή» του πωλητή για τον κίνδυνο που αναλαμβάνει πουλώντας το Δικαίωμα. Όταν η τιμή της μετοχής στον χρόνο εξάσκησης βρίσκεται κοντά στην τιμή εξάσκησης τότε ο πωλητής εξακολουθεί να έχει κέρδος, έστω και μειωμένο. Πρόκειται για εκείνη την περιοχή των τιμών της μετοχής μέσα στην οποία ο κάτοχος θα εξασκήσει το Δικαίωμα προκειμένου να περιορίσει τις απώλειές του και όχι να αποκομίσει κέρδος, κλείνοντας την ανοιχτή θέση του. Πιο συγκεκριμένα, τα short calls επιφέρουν κέρδος όσο ισχύει $S(T) < K + C$, ενώ αντίστοιχα για τα short puts η σχέση είναι $S(T) > K - C$.

1.3 Εξωτικά ή Εξωτερικά Δικαιώματα Προαίρεσης

Κλείνοντας το εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο στα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα, αξίζει να αναφερθούμε σε ορισμένα Δικαιώματα Προαίρεσης που διαφέρουν ως προς κάποια από τα χαρακτηριστικά τους, σε σχέση με τα συνήθη Δικαιώματα Ευρωπαϊκού και Αμερικανικού Τύπου (που καλούνται και *vanilla options*). Τα Δικαιώματα αυτά χαρακτηρίζονται ως *exotic options*, κυρίως λόγω του ότι είναι διαπραγματεύσιμα σε εξω-χρηματιστηριακές αγορές. Σε κάθε περίπτωση, πρέπει να τονίσουμε πως τα exotic options απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή από τον ενδιαφερόμενο επενδυτή, είτε θέλει να τα τιμολογήσει είτε να τα χρησιμοποιήσει σε ένα χαρτοφυλάκιο για αντιστάθμιση του κινδύνου, καθώς έχουν πιο περίπλοκη μορφή. Ας δούμε μερικές κατηγορίες από τα Δικαιώματα αυτά.

Η βασικότερη κατηγορία έχει να κάνει με Δικαιώματα των οποίων η τιμή εξάσκησης δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή, αλλά εξαρτάται από την πορεία της τιμής της μετοχής κατά τη διάρκεια ισχύος του συμβολαίου. Εδώ διακρίνουμε τα *Asian options*, τα *Lookback options*, τα *Barrier options* και άλλα.

- Στα ***Ασιατικά Δικαιώματα***, η τιμή εξάσκησης εξαρτάται από τον μέσο όρο της τιμής κλεισίματος της μετοχής για μια συγκεκριμένη περίοδο. Πρωτοεμφανίστηκαν στις Ασιατικές αγορές με σκοπό να μη δίνεται η δυνατότητα στους πωλητές Δικαιωμάτων να χειραγωγούν την τιμή της μετοχής κατά τον χρόνο εξάσκησης.

- Στα ***Lookback options***, ο κάτοχος έχει το δικαίωμα να αγοράσει (ή να πωλήσει) τον υποκείμενο τίτλο στη χαμηλότερη (ή υψηλότερη) τιμή που είχε, για μια προκαθορισμένη περίοδο.

- Τα ***Barrier options*** χαρακτηρίζονται από έναν αλγόριθμο σύμφωνα με τον οποίο εάν η τιμή της μετοχής ξεπεράσει μια οριακή τιμή, τότε ο κάτοχος αποκτά ή χάνει (ανάλογα με τον τύπο) το δικαίωμα να εξασκήσει.

Τέλος, άλλα exotic options μπορεί να αναφέρονται σε περισσότερες από μια υποκειμενικές αξίες (*Basket options, Himalaya options*), να έχουν ειδικά δικαιώματα αγοράς και πώλησης ή ακόμη και να περιλαμβάνουν τιμές συναλλάγματος με διάφορους τρόπους.

Η ανάλυσή μας ξεκινά με την παρουσίαση και μελέτη του διωνυμικού μοντέλου, αρχικά μιας και στη συνέχεια πολλών περιόδων (2^o Κεφάλαιο). Έπειτα γίνεται αναφορά στην ιστορία της αποτίμησης Δικαιωμάτων Προαίρεσης και σε άλλα μοντέλα που έχουν προταθεί κατά καιρούς, ιδιαίτερα δε στο μοντέλο των Black & Scholes που έθεσε τα θεμέλια για την τιμολόγηση Δικαιωμάτων σε συνεχή χρόνο (3^o Κεφάλαιο). Ακολουθεί μια εισαγωγική ενότητα στον δυναμικό προγραμματισμό, από τον οποίο προέκυψε η μεθοδολογία αποτίμησης Αμερικανικών Δικαιωμάτων με τη χρήση του διωνυμικού μοντέλου (4^o Κεφάλαιο). Άλλωστε, τα προβλήματα εύρεσης της βέλτιστης στρατηγικής για τη μεγιστοποίηση ή την ελαχιστοποίηση μιας διαδρομής που αντιμετωπίζονται στον δυναμικό προγραμματισμό, είναι σχεδόν όμοια με το πρόβλημα εύρεσης της βέλτιστης πολιτικής εξάσκησης ενός Δικαιώματος Αμερικανικού τύπου. Στο 5^o Κεφάλαιο παρουσιάζονται βασικά στοιχεία από τη θεωρία των martingales και των χρόνων διακοπής για διακριτό χρόνο, η γνώση των οποίων είναι απολύτως απαραίτητη για την κατανόηση της ανάλυσης που ακολουθεί. Το Κεφάλαιο 6 αποτελεί το βασικό κομμάτι της μελέτης. Αναφέρεται με λεπτομέρεια στον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιείται το διωνυμικό μοντέλο για να τιμολογηθούν Δικαιώματα Προαίρεσης Αμερικανικού τύπου. Επίσης, γίνεται ξεχωριστή ανάλυση των Δικαιωμάτων Αγοράς και Πώλησης, αλλά και ειδική προσέγγιση στα Δικαιώματα που η τιμή τους εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθεί η τιμή της μετοχής (*path-dependent*). Το τελευταίο Κεφάλαιο (7ο Κεφάλαιο) ασχολείται με την πρακτική εφαρμογή της θεωρίας του 6^{ου} Κεφαλαίου, η οποία γίνεται μέσω της χρήσης ηλεκτρονικού υπολογιστή, μιας και το πλήθος και η πολυπλοκότητα των υπολογισμών που απαιτούνται είναι πολύ μεγάλο. Στο κεφάλαιο αυτό εφαρμόζονται οι κατάλληλοι αναδρομικοί αλγόριθμοι αποτίμησης Αμερικανικών και Ασιατικών-Αμερικανικών Δικαιωμάτων, γίνεται πρακτική εφαρμογή τους για τη μετοχή της Ο.Τ.Ε. Α.Ε., ενώ τέλος δίνονται ορισμένα χρήσιμα διαγράμματα για τη βέλτιστη πολιτική εξάσκησης και τον τρόπο με τον οποίο επηρεάζεται η αξία ενός Δικαιώματος από διάφορους παράγοντες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

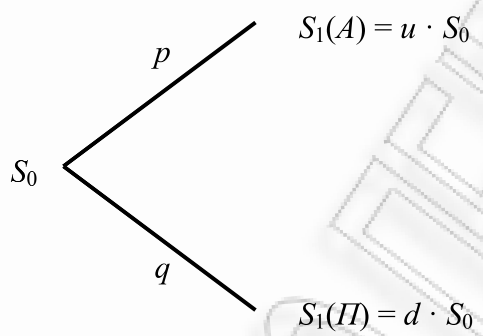
Το Διωνυμικό Μοντέλο

2.1 Το Διωνυμικό Μοντέλο Μιας Περιόδου

Το βασικό εργαλείο που θα χρησιμοποιήσουμε για να τιμολογήσουμε Δικαιώματα Προαίρεσης στην παρούσα εργασία, είναι το διωνυμικό μοντέλο αποτίμησης. Θα ξεκινήσουμε παρουσιάζοντας πρώτα το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου, το οποίο αν και μη ρεαλιστικό για πραγματικά δεδομένα, θα βοηθήσει τον αναγνώστη να κατανοήσει τις βασικές αρχές και τον τρόπο λειτουργίας του μοντέλου αυτού.

Θεωρούμε ότι το διάστημα που μελετούμε την τιμή μιας μετοχής έχει χρονική διάρκεια μιας περιόδου. Η αρχή της περιόδου αυτής είναι η χρονική στιγμή μηδέν (0) και η λήξη της είναι η χρονική στιγμή ένα (1). Τη χρονική στιγμή μηδέν βρισκόμαστε στο παρόν και θεωρούμε μια μετοχή της οποίας η τιμή μας είναι γνωστή. Η τιμή αυτή προφανώς είναι πάντοτε θετική και συμβολίζεται S_0. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα A και Π, που αντιπροσωπεύουν την άνοδο και την πτώση της τιμής της μετοχής αντίστοιχα. Τη χρονική στιγμή ένα, η τιμή της μετοχής μπορεί να πάρει δύο πιθανές τιμές ανάλογα με το ποιο ενδεχόμενο είναι αληθές. Οι τιμές αυτές συμβολίζονται $S_1(A)$ και $S_1(\Pi)$. Επίσης, θα συμβολίσουμε με p την πιθανότητα να υπάρξει άνοδος και $q = 1 - p$ την πιθανότητα να υπάρξει πτώση της τιμής της μετοχής.

Τη χρονική στιγμή μηδέν δεν γνωρίζουμε ποιο από τα δύο ενδεχόμενα θα πραγματοποιηθεί στη χρονική στιγμή ένα. Αυτό θα το γνωρίζουμε μόνο όταν είμαστε στη χρονική στιγμή ένα και όχι νωρίτερα. Ωστόσο, μπορούμε εκ των προτέρων να γνωρίζουμε την τιμή που θα πάρει η μετοχή στην περίπτωση που συμβεί το ενδεχόμενο A ή το ενδεχόμενο Π. Ορίζουμε δύο θετικούς αριθμούς, έστω u και d, από τις λέξεις *up* και *down*. Εάν συμβεί το ενδεχόμενο A, η μετοχή θα πάρει την τιμή $S_1(A) = u \cdot S_0$, ενώ εάν συμβεί το ενδεχόμενο Π, η μετοχή θα πάρει την τιμή $S_1(\Pi) = d \cdot S_0$. Είναι εύλογο να θεωρήσουμε ότι πρέπει να ισχύει $u > d$. Εάν ίσχυε $u = d$, η τιμή της μετοχής στη χρονική στιγμή ένα δεν θα ήταν τυχαία και το μοντέλο δεν θα παρουσίαζε κανένα ενδιαφέρον. Από τα παραπάνω είναι λογικό να συμπεράνει κάποιος ότι το u παίρνει τιμές μεγαλύτερες του ένα και το d τιμές μικρότερες του ένα, αλλά όχι αρνητικές. Όλα όσα αναφέραμε μέχρι στιγμής, μπορούν να αποδοθούν γραφικά στο ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 2.1.1. Το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου

Στη συνέχεια ορίζουμε το επιτόκιο προεξόφλησης, το οποίο θεωρούμε ίσο με το επιτόκιο μιας επένδυσης σίγουρου κέρδους (π.χ. ομόλογα δημοσίου) και το συμβολίζουμε r. Με απλά λόγια, ένας επενδυτής που θα επενδύσει μία νομισματική μονάδα τη χρονική στιγμή μηδέν, θα πάρει $1 + r$ τη χρονική στιγμή ένα. Προς το παρόν θεωρούμε ότι ο ανατοκισμός δεν είναι συνεχής. Προφανώς, το επιτόκιο θα παίρνει πάντοτε θετική τιμή.

Προκειμένου μια αγορά να είναι «δίκαιη» (και όπως θα δούμε αργότερα, σε «ισορροπία»), είναι απαραίτητο να μην δίνεται η ευκαιρία σε κανέναν επενδυτή να έχει σίγουρο (προεξοφλημένο) κέρδος ή αλλιώς *arbitrage*. Πώς όμως ένας επενδυτής μπορεί να έχει κέρδος χωρίς ρίσκο; Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι μια μετοχή που είναι διαπραγματεύσιμη όχι μόνο στην εγχώρια αγορά, αλλά και σε κάποιο χρηματιστήριο του εξωτερικού. Υπάρχει περίπτωση η τιμή της μετοχής σε μία από τις δύο αγορές να μην έχει προσαρμοστεί σωστά εξαιτίας της συνεχώς μεταβαλλόμενης τιμής του συναλλάγματος. Ένας επενδυτής που θα αντιληφθεί τη διαφορά αυτή, μπορεί (θεωρητικά στιγμιαία) να αγοράσει από το χρηματιστήριο όπου η μετοχή είναι υποτιμημένη και να πωλήσει σε αυτό όπου είναι υπερτιμημένη, αποκομίζοντας έτσι σίγουρο κέρδος. Στην πραγματικότητα, οι αγορές παρουσιάζουν ευκαιρία για arbitrage ορισμένες φορές. Ωστόσο, κάτι τέτοιο συμβαίνει για πολύ μικρό χρονικό διάστημα διότι γίνεται γρήγορα αντιληπτό και εξαλείφεται (διότι αυξάνεται η ζήτηση του υποτιμημένου και η προσφορά του υπερτιμημένου τίτλου με αποτέλεσμα οι δύο τιμές να μεταβληθούν και να φτάσουν σε ένα επίπεδο όπου δεν προσφέρεται πια ευκαιρία για arbitrage).

Στο μοντέλο που εξετάζουμε πρέπει να ισχύει η σχέση $0 < d < 1 + r < u$, διαφορετικά η μετοχή έχει πάντοτε καλύτερη απόδοση (όταν $d \geq 1 + r$) και δεν έχει νόημα η έκδοση ομολόγων ή έχει πάντοτε χειρότερη απόδοση (όταν $u \leq 1 + r$) και δεν έχει νόημα η έκδοση μετοχών. Διαφορετικά (ισοδύναμα) μπορούμε να πούμε ότι θα πρέπει να ισχύει η παραπάνω σχέση ώστε να μην υπάρχει η δυνατότητα για arbitrage. Πράγματι, εάν ισχύει $d \geq 1 + r$, τότε κάποιος επενδυτής μπορεί στο χρόνο 0 να αγοράσει τη μετοχή δανειζόμενος χρήματα (δηλ. εκδίδοντας ομόλογα) και στο χρόνο 1 να πωλήσει την μετοχή και να εξοφλήσει τους δανειολήπτες του έχοντας σίγουρο κέρδος. Στην περίπτωση που $u \leq 1 + r$ μπορεί να λάβει αντίθετες θέσεις (αγορά ομολόγων, ανοικτή πώληση μετοχής) αποκομίζοντας και πάλι σίγουρο κέρδος.

Είναι φανερό ότι το μοντέλο που παρουσιάσαμε είναι ακατάλληλο για να περιγράψει την κίνηση μιας μετοχής ικανοποιητικά. Όταν όμως περιλαμβάνει πολλές περιόδους, αποτελεί μια πολύ καλή προσέγγιση στα μοντέλα συνεχούς χρόνου και αυτήν ακριβώς την ιδιότητα θα εκμεταλλευτούμε προκειμένου να τιμολογήσουμε Δικαιώματα Προαίρεσης στη συνέχεια αυτής της εργασίας.

Ας δούμε τώρα πώς χρησιμοποιείται το διωνυμικό μοντέλο πρακτικά. Έστω ότι έχουμε ένα Δικαίωμα Αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου επί μίας μετοχής με τιμή εξάσκησης K. Με βάση όσα έχουμε εξηγήσει σχετικά με τον τρόπο που αποδίδουν κέρδη τα Δικαιώματα, γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι θα πρέπει να ισχύει $S_1(\Pi) < K < S_1(A)$. Εάν η τιμή της μετοχής πέσει, ο κάτοχος δεν εξασκεί το Δικαίωμα. Στην αντίθετη περίπτωση το Δικαίωμα εξασκείται και το κέρδος είναι $S_1(A) - K$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $(S_1 - K)^+$, ο οποίος δηλώνει ότι στη χρονική στιγμή ένα η αξία του Δικαιώματος είναι το μέγιστο μεταξύ της ποσότητας μέσα στην παρένθεση και του μηδενός. Έστω $V_1(A)$ η αξία του Δικαιώματος (ή αλλιώς το κέρδος που αποδίδει) τη χρονική στιγμή ένα εάν υπάρξει άνοδος της τιμής της μετοχής, $V_1(\Pi)$ η αντίστοιχη αξία στην περίπτωση που υπάρξει πτώση και V_0 η ζητούμενη αξία του Δικαιώματος τη χρονική στιγμή μηδέν.

Προκειμένου να βρούμε το V_0 χρησιμοποιούμε αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική. Κατασκευάζουμε το λεγόμενο “χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης” (*hedging portfolio*) το οποίο περιλαμβάνει ομόλογα και μετοχές και εξασφαλίζει τον πωλητή του Δικαιώματος από τον κίνδυνο που επιφέρει η πώλησή του. Η αξία του χαρτοφυλακίου αυτού τη χρονική στιγμή ένα (αλλά και οποιαδήποτε χρονική στιγμή στο μοντέλο πολλών περιόδων που θα εξετάσουμε παρακάτω) ισούται με την no-arbitrage αξία του Δικαιώματος την ίδια χρονική στιγμή, ανεξάρτητα από το ενδεχόμενο (άνοδος ή πτώση) που συνέβη. Έτσι, η αρχική αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι ίση με τη ζητούμενη no-arbitrage αξία του Δικαιώματος. Για να ισχύει βέβαια αυτό, πρέπει σε κάθε χρονική στιγμή να γίνονται οι κατάλληλες επεμβάσεις στη σύνθεση του χαρτοφυλακίου. Δηλαδή το χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης είναι δυναμικό και αυτοχρηματοδοτούμενο.

Ας το εξετάσουμε πιο αναλυτικά. Υποθέτουμε ότι ξεκινάμε με κεφάλαιο X_0 και αγοράζουμε Δ_0 μετοχές τη χρονική στιγμή μηδέν. Δηλαδή τελικά διαθέτουμε $X_0 - \Delta_0 \cdot S_0$. Τη χρονική στιγμή ένα, το διαθέσιμο κεφάλαιο τοκίζεται με επιτόκιο r και η τιμή της μετοχής γίνεται S_1. Άρα η αξία του χαρτοφυλακίου είναι:

$$X_1 = (1 + r)\,(X_0 - \Delta_0 S_0) + \Delta_0 S_1 = (1 + r)X_0 + \Delta_0(S_1 - (1 + r)S_0)$$

Πρέπει τα X_0 και Δ_0 να είναι τέτοια ώστε να ισχύει $X_1(A) = V_1(A)$ και $X_1(\Pi) = V_1(\Pi)$, με $V_1(A)$ και $V_1(\Pi)$ γνωστά. Με άλλα λόγια, γνωρίζουμε το κέρδος που θα έχουμε σε κάθε πιθανή κίνηση της μετοχής, γνωρίζουμε με ποια πιθανότητα θα πραγματοποιηθεί κάθε ενδεχόμενο, αλλά δεν γνωρίζουμε ποιο από τα δύο ενδεχόμενα θα πραγματοποιηθεί τελικά. Βάσει αυτών, η αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική υπαγορεύει ότι πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$$X_0 + \Delta_0\left(\frac{1}{1+r}S_1(A) - S_0\right) = \frac{1}{1+r}V_1(A) \tag{2.1.1}$$

$$X_0 + \Delta_0\left(\frac{1}{1+r}S_1(\Pi) - S_0\right) = \frac{1}{1+r}V_1(\Pi) \tag{2.1.2}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με $\widetilde{p}$, τη δεύτερη με $\widetilde{q} = 1 - \widetilde{p}$ (θα εξηγήσουμε παρακάτω λεπτομερώς τους συμβολισμούς αυτούς) και έπειτα προσθέτουμε κατά μέλη:

$$X_0 + \Delta_0\left(\frac{1}{1+r}\left[\widetilde{p}S_1(A) + \widetilde{q}S_1(\Pi)\right] - S_0\right) = \frac{1}{1+r}\left[\widetilde{p}V_1(A) + \widetilde{q}V_1(\Pi)\right] \tag{2.1.3}$$

Επιλέγουμε το $\widetilde{p}$ έτσι ώστε:

$$S_0 = \frac{1}{1+r}\left[\widetilde{p}S_1(A) + \widetilde{q}S_1(\Pi)\right] \tag{2.1.4}$$

Τότε ο όρος που πολλαπλασιάζει το Δ_0 στη σχέση (2.1.3) είναι μηδέν κι έτσι το αρχικό κεφάλαιο αρκεί να είναι ίσο με:

$$X_0 = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_1(A) + \tilde{q}V_1(\Pi)\right] \tag{2.1.5}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.1.4) το $\tilde{q}$ με $1-\tilde{p}$ και τα $S_1(A)$ και $S_1(\Pi)$ με uS_0 και dS_0 αντίστοιχα, βρίσκουμε:

$$S_0 = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}uS_0 + (1-\tilde{p})\, dS_0\right] = \frac{S_0}{1+r}\left[(u-d)\tilde{p} + d\right].$$

Από την οποία προκύπτουν οι πολύ σημαντικές σχέσεις:

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d} \ , \ \tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d} \tag{2.1.6}$$

Αφαιρώντας τη σχέση (2.1.2) από τη σχέση (2.1.1) παίρνουμε τον τύπο αντιστάθμισης της στρατηγικής Δέλτα, δηλαδή τον αριθμό των μετοχών που πρέπει να αγοράσουμε αρχικά:

$$\Delta_0 = \frac{V_1(A) - V_1(\Pi)}{S_1(A) - S_1(\Pi)} \tag{2.1.7}$$

Ξεκινώντας με αρχικό κεφάλαιο όπως αυτό που δίνεται από τη σχέση (2.1.3) η θέση μας είναι εξασφαλισμένη σε κάθε περίπτωση, είτε η μετοχή κινηθεί ανοδικά είτε καθοδικά. Τελικά, η no-arbitrage αξία του παραγώγου τη χρονική στιγμή μηδέν είναι:

$$V_0 = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_1(A) + \tilde{q}V_1(\Pi)\right] \tag{2.1.8}$$

Η παραπάνω αξία καλείται no-arbitrage διότι αν το παράγωγο έχει διαφορετική αξία τότε δημιουργείται ευκαιρία για σίγουρο κέρδος (arbitrage).

Οι ποσότητες $\tilde{p}$ και $\tilde{q}$ συμβολίζουν τις *πιθανότητες ουδέτερου ρίσκου* (*risk-neutral probabilities*) και διαφέρουν από τις πιθανότητες που ισχύουν στην πράξη και συμβολίζονται όπως έχουμε πει με p και q. Όταν ισχύουν οι τελευταίες, ο μέσος ρυθμός ανόδου της τιμής της μετοχής είναι αυστηρά μεγαλύτερος από την απόδοση που προσφέρει μια επένδυση σίγουρου κέρδους. Αυτό είναι φυσιολογικό από τη στιγμή που η επένδυση σε μετοχές ενέχει ρίσκο. Ενώ στον «κόσμο ουδέτερου ρίσκου» ισχύει η σχέση (2.1.4), για τα p και q ισχύει:

$$S_0 < \frac{1}{1+r}\left[pS_1(A) + qS_1(\Pi)\right].$$

Μπορεί βέβαια κάποιος να αναρωτηθεί γιατί οι πραγματικές πιθανότητες p και q δεν εμφανίζονται στη σχέση (2.1.8). Στην ουσία η στρατηγική εξασφάλισης που παρουσιάσαμε για τη θέση short δεν εξαρτάται από το εάν η τιμή της μετοχής θα ανέβει ή θα πέσει, αλλά μόνο από το πόσο μεγάλη ή μικρή θα είναι αυτή η άνοδος ή η πτώση. Εξαρτάται δηλαδή από τις τιμές των u και d. Αντίστοιχα, στα μοντέλα συνεχούς χρόνου τα οποία προσεγγίζει το διωνυμικό μοντέλο με πολλές περιόδους, η αξία των Δικαιωμάτων εξαρτάται από τη μεταβλητότητα των τιμών των μετοχών και όχι από τον μέσο ρυθμό ανόδου αυτών.

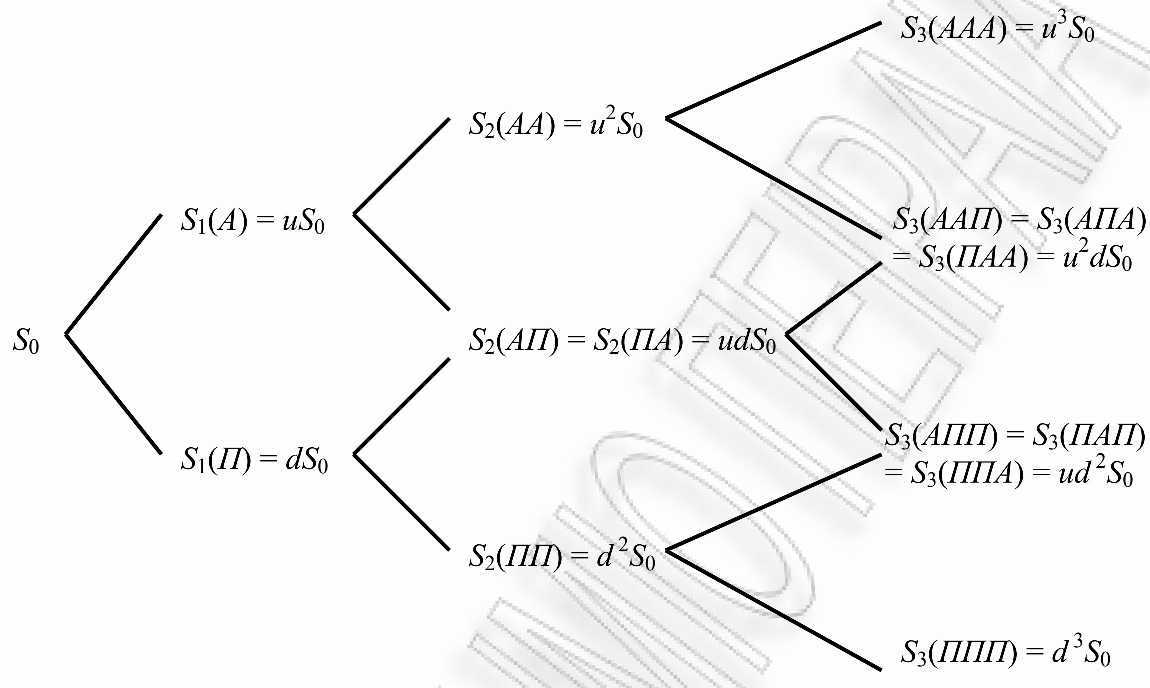
Πρέπει στο σημείο αυτό να αναφέρουμε πως το μοντέλο που εξετάζουμε βασίζεται σε τέσσερις υποθέσεις:

1. Οι μετοχές μπορούν να διαιρεθούν, π.χ. είναι δυνατή η αγορά ή η πώληση μισής μετοχής.
2. Το επιτόκιο της επένδυσης χωρίς ρίσκο είναι ίσο με το επιτόκιο δανεισμού.
3. Η τιμή αγοράς της μετοχής είναι ίση με την τιμή πώλησης (την ίδια χρονική στιγμή).
4. Η τιμή της μετοχής μπορεί να πάρει μόνο δύο πιθανές τιμές στην επόμενη χρονική περίοδο.

Η πρώτη υπόθεση δεν χρειάζεται να ικανοποιείται στην πράξη αφού συνήθως ένα Δικαίωμα αναφέρεται σε μεγάλο πλήθος μετοχών μιας εταιρίας, οπότε το Δ_0 είναι μάλλον απίθανο να χρειαστεί να πάρει τιμή μικρότερη του ένα. Η δεύτερη υπόθεση σχεδόν ισχύει όταν πρόκειται για μεγάλους οργανισμούς (π.χ. τράπεζες) που διαχειρίζονται τεράστια ποσά. Η τρίτη υπόθεση δεν είναι αληθής στην πράξη. Αυτό ορισμένες φορές έχει ελάχιστη σημασία, ιδίως όταν οι αγοραπωλησίες επί της συγκεκριμένης μετοχής είναι περιορισμένες, ενώ άλλες φορές μπορεί να δημιουργήσει σημαντικό πρόβλημα απόκλισης από την πραγματικότητα στο μοντέλο. Τέλος, στην τέταρτη υπόθεση, όπως στην τρίτη, υπάρχουν περιπτώσεις όπου προκαλείται πρόβλημα αξιοπιστίας στο μοντέλο, αλλά και περιπτώσεις όπου το αυτό αποδίδει εξαιρετικά.

2.2 Το Διωνυμικό Μοντέλο Πολλών Περιόδων

Στην παράγραφο αυτή θα γενικεύσουμε όσα είπαμε για το διωνυμικό μοντέλο και θα εξετάσουμε την πιο ρεαλιστική υλοποίησή του, αυτήν όπου περιλαμβάνει περισσότερες από μια περιόδους. Χρησιμοποιούμε τους ίδιους συμβολισμούς όπως στο διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου. Ας θεωρήσουμε το διωνυμικό μοντέλο τριών περιόδων. Η σχηματική του αναπαράσταση έχει ως εξής:



Σχήμα 2.2.1. Το διωνυμικό μοντέλο τριών περιόδων

Το πρώτο πράγμα που παρατηρεί κανείς, είναι ότι σε κάθε χρονική στιγμή οι πιθανές τιμές της μετοχής αυξάνονται κατά μία σε σχέση με την αμέσως προηγούμενη χρονική στιγμή. Για παράδειγμα, στην περίοδο τρία, ενώ υπάρχουν οκτώ πιθανά ενδεχόμενα (*ΑΑΑ*, *ΑΑΠ*, *ΑΠΑ*, *ΠΑΑ*, *ΑΠΠ*, *ΠΑΠ*, *ΠΠΑ*, *ΠΠΠ*) έχουμε μόνο τέσσερις δυνατές τιμές για τη μετοχή. Αυτή είναι μια ιδιαίτερα χρήσιμη ιδιότητα του μοντέλου. Στην πράξη, χρησιμοποιούνται 100 ή περισσότερες περίοδοι, κάτι που συνεπάγεται 2^{100} διαφορετικά ενδεχόμενα από συνδυασμούς ανόδου και πτώσης της τιμής μόνο για την τελευταία περίοδο (2^{100} διαφορετικές «διαδρομές» της τιμής). Ωστόσο, οι δυνατές τελικές τιμές που προκύπτουν είναι πολύ λιγότερες, αφού όλα τα ενδεχόμενα με τον ίδιο αριθμό ανόδων και πτώσεων θα καταλήξουν να έχουν την ίδια τιμή, ανεξάρτητα από τη σειρά με την οποία συνέβησαν τα *Α* και τα *Π*.

Η διαδικασία τιμολόγησης στο διωνυμικό μοντέλο πολλών περιόδων είναι αντίστοιχη με αυτήν του απλού μοντέλου, με τη διαφορά ότι περιλαμβάνει περισσότερους υπολογισμούς. Έστω ότι θέλουμε να τιμολογήσουμε ένα Δικαίωμα Αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου, το οποίο δίνει τη δυνατότητα στον κάτοχό του να αγοράσει μια μετοχή στην τιμή εξάσκησης K, τη χρονική στιγμή δύο. Δηλαδή την περίοδο δύο, η αξία του Δικαιώματος θα είναι $V_2 = (S_2 - K)^+$.

Βλέποντάς το από την πλευρά του πωλητή, αυτός εισπράττει V_0 (τη ζητούμενη αξία του Δικαιώματος) τη χρονική στιγμή μηδέν και αγοράζει Δ_0 μετοχές. Άρα ο πωλητής ξεκινάει με κεφάλαιο (ή χρέος) $V_0 - \Delta_0 S_0$. Τη χρονική στιγμή ένα, η αξία του χαρτοφυλακίου γίνεται:

$$X_1 = \Delta_0 S_1 + (1 + r)(V_0 - \Delta_0 S_0)$$

Ανάλογα με το ποιο ενδεχόμενο θα συμβεί, προκύπτουν δύο εξισώσεις:

$$X_1(A) = \Delta_0 S_1(A) + (1 + r)(V_0 - \Delta_0 S_0) \tag{2.2.1}$$

$$X_1(\Pi) = \Delta_0 S_1(\Pi) + (1 + r)(V_0 - \Delta_0 S_0) \tag{2.2.2}$$

Γνωρίζοντας το ενδεχόμενο (άνοδος ή πτώση) που πραγματοποιήθηκε τη χρονική στιγμή ένα, ο πωλητής αναπροσαρμόζει το χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης αλλάζοντας τον αριθμό των μετοχών από Δ_0 σε Δ_1. Το Δ_1 καθορίζεται από το ενδεχόμενο που συνέβη. Έτσι του απομένει κεφάλαιο (ή χρέος) $X_1 - \Delta_1 S_1$. Τη χρονική στιγμή δύο η αξία του χαρτοφυλακίου πρέπει να είναι ίση με την αξία του παραγώγου, διαφορετικά δημιουργείται ευκαιρία για arbitrage. Συνεπώς:

$$V_2 = \Delta_1 S_2 + (1 + r)(X_1 - \Delta_1 S_1).$$

Και πάλι, ανάλογα με τα ενδεχόμενα που θα πραγματοποιηθούν στις περιόδους ένα και δύο, έχουμε τις εξής σχέσεις:

$$V_2(AA) = \Delta_1(A) S_2(AA) + (1 + r)(X_1(A) - \Delta_1(A) S_1(A)) \tag{2.2.3}$$

$$V_2(A\Pi) = \Delta_1(A) S_2(A\Pi) + (1 + r)(X_1(A) - \Delta_1(A) S_1(A)) \tag{2.2.4}$$

$$V_2(\Pi A) = \Delta_1(\Pi) S_2(\Pi A) + (1 + r)(X_1(\Pi) - \Delta_1(\Pi) S_1(\Pi)) \tag{2.2.5}$$

$$V_2(\Pi\Pi) = \Delta_1(\Pi) S_2(\Pi\Pi) + (1 + r)(X_1(\Pi) - \Delta_1(A) S_1(\Pi)) \tag{2.2.6}$$

Συνολικά λοιπόν έχουμε έξι εξισώσεις προς επίλυση, οι οποίες φαίνονται στις σχέσεις (2.2.1) έως (2.2.6). Αφαιρώντας την (2.2.6) από την (2.2.5), προκύπτει ο τύπος αντιστάθμισης της στρατηγικής Δέλτα στην περίπτωση που κατά την πρώτη περίοδο συνέβη πτώση της τιμής της μετοχής:

$$\Delta_1(\Pi) = \frac{V_2(\Pi A) - V_2(\Pi\Pi)}{S_2(\Pi A) - S_2(\Pi\Pi)} \tag{2.2.7}$$

Με αντικατάσταση στην (2.2.5) παίρνουμε:

$$X_1(\Pi) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p} V_2(\Pi A) + \tilde{q} V_2(\Pi\Pi)\right] \tag{2.2.8}$$

Όπου $\tilde{p}$ και $\tilde{q}$ είναι οι πιθανότητες ουδέτερου ρίσκου οι οποίες, όπως στο διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου, ορίζονται από τις σχέσεις (2.1.6). Η τελευταία σχέση δίνει την αξία που πρέπει να έχει το χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης στη χρονική στιγμή ένα, δεδομένου ότι συνέβη πτώση της τιμής της μετοχής. Η αξία αυτή συμπίπτει με την αξία που πρέπει να έχει το Δικαίωμα τη χρονική στιγμή ένα, εάν το πρώτο ενδεχόμενο που πραγματοποιήθηκε ήταν πτώση, δηλαδή:

$$V_1(\Pi) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_2(\Pi A) + \tilde{q}V_2(\Pi\Pi)\right] \tag{2.2.9}$$

Για την περίπτωση όπου μεταξύ των περιόδων μηδέν και ένα συμβεί άνοδος της τιμής της μετοχής, οι αντίστοιχες των (2.2.7) και (2.2.9) σχέσεις είναι:

$$\Delta_1(A) = \frac{V_2(AA) - V_2(A\Pi)}{S_2(AA) - S_2(A\Pi)} \tag{2.2.10}$$

$$V_1(A) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_2(AA) + \tilde{q}V_2(A\Pi)\right] \tag{2.2.11}$$

Τελικά, έχοντας υπολογίσει τα $V_1(A)$ και $V_1(\Pi)$, μπορούμε να βρούμε τον αριθμό των μετοχών Δ_0 που θα αγοράσουμε για να ξεκινήσουμε τη στρατηγική εξασφάλισης, καθώς επίσης και τη ζητούμενη αξία V_0 του Δικαιώματος τη χρονική στιγμή μηδέν, μέσω των σχέσεων (2.1.7) και (2.1.8).

