

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**Υπολογισμός του Value-at-Risk με τη χρήση
Γενικευμένων Αυτοπαλίνδρομων υπό συνθήκη
Ετεροσκεδαστικότητας Υποδειγμάτων**

Κωνσταντίνος Α. Μπλούτσος

Διπλωματική Εργασία

υποβληθείσα στο Τμήμα Στατιστικής και
Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς
ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην
Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς

Απρίλιος 2008

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Τα μέλη της επιτροπής ήταν:

- Αν. Καθ. Αγιακλόγλου Χρήστος (Επιβλέπων)
- Καθ. Κούτρας Μάρκος
- Επικ. Καθ. Πιτσέλης Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS**

**Estimation of Value-at-Risk using Generalized
Autoregressive Conditional Heteroskedastic Models**

By
Konstantinos A. Bloutsos

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance
Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of
the requirements for the degree of Master of Science in
Applied Statistics

Piraeus, Greece

April 2008

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου προς τον κ. Αγιακλόγλου Χρήστο Αν. Καθηγητή του Τμήματος Οικονομικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς για την αμέριστη βοήθειά του στη κατανόηση του θέματος, τη καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας καθώς και για τη γενικότερη συνεργασία μας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω και την οικογένειά μου για τη συμπαράστασή της σε ολόκληρη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή αναπτύχθηκαν η έννοια του Κινδύνου και ο υπολογισμός του με τη χρήση της μεθόδου Value-at-Risk (VaR). Η μέθοδος αυτή παρέχει στον ενδιαφερόμενο έναν αριθμό που εκφράζει τη μέγιστη αναμενόμενη απώλεια μίας επένδυσης για δεδομένη χρονική περίοδο και δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Ο υπολογισμός του VaR γίνεται με μία σύνθετη οικονομετρική προσέγγιση, η οποία συνδυάζει την ανάλυση χρονοσειρών (ARIMA ανάλυση) με τα αυτοπαλίνδρομα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας υποδείγματα, γνωστά ως GARCH υποδείγματα. Στη διαδικασία αυτή το VaR προκύπτει ως η πρόβλεψη μίας περιόδου της διαδικασίας. Επίσης, στην εργασία αυτή γίνεται εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου στις λογαριθμικές αποδόσεις των μετοχών Ευρωπαϊκών Τηλεπικοινωνιακών Εταιρειών και υπολογίζεται ο Κίνδυνος τόσο σε ατομικό επίπεδο για εταιρεία όσο και σε επίπεδο αγοράς.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Abstract

This thesis presents the concept of Risk as it is obtained by the Value-at-Risk (VaR) method. This technique provides the user a measure of risk which is expressed by a single number for the worst expected loss of an asset for a given horizon at a given confidence level. VaR is estimated by the aid of a sophisticated econometric method which combines time series analysis (ARIMA analysis) and generalized autoregressive conditional heteroskedastic (GARCH) models. Using these models, VaR is produced as one-step-ahead forecast of the process. This method is applied to log returns of stock prices of European Telecommunication Companies in order to determine risk not only on an individual basis, but also in a marketwise basis.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Περιεχόμενα

Περίληψη	vii
Abstract	ix
Κατάλογος Πινάκων	xiii
Κατάλογος Διαγραμμάτων	xv
1. Γενικά στοιχεία για τον κίνδυνο	1
1.1. Εισαγωγή	1
1.2. Ιστορική αναδρομή στον ορισμό του κινδύνου	2
1.3. Ανάγκη αντιμετώπισης του κινδύνου	4
1.4. Προέλευση του κινδύνου	7
1.5. Διοικητική του κινδύνου	9
1.6. Μέτρηση του κινδύνου	10
1.7. Είδη χρηματοοικονομικών κινδύνων	12
1.8. Ανακεφαλαίωση	14
2. Μέθοδος Value-at-Risk	15
2.1. Εισαγωγή	15
2.2. Η ανάπτυξη της μεθόδου Value-at-Risk	15
2.3. Ορισμός και περιγραφή της μεθόδου VaR	17
2.4. Μέθοδος συνδιακύμανσης	20
2.5. VaR χαρτοφυλακίου	22
2.6. Μέθοδος προσομοίωσης	26
2.6.1. Ιστορική προσομοίωση	26
2.6.2. Προσομοίωση Monte Carlo	27
2.7. Ανακεφαλαίωση	28

3. Ανάλυση χρονοσειρών	31
3.1. Εισαγωγή	31
3.2. Βασικά στοιχεία χρονοσειρών	32
3.3. Λευκός θόρυβος	38
3.4. Αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα	39
3.5. Υποδείγματα κινητού μέσου	48
3.6. Μεικτά υποδείγματα	53
3.7. Μεικτά ολοκληρωμένα υποδείγματα	57
3.8. Ανακεφαλαίωση	60
4. Υπολογισμός του VaR με τη χρήση GARCH υποδειγμάτων	61
4.1. Εισαγωγή	61
4.2. Υποδείγματα μελέτης ετεροσκεδαστικότητας	62
4.2.1. Υποδείγματα ARCH	63
4.2.2. Υποδείγματα GARCH	67
4.3. Μέτρηση του VaR	72
4.4. Ανακεφαλαίωση	73
5. Προσδιορισμός του VaR Ευρωπαϊκών Τηλεπικοινωνιακών Εταιρειών	75
5.1. Εισαγωγή	75
5.2. Αποδόσεις και χρηματοοικονομικές χρονοσειρές	76
5.3. Περιγραφή των δεδομένων	77
5.4. Προσδιορισμός υποδείγματος $ARIMA(p, d, q)$ - $GARCH(m, s)$	82
5.5. Υπολογισμός του VaR	84
5.6. Ανακεφαλαίωση	85
Βιβλιογραφία	87

Κατάλογος Πινάκων

5.1	Περιγραφικά Στατιστικά στοιχεία	78
5.2	Εκτιμήσεις των συντελεστών των υποδειγμάτων	83
5.3	Εκτίμηση του VaR	85

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Κατάλογος Διαγραμμάτων

1.1	Μεταβολές στις συναλλαγματικές ισορροπίες	7
1.2	Αμερικάνικα επιτόκια	8
1.3	Τιμές OPEC (\$/ βαρέλι)	8
1.4	Τιμές της εθνικής αγοράς μετοχών	9
2.1	Περιγραφή του VaR	19
2.2	Επίδραση της διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου	24
2.3	Ο Κίνδυνος σε σχέση με την απόδοση	24
3.1	Μηνιαίες παρατηρήσεις της τιμής της μετοχής της IBM	32
3.2	Διαγράμματα αυτοσυσχετίσεων και μερικών αυτοσυσχετίσεων για στάσιμη και μη-στάσιμη χρονοσειρά	36
3.3	Διαγράμματα λευκού θορύβου και αυτοσυσχετίσεών του	38
4.1	Καθημερινές αποδόσεις του δείκτη S&P 500	69
4.2	Αυτοσυσχετίσεις της x_t	70
4.3	Μερικές αυτοσυσχετίσεις της x_t^2	71
4.4	Υπό συνθήκη τυπικές αποκλίσεις	71
5.1	Χρονοσειρές τιμών και λογαριθμικών αποδόσεων του δείκτη S&P 500	77
5.2	Διαγράμματα χρονοσειρών λογαριθμικών αποδόσεων	79
5.3	Ιστογράμματα λογαριθμικών αποδόσεων	80
5.4	QQ-Plots των κατανομών	81

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΙΝΔΥΝΟ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια, λόγω της παγκοσμιοποίησης, το διεθνές οικονομικό περιβάλλον γίνεται ολοένα και πιο ασταθές καθώς και απρόβλεπτο. Οι αλλαγές που διαδραματίζονται είναι συνεχείς και μερικές φορές ζημιογόνες για τις επιχειρήσεις που συμμετέχουν σε διεθνείς αγορές. Επιπρόσθετα, η τεχνολογική ανάπτυξη έχει ως αποτέλεσμα τη ραγδαία ανάπτυξη του ανταγωνισμού μεταξύ των επιχειρήσεων.

Σε τέτοιες καταστάσεις σκληρού ανταγωνισμού, οι επιχειρήσεις ψάχνουν κατάλληλες τεχνικές ώστε να αποκτήσουν συγκριτικά πλεονεκτήματα έναντι των ανταγωνιστών τους. Μεταξύ αυτών των τεχνικών είναι και ο περιορισμός των απωλειών που πιθανώς να οφείλονται σε απρόβλεπτους εξωτερικούς παράγοντες στους οποίους όλες οι επιχειρήσεις είναι εκτεθειμένες. Για παράδειγμα, όποια επιχείρηση αντιδράσει καλύτερα σε μία αναπάντεχη αύξηση των επιτοκίων, θα έχει λιγότερες απώλειες από τους ανταγωνιστές της και συνεπώς καλύτερα αποτελέσματα. Η αντίδραση των επιχειρήσεων σε τέτοια απρόβλεπτα γεγονότα θα πρέπει να είναι άμεση και επιτυχής.

Η έκθεση σε έναν παράγοντα που δρα απρόβλεπτα και με αυξημένες πιθανότητες να προκαλέσει ανεπιθύμητα αποτελέσματα, ορίζεται ως Κίνδυνος (*Risk*). Η σωστή αντίδραση μίας επιχείρησης σε τέτοιες καταστάσεις είναι προϋπόθεση για μείωση των απωλειών. Συνεπώς, η σωστή πρόβλεψη και η διαχείριση ενός Κινδύνου είναι απαραίτητη.

Το επόμενο στάδιο, μετά τη διαπίστωση ενός Κινδύνου, είναι η μέτρησή του με κάποιο ποσοτικό μοντέλο. Η μέτρησή του, βοηθά τις επιχειρήσεις να τον αποτιμήσουν και στη συνέχεια να προγραμματίσουν τις επόμενες κινήσεις τους, με δεδομένη την ύπαρξή του. Η ανάπτυξη, τα τελευταία χρόνια, των ηλεκτρονικών

υπολογιστών έκανε πιο εύκολη, πιο γρήγορη και πιο ακριβή την εφαρμογή μοντέλων μέτρησης του Κινδύνου.

Συμπερασματικά, η ανάπτυξη των επιχειρήσεων και η σταθεροποίησή τους στο διεθνές οικονομικό περιβάλλον, εξαρτάται άμεσα και από τη διαχείριση τέτοιων καταστάσεων. Έτσι, ήταν αναγκαία η δημιουργία ξεχωριστών μονάδων στις επιχειρήσεις που προσδιορίζουν και μετρούν τους Κινδύνους. Τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί πολλές μορφές αντιμετώπισης Κινδύνων και η ανάπτυξη συνεχίζεται καθώς ο στόχος της μείωσης των απωλειών παραμένει πρωτεύων. Το σύνολο αυτών των διαδικασιών εντάσσονται στη Διοικητική του Κινδύνου (*Risk Management*).

Στο κεφάλαιο αυτό, γίνεται μία προσέγγιση στην έννοια του Κινδύνου, έτσι ώστε να είναι ευκολότερη η κατανόηση των επομένων κεφαλαίων που ασχολούνται με τη μέτρησή του. Αρχικά, γίνεται μία σύντομη περιγραφή στη θεμελίωση της έννοιας του Κινδύνου. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται μερικά γεγονότα, τα οποία λειτουργούν ως παραδείγματα έλλειψης μηχανισμών αντιμετώπισης διαφόρων Κινδύνων και ανάγκης ανάπτυξης της Διοικητικής Κινδύνου. Το κεφάλαιο κλείνει με δύο ενότητες που πραγματεύονται τη μέτρηση του Κινδύνου και μία σύντομη περιγραφή στα διάφορα είδη Κινδύνων που ενδεχομένως να αντιμετωπίσει μία επιχείρηση.

1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΣΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Η μελέτη του Κινδύνου δεν είναι κάτι καινούργιο αλλά έχει εμφανιστεί πολλά χρόνια πριν. Οι πιο σημαντικές προσεγγίσεις στον ορισμό του Κινδύνου, δόθηκαν από τους Frank Knight, το 1921 στο βιβλίο του *Risk, Uncertainty, and Profit*, και τον Harry Markowitz στην εργασία του *Portfolio Selection*, που δημοσιεύθηκε το 1952 στο περιοδικό *Journal of Finance*.

Ο Knight έδωσε τον ορισμό σε μία εποχή όπου γινόταν εκτενής έρευνα στα θεμέλια της Θεωρίας των Πιθανοτήτων. Τότε επικρατούσαν δύο τάσεις στην ερμηνεία των Πιθανοτήτων. Η πρώτη υποστήριζε την αντικειμενική φύση των Πιθανοτήτων, καθώς τα αποτελέσματα προκύπτουν είτε από λογικά συμπεράσματα είτε υπολογίζονται με χρήση Στατιστικών Μεθόδων. Η δεύτερη υποστήριζε τη

δαισθητική ερμηνεία των Πιθανοτήτων, με την αιτιολογία ότι δεν είναι εγγενής με τη φύση και ο καθένας χρησιμοποιεί την ερμηνεία τους μεμονωμένα, έτσι ώστε να χαρακτηρίσει τη προσωπική του αβεβαιότητα.

Επηρεασμένος από αυτή τη διαμάχη, ο Knight έκανε ένα διαχωρισμό στις Πιθανότητες, ως εξής: Πρώτα, όρισε τις εκ των προτέρων (*a priori*) πιθανότητες, που προέρχονται από τη συμμετρία των γεγονότων, όπως τη ρίψη ενός ζαριού και στη συνέχεια, όρισε τις πιθανότητες, που προκύπτουν από τη στατιστική ανάλυση ομογενών δεδομένων. Συνεπώς, ο Knight πρότεινε ότι αυτοί οι δύο ορισμοί αντανακλούν στην “Μετρήσιμη Αβεβαιότητα” και οι διάφορες υποθέσεις, που μπορεί να κάνει ο οποιοσδήποτε αναπαριστούν την “μη-Μετρήσιμη Αβεβαιότητα”. Με βάση αυτό το διαχωρισμό, ο Knight όρισε τον **Κίνδυνο** ως την “Μετρήσιμη Αβεβαιότητα” και ως **Αβεβαιότητα** γενικά την “μη-Μετρήσιμη Αβεβαιότητα”. Ο ορισμός που έδωσε ο Knight είναι ο πρώτος και ο πλέον γνωστός.

Όσον αφορά τον Harry Markowitz, ο οποίος το 1990 πήρε το βραβείο Nobel στα Οικονομικά, εμφανίστηκε μερικές δεκαετίες αργότερα. Με τη διδακτορική του διατριβή στο Πανεπιστήμιο του Chicago έθεσε τις βάσεις ώστε τα Χρηματοοικονομικά να θεωρηθούν ξεχωριστή επιστήμη. Στην εργασία αυτή ο Markowitz ασχολήθηκε με τη θεωρία επιλογής καλύτερου Χαρτοφυλακίου και συνάντησε την αρνητική στάση της εξεταστικής επιτροπής, η οποία θεωρούσε πως η εργασία του δεν ανήκει ούτε στα Μαθηματικά ούτε στη Διοίκηση Επιχειρήσεων. Παρά τις αντιδράσεις της επιτροπής και κυρίως του Milton Friedman ο Markowitz έλαβε τον τίτλο του διδάκτορα. Έτσι, στην εργασία του το 1952, η οποία είχε δημοσιευθεί νωρίτερα στο περιοδικό *Journal of Finance*, έθεσε τις βάσεις για τη δημιουργία της Θεωρίας Χαρτοφυλακίου (*Portfolio theory*).

Σε γενικές γραμμές, η θεωρία Χαρτοφυλακίου μας περιγράφει πως οι επενδυτές χρησιμοποιούν ένα σύνολο μοντέλων για να ισορροπούν τον Κίνδυνο και τα κέρδη ώστε να κατασκευάσουν επενδυτικά χαρτοφυλάκια. Το 1952, ο Markowitz δεν έδωσε κανέναν ορισμό για τον Κίνδυνο, απλά θεώρησε πως ένας επενδυτής θεωρεί τις αναμενόμενες αποδόσεις ως επιθυμητές και τη διακύμανση των αποδόσεων ως ανεπιθύμητη. Στο τέλος μόνο της εργασίας του ανέφερε πως οι όροι απόδοση και Κίνδυνος μπορούν να αντικατασταθούν από τους όρους αναμενόμενη απόδοση και διακύμανση της απόδοσης αντίστοιχα. Με αυτή τη θέση ο Markowitz θεώρησε πως η διακύμανση των αποδόσεων πιθανόν να είναι ένας παράγοντας Κινδύνου.

1.3 ΑΝΑΓΚΗ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗΣ ΤΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Η ανάγκη αντιμετώπισης απρόβλεπτων γεγονότων είναι επιτακτική για τη βιωσιμότητα των επιχειρήσεων. Γυρνώντας πίσω 30 περίπου χρόνια, συνέβησαν γεγονότα τα οποία προκάλεσαν μεγάλες οικονομικές καταστροφές σε παγκόσμιο επίπεδο. Ενδεικτικά μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

- Οι σταθερές νομισματικές ισοτιμίες (*fixed exchange rates*) κατέρρευσαν το 1971, οδηγώντας σε ασταθείς ισοτιμίες. Οι σταθερές αυτές νομισματικές ισορροπίες χρησιμοποιήθηκαν από τα Κράτη της Δύσης από το τέλος του 2^{ου} Παγκοσμίου Πολέμου (συμφωνία Bretton Woods) μέχρι το 1971, όπου το Αμερικάνικο Δολάριο ήταν μετατρέσιμο σε χρυσό (1 ουγκιά=\$35). Το σύστημα αυτό όμως οδήγησε σε μεγάλα ελλείμματα την Αμερικάνικη Οικονομία και κατέρρευσε το 1971 για να αντικατασταθεί τον Μάρτιο του 1973 με τις κυμαινόμενες νομισματικές ισορροπίες (*floating exchange rates*).
- Οι διαταραχές στις τιμές του πετρελαίου από το 1973 συνοδεύτηκαν από υψηλό πληθωρισμό και εξωφρενικές ταλαντώσεις στα επιτόκια.
- Η Μαύρη Δευτέρα (*Black Monday*) στις 19 Οκτωβρίου 1987, οπότε συνέβη μεγάλη οικονομική κρίση στις Η.Π.Α.. Οι Αμερικάνικες μετοχές κατέρρευσαν κατά 23%, εξαφανίζοντας κεφάλαια αξίας πάνω από 1 τρισεκατομμύριο σε Αμερικάνικα Δολάρια. Η κρίση αυτή επηρέασε σοβαρά και απείλησε άμεσα με γενικότερη κατάρρευση τα Χρηματιστήρια και (έμμεσα) τα Χρηματοπιστωτικά Ιδρύματα της χώρας, αλλά και τα διεθνή Χρηματιστήρια.
- Ο πανικός που επικράτησε στα ομόλογα το 1994 όπου η Κεντρική Ομοσπονδιακή Τράπεζα των Η.Π.Α., αφού είχε κρατήσει τα επιτόκια χαμηλά για τρία χρόνια, ξεκίνησε ένα σερί από έξι συνεχόμενες αυξήσεις των επιτοκίων με αποτέλεσμα να εξαλειφθούν από το παγκόσμιο κεφάλαιο, πάνω από 1.5 τρισεκατομμύριο Αμερικάνικα Δολάρια.
- Η φούσκα του Ιαπωνικού Χρηματιστηρίου που έσκασε τελικά στο τέλος του 1989, στέλνοντας τον Δείκτη του Nikkei από τις 39.000 στις 17.000 μονάδες σε 3 χρόνια. Συνολικά, χάθηκαν 2,7 τρισεκατομμύρια σε Αμερικάνικα Δολάρια και οδήγησε την Ιαπωνία σε μία άνευ προηγουμένου οικονομική κρίση.

- Η Ασιατική αναταραχή του 1997, οδήγησε σε εξαφάνιση περίπου των τριών τετάρτων της αξίας των μετοχών σε Δολάρια, στην Ινδονησία, Κορέα και Ταϊλάνδη.
- Η αφερεγγυότητα της Ρωσίας στις οικονομικές της υποχρεώσεις, το 1997 είχε ως αντίκρισμα μία παγκόσμια οικονομική κρίση και οδήγησε κεφάλαια που είχαν επενδυθεί σε μακροπρόθεσμα χρεόγραφα, ένα βήμα πριν την χρεοκοπία.

Σε αυτά τα γεγονότα, η παγκόσμια αγορά παρακολουθούσε έντρομη, μη μπορώντας να αντιδράσει άμεσα και επιτυχώς. Οι αστάθειες σε διεθνή χρηματιστήρια, επιτόκια και νομισματικές ισορροπίες, όπως τα παραπάνω περιστατικά, οδήγησαν πολλές εταιρείες σε δύσκολες καταστάσεις και σε συνδυασμό άστοχων πρωτοβουλιών κάποιων στελεχών – χωρίς να λαμβάνουν υπ' όψιν τη γενικότερη διεθνή αστάθεια - σε αναπόφευκτες οικονομικές καταστροφές. Μερικές τέτοιες περιπτώσεις είναι οι εξής:

- Το Φεβρουάριο του 1993, η Ιαπωνική εταιρία πετρελαιοειδών Showa Shell Sekiyu, ανακοίνωσε απώλειες περίπου ενός δισεκατομμυρίου Αμερικάνικων Δολαρίων, από επενδύσεις υψηλού ρίσκου.
- Τον Δεκέμβριο του ίδιου έτους, η MG Refinig and Marketing, μία θυγατρική της Γερμανικής Metallgesellschaft AG, ανακοίνωσε απώλειες 1,3 δισεκατομμυρίων Αμερικάνικων Δολαρίων από αποτυχημένη επένδυση σε μακράς διάρκειας, χρεόγραφα.
- Το 1995, ένα στέλεχος της Ιαπωνικής Daiwa Bank, προκάλεσε ζημιές αξίας 1,1 δισεκατομμυρίων Αμερικάνικων Δολαρίων κατά τη διάρκεια 10 ετών.

Το επόμενο γεγονός αποτελεί σταθμό στη παγκόσμια ιστορία των οικονομικών καταστροφών και προκάλεσε το ενδιαφέρον της κοινής γνώμης. Πρόκειται για τη δραματική πτώχευση της Βρετανικής Barings PLC το Φεβρουάριο του 1995. Ο Nick Leeson, ένα νέο στέλεχος στα γραφεία της Barings στη Σιγκαπούρη, έχασε 1,4 δισεκατομμύρια σε Αμερικάνικα Δολάρια, από προσωπικές, μη-εγκεκριμένες ενέργειες σε προθεσμιακά συμβόλαια στο Χρηματιστήριο Nikkei. Η Barings ιδρύθηκε το 1762. Είχε χρηματοδοτήσει τη συμμετοχή της Βρετανίας στους πολέμους του Ναπολέοντα και την Αμερική για τη κατασκευή της διώρυγας Erie. Ύστερα από τη πτώχευσή της, πωλήθηκε στην Ολλανδική τράπεζα ING στη τιμή της μίας Βρετανικής Λίρας.

Το κύριο χαρακτηριστικό όλων των παραπάνω οικονομικών καταστροφών ήταν η μη-προβλεψιμότητα των απρόσμενων παραγόντων που οδήγησαν αγορές και εταιρείες σε κατάρρευση. Οι υπεύθυνοι δεν ήταν προετοιμασμένοι να αντιμετωπίσουν τόσο καταστροφικά σενάρια και λόγω αυτών των γεγονότων, ήταν άμεση η ανάπτυξη τεχνικών και μεθόδων αντιμετώπισης τέτοιων καταστάσεων με σκοπό τη διαφύλαξη των κερδών από τέτοιες καταστάσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Στο σημείο αυτό μπορεί να δοθεί ένας τελικός ορισμός του Κινδύνου. Ως **Κίνδυνος** (*Risk*) ορίζεται η έκθεση σε μία αβέβαιη κατάσταση η οποία παρουσιάζει αυξημένη πιθανότητα εμφάνισης απωλειών, ζημιών ή οποιοδήποτε άλλο αναπάντεχο γεγονός κατά κανόνα δυσάρεστο. Ο Κίνδυνος μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες. Την **έκθεση** σε έναν συγκεκριμένο Κίνδυνο (*exposure*) και την **αβεβαιότητα** (*uncertainty*). Ένας Κίνδυνος, για να υφίσταται, απαιτεί την ταυτόχρονη ύπαρξη τόσο της έκθεσης, όσο και της αβεβαιότητας.

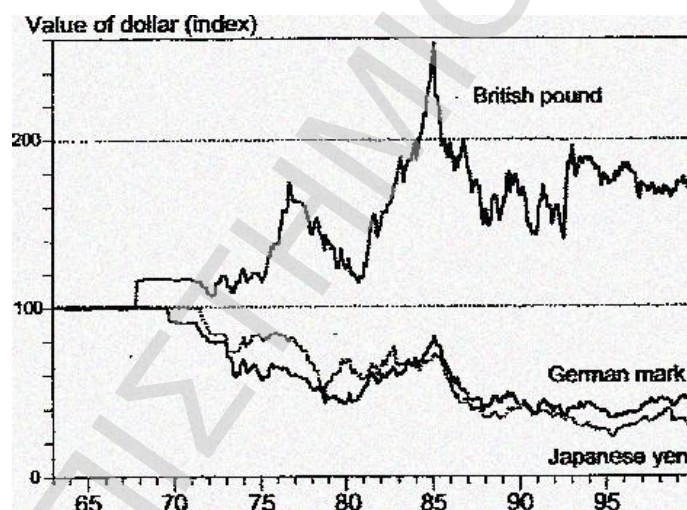
Ένας Κίνδυνος μπορεί να χαρακτηριστεί ως επιχειρηματικός (*Business risk*). Ο όρος περιλαμβάνει κυρίως την αβεβαιότητα (ως προς την εξέλιξη των εργασιών) και τη μεταβλητότητα των αναμενόμενων αποδόσεων. Δηλαδή περιλαμβάνει τους Κινδύνους που προέρχονται από τη φύση της αγοράς στην οποία μετέχει η επιχείρηση. Η έκθεση μίας επιχείρησης σε επιχειρηματικό κίνδυνο είναι δεδομένη και αναπόφευκτη.

Αντιθέτως, ένας Κίνδυνος, μπορεί να χαρακτηριστεί και ως μη-επιχειρηματικός (*non business risk*). Τέτοιοι Κίνδυνοι προέρχονται από το γενικότερο οικονομικό και πολιτικό περιβάλλον. Τέλος, ως χρηματοοικονομικοί κίνδυνοι (*financial risks*) ορίζονται αυτοί που προκαλούν απώλειες σε χρηματοοικονομικές αγορές, όπως απώλειες λόγω μεταβολών των επιτοκίων.

1.4 ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ ΤΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Όπως παρουσιάστηκε και σε προηγούμενη ενότητα, οι οικονομικές καταστροφές μεγάλων επιχειρήσεων προήλθαν από διάφορες μορφές κινδύνων. Για να γίνουν πιο εμφανή τα αίτια αυτών των οικονομικών καταρρεύσεων, παρατίθενται μερικά διαγράμματα που παρουσιάζουν μεταβολές σε συναλλαγματικές ισορροπίες, μεταβολές σε επιτόκια και σε τιμές πετρελαίου.

Το Διάγραμμα 1.1 παρουσιάζει τις μεταβολές στη συναλλαγματική ισορροπία, μεταξύ Αμερικάνικου δολαρίου, Γερμανικού μάρκου, Ιαπωνικού γιεν και Βρετανικής λίρας. Είναι φανερό ότι, τα τελευταία τριάντα χρόνια, το δολάριο έχασε περίπου τα δύο τρίτα της αξίας του σε σχέση με το μάρκο και το γιεν, ενώ αυξήθηκε σε σχέση με τη λίρα. Αυτές οι μεταβολές προκάλεσαν πολλά προβλήματα σε εταιρείες οι οποίες δεν είχαν εξασφαλιστεί για τέτοιες μεταβολές.

