ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΟΡΓΑΝΩΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ – ΟΛΙΚΗ ΠΟΙΟΤΗΤΑ
MBA–TQM

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ
ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ k – r – n ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΔΙΟΝΥΣΙΟΣ ΚΩΝ/ΝΟΥ ΦΡΑΓΚΑΝΔΡΕΑΣ

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΠΑΤΡΩΝ

Επιβλέπων Καθηγητής: Μ. Σφακιανάκης

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2008

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΟΡΓΑΝΩΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ – ΟΛΙΚΗ ΠΟΙΟΤΗΤΑ
MBA–TQM

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ
ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ k – r – n ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΔΙΟΝΥΣΙΟΣ ΚΩΝ/ΝΟΥ ΦΡΑΓΚΑΝΔΡΕΑΣ

Επιβλέπων Καθηγητής: Μ. Σφακιανάκης

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την / / 2008

………………….......	………………….......	………………….......
Μ. Σφακιανάκης	Γ. Μποχώρης	Αθ. Λαγοδήμος

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2008

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας κ. Μιχάλη Σφακιανάκη, αναπληρωτή καθηγητή του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την ευκαιρία που μου προσέφερε να ασχοληθώ με την παρούσα εργασία. Η καθοδήγησή του σε όλα τα στάδια εκπόνησής της ήταν για μένα πολύτιμη.

Θερμά ευχαριστήρια οφείλω και στα άλλα δύο μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής, κ. Γεώργιο Μποχώρη και κ. Αθανάσιο Λαγοδήμο.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο σκοπός της διπλωματικής εργασίας αυτής είναι η ανασκόπηση του θέματος της αξιοπιστίας των k-r-n συστημάτων. Πιο συγκεκριμένα το κύριο αντικείμενο, γύρω από το οποίο κινούνται όλα τα κεφάλαια της διπλωματικής εργασίας, είναι ο υπολογισμός της αξιοπιστίας των k-r-n συστημάτων, όταν αυτά βρεθούν υπό ορισμένες συνθήκες και περιορισμούς, τόσο από τη σκοπιά παλαιότερων δημοσιευμένων άρθρων από τις αρχές της δεκαετίας του ΄90, όσο και από αρκετέ πρόσφατα άρθρα επί του θέματος αυτού.

Αρχικά, στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται ο σκοπός της εργασίας αυτής. Πρόκειται για ένα εισαγωγικό κομμάτι, το οποίο κρίθηκε απαραίτητο για να κατανοήσει ο αναγνώστης τον λόγο για τον οποίο γράφτηκε η συγκεκριμένη εργασία αλλά και το κάθε κεφάλαιο μεμονωμένα. Επίσης γίνεται αναφορά σε γενικά θέματα αξιοπιστίας συστημάτων και δίνονται χρήσιμοι ορισμοί τόσο για την αξιοπιστία όσο και για τα k-r-n συστήματα, καθώς και αρκετοί απαραίτητοι συμβολισμοί, ώστε να μπορέσουν να γίνουν κατανοητά τα θέματα με τα οποία θα ασχοληθούν τα επόμενα κεφάλαια της εργασίας αυτής. Επίσης, παρουσιάζονται κάποια πολύ αντιπροσωπευτικά και χρήσιμα παραδείγματα k-r-n συστημάτων, με σκοπό να καταλάβει ο αναγνώστης ότι το θέμα της αξιοπιστίας των k-r-n συστημάτων δεν είναι κάτι το θεωρητικό, αλλά λαμβάνει χώρα σε αρκετές καθημερινές εφαρμογές, όπως είναι τα τηλεπικοινωνιακά συστήματα, τα υπολογιστικά συστήματα, τα συστήματα μεταφοράς καυσίμων, τα συστήματα εξυπηρέτησης πελατών.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάται η αξιοπιστία των k-από-r-από-n συστημάτων. Αρχικά, αναλύεται ο τρόπος υπολογισμού των φραγμάτων αξιοπιστίας των k-από-r συνεχόμενα-από-n: F συστημάτων και έπειτα παρουσιάζεται ο τρόπος υπολογισμού της αξιοπιστίας τόσο των γραμμικών όσο και των κυκλικών αυτών συστημάτων. Ακόμα, γίνεται αναφορά στις περιπτώσεις υπολογισμού της αξιοπιστίας των k-r-n συστημάτων πολλαπλών καταστάσεων καθώς και των k-από-r συνεχόμενα-από-n: G συστημάτων.

Το τρίτο κεφάλαιο ασχολείται με τα k-από-n συστήματα. Στο κεφάλαιο αυτό, δίνεται έμφαση στον υπολογισμό της αξιοπιστίας των γενικευμένων k συνεχόμενα-από-n: F συστημάτων (Γραμμικών και Κυκλικών), καθώς και στα φράγματα αξιοπιστίας των παραπάνω συστημάτων. Επίσης, αναλύονται τα k συνεχόμενα-από-n: G συστήματα και τα k-από-n συστήματα πολλαπλών καταστάσεων. Τέλος, παρουσιάζονται κάποιες ειδικές περιπτώσεις των συστημάτων αυτών, όπως είναι το συνωστισμένο σύστημα τριών καταστάσεων και τα DFM συστήματα.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το θέμα της βέλτιστης τοποθέτησης των εξαρτημάτων με σκοπό τη μεγιστοποίηση της αξιοπιστίας του συστήματος. Συγκεκριμένα, γίνεται αναφορά στο πρόβλημα της βέλτιστης τοποθέτησης τόσο στα k-από-r-από-n συστήματα, όσο και στα k-από-n συστήματα (Γραμμικά και Κυκλικά). Τέλος, δίνεται έμφαση στο θέμα της σπουδαιότητας των εξαρτημάτων και αναλύονται κάποιοι αρκετά χρήσιμοι δείκτες σπουδαιότητας εξαρτημάτων.

Στο τελευταίο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη μελέτη του θέματος της αξιοπιστίας των k-r-n συστημάτων που απασχόλησαν τα τέσσερα προηγούμενα κεφάλαια της διπλωματικής εργασίας αυτής. Τέλος, παρουσιάζονται ορισμένες σκέψεις για συγκεκριμένες περιοχές που θα μπορούσε κάποιος ενδιαφερόμενος να ερευνήσει περαιτέρω το συγκεκριμένο θέμα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο} - ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ</u>

Η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία ασχολείται με το θέμα της αξιοπιστίας των k-r-n συστημάτων. Πιο συγκεκριμένα πρόκειται για μία μορφή ανασκόπησης του θέματος αυτού, με το οποίο είχε ασχοληθεί ο επιβλέπων καθηγητής κ. Μιχάλης Σφακιανάκης στις αρχές της δεκαετίας του ΄90.

Η εργασία αυτή έγινε με σκοπό να δούμε κατά πόσο έχει μελετηθεί το συγκεκριμένο αντικείμενο από τότε έως και σήμερα. Μάλιστα, η ανασκόπηση του θέματος της αξιοπιστίας των k-r-n συστημάτων θα στηριχτεί σε αρκετά πρόσφατα άρθρα και δημοσιεύσεις, που χρονολογούνται κυρίως από το 2000 μέχρι και σήμερα.

Στόχος μας είναι να γίνει μία εμπεριστατωμένη και αποτελεσματική έρευνα επί του θέματος αυτού, με σκοπό να αποκομίσουμε αρκετά χρήσιμα συμπεράσματα από τη σύγκριση των πρόσφατων μελετών με τα παλαιότερα δημοσιευμένα άρθρα που έχουν να κάνουν με την αξιοπιστία των k-r-n συστημάτων. Επιπλέον θα μπορέσουμε να δούμε κατά πόσο εξελίχθηκε το υπό έρευνα και μελέτη αντικείμενο, καθώς και σε ποιους τομείς έμεινε στάσιμο και πού χρειάζεται περαιτέρω έρευνα.

Βέβαια, για να μπορέσει ο αναγνώστης να κατανοήσει το αντικείμενο της αξιοπιστίας των k-r-n συστημάτων και να μπορέσει ουσιαστικά να ‘μπει στο κλίμα’, κρίθηκε σκόπιμο στον παρόν κεφάλαιο να γίνει αναφορά τόσο σε αρκετούς χρήσιμους ορισμούς και συμβολισμούς, όσο και σε αρκετά αντιπροσωπευτικά παραδείγματα των εν λόγω συστημάτων. Έτσι, ο αναγνώστης αντιλαμβάνεται ότι πρόκειται για ένα είδος συστήματος που είναι αρκετά πρακτικό, καθώς και ότι η μελέτη της αξιοπιστίας του θα βελτιώσει σε μεγάλο βαθμό πολλές εφαρμογές της καθημερινής μας ζωής.

Πιο αναλυτικά, στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζεται αρχικά το θέμα των φραγμάτων αξιοπιστίας των k-από-r συνεχόμενα-από-n:F συστημάτων έτσι όπως το αντιμετώπισε στη διδακτορική του διατριβή ο επιβλέπων της διπλωματικής εργασίας αυτής καθηγητής. Παράλληλα, παρουσιάζεται και η νέα μορφή των φραγμάτων αξιοπιστίας, η ανάλυση της οποίας προέρχεται από δημοσιεύσεις άρθρων κατά τα έτη

2000 και έπειτα. Εκτενής αναφορά γίνεται τόσο στους ‘παλαιότερους’ όσο και στους αρκετά ‘πρόσφατους’ τρόπους υπολογισμού της αξιοπιστίας των k-από-r συνεχόμενα-από-n:F συστημάτων. Σημαντική είναι η εμφάνιση των δημοσιεύσεων που αφορούν διάφορες παραλλαγές των συστημάτων αυτών, όπως είναι η μελέτη της αξιοπιστίας των k-r-n συστημάτων με πολλαπλά κριτήρια αποτυχίας καθώς και των k-r-n συστημάτων πολλαπλών καταστάσεων.

Επιπλέον, το 3ο κεφάλαιο ασχολείται με μία ευρέως μελετημένη κατηγορία των k-r-n συστημάτων, τα k-από-n συστήματα. Και εδώ, όπως και στην προηγούμενη ενότητα, παρουσιάζονται οι ‘παλιές’ σε σύγκριση με της ‘πρόσφατες’ μελέτες που αφορούν την αξιοπιστία και τα φράγματα αυτής για τα γενικευμένα k συνεχόμενα-από-n: F συστήματα. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον μας προκαλεί ο αριθμός των δημοσιεύσεων των τελευταίων χρόνων για το θέμα της αξιοπιστίας των k-από-n συστημάτων και πόσο μάλιστα οι πολυάριθμες υποπεριπτώσεις τους. Παραδείγματα αυτών αποτελούν τα DFM συστήματα, τα συνδυασμένα k-από-n συστήματα καθώς και τα k-από-n συστήματα πολλαπλών καταστάσεων.

Ακόμα, το 4ο κεφάλαιο ασχολείται με το πώς εξετάστηκε από τον επιβλέπων καθηγητή κ. Μιχάλη Σφακιανάκη το θέμα της βέλτιστης τοποθέτησης των εξαρτημάτων σε ένα σύστημα με σκοπό τη μεγιστοποίηση της αξιοπιστίας του, καθώς και με το πώς εξελίχθηκε το συγκεκριμένο ζήτημα με το πέρασμα των χρόνων. Σημαντική είναι και η έρευνα για το θέμα της σπουδαιότητας των εξαρτημάτων στα k-r-n συστήματα. Τέλος, η ανασκόπηση του θέματος των δεικτών σπουδαιότητας είχε ικανοποιητικότατα αποτελέσματα, αφού η πληθώρα των πρόσφατων άρθρων κάλυψε επαρκώς το αντικείμενο αυτό.

Όμως, δεν νοείται ανασκόπηση ενός ζητήματος χωρίς να παρουσιαστεί το αν και πόσο εξελίχθηκε το ζήτημα αυτό. Έτσι, στο τελευταίο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στα συμπεράσματα που προκύπτουν από την ανασκόπηση του θέματος της αξιοπιστίας των k-r-n συστημάτων, με αποτέλεσμα να γίνεται αρκετά κατανοητή και φανερή η εξέλιξη της εν λόγω έρευνας. Απαραίτητη κρίθηκε και η αναφορά σε κάποια ‘κενά’ που προκύπτουν από την εν λόγω ανασκόπηση, τα οποία χρειάζονται περαιτέρω έρευνα.

1.1 Γενικά περί Αξιοπιστίας

Στη συγκεκριμένη παράγραφο παρουσιάζονται γενικές έννοιες που είναι χρήσιμες ώστε να μπορέσει ο αναγνώστης να κατανοήσει το υπό εξέταση αντικείμενο. Ακολουθούν κάποιοι χρήσιμοι ορισμοί:

Μονάδα : θεωρείται οποιοδήποτε στοιχείο, το οποίο δεν είναι διαχωρίσιμο από άποψη μελέτης [1].

Σύστημα : ονομάζεται ένα σύνολο μονάδων, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους [1].

Κυκλικό σύστημα : είναι το σύστημα όπου η πρώτη μονάδα θεωρείται επόμενη της n-στης. Εάν δεν ισχύει αυτό τότε το σύστημα είναι **Γραμμικό** [2].

Αξιοπιστία μιας μονάδας : θεωρείται η ικανότητα της μονάδας να διατηρεί την ποιότητά της σε συγκεκριμένες συνθήκες λειτουργίας [2].

Αποτυχία μιας μονάδας : είναι η μερική ή ολική απώλεια ή διαφοροποίηση μιας μονάδος ώστε να διακόπτεται ή να παρεμποδίζεται η λειτουργία της (Στα υπό εξέταση συστήματα θεωρούμε ανεξάρτητες μεταξύ τους τις αποτυχίες των μονάδων).

Διάρκεια ζωής μονάδος ή συστήματος : ονομάζεται ο χρόνος μέχρι την αποτυχία της μονάδος ή του συστήματος (Ο χρόνος ζωής είναι τυχαία μεταβλητή) [3].

Φράγματα Εμπιστοσύνης : Ένα μέτρο της ακρίβειας μιας στατιστικής εκτίμησης του μεγέθους. Ουσιαστικά είναι ένα εύρος τιμών, ανάμεσα στο οποίο θα βρίσκεται το συγκεκριμένο μέγεθος για ένα προκαθορισμένο ποσοστό του χρόνου. Συγκεκριμένα για την περίπτωση της αξιοπιστίας, τα **φράγματα αξιοπιστίας** είναι τιμές αξιοπιστίας που είναι πιθανές να εμφανίζονται για ένα προκαθορισμένο ποσοστό του χρόνου [4].

Ρυθμός αποτυχίας : Είναι μία συνάρτηση που περιγράφει τον αριθμό των αποτυχιών που αναμένεται να πάρουν μέρος σε ένα δεδομένο χρόνο. Η συνάρτηση ρυθμού αποτυχίας έχει μονάδες αποτυχίας ανά μονάδα χρόνου, π.χ. μία αποτυχία το μήνα.

Δείκτης Σπουδαιότητας : Είναι ο δείκτης της σχετικής συνεισφοράς ενός εξαρτήματος στη συνολική αξιοπιστία του συστήματος. Ο δείκτης σπουδαιότητας ενός εξαρτήματος είναι ισοδύναμος με την πρώτη μερική παράγωγο της αξιοπιστίας του εξαρτήματος του συστήματος [4].

Πιθανότητα : Είναι μία ποσοτική περιγραφή του πιθανού συμβάντος ενός συγκεκριμένου γεγονότος. Η πιθανότητα εκφράζεται σε μία κλίμακα από 0% έως 100%, ή από 0 ως 1, με ένα απίθανο γεγονός να έχει πιθανότητα κοντά στο 0 και ένα πολύ συνηθισμένο γεγονός έχει πιθανότητα κοντά στο 1.

Αξιοπιστία : Η πιθανότητα ένα αντικείμενο να λειτουργεί για ένα δεδομένο χρόνο χωρίς αποτυχία. Γενικότερα, αξιοπιστία είναι η ικανότητα των εξαρτημάτων, του εξοπλισμού, των προϊόντων και των συστημάτων να εκτελούν τις απαιτούμενες λειτουργίες για συγκεκριμένες επιθυμητές περιόδους χρόνου χωρίς να αποτυγχάνουν, σε καθορισμένα περιβάλλοντα λειτουργίας και με επιθυμητά διαστήματα εμπιστοσύνης.

Ανάλυση Αξιοπιστίας : Είναι η στατιστική ανάλυση των δεδομένων επιτυχίας και αποτυχίας που εκτελείται με σκοπό την ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων για τα χαρακτηριστικά αξιοπιστίας και αποτυχίας ενός εξαρτήματος, συστήματος, προϊόντος.

Αξιοπιστία Συστήματος : Είναι η αξιοπιστία ολόκληρου του συστήματος σε σχέση με την αξιοπιστία των εξαρτημάτων του συστήματος αυτού. Η αξιοπιστία του συστήματος καθορίζεται από την αξιοπιστία των εξαρτημάτων, καθώς και από τον τρόπο που τα εξαρτήματα είναι τοποθετημένα στο σύστημα.

Συνάρτηση αξιοπιστίας μονάδος ή συστήματος : είναι η πιθανότητα ο χρόνος ζωής της μονάδος ή του συστήματος να υπερβαίνει τον χρόνο t :

$$R(t) = P(t<T)\ ,\ t \geq 0$$

Η αξιοπιστία συνδέεται με τη συνάρτηση κατανομής του χρόνου ζωής με τη σχέση :

$$F(t) + R(t) = 1$$

Ομάδα αποτυχίας(cut set) συστήματος : είναι ένα υποσύστημα που η αποτυχία του προκαλεί αποτυχία του συστήματος στο σύνολό του. Μάλιστα αν δεν υπάρχει μικρότερο τμήμα του συστήματος με την ίδια ιδιότητα, τότε το υποσύστημα ονομάζεται **ελάχιστη ομάδα αποτυχίας(minimal cut set)** [4].

k-από-r συνεχόμενα-από-n : F Σύστημα : το οποίο ονομάζεται και **Σύστημα k-αποτυχιών σε-r-διαδοχικές επί συνόλου-n-μονάδων**, είναι ένα σύστημα n μονάδων που αποτυγχάνει όταν σε r διαδοχικές μονάδες, αποτύχουν οι k από αυτές. Με άλλα λόγια τα συγκεκριμένα συστήματα αποτυγχάνουν αν σε ένα παράθυρο r διαδοχικών εξαρτημάτων από τα n του συστήματος, αποτύχουν τα k (Ισχύει $k \leq r \leq n$). Στην περίπτωση που r=k έχουμε το k συνεχόμενα-από-n : F σύστημα, το οποίο αποτυγχάνει όταν k ή περισσότερες διαδοχικές μονάδες αποτύχουν. Αντίστοιχα όταν r=n τότε έχουμε το k-από-n : F σύστημα, το οποίο αποτυγχάνει όταν k μονάδες αποτύχουν. Τα συστήματα αυτά μπορεί να είναι είτε Γραμμικά είτε Κυκλικά [4].

Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι υπάρχουν δύο βασικοί τύποι k-n συστημάτων, τα **k συνεχόμενα-από-n:G συστήματα** και τα **k συνεχόμενα-από-n:F συστήματα**. Το k συνεχόμενα-από-n:G σύστημα λειτουργεί όταν τουλάχιστον k εξαρτήματα δουλεύουν ανάμεσα στα n εξαρτήματα του συστήματος. Το k συνεχόμενα-από-n:F σύστημα αποτυγχάνει όταν τουλάχιστον k εξαρτήματα αποτυγχάνουν ανάμεσα στα n εξαρτήματα του συστήματος. Αυτά τα δύο συστήματα είναι ισοδύναμα, δηλαδή το k συνεχόμενα-από-n:G σύστημα είναι το ίδιο με το (n-k+1) συνεχόμενα-από-n:F σύστημα.

Συστήματα πολλαπλών καταστάσεων (multi-state systems): Πολλά πρακτικά συστήματα μπορούν να εκτελούν τις λειτουργίες για τα οποία είναι προγραμματισμένα, σε περισσότερα από δύο διαφορετικά επίπεδα, τα οποία κυμαίνονται από την κατάσταση τέλειας λειτουργίας ως αυτήν της εντελώς αποτυχίας. Αυτού του είδους τα συστήματα είναι γνωστά ως συστήματα πολλαπλών καταστάσεων (multi-state systems). Ένα μοντέλο συστήματος πολλαπλών καταστάσεων παρέχει περισσότερη ευελιξία στη μοντελοποίηση των διαφόρων συνθηκών των εξαρτημάτων, από ότι ένα μοντέλο δυαδικού συστήματος, όπου τα εξαρτήματα και ολόκληρο το σύστημα μπορούν να πάρουν μόνο μία από τις δύο πιθανές καταστάσεις, δηλαδή είτε δουλεύουν είτε αποτυγχάνουν. Ο προσδιορισμός των δυαδικών παράλληλων, σειριακών και k-από-n:G συστημάτων έχει επεκταθεί στην περίπτωση των πολλαπλών καταστάσεων, επιτρέποντας στα εξαρτήματα καθώς και στο σύστημα να παίρνουν περισσότερες από δύο πιθανές καταστάσεις.

Ø Συμβολισμοί:

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να παρουσιαστούν ορισμένοι συμβολισμοί που θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα κεφάλαια της μελέτης της αξιοπιστίας των k-από-r συνεχόμενα-από-n : F Συστημάτων [4], [5].

p_i **à** Η πιθανότητα ότι το εξάρτημα που βρίσκεται στη θέση i δουλεύει, $i = 1, 2, \ldots, n$

q_i **à** Η πιθανότητα ότι το εξάρτημα που βρίσκεται στη θέση i απέτυχε, $i = 1, 2, \ldots, n$

p , q **à** Η πιθανότητα ότι το εξάρτημα δουλεύει, απέτυχε στην περίπτωση των ανεξάρτητων και ισόνομα κατανεμημένων εξαρτημάτων, $q = 1 - p$

$R_a(p;k,r,n)$ **à** Η αξιοπιστία του k-από-r συνεχόμενα-από-n : F Συστήματος ($a = L$ για γραμμικό σύστημα, $a = C$ για κυκλικό σύστημα)

$F_a(p;k,r,n) = 1 - R_a(p;k,r,n)$ **à** Η πιθανότητα αποτυχίας (αναξιοπιστία) του συστήματος ($a = L$ για γραμμικό σύστημα, $a = C$ για κυκλικό σύστημα)

$N_a(j,n,r,k)$ **à** Ο αριθμός των περιπτώσεων που το σύστημα δουλεύει δοθέντος ότι j εξαρτήματα απέτυχαν. Με άλλα λόγια, είναι ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης τουλάχιστον r-k+1 εξαρτημάτων που δουλεύουν μεταξύ k αποτυχημένων, δοθέντος ότι j εξαρτήματα έχουν αποτύχει.
(a = L για γραμμικό σύστημα, a = C για κυκλικό σύστημα)

P(A) **à** Η πιθανότητα του γεγονότος Α

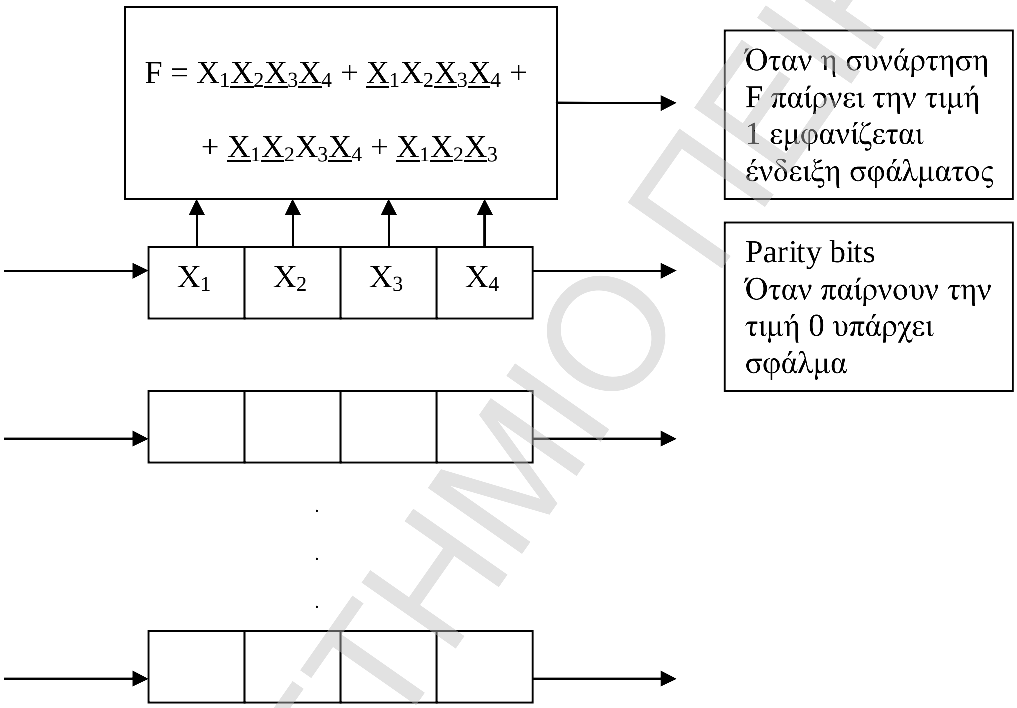
$\binom{X}{j}$ **= X! / (j!(X-j)!)** Ο διωνυμικός συντελεστής

$\boldsymbol{LB_j}$ **à** κάτω φράγμα για την *F(p; k, r, n)*, για *j* = 1, 2, 3 ή 4

$\boldsymbol{UB_j}$ **à** άνω φράγμα για την *F(p; k, r, n)*, για *j* = 1, 2, 3 ή 4

1.2 Παραδείγματα

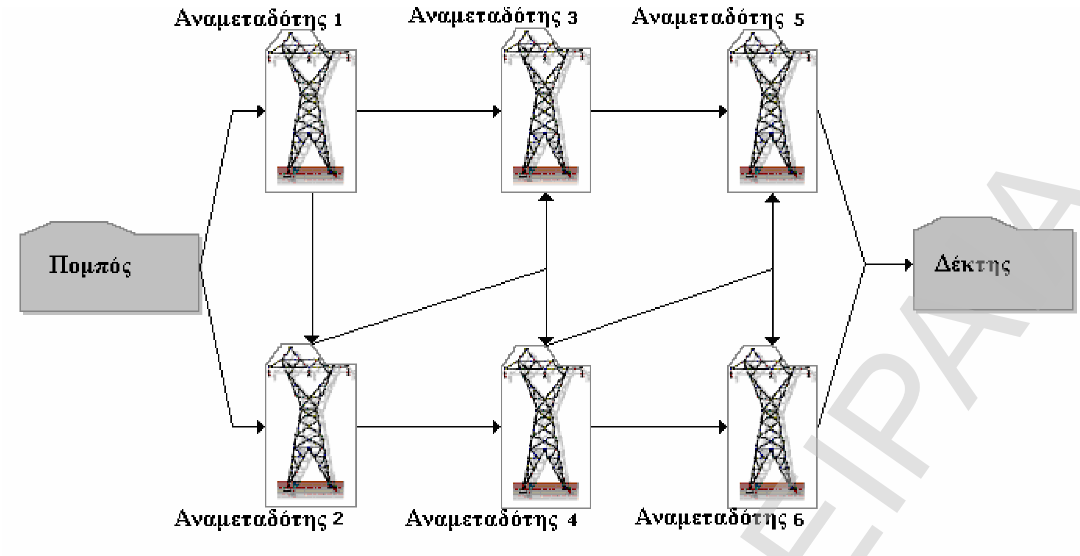
Παράδειγμα 1^{ο} : Έστω ότι έχουμε ένα ψηφιακό σύστημα τηλεπικοινωνιών, το οποίο εκπέμπει σε ομάδες χαρακτήρων, ο τελευταίος από τους οποίους, αποτελεί το ψηφίο ελέγχου (parity bit). Ο δέκτης ελέγχει ένα παράθυρο μήκους *r* της ακολουθίας n λέξεων(bytes) ενός μηνύματος και εάν τα σφάλματα υπερβούν τα *k*-1, τότε δίνει ένδειξη σφάλματος. Πιο συγκεκριμένα ακολουθείται η διαδικασία που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 1.1: Ψηφιακό σύστημα τηλεπικοινωνιών [4]

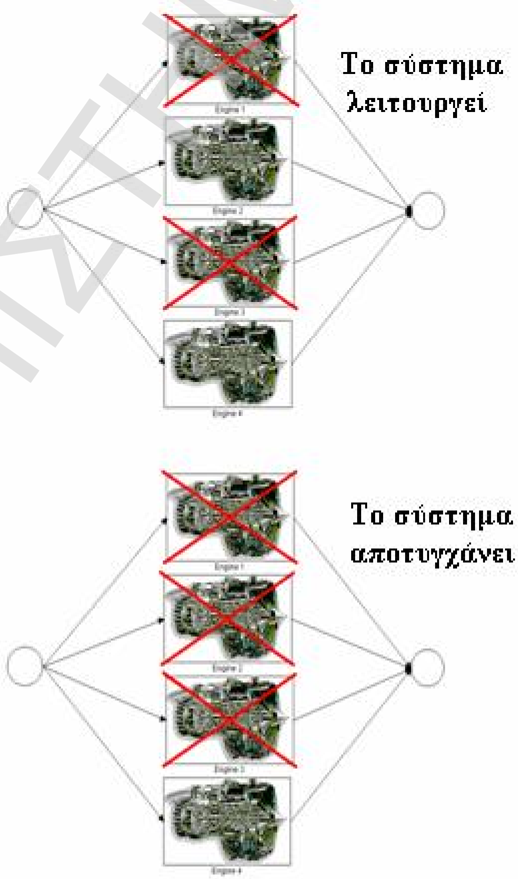
Το συγκεκριμένο σύστημα παράλληλης ψηφιακής επικοινωνίας είναι ένα σύστημα 3-από-4 συνεχόμενα-από-n, επειδή έχουμε ένδειξη σφάλματος όταν προκύψουν περισσότερα από 2 σφάλματα.

Παράδειγμα 2^{ο} : Έστω σύστημα με n αναμεταδότες. Το σήμα που εκπέμπεται από τον πρώτο αναμεταδότη μπορεί να ληφθεί από τους δύο επόμενους κ.ο.κ. Με τον τρόπο αυτό όταν δύο διαδοχικοί αναμεταδότες σταματήσουν, σταματάει και η αναμετάδοση του σήματος. Πρόκειται δηλαδή για ένα 2 συνεχόμενα-από-n σύστημα, αφού στην συγκεκριμένη περίπτωση ισχύει *r*=*k*=2, το οποίο φαίνεται παρακάτω:



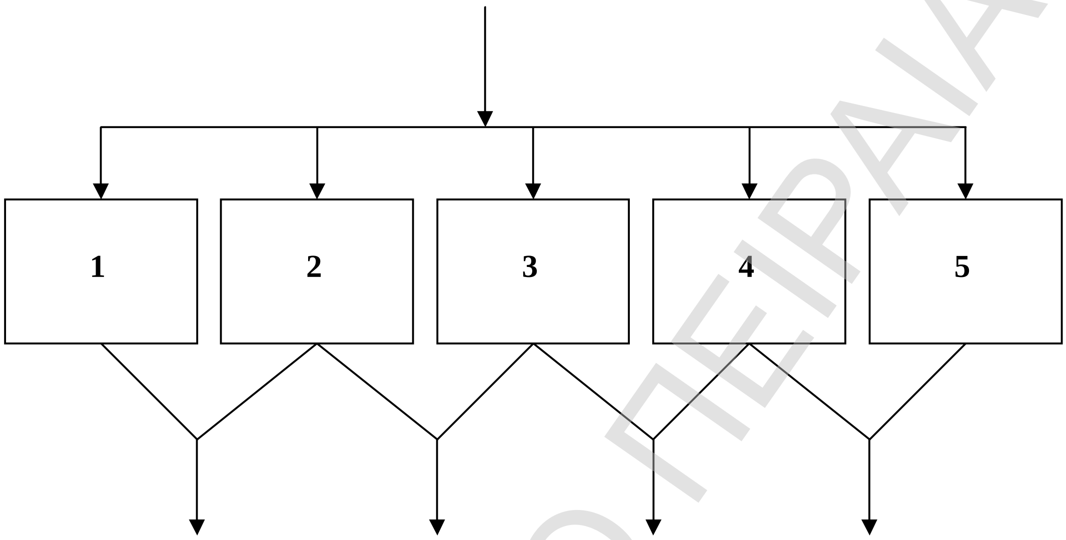
Εικόνα 1.2: 2 συνεχόμενα-από-n σύστημα [3]

Παράδειγμα 3^ο : Έστω ότι έχουμε ένα αεροπλάνο που έχει τέσσερις κινητήρες. Θεωρούμε ότι το αεροπλάνο είναι έτσι σχεδιασμένο ώστε αν λειτουργούν τουλάχιστον δύο από τους τέσσερις κινητήρες, τότε αυτό μπορεί να πετάει. Αυτό σημαίνει ότι οι μηχανές είναι τα εξαρτήματα του *k*-από-*n* συστήματος(δηλαδή του αεροπλάνου), και μάλιστα έχουμε k = 2 και n = 4. Με άλλα λόγια αποτελούν ένα 2-από-4 σύστημα, το οποίο φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 1.3: 2-από-4 σύστημα [2]

Παράδειγμα 4ο : Παρόμοια περίπτωση με αυτή του 2ου παραδείγματος αποτελεί το σύστημα του παρακάτω σχήματος:



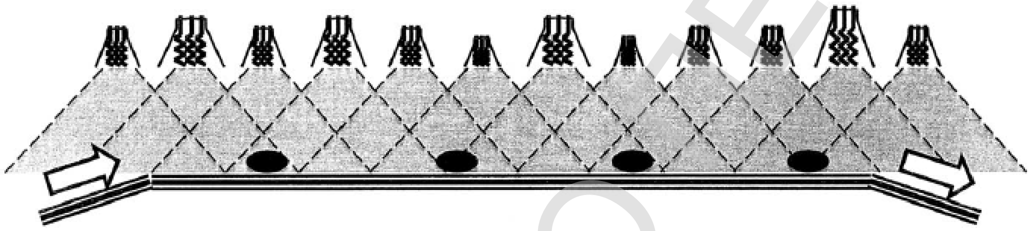
Σχήμα 1.4: 2 συνεχόμενα-από-5 σύστημα [1]

Το συγκεκριμένο σύστημα είναι ένα 2 συνεχόμενα-από-5 σύστημα, και θεωρείται ότι το σύστημα αποτυγχάνει αν μία τουλάχιστον έξοδος σταματήσει.

