ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΑΞΙΑΣ ΕΞΩΤΙΚΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ ΜΕΣΩ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Βασίλειος Α. Τζιμπλάκης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Ιούνιος 2008

Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

Τ Μ Η Μ Α Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ
Κ Α Ι Α Σ Φ Α Λ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Η Σ

Μ Ε Τ Α Π Τ Υ Χ Ι Α Κ Ο Π Ρ Ο Γ Ρ Α Μ Μ Α Σ Π Ο Υ Δ Ω Ν
Σ Τ Η Ν Ε Φ Α Ρ Μ Ο Σ Μ Ε Ν Η Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η

ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΑΞΙΑΣ ΕΞΩΤΙΚΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ ΜΕΣΩ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Βασίλειος Α. Τζιμπλάκης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Ιούνιος 2008

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:
- Επίκουρος Καθηγητής Μπούτσικας Μιχαήλ (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος
- Επίκουρος Καθηγητής Γεώργιος Ηλιόπουλος

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS

PRICING OF EXOTIC OPTIONS VIA SIMULATION

By

Vasileios A. Tzimplakis

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece
June 2008

Στην οικογένειά μου…

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Μιχάλη Μπούτσικα, επιβλέποντα καθηγητή μου σε αυτή τη διπλωματική εργασία, για την σημαντική καθοδήγηση, τις εύστοχες παρατηρήσεις και την υπομονή του στη διάρκεια υλοποίησης της παρούσας εργασίας.

Περίληψη

Τα εξωτικά δικαιώματα προαίρεσης αποτελούν χρήσιμα χρηματοοικονομικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται όλο και περισσότερο τόσο για την αντιστάθμιση κινδύνου από επιχειρήσεις όσο και για την αύξηση της χρηματοοικονομικής μόχλευσης (leverage) από επενδυτές. Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία αρχικά θα γίνει μια σύντομη παρουσίαση των κυριότερων εξωτικών δικαιωμάτων προαίρεσης και στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε στην αποτίμησή τους μέσω Monte Carlo προσομοίωσης. Σκοπός της συγκεκριμένης εργασίας είναι να παρουσιαστεί η διαδικασία της προσομοίωσης καθώς και κάποιες τεχνικές βελτίωσης της ακριβείας των εκτιμήσεων (variance reduction methods). Επίσης γίνονται και αναφορές στην κατανάλωση του υπολογιστικού χρόνου από τους εκάστοτε αλγορίθμους. Μεθοδολογίες προσομοίωσης θα παρουσιαστούν και για κάποια δικαιώματα για τα οποία υπάρχει αναλυτικός τύπος για την τιμή τους. Αυτό γίνεται διότι μια μικρή παραλλαγή τους, αν και σχεδόν πάντοτε αντιμετωπίζεται σχετικά εύκολα μέσω Monte Carlo προσομοίωσης, μπορεί να καθιστά σχεδόν αδύνατη την εξαγωγή αντίστοιχων αναλυτικών τύπων

Πιο συγκεκριμένα, στο 1^{o} Κεφάλαιο θα περιγράψουμε τα Barrier, τα Ασιατικά και τα Lookback δικαιώματα προαίρεσης, και θα αναφερθούμε στις παραμέτρους που επηρεάζουν την τιμή τους. Κατόπιν, στο 2^{o} Κεφάλαιο, θα κάνουμε μια εισαγωγή σε βασικές μαθηματικές έννοιες και μοντέλα που είναι απαραίτητα για τη μελέτη των δικαιωμάτων προαίρεσης. Θα αναφερθούμε στην έννοια του "*χωρίς ρίσκο μέτρου πιθανότητας*" και θα δικαιολογήσουμε γιατί η αναμενομένη τιμή (ως προς το συγκεκριμένο μέτρο πιθανότητας) της αποπληθωρισμένης τελικής αξίας του δικαιώματος ορίζει μια δίκαιη τιμή. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε την διαδρομή της τιμής μιας μετοχής (ή ενός οποιουδήποτε χρηματοοικονομικού τίτλου) ως μια στοχαστική διαδικασία. Συγκεκριμένα δείχνουμε ότι η γεωμετρική κίνηση Brown μπορεί να περιγράψει ικανοποιητικά τη στοχαστική διαδικασία εξέλιξης των τιμών ενός χρηματοοικονομικού τίτλου. Ακόμα θα περιγράψουμε το μοντέλο των Black-Scholes-Merton για την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης και θα εξετάσουμε πώς η εφαρμογή του σε κάποιες περιπτώσεις μας δίνει αναλυτικούς τύπους για συγκεκριμένα δικαιώματα προαίρεσης.

Στο 3^{o} Κεφάλαιο περιγράφεται γενικά η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo. Επίσης περιγράφεται η διαδικασία προσομοίωσης της εξέλιξης μιας κίνησης Brown και της διαδρομής της τιμής μιας μετοχής. Κάποιες αριθμητικές μέθοδοι υπολογισμού της συνάρτησης κα-

τανομής της κανονικής κατανομής και της αντιστροφής της, που μας είναι χρήσιμες στη συνεχεία, παρουσιάζονται και υλοποιούνται σε γλώσσα προγραμματισμού Java.

Στο 4° Κεφάλαιο, που είναι και το βασικότερο κεφάλαιο της διπλωματικής εργασίας, παρουσιάζουμε την απλή (raw) Monte Carlo εκτίμηση της τιμής ενός δικαιώματος προαίρεσης και στη συνέχεια παρουσιάζουμε εκτιμήτριες βελτιωμένης ακριβείας. Συγκεκριμένα παρουσιάζονται εκτιμήσεις που προκύπτουν από την τεχνική των *αντιθετικών μεταβλητών*, των *μεταβλητών ελέγχου*, της *στρωματοποιημένης δειγματοληψίας* (όπου επίσης γίνεται περιγραφή των LHS και Postratification), της *ελάττωσης διακύμανσης μέσω δέσμευσης* και της *δειγματοληψίας σπουδαιότητας*. Σε κάθε περίπτωση έχουμε περιγραφή της μεθόδου καθώς και εφαρμογή της σε κάποια εξωτικά δικαιώματα προαίρεσης, όπου δίδεται ο εκάστοτε αλγόριθμος και η υλοποίησή του σε γλώσσα προγραμματισμού Java. Σε ξεχωριστή ενότητα στο τέλος γίνεται εφαρμογή και σύγκριση των μεθόδων προσομοίωσης πάνω σε παραλλαγές Ασιατικών δικαιωμάτων προαίρεσης, που παρουσιάζουν αυξημένο ενδιαφέρον λόγω απουσίας αναλυτικών τύπων για τον υπολογισμό της τιμής τους.

Επίσης στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας έχει γίνει κατασκευή μιας μικροεφαρμογής (applet) σε γλώσσα Java, μέσω της οποίας μπορεί να γίνει αριθμητική και γραφική σύγκριση της εκτίμησης της αξίας Ασιατικών δικαιωμάτων προαίρεσης μέσω διαφόρων μεθόδων προσομοίωσης. Τέλος, στο παράρτημα παρατίθενται όσα προγράμματα χρησιμοποιηθήκαν.

Abstract

In the last years there has been a growing interest in the market for a special kind of financial derivatives, the so called *exotic options*. They are used for hedging (mainly by investment institutions) and from speculators in order to obtain greater profit oportunities. In this Dissertation there will be a quick review of the main exotic options properties and the main focus will be on pricing them via Monte Carlo simulation. The aim is to introduce the reader to the option pricing through Monte Carlo estimation and especially to provide some useful techniques for improving the precision of the estimates (variance reduction techniques). Some comments regarding the complexity of the algorithms are also included. Monte Carlo methods for the pricing of some exotic options with known analytical form are also developed. These methods can be useful in cases where the payoff function slightly varies from the original form rendering the derivation of analytical formulae infeasible.

In Chapter 1, *Barrier*, *Asian* and *Lookback* options are described along with the parameters that affect their prices.

In Chapter 2 there is an introduction in key mathematical concepts for the study of financial derivatives. Risk neutral probability measure is defined and we explain how the expected value (w.r.t. this measure) of the discounted payoff of the option defines a fair (or no-arbirtrage) price for this option. Next, the price of an underlying risky asset (e.g. share) until maturity will be described via a *geometric Brownian motion*. Moreover we will describe the well known Black-Scholes-Merton model for the valuation of options and how we may, in some cases, obtain analytical forms for their prices.

Monte Carlo simulation is described in general in Chapter 3. We also show how we can simulate the path of a Brownian motion and the path of the price of a risky asset. Some arithmetic methods for the computation of the normal cumulative function and its inverse are presented and developed in Java programming language.

In Chapter 4, which can be considered as the main part of this Dissertation, we discuss the estimation of the price of an option via (raw) Monte Carlo simulation and we also develop improved estimators (with smaller variance). In particular, we present estimators derived from the application of the following variance reduction techniques: *antithetic variat*es, *control variates*, *stratified sampling* (including *LHS* and *poststratification*), *conditioning*, and *importance sampling*. In each of these cases there is a description of the method and an application

of it in certain exotic options, introducing the algorithm and developing the corresponding program in Java language. In the last paragraph we apply most of the afore mentioned variance reduction techniques in several variations of Asian options and compare numerically their performance.

Finally, an appropriate Java applet has been developed in order to make a direct numerical and graphical comparison of the Monte Carlo techniques used in this Dissertation. Most of the programs are included in the appendix.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Τα δικαιώματα προαίρεσης

1.1 Εισαγωγή

Ένα *παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν* (*derivative* ή *derivative security*), ή απλά *παράγωγο*, είναι ένα χρηματοοικονομικό εργαλείο (συμβόλαιο μεταξύ δύο συμβαλλομένων) του οποίου η τιμή εξαρτάται από την τιμή κάποιου άλλου χρηματοοικονομικού τίτλου που ονομάζεται υποκείμενος τίτλος (*underlying asset*) του παραγώγου. Τα παράγωγα συνήθως βασίζονται σε τιμές εμπορεύσιμων περιουσιακών στοιχειών όπως χρυσός, συνάλλαγμα, μετοχές ή και σε βασικά είδη διατροφής όπως σιτάρι, φρούτα κτλ. Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε με S_t την τιμή του υποκείμενου τίτλου (π.χ. χρηματιστηριακή τιμή μετοχής) στο χρόνο t. Η οικογένεια $\{S_t, t \geq 0\}$ θα θεωρείται μία στοχαστική διαδικασία.

Υπάρχουν διάφορα είδη παραγώγων, όπως είναι τα μελλοντικά συμβόλαια (*forward contracts*), μελλοντικά συμβόλαια ανταλλαγής (*future contracts*), δικαιώματα (*options*), ανταλλαγές (*swaps*). Οι αγοραπωλησίες των παραγώγων πραγματοποιούνται στο χρηματιστήριο παραγώγων που λειτουργεί παράλληλα με το χρηματιστήριο αξιών, ή στις λεγόμενες OTC αγορές (*over the counter markets*), δηλαδή πραγματοποιούνται απευθείας μεταξύ δυο χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων ή μεταξύ ενός χρηματοπιστωτικού ιδρύματος και κάποιου εταιρικού συνεργάτη. Οι συναλλαγές των παραγώγων συνήθως αποσκοπούν στην αντιστάθμιση πιθανών κινδύνων που ενέχονται σε οικονομικές συναλλαγές, ή στην κερδοσκοπία.

Δικαιώματα προαίρεσης. Το *δικαίωμα προαίρεσης* ή απλά *δικαίωμα* (*option*) είναι ευρέως διαδεδομένο παράγωγο. Υπάρχουν δύο βασικά είδη δικαιωμάτων:

(1) Το *δικαίωμα αγοράς* (*call option*) μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ένα συμβόλαιο μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων, του αγοραστή (*holder*) και του εκδότη (*writer*), που δίνει το δικαίωμα (όχι όμως την υποχρέωση) στον κάτοχό του (*holder*) να αγοράσει ένα συγκεκριμένο περιουσιακό στοιχείο από τον εκδότη σε μια προκαθορισμένη τιμή και σε προκαθορισμένο χρόνο που ορίζει το συμβόλαιο.

(2) Το *δικαίωμα πώλησης* (*put option*) μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ένα συμβόλαιο μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων, του αγοραστή (*holder*) και του εκδότη (*writer*), που δίνει το δικαίωμα (όχι όμως την υποχρέωση) στον κάτοχό του (*holder*) να πουλήσει ένα συγκεκριμένο περιουσιακό στοιχείο στον εκδότη σε μια προκαθορισμένη τιμή και σε προκαθορισμένο χρόνο που ορίζει το συμβόλαιο.

Ενα δικαιωμα θεωρειται *Ευρωπαϊκού τύπου* αν ο κάτοχός του μπορεί να το εξασκήσει μόνο τη χρονική στιγμή της λήξης του συμβολαίου και *Αμερικανικού τύπου* αν μπορεί να το εξασκήσει οποιαδήποτε στιγμή μέχρι τη λήξη του συμβολαίου. Στην παρούσα διπλωματική θα ασχοληθούμε με δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου.

Τα δικαιώματα είναι τα μόνα παράγωγα για τα οποία δεν υπάρχει υποχρέωση για κάποια ενέργεια. Το αν ο κάτοχός του (*holder*) θα το εξασκήσει ή όχι δεν είναι προκαθορισμένο, και εξαρτάται από το αν τον συμφέρει να το εξασκήσει στο χρόνο λήξης του συμβολαίου. Επομένως, το δικαίωμα δίνει ένα πλεονέκτημα στον κάτοχο - holder του έναντι του εκδότη - writer (που πράττει ό,τι αποφασίσει ο holder) και επομένως ο κάτοχος θα πρέπει να καταβάλλει κάποιο ποσό (*option price* ή *premium*) στον εκδότη για να αποκτήσει το δικαίωμα.

Η εύρεση της τιμής (*option price*) ενός δικαιώματος είναι ένα ενδιαφέρον πρόβλημα και συνήθως αντιμετωπίζεται χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία που πρώτοι εισήγαγαν οι Black-Scholes-Merton και την οποια θα αναλύσουμε αργότερα.

Ένα δικαίωμα συνήθως χαρακτηρίζεται από τις εξής παραμέτρους:

• *Υποκείμενος τίτλος* (*underlying asset*). Ένα δικαίωμα μπορεί να βασίζεται σε μετοχές, ξένο συνάλλαγμα, δείκτες μετοχών κτλ. Ένα δικαίωμα με υποκείμενο τίτλο μια μετοχή ονομάζεται δικαίωμα μετοχής (*stock option*).

• *Τιμή εξάσκησης Κ* (*strike price, exercise price*). Τιμή εξάσκησης είναι η τιμή που μπορεί ο κάτοχος του δικαιώματος να αγοράσει ή να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο.

• *Θέση* (*position*). Μπορούν να ληφθούν δύο αντίθετες θέσεις: αγορά ή κατοχή του δικαιώματος (*long position*) ή πώληση του δικαιώματος (*short position*). Όπως έχουμε ήδη αναφέρει ο αγοραστής καλείται και κάτοχος (*holder*) ενώ ο εκδότης καλείται και εκδότης (*writer*).

• *Ασφάλιστρο ή τιμή δικαιώματος* (*option premium*, *option price*). Είναι η τιμή που καταβάλλει ο αγοραστής του δικαιώματος στον εκδότη για να αγοράσει το δικαίωμα.

• *Η ημερομηνία λήξης T* (*exercise date*, *maturity*). Είναι η ημερομηνία μέχρι την οποία ισχύει το συμβόλαιο. Ο μήνας λήξης έχει προσδιοριστικό χαρακτήρα στην ονομασία του δικαιώματος. Συνήθως λέμε ότι έχουμε ένα δικαίωμα αγοράς Μαΐου, όταν το δικαίωμα λήγει σε συγκεκριμένη ημερομηνία του Μαΐου.

• *Το μέγεθος του συμβολαίου*. Είναι ο αριθμός των τεμαχίων του υποκείμενου τίτλου που έχει το δικαίωμα ο κάτοχος (*holder*) να αγοράσει από τον (ή να πωλήσει στον) εκδότη (*writer*) στην τιμή εξάσκησης.

Αν π.χ. το υποκείμενο αγαθό είναι μια μετοχή, τότε όπως θα δούμε η τιμή του εξαρτάται από την *πτητικότητα* (*volatility*) που αντιστοιχεί στην τιμή της μετοχής. Πρόκειται για μία παράμετρο που εκφράζει τη μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής (δηλαδή τη μεταβλητότητα της στοχαστικής διαδικασίας $\{S_t, t \geq 0\}$). Πιο συγκεκριμένα, είναι η τυπική απόκλιση της ετήσιας απόδοσης της μετοχής. Η παράμετρος αυτή είναι πολύ σημαντική για την τιμή του δικαιώματος και για την εκτίμησή της υπάρχουν διάφορες μεθοδολογίες (π.χ. εκτίμηση από ιστορικά δεδομένα ή εκτίμηση από τις τιμές των παραγώγων που διατίθενται ήδη στην αγορά (*implied volatility*))

Το πιο απλό δικαίωμα είναι το σύνηθες δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου (*plain vanilla option* ή *standard option*). Αν S_T η τιμή της μετοχής στο χρόνο T λήξης του δικαιώματος και K η τιμή εξάσκησης, τότε ο κάτοχος (*holder*) του δικαιώματος:

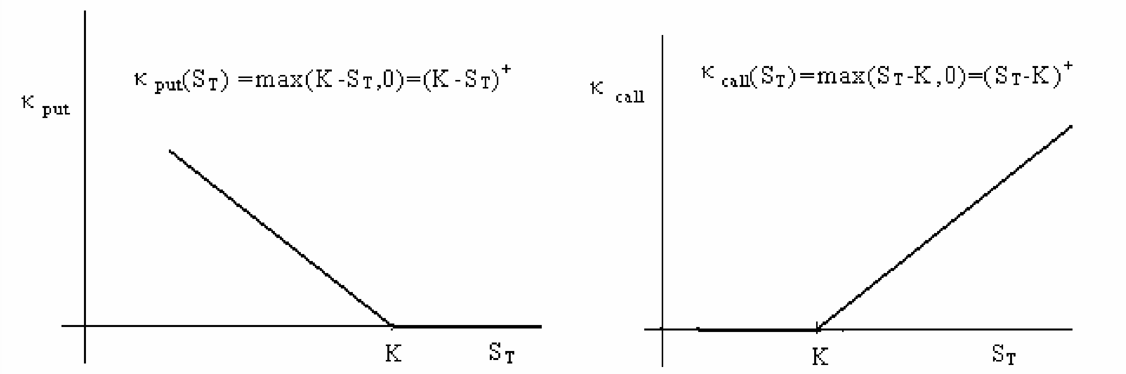
• Στην περίπτωση του *call* δικαιώματος, αν $S_T > K$ θα αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο στην τιμή K και θα έχει κέρδος $\kappa_{call}(S_T) = S_T - K$, ενώ αν $S_T \leq K$ τότε δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα διότι δεν τον συμφέρει ($\kappa_{call}(S_T) = 0$). Γενικά,

$$\kappa_{call}(S_T) = \max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)^+.$$

• Στην περίπτωση του *put* δικαιώματος, αν $S_T \leq K$, θα πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο στην τιμή K και θα έχει κέρδος $\kappa_{put}(S_T) = K - S_T$, ενώ αν $S_T > K$ τότε δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα διότι δεν τον συμφέρει ($\kappa_{put}(S_T) = 0$). Γενικά,

$$K_{putl}(S_T) = \max\{K - S_T, 0\} = (K - S_T)^+.$$

Η συνάρτηση $\kappa(S_T)$ λέγεται συνάρτηση κέρδους του δικαιώματος (*payoff function*) και στο σχημα (1.1) βλέπουμε τη γραφική της παράσταση ως συνάρτηση του υποκείμενου τίτλου για ένα δικαίωμα πώλησης και ένα δικαίωμα αγοράς.



Σχήμα 1.1. *Γραφική παράσταση της συνάρτησης κέρδους για ένα δικαίωμα πώλησης και ένα δικαίωμα αγοράς*

Οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t \leq T$ ένα απλό δικαίωμα αγοράς (πώλησης) λέμε ότι είναι *in-the-money*, αν $S_t > K$ ($S_t < K$), *at-the-money*, αν $S_t = K$ ($S_t = K$), και *out-of-the-money*, αν $S_t < K$ ($S_t > K$).

Εκτός από τη long και short θέση που μπορεί να πάρει ένας επενδυτής υπάρχουν διάφορες στρατηγικές επένδυσης που αφορούν τα δικαιώματα και μπορεί να περιλαμβάνουν και τον υποκείμενο τίτλο. Έτσι για παράδειγμα ο εκδότης ενός δικαιώματος αγοράς μπορεί ταυτόχρονα να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο του δικαιώματος που έχει εκδώσει. Η στρατηγική αυτή λέγεται covered call και έχει σαν στόχο την αντιστάθμιση του κινδύνου από την έκδοση του δικαιώματος. Άλλες στρατηγικές είναι το protective put, το bull spread, bear spread κα.

1.2 Τα εξωτικά (exotic) ή εξωτερικά δικαιώματα προαίρεσης

Τα τυπικά δικαιώματα προαίρεσης (*plain vanilla options*) που μόλις περιγράψαμε είναι δικαιώματα με μεγάλη εμπορευσιμότητα και έχουν μελετηθεί πολύ. Οι ιδιότητές τους είναι γνωστές και μάλιστα υπάρχουν αναλυτικοί τύποι που καθορίζουν την τιμή των ασφαλίστρων τους.

Ένα άλλο είδος δικαιωμάτων είναι τα εξωτικά (*exotic*) ή εξωτερικά δικαιώματα προαίρεσης. Τα δικαιώματα αυτά έχουν δημιουργηθεί για διάφορους λόγους. Σε κάποιες περιπτώσεις αποτελούν εργαλεία αντιστάθμισης του κινδύνου από διάφορες επενδυτικές επιλογές. Αρκετές φορές εξυπηρετούν φορολογικούς, λογιστικούς ή νομικούς σκοπούς και είναι ιδιαιτέρα ελκυστικά επειδή μπορούν να αποφέρουν μεγαλύτερο κέρδος από τα απλά δικαιώματα. Μερικές φορές βέβαια τα δικαιώματα αυτά εκδίδονται από τραπεζικούς οργανισμούς απλά για να φαίνονται ελκυστικά στους υποψηφίους αγοραστές.

Η ποικιλία αυτού του είδους δικαιωμάτων είναι μεγάλη. Το κοινό τους χαρακτηριστικό είναι ότι η τιμή τους την στιγμή της εξάσκησής τους δεν εξαρτάται μόνο από την τιμή του υποκείμενου τίτλου εκείνη τη στιγμή, αλλά και από τη διαδρομή (*path dependent*) της τιμής του τίτλου *μέχρι* εκείνη τη στιγμή. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στα *Ασιατικού τύπου δικαιώματα* (*asian options*), στα *Barrier δικαιώματα* και στα *lookback δικαιώματα προαίρεσης*. Άλλα τέτοιου τύπου δικαιώματα είναι τα *chooser options*, τα *binary options*, τα *shout options*, τα *rainbow options* που μάλιστα έχουν δύο ή περισσοτέρους υποκείμενους τίτλους κα.

Ασιατικού τύπου δικαιώματα (*asian options*). Το τελικό κέρδος από την χρήση των δικαιωμάτων αυτών εξαρτάται από τον μέσο όρο των τιμών του υποκείμενου τίτλου μέχρι την λήξη τους ή σε κάποιο προκαθορισμένο διάστημα. Επειδή ο μέσος όρος των τιμών του υποκείμενου τίτλου πριν τη λήξη του έχει μικρότερη διακύμανση από την τελική τιμή του, τα δικαιώματα αυτά είναι πιο φθηνά από τα κλασικά αντίστοιχα δικαιώματα που εξαρτώνται μόνο από την τελική τιμή του υποκείμενου τίτλου. Τα δικαιώματα αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αντισταθμιστεί ο κίνδυνος στον οποίο μπορεί να εκτεθεί μια εταιρία η οποία αγοράζει ή πουλά ανά τακτά χρονικά διαστήματα οποιοδήποτε είδος εμπορεύσιμου περιουσιακού στοιχείου. Οι συναλλαγές των δικαιωμάτων αυτών συνήθως γίνονται στις OTC αγορές (*over the counter markets*), οι οποίες δεν έχουν μεγάλο βάθος (δεν εμπλέκεται μεγάλος αριθμός επενδυτών). Σε αυτές τις περιπτώσεις ο γρήγορος υπολογισμός της τιμής τους εξυπηρετεί την εξασφάλιση δικαίων διαπραγματεύσεων.

Τα δικαιώματα Ασιατικού τύπου έχουν αρκετές παραλλαγές οι οποίες κυρίως βασίζονται στον τρόπο που υπολογίζεται ο μέσος όρος, S_{ave}, των τιμών του υποκείμενου τίτλου. Έτσι, έχουμε δικαιώματα Ασιατικού τύπου που βασίζονται στον *αριθμητικό* ή στον *γεωμετρικό* μέσο. Επίσης αν το S_{ave} υπολογίζεται για όλη τη χρονική διάρκεια που ισχύει το δικαίωμα τότε λέμε ότι έχουμε ένα plain vanilla Ασιατικό δικαίωμα. Αν ο υπολογισμός του S_{ave} γίνεται από κάποιο χρονικό σημείο και μέχρι τη λήξη του τότε λέμε ότι έχουμε ένα backward-starting δικαίωμα Ασιατικού τύπου. Αν η τιμή εξάσκησης K είναι σταθερή, τότε δικαιώματα αγοράς και πώλησης με συνάρτηση κέρδους

$$\kappa_{call}(S_T) = (S_{ave} - K)^+, \qquad \kappa_{put}(S_T) = (K - S_{ave})^+$$

αντίστοιχα, λέγονται *fixed-strike*, ενώ αν αντίστοιχα είναι

$$\kappa_{call}(S_T) = (S_T - S_{ave})^+, \qquad \kappa_{put}(S_T) = (S_{ave} - S_T)^+$$

λέγονται *floating-strike*. Αν το S_{ave} είναι ένας σταθμισμένος μέσος όρος τότε λέγονται *flexible*, ενώ αν το S_{ave} έχει υπολογιστεί με ίσα βάρη λέγεται *equally-weighted*. Ένα Ασιατικό δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου λέγεται και *Eurasian*.

Barrier options. Τα δικαιώματα αυτά είναι παρόμοια με τα τυπικά δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου με τη μόνη διαφορά ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου πρέπει να υπερβεί ή όχι (ανάλογα με τον τυπο του δικαιώματος) μια συγκεκριμένη τιμή (που ονομάζεται φράγμα - *barrier*) για να θεωρηθούν ενεργά (*alive*). Διαφορετικά θεωρούνται ανενεργά (*dead*). Επειδή το κέρδος που αποδίδουν είναι ίδιο με το κέρδος που αποδίδουν τα τυπικά δικαιώματα, δεδομένης κάποιας συνθήκης, είναι επόμενο ότι το ασφάλιστρό τους θα είναι πιο φθηνό από ένα αντίστοιχο τυπικό δικαίωμα. Υπάρχουν τέσσερις παραλλαγές του συγκεκριμένου τύπου:

(1) Αν η τιμή του φράγματος H_d είναι μικρότερη από την αρχική τιμή του υποκείμενου τίτλου:

(a) ***down-and-in***. Το δικαίωμα θα θεωρείται ενεργό όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου γίνει μικρότερη ή ίση από την τιμή H_d μέχρι το χρόνο λήξης του δικαιώματος.
(b) ***down-and-out***. Το δικαίωμα θα θεωρείται ανενεργό όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου γίνει μικρότερη ή ίση από την τιμή H_d μέχρι το χρόνο λήξης του δικαιώματος.

(2) Αν η τιμή του φράγματος H_u είναι μεγαλύτερη από την αρχική τιμή του υποκείμενου τίτλου:

(a) ***up-and-in***. Το δικαίωμα θα θεωρείται ενεργό όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου γίνει ίση ή υπερβεί την τιμή H_d μέχρι το χρόνο λήξης του δικαιώματος.
(b) ***up-and-out***. Το δικαίωμα θα θεωρείται ανενεργό όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου γίνει ίση ή υπερβεί την τιμή H_d μέχρι το χρόνο λήξης του δικαιώματος.

Υπάρχει παραλλαγή του Barrier δικαιώματος σύμφωνα με την οποία, όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου φτάσει το φράγμα, τα δικαιώματα γίνονται μη ενεργά και επιστρέφονται κάποια χρήματα του ασφαλίστρου στον κάτοχό του. Αυτή η παραλλαγή είναι ακριβότερη.

Τα Barrier δικαιώματα μπορούν να θεωρηθούν είτε Ευρωπαϊκού τύπου (αν μπορούν να εξασκηθούν μόνο κατά την λήξη τους), είτε Αμερικανικού τύπου (αν μπορούν να εξασκηθούν οποιαδήποτε στιγμή μέχρι την λήξη τους). Τα δικαιώματα αυτά λόγω του χαμηλού κόστους χρησιμοποιούνται ευρέως. Ένας επενδυτής εκτός από αντιστάθμιση κινδύνου μπορεί να χρησιμοποιήσει τα δικαιώματα αυτά και για να αυξήσει την χρηματοοικονομική μόχλευση (*leverage*) (μεγαλύτερο περιθώριο κέρδους αναλαμβάνοντας μεγαλύτερο κίνδυνο) .

Lookback options. Το κέρδος από την χρήση δικαιωμάτων τέτοιου τύπου εξαρτάται από τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει ο υποκείμενος τίτλος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος. Συγκεκριμένα το κέρδος ενός lookback Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς ισούται με τη διαφορά μεταξύ της τιμής του υποκείμενου τίτλου στη λήξη του και της μικρότερης τιμής που έχει πάρει μέχρι εκείνη τη στιγμή. Το κέρδος ενός lookback Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης ισούται με τη διαφορά μεταξύ της μεγαλύτερης τιμής που έχει πάρει ο υποκείμενος τίτλος μέχρι τη λήξη του και στην τιμή που έχει τη στιγμή της λήξης του. Έτσι ο κάτοχος ενός lookback δικαιώματος αγοράς στην ουσία αγοράζει τον υποκείμενο τίτλο στην χαμηλότερη τιμή που έχει πάρει από τη στιγμή που άρχισε να ισχύει μέχρι τη λήξη του και ο κάτοχος ενός lookback δικαιώματος πώλησης πουλά τον υποκείμενο τίτλο στην υψηλότερη τιμή που έχει πάρει ο τίτλος μέχρι τη λήξη του.

Τα δικαιώματα που περιγράψαμε έχουν δυο γενικές παραλλαγές που εξαρτώνται από τη συχνότητα που καταγράφεται η τιμή του υποκείμενου τίτλου. Έτσι η πορεία της τιμής μπορεί να καταγράφεται διαρκώς ή μπορεί να καταγράφεται σε χρονικές στιγμές καθορισμένες από πριν. Ο τρόπος καταγραφής επηρεάζει την τιμή του δικαιώματος.

Η εύρεση αναλυτικού τύπου για την τιμή του ασφαλίστρου ή και γενικά για την τιμή των εξωτικών δικαιωμάτων μέχρι τη λήξη τους δεν είναι πάντα εύκολη ή εφικτή. Ένας τρόπος για να αποτιμηθούν είναι μέσω προσομοίωσης που θα περιγράψουμε στη συνέχεια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Εισαγωγικές έννοιες

στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά

2.1 Η αρχή της μη κερδοσκοπίας (no-arbitrage) και το μέτρο πιθανότητας χωρίς ρίσκο

Η αρχή της μη κερδοσκοπίας είναι βασική στην αποτίμηση χρηματοοικονομικών παραγώγων. Ως *εξισορροπητική κερδοσκοπία* ή απλά *κερδοσκοπία* (*arbitrage*) εννοούμε τη δυνατότητα σχηματισμού μιας στρατηγικής αγοραπωλησιών χρηματιστηριακών τίτλων (π.χ. μετοχών, ομολόγων, παραγώγων) με τη μορφή ενός δυναμικού χαρτοφυλακίου, το οποίο να μας εγγυάται σίγουρο κέρδος, υψηλότερο από το κέρδος που θα μας έδινε το χωρίς ρίσκο επιτόκιο τη συγκεκριμένη χρονική περίοδο.

Θα θεωρούμε ότι ένας χρηματοοικονομικός τίτλος έχει δίκαια τιμή (*fair priced*) ή είναι σωστά αποτιμημένος, όταν από την τιμή του δεν συνεπάγονται δυνατότητες κερδοσκοπίας. Στην πράξη δυνατότητες κερδοσκοπίας μπορεί να υπάρξουν, παρ' όλ' αυτά δεν αναιρείται το ενδιαφέρον που έχει ο προσδιορισμός της δίκαιης τιμής ενός χρηματοοικονομικού τίτλου. Μάλιστα ο προσδιορισμός της τιμής αυτής είναι κεντρικής σημασίας στην αποτίμηση χρηματοοικονομικών παραγώγων .

Η τιμή ενός χρηματοοικονομικού τίτλου που προκύπτει από αυτή τη μεθοδολογία μπορεί να συγκριθεί με την τρέχουσα εμπορική του αξία για να εντοπίσουμε δυνατότητες κέρδους. Έτσι αν η τρέχουσα τιμή του είναι χαμηλότερη της δίκαιης τιμής του τότε ο τίτλος θεωρείται φθηνός. Σε αντίθετη περίπτωση ο τίτλος είναι υπερτιμημένος.

Για τη χρήση της αρχής της μη κερδοσκοπίας για την αποτίμηση χρηματοοικονομικών τίτλων είναι απαραίτητο να αναφερθούμε στο θεώρημα της κερδοσκοπίας (*The arbitrage theorem*). Έστω ένα τυχαίο πείραμα με δειγματικό χώρο $\Omega = \{1,2,\ldots,m\}$ και έστω ότι έχουμε τη δυνατότητα να θέσουμε n διαφορετικά στοιχήματα που έχουν σχέση με το αποτέλεσμα του πειράματος. Με $r_i(\omega)$, $\omega = 1, 2, \ldots, m$, παριστάνουμε το κέρδος ανά μονάδα που θα έχουμε από το i στοίχημα αν πραγματοποιηθεί το ω.

Έστω $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ένα διάνυσμα όπου x_i είναι η ποσότητα των μονάδων (όχι το κόστος) που έχουμε ρισκάρει στο i στοίχημα. Τα x_i μπορούν να πάρουν θετικές, αρνητικές τιμές ή μηδέν. Το διάνυσμα **x** καλείται *στοιχηματικό σχήμα* (*betting scheme*). Αν έχουμε πραγματοποίηση του ω τότε το κέρδος κ(**x**) από το στοιχηματικό σχήμα **x** θα είναι

$$\kappa(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i(\omega)$$

Θεώρημα 2.1.1 *Ακριβώς ένα από τα ακόλουθα είναι αληθές:*

(i) *Υπάρχει ένα διάνυσμα πιθανοτήτων* $\boldsymbol{P} = (p_1, \ldots, p_m)$ *για το οποίο ισχύει*

$$\sum_{\omega=1}^{m} p_\omega r_i(\omega) = 0 \quad \text{για κάθε } i = 1,\ldots,n.$$

(ii) *Υπάρχει ένα στοιχηματικό σχήμα* $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2,\ldots, x_n)$ *για το οποίο ισχύει*

$$\kappa(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i(\omega) > 0 \quad \text{για όλα τα } \omega = 1,\ldots,m.$$

Από το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε ότι είτε υπαρχει ένα διάνυσμα πιθανοτήτων $\mathbf{P} = (p_1,\ldots,p_m)$ που αφορά όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος, έτσι ώστε η αναμενόμενη τιμή του κέρδους ανά μονάδα για κάθε στοιχηματισμό να είναι μηδέν,

$$E_{\mathbf{P}}[r_i] = 0 \text{ για όλα τα } i = 1,\ldots,n$$

ή διαφορετικά υπαρχει ένα στοιχηματικό σχήμα που οδηγεί σε σίγουρο κέρδος.