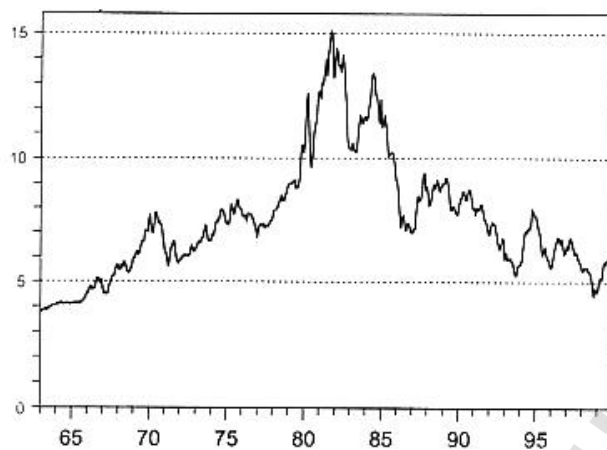


Πηγή: Philippe Jorion (2001)

Διάγραμμα 1.1

Μεταβολές στις συναλλαγματικές ισορροπίες

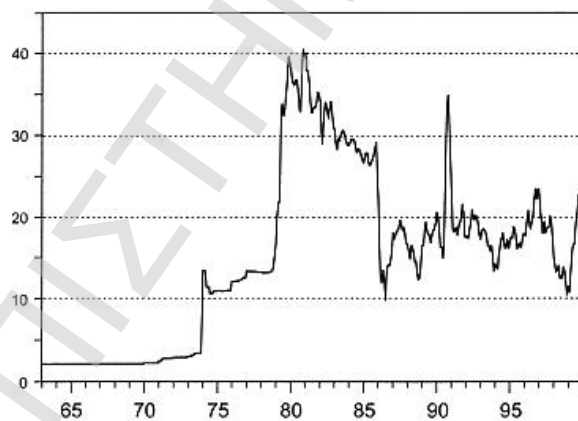
Το Διάγραμμα 1.2, παρουσιάζει έντονες διακυμάνσεις των Αμερικάνικων επιτοκίων, κυρίως την περίοδο από 1980 έως 1985. Οι διακυμάνσεις αυτές προκάλεσαν έντονη διαταραχή στην οικονομία της χώρας, κυρίως στα μακροπρόθεσμα δάνεια, όπως τα στεγαστικά.



Πηγή: Philippe Jorion (2001)

Διάγραμμα 1.2
Αμερικάνικα επιτόκια

Τέλος, στο Διάγραμμα 1.3 εμφανίζεται η διακύμανση των τιμών του πετρελαίου, κυρίως μετά το 1975. Οι αυξήσεις είναι έντονα συσχετισμένες με τις αυξήσεις των τοκομεριδίων των ομολόγων. Αυτές οι απότομες αλλαγές είχαν επίσης και μεγάλη επίδραση στην αγορά μετοχών, όπως εμφανίζεται στο Διάγραμμα 1.4.



Πηγή: Philippe Jorion (2001)

Διάγραμμα 1.3
Τιμές OPEC (\$/βαρέλι)



Πηγή: Philippe Jorion (2001)

Διάγραμμα 1.4

Τιμές της εθνικής αγοράς μετοχών

Ένα εύλογο ερώτημα που προκύπτει από όλα τα παραπάνω είναι πως προήλθαν όλοι αυτοί οι Κίνδυνοι. Οι Κίνδυνοι μπορεί να προέρχονται από πολλές πηγές, ανθρώπινες ή μη. Για παράδειγμα, αλλαγές στο πληθωρισμό, κυβερνητικές πολιτικές και πόλεμοι, προέρχονται από ανθρώπινες παρεμβάσεις. Αντιθέτως, φαινόμενα όπως, σεισμοί και πλημμύρες θεωρούνται φυσικά και δεν έχουν σχέση με την ανθρώπινη παρέμβαση.

Είναι λογικό, οι χρηματοοικονομικές αγορές, να μην μπορούν να προστατευτούν από όλους τους κινδύνους. Κυβερνήσεις, κατά καιρούς, έχουν θεσπίσει “δίκτυα ασφαλείας” (*safety nets*), τα οποία δεν μπορούν να καθοριστούν από τον ιδιωτικό τομέα. Έτσι, η πολιτεία μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα όργανο που κατανέμει τον κίνδυνο, με σκοπό να τον περιορίσει.

1.5 ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΤΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Στις αρχές της δεκαετίας του 1990, η Διοικητική του Κινδύνου (*risk management*) ήταν κάτι ασυνήθιστο. Πολλά χρηματοπιστωτικά ιδρύματα δεν είχαν ανεξάρτητη διεύθυνση για τη Διοίκηση του Κινδύνου. Σε επιχειρήσεις άλλου είδους,

ήταν εντελώς άγνωστη. Παρόλα αυτά, ο όρος Διοικητική του Κινδύνου δεν είναι εντελώς νέος. Εμφανίζεται στις δεκαετίες του 1960 και 1970, όταν διάφοροι οργανισμοί έψαχναν εναλλακτικούς τρόπους για ασφάλιση, συμπεριλαμβανομένων:

- Μείωση κινδύνου μέσω ασφαλέστερων διαδικασιών, ελέγχου ποιότητας και προετοιμασία για καταστροφικά σενάρια.
- Αυτασφαλίσεις και ίδρυση θυγατρικών ασφαλιστικών εταιρειών.

Τέτοιες μεθοδολογίες μαζί με την κλασική ασφάλιση θεωρούνταν ως Διοικητική του Κινδύνου.

Η αυξανόμενη, όμως, αστάθεια στις συναλλαγματικές ισορροπίες, στα επιτόκια και στους δείκτες των χρηματιστηρίων, έκαναν επιτακτική την ανάγκη δημιουργίας νέων τεχνικών για τη διαχείριση των Κινδύνων. Η νέα “Διοικητική του Κινδύνου” αναπτύχθηκε στις αρχές του 1990 σε διαφορετική μορφή από ότι εμφανιζόταν στα παλαιότερα χρόνια.

Από τότε η Διοικητική του Κινδύνου είναι μία συνεχώς αναπτυσσόμενη διαδικασία, η οποία αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της ευρύτερης επιχειρησιακής στρατηγικής. Αρμοδιότητά της είναι η μεθοδική εξέταση όλων των κινδύνων που σχετίζονται με την ευρύτερη δραστηριότητα της επιχείρησης, με στόχο τη μείωση των απωλειών από την έκθεση σε αυτούς τους κινδύνους ώστε να επιτευχθούν οι στρατηγικοί στόχοι της.

1.6 ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Η σωστή αντιμετώπιση του Κινδύνου, προϋποθέτει τον προσδιορισμό του Κινδύνου και στη συνέχεια τη μέτρησή του. Ο προσδιορισμός του Κινδύνου είναι αναμφισβήτητο το πιο σημαντικό βήμα στην αντιμετώπιση του. Με τον σωστό προσδιορισμό του Κινδύνου καθορίζεται ο βαθμός έκθεσης της επιχείρησης στην αβεβαιότητα. Αυτό απαιτεί ικανά και έμπειρα στελέχη τα οποία να είναι σε θέση να γνωρίζουν τους στρατηγικούς και λειτουργικούς στόχους της επιχείρησης, καθώς και τις απειλές ή τις ευκαιρίες που σχετίζονται με την επίτευξη αυτών των στόχων. Επίσης, θα πρέπει να γνωρίζουν τις ιδιαιτερότητες της αγοράς στην οποία δραστηριοποιούνται, το νομικό, κοινωνικό, πολιτικό και πολιτιστικό περιβάλλον.

Οι πλέον διαδεδομένοι χρηματοοικονομικοί κίνδυνοι είναι τέσσερις. Ο Κίνδυνος από τις μεταβολές των επιτοκίων (*interest rate risk*), ο Κίνδυνος από μεταβολές σε μία συναλλαγματική ισορροπία (*exchange rate risk*), ο Κίνδυνος από μεταβολές στις τιμές μετοχών (*equity risk*) και ο Κίνδυνος των εμπορεύσιμων υλών (*commodity risk*). Ο Κίνδυνος μετράται από τη τυπική απόκλιση των αποτελεσμάτων ή αλλιώς της **αστάθειας-μεταβλητότητας** (*volatility*).

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, ο Κίνδυνος έχει δύο συνιστώσες:

- Την έκθεση και
- την αβεβαιότητα.

Επιχειρήσεις που δεν έχουν τον έλεγχο της αστάθειας των χρηματοοικονομικών μεγεθών, προσαρμόζουν την έκθεσή τους σε αυτούς τους Κινδύνους, όπως για παράδειγμα, τη χρήση παραγώγων (*derivatives*). Η μέθοδος Value-at-Risk πετυχαίνει να υπολογίσει το συνδυασμό της επίδρασης της υποκείμενης αστάθειας και της έκθεσης σε χρηματοοικονομικούς κινδύνους.

Η μέτρηση του Κινδύνου, μπορεί να έχει μία από τις παρακάτω μορφές:

- Τη μέτρηση της Έκθεσης,
- τη μέτρηση της Αβεβαιότητας (ή αστάθειας) και
- τη μέτρηση της Έκθεσης και της Αβεβαιότητας (ή αστάθειας), σε συνδυασμό.

Μετρήσεις της έκθεσης σε κινδύνους εμφανίζονται σε πολλές εφαρμογές, με διαφορετικές όψεις. Για παράδειγμα, στην αγορά έντοκων γραμματίων (*fixed-income market*) η έκθεση σε μεταβολές των επιτοκίων ονομάζεται δείκτης του μέσου όρου διάρκειας ενός τίτλου (*duration*). Στη χρηματιστηριακή αγορά (*stock market*) η έκθεση καλείται συστηματικός Κίνδυνος (*systematic risk*) ή συντελεστής βήτα (*beta*). Στην αγορά παραγώγων (*derivatives market*) η έκθεση σε μεταβολές των τιμών των υποκείμενων επενδυτικών αγαθών (*assets*) καλείται δέλτα (*delta*) (Δ). Τέλος, ορίζεται η μέτρηση του βαθμού από τον οποίο και μετά επηρεάζεται η τιμή αγοράς ενός τίτλου από μεταβολές των επιτοκίων (*convexity*) και ο συντελεστής γάμμα (*gamma*), ως το μέτρο της ταχύτητας με την οποία αλλάζει το δέλτα, στη μοναδιαία αλλαγή της τιμής του υποκείμενου χρεογράφου (π.χ. παραγώγου, *future*).

Η μέτρηση του Κινδύνου, που μετρά την αστάθεια – μόνη ή μαζί με την έκθεση – είναι συνήθως πιθανοθεωρητική. Πολλοί ερμηνεύουν τον Κίνδυνο με μία παράμετρο μία συγκεκριμένης κατανομής. Για παράδειγμα, η τυπική απόκλιση της

αυριανής τιμής ενός προϊόντος είναι μία μέτρηση Κινδύνου όπου προσδιορίζει την αστάθεια.

Για την μέτρηση του Κινδύνου, απαιτείται επίσης η συλλογή δεδομένων τα οποία με την κατάλληλη επεξεργασία παρέχουν τις πληροφορίες, που απαιτούνται για τη μέτρηση του Κινδύνου. Η δυσκολία μέτρησης του Κινδύνου εξαρτάται και από τους τύπους του Κινδύνου, που συνθέτουν τον συνολικό Κίνδυνο. Όσο περισσότεροι είναι οι Κίνδυνοι, τόσο πιο σύνθετος γίνεται ο υπολογισμός του συνολικού Κινδύνου.

1.7 ΕΙΔΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

Οι επιχειρήσεις, μπορούν να αντιμετωπίσουν διάφορα είδη Κινδύνων. Για να γίνει πιο κατανοητό, ξεχωρίζουν διάφορα είδη Κινδύνων όπως, για παράδειγμα, ο Κίνδυνος της Αγοράς (*market risk*), ο Πιστωτικός Κίνδυνος (*credit risk*), ο Κίνδυνος Ρευστότητας (*liquidity risk*) και άλλοι. Παρόλο που αυτός ο διαχωρισμός είναι βολικός είναι και ανεπίσημος. Οι περιπτώσεις και οι ερμηνείες διαφόρων Κινδύνων ποικίλουν. Για παράδειγμα, μία απώλεια λόγω ευρέων πιστωτικών περιθωρίων (*credit spreads*) μπορεί να θεωρηθεί σαν αποτέλεσμα του Κινδύνου της Αγοράς ή λόγω του Πιστωτικού Κινδύνου, έτσι τα δύο αυτά είδη ταυτίζονται.

Ο Κίνδυνος Ρευστότητας, που θεωρείται ο Κίνδυνος που εμφανίζεται όταν τα ποσά που οφείλονται δεν μπορούν να καταβληθούν λόγω έλλειψης διαθέσιμων κεφαλαίων, μπορεί να αναμειχθεί με τον Κίνδυνο Αγοράς και τον Πιστωτικό Κίνδυνο. Δεν μπορεί όμως να θεωρηθεί ανεξάρτητος Κίνδυνος από τους παραπάνω.

Συνοπτικά, μερικά είδη Κινδύνων που μπορεί να προκύψουν είναι:

- *Πιστωτικός (Credit Risk)*: Είναι ο Κίνδυνος κατά τον οποίο ένα από τα μέρη που συμμετέχουν σε μία σύμβαση να μην μπορεί να καλύψει τις οφειλές του εμπρόθεσμα.
- *Επιχειρηματικός (Enterprise Risk)*: Είναι ο Κίνδυνος να μην πετύχει μία επιχείρηση τους στρατηγικούς της στόχους, λόγω ακατάλληλου σχεδιασμού, ανεπαρκών πόρων ή αλλαγών στο οικονομικό ή ανταγωνιστικό περιβάλλον.
- *Κυριαρχικός*: Είναι ένας Πιστωτικός Κίνδυνος που συνδέεται με το δανεισμό στην ίδια τη κυβέρνηση ή σε έναν συμβαλλόμενο για το οποίον εγγυάται η κυβέρνηση.

- *Αγοράς (Market Risk)*: Είναι ο Κίνδυνος απώλειας λόγω των αλλαγών στις τιμές της αγοράς. Περιλαμβάνει τον Κίνδυνο επιτοκίων, τον συναλλαγματικό Κίνδυνο, τον Κίνδυνο τιμών, και τον Κίνδυνο των τιμών των μετοχών.
- *Λειτουργικός (Operational Risk)*: Είναι ο Κίνδυνος απώλειας λόγω των ενεργειών του προσωπικού, της υποδομής της επιχείρησης και οποιουδήποτε άλλου παράγοντα που μπορεί να οδηγήσει σε απάτη.
- *Νομικός (Law Risk)*: Όταν μία συναλλαγή φαίνεται νομικά αδικαιολόγητη. Μπορεί να συσχετισθεί με τον Πιστωτικό Κίνδυνο, εφόσον οι συμβαλλόμενοι που χάνουν χρήματα σε μία συναλλαγή μπορεί να προσπαθήσουν να ακυρώσουν την συναλλαγή. Υπάρχει το ενδεχόμενο να πάρει τη μορφή δικαστικών αποφάσεων εναντίων επιχειρήσεων από τη πλευρά των μετόχων, που έχουν χάσει χρήματα. Για παράδειγμα, όταν ένας δυσαρεστημένος μέτοχος υπέβαλλε μήνυση σε υψηλόβαθμο στελέχη της Procter and Gamble, τότε αποκαλύφθηκε ότι η εταιρία είχε χάσει 157 εκατομμύρια Αμερικάνικα Δολάρια σε πολύπλοκες συναλλαγές ανταλλαγής (*swap*).
- *Κίνδυνος Χώρας (Country Risk)*: Εμφανίζεται όταν μία χώρα διακόπτει τις πληρωμές σε συνάλλαγμα λόγω της έλλειψης του ξένου νομίσματος ή της συμπεριφοράς της κυβέρνησης που το διανέμει με περιοριστικούς όρους.
- *Πολιτικός*: Είναι ο Κίνδυνος που συνδέεται με μία πιθανή αλλαγή στο πολιτικό πλαίσιο μίας χώρας.
- *Περιβαλλοντικός (Environmental Risk)* : Είναι ο Κίνδυνος κατά τον οποίον μία επιχείρηση μπορεί να υποστεί απώλεια από περιβαλλοντικές ζημιές οι οποίες προκλήθηκαν είτε από την ίδια την επιχείρηση είτε από εξωτερικούς παράγοντες.
- *Φήμης (Reputation Risk)*: Είναι ο Κίνδυνος να επηρεαστεί αρνητικά μία επιχείρηση από ένα αναπάντεχο γεγονός.

Οι παραπάνω Κίνδυνοι μπορούν με τη σειρά τους να κατηγοριοποιηθούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τους Κινδύνους του οποίους καλείται μία επιχείρηση να αναλάβει εθελοντικά, ώστε να δημιουργήσει ανταγωνιστικό πλεονέκτημα στο χώρο που δραστηριοποιείται και η δεύτερη, όπου εντάσσονται Κίνδυνοι που οφείλονται σε εξωγενείς παράγοντες και επηρεάζουν την επιχείρηση χωρίς η δεύτερη να μπορεί να αντιδράσει άμεσα ώστε να μειώσει τις απώλειες.

1.8 ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου ήταν η συνοπτική περιγραφή της έννοιας του Κινδύνου και κυρίως του χρηματοοικονομικού Κινδύνου. Ξεκινώντας από μία εισαγωγή για το πώς προέκυψε η έννοια του Κινδύνου, γίνεται, στη συνέχεια, μία παρουσίαση γεγονότων όπου λόγω της σοβαρότητας των αποτελεσμάτων τους, έκαναν επιτακτική την ανάγκη ανάπτυξης μεθόδων προσδιορισμού και μέτρησης αυτών των κινδύνων. Τέλος, έγινε μία σύντομη περιγραφή στο τρόπο μέτρησης του κινδύνου και στα είδη των χρηματοοικονομικών κινδύνων που απειλούν τις επιχειρήσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΕΘΟΔΟΣ Value-at-Risk

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι υπερβολικά απρόσμενες κινήσεις στις χρηματοοικονομικές αγορές είναι σπάνιες, αλλά πολύ σημαντικές ως προς τις απώλειες που πιθανόν να προκαλέσουν. Για παράδειγμα, η απότομη πτώση των τιμών στο Χρηματιστήριο της Wall Street τον Οκτώβριο του 1987 και άλλες παρόμοιες κρίσεις, τράβηξαν τη προσοχή, σε μεγάλο βαθμό, πολλών ερευνητών και πολλοί ζήτησαν κρατική παρέμβαση έτσι ώστε να τεθούν κάποιοι κανονισμοί. Τα τελευταία χρόνια, οι ευρείες κινήσεις των τιμών σε καθημερινή βάση, προκάλεσαν αρκετές συζητήσεις πάνω στον Κίνδυνο Αγοράς (*market risk*) και την εφαρμογή ορίων (*margin setting*) σε Πιστωτικά Ιδρύματα (*financial institutions*). Σαν αποτέλεσμα των παραπάνω, η μέθοδος αποτίμησης του Κινδύνου με τη μέθοδο VaR χρησιμοποιείται ευρέως στη μέτρηση του Κινδύνου Αγοράς και γενικότερα στη διοικητική του Κινδύνου.

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα παρουσιαστεί, όσο το δυνατό πιο περιεκτικά, η θεωρία γύρω από την αποτίμηση του Κινδύνου με τη μέθοδο Value-at-Risk (VaR). Ξεκινώντας από μία ιστορική αναδρομή, δίνεται στη συνέχεια ο ορισμός της μεθόδου VaR και η γενικότερη περιγραφή της. Τέλος, θα παρουσιαστούν επιγραμματικά, μερικές μέθοδοι με την οποίες μπορεί να αποτιμηθεί ένας Κίνδυνος με τη μέθοδο VaR.

2.2 Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ Value-at-Risk

Στις αρχές του 1990, μεγάλες επιχειρήσεις κατέρρευσαν οικονομικά λόγω κακής διαχείρισης και έλλειψης εσωτερικών ελεγκτικών μηχανισμών. Ωστόσο,

παρόμοια περιστατικά υπήρχαν και δεκαετίες νωρίτερα, όχι μόνο σε αναπτυσσόμενες χώρες όπως Αργεντινή, Βραζιλία και Μεξικό, αλλά και σε ήδη ανεπτυγμένες χώρες όπως οι Η.Π.Α.. Απώλειες τέτοιων μεγεθών δεν μπορούσαν πλέον να αποδοθούν σε άστοχες κυβερνητικές ενέργειες ή σε ελλείψεις αυστηρών ελεγκτικών μηχανισμών. Συνεπώς, έγινε φανερή η ανάγκη μηχανισμών αντιμετώπισης τέτοιων φαινομένων.

Για την αντιμετώπιση τέτοιων καταστάσεων, αναπτύχθηκε μία μέθοδος για να μετρά τον Κίνδυνο και επικεντρώθηκε στις απώλειες μίας επιχείρησης με μία λογική πιθανότητα. Η μέθοδος αυτή ονομάστηκε Value-at-Risk (VaR), αναπτύχθηκε το 1993 και έγινε ευρέως γνωστή το 1994 από τη J.P. Morgan και τη μέθοδο RiskMetrics®. Συμπληρώθηκε στη συνέχεια από τα CreditMetrics®, CorporateMetrics® και PensionMetrics® το 1999. Έτσι, η μέθοδος VaR έγινε η πλέον γνωστή μέθοδος μέτρησης Κινδύνου.

Ο όρος “Value-at-Risk” (VaR) δεν υπήρχε ως οικονομικός όρος μέχρι τις αρχές της δεκαετίας του 1990, αλλά η ιδέα μίας τέτοιας μέτρησης βρίσκεται πολύ πιο παλιά. Εμφανίζεται περίπου το 1922 στο Χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης (NYSE) ως ένας έλεγχος κεφαλαίων των τραπεζών. Ο κανονισμός του NYSE απαιτούσε από τις επιχειρήσεις να κρατούν κεφάλαια ίσα με το 10% των ιδίων κεφαλαίων και των καταθέσεων των πελατών. Το 1929 επεκτάθηκε και οι τράπεζες όφειλαν να κρατούν κεφάλαια ίσα με:

- 5% των χρεώσεων των πελατών,
- 10% (ελάχιστο) των ιδίων κεφαλαίων σε κρατικές ή δημοτικές ομολογίες,
- 30% των ιδίων κεφαλαίων σε εύκολα ρευστοποιήσιμα χρεόγραφα και
- 100% των ιδίων κεφαλαίων σε άλλες αξίες.

Με το χρόνο, οι ρυθμιστές αυτών των μέτρων ανέλαβαν την ευθύνη να θέσουν τα επίπεδα για τις κεφαλαιουχικές ανάγκες (*capital requirements*). Το 1975, η Επιτροπή Κεφαλαιαγοράς των Η.Π.Α. (*US Securities and Exchange Commission – SEC*) έθεσε ένα κανόνα γνωστό ως “Uniform Net Capital Rule” (UNCR) που αφορούσε χρηματιστές που διαχειρίζονταν μη-κρατικά χρεόγραφα. Αυτή η οδηγία περιλάμβανε ένα σύστημα δεικτών, γνωστοί ως “haircuts”, οι οποίοι αναφέρονταν στη σχέση μεταξύ ιδίων κεφαλαίων και ξένων κεφαλαίων που πρέπει να διαθέτουν, με σκοπό να αποφύγουν απώλειες σε αναταράξεις της αγοράς.

Η αστάθεια στους δείκτες των Η.Π.Α. οδήγησε την Επιτροπή Κεφαλαιαγοράς – SEC, να αναβαθμίσει τα “haircuts” το 1980. Οι καινούργιοι πλέον περιορισμοί

βασίζονταν σε στατιστικές αναλύσεις ιστορικών δεδομένων της αγοράς. Με τα μέτρα αυτά σκόπευαν να αναδείξουν με ένα ποσοτικό προσδιορισμό το σύνολο των χρημάτων που πιθανόν να χαθεί από μία επιχείρηση σε ένα μήνα. Αυτό το σύστημα των “haircuts” ήταν ένα VaR μέτρο.

Κατόπιν, επιπρόσθετα περιοριστικά VaR μέτρα αναπτύχθηκαν για τράπεζες ή χρηματοπιστωτικές επιχειρήσεις μεταξύ άλλων:

- Τα VaR μέτρα για χαρτοφυλάκια, από την Επιτροπή Κεφαλαιαγοράς της Αγγλίας.
- Την οδηγία της Ε.Ε. το 1993 για κεφαλαιουχική επάρκεια, γνωστή ως “Capital Adequacy Directive” (CAD).
- Το VaR μέτρο της Επιτροπής της Βασιλείας (*Basle Committee*), το 1996, που βασιζόταν αρκετά στο CAD.

Το 1996 η Επιτροπή της Βασιλείας (*Basle Committee*) ενέκρινε τη χρήση μεθόδων VaR με σκοπό οι τράπεζες να υπολογίζουν τις κεφαλαιουχικές τους ανάγκες. Έκτοτε, η VaR έγινε η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη μέθοδος μέτρησης κινδύνων στο χρηματοοικονομικό περιβάλλον.

2.3 ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ VaR

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, έγινε φανερό ότι υπάρχουν πολλά είδη Κινδύνων. Για παράδειγμα, ο Πιστωτικός Κίνδυνος (*Credit Risk*), ο Κίνδυνος Ρευστότητας (*Liquidity Risk*) και ο Κίνδυνος της Αγοράς (*Market Risk*). Το Value at Risk, αναφέρεται κυρίως στον Κίνδυνο της Αγοράς. Το VaR ενός χαρτοφυλακίου μπορεί να ορισθεί ως τη μέγιστη απώλεια που μπορούμε να αναμένουμε με ένα σταθερό συντελεστή εμπιστοσύνης, πάνω σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Η μέτρηση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί από χρηματοπιστωτικά ιδρύματα για να αποτιμήσουν τους Κινδύνους τους ή από εποπτικές αρχές με σκοπό να θέσουν τα απαραίτητα περιθώρια (*margin requirements*) σε επιχειρήσεις, ώστε να μπορούν να συμμετέχουν σε συναλλαγές. Και στις δύο αυτές περιπτώσεις, το VaR χρησιμοποιείται για να διασφαλίσει ότι τα πιστωτικά ιδρύματα θα μπορούν να λειτουργούν ακόμα και ύστερα από μία καταστροφική οικονομική κρίση. Από τη

σκοπία των πιστωτικών ιδρυμάτων, το VaR μπορεί να ορισθεί σαν τη μέγιστη απώλεια μιας επιχείρησης κατά τη διάρκεια μίας περιόδου για μία δεδομένη πιθανότητα. Από αυτή την άποψη, κάποιος κατανοεί το VaR σαν ένα μέτρο των απωλειών που σχετίζονται με ένα σπάνιο (ή εξωπραγματικό) γεγονός, σε κανονικές συνθήκες αγοράς. Αντίθετα, από τη πλευρά των εποπτικών οργανισμών, το VaR μπορεί να θεωρηθεί σαν τις ελάχιστες απώλειες υπό ασυνήθιστες συνθήκες. Οι δύο ορισμοί οδηγούν στην ίδια μέτρηση του VaR.