Παράδειγμα 5ο : Ένα σύστημα μεταφοράς πετρελαίου μέσω σωλήνων από το σημείο Α στο σημείο Β έχει n σταθμούς άντλησης. Οι σταθμοί άντλησης είναι ίσα κατανεμημένοι ανάμεσα στα σημεία Α και Β. Κάθε σταθμός άντλησης μπορεί να μεταφέρει το πετρέλαιο σε μία απόσταση k σταθμών άντλησης. Αν ένας σταθμός άντλησης είναι πεσμένος, η ροή του πετρελαίου δεν θα μπορούσε να διακοπεί γιατί ο επόμενος σταθμός άντλησης θα μπορούσε να αντέξει το φορτίο. Ωστόσο, όταν τουλάχιστον k συνεχόμενοι σταθμοί άντλησης αποτύχουν, η ροή του πετρελαίου σταματάει και το σύστημα αποτυγχάνει [6].

Παράδειγμα 6ο : Θεωρούμε ότι έχουμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης πελατών, που μπορεί να εξυπηρετεί *r* εισερχόμενες απαιτήσεις ταυτόχρονα σύμφωνα με τον κανόνα FIFO. Κάθε εισερχόμενη απαίτηση μπορεί να έχει διάφορες καταστάσεις και ο αριθμός των πόρων που χρειάζονται για να πραγματοποιηθεί η απαίτηση, είναι διαφορετικός για κάθε κατάσταση της κάθε απαίτησης. Ο συνολικός αριθμός πόρων που χρειάζονται για να εξυπηρετηθούν *k* συνεχόμενες απαιτήσεις, δεν θα πρέπει να ξεπερνά το διαθέσιμο ποσό των πόρων. Αν δεν υπάρχουν διαθέσιμοι πόροι για να εξυπηρετηθούν *r* απαιτήσεις ταυτόχρονα, τότε το σύστημα αποτυγχάνει [7].

Παράδειγμα 7ο : Θεωρούμε ότι έχουμε ένα σύστημα θερμάνσεως που μπορεί να παρέχει μία συγκεκριμένη θερμοκρασία κατά μήκος μιας γραμμής με κινούμενα μέρη. Η θερμοκρασία σε κάθε σημείο της γραμμής είναι καθορισμένη από ένα συσσωρευτικό αποτέλεσμα *r* κοντινών θερμαστρών. Κάθε θερμάστρα αποτελείται από αρκετά ηλεκτρικά εξαρτήματα θερμάνσεως. Η θέρμανση που παράγει η κάθε θερμάστρα εξαρτάται από τη διαθεσιμότητα των εξαρτημάτων και έτσι μπορεί να ποικίλει(αν οι θερμάστρες είναι διαφορετικές, ο αριθμός των διαφορετικών επιπέδων θέρμανσης και η έντασή τους είναι συγκεκριμένα για κάθε θερμάστρα). Με σκοπό να παρέχεται θερμοκρασία, η οποία δεν πρέπει να είναι λιγότερη από μία συγκεκριμένη τιμή σε κάθε σημείο της γραμμής, οποιεσδήποτε *r* συνεχόμενες θερμάστρες πρέπει να βρίσκονται σε καταστάσεις όπου το άθροισμα του επιπέδου θέρμανσης που παράγουν να είναι μεγαλύτερο από ένα ελάχιστο επιτρεπόμενο *W*, αλλιώς το σύστημα αποτυγχάνει [7].



Εικόνα 1.5: Σύστημα Θερμάνσεως: k συνεχόμενα-από-r-από-n (*r* = 3)

Παράδειγμα 8ο : Ποιοτικός Έλεγχος: Στον ποιοτικό έλεγχο, το κριτήριο για να αποφασίσεις πότε να ξεκινήσεις την έρευνα για τα αίτια αλλαγής μιας διαδικασίας, βασίζεται στα τεστ ζώνης (zone tests) με τη βοήθεια των χαρτών ελέγχου. Η αλλαγή της διαδικασίας αρχίζει να γίνεται φανερή όταν κάποιο προειδοποιητικό όριο (Warning limit) παραβιάζεται επαναλαμβανόμενα ή συνεχόμενα από μία ακολουθία σημείων στον χάρτη ελέγχου (Quality control chart). Αν σε *k* από *r* συνεχόμενα τεστ, η τιμή της παραμέτρου πέφτει έξω από το προειδοποιητικό όριο, τότε ενεργοποιείται ένα προειδοποιητικό σήμα. Έτσι, για παράδειγμα θεωρούμε ότι η τιμή της παραμέτρου μπορεί να βρίσκεται μέσα σε *H* ζώνες. Το προειδοποιητικό σήμα ενεργοποιείται όταν το συνολικό άθροισμα των ζωνών, μέσα στις οποίες πέφτει η παράμετρος, κατά τη διάρκεια *r* συνεχόμενων τεστ, είναι μεγαλύτερο από μία καθορισμένη τιμή *W* [8].

1.3 Απολογισμός 1^{ου} Κεφαλαίου

Συγκεντρωτικά, στο κεφάλαιο αυτό έγινε αναφορά σε γενικά θέματα αξιοπιστίας συστημάτων. Δόθηκαν χρήσιμοι ορισμοί τόσο για την αξιοπιστία όσο και για τα k-r-n συστήματα, καθώς και αρκετοί απαραίτητοι συμβολισμοί. Επίσης, παρουσιάστηκαν κάποια πολύ αντιπροσωπευτικά και χρήσιμα παραδείγματα k-r-n συστημάτων.

Όπως προαναφέρθηκε, έγινε παρουσίαση, με αρκετά κατανοητό τρόπο, των διαφόρων εννοιών που έχουν να κάνουν με το θέμα της αξιοπιστίας των συστημάτων. Ορισμοί όπως αυτοί της αξιοπιστίας, των φραγμάτων εμπιστοσύνης, των k-από-r συνεχόμενα-από-n συστημάτων, των δεικτών σπουδαιότητας είναι πάρα πολύ χρήσιμοι και αρκετά καθοδηγητικοί, ώστε να μπορέσει ο αναγνώστης να σχηματίσει μία πρώτη άποψη και να μπορέσει έπειτα να κατανοήσει ευκολότερα τα περισσότερο εξειδικευμένα θέματα που αναλύονται στα επόμενα κεφάλαια.

Τον ίδιο σκοπό εξυπηρετούν τόσο οι συμβολισμοί, όπως αυτοί της πιθανότητας αποτυχίας, της αξιοπιστίας, των άνω και κάτω φραγμάτων, όσο και τα πολύ αντιπροσωπευτικά παραδείγματα που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό.

Τέλος, δίνοντας παραδείγματα, όπως αυτά του τηλεπικοινωνιακού συστήματος, των κινητήρων του αεροπλάνου, του συστήματος μεταφοράς πετρελαίου, του συστήματος θερμάνσεως, αποκαλύπτεται το γεγονός ότι το θέμα με το οποίο ασχολείται η παρούσα διπλωματική εργασία δεν πρόκειται για ένα πολύπλοκο θεωρητικό θέμα, αλλά για ένα θέμα που βρίσκει εφαρμογή στην πράξη και μάλιστα σε πάρα πολλούς τομείς της καθημερινής μας ζωής.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 1^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

[1] **Α. Χείλαρης,** "*Συστήματα k-αποτυχιών-σε-r-διαδοχικές μονάδες, σε σύνολο n-μονάδων*", **Πανεπιστήμιο Αθηνών – Πτυχιακή μελέτη**, 1986, pp. 1 - 4

[2] www.weibull.com

[3] www.reliasoft.com

[4] **M. Sfakianakis, S. Kounias, and A. Hillaris**, "*Reliability of consecutive k-out-of-r-from-n: F system,*" **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 41, No. 3, September 1992, pp. 442 – 447

[5] **M. Sfakianakis and S. Papastavridis**, "*Reliability of a general consecutive-k-out-of-n: F system*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 42, No. 3, September 1993, pp. 491 – 496

[6] **M. Chao, J. Fu, M. Koutras,** "*Survey of reliability studies of consecutive-k-out-of-n:F and related systems*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 44, No. 1, March 1995, pp. 120 – 127

[7] **G. Levitin**, "*Optimal allocation of elements in a linear multi-state sliding window system*", **Reliability Engineering and System Safety**, Vol. 76, 2002, pp. 245 – 254

[8] **G. Levitin**, "*Linear Multi-State Sliding-Window Systems*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 52, No. 2, June 2003, pp. 263 – 269

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο} - k-*από*-r-*από*-n ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο μελετάται η αξιοπιστία των k-από-r-από-n συστημάτων. Αρχικά, αναλύεται ο τρόπος υπολογισμού των φραγμάτων αξιοπιστίας των k-από-r συνεχόμενα-από-n: F συστημάτων και έπειτα παρουσιάζεται ο τρόπος υπολογισμού της αξιοπιστίας τόσο των γραμμικών όσο και των κυκλικών αυτών συστημάτων. Ακόμα, γίνεται αναφορά στις περιπτώσεις υπολογισμού της αξιοπιστίας των k-r-n συστημάτων πολλαπλών καταστάσεων καθώς και των k-από-r συνεχόμενα-από-n: G συστημάτων.

2.1 Φράγματα Αξιοπιστίας του k-*από*-r *συνεχόμενα*-*από*-n:F *συστήματος*

Τα k-από-r συνεχόμενα-από-n : F συστήματα(γραμμικά ή κυκλικά) αποτυγχάνουν αν σε ένα ‘παράθυρο’ r διαδοχικών εξαρτημάτων από τα n του συστήματος, αποτύχουν τουλάχιστον k. Έστω A_i το γεγονός ότι υπάρχουν τουλάχιστον k αποτυχημένα εξαρτήματα από το i μέχρι και το $i+r-1$ εξάρτημα για $i=1,2,\ldots,N$, όπου $N=n-r+1$. Επίσης $P(A_i)$ η πιθανότητα του γεγονότος A_i , $i=1,2,\ldots,N$, η οποία είναι ανεξάρτητη του i εξαιτίας του ότι τα εξαρτήματα είναι ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένα. Ακόμα $\underline{A}_i$ είναι το συμπλήρωμα του A_i και $S_1=\Sigma P(A_i)$ για $1\leq i\leq N$, $S_2=\Sigma P(A_i\,A_j)$ για $1\leq i<j\leq N$, $S_3=\Sigma P(A_i\,A_j\,A_v)$ για $1\leq i<j<v\leq N$. Τέλος έστω *UB* το άνω φράγμα και *LB* το κάτω φράγμα για την $F_L(p;k,r,n)$ χρησιμοποιώντας τις βελτιωμένες ανισότητες Bonferroni [1].

Η αξιοπιστία του k-r-n γραμμικού συστήματος, για $k\leq r\leq n$, ισούται με :

$$R_L(p;k,r,n) = P\Big(\bigcap_{i=1}^{N} Ai\Big) = 1-P\Big(\bigcup_{i=1}^{N} Ai\Big)$$

Επίσης για τα φράγματα ισχύει :

$$LB\leq P\Big(\bigcup_{j=1}^{N} Aj\Big)=F_L(p;k,r,n)\leq UB$$

$$\mathbf{LB}=a_1S_1 - a_2S_2 + a_3S_3 \,,$$

όπου $a_1=\dfrac{2\mathrm{N}+t-1}{\mathrm{N}(t+1)}$, $a_2=\dfrac{2(N+2t-2)}{Nt(t+1)}$, $a_3=\dfrac{6}{Nt(t+1)}$, $t=\dfrac{2((N-2)S_2-3S_3)}{(N-1)S_1-2S_2}$

$$\mathbf{UB}=\min(1,S_1-b_2S_2+b_3S_3) \,,$$

όπου $b_2 = \dfrac{2(2t-1)}{t(t+1)}$, $b_3 = \dfrac{6}{t(t+1)}$, $t = \dfrac{3S_3}{S_2} + 2$

Ακόμα οι σχέσεις για τα $P(A_i)$, $P(A_iA_j)$, και $P(A_iA_jA_\nu)$ είναι οι ακόλουθες:

$\mathbf{P(A_i)} = \sum_{x=k}^{r} \binom{r}{x} q^x p^{r-x} = W$ για $1 \le i < j < \nu \le N$

$\mathbf{P(A_iA_j)} = P(A_i)\, P(A_j) = W^2$ αν $i+r-1<j$

$\mathbf{P(A_iA_jA_\nu)} = P(A_i)\, P(A_j)\, P(A_\nu) = W^3$, αν $i+r-1<j$ και $j+r-1<\nu$
$\mathbf{P(A_iA_jA_\nu)} = P(A_i A_j)\, P(A_\nu) = P(A_i A_j)W$, αν $j \le i+r-1$ και $\nu > j+r-1$

$\mathbf{P(A_iA_jA_\nu)} = P(A_i)P(A_jA_\nu) = W\, P(A_jA_\nu)$, αν $i+r-1<j$ και $\nu \le j+r-1$

Παράλληλα τα S_1 , S_2 , S_3 δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις :

$\mathbf{S_1} = NW$

$\mathbf{S_2} = \binom{N-r+1}{2} W^2 + \sum_{u=1}^{m} \binom{N-u}{1} P(A_iA_{i+u})$, όπου $m=\min(r-1,N-1)$

$\mathbf{S_3} = \binom{N-2r+2}{3} W^3 + 2W \sum_{u=1}^{m} \binom{N-u-r+1}{2} P(A_iA_{i+u}) + \sum_{u=1}^{t} \sum_{n=1}^{s} \binom{N-u-z}{1} P(A_iA_i+uA_i+u+z)$, όπου

$m=\min(r-1,N-r-1)$,
$s=\min(r-1,N-1-u)$,
$t=\min(r-1,N-2)$

Σημειώνεται ότι το $P(A_i) = W$ ανεξαρτήτως του I, $1 \le i \le N$, το $P(A_iA_j)$ είναι συνάρτηση του $j-i=u$ και το $\mathbf{P(A_iA_{i+u})} = P(A_iA_j) = P(A_i)\, P(A_j) = W^2$ για $r-1<u\le N-1$, το $P(A_iA_jA_\nu)$ είναι συνάρτηση των $j-i=u$ και $\nu-j=z$ και $\mathbf{P(A_iA_i+uA_i+u+z)} = P(A_iA_jA_\nu)$ για τις διάφορες τιμές των u και z.

2.2 Νέα Φράγματα Αξιοπιστίας του k-από-r συνεχόμενα-από-n:F συστήματος

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται τα νέα φράγματα αξιοπιστίας των k-από-r συνεχόμενα-από-n:F συστημάτων, τα οποία ουσιαστικά είναι η βελτίωση αυτών που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα, εφαρμόζοντας όμως τέταρτης τάξης Boole–Bonferroni φράγματα.

n **à** αριθμός των εξαρτημάτων του συστήματος

r **à** ένα ‘παράθυρο’ από r συνεχόμενα από n εξαρτήματα, $r \le n$

k **à** ελάχιστος αριθμός αποτυχημένων εξαρτημάτων από r συνεχόμενα εξαρτήματα, που προκαλούν αποτυχία του συστήματος, $k \le r$

p, q **à** η πιθανότητα ένα εξάρτημα να δουλεύει, αποτυγχάνει $(p + q = 1)$

$R(p; k, r, n)$ **à** αξιοπιστία του k-από-r συνεχόμενα-από-n:F συστήματος

$F(p; k, r, n)$ **à** πιθανότητα αποτυχίας του k-από-r συνεχόμενα-από-n:F συστήματος $(R(p; k, r, n) = 1 - F(p; k, r, n))$

N **à** $n - r + 1$

A_i **à** γεγονός: τουλάχιστον k από τα $i, i+1, \ldots, i+r-1$ εξαρτήματα αποτυγχάνουν, $i = 1, \ldots, N$

μ **à** η τυχαία μεταβλητή που ορίζει τον αριθμό εκείνων των $A_1, \ldots, A_N$ γεγονότων που εμφανίζονται

S_1, S_2, S_3, S_4 **à** διωνυμικές αποκλίσεις (binomial moments) της τυχαίας μεταβλητής μ

$S_1 = \sum_i \Pr(A_i)$, για $1 \le i \le N$

$S_2 = \sum_{ij} \Pr(A_i A_j)$, για $1 \le i < j \le N$

$S_3 = \sum_{ij,n} \Pr(A_i A_j A_n)$, για $1 \le i < j < \nu \le N$

$S_4 = \sum_{i,j,n,r} \Pr(A_i A_j A_n A_r)$, για $1 \le i < j < \nu < \rho \le N$

LB_j **à** κάτω φράγμα για την $F(p; k, r, n)$ από τα Boole–Bonferroni φράγματα, για j = 1, 2, 3 ή 4

UB_j **à** άνω φράγμα για την $F(p; k, r, n)$ από τα Boole–Bonferroni φράγματα, για j = 1, 2, 3 ή 4

Το k-από-r συνεχόμενα-από-n:F σύστημα, εμπεριέχει ως ειδικές περιπτώσεις το k συνεχόμενα-από-n:F σύστημα ($k = r$) και το k-από-n:F σύστημα ($r = n$). Σε αυτή την ενότητα θα δοθούν τα νέα άνω και κάτω φράγματα της πιθανότητας αποτυχίας που αντιστοιχούν στην αξιοπιστία του k-από-r συνεχόμενα-από-n:F συστήματος. Ένα ζευγάρι των νέων αυτών φραγμάτων μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση των φραγμάτων που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Επίσης, έχοντας αναπτύξει νέες διωνυμικές αποκλίσεις (binomial moments), έχουμε τη δυνατότητα να υπολογίσουμε υψηλότερου βαθμού Boole–Bonferroni φράγματα. Ακόμα παρουσιάζεται και το Hunter–Worsley φράγμα, το οποίο είναι μίας πλευράς, κάτω φράγμα όσον αφορά την αξιοπιστία του συστήματος και άνω φράγμα όσον αφορά την πιθανότητα αποτυχίας αυτού.

2.2.1 Η τεχνική Boole–Bonferroni

Παρόλο που τα φράγματα που αναλύσαμε στην προηγούμενη ενότητα, είναι αποτέλεσμα αυτής της μεθόδου, εδώ θα παρουσιάσουμε μια περισσότερο γενική εκτίμησή τους [2].

Θεωρούμε ότι η τυχαία μεταβλητή μ προσδιορίζει τον αριθμό εκείνων των γεγονότων $A_1, \dots, A_N$ που εμφανίζονται. Είναι γνωστό ότι οι διωνυμικές αποκλίσεις που αντιστοιχούν σε αυτή την τυχαία μεταβλητή είναι:

$$S_i = E\left[\binom{\mu}{i}\right], \qquad i = 1, \dots, N.$$

Επίσης, αν p_i , $i = 0, 1, \dots, N$ προσδιορίζει την ξεχωριστή πιθανότητα της τυχαίας μεταβλητής μ, δηλαδή:

$$p_i = Pr(\mu = i), \qquad i = 0, 1, \dots, N$$

τότε μπορούμε να οδηγηθούμε εύκολα στην ακόλουθη σχέση:

$$S_i = \sum_{j=1}^{N} \binom{j}{i} p_j, \qquad i = 1, \dots, N.$$

Αν τώρα, τα $S_1, \dots, S_M$, είναι γνωστά, όπου $M < N$ και παίρνοντας $p_1, \dots, p_N$ ως μεταβλητές, έχουμε να αντιμετωπίσουμε τα δύο παρακάτω προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού:

- Ελαχιστοποίηση $\{p_1 + p_2 + \ldots + p_M + \ldots + p_N\}$, υπό τον όρο

$$\begin{aligned} p_1 + \binom{2}{1} p_2 + \ldots + \binom{M}{1} p_M + \ldots + \binom{N}{1} p_N &= S_1 \\ p_2 + \ldots + \binom{M}{2} p_M + \ldots + \binom{N}{1} p_N &= S_2 \\ \ddots \ \ddots \ \vdots \\ p_M + \ldots + \binom{N}{M} p_N &= S_M \end{aligned}$$

$$p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \cdots p_M \geq 0, \cdots p_N \geq 0$$

- Μεγιστοποίηση $\{p_1 + p_2 + \ldots + p_M + \ldots + p_N\}$, υπό τον όρο

$$\begin{aligned} p_1 + \binom{2}{1} p_2 + \ldots + \binom{M}{1} p_M + \ldots + \binom{N}{1} p_N &= S_1 \\ p_2 + \ldots + \binom{M}{2} p_M + \ldots + \binom{N}{2} p_N &= S_2 \\ \ddots \ \ddots \ \vdots \\ p_M + \ldots + \binom{N}{M} p_N &= S_M \end{aligned}$$

$$p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \cdots p_M \geq 0, \cdots p_N \geq 0$$

Τα οποία μας παρέχουν τα καλύτερα δυνατά κάτω και άνω φράγματα για:

$$\Pr(\mu \geq 1) = \Pr(A_1 + \ldots + A_N) = F(p; k, r, n)$$

Αυτά τα φράγματα ονομάζονται Boole–Bonferroni φράγματα και είναι τα καλύτερα δυνατά υπό τις συγκεκριμένες προϋποθέσεις για τις διάφορες τιμές των $S_1, \ldots, S_M$. Παρακάτω παρουσιάζονται ορισμένα φράγματα Boole–Bonferroni.

- **Κάτω φράγμα αν μόνο τα S_1 και S_2 είναι υπολογισμένα:**

Έστω

$$i = \left\lfloor \frac{2S_2}{S_1} \right\rfloor$$

τότε το ακριβές κάτω φράγμα που αναφέρεται στην πιθανότητα αποτυχίας του συστήματος είναι:

$$F(p;k,r,n) \geq \frac{2}{i+1} S_1 - \frac{2}{i(i+1)} S_2$$

- **Άνω φράγμα αν μόνο τα S_1 και S_2 είναι υπολογισμένα:**

Το ακριβές άνω φράγμα που αναφέρεται στην πιθανότητα αποτυχίας του συστήματος είναι:

$$F(p;k,r,n) \leq S_1 - \frac{2}{N} S_2$$

- **Κάτω φράγμα αν μόνο τα S_1, S_2 και S_3 είναι υπολογισμένα:**

Έστω

$$i = 1 + \left\lfloor \frac{-6S_3 + 2(N-2)S_2}{-2S_2 + (N-1)S_1} \right\rfloor$$

τότε το ακριβές κάτω φράγμα που αναφέρεται στην πιθανότητα αποτυχίας του συστήματος είναι:

$$F(p;k,r,n) \geq \frac{i+2N-1}{(i+1)N} S_1 - \frac{2(2i+N-2)}{i(i+1)N} S_2 + \frac{6}{i(i+1)N} S_3.$$

- **Άνω φράγμα αν μόνο τα S_1, S_2 και S_3 είναι υπολογισμένα:**

Έστω

$$i = 2 + \left\lfloor \frac{3S_3}{S_2} \right\rfloor$$

τότε το ακριβές άνω φράγμα που αναφέρεται στην πιθανότητα αποτυχίας του συστήματος είναι:

$$F(p;k,r,n) \leq S_1 - \frac{2(2i-1)}{i(i+1)} S_2 + \frac{6}{i(i+1)} S_3$$

- **Άνω φράγμα αν μόνο τα *S_1, S_2, S_3* και *S_4* είναι υπολογισμένα:**

Έστω

$$i = 1 + \left\lfloor \frac{-12S_4 + 3(N-4)S_3 + (N-2)S_2}{-3S_3 + (N-2)S_2} \right\rfloor$$

τότε το ακριβές άνω φράγμα που αναφέρεται στην πιθανότητα αποτυχίας του συστήματος είναι:

$$F(p;k,r,n) \leq S_1 - \frac{2((i-1)(i-2) + (2i-1)N)}{i(i+1)N} S_2 + \frac{6(2i+N-4)}{i(i+1)N} S_3 - \frac{24}{i(i+1)N} S_4.$$

2.2.2 Η τεχνική Hunter–Worsley

Όπως προαναφέρθηκε το Hunter–Worsley φράγμα είναι μίας πλευράς, είτε κάτω φράγμα όσον αφορά την αξιοπιστία του συστήματος, είτε άνω φράγμα όσον αφορά την πιθανότητα αποτυχίας αυτού.

Ουσιαστικά η συγκεκριμένη τεχνική είναι μία παραλλαγή της προηγούμενης, αν αναλογιστούμε ότι στα δύο προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού, θεωρούμε ότι εμπεριέχονται $2^N - 1$ μεταβλητές και έχουν από τα δεξιά τους όλες τις μεμονωμένες πιθανότητες για τις διάφορες τιμές των *S_1, …, S_M*. Οπότε το άνω όριο των Hunter–Worsley φαίνεται παρακάτω:

$$F(p;k,r,n) \leq S_1 - \sum_{(i,j)\in T^*} \Pr(A_i A_j)$$

2.3 Αξιοπιστία του k-από-r συνεχόμενα-από-n:F συστήματος

Στην παράγραφο αυτή γίνεται αναφορά στις αναγωγικές σχέσεις που αφορούν τον υπολογισμό της αξιοπιστίας των k-r-n συστημάτων τόσο στη γραμμική όσο και στην κυκλική περίπτωση. Αρχικά όμως είναι απαραίτητο να αναφερθεί ότι το μοντέλο που ακολουθούμε είναι το Bernoulli model, δηλαδή τα εξαρτήματα δρουν ανεξάρτητα και έχουν την ίδια πιθανότητα να λειτουργούν σωστά p_i=p, άρα και ίδια πιθανότητα αποτυχίας, q_i=1- p_i=q , για i=1,2,…,n.

Το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός της αξιοπιστίας για το προαναφερθέν Bernoulli model. Έστω ότι N_a(j,n,r,k) δηλώνει τον αριθμό των περιπτώσεων που το σύστημα(γραμμικό ή κυκλικό) δουλεύει, δοθέντος ότι j εξαρτήματα απέτυχαν. Η αξιοπιστία του συστήματος ισούται με :

$$\mathbf{R_a(p;k,r,n)}= \sum_j q^j p^{n-j} N_a(j,n,r,k)$$

Οπότε το μόνο που μένει είναι το δύσκολο κομμάτι του υπολογισμού του N_a(j,n,r,k) και συγκεκριμένα πρώτα το N_L(j,n,r,k) για το γραμμικό σύστημα και έπειτα το N_C(j,n,r,k) για το κυκλικό, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη ιδιαίτεροι περιορισμοί για τα j, n, r και k.

2.3.1 Αξιοπιστία των k-r-n Γραμμικών Συστημάτων

Με F_i δηλώνουμε ότι το i εξάρτημα απέτυχε και έστω a_i ο αριθμός των εξαρτημάτων που περιλαμβάνονται μεταξύ του F_i και του F_{i+1} , i=1,2,…,j-1. Επίσης έστω a_0 ο αριθμός των εξαρτημάτων μέχρι την πρώτη αποτυχία και a_j ο αριθμός των εξαρτημάτων μετά το τελευταίο αποτυχημένο εξάρτημα [1].

- Αν **j<k** , τότε :

$$\mathbf{N_L(j,n,r,k)} = \binom{n}{j}$$

Το οποίο αποδεικνύεται από το γεγονός ότι για j<k το σύστημα δουλεύει και ο αριθμός των περιπτώσεων είναι ίδιος με το να παρθούν j αντικείμενα από n.

- Αν **j=k** , τότε :

$$\mathbf{N_L(j,n,r,k) = N_L(k,n,r,k)} = \sum_{a_2}\sum_{a_3}\ldots\sum_{a_{k-1}} N_L(k,n,r,k;a_2,a_3,\ldots,a_{k-1})$$

Το οποίο είναι για όλα τα $a_2,a_3,\ldots,a_{k-1}$ τέτοια ώστε το άθροισμα $a_2+a_3+\ldots+a_{k-1}$ πηγαίνει από το 0 έως το n-k.

- Αν **j>k** , τότε :

$$\mathbf{N_L(j,n,r,k)} = \sum N_L(j,n,r,k;a_{j-k+2},\ldots, a_{j-1})$$

Το οποίο είναι για όλα τα $a_{j-k+2},\ldots,a_{j-1}$ τέτοια ώστε το άθροισμα $a_{j-k+2}+\ldots+a_{j-1}$ πηγαίνει από το 0 έως το n-j.

Τελικά έχοντας τις παραπάνω σχέσεις καθώς και την ακόλουθη:

$$\mathbf{R_L(p;k,r,n)} = \sum_j q^j p^{n-j} N_L(j,n,r,k)$$

μπορούμε να υπολογίσουμε την αξιοπιστία οποιουδήποτε k-r-n γραμμικού συστήματος.

2.3.2 Αξιοπιστία των k-r-n Κυκλικών Συστημάτων

Και σε αυτήν την περίπτωση, όπως και προηγουμένως καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε το δύσκολο πρόβλημα του υπολογισμού του $N_C(j,n,r,k)$, δηλαδή του αριθμού των τρόπων τοποθέτησης n εξαρτημάτων σε κύκλο, έτσι ώστε κάθε r συνεχόμενα εξαρτήματα να περιλαμβάνουν το πολύ k-1 αποτυχημένα, δοθέντος ότι j εξαρτήματα απέτυχαν, $k\leq r\leq n$ και $j\leq n$ [1].

Αρχικά αριθμούμε τα εξαρτήματα στον κύκλο από το 1 μέχρι το n και έστω ότι το F_i συμβολίζει το i-στο αποτυχημένο εξάρτημα. Έστω ότι το a_i δηλώνει τον αριθμό των αντικειμένων που περιλαμβάνονται μεταξύ του F_i και του F_{i+1} , i=1,2,…,j-1 όπου j ο αριθμός των αποτυχημένων εξαρτημάτων. Επίσης έστω a_0 ο αριθμός των εξαρτημάτων που περιλαμβάνονται από το πρώτο εξάρτημα μέχρι το F_1 και a_j ο αριθμός των εξαρτημάτων από το F_j μέχρι και το n εξάρτημα.

- Αν **j<k** , τότε :

$$\mathbf{N_C(j,n,r,k)} = \binom{n}{j}$$

Το οποίο αποδεικνύεται από το γεγονός ότι για j<k το σύστημα δουλεύει και ο αριθμός των περιπτώσεων είναι ίδιος με το να παρθούν j αντικείμενα από n.