Ας δούμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω για να υπολογίσουμε την τιμή ενός δικαιώματος f τη χρονική στιγμή $t = 0$. Το δικαίωμα λήγει τη χρονική στιγμή $t = T$ και έστω ότι ο υποκείμενος τίτλος από τον οποίο εξαρτάται το δικαίωμα είναι μια μετοχή με τιμή S_0 όταν $t = 0$. Ας θεωρήσουμε ότι η μετοχή στη λήξη του δικαιώματος μπορεί να πάρει δυο τιμές $\{S_0u, S_0d\}$ με $u > 1$ και $d < 1$. Η τιμή του δικαιώματος f_T τη χρονική στιγμή $t =$

T θα μας αποδώσει f_u ή f_d αντίστοιχα ανάλογα με την κίνηση της μετοχής. Όπως ορίσαμε το πρόβλημα παραπάνω, ο δείγματικος χώρος είναι $\Omega = \{S_0u,\ S_0d\}$. Επίσης έχουμε δυο είδη στοιχημάτων: να αγοράσουμε x_s μετοχές (αν $x_s < 0$ πωλούμε) και να αγοράσουμε x_f δικαιώματα (αν $x_f < 0$ πωλούμε), δηλαδή $\mathbf{x} = (x_s, x_f)$. Θεωρούμε ότι ισχύει η αρχή της μη κερδοσκοπίας (*no-arbitrage*). Με την υπόθεση αυτή θα υπαρχει ένα διάνυσμα πιθανότητας $(p,\ 1-p)$ τέτοιο ώστε το αναμενόμενο κέρδος ανά μονάδα και για τα δυο στοιχήματα να είναι μηδέν. Αν r είναι το επιτόκιο χωρίς ρίσκο τότε:

$$E_P[r_s] = E_P[S_T e^{-rT} - S_0] = 0$$

από όπου προκύπτει ότι $(S_0\, u\, e^{-rT} - S_0)\, p + (\, S_0\, d\, e^{-rT} - S_0)(1-p) = 0$ και άρα

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}. \tag{2.1}$$

Επίσης θα ισχύει

$$E_P[r_f] = E_{\mathrm{P}}[\, f_T\, e^{-rT} - f\,] = (\, f_u e^{-rT} - f)\, p + (\, f_d\, e^{-rT} - f)\,(1-p) = 0$$

και επομένως,

$$f = e^{-rT}(pf_u + f_d\,(1-p)). \tag{2.2}$$

Από τις (2.1) και (2.2) προκύπτει μια δίκαιη τιμή για το δικαίωμα (οποιουδήποτε τύπου και αν είναι). Οι πιθανότητες στις (2.1) και (2.2) δεν είναι οι πιθανότητες να ανεβεί ή να κατεβεί η τιμή της μετοχής. Το μέτρο πιθανότητας που ορίζει το διάνυσμα P δεν περιγράφει τη μελλοντική συμπεριφορά της μετοχής. Οι σχέσεις (2.1),(2.2) προέκυψαν από τις σχέσεις

$$E_{\mathrm{P}}[S_T e^{-rT} - S_0] = 0 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \mathrm{E}_{\mathrm{P}}[S_T] = e^{rT} S_0 \tag{2.3.α}$$

$$E_{\mathrm{P}}[f_T e^{-rT} - f] = 0 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad f = e^{-rT}\, \mathrm{E}_{\mathrm{P}}[f_T]. \tag{2.3.β}$$

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν και στην περίπτωση που θεωρήσουμε μεγαλύτερους χώρους καταστάσεων που περιλαμβάνουν και την «διαδρομή» της τιμής της μετοχής, π.χ. $\Omega = \{(S_{t1}, S_{t2}, \ldots, S_{tn} = S_T)\}$ με $S_{ti} = S_0 u^k d^{i-k}$, $k = 1,\ldots,i$. Η σχέση (2.3.β) είναι βασικής σημασίας για την αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης (*risk neutral pricing formula*). Παρατηρούμε επίσης ότι η αναμενομένη τιμή της S_T για το συγκεκριμένο μέτρο πιθανότητας θα είναι η παρούσα τιμή S_0 αναγομένη (με το χωρίς ρίσκο επιτόκιο r) στον χρόνο T. Το μέτρο που ορίζεται από το P ονομάζεται *μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου*. Η σχέση (2.3.α) δεν φαίνεται ρεαλιστική. Δεν αναμένουμε από όλες τις μετοχές το ίδιο κέρδος και μάλιστα όχι το χωρίς ρίσκο κέρδος από μια επένδυση που περιέχει αρκετό ρίσκο. Τότε γιατί να χρησιμοποιήσουμε το μέτρο P για να αποτιμήσουμε έναν οποιονδήποτε χρηματοοικονομικό τίτλο; Όχι επειδή περιγράφει ακριβώς τη μέλλουσα συμπεριφορά του τίτλου, αλλά επειδή αν χρησιμοποιήσουμε οποιανδήποτε άλλη κατανομή θα δημιουργηθεί δυνατότητα κερδοσκοπίας. Έτσι, π.χ. αν η τιμή του δικαιώματος είναι μικρότερη από την τιμή της (2.2), θα μπορούσε κάποιος αγοράζοντας το δικαίωμα αυτό να δημιουργήσει ένα χαρτοφυλάκιο που θα απέδιδε κέρδος χωρίς ρίσκο. Η αγορά όμως απαρτίζεται από επενδυτές που σπεύδουν να εκμεταλλευθούν οποιαδήποτε τέτοια ευκαιρία παρουσιάζεται. Έτσι, θα έσπευδαν πολλοί επενδυτές να αγοράσουν το συγκεκριμένο δικαίωμα και πολύ σύντομα, μέσα από τους κανόνες προσφοράς και ζήτησης, η αξία του θα αρχίσει να αυξάνεται. Αν τώρα η τιμή αυξηθεί πάνω από την τιμή της (2.2) τότε πάλι θα υπάρχει ευκαιρία για σίγουρο κέρδος, αυτή τη φορά πωλώντας το παράγωγο. Όμοια, μέσα από την διαδικασία προσφοράς και ζήτησης, η τιμή του παραγώγου σύντομα θα αρχίσει να μειώνεται. Επομένως τελικά η τιμή του δικαιώματος θα πρέπει πολύ γρήγορα να σταθεροποιηθεί "κοντά" στην δίκαιη τιμή.

2.2 Martingales

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t οι διαθέσιμες πληροφορίες που έχουμε περιγράφονται από μια σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_t$. Η πληροφορία που θα έχουμε στο χρόνο t θα είναι ποια από τα ενδεχόμενα της $\mathcal{F}_t$ έχουν πραγματοποιηθεί και ποια όχι. Έστω $t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1}$ οι διαδοχικές στιγμές πού το σύνολο των πληροφοριών εμπλουτίζεται. Τότε θα ισχύει

$$\mathcal{F}_{t_0} \subset \mathcal{F}_{t_1} \subset \ldots \subset \mathcal{F}_{t_k} \subset \mathcal{F}_{t_{k+1}}.$$

Η οικογένεια $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$ ονομάζεται φιλτράρισμα (*filtration*) ή διήθηση. Η δεσμευμένη μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής X δεδομένης της πληροφορίας $\mathcal{F}_s$ ως συνήθως συμβολίζεται με

$$E[X_t \mid \mathcal{F}_s].$$

Έστω επίσης μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t \geq 0\}$. Η στοχαστική διαδικασία αυτή θα καλείται *προσαρμοσμένη* στην διήθηση $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$ αν η X_t είναι $\mathcal{F}_t$ - μετρήσιμη για κάθε $t \geq 0$.

Ορισμός 2.2.1 *Μια στοχαστική διαδικασία* $\{X_t,\ t \geq 0\}$ *λέγεται martingale ως προς το φιλτράρισμα* $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$ *και το μέτρο πιθανότητας* P *αν είναι προσαρμοσμένη στο φιλτράρισμα και*

$$E_P[X_{t+s} \mid \mathcal{F}_t] = X_t \quad , \quad \text{για κάθε } s, t > 0$$

με πιθανότητα 1 (επίσης υποθέτουμε ότι $E(|X_s|) < \infty$).

Η παραπάνω στοχαστική διαδικασία καλείται submartingale (supermartingale) αν η παραπάνω σχέση ισχύει για $\geq$ ($\leq$).

Οι παραπάνω έννοιες είναι βασικές στα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά και ειδικότερα στην τιμολόγηση περιουσιακών στοιχειών. Αποδεικνύεται κάτι ανάλογο με αυτό που είδαμε στην προηγουμένη παράγραφο. Ως προς το μέτρο πιθανότητας P ουδέτερου ρίσκου θα ισχύει ότι

$$E_P[S_{t+s} \mid \mathcal{F}_t] = e^{rs}S_t \ , \quad \text{για κάθε } s > 0.$$

Ορίζοντας την τυχαία μεταβλητή

$$X_{t+s} = e^{-rs}S_{t+s},$$

η $\{X_t,\ t \geq 0\}$ θα είναι martingale. Για την αναμενόμενη τιμή τώρα μιας μετοχής ως προς το πραγματικό μέτρο Q θα ισχύει (σχεδόν πάντα)

$$E_Q[S_{t+s} \mid \mathcal{F}_t] \geq e^{rs}S_t \ , \quad \text{για κάθε } s > 0.$$

Αυτό θα ισχύει γιατί, όπως αναφέραμε στην προηγουμένη παράγραφο, ο επενδυτής αναλαμβάνει κάποιο ρίσκο αγοράζοντας μια μετοχή (αυστηρή απόδειξη βασίζεται στο μοντέλο τιμολόγησης κεφαλαιακών αγαθών CAPM). Ανταμείβεται για αυτό με αύξηση του χωρίς κίνδυνο επιτοκίου κατά r_{rp} που ονομάζεται ασφάλιστρο κινδύνου (*risk premium*). Το r_{rp} για τίτλους θετικά συσχετισμένους με την «αγορά» (που αποτελείται από το σύνολο των τίτλων) είναι θετικό (βλ. Neftci (2000)). Έτσι

$$\mathrm{E}_Q[S_{t+s} \mid \mathcal{F}_t] \geq e^{(r+r_{rp})s}S_t > e^{rs}S_t \ , \quad \text{για κάθε } s > 0$$

Άρα αν ορίσουμε την X_{t+s} όπως πριν, η $\{X_t,\ t \geq 0\}$ θα είναι submartingale ως προς το μέτρο πιθανότητας Q.

2.3 Η παράγωγος Radon-Nikodym

Είδαμε κατά την τιμολόγηση χρηματοοικονομικών τίτλων ότι η αναμενομένη τιμή ως προς το μέτρο πιθανότητας P ουδέτερου ρίσκου μπορεί να διαφέρει από την αναμενομένη τιμή ως προς το πραγματικό μέτρο πιθανότητας Q. Ένα χρήσιμο εργαλείο για την αλλαγή του μέτρου πιθανότητας είναι η παράγωγος Radon-Nikodym.

Ορισμός 2.3.1 *Έστω δυο μέτρα P, Q ενός χώρου $(\Omega, \mathscr{F})$. Αν υπαρχει μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση f τέτοια ώστε για κάθε $A \in \mathscr{F}$*

$$P(A) = \int_A f dQ$$

τότε η f λέγεται Radon-Nikodym παράγωγος του P ως προς το Q και συμβολίζεται με $f = \dfrac{dP}{dQ}$.

Δεδομένου ότι υπαρχει η f για δυο μέτρα πιθανότητας P,Q, θα ισχύει για μια τυχαία μεταβλητή X ότι

$$E_P[X] = E_Q[\frac{dP}{dQ}X].$$

Αν η X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(x)$ ως προς το μέτρο πιθανότητας P και $q(x)$ ως προς το Q τότε από τον Ορισμό 2.3.1 προκύπτει ότι $dP/dQ = p/q$.

2.4 Put-Call Parity

Έστω ένα Ευρωπαϊκό κλασικό δικαίωμα αγοράς και ένα δικαίωμα πώλησης με τιμές c και p αντίστοιχα. Τα δικαιώματα έχουν την ιδία τιμή εξάσκησης K, τον ίδιο υποκείμενο τίτλο με αξία S_t στο χρόνο t, και ίσο χρόνο T μέχρι τη λήξη τους. Τότε έστω τα εξής δυο χαρτοφυλάκια :

- *Χαρτοφυλάκιο* A: αποτελείται από ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς και χρήματα (επενδυμένα σε ομόλογα με επιτόκιο r) ίσα με Ke^{-rT}

- *Χαρτοφυλάκιο* B: αποτελείται από ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης και ένα τεμάχιο από τον υποκείμενο τίτλο του δικαιώματος

Τότε τα δυο χαρτοφυλάκια στη λήξη των δικαιωμάτων είναι εύκολο να δειχθεί ότι θα έχουν την ίδια αξία, $\max(S_T, K)$. Σύμφωνα με την αρχή της μη κερδοσκοπίας τα χαρτοφυλάκια πρέπει να έχουν και την ιδία αρχική αξία:

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0 \tag{2.4}$$

Αυτή η σχέση είναι γνωστή ως put-call parity. Άρα αν μπορέσουμε να υπολογίσουμε την τιμή ενός κλασικού δικαιώματος αγοράς από την σχέση (2.4) μας δίνεται και η τιμή του αντίστοιχου δικαιώματος πώλησης.

2.5 Η στοχαστική διαδικασία εξέλιξης των τιμών

Η μελέτη της εξέλιξης ενός τυχαίου πειράματος στο χρόνο (ή στο χώρο) γίνεται περισσότερο αποτελεσματική με τη χρήση κατάλληλων μαθηματικών εργαλείων όπως είναι οι στοχαστικές διαδικασίες.

Ως γνωστό, στοχαστική διαδικασία (*stochastic process*) καλείται μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X(t), t\in T\}$. Το σύνολο T των τιμών της παραμέτρου είναι το σύνολο δεικτών (*index set*) της στοχαστικής διαδικασίας. Η παράμετρος t συνήθως παριστά χρόνο. Με βάση το σύνολο δεικτών τους οι στοχαστικές διαδικασίες διακρίνονται σε διαδικασίες διακριτού χρόνου (*discrete time*), όταν το σύνολο T είναι αριθμήσιμο και σε διαδικασίες συνεχούς χρόνου (*continuous time*), όταν το σύνολο T είναι διάστημα του R. Το σύνολο των δυνατών τιμών της τυχαίας μεταβλητής $X(t)$ λέγεται χώρος καταστάσεων (*state space*). Με βάση το χώρο καταστάσεων οι στοχαστικές διαδικασίες διακρίνονται σε διαδικασίες με διακριτό χώρο καταστάσεων (όταν ο χώρος καταστάσεων είναι αριθμήσιμος), και σε διαδικασίες με συνεχή χώρο καταστάσεων.

Έστω $\{S(t),\ t \geq 0\}$ μια στοχαστική διαδικασία που εκφράζει την εξέλιξη της τιμής μιας μετοχής ή ενός περιουσιακού στοιχείου. Η $S(t)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή που εκφράζει την τιμή στο χρόνο t και η $S(t,\omega)$ είναι μια απεικόνιση από ένα χώρο πιθανότητας (Ω,A,P) στον R που ορίζεται από τη σχέση:

$$S(t,\omega) = \{\textit{η τιμή μιας μετοχής ή ενός περιουσιακού στοιχείου στο χρόνο } t \\ \textit{όταν πραγματοποιηθεί το στοιχειώδες ενδεχόμενο } \omega\in\Omega\}$$

Σε αυτή την περίπτωση η $\{S(t), t \geq 0\}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία που ονομάζεται στοχαστική διαδικασία τιμών (*price process* ή *securities price process*).

Οι τιμές των μετοχών ή γενικά οποιωνδήποτε περιουσιακών στοιχείων στην πραγματικότητα παίρνουν διακριτές τιμές (π.χ. πολλαπλάσια των 5 λεπτών) και ο χρόνος διαπραγμάτευσης δεν είναι συνεχής αλλά περιορίζεται στη διάρκεια που επιτρέπονται οι συναλλαγές. Παρ' όλ' αυτά, για τη μελέτη εξέλιξης των τιμών τους γίνεται χρήση μοντέλων που, αν και δεν υπακούουν με ακρίβεια στην πραγματικότητα, είναι εύχρηστα και στην πράξη οδηγούν σε χρήσιμα συμπεράσματα. Δυο χαρακτηριστικά τέτοια μοντέλα είναι :

- Το *διωνυμικό μοντέλο* (*The Binomial Model*), όπου υποθέτουμε ότι η στοχαστική διαδικασία είναι διακριτού χρόνου και με διακριτό χώρο καταστάσεων. Το μοντέλο αυτό ανήκει σε ένα σύνολο μοντέλων που λέγονται μοντέλα πλέγματος (*lattice models*). Ένα τέτοιο π.χ. είναι και το τριωνυμικό μοντέλο (*Trinomial Model*).

- Ένα άλλο εύχρηστο μοντέλο είναι το μοντέλο της *γεωμετρικής κίνησης Brown* (*The Geometric Brownian Motion Model*) όπου η στοχαστική διαδικασία θεωρείται συνεχούς χρόνου και με συνεχή χώρο καταστάσεων. Οι Black και Scholes βασίστηκαν σε αυτό το μοντέλο για να υπολογίσουν με κλειστό τύπο την άξια των κλασικών δικαιωμάτων προαίρεσης (*plain vanilla*). Με βάση το μοντέλο της γεωμετρικής κίνησης Brown έχουν αναπτυχθεί και άλλα πιο περίπλοκα μοντέλα π.χ. το CEV μοντέλο (*Constant Elasticity of Variance Model*) ή και μοντέλα διάχυσης με άλματα (*Jump Diffusion Model*).

2.6 Το διωνυμικό μοντέλο (binomial model)

Στο εξής, για λόγους οικονομίας, θα αναφερόμαστε σε στοχαστικές διαδικασίες που περιγράφουν την εξέλιξη των τιμών μετοχών. Βέβαια όλα τα παρακάτω ισχύουν και για τη τιμή οποιουδήποτε περιουσιακού στοιχείου που είναι αντικείμενο χρηματιστηριακής συναλλαγής και που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως υποκείμενος τίτλος για ένα δικαίωμα προαίρεσης.

Το διωνυμικό μοντέλο για την περιγραφή της εξέλιξης της τιμής μιας μετοχής που χρησιμοποιείται ως υποκείμενος τίτλος σε ένα δικαίωμα προαίρεσης n χρονικών περιόδων είναι το ακόλουθο:

Παράμετροι του μοντέλου είναι οι σταθερές p,u,d,r. Στην πράξη οι παράμετροι αυτές επιλέγονται έτσι ώστε η διακριτού χρόνου στοχαστική διαδικασία τιμών που θα περιγράψουμε να προσεγγίζει την στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου που ορίζεται από μια κίνηση Brown. Αρχικά θα περιγράψουμε το μοντέλο πιθανοθεωρητικά θεωρώντας τις παραμέτρους του ήδη γνωστές και κατόπιν θα αναφερθούμε στη σχέση τους με τις παραμέτρους της μετοχής. Στο συγκεκριμένο μοντέλο, n είναι ο αριθμός των χρονικών περιόδων μέχρι τη λήξη του δικαιώματος. Μπορούμε να θέσουμε το χρόνο $t = 0$ ανάλογα με το πρόβλημα κάθε φορά. Για παράδειγμα μπορεί να είναι η χρονική στιγμή κατά την οποία θέλουμε να αποτιμήσουμε κάποιο δικαίωμα πάνω στη μετοχή. Οι χρονικές στιγμές 1, 2, ..., n είναι οι στιγμές διαπραγμάτευσης της τιμής της μετοχής. Η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή k θα είναι $S(k)$. Η αρχική τιμή της μετοχής θα είναι $S(0)$ και θα θεωρείται γνωστή. Σε κάθε βήμα k στο χρόνο υποθέτουμε ότι η τιμή της μετοχής θα ανέβει στην τιμή $u{\cdot}S(k-1)$ με πιθανότητα p ή θα κατέβει στη τιμή $d{\cdot}S(k-1)$ με πιθανότητα $q = 1 - p$. Το p αναφέρεται και ως πιθανότητα ανόδου (*up-tick probability*) και τα u και d ως συντελεστές ανόδου (*up-factor*) και καθόδου (*down-factor*) αντίστοιχα, ενώ r είναι το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο.

Ορίζοντας περισσότερο θεωρητικά το μοντέλο, θεωρούμε n αποτελέσματα $\omega = (\omega_1,\omega_2,\ldots\omega_n)$ όπου $\omega_i \in \{A,K\}$ με το Α να αντιστοιχεί σε «άνοδο» και Κ σε «κάθοδο» της τιμής της μετοχής στο i – βήμα της διαδικασίας. Δειγματικός χώρος Ω είναι το σύνολο όλων των δυνατών ω. Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές $X_1,X_2,\ldots,X_n$ όπου για κάθε $\omega \in \Omega$,

$$X_i(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_i = A \\ 0, & \omega_i = K \end{cases}$$

Ορίζουμε το μέτρο πιθανότητας P στον Ω να είναι το μοναδικό μέτρο για το οποίο οι τυχαίες μεταβλητές X_i , $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι ανεξάρτητες και με την ίδια κατανομή (*i.i.d.*),

$$P(X_i = 1) = p, \;\; P(X_i = 0) = 1 - p = q$$

Για την τιμή της μετοχής $S(k)$, $k \geq 0$ που είναι τυχαία μεταβλητή θα ισχύουν:

$$S(k+1) = u^{X_{k+1}} d^{1-X_{k+1}} S(k)$$

Ακόμη θέτοντας

$$Y_k = \sum_{i=1}^{k} X_i, \; k \geq 1$$

προκύπτει ότι η τυχαία μεταβλητή Y_k ακολουθεί την διωνυμική κατανομή (Bi(n,k)) με παραμέτρους p, k, και

$$S(k) = u^{Y_k} d^{k-Y_k} S(0)$$

Έστω μετοχή της οποίας την εξέλιξη της τιμής θέλουμε να μελετήσουμε με το διωνυμικό μοντέλο n περιόδων. Θεωρούμε τις παραμέτρους μ και σ, η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής ή τάση (*drift*) και το συντελεστή διάχυσης ή πτητικότητα της τιμής της μετοχής (*volatility*) αντίστοιχα. Θα προσαρμόσουμε κατάλληλα τις παραμέτρους του μοντέλου.

Έστω διαμέριση του χρονικού διαστήματος [0, T] η οποία θα έχει σταθερό βήμα $\Delta t = T/n$. Η τιμή της μετοχής θα μεταβάλλεται στις χρονικές στιγμές $t_k = k\Delta t$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Πρέπει να προσδιορίσουμε τις παραμέτρους p, u και d κατά τέτοιον τρόπο ώστε να αποδίδουν τη σωστή τιμή των παραμέτρων της μετοχής μ και σ. Έστω $S(t_{k+1})$ η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή t_{k+1}. Η αναμενόμενη τιμή της μετοχής σε συνάρτηση με την αμέσως προηγούμενη τιμή της είναι :

$$E(S(t_{k+1}) \mid S(t_k)) = pu \cdot S(t_k) + (1-p)d \cdot S(t_k) = S(t_k)e^{\mu\Delta t} \tag{2.5}$$

Επιπλέον, από τον ορισμό της πτητικότητας, η διασπορά της απόδοσης μιας μετοχής, σε ένα χρονικό διάστημα Δt θα είναι :

$$Var(\frac{S(t_{k+1})}{S(t_k)}) = E\left(\left(\frac{S(t_{k+1})}{S(t_k)}\right)^2\right) - E\left(\frac{S(t_{k+1})}{S(t_k)}\right)^2 = (pu^2 + (1-p)d^2) - (pu + (1-p)d)^2$$

$$= u^2(p - p^2) + d^2(1 - p - (1-p)^2) - 2pu(1-p)d = (u-d)^2 p(1-p) = \sigma^2 \Delta t \tag{2.6}$$

Αν ακόμα θεωρήσουμε ότι ισχύει

$$u = \frac{1}{d} \tag{2.7}$$

θα έχουμε μια επιπλέον σχέση και από τις (2.5),(2.6),(2.7) μπορούμε να λύσουμε το σύστημα ως προς p, u και d. Η σχέση (2.7) προτείνεται από τους Cox, Ross και Rubinstein (1979) όπου και γίνεται εκτενής αναφορά στο διωνυμικό μοντέλο.

2.7 Το μοντέλο της γεωμετρικής κίνησης Brown

Το μοντέλο της γεωμετρικής κίνησης Brown είναι το συνεχές ανάλογο του διωνυμικού μοντέλου της προηγούμενης παραγράφου. Προτού καταλήξουμε στο μοντέλο αυτό που μπορεί να περιγράψει την στοχαστική διαδικασία εξέλιξης της τιμής μιας μετοχής θα παρουσιάσουμε κάποιες χρήσιμες συνεχούς χρόνου και συνεχούς χώρου καταστάσεων διαδικασίες.

Ας θεωρήσουμε μια στοχαστική διαδικασία $\{B(t),\ t \geq 0\}$ όπου η τιμή της $B(t)$ τη χρονική στιγμή $t \in [0,T]$ μπορεί να αυξηθεί ή να μειωθεί κατά Δx μετά από χρόνο Δt. Πιο συγκεκριμένα ας ορίσουμε

$$B(t) = \Delta x(X_1 + X_2 + \ldots + X_{[t/\Delta t]}) \tag{2.8}$$

με $B(0) = 0$ και $X_i = 1$ αν στο i-βήμα αυξηθεί η τιμή κατά Δx και $X_i = 1$ αν μειωθεί. Επίσης, $[t/\Delta t]$ είναι το ακέραιο μέρος του $t/\Delta t$ που, ως γνωστό, ικανοποιεί τη σχέση

$$[t/\Delta t] \leq t/\Delta t < [t/\Delta t] + 1$$

και ας υποθέσουμε τις X_i ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = 1/2$

Τότε $E(X_i) = 0$ και $\mathrm{Var}(X_i) = E(X_i^2) = 1$, άρα

$$E(B(t)) = 0 \qquad \text{και} \qquad Var(B(t)) = (\Delta x)^2 \frac{t}{\Delta t}$$

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι $\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}$ για κάποια θετική σταθερά σ και αν $\Delta t \to 0$ τότε

$$E(B(t)) = 0 \qquad \text{και} \qquad Var(B(t)) \to \sigma^2 t$$

Από τον τρόπο ορισμού αυτής της διαδικασίας και θεωρώντας το Δt απειροστό, προκύπτουν:

(i) Από τη σχέση (2.8) όπου η $B(t)$ προκύπτει ως άθροισμα τυχαίων μεταβλητών, και από το Κ.Ο.Θ. επάγουμε ότι $B(t) \sim N(0,\sigma^2 t)$.

(ii) Η συγκεκριμένη διαδικασία $\{B(t),\ t \geq 0\}$ ως τυχαίος περίπατος θα έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις, δηλαδή για όλα τα $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ οι

$$B(t_n) - B(t_{n-1}),\ B(t_{n-1}) - B(t_{n-2}),\ \ldots, B(t_2) - B(t_1),\ B(t_1)$$

θα είναι ανεξάρτητες και η κατανομή της $B(t + s) - B(t)$ δεν θα εξαρτάται από το t.

Τα παραπάνω μας οδηγούν φυσιολογικά στον εξής ορισμό

Ορισμός 2.7.1 *Μια στοχαστική διαδικασία* $\{B(t),\ t \geq 0\}$ *λέγεται κίνηση Brown με συντελεστή διάχυσης* σ^2, *αν:*

(i) $B(0) = 0$

(ii) *έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις*

(iii) *για κάθε* $t \geq 0$, $B(t) \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2 t)$.

Όταν επιπλέον σ = 1 η διαδικασία καλείται *τυπική κίνηση Brown* (*Standard Brownian Motion*) *ή διαδικασία Wiener* (*Wiener process*).

Άμεση απόρροια των παραπάνω είναι ότι οποιαδήποτε κίνηση Brown μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση μιας κίνησης Wiener ως εξής: $B(t) = \sigma W(t)$. Επίσης μετά από χρόνο Δt οι αντίστοιχες προσαυξήσεις ΔB και ΔW θα ικανοποιούν τη σχέση $\Delta B = \sigma \Delta W$ και αν θεωρήσουμε Δt απείρως μικρό, δηλαδή $\Delta t \to 0$ τότε μπορούμε να γράψουμε την διαφορική εξίσωση ως εξής $\mathrm{d}B = \sigma\, \mathrm{d}W$.

Λόγω του ότι οι προσαυξήσεις μιας διαδικασίας Wiener είναι ανεξάρτητες και στάσιμες και ότι *για κάθε* $t \geq 0$, $W(t) \sim \mathrm{N}(0, t)$, προκύπτει ότι για οποιαδήποτε προσαύξησή της μετά από χρόνο Δt θα ισχύει $\Delta W \sim \mathrm{N}(0, \Delta t)$ και άρα μπορούμε να γράψουμε $\Delta W = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$ με $\varepsilon \sim \mathrm{N}(0,1)$.

Είναι γνωστό, ότι η κίνηση Brown έχει το όνομα του Άγγλου βοτανολόγου Robert Brown, ο οποίος πρώτος περιέγραψε (1827) την κίνηση ενός μικρού σώματος μέσα σε ένα υγρό ή αέριο. Ο Γερμανός φυσικός Albert Einstein έδειξε (1905) ότι η κίνηση αυτή μπορεί να ερμηνευθεί θεωρώντας ότι το σωματίδιο «βομβαρδίζεται» από τα μόρια του υγρού ή του αερίου και για αυτό κινείται ακανόνιστα με «τυχαίο» τρόπο στο χώρο. Τέλος, ο Αμερικανός μαθηματικός Robert Wiener όρισε αυστηρά και μελέτησε σε βάθος (1918) την διαδικασία αυτή αποδεικνύοντας πολλές ιδιότητές της (για αυτό και η διαδικασία είναι γνωστή και ως Wiener process). Η κίνηση Brown μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει πολλά φυσικά φαινόμενα. Ως επέκταση της κίνησης Brown ορίζονται και οι παρακάτω διαδικασίες

Ορισμός 2.7.2 *Μια στοχαστική διαδικασία* $\{X(t),\ t \geq 0\}$ *λέγεται κίνηση Brown με τάση* μ (*drift*) *ή γενικευμένη διαδικασία Wiener, αν:*

(i) $X(0) = 0$

(ii) *έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις*

(iii) *για κάθε για κάθε* $t \geq 0$, $X(t) \sim \mathrm{N}(\mu t, \sigma^2 t)$

Αν dW είναι μια απειροστή προσαύξηση μιας κίνησης Wiener και dX μιας κίνησης Brown με τάση μ τότε μπορούμε σχηματικά να γράψουμε dX = μdt + σdW.

Ορισμός 2.7.3 *Έστω* $\{Y(t), t \geq 0\}$ *κίνηση Brown με drift μ, τότε η* $X(t) = e^{Y(t)}$ *λέγεται γεωμετρική κίνηση Brown.*

Τη χρησιμότητα και το εύρος των εφαρμογών της κίνησης Brown αποδίδει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.7.1 *Αν Y είναι μία συνεχής διαδικασία με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις τότε είναι μια κίνηση Brown.*

Το παραπάνω θεώρημα αναφέρεται από τον Harrison (1985) ο οποίος παρατηρεί ότι η κανονικότητα έπεται των στάσιμων ανεξάρτητων προσαυξήσεων και της συνέχειας των διαδρομών της κίνησης Brown γεγονός που δείχνει τη σημασία της στην πιθανοθεωρητική μοντελοποίηση.

Το 1900 ο Γάλλος μαθηματικός Bachelier στη διδακτορική του διατριβή πρώτος χρησιμοποίησε την κίνηση Brown για να περιγράψει τη στοχαστική διαδικασία των τιμών αγαθών ή μετοχών $\{S(t), t \geq 0\}$. Παρ' όλ' αυτά, η συγκεκριμένη διαδικασία δεν είναι κατάλληλη αρχικά επειδή μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές, αλλά και επειδή αδυνατεί να αποδώσει μια βασική αρχή της εξέλιξης των τιμών αγαθών ή μετοχών: η αναμενόμενη ποσοστιαία απόδοση θεωρείται σταθερή και ανεξάρτητη από την τιμή. Δηλαδή αν μ είναι η αναμενόμενη ποσοστιαία απόδοση μιας μετοχής και σ η πτητικότητά της τότε θα πρέπει μετά από χρόνο Δt να ισχύει:

$$\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{S(t)} = \frac{\Delta S}{S} = \mu\,\Delta t\,.$$

Βέβαια, η απόδοση σε μια μετοχή ή σε ένα περιουσιακό στοιχείο δεν είναι ποτέ σταθερή και βέβαιη. Το στοιχείο αυτό της αβεβαιότητας προσθέτει στο μοντέλο ο παράγοντας $\sigma\Delta W$, όπου ΔW μια προσαύξηση της διαδικασίας Wiener. Έτσι το μοντέλο γίνεται :

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu\,\Delta t + \sigma\,\Delta W$$

και θεωρώντας το χρονικό διάστημα Δt απειροστό ($\Delta t \to 0$) μπορούμε σχηματικά να γράψουμε:

$$dS = \mu\, S dt + \sigma\, S\, dW \Rightarrow \int_0^t \frac{dS}{S} = \mu + \sigma W \,. \tag{2.9}$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στη (2.9), δεν είναι σύνηθες ολοκλήρωμα Riemman και δε μπορούμε να το υπολογίσουμε κατά τα γνωστά. Ορίζεται αυστηρά στα πλαίσια της στοχαστικής ανάλυσης και καλείται ολοκλήρωμα **Itô**.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να παρουσιάσουμε ένα σημαντικό λήμμα της στοχαστικής ανάλυσης που είναι χρήσιμο για τον μετασχηματισμό διαφορικών, το γνωστό ως λήμμα του Itô. Εδώ παρατίθεται στη διαφορική μορφή του, χωρίς μαθηματική αυστηρότητα (πιο αυστηρή εισαγωγή υπάρχει στον Neftci (2000)). Αρχικά, μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t),\, t \geq 0\}$ θα είναι διαδικασία Itô (*Itô process*) αν είναι μια γενικευμένη διαδικασία Wiener με παραμέτρους μ, σ που δεν είναι σταθερές, αλλά εξαρτώνται από την τιμή της X και το χρόνο t. Αν dW είναι μια απειροστή προσαύξηση μιας κίνηση Wiener, dX μιας διαδικασίας Itô τότε ισχύει

$$\mathrm{d}X = \mu(t,X)\mathrm{d}t + \sigma(t,X)\mathrm{d}W.$$

Θεώρημα 2.7.2. (*Λήμμα του Itô*) *Αν $X(t)$ είναι μια διαδικασία* Itô *τότε για οποιαδήποτε συνάρτηση της $X(t)$ της μορφής $G(t,X)$ που είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, το διαφορικό της εκφράζεται στη μορφή* :

$$dG(t,X) = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \mu(t,X)\frac{\partial G}{\partial X} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,\mathrm{X})\frac{\partial^2 G}{\partial X^2} \right) dt + \sigma(t,X)\frac{\partial G}{\partial X} dW \,.$$

Με τη βοήθεια του παραπάνω λήμματος θα δείξουμε ότι, όπως έχει οριστεί, η $S(t)$ είναι μια γεωμετρική κίνηση Brown. Θα υπολογίσουμε το διαφορικό της διαδικασίας $G(t,S) = Z(t) = \ln S(t)$. Είναι

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S} \quad , \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$$

$$dZ = \left(\mu\, S\frac{1}{S} - \frac{1}{2S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt + \sigma\, S\frac{1}{S} dW = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma\, dW$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει η $Z(t)$ θα είναι μια κίνηση Brown με drift $\mu - \sigma^2/2$ και συντελεστή διάχυσης σ^2, άρα από τον Ορισμό 2.7.3 η $S(t)$ θα είναι μια γεωμετρική κίνηση Brown. Επίσης θα είναι

$$\ln S(t) - \ln S(0) \sim N((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t) \quad \text{ή ισοδύναμα,} \quad \ln S(t) \sim N(\ln S(0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)$$

Άρα από το μοντέλο που υποθέσαμε ότι περιγράφει την εξέλιξη της τιμής μιας μετοχής συνάγουμε ότι η κατανομή που ακολουθεί η τιμή μιας μετοχής δεδομένης της τιμής εκκίνησης $S(0)$ θα είναι λογαριθμοκανονική.

2.8 Η διαφορική εξίσωση των Black-Scholes και η αποτίμηση χρηματοοικονομικών παραγώγων

Σύμφωνα με το μοντέλο Black-Scholes θεωρούμε ότι:

(1) Η τιμή του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί μία γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους μ, σ.

(2) Μπορούμε να εκδώσουμε δικαιώματα και να επενδύσουμε όλα τα κέρδη από αυτά.

(3) Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγής και φόροι.

(4) Μπορούμε να αγοράσουμε ή να πουλήσουμε οποιαδήποτε ποσότητα του υποκείμενου τίτλου.

(5) Δεν δίδονται μερίσματα κατά τη διάρκεια της ισχύος των δικαιωμάτων.

(6) Δεν υπάρχουν δυνατότητες κερδοσκοπίας.

(7) Οι συναλλαγές είναι διαρκείς.

(8) Το χωρίς ρίσκο επιτόκιο είναι σταθερό ίσο με r μέχρι τη λήξη του δικαιώματος.

Οι αποκλίσεις των παραπάνω υποθέσεων από την πραγματικότητα είναι φανερές, παρ' όλ' αυτά δεν μειώνεται η σημασία που έχει η μεθοδολογία των Black-Scholes, πάνω στην οποία βασίζεται η τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης σήμερα.

Για να καταλήξουν σε αυτήν την εξίσωση οι Black και Scholes δημιούργησαν ένα χαρτοφυλάκιο χωρίς ρίσκο που αποτελείται από ένα δικαίωμα που έχει εκδοθεί και μια ποσότητα $\Delta = \partial f / \partial S$ από τον υποκείμενο τίτλο. Το χαρτοφυλάκιο αυτό πρέπει να αποδίδει κέρδος ίσο με το κέρδος από το επιτόκιο χωρίς ρίσκο. Από εδώ προκύπτει άμεσα μια στοχαστική διαφορική εξίσωση.