Στο σημείο αυτό, θα αναλυθεί το VaR με μία πιο πιθανοθεωρητική μορφή. Θα ήταν πιο κατάλληλο να επικεντρωθεί το ενδιαφέρον της ανάλυσης, στην αριστερή ουρά της κατανομής των μεταβολών των τιμών, όπου παρατηρούνται οι απώλειες. Έστω, η χρονική στιγμή t και ένας χρονικός ορίζοντας 1 περιόδων. Έστω, επίσης, $\Delta V(1)$ η αλλαγή της τιμής μίας επένδυσης από τη χρονική στιγμή t έως τη $t+1$. Η ποσότητα αυτή είναι τυχαία μεταβλητή του χρόνου t . Έστω, $F_1(x)$ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (*cumulative distribution function* – CDF) της $\Delta V(1)$. Το VaR ορίζεται στο χρονικό ορίζοντα 1 με πιθανότητα a ως:

$$a = P[\Delta V(1) \leq VaR] = F_1(VaR)$$

Δηλαδή, η πιθανότητα για έναν επενδυτή να υποστεί απώλειες μεγαλύτερες ή ίσες του VaR, για μία περίοδο 1, είναι a . Εναλλακτικά, το VaR μπορεί να ερμηνευτεί ως εξής. Με πιθανότητα $(1-a)$, οι δυνατές απώλειες που θα υποστεί ένας επενδυτής, σε ένα χρονικό ορίζοντα 1, είναι μικρότερες του VaR. Εφόσον, ο επενδυτής υφίσταται απώλειες τότε θα είναι $\Delta V(1) < 0$ και συνεπώς το VaR, όπως ορίστηκε, θα παίρνει, τυπικά, αρνητική τιμή για μικρό a .

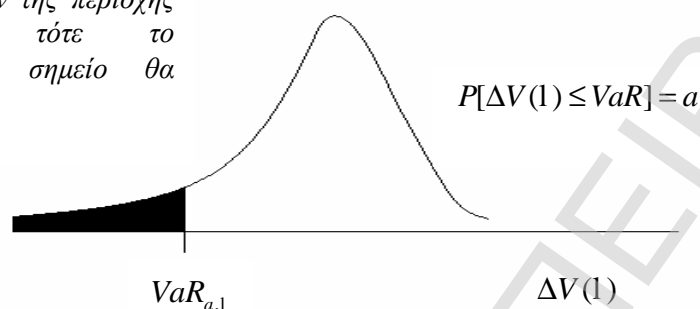
Από τους παραπάνω ορισμούς γίνεται φανερό, ότι το VaR σχετίζεται με τη συμπεριφορά της αριστερής ουράς της κατανομής των μεταβολών. Έτσι, για μία συγκεκριμένη $F_1(x)$ και πιθανότητα a , η ποσότητα:

$$x_a = \inf\{x : F_1(x) \geq a\}$$

καλείται το a -ποσοστιαίο σημείο της $F_1(x)$, όπου το \inf δηλώνει τον μικρότερο πραγματικό αριθμό που ικανοποιεί το $F_1(x) \geq a$. Εάν η αθροιστική συνάρτηση $F_1(x)$

είναι γνωστή, τότε το VaR είναι απλά, το a -ποσοστιαίο σημείο της. Τα ανωτέρω γίνονται πιο κατανοητά στο Διάγραμμα 2.1 όπου παρουσιάζεται διαγραμματικά ο ορισμός του VaR. Είναι φανερό ότι μεταβολές οι οποίες βρίσκονται αριστερά του σημείου VaR, στον οριζόντιο άξονα, είναι ανεπιθύμητες.

Εάν το εμβαδόν της περιοχής είναι a , τότε το a -ποσοστιαίο σημείο θα είναι το $VaR_{a,1}$



Διάγραμμα 2.1
Περιγραφή του VaR

Σε πρακτικές εφαρμογές, στον υπολογισμό του VaR λαμβάνονται υπ' όψιν τα εξής:

1. Η πιθανότητα a (επίπεδο σημαντικότητας) που, συνήθως, λαμβάνει τιμές 0.01 ή 0.05.
2. Ο χρονικός ορίζοντας 1 . Εξαρτάται από τις συνθήκες και είναι μία ημέρα ή δέκα ημέρες συνήθως.
3. Η συχνότητα των δεδομένων, η οποία πιθανόν να μην είναι ίση με το χρονικό ορίζοντα 1 . Συνήθως, χρησιμοποιούνται ημερήσια δεδομένα.
4. Το κεφάλαιο της επένδυσης.
5. Η αθροιστική συνάρτηση $F_1(x)$.

Μεταξύ αυτών, στόχος των οικονομετρικών υποδειγμάτων είναι η αθροιστική συνάρτηση $F_1(x)$. Διαφορετικές μέθοδοι υπολογισμού της $F_1(x)$, δίνουν διαφορετικές προσεγγίσεις στον υπολογισμό του VaR.

Ο παραπάνω ορισμός του VaR, αναφέρεται σε μεταβολές τιμών. Εφόσον όμως, οι λογαριθμικές αποδόσεις (*log returns*) ανταποκρίνονται, σχεδόν, σε ποσοστιαίες μεταβολές της αξίας μίας επένδυσης, στο εξής θα χρησιμοποιούνται αυτές. Έτσι, το

VaR θα υπολογίζεται από το ποσοστιαίο σημείο της κατανομής των r_{t+1} αποδόσεων, δεδομένης της πληροφορίας στο χρόνο t , με τη μορφή ποσοστού.

Κατά συνέπεια, το VaR θα είναι μία πρόβλεψη των πιθανών απωλειών μίας επένδυσης σε ένα δεδομένο χρονικό ορίζοντα. Έτσι, το VaR υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη προβλεπόμενη κατανομή των μελλοντικών αποδόσεων της επένδυσης. Για παράδειγμα, το VaR για χρονικό ορίζοντα μίας ημέρας, μίας επένδυσης, χρησιμοποιώντας καθημερινές αποδόσεις r_t , θα υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τη κατανομή των r_{t+1} αποδόσεων, δεδομένης της πληροφορίας στο χρόνο t . Από στατιστικής άποψης, η προβλεπόμενη κατανομή, εμπεριέχει τον παράγοντα της αβεβαιότητας.

2.4 ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

Στην ενότητα αυτή γίνεται μία προσπάθεια παρουσίασης της πρώτης και ευρέως διαδεδομένης μεθόδου υπολογισμού του Value-at-Risk, τη μέθοδο συνδιακύμανσης (*covariance method*). Έστω ότι ένα χαρτοφυλάκιο αποτελείται από επενδύσεις σε χρυσό, αξίας ενός εκατομμυρίου δολαρίων. Το ερώτημα είναι πόσα χρήματα είναι πιθανόν να χαθούν σε περίοδο μίας ημέρας. Ο υπολογισμός αυτός προϋποθέτει την αστάθεια-μεταβλητότητα (*volatility*) στη τιμή του χρυσού. Έστω ότι η ημερήσια αστάθεια-μεταβλητότητα στη τιμή του χρυσού είναι 0.55% .

Συνεπώς, μπορεί να υπολογισθεί ένας VaR αριθμός, δηλαδή, η δυνατή απώλεια της επένδυσης σε χρονικό ορίζοντα μίας ημέρας ως εξής:

$$VaR = V \times P$$

όπου: V = αστάθεια - μεταβλητότητα (*volatility*)

P = κεφάλαιο της επένδυσης (\$)

Έτσι, το VaR θα είναι: $1,000,000 \times 0.0055 = \$5,500$.

Συνεπώς, η απώλεια στην επένδυση του ενός εκατομμυρίου δολαρίων σε χρυσό, για μία ημέρα, θα είναι \$5,500.

Το επόμενο στοιχείο που θα πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν είναι το επίπεδο σημαντικότητας για την απώλεια των \$5,500. Το επίπεδο σημαντικότητας ορίζεται στατιστικά και απαιτεί σωστό προσδιορισμό της κατανομής των μεταβολών των τιμών.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΑΣΤΑΘΕΙΑΣ- ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ

Τα VaR υποδείγματα που βασίζονται στη παραπάνω μέθοδο υποθέτουν ότι τα ποσοστά των μεταβολών των τιμών κατανέμονται κανονικά. Αυτή η υπόθεση επιτρέπει τη περιγραφή της αστάθειας-μεταβλητότητας σε μονάδες τυπικών αποκλίσεων (*standard deviations*). Η αστάθεια-μεταβλητότητα περιγράφεται, συνήθως, ως ποσοστιαία μεταβολή, με τυπικό μέτρο της να είναι το ποσοστό μεταβολής που ισούται με μία τυπική απόκλιση.

Το κρίσιμο ερώτημα σε σχέση με την αστάθεια-μεταβλητότητα είναι να καθοριστεί το επίπεδο σημαντικότητας ώστε οι μελλοντικές μεταβολές στις τιμές να μην υπερβούν τη δεδομένη μεταβλητότητα. Στον υπολογισμό του VaR χρησιμοποιείται συνήθως διάστημα εμπιστοσύνης 95% ή μεγαλύτερο. Ένα διάστημα εμπιστοσύνης 95% αντιστοιχεί σε 1.65 τυπικές αποκλίσεις της κανονικής κατανομής, ενώ ένα διάστημα εμπιστοσύνης 99% σε 2.33 αντίστοιχα.

Συνεπώς, στο παραπάνω παράδειγμα με το χρυσό, εφόσον γίνεται υπολογισμός του VaR με διάστημα εμπιστοσύνης 95%, πρέπει να πολλαπλασιασθεί η αστάθεια-μεταβλητότητα με 1.65. Αυτό δίνει VaR:

$$VaR = 1.65 \times 0.0055 \times 1,000,000 = \$9,075$$

Ο παραπάνω αριθμός έχει ένα διάστημα εμπιστοσύνης 95% ότι η απώλεια δεν θα υπερβεί αυτό το ποσό σε διάστημα μίας ημέρας.

ΧΡΟΝΙΚΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

Το χρονικό διάστημα (*holding period*) είναι ο χρονικός ορίζοντας για τον οποίο υπολογίζεται το VaR, δηλαδή, η χρονική περίοδος για την οποία υπολογίζονται οι δυνατές απώλειες. Με την αύξηση του χρονικού διαστήματος το VaR αυξάνεται διότι

η μεταβλητότητα διογκώνεται ανάλογα με τη τετραγωνική ρίζα του χρονικού διαστήματος. Για παράδειγμα, εάν μία τράπεζα αλλάξει το χρονικό διάστημα από μία ημέρα σε δέκα ημέρες, το VaR θα πρέπει να πολλαπλασιασθεί με τη τετραγωνική ρίζα του 10, δηλαδή με 3.16. Συνεπώς, η επιλογή του χρονικού διαστήματος, για το οποίο θα γίνει υπολογισμός του VaR, είναι κρίσιμη απόφαση.

2.5 VaR ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

Μέχρι στιγμής, έχουν αναλυθεί δύο από τους τρεις κύριους παράγοντες του VaR η μεταβλητότητα και η χρονική περίοδος, αντίστοιχα. Ο τρίτος παράγοντας που θα πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψιν, είναι η διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου. Η διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου (*portfolio diversification*) περιγράφει το βαθμό μείωσης του κινδύνου σε ένα χαρτοφυλάκιο με διαφοροποιημένα επενδυτικά αγαθά.

Ο υπολογισμός του VaR, τέτοιων χαρτοφυλακίων, λαμβάνει υπ' όψιν του κάθε διαφοροποίηση του κινδύνου σε ένα χαρτοφυλάκιο ο οποίος προκύπτει από τα επενδυτικά αγαθά που περιέχονται σε αυτό. Για να αναλυθεί το πώς οι αλλαγές των τιμών των επενδυτικών αγαθών σχετίζονται μεταξύ τους, χρησιμοποιούνται οι *συσχετίσεις* (*correlations*) ανάμεσα σε αυτά τα αγαθά.

Η ανάλυση της σχέσης δύο μεταβλητών παίζει σπουδαίο ρόλο στην διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο επηρεάζει η μεταβολή της μίας μεταβλητής την άλλη. Για τη μέτρηση της έντασης της εξάρτησης που υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών χρησιμοποιείται ο *συντελεστής συσχέτισης* (*correlation coefficient*). Εφόσον η σχέση εξάρτησης μεταξύ των δύο μεταβλητών είναι γραμμική, τότε ο παραπάνω συντελεστής καλείται *συντελεστής απλής γραμμικής συσχέτισης* (*simple linear correlation coefficient*).

Έστω ότι ένα χαρτοφυλάκιο αποτελείται από δύο επενδυτικά αγαθά των οποίων οι τιμές εκφράζονται από τις μεταβλητές A και B αντίστοιχα. Ως *πληθυσμιακό συντελεστή συσχέτισης* (*population correlation coefficient*) των μεταβλητών A και B ορίζεται το πηλίκο της συνδιακύμανσής τους προς το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών των διακυμάνσεών τους και συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα ρ ή ως $Corr(A,B)$ και δίνεται από το τύπο:

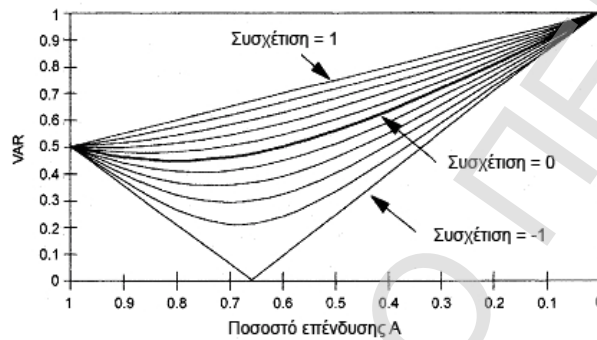
$$r = \text{Corr}(A, B) = \frac{\text{Cov}(A, B)}{\sqrt{\text{Var}(A)}\sqrt{\text{Var}(B)}}$$

όπου $\text{Cov}(A, B)$ είναι η **πληθυσμιακή συνδιακύμανση** (*population covariance*) μεταξύ των δύο μεταβλητών A και B , ενώ $\text{Var}(A)$ και $\text{Var}(B)$ είναι αντίστοιχα οι πληθυσμιακές διακυμάνσεις τους. Εφόσον ο παρονομαστής του ρ είναι πάντα θετικός, το πρόσημο του συντελεστή συσχέτισης καθορίζεται από το πρόσημο της συνδιακύμανσης των μεταβλητών A και B . Οι τιμές που μπορεί να λάβει ο συντελεστής συσχέτισης είναι από -1 έως 1 . Έτσι, αν $r = 1$, υπάρχει **πλήρης θετική γραμμική συσχέτιση** μεταξύ των μεταβλητών A και B . Αντιθέτως, εάν λάβει τη τιμή -1 , σημαίνει ότι υπάρχει **πλήρης αρνητική γραμμική συσχέτιση**. Επιπρόσθετα, αν λάβει τη τιμή 0 , σημαίνει ότι οι μεταβλητές δεν έχουν καμιά γραμμική συσχέτιση μεταξύ τους, δηλαδή είναι γραμμικά ασυσχέτιστες. Τέλος, αν $0 < r < 1$, υπάρχει **θετική γραμμική συσχέτιση**, η οποία είναι **ισχυρή**, όσο η τιμή του ρ πλησιάζει το 1 και **ασθενής**, όσο πλησιάζει το 0 . Αντιθέτως, για $-1 < r < 0$, υπάρχει **αρνητική γραμμική συσχέτιση**, η οποία γίνεται **ισχυρή**, όσο η τιμή του ρ πλησιάζει το -1 και **ασθενής**, όσο πλησιάζει το 0 .

Ο πληθυσμιακός συντελεστής συσχέτισης εκφράζει το βαθμό της γραμμικής σχέσης μεταξύ δύο μεταβλητών στον πληθυσμό τους. Στην πράξη όμως τέτοια μέτρηση είναι πολύ δύσκολη έως αδύνατη και η τιμή του συντελεστή r δεν είναι σχεδόν ποτέ γνωστή. Ωστόσο, μπορεί να υπολογισθεί μία εκτίμηση του r από ένα δείγμα παρατηρήσεων χρησιμοποιώντας τον **δειγματικό συντελεστή συσχέτισης r** (*sample correlation coefficient*). Ο δειγματικός συντελεστής συσχέτισης ορίζεται ανάλογα με τον πληθυσμιακό συντελεστή συσχέτισης χρησιμοποιώντας τη δειγματική συνδιακύμανση των δύο μεταβλητών και τις αντίστοιχες δειγματικές τους διακυμάνσεις.

Για να γίνει πιο εμφανής η επίδραση της διαφοροποίησης στη μείωση του κινδύνου, ας θεωρηθεί ότι το χαρτοφυλάκιο μπορεί να περιέχει μέρος του A ή του B . Έστω επίσης ότι το B φέρει διπλάσιο κίνδυνο από το A , αλλά αποφέρει διπλάσια απόδοση. Έστω, αρχικά, ότι το χαρτοφυλάκιο έχει επενδυθεί εξ ολοκλήρου στην επένδυση A . Ο διαχειριστής του χαρτοφυλακίου επιθυμεί να αυξήσει τις πιθανές αποδόσεις αλλά και να μην αυξήσει τον κίνδυνο.

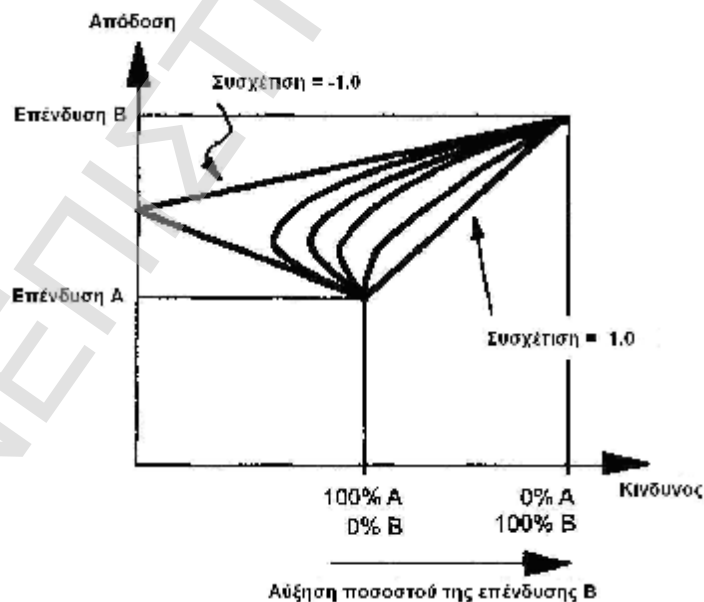
Στο Διάγραμμα 2.2 απεικονίζεται η επίδραση της διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου, αυξάνοντας το ποσοστό της επένδυσης B. Παρόλο, που η επένδυση B είναι διπλάσιου κινδύνου από την A, ο Κίνδυνος του χαρτοφυλακίου περιορίζεται σημαντικά καθώς το ποσοστό της επένδυσης B αυξάνεται μέχρι ένα συγκεκριμένο σημείο, το οποίο εξαρτάται από τη συσχέτιση της A και της B μεταβλητής. Η επίδραση της διαφοροποίησης, συνεπώς και η μείωση του κινδύνου, αυξάνεται καθώς η συσχέτιση μειώνεται.



Πηγή: Philip Best (1998)

Διάγραμμα 2.2

Επίδραση της διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου



Πηγή: Philip Best (1998)

Διάγραμμα 2.3

Ο Κίνδυνος σε σχέση με την απόδοση

Εάν τώρα, εισαχθεί και η απόδοση του χαρτοφυλακίου, θα προκύψει το Διάγραμμα 2.3, το οποίο είναι ένα διάγραμμα του κινδύνου σε σχέση με τις αναμενόμενες αποδόσεις, για διάφορες συσχετίσεις. Κάθε καμπύλη παρουσιάζει τους δυνατούς συνδυασμούς κινδύνου-απόδοσης και είναι γνωστή ως το **ελάχιστο περιθώριο διακύμανσης** (*minimum variance frontier*). Η μέγιστη αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου βρίσκεται κατά μήκος του ελαχίστου περιθωρίου διακύμανσης, το οποίο έχει θετική κλίση (κλίνοντας προς τα πάνω και αριστερά). Η καμπύλη αυτή καλείται **αποδοτικό περιθώριο** (*efficient frontier*) και αναπαριστά τη μέγιστη αναμενόμενη απόδοση, για κάθε επίπεδο του κινδύνου.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ VaR ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

Το VaR ενός χαρτοφυλακίου είναι απλά η μεταβλητότητα του χαρτοφυλακίου. Συνεπώς, στην πράξη όταν γίνεται υπολογισμός του VaR για ένα χαρτοφυλάκιο, γίνεται ένας συνδυασμός των κατανομών των μεταβολών των τιμών κάθε επένδυσης του χαρτοφυλακίου. Η παρακάτω εξίσωση δείχνει το πώς η μεταβλητότητα ενός χαρτοφυλακίου με επενδυτικά αγαθά A και B μπορεί να υπολογισθεί. Το VaR μπορεί να υπολογισθεί ως η μεταβλητότητα του χαρτοφυλακίου πολλαπλασιαζόμενη με τη τρέχουσα αξία του χαρτοφυλακίου.

$$s_p = \sqrt{a^2 s_A^2 + b^2 s_B^2 + 2ab r_{AB} s_A s_B}$$

Όπου: s_p , η μεταβλητότητα του χαρτοφυλακίου

a, b , τα ποσοστά των επενδυτικών αγαθών A και B στο χαρτοφυλάκιο

s_A, s_B , οι μεταβλητότητες των επενδυτικών αγαθών A και B

r_{AB} , ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των επενδυτικών αγαθών A και B αντίστοιχα.

Είναι φανερό ότι, $a s_A$ είναι το VaR της απλής επένδυσης A. Από τη παραπάνω εξίσωση, προκύπτει ότι ο τρίτος όρος θα είναι μηδέν εάν δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των δύο επενδύσεων. Στη περίπτωση αυτή το VaR θα ισούται με:

$$S_P = \sqrt{a^2 S_A^2 + b^2 S_B^2}$$

Η παραπάνω εξίσωση, μπορεί να επεκταθεί και για περισσότερες επενδύσεις. Στη πράξη, το VaR ενός χαρτοφυλακίου, μπορεί να υπολογισθεί με τη παρακάτω εξίσωση των πινάκων :

$$VaR_p = \sqrt{V \cdot C \cdot V^T}$$

Όπου: VaR_p , είναι το VaR του χαρτοφυλακίου

V , πίνακας γραμμή με τα VaR της κάθε επένδυσης ξεχωριστά

C , πίνακας των συσχετίσεων

V^T , ο ανάστροφος του V

2.6 ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Σε αυτή την ενότητα, θα παρουσιαστούν οι δύο κύριες προσεγγίσεις του VaR με τη μέθοδο της προσομοίωσης. Η ιστορική προσομοίωση (*historical simulation*) και η προσομοίωση Monte Carlo.

2.6.1 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ

Η ιστορική προσομοίωση αποτελεί μία προσέγγιση του VaR η οποία δεν βασίζεται σε κάποιο στατιστικό υπόδειγμα. Ωστόσο, παραμένει ένα στατιστικό μέτρο των πιθανών απωλειών. Λόγω του γεγονότος ότι τα μαθηματικά που χρησιμοποιεί είναι απλά η μεθοδολογία αυτή είναι πιο αποδεκτή από την Αγορά.

Η ιστορική προσομοίωση παίρνει ένα χαρτοφυλάκιο επενδύσεων σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή και στη συνέχεια ανατιμά την αξία του αρκετές φορές, χρησιμοποιώντας παλαιότερες τιμές των επενδύσεων του χαρτοφυλακίου. Η ανατίμηση του χαρτοφυλακίου παράγει μία κατανομή απωλειών και κερδών και η οποία εξετάζεται ώστε να προσδιορισθεί το VaR του χαρτοφυλακίου σε ένα δεδομένο διάστημα εμπιστοσύνης.

Η μέθοδος για τον υπολογισμό του VaR με τη χρήση ιστορικής προσομοίωσης απαιτεί τη χρήση μίας σειράς ιστορικών στοιχείων από ποσοστά μεταβολών των τιμών και εφαρμογή τους στο τρέχον χαρτοφυλάκιο ως εξής:

- Λήψη μίας σειράς ποσοστιαίων μεταβολών των τιμών για κάθε επένδυση που θα χρειαστεί στην ανατίμηση του χαρτοφυλακίου.
- Εφαρμογή της παραπάνω σειράς στο χαρτοφυλάκιο με σκοπό τη δημιουργία μίας ιστορικής σειράς με τις μεταβολές της αξίας του χαρτοφυλακίου.
- Ταξινόμηση των ποσοστιαίων μεταβολών της αξίας του χαρτοφυλακίου.
- Το VaR του χαρτοφυλακίου είναι η μεταβολή της αξίας που ανταποκρίνεται στο δεδομένο διάστημα εμπιστοσύνης.

2.6.2 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ MONTE CARLO

Η ιστορική προσομοίωση που παρουσιάστηκε παραπάνω, προσδιορίζει το VaR προσομοιώνοντας τις μεταβολές της αξίας του χαρτοφυλακίου που προκύπτουν από ανατιμήσεις του χαρτοφυλακίου, χρησιμοποιώντας ιστορικά δεδομένα από μεταβολές στις αξίες των επενδύσεων του χαρτοφυλακίου, σε ένα ορισμένο χρονικό διάστημα. Για όσο διάστημα υπάρχουν ιστορικά στοιχεία, η παραπάνω μέθοδος είναι αποτελεσματική. Αντιθέτως, εάν τα επαρκή ιστορικά στοιχεία είναι δύσκολο να βρεθούν, η ιστορική προσομοίωση είναι δύσκολο να εφαρμοσθεί. Επίσης, υπάρχει μία διαφωνία σύμφωνα με την οποία, τα πραγματικά ιστορικά στοιχεία είναι ένα περιορισμένο σύνολο γεγονότων από το οποίο μπορεί να προκύψει το VaR. Η λύση σε αυτή τη διαφωνία δόθηκε με τη προσομοίωση Monte Carlo.

Η μέθοδος Monte Carlo παράγει τεχνητά μία σειρά μεταβολών των τιμών από τις οποίες μπορεί να προσδιορισθεί το VaR. Η δημιουργία τέτοιων μεταβολών γίνεται μέσω τυχαίων αριθμών και στη συνέχεια, οι μεταβολές αυτές εφαρμόζονται στο χαρτοφυλάκιο και το VaR προσδιορίζεται όπως ακριβώς και στην ιστορική προσομοίωση. Η προσομοίωση Monte Carlo υποθέτει—όπως και η μέθοδος συνδιακύμανσης—ότι οι μεταβολές των τιμών κατανέμονται κανονικά.

Τα κύρια σημεία της διαδικασίας προσομοίωσης Monte Carlo είναι τα ακόλουθα:

- Προσδιορισμός της μεταβλητότητας και των συσχετίσεων.

- Παραγωγή κανονικών σειρών με τη σωστή μεταβλητότητα.
- Προσδιορισμός ιδιοτιμών (*eigenvalues*) και ιδιοδιανυσμάτων (*eigenvectors*) του πίνακα συσχετίσεων.
- Προσδιορισμός συσχετισμένων σειρών.
- Προσδιορισμός των αλλαγών του χαρτοφυλακίου και κατάταξή τους όπως και στην ιστορική προσομοίωση.

2.7 ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Το VaR, είναι ένα στατιστικό μέτρο του κινδύνου και μετρά τη μέγιστη απώλεια που μπορεί να υποστεί ένα χαρτοφυλάκιο σε ένα δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Το VaR συνοδεύεται πάντα από μία πιθανότητα που εκφράζει το πόσο είναι πιθανό οι απώλειες να είναι μικρότερες από ένα ποσό και υπολογίζεται για μία περίοδο μίας ημέρας. Το διάστημα εμπιστοσύνης, συνήθως 95%, θεωρεί ότι υπάρχει πιθανότητα 95% οι απώλειες να είναι μικρότερες του VaR. Το VaR εξαρτάται από τρεις παράγοντες, α) τη μεταβλητότητα στις αλλαγές των τιμών, β) το χρονικό διάστημα εφαρμογής της μεθόδου και γ) τις συσχετίσεις των επενδυτικών αγαθών μέσα σε ένα κοινό χαρτοφυλάκιο.

Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα του VaR είναι ότι είναι ένα μέτρο κινδύνου, το οποίο μπορεί να εφαρμοσθεί σε όλα τα προϊόντα της αγοράς (κεφάλαια, δείκτες, κ.α.). Συνεπώς, αποτελεί σημείο αναφοράς μετρήσεων του κινδύνου, σε διάφορα πεδία της αγοράς και επιτρέπει την άμεση σύγκρισή τους. Επίσης, λόγω της πιθανότητας που φέρει, είναι συγκριτικά καλύτερο από τα υπόλοιπα μέτρα καθώς έχει τη δυνατότητα να υπολογίζει τη πιθανότητα μίας απώλειας, μεγαλύτερης ενός συγκεκριμένου μεγέθους. Τέλος, το VaR μπορεί να λάβει υπ' όψιν του το πώς σχετίζονται οι μεταβολές των τιμών, διαφορετικών επενδυτικών αγαθών. Αυτό επιτρέπει τη μείωση του κινδύνου λόγω της διαφοροποίησης.

Η μέθοδος συνδιακύμανσης είναι ένα στατιστικό μοντέλο που υποθέτει ότι οι μεταβολές των τιμών είναι κατανεμημένες κανονικά. Τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει αρκετές προσπάθειες επέκτασης της μεθόδου της συνδιακύμανσης, ωστόσο, τράπεζες που χρειάζονται τον υπολογισμό του VaR χαρτοφυλακίων χρησιμοποιούν συνήθως είτε προσομοίωση Monte Carlo (*Monte Carlo simulation*) είτε ιστορική προσομοίωση

(*historical simulation*). Η θεμελιώδης διαφορά αυτών των δύο μεθόδων είναι ότι η προσομοίωση Monte Carlo υποθέτει κανονικότητα, όπως και η μέθοδος συνδιακύμανσης, ενώ η ιστορική προσομοίωση όχι. Συγκεκριμένα, η ιστορική προσομοίωση δεν κάνει καμία υπόθεση για τη κατανομή των μεταβολών των τιμών των επενδυτικών αγαθών.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα μέρος της στατιστικής ανάλυσης πραγματεύεται με υποδείγματα των οποίων οι παρατηρήσεις μεταβάλλονται ανεξάρτητα. Σε πολλές εφαρμογές η εξάρτηση των παρατηρήσεων είναι ανεπιθύμητη. Παρόλα αυτά, ένα μεγάλο μέρος δεδομένων που προέρχονται από οικονομικές ή φυσικές επιστήμες έχουν τη μορφή *χρονοσειρών* (*time series*) στις οποίες οι παρατηρήσεις εξαρτώνται χρονικά και η φύση αυτής της εξάρτησης έχει σπουδαίο ερευνητικό ενδιαφέρον. Το σύνολο των τεχνικών που είναι διαθέσιμες για την ανάλυση τέτοιων εξαρτημένων δεδομένων καλείται *ανάλυση χρονοσειρών* (*time series analysis*).

Η ανάλυση χρονοσειρών εξετάζει τη διαχρονική συμπεριφορά των τιμών μίας μεταβλητής, οι παρατηρήσεις της οποίας προέρχονται αποκλειστικά από χρονοσειρά, δηλαδή από παρατηρήσεις που έχουν καταγραφεί κατά τη διάρκεια ίσων χρονικών περιόδων. Η ανάλυση χρονοσειρών χωρίζεται σε τρεις κατηγορίες:

- Μέθοδοι εξομάλυνσης (*smoothing methods*).
- Μέθοδοι διάσπασης χρονοσειρών (*time series decomposition*).
- Ανάλυση κατά Box και Jenkins ή ανάλυση ARIMA.

Οι δύο πρώτες μέθοδοι είναι αιτιοκρατικές σε αντίθεση με τη τελευταία η οποία είναι στοχαστική.

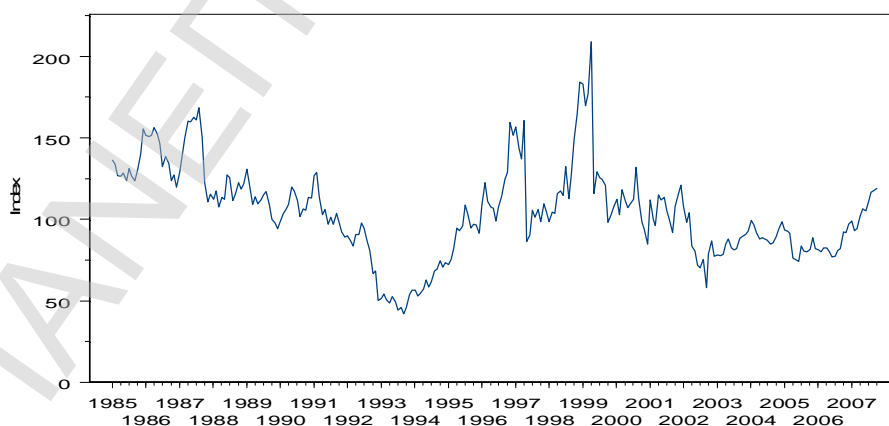
Κατά συνέπεια, με βάση τη μεθοδολογία των Box και Jenkins, η επιλογή ενός υποδείματος (*model building*) για μία χρονοσειρά ενός δείγματος παρατηρήσεων γίνεται ακολουθώντας ένα σύνολο βημάτων. Το πρώτο βήμα περιλαμβάνει τεχνικές ταυτοποίησης. Οι τεχνικές αυτές προτείνουν ποιο είδος υποδείματος έχει τη καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα, κάνοντας χρήση των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης αντίστοιχα. Στη συνέχεια, ακολουθεί η εκτίμηση του υποδείματος με τη χρήση της συνάρτησης πιθανοφάνειας. Στο

τελευταίο βήμα περιλαμβάνονται όλοι οι διαγνωστικοί έλεγχοι οι οποίοι εξετάζουν την επάρκεια του υποδείγματος να ερμηνεύσει τη μεταβλητότητα των δεδομένων. Η σωστή κατασκευή του υποδείγματος είναι βασική προϋπόθεση για σωστές προβλέψεις. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν τα υποδείγματα ARIMA ή υποδείγματα των Box και Jenkins.

3.2 ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

Μία χρονοσειρά είναι ένα σύνολο παρατηρήσεων το οποίο εξελίσσεται διαδοχικά με τη πάροδο του χρόνου. Βασική προϋπόθεση για την ορθή ανάλυση μίας χρονοσειράς είναι τα διαστήματα μεταξύ των παρατηρήσεων να ισαπέχουν μεταξύ τους και η συλλογή των παρατηρήσεων να είναι αδιάκοπη. Τα διαστήματα μεταξύ των παρατηρήσεων αντιπροσωπεύουν ημέρες, μήνες, έτη ή οποιαδήποτε άλλη χρονική περίοδο.

Σε αντίθεση με οικονομετρικά υποδείγματα, τα οποία προσπαθούν να ερμηνεύσουν τη σχέση μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών, σκοπός την ανάλυσης χρονοσειρών είναι η ερμηνεία του τρόπου με τον οποίο εξελίσσεται μία χρονοσειρά στο χρόνο καθώς και ο βαθμός συσχέτισής της με προηγούμενες παρατηρήσεις. Για παράδειγμα, το Διάγραμμα 3.1 παρουσιάζει μία χρονοσειρά με μηνιαία δεδομένα δώδεκα ετών (από 2.01.1985 έως 1.10.2007) που φανερώνουν την εξέλιξη της τιμής της μετοχής της εταιρείας IBM.



Διάγραμμα 3.1

Μηνιαίες παρατηρήσεις της τιμής της μετοχής της IBM

Από το διάγραμμα είναι φανερό ότι η τιμή της μετοχής της IBM εμφανίζει μία πτωτική τάση μέχρι το 1993 από όπου στη συνέχεια ακολουθεί μία ανοδική πορεία με έντονη μεταβλητότητα μέχρι το 2000. Στη συνέχεια φαίνεται να ακολουθεί μία πιο ομαλή πορεία. Η ανάλυση χρονοσειρών προσπαθεί, αρχικά, να ερμηνεύσει την εξέλιξη της χρονοσειράς στο χρόνο και αφού το επιτύχει αυτό, με τη στατιστική έννοια του όρου, να προβλέψει την μελλοντική της εξέλιξη.

ΣΤΑΣΙΜΟΤΗΤΑ

Μία ειδική κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών, γνωστές ως στάσιμες διαδικασίες, βασίζεται στην υπόθεση ότι η διαδικασία βρίσκεται σε μία **στατιστική ισορροπία** (*statistical equilibrium*). Μία στοχαστική διαδικασία καλείται **αυστηρά στάσιμη** (*strictly stationary*) εφόσον οι ιδιότητές της μένουν ανεπηρέαστες με το πέρασμα του χρόνου. Ειδικότερα, εάν η από κοινού κατανομή πιθανότητας n παρατηρήσεων $x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}$, που δημιουργήθηκαν σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα t_1, t_2, \dots, t_n , είναι η ίδια με αυτή που θα προέκυπτε για n παρατηρήσεις $x_{t_1+k}, x_{t_2+k}, \dots, x_{t_n+k}$ που δημιουργήθηκε στους χρόνους $t_1+k, t_2+k, \dots, t_n+k$. Συμπερασματικά, για να είναι μία χρονοσειρά αυστηρά στάσιμη πρέπει η από κοινού συνάρτηση κατανομής οποιουδήποτε συνόλου παρατηρήσεων να μένει αναλλοίωτη με τη μετακίνηση των χρονικών περιόδων των παρατηρήσεων είτε προς τα εμπρός είτε προς τα πίσω, κατά έναν ακέραιο αριθμό k .

Μία χρονοσειρά καλείται **ασθενώς στάσιμη** (*weakly stationary*) εάν ικανοποιούνται μία σειρά από υποθέσεις. Πρώτον, η αναμενόμενη τιμή της χρονοσειράς θα πρέπει να είναι σταθερή για κάθε χρονική περίοδο, δηλαδή:

$$E(x_t) = m$$

Δεύτερον, η διακύμανση της χρονοσειράς να είναι σταθερή για κάθε χρονική περίοδο, δηλαδή:

$$\text{Var}(x_t) = E[(x_t - m)^2] = s^2$$

Τέλος, η αυτοσυνδιακύμανση μεταξύ δύο παρατηρήσεων της χρονοσειράς να είναι συνάρτηση μόνο των χρονικών υστερήσεων μεταξύ των παρατηρήσεων k και όχι του χρόνου t , δηλαδή:

$$Cov(x_t, x_{t-1}) = E[(x_t - m)(x_{t-1} - m)] = Cov(x_{t-1}, x_t) = g_k, \quad \forall k \geq 1$$

Επιπρόσθετα, είναι φανερό ότι η αυστηρή στασιμότητα συνεπάγεται την ασθενή.

ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΚΑΙ ΜΕΡΙΚΗ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗ

Έστω ότι x_t μία ασθενώς στάσιμη χρονοσειρά. Ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ της x_t και της x_{t-1} παρατήρησης καλείται **1-τάξης συντελεστής αυτοσυσχέτισης** (*1-lag autocorrelation coefficient*) της x_t , συμβολίζεται με r_1 και κάτω από την υπόθεση της ασθενούς στασιμότητας είναι συνάρτηση μόνο της χρονικής υστέρησης 1. Ειδικότερα:

$$r_1 = \frac{Cov[x_t, x_{t-1}]}{\sqrt{Var[x_t]Var[x_{t-1}]}} = \frac{Cov[x_t, x_{t-1}]}{Var[x_t]} = \frac{g_1}{g_0}$$

Από τον ορισμό της στασιμότητας προκύπτει ότι $r_0 = 1, r_1 = r_{-1}$ και $-1 \leq r_1 \leq 1$. Επίσης, μία ασθενώς στάσιμη χρονοσειρά r_t δεν είναι σειριακά συσχετισμένη αν και μόνο αν $r_1 = 0$ και κάθε $1 \neq 0$.

Για ένα δεδομένο δείγμα $\{x_t\}_{t=1}^n$, έστω \bar{x} ο δειγματικός μέσος (δηλαδή, $\bar{x} = \sum_{t=1}^n x_t / n$). Τότε η 1^{ης} τάξης **δειγματική αυτοσυσχέτιση** της x_t είναι

$$r_1 = \frac{\sum_{t=2}^n (x_t - \bar{x})(x_{t-1} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2}$$

Κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, η r_1 είναι εκτιμήτρια της r_1 . Σε πεπερασμένες σειρές, η r_1 είναι μία μεροληπτική εκτιμήτρια της r_1 . Η μεροληψία είναι της τάξης του $1/n$, η οποία μπορεί να θεωρηθεί σημαντική όταν το μέγεθος του δείγματος n είναι μικρό. Σε πολλές εφαρμογές, το n είναι σχετικά μεγάλο έτσι ώστε η μεροληψία να μην θεωρείται σημαντική.

Η συνάρτηση r_1, r_2, \dots καλείται **δειγματική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης** (*sample autocorrelation function-ACF*) της x_t . Η συνάρτηση αυτή παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάλυση των χρονοσειρών. Ένα γραμμικό υπόδειγμα χρονοσειρών μπορεί να χαρακτηριστεί από τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και η διαδικασία ταυτοποίησης του υποδείγματος χρησιμοποιεί τη δειγματική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης με σκοπό να διερευνηθεί η γραμμική δυναμική των δεδομένων.

Η συνάρτηση μερικών αυτοσυσχετίσεων είναι μία συνάρτηση των αυτοσυσχετίσεων και είναι πολύ χρήσιμη στο προσδιορισμό της τάξης p ενός αυτοπαλίνδρομου υποδείγματος. Αν x_1, x_2, x_3 είναι τυχαίες μεταβλητές, τότε ορίζεται σαν μερική συσχέτιση των x_1 και x_2 , όταν η x_3 παραμένει σταθερή, την απλή συσχέτιση μεταξύ των τιμών των x_1 και x_2 , όταν από αυτές αφαιρείται η γραμμική επίδραση της x_3 . Αν r_{12}, r_{13}, r_{23} είναι οι συντελεστές απλής συσχέτισης των τυχαίων μεταβλητών x_1, x_2, x_3 ανά δύο, τότε ο συντελεστής μερικής συσχέτισης των x_1 και x_2 , όταν η x_3 παραμένει σταθερή, δίνεται από τη σχέση:

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}}$$

Για τη χρονοσειρά x_t ορίζεται σαν **μερική αυτοσυσχέτιση k -τάξης** (*k-lag partial autocorrelation*) η μερική αυτοσυσχέτιση μεταξύ των x_t και x_{t+k} , όταν οι $x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{t+k-1}$ παραμένουν σταθερές, δηλαδή:

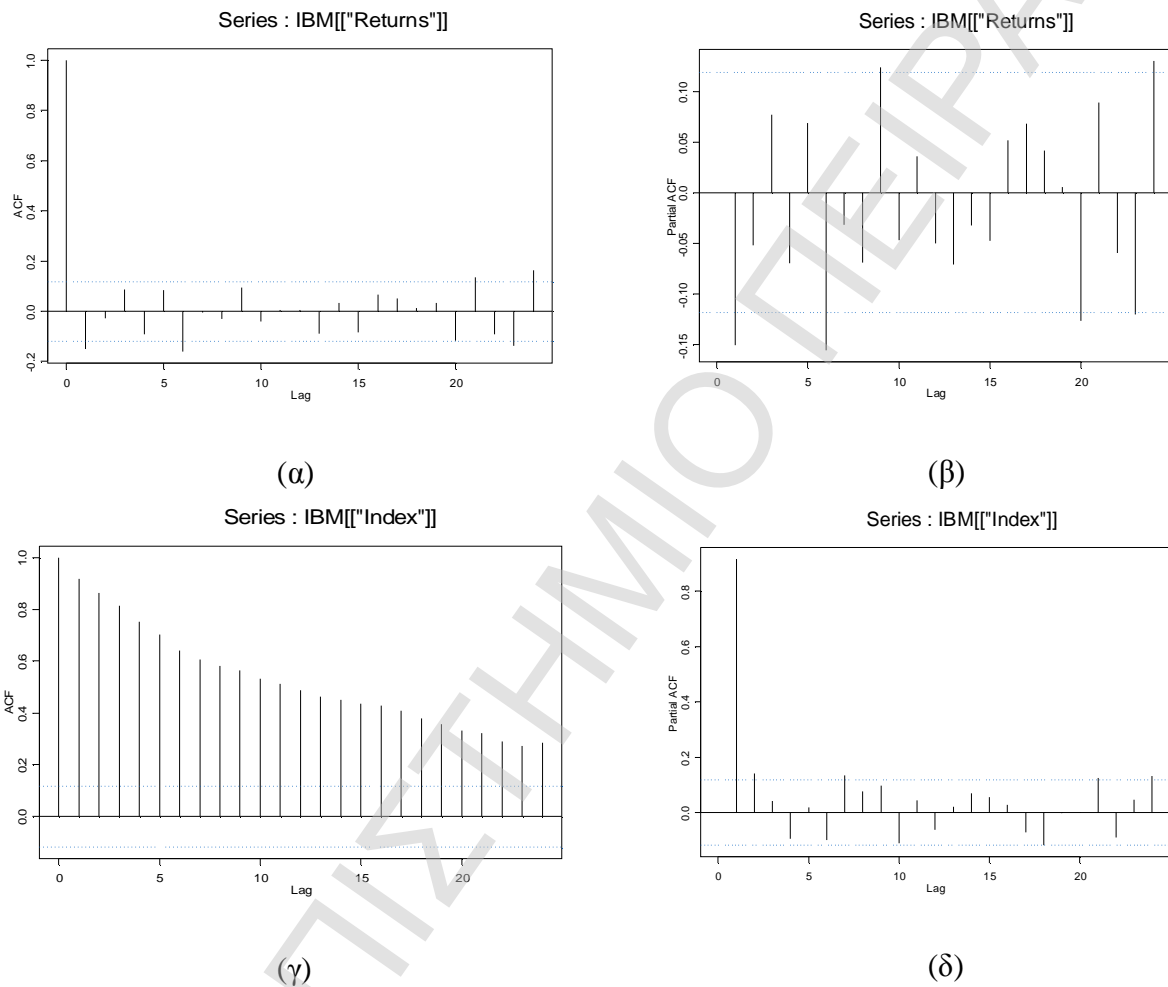
$$r_{k\bullet} = \text{Corr}(x_t, x_{t+k} / x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{t+k-1} \text{ σταθερές})$$

και συνήθως συμβολίζεται με:

$$r_{k\bullet} = f_{kk}$$

Η εκτίμηση \hat{f}_{11} καλείται πρώτης τάξης δειγματική μερική αυτοσυσχέτιση της x_t .

Ομοίως, η \hat{f}_{22} , δευτέρας τάξης δειγματική μερική αυτοσυσχέτιση κ.ο.κ.



Διάγραμμα 3.2

**Διαγράμματα αυτοσυσχετίσεων και μερικών αυτοσυσχετίσεων
για στάσιμη και μη-στάσιμη χρονοσειρά**

Οι γραφικές παραστάσεις των αυτοσυσχετίσεων και μερικών αυτοσυσχετίσεων, παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον και λαμβάνονται υπ' όψιν στην ανάλυση χρονοσειρών. Το διάγραμμα των αυτοσυσχετίσεων παρέχει πληροφορίες σχετικά με τη στασιμότητα μίας χρονοσειράς. Εάν στο διάγραμμα αυτό οι αυτοσυσχετίσεις φθίνουν πολύ γρήγορα, τότε η χρονοσειρά μπορεί να θεωρηθεί

στάσιμη. Σε αντίθετη περίπτωση θεωρείται μη-στάσιμη. Στο Διάγραμμα 3.2 (α), (β) και (γ), (δ) φαίνονται τα διαγράμματα αυτοσυσχετίσεων και μερικών αυτοσυσχετίσεων μίας στάσιμης και μίας μη-στάσιμης χρονοσειράς αντίστοιχα.

ΕΛΕΓΧΟΣ Portmanteau

Πολλές εφαρμογές, συχνά, απαιτούν κάποιον έλεγχο για το εάν οι μερικές αυτοσυσχετίσεις της x_t είναι μηδέν. Οι Box και Pierce (1970) πρότειναν τον *έλεγχο Portmanteau* (*Portmanteau test*) που βασίζεται στη στατιστική συνάρτηση:

$$Q^*(m) = n \sum_{i=1}^m r_i^2$$

και με την οποία γίνεται ο έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης $H_0 : r_1 = \dots = r_m = 0$ με εναλλακτική την $H_a : r_i \neq 0$ για κάποιο $i \in \{1, \dots, m\}$. Κάτω από ορισμένες συνθήκες η $Q^*(m)$ ακολουθεί τη χ -τετράγωνο κατανομή με m βαθμούς ελευθερίας.

Οι Ljung και Box (1978) μετέτρεψαν την στατιστική συνάρτηση $Q^*(m)$ με σκοπό την αύξηση της δύναμης του ελέγχου. Η νέα στατιστική συνάρτηση που πρότειναν ακολουθεί τη χ -τετράγωνο κατανομή και είναι η εξής:

$$Q(m) = n(n+2) \sum_{i=1}^m \frac{r_i^2}{n-1}$$

Στη πράξη, η επιλογή του m μπορεί να επηρεάσει την αποτελεσματικότητα της $Q(m)$ στατιστικής συνάρτησης. Μελέτες προσομοίωσης προτείνουν ότι η καλύτερη επίδοση επιτυγχάνεται για $m \approx \ln(n)$.

3.3 ΛΕΥΚΟΣ ΘΟΡΥΒΟΣ

Η διαδικασία του *λευκού θορύβου* (*white noise series*) μπορεί να θεωρηθεί σαν μία χρονοσειρά *διαταραχών* (*shocks*) η οποία παίζει σπουδαίο ρόλο στην εξέλιξη ενός υποδείγματος. Μία χρονοσειρά λευκού θορύβου αποτελείται από ασυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές με μηδενική αναμενόμενη τιμή και σταθερή διακύμανση:

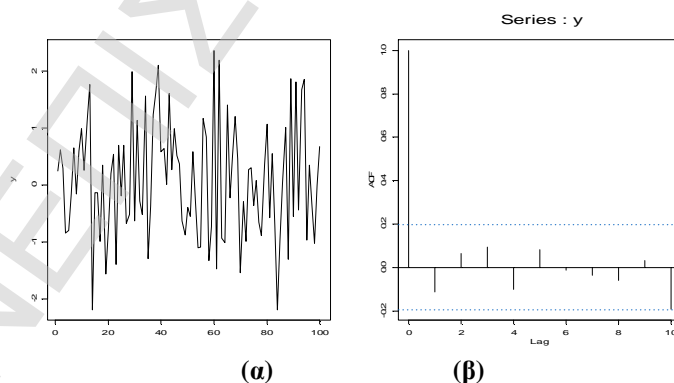
$$E(e_t) = 0 \quad \text{Var}(e_t) = s_e^2$$

Εφόσον οι τυχαίες μεταβλητές e_t είναι ασυσχέτιστες, έπεται ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης θα είναι:

$$g_k = E(e_t e_{t+k}) = \begin{cases} s_e^2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

συνεπώς, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του λευκού θορύβου έχει τη μορφή:

$$r_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$



Διάγραμμα 3.3

Διαγράμματα λευκού θορύβου και αυτοσυσχετίσεών του

Το Διάγραμμα 3.3 (α) και (β) παρουσιάζει τα διαγράμματα μίας χρονοσειράς λευκού θορύβου και των αυτοσυσχετίσεών της. Είναι φανερό ότι στο πρώτο διάγραμμα η σειρά του λευκού θορύβου εξελίσσεται γύρω από το μηδέν ενώ στο δεύτερο διάγραμμα γίνεται φανερό ότι η πρώτη αυτοσυσχέτιση ισούται με 1 και οι υπόλοιπες μπορούν να θεωρηθούν ίσες με μηδέν, αφού βρίσκονται εντός του διαστήματος εμπιστοσύνης.

3.4 ΑΥΤΟΠΑΛΙΝΔΡΟΜΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ

Έστω ότι $\{x_t\}$ μία χρονοσειρά η οποία διαμορφώνεται ως εξής:

$$x_t = f_0 + f_1 x_{t-1} + e_t \quad (3.1)$$

όπου f_0 είναι ένας σταθερός όρος, ανεξάρτητος του χρόνου, και e_t είναι λευκός θόρυβος με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση S_e^2 . Στο παραπάνω υπόδειγμα ο όρος x_t παλινδρομεί πάνω στον όρο που παρουσιάζει χρονική υστέρηση μίας χρονικής περιόδου. Δηλαδή, ο όρος x_t είναι η εξαρτημένη μεταβλητή και x_{t-1} η ερμηνευτική. Ένα υπόδειγμα σαν το (3.1) καλείται **αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα** (*autoregressive model*) πρώτης τάξης και συμβολίζεται απλά ως **AR(1)**.

Ένα AR(1) υπόδειγμα έχει υπό τη συνθήκη της προηγούμενης παρατήρησης x_{t-1} :

$$E(x_t | x_{t-1}) = f_0 + f_1 x_{t-1}, \quad \text{Var}(x_t | x_{t-1}) = \text{Var}(e_t) = S_e^2$$

Μία γενίκευση του AR(1) υποδείγματος είναι το υπόδειγμα **AR(p)**:

$$x_t = f_0 + f_1 x_{t-1} + f_2 x_{t-2} + \dots + f_p x_{t-p} + e_t \quad (3.2)$$

όπου p είναι ένα θετικός ακέραιος και ο όρος e_t είναι λευκός θόρυβος. Το υπόδειγμα (3.2) δηλώνει ότι οι προηγούμενες p παρατηρήσεις x_{t-i} ($i=1, \dots, p$) από κοινού προσδιορίζουν την υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή της x_t δεδομένων των προηγούμενων παρατηρήσεων. Το AR(p) υπόδειγμα έχει την ίδια μορφή με ένα πολλαπλό υπόδειγμα γραμμικής παλινδρόμησης με ερμηνευτικές μεταβλητές, τις χρονικές υστερήσεις της μεταβλητής x_t .

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ AR ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

Στο σημείο αυτό αναλύονται μερικές βασικές ιδιότητες των AR υποδειγμάτων ξεκινώντας από το AR(1), το AR(2) και γενικεύοντας με το AR(p).

Υπόδειγμα AR(1)

Θεωρώντας δεδομένη τη στασιμότητα της σειράς, ισχύει $E(x_t) = m, Var(x_t) = g_0$, και $Cov(x_t, x_{t-i}) = g_i$, όπου m, g_0 είναι σταθερά και g_i είναι συνάρτηση μόνο της χρονικής υστέρησης j και όχι του t . Παίρνοντας αναμενόμενες τιμές και επειδή είναι $E(e_t)$, ισχύει:

$$E(x_t) = f_0 + f_1 E(x_{t-1})$$

και κάτω από τη συνθήκη της στασιμότητας, $E(x_t) = E(x_{t-1}) = m$, έπεται ότι:

$$m = f_0 + f_1 m \quad \text{ή} \quad E(x_t) = m = \frac{f_0}{1-f_1}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $f_0 = (1-f_1)m$, το υπόδειγμα μπορεί να γραφεί:

$$x_t - m = f_1(x_{t-1} - m) + e_t \quad (3.3)$$

και με επανειλημμένες αντικαταστάσεις, η αρχική εξίσωση μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$x_t - m = e_t + f_1 e_{t-1} + f_1^2 e_{t-2} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} f_1^i e_{t-i} \quad (3.4)$$

η οποία αποτελεί τη μορφή της μακροχρόνιας συμπεριφοράς του υποδείγματος.

Όσον αφορά τη διακύμανση είναι:

$$Var(x_t) = Var\left(\sum_{i=0}^{\infty} f_1^i e_{t-i}\right) = Var(e_t) + f_1^2 Var(e_{t-1}) + \dots = s_e^2 (1 + f_1^2 + f_1^4 + \dots) \quad (3.5)$$

όπου s_e^2 είναι η διακύμανση του e_t . Η παραπάνω σχέση μπορεί να θεωρηθεί ως άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου, άρα θα πρέπει να ισχύει $|f_1| < 1$ έτσι ώστε να συγκλίνει. Άρα, η διακύμανση θα είναι :

$$Var(x_t) = \frac{s_e^2}{1 - f_1^2}$$

Συνεπώς, η υπόθεση της στασιμότητας σε ένα AR(1) υπόδειγμα ισοδυναμεί με $|f_1| < 1$.