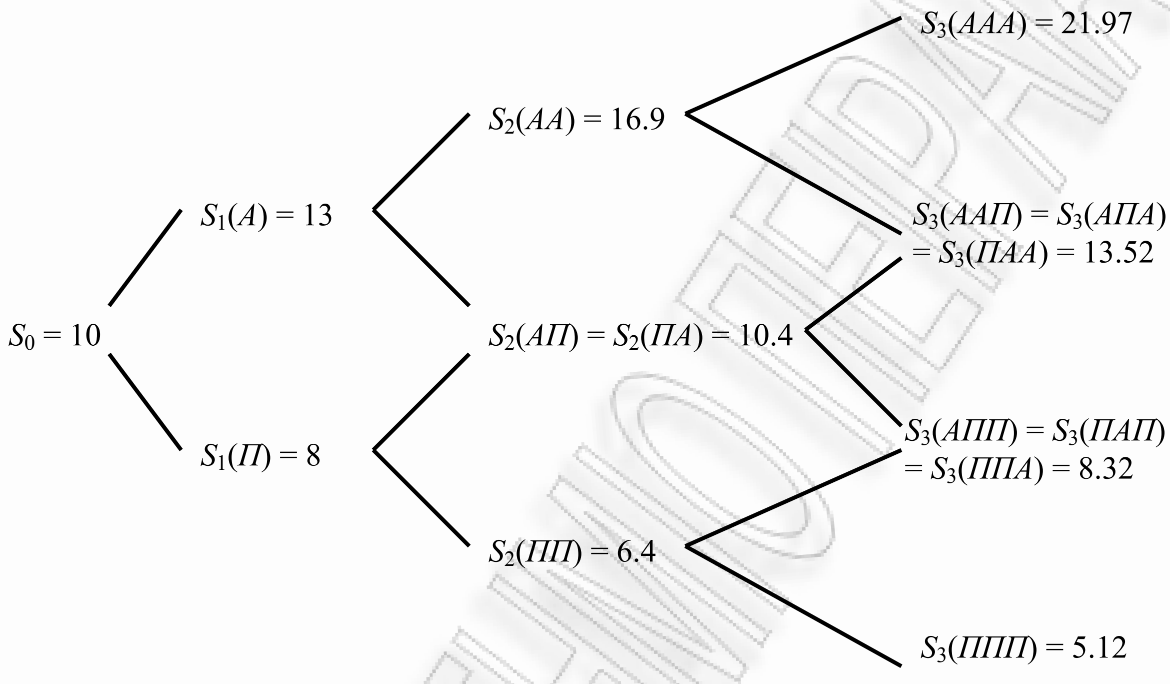
Μπορούμε να γενικεύσουμε τα παραπάνω θεωρώντας ένα μοντέλο N περιόδων. Έστω x_1 το ενδεχόμενο (άνοδος ή πτώση) που πραγματοποιήθηκε τη χρονική στιγμή ένα, x_1x_2 ο συνδυασμός των ενδεχομένων που πραγματοποιήθηκαν μέχρι τη χρονική στιγμή δύο και ούτω καθ' εξής. Τότε την περίοδο n, η αξία του Δικαιώματος V_n και ο αριθμός των μετοχών Δ_n που θα περιέχονται στο χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης, δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους:

$$V_n(x_1x_2...x_n) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_{n+1}(x_1x_2...x_nA) + \tilde{q}V_{n+1}(x_1x_2...x_n\Pi)\right],\ n = N-1, N-2, \ldots, 0 \tag{2.2.12}$$

$$\Delta_n(x_1x_2...x_n) = \frac{V_{n+1}(x_1x_2...x_nA) - V_{n+1}(x_1x_2...x_n\Pi)}{S_{n+1}(x_1x_2...x_nA) - S_{n+1}(x_1x_2...x_n\Pi)},\ n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{2.2.13}$$

Παράδειγμα. Θέλουμε να τιμολογήσουμε ένα Δικαίωμα Πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου. Η τιμή της μετοχής σήμερα είναι S_0 = 10€, η τιμή εξάσκησης του Δικαιώματος είναι K = 11€

και το επιτόκιο είναι $r = 0.1$. Η εξάσκηση μπορεί να γίνει την τρίτη περίοδο, ενώ οι τιμές των u και d είναι 1.3 και 0.8 αντίστοιχα. Το παρακάτω σχεδιάγραμμα των πιθανών τιμών της μετοχής σε κάθε περίοδο θα φανεί εξαιρετικά χρήσιμο:



Από την (2.1.6) βρίσκουμε τις πιθανότητες ουδέτερου ρίσκου:

$$\tilde{p} = \frac{1 + 0.1 - 0.8}{0.5} = 0.6 \;,\;\; \tilde{q} = 1 - \tilde{p} = 0.4$$

Ξεκινάμε τους υπολογισμούς από την περίοδο τρία. Ο κάτοχος θα εξασκήσει το Δικαίωμα μόνο στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης, δηλαδή 11€. Διαφορετικά δεν έχει συμφέρον από την εξάσκηση, αφού μπορεί να την πουλήσει ακριβότερα στο χρηματιστήριο. Άρα η αξία του Δικαιώματος στην περίοδο τρία δίνεται από τη σχέση $V_3 = (K - S_3)^+$. Έτσι βρίσκουμε:

$V_3(AAA) = 0$

$V_3(AA\Pi) = V_3(A\Pi A) = V_3(\Pi AA) = 0$

$V_3(A\Pi\Pi) = V_3(\Pi A\Pi) = V_3(\Pi\Pi A) = 11 - 8.32 = 2.68$

$V_3(\Pi\Pi\Pi) = 11 - 5.12 = 5.88$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (20), υπολογίζουμε για τη δεύτερη περίοδο:

$$V_2(AA)=\frac{1}{1+r}\left[0.6\cdot V_3(AAA)+0.4\cdot V_3(AA\Pi)\right]=0$$

$$V_2(A\Pi)=\frac{1}{1+r}\left[0.6\cdot V_3(A\Pi A)+0.4\cdot V_3(A\Pi\Pi)\right]=0.974545$$

$$V_2(\Pi A)=\frac{1}{1+r}\left[0.6\cdot V_3(\Pi AA)+0.4\cdot V_3(\Pi A\Pi)\right]=0.974545$$

$$V_2(\Pi\Pi)=\frac{1}{1+r}\left[0.6\cdot V_3(\Pi\Pi A)+0.4\cdot V_3(\Pi\Pi\Pi)\right]=3.6$$

Αντίστοιχα για την περίοδο ένα:

$$V_1(A)=\frac{1}{1+r}\left[0.6\cdot V_2(AA)+0.4\cdot V_2(A\Pi)\right]=0.35438$$

$$V_1(\Pi)=\frac{1}{1+r}\left[0.6\cdot V_2(\Pi A)+0.4\cdot V_2(\Pi\Pi)\right]=1.84066$$

Άρα τελικά η αξία του συγκεκριμένου Δικαιώματος τη χρονική στιγμή μηδέν είναι:

$$V_0=\frac{1}{1+r}\left[0.6\cdot V_1(A)+0.4\cdot V_1(\Pi)\right]=0.862629\cong 0.86\,€$$

Σύμφωνα με τη στρατηγική εξασφάλισης, τη χρονική στιγμή μηδέν πρέπει να πωληθούν:

$$\Delta_0=\frac{V_1(A)-V_1(\Pi)}{S_1(A)-S_1(\Pi)}=-0.297256 \text{ μετοχής}$$

Τη χρονική στιγμή ένα πρέπει να πωληθούν:

$$\Delta_1(A)=\frac{V_2(AA)-V_2(A\Pi)}{S_2(AA)-S_2(A\Pi)}=-0.14993 \text{ μετοχής ή}$$

$$\Delta_1(\Pi)=\frac{V_2(\Pi A)-V_2(\Pi\Pi)}{S_2(\Pi A)-S_2(\Pi\Pi)}=-0.656364 \text{ μετοχής}$$

ανάλογα με το ενδεχόμενο που έχει συμβεί. Αντίστοιχα βρίσκουμε για τη δεύτερη περίοδο

$\Delta_2(AA) = 0$, $\Delta_2(A\Pi) = \Delta_2(\Pi A) = -0.515385$, $\Delta_2(\Pi\Pi) = -1$ □

Μέσα από το παράδειγμα, διαπιστώνουμε ότι στη δεύτερη περίοδο έγινε ένας παραπάνω υπολογισμός από ό,τι χρειαζόταν, αφού η αξία του Δικαιώματος θα είναι ίδια ανεξάρτητα από το εάν συνέβη πρώτα άνοδος και μετά πτώση ή αντίστροφα. Σε περίπτωση που το μοντέλο περιελάμβανε πιο πολλές περιόδους, οι περιττοί αυτοί υπολογισμοί των V_n θα ήταν πολύ περισσότεροι. Προκύπτει λοιπόν ανάγκη, ιδιαίτερα από πρακτικής πλευράς, να βρεθεί ένας τρόπος ώστε να γίνονται μόνο οι απαραίτητοι υπολογισμοί.

Η λύση είναι πολύ εύκολη και απαιτεί απλώς την εισαγωγή ενός νέου συμβολισμού. Έστω $\upsilon_n(s)$ η αξία του Δικαιώματος τη χρονική στιγμή n όταν η τιμή της μετοχής είναι s. Ο τύπος υπολογισμού των υ_n είναι αντίστοιχος με αυτόν για τα V_n της σχέσης (2.2.12):

$$\upsilon_n(s) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_{n+1}(us) + \tilde{q}\,\upsilon_{n+1}(ds)\right], \; n = N-1, N-2, \ldots, 0 \qquad (2.2.14)$$

Αντί λοιπόν να υπολογίζουμε τα V_n όλων των δυνατών ενδεχομένων, θα υπολογίζουμε μόνο τα υ_n όλων των δυνατών τιμών της μετοχής, οι οποίες είναι σαφώς λιγότερες από το σύνολο των ενδεχομένων. Π.χ. για εκατό περιόδους, τα ενδεχόμενα είναι $2^{100} > 1.2\cdot 10^{30}$ μόνο για την τελευταία περίοδο, ενώ οι δυνατές τιμές της μετοχής για όλες τις περιόδους είναι 5151. Επίσης, ο αριθμός των μετοχών που πρέπει να υπάρχουν στο χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης δίνεται από τον ακόλουθο τύπο, ο οποίος είναι αντίστοιχος με αυτόν της σχέσης (2.2.13) για τα Δ_n:

$$\delta_n(s) = \frac{\upsilon_{n+1}(us) - \upsilon_{n+1}(ds)}{(u-d)s}, \; n = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (2.2.15)$$

Επιστρέφοντας στο προηγούμενο παράδειγμα με το Δικαίωμα Πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου, βρίσκουμε:

περίοδος 3:

$\upsilon_3(21.97) = 0$

$\upsilon_3(13.52) = 0$

$\upsilon_3(8.32) = 11 - 8.32 = 2.68$

$\upsilon_3(5.12) = 11 - 5.12 = 5.88$

περίοδος 2:

$$\upsilon_2(16.9) = \frac{1}{1+r}\left[0.6\cdot\upsilon_3(21.97) + 0.4\cdot\upsilon_3(13.52)\right] = 0$$

$$\upsilon_2(10.4) = \frac{1}{1+r}\left[0.6\cdot\upsilon_3(13.52) + 0.4\cdot\upsilon_3(8.32)\right] = 0.974545$$

$$\upsilon_2(6.4) = \frac{1}{1+r}\left[0.6\cdot\upsilon_3(8.32) + 0.4\cdot\upsilon_3(5.12)\right] = 3.6$$

περίοδος 1:

$$\upsilon_1(13) = \frac{1}{1+r}\left[0.6 \cdot \upsilon_2(16.9) + 0.4 \cdot \upsilon_2(10.4)\right] = 0.35438$$

$$\upsilon_1(8) = \frac{1}{1+r}\left[0.6 \cdot \upsilon_2(10.4) + 0.4 \cdot \upsilon_2(6.4)\right] = 1.84066$$

Αξία Δικαιώματος (περίοδος 0*)*:

$$\upsilon_0(10) = \frac{1}{1+r}\left[0.6 \cdot \upsilon_1(13) + 0.4 \cdot \upsilon_1(8)\right] = 0.862629 \cong 0.86\text{€}$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Στη βιβλιογραφία έχει προταθεί ένα πλήθος μοντέλων συνεχούς και διακριτού χρόνου για την εύρεση της αξίας των Δικαιωμάτων Προαίρεσης. Το πιο γνωστό μοντέλο συνεχούς χρόνου είναι το μοντέλο των Black & Scholes, ενώ ένα από τα πιο δημοφιλή μοντέλα διακριτού χρόνου είναι το διωνυμικό μοντέλο. Το πρώτο πράγμα για το οποίο μπορεί κανείς να αναρωτηθεί, είναι κατά πόσο ένα μοντέλο διακριτού χρόνου μπορεί να προσεγγίσει με ακρίβεια την πραγματικότητα. Αυτό δεν θα πρέπει να προβληματίζει τον αναγνώστη, αφού με τις κατάλληλες παραμέτρους και με χρήση πολλών περιόδων επιτυγχάνονται αρκούντως ικανοποιητικές εκτιμήσεις, οι οποίες τείνουν στις εκτιμήσεις των μοντέλων συνεχούς χρόνου.

Η απαρχή των σύγχρονων τεχνικών αποτίμησης Δικαιωμάτων χρονολογείται στον 19^{ο} αιώνα, με το βιβλίο «The Theory of Options in Stocks and Shares» του Charles Castelli το 1877. Το βιβλίο του Castelli ήταν το πρώτο που εισήγαγε τεχνικές αντιστάθμισης του κινδύνου με χρήση Δικαιωμάτων, χωρίς όμως να θεμελιώνει κάποια ισχυρή θεωρητική βάση. Είκοσι τρία χρόνια αργότερα, ο Louis Bachelier εφάρμοσε την πρώτη γνωστή αναλυτική αποτίμηση Δικαιωμάτων στη διατριβή του με τίτλο «Théorie de la Spéculation». Όμως η διαδικασία που ακολούθησε είχε διάφορα μειονεκτήματα, όπως το γεγονός ότι η αξία του Δικαιώματος μπορούσε να πάρει αρνητική τιμή. Ακολούθησαν το 1955 οι Paul Samuelson και Richard Kruizenga, ο πρώτος με την αδημοσίευτη εργασία του με τίτλο «Brownian Motion in the Stock Market» και ο δεύτερος με τη διατριβή του «Put and Call Options: A Theoretical and Market Analysis». Σημαντική πρόοδος από θεωρητικής πλευράς, έγινε από τον James Boness με το μοντέλο που πρότεινε στη διατριβή του με τίτλο «A Theory and Measurement of Stock Option Value». Αναμφισβήτητα όμως, αυτοί που προσέφεραν τα μέγιστα στον τομέα της αποτίμησης Δικαιωμάτων και της στοχαστικής ανάλυσης, ήταν οι Fischer Black, Myron Scholes και Robert Merton με το μοντέλο που πρότειναν το 1973. Μάλιστα στους δύο τελευταίους απονεμήθηκε το βραβείο Nobel στα Οικονομικά το 1997 για την προσφορά τους, ενώ για τον

Black που πέθανε το 1995 έγινε τιμητική αναφορά για τη συνεισφορά του από τη Σουηδική ακαδημία[1].

Τα μοντέλα συνεχούς χρόνου δεν θα μας απασχολήσουν στη συγκεκριμένη εργασία, κρίνεται όμως απαραίτητο για λόγους πληρότητας της παρουσίασης να αναφερθούμε επιγραμματικά στο μοντέλο των Black & Scholes, μιας και αποτέλεσε τη βάση για ένα μεγάλο πλήθος μελετών και εκτεταμένη έρευνα πάνω στον τομέα της αποτίμησης. Πριν περάσουμε σε αυτό, πρέπει να εισάγουμε την έννοια της *γεωμετρικής κίνησης Brown*, η οποία είναι θεμελιώδης για τα μοντέλα συνεχούς χρόνου.

Όταν δουλεύουμε σε συνεχή χρόνο, χρειαζόμαστε ένα εργαλείο με βάση το οποίο θα «παράγουμε» τις πιθανές τιμές της μετοχής, όπως κάνουμε αντίστοιχα στον διακριτό χρόνο με το διωνυμικό μοντέλο. Ουσιαστικά ο όρος «συνεχής χρόνος» δεν είναι απόλυτα ακριβής, διότι στην πράξη *διακριτοποιούμε* τον χρόνο παίρνοντας πολύ μικρά χρονικά διαστήματα. Επίσης, η ποσοστιαία αύξηση ή μείωση της τιμής είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν. Έστω S η τιμή της μετοχής, h το μήκος του χρονικού διαστήματος που χωρίζουμε τον χρόνο (πολύ μικρό), μ η τάση και σ η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής. Τότε οι πιθανές τιμές της μετοχής προκύπτουν ως εξής:

$$S_i = \begin{cases} S_{i-1}e^{\sigma\sqrt{h}}, & \text{με πιθανότητα } p \\ S_{i-1}e^{-\sigma\sqrt{h}}, & \text{με πιθανότητα } 1-p \end{cases}, \quad \text{όπου } p = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{h}\right)$$

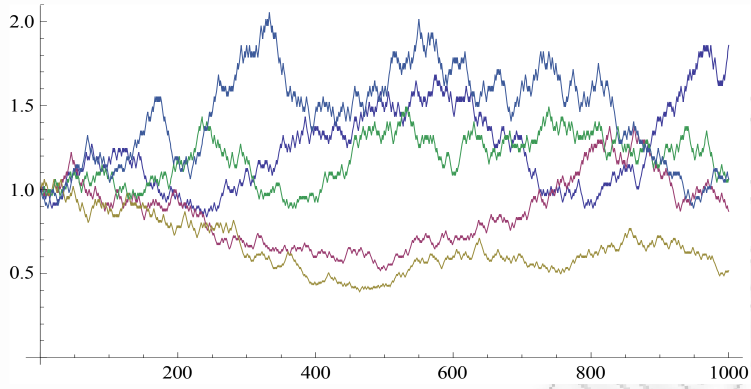
Μια στοχαστική ανέλιξη S_t, $t \geq 0$, καλείται γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους μ και σ, αν για κάθε $y \geq 0$, $t > 0$, ισχύει:

1) $\ln\dfrac{S_{t+y}}{S_y} \sim N\left(t\mu, t\sigma^2\right)$

2) Η τυχαία μεταβλητή S_{t+y}/S_y είναι ανεξάρτητη από τις S_u, με $0 \leq u \leq y$.

Ο συμβολισμός είναι GBM(μ,σ^2). Στο παρακάτω διάγραμμα αναπαρίστανται πέντε τυχαίες πραγματοποιήσεις μιας γεωμετρικής κίνησης Brown με $S_0 = 1$, $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.2$, $h = 0.01$ και 1000 βήματα ($n = 1000$):

[1] Τα βραβεία Nobel απονέμονται μόνο σε εν ζωή επιστήμονες.



Σχήμα 3.1. Πέντε τυχαίες διαδρομές της γεωμετρικής κίνησης Brown

Η γεωμετρική κίνηση Brown χρησιμοποιείται πρακτικά για την περιγραφή της κίνησης των μετοχών, κυρίως λόγω της απλότητας στην εφαρμογή της. Πολλά μοντέλα συνεχούς χρόνου που εμπλέκουν εξέλιξη τιμών στον χρόνο έχουν ως βάση τη γεωμετρική κίνηση Brown. Αυτό συμβαίνει γιατί συγκεντρώνει ορισμένες σημαντικές (για την κίνηση των τιμών χρηματοοικονομικών τίτλων) ιδιότητες. Μια από αυτές είναι ότι γίνεται ποσοστιαία αυξομείωση της τιμής, κάτι που εκτός από ρεαλιστικό αποκλείει και το ενδεχόμενο να προκύψει αρνητική τιμή. Άλλη ιδιότητα είναι ότι δίνει την ευχέρεια στον ερευνητή να διακριτοποιήσει τον χρόνο όσο εκείνος επιθυμεί αλλά και να προσομοιώσει εύκολα και γρήγορα πολλές πραγματοποιήσεις της ίδιας κίνησης, ούτως ώστε να επιτύχει τη μέγιστη δυνατή ακρίβεια.

Επιστρέφουμε στη συνοπτική παρουσίαση του μοντέλου των Black & Scholes. Θεωρούμε ότι υπάρχει συνεχής ανατοκισμός, δηλαδή αν επενδύσουμε σήμερα κεφάλαιο B θα πάρουμε $B \cdot e^{rt}$ έπειτα από t χρονικές περιόδους, όπου r το ισχύον επιτόκιο. Αντίστοιχα, αν έχουμε κεφάλαιο B τη χρονική στιγμή t, η σημερινή (παρούσα) του αξία είναι $B \cdot e^{-rt}$. Έστω ένα απλό παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν Ευρωπαϊκού τύπου με χρόνο λήξης T και τελική αξία U_T. Με μια διαδικασία ανάλογη του διωνυμικού μοντέλου που εξετάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (προσαρμοσμένη κατάλληλα σε συνεχή χρόνο), αποδεικνύεται ότι ένα απλό παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν θα έχει no-arbitrage αξία στον χρόνο t:

$$U_t = e^{-r(T-t)} \cdot \tilde{E}(U_T \mid I_t),$$

όπου I_T η «πληροφόρηση» που έχουμε μέχρι τη χρονική στιγμή T (εκφράζεται μέσα από κατάλληλη σ-άλγεβρα), U_T η συνάρτηση κέρδους στον χρόνο λήξης T και $\tilde{E}$ η αναμενόμενη τιμή σε ένα «περιβάλλον ουδέτερου ρίσκου». Η συνάρτηση κέρδους εξαρτάται από το είδος του Δικαιώματος. Όπως εξετάσαμε παραπάνω για τα Δικαιώματα Αγοράς, η συνάρτηση είναι

$U_T = \max[S_T - K, 0]$, ενώ για τα Δικαιώματα Πώλησης είναι $U_T = \max[K - S_T, 0]$. Η συνάρτηση του κέρδους δηλαδή σχετίζεται με την εξάσκηση ή μη του Δικαιώματος στον χρόνο T.

Ας εξηγήσουμε στο σημείο αυτό τι εννοούμε με την έννοια «περιβάλλον ουδέτερου ρίσκου». Ουσιαστικά ορίζουμε ότι ισχύει ένα μέτρο πιθανότητας σύμφωνα με το οποίο οι πιθανότητες ανοδικής και καθοδικής κίνησης της μετοχής είναι τέτοιες ώστε η επένδυση στη μετοχή να έχει αναμενόμενη απόδοση ίση με την απόδοση μιας επένδυσης χωρίς ρίσκο (π.χ. κρατικά ομόλογα). Προφανώς στην πραγματικότητα δεν ισχύει κάτι τέτοιο, διότι τότε κανένας δεν θα είχε συμφέρον να επενδύσει στη μετοχή που ενέχει ρίσκο, αφού θα μπορούσε να έχει την ίδια απόδοση με μια επένδυση σίγουρου κέρδους. Επομένως, υπάρχει σαφής διαχωρισμός μεταξύ των πραγματικών πιθανοτήτων που καθορίζουν την κίνηση της μετοχής και των πιθανοτήτων ουδέτερου ρίσκου. Το μέτρο πιθανότητας σε «περιβάλλον ουδέτερου ρίσκου», χρησιμοποιείται απλώς και μόνο για να απλοποιηθεί ο τρόπος έκφρασης της τιμής του Δικαιώματος και όχι για να περιγράψει την πραγματικότητα.

Τελικά, σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο, *η αξία ενός Δικαιώματος Ευρωπαϊκού τύπου είναι ίση με την παρούσα αξία του αναμενόμενου κέρδους από τη χρήση του Δικαιώματος σε ένα «περιβάλλον ουδέτερου ρίσκου»*. Στο μοντέλο των Black & Scholes, υπό το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου, η ανέλιξη της τιμής της μετοχής S_t είναι μια γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους $r - \sigma^2/2$ και σ^2, δηλαδή $S_t \sim \text{GBM}(r - \sigma^2/2\ ,\ \sigma^2)$. Αυτή είναι μια ιδιαίτερα σημαντική ιδιότητα η οποία βοηθά στην εύρεση ενός κλειστού τύπου για τον υπολογισμό της no-arbitrage αξίας των παραγώγων.

Πιο συγκεκριμένα, ο τύπος των Black & Scholes για την τιμή ενός Δικαιώματος Αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου επί μιας μετοχής με αξία S, με τιμή εξάσκησης K, στον χρόνο T, με σταθερό επιτόκιο r και σταθερή μεταβλητότητα σ, είναι:

$$C(S,T) = S \cdot \Phi(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot \Phi(d_2)$$

Όπου:

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}\ .$$

Με Φ συμβολίζουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής. Το μοντέλο βασίζεται σε ορισμένες υποθέσεις. Αυτές είναι ότι η μετοχή δεν αποδίδει μέρισμα, η αγορά λειτουργεί αποτελεσματικά, δεν υπάρχουν έξοδα συναλλαγών, το επιτόκιο παραμένει σταθερό και οι αποδόσεις κατανέμονται λογαριθμο-κανονικά. Μετά τη δημοσίευση του μοντέλου, ακολούθησαν πολλές μελέτες που «χαλαρώνουν» κάποιες από τις υποθέσεις, όπως για παράδειγμα την υπόθεση της μη απόδοσης μερισμάτων το 1973 από τον Merton, την υπόθεση για μηδενικά έξοδα συναλλαγών το 1976 από τον Jonathan Ingerson και την υπόθεση του σταθερού επιτοκίου το 1976 πάλι από τον Merton.

Ο αντίστοιχος τύπος που δίνει την παρούσα αξία ενός παραγώγου Αμερικανικού τύπου με χρόνο εξάσκησης το διάστημα $[0, T]$, αποδεικνύεται ότι είναι:

$$C = \sup_{\tau} \widetilde{E}\left(e^{-r\tau} U_{\tau}\right).$$

Με τ συμβολίζεται ο βέλτιστος χρόνος εξάσκησης του παραγώγου ο οποίος δεν είναι γνωστός εκ των προτέρων. Προφανώς, ένας επενδυτής θα αποφασίσει να εξασκήσει ένα Δικαίωμα Αμερικανικού τύπου σε κάποιο χρόνο τ, με βάση την πληροφορία που θα έχει από την αγορά μέχρι και τον χρόνο αυτό και όχι με βάση πληροφορία από το «μέλλον» (βλ. 5.2 Χρόνοι Διακοπής). Σε αυτήν την περίπτωση ο συγκεκριμένος τύπος αποτελεί μια θεωρητική μόνο έκφραση της αξίας του Αμερικανικού Δικαιώματος Προαίρεσης και δεν μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά ώστε να δώσει έναν κλειστό τύπο, όπως ο τύπος των Black & Scholes για το Ευρωπαϊκό Δικαίωμα. Ωστόσο, καθίσταται σαφές ότι σε κάθε περίπτωση ένα Δικαίωμα Αμερικανικού τύπου θα έχει πάντοτε αξία ίση ή μεγαλύτερη σε σχέση με ένα Δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου με τα ίδια ακριβώς χαρακτηριστικά. Αυτό συμβαίνει διότι το Αμερικανικό Δικαίωμα δίνει την επιπλέον δυνατότητα στον κάτοχό του να το εξασκήσει όποτε εκείνος κρίνει ότι είναι βέλτιστο μέσα σε ένα προκαθορισμένο χρονικό διάστημα, ενώ το Ευρωπαϊκό Δικαίωμα έχει συγκεκριμένη ημερομηνία εξάσκησης. Βέβαια, η εύρεση του βέλτιστου χρόνου εξάσκησης είναι ένα θέμα που παρουσιάζει ιδιαίτερη δυσκολία, αφού η απόφαση πρέπει να βασίζεται μόνο στην πληροφόρηση που υπάρχει μέχρι εκάστοτε χρονική στιγμή και φυσικά υπάρχει ο κίνδυνος της απώλειας κερδών από μια μη βέλτιστη εξάσκηση. Το συγκεκριμένο πρόβλημα θα εξεταστεί λεπτομερώς στην εργασία αυτή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

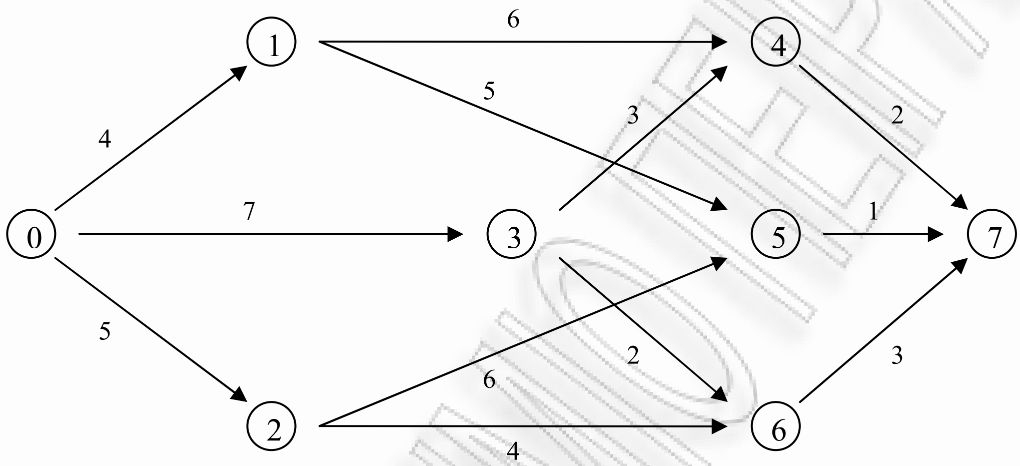
Εισαγωγή στο Δυναμικό Προγραμματισμό

Δεδομένου ότι δεν υπάρχει κλειστός τύπος για την εύρεση της αξίας ενός Δικαιώματος Αμερικανικού τύπου, προέκυψε η ανάγκη για ανάπτυξη εναλλακτικών μεθόδων προσέγγισης του προβλήματος. Η χρήση του διωνυμικού μοντέλου για την αποτίμηση αυτού του είδους Δικαιωμάτων βασίζεται στην ιδέα του δυναμικού προγραμματισμού και διαφέρει από τη μεθοδολογία που περιγράψαμε για τα Δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου.

Ο δυναμικός προγραμματισμός αποτελεί κομμάτι της Επιχειρησιακής Έρευνας και θεμελιώθηκε από τον R. E. Bellman τη δεκαετία του 1950. Έχει εφαρμογή στη μελέτη και ανάλυση συστημάτων, των οποίων η εξέλιξη στον χρόνο εξαρτάται από διαδοχικές αποφάσεις που λαμβάνονται κατά τη διάρκεια της λειτουργίας τους. Η κάθε απόφαση επιφέρει συγκεκριμένο κέρδος ή κόστος (ανάλογα με τη φύση του συστήματος) που είναι εκ των προτέρων γνωστό. Αυτό που επιδιώκουμε μέσω του δυναμικού προγραμματισμού είναι η επιλογή των κατάλληλων αποφάσεων ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος ή να ελαχιστοποιηθεί το κόστος. Κύριο χαρακτηριστικό είναι ότι η επίλυση των προβλημάτων γίνεται σε διαδοχικά βήματα με τη χρήση *αναδρομικών σχέσεων*, όπως ακριβώς δηλαδή και στο διωνυμικό μοντέλο όπου ξεκινάμε από τον τελικό χρόνο N και έπειτα μέσω αναδρομικών σχέσεων φτάνουμε στη χρονική στιγμή μηδέν όπου υπολογίζουμε την παρούσα αξία του Δικαιώματος.

Το παρόν κεφάλαιο θα αποτελέσει μόνο μια εισαγωγή στον τρόπο αντιμετώπισης προβλημάτων μέσω του δυναμικού προγραμματισμού, κυρίως μέσω παραδειγμάτων, ώστε ο αναγνώστης να αντιληφθεί τη λογική με την οποία επιτυγχάνονται οι βέλτιστες επιλογές (ή αποφάσεις) αναδρομικά. Θα δοθεί έμφαση στα παραδείγματα διότι η αυστηρή παρουσίαση της θεωρίας του δυναμικού προγραμματισμού ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτής της εργασίας. Άλλωστε οι απαιτούμενοι τύποι έχουν τέτοια μορφή που μόνο μέσω της εφαρμογής τους μπορεί να γίνει κατανοητή η συγκεκριμένη μέθοδος.

Ας ξεκινήσουμε με το εξής απλό παράδειγμα. Έστω ότι στο ακόλουθο σχήμα παριστάνεται ένα δίκτυο από οκτώ πόλεις (0 έως 7) και τα βέλη συμβολίζουν σωλήνες ύδρευσης μέσω των οποίων μεταφέρεται νερό από τη μια πόλη στην άλλη, σύμφωνα με την κατεύθυνση που δείχνει το κάθε βέλος. Οι αριθμοί δίπλα σε κάθε ένα από αυτά συμβολίζουν τα μήκη των αντίστοιχων σωλήνων.



Αναζητείται η βέλτιστη διαδρομή από την πόλη 0 στην πόλη 7, ώστε το νερό να δρομολογηθεί ταχύτερα. Προφανώς, ένας τρόπος επίλυσης του προβλήματος είναι να υπολογιστούν όλες οι δυνατές διαδρομές από την πόλη 0 στην πόλη 7 και έπειτα να προσδιοριστεί η συντομότερη. Κάτι τέτοιο μπορεί να γίνεται πολύ εύκολα στο συγκεκριμένο απλό σύστημα, όταν όμως οι πόλεις είναι περισσότερες και οι διαδρομές πολυπλοκότερες τότε αυτό ίσως να μην μπορεί να καταστεί δυνατό πρακτικά (απαιτείται πολύ μεγάλος χρόνος).

Με τη βοήθεια του δυναμικού προγραμματισμού, το πρόβλημα επιλύεται ως εξής. Έστω $\upsilon(x)$, $x = 0, 1, \ldots, 7$, το μήκος της ελάχιστης διαδρομής από την πόλη x στην πόλη 7. Εξ ορισμού ισχύει $\upsilon(7) = 0$ και το ζητούμενο είναι το $\upsilon(0)$. Η πόλη 0 συνδέεται άμεσα με τις πόλεις 1, 2 και 3. Επομένως, αν γνωρίζαμε τα $\upsilon(1)$, $\upsilon(2)$ και $\upsilon(3)$, τότε το $\upsilon(0)$ θα προέκυπτε άμεσα από τη σχέση:

$$\upsilon(0) = \min [\, 4 + \upsilon(1),\ 5 + \upsilon(2),\ 7 + \upsilon(3) \,]$$

Αντίστοιχα, τα $\upsilon(1)$, $\upsilon(2)$ και $\upsilon(3)$ εξαρτώνται από τις τιμές που παίρνουν τα μήκη των ελάχιστων διαδρομών των πόλεων με τις οποίες συνδέονται, δηλαδή από τα $\upsilon(4)$, $\upsilon(5)$ και $\upsilon(6)$. Οι σχέσεις εδώ είναι:

$$\upsilon(1) = \min [\ 6 + \upsilon(4),\ 5 + \upsilon(5)\ ]$$
$$\upsilon(2) = \min [\ 6 + \upsilon(5),\ 4 + \upsilon(6)\ ]$$
$$\upsilon(3) = \min [\ 3 + \upsilon(4),\ 2 + \upsilon(6)\ ]$$

Όμως, οι τιμές των $\upsilon(4)$, $\upsilon(5)$ και $\upsilon(6)$ είναι γνωστές, αφού οι πόλεις 4, 5 και 6 συνδέονται απευθείας με την τερματική πόλη 7. Δηλαδή:

$$\upsilon(4) = 2$$
$$\upsilon(5) = 1$$
$$\upsilon(6) = 3$$

Γνωρίζοντας τις τιμές αυτές, αντικαθιστούμε και βρίσκουμε τα $\upsilon(1)$, $\upsilon(2)$ και $\upsilon(3)$ και τελικά το $\upsilon(0)$. Είναι φανερό ότι αυτός ο τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος είναι πολύ πιο αποτελεσματικός και λιγότερο χρονοβόρος από το να υπολογιστεί το σύνολο των δυνατών διαδρομών και κατόπιν να γίνει επιλογή της βέλτιστης.

Γενικά, για ένα σύστημα που αποτελείται από N κόμβους (στο παράδειγμα οι κόμβοι αντιπροσωπεύουν πόλεις), το μήκος της ελάχιστης διαδρομής $\upsilon(x)$ μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$\upsilon(x) = \min_{(x,y)\in D(x)} \left[c(x,y) + \upsilon(y)\right],\ x = 0, 1, \ldots, N, \tag{4.1}$$
$$\upsilon(N) = 0,$$

όπου $D(x)$ είναι το σύνολο των διαδρομών από τον κόμβο x στους γειτονικούς κόμβους και $c(x, y)$ το μήκος της διαδρομής (x, y). Επίσης, θα συμβολίσουμε $y^*(x)$ τον βέλτιστο γειτονικό κόμβο του x. Η παραπάνω εξίσωση λέγεται *εξίσωση βελτιστοποίησης*. Τα προβλήματα του δυναμικού προγραμματισμού έχουν να κάνουν είτε με ελαχιστοποίηση είτε με μεγιστοποίηση μιας διαδρομής μέσω της λήψης συγκεκριμένων αποφάσεων. Το σύνολο των αποφάσεων που οδηγούν στη βέλτιστη διαδρομή καλείται *βέλτιστη πολιτική*.

Σύμφωνα λοιπόν με όσα αναφέραμε, η ελάχιστη διαδρομή στο παραπάνω σύστημα βρίσκεται αναδρομικά ως εξής:

$\upsilon(7) = 0$

$\upsilon(6) = 3 + \upsilon(7) = 3,$ $\qquad$ $y^*(6) = 7$

$\upsilon(5) = 1 + \upsilon(7) = 1,$ $\qquad$ $y^*(5) = 7$

$\upsilon(4) = 2 + \upsilon(7) = 2,$ $\qquad$ $y^*(4) = 7$

$\upsilon(3) = \min [\ 3 + \upsilon(4), 2 + \upsilon(6)\ ] = \min [\ 3 + 2, 2 + 3\ ] = 5,$ $y^*(3) = 4$ ή 6

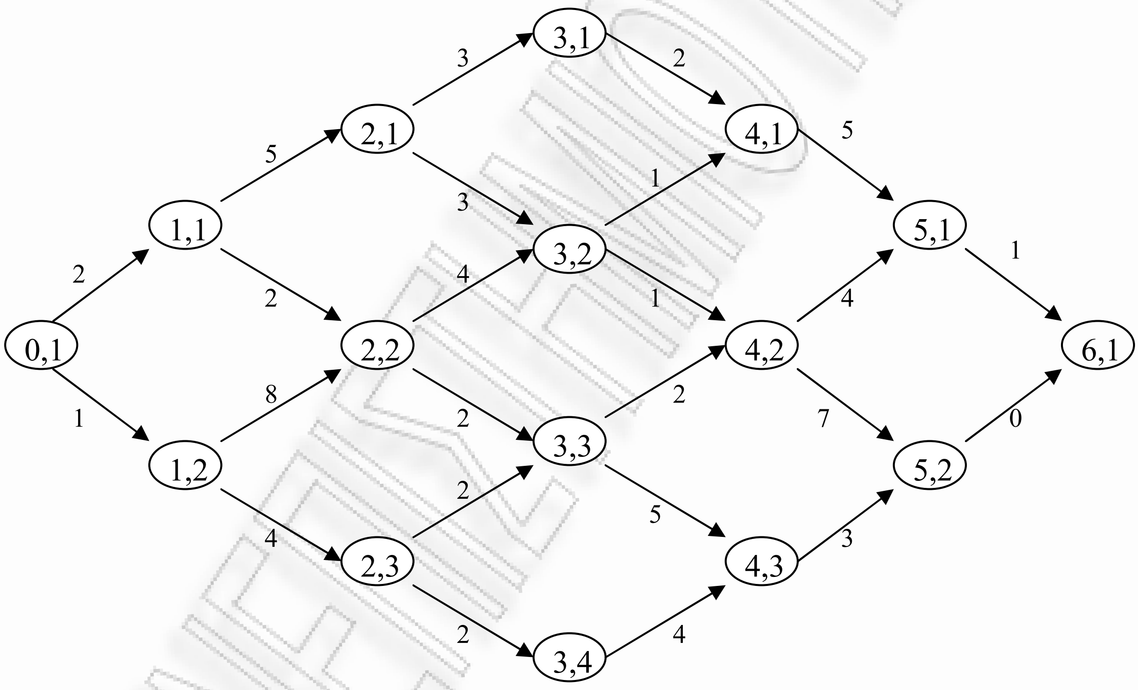
$\upsilon(2) = \min [\ 6 + \upsilon(5), 4 + \upsilon(6)\ ] = \min [\ 6 + 1, 4 + 3\ ] = 7,$ $y^*(2) = 5$ ή 6

$\upsilon(1) = \min [\ 6 + \upsilon(4), 5 + \upsilon(5)\ ] = \min [\ 6 + 2, 5 + 1\ ] = 6,$ $y^*(1) = 5$

$\upsilon(0) = \min [\ 4 + \upsilon(1), 5 + \upsilon(2), 7 + \upsilon(3)\ ] = \min [\ 4 + 6, 5 + 7, 7 + 5\ ] = 10,$ $y^*(0) = 1$

Άρα η ελάχιστη δυνατή διαδρομή από την πόλη 0 στην πόλη 7 έχει μήκος 10 και η διαδρομή αυτή είναι η $0 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 7$.