Πιο αναλυτικά, έστω ένα οποιοδήποτε δικαίωμα με τιμή που περιγράφεται από την ανέλιξη *f*. Το δικαίωμα αυτό έχει ως υποκείμενο τίτλο ένα περιουσιακό στοιχείο με τιμή που περιγράφεται από την ανέλιξη *S*. Το *S* σύμφωνα με τα παραπάνω θα είναι μια γεωμετρική κίνηση Brown. Άρα

$$\mathrm{d}S = \mu S\mathrm{d}t + \sigma S\mathrm{d}W$$

όπου μ είναι η αναμενόμενη απόδοση του υποκείμενου τίτλου ή τάση (*drift*) και σ είναι ο συντελεστής διάχυσης ή πτητικότητα της τιμής της μετοχής (*volatility*). Η τιμή *f* του δικαιώματος θα είναι μια συνάρτηση του *S*, άρα σύμφωνα με το λήμμα του Itô θα έχουμε

$$df = \left(\mu S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial f}{\partial S}dW$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι μια στοχαστική διαφορική εξίσωση. Θεωρούμε το χωρίς ρίσκο χαρτοφυλάκιο με αξία Π που αποτελείται από ένα δικαίωμα που έχει εκδοθεί και μια ποσότητα $\Delta = \partial f / \partial S$ από τον υποκείμενο τίτλο. Η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι $\Pi = -f + \partial f / \partial S$. Το χαρτοφυλάκιο αυτό θα είναι χωρίς ρίσκο γιατί

$$d\Pi = -\left(\mu S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)dt - \sigma S\frac{\partial f}{\partial S}dW + \frac{\partial f}{\partial S}(\mu S dt + \sigma S dW)$$

$$= -\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)dt \quad .$$

Παρατηρούμε ότι η απειροστή μεταβολή του χαρτοφυλακίου δεν περιέχει το στοχαστικό διαφορικό d*W*, άρα το χαρτοφυλάκιο είναι χωρίς ρίσκο και επομένως πρέπει να αποδίδει κέρδος ίσο με το κέρδος από το χωρίς ρίσκο επιτόκιο,

$$d\Pi = -\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)dt = r(-f + \frac{\partial f}{\partial S}S)dt = r\Pi dt$$

και επομένως τελικά,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \;. \tag{2.10}$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι γνωστή ως η εξίσωση των Black-Scholes και έχει πολλές λύσεις. Η κάθε λύση εξαρτάται από την οριακή συνθήκη που θεωρούμε. Η οριακή συνθήκη εξαρτάται από το δικαίωμα που θέλουμε να τιμολογήσουμε. Παρατηρούμε ότι για να καταλήξουμε στη συγκεκριμένη εξίσωση δεν έγινε καμιά υπόθεση σχετικά με το είδος του δικαιώματος, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε οποιοδήποτε δικαίωμα. Για να τιμολογήσουμε ένα κλασικό Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς αρκεί να θέσουμε ως οριακή συνθήκη

$$f = \max(S - K, 0), \text{ όταν } t = T \qquad (2.11)$$

Ομοίως και για οποιοδήποτε άλλο δικαίωμα. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι το χαρτοφυλάκιο που δημιουργήσαμε διατηρεί την ιδιότητα να μην περιέχει ρίσκο για πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Η ποσότητα $\Delta = \partial f / \partial S$ που επιλέξαμε μεταβάλλεται στο χρόνο και άρα θα πρέπει το χαρτοφυλάκιο διαρκώς να αναπροσαρμόζεται για να διατηρεί αυτή την ιδιότητα. Επίσης στην εξίσωση δεν περιέχεται καθόλου η αναμενόμενη απόδοση μ του υποκείμενου τίτλου παρά μόνο η πτητικότητα (volatility) σ. Άρα η τιμή του δικαιώματος δεν επηρεάζεται από την αναμενόμενη απόδοση παρά μόνο από την πτητικότητα σ, το χωρίς ρίσκο επιτόκιο *r* και την αρχική τιμή του τίτλου *S*. Επίσης παρατηρούμε ότι σημαντικό ρόλο στην τιμή του δικαιώματος έχει η ευαισθησία του δικαιώματος σε σχέση με το χρόνο $\partial f / \partial t$ (*Theta*), η ευαισθησία του δικαιώματος ως προς την τιμή του υποκείμενου τίτλου $\partial f / \partial S$ (Delta), καθώς και η ευαισθησία αυτών των μεταβολών σε σχέση με την αξία του υποκείμενου προϊόντος $\partial^2 f / \partial S^2$ (*Gamma*). Αναλυτική παρουσίαση των παραπάνω παραμέτρων του δικαιώματος γίνεται στον Rubinstein (2000).

Την τιμή ενός δικαιώματος, εκτός από τη χρήση της εξίσωσης (2.10) μαζί με την οριακή συνθήκη που ορίζεται κάθε φορά από το αντίστοιχο δικαίωμα, μπορούμε να την βρούμε υπολογίζοντας την αναμενομένη τιμή στη λήξη του, *κάτω από το μέτρο πιθανότητας χωρίς ρίσκο*. Ο υπολογισμός απλοποιείται αρκετά με χρήση της παρακάτω σχέσης (βλ. Hull (2003)). Έστω *X* τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την λογαριθμική κατανομή και τυπική απόκλιση της *lnX* είναι *s*. Τότε

$$E[\max\{X - K, 0\}] = E[X]\Phi(d_1) - K\Phi(d_2) \text{ για } K \in \mathrm{R}, \quad d_1 = \frac{1}{s}\left(\ln(\frac{E[X]}{K}) + \frac{s^2}{2}\right), \quad d_2 = d_1 - s$$

και Φ είναι η αθροιστική συνάρτηση της τυποπικής κανονικής κατανομής.

Έτσι, έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή, C_{plain}, ενός κλασικού Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με υποκείμενο τίτλο αρχικής τιμής S_0 και με τιμή εξάσκησης K. Η αναμενόμενη τιμή $E(S_T)$ του υποκείμενου τίτλου στο χρόνο T λήξης του δικαιώματος, κάτω από το χωρίς ρίσκο μέτρο πιθανότητας θα είναι $E[S_T] = e^{rT}S_0$ και η S_T όπως δείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο θα ακολουθεί την λογαριθμοκανονική, με την τυπική απόκλιση της $\ln S_T$ να είναι $\sigma\sqrt{T}$. Η τιμή τότε θα είναι

$$C_{plain} = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2), \quad d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} .$$

Η τιμή του αντίστοιχου δικαιώματος πώλησης προκύπτει εύκολα από τη σχέση μεταξύ τους (*put-call parity*) και είναι

$$P_{plain} = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1)$$

Πιο αναλυτικά, η τιμολόγηση με χρήση αναμενόμενων τιμών υπάρχει στον Salih N. Neftci (2000). Αποδεικνύεται γενικότερα ότι, αν ένα παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν έχει αξία στο χρόνο λήξης του ίση με $C(T) = \kappa(S_x, x\in[0,T])$, δηλαδή η τιμή του στο T εξαρτάται από όλη την διαδρομή της τιμής της μετοχής στο $[0,T]$ (π.χ. βλ. τα exotic options σε επόμενη παράγραφο) τότε θα έχει no-arbitrage αξία στο t,

$$C = e^{-rT}E_P(\kappa(S_x, x\in[0,T])),$$

όπου υπό το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου, P, η $\{S_t, t\in[0,T]\}$ ακολουθεί είναι μία γεωμετρική κίνηση Brown με τάση $r - \sigma^2/2$ και πτητικότητα σ^2).

2.9 Η αποτίμηση των εξωτικών δικαιωμάτων προαίρεσης

Θα αναφερθούμε στις αναλυτικές τιμές – όπου υπάρχουν – για τα εξωτικά δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου όπως προκύπτουν από τη μεθοδολογία που μόλις παρουσιάστηκε.

Α. Barrier Options. Έστω $S(t)$ η τιμή του υποκείμενου τίτλου (μετοχή που να μην αποδίδει μερίσματα) τη χρονική στιγμή t με $t = 0$ η έναρξη της ισχύος του εκάστοτε δικαιώματος. Έστω T ο χρόνος μέχρι τη λήξη του και έστω H, $K > 0$ το φράγμα (*Barrier*) και η τιμή εξάσκησης αντίστοιχα. Τότε

(α) down-and-in και **down-and-out.** Για να έχει νόημα το δικαίωμα θα πρέπει $H < S(0)$. Τα $C_{di}(t)$, $C_{do}(t)$, $P_{di}(t)$, $P_{do}(t)$ είναι οι τιμές των down-and-in, down-and-out δικαιωμάτων αγοράς, down-and-in, down-and-out δικαιωμάτων πώλησης αντίστοιχα τη χρονική στιγμή t και $C(t)$, $P(t)$ τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης του αντιστοίχου κλασικού Ευρωπαϊκού δικαιώματος. Ορίζουμε τις

$$I^{i}_{[0,T]}=\{1 \text{ εάν } \exists t\in[0,T]: S(t) \leq H,\ 0 \text{ αλλιώς}\},$$

$$I^{o}_{[0,T]}=\{1 \text{ εάν δεν υπάρχει } t\in[0,T]: S(t) \leq H,\ 0 \text{ αλλιώς}\}.$$

Τότε, σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε στο Κεφαλαίο 1, οι συναρτήσεις κέρδους των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης θα είναι

$$C_{di}(\mathrm{T}) = I^{i}_{[0,T]}(S(T) - K)^{+}, \quad P_{di}(\mathrm{T}) = I^{i}_{[0,T]}(K - S(T))^{+},$$

$$C_{do}(\mathrm{T}) = I^{o}_{[0,T]}(S(T) - K)^{+}, \quad P_{do}(\mathrm{T}) = I^{o}_{[0,T]}(K - S(T))^{+}.$$

Επίσης ισχύει σε κάθε περίπτωση $I^{i}_{[0,T]} + I^{o}_{[0,T]} = 1$. Άρα και για τις συναρτήσεις κέρδους θα ισχύει

$$C_{di}(T) + C_{do}(T) = C(T) \qquad \text{και} \qquad P_{di}(T) + P_{do}(T) = P(T) \tag{2.12}$$

και επειδή η τιμή των δικαιωμάτων είναι άμεσα εξαρτώμενες από τις συναρτήσεις κέρδους, οι παραπάνω σχέσεις θα ισχύουν για τις τιμές τους κάθε χρονική στιγμή t.

Εάν $H \leq K$ οι αναλυτικές τους τιμές στην έναρξη της ισχύος τους θα δίνονται από τους τύπους

$$C_{di}(0) = S_0 (H / S_0)^{2\lambda} \Phi(y) - Ke^{-rT} (H / S_0)^{2\lambda-2} \Phi(y - \sigma\sqrt{T}\,)$$

όπου

$$\lambda = \frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \quad , \quad y = \frac{\ln[H^2 /(S_0 K)]}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

και επομένως, $C_{do}(0) = C(0) - C_{di}(0)$.

Επίσης

$$\begin{aligned} P_{di}(0) = &-S_0\Phi(-x_1) + Ke^{-rT}\Phi(-x_1 + \sigma\sqrt{T}\,) + S_0 (H / S_0)^{2\lambda}[\Phi(y) - \Phi(y_1)] \\ &- Ke^{-rT} (H / S_0)^{2\lambda-2}[\Phi(y - \sigma\sqrt{T}\,) - \Phi(y_1 - \sigma\sqrt{T}\,)] \end{aligned}$$

όπου

$$x_1 = \frac{\ln[S_0 / H]}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T} \quad , \quad y_1 = \frac{\ln[H / S_0]}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

και επομένως, $P_{do}(0) = P(0) - P_{di}(0)$.

Εάν $H \geq K$,

$$C_{do}(0) = S_0\Phi(x_1) - Ke^{-rT}\Phi(x_1 - \sigma\sqrt{T}\,) - S_0(H/S_0)^{2\lambda}\Phi(y_1) + Ke^{-rT}(H/S_0)^{2\lambda-2}\Phi(y_1 - \sigma\sqrt{T}\,)$$

και επομένως $C_{di}(0) = C(0) - C_{do}(0)$. Εξ ορισμού του δικαιώματος πώλησης προκύπτει άμεσα

$$P_{do}(0) = 0 \quad \text{και} \quad P_{di}(0) = P(0).$$

(β) up-and-in και **up-and-out.** Για να έχει νόημα το δικαίωμα θα πρέπει $H > S(0)$. Τα $C_{ui}(t)$, $C_{uo}(t)$, $P_{ui}(t)$, $P_{uo}(t)$ είναι οι τιμές των up-and-in, up-and-out δικαιωμάτων αγοράς, up-and-in, up-and-out δικαιωμάτων πώλησης αντίστοιχα τη χρονική στιγμή t και $C(t)$, $P(t)$ τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης του αντιστοίχου κλασικού Ευρωπαϊκού δικαιώματος. Ορίζουμε τις

$$I^{i\prime}_{[0,T]}=\{1 \text{ εάν } \exists t\in[0,T]: S(t) \geq H, 0 \text{ αλλιώς}\},$$

$$I^{o\prime}_{[0,T]}=\{1 \text{ εάν δεν } \exists t\in[0,T]: S(t) \geq H, 0 \text{ αλλιώς}\}.$$

Τότε σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε στο Κεφάλαιο 1 οι συναρτήσεις κέρδους των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης θα είναι

$$C_{ui}(\mathrm{T}) = I^{i\prime}_{[0,T]}(S(T) - K)^+, \quad P_{ui}(\mathrm{T}) = I^{i\prime}_{[0,T]}(K - S(T))^+,$$

$$C_{uo}(\mathrm{T}) = I^{o\prime}_{[0,T]}(S(T) - K)^+, \quad P_{uo}(\mathrm{T}) = I^{o\prime}_{[0,T]}(K - S(T))^+.$$

Επίσης ισχύει σε κάθε περίπτωση $I^{i}_{[0,T]}+ I^{o}_{[0,T]} = 1$. Άρα και για τις συναρτήσεις κέρδους θα ισχύει

$$C_{ui}(\mathrm{T})+ C_{uo}(\mathrm{T}) = C(T) \qquad \text{και} \qquad P_{ui}(\mathrm{T})+ P_{uo}(\mathrm{T}) = P(T) \quad (2.13)$$

και επειδή η τιμή των δικαιωμάτων είναι άμεσα εξαρτώμενες από τις συναρτήσεις κέρδους οι παραπάνω σχέσεις θα ισχύουν για τις τιμές τους κάθε χρονική στιγμή t. Εάν $H \leq K$ οι αναλυτικές τους τιμές στην έναρξη της ισχύς τους θα δίνονται από τους τύπους (εξ ορισμού $C_{uo}(0) = 0$ και $C_{ui}(0) = C(0)$)

$$P_{uo}(T) = -S_0\Phi(-x_1) - Ke^{-rT}\Phi(-x_1 + \sigma\sqrt{T}\ ) + S_0(H / S_0)^{2\lambda}\Phi(-y_1)$$
$$- Ke^{-rT}(H / S_0)^{2\lambda\text{-}2}\Phi(-y_1 + \sigma\sqrt{T}\ )$$

και από την (2.13) προκύπτει ότι $P_{ui}(0) = P(0) - P_{uo}(0)$. Εάν $H \geq K$,

$$C_{ui}(T) = S_0\Phi(x_1) - Ke^{-rT}\Phi(x_1 - \sigma\sqrt{T}\ ) - S_0(H / S_0)^{2\lambda}[\Phi(-y) - \Phi(-y_1)]$$

$$+ Ke^{-rT}(H / S_0)^{2\lambda\text{-}2}[\Phi(-y + \sigma\sqrt{T}\ ) - \Phi(-y_1 + \sigma\sqrt{T}\ )]$$

και από την (2.13) προκύπτει ότι $C_{uo}(0) = C(0) - C_{ui}(0)$ και

$$P_{ui}(T) = -S_0(H / S_0)^{2\lambda}\Phi(-y) + Ke^{-rT}(H / S_0)^{2\lambda\text{-}2}\Phi(-y + \sigma\sqrt{T}\ ),$$

$$P_{uo}(0) = P(0) - P_{ui}(0).$$

Οι Reiner και Rubinstein (1991) παρουσίασαν τους παραπάνω τύπους σε αυτή τη μορφή. Ο Haug (1998) έκανε τους υπολογισμούς πιο λειτουργικούς εισάγοντας έξι τύπους A-F οι οποίοι επαναλαμβάνονται στους υπολογισμούς και η ζητούμενη τιμή για κάθε δικαίωμα προκύπτει ως ένας απλός γραμμικός συνδυασμός τους. Επίσης οι παραπάνω τύποι ισχύουν για δικαιώματα όπου η τιμή της μετοχής καταγράφεται διαρκώς. Όταν η τιμή καταγράφεται μια φορά την ημέρα, μια καθορισμένη στιγμή, τότε οι παραπάνω τύποι ισχύουν με μια ελαφρά τροποποίηση. Εάν η τιμή της μετοχής καταγράφεται συνολικά μέχρι τη λήξη του δικαιώματος *m* φορές και *T*/*m* ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ των καταγραφών, τότε αντικαθιστούμε την τιμή του *H* με την $He^{0.5826\sigma\sqrt{T/m}}$ για τα *up*-and-in και για το up-and-out και με $He^{-0.5826\sigma\sqrt{T/m}}$ για το down-and-in και το down-and-out.

B. Lookback Options. Έστω $C_{lookback}(t)$, $P_{lookback}(t)$ οι τιμές των *lookback* δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης αντίστοιχα τη χρονική στιγμή *t*. Σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε στο Κεφάλαιο 1 οι συναρτήσεις κέρδους στο χρόνο λήξης *T* των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης θα είναι

$$C_{lookback}(T) = (S(T) - S_{min})^+ , \quad P_{lookback}(T) = (S_{max} - S(T))^+,$$

όπου S_{min} και S_{max} είναι η ελάχιστη και μέγιστη τιμή αντίστοιχα που πήρε η μετοχή στο χρονικό διάστημα $[0,T]$. Στην περίπτωση που έχουμε διαρκή παρακολούθηση της τιμής για να υπολογίσουμε τα S_{min}, S_{max}, τότε

$$C_{lookback}(0) = S_0\Phi(a_1) - S_0\frac{\sigma^2}{2r}\Phi(-a_1) - S_{\min}e^{-rT}(\Phi(a_2) - \frac{\sigma^2}{2r}e^{Y_1}\Phi(-a_3))$$

όπου

$$a_1 = \frac{\ln(S_0/S_{\min}) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T}, \quad a_3 = \frac{\ln(S_0/S_{\min}) + (-r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

και $Y_1 = -\frac{2}{\sigma^2}(r - \sigma^2/2)\ln(S_0/S_{\min})$. Επίσης,

$$P_{lookback}(0) = S_{\max}e^{-rT}(\Phi(b_1) - \frac{\sigma^2}{2r}e^{Y_2}\Phi(-b_3)) + S_0\frac{\sigma^2}{2r}\Phi(-b_2) - S_0\Phi(b_2)$$

όπου

$$b_1 = \frac{\ln(S_{\max}/S_0) + (-r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T}, \quad b_3 = \frac{\ln(S_{\max}/S_0) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

και $Y_2 = \frac{1}{\sigma^2}2(r - \sigma^2/2)\ln(S_{\max}/S_0)$.

Τα S_{max} και S_{min} στους τύπους παίρνουν την αρχική τιμή της μετοχής S_0 αν υπολογίζουμε την τιμή των δικαιωμάτων για $t = 0$. Γενικά αν θέλουμε να αποτιμήσουμε τα δικαιώματα τη χρονική στιγμή t τότε τα S_{max} και S_{min} παίρνουν τις τιμές τους από τις παρατηρήσεις των τιμών της μετοχής στο διάστημα $[0, t]$.

Γ. Ασιατικού τύπου δικαιώματα (Asian Options). Έστω $C_G(t)$, $C_A(t)$ οι τιμές τη χρονική στιγμή t των Ασιατικού τύπου δικαιωμάτων αγοράς που βασίζονται στο γεωμετρικό και αριθμητικό μέσο αντίστοιχα και $P_G(t)$, $P_A(t)$ οι τιμές τη χρονική στιγμή t των Ασιατικού τύπου δικαιωμάτων πώλησης που βασίζονται ομοίως στον αριθμητικό και γεωμετρικό μέσο. Έστω G, A ο γεωμετρικός και αριθμητικός μέσος

$$G = (\prod_{k=1}^{n} S(t_k))^{\frac{1}{n}} \quad \text{και} \quad A = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S(t_k)$$

με $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$. Σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε στο Κεφάλαιο 1, οι συναρτήσεις κέρδους των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης θα είναι

$$C_G(T) = (G - K)^+, \quad C_A(T) = (A - K)^+$$

και

$$P_G(T) = (K - G)^+ \quad , \quad P_A(T) = (K - A)^+$$

Αναλυτικές τιμές υπάρχουν μονό για τα Ασιατικά δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου που βασίζονται στον γεωμετρικό μέσο. Συγκεκριμένα οι τιμές των $C_G(0)$,$P_G(0)$, όταν έχουμε συνεχή καταγραφή της τιμής του υποκείμενου τίτλου είναι

$$C_G(0) = S_0 e^{-\frac{1}{2}(r+\frac{\sigma^2}{6})T} N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \text{ και } P_G(0) = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-\frac{1}{2}(r+\frac{\sigma^2}{6})T} N(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (\frac{r}{2} + \frac{\sigma^2}{12})\mathrm{T}}{\sigma\sqrt{T/3}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T/3}$$

Για τα Ασιατικά δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου που βασίζονται στον αριθμητικό μέσο δεν υπάρχουν διαθέσιμοι τύποι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Προσομοίωση Monte Carlo

3.1 Εισαγωγή

Έστω $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ένα τυχαίο διάνυσμα με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ και έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή

$$E[Y] = E[g(\mathbf{X})] = \int\int \ldots \int g(x_1, x_2, .., x_n) f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n$$

με g οποιαδήποτε n–διαστατή συνάρτηση για την οποία το ολοκλήρωμα υπάρχει και είναι πεπερασμένο. Η g π.χ. θα μπορούσε να είναι η συνάρτηση κέρδους ενός δικαιώματος που εξαρτάται από την πορεία του υποκείμενου τίτλου $(S(t_0), S(t_1), S(t_2), \ldots, S(t_n))$. Σε αρκετές περιπτώσεις δεν μπορεί να βρεθεί κάποιος αναλυτικός τύπος για την $E[g(\mathbf{X})]$. Μέσω της προσομοίωσης Monte Carlo μπορούμε να πάρουμε μια εκτίμηση για την αναμενόμενη τιμή.

Για να εκτιμήσουμε την $E[Y] = E[g(\mathbf{X})]$ παράγουμε k τυχαία διανυσματα $\mathbf{X}^{(1)}$, $\mathbf{X}^{(2)}$, …, $\mathbf{X}^{(k)}$ με $\mathbf{X}^{(i)} = (X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, ..., X_n^{(i)})$, $i = 1, 2, \ldots, k$, ανεξάρτητα μεταξύ τους με από κοινού σ.π.π. $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Υπολογίζοντας τις $Y^{(i)} = g(\mathbf{X}^{(i)})$, $i = 1, 2, \ldots, k$ θα έχουμε ένα δείγμα από την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής Y, της οποίας θέλουμε να εκτιμήσουμε τη μέση τιμή. Από τον νόμο των μεγάλων αριθμών προκύπτει

$$\lim_{k\to\infty} \frac{Y^{(1)} + Y^{(2)} + \ldots + Y^{(k)}}{k} = E[Y] = E[g(\mathrm{X})]$$

Μπορούμε επομένως να χρησιμοποιήσουμε τη μέση τιμή του παραγόμενου δείγματος ως εκτίμηση για την $\mathrm{E}[g(\mathbf{X})]$. Αυτή η εκτίμηση της $\mathrm{E}[g(\mathbf{X})]$ λέγεται εκτίμηση Monte Carlo.

3.2 Παραγωγή τυχαίων αριθμών

Είδαμε ότι κατά την εκτίμηση Monte Carlo της $E[g(\mathbf{X})]$ χρησιμοποιούμε δείγμα από την κατανομή του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X} = (X_1,X_2,\ldots,X_n)$. Πριν αναφερθούμε στη διαδικασία παραγωγής των $\mathbf{X}^{(1)}$, $\mathbf{X}^{(2)}$, …, $\mathbf{X}^{(k)}$ από μια συγκεκριμένη κατανομή, θα παρουσιάσουμε την διαδικασία παραγωγής τυχαίων αριθμών.

Έχει επικρατήσει να λέμε *τυχαίους αριθμούς* μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών U_1, $U_2,\ldots$ με τις εξής ιδιότητες

i) Κάθε $U_i \sim U[0,1]$ (ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1])

ii) Οι τ.μ. U_1, $U_2,\ldots$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες

Η πρώτη ιδιότητα είναι αυθαίρετη γιατί ακόμα και αν $U_i \sim U[0,1/2]$ η χρήση τους δεν θα άλλαζε σημαντικά. Η δεύτερη ιδιότητα είναι σημαντική και στην ουσία απαιτεί να είναι αδύνατη οποιαδήποτε πρόβλεψη για την τιμή της U_i δεδομένου ότι ξέρουμε τις τιμές των αριθμών που έχουν παραχθεί πριν $U_1,\ldots,U_{i-1}$.

Στην πραγματικότητα η παραγωγή τυχαίων αριθμών γίνεται μέσω Η/Υ, συνήθως μέσα από κάποιον επαναληπτικό αλγόριθμο ξεκινώντας από κάποια αρχική τιμή που μπορεί να θεωρηθεί τυχαία (δίνεται από το χρήστη ή ανακτάται από το ρολόι του υπολογιστή τη δεδομένη χρονική στιγμή). Οι αριθμοί που παράγονται με την παραπάνω διαδικασία ονομάζονται ψευδοτυχαίοι αριθμοί γιατί αν και «φαίνεται» να ικανοποιούν τις ιδιότητες (i) και (ii) στην πραγματικότητα αυτό δεν συμβαίνει. Παρ' όλ' αυτά τους χρησιμοποιούμε ως μια καλή προσέγγιση των τυχαίων αριθμών.

Μια από τις πιο συνηθισμένες μεθόδους παραγωγής ψευδοτυχαίων αριθμών είναι η multiplicative congruential method. Ξεκινώντας από μια αρχική τιμή x_0 που καλείται γόνος (*seed*) και με χρήση της αναδρομικής σχέσης

$$x_n = ax_{n-1} \bmod \mathrm{m} = ax_{n-1} - [ax_{n-1}/m]m \quad \text{για } n=1,2,\ldots \quad \text{με } x_0 \in \mathrm{N}^*$$

προκύπτουν ψευδοτυχαίοι αριθμοί

$$U_n = x_n / m \,,\; n=1,2,\ldots$$

Οι παράμετροι m, a είναι θετικοί ακέραιοι και δεδομένου του γόνου x_0 καθορίζουν πλήρως τους αριθμούς που θα παραχθούν. Ως $[x] = k$ εννοούμε την ακέραια τιμή του x. Από τη διαδικασία που περιγράψαμε είναι φανερό ότι $x_n \in \{0,1,\ldots,m-1\}$. Άρα μπορούμε να παράγουμε το πολύ $m-1$ τυχαίους αριθμούς μέχρι να συναντήσουμε το αρχικό x_0, οπότε η ακολουθία θα επαναληφθεί. Όταν συμβαίνει αυτό η congruential γεννήτρια που έχουμε επιλέξει λέμε ότι έχει πλήρη περίοδο (*full period*). Η γεννήτρια που περιγράψαμε καθορίζεται από τις τιμές των παραμέτρων m, a. Όταν ο m είναι πρώτος αριθμός τότε μια τέτοια γεννήτρια θα έχει πλήρη περίοδο για κάθε $x_0 \neq 0$ εάν

(i) *το* $a^{m-1} - 1$ *είναι ένα πολλαπλάσιο του* m και

(ii) *το* $a^j - 1$ *δεν είναι πολλαπλάσιο του* m *για* $j = 1, \ldots, m - 2$.

Όταν ένας αριθμός a ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες τότε λέμε ότι ο a είναι πρωτογενής ρίζα (*primitive root*) του m. Οι παραπάνω συνθήκες βασίζονται στην παρατήρηση ότι η παραγόμενη ακολουθία

$$x_0,\ ax_0,\ a^2x_0,\ a^3x_0, \ldots (\mathrm{mod}\ m)$$

θα αρχίσει να επαναλαμβάνεται για το μικρότερο k για το οποίο $a^k x_0 \bmod m = x_0$. Στην ουσία πρόκειται το μικρότερο k για το οποίο θα ισχύει $a^k \bmod m = 1$, δηλαδή το μικρότερο k για το οποίο $\alpha^k - 1$ είναι ένα πολλαπλάσιο του m. Έτσι όταν το a είναι μια πρωτογενής ρίζα του m τότε πράγματι η ακολουθία δεν θα πάρει την τιμή x_0 παρά μόνο όταν πάρει την τιμή $a^{m-1}x_0$.

Αποδεικνύεται ότι όταν ο a ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες τότε κανένας όρος της ακολουθίας δεν θα πάρει την τιμή 0 (τότε όλες οι επόμενες τιμές θα ήταν μηδενικές).

Η επιλογή των παραμέτρων m και a πρέπει να γίνεται και με γνώμονα την γρήγορη και εύκολη παραγωγή της ακολουθίας από τον υπολογιστή καθώς και προσεγγιστικά να μπορούν να θεωρηθούν οι όροι της ακολουθίας τυχαίοι αριθμοί. Ο m συνήθως επιλέγεται να είναι ένας μεγάλος πρώτος αριθμός. Η επιλογή του μεγέθους του εξαρτάται από το μέγεθος των λέξεων που χειρίζεται ο επεξεργαστής. Όταν ένας επεξεργαστής μπορεί να εκτελεί πράξεις με λέξεις των 32-bit τότε μια καλή επιλογή είναι $m = 2^{32} - 1$ και $a = 7^5 - 1$.

Μια άλλη γεννήτρια ψευδοτυχαίων αριθμών είναι η mixed congruential (η προηγούμενη λέγεται και απλά pure congruential). Η διαδικασία και εδώ βασίζεται σε δυο σχέσεις

$$x_n = (ax_{n-1}+c) \bmod \mathrm{m} \quad \text{για } n=1,2,\ldots \quad \text{με } x_0 \in \mathrm{N}^*$$

και προκύπτουν ψευδοτυχαίοι αριθμοί $U_n = x_n / m$.

Ο Knuth (1998) αναφέρει ότι αν η επιλογή των παραμέτρων a, m, $c \neq 0$ γίνει με βάση τα παρακάτω κριτήρια τότε η γεννήτρια για οποιοδήποτε γόνο x_0 έχει πλήρη περίοδο.

(i) *c και m είναι μεταξύ τους πρώτοι αριθμοί.*

(ii) *Κάθε πρώτος αριθμός που διαιρεί το m διαιρεί και το a*−1.

(iii) *Το* 4 *θα πρέπει να διαιρεί το a*−1 *εάν διαιρεί και το m*−1.

Κάθε γλώσσα προγραμματισμού και τα περισσότερα υπολογιστικά προγράμματα έχουν μια εντολή που παράγει τυχαίους αριθμούς και η οποία βασίζεται σε μεθοδολογίες όπως οι προηγούμενες. Έτσι μας είναι άμεσα διαθέσιμοι τυχαίοι αριθμοί για να προχωρήσουμε σε προσομοίωση. Στην Java, την οποία και θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, η μέθοδος random της κλάσης Math μας δίνει τυχαίους αριθμούς (Math.random() επιστρέφει έναν τυχαίο αριθμό).

3.3 Παραγωγή δείγματος συγκεκριμένης κατανομής

Η διαδικασία της προσομοίωσης συνήθως απαιτεί τη χρήση δείγματος διάφορων κατανομών. Θα παρουσιάσουμε συνοπτικά κάποιες μεθόδους για την παραγωγή τέτοιων δειγμάτων με ιδιαίτερη έμφαση στην παραγωγή δείγματος από την κανονική κατανομή. Υποθέτουμε ότι θέλουμε δείγμα από την F με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f.

3.3.1 Η μέθοδος της αντιστροφής

Η μέθοδος αυτή είναι αρκετά απλή και βασίζεται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.3.1.1 *Έστω $U \sim U[0,1]$ και F μια οποιαδήποτε συνάρτηση κατανομής, τότε η τυχαία μεταβλητή*

$$X = F^{-1}(U)$$

έχει συνάρτηση κατανομής F.

Η F^{-1} καλείται *γενικευμένη αντίστροφη* της F και ορίζεται ως εξής

$$F^{-1}(u) = \inf F^{-1}([u,1]) = \inf \{x\colon F(x) \in [u,1]\},\ \ u \in [0,1].$$

Επομένως εάν παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό U, ο $F^{-1}(U)$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια πραγματοποίηση της τυχαίας μεταβλητής $X \sim F$. Παρ' όλη την απλότητα της παραπάνω μεθόδου, η αντίστροφη συνάρτηση κατανομής μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκη ή να μην έχει αναλυτική μορφή.

3.3.2 Η μέθοδος της απόρριψης

Έστω ότι μπορούμε να παράγουμε μια τυχαία μεταβλητή Y που έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g(x)$. Με βάση τη δυνατότητα παραγωγής δείγματος από την $g(x)$ μπορούμε να πάρουμε δείγμα από μια άλλη κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$. Έστω c κάποια σταθερά για την οποία ισχύει

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq c \quad \text{για όλα τα } y\text{: } g(y) \neq 0 \tag{3.1}$$

Έχοντας μια πραγματοποίηση της Y μπορούμε να τη δεχτούμε ή να την απορρίψουμε με πιθανότητα ανάλογη του $f(Y)/g(Y)$. Συγκεκριμένα, αν ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1: *Παράγουμε* Y, U *με* $Y \sim g$ *και* $U \sim \mathrm{U}[0,1]$

Βήμα 2: *Εάν* $U \leq f(Y)/cg(Y)$ *θέτουμε* $X = Y$, *διαφορετικά γυρνάμε στο βήμα* 1

τότε η τυχαία μεταβλητή X που παράγεται έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την f. Η πιθανότητα σε κάθε επανάληψη να δεχτούμε την Y είναι

$$P\left(U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\right) = \int_R P\left(U \leq \frac{f(y)}{cg(y)}\right) g(y)dy = \int_R \frac{f(y)}{cg(y)} g(y)dy = \int_R \frac{f(y)}{c} dy = \frac{1}{c}$$

(είναι $f(y)/cg(y) \leq 1$, άρα $\mathrm{P}(U < f(y)/cg(y)) = f(y)/cg(y)$). Άρα η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το πλήθος των επαναλήψεων μέχρι να δεχτούμε μια τιμή θα ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $1/c$ (με μέσο c). Άρα όσο μικρότερο το c τόσο πιο αποτελεσματική θα είναι η διαδικασία. Το c εξαρτάται άμεσα από την επιλογή της g. Σε περίπτωση όπου η f δεν είναι φραγμένη η εύρεση ενός c που να ικανοποιεί την (3.1) ίσως να μην είναι δυνατή.

3.3.3 Παραγωγή δείγματος από την κανονική κατανομή

Όταν θέλουμε να προσομοιώσουμε ένα χρηματοοικονομικό μοντέλο η χρήση τυχαίων αριθμών από την κανονική κατανομή είναι αναγκαία. Η τυπική κανονική κατανομή έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και αθροιστική συνάρτηση κατανομής για $x \in R$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ και } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du \text{ αντίστοιχα}$$

Η $\Phi(x)$ προσεγγίζεται με αριθμητικές μεθόδους στους υπολογισμούς, όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα. Μια τυχαία μεταβλητή Z που έχει την παραπάνω συνάρτηση κατανομής έχει μέση τιμή 0 και διακύμανση 1 και συμβολίζουμε $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

Γενικά μια τυχαία μεταβλητή $X \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και αθροιστική συνάρτηση κατανομής για $x \in \mathrm{R}$

$$\phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ και } \Phi_{\mu,\sigma}(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \text{ αντίστοιχα}$$

Όταν $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ τότε η $X = \mu + \sigma Z \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$. Άμεσα συνεπάγεται ότι αρκεί να προσομοιώσουμε τη Z και τότε εύκολα προκύπτει μια πραγματοποίηση της X.

Θα περιγράψουμε τη μέθοδο ***Box-Müller*** για την παραγωγή κανονικών τυχαίων μεταβλητών. Έστω (X,Y) οι συντεταγμένες ενός σημείου στο καρτεσιανό επίπεδο. Οι αντίστοιχες πολικές συντεταγμένες του (ακτίνα , γωνία) θα είναι

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} \text{ και } \Theta = \arctan Y/X$$

Θεώρημα 3.3.3.1 *Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από την τυπική κανονική και*

$$(R,\Theta) = (\sqrt{X^2 + Y^2}, \arctan(Y/X))$$

οι πολικές συντεταγμένες του σημείου (X,Y) *στο καρτεσιανό επίπεδο. Οι τυχαίες μεταβλητές* R^2,Θ *είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο* 1/2 *και την ομοιόμορφη στο* $(0,2\pi)$ *αντίστοιχα.*

Ο αλγόριθμος Box-Müller προκύπτει από το παραπάνω θεώρημα ακολουθώντας αντίθετη πορεία. Έστω $R \sim \mathrm{Exp}(1/2)$ και $\Theta \sim \mathrm{U}[0,2\pi]$ και (R,Θ) είναι πολικές συντεταγμένες ενός σημείου. Οι αντίστοιχες καρτεσιανές συντεταγμένες του, $(R\cos\Theta, R\sin\Theta)$, θα είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από την τυπική κανονική. Μια τυχαία μεταβλητή από την εκθετική κατανομή προσομοιώνεται εύκολα με την μέθοδο της αντιστροφής. Έτσι αν $U \sim \mathrm{U}[0,1]$, τότε η $-2\ln(U) \sim \mathrm{Exp}(1/2)$. Επομένως δυο πραγματοποιήσεις της τυπικής κανονικής που προκύπτουν από τις παραπάνω παρατηρήσεις θα είναι

$$\mathrm{X} = (-2\ln(U_1))^{1/2}\cos(2\pi U_2) \qquad \text{και} \qquad Y = (-2\ln(U_1))^{1/2}\sin(2\pi U_2) \qquad (3.2)$$

με U_1, U_2~U(0,1). Η εφαρμογή της παραπάνω διαδικασίας παράγει σε κάθε επανάληψή της υποχρεωτικά δυο τυχαίους αριθμούς από την τυπική κανονική. Ένα αρνητικό στοιχείο είναι η χρήση ενός ημιτόνου και ενός συνημίτονου σε κάθε επανάληψη, που θεωρούνται υπολογιστικά «απαιτητικοί». Θα παρουσιάσουμε μια τροποποίηση της παραπάνω διαδικασίας που ονομάζεται πολική μέθοδος η οποία παρακάμπτει τη χρήση των sin, cos.

