

# ΟΙ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΤΗΣ ΓΟΝΙΜΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΕΛΛΗΝΙΚΟΥ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ

Τεχνικό Παράρτημα

Ιωάννης Γεωργίου Τζουγιάς



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σεπτέμβριος 2007

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1.1	Εισαγωγή.....	1
1.2	Κοινωνιολογικές θεωρίες της γονιμότητας.....	1
1.2.1	Οι ενδιάμεσες και προσδιορίζουσες μεταβλητές της γονιμότητας.....	3
1.2.1.1	Το εννοιολογικό σχήμα των Davis and Blake.....	3
1.2.1.2	Το εννοιολογικό σχήμα του Freedman.....	4
1.3	Ψυχολογικές θεωρίες της γονιμότητας.....	6
1.4	Θεωρητικό πλαίσιο μαθηματικο-στατιστικών μεθόδων για τη μελέτη της κυκλικής συμπεριφοράς των CBR, INC, FPR, IMR και MR.....	14
1.4.1	Γραμμικά φίλτρα.....	14
1.4.2	Συμμετρικά φίλτρα.....	15
1.4.3	Ιδανικά συμμετρικά φίλτρα χαμηλού, υψηλού περάσματος συχνοτήτων και διελεύσεως ζώνης συχνοτήτων.....	16
1.4.4	Διάσπαση της χρονολογικής σειράς με ad hoc φίλτρα.....	17
1.4.5	Ανάλυση των ιδιοτήτων των ad hoc φίλτρων.....	18
1.4.6	Διάσπαση της χρονολογικής σειράς με ARIMA Model Based φίλτρα.....	23
1.4.7	Αρίστη εκτίμηση των μη διακριτών συνιστωσών.....	26
1.4.8	AMB ερμηνεία των φίλτρων HP και Butterworth.....	29
1.4.8.1	Το φίλτρο των Hodrick-Prescott.....	29
1.4.8.2	Η οικογένεια των φίλτρων Butterworth.....	30
1.5	Σύγκριση της αποτελεσματικότητας των ad hoc φίλτρων στην εξαγωγή της κυκλικής συνιστώσας των χρονολογικών σειρών CBR και INC.....	31
1.5.1	Θεωρητικό πλαίσιο.....	33
1.5.2	Αρίστα φίλτρα.....	33
1.5.3	Παραμορφωτικά φίλτρα.....	34
1.5.4	Ένα μέτρο-απόστασης για τη μέτρηση των παραμορφωτικών επιδράσεων των φίλτρων.....	36
1.5.5	Μέτρηση των παραμορφωτικών επιδράσεων των φίλτρων BK, HP, PT, DF... ..	37
1.5.6	Το τροποποιημένο φίλτρο Baxter-King και το φαινόμενο Gibb.....	39
1.5.7	Μεθοδολογική προσέγγιση της μελέτης του βαθμού συσχέτισης και των δομών υστέρησης – προπόρευσης των κυκλικών συνιστωσών των χρονολογικών σειρών CBR και INC στο πεδίο συχνοτήτων.....	40
1.5.8	Θεωρητικό πλαίσιο των ARIMA-Model-Based (AMB) φίλτρων.....	46
1.5.8.1	Το τροποποιημένο φίλτρο των Hodrick-Prescott (MHP).....	46
1.5.8.1.1	Καθορισμός της παραμέτρου $\lambda$ του φίλτρου HP στην περίπτωση ετησίων δεδομένων.....	52
1.5.8.2	Το φίλτρο Butterworth-ARIMA (BW-ARIMA).....	54
1.6	Δυναμική και φασματική ανάλυση των εκτιμημένων υποδειγμάτων ΔΥΜΕΓ και ΔΥΒΕΓ.....	57
1.6.1	Δυναμική ανάλυση ενός υποδείγματος ταυτοχρόνως προσδιοριζόμενων εξισώσεων.....	57
1.6.2	Φασματική ανάλυση ενός υποδείγματος ταυτοχρόνως προσδιοριζόμενων εξισώσεων.....	61
1.6.3	Αξιολόγηση της δυναμικής κυκλικού υποδείγματος στην αναπαραγωγή κυκλικών κυμάτων των ενδογενών μεταβλητών του οι οποίες προσομοιάζουν τις αντίστοιχες των πραγματικών δεδομένων.....	63
1.6.4	Άσκηση δημογραφικής πολιτικής με τη χρήση ενός υποδείγματος ταυτοχρόνως προσδιοριζόμενων εξισώσεων.....	63
1.7	Σύντομη περιγραφή των υποδειγμάτων VAR.....	66
1.7.1	Γενικά.....	66
1.7.2	Έλεγχος της ευστάθειας των υποδειγμάτων VAR.....	67
1.7.3	Εκτίμηση των υποδειγμάτων VAR.....	68
1.7.4	Έλεγχος της τάξης συνολοκλήρωσης. Η αρχή του Pantoula.....	72
1.7.5	Ανάλυση αιτιότητας και εξωγένειας μέσω των υποδειγμάτων VAR.....	74
1.7.5.1	Αιτιότητα κατά Granger.....	74
1.7.5.2	Εξωγένεια.....	75
1.7.5.3	Εφαρμογή των εννοιών της αιτιότητας και εξωγένειας στα υποδείγματα VAR.....	78

1.7.5.3.1 Έλεγχος αιτιότητας κατά Granger και υποδείγματα VAR .....	78
1.7.5.3.2 Εξωγένεια και υποδείγματα VAR .....	82
1.7.6 Συναρτήσεις αιφνίδιων αντιδράσεων και συναρτήσεις διάσπασης της διακύμανσης του σφάλματος πρόβλεψης .....	85
1.7.6.1 Συναρτήσεις αιφνίδιων αντιδράσεων (IRF) .....	86
1.7.6.1.1 Συναρτήσεις αιφνίδιων αντιδράσεων, ισχυρή εξωγένεια και άσκηση δημογραφικής πολιτικής .....	88
1.7.6.2 Διάσπαση της διακύμανσης του σφάλματος πρόβλεψης .....	90
1.7.7 Διαγνωστικός έλεγχος των υποδειγμάτων VAR .....	91
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ .....	93
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....	97

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ



## 1.1 Εισαγωγή

Στο παρόν Τεχνικό Παράρτημα, επιχειρείται η παρουσίαση ορισμένων θεμάτων που βοηθούν στην καλύτερη κατανόηση της Διδακτορικής Διατριβής με τίτλο «Οι Οικονομετρικές Προσεγγίσεις της Γονιμότητας του Ελληνικού Πληθυσμού». Πρόκειται για διάφορες έννοιες που συμπληρώνουν τα όσα αναφέρονται στα κεφάλαια της Διατριβής καθώς και θεωρητικά και υπολογιστικά θέματα που αναφέρονται στα κεφάλαια αυτής.

Συγκεκριμένα αναφέρονται ορισμένες κοινωνιολογικές και ψυχολογικές θεωρίες της γονιμότητας, όπως είναι τα ταξινομικά υποδείγματα των Davis and Blake (1956) και του Freedman (1962) και τα θεωρητικά υποδείγματα των Fawcett, Hoffman, Fishbein, Hass και Beckman et al. Τα υποδείγματα αυτά συμπληρώνουν τις έννοιες που αναφέρονται στο 3ο Κεφάλαιο της Διατριβής.

Επίσης παρουσιάζονται ορισμένα θεωρητικά θέματα που αναφέρονται στο Κεφάλαιο 5 της Διατριβής, όπως η παρουσίαση των γραμμικών και συμμετρικών φίλτρων, η ανάλυση των ιδιοτήτων των ad hoc φίλτρων, η *AMB* ερμηνεία των φίλτρων *HP* και Butterworth καθώς επίσης γίνεται σύγκριση της αποτελεσματικότητας των ad hoc φίλτρων στην εξαγωγή της κυκλικής συνιστώσας των χρονολογικών σειρών *CBR* και *INC*.

Στη συνέχεια γίνεται αναφορά στη δυναμική ανάλυση ενός υποδείγματος ταυτοχρόνως προσδιοριζόμενων εξισώσεων, που παρουσιάζεται στο 6ο Κεφάλαιο της Διατριβής, στη φασματική ανάλυσή του, στην αξιολόγηση της δυναμικής κυκλικού υποδείγματος στην αναπαραγωγή κυκλικών κυμάνσεων των ενδογενών μεταβλητών του, οι οποίες προσομοιάζουν τις αντίστοιχες των πραγματικών δεδομένων καθώς και στην άσκηση δημογραφικής πολιτικής με τη χρήση ενός τέτοιου υποδείγματος.

Επιπλέον, γίνεται μια σύντομη περιγραφή των υποδειγμάτων αυτοπαλίνδρομων διανυσμάτων *VAR*, που παρουσιάζονται στο 7ο Κεφάλαιο της Διδακτορικής Διατριβής. Συγκεκριμένα παρουσιάζεται ο έλεγχος της ευστάθειας των υποδειγμάτων *VAR*, η εκτίμησή τους, ο έλεγχος της τάξης συνολοκλήρωσης, η ανάλυση αιτιότητας και εξωγένειας μέσω των υποδειγμάτων *VAR*, οι συναρτήσεις αιφνίδιων αντιδράσεων και συναρτήσεις διάσπασης της διακύμανσης του σφάλματος πρόβλεψης και ο διαγνωστικός έλεγχος των υποδειγμάτων *VAR*.

Τέλος, στο παράρτημα παρουσιάζεται ο υπολογισμός των σταθμίσεων του φίλτρου Baxter-King και του τροποποιημένου φίλτρου Baxter-King.

## 1.2 Κοινωνιολογικές θεωρίες της γονιμότητας

Η επιστήμη της δημογραφίας όπως είναι γνωστό περιλαμβάνει δύο μεγάλους κλάδους: α) Τη τυπική δημογραφία, η οποία ασχολείται με τη στατιστική ανάλυση και τη τεχνική παρουσίαση των πληθυσμιακών φαινομένων καθώς και με τη διερεύνηση των προοπτικών και

των τάσεων των φαινομένων αυτών ανεξάρτητα όμως από τους παράγοντες οι οποίοι συμβάλλουν στη διαμόρφωση τους. β) Την κοινωνική δημογραφία, η οποία μελετά τα πληθυσμιακά φαινόμενα ως εξηρημένες και ως ανεξάρτητες μεταβλητές, δηλαδή ως φαινόμενα τα οποία τελούν σε αλληλοεξάρτηση με άλλα φαινόμενα από τα οποία διαμορφώνονται ή τα οποία διαμορφώνουν. Στην πρώτη περίπτωση η μελέτη συνίσταται στην εξέταση των παραγόντων και των συνθηκών οι οποίοι διαμορφώνουν τα πληθυσμιακά φαινόμενα ενώ στη δεύτερη εκείνο που ενδιαφέρει είναι πώς τα πληθυσμιακά φαινόμενα και οι μεταβολές τους επιδρούν στη διαμόρφωση των κοινωνικών συνθηκών και καταστάσεων.

Βασική προϋπόθεση των αναλύσεων της κοινωνικής δημογραφίας είναι ότι η γεννητικότητα αποτελεί μια μορφή κοινωνικής συμπεριφοράς και ότι καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από κοινωνικούς κανόνες και κοινωνικά πρότυπα μέσω των οποίων διαμορφώνονται οι επιλογές των γονέων. Οι επιλογές αυτές είναι περιορισμένες όσον αφορά τον αριθμό των παιδιών τα οποία θα αποκτήσουν οι γονείς καθώς και τον τρόπο με τον οποίο θα τα μεγαλώσουν. Το φάσμα των επιλογών καθορίζεται από τα πρότυπα της κοινωνικής ομάδας των γονέων, από τους κανόνες της ευρύτερης κοινωνίας στην οποία ανήκουν και από τα διαθέσιμα αγαθά ή τις εναλλακτικές δραστηριότητες που διεκδικούν μαζί με τα παιδιά, το διαθέσιμο χρόνο και τους οικονομικούς τους πόρους.

Σε αντίθεση με την οικονομική θεωρία της γενετήσιας συμπεριφοράς της οποίας βασική προϋπόθεση είναι ότι οι γονείς είναι ελεύθεροι να επιλέξουν τόσο τον αριθμό των παιδών όσο και το χρόνο που θα τα αποκτήσουν, στην κοινωνιολογική θεωρία η αναπαραγωγική συμπεριφορά καθορίζεται από την κοινωνική δομή και την επίδραση την οποία αυτή ασκεί στους ρόλους των φύλων, στα πρότυπα για την ανατροφή παιδιών, στους στόχους και τις φιλοδοξίες των γονέων και συνεπώς στο πώς αυτοί αντιλαμβάνονται το κόστος και το όφελος των παιδιών.

Στην ενότητα αυτή, αναφέρονται οι προσπάθειες των κοινωνιολόγων για μια θεωρητική εξήγηση της γενετήσιας συμπεριφοράς. Περιγράφονται περιληπτικά, τα ταξινομικά υποδείγματα των Davis and Blake (1956) και του Freedman (1962) στα οποία η γεννητικότητα είναι συνάρτηση κοινωνικών επιδράσεων, βιολογικών παραγόντων και ατομικής συμπεριφοράς. Επίσης παρουσιάζονται οι προσεγγίσεις για την ερμηνεία της κοινωνικής κινητικότητας και της σχέσεώς της με τη γεννητικότητα. Τέλος, καλύπτονται οι επιδράσεις των ρόλων των φύλων στη γεννητικότητα, ξεκινώντας από τη διατύπωση της εκδήλωσης των ρόλων στις στάσεις και τη συμπεριφορά και ολοκληρώνοντας με την παρουσίαση της φεμινιστικής προσέγγισης η οποία επικεντρώνεται στην επίδραση της κοινωνικής δομής στους ρόλους των φύλων και κατ' επέκταση στη γεννητικότητα.

## 1.2.1 Οι ενδιάμεσες και προσδιορίζουσες μεταβλητές της γονιμότητας

### 1.2.1.1 Το εννοιολογικό σχήμα των Davis and Blake

Στα μέσα της δεκαετίας του 1950, οι Αμερικανοί κοινωνιολόγοι K. Davis και J. Blake επεσήμαναν τόσο το γεγονός ότι οι παρατηρούμενες διαφορές μεταξύ της γονιμότητας των πληθυσμών των υποανάπτυκτων και των ανεπτυγμένων χωρών οφείλονται σε διαφορές κοινωνικής οργάνωσης όσο και το γεγονός ότι κοινωνίες με όμοια οργάνωση παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές γονιμότητας που οφείλονται στο ότι ένα ορισμένο δημογραφικό φαινόμενο όπως η υψηλή ή η χαμηλή γονιμότητα είναι δυνατόν να επιτυγχάνεται με παρομοίους τρόπους επενέργειας διαφορετικών θεσμών (1956:211).

Οι διαπιστώσεις αυτές, τους οδήγησαν στη διατύπωση ενός αναλυτικού πλαισίου το οποίο επιτρέπει τη συστηματική μελέτη του τρόπου με τον οποίο επενεργούν οι κοινωνικοί παράγοντες που διαμορφώνουν τα μεγέθη της γονιμότητας ενός πληθυσμού. Σύμφωνα με αυτούς, οι κοινωνικοί παράγοντες που επηρεάζουν τη γονιμότητα ενός πληθυσμού επιδρούν πάντοτε έμμεσα και αθροιστικά. Επενεργούν μέσω ενός περιορισμένου αριθμού χαρακτηριστικών συνθηκών, η κάθε μια από τις οποίες ασκεί τη δική της θετική ή αρνητική επίδραση. Ως εκ τούτου οι χαρακτηριστικές αυτές συνθήκες ονομάζονται ενδιάμεσες μεταβλητές της γονιμότητας. Οι μεταβλητές αυτές είναι έντεκα και κατατάσσονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες ανάλογα με το στάδιο της αναπαραγωγικής περιόδου στο οποίο παρεμβαίνουν. Το ταξινομικό σχήμα των Davis and Blake παρατίθεται στον Πίνακα 1.1.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1:** Οι ενδιάμεσες μεταβλητές της γονιμότητας κατά Davis και Blake

I.	<b>Γενετήσιες Μεταβλητές</b>
A.	Παράγοντες που καθορίζουν το σχηματισμό και τη λύση γενετήσιων ενώσεων κατά την αναπαραγωγική περίοδο
1.	Ηλικία εισόδου σε γενετήσια ένωση
2.	Μόνιμη αγαμία
3.	Τμήμα της αναπαραγωγικής περιόδου που διανύεται μετά τη γενετήσια ένωση ή μεταξύ δυο γενετήσιων σχέσεων
B.	Παράγοντες που καθορίζουν την έκθεση σε γενετήσια σχέση στη διάρκεια της γενετήσιας ένωσης
4.	Εκούσια αποχή
5.	Ακούσια αποχή (λόγω ασθένειας, ανικανότητας, αναπόδραστου αλλά προσωρινού χωρισμού)
6.	Συχνότητα επαφών
II.	<b>Μεταβλητές Σύλληψης</b>
7.	Γονιμότητα ή στειρότητα που επηρεάζεται από μη ηθελημένους παράγοντες
8.	Χρήση ή μη αντισυλληπτικών μέσων
9.	Γονιμότητα ή στειρότητα που επηρεάζεται από ηθελημένους παράγοντες (στείρωση, ιατρική θεραπεία κλπ.)
III.	<b>Μεταβλητές Κύησης</b>
10.	Εμβρυϊκή θνησιμότητα που οφείλεται σε ακούσιους λόγους
11.	Εμβρυϊκή θνησιμότητα που οφείλεται σε εκούσιους λόγους

Επομένως οι μεταβλητές αυτές συνιστούν το πλαίσιο μέσω του οποίου είναι δυνατό να κριθεί ο βαθμός σχετικότητας των κοινωνικών και των πολιτιστικών παραγόντων ή κατά άλλη διατύπωση των προσδιορίζουσών μεταβλητών στη γεννητικότητα. Από τις πλέον σημαντικές μεταβλητές του πλαισίου αυτού είναι αυτές που σχετίζονται με το γάμο και οι οποίες περιλαμβάνονται στην κατηγορία των γενετήσιων μεταβλητών. Η σύνδεση μεταξύ της ηλικίας της γυναίκας κατά τον πρώτο της γάμο και της γεννητικότητας αποτελεί την πλέον σταθερή και

εδραιωμένη σχέσηη στο χώρο της δημογραφικής επιστήμης (Bumpass, 1982).

Στις ανεπτυγμένες χώρες, η σύνδεση μεταξύ της γαμηλιότητας ή της κατά το γάμο ηλικίας και της γεννητικότητας, η οποία όπως αναφέρθη ανωτέρω παρουσιάζεται πολύ ισχυρή στη βιβλιογραφία, θα πρέπει λογικά να αποδυναμωθεί δεδομένου ότι ο γάμος δεν αποτελεί πλέον την απαραίτητη κοινωνική προϋπόθεση για την τεκνοποίηση όπως π.χ. στις σκανδιναβικές χώρες όπου το 40% των συνολικών γεννήσεων πραγματοποιούνται εκτός γάμου. Επομένως ο γάμος δεν αποτελεί πλέον έγκυρο δείκτη της γεννητικότητας όπως προϋποθέτει το ταξινομικό σχήμα των Davis και Blake.

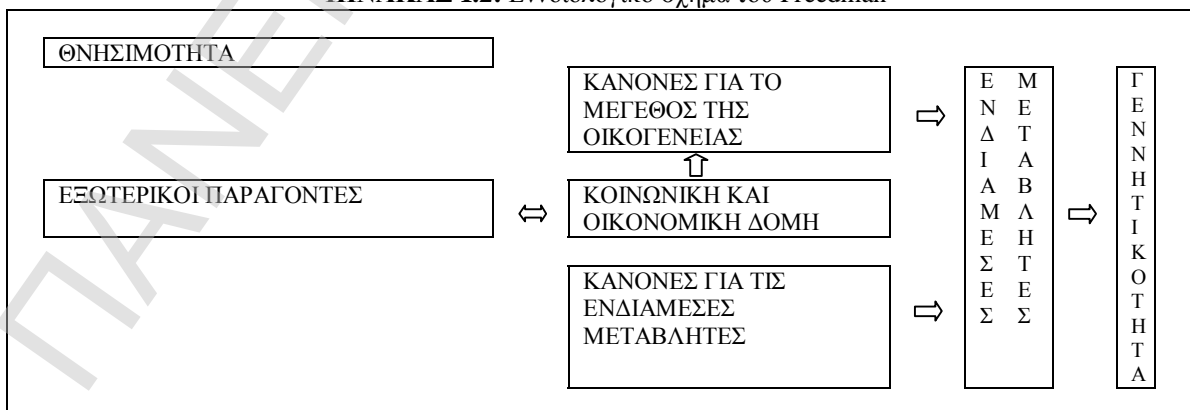
Στις τρεις κατηγορίες του ταξινομικού σχήματος των Davis και Blake διαπιστώνεται μια εκούσια και μια ακούσια διάσταση, η οποία δε συμβάλλει μόνο στην εξήγηση της γεννητικότητας αλλά και στη διαμόρφωση της κοινωνικής πολιτικής που πρόκειται να εφαρμοσθεί. Εάν μια εκ των μεταβλητών συμβάλλει στην υψηλή γεννητικότητα και ως εκ τούτου δύναται να χαρακτηριστεί ότι έχει εκούσια διάσταση τότε στόχος των κοινωνικών μέτρων θα πρέπει να είναι η αλλαγή της επιθυμητής γεννητικότητας. Εάν όμως μια εκ των μεταβλητών αυτών συμβάλλει στη χαμηλή γεννητικότητα όπως η ακούσια αποχή, τότε πρέπει να ληφθούν δομικές αλλαγές που θα μπορούσαν να επιδράσουν θετικά σε αυτή τη μεταβλητή.

### 1.2.1.2 Το εννοιολογικό σχήμα του Freedman

Μολονότι οι Davis και Blake επισημαίνουν την έμμεση επίδραση των προσδιορισουσών μεταβλητών δηλαδή των κοινωνικών και των πολιτιστικών παραγόντων στη γεννητικότητα, η όλη εργασία τους επικεντρώνεται στις ενδιάμεσες μεταβλητές της γεννητικότητας.

Ο Freedman (1962) ενσωμάτωσε το ταξινομικό σχήμα των Davis και Blake σε ένα ευρύτερο πλαίσιο το οποίο αναδεικνύει τις επιδράσεις των κοινωνικών κανόνων και της κοινωνικής δομής στη γεννητικότητα μέσω των ενδιάμεσων μεταβλητών. Το εννοιολογικό σχήμα του Freedman παρατίθεται στον Πίνακα 1.2.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2: Εννοιολογικό σχήμα του Freedman



Σύμφωνα με τον Freedman, οι κοινωνίες χαρακτηρίζονται από κανόνες που ενθαρρύνουν τη γεννητικότητα αλλά και από κανόνες που καθορίζουν το ιδανικό μέγεθος της οικογένειας.

Στην πρώτη περίπτωση, σχετικές έρευνες έδειξαν ότι παρόλο η γεννητικότητα έχει μειωθεί στις δυτικές κοινωνίες και το διάστημα μεταξύ του γάμου και της τεκνοποίησης έχει αυξηθεί (Knaub et al., 1983), η εθελουσία ατεκνία έχει ελάχιστα αυξηθεί (Houseknecht (1979) και Veeners (1979)), ενώ στη δεύτερη σχετικές έρευνες έδειξαν ότι οι γονείς χωρίς παιδιά αισθάνονται κοινωνική πίεση να τεκνοποιήσουν ενώ αντίθετα γονείς οι οποίοι ήδη έχουν δύο παιδιά δέχονται πιέσεις να μην τεκνοποιήσουν (Hofferthn, 1980).

Κοινωνικοί κανόνες επηρεάζουν και τις ενδιάμεσες μεταβλητές όπως τη χρήση αντισυλληπτικών μέσων ή την κατά το γάμο ηλικία, οι οποίες στη συνέχεια επιδρούν στη γεννητικότητα. Οι κανόνες αυτοί μακροπρόθεσμα προσαρμόζονται στους κανόνες για το μέγεθος της οικογένειας. Επίσης αλλαγές στην κοινωνική δομή προκαλούν την ανάλογη προσαρμογή των κοινωνικών κανόνων όσον αφορά το μέγεθος της οικογένειας. Επί παραδείγματι, η κατάργηση της οικογένειας ως οικονομικής μονάδας οδήγησε σε μειωμένο οικονομικό όφελος των παιδιών με αποτέλεσμα την προσαρμογή των κοινωνικών κανόνων για το ιδανικό μέγεθος της οικογένειας σε αυτή τη νέα πραγματικότητα.

Άλλες πλευρές της κοινωνικής δομής, όπως η εξωτερική απασχόληση της γυναίκας επιδρούν στους κοινωνικούς κανόνες οι οποίοι με τη σειρά τους επηρεάζουν τις ενδιάμεσες μεταβλητές όπως την κατάλληλη ηλικία της γυναίκας για γάμο. Τέλος, η θνησιμότητα καθορίζει το επίπεδο της γεννητικότητας το οποίο είναι απαραίτητο για να επιτευχθεί ο αριθμός των παιδιών που επιθυμούν να αποκτήσουν οι γονείς. Παράγοντες εκτός του κοινωνικού συστήματος όπως οι ασθένειες, η έλλειψη τροφίμων κλπ. επιδρούν στη θνησιμότητα ή στις ενδιάμεσες μεταβλητές όπως στη βιολογική γονιμότητα και κατ' επέκταση επηρεάζουν τη γεννητικότητα.

Σε όλες τις θεωρητικές διατυπώσεις για τη γεννητικότητα επιχειρείται αμέσως ή εμμέσως η σύνδεση του μακρό-επιπέδου με την ατομική απόφαση για τη γεννητικότητα.

Στο εννοιολογικό πλαίσιο των Davis-Blake-Freedman, οι κοινωνικοδομικοί παράγοντες επιδρούν στις έντεκα ενδιάμεσες μεταβλητές, οι οποίες στη συνέχεια επηρεάζουν στο ατομικό επίπεδο τους παράγοντες που είναι απαραίτητοι για την τεκνοποιία.

Στην υπόθεση για την επίδραση της κοινωνικής κινητικότητας, οι διαφορές που παρατηρούνται στη γεννητικότητα των κινητικών και των μη κινητικών ατόμων αποδίδονται στα διαφορετικά κοινωνικά πρότυπα και στη διαφορετική κοινωνικοποίηση που χαρακτηρίζουν την κοινωνικοοικονομική θέση προέλευσης και προορισμού. Ο βαθμός ταύτισης ενός κινητικού ατόμου της θέσεως προορισμού και της σταθερότητας την οποία της αποδίδει καθορίζουν τα πρότυπα που θα υιοθετήσει. Επομένως και στην υπόθεση αυτή οι μακρο-μεταβλητές συνδέονται με τη γεννητικότητα στο ατομικό επίπεδο.

Τέλος, οι στάσεις για τους ρόλους των δύο φύλων στο ατομικό επίπεδο και η επίδρασή

τους στη γεννητικότητα είναι συνάρτηση της ανισότητας των θέσεων μεταξύ των ανδρών και των γυναικών που εκδηλώνεται στον ευρύτερο κοινωνικό χώρο, διατηρείται μέσω των διαδικασιών κοινωνικοποίησης και κοινωνικού ελέγχου και μεταφέρεται στους ρόλους που ισχύουν στα πλαίσια του νοικοκυριού.

Στο κανονιστικό επίπεδο αναπαραγωγής το οποίο είναι ομαδικό χαρακτηριστικό, υπάρχει η δυνατότητα απόκλισης εντός των αποδεκτών και των προκαθορισμένων ορίων και επομένως η προσωπική απόφαση για τον αριθμό των παιδιών που επιθυμεί να αποκτήσει ένα ζευγάρι είναι αυτεξούσια εφόσον δεν επηρεάζονται οι κανόνες αναπαραγωγής της κοινωνικής ομάδας στην οποία το ζευγάρι εντάσσεται. Εντός των προκαθορισμένων αυτών ορίων, οι οικονομικές συνθήκες, οι προσδοκίες των γυναικών για κοινωνική και επαγγελματική καταξίωση και άλλες μικρο-μεταβλητές συνθέτουν τις προσωπικές στάσεις οι οποίες σε συνδυασμό με τα ομαδικά χαρακτηριστικά προσδιορίζουν την ατομική απόφαση.

Επομένως το χαρακτηριστικό γνώρισμα της κοινωνιολογικής προσέγγισης στην ερμηνεία της γεννητικότητας είναι ότι επιδιώκεται η διερεύνηση της διασύνδεσης του συλλογικού, κοινωνικού επιπέδου με τη γεννητικότητα.

### **1.3 Ψυχολογικές θεωρίες της γονιμότητας**

Οι πρώτες προσπάθειες για την ερμηνεία της γενετήσιας συμπεριφοράς βάσει ψυχολογικών παραγόντων υπήρξαν άκαρπες (Kaiser and Whelpton (1958), Westoff et al. (1961, 1968), Westoff and Potvin (1967) και Jaccard and Davidson (1976)). Το γεγονός αυτό δύναται να αποδοθεί στην έλλειψη ενός ολοκληρωμένου πλαισίου στο οποίο οι ψυχολογικές μεταβλητές θα έπρεπε να διαμεσολαβούν μεταξύ κοινωνικοοικονομικών παραγόντων και γεννητικότητας (Namboodiri, 1978). Στις πλέον πρόσφατες προσεγγίσεις, επιχειρείται ο εντοπισμός των ενδιάμεσων αυτών μεταβλητών οι οποίες σε αλληλοεπίδραση με τους κοινωνικοοικονομικούς παράγοντες επηρεάζουν τη γεννητικότητα.

Τα βασικότερα θεωρητικά υποδείγματα που εντάσσονται στο χώρο της Ψυχολογίας είναι το εννοιολογικό σχήμα των L. Hoffman and M. Hoffman, που επικεντρώνονται στις αξίες των παιδιών, το υπόδειγμα που αναφέρεται στις στάσεις και προθέσεις για τη γεννητικότητα (Fishbein, Hass) και τα υποδείγματα που αναφέρονται στη διαδικασία διαπραγμάτευσης μεταξύ των συζύγων απ' όπου απορρέει η απόφαση για τη γεννητικότητα (Beckman, Bagozzi και Van Loo).

#### Το εννοιολογικό σχήμα των L. Hoffman and M. Hoffman

Ο ρόλος της αξίας των παιδιών και τα κίνητρα των γονέων για τεκνοποίηση απετέλεσαν το αντικείμενο μελέτης των περισσότερων ερευνητών για την ερμηνεία της γενετήσιας συμπεριφοράς στο χώρο της Ψυχολογίας (Arnold et al. (1975) και Fawcett (1972, 1976)).

Το σχήμα των Hoffman and Hoffman (1973), στηρίζεται στην υπόθεση ότι το κίνητρο για τεκνοποίηση εξαρτάται σε ένα μεγάλο βαθμό από την αξία που έχουν τα παιδιά για τους γονείς. Σύμφωνα δε με αυτό, οι αξίες των παιδιών είναι δυνατό να είναι θετικές ή αρνητικές, διαφοροποιούμενες ανάλογα με την κοινωνία αλλά και την κοινωνικοοικονομική ομάδα μιας συγκεκριμένης κοινωνίας. Η απόφαση των γονέων για την απόκτηση ενός ακόμη παιδιού εξαρτάται από την σχετική σπουδαιότητα των θετικών και αρνητικών αξιών. Όσο μεγαλύτερη είναι η σπουδαιότητα των θετικών αξιών τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα απόκτησης ενός ακόμη παιδιού από τους γονείς.

Στο εννοιολογικό σχήμα των Hoffman and Hoffman, οι θετικές αξίες οι οποίες συνδέονται με τα παιδιά κατατάσσονται σε εννέα βασικές κατηγορίες: 1) Γόητρο και κοινωνική ταυτότητα, 2) Διεύρυνση της προσωπικότητας, σύνδεση με μια ευρύτερη οντότητα, "αθανασία", 3) Ηθική (θρησκεία, αλtruισμός, καλό του συνόλου), 4) Σύνδεσμος με την πρωτογενή ομάδα, κοινωνικός δεσμός, 5) Τόνωση, πρωτοτυπία, ψυχαγωγία, 6) Δημιουργία, επιτυχία, ικανότητα 7) Δύναμη, επιρροή, αποτελεσματικότητα, 8) Κοινωνική σύγκριση, ανταγωνισμός και 9) Οικονομικό όφελος.

Εκτός των θετικών αξιών στο εννοιολογικό σχήμα των Hoffman and Hoffman, περιλαμβάνονται και άλλες μεταβλητές όπως οι εναλλακτικοί τρόποι ικανοποίησης των θετικών αξιών, οι αρνητικές αξίες (το κόστος των παιδιών), τα εμπόδια στην επίτευξη των αξιών και οι παράγοντες που διευκολύνουν την επίτευξη των αξιών.

Στην περίπτωση υπάρξεως εναλλακτικών τρόπων ικανοποίησης μιας αξίας, τότε η συγκεκριμένη αξία των παιδιών μειώνεται. Αυτό ισχύει κυρίως για τις εργαζόμενες γυναίκες με υψηλή μόρφωση οι οποίες αποδίδουν μικρότερη αξία στο οικονομικό όφελος των παιδιών ενώ δεν αναφέρουν τόσο συχνά την ψυχαγωγική ενασχόληση με τα παιδιά (Hoffman and Manis, 1979). Αυτό εξηγεί και τη χαμηλότερη γεννητικότητά τους.

Οι αρνητικές αξίες ή το κόστος των παιδιών αντιστοιχούν αφενός στα έξοδα των γονέων για την ανατροφή τους και αφετέρου στο ευκαιριακό κόστος των γυναικών οι οποίες αναγκάζονται να εγκαταλείψουν την εργασία τους για χάριν της φροντίδας τους. Τα εμπόδια που δυσκολεύουν την επίτευξη μιας αξίας μέσω των παιδιών περιλαμβάνουν παράγοντες όπως το χαμηλό εισόδημα, τα προβλήματα στέγης ή υγείας των γονέων κλπ. Παράγοντες που διευκολύνουν την επίτευξη των αξιών περιλαμβάνουν την οικονομική άνεση των γονέων, την ύπαρξη οικιακής βοηθού καθώς και τον επαρκή στεγαστικό χώρο.

Το ταξινομικό σχήμα των Hoffman and Hoffman αποτελεί ένα γενικό πλαίσιο για την ανάλυση των παραγόντων οι οποίοι αποτελούν το κίνητρο τεκνοποίησης. Οι Hoffman and Hoffman χρησιμοποιούν τις έννοιες της οικονομικής θεωρίας από την άποψη της αναγνώρισης του αμέσου και του εμμέσου κόστους των παιδιών, των εναλλακτικών δραστηριοτήτων οι

οποίες συναγωνίζονται τα παιδιά ως πηγές ορισμένων αξιών όπως του κοινωνικού κύρους, της αίσθησης δημιουργίας, ικανότητας, επιτυχίας κλπ. καθώς και τους οικονομικούς περιορισμούς υπό την επίδραση των οποίων λαμβάνονται οι αποφάσεις για τα παιδιά. Επιπλέον ισχυρίζονται ότι άλλοι παράγοντες σχετιζόμενοι με την κοινωνική δομή επιδρούν στις μεταβλητές του υποδείγματος τους και ούτως έμμεσα στην επιθυμία τεκνοποίησης.

Εκτός του ταξινομικού τους, όμως, σχήματος, οι Hoffman and Hoffman δεν έκαναν καμιά προσπάθεια να συνδέσουν τις αξίες των τρόπων να προτείνουν συγκεκριμένες υποθέσεις για τις συνθήκες κάτω από τις οποίες ορισμένες αξίες και όχι άλλες αποτελούν το κίνητρο τεκνοποίησης.

### Το υπόδειγμα του Fishbein

Η ερμηνεία της ατομικής συμπεριφοράς συμπεριλαμβανομένης και της αναπαραγωγικής, υπήρξε το αντικείμενο μελέτης μεγάλου αριθμού ψυχολόγων (Davidson and Jaccard (1976, 1979), Fishbein (1972) και Fishbein et al. (1980)). Σύμφωνα με τους ψυχολόγους αυτούς, οι πεποιθήσεις ενός ατόμου για τις επιπτώσεις μιας συγκεκριμένης συμπεριφοράς επηρεάζουν τις προθέσεις του οι οποίες αποτελούν το μοναδικό προσδιοριστικό παράγοντα αυτής της συμπεριφοράς. Οι προθέσεις του ατόμου για την εκδήλωση μιας συγκεκριμένης συμπεριφοράς βασίζονται σε έναν υπολογισμό των θετικών και των αρνητικών επιπτώσεων της συμπεριφοράς αυτής αλλά και των επιδράσεων του κοινωνικού συνόλου.

Σε ένα ενδιαφέρον άρθρο του, ο Fishbein (1972) ισχυρίζεται ότι η πρόθεση ενός ατόμου να δράσει με ένα συγκεκριμένο τρόπο, όπως το να τεκνοποιήσει, είναι αποτέλεσμα δύο βασικών παραγόντων: α) Των επιπτώσεων της συγκεκριμένης συμπεριφοράς και της αξίας αυτών των επιπτώσεων και β) Των κοινωνικών κανόνων που καθορίζουν τη συμπεριφορά του και του κινήτρου που έχει για την προσαρμογή του στους κανόνες αυτούς.

Η αλγεβρική μορφή του θεωρητικού υποδείγματός του έχει ως εξής:

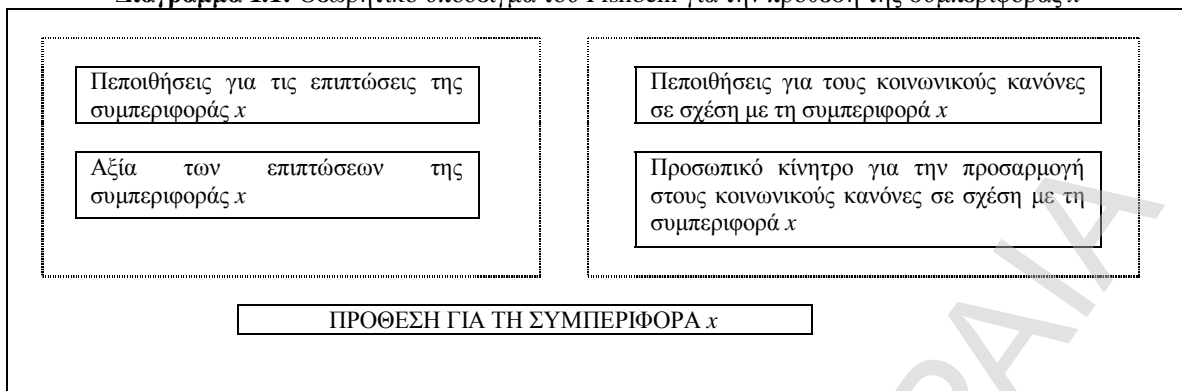
$$BI = \left( \sum_{i=1}^n B_i a_i \right) w_1 + \left( \sum_{i=1}^n NB_i Mc_i \right) w_2, \quad (1.1)$$

οπού  $BI$  = η πρόθεση μιας συγκεκριμένης συμπεριφοράς,  $B_i$  = η πεποίθηση για την επίπτωση της συμπεριφοράς " $x_i$ ",  $a_i$  = η αξία της επίπτωσης της συμπεριφοράς " $x_i$ ",  $NB_i$  = η πεποίθηση ότι ένα σημαντικό πρόσωπο " $y_i$ " νομίζει ότι πρέπει ή δεν πρέπει να υλοποιηθεί αυτή η συμπεριφορά,  $Mc_i$  = το κίνητρο να προσαρμόσει τη συμπεριφορά του στις απόψεις του προσώπου " $y_i$ " και  $w_1, w_2$  = σταθμίσεις που αντανακλούν τη σπουδαιότητα της επίδρασης κάθε ενός από τους δύο παράγοντες στην πρόθεση ενός ατόμου να εκδηλώσει μια συγκεκριμένη συμπεριφορά.

Το υπόδειγμα του Fishbein παρίσταται σχηματικά στο Διάγραμμα 1.1



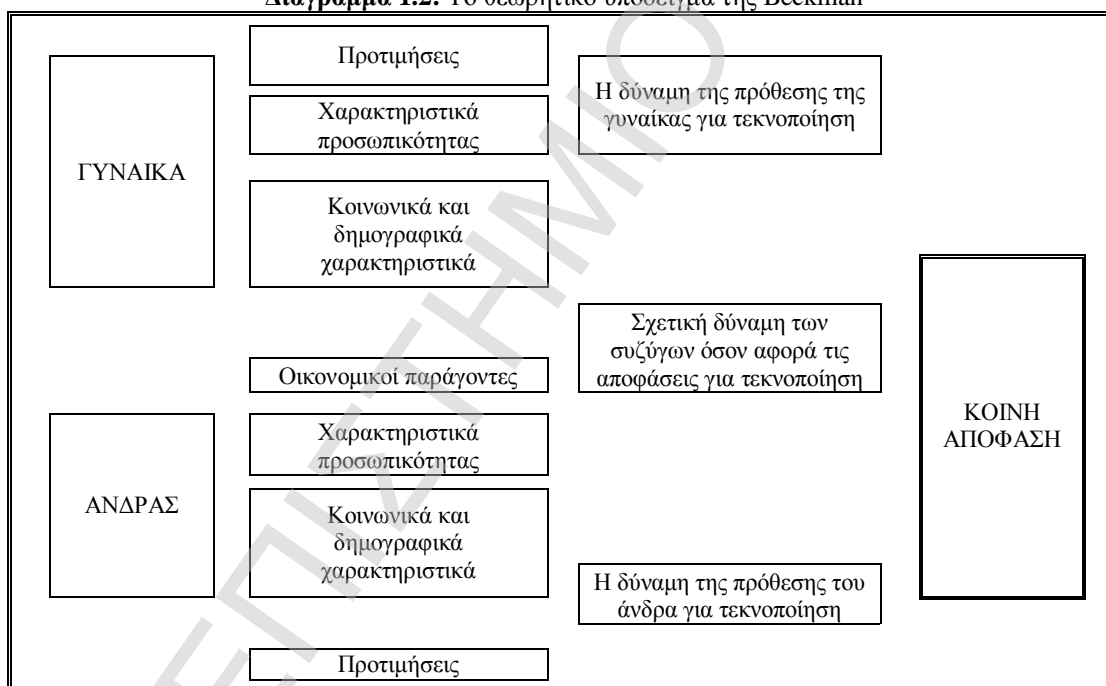
**Διάγραμμα 1.1:** Θεωρητικό υπόδειγμα του Fishbein για την πρόθεση της συμπεριφοράς  $x$



Το υπόδειγμα της Beckman

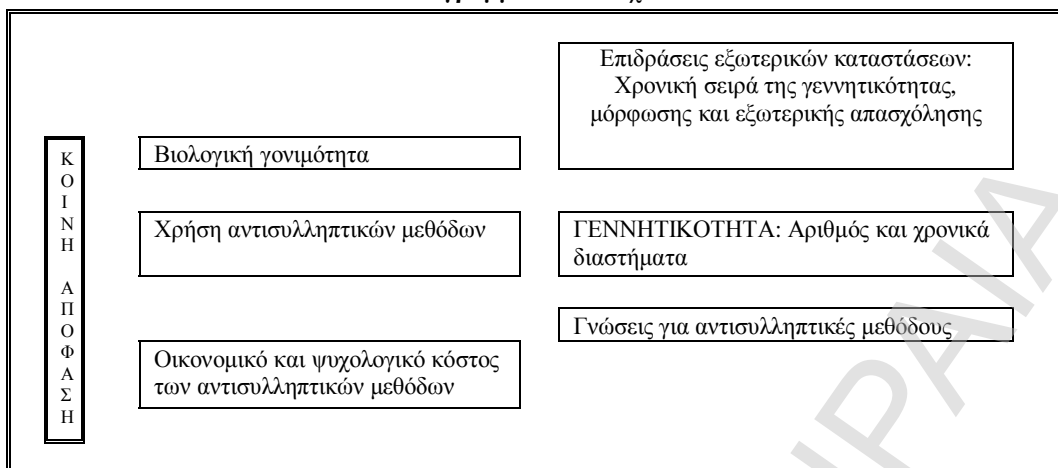
Η Beckman (1978) διετύπωσε ένα κοινωνικό-ψυχολογικό υπόδειγμα του οποίου βασικό χαρακτηριστικό είναι ότι η κοινή απόφαση του ζευγαριού για τη γεννητικότητα δεν λαμβάνεται ως δεδομένη, αλλά εξετάζεται η διαδικασία μέσω της οποίας το ζευγάρι οδηγείται σε αυτή την απόφαση. Το θεωρητικό υπόδειγμα της Beckman παρουσιάζεται σχηματικά στο Διάγραμμα 1.2.