Ας περάσουμε σε ένα δεύτερο παράδειγμα. Θεωρούμε το παρακάτω σύστημα όπου στόχος μας είναι να ξεκινήσουμε από τον κόμβο (0,1) και να φτάσουμε στον κόμβο (6,1), έχοντας διανύσει την ελάχιστη δυνατή απόσταση.



Το πρώτο νούμερο κάθε κόμβου συμβολίζει το βήμα στο οποίο βρισκόμαστε, ενώ το δεύτερο τον αριθμό του κόμβου του συγκεκριμένου βήματος. Ο συνολικός αριθμός βημάτων που θα γίνουν σε κάθε περίπτωση είναι έξι. Με τη χρήση της εξίσωσης βελτιστοποίησης, το παραπάνω πρόβλημα λύνεται αναδρομικά ως εξής:

$\upsilon(6,1) = 0$

$\upsilon(5,1) = 1 + \upsilon(6,1) = 1,$ $\upsilon^*(5,1) = (6,1)$

$\upsilon(5,2) = 0 + \upsilon(6,1) = 0,$ $\upsilon^*(5,2) = (6,1)$

$\upsilon(4,1) = 5 + \upsilon(5,1) = 6,$ $\upsilon^*(4,1) = (5,1)$

$\upsilon(4,2) = \min [\, 4 + \upsilon(5,1),\, 7 + \upsilon(5,2)\,] = \min [\, 4 + 1,\, 7 + 0\,] = 5,$ $\upsilon^*(4,2) = (5,1)$

$\upsilon(4,3) = 3 + \upsilon(5,2) = 3,$ $\upsilon^*(4,3) = (5,2)$

$\upsilon(3,1) = 2 + \upsilon(4,1) = 8,$ $\upsilon^*(3,1) = (4,1)$

$\upsilon(3,2) = \min [\, 1 + \upsilon(4,1),\, 1 + \upsilon(4,2)\,] = \min [\, 1 + 6,\, 1 + 5\,] = 6,$ $\upsilon^*(3,2) = (4,2)$

$\upsilon(3,3) = \min [\, 2 + \upsilon(4,2),\, 5 + \upsilon(4,3)\,] = \min [\, 2 + 5,\, 5 + 3\,] = 7,$ $\upsilon^*(3,3) = (4,2)$

$\upsilon(3,4) = 4 + \upsilon(4,3) = 7,$ $\upsilon^*(3,4) = (4,3)$

$\upsilon(2,1) = \min [\, 3 + \upsilon(3,1),\, 3 + \upsilon(3,2)\,] = \min [\, 3 + 8,\, 3 + 6\,] = 9,$ $\upsilon^*(2,1) = (3,2)$

$\upsilon(2,2) = \min [\, 4 + \upsilon(3,2),\, 2 + \upsilon(3,3)\,] = \min [\, 4 + 6,\, 2 + 7\,] = 9,$ $\upsilon^*(2,2) = (3,3)$

$\upsilon(2,3) = \min [\, 2 + \upsilon(3,3),\, 2 + \upsilon(3,4)\,] = \min [\, 2 + 7,\, 2 + 7\,] = 9,$ $\upsilon^*(2,3) = (3,3)$ ή $(3,4)$

$\upsilon(1,1) = \min [\, 5 + \upsilon(2,1),\, 2 + \upsilon(2,2)\,] = \min [\, 5 + 9,\, 2 + 9\,] = 11,$ $\upsilon^*(1,1) = (2,2)$

$\upsilon(1,2) = \min [\, 8 + \upsilon(2,2),\, 4 + \upsilon(2,3)\,] = \min [\, 8 + 9,\, 4 + 9\,] = 13,$ $\upsilon^*(1,2) = (2,3)$

$\upsilon(0,1) = \min [\, 2 + \upsilon(1,1),\, 1 + \upsilon(1,2)\,] = \min [\, 2 + 11,\, 1 + 13\,] = 13,$ $\upsilon^*(0,1) = (1,1)$

Συνεπώς, η βέλτιστη διαδρομή από τον κόμβο (0,1) στον κόμβο (6,1) έχει μήκος 13 και είναι η

$$(0,1) \to (1,1) \to (2,2) \to (3,3) \to (4,2) \to (5,1) \to (6,1).$$

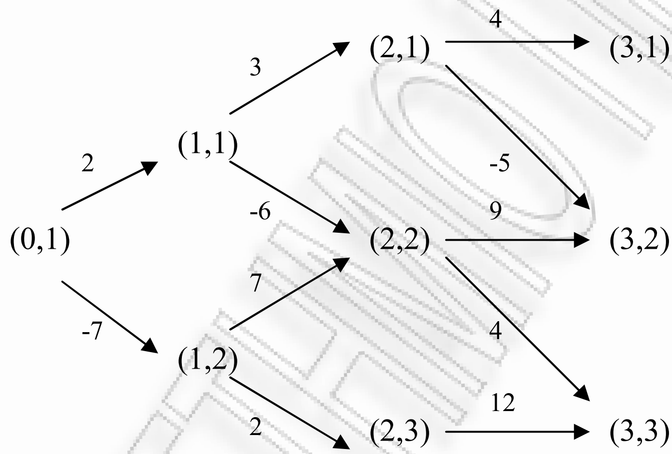
Στη συνέχεια θα εξετάσουμε δύο πιο ρεαλιστικά μοντέλα του δυναμικού προγραμματισμού. Το πρώτο έχει να κάνει με το γεγονός ότι συνυπολογίζεται η χρονική αξία του χρήματος, δεδομένης της ύπαρξης πληθωρισμού. Γίνεται λοιπόν αναγωγή των ποσών κάθε χρονικής περιόδου σε παρούσα αξία μέσω ενός αποπληθωριστή b, με $b = 1/(1 + r)$, όπου r το επιτόκιο του αποπληθωρισμού. Η εξίσωση βελτιστοποίησης για την περίπτωση που το ζητούμενο είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους, έχει τώρα την εξής μορφή:

$$\upsilon(t, x) = \min [\, c_t(x, \alpha) + b\upsilon(t + 1,\, \overline{\alpha}\,(x))\,], \tag{4.2}$$

$$\upsilon(N{+}1, x) = \hat{c}(x)$$

όπου $\upsilon(t, x)$ το ελάχιστο συνολικό κόστος όταν στην αρχή του βήματος t το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση x, $c_t(x, \alpha)$ το κόστος που αντιστοιχεί στην απόφαση α όταν το σύστημα στην αρχή του βήματος t βρίσκεται στην κατάσταση x, $\hat{c}(x)$ το κόστος όταν το σύστημα βρεθεί στο τέλος του N-οστού βήματος στην κατάσταση x και $\overline{\alpha}\,(x)$ η νέα κατάσταση στην αρχή του βήματος $t + 1$ μέσω της απόφασης α.

***Παράδειγμα* 1** (Φακίνος και Οικονόμου (2003), σελ. 160)**.** Ένας αγροτικός συνεταιρισμός έχει αποθήκη χωρητικότητας ενός επιπέδου και σχεδιάζει την επέκτασή της για τα επόμενα 3 έτη. Στην αρχή κάθε έτους υπάρχουν οι εναλλακτικές αποφάσεις να διατηρήσει την υπάρχουσα χωρητικότητα, ή να την επεκτείνει κατά ένα επίπεδο ακόμη. Ο μέγιστος επιτρεπόμενος αριθμός επιπέδων είναι 3 και το άμεσο κέρδος για κάθε απόφαση δίνεται στο επόμενο διάγραμμα:



Η αξία της αποθήκης το τρίτο έτος εκτιμάται ότι θα είναι αυξημένη σε σχέση με τη σημερινή της αξία κατά 4 και 8 μονάδες για τα επίπεδα 2 και 3 αντίστοιχα, ενώ παραμένει σταθερή για το επίπεδο 1. Ο ετήσιος πληθωρισμός είναι 33.3% και το ζητούμενο είναι η βέλτιστη πολιτική επέκτασης της αποθήκης.

Για να λύσουμε το πρόβλημα, ορίζουμε πρώτα το σύνολο των δυνατών καταστάσεων και αποφάσεων. Το t μπορεί να πάρει τιμές από 0 έως 3, ανάλογα με τη χρονική περίοδο (ή έτος) στην οποία βρισκόμαστε, το x συμβολίζει το επίπεδο της αποθήκης και παίρνει τιμές από 1 έως 3, ενώ οι δυνατές αποφάσεις είναι 0 για διατήρηση και 1 για επέκταση της χωρητικότητας της αποθήκης κατά ένα επίπεδο. Επομένως ισχύει:

$$x_{t+1} = \begin{cases} x_t\,, & \text{αν } \ \alpha = 0 \\ x_t + 1, & \text{αν } \ \alpha = 1 \end{cases}$$

και ο αποπληθωριστής παίρνει την τιμή:

$$b = 1 / (1 + 0.33) \approx 0.75$$

Σύμφωνα με την εξίσωση βελτιστοποίησης (4.2), το πρόβλημα μπορεί να λυθεί αναδρομικά ως εξής (με αστεράκι σημειώνονται οι βέλτιστες αποφάσεις):

$t = 3$

$x = 1$: $\upsilon(t,x) = 0$

$x = 2$: $\upsilon(t,x) = 4$

$x = 3$: $\upsilon(t,x) = 8$

$t = 2$

$x = 1$	$\alpha = 0$	$c_t(\alpha(x)) = 4$	$\overline{\alpha}\,(x) = 1$	$\upsilon(t,x) = 4 + 0 = 4^*$
	$\alpha = 1$	$c_t(\alpha(x)) = -5$	$\overline{\alpha}\,(x) = 2$	$\upsilon(t,x) = -5 + b{\cdot}4 = -2$
$x = 2$	$\alpha = 0$	$c_t(\alpha(x)) = 9$	$\overline{\alpha}\,(x) = 2$	$\upsilon(t,x) = 9 + b{\cdot}4 = 12^*$
	$\alpha = 1$	$c_t(\alpha(x)) = 4$	$\overline{\alpha}\,(x) = 3$	$\upsilon(t,x) = 4 + b{\cdot}8 = 10$
$x = 3$	$\alpha = 0$	$c_t(\alpha(x)) = 12$	$\overline{\alpha}\,(x) = 3$	$\upsilon(t,x) = 12 + b{\cdot}8 = 18$

$t = 1$

$x = 1$	$\alpha = 0$	$c_t(\alpha(x)) = 3$	$\overline{\alpha}\,(x) = 1$	$\upsilon(t,x) = 3 + b{\cdot}4 = 6^*$
	$\alpha = 1$	$c_t(\alpha(x)) = -6$	$\overline{\alpha}\,(x) = 2$	$\upsilon(t,x) = -6 + b{\cdot}12 = 3$
$x = 2$	$\alpha = 0$	$c_t(\alpha(x)) = 7$	$\overline{\alpha}\,(x) = 2$	$\upsilon(t,x) = 7 + b{\cdot}12 = 16^*$
	$\alpha = 1$	$c_t(\alpha(x)) = 2$	$\overline{\alpha}\,(x) = 3$	$\upsilon(t,x) = 2 + b{\cdot}18 = 15.5$

$t = 0$

$x = 1$	$\alpha = 0$	$c_t(\alpha(x)) = 2$	$\overline{\alpha}\,(x) = 1$	$\upsilon(t,x) = 2 + b{\cdot}6 = 6.5^*$
	$\alpha = 1$	$c_t(\alpha(x)) = -7$	$\overline{\alpha}\,(x) = 2$	$\upsilon(t,x) = -7 + b{\cdot}16 = 5$

Άρα τελικά η βέλτιστη πολιτική είναι η $(0,1) \rightarrow (1,1) \rightarrow (2,1) \rightarrow (3,1)$, δηλαδή να μη γίνει καθόλου επέκταση της αποθήκης. Η πολιτική αυτή θα αποφέρει κέρδη 6.5 χρηματικές μονάδες. □

Η τελευταία περίπτωση που θα εξετάσουμε στην ενότητα αυτή έχει να κάνει με *στοχαστικό δυναμικό προγραμματισμό*. Σε αντίθεση με τα παραδείγματα που είδαμε μέχρι τώρα, η επόμενη κατάσταση στην οποία περιέρχεται το σύστημα δεν προσδιορίζεται μονοσήμαντα από την παρούσα κατάσταση και την απόφαση που λαμβάνεται σε αυτήν, αλλά είναι τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας γνωστή εκ των προτέρων. Κατά συνέπεια και το συνολικό κόστος ή κέρδος δεν υπολογίζεται ντετερμινιστικά αλλά είναι και αυτό τυχαία μεταβλητή. Η εξίσωση βελτιστοποίησης για την εύρεση της *αναμενόμενης* βέλτιστης τιμής $\upsilon(t,x)$ σε αυτήν την περίπτωση είναι η ακόλουθη:

$$\upsilon(t,x) = \min_{\alpha \in D_t(x)} \text{ή} \max \left[c_t(x,\alpha) + \sum_y p_{xy}(\alpha)\, \upsilon(t+1,y) \right], \ t = 1, 2, \ldots, N, \tag{4.3}$$

$$\upsilon(N+1, x) = \hat{c}(x)$$

όπου y είναι η επόμενη κατάσταση από την παρούσα x, με πιθανότητα $p_{xy}(\alpha) \geq 0$ και $\sum_y p_{xy}(\alpha) = 1$. Η βέλτιστη πολιτική του προβλήματος προκύπτει από την επίλυση της (4.3).

***Παράδειγμα* 2** (Φακίνος και Οικονόμου (2003), σελ. 191)**.** Ένας αγροτικός συνεταιρισμός έχει στη διάθεσή του έναν μεγάλο αγρό. Η παραγωγικότητα του αγρού ελέγχεται κάθε χρόνο και κατατάσσεται σε μια από τις καταστάσεις, 1: άριστη, 2: καλή και 3: μέτρια. Μάλιστα η κατάσταση του αγρού το επόμενο έτος εξαρτάται αποκλειστικά από την κατάστασή του στο προηγούμενο έτος, μέσω του πίνακα των πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P(1) = (p_{ij}(1)) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Για παράδειγμα, αν φέτος η κατάσταση του αγρού είναι καλή, τότε το επόμενο έτος θα είναι καλή ή μέτρια με ίσες πιθανότητες. Η παραγωγικότητα του αγρού μπορεί να βελτιωθεί με τη χρησιμοποίηση λιπασμάτων. Συγκεκριμένα, αν στην αρχή του έτους ο αγρός λιπανθεί, τότε ο προηγούμενος πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης αλλάζει και γίνεται:

$$P(2) = (p_{ij}(2)) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{pmatrix} \end{array}$$

Έτσι ανάλογα με την κατάσταση του αγρού, υπάρχουν στην αρχή κάθε έτους οι αποφάσεις μη λίπανσης (1) και λίπανσης (2). Οι αντίστοιχοι πίνακες αμοιβής είναι:

$$R(1) = (r_{ij}(1)) = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ και } R(2) = (r_{ij}(2)) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Π.χ. αν η κατάσταση του αγρού φέτος είναι καλή και ο αγρός δεν λιπανθεί, τότε το κέρδος του συνεταιρισμού είναι 5 ή 1 χρηματικές μονάδες, ανάλογα αν το επόμενο έτος η κατάστασή του παραμείνει καλή ή γίνει μέτρια. Αν όμως ο αγρός λιπανθεί, το κέρδος είναι 7, 4 ή 0, ανάλογα αν η κατάστασή του το επόμενο έτος βελτιωθεί, μείνει η ίδια ή χειροτερέψει αντίστοιχα. Τα τερματικά κέρδη είναι μηδενικά, δηλαδή $\hat{c}(x) = 0$ για όλα τα x.

Εργαζόμαστε ως εξής. Υπολογίζουμε πρώτα τα άμεσα κέρδη για κάθε κατάσταση του αγρού και απόφαση. Ουσιαστικά αυτά προκύπτουν ως μέσες τιμές από τη σχέση:

$$c(i,\alpha) = \sum_{j=1}^{3} p_{ij}(\alpha)\, r_{ij}(\alpha) \;,\; \text{για } i = 1, 2, 3 \text{ και } \alpha = 1, 2$$

Έτσι έχουμε:

$c(1,1) = 0.2\cdot 7 + 0.5\cdot 6 + 0.3\cdot 3 = 5.3$

$c(2,1) = 0\cdot 0 + 0.5\cdot 5 + 0.5\cdot 1 = 3$

$c(3,1) = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot(-1) = -1$

$c(1,2) = 0.3\cdot 6 + 0.6\cdot 5 + 0.1\cdot(-1) = 4.7$

$c(2,2) = 0.1\cdot 7 + 0.6\cdot 4 + 0.3\cdot 0 = 3.1$

$c(3,2) = 0.05\cdot 6 + 0.4\cdot 3 + 0.55\cdot(-2) = 0.4$

Με τη χρήση της σχέσης (4.3), το πρόβλημα λύνεται αναδρομικά ως ακολούθως:

$t = 2$

$x = 1$	$\alpha = 1$	$c(x,\alpha) = 5.3$	$\upsilon(t,x) = 5.3^*$
	$\alpha = 2$	$c(x,\alpha) = 4.7$	$\upsilon(t,x) = 4.7$
$x = 2$	$\alpha = 1$	$c(x,\alpha) = 3$	$\upsilon(t,x) = 3$
	$\alpha = 2$	$c(x,\alpha) = 3.1$	$\upsilon(t,x) = 3.1^*$
$x = 3$	$\alpha = 1$	$c(x,\alpha) = -1$	$\upsilon(t,x) = -1$
	$\alpha = 2$	$c(x,\alpha) = 0.4$	$\upsilon(t,x) = 0.4^*$

$t = 1$

$x = 1$	$\alpha = 1$	$c(x,\alpha) = 5.3$	$\upsilon(t,x) = 5.3 + 0.2\cdot 5.3 + 0.5\cdot 3.1 + 0.3\cdot 0.4 = 8.03$
	$\alpha = 2$	$c(x,\alpha) = 4.7$	$\upsilon(t,x) = 4.7 + 0.3\cdot 5.3 + 0.6\cdot 3.1 + 0.1\cdot 0.4 = 8.19^*$
$x = 2$	$\alpha = 1$	$c(x,\alpha) = 3$	$\upsilon(t,x) = 3 + 0\cdot 5.3 + 0.5\cdot 3.1 + 0.5\cdot 0.4 = 4.75$
	$\alpha = 2$	$c(x,\alpha) = 3.1$	$\upsilon(t,x) = 3.1 + 0.1\cdot 5.3 + 0.6\cdot 3.1 + 0.3\cdot 0.4 = 5.61^*$
$x = 3$	$\alpha = 1$	$c(x,\alpha) = -1$	$\upsilon(t,x) = -1 + 0\cdot 5.3 + 0\cdot 3.1 + 1\cdot 0.4 = -0.6$

$\alpha = 2 \quad c(x,\alpha) = 0.4 \quad \upsilon(t,x) = 0.4 + 0.05{\cdot}5.3 + 0.4{\cdot}3.1 + 0.55{\cdot}0.4 = 2.13^*$

$t = 0$

$x = 1 \quad \alpha = 1 \quad c(x,\alpha) = 5.3 \quad \upsilon(t,x) = 5.3 + 0.2{\cdot}8.19 + 0.5{\cdot}5.61 + 0.3{\cdot}2.13 = 10.38$

$\alpha = 2 \quad c(x,\alpha) = 4.7 \quad \upsilon(t,x) = 4.7 + 0.3{\cdot}8.19 + 0.6{\cdot}5.61 + 0.1{\cdot}2.13 = 10.74^*$

$x = 2 \quad \alpha = 1 \quad c(x,\alpha) = 3 \quad \upsilon(t,x) = 3 + 0{\cdot}8.19 + 0.5{\cdot}5.61 + 0.5{\cdot}2.13 = 6.87$

$\alpha = 2 \quad c(x,\alpha) = 3.1 \quad \upsilon(t,x) = 3.1 + 0.1{\cdot}8.19 + 0.6{\cdot}5.61 + 0.3{\cdot}2.13 = 7.92^*$

$x = 3 \quad \alpha = 1 \quad c(x,\alpha) = -1 \quad \upsilon(t,x) = -1 + 0{\cdot}8.19 + 0{\cdot}5.61 + 1{\cdot}2.13 = 1.13$

$\alpha = 2 \quad c(x,\alpha) = 0.4 \quad \upsilon(t,x) = 0.4 + 0.05{\cdot}8.19 + 0.4{\cdot}5.61 + 0.55{\cdot}2.13 = 4.23^*$

Άρα τελικά για να επιτευχθεί μεγιστοποίηση του αναμενόμενου συνολικού κέρδους, οι βέλτιστες αποφάσεις είναι λίπανση του αγρού στο παρόν και στο πρώτο έτος, ενώ στο δεύτερο έτος πρέπει να λιπανθεί μόνο στην περίπτωση που η κατάστασή του δεν είναι άριστη. Ανάλογα με την παρούσα κατάσταση του αγρού, δηλαδή άριστη, καλή ή μέτρια, τα αντίστοιχα αναμενόμενα κέρδη είναι 10.74, 7.92 ή 4.23 χρηματικές μονάδες αντίστοιχα. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Martingales και Χρόνοι Διακοπής

Προκειμένου να προχωρήσουμε στην αναλυτική αποτίμηση Δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου, είναι απαραίτητο να αναφερθούμε σε δύο πολύ σημαντικές έννοιες τις οποίες θα χρειαστούμε στη συνέχεια. Πρόκειται για τα *martingales* και τους *χρόνους διακοπής* (*stopping times*). Και οι δύο έννοιες είναι εξίσου χρήσιμες για την ανάλυση που θα κάνουμε, όμως επειδή είναι διαφορετικές μεταξύ τους θα μελετηθούν ξεχωριστά και στα πλαίσια του διωνυμικού μοντέλου που αποτελεί τη βάση της παρούσας εργασίας. Πρώτα θα παρουσιαστούν τα martingales και έπειτα οι χρόνοι διακοπής όπου η θεωρία των martingales θα μας φανεί πολύ χρήσιμη για την καλύτερη κατανόηση.

5.1 Martingales

Ορισμός 5.1.1. *Ας θεωρήσουμε το διωνυμικό μοντέλο. Έστω M_0, $M_1,\ldots, M_N$ μια ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές με M_0 σταθερό και κάθε M_n να εξαρτάται μόνο από τις πρώτες n δοκιμές. Μια τέτοια ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές ονομάζεται προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία (adapted stochastic process). Συμβολίζουμε με $E_n(X) = E(X \mid I_n)$ την δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X δεδομένης της "πληροφορίας" μέχρι και το χρόνο n.*

- Εάν ισχύει:

$$M_n = E_n[M_{n+1}]\ ,\ \ n = 0, 1,\ldots, N-1,$$

τότε λέμε ότι η διαδικασία αυτή είναι martingale (εδώ και στη συνέχεια, όπου εμφανίζονται μέσες τιμές υποθέτουμε επιπροσθέτως ότι αυτές ορίζονται).

- Εάν ισχύει:

$$M_n \le E_n[M_{n+1}]\ ,\ \ n = 0, 1,\ldots, N-1,$$

τότε λέμε ότι η διαδικασία είναι submartingale.

- Εάν ισχύει:

$$M_n \geq E_n[M_{n+1}]\ ,\ \ n = 0, 1, \ldots, N-1,$$

τότε λέμε ότι η διαδικασία είναι supermartingale.

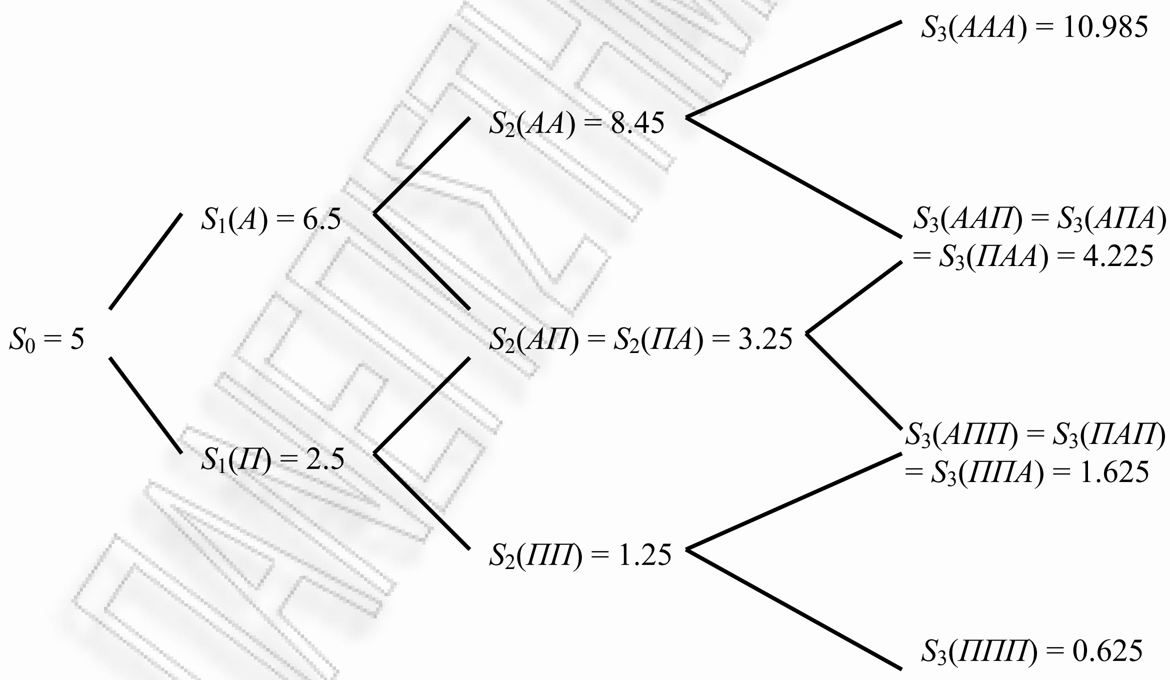
Παρατηρούμε ότι η ιδιότητα του martingale όπως ορίστηκε αφορά δύο τυχαίες μεταβλητές που απέχουν μεταξύ τους μια χρονική περίοδο. Ωστόσο μπορούμε να γενικεύσουμε την ιδιότητα για δύο ή περισσότερες περιόδους. Για $n \leq N-2$, έχουμε:

$$M_{n+1} = E_{n+1}[M_{n+2}] \ \Rightarrow\ E_n[M_{n+1}] = E_n[\,E_{n+1}[M_{n+2}]\,] \ \Rightarrow\ M_n = E_n[M_{n+2}].$$

Γενικά, εάν $0 \leq n \leq m \leq N$, ισχύει:

$$M_n = E_n[M_m].$$

Για να είναι martingale μια διαδικασία, πρέπει να ισχύει η ισότητα για κάθε πιθανό ενδεχόμενο. Ας δούμε ένα παράδειγμα με αρχική τιμή μετοχής $S_0 = 5$, $u = 1.3$, $d = 0.5$ και $n = 3$:



Η συγκεκριμένη διαδικασία είναι martingale μόνο στην περίπτωση που οι πιθανότητες ανόδου και πτώσης της τιμής της μετοχής είναι $\hat{p} = 0.625$ και $\hat{q} = 0.375$ αντίστοιχα. Π.χ. αν στη δεύτερη περίοδο έχουμε μια άνοδο και μια πτώση, τότε η τιμή της μετοχής είναι:

$$S_2(A\Pi) = 3.25 = 0.625 \cdot 4.225 + 0.375 \cdot 1.625$$

Κάθε τιμή είναι ίση με τον σταθμισμένο μέσο όρο των δύο διαδοχικών τιμών, όπου η στάθμιση γίνεται με βάρη τα $\hat{p}$ και $\hat{q}$. Αυτό ισχύει για κάθε τιμή στο παραπάνω διάγραμμα.

Είναι φανερό ότι ένα martingale δεν παρουσιάζει ούτε ανοδική ούτε πτωτική τάση. Όμως οι μετοχές, υπό κανονικές συνθήκες, πρέπει να παρουσιάζουν ανοδική τάση ούτως ώστε να δικαιολογείται η επένδυση σε αυτές, δεδομένου του ρίσκου που ενέχουν. Έτσι, στη συγκεκριμένη περίπτωση οι πραγματικές πιθανότητες θα μπορούσαν να είναι p = 0.8 και q = 0.2. Υπό αυτές τις πιθανότητες, για κάθε δυνατό συνδυασμό ενδεχομένων ισχύει:

$$E_n[S_{n+1}] = 1.14 \cdot S_n.$$

Δηλαδή όταν ισχύουν οι πραγματικές πιθανότητες τότε η διαδικασία είναι submartingale και έχει ανοδική τάση. Αν το επιτόκιο μιας σίγουρης επένδυσης είναι 10%, βλέπουμε ότι με την επιλογή που κάναμε για τα p και q, ο ρυθμός ανόδου της τιμής της μετοχής είναι μεγαλύτερος και συγκεκριμένα 14%. Γενικά, το να ξεπερνάει ο μέσος ρυθμός ανόδου της τιμής της μετοχής την απόδοση που προσφέρει μια επένδυση χωρίς ρίσκο, είναι αληθές στον πραγματικό κόσμο των αγορών, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι ισχύει πάντοτε.

Λόγω της χρονικής αξίας του χρήματος, οι πιθανότητες για να είναι martingale η παραπάνω διαδικασία δεν θα είναι οι $\hat{p}$ και $\hat{q}$ που αναφέραμε. Υπό το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου, οι πιθανότητες επιλέγονται έτσι ώστε οι *προεξοφλημένες* τιμές της μετοχής να είναι martingale. Στο παράδειγμα, για r = 0.1, είναι $\tilde{p} = 0.75$ και $\tilde{q} = 0.25$. Ακολουθεί μια χρήσιμη πρόταση και ένα θεώρημα όπου αποδεικνύει τον ισχυρισμό που μόλις διατυπώσαμε.

Πρόταση 5.1.1. *Στο διωνυμικό μοντέλο αποτίμησης, οι πιθανότητες ουδέτερου ρίσκου που δίνονται από τις σχέσεις* (2.1.6), *ικανοποιούν τη συνθήκη*:

$$\frac{\tilde{p}u + \tilde{q}d}{1+r} = 1$$

Απόδειξη. Πράγματι, ισχύει ότι:

$$\frac{\tilde{p}u + \tilde{q}d}{1+r} = \frac{\frac{1+r-d}{u-d}u + \frac{u-1-r}{u-d}d}{1+r} = \frac{\frac{u+ur-ud+ud-d-dr}{u-d}}{1+r}$$

$$= \frac{\frac{u-d}{u-d} + \frac{r(u-d)}{u-d}}{1+r}$$

$$= \frac{1+r}{1+r}$$

$$= 1$$ □

Θεώρημα 5.1.1. *Στο διωνυμικό μοντέλο αποτίμησης, υπό το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου, οι προεξοφλημένες τιμές της μετοχής είναι martingale, για κάθε χρονική στιγμή n και κάθε δυνατό συνδυασμό ενδεχομένων.*

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $x_1, x_2, \ldots, x_n$ τα ενδεχόμενα (άνοδος ή πτώση της τιμής), τα οποία θεωρούνται γνωστά. Τότε:

$$\widetilde{E}_n\left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right](x_1\ldots x_n) = \frac{1}{(1+r)^n}\cdot\frac{1}{1+r}\left[\widetilde{p}S_{n+1}(x_1\ldots x_n A)+\widetilde{q}S_{n+1}(x_1\ldots x_n \varPi)\right]$$

$$= \frac{1}{(1+r)^n}\cdot\frac{1}{1+r}\left[\widetilde{p}uS_n(x_1\ldots x_n)+\widetilde{q}dS_n(x_1\ldots x_n)\right]$$

$$= \frac{S_n(x_1\ldots x_n)}{(1+r)^n}\cdot\frac{\widetilde{p}u+\widetilde{q}d}{1+r}$$

$$= \frac{S_n(x_1\ldots x_n)}{(1+r)^n}$$ □

Η ιδιότητα του martingale δεν αφορά μόνο τις προεξοφλημένες τιμές της μετοχής στο διωνυμικό μοντέλο. Όπως έχουμε αναφέρει, για να κατασκευαστεί το χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης για ένα Δικαίωμα, σε κάθε χρονική στιγμή n αγοράζονται $\varDelta_n$ μετοχές και το χαρτοφυλάκιο έχει αξία X_n. Το κάθε $\varDelta_n$ εξαρτάται από τα πρώτα n ενδεχόμενα. Έτσι, η στοχαστική διαδικασία $\varDelta_0, \varDelta_1, \ldots, \varDelta_{N-1}$ είναι προσαρμοσμένη (adapted). Σε κάθε χρονική στιγμή, η αξία του χαρτοφυλακίου δίνεται από τη σχέση:

$$X_{n+1} = \varDelta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - \varDelta_n S_n)\ ,\ \ n = 0, 1, \ldots, N-1$$

Προφανώς και η στοχαστική διαδικασία X_n, $n = 0, 1, \ldots, N$-1, είναι προσαρμοσμένη αφού εξαρτάται μόνο από τα πρώτα n ενδεχόμενα.

Θεώρημα 5.1.2. *Στο διωνυμικό μοντέλο αποτίμησης N περιόδων, η προεξοφλημένη διαδικασία* $(1+r)^{-n}X_n$*, n = 0, 1,…, N, είναι martingale υπό το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου.*

Απόδειξη. Ισχύει ότι:

$$\widetilde{E}_n\left[\frac{X_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right]=\widetilde{E}_n\left[\frac{\Delta_n S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}+\frac{X_n-\Delta_n S_n}{(1+r)^n}\right]$$

$$=\widetilde{E}_n\left[\frac{\Delta_n S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right]+\widetilde{E}_n\left[\frac{X_n-\Delta_n S_n}{(1+r)^n}\right]$$

$$=\Delta_n\widetilde{E}_n\left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right]+\frac{X_n-\Delta_n S_n}{(1+r)^n}$$

$$=\Delta_n\frac{S_n}{(1+r)^n}+\frac{X_n-\Delta_n S_n}{(1+r)^n}$$

$$=\frac{X_n}{(1+r)^n}\qquad\square$$

Γνωρίζουμε ότι η αξία του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης στον χρόνο N είναι ίση με την αξία του Δικαιώματος στον ίδιο χρόνο, δηλαδή $X_N = V_N$, ανεξάρτητα από τα ενδεχόμενα που συνέβησαν. Από το προηγούμενο θεώρημα ξέρουμε ότι το $(1+r)^{-n}X_n$, $n = 0, 1,\ldots, N$, είναι martingale. Άρα ισχύει:

$$\frac{X_n}{(1+r)^n}=E_n\left[\frac{X_N}{(1+r)^N}\right]=E_n\left[\frac{V_N}{(1+r)^N}\right],\ n=0,\,1,\,\ldots,\,N.$$

Όμως σε κάθε χρονική στιγμή n, η αξία του Δικαιώματος V_n ταυτίζεται με την αξία X_n του χαρτοφυλακίου. Συνεπώς:

$$\frac{V_n}{(1+r)^n}=\widetilde{E}_n\left[\frac{V_N}{(1+r)^N}\right].$$

Από τα παραπάνω προκύπτει άμεσα το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.1.3. *Στο διωνυμικό μοντέλο αποτίμησης N περιόδων, η προεξοφλημένη no-arbitrage αξία ενός Δικαιώματος (του οποίου η υποκείμενη μετοχή δεν αποδίδει μερίσματα) είναι martingale υπό το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου, δηλαδή*:

$$\frac{V_n}{(1+r)^n}=\widetilde{E}_n\left[\frac{V_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right],\ \ n=0,\,1,\ldots,\,N-1.$$

Πρέπει να τονίσουμε πως επιλέχθηκε εξ αρχής να χρησιμοποιηθεί το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου, έτσι ώστε οι προεξοφλημένες τιμές της μετοχής να είναι martingale. Ως άμεση συνέπεια οι προεξοφλημένες αξίες του Δικαιώματος σε κάθε χρονική στιγμή είναι επίσης martingale.

5.2 Χρόνοι Διακοπής

Στα Δικαιώματα Προαίρεσης Αμερικανικού τύπου ο χρόνος εξάσκησης όπως έχουμε πει δεν είναι προκαθορισμένος, αλλά έπεται στην κρίση και στην εκτίμηση του κατόχου και εξαρτάται καθαρά από το επίπεδο στο οποίο κινείται η τιμή της μετοχής. Το πρόβλημα της εύρεσης του βέλτιστου χρόνου εξάσκησης του Δικαιώματος είναι ένα από τα πιο σύνθετα θέματα που μπορεί κανείς να αντιμετωπίσει στη στοχαστική ανάλυση, ιδίως σε μοντέλα συνεχούς χρόνου. Στην παρούσα εργασία θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό από την πλευρά του διακριτού χρόνου, ώστε να συμβαδίζουμε με το κύριο εργαλείο της ανάλυσής μας που είναι το διωνυμικό μοντέλο.