- Αν **j=k,…,2k-3** , τότε :

$$\mathbf{N_C(j,n,r,k;a_1,\ldots,a_{j-1})} = n-j+1-a_1-\ldots-a_{j-1}$$

όπου $a_i+\ldots+a_{i+j-k}\leq n-j-r+k-1$, $i=1,\ldots,k-1$ και $a_1+\ldots+a_{j-1}\leq n-j$

- Αν j>2k-2 , τότε :

$$\mathbf{N_C(j,n,r,k;a_1,\ldots,a_{2k-4})} = \sum N_C(j-1,n-a_{k-1}-1,r,k;a_1,\ldots,a_{k-2},a_k,\ldots,a_{2k-3})$$

Το οποίο είναι για $a_{2k-3}\geq \max(0,r-k+1-a_{k-1}-\ldots-a_{2k-4})$.

Τελικά έχοντας τις παραπάνω σχέσεις καθώς και την ακόλουθη:

$$\mathbf{R_C(p;k,r,n)}= \sum_j q^j p^{n-j} N_C(j,n,r,k)$$

μπορούμε να υπολογίσουμε την αξιοπιστία οποιουδήποτε k-r-n κυκλικού συστήματος.

2.3.3 Υπολογισμός της αξιοπιστίας των k-r-n συστημάτων για διάφορες τιμές των k, r, n

A. ***k* = 2 à** Πρώτα απ’ όλα θα εξεταστεί η περίπτωση όπου *k* = 2, για την οποία ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις(για γραμμικό και έπειτα για κυκλικό σύστημα):

$$\mathbf{N_L(j,n,r,2)} = \binom{n-(j-1)(r-1)}{j}$$

και

$$\mathbf{N_C(j,n,r,2)} = \frac{n}{n-j(r-1)}\binom{n-j(r-1)}{j}$$

Άρα, η αξιοπιστία για $k = 2 \leq r \leq n$, μπορεί να δοθεί από τον παρακάτω τύπο:

$$\mathbf{R_L(p;2,r,n)} = \sum_{j=0}^{m} \binom{n-(j-1)(r-1)}{j} q^j p^{n-j} \quad \text{, όπου m = [(n + r - 1)/r]}$$

και

$$\mathbf{R_C(p;2,r,n)} = \sum_{j=0}^{s} \frac{n}{n-j(r-1)} \binom{n-j(r-1)}{j} q^j p^{n-j} \quad \text{, όπου s = [n/r]}$$

B. $\boldsymbol{n = r + \lambda,\ \lambda \leq r}$ **à** Εδώ θα εξεταστεί η περίπτωση όπου $n = r + \lambda,\ \lambda \leq r$, για την οποία ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις [1]:

$$\mathbf{R_L(p;k,r,n)} = \sum_{x=1}^{k} R_L(p;x,l,2l)\binom{r-l}{k-x} p^{r-l-k+x} q^{k-x}$$

$$\text{όπου } R_L(p;x,l,2l) = 1 \text{ αν } x > \lambda$$

οπότε για n = r + 1, ισχύει :

$$\mathbf{R_L(p;k,r,n)} = \binom{r-1}{k-1} p^{r-k+2} q^{k-1} + \sum_{x=0}^{k-2} \binom{r-1}{x} p^{r-1-x} q^x$$

και για n = r + 2, ισχύει :

$$\mathbf{R_L(p;k,r,r+2)} = \binom{r-2}{k-1} p^{r-k+3} q^{k-1} + p^2(1+2q)\binom{r-2}{k-2} p^{r-k} q^{k-2} + \\ + \sum_{x=0}^{k-3} \binom{r-2}{x} p^{r-x-2} q^x$$

Όπως παρατηρούμε, οι σχέσεις που δίνουν την αξιοπιστία του συστήματος της καθεμιάς από τις παραπάνω περιπτώσεις είναι αρκετά σύνθετες και πολύπλοκες, με αποτέλεσμα να είναι αναγκαία η χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή κατά την υπολογιστική διαδικασία.

2.4 Πολλαπλά κριτήρια αποτυχίας στα k-από-r συνεχόμενα-από-n : F Συστήματα (Consecutive k-Out-of-r-From-n System With Multiple Failure Criteria)

Αρχικά παραθέτονται ορισμένοι συμβολισμοί που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια και είναι αρκετά χρήσιμοι για την κατανόηση της συγκεκριμένης παραγράφου:

n : αριθμός στοιχείων του συστήματος

H : αριθμός των κριτηρίων αποτυχίας του συστήματος

r_H : μέγιστο στοιχείο του r

X_j : τυχαία κατάσταση του συστήματος(με $X_j=0$ όταν αποτυγχάνει και $X_j=1$ όταν δουλεύει)

ρ : η πιθανότητα ότι το σύστημα δουλεύει

Y : τυχαίος δυαδικός παράγοντας που αναπαριστά καταστάσεις των r συνεχόμενων εξαρτημάτων

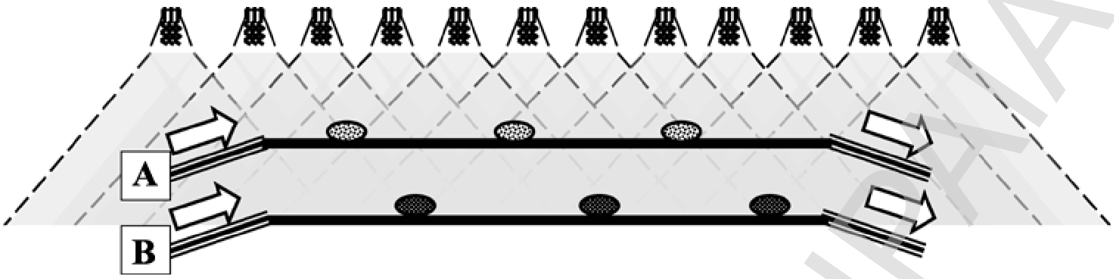
$U_{h,r}(z)$: συνάρτηση u που αναπαριστά μια πιθανή κατάσταση για την ομάδα εξαρτημάτων από h ως h+r-1

R : αξιοπιστία του συστήματος

F : αποτυχία του συστήματος

Η ύπαρξη πολλαπλών κριτηρίων αποτυχίας είναι μια αρκετά κοινή κατάσταση για τα πολύπλοκα συστήματα, ειδικά για τα k-r-n συστήματα. Το k-από-r συνεχόμενα-από-n : F Γραμμικό Σύστημα έχει n σε σειρά εξαρτήματα, και αποτυγχάνει αν λιγότερα από k από τα r συνεχόμενα εξαρτήματα είναι σε λειτουργία. Πιο συγκεκριμένα, $k = \{k_i \mid 1 \le i \le H\}$ και $r = \{r_i \mid 1 \le i \le H\}$, και μάλιστα είναι ακέραιοι τέτοιοι ώστε $r_i \le r_{i+1}$, $r_i \le n$ και $k_i \le r_i$. Το σύστημα αποτυγχάνει αν υπάρχει τουλάχιστον μια ομάδα από r_i συνεχόμενα εξαρτήματα, μέσα στην οποία λιγότερα από k_i εξαρτήματα δουλεύουν για $1 \le i \le H$.

Παράδειγμα: Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα θερμάνσεως [3], το οποίο πρέπει να παρέχει μία συγκεκριμένη θερμοκρασία κατά μήκος διαφόρων γραμμών με κινούμενα μέρη τοποθετημένα σε διαφορετικές αποστάσεις από τις αντιστάσεις. Η θερμοκρασία σε κάθε σημείο της γραμμής i καθορίζεται από μία συσσωρευμένη επιρροή από r_i κοντινές αντιστάσεις. Αν σε οποιοδήποτε ομάδα r_i , ο αριθμός των αντιστάσεων που δουλεύουν είναι μικρότερος από k_i , το σύστημα αποτυγχάνει επειδή δεν μπορεί να παρέχει την απαραίτητη θερμοκρασία, η οποία δεν πρέπει να είναι λιγότερη από μία συγκεκριμένη τιμή σε κάθε σημείο της γραμμής i.



Εικόνα 2.1: Σύστημα (1,2)-από-(3,5) συνεχόμενα-από-12 [3]

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σύστημα 12 αντιστάσεων και ότι το σύστημα αποτυγχάνει αν λιγότερες από 1 από 3 αντιστάσεις, ή λιγότερες από 3 από 5 αντιστάσεις, δουλεύουν. Με άλλα λόγια, πρόκειται για ένα σύστημα (1,2)-από-(3,5) συνεχόμενα-από-12. Θεωρούμε ότι έχουμε μια ομάδα 6 συνεχόμενων αντιστάσεων στο σύστημα αυτό και έστω ότι κάθε αντίσταση είναι στην κατάσταση 1 όταν δουλεύει και στην κατάσταση 0 όταν αποτυγχάνει. Ο συνδυασμός των καταστάσεων της ομάδας των 6 αντιστάσεων μπορεί να αναπαρασταθεί από μία 6-bit ακολουθία δυαδικών αριθμών. Για παράδειγμα στην ακολουθία 000110, δεν ικανοποιείται το πρώτο κριτήριο(1-από-3) γιατί από τις 3 συνεχόμενες αντιστάσεις δεν δουλεύει καμία, ενώ στην ακολουθία 001001, δεν ικανοποιείται το δεύτερο κριτήριο(2-από-5), και τέλος στην ακολουθία 011001 δεν ικανοποιείται κανένα από τα δύο κριτήρια.

2.4.1 k-από-r συνεχόμενα-από-n : F Γραμμικό Σύστημα

Θεωρούμε ότι όλα τα n εξαρτήματα του συστήματος είναι ίδια και ανεξάρτητα μεταξύ τους. Η κατάσταση του κάθε εξαρτήματος j του συστήματος χαρακτηρίζεται από μια τυχαία δυαδική μεταβλητή X_j , όπου $X_j = 0$ αντιστοιχεί στην αποτυχία και $X_j = 1$ αντιστοιχεί στη σωστή λειτουργία. Οπότε η πιθανότητα το σύστημα να δουλεύει είναι ίση με $p = Pr\{ X_j = 1\}$.

Το σύστημα αποτυγχάνει αν για $1 \leq i \leq H$, τουλάχιστον ένα από τα αθροίσματα $\sum_{j=1}^{r_i} X_j$, $\sum_{j=2}^{r_i+1} X_j$, … , $\sum_{j=n-r_i+1}^{n} X_j$ είναι μικρότερο από k_i. Τότε, η αξιοπιστία του συστήματος ορίζεται ως εξής [3]:

$$\mathbf{R = Pr\{} \sum_{j=h}^{h+r_i-1} X_j \geq k_i \text{ , } 1 \leq h \leq n-r_i+1, \ 1 \leq i \leq H \mathbf{\}}$$

Μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί ότι αν υπάρχει ένα i για το οποίο ισχύει ότι $k_i = r_i$, το σύστημα γίνεται σειριακό και η αξιοπιστία του είναι ίση με p^n. Άλλωστε, η κατάσταση όπου ισχύει $k_i = r_i$, σημαίνει ότι οποιαδήποτε ομάδα από r_i συνεχόμενα εξαρτήματα δεν πρέπει να περιέχει εξαρτήματα που αποτυγχάνουν.

Η διαδικασία υπολογισμού της αξιοπιστίας που χρησιμοποιείται εδώ, είναι βασισμένη στον μετασχηματισμό Z, που λέγεται και συνάρτηση-u και θεωρείται ιδανική για την εκτίμηση της αξιοπιστίας διαφορετικών τύπων συστημάτων με πολλές καταστάσεις.

Η συνάρτηση-u μιας τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως εξής:

$$u(z) = pz^1 + (1-p)z^0$$

Αυτή η ισότητα αναπαριστά τη σχέση ανάμεσα στη τυχαία μεταβλητή και στην πιθανότητα η μεταβλητή να παίρνει αυτή την τιμή. Στην περίπτωσή μας η μεταβλητή X αναπαριστά την κατάσταση των στοιχείων του συστήματος και η u-συνάρτηση u(z) αναπαριστά την πιθανή κατάσταση των στοιχείων του συστήματος. Αν τώρα θέλουμε να αναπαραστήσουμε r δυαδικές μεταβλητές για ένα σύνολο r εξαρτημάτων, πρέπει να αντικαταστήσουμε τη X με την Y = {Y(1),…,Y(r)}.

Θεωρούμε μια κατάσταση m, τέτοια ώστε $m_j \in \{0,1\}$ για $h \le j \le h+r-1$. Επίσης, οι καταστάσεις των εξαρτημάτων της h ομάδας της κατάστασης m, παρουσιάζονται στην $y_m = \{m_h,\ldots,m_{h+r-1}\}$. Ακόμα, το διάνυσμα της u-συνάρτησης για μια ομάδα r συνεχόμενων εξαρτημάτων, φαίνεται στην παρακάτω σχέση:

$$U_{h,r}(z) = \sum_{m_h=0}^{1}\sum_{m_{h+1}=0}^{1}\cdots\sum_{m_{h+r-1}=0}^{1}\Big(\prod_{j=h}^{h+r-1} p^{m_j}(1-p)^{1-m_j}\Big)z^{\{m_h,m_{h+1},\ldots,m_{h+r-1}\}}$$

η οποία μπορεί να παρουσιαστεί σε πιο απλή μορφή ως εξής:

$$U_{h,r}(z) = \sum_{m=1}^{2^r} Q_m z^{y_m}$$

όπου Q_m είναι η πιθανότητα μια ομάδα εξαρτημάτων h να είναι στην κατάσταση m και ο παράγοντας y_m αναπαριστά τις καταστάσεις των εξαρτημάτων όταν η ομάδα που αυτά ανήκουν είναι στην κατάσταση m. Έτσι, χρησιμοποιώντας τον παράγοντα y_m μπορούμε να καταλάβουμε αν η κατάσταση m αντιστοιχεί σε κατάσταση αποτυχίας ή όχι, αθροίζοντας τα επιμέρους στοιχεία του παράγοντα αυτού. Οπότε υπολογίζοντας το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των καταστάσεων που οδηγούν σε αποτυχία, μπορούμε να καταλήξουμε στην πιθανότητα αποτυχίας μιας ομάδας h από r συνεχόμενα εξαρτήματα, μέσω του παρακάτω συντελεστή:

$$\delta_r(U_{h,r}(z)) = \sum_{m=1}^{2^r} Q_{m^1}\Big(\sum_{j=1}^{r} y_m(j) < k\Big)$$

2.4.2 Καθορισμός της u-συνάρτησης για όλες τις ομάδες των r συνεχόμενων εξαρτημάτων

Αρχικά σημειώνεται ότι το σύστημα περιέχει ακριβώς n-r+1 ομάδες από συνεχόμενα r εξαρτήματα και κάθε εξάρτημα δεν μπορεί να ανήκει σε περισσότερες από r τέτοιες ομάδες. Για να καθοριστεί η u-συνάρτηση για όλες τις ομάδες των r συνεχόμενων εξαρτημάτων, ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα [3]:

1) $U_{1-r,r}(z) = z^{y_0}$

2) Ορίζεται ο συντελεστής Ψ ως εξής:

$$\Psi(U_{h,r}(z)) = \Psi\Big(\sum_{m=1}^{2^r} Q_m z^{y_m}\Big) = p\sum_{m=1}^{2^r} Q_m z^{f(y_m,1)} + (1-p)\sum_{m=1}^{2^r} Q_m z^{f(y_m,0)}$$

3) Κάνοντας χρήση του συντελεστή Ψ, έχουμε:

$$U_{j+1-r,r}(z) = \Psi(U_{j-r,r}(z))\text{ , για } j=1,\ldots,n$$

Τελικά, έχοντας προσδιορίσει την παραπάνω u-συνάρτηση για όλες τις ομάδες των r συνεχόμενων εξαρτημάτων και χρησιμοποιώντας τον συντελεστή $\delta_r(U_{h,r}(z))$ της προηγούμενης παραγράφου, μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στην πιθανότητα αποτυχίας μιας ομάδας h από r συνεχόμενα εξαρτήματα. Έτσι, θα είναι γνωστή και η αξιοπιστία του συγκεκριμένου συστήματος.

2.5 k-από-r συνεχόμενα-από-n:F συστήματα πολλαπλών καταστάσεων (Multi-State Sliding-Window Systems)

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται ένα νέο μοντέλο συστήματος, το οποίο ουσιαστικά είναι η γενίκευση ενός k-από-r συνεχόμενα-από-n:F συστήματος σε σύστημα πολλαπλών καταστάσεων. Αυτό το νέο σύστημα αποτελείται από n εξαρτήματα πολλαπλών καταστάσεων. Δηλαδή, το κάθε εξάρτημα j μπορεί να βρεθεί σε H_j διαφορετικές καταστάσεις, από μία κατάσταση τελείως αποτυχίας έως την κατάσταση τέλειας λειτουργίας. Μάλιστα η κάθε κατάσταση αντιστοιχίζεται με ένα συγκεκριμένο βαθμό απόδοσης. Το k-από-r συνεχόμενα-από-n:F σύστημα πολλαπλών καταστάσεων αποτυγχάνει αν το άθροισμα των βαθμών απόδοσης οποιονδήποτε r συνεχόμενων εξαρτημάτων πολλαπλών καταστάσεων, είναι μικρότερο από ένα ελάχιστο επιτρεπτό όριο W.

Η ειδική περίπτωση του k-από-r συνεχόμενα-από-n:F συστήματος πολλαπλών καταστάσεων, όπου όλα τα n εξαρτήματα πολλαπλών καταστάσεων είναι ιδανικά και μπορούν να βρεθούν μόνο σε δύο καταστάσεις με βαθμό απόδοσης 0 και g αντίστοιχα, είναι ένα k-από-r συνεχόμενα-από-n:F σύστημα όπου στη συγκεκριμένη περίπτωση ισχύει $W = (r - k + 1)g$. Για την καλύτερη κατανόηση αυτών των συστημάτων ακολουθεί το παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα: Ποιοτικός Έλεγχος [4]: Στον ποιοτικό έλεγχο, το κριτήριο για να αποφασίσεις πότε να ξεκινήσεις την έρευνα για τα αίτια αλλαγής μιας διαδικασίας, βασίζεται στα τεστ ζώνης (zone tests) με τη βοήθεια των χαρτών ελέγχου. Η αλλαγή της διαδικασίας αρχίζει να γίνεται φανερή όταν κάποιο προειδοποιητικό όριο (Warning limit) παραβιάζεται επαναλαμβανόμενα ή συνεχόμενα από μία ακολουθία σημείων στον χάρτη ελέγχου (Quality control chart). Αν σε k από r συνεχόμενα τεστ, η τιμή της παραμέτρου πέφτει έξω από το προειδοποιητικό όριο, τότε ενεργοποιείται ένα προειδοποιητικό σήμα. Έτσι, για παράδειγμα θεωρούμε ότι η τιμή της παραμέτρου μπορεί να βρίσκεται μέσα σε H ζώνες. Το προειδοποιητικό σήμα ενεργοποιείται όταν το συνολικό άθροισμα των ζωνών, μέσα στις οποίες πέφτει η παράμετρος, κατά τη διάρκεια r συνεχόμενων τεστ, είναι μεγαλύτερο από μία καθορισμένη τιμή W.

Αρχικά, θεωρούμε ότι όλα τα n εξαρτήματα πολλαπλών καταστάσεων του k-από-r συνεχόμενα-από-n:F συστήματος πολλαπλών καταστάσεων, είναι αμοιβαίως ανεξάρτητα. Επίσης, κάθε εξάρτημα πολλαπλών καταστάσεων j μπορεί να βρεθεί σε μία από τις H_j διαφορετικές καταστάσεις, όπου κάθε κατάσταση $h \in \{1, 2, \ldots, H_j\}$ χαρακτηρίζεται από την πιθανότητα $p_{j,h}$ και από τον βαθμό απόδοσης $g_{i,h}$.

Η διαδικασία εκτίμησης της αξιοπιστίας του k-από-r συνεχόμενα-από-n:F συστήματος πολλαπλών καταστάσεων, βασίζεται στον μετασχηματισμό-z (που ονομάζεται και u-συνάρτηση). Η u-συνάρτηση μιας διακριτής μεταβλητής X ορίζεται ως εξής [4]:

$$u(z) = \sum_{k=1}^{K} q_k z^{X_h}$$

όπου η μεταβλητή X έχει K πιθανές τιμές και q_k = Pr{X = X_k}.

Επίσης, η u-συνάρτηση μπορεί να ερμηνεύσει την κατανομή των βαθμών απόδοσης των εξαρτημάτων πολλαπλών καταστάσεων, δηλαδή μπορεί να αναπαραστήσει όλες τις πιθανές καταστάσεις ενός εξαρτήματος πολλαπλών καταστάσεων j με τη βοήθεια της σχέσης:

$$u_j(z) = \sum_{h=1}^{H_j} p_{j,h} z^{g_{j,h}}$$

Οπότε για να γίνει αναπαράσταση της κατανομής των βαθμών απόδοσης, αρκεί να αντικαταστήσουμε την τυχαία μεταβλητή X με το τυχαίο διάνυσμα G = {G(1), …, G(r)}, όπου G(j) ισούται με το βαθμό απόδοσης του j εξαρτήματος πολλαπλών καταστάσεων από ένα σύνολο r εξαρτημάτων πολλαπλών καταστάσεων και παίρνει τιμές $g_1(j)$, …, $g_{Hj}(j)$. Έτσι, η u-συνάρτηση είναι η ακόλουθη:

$$U(z) = \sum_{h_e=1}^{H_e} \sum_{h_f=1}^{H_f} p_{e,h_e} p_{f,h_f} z^{\{g_e, h_e, g_f, h_f\}}$$

η οποία μπορεί να απλοποιηθεί στην παρακάτω σχέση:

$$U(z) = \sum_{i=1}^{I} Q_i z^{g_i}$$

Αυτή η u-συνάρτηση προσδιορίζει όλες τις πιθανές καταστάσεις του συνόλου r εξαρτημάτων πολλαπλών καταστάσεων. Με g_i να αναπαρίστανται οι βαθμοί απόδοσης των εξαρτημάτων οποιασδήποτε κατάστασης i, μπορούμε να υπολογίσουμε τον αθροιστικό βαθμό απόδοσης του συνόλου των εξαρτημάτων,

$\sigma(g_i) = \sum_{s=1}^{r} g_i(s)$.

Οπότε, προσθέτοντας τις πιθανότητες όλων των καταστάσεων όπου το άθροισμα των βαθμών απόδοσης είναι μικρότερο από W, μπορούμε να πάρουμε την πιθανότητα αποτυχίας του συνόλου των r εξαρτημάτων πολλαπλών καταστάσεων, χρησιμοποιώντας τον δείκτη δ:

$$d(U(z), W) = \sum_{i=1}^{I} Q_i \bullet 1_{s\,(g_i) < W}$$

2.6 k-από-r συνεχόμενα-από-n:G συστήματα

Στη συγκεκριμένη παράγραφο παρουσιάζεται ένα γραμμικό k-από-r συνεχόμενα-από-n:G σύστημα πολλαπλών καταστάσεων. Στο μοντέλο αυτό το σύστημα αποτελείται από n εξαρτήματα πολλαπλών καταστάσεων σε γραμμική διάταξη. Το σύστημα καθώς και τα εξαρτήματά του μπορούν να βρεθούν σε πολλές διαφορετικές καταστάσεις, από τελείως αποτυχία σε τέλεια λειτουργία. Το σύστημα είναι στην κατάσταση j ή σε ανώτερη αν και μόνο αν τουλάχιστον k_j εξαρτήματα από r συνεχόμενα εξαρτήματα είναι στην κατάσταση j ή σε ανώτερη. Επίσης, πρέπει να αναφερθεί ότι το k-από-r συνεχόμενα-από-n:G σύστημα είναι ισοδύναμο με το (r – k + 1)-από-r συνεχόμενα-από-n:F σύστημα.

Πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό της αξιοπιστίας του συστήματος αυτού, είναι απαραίτητο να γίνουν ορισμένες υποθέσεις [5]:

i. Η $\varphi(x)$ είναι αύξουσα και μάλιστα $\varphi(j)=\varphi(j, j, \ldots, j)=j$, για $j\in S$

ii. Τα x_i είναι αμοιβαίως S-ανεξάρτητα

iii. Οι πιθανές καταστάσεις του κάθε εξαρτήματος και του συστήματος είναι διατεταγμένα: Κατάσταση 0 ≤ Κατάσταση 1 ≤ … ≤ Κατάσταση M

iv. $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_M$

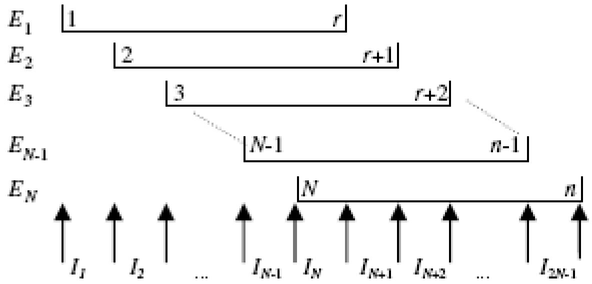
v. Ορίζουμε το σύστημα πολλαπλών καταστάσεων ως λειτουργούν σύστημα αν $\varphi(x) \geq j$, αλλιώς ως αποτυχόν

vi. Ορίζουμε το εξάρτημα του συστήματος πολλαπλών καταστάσεων ως λειτουργούν σύστημα αν $x_i \geq j$, αλλιώς ως αποτυχόν.

2.6.1 Αξιοπιστία του συστήματος με ίσες πιθανότητες εξαρτημάτων

Στον υπολογισμό της αξιοπιστίας του k-από-r συνεχόμενα-από-n:G συστήματος πολλαπλών καταστάσεων με ίσες πιθανότητες εξαρτήματα [5], θα ληφθούν υπόψη δύο περιπτώσεις:

- **Περίπτωση 1η**: Αν $r \geq N$, δηλαδή βρισκόμαστε στην περίπτωση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 2.2: $r \geq N$

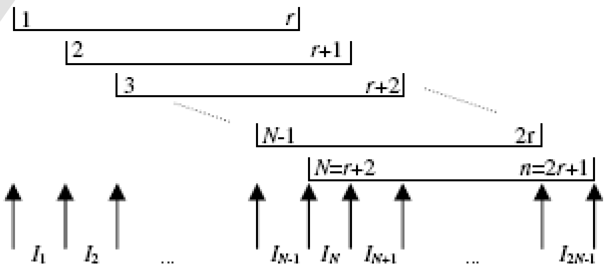
τότε η αξιοπιστία του συστήματος ισούται με:

$$R_j = \sum_{x_1=t_1}^{m_1} \cdots \sum_{x_{2N-1}=t_{2N-1}}^{m_{2N-1}} \binom{r-N+1}{x_N} P_j^x Q_j^{n-x},$$

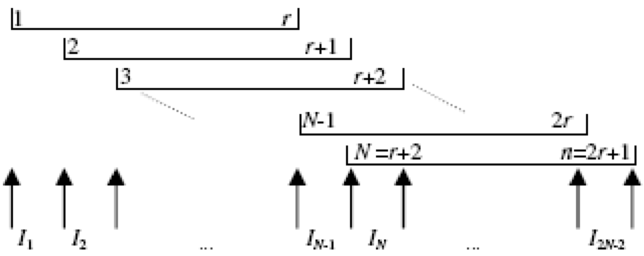
όπου:

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_{2N-1},$$
$$m_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, N+1, \ldots, 2N-1,$$
$$m_N = r - N + 1,$$
$$t_1 = \max(0, k_j - r + 1),$$
$$t_i = \max\left(0, k_j - (r-i) - \sum_{b=1}^{i-1} x_b\right), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, N-1,$$
$$t_i = \max\left(0, k_j - \sum_{b=i-(N-1)}^{i-1} x_b\right), \quad i = N, \ldots, 2N-1.$$

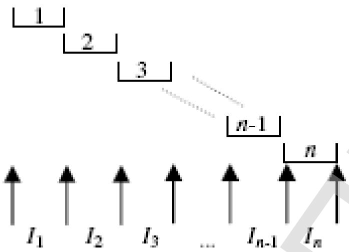
- **Περίπτωση 2^{η}**: Αν $\boldsymbol{r < N}$, δηλαδή βρισκόμαστε σε μία από τις περιπτώσεις που φαίνονται στα παρακάτω σχήματα:



Σχήμα 2.3: $r = 2N - 1$



Σχήμα 2.4: *r* = 2*N* – 2



Σχήμα 2.5: *n* = *N*

τότε η αξιοπιστία του συστήματος ισούται με:

$$R_j = \sum_{x_1=t_1}^{m_1} \dots \sum_{x_n=t_n}^{m_n} P_j^x Q_j^{n-x},$$

όπου:

$$\begin{aligned}
&x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
&m_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\
&t_1 = \max(0, k_j - r + 1), \\
&t_i = \max\left(0, k_j - (r-i) - \sum_{b=1}^{i-1} x_b\right), \quad i = 2, 3, \dots, r, \\
&t_i = \max\left(0, k_j - \sum_{b=1}^{r-1} x_{i-b}\right), \quad i = r+1, \dots, n.
\end{aligned}$$

2.6.2 Αξιοπιστία του συστήματος με άνισες πιθανότητες εξαρτημάτων

Αρχικά, έστω:

$$B_e^j(m_N, x_N) = P_{e+m_N j} B_e^j(m_N - 1, x_N - 1) + Q_{e+m_N j} B_e^j(m_N - 1, x_N), \text{ για } e = N - 1.$$

Οι περιοριστικές προϋποθέσεις είναι:

$B_e^j(a,b) = 0$, για $b > \alpha > 0$

$B_e^j(0,0) = 1$

$B_e^j(a,0) = Q_{e+aj} B_e^j(a-1,0)$, για $\alpha > 0$

Οπότε, όμοια με προηγουμένως, στον υπολογισμό της αξιοπιστίας του k-από-r συνεχόμενα-από-n:G συστήματος πολλαπλών καταστάσεων με άνισες πιθανότητες εξαρτημάτων [5], θα ληφθούν υπόψη οι δύο ακόλουθες περιπτώσεις:

- **Περίπτωση 1η**: Αν $r \geq N$, τότε η αξιοπιστία του συστήματος ισούται με:

$$R_j = \sum_{x_1=t_1}^{m_1} \cdots \sum_{x_{2N-1}=t_{2N-1}} m_{2N-1} \left(P_{1,j}^{x_1} Q_{1,j}^{1-x_1} \ldots P_{N-1,j}^{x_{N-1}} Q_{N-1,j}^{1-x_{N-1}} B_e^j(m_N, x_N) P_{r+1,j}^{x_{N+1}} Q_{r+1,j}^{1-x_{N+1}} \ldots P_{n,j}^{x_{2N-1}} Q_{n,j}^{1-x_{2N-1}} \right)$$

όπου:

$$m_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, N+1, \ldots, 2N-1,$$

$$m_N = r - N + 1,$$

$$t_1 = \max(0, k_j - r + 1),$$

$$t_i = \max\left(0, k_j - (r - i) - \sum_{b=1}^{i-1} x_b\right), \quad i = 2, 3, \ldots, N-1,$$

$$t_i = \max\left(0, k_j - \sum_{b=i-(N-1)}^{i-1} x_b\right), \quad i = N, \ldots, 2N-1.$$

- **Περίπτωση 2$^{\eta}$**: Αν $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{N}$, τότε η αξιοπιστία του συστήματος ισούται με:

$$R_j = \sum_{x_1=t_1}^{m_1} \cdots \sum_{x_n=t_n}^{m_n} (P_{1,j}^{x_1} Q_{1,j}^{1-x_1} \ldots P_{n,j}^{x_n} Q_{n,j}^{1-x_n}),$$

όπου:

$$m_i = 1, i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$t_1 = \max(0, k_j - r + 1),$$
$$t_i = \max\left(0, k_j - (r - i) - \sum_{b=1}^{i-1} x_b\right), \quad i = 2, 3, \ldots, r,$$
$$t_i = \max\left(0, k_j - \sum_{b=1}^{r-1} x_{i-b}\right), \quad i = r + 1, \ldots, n.$$

Οπότε, κάνοντας χρήση των σχέσεων των δύο προηγούμενων παραγράφων και λαμβάνοντας υπόψη την κατάσταση του συστήματος και τους τυχόντες περιορισμούς, μπορούμε να καταλήξουμε στον υπολογισμό της αξιοπιστίας του k-από-r συνεχόμενα-από-n:G συστήματος πολλαπλών καταστάσεων, είτε στην περίπτωση που έχουμε ίσες πιθανότητες εξαρτημάτων, είτε σε αυτήν που έχουμε άνισες πιθανότητες εξαρτημάτων.