**Διάγραμμα 1.2:** Το θεωρητικό υπόδειγμα της Beckman



Από τη μελέτη του Διαγράμματος 1.2, διαπιστώνεται ότι το θεωρητικό υπόδειγμα της Beckman αναγνωρίζει την επίδραση των κοινωνικών και των οικονομικών μεταβλητών στις αποφάσεις του ζευγαριού για τεκνοποίηση αλλά ταυτόχρονα λαμβάνει υπόψη και τις ψυχολογικές μεταβλητές - προθέσεις, προτιμήσεις και χαρακτηριστικά της προσωπικότητας - οι οποίες διαμεσολαβούν μεταξύ των κοινωνικοοικονομικών παραγόντων και της απόφασης για τεκνοποίηση.

Διάγραμμα 1.2: συνέχεια



Το θεωρητικό υπόδειγμα της Beckman δεν επικεντρώνεται μόνο στην ανάλυση της κοινής απόφασης του ζευγαριού για τεκνοποίηση αλλά καλύπτει και τη διαδικασία η οποία οδηγεί σε αυτή την κοινή απόφαση, εξετάζοντας την επίδραση των προτιμήσεων στη διαμόρφωση των προθέσεων και των δύο ατόμων οι οποίες οδηγούν στη λήψη μιας κοινής απόφασης στην οποία η προτίμηση του ατόμου με μεγαλύτερη επιρροή στη συζυγική σχέση βαραίνει περισσότερο. Η κοινή απόφαση μεταφράζεται σε συγκεκριμένη συμπεριφορά όσον αφορά τον αριθμό των παιδιών που θα αποκτήσει το ζευγάρι καθώς και τα χρονικά διαστήματα μεταξύ των διαδοχικών γεννήσεων λαμβανομένης όμως υπόψη τόσο της βιολογικής γονιμότητας και των δύο ατόμων όσο και της χρήσης αντισυλληπτικών μεθόδων. Το θεωρητικό υπόδειγμα της Beckman αναγνωρίζει το ρόλο του εισοδήματος, των τιμών και του κόστους ευκαιρίας των παιδιών, έννοιες που περιλαμβάνονται στη Μικροοικονομική θεωρία, αν και έρχεται σε αντίθεση με αυτή όσον αφορά τις προτιμήσεις οι οποίες είναι ομοιογενείς και κοινές στα πλαίσια του νοικοκυριού.

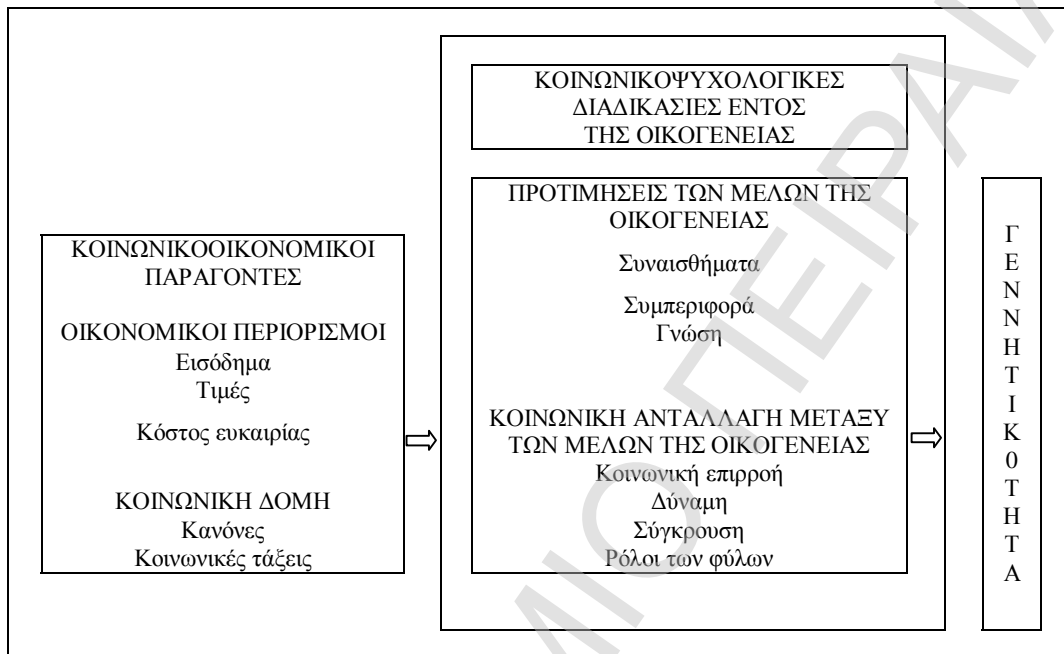
#### Το υπόδειγμα των Bagozzi and Van Loo

Τη βάση του θεωρητικού υποδείγματος των Bagozzi and Van Loo (1976b, 1980) αποτελεί η θεωρία της κοινωνικής ανταλλαγής (*Theory of social exchange*) σύμφωνα με την οποία η διαδικασία της ανταλλαγής και της διαπραγμάτευσης μεταξύ των συζύγων επηρεάζει την απόφαση για τη γεννητικότητα. Η διαδικασία της ανταλλαγής και της διαπραγμάτευσης μεταξύ των συζύγων αλληλοεπηρεάζεται από τις προτιμήσεις, τη συμπεριφορά και τα συναισθήματά τους, έχοντας άμεση επίδραση στην απόφαση για τη γεννητικότητα. Παράλληλα όμως οι προτιμήσεις και η διαδικασία διαπραγμάτευσης μεταξύ των συζύγων καθορίζεται από κοινωνικές και οικονομικές μεταβλητές οι οποίες έχουν κατ' αυτό τον τρόπο έμμεση επίδραση στην απόφαση για τη γεννητικότητα. Το θεωρητικό υπόδειγμα των Bagozzi and VanLoo παρουσιάζεται σχηματικά στο Διάγραμμα 1.3, ενώ η μαθηματική του μορφή είναι μια σύνθετη συνάρτηση της μορφής

$$\left. \begin{matrix} F = F(W) \\ W = W(Z) \end{matrix} \right\} \Rightarrow F = F(W(Z)) = F(Z), \quad (1.2)$$

όπου  $F$  = γεννητικότητα,  $W$  = κοινωνικοψυχολογικές μεταβλητές και  $Z$  = κοινωνικοοικονομικοί παράγοντες.

**Διάγραμμα 1.3:** Το θεωρητικό υπόδειγμα των Bagozzi and Van Loo



### Το υπόδειγμα της Hass

Βασική προϋπόθεση του θεωρητικού υποδείγματος της Hass (1974) είναι ότι οι στάσεις της γυναίκας για τα παιδιά τα οποία θέλει να αποκτήσει μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου και αλλάζουν σύμφωνα με το συγκεκριμένο στάδιο στο οποίο αυτή ευρίσκεται δηλαδή προ της σύλληψης, κατά τη διάρκεια της εγκυμοσύνης και μετά τη γέννηση.

Το θεωρητικό υπόδειγμα της Hass παρουσιάζεται σχηματικά στο Διάγραμμα 1.4. Από το διάγραμμα αυτό προκύπτει ότι η απόφαση για τη γεννητικότητα αναλύεται για κάθε στάδιο χωριστά το οποίο έχει τα ίδια χαρακτηριστικά αναφορικά με τη διαχρονική του πορεία.

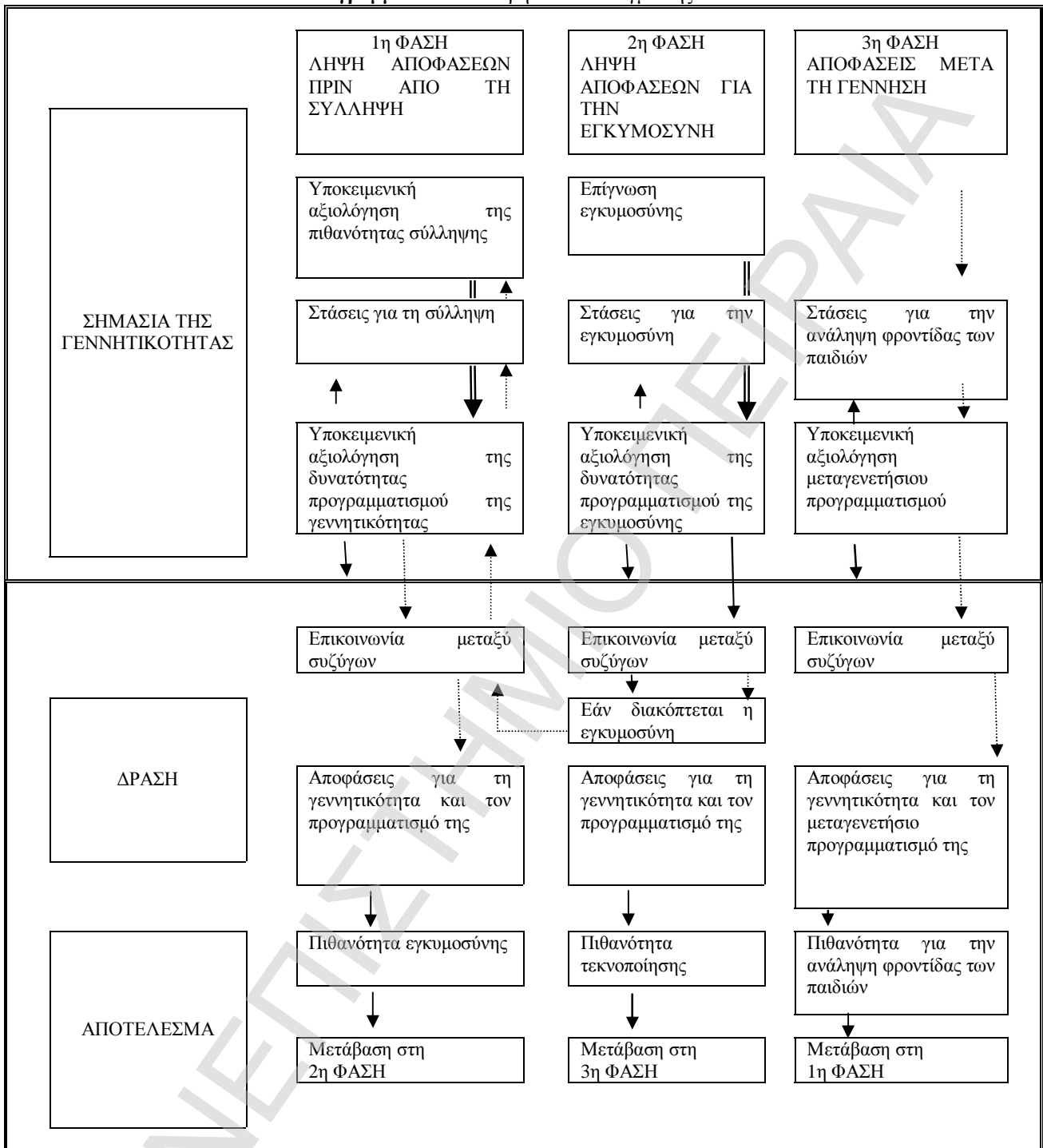
Το πρώτο στάδιο, δηλαδή πριν από τη σύλληψη, το οποίο περιλαμβάνει την αντίληψη την οποία έχει το ζευγάρι για τη σημασία της γεννητικότητας, αποτελείται από τη συνειδητοποίηση για τον κίνδυνο σύλληψης, τη γνώση για τις αντισυλληπτικές μεθόδους και τις στάσεις για τη σύλληψη οι οποίες εξαρτώνται από εξωτερικούς παράγοντες και κοινωνικούς κανόνες.

Το δεύτερο στάδιο στη λήψη αποφάσεων αρχίζει με τη συνειδητοποίηση και την επιβεβαίωση της εγκυμοσύνης. Μετά την επιβεβαίωση της εγκυμοσύνης τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της γέννησης αναθεωρούνται σύμφωνα με τους επικρατούντες κοινωνικούς κανόνες.

Το τρίτο στάδιο περιλαμβάνει τις αποφάσεις των γονέων όταν το παιδί έχει πλέον γεννηθεί. Η συγκεκριμένη γέννηση επηρεάζει τις στάσεις των γονέων και τα αντιληπτά

πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα αυτού του παιδιού αναθεωρούνται.

**Διάγραμμα1.4:** Το θεωρητικό υπόδειγμα της Hass



Όπως και στις προηγούμενες ψυχολογικές προσεγγίσεις αυτής της ενότητας, το θεωρητικό υπόδειγμα της Hass προϋποθέτει ότι οιαδήποτε απόφαση για τη γεννητικότητα δεν είναι δυνατό να υλοποιηθεί εφόσον δεν υπάρχει γνώση και διαθεσιμότητα αντισυλληπτικών μεθόδων. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει έλεγχος και προγραμματισμός της γεννητικότητας ενώ στην αντίθετη περίπτωση η γεννητικότητα καθορίζεται μόνο από βιολογικούς παράγοντες. Δεδομένου μάλιστα ότι σε κάθε στάδιο επικρατούν συνθήκες ελέγχου και προγραμματισμού, η αντίληψη για τις επιπτώσεις της τεκνοποίησης και η αξία των επιπτώσεων αυτών καθορίζουν

τους στόχους για τη γεννητικότητα, τη δράση για την επίτευξη αυτών των στόχων και το αποτέλεσμα αυτής της δράσης.

Το υπόδειγμα της Hass παραμένει ένα γενικό εννοιολογικό σχήμα δυνάμενο να θεωρηθεί ως υπόδειγμα προθεωρητικού χαρακτήρα δεδομένου ότι οι συγκεκριμένες σχέσεις των μεταβλητών δεν έχουν προσδιοριστεί δηλαδή δεν διατυπώνονται συγκεκριμένες υποθέσεις ενώ οι μεταβλητές του υποδείγματος είναι πολυσύνθετες δηλαδή δεν παρέχονται συγκεκριμένοι ορισμοί γεγονός το οποίο δημιουργεί προβλήματα εφαρμογής του σε εμπειρικό επίπεδο.

Συμπερασματικά, όλα τα θεωρητικά υποδείγματα της ενότητας αυτής, βασίζονται στην υπόθεση ότι η απόφαση για τη γεννητικότητα λαμβάνεται μετά από την αξιολόγηση του οφέλους και του κόστους των παιδιών όπως ακριβώς και στη Μικροοικονομική θεωρία και επομένως κατατάσσονται στην κατηγορία των υποδειγμάτων τα οποία χαρακτηρίζονται από λογική και συνέπεια αναφορικά στη λήψη αποφάσεων.

Εν αντιθέσει όμως με τη Μικροοικονομική θεωρία, τα υποδείγματα αυτά αναγνωρίζουν την επίδραση των κοινωνικών και οικονομικών κανόνων σε αυτή τη διαδικασία. Οι κανόνες αυτοί περιλαμβάνονται ή υπονοούνται στα υποδείγματα αυτά και είναι προκαθορισμένες μεταβλητές σε σχέση με τους ψυχολογικούς παράγοντες οι οποίοι διαμεσολαβούν ανάμεσα σε αυτούς και στην απόφαση για τη γεννητικότητα.

Εξαιρώντας το υπόδειγμα του Fishbein, όλα τα άλλα υποδείγματα αναγνωρίζουν τη διαφορά των προτιμήσεων ως προς το επιθυμητό μέγεθος της οικογένειας μεταξύ των συζύγων αν και διαφέρουν στο βαθμό επικέντρωσης στη διαδικασία αυτή. Στο υπόδειγμα των Bagozzi and Van Loo, η διαδικασία της κοινωνικής ανταλλαγής και της διαπραγμάτευσης μεταξύ των συζύγων αποτελεί το βασικότερο μέρος αυτού του υποδείγματος ενώ στο υπόδειγμα της Hass, οι διαφορετικές προτιμήσεις μεταφράζονται σε μια κοινή απόφαση χωρίς όμως να εξετάζεται ο συγκεκριμένος τρόπος με τον οποίο τελικά να επιτυγχάνεται η σύγκλιση των απόψεων.

Τέλος, τα υποδείγματα αυτά διαφέρουν ως προς το βαθμό που επιδέχονται εμπειρικές εφαρμογές. Το υπόδειγμα του Fishbein μεταφράζεται με μεγαλύτερη ευκολία σε εμπειρικό υπόδειγμα δεδομένου ότι περιλαμβάνει συγκεκριμένες θεωρητικές έννοιες εν αντιθέσει με τα υποδείγματα της Hass και των Bagozzi and Van Loo, τα οποία είναι γενικά εννοιολογικά σχήματα δίχως να περιλαμβάνουν θεωρητικές προτάσεις με βάση τις οποίες θα ήταν δυνατό να διατυπωθούν συγκεκριμένες εμπειρικές υποθέσεις.

## 1.4 Θεωρητικό πλαίσιο μαθηματικο-στατιστικών μεθόδων για τη μελέτη της κυκλικής συμπεριφοράς των CBR, INC, FPR, IMR και MR

### 1.4.1 Γραμμικά φίλτρα

Στην παρούσα ενότητα θα γίνει περιγραφή των γραμμικών φίλτρων μέσω των οποίων επιτυγχάνεται η εξαγωγή των συνιστωσών μιας χρονολογικής σειράς όπως της μακροχρονίου τάσεως, της κυκλικής συνιστώσας και της άρρυθμης στην περίπτωση ετησίων δεδομένων. Η περιγραφή αυτή θα γίνει σε συνάρτηση με το χώρο των συχνοτήτων προκειμένου να διευκολυνθεί η ερμηνεία της συμπεριφοράς των ήδη αναφερθέντων φίλτρων καθώς και η σύγκριση της αποτελεσματικότητάς τους στον προσδιορισμό των συνιστωσών της χρονολογικής σειράς.

Εάν  $L$  παριστά τον τελεστή οπισθοδρόμου μετατοπίσεως, δηλαδή  $L^k X_t = X_{t-k}$ , όπου  $X_t$  είναι η υπό μελέτη χρονολογική σειρά, τότε ένα γραμμικό αμετάβλητο χρονικά φίλτρο είναι της μορφής

$$a(L) = \sum_{k=-m}^r a_k L^k, \quad (1.3)$$

όπου οι σταθμίσεις  $a_k$  είναι χρονικά ανεξάρτητες και ικανοποιούν τη σχέση  $\sum a_k^2 < \infty$ .

Φιλτράροντας τη χρονολογική σειρά  $X_t$  με το φίλτρο  $a(L)$  παράγεται μια χρονολογική σειρά  $Y_t$  της μορφής

$$Y_t = a(L)X_t = \sum_{k=-m}^r a_k X_{t-k}. \quad (1.4)$$

Εάν η χρονολογική σειρά  $X_t$  είναι μια στοχαστική στάσιμη διαδικασία, τότε τα χαρακτηριστικά της μεταβιβάζονται στη χρονολογική σειρά  $Y_t$  μέσω του φίλτρου  $a(L)$ .

Η ερμηνεία του ανωτέρω γραμμικού φίλτρου κινητού μέσου στον χώρο των συχνοτήτων έχει ως εξής:

Εάν  $\omega$  παριστά τη συχνότητα μετρούμενη σε ακτίνια και  $\omega \in [0, \pi]$ , τότε εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό του Fourier  $L = e^{-i\omega}$  στο γραμμικό φίλτρο  $a(L)$  προκύπτει η συνάρτηση μετάθεσης συχνότητας  $H(\omega)$  (*frequency response or transfer function*) του γραμμικού φίλτρου  $a(L)$  η οποία έχει ως εξής

$$H(\omega) = a(e^{-i\omega}) = \sum_{k=-m}^r a_k e^{-ik\omega}. \quad (1.5)$$

Η συνάρτηση  $H(\omega)$ , εν γένει, λαμβάνει μιγαδικές τιμές και ως εκ τούτου δύναται να γραφεί υπό την εξής μορφή

$$H(\omega) = H_r + iH_i = G(\omega)e^{-i\text{Ph}(\omega)}. \quad (1.6)$$

Από τη σχέση (1.6) προκύπτουν οι σχέσεις

$$G(\omega)=|H(\omega)|=\sqrt{H_r^2 + H_i^2} \quad (1.7)$$

και

$$Ph(\omega)=\text{Arg}(H(\omega))=\tan^{-1}(-H_i/H_r). \quad (1.8)$$

Οι συναρτήσεις  $G(\omega)$  και  $Ph(\omega)$  καλούνται αντιστοίχως κέρδος και φάση του γραμμικού φίλτρου  $a(L)$ . Το κέρδος  $G(\omega)$  αναφέρεται στο εύρος των κυμάνσεων και συνδέεται με τις συναρτήσεις φασματικής πυκνότητας  $g_x(\omega)$  και  $g_y(\omega)$  των χρονολογικών σειρών  $X_t$  και  $Y_t$  με τη σχέση

$$g_y(\omega)=a(e^{-i\omega})a(e^{i\omega})g_x(\omega)=G(\omega)^2g_x(\omega). \quad (1.9)$$

Η συνάρτηση  $G(\omega)^2$  καλείται συνάρτηση τετραγωνισμού κέρδους του φίλτρου  $a(L)$  και είναι ένα μέτρο μέσω του οποίου καθορίζεται η συνεισφορά της διακύμανσης της  $X_t$  στην ερμηνεία της διακύμανσης της  $Y_t$  για κάθε διαφορετική συχνότητα.

Εάν στο διάστημα συχνοτήτων  $[\omega_1, \omega_2]$ , η συνάρτηση  $G(\omega)=1$ , τότε η συνολική διακύμανση της  $X_t$  μεταβιβάζεται στην  $Y_t$ . Εάν όμως  $G(\omega)=0$ , η διακύμανση της  $X_t$  δεν λαμβάνεται καθόλου υπόψη κατά τον υπολογισμό της  $Y_t$ .

### 1.4.2 Συμμετρικά φίλτρα

Στην περίπτωση κατά την οποία  $a_k=a_{-k}$  και  $m=r$ , τότε το γραμμικό φίλτρο  $a(L)$  καλείται (κεντρικό) συμμετρικό φίλτρο και έχουμε

$$a^*(L)=a_0 + \sum_{k=1}^r a_k (L^k + L^{-k}). \quad (1.10)$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό του Fourier  $L=e^{-i\omega}$  στο συμμετρικό φίλτρο  $a^*(L)$ , λαμβάνουμε την εξής μορφή της συνάρτησης μετάθεσης συχνότητας  $H^*(\omega)$

$$H^*(\omega)=a^*(e^{-i\omega})=a_0 + 2\sum_{k=1}^r a_k \cos(k\omega). \quad (1.11)$$

Τα συμμετρικά φίλτρα έχουν την ιδιότητα να μην επιφέρουν μετατόπιση της γωνίας φάσεως, δηλαδή  $Ph(\omega)$  δεδομένου ότι η συνάρτηση  $H^*(\omega)$  είναι πραγματική.

Επιπλέον ισχύει η σχέση  $G^*(\omega)=H^*(\omega)$  καθώς και η κατωτέρω πρόταση

#### Πρόταση 1

Ένα συμμετρικό φίλτρο έχει κέρδος ίσο με τη μονάδα στη μηδενική συχνότητα

$$G^*(0)=1 \quad (1.12)$$

εάν και μόνον εάν ισχύει η σχέση

$$\sum_{k=1}^r a_k = 1.$$

### 1.4.3 Ιδανικά συμμετρικά φίλτρα χαμηλού, υψηλού περάσματος συχνοτήτων και διελεύσεως ζώνης συχνοτήτων

Στην ενότητα αυτή γίνεται μνεία τριών ιδανικών φίλτρων (*ideal filters*) τα οποία θα χρησιμεύσουν ως μέτρο συγκρίσεως κατά τη μελέτη των γραμμικών συμμετρικών φίλτρων για τον προσδιορισμό τόσο της τάσεως όσο και του κύκλου δοθείσης χρονολογικής σειράς. Τα φίλτρα αυτά είναι α) το ιδανικό φίλτρο χαμηλού περάσματος (*low-pass filter*) ή φίλτρο προσδιορισμού της τάσεως (απομονώσεως του κύκλου)  $a_L(L)$ , β) το ιδανικό φίλτρο υψηλού περάσματος (*high-pass filter*) ή φίλτρο απομονώσεως της τάσεως (προσδιορισμού του κύκλου)  $a_H(L)$  και γ) το ιδανικό φίλτρο διελεύσεως ζώνης συχνοτήτων (*band-pass filter*) (προσδιορισμού του κύκλου)  $a_B(L)$ .

α) Έστω  $H_L(\omega)$  η συνάρτηση μεταφοράς συχνότητας ενός ιδανικού συμμετρικού φίλτρου χαμηλού περάσματος συχνοτήτων. Τότε ισχύει

$$H_L(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

όπου  $\omega_1$  είναι η συχνότητα αποκοπής.

β) Έστω το γραμμικό φίλτρο  $a_H(L)=1-a_L(L)$  του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς συχνότητας  $H_H(\omega)=1-H_L(\omega)$  ορίζεται ως εξής

$$H_H(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < \omega_1 \\ 1, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Το φίλτρο αυτό είναι το ιδανικό συμμετρικό φίλτρο υψηλού περάσματος συχνοτήτων.

Εάν  $X_t$  είναι η υπό μελέτη χρονολογική σειρά τότε ένας γενικός κανόνας για την κατασκευή ενός φίλτρου υψηλού περάσματος από ένα φίλτρο χαμηλού περάσματος έχει ως εξής:

$$High-pass(X_t) = X_t - low-pass(X_t).$$

Το κέρδος και η γωνία φάσεως του φίλτρου υψηλού περάσματος προκύπτουν από τις σχέσεις:

$$G_H(\omega) = |H_H(\omega)| = |1 - H_L(\omega)| = [(1 - H_{Lr})^2 + H_{Lr}^2]^{1/2} \quad (1.13)$$

και

$$Ph_H(\omega) = Arg[1 - H_L(\omega)] = \tan^{-1}[-H_{Lr}/(1 - H_{Lr})] \quad (1.14)$$

γ) Έστω  $a_L(L)$  και  $a_H(L)$  τα γραμμικά φίλτρα χαμηλού και υψηλού περάσματος αντιστοίχως με συχνότητες αποκοπής  $\omega_0$  και  $\omega_1$ , αντιστοίχως. Τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$H_L(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad \text{και} \quad H_H(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < \omega_1 \\ 1, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Το φίλτρο  $a_B(L)$  με συνάρτηση μεταφοράς συχνότητας  $H_B(\omega)$ , η οποία έχει τη μορφή



$$H_B(w) = H_L(w)H_H(w) = \begin{cases} 1, & \omega_0 < \omega < \omega_1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

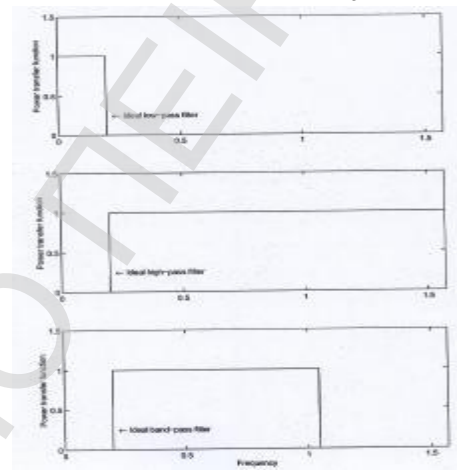
όπου  $\omega_0 < \omega_1$ , ονομάζεται φίλτρο ζώνης διελύσεως συχνοτήτων.

Εάν  $X_t$  είναι η υπό μελέτη χρονολογική σειρά, τότε ένας γενικός κανόνας για την κατασκευή ενός φίλτρου διελύσεως ζώνης συχνοτήτων από δύο επικαλυπτόμενα φίλτρα υψηλού και χαμηλού περάσματος έχει ως εξής:

$$\text{band-pass}(X_t) = \text{high-pass}(\text{low-pass}(X_t)) = \text{low-pass}(\text{high-pass}(X_t)) \quad (1.15)$$

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων μεταφορών συχνοτήτων των ανωτέρω τριών ιδανικών φίλτρων - χαμηλού, υψηλού περάσματος συχνοτήτων και διελύσεως ζώνης συχνοτήτων - αποτυπώνονται στο Σχήμα 1.1.

**ΣΧΗΜΑ 1.1:** ΙΔΑΝΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ ΧΑΜΗΛΟΥ ΚΑΙ ΥΨΗΛΟΥ ΠΕΡΑΣΜΑΤΟΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΔΙΕΛΕΥΣΕΩΣ ΖΩΝΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ



#### 1.4.4 Διάσπαση της χρονολογικής σειράς με *ad hoc* φίλτρα

Έστω ότι το πρόβλημα διασπάσεως της χρονολογικής σειράς  $X_t$  ανάγεται σε δύο μόνο συνιστώσες την  $s_t$  και την  $n_t$ , ως

$$X_t = s_t + n_t, \quad (1.16)$$

όπου η συνιστώσα  $s_t$  καλείται "σήμα" (*signal*) ενώ η συνιστώσα  $n_t$  "μη σήμα" ή θόρυβος (*non-signal or noise*). Η συνιστώσα  $s_t$  αντιπροσωπεύει τη μακροχρόνια τάση της χρονολογικής σειράς  $X_t$  ενώ η  $n_t$ , η οποία συνήθως καλείται "κυκλική" συνιστώσα, αντιπροσωπεύει το άθροισμα της κυκλικής και της άρρυθμου συνιστώσας στην περίπτωση πάντοτε των ετησίων δεδομένων.

Έστω το γραμμικό φίλτρο

$$a(L) = \sum_{k=-m}^r a_k L^k \quad (1.17)$$

για το οποίο ισχύει η σχέση  $\sum a_k = 1$ . Το φίλτρο αυτό, το οποίο χρησιμοποιείται ευρέως, καλείται *φίλτρο κινητού μέσου* και έχει την ιδιότητα ότι είναι συμμετρικό για παρατηρήσεις της χρονολογικής σειράς, οι οποίες δεν γειτνιάζουν με τις παρατηρήσεις τις ευρισκόμενες στα δύο άκρα της. Επομένως η (1.11) λαμβάνει τη μορφή

$$a(L) = a_0 + \sum_{k=1}^r a_k (L^k + L^{-k}). \quad (1.18)$$

Η εφαρμογή του φίλτρου αυτού στη χρονολογική σειρά  $X_t$ , δίνει τους εξής εκτιμητές του σήματος  $s_t$  και του μη σήματος  $n_t$

$$\hat{s}_t = \left[ a_0 + \sum_{k=1}^r a_k (L^k + L^{-k}) \right] X_t = a(L)X_t \quad (1.19)$$

και

$$\hat{n}_t = [I - a(L)]X_t \quad (1.20).$$

οπότε ισχύει η σχέση  $X_t = \hat{s}_t + \hat{n}_t$ .

Εάν  $a_s(L)$  και  $a_n(L)=[1-a_s(L)]$  είναι τα φίλτρα των συνιστωσών  $s_t$  και  $n_t$  της χρονολογικής σειράς  $X_t$  τότε μεταξύ των συναρτήσεων κέρδους, ισχύει η σχέση  $G_c(\omega)=1-G_m(\omega)$ . Από τη σχέση αυτή, το γεγονός ότι  $\sum a_k = 1$ , προκύπτει ότι η συνάρτηση κέρδους για την τάση και την κυκλική συνιστώσα λαμβάνει τις τιμές 1 και 0 αντίστοιχα στη μηδενική συχνότητα.

#### 1.4.5 Ανάλυση των ιδιοτήτων των *ad hoc* φίλτρων

Στην ενότητα αυτή αναλύονται οι ιδιότητες των περιγραφέντων στην προηγούμενη ενότητα *ad hoc* φίλτρων με σκοπό την εκτίμηση της ικανότητάς τους να προσδιορίσουν την κυκλική συνιστώσα μιας οιασδήποτε χρονολογικής σειράς. Η ικανότητά τους αυτή ελέγχεται μέσω ορισμένων βασικών κριτηρίων τα οποία, τα φίλτρα αυτά, πρέπει να πληρούν (Baxter and King, 1999).

Τα κριτήρια αυτά είναι έξι και περιλαμβάνουν:

- 1) Το φίλτρο πρέπει να προσδιορίζει την κυκλική συνιστώσα μιας οιασδήποτε χρονολογικής σειράς η οποία καθορίζεται εντός συγκεκριμένου εύρους συχνοτήτων και να μην επηρεάζει τις ιδιότητες της συνιστώσας αυτής.
- 2) Το φίλτρο πρέπει να μη δημιουργεί μετατόπιση της γωνίας φάσεως, δηλαδή το φίλτρο δεν πρέπει να επηρεάζει τη χρονολόγηση των σημείων καμπής της υπό μελέτη χρονολογικής σειράς.
- 3) Το φίλτρο πρέπει να αποτελεί μια άριστη προσέγγιση του ιδανικού φίλτρου είτε αυτό είναι το φίλτρο χαμηλού ή υψηλού περάσματος είτε το φίλτρο διελεύσεως συχνοτήτων.
- 4) Το φίλτρο πρέπει να καθιστά τη χρονολογική σειρά στάσιμη, δηλαδή πρέπει να έχει την ικανότητα απομονώσεως της προσδιοριστικής ή της στοχαστικής τάσεως.
- 5) Το φίλτρο πρέπει να προσδιορίζει κυκλικές συνιστώσες των οποίων το μήκος δεν συσχετίζεται με το μήκος της χρονολογικής σειράς.
- 6) Το φίλτρο πρέπει να είναι λειτουργικό.

### A. Απομόνωση γραμμικών τάσεων

Αν και η απομόνωση των γραμμικών τάσεων (*deterministic trends*) υπήρξε ιστορικά μια βασική μέθοδος για το διαχωρισμό της τάσεως από τον κύκλο, η συνεχώς αυξανόμενη μαρτυρία περί υπάρξεως μοναδιαίων ριζών (*unit roots-stochastic trends*) στις συνιστώσες των περισσοτέρων και ειδικότερα μακροοικονομικών χρονολογικών σειρών, συνηγορεί περί της μη εφαρμογής της μεθόδου αυτής δεδομένου ότι αδυνατεί να απομονώσει τις συνιστώσες αυτής της μορφής (Nelson and Plosser (1982) και, Pierce (1978)).

Η μέθοδος αυτή βασίζεται στο γεγονός ότι οιοδήποτε πολυώνυμο βαθμού  $n$  είναι δυνατό να απομονωθεί από τη χρονολογική σειρά μέσω του γραμμικού φίλτρου συνεχών διαφορών  $\Delta^{n+1}$ . Πράγματι στην περίπτωση αυτή με την εφαρμογή του φίλτρου αυτού στη σχέση (1.16) προκύπτει ότι

$$\Delta^{n+1}(X_t) = \Delta^{n+1}(s_t + n_t).$$

Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση κέρδους του φίλτρου  $\Delta^{n+1}$  είναι της μορφής  $|2\sin(\omega/2)|^{n+1}$  (Koopmans, 1995) και επομένως η συνάρτηση φασματικής πυκνότητας της κυκλικής συνιστώσας  $f_{\hat{n}}(\omega)$  προκύπτει από την εξής σχέση

$$f_{\hat{n}}(\omega) = \left[ 1/|2\sin(\omega/2)|^{2(n+1)} \right] \hat{f}_X(\omega).$$

Μολονότι το φίλτρο αυτό δεν δημιουργεί μετατόπιση της γωνίας φάσεως και δεν επανασταθμίζει τις φιλτραρισμένες συχνότητες, η ανικανότητά του να απομονώνει τις μοναδιαίες ρίζες από τις υπό μελέτη χρονολογικές σειρές έχει συντελέσει στον περιορισμό της χρήσης του εκτός και αν μέσω των τεστ ελέγχου περί υπάρξεως προσδιοριστικής ή στοχαστικής τάσεως (*trend stationary (TS) or difference stationary (DS)*) επιβεβαιώνεται ή όχι η ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας. Η ισχύς όμως των τεστ αυτών είναι μικρή στην περίπτωση ολιγάριθμων παρατηρήσεων γεγονός το οποίο δημιουργεί αναξιοπιστία ως προς την αποτελεσματικότητά τους. Αντί των τεστ αυτών, ο έλεγχος περί *TS* ή *DS* μοντέλου της τάσεως δύναται να γίνει και μέσω της συνάρτησης φασματικής πυκνότητας της πρώτης διαφοράς  $Z_t = X_t - X_{t-1}$  της χρονολογικής σειράς.

Στην περίπτωση αυτή ισχύει η σχέση

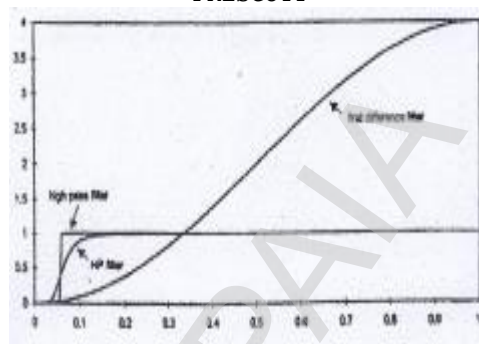
$$f_Z(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{εάν } \omega = 0 \text{ τότε } TS \\ 1, & \text{εάν } \omega = 0 \text{ τότε } DS \end{cases}$$

### B. Το φίλτρο της πρώτης διαφοράς

Το φίλτρο αυτό προσδιορίζει την κυκλική συνιστώσα  $n_t$  από τη χρονολογική σειρά  $X_t$  μέσω της σχέσεως  $\hat{n}_t = (1-L)X_t$ . Είναι προφανές ότι το φίλτρο αυτό απομονώνει τις μοναδιαίες ρίζες πρώτης τάξεως από τις υπό μελέτη χρονολογικές σειρές αν και παρουσιάζονται διάφορα προβλήματα κατά την εφαρμογή του.

Πρώτον, επειδή το φίλτρο αυτό δεν είναι συμμετρικό προκαλεί μετατόπιση της γωνίας φάσεως. Δεύτερο, προκαλεί επαναστάθμιση των φιλτραρισμένων συχνοτήτων θέτοντας περισσότερο βάρος στις υψηλές συχνότητες και ολιγότερο βάρος στις χαμηλές συχνότητες (βλ. Σχήμα 1.2). Εάν ο σκοπός είναι η απομόνωση συχνοτήτων της χρονολογικής σειράς οι οποίες περιλαμβάνονται μεταξύ ορισμένων ορίων χωρίς συγκεκριμένη έμφαση σε μια ιδιαίτερη συχνότητα, η επιλογή του φίλτρου αυτού δεν συνίσταται.

**ΣΧΗΜΑ 1.2:** ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΕΝΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ ΤΟΥ ΙΔΑΝΙΚΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ ΠΡΩΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ ΤΩΝ HODRICK-PRESCOTT



### Γ. Το φίλτρο των Hodrick-Prescott

Από τη συνθήκη πρώτης τάξεως του προβλήματος ελαχιστοποίησης υπό περιορισμούς (1.43) προκύπτουν οι εξής σχέσεις για τα φίλτρα της τάξεως  $a_m(L)$  και του κύκλου  $a_c(L)$  (King and Rebello, 1993)

$$a_m = [F(L)]^{-1} \text{ και } a_c = [F(L) - I][F(L)]^{-1}$$

όπου  $F(L) = [1 + \lambda(1-L)^2(1-L^{-1})^2]$ .

Το φίλτρο της κυκλικής συνιστώσας

$$\hat{a}_c(L) = \frac{I[1-L]^2[1-L^{-1}]^2}{1 + I[1-L]^2[1-L^{-1}]^2}$$

έχει συνάρτηση μετάθεσης συχνότητας της μορφής

$$G_c(w) = \frac{4I(1 - \cos(w))^2}{1 + 4I(1 - \cos(w))^2}$$

Επομένως η συνάρτηση κέρδους της κυκλικής συνιστώσας λαμβάνει τη τιμή 0 στη μηδενική συχνότητα και τιμές κοντά στη μονάδα για υψηλότερες συχνότητες ( $G(\pi) = 16\lambda/(1+16\lambda)$ ) (βλ. Σχήμα 1.2).

Σε σχέση με τα κριτήρια τα οποία πρέπει να πληροί ένα φίλτρο για την εξαγωγή της κυκλικής συνιστώσας, το φίλτρο των Hodrick-Prescott έχει πολλά επιθυμητά χαρακτηριστικά. Πρώτον, δεν δημιουργεί μετατόπιση της γωνίας φάσεως. Δεύτερο, έχει ιδιότητες απαλοιφής της προσδιοριστικής τάξεως, δεδομένου ότι η συνάρτηση κέρδους λαμβάνει τη μηδενική τιμή στη μηδενική συχνότητα. Επίσης καθιστά στάσιμες τις χρονολογικές σειρές μέχρι και την τετάρτη τάξη.

Αν και απομονώνει ικανό μέγεθος της διακύμανσης χαμηλής συχνότητας, εν τούτοις σε σύγκριση με το φίλτρο της πρώτης διαφοράς, το μέγεθος αυτό είναι μικρότερης τάξεως.

Το φίλτρο των Hodrick-Prescott έχει μελετηθεί από διάφορους συγγραφείς ως προς την

ιδιότητα του προσδιορισμού της κυκλικής συνιστώσας (Danthine and Girardin (1989), Kydland and Prescott (1990), Backhus and Kehoe (1992), Brandner and Neusser (1992) και Kim et al. (1994)). Οι King and Rebello (1989) διερευνούν τις ιδιότητες αυτού του φίλτρου τόσο στο πεδίο συχνοτήτων όσο και πεδίο του χρόνου συμπεραίνοντας ότι το *HP* φίλτρο αποτελεί γενίκευση του εκθετικού φίλτρου εξομάλυνσης. Άλλες πλέον πρόσφατες εργασίες για το φίλτρο *HP* περιλαμβάνουν τις εργασίες των Reeves et al. (1996) και Maravall and del Rio (2001). Επίσης το φίλτρο των Hodrick-Prescott, έχει υποστεί κριτικές ότι δημιουργεί τεχνητή κυκλικότητα (*spurious cyclicity*) όταν στην πραγματικότητα δεν υφίσταται (Harvey and Jaeger (1991), Jaeger (1994) και Cogley and Nason (1995)). Ανάλογα συμπεράσματα προκύπτουν από την εργασία των Guay and Amant (1997) οι οποίοι ισχυρίζονται ότι εάν η συνάρτηση φασματικής πυκνότητας της υπό μελέτη χρονολογικής σειράς έχει τη μορφή Granger-shape (Granger, 1966) τότε δημιουργείται τεχνητή κυκλικότητα. Όλες τις ανωτέρω κριτικές αναιρεί μια πρόσφατη αδημοσίευτη εργασία των Young and Pedrega (2001). Τα αποτελέσματα της εργασίας αυτής θα χρησιμοποιηθούν για τη μελέτη της κυκλικής συμπεριφοράς των χρονολογικών σειρών *CBR*, *INC*, *FPR*, *IMR* και *MR* κατά τη χρονική περίοδο 1960-1997.