Γενικά, η ιδέα είναι ότι γίνεται παρακολούθηση μιας διαδικασίας, εν προκειμένω της εξέλιξης της τιμής μιας μετοχής, και πρέπει να αποφασίσουμε πότε είναι η βέλτιστη χρονική στιγμή για να σταματήσουμε να παρακολουθούμε τη διαδικασία ώστε να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος μας (ή να ελαχιστοποιήσουμε τις απώλειες σε άλλες περιπτώσεις). Μάλιστα, η απόφαση για διακοπή της παρακολούθησης πρέπει να βασίζεται αποκλειστικά στην πληροφόρηση που έχουμε μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή και όχι στο πώς θα κινηθεί η τιμή της μετοχής στο μέλλον (αφού προφανώς δεν διαθέτουμε πληροφορία από το μέλλον). Η έννοια του χρόνου διακοπής εκφράζεται αυστηρά μέσα από τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 5.2.1. *Στο διωνυμικό μοντέλο N περιόδων, ένας χρόνος διακοπής (stopping time) είναι μια τυχαία μεταβλητή, έστω τ, η οποία παίρνει τιμές* 0, 1, 2,…, N *ή* ∞ *και ικανοποιεί τη συνθήκη*:

Αν $\tau(x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1} \ldots x_N) = n$, τότε $\tau(x_1 x_2 \ldots x_n x'_{n+1} \ldots x'_N) = n$ για όλα τα $x'_{n+1} \ldots x'_N$.

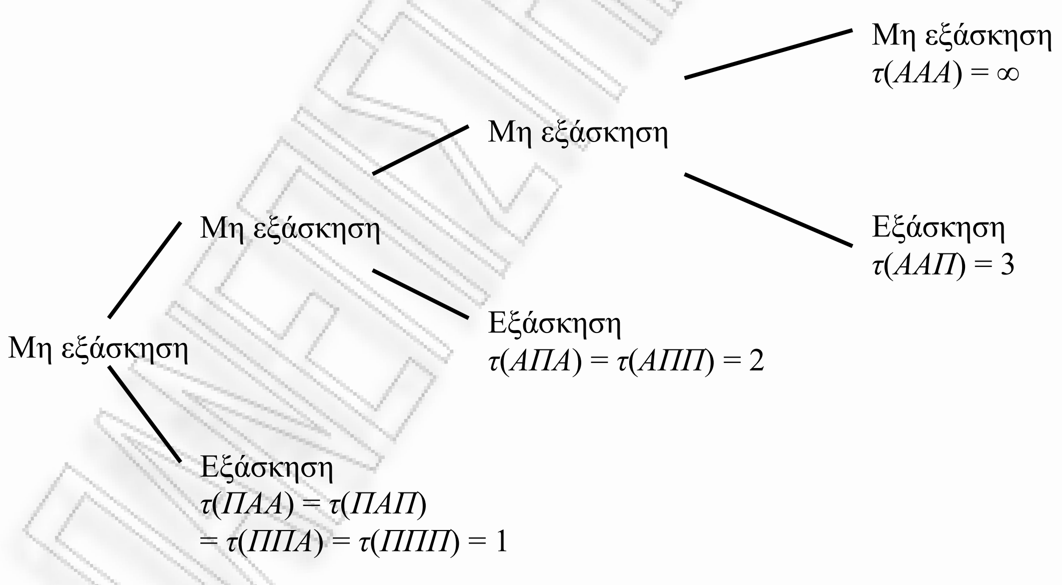
Με x_i συμβολίζονται τα πιθανά ενδεχόμενα (άνοδος ή πτώση της τιμής της μετοχής). Η συνθήκη του ορισμού καθιστά σαφές ότι η απόφαση για διακοπή στον χρόνο n βασίζεται *μόνο στην πληροφορία που έχουμε μέχρι τη χρονική στιγμή n*, δηλαδή στα πρώτα n ενδεχόμενα. Επομένως, όποιο ενδεχόμενο και να συμβεί μετά από αυτήν τη χρονική στιγμή δεν επηρεάζει την απόφαση που λαμβάνουμε.

Ας πάρουμε για παράδειγμα την εξέλιξη των τιμών της μετοχής της προηγούμενης παραγράφου με αρχική τιμή $S_0 = 5$, $u = 1.3$, $d = 0.5$ και $n = 3$. Έστω ότι ένας επενδυτής έχει ένα Δικαίωμα Πώλησης Αμερικανικού τύπου επί της συγκεκριμένης μετοχής με τιμή εξάσκησης $K = 6$. Τότε σε περίπτωση που η τιμή της μετοχής ανέβει κατά την πρώτη περίοδο, ο κάτοχος θα προτιμήσει να περιμένει και να μην εξασκήσει το Δικαίωμα, αφού δεν θα έχει κέρδος (το Δικαίωμα είναι *out of the money*). Αν και στη δεύτερη περίοδο υπάρξει άνοδος της τιμής, πάλι δεν θα εξασκήσει το Δικαίωμα αφού εξακολουθεί να είναι out of the money, ενώ αν συμβεί πτώση της τιμής, μπορεί να αποφασίσει να το εξασκήσει. Στην περίπτωση που πέσει η τιμή της μετοχής στην πρώτη περίοδο, μπορεί επίσης να αποφασίσει να μην περιμένει άλλο και να εξασκήσει το Δικαίωμα. Θα περιγράψουμε αυτόν τον κανόνα εξάσκησης με τη χρήση της τυχαίας μεταβλητής τ ως ακολούθως:

$$\tau(AAA) = \infty \qquad \tau(AA\Pi) = 3 \qquad \tau(A\Pi A) = 2 \qquad \tau(A\Pi\Pi) = 2$$

$$\tau(\Pi AA) = 1 \qquad \tau(\Pi A\Pi) = 1 \qquad \tau(\Pi\Pi A) = 1 \qquad \tau(\Pi\Pi\Pi) = 1$$

Με ∞ συμβολίζεται η επιλογή να αφεθεί το Δικαίωμα να λήξει χωρίς να γίνει εξάσκηση. Ο συγκεκριμένος κανόνας μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά ως εξής:



Η τυχαία μεταβλητή τ παίρνει τιμές στο σύνολο $\{0, 1, 2, 3, \infty\}$ ή γενικότερα σε μοντέλο με N περιόδους στο σύνολο $\{0, 1, 2,\ldots, N, \infty\}$. Η τ είναι ένας χρόνος διακοπής σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε.

Έστω ότι στο προηγούμενο παράδειγμα χρησιμοποιείται ο εξής κανόνας εξάσκησης:

$$\rho(AAA) = \infty \quad \rho(AA\Pi) = 3 \quad \rho(A\Pi A) = 2 \quad \rho(A\Pi\Pi) = 3$$

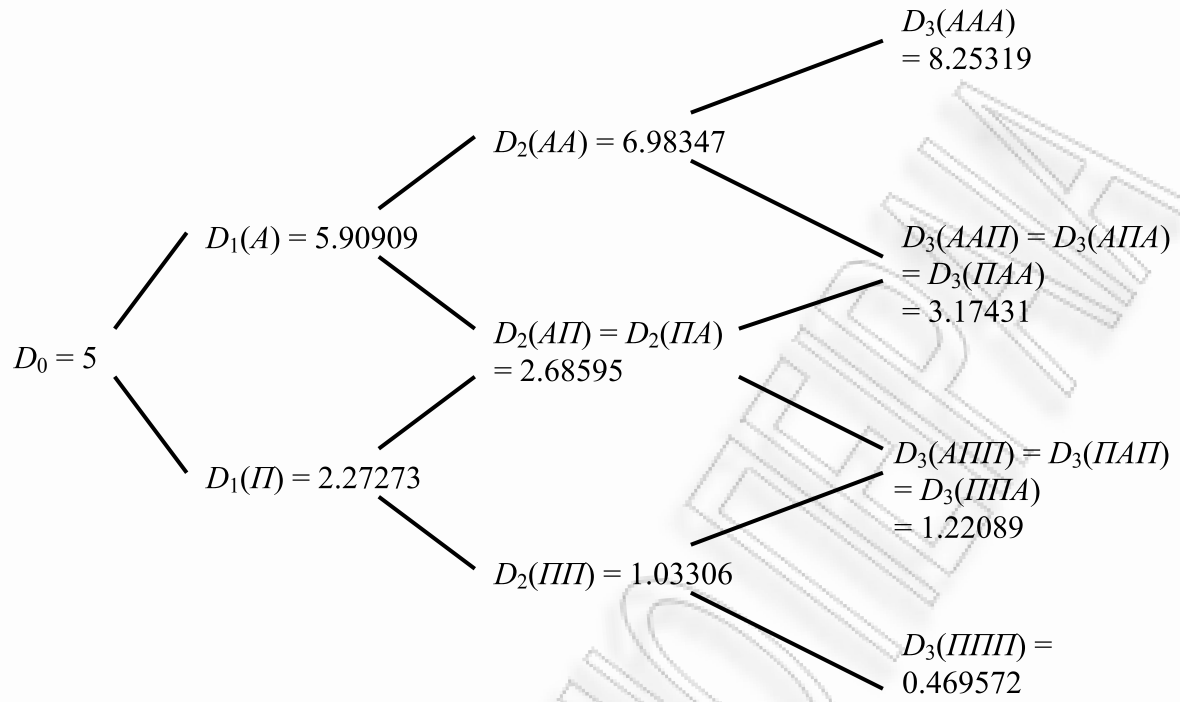
$$\rho(\Pi AA) = 1 \quad \rho(\Pi A\Pi) = 3 \quad \rho(\Pi\Pi A) = 2 \quad \rho(\Pi\Pi\Pi) = 3$$

Ο εν λόγω κανόνας δεν μπορεί να θεωρηθεί ως χρόνος διακοπής, διότι για να εφαρμοστεί προϋποθέτει τη γνώση των ενδεχομένων που θα συμβούν μελλοντικά. Το $\rho(A\Pi A) = 2$ σημαίνει ότι μετά από μια άνοδο και μια πτώση της τιμής της μετοχής, αποφασίζεται να γίνει εξάσκηση στον χρόνο 2, ενώ το $\rho(A\Pi\Pi) = 3$ υπονοεί πως γνωρίζουμε ότι το επόμενο ενδεχόμενο που θα συμβεί θα είναι πτώση κι έτσι προτιμάται να γίνει εξάσκηση στον χρόνο 3 ώστε το κέρδος να είναι μεγαλύτερο. Το ίδιο ισχύει και για όλους τους συνδυασμούς ενδεχομένων όπου το πρώτο είναι πτώση.

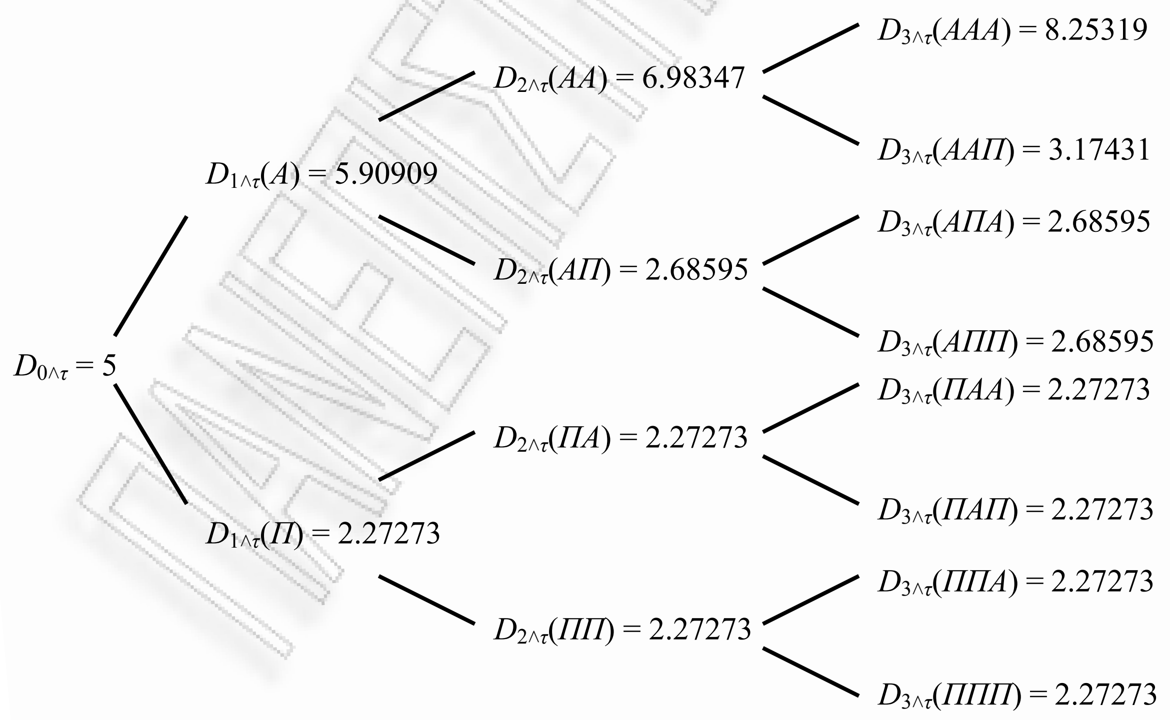
Μια στοχαστική διαδικασία σε συνδυασμό με έναν χρόνο διακοπής, έχουν ως αποτέλεσμα μια διακοπείσα διαδικασία (*stopped process*). Σε μια διακοπείσα διαδικασία, αυτό που σταματάει δεν είναι ο χρόνος αλλά η αξία των τιμών της διαδικασίας, οι οποίες παραμένουν σταθερές από τη διακοπή και έπειτα. Ακολουθεί ένα θεμελιώδες θεώρημα για τους χρόνους διακοπής και ένα κατατοπιστικό παράδειγμα για το τι είναι διακοπείσα διαδικασία.

Θεώρημα 5.2.1 (*Προαιρετική Δειγματοληψία, Optional Sampling*). Ένα *martingale που διακόπτεται σε έναν χρόνο διακοπής είναι επίσης martingale. Ένα supermartingale* (*ή submartingale*) *που διακόπτεται σε έναν χρόνο διακοπής είναι επίσης supermartingale* (*ή submartingale*).

Παίρνουμε ως παράδειγμα τις προεξοφλημένες τιμές της μετοχής της προηγούμενης παραγράφου, οι οποίες όπως ξέρουμε είναι martingale όταν ισχύουν οι πιθανότητες ουδέτερου ρίσκου που είναι $\tilde{p} = 0.75$ και $\tilde{q} = 0.25$. Το επιτόκιο προεξόφλησης είναι $r = 0.1$.



Εφαρμόζουμε τον χρόνο διακοπής τ όπως περιγράφτηκε παραπάνω και το αποτέλεσμα δίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $n \wedge \tau$ που υποδηλώνει το ελάχιστο μεταξύ των n και τ:



Εδώ υπάρχουν δύο αξιοσημείωτες παρατηρήσεις. Σύμφωνα με τον χρόνο διακοπής τ, εάν συμβεί πτώση της τιμής της μετοχής στην πρώτη περίοδο αποφασίζουμε να διακόψουμε τη διαδικασία. Παρατηρούμε ότι από τη διακοπή αυτή και μετά, όλες οι προεξοφλημένες τιμές της μετοχής ταυτίζονται με την τιμή $D_1(\Pi)$ = 2.27273, δηλαδή την τιμή που ίσχυε κατά τη στιγμή της διακοπής. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και όταν έχουμε πρώτα άνοδο και μετά πτώση της τιμής της μετοχής, όπου πάλι διακόπτεται η διαδικασία. Αυτή ακριβώς είναι η έννοια της διακοπείσας διαδικασίας, δηλαδή ο χρόνος συνεχίζεται κανονικά αλλά η αξία της διαδικασίας «παγώνει» μετά από έναν χρόνο διακοπής. Το άλλο πολύ σημαντικό στοιχείο είναι ότι επιβεβαιώνεται το θεώρημα που παραθέσαμε. Είδαμε μια διαδικασία η οποία είναι martingale να διακόπτεται σε έναν χρόνο διακοπής και το αποτέλεσμα να είναι επίσης martingale. Αντίθετα, εάν συνδυάζαμε την παραπάνω διαδικασία με τον κανόνα εξάσκησης ρ που όπως είπαμε δεν είναι χρόνος διακοπής, θα χανόταν η ιδιότητα του martingale αφού ο συγκεκριμένος κανόνας ελέγχει τις μελλοντικές τιμές και σταματάει τη διαδικασία όταν η τιμή της μετοχής πρόκειται να ανέβει. Κλείνουμε την παράγραφο αυτή με ένα θεώρημα που προκύπτει λογικά με βάση όσα αναφέραμε.

Θεώρημα 5.2.2. *Έστω η διαδικασία X_n, $n = 0, 1, \ldots, N$ και τ ένας χρόνος διακοπής. Αν η X_n είναι martingale, τότε $E(X_{n\wedge\tau}) = E(X_n)$. Αν η X_n είναι submartingale, τότε $E(X_{n\wedge\tau}) \leq E(X_n)$. Αν η X_n είναι supermartingale, τότε $E(X_{n\wedge\tau}) \geq E(X_n)$.*

Ένα submartingale έχει ανοδική τάση εξ ορισμού, επομένως ισχύει $E(X_m) \leq E(X_n)$ για κάθε $m \leq n$. Η ανισότητα εξακολουθεί να ισχύει και στην περίπτωση που αντικαταστήσουμε το m με το $n \wedge \tau$, αφού όπως εξηγήσαμε η συγκεκριμένη μεταβλητή παίρνει τιμές μικρότερες ή ίσες του n. Το αντίστοιχο ισχύει και στην περίπτωση των martingales και supermartingales.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Δικαιώματα Προαίρεσης Αμερικανικού Τύπου

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, τα Δικαιώματα Προαίρεσης Αμερικανικού τύπου προσφέρουν την επιπλέον δυνατότητα στον κάτοχό τους (σε σχέση με τα Ευρωπαϊκού τύπου Δικαιώματα) να τα εξασκήσει σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέχρι τη λήξη τους. Η ιδιότητα αυτή από μόνη της καθιστά σαφές ότι σε κάθε περίπτωση τα Δικαιώματα αυτά θα έχουν αξία τουλάχιστον ίση ή μεγαλύτερη συγκριτικά με τα αντίστοιχα Δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου με τα ίδια χαρακτηριστικά. Ωστόσο, η διαφορά στην αξία μπορεί να είναι αμελητέα ή μηδαμινή σε κάποιες περιπτώσεις.

Ένα πολύ σημαντικό στοιχείο που διαφοροποιεί τα Αμερικανικού τύπου Δικαιώματα είναι το γεγονός ότι τα Δικαιώματα Αγοράς αντιμετωπίζονται διαφορετικά από τα Δικαιώματα Πώλησης, σε ό,τι αφορά την κατασκευή του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης και την τιμολόγηση. Πιο συγκεκριμένα, τα Δικαιώματα Αγοράς Αμερικανικού τύπου έχουν ακριβώς την ίδια αξία με τα αντίστοιχα Ευρωπαϊκού τύπου, διότι αποδεικνύεται ότι είναι ασύμφορη η πρόωρη εξάσκησής τους. Αντίθετα, τα Δικαιώματα Πώλησης Αμερικανικού τύπου σε αρκετές περιπτώσεις μπορεί να προσφέρουν επιπλέον κέρδος αν εξασκηθούν πριν την ημερομηνία λήξης τους και αυτό φυσικά ανεβάζει την αξία τους. Παρακάτω θα εξηγήσουμε αναλυτικά τι συμβαίνει σε κάθε μια από τις δύο περιπτώσεις.

Ένα Δικαίωμα Αμερικανικού τύπου πρέπει πάντα να έχει αξία τουλάχιστον ίση με το κέρδος από την άμεση εξάσκησή του. Το κέρδος από την εξάσκηση καλείται *εγγενής αξία* (*intrinsic value*) του Δικαιώματος. Προκύπτει από τη σχέση $S_t - K$ για τα Δικαιώματα Αγοράς ή από τη σχέση $K - S_t$ για τα Δικαιώματα Πώλησης, όπου S_t η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή t και K η τιμή εξάσκησης. Στην περίπτωση που η διαφορά προκύψει αρνητική, η εγγενής αξία ορίζεται ίση με μηδέν. Για παράδειγμα, αν έχουμε ένα Δικαίωμα Πώλησης επί μιας μετοχής με τιμή εξάσκησης 15€ και η αξία της μετοχής επί του παρόντος είναι 10€, η εγγενής αξία του Δικαιώματος είναι 5€.

Ο υπολογισμός της αξίας ενός Δικαιώματος Αμερικανικού τύπου γίνεται και πάλι με βάση το διωνυμικό μοντέλο μέσω της κατασκευής ενός χαρτοφυλακίου εξασφάλισης, το οποίο ξεκινάει με αρχικό κεφάλαιο την αξία του Δικαιώματος. Τώρα όμως πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι η ημερομηνία εξάσκησης δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή. Συνεπώς, το χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης πρέπει να αναπροσαρμόζεται με τέτοιο τρόπο ώστε ο πωλητής του Δικαιώματος να είναι καλυμμένος έναντι των απαιτήσεων του κατόχου σε κάθε χρονική στιγμή και όχι μόνο κατά τη λήξη του Δικαιώματος.

Στο παρόν κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε στοιχεία από τη θεωρία των martingales και των χρόνων διακοπής για να τιμολογήσουμε παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα Αμερικανικού τύπου. Πρώτα θα εξετάσουμε την περίπτωση των Δικαιωμάτων που η τιμή τους δεν εξαρτάται από τη διαδρομή της τιμής της μετοχής (*non-path-dependent American options*), ενώ έπειτα η μελέτη μας θα γενικευθεί συμπεριλαμβάνοντας και εκείνα τα Δικαιώματα των οποίων η αξία εξαρτάται από τη διαδρομή της τιμής της μετοχής (*path-dependent American options*). Για κάθε περίπτωση θα γίνει κατασκευή του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης. Τέλος, θα γίνει αναφορά στα Δικαιώματα Αγοράς Αμερικανικού τύπου όπου θα αποδειχθεί θεωρητικά ότι πρέπει να εξασκούνται μόνο κατά τη λήξη τους και όχι νωρίτερα.

6.1 Δικαιώματα Προαίρεσης Αμερικανικού τύπου των οποίων η αξία δεν εξαρτάται από τη διαδρομή της τιμής της μετοχής

Θεωρούμε το διωνυμικό μοντέλο N περιόδων με παράγοντες ανόδου και καθόδου u και d όπως έχουν οριστεί παραπάνω και επιτόκιο r, ώστε να ισχύει η συνθήκη $0 < d < 1 + r < u$. Θυμίζουμε ότι η συνθήκη αυτή εξασφαλίζει τη μη ύπαρξη βέβαιου κέρδους (*no-arbitrage condition*). Αρχικά θα υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει συνεχής ανατοκισμός για λόγους απλότητας. Ορίζουμε επίσης τις πιθανότητες ουδέτερου ρίσκου:

$$\widetilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d} \text{ και } \widetilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d}$$

όπου $\widetilde{p}$ η πιθανότητα ανόδου και $\widetilde{q} = 1-\widetilde{p}$ η πιθανότητα πτώσης της τιμής της μετοχής. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g(s)$ η οποία συμβολίζει το κέρδος από την εξάσκηση του Δικαιώματος όταν η τιμή της μετοχής είναι s. Με άλλα λόγια η συνάρτηση $g(s)$ παριστάνει την εγγενή αξία του Δικαιώματος και για τα Δικαιώματα Πώλησης που θα μας απασχολήσουν σε αυτήν την ενότητα δίνεται από τη σχέση $(K-s)^+$. Επίσης, συμβολίζουμε $\upsilon_n(s)$ την αξία του Δικαιώματος τη χρονική στιγμή n όταν η τιμή της μετοχής είναι s.

Προκειμένου να γίνει αντιληπτή η διαφορά στον τρόπο αποτίμησης Δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού και Αμερικανικού τύπου, θα δοθεί πρώτα ο αναδρομικός τύπος για τα Ευρωπαϊκού τύπου Δικαιώματα. Όπως δείξαμε και στο κεφάλαιο της παρουσίασης του διωνυμικού μοντέλου, αυτός είναι ο ακόλουθος:

$$\upsilon_N(s) = \max[g(s), 0]$$

$$\upsilon_n(s) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_{n+1}(us) + \tilde{q}\,\upsilon_{n+1}(ds)\right], \quad n = N-1, N-2, \ldots, 0$$

Στα Αμερικανικού τύπου Δικαιώματα, δεδομένου ότι ο κάτοχος μπορεί να προβεί σε εξάσκηση οποιαδήποτε χρονική στιγμή, πρέπει το χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης να έχει αξία X_n τουλάχιστον ίση με την εγγενή αξία $g(S_n)$ για κάθε περίοδο n. Δηλαδή:

$$X_n \geq g(S_n), \quad n = 0, 1, \ldots, N$$

Έτσι, ο αναδρομικός τύπος αποτίμησης σε αυτήν την περίπτωση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\upsilon_N(s) = \max[g(s), 0]$$

$$\upsilon_n(s) = \max\left\{g(s), \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_{n+1}(us) + \tilde{q}\,\upsilon_{n+1}(ds)\right]\right\}, \quad n = N-1, N-2, \ldots, 0 \qquad (6.1.1)$$

Δηλαδή ***σε κάθε χρονική στιγμή, η αξία ενός Δικαιώματος Προαίρεσης Αμερικανικού τύπου εξαρτάται από την τιμή της υποκείμενης μετοχής και αποδεικνύεται ότι είναι το μέγιστο μεταξύ του κέρδους από την άμεση εξάσκηση και του αναμενόμενου κέρδους από τη μη εξάσκησή του***.

Αφού υπολογιστούν όλα τα υ_n, μπορούμε να προχωρήσουμε στην κατασκευή του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης. Ορίζουμε τις εξής ποσότητες:

$$\Delta_n = \frac{\upsilon_{n+1}(uS_n) - \upsilon_{n+1}(dS_n)}{(u-d)S_n}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (6.1.2)$$

$$C_n = \upsilon_n(S_n) - \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_{n+1}(uS_n) + \tilde{q}\,\upsilon_{n+1}(dS_n)\right], \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

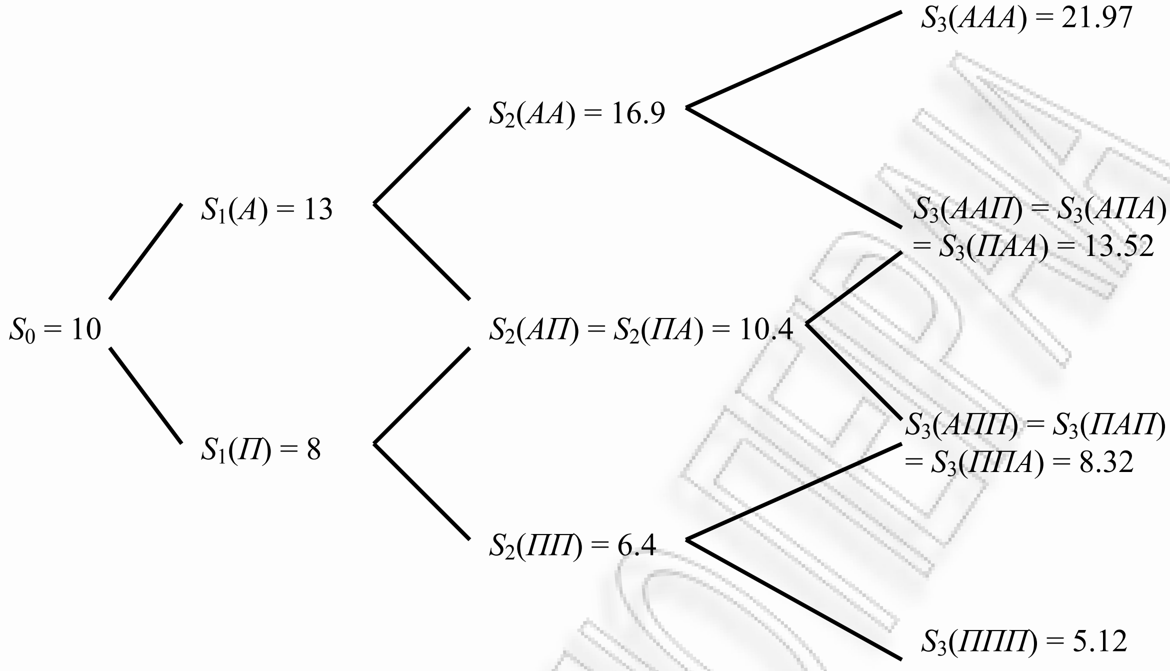
Το Δ_n συμβολίζει τον αριθμό των μετοχών που πρέπει να αγοράζονται ή να πωλούνται σε κάθε χρονική στιγμή n, ενώ το C_n παριστάνει την κατανάλωση (*consumption*) ή αλλιώς το επιπλέον (ενδεχόμενο) κέρδος που εξασφαλίζει τον πωλητή του Δικαιώματος από τις μέγιστες απαιτήσεις που μπορεί να έχει ο κάτοχος σε κάθε χρονική στιγμή. Προφανώς από τη σχέση (6.1.1) προκύπτει άμεσα ότι $C_n \geq 0$ για κάθε n. Το C_n είναι θετικό στις περιπτώσεις εκείνες όπου η εγγενής αξία του Δικαιώματος είναι μεγαλύτερη από το αναμενόμενο κέρδος της μη εξάσκησής του, δηλαδή μετά από έναν βέλτιστο χρόνο εξάσκησης. Η αξία του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης έναντι της πώλησης ενός Δικαιώματος Αμερικανικού τύπου για κάθε χρονική στιγμή δίνεται από τη σχέση:

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1 + r)(X_n - C_n - \Delta_n S_n)\ , \ \ n = 0, 1, \dots, N-1 \qquad (6.1.3)$$

με $X_0 = \upsilon_0(S_0)$ ώστε η αρχική αξία του να ισούται με την αξία του Δικαιώματος. Επίσης, *για κάθε χρονική στιγμή και όλα τα δυνατά ενδεχόμενα, η αξία του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης είναι ίση ή μεγαλύτερη από το κέρδος της άμεσης εξάσκησης* ($X_n \geq g(S_n)$). Όλα τα παραπάνω συμπεράσματα θα αποδειχθούν γενικότερα στην επόμενη παράγραφο όπου θα εξετάσουμε παράγωγα των οποίων η τιμή εξαρτάται από την διαδρομή της τιμής του υποκείμενου τίτλου,

Στο Κεφάλαιο 2 είχαμε τιμολογήσει ένα Δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου. Θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα από εκείνο το παράδειγμα μόνο που τώρα το Δικαίωμα θα είναι Αμερικανικού τύπου. Έτσι, εκτός από την παρουσίαση του τρόπου αντιμετώπισης αυτών των Δικαιωμάτων, θα γίνει φανερός ο λόγος για τον οποίο πάντοτε τα Αμερικανικού τύπου Δικαιώματα έχουν αξία ίση ή μεγαλύτερη από τα αντίστοιχα Ευρωπαϊκά. *Η μόνη περίπτωση κατά την οποία δύναται να έχουν την ίδια ακριβώς αξία, είναι αυτή κατά την οποία η πρόωρη εξάσκηση του Δικαιώματος Αμερικανικού τύπου είναι ασύμφορη για κάθε δυνατή τιμή της μετοχής.*

Παράδειγμα. Έστω ένα Δικαίωμα Πώλησης Αμερικανικού τύπου. Η παρούσα τιμή της μετοχής είναι S_0 = 10€, η τιμή εξάσκησης του Δικαιώματος είναι K = 11€ και το επιτόκιο είναι 10%. Η εξάσκηση μπορεί να γίνει σε οποιαδήποτε περίοδο, ενώ οι τιμές των u και d είναι 1.3 και 0.8 αντίστοιχα. Δίνεται το διάγραμμα των πιθανών τιμών της μετοχής με βάση το διωνυμικό μοντέλο:



Υπολογίζουμε αρχικά τις πιθανότητες ουδέτερου ρίσκου:

$$\tilde{p} = \frac{1+0.1-0.8}{0.5} = 0.6\ ,\ \ \tilde{q} = 1-\tilde{p} = 0.4$$

Η αποτίμηση γίνεται αναδρομικά με τη χρήση της σχέσης (6.1.1) ξεκινώντας από την τελευταία περίοδο. Βρίσκουμε λοιπόν:

περίοδος 3:

$\upsilon_3(21.97) = 0$

$\upsilon_3(13.52) = 0$

$\upsilon_3(8.32) = 11 - 8.32 = 2.68$

$\upsilon_3(5.12) = 11 - 5.12 = 5.88$

περίοδος 2:

$$\upsilon_2(16.9) = \max\left\{0, \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_3(21.97) + \tilde{q}\,\upsilon_3(13.52)\right]\right\} = 0$$

$$\upsilon_2(10.4) = \max\left\{11-10.6, \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_3(13.52) + \tilde{q}\,\upsilon_3(8.32)\right]\right\} = \max\{0.4, 0.974545\}$$

$$= 0.974545$$

$$\upsilon_2(6{,}4)=\max\left\{11-6.4,\frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_3(8.32)+\tilde{q}\,\upsilon_3(5.12)\right]\right\}=\max\{4.6{,}3.6\}=4.6$$

περίοδος 1:

$$\upsilon_1(13)=\max\left\{0,\frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_2(16.9)+\tilde{q}\,\upsilon_2(10.4)\right]\right\}=\max\{0{,}0.35438\}=0.35438$$

$$\upsilon_1(8)=\max\left\{11-8,\frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_2(10.4)+\tilde{q}\,\upsilon_2(6.4)\right]\right\}=\max\{3{,}2.2043\}=3$$

Αξία Δικαιώματος:

$$\upsilon_0(10)=\max\left\{11-10,\frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_1(13)+\tilde{q}\,\upsilon_1(8)\right]\right\}=\max\{1{,}1.28421\}=1.28421\cong 1.28\,€$$

Να θυμίσουμε στο σημείο αυτό ότι η αξία του αντίστοιχου Δικαιώματος Ευρωπαϊκού τύπου που είχαμε υπολογίσει ήταν περίπου 0.86€, άρα το «προνόμιο» της πρόωρης εξάσκησης ανεβάζει σημαντικά την τιμή στη συγκεκριμένη περίπτωση (σχεδόν κατά 49%). Αυτό βέβαια δεν αποτελεί κανόνα διότι σε άλλες περιπτώσεις η διαφορά μπορεί να είναι ελάχιστη.

Ας δούμε τώρα πιο αναλυτικά πως πρέπει θεωρητικά να ενεργήσει ο κάτοχος του Δικαιώματος που εξετάζουμε. Ξεκινάει πληρώνοντας 1.28€ για να αποκτήσει το Δικαίωμα. Φυσικά δεν τον συμφέρει να το εξασκήσει αμέσως αφού το κέρδος που θα αποκομίσει θα είναι μόλις 1€. Στην περίπτωση που κατά την πρώτη περίοδο σημειωθεί άνοδος της τιμής της μετοχής, το Δικαίωμα είναι out-of-the-money οπότε πρέπει να περιμένει. Επίσης θα πρέπει να μην προχωρήσει σε εξάσκηση στη δεύτερη περίοδο σε κανένα από τα ενδεχόμενα *ΑΑ* και *ΑΠ*, αφού το αναμενόμενο κέρδος από τη μη εξάσκηση είναι μεγαλύτερο από το κέρδος της άμεσης εξάσκησης. Εάν κατά την πρώτη περίοδο σημειωθεί πτώση της τιμής της μετοχής, βλέπουμε ότι ισχύει ακριβώς το αντίθετο. Το κέρδος από την άμεση εξάσκηση είναι 3€ ενώ το αναμενόμενο κέρδος από τη μη εξάσκηση είναι 2.2043€. Άρα σε αυτήν την περίπτωση ο κάτοχος πρέπει να εξασκήσει το Δικαίωμα. Αν ωστόσο αποφασίσει ότι δεν θέλει να το εξασκήσει ακόμη, μια άλλη ευκαιρία για πρόωρη εξάσκηση υπάρχει εάν συμβεί το ενδεχόμενο *ΠΠ* μέχρι τη δεύτερη χρονική περίοδο. Τότε το κέρδος από την άμεση εξάσκηση είναι 4.6€ ενώ το αναμενόμενο κέρδος από τη μη εξάσκηση είναι 3.6€.

Στον πίνακα που ακολουθεί αντιπαραβάλλονται οι τιμές των u_n του συγκεκριμένου Δικαιώματος Αμερικανικού τύπου με το αντίστοιχο Ευρωπαϊκού τύπου:

u_i	**Αμερικανικού τύπου**	**Ευρωπαϊκού τύπου**
$u_3(21.97)$	0	0
$u_3(13.52)$	0	0
$u_3(8.32)$	2.68	2.68
$u_3(5.12)$	5.88	5.88
$u_2(16.9)$	0	0
$u_2(10.4)$	0.974545	0.974545
$\mathbf{u_2(6.4)}$	**4.6**	**3.6**
$u_1(13)$	0.35438	0.35438
$\mathbf{u_1(8)}$	**3**	**1.84066**
$\mathbf{u_0(10)}$	**1.28421**	**0.862629**

Πίνακας 6.1.1. Σύγκριση της αξίας Δικαιωμάτων Πώλησης Αμερικανικού και Ευρωπαϊκού τύπου με τα ίδια χαρακτηριστικά

Έχουν τονιστεί οι τιμές εκείνες για τις οποίες η εγγενής αξία του Δικαιώματος Αμερικανικού τύπου είναι μεγαλύτερη από αυτήν του συγκρίσιμου Ευρωπαϊκού. Παρατηρούμε ότι *από τη στιγμή που για κάποια τιμή της μετοχής γίνεται συμφέρουσα η εξάσκηση για τον κάτοχο* (εδώ συμβαίνει δύο φορές), *το Δικαίωμα αποκτά μεγαλύτερη αξία* (σε σχέση με το αντίστοιχο Ευρωπαϊκού τύπου). *Μάλιστα, όσο νωρίτερα δίνεται αυτή η δυνατότητα στον κάτοχο, τόσο περισσότερο αυξάνει η τιμή του Δικαιώματος, διότι το επιπλέον κέρδος που προκύπτει αποπληθωρίζεται σε μικρότερο βαθμό*.