Παρατηρούμε ότι αν $U \sim$ U(0,1) τότε $2U \sim$ U(0,2) και $2U - 1 \sim$ U(−1,1). Άρα αν U_1, U_2~U(0,1) οι $V_1 = 2U_1 - 1$ και $V_2 = 2U_2 - 1$ θα ορίζουν ένα σημείο (V_1,V_2) στο τετράγωνο του καρτεσιανού επιπέδου που έχει κέντρο το (0,0) και οι πλευρές του είναι παράλληλες στους άξονες. Αν παράγουμε συνεχώς ζεύγη V_1, V_2 μέχρι να ορίσουν σημείο εντός του εγγεγραμμένου στο προηγούμενο τετράγωνο κύκλο, δηλαδή μέχρι να είναι $V_1^2 + V_2^2 \leq 1$, τότε το ζεύγος (V_1,V_2) θα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στον κύκλο που ορίσαμε. Αν R', Θ' είναι οι πολικές συντεταγμένες του ζεύγους, τότε προκύπτει ότι οι R', Θ' είναι ανεξάρτητες, με $R'^2 \sim$ U[0,1], $\Theta' \sim$ U[0,2π] και επειδή

$$\sin\Theta' = \frac{V_2}{R'} = \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} \text{ και } \cos\Theta' = \frac{V_1}{R'} = \frac{V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$$

από τις σχέσεις (3.2), και παράγοντας έναν επιπλέον τυχαίο αριθμό U, παίρνουμε δυο πραγματοποιήσεις της τυπικής κανονικής

$$X = (-2\ln(U))^{1/2} V_1 / R' \quad \text{και} \quad Y = (-2\ln(U))^{1/2} V_2 / R'$$

Μάλιστα επειδή η $R'^2 = V_1^2 + V_2^2 \leq 1$ είναι ανεξάρτητη της Θ', αντί να παράγουμε την U μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη $R'^2 \sim$ U[0,1]. Άρα οι παραπάνω εξισώσεις γίνονται

$$X = (-2\ln(R'^2))^{1/2} V_1 / R' \quad \text{και} \quad Y = (-2\ln(R'^2))^{1/2} V_2 / R'.$$

Η διαδικασία που περιγράψαμε για την παραγωγή δυο αριθμών από την τυπική κανονική κατανομή συνοπτικά περιγράφεται και από τον παρακάτω αλγόριθμο

Βήμα 1: Παράγουμε U_1, $U_2 \sim$ U[0,1]

Βήμα 2: $V_1 = 2U_1 - 1$, $V_2 = 2U_2 - 1$ **και** $\mathrm{R}'^2 = \mathrm{V}_1^2 + \mathrm{V}_2^2$

Βήμα 3: Εάν $R'^2 > 1$**, πήγαινε στο Βήμα 1.**

Βήμα 4: $X = (-2\ln(R'^2))^{1/2} V_1 / R'$ **και** $Y = (-2\ln(R'^2))^{1/2} V_2 / R'$

Ο παραπάνω αλγόριθμος υλοποιείται στο παράρτημα χρησιμοποιώντας την γλώσσα Java. Παρατηρούμε ότι η πολική μέθοδος είναι απαλλαγμένη από υπολογισμούς συνημίτονου και ημιτόνου. Παρ' όλ' αυτά υπαρχει κάποιο μικρό υπολογιστικό κόστος, γιατί χρειάζεται κατά μέσο όρο 4/π ≈ 1.273 επαναλήψεις παραγωγής τυχαίων αριθμών ($P(V_1^2 + V_2^2 \leq 1) = \pi/4$).

3.4 Αριθμητικές μέθοδοι για την κανονική κατανομή και την αντίστροφή της

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι μας είναι απαραίτητος ο υπολογισμός της αθροιστικής συνάρτησης της κανονικής κατανομής κατά την αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης. Ο υπολογισμός της αντίστροφής της, μας είναι χρήσιμος κατά την αποτίμηση δικαιωμάτων χρησιμοποιώντας προσομοίωση, όπως θα δούμε παρακάτω. Επίσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στη μέθοδο της αντιστροφής για την παραγωγή κανονικών τυχαίων μεταβλητών. Θα αναφερθούμε στην τυπική κατανομή (γενικεύεται εύκολα και για την περίπτωση της $N(\mu,\sigma^2)$ από τη σχέση μεταξύ τους που είδαμε στην προηγουμένη ενότητα). Για τον υπολογισμό της $\Phi(x)$ γενικά έχουν προταθεί αρκετές μέθοδοι. Έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση της με την $\mathrm{Erf}(x)$

$$\Phi(x) = \frac{Erf(x/\sqrt{2}+1)}{2}, \quad \text{με } Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Η $Erf(x)$ βέβαια πρέπει πάλι να προσεγγιστεί με αριθμητικές μεθόδους (ανάλυση σε σειρά Taylor ή με άλλες αριθμητικές μεθόδους). Ο Hastings (1955) για $x \geq 0$ βασίζεται στον τυπο

$$\Phi(x) = 1 - \phi(x)(b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5) \quad \text{με } t = \frac{1}{1+px} \tag{3.3}$$

για συγκεκριμένες σταθερές b_i,p. Για $x < 0$ χρησιμοποιείται η ταυτότητα $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Παρακάτω παρουσιάζεται ο αλγόριθμος της μεθόδου αυτής καθώς και οι σταθερές που αναφέρονται στην (3.3).

Θέτουμε $b_1 = 0.319381530$, $b_2 = -0.356563782$, $b_3 = 1.781477937$, $b_4 = -1.821255978$,

$b_5 = 1.330274429$, $p = 0.2316419$, $c = 0.5\ln(2\pi)$

Βήμα 1: Θέτουμε $a = |x|$, $t = 1/(1 + ap)$, $s = ((((b_5 t + b_4)\, t + b_3)\, t + b_2)\, t + b_1)\, t$

Βήμα 2: $y = e^{-0.5x^2 - c}s$

Βήμα 3: Εάν $x > 0$ **τότε** $y = 1 - y$

Η μέγιστη απόλυτη απόκλιση του παραπάνω αλγορίθμου από την πραγματική τιμή είναι 7.5×10^{-8}.

Για την προσέγγιση της αντίστροφης της τυπικής κανονικής $\Phi^{-1}(x)$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όπως αναφέραμε και πριν, την αντίστροφη της Erf(x). Ένας άλλος σχετικά απλός αλγόριθμος που προτείνεται από τον Acklam (http://home.online.no/~pjacklam/notes/invnorm/) υπολογίζει την συνάρτηση αυτή με απόλυτη απόκλιση από την πραγματική τιμή $1.15\cdot10^{-9}$. Χωρίς να επεκταθούμε στην παρουσίασή του, αναφέρουμε ότι στην μεθοδολογία που χρησιμοποιεί χωρίζει το [0,1] σε τρία διαστήματα και υπολογίζει ξεχωριστά την συνάρτηση για κάθε διάστημα. Υπάρχει υλοποίηση των παραπάνω αλγορίθμων χρησιμοποιώντας Java στο παράρτημα.

3.5 Προσομοίωση της κίνησης Brown

3.5.1 Προσομοίωση της κίνησης Brown ως άθροισμα προσαυξήσεων (incremental)

Έστω ότι θέλουμε να προσομοιώσουμε μια τυπική κίνηση Brown (ή διαδικασία Wiener) $\{W(t), t \geq 0\}$. Είδαμε ότι $W(t) \sim N(0,t)$ και $W(0) = 0$, άρα αν $Z \sim N(0,1)$, τότε τη χρονική στιγμή T θα λέγαμε πως μια πραγματοποίηση της $W(T)$ είναι η $Z\sqrt{T}$. Έστω τώρα ότι θέλουμε να προσομοιώσουμε την τυπική κίνηση Brown τις χρονικές στιγμές $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$. Μπορούμε να παράγουμε $Z_1,\ldots,Z_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από την N(0,1). Βασιζόμενοι στο γεγονός ότι η κίνηση Brown έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις μπορούμε να έχουμε πραγματοποιήσεις της $W(t)$ τις ζητούμενες χρονικές στιγμές ως εξής:

$$W(t_{i+1}) = W(t_i) + \sqrt{t_{i+1} - t_i}\,Z_{i+1} \text{ για } i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Στις δυο παραπάνω περιπτώσεις με την μεθοδολογία που περιγράψαμε καταφέραμε να πάρουμε πραγματοποιήσεις της $W(T)$ και του τυχαίου διανύσματος $(W(t_1),\ldots W(t_n))$ που θα ακολουθούν ακριβώς την κατανομή που θα έπρεπε να έχουν δεδομένου ότι είναι σημεία μιας κίνησης Brown. Παρ' όλ' αυτά δεν είναι δυνατόν να προσομοιωθεί η $W(t)$ ως συνεχής συνάρτηση του χρόνου. Μπορούμε να θεωρήσουμε τα $\delta t_i = t_{i+1} - t_i$ πολύ μικρά, αλλά πάλι δεν θα έχουμε τη δυνατότητα να αναπαραστήσουμε την κίνηση στο χρόνο που μεσολαβεί μεταξύ t_i μέχρι t_{i+1}. Αυτή την απροσδιοριστία κατά την προσομοίωση μιας κίνησης Brown την ονομάζουμε σφάλμα διακριτοποίησης (*discretization error*).

Η προσομοίωση μιας κίνησης Brown με συντελεστή διάχυσης σ^2 και τάση μ προκύπτει άμεσα από τα παραπάνω σε συνδυασμό με τη σχέση $B(t) = \mu t + \sigma W(t)$ (βλέπε Κεφ.2)

3.5.2 Προσομοίωση με κατασκευή γέφυρας Brown (Brownian Bridge)

Η προηγούμενη μέθοδος μας έδινε τη δυνατότητα να προσομοιώσουμε μια κίνηση Brown ξεκινώντας από τη χρονική στιγμή t_0 και προσθέτοντας ανεξάρτητες προσαυξήσεις $W(t_{i+1}-t_i)$ καταλήγαμε σε προσομοίωση της τελικής τιμής στο χρόνο t_n.

Η μέθοδος της κατασκευής γέφυρας Brown ακολουθεί αντίθετη πορεία. Αρχικά έχουμε μια πραγματοποίηση της τελικής τιμής $W(t_n) = \sqrt{t_n} Z_1$. Στο επόμενο βήμα προσομοιώνουμε την τιμή της κίνησης Brown τη χρονική στιγμή t_i με $t_0 < t_i < t_n$, δεδομένης της τιμής της $W(t_n)$ και της $W(t_0)$. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται κινουμένη προς τα δεξιά του άξονα του χρόνου, δηλαδή προσομοιώνοντας την $W(t_{i+1})$ ή προς τα αριστερά προσομοιώνοντας την $W(t_{i-1})$ μέχρι να εξαντληθούν οι τιμές της κίνησης Brown που μας ενδιαφέρουν.

Έστω λοιπόν ότι γνωρίζουμε τις τιμές των μεταβλητών $W(s)$, $W(T)$ τις χρονικές στιγμές s, T αντίστοιχα και θέλουμε να παράγουμε την τιμή της $W(t)$ με $s < t < T$. Αποδεικνύεται (βλέπε Jaeckel (2002)) ότι δεδομένου των $W(s) = w_s$, $W(T) = w_T$, η τυχαία μεταβλητή $W(t)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή και διακύμανση

$$E[W(t)] = \frac{T-t}{T-s} w_s + \frac{t-s}{T-s} w_T \,, \qquad Var[W(t)] = \frac{(T-t)(t-s)}{T-s}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το πρόβλημα όπως το θέσαμε ανάγεται στην απλή περίπτωση παραγωγής μιας τυχαίας μεταβλητής

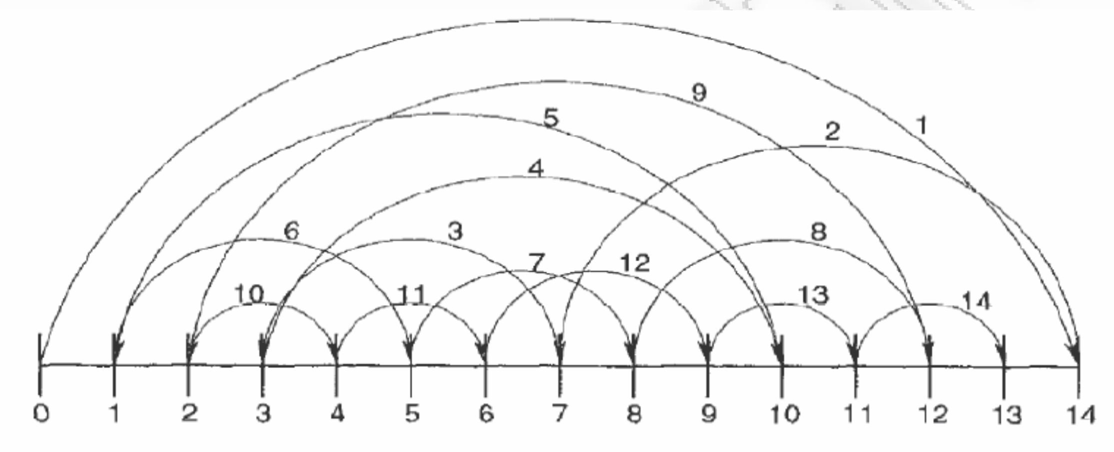
$$W(t) \sim \mathrm{N}\left(\frac{T-t}{T-s} w_s + \frac{t-s}{T-s} w_T , \frac{(T-t)(t-s)}{T-s} \right).$$

Άρα μια πραγματοποίηση της θα είναι

$$W(t) = \frac{T-t}{T-s} w_s + \frac{t-s}{T-s} w_T + \sqrt{\frac{(t-s)(T-t)}{T-s}} Z \text{, όπου } Z \sim \mathrm{N}(0,1).$$

Με τη μεθοδολογία αυτή μπορούμε να παράγουμε οποιαδήποτε μεταβλητή του τυχαίου διανύσματος ($W(t_1)$, …, $W(t_n)$) σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου. Επειδή όμως ένας αλγόριθμος απαιτεί ντετερμινιστική περιγραφή του τρόπου παραγωγής, προτείνεται να παράγουμε ως πρώτη ενδιάμεση τιμή την $t_{[n/2]}$, κατόπιν την $t_{[[n/2]/2]}$, $t_{[n-[n/2]/2]}$, κ.ο.κ. Ένα τέτοιο παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 1 για n = 14. Βέβαια η σειρά της προσομοίωσης εξαρτάται και από το εκάστοτε πρόβλημα που μας ενδιαφέρει.

Σχήμα 3.1 Κατασκευή γεφύρας Brown για n=14 (βλ Jaeckel (2002)).



Η προηγούμενη μεθοδολογία, όπου η προσομοίωση προκύπτει ως άθροισμα προσαυξήσεων είναι σαφώς πιο γρήγορη από υπολογιστική άποψη (απαιτεί πολύ λιγότερες πράξεις). Βέβαια αυτό ισχύει στην περίπτωση όπου πράγματι μας ενδιαφέρουν όλες οι τιμές του τυχαίου διανύσματος και πρέπει να το προσομοιώσουμε. Στην περίπτωση για παράδειγμα ενός Barrier δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου μια τελική τιμή $S_T < K$, όπου K η τιμή εξάσκησης, θα μας απέτρεπε από περαιτέρω προσομοίωση αφού η αξία στη λήξη του σε κάθε περίπτωση θα είναι μηδέν. Η μεθοδολογία που μόλις περιγράψαμε έχει τη δυνατότητα αυτής της μεταπήδησης σε τιμές που μας ενδιαφέρουν περισσότερο. Ο Jaeckel (2002) συγκρίνοντας τις δυο μεθόδους σε ένα παράδειγμα προσομοίωσης κίνησης Brown με t = 3, n = 12 παρατηρεί ότι η μεθοδολογία με κατασκευή γεφύρας Brown επιτυγχάνει σε αρκετές περιπτώσεις πολύ ικανοποιητικότερα αποτελέσματα. Επίσης η κατασκευή της γεφύρας Brown, θα δούμε και παρακάτω, είναι αναγκαία μεθοδολογία σε κάποιες τεχνικές προσομοίωσης.

3.6 Προσομοίωση της τιμής μιας μετοχής

Θεωρήσαμε στο Κεφαλαίο 2 ένα μοντέλο όπου η εξέλιξη της τιμής μιας μετοχής $\{S(t), t \geq 0\}$ περιγράφεται ως μια γεωμετρική κίνηση Brown, δηλαδή

$$S(t) = e^{Z(t)} \tag{3.4}$$

με $Z(t)$ μια κίνηση Brown με τάση $r - \sigma^2/2$, συντελεστή διάχυσης σ^2 και $Z(0) = \ln S(0)$, όπου r η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής, σ^2 η πτητικότητά της και $S(0)$ η αρχική τιμή της. Είδαμε πως είναι αδύνατον να έχουμε πραγματοποίηση μιας κίνησης Brown ως μια συνεχή συνάρτηση του χρόνου t. Μπορούμε μόνο να προσομοιώσουμε τις τιμές της σε συγκεκριμένα χρονικά σημεία. Το ίδιο συμβαίνει και με την τιμή μιας μετοχής. Μπορούμε να προσομοιώσουμε την τιμή της σε ορισμένα χρονικά σημεία $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n$. Προσομοιώνοντας το τυχαίο διάνυσμα $(Z(t_1),\ldots Z(t_n))$ με οποιαδήποτε από τις μεθοδολογίες που προτείναμε και από τη σχέση (3.4) θα είναι $(e^{Z(t_1)},\ldots,e^{Z(t_n)}) = (S(t_1), \ldots, S(t_n))$. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των προσαυξήσεων και με $Z_0,\ldots,Z_{n-1}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από την τυπική κανονική,

$$S(t_{i+1}) = S(t_i)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(t_{i+1}-t_i)+\sigma\sqrt{t_{i+1}-t_i}Z_i} \quad \text{για } i = 0, \ldots, n-1.$$

Κατά την προσομοίωση μιας μετοχής μπορούμε να προσεγγίσουμε τη συνεχή καταγραφή της τιμής της όταν αυτό απαιτείται (π.χ. θέλουμε να αποτιμήσουμε με προσομοίωση ένα εξωτικό δικαίωμα, όπου η συνάρτηση κέρδους απαιτεί συνεχή καταγραφή του υποκείμενου τίτλου) διαιρώντας τον χρόνο σε παρά πολύ μικρά διαστήματα. Επίσης και σε μοντέλα πού δεν θεωρούμε την πτητικότητα της μετοχής σταθερή, αλλά μια στοχαστική διαδικασία (*stochastic volatility*), υποθέτουμε ότι για $\delta t_i = t_{i+1}-t_i$ πολύ μικρά παραμένει σταθερή η παράμετρος $\sigma(t)$. Έτσι έχοντας μια πραγματοποίηση της τιμής της $\sigma(t_i)$ υποθέτουμε ότι παραμένει σταθερή στο αμέσως επόμενο διάστημα για το οποίο παράγουμε μια πραγματοποίηση της τιμής της μετοχής $S(t_{i+1})$ κ.ο.κ.

Στο εξής θα θεωρούμε τις παραμέτρους σταθερές και μάλιστα η τάση της μετοχής μ θα θεωρήσουμε ότι ισούται με $r - \sigma^2/2$, όπου r το χωρίς ρίσκο επιτόκιο (που το θεωρούμε σταθερό) και σ η πτητικότητα του υποκείμενου τίτλου, επίσης σταθερή. Δηλαδή δεν θα χρησιμοποιήσουμε ως τάση την αναμενομένη απόδοση της μετοχής, όπως αυτή προκύπτει από στατιστικές εκτιμήτριες με χρήση ιστορικών δεδομένων, αλλά υποθέτουμε ότι το χωρίς ρίσκο επιτόκιο r είναι η αναμενομένη απόδοση της μετοχής, κάτι που είναι άμεση συνεπεία της υπόθεσης της μη κερδοσκοπίας, μέσω της οποίας ορίζεται το χωρίς ρίσκο επιτόκιο για το οποίο ισχύει $E(S_T) = \mathrm{e}^{rT} S_0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Μέθοδοι προσομοίωσης για την αποτίμηση εξωτικών δικαιωμάτων προαίρεσης

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται μέθοδοι για την εκτίμηση της τιμής εξωτικών δικαιωμάτων προαίρεσης μέσω Monte Carlo προσομοίωσης. Για καλύτερα αποτελέσματα θα χρησιμοποιήσουμε μεθόδους ελάττωσης διακύμανσης των εκτιμήσεων. Η ελάττωση της διακύμανσης μιας εκτίμησης θεωρείται μείζονος σημασίας παρ' ότι το πραγματικό όφελος που αποκομίζουμε συχνά παραβλέπεται. Εξηγούμε σύντομα γιατί μας ενδιαφέρει και πώς επηρεάζεται η υπολογιστική αποτελεσματικότητα (*computational efficiency*).

Σε ένα τυπικό μοντέλο προσομοίωσης, επιθυμούμε να εκτιμήσουμε μία ποσότητα η οποία συνδέεται με ένα στοχαστικό μοντέλο – για παράδειγμα, την τιμή ενός δικαιώματος. Έστω ότι μέσω Monte Carlo παράγουμε τυχαίους αριθμούς θ_i, $i = 1,2,..,N$, που ακολουθούν την ίδια κατανομή, είναι ανεξάρτητοι, η αναμενόμενη τιμή τους είναι θ και η διακύμανση σ^2. Τότε μια απλή εκτιμήτρια του θ είναι ο δειγματικός μέσος

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\theta_i \, .$$

Σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, για μεγάλο N, ο δειγματικός μέσος προσεγγιστικά ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο θ και διακύμανση σ^2/N . Με αυτή τη προσέγγιση τα άκρα του διαστήματος εμπιστοσύνης της παραμέτρου προκύπτουν εύκολα και γίνεται φανερό ότι το σφάλμα της εκτίμησης θα είναι ανάλογο του $\sigma / \sqrt{N}$. Έτσι αν κάνουμε τη διακύμανση 10 φορές μικρότερη κρατώντας όλα τα αλλά σταθερά θα έχει την ίδια επίδραση στη μείωση του σφάλματος, όπως αν αυξάναμε το αριθμό του δείγματος, άρα και των επαναλήψεων, κατά 100 φορές.

Έστω τώρα ότι μπορούμε να παράγουμε δυο διαφορετικές ακολουθίες $\{\theta_i^{(1)}, i = 1,2,..\}$ και $\{\theta_i^{(2)}, i = 1,2,..\}$ με Ε($\theta_i^{(1)}$) = Ε($\theta_i^{(2)}$) = θ, αλλά $\sigma_1 < \sigma_2$ όπου $\sigma_j^2 = Var(\hat{\theta}^{(j)}), j = 1,2.$ Από όσα αναφέραμε παραπάνω προκύπτει ότι ο δειγματικός μέσος που υπολογίζεται με βάση N όρους από τη $\theta^{(1)}$ θα μας δώσει μια εκτίμηση του θ μεγαλύτερης ακρίβειας από ό,τι μια εκτίμηση με βάση N όρους από τη $\theta^{(2)}$. Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε ένα ξεκάθαρο κριτήριο για να επιλέξουμε τον επαναλαμβανόμενο αλγόριθμο που θα μας δώσει την ακολουθία που θέλουμε. Στην πραγματικότητα όμως εμπλέκεται και ένας επιπλέον παράγοντας, που είναι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου. Οι N επαναλήψεις της $\theta^{(1)}$ μπορεί να είναι περισσότερο χρονοβόρα διαδικασία από N επαναλήψεις της $\theta^{(2)}$, έτσι η μικρότερη διακύμανση δεν αποτελεί το μοναδικό κριτήριο επιλογής εκτιμήτριας.

Για να συγκρίνουμε εκτιμήτριες που έχουν αλγορίθμους με διαφορετική πολυπλοκότητα μπορούμε να ακολουθήσουμε μια διαφορετική διαδικασία. Έστω ότι για να παράγουμε έναν αριθμό από την ακολουθία $\theta^{(j)}$ απαιτείται χρόνος που δηλώνεται από μια σταθερά t_j , j=1,2,… (σε κάποια προβλήματα ο χρόνος ανά επανάληψη είναι τυχαία μεταβλητή, σε αυτή την περίπτωση σύμφωνα με τους Glynn and Whitt (1992) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αναμενόμενο χρόνο ανά επανάληψη). Για υπολογιστικό χρόνο σταθερό ίσο με t, μπορούμε να παράγουμε $[t/t_j]$ ορούς από την $\theta^{(j)}$. Για ευκολία δεν χρησιμοποιούμε την ακεραία τιμή του t/t_j, αλλά θεωρούμε ότι είναι ακέραιος. Τότε προκύπτει ότι οι δυο εκτιμήτριες του θ θα είναι:

$$\frac{t_1}{t}\sum_{i=1}^{t_1/t}\theta_i \quad \text{και} \quad \frac{t_2}{t}\sum_{i=1}^{t_2/t}\theta_i$$

Για μεγάλο t (σε σχέση με τα t_j) ακολουθούν προσεγγιστικά την κανονική κατανομή με μέσο θ και διακύμανση $\sigma_1^2 t_1 / t$ και $\sigma_2^2 t_2 / t$ αντίστοιχα. Συνεπώς , για μεγάλο πάντα t, η πρώτη εκτιμήτρια είναι καλύτερη αν

$$\sigma_1^2 t_1 < \sigma_2^2 t_2 \ .$$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι ισχύει το κλασικό μοντέλο Black and Scholes. Σύμφωνα με αυτό, διατίθενται στην αγορά τρείς τίτλοι:

(Α) Ένα *ομόλογο* (*riskless asset*) επί μιας χρηματικής μονάδας (*στο χρόνο* 0) με σταθερό επιτόκιο r (με συνεχή ανατοκισμό)

(Β) Μια *μετοχή* (*risky asset*) η οποία στο χρόνο t έχει αξία S_t. Η στοχαστική ανέλιξη S_t, $t\in[0,T]$ είναι μία γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους μ (drift) και σ (volatility).

(Γ) Ένα απλό *παράγωγο* (*derivative*) χρηματοοικονομικό προϊόν Ευρωπαικού τύπου επί της παραπάνω μετοχής με χρόνο λήξης T. Η αξία του στο χρόνο T, έστω $C(T)$, μπορεί να εξαρτάται από την διαδρομή της τιμής του υποκείμενου αγαθού $\{S(t), t\in[0,T]\}$.

Αποδεικνύεται ότι η *no-arbitrage* τιμή του παραγώγου στο χρόνο 0 είναι ίση με (*risk neutral pricing formula*)

$$C = e^{-rT} E_P(C(T)), \quad t\in[0,T],$$

όπου, υπό το μέτρο πιθανότητας P, η ανέλιξη της τιμής της μετοχής S_t, $t\in[0,T]$ *είναι μία γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους* $r - \sigma^2/2$ *και* σ^2 (GBM($r - \sigma^2/2$, σ^2)).

4.2 Απλή (raw - πρωτογενής) Monte Carlo προσομοίωση

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε πώς μπορούμε να προσομοιώσουμε την τιμή μιας μετοχής. Έστω $(S_{t_1}^{(i)},...,S_T^{(i)})$, $i = 1,2,\ldots,N$, πραγματοποιήσεις της διαδρομής (*path*) της τιμής μιας μετοχής με $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = T$, όπου t_0 η έναρξη ισχύος του δικαιώματος που θέλουμε να αποτιμήσουμε. Ανάλογα με το είδος του δικαιώματος προκύπτει και η αντίστοιχη συνάρτηση κέρδους $C_i(T) = \kappa(S_{t_1}^{(i)},...,S_T^{(i)})$ που θα είναι μια πραγματοποίηση της τιμής του δικαιώματος στη λήξη του. Η Monte Carlo εκτίμηση της τιμής του δικαιώματος στο χρόνο 0 σύμφωνα με το risk neutral pricing formula θα είναι,

$$\hat{C} = \frac{\sum_{i=1}^{N} e^{-rT} C_i(T)}{N} = e^{-rT} \frac{\sum_{i=1}^{N} \kappa(S_{t_1}^{(i)},...,S_T^{(i)})}{N},$$

όπου έχουμε θεωρήσει ότι η ανέλιξη της τιμής της μετοχής S_t, $t\in[0,T] \sim$ GBM($r - \sigma^2/2$, σ^2)). Το 100(1−α)% διάστημα εμπιστοσύνης για την εκτίμηση θα είναι

$$\hat{C} \pm z_{a/2} \frac{\sigma_C}{\sqrt{N}} \tag{4.1}$$

όπου σ_C^2 η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής $C_i(0) = e^{-rT} C_i(T)$ και για το $z_{\alpha/2}$ ισχύει $\Phi(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$. Η διακύμανση σ_C^2 όμως δεν είναι συνήθως γνωστή και εκτιμάται από το παραγόμενο δείγμα

$$\hat{\sigma}_C = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(C_i(0)-\hat{C})^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} C_i^2(0) - N\hat{C}^2}{N-1}}$$

Η προσομοίωση της διαδρομής της τιμής της μετοχής μπορεί να γίνει είτε με την μέθοδο των προσαυξήσεων είτε με τη μέθοδο της κατασκευής της γεφύρας Brown. Με τη μέθοδο των προσαυξήσεων χρησιμοποιούμε αναδρομικά τη σχέση

$$S_{t+\delta t} = S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\delta t + \sigma\sqrt{\delta t} Z_i}, \text{ όπου } Z_i \sim N(0,1)$$

Εάν το παράγωγο είναι συνάρτηση της διαδρομής της τιμής της μετοχής, όπως αυτή καταγράφεται κάποια προκαθορισμένη στιγμή της ημέρας, παίρνουμε $\delta t = 1/252$, δηλαδή θεωρούμε 252 τις ημέρες του χρόνου όπου γίνονται χρηματιστηριακές συναλλαγές. Εάν το δικαίωμα απαιτεί συνεχή δειγματοληψία τότε θεωρούμε το δt όσο το δυνατόν πιο μικρό για να ελαχιστοποιήσουμε το σφάλμα διακριτοποίησης. Παρακάτω παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό ενός lookback Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με καθημερινή καταγραφή της τιμής του υποκείμενου τίτλου. Η διάρκεια του είναι 3 μήνες ($T = 0.25 = 63/252$)

Βήμα 1. **Θέτουμε** N = 1000, Sum = 0, Sum2 = 0, PA = $e^{-r*t*dtday}$,

md = $(r - \sigma^2/2)$*dtday, vol_dt = $\sigma * \sqrt{dtday}$,

όπου dtday =1/252 **και** t = 63 (***ο χρόνος μέχρι τη λήξη σε εργάσιμες ημέρες***)

Βήμα 2. **Θέτουμε** S = S0, Smin = S0 **για** i = 1, 2,…, t:

S = Se^{md+vol_dtZi}, **εάν** S < Smin **τότε** Smin = S, **όπου** Zi ~ N(0,1), **ανεξ. τ.μ**.

Βήμα 3. profit = S – Smin αν S – Smin > 0, **αλλιώς** profit = 0

Sum = Sum + profit και Sum2 = Sum2 + $profit^2$

Βήμα 4. **Επαναλαμβάνουμε** N **φορές τα βήματα** 3,4.

Βήμα 5. mtimh = Sum/N

std = $\sqrt{(Sum2 - Nmtimh^2)/(N(N-1))}$

Τυπώνουμε την εκτίμηση : PA*mtimh

και το 100(1−α)% **διάστημα εμπιστοσύνης**: $PAmtimh \pm z_{a/2} PA * std$

Ο αριθμός N των επαναλήψεων είναι αντίστροφα ανάλογος με την διακύμανση της εκτίμησης που όπως παρατηρούμε από τη σχέση (4.1) επηρεάζει το εύρος του διαστήματος εμπιστοσύνης, δηλαδή την ακρίβεια της εκτίμησης. Όσο αυξάνουμε τον αριθμό των επαναλήψεων αυξάνεται και ο υπολογιστικός χρόνος. Παρακάτω παρουσιάζουμε μεθοδολογίες όπου πετυχαίνουμε μείωση της διακύμανσης της εκτίμησης $\sigma_C / \sqrt{N}$ διατηρώντας σταθερό τον αριθμό των επαναλήψεων.

4.3 Αντιθετικές τυχαίες μεταβλητές (*antithetic variates*)

Η μέθοδος των αντιθετικών μεταβλητών αποσκοπεί στη μείωση της διακύμανσης παράγοντας σε κάθε επανάληψη ένα ζεύγος πραγματοποιήσεων με αρνητική συσχέτιση μεταξύ τους. Έστω θ_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, ανεξάρτητες πραγματοποιήσεις της μεταβλητής της οποίας θέλουμε να εκτιμήσουμε την αναμενόμενη τιμή. Η διασπορά της απλής εκτιμήτριας θα είναι $V(\bar{\theta}) = \sigma^2 / N$. Αν όμως παράγουμε τους τυχαίους αριθμούς θ_1, θ_2, ..., θ_N με τέτοιο τρόπο ώστε να μην είναι όλοι ανεξάρτητοι, τότε

$$V\ (\bar{\theta}) = \frac{1}{N^2} V(\sum_{i=1}^{n} \theta_i) = \frac{1}{N^2} (\sum_{i=1}^{n} V(\theta_i) + 2\sum_{i<j} Cov(\theta_i, \theta_j)) = \frac{\sigma^2}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{i<j} Cov(\theta_i, \theta_j)$$

Άρα, αν οι $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ είναι αρνητικά συσχετισμένοι, δηλαδή $Cov(\theta_i, \theta_j) < 0$ τότε $V(\bar{\theta}) < \sigma^2 / N$ και με το ίδιο μέγεθος δείγματος N θα λαμβάνουμε καλύτερες εκτιμήσεις. Μία αρκετά απλή και αποτελεσματική μέθοδος παραγωγής αρνητικά συσχετισμένων πραγματοποιήσεων μιας τυχαίας μεταβλητής είναι η μέθοδος των αντιθετικών μεταβλητών.

Έστω ότι κάθε ένας από τους τυχαίους αριθμούς θ_1, θ_2, ..., θ_N παράγεται με βάση τα m-διάστατα τυχαία διανύσματα $\mathbf{U}_i = (U_1^{(i)}, U_2^{(i)}, .., U_m^{(i)})$, $i = 1, 2, ..., N$ από την $U^m[0,1]$, δηλαδή

$$\theta_1 = h(\mathbf{U}_1),\ \theta_2 = h(\mathbf{U}_2),\ ...,\ \theta_N = h(\mathbf{U}_N).$$

Αν τώρα η συνάρτηση h είναι μονότονη, δηλαδή αύξουσα ή φθίνουσα[1], η εφαρμογή ενός πολύ γνωστού θεωρήματος από τη θεωρία των συναφών (*associated*) τυχαίων μεταβλητών μας αποκαλύπτει μια σχετικά απλή μέθοδο για την παραγωγή ζευγών τυχαίων αριθμών (θ_1, θ_1'), …, (θ_N, θ_N') με αρνητική συσχέτιση.

---

[1] Στο εξής, όπου αναφέρεται ότι μία συνάρτηση h: $R^m \rightarrow R$ είναι αύξουσα (αντίστοιχα, φθίνουσα) θα εννοείται ότι αυτή είναι μη-φθίνουσα κατά συντεταγμένη, (αντίστοιχα, μη-αύξουσα κατά συντεταγμένη)

Θεώρημα 4.2.1 *Αν $X_1, X_2, \ldots, X_m$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τότε για κάθε ζεύγος αυξουσών συναρτήσεων f, g: $R^m \to R$, θα ισχύει ότι:*

$$Cov(f (X_1,X_2,..,X_m),\ g(X_1,X_2,..,X_m)) \geq 0$$

(*αρκεί να ορίζεται η συνδιακύμανση*).

Έστω h αύξουσα. Τότε και η $-h(1-\mathbf{U})$ επίσης αύξουσα και συνεπώς

$$\mathrm{Cov}(h(\mathbf{U}_i), -h(1-\mathbf{U}_i))) \geq 0 \iff \mathrm{Cov}(h(\mathbf{U}_i), h(1-\mathbf{U}_i)) \leq 0$$

Όμοια αποδεικνύεται η παραπάνω ανισότητα όταν η h είναι φθίνουσα (θεωρούμε τις συναρτήσεις $-h(\mathbf{U})$ και $h(1-\mathbf{U})$).

Άρα, για κάθε παραγόμενο $\theta_i = h(U_1^{(i)}, U_2^{(i)}, .., U_m^{(i)})$, το $\theta_i' = h(1-U_1^{(i)}, 1-U_2^{(i)}, .., 1-U_m^{(i)})$ θα έχει την ίδια κατανομή με το θ_i (με μέση τιμή θ), αφού $\mathbf{U}_i$, $1 - \mathbf{U}_i$ έχουν επίσης ίδια κατανομή, και εφ' όσον η h είναι μονότονη, το παραγόμενο ζεύγος θα έχει αρνητική συσχέτιση αφού σύμφωνα με τα παραπάνω $\mathrm{Cov}(\theta_i,\theta_i') = \mathrm{Cov}(h(\mathbf{U}_i), h(1 - \mathbf{U}_i)) \leq 0$.