#### Δ. Η οικογένεια των φίλτρων

Η οικογένεια των φίλτρων Butterworth αποτελείται από φίλτρα χαμηλού περάσματος τα οποία είναι δύο τύπων (βλ. Σχήμα 1.3):

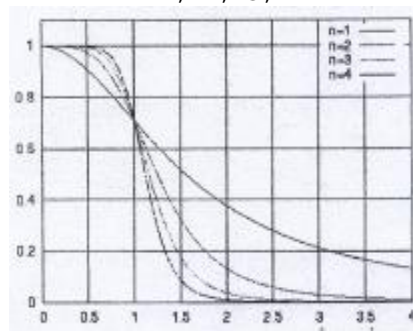
α) Ο πρώτος τύπος περιλαμβάνει φίλτρα των οποίων η συνάρτηση τετραγωνισμένου κέρδους βασίζεται στη συνάρτηση του ημίτονου (*based on the sine function (BFS)*) και έχει την εξής μορφή  $|G_{BFS}(\omega_c)|^2 = 1/(1+[\sin(\omega/2)/\sin(\omega_c)]^{2d})$ , όπου  $|G_{BFS}(\omega_c)| = 1/2$ .

β) Ο δεύτερος τύπος περιλαμβάνει φίλτρα των οποίων η συνάρτηση τετραγωνισμένου κέρδους βασίζεται στη συνάρτηση της εφαπτομένης (*based on the tangent function (BFT)*) και έχει την εξής μορφή  $|G_{BFT}(\omega_c)|^2 = 1/(1+[\tan(\omega/2)/\tan(\omega_c)]^{2d})$ , όπου  $|G_{BFT}(\omega_c)| = 1/2$ .

Το φίλτρο των Hodrick-Prescott αποτελεί ειδική περίπτωση της οικογενείας των φίλτρων Butterworth και συγκεκριμένα του πρώτου τύπου του ημίτονου με τη τιμή για το  $d=2$ . Πράγματι η συνάρτηση τετραγωνισμένου κέρδους του φίλτρου τάσεως των Hodrick-Prescott έχει τη μορφή  $|G_H(\omega_c)| = 1/(1+[\sin(\omega/2)/\sin(\omega_c)]^4)$ , όπου  $|G_H(\omega_c)| = 1/2$ .

Το φίλτρο Butterworth κυρίως χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της τάσεως στα στοχαστικά μοντέλα εξαγωγής των συνιστωσών μιας χρονολογικής σειράς και συγκεκριμένα στα *AMB-ARIMA Model Based*.

**ΣΧΗΜΑ 1.3:** ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΕΝΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ ΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ ΧΑΜΗΛΟΥ ΠΕΡΑΣΜΑΤΟΣ BUTTERWORTH ΓΙΑ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥ  $n=1, 2, 3, 4$



## E. Το φίλτρο των Baxter-King

Οι Baxter and King το 1995, βασιζόμενοι στα έξι αναφερόμενα ανωτέρω κριτήρια τα οποία πρέπει να πληροί ένα ιδανικό φίλτρο απομονώσεως της κυκλικής συνιστώσας συγκεκριμένου όμως εύρους συχνοτήτων, κατασκεύασαν ένα γραμμικό φίλτρο κινητού μέσου πεπερασμένης τάξεως  $m$

$$a_{BK}(L) = \sum_{k=-m}^m a_k L^k,$$

το οποίο εφαρμοζόμενο στην χρονολογική σειρά  $X_t$  παράγει την κυκλική συνιστώσα της μορφής:

$$c_{BK,t} = a(L)X_t = \sum_{k=-m}^m a_k X_{t-k},$$

όπου οι σταθμίσεις καθορίζονται μέσω της σχέσεως

$$\min_{a_k} Q = \int_{-p}^p |b(\omega) - a(\omega)|^2 d\omega \text{ ούτως ώστε } a(0)=0,$$

όπου  $|b(\omega)|$  είναι η συνάρτηση κέρδους του ιδανικού φίλτρου περάσματος εύρους συχνοτήτων με συχνότητες αποκοπής  $\omega_1$  και  $\omega_2$ .

Η επίλυση της ελαχιστοποίησης της ανωτέρω συναρτήσεως  $Q$  υπό τον περιορισμό  $a(0)=0$ , ο οποίος υποδηλοί ότι το φίλτρο καθιστά την υπό μελέτη χρονολογική σειρά στάσιμη (βλ. το ανωτέρω κριτήριο 4), οδηγεί στις κατωτέρω σταθμίσεις

$$a_j = b_j + \theta$$

$$b_j = \begin{cases} w_2 - w_{1/p}, & j = 0 \\ (1/pj)[\sin(w_2 j) - \sin(w_1 j)], & |j| = 1, 2, K \end{cases}$$

$$q = - \sum_{j=-k}^k b_j / (2k + 1).$$

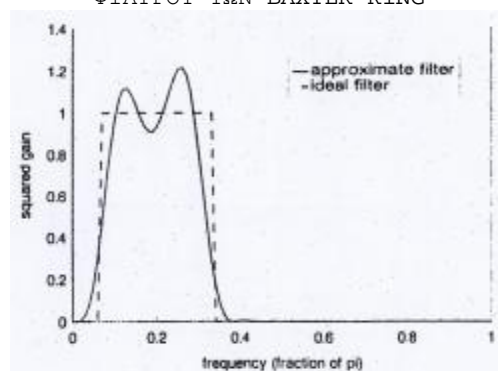
Στην περίπτωση ετησίων δεδομένων όπου  $\omega_1=2\pi/8$  και  $\omega_2=\pi$ , δηλαδή κυκλικής συνιστώσας περιόδου μεταξύ των 2 και 8 ετών, οι BK προτείνουν την τιμή  $k=3$ .

Με βάση αυτή την τιμή προκύπτουν οι εξής σταθμίσεις  $a_j$  (βλ. Παράρτημα):  $a_0=0.774074394$ ,  $a_1=-0.2010046854$ ,  $a_2=-0.135080549$ ,  $a_3=-0.050951966$  οπότε η ανωτέρω σχέση για την κυκλική συνιστώσα γράφεται ως εξής:

$$c_{BK,t} = 0.774X_t - 0.201(X_{t-1} + X_{t+1}) - 0.1351(X_{t-2} + X_{t+2}) - 0.050(X_{t-3} + X_{t+3}).$$

Η συνάρτηση τετραγωνισμένου κέρδους του φίλτρου BK εμφανίζεται στο Σχήμα 1.4.

**ΣΧΗΜΑ 1.4:** ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΕΝΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ ΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ ΤΩΝ BAXTER-KING



## 1.4.6 Διάσπαση της χρονολογικής σειράς με ARIMA Model Based φίλτρα

### A. Γενικό πλαίσιο

Καθορισμός του μοντέλου και υποθέσεις

Έστω ότι η χρονολογική σειρά  $X_t$  παρίσταται ως το άθροισμα δύο μη διακριτών συνιστωσών (*unobserved components* ή εν συντομία *UC*)  $s_t$  και  $n_t$

$$X_t = s_t + n_t, \quad (1.21)$$

όπου  $s_t$  παριστά το σήμα και  $n_t$  το μη σήμα.

Η στοχαστική διαδικασία ARIMA Model Based (*AMB*) για την εκτίμηση των επιμέρους συνιστωσών  $s_t$  και  $n_t$  της χρονολογικής σειράς  $X_t$ , η οποία αναπτύχθηκε από τους Box et al. (1978), Burman (1980) και Hillmer and Tiao (1982) θεωρεί ότι ισχύουν οι ακόλουθες υποθέσεις για τις μη διακριτές συνιστώσες 00.

### ΥΠΟΘΕΣΗ 1

Κάθε μη διακριτή συνιστώσα είναι δυνατό να παρασταθεί ως ένα ARIMA μοντέλο,

$$\delta_s(L)s_t = \psi_s(L)a_{st} \quad (1.22)$$

$$\delta_n(L)n_t = \psi_n(L)a_{nt}, \quad (1.23)$$

όπου οι μεταβλητές  $a_{st}$  και  $a_{nt}$  οι οποίες καλούνται διαταράξεις (*innovations*) είναι στοχαστικές διαδικασίες λευκού θορύβου οι οποίες ακολουθούν την κανονική κατανομή  $a_{st} \equiv N(0, \sigma_s^2)$  και  $a_{nt} \equiv N(0, \sigma_n^2)$  και τα πολυώνυμα  $\psi_s(L)a_{st}$  και  $\psi_n(L)a_{nt}$  είναι της μορφής

$$\psi_s(L) = \theta_s(L) / \varphi_s(L)$$

$$\psi_n(L) = \theta_n(L) / \varphi_n(L).$$

Τα πολυώνυμα  $\delta_s(L)$ ,  $\delta_n(L)$ ,  $\varphi_s(L)$ ,  $\varphi_n(L)$ ,  $\theta_s(L)$  και  $\theta_n(L)$  είναι πεπερασμένων τάξεων. Οι ρίζες των πολυωνύμων  $\delta_s(L)$  και  $\delta_n(L)$  κείνται επί του μοναδιαίου κύκλου, των  $\varphi_s(L)$ ,  $\varphi_n(L)$  κείνται έξω από το μοναδιαίο κύκλο ενώ των  $\theta_s(L)$  και  $\theta_n(L)$  επί ή έξω από το μοναδιαίο κύκλο.

Οι μεταβλητές  $z_{st} = \delta_s(L)s_t$  και  $z_{nt} = \delta_n(L)n_t$  παριστάνουν τους στάσιμους μετασχηματισμούς των μεταβλητών  $s_t$  και  $n_t$  ενώ οι σχέσεις (1.22) και (1.23) λαμβάνουν τη μορφή

$$\varphi_s(L)\delta_s(L)s_t = \theta_s(L)a_{st} \quad (1.24)$$

$$\varphi_n(L)\delta_n(L)n_t = \theta_n(L)a_{nt} \quad (1.25)$$

ή τη μορφή

$$\varphi_s(L)s_t = \theta_s(L)a_{st} \quad (1.26)$$

$$\varphi_n(L)n_t = \theta_n(L)a_{nt}, \quad (1.27)$$

όπου τα πολυώνυμα  $\Phi_s(L) = \varphi_s(L)\delta_s(L)s_t$  και  $\Phi_n(L) = \varphi_n(L)\delta_n(L)n_t$  είναι γινόμενα στάσιμων και μη στάσιμων AR πολυωνύμων.

Επειδή οι διαφορετικές ρίζες των AR πολυωνύμων παράγουν "κορυφές" στο φάσμα των σειρών για διαφορετικές συχνότητες και δεδομένου ότι οι μη διακριτές συνιστώσες συνδέονται

με διαφορετικές φασματικές "κορυφές", η ακόλουθη υπόθεση είναι απαραίτητη.

## ΥΠΟΘΕΣΗ 2

Τα πολυώνυμα  $\Phi_s(L)$  και  $\Phi_n(L)$  δεν έχουν κοινές ρίζες.

Από την Υπόθεση 1 και τη σχέση (1.21) προκύπτει η σχέση

$$\Phi_s(L)\Phi_n(L)X_t = \Phi_s(L)\Phi_n(L)s_t + \Phi_s(L)\Phi_n(L)n_t = \Phi_n(L)\theta_s(L)a_{st} + \Phi_s(L)\theta_n(L)a_{nt},$$

από την οποία, με βάση την Υπόθεση 2, συνάγεται ότι η χρονολογική σειρά  $X_t$  ακολουθεί ένα μοντέλο *ARIMA* της μορφής

$$\Phi_X(L)X_t = \theta_X(L)a_t. \quad (1.28)$$

Η ύπαρξη συνέπειας μεταξύ των σχέσεων (1.26) και (1.27), (1.28) υποδηλοί την ισχύ των κατωτέρω σχέσεων

$$\Phi_X(L) = \varphi_s(L)\delta_s(L)\varphi_n(L)\delta_n(L) = \Phi_s(L)\Phi_n(L) \quad (1.29)$$

και

$$\theta_X(L)a_t = \Phi_n(L)\theta_s(L)a_{st} + \Phi_s(L)\theta_n(L)a_{nt}. \quad (1.30)$$

Η Υπόθεση 1 επιτρέπει τη μη αντιστρεψιμότητα των μη διακριτών συνιστωσών  $s_t$  και  $n_t$ . Το μοντέλο της χρονολογικής σειράς είναι δυνατό να θεωρηθεί αντιστρέψιμο χωρίς να υπάρξει απώλεια της γενίκευσης. Δεδομένου ότι η αντιστρεψιμότητα συνδέεται με τιμές της φασματικής συνάρτησης πυκνότητας ίσες με το μηδέν, δεν πρέπει να υφίστανται συχνότητες για τις οποίες όλες οι συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος των μη διακριτών συνιστωσών να είναι μηδέν. Προκειμένου να συμβεί αυτό, τίθεται η κατωτέρω Υπόθεση 3.

## ΥΠΟΘΕΣΗ 3

Τα πολυώνυμα  $\theta_s(L)$  και  $\theta_n(L)$  δεν έχουν κοινές ρίζες.

Οι εξισώσεις (1.21), (1.26) και (1.27) και οι Υποθέσεις 1, 2 και 3 συνιστούν ένα μοντέλο *ARIMA* μέσω του οποίου καθορίζεται η κατανομή της χρονολογικής σειράς  $X_t$ . Επειδή οι παράμετροί του είναι δυνατόν να εκτιμηθούν με συνέπεια και δεδομένου ότι το ενδιαφέρον ανάγεται στην εκτίμηση των μη διακριτών μεταβλητών είναι απαραίτητη η επόμενη Υπόθεση 4.

## ΥΠΟΘΕΣΗ 4

Τα πολυώνυμα  $\Phi_X(L)$  και  $\theta_X(L)$  καθώς και η διακύμανση  $V_a = \sigma_a^2$  της στοχαστικής διαδικασίας  $a_t$  λευκού θορύβου θεωρούνται γνωστά.

Λαμβανομένης υπόψη της σχέσεως (1.29) και της Υποθέσεως 3, η παραγοντοποίηση του πολυωνύμου  $\Phi_X(L)$  παράγει τα πολυώνυμα  $\Phi_s(L)$  και  $\Phi_n(L)$  των μη διακριτών συνιστωσών. Οι παράμετροι οι οποίες απομένει να εκτιμηθούν, είναι τα πολυώνυμα  $\theta_s(L)$  και  $\theta_n(L)$  και η μήτρα συνδιακύμανσης  $\Sigma = [\text{cov}(a_{st}, a_{nt})]$ . Υπό την υπόθεση της κανονικής κατανομής, εάν το σύστημα των εξισώσεων το οποίο προκύπτει κατόπιν εξισώσεως των αυτοσυνδιακυμάνσεων της αριστερής πλευράς της εξισώσεως (1.30) με τη δεξιά πλευρά έχει μια τοπική λύση για τις



παραμέτρους των πολυωνύμων  $\theta_s(L)$  και  $\theta_n(L)$  και της μήτρας συνδιακύμανσης  $\Sigma$ , τότε τα μοντέλα των μη διακριτών μεταβλητών είναι δυνατόν να προσδιορισθούν. Προφανώς χωρίς επιπρόσθετες υποθέσεις θα υπάρξει ένας άπειρος συνδυασμός μοντέλων μη διακριτών συνιστωσών τα οποία ικανοποιούν την ταυτότητα (1.30). Για την επίτευξη όμως ενός μόνο συνδυασμού συνιστωσών (πρόβλημα ταυτοποίησης) απαιτούνται επί πλέον περιορισμοί.

#### ΥΠΟΘΕΣΗ 5

Η μήτρα συνδιακύμανσης  $\Sigma$  είναι διαγώνια.

Από την Υπόθεση 5 προκύπτει ότι οι μη διακριτές συνιστώσες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, οπότε εάν  $g_j(\omega)$ ,  $j=X,s,n$  συμβολίζει τη συνάρτηση φασματικής πυκνότητας, τότε ισχύει η σχέση

$$g_X(\omega) = g_s(\omega) + g_n(\omega) \quad (1.31)$$

όπου

$$g_j(\omega) = S_j^2 [\theta_j(e^{-i\omega})\theta_j(e^{i\omega})/\varphi_j(e^{-i\omega})\varphi_j(e^{i\omega})]. \quad (1.32)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος της σχέσεως (1.32) ισχύει για στάσιμες στοχαστικές διαδικασίες αλλά ισχύει και στην περίπτωση μη στάσιμων περιπτώσεων οπότε στην περίπτωση αυτή οι συναρτήσεις  $g_j(\omega)$  καλούνται ψευδο-φασματικές συναρτήσεις πυκνότητας (Harvey, 1989).

#### B. Η κανονική διάσπαση

Έστω  $\varepsilon_j = \min_{\omega} g_j(\omega)$  όπου  $j=s,n$  (Burman, 1980). Τότε η ποσότητα  $\varepsilon_s + \varepsilon_n$  είναι δυνατόν να θεωρηθεί ως η διακύμανση μιας ορθογώνιας συνιστώσας καθαρού θορύβου ο οποίος εμπεριέχεται στο φάσμα της χρονολογικής σειράς  $X_t$  και ο οποίος είναι δυνατόν να ανακατανεμηθεί αυθαίρετως. Καθίσταται προφανές ότι το πρόβλημα ταυτοποίησης των μη διακριτών συνιστωσών ανάγεται στο πρόβλημα ανακατανομής του θορύβου μεταξύ των: ένα κλάσμα των ποσοτήτων  $\varepsilon_s$  και  $\varepsilon_n$  θα ήταν δυνατό να αφαιρεθεί από τη συνάρτηση φασματικής πυκνότητας της μιας μη διακριτής συνιστώσας και να μεταφερθεί στο φάσμα της άλλης. Εάν όσο το δυνατόν περισσότερος θόρυβος αφαιρεθεί από τη μη διακριτή συνιστώσα  $s_t$  και μεταφερθεί στην  $n_t$  τότε προκύπτουν τα φάσματα ενός μη αντιστρέψιμου σήματος  $s_t$  και ενός μη σήματος το οποίο όμως συγκεντρώνει όλο το θόρυβο του μοντέλου.

$$g_s^0(\omega) = g_s(\omega) - \varepsilon_s \text{ και } g_n^0(\omega) = g_n(\omega) - \varepsilon_n.$$

Η διάσπαση αυτή της  $X_t$  στις μη διακριτές συνιστώσες  $s_t$  και  $n_t$  καλείται κανονική (*canonical*). Η διάσπαση αυτής της μορφής της χρονολογικής σειράς  $X_t$  επροτάθη πρώτον από τους Box et al. (1978) και Pierce (1978). Όπως ανεφέρθη ανωτέρω, η προσέγγιση αυτή συνίσταται στον καθορισμό μιας μη διακριτής συνιστώσας από την οποία έχει αφαιρεθεί όσο το δυνατόν περισσότερο θόρυβος και ένα κανονικό σήμα λαμβάνει την τιμή μηδέν στο φάσμα του,

η οποία αντιστοιχεί σε μια μοναδιαία ρίζα στο  $MA$  πολυώνυμό του. Δηλαδή ένα κανονικό σήμα είναι μη αντιστρέψιμο. Μεταγενέστερα οι Hillmer and Tiao (1982) απέδειξαν ότι η κανονική διάσπαση μιας χρονολογικής σειράς ελαχιστοποιεί τη διακύμανση  $a_{st}$  της συνιστώσας του σήματος. Επίσης εάν η άρρυθμη συνιστώσα πρόκειται να απομονωθεί, τότε η διακύμανσή της μεγιστοποιείται όταν οι άλλες συνιστώσες είναι κανονικές.

### 1.4.7 Αρίστη εκτίμηση των μη διακριτών συνιστωσών

Το φίλτρο των Wiener-Kolmogorov ( $WK$ )

Ο άριστος εκτιμητής με βάση το μοντέλο (1.21) και το σύνολο των Υποθέσεων 1-5 ορίζεται ως ακολούθως:

#### ΥΠΟΘΕΣΗ 6

Έστω  $X_t = [x_1, \dots, x_T]$  το σύνολο των παρατηρήσεων επί της χρονολογικής σειράς  $X_t$ . Ο άριστος εκτιμητής της μη διακριτής μεταβλητής  $s_t$  ορίζεται από τη σχέση

$$\hat{s}_{t/T} = E(s_t / X_t).$$

Υπάρχουν δύο πολύ γνωστές διαδικασίες για τον υπολογισμό του υπό συνθήκη μέσου της μη διακριτής συνιστώσας  $s_t$ . Η μία βασίζεται στο φίλτρο Kalman και η άλλη στο φίλτρο Wiener-Kolmogorov ( $WK$ ). Στην αρχή και οι δύο παρήχθησαν για στάσιμες σειρές (Whittle (1963) και Anderson and Moore (1979)) και στη συνέχεια επεξετάθησαν για μη στάσιμες σειρές (Cleveland and Tiao (1976), Bell (1984), Ansley and Kohn (1985), Maravall (1988), DeJong (1988) κ.α.). Το φίλτρο Kalman χρησιμοποιείται κυρίως στην μεθοδολογία  $STS$  (*State Space Models*) ενώ το φίλτρο  $WK$  στην μεθοδολογία  $AMB$ .

Το φίλτρο  $WK$  είναι ένα γραμμικό φίλτρο των παρελθόντων και των μελλοντικών παρατηρήσεων επί της χρονολογικής σειράς  $X_t$

$$v(L) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k L^k,$$

όπου η σειρά  $X_t$  επεκτείνεται από  $-\infty$  έως  $-\infty$  (Pierce, 1979).

Το φίλτρο αυτό είναι ένα γραμμικό φίλτρο κινητού μέσου αλλά η κύρια διαφορά του από τα *ad hoc* φίλτρα έγκειται στον τρόπο κατασκευής του - το φίλτρο  $WK$  κατασκευάζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα ( $MMSE$ ) του εκτιμητή του σήματος.

Ο Whittle (1963) παρήγαγε το φίλτρο  $WK$  στο πεδίο συχνοτήτων ως ένα  $MMSE$  φίλτρο με την εξής μορφή  $v_s(e^{-i\omega}) = g_s(\omega) / g_x(\omega)$ .

Με την εφαρμογή της ανωτέρω σχέσεως στο μοντέλο (1.21), με βάση τη σχέση (1.31) και την ιδιότητα ανεξαρτησίας των μη διακριτών συνιστωσών, προκύπτουν οι εξής εκτιμητές τους:

$$\hat{s}_t = v_s(L)X_t = V_s \frac{q_s(L)q_s(F)\Phi_n(L)\Phi_n(F)}{q_x(L)q_x(F)} X_t \quad (1.33)$$

$$\hat{n}_t = v_n(L)X_t = V_n \frac{q_n(L)q_n(F)\Phi_s(L)\Phi_s(F)}{q_x(L)q_x(F)} X_t, \quad (1.34)$$

όπου  $V_s = \sigma_s^2$ ,  $F = L^{-1}$  και  $V_n = \sigma_n^2$ .

Από τις ανωτέρω σχέσεις είναι προφανές ότι το φίλτρο  $WK$  εξαρτάται από τα πολυώνυμα τόσο της χρονολογικής σειράς όσο και των μη διακριτών συνιστωσών της. Αυτή η εξάρτηση επιτρέπει την προσαρμογή αυτού του φίλτρου στην υπό μελέτη χρονολογική σειρά εν αντιθέσει με τα ad hoc φίλτρα τα οποία υιοθετούν ένα φίλτρο για ένα σύνολο χρονολογικών σειρών.

### Πρόταση 2

Επειδή το φίλτρο είναι συμμετρικό δύναται να θεωρηθεί ως η παράγωγος συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης  $ACGF$  (*AutoCovariance Generating Function*) του γραμμικού μοντέλου  $\theta_x(L) = \theta_s(L)\Phi_n(L)b_t$ ,

όπου  $V(b_t) = V_s$ .

Η παράγωγος συνάρτηση αυτοδιακύμανσης ορίζεται από τη σχέση

$$g(L) = g_0 + \sum_{i=1}^{\infty} g_i (L^i + F^i),$$

όπου  $g_0$  είναι η διακύμανση και  $g_i = \text{cov}(y_t, y_{t-i})$ ,  $i=1,2,\dots$  είναι οι lag- $i$  αυτοσυνδιακυμάνσεις μιας στοχαστικής διαδικασίας  $y_t$ . Στην περίπτωση στάσιμης  $ARMA$  διαδικασίας  $\Phi(L)y_t = \theta(L)a_t$ ,

$$g(L) = V_a \frac{q(L)q(F)}{\Phi(L)\Phi(F)}.$$

Από την ανωτέρω Πρόταση 2 προκύπτει ότι οι  $MMSE$  εκτιμητές είναι δυνατόν να υπολογισθούν εφόσον είναι γνωστά όλα τα στοχαστικά μοντέλα - της χρονολογικής σειράς και των μη διακριτών συνιστωσών. Η εκτίμηση των μη διακριτών μεταβλητών απαιτεί πρώτον την επιλογή μιας επιτρεπτέας διάσπασης (*admissible decomposition*) της χρονολογικής σειράς. Διαφορετικές υποθέσεις για τα στοχαστικά μοντέλα των μη διακριτών μεταβλητών συνεπάγεται διαφορετικές ιδιότητες για τους εκτιμητές μέσω των τετραγωνισμένων πολυωνύμων  $\theta_i(L)\theta_i(F)$  και της  $V_i$ ,  $i=s,n$ .

Εν τούτοις δεν υφίσταται αυστηρή αντιστοιχία μεταξύ των στοχαστικών ιδιοτήτων των μη διακριτών μεταβλητών (*components*) και των εκτιμητών (*estimators*) τους (Bell and Hillmer, 1984). Το γεγονός αυτό καθίσταται αντιληπτό από τη μελέτη της κατανομής των εκτιμητών.

#### A. Η κατανομή του εκτιμητή

Από τη σχέση (1.33) σε συνδυασμό με τις σχέσεις (1.28) και (1.29) προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\hat{s}_t = \frac{q_s(L)}{\Phi_s(L)} \hat{a}_{s_t} \quad (1.35)$$

$$\hat{a}_{s_t} = V_s \frac{q_s(L)\Phi_n(F)}{q_x(L)} a_t. \quad (1.36)$$

Ο εκτιμητής  $\hat{a}_{s_t}$ , είναι ο *MMSE* εκτιμητής των ψευδο-διαταρακτικών όρων  $a_{s_t}$  της μη διακριτής συνιστώσας  $s_t$  (Harvey and Koopman, 1992).

Από τις σχέσεις (1.26) και (1.35) προκύπτει ότι οι δομικές διαφορές μεταξύ της μη διακριτής συνιστώσας  $s_t$  και του εκτιμητή της  $\hat{s}_t$  οφείλονται στον εκτιμητή  $\hat{a}_{s_t}$  των ψευδο-διαταρακτικών όρων: ενώ οι ψευδο-διαταρακτικοί όροι υποτίθεται ότι είναι λευκός θόρυβος οι *MMSE* εκτιμητές τους ακολουθούν κάποιο μοντέλο *ARMA*. Επί παραδείγματι, ενώ η άρρυθμη συνιστώσα υποτίθεται ότι είναι λευκός θόρυβος ο εκτιμητής της ακολουθεί κάποιο μοντέλο *ARMA*.

Οι διαφορές μεταξύ  $s_t$  και  $\hat{s}_t$  γίνονται περισσότερο αντιληπτές κατόπιν μελέτης της επίδρασης του φίλτρου *WK* επί της χρονολογικής σειράς  $X_t$  στο φασματικό πεδίο. Πράγματι εάν  $g_s(\omega)$  είναι η συνάρτηση φασματικής πυκνότητας του εκτιμητή  $\hat{s}_t$  τότε από την (1.21) προκύπτει ότι

$$g_s(\omega) = v_s(e^{-i\omega})v_s(e^{i\omega})g_x(\omega) = R^2(\omega)g_x(\omega) = R(\omega)g_s(\omega), \quad (1.37)$$

όπου

$$R(\omega) = g_s(\omega)/g_x(\omega) = \frac{1}{1+1/r(\omega)} \quad (1.38)$$

και

$$r(\omega) = g_s(\omega)/g_x(\omega). \quad (1.39)$$

Η ποσότητα  $r(\omega)$  ονομάζεται λόγος του σήματος προς τον θόρυβο (*signal to noise ratio*). Η σχέση αυτή παρέχει τη δυνατότητα ερμηνείας της λειτουργίας του φίλτρου *WK* στο πεδίο των συχνοτήτων.

Όταν η τιμή του λόγου (1.39) σε μια συγκεκριμένη συχνότητα  $\omega$  είναι μηδέν τότε η συνάρτηση μεταφοράς συχνότητας  $R(\omega)$  θα λαμβάνει την τιμή 1 και ισχύει η ισότητα  $g_s(\omega^*) = g_x(\omega^*)$ . Η μη διακριτή συνιστώσα  $s_t$  και ο εκτιμητής της  $\hat{s}_t$  θα παρουσιάζουν περιοδικές κυμάνσεις της ίδιας μεταβλητικότητας γύρω από τη συχνότητα  $\omega$ . Επίσης λόγω του ότι το κέρδος του φίλτρου *WK* σε αυτή τη συχνότητα είναι περίπου 1 τότε ισχύει  $g_s(\omega^*) = g_x(\omega)$  και επομένως το μεγαλύτερο μέρος του φάσματος της χρονολογικής σειράς χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του σήματος.

Αντιθέτως όταν η σχετική συνεισφορά σε μια συγκεκριμένη συχνότητα είναι μικρή, τότε

το φίλτρο  $WK$  την αγνοεί κατά την εκτίμηση του σήματος. Εάν υποθεθεί ότι είτε το φάσμα του σήματος λαμβάνει την τιμή μηδέν σε μια συγκεκριμένη συχνότητα  $\omega$  είτε το φάσμα του μη σήματος παρουσιάζει μια κορυφή προς το άπειρο στη συχνότητα  $\omega$  τότε  $R(\omega^*)=0$  και  $g_s(w^*) \equiv 0$  και το στοχαστικό μοντέλο του εκτιμητή θα είναι αντιστρέψιμο. Επίσης από τις ανωτέρω σχέσεις προκύπτει και η σχέση  $g_s(w) = g_s(w)$ , δηλαδή το σήμα πάντοτε υποεκτιμάται (Burman, 1980). Αυτό σημαίνει ότι εκτιμητής του σήματος θα παρουσιάζει μεγαλύτερη σταθερότητα από το ίδιο το σήμα.

## 1.4.8 AMB ερμηνεία των φίλτρων HP και Butterworth

### 1.4.8.1 Το φίλτρο των Hodrick-Prescott

Σε αυτή την ενότητα διερευνούνται οι συνθήκες κάτω από τις οποίες το φίλτρο  $HP$  είναι άριστο φίλτρο υπό την έννοια ότι ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα του εκτιμητή της μη διακριτής συνιστώσας ( $s_t$  ή  $n_t$ ). Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα έγκειται στον προσδιορισμό στοχαστικών μοντέλων για τη χρονολογική σειρά και τις μη διακριτές συνιστώσες. Οι King and Rebelo (1993) απέδειξαν ότι το φίλτρο  $HP$  δύναται να ερμηνευθεί ως ένα  $AMB$  φίλτρο όπου  $(x_1, \dots, x_T)$  είναι παρατηρήσεις μιας στοχαστικής διαδικασίας η οποία είναι το άθροισμα μιας  $IMA(2,0)$  στοχαστικής τάσεως και μιας στοχαστικής διαδικασίας λευκού θορύβου ορθογώνιας στη συνιστώσα της στοχαστικής τάσης. Υπό αυτές τις συνθήκες ο προσδιορισμός του  $HP$  φίλτρου είναι ισοδύναμος με την εύρεση του  $MMSE$  εκτιμητή της μη διακριτής συνιστώσας  $s_t$  ή  $n_t$ .

Οι Kaiser and Maravall (1999) έδωσαν μια διαφορετική  $AMB$  ερμηνεία για το φίλτρο  $HP$ .

Εάν " $w.n \equiv (0, v)$ " συμβολίζει μια στοχαστική διαδικασία λευκού θορύβου, τότε τα στοχαστικά μοντέλα για τις μη διακριτές συνιστώσες  $m_t$  και  $c_t$  έχουν τη μορφή

$$x_t = m_t + c_t \quad (1.40)$$

$$\nabla^2 m_t = a_{mt}, \quad a_{mt} \equiv w.n(0, v_m) \quad (1.41)$$

$$c_t \equiv w.n(0, v_c), \quad (1.42)$$

όπου  $a_{mt}$  και  $c_t$  ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Από τη σχέση (1.40) προκύπτει ότι

$$\nabla^2 x_t = a_{mt} + \nabla^2 c_t \quad (1.43)$$

και επομένως η στοχαστική διαδικασία για την  $x_t$  είναι ένα  $IMA(2,2)$  μοντέλο.

Έστω ότι έχει τη μορφή

$$\nabla^2 x_t = \theta_{HP}(L)a_t = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2)a_t, \quad a_t \equiv w.n(0, v_a), \quad (1.44)$$

οπού η ταυτότητα

$$\theta_{HP}(L)a_t = a_{mt} + \nabla^2 c_t \quad (1.45)$$

καθορίζει τις παραμέτρους  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  και  $v_a$ . Το γεγονός ότι η (1.43) είναι το άθροισμα δύο

ορθογωνίων συνιστωσών, η μία από τις οποίες είναι λευκός θόρυβος, υποδηλοί ότι η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος έχει ένα θετικό ελάχιστο ή με άλλα λόγια ότι η  $\theta_{HP}(L)a_t$  είναι αντιστρέψιμη και επομένως ότι η  $\theta_{HP}(L)^{-1}$  πάντοτε συγκλίνει. Οι *MMSE* εκτιμητές των  $m_t$  και  $c_t$  είναι δυνατόν να υπολογισθούν με το φίλτρο Wiener-Kolmogorov (*WK*). Όταν  $\lambda=v_c/v_m$ , αυτοί οι εκτιμητές είναι οι ίδιοι με αυτούς οι οποίοι υπολογίζονται με το φίλτρο *HP*.

Πράγματι από τη σχέση (1.33) σε συνδυασμό με τις σχέσεις (1.44), (1.41) και (1.42) προκύπτει ότι τα *HP* φίλτρα για τάση και τον κύκλο δίνονται από τις σχέσεις:

$$v_m(L, F) = k_m \frac{1}{q_{HP}(L)q_{HP}(F)} \quad (1.46)$$

$$v_c(L, F) = k_c \frac{(1-L)^2(1-F)^2}{q_{HP}(L)q_{HP}(F)}, \quad (1.47)$$

όπου  $k_m=v_m/v_a$ ,  $k_c=v_c/v_a$ .

Από τη σχέση (1.45) προκύπτει ότι

$$\theta_{HP}(L)\theta_{HP}(F)v_a=v_m+(1-B)^2(1-F)^2v_c, \quad (1.48)$$

οπότε προκύπτει η σχέση  $v_m(L, F)+v_c(L, F)=1$  η οποία συνεπάγεται ότι  $x_t = \hat{m}_t + \hat{c}_t$ .

Επομένως θα μελετηθεί το φίλτρο της τάσεως  $v_m(L, F)$  δεδομένου ότι το άλλο προκύπτει από τη σχέση  $v_c(L, F)=1-v_m(L, F)$ .

Από τις σχέσεις (1.46), (1.48) και  $\lambda=v_c/v_m$  προκύπτει ότι

$$v_m(L, F) = \frac{1}{1+I(1-B)^2(1-F)^2} \quad (1.49)$$

το *HP* φίλτρο της τάσεως (βλ. ενότητα 1.4.5).

### 1.4.8.2 Η οικογένεια των φίλτρων Butterworth

Η οικογένεια των φίλτρων Butterworth και συγκεκριμένα οι δύο τύποι της *BFS* και *BFT* είναι άριστα φίλτρα υπό την έννοια ότι ελαχιστοποιούν το μέσο τετραγωνικό σφάλμα του εκτιμητή της μη διακριτής συνιστώσας ( $s_t$  ή  $n_t$ ) σε μοντέλα της μορφής  $x_t=s_t+n_t$ .

Για το φίλτρο *BFS*, η συνιστώσα  $s_t$  ακολουθεί ένα *IMA*(1,0) μοντέλο, ενώ η συνιστώσα  $n_t$  είναι λευκός θόρυβος. Για το φίλτρο *BFT*, η πρώτη συνιστώσα ακολουθεί ένα *IMA*( $d,d$ ) μοντέλο ενώ η δευτέρα είναι πάλι λευκός θόρυβος.

Με βάση αυτή την *AMB* (*ARIMA-Model Based.*) ερμηνεία των δύο αντιπροσωπευτικών τύπων της οικογενείας των φίλτρων Butterworth είναι δυνατόν να συναχθούν οι κατωτέρω σχέσεις για τα *WK* φίλτρα (Gomez, 1988):

*BFS* φίλτρο

$$H_{BFS}(L, F) = \frac{1}{1+I(1-F)^d(1-F)^d} \quad (1.50)$$

### BFT φίλτρο

$$H_{BFT}(L, F) = \frac{(1+L)^d (1+F)^d}{(1+L)^d (1+F)^d + I(1-L)^d (1-F)^d}, \quad (1.51)$$

όπου  $\lambda = \sigma_n^2 / \sigma_b^2$ ,  $\nabla^d x_t = \theta(L)a_t$ ,  $\text{Var}(a_t) = \sigma_a^2$ ,  $\nabla^d s = b_t$ ,  $\text{Var}(b_t) = \sigma_b^2$  και  $n_t \equiv w.n(0, \sigma_n^2)$ .

Όπως είναι γνωστό τα μηχανικά ή ad hoc φίλτρα είναι δυνατό να παράγουν τεχνητούς κύκλους το επονομαζόμενο Slutsky effect. Αυτό είναι δυνατό και όταν εφαρμόζεται το φίλτρο Butterworth για την εξαγωγή της μακροχρονίου τάσεως ή των κύκλων.

Το πρόβλημα αυτό υπερνικάται με την εφαρμογή μιας διαδικασίας δύο βημάτων :

α) Στο πρώτο βήμα υπολογίζεται η συνιστώσα τάση-κύκλος με την βοήθεια της μεθοδολογίας *AMB* μέσω του προγράμματος TRAMO-SEATS. Με τον τρόπο αυτό η παραγωγή τεχνητής κυκλικότητας αποτρέπεται δεδομένου ότι η εφαρμογή του *AMB*-φίλτρου εγγυάται ότι εάν δεν υπάρχει φασματική ισχύς σε ένα συγκεκριμένο διάστημα συχνοτήτων του φασματικού πεδίου, τότε η συνάρτηση τετραγωνισμένου κέρδους του φίλτρου είναι μηδέν σε αυτό το πεδίο συχνοτήτων. Εάν επί παραδείγματι η χρονολογική σειρά είναι λευκός θόρυβος, τότε το *AMB*-φίλτρο θα είναι μηδέν.

β) Στο δεύτερο βήμα εφαρμόζεται το φίλτρο *BFS* ή *BFT* επί της συνιστώσας τάση-κύκλος για την εξαγωγή της μακροχρονίου τάσεως ή του κύκλου.

Τα ανωτέρω προγράμματα TRAMO-SEATS, DEMETRA - επέκταση του TRAMO-SEATS - και TESS-TRACE εφαρμόζονται για την εξαγωγή της τάσεως και του κύκλου των χρονολογικών σειρών *CBR*, *INC*, *FPR*, *IMR* και *MR*.

## **1.5 Σύγκριση της αποτελεσματικότητας των ad hoc φίλτρων στην εξαγωγή της κυκλικής συνιστώσας των χρονολογικών σειρών CBR και INC**

Όπως είναι γνωστό, ο βαθμός συσχέτισης μεταξύ των κυκλικών συνιστωσών δυο χρονολογικών σειρών ποικίλει μεταξύ των διαφόρων μεθόδων φιλτραρίσματος, γεγονός το οποίο υποδηλοί την εξάρτηση των υπολογιζόμενων ροπών δευτέρας τάξεως από τη μέθοδο φιλτραρίσματος.

Η εξάρτηση των υπολογιζόμενων ροπών δευτέρας τάξεως από την εφαρμοζόμενη μέθοδο φιλτραρίσματος, έχει αναγνωρισθεί από διαφόρους ερευνητές σε διαφορετικές εργασίες μεταξύ των οποίων οι πλέον σημαντικότερες είναι οι εξής:

Οι Baxter (1988, 1991) και Baxter and Stockman (1989), είναι πιθανόν από τους πρώτους οι οποίοι ανέλυσαν τις συνέπειες των διαφορετικών μεθόδων φιλτραρίσματος συγκρίνοντας τις υπολογιζόμενες ροπές δευτέρας τάξεως από γραμμικούς φιλτραρισμένες και *HP*-φιλτραρισμένες χρονολογικές σειρές. Η Baxter διαπίστωσε ότι οι μέθοδοι φιλτραρίσματος αλλάζουν δραματικά

τις υπολογιζόμενες πληθυσμιακές ροπές δευτέρας τάξεως. Οι King and Rebelo (1989, 1993) διαπίστωσαν ότι η εφαρμογή του *HP*-φίλτρου μειώνει τη μεταβλητότητα, μεταβάλλει τις σχετικές μεταβλητότητες και τις σταυροειδείς συσχετίσεις μεταξύ διαφορετικών χρονολογικών σειρών. Τέλος, ο Canova (1998) συνέκρινε τις παραμορφωτικές επιδράσεις διαφορετικών φίλτρων στο χρονικό πεδίο χωρίς όμως την καθιέρωση ενός κριτηρίου για την εκτίμηση της προσεγγίσεως του καλύτερου φίλτρου από ένα ιδανικό φίλτρο.

Τα ανωτέρω οδηγούν στα εξής δύο βασικά ερωτήματα:

α) Κατά πόσο οι επιπτώσεις των διαφόρων φίλτρων στις υπολογιζόμενες ροπές δευτέρας τάξεως αποτελούν ένδειξη περί της αποτυχίας ή μη ενός συγκεκριμένου φίλτρου όπως ισχυρίζονται οι King and Rebelo (1993), Guay and Amant (1997), Ehlgren (1998) και άλλοι ερευνητές;

β) Κατά πόσο οι υπολογιζόμενες ροπές δευτέρας τάξεως παριστάνουν πραγματικά ή τεχνητά γεγονότα (*facts or artifacts*) ως επακόλουθο της εφαρμοζόμενης μεθόδου φιλτραρίσματος, ανεξαρτήτως του εάν η μέθοδος αυτή δρα παραμορφωτικά ή όχι επί των υπολογιζόμενων ροπών δευτέρας τάξεως - ένα ερώτημα διαφορετικής φύσεως.

Οι απαντήσεις επί των ανωτέρω ερωτημάτων έχουν ως εξής:

α) Η αλλαγή των ροπών δευτέρας τάξεως μιας φιλτραρισμένης χρονολογικής σειράς εν σχέσει με την αρχική μη φιλτραρισμένη χρονολογική σειρά δεν πρέπει να θεωρείται ως ένδειξη αποτυχίας ή επιτυχίας του φίλτρου στην εξαγωγή των συνιστωσών της σειράς αυτής.

Πράγματι ακόμη και η εφαρμογή ενός ιδανικού φίλτρου είτε αυτό είναι φίλτρο υψηλού περάσματος συχνοτήτων είτε είναι φίλτρο συγκεκριμένης ζώνης διελύσεως συχνοτήτων στη συνάρτηση φασματικής πυκνότητας  $S_y(\omega)$  μιας οιασδήποτε στάσιμης στοχαστικής διαδικασίας έχει ως αποτέλεσμα την αλλαγή της διακύμανσης και των αυτοσυνδιακυμάνσεων (*variance and autocovariances*) ως εξής:

$$\int_0^p 2S_y(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \neq \int_0^p H^*(\omega)2S_y(\omega)e^{-i\omega t} d\omega, \quad (1.52)$$

όπου  $H^*(\omega)$  είναι η συνάρτηση μετάθεσης συχνότητας του ιδανικού φίλτρου.

Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και για τις σταυροειδείς διακυμάνσεις μεταξύ διαφορετικών χρονολογικών σειρών ως εξής:

$$\int_0^p 2S_Y(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \neq \int_0^p H^*(\omega)2S_Y(\omega)e^{-i\omega t} d\omega, \quad (1.53)$$

όπου  $Y$  είναι το διάνυσμα των χρονολογικών σειρών.