Τι συμβαίνει όμως με την κατασκευή του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης; Το αρχικό κεφάλαιο είναι 1.28421 € από την πώληση του Δικαιώματος, ενώ πρέπει να πωληθούν:

$$\Delta_0 = \frac{\upsilon_1(13) - \upsilon_1(8)}{13 - 8} = -0.529124 \text{ μετοχής}$$

Με τον τρόπο αυτό, στην πρώτη χρονική περίοδο η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι είτε $X_1(A) = \upsilon_1(13)$, είτε $X_1(\Pi) = \upsilon_1(8)$, ανάλογα με το ενδεχόμενο που θα συμβεί. Εάν συμβεί άνοδος της τιμής της μετοχής, τότε έχουμε $X_1(A) = 0.35438$, το Δικαίωμα είναι out-of-the-money οπότε δεν εξασκείται και σύμφωνα πάλι με τη σχέση (6.1.2) πρέπει να πωληθούν $\Delta_1(A) = -0.14993$ μετοχής. Στην περίπτωση που το πρώτο ενδεχόμενο είναι πτώση της τιμής της μετοχής, το χαρτοφυλάκιο έχει αξία $X_1(\Pi) = 3$. Αν ο κάτοχος αποφασίσει να εξασκήσει το Δικαίωμα, ο πωλητής του παραδίδει τα 3€ που είναι η αξία του χαρτοφυλακίου και δεν χρειάζεται να συνεχιστεί η στρατηγική εξασφάλισης. Αντίθετα, αν ο κάτοχος δεν εξασκήσει το Δικαίωμα η στρατηγική εξασφάλισης συνεχίζεται κανονικά. Πιο συγκεκριμένα, για να είναι καλυμμένος ο πωλητής του Δικαιώματος πρέπει τη χρονική στιγμή ένα –με δεδομένο ότι έχει σημειωθεί πτώση– η αξία του χαρτοφυλακίου να ισούται με:

$$\frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_2(10.4)+\tilde{q}\,\upsilon_2(6.4)\right]=2.2043.$$

Όμως ήδη είπαμε ότι η αξία του χαρτοφυλακίου είναι 3. Συνεπώς, ο πωλητής έχει την ευχέρεια να ξοδέψει (καταναλώσει - consume) 3 – 2.2043 = 0.7957€ και να συνεχίσει τη στρατηγική εξασφάλισης με τα υπόλοιπα 2.2043€, όπου θα πρέπει να πωλήσει $\Delta_1(\Pi) = -0.906364$ μετοχής. Είναι φανερό μέσα από τα παραπάνω, ότι αν ο κάτοχος του Δικαιώματος δεν το εξασκήσει στην περίπτωση που συμβεί πτώση κατά την πρώτη περίοδο, έχει αφήσει ανεκμετάλλευτο έναν βέλτιστο χρόνο εξάσκησης. Αυτό δίνει την ευκαιρία στον πωλητή του Δικαιώματος να αποκομίσει κέρδος. Δεν θα αναφερθούμε αναλυτικά στο τι συμβαίνει για τις υπόλοιπες χρονικές περιόδους και τιμές της μετοχής, αφού η λογική είναι ακριβώς η ίδια. □

Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι προεξοφλημένες αξίες ενός Δικαιώματος Πώλησης Αμερικανικού τύπου, δηλαδή η στοχαστική διαδικασία $(1+r)^{-n}\upsilon_n(s)$ για $n = 0, 1,\ldots, N$. Από τα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος έχουμε:

$$\upsilon_0(10) = 1.28421$$

$$\frac{1}{1+r}\upsilon_1(13) = 0.322164 \qquad \frac{1}{1+r}\upsilon_1(8) = 2.72727$$

$$\left(\frac{1}{1+r}\right)^2\upsilon_2(16.9) = 0 \qquad \left(\frac{1}{1+r}\right)^2\upsilon_2(10.4) = 0.805409 \qquad \left(\frac{1}{1+r}\right)^2\upsilon_2(6.4) = 3.80165$$

$$\left(\frac{1}{1+r}\right)^3\upsilon_3(21.97) = 0 \qquad \left(\frac{1}{1+r}\right)^3\upsilon_3(13.52) = 0$$

$$\left(\frac{1}{1+r}\right)^3\upsilon_3(8.32) = 2.01352 \qquad \left(\frac{1}{1+r}\right)^3\upsilon_3(5.12) = 4.41773$$

Η διαδικασία αυτή είναι supermartingale υπό το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου και όχι martingale όπως ισχύει για τα Ευρωπαϊκού τύπου Δικαιώματα. Σε κάθε δυνατή θέση, η αξία του Δικαιώματος είναι μεγαλύτερη ή ίση από τον σταθμισμένο μέσο (με βάρη τις πιθανότητες ουδέτερου ρίσκου $\widetilde{p}$ και $\widetilde{q}$) των δύο διαδοχικών θέσεων. Η διαδικασία δεν είναι martingale διότι η ανισότητα ισχύει αυστηρά σε δύο περιπτώσεις. Στη χρονική στιγμή ένα για τιμή μετοχής 8, ισχύει $2.72727 > 0.6 \cdot 0.805409 + 0.4 \cdot 3.80165 = 2.00391$ και στη χρονική στιγμή δύο για τιμή μετοχής 6.4, ισχύει $3.80165 > 0.6 \cdot 2.01352 + 0.4 \cdot 4.41773 = 2.9752$.

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω και με βάση όσα γνωρίζουμε για τα martingales και τους χρόνους διακοπής, εάν η διαδικασία των προεξοφλημένων αξιών ενός Δικαιώματος Αμερικανικού τύπου διακοπεί σε έναν βέλτιστο χρόνο εξάσκησης, η διαδικασία που προκύπτει είναι martingale (αλλά και supermartingale λόγω της ανισο-ισότητας). *Αν ο κάτοχος του Δικαιώματος αφήσει να περάσει ένας χρόνος στον οποίο η ανισότητα του supermartingale ισχύει αυστηρά, τότε έχει αποτύχει να εξασκήσει βέλτιστα.* Αυτή είναι η λογική με βάση την οποία τιμολογούνται τα Αμερικανικού τύπου Δικαιώματα.

6.2 Δικαιώματα Προαίρεσης Αμερικανικού τύπου των οποίων η αξία εξαρτάται από τη διαδρομή της τιμής της μετοχής

Ό,τι ειπωθεί στην παράγραφο αυτή ισχύει γενικά για τα Αμερικανικού τύπου παράγωγα είτε αυτά είναι path-depended είτε non-path-depended. Το γεγονός ότι στην περίπτωση των path-depended Δικαιωμάτων μας ενδιαφέρει η διαδρομή που έκανε η τιμή της μετοχής για να καταλήξει σε μια συγκεκριμένη θέση στο διωνυμικό μοντέλο, περιπλέκει αρκετά την κατάσταση. Προκειμένου να αποτιμηθούν τέτοιου είδους Δικαιώματα ντετερμινιστικά, χρειάζεται να υπολογισθούν όλες οι δυνατές διαδρομές της τιμής της μετοχής, κάτι που είναι ιδιαίτερα επίπονο είτε γίνεται με το χέρι, είτε μέσω προγραμματισμού σε ηλεκτρονικό υπολογιστή. Στην ανάλυσή μας θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι στοιχεία από τη θεωρία των martingales και των χρόνων διακοπής, τα οποία είναι άκρως απαραίτητα ώστε να θεμελιωθεί η μεθοδολογία της αποτίμησης στα Δικαιώματα αυτά.

Ένα πρώτο στοιχείο που πρέπει να σημειώσουμε είναι ότι η χρήση του συμβολισμού $v_n(s)$ δεν ενδείκνυται στην περίπτωση των path-depended Δικαιωμάτων, διότι σε κάθε περίοδο n δεν μας ενδιαφέρει η αξία του Δικαιώματος μόνο για δεδομένη τιμή της μετοχής. Το ζητούμενο πλέον είναι η εύρεση της αξίας του Δικαιώματος για κάθε ακολουθία ενδεχομένων ανόδου και πτώσης της τιμής της μετοχής. Επομένως πρέπει να υπολογίζονται τα V_n. Λόγου χάριν στο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου, στη δεύτερη περίοδο η τιμή της μετοχής μπορούσε να πάρει την τιμή 10.4 αν είχε συμβεί ένα από τα ενδεχόμενα *ΑΠ* και *ΠΑ*. Στα non-path-depended Δικαιώματα δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία συμβαίνουν τα ενδεχόμενα. Αυτό δεν ισχύει στα path-depended Δικαιώματα όπου το $V_2(ΑΠ)$ μπορεί να είναι διαφορετικό από το $V_2(ΠΑ)$. Ωστόσο, ανάλογα με τον τρόπο που καθορίζεται η τιμή εξάσκησης (Lookback, Asian, κλπ) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $\upsilon_n(s,y)$, με το y να καθορίζεται από τον τύπο του Δικαιώματος. Θα επανέλθουμε στο θέμα των συμβολισμών αφού δοθεί πρώτα το θεωρητικό υπόβαθρο για τα path-depended Δικαιώματα.

Θα χρησιμοποιήσουμε το γνώριμο πια πλαίσιο του διωνυμικού μοντέλου N περιόδων με ανοδικό παράγοντα u, καθοδικό παράγοντα d και επιτόκιο r τέτοιο ώστε να ισχύει η συνθήκη $0 < d < 1 + r < u$. Ορίζουμε το S_n ως το σύνολο όλων των χρόνων διακοπής τ που παίρνουν τιμές στο σύνολο $\{n, n + 1,\ldots, N, \infty\}$. Το S_0 περιέχει όλους τους δυνατούς χρόνους διακοπής, ενώ το S_N μπορεί να πάρει μόνο την τιμή N σε κάποιες διαδρομές (*paths*) και την τιμή ∞ στις υπόλοιπες.

Ορισμός 6.2.1. *Έστω G_n μια τυχαία μεταβλητή που συμβολίζει την εγγενή αξία ενός Δικαιώματος Προαίρεσης Αμερικανικού τύπου και εξαρτάται από τα πρώτα n ενδεχόμενα. Το Δικαίωμα μπορεί να εξασκηθεί σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή ή στην τελική περίοδο N και αν εξασκηθεί στον χρόνο n, αποδίδει κέρδος G_n. Η διαδικασία αποτίμησης Αμερικανικού τύπου υπό το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου (American risk-neutral pricing formula) ορίζεται από τη σχέση*:

$$V_n = \max_{\tau \in S_n} \widetilde{E}_n\left[I_{\{\tau \le N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau - n}} G_\tau \right], \; n = 0, 1,\ldots, N \tag{6.2.1}$$

Ο όρος $I_{\{\tau \le N\}}$ εξασφαλίζει ότι η ποσότητα μέσα στις αγκύλες ισούται με μηδέν για τις διαδρομές εκείνες όπου $\tau = \infty$. Σε κάθε περίοδο n, ο κάτοχος του Δικαιώματος μπορεί να αποφασίσει να το εξασκήσει ή να περιμένει. Η χρονική στιγμή στην οποία θα γίνει η εξάσκηση, εάν τελικώς γίνει, μπορεί να εξαρτάται μόνο από τη διαδρομή της τιμής της μετοχής μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή και όχι από μελλοντικές κινήσεις της. Με άλλα λόγια, ο χρόνος εξάσκησης μπορεί να χαρακτηριστεί ως χρόνος διακοπής τ. Εάν η εξάσκηση δεν γίνει μέχρι τη χρονική στιγμή n, ο χρόνος διακοπής πρέπει να περιλαμβάνεται στο S_n. Όταν ο κάτοχος εξασκεί το Δικαίωμα σύμφωνα με έναν χρόνο διακοπής $\tau \in S_n$, η αξία του παραγώγου ισούται με το προεξοφλημένο αναμενόμενο κέρδος από την εξάσκηση. Το κέρδος αυτό μεγιστοποιείται επειδή ακριβώς ο τ είναι χρόνος διακοπής.

Στην τελευταία χρονική περίοδο N, η σχέση (6.2.1) γίνεται:

$$V_N = \sup_{\tau \in S_N} I_{\{\tau \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau - N}} G_\tau$$

Ένας χρόνος διακοπής στο S_N παίρνει μόνο τις τιμές N και ∞, συνεπώς ισχύει:

$$I_{\{\tau \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau - N}} G_\tau = I_{\{\tau = N\}} G_N$$

Για να μεγιστοποιηθεί η τελευταία σχέση πρέπει ο χρόνος διακοπής τ να πάρει την τιμή N μόνο στις περιπτώσεις όπου $G_N(x_1,\ldots,x_N) > 0$ και ∞ παντού αλλού. Με x_n συμβολίζεται το ενδεχόμενο (άνοδος ή πτώση της τιμής της μετοχής) που συνέβη την περίοδο n. Έτσι έχουμε ότι $I_{\{\tau = N\}} G_N = \max\{G_N, 0\}$ και τελικά για την περίοδο N ισχύει:

$$V_N \geq \max\{G_N, 0\}.$$

Θεώρημα 6.2.1: *Η διαδικασία αποτίμησης Δικαιωμάτων Προαίρεσης Αμερικανικού τύπου όπως προσδιορίστηκε από τον Ορισμό* 6.2.1*, έχει τις εξής ιδιότητες*:

(α) $V_n \geq \max\{G_n, 0\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$.

(β) *Η διαδικασία των προεξοφλημένων* V_n*, δηλαδή η* $\{(1+r)^{-n} V_n\}$ *είναι supermartingale.*

(γ) *Έστω* $\{Y_n\}$ *μια στοχαστική διαδικασία που ικανοποιεί τη σχέση* $Y_n \geq \max\{G_n, 0\}$ *για κάθε* n *και για την οποία ισχύει ότι η* $\{(1+r)^{-n} Y_n\}$ *είναι supermartingale. Τότε ισχύει* $Y_n \geq V_n$ *για όλα τα* n*. Με άλλα λόγια, η* $\{V_n\}$ *είναι η μικρότερη δυνατή διαδικασία που ικανοποιεί τις ιδιότητες* (α) *και* (β).

Οι ιδιότητες (α) και (β) διασφαλίζουν ότι η τιμή του Δικαιώματος είναι αποδεκτή για τον πωλητή. Η ιδιότητα (γ) διασφαλίζει ότι η τιμή δεν είναι μεγαλύτερη από όσο χρειάζεται και έτσι είναι δίκαιη για τον αγοραστή. Πιο συγκεκριμένα, με βάση την πρώτη ιδιότητα ο πωλητής είναι καλυμμένος έναντι των απαιτήσεων του κατόχου, όποτε και αν αυτός αποφασίσει να εξασκήσει το Δικαίωμα, ενώ σύμφωνα με τη δεύτερη ιδιότητα μπορεί να κατασκευαστεί ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης με αρχικό κεφάλαιο V_0, του οποίου η αξία σε κάθε χρονική στιγμή είναι V_n. Ακολουθούν οι αποδείξεις των παραπάνω ιδιοτήτων.

Απόδειξη (α). Για δοθέν n, έστω $\hat{\tau}$ ο χρόνος διακοπής στο S_n, που παίρνει την τιμή n ανεξάρτητα από την ακολουθία ενδεχομένων που συμβαίνουν. Τότε:

$$\widetilde{E}_n\left[I_{\{\hat{\tau}\le N\}}\frac{1}{(1+r)^{\hat{\tau}-n}}G_{\hat{\tau}}\right]=G_n\,.$$

Η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παραπάνω ποσότητα για $\hat{\tau}=\tau$, $\tau\in S_n$, είναι το V_n. Άρα πρέπει να έχουμε $V_n \ge G_n$. Αν θεωρήσουμε τον χρόνο διακοπής $\bar{\tau}$ στο S_n που παίρνει την τιμή ∞ ανεξάρτητα από την ακολουθία των ενδεχομένων που συμβαίνουν, τότε:

$$\widetilde{E}_n\left[I_{\{\bar{\tau}\le N\}}\frac{1}{(1+r)^{\bar{\tau}-n}}G_{\bar{\tau}}\right]=0\,.$$

Και πάλι, αφού το V_n είναι το μέγιστο της ποσότητας αυτής, ισχύει $V_n \ge 0$, συνεπώς η ιδιότητα (α) είναι αληθής.

(β). Για δοθέν n, έστω ο χρόνος διακοπής $\tau^*\in S_{n+1}$ ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση:

$$V_{n+1}=\max_{\tau\in S_{n+1}}\widetilde{E}_{n+1}\left[I_{\{\tau\le N\}}\frac{1}{(1+r)^{\tau-n-1}}G_\tau\right]=\widetilde{E}_{n+1}\left[I_{\{\tau^*\le N\}}\frac{1}{(1+r)^{\tau^*-n-1}}G_{\tau^*}\right]$$

Αφού ο τ^* ανήκει στο S_{n+1}, σίγουρα ανήκει και στο S_n. Έτσι έχουμε[2]:

$$\begin{aligned}
V_n &\ge \widetilde{E}_n\left[I_{\{\tau^*\le N\}}\frac{1}{(1+r)^{\tau^*-n}}G_{\tau^*}\right]\\
&=\widetilde{E}_n\left[\widetilde{E}_{n+1}\left[I_{\{\tau^*\le N\}}\frac{1}{(1+r)^{\tau^*-n}}G_{\tau^*}\right]\right]\\
&=\widetilde{E}_n\left[\frac{1}{1+r}\widetilde{E}_{n+1}\left[I_{\{\tau^*\le N\}}\frac{1}{(1+r)^{\tau^*-n-1}}G_{\tau^*}\right]\right]\\
&=\widetilde{E}_n\left[\frac{1}{1+r}V_{n+1}\right].
\end{aligned}$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με $(1+r)^n$, προκύπτει η ιδιότητα του supermartingale για τη διαδικασία των προεξοφλημένων V_n:

[2] Θα χρησιμοποιηθούν ιδιότητες δεσμευμένων μέσων τιμών, όπως η γνωστή *tower property*.

$$\frac{1}{(1+r)^n} V_n \geq \widetilde{E}_n\left[\frac{1}{(1+r)^{n+1}} V_{n+1}\right].$$

(γ). Έστω Y_n μια διαδικασία η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες (α) και (β). Για δοθέν $n \leq N$, έστω τ ένας χρόνος διακοπής στο S_n. Επειδή ισχύει $Y_k \geq \max\{G_k, 0\}$ για όλα τα k, έχουμε:

$$\begin{aligned} I_{\{\tau\leq N\}} G_\tau &\leq I_{\{\tau\leq N\}} \max\{G_\tau, 0\} \\ &\leq I_{\{\tau\leq N\}} \max\{G_{N\wedge\tau}, 0\} + I_{\{\tau=\infty\}} \max\{G_{N\wedge\tau}, 0\} \\ &= \max\{G_{N\wedge\tau}, 0\} \\ &\leq Y_{N\wedge\tau} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.2.1 της Προαιρετικής Δειγματοληψίας, αλλά και το γεγονός ότι η διαδικασία $(1+r)^{-k} Y_k$ είναι supermartingale, έχουμε:

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_n\left[I_{\{\tau\leq N\}} \frac{1}{(1+r)^\tau} G_\tau\right] &= \widetilde{E}_n\left[I_{\{\tau\leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{N\wedge\tau}} G_\tau\right] \\ &\leq \widetilde{E}_n\left[\frac{1}{(1+r)^{N\wedge\tau}} Y_{N\wedge\tau}\right] \\ &\leq \frac{1}{(1+r)^{n\wedge\tau}} Y_{n\wedge\tau} \\ &= \frac{1}{(1+r)^n} Y_n. \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα είναι άμεση συνέπεια του ότι ο χρόνος διακοπής τ είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το n για κάθε δυνατή διαδρομή. Πολλαπλασιάζοντας με $(1 + r)^n$ παίρνουμε:

$$\widetilde{E}_n\left[I_{\{\tau\leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau-n}} G_\tau\right] \leq Y_n.$$

Το V_n είναι η μέγιστη τιμή που μπορούμε να έχουμε για το πρώτο μέλος της σχέσης αυτής, δεδομένου ότι $\tau \in S_n$. Άρα τελικά ισχύει $V_n \leq Y_n$. □

Θεώρημα 6.2.2. *Ο αναδρομικός τύπος αποτίμησης για τα Δικαιώματα Προαίρεσης Αμερικανικού τύπου που εξαρτώνται από τη διαδρομή της τιμής της μετοχής, είναι ο ακόλουθος:*

$$V_N(x_1 \ldots x_N) = \max\{G_N(x_1 \ldots x_N), 0\}$$

$$V_n(x_1...x_n) = \max\left\{G_n(x_1...x_n), \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_{n+1}(x_1...x_n A) + \tilde{q}V_{n+1}(x_1...x_n \Pi)\right]\right\},\ n = N-1,\dots,0 \quad (6.2.2)$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η διαδικασία V_n που προκύπτει από τη σχέση (6.2.2) ικανοποιεί και τις τρεις ιδιότητες του Θεωρήματος 6.2.1. Είναι εύκολα φανερό ότι για $n = N$, η ιδιότητα (α) ικανοποιείται. Θα αποδείξουμε την (α) επαγωγικά ξεκινώντας από το N προς το 0. Έστω ότι για κάποιο $n = N-1,\dots,0$ ισχύει $V_{n+1} \geq \max\{G_{n+1}, 0\}$. Από την (6.2.2) θα έχουμε επίσης ότι:

$$V_n(x_1\dots x_n) \geq \max\{G_n(x_1\dots x_n), 0\}$$

και από την τελευταία σχέση προκύπτει επαγωγικά ότι ικανοποιείται η ιδιότητα (α) για όλα τα n. Για τη δεύτερη ιδιότητα, από τη σχέση (6.2.2) παίρνουμε:

$$V_n(x_1...x_n) \geq \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_{n+1}(x_1...x_n A) + \tilde{q}V_{n+1}(x_1...x_n \Pi)\right] = \tilde{E}_n\left[\frac{1}{1+r}V_{n+1}\right](x_1...x_n)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $(1+r)^{-n}$ προκύπτει η ιδιότητα του supermartingale και άρα ικανοποιείται η ιδιότητα (β). Τέλος, για την τρίτη ιδιότητα, παρατηρούμε αρχικά ότι η V_N είναι η μικρότερη τυχαία μεταβλητή που ικανοποιεί τη σχέση $V_N \geq \max\{G_N, 0\}$ (διότι από την πρώτη σχέση του Θεωρήματος, ορίζεται ως ισότητα). Έστω ότι για κάποιο $n = N-1$, ,…, 0, η V_{n+1} είναι η μικρότερη δυνατή. Η V_n πρέπει να ικανοποιεί την προηγούμενη ανισότητα για να είναι supermartingale, αλλά και να είναι μεγαλύτερη ή ίση από την G_n. Έτσι, μέσω των ιδιοτήτων (α) και (β) προκύπτει:

$$V_n(x_1...x_n) \geq \max\left\{G_n(x_1...x_n), \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_{n+1}(x_1...x_n A) + \tilde{q}V_{n+1}(x_1...x_n \Pi)\right]\right\},\ n = N-1,\dots,0$$

Όμως η σχέση (6.2.2) ορίζει ότι η $V_n(x_1\dots x_n)$ είναι ακριβώς ίση με το δεύτερο μέλος της τελευταίας σχέσης. Επομένως, η $V_n(x_1\dots x_n)$ είναι η ελάχιστη δυνατή. □

Θεώρημα 6.2.3. *Το χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης στα Δικαιώματα Προαίρεσης Αμερικανικού τύπου που η τιμή τους εξαρτάται από τη διαδρομή της τιμής της μετοχής, κατασκευάζεται μέσω των ποσοτήτων*:

$$\Delta_n(x_1...x_n) = \frac{V_{n+1}(x_1...x_n A) - V_{n+1}(x_1...x_n \Pi)}{S_{n+1}(x_1...x_n A) - S_{n+1}(x_1...x_n \Pi)},\ n = 0, 1,\dots, N-1 \quad (6.2.3)$$

$$C_n(x_1...x_n) = V_n(x_1...x_n) - \frac{1}{1+r}\left[\widetilde{p}V_{n+1}(x_1...x_n A) + \widetilde{q}V_{n+1}(x_1...x_n \Pi)\right], \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - C_n - \Delta_n S_n), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (6.2.4)$$

με $C_n \geq 0$, *ενώ αρχικά θέτουμε* $X_0 = V_0$. *Όπου* Δ_n *το πλήθος των μετοχών που πρέπει να περιέχει το χαρτοφυλάκιο,* C_n *η κατανάλωση (consumption) και* X_n *η αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή* n. *Έτσι, ισχύει:*

$$X_n(x_1 \ldots x_n) = V_n(x_1 \ldots x_n), \quad n = 0, 1, \ldots, N \qquad (6.2.5)$$

για κάθε $x_1 \ldots x_n$. *Ιδιαίτερα, ισχύει ότι* $X_n \geq G_n$ *για κάθε* n.

Απόδειξη. Από την ιδιότητα (β) του Θεωρήματος 6.2.1 προκύπτει ότι το C_n δεν μπορεί να είναι αρνητικό. Για να αποδείξουμε την (6.2.5) δουλεύουμε επαγωγικά. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $X_n(x_1 \ldots x_n) = V_n(x_1 \ldots x_n)$ για κάποιο $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ και αρκεί να δείξουμε ότι:

$$X_{n+1}(x_1 \ldots x_n A) = V_{n+1}(x_1 \ldots x_n A) \qquad (6.2.6)$$

$$X_{n+1}(x_1 \ldots x_n \Pi) = V_{n+1}(x_1 \ldots x_n \Pi) \qquad (6.2.7)$$

Θα αποδείξουμε μόνο την (6.2.6) αφού η απόδειξη της (6.2.7) είναι ανάλογη. Μπορούμε να γράψουμε:

$$V_n(x_1...x_n) - C_n(x_1...x_n) = \frac{1}{1+r}\left[\widetilde{p}V_{n+1}(x_1...x_n A) + \widetilde{q}V_{n+1}(x_1...x_n \Pi)\right].$$

Δεδομένου ότι η ακολουθία των ενδεχομένων $x_1 \ldots x_n$ παραμένει σταθερή, θα απαλείψουμε τον συμβολισμό αυτό από τη συνέχεια της απόδειξης ώστε αυτή να είναι πιο ευανάγνωστη. Έτσι η τελευταία σχέση γράφεται ως εξής:

$$V_n - C_n = \frac{1}{1+r}\left[\widetilde{p}V_{n+1}(A) + \widetilde{q}V_{n+1}(\Pi)\right]$$

Υπολογίζουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned}
X_{n+1}(A) &= \Delta_n S_{n+1}(A) + (1+r)(X_n - C_n - \Delta_n S_n) \\
&= \frac{V_{n+1}(A) - V_{n+1}(\Pi)}{S_{n+1}(A) - S_{n+1}(\Pi)}\left[S_{n+1}(A) - (1+r)S_n\right] + (1+r)(V_n - S_n) \\
&= \frac{V_{n+1}(A) - V_{n+1}(\Pi)}{(u-d)S_n}\left[uS_n - (1+r)S_n\right] + \widetilde{p}V_{n+1}(A) + \widetilde{q}V_{n+1}(\Pi)
\end{aligned}$$

$$= \left[V_{n+1}(A) - V_{n+1}(\Pi)\right]\frac{u-1-r}{u-d} + \tilde{p}V_{n+1}(A) + \tilde{q}V_{n+1}(\Pi)$$

$$= \left[V_{n+1}(A) - V_{n+1}(\Pi)\right]\tilde{q} + \tilde{p}V_{n+1}(A) + \tilde{q}V_{n+1}(\Pi)$$

$$= (\tilde{p} + \tilde{q})V_{n+1}(A)$$

$$= V_{n+1}(A)$$

Δείξαμε ότι ισχύει η σχέση (6.2.6), ενώ ο ισχυρισμός ότι $X_n \geq G_n$ για κάθε n προκύπτει από την ιδιότητα (α) του Θεωρήματος 6.2.1 για τη διαδικασία αποτίμησης Δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου. □

Το Θεώρημα 6.2.3 εξασφαλίζει ότι η τιμή που θα έχει το Δικαίωμα σύμφωνα με τη σχέση 6.2.1, θα είναι αποδεκτή από τον πωλητή διότι μπορεί με το ποσό που θα εισπράξει από την πώληση του Δικαιώματος να κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης. Πρέπει τώρα να δείξουμε ότι η τιμή αυτή θα είναι “δίκαιη” και για τον αγοραστή του Δικαιώματος. Έστω ότι φθάνουμε στη χρονική στιγμή n και το Δικαίωμα δεν έχει εξασκηθεί. Έστω επίσης ότι ο χρόνος διακοπής $\tau^* \in S_n$ επιτυγχάνει το μέγιστο στη σχέση 6.2.1, δηλαδή:

$$V_n = \tilde{E}_n\left[I_{\{\tau^* \leq N\}}\frac{1}{(1+r)^{\tau^*-n}}G_{\tau^*}\right].$$

Για $k = n, n+1, \dots, N$, ορίζουμε:

$$C_k = I_{\{\tau^* = k\}}G_k\,.$$

Εάν ο κάτοχος του Δικαιώματος το εξασκήσει σύμφωνα με τον χρόνο διακοπής τ^*, τότε θα εισπράξει $C_n, C_{n+1}, \dots, C_N$ στις χρονικές στιγμές $n, n+1, \dots, N$, αντίστοιχα. Υπάρχει το πολύ ένα C_k που να μην είναι μηδενικό. Αν το Δικαίωμα εξασκηθεί πριν τον χρόνο λήξης N, το αντίστοιχο C_k είναι το μόνο θετικό στην ακολουθία των C_i. Για κάθε δυνατή διαδρομή της τιμής της μετοχής, το θετικό C_k πιθανότατα θα προκύψει σε διαφορετική χρονική στιγμή. Σε κάθε περίπτωση όμως θα ισχύει:

$$V_n = \tilde{E}_n\left[\sum_{k=n}^{N} I_{\{\tau^*=k\}}\frac{1}{(1+r)^{k-n}}G_k\right] = \tilde{E}_n\left[\sum_{k=n}^{N}\frac{C_k}{(1+r)^{k=n}}\right]$$

Δηλαδή, η αξία του Δικαιώματος στον χρόνο n ισούται με την αναμενόμενη αξία των C_n, $C_{n+1}, \dots, C_N$, που εισπράττονται τις χρονικές στιγμές $n, n+1, \dots, N$, αντίστοιχα. Επομένως, εάν ο κάτοχος του Δικαιώματος το εξασκήσει σύμφωνα με τον χρόνο διακοπής τ^*, η τιμή του Δικαιώματος με βάση τη σχέση 6.2.1 είναι αποδεκτή για αυτόν.

Αυτό που μένει πλέον να δείξουμε είναι ο τρόπος με τον οποίο πρέπει θεωρητικά να εξασκήσει ένα Δικαίωμα Αμερικανικού τύπου ο κάτοχός του. Η λογική είναι η ίδια με αυτήν που ισχύει στα non-path-depended Δικαιώματα και που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο. Εδώ θεμελιώνεται και η μαθηματική της απόδειξη.

Θεώρημα 6.2.4. *Έστω* τ^* *ένας χρόνος διακοπής στο* S_0 *για τον οποίο ισχύει*:

$$\tau^* = \min\{n;\ V_n = G_n\} \tag{6.2.8}$$

Τότε ο τ^* *μεγιστοποιεί το δεξιό μέλος της σχέσης* (6.2.1) *για* $n = 0$, *δηλαδή*:

$$V_0 = \widetilde{E}\left[I_{\{\tau^* \le N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau^*}} G_{\tau^*} \right] \tag{6.2.9}$$

Όπως γνωρίζουμε, η αξία ενός Δικαιώματος Αμερικανικού τύπου είναι πάντοτε ίση ή μεγαλύτερη από το κέρδος της άμεσης εξάσκησής του, με άλλα λόγια την εγγενή του αξία. Ο χρόνος διακοπής τ^* της σχέσης (6.2.8) εκφράζει την πρώτη χρονική στιγμή κατά την οποία ισχύει η ισότητα, εάν βέβαια συμβεί κάτι τέτοιο.

Απόδειξη. Από τη σχέση (6.2.2) προκύπτει ότι η διακοπείσα διαδικασία

$$\frac{1}{(1+r)^{n\wedge\tau^*}} V_{n\wedge\tau^*} \tag{6.2.10}$$

είναι martingale κάτω από το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου. Πράγματι, αν συμβεί η ακολουθία των ενδεχομένων $x_1 \ldots x_n$ και $\tau^* \ge n + 1$, τότε γνωρίζουμε ότι $V_n(x_1 \ldots x_n) > G_n(x_1 \ldots x_n)$ και από την (6.2.2) έχουμε:

$$\begin{aligned} V_{n\wedge\tau^*}(x_1 \ldots x_n) &= V_n(x_1 \ldots x_n) \\ &= \frac{1}{1+r}\left[\widetilde{p} V_{n+1}(x_1 \ldots x_n A) + \widetilde{q} V_{n+1}(x_1 \ldots x_n \Pi)\right] \\ &= \frac{1}{1+r}\left[\widetilde{p} V_{(n+1)\wedge\tau^*}(x_1 \ldots x_n A) + \widetilde{q} V_{(n+1)\wedge\tau^*}(x_1 \ldots x_n \Pi)\right] \end{aligned}$$

Ενώ αν συμβεί η ακολουθία των ενδεχομένων $x_1 \ldots x_n$ και $\tau^* \le n$, τότε έχουμε:

$$V_{n\wedge\tau^*}(x_1 \ldots x_n) = V_{\tau^*}(x_1 \ldots x_{\tau^*})$$

$$= \widetilde{p} V_{\tau^*}\left(x_1 \dots x_{\tau^*}\right) + \widetilde{q} V_{\tau^*}\left(x_1 \dots x_{\tau^*}\right)$$

$$= \widetilde{p} V_{(n+1)\wedge\tau^*}\left(x_1 \dots x_n A\right) + \widetilde{q} V_{(n+1)\wedge\tau^*}\left(x_1 \dots x_n \Pi\right)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι και στις δύο περιπτώσεις η διαδικασία που προκύπτει είναι martingale. Αφού η διακοπείσα διαδικασία της σχέσης (6.2.10) είναι martingale, έχουμε:

$$V_0 = \widetilde{E}\left[\frac{1}{(1+r)^{N\wedge\tau^*}} V_{N\wedge\tau^*}\right] = \widetilde{E}\left[I_{\{\tau^* \le N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau^*}} G_{\tau^*}\right] + \widetilde{E}\left[I_{\{\tau^* = \infty\}} \frac{1}{(1+r)^{N}} V_N\right] \quad (6.2.11)$$

Όμως για τις διαδρομές εκείνες όπου $\tau^* = \infty$ πρέπει να ισχύει $V_n > G_n$ και ειδικότερα $V_N > G_N$. Το τελευταίο μπορεί να συμβεί μόνο στην περίπτωση όπου $G_N < 0$ και $V_N = 0$. Επομένως $I_{\{\tau^* = \infty\}} V_N = 0$ και η σχέση (6.2.11) γίνεται:

$$V_0 = \widetilde{E}\left[I_{\{\tau^* \le N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau^*}} G_{\tau^*}\right] \qquad \square$$

Είναι φανερό ότι τα Δικαιώματα Αμερικανικού τύπου των οποίων η αξία εξαρτάται από τη διαδρομή της τιμής της μετοχής, χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής κατά την αποτίμησή τους αφού η μορφή τους μπορεί να είναι αρκετά σύνθετη. Θα εξετάσουμε τον τρόπο αντιμετώπισης τέτοιου είδους Δικαιωμάτων με τη χρήση του διωνυμικού μοντέλου μέσα από δύο παραδείγματα. Το πρώτο θα αναφέρεται σε Lookback option και το δεύτερο σε Asian option. Θα πάρουμε τα δεδομένα για τις πιθανές τιμές της μετοχής από το παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου, ώστε να μην χρειάζεται νέο σχήμα κάθε φορά.

Παράδειγμα (*Lookback–American put option*)**.** Έστω ένα Lookback Δικαίωμα Πώλησης Αμερικανικού τύπου. Η παρούσα τιμή της μετοχής είναι S_0 = 10€, τα u και d είναι 1.3 και 0.8 αντίστοιχα και το επιτόκιο είναι 10%. Η εξάσκηση μπορεί να γίνει σε οποιαδήποτε περίοδο, ενώ η τιμή εξάσκησης ορίζεται ως η μέγιστη τιμή που έχει πάρει η μετοχή μέχρι την εκάστοτε χρονική στιγμή. Το ζητούμενο είναι η αξία του Δικαιώματος.

Το πρόβλημα λύνεται αναδρομικά με τη χρήση της σχέσης (6.2.2). Ωστόσο θα εισάγουμε σε αυτό το σημείο έναν νέο συμβολισμό ο οποίος βοηθά σημαντικά στο «συμμάζεμα» των πράξεων και μας δίνει τη δυνατότητα να απαλλαγούμε από τη διαρκή αναγραφή της ακολουθίας των ενδεχομένων που εξετάζουμε κάθε φορά. Το τελευταίο αποτελεί μεγάλο πλεονέκτημα ιδίως όταν χρησιμοποιούνται πολλές περίοδοι στο μοντέλο.

Η λογική του νέου συμβολισμού στηρίζεται στο γεγονός ότι εκτός από την περίοδο και την τιμή της μετοχής οπού βρισκόμαστε, πρέπει να δηλώνεται και μια ακόμη μεταβλητή η οποία θα εξαρτάται από τον τύπο του path-depended Δικαιώματος. Έτσι, θα συμβολίζουμε $\upsilon_n(s,y)$ την αξία του Δικαιώματος τη χρονική στιγμή n, για τιμή μετοχής s και μεταβλητή y που εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολούθησε η μετοχή ώστε να καταλήξει στην τιμή s. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται υπολογισμός όλων των δυνατών διαδρομών, δηλαδή το διωνυμικό μοντέλο δεν έχει την κλασσική μορφή που δείξαμε στο κεφάλαιο παρουσίασής του. Πλέον, δεν υπάρχει ταύτιση των τιμών της ίδιας περιόδου διότι αυτές προέρχονται από διαφορετική διαδρομή. Έτσι, σε κάθε περίοδο οι πιθανές τιμές της μετοχής είναι διπλάσιες από την προηγούμενη περίοδο, και όχι μόνο μια περισσότερη όπως συμβαίνει στα non-path-depended Δικαιώματα. Δηλαδή σε κάθε περίοδο n υπάρχουν 2^n πιθανές τιμές της μετοχής και όχι $n + 1$.