Στην περίπτωση τώρα που θέλουμε να παράγουμε $\theta_1 = h(\mathbf{Z}_1)$, $\theta_2 = h(\mathbf{Z}_2)$, ..., $\theta_N = h(\mathbf{Z}_N)$ με $\mathbf{Z}_i \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, $i = 1,2,\ldots,N$, στηριζόμενοι πάλι στο παραπάνω θεώρημα και παρατηρώντας ότι $\mathbf{Z}$, $-\mathbf{Z}$ έχουν την ίδια κατανομή, το ζεύγος $\theta_i = h(\mathbf{Z}_i)$ και $\theta_i' = h(-\mathbf{Z}_i)$ θα έχει επίσης την ίδια κατανομή και αρνητική συσχέτιση.

Για τις περιπτώσεις όπου U, $1-U \sim \mathrm{U}[0,1]$ και Z, $-Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ παρατηρούμε ότι $(U + (1 - U))/2 = 1/2$ και $(Z + (-Z))/2 = 0$, δηλαδή για κάθε πραγματοποίηση τους θα αποδίδουν ακριβώς τη μέση τιμή της κατανομής τους. Άρα αν θέλουμε να εκτιμήσουμε την αναμενόμενη τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής $X = h(U_1,U_2,..,U_m)$ ή $X = h(Z_1,Z_2,..,Z_m)$, με h γραμμική συνάρτηση, τότε η εκτίμηση με χρήση αντιθετικών μεταβλητών θα μας αποδώσει ακριβώς την τιμή θ, δηλαδή θα έχουμε μηδενική διακύμανση. Βέβαια όταν η h είναι γραμμική, η χρήση προσομοίωσης δεν είναι απαραίτητη, αλλά η παρατήρηση είναι σημαντική γιατί υποδεικνύει ότι όσο περισσότερο τείνει η h σε μία γραμμική συνάρτηση τόσο περισσότερο αποτελεσματική είναι αυτή η μέθοδος.

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε με προσομοίωση την τιμή ενός εξωτικού δικαιώματος ή γενικά οποιουδήποτε δικαιώματος που εξαρτάται από την διαδρομή του υποκείμενου τίτλου (*path depended*). Όπως είδαμε, για να προσομοιώσουμε μια διαδρομή (*path*) της τιμής του υποκείμενου τίτλου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αναδρομικό τύπο:

$$S_{i+1} = S_i\ e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}Z_i},\ i=0,1,\ldots,m-1$$

με S_0 την αρχική τιμή της μετοχής, r το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο, σ την τυπική απόκλιση της τιμής του υποκείμενου τίτλου (*volatility parameter*), T το χρόνο μέχρι τη λήξη του δικαιώματος, $\delta t = T/m$ όπου m φορές θα καταγράψουμε την τιμή του υποκείμενου τίτλου στο χρόνο T και $Z_1, Z_2, \ldots$ τυχαίοι αριθμοί από την N(0,1) ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Η συνάρτηση κέρδους ανεξάρτητα από το είδος του δικαιώματος θα είναι μια συνάρτηση της καταγεγραμμένης πορείας της μετοχής, με

$$\kappa(S_1,\ldots,S_m) = h(Z_1,..,Z_m).$$

Αν τώρα η h είναι μονότονη συνάρτηση των $Z_1,\ldots Z_m$, τότε σε N επαναλήψεις με τη μέθοδο των αντιθετικών μεταβλητών θα εκτιμήσουμε τη μέση τιμή του κέρδους από το συγκεκριμένο δικαίωμα (και από εκεί την no-arbitrage τιμή του στο χρόνο 0) πετυχαίνοντας σημαντική μείωση της διακύμανσης της εκτίμησης.

Εφαρμογή (*down and out δικαίωμα αγοράς*). Σύμφωνα με το γενικό αποτέλεσμα (*risk neutral pricing formula*) η no-arbitrage τιμή στο χρόνο 0 ενός down and out δικαιώματος αγοράς θα είναι

$$C = e^{-rT} E_P((S_T - K)^+ \cdot I\{\min_{t\in[0,T]} S_t > H\})$$

Με βάση τον παραπάνω τύπο, ο αλγόριθμος εκτίμησης της τιμής ενός down and out δικαιώματος αγοράς χρησιμοποιώντας αντιθετικές τ.μ. είναι ο ακόλουθος:

Βήμα 1. Θέτουμε N = 1000, N = N/2, Sum = 0, Sum2 = 0, PA = $e^{-r*t*dtday}$, md = $(r-\sigma^2/2)$dtday, vol_dt = $\sigma * \sqrt{dtday}$, **όπου** dtday = 1/252 **και** t (***ο χρόνος μέχρι τη λήξη σε εργάσιμες ημέρες***)

Βήμα 2. Θέτουμε S1 = S2 = S0, barrier_crossed1 = barrier_crossed2 = false, **για** i = 1, 2, ..., t : S1 = S1e^{md+vol_dtZi}, S2 = S2$e^{md+vol_dt(-Zi)}$ **όπου** Zi ~ N(0,1), **ανεξ. τ.μ. και** barrier_crossed1 = true **αν** S1 < H, barrier_crossed2 = true **αν** S2 < H

Βήμα 3. profit1 = S1 − K **αν** (S1 − K > 0 **και** barrier_crossed1 = false) **αλλιώς** 0
profit2 = S2 − K **αν** (S2 − K > 0 **και** barrier_crossed2 = false) **αλλιώς** 0
profit = (profit1 + profit2)/2 **και** Sum = Sum + profit **και** Sum2 = Sum2 + profit^2.

Βήμα 4. Επαναλαμβάνουμε N **φορές τα βήματα** 2,3.

Βήμα 5. mtimh = Sum/N

$$std = \sqrt{(Sum2 - Nmtimh^2)/(N(N-1))}$$

Τυπώνουμε την εκτίμηση : PA*mtimh

και το $100(1-\alpha)\%$ **διάστημα εμπιστοσύνης**: $PA \cdot mtimh \pm z_{a/2} PA * std$

Στον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση του δείγματος πλήθους $N/2$ αποτελούμενο από τις μέσες τιμές των παραγομένων ζευγών $(\theta_i + \theta_i')/2$ και όχι από το πλήθος των N εκτιμήσεων, γιατί τα $N/2$ ζεύγη εκτιμήσεων είναι ανεξάρτητα αλλά οι N εκτιμήσεις όχι. Στη συνέχεια υλοποιούμε τον παραπάνω αλγόριθμο μέσω της γλώσσας προγραμματισμού Java και εκτιμούμε την τιμή ενός τέτοιου δικαιώματος και υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση της εκτίμησης για N = 500000 ($r = 0.1$, $vol = 0.2$, $S0 = 100$, $K = 90$, $H = 98$, $T = 20/252$):

```
class downandout
{public static void main(String arg[])
  {
   double r=0.1,vol=0.2,S0=100,K=90,H=98,N=500000,dt=1.0/252;
   double Si1,Si2,z,profit1=0,profit2=0,profit=0,Sum=0,Sum2=0,mtimh,std;
   boolean barrier_crossed1=false,barrier_crossed2=false;
   int t=20,i,j;
   double  md=(r-vol*vol/2)*dt,vol_dt=vol*Math.sqrt(dt),PA=Math.exp(-r*t*dt);
   Generator typikh=new Generator();
   for(i=1;i<=N;i++)
        {
           barrier_crossed1=false;
           barrier_crossed2=false;
           Si1=S0;
           Si2=S0;
           j=0;
           do
                {
                    j=j+1;
                    z=typikh.normal();
                    Si1=Si1*Math.exp(md+vol_dt*z);
                    Si2=Si2*Math.exp(md+vol_dt*(-z));
                    if(Si1<H)
                           barrier_crossed1=true;
                    if(Si2<H)
                           barrier_crossed2=true;
                } while((!barrier_crossed1 ||!barrier_crossed2) && j<t);
            profit1=((Si1-K)>0 && !barrier_crossed1)?(Si1-K):0;
            profit2=((Si2-K)>0 && !barrier_crossed2)?(Si2-K):0;
            profit=(profit1+profit2)/2.0;
            Sum+=profit;
            Sum2+=profit*profit;
           }
  mtimh=Sum/N;
  std=PA* Math.sqrt((Sum2-N*mtimh*mtimh)/((N-1)*N));
  System.out.println("Replications:"+String.valueOf(2*N));
  System.out.println ("  Estimated cost:"+String.valueOf(PA*mtimh)+"
std="+String.valueOf(std));
  }}
```

Η εκτιμωμένη τιμή του δικαιώματος είναι $C_{do} = 6{,}274$ με τυπικό σφάλμα $s = 0{,}0042$ για $N = 500000$ επαναλήψεις, δηλαδή έχοντας παράγει N ζεύγη ή $2N$ όρους.

Για την παραγωγή $2N$ όρων χωρίς τη χρήση της μεθόδου των αντιθετικών μεταβλητών απαιτείται περίπου ίσος υπολογιστικός χρόνος, συν το χρόνο για τη παραγωγή N επιπλέον $Z \sim N(0,1)$. Συνυπολογίζοντας τη μείωση του τυπικού σφάλματος που πετυχαίνουμε συμπεραίνουμε ότι η εκτιμήτρια που προκύπτει με τη χρήση αντιθετικών μεταβλητών είναι συμφέρουσα.

Η μονοτονία της συνάρτησης κέρδους $\kappa(S_1,\ldots S_m) = h(Z_1,..,Z_m)$ ως προς Z_i κατά τον υπολογισμό εξωτικών δικαιωμάτων προαίρεσης επηρεάζει την αποτελεσματικότητα της μεθόδου αλλά όταν δεν ικανοποιείται δεν είναι απαγορευτική ως προς τη χρήση της, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 1 όπου συγκρίνονται οι τυπικές αποκλίσεις του down and out call (μονότονη συνάρτηση κέρδους) με το down and in call (όχι μονότονη συνάρτηση κέρδους).

Πίνακας 4.1

Τυπικά σφάλματα για down and out και down and in δικαιώματα αγοράς.[2]

S_0=100		**down and out**		**down and in**	
σ	**K**	Χωρίς ελάττωση διακύμανσης	Μέθοδος αντιθετικών μεταβλητών	Χωρίς ελάττωση διακύμανσης	Μέθοδος αντιθετικών μεταβλητών
0,2	90	0,112	0.051	0,071	0,048
	100	0,051	0.030	0,023	0,014
	110	0,011	0.008	0,004	0,002
0,4	90	0,144	0,088	0,111	0,071
	100	0,094	0.059	0,064	0,041
	110	0,049	0.035	0,028	0,019
0,6	90	0,179	0.114	0,153	0,089
	100	0,133	0.090	0,102	0,067
	110	0,091	0.064	0,071	0,043

Όλα τα αποτελέσματα βασίζονται σε N=10000 επαναλήψεις. Οι παράμετροι και για τα δυο δικαιώματα είναι $S_0 = 100$, $r = 0.10$, $H = 98$, $T = 20/252$ και με το K και το σ να μεταβάλλεται όπως φαίνεται στον πίνακα. Η πορεία της τιμής του υποκείμενου τίτλου καταγράφεται κάθε μέρα.

Δουλεύοντας εναλλακτικά για το down and in call μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή ενός απλού Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με τον αναλυτικό του τύπο, την τιμή του

[2] Τα προγράμματα σε Java υπάρχουν στο παράρτημα

down and out δικαιώματος αγοράς με αντιθετικές μεταβλητές και υστέρα να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $C_{di} = C - C_{do}$ που είδαμε στο Κεφάλαιο 2. Όμοια μπορούμε να δουλέψουμε και στην περίπτωση του δικαιώματος πώλησης καθώς και στην περίπτωση των up and out και up and in.

Μονοτονία της $h(\mathbf{Z})$ για Barrier call δικαιώματα.

	down and in	**down and out**	**up and out**	**up and in**
h(**Z**)	ΟΧΙ	ΝΑΙ (αύξουσα)	ΟΧΙ	ΝΑΙ (αύξουσα)

4.4 Ρυθμιστικές μεταβλητές (*control variates*)

Η μέθοδος των ρυθμιστικών μεταβλητών ή μεταβλητών ελέγχου (*control variates*) είναι πολύ χρήσιμη και αποδοτική στην ελάττωση της διακύμανσης κατά τον υπολογισμό της τιμής ενός δικαιώματος προαίρεσης. Βασίζεται στην απλή αρχή «*χρησιμοποίησε ό,τι γνωρίζεις*».

Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε με προσομοίωση την αναμενομένη τιμή $E(X) = \theta$ της τυχαίας μεταβλητής X και για το λόγο αυτό παράγουμε $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητα αντίγραφα της X (ακολουθούν την κατανομή της X και είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους). Τότε η

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \,,$$

είναι μια αμερόληπτη και συνεπής εκτιμήτρια του $E(X) = \theta$. Έστω ότι, παράλληλα, κατά την προσομοίωση του X μπορούμε και παράγουμε και ανεξάρτητα αντίγραφα $Y_1, Y_2, .., Y_n$ μιας τυχαίας μεταβλητής Y. Αν η αναμενομένη τιμή της Y, $E(Y) = \mu$ είναι γνωστή τότε η τ.μ.

$$X(\beta) = X + \beta(Y - \mu)$$

θα έχει την ιδία μέση τιμή με την X. Η Y ονομάζεται ρυθμιστική μεταβλητή. Για κάθε σταθερά β προκύπτει μια αμερόληπτη και συνεπής εκτιμήτρια της $E(X) = \theta$, η

$$\overline{X}(\beta) = \overline{X} + \beta(\overline{Y} - \mu)\,.$$

Έτσι από τις τιμές που μπορεί να πάρει το β μπορούμε να αναζητήσουμε εκείνη που θα μας δίνει την μικρότερη διακύμανση στην εκτίμηση του θ. Αν για παράδειγμα οι X, Y είναι θετικά συσχετισμένες τότε και οι $\overline{X}, \overline{Y}$ θα είναι το ίδιο, οπότε χρειαζόμαστε ένα β αρνητικό, ώστε όταν και οι δυο θα παίρνουν ταυτόχρονα υψηλές ή μικρές τιμές σε μια πραγματοποίησή τους η διαφορά τους θα παρουσιάζει μικρότερη διαφοροποίηση από το μέσο που θέλουμε να εκτιμήσουμε. Παρόμοια όταν θα είναι αρνητικά συσχετισμένες, χρειαζόμαστε το β να είναι θετικό οπότε όταν το *X* είναι μεγάλο και το *Y* είναι μικρό, το άθροισμα τους να δίνει επίσης ένα πιο ακριβές αποτέλεσμα. Για να υπολογίσουμε την καλύτερη τιμή του β κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι η διακύμανση της *X*(β) είναι

$$Var(X(\beta)) = \sigma_X^2 + 2\beta\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} + \beta^2\sigma_Y^2 = \sigma^2(\beta),$$

όπου ρ_{XY} είναι η συσχέτιση μεταξύ *X* και *Y*. Εύκολα προκύπτει ότι η παραπάνω παράσταση ελαχιστοποιείται για

$$\beta^* = -\rho_{XY}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}, \tag{4.2}$$

και για αυτή την τιμή του β έχουμε

$$\sigma^2(\beta) = (1-\rho_{XY}^2)\sigma_X^2 .$$

Επειδή είναι $Var(\overline{X}(\beta)) = \sigma^2(\beta)/n$, η διακύμανση της νέας εκτιμήτριας θα είναι

$$Var(\overline{X}(\beta)) = \frac{(1-\rho_{XY}^2)\,\sigma_X^2}{n}.$$

Με τη νέα εκτιμήτρια πετυχαίνουμε ελάττωση διακύμανσης σε σχέση με την παλιά που φαίνεται από το λόγο τους,

$$\frac{Var(\overline{X}(\beta))}{Var(\overline{X})} = 1-\rho_{XY}^2 . \tag{4.3}$$

Παρατηρούμε ότι με την επιλογή του βέλτιστου β^* πετυχαίνουμε μείωση της διακύμανσης που εξαρτάται από την συσχέτιση των *X*, *Y*. Το πρόσημο της συσχέτισης είναι αδιάφορο. Επίσης η σχέση (4.3) μετράει και την υπολογιστική βελτιστοποίηση που πετυχαίνουμε. Αν υποθέσουμε ότι η πολυπλοκότητα των δυο αλγορίθμων προσομοίωσης είναι ίδια, τότε ο αριθμός των επαναλήψεων που απαιτεί η απλή εκτιμήτρια για να πετύχει την ίδια διακύμανση με εκείνη που πετυχαίνουμε με *n* επαναλήψεις με τη χρήση μεταβλητών ελέγχου θα είναι $n/(1-\rho_{XY}^2)$.

Στην πράξη τώρα οι παραπάνω θεωρητικές παρατηρήσεις συναντούν δυσκολία στο γεγονός ότι η βέλτιστη σταθερά β^* δεν είναι γνωστή. Από τη στιγμή που η *E*(*X*) δεν είναι γνωστή, είναι απίθανο να γνωρίζουμε τις σ_X, ρ_{XY} ώστε να υπολογίσουμε το β^* από την (4.2). Παρόλα αυτά μπορούμε να παράγουμε ζεύγη (X_i, Y_i), $i = 1,2, .., m$, για την εκτίμηση του $\hat{\beta}^*$. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα *n* ζεύγη που έχουν παραχθεί για την εκτίμηση του $E(X)$ για n μεγάλο, παρ' όλο που αυτό θα επηρεάσει την αμεροληψία της εκτιμήτριας (Bolia and Juneja (2005)). Έτσι αν έχουμε n επαναλήψεις θα προκύψουν X_i, Y_i, $i = 1, 2, ...,n$, και θα έχουμε

$$\hat{\beta}^* = -\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2} \quad . \qquad (4.4)$$

Μια εναλλακτική μορφή του τύπου (4.4) είναι

$$\hat{\beta}^* = -\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\overline{X}\overline{Y}}{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\overline{Y}^2} .$$

Παρατηρούμε ότι η εκτίμηση του $-\beta^*$ μέσω της (4.4) είναι η εκτιμήτρια ελαχίστων τετραγώνων της κλίσης της ευθείας γραμμικής παλινδρόμησης των ζευγών (X_i, Y_i) $i = 1, 2, \ldots, n$. Έτσι μπορούμε και με ένα οποιοδήποτε στατιστικό πακέτο να υπολογίσουμε το β^*.

Αναζητώντας μεταβλητές ελέγχου για την αποτίμηση των εξωτικών δικαιωμάτων προαίρεσης μέσω προσομοίωσης μας ενδιαφέρουν μεταβλητές με (α) γνωστή μέση τιμή $E(Y)$, (β) υψηλή συσχέτιση με την τελική τιμή του δικαιώματος.

4.4.1 Οι υποκείμενοι τίτλοι ως μεταβλητές ελέγχου

Στην αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης μέσω προσομοίωσης, το σύνολο των υποκειμένων τίτλων αποτελούν μια σημαντική πηγή ρυθμιστικών μεταβλητών. Με την υπόθεση της μη κερδοσκοπίας (*no-arbitrage*) εξασφαλίζουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $e^{-rt}S(t)$, $t \geq 0$ είναι ένα martingale (θεωρώντας ότι $S \sim \text{GBM}(r - \sigma^2/2, \sigma^2)$) και τότε άμεσα έχουμε γνωστή τη μέση τιμή $E(e^{-rt}S(t)) = S(0)$ αφού όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 2 ένα martingale έχει σταθερή μέση τιμή.

Έστω λοιπόν ότι θέλουμε να αποτιμήσουμε ένα δικαίωμα πάνω στη μετοχή με τιμή που περιγράφεται από τη στοχαστική διαδικασία $\{S(t), 0 \leq t \leq T\}$, με παρούσα αξία του τελικού κέρδους από τη χρήση του δικαιώματος X. Έστω επίσης ότι θα χρησιμοποιήσουμε ως μεταβλητή ελέγχου την τυχαία μεταβλητή $S(T)$ που είναι η τιμή του υποκείμενου τίτλου στη λήξη του δικαιώματος. Τότε, με ανεξάρτητες επαναλήψεις του S_i, i=1,2,...,n, όπου κάθε S_i είναι η διαδρομή της τιμής του υποκείμενου τίτλου στο χρονικό διάστημα [0, T], παίρνουμε την εξής εκτιμήτρια:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[X_i + \beta(S_i(T) - e^{rT}S(0))].$$

Το *X* τώρα μπορεί να είναι το τελικό κέρδος από ένα οποιοδήποτε δικαίωμα προαίρεσης. Στον Πίνακα 2 έχουμε τις περιπτώσεις όπου το *X* είναι η τιμή ενός τυπικού Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς (*plain vanilla call*), ενός Ασιατικού τύπου δικαιώματος αγοράς (*arithmetic average call option*) και ενός barrier call option (*down and out*) στη λήξη τους και εκτιμάται η συσχέτισή τους με τον υποκείμενο τίτλο. Από τις τιμές της συσχέτισης παρατηρούμε ότι ο υποκείμενος τίτλος ως μεταβλητή ελέγχου είναι αποτελεσματικός σε κάποιες περιπτώσεις ανάλογα με τις παραμέτρους του προβλήματος.

Πίνακας 4.2

Εκτιμώμενη συσχέτιση με τον υποκείμενο τίτλο[3]

K			40	45	50	55	60	65	70
ρ (ρ^2%)	**plain vanilla call**		0.995(98.9%)	0.968(93.7%)	0.896(80.2%)	0.768(59%)	0.604(36.5%)	0.434(18.9%)	0.285(8.1%)
	arithmetic average call		0.868(75.3%)	0.86(74%)	0.779(60.6%)	0.55(31.3%)	0.294(8.6%)	0.115(1.3%)	0.031(0.1%)
	down and out call	**H** 35	0.995(98.9%)	0.968(93.7%)	0.895(80.1%)	0.768(59%)	0.603(36.4%)	0.43(18.5%)	0.286(8.2%)
		H 45	0.881(77.7%)	0.897(80.4%)	0.862(74.3%)	0.755(57%)	0.597(35.7%)	0.431(18.6%)	0.283(8%)
		H 48	0.678 (46%)	0.695(48.4%)	0.695(48.3%)	0.643(41.3%)	0.532(28.3%)	0.394(15..5%)	0.266(7.1%)

Εκτιμώμενη συσχέτιση $\hat{\rho}$ μεταξύ S(T) και $(S(T) - K)^+$, $(\bar{S}_A - K)^+$, $(S(T) - K)^+$ αν S(t) > H, για διάφορες τιμές των K, H και με S(0) = 50, σ = 0.3, r = 0.05, t = 90 ημέρες. Στην παρένθεση έχει υπολογιστεί η επί τοις % ελάττωση της διακύμανσης που πετυχαίνουμε με τη χρήση του υποκείμενου τίτλου ως μεταβλητή ελέγχου.

Στον Πίνακα 4.2 μεταβάλλουμε μόνο το strike price ή και το φράγμα barrier για το down and out. Παρατηρούμε ότι η συσχέτιση με τον υποκείμενο τίτλο (άρα και η αποτελεσματικότητά του ως μεταβλητή ελέγχου) είναι μεγάλη όταν το *K* είναι πολύ μικρότερο από το *S*(0), ενώ το αντίθετο συμβαίνει όταν το *K* είναι πολύ μεγαλύτερο από το *S*(0). Επίσης στην περίπτωση του down and out Barrier παρατηρούμε ότι όσο πιο κοντά βρίσκεται το φράγμα *H* στο *S*(0) τόσο μικρότερη γίνεται η συσχέτιση, κάτι που εξηγείται από το γεγονός ότι το δικαίωμα θα γίνει πιο εύκολα ανενεργό και δεν θα ακολουθεί την πορεία του υποκείμενου τίτλου. Λογικά θα αναμένουμε το αντίθετο για ένα down and in δικαίωμα.

[3] Τα αντίστοιχα προγράμματα σε Java υπάρχουν στο παράρτημα

Επίσης ανάλογα με την περίπτωση θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και μια συνάρτηση της διαδρομής του υποκείμενου τίτλου. Για παράδειγμα, για το δικαίωμα Ασιατικού τύπου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως ρυθμιστική μεταβλητή και τη

$$Y = \sum_{k=1}^{n} S(t_k) \, .$$

Ως συμπέρασμα θα μπορούσαμε να πούμε πως ο υποκείμενος τίτλος μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά ως μεταβλητή ελέγχου για συγκεκριμένες τιμές παραμέτρων του προς εκτίμηση δικαιώματος.

4.4.2 Δικαιώματα με γνωστό αναλυτικό τύπο ως μεταβλητές ελέγχου

Ως μεταβλητές ελέγχου μπορούν να χρησιμοποιηθούν άλλα δικαιώματα των οποίων η τιμή μπορεί να υπολογιστεί από αναλυτικό τύπο.

Μια αποτελεσματική χρήση αυτής της μεθόδου παρουσιάζεται από τους Kemna and Vorst (1990) για την αποτίμηση ενός δικαιώματος Ασιατικού τύπου. Θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο αυτή για ένα Ασιατικό δικαίωμα που βασίζεται στον αριθμητικό μέσο της τιμής μιας μετοχής σε n χρονικές στιγμές. Όπως και παραπάνω θεωρούμε ότι η ανέλιξη της τιμής της μετοχής ($S(t), 0 \le t \le T$) ακολουθεί μία GBM($r - \sigma^2/2$, σ^2) (υπό το χωρίς ρίσκο μέτρο πιθανότητας). Θέλουμε να υπολογίσουμε την αξία του Ασιατικού τύπου δικαιώματος του οποίου η αξία τη χρονική στιγμή T ισούται με

$$(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S(t_k) - K)^+ ,$$

όπου K είναι η τιμή εξάσκησης (*strike price*) και $t_k = kT/n$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Ακολουθώντας την κλασική μεθοδολογία μπορούμε να πάρουμε τιμές για την μετοχή τις χρονικές στιγμές $t_k = kT/n$, $k = 0, 1, \ldots, n$, με χρήση της σχέσης

$$S(t_{k+1}) = S(t_k)\; e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\delta t + \sigma\sqrt{\delta t} Z_k} , \; k = 0, 1,.., n-1,$$

με $Z_k \sim \mathrm{N}(0,1)$ και $\delta t = T/n$. Χρησιμοποιούμε ως ρυθμιστική μεταβλητή ένα παρόμοιο δικαίωμα που βασίζεται στον γεωμετρικό μέσο της τιμής της μετοχής σε n χρονικές στιγμές, για το οποίο υπαρχει αναλυτικός τύπος. Πιο συγκεκριμένα η αξία ενός τέτοιου δικαιώματος την χρονική στιγμή T στην λήξη του θα είναι

$$((\prod_{k=1}^{n} S(t_k))^{\frac{1}{n}} - K)^+$$

και αφού

$$A_G = (\prod_{k=1}^{n} S(t_k))^{\frac{1}{n}} = (S(t_1)...S(t_n))^{\frac{1}{n}}$$

$$= (S(t_0)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}Z_1} S(t_0)e^{2(r-\frac{\sigma^2}{2})\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}(Z_1+Z_2)} ...S(t_0)e^{n(r-\frac{\sigma^2}{2})\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}\sum_{k=1}^{n}Z_k})^{\frac{1}{n}}$$

$$= (\prod_{k=1}^{n} S(t_k))^{\frac{1}{n}} = e^{\ln S(t_0)+\frac{1+n}{2}(r-\frac{\sigma^2}{2})\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}\frac{1}{n}(nZ_1+(n-1)Z_2...+Z_n)},$$

η A_G θα ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή με

$$E[\ln A_G] = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \ln S(t_0) = \mu_G T + \ln S(t_0)\,, \qquad (1)$$

$$Var[\ln A_G] = T\frac{1}{n^3}\sigma^2(n^2+(n-1)^2...+1)$$

$$= T\frac{1}{n^3}\sigma^2\frac{1}{6}n(1+n)(1+2n) = T\frac{\sigma^2}{3}(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{2n}) = T\sigma_G^2 \qquad (2)$$

και

$$E[A_G] = S(t_0)e^{T(\mu_G+\sigma_G^2/2)}.$$

Σε αυτή την περίπτωση η αναμενομένη τιμή της αξίας του δικαιώματος τη χρονική στιγμή T μπορεί να εκτιμηθεί όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2. Συγκεκριμένα θα είναι

$$E[\max\{A_G - K, 0\}] = E[A_G]\ \Phi(d_1) - K\ \Phi(d_2) = S(t_0)e^{T(\mu_G+\sigma_G^2/2)}\Phi(d_1) - K\Phi(d_2) \text{ για } K\in\mathrm{R},$$

όπου $\Phi(x)$ είναι η σ.κ. της N(0,1) και

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{E[A_G]}{K}) + \frac{T\sigma_G^2}{2}}{\sqrt{T}\sigma_G} = \frac{\ln(\frac{S(t_0)e^{T(\mu_G+\sigma_G^2/2)}}{K}) + \frac{T\sigma_G^2}{2}}{\sqrt{T}\sigma_G} = \frac{\ln(\frac{S(t_0)e^{T(\mu_G+\sigma_G^2/2-r)}}{K}) + T(\frac{\sigma_G^2}{2}+r)}{\sqrt{T}\sigma_G},$$

$$d_2 = d_1 - \sqrt{T}\sigma_G.$$

Άρα για το δικαίωμα αγοράς (*call*) Ασιατικού τύπου με βάση τον γεωμετρικό μέσο θα ισχύει

$$C_G = e^{-rT}E[\max\{A_G - K, 0\}] = S(t_0)e^{(\mu_G+\sigma_G^2/2-r)T}\Phi(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2).$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή του δικαιώματος αγοράς ενός Ασιατικού δικαιώματος Ευρωπαϊκού τύπου που βασίζεται στο γεωμετρικό μέσο με καταγραφή της τιμής του υποκείμενου τίτλου n φορές ανά ίσα χρονικά διαστήματα $\delta t = T/n$ στην ουσία δίνεται από τον τυπο του τυπικού (*vanilla*) δικαιώματος αγοράς αν αντικαταστήσουμε την αρχική τιμή του τίτλου S_0 και το σ με

$$S_0 = S(t_0)e^{T(\mu_G+\sigma_G^2/2-r)}, \quad \text{με} \quad \mu_G = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})(r-\frac{\sigma^2}{2}) \ ,$$

και

$$\sigma = \sigma_G = \sigma\sqrt{\frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{2n})} \ ,$$

αντίστοιχα.

Τα ίδια ισχύουν και για το αντίστοιχο δικαίωμα πώλησης (*put*). Άρα οι τιμές των C_G και P_G μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ρυθμιστικές μεταβλητές για την εκτίμηση των C_A και P_A αντίστοιχα.

Ο αλγόριθμος εκτίμησης της τιμής ενός δικαιώματος αγοράς Ασιατικού τύπου που βασίζεται στον αριθμητικό μέσο της τιμής μιας μετοχής σε n χρονικές στιγμές C_A χρησιμοποιώντας ως ρυθμιστική μεταβλητή το αντίστοιχο C_G είναι ο ακόλουθος:

Βήμα 1. Θέτουμε N = 1000, Sum = 0, Sum2 = 0, CVSum = 0, CVSum2 = 0, SumXY = 0,

PA = $e^{-r*t*dtday}$, md = $(r - \sigma^2/2)*dt_{day}$, vol_dt = $\sigma*\sqrt{dtday}$, **όπου** dtday = 1/252 και

t (***ο χρόνος μέχρι τη λήξη σε ημέρες***)

Βήμα 2. Υπολογίζουμε Cg(K,r,vol,t) **με τον αναλυτικο τυπο**.

Βήμα 3. Θέτουμε S_i = S0, SumSi = 0, CvgewmSi = 1 **για** i = 1, 2, …, t :

$S_i = S_i e^{md+vol\_dtZi}$ **όπου** Zi ~ N(0,1), **ανεξ. τ.μ. και**

SumSi = Si + SumSi, CvgewmSi = CVgewmSi*Si

Βήμα 4. profit = SumSi/t – K **αν** SumSi/t – K > 0 **αλλιώς** 0

Cvprofit = $(CVgewmSi)^{1/t}$ – K **αν** $(CVgewmSi)^{1/t}$ – K > 0 **αλλιώς** 0

Sum = Sum + profit **και** Sum2 = Sum2 + $profit^2$

CVSum = CVSum + CVprofit **και** CVSum2 = CVSum2 + $CVprofit^2$

SumXY = profit*CVprofit

Βήμα 5. Επαναλαμβάνουμε N **φορές τα βήματα** 3, 4.

Βήμα 6. mtimh = Sum/N και Cvmtimh = CVSum/N

$rxy = (N*SumXY - CVSum*Sum)$

$/\sqrt{(N*Sum2 - Sum*Sum)*(N*CVSum2 - CVSum*CVSum)}$

$$\text{stdx} = \sqrt{(\text{Sum2} - \text{N} * \text{mtimh} * \text{mtimh})/(\text{N}-1)}$$

$$\text{stdy} = \sqrt{(\text{CVSum2} - \text{N} * \text{CVmtimh} * \text{CVmtimh})/(\text{N}-1)}$$

b= – (rxy*stdx/stdy);

Τυπώνουμε την εκτίμηση : PA*mtimh + b*(PA*Cvmtimh – Cg)

και την τυπική απόκλισή της: $\text{PA*stdx}\sqrt{(1-\text{rxy}*\text{rxy})/\text{N}}$

Στον υπολογισμό της no-arbitrage τιμής του Ασιατικού δικαιώματος που βασίζεται στον γεωμετρικό μέσο χρησιμοποιείται ο αναλυτικός τύπος που αναφέρουμε πριν στην θεωρία. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι θεωρούμε τον χρόνο σε ημέρες χρησιμοποιώντας την τιμή του υποκείμενου τίτλου στο τέλος της κάθε ημέρας για τον υπολογισμό του αριθμητικού και γεωμετρικού μέσου. Παρακάτω μέσω της Java εκτιμούμε την τιμή ενός τέτοιου δικαιώματος και υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση της εκτίμησης για $N = 1000$ ($r = 0.1$, $vol = 0.2$, $S0 = 100$, $K = 100$, $T = 20/252$):

```
class arithmeticCV
{public static void main(String arg[])
  {
   double r=0.05,vol=0.1,S0=50,K=45,N=1000000,dt=1.0/16.0;
   double Si,profit=0,SumSi=0,Sum=0,Sum2=0,mtimh,std;
   int t=16,i,j;
   double b,Cg,CVgewmSi=1,CVprofit,CVSum=0,CVSum2=0,CVmtimh,SumXY=0;
   double stdx=0,stdy=0,rxy=0,volG,S0G,mg;
   double  md=(r-vol*vol/2)*dt,vol_dt=vol*Math.sqrt(dt),T=dt*t,PA=Math.exp(-r*T);
   Generator typikh=new Generator();

  /************** gia to geometric asian call analytika **********/
        volG=vol*Math.sqrt((1+1.0/t)*(1+1.0/(2*t))/3.0);
    mg=1.0/2.0*(1.0+1.0/t)*(r-vol*vol/2.0);
    S0G=S0*Math.exp(T*(-r+volG*volG/2.0+mg));
    double d1=(Math.log(S0G/K)+(r+volG*volG/2.0)*T)/(volG*Math.sqrt(T));
    Cumulative Fd1=new Cumulative(d1);
    Cumulative Fd2=new Cumulative(d1-volG*Math.sqrt(T));
    Cg=S0G*Fd1.CDF()-K*Math.exp(-r*T)*Fd2.CDF();
    System.out.println ("Cg="+String.valueOf(Cg));
                        /*************************/

   for(i=1;i<=N;i++)
             {
                  Si=S0;
                  SumSi=0;
```

```
                    CVgewmSi=1;
                    j=0;
                    do
                                   {
                                     j=j+1;
                                    Si=Si*Math.exp(md+vol_dt*typikh.normal());
                                    SumSi+=Si;
                                    CVgewmSi=CVgewmSi*Si;
                                    } while(j<t);
                     profit=(SumSi/(t)-K)>0?(SumSi/(t)-K):0;
                    CVprofit=(Math.pow(CVgewmSi, 1.0/t)-K)>0?(Math.pow(CVgewmSi, 1.0/t)-K):0;
                     Sum+=profit;
                     Sum2+=profit*profit;
                     CVSum+=CVprofit;
                     CVSum2+=CVprofit*CVprofit;
                     SumXY+=profit*CVprofit;
              }
    mtimh=Sum/N;
    CVmtimh=CVSum/N;
    rxy=(N*SumXY-CVSum*Sum)/Math.sqrt((N*Sum2-Sum*Sum)*(N*CVSum2-CVSum*CVSum));
    stdx=Math.sqrt((Sum2-N*mtimh*mtimh)/(N-1));
    stdy=Math.sqrt((CVSum2-N*CVmtimh*CVmtimh)/(N-1));
    b=-rxy*stdy/stdx;
    std=PA*Math.sqrt((1-rxy*rxy)/N)*stdx;
    System.out.println("Replications:"+String.valueOf(N));
    System.out.println ("Estimated cost:"+String.valueOf(PA*mtimh+b*(PA*CVmtimh-Cg))+" std="
                        +String.valueOf(std));
    }
  }
```

Η εκτιμωμένη τιμή του δικαιώματος είναι $C_A = 1.749$ με τυπικό σφάλμα $s = 0.000535$ για μόλις $N = 1000$ επαναλήψεις.

Η χρήση του Ασιατικού δικαιώματος που βασίζεται στον γεωμετρικό μέσο είναι πολύ αποτελεσματική για την αποτίμηση του αντιστοίχου δικαιώματος που βασίζεται στον αριθμητικό μέσο. Όπως φαίνεται και από τον Πίνακα 3 πετυχαίνουμε πολύ σημαντική μείωση της διακύμανσης που οφείλεται στην υψηλή συσχέτιση των δύο δικαιωμάτων.