β) Δεδομένου ότι η επιλογή της μεθόδου φιλτραρίσματος επιδρά επί των υπολογιζόμενων ροπών δευτέρας τάξεως, θεωρείται απαραίτητη η κατασκευή ενός δείκτη-μέτρου για την εκτίμηση των παραμορφωτικών επιδράσεων των φίλτρων. Στην αντίθετη περίπτωση, είναι αδύνατον να καθορισθεί εάν οι υπολογιζόμενες ροπές δευτέρας τάξεως είναι πραγματικές ή



απλώς παριστούν τεχνητά γεγονότα (*stylized facts or artifacts*).

### 1.5.1 Θεωρητικό πλαίσιο

Με βάση το ανωτέρω ερώτημα θα εξετασθεί η δυνατότητα επιλογής του πλέον αρίστου φίλτρου υπό την έννοια ότι προσεγγίζει όσο το δυνατό καλύτερα το ιδανικό φίλτρο είτε αυτό είναι φίλτρο χαμηλού περάσματος συχνοτήτων είτε αυτό είναι φίλτρο διελεύσεως ζώνης συχνοτήτων.

### 1.5.2 Άριστα φίλτρα

Έστω  $C_t^*$  παριστά την αληθή κυκλική συνιστώσα της χρονολογικής σειράς  $Y_t$  και έστω  $\hat{C}_t$  παριστά την εκτίμησή της. Ένα ιδανικό φίλτρο για την εξαγωγή της κυκλικής συνιστώσας της χρονολογικής σειράς  $Y_t$  θεωρείται εκείνο το οποίο ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα  $MSE$  (Wiener (1949) και Whittle (1983)) ως εξής:

$$MSE = (1/T) \sum_{t=1}^T (\hat{C}_t - C_t^*)^2. \quad (1.54)$$

Ο ανωτέρω όμως ορισμός δεν θεωρείται λειτουργικός δεδομένου ότι δεν είναι γνωστή η αληθής κυκλική συνιστώσα στο χρονικό πεδίο.

Έστω ότι η αληθής κυκλική συνιστώσα  $C_t^*$  της χρονολογικής σειράς  $Y_t$  είναι το αποτέλεσμα φιλτραρίσματος της με ένα ιδανικό φίλτρο είτε αυτό είναι ένα φίλτρο υψηλού περάσματος συχνοτήτων είτε αυτό είναι ένα φίλτρο διελεύσεως ζώνης συχνοτήτων οπότε ισχύει  $C_t^* = C^*(L)Y_t$ , όπου  $C^*(L)$  είναι το ιδανικό φίλτρο.

Έστω επίσης  $\hat{C}_t$  είναι το αποτέλεσμα φιλτραρίσματος της χρονολογικής σειράς  $Y_t$  με ένα φίλτρο  $C(L)$ , το οποίο όμως δημιουργεί παραμορφωτικά αποτελέσματα. Τότε η ανωτέρω σχέση είναι δυνατό να γραφεί υπό τη μορφή

$$MSE = (1/T) \sum_{t=1}^T (C(L)Y_t - C^*(L)Y_t)^2 \quad (1.55)$$

η οποία όμως όπως και η προηγούμενη δεν είναι λειτουργική λόγω του ότι δεν είναι δυνατό να κατασκευασθεί ένα ιδανικό φίλτρο για την εξαγωγή κυκλικών συνιστωσών με πεπερασμένο αριθμό παρατηρήσεων στο χρονικό πεδίο (Priestley (1981) και Koopman (1974)).

Εάν όμως ο αριθμός των παρατηρήσεων ήταν άπειρος, τότε ένα ιδανικό φίλτρο χαμηλού περάσματος συχνοτήτων είναι δυνατόν να κατασκευασθεί στο χρονικό πεδίο ως ένα γραμμικό συμμετρικό φίλτρο της μορφής

$$a(h) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j^* Y_{t-j}, \quad (1.56)$$

όπου οι σταθμίσεις του φίλτρου ικανοποιούν τη σχέση  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |h_j^*| < \infty$ .

Εάν  $H^*(e^{-i\omega j})$  είναι η συνάρτηση μετάθεσης συχνότητας του ιδανικού φίλτρου χαμηλού περάσματος συχνοτήτων

$$H^*(e^{-i\omega j}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j^* e^{-i\omega j}, \quad (1.57)$$

τότε οι σταθμίσεις του φίλτρου  $a(h)$  είναι δυνατόν να υπολογισθούν μέσω του αντιστρόφου διακριτού μετασχηματισμού του Fourier της συναρτήσεως μεταφοράς συχνότητας ως εξής (Baxter and King, 1995)

$$h_j^* = (1/2p) \int_{-p}^p h^* e^{-i\omega j} e^{i\omega j} d\omega = \begin{cases} \omega_{1/p}, & j = 0 \\ \sin(j\omega_1)/pj, & j = \pm 1, 2 \end{cases} \quad (1.58)$$

όπου  $\omega_1$  είναι η συχνότητα αποκοπής (*cutoff frequency*).

Η μέθοδος αυτή υπολογισμού του ιδανικού φίλτρου χαμηλού περάσματος συχνοτήτων, αποτελεί τη βάση για την κατασκευή φίλτρων τα οποία προσεγγίζουν το ιδανικό αυτό φίλτρο όταν ο αριθμός των παρατηρήσεων είναι πεπερασμένος.

### 1.5.3 Παραμορφωτικά φίλτρα

Η μη δυνατότητα κατασκευής ενός ιδανικού φίλτρου με πεπερασμένο αριθμό παρατηρήσεων στο χρονικό πεδίο (*time domain*) έχει ως αποτέλεσμα όλα τα φίλτρα να αποτελούν προσεγγίσεις του ιδανικού αυτού φίλτρου και κατά συνέπεια να παραμορφώνουν (*distort*) την "αληθή" κυκλική συνιστώσα λόγω επανασταθμίσεως των διαφορετικών συχνοτήτων στο φασματικό πεδίο (*frequency domain*) (Priestley (1981) και Koopman (1974)).

Αυτό υποδηλοί ότι κατά τον υπολογισμό των ροπών δευτέρας τάξεως καμιά από τις εφαρμοζόμενες μεθόδους φιλτραρίσματος δεν δύναται να λεχθεί ότι είναι η "αληθής" και κατά μία άποψη θεωρείται χρήσιμη η παρουσίαση διαφορετικών αποτελεσμάτων χρησιμοποιώντας διαφορετικά φίλτρα (Baxter (1988, 1993), Baxter and Stockman (1989), King and Rebelo (1989, 1993) και Canova (1998)), όπως ήδη έχει εφαρμοσθεί ανωτέρω στην προηγούμενη ενότητα.

Εν τούτοις με τον προσδιορισμό των παραμορφωτικών επιδράσεων (*distortionary effect*) των φίλτρων είναι δυνατό να αποφευχθεί η χρησιμοποίηση μεθόδων φιλτραρίσματος με υψηλό δείκτη παραμορφώσεως με αποτέλεσμα να τίθεται μεγαλύτερη "εμπιστοσύνη" στον υπολογισμό των ροπών δευτέρας τάξεως υπό την έννοια ότι προσεγγίζουν όσο το δυνατό περισσότερο τις ροπές δευτέρας τάξεως της αληθούς κυκλικής συνιστώσας.

Βασικός στόχος της θεωρίας κατασκευής των ιδανικών φίλτρων είναι η κατασκευή εκείνων των φίλτρων των οποίων οι παραμορφωτικές των συνέπειες ελαχιστοποιούνται κατά το μέγιστο δυνατό.

Εν γένει ένα οιοδήποτε φίλτρο θεωρείται ότι έχει παραμορφωτικές συνέπειες εφόσον περνά συχνότητες τις οποίες υπετίθετο ότι έπρεπε να μετριάσει (*leakage*) και ταυτόχρονα να συμπίσει συχνότητες τις οποίες υπετίθετο ότι έπρεπε να περάσει (*compression*) και ως εκ τούτου επεκράτησαν οι όροι διαρροή και συμπίεση (*leakage and compression*) συχνοτήτων (βλ. Σχήμα 1.5).

Το μέγεθος της διαρροής και της συμπίεσεως ενός φίλτρου είναι δύο φορές η επιφάνεια μεταξύ της συναρτήσεως μετάθεσης συχνότητας  $H^*(\omega)$  ενός ιδανικού φίλτρου και της συναρτήσεως μετάθεσης συχνότητας  $H(\omega)$  ενός παραμορφωτικού φίλτρου και δίδεται από τη σχέση

$$Leakage\ and\ compression = \sum_{\omega \in W} 2|H(\omega) - H^*(\omega)|\Delta\omega, \quad (1.59)$$

όπου  $W = (\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n)$  με  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_n = \pi$  και  $\Delta\omega = \omega_i - \omega_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Με βάση ένα πεπερασμένο αριθμό παρατηρήσεων είναι δυνατόν να κατασκευασθεί ένα γραμμικό φίλτρο κινητού μέσου της μορφής

$$a_{lp}(L) = \sum_{j=-k}^K a_j,$$

το οποίο αποτελεί μια "αρίστη προσέγγιση" στο ιδανικό φίλτρο χαμηλού περάσματος συχνοτήτων.

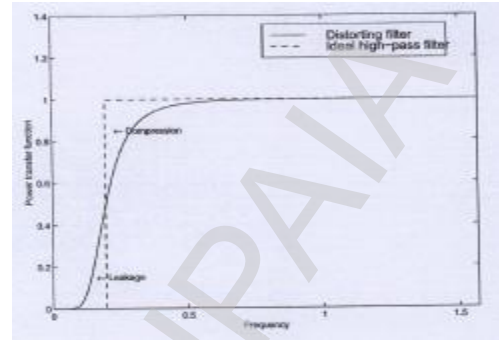
Η έννοια της "αρίστης προσεγγίσεως" σε ένα ιδανικό φίλτρο χαμηλού περάσματος συχνοτήτων βασίζεται στην ιδέα ότι ένα άριστο φίλτρο είναι αυτό το οποίο ελαχιστοποιεί τη διαρροή και τη συμπίεση του φίλτρου και όχι αυτό το οποίο ελαχιστοποιεί το  $MSE$  το δείκτη-μέτρο των παραμορφωτικών επιδράσεων του φίλτρου.

Μια αρίστη προσέγγιση στο ιδανικό φίλτρο χαμηλού περάσματος για συγκεκριμένο μήκος χρονικής υστέρησης  $K$  είναι δυνατόν να επιτευχθεί με την αποκοπή των σταθμίσεων  $h_j^*$  του ιδανικού φίλτρου στη χρονική υστέρηση  $K$  (Koopmans (1974) και Baxter and King (1995)) ως εξής:

$$a_j = \begin{cases} h_j^*, & j = \pm 1, 2, K, K \\ 0, & j > k \end{cases}.$$

Με βάση την ανωτέρω σχέση είναι επίσης δυνατόν να κατασκευασθεί ένα πεπερασμένου μήκους άριστο φίλτρο υψηλού περάσματος συχνοτήτων, το οποίο προσεγγίζει ένα ιδανικό φίλτρο υψηλού περάσματος μέσω της σχέσεως  $a_{hp}(L) = 1 - a_{lp}(L)$ .

**ΣΧΗΜΑ 1.5:** ΟΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΤΙΚΕΣ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ ΗΡ ΣΥΓΚΡΙΝΟΜΕΝΕΣ ΜΕ ΤΟ ΙΔΑΝΙΚΟ ΦΙΛΤΡΟ ΥΨΗΛΟΥ ΠΕΡΑΣΜΑΤΟΣ



Με βάση τα ανωτέρω, η σχέση (1.55) γίνεται

$$MSE = (1/T) \sum_{t=1}^T \left[ \sum_{j=-k}^k (1-h_j^*) y_{t-j} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} (1-h_j^*) y_{t-j} \right]. \quad (1.60)$$

Η σχέση όμως αυτή δεν είναι λειτουργική λόγω του ότι δεν είναι δυνατό με ένα πεπερασμένο αριθμό παρατηρήσεων να κατασκευασθεί το ιδανικό κυκλικό φίλτρο  $C^*(L)y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (1-h_j^*) y_{t-j}$  και επομένως δεν δύναται να χρησιμοποιηθεί ως δείκτης-μέτρο για τη μέτρηση των παραμορφωτικών επιδράσεων ενός φίλτρου στο πεδίο του χρόνου.

Παρά ταύτα είναι δυνατό να κατασκευασθεί ένας δείκτης-μέτρο για τη μέτρηση των παραμορφωτικών επιδράσεων ενός φίλτρου στο πεδίο των συχνοτήτων όπως αναπτύσσεται κατωτέρω.

#### **1.5.4 Ένα μέτρο-απόστασης για τη μέτρηση των παραμορφωτικών επιδράσεων των φίλτρων**

Στο πεδίο του χρόνου, το μέγεθος των παραμορφωτικών επιδράσεων ενός φίλτρου εξαρτάται τόσο από το ίδιο το φίλτρο μέσω των σταθμίσεων του όσο και από την υπό καθεστώς φιλτραρίσματος χρονολογική σειρά.

Όπως αποδεικνύεται κατωτέρω, στο πεδίο των συχνοτήτων ισχύει κάτι ανάλογο δηλαδή οι παραμορφωτικές επιδράσεις ενός φίλτρου εξαρτώνται τόσο από τη συνάρτηση μετάθεσης συχνοτήτων του φίλτρου, όσο και από τη συνάρτηση πυκνότητας φάσματος της υπό καθεστώς φιλτραρίσματος χρονολογικής σειράς.

Έστω  $H^*(\omega)$  παριστά τη συνάρτηση μεταφοράς συχνότητας ενός ιδανικού φίλτρου είτε αυτό είναι φίλτρο υψηλού περάσματος συχνοτήτων είτε αυτό είναι φίλτρο διελεύσεως ζώνης συχνοτήτων και έστω  $H(\omega)$  παριστά τη συνάρτηση μεταφοράς συχνότητας ενός παραμορφωτικού φίλτρου. Τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} S_c^*(w) &= 2H^*(w)S_y(w) \\ S_c(w) &= 2H(w)S_y(w) \end{aligned} \quad (1.61)$$

όπου  $S_y(\omega)$  είναι η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος της χρονολογικής σειράς  $Y$ ,  $W=(\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n)$  με  $\omega_1=0$ ,  $\omega_n=\pi$  και  $\Delta\omega=\omega_i-\omega_{i-1}$ ,  $i=1,2,\dots,n$  και  $S_y^*(w)$ ,  $S_y(\omega)$  είναι αντίστοιχα οι συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος της πραγματικής κυκλικής συνιστώσας και της παραμορφωτικής κυκλικής συνιστώσας της χρονολογικής σειράς  $Y$ .

Εκ των ανωτέρω σχέσεων είναι δυνατό να κατασκευασθεί ένα μέτρο-απόστασης (*distance-measure*)  $DM$  για τη μέτρηση των παραμορφωτικών επιδράσεων ενός φίλτρου ως εξής:

$$\begin{aligned}
DM[S_c(w), S_c^*(w)] &= \sum_{w \in W} 2|S_c^*(w) - S_c(w)| \Delta w \\
&= \sum_{w \in W} 2|H_c(w) - H_c^*(w)| S_y(w) \Delta w
\end{aligned} \tag{1.62}$$

Από την ανωτέρω σχέση φαίνεται ότι το μέτρο-απόστασης των παραμορφωτικών επιδράσεων ενός φίλτρου είναι συνάρτηση της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος ακριβώς όπως από τη σχέση (1.60) το  $MSE$  είναι συνάρτηση της χρονολογικής σειράς  $Y_t$ . Η αντιστοιχία αυτή υποδηλοί ότι εν γένει οι παραμορφωτικές επιδράσεις ενός φίλτρου δεν είναι δυνατό να μετρηθούν μόνο μέσω της συνάρτησης μετάθεσης συχνότητας και επομένως η ελαχιστοποίηση μόνο του μεγέθους της διαρροής και της συμπίεσης ενός φίλτρου δεν είναι ισοδύναμη με την ελαχιστοποίηση του ανωτέρω δείκτη-μέτρου των παραμορφωτικών επιδράσεων του φίλτρου.

Κατ' άλλη διατύπωση, το μέγεθος της διαρροής και της συμπίεσης ενός φίλτρου δεν αποτελεί από μόνο του ένα μέτρο για την εκτίμηση των παραμορφωτικών επιδράσεων του φίλτρου.

Η σχέση (1.62) είναι δυνατόν να γραφεί και υπό τη μορφή

$$DM[S_c(w), S_c^*(w)] = \sum_{w \in W} 2|H_c(w) - H_c^*(w)| v(w), \tag{1.63}$$

$$\text{όπου } v(w) = \frac{2S_y(w)\Delta w}{\sum_{w \in W} S_y(w)\Delta w}.$$

### 1.5.5 Μέτρηση των παραμορφωτικών επιδράσεων των φίλτρων $BK$ , $HP$ , $PT$ , $DF$

Η μελέτη των παραμορφωτικών επιδράσεων διαφόρων φίλτρων περιλαμβανομένων και των φίλτρων  $BK$ ,  $HP$ ,  $PT$ ,  $DF$ , έγινε για πρώτη φορά από τον Pedersen (1998) με βάση τη σχέση (1.63).

Χρησιμοποιώντας πέντε αυτοπαλινδρομικά μοντέλα  $AR$  της μορφής

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| 1. A stationary $AR(1)$ -process     | $y_t = 0.9y_{t-1} + \varepsilon_t$                     |
| 2. A stationary $AR(1)$ -process     | $y_t = 0.95y_{t-1} + \varepsilon_t$                    |
| 3. A near unit root $AR(1)$ -process | $y_t = 0.99y_{t-1} + \varepsilon_t$                    |
| 4. A near unit root $AR(1)$ -process | $y_t = 0.9999y_{t-1} + \varepsilon_t$                  |
| 5. A near unit root $AR(2)$ -process | $y_t = 1.3297y_{t-1} - 0.33182y_{t-2} + \varepsilon_t$ |

όπου  $\varepsilon_t$  είναι λευκός θόρυβος και τριμηνιαία δεδομένα για το  $\log(\text{ΑΕΠ})$  των Η.Π.Α., τα οποία καλύπτουν την περίοδο 1947:1-1997:2, κατέληξε στα εξής συμπεράσματα:

Το φίλτρο  $PT$  παρουσιάζει το μεγαλύτερο μέτρο-απόστασης παραμορφωτικών επιδράσεων το οποίο αυξάνει όσο η στοχαστική διαδικασία γίνεται  $I(1)$ . Το φίλτρο  $DF$  προκαλεί επίσης υψηλές παραμορφωτικές επιδράσεις αν και αυτές μειώνονται όσο η στοχαστική διαδικασία καταλήγει στη μορφή  $I(1)$ . Το φίλτρο  $HP$  παρουσιάζει το μικρότερο μέτρο-απόστασης παραμορφωτικών επιδράσεων εκτός της περιπτώσεως της αυτοπαλινδρομής στοχαστικής

διαδικασίας  $AR(2)$  για την οποία το φίλτρο  $BK$  παρουσιάζει μικρότερο μέτρο-απόστασης αν και όχι με μεγαλύτερη διαφορά από αυτό του φίλτρου  $HP$ .

Συνοψίζοντας, ο Pedersen (1998) κατέληξε στο συμπέρασμα ότι τα φίλτρα  $HP$  και  $BK$ , σε σύγκριση με τα άλλα φίλτρα, είναι σχεδόν όμοια και αποτελούν άριστες προσεγγίσεις στο ιδανικό φίλτρο υψηλού περάσματος συχνοτήτων ή στο ιδανικό φίλτρο διέλευσης ζώνης συχνοτήτων δεδομένου ότι οι συναρτήσεις μετάθεσης συχνότητας των φίλτρων αυτών λαμβάνουν τιμές σχεδόν μηδενικές για συχνότητες μικρότερες του  $\pi/4$  (κύκλοι περιόδου 8 ετών) και σχεδόν κοντά στη μονάδα για μεγαλύτερες συχνότητες. Επίσης τα μεγέθη διαρροής και συμπίεσης των δύο αυτών φίλτρων είναι μικρότερα σε σύγκριση με τα άλλα φίλτρα.

Εκ των ανωτέρω συνάγεται το συμπέρασμα ότι τα φίλτρα  $HP$  και  $BK$  προκαλούν το μικρότερο βαθμό παραμορφωτικών επιδράσεων. Στην περίπτωση μάλιστα ετησίων δεδομένων τα δύο αυτά φίλτρα ταυτίζονται εφόσον η παράμετρος εξομάλυνσης του φίλτρου  $HP$  λάβει την τιμή  $\lambda=10$  (Baxter and King, 1995) ή την τιμή  $\lambda=6.25$  (Ravn and Uhlig (1997) και Barrios et al. (2001)).

Οι Ravn and Uhlig απέδειξαν πώς η τιμή της παραμέτρου εξομάλυνσης  $\lambda$  πρέπει να διορθωθεί όταν φιλτράρονται χρονολογικές σειρές με ετήσια δεδομένα με το φίλτρο  $HP$  και πρότειναν την τιμή  $\lambda=6.25$  η οποία όμως δεν βασίζεται σε άριστο φιλτράρισμα.

Παράλληλα ο Pedersen (1998) υπολόγισε τις άριστες τιμές της παραμέτρου εξομάλυνσης  $\lambda$  του φίλτρου  $HP$ , για ετήσια δεδομένα για τα πέντε αυτοπαλινδρομικά μοντέλα  $AR$  και κατέληξε στα εξής αποτελέσματα:

1.  $AR(1)$   $\lambda=5.03$
2.  $AR(1)$   $\lambda=4.96$
3.  $AR(1)$   $\lambda=4.94$
4.  $AR(1)$   $\lambda=4.94$
5.  $AR(2)$   $\lambda=3.73$

Εκ των ανωτέρω συνάγεται ότι η τιμή της παραμέτρου εξομάλυνσης  $\lambda$  των Ravn and Uhlig για κύκλους με περίοδο μέχρι οκτώ ετών προσεγγίζει τις αντίστοιχες άριστες τιμές της ίδιας παραμέτρου για τα πέντε αυτοπαλινδρομικά μοντέλα  $AR$  του Pedersen και επομένως δύναται να χρησιμοποιηθεί κατά το φιλτράρισμα χρονολογικών σειρών με ετήσια δεδομένα με το φίλτρο  $HP$ .

**ΠΙΝΑΚΑΣ 1.3:** Μετρήσεις των παραμορφωτικών επιδράσεων των φίλτρων  $BK$ ,  $HP$ ,  $PT$ ,  $DF$  για πέντε αυτοπαλινδρομικά μοντέλα

ΦΙΛΤΡΑ	$\varphi=$	$AR(1) Y_t = \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t$				$AR(2)$
		0.90	0.95	0.99	0.9999	
$PT$		687.57	837.86	967.55	0.9999	991.83
$DF$		287.98	150.74	30.49	0.31	7.32
$HP \lambda=1600$		73.60	44.06	9.33	0.09	2.86
$BK K=12$		86.60	51.10	10.90	0.08	2.65

ΠΗΓΗ: Pedersen (1998)

### 1.5.6 Το τροποποιημένο φίλτρο Baxter-King και το φαινόμενο Gibb

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.6, το φίλτρο *BK* ταλαντεύεται γύρω από τη συνάρτηση μετάθεσης συχνότητας του ιδανικού φίλτρου διέλευσης ζώνης συχνοτήτων. Η ανεπιθύμητη αυτή ιδιότητα του φίλτρου *BK* η οποία αυξάνει το μέγεθος της διαρροής και της συμπίεσης και κατ' επέκταση το μέγεθος των παραμορφωτικών επιδράσεων του φίλτρου είναι γνωστό ως φαινόμενο Gibb (*Gibb's phenomenon*) και οφείλεται στο γεγονός του ότι η συνάρτηση μετάθεσης συχνότητας του ιδανικού φίλτρου η οποία είναι μια ασυνεχής συνάρτηση της συχνότητας  $\omega$  προσεγγίζεται από μια πεπερασμένη σειρά του Fourier.

Η προσέγγιση αυτή έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία των πλευρικών τοξοειδών σχηματισμών όπως αυτοί φαίνονται στο Σχήμα 1.6 οι οποίοι είναι δυνατό να περιορισθούν μόνο με την αύξηση του μήκους του φίλτρου. Επειδή όμως συνήθως τα δεδομένα και κυρίως τα οικονομικά δεν είναι διαθέσιμα για μεγάλες χρονικές περιόδους, η αύξηση του μήκους του φίλτρου δεν πρόκειται να οδηγήσει σε προσδοκώμενα αποτελέσματα. Η μόνη λύση είναι η εφαρμογή φασματικών παραθύρων (*spectral window*) (Mitra and Kaiser (1993) και Antoniou (1993)), όπως η χρήση των συντελεστών  $\sigma$  του Lanczos (*Lanczos'factors*) (Woitek, 1998) οι οποίοι εφαρμοζόμενοι στις σταθμίσεις  $b_j$  (βλ. παρ.1.4.5) του φίλτρου *BK* προκύπτουν οι σταθμίσεις  $b_j^*$  του τροποποιημένου φίλτρου *BKM* (*Modified Baxter-King*) ως εξής:

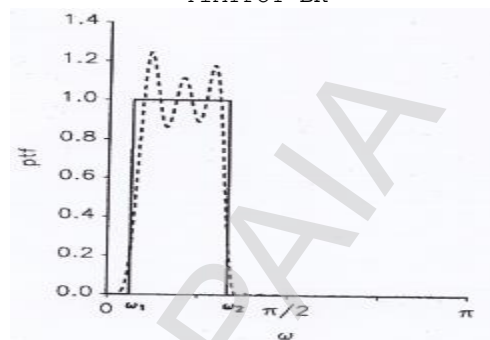
$$b_j^* = b_j \frac{\sin[2pj/(2k+1)]}{2pj/(2k+1)}.$$

Οι τροποποιημένες σταθμίσεις  $a_j^*$  για ετήσια δεδομένα ( $k=3$ ) λαμβάνουν τις εξής τιμές: (βλ. Παράρτημα)  $a_0^* = 0.72702054$ ,  $a_1^* = -0.0219029282$ ,  $a_2^* = -0.109412702$ ,  $a_3^* = -0.035068286$ .

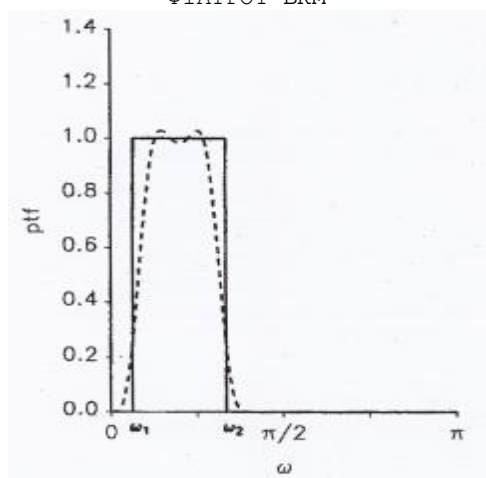
Η κυκλική συνιστώσα του φίλτρου *BKM* για τη χρονολογική σειρά  $X_t$  με βάση τις ως άνω σταθμίσεις, γράφεται ως εξής:  $C_{BKM} = 0.727X_t - 0.219(X_{t-1} + X_{t+1}) - 0.1094(X_{t-2} + X_{t+2}) - 0.035(X_{t-3} + X_{t+3})$ .

Η συνάρτηση τετραγωνισμένου κέρδους του φίλτρου *BKM* φαίνεται στο Σχήμα 1.7 χωρίς τις παραμορφωτικές τοξοειδείς καμάρες.

ΣΧΗΜΑ 1.6: ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΕΝΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ ΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ BK



ΣΧΗΜΑ 1.7: ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΕΝΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ ΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ BKM



### 1.5.7 Μεθοδολογική προσέγγιση της μελέτης του βαθμού συσχέτισης και των δομών υστέρησης – προπόρευσης των κυκλικών συνιστωσών των χρονολογικών σειρών CBR και INC στο πεδίο συχνοτήτων

#### 1. Η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος

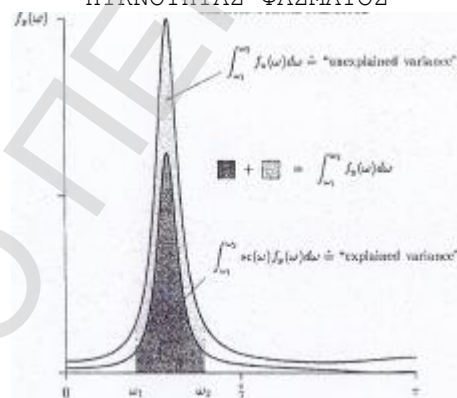
Η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος μιας στάσιμης χρονολογικής σειράς  $X_t$  ορίζεται ως ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτοδιακύμανσης  $\gamma_X(\tau)$ ,  $\tau=0,1,\dots$

$$f_X(\omega) = \frac{1}{2p} \sum_{t=-\infty}^{\infty} g_X(t) e^{-i\omega t}$$

όπου  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος εμφανίζεται στο Σχήμα 1.8. Η ερμηνεία της συνάρτησης αυτής, ταυτίζεται με τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας;  $f_X(\omega)d\omega$  είναι το μέρος της συνολικής διακύμανσης το οποίο οφείλεται στη συνιστώσα με συχνότητα εντός του διαστήματος  $[\omega, \omega+d\omega]$ . Η συνολική επιφάνεια η οποία περικλείεται από τη συνάρτηση πυκνότητας φάσματος ισούται με τη διακύμανση της

**ΣΧΗΜΑ 1.8:** ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΦΑΣΜΑΤΟΣ



χρονολογικής σειράς  $X_t$ , δηλαδή ισχύει η σχέση  $g_X(t) = \int_{-p}^p f_X(\omega) d\omega = \int_0^p 2f_X(\omega) d\omega$ .

Το ανωτέρω ολοκλήρωμα δύναται να θεωρηθεί ως η γραφική παράσταση της διάσπασης της διακύμανσης της χρονολογικής σειράς  $X_t$  συναρτήσει της συχνότητας  $\omega$  στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$  ή στο διάστημα  $[0, \pi]$  δεδομένου ότι η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος είναι άρτια συνάρτηση στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$  (βλ. Σχήμα 1.8). Η περιοχή του Σχήματος 1.8 η οποία περικλείεται μεταξύ της καμπύλης της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος και των καθέτων στις συχνότητες  $\omega_1$  και  $\omega_2$  είναι δυνατό να αποδοθεί στη σύνθεση των κυκλικών κυμάνσεων της ίδιας περιοχής συχνοτήτων.

Ο μετασχηματισμός επομένως μιας χρονολογικής σειράς από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο των συχνοτήτων δύναται να ερμηνευθεί ως μια υπέρθεση κυκλικών κυμάνσεων στο διάστημα συχνοτήτων  $[0, \pi]$ . Η διερεύνηση της σημαντικότητας της συνεισφοράς εκάστης κυκλικής συνιστώσας στη διακύμανση της χρονολογικής σειράς  $X_t$  επιτυγχάνεται με τη μελέτη της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος - μια κορυφή στην καμπύλη της συνάρτησης αυτής υποδηλοί μεγάλη συνεισφορά στη διακύμανση της χρονολογικής σειράς  $X_t$  και επομένως μια σημαντική κυκλική συνιστώσα.



## 2. Η συνάρτηση τετραγωνισμένης συνεκτικότητας

Έστω δύο στάσιμες χρονολογικές σειρές  $X_t$  και  $Y_t$  και έστω ότι συνδέονται μεταξύ τους μέσω του απλού γραμμικού υποδείγματος

$$Y_t = a + bX_t + u_t, \quad u_t \sim NID(0, \sigma^2).$$

Είναι προφανές ότι η μεταβλητότητα στις τιμές της  $Y_t$  προσδιορίζεται από τις μεταβολές των τιμών της  $X_t$  και του στοχαστικού όρου.

Ως γνωστόν, η κατωτέρω σχέση

$$\hat{b} = \frac{g_{yx}(0)}{g_x(0)} \quad (1.64)$$

προκύπτει κατόπιν ελαχιστοποίησης της σχέσεως

$$\min_{a,b} S^2 = E[Y_t^2 - (a - bX_t)^2]$$

Επίσης ως γνωστόν, ισχύει και η σχέση

$$g_y(0) = g_{\hat{y}}(0) + \hat{S}^2 \quad (1.65)$$

δηλαδή η συνολική μεταβλητότητα της  $Y_t$  διασπάται σε δύο συνιστώσες, από τις οποίες η μεν πρώτη αντιπροσωπεύει το μέρος εκείνο της μεταβλητότητας της  $Y_t$  το οποίο ερμηνεύεται από το εκτιμημένο γραμμικό υπόδειγμα, η δε δεύτερη εκφράζει το μέρος της συνολικής μεταβλητότητας της  $Y_t$  το οποίο δεν ερμηνεύεται από το γραμμικό υπόδειγμα.

Η σχέση (1.65) δύναται να μετασχηματισθεί στη σχέση

$$g_y(0) = R^2 g_y(0) + \hat{S}^2, \quad (1.66)$$

όπου  $R^2$  ο συντελεστής προσδιορισμού του γραμμικού υποδείγματος.

Ως γνωστόν, ο συντελεστής προσδιορισμού του γραμμικού υποδείγματος

$$R^2 = \frac{g_{\hat{y}}(0)}{g_y(0)}$$

μετράει το ποσοστό της μεταβλητότητας της  $Y_t$  το οποίο ερμηνεύεται από την εκτιμηθείσα γραμμή παλινδρόμησης.

Στο πεδίο των συχνοτήτων ισχύουν ανάλογες σχέσεις. Έστω ότι το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση του γραμμικού φίλτρου  $a(L)$  το οποίο ελαχιστοποιεί τη σχέση

$$\sigma^2 = E[Y_t - a(L)X_t]^2.$$

Αποδεικνύεται ότι αν το ανωτέρω πρόβλημα επιλυθεί στο πεδίο των συχνοτήτων, η συνάρτηση μετάθεσης συχνότητας του αρίστου φίλτρου  $\hat{a}(L)$  ικανοποιεί τη σχέση

$$\hat{a}(w) = \frac{f_{yx}(w)}{f_x(w)}, \quad w \in [-\pi, \pi],$$

όπου η συνάρτηση  $f_{yx}(w)$  καλείται συνάρτηση πυκνότητας φάσματος τομής (*cross-spectral*

density function) και έχει τη μορφή

$$f_{yx}(w) = \frac{1}{2p} \sum_{t=-\infty}^{\infty} g_{yx}(t) e^{-iwt},$$

όπου  $g_{yx}(\tau)$ ,  $\tau=0,1,\dots$  είναι η συνάρτηση συνδιακύμανσης των δύο χρονολογικών σειρών  $X_t$  και  $Y_t$ .

Έστω τώρα ότι η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος της χρονολογικής σειράς  $Y_t$  διασπάται σε δύο συνιστώσες από τις οποίες, η μεν πρώτη αντιπροσωπεύει το μέρος εκείνο το οποίο ερμηνεύεται από τη φιλτραρισμένη χρονολογική σειρά  $X_t$  και η δε δεύτερη εκφράζει το μέρος εκείνο το οποίο δεν ερμηνεύεται από τη φιλτραρισμένη χρονολογική σειρά  $X_t$ , δηλαδή

$$f_y(w) = f_{\hat{y}}(w) + f_u(w), \quad (1.67)$$

όπου η  $f_{\hat{y}}(w)$  ικανοποιεί τη σχέση

$$f_{\hat{y}}(w) = |\hat{a}(w)|^2 f_y(w).$$

Επομένως η σχέση (1.67) δύναται να γραφεί υπό τη μορφή

$$f_y(w) = |f_{yx}(w)|^2 / f_y(w) + f_u(w). \quad (1.68)$$

Έστω τώρα ότι ορίζεται ένα μέτρο αξιολόγησης του βαθμού της γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των κυκλικών συνιστωσών των δύο χρονολογικών σειρών  $Y_t$  και  $X_t$  ως συνάρτηση της συχνότητας  $\omega$ , υπό τη μορφή

$$sc(w) = \frac{|f_{yx}(w)|^2}{f_x(w)f_y(w)}. \quad (1.69)$$

Το μέτρο αυτό ονομάζεται τετραγωνισμένη συνεκτικότητα (*squared coherency*) και ικανοποιεί τη σχέση  $0 < sc(\omega) < 1$ .

Η σχέση (1.68) με βάση τη σχέση (1.69) γράφεται υπό τη μορφή

$$f_y(w) = sc(w)f_y(w) + f_u(w). \quad (1.70)$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (1.66) στο διάστημα συχνοτήτων  $[-\pi, \pi]$ , προκύπτει η κατωτέρω σχέση

$$\int_{-p}^p f_y(w) dw = \int_{-p}^p R^2 f_y(w) dw + \hat{S}^2 \quad (1.71)$$

ή

$$g_y(0) = \text{"explained variance"} + \hat{S}^2. \quad (1.72)$$

Ομοίως, ολοκληρώνοντας τη σχέση (1.67) στο ίδιο διάστημα συχνοτήτων προκύπτει η κατωτέρω σχέση

$$\int_{-p}^p f_y(w) dw = \int_{-p}^p sc(w)f_y(w) dw + \int_{-p}^p f_u(w) dw \quad (1.73)$$

ή

$$g_y(0) = \text{"explained variance"} + \hat{S}^2. \quad (1.74)$$

Η γραφική παράσταση της ανωτέρω σχέσεως (1.73) εμφανίζεται στο Σχήμα 1.8. Συγκρίνοντας την περιοχή εκείνη του φάσματος η οποία ερμηνεύεται από τη φιλτραρισμένη χρονολογική σειρά  $X_t$  με την περιοχή του φάσματος της χρονολογικής σειράς  $Y_t$  στο διάστημα συχνοτήτων  $[\omega_1, \omega_2]$ , προκύπτει ένα μέτρο της ερμηνευτικής δύναμης της χρονολογικής σειράς  $X_t$  ανάλογο με το συντελεστή προσδιορισμού του γραμμικού υποδείγματος  $R^2$ .

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (1.71) και (1.73), γίνονται περισσότερο αντιληπτές οι ομοιότητες και οι διαφορές των μέτρων αξιολόγησης των γραμμικών συσχετίσεων στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων. Και στις δύο περιπτώσεις, η όλη διαδικασία ανάγεται στη διάσπαση της μεταβλητότητας των χρονολογικών σειρών στην ερμηνευόμενη και μη ερμηνευόμενη μεταβλητότητα. Η διάσπαση όμως αυτή στο πεδίο των συχνοτήτων γίνεται σε όλο το φάσμα των συχνοτήτων ενός συγκεκριμένου διαστήματος συχνοτήτων  $[\omega_1, \omega_2]$ . Επομένως στην περίπτωση αυτή, ο υπολογισμός ενός μέτρου γραμμικής συσχέτισης όπως είναι η τετραγωνισμένη συνεκτικότητα  $sc(\omega)$ , καθίσταται περισσότερο ενδιαφέρον για τους εξής λόγους: α) Μια γνωστή χρονολογική σειρά πιθανόν να κυριαρχείται από κυκλικές συνιστώσες δεδομένης συχνότητας. Στην περίπτωση αυτή ενδιαφέρον αποτελεί η διερεύνηση μέσω του μέτρου  $sc(\omega)$  του βαθμού συσχέτισης των κυκλικών αυτών συνιστωσών δεδομένης συχνότητας με τις κυκλικές συνιστώσες μιας υπό μελέτη χρονολογικής σειράς και β) Η συσχέτιση μεταξύ των κυκλικών συνιστωσών δύο χρονολογικών σειρών θα είναι η ίδια για όλες τις συχνότητες ως ειδική περίπτωση μόνο, π.χ. από την εξίσωση (1.71) φαίνεται ότι ο συντελεστής προσδιορισμού  $R^2$  δεν είναι συνάρτηση της συχνότητας  $\omega$ , ενώ στην εξίσωση (1.73) η τετραγωνισμένη συχνότητα  $sc(\omega)$  είναι συνάρτηση της συχνότητας  $\omega$ .

### 3. Τα φάσματα φάσης και κέρδους

Το φάσμα τομής (*cross-spectrum*) μεταξύ των χρονολογικών σειρών  $Y_t$  και  $X_t$  είναι μια μιγαδική συνάρτηση της συχνότητας  $\omega$

$$f_{yx}(\omega) = \frac{1}{2p} \sum_{t=-\infty}^{\infty} g_{yx}(t) e^{-i\omega t}, \quad (1.75)$$

όπου  $\gamma_{yx}(\tau) = \text{Cov}[Y_t, X_{t-\tau}]$ , η οποία είναι δυνατό να γραφεί υπό τη μορφή

$$f_{yx}(\omega) = co_{yx}(\omega) + iqu_{yx}(\omega), \quad (1.76)$$

όπου οι συναρτήσεις  $co_{yx}(\omega)$  και  $qu_{yx}(\omega)$  καλούνται συν-φάσμα (*co-spectrum*) και φάσμα τετραγωνισμού (*quadrature spectrum*) και δίδονται από τις σχέσεις

$$co_{yx}(\omega) = \frac{1}{2p} \sum_{t=-\infty}^{\infty} g_{yx}(t) \cos(\omega t) \quad \text{και} \quad qu_{yx}(\omega) = \frac{1}{2p} \sum_{t=-\infty}^{\infty} g_{yx}(t) \sin(\omega t).$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι

$$co_{yx}(-\omega) = co_{yx}(\omega) \quad \text{και} \quad qu_{yx}(-\omega) = -qu_{yx}(\omega).$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό του Fourier στη σχέση (1.75), προκύπτει η σχέση

$$g_{yx}(t) = \int_{-p}^p f_{yx}(w) e^{-iwt} dw,$$

η οποία δύναται να γραφεί και υπό την εξής μορφή (Dhrymes, 1970)

$$g_{yx}(t) = \int_0^p \cos(wt) co_{yx}(w) e^{-iwt} dw + \int_0^p \sin(wt) qu_{yx}(w) e^{-iwt} dw.$$

Από την ανωτέρω σχέση προκύπτει

$$g_{yx}(0) = \int_{-p}^p f_{yx}(w) dw = \int_{-p}^p co_{yx}(w) dw = \int_0^p co_{yx}(w) dw \quad \text{ότι}$$

δεδομένου ότι  $\int_{-p}^p qu_{yx}(w) dw = 0$ .

Επομένως το συν-φάσμα μεταξύ των  $Y_t$  και  $X_t$  στη συχνότητα  $\omega$  είναι δυνατό να ερμηνευθεί ως το ποσοστό της συνδιακύμανσης μεταξύ των  $Y_t$  και  $X_t$  η οποία αποδίδεται στις κυκλικές συνιστώσες με συχνότητα  $\omega$ . Δεδομένου ότι η συνδιακύμανση μεταξύ των  $Y_t$  και  $X_t$  είναι δυνατό να είναι θετική ή αρνητική το συν-φάσμα είναι δυνατό να λαμβάνει τιμές θετικές ή αρνητικές αντιστοίχως.

Το φάσμα τετραγωνισμού μεταξύ της  $X_t$  και της  $Y_t$  στη συχνότητα  $w$  είναι ανάλογο του ποσοστού της συνδιακύμανσης μεταξύ των  $X_t^*$  και  $Y_t$  η οποία οφείλεται στις κυκλικές συνιστώσες συχνότητας  $\omega$ . Η χρονολογική σειρά  $X_t^*$  έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με τη  $X_t$  αλλά προπορεύεται της  $X_t$ , κατά ένα τέταρτο του κύκλου. Κυκλικές συνιστώσες συχνότητας  $\omega$  είναι πιθανόν να είναι κυριαρχούσες και στις δύο χρονολογικές σειρές  $X_t$  και  $Y_t$  και ταυτόχρονα να μην συντελούν σε υψηλή ταυτόχρονη συνδιακύμανση (*contemporaneous covariance*) μεταξύ των  $X_t$  και  $Y_t$  επειδή και οι δύο χρονολογικές σειρές σε μια δεδομένη χρονική στιγμή ευρίσκονται σε διαφορετική γωνία φάσεως από τις κυκλικές τους συνιστώσες. Με το φάσμα τετραγωνισμού είναι δυνατό να εντοπισθούν τέτοιου είδους κυκλικές συνιστώσες οι οποίες δεν είναι "ευθυγραμμισμένες".