2.7 Απολογισμός 2ου Κεφαλαίου

Συγκεντρωτικά, στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάται η αξιοπιστία των k-από-r-από-n συστημάτων. Αρχικά, αναλύθηκε ο τρόπος υπολογισμού των φραγμάτων αξιοπιστίας των k-από-r συνεχόμενα-από-n: F συστημάτων και έπειτα παρουσιάστηκε ο τρόπος υπολογισμού της αξιοπιστίας τόσο των γραμμικών όσο και των κυκλικών αυτών συστημάτων. Ακόμα, έγινε αναφορά στις περιπτώσεις υπολογισμού της αξιοπιστίας των k-r-n συστημάτων πολλαπλών καταστάσεων καθώς και των k-από-r συνεχόμενα-από-n: G συστημάτων.

Η πολυπλοκότητα που παρουσιάζει η δομή των k-r-n συστημάτων, μας οδηγεί σε προσπάθειες προσδιορισμού οριακών θεωρημάτων που διέπουν το χρόνο ζωής των συστημάτων αυτών, πράγμα το οποίο σημαίνει εύρεση των φραγμάτων αξιοπιστίας τους. Η τεχνική Boole-Bonferroni, η οποία δίνει τα φράγματα για την αξιοπιστία των k-r-n συστημάτων κάνοντας χρήση των βελτιωμένων ανισοτήτων Bonferroni, είναι σχετικά εύκολη στη χρήση της και οδηγεί σε αρκετά έγκυρα αποτελέσματα.

Επίσης, οι τύποι που δίνονται για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας των k-r-n συστημάτων, γραμμικών και κυκλικών, καθώς και των k-r-n συστημάτων πολλαπλών καταστάσεων, είναι αρκετά πολύπλοκοι και βέβαια χρειάζεται υπολογιστής ώστε να μπορέσει κάποιος να υπολογίσει τις διάφορες τιμές της αξιοπιστίας των συστημάτων αυτών για τις διάφορες τιμές των k, r, n. Σίγουρα όμως, σύμφωνα με τις μελέτες πάνω στο συγκεκριμένο θέμα, η σύγκριση των φραγμάτων αξιοπιστίας για τις διάφορες τιμές των k, r, n με τις αντίστοιχες τιμές της αξιοπιστίας που προκύπτουν, δίνει πολύ ικανοποιητικά συμπεράσματα. Με άλλα λόγια, υπολογίζοντας είτε τα φράγματα αξιοπιστίας ενός k-r-n συστήματος, είτε την τιμή της αξιοπιστίας αυτού, καταλήγουμε σχεδόν στο ίδιο αποτέλεσμα. Βέβαια, είναι γεγονός ότι πολλές φορές, εξαιτίας της πολυπλοκότητας των συστημάτων αυτών, είναι πολύ ευκολότερη η εύρεση των φραγμάτων αξιοπιστίας, παρά ο υπολογισμός της ακριβής τιμής της αξιοπιστίας κάποιου συγκεκριμένου k-r-n συστήματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 2^ΟΥ^ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

[1] **M. Sfakianakis, S. Kounias, and A. Hillaris**, "*Reliability of consecutive k-out-of-r-from-n: F system*," **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 41, No. 3, September 1992, pp. 442 – 447

[2] **A. Habib, T. Szantai**, "*New bounds on the reliability of the consecutive k-out-of-r-from-n: F system*", **Reliability Engineering and System Safety**, Vol. 68, 2000, pp. 97–104

[3] **G. Levitin**, "*Consecutive k-Out-of-r-From-n System With Multiple Failure Criteria*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 53, No. 3, September 2004, pp. 394 - 400

[4] **G. Levitin**, "*Linear Multi-State Sliding-Window Systems*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 52, No. 2, June 2003, pp. 263 – 269

[5] **A. Habib, R. Al-Seedy, T. Radwan**, "*Reliability evaluation of multi-state consecutive k-out-of-r-from-n: G system*", **Applied Mathematical Modelling**, Vol. 31, 2007, pp. 2412 – 2423

[6] **Jun Cai**, "*Reliability of a large consecutive-k-out-of-r-from-n:F system with unequal component-reliability*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 43, No. 1, March 1994, pp. 107 – 111

[7] **M. Jain, R. Ghimire**, "*Reliability of k-r-out-of-n: G system subject to random and common cause failure*", **Performance Evaluation**, Vol. 29, 1997, pp. 213 – 218

[8] **G. Levitin**, "*Reliability of Linear Multistate Multiple Sliding Window Systems*", **Naval Research Logistics**, Vol. 52, 2005, pp. 212 - 223

[9] **Z. Psillakis**, "*A simulation algorithm for computing failure probability of a consecutive-k-out-of-r-from-n: F system*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 44, No. 3, September 1995, pp. 523 – 531

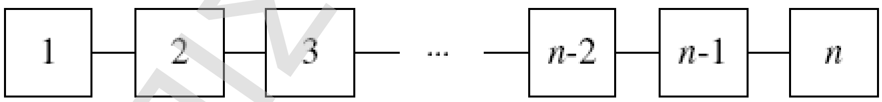
[10] **F. Makri, Z. Psillakis**, "*Bounds for reliability of k-within two-dimensional consecutive-r-out-of-n failure systems*", **Microelectronics Reliability,** Vol. 36, No. 3, 1996, pp. 341-345

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο} - k-*από*-n ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Το κεφάλαιο που ακολουθεί ασχολείται με τα k-από-n συστήματα. Στο κεφάλαιο αυτό, δίνεται έμφαση στον υπολογισμό της αξιοπιστίας των γενικευμένων k συνεχόμενα-από-n: F συστημάτων (Γραμμικών και Κυκλικών), καθώς και στα φράγματα αξιοπιστίας των παραπάνω συστημάτων. Επίσης, αναλύονται τα k συνεχόμενα-από-n: G συστήματα και τα k-από-n συστήματα πολλαπλών καταστάσεων. Τέλος, παρουσιάζονται κάποιες ειδικές περιπτώσεις των συστημάτων αυτών, όπως είναι το συνωστισμένο σύστημα τριών καταστάσεων και τα DFM συστήματα

3.1 Αξιοπιστία ενός γενικευμένου k συνεχόμενα-από-n:F Συστήματος

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται η αξιοπιστία του συστήματος k-r-n όταν r=k, κάτω από οποιοδήποτε είδος εξάρτησης μεταξύ των εξαρτημάτων του συστήματος. Κατά καιρούς, τα k συνεχόμενα-από-n:F συστήματα έχουν μελετηθεί στις περιπτώσεις των στατιστικά ανεξάρτητων εξαρτημάτων, της Μαρκοβιανής εξάρτησης μεταξύ των εξαρτημάτων, των εναλλάξιμων εξαρτημάτων καθώς και τη γενική περίπτωση(την οποία θα εξετάσουμε και εμείς), όπου δηλαδή δεν υποθέτουμε κανένα είδος εξάρτησης μεταξύ των εξαρτημάτων του συστήματος. Ακολουθεί ο υπολογισμός της αξιοπιστίας των k συνεχόμενα-από-n:F γραμμικών συστημάτων καθώς και ο υπολογισμός της αξιοπιστίας των k συνεχόμενα-από-n:F κυκλικών συστημάτων.



Σχήμα 3.1: k συνεχόμενα-από-n:F σύστημα [1]

3.1.1 Αξιοπιστία ενός γενικευμένου k συνεχόμενα-από-n:F Γραμμικού Συστήματος

Έστω x_i τυχαία μεταβλητή που δηλώνει την κατάσταση του εξαρτήματος i , δηλαδή $x_i=0$ αν το εξάρτημα i δουλεύει, ενώ $x_i=1$ αν το εξάρτημα i αποτυγχάνει, για i=1,2,…,n. Επίσης $L(x_1,\ldots,x_n)$ είναι η συνάρτηση δομής του γραμμικού k συνεχόμενα-από-n:F συστήματος, η οποία ισούται με 0 αν το σύστημα δουλεύει και με 1 αν το σύστημα αποτυγχάνει. Ακόμα $R_L(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ είναι η αξιοπιστία του k συνεχόμενα-από-n:F γραμμικού συστήματος. Τέλος έστω I(n)=(1,2,…,n) και τα εξαρτήματα του συστήματος θα ονομάζονται με στοιχεία του I(n) , και T_i ο χρόνος αποτυχίας του εξαρτήματος i , i=1,2,…,n.

Αρχικά ορίζουμε επαγωγικά το σύνολο L(n), θέτοντας :

$L(n)=0$, αν $n<k$

$L(k)=I(k)=\{1,2,\ldots,k\}$, αν $n=k$

$L(n)=L(n-1) \bigcup \{A \bigcup \{n-k,\ldots,n\}\}$, αν $n\geq k+1$

Έπειτα ορίζουμε επαγωγικά τον αριθμό I(A), για όλα τα $A\in L(n)$, θέτοντας:

$I(A)=-1$, αν το A έχει k στοιχεία

$I(A)=1$, αν το A έχει k+1 στοιχεία

Επιπλέον για $A\in L(n-1)$ και $n\geq k$, ισχύει :

$I(A \bigcup \{n-k,\ldots,n\}) = I(A)$

$I(A \bigcup \{n-k+1,\ldots,n\}) = -I(A)$

Τέλος, αν $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ είναι ένα υποσύνολο του I(n), ορίζουμε $x(A) = x_{a1}\, x_{a2} \ldots x_{am}$, $x(0) = 1$.

Έτσι, για $n\geq k+1$, έχουμε:

$$\mathbf{L(x_1, \ldots, x_n)} = L(x_1, \ldots, x_{n-1}) + L(x_1, \ldots, x_{n-k+1})x_{n-k}\ldots x_n - L(x_1, \ldots, x_{n-k-1})x_{n-k+1}\ldots x_n + x_{n-k+1}\ldots x_n - x_{n-k}\ldots x_n$$

Άρα έχοντας ορίσει όλα τα παραπάνω είμαστε έτοιμοι να προχωρήσουμε στη συνάρτηση δομής του k συνεχόμενα-από-n:F γραμμικού συστήματος, για την οποία ισχύει :

$$\mathbf{L(x_1,\ldots,x_n)} = - \Sigma\, I(A)x(A)$$

το οποίο είναι για όλα τα $A\in L(n)$.

Μάλιστα η αξιοπιστία του συστήματος αυτού ισούται με [1]:

$$\mathbf{R_L(p_1,p_2,\ldots,p_n)} = 1 + \Sigma\, I(A)P(T_i\leq t \text{ , για } i \in A)$$

το οποίο είναι για όλα τα $A\in L(n)$, μάλιστα αποδεικνύεται αν αναλογιστούμε ότι η πιθανότητα αποτυχίας του συστήματος πριν το χρόνο t, είναι η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής $L(x_1,\ldots,x_n)$, καθώς και ότι η αναμενόμενη τιμή του x(A) είναι $P(T_i\leq t$, για $i \in A)$.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι οι μεταβλητές $T_1,\ldots,T\alpha_n$ είναι ανεξάρτητες και έστω ότι $q_i = P(T_i \le t)$ για $i=1,\ldots,n$, τότε η αξιοπιστία του k συνεχόμενα-από-n:F γραμμικού συστήματος είναι :

- Για $n \le 2k$

$$\mathbf{R_L(p_1,p_2,\ldots,p_n)} = 1-q_1\ldots q_k - \sum_{i=1}^{n-k}(1-q_i)q_{i+1}\ldots q_{i+k}$$

- Για $n=2k+1$

$$\mathbf{R_L(p_1,p_2,\ldots,p_{2k+1})} = 1-q_1\ldots q_k(1-q_{k+2}\ldots q_{2k+1}+q_{k+1}\ldots q_{2k+1}) - \sum_{i=1}^{n-k}(1-q_i)q_{i+1}\ldots q_{i+k}$$

Τέλος, θα μπορούσε να δοθεί μια απευθείας περιγραφή του L(n) και των I(A): Έστω Α ένα υποσύνολο του I(n), τότε $A \in L(n)$ αν και μόνο αν

1) υπάρχουν ακέραιοι τέτοιοι ώστε

$$1 \le a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_m < b_m \le n$$

και για κάθε $1 \le i \le m$

ή το $(b_i - a_i + 1)$ διαιρείται από το $(k + 1)$
ή το $(b_i - a_i + 1) - k$ διαιρείται από το $(k + 1)$

2) $x \in A$ αν και μόνο αν υπάρχει $1 \le i \le m$ τέτοιο ώστε $a_i \le x \le b_i$

Αν ικανοποιούνται οι παραπάνω συνθήκες, τότε $I(A) = -1$, αν και μόνο αν για ένα περιττό αριθμό δεικτών i, $1 \le i \le m$, αληθεύει ότι $(b_i - a_i + 1) - k$ διαιρείται από το $(k + 1)$.

3.1.2 Αξιοπιστία ενός γενικευμένου k συνεχόμενα-από-n:F Κυκλικού Συστήματος

Όμοια με την προηγούμενη περίπτωση, θα υπολογίσουμε την αξιοπιστία ενός k συνεχόμενα-από-n:F κυκλικού συστήματος. Αρχικά το $C(x_1,\ldots,x_n)$ συμβολίζει τη συνάρτηση δομής του κυκλικού k συνεχόμενα-από-n:F συστήματος, η οποία ισούται με 0 αν το σύστημα δουλεύει και με 1 αν το σύστημα αποτυγχάνει. Η αξιοπιστία του k συνεχόμενα-από-n:F κυκλικού συστήματος συμβολίζεται με $R_C(p_1,p_2,\ldots,p_n)$. Αν $a,b\in I(n)$, τότε εισάγεται η πρόθεση modn , $a+b\in I(n)$, δηλαδή το a+b είναι το υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης του (a+b) με το n. Αν A είναι ένα υποσύνολο του I(n) τότε [1]:

$$A+b = \{b+a : a\in A\}$$

Οπότε ορίζουμε :

$$\mathbf{C(n)}=\{A+i : A\in L(n-1),\ i=0,1,\ldots,(n-1)\}$$

Επίσης αν B=A+I , για $A\in L(n-1)$, ορίζουμε το δείκτη c(B)=I(A).

Ακόμα το σύνολο I(n) ανήκει στο L(n) μόνο στις δύο παρακάτω περιπτώσεις:

α) Αν το n διαιρείται με το (k+1), τότε I(I(n))=1

β) Αν n=k mod(k+1), τότε I(I(n))=-1

Παράλληλα ισχύει ότι:

$$\mathbf{C(x_1,\ldots,x_n)}=(1-x_n)L(x_1,\ldots,x_{n-1}) + x_nC(x_1,\ldots,x_{n-1}) - \sum_{i=0}^{k-1} x_1\ldots x_i(1-x_{i+1})x_nx_{n-1}\ldots x_{n-k+i+1}(1-x_{n-k+i})\, L(x_{i+2},\ldots,x_{n-k+i-1})$$

Έχοντας υπόψη όλα τα παραπάνω, η συνάρτηση δομής ενός κυκλικού k συνεχόμενα-από-n:F συστήματος είναι η ακόλουθη:

$$\mathbf{C(x_1,\ldots,x_n) = -}\Sigma c(A)x(A) + e(n)P(T_1\le t,\ldots, T_n\le t)$$

το οποίο είναι για όλα τα $A\in C(n)$ και

e(n)=-k , αν (k+1) διαιρεί το n και

e(n)=1, σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.

Τελικά είμαστε έτοιμοι να περάσουμε στον υπολογισμό της αξιοπιστίας του k συνεχόμενα-από-n:F κυκλικού συστήματος, η οποία ισούται με :

$$\mathbf{R_C(p_1,p_2,\ldots,p_n;k)} = 1+ \Sigma\, c(A)P(T_i \leq t, \text{ για } i \in A) - e(n)P(T_1 \leq t,\ldots, T_n \leq t)$$

το οποίο είναι για όλα τα $A \in C(n)$ και μάλιστα ισχύει και η παρακάτω σχέση:

$$e(n) = - (1 + k)a(n - 1) + e(n - 1)$$

Τέλος, έστω $(n-1) \leq 2k$ και οι μεταβλητές $T_1,\ldots,T\alpha_n$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και έστω $q_i = P(T_i \leq t)$ για $i=1,\ldots,n$, τότε η αξιοπιστία του k συνεχόμενα-από-n:F κυκλικού συστήματος είναι :

$$\mathbf{R_C(p_1,p_2,\ldots,p_n;k)} = 1 - q_1\ldots q_n \text{ , αν } k=n$$

$$\mathbf{R_C(p_1,p_2,\ldots,p_n;k)} = 1 - q_1\ldots q_n - \sum_{i=1}^{n}(1-q_i)q_{i+1}\ldots q_{i+k} \text{ , αν } k \leq n-1$$

Οπότε, με βάση τους τύπους που δόθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, μπορεί να υπολογιστεί σχετικά εύκολα η αξιοπιστία τόσο ενός αξιοπιστία ενός k συνεχόμενα-από-n:F γραμμικού συστήματος, όσο και ενός αξιοπιστία ενός k συνεχόμενα-από-n:F κυκλικού συστήματος.

3.2 Νέα βελτιωμένα φράγματα αξιοπιστίας για τα k συνεχόμενα-από-n:F συστήματα

Ακόμα και όταν τα εξαρτήματα είναι ανεξάρτητα και ιδανικά κατανεμημένα με την ίδια πιθανότητα αποτυχίας *q*, η ακριβής έκφραση της αξιοπιστίας *R(n, k; q)* για ένα k συνεχόμενα-από-n:F σύστημα εμπεριέχει ένα άθροισμα διωνυμικών όρων. Επιπλέον, μόνο για μικρές τιμές του *k*, μπορούμε να υπολογίσουμε με τη βοήθεια αλγορίθμων την ποσότητα του *R(n, k; q)* και μάλιστα όταν $n \leq 1000$. Ένας πιθανός τρόπος για να ξεπεραστούν αυτά τα προβλήματα, είναι να βρούμε απλά άνω και κάτω φράγματα τα οποία προσεγγίζουν κατά πολύ την αξιοπιστία *R(n, k; q)*. Τα φράγματα αυτά υπολογίζονται με την προϋπόθεση $k \geq q/(1-q)$, η οποία μάλιστα είναι ισοδύναμη της $q \leq k/(k+1)$, και επιβεβαιώνεται αν η πιθανότητα αποτυχίας *q* δεν είναι μεγαλύτερη από 0.5 (όπως συμβαίνει σε ένα *k* συνεχόμενα-από-n:F σύστημα).

3.2.1 Φράγματα αξιοπιστίας για ένα k συνεχόμενα-από-n:F σύστημα

Η αξιοπιστία *R(n, k; q)* ενός k συνεχόμενα-από-n:F συστήματος, με ίσες πιθανότητες αποτυχίας για όλα τα εξαρτήματά του, μπορεί εύκολα να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την παρακάτω σχέση [2]:

$$R(n,k;q) = \sum_{m=0}^{\lfloor (n+1)/(k+1) \rfloor} (-1)^m q^{mk} p^{m-1} \left(\binom{n-mk}{m-1} + p \binom{n-mk}{m} \right)$$

όπου $p = 1 - q$.

Όμως όσο αυξάνουν οι τιμές των *n* και *k* , τόσο αυξάνει και ο υπολογιστικός φόρτος, ο οποίος όμως μπορεί να ελαττωθεί κάνοντας χρήση του ακόλουθου τύπου:

$$R(n,k;q) = (1,0,\ldots,0) M^n (1,\ldots,1,0)^{\mathrm{T}}$$

όπου $^{\mathrm{T}}$ υποδηλώνει την μετατόπιση και Μ είναι το *(k + 1)*x*(k + 1)* πίνακας μεταφοράς:

$$M = \begin{bmatrix} q & p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ q & 0 & 0 & \cdots & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οπότε από τα παραπάνω προκύπτουν τα φράγματα της αξιοπιστίας *R(n, k; q)* του συγκεκριμένου συστήματος:

$$(1-q^k)^{n-k+1} \leq R(n,k;q) \leq (1-q^k)^{\lfloor n/k \rfloor}$$

για $n \geq k \geq 1$ και $0 \leq q \leq 1$, και μπορούν να γραφούν και υπό την μορφή :

$$(1-q^k)^{\lfloor (n-k)/h \rfloor + 1}$$

όπου για h = 1 παίρνουμε το κάτω φράγμα, ενώ για h = k παίρνουμε το άνω φράγμα.

Γενικεύοντας αυτές τις παρατηρήσεις, αυτό πού θέλουμε είναι να βρούμε δύο πραγματικές συναρτήσεις $h_L = h_L(k, q)$ και $h_U = h_U(k, q)$ τέτοιες ώστε:

$$(1-q^k)^{((n-k)/h_L)+1} \leq R(n,k;q) \leq (1-q^k)^{((n-k)/h_U)+1}$$

για $n \geq k \geq 1$ και $0 < q < 1$ και συγκεκριμένα οι συναρτήσεις αυτές είναι οι ακόλουθες:

$$h_U(k,q) = \frac{1-q^k}{p}$$

και

$$h_L(k,q) = \frac{(1-q^k)^k}{p}$$

Οι συναρτήσεις αυτές μπορούν εύκολα να μας οδηγήσουν στον προσδιορισμό των φραγμάτων αξιοπιστίας ενός k συνεχόμενα-από-n:F συστήματος, σύμφωνα με τα ανωτέρω.

3.3 Νέες προσεγγίσεις για τα k συνεχόμενα-από-n:G Συστήματα

Γενικά υπάρχουν δύο βασικοί τύποι k-n συστημάτων, τα k συνεχόμενα-από-n:G συστήματα και τα k συνεχόμενα-από-n:F συστήματα. Το k συνεχόμενα-από-n:G σύστημα λειτουργεί όταν τουλάχιστον k εξαρτήματα δουλεύουν ανάμεσα στα n εξαρτήματα του συστήματος. Το k συνεχόμενα-από-n:F σύστημα αποτυγχάνει όταν τουλάχιστον k εξαρτήματα αποτυγχάνουν ανάμεσα στα n εξαρτήματα του συστήματος. Αυτά τα δύο συστήματα είναι ισοδύναμα, δηλαδή το k συνεχόμενα-από-n:G σύστημα είναι το ίδιο με το (n-k+1) συνεχόμενα-από-n:F σύστημα.

Αρχικά θεωρούμε ότι έχουμε ένα σύστημα που αποτελείται από n εξαρτήματα και το σύστημα λειτουργεί σωστά αν τουλάχιστον k εξαρτήματα λειτουργούν. Όταν ένα εξάρτημα αποτύχει, το φορτίο του διανέμεται ισομερώς σε όλα τα υπόλοιπα εξαρτήματα που λειτουργούν.

3.3.1 Εκθετική περίπτωση

Έστω ότι έχουμε ένα k-συνεχόμενα-από-n σύστημα, του οποίου τα εξαρτήματα έχουν χρόνο ζωής που ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Όταν το σύστημα τίθεται σε λειτουργία στο χρόνο 0, όλα τα εξαρτήματα δουλεύουν και μάλιστα μοιράζονται ισομερώς το φορτίο που πρέπει να καλύπτει το σύστημα. Σε αυτή την περίπτωση, ο ρυθμός αποτυχίας του κάθε εξαρτήματος δηλώνεται με λ_0. Επειδή στο σύστημα υπάρχουν n εξαρτήματα που δουλεύουν, η πρώτη αποτυχία εμφανίζεται με ρυθμό $\alpha_1 = n\lambda_0$. Όταν το σύστημα αντιμετωπίσει την πρώτη αποτυχία, τα υπόλοιπα n-1 εξαρτήματα που δουλεύουν, πρέπει να υποστηρίξουν το ίδιο φορτίο με πριν. Έτσι ο ρυθμός αποτυχίας του κάθε εξαρτήματος που δουλεύει, γίνεται λ_1, το οποίο είναι μεγαλύτερο από το λ_0. Η δεύτερη αποτυχία εμφανίζεται για $\alpha_2 = (n-1)\lambda_1$. Οπότε όταν i εξαρτήματα αποτυγχάνουν, ο ρυθμός αποτυχίας των υπόλοιπων (n-i) εξαρτημάτων που δουλεύουν, είναι ίσος με λ_i για $0 \le i \le n-k$. Η i-στη αποτυχία εμφανίζεται για $\alpha_i = (n-i+1)\lambda_{i-1}$. Το σύστημα αποτυγχάνει όταν περισσότερα από (n-k) εξαρτήματα αποτύχουν.

Αφού όλα τα εξαρτήματα ακολουθούν την εκθετική κατανομή, οι φορές αποτυχίας είναι τυχαίες ανεξάρτητες μεταβλητές X_i, όπου το X_i ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο α_i για $1 \le i \le n-k+1$. Γι' αυτό και ο χρόνος ζωής του συστήματος είναι ίσος με την (n-k+1) φορά αποτυχίας, ή αλλιώς είναι ίσος με το άθροισμα των (n-k+1) ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την εκθετική κατανομή [3].

$$\mathbf{T = X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-k+1}}$$

και

$$\mathbf{R(t) = Pr\{T \leq t\}}$$

τα οποία για να υπολογισθούν πρέπει να ληφθούν υπόψη οι τρεις παρακάτω περιπτώσεις:

A. Όλα τα $α_i$ είναι ίσα, δηλαδή $α_i=α$:

$$\mathbf{R(t)} = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(at)^i \exp(-at)}{i!}$$

B. Όλα τα $α_i$ είναι διαφορετικά:

$$\mathbf{R(t)} = \sum_{i=1}^{n-k+1} A_i \exp(-a_i t)$$

όπου $\mathbf{A_i} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-k+1} \frac{a_j}{a_j - a_i}$, για $i=1,\ldots,n-k+1$

C. Τα $α_i$ δεν είναι ούτε ίσα ούτε διαφορετικά. Συγκεκριμένα έχουμε α με $1<α<n-k+1$ με διαφορετικές τιμές $β_1, β_2, \ldots, β_α$. Έτσι θεωρούμε ότι:

$$\begin{gathered} α_1 = \ldots = α_{r1} = β_1 \\ α_{r1+1} = \ldots = α_{r1+r2} = β_2 \\ . \\ . \\ . \\ α_{r1+r2+\ldots+rα-1+1} = \ldots = α_{r1+r2+\ldots+rα} = β_α \end{gathered}$$

όπου $α \geq 1$ και ακέραιος,
όλα τα $β_i$ είναι διαφορετικά,
$n=\Sigma r_i$,
$r_i \geq 1$ και ακέραιος.

$$\mathbf{R(t)} = B \sum_{j=1}^{a} \sum_{l=1}^{r_j} \frac{\Phi_{jl}(-b_j)}{(l-1)!\, b_j^{r_j-l+1}} \bullet \sum_{i=0}^{r_j-l} \frac{\exp(-b_j t)(b_j t)^i}{i!}$$

όπου $\mathbf{B} = \prod_{j=1}^{a}(b_j)^{r_j}$ και $\mathbf{\Phi_{jl}(t)} = D^{l-1}(\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{a}(b_i+t)^{-r_i})$

3.3.2 Το μοντέλο TFR (Tampered Failure Rate)

Θεωρούμε ένα εξάρτημα το οποίο υποβάλλεται σε μία καθορισμένη σειρά φορτίων, όπου το φορτίο z_i (i=0,1,…,n-k) εφαρμόζεται κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος $[\tau_i,\tau_{i+1}]$ όπου $\tau_0=0$. Με άλλα λόγια το φορτίο αλλάζει στα $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{n-k}$. Σύμφωνα με το μοντέλο TFR, ο ρυθμός αποτυχίας του εξαρτήματος κατά τη στιγμή t είναι [3]:

$$\mathbf{h(t) = h_i(t) = \delta_i\, h_0(t)\ ,\ \text{για}\ \tau_{i-1}\leq t\leq \tau\alpha_i}$$

όπου $\delta_0 = 1$ και δ_i είναι ο παράγοντας επικινδυνότητας (tampered factor) για φορτίο z_i. Οπότε το μοντέλο TFR μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\mathbf{h(t) = \delta(z)\, h_0(t)}$$

Για ένα μοντέλο TFR που ακολουθεί την εκθετική κατανομή ισχύει:

$$\mathbf{h(t) = \delta_i\ ,\ \text{όταν}\ H(t) = H(\tau_{i-1}) + \delta_i(t-\tau_{i-1})\ ,\ \text{για}\ \tau_{i-1}\leq t<\tau_i}$$

$$\mathbf{\text{και}\ H(t)=-ln[R(t)]}$$

Επίσης για ένα μοντέλο TFR ισχύει:

$$\mathbf{h(t) = \delta_i\, h_0(t)}$$

$$\mathbf{H(t) = H(\tau_{i-1}) + \delta_i\, [H_0(t) - H_0(\tau_{i-1})]\ ,\ \text{για}\ \tau_{i-1}\leq t<\tau_i}$$

και αν $y = H_0(t)$, τότε:

$$\mathbf{h_y(y) = \delta_i}$$

$$\mathbf{H_y(y) = H_y(v_{i-1}) + \delta_i{*}[y- v_{i-1}]\ ,\ \text{για}\ v_{i-1}\leq y< v_i\ \text{και}\ v_i = H_0(\tau_i)}$$

3.3.3 Το μοντέλο IFR (Increasing Failure Rate)

Για ένα k συνεχόμενα-από-n σύστημα με ανεξάρτητα και ιδανικά κατανεμημένα εξαρτήματα με αυξανόμενου ρυθμού αποτυχίας (IFR) χρόνο ζωής [4], έχει αποδειχθεί ότι για οποιοδήποτε k, υπάρχει ένα n_k για το οποίο το σύστημα δεν διατηρεί το IFR, όταν $n > n_k$.

Επίσης έχει αποδειχθεί ότι:

a. Υπάρχει $k_0 \geq 2$ τέτοιο ώστε η $C(n,k)$ διατηρεί το IFR για όλα τα $k_0 \leq k < n \leq 1.02k$

b. Έστω $\Delta = N_S(n - q - 1, n, k) - (n - q)\, N_S(n - q, n, k)$, η $S(n,k)$ δεν διατηρεί το IFR αν $\Delta > 0$ (το $S = L$ για γραμμικό σύστημα και $S = C$ για κυκλικό σύστημα), όπου $N_S(i, n, k)$ υποδηλώνει τον αριθμό των τρόπων που διατάσσονται σε ένα σύστημα S, i αποτυχημένα εξαρτήματα και $(n - i)$ εξαρτήματα που δουλεύουν.

3.4 Γενικευμένα k-από-n συστήματα πολλαπλών καταστάσεων

Πολλά πρακτικά συστήματα μπορούν να εκτελούν τις λειτουργίες για τα οποία είναι προγραμματισμένα, σε περισσότερα από δύο διαφορετικά επίπεδα, τα οποία κυμαίνονται από την κατάσταση τέλειας λειτουργίας ως αυτήν την εντελώς αποτυχίας. Αυτού του είδους τα συστήματα είναι γνωστά ως συστήματα πολλαπλών καταστάσεων (multi-state systems). Ένα μοντέλο συστήματος πολλαπλών καταστάσεων παρέχει περισσότερη ευελιξία στη μοντελοποίηση των διαφόρων συνθηκών των εξαρτημάτων, από ένα μοντέλο δυαδικού συστήματος, όπου τα εξαρτήματα και ολόκληρο το σύστημα μπορούν να πάρουν μόνο μία από τις δύο πιθανές καταστάσεις, δηλαδή είτε δουλεύουν είτε αποτυγχάνουν. Ο προσδιορισμός των δυαδικών παράλληλων, σειριακών και k-από-n:G συστημάτων έχει επεκταθεί στην περίπτωση των πολλαπλών καταστάσεων, επιτρέποντας στα εξαρτήματα καθώς και στο σύστημα να παίρνουν περισσότερες από δύο πιθανές καταστάσεις.

Στηριζόμενοι στον συνηθισμένο ορισμό, ορίζουμε k-από-n:G σύστημα πολλαπλών καταστάσεων, το σύστημα που είναι στην κατάσταση j ή σε ανώτερη, αν τουλάχιστον k εξαρτήματα αυτού είναι στην κατάσταση j ή σε ανώτερη. Επίσης γενικευμένο k-από-n:G σύστημα πολλαπλών καταστάσεων είναι το σύστημα όπου μπορούν να υπάρχουν διαφορετικές τιμές για τα k εξαρτήματα που αντιστοιχούν στις διαφορετικές καταστάσεις αυτών. Οπότε, το σύστημα είναι στην κατάσταση j ή σε ανώτερη αν υπάρχει ένας ακέραιος l ($j \leq l \leq M$) τέτοιος ώστε τουλάχιστον k_j εξαρτήματα είναι στην κατάσταση j ή σε ανώτερη. Το γενικευμένο k-από-n:G μοντέλο συστήματος πολλαπλών καταστάσεων επιτρέπει την περιγραφή πρακτικών συστημάτων πολλαπλών καταστάσεων με περισσότερη ευελιξία και μπορεί να επεκταθεί μοντέλο k συνεχόμενα-από-n συστήματος πολλαπλών καταστάσεων.