Πίνακας 4.3[4]

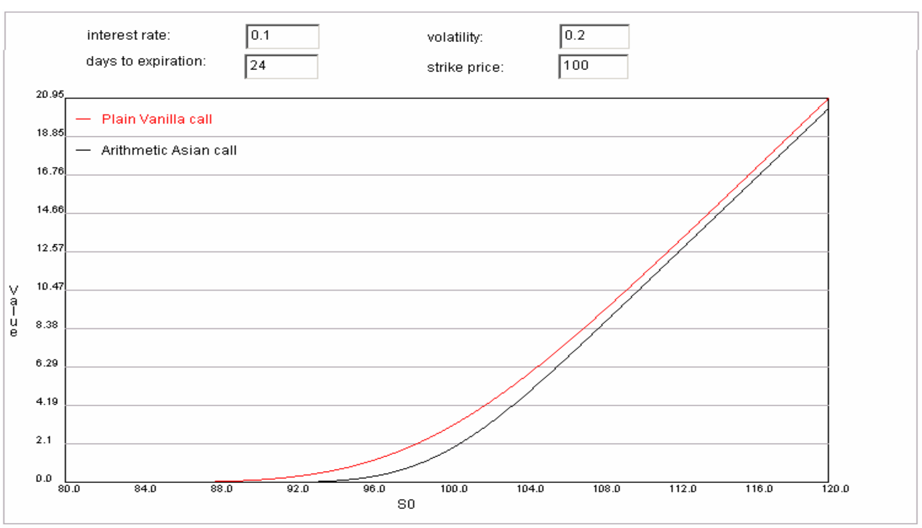
Τυπικά σφάλματα για arithmetic average asian δικαιώματα αγοράς.

S_0=100		arithmetic average asian call		ρ^2%
σ	**K**	Χωρίς ελάττωση διακύμανσης	Μέθοδος ρυθμιστικών μεταβλητών	
0.2	90	0.38750	0.00033	99.9999%
	100	0.02489	0.00022	99.9922%
	110	0.00189	0.00010	99.6922%
0.4	90	0.07332	0.00113	99.9762%
	100	0.05026	0.00089	99.9684%
	110	0.02028	0.00070	99.8821%
0.6	90	0.10359	0.00234	99.9491%
	100	0.07651	0.00197	99.9336%
	110	0.11266	0.00259	99.9470%

Οι εκτιμήσεις της τυπικής απόκλισης βασίζονται σε N = 10000 επαναλήψεις. Οι παράμετροι και για τα δυο δικαιώματα είναι S_0 = 100, r = 0.10, T = 28/252 και με το K και το σ να μεταβάλλεται όπως φαίνεται στον πίνακα. Η πορεία της τιμής του υποκείμενου τίτλου καταγράφεται με συχνότητα δt = 1/252 (κάθε εργάσιμη ημέρα). Το ρ είναι η συσχέτιση μεταξύ της τελικής τιμής του δικαιώματος και της ρυθμιστικής μεταβλητής (*geometric average asian call*).

Εφαρμογή. (*Σύγκριση μέσω γραφήματος της αξίας του τυπικού και του Ασιατικού δικαιώματος προαίρεσης.*) Θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο που περιγράψαμε για την κατασκευή μιας μικροεφαρμογής (*Java Applet*), όπου συγκρίνονται μέσω γραφήματος η τιμή του τυπικού Ευρωπαϊκού δικαιώματος προαίρεσης (*plain vanilla call*) και του Ασιατικού που βασίζεται στον αριθμητικό μέσο S_A με συνάρτηση κέρδους $(S_A - K)^+$ (*plain vanilla fixed-strike Eurasian call*), με τις τιμές του υποκείμενου τίτλου να καταγράφονται μια φορά την ημέρα (στο τέλος των συνεδριάσεων).

Σχήμα 4.1



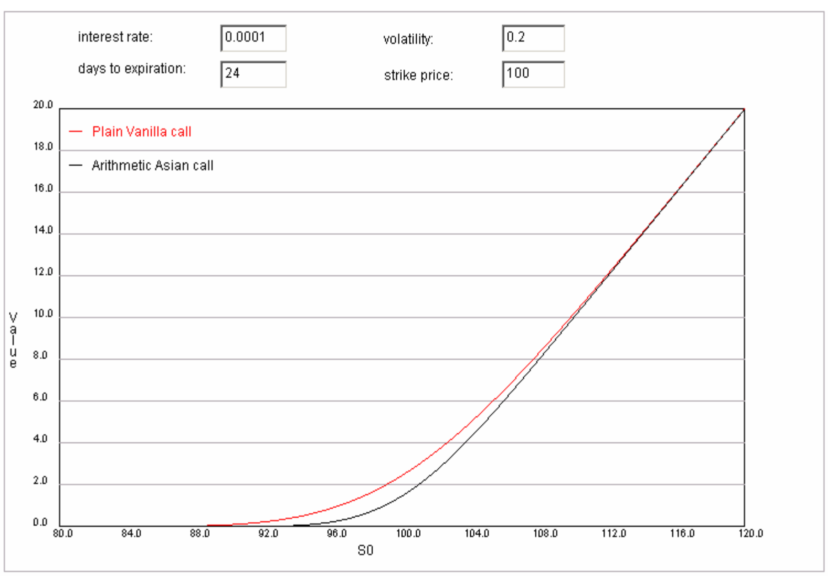
4 Τα αντίστοιχα προγράμματα σε Java υπάρχουν στο παράρτημα

Οι τιμές του τυπικού και του Ασιατικού δικαιώματος συγκρίνονται γραφικά ως συνάρτηση της αρχικής τιμής S_0 του υποκείμενου τίτλου. Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι ίδιες και για τα δυο δικαιώματα, με δυνατότητα να αλλάζουν από τον χρήστη. Οι τιμές του τυπικού δικαιώματος υπολογίζονται από τον αναλυτικό τύπο, ενώ οι τιμές για το Ασιατικό δικαίωμα υπολογίζονται με Monte Carlo προσομοίωση ($N = 2000$ επαναλήψεις) και με το αντίστοιχο Ασιατικο δικαίωμα που ορίζεται από το γεωμετρικό μέσο ως μεταβλητή ελέγχου. Στο Σχήμα 4.1 εχουμε ένα στιγμιότυπο της μικροεφαρμογής για $r = 0.1$, $vol = 0.2$, $K = 100$ και $T = 24/252$. Παρατηρούμε ότι η τιμή του τυπικού δικαιώματος είναι σταθερά μεγαλύτερη του αντίστοιχου Ασιατικού. Μάλιστα, η διαφορά μεταξύ των δύο τιμών φαίνεται να είναι μεγαλύτερη όταν η αρχική τιμή S_0 του υποκείμενου τίτλου είναι ίση με τη τιμή εξάσκησης K. Η παρατήρηση ότι $C_{Asian} < C_{plainvanilla}$ δεν είναι εύκολο να εξηγηθεί αυστηρά, αφού δεν γνωρίζουμε την κατανομή του αριθμητικού μέσου. Γνωρίζουμε πάντως ότι το S_A είναι ο μέσος όρος n (όσες οι εργάσιμες ημέρες) τυχαίων μεταβλητών (εξαρτημένων), που ακολουθούν την λογαριθμοκανονική κατανομή, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2, με μέση τιμή $E(S_{t_i}) = S_0\text{Exp}(rt_i)$ και επομένως είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι $E(S_A) < E(S_T)$. Φαίνεται όμως επιπλέον ότι ισχύει

$$E((S_A - K)^+) \leq E((S_T - K)^+)$$

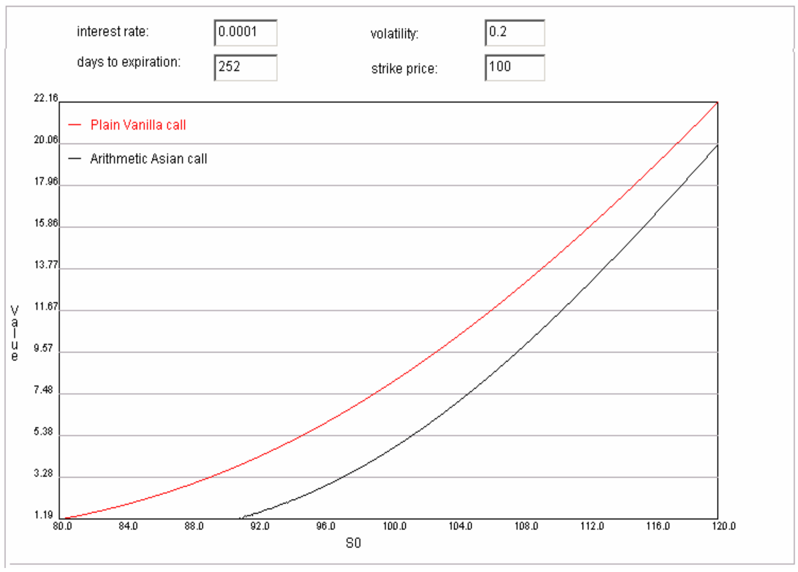
και άρα $C_{Asian} < C_{plainvanilla}$. Τα Σχήματα 4.2(α), 4.2(β) ερμηνεύονται επίσης σύμφωνα με τα παραπάνω.

Σχήμα 4.2(α)



Στο 4.2(α) παριστάνουμε γραφικά τις αξίες των δυο δικαιωμάτων ως προς το S_0 (διατηρώντας σταθερές τις άλλες παραμέτρους), δίνοντας στο χωρίς ρίσκο επιτόκιο μια πολύ μικρή τιμή r = 0.0001. Παρατηρούμε ότι οι τιμές των δυο δικαιωμάτων συγκλίνουν μεταξύ τους (σχεδόν ταυτίζονται) όσο η αρχική τιμή του υποκείμενου τίτλου μεγαλώνει σε σχέση με την τιμή εξάσκησης K, δηλαδή το δικαίωμα γίνεται in-the-money. Στο σχήμα 4.2(β) λαμβάνοντας και πάλι $r = 0.0001$ και θεωρώντας τώρα ότι $T = 252/252$ παρατηρούμε ότι η διαφορά στις δύο τιμές αυξάνεται.

Σχήμα 4.2(β)



4.4.3 Στοιχειώδεις μεταβλητές ελέγχου (*primitive controls*)

Στις δυο παραπάνω περιπτώσεις βασίσαμε την επιλογή των μεταβλητών ελέγχου σε κατάλληλες μεταβλητές του ίδιου του δικαιώματος που επηρεάζουν την τιμή του (για παράδειγμα η διαδρομή της τιμής του υποκείμενου τίτλου). Αξιολογώντας την μείωση της διακύμανσης που πετύχαμε μπορούμε να πούμε πως επρόκειτο για αρκετά αποτελεσματική επιλογή. Παρ' όλ' αυτά αξίζει να σημειώσουμε πως υπάρχουν και αρκετές πρωτογενείς (*generic*) μεταβλητές ελέγχου που είναι διαθέσιμες σε μια διαδικασία προσομοίωσης. Για παράδειγμα σε κάθε προσομοίωση που αναφέραμε χρησιμοποιήσαμε μια ακολουθία $Z_1, Z_2, \ldots$ από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από την τυπική κανονική κατανομή. Γνωρίζουμε ότι $E[Z] = 0$ και $\mathrm{Var}[Z] = 1$, έτσι η τυχαία μεταβλητή Z μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μεταβλητή ελέγχου. Ένα επίπεδο χαμηλότερα ξέρουμε πως και κατά την παραγωγή της ακολουθίας $Z_1, Z_2, \ldots$ γίνεται χρήση μιας ακολουθίας $U_1, U_2, \ldots$ από την ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1]. Άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την τυχαία μεταβλητή U από την U[0,1] ως μεταβλητή ελέγχου.

Η χρήση της τεχνικής των μεταβλητών ελέγχου μπορεί να επεκταθεί γενικά σε κάθε περίπτωση όπου έχουμε να εκτιμήσουμε μια μέση τιμή E[Y] και εκτός από την κλασική εκτιμήτρια της μέσης τιμής $\bar{Y}$ έχουμε και μια ακόμα αμερόληπτη εκτιμήτριά της $\tilde{Y}$. Η διαφορά τότε $(\bar{Y} - \tilde{Y})$ έχει γνωστή αναμενομένη τιμή μηδέν και άρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μεταβλητή ελέγχου ως εξής:

$$\bar{Y} - \beta(\bar{Y} - \tilde{Y}).$$

Για β = 0 και β = 1 καταλήγουμε στο να χρησιμοποιούμε τη μια ή την άλλη εκτιμήτρια, αλλά βρίσκοντας το βέλτιστο β βρίσκουμε μια εκτιμήτρια με διακύμανση χαμηλότερη και από τις δυο.

4.5 Στρωματοποιημένη Δειγματοληψία (*stratified sampling*)

Μέχρι τώρα, στις τεχνικές που περιγράψαμε το δείγμα ήταν τυχαία κατανεμημένο στο δειγματικό χώρο με μόνο περιορισμό να υπακούει σε μια συγκεκριμένη κατανομή. Στη στρωματοποιημένη δειγματοληψία γενικά, ο δειγματικός χώρος χωρίζεται σε υποσύνολα (στρώματα) και ορίζουμε εξ' αρχής το μέγεθος του δείγματος ανά στρώμα. Έστω λοιπόν πάλι το πρόβλημα όπου έχουμε να εκτιμήσουμε την αναμενόμενη τιμή $E[Y]$ μιας τυχαίας μεταβλητής $Y \in R$ και έστω $A_1, \ldots, A_\kappa$ ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του δειγματικού χώρου έτσι ώστε

$$P(Y \in \bigcup_{i=1}^{\kappa} A_i) = 1.$$

Τότε

$$E[Y] = \sum_{i=1}^{\kappa} P(Y \in A_i) E[Y \mid Y \in A_i] = \sum_{i=1}^{\kappa} p_i E[Y \mid Y \in A_i] \tag{4.5}$$

όπου $p_i = P(Y \in A_i)$. Κατά την τυχαία δειγματοληψία παράγουμε $Y_1, \ldots, Y_n$ από την κατανομή της Y. Στη στρωματοποιημένη δειγματοληψία ορίζουμε εξ' αρχής τον αριθμό των λήψεων n_i από το A_i στρώμα. Η κατανομή του $Y_i \in A_i$ θα είναι η δεσμευμένη κατανομή του Y δεδομένου ότι $Y \in A_i$. Ένα πλεονέκτημα της χρήσης αυτής της δεσμευμένης κατανομής έναντι της αδέσμευτης είναι η ευκολότερη παραγωγή τυχαίων αριθμών. Το βασικότερο όμως πλεονέκτημα είναι η ελάττωση της διακύμανσης της εκτιμήτριας που προκύπτει. Για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ έστω Y_{ij}, $j = 1, 2, \ldots, n_i$, ανεξάρτητες λήψεις από την δεσμευμένη κατανομή του Y δεδομένου ότι $Y \in A_i$. Τότε μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του $E[Y \mid Y \in A_i]$ δίδεται από το δειγματικό μέσο $\overline{Y}_i = (Y_{i1} + ... + Y_{in_i}) / n_i$ των παρατηρήσεων από το i–οστό στρώμα. Από την (4.5) τότε προκύπτει μια αμερόληπτη εκτιμήτρια για το E[Y].

$$\hat{Y} = \sum_{i=1}^{k} p_i \overline{Y}_i .$$

Η διασπορά της νέας εκτιμήτριας είναι

$$\sigma^2(n_1,..,n_k) = Var(\sum_{i=1}^{k} p_i \overline{Y}_i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i^2}{n_i} Var(Y_i \mid Y_i \in A_i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i^2}{n_i} \sigma_i^2 . \tag{4.6}$$

Υπό τον περιορισμό ότι $n_1 + \ldots + n_k = n$, η παραπάνω διακύμανση ελαχιστοποιείται για

$$n_i^* = \frac{n p_i \sigma_i}{\sum_{j=1}^{k} p_j \sigma_j} \quad , i = 1, 2 ,\ldots, k.$$

Παρατηρούμε ότι ο ορισμός του βέλτιστου μεγέθους του δείγματος ανά στρώμα n_i^* με αυτόν τον τρόπο, προϋποθέτει τη γνώση της διακύμανσης σ_i^2 σε κάθε στρώμα. Στην πράξη αυτό δεν είναι σχεδόν ποτέ εφικτό. Παρ' όλ' αυτά, για τον υπολογισμό των διασπορών σ_i^2, μπορούμε να παράγουμε αρχικά δείγματα τυχαίων αριθμών από κάθε στρώμα και έτσι να υπολογίσουμε τα βέλτιστα n_i^*.

Μπορούμε όμως να ορίσουμε και το μέγεθος του δείγματος ανά στρώμα διαφορετικά. Ο λόγος n_i / n του αριθμού των λήψεων της Y που θα ανήκουν στο A_i προς το μέγεθος του συνολικού δείγματος n (που στην ουσία είναι η σχετική συχνότητα), στην τυχαία δειγματοληψία δεν θα είναι απαραίτητα ίση με p_i, παρόλο που για n μεγάλο το $n_i / n \to p_i$. Αν απαιτήσουμε ο λόγος αυτός να ισούται με την θεωρητική πιθανότητα, τα n_i ορίζονται ως

$$n_i = np_i \quad , i = 1, 2, \ldots, k$$

Για λόγους απλότητας θεωρούμε το np_i ακέραιος (μπορούμε όμως να το αντικαταστήσουμε και με την ακέραια τιμή του $[np_i]$). Η εκτιμήτρια που προκύπτει είναι καλύτερη όσον αφορά στην διακύμανση της αφού

$$Var(\sum_{i=1}^{\kappa} p_i \overline{Y}_i) = \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{p_i^2}{n_i} \sigma_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\kappa} p_i Var(Y_i \mid Y_i \in A_i) = \frac{1}{n} E[Var(Y \mid Y \in A_i)] \leq \frac{Var(Y)}{n} = Var(\overline{Y}) .$$

Η ανισότητα ισχύει γιατί Var(Y) = E[Var(Y | X)] + Var(E[Y | X]) και ισχύει πάντοτε ότι $Var(E[Y \mid X]) \geq 0$. Ενδιαφέρον έχει να παρατηρήσουμε ότι η νέα εκτιμήτρια που προκύπτει είναι η

$$\hat{Y} = \sum_{i=1}^{\kappa} p_i \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\kappa} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$$

Αυτή η εκτιμήτρια διαφέρει από την συνήθη εκτιμήτρια του δειγματικού μέσου $(Y_1+\ldots+Y_n)/n$ στο ότι εξασφαλίζει την ομοιομορφία στη κατανομή των λήψεων στο δειγματικό χώρο.

Γενικεύοντας την τεχνική της στρωματοποιημένης δειγματοληψίας, έστω ότι τα στρώματα ορίζονται από μια δεύτερη μεταβλητή X που ονομάζεται μεταβλητή στρωματοποίησης (*stratification variable*).

Έστω η $X \in R^d$ με $d \in N^*$ και A_i, $i = 1, 2, \ldots, k,$ υποσύνολα του R^d ξένα μεταξύ τους με $P(X \in \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{A}_i) = 1$. Μια πιο γενική μορφή της (4.5) είναι η

$$E[Y] = \sum_{i=1}^{k} P(X \in A_i) E[Y \mid X \in A_i] = \sum_{i=1}^{k} p_i E[Y \mid X \in A_i] \tag{4.7}$$

όπου $p_i = P(X \in A_i)$. Σε κάποιες εφαρμογές η Y είναι συνάρτηση του X. Για παράδειγμα η X μπορεί να είναι οι διακριτές τιμές της διαδρομής της τιμής μιας μετοχής και η Y η αξία του παραγώγου. Για να χρησιμοποιήσουμε την (4.7) για στρωματοποιημένη δειγματοληψία χρειάζεται να παράγουμε ζεύγη (X_{ij},Y_{ij}), $j = 1, 2, \ldots, n_i$, γνωρίζοντας τη δεσμευμένη κατανομή του (X, Y) δεδομένου ότι $X \in A_i$.

Έτσι λοιπόν κατά την στρωματοποιημένη δειγματοληψία απαιτείται:

- Η επιλογή της μεταβλητής στρωματοποίησης X, των στρωμάτων $A_1,\ldots,A_k$ και του μεγέθους των δειγμάτων ανά στρώμα $n_1,\ldots,n_k$.
- Η παραγωγή δειγμάτων από την κατανομή του (X, Y) δεδομένου ότι $X \in A_i$.

Κατά τον υπολογισμό των εξωτικών δικαιωμάτων προαίρεσης, η διαδρομή της τιμής του υποκείμενου τίτλου $(S_1,\ldots, S_T)$ ουσιαστικά ορίζει την αξία του δικαιώματος, με την τιμή S_T να επηρεάζει στις περισσότερες περιπτώσεις σε πολύ μεγάλο βαθμό την αξία του. Έστω λοιπόν ότι η πορεία του τίτλου εξετάζεται σε n χρονικές στιγμές με $S_n = S_T$. Τότε ουσιαστικά μπορούμε να θεωρήσουμε το $[0,\infty)^n$ ως δειγματικό χώρο τον οποίο θέλουμε να διαμερίσουμε για να χρησιμοποιήσουμε την τεχνική της στρωματοποιημένης δειγματοληψίας. Η τιμή του υποκείμενου τίτλου στη λήξη του δικαιώματος είναι

$$S_T = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma W_T},$$

όπου W_t, $t \geq 0$, μία κίνηση Brown. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι με $W_T = \sqrt{T}Z$, όπου $Z \sim N(0,1)$, ή ισοδύναμα

$$W_T = \sqrt{T}\Phi^{-1}(V)\,, \text{ όπου } V \sim \mathrm{U}[0,1]$$

και επομένως

$$S_T(V) = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}\Phi^{-1}(V)} \tag{4.8}$$

όπου Φ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής. Έστω τώρα k ισοπίθανα στρώματα της U[0,1]. Τότε αν ορίσουμε ως V την

$$V = \frac{i-1}{k} + \frac{U}{k} \text{ , όπου } U \sim U[0,1] \tag{4.9}$$

αυτή θα ανήκει στο $[(i-1)/k,\ i/k]$. Άρα από τις (4.8) και (4.9) μπορούμε να παράγουμε το ζεύγος $(S_T(V), V)$ δεδομένου ότι το V ανήκει στο $[(i-1)/k,\ i/k]$. Επίσης από την (4.7) φαίνεται ότι έτσι ορίζουμε τα επιθυμητά υποσύνολα του δειγματικού χώρου. Έχουμε στην ουσία στρωματοποιήσει την τελική τιμή (*terminal value*) του υποκείμενου τίτλου με μεταβλητή στρωματοποίησης την V, αλλά και εμμέσως όλη την διαδρομή $(S_1,\ldots,S_n)$ που ανήκει στο $[0,\infty)^{n-1}\times\{S_T(\omega),\ \omega\in\Omega\}$. Για να παράγουμε τώρα τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ S_0 και S_T κάνουμε χρήση της παρεμβολής με γέφυρα Brown (*Brownian bridge*) που είδαμε στο Κεφάλαιο 3. Δηλαδή για W_s και W_T γνωστά με $s < t < T$ θα είναι

$$W_t = \frac{T-t}{T-s}W_s + \frac{t-s}{T-s}W_T + \sqrt{\frac{(t-s)(T-t)}{T-s}}Z \text{, όπου } Z \sim N(0,1) \text{ ανεξ. των } W_s,\ W_T.$$

Άρα εύκολα προκύπτει η τιμή του δικαιώματος $g(S_0,\ldots,S_T)$ στη λήξη του, όπου g η συνάρτηση κέρδους του εκάστοτε δικαιώματος. Ανακεφαλαιώνοντας, η γενική ιδέα είναι:

- *Διαμερίζουμε* το [0,1] *στο* $\{A_1\ldots,A_k\}$
- *Παράγουμε V από την* U(0,1) δεδομένου ότι $V\in A_i$ και λαμβάνουμε την τελική τιμή $S_T(V)$.
- *Παράγουμε την διαδρομή* $S_0,\ldots,S_T$ *δεδομένου ότι* $S_T = S_T(V)$ (*μέσω Brownian bridge*)
- *Για συνάρτηση κέρδους g*,

$$E[g(S_0,...,S_T)] = \sum_{i=1}^{\kappa} P(V\in A_i)E[g(S_0,...,S_T)\,|\,V\in A_i] = \sum_{i=1}^{\kappa} p_i E[g(S_0,...,S_T)\,|\,V\in A_i]\,.$$

Ο αλγόριθμος εκτίμησης της τιμής ενός δικαιώματος αγοράς Ασιατικού τύπου που βασίζεται στον αριθμητικό μέσο της τιμής μιας μετοχής σε n χρονικές στιγμές (μέρες) C_A με χρήση της τεχνικής της στρωματοποιημένης δειγματοληψίας που μόλις περιγράψαμε είναι ο ακόλουθος:

Βήμα 1. Θέτουμε N=1000, **ορίζουμε τους μηδενικούς πίνακες**

Sum[], Sum2[] **διάστασης** strata

PA = $e^{-r*t*dtday}$, **οπου** dtday = 1/252 **και**

t = 0 **χρόνος μέχρι τη λήξη σε ημέρες**, T = t*dtday.

Βήμα 2. SumSi = 0

V = (j – 1 + U)/strata, **όπου** $U \sim U[0,1]$

$WT = \sqrt{T}\Phi^{-1}(V)$,

$$S_T = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma W_T}$$

Wprin = 0

SumSi = SumSi + ST

Βήμα 3. Για l = 1, …, t – 1

Wprin = (T–l*dtday)*Wprin/(T– (l–1)*dtday) + dtday*WT/(T– (l–1)*dtday)

$+\sqrt{(T-l*dt)*dt/(T-(l-1)*dt)}$ *Z , **όπου** Z ~ N(0,1),

$$S_i = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})l*dtday+\sigma W_{prin}}$$

SumSi = SumSi + Si

Βήμα 4. profit = SumSi/t – K **αν** SumSi/t – K > 0, **αλλιώς** 0

Sum[j] = Sum[j] + profit **και** Sum2[j] = Sum2[j] + profit^2

Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2,3,4 **για** j = 1,…,strata.

Βήμα 5. Επαναλαμβάνουμε N **φορές τα βήματα** 2,3,4.

Βήμα 6. Για i = 1, …, strata

mtimh[i] = Sum[i]/N **και**

var[i] = (Sum2[i] – N*mtimh[i]*mtimh[i])/(N – 1) **και**

TSum = mtimh[i] + TSum **και**

Sumvar = var[i] + Sumvar

$$Tstd = \frac{\sqrt{Sum\,\mathrm{var}/N}}{strata}$$

Τυπώνουμε την εκτίμηση : PA*TSum/strata **και την τυπική απόκλισή της**: PA*Tstd

Στον υπολογισμό της διακύμανσης της εκτίμησης πρώτα εκτιμούμε τις διακυμάνσεις σε κάθε στρώμα χωριστά και μετά τη διακύμανση της εκτιμήτριας του Ασιατικού δικαιώματος. Έχουμε διαμερίσει τον δειγματικό χώρο σε 100 στρώματα ίσων πιθανοτήτων. Η πορεία της μετοχής προσομοιώνεται με κατασκευή γεφύρας Brown όπου η νέα τιμή προκύπτει με παρεμβολή ανάμεσα στην τελική τιμή του υποκείμενου τίτλου, και στην προηγουμένη τιμή που έχουμε μόλις παράγει. Η τιμή του υποκείμενου τίτλου καταγράφεται στο τέλος της κάθε εργάσιμης ημέρας και χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του αριθμητικού μέσου. Παρακάτω, μέσω της Java, εκτιμούμε την τιμή ενός τέτοιου δικαιώματος καθώς και την τυπική απόκλιση της εκτίμησης για $N = 10$ ($r = 0.1$, $vol = 0.2$, $S0 = 100$, $K = 100$,$T = 62/252$, $strata$ =100):

```
class arithmetic
{public static void main(String arg[])
  {
   double r=0.1,vol=0.2,S0=100,K=100,N=10;
   double Si,profit=0,TSum=0,SumSi=0,Tstd=0,Sumvar=0;
   int strata=100,t=62,i,j,l;
   double p=1.0/strata,WT,ST,Wprin,V,U;
   double  dt=1.0/252.0,T=t*dt,PA=Math.exp(-r*T);
   Generator typikh=new Generator();
   InvNormalCumulative InvF=new InvNormalCumulative();
 /******Dhmioyrgia kai arxikopoihsh pinakwn gia ypologismoys mesa sta strwmata*********/
   double  Sum[]=new double[strata],Sum2[]=new double[strata];
   double mtimh[]=new double[strata],var[]=new double[strata];
   for(i=0;i<strata;i++){
               Sum[i]=0;Sum2[i]=0;mtimh[i]=0;var[i]=0;
                        }

/*********************************************************************************/
  for(i=1;i<=N;i++)
     {

        for(j=1;j<=strata;j++)
           {
            SumSi=0;
            l=0;
            U=Math.random();
            V=(j-1+U)/strata;
            WT=Math.sqrt(T)*InvF.InvCDF(V);
            ST=S0*Math.exp((r-vol*vol/2)*T+vol*WT);
            Wprin=0;
            SumSi+=ST;
            do
             {
             l=l+1;
             Wprin=(T-l*dt)*Wprin/(T-(l-1)*dt)+dt*WT/(T-(l-1)*dt)+Math.sqrt((T-l*dt)*dt/(T-(l-
1)*dt))*typikh.normal();
             Si=S0*Math.exp((r-vol*vol/2)*l*dt+vol*Wprin);
             SumSi+=Si;
            } while(l<t-1);//*********points-1?
           profit=(SumSi/(t)-K)>0?(SumSi/(t)-K):0;
           Sum[j-1]+=profit;
           Sum2[j-1]+=profit*profit;
            }
         }
   for(i=0;i<strata;i++)
          {
           mtimh[i]=Sum[i]/N;
           var[i]=(Sum2[i]-N*mtimh[i]*mtimh[i])/(N-1);
           TSum+=mtimh[i];
           Sumvar+=var[i];
          }
```

```
  Tstd=Math.sqrt(Sumvar/N)/strata;// s2=Sum(pi2/ni*Si2,i=1,..,strata)
  System.out.println("Replications:"+String.valueOf(N));
  System.out.println ("Estimated cost:"+String.valueOf(PA*TSum/strata)+"
std="+String.valueOf(PA*Tstd));
  }
}
```

Η εκτιμωμένη τιμή του δικαιώματος είναι C_A = 2.994 με τυπικό σφάλμα s = 0.0683 για N = 10 επαναλήψεις. Είναι σημαντικό, όταν θέλουμε να συγκρίνουμε την αποτελεσματικότητα της μεθόδου, να παρατηρήσουμε ότι εδώ το N = 10 είναι το σύνολο των επαναλήψεων κατά μήκος όλων των στρωμάτων. Έτσι στην ουσία έχουμε $N \cdot strata$ = 1000 επαναλήψεις. Το αντίστοιχο τυπικό σφάλμα της απλής εκτιμήτριας για τον ίδιο αριθμό επαναλήψεων είναι $s = 0.118$.

Ο τρόπος στρωματοποίησης της τιμής του υποκείμενου τίτλου που περιγράψαμε παραπάνω δεν είναι ο μονός δυνατός. Εύκολα μπορούμε να διαμερίσουμε το δειγματικό χώρο του S_T όχι σε ισοπίθανα σύνολα, αλλά με βάση εκείνες τις τιμές του S_T που μηδενίζουν το κέρδος του δικαιώματος και σε εκείνες που δεν το μηδενίζουν. Επίσης μπορούμε να μην στρωματοποιήσουμε το S_T αλλά το μέσο όρο των

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{t_i} .$$

Η περίπτωση αυτή ανάγεται στο πρόβλημα παραγωγής πολυμεταβλητών κανονικών τυχαίων μεταβλητών στρωματοποιημένων με βάση κάποια προβολή του διανύσματός τους. Λεπτομερής περιγραφή υπαρχει στον Glasserman (2003).

4.5.1 Poststratification

Η τεχνική αυτή είναι μια πιο εύχρηστη παραλλαγή της στρωματοποιημένης δειγματοληψίας. Είναι πιο απλή από την κλασική στρωματοποιημένη δειγματοληψία, γιατί δεν απαιτείται η παραγωγή δεσμευμένων δειγμάτων. Αντίθετα η δειγματοληψία είναι τυχαία και η στρωματοποίηση γίνεται εκ των υστέρων (*poststratification*). Πρέπει όμως να γνωρίζουμε τις πιθανότητες που οι διάφορες λήψεις ανήκουν σε κάθε στρώμα.

Έστω πάλι ότι ο στόχος μας είναι να υπολογίσουμε την αναμενομένη τιμή $E[Y]$. Έστω ότι έχουμε ορίσει στρώματα $A_1,\ldots,A_k$ και έστω ότι γνωρίζουμε τις πιθανότητες $p_i = P(Y \in A_i)$, με $i = 1,\ldots,k$. Έστω επίσης ότι μπορούμε να παράγουμε τυχαία αντίγραφα $Y_1,\ldots,Y_n$ της Y και εκ των υστέρων έχουμε έναν κανόνα που καθορίζει σε ποιο στρώμα ανήκει η κάθε λήψη. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή

$$N_i = \sum_{j=1}^{n} 1\{Y_j \in A_i\} \quad , i = 1, 2, \ldots, k,$$

ως τον αριθμό των λήψεων του Y που ανήκουν στο στρώμα i. Έστω επίσης

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} 1\{Y_j \in A_i\} Y_j \,, \; i = 1, 2, \ldots, k,$$

το άθροισμα των λήψεων του Y που ανήκουν στο στρώμα i. Ο συνήθης δείγματικος μέσος είναι $Y = (Y_1 + \ldots + Y_n)/n$ και μπορεί να γραφεί και ως

$$\hat{Y} = \frac{S_1 + \ldots + S_k}{n} = \sum_{i=1}^{k} \frac{N_i}{n} \frac{S_i}{N_i}$$

με την προϋπόθεση ότι το N_i δεν είναι μηδέν για $i = 1, 2, \ldots, k$. Από τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών προκύπτει ότι $N_i / n \to p_i$ και $S_i / N_i \to \mu_i$ με πιθανότητα 1, όπου $\mu_i = E[Y \mid Y \in A_i]$ είναι η μέση τιμή του κάθε στρώματος. Στην τεχνική αυτή ο λόγος N_i/n που στην ουσία είναι η σχετική συχνότητα του i-στρώματος, αντικαθίσταται από την αναμενομένη θεωρητική πιθανότητα p_i . Άρα έχουμε την εξής εκτιμήτρια

$$\hat{Y} = \sum_{i=1}^{k} p_i \frac{S_i}{N_i} \tag{4.10}$$

Καλύπτοντας την περίπτωση όπου $N_i = 0$ αντικαθιστούμε το $S_i/N_i = 0$ αν $N_i = 0$ στην εκτιμήτρια (4.10).

Η βασική διαφορά της παραπάνω εκτιμήτριας με την κλασική είναι ότι στην ουσία αθροίζει ένα σταθμισμένο μέσο όρο των αθροισμάτων των λήψεων ανά στρώμα με τα βάρη να είναι οι θεωρητικές πιθανότητες p_i. Έτσι κατά κάποιον τρόπο ομαλοποιεί την κατανομή των αριθμών των λήψεων ανά στρώμα εκ των υστέρων. Για μεγάλα n αποδεικνύεται εξίσου αποτελεσματική στην μείωση της διακύμανσης με την κλασική στρωματοποιημένη δειγματοληψία.

4.5.2 Latin Hypercube Sampling (*LHS*)

Είδαμε την εφαρμογή της στρωματοποιημένης δειγματοληψίας στην εκτίμηση δικαιωμάτων όπου η πορεία της τιμής του υποκείμενου τίτλου επηρεάζει την τιμή του δικαιώματος. Η στρωματοποίηση έγινε με βάση τη μια διάσταση του $(S_1, \ldots, S_d) \in [0, \infty)^d$ που είναι ο δειγματικός χώρος της (διακριτοποιημένης) διαδρομής της τιμής της μετοχής. Συγκεκριμένα η στρωματοποίηση γινόταν μόνο για το $S_d = S_T$, που είναι η τελική τιμή του τίτλου. Εάν τώρα θελήσουμε να στρωματοποιήσουμε και τις d διαστάσεις σε K στρώματα τότε θα προκύψει ένα μείγμα K^d κατανομών σε κάθε μια από τις οποίες πρέπει να πάρουμε αρκετές λήψεις για να εφαρμόσουμε την τεχνική. Οι υπολογισμοί αυτοί γίνονται απαγορευτικοί ειδικά όταν τα K και d μεγαλώνουν. Η τεχνική του LHS στην ουσία μας επιτρέπει την στρωματοποίηση και στις d διαστάσεις παίρνοντας μόνο ένα δείγμα μεγέθους K αντί K^d.