Επίσης από τη σχέση

$$g_{yx}(t) = \int_0^p \cos(wt) co_{yx}(w) e^{-iwt} dw + \int_0^p \sin(wt) qu_{yx}(w) e^{-iwt} dw,$$

καθίσταται αμέσως προφανές ότι το φάσμα τετραγωνισμού μεταξύ των  $X_t$  και  $Y_t$  συνεισφέρει στη διάσπαση της  $\gamma_{yx}(t)$  στο πεδίο συχνοτήτων.

Η σχέση (1.75) είναι δυνατό να γραφεί και υπό τη μορφή  $f_{yx}(\omega) = a_{yx}(\omega) e^{iPh(\omega)}$ , όπου  $a_{yx}(\omega) = [co_{yx}^2(\omega) + qu_{yx}^2(\omega)]^{1/2}$  είναι το φάσμα εύρους τομής (*cross-amplitude*) και  $Ph_{yx}(\omega) = \arctan(qu_{yx}(\omega)/co_{yx}(\omega))$

$$(1.77)$$

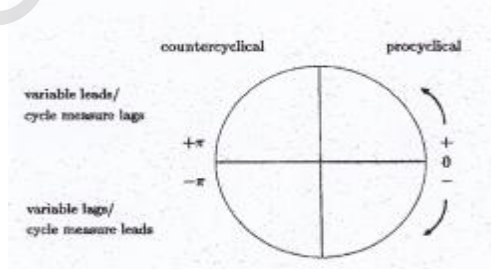
είναι το φάσμα φάσης ή η φάση μετατόπισης (*phase spectrum or phase shift*). Το φάσμα φάσης

δίδει την προήγηση της χρονολογικής σειράς  $Y_t$  έναντι της χρονολογικής σειράς  $X_t$  στη συχνότητα  $\omega$ . Το διάγραμμα του φάσματος φάσης  $Ph(\omega)$  ως προς τη συχνότητα  $\omega$  παρέχει πληροφορίες σχετικά με τη σχέση υστέρησης-προήγησης μεταξύ των δύο χρονολογικών σειρών. Μια τιμή του φάσματος φάσης  $Ph(\omega)$  στο πεδίο των συχνοτήτων αντιστοιχεί σε μια τιμή  $Ph(\omega)/\omega$  στο πεδίο του χρόνου. Εάν η συνάρτηση  $Ph(\omega)$  είναι ευθεία γραμμή σε ένα διάστημα συχνοτήτων  $[\omega_1, \omega_2]$ , τότε η  $\partial Ph(\omega)/\partial \omega$  ισούται με τη χρονική υστέρηση της μιας χρονολογικής σειράς έναντι της άλλης και ως τούτου είναι εύκολο να εντοπισθεί ποια χρονολογική σειρά οδηγεί την άλλη και κατά πόσες περιόδους.

Εν τούτοις το φάσμα φάσης όπως δίδεται από την εξίσωση (1.77) συνήθως είναι δύσκολο να ερμηνευθεί λόγω των σημείων ασυνέχειας (*discontinuous jumps*) τα οποία εμφανίζονται στο διάγραμμα της συναρτήσεως του φάσματος φάσης  $Ph(\omega)$  σε γραμμική κλίμακα (Koopman, 1974).

Ως εκ τούτου, αντί της γραμμικής κλίμακας (*linear scale*) χρησιμοποιείται η κυκλική κλίμακα (*circular scale*) για την ερμηνεία του φάσματος φάσης όπου ο κύκλος διαιρείται σε τέσσερις περιοχές-τεταρτημόρια όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.9. Επίσης εκτός της παρουσιάσεως των σημειακών εκτιμήσεων του φάσματος φάσης επί της κυκλικής κλίμακας, παρίστανται και τα διαστήματα εμπιστοσύνης του φάσματος φάσης, γεγονός το οποίο διευκολύνει την ερμηνεία τους.

**ΣΧΗΜΑ 1.9:** ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΦΑΣΜΑΤΟΣ ΦΑΣΗΣ  
Variable leads=INC Cycle measure lags=CBR



Εάν το διάστημα εμπιστοσύνης ευρίσκεται στο αριστερό ήμισυ της κυκλικής κλίμακας, τότε αυτό υποδηλοί αντικυκλική κίνηση. Εάν το διάστημα εμπιστοσύνης καλύπτει το δεξιό ήμισυ του κύκλου τότε έχουμε προκυκλική κίνηση. Εάν η  $Y_t$  προπορεύεται της  $X_t$ , τότε το διάστημα εμπιστοσύνης ευρίσκεται στην άνω ήμισυ της κυκλικής κλίμακας. Στην αντίθετη περίπτωση ευρίσκεται στο κάτω ήμισυ της κυκλικής κλίμακας. Στην περίπτωση κατά την οποία τα σημεία 0 και  $-\pi/\pi$  καλύπτονται από το διάστημα εμπιστοσύνης, τότε οι δύο σειρές ευρίσκονται σε ταυτόχρονη προκυκλική κίνηση ή σε ταυτόχρονη αντικυκλική κίνηση αντιστοίχως. Τέλος, εάν η καλυπτόμενη περιοχή καταλαμβάνει μεγαλύτερο μέρος από το ήμισυ της κυκλικής κλίμακας, τότε οι δύο σειρές ευρίσκονται σε ακυκλική κίνηση.

Από τις ανωτέρω σχέσεις παράγεται και η παρακάτω συνάρτηση  $G_{yx}(\omega) = |f_{yx}(\omega)|^2 / f_x(\omega)$ , η οποία καλείται φάσμα κέρδους (*gain spectrum*). Το φάσμα κέρδους στη συχνότητα  $\omega$  είναι δυνατό να ερμηνευθεί ως ο συντελεστής παλινδρόμησης στη συχνότητα  $\omega$  της χρονολογικής σειράς  $Y_t$  ως προς τη χρονολογική σειρά  $X_t$  και ως εκ τούτου εκφράζει την αύξηση του εύρους της χρονολογικής σειράς  $Y_t$  εν σχέσει με τη χρονολογική σειρά  $X_t$ .

## 1.5.8 Θεωρητικό πλαίσιο των ARIMA-Model-Based (AMB) φίλτρων

### 1.5.8.1 Το τροποποιημένο φίλτρο των Hodrick-Prescott (MHP)

Έστω ότι η χρονολογική σειρά  $x_t$  παρίσταται ως ένα ARIMA μοντέλο της μορφής:

$$\varphi(B)\nabla^d x_t = \theta(B)a_t, a_t \sim w.n(0, V_a), \quad (1.78)$$

όπου  $\nabla = 1 - B$ ,  $d = 0, 1, 2$ ,  $\varphi(B)$  είναι ένα στάσιμο αυτοπαλίνδρομο πολυώνυμο ως προς τη μεταβλητή  $B$  και  $\theta(B)$  είναι ένα αντιστρέψιμο πολυώνυμο κινητού μέσου ως προς τη μεταβλητή  $B$ .

Έστω ότι η χρονολογική σειρά  $x_t$  διασπάται σε ορθογώνιες συνιστώσες ως εξής:

$$x_t = p_t + s_t + u_t, \quad (1.79)$$

όπου  $p_t$  παριστά τη συνιστώσα της τάσης-κύκλου (*trend-cycle*),  $s_t$  τη βραχύβια (*transitory*) συνιστώσα και  $u_t$  την άρρυθμη (*irregular*) συνιστώσα. Η βραχύβια συνιστώσα  $s_t$  συλλαμβάνει βραχύβια, υψηλού βαθμού, μεταβλητικότητα διαφορετική της άρρυθμης συνιστώσας η οποία είναι λευκός θόρυβος.

Ως γνωστό σύμφωνα με τη διαδικασία AMB οι συνιστώσες  $p_t$ ,  $s_t$  και  $u_t$  είναι δυνατό να παρασταθούν ως μοντέλα ARIMA τα οποία αθροίζονται στο μοντέλο ARIMA της χρονολογικής σειράς  $x_t$  ως εξής:

$$\varphi_p(L)\nabla^d p_t = \theta_p(L)a_{pt}, a_{pt} \sim w.n(0, V_p) \quad (1.80)$$

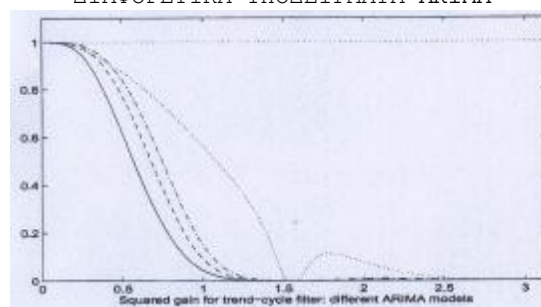
$$\varphi_s(L)\nabla^d s_t = \theta_s(L)a_{st}, a_{st} \sim w.n(0, V_s). \quad (1.81)$$

Το μοντέλο το οποίο απαρτίζεται από τις εξισώσεις (1.80) και (1.81) σε συνδυασμό με τις υποθέσεις 1-5 της παραγράφου 1.4.6 περί ταυτοποίησης τους, ονομάζεται μοντέλο μη διακριτών συνιστωσών ARIMA (*Unobserved Component ARIMA-UCARIMA*). Το μοντέλο αυτό στη συνέχεια θα αναφέρεται ως *UCARIMA-(A)*.

Από τις ανωτέρω σχέσεις καθίσταται προφανές ότι η συνιστώσα της τάσης-κύκλου  $p_t$  είναι το προς μελέτη σήμα για τη μετέπειτα εξαγωγή της κυκλικής συνιστώσας και προκύπτει εξ υπολοίπου κατόπιν απομονώσεως του λευκού θορύβου και ίσως κάποιας υψηλού βαθμού βραχύβιας επιδράσεως.

Κατά συνέπεια η συνάρτηση τετραγωνισμένου κέρδους της συνιστώσας αυτής θα επεκτείνεται στην περιοχή των συχνοτήτων της κυκλικής συνιστώσας και πιθανόν να παρουσιάζει φαινόμενα υπερχειλίσεως (*spill-over effects*) στις υψηλότερες συχνότητες (βλ. και Σχήμα 1.10). Οι συνιστώσες της τάσης-κύκλου της

**ΣΧΗΜΑ 1.10:** ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΕΝΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ ΤΗΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΑΣ ΤΑΣΗΣ-ΚΥΚΛΟΥ ΜΕ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΥΠΕΡΧΕΙΛΙΣΗΣ ΣΤΙΣ ΥΨΗΛΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ARIMA



μορφής αυτής συνήθως καλούνται βραχυχρόνιες-τάσεις (*short-term trend*).

Οι βραχυχρόνιες όμως τάσεις δεν ενδείκνυνται στη μελέτη των κυκλικών κυμάνσεων δεδομένου ότι δεν συμβάλλουν στο διαχωρισμό της μακροχρονίου τάσεως (*long-term trend*) από την υπό μελέτη χρονολογική σειρά. Ένα από τα πλέον χρησιμοποιούμενα φίλτρα για την εκτίμηση της κυκλικών κυμάνσεων όπως ήδη έχει αναφερθεί σε προηγούμενες ενότητες είναι το φίλτρο των Hodrick-Prescott (*HP*). Επίσης σύμφωνα με τα λεχθέντα στην παράγραφο 1.4.8.1 το φίλτρο (*HP*) είναι δυνατό να ερμηνευθεί ως ένα *AMB* φίλτρο στο μοντέλο *UCARIMA*.

$$x_t = m_t + c_t \quad (1.82)$$

$$\nabla^2 m_t = a_{mt}, \quad a_{mt} \sim w.n(0, V_m) \quad (1.83)$$

$$c_t \sim w.n(0, V_c), \quad (1.84)$$

όπου η παράμετρος  $\lambda$  του φίλτρου *HP* ισούται με  $V_c/V_m$ .

Από την ανωτέρω σχέση (1.82) προκύπτει η σχέση

$$\nabla^2 x_t = a_{mt} + \nabla^2 c_t, \quad (1.85)$$

η οποία υποδηλοί ότι η χρονολογική σειρά  $x_t$  ακολουθεί μια *IMA(2,2)* στοχαστική διαδικασία της μορφής

$$\nabla^2 x_t = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2) a_t = \theta_{HP}(L) a_t, \quad a_t \sim w.n(0, V_a).$$

Το πολυώνυμο αυτό, δηλαδή οι παράμετροι  $\theta_1$  και  $\theta_2$  καθώς και η διακύμανση  $V_a$  λαμβάνουν συγκεκριμένες τιμές εφόσον είναι γνωστή η τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  του φίλτρου *HP*.

Πράγματι ισχύει ο κατωτέρω αλγόριθμος:

### Αλγόριθμος 1

Έστω ότι  $k_c = V_c/V_a$  και  $k_m = V_m/V_a$ . Έστω επίσης η σχέση

$$\theta_{HP}(L) a_t = a_{mt} + \nabla^2 c_t$$

και έστω ότι είναι γνωστή η τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  του φίλτρου *HP*. Τότε είναι δυνατόν να υπολογισθούν οι τιμές των παραμέτρων  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  και της διακύμανσης  $V_a$ .

### Απόδειξη

Εξισώνοντας τις γεννήτριες συναρτήσεις αυτοδιακυμανσης *ACGF* της ανωτέρω σχέσεως, προκύπτει η σχέση

$$\theta_{HP}(L)\theta_{HP}(F) = k_m + (1-L)^2(1-F)^2 k_c,$$

η οποία περαιτέρω αναλύεται σε ένα σύστημα τριών μη γραμμικών εξισώσεων, μια για τη διακύμανση και δύο για τις αυτοδιακυμάνσεις στις χρονικές υστερήσεις 1 και 2. Το σύστημα αυτό επιλύεται ως ακολούθως (Maravall and Mathis, 1994).

Υπολογίζονται διαδοχικά τα παρακάτω βήματα υπό την προϋπόθεση ότι είναι γνωστή η τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  του φίλτρου *HP*.

$$(1) \quad a=2, \quad b = 1/\sqrt{I}, \quad k=-b^2, \quad s=2ab$$

$$(2) z=[1/2\lambda(1+(1+16\lambda)^{1/2})]^{1/2}, r=s/2z$$

$$(3) m_1=(-a+r)/2, n_1=(z-b)/2$$

$$(4) m_2=(-a-r)/2, n_2=(-z-b)/2$$

(5) Από τους δύο μιγαδικούς αριθμούς  $(m_1+in_1)$  και  $(m_2+in_2)$  επιλέγεται αυτός με το μικρότερο μέτρο. Έστω ότι ο αριθμός αυτός είναι της μορφής  $R=M+iN$ .

$$(6) \theta_1=2M, \theta_2=M^2+N^2, V_a=(1+6\lambda)/(1+\theta_1^2+\theta_2^2)$$

(7) Θέτοντες  $V_c=\lambda$  και  $V_m=1$ , προκύπτουν οι σχέσεις  $k_c=\lambda/((1+6\lambda)/(1+\theta_1^2+\theta_2^2))$  και  $k_m=\lambda/((1+6\lambda)/(1+\theta_1^2+\theta_2^2))$ .

Στην περίπτωση ετησίων δεδομένων όπου το  $\lambda \cong 7$  όπως αποδεικνύεται κατωτέρω προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\theta_1=1.17062219, \theta_2=0.41373837, V_a=16.9189042$$

οπότε

$$\theta_{HP}(L)=(1-1.1706L+0.4137L^2), V_{HP}=16.92, k_m=0.059, k_c=0.414. \quad (1.86)$$

Επομένως οι σχέσεις (1.46) και (1.47) της παραγράφου 1.4.8.1 λαμβάνουν την εξής μορφή

$$HP_m(L, F) = 0.059 \frac{1}{q_{HP}(L)q_{HP}(F)} \quad (1.87)$$

$$HP_m(L, F) = 0.414 \frac{(1-L)^2(1-F)^2}{q_{HP}(L)q_{HP}(F)}. \quad (1.88)$$

Με την εφαρμογή των φίλτρων (1.87) και (1.88) στον εκτιμητή της συνιστώσας της τάσης-κύκλου  $\hat{p}_t$  του *ARIMA* μοντέλου (1.78) προκύπτουν οι κατωτέρω εκτιμητές  $\hat{c}_t$  και  $\hat{m}_t$  για την κυκλική συνιστώσα και τη μακροχρόνια τάση αντιστοίχως:

$$\hat{c}_t = 0.414 \frac{(1-L)^2(1-F)^2}{q_{HP}(L)q_{HP}(F)} \hat{p}_t = 0.414 \frac{V_p}{V_a} \left\| \frac{(1-L)^2 q_p(L) j_s(L) j_u(L)}{q_{HP}(L)q_{HP}(F)} \right\|^2 x_t \quad (1.89)$$

$$\hat{m}_t = 0.059 \frac{1}{q_{HP}(L)q_{HP}(F)} \hat{p}_t = 0.059 \frac{V_p}{V_a} \left\| \frac{q_p(L) j_s(L) j_u(L)}{q_{HP}(L)q_{HP}(F)} \right\|^2 x_t, \quad (1.90)$$

όπου με βάση τη σχέση (1.72)

$$\hat{p}_t = \frac{V_p}{V_a} \left\| \frac{q_p(L) j_s(L) j_u(L)}{q_{HP}(L)q_{HP}(F)} \right\|^2 x_t \quad (1.91)$$

και  $\|H(L)\|^2=H(L)H(F)$ .

Επομένως με βάση την ανωτέρω διαδικασία επιτυγχάνεται μια πλήρης διάσπαση της χρονολογικής σειράς  $x_t$  ως ακολούθως

$$x_t = \hat{m}_t + \hat{c}_t + \hat{s}_t + \hat{u}_t, \quad (1.92)$$



όπου οι εκτιμητές  $\hat{m}_t$  και  $\hat{c}_t$  δίνονται από τις σχέσεις (1.89) και (1.90) αντιστοίχως ενώ ο εκτιμητής  $\hat{s}_t$  από τη σχέση

$$\hat{s}_t = \frac{V_s}{V_a} \left\| \frac{\mathbf{q}_s(L) \mathbf{j}_p(L) \mathbf{j}_u(L)}{\mathbf{q}(L)} \right\|^2 x_t. \quad (1.93)$$

Το βασικό όμως ερώτημα το οποίο απομένει να απαντηθεί είναι το εξής:

Είναι δυνατό οι ανωτέρω εκτιμητές να θεωρηθούν ως οι *MMSE* εκτιμητές των μη διακριτών συνιστωσών σε μια διάσπαση της χρονολογικής σειράς  $x_t$  ως ακολούθως

$$x_t = m_t + c_t + s_t + u_t, \quad (1.94)$$

όπου  $m_t$  είναι η συνιστώσα της (μακροχρονίου) τάσεως,  $c_t$  η συνιστώσα του κύκλου,  $s_t$  η βραχύβια συνιστώσα και  $u_t$  η άρρυθμη συνιστώσα, οι οποίες είναι δυνατόν να παρασταθούν σε συγκεκριμένα μοντέλα *ARIMA* και τα οποία είναι δυνατόν να αθροιστούν σε ένα μοντέλο *ARIMA* αντιπροσωπευτικό της χρονολογικής σειράς  $x_t$ .

Η απάντηση είναι καταφατική.

Έστω ότι η χρονολογική σειρά  $x_t$  παράσταται από το *ARIMA* μοντέλο (1.78) και ότι διασπάται σε μη διακριτές συνιστώσες της τάσεως-κύκλου, της βραχύβιας συνιστώσας και της άρρυθμης συνιστώσας σύμφωνα με τις σχέσεις (1.79)-(1.81). Έστω επίσης  $\psi_p(L) = \theta_p(L)/\phi_p(L)$  και έστω το μοντέλο *UCARIMA-B* το οποίο απαρτίζεται από τα εξής *ARIMA* μοντέλα για τις συνιστώσες της

$$\theta_{HP}(L) \nabla^d m_t = \psi_p(L) a_{mt}, \quad a_{mt} \cong w.n.(0, 0.059V_p/V_a) \quad (1.95)$$

$$\theta_{HP}(L) \nabla^d c_t = \psi_p(L) a_{ct}, \quad a_{ct} \cong w.n.(0, 0.059V_p/V_a) \quad (1.96)$$

$$\phi_s(L) s_t = \theta_s(L) a_{st}, \quad a_{st} \cong w.n.(0, 0.059V_s) \quad (1.97)$$

$$a_t \cong w.n.(0, V_u).$$

Όπως ευκόλως καθίσταται προφανές, οι εκτιμητές  $\hat{s}_t$  και  $\hat{u}_t$  όπως δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$\hat{s}_t = \frac{V_s}{V_a} \left\| \frac{\mathbf{q}_s(L) \mathbf{j}_p(L) \mathbf{j}_u(L)}{\mathbf{q}(L)} \right\|^2 x_t \quad (1.98)$$

$$\hat{u}_t = \frac{V_u}{V_a} \left\| \frac{\mathbf{q}_u(L) \mathbf{j}_p(L) \mathbf{j}_s(L)}{\mathbf{q}(L)} \right\|^2 x_t \quad (1.99)$$

είναι οι *MMSE* εκτιμητές των μη διακριτών συνιστωσών  $s_t$  και  $u_t$  του μοντέλου *UCARIMA-B*.

Επιπλέον από την εφαρμογή του *WK* φίλτρου (βλ. σχέση (1.33) της παραγράφου 1.4.7) στις σχέσεις (1.95) και (1.96), προκύπτουν οι σχέσεις (1.89) και (1.90). Επομένως οι εκτιμητές των  $m_t$  και  $c_t$ , οι οποίοι επιγγάνονται με μια εκτιμητική διαδικασία δύο σταδίων, είναι δυνατόν να θεωρηθούν ως οι *MMSE* εκτιμητές μόνο ενός σταδίου στο μοντέλο *UCARIMA-B*.

Από τις σχέσεις (1.89) και (1.90) προκύπτει ότι

$$\hat{m}_t + \hat{c}_t = H(L, F)[0.059 + 0.414(1-L)^2(1-F)^2]x_t,$$

$$\text{όπου } H(L, F) = \frac{V_p}{V_a} \left\| \frac{q_p(L)j_s(L)j_u(L)}{q(L)} \right\|^2.$$

Επειδή όμως  $[0.059 + 0.414(1-L)^2(1-F)^2] = \|\theta_{HP}(L)\|^2$  προκύπτει ότι

$$\hat{m}_t + \hat{c}_t = \frac{V_p}{V_a} \left\| \frac{q_p(L)j_s(L)j_u(L)}{q(L)} \right\|^2 x_t = p_t \text{ σύμφωνα με τη σχέση (1.91).}$$

Ομοίως έστω  $z_t$  το άθροισμα των μη διακριτών συνιστωσών  $m_t$  και  $c_t$  δηλαδή  $z_t = m_t + c_t$ .

Από τις σχέσεις (1.95) και (1.96) προκύπτει ότι η μεταβλητή  $\nabla^d z_t$ , η οποία έχει μηδενική μέση τιμή και ακολουθεί την κανονική κατανομή, έχει γεννήτρια συνάρτηση αυτοδιακύμανσης *ACGF* (*autocovariance generating function*) ίση με

$$\begin{aligned} ACGF(\nabla^d z_t) &= 0.059 \frac{V_p}{V_a} \left\| \frac{y_p(L)}{q_{HP}(L)} \right\|^2 + 0.414 \frac{V_p}{V_a} \left\| \frac{y_p(L)\nabla^2}{q_{HP}(L)} \right\|^2 \\ &= \frac{V_p}{V_a} \left\| \frac{y_p(L)}{q_{HP}(L)} \right\|^2 [0.059 + 0.414(1-L)^2(1-F)^2] = \frac{V_p}{V_a} \left\| \frac{q_p(L)}{j_p(L)} \right\|^2 \end{aligned}$$

δεδομένου ότι  $[0.059 + 0.414(1-L)^2(1-F)^2] = \|\theta_{HP}(L)\|^2 = ACGF(\nabla^d p_t)$ .

Επομένως οι εξισώσεις (1.92) και (1.94) ικανοποιούνται και το άθροισμα είτε των τεσσάρων μη διακριτών συνιστωσών είτε των εκτιμητών τους παράγει το μοντέλο *ARIMA* (1.78) της χρονολογικής σειράς  $x_t$ .

Η ανωτέρω διαδικασία υπολογισμού της κυκλικής συνιστώσας σε δύο στάδια μέσω του φίλτρου συνέλιξης  $\eta_c(L, F)$  των φίλτρων *HP* και *WK* όπως φαίνεται στην κατωτέρω σχέση

$$\hat{c}_t = HP_c(L, F)\hat{p}_t = HP_c(L, F)[v(L, F)x_t] = [HP_c(L, F)v(L, F)]x_t = h_c(L, F)x_t,$$

όπου  $HP_c(L, F)$  είναι το *HP* φίλτρο για την εξαγωγή της κυκλικής συνιστώσας,  $v(L, F)$  είναι το *WK* φίλτρο για την εξαγωγή της συνιστώσας της τάσης-κύκλου και  $\eta_c(L, F)$  είναι το φίλτρο συνέλιξης (*convolution*) των δύο αυτών φίλτρων, αναφέρεται σε εργασία των Kaiser and Maravall (1999) ως το "τροποποιημένο φίλτρο *HP*" και συμβολίζεται εν συντομία ως *MHP*.

Το φίλτρο *MHP* υπερνικά και βελτιώνει ορισμένες βασικές ατέλειες του φίλτρου *HP* όπως

- A1 - Την αστάθεια των ακραίων σημείων της κυκλικής συνιστώσας (Baxter and King, 1999)
- A2 - Τη μεγάλο βαθμού μεταβλητικότητα της κυκλικής συνιστώσας με αποτέλεσμα την δυσκολία εντοπισμού των σημείων καμψής της
- A3 - Τη μείωση της πιθανότητας παραγωγής τεχνητών κύκλων (*Slutsky effect*) - ένα βασικό μειονέκτημα του φίλτρου *HP*

A1 - Η μείωση της αστάθειας των ακραίων σημείων επιτυγχάνεται με την επέκταση της

συνιστώσας της τάσης-κύκλου μέσω προβλέψεων με το κατάλληλο μοντέλο *ARIMA* αν και η μεθοδολογία αυτή έχει αμφισβητηθεί από τους *Apel et al. (1996)* με την αιτιολογία ότι τα αποτελέσματα εξαρτώνται από τον αριθμό των προβλέψεων. Ο περιορισμός όμως αυτός δεν υφίσταται εφόσον αυτή η επέκταση εφαρμόζεται με τον σωστό τρόπο: οι *Kaiser and Maravall (1999)* στην εργασία τους αποδεικνύουν ότι με τη διαδικασία *WK* μόνο τέσσερις προβλέψεις σε κάθε ένα από τα δύο ακραία σημεία της συνιστώσας της τάσης-κύκλου (*4 forecasts and backcasts*) είναι απαραίτητες για την ακριβή αναπαραγωγή της άπειρης επέκτασης πρόβλεψης.

A2 - Η μείωση του μεγάλου βαθμού μεταβλητικότητας της κυκλικής συνιστώσας επιτυγχάνεται με την εφαρμογή του φίλτρου  $HP_c(L,F)$  στη συνιστώσα της τάσης-κύκλου αντί της ίδιας της χρονολογικής σειράς η οποία εμπεριέχει υψηλού βαθμού μεταβλητικότητα ή λευκό θόρυβο.

Πράγματι εάν το φίλτρο *HP* εφαρμόζεται στην ίδια τη χρονολογική σειρά  $x_t$  αντί στη συνιστώσα της τάσης-κύκλου, τότε η πλήρης διάσπαση της  $x_t$  δίνεται από τη σχέση

$$x_t = m_t + c_t \quad (1.100)$$

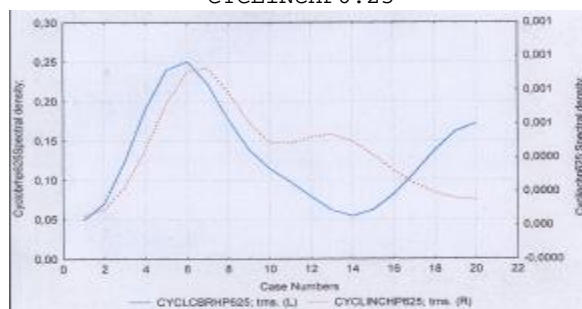
τα μοντέλα για  $m_t$  και  $c_t$  δίνονται από τις σχέσεις (1.89) και (1.90) και το πολυώνυμο  $\psi_p(L)$  αντικαθίσταται από το  $\psi(L) = \theta(L)/\phi(L)$  και η διακύμανση  $V_p$  από την  $V_a$ . Στην περίπτωση αυτή η άρρυθμη συνιστώσα λευκού θορύβου ή/και η βραχύβια συνιστώσα υψηλής μεταβλητικότητας διαφορετικής του λευκού θορύβου απορροφώνται περισσότερο από τη συνιστώσα του κύκλου παρά από τη συνιστώσα της μακροχρονίου τάσεως  $m_t$  με αποτέλεσμα η συνιστώσα του κύκλου να παρουσιάζει μεγαλύτερη μεταβλητικότητα.

A3 - Η μείωση της πιθανότητας παραγωγής τεχνητών κύκλων επιτυγχάνεται με την εφαρμογή του φίλτρου *HP* στη συνιστώσα της τάσης-κύκλου αντί στην ίδια τη χρονολογική σειρά. Με αυτόν τον τρόπο η παραγωγή τεχνητών κύκλων αποφεύγεται δεδομένου ότι το φίλτρο *WK* το οποίο είναι ένα *AMB*-φίλτρο εγγυάται ότι εάν δεν υπάρχει φασματική ισχύς σε ένα συγκεκριμένο διάστημα συχνοτήτων στο φασματικό πεδίο, τότε η συνάρτηση τετραγωνισμένου κέρδους του φίλτρου αυτού θα λαμβάνει τη μηδενική τιμή.

Στο Σχήμα 1.11 ο παραγόμενος κύκλος με την εφαρμογή του φίλτρου *HP* στη συνιστώσα της τάσης-κύκλου  $x_t$  του μοντέλου  $z_t = x_t + u_t$ , όπου  $(1-L)^2 z_t = (1+L)^2 a_t$  με  $a_t \cong w.n.(0,0.01)$  και  $u_t \cong w.n.(0,100)$  είναι πρακτικά μηδενικός ( $cycle = Est.Cycle(TR)$ ) δεδομένου ότι τα δεδομένα δεν εμπεριέχουν

κυκλικές κυμάνσεις. Η εφαρμογή όμως του φίλτρου *HP* στην ίδια τη χρονολογική σειρά  $z_t$  παράγει τεχνητή κυκλικότητα ( $cycle = Est.Cycle(SA)$ ) (*Gomez, 2001*).

**ΣΧΗΜΑ 1.11:** ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΦΑΣΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΣΥΝΙΣΤΩΣΩΝ CYCLCBRHP6.25 ΚΑΙ CYCLINCHP6.25



Οι συνιστώσες της μακροχρονίου τάσεως  $m_t$  και του κύκλου  $c_t$  οι οποίες προκύπτουν κατόπιν διασπάσεως της συνιστώσας της τάσης-κύκλου  $p_t$  της χρονολογικής σειράς  $x_t$  με το φίλτρο  $MHP$ , παρουσιάζουν ορισμένα βασικά χαρακτηριστικά τα οποία αξίζει να αναφερθούν.

α) και οι δύο συνιστώσες είναι κανονικές δεδομένου ότι προέρχονται από τη διάσπαση της συνιστώσας της τάσης-κύκλου, η οποία είναι και η ίδια κανονική λόγω του ότι προέρχεται από την  $AMB$ -διάσπαση της χρονολογικής σειράς. Επομένως οι συναρτήσεις φασματικής πυκνότητάς τους, θα λαμβάνουν τη μηδενική τιμή για τη συχνότητα  $\omega=\pi$ , δηλαδή  $g_k(\pi)=0$  όπου  $k=m,c$  ή κατ' άλλη διατύπωση το πολυώνυμο  $\psi_p(L=-1)=0$  δεδομένου ότι  $\psi_p(L=-1)=\theta_p(L=-1)/\varphi_p(L=-1)$  και  $\theta_p(L=-1)=0$ .

β) Η συνιστώσα της μακροχρονίου τάσεως είναι μη στάσιμη, εκτός εάν η ίδια η χρονολογική σειρά είναι στάσιμη και ο βαθμός διαφορίζης της στη μηδενική συχνότητα είναι ο ίδιος με αυτόν της χρονολογικής σειράς. Η συνάρτηση φασματικής πυκνότητας της συνιστώσας της μακροχρονίου τάσεως θα λαμβάνει την τιμή  $g_m(\omega)=\infty$  για  $\omega=0$ .

γ) Η κυκλική συνιστώσα θα είναι στάσιμη εφόσον  $d<3$ . Εκτός ορισμένων πολύπλοκων  $ARIMA$  υποδειγμάτων, η συνάρτηση φασματικής πυκνότητας της κυκλικής συνιστώσας  $g_c(\omega)$  εκτός της τιμής  $g_c(\omega)=\infty$  για  $\omega=\pi$ , θα λαμβάνει και την τιμή  $g_c(\omega)=0$  για  $\omega=0$  εφόσον  $d<2$ .

#### **1.5.8.1.1 Καθορισμός της παραμέτρου $\lambda$ του φίλτρου $HP$ στην περίπτωση ετησίων δεδομένων**

Όπως έχει αναφερθεί στην προηγούμενη ενότητα για τον καθορισμό του πλήρους μοντέλου  $UCARIMA-B$ , είναι απαραίτητο να εκτιμηθεί μια τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  του φίλτρου  $HP$  προκειμένου να υπολογισθεί το πολυώνυμο  $\theta_{HP}(L)$  και οι παράμετροι  $k_m$  και  $k_c$ . Ενώ στην περίπτωση τριμηνιαίων δεδομένων υπάρχει κοινή αποδοχή για την τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  η οποία έχει προταθεί από τους Hodrick and Prescott (1980) και είναι 1600, δεν υπάρχει τέτοιας φύσεως ομοφωνία στην περίπτωση ετησίων δεδομένων. Ένα ελκυστικό κριτήριο για την επιλογή μιας τιμής της παραμέτρου  $\lambda$  στην περίπτωση ετησίων δεδομένων, είναι εκείνη η τιμή η οποία προκύπτει από το άθροισμα του τριμηνιαίου φίλτρου το οποίο συνδέεται με την τιμή 1600 υπό την εξής ερμηνεία (Maravall and del Rio, 2001):

Έστω ότι  $X_T$  παριστά τη χρονολογική σειρά ετησίων δεδομένων,  $x_t$  παριστά τη χρονολογική σειρά τριμηνιαίων δεδομένων και ότι ισχύει η σχέση

$$X_T = \sum x_t.$$

Έστω επίσης ότι  $\lambda_A=V_C/V_M$  παριστά την τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  στην περίπτωση της χρονολογικής σειράς  $X_T$  ετησίων δεδομένων η οποία συνδέεται με το  $UCARIMA$  μοντέλο

$$X_T=M_T+C_T$$

$$D^2M_T=A_{MT}, A_{MT} \cong w.n.(0, V_M)$$

$$|\lambda_i|>1.$$

Ομοίως, στην περίπτωση της χρονολογικής σειράς  $x_t$  τριμηνιαίων δεδομένων  $\lambda_Q = V_C/V_m$  και  $X_T = m_T + c_T$

$$\nabla^2 m_t = a_{mt}, \quad a_{mt} \equiv w.n.(0, V_m)$$

$$c_t \equiv w.n.(0, V_c).$$

Επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις

ετησίων δεδομένων $D = 1-L$	Χρονολογική σειρά τριμηνιαίων δεδομένων $\nabla = 1-l, \nabla_k = 1-l^k, S_k = 1+l+\dots+l^{k-1}$
	$X_{T:j} = S_k x_{t:jk}$ $\nabla_k = \nabla S_k$

Στην εργασία τους οι Maravall and del Rio (2001) ορίζουν τη συνθήκη: "HP - type decomposition καλείται η διάσπαση ενός  $IMA(2,2)$  μοντέλου σε ένα  $IMA(2,0)$  μοντέλο και σε έναν ορθογώνιο λευκό θόρυβο".

Στη συνέχεια αποδεικνύουν ότι  $D^2 X_T = \nabla_k^2 S_k x_t$ , η οποία με βάση τις σχέσεις  $\nabla^2 x_t = \theta_{HP}(l) a_t = (1 + \theta_1 l + \theta_2 l^2)$  και  $\nabla_k = \nabla S_k$  γίνεται  $D^2 X_T = S_k^3 \theta_{HP}(l) a_t = a(l) a_t$ , όπου  $a(l)$  είναι ένα πολυώνυμο της μεταβλητής  $l$  και βαθμού  $3k-1$ .

Από την εξέταση της συναρτήσεως  $ACGF$  της  $D^2 X_T$  προκύπτει ότι η  $D^2 X_T$  ακολουθεί μια  $IMA(2,2)$  στοχαστική διαδικασία.

Ομοίως για τη συνιστώσα της τάσης  $M_T$  στην περίπτωση της χρονολογικής σειράς ετησίων δεδομένων ισχύει η σχέση  $D^2 M_T = \nabla_k^2 S_k m_t = S_k^3 a_{mt}$ , όπου  $a_m(l) = S_k^3$  είναι ένα πολυώνυμο της μεταβλητής  $l$  βαθμού  $3k-3$ .

Από την εξέταση της συναρτήσεως  $ACGF$  της  $D^2 M_T$  προκύπτει ότι η  $D^2 M_T$  ακολουθεί επίσης μια  $IMA(2,2)$  στοχαστική διαδικασία.

Η κυκλική συνιστώσα των ετησίων δεδομένων  $C_T$  είναι λευκός θόρυβος με διακύμανση  $V_C = kV_c$ .

Επομένως μια διάσπαση της χρονολογικής σειράς ετησίων δεδομένων  $X_T$ , η οποία προκύπτει κατόπιν αθροίσεως της χρονολογικής σειράς  $x_t$  των τριμηνιαίων δεδομένων, δεν είναι της μορφής "HP -type decomposition" δεδομένου ότι η συνιστώσα της τάσης ακολουθεί ένα μοντέλο  $IMA(2,2)$  και όχι ένα  $IMA(2,0)$  όπως θα έπρεπε με βάση την ανωτέρω συνθήκη.

Το ερώτημα το οποίο απομένει να απαντηθεί είναι το εξής: Δεδομένης της HP - type decomposition της χρονολογικής σειράς των τριμηνιαίων δεδομένων και των συνιστωσών της χρονολογικής σειράς των ετησίων δεδομένων οι οποίες προκύπτουν κατόπιν αθροίσεως των αντιστοιχών συνιστωσών της χρονολογικής σειράς των τριμηνιαίων δεδομένων, είναι δυνατόν να επιτευχθεί μια τιμή της παραμέτρου  $\lambda = \lambda_A$ , η οποία επιτρέπει μια HP - type decomposition της χρονολογικής σειράς των ετησίων δεδομένων με συνιστώσες οι οποίες προσεγγίζουν τις προηγούμενες.

Έστω ότι  $\lambda_Q=1600$  και έστω η σχέση,  $D^2X_T=S_k^3\theta_{HP}(l)a_t=S_k^3(a_{mt}+\nabla^2c_t)=S_k^3a_{mt}+S_k^3\nabla_k^2c_t$ , η οποία προκύπτει από τη σχέση  $D^2X_T=S_k^3\theta_{HP}(l)a_t$ , με βάση τις σχέσεις (1.82) και  $\nabla_k = \nabla S_k$ .

Η γεννήτρια συνάρτηση αυτοδιακύμανσης  $ACGF$  της  $D^2M_T$  ισούται με

$$ACGF(D^2X_T) = S_k^3\bar{S}_k^3v_m + S_k\nabla^2\bar{S}_k\bar{\nabla}^2v_c, \quad (1.101)$$

όπου  $\bar{S} = 1+f+\dots+f^{k-1}$ ,  $f=l^{-1}$ ,  $\bar{\nabla}_k = 1-F^k$ ,  $F=1-L^{-1}$ .

Επομένως εάν με  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$  συμβολίζονται η διακύμανση και οι αυτοδιακυμάνσεις στις χρονικές υστερήσεις 1 και 2 της  $D^2X_T$ , οι οποίες αντιστοιχούν στα ετήσια δεδομένα και με  $\gamma_0$ ,  $\gamma_{1k}$  και  $\gamma_{2k}$  η διακύμανση και οι αυτοδιακυμάνσεις στις χρονικές υστερήσεις  $k$  και  $2k$  του δεξιού μέρους της (1.101), οι οποίες αντιστοιχούν στα τριμηνιαία δεδομένα ισχύουν οι σχέσεις  $\Gamma_j=\gamma_{jk}$ ,  $j=0,1,2$ .

Λαμβάνοντας υπόψη την  $HP$  - type decomposition της χρονολογικής σειράς  $X_T$  και θέτοντας  $\Gamma_j=\gamma_{jk}$ ,  $j=0,1,2$ , προκύπτει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} V_M + 6V_C &= 580V_m + 24V_c \\ -4V_C &= 216V_m - 16V_c \\ V_C &= 6V_m + 4V_c. \end{aligned}$$

Το ανωτέρω σύστημα εξισώσεων με δεδομένες τις τιμές  $V_m=1$  και  $V_c=1600$  οι οποίες αντιστοιχούν στην τιμή της παραμέτρου  $\lambda_Q=V_c/V_m=1600$ , δεν έχει μια μοναδική λύση για τις παραμέτρους  $V_M$  και  $V_C$ .

Οι Maravall and del Rio (2001) προτείνουν την επίλυση των δύο πρώτων εξισώσεων του συστήματος οι οποίες δίνουν το εξής αποτέλεσμα

$$\lambda_A = V_C/V_M = 6934/904 \approx 7.02.$$

Επιπλέον, θέτοντας τις ανωτέρω τιμές στα δεξιά μέλη των δύο τελευταίων εξισώσεων, επαληθεύουν ότι ο λόγος τους είναι ίσος με  $-3.96$ , τιμή η οποία προσεγγίζει ικανοποιητικά την πραγματική τιμή  $-4$ .

### 1.5.8.2 Το φίλτρο Butterworth-ARIMA (BW-ARIMA)

Όπως ήδη έχει αναφερθεί στις ενότητες 1.4.6 και 1.4.8, η οικογένεια των φίλτρων Butterworth αποτελείται από δύο βασικά φίλτρα χαμηλού περάσματος συχνοτήτων, τα  $BFS$  και  $BPT$  εκ των οποίων το μεν πρώτο βασίζεται στη συνάρτηση του ημιτόνου το δε δεύτερο στη συνάρτηση της εφαπτομένης. Η συνάρτηση τετραγωνισμένου κέρδους του φίλτρου Butterworth φίλτρου  $BFS$  δίνεται από τη σχέση

$$G(x) = \left[ 1 + \left( \frac{\sin(x/2)}{\sin(x_c/2)} \right)^{2d} \right]^{-1}, \quad 0 < x < \pi. \quad (1.102)$$

Το φίλτρο  $BFS$  εξαρτάται από δύο παραμέτρους οι οποίοι πρέπει να καθορισθούν εκ των

προτέρων α) τη συχνότητα  $x_c$  η οποία ορίζεται ως η συχνότητα για την οποία η συνάρτηση  $G(x_c)=0.05$  και β) την παράμετρο  $d$ .