Επίσης βασισμένοι στον συνηθισμένο ορισμό των k-από-n συστημάτων πολλαπλών καταστάσεων, υπάρχει ένα ισοδύναμο k-από-n:F συστημάτων πολλαπλών καταστάσεων, το οποίο αντιστοιχεί σε ένα k-από-n:G συστημάτων πολλαπλών καταστάσεων και η ίδια ισοδυναμία ισχύει και για τα γενικευμένα k-από-n:G και F συστήματα πολλαπλών καταστάσεων.

Αρχικά κάνουμε τις παρακάτω παραδοχές:

- Το διάστημα των καταστάσεων του κάθε εξαρτήματος και του συστήματος είναι {0, 1, 2 …, M}.

- Οι καταστάσεις όλων των εξαρτημάτων είναι τυχαίες μεταβλητές.

- Η κατάσταση του συστήματος είναι εξολοκλήρου καθορισμένη από τις καταστάσεις των εξαρτημάτων.

- Μία κατώτερου επιπέδου κατάσταση αναπαριστά μία χειρότερη ή ίση απόδοση των εξαρτημάτων ή του συστήματος.

3.4.1 Το γενικευμένο k-από-n:G σύστημα πολλαπλών καταστάσεων

Ένα σύστημα αποτελούμενο από n εξαρτήματα, λέγεται γενικευμένο k-από-n:G σύστημα πολλαπλών καταστάσεων, αν $\Phi(x) \geq j$, $(1 \leq j \leq M)$ κάθε φόρα που υπάρχει ένας ακέραιος αριθμός l $(j \leq l \leq M)$ τέτοια ώστε τουλάχιστον k_l εξαρτήματα είναι στην κατάσταση l ή σε ανώτερη [5].

Ένα γενικευμένο k-από-n:G σύστημα πολλαπλών καταστάσεων μπορεί επίσης να ονομαστεί και $(k_1, k_2, \ldots, k_M)$-από-n:G σύστημα πολλαπλών καταστάσεων, όπου για τις τιμές των k_j λαμβάνονται υπόψη οι δύο παρακάτω περιπτώσεις:

- Όταν $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_M$, το σύστημα ονομάζεται αυξανόμενο k-από-n:G σύστημα πολλαπλών καταστάσεων. Σε αυτή την περίπτωση, για να είναι το σύστημα σε μία υψηλότερου επιπέδου κατάσταση j ή σε ανώτερη, ένας μεγαλύτερος αριθμός από εξαρτήματα πρέπει να είναι στην κατάσταση j ή σε ανώτερη. Με άλλα λόγια, υπάρχει μια αυξανόμενη απαίτηση στον αριθμό των εξαρτημάτων που πρέπει να είναι σε μία συγκεκριμένη κατάσταση ή σε ανώτερη για να είναι το σύστημα σε μία υψηλότερη κατάσταση ή σε ανώτερη.

- Όταν $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_M$, το σύστημα ονομάζεται μειούμενο k-από-n:G σύστημα πολλαπλών καταστάσεων. Σε αυτή την περίπτωση, για μία υψηλότερου επιπέδου κατάσταση j του συστήματος, υπάρχει μία μειούμενη απαίτηση για των αριθμό των εξαρτημάτων που πρέπει να είναι στην κατάσταση j ή σε ανώτερη.

Όταν το k_j είναι σταθερό, δηλαδή $k_1 = k_2 = \ldots = k_M = k$, η δομή του συστήματος είναι ίδια για όλες τις καταστάσεις του συστήματος. Αυτά τα συστήματα ονομάζονται σταθερά k-από-n:G συστήματα πολλαπλών καταστάσεων.

Για ένα αυξανόμενο k-από-n:G σύστημα πολλαπλών καταστάσεων, έστω ότι $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_M$, τότε θα ισχύει:

$\Phi(x) \geq j$ αν τουλάχιστον k_j εξαρτήματα είναι στην κατάσταση j ή σε ανώτερη.

Αν τουλάχιστον k_j εξαρτήματα είναι στην κατάσταση j ή σε ανώτερη (αυτά τα εξαρτήματα θεωρείται ότι δουλεύουν), τότε το σύστημα θα είναι στην κατάσταση j ή σε ανώτερη(το σύστημα θεωρείται ότι δουλεύει) για $1 \leq j \leq M$. Η διαφορά αυτού του ορισμού με αυτόν για τα σταθερά k-από-n:G συστήματα πολλαπλών καταστάσεων είναι ότι ο αριθμός των εξαρτημάτων που απαιτούνται μπορεί να αλλάζει από κατάσταση σε κατάσταση. Όλα τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά της περίπτωσης αυτής είναι ίδια με αυτή του σταθερού συστήματος. Έτσι, η αξιοπιστία για το αυξανόμενο k-από-n:G σύστημα πολλαπλών καταστάσεων δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$R_j(k_j, n) = P_j R_j(k_j - 1, n - 1) + Q_j R_j(k_j, n - 1)$$

όπου $R_j(b,a)$ είναι η πιθανότητα τουλάχιστον b από τα a εξαρτήματα να είναι στην κατάσταση j ή σε ανώτερη,

και

$$R_j(0,a) = 1 \text{ , για } a \geq 0$$

$$R_j(b,0) = 0 \text{ , για } b > a > 0$$

Επίσης η αξιοπιστία μπορεί να εκφραστεί και ως εξής:

$$R_{sj} = \sum_{k=k_j}^{n} \binom{n}{k} P_j^k (1-P_j)^{n-k}$$

Για ένα μειούμενο k-από-n:G σύστημα πολλαπλών καταστάσεων, όπου $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_M$, η απόδοση του ορισμού της αξιοπιστίας δεν είναι τόσο εύκολη όσο πριν. Το σύστημα είναι στο επίπεδο M αν τουλάχιστον k_M εξαρτήματα είναι στο επίπεδο M. Το σύστημα είναι στο επίπεδο M-1 ή σε ανώτερο, αν τουλάχιστον k_{M-1} εξαρτήματα είναι στο επίπεδο M-1 ή σε ανώτερο, ή αν τουλάχιστον k_M εξαρτήματα είναι στο επίπεδο M. Γενικά, το σύστημα είναι στο επίπεδο j ή σε ανώτερο ($1 \leq j \leq M$) αν τουλάχιστον k_j εξαρτήματα είναι στο επίπεδο j ή σε ανώτερο, αν τουλάχιστον k_{j+1} εξαρτήματα είναι στο επίπεδο j+1 ή σε ανώτερο, αν τουλάχιστον k_{j+2} εξαρτήματα είναι στο επίπεδο j+2 ή σε ανώτερο, … , αν τουλάχιστον k_M εξαρτήματα είναι στο επίπεδο M. Έτσι :

Φ(x) = j αν τουλάχιστον k_j εξαρτήματα είναι στην κατάσταση j ή σε ανώτερη, και αν το πολύ k_{l-1} εξαρτήματα είναι στην κατάσταση l ή σε ανώτερη, για $l = j+1, j+2, \ldots, M$

Οπότε η πιθανότητα να είναι το σύστημα στην κατάσταση j για j = 1, 2, …, M, είναι:

$$r_{sj} = \sum_{k=k_j}^{n} \binom{n}{k} Q_j^{n-k} \left(p_j^k + \sum_{l=j+1, k_l>1}^{M} \beta_l(k) \right)$$

όπου β_{lk} είναι η πιθανότητα τουλάχιστον ένα και το πολύ k_{l-1} εξαρτήματα να είναι στην κατάσταση l , το πολύ k_{u-1} εξαρτήματα είναι στην κατάσταση u για $j+1 \leq u < l$, ο συνολικός αριθμός εξαρτημάτων είναι ανάμεσα στις καταστάσεις j και l είναι ίσος με k, και το σύστημα είναι στην κατάσταση j. Ακόμα το β_{lk} είναι ίσο με:

$$
\begin{aligned}
\beta_l(k) = \sum_{i_1=1}^{k_l-1} \binom{k}{i_1} p_l^{i_1} \times \sum_{i_2=0}^{k_{l-1}-1-I_1} \binom{k-I_1}{i_2} p_{l-1}^{i_2} \\
\times \sum_{i_3=0}^{k_{l-2}-1-I_2} \binom{k-I_2}{i_3} p_{l-2}^{i_3} \times \cdots \\
\times \sum_{i_{l-j}=0}^{k_{j+1}-1-I_{l-j-1}} \binom{k-I_{l-j-1}}{i_{l-j}} p_{j+1}^{i_{l-j}} \times p_j^{k-I_{l-j}}
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα: Θεωρούμε ένα σταθμό παραγωγής ενέργειας με τρεις γεννήτριες [5]. Κάθε γεννήτρια αντιμετωπίζεται ως ένα εξάρτημα και έτσι έχουμε ένα σύστημα που αποτελείται από 3 εξαρτήματα. Κάθε γεννήτρια μπορεί να είναι σε τρεις πιθανές καταστάσεις: 0, 1 και 2. Όταν η γεννήτρια είναι στην κατάσταση 2, είναι ικανή να παράγει 10 MW, στην κατάσταση 1 παράγει 2 MW και στην κατάσταση 0 παράγει 0 MW. Η συνολική ισχύς εξόδου του συστήματος είναι ίση με το άθροισμα των ισχύων εξόδου και των τριών γεννητριών. Το σύστημα μπορεί να είναι σε τρεις διαφορετικές καταστάσεις: 0, 1 και 2. Όταν η συνολική έξοδος είναι μεγαλύτερη ή ίση των 10 MW, το σύστημα είναι στην κατάσταση 2. Επίσης όταν η συνολική έξοδος είναι μεγαλύτερη ή ίση των 4 MW, το σύστημα είναι στην κατάσταση 1, και σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση το σύστημα είναι στην κατάσταση 0. Με βάση την παραπάνω περιγραφή το σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μειούμενο k-από-n:G σύστημα πολλαπλών καταστάσεων, με τις ακόλουθες παραμέτρους:

$$n = 3,\ M = 2,\ k_1 = 2,\ k_2 = 1.$$

Οπότε, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ορολογία, το σύστημα είναι στην κατάσταση 2 όταν τουλάχιστον 1 εξάρτημα είναι στην κατάσταση 2. Επίσης το σύστημα είναι στην κατάσταση 1 ή σε ανώτερη όταν είτε τουλάχιστον 1 εξάρτημα είναι στην κατάσταση 2, είτε τουλάχιστον 2 εξαρτήματα είναι στην κατάσταση 1. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση το σύστημα είναι στην κατάσταση 0.

3.4.2 Το γενικευμένο k-από-n:F σύστημα πολλαπλών καταστάσεων

Με βάση τον ορισμό για το γενικευμένο k-από-n:G σύστημα πολλαπλών καταστάσεων, μπορούμε να προχωρήσουμε στο παρακάτω:

Φ(x) $<$ ***j*** αν τουλάχιστον n - k_l + 1 εξαρτήματα είναι κάτω από την κατάσταση ***l***, για όλα τα l τέτοια ώστε $j \le l \le M$.

Αυτό μας παραπέμπει στον παρακάτω ορισμό για το γενικευμένο k-από-n:F σύστημα πολλαπλών καταστάσεων:

Ένα σύστημα που αποτελείται από n εξαρτήματα, ονομάζεται γενικευμένο k-από-n:F σύστημα πολλαπλών καταστάσεων αν ***Φ(x)*** $<$ ***j*** , ($1 \le j \le M$) κάθε φορά που οι καταστάσεις τουλάχιστον k_l εξαρτημάτων είναι κάτω από την κατάσταση ***l***, για όλα τα l τέτοια ώστε $j \le l \le M$.

Εδώ λαμβάνουμε υπόψη δύο ειδικές περιπτώσεις:

- Ένα γενικευμένο k-από-n:F σύστημα πολλαπλών καταστάσεων ονομάζεται αυξανόμενο k-από-n:F σύστημα πολλαπλών καταστάσεων αν $k_1 < k_2 < \ldots < k_M$
- Ένα γενικευμένο k-από-n:F σύστημα πολλαπλών καταστάσεων ονομάζεται μειούμενο k-από-n:F σύστημα πολλαπλών καταστάσεων αν $k_1 \ge k_2 \ge \ldots \ge k_M$

Τελικά για ένα δεδομένο αριθμό n εξαρτημάτων και για δεδομένες καταστάσεις αυτών, η κατάσταση ενός γενικευμένου k-από-n:G συστήματος πολλαπλών καταστάσεων είναι ίδια με αυτή ενός γενικευμένου k-από-n:F συστήματος πολλαπλών καταστάσεων, αν

$$k_j^F = n - k_j^G + 1 \text{ , για j = 1, 2, …, M.}$$

Ως αποτέλεσμα αυτών, ένα αυξανόμενο k-από-n:G σύστημα πολλαπλών καταστάσεων γίνεται ένα μειούμενο (n-k+1)-από-n:F σύστημα πολλαπλών καταστάσεων, και ένα μειούμενο k-από-n:G σύστημα πολλαπλών καταστάσεων γίνεται ένα αυξανόμενο (n-k+1)-από-n:F σύστημα πολλαπλών καταστάσεων.

3.5 k συνεχόμενα-από-n συνωστισμένο σύστημα τριών καταστάσεων (Ternary State Circular Sequential k-out-of-n Congestion System)

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάζεται ένα k συνεχόμενα-από-n συνωστισμένο κυκλικό σύστημα τριών καταστάσεων. Το σύστημα αυτό είναι μία επέκταση του k συνεχόμενα-από-n κυκλικού συστήματος και αποτελείται από τρεις καταστάσεις: i) συνωστισμός (congestion), ii) αποτυχία, iii) σωστή λειτουργία. Το σύστημα θεωρεί ότι καθένα από τα n εξαρτήματα έχει πιθανότητα να βρεθεί σε οποιαδήποτε από τις τρεις αυτές καταστάσεις. Τα n εξαρτήματα είναι τοποθετημένα κυκλικά και συνεχόμενα, με τέτοιο τρόπο ώστε αν ένα εξάρτημα δεν είναι συνωστισμένο (congested) τότε η σύνδεσή του είναι είτε αποτυχημένη είτε επιτυχημένη. Το σύστημα λειτουργεί αν k εξαρτήματα είναι στην κατάσταση iii) και αποτυγχάνει όταν (n-k+1) εξαρτήματα είναι στην κατάσταση ii). Για να προχωρήσουμε είναι απαραίτητες οι παρακάτω παραδοχές:

1) Το εξάρτημα(π.χ. ένας server) i έχει συνωστισμό c_i , αποτυχία q_i, σωστή λειτουργία p_i, τέτοιες ώστε $c_i + q_i + p_i = 1$, για i=1, 2, …, n.

2) Τα εξαρτήματα 1, 2, … , n είναι τοποθετημένα σε κύκλο και είναι αμοιβαίως ανεξάρτητα.

3) Το σύστημα δουλεύει αν k εξαρτήματα λειτουργούν πριν (n-k+1) αποτύχουν.

4) Το σύστημα αποτυγχάνει αν (n-k+1) εξαρτήματα αποτύχουν πριν k εξαρτήματα συνδεθούν επιτυχώς.

Αρχικά θεωρούμε ένα σύστημα με n εξαρτήματα, που λειτουργεί αν ένα εξάρτημα είναι συνδεδεμένο και βρίσκεται σε σωστή λειτουργία, ή το σύστημα αποτυγχάνει αν ένα εξάρτημα είναι συνδεδεμένο και αποτυγχάνει. Η πιθανότητα ένα εξάρτημα να συνδεθεί επιτυχώς κατά την t-στη σύνδεση είναι [6]:

$$P(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = P(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, 1, 0) = p_{t_r} c_*^{t_m} \prod_{j=1}^{t_r - 1} c_j$$

και η πιθανότητα ένα εξάρτημα να αποτύχει κατά την t-στη σύνδεση είναι:

$$Q(t,\mathfrak{p},\mathfrak{q}) = Q(t,\mathfrak{p},\mathfrak{q},0,1) = q_{t_r} c_*^{t_m} \prod_{j=1}^{t_r-1} c_j$$

όπου t_m και t_r είναι θετικοί ακέραιοι, τέτοιοι ώστε $t = t_m n + t_r$, με $1 \leq t_r \leq n$

και $$c_* = \prod_{j=1}^{n} c_j$$

Οπότε για n = 5 , οι τιμές των P(t,p,q) και Q(t,p,q) υπολογίζονται παρακάτω:

$$\begin{aligned} t = 1: \quad & t = 0 \times 5 + 1 \Rightarrow t_m = 0, \text{and } t_r = 1 \\ & \Rightarrow P(1,\mathfrak{p},\mathfrak{q}) = p_1 \\ & \Rightarrow Q(1,\mathfrak{p},\mathfrak{q}) = q_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t = 2: \quad & t = 0 \times 5 + 2 \Rightarrow t_m = 0, \text{and } t_r = 2 \\ & \Rightarrow P(2,\mathfrak{p},\mathfrak{q}) = p_2 \prod_{j=1}^{1} c_j \\ & \Rightarrow Q(2,\mathfrak{p},\mathfrak{q}) = q_2 \prod_{j=1}^{1} c_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t = 5: \quad & t = 0 \times 5 + 5 \Rightarrow t_m = 0, \text{and } t_r = 5 \\ & \Rightarrow P(5,\mathfrak{p},\mathfrak{q}) = p_5 \prod_{j=1}^{4} c_j \\ & \Rightarrow Q(5,\mathfrak{p},\mathfrak{q}) = q_5 \prod_{j=1}^{4} c_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t = 6: \quad & t = 1 \times 5 + 1 \Rightarrow t_m = 1, \text{and } t_r = 1 \\ & \Rightarrow P(6,\mathfrak{p},\mathfrak{q}) = p_1 c_*^1 \prod_{j=1}^{0} c_j \\ & \Rightarrow Q(6,\mathfrak{p},\mathfrak{q}) = q_1 c_*^1 \prod_{j=1}^{0} c_j \end{aligned}$$

$$t = 10: \quad t = 1 \times 5 + 5 \Rightarrow t_m = 1, \text{and } t_r = 5$$
$$\Rightarrow P(10, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = p_5 c_*^1 \prod_{j=1}^{4} c_j$$
$$\Rightarrow Q(10, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = q_5 c_*^1 \prod_{j=1}^{4} c_j$$

Άρα η πιθανότητα επιτυχίας P και αποτυχίας Q του συστήματος φαίνονται παρακάτω:

$$P = \sum_{t=1}^{\infty} P(t, \mathbf{p}, \mathbf{q})$$

$$Q = \sum_{t=1}^{\infty} Q(t, \mathbf{p}, \mathbf{q})$$

για τις οποίες μάλιστα ισχύει ότι P + Q = 1 το οποίο αποδεικνύεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
P + Q &= \sum_{t=1}^{\infty} \left(P(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}) + Q(t, \mathbf{p}, \mathbf{q})\right) \\
&= \sum_{t_m=0}^{\infty} c_*^{t_m} \left[\sum_{t_r=1}^{n} \prod_{j=1}^{t_r - 1} c_j (p_{t_r} + q_{t_r}) \right] \\
&= \frac{1}{1 - c_*} \left[\sum_{t_r=1}^{n} \prod_{j=1}^{t_r - 1} c_j (1 - c_{t_r}) \right] \\
&= \frac{1}{1 - c_*} \Big[(1 - c_1) + c_1 (1 - c_2) \\
&\qquad + c_1 c_2 (1 - c_3) + \cdots \prod_{j=1}^{n-1} c_j (1 - c_n) \Big] \\
&= \frac{1}{1 - c_*} \Big(1 - c_1 + c_1 - c_1 c_2 + c_1 c_2 \\
&\qquad - c_1 c_2 c_3 + \cdots \prod_{j=1}^{n-1} c_j - \prod_{j=1}^{n} c_j \Big) \\
&= \frac{1}{1 - c_*} \left(1 - \prod_{j=1}^{n} c_j \right) = 1.
\end{aligned}$$

Επίσης για $t = nt_m + i$ έχουμε ότι :

$$P^{(1)}(t, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = c_*^{t_m} \prod_{j=1}^{i-1} c_j p_i$$

$$Q^{(1)}(t, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = c_*^{t_m} \prod_{j=1}^{i-1} c_j q_i$$

$$P^{(2)}(t, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = c_*^{t_m} \prod_{j=1}^{i-1} c_j p_{i+1}$$

$$Q^{(2)}(t, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = c_*^{t_m} \prod_{j=1}^{i-1} c_j q_{i+1}$$

και

$$P^{(1)}(t+1, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = c_*^{t_m} \prod_{j=1}^{i-1} c_j c_i p_{i+1}$$

$$Q^{(1)}(t+1, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = c_*^{t_m} \prod_{j=1}^{i-1} c_j c_i q_{i+1}$$

$$P^{(2)}(t+1, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = c_*^{t_m} \prod_{j=1}^{i-1} c_j c_{i+1} p_i$$

$$Q^{(2)}(t+1, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = c_*^{t_m} \prod_{j=1}^{i-1} c_j c_{i+1} q_i.$$

και έχοντας ως δεδομένο ότι

$$E\{T_{(\mathfrak{p},\mathfrak{q},1,1)}\} = \sum_{t=1}^{\infty} t\,(P(t, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) + Q(t, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}))$$

όπου $E\{T_{(p,q,1,1)}\}$ είναι ένας δείκτης για το μέσο μήκος σταματήματος του συστήματος(average stop length),

καταλήγουμε στο ότι

$$E\{T^{(1)}_{(\mathfrak{p},\mathfrak{q},1,1)}\} > E\{T^{(2)}_{(\mathfrak{p},\mathfrak{q},1,1)}\}$$

3.6 Συνδυασμένο k-από-n:F με k συνεχόμενα-από-n:F σύστημα (Combined k-out-of-n: F and Consecutive-k-out-of-n: F System)

Έστω ένα σύστημα που αποτελείται από μία ακολουθία *n* εξαρτημάτων, όπου το κάθε εξάρτημα μπορεί να πάρει δύο καταστάσεις(δουλεύει ή αποτυγχάνει) και το σύστημα αποτυγχάνει όταν τουλάχιστον k_c συνεχόμενα εξαρτήματα αποτύχουν. Το σύστημα αυτό ονομάζεται k_c συνεχόμενα-από-*n*:F σύστημα και η πιθανότητα αποτυχίας του δίνεται παρακάτω [7]:

$$Q(j;\, k_c) = Q(j-1;\, k_c) + [1 - Q(j - k_c - 1;\, k_c)]\, p_{j-kc} \prod_{l=j-k_c+1}^{j} q_l$$

όπου $Q(j;\, k_c) = 0$ για $j < k_c$; $p_0 = 1$

Επίσης, ένα σύστημα που αποτελείται από *n* εξαρτήματα, ονομάζεται *k*-από-*n*:F σύστημα, αν αυτό αποτυγχάνει όταν τουλάχιστον *k* εξαρτήματα αποτύχουν. Μάλιστα η πιθανότητα αποτυχίας του δίνεται παρακάτω:

$$Q(i, j) = p_j Q(i, j-1) + q_j Q(i-1, j-1)$$

όπου $Q(i, j) = 0$ για $i > j \geq 0$

$Q(0, j) = 1$ για $j \geq 0$

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση του συνδυασμένου μοντέλου πρέπει να κάνουμε κάποιες παραδοχές. Έτσι, κάθε εξάρτημα και το σύστημα, είτε δουλεύει είτε αποτυγχάνει. Ακόμα, οι αποτυχίες των εξαρτημάτων είναι αμοιβαίως ανεξάρτητες και μάλιστα η αξιοπιστίες τους δεν είναι απαραίτητα ίδιες μεταξύ τους. Επίσης, το γεγονός $A(i, j, k_c)$ είναι αυτό κατά το οποίο το συνδυασμένο *j*-από-*i*:F και k_c συνεχόμενα-από-*i*:F υποσύστημα αποτυγχάνει. Το υποσύστημα αυτό αποτελείται από 1, 2, …, *i* εξαρτήματα, με $i \geq j \geq 0$, $i \geq k_c$. Παράλληλα, το γεγονός $B(i)$ είναι αυτό κατά το οποίο το εξάρτημα *i* αποτυγχάνει, ενώ $Q(i, j, k_c) = \Pr\{A(i, j, k_c)\}$.

Το συνδυασμένο *k*-από-*n*:F και k_c συνεχόμενα-από-*n*:F σύστημα έχει *n* εξαρτήματα τοποθετημένα διαδοχικά. Το συνδυασμένο αυτό σύστημα αποτυγχάνει όταν τουλάχιστον *k* εξαρτήματα αποτύχουν ή τουλάχιστον k_c συνεχόμενα εξαρτήματα αποτύχουν. Αυτό το μοντέλο συστήματος είναι ίδιο με το *k*-από-*n*:F μοντέλο συστήματος αν $k_c \geq k$.

Θεωρούμε ότι $k > k_c$. Όταν $k > n$, η αξιοπιστία του συνδυασμένου συστήματος ισούται με την αξιοπιστία του k_c συνεχόμενα-από-*n*:F συστήματος. Παρακάτω φαίνεται η πιθανότητα αποτυχίας του συστήματος (ως γνωστόν $R = 1 - Q$):

$$\boldsymbol{Q(i, j, k_c)} = p_i\, Q(i\text{-}1, j, k_c) + q_i\, Q(i\text{-}1, j\text{-}1, k_c) + [1 - Q(i- k_c -1, j - k_c, k_c)]\; p_{i\text{-}kc} \prod_{l=j-k_c+1}^{j} q_l$$

με $Q(i, j, k_c) = 0$ αν $i < \min\{j, k_c\}$

$Q(i, j, k_c) = 1$ αν $j = 0$

$p_0 = 1$

ή αλλιώς:

$$\boldsymbol{Q(i, j, k_c) = \Pr\{ A(i, j, k_c)\}}$$

όπου:

$$\begin{aligned} A(i, j, k_c) = & \left\{A(i-1, j, k_c) \bigcap \overline{B}(i)\right\} \\ & \bigcup \left\{A(i-1, j-1, k_c) \bigcap B(i)\right\} \\ & \bigcup \left\{\overline{A}(i-k_c-1, j-k_c, k_c) \bigcap \overline{B}(i-k_c) \bigcap_{l=i-k_c+1}^{i} B(l)\right\} \end{aligned}$$

Οπότε, έχοντας γνωστή την πιθανότητα αποτυχίας του συστήματος, ουσιαστικά γνωρίζουμε και την αξιοπιστία του συστήματος αυτού. Αφού ισχύει $R = 1 - Q$, έχοντας υπολογίσει την πιθανότητα αποτυχίας, έχουμε υπολογίσει έμμεσα και την αξιοπιστία του συστήματος.

3.7 k, r συνεχόμενα-από-n:DFM (Dual Failure Mode) συστήματα

Ένα διπλής κατάστασης αποτυχίας σύστημα (Dual Failure Mode - DFM) είναι ένα σύστημα του οποίου τα εξαρτήματα υπόκεινται σε δύο διαφορετικές είδη αποτυχίας (μονάδες τριών καταστάσεων). Σε αυτή την παράγραφο θα εξεταστεί ένα νέο σύστημα, το k, r συνεχόμενα-από-n:DFM σύστημα, το οποίο ουσιαστικά είναι μία επέκταση του ήδη γνωστού k συνεχόμενα-από-n:F συστήματος, σε ένα περιβάλλον διπλής αποτυχίας.

Όταν αναλύουμε την αξιοπιστία ενός συστήματος, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι λαμβάνουμε υπόψη όχι μόνο την κατάσταση όπου το εξάρτημα απέτυχε να λειτουργήσει, αλλά και το γεγονός ότι η συσκευή μπορεί να δουλεύει άθελά της. Στη βιομηχανία χρησιμοποιούνται διάφορα ονόματα για να περιγραφούν οι διαφορετικές καταστάσεις αποτυχίας, για παράδειγμα: ‘failure to safety’ και ‘failure to danger’, ‘stuck-open’ και ‘stuck-closed’, ‘failed-open’ και ‘failed-short’. Εμείς, θα κάνουμε χρήση των δύο τελευταίων όρων (‘failed-open’ και ‘failed-short’) για την μελέτη του DFM συστήματος.

Θεωρούμε ένα σύστημα που αποτελείται από n εξαρτήματα τοποθετημένα σε μια γραμμή. Κάθε εξάρτημα μπορεί είτε να δουλεύει είτε να αποτυγχάνει βρισκόμενο σε μία από τις δύο καταστάσεις: ‘failed-open’ και ‘failed-short’. Το σύστημα αυτό, ονομάζεται k, r συνεχόμενα-από-n:DFM σύστημα, αν και μόνο αν αποτυγχάνει όταν τουλάχιστον k συνεχόμενα εξαρτήματα είναι ‘failed-open’ ή τουλάχιστον r συνεχόμενα εξαρτήματα είναι ‘failed-short’. Αξίζει να σημειωθεί ότι για $k = 1$ και $r = n$, δηλαδή το 1, n συνεχόμενα-από-n:DFM σύστημα αντιστοιχεί σε ένα παράλληλο σύστημα.

Αρχικά, έστω ότι έχουμε ένα σύστημα που αποτελείται από n ανεξάρτητα εξαρτήματα που είναι τοποθετημένα σε γραμμή. Η πιθανότητα επιτυχίας του i εξαρτήματος συμβολίζεται με p_i και οι πιθανότητες να βρίσκεται το i εξάρτημα στην κατάσταση ‘failed-open’ και ‘failed-short’ είναι q_{i1} και q_{i2} αντίστοιχα, με $i = 1, 2, \ldots, n$. Οι τρεις καταστάσεις (δουλεύει, ‘failed-open’, ‘failed-short’) του κάθε εξαρτήματος είναι αμοιβαίως αποκλειστικές και εξαντλητικές, δηλαδή:

$$p_i + q_{i1} + q_{i2} = 1,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Δεδομένου ότι τα k, r είναι θετικοί ακέραιοι με $1 \leq k,\ r \leq n$, η αξιοπιστία του συστήματος αυτού συμβολίζεται με R_n, ενώ με R_i θα είναι η αξιοπιστία του k, r συνεχόμενα-από-i : DFM συστήματος που αποτελείται από εξαρτήματα 1, 2, …, n για $1 \leq i \leq n$. Επίσης R_{i1} και R_{i2} είναι οι πιθανότητες το σύστημα να λειτουργεί, δεδομένου ότι το i εξάρτημα να βρίσκεται στην κατάσταση ‘failed-open’ ή ‘failed-short’, αντίστοιχα.

Οπότε η αξιοπιστία R_n του k, r συνεχόμενα-από-n:DFM συστήματος, υπολογίζεται από τις παρακάτω σχέσεις [8]:

$$\boldsymbol{R_n = p_n R_{n\text{-}1} + q_{n1} R_{n1} + q_{n2} R_{n2}}$$

όπου:

$$\boldsymbol{R_{n1} = R_{n\text{-}1} - (p_{n\text{-}k} R_{n\text{-}k\text{-}1} + q_{n\text{-}k,2} R_{n\text{-}k,2})} \prod_{j=n-k+1}^{n-1} q_{j1}$$

$$\boldsymbol{R_{n2} = R_{n\text{-}1} - (p_{n\text{-}r} R_{n\text{-}r\text{-}1} + q_{n\text{-}r,1} R_{n\text{-}r,1})} \prod_{j=n-r+1}^{n-1} q_{j2}$$

για $n \geq \min(k, r)$
και αρχικές καταστάσεις $R_n = R_{n1} = R_{n2} = 1$ για $0 < n < \min(k, r)$

Μάλιστα η αξιοπιστία του k, r συνεχόμενα-από-n:DFM συστήματος, έχει άνω φράγμα το παρακάτω:

$$R_n \leq \prod_{i=\min(k,r)}^{n} (1 - p_{i-k} \prod_{j=i-k+1}^{i} q_{j1} - p_{i-r} \prod_{j=i-r+1}^{i} q_{j2})$$

Επίσης η αξιοπιστία του k, r συνεχόμενα-από-n:DFM συστήματος, έχει κάτω φράγμα το παρακάτω:

$$R_n \geq \prod_{i=k}^{n} (1 - \prod_{j=i-k+1}^{i} q_{j1}) + \prod_{i=r}^{n} (1 - \prod_{j=i-r+1}^{i} q_{j2}) - 1$$

Άρα, για την συγκεκριμένη ειδική περίπτωση k συνεχόμενα-από-n: F συστήματος, δηλαδή το προαναφερθέν k, r συνεχόμενα-από-n: DFM σύστημα, δόθηκαν οι σχέσεις για τον υπολογισμό τόσο της αξιοπιστίας του, όσο και για την ακριβή εύρεση των άνω και κάτω φραγμάτων αξιοπιστίας αυτού.