Προκειμένου να λύσουμε το πρόβλημα της τιμολόγησης του συγκεκριμένου Δικαιώματος, πρέπει πρώτα να ορίσουμε πως παίρνει τιμές η μεταβλητή y. *Αφού το Δικαίωμα είναι Lookback, είναι εύλογο να θέσουμε ως y τη μέγιστη τιμή που έχει πάρει η μετοχή στην εκάστοτε διαδρομή*. Έτσι θα έχουμε κάθε φορά διαθέσιμη (μέσω της y) την τιμή εξάσκησης του Δικαιώματος και η αξία θα βρίσκεται αναδρομικά μέσω του προσαρμοσμένου τύπου:

$$\upsilon_N(s,y) = \max\{y - s, 0\} \tag{6.2.12}$$

$$\upsilon_n(s,y) = \max\left\{ y - s, \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_{n+1}(us, y \vee us) + \tilde{q}\,\upsilon_{n+1}(ds, y)\right] \right\}, \quad n = N-1, N-2, \ldots, 0$$

Το σύμβολο $\vee$ δηλώνει το μέγιστο μεταξύ των δύο ποσοτήτων αριστερά και δεξιά του. Αρχικά υπολογίζουμε όλες τις δυνατές τιμές (s,y). Αυτό γίνεται ξεκινώντας από την περίοδο μηδέν και προς τα εμπρός:

Περίοδος	Ενδεχόμενο	(s,y)
0	–	(10,10)
1	*Α*	(13,13)
	Π	(8,10)
2	*ΑΑ*	(16.9,16.9)
	ΑΠ	(10.4,13)
	ΠΑ	(10.4,10.4)
	ΠΠ	(6.4,10)
3	*ΑΑΑ*	(21.97,21.97)
	ΑΑΠ	(13.52,16.9)
	ΑΠΑ	(13.52,13.52)
	ΠΑΑ	(13.52,13.52)

	ΑΠΠ	(8.32,13)
	ΠΑΠ	(8.32,10.4)
	ΠΠΑ	(8.32,10)
	ΠΠΠ	(5.12,10)

Πίνακας 6.2.1. Δυνατές τιμές (*s*,*y*) ενός Lookback Δικαιώματος Πώλησης Αμερικανικού τύπου

Τώρα μπορεί να γίνει αποτίμηση της αξίας του Δικαιώματος αναδρομικά σύμφωνα με τον τύπο που παραθέσαμε. Βρίσκουμε λοιπόν:

περίοδος 3:

$\upsilon_3(21.97,21.97) = 0$

$\upsilon_3(13.52,16.9) = 3.38$

$\upsilon_3(13.52,13.52) = 0$

$\upsilon_3(8.32,13) = 4.68$

$\upsilon_3(8.32,10.4) = 2.08$

$\upsilon_3(8.32,10) = 1.68$

$\upsilon_3(5.12,10) = 4.88$

περίοδος 2:

$$\upsilon_2(16.9,16.9) = \max\left\{0, \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_3(21.97,21.97) + \tilde{q}\,\upsilon_3(13.52,16.9)\right]\right\} = 1.22909$$

$$\upsilon_2(10.4,13) = \max\left\{13-10.4, \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_3(13.52,13.52) + \tilde{q}\,\upsilon_3(8.32,13)\right]\right\}$$

$$= \max\{2.6, 1.70182\} = 2.6$$

$$\upsilon_2(10.4,10.4) = \max\left\{0, \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_3(13.52,13.52) + \tilde{q}\,\upsilon_3(8.32,10.4)\right]\right\} = 0.756364$$

$$\upsilon_2(6.4,10) = \max\left\{10-6.4, \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_3(8.32,10) + \tilde{q}\,\upsilon_3(5.12,10)\right]\right\}$$

$$= \max\{3.6, 2.69091\} = 3.6$$

περίοδος 1:

$$\upsilon_1(13,13) = \max\left\{0, \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_2(16.9,16.9) + \tilde{q}\,\upsilon_2(10.4,13)\right]\right\} = 1.61587$$

$$\upsilon_1(8,10) = \max\left\{10-8, \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_2(10.4,10.4) + \tilde{q}\,\upsilon_2(6.4,10)\right]\right\} = \max\{2, 1.72165\} = 2$$

Αξία Δικαιώματος:

$$\upsilon_0(10,10) = \max\left\{0, \frac{1}{1+r}\left[\widetilde{p}\,\upsilon_1(13,13) + \widetilde{q}\,\upsilon_1(8,10)\right]\right\} = 1.60866 \cong 1.61€$$

Υπολογίσαμε λοιπόν την αξία του Lookback Δικαιώματος Αμερικανικού τύπου ντετερμινιστικά και αυτή προέκυψε μεγαλύτερη από αυτήν του vanilla Αμερικανικού Δικαιώματος. Αυτό ήταν αναμενόμενο από τη στιγμή που στο Lookback ο τρόπος που ορίζεται η τιμή εξάσκησης εξασφαλίζει τα μέγιστα δυνατά κέρδη για τον κάτοχο, επομένως αυτός πρέπει να πληρώσει παραπάνω για την απόκτησή του. Ωστόσο σε αυτήν την περίπτωση είναι πολύπλοκο να περιγραφεί η βέλτιστη στρατηγική εξάσκησης, ιδίως όταν το μοντέλο περιέχει μεγάλο αριθμό περιόδων. Εν προκειμένω πάντως, είδαμε ότι κάθε φορά που η άμεση εξάσκηση αποδίδει κέρδος, αυτό είναι μεγαλύτερο από το αναμενόμενο κέρδος από τη μη εξάσκηση του Δικαιώματος. Τα ζεύγη (s,y) για τα οποία ισχύει αυτό είναι το (8,10) της πρώτης περιόδου και τα (6.4,10) και (10.4,13) της δεύτερης περιόδου. □

Θα ολοκληρώσουμε την παρουσίαση των path-depended Δικαιωμάτων Προαίρεσης με ένα ακόμη παράδειγμα και συγκεκριμένα με ένα Δικαίωμα Ασιατικού τύπου. Σε αυτά, το κέρδος εξαρτάται από τη μέση τιμή της μετοχής σύμφωνα με τη διαδρομή που ακολούθησε. Υπάρχουν δύο κύρια είδη Ασιατικών Δικαιωμάτων. Στο πρώτο είδος, η τιμή εξάσκησης ορίζεται ως η μέση τιμή της μετοχής, έστω M, και το κέρδος που προκύπτει από την εξάσκηση τη χρονική στιγμή n είναι $(M - S_n)^+$ για Δικαιώματα Πώλησης και $(S_n - M)^+$ για Δικαιώματα Αγοράς. Στο δεύτερο είδος, ορίζεται μια σταθερή τιμή εξάσκησης γνωστή εκ των προτέρων, έστω K, και το κέρδος από την εξάσκηση τη χρονική στιγμή n είναι $(K - M)^+$ για Δικαιώματα Πώλησης και $(M - K)^+$ για Δικαιώματα Αγοράς. Το παράδειγμα που ακολουθεί αφορά τον πρώτο τύπο Ασιατικού Δικαιώματος.

Παράδειγμα (*Asian–American put option*)**.** Έστω ένα Δικαίωμα Πώλησης Ασιατικού – Αμερικανικού τύπου. Η παρούσα τιμή της μετοχής είναι S_0 = 10€, τα u και d είναι 1.3 και 0.8 αντίστοιχα και το επιτόκιο είναι 10%. Η εξάσκηση μπορεί να γίνει σε οποιαδήποτε περίοδο, ενώ η τιμή εξάσκησης ορίζεται ως η μέση τιμή της μετοχής με βάση τη διαδρομή που ακολούθησε μέχρι την εκάστοτε χρονική στιγμή. Το ζητούμενο είναι η αξία του Δικαιώματος.

Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τον συμβολισμό $\upsilon_n(s,y)$ για την αξία του Δικαιώματος τη χρονική στιγμή n, για τιμή μετοχής s και κατάλληλο y, ώστε να απαλλαγούμε από τους συνδυασμούς ενδεχομένων που θα εξετάζουμε κάθε φορά. Αυτή τη φορά, *το y θα είναι το άθροι-*

σμα των τιμών της μετοχής σύμφωνα με τη διαδρομή που αυτή ακολούθησε μέχρι την εκάστοτε τιμή. Έτσι, η τιμή εξάσκησης του Δικαιώματος θα είναι διαθέσιμη για κάθε δυνατό ενδεχόμενο απλά διαιρώντας το y με τον αριθμό των τιμών που προστέθηκαν σε αυτό και άρα μπορούμε να προχωρήσουμε στην αναδρομική επίλυση του προβλήματος. Ο τύπος βέβαια θα είναι λίγο διαφορετικός από αυτόν που δώσαμε για το Lookback Δικαίωμα του προηγούμενου παραδείγματος. Τώρα διαμορφώνεται ως εξής:

$$\upsilon_N(s,y) = \max\left\{\frac{1}{N+1}y - s, 0\right\} \tag{6.2.13}$$

$$\upsilon_n(s,y) = \max\left\{\frac{1}{n+1}y - s, \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_{n+1}(us, y+us) + \tilde{q}\,\upsilon_{n+1}(ds, y+ds)\right]\right\}\ ,\ n = N-1, N-2, \ldots, 0$$

Όπως και πριν, υπολογίζουμε πρώτα όλα τα δυνατά ζεύγη (s,y). Αυτά δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Περίοδος	Ενδεχόμενο	(s,y)
0	–	(10,10)
1	*Α*	(13,23)
	Π	(8,18)
2	*ΑΑ*	(16.9,39.9)
	ΑΠ	(10.4,33.4)
	ΠΑ	(10.4,28.4)
	ΠΠ	(6.4,24.4)
3	*ΑΑΑ*	(21.97,61.87)
	ΑΑΠ	(13.52,53.42)
	ΑΠΑ	(13.52,46.92)
	ΠΑΑ	(13.52,41.92)
	ΑΠΠ	(8.32,41.72)
	ΠΑΠ	(8.32,36.72)
	ΠΠΑ	(8.32,32.72)
	ΠΠΠ	(5.12,29.52)

Πίνακας 6.2.2. Δυνατές τιμές (s,y) ενός Δικαιώματος Πώλησης Ασιατικού-Αμερικανικού τύπου

Η επίλυση του προβλήματος γίνεται αναδρομικά με βάση τον παραπάνω τύπο. Βρίσκουμε λοιπόν:

περίοδος 3:

$\upsilon_3(21.97,61.87) = 0$

$\upsilon_3(13.52,53.42) = 0$

$\upsilon_3(13.52,46.92) = 0$

$\upsilon_3(13.52,41.92) = 0$

$$\upsilon_3(8.32,41.72) = \frac{1}{4}41.72 - 8.32 = 10.43 - 8.32 = 2.11$$

$$\upsilon_3(8.32,36.72) = \frac{1}{4}36.72 - 8.32 = 9.18 - 8.32 = 0.86$$

$\upsilon_3(8.32,32.72) = 0$

$$\upsilon_3(5.12,29.52) = \frac{1}{4}29.52 - 5.12 = 7.38 - 5.12 = 2.26$$

περίοδος 2:

$$\upsilon_2(16.9,39.9) = \max\left\{0, \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_3(21.97,61.87) + \tilde{q}\,\upsilon_3(13.52,53.42)\right]\right\} = 0$$

$$\upsilon_2(10.4,33.4) = \max\left\{\frac{1}{3}33.4 - 10.4, \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_3(13.52,46.92) + \tilde{q}\,\upsilon_3(8.32,41.72)\right]\right\}$$

$$= \max\{0.73, 0.767273\} = 0.767273$$

$$\upsilon_2(10.4,28.4) = \max\left\{0, \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_3(13.52,41.92) + \tilde{q}\,\upsilon_3(8.32,36.72)\right]\right\} = 0.312727$$

$$\upsilon_2(6.4,24.4) = \max\left\{\frac{1}{3}24.4 - 6.4, \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_3(8.32,32.72) + \tilde{q}\,\upsilon_3(5.12,29.52)\right]\right\}$$

$$= \max\{1.73, 0.821818\} = 1.73$$

περίοδος 1:

$$\upsilon_1(13,23) = \max\left\{0, \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_2(16.9,39.9) + \tilde{q}\,\upsilon_2(10.4,33.4)\right]\right\} = 0.279008$$

$$\upsilon_1(8,18) = \max\left\{\frac{1}{2}18 - 8, \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_2(10.4,28.4) + \tilde{q}\,\upsilon_2(6.4,24.4)\right]\right\} = \max\{1, 0.799669\} = 1$$

Αξία Δικαιώματος:

$$\upsilon_0(10,10) = \max\left\{0, \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,\upsilon_1(13,23) + \tilde{q}\,\upsilon_1(8,18)\right]\right\} = 0.515823 \cong 0.52\,€ \qquad \square$$

6.3 Δικαιώματα Αγοράς Αμερικανικού τύπου

Σε αντίθεση με ό,τι ισχύει για τα Δικαιώματα Πώλησης Αμερικανικού τύπου, τα Δικαιώματα Αγοράς με Αμερικανικό τρόπο εξάσκησης πρέπει θεωρητικά να εξασκούνται μόνο κατά τη λήξη τους, εάν βέβαια είναι in-the-money εκείνη τη στιγμή. Αυτό ισχύει για τα Δικαιώματα εκείνα των οποίων η υποκείμενη μετοχή δεν αποδίδει μερίσματα. Στην παράγραφο αυτή θα εξηγήσουμε τον λόγο που συμβαίνει αυτό, τόσο από την πρακτική πλευρά όσο και από τη θεωρητική μέσω μαθηματικής απόδειξης.

Στην περίπτωση που η μετοχή αποδίδει μερίσματα, υπάρχουν περιπτώσεις όπου η πρόωρη εξάσκηση μπορεί να αποβεί προς το συμφέρον του κατόχου. Για παράδειγμα αν το Δικαίωμα είναι in-the-money μια ημέρα πριν την απόδοση του μερίσματος, ο κάτοχος μπορεί να το εξασκήσει ώστε να έχει τις μετοχές στα χέρια του κι έτσι να εισπράξει το μέρισμα. Για να συμβεί βέβαια αυτό, πρέπει το κέρδος που θα προκύψει να είναι μεγαλύτερο από το αναμενόμενο κέρδος της μη εξάσκησης του Δικαιώματος και κατά συνέπεια τη μη είσπραξη του μερίσματος. Γενικά, τα Δικαιώματα Αγοράς Αμερικανικού τύπου των οποίων η υποκείμενη μετοχή αποδίδει μερίσματα πρέπει να εξασκούνται μόνο μια ημέρα πριν την προκαθορισμένη ημέρα απόδοσης του μερίσματος και τότε μόνο εάν το κέρδος από την εξάσκηση είναι σημαντικό (*deep in-the-money*). Μια συνήθης στρατηγική από πεπειραμένους επενδυτές είναι η πώληση μεγάλων ποσοτήτων Δικαιωμάτων Αγοράς Αμερικανικού τύπου τα οποία είναι in-the-money, μια ημέρα πριν την προκαθορισμένη ημερομηνία απόδοσης του μερίσματος. Συχνά, οι μη έμπειροι επενδυτές δεν αντιλαμβάνονται το όφελος από την πρόωρη εξάσκηση του Δικαιώματος κι έτσι χάνουν το κέρδος από το μέρισμα. Με τον τρόπο αυτό, ο πωλητής του call option εισπράττει την αξία του Δικαιώματος συν το μέρισμα από τις μετοχές που κατέχει στο χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης αφού το Δικαίωμα δεν εξασκείται, άρα έχει κέρδος.

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση όπου η υποκείμενη μετοχή του Δικαιώματος δεν αποδίδει μερίσματα. Τότε, η βέλτιστη στρατηγική είναι η εξάσκηση του Δικαιώματος κατά την ημερομηνία λήξης του αν είναι in-the-money. Ως άμεση συνέπεια, *η no-arbitrage αξία ενός Δικαιώματος Αγοράς Αμερικανικού τύπου ισούται με τη no-arbitrage αξία του αντίστοιχου Δικαιώματος Αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου*. Γιατί όμως συμβαίνει αυτό; Έστω ότι ένας επενδυτής έχει ένα Δικαίωμα Αγοράς Αμερικανικού τύπου επί μιας μετοχής με τιμή εξάσκησης K και χρόνο λήξης T. Αν το εξασκήσει σε μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t < T$, τότε το κέρδος του εκείνη τη χρονική στιγμή θα είναι $S_t - K$. Αντίθετα, μπορεί τη χρονική στιγμή t να πωλήσει την υποκείμενη μετοχή στην τιμή S_t και κατόπιν να κλείσει την ανοιχτή του θέση στον χρόνο T αγοράζοντας τη μετοχή με κόστος $\min\{K, S_T\}$, δηλαδή είτε εξασκεί το Δικαίωμα είτε αγοράζει τη μετοχή από το Χρηματιστήριο. Τότε το κέρδος του (τη χρονική στιγμή t ώστε να είναι άμεσα συγκρίσιμο με την προηγούμενη περίπτωση) είναι $S_t - \min\{K, S_T\} \cdot e^{-r(T-t)}$ το οποίο είναι μεγαλύτερο του $S_t - K$. Με άλλα λόγια, ο λόγος για τον οποίο υπάρχει διαφοροποίηση μεταξύ των Δικαιωμάτων Αγοράς και Πώλησης Αμερικανικού τύπου είναι ο ακόλουθος. Στο Δικαίωμα Πώλησης (έστω επί μιας μετοχής), ο κάτοχος *λαμβάνει* K χρηματικές μονάδες τη στιγμή της εξάσκησης και προτιμά η εξάσκηση να γίνει νωρίς (εφόσον είναι συμφέρουσα) προκειμένου το κέρδος του να έχει μεγαλύτερη αξία, δεδομένης της χρονικής αξίας του χρήματος. Από την άλλη, στο Δικαίωμα Αγοράς ο κάτοχος *πληρώνει* K χρηματικές μονάδες τη στιγμή της εξάσκησης και προτιμά αυτό να συμβεί όσο το δυνατόν πιο αργά ώστε η αξία της πληρωμής αυτής να είναι μικρότερη.

Πέρα όμως από τη διαισθητική ερμηνεία του λόγου για τον οποίο ένα Δικαίωμα Αγοράς Αμερικανικού τύπου πρέπει να εξασκείται μόνο κατά τη λήξη του, θα παραθέσουμε και τη μαθηματική απόδειξη η οποία ισχύει γενικότερα για τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα με Αμερικανικό τρόπο εξάσκησης. Η απόδειξη στηρίζεται στην *ανισότητα του Jensen* για υπό συνθήκη αναμενόμενες τιμές, σύμφωνα με την οποία:

Θεώρημα (*Ανισότητα του Jensen για υπό συνθήκη αναμενόμενες τιμές*). *Έστω φ μια κυρτή πραγματική συνάρτηση. Τότε ισχύει*:

$$E_n[\varphi(X)] \geq \varphi(E_n[X])$$

Ας δούμε τώρα τι ισχύει για τα Δικαιώματα Αγοράς Αμερικανικού τύπου μέσα από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 6.3.1. *Έστω το διωνυμικό μοντέλο N περιόδων με $0 < d < 1 + r < u$ και $r \geq 0$. Σε αυτό το μοντέλο θεωρούμε ένα Αμερικανικό παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν με κυρτή συνάρτηση κέρδους $g(s)$ που ικανοποιεί τη σχέση $g(0) = 0$. Η no-arbitrage αξία του παράγωγου αυτού τη χρονική στιγμή μηδέν δίνεται από τη σχέση*

$$V_0^A = \max_{\tau \in S_0} \widetilde{E}\left[I_{\{\tau \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau}} g(S_\tau) \right]$$

και ταυτίζεται με την no-arbitrage αξία ενός Ευρωπαϊκού παράγωγου χρηματοοικονομικού προϊόντος με συνάρτηση κέρδους $g(S_N)$ και χρόνο λήξης N, του οποίου η αξία είναι:

$$V_0^E = \widetilde{E}\left[\frac{1}{(1+r)^N}\max\{g(S_N),0\}\right]$$

Απόδειξη. Το γεγονός ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή, σημαίνει ότι ικανοποιεί τη σχέση

$$g(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2) \le \lambda g(s_1) + (1-\lambda)g(s_2) \qquad (6.3.1)$$

για s_1, $s_2 \ge 0$ και $\lambda\in[0, 1]$. Η g μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές. Για τον λόγο αυτό ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$g^+(s) = \max\{g(s), 0\}$$

Η συνάρτηση αυτή δεν παίρνει καθόλου αρνητικές τιμές και ικανοποιεί τη σχέση $g^+(0) = 0$. Επίσης είναι κυρτή. Πράγματι, επειδή η g ικανοποιεί τη σχέση (6.3.1), έχουμε

$$g(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2) \le \lambda g^+(s_1) + (1-\lambda)g^+(s_2)$$

για όλα τα $s_1,s_2 \ge 0$ και $\lambda\in[0, 1]$. Ακόμη ισχύει $0 \le \lambda g^+(s_1) + (1-\lambda)g^+(s_2)$, συνεπώς:

$$g^+(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2) = \max\{0, g(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2)\} \le \lambda g^+(s_1) + (1-\lambda)g^+(s_2)$$

Η τελευταία ανισότητα επαληθεύει την κυρτότητα της g^+. Για $s_1 = s$ και $s_2 = 0$, βλέπουμε ότι:

$$g^+(\lambda s) \le \lambda g^+(s) \text{ για όλα τα } s \ge 0 \text{ και } \lambda \in [0, 1] \qquad (6.3.2)$$

Υπό το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου, η διαδικασία $(1+r)^{-n}S_n$ είναι martingale, δηλαδή ισχύει $S_n = \widetilde{E}_n[(1+r)^{-1}S_{n+1}]$. Έτσι έχουμε:

$$g^+(S_n) = g^+\left(\widetilde{E}_n\left[\frac{1}{1+r}S_{n+1}\right]\right)$$

Από την ανισότητα του Jensen που αναφέραμε προηγουμένως, προκύπτει:

$$g^+\left(\widetilde{E}_n\left[\frac{1}{1+r}S_{n+1}\right]\right) \le \widetilde{E}_n\left[g^+\left(\frac{1}{1+r}S_{n+1}\right)\right] \qquad (6.3.3)$$

Για $\lambda = (1+r)^{-1}$ στη σχέση (6.3.2) παίρνουμε:

$$\widetilde{E}_n\left[g^+\left(\frac{1}{1+r}S_{n+1}\right)\right] \le \widetilde{E}_n\left[\frac{1}{1+r}g^+(S_{n+1})\right] \qquad (6.3.4)$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε:

$$g^{+}(S_n) \le \widetilde{E}_n\left[\frac{1}{1+r} g^{+}(S_{n+1})\right]$$

Πολλαπλασιάζουμε τώρα κάθε μέλος με $(1+r)^{-n}$ κι έτσι προκύπτει η ιδιότητα του submartingale για τη διαδικασία των αποπληθωρισμένων εγγενών αξιών, δηλαδή:

$$\frac{1}{(1+r)^n} g^{+}(S_n) \le \widetilde{E}_n\left[\frac{1}{(1+r)^{n+1}} g^{+}(S_{n+1})\right]$$

Επειδή ακριβώς η διαδικασία αυτή είναι submartingale, από το Θεώρημα 5.2.1 της Προαιρετικής Δειγματοληψίας έχουμε ότι για κάθε χρόνο διακοπής $\tau \in S_0$ ισχύει:

$$\widetilde{E}\left[\frac{1}{(1+r)^{N\wedge\tau}} g^{+}(S_{N\wedge\tau})\right] \le \widetilde{E}\left[\frac{1}{(1+r)^{N}} g^{+}(S_{N})\right] = V_0^E \tag{6.3.5}$$

Αν $\tau \le N$, τότε

$$I_{(\tau\le N)} \frac{1}{(1+r)^{\tau}} g(S_\tau) = \frac{1}{(1+r)^{N\wedge\tau}} g(S_{N\wedge\tau}) \le \frac{1}{(1+r)^{N\wedge\tau}} g^{+}(S_{N\wedge\tau})$$

ενώ αν $\tau = \infty$

$$I_{(\tau\le N)} \frac{1}{(1+r)^{\tau}} g(S_\tau) = 0 \le \frac{1}{(1+r)^{N\wedge\tau}} g^{+}(S_{N\wedge\tau})$$

Προφανώς σε κάθε περίπτωση το αποτέλεσμα είναι ίδιο, συνεπώς χρησιμοποιώντας τη σχέση (6.3.5) προκύπτει:

$$\widetilde{E}\left[I_{\{\tau\le N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau}} g^{+}(S_\tau)\right] \le \widetilde{E}\left[\frac{1}{(1+r)^{N\wedge\tau}} g^{+}(S_{N\wedge\tau})\right] \le V_0^E$$

Αφού η τελευταία ανισότητα ισχύει για κάθε $\tau \in S_0$, έχουμε τελικά:

$$V_0^A = \max_{\tau\in S_0} \widetilde{E}\left[I_{\{\tau\le N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau}} g(S_\tau)\right] \le V_0^E \qquad \square$$

Με βάση το θεώρημα που αποδείξαμε, η δυνατότητα της πρόωρης εξάσκησης ενός Δικαιώματος Αγοράς Αμερικανικού τύπου (το οποίο έχει κυρτή $g(s) = (s - K)^{+}$) δεν ανεβάζει την αξία του διότι η διαδικασία των προεξοφλημένων εγγενών αξιών του Δικαιώματος είναι submartingale (δηλαδή έχει ανοδική τάση), αντίθετα με ό,τι συμβαίνει στα Δικαιώματα Πώλησης Αμερικανικού τύπου. Σύμφωνα με την ανισότητα του Jensen η κυρτότητα της συνάρτησης κέρδους ενός Δικαιώματος Πώλησης, $g^+(s) = (K - s)^+$, προσδίδει μεν στις προεξοφλημένες εγγενείς αξίες μια ανοδική τάση, όμως το τελικό αποτέλεσμα μπορεί να μην είναι submartingale (και όπως είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο η διαδικασία είναι supermartingale). Δηλαδή ενώ ισχύει η ανισότητα της σχέσης (6.3.3), δεν ισχύει η ανισότητα της σχέσης (6.3.4). Το σημείο αυτό της απόδειξης ταυτίζεται με τη διαισθητική ερμηνεία όπου αναφέραμε ότι ο κάτοχος ενός put option επιθυμεί να εξασκήσει νωρίτερα ώστε να εισπράξει μεγαλύτερο κέρδος. Το τελευταίο φυσικά ισχύει για χαμηλές τιμές της μετοχής και, αναλόγως των παραμέτρων του Δικαιώματος, σε ορισμένες χρονικές στιγμές κρίνεται πράγματι βέλτιστο να γίνει πρόωρη εξάσκηση για αυτές τις χαμηλές τιμές της μετοχής. Κάτι τέτοιο όμως δεν συμβαίνει στα Δικαιώματα Αγοράς αφού ο κάτοχος προτιμά να πληρώσει κατά το δυνατόν αργότερα για την απόκτηση των μετοχών, συνεπώς η εξάσκηση πριν τον χρόνο λήξης σε αυτήν την περίπτωση δεν αποτελεί πλεονέκτημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Αλγόριθμοι Αποτίμησης Παραγώγων Χρηματοοικονομικών Προϊόντων και Αριθμητικές Εφαρμογές

Μέσα από την παρουσίαση του διωνυμικού μοντέλου καθίσταται σαφές ότι είναι εξαιρετικά δύσκολο να γίνουν με το χέρι όλοι οι απαραίτητοι υπολογισμοί για την εύρεση της αξίας ενός Δικαιώματος. Μάλιστα στην περίπτωση που θέλουμε να προσεγγίσουμε με ακρίβεια τα πιο ρεαλιστικά μοντέλα συνεχούς χρόνου, θα πρέπει να συμπεριλάβουμε πολλές περιόδους (εκατό ή και περισσότερες) ώστε να είναι ικανοποιητική η διακριτοποίηση του χρόνου. Προφανώς, κάτι τέτοιο είναι πρακτικά αδύνατο να πραγματοποιηθεί χωρίς τη χρήση Η/Υ. Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει η παρουσίαση, ανάλυση και εφαρμογή κατάλληλων αλγορίθμων για την τιμολόγηση Δικαιωμάτων Πώλησης Αμερικανικού και Ασιατικού-Αμερικανικού τύπου. Ακόμη, θα εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα σχετικά με την επίδραση που έχει στην εκτίμηση της no-arbitrage αξίας των Δικαιωμάτων, η μεταβολή ορισμένων παραμέτρων όπως για παράδειγμα το επιτόκιο της σίγουρης επένδυσης. Για την εφαρμογή των αλγορίθμων, θα χρησιμοποιηθεί ως υποκείμενος τίτλος η μετοχής της Ο.Τ.Ε. Α.Ε. για το τρίμηνο Μαΐου-Ιουλίου του έτους 2008.

7.1 Αποτίμηση Δικαιωμάτων Πώλησης Αμερικανικού τύπου (non-path-depended)

Για τις ανάγκες της εργασίας κατασκευάστηκε ένας αλγόριθμος που τιμολογεί *προσεγγιστικά* Δικαιώματα Πώλησης Αμερικανικού τύπου στο ***μοντέλο Black and Scholes***, χρησιμοποιώντας το διακριτό του ανάλογο, δηλαδή το *διωνυμικό μοντέλο με μεγάλο πλήθος περιόδων*. Ο προγραμματισμός έγινε με το υπολογιστικό πακέτο Mathematica (Wolfram Research, έκδοση 6.0). Με τη χρήση κατάλληλων αλγορίθμων μπορούμε να μειώσουμε τον χρόνο για τη διεκπεραίωση των απαιτούμενων πράξεων. Αξίζει να σημειωθεί πως έγιναν αρκετές αλλαγές στον κώδικα κατά τη διάρκεια της υλοποίησης, έτσι ώστε να βελτιστοποιηθεί η σταθερότητα και η ταχύτητα του προγράμματος. Ο λόγος που έγινε αυτό είναι διότι παρατηρήθηκε ότι α-κόμη και ένας Η/Υ τελευταίας τεχνολογίας χρειάζεται αρκετή ώρα για να φέρει σε πέρας τους απαιτούμενους υπολογισμούς σε ένα διωνυμικό μοντέλο με περισσότερες από περίπου 500 περιόδους[3]. Ήδη, μέχρι την πεντακοσιοστή περίοδο υπολογίζονται 125751 πιθανές τιμές της μετοχής, που αντιστοιχούν σε ισάριθμες «θέσεις εκχώρησης» στη μνήμη του υπολογιστή. Ε-πίσης έγινε προσπάθεια ώστε το πρόγραμμα να είναι φιλικό προς τον τελικό χρήστη, ο οποίος το μόνο που έχει να κάνει είναι να ορίσει τα χαρακτηριστικά του Δικαιώματος, δηλαδή την *αρχική τιμή* της υποκείμενης μετοχής, την *τιμή εξάσκησης*, το *ετήσιο επιτόκιο ασφαλούς επέν-δυσης*, τη *μεταβλητότητα* της τιμής της μετοχής, τη *διάρκεια ισχύος* του συμβολαίου και τέλος το *πλήθος των περιόδων* που θα χρησιμοποιήσει το μοντέλο. Αφού ορίσει τα παραπάνω, ε-κτελεί το πρόγραμμα και παίρνει ως αποτέλεσμα μια ικανοποιητική προσέγγιση της αξίας του συγκεκριμένου Δικαιώματος Πώλησης, καθώς επίσης και ορισμένα χρήσιμα διαγράμματα για τα οποία θα κάνουμε λόγο στη συνέχεια. Τελικός στόχος είναι ο κάτοχος του Δικαιώματος να γνωρίζει ανά πάσα στιγμή εάν τον συμφέρει να το εξασκήσει και για ποιες τιμές του υποκεί-μενου αγαθού πρέπει να το κάνει.

Συμβολισμοί και Εκτιμήσεις Παραμέτρων

Δεδομένου ότι με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή έχουμε την ευχέρεια να διακριτο-ποιήσουμε τη χρονική διάρκεια ισχύος του Δικαιώματος σε πολύ ικανοποιητικό βαθμό προ-σεγγίζοντας έτσι το μοντέλο Black and Scholes (που είναι συνεχούς χρόνου), είναι εύλογο να χρησιμοποιήσουμε συνεχή ανατοκισμό (δηλ. συντελεστή προεξόφλησης e^{-r} αντί του $(1 + r)^{-1}$) ώστε τα αποτελέσματα να είναι σε απλούστερη μορφή. Πράγματι, αν χωρίσουμε το χρόνο σε πολλές περιόδους το επιτόκιο r μιας χρονικής περιόδου θα είναι πολύ μικρό, και επομένως

$$(1+r)^{-1} \approx e^{-r}.$$

Επίσης θα αλλάξει ο τρόπος με τον οποίο ορίζονται οι πιθανότητες ουδέτερου ρίσκου ώστε να χρησιμοιήσουμε τους συμβολισμούς του μοντέλου Black and Scholes. Στον συνεχή χρόνο θεωρούμε ότι οι τιμές της μετοχής περιγράφονται από μια γεωμετρική κίνηση Brown με πα-ραμέτρο τάσης μ (*drift*) και μεταβλητότητα σ (*volatility*). Ο χρόνος μετράται σε έτη και σε κάθε μικρό χρονικό διάστημα μήκους h, υπάρχει ποσοστιαία αύξηση ή μείωση της τιμής η

[3] Το πρόβλημα αυτό εξακολουθεί να υφίσταται ακόμη στην 64-bit πλατφόρμα του προγράμματος με αντίστοιχη έκδοση Windows.

οποία δεν εξαρτάται από τις προηγούμενες αυξομειώσεις. Συνεπώς, σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει για τη γεωμετρική κίνηση Brown, οι τιμές των u και d θα είναι $e^{\sigma\sqrt{h}}$ και $e^{-\sigma\sqrt{h}}$ αντίστοιχα, ενώ οι *πιθανότητες ουδέτερου ρίσκου* είναι οι εξής:

$$\widetilde{p} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{R - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\sqrt{h}\right], \quad \widetilde{q} = 1 - \widetilde{p},$$

όπου R είναι το (ετήσιο) επιτόκιο χωρίς ρίσκο. Στο σημείο αυτό προκύπτει το ερώτημα για το πώς θα γίνεται η εκτίμηση της μεταβλητότητας σ των τιμών της μετοχής. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να ξεπεραστεί αυτό το πρόβλημα. Οι τρεις που χρησιμοποιούνται περισσότερο είναι η εκτίμηση από *ιστορικά δεδομένα*, η εκτίμηση από *σταθμισμένα ιστορικά δεδομένα* (ώστε να δίνεται βάρος στις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις) και η εκτίμηση μέσα από τις τιμές των παραγώγων που υπάρχουν ήδη στην αγορά (*τεκμαρτή μεταβλητότητα - implied volatility*). Η εκτίμηση του σ με κάθε έναν από αυτούς τους τρεις τρόπους είναι σχεδόν βέβαιο ότι θα καταλήξει σε αποτελέσματα τα οποία θα διαφέρουν άλλες φορές λιγότερο και άλλες περισσότερο. Η σύγκριση των τριών μεθόδων ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτής της εργασίας. Πρέπει όμως να σημειώσουμε ότι ακόμη και στην πράξη οι επενδυτές καταλήγουν σε εκτιμήσεις οι οποίες είναι διαφορετικές μεταξύ τους, δηλαδή δεν υπάρχει κάποιος απόλυτος τρόπος υπολογισμού της μεταβλητότητας των τιμών των μετοχών. Έτσι, κυρίως οι προσδοκίες των επενδυτών δημιουργούν τις λεγόμενες τάσεις στις αγορές και διαμορφώνουν την προσφορά και τη ζήτηση για κάθε Δικαίωμα Προαίρεσης.

Ας δούμε λίγο πιο αναλυτικά τον τρόπο με τον οποίο η μεταβλητότητα εκτιμάται από ιστορικά δεδομένα, μιας και αυτόν τον τρόπο θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια. Αρχικά γίνεται συλλογή δεδομένων που αφορούν τις τιμές κλεισίματος S_1, S_2, …, S_ν της υποκείμενης μετοχής για ένα χρονικό διάστημα ν ημερών. Το μήκος του διαστήματος αυτού εξαρτάται από την κρίση του ερευνητή και κυμαίνεται συνήθως μεταξύ ενός και τριών μηνών, έτσι ώστε αφενός να μην υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα και αφετέρου να μην προκύψει μεγάλο σφάλμα στην εκτίμηση. Σύμφωνα με το μοντέλο των Black & Scholes το οποίο προσεγγίζεται αρκούντως ικανοποιητικά από το διωνυμικό μοντέλο για μεγάλο n, οι τυχαίες μεταβλητές

$$X_i = \ln\frac{S_{i+1}}{S_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu - 1,$$

είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν κανονική κατανομή με παραμέτρους $\tau\mu$ και $\tau\sigma^2$. Το τ ισούται με 1/260 διότι γίνονται περίπου 260 συνεδριάσεις κατά τη διάρκεια ενός έτους. Στη συνέχεια, η εκτίμηση της διακύμανσης των X_i γίνεται ως συνήθως μέσω της δειγματικής διακύμανσης. Επειδή όμως η δειγματική διακύμανση θα εκτιμά το $\tau\sigma^2$ και όχι το ζητούμενο σ^2, πρέπει να την πολλαπλασιάσουμε με $1/\tau$. Έτσι τελικά βρίσκουμε:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\tau}\frac{1}{\nu-2}\sum_{i=1}^{\nu-1}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

Εφαρμογή. Ως παράδειγμα για την εφαρμογή του αλγορίθμου θα χρησιμοποιήσουμε τη μετοχή της Ο.Τ.Ε. Α.Ε. Αξίζει να σημειώσουμε ότι στο Χρηματιστήριο Παραγώγων Αθηνών διατίθενται Δικαιώματα Προαίρεσης που έχουν ως υποκείμενη μετοχή τη μετοχή του Ο.Τ.Ε., στα οποία μάλιστα ο τρόπος εξάσκησης είναι ο Αμερικάνικος. Καταγράφουμε τις τιμές κλεισίματος της εν λόγω μετοχής για τους μήνες Μάιο, Ιούνιο και Ιούλιο του έτους 2008 (βλ. Π.1 Παραρτήματος). Πρώτα ελέγχουμε εάν το σ παραμένει σταθερό κατά τη διάρκεια αυτού του τριμήνου μέσω των στατιστικών ελέγχων του Bartlett και του Levene. Διενεργούμε τους ελέγχους με τη βοήθεια του στατιστικού πακέτου Minitab (βλ. Π.2 Παραρτήματος για γραφικό έλεγχο) και τα αποτελέσματα είναι τα ακόλουθα:

Έλεγχος	**p-value**
Bartlett's test	0.168
Levene's test	0.092

Πίνακας 7.1.1. Έλεγχοι Ομοσκεδαστικότητας για τη μετοχή της Ο.Τ.Ε. Α.Ε.