Η αντίστοιχη της σχέσεως (1.102) σχέση στο πεδίο του χρόνου προκύπτει θέτοντας  $L=e^{-ix}$  και λαμβάνοντας υπόψη τη γνωστή σχέση  $4\sin^2(x/2)=(1-e^{-ix})(1-e^{ix})$ , οπότε

$$H_{BFS}(L, F) = \frac{1}{1 + I[(1-L)(1-F)]^d},$$

όπου  $\lambda=[2\sin(x_c/2)]^{-2d}$  είναι μια σταθερά.

Το φίλτρο, όμως αυτό, όπως ήδη έχει αναφερθεί στην παράγραφο 1.4.8.2, είναι το *WK* φίλτρο για την εκτίμηση του σήματος  $s_t$  στη διάσπαση της χρονολογικής σειράς

$$z_t = s_t + n_t,$$

όπου το σήμα  $s_t$  είναι το *IMA*( $d,0$ ) μοντέλο

$$\nabla^d s_t = b_t, \text{ var}(b_t) = S_b^2,$$

το μη σήμα  $n_t$  είναι λευκός θόρυβος

$$n_t \cong w.n.(0, \sigma_n^2) \text{ και } \lambda = \sigma_n^2 / \sigma_b^2.$$

Από τις ανωτέρω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\nabla^d z_t = b_t + \nabla^d n_t$$

και επομένως η χρονολογική σειρά  $z_t$  είναι δυνατόν να παρασταθεί ως ένα μοντέλο *IMA*( $d,d$ )

$$\nabla^d z_t = \theta(L) = (\theta_0 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_d L^d) a_t, \text{ var}(a_t) = \sigma_a^2.$$

Με βάση τα ανωτέρω, το φίλτρο *BFS* είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί για τη διάσπαση της συνιστώσας της τάσης-κύκλου  $p_t$  σε δύο συνιστώσες  $m_t$  και  $c_t$ , τη μακροχρόνιο τάση και τον κύκλο, σε ένα μοντέλο της μορφής

$$x_t = p_t + e_t,$$

όπου  $e_t$  παριστά τη βραχύβια και την άρρυθμη συνιστώσα, με μια διαδικασία δύο σταδίων ανάλογη με αυτή του φίλτρου *MHP*.

Επιπλέον το φίλτρο *BFS* είναι ένα *ARIMA* φίλτρο της μορφής  $H(L)=1/\theta(L)$ , όπου  $\theta(L)=\theta_0+\theta_1L+\theta_2L^2+\dots+\theta_dL^d$  και είναι δυνατόν να γραφεί και ως (Gomez, 1999)

$$H_{BFS}(L, F) = \frac{S_b^2}{S_a^2 q(L) q(F)}.$$

Επομένως η όλη διαδικασία εκτιμήσεως των συνιστωσών  $m_t$  και  $c_t$  ανάγεται στον υπολογισμό του πολυωνύμου  $\theta(L)$  και της διακύμανσης  $\sigma_a^2$ .

Το κατωτέρω θεώρημα του Gomez (2001) δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού του πολυωνύμου  $\theta(L)$  και της διακύμανσης  $\sigma_a^2$  με τη βοήθεια ενός αλγορίθμου.

### **Θεώρημα 1**

Έστω ένα φίλτρο *BFS* με παραμέτρους  $x_c$  και  $d$ . Τότε η συνάρτηση τετραγωνισμένου

κέρδους του φίλτρου αυτού, συμπίπτει με αυτή του φίλτρου  $WK$

$$\hat{s}_t = \frac{1}{1 + I[(1-L)(1-F)]^d} \hat{z}_t \quad (1.103)$$

το οποίο χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του σήματος  $s_t$  στο μοντέλο  $z_t = s_t + n_t$ , όπου το σήμα  $s_t$  ακολουθεί το  $IMA(d,0)$  μοντέλο

$$\nabla^d s_t = b_t, \text{ var}(b_t) = s_b^2$$

και το  $\lambda = \sigma_n^2 / \sigma_b^2$  δίνεται από τη σχέση  $\lambda = [2\sin(x_c/2)]^{-2d}$ .

Επιπλέον, το μοντέλο  $ARIMA$  της  $z_t$  το οποίο αντιστοιχεί σε αυτό το φίλτρο, είναι  $\nabla^d z_t = \theta(L)a_t$ , όπου  $\theta(L) = \prod_{i=1}^k q_i(L)$ ,  $k$  είναι το ακέραιο μέρος του  $(d+1)/2$  και το  $\theta(L)$  και η διακύμανση  $s_a^2$  δίνονται από τις σχέσεις

$$(1) \theta_i(L) = 1 + \theta_{1i}L + \theta_{2i}L^2$$

$$(2) \theta_{ij} = a_{ij}/a_{0i}, j=1,2$$

$$(3) a_{0i} = C + D_i^{1/2} + [(C + D_i^{1/2})^2 - 1]^{1/2}$$

$$(4) a_{0i} = C + D_i^{1/2} - [(C + D_i^{1/2})^2 - 1]^{1/2}$$

$$(5) a_{1i} = 2(C - D_i^{1/2}), i=1, \dots, k$$

$$(6) s_a^2 / s_b^2 = I \prod_{i=1}^k a_{0i}^2$$

$$(7) C = 2\sin^2(x_c/2)$$

$$(8) D_i = 1 - 2C\cos[(\pi + 2(i-1)\pi)/d] + C^2$$

$$(9) \text{ Εάν ο } d \text{ είναι περιττός, τότε το πολυώνυμο } \theta_i(L) \text{ έχει βαθμό } 1 \text{ αντί } 2 \text{ και } a_{0i} = C^{1/2} + (C+1)^{1/2}, a_{1i} = C^{1/2} - (C+1)^{1/2}.$$

Τότε η (1.103) είναι δυνατό να γραφεί ως

$$\hat{s}_t = H(L)H(F)\hat{z}_t, \quad (1.104)$$

όπου  $H(L) = \sigma_b / (\sigma_a H(L))$ .

Με βάση το ανωτέρω θεώρημα προκύπτει ότι προκειμένου να υπολογισθεί το πολυώνυμο  $\theta(L)$  και η διακύμανση  $\sigma_a^2$  είναι απαραίτητο να δοθούν εκ των προτέρων τιμές για τις παραμέτρους  $d$  και  $x_c$  του φίλτρου  $BFS$ .

Έστω ότι η παράμετρος  $d$  λαμβάνει την τιμή 2, οπότε το φίλτρο  $BFS$  ταυτίζεται με το φίλτρο  $HP$ .

Από τη σχέση  $\lambda = [2\sin(x_c/2)]^{-4}$  είναι δυνατόν να υπολογισθεί η παράμετρος  $\lambda$  και αντιστρόφως η  $x_c$ . Πράγματι από αυτή τη σχέση προκύπτει ότι

$$x_c = 2\arcsin[1/2\text{antilog}(-1/4\log\lambda)]. \quad (1.105)$$

Θέτοντας  $\lambda = 1600$ , η γενικώς αποδεκτή τιμή της  $HP$ -παραμέτρου για τριμηνιαία δεδομένα, προκύπτει η τιμή της  $x_c = 0.15827905$ , η οποία αντιστοιχεί σε



$2\pi/0.15827905=9.924221347$  έτη. Η τιμή αυτή των 9.924221347 ετών είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση της παραμέτρου  $\lambda$  η οποία αντιστοιχεί σε ετήσια δεδομένα, καλείται δε περίοδος του κύκλου αναφοράς (Maravall and del Rio (2001) και Gomez (2001)).

Θέτοντας την τιμή της  $x_c=2\pi/9.924221347$  στη σχέση  $\lambda=[2\sin(x_c/2)]^4$ , προκύπτει η τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  στην περίπτωση των ετησίων δεδομένων  $\lambda=6.655448329$  (βλ. και Maravall and del Rio (2001)).

Με βάση τις τιμές  $d=2$  και  $x_c=2\pi/9.924221347=0.6331162$  και το Θεώρημα 1, προκύπτουν οι εξής τιμές για το πολυώνυμο  $\theta(L)$  και το λόγο των διακυμάνσεων  $s_a^2/s_b^2$ .

$$C=0.096906152, \quad D_1=1-C^2=0.990609198, \quad a_{01}=1.531403648, \quad a_{21}=0.652995703, \\ a_{11}=-1.796774742, \quad \theta_{11}=-1.173285183, \quad \theta_{21}=0.426403387,$$

$$\sigma_a^2/\sigma_b^2=\lambda \prod_{i=1}^k a_{0i}^2=6.655448329 \times (1.531403648)^2=15.60833834$$

οπότε  $\theta(L)=1-1.1733L+0.4264L^2$  και

$$\hat{s}_t = \left( \frac{s_b^2}{s_a^2} \right) \frac{1}{q(L)q(F)} \hat{z}_t = H(L)H(F)\hat{z}_t,$$

$$\text{όπου } H(L) = s_b/s_a q(L) = 0.253117204 \frac{1}{1-1.1733L+0.4264L^2}.$$

Τα ανωτέρω αποτελέσματα ταυτίζονται με αυτά του προγράμματος TESS (βλ. παράγραφο 1.4.8.2) για την εξαγωγή της μακροχρονίου τάσεως όπως θα δούμε στην επομένη ενότητα.

## 1.6 Δυναμική και φασματική ανάλυση των εκτιμημένων υποδειγμάτων ΔΥΜΕΓ και ΔΥΒΕΓ

### 1.6.1 Δυναμική ανάλυση ενός υποδείγματος ταυτοχρόνως προσδιοριζόμενων εξισώσεων

Μετά την εκτίμηση των διαρθρωτικών εξισώσεων ενός υποδείγματος το επόμενο βήμα ανάγεται στον έλεγχο της ευστάθειάς του. Δηλαδή στον υπολογισμό των βραχυχρόνιων και μακροχρονίων αντιδράσεων των ενδογενών μεταβλητών στις μεταβολές των εξωγενών εκείνων μεταβλητών του οι οποίες συνήθως θεωρούνται ως μέσα άσκησης δημογραφικής πολιτικής. Οι αντιδράσεις αυτές οι οποίες πρέπει να οδηγούν σε ένα σημείο μακροοικονομικής ισορροπίας, προκειμένου το εκτιμημένο υπόδειγμα να είναι ευσταθές, μετρώνται ποσοτικά με τους διάφορους δυναμικούς πολλαπλασιαστές.

α) Δυναμικοί πολλαπλασιαστές

α1) Διαρθρωτική και ανοιγμένη μορφή

$$\text{Έστω η διαρθρωτική μορφή ενός συστήματος ταυτοχρόνως προσδιοριζόμενων εξισώσεων} \\ y_t \Gamma + z_t B = \varepsilon_t, \quad (1.106)$$

όπου  $y_t$  είναι ένα  $1 \times g$  διάνυσμα γραμμής  $g$  ενδογενών μεταβλητών της τρέχουσας περιόδου του

υποδείγματος,  $z_t$  είναι ένα  $1 \times k$  διάνυσμα γραμμής  $k$  προκαθορισμένων (εξωγενών ή ενδογενών με χρονική υστέρηση) μεταβλητών και  $\varepsilon_t$  είναι ένα  $1 \times g$  διάνυσμα γραμμής  $g$  στοχαστικών διαταρακτικών όρων. Επίσης οι μήτρες  $\Gamma$ ,  $B_1$  και  $B_2$  είναι τάξεων  $g \times g$ ,  $g \times g$  και  $k \times g$  αντιστοίχως.

Εάν η μήτρα  $\Gamma$  είναι μη ιδιάζουσα τότε προκύπτει η ανοιγμένη μορφή του ανωτέρω υποδείγματος

$$y_t = z_t \Pi + v_t, \quad (1.107)$$

όπου οι μήτρες των συντελεστών και οι στοχαστικοί διαταρακτικοί όροι της ανοιγμένης μορφής δίνονται ως

$$\Pi = -B\Gamma^{-1}$$

$$v_t = -\varepsilon_t \Gamma^{-1}.$$

Τα στοιχεία της μήτρας των συντελεστών ανοιγμένης μορφής έχουν μια πρακτική ερμηνεία ως αποτελέσματα συγκριτικής στατικής (*comparative statics*) και δείχνουν το μέγεθος της μεταβολής σε κάθε ενδογενή μεταβλητή καθώς μεταβάλλεται οιαδήποτε από τις προκαθορισμένες μεταβλητές δηλαδή ισχύει ότι

$$\frac{\partial y_{t,h}}{\partial z_{t,j}} = (\Pi)_{h,j}.$$

## α2) Τελική μορφή

Η τελική μορφή (*final form*) του υποδείγματος εκφράζει τις ενδογενείς μεταβλητές τρέχουσας περιόδου ως συναρτήσεις των τιμών βάσης και όλων των εξωγενών μεταβλητών καθώς και των στοχαστικών διαταρακτικών όρων. Η τελική μορφή είναι σημαντική για τη διαρθρωτική ανάλυση εφόσον από αυτήν είναι δυνατό να προσδιορισθούν όλοι οι βραχυχρόνιοι και μακροχρόνιοι πολλαπλασιαστές και επομένως αποκαλύπτει τη βραχυχρόνια και μακροχρόνια συγκριτική στατική του υποδείγματος.

Εάν το σύστημα είναι πρώτης τάξεως (περιλαμβάνει μια χρονική υστέρηση) και αν οι ενδογενείς μεταβλητές με χρονική υστέρηση περιληφθούν πρώτες, τότε το διάνυσμα των προκαθορισμένων μεταβλητών  $z_t$  είναι δυνατό να χωρισθεί σε υποδιανύσματα ως εξής:

$$z_t = (y_{t-1} | x_t).$$

Επίσης αν η μήτρα  $B$  της σχέσης (1.106) χωριστεί σε υπομήτρες ώστε να συμφωνεί με τη διαίρεση του  $z$  σε υποδιανύσματα, δηλαδή

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ K & K \\ B_2 \end{pmatrix},$$

τότε η διαρθρωτική μορφή είναι δυνατό να γραφεί ως εξής:

$$y_t \Gamma + y_{t-1} B_1 + x_t B_2 = \varepsilon_t, \quad (1.108)$$

όπου  $y_t$  είναι ένα  $1 \times g$  διάνυσμα γραμμής  $g$  ενδογενών μεταβλητών της τρέχουσας περιόδου του υποδείγματος,  $y_{t-1}$  είναι ένα  $1 \times g$  διάνυσμα γραμμής των ιδίων ενδογενών μεταβλητών της προηγούμενης περιόδου,  $x_t$  είναι ένα  $1 \times g$  διάνυσμα γραμμής  $k$  προκαθορισμένων (εξωγενών ή ενδογενών με χρονική υστέρηση) μεταβλητών και  $e_t$  είναι ένα  $1 \times g$  διάνυσμα γραμμής  $g$  στοχαστικών διαταρακτικών όρων. Επίσης οι μήτρες  $\Gamma$ ,  $B_1$  και  $B_2$  είναι τάξεων  $g \times g$ ,  $g \times g$  και  $k \times g$  αντιστοίχως.

Εάν η τετραγωνική μήτρα  $\Gamma$  είναι μη ιδιάζουσα τότε προκύπτει η ανοιγμένη μορφή του ανωτέρω υποδείγματος

$$y_t = y_{t-1}\Delta + x_t\Pi + v_t, \quad (1.109)$$

όπου οι μήτρες των συντελεστών και οι στοχαστικοί διαταρακτικοί όροι της ανοιγμένης μορφής δίνονται ως

$$\Pi = -B_2\Gamma^{-1}$$

$$\Delta = -B_2\Gamma^{-1}$$

$$v_t = -e_t\Gamma^{-1}.$$

Τα στοιχεία της μήτρας  $\Pi$  εκφράζουν το μέγεθος της μεταβολής σε κάθε ενδογενή μεταβλητή καθώς μεταβάλλεται οιαδήποτε από τις προκαθορισμένες μεταβλητές μέσα στην ίδια χρονική περίοδο και ονομάζονται βραχυχρόνιοι ή άμεσοι πολλαπλασιαστές (*impact multipliers*).

Αντικαθιστώντας διαδοχικώς τις ενδογενείς μεταβλητές  $y_t$  με χρονική υστέρηση στην ανοιγμένη μορφή (1.109) προς τα πίσω στην περίοδο βάσης  $t=0$ , προκύπτει η σχέση

$$y_t = y_0\Delta_t + \sum_{s=0}^{t-1} x_{t-s}\Pi\Delta^s + \sum_{s=0}^{t-1} v_{t-s}\Delta^s. \quad (1.110)$$

Τα στοιχεία του πίνακα  $\Pi\Delta^s$ ,  $s=1,2,3$  ονομάζονται ενδιάμεσοι πολλαπλασιαστές (*interim multipliers*)  $s$ -περιόδων και εκφράζουν την επίδραση επί των ενδογενών μεταβλητών στις περιόδους  $t+1, t+2, \dots, t+s$  από τη μεταβολή κατά μία μονάδα των εξωγενών μεταβλητών  $x_t$ , στην περίοδο  $t$ .

Επί πλέον τα στοιχεία του πίνακα

$$\sum_{s=0}^{t-1} \Pi\Delta^s \quad (1.111)$$

δείχνουν τη μεταβολή σε κάθε ενδογενή μεταβλητή καθώς κάθε εξωγενής μεταβλητή  $x_t$  υφίσταται μια διατηρούμενη αύξηση κατά το διάστημα  $t$  ( $t>1$ ) περιόδων και ονομάζονται αθροιστικοί ενδιάμεσοι πολλαπλασιαστές (*cumulated interim multipliers*).

Αν για τον πίνακα  $\Delta$  ισχύει ότι  $\lim_{s \rightarrow \infty} \Delta^s = 0$  τότε από τη σχέση (1.108) προκύπτει ότι

$$y_t = \sum_{s=0}^{\infty} x_{t-s}\Pi\Delta^s + \sum_{s=0}^{\infty} v_{t-s}\Delta^s \quad (1.112)$$

Η σχέση αυτή καλείται η τελική μορφή (*final form*) του υποδείγματος τα δε στοιχεία του πίνακα

$$\sum_{s=0}^{\infty} \Pi \Delta^s \quad (1.113)$$

μακροχρόνιοι ή συνολικοί πολλαπλασιαστές (*long-run or total multipliers*) και εκφράζουν τη συνολική επίδραση επί των ενδογενών μεταβλητών από μεταβολή των εξωγενών μεταβλητών  $x_t$  από την περίοδο  $t$  κατά μία μονάδα όταν το σύστημα έχει επανέλθει και πάλι σε σημείο ευσταθούς ισορροπίας.

Η δυναμοσειρά (1.110) η οποία ονομάζεται ανάπτυγμα κατά Neumann και συγκλίνει αν  $\lim_{s \rightarrow \infty} \Delta^s = 0$  ή ισοδύναμα αν όλες οι χαρακτηριστικές ρίζες του πίνακα  $\Delta$  έχουν μέτρο μικρότερο της μονάδας. Επιπλέον ισχύει η σχέση

$$\sum_{s=0}^{\infty} \Pi \Delta^s = \Pi [I - \Delta]^{-1}. \quad (1.114)$$

β) Ευστάθεια του υποδείγματος

Ισχύει η κατωτέρω πρόταση (Greene, 2000).

### Πρόταση

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ευστάθεια ενός εκτιμημένου υποδείγματος δηλαδή για την επάνοδο του σε ένα νέο σημείο μακροοικονομικής ισορροπίας μετά από οποιαδήποτε διαταραχή η οποία προκαλείται από τη μεταβολή των τιμών των εξωγενών μεταβλητών είναι να ισχύει η σχέση  $|\lambda_i| < 1$ , για όλες χαρακτηριστικές ρίζες  $\lambda_i$  - της τετραγωνικής μήτρας  $\Delta$  ή ισοδύναμα  $|\lambda_m| < 1$  όπου  $\lambda_m$  είναι η μεγαλύτερη ή κυριαρχούσα χαρακτηριστική ρίζα της μήτρας  $\Delta$ .

Επειδή η εκτιμήτρια της κυριαρχούσας ρίζας  $\lambda_m$  της τετραγωνικής μήτρας  $\Delta$  είναι μια δειγματική στατιστική, είναι δυνατόν να υπολογισθεί μια εκτιμήτρια της ασυμπτωτικής της διακύμανσης (Theil and Boot (1962) και Goldberger et al. (1961)). Ο συνδυασμός της εκτιμήτριας της κυριαρχούσας ρίζας με την εκτιμήτρια της ασυμπτωτικής της διακύμανσης αποτελούν επιπρόσθετη ένδειξη για τη σταθερότητα του υποδείγματος.

Σχετικά με τη σταθερότητα ενός υποδείγματος ισχύουν τα εξής:

(i) Αν όλες οι χαρακτηριστικές ρίζες της μήτρας  $\Delta$  είναι πραγματικές και ισχύει  $|\lambda_i| < 1$  τότε το υπόδειγμα είναι σταθερό και συγκλίνει προς τη νέα κατάσταση ισορροπίας χωρίς ταλαντώσεις.

(ii) Αν η μήτρα  $\Delta$  έχει πραγματικές και μιγαδικές ρίζες για τις οποίες ισχύει  $|\lambda_i| < 1$  τότε το υπόδειγμα είναι σταθερό και συγκλίνει προς τη νέα κατάσταση ισορροπίας με ταλαντώσεις.

(iii) Αν όλες οι χαρακτηριστικές ρίζες της μήτρας  $\Delta$  είναι πραγματικές αλλά για μερικές

από αυτές ισχύει  $|\lambda_i| > 1$  τότε το υπόδειγμα δεν είναι σταθερό και αποκλίνει χωρίς ταλαντώσεις.

(iv) Αν η μήτρα  $\Delta$  έχει και μιγαδικές χαρακτηριστικές ρίζες για τις οποίες ισχύει  $|\lambda_i| > 1$  τότε το υπόδειγμα δεν είναι σταθερό και αποκλίνει με ταλαντώσεις.

### 1.6.2 Φασματική ανάλυση ενός υποδείγματος ταυτοχρόνως προσδιοριζόμενων εξισώσεων

Προκειμένου να ελεγχθεί η κυκλική ή μη συμπεριφορά των ενδογενών μεταβλητών ενός υποδείγματος ταυτοχρόνως προσδιοριζόμενων εξισώσεων και κατ' επέκταση η βραχυχρόνια ή μακροχρόνια συμπεριφορά του υποδείγματος ως συνόλου είναι απαραίτητο να κατασκευασθεί η φασματική μήτρα της τελικής του μορφής.

Έστω η γενικευμένη διαρθρωτική μορφή ενός συστήματος ταυτοχρόνως προσδιοριζόμενων εξισώσεων με  $r$  και  $k$  χρονικές υστερήσεις για τις ενδογενείς και εξωγενείς του μεταβλητές αντιστοίχως:

$$y_t = y_t B + z_t C + u_t \text{ με } u_t \cong w.n.(\mathbf{0}, \Sigma), \quad (1.115)$$

όπου  $y_t$  είναι ένα  $1 \times g$  διάνυσμα  $g$  ενδογενών μεταβλητών,  $x_t$  είναι ένα  $1 \times s$  διάνυσμα  $s$  εξωγενών μεταβλητών,  $z_t = (y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-r}, x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-k})$  είναι ένα  $1 \times G$  διάνυσμα  $G$  προκαθορισμένων μεταβλητών, όπου  $G = gr + s(k+1)$  και  $u_t$  είναι ένα  $1 \times g$  διάνυσμα  $g$  στοχαστικών διαταρακτικών όρων. Οι μήτρες  $B$  και  $C$  είναι τάξεων  $g \times g$  και  $G \times G$  αντιστοίχως.

Επίσης αν η μήτρα  $C$  χωριστεί σε υπομήτρες ώστε να συμφωνεί με τη διαίρεση του  $z$  σε υποδιανύσματα, δηλαδή

$$C = (C_1, C_2, \dots, C_r, C_0^*, C_1^*, \dots, C_k^*),$$

όπου οι μήτρες  $C_i, i=1, 2, \dots, r$  είναι τάξεως  $g \times g$  και οι μήτρες  $C_i^*, i=1, 2, \dots, k$  είναι τάξεως  $g \times s$  αντιστοίχως, τότε η διαρθρωτική μορφή (1.115) γράφεται ως εξής:

$$\left( C_0 I_0 - \sum_{i=1}^r C_i L^i \right) y'_t = \left( \sum_{i=1}^k C_i^* L^i \right) x'_t + u'_t, \quad (1.116)$$

όπου  $L$  ο τελεστής χρονικών υστερήσεων  $L^r y_t = y_{t-r}, r=0, 1, \dots$  και  $L^0 = I_0$ .

$$\text{Έστω } C(L) = \left( C_0 I_0 - \sum_{i=1}^r C_i L^i \right), \quad C^*(L) = \sum_{i=1}^k C_i^* L^i \text{ και } C_0 = I - B \text{ οπότε η σχέση (1.116)}$$

γράφεται ως εξής:

$$C(L) y'_t = C^*(L) x'_t + u'_t. \quad (1.117)$$

Εάν η μήτρα  $C(L)$  είναι μη ιδιάζουσα δηλαδή το υπόδειγμα είναι σταθερό (οι ρίζες  $\rho$  της εξίσωσης  $\det[C(\rho)] = 0$  ικανοποιούν τη σχέση  $|\rho| > 1$ ) τότε προκύπτει η τελική μορφή του συστήματος των ταυτοχρόνως προσδιοριζόμενων εξισώσεων ως

$$y'_t = [C(L)]^{-1} C^*(L) x'_t + [C(L)]^{-1} u'_t. \quad (1.118)$$

Έστω  $[C(L)]^{-1} = \text{adj}[C(L)] / \det[C(L)]$ , όπου  $\text{adj}[C(L)]$  ο συμπληρωματικός ή προσηρτημένος

πίνακας του  $C(L)$  και  $\det[C(L)]$  η ορίζουσα του  $C(L)$ , οπότε η (1.110) γράφεται ως

$$y'_t = \frac{A(L)}{b(L)} x'_t + \frac{G(L)}{b(L)} u'_t, \quad (1.119)$$

όπου  $A(L)=G(L)C^*(L)$ ,  $G(L)=adj[A(L)]$  και  $b(L)=\det[A(L)]$ .

Έστω τώρα ότι η  $x_t$  διασπάται ως  $x_t=w(t)+e_t$ , όπου  $w(t)$  είναι μια προσδιοριστική συνάρτηση (*deterministic function*) ως προς το χρόνο  $t$  και  $e_t$  είναι μια στοχαστική διαδικασία κατά συνδιακύμανση στάσιμη (*covariance stationary*) (Drymes,1970). Επιπλέον, εάν η  $e_t$  στοχαστική διαδικασία έχει μέση τιμή 0 και μήτρα συνδιακύμανσης  $\Omega$ , η φασματική της μήτρα αποδεικνύεται ότι είναι η εξής:

$$F_e(\theta)=(1/2\pi)\Omega. \quad (1.120)$$

Με βάση τη σχέση,  $x_t=w(t)+e_t$ , η τελική μορφή (1.119) γράφεται ως εξής:

$$y'_t = \frac{A(L)}{b(L)} w'_t + \frac{A(L)}{b(L)} e'_t + \frac{G(L)}{b(L)} u'_t. \quad (1.121)$$

Επομένως η φασματική μήτρα των ενδογενών μεταβλητών  $y_t$  του υποδείγματος υπολογίζεται εφόσον υπολογισθούν οι φασματικές μήτρες των στοχαστικών διαδικασιών  $e'_t$  και  $u'_t$  όπου

$$e'_t = \frac{A(L)}{b(L)} e'_t \text{ και } u'_t = \frac{G(L)}{b(L)} u'_t,$$

δηλαδή ισχύει η σχέση

$$F_y(q) = F_{e^*}(q) + F_{u^*}(q). \quad (1.122)$$

Αποδεικνύεται ότι (Drymes, 1970)

$$F_{e^*}(q) = \frac{A(q)F_e(q)\bar{A}'(q)}{|b(q)|^2} \quad (1.123)$$

και

$$F_{u^*}(q) = \frac{A(q)F_u(q)\bar{A}'(q)}{|b(q)|^2}, \quad (1.124)$$

όπου  $\bar{A}(q)$  είναι η μήτρα της οποίας τα στοιχεία είναι οι συζυγείς μιγαδικοί των στοιχείων της μήτρας  $A(\theta)$ .

Επειδή όμως ισχύει ότι

$$F_u(\theta)=(1/2\pi)\Sigma \quad (1.125)$$

η σχέση (1.122) με βάση τις σχέσεις (1.120), (1.123) και (1.124) γίνεται

$$F_y(q) = \frac{1}{2p} \left( \frac{A(q)\Omega\bar{A}'(q)}{|b(q)|^2} + \frac{G(q)\Sigma\bar{G}'(q)}{|b(q)|^2} \right). \quad (1.126)$$

Στην περίπτωση κατά την οποία η μήτρα  $C(L)$  είναι ιδιάζουσα δηλαδή το υποδείγμα είναι ασταθές τότε αντί της σχέσεως (1.118) ισχύει η κατωτέρω σχέση

$$y_t' = Pt + [C(L)]^{-1} C^*(L) x_t' + [C(L)]^{-1} u_t', \quad (1.127)$$

όπου  $P_{jt}$  είναι ένα διάνυσμα συναρτήσεων της μορφής

$$P_{jt} = k_{j1} I_1' + k_{j2} I_2' + K + k_{jn} I_n',$$

όπου  $\lambda_i$  είναι οι χαρακτηριστικές ρίζες του υποδείγματος και  $k_{ji}$  σταθερές οι οποίες καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του υποδείγματος. Στην περίπτωση δε αυτή, η φασματική μήτρα  $F_y(\theta)$  της τελικής μορφής του υποδείγματος είναι της ίδιας μορφής όπως αυτή του σταθερού υποδείγματος (Chow and Levitan, 1969).

### **1.6.3 Αξιολόγηση της δυναμικής κυκλικού υποδείγματος στην αναπαγωγή κυκλικών κυμάνσεων των ενδογενών μεταβλητών του, οι οποίες προσομοιάζουν τις αντίστοιχες των πραγματικών δεδομένων**

Η αξιολόγηση της δυναμικής ενός κυκλικού υποδείγματος ως προς την ικανότητά του να αναπαραγάγει κυκλικές συνιστώσες των ενδογενών μεταβλητών του οι οποίες προσομοιάζουν με τις αντίστοιχες των αρχικών χρονολογικών σειρών επιτυγχάνεται με τον υπολογισμό των ροπών πρώτης και δευτέρας τάξεως των κυκλικών συνιστωσών των ενδογενών μεταβλητών του υποδείγματος και την εν συνεχεία σύγκριση τους με τις αντίστοιχες ροπές των κυκλικών συνιστωσών των αρχικών χρονολογικών σειρών προκειμένου να αποτιμηθεί ο βαθμός συνάφειάς τους. Αυτή η μέθοδος αξιολόγησης αναφέρεται στη διεθνή βιβλιογραφία ως *moment matching method* (Blake and Young, 2000).

Ο υπολογισμός των ροπών πρώτης και δευτέρας τάξεως είναι δυνατό να γίνει είτε στο πεδίο του χρόνου με τη μέθοδο της προσομοίωσης των ενδογενών μεταβλητών του υποδείγματος και τον υπολογισμό των ροπών των εξ αυτών προκυπτουσών κυκλικών συνιστωσών με τη βοήθεια ενός από τα γνωστά φίλτρα - *HP*, *BK*, *BKM* και *MHP* - για την εξαγωγή κυκλικών συνιστωσών (King and Rebelo (1999), Blake and Young (2000) και Den Haan (2001)) είτε στο πεδίο των συχνοτήτων με τον υπολογισμό της φασματικής μήτρας των ενδογενών μεταβλητών του και τον υπολογισμό των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος και φάσματος τομής (Ortega (1998a, 1998b), Diebold et al. (1998) και Pakko (1997)).

Οι μέθοδοι αυτοί υπολογισμού των ροπών πρώτης και δευτέρας τάξεως είτε στο πεδίο του χρόνου είτε στο πεδίο των συχνοτήτων συνήθως αλληλοσυμπληρώνουν η μια την άλλη.

### **1.6.4 Άσκηση δημογραφικής πολιτικής με τη χρήση ενός υποδείγματος ταυτοχρόνως προσδιοριζόμενων εξισώσεων**

Η άσκηση δημογραφικής πολιτικής με τη χρήση ενός υποδείγματος διαχωρίζεται σε βραχυχρόνια και μακροχρόνια πολιτική. Ένα βασικό ζήτημα στην άσκηση δημογραφικής

πολιτικής είναι ο χρονικός ορίζοντας δηλαδή το ζήτημα του πόσο πρέπει να είναι το μελλοντικό χρονικό διάστημα για το οποίο θα διαμορφωθεί η πολιτική και για πόσο μελλοντικό χρονικό διάστημα θα μελετώνται τα αποτελέσματα των διαφόρων πολιτικών ούτως ώστε να αξιολογηθεί η συγκεκριμένη πολιτική.

Το πρότυπο της άσκησης δημογραφικής πολιτικής το οποίο συνήθως μελετάται είναι της βραχυχρόνιας πολιτικής καθόσον οι λήπτες αποφάσεων της δημογραφικής πολιτικής αδυνατούν να επηρεάσουν τα μακροχρόνια χαρακτηριστικά της οικογενείας εν αντιθέσει με τη δυνατότητα επηρεασμού των βραχυχρόνιων χαρακτηριστικών της όπως το τρέχον εισοδηματικό της επίπεδο (Bratti, 2002).

Αν υποθεθεί ότι το διάνυσμα των μεταβλητών  $r$  συνοψίζει τις μεταβλητές πολιτικής η οποία πρόκειται να επιλεγεί από τους λήπτες αποφάσεων το πρόβλημα της άσκησης πολιτικής βραχυχρόνια ανάγεται στην επιλογή των αρίστων τιμών για αυτές τις μεταβλητές στη διάρκεια της τρέχουσας περιόδου  $T$  της βραχυχρόνιας άριστης πολιτικής  $r_T^*$ .

Μια μακροχρόνια άριστη πολιτική θα ήταν δυνατό να συνοψιστεί από την ακολουθία των τρεχουσών και των μελλοντικών τιμών των μεταβλητών πολιτικής  $r_T^*, r_{T+1}^*, \dots, r_{T+h}^*$ , όπου  $h$  ο χρονικός ορίζοντας άσκησης της μακροχρόνιας πολιτικής.

Έστω η διαρθρωτική μορφή ενός συστήματος ταυτοχρόνως προσδιοριζόμενων εξισώσεων

$$y_t \Gamma + y_{t-1} B_1 + z_t B_2 + r_{t-1} A = \varepsilon_t, \quad (1.128)$$

όπου  $y_t$  είναι ένα  $1 \times g$  διάνυσμα  $g$  ενδογενών μεταβλητών,  $y_{t-1}$  είναι ένα  $1 \times g$  διάνυσμα  $g$  ενδογενών μεταβλητών με χρονική υστέρηση,  $z_t$  είναι ένα  $1 \times k$  διάνυσμα  $k$  εξωγενών μεταβλητών και  $\varepsilon_t$  είναι ένα  $1 \times g$  διάνυσμα  $g$  στοχαστικών διαταρακτικών όρων. Το διάνυσμα  $r_{t-1}$ , παριστάνει  $l$  πρόσθετες μεταβλητές οι οποίες υπόκεινται στον έλεγχο του φορέα πολιτικής. Οι τιμές των μεταβλητών αυτών επηρεάζουν το σύστημα στο χρόνο  $t$  όπως φαίνεται στη διαρθρωτική μορφή (1.128).

Εφόσον η μήτρα  $\Gamma$  είναι μη ιδιάζουσα, η ανοιγμένη μορφή της ανωτέρω διαρθρωτικής μορφής του υποδείγματος

$$y_t = -y_{t-1} B_1 \Gamma^{-1} + z_t B_2^{-1} + r_{t-1} A \Gamma^{-1} + \varepsilon_t \Gamma^{-1} \quad (1.129)$$

προσδιορίζει τις ενδογενείς μεταβλητές ως συναρτήσεις των τιμών με χρονική υστέρηση, των εξωγενών μεταβλητών, των μεταβλητών πολιτικής και των στοχαστικών διαταρακτικών όρων.

Με δεδομένη αυτή τη διατύπωση του υποδείγματος υπάρχουν διάφορες εναλλακτικές προσεγγίσεις στην άσκηση δημογραφικής πολιτικής μεταξύ των οποίων εντάσσεται η προσέγγιση με τη μέθοδο της προσομοίωσης η οποία αναφέρεται στον προσδιορισμό της ποσοτικής συμπεριφοράς ενός υποδείγματος με τον υπολογισμό των τιμών με βάση την εκτιμημένη του μορφή. Η ποσοτική συμπεριφορά του υποδείγματος προσομοιώνεται με βάση εναλλακτικές υποθέσεις ούτως ώστε να γίνει ανάλυση της αντίδρασης της συμπεριφοράς του σε



μια ποικιλία εναλλακτικών εισροών.

Σε μια διαδικασία προσομοίωσης χρησιμοποιούνται δεδομένα για τις τιμές των μεταβλητών πολιτικής και των άλλων εξωγενών μεταβλητών μαζί με τις εκτιμήσεις των τιμών των παραμέτρων και των στοχαστικών διαταρακτικών όρων για να υπολογισθούν οι τιμές των ενδογενών μεταβλητών από τις εξισώσεις του υποδείγματος. Η διαδικασία προσομοίωσης είναι δυνατό να πάρει διάφορες μορφές - την ιστορική προσομοίωση, την προσομοίωση προβολής και την προσομοίωση πολιτικής.

Μια ιστορική προσομοίωση αναφέρεται στον υπολογισμό των εκτιμημένων τιμών των ενδογενών μεταβλητών εντός της περιόδου του δείγματος χρησιμοποιώντας ιστορικές τιμές των εξωγενών μεταβλητών και τις εκτιμήσεις των παραμέτρων. Οι τιμές των ενδογενών μεταβλητών οι οποίες προκύπτουν από την προσομοίωση στη συνέχεια συγκρίνονται με τις πραγματικές τους τιμές για να προσδιοριστεί αν το υπόδειγμα ιχνηλατεί με ακρίβεια την ιστορική περίοδο. Στην περίπτωση αποτυχίας του το υπόδειγμα πρέπει να επαναπροσδιοριστεί.

Ένας δεύτερος τρόπος προσομοίωσης είναι η προβολή με την οποία γίνεται πρόβλεψη των τιμών των ενδογενών μεταβλητών πέρα από την περίοδο του δείγματος.

Ο τρίτος τρόπος προσομοίωσης είναι η προσομοίωση δημογραφικής πολιτικής με την οποία προσδιορίζονται οι τιμές των ενδογενών μεταβλητών για εναλλακτικά υποτιθέμενα σύνολα τιμών των μεταβλητών πολιτικής τα οποία αντιστοιχούν στις υπό μελέτη εναλλακτικές πολιτικές.

Η προσέγγιση με την προσομοίωση δημογραφικής πολιτικής χρησιμοποιεί το εκτιμημένο υπόδειγμα ανοιγμένης μορφής

$$y_{T+1} = -r_T \hat{A} \hat{\Gamma}^{-1} - y_T \hat{B}_1 \hat{\Gamma}^{-1} - z_{T+1} B_2^{-1} + \hat{e}_{T+1} \hat{\Gamma}^{-1} \quad (1.130)$$

προκειμένου να προσφέρει στους φορείς άσκησης δημογραφικής πολιτικής ένα μενού εναλλακτικών πολιτικών από τις οποίες είναι δυνατό να επιλέξουν μια επιθυμητή εναλλακτική δημογραφική πολιτική όπως φαίνεται από τον κατωτέρω πίνακα, όπου οι αριθμοί επιλογής κατατάσσουν το σύνολο των εναλλακτικών δημογραφικών πολιτικών. Εν συνεχεία οι φορείς δημογραφικής πολιτικής θα πρέπει να επιλέξουν μια συγκεκριμένη εναλλακτική δημογραφική πολιτική  $r_{T+1}^*, y_{T+1}^*$  σύμφωνα με τις προτιμήσεις τους οι οποίες εξαρτώνται από τις μεταβλητές δημογραφικής πολιτικής και από τις ενδογενείς μεταβλητές.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 1.4:** Αποτέλεσμα προσομοίωσης από επιλογές εναλλακτικών δημογραφικών πολιτικών

Αριθμός επιλογής	Δημογραφική πολιτική τρέχουσας περιόδου	Ενδογενείς μεταβλητές μελλοντικής περιόδου
1	$r_T^1$	$y_{T+1}^1$
2	$r_T^2$	$y_{T+1}^2$
3	$r_T^3$	$y_{T+1}^3$
N	N	N

Η μέθοδος της προσομοίωσης άσκησης δημογραφικής πολιτικής συχνά χρησιμοποιεί τους

πολλαπλασιαστές δημογραφικής πολιτικής οι οποίοι για το υπόδειγμα (1.130) είναι της μορφής

$$\frac{\partial y_{T+1}}{\partial r_T} = -\hat{A}\hat{\Gamma}^{-1}. \quad (1.131)$$

Οι ανωτέρω πολλαπλασιαστές δίνουν το αποτέλεσμα μιας μεταβολής οιασδήποτε μεταβλητής δημογραφικής πολιτικής σε κάθε μια από τις ενδογενείς μεταβλητές. Το συνολικό αποτέλεσμα μιας μεταβολής κάθε μιας από τις  $l$  μεταβλητές δημογραφικής πολιτικής στην ενδογενή μεταβλητή  $g$  είναι δυνατό να ληφθεί αν αθροιστούν τα ξεχωριστά αποτελέσματα κάθε μιας από τις μεταβλητές δημογραφικής πολιτικής όπως στη σχέση

$$\Delta y_{g,T+1} = \sum_{i=1}^l \frac{\partial y_{g,T+1}}{\partial r_{g,T+1}} \Delta r_{i,T}. \quad (1.132)$$

## 1.7 Σύνοψη περιγραφής των υποδειγμάτων VAR

### 1.7.1 Γενικά

Στην κλασική παραδοσιακή προσέγγιση των υποδειγμάτων ταυτοχρόνως προσδιοριζόμενων εξισώσεων (*The Cowles Commission foundations for the development of macroeconomic models*), η ταξινόμηση των μεταβλητών σε ενδογενείς και εξωγενείς όπως και οι μεταξύ τους αιτιώδεις σχέσεις είναι δεδομένες a priori δηλαδή δεν υπόκεινται σε στατιστικό έλεγχο. Η προσέγγιση αυτή έγινε αντικείμενο σοβαρής κριτικής (Liu and Lucas critiques) με αποτέλεσμα την ανάπτυξη μεθόδων για τον έλεγχο της εξωγένειας (*exogeneity*) και της αιτιότητας (*casuality*).

Με βάση αυτές τις διαπιστώσεις αναπτύχθηκαν τη δεκαετία του 1980 από τον Sims τα λεγόμενα υποδείγματα αυτοπαλίνδρομων διανυσμάτων VAR - *Vector Autoregressive Models*, όπου καθίσταται πλέον δυνατή η ανάπτυξη μεθόδων για τον έλεγχο της εξωγένειας και της αιτιότητας.

Επιπλέον μέσω των υποδειγμάτων αυτοπαλίνδρομων διανυσμάτων VAR, όπου οι ερμηνευτικές μεταβλητές σε κάθε εξίσωση εμφανίζονται με χρονική υστέρηση δεδομένου ότι όλες εξειδικεύονται ως ενδογενείς μεταβλητές, καθίσταται πληρεστέρα η δυνατότητα διερευνήσεως των δυναμικών ιδιοτήτων μεταξύ συμμεταβαλλομένων χρονολογικών σειρών - μέσω των συναρτήσεων αιφνίδιων αντιδράσεων (*IRF*) και των διασπάσεων της διακύμανσης του σφάλματος πρόβλεψης (*FEVD*), δυνατότητα η οποία δεν καθίσταται εφικτή μέσω των υποδειγμάτων ταυτοχρόνως προσδιοριζόμενων εξισώσεων.