3.8 Απολογισμός 3ου Κεφαλαίου

Συγκεντρωτικά, στο κεφάλαιο αυτό ασχοληθήκαμε με τα k-από-n συστήματα. Δόθηκε έμφαση στον υπολογισμό της αξιοπιστίας των γενικευμένων k συνεχόμενα-από-n: F συστημάτων (Γραμμικών και Κυκλικών), καθώς και στα φράγματα αξιοπιστίας των παραπάνω συστημάτων. Επίσης, αναλύθηκαν τα k συνεχόμενα-από-n: G συστήματα και τα k-από-n συστήματα πολλαπλών καταστάσεων. Τέλος, παρουσιάστηκαν κάποιες ειδικές περιπτώσεις των συστημάτων αυτών, όπως είναι το συνωστισμένο σύστημα τριών καταστάσεων και τα DFM συστήματα.

Το θέμα της αξιοπιστίας των k-r-n συστημάτων, τόσο στην περίπτωση όπου r=k (k συνεχόμενα-από-n σύστημα), όσο και στην περίπτωση όπου r=n (k-από-n σύστημα), έχει μελετηθεί πάρα πολύ από τους επιστήμονες του χώρου της αξιοπιστίας τα τελευταία χρόνια. Βέβαια, για τα k συνεχόμενα-από-n συστήματα, οι περισσότερες εργασίες επικεντρώθηκαν στην περίπτωση των στατιστικά ανεξάρτητων εξαρτημάτων, αλλά και στη γενική περίπτωση, δηλαδή κάτω από οποιοδήποτε είδος εξάρτησης μεταξύ των εξαρτημάτων.

Ακόμα, οι τύποι που παρουσιάστηκαν για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας των k συνεχόμενα-από-n συστημάτων (γραμμικών και κυκλικών), των k-από-n συστημάτων, των k-από-n συστημάτων πολλαπλών καταστάσεων και διαφόρων άλλων περιπτώσεων των συστημάτων αυτών, εκφράζονται σε απλή μορφή ώστε να είναι άμεση και σχετικά εύκολη η υπολογιστική τους επεξεργασία. Σίγουρα, όμως όσο αυξάνει η πολυπλοκότητα ενός τέτοιου συστήματος (για παράδειγμα τα συστήματα με εξαρτήματα πολλαπλών καταστάσεων), τόσο δυσκολότερη γίνεται η υπολογιστική διαδικασία της αξιοπιστίας του και για αυτό δίνεται και η δυνατότητα του αρκετά ευκολότερου υπολογισμού των φραγμάτων αξιοπιστίας των k-από-n συστημάτων (όπως γίνεται και στην περίπτωση των DFM συστημάτων).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 3^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

[1] **M. Sfakianakis and S. Papastavridis**, “*Reliability of a general consecutive-k-out-of-n: F system*”, **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 42, No. 3, September 1993, pp. 491 – 496

[2] **M. Muselli**, “*New Improved Bounds for Reliability of Consecutive-k-out-of-n: F Systems*”, **Journal of Applied Probability**, Vol. 37, No. 4, December 2000, pp. 1164 - 1170

[3] **S. Amari, K. Misra, H. Pham**, “*Reliability Analysis of Tampered Failure Rate Load-Sharing k-out-of-n: G Systems*”, 2006

[4] **L. Cui**, “*The IFR property for consecutive-k-out-of-n:F systems*”, **Statistics & Probability Letters**, Vol. 59, 2002, pp. 405 – 414

[5] **M. Zuo, Z. Tian**, “*Performance Evaluation of Generalized Multi-State k-Out-of-n Systems*”, **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 55, No. 2, June 2006, pp. 319 - 327

[6] **Li Bai, F. Zheng**, “*Ternary State Circular Sequential k-out-of-n Congestion System*”, **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 56, No. 3, September 2007, pp. 495 - 505

[7] **M. Zuo, D. Lin, Y. Wu**, “*Reliability Evaluation of Combined k-out-of-n: F, Consecutive-k-out-of-n:F, and Linear Connected-(r; s)-out-of-(m; n):F System Structures*”, **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 49, No. 1, March 2000, pp. 99 - 104

[8] **M. Koutras**, “*Consecutive-k, r-out-of-n: DFM systems*”, **Microelectronics Reliability**, Vol. 37, No. 4, 1996, pp. 597 - 603

[9] **S. Amari, H. Pham, G. Dill**, “*Optimal Design of k-out-of-n:G Subsystems Subjected to Imperfect Fault-Coverage*”, **IEEE Transactions on Reliability**, vol. 53, No. 4, December 2004, pp. 567 - 575

[10] **M. Chao, J. Fu, M. Koutras,** “*Survey of reliability studies of consecutive-k-out-of-n:F and related systems*”, **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 44, No. 1, March 1995, pp. 120 – 127

[11] **Y. Chen and Q. Yang**, “*Reliability of Two-Stage Weighted-k-out-of-n Systems With Components in Common*”, **IEEE Transactions on Reliability**, vol. 54, No. 3, September 2005, pp. 431 - 440

[12] **L. Cui, A. Hawkes**, “*A note on the proof for the optimal consecutive-k-out-of-n:G line for n≤2k*”, **Journal of Statistical Planning and Inference**, 2007, pp.1-5

[13] **L. Cui, M. Xie**, "*On a generalized k-out-of-n system and its reliability*", **International Journal of Systems Science**, Vol. 36, No. 5, 15 April 2005, pp. 267 – 274

[14] **J. Flynn, C. Chung**, "*A Branch and Bound Algorithm for Computing Optimal Replacement Policies in Consecutive k-out-of-n-Systems*", **Naval Research Logistics**, Vol. 49, 2002, pp. 288 – 302

[15] **A. Gera**, "*A consecutive k-out-of-n:G system with dependent elements - a matrix formulation and solution*", **Reliability Engineering & System Safety**, Volume 68, Issue 1, April 2000, Pages 61-67

[16] **E. Lewis**, "A *Load-Capacity Interference Model for Common-Mode Failures in 1-out-of-2: G Systems*", **IEEE Transactions on Reliability**, vol. 50, No. 1, March 2001, pp. 47 - 51

[17] **Y. Wu and J. Guan**, "*Repairable Consecutive-k-Out-of-n: G Systems With r Repairmen*", **IEEE Transactions on Reliability**, vol. 54, No. 2, June 2005, pp. 328 - 337

[18] **H. Yamamoto, M. Zuo**, "*Recursive Formulas for the Reliability of Multi-State Consecutive-k-out-of-n:G Systems*", **IEEE Transactions on Reliability**, vol. 55, No. 1, March 2006, pp. 98 - 104

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο} – ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ & ΣΠΟΥΔΑΙΟΤΗΤΑ ΕΞΑΡΤΗΜΑΤΩΝ

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάζεται το θέμα της βέλτιστης τοποθέτησης των εξαρτημάτων με σκοπό τη μεγιστοποίηση της αξιοπιστίας του συστήματος. Συγκεκριμένα, γίνεται αναφορά στο πρόβλημα της βέλτιστης τοποθέτησης τόσο στα k-από-r-από-n συστήματα, όσο και στα k-από-n συστήματα (Γραμμικά και Κυκλικά). Τέλος, δίνεται έμφαση στο θέμα της σπουδαιότητας των εξαρτημάτων και αναλύονται κάποιοι αρκετά χρήσιμοι δείκτες σπουδαιότητας εξαρτημάτων.

4.1 Βέλτιστη τοποθέτηση με σκοπό τη μεγιστοποίηση της αξιοπιστίας του συστήματος

4.1.1 Βέλτιστη τοποθέτηση των εξαρτημάτων στα k-r-n συστήματα

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο εξετάζεται αρχικά το θέμα της βέλτιστης τοποθέτησης των εξαρτημάτων στα k-r-n συστήματα με σκοπό τη μεγιστοποίηση της αξιοπιστίας τους. Πρόκειται για ένα πολύ σημαντικό πρόβλημα και μάλιστα αρκετά δύσκολο εξαιτίας του γεγονότος ότι τα εξαρτήματα στα k-r-n συστήματα δεν έχουν την ίδια αξιοπιστία, άλλωστε αν όλα τα εξαρτήματα είχαν την ίδια αξιοπιστία τότε δεν θα προέκυπτε το θέμα της βέλτιστης τοποθέτησης.

Αρχικά υποθέτουμε ότι το σύστημα και τα εξαρτήματά του είτε δουλεύουν είτε αποτυγχάνουν, καθώς και το ότι τα εξαρτήματα δρουν ανεξάρτητα και όλα μπορούν να τοποθετηθούν σε οποιαδήποτε γραμμική σειρά.

Έστω ότι π είναι μια μετάθεση (π(1), π(2), … , π(n)) των ακεραίων από 1 έως n και $\rho_\pi = (\rho_{\pi(1)},\ldots, \rho_{\pi(n)})$. Τότε το $R(\rho_\pi)$ συμβολίζει την αξιοπιστία των k-r-n συστημάτων αν τα n εξαρτήματα είναι τοποθετημένα σύμφωνα με τη μετάθεση π. Επίσης έστω ότι F δηλώνει το γεγονός ότι το σύστημα απέτυχε, F_i το γεγονός ότι το εξάρτημα στη θέση i απέτυχε, $1 \le i \le n$, και $\underline{F}_i$ (το συμπλήρωμα του F_i) το γεγονός ότι το εξάρτημα στη θέση i δουλεύει. Ακόμα, με $\pi_{i,j}$ συμβολίζεται η μετάθεση που επιτυγχάνεται από τη μετάθεση π εναλλάσσοντας τους ακέραιους των θέσεων i και j. Τέλος με τον όρο minimal cut εννοούμε ένα σύνολο από k εξαρτήματα ανάμεσα σε r συνεχόμενα εξαρτήματα ενός συστήματος και μάλιστα αυτό λέγεται ενεργό όταν και τα k εξαρτήματα αποτύχουν [1], [2].

Οπότε για $1 \le i \le \min(r-1 , n-r)$ ισχύει η ανισότητα :

$$\mathbf{P(F \mid F_i\underline{F}_{i+1}) \leq P(F \mid \underline{F}_iF_{i+1})}$$

Επίσης για max(r,n-r+1) $\leq$i$\leq$n-1 ισχύει η ανισότητα :

$$\mathbf{P(F \mid F_i\underline{F}_{i+1}) \geq P(F \mid \underline{F}_iF_{i+1})}$$

Ακόμα στα k-r-n γραμμικά συστήματα ισχύει ότι :

$$\mathbf{R(\underline{\rho}_{\pi}) \geq R(\underline{\rho}_{\pi i,i+1})} \text{ όταν :}$$

- Για 1$\leq$i$\leq$min(r-1 , n-r) : $q_{\pi(i+1)} \leq q_{\pi(i)}$,
- Για max(r,n-r+1) $\leq$i$\leq$n-1 : $q_{\pi(i+1)} \geq q_{\pi(i)}$

Από όπου μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η αξιοπιστία των k-r-n γραμμικών συστημάτων μικραίνει όταν μερικά από τα πρώτα εξαρτήματα (min(r-1 , n-r)) και μερικά από τα τελευταία εξαρτήματα (max(r,n-r+1)), τοποθετηθούν έτσι ώστε τα εξαρτήματα με τις μεγαλύτερες πιθανότητες αποτυχίας να είναι πιο κοντά στο κέντρο της ακολουθίας.

4.1.2 Βέλτιστη τοποθέτηση των εξαρτημάτων σε ένα k συνεχόμενα-από-r-από-n σύστημα πολλαπλών καταστάσεων

Αρχικά κάνουμε τις παρακάτω παραδοχές:

i. Όλα τα *n* εξαρτήματα πολλαπλών καταστάσεων του *k-r-n* συστήματος είναι αμοιβαίως ανεξάρτητα.

ii. Κάθε εξάρτημα πολλαπλών καταστάσεων *j* μπορεί να είναι σε μία από τις H_j διαφορετικές καταστάσεις. Κάθε κατάσταση $h \in \{1, 2, \ldots, H_j\}$ των εξαρτημάτων πολλαπλών καταστάσεων *j*, χαρακτηρίζεται από την πιθανότητα p_{jh} και το βαθμό απόδοσης g_{jh}. Μάλιστα ισχύει:

$$\sum_{h=1}^{H_j} p_{jh} = 1$$

iii. Κάθε εξάρτημα πολλαπλών καταστάσεων *j* μπορεί να τοποθετηθεί σε οποιαδήποτε από *n* σειριακά διατεταγμένες θέσεις.

iv. Το σύστημα αποτυγχάνει όταν το άθροισμα των βαθμών απόδοσης των εξαρτημάτων πολλαπλών καταστάσεων, που εντοπίζονται σε οποιεσδήποτε *r* συνεχόμενες θέσεις, είναι λιγότερο από *W*.

Με σκοπό να αναπαραστήσουμε τη βέλτιστη τοποθέτηση των εξαρτημάτων στο συγκεκριμένο k-r-n σύστημα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση C = {c(1), …, c(n))}, όπου c(*j*) ισούται με τον αριθμό των εξαρτημάτων πολλαπλών καταστάσεων που τοποθετούνται στη θέση *j*. Είναι φανερό ότι ο συνολικός αριθμός των διαφορετικών λύσεων του προβλήματος της βέλτιστης τοποθέτησης (αριθμός των διαφορετικών C) είναι ίσος με *n*!. Για την ομάδα των εξαρτημάτων πολλαπλών καταστάσεων με ένα γνωστό βαθμό απόδοσης, ο μόνος παράγοντας που επηρεάζει τη συνολική αξιοπιστία του συστήματος είναι το πώς θα τοποθετηθούν τα εξαρτήματα στο σύστημα. Για να λύσουμε το θέμα αυτό, ορίζουμε το παρακάτω πρόβλημα βέλτιστης τοποθέτησης των εξαρτημάτων για ένα k-r-n σύστημα πολλαπλών καταστάσεων [3].

Βρες τη συνάρτηση C που μεγιστοποιεί την αξιοπιστία του συστήματος *R* :

$$C(r, W) = \arg(R(C, r, W) \rightarrow \max)$$

το οποίο μπορεί να επιλυθεί με τη βοήθεια του παρακάτω αλγορίθμου:

1. Αρχικοποίηση

   $F = 0$; $U_{1-r}(z) = z^{Go}$

   $$u_j(z) = \sum_{h=1}^{H_j} p_{jh} z^{g_{jh}}$$

2. Κύριος βρόχος

   Επανέλαβε τα ακόλουθα για $j = 1, \ldots, n$:

   2.1 $U_{j+1-r}(z) = \Psi(U_{j-r}(z), u_{c(j)}(z))$

   2.2 Αν $j \geq r$ πρόσθεσε τη $\delta(U_{j+1-r}(z), W)$ στην F και βάλε $\sigma(G_i) = 1$ στην $U_{j+1-r}(z)$.

3. Η αξιοπιστία του συστήματος είναι $R = 1 - F$.

Στον παραπάνω αλγόριθμο χρειάζεται να συμπληρωθούν οι παρακάτω σχέσεις ως υποσημειώσεις:

$$\delta(U(z), W) = \sum_{i=1}^{I} Q_i \sigma(\mathbf{G}_i$$

όπου:

$$\sigma(\mathbf{G}_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } \sum_{s=1}^{r} G_i(s) < W \\ 0 & \text{if } \sum_{s=1}^{r} G_i(s) \geq W \end{cases}$$

και

$$\Psi(U(z), u(z)) = \Psi\left(\sum_{i=1}^{I} Q_i z^{G_i}, \sum_{h=1}^{H_j} p_{jh} z^{g_{jh}}\right) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{h=1}^{H_j} Q_i p_{jh} z^{\phi(G_i, g_{jh}}$$

Άρα, έχοντας τον παραπάνω αλγόριθμο, μπορούμε να υπολογίσουμε με τη βοήθεια κάποιου ηλεκτρονικού υπολογιστή, τη μέγιστη αξιοπιστία του συστήματος και ουσιαστικά να δώσουμε λύση στο πρόβλημα της βέλτιστης τοποθέτησης των εξαρτημάτων σε ένα k συνεχόμενα-από-r-από-n σύστημα πολλαπλών καταστάσεων.

4.1.3 Βέλτιστο k συνεχόμενα-από-n σύστημα

Ένα k συνεχόμενα-από-n σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ως ένα γράφημα με n κορυφές, όπου το σύστημα αποτυγχάνει αν και μόνο αν ένα ‘μονοπάτι’ από k συνεχόμενες κορυφές αποτύχει ολόκληρο. Ένα τυπικό πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε είναι να υπολογίσουμε την αξιοπιστία τέτοιων συστημάτων καθώς και πώς να απονείμουμε n πιθανότητες στις n θέσεις σε μία γραμμή ώστε να επιτύχουμε μεγιστοποίηση της αξιοπιστίας. Πρόκειται δηλαδή για το γνωστό πρόβλημα της βέλτιστης τοποθέτησης.

Στη συγκεκριμένη παράγραφο θεωρούμε ότι πάρουμε ή να κατασκευάσουμε ένα σύστημα που αποτελείται από n εξαρτήματα οποιασδήποτε ομάδας πιθανοτήτων αποτυχίας, δεδομένου ότι οι τιμές και οι πιθανότητες αποτυχίας είναι αρνητικά συσχετισμένες και ότι έχουμε ένα σταθερό προϋπολογισμό. Το πρόβλημα τώρα μετατίθεται στο τρόπο που θα γίνει η αντιστοίχηση των n εξαρτημάτων στις n κορυφές του συστήματος ώστε να μεγιστοποιηθεί η αξιοπιστία του συστήματος αυτού.

Αρχικά σχετίζουμε το κόστος των εξαρτημάτων με την πιθανότητα αποτυχίας τους, μέσω τις σχέσης [4]:

$q_i = f(c_i)$, όπου f είναι μία συνάρτηση στο διάστημα [0,1], για την οποία ισχύουν:
$f(0) = 1$, $f' \leq 0$ και $f'' \geq 0$

Επίσης, έστω ότι το c είναι το κόστος ενός εξαρτήματος με πιθανότητα αποτυχίας q. Τότε με το κόστος kc, όπου k θετικός ακέραιος, μπορούμε να φτιάξουμε ένα εξάρτημα με k-περίσσεια (k-redundancy), του οποίου η πιθανότητα αποτυχίας είναι q^k. Οπότε θέλουμε $\ln q_i$ να είναι γραμμικό στο c_i, απ’ όπου παίρνουμε:

$f(c_i) = \alpha e^{-\beta c_i}$ και αφού $f(0) = 1$, τότε α=1, πράγμα το οποίο μας οδηγεί στην:

$$\boldsymbol{f(c_i) = e^{-\beta c_i}}$$

Έστω ότι $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$ είναι ο σταθερός προϋπολογισμός για το σύστημα, τότε:

$$\prod_{i=1}^{n} q_i = e^{-bC}$$

το οποίο είναι μια σταθερά που υποδηλώνεται με Q, για το οποίο υποθέτουμε ότι $Q<1$. Επίσης ορίζουμε $R(G, Q)$ την μέγιστη αξιοπιστία του συστήματος G υπό τον περιορισμό Q.

4.1.3.1 Βέλτιστο k συνεχόμενα-από-n γραμμικό σύστημα

Για ένα οποιοδήποτε αλλά σταθερό k παρουσιάζεται μία n-γραμμή L_n υπό την ακολουθία ($q_1, \ldots, q_n$) όπου q_i είναι η πιθανότητα αποτυχίας που αντιστοιχεί στη i κορυφή της L_n. Επίσης ορίζουμε $q_i = 0$ για $i \leq 0$ και $R(L_n) = 1$ για $n < k$. Ακόμα για ένα δεδομένο L_n, ισχύει [4]:

$$L_n^{'} = (q_1, \ldots, q_{n-k}, \prod_{i=n-k+1}^{n} q_j, 1, \ldots, 1)$$

και παράλληλα ισχύει:

$$\boldsymbol{R(L'_n) \geq R(L_n)}$$

για την οποία η ισότητα ισχύει όταν:

i. $n \leq k$
ii. $R(L'_n) = 0$
iii. $r + s \geq k - 1$ όπου $r(s)$ είναι ο αρχικός αριθμός των πρώτων στην q_{n-2k+1}, q_{n-2k+2}, …, q_n

Έστω G ένα γράφημα με V κορυφές. Το $K \subseteq V$ ονομάζεται k-κάλυψη (k-covering) του G και ορίζουμε $\theta_k(G) = \min\{|K|: K$ μία k-κάλυψη του G$\}$. Μάλιστα μία k-κάλυψη είναι ελάχιστη αν $|K| = \theta_k(G)$. Οπότε ένα k συνεχόμενα-από-n σύστημα ονομάζεται *βασικό* αν $q_i = 1$ για όλες της i κορυφές εκτός από εκείνες που είναι σε μία ελάχιστη k-κάλυψη.

Ακόμα, για $n \geq k$, υπάρχει βέλτιστη (n, k) γραμμή, η οποία είναι βασική. Μάλιστα αν $n - 1 > k$ και $k|(n-1)$, τότε μία βέλτιστη (n, k) γραμμή πρέπει να είναι βασική.

Παράλληλα, για $n \geq k$, οποιαδήποτε βασική L_n με όλα μη-μοναδιαία $q_i = q = Q^{1/m}$, είναι βέλτιστη με :

$$\boldsymbol{R(L_n) = (1 - Q^{1/m})^{m}}$$

και μάλιστα υπάρχουν $\sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{m+1}{i} \binom{n-ki}{m}$ βέλτιστες βασικές (n, k)-γραμμές.
Ο αριθμός αυτός ισούται με 1 αν το k διαιρεί το (n+1).

4.1.3.2 Βέλτιστο k συνεχόμενα-από-n κυκλικό σύστημα

Μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι $\theta_k(C_n) = [n/k] = m$, για $n \geq k$.

Όμοια με το γραμμικό, έτσι και στο κυκλικό σύστημα, για $n > k$ υπάρχει ένας βέλτιστος (n, k)-κύκλος C_n^* , ο οποίος είναι βασικός και $q_i = q = Q^{1/m}$ για όλα τα μη-μοναδιαία q_i , και ισχύει ότι [4]:

$$\boldsymbol{R(C_n) = (1 - Q^{1/m})^m}$$

Επίσης ισχύει $\boldsymbol{R(C'_n) \geq R(C_n)}$ για την οποία η ισότητα ισχύει όταν:

i. $n \leq k$
ii. $R(C'_n) = 0$
iii. $r_i + s_i \geq d - 1$ όπου $r_i(s_i)$ είναι ο αρχικός αριθμός των πρώτων στην q_{id+1}, q_{id+2}, …, q_{id+k+d}

Ακόμα, ο μοναδικός βέλτιστος $(n, 1)$-κύκλος, είναι ομοιόμορφος με

$$\boldsymbol{R(C_n, Q) = (1 - Q^{1/m})^m}$$

και ο μοναδικός βέλτιστος $(n, n - 1)$-κύκλος, είναι ομοιόμορφος με

$$\boldsymbol{R(C_n, Q) = 1 - Q(nQ^{-1/n} - n + 1)}$$

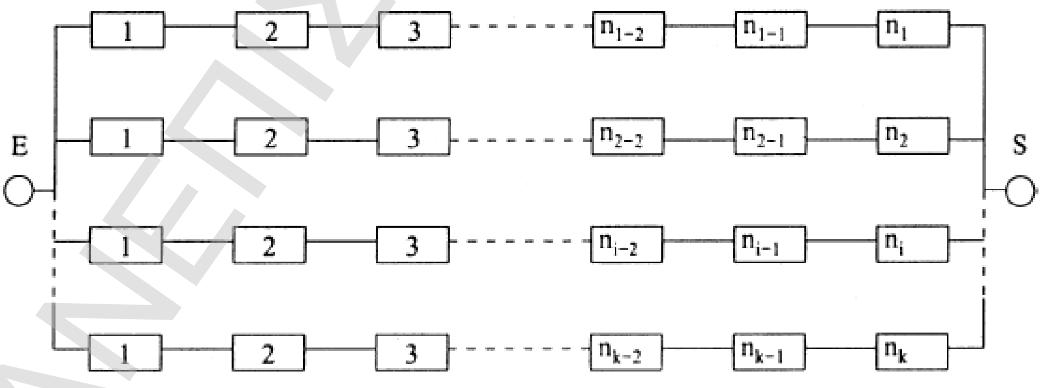
η οποία μας δίνει ουσιαστικά την λύση στο πρόβλημα της βέλτιστης τοποθέτησης των εξαρτημάτων σε ένα k συνεχόμενα-από-n κυκλικό σύστημα.

4.1.4 Βέλτιστη τοποθέτηση σε ένα σειριακό-παράλληλο σύστημα

Στη συγκεκριμένη παράγραφο θα γίνει αναφορά στο πρόβλημα της αύξησης της αξιοπιστίας ενός k συνεχόμενα-από-n συστήματος μέσω της βέλτιστης τοποθέτησης των εξαρτημάτων. Όμως είναι γνωστό ότι ένα k συνεχόμενα-από-n σύστημα ισοδυναμεί με ένα σειριακό σύστημα αν k = 1 και με ένα παράλληλο σύστημα αν k = n. Λόγω δυσκολίας εύρεσης πρόσφατων στοιχείων για το πρόβλημα της βέλτιστης τοποθέτησης σε ένα k συνεχόμενα-από-n σύστημα, θα αναλυθεί το ίδιο πρόβλημα για ένα σειριακό-παράλληλο σύστημα, απ' όπου θα μπορέσουμε να πάρουμε πληροφορίες τόσο για τα k συνεχόμενα-από-n συστήματα, όσο και για τα k-r-n συστήματα γενικότερα.

Με σκοπό την βελτίωση της αξιοπιστίας των συστημάτων, οι σχεδιαστές τοποθέτησαν σε ένα σύστημα διαφορετικές τεχνολογίες παράλληλα, που μάλιστα η κάθε τεχνολογία αποτελείται από εξαρτήματα στη σειρά. Δημιουργήθηκε δηλαδή ένα σειριακό-παράλληλο σύστημα πάνω στο οποίο μελετήθηκε το πρόβλημα της βέλτιστης τοποθέτησης. Με άλλα λόγια, το πρόβλημα μετατίθεται στο να χρησιμοποιηθούν οι διαθέσιμοι πόροι με τον καλύτερο δυνατό τρόπο, ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική αξιοπιστία του συστήματος, ή να ελαχιστοποιηθεί η κατανάλωση των πόρων ενώ επιτυγχάνονται συγκεκριμένοι στόχοι για την αξιοπιστία. Μάλιστα, το εν λόγω πρόβλημα είναι περισσότερο έντονο όταν διαφορετικές τεχνολογίες με την ίδια λειτουργική χρήση, είναι συνδεδεμένες παράλληλα. Ακολουθεί η περιγραφή του συγκεκριμένου ζητήματος.

Έστω ότι έχουμε ένα σειριακό-παράλληλο σύστημα που αποτελείται από k υποσυστήματα σε παράλληλη διάταξη, όπου το κάθε υποσύστημα i (i = 1, …, k) αποτελείται από n_i εξαρτήματα σε σειρά.



Σχήμα 4.1: Σειριακό-παράλληλο σύστημα [5]

Η αξιοπιστία του συστήματος αυτού είναι:

$$R_s = 1 - \prod_{i=1}^{k}\left(1 - \prod_{j=1}^{n_i} r_{ij}\right)$$

όπου r_{ij} είναι η αξιοπιστία του j εξαρτήματος του i υποσυστήματος (i = 1, …, k και j = 1, …, n_i). Θεωρούμε ότι το c_{ij} είναι το κόστος που συνδέεται με το r_{ij} με $c_{ij} = f_{ij}(r_{ij})$. Τότε το συνολικό κόστος του συστήματος είναι:

$$C_s = \sum_{i=1}^{k} C_i = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} f_{ij}(r_{ij})$$

Θεωρούμε ότι οι μεταβλητές r_{ij} μπορούν να παίρνουν τιμές μεταξύ του 0 και 1. Έστω R_{min} η αξιοπιστία του συστήματος στην οποία στοχεύουμε αυτό να φτάσει. Το μοντέλο όπου ελαχιστοποιείται το κόστος με περιορισμό την αξιοπιστία είναι το παρακάτω:

$$\text{(M1)} \quad \min \sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} f_{ij}(r_{ij})$$

$$1 - \prod_{i=1}^{k}\left(1 - \prod_{j=1}^{n_i} r_{ij}\right) = R_{\min}$$

με $0 < r_{ij} < 1$ για κάθε i = 1, …, k και για κάθε j = 1, …, n_i.

4.1.4.1 Θεωρητική μελέτη του προβλήματος ενός επιπέδου (One-stage problem)

Σε αυτή την ενότητα, θεωρούμε ότι γνωρίζουμε την αξιοπιστία R_i που στοχεύουμε να έχει το σύστημα και αναπτύσσουμε την βέλτιστη λύση στο πρόβλημα ενός επιπέδου. Έτσι, το υποπρόβλημα i είναι να την βέλτιστη αξιοπιστία για n_i εξαρτήματα σε μία σειριακή δομή. Το μοντέλο είναι [5]:

$$\text{(M2)} \quad \min \sum_{j=1}^{n_i} f_{ij}(r_{ij})$$

$$\prod_{j=1}^{n_i} r_{ij} = R_i$$

με $0 < r_{ij} < 1$ για κάθε j = 1, …, n_i.

Το οποίο, αν κάνουμε την αντικατάσταση y_{ij} = ln(r_{ij}) è r_{ij} = exp(y_{ij}) και ορίσουμε την συνάρτηση $h_{ij}(y_{ij}) = f_{ij}(r_{ij})$, γίνεται:

$$\text{(M3)} \quad \min \sum_{j=1}^{n_i} h_{ij}(y_{ij})$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = \ln(R_i)$$

για κάθε j = 1, …, n_i και με y_{in_i} = ln(R_i) - $\sum_{j=1}^{n_i-1} y_{ij}$, το πρόβλημα γίνεται:

$$\text{(M3}'\text{)} \quad \min \sum_{j=1}^{n_i-1} h_{ij}[y_{ij}] + h_{in_i}\left[\ln(R_i) - \sum_{j=1}^{n_i-1} y_{ij}\right]$$

$$\sum_{j=1}^{n_i-1} y_{ij} > \ln(R_i)$$

για κάθε j = 1, …, n_i-1

Θεωρούμε ότι όλες οι συναρτήσεις h_{ij} είναι κυρτές και δεδομένου ότι στη βέλτιστη περίπτωση οι μερικές παράγωγοι μηδενίζονται, έχουμε:

$$h'_{ij}(y_{ij}) = h'_{in_i}\left[\ln(R_i) - \sum_{j=1}^{n_i-1} y_{ij}\right]$$

$$h'_{i1}(y_{i1}) = h'_{i2}(y_{i2}) = \cdots = h'_{in_i}\left[\ln(R_i) - \sum_{j=1}^{n_i-1} y_{ij}\right]$$

για κάθε j = 1, …, n_i-1

Από όπου βλέπουμε ότι οι μερικές παράγωγοι είναι ίσες με μια θετική τιμή, έστω A, η οποία ποικίλει ανάλογα με την αξιοπιστία R_i , i = 1, …, k. Οπότε, για να επιλύσουμε το πρόβλημα ενός επιπέδου, αρκεί να βρούμε την $A(R_i)$, η οποία υπολογίζεται εύκολα αν επιλυθεί το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{cases} h'_{ij}(y_{ij}) = A(R_i), \quad j = 1, \ldots, n_i \\ \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = \ln(R_i) \end{cases}$$

4.1.4.2 Θεωρητική μελέτη του προβλήματος πολλαπλών-επιπέδων (Multi-stage problem)

Έστω Y_i = ln(1 - R_i). Επίσης, από το σύστημα της προηγούμενης παραγράφου [5]:

$$\begin{cases} h'_{ij}(y_{ij}) = A(R_i), \quad j = 1, \ldots, n_i \\ \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = \ln(R_i) \end{cases}$$

μπορούμε να έχουμε $H_i(Y_i) = \min \sum_{j=1}^{n_i} h_{ij}(y_{ij}(Y_i))$, τέτοια ώστε $y_{ij}(Y_i) = h'_{ij} - 1(\varphi(Y_i))$, με $\varphi(Y_i) = A(R_i)$ και $\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}(Y_i) = \ln(1 - \exp(Y_i))$. Έτσι το συνολικό πρόβλημα μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$(\mathrm{M4}) \quad \min \sum_{i=1}^{k} H_i(Y_i)$$

$$\sum_{i=1}^{k} Y_i = \ln(1 - R_{\min})$$

για κάθε $i = 1, \ldots, k$

Για να επιλύσουμε αυτό το πρόβλημα, πρέπει να βρούμε τις τιμές των Y_i. Οπότε πρέπει να βρεθούν οι συνθήκες για τις h_{ij}, που είναι κυρτές, ώστε οι $H_i(Y_i)$ να είναι κυρτές. Π.χ. $H_i''(Y_i) > 0$

$$H_i(Y_i) = \sum_{j=1}^{n_i} h_{ij}(y_{ij}(Y_i))$$

$$H'_i(Y_i) = \sum_{j=1}^{n_i} h'_{ij}(y_{ij}(Y_i))y'_{ij}(Y_i)$$

η οποία ισοδυναμεί με την:

$$H'_i(Y_i) = \sum_{j=1}^{n_i} \varphi(Y_i)y'_{ij}(Y_i) = \varphi(Y_i)\sum_{j=1}^{n_i} y'_{ij}(Y_i)$$

και δεδομένου ότι $\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}(Y_i) = \ln(1 - \exp(Y_i))$, έχουμε:

$$\sum_{j=1}^{n_i} y'_{ij}(Y_i) = \frac{\exp(Y_i)}{\exp(Y_i) - 1}$$

απ' όπου καταλήγουμε στην:

$$H_i'(Y_i) = \varphi(Y_i)\frac{\exp(Y_i)}{\exp(Y_i)-1} < 0$$

Επίσης, έστω *g(z)* = $\sum_{j=1}^{n_i} h_{ij}^{'} - 1(z)$ και *g΄(z)* = $\sum_{j=1}^{n_i} (h_{ij}^{'} - 1)'(z)$, το οποίο ισοδυναμεί με

$$g'(z) = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{h_{ij}''(h_{ij}'-1(z))}.$$

Αν $y_{ij} < 0$ και $h_{ij}^{'} - 1 < 0$, τότε *g(z)*< 0

Αν $h_{ij}^{'} > 0$ και $h_{ij}^{''} > 0$, τότε η *g(z)*είναι μία αύξουσα αρνητική συνάρτηση.