Η μηδενική υπόθεση είναι ότι η διασπορά παραμένει σταθερή για τους μήνες που μελετούμε. Βλέπουμε ότι τα p-values των ελέγχων είναι αρκετά μεγαλύτερα του 0.05, συνεπώς σε επίπεδο σημαντικότητας 5% δεν απορρίπτουμε την υπόθεση της ισότητας των διασπορών με κανέναν από τους δύο ελέγχους. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα X_i, έπειτα τη δειγματική διακύμανση και τελικά τη δειγματική τυπική απόκλιση. Έχουμε λοιπόν $\hat{\sigma}^2 \cong 0.144$ και $\hat{\sigma} \cong 0.38$. Στο παράρτημα δίνεται ο αναλυτικός πίνακας με τις τιμές κλεισίματος της μετοχής.

Ένα άλλο θέμα στο οποίο πρέπει να δώσουμε προσοχή είναι το *επιτόκιο της ασφαλούς επένδυσης* που θα χρησιμοποιήσουμε κατά την τιμολόγηση. Ως ασφαλής επένδυση συνήθως θεωρούνται τα κρατικά ομόλογα διότι ενέχουν σχεδόν μηδενικό κίνδυνο. Πρέπει ωστόσο να αναφέρουμε ότι στην αγορά διατίθεται μια πληθώρα επενδυτικών επιλογών οι οποίες προσφέρουν υψηλότερες αποδόσεις σε σχέση με τα κρατικά ομόλογα με ελάχιστο κίνδυνο. Πρόκειται για τις λεγόμενες προθεσμιακές καταθέσεις που παρέχονται από χρηματοπιστωτικά ιδρύματα. Ο λόγος που δεν χρησιμοποιούμε ως βάση αναφοράς τα επιτόκια αυτών των επενδύσεων είναι ότι πέρα από τον (έστω και πολύ λίγο) αυξημένο κίνδυνο σε σύγκριση με τα κρατικά ομόλογα, συνήθως οι αποδόσεις τους είναι μεγάλες μόνο για κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα (π.χ. τους έξι πρώτους μήνες), ενώ έπειτα το επιτόκιό τους κυμαίνεται σε επίπεδα χαμηλότερα των επιτοκίων των κρατικών ομολόγων. Στο τέλος του Ιουλίου οι αποδόσεις των ελληνικών κρατικών τίτλων υποχώρησαν σε όλες τις διάρκειες ακολουθώντας τις αντίστοιχες τάσεις των αγορών της Ευρωζώνης. Τη μεγαλύτερη πτώση παρουσίασαν οι τίτλοι βραχυπρόθεσμης διάρκειας με τις αποδόσεις του τριετούς και του πενταετούς ομολόγου να διαμορφώνονται σε 4.81% και 4.90% αντίστοιχα, από 5.14% και 5.22% στο τέλος του προηγούμενου μήνα. Επίσης η απόδοση του δεκαετούς ομολόγου μειώθηκε σε 5.07% από 5.32% και η απόδοση του τριακονταετούς ομολόγου έκλεισε σε 5.33% από 5.56%. Το επιτόκιο που θα χρησιμοποιήσουμε τελικά θα είναι ο μέσος όρος των αποδόσεων των τεσσάρων αυτών ομολόγων, δηλαδή περίπου 4.96%.

Υλοποίηση του Αλγορίθμου Αποτίμησης Δικαιωμάτων Πώλησης Αμερικανικού τύπου

Ακολουθεί η παρουσίαση του αλγορίθμου καθώς και η επεξήγησή του βήμα προς βήμα. Προκειμένου να είναι πιο εύκολη η εποπτεία, θα τον μελετήσουμε τμηματικά (βλ. Π.3 Παραρτήματος για ολόκληρο τον αλγόριθμο). Συνοπτικά τα βήματα του αλγορίθμου είναι τα εξής:

<u>Βήμα 1:</u> Ορισμός των χαρακτηριστικών του Δικαιώματος (γίνεται από τον χρήστη).

<u>Βήμα 2:</u> Υπολογισμός των u, d, $\tilde{p}$ και $\tilde{q}$.

<u>Βήμα 3:</u> Υπολογισμών των δυνατών τιμών της μετοχής για κάθε χρονική στιγμή.

<u>Βήμα 4:</u> Υπολογισμός της αξίας του Δικαιώματος για κάθε δυνατή τιμή s και χρονική στιγμή n, δηλαδή εύρεση των $v_n(s)$. Τελικά προκύπτει το $v_0(S_0)$ που είναι η ζητούμενη αρχική αξία του Δικαιώματος.

<u>Βήμα 5:</u> Προεξόφληση των $v_n(s)$.

<u>Βήμα 6:</u> Εύρεση των βέλτιστων χρόνων εξάσκησης.

<u>Βήμα 7:</u> Διάγραμμα των πιθανών τιμών της μετοχής με βάση το διωνυμικό μοντέλο, πάνω στο οποίο σημειώνονται τα σημεία όπου η εξάσκηση είναι βέλτιστη.

Ας δούμε τις πρώτες γραμμές του κώδικα:

```
n=320;T=3/12;σ=0.379512254;R=0.049625;
S0=13.4;
K=14;
h=T/n;
r=h*R;
up=Exp[σ*(h^(0.5))];
down=Exp[-σ*(h^(0.5))];
p=1/2*(1+(R-σ^2/2)/σ*h^0.5);
q=1-p;
S=Table[0,{n}];
Do[S[[i]]=Table[0,{i+1}],{i,1,n}];
Do[
  Do[S[[i,j]]=S0*(up^(i-j+1))*(down^(j-1))
     ,{j,1,Length[S[[i]]]}];
  ,{i,1,n}];
Print["up = ",up]
Print["down = ",down]
Print["p = ",p]
Print["q = ",q]
```

Στις τρεις πρώτες γραμμές ο χρήστης ορίζει τα χαρακτηριστικά του Δικαιώματος. Όπου *n* είναι *ο αριθμός των περιόδων του μοντέλου*, *T* η *χρονική διάρκεια του συμβολαίου*, *σ* η *μεταβλητότητα των τιμών της μετοχής*, *R* το *ετήσιο επιτόκιο της επένδυσης χωρίς ρίσκο*, *S*0 *η παρούσα τιμή της μετοχής* και *K* η *τιμή εξάσκησης του Δικαιώματος*. Στη συνέχεια ορίζεται το μήκος του χρονικού διαστήματος *h* που χωρίζουμε τον συνολικό χρόνο και το επιτόκιο που ισχύει για το πολύ μικρό αυτό διάστημα. Έπειτα υπολογίζονται οι τιμές των *u* (μεταβλητή *up*), *d* (μεταβλητή *down*), $\widetilde{p}$ και $\widetilde{q}$. Τέλος, δημιουργείται μια λίστα *S* η οποία περιλαμβάνει όλες τις δυνατές τιμές της μετοχής σύμφωνα με το διωνυμικό μοντέλο και τα χαρακτηριστικά που ορίστηκαν από τον χρήστη, ενώ το πρόγραμμα εμφανίζει ως αποτέλεσμα τις τιμές των *u*, *d*, $\widetilde{p}$ και $\widetilde{q}$. Η λίστα *S* αποτελείται από *n* στοιχεία που αναφέρονται σε *n* χρονικές στιγμές. Συγκεκριμένα, το *i*-οστό στοιχείο της *S* περιλαμβάνει τις $i+1$ δυνατές τιμές μετοχής, $i = 1, 2, \ldots, n$ *στο χρόνο i*. Για παράδειγμα, η λίστα *S* έχει τις ακόλουθες αριθμητικές τιμές

$$S = \{\{S_0u, S_0d\},\ \{S_0u^2, S_0du, S_0d^2\}, \{S_0u^3, S_0du^2, S_0d^2u, S_0d^3\}, \ldots\}$$

Έτσι, το στοιχείο $S_{i,j} = S[[i,j]]$ εκφράζει την *j*-οστή δυνατή τιμή της μετοχής (ξεκινώντας από την ανώτερη τιμή με φθίνουσα σειρά) της *i*-οστής χρονικής περιόδου. Για το συγκεκριμένο Δικαίωμα το output είναι:

```
up =  1.01066
down =  0.989448
p =  0.499176
q =  0.500824
```

Στη συνέχεια κατασκευάζεται αναδρομικά, σύμφωνα με τον τύπο 6.1.1, μια λίστα *u* που περιέχει όλα τα $\upsilon_n(s)$. Υπενθυμίζεται ότι το $\upsilon_n(s)$ εκφράζει την αξία του ***Δικαιώματος Πώλησης Αμερικανικού τύπου*** στο χρόνο *n* δεδομένου ότι η υποκείμενη μετοχή έχει αξία *s*.

```
u=Table[0,{n}];
Do[u[[i]]=Table[0,{i+1}],{i,1,n}];
Do[u[[n,j]]=Max[K-S[[n,j]],0],{j,1,n+1}];
Do[
  Do[u[[i,j]]=Max[K-S[[i,j]],Exp[-r]*(p*u[[i+1,j]]+q*u[[i+1,j+1]])]
     ,{j,1,Length[u[[i]]]}];
  ,{i,n-1,1,-1}];
u0=Max[K-S0,Exp[-r]*(p*u[[1,1]]+q*u[[1,2]])];
Print["Αξία Δικαιώματος = ",u0," €"]
```

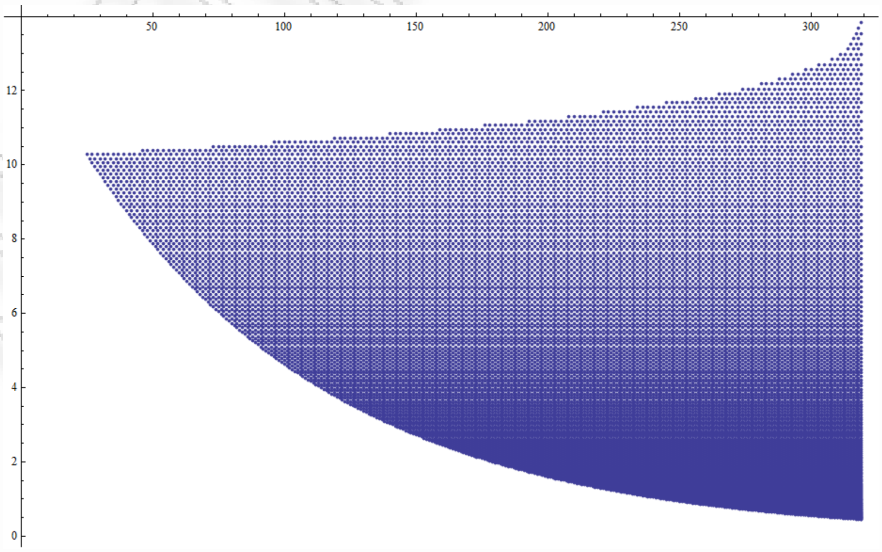
Το μήκος και η δομή της λίστας αυτής είναι ακριβώς ίδια με τη λίστα *S*. Η αξία του Δικαιώματος σε κάθε χρονική στιγμή για κάθε πιθανή τιμή της μετοχής υπολογίζεται μέσω επαναληπτικής εντολής ως το μέγιστο μεταξύ του κέρδους από την άμεση εξάσκηση και του αναμενόμενου κέρδους (με συντελεστή προεξόφλησης e^{-r}) από τη μη εξάσκηση. Αφού βρεθούν όλα τα $\upsilon_n(s)$ αναδρομικά από την τελική περίοδο *n* μέχρι την περίοδο ένα, υπολογίζεται το *u*0 που είναι η παρούσα αξία του Δικαιώματος. Το αποτέλεσμα που παίρνουμε στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι:

```
Αξία Δικαιώματος =  1.27653  €
```

Με την εύρεση της αξίας του Δικαιώματος επιτυγχάνεται ο κύριος στόχος του προγράμματος. Ωστόσο μπορούμε να επεκτείνουμε το παραπάνω πρόγραμμα ώστε να παράγουμε ορισμένα χρήσιμα διαγράμματα. Το πρώτο διάγραμμα αναπαριστά το σύνολο των χρόνων εξάσκησης, αναλόγως του χρονικού σημείου και της τιμής της μετοχής στα οποία βρισκόμαστε. Οι εντολές στο Mathematica είναι οι ακόλουθες:

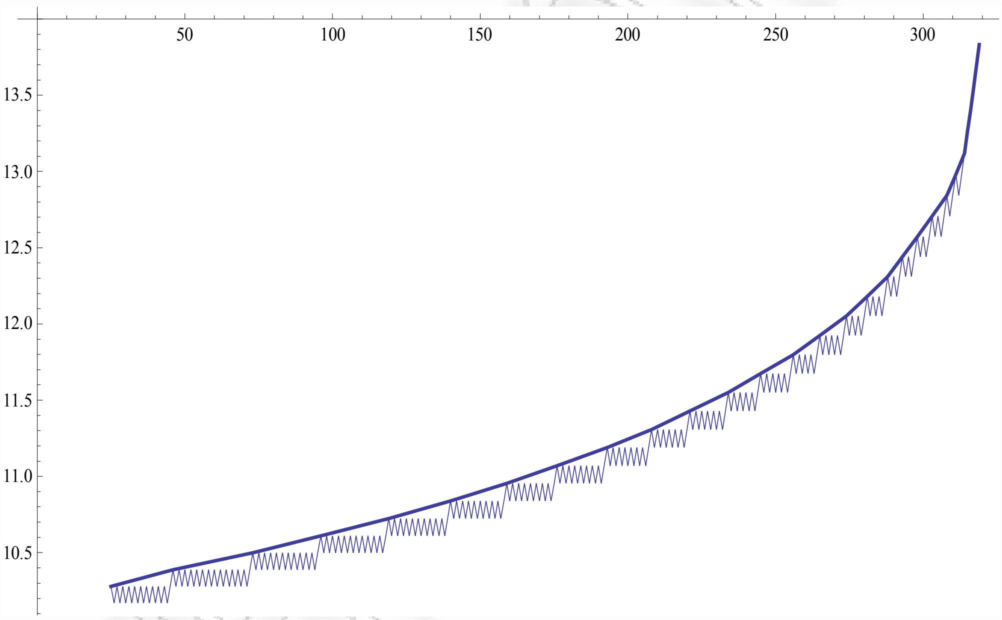
```
discountedu={};
Do[discountedu=Append[discountedu,u[[i]]*Exp[-r*i]],{i,1,n}];
optimal={};
Do[
  Do[
 If[discountedu[[i,j]]>p*discountedu[[i+1,j]]+q*discountedu[[i+1,j+1]],
     optimal=Append[optimal,{i,S[[i,j]]}]]
    ,{j,1,Length[discountedu[[i]]]}];
  ,{i,1,n-1}];
If[u0>p*discountedu[[1,1]]+q*discountedu[[1,2]],
Print["It is optimal to exercise now."],
ListPlot[optimal,AxesOrigin→{0,K}]]
```

Αρχικά δημιουργείται η λίστα *discountedu* που περιέχει όλες τις προεξοφλημένες τιμές των $\upsilon_n(s)$. Αυτό μας απαλλάσσει από τη συνεχή χρήση του συντελεστή προεξόφλησης. Χρησιμοποιώντας τη λίστα αυτή προσδιορίζουμε τις θέσεις (χρόνος, τιμή μετοχής) στις οποίες πρέπει να γίνει εξάσκηση του Δικαιώματος. Συγκεκριμένα, ελέγχουμε κάθε στοιχείο της λίστας *discountedu* και αν κάποιο από αυτά είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των δύο αντίστοιχων τιμών της επόμενης περιόδου πολλαπλασιασμένων με τις πιθανότητες ουδέτερου ρίσκου (βλέπε σχέση 6.2.8), τότε προσθέτουμε την αντίστοιχη τιμή της μετοχής ως τεταγμένη σε μια νέα λίστα που την ονομάζουμε *optimal*, με τετμημένη την αντίστοιχη χρονική περίοδο. Τέλος, γίνεται έλεγχος μήπως τυχόν είναι συμφέρουσα η άμεση εξάσκηση του Δικαιώματος (στον χρόνο μηδέν). Εάν συμβαίνει αυτό το πρόγραμμα εμφανίζει ως αποτέλεσμα τη φράση «*It is optimal to exercise now*», ενώ στην αντίθετη περίπτωση κατασκευάζει ένα διάγραμμα στο οποίο αναπαρίστανται οι τιμές της λίστας *optimal*. Η αρχή των αξόνων στο διάγραμμα είναι το (0, *K*). Το αποτέλεσμα είναι το ακόλουθο:



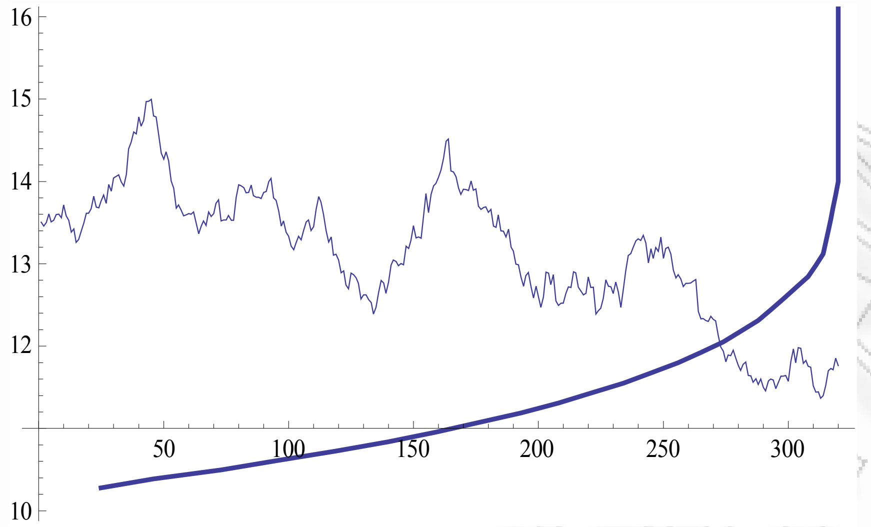
Σχήμα 7.1.1. Το σύνολο των χρόνων εξάσκησης ενός Δικαιώματος Πώλησης Αμερικανικού τύπου με υποκείμενο τίτλο τη μετοχή της Ο.Τ.Ε. Α.Ε.

Παίρνοντας μεγάλο αριθμό περιόδων (εδώ $n = 320$) βλέπουμε ότι στο παραπάνω σχήμα σκιαγραφείται μια περιοχή (σκούρα περιοχή) μέσα στην οποία μόλις βρεθούμε θα πρέπει να άμεσα να εξασκήσουμε το Δικαίωμα. Συγκεκριμένα, η βέλτιστη εξάσκηση πρέπει να γίνει ακριβώς τη στιγμή που η τιμή της μετοχής εισέλθει για πρώτη φορά στην κρίσιμη περιοχή. Με άλλα λόγια, το *σύνορο βέλτιστης διακοπής* ή *εξάσκησης* (*optimal stopping boundary*) είναι το άνω όριο ή σύνορο της περιοχής εξάσκησης. Αν αναλύσουμε το Σχήμα 7.1.1 λεπτομερέστερα, θα βρούμε ότι το σύνορο βέλτιστης διακοπής δίνεται από την τεθλασμένη γραμμή που φαίνεται στο Σχήμα 7.1.2 παρακάτω (για τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων). Πρόκειται για τεθλασμένη γραμμή διότι εργαζόμαστε στο διωνυμικό μοντέλο όπου η μετοχή μπορεί να πάρει διακριτές τιμές. Μια καλύτερη προσέγγιση του μοντέλου συνεχούς χρόνου αποτελεί η κυρτή καμπύλη που φαίνεται στο ίδιο σχήμα.

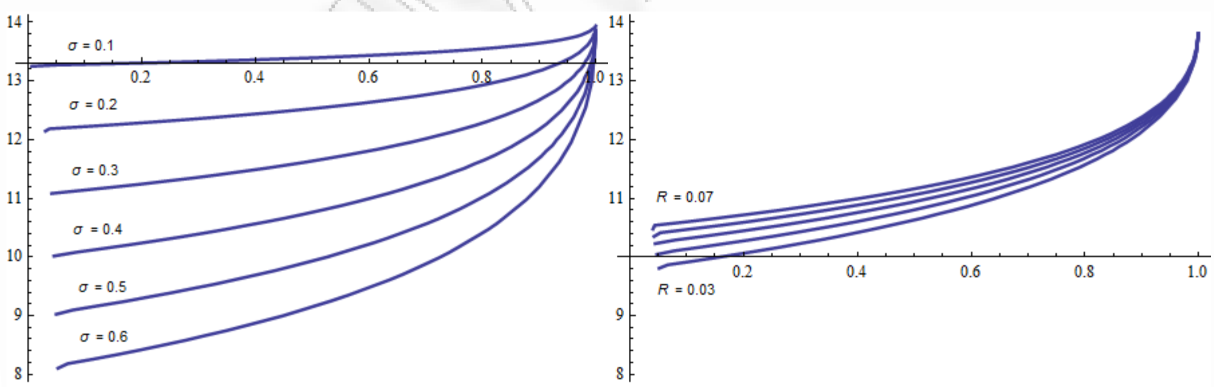


Σχήμα 7.1.2. Το σύνορο βέλτιστης διακοπής

Για παράδειγμα, στο ακόλουθο σχήμα παριστούμε μια τυχαία διαδρομή της τιμής της μετοχής (ξεκινώντας από την τιμή $S_0 = 13.4$) μαζί με το σύνορο βέλτιστης εξάσκησης που βρήκαμε στο προηγούμενο σχήμα. Σύμφωνα με τα παραπάνω, θα πρέπει να εξασκήσουμε το Δικαίωμα μόλις η τιμή τμήσει για πρώτη φορά το σύνορο βέλτιστης εξάσκησης. Αυτό φαίνεται να γίνεται στο παρακάτω παράδειγμα στο χρόνο $272/320\ T \approx 2.55$ μήνες.



Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι το σύνορο βέλτιστης εξάσκησης αυξάνεται όσο περνάει ο χρόνος. Αυτό συμβαίνει γιατί με την πάροδο του χρόνου το αναμενόμενο κέρδος από τη μη εξάσκηση του Δικαιώματος χάνει την αξία του λόγω της προεξόφλησης κι έτσι γίνεται συμφέρουσα η άμεση εξάσκηση για περισσότερες τιμές της μετοχής. Μάλιστα πρόσφατα αποδείχθηκε ότι το σύνορο βέλτιστης εξάσκησης στο μοντέλο Black and Scholes είναι κυρτή συνάρτηση του χρόνου (βλ. Ekström (2004)) κάτι που επαληθεύεται από το παραπάνω σχήμα. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλεται το σύνορο βέλτιστης εξάσκησης ανάλογα με τις τιμές των σ και R. Στα δύο ακόλουθα γραφήματα βλέπουμε το αποτέλεσμα για $\sigma = 0.1, 0.2, \ldots, 0.6$ και $R = 0.03, 0.04, \ldots, 0.07$:



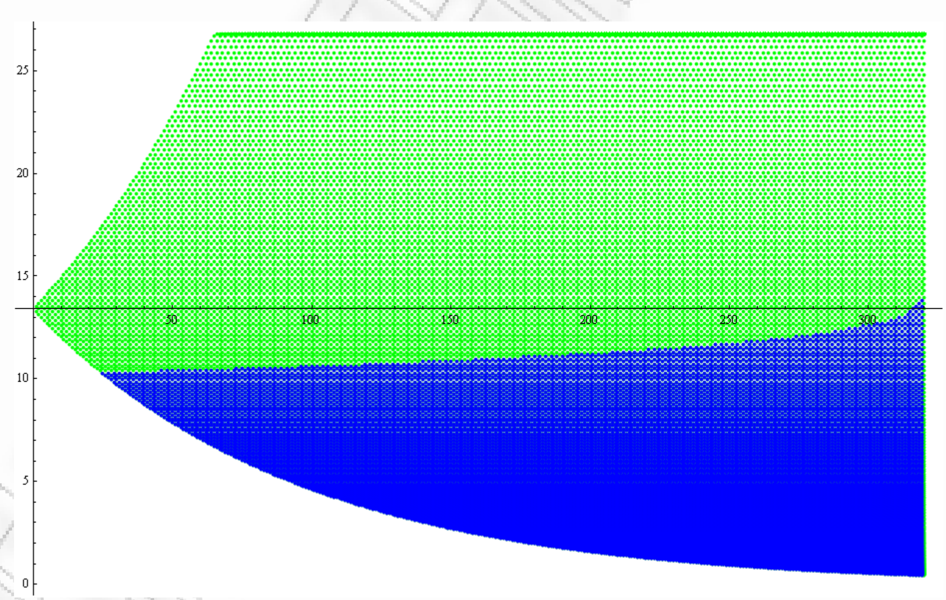
Σχήμα 7.1.3. Μεταβολή του συνόρου βέλτιστης διακοπής ως προς τις παραμέτρους σ και R

Παρατηρούμε ότι το σύνορο βέλτιστης διακοπής μεταβάλλεται σημαντικά όσο αλλάζει η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής. Για μικρότερες τιμές του σ, το σύνορο μετατοπίζεται υψηλότερα και εμφανίζεται «νωρίτερα». Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και όταν το επιτόκιο της ασφαλούς επένδυσης παίρνει μεγαλύτερες τιμές, χωρίς όμως το σύνορο να διαφοροποιείται σημαντικά σε αυτήν την περίπτωση.

Το επόμενο διάγραμμα που θα κατασκευάσουμε αναπαριστά όλες τις δυνατές τιμές της μετοχής με βάση το διωνυμικό μοντέλο παρουσιάζοντας με διαφορετικό χρώμα την κρίσιμη περιοχή όπου είναι βέλτιστη η εξάσκηση. Χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο:

```
sigma={};
Do[
  Do[sigma=Append[sigma,{i,S[[i,j]]}],{j,1,Length[S[[i]]]}]
  ,{i,1,n}];
Do[If[sigma[[i,2]]>2*S0,sigma[[i,2]]=2*S0],{i,1,Length[sigma]}];
ListPlot[{sigma,optimal},AxesOrigin→{0,S0}]
```

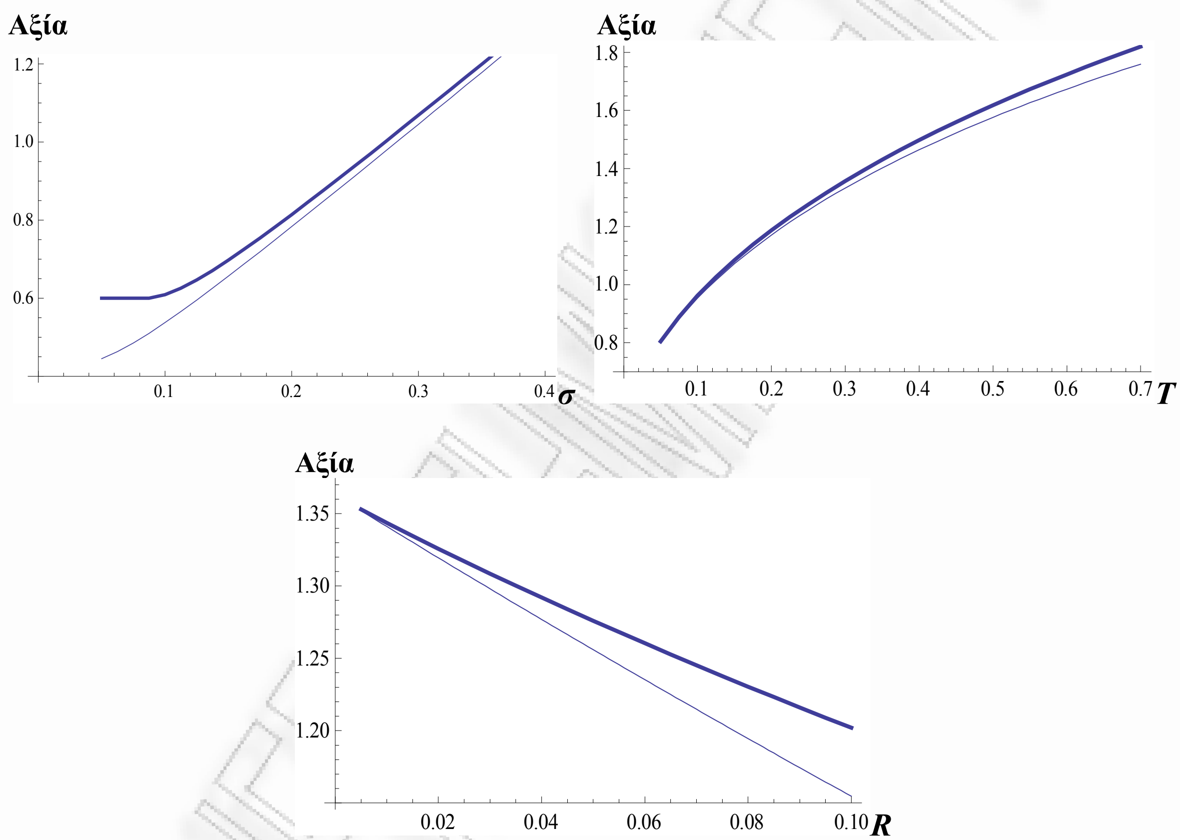
Το μόνο που κάνουμε είναι να φτιάξουμε μια λίστα *sigma* η οποία περιλαμβάνει όλες τις πιθανές τιμές της μετοχής ως τεταγμένες, έχοντας ως τετμημένες τις αντίστοιχες χρονικές περιόδους στις οποίες βρίσκονται. Έπειτα φτιάχνουμε ένα κοινό διάγραμμα για τις λίστες *sigma* και *optimal* που έχει ως αρχή των αξόνων το (0, S_0), φροντίζοντας οι ανώτερες τιμές που θα απεικονίζονται να μην ξεπερνούν το διπλάσιο της σημερινής τιμής της μετοχής. Έτσι προκύπτει το ζητούμενο διάγραμμα:



Σχήμα 7.1.4. Η περιοχή εξάσκησης ενός Δικαιώματος Πώλησης Αμερικανικού τύπου με υποκείμενο τίτλο τη μετοχή της Ο.Τ.Ε. Α.Ε.

Το διάγραμμα αυτό αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στα χέρια του κατόχου του Δικαιώματος διότι του δίνει την ευχέρεια να γνωρίζει ανά πάσα στιγμή τι πρέπει να πράξει. Θα μπορούσε μάλιστα να το χρησιμοποιήσει σε συνδυασμό με ένα online σύστημα παρακολούθησης της τιμής της μετοχής και να το ορίσει έτσι ώστε να τον ειδοποιεί σε περίπτωση που η τιμή εισέλθει στην κρίσιμη περιοχή.

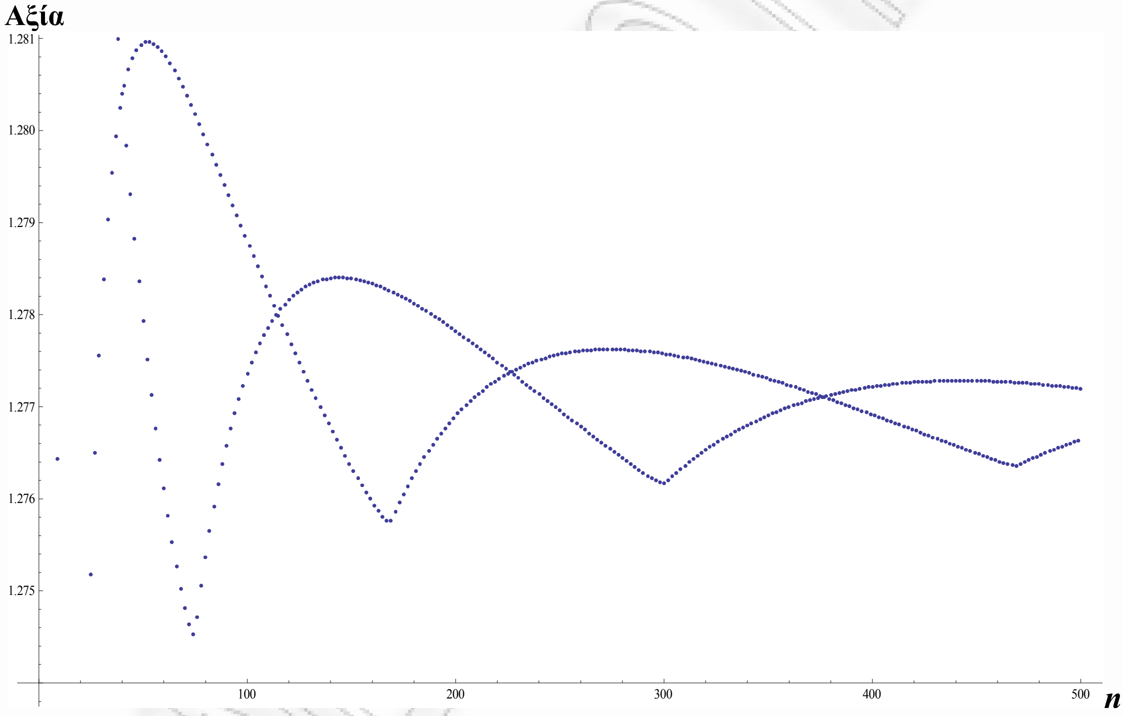
Στο σημείο αυτό είμαστε σε θέση να κάνουμε ορισμένες ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις για τον τρόπο που διαμορφώνεται η αξία του Δικαιώματος. Θα αναφερθούμε στο πώς αυτή επηρεάζεται από την αλλαγή των παραμέτρων σ, T, R και n, αλλά και από τη διαφορά μεταξύ S_0 και K. Δοκιμάζουμε λοιπόν να μεταβάλλουμε καθεμιά από αυτές κρατώντας τις υπόλοιπες σταθερές. Έτσι λαμβάνουμε τα εξής διαγράμματα:



Σχήμα 7.1.5. Γράφημα της αξίας ενός Δικαιώματος Πώλησης Αμερικανικού τύπου ως προς τις παραμέτρους *σ*, *T* και *R* (*με λεπτή γραμμή η αξία του αντίστοιχου Δικαιώματος Ευρωπαϊκού τύπου*)

Παρατηρούμε ότι η μείωση της μεταβλητότητας της τιμής της μετοχής, η μείωση της χρονικής διάρκειας του συμβολαίου και η αύξηση του επιτοκίου της ασφαλούς επένδυσης έχουν αρνητική επίπτωση στην αξία του Δικαιώματος. Τα αντίθετά τους έχουν προφανώς θετική επίπτωση. Ο λόγος που η μείωση των T και σ ελαττώνει την αξία του Δικαιώματος είναι επειδή και τα δύο έχουν ως αποτέλεσμα την ύπαρξη λιγότερων χαμηλών δυνατών τιμών της μετοχής. Ιδιαίτερα εάν το σ είναι μεγάλο, προκύπτουν «συντομότερα» πολλές χαμηλές δυνατές τιμές της μετοχής στο μοντέλο και άρα περισσότεροι βέλτιστοι χρόνοι εξάσκησης που ανεβάζουν την αξία Από την άλλη, όσο μεγαλύτερο είναι το επιτόκιο με το οποίο προεξοφλούμε τόσο τα πιθανά κέρδη χάνουν την αξία τους, με αποτέλεσμα και η αρχική αξία του Δικαιώματος να είναι μειωμένη.