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (3.3) με e_t , λαμβάνοντας υπ' όψιν την ανεξαρτησία μεταξύ e_t και x_{t-1} , και παίρνοντας αναμενόμενες τιμές προκύπτει:

$$E[e_t(x_t - m)] = E[e_t(x_{t-1} - m)] + E[e_t^2] = s_e^2$$

Πολλαπλασιάζοντας την (3.3) με $(x_{t-1} - m)$, παίρνοντας αναμενόμενες τιμές και λαμβάνοντας υπ' όψιν το παραπάνω αποτέλεσμα, προκύπτει:

$$g_1 = \begin{cases} f_1 g_1 + s_e^2 & \text{εάν } l = 0 \\ f_1 g_{1-1} & \text{εάν } l > 0 \end{cases}$$

Επομένως, για ένα στάσιμο AR(1) υπόδειγμα, ισχύει:

$$\text{Var}(x_t) = g_0 = \frac{\sigma_e^2}{1-f_1^2} \text{ και } g_1 = f_1 g_{1-1}, \text{ για } |f_1| < 1$$

Κατά συνέπεια, η εξίσωση των αυτοσυσχετίσεων θα παίρνει τη μορφή:

$$r_1 = f_1 r_{1-1} \text{ για } |f_1| < 1.$$

Επειδή, $r_0 = 1$, έπεται $r_1 = f_1$. Το αποτέλεσμα αυτό περιγράφει το γεγονός ότι σε ένα στάσιμο AR(1) υπόδειγμα, οι αυτοσυσχετίσεις φθίνουν εκθετικά με ρυθμό f_1 και έχουν αρχική τιμή $r_0 = 1$.

Υπόδειγμα AR(2)

Η μορφή ενός AR(2) υποδείγματος είναι:

$$x_t = f_0 + f_1 x_{t-1} + f_2 x_{t-2} + e_t$$

Με την ίδια ακριβώς διαδικασία, όπως και στο AR(1) υπόδειγμα, προκύπτει ότι:

$$E(x_t) = m = \frac{f_0}{1-f_1-f_2}$$

με την προϋπόθεση ότι $f_1 + f_2 \neq 1$. Χρησιμοποιώντας την έκφραση $f_0 = (1-f_1-f_2)m$ το AR(2) υπόδειγμα γράφεται ως εξής:

$$(x_t - m) = f_1(x_{t-1} - m) + f_2(x_{t-2} - m) + e_t$$

Πολλαπλασιάζοντας τη παραπάνω σχέση με $(x_{t-1} - m)$ έπεται:

$$(x_{t-1} - m)(x_t - m) = f_1(x_{t-1} - m)(x_{t-1} - m) + f_2(x_{t-1} - m)(x_{t-2} - m) + (x_{t-1} - m)e_t$$

Παίρνοντας αναμενόμενες τιμές και θεωρώντας $E[(x_{t-1} - m)e_t] = 0$ για $1 > 0$, προκύπτει:

$$g_1 = f_1 g_{1-1} + f_2 g_{1-2}, \text{ για } 1 > 0$$

Διαιρώντας τη παραπάνω εξίσωση με g_0 , προκύπτει η εξίσωση των αυτοσυσχετίσεων:

$$r_1 = f_1 r_{1-1} + f_2 r_{1-2}, \text{ για } 1 > 0 \quad (3.6)$$

Συγκεκριμένα, για $1 = 1$, η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$r_1 = f_1 r_0 + f_2 r_1 = f_1 + f_2 r_1$$

Συνεπώς, για μία στάσιμη AR(2) διαδικασία x_t ισχύει $r_0 = 1$,

$$r_1 = \frac{f_1}{1 - f_2}$$

$$r_1 = f_1 r_{1-1} + f_2 r_{1-2} \text{ για } 1 \geq 2$$

Το αποτέλεσμα της εξίσωσης (3.6) μπορεί να γραφεί σαν εξίσωση διαφορών 2^{ης} τάξης ως εξής:

$$(1 - f_1 B - f_2 B^2) r_1 = 0$$

όπου B είναι ο τελεστής μετατόπισης (*back-shift operator*) τέτοιος ώστε $B^j r_1 = r_{1-j}$. Άρα από τη παραπάνω εξίσωση προκύπτει ένα πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού, η λύση του οποίου δίνει τις εξισώσεις βάσει των οποίων ικανοποιείται η συνθήκη της στασιμότητας. Κατά συνέπεια, η συνθήκη στασιμότητας των AR(2) υποδειγμάτων απαιτεί την ικανοποίηση του συστήματος ανισώσεων:

$$\begin{cases} f_1 + f_2 < 1 \\ \text{ή} & \text{και } -1 < f_2 < 1 \\ f_2 - f_1 < 1 \end{cases}$$

Υπόδειγμα AR(p)

Τα αποτελέσματα από τα υποδείγματα AR(1) και AR(2) μπορούν να γενικευθούν και στο γενικό υπόδειγμα AR(p). Η μορφή αυτού του υποδείγματος είναι:

$$x_t = f_0 + f_1 x_{t-1} + f_2 x_{t-2} + \dots + f_p x_{t-p} + e_t$$

Η αναμενόμενη τιμή της σειράς θα είναι :

$$E(x_t) = \frac{f_0}{1 - f_1 - \dots - f_p}$$

εφόσον ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός. Όπως και στο AR(2) υπόδειγμα, προκύπτει η εξίσωση διαφορών p-τάξης από την οποία προκύπτουν οι συνθήκες στασιμότητας του υποδείγματος.

ΤΑΥΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ AR ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

Στη πράξη, η τάξη p ενός υποδείγματος AR είναι άγνωστη και πρέπει να προσδιορισθεί εμπειρικά. Αυτή η διαδικασία είναι γνωστή ως **προσδιορισμός της τάξης** (*order determination*) ενός AR υποδείγματος. Ο προσδιορισμός της τάξης μπορεί να προσεγγισθεί μέσω δύο διαδικασιών. Η πρώτη χρησιμοποιεί τη **συνάρτηση μερικών αυτοσυσχετίσεων** (*partial autocorrelation function - PACF*) και η άλλη χρησιμοποιεί τις τιμές **πληροφοριακών κριτηρίων** (*information criteria*).

Στα AR(1) υποδείγματα είναι:

$$f_{11} = r_{1g} = r_1 = f_1$$

$$f_{22} = r_{2g} = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2} = \frac{f_1^2 - f_1^2}{1 - f_1^2} = 0$$

Αποδεικνύεται ότι για τα AR(1) υποδείγματα ισχύει: $f_{kk} = 0 \quad \forall k > 1$, πράγμα που σημαίνει ότι μόνο η πρώτη τάξης μερική αυτοσυσχέτιση είναι μηδενική. Ομοίως αποδεικνύεται ότι και στα AR(2) υποδείγματα είναι $f_{kk} = 0 \quad \forall k > 2$ και γενικότερα ότι για τα AR(p) ισχύει ότι $f_{kk} = 0 \quad \forall k > p$. Κατά συνέπεια, σε ένα AR(p) υπόδειγμα η p-τάξης δειγματική μερική αυτοσυσχέτιση θα πρέπει να είναι μη-μηδενική, αλλά η \hat{f}_{jj} θα πρέπει να έχει τιμή πολύ κοντά στο μηδέν για κάθε $j > p$. Αυτή η ιδιότητα χρησιμοποιείται για τον καθορισμό της τάξης p ενός AR υποδείγματος. Γενικά, η δειγματική μερική αυτοσυσχέτιση ενός AR(p) υποδείγματος έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- \hat{f}_{pp} τείνει στο f_p καθώς το μέγεθος n του δείγματος τείνει στο άπειρο.
- \hat{f}_{ll} τείνει στο μηδέν για κάθε $l > p$.
- Η ασυμπτωτική διακύμανση του \hat{f}_{ll} είναι $1/n$ για $l > p$.

Τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν ότι για ένα AR(p) υπόδειγμα, η δειγματική μερική αυτοσυσχέτιση μηδενίζεται στη p-τάξη.

Πληροφοριακά κριτήρια

Για να προσδιορισθεί η τάξη p του AR(p) υποδείγματος υπάρχουν διάφορα πληροφοριακά κριτήρια τα οποία βασίζονται στη συνάρτηση πιθανοφάνειας. Τα πιο διαδεδομένα από αυτά είναι τα πληροφοριακά κριτήρια του **Akaike** και του **Schwarz** (*Akaike Information Criterion - AIC* και *Schwarz Bayesian Criterion - SBC/BIC*). Τα κριτήρια ορίζονται ως εξής:

$$AIC(k) = \ln(\hat{S}_k^2) + 2\frac{k}{n}$$

$$SBC(k) = \ln(\hat{S}_k^2) + \frac{k}{n} \ln(n)$$

όπου \hat{S}_I^2 είναι ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας του S_e^2 , δηλαδή του SSE/n , n είναι το μέγεθος του δείγματος και k ο συνολικός αριθμός των παραμέτρων του υποδείγματος. Στη πράξη, γίνεται υπολογισμός ενός κριτηρίου για διάφορες τιμές $k = 0, 1, K, P$, όπου P είναι ένας προεπιλεγμένος θετικός ακέραιος και επιλέγεται η τάξη k που ελαχιστοποιεί τη τιμή του πληροφοριακού κριτηρίου που χρησιμοποιείται. Το πληροφοριακό κριτήριο του Schwarz επιλέγει, κατά κανόνα, υποδείγματα με μικρό αριθμό παραμέτρων σε αντίθεση με το πληροφοριακό κριτήριο του Akaike, το οποίο έχει τη τάση να επιλέγει υποδείγματα με μεγάλο αριθμό παραμέτρων.

ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

Ένα εκτιμώμενο υπόδειγμα θα πρέπει να ελέγχεται προσεκτικά για τυχόν ανεπάρκεια του υποδείγματος. Εάν το υπόδειγμα είναι επαρκές, τότε η σειρά των σφαλμάτων θα πρέπει να είναι λευκός θόρυβος. Για τον έλεγχο της υπόθεσης ότι τα σφάλματα είναι λευκός θόρυβος χρησιμοποιείται η στατιστική συνάρτηση $Q(m)$ των Ljung και Box. Για ένα $AR(p)$ υπόδειγμα, η παραπάνω στατιστική συνάρτηση ακολουθεί ασυμπτωτικά τη χ^2 -τετράγωνο κατανομή με $m-p$ βαθμούς ελευθερίας. Εφόσον ένα υπόδειγμα αποδειχθεί ότι είναι ανεπαρκές θα πρέπει να εκτιμηθεί εξ αρχής.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Η πρόβλεψη μελλοντικών τιμών είναι ένα πολύ σημαντικό κομμάτι της ανάλυσης χρονοσειρών. Έστω ένα $AR(p)$ υπόδειγμα τη χρονική στιγμή h και σκοπός είναι να γίνει πρόβλεψη για την μελλοντική τιμή x_{h+q} , για $q \geq 1$. Ο θετικός ακέραιος q καλείται **ορίζοντας πρόβλεψης** (*forecast horizon*). Έστω, $\hat{x}_h(q)$ η πρόβλεψη της τιμής x_{h+q} .

Πρόβλεψη μίας περιόδου

Από AR(p) υπόδειγμα προκύπτει:

$$x_{h+1} = f_0 + f_1 x_h + K + f_p x_{h+1-p} + e_{h+1}$$

η σημειακή πρόβλεψη x_{h+1} είναι η υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή:

$$\hat{x}_h(1) = E(x_{h+1} | x_h, x_{h-1}) = f_0 + \sum_{i=1}^p f_i x_{h+1-i}$$

και το σφάλμα της πρόβλεψης είναι:

$$e_h(1) = x_{h+1} - \hat{x}_h(1) = e_{h+1}$$

Συνεπώς, η διακύμανση του σφάλματος της πρόβλεψης μίας περιόδου είναι $Var[e_h(1)] = Var(e_{h+1}) = s_e^2$. Εάν, η σειρά των σφαλμάτων e_t κατανέμεται κανονικά τότε το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη πρόβλεψη της x_{h+1} είναι $\hat{x}_h(1) \pm 1.96s_e^2$.

Πρόβλεψη δύο περιόδων

Όσον αφορά τη πρόβλεψη του x_{h+2} από το υπόδειγμα AR(p) έπεται:

$$x_{h+2} = f_0 + f_1 x_{h+1} + K + f_p x_{h+2-p} + e_{h+2}$$

Η υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή είναι:

$$\hat{x}_h(2) = E(x_{h+2} | x_h, x_{h-1,K}) = f_0 + f_1 \hat{x}_h(1) + f_2 x_h + K + f_p x_{h+2-p}$$

και το σφάλμα της πρόβλεψης είναι

$$e_h = x_{h+2} - \hat{x}_h(2) = f_1 [x_{h+1} - \hat{x}_h(1)] + e_{h+2} = e_{h+2} + f_1 e_{h+1}$$

Η διακύμανση του σφάλματος της πρόβλεψης είναι $Var[e_h(2)] = (1 - f_1^2) S_a^2$. Το διάστημα εμπιστοσύνης της x_{h+2} γίνεται με τον ίδιο τρόπο όπως και της x_{h+1} . Είναι σημαντικό να παρατηρηθεί ότι $Var[e_h(2)] \geq Var[e_h(1)]$, σχέση η οποία δηλώνει ότι όσο ο χρονικός ορίζοντας της πρόβλεψης αυξάνεται, τόσο αυξάνεται και η αβεβαιότητα της πρόβλεψης.

Πρόβλεψη πολλών περιόδων

Γενικότερα, μπορεί να θεωρηθεί:

$$x_{t+1} = f_0 + f_1 x_{t+1} + K + f_p x_{t+1-p} + e_{h+1}$$

Η πρόβλεψη αυτή μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τις προβλέψεις $\hat{x}_h(i)$ για $i = (1, K, 1 - 1)$. Το σφάλμα της πρόβλεψης είναι $e_h(1) = x_{h+1} - \hat{x}_h(1)$. Αποδεικνύεται ότι για ένα στάσιμο AR(p) υπόδειγμα η πρόβλεψη $\hat{x}_h(1)$ τείνει στο $E(x_t)$ καθώς $1 \rightarrow \infty$, δηλώνοντας ότι για τέτοιες σειρές η μακροχρόνια πρόβλεψη προσεγγίζει την χωρίς-συνθήκη (*unconditional*) αναμενόμενη μέση τιμή της σειράς και η διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης προσεγγίζει την χωρίς-συνθήκη διακύμανση της x_t .

3.5 ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΙΝΗΤΟΥ ΜΕΣΟΥ

Μία άλλη κατηγορία υποδειγμάτων για τη περιγραφή οικονομικών σειρών είναι αυτή των *υποδειγμάτων κινητού μέσου* (*moving average-MA model*). Τα υποδείγματα αυτά μπορούν αν θεωρηθούν ως AR υποδείγματα απείρων όρων. Η φιλοσοφία των MA υποδειγμάτων δεν διαφέρει από αυτή των AR. Όπως στα AR υποδείγματα έτσι και στα MA, η επιλογή του βέλτιστου υποδείγματος μπορεί να βασισθεί στο πληροφοριακό κριτήριο AIC ή στο BIC. Όσον αφορά τη στασιμότητα, τα MA υποδείγματα είναι πάντα στάσιμα καθώς η σειρά είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός ενός λευκού θορύβου με τις δύο πρώτες ροπές να είναι ανεξάρτητες του χρόνου. Κατά συνέπεια, το πρόβλημα της μη-στασιμότητας, που εμφανίζεται στα αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα, δεν υπάρχει για τα υποδείγματα

κινητού μέσου. Αντίθετα, στα υποδείγματα κινητού μέσου υπάρχει το πρόβλημα της αντιστρεψιμότητας το οποίο θα αναλυθεί στη συνέχεια.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ $MA(q)$ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

Στο σημείο αυτό παρουσιάζεται το υπόδειγμα $MA(1)$ και οι ιδιότητές του οι οποίες γενικεύονται και για το $MA(q)$ υπόδειγμα.

$MA(1)$ υπόδειγμα

Για $q=1$ το υπόδειγμα κινητού μέσου γράφεται:

$$x_t = m + e_t - q_1 e_{t-1}$$

Παίρνοντας την αναμενόμενη τιμή του υποδείματος προκύπτει:

$$E(x_t) = m$$

η οποία είναι ανεξάρτητη του χρόνου. Η διακύμανση του υποδείματος είναι αντίστοιχα:

$$Var(x_t) = s_e^2 + q_1^2 s_e^2 = s_e^2 (1 + q_1^2)$$

λόγω του ότι $Cov(e_t, e_{t-1}) = 0$. Όπως και η αναμενόμενη τιμή, έτσι και η διακύμανση είναι ανεξάρτητη του χρόνου. Θεωρώντας, για απλότητα, $m=0$ και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη με x_{t-1} έπεται:

$$x_{t-1} x_t = x_{t-1} e_t - q_1 x_{t-1} e_{t-1}$$

και παίρνοντας αναμενόμενες τιμές προκύπτει:

$$g_1 = -q_1 s_e^2, \text{ και } g_1 = 0, \text{ για } 1 > 1$$

Κατά συνέπεια, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $Var(x_t) = \sigma_e^2(1+q_1^2)$, προκύπτει:

$$r_0 = 1, r_1 = \frac{-q_1}{1+q_1^2}, r_l = 0, \text{ για } l > 1$$

Είναι φανερό ότι για ένα MA(1) υπόδειγμα, η πρώτη τάξης συνάρτηση αυτοσυσχετίσεως είναι μη-μηδενική. Με άλλα λόγια, σε ένα MA(1) υπόδειγμα η συνάρτηση αυτοσυσχετίσεως είναι μη-μηδενική μέχρι τη πρώτη τάξη. Για ένα MA(2) υπόδειγμα, οι συντελεστές αυτοσυσχετίσεως είναι:

$$r_1 = \frac{-q_1 + q_1 q_2}{1+q_1^2 + q_2^2}, r_2 = \frac{-q_2}{1+q_1^2 + q_2^2}, r_l = 0, \text{ για } l > 2.$$

Εδώ, η συνάρτηση αυτοσυσχετίσεως είναι μη-μηδενική μέχρι τη δεύτερη τάξη. Κατά συνέπεια, για το MA(q) υπόδειγμα η συνάρτηση αυτοσυσχετίσεως θα είναι μη-μηδενική για την 1-τάξη ενώ θα μηδενίζεται για $l > q$. Η παραπάνω παρατήρηση είναι πολύ σημαντική για τη ταυτοποίηση του υποδείγματος. Δηλαδή, για μία χρονοσειρά x_t με συνάρτηση αυτοσυσχετίσεως r_l , εάν $r_1 \neq 0$, αλλά $r_l = 0$ για $l > q$, τότε η x_t περιγράφεται από ένα MA(q) υπόδειγμα.

Όσον αφορά την αντιστρεψιμότητα, μία MA διαδικασία έχει αυτή την ιδιότητα όταν μπορεί να αντιστραφεί η έκφρασή της, δηλαδή να εκφραστούν τα e_t σαν συνάρτηση των x_t, x_{t-1}, \dots με μοναδικό τρόπο. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα υπόδειγμα MA(1) αντιστρέψιμο είναι $|q_1| < 1$. Για ένα MA(2) υπόδειγμα αποδεικνύεται ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για αντιστρεψιμότητα είναι το ακόλουθο σύστημα ανισοτήτων:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 < 1 \\ \quad \text{ή} \quad \text{και} \quad -1 < q_2 < 1 \\ q_2 - q_1 < 1 \end{cases}$$

Είναι προφανές, ότι οι συνθήκες αντιστρεψιμότητας για τις παραμέτρους των MA υποδειγμάτων είναι αντίστοιχες ακριβώς με τις συνθήκες στασιμότητας για τις παραμέτρους των AR υποδειγμάτων.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Η πρόβλεψη με ένα MA υπόδειγμα μπορεί να προκύψει άμεσα λόγω του γεγονότος ότι οι σημειακές προβλέψεις τείνουν στο μέσο όρο της σειράς πολύ γρήγορα. Για να γίνει άμεσα κατανοητό ας θεωρηθεί ότι η πρόβλεψη ξεκινά τη χρονική στιγμή h . Η πρόβλεψη μίας περιόδου μίας MA(1) διαδικασίας σύμφωνα με το αντίστοιχο υπόδειγμα θα είναι:

$$x_{h+1} = m + e_{t+1} - q_1 e_t$$

Παίρνοντας την υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή, προκύπτει:

$$x_h(1) = E(x_{h+1} | x_h, x_{h-1}, \mathbf{K}) = m - q_1 e_h$$

$$e_h(1) = x_{h+1} - \hat{x}_h(1) = e_{h+1}$$

Η διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης μίας περιόδου είναι $Var[e_h(1)] = s_e^2$.

Αντίστοιχα, για τη πρόβλεψη δύο περιόδων είναι:

$$x_{h+2} = m + e_{h+2} - q_1 e_{h+1}$$

από όπου προκύπτει:

$$\hat{x}_h(2) = E(x_{h+2} | x_h, x_{h-1}, \mathbf{K}) = m,$$

$$e_h(2) = x_{h+2} - \hat{x}_h(2) = e_{h+2} - q_1 e_{h+1}$$

Η διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης είναι $Var[e_h(2)] = (1+q_1^2)s_e^2$, η οποία είναι η διακύμανση του υποδείγματος και είναι μεγαλύτερη ή ίση με τη διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης μίας περιόδου. Το αποτέλεσμα αυτό καταδεικνύει ότι για ένα MA(1) υπόδειγμα η πρόβλεψη δύο περιόδων είναι η χωρίς-συνθήκη αναμενόμενη τιμή του υποδείγματος. Γενικότερα, ισχύει ότι $\hat{x}_h(1) = m$ για $1 \geq 2$.

Ομοίως, για ένα MA(2) υπόδειγμα είναι:

$$x_{h+t} = m + e_{h+t} - q_1 e_{h+t-1} - q_2 e_{h+t-2},$$

από όπου προκύπτει ότι:

$$\hat{x}_h(1) = m - q_1 e_h - q_2 e_{h-1}$$

$$\hat{x}_h(2) = m - q_2 e_h$$

$$\hat{x}_h(1) = m, \text{ για } 1 > 2$$

Είναι φανερό ότι οι προβλέψεις πολλών περιόδων για ένα MA(2) υπόδειγμα ταυτίζονται με την αναμενόμενη τιμή της χρονοσειράς μετά τις δύο πρώτες περιόδους. Επίσης, οι διακυμάνσεις των σφαλμάτων των προβλέψεων τείνουν στη διακύμανση της σειράς μετά τις δύο πρώτες περιόδους. Γενικά, για ένα MA(q) υπόδειγμα, η πρόβλεψη πολλών περιόδων συγκλίνει στην αναμενόμενη τιμή της σειράς μετά τις πρώτες q περιόδους.

Ανακεφαλαίωση των AR και MA υποδειγμάτων

Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητη μία ανακεφαλαίωση για τα AR και MA υποδείγματα. Μέχρι στιγμής δόθηκε έμφαση στα εξής σημεία:

- Για τα MA υποδείγματα, η συνάρτηση αυτοσυσχετίσεως είναι χρήσιμη για τον προσδιορισμό της τάξης του υποδείγματος διότι μηδενίζεται στη q -χροنيκή υστέρηση μίας MA(q) διαδικασίας.
- Για τα AR υποδείγματα, η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης είναι χρήσιμη για τον προσδιορισμό της τάξης του υποδείγματος διότι μηδενίζεται στη p -χροنيκή υστέρηση μίας AR(p) διαδικασίας.

- Ένα MA υπόδειγμα είναι πάντα στάσιμο σε αντίθεση με τα AR υποδείγματα για τα οποία πρέπει να ικανοποιούνται ικανές και αναγκαίες συνθήκες.
- Για μία στάσιμη διαδικασία, η πρόβλεψη πολλών περιόδων τείνει στην αναμενόμενη τιμή της διαδικασίας και η διακύμανση των σφαλμάτων πρόβλεψης τείνουν στη διακύμανση της διαδικασίας.

3.6 ΜΕΙΚΤΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ

Σε μερικές εφαρμογές τα AR και MA υποδείγματα δεν είναι εύκολα στην εφαρμογή τους καθώς είναι πιθανόν να απαιτούν υψηλή τάξη με πολλές παραμέτρους, έτσι ώστε να θεωρηθούν επαρκή για να περιγράψουν τη δομή των δεδομένων. Για να ξεπεραστεί αυτό το πρόβλημα, εισήχθησαν τα *αυτοπαλίνδρομα κινητού μέσου υποδείγματα* ή *μεικτά υποδείγματα* (*autoregressive moving average model-ARMA*). Ουσιαστικά, τα ARMA υποδείγματα συνδυάζουν τις ιδιότητες των AR και MA υποδειγμάτων σε μία κοινή μορφή με σκοπό να μείνει χαμηλός ο αριθμός των παραμέτρων που χρησιμοποιούνται.

Το πιο απλό υπόδειγμα αυτής της κατηγορίας είναι το ARMA(1,1). Η μορφή του υποδείματος είναι η ακόλουθη:

$$x_t - f_1 x_{t-1} = f_0 + e_t - q_1 e_{t-1} \quad (3.7)$$

όπου e_t είναι λευκός θόρυβος. Το αριστερό μέρος της παραπάνω εξίσωσης είναι το AR μέρος του υποδείματος και το δεξιό το MA αντίστοιχα. Το f_0 είναι ο σταθερός όρος. Για να έχει νόημα το παραπάνω υπόδειγμα θα πρέπει $f_1 \neq q_1$ αλλιώς το υπόδειγμα μετατρέπεται σε λευκό θόρυβο.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ARMA(1,1) ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

Οι ιδιότητες του ARMA(1,1) υποδείματος είναι γενικεύσεις των ιδιοτήτων του AR(1) υποδείματος με μερικές μετατροπές ώστε να μεταχειρίζονται την επίδραση

του MA(1) μέρους του υποδείγματος. Ξεκινώντας από τη συνθήκη της στασιμότητας, η αναμενόμενη τιμή της (3.7) δίνει:

$$E(x_t) - f_1 E(x_{t-1}) = f_0 + E(e_t) - q_1 E(e_{t-1})$$

Επειδή $E(e_t) = 0$ για κάθε i , η αναμενόμενη τιμή της x_t είναι:

$$E(x_t) = m = \frac{f_0}{1-f_1}$$

που δηλώνει ότι η σειρά είναι ασθενώς στάσιμη. Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι ακριβώς το ίδιο όπως και με το AR(1) υπόδειγμα.

Στη συνέχεια, με την υπόθεση ότι $f_0 = 0$ χωρίς βλάβη της γενικότητας, πολλαπλασιάζοντας το υπόδειγμα με e_t προκύπτει:

$$E(x_t e_t) = E(e_t^2) - q_1 E(e_t e_{t-1}) = E(e_t^2) = s_e^2 \quad (3.8)$$

Γράφοντας το υπόδειγμα ως εξής:

$$x_t = f_1 x_{t-1} + e_t - q_1 e_{t-1}$$

παίρνοντας τη διακύμανση και λόγω του ότι x_{t-1} και e_t είναι ασυσχέτιστα προκύπτει:

$$Var(x_t) = f_1^2 Var(x_{t-1}) + s_e^2 + q_1^2 s_e^2 - 2f_1 q_1 E(x_{t-1} e_{t-1})$$

και λόγω της (3.8) έπεται:

$$Var(x_t) - f_1^2 Var(x_{t-1}) = (1 - 2f_1 q_1 + q_1^2) s_e^2$$

Συνεπώς, εάν η σειρά x_t είναι ασθενώς στάσιμη, τότε $Var(x_t) = Var(x_{t-1})$ και έπεται:

$$\text{Var}(x_t) = \frac{(1 - 2f_1q_1 + q_1^2)s_e^2}{1 - f_1^2}$$

Επειδή η διακύμανση είναι θετική ποσότητα, πρέπει $f_1^2 < 1$ (δηλ., $|f_1| < 1$) όπου και αυτή είναι μία συνθήκη στασιμότητας, όπως και στα AR(1) υποδείγματα.