Οπότε για z = *φ(Y*$_i$*)*, έχουμε:

$$g(\varphi(Y_i)) = \sum_{j=1}^{n_i} h_{ij}^{'} - 1(\varphi(Y_i)) = \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}(Y_i) = \ln(1 - \exp(Y_i)) \text{ και τότε:}$$

$$\varphi(Y_i) = g^{-1}(\ln(1 - \exp(Y_i)))$$

Είναι γνωστό ότι $h_{ij}^{'} > 0$, απ' όπου παίρνουμε ότι $\varphi(Y_i) > 0$ και $g^{-1}(z) > 0$.
Οπότε οδηγούμαστε στην ακόλουθη σχέση:

$$\varphi'(Y_i) = g'^{-1}(\ln(1 - \exp(Y_i)))\frac{\exp(Y_i)}{\exp(Y_i)-1}$$

και αφού

$$g'^{-1}(\ln(1 - \exp(Y_i))) = \frac{1}{g'(g^{-1}(\ln(1 - \exp(Y_i))))}$$

τότε:

$$\varphi'(Y_i) = \frac{1}{g'(\varphi(Y_i))}\frac{\exp(Y_i)}{\exp(Y_i)-1} < 0$$

και δεδομένου ότι η $H_i(Y_i)$ είναι κυρτή αν $H_i^{''}(Y_i) > 0$, ισοδυναμεί με:

$$\varphi(Y_i)g'(\varphi(Y_i)) < \exp(Y_i)$$

$$\Leftrightarrow g^{-1}(\ln(1 - \exp(Y_i)))g'(g^{-1}(\ln(1 - \exp(Y_i))) < \exp(Y_i)$$

Και τελικά η συνθήκη κυρτότητας για να έχουμε τη βέλτιστη τοποθέτηση και την βέλτιστη δυνατή αξιοπιστία στο σύστημα είναι:

$$g^{-1}(\ln(R_i))g'(g^{-1}(\ln(R_i))) < 1 - R_i$$

για κάθε $1 > R_i > 0$

και μάλιστα η βέλτιστη αξιοπιστία R_i για κάθε υποσύστημα i = 1, …, k δίνεται από τις δύο παρακάτω ισοδύναμες σχέσεις :

$$Y_i = \frac{\ln(1 - R_{\min})}{k} \quad \text{για κάθε } i = 1, \ldots, k$$

$$R_i = 1 - \sqrt[k]{1 - R_{\min}} \quad \text{για κάθε } i = 1, \ldots, k$$

Που ουσιαστικά, αποτελούν την απάντηση στο ερώτημα της εύρεσης ενός βέλτιστου συστήματος, στο οποίο η θέση των εξαρτημάτων του είναι τέτοια ώστε να μεγιστοποιείται η αξιοπιστία αυτού.

4.2.1 Σπουδαιότητα των εξαρτημάτων στα k-r-n συστήματα

Στη παράγραφο αυτή εξετάζεται η σπουδαιότητα των εξαρτημάτων στα k-r-n συστήματα, έχοντας θεωρήσει ότι τα εξαρτήματα είναι ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένα. Πιο συγκεκριμένα, θα εξεταστεί η σπουδαιότητα κατά Birnbaum ή B-σπουδαιότητα των εξαρτημάτων στα k-r-n γραμμικά συστήματα.

Έστω $R(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ η αξιοπιστία ενός συστήματος που αποτελείται από n εξαρτήματα με πιθανότητες αυτά να δουλεύουν ίσες με $p_1,p_2,\ldots,p_n$ αντίστοιχα. Τότε η B-σπουδαιότητα του εξαρτήματος i είναι ίση με :

$$\mathbf{I_i = R(p_1, \ldots,p_{i-1},1, p_{i+1},\ldots, p_n) - R(p_1, \ldots,p_{i-1},0, p_{i+1},\ldots, p_n)}$$

Ουσιαστικά το I_i είναι η μείωση της αξιοπιστίας του συστήματος όταν το εξάρτημα i αποτύχει. Με άλλα λόγια, σε ένα σε σειρά σύστημα, το εξάρτημα με τη μεγαλύτερη πιθανότητα αποτυχίας είναι το πιο B-σπουδαίο, παραπέμποντας στην αρχή ότι μια αλυσίδα είναι τόσο δυνατή όσο και ο πιο αδύνατος κρίκος της. Ενώ σε ένα παράλληλο σύστημα, το πιο B-σπουδαίο εξάρτημα είναι αυτό με τη μεγαλύτερη αξιοπιστία, πράγμα το οποίο είναι λογικό αφού το σύστημα συνεχίζει να δουλεύει ακόμα και αν μόνο ένα εξάρτημα δουλεύει.

Έστω ένα k-r-n γραμμικό σύστημα με ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένα εξαρτήματα, τότε [1]:

- Για $1 \leq i \leq \min(r-1\ , n-r)$ ισχύει ότι :

$$R(p_{(1)},\ldots,p_{(i)}, 1_{(i+1)}, p_{(i+2)},\ldots,p_{(n)}) \geq R(p_{(1)},\ldots,p_{(i-1)}, 1_{(i)}, p_{(i+1)},\ldots,p_{(n)})$$

και

$$R(p,\ldots,p, 0_{(i+1)}, p,\ldots,p) \leq R(p,\ldots,p, 0_{(i)}, p,\ldots,p)$$

- Για $\max(r+1,n-r+2) \leq i \leq n$ ισχύει ότι :

$$R(p,\ldots,p, 1_{(i)}, p,\ldots,p) \leq R(p,\ldots,p, 1_{(i-1)}, p,\ldots,p)$$

και

$$R(p,\ldots,p, 0_{(i)}, p,\ldots,p) \geq R(p,\ldots,p, 0_{(i-1)}, p,\ldots,p)$$

Επίσης έστω I_i ο δείκτης σπουδαιότητας κατά Birnbaum του εξαρτήματος που βρίσκεται στη θέση i. Τότε θα ισχύουν τα παρακάτω:

- **$I_i \leq I_{i+1}$, για $1 \leq i \leq \min(r-1 , n-r)$**

και

- **$I_i \geq I_{i+1}$, για $\max(r,n-r+1) \leq i \leq n-1$**

Οι παραπάνω σχέσεις αφορούν το δείκτη σπουδαιότητας κατά Birnbaum και ουσιαστικά μας φανερώνουν τη σπουδαιότητα των εξαρτημάτων στα k-r-n συστήματα, πράγμα το οποίο μπορεί να βοηθήσει τους μηχανικούς και σχεδιαστές των k-r-n συστημάτων ώστε να εστιάσουν την προσοχή τους στα πιο σημαντικά εξαρτήματα και να επιτύχουν ένα βέλτιστο σύστημα.

4.2.2 Νέες προσεγγίσεις για τη σπουδαιότητα κατά Birnbaum στα k συνεχόμενα-από-n: F συστήματα

Ένα k συνεχόμενα-από-n:F γραμμικό σύστημα είναι ένα γραμμικό σύστημα αποτελούμενο από n εξαρτήματα, καθένα από τα οποία δουλεύει ή αποτυγχάνει, τέτοια ώστε το σύστημα αποτυγχάνει αν και μόνο αν k συνεχόμενα εξαρτήματα αποτύχουν όλα. Έστω σύστημα S και R(S) η αξιοπιστία του συστήματος αυτού, τότε η B-σπουδαιότητα ενός εξαρτήματος i ορίζεται ως εξής [6]:

$$I_i = R(S \mid i \text{ δουλεύει}) - R(S \mid i \text{ αποτυγχάνει})$$

Η σπουδαιότητα κατά Birnbaum στα k συνεχόμενα-από-n:F γραμμικά συστήματα έχει μελετηθεί ως σύγκριση της I_i και της I_j και μας παρέχει πληροφορίες αρχικά για να μπορέσουμε να επιτύχουμε μεγιστοποίηση της αξιοπιστίας του συστήματος τοποθετώντας το κάθε εξάρτημα στην κατάλληλη θέση, με τη χρήση του βαθμού σημαντικότητας(σπουδαιότητα) της κάθε μιας από τις n θέσεις. Ακόμα, στην περίπτωση που θέλουμε να αυξήσουμε την αξιοπιστία του συστήματος, βελτιώνοντας την αξιοπιστία ενός εξαρτήματος αυτού, τότε η B-σπουδαιότητα μας υποδεικνύει το εξάρτημα προς βελτίωση με τη μεγαλύτερη σπουδαιότητα. Δυστυχώς όμως η παραπάνω σύγκριση που μπορεί να μας δώσει τόσο χρήσιμες πληροφορίες, είναι αρκετά δύσκολο να πραγματοποιηθεί. Για οποιοδήποτε n, παρουσιάζονται οι παρακάτω ανισότητες:

- $I_1 \le I_2 \le \ldots \le I_k$ για $n \ge 2k$
  και
  $I_1 \le I_2 \le \ldots \le I_{n-k+1} = \ldots = I_{[n/2]}$ για $n \le 2k$

- $I_1 \le I_{k+1}$

- $I_k \ge I_{2k}$

- $I_1 \le I_i \le I_k$ για $1 \le i \le [n/2]$

Επίσης, για ένα συγκεκριμένο k, έστω R(n) η αξιοπιστία ενός k συνεχόμενα-από-n:F συστήματος και έστω p η αξιοπιστία ενός εξαρτήματος(q=1-p), τότε ισχύει:

$$I_i = [R(i-1)R(n-1) - R(n)]/q$$

το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για να αποδειχθεί η παρακάτω ανισότητα:

- $I_1 \le I_i$ για $2 \le i \le [n/2]$

Απόδειξη: $I_1 = [R(n-1) - R(n)]/q \leq [R(i-1)R(n-i) - R(n)]/q = I_i$ για $2 \leq i \leq [n/2]$

Πρόσφατα, παρουσιάστηκε και ένας νέος ορισμός σπουδαιότητας η οποία συμβολίζεται με I^H. Μια ομάδα αποτυχίας(cutset) συστήματος είναι ένα υποσύστημα που η αποτυχία του προκαλεί αποτυχία του συστήματος στο σύνολό του. Έτσι, αν f(d,n) υποδηλώνει έναν αριθμό από d cutsets τότε θα ισχύει [6]:

$$I_i^H \geq I_j^H \text{ αν και μόνο αν } f_i(d,n) \geq f_j(d,n)$$

Παρόλο που η σύγκριση των I^H είναι πιο ισχυρή από την σύγκριση των I, μπορεί να αποδειχθεί ότι:

$$I_k^H \geq I_i^H \text{ , για } 1 \leq i \leq [n/2] \text{ και } n \geq 2k$$

όπως και

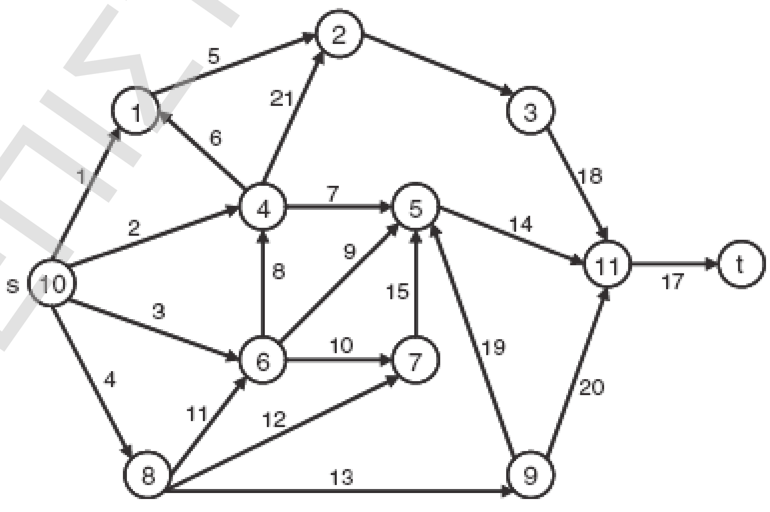
$$I_k \geq I_i \text{ , για } 1 \leq i \leq [n/2] \text{ και } n \geq 2k$$

Στην ουσία οι παραπάνω σχέσεις και συγκρίσεις αποτελούν άλλη μια προσέγγιση του θέματος της σπουδαιότητας των εξαρτημάτων στα k συνεχόμενα-από-n συστήματα, που βέβαια όπως και στην προηγούμενη παράγραφο βασίζεται στον πολύ σημαντικό δείκτη σπουδαιότητας κατά Birnbaum.

4.2.3 Ανάλυση της σπουδαιότητας των εξαρτημάτων για βελτίωση της αξιοπιστίας σε συστήματα πολλαπλών καταστάσεων

Διάφορα μέτρα - δείκτες σπουδαιότητας ποσοτικοποιούν την κρισιμότητα συγκεκριμένων εξαρτημάτων μέσα σε ένα σύστημα. Για συστήματα που έχουν δυαδική συμπεριφορά(π.χ. σύστημα και εξαρτήματα του συστήματος που είτε λειτουργούν τέλεια, είτε αποτυγχάνουν τελείως), οι πιο δημοφιλείς και χρήσιμοι δείκτες σπουδαιότητας είναι ο δείκτης Birnbaum, ο δείκτης Fussell-Veseley (FV), ο δείκτης RRW(reliability reduction worth) και ο δείκτης RAW(reliability achievement worth). Για τα συστήματα αυτά, αυτοί οι δείκτες σπουδαιότητας μπορούν να βοηθήσουν στον προσδιορισμό του πιο σημαντικού εξαρτήματος του συστήματος με σημείο αναφοράς την συνολική αξιοπιστία του συστήματος. Επίσης, οι δείκτες σπουδαιότητας μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εργαλείο εύρεσης των αδυναμιών του συστήματος και προσδιορισμού των κατά προτεραιότητα ενεργειών βελτίωσης της αξιοπιστίας του συστήματος.

Όταν τα εξαρτήματα του συστήματος φθείρονται σταδιακά και έτσι μειώνεται η ικανότητα του συστήματος να ικανοποιεί συγκεκριμένες απαιτήσεις, μία ανάλυση αξιοπιστίας μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι ανεπαρκής. Για συστήματα όπως αυτά των τηλεπικοινωνιών, της παροχής νερού, πετρελαίου και φυσικού αερίου, της παραγωγής και μεταφοράς ενέργειας, μία προσέγγιση που λαμβάνει υπόψη τη φθορά των εξαρτημάτων στην ανάλυση της αξιοπιστίας μπορεί να δώσει ιδιαίτερα χρήσιμες πληροφορίες. Για να αναλύσουμε, όμως, την αξιοπιστία των συστημάτων αυτών, πρέπει να μελετήσουμε δίκτυα πολλαπλών καταστάσεων, όπως αυτό του παρακάτω σχήματος:



Σχήμα 4.2: Σύστημα MSMC [7]

Οπότε γίνεται χρήση των δεικτών σπουδαιότητας ως εργαλεία για τη βελτίωση της αξιοπιστίας στα συστήματα πολλαπλών καταστάσεων με εξαρτήματα πολλαπλών καταστάσεων (MSMC). Μάλιστα έχουν αναπτυχθεί δείκτες σπουδαιότητας που έχουν την ικανότητα να προσδιορίζουν ή να βαθμολογούν αμέσως τα πιο σημαντικά εξαρτήματα οποιουδήποτε συστήματος MSMC σε οποιοδήποτε κατάσταση αυτό βρίσκεται. Οι συγκεκριμένοι δείκτες σπουδαιότητας ονομάζονται σύνθετοι δείκτες σπουδαιότητας(CIM).

v Σύνθετοι δείκτες σπουδαιότητας (CIM)

Οι πρόσφατες έρευνες στο αντικείμενο των δεικτών σπουδαιότητας, επικεντρώνονται στην ανάπτυξη δεικτών σπουδαιότητας που ποσοτικοποιούν το πώς μία συγκεκριμένη κατάσταση ή ένα σύνολο καταστάσεων ενός συγκεκριμένου εξαρτήματος, επηρεάζει την αξιοπιστία του συστήματος πολλαπλών καταστάσεων. Αυτοί οι δείκτες ονομάζονται δείκτες σπουδαιότητας Τύπου 2 και είναι οι πιο χρήσιμοι σε περιπτώσεις όπου δίνεται έμφαση στην επίδραση της φθοράς και στη σταδιακή υποβάθμιση των εξαρτημάτων του συστήματος, στην αξιοπιστία αυτού. Όμως, όταν δίνεται έμφαση στην εύρεση του εξαρτήματος του συστήματος με τη μεγαλύτερη επιρροή στην αξιοπιστία, τότε οι δείκτες Τύπου 2 δεν είναι άμεσα εφαρμόσιμοι.

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιαστούν οι δείκτες σπουδαιότητας Τύπου 1, οι οποίοι ονομάζονται σύνθετοι δείκτες σπουδαιότητας (CIM) και μπορούν να βοηθήσουν στον προσδιορισμό του τρόπου που επηρεάζει την αξιοπιστία του συστήματος ένα εξάρτημα πολλαπλών καταστάσεων. Έτσι, παρακάτω παρουσιάζονται δύο ομάδες CIM [7]:

Ø *1η ομάδα CIM:*

Αυτή την ομάδα σύνθετων δεικτών σπουδαιότητας, περιέχει μία γενίκευση ή μία επέκταση των πιο συχνά χρησιμοποιούμενων δεικτών σπουδαιότητας.

i. Αρχικά, η σπουδαιότητα κατά Birnbaum ενός εξαρτήματος ορίζεται ως η πιθανότητα το εξάρτημα αυτό να είναι κρίσιμο για την λειτουργία του συστήματος. Έτσι, για ένα πρόβλημα πολλαπλών καταστάσεων με $b_i = (0,1)$ και $d = 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned} I_i &= P(\varphi(\mathbf{x}) = 1 | x_i = 1) - P(\varphi(\mathbf{x}) = 1 | x_i = 0) \\ &= P(\varphi(\mathbf{x}) = 1 | x_i = 1) - P(\varphi(\mathbf{x}) = 1) \\ &\quad + P(\varphi(\mathbf{x}) = 1) - P(\varphi(\mathbf{x}) = 1 | x_i = 0) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| P(\varphi(\mathbf{x}) = 1 | x_i = 1) - P(\varphi(\mathbf{x}) = 1) \right| \\
&\quad + \left| P(\varphi(\mathbf{x}) = 1) - P(\varphi(\mathbf{x}) = 1 | x_i = 0) \right| \\
&= \frac{\sum_{j=0}^{1} \left| P(\varphi(\mathbf{x}) = 1 | x_i = b_{ij}) - P(\varphi(\mathbf{x}) = 1) \right|}{|\mathbf{b}_i| - 1}
\end{aligned}
$$

και η γενίκευσή του μας δίνει το δείκτη CIM για ένα σύστημα MSMC, που φαίνεται παρακάτω:

$$
\mathrm{MI}_i^{\mathrm{SAD}} = \frac{\sum_{j=1}^{\omega_i} \left| P(\varphi(\mathbf{x}) \geqslant d | x_i = b_{ij}) - P(\varphi(\mathbf{x}) \geqslant d) \right|}{\omega_i - 1}
$$

όπου ω = $|b_i|$ = ο αριθμός των καταστάσεων ενός εξαρτήματος ***i***.

ii. Ο δείκτης RAW ποσοτικοποιεί το μέγιστο ποσοστό αύξησης της αξιοπιστίας του συστήματος από ένα συγκεκριμένο εξάρτημα, και με b_i = (0,1) ορίζεται ως:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{RAW}_i &= \frac{P(\varphi(\mathbf{x}) = 1 | x_i = 1)}{P(\varphi(\mathbf{x}) = 1)} \\
&= 1 + \max\left(0,\ \frac{P(\varphi(\mathbf{x}) = 1 | x_i = 1)}{P(\varphi(\mathbf{x}) = 1)} - 1\right) \\
&= 1 + \sum_{j=0}^{1} \max\left(0,\ \frac{P(\varphi(\mathbf{x}) = 1 | x_i = b_{ij})}{P(\varphi(\mathbf{x}) = 1)} - 1\right)
\end{aligned}
$$

και η CIM γενίκευσή του για ένα σύστημα MSMC φαίνεται παρακάτω:

$$
\mathrm{MRAW}_i = 1 + \frac{1}{\omega - 1} \sum_{j=1}^{\omega} \max\left(0,\ \frac{P(\varphi(\mathbf{x}) \geqslant d | x_i = b_{ij})}{P(\varphi(\mathbf{x}) \geqslant d)} - 1\right)
$$

iii. Ο δείκτης RRW δείχνει την δυνητική ζημιά που προκαλείται στο σύστημα από ένα συγκεκριμένο εξάρτημα και είναι ο ακόλουθος:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{RRW}_i &= \frac{P(\varphi(\mathbf{x}) = 1)}{P(\varphi(\mathbf{x}) = 1 | x_i = 0)} \\
&= 1 + \max\left(0,\ \frac{P(\varphi(\mathbf{x}) = 1)}{P(\varphi(\mathbf{x}) = 1 | x_i = 0)} - 1\right) \\
&= 1 + \sum_{j=0}^{1} \max\left(0,\ \frac{P(\varphi(\mathbf{x}) = 1)}{P(\varphi(\mathbf{x}) = 1 | x_i = b_{ij})} - 1\right)
\end{aligned}
$$

και η CIM γενίκευσή του για ένα σύστημα MSMC είναι:

$$\mathrm{MRRW}_i = 1 + \frac{1}{\omega - 1}\sum_{j=1}^{\omega} \max\left(0,\ \frac{P(\varphi(\mathbf{x}) \geqslant d)}{P(\varphi(\mathbf{x}) \geqslant d \mid x_i = b_{ij})} - 1\right)$$

iv. Ο δείκτης σπουδαιότητας Fussell-Vesely (FV) ποσοτικοποιεί το μέγιστο ποσοστό μείωσης της αξιοπιστίας του συστήματος από ένα συγκεκριμένο εξάρτημα, και ισούται με:

$$\begin{aligned}\mathrm{FV}_i &= \frac{P(\varphi(\mathbf{x}) = 1) - P(\varphi(\mathbf{x}) = 1 \mid x_i = 0)}{P(\varphi(\mathbf{x}) = 1)} \\ &= 1 - \frac{1}{\mathrm{RRW}_i}\end{aligned}$$

και η CIM γενίκευσή του για ένα σύστημα MSMC είναι:

$$\mathrm{MFV}_i = 1 - (1/\mathrm{MRRW}_i$$

- ***2η ομάδα CIM:***

Οι δείκτες της προηγούμενης ομάδας φτιάχτηκαν εστιάζοντας στα πιθανά επίπεδα καταστάσεων ενός εξαρτήματος αλλά δεν ερμηνεύουν την πιθανότητα ένα τέτοιο εξάρτημα να είναι στην κατάσταση αυτή. Για παράδειγμα, σύνθετος δείκτης σπουδαιότητας(CIM) κατά Birnbaum λαμβάνει υπόψη την απόκλιση που προκαλεί ένα εξάρτημα στη συνολική αξιοπιστία του συστήματος, αλλά δεν λαμβάνεται υπόψη η πιθανότητα εμφάνισης της απόκλισης αυτής. Έτσι, για να υπολογίσουμε αυτές τις πιθανότητες των καταστάσεων μέσα στους δείκτες CIM, αναπτύχθηκαν δύο νέοι δείκτες, που μάλιστα συνδέονται στενά με το δείκτη σπουδαιότητας κατά Birnbaum [7].

i. Μέση απόκλιση (Mean Absolute Deviation - MAD) : δείχνει την αναμενόμενη απόκλιση στην αξιοπιστία ενός συστήματος MSMC, η οποία προκαλείται από τα διαφορετικά επίπεδα απόδοσης ενός συγκεκριμένου εξαρτήματος και τις σχετιζόμενες πιθανότητες.

$$\begin{aligned}\mathrm{MAD}_i &= E\left[\left|P(\varphi(\mathbf{x}) \geqslant d \mid x_i = b_{ij}) - P(\varphi(\mathbf{x}) \geqslant d)\right|\right] \\ &= \sum_j p_{ij}\left|P(\varphi(\mathbf{x}) \geqslant d \mid x_i = b_{ij}) - P(\varphi(\mathbf{x}) \geqslant d)\right.\end{aligned}$$

ii. Ο δεύτερος δείκτης της ομάδας αυτής μπορεί να βγει αν εστιάσουμε στη δεύτερη στιγμή του $P(\varphi(x) \geq d|x_i)$ και η μαθηματική του έκφραση φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned} \mathrm{MI}_i^{\mathrm{Var}} &= E\left[P(\varphi(\mathbf{x}) \geqslant d|x_i)^2\right] \\ &= \sum_j p_{ij} P(\varphi(\mathbf{x}) \geqslant d|x_i = b_{ij})^2 \end{aligned}$$

Τέλος, είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι η επιλογή του σύνθετου δείκτη CIM επηρεάζει τον τελικό σχεδιασμό του συστήματος πολλαπλών καταστάσεων με εξαρτήματα πολλαπλών καταστάσεων (MSMC). Έτσι, οι εξειδικευμένες απαιτήσεις του εκάστοτε προβλήματος σε συνδυασμό με την κρίση του σχεδιαστή, μας οδηγούν στην επιλογή του κατάλληλου για το κάθε πρόβλημα σύνθετου δείκτη σπουδαιότητας (CIM), με σκοπό πάντα τη μεγιστοποίηση της αξιοπιστίας του συστήματος.

4.2.4 Άλλοι δείκτες σπουδαιότητας των εξαρτημάτων [8]

- *Ομοιόμορφος* δείκτης σπουδαιότητας *κατά* ***Birnbaum*** (***Uniform Birnbaum importance***):

  $$\partial_i R(T) \geq \partial_j R(T)$$

  για $0 < p < 1$

- *Συνδυαστικός* δείκτης σπουδαιότητας(***Combinatorial importance***):

  Ο συγκεκριμένος δείκτης ουσιαστικά είναι μία ειδική περίπτωση του ομοιόμορφου δείκτη σπουδαιότητας κατά Birnbaum, για $p = ½$.

- *Μισής-γραμμής* δείκτης σπουδαιότητας(***Half-line importance***):

  Πρόκειται για μία εξασθενισμένη έκδοση του ομοιόμορφου δείκτη σπουδαιότητας κατά Birnbaum, για $p \geq ½$.

- *Κρίσιμος* δείκτης σπουδαιότητας(***Critical importance***):

  Για οποιαδήποτε υποομάδα S που δεν περιέχει i και j, ισχύει

  $$j \cup S \in CS_j(T) \Rightarrow i \cup S \in CS_i(T)$$

- *H*-δείκτης σπουδαιότητας(***H-importance***):

  $$cs_{i,d}(T) \geq cs_{j,d}(T)$$

  για οποιοδήποτε d.

- ***Cut***-δείκτης σπουδαιότητας(***Cut importance***):

  $$(cs_{i,1}(T), cs_{i,2}(T), \cdots) \geq (cs_{j,1}(T), cs_{j,2}(T), \cdots)$$

- *Πρώτου-όρου* δείκτης σπουδαιότητας(***First-term importance***):

  Ο συγκεκριμένος δείκτης ουσιαστικά είναι μία παραλλαγή του παραπάνω δείκτη, δηλαδή ο συγκεκριμένος δείκτης συγκρίνει μόνο τον πρώτο όρο του προηγούμενου δείκτη.

4.3 Απολογισμός 4ου Κεφαλαίου

Συγκεντρωτικά, στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάστηκε το θέμα της βέλτιστης τοποθέτησης των εξαρτημάτων με σκοπό τη μεγιστοποίηση της αξιοπιστίας του συστήματος, κάνοντας αναφορά στο πρόβλημα της βέλτιστης τοποθέτησης τόσο στα k-από-r-από-n συστήματα, όσο και στα k-από-n συστήματα (Γραμμικά και Κυκλικά). Επίσης, δόθηκε έμφαση στο θέμα της σπουδαιότητας των εξαρτημάτων και αναλύθηκαν κάποιοι αρκετά χρήσιμοι δείκτες σπουδαιότητας εξαρτημάτων.

Συμπερασματικά, η βέλτιστη τοποθέτηση των εξαρτημάτων στα k-r-n συστήματα με σκοπό τη μεγιστοποίηση της αξιοπιστίας τους, είναι ένα πολύ σημαντικό πρόβλημα και μάλιστα αρκετά δύσκολο εξαιτίας του γεγονότος ότι τα εξαρτήματα στα k-r-n συστήματα δεν έχουν την ίδια αξιοπιστία. Άλλωστε αν όλα τα εξαρτήματα είχαν την ίδια αξιοπιστία τότε δεν θα προέκυπτε το θέμα της βέλτιστης τοποθέτησης.

Συγκεκριμένα, αρκετοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με το πρόβλημα της βελτιστοποίησης των k-r-n συστημάτων, καθώς και για την περίπτωση των συστημάτων όπου r=k. Μάλιστα, τα αποτελέσματα των ερευνών αυτών οδηγούν σε σχετικά απλές λύσεις του προβλήματος της βέλτιστης τοποθέτησης των εξαρτημάτων.