Η μαθηματική μορφή ενός υποδείγματος αυτοπαλίνδρομου διανύσματος VAR( $p$ ) τάξεως  $p$  έχει ως εξής:

$$y_t = \pi_1 y_{t-1} + \pi_2 y_{t-2} + \dots + \pi_p y_{t-p} + u_t, \quad (1.133)$$

όπου  $y_t$  είναι ένα διάνυσμα διαστάσεων  $m \times 1$ ,  $t=1,2,\dots,n$ ,  $\pi_i$ ,  $i=1,2,\dots,p$  είναι πίνακες

διαστάσεων ( $m \times m$ ) και όπου το διάνυσμα των διαταρακτικών όρων  $u_t$  είναι λευκός θόρυβος με τις εξής ιδιότητες:

$$E(u_t) = 0, \forall t \text{ και } E(u_t u_s^T) = \begin{cases} \Omega, & s = t \\ 0, & s \neq t \end{cases}$$

### 1.7.2 Έλεγχος της ευστάθειας των υποδειγμάτων VAR

Έστω  $L$  ο τελεστής οπισθοδρόμου μετατοπίσεως, δηλαδή  $L^i y_t = y_{t-i}$ . Τότε η σχέση (1.133) δύναται να γραφεί υπό τη μορφή

$$y_t = \sum_{i=1}^p p_i L^i y_t + u_t \quad (1.134)$$

ή τη μορφή

$$\pi(L)y_t = u_t, \quad (1.135)$$

όπου  $p(L) = I - \sum_{i=1}^p p_i L^i$ .

Επίσης έστω ότι  $\pi(z) = [I - \pi_1 z - \pi_2 z^2 - \dots - \pi_p z^p]$  παριστά το "χαρακτηριστικό" πολυώνυμο του πίνακα  $\pi(L)$ . Αποδεικνύεται ότι οι ρίζες του  $\det[\pi(z)] = 0$  περικλείουν όλη τη σχετική πληροφόρηση για την ευστάθεια του υποδείγματος VAR καθώς και για τη στασιμότητα ή μη στασιμότητα του διανύσματος VAR των ενδογενών μεταβλητών του (Johnston and Dinarbo, 1997). Συνήθως ο έλεγχος της ευστάθειας του υποδείγματος VAR( $p$ ) επιτυγχάνεται μέσω του μετασχηματισμού του σε ένα ισοδύναμο υπόδειγμα VAR(1) ως κατωτέρω

$$\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{p-1} & p_p \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ y_{t-3} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

και συγκεκριμένα μέσω των ιδιοτιμών του πίνακα των συντελεστών του υποδείγματος VAR(1)

$$CM = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{p-1} & p_p \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix},$$

ο οποίος καλείται συνοδός πίνακας (*companion matrix*) του υποδείγματος VAR( $p$ ). Αποδεικνύεται ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $CM$  είναι ακριβώς οι ρίζες του πολυωνύμου  $\det[\pi(z^{-1})] = 0$  και ότι ισχύουν οι κατωτέρω περιπτώσεις (Johnston and Dinarbo, 1997):

α) Εάν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα  $CM$  ευρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου τότε το διάνυσμα των ενδογενών μεταβλητών  $y_t$  είναι στάσιμο.

β) Εάν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα  $CM$  ευρίσκονται εντός ή επάνω στον μοναδιαίο κύκλο τότε το διάνυσμα των ενδογενών μεταβλητών  $y_t$  είναι μη στάσιμο.

γ) Εάν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα  $CM$  ευρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου τότε το διάνυσμα των ενδογενών μεταβλητών  $y_t$  είναι εκρηκτικό (*explosive*).

### 1.7.3 Εκτίμηση των υποδειγμάτων VAR

Για την εκτίμηση του υποδείγματος VAR πρέπει να γίνουν υποθέσεις αναφορικά με τη φύση του διανύσματος των ενδογενών μεταβλητών  $y_t$ . Σύμφωνα με τα ανωτέρω, διακρίνουμε δύο διαφορετικές υποθέσεις για το διάνυσμα των ενδογενών μεταβλητών  $y_t$ :

- Υπόθεση 1η: Το διάνυσμα  $y_t$  είναι  $I(0)$

Όταν ισχύει η υπόθεση της στασιμότητας του διανύσματος των ενδογενών μεταβλητών  $y_t$ , τότε οι συντελεστές του υποδείγματος VAR είναι δυνατό να εκτιμηθούν με την εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων σε κάθε εξίσωση χωριστά.

Όταν μάλιστα, οι τιμές του διανύσματος των διαταρακτικών όρων  $u_t$ , πλέον των ανωτέρω υποθέσεων, ακολουθούν την κανονική κατανομή δηλαδή  $u_t \sim Niid(\mathbf{0}, \Sigma)$  τότε οι προκύπτοντες εκτιμητές είναι εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας οπότε στην περίπτωση αυτή καθίσταται εφικτός ο έλεγχος διαφόρων στατιστικών υποθέσεων.

- Υπόθεση 2η: Το διάνυσμα  $y_t$  είναι  $I(1)$

Όταν το διάνυσμα των ενδογενών μεταβλητών  $y_t$  δεν είναι στάσιμο, τότε οι ελαχίστων τετραγώνων εκτιμητές των παραμέτρων του υποδείγματος VAR δεν είναι συνεπείς με αποτέλεσμα ο στατιστικός έλεγχος να μην είναι έγκυρος. Έτσι τα στατιστικά αποτελέσματα είναι πολύ πιθανό να είναι πολύ ικανοποιητικά αλλά να μην έχουν καμιά οικονομική ή άλλη σημασία. Δηλαδή η παρατηρούμενη στατιστικά σημαντική σχέση οφείλεται στην ασυνέπεια των εκτιμητών και δε συνεπάγεται αναγκαστικά και την ύπαρξη πραγματικής αιτιώδους σχέσης ανάμεσα στις μεταβλητές. Οι Granger and Newbold (1974) χρησιμοποιούν τον όρο φαινομενική ή νόθος παλινδρόμηση (*spurious regression*) για να περιγράψουν αυτό το αποτέλεσμα το οποίο είναι σύνηθες όταν χρησιμοποιούνται στοιχεία χρονολογικών σειρών.

Στην περίπτωση κατά την οποία τα δεδομένα δεν προέρχονται από στάσιμες χρονολογικές σειρές και ανακύπτει το πρόβλημα της νόθου παλινδρόμησης προτείνεται η χρησιμοποίηση των πρώτων διαφορών και όχι των επιπέδων των μεταβλητών. Αυτό όμως που ενδιαφέρει τους ερευνητές είναι οι μακροχρόνιες σχέσεις ανάμεσα στις μεταβλητές και αυτό σημαίνει τα επίπεδά τους και όχι οι πρώτες διαφορές. Το πρόβλημα αυτό της ακαταλληλότητας των επιπέδων και η αδυναμία χρησιμοποίησης των πρώτων διαφορών όταν οι χρονολογικές σειρές είναι ολοκληρωμένες, τάξεως  $I(d)$  επιλύεται όταν οι χρονολογικές σειρές είναι συνολοκληρωμένες (*cointegrated*).

Η έννοια της συνολοκλήρωσης μεταξύ δύο ή περισσότερων χρονολογικών σειρών αποτελεί το συνδυαστικό κρίκο μεταξύ σχέσεων οι οποίες υφίστανται μεταξύ ολοκληρωμένων μη στάσιμων διαδικασιών και την έννοια της μακροχρόνιας ισορροπίας. Κατ' άλλη διατύπωση, η συνολοκλήρωση είναι η στατιστική συνέπεια ύπαρξης μακροχρόνιας ισορροπίας μεταξύ δύο ή και περισσότερων μεταβλητών.

Σύμφωνα δε με τον ορισμό της συνολοκλήρωσης, "Οι συνιστώσες ενός διανύσματος  $y_t$  καλούνται συνολοκληρωμένες τάξεως  $d, b$  εάν α) όλες οι συνιστώσες του διανύσματος είναι ολοκληρωμένες τάξεως  $I(d)$  και β) υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα  $a$  τέτοιο ώστε  $a^T y_t$  να είναι  $I(d-b)$ ,  $b > 0$ ".

Η σχέση αυτή συμβολίζεται με  $y_t \sim CI(d, b)$  και το μη μηδενικό διάνυσμα  $a$  καλείται διάνυσμα συνολοκλήρωσης (*cointegrating vector*).

Στην παρούσα περίπτωση όπου το διάνυσμα  $y_t$  είναι  $I(1)$  ισχύει  $a^T y_t$  είναι  $I(1)$  και συμβολίζεται με  $CI(1, 1)$ .

Στην περίπτωση κατά την οποία διαπιστώνεται ότι οι ενδογενείς μεταβλητές του διανύσματος  $y_t$  τάξεως  $I(1)$  του υποδείγματος VAR είναι συνολοκληρωμένες, τότε καθίσταται αναγκαίος ο μετασχηματισμός του, προκειμένου να συμπεριλάβει τις σχέσεις συνολοκλήρωσης μεταξύ των ενδογενών μεταβλητών του.

Πράγματι το υπόδειγμα αυτοπαλίνδρομου διανύσματος VAR της σχέσεως (1.133) είναι δυνατό να μετασχηματισθεί σε ένα ισοδύναμο υπόδειγμα (αυτοπαλίνδρομου) διανύσματος διόρθωσης λαθών VECM (*Vector Error Correction Model*) υπό τη μορφή

$$\Delta y_t = A_1 \Delta y_{t-1} + A_2 \Delta y_{t-2} + \dots + A_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \Pi y_{t-p} + u_t, \quad (1.136)$$

όπου  $A_i = -(I - \Pi_1 - \dots - \Pi_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, p-1$ ,  $\Pi = -\left( I + \sum_{i=1}^p p_i \right)$  και  $u_t \sim Niid(\mathbf{0}, \Sigma)$ .

Με βάση το υπόδειγμα VECM καθίσταται εφικτή η διερεύνηση των βραχυχρόνιων και μακροχρόνιων προσαρμογών στις αλλαγές του διανύσματος των ενδογενών μεταβλητών  $y_t$  μέσω των εκτιμήσεων των  $\hat{A}_i$  και  $\hat{\Pi}$  των πινάκων  $A_i$  και  $\Pi$ .

Ο πίνακας  $\Pi$  διαστάσεων  $(m \times m)$  δύναται να γραφεί υπό τη μορφή  $\Pi = a\beta^T$  όπου  $a$  και  $\beta$  είναι πίνακες διαστάσεων  $(m \times r)$ . Ο πίνακας  $a$  αποτελείται από  $r$  διανύσματα συνολοκλήρωσης, ενώ ο πίνακας  $\beta$  δύναται να ερμηνευθεί ως ο πίνακας των παραμέτρων των βραχυχρόνιων προσαρμογών των διανυσμάτων συνολοκλήρωσης ή κατά άλλη ονομασία, των παραμέτρων ανατροφοδότησης (*feedback coefficients*) των διανυσμάτων συνολοκλήρωσης.

Εάν υποθεθεί ότι το διάνυσμα των ενδογενών μεταβλητών  $y_t$  είναι  $I(1)$ , τότε οι όροι της σχέσεως (1.136) της μορφής  $\Delta y_{t-i}$  είναι  $I(0)$ , ενώ ο όρος  $\Pi y_{t-p}$  πρέπει να είναι  $I(0)$  ούτως ώστε να ισχύει ότι  $u_t$  είναι λευκός θόρυβος δηλαδή  $I(0)$ .

Διακρίνονται τρεις περιπτώσεις προκειμένου να ισχύει η σχέση  $\Pi y_{t-p} \sim I(0)$ :

### 1η περίπτωση

Εάν όλες οι ενδογενείς μεταβλητές του διανύσματος  $y_t$  είναι όντως  $I(0)$ , τότε το υπόδειγμα VAR (1.136) περιστέλλεται σε ένα υπόδειγμα VARL (VAR in levels).

### 2η περίπτωση

Εάν δεν υφίστανται σχέσεις συνολοκλήρωσης, δηλαδή δεν υφίστανται γραμμικοί συνδυασμοί του διανύσματος  $y_t$  οι οποίοι είναι  $I(0)$ , τότε το υπόδειγμα VAR (1.136) περιστέλλεται σε ένα υπόδειγμα VARD (VAR in differences).

### 3η περίπτωση

Στην περίπτωση αυτή υφίστανται  $r < (m-1)$  διανύσματα συνολοκλήρωσης του πίνακα  $\beta$  (δηλ.  $r$  στήλες του  $\beta$  σχηματίζουν  $r$  γραμμικούς συνδυασμούς των ενδογενών μεταβλητών του διανύσματος  $y_t$ , κάθε ένας εκ των οποίων είναι  $I(0)$ ) μαζί με  $m-r$  μη στάσιμα διανύσματα (δηλ.  $n-r$  στήλες του  $\beta$  σχηματίζουν  $m-r$  γραμμικούς συνδυασμούς  $I(1)$ ). Μόνο τα διανύσματα συνολοκλήρωσης του πίνακα  $\beta$  υπεισέρχονται στη σχέση (1.136), διαφορετικά ο όρος  $\Pi y_{t-p}$  δεν θα ήταν  $I(0)$ , γεγονός το οποίο υποδηλοί ότι οι τελευταίες  $m-r$  στήλες του  $a$  είναι ουσιαστικά μηδενικές. Επομένως το πρόβλημα καθορισμού του αριθμού των διανυσμάτων συνολοκλήρωσης του πίνακα  $\beta$  ισοδυναμεί στον έλεγχο των μηδενικών στηλών του πίνακα  $a$ .

Κατά άλλη διατύπωση, ο έλεγχος συνολοκλήρωσης ισοδυναμεί με τη διερεύνηση της τάξεως  $r(\Pi)$  του πίνακα  $\Pi$ .

Κατ' αναλογία με τα ανωτέρω διακρίνονται οι ακόλουθες τρεις περιπτώσεις για την τάξη  $r(\Pi)$  του πίνακα  $\Pi$ :

1.-  $r(\Pi)=m$

Στην περίπτωση αυτή,  $\det[\Pi] \neq 0$ , οπότε από τη σχέση (1.136) προκύπτει ότι

$$y_{t-p} = \Pi^{-1} (\Delta y_t + A_1 \Delta y_{t-1} + A_2 \Delta y_{t-2} + \dots + A_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + u_t)$$

δηλαδή το διάνυσμα των ενδογενών μεταβλητών  $y_t$  είναι  $I(0)$  οπότε το καταλληλότερο υπόδειγμα είναι το VARL.

2.-  $r(\Pi)=0$

Στην περίπτωση αυτή, ο πίνακας  $\Pi$  είναι μηδενικός οπότε από τη σχέση (1.136) προκύπτει ότι

$$\Delta y_t = A_1 \Delta y_{t-1} + A_2 \Delta y_{t-2} + \dots + A_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + u_t$$

οπότε το καταλληλότερο υπόδειγμα είναι το VARD.

3.-  $r(\Pi)=r < m$

Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας  $\Pi$ , είναι μειωμένης τάξεως  $r < n-1$ . Ο έλεγχος για την τάξη  $r(\Pi)$  του πίνακα  $\Pi$  είναι ισοδύναμος με τον έλεγχο των μηδενικών στηλών του πίνακα  $a$ . Προκειμένου όμως να γίνουν οι έλεγχοι αυτοί είναι απαραίτητο να γίνει παραγοντοποίηση του πίνακα  $\Pi = a\beta^T$  στους πίνακες  $a$  και  $\beta$  διαστάσεων  $(m \times r)$ . Η εφαρμογή της μεθόδου των

ελαχίστων τετραγώνων δεν ενδείκνυται στην περίπτωση αυτή δεδομένου ότι οι εκτιμητές του πίνακα είναι πιθανό να δώσουν πίνακα πλήρους τάξεως (*full rank*) ( $m \times m$ ) με αποτέλεσμα να μη είναι δυνατή η παραγοντοποίησή του στους πίνακες  $a$  και  $\beta$  και κατ' επέκταση να μη καθίσταται εφικτός ο έλεγχος της τάξεως  $r(\Pi)$  μέσω του ελέγχου του αριθμού των μη μηδενικών στηλών του πίνακα  $a$ . Παραγοντοποίηση του πίνακα  $\Pi$  στους πίνακες  $a$  και  $\beta$  επιτυγχάνεται μέσω μιας διαδικασίας η οποία ονομάζεται "παλινδρόμηση μειωμένης τάξεως" (*reduced rank regression*) του Johansen (1988) και η οποία χρησιμοποιεί τη μεθοδολογία των κανονικών συσχετίσεων (*canonical correlations*).

Μέσω της διαδικασίας της "παλινδρόμησης μειωμένης τάξεως" η σχέση (1.136) γράφεται υπό τη μορφή

$$\Delta y_t + a\beta^T y_{t-p} = A_1 \Delta y_{t-1} + A_2 \Delta y_{t-2} + \dots + A_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + u_t \quad (1.137)$$

$$\text{και υπολογίζονται οι πίνακες } S_{00} = T^{-1} \sum_{t=1}^T R_{0t} R_{0t}^T, \quad S_{pp} = T^{-1} \sum_{t=1}^T R_{pt} R_{pt}^T \quad \text{και} \quad S_{0p} = T^{-1} \sum_{t=1}^T R_{0t} R_{pt}^T,$$

όπου  $T$  είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων και όπου  $R_{0t}$  και  $R_{pt}$  είναι τα διανύσματα καταλοίπων των παλινδρομήσεων

$$\Delta y_t = P_1 \Delta y_{t-1} + P_2 \Delta y_{t-2} + \dots + P_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + R_{0t}$$

και

$$\Delta y_{t-p} = T_1 \Delta y_{t-1} + T_2 \Delta y_{t-2} + \dots + T_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + R_{pt}$$

Ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας του πίνακα  $\beta$  υπολογίζεται από τα ιδιοδιανύσματα τα οποία αντιστοιχούν στις  $r$  μεγαλύτερες ιδιότητες οι οποίες προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης

$$\det[\lambda S_{pp} - S_{p0} S_{00}^{-1} S_{0p}] = 0$$

η οποία δίνει  $p$  ιδιοτιμές  $\hat{I}_1 > \hat{I}_2 > \dots > \hat{I}_p$  και  $p$  αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα  $\hat{V} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_p)$ .

Τα  $r$  πρώτα στοιχεία του διανύσματος  $\hat{V}$  αποτελούν τα διανύσματα συνολοκλήρωσης και γράφονται υπό τη μορφή  $\hat{b} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_r)$ . Πράγματι αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα τετράγωνα των ιδιοτιμών  $\hat{I}_i$ ,  $i=1,2,\dots,r$  ισούνται με τις μεγαλύτερες κανονικές συσχετίσεις μεταξύ των καταλοίπων των "επιπέδων" (*levels residuals*)  $R_{pt}$  και των καταλοίπων των "διαφορών" (*difference residuals*)  $R_{0t}$  με αποτέλεσμα οι γραμμικοί συνδυασμοί  $\lambda_{trace}$ , όπου  $i=1,2,\dots,r$  των  $I(1)$  μεταβλητών  $y_t$  οι οποίοι παρουσιάζουν τις μεγαλύτερες συσχετίσεις με τις  $I(0)$  μεταβλητές  $\Delta y_t$  να είναι οι ίδιοι  $I(0)$  προκειμένου να υφίστανται υψηλές συσχετίσεις. Επομένως το μέγεθος των ιδιοτιμών  $VECM$ , όπου  $i=1,2,\dots,r$  αποτελεί ένα μέτρο αποτιμής του βαθμού συσχέτισης των σχέσεων συνολοκλήρωσης  $\hat{v}_i^T y_t$  ή  $\beta_i^T y_t$  όπου  $i=1,2,\dots,r$ , με το "στάσιμο μέρος" (*stationary part*) του υποδείγματος  $VECM$  ενώ οι τελευταίοι  $(n-r)$  συνδυασμοί  $\beta_i^T y_t$  όπου  $i=r+1,r+2,\dots,m$ , είναι μη στάσιμοι και θεωρητικώς δεν πρέπει να συσχετίζονται με το

"στάσιμο μέρος" του υποδείγματος *VECM*. Επομένως για τις ιδιοτιμές  $\lambda_i$  όπου  $i=r+1, r+2, \dots, m$ , οι οποίες αντιστοιχούν στους τελευταίους  $(m-r)$  συνδυασμούς  $\beta_i^T y_t$ , ισχύει ότι  $\lambda_i=0$ .

Ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας του πίνακα  $a$  υπολογίζεται μέσω της σχέσεως  $\hat{a} = S_{0p} \hat{b}$ , ενώ οι εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας των πινάκων  $A_1, A_2, \dots, A_{p-1}$ , υπολογίζονται μέσω της πολλαπλής παλινδρόμησης

$$\Delta y_t - \hat{a} \hat{b}^T y_{t-1} = A_1 \Delta y_{t-1} + A_2 \Delta y_{t-2} + K + A_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + w_t,$$

όπου  $w_t \sim Niid(\mathbf{0}, \Sigma)$ .

Επιπλέον η μέγιστη τιμή της συνάρτησης πιθανοφάνειας είναι (Harris, 1995)

$$\max \log L = -T/2 \left[ n + n \log 2p + \log \det[S_{00}] + \sum_{i=0}^r \log(1 - I_i) \right], \quad (1.138)$$

η οποία γράφεται και υπό τη μορφή

$$\max L = \sum_{i=0}^r [\Pi(1 - I_i)]^{-T/2}, \quad (1.139)$$

όπου  $C = \text{antilog}[-T/2(n + n \log 2p + \log \det[S_{00}])]$ .

#### 1.7.4 Έλεγχος της τάξης συνολοκλήρωσης. Η αρχή του Pantoula

Από τα ανωτέρω προκύπτει ότι ο έλεγχος της υποθέσεως ότι υπάρχουν το πολύ  $r$  διανύσματα συνολοκλήρωσης (και επομένως  $(m-r)$  μοναδιαίες ρίζες) είναι ισοδύναμος με τον έλεγχο υποθέσεως

$$H_0: \lambda_i = 0, \quad i=r+1, r+2, \dots, m,$$

όπου μόνο οι πρώτες  $r$  ιδιοτιμές είναι διάφορες του μηδενός.

Ο έλεγχος αυτός για διαφορετικές τιμές του  $r$  δύναται να γίνει με βάση το κριτήριο του λόγου πιθανοφανειών (*Likelihood Ratio LR*).

Πράγματι έστω η μηδενική υπόθεση  $H_0(r): r(\Pi) = r$  έναντι της εναλλακτικής  $H_1(r): r(\Pi) = m$  και έστω  $Q = \max LH_0(r) / \max LH_1(r)$ . Τότε προκύπτει ότι η στατιστική ελέγχου *LR* η οποία συμβολίζεται με  $\lambda_{trace}$  ισούται με

$$I_{trace} = -2 \log Q = -T \sum_{i=r+1}^m \log(1 - \hat{I}_i), \quad r=0, 1, \dots, m-1,$$

$$\text{όπου } Q = \max LH_0(r) / \max LH_1(r) \left[ \prod_{i=r+1}^m (1 - I_i) \right]^{T/2}.$$

Η στατιστική  $\lambda_{trace}$ , η οποία είναι γνωστή ως στατιστική ίχνους (*trace statistic*) δεν ακολουθεί καμία γνωστή κατανομή και ασυμπτωτικές κριτικές τιμές της στατιστικής αυτής υπολογίζονται με την εφαρμογή της μεθόδου προσομοίωσης (Johnston and Dinardo, 1997). Ασυμπτωτικές κριτικές τιμές αυτής της στατιστικής  $\lambda_{trace}$  περιλαμβάνονται στην εργασία των Osterwald and Lenum (1992) σε πέντε διαφορετικούς πίνακες από τους οποίους πρέπει να



επιλεγεί ο πλέον κατάλληλος. Οι πίνακες αυτοί διαφέρουν μεταξύ τους σύμφωνα με πέντε διαφορετικές εξειδικεύσεις του υποδείγματος *VECM* όσον αφορά στην προσθήκη σταθερών όρων και προσδιοριστικών τάσεων στο ίδιο το υπόδειγμα και στις σχέσεις συνολοκλήρωσης.

Οι διαφορετικές αυτές εξειδικεύσεις του υποδείγματος *VECM*, το οποίο είναι δυνατό να γραφεί υπό τη μορφή

$$\Delta y_t = A_1 \Delta y_{t-1} + A_2 \Delta y_{t-2} + \dots + A_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \Pi y_{t-p} + \Psi D_t + u_t, \quad (1.140)$$

όπου  $D_t$  είναι ένα διάνυσμα διαστάσεων  $(d \times 1)$  προσδιοριστικών μεταβλητών (σταθερό όρο, τάση κλπ.) και  $\Psi$  είναι ένας πίνακας διαστάσεων  $(m \times d)$ , είναι οι εξής:

Model 1:  $H_1(r) = \Pi y_{t-p} + \Psi D_t = a \beta^T y_{t-p}$

Το διάνυσμα των ενδογενών μεταβλητών δεν περιλαμβάνει προσδιοριστικές τάσεις και οι εξισώσεις συνολοκλήρωσης δεν περιλαμβάνουν σταθερούς όρους.

Model 2:  $H_2(r) = \Pi y_{t-p} + \Psi D_t = a(\beta^T y_{t-p} + c_0)$

Το διάνυσμα των ενδογενών μεταβλητών δεν περιλαμβάνει προσδιοριστικές τάσεις και οι εξισώσεις συνολοκλήρωσης περιλαμβάνουν σταθερούς όρους.

Model 3:  $H_3(r) = \Pi y_{t-p} + \Psi D_t = a(\beta^T y_{t-p} + c_0) + a^T d_0$

Το διάνυσμα των ενδογενών μεταβλητών περιλαμβάνει προσδιοριστικές τάσεις πρώτου βαθμού και οι εξισώσεις συνολοκλήρωσης περιλαμβάνουν μόνο σταθερούς όρους.

Model 4:  $H_4(r) = \Pi y_{t-p} + \Psi D_t = a(\beta^T y_{t-p} + c_0 + c_1 t) + a^T d_0$

Το διάνυσμα των ενδογενών μεταβλητών καθώς και οι εξισώσεις συνολοκλήρωσης περιλαμβάνουν προσδιοριστικές τάσεις πρώτου βαθμού.

Model 5:  $H_5(r) = \Pi y_{t-p} + \Psi D_t = a(\beta^T y_{t-p} + c_0 + c_1 t) + a^T (d_0 + d_1 t)$

Το διάνυσμα των ενδογενών μεταβλητών περιλαμβάνει προσδιοριστικές τάσεις δευτέρου βαθμού και οι εξισώσεις συνολοκλήρωσης περιλαμβάνουν προσδιοριστικές τάσεις πρώτου βαθμού.

Ο πίνακας  $a^T$  διαστάσεων  $m \times (m-r)$  είναι ο ορθογώνιος πίνακας του πίνακα  $a$ , δηλαδή  $aa^T = 0$  και  $r[a/a^T] = m$ .

Οι ανωτέρω πέντε εξειδικεύσεις του υποδείγματος (1.140) είναι φωλιάζοντα υποδείγματα (*nested models*) από το περισσότερο στο oligότερο περιοριστικό για οιαδήποτε τάξη συνολοκλήρωσης δηλαδή ισχύει η σχέση

$$H_1(r) \subseteq H_2(r) \subseteq H_3(r) \subseteq H_4(r) \subseteq H_5(r).$$

Η επιλογή ενός εκ των πέντε εξειδικεύσεων του υποδείγματος *VECM* δεν είναι εύκολο να καθοριστεί a priori. Ο Johansen (1992a) προτείνει τον από κοινού έλεγχο της τάξεως συνολοκλήρωσης  $r$  και της επιλογής ενός εκ των πέντε υποδειγμάτων *VECM* με βάση τη λεγομένη αρχή του Pantula (*Pantula Principle*).

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία αυτή και τα πέντε υποδείγματα *VECM* εκτιμώνται και τα

αποτελέσματα μαζί με την τάξη συνολοκλήρωσης παρουσιάζονται από το περισσότερο περιοριστικό υπόδειγμα *VECM* - π.χ.  $r=0$  και Model 1 - στο ολιγότερο περιοριστικό υπόδειγμα *VECM* - π.χ.  $r=n-1$  και Model 5, όπως φαίνεται στον Πίνακα 1.5.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 1.5:** Determining the cointegration rank and the model  
For the deterministic components  
Pantula Principle

$H(r)$	$r$	$n-r$	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4	Model 5
Trace test							
	0	$n$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
	1	$n-1$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
	2	$n-2$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
	$n-1$	1	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$

Στη συνέχεια η διαδικασία ελέγχου έγκειται στη μετακίνηση σύμφωνα με τη φορά των βελών από το περισσότερο περιοριστικό υπόδειγμα *VECM* και στη σύγκριση της στατιστικής ελέγχου  $\lambda_{trace}$  σε κάθε στάδιο με τις κριτικές της τιμές και στην παύση της διαδικασίας αυτής όταν η αρχική υπόθεση  $H(r)$  δεν απορρίπτεται.

### 1.7.5 Ανάλυση αιτιότητας και εξωγένειας μέσω των υποδειγμάτων VAR

Προκειμένου να προβούμε στην ανάλυση της αιτιότητας και της εξωγένειας μέσω των υποδειγμάτων VAR είναι απαραίτητο να ορισθούν οι έννοιες της αιτιότητας κατά Granger καθώς και της εξωγένειας.

#### 1.7.5.1 Αιτιότητα κατά Granger

Όπως είναι γνωστό η επισήμανση και η διατύπωση αιτιωδών σχέσεων μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών αποτελεί την πεμπτουσία της επιστήμης. Μια στατιστική σχέση, όμως, όσο δυνατή και αν είναι δεν δύναται να προσδιορίσει την αιτιώδη συνάφεια μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών.

Εάν υποθέσουμε ότι οι μεταβλητές  $X$  και  $Y$  αλληλεξαρτώνται η αιτιώδης κατεύθυνση μεταξύ αιτίας και αποτελέσματος (*cause and effect relationship*) δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή. Στην πραγματικότητα παρατηρούμε τις μεταβλητές  $X$  και  $Y$  ως χρονολογικές σειρές και επιθυμούμε να γνωρίζουμε αν οι μεταβολές της  $Y$  προηγούνται, έπονται ή είναι σύγχρονες των μεταβολών της  $X$ . Η διαπίστωση της προήγησης (*precedence*) είναι ο σκοπός της ανάλυσης γνωστής ως αιτιότητα κατά Granger (1969), Sims (1972) (*Granger Causality GC*). "If  $X(t)$  causes  $Y(t)$ , then  $Y(t+1)$  is better forecast if the information in  $X(t)$  is used than if it is not used, where better means a smaller variance of forecast error, or the matrix equivalence of variance".

Από τον ανωτέρω ορισμό προκύπτει ότι η μεταβλητή  $X$  επικουρεί στην πρόβλεψη της μεταβλητής  $Y$  ενώ δεν συμβαίνει το αντίθετο.

Ισχύουν οι συμβολισμοί " $X$  Granger cause  $Y$ " ή  $XGCY$  και " $X$  does not Granger cause  $Y$ " ή  $XGNCY$ .

Η διαδικασία ελέγχου για τον εντοπισμό της κατεύθυνσης αιτιότητας μεταξύ των χρονολογικών σειρών  $X$  και  $Y$  με το κριτήριο του Granger περιλαμβάνει τα παρακάτω τρία στάδια:

### 1ο Στάδιο

Εκφράζουμε τις συναρτησιακές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών  $X$  και  $Y$  με τα ακόλουθα δύο υποδείγματα:

$$Y_t = \sum_{i=1}^m a_i Y_{t-i} + \sum_{i=1}^m b_i X_{t-i} + u_t \quad (1.141)$$

$$X_t = \sum_{i=1}^m c_i Y_{t-i} + \sum_{i=1}^m d_i X_{t-i} + v_t, \quad (1.142)$$

όπου  $m$  είναι το μήκος της υστέρησης.

### 2ο Στάδιο

Με βάση τα δύο υποδείγματα (1.141) και (1.142), ελέγχουμε στατιστικά τις παρακάτω υποθέσεις:

$$H_0^1 : \sum_{i=1}^m a_i = 0 \text{ και } H_1^1 : \sum_{i=1}^m a_i \neq 0 \quad (1.143)$$

$$H_0^2 : \sum_{i=1}^m d_i = 0 \text{ και } H_1^2 : \sum_{i=1}^m d_i \neq 0. \quad (1.144)$$

Με βάση τα ανωτέρω διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) Αν οι υποθέσεις  $H_1^1$  και  $H_0^2$  γίνουν αμφότερες αποδεκτές τότε συμπεραίνεται ότι υπάρχει αιτιότητα κατά Granger από την  $X$  προς την  $Y$ .

β) Αν οι υποθέσεις  $H_0^1$  και  $H_1^2$  γίνουν αμφότερες αποδεκτές τότε συμπεραίνεται ότι υπάρχει αιτιότητα κατά Granger από την  $Y$  προς την  $X$ .

γ) Αν οι υποθέσεις  $H_1^1$  και  $H_1^2$  γίνουν αμφότερες αποδεκτές τότε συμπεραίνεται ότι υπάρχει αιτιότητα κατά Granger και προς τις δύο κατευθύνσεις από την  $Y$  προς την  $X$  και από την  $X$  προς την  $Y$ .

δ) Αν οι υποθέσεις  $H_0^1$  και  $H_0^2$  γίνουν αμφότερες αποδεκτές τότε συμπεραίνεται ότι δεν υπάρχει αιτιότητα κατά Granger μεταξύ των μεταβλητών  $Y$  και  $X$ .

### 3ο Στάδιο

Ελέγχουμε τις ανωτέρω υποθέσεις μέσω της  $F$ -stat.

#### **1.7.5.2 Εξωγένεια**

Όπως είναι γνωστό μια μεταβλητή ενός οικονομετρικού υποδείγματος είναι εξωγενής όταν είναι στοχαστικά ανεξάρτητη από το διαταρακτικό όρο. Ο ορισμός αυτός συμπίπτει με την έννοια της αυστηρής εξωγένειας (*strict exogeneity*):

- Αυστηρή εξωγένεια

Μια μεταβλητή είναι αυστηρά εξωγενής όταν είναι ανεξάρτητη από τις τρέχουσες, τις παρελθούσες και τις μελλοντικές τιμές του διαταρακτικού όρου στη σχετική εξίσωση του οικονομετρικού υποδείγματος.

Όταν η μεταβλητή είναι ανεξάρτητη μόνο από τις τρέχουσες και μελλοντικές τιμές του διαταρακτικού όρου και όχι από τις παρελθούσες τιμές τότε η μεταβλητή δεν είναι αυστηρά εξωγενής και αναφέρεται ως προκαθορισμένη (*predetermined*).

Πέραν της ανωτέρω κλασσικής προσέγγισης στο θέμα της εξωγένειας οι Engle et al. (1983) εισήγαγαν μια μοντέρνα προσέγγιση στο θέμα αυτό, η οποία αναφέρεται στη διεθνή βιβλιογραφία ως προσέγγιση *EHR*.

Μέσω της προσέγγισης *EHR* η έννοια της εξωγένειας διαχωρίζεται στις τρεις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Ασθενής εξωγένεια (*weak exogeneity*)
2. Ισχυρή εξωγένεια (*strong exogeneity*)
3. Υπερεξωγένεια (*superexogeneity*).

Προκειμένου να δοθεί η σωστή ερμηνεία των ανωτέρω τριών περιπτώσεων εισάγεται το κατωτέρω υπόδειγμα:

$$y_t = \beta x_t + u_{1t} \quad (1.145)$$

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + u_{2t}, \quad (1.146)$$

όπου οι διαταρακτικοί όροι  $(u_{1t}, u_{2t})$  ανεξάρτητοι μεταξύ τους και ακολουθούν μια διμεταβλητή κανονική κατανομή, δηλαδή

$$\begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix} \sim IN \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \right]. \quad (1.147)$$

### 1. Ασθενής εξωγένεια

Έστω ότι

$$f(y_t, x_t; \theta) = g(y_t/x_t; \lambda_1) h(x_t; \lambda_2), \quad (1.148)$$

όπου  $\lambda_1 = \lambda_1(\theta)$  και  $\lambda_2 = \lambda_2(\theta)$  και έστω  $\phi$  το σύνολο των προς εξαγωγή συμπερασμάτων παραμέτρων.

Η μεταβλητή  $x_t$  καλείται ασθενώς εξωγενής ως προς τις παραμέτρους  $\phi$  εάν η εξαγωγή συμπερασμάτων για τις παραμέτρους  $\phi$  από την υπό συνθήκη συνάρτηση πιθανότητας  $g(y_t/x_t; \lambda_1)$  ισοδυναμεί με την εξαγωγή συμπερασμάτων για τις παραμέτρους από την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας  $f(y_t, x_t; \theta)$ . Με άλλα λόγια η περιθωριακή συνάρτηση πιθανότητας της μεταβλητής  $x_t$  δεν περιλαμβάνει καμιά σχετική πληροφορία για τις παραμέτρους  $\phi$  και ως εκ τούτου δύναται να αγνοηθεί.

Δεδομένης της σχέσεως (1.148) δύο βασικές συνθήκες πρέπει να ισχύουν προκειμένου η μεταβλητή  $x_t$  να είναι ασθενώς εξωγενής:

- 1η  $\varphi = \varphi(\lambda_1)$
- 2η  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  είναι variation-free

Η συνθήκη variation-free υπονοεί ότι οποιαδήποτε παράμετρος του συνόλου παραμέτρων  $\lambda_1$ , είναι δυνατό να λάβει οποιαδήποτε τιμή σε ένα αποδεκτό σύνολο τιμών ανεξαρτήτως των τιμών τις οποίες λαμβάνουν οι παράμετροι του συνόλου παραμέτρων  $\lambda_2$  και αντιστρόφως. Επίσης δεν πρέπει να υφίστανται οποιαδήποτε σταυροειδείς περιορισμοί (*cross-restrictions*) εάν υφίστανται ισότητες ή ανισότητες μεταξύ των παραμέτρων και των δύο συνόλων  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$ .

Από το ανωτέρω υπόδειγμα προκύπτει η εξίσωση

$$x_t = \delta_0 x_t + \delta_1 x_{t-1} + \delta_2 y_{t-2} + u_t, \quad (1.149)$$

όπου  $\delta_0 = \beta + \sigma_{12}/\sigma_{22}$ ,  $\delta_1 = -a_1(\sigma_{12}/\sigma_{22})$  και  $\delta_2 = -a_2(\sigma_{12}/\sigma_{22})$ .

Επίσης ισχύουν οι σχέσεις

$$u_t = u_{1t} - (\sigma_{12}/\sigma_{22})u_{2t}, \quad \text{var}(u_t) = \sigma_{11} - \sigma_{12}^2/\sigma_{22} \quad \text{και} \quad E(x_t u_t) = 0.$$

Επίσης ισχύει ότι  $\theta = (\beta, a_1, a_2, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22})$ ,  $\lambda_1 = (\delta_0, \delta_1, \delta_2, \sigma_u^2)$  και  $\lambda_2 = (a_1, a_2, \sigma_{22})$ .

Εάν υποθεθεί ότι η παράμετρος  $\beta$  αποτελεί την προς μελέτη μεταβλητή τότε από τις ανωτέρω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\beta = \delta_0 + \delta_1/a_1 = \delta_0 + \delta_2/a_2.$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η παράμετρος  $\beta$  δεν δύναται να εκφραστεί ως συνάρτηση των παραμέτρων του συνόλου  $\lambda_1$ . Επιπλέον από την ίδια σχέση προκύπτει ότι  $a_2 \delta_1 - a_1 \delta_2 = 0$ .

Επομένως οι δύο ανωτέρω συνθήκες δεν ικανοποιούνται και ως εκ τούτου η μεταβλητή  $x_t$  δεν δύναται να θεωρηθεί ως εξωγενώς ασθενής για την παράμετρο  $\beta$ .

Εάν όμως ισχύει ότι  $\sigma_{12} = 0$  τότε  $\theta = (\beta, a_1, a_2, \sigma_{11}, \sigma_{22})$ ,  $\lambda_1 = (\beta, \sigma_{11})$  και  $\lambda_2 = (a_1, a_2, \sigma_{22})$ .

Επομένως είναι προφανές ότι η μεταβλητή  $x_t$  δύναται να θεωρηθεί ως εξωγενώς ασθενής για την παράμετρο  $\beta$ .

## 2. Ισχυρή εξωγένεια

Εάν η μεταβλητή  $x_t$  είναι ασθενώς εξωγενής και δεν προηγείται από ενδογενείς μεταβλητές του συστήματος τότε η μεταβλητή  $x_t$  καλείται ισχυρώς εξωγενής.

Με βάση το ανωτέρω υπόδειγμα προκύπτει ότι εάν η  $x_t$  είναι ασθενώς εξωγενής ως προς την παράμετρο  $\beta$  και επιπροσθέτως δεν υπάρχει αιτιότητα κατά Granger από την  $y_t$  προς την  $x_t$  ( $y_t$  does not Granger-cause  $x_t$ , not  $y_t GC x_t$  ή  $y_t \sim GC x_t$ ) τότε η  $x_t$  καλείται ισχυρώς εξωγενώς ως προς την παράμετρο  $\beta$ .

## 3. Υπερεξωγένεια

Εάν η μεταβλητή  $x_t$  είναι ασθενώς εξωγενής και οι παράμετροι της συνάρτησης  $g(y_t/x_t)$

παραμένουν αμετάβλητες στις αλλαγές της συνάρτησης  $h(x_t)$  τότε η μεταβλητή  $x_t$  καλείται υπερεξωγενής.

### 1.7.5.3 Εφαρμογή των εννοιών της αιτιότητας και εξωγένειας στα υποδείγματα VAR

#### 1.7.5.3.1 Έλεγχος αιτιότητας κατά Granger και υποδείγματα VAR

Ο έλεγχος της αιτιότητας κατά Granger μέσω των υποδειγμάτων VAR εξαρτάται από την τάξη ολοκλήρωσης και την ύπαρξη ή όχι συνολοκλήρωσης του διανύσματος των ενδογενών μεταβλητών  $y_t$ .

Διακρίνουμε τις κάτωθι περιπτώσεις:

#### A - Το διάνυσμα των ενδογενών μεταβλητών $x_t$ είναι $I(0)$

Στην περίπτωση αυτή η διαδικασία ελέγχου της αιτιότητας κατά Granger γίνεται μέσω ενός υποδείγματος VARL ως εξής:

Έστω το υπόδειγμα VARL

$$y_t = \sum_{i=1}^p \Pi_i L^i y_t + u_t, \text{ όπου } u_t \sim Niid(0, \Sigma) \quad (1.150)$$

και έστω  $y_t = (y_{1t}^T, y_{2t}^T, y_{3t}^T)^T$ , όπου  $y_{it}$  είναι ένα διάνυσμα διαστάσεων  $(m_i \times 1)$  για  $i=1,2,3$  και  $m=m_1+m_2+m_3$ .

Επίσης έστω ότι ο πίνακας  $\Pi_i$  διαχωρίζεται σε υποπίνακες  $\Pi_{ijk}$  ως εξής

$$\Pi_i = \begin{bmatrix} \Pi_{i11} & \Pi_{i12} & \Pi_{i13} \\ \Pi_{i21} & \Pi_{i22} & \Pi_{i23} \\ \Pi_{i31} & \Pi_{i32} & \Pi_{i33} \end{bmatrix}$$

Έστω ότι επιθυμούμε να ελέγξουμε την υπόθεση εάν ή όχι υπάρχει αιτιότητα κατά Granger από την  $y_{1t}$  προς την  $x_{1t}$ . Η μηδενική υπόθεση μη αιτιότητας κατά Granger μέσω του υποδείγματος VARL διαμορφώνεται ως εξής

$$H_0^L: P_{13}=0 \quad H_0^L: P_{13} = 0,$$

όπου  $P_{13}=[\Pi_{113}, \Pi_{213}, \dots, \Pi_{p13}]$ .