Υποθέτοντας και πάλι ότι $f_0 = 0$ και πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση του υποδείματος (3.7) με x_{t-1} προκύπτει:

$$x_t x_{t-1} - f_1 x_{t-1} x_{t-1} = e_t x_{t-1} - q_1 e_{t-1} x_{t-1}$$

Για $l = 1$, παίρνοντας την αναμενόμενη τιμή και λαμβάνοντας υπ' όψιν την εξίσωση (3.8) προκύπτει ότι:

$$g_1 - f_1 g_0 = -q_1 s_e^2$$

όπου $g_1 = \text{Cov}(x_t, x_{t-1})$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι διαφορετικό από το αντίστοιχο του AR(1) το οποίο είναι $g_1 - f_1 g_0 = 0$. Όμως, για $l = 2$, είναι:

$$g_2 - f_1 g_1 = 0$$

το οποίο είναι ακριβώς ίδιο με το αντίστοιχο αποτέλεσμα του AR(1). Κατά συνέπεια, με την ίδια τεχνική, προκύπτει:

$$g_l - f_1 g_{l-1} = 0, \text{ για } l > 1$$

Όσον αφορά τη συνάρτηση αυτοσυσχετίσεως, τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν ότι για ένα στάσιμο υπόδειγμα ARMA(1,1) ισχύει ότι:

$$r_l = f_1 - \frac{q_1 s_e^2}{g_0}, \quad r_l = f_1 r_{l-1}, \quad \text{για } l > 1$$

Συνεπώς, η συνάρτηση αυτοσυσχετίσεως ενός ARMA(1,1) υποδείγματος συμπεριφέρεται παρόμοια με την αντίστοιχη συνάρτηση ενός AR(1) υποδείγματος εκτός του ότι η εκθετική εξασθένιση ξεκινά από τη δεύτερη χρονική υστέρηση. Αντιθέτως, η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχετίσεως, συμπεριφέρεται παρόμοια με την αντίστοιχη συνάρτηση ενός MA(1) υποδείγματος.

ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ARMA(p, q)

Το γενικό υπόδειγμα ARMA(p, q) έχει τη μορφή:

$$x_t = f_0 + \sum_{i=1}^p f_i x_{t-i} + e_t - \sum_{i=1}^q q_i e_{t-i}$$

όπου η σειρά e_t είναι λευκός θόρυβος και p και q είναι μη-αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί. Τα AR και MA υποδείγματα είναι ειδικές περιπτώσεις ενός ARMA(p, q) υποδείγματος. Με τη χρήση του τελεστή μετατόπισης, το ARMA υπόδειγμα μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$(1 - f_1 B - K - f_p B^p) x_t = f_0 + (1 - q_1 B - K - q_q B^q) e_t \quad (3.9)$$

Το πολυώνυμο $1 - f_1 B - K - f_p B^p$ είναι το πολυώνυμο ενός AR υποδείγματος. Ομοίως, $1 - q_1 B - K - q_q B^q$ είναι ένα MA υπόδειγμα. Βασική προϋπόθεση είναι να μην υπάρχουν κοινοί παράγοντες μεταξύ των δύο πολυωνύμων, διαφορετικά η τάξη (p, q) του υποδείγματος θα πρέπει να μειωθεί. Το πολυώνυμο που αναφέρεται στο AR μέρος του υποδείγματος, συμπεριφέρεται σαν ένα πολυώνυμο ενός απλού AR υποδείγματος, κατά συνέπεια, η χωρίς-συνθήκη αναμενόμενη τιμή του υποδείγματος θα είναι: $E(x_t) = f_0 / (1 - f_1 - K - f_p)$.

ΤΑΥΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ARMA(p, q)

Ο προσδιορισμός της τάξης ενός ARMA υποδείγματος δεν μπορεί να βασισθεί στις ιδιότητες των συναρτήσεων αυτοσυσχετίσεως και μερικής αυτοσυσχετίσεως

αντίστοιχα. Συνεπώς, με βάση το πληροφοριακό κριτήριο AIC ή BIC μπορεί να γίνει ο προσδιορισμός της τάξης του υποδείγματος δοκιμάζοντας όλα τα υποδείγματα ARMA(p, q) με $p+q \leq 5$. Το κατάλληλο υπόδειγμα θα είναι αυτό το οποίο ελαχιστοποιεί το παραπάνω κριτήριο.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ARMA(p, q)

Η πρόβλεψη μίας περιόδου προκύπτει από το υπόδειγμα ως εξής:

$$\hat{x}_h(1) = E(x_{h+1} | x_h, x_{h-1}, \mathbf{K}) = f_0 + \sum_{i=1}^p f_i x_{h+1-i} - \sum_{i=1}^q q_i e_{h+1-i}$$

και το αντίστοιχο σφάλμα πρόβλεψης θα είναι $e_h(1) = x_{h+1} - \hat{x}_h(1) = e_{h+1}$. Η διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης μίας περιόδου θα είναι: $Var[e_h(1)] = s_e^2$.

Ομοίως, για τη πρόβλεψη πολλών περιόδων είναι:

$$\hat{x}_h(1) = E(x_{h+1} | x_h, x_{h-1}, \mathbf{K}) = f_0 + \sum_{i=1}^p f_i \hat{x}_h(1-i) x_{h+1-i} - \sum_{i=1}^q q_i e_h(1-i)$$

όπου $\hat{x}_h(1-i) = x_{h+1-i}$ για $1-i \leq 0$ και $e_h(1-i) = 0$ εάν $1-i > 0$ και $e_h(1-i) = e_{h+1-i}$ εάν $1-i \leq 0$. Τέλος, το σφάλμα πρόβλεψης για πρόβλεψη πολλών περιόδων θα είναι:

$$e_h(1) = x_{h+1} - \hat{x}_h(1)$$

3.7 ΜΕΙΚΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ

Οι συνθήκες στασιμότητας, όπως αναφέρθηκαν παραπάνω, καθορίζουν τη μορφή του διαγράμματός της χρονολογικής σειράς που είναι υπό μελέτη. Συγκεκριμένα, η συνθήκη σταθερής αναμενόμενης τιμής και ανεξάρτητης του

χρόνου, $E(x_t) = m$, καθορίζει ότι το διάγραμμα θα κυμαίνεται γύρω από μία σταθερή τιμή. Η δεύτερη συνθήκη στασιμότητας, που αναφέρεται στην ανεξαρτησία της αυτοσυνδιακύμανσης από το χρόνο, καθορίζει ότι η διακύμανση της σειράς γύρω από τη σταθερή αναμενόμενη τιμή, θα περιορίζεται μεταξύ δύο ορίων τα οποία δεν θα διαφοροποιούνται με την εξέλιξη του χρόνου. Είναι προφανές ότι στη πράξη, τα παραπάνω χαρακτηριστικά για το διάγραμμα μίας χρονοσειράς, διατηρούνται μόνο κατά προσέγγιση. Στη πραγματικότητα, οι περισσότερες χρονοσειρές δεν εμφανίζουν χαρακτηριστικά στάσιμης σειράς.

Μία συνήθης περίπτωση μη-στασιμότητας είναι όταν υπάρχει μοναδιαία ρίζα. Έστω, δηλαδή, ένα ARMA του οποίου το AR μέρος έχει μία ρίζα ίση με τη μονάδα. Για την απαλοιφή αυτού του προβλήματος γίνεται χρήση του **υποδείγματος αυτοπαλίνδρομου ολοκληρωμένου κινητού μέσου** (*autoregressive integrated moving average model-ARIMA*) το οποίο αποτελεί μία επέκταση του μεικτού υποδείγματος ARMA(p,q). Μία μέθοδος για να διαχειριστεί η μη-στασιμότητα της μοναδιαίας ρίζας είναι χρησιμοποιηθούν οι **προς τα πίσω διαφορές** (*differencing*).

Μία χρονοσειρά x_t λέγεται ότι περιγράφεται από ένα ARIMA(p, I, q) υπόδειγμα εάν η σειρά $c_t = x_t - x_{t-1} = (1-B)x_t$ είναι στάσιμη και αντιστρέψιμη και ακολουθεί μία ARMA(p, q) διαδικασία. Η $c_t = x_t - x_{t-1} = (1-B)x_t$ καλείται σειρά πρώτων διαφορών της x_t . Μερικές φορές χρειάζονται διαφορές περισσότερων τάξεων. Εάν, για παράδειγμα, η x_t και η $c_t = x_t - x_{t-1}$ είναι μη-στάσιμες, αλλά η $s_t = c_t - c_{t-1} = x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2}$ είναι στάσιμη τότε η s_t καλείται σειρά δύο διαφορών. Έτσι, αν η s_t ακολουθεί ένα ARMA(p, q) υπόδειγμα τότε η x_t θα ακολουθεί ένα ARMA(p, 2, q) υπόδειγμα αντίστοιχα.

Το πιο απλό μη-στάσιμο υπόδειγμα αποτελεί η διαδικασία του **τυχαίου περιπάτου** (*random walk*). Έστω η χρονοσειρά x_t , το υπόδειγμα του τυχαίου περιπάτου για τη παραπάνω χρονοσειρά είναι:

$$x_t = x_{t-1} + e_t$$

όπου e_t είναι ο γνωστός λευκός θόρυβος. Το παραπάνω υπόδειγμα είναι ένα AR(1) υπόδειγμα με συντελεστή $\varphi=1$. Συνεπώς παρουσιάζεται μοναδιαία ρίζα και παραβιάζεται η συνθήκη στασιμότητας και το υπόδειγμα είναι μη-στάσιμο.

Λαμβάνοντας πρώτες διαφορές:

$$z_t = x_t - x_{t-1}$$

τότε το υπόδειγμα γράφεται:

$$z_t = e_t$$

και είναι στάσιμο, αφού ο λευκός θόρυβος είναι στάσιμη χρονοσειρά. Η παραπάνω διαδικασία, του τυχαίου περιπάτου, είναι η απλούστερη περίπτωση μη στάσιμης χρονοσειράς. Συγκεκριμένα ο όρος x_t της σειράς αυτής στην τρέχουσα περίοδο t διαμορφώνεται από τον προηγούμενο χρονικά όρο x_{t-1} με την επίδραση ενός τυχαίου όρου e_t .

Εφόσον θεωρηθούν γνωστές οι τιμές $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, \mathbf{K}$, τότε παίρνοντας αναμενόμενες τιμές προκύπτει:

$$E(x_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, \mathbf{K}) = x_{t-1}$$

Γίνεται φανερό ότι η αναμενόμενη τιμή της χρονοσειράς x_t μεταβάλλεται τυχαία μέσα στο χρόνο. Επίσης, για $\varphi=1$ η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μίας τέτοιας χρονοσειράς θα είναι σταθερά ίση με μονάδα. Στη πράξη, χρονοσειρές οι οποίες οριακά μπορεί να θεωρηθούν ως τυχαίοι περίπατοι θα έχουν συνάρτηση αυτοσυσχέτισης η οποία θα τείνει στη μονάδα και θα φθίνει με πάρα πολύ αργό ρυθμό.

3.8 ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Σε ένα δυναμικό περιβάλλον, όπου δραστηριοποιούνται οι επιχειρήσεις, ο προγραμματισμός της στρατηγικής που θα ακολουθήσει η κάθε επιχείρηση θα πρέπει να γίνεται με τον καλύτερο και ακριβέστερο τρόπο λαμβάνοντας υπ' όψιν όλους εκείνους τους παράγοντες που είναι δυνατόν να επηρεάσουν την ανάπτυξη της. Σημαντικό ρόλο σε αυτή τη διαδικασία παίζει η συλλογή πληροφοριών και η ποσοτική αξιοποίησή τους. Η διαδικασία της πρόβλεψης είναι μία από τις σημαντικότερες λειτουργίες της διοίκησης των επιχειρήσεων αφού αποτελούν απαραίτητη πηγή πληροφόρησης για τη λήψη διοικητικών αποφάσεων.

Η διαμόρφωση των προβλέψεων βασίζεται σε μία διαδικασία η οποία αρχικά μελετά το οικονομικό φαινόμενο και διερευνά τον τρόπο με τον οποίο συμπεριφέρονται οι παρατηρήσεις. Οι πληροφορίες που προκύπτουν από τη παραπάνω διαδικασία χρησιμοποιούνται στη συνέχεια για τη πρόβλεψη μελλοντικών περιόδων. Τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί αρκετά υποδείγματα, ανάλυσης και πρόβλεψης οικονομικών φαινομένων, γνωστά ως οικονομετρικά υποδείγματα. Τα πλέον σημαντικά είναι αυτά της οικογένειας ARIMA ή αλλιώς υποδείγματα των Box και Jenkins.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκαν τα υποδείγματα ARIMA, οι ιδιότητές τους και η διαδικασία πρόβλεψης μελλοντικών περιόδων. Σκοπός της ενότητας αυτής είναι να αναλυθούν τα βασικά σημεία της μεθοδολογίας των Box και Jenkins η οποία χρησιμοποιείται στη συνέχεια για τη μελέτη συγκεκριμένων χρονοσειρών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ VaR ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ GARCH ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Εξαιτίας της συνεχώς αυξανόμενης αβεβαιότητας στον Χρηματιστηριακό κλάδο, η οποία προκάλεσε μία σειρά οικονομικών καταστροφών, πολλές επιχειρήσεις, πολλοί ερευνητές αλλά και πολλές εποπτικές αρχές προσπάθησαν να αναπτύξουν νέα υποδείγματα για την πιο ακριβή μέτρηση του Κινδύνου της αγοράς. Η πλέον διαδεδομένη μέθοδος είναι η μέθοδος Value at Risk (VaR) η οποία παρέχει στον ενδιαφερόμενο έναν αριθμό για το χειρότερο αποτέλεσμα που αναμένεται σε ένα προκαθορισμένο χρονικό διάστημα και σε δεδομένο διάστημα εμπιστοσύνης.

Η μέθοδος VaR είναι ένας τρόπος για τη μέτρηση της πιθανότητας των απωλειών μίας μετοχής ή ακόμα και ενός χαρτοφυλακίου. Ο υπολογισμός του VaR με τη προσέγγιση της διακύμανσης-συνδιακύμανσης προϋποθέτει την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης της χρονοσειράς που είναι υπό μελέτη. Σε χρηματοοικονομικές εφαρμογές όμως, η διακύμανση μίας χρονοσειράς δεν είναι σταθερή με τη πάροδο του χρόνου, και συνεπώς και η τυπική απόκλιση, που έχει ως αποτέλεσμα να παρατηρείται το πρόβλημα της *ετεροσκεδαστικότητας* (*heteroscedasticity*). Κατά συνέπεια, η εκτίμηση της υπό συνθήκη τυπικής απόκλισης, η οποία στις χρηματοοικονομικές χρονοσειρές καλείται αστάθεια-μεταβλητότητα (*volatility*), είναι απαραίτητη για την ορθή εκτίμηση του VaR.

Ένας τρόπος για την εκτίμηση της αστάθειας-μεταβλητότητας είναι τα αυτοπαλίνδρομα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας υποδείγματα (*ARCH models*), τα οποία ανέπτυξε ο Engle το 1982 και για τα οποία τιμήθηκε με το βραβείο Nobel το 2003 και τα γενικευμένα αυτοπαλίνδρομα, υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας υποδείγματα (*GARCH*), τα οποία ανέπτυξε ο Bollerslev το 1986.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν αρχικά τα υποδείγματα ARCH(m) και στη συνέχεια η γενίκευσή τους GARCH(m, s). Τα υποδείγματα αυτά μελετούν την μεταβολή της διακύμανσης στο χρόνο και χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό με τα ARMA(p, q) υποδείγματα για τον υπολογισμό του VaR. Τέλος, θα παρουσιαστεί ο τρόπος με τον οποίο γίνεται ο υπολογισμός του VaR.

4.2 ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΕΛΕΤΗΣ ΕΤΕΡΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Αρχικά θα ήταν χρήσιμο να περιγραφεί η υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή και διακύμανση μίας χρονοσειράς x_t δεδομένης της πληροφορίας της προηγούμενης περιόδου I_{t-1} . Αυτές οι ποσότητες περιγράφονται από τις αντίστοιχες σχέσεις:

$$\mathbf{m}_t = E(x_t | I_{t-1}) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{s}_t^2 = \text{Var}(x_t | I_{t-1}) = E[(x_t - \mathbf{m}_t)^2 | I_{t-1}] \quad (4.2)$$

Η εξίσωση του \mathbf{m}_t μπορεί να θεωρηθεί ότι ακολουθεί ένα στάσιμο ARMA(p, q) υπόδειγμα το οποίο περιγράφεται ως εξής:

$$x_t = \mathbf{m}_t + \mathbf{e}_t \quad (4.3)$$

όπου \mathbf{e}_t είναι ο γνωστός λευκός θόρυβος και το \mathbf{m}_t αναλύεται ως εξής:

$$\mathbf{m}_t = \mathbf{f}_0 + \sum_{i=1}^p \mathbf{f}_i x_{t-i} - \sum_{i=1}^q \mathbf{q}_i \mathbf{e}_{t-i} \quad (4.4)$$

όπου οι ποσότητες p, q είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί.

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.2) και (4.3) έπεται ότι:

$$\mathbf{s}_t^2 = \text{Var}(x_t | I_{t-1}) = \text{Var}(\mathbf{e}_t | I_{t-1}) \quad (4.5)$$

Οι όροι e_t θα αναφέρονται ως όροι διαταραχών (*shocks*) της χρονοσειράς για κάθε χρονική περίοδο t . Το υπόδειγμα για τον όρο m_t καλείται υπόδειγμα του μέσου για την χρονοσειρά x_t και το υπόδειγμα για τον όρο S_t^2 ως υπόδειγμα της αστάθειας-μεταβλητότητας (*volatility*).

Τα υποδείγματα της υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας μελετούν την εξέλιξη του S_t^2 . Ο τρόπος με τον οποίο εξελίσσεται ο όρος S_t^2 στο χρόνο, διαχωρίζει τα υποδείγματα μεταξύ τους. Τα υποδείγματα της υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας μπορούν να χωριστούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Αυτά τα οποία χρησιμοποιούν μια συγκεκριμένη εξίσωση για να ερμηνεύσουν την εξέλιξη του όρου S_t^2 σε αντίθεση με αυτά της δεύτερης κατηγορίας τα οποία χρησιμοποιούν μία στοχαστική εξίσωση για να περιγράψουν τον όρο S_t^2 . Τα GARCH υποδείγματα ανήκουν στη πρώτη κατηγορία και τα υποδείγματα στοχαστικής αβεβαιότητας-μεταβλητότητας (*stochastic volatility models*) στη δεύτερη.

4.2.1 ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ARCH

Η βασική ιδέα των ARCH(m) υποδειγμάτων είναι ότι οι όροι των διαταραχών e_t είναι σειριακά ασυσχέτιστοι αλλά παρουσιάζουν εξάρτηση. Συγκεκριμένα, ένα υπόδειγμα ARCH(m) ορίζεται ως εξής:

$$e_t = z_t S_t, \quad (4.6)$$

όπου:

$$S_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i e_{t-i}^2 \quad (4.7)$$

Η z_t είναι μία τυχαία μεταβλητή, ανεξάρτητη και ταυτοτικά κατανομημένη με μηδενική αναμενόμενη τιμή και μοναδιαία διακύμανση. Για να είναι η υπό συνθήκη διακύμανση θετική και πεπερασμένη θα πρέπει οι συντελεστές της σχέσης (4.7) να ικανοποιούν τις εξής συνθήκες: $a_0 > 0$ και $a_i \geq 0$ για $i = 1, 2, \dots, m$

Στη πράξη, η σειρά z_t υποτίθεται ότι ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή ή την τυποποιημένη Student-t κατανομή.

Για να γίνει πιο κατανοητή η λειτουργία των ARCH(m) υποδειγμάτων, μελετάται αρχικά το ARCH(1) υπόδειγμα στο οποίο η υπό συνθήκη διακύμανση ορίζεται ως:

$$s_t^2 = a_0 + a_1 e_{t-1}^2$$

για $a_0 > 0$ και $a_1 \geq 0$. Η άνευ συνθήκης αναμενόμενη τιμή του e_t παραμένει μηδενική διότι:

$$E(e_t) = E[E(e_t | I_{t-1})] = E[E(z_t) s_t] = 0$$

Η άνευ συνθήκης διακύμανση του e_t ορίζεται ως εξής:

$$Var(e_t) = E(e_t^2) = E[E(e_t^2 | I_{t-1})] = E(a_0 + a_1 e_{t-1}^2) = a_0 + a_1 E(e_{t-1}^2)$$

διότι η σειρά e_t είναι στάσιμη με μέσο όρο μηδέν και σταθερή διακύμανση, δηλαδή $E(e_t) = 0$ και $Var(e_t) = Var(e_{t-1}) = E(e_{t-1}^2)$. Κατά συνέπεια, η διακύμανση των σφαλμάτων θα δίνεται από τη σχέση:

$$Var(e_t) = a_0 + a_1 Var(e_t)$$

ή

$$Var(e_t) = a_0 / (1 - a_1)$$

Επειδή ο παρονομαστής πρέπει να είναι μη-μηδενικός, έπεται ότι ο όρος a_1 θα πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη $0 \leq a_1 < 1$.

Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει και το υπόδειγμα ARCH(2). Στο υπόδειγμα αυτό η διακύμανση ορίζεται ως εξής:

$$s_t^2 = a_0 + a_1 e_{t-1}^2 + a_2 e_{t-2}^2$$

για $a_0 > 0$, $a_1 \geq 0$ και $a_2 \geq 0$. Όμοια με το υπόδειγμα ARCH(1) ορίζεται η άνευ συνθήκης διακύμανση του όρου e_t ως εξής:

$$Var(e_t) = a_0 / (1 - a_1 - a_2)$$

κατά συνέπεια, για να ορίζεται η διακύμανση, θα πρέπει ο παρονομαστής να είναι θετικός, δηλαδή $0 \leq a_1 + a_2 < 1$.

Η γενικότερη περίπτωση του ARCH υποδείγματος είναι το ARCH(m). Η διακύμανση σε αυτή τη περίπτωση θα έχει τη παρακάτω μορφή:

$$s_t^2 = a_0 + a_1 e_{t-1}^2 + a_2 e_{t-2}^2 + \dots + a_m e_{t-m}^2$$

για $a_0 > 0$, $a_i \geq 0$ για $i = 1, 2, \dots, m$. Η άνευ συνθήκης διακύμανση των σφαλμάτων θα είναι:

$$Var(e_t) = a_0 / (1 - a_1 - a_2 - \dots - a_m)$$

και για να ισχύει η παραπάνω σχέση θα πρέπει $0 \leq a_1 + a_2 + \dots + a_m < 1$.

Έλεγχος για ύπαρξη ARCH υποδειγμάτων

Όταν η μελέτη αφορά χρονοσειρές, χρησιμοποιούνται συνήθως ARMA(p, q) υποδείγματα για τη μελέτη της εξέλιξης των παρατηρήσεων της χρονοσειράς. Η σειρά των τετραγώνων των σφαλμάτων \hat{e}_t^2 χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας, όπου $\hat{e}_t = x_t - \hat{m}_t$ είναι τα σφάλματα που προκύπτουν από την εκτίμηση των ARMA υποδειγμάτων. Ο έλεγχος για την υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητα γίνεται με τον έλεγχο LM (*Lagrange multiplier*) του Engle (1982) και είναι ισοδύναμος με τον έλεγχο που γίνεται με την F στατιστική για τον έλεγχο $a_i = 0$ ($i = 1, \dots, m$) στη γραμμική παλινδρόμηση:

$$\hat{e}_t^2 = a_0 + a_1 \hat{e}_{t-1}^2 + K + a_m \hat{e}_{t-m}^2 + e_t, \quad t = m+1, K, n$$

όπου e_t είναι τα σφάλματα, m είναι ένας προεπιλεγμένος θετικός ακέραιος που εκφράζει τις χρονικές υστερήσεις και n είναι το μέγεθος του δείγματος. Αρχικά, για $m=1$, εξετάζεται εάν το γινόμενο του μεγέθους δείγματος επί του συντελεστή προσδιορισμού της παλινδρόμησης ακολουθεί τη χ -τετράγωνο κατανομή με $m=1$ βαθμό ελευθερίας. Εάν η τιμή του γινομένου είναι μεγαλύτερη της κριτικής τιμής της χ -τετράγωνο κατανομής με ένα βαθμό ελευθερίας, τότε δεχόμαστε την ύπαρξη της υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας. Ομοίως εξετάζονται και μεγαλύτερες τιμές του m . Ο καθορισμός της τάξης ενός ARCH(m) υποδείγματος γίνεται με την ίδια διαδικασία όπως και στα υποδείγματα ARIMA, ελαχιστοποιώντας τη τιμή των πληροφοριακών κριτηρίων AIC και SBC.

Πρόβλεψη μελλοντικών περιόδων

Οι προβλέψεις ενός ARCH(m) υποδείγματος προκύπτουν με όμοιο τρόπο όπως και σε ένα AR υπόδειγμα. Έστω ότι γίνεται πρόβλεψη της $h+1$ περιόδου. Η πρόβλεψη του S_{h+1}^2 είναι:

$$S_h^2(1) = a_0 + a_1 e_h^2 + K + a_m e_{h+1-m}^2$$

Η πρόβλεψη δύο περιόδων θα είναι:

$$S_h^2(2) = a_0 + a_1 S_h^2(1) + a_2 e_h^2 + K + a_m e_{h+2-m}^2$$

και η πρόβλεψη 1 περιόδων του S_{h+1}^2 είναι:

$$S_h^2(1) = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i S_h^2(1-i)$$

όπου $S_h^2(1-i) = e_{h+1-i}^2$ εάν $1-i \leq 0$.

4.2.2 ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ GARCH

Ενώ τα υποδείγματα χρονοσειρών και άλλα οικονομετρικά υποδείγματα λειτουργούν κάτω από την υπόθεση της σταθερής διακύμανσης, τα ARCH υποδείγματα επιτρέπουν στη διακύμανση να μεταβάλλεται με τη πάροδο του χρόνου σαν μία συνάρτηση των τετραγώνων των σφαλμάτων προηγούμενων περιόδων αφήνοντας την άνευ συνθήκης διακύμανση σταθερή.

Αυτή η μορφή υποδειγμάτων αποδείχθηκε πολύ χρήσιμη στη περιγραφή διαφόρων οικονομικών φαινομένων. Στην εργασία του Weiss (1984) υποδείγματα ARMA με σφάλματα που περιγράφονταν από ARCH υποδείγματα, αποδείχθηκαν ότι περιέγραφαν επιτυχώς δεκατρείς χρονοσειρές μακροοικονομικών μεταβλητών των Η.Π.Α.. Παρόλο που τα ARCH υποδείγματα είναι απλά, συχνά απαιτείται μεγάλος αριθμός παραμέτρων έτσι ώστε να περιγράφεται επαρκώς η αστάθεια – αβεβαιότητα. Για παράδειγμα, ένα υπόδειγμα ARCH (9) απαιτείται για τη περιγραφή της αστάθειας – μεταβλητότητας των μηνιαίων παρατηρήσεων του δείκτη S&P 500.