Τέλος, όσον αφορά το θέμα της σπουδαιότητας των εξαρτημάτων στα k-r-n συστήματα, αυτό αντιμετωπίζεται κάνοντας χρήση ενός πολύ σημαντικού δείκτη σπουδαιότητας, του δείκτη σπουδαιότητας κατά Birnbaum. Οι σχέσεις που αφορούν το δείκτη σπουδαιότητας κατά Birnbaum, ουσιαστικά μας φανερώνουν τη σπουδαιότητα των εξαρτημάτων στα k-r-n συστήματα, πράγμα το οποίο μπορεί να βοηθήσει τους μηχανικούς και σχεδιαστές των k-r-n συστημάτων ώστε να εστιάσουν την προσοχή τους στα πιο σημαντικά εξαρτήματα και να επιτύχουν ένα βέλτιστο k-r-n σύστημα. Βέβαια, οι υπόλοιποι δείκτες που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό, είναι και αυτοί πολύ χρήσιμοι, αλλά εξαιτίας του γεγονότος ότι αρκετοί από αυτούς προκύπτουν από τον δείκτη σπουδαιότητας κατά Birnbaum, είναι καλύτερο να χρησιμοποιείται ο συγκεκριμένος τρόπος εύρεσης της σπουδαιότητας των εξαρτημάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 4^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

[1] **S. Papastavridis and M. Sfakianakis**, "*Optimal-arrangement and importance of the components in a consecutive-k-out-of-r-from-n: F system,*" **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 40, No. 3, August 1991, pp. 277 – 279

[2] **M. Sfakianakis**, "*Optimal arrangement of components in a consecutive k-out-of-r-from n:F system*", **Microelectronics and Reliability**, Volume 33, Issue 10, August 1993, Pages 1573 - 1578

[3] **G. Levitin**, "*Optimal allocation of elements in a linear multi-state sliding window system*", **Reliability Engineering and System Safety**, Vol. 76, 2002, pp. 245 – 254

[4] **H. Chang, F. Hwang**, "*Optimal Consecutive-k-out-of-n Systems Under a Fixed Budget*", **At & T Bell Laboratories**, 1996

[5] **A. Yalaoui, C. Chu, E. Chatelet**, "*Reliability allocation problem in a series–parallel system*", **Reliability Engineering and System Safety**, Vol. 90, 2005, pp. 55 – 61

[6] **G. Chang, L. Cui, F. Hwang**, "*New comparisons in Birnbaum importance for the consecutive-k-out-of-n system*", **Probability in the Engineering and Informational Sciences**, Vol. 13, 1999, pp. 187 – 192

[7] **J. Ramirez-Marquez, D. Coit**, "*Multi-state component criticality analysis for reliability improvement in multi-state systems*", **Reliability Engineering and System Safety**, Vol. 92, 2007, pp. 1608 – 1619

[8] **H. Chang, F. Hwang**, "*Rare-Event Component Importance for the Consecutive-k System*", **Naval Research Logistics**, Vol. 49, 2002, pp. 159 - 166

[9] **M. Armstrong**, "*Joint Reliability – Importance of Components*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 44, No. 3, September 1995, pp. 408 – 412

[10] **J. Deshpande, U. Naik-Nimbalkar**, "*Comparing relative importance of the same component in a series system in two environments*", **Journal of Statistical Planning and Inference**, Vol. 137, 2007, pp. 3410 – 3415

[11] **C. Elegbede, C. Chu**, "*Reliability Allocation Through Cost Minimization*", **IEEE Transactions on Reliability**, vol. 52, No. 1, March 2003, pp. 106 - 111

[12] **X. Gao, L. Cui and J. Li**, "*Analysis for joint importance of components in a coherent system*", **European Journal of Operational Research**, Volume 182, Issue 1, 1 October 2007, Pages 282-299

[13] **G. Levitin**, "*Uneven allocation of elements in linear multi-state sliding window system*", **European Journal of Operational Research**, Vol. 163, 2005, pp. 418 – 433

[14] **A. Yalaoui, E. Châtelet, C. Chu**, "*A New Dynamic Programming Method for Reliability & Redundancy Allocation in a Parallel-Series System*", **IEEE Transactions on Reliability**, vol. 54, No. 2, June 2005, pp. 254 – 261

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{ο} – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ & ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΠΡΟΣ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ

Στο τελευταίο κεφάλαιο της συγκεκριμένης μελέτης γίνεται αναφορά στα συμπεράσματα που προκύπτουν από την ανασκόπηση του θέματος της αξιοπιστίας των k-r-n συστημάτων που απασχόλησαν τα τέσσερα προηγούμενα κεφάλαια της διπλωματικής εργασίας αυτής. Τέλος, παρουσιάζονται ορισμένες σκέψεις για συγκεκριμένες περιοχές που θα μπορούσε κάποιος ενδιαφερόμενος να ερευνήσει περαιτέρω το συγκεκριμένο θέμα.

5.1 Συμπεράσματα

Καταρχήν, όσον αφορά τα φράγματα αξιοπιστίας των k-r-n συστημάτων, παρατηρούμε ότι ουσιαστικά συνεχίζουμε να στηριζόμαστε σε αυτά που προκύπτουν από την τεχνική Boole-Bonferroni. Βέβαια τα φράγματα αξιοπιστίας που αναλύονται στα πρόσφατα άρθρα αποτελούν μία γενικότερη εκτίμησή τους, σε σχέση με αυτά των ‘παλιών’ μελετών. Επίσης αξίζει να σημειωθεί ότι έχουν αναπτυχθεί και νέες τεχνικές εύρεσης και υπολογισμού των φραγμάτων αξιοπιστίας των k-r-n συστημάτων, όπως είναι η τεχνική Hunter-Worsley.

Επιπλέον, όσον αφορά τον υπολογισμό της αξιοπιστίας των k-από-r συνεχόμενα-από-n:F συστημάτων, συμπεραίνουμε ότι ακόμα συνεχίζουμε να χρησιμοποιούμε και να αποδεχόμαστε τις παλαιότερες αναγωγικές σχέσεις υπολογισμού της. Βέβαια, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ο συγκεκριμένος τομέας παρουσιάζει στασιμότητα. Τον ισχυρισμό αυτόν τον αναιρούν οι πρόσφατες μελέτες, όπως αυτή των k-r-n συστημάτων με πολλαπλά κριτήρια αποτυχίας, που αντιμετωπίζει το πρόβλημα με μία νέα προσέγγιση, κάνοντας χρήση δηλαδή της u-συνάρτησης.

Παράλληλα, η πρόοδος στο συγκεκριμένο θέμα γίνεται ακόμα πιο φανερή από τη διαδικασία εκτίμησης της αξιοπιστίας των k-από-r συνεχόμενα-από-n:F συστημάτων πολλαπλών καταστάσεων, η οποία βασίζεται στον μετασχηματισμό-z, ή αλλιώς στην u-συνάρτηση. Ακόμα δεν θα μπορούσαμε να παραλείψουμε τις πρόσφατες μελέτες για τα k-από-r συνεχόμενα-από-n: G συστήματα, τα οποία δεν είναι τίποτα άλλο από το ισοδύναμο (r-k+1)-από-r συνεχόμενα-από-n: F σύστημα.

Όσον αφορά την αξιοπιστία των k συνεχόμενα-από-n:F συστημάτων, η οποία είχε μελετηθεί κατά πολύ στα δημοσιευμένα άρθρα της προηγούμενης δεκαετίας, παρατηρούμε ότι αποτελεί ένα θέμα το οποίο απασχόλησε τους επιστήμονες σε σημαντικό βαθμό, κρίνοντας από το μεγάλο αριθμό πρόσφατων μελετών.
Η διαφορά των πρόσφατων άρθρων από τα παλαιότερα, είναι ότι τα μεν αναπτύσσουν τρόπους υπολογισμού της αξιοπιστίας των k-συνεχόμενα-από-n συστημάτων όταν τα εξαρτήματα είτε ακολουθούν την εκθετική κατανομή, είτε όταν βρίσκονται στις περιπτώσεις των μοντέλων TFR και IFR, ενώ τα δε εξετάζουν την αξιοπιστία κάτω από κανένα είδος εξάρτησης μεταξύ των εξαρτημάτων του συστήματος. Έτσι, δεν είμαστε σε θέση να εξάγουμε πολλά συμπεράσματα για την εξέλιξη και την ορθότητα των νέων σχέσεων υπολογισμού της αξιοπιστίας των k-n συστημάτων, αφού πολύ απλά ασχολούνται με τα ίδια συστήματα αλλά υπό διαφορετικές προϋποθέσεις.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι πρόσφατες δημοσιεύσεις για τα γενικευμένα k-από-n συστήματα πολλαπλών καταστάσεων, οι οποίες είναι φανερό ότι βασίζονται στους παλαιότερους τρόπους υπολογισμού της αξιοπιστίας. Αρκετά σημαντικές είναι και οι μελέτες όπως αυτή των συνδυασμένων k-από-n συστημάτων ή αυτή των DFM συστημάτων, οι οποίες ναι μεν έχουν τις βάσεις τους στα δημοσιευμένα άρθρα της προηγούμενης δεκαετίας, αλλά αποτελούν τις πλέον χαρακτηριστικές και αντιπροσωπευτικές μελέτες για την εξέλιξη του συγκεκριμένου αντικειμένου.

Επιπλέον ένα συμπέρασμα που προκύπτει παρατηρώντας τόσο τα παλαιότερα δημοσιευμένα άρθρα, όσο και τα πιο πρόσφατα, είναι το γεγονός ότι οι αναγωγικές σχέσεις που δίνονται για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας των k-r-n συστημάτων, γραμμικών και κυκλικών, είναι αρκετά πολύπλοκες και βέβαια χρειάζεται υπολογιστής ώστε να μπορέσει κάποιος να υπολογίσει τις διάφορες τιμές της αξιοπιστίας των συστημάτων αυτών για τις διάφορες τιμές των k, r, n. Έτσι εναλλακτική και ίσως ευκολότερη λύση αποτελεί η χρήση των φραγμάτων αξιοπιστίας για τις διάφορες τιμές των k, r, n. Με άλλα λόγια, υπολογίζοντας είτε τα φράγματα αξιοπιστίας ενός k-r-n συστήματος, είτε την τιμή της αξιοπιστίας αυτού, καταλήγουμε σχεδόν στο ίδιο αποτέλεσμα. Βέβαια, είναι γεγονός ότι πολλές φορές, εξαιτίας της πολυπλοκότητας των συστημάτων αυτών, είναι πολύ ευκολότερη η εύρεση των φραγμάτων αξιοπιστίας, παρά ο υπολογισμός της ακριβής τιμής της αξιοπιστίας κάποιου συγκεκριμένου k-r-n συστήματος.

Ακόμα το θέμα της αξιοπιστίας των k-r-n συστημάτων, τόσο στην περίπτωση όπου r=k (k συνεχόμενα-από-n σύστημα), όσο και στην περίπτωση όπου r=n (k-από-n σύστημα), έχει μελετηθεί πάρα πολύ από τους επιστήμονες του χώρου της αξιοπιστίας τα τελευταία χρόνια. Βέβαια, για τα k συνεχόμενα-από-n συστήματα, οι περισσότερες εργασίες επικεντρώθηκαν στην περίπτωση των στατιστικά ανεξάρτητων εξαρτημάτων, αλλά και στη γενική περίπτωση, δηλαδή κάτω από οποιοδήποτε είδος εξάρτησης μεταξύ των εξαρτημάτων.

Όσον αφορά τη βέλτιστη τοποθέτηση των εξαρτημάτων στα k-r-n συστήματα με σκοπό τη μεγιστοποίηση της αξιοπιστίας τους, είναι ένα πολύ σημαντικό πρόβλημα και μάλιστα αρκετά δύσκολο εξαιτίας του γεγονότος ότι τα εξαρτήματα στα k-r-n συστήματα δεν έχουν την ίδια αξιοπιστία. Βέβαια, σε αντίθεση με παλιότερα, παρατηρήθηκε ότι πολλά πρόσφατα δημοσιευμένα άρθρα έχουν ασχοληθεί με το πρόβλημα της βελτιστοποίησης των k-r-n συστημάτων, καθώς και για την περίπτωση των συστημάτων όπου r=k. Μάλιστα, τα αποτελέσματα των ερευνών αυτών οδηγούν σε σχετικά απλές λύσεις του προβλήματος της βέλτιστης τοποθέτησης των εξαρτημάτων.

Τέλος, το αντικείμενο της σπουδαιότητας των εξαρτημάτων στα k-r-n συστήματα, παρατηρούμε ότι έχει ερευνηθεί σε μεγάλο βαθμό και έχει εξελιχθεί κατά πολύ τα τελευταία χρόνια. Όπως και στις παλαιότερες μελέτες, έτσι και στις πρόσφατες, γίνεται ευρεία χρήση ενός πολύ σημαντικού δείκτη σπουδαιότητας, του δείκτη σπουδαιότητας κατά Birnbaum. Βέβαια, οι υπόλοιποι δείκτες σπουδαιότητας που παρουσιάζονται από τις σύγχρονες μελέτες, είναι και αυτοί πολύ χρήσιμοι, αλλά εξαιτίας του γεγονότος ότι αρκετοί από αυτούς προκύπτουν από τον δείκτη σπουδαιότητας κατά Birnbaum, είναι καλύτερο να χρησιμοποιείται ο συγκεκριμένος τρόπος εύρεσης της σπουδαιότητας των εξαρτημάτων.

5.2 Περιοχές προς περαιτέρω έρευνα

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται ορισμένες σκέψεις για συγκεκριμένες περιοχές που θα μπορούσε κάποιος ενδιαφερόμενος να ερευνήσει περαιτέρω το ευρύτερο θέμα της αξιοπιστίας των k-r-n συστημάτων.

Έπειτα από αρκετή έρευνα για δημοσιεύσεις εργασιών πάνω στο συγκεκριμένο αντικείμενο, διαπιστώθηκε ότι τα τελευταία χρόνια έχουν ασχοληθεί λίγοι επιστήμονες με το θέμα της βέλτιστης τοποθέτησης στα k-r-n συστήματα ή στα k-από-n συστήματα. Οι περισσότερες πρόσφατες δημοσιευμένες εργασίες έχουν να κάνουν με το πρόβλημα της βέλτιστης τοποθέτησης σε σειριακά και παράλληλα συστήματα ή ακόμη και στο συνδυασμό των δύο (παράλληλα-σειριακά συστήματα). Έτσι, η συγκεκριμένη ερευνητική περιοχή έχει ακόμα αρκετό χώρο τόσο για έρευνα όσο και για δημοσιεύσεις.

Επίσης, το θέμα της σπουδαιότητας των εξαρτημάτων προσεγγίζεται ουσιαστικά μόνο με το δείκτη σπουδαιότητας κατά Birnbaum και μάλιστα ο δείκτης αυτός χρησιμοποιείται κατά τα τελευταία είκοσι χρόνια (κάποιες φορές με ορισμένες παραλλαγές). Οπότε, θα ήταν αρκετά ενδιαφέρον να μελετηθεί περαιτέρω το ζήτημα αυτό και ίσως να βρεθεί κάποιος πιο εύχρηστος και αρκετά πιο αντιπροσωπευτικός δείκτης σπουδαιότητας για τα εξαρτήματα οποιουδήποτε συστήματος υπό οποιεσδήποτε προϋποθέσεις.

Ακόμα, μπορεί ο υπολογισμός της αξιοπιστίας για τα k-από-n συστήματα να έχει μελετηθεί από πάρα πολλούς επιστήμονες του χώρου της αξιοπιστίας των συστημάτων, όμως η αξιοπιστία των k-από-r συνεχόμενα-από-n συστημάτων έχει εξεταστεί από πολύ λίγους (M. Σφακιανάκης, G. Levitin) και μάλιστα πριν από αρκετό καιρό. Έτσι, το συγκεκριμένο θέμα υπολογισμού της αξιοπιστίας των k-από-r συνεχόμενα-από-n συστημάτων καθώς και των φραγμάτων αξιοπιστίας αυτών, χρειάζεται επιπλέον έρευνα για να βρεθούν νέες προσεγγίσεις του.

Επιπλέον, οι υπάρχοντες τρόποι υπολογισμού τόσο των φραγμάτων της αξιοπιστίας των k-r-n συστημάτων, όσο και της τιμής της αξιοπιστίας των συστημάτων αυτών για τις διάφορες τιμές των k, r, n, είναι αρκετά έως πάρα πολύ πολύπλοκοι. Έτσι, θα ήταν πολύ χρήσιμη η ανάπτυξη ενός εύχρηστου προγράμματος υπολογισμού της αξιοπιστίας των συστημάτων αυτών, το οποίο θα είναι ‘φιλικό’ προς το χρήστη και θα μπορεί να προσαρμοστεί στις εξειδικευμένες απαιτήσεις του εκάστοτε συστήματος.

Τέλος, η ανάλυση και η μελέτη του θέματος της αξιοπιστίας των k-r-n συστημάτων που έγινε στην παρούσα διπλωματική εργασία, μπορεί να αποτελέσει αφορμή για την μελέτη της αξιοπιστίας άλλων συστημάτων, όπως είναι τα σειριακά, τα παράλληλα ή ακόμα και διάφοροι συνδυασμοί των συστημάτων αυτών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ
(με αλφαβητική σειρά)

[1] **S. Amari, H. Pham, G. Dill**, "*Optimal Design of k-out-of-n:G Subsystems Subjected to Imperfect Fault-Coverage*", **IEEE Transactions on Reliability**, vol. 53, No. 4, December 2004, pp. 567 - 575

[2] **S. Amari, K. Misra, H. Pham**, "*Reliability Analysis of Tampered Failure Rate Load-Sharing k-out-of-n: G Systems*", 2006

[3] **M. Armstrong**, "*Joint Reliability – Importance of Components*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 44, No. 3, September 1995, pp. 408 – 412

[4] **Li Bai**, "*Circular Sequential k-Out-of-n Congestion System*", **IEEE Transactions on Reliability**, vol. 54, No. 3, September 2005, pp. 412 - 420

[5] **Li Bai, F. Zheng**, "*Ternary State Circular Sequential k-out-of-n Congestion System*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 56, No. 3, September 2007, pp. 495 - 505

[6] **L. Belfore**, "*An $O(n(\log_2(n))^2)$ Algorithm for Computing the Reliability of k-out-of-n: G & k-to-l-out-of-n: G Systems*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 44, No. 1, March 1995, pp. 132 - 136

[7] **T. Boehme, A. Kossow, Wolfgang Preuss**, "*A Generalization of Consecutive-k-out-of-n: F Systems*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 41, No. 3, September 1992, pp. 451 – 457

[8] **P. Boland and F. Samaniego**, "*Stochastic Ordering Results for Consecutive k-out-of-n: F Systems*", **IEEE Transactions on Reliability**, vol. 53, No. 1, March 2004, pp. 7 - 10

[9] **Jun Cai**, "*Reliability of a large consecutive-k-out-of-r-from-n:F system with unequal component-reliability*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 43, No. 1, March 1994, pp. 107 – 111

[10] **J. Cha, H. Yamamoto**, "*Optimal Workload for a Multi-Tasking k-out-of-n: G Load Sharing System*", **IEICE TRANS. FUNDAMENTALS**, vol. E89–A, No. 1, January 2006, pp. 288 – 296

[11] **J. Chang, R. Chen, F. Hwang,** "*A Fast Reliability-Algorithm for the Circular Consecutive-Weighted-k-out-of-n: F System*", **IEEE Transactions on Reliability**, vol. 47, No. 4, December 1998, pp. 472 - 474

[12] **G. Chang, L. Cui, F. Hwang**, "*New comparisons in Birnbaum importance for the consecutive-k-out-of-n system*", **Probability in the Engineering and Informational Sciences**, Vol. 13, 1999, pp. 187 – 192

[13] **H. Chang, F. Hwang**, "*Rare-Event Component Importance for the Consecutive-k System*", **Naval Research Logistics**, Vol. 49, 2002, pp. 159 - 166

[14] **M. Chao, J. Fu, M. Koutras,** "*Survey of reliability studies of consecutive-k-out-of-n:F and related systems*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 44, No. 1, March 1995, pp. 120 – 127

[15] **R. Chen, F. Hawng, W. Li**, "*Consecutive-2-out-of-n: F Systems with Node & Link Failures*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 42, No. 3, September 1993, pp. 497 – 502

[16] **Y. Chen and Q. Yang**, "*Reliability of Two-Stage Weighted-k-out-of-n Systems With Components in Common*", **IEEE Transactions on Reliability**, vol. 54, No. 3, September 2005, pp. 431 - 440

[17] **L. Cui**, "*The IFR property for consecutive-k-out-of-n:F systems*", **Statistics & Probability Letters**, Vol. 59, 2002, pp. 405 – 414

[18] **L. Cui, A. Hawkes**, "*A note on the proof for the optimal consecutive-k-out-of-n:G line for n≤2k*", **Journal of Statistical Planning and Inference**, 2007, pp.1-5

[19] **L. Cui, M. Xie**, "*On a generalized k-out-of-n system and its reliability*", **International Journal of Systems Science**, Vol. 36, No. 5, 15 April 2005, pp. 267 – 274

[20] **J. Deshpande, U. Naik-Nimbalkar**, "*Comparing relative importance of the same component in a series system in two environments*", **Journal of Statistical Planning and Inference**, Vol. 137, 2007, pp. 3410 – 3415

[21] **C. Elegbede, C. Chu**, "*Reliability Allocation Through Cost Minimization*", **IEEE Transactions on Reliability**, vol. 52, No. 1, March 2003, pp. 106 - 111

[22] **O. Feyzioglu, I. Altinel, S. Ozekici**, "*The design of optimum component test plans for system reliability*", **Computational Statistics & Data Analysis**, Vol. 50, 2006, pp. 3099 – 3112

[23] **J. Flynn, C. Chung**, "*A Branch and Bound Algorithm for Computing Optimal Replacement Policies in Consecutive k-out-of-n-Systems*", **Naval Research Logistics**, Vol. 49, 2002, pp. 288 – 302

[24] **X. Gao, L. Cui and J. Li**, "*Analysis for joint importance of components in a coherent system*", **European Journal of Operational Research**, Volume 182, Issue 1, 1 October 2007, Pages 282-299

[25] **A. Gera**, "*A consecutive k-out-of-n:G system with dependent elements—a matrix formulation and solution*", **Reliability Engineering & System Safety**, Volume 68, Issue 1, April 2000, Pages 61-67

[26] **A. Godbole, L. Potter, J. Sklar**, "*Improved Upper Bounds for the Reliability of d-Dimensional Consecutive-k-out-of-n : F Systems*", **Naval Research Logistics**, Vol. 45, 1998, pp. 219 – 230

[27] **J. Guan, Y. Wu**, "*Repairable consecutive-k-out-of-n:F system with fuzzy states*", **Fuzzy Sets and Systems**, Vol. 157, 2006, pp. 121 – 142

[28] **A. Habib, R. Al-Seedy, T. Radwan**, "*Reliability evaluation of multi-state consecutive k-out-of-r-from-n: G system*", **Applied Mathematical Modelling**, Vol. 31, 2007, pp. 2412 – 2423

[29] **A. Habib, T. Szantai**, "*New bounds on the reliability of the consecutive k-out-of-r-from-n: F system*", **Reliability Engineering and System Safety**, Vol. 68, 2000, pp. 97–104

[30] **Y. Hsieh, P. You**, "*An Immune Algorithm for the Optimal Maintenance of New Consecutive-Component Systems*", **Q. Yang and G. Webb (Eds.): PRICAI**, 2006, pp. 929 – 933

[31] **J. Huang, M. Zuo**, "*Generalized Multi-State k-out-of-n: G Systems*", **IEEE Transactions on Reliability**, vol. 49, No. 1, March 2000, pp. 105 - 111

[32] **J. Huang, M. Zuo, Z. Fang**, "*Multi-state consecutive-k-out-of-n systems*", **IIE Transactions**, vol. 35, 2003, pp. 527 – 534

[33] **F. Hwang, P. Wright**, "*An $O(k^3 log(n/k))$ Algorithm for the Consecutive-k-out-of-n: F System*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 44, No. 1, March 1995, pp. 128 - 131

[34] **S. Iyer**, "*Distribution of the Lifetime of Consecutive k-within-m-out-of-n: F Systems*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 41, No. 3, September 1992, pp. 448 – 450

[35] **M. Jain, R. Ghimire**, "*Reliability of k-r-out-of-n: G system subject to random and common cause failure*", **Performance Evaluation**, Vol. 29, 1997, pp. 213 – 218

[36] **M. Koutras**, "*Consecutive-k, r-out-of-n: DFM systems*", **Microelectronics Reliability**, Vol. 37, No. 4, 1996, pp. 597 - 603

[37] **A. Kossow, Wolfgang Preuss,** "*Mean Time-to-Failure for a Linear-Consecutive-k-out-of-n: F System*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 40, No. 3, August 1991, pp. 271 – 272

[38] **Y. Lam, Y. Zhang**, "*Repairable Consecutive-k-out-of-n: F System with Markov Dependence*", **Naval Research Logistics**, Vol. 47, 2000, pp. 18 – 39

[39] **G. Levitin**, "*Consecutive k-Out-of-r-From-n System With Multiple Failure Criteria*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 53, No. 3, September 2004, pp. 394 – 400

[40] **G. Levitin**, "*Linear Multi-State Sliding-Window Systems*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 52, No. 2, June 2003, pp. 263 – 269

[41] **G. Levitin**, "*Optimal allocation of elements in a linear multi-state sliding window system*", **Reliability Engineering and System Safety**, Vol. 76, 2002, pp. 245 – 254

[42] **G. Levitin**, "*Reliability of Linear Multistate Multiple Sliding Window Systems*", **Naval Research Logistics**, Vol. 52, 2005, pp. 212 - 223

[43] **G. Levitin**, "*Uneven allocation of elements in linear multi-state sliding window system*", **European Journal of Operational Research**, Vol. 163, 2005, pp. 418 – 433

[44] **E. Lewis**, "A *Load-Capacity Interference Model for Common-Mode Failures in 1-out-of-2: G Systems*", **IEEE Transactions on Reliability**, vol. 50, No. 1, March 2001, pp. 47 - 51

[45] **X. Li, J. Chen**, "*Aging properties of the residual life length of k-out-of-n systems with independent but non-identical components*", **Applied Stochastic Models in Business and Industry**, Vol. 20, 2004, pp. 143 – 153

[46] **M. Lin**, "*An O(k2 log(n)) Algorithm for Computing the Reliability of Consecutive-k-out-of-n: F Systems*", **IEEE Transactions on Reliability**, vol. 53, No. 1, March 2004, pp. 3 - 6

[47] **H. Liu,** "*Reliability of a Load-Sharing k-out-of-n:G System: Non-iid Components with Arbitrary Distributions*", **IEEE Transactions on Reliability**, vol. 47, No. 3, September 1998, pp. 279 - 284

[48] **F. Makri, Z. Psillakis**, "*Bounds for reliability of k-within two-dimensional consecutive-r-out-of-n failure systems*", **Microelectronics Reliability,** Vol. 36, No. 3, 1996, pp. 341-345

[49] **F. Makri, Z. Psillakis**, "*Bounds for reliability of k-within connected-(r, s)-out-of-(m, n) failure systems*", **Microelectronics Reliability,** Vol. 37, No. 8, 1997, pp. 1217-1224

[50] **J. Malinowski, Wolfgang Preuss**, "*Reliability increase of consecutive k-out-of-n:f and related systems through components' rearrangement*", **Microelectronics and Reliability**, Volume 36, Issue 10, October 1996, Pages 1417-1423

[51] **J. Malinowski, Wolfgang Preuss**, "*A recursive algorithm evaluating the exact reliability of a consecutive κ-within-m-out-of-n:F system*", **Microelectronics and Reliability**, Volume 35, Issue 12, December 1995, Pages 1461-1465

[52] **A. Mohamed, L. Leemis, A. Ravindran**, "*Optimization techniques for system reliability: a review*", **Reliability Engineering and System Safety**, Vol. 35, 1992, pp. 137 – 146

[53] **M. Muselli**, "*New Improved Bounds for Reliability of Consecutive-k-out-of-n: F Systems*", **Journal of Applied Probability**, Vol. 37, No. 4, December 2000, pp. 1164 - 1170

[54] **J. Newton**, "*Comment on: Reliability of k-out-of-n: G Systems With Imperfect Fault-Coverage*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 44, No. 1, March 1995, pp. 137 – 138

[55] **S. Papastavridis, M. Koutras**, "*Bounds for reliability of consecutive k-within-m-out-of-n:F systems*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 42, No. 1, March 1993, pp. 156 – 160

[56] **S. Papastavridis and M. Sfakianakis**, "*Optimal-arrangement and importance of the components in a consecutive-k-out-of-r-from-n: F system,*" **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 40, No. 3, August 1991, pp. 277 – 279

[57] **Z. Psillakis**, "*A simulation algorithm for computing failure probability of a consecutive-k-out-of-r-from-n: F system*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 44, No. 3, September 1995, pp. 523 – 531

[58] **K. Ramamurthy**, "*Reliability Function of Consecutive-k-out-of-n Systems for the General Case*", **The Indian Journal of Statistics**, vol. 59, No. 3, 1997, pp. 396 – 420

[59] **J. Ramirez-Marquez, D. Coit**, "*Multi-state component criticality analysis for reliability improvement in multi-state systems*", **Reliability Engineering and System Safety**, Vol. 92, 2007, pp. 1608 – 1619

[60] **A. Rushdi, A. Alsulami**, "*Cost Elasticities of Reliability and MTTF for k-out-of-n Systems*", **Journal of Mathematics and Statistics**, Vol. 3, 2007, pp. 122-128

[61] **M. Sfakianakis**, "*Optimal arrangement of components in a consecutive k-out-of-r-from n:F system*", **Microelectronics and Reliability**, Volume 33, Issue 10, August 1993, Pages 1573 - 1578

[62] **M. Sfakianakis, S. Kounias, and A. Hillaris**, "*Reliability of consecutive k-out-of-r-from-n: F system,*" **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 41, No. 3, September 1992, pp. 442 – 447

[63] **M. Sfakianakis and S. Papastavridis**, "*Reliability of a general consecutive-k-out-of-n: F system*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 42, No. 3, September 1993, pp. 491 – 496

[64] **H. Singh, G. Vijayasree,** "*Preservation of Partial Orderings Under the Formation of k-out-of-n: G Systems of i.i.d. Components*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 40, No. 3, August 1991, pp. 273 - 276

[65] **V. Srivastava, A. Fahim,** "*An Enhanced Integer Simplical Optimization Method for Minimum Cost Spares for k-out-of-n Systems*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 40, No. 3, August 1991, pp. 265 – 270

[66] **R. Suich, R. Patterson,** "*k-out-of-n: G Systems: Some Cost Considerations*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 40, No. 3, August 1991, pp. 259 – 264

[67] **Wolfgang Preuss**, "*On the reliability of generalized consecutive systems*", **Nonlinear Analysis**, Volume 30, Issue 8, December 1997, Pages 5425-5429

[68] **Y. Wu and J. Guan**, "*Repairable Consecutive-k-Out-of-n: G Systems With r Repairmen*", **IEEE Transactions on Reliability**, vol. 54, No. 2, June 2005, pp. 328 - 337

[69] **G. Xiao, Z. Li, T. Li**, "*Dependability estimation for non-Markov consecutive-k-out-of-n: F repairable systems by fast simulation*", **Reliability Engineering and System Safety**, Vol. 92, 2007, pp. 293 – 299

[70] **A. Yalaoui, C. Chu, E. Chatelet**, "*Reliability allocation problem in a series–parallel system*", **Reliability Engineering and System Safety**, Vol. 90, 2005, pp. 55 – 61

[71] **A. Yalaoui, E. Châtelet, C. Chu**, "*A New Dynamic Programming Method for Reliability & Redundancy Allocation in a Parallel-Series System*", **IEEE Transactions on Reliability**, vol. 54, No. 2, June 2005, pp. 254 – 261

[72] **R. Yam, M. Zuo, Y. Zhang**, "*A method for evaluation of reliability indices for repairable circular consecutive-k-out-of-n:F systems*", **Reliability Engineering & System Safety**, Volume 79, Issue 1, 1 January 2003, Pages 1-9

[73] **H. Yamamoto, M. Zuo**, "*Recursive Formulas for the Reliability of Multi-State Consecutive-k-out-of-n:G Systems*", **IEEE Transactions on Reliability**, vol. 55, No. 1, March 2006, pp. 98 - 104

[74] **W. Yun, G. Kim, H. Yamamoto**, "*Economic design of a circular consecutive-k-out-of-n: F system with (k - 1)-step Markov dependence*", **Reliability Engineering and System Safety**, Vol. 92, 2007, pp. 464 – 478

[75] **M. Zuo**, "*Reliability and Design of 2-Dimensional Consecutive-k-out-of-n Systems*", **IEEE Transactions on Reliability**, vol. 42, No. 3, September 1993, pp. 488 – 490

[76] **M. Zuo, D. Lin, Y. Wu**, "*Reliability Evaluation of Combined k-out-of-n: F, Consecutive-k-out-of-n:F, and Linear Connected-(r; s)-out-of-(m; n):F System Structures*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 49, No. 1, March 2000, pp. 99 - 104

[77] **M. Zuo, Z. Tian**, "*Performance Evaluation of Generalized Multi-State k-Out-of-n Systems*", **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 55, No. 2, June 2006, pp. 319 - 327

[78] www.weibull.com

[79] www.reliasoft.com

[80] www.ieee.org

[81] www.sciencedirect.com

[82] www.heal-link.gr