Ας θεωρήσουμε τη στρωματοποίηση του $[0,1]^d$ σε κάθε μια από τις d διαστάσεις του σε K διαστήματα ίσου μήκους. Έστω ότι για κάθε διάσταση $i = 1,2,\ldots,d$ μπορούμε να παράγουμε ένα στρωματοποιημένο δείγμα $V_i^{(1)},\ldots,V_i^{(K)}$ με $V_i^{(j)} \in [(j-1)/K,\ j/K]$. Από το παραπάνω δείγμα και για τις d διαστάσεις διατεταγμένες σε στήλες προκύπτει

$$
\begin{aligned}
(V_1^{(1)},V_2^{(1)}\ldots,V_d^{(1)}) &\sim U[0,\frac{1}{K}]^d \\
(V_1^{(2)},V_2^{(2)}\ldots,V_d^{(2)}) &\sim U[\frac{1}{K},\frac{2}{K}]^d \\
(V_1^{(K)},V_2^{(K)}\ldots,V_d^{(K)}) &\sim U[\frac{K-1}{K},1]^d
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι κάθε γραμμή είναι ένα σημείο του $[0,1]^d$ και συγκεκριμένα η πρώτη γραμμή θα ανήκει στο $[0,\ 1/K]^d$, η δεύτερη στο $[1/K,\ 2/K]^d$ κοκ. Θεωρούμε τώρα π_i, $i = 1, 2, \ldots, d,$ μεταθέσεις του συνόλου $\{1, 2, \ldots, K\}$ και έστω $\pi_i(j)$ η j συντεταγμένη της i μετάθεσης. Τότε μετασχηματίζουμε τις παραπάνω στήλες ως εξής

$$
\begin{aligned}
(V_1^{\pi_1(1)},V_2^{\pi_2(1)}\ldots,V_d^{\pi_d(1)}) &\sim U[0,1]^d \\
(V_1^{\pi_1(2)},V_2^{\pi_2(2)}\ldots,V_d^{\pi_d(2)}) &\sim U[0,1]^d \\
(V_1^{\pi_1(K)},V_2^{\pi_2(K)}\ldots,V_d^{\pi_d(K)}) &\sim U[0,1]^d
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε τώρα ότι κάθε γραμμή θα είναι ένα διάνυσμα, δείγμα από την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,1]^d$. Όπως είναι φανερό η στρωματοποίηση δεν είναι πλήρης, αλλά παρ' όλ' αυτά πετυχαίνουμε σε κάποιες περιπτώσεις σημαντική μείωση της διακύμανσης. Παρατηρούμε ότι στην ουσία προκύπτουν K διανυσματα, όπου το σύνολο των συντεταγμένων της i διάστασης $\{V_i^{\pi_i(1)},\ldots,V_i^{\pi_i(K)}\}$ θα έχει από μία ακριβώς λήψη από κάθε στρώμα του $[0,1]$.

Για να παράγουμε λοιπόν ένα δείγμα με την τεχνική της LHS

- Παράγουμε $\pi_1,\ldots\pi_d$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταθέσεις του συνόλου $\{1,\ldots,K\}$.
- Ορίζουμε $V_i^{(j)} = \dfrac{\pi_i(j)-1+U_i^{(j)}}{K}$, $i = 1, 2, \ldots, d$ και $j = 1, 2,\ldots, K$, όπου $U_i^{(j)} \sim U[0,1]$

Τα K διανύσματα $(V_1^{(j)},...,V_d^{(j)})$, j = 1,2,…,K, είναι το παραγόμενο δείγμα. Το δείγμα μετατρέπεται εύκολα σε δείγμα της πολυμεταβλητής κανονικής N(**0**, $\mathbf{I}_d$), αν θέσουμε

$$Z_i^{(j)} = \Phi^{-1}(V_i^{(j)}) \quad , i = 1, 2, \ldots, d \ \text{ και } \ j = 1, 2, \ldots, K.$$

Το δείγμα θα αποτελείται από τα διανύσματα

$$Z^{(j)} = (Z_1^{(j)},...,Z_d^{(j)}), \ j = 1, 2, \ldots, K \tag{4.11}$$

Έστω τώρα ότι θέλουμε ένα δείγμα από την τιμή ενός υποκείμενου τίτλου ενός δικαιώματος με μετρήσεις να γίνονται σε d χρονικές στιγμές $(S_{t_1}, S_{t_2}, \ldots, S_{t_d})$ και θέλουμε το δείγμα να είναι στρωματοποιημένο σε K στρώματα και στις d διαστάσεις του με την τεχνική του LHS. Από την (4.11) θα έχουμε K δείγματα $Z^{(1)},\ldots, Z^{(K)}$ από την N(**0**, $\mathbf{I}_d$). Από τα K διανυσματα παράγουμε K διακριτές κινήσεις Brown $W^{(1)},\ldots,W^{(K)}$ ως εξής:

$$W^{(j)}(t_d) = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{t_i - t_{i-1}} Z_i^{(j)} , \quad j = 1, 2, \ldots, d.$$

Εύκολα από εδώ προκύπτουν K διανυσματα

$$(S_{t_1}^{(j)},...,S_{t_d}^{(j)}) = (S_{t_1} e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t_1+\sigma W^{(j)}(t_1)},...,S_{t_d} e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t_d+\sigma W^{(j)}(t_d)}), \ j = 1,2,\ldots,K.$$

4.6 Ελάττωση διακύμανσης μέσω δέσμευσης (*Conditioning*)

Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι

$$\text{Var}[Y] = E[\text{Var}(Y \mid X)] + \text{Var}(E[Y \mid X])$$

και επομένως

$$Var(Y) \geq Var(E[Y \mid X]) \tag{4.12}$$

Έστω και πάλι ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής Y, θ = $E[Y]$. Είναι προτιμότερο να υπολογίσουμε την $E[Y \mid X]$ παρά την $E[Y]$. Έστω λοιπόν μια τυχαία μεταβλητή X που μπορεί να ορισθεί κατά τη διαδικασία της προσομοίωσης. Τότε

$$E[E[Y \mid X]] = E[Y] = \theta.$$

Άρα εκτιμώντας τη μέση τιμή της $E[Y \mid X]$ θα έχουμε εκτιμήσει το θ και μάλιστα από την (4.12) η εκτίμησή μας θα έχει μικρότερη διακύμανση από την κλασική εκτιμήτρια. Για να κατανοήσουμε καλυτέρα πώς ορίζεται η X μέσα από τη διαδικασία της προσομοίωσης και πώς αυτό βελτιώνει την εκτιμήτρια ας θεωρήσουμε ότι η διαδικασία της προσομοίωσης χωρίζεται σε δυο στάδια. Πρώτα προκύπτει η προσομοιωμένη τιμή του X και μετά η τιμή του Y.

Τώρα εάν η τιμή του X μας βοηθά στον υπολογισμό του Y άμεσα τότε προκύπτει μια τιμή του Y δεδομένου του X η οποία είναι απαλλαγμένη από τη διακύμανση της αρχικής εκτιμήτριας του Y, αν από το σημείο αυτό συνεχίζαμε την προσομοίωση.

Ας δούμε πώς εφαρμόζεται αυτή η τεχνική στην αποτίμηση ενός down and in Barrier δικαιώματος προαίρεσης. Έστω ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου S_t καταγράφεται τις χρονικές στιγμές $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$. Η no-arbitrage τιμή του δικαιώματος στο χρόνο 0 θα είναι

$$E[e^{-rT}(S_T - K)^+ 1_{\{t_H \le T\}}],$$

όπου H είναι το φράγμα και t_H είναι η χρονική στιγμή που έχουμε καταγραφή της τιμής του τίτλου και ταυτόχρονα, για πρώτη φορά, είναι $S_{t_H} \le H$. Με την κλασική προσομοίωση θα προσομοιώναμε την τιμή του τίτλου $\{S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_n}\}$ και θα λαμβάναμε την

$$C_{di}(0) = e^{-rT}(S_T - K)^+ 1_{\{t_H \le T\}}.$$

Γνωρίζουμε ότι τη χρονική στιγμή που θα έχει περάσει το φράγμα η τιμή του υποκείμενου τίτλου, η τιμή του down and in δικαιώματος θα ισούται με την τιμή του κλασικού δικαιώματος προαίρεσης (*plain vanilla call*) για το οποίο υπαρχει γνωστός αναλυτικός τύπος. Έστω λοιπόν $\{S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_H}\}$ η διαδρομή της τιμής του τίτλου μέχρι να περάσει το φράγμα. Τότε

$$\begin{aligned} E[e^{-rT}(S_T - K)^+ 1_{\{t_H \le T\}}] &= e^{-rT} E[E[(S_T - K)^+ 1_{\{t_H \le T\}}] \mid S_{t_1}, \ldots, S_{t_n}]] \\ &= e^{-rT} E[e^{r(T-t_H)} C_{plain}(S_{t_H}, K, r, T - t_H, \sigma) 1_{\{t_H \le T\}}]. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε την εξής εκτιμήτρια

$$\hat{C}_{di} = e^{-rt_H} C_{plain}(S_{t_H}, K, r, T - t_H, \sigma) 1_{\{t_H \le T\}}.$$

Στην ουσία δηλαδή η προσομοίωση της διαδρομής της τιμής του τίτλου συνεχίζεται κανονικά μέχρι τη λήξη του δικαιώματος. Αν περάσει το φράγμα, η αναμενόμενη αξία του δικαιώματος στη λήξη του θα είναι η αναμενόμενη αξία του κλασικού δικαιώματος με αρχική τιμή S_{t_H} και χρόνο μέχρι τη λήξη του $T - t_H$.

Επιλέγοντας διαφορετικούς τρόπους δέσμευσης προκύπτουν διαφορετικές εκτιμήτριες. Τότε, αν για παράδειγμα $\hat{C}'_{di}$ είναι μια άλλη τέτοια εκτιμήτρια,

$$\hat{C}''_{di} = \hat{C}'_{di} + b(\hat{C}_{di} - \hat{C}'_{di})$$

Δηλαδή χρησιμοποιώντας τη μια ως μεταβλητή ελέγχου για την άλλη προκύπτει μια τρίτη που θα έχει μικρότερη διακύμανση και από τις δυο όπως είδαμε στην Παράγραφο 4.3.

4.7 Δειγματοληψία σπουδαιότητας (Importance Sampling)

Η τεχνική αυτή βασίζεται στην παρατήρηση ότι η αναμενομένη τιμή ως προς κάποιο μέτρο πιθανότητας μπορεί να εκφραστεί ως αναμενόμενη τιμή ως προς κάποιο άλλο μέτρο πιθανότητας με χρήση του λόγου πιθανοφάνειας (*likehood ratio*) ή της παραγώγου των Radon-Nikodym. Έστω λοιπόν ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής $X \in A$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$, δηλαδή

$$\mu = E[X] = \int_{x \in A} x f(x) dx .$$

Επιλέγουμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από μια άλλη κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g(x)$ για την οποία ισχύει για κάθε $X \in A$ με $f(X) \neq 0 \Rightarrow g(X) \neq 0$. Θα ισχύει ότι

$$E_f[X] = \int_{x \in A} x f(x) dx = \int_{x \in A} x \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx = E_g[X \frac{f(X)}{g(X)}]. \tag{4.13}$$

Με E_f, E_g συμβολίζουμε τις αναμενόμενες τιμές θεωρώντας ότι η τ.μ. X έχει σ.π.π. f και g αντίστοιχα. Από την (4.13) προκύπτει μια διαφορετική εκτιμήτρια από τη συνήθη

$$\tilde{\hat{\mu}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{f(X_i)}{g(X_i)} X_i \tag{4.14}$$

με X_i τυχαίους αριθμούς από την κατανομή g. Η αποτελεσματικότητα της νέας εκτιμήτριας εξαρτάται άμεσα από την επιλογή της *νέας κατανομής*. Η g πρέπει όταν $f(x) > 0$ *τότε και* $g(x) > 0$.

Γενικά μια «καλή» g θα έχει τις εξής ιδιότητες

I) *Η $g(x)$ να είναι όσο το δυνατόν ανάλογη της $f(x)$. Από την εκτιμήτρια της σχέσης (4.14) έπεται ότι αν $g = af$ τότε η διακύμανση της εκτιμήτριας θα ήταν μηδενική.*

II) *Να είναι εύκολο να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από την g.*

III) *Να είναι εύκολο να υπολογιστεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της* g *για οποιαδήποτε πραγματοποίηση της X προκύψει.*

Όμοια, και στην περίπτωση όπου θέλουμε να εκτιμήσουμε την αναμενόμενη τιμή μιας συνάρτησης h της τυχαίας μεταβλητής X μπορούμε να την υπολογίσουμε ως προς κάποιο άλλο μέτρο πιθανότητας, δηλαδή

$$a = E_f[h(X)] = \int_{x \in A} h(x) f(x) dx = \int_{x \in A} \frac{h(x) f(x)}{g(x)} g(x) dx = E_g[\frac{h(x) f(x)}{g(x)}]$$

όπου και πάλι θα προκύψει μια νέα εκτιμήτρια. Όταν $h(x) \geq 0$ αποδεικνύεται ότι η βέλτιστη επιλογή g, θα ήταν η κανονικοποιημένη μορφή της $G(x) = |h(x)|f(x)$, δηλαδή

$$g(x) = G(x) / \int_{x \in A} G(x) dx,$$

όμως η επιλογή αυτή έχει μόνο θεωρητική αξία, γιατί περιέχει και το ολοκλήρωμα που επιθυμούμε να υπολογίσουμε.

4.7.1. Εφαρμογή στην περίπτωση δικαιωμάτων που εξαρτώνται από την διαδρομή (Path dependent options)

Έστω ότι θέλουμε να εφαρμόσουμε την παραπάνω τεχνική για να ελαττώσουμε την διακύμανση της εκτιμήτριας της τιμής του δικαιώματος, το οποίο εξαρτάται από την διαδρομή της τιμής του υποκείμενου τίτλου. Έστω ότι η τιμή καταγράφεται m φορές και κατά τις χρονικές στιγμές $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T$. Στο μοντέλο της γεωμετρικής κίνησης Brown είδαμε ότι το αποπληθωρισμένο κέρδος του δικαιώματος $G(Z_1,\ldots,Z_m)$ είναι μια συνάρτηση του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{Z} = (Z_1,\ldots,Z_m) \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_m)$ και μάλιστα είναι

$$S(t_i) = S(t_{i-1})\exp((r - \sigma^2/2)(t_i - t_{i-1}) + \sigma\sqrt{t_i - t_{i-1}}\, Z_i). \tag{4.15}$$

Εφαρμόζοντας την τεχνική της δειγματοληψίας σπουδαιότητας σε τέτοια δικαιώματα μια νέα εκτιμήτρια μπορεί να προκύψει για τον υπολογισμό της $\mathrm{E}[G(\mathbf{Z})]$ αλλάζοντας την κατανομή του $\mathbf{Z}$. Έστω λοιπόν ότι θέλουμε να αλλάξουμε μόνο τον μέσο της κατανομής του $\mathbf{Z}$ από $\mathbf{0}$ σε κάποιο άλλο διάνυσμα $\boldsymbol{\mu}$. Έστω $P_{\boldsymbol{\mu}}$, $E_{\boldsymbol{\mu}}$ και $f_{\boldsymbol{\mu}}$ το μέτρο πιθανότητας, η αναμενόμενη τιμή και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας όταν $\mathbf{Z} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_m)$. Τότε θα είναι

$$E[G(\mathbf{Z})] = E_{\boldsymbol{\mu}}[L(\mathbf{Z})G(\mathbf{Z})]$$

όπου L ο λόγος πιθανοφάνειας που είναι ίσος με

$$L(\mathbf{Z}) = \frac{f(\mathbf{Z})}{f_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{Z})} = \prod_{i=1}^{m} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-Z_i^2/2)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-(Z_i - \mu)^2/2)} = \exp(\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(Z_i - \mu)^2 - \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} Z_i^2) = \exp(-\mu\sum_{i=1}^{m} Z_i + \frac{m}{2}\mu^2)$$

και άρα

$$L(\mathbf{Z}) = \exp(-\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{Z} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mu}) .$$

Όποιο $\boldsymbol{\mu}\in R^m$ και αν επιλέξουμε, ο αλγόριθμος προσομοίωσης θα είναι ο εξής:

Βήμα 1. Παράγουμε $\mathbf{Z}^{(i)} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_m)$ **για** $i = 1, 2, \ldots, N$

Βήμα 2. Υπολογίζουμε τα $Y^{(i)} = G(\mathbf{Z}^{(i)})\cdot\exp(-\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{Z} + \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\mu}/2)$

Βήμα 3. Τυπώνουμε την εκτίμηση $(Y^{(1)} + \ldots + Y^{(N)})/N$

Με την εφαρμογή της παραπάνω τεχνικής προκύπτει μια αμερόληπτη εκτιμήτρια που ανάλογα με την επιλογή του $\boldsymbol{\mu}$ μπορεί να είναι μικρότερης διακύμανσης από την κλασική εκτιμήτρια.

Οι Glasserman, Heidelberger and Shahabuddin (1999) προτείνουν μια συνθήκη από την οποία προκύπτει ένα βέλτιστο $\boldsymbol{\mu}$. Η G ως συνάρτηση του αποπληθωρισμένου κέρδους ενός δικαιώματος μπορεί να πάρει μόνο μη αρνητικές τιμές. Άρα μπορεί να γραφεί ως $G(\mathbf{z}) = \exp(F(\mathbf{z}))$, θεωρώντας καταχρηστικά ότι $F(\mathbf{z}) = -\infty$ όταν $G(\mathbf{z}) = 0$. Τότε

$$E[G(\mathbf{Z})] = E[\exp(F(\mathbf{Z}))] = E_{\boldsymbol{\mu}}[\exp(F(\mathbf{Z}))\exp(-\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{Z} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\mu})\,]$$

$$= E[\exp(F(\mathbf{Z} + \boldsymbol{\mu}))\exp(-\boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{\mu} + \mathbf{Z}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\mu})\,]$$

$$= E[\,\exp(F(\mathbf{Z} + \boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{\mu}^T\mathbf{Z} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\mu})\,].$$

Για κάθε $\boldsymbol{\mu}$ και $\mathbf{Z} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_m)$. Η παράσταση μέσα στις αγκύλες υποδεικνύει μια αμερόληπτη εκτιμήτρια. Παίρνουμε το ανάπτυγμα Taylor πρώτου βαθμού της F και η εκτιμήτρια προσεγγιστικά γίνεται

$$\exp(F(\mathbf{Z} + \boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{\mu}^T\mathbf{Z} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\mu}) \approx \exp(F(\boldsymbol{\mu}) + \nabla F(\boldsymbol{\mu})\mathbf{Z} - \boldsymbol{\mu}^T\mathbf{Z} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\mu}) \tag{4.16}$$

με $\nabla F(\boldsymbol{\mu})$ το βαθμωτό διάνυσμα της F στο $\boldsymbol{\mu}$. Εάν απαιτήσουμε το $\boldsymbol{\mu}$ να ικανοποιεί τη σχέση

$$\nabla F(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\mu}^T \tag{4.17}$$

τότε η εκτιμήτρια δεν θα περιέχει το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{Z}$. Έτσι εφαρμόζοντας δειγματοληψία σπουδαιότητας με ένα $\boldsymbol{\mu}$ που θα ικανοποιεί την (4.17) λαμβάνουμε μια εκτιμήτρια με μηδενική διακύμανση (εάν η (4.16) ισχύει ακριβώς) ή μια εκτιμήτρια με χαμηλή διακύμανση (εάν η (4.16) ισχύει προσεγγιστικά).

4.7.2. Εφαρμογή σε δικαίωμα Ασιατικού τύπου

Έστω ένα δικαίωμα Ασιατικού τύπου με συνάρτηση κέρδους $(\bar{S}-K)^+$, όπου $\bar{S}$ ο αριθμητικός μέσος των τιμών του υποκείμενου τίτλου που έχουν καταγραφεί ανά ισομήκη χρονικά διαστήματα με $t_i - t_{i-1} = h$. O Glasserman (2003) περιγράφει πώς μπορεί να προσεγγιστεί το βέλτιστο **μ** σε αυτή την περίπτωση. Παραθέτουμε μόνο τις σχέσεις:

$$\mu_{i+1} = \mu_i - \frac{\sigma\sqrt{h}S(t_i)}{my} \quad \text{με } \mu_1 = \frac{\sigma\sqrt{h}(y+K)}{y}, \quad i = 1, \ldots, m-1,$$

όπου y είναι η ρίζα της εξίσωσης

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} S(t_i, y) - K - y = 0 \tag{4.18}$$

και τα $S(t_i) = \mathrm{S}(t_i,y)$ στον παραπάνω τύπο υπολογίζονται από τη σχέση (4.15) θεωρώντας ότι το $\mathbf{Z} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}(y), \mathbf{I}_m)$ με $\boldsymbol{\mu}(y)$ να προκύπτει από τους παραπάνω τύπους.

Το y προσεγγίζεται με αριθμητικές μεθόδους. Στο πρόγραμμα που ακολουθεί υπολογίζεται με τη μέθοδο της τέμνουσας (*Secant method*). Γενικά ο Glasserman (2003) παρατηρεί ότι η ρίζα της (4.18) προκύπτει σχετικά γρήγορα και ότι αριθμητικά παραδείγματα συνιστούν την ύπαρξη μοναδικής ρίζας.

Στο παρακάτω πρόγραμμα σε Java υπολογίζεται ένα τέτοιο δικαίωμα αγοράς με r = 0.05, vol = 0.1, $S_0 = 50$, $K = 45$, $T = 1$, $m = 16$.

```
public class arithmeticIS
{public static void main(String arg[])
    {
        double r=0.05,vol=0.1,S0=50,K=45,N=1000000,dt=1.0/16.0,Z,y,SumZmean=0,SummTm=0;
        double Si,profit=0,SumSi=0,Sum=0,Sum2=0,mtimh,std,mean;
        int t=16,i,j,m=t;
        double PA=Math.exp(-r*dt*t);
        Generator typikh=new Generator();
        System.out.println("Finding optimal y");
        y=Solve(K,vol,dt,r,S0,m);
        System.out.println("Optimal y found: "+String.valueOf(y)+"  with f(y)="+String.valueOf(f(y,K,vol,dt,r,S0,m)));
        System.out.println("Simulating");
        for(i=1;i<=N;i++)
            {
             Si=S0;
             SumSi=0;
             SumZmean=0;
             mean=vol*Math.sqrt(dt)*(y+K)/y;
             SummTm=0;
             j=0;
             do
                 {
                  j=j+1;
                  Z=typikh.normal()+mean;
                  Si=St(Si,dt,Z,r,vol);
                  SummTm+=0.5*mean*mean;
                  SumZmean+=Z*mean;
                  SumSi+=Si;
                  mean=Zt(mean,Si,y,m,dt,vol);
                 } while(j<t);
             profit=(SumSi/(t)-K)>0?(SumSi/(t)-K)*Math.exp(-SumZmean+SummTm):0;
```

```
                Sum+=profit;
                Sum2+=profit*profit;
              }
        mtimh=Sum/N;
        std=PA*Math.sqrt((Sum2-N*mtimh*mtimh)/((N-1)*N));
        System.out.println("Replications:"+String.valueOf(N));
        System.out.println ("Estimated cost:"+String.valueOf(PA*mtimh)+" std="+String.valueOf(std));
    }

// Μέθοδος για την εύρεση του Si
public static double St(double St_1,double dt,double Z,double r,double vol) {
  return St_1*Math.exp((r-0.5*vol*vol)*dt+vol*Math.sqrt(dt)*Z);
  }

// Μέθοδος για την εύρεση του Zi
public static double Zt(double Zt_1,double St_1,double y,int m,double dt,double vol) {
   return Zt_1-vol*Math.sqrt(dt)*St_1/(m*y);
  }

//Μέθοδος για τον υπολογισμό της συνάρτησης της οποίας θέλουμε τη ρίζα
public static double f(double y,double K,double vol,double dt,double r,double S0,int m) {
        double Sum=0,St_1,Zt_1;
        int j;
        St_1=S0;
        Zt_1=vol*Math.sqrt(dt)*(y+K)/y;
        for(j=1;j<=m;j++)
          {
           St_1=St(St_1,dt,Zt_1,r,vol);
           Sum+=St_1;
           Zt_1=Zt(Zt_1,St_1,y,m,dt,vol);
          }
        return Sum/m-K-y;
  }

//Η μέθοδος της χορδής (Secant method) για εύρεση ρίζας
public static double Solve(double K,double vol,double dt,double r,double S0,int m) {
        double epsilon=0.01,yn_1=0.1,yn=10*S0,d;
        int n=1,epanalhpseis=100;
        do
          {
           d=(yn-yn_1)/(f(yn,K,vol,dt,r,S0,m)-f(yn_1,K,vol,dt,r,S0,m))*f(yn,K,vol,dt,r,S0,m);
           yn_1=yn;
           yn=yn-d;
          }while(n<=epanalhpseis&&Math.abs(d)>epsilon);
        return yn;
}
}
```

Για N = 1000000 επαναλήψεις η no-arbitrage τιμή του δικαιώματος στο χρόνο 0 υπολογίζεται ότι είναι περίπου C = 6.053 και η τυπική απόκλιση της εκτίμησης είναι std = 0.000863.

Στον παρακάτω πίνακα συγκρίνεται η τυπική απόκλιση της εκτιμήτριας που προκύπτει με την παραπάνω τεχνική της δειγματοληψίας σπουδαιότητας με την τυπική απόκλιση της κλασικής εκτιμήτριας για ένα Ασιατικό δικαίωμα αγοράς.

Πίνακας 4.4[5]

Τυπικά σφάλματα για arithmetic average asian δικαιώματα αγοράς.

S_0=100		arithmetic average asian call	
σ	**K**	Χωρίς ελάττωση διακύμανσης	Μέθοδος δειγματοληψίας σπουδαιότητας
0,2	90	0,3875	0,0098
	100	0,02489	0,0094
	110	0,00189	0,0029
0,4	90	0,07332	0,0257
	100	0,05026	0,0172
	110	0,02028	0,0409
0,6	90	0,10359	0,0359
	100	0,07651	0,0248
	110	0,11266	0,0909

Οι εκτιμήσεις της τυπικής απόκλισης βασίζονται σε N = 10000 επαναλήψεις. Οι παράμετροι και για τα δυο δικαιώματα είναι S_0 = 100, r = 0.10, T = 28/252 και με το K και το σ να μεταβάλλεται όπως φαίνεται στον πίνακα. Η διαδρομή της τιμής του υποκείμενου τίτλου καταγράφεται με συχνότητα δt = 1/252 (κάθε εργάσιμη ημέρα).

Παρατηρούμε ότι υπαρχει αρκετά μεγάλη ελάττωση της τυπικής απόκλισης σε κάποιες περιπτώσεις. Μάλιστα παρατηρούμε ότι η τεχνική αποδίδει περισσότερο όσο αυξάνεται η πιθανότητα κέρδους του δικαιώματος, ενώ σε κάποιες περιπτώσεις η τεχνική αυτή μπορεί να έχει και αρνητική επίδραση (αύξηση της τυπικής απόκλισης της εκτιμήτριας).

4.8 Εφαρμογές σε δικαιώματα Ασιατικού τύπου

Θα εφαρμόσουμε τις κυριότερες τεχνικές ελάττωσης διακύμανσης που παρουσιάστηκαν έως τώρα σε διάφορες παραλλαγές δικαιωμάτων αγοράς Ασιατικού τύπου.

4.8.1 Plain vanilla fixed-strike Eurasian call

Ένα Ευρωπαϊκό fixed-strike plain vanilla Ασιατικό δικαίωμα αγοράς έχει συνάρτηση κέρδους $\kappa_{call} = (S_{ave} - K)^+$. Το S_{ave} είναι ο αριθμητικός μέσος των τιμών του υποκείμενου τίτλου που έχουν καταγραφεί κατά τη διάρκεια ισχύος του δικαιώματος. Εδώ θεωρούμε τη διάρκεια ισχύος του δικαιώματος ένα έτος (T = 1) και θεωρούμε ότι η καταγραφή της πορείας του υποκείμενου τίτλου γίνεται ανά μήνα (σύνολο 12 καταγραφές). Το χωρίς ρίσκο επιτόκιο θεωρείται σταθερό κατά τη διάρκεια του έτους (r = 0.05) και η αρχική τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι S_0 = 100. Στον Πίνακα 4.5 δίνονται οι τυπικές αποκλίσεις της εκτιμήτριας της (no-arbitrage) τιμής του δικαιώματος στην αρχή της ισχύος του για διάφορες τιμές της πτητικότη-

[5] Τα προγράμματα σε Java υπάρχουν στο παράρτημα

τας σ και της τιμής εξάσκησης K . Στην πρώτη στήλη του πίνακα δίνεται η τυπική απόκλιση ***χωρίς τη χρήση κάποιας μεθόδου ελάττωσης διακύμανσης*** (*Raw*) ενώ στις επόμενες στήλες δίνεται η τυπική απόκλιση καθώς και το ποσοστό ελάττωσης της τυπικής απόκλισης που έχει επιτευχθεί με την εφαρμογή της εκάστοτε μεθόδου ελάττωσης διακύμανσης.

Παρατηρούμε ότι η χρήση της ***μεθόδου των αντιθετικών μεταβλητών*** (AV) ελαττώνει σε μεγάλο ποσοστό την τυπική απόκλιση για $K << S_0$ και σ μικρό. Όταν αυτές οι παράμετροι του δικαιώματος αυξάνουν, η αποτελεσματικότητα της μεθόδου μειώνεται.

Η χρήση της ***μεταβλητής ελέγχου*** (CV) για την αποτίμηση αυτού του δικαιώματος φαίνεται να έχει πολύ καλό αποτέλεσμα. Ως μεταβλητή ελέγχου έχει χρησιμοποιηθεί το αντίστοιχο Ασιατικό δικαίωμα με βάση το γεωμετρικό μέσο. Το συγκεκριμένο δικαίωμα έχει αναλυτικό τυπο που παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 4.4 (αντίστοιχος τύπος στην περίπτωση όπου έχουμε συνεχή καταγραφή του υποκείμενου τίτλου υπάρχει στην Παράγραφο 2.10) και όπως είδαμε στον Πίνακα 4.3 έχει πολύ υψηλή συσχέτιση με το δικαίωμα που θέλουμε να αποτιμήσουμε, γεγονός που εξηγεί την υψηλή αποτελεσματικότητα της μεθόδου.

Η μέθοδος της ***στρωματοποιημένης δειγματοληψίας*** (SS) έχει καλά αποτελέσματα που είναι ανεξάρτητα της τιμής των K, σ.

Πίνακας 4.5.

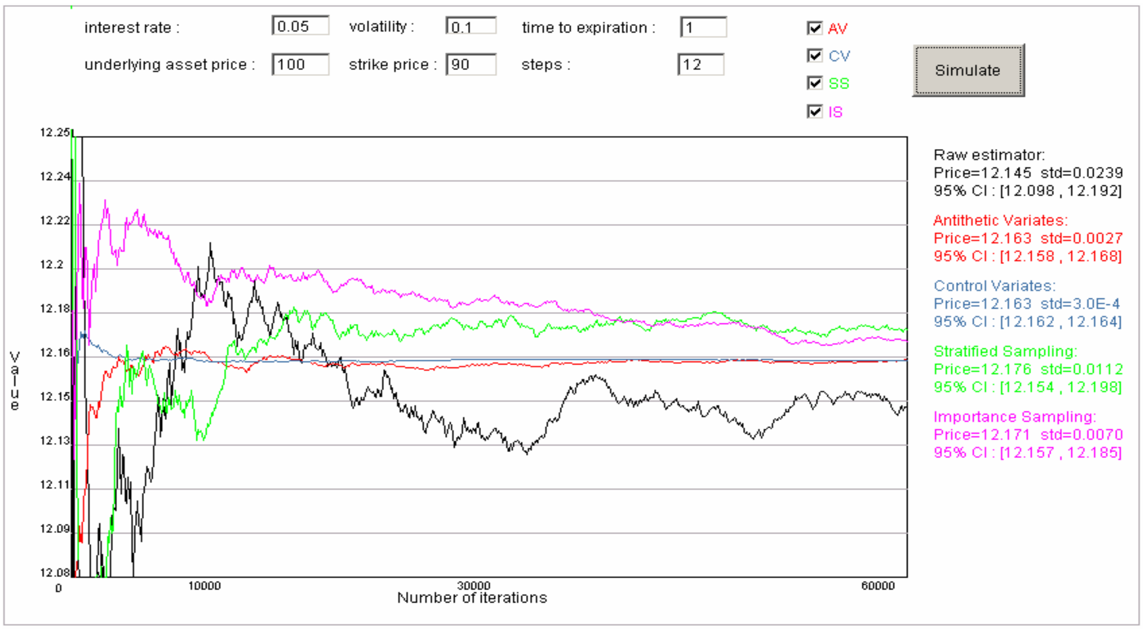
Τυπικές αποκλίσεις της εκτίμησης του plain vanilla fixed-strike Eurasian call για N* = 1000000 *επαναλήψεις

σ	K	Raw	AV		CV		SS		IS	
0,1	**90**	0,00597	0,00068	11,39%	0,00008	1,34%	0,00279	46,73%	0,00176	29,48%
	92	0,00588	0,00091	15,48%	0,00008	1,36%	0,00276	46,94%	0,00193	32,82%
	94	0,0057	0,00124	21,75%	0,00007	1,23%	0,0027	47,37%	0,00203	35,61%
	96	0,00543	0,00166	30,57%	0,00007	1,29%	0,0026	47,88%	0,00201	37,02%
	98	0,00503	0,00212	42,15%	0,00007	1,39%	0,00245	48,71%	0,00189	37,57%
	100	0,00451	0,00252	55,88%	0,00007	1,55%	0,00225	49,89%	0,00166	36,81%
	102	0,00391	0,00276	70,59%	0,00006	1,53%	0,00202	51,66%	0,00137	35,04%
	104	0,00326	0,00267	81,90%	0,00006	1,84%	0,00175	53,68%	0,00977	-
	106	0,00264	0,00235	89,02%	0,00006	2,27%	0,00148	56,06%	0,00671	-
	108	0,00205	0,00192	93,66%	0,00006	2,93%	0,00121	59,02%	0,00478	-
	110	0,00156	0,00148	94,87%	0,00005	3,21%	0,00097	62,18%	0,0032	-
0,2	**90**	0,01098	0,004	36,43%	0,00027	2,46%	0,00527	48,00%	0,00377	34,34%
	92	0,01061	0,00447	42,13%	0,00026	2,45%	0,00513	48,35%	0,00368	34,68%
	94	0,01015	0,00492	48,47%	0,00025	2,46%	0,00496	48,87%	0,00354	34,88%
	96	0,00967	0,00532	55,02%	0,00025	2,59%	0,00478	49,43%	0,00335	34,64%
	98	0,0091	0,00568	62,42%	0,00024	2,64%	0,00456	50,11%	0,00312	34,29%
	100	0,00853	0,0059	69,17%	0,00024	2,81%	0,00434	50,88%	0,00284	33,29%
	102	0,00791	0,00598	75,60%	0,00023	2,91%	0,00409	51,71%	0,00256	32,36%
	104	0,00725	0,00589	81,24%	0,00023	3,17%	0,00385	53,10%	0,02081	-
	106	0,00663	0,00562	84,77%	0,00022	3,32%	0,00357	53,85%	0,01732	-
	108	0,00602	0,0053	88,04%	0,00022	3,65%	0,00331	54,98%	0,01457	-
	110	0,00541	0,00491	90,76%	0,00022	4,07%	0,00305	56,38%	0,01231	-