Το 1986 ο Bollerslev εισήγαγε τα γενικευμένα ARCH υποδείγματα γνωστά ως GARCH υποδείγματα (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic model*) στα οποία η υπό συνθήκη διακύμανση εμφανίζεται στο υπόδειγμα με χρονικές υστερήσεις. Κατά συνέπεια, για μία χρονοσειρά x_t , που ακολουθεί ένα ARMA(p, q) υπόδειγμα, τα σφάλματα του υποδείματος, $e_t = x_t - \hat{m}_t$, σχηματίζονται από ένα υπόδειγμα GARCH (m, s) με τον ακόλουθο τρόπο:

$$e_t = s_t z_t$$

όπου:

$$s_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s b_j s_{t-j}^2$$

Όπως στα ARCH(m) υποδείγματα, έτσι και εδώ, η z_t είναι μία τυχαία μεταβλητή η οποία είναι ανεξάρτητη και ταυτοτικά κατανομημένη με μηδενική αναμενόμενη τιμή και μοναδιαία διακύμανση. Οι συντελεστές πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες:

$a_0 > 0$, $a_i \geq 0$ για $i=1, K, m$ και $b_j \geq 0$ για $j=1, K, s$. Εάν $\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^s b_j < 1$, τότε

η σειρά e_t είναι στάσιμη και η άνευ συνθήκης διακύμανσή της ισούται με:

$$E(e_t^2) = \frac{a_0}{1 - \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^s b_j}$$

Ένα GARCH (1, 1) υπόδειγμα γράφεται ως εξής:

$$s_t^2 = a_0 + a_1 e_{t-1}^2 + b_1 s_{t-1}^2 \quad (4.8)$$

όπου πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες $0 \leq a_1, 0 \leq b_1, a_1 + b_1 < 1$.

Οι προβλέψεις ενός GARCH υποδείγματος προκύπτουν με όμοιο τρόπο όπως και με ένα ARMA υπόδειγμα. Η πρόβλεψη για ένα GARCH(1, 1) υπόδειγμα, όπως αυτό στη σχέση (4.8), για μία περίοδο είναι:

$$s_h^2(1) = a_0 + a_1 e_h^2 + b_1 s_h^2$$

Για προβλέψεις περισσότερων περιόδων η πρόβλεψη θα είναι:

$$s_h^2(2) = a_0 + (a_1 + b_1) s_h^2(1)$$

και γενικότερα ισχύει:

$$s_h^2(l) = a_0 + (a_1 + b_1) s_h^2(l-1), l > 1$$

Το αποτέλεσμα είναι όμοιο με αυτό ενός ARMA(1, 1) υποδείγματος. Με επαναλαμβανόμενες αντικαταστάσεις, η παραπάνω εξίσωση για τη πρόβλεψη 1 περιόδων μπορεί να γραφτεί ως εξής:

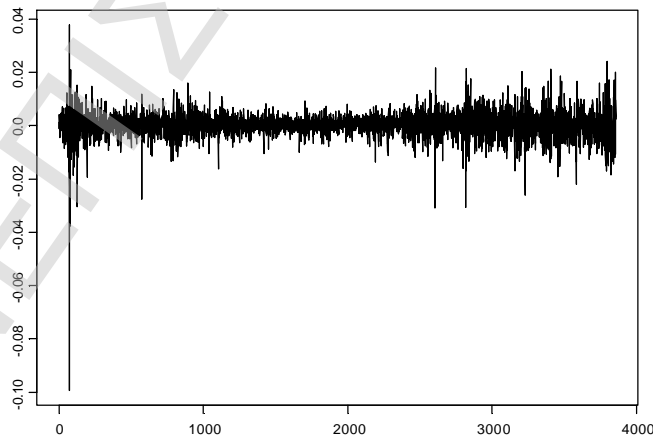
$$s_h^2(1) = \frac{a_0 [1 - (a_1 + b_1)^{1-1}]}{1 - a_1 - b_1} + (a_1 + b_1)^{1-1} s_h^2(1)$$

Κατά συνέπεια,

$$s_h^2(1) \rightarrow \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1} \text{ για } 1 \rightarrow \infty$$

με τη προϋπόθεση ότι $a_1 + b_1 < 1$. Συνεπώς, η πρόβλεψη πολλών περιόδων ενός υποδείγματος GARCH(1, 1) συγκλίνει στην άνευ συνθήκης διακύμανση της e_t , καθώς οι περίοδοι των προβλέψεων τείνουν στο άπειρο και με δεδομένο ότι η διακύμανση των σφαλμάτων υπάρχει. Η διαδικασία εκτίμησης ενός υποδείγματος GARCH(m, s) αποτελείται από τα ίδια βήματα με αυτά της εκτίμησης ενός υποδείγματος ARCH(m). Αν σε ένα GARCH(m, s) θεωρηθεί ότι $s=0$ τότε το GARCH($m, 0$) ισοδυναμεί με το ARCH(m) υπόδειγμα.

Τα παραπάνω γίνονται πιο κατανοητά με το παράδειγμα που ακολουθεί, στο οποίο γίνεται μελέτη του δείκτη S&P 500 με καθημερινά δεδομένα από τις 9 Ιουλίου 1987 έως 18 Οκτωβρίου 2002 για 3857 παρατηρήσεις. Η γραφική παράσταση των αποδόσεων της χρονοσειράς δίνεται στο Διάγραμμα 4.1.



Διάγραμμα 4.1

Καθημερινές αποδόσεις του δείκτη S&P 500

Εάν θεωρηθεί ότι η παραπάνω χρονοσειρά συμβολίζεται με x_t , τα Διαγράμματα 4.2 και 4.3 απεικονίζουν τις αυτοσυσχετίσεις της x_t και τις μερικές αυτοσυσχετίσεις της x_t^2 αντίστοιχα. Η σειρά x_t παρουσιάζει συσχέτιση στις χρονικές υστερήσεις 2 και 3, αλλά το πιο ενδιαφέρον είναι ότι το διάγραμμα μερικών αυτοσυσχετίσεων της x_t^2 που δείχνει ισχυρή γραμμική συσχέτιση.

Ένα υπόδειγμα το οποίο περιγράφει επαρκώς τα δεδομένα είναι το AR(0)-GARCH(1, 1) του οποίου η εκτίμηση δίνει τα εξής:

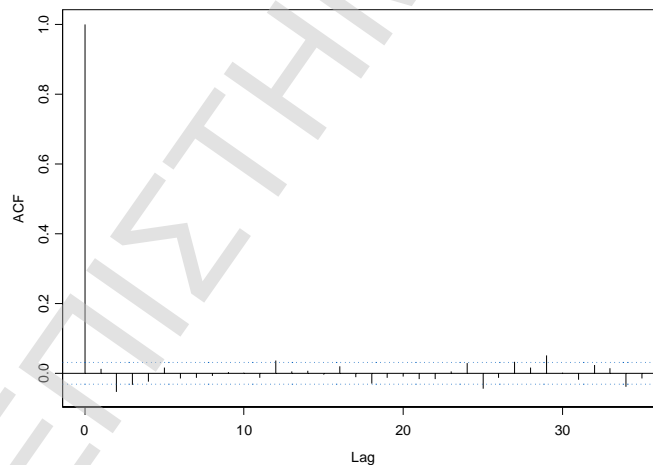
$$x_t = 0.0002304 + e_t$$

(0.0000613)

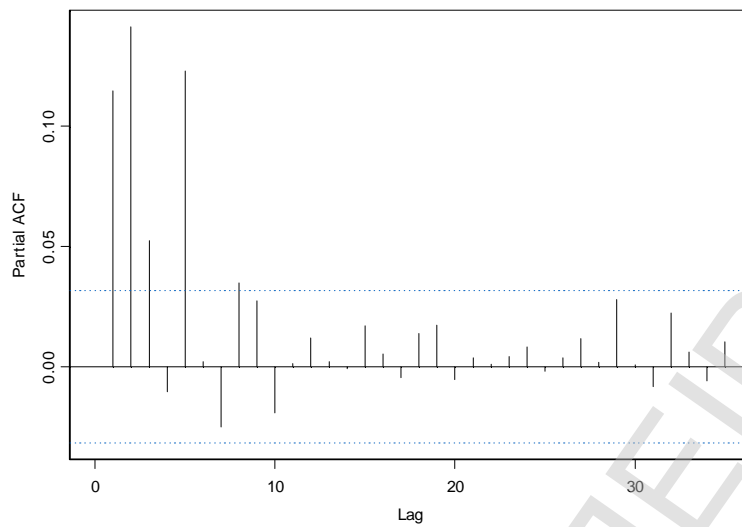
$$s_t^2 = 0.0000003332 + 0.0981e_{t-1}^2 + 0.8935s_{t-1}^2$$

(3.96·10⁻⁸) (0.002745) (0.00479)

όπου στις παρενθέσεις δίνονται αντίστοιχα οι τυπικές αποκλίσεις των εκτιμήσεων.



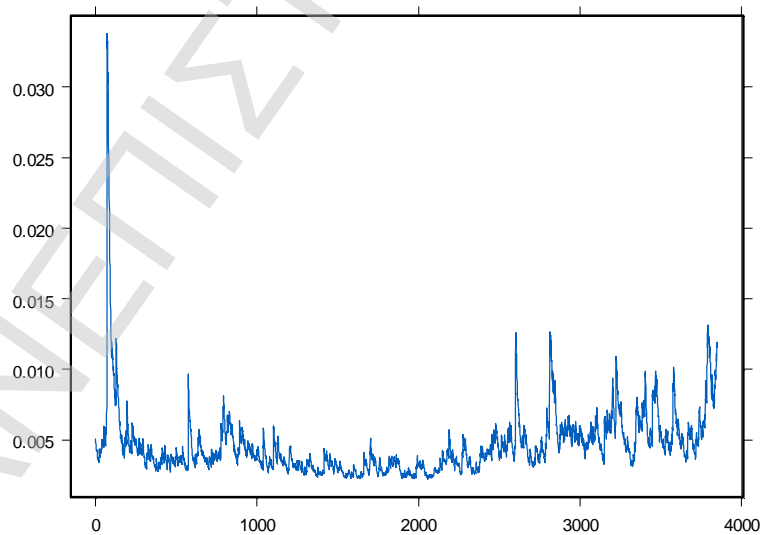
Διάγραμμα 4.2
Αυτοσυσχετίσεις της x_t



Διάγραμμα 4.3

Μερικές αυτοσυσχετίσεις της x_t^2

Η γραφική παράσταση της υπό συνθήκη τυπικής απόκλισης, η οποία στις χρηματοοικονομικές χρονοσειρές μεταφράζεται ως αστάθεια – μεταβλητότητα, παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 4.4. Όπως γίνεται φανερό από το διάγραμμα αυτό, απότομες μεταβολές στις αποδόσεις του δείκτη S&P 500 γίνονται αντιληπτές από τις



Διάγραμμα 4.4

Υπό συνθήκη τυπικές αποκλίσεις

απότομες αυξομειώσεις των υπό συνθήκη τυπικών αποκλίσεων. Όσο πιο απότομες είναι αυτές οι αυξομειώσεις τόσο πιο απότομες είναι και οι μεταβολές των αποδόσεων.

4.3 ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΥ VaR

Ο υπολογισμός του VaR με τη χρήση υποδειγμάτων ARIMA (p, q, d) των οποίων τα σφάλματα παρουσιάζουν ετεροσκεδαστικότητα και περιγράφονται από ένα GARCH(m, s) υπόδειγμα, ανήκουν στη κατηγορία των μεθόδων Συνδιακύμανσης. Με τη μέθοδο Συνδιακύμανσης, το ζητούμενο είναι η προσέγγιση της αστάθειας – μεταβλητότητας (*volatility*), η οποία προκύπτει από τα GARCH υποδείγματα ως υπό συνθήκη τυπική απόκλιση.

Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη ενότητα, ο αριθμός VaR ορίζεται σαν τη μέγιστη αναμενόμενη απώλεια μίας ποσότητας με ένα συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης και σε ένα καθορισμένο χρονικό διάστημα. Είναι φανερό ότι η ερμηνεία του VaR εξαρτάται από την κατανομή των μεταβολών της μεταβλητής που μελετάται. Έστω ότι x_t είναι μία χρονοσειρά η οποία περιγράφει τις μεταβολές ενός μεγέθους. Ένα γενικό υπόδειγμα για τη χρονοσειρά x_t είναι το ακόλουθο:

$$x_t = f_0 + \sum_{i=1}^p f_i x_{t+1-i} - \sum_{j=1}^q q_j e_{t+1-j} \quad (4.9)$$

με:

$$e_t = s_t z_t$$

$$s_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s b_j s_{t-j}^2 \quad (4.10)$$

Οι εξισώσεις (4.9) και (4.10) είναι οι εξισώσεις που περιγράφουν την εξέλιξη της χρονοσειράς x_t και της αστάθειας-μεταβλητότητας αντίστοιχα. Οι δύο αυτές εξισώσεις χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της πρόβλεψης μίας περιόδου της υπό συνθήκη αναμενόμενης τιμής και της υπό συνθήκη διακύμανσης της x_t με τη προϋπόθεση ότι οι τιμές των παραμέτρων είναι γνωστές. Ειδικότερα προκύπτει ότι:

$$\hat{x}_t(1) = f_0 + \sum_{i=1}^p f_i x_{t+1-i} - \sum_{j=1}^q q_j e_{t+1-j}$$

$$\hat{s}_t^2(1) = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i e_{t+1-i}^2 + \sum_{j=1}^s b_j s_{t+1-j}^2$$

Εάν γίνει η υπόθεση ότι η σειρά z_t κατανέμεται κανονικά, τότε η υπό συνθήκη κατανομή της x_{t+1} δεδομένης της πληροφορίας στο χρόνο t είναι $N[\hat{x}_t(1), \hat{s}_t^2(1)]$.

Κατά συνέπεια, η πρόβλεψη του VaR για μία περίοδο θα είναι:

$$VaR_{t+1|t} = \hat{x}_t(1) - F(a) \hat{s}_t(1)$$

όπου $F(a)$ είναι η κριτική τιμή για δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης (95% ή 99%) της τυπικής κανονικής κατανομής και $\hat{s}_t(1)$ είναι η πρόβλεψη της υπό συνθήκη τυπικής απόκλισης ή αστάθειας – μεταβλητότητας στο χρόνο $t+1$, δεδομένης της πληροφορίας στο χρόνο t .

4.5 ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Μία από τις βασικές υποθέσεις των οικονομετρικών υποδειγμάτων είναι η σταθερή διακύμανση των σφαλμάτων, ιδιότητα γνωστή και ως ομοσκεδαστικότητα. Στη περίπτωση ασταθούς διακύμανσης δημιουργούνται προβλήματα στην εκτίμηση των υποδειγμάτων με αποτέλεσμα η εκτίμηση να είναι μη ορθή. Η ύπαρξη της ετεροσκεδαστικότητας επηρεάζει σημαντικά τις τιμές των τυπικών σφαλμάτων των εκτιμητών των συντελεστών ενός υποδείγματος, με αποτέλεσμα να αμφισβητείται η αξιοπιστία των στατιστικών ελέγχων που αφορούν τη στατιστική σημαντικότητα των συντελεστών.

Συνεπώς, είναι επιτακτική η χρήση υποδειγμάτων τα οποία να μελετούν αυτή την αστάθεια της διακύμανσης και να δίνουν μία εικόνα για το πως εξελίσσεται στο χρόνο. Σε οικονομικά δεδομένα, το πρόβλημα της ετεροσκεδαστικότητας εμφανίζεται

συχνά με συνέπεια τη μη ορθή εκτίμηση του υποδείγματος και τον υπολογισμό λανθασμένων προβλέψεων. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται τα υποδείγματα GARCH. Η χρήση των GARCH υποδειγμάτων δεν περιορίζεται μόνο στη μελέτη της ετεροσκεδαστικότητας των σφαλμάτων. Η χρήση τους έχει επεκταθεί και στη διαχείριση Κινδύνου και συγκεκριμένα χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του VaR ως μία κατηγορία της γενικότερης μεθόδου Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης. Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάστηκαν τα υποδείγματα $GARCH(m, s)$, οι ιδιότητές τους και το πως σε συνδυασμό με τα υποδείγματα $ARIMA(p, d, q)$ γίνεται ο υπολογισμός του VaR.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥ VaR ΣΕ ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ ΜΕΤΟΧΩΝ ΕΥΡΩΠΑΪΚΩΝ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΩΝ ΕΤΑΙΡΕΙΩΝ

5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η χρήση ποσοτικών μεθόδων στη λήψη αποφάσεων παίζει καθοριστικό ρόλο στην εξέλιξη της λειτουργίας των επιχειρήσεων στο χώρο που δραστηριοποιούνται. Η αβεβαιότητα που επικρατεί στην αγορά, καθιστά την ποσοτική ανάλυση και τη διερεύνηση των μελλοντικών κινδύνων περισσότερο απαιτητική στις μέρες μας από κάθε άλλη χρονιά. Για το λόγο αυτό, έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι ανάλυσης και πρόβλεψης, οι οποίες συμβάλλουν στην αντιμετώπιση αβέβαιων καταστάσεων. Μία από τις πλέον διαδεδομένες μεθόδους που χρησιμοποιείται ευρέως στις μέρες μας είναι η μέθοδος VaR, η οποία έχει παρουσιαστεί αναλυτικά σε προηγούμενο κεφάλαιο και η οποία αποσκοπεί στον προσδιορισμό του κινδύνου μέσω μίας τιμής που περιγράφει το χειρότερο δυνατό σενάριο για δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας.

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται εφαρμογή της μεθόδου VaR στις αποδόσεις των μετοχών Ευρωπαϊκών Τηλεπικοινωνιακών Εταιρειών. Ειδικότερα, η εκτίμηση του κινδύνου επιτυγχάνεται με τη ανάλυση χρονοσειρών συνδυασμένη με GARCH υποδείγματα. Έτσι, ο κίνδυνος προκύπτει ως πρόβλεψη της μελλοντικής εξέλιξης της σειράς για την αμέσως επόμενη περίοδο.

Ο σκοπός της μελέτης του κινδύνου σε αυτόν τον κλάδο της αγοράς έχει διττό χαρακτήρα. Αφενός, γίνεται προσπάθεια εκτίμησης της τιμής του σε ατομικό επίπεδο για κάθε εταιρεία τηλεπικοινωνιακών υπηρεσιών και αφετέρου γίνεται αναγνώριση του κινδύνου σε επίπεδο κλάδου της αγοράς.

5.2 ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

Έστω P_t η τιμή της μετοχής μιας εταιρείας τη χρονική περίοδο t . Ως *απόδοση* (*return*) της μετοχής αυτής χωρίς μερίσματα ορίζεται η ποσότητα R_t ως εξής:

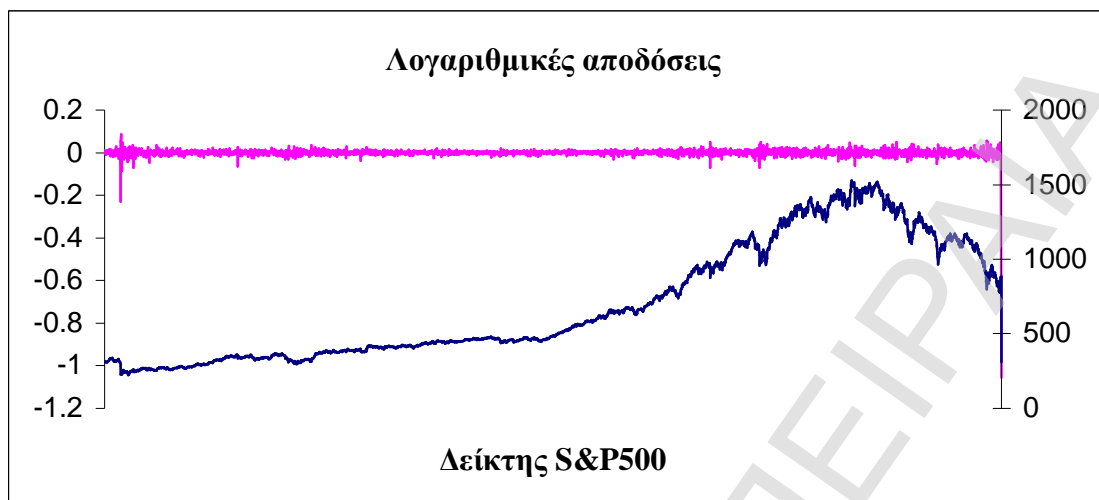
$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

Η παραπάνω ποσότητα εκφράζει τη ποσοστιαία μεταβολή της τιμής της μετοχής για μία χρονική περίοδο. Η μεταβλητή R_t μπορεί κατά προσέγγιση να εκφραστεί από το λογαριθμικό λόγο δύο συνεχόμενων τιμών, δηλαδή από τη μεταβλητή $x_t = \log(P_t/P_{t-1})$, και αυτό γιατί η παραπάνω σχέση γράφεται ως ακολούθως:

$$\frac{P_t}{P_{t-1}} = R_t + 1$$

Μάλιστα, αν η χρονική περίοδος αναφοράς είναι πολύ μικρή, π.χ. ημέρα όπου οι μεταβολές στις τιμές δεν είναι πολύ διαφορετικές μεταξύ τους, οι τιμές της μεταβλητής x_t σχεδόν συμπίπτουν με τις τιμές της μεταβλητής R_t . Η μεταβλητή $x_t = \log(P_t/P_{t-1})$ είναι μία προσεγγιστική μεταβλητή (*proxy variable*) της R_t και καλείται *λογαριθμική απόδοση* (*log-return*) της μετοχής.

Σε πολλές μελέτες γίνεται χρήση χρονοσειρών που περιγράφουν την εξέλιξη της λογαριθμικής απόδοσης ενός περιουσιακού στοιχείου στο χρόνο, αντί χρονοσειρών που περιγράφουν την εξέλιξη της τιμής της αξίας τους. Βασικό πλεονέκτημα της χρήσης χρονοσειρών λογαριθμικών αποδόσεων είναι ότι τα αποτελέσματα είναι "καθαροί" αριθμοί απαλλαγμένοι από μονάδες μέτρησης. Επιπρόσθετα, η χρήση λογαριθμικών αποδόσεων βοηθά στο να επιλυθούν διάφορα προβλήματα οικονομετρικής φύσεως τα οποία ενδεχομένως να προκύψουν. Για παράδειγμα, με τη χρήση των λογαριθμικών σε χρονοσειρές αντιμετωπίζονται τυχόν προβλήματα αυτοσυσχέτισης, ετεροσκεδαστικότητας, μη-κανονικότητας και πολύ συχνά μη-στασιμότητας.



Διάγραμμα 5.1
Χρονοσειρές τιμών και λογαριθμικών αποδόσεων
του δείκτη S&P 500

Ενδεικτικά, στο Διάγραμμα 5.1 παρουσιάζεται η χρονοσειρά των τιμών του δείκτη S&P 500 και της χρονοσειράς των λογαριθμικών του αποδόσεων για μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Όπως φαίνεται από το διάγραμμα αυτό η χρονοσειρά του τιμών του Δείκτη παρουσιάζει σε γενικές γραμμές μία ανοδική πορεία που διακρίνεται από χαρακτηριστικά μη-στάσιμων χρονοσειρών, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να αναλυθεί από ένα στάσιμο υπόδειγμα χρονοσειρών. Αντίθετα, η χρονοσειρά των λογαριθμικών αποδόσεων του Δείκτη παρουσιάζει μία στασιμότητα στο χρόνο και η εξέλιξή της στηρίζεται γύρω από τη περιοχή του μηδενός που είναι και ο μέσος όρος της χρονοσειράς.

5.3 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν για την παρούσα μελέτη αφορούν ημερήσιες τιμές κλεισίματος των μετοχών Ευρωπαϊκών Εταιρειών Τηλεπικοινωνιακών Υπηρεσιών και χρησιμοποιούνται για το σχηματισμό των λογαριθμικών τους αποδόσεων για την περίοδο από Ιούλιο του 2002 έως Ιούνιο του 2007. Οι Εταιρείες αυτές αποτελούν τις μεγαλύτερες τηλεπικοινωνιακές εταιρείες στις χώρες τους,

πρώην μονοπωλιακής μορφής γνωστές ως PTT (Post Telephone and Telegraphs), και η μετοχή τους διαπραγματεύεται στο χρηματιστήριο της χώρας τους.¹ Στον Πίνακα 5.1 παρουσιάζονται ορισμένα περιγραφικά στατιστικά στοιχεία για τις καθημερινές λογαριθμικές αποδόσεις των εταιρειών.

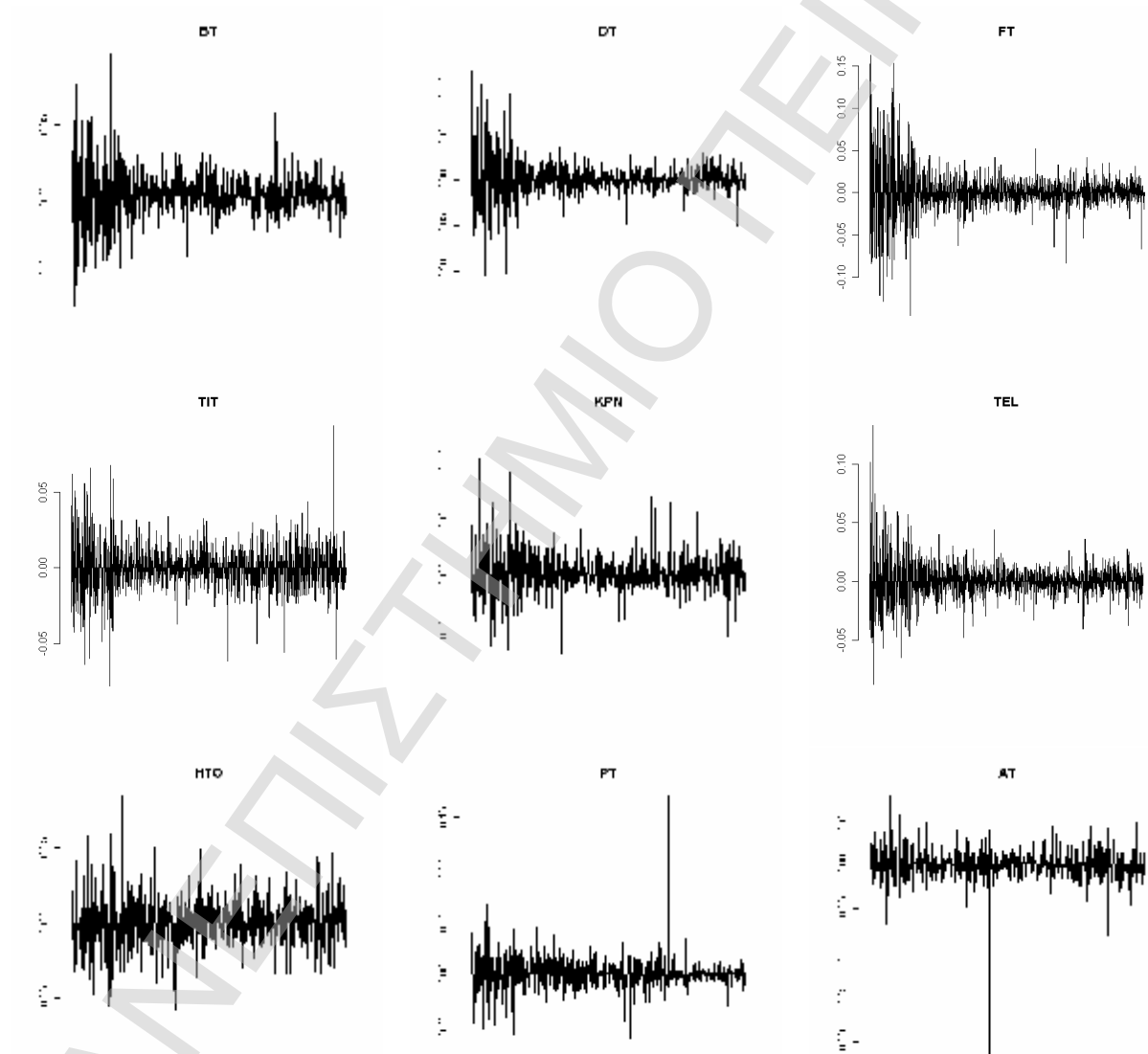
Πίνακας 5.1
Περιγραφικά Στατιστικά στοιχεία

Εταιρείες	Παρατηρήσεις	Μέση Τιμή	Τυπική Απόκλιση	Κύρτωση	Ασυμμετρία	Ποσοστιαίο σημείο	
						95°	99°
BT	1269	0.000207	0.018148	6.87768	0.04023	-0.026814	-0.055414
DT	1262	0.000236	0.020846	11.46276	0.06082	-0.028853	-0.061850
FT	1295	0.000422	0.025701	10.93547	0.51096	-0.034654	-0.077982
TIT	1285	-0.000111	0.014494	7.34506	0.22355	-0.021786	-0.039266
KPN	1278	0.000762	0.017452	9.33416	0.42892	-0.023799	-0.046530
TEL	1293	0.000507	0.015114	12.07431	0.76518	-0.021780	-0.040612
OTE	1241	0.000299	0.017306	4.89886	-0.09536	-0.028170	-0.041024
PT	1267	0.000299	0.014458	20.10334	1.04737	-0.022038	-0.043949
AT	1284	0.000610	0.016564	27.61497	-1.51256	-0.021733	-0.039849

Από τον πίνακα αυτόν γίνεται φανερό ότι ο μέσος όρος των λογαριθμικών αποδόσεων, για όλες τις εταιρείες, βρίσκεται στη περιοχή του μηδενός με τις αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις να είναι σχετικά μεγάλες. Κατά συνέπεια, οποιαδήποτε αναφορά στην έννοια της μέσης απόδοσης δεν έχει ούτε πραγματική αλλά ούτε και στατιστική σημασία. Εκείνο που αξίζει να αναφερθεί κανείς στα δεδομένα του Πίνακα 5.1 είναι η αποτίμηση του κινδύνου για τις αποδόσεις των μετοχών αυτών όπως αυτή ορίζεται από το 95ο ή το 99ο ποσοστιαίο σημείο και δίνεται από τις δύο τελευταίες στήλες του πίνακα αυτού. Για την υπό μελέτη περίοδο το 95ο ποσοστιαίο σημείο κυμαίνεται από -2.2% έως -3.5% με μέση τιμή της αγοράς στο -2.55%. Αντίστοιχα, για το 99ο ποσοστιαίο σημείο είναι από -3.9% έως -7.7% με μέση τιμή κινδύνου για την αγορά στο -4.9%.