Επόμενη παράμετρος με την οποία θα ασχοληθούμε είναι ο αριθμός των περιόδων που περιλαμβάνει το μοντέλο. Προκειμένου να διαπιστώσουμε την επίδραση που έχει στην προσέγγιση της αξίας του Δικαιώματος Πώλησης ένα μικρό ή μεγάλο *n*, θα κατασκευάσουμε ένα διάγραμμα το οποίο στον οριζόντιο άξονα θα έχει τον αριθμό των περιόδων και στον κατακόρυφο την αξία. Μέσω κατάλληλου αλγορίθμου ο οποίος δίνεται στο Παράρτημα (βλ. Π.4)[4], θα υπολογίσουμε και θα αναπαραστήσουμε την αξία του υπό μελέτη Δικαιώματος για *n* από 2 έως 500. Το διάγραμμα που προκύπτει είναι το ακόλουθο:

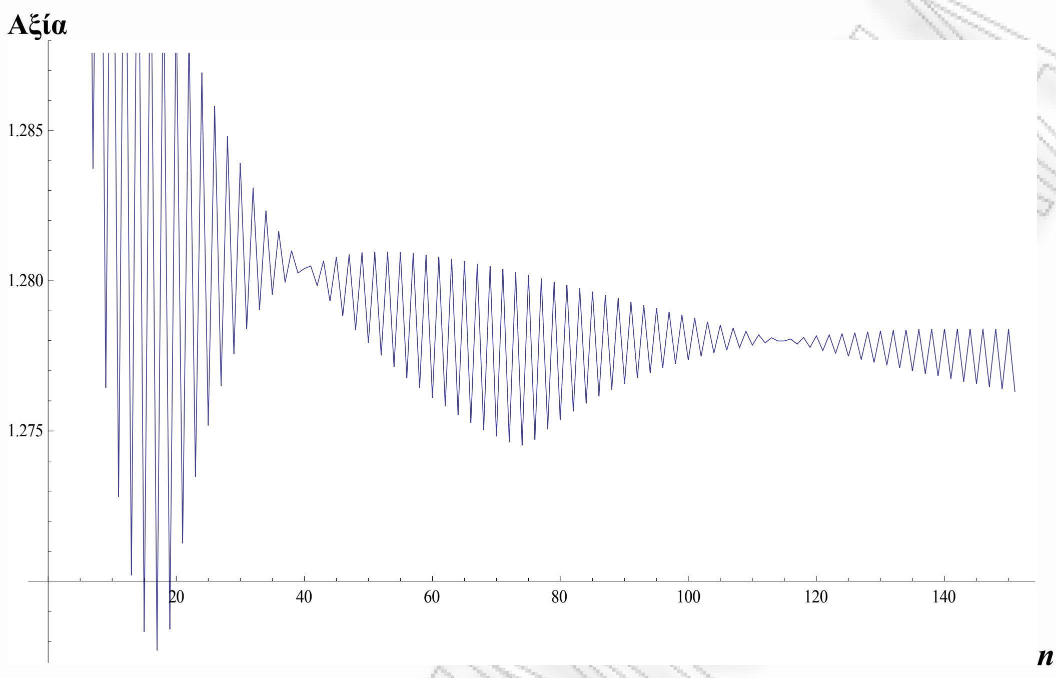


Σχήμα 7.1.6. Εκτίμηση της αξίας ενός Δικαιώματος Πώλησης Αμερικανικού τύπου ως προς τον αριθμό *n* των περιόδων του μοντέλου

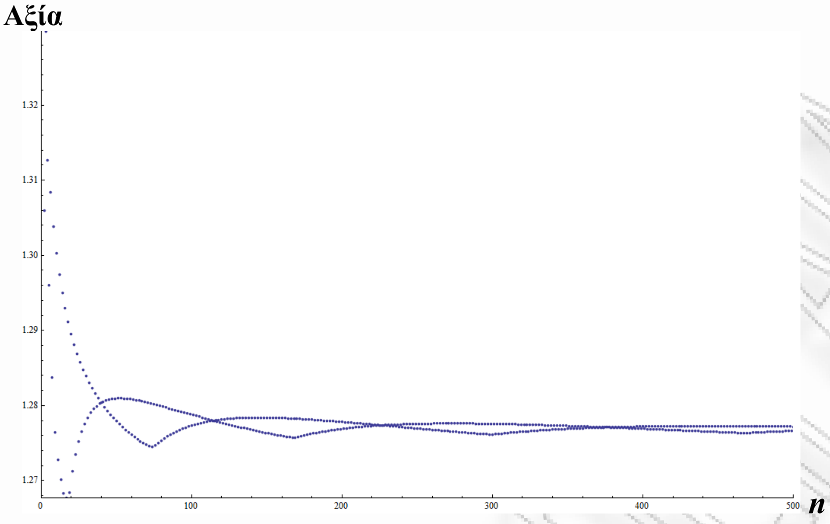
Προφανώς αναμένουμε ότι η αύξηση του πλήθους των περιόδων θα βελτιώσει την προσέγγιση της αξίας διότι θα είμαστε πιο κοντά στο μοντέλο του συνεχούς χρόνου. Προς έκπληξή μας όμως παρατηρούμε ότι τα σημεία που εκφράζουν την προσεγγιστική τιμή του Δικαιώμα-

[4] Ουσιαστικά πρόκειται για τον αλγόριθμο υπολογισμού της αξίας ενός Δικαιώματος Αμερικανικού τύπου που παρουσιάσαμε νωρίτερα, με τη διαφορά ότι ολόκληρος αυτός ο αλγόριθμος έχει εισαχθεί σε μια επαναληπτική εντολή που αλλάζει κάθε φορά το *n* και αποθηκεύει το αποτέλεσμα σε μια νέα λίστα.

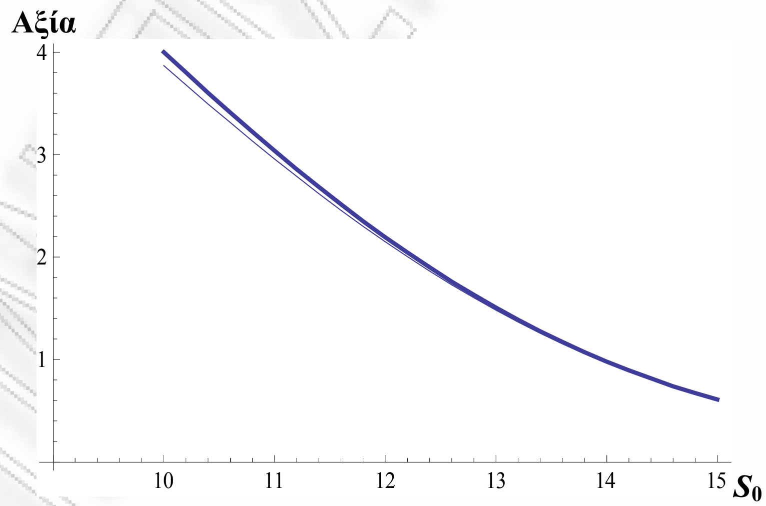
τος φαίνεται να συγκλίνουν σε μια τιμή όσο το *n* αυξάνεται, αλλά όχι μονότονα. Αυτό φαίνεται καθαρότερα στο ακόλουθο γράφημα όπου ενώνουμε τις προσεγγιστικές τιμές (*n* < 150).



Θα περίμενε κανείς να υπάρχει υποεκτίμηση ή υπερεκτίμηση της αξίας για μικρό *n* και σύγκλιση για μεγάλο *n*. Ωστόσο το διάγραμμα παρουσιάζει μια ιδιαίτερη μορφή η οποία δημιουργεί ερωτήματα. Το πιο σημαντικό στοιχείο είναι οι «αναπηδήσεις» της προσέγγισης της αξίας του Δικαιώματος για διαδοχικές τιμές του *n*. Οι αναπηδήσεις αυτές είναι πιο έντονες για μικρά *n*, ενώ εξομαλύνονται για μεγάλα. Η εικόνα αυτή του διαγράμματος οφείλεται στη διακριτοποίηση του χρόνου και στο διωνυμικό μοντέλο που επιτρέπει μόνο δύο δυνατές κινήσεις της τιμής μεταξύ διαδοχικών περιόδων. Μια καλύτερη εκτίμηση της αξίας του Δικαιώματος είναι ο μέσος όρος των εκτιμήσεων δύο διαδοχικών περιόδων. Γενικά πάντως, για *n* μεγαλύτερο από 100 οι διαφορές που παρατηρούνται είναι μικρότερες της τάξης του 0.003 και κατά συνέπεια μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες. Η μικρότερη εκτιμώμενη αξία του Δικαιώματος είναι 1.2677€ και η μεγαλύτερη 1.32979€. Επανασχεδιάζοντας το παραπάνω διάγραμμα με πιο πλατύ εύρος στον κατακόρυφο άξονα ώστε να περιλαμβάνει όλες τις τιμές που προέκυψαν, εύκολα αντιλαμβανόμαστε ότι τελικά αυτές συγκλίνουν:



Κλείνοντας την παράγραφο αυτή, θα εξετάσουμε σε τι βαθμό επηρεάζει την αξία του Δικαιώματος η διαφορά ανάμεσα στην παρούσα τιμή της μετοχής και την τιμή εξάσκησης. Όπως στον αριθμό των περιόδων του μοντέλου έτσι κι εδώ, μια διαγραμματική απεικόνιση είναι το καλύτερο μέσο για να αντιληφθούμε τι ακριβώς συμβαίνει. Στο νέο διάγραμμα ο οριζόντιος άξονας θα συμβολίζει την παρούσα τιμή της μετοχής και ο κατακόρυφος την αξία. Χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο αλγόριθμο ο οποίος δίνεται στο Παράρτημα (βλ. Π.5)[5], προκύπτει το ακόλουθο διάγραμμα που παριστάνει τις διαφορετικές εκτιμήσεις για την αξία του Δικαιώματος για S_0 από 10€ έως 15€ με βήμα 0.05 (η τιμή εξάσκησης παραμένει σταθερή στα 14€):



Σχήμα 7.1.7. Γράφημα της αξίας ενός Δικαιώματος Πώλησης Αμερικανικού τύπου ως προς τη διαφορά μεταξύ S_0 και K (*με λεπτή γραμμή η αξία του αντίστοιχου Δικαιώματος Ευρωπαϊκού τύπου*)

[5] Και πάλι κάνουμε χρήση του αλγορίθμου αποτίμησης Δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου, μόνο που τώρα αλλάζουμε κάθε φορά την τιμή του S_0 και αποθηκεύουμε το αποτέλεσμα σε μια νέα λίστα.

Το αποτέλεσμα εδώ είναι απόλυτα αναμενόμενο. Όταν το S_0 βρίσκεται αρκετά πιο κάτω από την τιμή εξάσκησης, τότε είναι λογικό το Δικαίωμα να κοστίζει περισσότερο αφού ακόμη και με μικρές πτώσεις της τιμής της μετοχής ο κάτοχος θα έχει την ευκαιρία να το εξασκήσει πρόωρα και να αποκομίσει κέρδος. Αντίθετα όταν η παρούσα τιμή της μετοχής ξεπερνά κατά πολύ την τιμή εξάσκησης, το Δικαίωμα πρέπει να κοστίζει λιγότερο δεδομένου ότι ο κάτοχός του θα πρέπει να αναμένει σημαντική πτώση της τιμής προκειμένου να μπορεί να το εξασκήσει. Στην πρώτη περίπτωση η ακραία τιμή που μπορεί να πάρει το Δικαίωμα είναι η διαφορά $K - S_0$ (και μάλιστα τότε είναι συμφέρουσα η άμεση εξάσκησή του), ενώ στη δεύτερη η τιμή μηδέν, δηλαδή δεν αξίζει η αγορά του.

7.2 Αποτίμηση Δικαιωμάτων Πώλησης Ασιατικού-Αμερικανικού τύπου (path-depended)

Η περίπτωση των Δικαιωμάτων Προαίρεσης των οποίων η αξία εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθεί η τιμή της υποκείμενης μετοχής, είναι σαφώς πιο σύνθετη από τα non-path-depended Δικαιώματα. Εκτός από την πιο λεπτομερή θεωρητική αντιμετώπιση που απαιτούν, παρουσιάζουν σημαντικές δυσκολίες και στην υλοποίηση προκειμένου αυτά να αποτιμηθούν με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή. Επίσης, όπως ήδη γνωρίζουμε, στη γενική περίπτωση θα πρέπει σε κάθε χρονική περίοδο n να εξετάζουμε τις 2^n δυνατές διαδρομές της τιμής της μετοχής και όχι μόνο τις $n + 1$ δυνατές τιμές. Αυτό συνεπάγεται τη χρήση πολύ περισσότερων πόρων του υπολογιστή προκειμένου να φέρει σε πέρας τις απαιτούμενες πράξεις.

Για την αποτίμηση *Δικαιωμάτων Πώλησης Ασιατικού-Αμερικανικού* τύπου κατασκευάστηκε εξ ολοκλήρου ένας νέος, πιο πολύπλοκος αλγόριθμος. Στα συγκεκριμένα Δικαιώματα αρκεί να εξετάζουμε σε κάθε περίοδο (α) την τιμή της μετοχής και (β) το άθροισμα των προηγούμενων τιμών της μετοχής (και όχι όλη την προηγούμενη διαδρομή). Ως συνέπεια, αυξάνεται σημαντικά η υπολογιστική ισχύς που απαιτείται. Για παράδειγμα, μέχρι την εικοστή περίοδο πρέπει να υπολογιστούν 2097150 δυνατές τιμές της μετοχής και άρα δεν μας δίνεται η δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε μεγάλο αριθμό περιόδων. Ωστόσο μπορούμε να αποκτήσουμε μια καλή εικόνα για το τι συμβαίνει με αυτού του είδους τα Δικαιώματα. Τα βήματα του νέου αλγορίθμου είναι τα εξής:

Βήμα 1: Ορισμός των χαρακτηριστικών του Δικαιώματος (γίνεται από τον χρήστη).

Βήμα 2: Υπολογισμός των u, d, $\widetilde{p}$ και $\widetilde{q}$.

Βήμα 3: Υπολογισμών των πιθανών τιμών της μετοχής για κάθε χρονική στιγμή.

Βήμα 4: Υπολογισμός της αξίας του Δικαιώματος για κάθε πιθανή τιμή s, άθροισμα y και χρονική στιγμή n, δηλαδή εύρεση των $\upsilon_n(s,y)$. Τελικά προκύπτει το $\upsilon_0(S_0,S_0)$ που είναι η ζητούμενη αρχική αξία του Δικαιώματος.

Στο πρώτο βήμα ο χρήστης ορίζει τα χαρακτηριστικά του Δικαιώματος όπως προηγουμένως, με τη διαφορά βέβαια ότι τώρα δεν ορίζει συγκεκριμένη τιμή εξάσκησης. Η τιμή εξάσκησης στα Ασιατικά Δικαιώματα *ορίζεται ως ο μέσος όρος των τιμών που πήρε η μετοχή μέχρι να καταλήξει στην εκάστοτε χρονική στιγμή* (βλ. 6.2. Δικαιώματα Προαίρεσης των οποίων η αξία εξαρτάται από τη διαδρομή της τιμής της μετοχής). Ξεκινάμε παραθέτοντας το πρώτο μέρος του αλγορίθμου (βλ. Π.6 Παραρτήματος για ολόκληρο τον αλγόριθμο):

```
n=20;T=3/12;σ=0.379512254;R=0.049625;
S0=13.4;
h=T/n;
r=h*R;
up=Exp[σ*(h^(0.5))];
down=Exp[-σ*(h^(0.5))];
p=1/2*(1+(R-σ^2/2)/σ*h^0.5);
q=1-p;
S=Table[0,{n}];
Do[S[[i]]=Table[{0,0},{2^i}],{i,1,n}];
S[[1,1]]={S0*up,S0*up+S0};S[[1,2]]={S0*down,S0*down+S0};
Do[
  For[j=1,j<Length[S[[i]]],j=j+2,
   S[[i,j]]={S[[i-1,j/2+0.5,1]]*up,
     S[[i-1,j/2+0.5,1]]*up+S[[i-1,j/2+0.5,2]]}];
  For[j=2,j≤Length[S[[i]]],j=j+2,
   S[[i,j]]={S[[i-1,j/2,1]]*down,
     S[[i-1,j/2,1]]*down+S[[i-1,j/2,2]]}]
    ,{i,2,n}];
```

Στις δύο πρώτες σειρές εντολών ο χρήστης ορίζει τα χαρακτηριστικά του Δικαιώματος. Έπειτα γίνεται υπολογισμός των ποσοτήτων h, r, u, d, $\widetilde{p}$ και $\widetilde{q}$ και κατασκευάζεται μια λίστα S η οποία περιλαμβάνει όλες τις δυνατές τιμές της μετοχής, μαζί με τα αθροίσματα των τιμών που πήρε η μετοχή μέχρι να φτάσει σε κάθε τιμή. Έτσι, το $S[[i,j,1]]$ στοιχείο εκφράζει την j-οστή τιμή της μετοχής της i-οστής χρονικής περιόδου, ενώ το $S[[i,j,2]]$ εκφράζει το άθροισμα των τιμών της διαδρομής που ακολούθησε η μετοχή για να φτάσει στη συγκεκριμένη τιμή. Το $S[[i,j]]$ περιλαμβάνει τα $S[[i,j,1]]$ και $S[[i,j,2]]$ μαζί, δηλαδή το (s,y). Με αυτόν τον τρόπο, όλα τα στοιχεία $S[[i,j]]$ που προκύπτουν είναι μοναδικά, με την έννοια ότι το κάθε ένα αντιπροσωπεύει ένα διαφορετικό συνδυασμό ενδεχομένων ανόδου και πτώσης της τιμής της μετοχής. Η συγκεκριμένη ακολουθία εντολών δεν δίνει κάποιο output.

Προχωρούμε στο δεύτερο μέρος του αλγορίθμου:

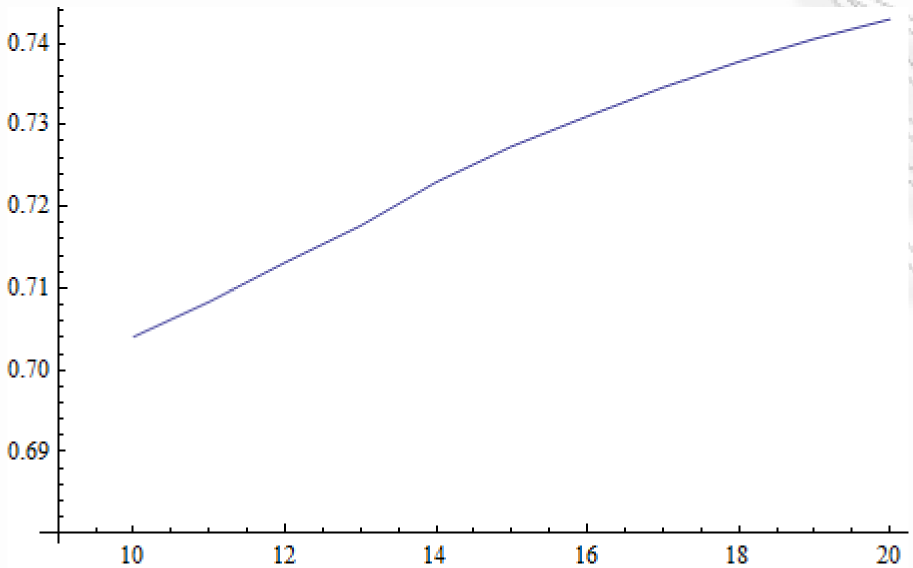
```
u=Table[0,{n}];
Do[u[[i]]=Table[{0,0},{2^i}],{i,1,n}];
Do[u[[n,j]]={Max[(1/(n+1))*S[[n,j,2]]-S[[n,j,1]],0],
    S[[n,j,2]]},{j,1,2^n}];
Do[
  Do[
    u[[i,j]]={Max[(1/(i+1))*S[[i,j,2]]-S[[i,j,1]],
       Exp[-r]*(p*u[[i+1,2*j-1,1]]+q*u[[i+1,2*j,1]])],
      S[[i,j,2]]}
    ,{j,1,2^i}];
  ,{i,n-1,1,-1}];
u0=Max[Exp[-r]*(p*u[[1,1,1]]+q*u[[1,2,1]]),0];
Print["Αξία Δικαιώματος = ",u0," €"]
```

Εδώ γίνεται υπολογισμός των $\upsilon_i(s,y)$. Για την αποθήκευσή τους δημιουργείται η λίστα u η οποία έχει την ίδια δομή με τη λίστα S. Ο υπολογισμός των $\upsilon_i(s,y)$ γίνεται αναδρομικά μέσω του τύπου που δώσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για τα Δικαιώματα Ασιατικού-Αμερικανικού τύπου (βλ. σχέση 6.2.13). Στο τελικό βήμα υπολογίζεται το $\upsilon_0(S_0,S_0)$, το οποίο είναι και το αποτέλεσμα που δίνει το πρόγραμμα:

```
Αξία Δικαιώματος = 0.742969 €
```

Η εξήγηση για την τιμή που παίρνει το συγκεκριμένο Δικαίωμα είναι ότι η τιμή εξάσκησης, (που σε κάθε συνδυασμό ενδεχομένων είναι διαφορετική) είναι κατά μέσο όρο χαμηλότερη από 14€ που ήταν για το απλό Αμερικανικό Δικαίωμα και συνεπώς τα πιθανά κέρδη που υπολογίζονται είναι χαμηλότερα από πριν και άρα και η τελική αξία. Η κατασκευή ενός γραφήματος που να απεικονίζει τις θέσεις βέλτιστης εξάσκησης (όπως π.χ. το Σχήμα 7.1.1) είναι σε αυτήν την περίπτωση πρακτικά αδύνατη λόγω της φύσης του Δικαιώματος. Δεδομένου ότι η τιμή εξάσκησης είναι μεταβαλλόμενη, ο κάτοχος πρέπει να βρίσκεται συνεχώς σε εγρήγορση ώστε αμέσως μόλις αυτή φτάσει σε ικανοποιητικά επίπεδα (ο κανόνας βέλτιστης διακοπής περιγράφεται από την σχέση 6.2.8), να το εξασκήσει και να αποκομίσει κέρδος.

Κλείνοντας, ας δούμε πως επηρεάζεται η εκτίμηση της αξίας του Δικαιώματος από την αυξομείωση του αριθμού των περιόδων που περιλαμβάνει το μοντέλο. Κατασκευάζουμε ένα διάγραμμα στο οποίο ο οριζόντιος άξονας συμβολίζει το n και ο κατακόρυφος την αξία. Ο σχετικός αλγόριθμος δίνεται στο Παράρτημα (βλ. Π.7). Για *n* από 10 έως 20, το διάγραμμα έχει ως εξής:



Σχήμα 7.2.1. Εκτίμηση της αξίας ενός Δικαιώματος Πώλησης Ασιατικού-Αμερικανικού τύπου ως προς τον αριθμό *n* των περιόδων του μοντέλου

Είναι ξεκάθαρο ότι αν μπορούσαμε να συμπεριλάβουμε περισσότερες περιόδους στο μοντέλο η αξία του Δικαιώματος θα έπαιρνε μεγαλύτερη τιμή, αφού φαίνεται ότι υπάρχει μια σχετική υποεκτίμηση της αξίας του Δικαιώματος. Δυστυχώς η αποτελεσματικότητα της μεθόδου δεν είναι η επιθυμητή, αφού απαιτείται εκθετικά αυξανόμενη επεξεργαστική ισχύς προκειμένου να ολοκληρωθούν όλοι οι απαιτούμενοι υπολογισμοί. Όπως άλλωστε είχαμε επισημάνει στο εισαγωγικό κεφάλαιο, γενικά τα exotic options προσφέρουν ξεχωριστά προνόμια στους κατόχους, αλλά απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή τόσο κατά την τιμολόγηση, όσο και κατά την επιλογή τους από επενδυτές.

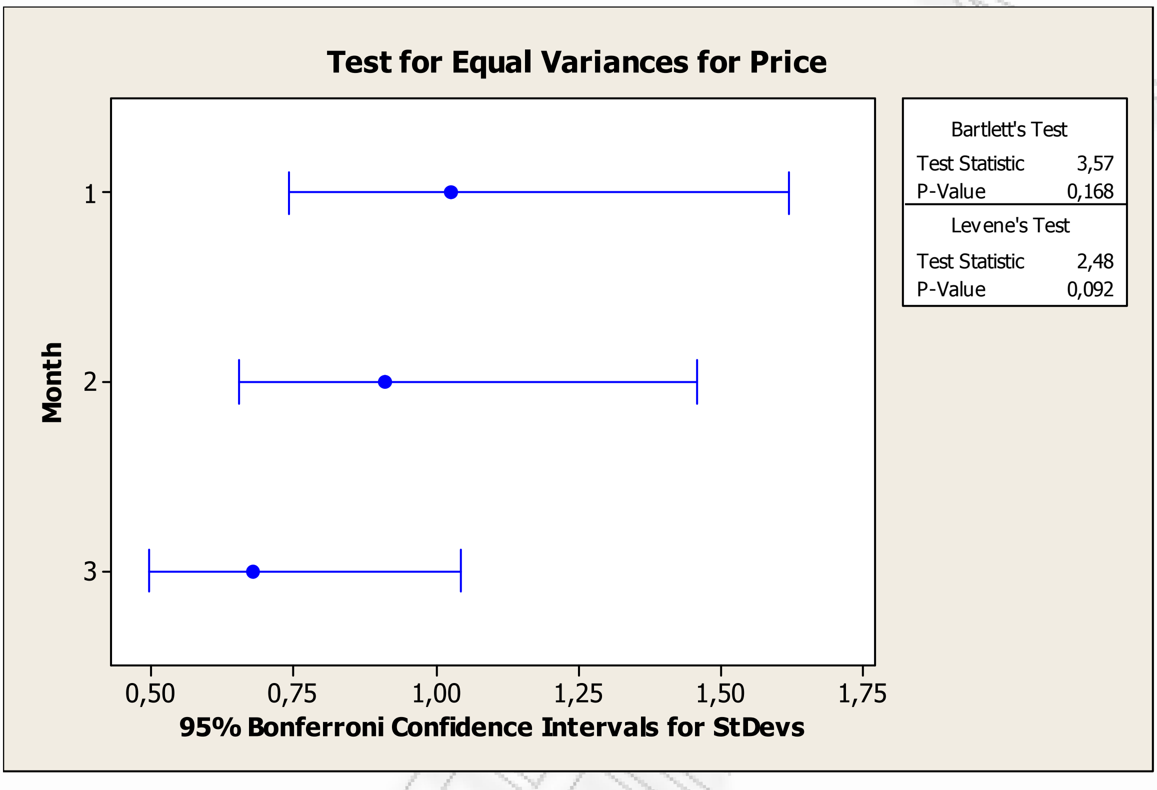
Π Α Ρ Α Ρ Τ Η Μ Α

Π.1. Τιμές κλεισίματος της μετοχής της Ο.Τ.Ε. Α.Ε. για το τρίμηνο Μαΐου-Ιουλίου 2008 και υπολογισμός της μεταβλητότητας

Ημερομηνία	Τιμή Κλεισίματος	Μήνας	X_i	σ^2	σ
02/05/2008	19.4	1	-0.00617	Τριμήνου	
05/05/2008	19.52	1	0.004107	0.144029551	0.379512254
06/05/2008	19.44	1	-0.0264		
07/05/2008	19.96	1	-0.02474		
08/05/2008	20.46	1	0.012789		
09/05/2008	20.2	1	-0.01181		
12/05/2008	20.44	1	-0.0078		
13/05/2008	20.6	1	0.009756		
14/05/2008	20.4	1	0.080615		
15/05/2008	18.82	1	-0.00424		
16/05/2008	18.9	1	0.01278		
19/05/2008	18.66	1	0.014032		
20/05/2008	18.4	1	0.010929		
21/05/2008	18.2	1	0.019978		
22/05/2008	17.84	1	-0.02108		
23/05/2008	18.22	1	0.024446		
26/05/2008	17.78	1	0.00904		
27/05/2008	17.62	1	-0.03239		
28/05/2008	18.2	1	0.018858		
29/05/2008	17.86	1	-0.00781		
30/05/2008	18	1	-0.00333		
02/06/2008	18.06	2	-0.02946		
03/06/2008	18.6	2	0.02725		
04/06/2008	18.1	2	-0.00221		
05/06/2008	18.14	2	0.007748		
06/06/2008	18	2	0.01907		
09/06/2008	17.66	2	0.032224		
10/06/2008	17.1	2	0.020083		
11/06/2008	16.76	2	0.016848		
12/06/2008	16.48	2	-0.00726		
13/06/2008	16.6	2	0.007255		
17/06/2008	16.48	2	-0.01565		
18/06/2008	16.74	2	-0.00119		
19/06/2008	16.76	2	-0.00119		
20/06/2008	16.78	2	0.060178		
23/06/2008	15.8	2	0.015306		
24/06/2008	15.56	2	-0.02789		
25/06/2008	16	2	0		
26/06/2008	16	2	0		
27/06/2008	16	2	0		
30/06/2008	16	2	0.064539		
01/07/2008	15	3	0.013423	Τελευταίου Μήνα	
02/07/2008	14.8	3	0	0.138736228	0.372473124

03/07/2008	14.8	3	-0.01342		
04/07/2008	15	3	-0.00133		
07/07/2008	15.02	3	0.002667		
08/07/2008	14.98	3	-0.03283		
09/07/2008	15.48	3	0.011696		
10/07/2008	15.3	3	0.019803		
11/07/2008	15	3	-0.01718		
14/07/2008	15.26	3	0.038749		
15/07/2008	14.68	3	0.005464		
16/07/2008	14.6	3	-0.01765		
17/07/2008	14.86	3	-0.00403		
18/07/2008	14.92	3	0.023052		
21/07/2008	14.58	3	0.040593		
22/07/2008	14	3	-0.02817		
23/07/2008	14.4	3	0.035339		
24/07/2008	13.9	3	0.051672		
25/07/2008	13.2	3	-0.02247		
28/07/2008	13.5	3	-0.00591		
29/07/2008	13.58	3	-0.00147		
30/07/2008	13.6	3	0.014815		
31/07/2008	13.4	3			

Π.2. Έλεγχος ομοσκεδαστικότητας των τιμών της μετοχής της Ο.Τ.Ε. Α.Ε. το τρίμηνο Μαΐου-Ιουλίου 2008



Π.3. Αλγόριθμος υπολογισμού της αξίας ενός Δικαιώματος Πώλησης Αμερικανικού τύπου στο διωνυμικό μοντέλο *n* περιόδων

```
n=320;T=3/12;σ=0.379512254;R=0.049625;
S0=13.4;
K=14;
h=T/n;
r=h*R;
up=Exp[σ*(h^(0.5))];
down=Exp[-σ*(h^(0.5))];
p=1/2*(1+(R-σ^2/2)/σ*h^0.5);
q=1-p;
S=Table[0,{n}];
Do[S[[i]]=Table[0,{i+1}],{i,1,n}];
Do[
  Do[S[[i,j]]=S0*(up^(i-j+1))*(down^(j-1))
    ,{j,1,Length[S[[i]]]}];
  ,{i,1,n}];
Print["up = ",up]
Print["down = ",down]
Print["p = ",p]
Print["q = ",q]
u=Table[0,{n}];
Do[u[[i]]=Table[0,{i+1}],{i,1,n}];
Do[u[[n,j]]=Max[K-S[[n,j]],0],{j,1,n+1}];
Do[
  Do[u[[i,j]]=Max[K-S[[i,j]],Exp[-r]*(p*u[[i+1,j]]+q*u[[i+1,j+1]])]
    ,{j,1,Length[u[[i]]]}];
  ,{i,n-1,1,-1}];
u0=Max[K-S0,Exp[-r]*(p*u[[1,1]]+q*u[[1,2]])];
Print["Αξία Δικαιώματος = ",u0," €"]
```

Π.4. Αλγόριθμος υπολογισμού της αξίας ενός Δικαιώματος Πώλησης Αμερικανικού τύπου για διαφορετικό αριθμό περιόδων *n*

```
T=3/12;σ=0.379512254;R=0.049625;
S0=13.4;
K=14;
arxikon=2;
telikon=500;
bima=1;
simeia=(telikon-arxikon)/bima+1;
sygklisi=Table[0,{simeia}];
counter=1;
Do[
  h=T/n;r=h*R;up=Exp[σ*(h^0.5)];down=Exp[-σ*(h^0.5)];
  p=1/2*(1+(R-σ^2/2)/σ*h^0.5);q=1-p;
  S=Table[0,{n}];
  Do[S[[i]]=Table[0,{i+1}],{i,1,n}];
  Do[
   Do[S[[i,j]]=S0*(up^(i-j+1))*(down^(j-1)),{j,1,Length[S[[i]]]}];
   ,{i,1,n}];
  u=Table[0,{n}];
  Do[u[[i]]=Table[0,{i+1}],{i,1,n}];
  Do[u[[n,j]]=Max[K-S[[n,j]],0],{j,1,n+1}];
  Do[
   Do[u[[i,j]]=Max[K-S[[i,j]],Exp[-r]*(p*u[[i+1,j]]+q*u[[i+1,j+1]])]
     ,{j,1,Length[u[[i]]]}];
   ,{i,n-1,1,-1}];
  u0=Max[K-S0,Exp[-r]*(p*u[[1,1]]+q*u[[1,2]])];
  sygklisi[[counter]]={n,u0};
  counter=counter+1;
  ,{n,arxikon,telikon,bima}];
ListPlot[sygklisi]
```

Π.5. Αλγόριθμος υπολογισμού της αξίας ενός Δικαιώματος Πώλησης Αμερικανικού τύπου για διαφορετική παρούσα τιμή της μετοχής S_0, με σταθερή τιμή εξάσκησης K

```
n=320;T=3/12;σ=0.379512254;R=0.049625;
K=14;
h=T/n;
r=h*R;
up=Exp[σ*(h^(0.5))];
down=Exp[-σ*(h^(0.5))];
p=1/2*(1+(R-σ^2/2)/σ*h^0.5);
q=1-p;
arxikoS0=12;
telikoS0=16;
bima=0.05;
simeia=(telikoS0-arxikoS0)/bima+1;
lista=Table[0,{simeia}];
counter=1;
Do[
  S=Table[0,{n}];
  Do[S[[i]]=Table[0,{i+1}],{i,1,n}];
  Do[
   Do[S[[i,j]]=S0*(up^(i-j+1))*(down^(j-1))
     ,{j,1,Length[S[[i]]]}];
   ,{i,1,n}];
  u=Table[0,{n}];
  Do[u[[i]]=Table[0,{i+1}],{i,1,n}];
  Do[u[[n,j]]=Max[K-S[[n,j]],0],{j,1,n+1}];
  Do[
   Do[u[[i,j]]=Max[K-S[[i,j]],Exp[-r]*(p*u[[i+1,j]]+q*u[[i+1,j+1]])]
     ,{j,1,Length[u[[i]]]}];
   ,{i,n-1,1,-1}];
  u0=Max[K-S0,Exp[-r]*(p*u[[1,1]]+q*u[[1,2]])];
  lista[[counter]]={S0,u0};
  counter=counter+1;
  ,{S0,arxikoS0,telikoS0,bima}];
ListPlot[lista,AxesOrigin→{arxikoS0,0}]
```

Π.6. Αλγόριθμος υπολογισμού της αξίας ενός Δικαιώματος Πώλησης Ασιατικού-Αμερικανικού τύπου στο διωνυμικό μοντέλο *n* περιόδων

```
n=20;T=3/12;σ=0.379512254;R=0.049625;
S0=13.4;
h=T/n;
r=h*R;
up=Exp[σ*(h^(0.5))];
down=Exp[-σ*(h^(0.5))];
p=1/2*(1+(R-σ^2/2)/σ*h^0.5);
q=1-p;
S=Table[0,{n}];
Do[S[[i]]=Table[{0,0},{2^i}],{i,1,n}];
S[[1,1]]={S0*up,S0*up+S0};S[[1,2]]={S0*down,S0*down+S0};
Do[
  For[j=1,j<Length[S[[i]]],j=j+2,
   S[[i,j]]={S[[i-1,j/2+0.5,1]]*up,
     S[[i-1,j/2+0.5,1]]*up+S[[i-1,j/2+0.5,2]]}];
  For[j=2,j≤Length[S[[i]]],j=j+2,
   S[[i,j]]={S[[i-1,j/2,1]]*down,
     S[[i-1,j/2,1]]*down+S[[i-1,j/2,2]]}]
    ,{i,2,n}];
u=Table[0,{n}];
Do[u[[i]]=Table[{0,0},{2^i}],{i,1,n}];
Do[u[[n,j]]={Max[(1/(n+1))*S[[n,j,2]]-S[[n,j,1]],0],
    S[[n,j,2]]},{j,1,2^n}];
Do[
  Do[
    u[[i,j]]={Max[(1/(i+1))*S[[i,j,2]]-S[[i,j,1]],
       Exp[-r]*(p*u[[i+1,2*j-1,1]]+q*u[[i+1,2*j,1]])],
      S[[i,j,2]]}
    ,{j,1,2^i}];
  ,{i,n-1,1,-1}];
u0=Max[Exp[-r]*(p*u[[1,1,1]]+q*u[[1,2,1]]),0];
Print["Αξία Δικαιώματος = ",u0," €"]
```

Π.7. Αλγόριθμος υπολογισμού της αξίας ενός Δικαιώματος Πώλησης Ασιατικού-Αμερικανικού τύπου για διαφορετικό αριθμό περιόδων *n*

```
arxikon=10;
telikon=20;
lista={};
Do[
  n=k;T=3/12;σ=0.379512254;R=0.049625;
  S0=13.4;
  h=T/n;
  r=h*R;
  up=Exp[σ*(h^(0.5))];
  down=Exp[-σ*(h^(0.5))];
  p=1/2*(1+(R-σ^2/2)/σ*h^0.5);
  q=1-p;
  S=Table[0,{n}];
  Do[S[[i]]=Table[{0,0},{2^i}],{i,1,n}];
  S[[1,1]]={S0*up,S0*up+S0};S[[1,2]]={S0*down,S0*down+S0};
  Do[For[j=1,j<Length[S[[i]]],j=j+2,
    S[[i,j]]={S[[i-1,j/2+0.5,1]]*up,
      S[[i-1,j/2+0.5,1]]*up+S[[i-1,j/2+0.5,2]]}];
   For[j=2,j≤Length[S[[i]]],j=j+2,
    S[[i,j]]={S[[i-1,j/2,1]]*down,
      S[[i-1,j/2,1]]*down+S[[i-1,j/2,2]]}],{i,2,n}];
  u=Table[0,{n}];
  Do[u[[i]]=Table[{0,0},{2^i}],{i,1,n}];
  Do[u[[n,j]]={Max[(1/(n+1))*S[[n,j,2]]-S[[n,j,1]],0],
     S[[n,j,2]]},{j,1,2^n}];
  Do[
   Do[
     u[[i,j]]={Max[(1/(i+1))*S[[i,j,2]]-S[[i,j,1]],
        Exp[-r]*(p*u[[i+1,2*j-1,1]]+q*u[[i+1,2*j,1]])],
       S[[i,j,2]]}
     ,{j,1,2^i}];
   ,{i,n-1,1,-1}];
  u0=Max[Exp[-r]*(p*u[[1,1,1]]+q*u[[1,2,1]]),0];
  lista=Append[lista,{n,u0}];
  ,{k,arxikon,telikon}];
ListPlot[lista,AxesOrigin→{(arxikon-1),0.68}]
ListLinePlot[lista,AxesOrigin→{(arxikon-1),0.68}]
```

Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

Ελληνική

Μπούτσικας, Μ. (2007). *Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα (Εισαγωγή στη στοχαστική χρηματοοικονομική ανάλυση)*, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Μπούτσικας, Μ. (2004). *Μέθοδοι Προσομοίωσης και Στατιστικές Υπολογιστικές Τεχνικές*. Πανεπιστημίο Πειραιώς.

Χατζηκωνσταντινίδης, Ε. (2007). *Σημειώσεις μαθήματος «Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα»*, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Φακίνος, Δ. και Οικονόμου, Α. (2003), *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα

Καραθανάσης, Γ. (2002), *Χρηματοοικονομική Διοίκηση και Χρηματιστηριακές Αγορές*, Εκδόσεις Μπένου, Αθήνα

Ξένη

Shreve, S. (2004). *Stochastic Calculus for Finance I. The Binomial Asset Pricing Model*, Springer-Verlag, New York

Ekström, E. (2004). Convexity of the optimal stopping boundary for the American put option, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. **299**, 147-156.

Bensoussan, A. (1984). On the theory of option pricing, *Acta Appl. Math.* **2**, 139–158

Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities, *J. Polit. Econ.* **81**, 637–659

Duffie, D. (1992). *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press, Princeton, NJ

Karatzas, I. (1988). On the pricing of American options, *Appl. Math. Optim.* **17**, 37–60

Shiryaev, A. N. (1978). *Optimal Stopping Rules*, Springer, New York