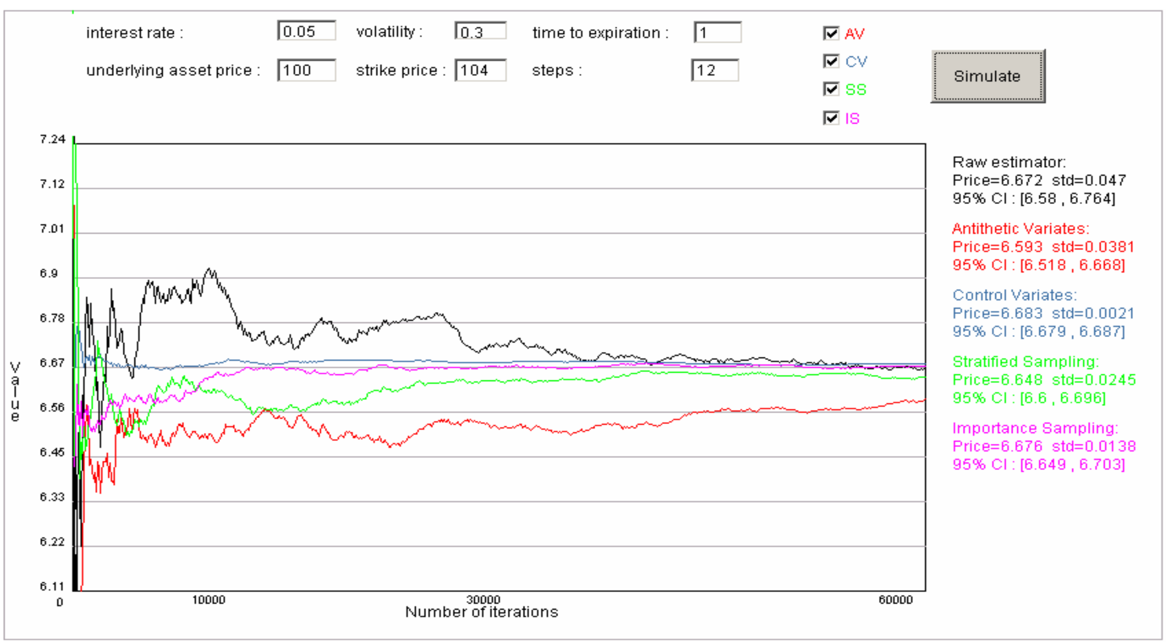
σ	K	Raw	AV		CV		SS		IS	
0,3	**90**	0,01558	0,00832	53,40%	0,00057	3,66%	0,00763	48,97%	0,00509	32,67%
	92	0,01512	0,00866	57,28%	0,00056	3,70%	0,00745	49,27%	0,00493	32,61%
	94	0,01456	0,00904	62,09%	0,00056	3,85%	0,00725	49,79%	0,00472	32,42%
	96	0,01402	0,00935	66,69%	0,00055	3,92%	0,00705	50,29%	0,00449	32,03%
	98	0,01345	0,00954	70,93%	0,00054	4,01%	0,00684	50,86%	0,00424	31,52%
	100	0,01283	0,00965	75,21%	0,00053	4,13%	0,00659	51,36%	0,00397	30,94%
	102	0,01224	0,00965	78,84%	0,00053	4,33%	0,00636	51,96%	0,0037	30,23%
	104	0,01162	0,00949	81,67%	0,00052	4,48%	0,00611	52,58%	0,00342	29,43%
	106	0,011	0,00929	84,45%	0,00051	4,64%	0,00586	53,27%	0,02834	-
	108	0,01038	0,00901	86,80%	0,0005	4,82%	0,00561	54,05%	0,02503	-
	110	0,00977	0,00864	88,43%	0,0005	5,12%	0,00535	54,76%	0,02271	-
0,4	**90**	0,02042	0,013	63,66%	0,00103	5,04%	0,01014	49,66%	0,00628	30,75%
	92	0,0199	0,01333	66,98%	0,00102	5,13%	0,00993	49,90%	0,0061	30,65%
	94	0,01934	0,01357	70,17%	0,001	5,17%	0,00973	50,31%	0,00586	30,30%
	96	0,01875	0,01376	73,39%	0,00099	5,28%	0,00953	50,83%	0,00562	29,97%
	98	0,01811	0,01386	76,53%	0,00098	5,41%	0,00928	51,24%	0,00537	29,65%
	100	0,01756	0,01383	78,76%	0,00098	5,58%	0,00907	51,65%	0,00511	29,10%
	102	0,01694	0,01373	81,05%	0,00096	5,67%	0,00883	52,13%	0,00484	28,57%
	104	0,01632	0,01361	83,39%	0,00096	5,88%	0,00857	52,51%	0,00458	28,06%
	106	0,01572	0,01343	85,43%	0,00095	6,04%	0,00835	53,12%	0,00432	27,48%
	108	0,0151	0,01313	86,95%	0,00094	6,23%	0,00812	53,77%	0,03787	-
	110	0,01454	0,01277	87,83%	0,00094	6,46%	0,00783	53,85%	0,03305	-
0,5	**90**	0,02557	0,01816	71,02%	0,00168	6,57%	0,01283	50,18%	0,00765	29,92%
	92	0,02499	0,01839	73,59%	0,00165	6,60%	0,01264	50,58%	0,0074	29,61%
	94	0,0245	0,01853	75,63%	0,00162	6,61%	0,01242	50,69%	0,00717	29,27%
	96	0,02388	0,01857	77,76%	0,00162	6,78%	0,01221	51,13%	0,00692	28,98%
	98	0,02329	0,0186	79,86%	0,0016	6,87%	0,01202	51,61%	0,00666	28,60%
	100	0,02273	0,01853	81,52%	0,00158	6,95%	0,01177	51,78%	0,00637	28,02%
	102	0,02216	0,01841	83,08%	0,00156	7,04%	0,01158	52,26%	0,00611	27,57%
	104	0,02152	0,01823	84,71%	0,00156	7,25%	0,01131	52,56%	0,00589	27,37%
	106	0,02089	0,01796	85,97%	0,00155	7,42%	0,0111	53,14%	0,0056	26,81%
	108	0,02035	0,01777	87,32%	0,00153	7,52%	0,01087	53,42%	0,00534	26,24%
	110	0,01976	0,01746	88,36%	0,00152	7,69%	0,01063	53,80%	0,0051	25,81%
0,6	**90**	0,03115	0,0237	76,08%	0,00251	8,06%	0,01588	50,98%	0,00947	30,40%
	92	0,03059	0,02393	78,23%	0,00248	8,11%	0,01563	51,10%	0,00917	29,98%
	94	0,02993	0,02395	80,02%	0,00243	8,12%	0,01544	51,59%	0,00896	29,94%
	96	0,02946	0,02391	81,16%	0,00242	8,21%	0,01518	51,53%	0,00914	31,03%
	98	0,02889	0,02383	82,49%	0,00242	8,38%	0,01501	51,96%	0,00839	29,04%
	100	0,0283	0,02378	84,03%	0,0024	8,48%	0,01481	52,33%	0,00813	28,73%
	102	0,02778	0,02362	85,03%	0,00238	8,57%	0,01458	52,48%	0,00785	28,26%
	104	0,02722	0,02337	85,86%	0,00238	8,74%	0,0144	52,90%	0,00778	28,58%
	106	0,02665	0,0231	86,68%	0,00237	8,89%	0,01413	53,02%	0,00728	27,32%
	108	0,02602	0,02291	88,05%	0,00234	8,99%	0,01392	53,50%	0,00697	26,79%
	110	0,02549	0,02255	88,47%	0,00233	9,14%	0,01368	53,67%	0,00673	26,40%

Η ***δειγματοληψία σπουδαιότητας*** (IS) φαίνεται να δουλεύει πολύ καλά, αλλά όχι στο σύνολο των περιπτώσεων. Όταν $K >> S_0$, όταν δηλαδή η τιμή του δικαιώματος τείνει να γίνει μηδενική (το δικαίωμα θα είναι μάλλον out-of-the-money) η μέθοδος δεν δουλεύει ικανοποιητικά. Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει κάτι χαρακτηριστικό της μεθόδου αυτής: Επιλέγοντας πραγματοποιήσεις από μια άλλη κατανομή δεν έχουμε πάντα ως αποτέλεσμα τη μείωση της τυπικής απόκλισης, αλλά αντίθετα μπορεί να παρατηρείται αύξηση. Όταν το σ αυξάνει, αυξάνοντας ταυτόχρονα και την τιμή του δικαιώματος, αυτή η μέθοδος γίνεται αποτελεσματική και για μεγάλα *K*.

Σχήμα 4.3 (α)



Σχήμα 4.3 (β)



Στα σχήματα 4.3(α), 4.3(β) παρουσιάζεται μια γραφική σύγκριση των μεθόδων. Παριστάνεται η εκτιμώμενη τιμή του δικαιώματος σε συνάρτηση με τον αριθμό των επαναλήψεων. Παρατηρούμε ότι με τη μέθοδο των μεταβλητών ελέγχου έχουμε πολύ γρήγορη σύγκλιση της εκτιμώμενης τιμής του δικαιώματος που προκύπτει από προσομοίωση, και η μέθοδος αυτή φαίνεται να είναι σαφώς καλύτερη και στα δυο σχήματα. Στο Σχήμα 4.3(α), όπου η προσομοίωση αφορά σε δικαίωμα με $K = 90$, $\sigma = 0.1$, όπως και στον Πίνακα 4.5, η επόμενη καλύτερη μέθοδος μετά την μέθοδο των ρυθμιστικών μεταβλητών φαίνεται να είναι η μέθοδος των αντιθετικών μεταβλητών. Αντίθετα, στο Σχήμα 4.3(β), όπου η προσομοίωση αφορά σε δικαίωμα με $K = 104$, $\sigma = 0.3$, η επόμενη καλύτερη μέθοδος φαίνεται τώρα να είναι η μέθοδος της δειγματοληψίας σπουδαιότητας.

Ως συμπέρασμα θα λέγαμε ότι η μέθοδος της ρυθμιστικής μεταβλητής φαίνεται να δουλεύει καλυτέρα για αυτό το δικαίωμα για όλες τις τιμές των παραμέτρων.

4.8.2 Plain vanilla floating-strike Eurasian call

Ένα Ευρωπαϊκό plain vanilla floating-strike Ασιατικό δικαίωμα αγοράς έχει συνάρτηση κέρδους $\kappa_{call} = (S_T - S_{ave})^+$. Το S_{ave} υπολογίζεται όπως και για το fixed-strike. Στο συγκεκριμένο δικαίωμα δεν υπάρχει σταθερή τιμή εξάσκησης K. Προσομοιώνουμε ένα τέτοιο δικαίωμα με παραμέτρους $S_0 = 100$, $T = 1$ και ανά μήνα καταγράφουμε την τιμή του υποκείμενου τίτλου (12 καταγραφές) και υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση της εκτιμήτριας για $N =$ 1000000 επαναλήψεις. Στον Πίνακα 4.6 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από τις τυπικές αποκλίσεις της εκτιμήτριας για διάφορες μεθόδους και για διάφορες τιμές της πτητικότητας και του (σταθερού κατά τη διάρκεια της ισχύος του δικαιώματος), χωρίς ρίσκο επιτοκίου r.

Η απόδοση της μεθόδου των αντιθετικών μεταβλητών είναι μέτρια σε σχέση με την προηγουμένη περίπτωση. Παρατηρούμε ότι και σε αυτή την περίπτωση η μείωση της διακύμανσης γίνεται μικρότερη καθώς το σ μεγαλώνει. Για την μέθοδο της μεταβλητής ελέγχου η διαφορά σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση είναι εμφανής. Τα αποτελέσματα αν και σταθερά στις μεταβολές των παραμέτρων του δικαιώματος δεν είναι ικανοποιητικά. Ως μεταβλητή ελέγχου εδώ χρησιμοποιήθηκε ο υποκείμενος τίτλος, ο οποίος (όπως είδαμε στον Πίνακα 4.2) δεν έχει πολύ μεγάλη συσχέτιση με το fixed-strike αντίστοιχο δικαίωμα και προφανώς ισχύει το ίδιο και για την περίπτωση που εξετάζουμε. Η μέθοδος της στρωματοποιημένης δειγματοληψίας εδώ έχει την καλύτερη απόδοση. Είναι σχεδόν σταθερά καλύτερη από τις άλλες μεθόδους και αποδίδει μια μείωση της τάξεως του 50% περίπου σε κάθε περίπτωση.

Πίνακας 4.6.

Τυπικές αποκλίσεις της εκτίμησης του plain vanilla floating-strike Eurasian call για N = 1000000 επαναλήψεις

σ	r	Raw	AV		CV		SS	
0,1	0,2	0,00368	0,00256	69,57%	0,00231	62,77%	0,00201	54,62%
	0,4	0,00396	0,00246	62,12%	0,00238	60,10%	0,00212	53,54%
	0,6	0,00424	0,00232	54,72%	0,00245	57,78%	0,00223	52,59%
	0,8	0,00448	0,00215	47,99%	0,00249	55,58%	0,00231	51,56%
	1	0,0047	0,00196	41,70%	0,00252	53,62%	0,00239	50,85%
0,2	0,2	0,0075	0,00578	77,07%	0,0046	61,33%	0,00402	53,60%
	0,4	0,00779	0,00579	74,33%	0,00466	59,82%	0,00411	52,76%
	0,6	0,0081	0,00576	71,11%	0,00472	58,27%	0,00422	52,10%
	0,8	0,00839	0,00567	67,58%	0,00477	56,85%	0,00431	51,37%
	1	0,00868	0,00558	64,29%	0,00481	55,41%	0,0044	50,69%
0,3	0,2	0,01185	0,00964	81,35%	0,00699	58,99%	0,00619	52,24%
	0,4	0,01218	0,00972	79,80%	0,00703	57,72%	0,00629	51,64%
	0,6	0,01245	0,00977	78,47%	0,00709	56,95%	0,00638	51,24%
	0,8	0,01279	0,00977	76,39%	0,00712	55,67%	0,00648	50,66%
	1	0,01312	0,00973	74,16%	0,00713	54,34%	0,00654	49,85%
0,4	0,2	0,01686	0,01425	84,52%	0,00952	56,47%	0,00865	51,30%
	0,4	0,01717	0,01436	83,63%	0,00955	55,62%	0,00873	50,84%
	0,6	0,01755	0,01446	82,39%	0,00958	54,59%	0,00879	50,09%
	0,8	0,01786	0,01459	81,69%	0,0096	53,75%	0,0089	49,83%
	1	0,01814	0,01461	80,54%	0,00961	52,98%	0,00894	49,28%
0,5	0,2	0,0227	0,01975	87,00%	0,01219	53,70%	0,01146	50,48%
	0,4	0,02303	0,01994	86,58%	0,01223	53,10%	0,0115	49,93%
	0,6	0,02342	0,01999	85,35%	0,01226	52,35%	0,01159	49,49%
	0,8	0,02362	0,02016	85,35%	0,01224	51,82%	0,01165	49,32%
	1	0,02402	0,02033	84,64%	0,01221	50,83%	0,0117	48,71%
0,6	0,2	0,02939	0,0264	89,83%	0,01512	51,45%	0,01473	50,12%
	0,4	0,02964	0,02651	89,44%	0,01511	50,98%	0,01476	49,80%
	0,6	0,03003	0,02659	88,54%	0,01511	50,32%	0,01485	49,45%
	0,8	0,03036	0,02689	88,57%	0,01508	49,67%	0,01487	48,98%
	1	0,03076	0,02696	87,65%	0,01504	48,89%	0,01485	48,28%

4.8.3. Ανακεφαλαίωση

Παρουσιάστηκαν και εφαρμόστηκαν συγκριτικά οι κυριότερες μέθοδοι ελάττωσης διακύμανσης. Όπως ήταν αναμενόμενο, καμία από τις μεθόδους που είδαμε δεν φαίνεται να υπερτερεί σε όλες τις περιπτώσεις. Αντίθετα η επιλογή μιας μεθόδου έναντι των υπολοίπων μπορεί να γίνει μόνο ανά περίπτωση. Η μέθοδος των αντιθετικών μεταβλητών είναι η πιο απλή και από άποψη εφαρμογής και από άποψη αλγοριθμικής πολυπλοκότητας. Σε κάποιες περιπτώσεις ελαττώνει τη διακύμανση της εκτίμησης αρκετά αλλά χωρίς θεαματικά αποτελέσματα συνήθως. Η μέθοδος της μεταβλητής ελέγχου μπορεί να είναι παρά πολύ αποδοτική αν βρούμε την κατάλληλη μεταβλητή ελέγχου. Υπάρχει δυνατότητα να βρούμε αρκετές μεταβλητές ελέγχου για ένα εξωτικό δικαίωμα όπως είδαμε στην Παράγραφο 4.3, αλλά η υψηλή συσχέτισή του με το προς αποτίμηση δικαίωμα είναι το ζητούμενο για να πετύχουμε μεγάλη ελάττωση διακύμανσης. Όσον αφορά στη στρωματοποιημένη δειγματοληψία εδώ παρουσιάσαμε κάποιους σχετικά απλούς τρόπους στρωματοποίησης, οι οποίοι όμως φαίνονται να λειτουργούν σταθερά καλά σε κάθε περίπτωση. Μια πιο εξεζητημένη στρωματοποίηση που βασίζεται και στις ιδιαιτερότητες της συνάρτησης κέρδους του εκάστοτε δικαιώματος μπορεί να δώσει πολύ καλυτέρα αποτελέσματα, όπως αναφέρεται στον Glasserman (2003). Η δειγματοληψία σπουδαιότητας φαίνεται και αυτή να δίνει πολύ καλά αποτελέσματα αν και έχει αυξημένη πολυπλοκότητα και είναι δύσκολο να γνωρίζουμε ανά περίπτωση τη βέλτιστη κατανομή από την οποία θα προκύψει η εκτίμηση. Μια εσφαλμένη επιλογή κατανομής μπορεί να αυξήσει τη διακύμανση της εκτίμησης.

Κλείνοντας, είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι οι παραπάνω μέθοδοι μπορούν να εφαρμοστούν και συνδυαστικά μεταξύ τους. Οι Glasserman, Heidelberger and Shahabuddin (1999) παρουσιάζουν ένα συνδυασμό στρωματοποιημένης δειγματοληψίας και δειγματοληψίας σπουδαιότητας, ο οποίος έχει άριστα αποτελέσματα στην εκτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης που εξαρτώνται από την πορεία του υποκείμενου τίτλου.

Παράρτημα

1. Monte Carlo Εκτίμηση της τιμής ενός *down and out call option* με χρήση της απλής (raw) εκτιμήτριας (σε γλώσσα Java). Πίνακας 4.1, σελίδα 52 .

/***** Για το down and out call raw estimator******/

```
class downandout
{public static void main(String arg[])
  {
   double r=0.1,vol=0.2,S0=100,K=90,H=98,N=10000,dt=1/252.0; //ρυθμίζονται οι παράμετροι
   double Si,profit=0,Sum=0,Sum2=0,Sum3=0,mtimh=0,std;
   boolean barrier_crossed;
   int t=20,i,j;
   double  md=(r-vol*vol/2)*dt,vol_dt=vol*Math.sqrt(dt);
   Generator typikh=new Generator();

   for(i=1;i<=N;i++)
        {
           barrier_crossed=false;
           Si=S0;
           j=0;
           do
                {
                    j=j+1;
                    Si=Si*Math.exp(md+vol_dt*typikh.normal());
                    if(Si<H)
                           barrier_crossed=true;
                } while((!barrier_crossed) && j<t);
             if(!barrier_crossed)
                   profit=(Si-K)>0?(Si-K):0;  //Αν (Si-K)>0, τότε  profit=(Si-K) αλλιώς profit=0
             else
                   profit=0;
             Sum+=profit;
             Sum2+=profit*profit;
           }
  mtimh=Sum/N;
  std=Math.sqrt((Sum2-N*mtimh*mtimh)/((N-1)*N));
  System.out.println("K="+String.valueOf(K)+"  vol="+String.valueOf(vol));
  System.out.println ("std="+String.valueOf(Math.exp(-r*t*dt)*std));
  }
}
```

2. Monte Carlo Εκτίμηση της τιμής ενός *down and out call option* με χρήση αντιθετικών μεταβλητών (σε γλώσσα Java). Πίνακας 4.1, σελίδα 52 .

```
/***** Για το down and out  call με χρήση αντιθετικών μεταβλητών ******/

class downandout
{public static void main(String arg[])
  {
   double r=0.1,vol=0.2,S0=100,K=90,H=98,N=10000,dt=1/252.0;//ρυθμίζονται οι παράμετροι
   double Si1,Si2,z,profit1=0,profit2=0,profit=0,Sum=0,Sum2=0,Sum3=0,mtimh=0,std;
   boolean barrier_crossed1=false,barrier_crossed2=false;
   int t=20,i,j;
   double  md=(r-vol*vol/2)*dt,vol_dt=vol*Math.sqrt(dt);
   Generator typikh=new Generator();
   N=N/2;
   for(i=1;i<=N;i++)
        {
           barrier_crossed1=false;
           barrier_crossed2=false;
           Si1=S0;
           Si2=S0;
            j=0;
            do
                {
                    j=j+1;
                    z=typikh.normal();
                    Si1=Si1*Math.exp(md+vol_dt*z);
                    Si2=Si2*Math.exp(md+vol_dt*(-z));
                    if(Si1<H)
                           barrier_crossed1=true;
                    if(Si2<H)
                           barrier_crossed2=true;
                } while((!barrier_crossed1 ||!barrier_crossed2) && j<t);
              if(!barrier_crossed1)
                   profit1=(Si1-K)>0?(Si1-K):0;//Αν (Si-K)>0 τότε profit=(Si-K) αλλιώς profit=0
              else
                   profit1=0;
              if(!barrier_crossed2)
                   profit2=(Si2-K)>0?(Si2-K):0;
              else
                    profit2=0;
              profit=(profit1+profit2)/2.0;
              Sum+=profit;
              Sum2+=profit*profit;

}
  mtimh=Sum/N;
  std=Math.sqrt((Sum2-N*mtimh*mtimh)/((N-1)*N));
  System.out.println("K="+String.valueOf(K)+"  vol="+String.valueOf(vol));
  System.out.println ("std="+String.valueOf(Math.exp(-r*t*dt)*std));
  }
}
```

3. Monte Carlo Εκτίμηση της τιμής ενός *down and in call option* με χρήση της απλής (raw) εκτιμήτριας (σε γλώσσα Java). Πίνακας 4.1, σελίδα 52.

```
/***** Για το down and in  call raw estimator******/

class downandin
{public static void main(String arg[])
  {
   double r=0.1,vol=0.2,S0=100,K=90,H=98,N=10000,dt=1/252.0;//ρυθμίζονται οι παράμετροι
   double Si,profit=0,Sum=0,Sum2=0,Sum3=0,mtimh=0,std;
   boolean barrier_crossed;
   int t=20,i,j;
   double  md=(r-vol*vol/2)*dt,vol_dt=vol*Math.sqrt(dt);
   Generator typikh=new Generator();

   for(i=1;i<=N;i++)
        {
           barrier_crossed=false;
           Si=S0;
           j=0;
           do
                {
                     j=j+1;
                     Si=Si*Math.exp(md+vol_dt*typikh.normal());
                     if(Si<=H)
                            barrier_crossed=true;
                } while(j<t);
             if(barrier_crossed)
                   profit=(Si-K)>0?(Si-K):0;//  Αν (Si-K)>0, τότε profit=(Si-K) αλλιώς profit=0
             else
                   profit=0;
             Sum+=profit;
             Sum2+=profit*profit;
           }
  mtimh=Sum/N;
  std=Math.sqrt((Sum2-N*mtimh*mtimh)/((N-1)*N));
  System.out.println("K="+String.valueOf(K)+"  vol="+String.valueOf(vol));
  System.out.println ("std="+String.valueOf(Math.exp(-r*t*dt)*std));
  }
}
```

4. Monte Carlo Εκτίμηση της τιμής ενός *down and in call option* με χρήση αντιθετικών μεταβλητών (σε γλώσσα Java). Πίνακας 4.1, σελίδα 52.

```
/***** Για το down and in  call με χρήση αντιθετικών μεταβλητών******/

class downandin
{public static void main(String arg[])
  {
   double r=0.1,vol=0.2,S0=100,K=90,H=98,N=10000, dt=1/252.0;//ρυθμίζονται οι παράμετροι
   double Si1,Si2,z,profit1=0,profit2=0,profit=0,Sum=0,Sum2=0,Sum3=0,mtimh=0,std;
   boolean barrier_crossed1=false,barrier_crossed2=false;
   int t=20,i,j;
   double  md=(r-vol*vol/2)*dt,vol_dt=vol*Math.sqrt(dt);
   Generator typikh=new Generator();
   N=N/2;
   for(i=1;i<=N;i++)
         {
           barrier_crossed1=false;
           barrier_crossed2=false;
           Si1=S0;
           Si2=S0;
            j=0;
            do
                {
                    j=j+1;
                    z=typikh.normal();
                    Si1=Si1*Math.exp(md+vol_dt*z);
                    Si2=Si2*Math.exp(md+vol_dt*(-z));
                    if(Si1<=H)
                           barrier_crossed1=true;
                    if(Si2<=H)
                           barrier_crossed2=true;
                } while(j<t);
              if(barrier_crossed1)
                   profit1=(Si1-K)>0?(Si1-K):0;//Αν (Si-K)>0 τότε profit=(Si-K) αλλιώς profit=0
              else
                   profit1=0;
              if(barrier_crossed2)
                   profit2=(Si2-K)>0?(Si2-K):0
              else
                    profit2=0;
              profit=(profit1+profit2)/2.0;
              Sum+=profit;
              Sum2+=profit*profit;
           }
  mtimh=Sum/N;
  std=Math.sqrt((Sum2-N*mtimh*mtimh)/((N-1)*N));
  System.out.println("K="+String.valueOf(K)+"  vol="+String.valueOf(vol));
  System.out.println ("std="+String.valueOf(Math.exp(-r*t*dt)*std));
  }
}
```

Προγράμματα Πίνακα 4.2

1. Εκτίμηση της συσχέτισης του plain vanilla call με τον υποκείμενο τίτλο του (σε γλώσσα Java). Πίνακας 4.2, σελίδα 56.

```
/****Υπολογισμός της συσχέτισης για  plain vanilla call και το Si ****/
  class rxyplain
{public static void main(String arg[])
  {
   double r=0.05,vol=0.3,S0=50,T=90.0/365.0,N=1000000;
   double Si,profit=0,Sum,Sum2;
   double SumSi,SumSi2,SumSiprofit,rxy;
   int i,K;
   double  md=(r-vol*vol/2)*T,vol_dt=vol*Math.sqrt(T);
   Generator typikh=new Generator();
   for(K=40;K<=70;K=K+5)
      {
         Sum=0;Sum2=0;SumSi=0;SumSi2=0;SumSiprofit=0;
   for(i=1;i<=N;i++)
      {
         Si=S0;
         Si=Si*Math.exp(md+vol_dt*typikh.normal());
         profit=(Si-K)>0?(Si-K):0;
/**********************************************************************/
         SumSi+=Si;
         SumSi2+=Si*Si;
/**********************************************************************/
         Sum+=profit;
         Sum2+=profit*profit;
         SumSiprofit+=Si*profit;

/********Επειδη Corr(aX + b, cY + d) = Corr(X, Y),  αν ac>0 ************/
/********Corr(Si,Math.exp(-r*t/252.0)*profit) = Corr(Si,profit)***********/
      }
  rxy=(N*SumSiprofit-SumSi*Sum)/Math.sqrt((N*Sum2-Sum*Sum)*(N*SumSi2-SumSi*SumSi));
  System.out.println ("K=:"+String.valueOf(K)+" Corr="+String.valueOf(rxy)+"
Corr2="+String.valueOf(rxy*rxy*100)+"%");
     }
  }
}
```

2. Εκτίμηση της συσχέτισης του Asian arithmetic average call με τον υποκείμενο τίτλο του (σε γλώσσα Java). Πίνακας 4.2, σελίδα 56.

```
/****Υπολογισμός της συσχέτισης για  Asian arithmetic average call και το Si ******/
class rxyarithmetic
{public static void main(String arg[])
  {
   double r=0.05,vol=0.3,S0=50,N=1000000,dt=1.0/365;
   double Si,profit=0,Sum,Sum2,ARAVSumSi;
   double SumSi,SumSi2,SumSiprofit,rxy;
   int t=90,i,j,K;
   double  md=(r-vol*vol/2)*dt,vol_dt=vol*Math.sqrt(dt);
   Generator typikh=new Generator();
   for(K=40;K<=70;K=K+5)
      {
          Sum=0;Sum2=0;SumSi=0;SumSi2=0;SumSiprofit=0;
   for(i=1;i<=N;i++)
      {
          Si=S0;
          ARAVSumSi=0;
          j=0;
          do
              {
                  j=j+1;
                  Si=Si*Math.exp(md+vol_dt*typikh.normal());
                  ARAVSumSi+=Si;
                } while(j<t);
          profit=(ARAVSumSi/t-K)>0?(ARAVSumSi/t-K):0;
/**************************************************************************/
          SumSi+=Si;
          SumSi2+=Si*Si;
/**************************************************************************/
          Sum+=profit;
          Sum2+=profit*profit;
          SumSiprofit+=Si*profit;

/********Επειδη Corr(aX + b, cY + d) = Corr(X, Y),  αν ac>0 ************/
/********Corr(Si,Math.exp(-r*t/252.0)*profit) = Corr(Si,profit)***********/
                      }
  rxy=(N*SumSiprofit-SumSi*Sum)/Math.sqrt((N*Sum2-Sum*Sum)*(N*SumSi2-SumSi*SumSi));
  System.out.println ("K=:"+String.valueOf(K)+" Corr="+String.valueOf(rxy)+"
Corr2="+String.valueOf(rxy*rxy*100)+"%");
   }
 }
}
```

3. Εκτίμηση της συσχέτισης του down and out call με τον υποκείμενο τίτλο του (σε γλώσσα Java). Πίνακας 4.2, σελίδα 56.

```
/****Υπολογισμός της συσχέτισης για το down and out  call και το Si ******/
class rxydownandout
{public static void main(String arg[])
  {
   double r=0.05,vol=0.3,S0=48,H=50,N=1000000,dt=1.0/365;
   double Si,profit=0,Sum=0,Sum2=0;
   double SumSi,SumSi2,SumSiprofit,rxy;
   boolean barrier_crossed;
   int t=90,i,j,K;
   double  md=(r-vol*vol/2)*dt,vol_dt=vol*Math.sqrt(dt);
   Generator typikh=new Generator();

   for(K=40;K<=70;K=K+5)
      {
        Sum=0;Sum2=0;SumSi=0;SumSi2=0;SumSiprofit=0;
  for(i=1;i<=N;i++)
      {
        barrier_crossed=false;
        Si=S0;
        j=0;
        do
           {
             j=j+1;
             Si=Si*Math.exp(md+vol_dt*typikh.normal());
             if(Si<H)
                            barrier_crossed=true;
            } while(j<t );
        if(!barrier_crossed)
            profit=(Si-K)>0?(Si-K):0;
        else
            profit=0;

/*************************************************************************/
              SumSi+=Si;
             SumSi2+=Si*Si;
/*************************************************************************/
             Sum+=profit;
             Sum2+=profit*profit;
             SumSiprofit+=Si*profit;

/********Επειδη Corr(aX + b, cY + d) = Corr(X, Y),  αν ac>0 ***********/
/********Corr(Si,Math.exp(-r*t/252.0)*profit) = Corr(Si,profit)**********/
                     }
  rxy=(N*SumSiprofit-SumSi*Sum)/Math.sqrt((N*Sum2-Sum*Sum)*(N*SumSi2-SumSi*SumSi));
  System.out.println ("K=:"+String.valueOf(K)+" Corr="+String.valueOf(rxy)+"
Corr2="+String.valueOf(rxy*rxy*100)+"%");
   }
 }
}
```

Προγράμματα Πίνακα 4.3

1. Monte Carlo Εκτίμηση της τιμής ενός *arithmetic average call option* με χρήση της απλής (raw) εκτιμήτριας (σε γλώσσα Java). Πίνακας 4.4, σελίδα 62.

/****Υπολογισμός του Asian arithmetic average call raw estimator ****/

```
class arithmetic
{public static void main(String arg[])
      {
           double r=0.10,vol=0.2,S0=100,K=90,N=10000,dt=1.0/252.0;
           double Si,profit=0,SumSi=0,Sum=0,Sum2=0,mtimh,std;
           int t=28,i,j;
           double  md=(r-vol*vol/2)*dt,vol_dt=vol*Math.sqrt(dt),PA=Math.exp(-
r*dt*t);
           Generator typikh=new Generator();
           for(i=1;i<=N;i++)
                  {
                     Si=S0;
                     SumSi=0;
                     j=0;
                     do
                           {
                             j=j+1;
                             Si=Si*Math.exp(md+vol_dt*typikh.normal());
                             SumSi+=Si;
                           } while(j<t);
                     profit=(SumSi/(t)-K)>0?(SumSi/(t)-K):0;
                     Sum+=profit;
                     Sum2+=profit*profit;
                  }
          mtimh=Sum/N;
          std=PA*Math.sqrt((Sum2-N*mtimh*mtimh)/((N-1)*N));
          System.out.println("Replications:"+String.valueOf(N));
          System.out.println ("Estimated cost:"+String.valueOf(PA*mtimh)+"
std="+String.valueOf(std));
     }
}
```

Κλάσεις που χρησιμοποιούνται

1. Παραγωγή τυχαίου αριθμού *X* από την κανονική κατανομή κάθε φορά που καλείται, με εφαρμογή της πολικής μεθόδου (παραποιημένη η παρακάτω κλάση χρησιμοποιείται και ως μέθοδος (*method*)).

```
/***** Για την παραγωγή δειγμάτων από την κανονική κατανομή****/

class Generator
{
  static boolean create_new=false;
  static double multiplier,U2;
  double U1,R2;
  double s,m;
Generator ()//κατασκευαστής της κλάσης χωρίς ορίσματα, αποδίδει την τυπική κανονική
{
  m=0;
  s=1;
 }
Generator (double mesh_timh , double typikh_apoklish)// αποδίδει την κανονική
{
  m=mesh_timh;
  s=typikh_apoklish;
}
double normal()
{
create_new=!create_new;
if(create_new)
   {
     do{
         U1=2*Math.random()-1;
         U2=2*Math.random()-1;
         R2=U1*U1+U2*U2;
       }while(R2>=1 || R2==0);
     multiplier=Math.sqrt(-2*Math.log(R2)/R2);
     return m+s*multiplier*U1;
    }
else
     return m+s*multiplier*U2;
}
}
```

2. Αριθμητικός υπολογισμός της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της N(0,1) στο x, με εφαρμογή του αλγόριθμου του Hastings.

/*****Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της N(0,1) με τον αλγόριθμο του Hasting*****/

```
class Cumulative
 {
  static double b1=0.319381530,b2=-0.356563782,b3=1.781477937,b4=-
1.821255978,b5=1.330274429;
  static double p=0.2316419,c=0.918938533204672;
  double a;
Cumulative (double a1)
 //κατασκευαστής της κλάσης, αποδίδει την CDF(a) της τυπικής κανονικής
   {
     a=a1;
   }
double CDF()
   {
    double F,x=Math.abs(a),t=1/(1+x*p),s=((((b5*t+b4)*t+b3)*t+b2)*t+b1)*t;
    F=Math.exp(-0.5*x*x-c)*s;
    F=a>0?1-F:F;
    return F;
   }
}
```

3. Αριθμητικός υπολογισμός της αντίστροφης της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της N(0,1) στο x (ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί διαφορετικό τυπο στις ουρές).

/**Η αντίστροφη της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής κανονικής**/

```
class InvNormalCumulative
 {
static double A1=-3.969683028665376e+01,A2=2.209460984245205e+02,A3=-
2.759285104469687e+02,A4=1.383577518672690e+02,A5=-
3.066479806614716e+01,A6=2.506628277459239e+00;
static double B1=-5.447609879822406e+01,B2=1.615858368580409e+02,B3=-
1.556989798598866e+02,B4=6.680131188771972e+01,B5=-1.328068155288572e+01;
static double C1=-7.784894002430293e-03,C2=-3.223964580411365e-01,C3=-
2.400758277161838e+00,C4=-
2.549732539343734e+00,C5=4.374664141464968e+00,C6=2.938163982698783e+00;
static double D1=7.784695709041462e-03,D2=3.224671290700398e-
01,D3=2.445134137142996e+00,D4=3.754408661907416e+00;
static double P_LOW=0.02425,P_HIGH=0.97575;   /*** P_high = 1 - p_low****/
double p,x,q,r;

InvNormalCumulative ()//κατασκευαστής της κλάσης, αποδίδει την InvCDF(a) της τυπικής κανονικής

   {

   }
double InvCDF(double p1)
   {
 p=p1;

if ((0 < p )  && (p < P_LOW)){
   q = Math.sqrt(-2*Math.log(p));
   x = (((((C1*q+C2)*q+C3)*q+C4)*q+C5)*q+C6) / ((((D1*q+D2)*q+D3)*q+D4)*q+1);
}
else{
        if ((P_LOW <= p) && (p <= P_HIGH)){
           q = p - 0.5;
           r = q*q;
           x = (((((A1*r+A2)*r+A3)*r+A4)*r+A5)*r+A6)*q
/(((((B1*r+B2)*r+B3)*r+B4)*r+B5)*r+1);
        }
        else{
                if ((P_HIGH < p)&&(p < 1)){
                   q = Math.sqrt(-2*Math.log(1-p));
                   x = -(((((C1*q+C2)*q+C3)*q+C4)*q+C5)*q+C6) /
((((D1*q+D2)*q+D3)*q+D4)*q+1);
                }
        }
}
    return x;
   }
}
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

Μπούτσικας, Μ. (2003-5) *Μέθοδοι προσομοίωσης και υπολογιστικές στατιστικές τεχνικές*, Σημειώσεις διδασκαλίας, ΠΜΣ «Εφαρμοσμένης Στατιστικής».

Ξένη

Bolia, N. and Juneja, S. (2005) *Monte Carlo methods for pricing financial options*, Sadhana, Springer India, Vol. 30, No. 2-3.

Boyle, P., Broadie, M. and Glasserman, P. (1997). Monte Carlo methods for security pricing, *Journal of Economic Dynamics and Control* 21 , 1267–1321.

Cox, J., Ross, S. and Rubinstein, M. (1979) Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, No. 3., pp. 229-263.

Glasserman, P. (2003) *Monte Carlo Methods in Financial Engineering* (Stochastic Modelling and Applied Probability), Springer.

Glasserman P., Heidelberger, P. and Shahabuddin, P. (1999) Asymptotically Optimal Importance Sampling and Stratification for Pricing Path-Dependent Options, *Math. Finance* 9, no. 2.

Glynn, P. and Whitt, W. (1992) The asymptotic efficiency of simulation estimators, *Operations Research* 40, 505-520.

Harrison, J. (1985) *Brownian Motion and Stochastic Flow Systems*, John Wiley and Sons, New York.

Hastings, C. (1955) *Approximations for digital computers*, assisted by J. T. Hayward and J. P. Wong, Jr. Princeton University Press.

Haug, E. (1998) *Complete Guide to Options Pricing Formulas*, Irwin Professional Publishing.

Hull, J. (2003) *Options, Futures and Other Derivatives*, Fifth Edition, Prentice Hall International Editions.

Jaeckel, P. (2002) *Monte Carlo Methods in Finance*, Wiley.

Kemna, A. and A. Vorst (1990). A pricing method for options based on average asset values, *Journal of Banking and Finance* 14, 113-129

Knuth, D. (1998) *The Art of Computer Programming*, Volume II: Seminumerical Algorithms (Third Edition), Addison Wesley Longman, Reading, Mass.

Neftci, S. (2000) *Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Academic Press, Second Edition.

Reiner, E. and Rubinstein, M. (1991) *Breaking Down the Barriers*, Risk Magazine 4, 6-14.

Rubinstein, M. (2000) *Rubinstein on Derivatives*, Risk Books.