¹ Οι Τηλεπικοινωνιακές Εταιρείες, με βάση μεγέθους είναι: British Telecom (BT), Deutsche Telekom (DT), France Telecom (FT), Telecom Italia (TIT), KPN Nederland's (KPN), Telefonica (TEL), Οργανισμός Τηλεπικοινωνιών Ελλάδος (OTE), Portugal Telecom (PT), Austria Telecom (AT).

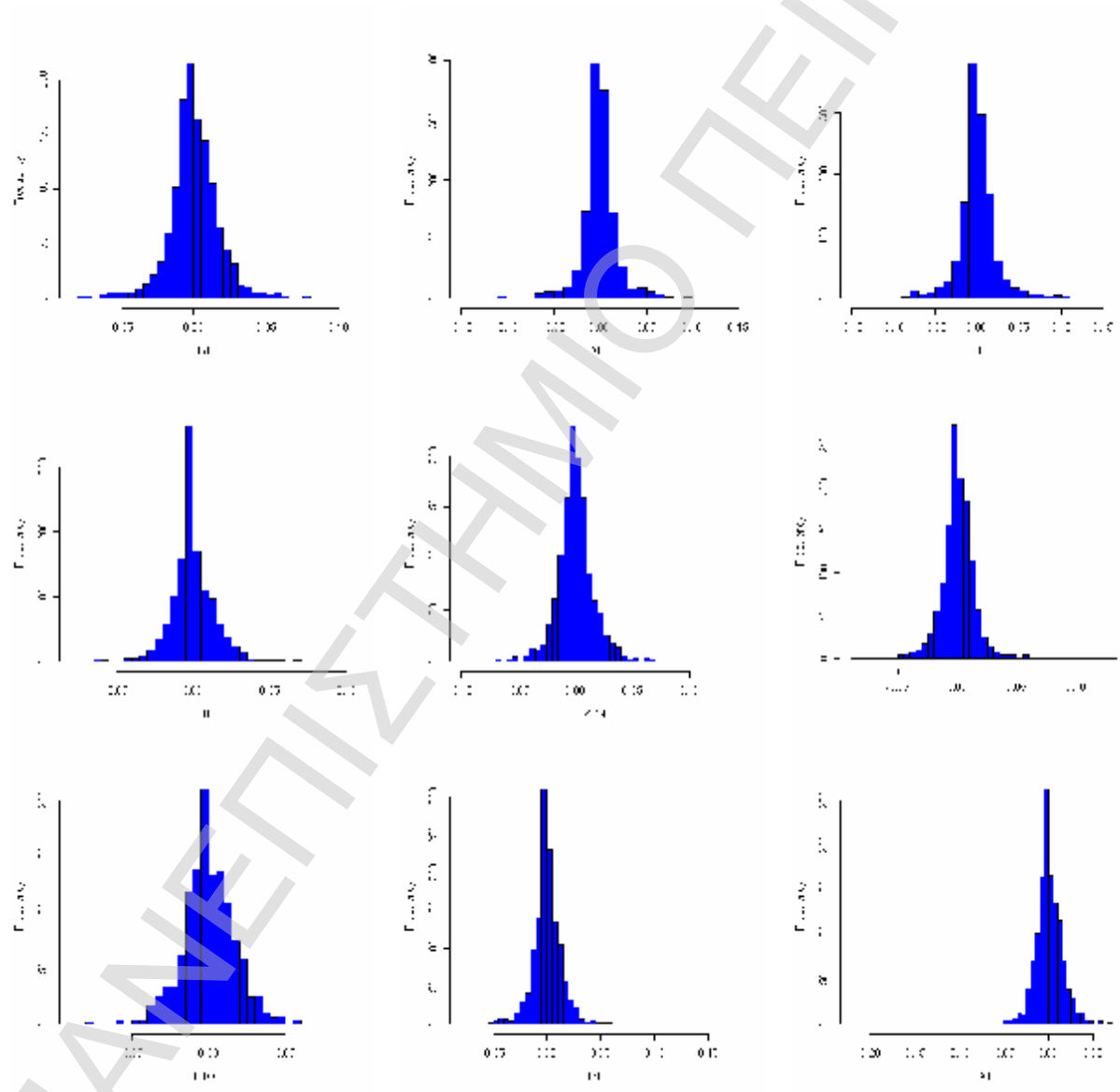
Στο Διάγραμμα 5.2 παρουσιάζονται τα διαγράμματα των χρονοσειρών των λογαριθμικών αποδόσεων. Από τα διαγράμματα αυτά μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι κατά την εξέλιξη της κάθε χρονοσειράς υπήρχαν αρκετές περιόδους έντονης μεταβλητότητας. Η έντονη μεταβλητότητα μπορεί να είναι είτε αρνητική είτε θετική, αλλά το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην πρώτη, καθώς απότομες κινήσεις προς τα κάτω είναι ενδείξεις απρόσμενων και δυσάρεστων εξελίξεων. Επίσης, γίνεται φανερό ότι οι χρονοσειρές μακροχρόνια εξελίσσονται γύρω από τη τιμή του μηδενός.



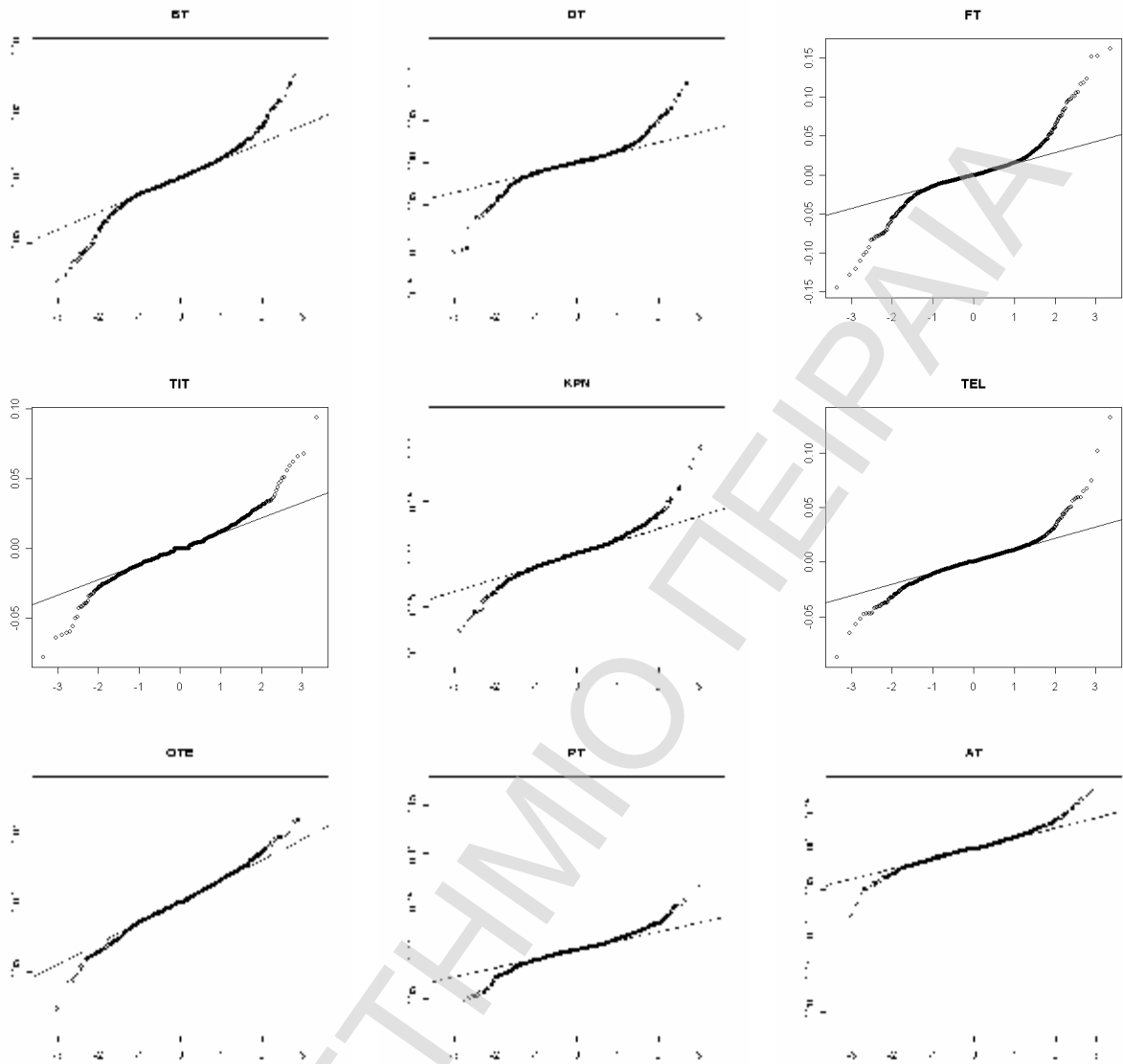
Διάγραμμα 5.2

Διαγράμματα χρονοσειρών λογαριθμικών αποδόσεων

Επιπρόσθετα, στο Διάγραμμα 5.3 παρουσιάζονται τα ιστογράμματα των λογαριθμικών αποδόσεων για κάθε μία από τις εταιρείες. Από τα διαγράμματα αυτά μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι υπάρχει έντονη κύρτωση αλλά δεν υπάρχουν ενδείξεις ασυμμετρίας, εκτός ενδεχομένως από την ΑΤ. Επίσης, γίνεται φανερό ότι τη μεγαλύτερη συχνότητα την έχουν παρατηρήσεις που βρίσκονται στη περιοχή του μηδενός, που αποτελεί και το μέσο όρο των αποδόσεων, ενώ υπάρχουν ενδείξεις για απομακρυσμένες παρατηρήσεις στις ουρές της κάθε κατανομής.



Διάγραμμα 5.3
Ιστογράμματα λογαριθμικών αποδόσεων



Διάγραμμα 5.4
QQ-Plots των κατανομών

Τέλος, στο Διάγραμμα 5.4 παρουσιάζονται τα QQ-Plots για κάθε κατανομή των λογαριθμικών αποδόσεων, έτσι ώστε να φανεί αν όντως οι ουρές της κάθε κατανομής είναι βαριές. Από τα παραπάνω γραφήματα είναι φανερό ότι υπάρχουν βαριές ουρές στις κατανομές της χρονοσειράς λογαριθμικών αποδόσεων, διότι υπάρχουν παρατηρήσεις που αποκλίνουν από την γραμμή της κανονικής κατανομής. Ουσιαστικά, μπορεί κανείς να ισχυριστεί την ύπαρξη θετικών και αρνητικών ακραίων αποδόσεων. Το ενδιαφέρον όμως επικεντρώνεται στην αριστερή ουρά, η οποία περιέχει αρκετές απομακρυσμένες παρατηρήσεις που αποτελούν δυσμενή αποτελέσματα για τις εταιρείες.

5.4 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ARIMA(p, d, q) – GARCH(m, s)

Η ανάλυση χρονοσειρών για τον υπολογισμό του VaR απαιτεί τον καθορισμό ενός υποδείγματος ARIMA(p, d, q) - GARCH(m, s), το οποίο ακολουθεί η κάθε χρονοσειρά. Αρχικά, γίνεται ο προσδιορισμός ενός ARIMA(p, d, q) υποδείγματος, σύμφωνα με τη μεθοδολογία των Box & Jenkins (1970). Δεδομένου ότι η ανάλυση των αποδόσεων των μετοχών γίνεται με τη χρήση λογαριθμικών αποδόσεων $x_t = \log(P_t/P_{t-1})$ έπεται η μεταβλητή x_t μπορεί να εκφραστεί και ως διαφορά των λογαρίθμων δύο συνεχόμενων τιμών, δηλαδή ως $x_t = \log(P_t) - \log(P_{t-1})$. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας λογαριθμικές αποδόσεις μπορεί να εξεταστεί ισοδύναμα η χρονοσειρά $\log(P_t)$ σε πρώτες διαφορές. Αυτό σημαίνει ότι ισοδύναμα ο προσδιορισμός του υποδείγματος της χρονοσειράς μπορεί να γίνει σε ARIMA($p, 1, q$) για το $\log(P_t)$ ή εναλλακτικά σε υποδείγματα ARMA(p, q) για το $x_t = \log(P_t/P_{t-1})$.

Ωστόσο, η ανάλυση της χρονοσειράς βασίστηκε στη μεταβλητή x_t . Για το λόγο αυτό εκτιμήθηκαν υποδείγματα ARMA(p, q) για όλους τους συνδυασμούς με $p + q \leq 3$ χρησιμοποιώντας μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας και το “καταλληλότερο” υπόδειγμα επιλέγεται με βάση την ελάχιστη τιμή των πληροφοριακών κριτηρίων AIC ή BIC. Για το σύνολο των χρονοσειρών τα πληροφοριακά κριτήρια επιλέγουν το υπόδειγμα του τυχαίου περιπάτου.

Κατόπιν, γίνεται ο προσδιορισμός του GARCH(m, s) υποδείγματος για την υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητα. Στο σημείο αυτό εξετάζονται υποδείγματα ARMA(p, q)-GARCH(m, s) για $m + s \leq 2$ στα οποία το πρώτο μέρος του υποδείγματος έχει προκύψει από τη προηγούμενη ανάλυση και το “καταλληλότερο” υπόδειγμα προκύπτει επίσης από τη τιμή του πληροφοριακού κριτηρίου BIC που ελαχιστοποιείται. Κατά συνέπεια, αφού προκύψει το τελικό “κατάλληλο” υπόδειγμα για τη κάθε χρονοσειρά γίνεται η πρόβλεψη για την επόμενη περίοδο και ο υπολογισμός του VaR.

Από τη διαδικασία αυτή προέκυψε ως καταλληλότερο υπόδειγμα το GARCH(1, 1) για όλες τις χρονοσειρές με δεύτερο καλύτερο το ARCH(1), ενώ

κανένα άλλο υπόδειγμα δεν έδωσε στατιστικά σημαντικές εκτιμήσεις. Στον Πίνακα 5.3 παρουσιάζονται οι εκτιμήσεις των συντελεστών των υποδειγμάτων GARCH(1, 1) και ARCH(1) για κάθε μία από τις Εταιρείες, ενώ στις παρενθέσεις δίνονται τα τυπικά σφάλματα των εκτιμήσεων και όλοι οι συντελεστές είναι στατιστικά σημαντικοί.

Πίνακας 5.3

Εκτιμήσεις συντελεστών των υποδειγμάτων

	ARCH(1)	GARCH(1,1)	
	a_1	a_1	b_1
BT	0.358 (0.04009)	0.0916 (0.01397)	0.878 (0.01836)
DT	0.612 (0.04119)	0.0492 (0.006436)	0.9378 (0.00787)
FT	0.6389 (0.04185)	0.0348 (0.004732)	0.9527 (0.006188)
TIT	0.0001702 (0.00000525)	0.06183 (0.0089)	0.9116 (0.01128)
KPN	0.3398 (0.0267)	0.03098 (0.00428)	0.9583 (0.006463)
TEL	0.347363 (0.02914)	0.07856 (0.01056)	0.8974 (0.01316)
OPE	0.1411 (0.03036)	0.058 (0.009796)	0.9043 (0.0134)
PT	0.306 (0.03541)	0.1535 (0.001115)	0.8339 (0.01446)
AT	0.28914 (0.01393)	0.21629 (0.02243)	0.5983 (0.05229)

Ωστόσο, αξίζει να αναφερθεί ότι το άθροισμα των εκτιμήσεων των συντελεστών των GARCH(1, 1) υποδειγμάτων για κάθε εταιρεία πλησιάζει τη μονάδα. Αυτό βέβαια μπορεί να μην επηρεάζει τη στασιμότητα της χρονοσειράς, αλλά αφήνει ερωτηματικά ως προς το σωστό προσδιορισμό της διακύμανσης της χρονοσειράς. Μάλιστα, ακόμα και αν το άθροισμα των συντελεστών είναι ίσο με τη μονάδα η χρονοσειρά εξακολουθεί να είναι στάσιμη, ωστόσο η διακύμανσή της δεν ορίζεται. Για το λόγο αυτό εκτιμήθηκαν IGARCH υποδείγματα, χωρίς όμως να είναι

σε θέση να δώσουν στατιστικά αξιόλογα αποτελέσματα. Αντίθετα, οι εκτιμήσεις του συντελεστή του ARCH(1) υποδείγματος για κάθε εταιρεία είναι αισθητά μικρότερες της μονάδας και περισσότερο προσιτές.

5.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ VaR

Η εκτίμηση του κινδύνου για τις λογαριθμικές αποδόσεις των τιμών των μετοχών των Εταιρειών βασίζεται στο επιλεγμένο ARMA(p, q)-GARCH(m, s) υπόδειγμα. Ειδικότερα, η τιμή του VaR προσδιορίζεται από τη σχέση $\hat{x}_t(1) - F(a)\hat{S}_t(1)$ στην οποία η $\hat{x}_t(1)$ αποτελεί την προβλεπόμενη τιμή της χρονοσειράς για την επόμενη περίοδο, ενώ η $\hat{S}_t(1)$ αποτελεί την πρόβλεψη της υπό συνθήκη διακύμανσης της χρονοσειράς. Στην πραγματικότητα ο αριθμός που θα προκύψει είναι μία περιγραφή του χειρότερου αναμενομένου σεναρίου για τις λογαριθμικές αποδόσεις της χρονοσειράς και έχει τη μορφή ενός ποσοστού επί της συνολικής επένδυσης. Η ποσότητα $F(a)$ εξαρτάται από την κατανομή και από το επίπεδο σημαντικότητας που χρησιμοποιείται στον υπολογισμό της VaR. Για την τυπική κανονική κατανομή και για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% και 99% οι τιμές που λαμβάνει η ποσότητα $F(a)$ είναι αντίστοιχα 1.64 και 2.32.

Στον Πίνακα 5.4 παρατίθενται οι τιμές του VaR για κάθε Εταιρεία με τη χρήση των υποδειγμάτων GARCH(1, 1) και ARCH(1) και για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% και 99%. Από τον πίνακα αυτό γίνεται αντιληπτό ότι οι εκτιμήσεις του VaR που προέρχονται από το ARCH(1) υπόδειγμα είναι μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες του GARCH(1, 1) υποδείγματος. Αυτό συμβαίνει διότι το ARCH(1) υπόδειγμα προσδιορίζει μεγαλύτερη τιμή για την υπό συνθήκη διακύμανση της χρονοσειράς από ότι το GARCH(1, 1) υπόδειγμα.

Πιο αναλυτικά, για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% ο κίνδυνος με τη χρήση του GARCH(1, 1) υποδείγματος κυμαίνεται από -1.5% έως -2.6% με μέση τιμή για την αγορά -2%. Αντίθετα, για το ίδιο επίπεδο εμπιστοσύνης ο κίνδυνος με τη χρήση του ARCH(1) υποδείγματος κυμαίνεται από -2.1% έως -2.9% με μέση τιμή για την αγορά -2.4%. Κατά ανάλογο τρόπο ο κίνδυνος προσδιορίζεται μεταξύ -2.1% με -3.6% (μέση τιμή της αγοράς -2.8%) για GARCH(1, 1) υπόδειγμα και μεταξύ -2.9% έως -4%

(μέση τιμή για την αγορά -3.4%) για ARCH(1) υπόδειγμα για επίπεδο εμπιστοσύνης 95%.

Πίνακας 5.4
Εκτίμηση του VaR

Εταιρείες	ARCH(1)		GARCH(1,1)	
	95%	99%	95%	99%
BT	-0.0244	-0.0346	-0.0205	-0.0292
DT	-0.0238	-0.0337	-0.0191	-0.027
FT	-0.0275	-0.0392	-0.0225	-0.0319
TIT	-0.0215	-0.0304	-0.0177	-0.0251
KPN	-0.0237	-0.0337	-0.0194	-0.0278
TEL	-0.0206	-0.0294	-0.0161	-0.023
OTE	-0.026	-0.0369	-0.0226	-0.0322
PT	-0.0213	-0.0304	-0.015	-0.0214
AT	-0.0284	-0.0403	-0.0256	-0.0364
Μέση τιμή	-0.0241	-0.0343	-0.0198	-0.0282

Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι οι εκτιμήσεις του κινδύνου που προέρχονται από ARCH(1) υπόδειγμα είναι πολύ κοντά στις εκτιμήσεις του κινδύνου με βάση το 95ο ή το 99ο ποσοστιαίο σημείο των παρατηρήσεων του δείγματος. Πιο αναλυτικά, η μέση εκτίμηση της αγοράς για 95% επίπεδο σημαντικότητας είναι -2.41%, ενώ αντίστοιχα το 95ο ποσοστιαίο σημείο έδωσε μέση τιμή -2.55%. Ανάλογα συμπεράσματα προκύπτουν και για το 99% επίπεδο σημαντικότητας.

5.6 ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό έγινε εφαρμογή της μεθόδου διακύμανσης – συνδιακύμανσης, στην οποία η αστάθεια – μεταβλητότητα ορίστηκε ως η υπό συνθήκη τυπική απόκλιση και προσδιορίστηκε με τη χρήση GARCH(m, s) υποδειγμάτων, για τη μέτρηση του VaR των λογαριθμικών αποδόσεων των τιμών των μετοχών Ευρωπαϊκών Τηλεπικοινωνιακών Εταιρειών. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκαν χρονοσειρές των οποίων οι παρατηρήσεις ξεπερνούν τις 1200.

Η εφαρμογή στηρίχθηκε στη μεθοδολογία των Box & Jenkins (1970) από όπου προέκυψε το καταλληλότερο υπόδειγμα για την εξέλιξη των τιμών της χρονοσειράς για κάθε εταιρεία. Στη συνέχεια, έγινε ανάλυση για τον προσδιορισμό του καταλληλότερου υποδείγματος GARCH(m, s) από το οποίο καθορίζεται η υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητα διακύμανση της χρονοσειράς. Ο συνδυασμός των παραπάνω καθορίζει το σχηματισμό των προβλέψεων των τιμών και της διακύμανσης της χρονοσειράς από όπου προκύπτει ο κίνδυνος. Για τα δεδομένα της μελέτης αυτής ο κίνδυνος προέρχεται από ένα υπόδειγμα τυχαίου περιπάτου στο οποίο η διακύμανση της χρονοσειράς εξελίσσεται με βάση ένα GARCH(1, 1).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

- Αγιακλόγλου, Ν. Χ. και Μπένος, Ε.Θ. (2003). *Εισαγωγή στην Οικονομετρική Ανάλυση*, Εκδόσεις Μπένου, Αθήνα.
- Αγιακλόγλου, Ν. Χ. και Οικονόμου, Σ.Γ. (2004). *Μέθοδοι Προβλέψεων και Ανάλυσης Αποφάσεων*, Εκδόσεις Μπένου, Αθήνα.
- Spiegel, M. R. (1977). *Πιθανότητες και Στατιστική* (Μετάφραση: Περσίδης, Κ.Σ.), McGraw-Hill, ΕΣΠΙ, Αθήνα.

Ξένα

- Angelidis T., Benos, A. and Degiannakis, S. (2004). The use of GARCH models in VaR estimation, *Statistical Methodology*, **1**, 105-128.
- Aven, T. (2003). *Foundations of Risk Analysis*, John Wiley & Sons, New York.
- Bera, K. A. and Higgins, M. L. (1993). ARCH models: properties, estimations and testing, *Journal of Economic Surveys*, **7**, 305-366.
- Berkowitz, J. and O'Brien, J. (2002). How Accurate Are Value-at-Risk Models at Commercial Banks?, *The Journal of Finance*, **57**, 1093-1111.
- Best, P. W. (1998). *Implementing Value at Risk*, John Wiley & Sons, New York.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307-327.
- Bollerslev, T., Chou, R. Y., and Kronker, K. F. (1992). ARCH modeling in finance, *Journal of Econometrics*, **52**, 5-59.
- Box, E. P. G. and Jenkins, M. G. (1970). *Time Series Analysis forecasting and control*, Holden-Day, San Francisco.
- Enders, W. (1995). *Applied Econometric Time Series*, John Willey & Sons, New York.

- Engle, F. R. (1995). *ARCH Selected Readings – Advanced Texts in Econometrics*, Oxford University Press, New York.
- Engle, F. R. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflations, *Econometrica*, **50**, 987-1007.
- Engle, F.R. (2004). Risk and Volatility: Econometric Models and Financial Practice, *The American Economic Review*, **94**, 405-420.
- Hamilton, D. J. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press, New Jersey.
- Holton, A. G. (2004). Defining Risk, *Financial Analysts Journal*, **60**, 19-25.
- Holton, A. G. (2003). *Value-at-Risk, Theory and Practice*, Elsevier.
- Insightful Corporation, (2002). *S+FinMetrics, Reference Manual*, Washington.
- J.P. Morgan/Reuters (1996). *RiskMetrics™ - Technical Document*, New York.
- Jorion, P. (2001). *Value-at-Risk: the new benchmark for managing financial risk*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York.
- Keung, L. W. (2003). *Diagnostic Checks in Time Series*, Chapman & Hall.
- Linsmeier, J. T. and Pearson, D. N. (1996). *Risk Measurement: An Introduction to Value at Risk*, University of Illinois at Urbana-Champaign, Illinois.
- Markowitz, H. M. (1952). Portfolio Selection, *Journal of Finance*, **7**, 77-91.
- Mills, T. (1999), *The Econometric Modelling of Financial Time Series*, Cambridge University Press, London.
- Tsay, R. S. (2002). *Analysis of Financial Time Series*, John Wiley & Sons, New York
- Zivot, E. and Wang, J. (2002). *Modeling Financial Time Series with S-PLUS*, Washington .