Η ανωτέρω υπόθεση δύναται να γραφεί και υπό την εξής μορφή

$$H_0^L: R\theta=0 \quad (1.151)$$

η οποία είναι δυνατό να ελεγχθεί μέσω της στατιστικής Wald

$$W = T\hat{q}^T R^T [R\hat{V}(\hat{q})R^T] R\hat{q}, \quad (1.152)$$

όπου  $\hat{q}$  είναι ο εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων του  $\theta = \text{vec}[\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_p] - \text{vec}[A]$  είναι ο τελεστής διανύσματος ενός πίνακα  $A$  - βλ. Hamilton (1994) - και  $R$  (*selector matrix*) είναι ένας πίνακας τέτοιος ώστε να ισχύει  $R\theta = \text{vec}[P_{13}]$ .

Ο εκτιμητής  $\hat{q}$  της παραμέτρου  $\theta$  είναι συνεπής (*consistent*) όπως και ο εκτιμητής  $\hat{V}(\hat{q})$  του πίνακα διακύμανσης-συνδιακύμανσης της στατιστικής  $\sqrt{T}(\hat{q} - q)$  όπου  $T$  ο αριθμός των παρατηρήσεων.

Η στατιστική Wald η οποία συμβολίζεται  $WL$  για το υπόδειγμα  $VARL$  έχει ασυμπτωτική κατανομή  $\chi^2(J)$ , όπου  $J=m_1m_3p$ . Ισχύει δε

$$WL=JF \xrightarrow{d} \chi^2(J), \quad (1.153)$$

όπου  $F$  είναι η  $F$ -stat. (βλ. Green (2000)).

### **B - Το διάνυσμα των ενδογενών μεταβλητών $y_t$ είναι I(1)**

Στην περίπτωση αυτή διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

**B1 - Οι συνιστώσες του διανύσματος των ενδογενών μεταβλητών  $y_t$  είναι I(1) και συνολοκληρωμένες τάξεως CI(1,1).**

Στην περίπτωση αυτή σύμφωνα με την τεχνική της συνολοκλήρωσης των Engle and Granger (1987) εάν δύο μεταβλητές είναι συνολοκληρωμένες, τότε αιτιότητα κατά Granger πρέπει οπωσδήποτε να υφίσταται τουλάχιστον προς τη μία κατεύθυνση. Η αιτιότητα αυτή κατά Granger δύναται να διερευνηθεί μέσω του υποδείγματος  $VARL$  καθώς και του υποδείγματος  $VECM$ .

### **B12 - Υπόδειγμα VARL**

Στην περίπτωση αυτή είναι δυνατό να εφαρμοσθεί το υπόδειγμα  $VARL$  για τον έλεγχο της αιτιότητας κατά Granger δεδομένου ότι ο εκτιμητής  $\hat{q} = \text{vec}[\Pi_1, \Pi_2, K, \Pi_p]$  είναι υπερσυνεπής (*superconsistent*) (Stock, 1987). Στην περίπτωση μάλιστα κατά την οποία ισχύει η σχέση  $\text{rank}(\beta_3)=m_3$  όπου  $\beta_3$ , περιλαμβάνει τις τελευταίες  $m_3$ , γραμμές του πίνακα  $\beta$  της σχέσεως  $\Pi = \alpha\beta^T$  τότε η στατιστική  $WL$  κατανέμεται όπως στη σχέση (1.152) (Toda and Phillips (1993, 1994) και Sims et al.(1990)).

Εάν η σχέση  $\text{rank}(\beta_3)=m_3$  δεν ισχύει τότε η στατιστική  $WL$  δεν ακολουθεί ασυμπτωτικά την κατανομή  $\chi^2$  αλλά ακολουθεί μια μη συνήθη κατανομή (*nonstandard distribution*) με "άσχετες" παραμέτρους (*nuisance parameters*).

### **B22 - Υπόδειγμα VECM**

Ως γνωστό το υπόδειγμα  $VARL$  είναι δυνατό να γραφεί ως ένα υπόδειγμα  $VECM$  ως κατωτέρω:

$$\Delta y_t = A_1 \Delta y_{t-1} + A_2 \Delta y_{t-2} + \dots + A_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \Pi y_{t-p} + u_t, \quad (1.154)$$

όπου  $A_i = -(I - \Pi_1 - \dots - \Pi_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, p-1$ ,  $\Pi = -\left( I + \sum_{i=1}^p p_i \right)$  και  $u_t \sim \text{Niid}(\mathbf{0}, \Sigma)$ .

Δεδομένου ότι η τάξη  $r=r(\Pi)$  του πίνακα  $\Pi$  ισούται με τη διάσταση του χώρου

συνολοκλήρωσης, η στατιστική ελέγχου της αιτιότητας κατά Granger εξαρτάται από τη τιμή της τάξης  $r(\Pi)$ . Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις  $r(\Pi)=m$ ,  $0 < r(\Pi) < m$ , και  $r(\Pi)=0$ .

### 1. $r(\Pi)=m$

Στην περίπτωση αυτή το διάνυσμα των ενδογενών μεταβλητών  $y_t$  είναι  $I(0)$  οπότε είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί η στατιστική  $WL$  για τον έλεγχο αιτιότητας κατά Granger.

### 2. $0 < r(\Pi) < m$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει  $\Pi = a\beta^T$ , όπου  $a$  και  $\beta$  είναι πίνακες διαστάσεων  $m \times r$  και τάξεως  $r$ . Έστω ότι ο πίνακας  $A_i$  διαχωρίζεται σε υποπίνακες  $A_{ijk}$  ως εξής:

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{i11} & A_{i12} & A_{i13} \\ A_{i21} & A_{i22} & A_{i23} \\ A_{i31} & A_{i32} & A_{i33} \end{bmatrix}.$$

Η μηδενική υπόθεση μη αιτιότητας κατά Granger μεταξύ  $y_{3t}$  και  $y_{1t}$  μέσω του υποδείγματος  $VECM$  διαμορφώνεται ως εξής:

$$H_0^{EC}: A_{13} = 0 \text{ και } a_1\beta_3^T = 0,$$

όπου  $A_{13} = [A_{113}, A_{213}, \dots, A_{p13}]$ ,  $a_1$  περιλαμβάνει τις πρώτες  $m_1$  γραμμές του πίνακα  $a$  και  $\beta_3$  περιλαμβάνει τις τελευταίες  $m_3$  γραμμές του πίνακα  $\beta$ .

Η στατιστική Wald του υποδείγματος  $VECM$  με  $\Pi = a\beta^T$ , δίνεται από τη σχέση

$$W = T\hat{q}^T R^T [RV(\hat{q})R^T] R\hat{q}, \quad (1.155)$$

όπου  $\hat{q}$  είναι ο εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων του  $\theta = [A_1, A_2, \dots, A_p, a\beta^T]$  και  $R$  είναι ένας πίνακας τέτοιος ώστε να ισχύει  $R\theta = \text{vec}[A_{13}, a\beta^T]$ .

Η στατιστική Wald, η οποία συμβολίζεται  $WEC$ , έχει ασυμπτωτική  $\chi^2(J)$ , όπου  $J = m_1 m_3 p$ , όταν ισχύουν οι σχέσεις  $\text{rank}(\beta_1) = m_1$ , και  $\text{rank}(\beta_3) = m_3$  (Toda and Phillips, 1993).

Εάν δεν ισχύουν οι σχέσεις αυτές ή όπως αναφέρεται στην εργασία των Toda and Phillips δεν ισχύει η συνθήκη επαρκούς συνολοκλήρωσης (*sufficient cointegration*) τότε η στατιστική  $WEC$  δεν ακολουθεί ασυμπτωτικά την κατανομή  $\chi^2$  με αποτέλεσμα, τα αποτελέσματα ελέγχου της κατά Granger αιτιότητας να μην είναι έγκυρα.

### 3. $r(\Pi)=0$

Στην περίπτωση αυτή  $\Pi=0$  οπότε το υπόδειγμα  $VECM$  μετατρέπεται στο υπόδειγμα  $VARD$

$$\Delta y_t = A_1 \Delta y_{t-1} + A_2 \Delta y_{t-2} + \dots + A_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + ut. \quad (1.156)$$

Η μηδενική υπόθεση μη αιτιότητας κατά Granger μεταξύ  $y_{3t}$  και  $y_{1t}$  μέσω του υποδείγματος  $VARD$  διαμορφώνεται ως εξής

$$H_0^D: A_{13} = 0,$$

όπου  $A_{13} = [A_{113}, A_{213}, \dots, A_{p13}]$ .

Η στατιστική Wald του υποδείγματος  $VARD$ , η οποία συμβολίζεται  $WD$ , δίνεται από τη



σχέση

$$WD = T\hat{q}^T R^T \left[ R\hat{V}(\hat{q})R^T \right] R\hat{q}, \quad (1.157)$$

όπου  $\hat{q}$  είναι ο εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων του  $\theta=[A_1, A_2, \dots, A_{p-1}]$  και  $R$  είναι ένας πίνακας τέτοιος ώστε να ισχύει  $R\theta = \text{vec}[A_{13}]$  και έχει ασυμπτωτική κατανομή  $\chi^2(J)$ , όπου  $J=m_1 m_3 (p-1)$  (Toda and Phillips, 1994).

**B2 - Οι συνιστώσες του διανύσματος των ενδογενών μεταβλητών γι δεν είναι συνολοκληρωμένες CI(1,1)**

Η περίπτωση αυτή ελέγχου αιτιότητας κατά Granger εμπίπτει στην προηγούμενη περίπτωση B1-B22 με  $r(\Pi)=0$ .

**Γ - Κριτήριο ελέγχου της αιτιότητας κατά Granger των Toda-Yamamoto**

Ο έλεγχος της αιτιότητας κατά Granger με το κριτήριο των Toda-Yamamoto είναι ένας γενικός έλεγχος υπό την έννοια ότι είναι ανεξάρτητος της τάξεως ολοκλήρωσης και της υπέρξεως ή μη συνολοκλήρωσης των ενδογενών μεταβλητών του διανύσματος  $y_t$ .

Τα προκύπτοντα προβλήματα κατά τον έλεγχο της αιτιότητας κατά Granger μέσω των υποδειγμάτων *VARL* και *VECM* όπου η κατανομή της στατιστικής Wald δεν ακολουθεί πάντοτε ασυμπτωτικά την κατανομή  $\chi^2$  αλλά μόνο υπό ορισμένες προϋποθέσεις επί της τάξεως των πινάκων συνολοκλήρωσης  $\alpha$  και  $\beta$  οδήγησε τους Toda and Yamamoto (1995) να προτείνουν μια διαφορετική προσέγγιση η οποία εξασφαλίζει την ασυμπτωτική κατανομή  $\chi^2$  της στατιστικής Wald ανεξαρτήτως των ιδιοτήτων ολοκλήρωσης ή/και συνολοκλήρωσης του υποδείγματος *VAR*.

Μέσω της προσεγγίσεως των Toda and Yamamoto (1995) εκτιμάται ένα επαυξημένο υπόδειγμα *VARL*( $p+d_{max}$ ) τάξεως  $p+d_{max}$  όπου  $d_{max}$  είναι η μέγιστη τάξη ολοκλήρωσης του διανύσματος των ενδογενών μεταβλητών  $y_t$  και *VARL*( $p$ ) είναι το αρχικό υπόδειγμα αυτοπαλίνδρομου διανύσματος τάξεως  $p$ .

Έστω το επαυξημένο υπόδειγμα *VARL*( $p+d_{max}$ )

$$y_t = \sum_{i=1}^p \Pi_i L^i y_t + \sum_{i=1}^p \Pi_{p+i} L^{p+i} y_t + u_t,$$

όπου  $u_t \sim \text{Niid}(\mathbf{0}, \Sigma)$  και  $d$  είναι η υψηλότερη τάξη ολοκλήρωσης του  $y_t$ .

Στο επαυξημένο αυτό υπόδειγμα *VARL*( $p+d_{max}$ ), η μηδενική υπόθεση για την μη αιτιότητα κατά Granger (*GNC*) μεταξύ  $y_{3t}$  και  $y_{1t}$  διαμορφώνεται ως εξής

$$H_0^{AL}: P_{13} = 0,$$

όπου  $P_{13} = [\Pi_{113}, \Pi_{213}, \dots, \Pi_{p13}]$ .

Η μηδενική αυτή υπόθεση  $H_0^{AL}$ , η οποία ταυτίζεται με τη μηδενική υπόθεση  $H_0^L$  του αρχικού υποδείγματος *VARL*( $p$ ), ελέγχεται μέσω της στατιστικής Wald η οποία στην προκειμένη περίπτωση συμβολίζεται ως *Wald* και είναι η εξής

$$Wald = T\hat{q}^T R^T [R\hat{V}(\hat{q})R^T] R\hat{q}, \quad (1.158)$$

όπου  $\hat{q}$  είναι ο εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων του  $\theta=[\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_p]$  και  $R$  είναι ένας πίνακας τέτοιος ώστε να ισχύει  $R\theta = \text{vec}[P_{13}]$ .

Η στατιστική *Wald* υπό τη μηδενική υπόθεση  $H_0^{AL}$  κατανέμεται ασυμπτωτικά ως μια  $\chi^2$  κατανομή ανεξαρτήτως της τάξεως ολοκλήρωσης και της υπάρξεως ή μη συνολοκλήρωσης των ενδογενών μεταβλητών του διανύσματος  $y_t$ .

### 1.7.5.3.2 Εξωγένεια και υποδείγματα VAR

Στην παρούσα ενότητα η έννοια της εξωγένειας εφαρμόζεται στα υποδείγματα VARL και VECM ως ακολούθως:

#### A-Υπόδειγμα VARL

Έστω το υπόδειγμα VARL

$$y_t = \sum_{i=1}^p \Pi_i L^i y_t + u_t, \text{ όπου } u_t \sim \text{Niid}(\mathbf{0}, \mathbf{\Omega}). \quad (1.159)$$

Έστω επίσης

$$y_t = \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix},$$

όπου  $y_t$  είναι ένα διάνυσμα διαστάσεων  $(m_i \times 1)$  όπου  $i=1,2$  και  $m=m_1+m_2$  και έστω

$$x_{1t} = \begin{bmatrix} y_{1t-1} \\ \mathbf{M} \\ y_{1t-p} \end{bmatrix} \quad x_{2t} = \begin{bmatrix} y_{2t-1} \\ \mathbf{M} \\ y_{2t-p} \end{bmatrix},$$

όπου  $x_{it}$  ( $i=1,2$ ) είναι ένα διάνυσμα διαστάσεων  $(m_i p \times 1)$ .

Τότε η σχέση (1.157) δύναται να γραφεί υπό τη μορφή

$$y_{1t} = B_1^T x_{1t} + B_2^T x_{2t} + u_{1t} \quad (1.160)$$

$$y_{2t} = C_1^T x_{1t} + C_2^T x_{2t} + u_{2t}, \quad (1.161)$$

όπου οι πίνακες  $B_i, C_i$  ( $i=1,2$ ) είναι συναρτήσεις των πινάκων  $\Pi_i$  και για τους διαταρακτικούς όρους  $u_{1t}$  και  $u_{2t}$  ισχύει ότι

$$\begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix} \sim \text{Niid} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix} \right].$$

Το διάνυσμα των ενδογενών μεταβλητών  $y_1$  ονομάζεται μπλοκ-εξωγενές (*block-exogeneous*) όσον αφορά το διάνυσμα των ενδογενών μεταβλητών  $y_2$  εάν  $B_2=0$ , δηλαδή εάν οι συνιστώσες του διανύσματος  $y_2$  δεν συνεισφέρουν στη βελτίωση της πρόβλεψης οιαδήποτε μεταβλητής του διανύσματος  $y_1$  η οποία βασίζεται μόνο σε χρονικώς υστερημένες τιμές των συνιστωσών του διανύσματος.

Ο έλεγχος της υποθέσεως  $H_0^{exs}: B_2=0$ , δηλαδή της υποθέσεως " $y_1$  is block exogeneous

with respect to  $y_2$ " είναι δυνατό να γίνει μέσω της στατιστικής

$$LR_{exg} = T[\log \det \Omega_{11}(0) - \log \det \Omega_{11}],$$

όπου  $\Omega_{11} = 1/T \sum_{t=1}^T u_{1t} u_{1t}^T$  είναι ο πίνακας διακύμανσης-συνδιακύμανσης των καταλοίπων από την εκτίμηση με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων της εξίσωσης (1.160) και  $\Omega_{11}(0) = 1/T \sum_{t=1}^T u_{1t} u_{1t}^T$  είναι ο πίνακας διακύμανσης-συνδιακύμανσης των καταλοίπων από την εκτίμηση με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων της εξίσωσης (1.160) όταν  $B_2=0$ .

Η στατιστική  $LR_{exg}$  υπό τη μηδενική υπόθεση  $H_0^{exg}$  κατανέμεται ασυμπτωτικά ως  $\chi^2$  με  $J=m_1 m_3 p$  βαθμούς ελευθερίας.

Από τα ανωτέρω προκύπτει η εξής σύνδεση μεταξύ της αιτιότητας κατά Granger μεταξύ δύο μεταβλητών  $x_t, y_t$  και της εξωγένειας της  $x_t$  όσον αφορά την  $y_t$ :

" $y_t$  fails to Granger-cause  $x_t$ "  $\Leftrightarrow$  " $x_t$  is exogenous in the time series sense with respect to  $y_t$ ".

### B - Υπόδειγμα *VECM*

Στην παρούσα ενότητα από τις τρεις έννοιες της εξωγένειας -την ασθενή εξωγένεια, την ισχυρή εξωγένεια και την υπερ-εξωγένεια των Engle et al. - εξετάζονται μόνο οι δύο πρώτες, οποίες συνδέονται άμεσα με τα υποδείγματα *VECM*.

Έστω το υπόδειγμα *VECM*

$$\Delta y_t = \sum_{i=1}^{p-1} A_{2i} \Delta y_{t-i} + \Pi y_{t-p} + u_t,$$

όπου  $y_t$  είναι ένα διάνυσμα διαστάσεων  $(m \times 1)$ ,  $A_i = -(I - \Pi_1 - \dots - \Pi_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, p-1$ ,  $\Pi_i = -(I - \pi_1 - \dots - \pi_p)$  και  $u_t \sim Niid(\mathbf{0}, \Omega)$ .

Εάν  $rank(\Pi) = r < p$ , τότε το υπόδειγμα *VECM* γράφεται ως εξής

$$\Delta y_t = \sum_{i=1}^{p-1} A_i \Delta y_{t-i} + a b^T y_{t-p} + u_{2t},$$

όπου  $a$  και  $b$  είναι πίνακες διαστάσεων  $(m \times r)$  και  $r(a) = r(b) = r$ . Έστω

$$y_t = \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix},$$

όπου  $y_t$  είναι ένα διάνυσμα διαστάσεων  $(m_i \times 1)$  όπου  $i=1, 2$  και  $m = m_1 + m_2$  και

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \text{ και } A_i = \begin{bmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \end{bmatrix}, i=1, 2, \dots, p-1.$$

Με βάση τα ανωτέρω, το υπόδειγμα *VECM* γράφεται ως εξής:

$$\Delta y_{1t} = \sum_{i=1}^{p-1} A_{1i} \Delta y_{1t-i} + a_1 b^T y_{1t-p} + u_{1t} \quad (1.162)$$

$$\Delta y_{2t} = \sum_{i=1}^{p-1} A_{2i} \Delta y_{t-i} + a_2 \mathbf{b}^T y_{t-p} + u_{2t}. \quad (1.163)$$

Το δεσμευμένο υπόδειγμα του διανύσματος  $\Delta y_{1t}$  όταν δίνεται, το διάνυσμα  $\Delta y_{2t}$  γράφεται ως εξής (Johansen, 1992b)

$$\Delta y_{1t} = w \Delta y_{2t} + \sum_{i=1}^{p-1} \tilde{A}_{1i} \Delta y_{t-i} + (a_1 - w a_2) \mathbf{b}^T y_{t-p} + \tilde{u}_{1t}, \quad (1.163a)$$

όπου  $w = \Omega_{12} \Omega_{22}^{-1}$ ,  $\tilde{A}_{1i} = A_{1i} - w A_{2i}$  και  $\tilde{u}_{1t} = u_{1t} - w u_{2t}$ .

Από τα ανωτέρω προκύπτει ότι εάν στο δεσμευμένο υπόδειγμα (1.163a) αντικατασταθεί το περιθώριο υπόδειγμα (1.163) τότε προκύπτει το υπόδειγμα (1.162).

Εάν  $a_2=0$  τότε προκύπτει το υπόδειγμα

$$\Delta y_{1t} = w \Delta y_{2t} + \sum_{i=1}^{p-1} \tilde{A}_{1i} \Delta y_{t-i} + a_1 \mathbf{b}^T y_{t-p} + \tilde{u}_{1t} \quad (1.164)$$

$$\Delta y_{2t} = \sum_{i=1}^{p-1} A_{2i} \Delta y_{t-i} + u_{2t}. \quad (1.165)$$

Από το ανωτέρω υπόδειγμα, προκύπτει ότι η μεταβλητή  $y_{2t}$  είναι ασθενώς εξωγενής ως προς την παράμετρο  $\beta$  δεδομένου ότι ισχύουν οι δύο συνθήκες εξωγένειας. Πράγματι, πρώτον, η παράμετρος  $\beta$  είναι συνάρτηση μόνο των παραμέτρων του υπό συνθήκη υποδείγματος δεδομένου ότι η παράμετρος  $\beta$  υπεισέρχεται μόνο στο υπόδειγμα (1.164). Δεύτερον, οι παράμετροι του δεσμευμένου και του περιθωρίου υποδείγματος είναι variation-free δεδομένου ότι δεν υφίστανται οιασδήποτε σταυροειδείς συσχετίσεις μεταξύ τους γεγονός το οποίο επιβεβαιώνεται από τις ιδιότητες της κανονικής κατανομής.

Εάν  $a_2=0$  τότε οι σχέσεις συνολοκλήρωσης δεν υπεισέρχονται στην εξίσωση της μεταβλητής  $y_{2t}$  και επομένως καθίσταται δυνατός ο μετασχηματισμός του υποδείγματος *VECM* σε ένα υπόδειγμα της κατωτέρω μορφής

$$\Delta y_{1t} = A_0 \Delta y_{2t} + \sum_{i=1}^{p-1} \tilde{A}_{1i} \Delta y_{t-i} + a_1 \mathbf{b}^T y_{t-p} + \tilde{u}_{1t}, \quad (1.166)$$

δηλαδή ένα υπόδειγμα *VECM* όπου δεν υπεισέρχεται η βραχυχρόνιος συμπεριφορά της μεταβλητής  $y_{2t}$ .

Η μορφή αυτή του υποδείγματος *VECM* έχει τα εξής δύο πλεονεκτήματα εν σχέσει με το αρχικό υπόδειγμα *VECM*:

- 1) Μείωση του αριθμού των βραχυχρόνιων μεταβλητών στο υπόδειγμα *VECM*
- 2) Το υπόδειγμα (1.166) θα παρουσιάζει καλύτερες στοχαστικές ιδιότητες από το αρχικό υπόδειγμα *VECM* στην περίπτωση κατά την οποία οι ασθενώς εξωγενείς μεταβλητές εμπεριέχουν τα προβληματικά χαρακτηριστικά των δεδομένων (Harris, 1995).

Επιπλέον η  $y_{2t}$  είναι ισχυρώς εξωγενής ως προς την παράμετρο  $\beta$  εφόσον δεν υπάρχει

αιτιότητα κατά Granger από την  $y_{1t}$  προς την  $y_{2t}$  το οποίο συμβαίνει στην περίπτωση κατά την οποία οι συντελεστές της  $\Delta y_{1t-1}$ , είναι μηδενικοί. Στην περίπτωση μάλιστα αυτή, η μεταβλητή  $\Delta y_{1t-i}$  - στην εξίσωση (1.165) αντικαθίσταται από τη μεταβλητή  $\Delta y_{2t-1}$ .

Επομένως εάν υφίσταται ισχυρή εξωγένεια τότε η παράμετρος  $\beta$  είναι δυνατό να εκτιμηθεί μέσω του υποδείγματος (1.164) και στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί για τη διενέργεια προβλέψεων της μεταβλητής  $y_{1t}$  μέσω των προβλέψεων της μεταβλητής  $y_{2t}$ , οι οποίες όμως πλέον προέρχονται από την παρελθούσα ιστορία της μεταβλητής αυτής σύμφωνα με το υπόδειγμα (1.164).

Από τα ανωτέρω προκύπτει ότι υφίσταται μια άμεση συσχέτιση μεταξύ των εννοιών της ασθενούς και ισχυρής εξωγένειας με τις παραμέτρους ενός υποδείγματος *VECM*.

Η ασθενής εξωγένεια η οποία ονομάζεται μακροχρόνια μη αιτιότητα κατά Granger (*Long-run Granger non-causality*) είναι μια μακροχρόνια έννοια της εξωγένειας μέσω της οποίας υπονοείται ότι δεν υφίσταται μακροχρόνια ανατροφοδότηση (*insignificance of the speed of adjustment coefficients*) προς τη σχετική μεταβλητή και ως εκ τούτου δύναται να θεωρηθεί ως ένας τύπος "ασθενούς" μη αιτιότητας κατά Granger.

Επιπλέον η ασθενής εξωγένεια μιας μεταβλητής σε συνδυασμό με την απουσία της αιτιότητας κατά Granger βραχυχρονίως (*insignificance of the lagged terms of adjustment coefficients*) θεμελιώνει την ισχυρή εξωγένεια αυτής της μεταβλητής.

Οι ανωτέρω έννοιες της βραχυχρονίου και μακροχρονίου αιτιότητας κατά Granger οι οποίες συμβολίζονται αντίστοιχα  $\Delta$ -αιτιότητα κατά Granger ( $\Delta$ -Granger) και *LR*-αιτιότητα κατά Granger αποτελούν τα δύο "κανάλια" αιτιότητας στα οποία διασπάται η (συνολική) αιτιότητα κατά Granger σε ένα υπόδειγμα (βλ. ενότητα 1.7.5.3.1).

### **1.7.6 Συναρτήσεις αιφνίδιων αντιδράσεων και συναρτήσεις διάσπασης της διακύμανσης του σφάλματος πρόβλεψης**

Όπως είναι γνωστό τα υποδείγματα *VAR* στερούνται θεωρητικής βάσεως - είναι μη θεωρητικά (*atheoretical*) - και ως εκ τούτου δεν είναι δυνατό να δοθεί ερμηνεία στους εκτιμώμενους συντελεστές τους από την άποψη της οικονομικής ή άλλης θεωρίας.

Ως εκ τούτου οι μελέτες μέσω των υποδειγμάτων *VAR* είθισται να αναφέρονται σε ειδικές συναρτήσεις των συντελεστών αυτών μέσω των οποίων συγκεφαλαιώνεται η συμπεριφορά των μεταβλητών οι οποίες απαρτίζουν τα υποδείγματα *VAR* και στις οποίες είναι δυνατό να δοθεί επιστημονική ερμηνεία από οικονομικής ή άλλης πλευράς και οι οποίες επιπλέον παρουσιάζουν μεγαλύτερη στατιστική αξιοπιστία από τους εκτιμώμενους συντελεστές των υποδειγμάτων *VAR*. Οι συντελεστές των υποδειγμάτων *VAR* συνήθως παρουσιάζουν χαμηλού βαθμού στατιστική αξιοπιστία η οποία βαίνει αυξανόμενη αυξανόμενης της χρονικής υστερήσεως των ενδογενών τους μεταβλητών.

Οι συναρτήσεις αυτές είναι δύο ειδών α) οι συναρτήσεις αιφνίδιων αντιδράσεων (*IRF*) και β) οι συναρτήσεις διάσπασης της διακύμανσης του σφάλματος πρόβλεψης (*FEVD*).

Μέσω των *IRF* συναρτήσεων ιχνηλατείται η αντίδραση των ενδογενών μεταβλητών σε εξωγενείς αιφνίδιες διαταραχές, ενώ μέσω των *FEVD* συναρτήσεων αποτιμάται ο βαθμός της συνεισφοράς των εξωγενών αιφνίδιων διαταραχών στη μεταβλητικότητα των ενδογενών μεταβλητών.

### 1.7.6.1 Συναρτήσεις αιφνίδιων αντιδράσεων (*IRF*)

#### A. Υπόδειγμα *VAR*

Ως γνωστό, σύμφωνα με το θεώρημα διαχωρισμού του Wold (*Wold's Decomposition Theorem*), ένα στάσιμο υπόδειγμα *VAR(p)* τάξεως  $p$  της μορφής  $\Pi(L)y_t = u_t; u_t \sim Niid(0, \Omega)$ ,

όπου  $\Pi(L) = I - \sum_{i=1}^p \Pi_i L^i$  δύναται να μετασχηματισθεί σε ένα υπόδειγμα κινητού μέσου *MA*( $\infty$ ) της μορφής

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i u_{t-i}, \quad (1.167)$$

όπου  $\Psi_i = \sum_{j=1}^p \Pi_j \Psi_{i-j}$ ,  $i=1,2,\dots$  και  $\Psi_0 = I_p$  (Hamilton, 1994).

Η σχέση (1.167) δύναται να γραφεί υπό τη μορφή

$$y_{t+s} = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i u_{t+s-i}. \quad (1.168)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι ο πίνακας  $\Psi_i$  για  $i=s$  δύναται να ερμηνευθεί ως ο δυναμικός πολλαπλασιαστής (*dynamic multiplier or impulse response*)

$$\Psi_s = \frac{\partial y_{t+s}}{\partial u_t^T},$$

όπου  $(\Psi_s)_{ij}$  παριστάνει την αντίδραση της  $i$ -οστής μεταβλητής κατά τη χρονική στιγμή  $t+s$  ( $y_{i,t+s}$ ) σε μια αιφνίδια μεταβολή κατά μία τυπική απόκλιση του διαταρακτικού όρου της  $j$ -οστής μεταβλητής κατά τη χρονική στιγμή  $t$  ( $u_{jt}$ ), διατηρώντας όλους τους άλλους διαταρακτικούς όρους σταθερούς σε όλες τις χρονικές περιόδους.

Η γραφική παράσταση της  $(\Psi_s)_{ij}$  ως συνάρτηση της  $s$  ονομάζεται συνάρτηση αιφνίδιων αντιδράσεων.

Η υπόθεση όμως ότι μια αιφνίδια μεταβολή σε ένα διαταρακτικό όρο δεν επηρεάζει τους άλλους διαταρακτικούς όρους συνήθως δεν ισχύει δεδομένου ότι  $E(u_t u_t^T) \neq 0$ , δηλαδή οι συνιστώσες του διανύσματος των διαταρακτικών όρων  $u_t$  συμμεταβάλλονται ταυτοχρόνως (*contemporaneously correlated*). Αυτό σημαίνει ότι μια αιφνίδια μεταβολή σε μια μεταβλητή

είναι πολύ πιθανό να συνοδεύεται από μια αιφνίδια μεταβολή σε μια άλλη μεταβλητή κατά την ίδια χρονική περίοδο. Όμως ο πίνακας  $\Omega$  είναι θετικά ορισμένος (*positive definite*) και επομένως δύναται να γραφεί υπό τη μορφή  $\Omega=AA^T$  (*Choleski decomposition*) όπου  $A$  είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας.

Έστω  $v_t=A^{-1}u_t$ , τότε

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i u_{t-i} = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i AA^{-1} u_{t-i} = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i^* v_{t-i}, \quad (1.169)$$

όπου  $\Psi_i^* = \Psi_i A$  και

$$E(v_t v_t^T) = E(A^{-1} u_t u_t^T (A^{-1})^T) = A^{-1} \Omega (A^{-1})^T = A^{-1} A A^T (A^{-1})^T = I. \quad (1.170)$$

Από τη σχέση (1.170) προκύπτει ότι πλέον τα κατάλοιπα  $v_{it}$  δεν συμμεταβάλλονται, ενώ ο πίνακας για  $i=s$

$$\Psi_s^* = \frac{\partial y_{t+s}}{\partial v_t^T}$$

δίνει την αντίδραση της μεταβλητής  $y_{it}$  σε μια αιφνίδια αντίδραση του διαταρακτικού όρου  $v_t$ .

Στη νέα αυτή μορφή μετασχηματισμού του υποδείγματος VAR σε ένα υπόδειγμα κινητού μέσου  $MA(\infty)$  της μορφής (1.169), προκύπτει πλέον ότι μια μεταβολή σε μια συνιστώσα του διανύσματος των διαταρακτικών όρων  $u_t$  δεν έχει καμία επίδραση στις άλλες συνιστώσες δεδομένου ότι αυτές είναι ορθογώνιες μεταξύ τους.

Η γραφική παράσταση της  $(\Psi_s^*)_{ij}$  ως συνάρτηση της  $s$  ονομάζεται ορθογωνοποιημένη συνάρτηση αιφνίδιων αντιδράσεων (*orthogonalized impulse response functions*).

Από τη σχέση  $\Psi_0^* = \Psi_0 A = I A$  προκύπτει ότι ο πίνακας  $\Psi_0$  είναι κάτω διαγώνιος, γεγονός το οποίο υποδηλώνει τη σπουδαιότητα της σειράς κατάταξης των ενδογενών μεταβλητών του υποδείγματος VAR.

Η σειρά κατάταξης πρέπει να είναι τέτοια ούτως ώστε η ενδογενής μεταβλητή  $y_{1t}$  να είναι η μοναδική μεταβλητή με μία πιθανή επίδραση στις άλλες μεταβλητές, η ενδογενής μεταβλητή  $y_{2t}$  να επιδρά στις υπόλοιπες  $m-1$  μεταβλητές αλλά όχι στη μεταβλητή  $y_{1t}$  κ.ο.κ.

Η τεχνική όμως αυτή παρουσιάζει το εξής βασικό μειονέκτημα: η επιλογή του πίνακα  $A$  δεν είναι μοναδική και επομένως διαφορετικές επιλογές του πίνακα  $A$  (π.χ. διαφορετικές σειρές κατάταξης των ενδογενών μεταβλητών) μεταβάλλουν τους συντελεστές  $(\Psi_s^*)_{ij}$  και κατά συνέπεια και τη συνάρτηση αιφνίδιων αντιδράσεων *IRF*.

Ο βαθμός αυτών των μεταβολών εξαρτάται από την τάξη μεγέθους των συντελεστών συσχέτισης μεταξύ των καταλοίπων  $v_t$ .

Συγκεκριμένα, εάν ο συντελεστής συσχέτισης  $\rho_{ij}$  μεταξύ των καταλοίπων  $(v_{it}, v_{jt})$  είναι τάξεως μικρότερης του 0.2 δηλαδή  $|\rho_{ij}| < 0.2, \forall (i, j)$  (Enders, 1995) τότε η σειρά κατάταξης των ενδογενών μεταβλητών του υποδείγματος VAR δεν επηρεάζει τους συντελεστές  $(\Psi_s^*)_{ij}$  της

συνάρτησης αιφνίδιων αντιδράσεων *IRF*.

Στην αντίθετη περίπτωση κατά την οποία  $|\rho_{ij}| > 0.2, \forall (i,j)$ , τότε αντί της συναρτήσεως αυτής χρησιμοποιείται η γενικευμένη συνάρτηση αιφνίδιων αντιδράσεων *GIRF* (*Generalized Impulse Response Function*) (Pesaran and Shin, 1997), η οποία δεν επηρεάζεται από τη σειρά κατάταξης των ενδογενών μεταβλητών του υποδείγματος *VAR*. Η συνάρτηση *GIRF* προκύπτει από τη σχέση (1.67) με  $A = \sigma_{ii}^{-1/2} \Omega$ , όπου  $\sigma_{ii}$  είναι το  $i$ -οστό διαγώνιο στοιχείο του πίνακα  $\Omega$  (Mills, 2000).

#### B. Υπόδειγμα *VECM*

Στην περίπτωση του υποδείγματος *VECM* η συνάρτηση αιφνίδιων αντιδράσεων  $(\Psi_s)_{ij}, \forall s$  είναι η ίδια όπως και στην περίπτωση του υποδείγματος *VAR* με το διάνυσμα των ενδογενών μεταβλητών  $y_t$  της τάξεως  $I(0)$ . Όταν ο πίνακας  $\Pi$  του υποδείγματος *VECM* είναι μειωμένης τάξεως  $r < m$ , τότε η συνάρτηση αιφνίδιων αντιδράσεων  $(\Psi_s)_{ij}$  καθώς το  $s \rightarrow \infty$  δεν συγκλίνει προς το μηδέν όπως στην περίπτωση ενός στάσιμου υποδείγματος *VAR* αλλά συγκλίνει σε μια μη μηδενική σταθερά. Επομένως μέσω της συναρτήσεως αιφνίδιων αντιδράσεων παρέχεται ένας έμμεσος τρόπο ελέγχου των σχέσεων συνολοκλήρωσης του υποδείγματος *VECM* (Kanioura and Mills, 2000).

#### 1.7.6.1.1 Συναρτήσεις αιφνίδιων αντιδράσεων, ισχυρή εξωγένεια και άσκηση δημογραφικής πολιτικής

Όπως είναι γνωστό οι χρονολογικές σειρές συχνά παρουσιάζουν διαρθρωτικές μεταβολές (*structural breaks*) με αποτέλεσμα οι συντελεστές των υποδειγμάτων *VAR* με ενδογενείς μεταβλητές τις χρονολογικές αυτές σειρές να παρουσιάζουν κατά την εμπειρική τους εφαρμογή μη σταθερότητα ή αστάθεια (*nonconstancy or invariability*). Στις περιπτώσεις αυτές, οι συναρτήσεις αιφνίδιων αντιδράσεων λόγω της εγγενούς ευαισθησίας τους στις αλλαγές των παραμέτρων των υποδειγμάτων *VAR* καθίστανται προβληματικές και επομένως δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν για τη διαμόρφωση πολιτικών από τους εμπλεκόμενους φορείς δημογραφικής/οικονομικής πολιτικής. Παρ' όλα αυτά, η σταθερότητα/ευστάθεια των υποδειγμάτων *VAR* συνήθως δεν ελέγχεται κατά την ανάλυση των συναρτήσεων των αιφνίδιων αντιδράσεων. Όμως σε ένα δεσμευμένο υπόδειγμα *VAR*, εν αντιθέσει με ένα πλήρες υπόδειγμα *VAR*, είναι δυνατό να επιτευχθεί η επιθυμητή σταθερότητα των παραμέτρων του με τη δέσμευση ακριβώς των μεταβλητών εκείνων οι οποίες παράγουν ή συμμετέχουν στις διαρθρωτικές αλλαγές των υπό μελέτη χρονολογικών σειρών. Έστω ένα στάσιμο υπόδειγμα *VAR* τάξεως  $p=1$  της μορφής

$$x_t = \delta + Ax_{t-1} + u_t, u_t \sim Niid(0, \Omega).$$

Ως γνωστό το υπόδειγμα αυτό δύναται να μετασχηματισθεί σε ένα υπόδειγμα κινητού μέσου της μορφής



$$x_t = (I - AL)^{-1}(\delta + u_t) = \sum_{h=0}^{\infty} C_h (d + u_{t-h}) = C(L)(\delta + u_t).$$

Από τη σχέση αυτή, προκύπτει ο πίνακας  $C_h$  των αντιδράσεων των  $y_{h+t}$  στις αιφνίδιες μεταβολές του διαταρακτικού όρου  $u_t$ :

$$\frac{\partial x_{t+h}}{\partial u_t^T} = C_h = (A)^h.$$

Έστω ότι το διάνυσμα  $x_t$  διαχωρίζεται ως  $x_t = [y_t^T, z_t^T]^T$  όπου  $y_t$  είναι οι μεταβλητές στόχοι της δημογραφικής πολιτικής (*target variables of demographic policy*) και  $z_t$  οι μεταβλητές "εργαλεία" για τη διαμόρφωση της δημογραφικής πολιτικής (*policy instruments of demographic policy*).

Με βάση το διαχωρισμό αυτό το υπόδειγμα VAR γράφεται ως εξής:

$$y_t = A_{11}y_{t-1} + A_{12}z_{t-1} + u_{1t}$$

$$z_t = A_{21}y_{t-1} + A_{22}z_{t-1} + u_{2t},$$

όπου  $E(u_{1t}) = E(u_{2t}) = 0$ ,  $var(u_{1t}) = \sigma_{11}$ ,  $var(u_{2t}) = \sigma_{22}$  και  $Cov(u_{1t}, u_{2t}) = \sigma_{12}$ .

Έστω ότι  $D = \sigma_{12}/\sigma_{11}$ , οπότε το ανωτέρω υπόδειγμα VAR διασπάται σε μια δεσμευμένη διαδικασία/υπόδειγμα (*conditional process*) της μεταβλητής  $y_t$  ως προς τη μεταβλητή  $z_t$  και μια περιθώριο διαδικασία/υπόδειγμα (*marginal process*) της μεταβλητής  $z_t$  ως εξής:

$$y_t - Dz_t = (A_{11} - DA_{21})y_{t-1} + (A_{12} - DA_{22})z_{t-1} + u_{1t}^*$$

$$z_t = A_{21}y_{t-1} + A_{22}z_{t-1} + u_{2t},$$

όπου  $u_{1t}^* = (u_{2t} + Du_{1t})$ .

Αποδεικνύεται ότι η μεταβλητή  $z_t$  είναι ασθενώς εξωγενής ως προς τις παραμέτρους  $D_1 = (A_{11} - DA_{21})$ ,  $D_2 = (A_{12} - DA_{22})$  και  $D$  της δεσμευμένης διαδικασίας της μεταβλητής  $y_t$  ως προς τη μεταβλητή  $z_t$  (Charemza and Deadman, 2003).

Επίσης αποδεικνύεται ότι  $\frac{\partial y_{t+h}}{\partial u_t^T} = (A_{11} - DA_{21})^h$  (Ericsson et al., 1998).

Από την ανωτέρω σχέση, προκύπτει ότι οι συναρτήσεις αιφνίδιων αντιδράσεων του δεσμευμένου υποδείγματος είναι ίσες με τις συναρτήσεις αιφνίδιων αντιδράσεων του πλήρους υποδείγματος εφόσον ισχύει ότι  $A_{21} = 0$  δηλαδή η μεταβλητή  $y_t$  does not Granger-cause τη μεταβλητή  $z_t$ . Επομένως η ασθενής εξωγένεια της μεταβλητής  $z_t$  ως προς τις παραμέτρους του δεσμευμένου υποδείγματος σε συνδυασμό με την απουσία αιτιότητας κατά Granger από τη μεταβλητή  $y_t$  προς τη μεταβλητή  $z_t$ , θεμελιώνουν την ισχυρή εξωγένεια της ως προς το δεσμευμένο υπόδειγμα.

Από τα ανωτέρω προκύπτει ότι η μεταβλητή  $z_t$  δύναται να χρησιμοποιηθεί ως μεταβλητή για τη διαμόρφωση δημογραφικής πολιτικής στην περίπτωση κατά την οποία διαπιστωθεί ότι είναι ισχυρώς εξωγενής ως προς τις παραμέτρους της δεσμευμένης διαδικασίας  $y_t$  δεδομένου ότι

στην περίπτωση αυτή οι παράμετροι για τον υπολογισμό των συναρτήσεων αιφνίδιων αντιδράσεων απομονώνονται στο δεσμευμένο υπόδειγμα. Κατ' άλλη διατύπωση, στην περίπτωση αυτή οιαδήποτε μεταβολή των παραμέτρων της περιθώριας διαδικασίας  $z_t$  δεν επηρεάζει τις παραμέτρους της δεσμευμένης διαδικασίας  $y_t|z_t$  και επομένως η μεταβλητή  $z_t$  δύναται να χρησιμοποιηθεί εκ του ασφαλούς ως εργαλείο διαμόρφωσης πολιτικής (Charemza and Deadman, 2003).

### 1.7.6.2 Διάσπαση της διακύμανσης του σφάλματος πρόβλεψης

Ως γνωστό το σφάλμα πρόβλεψης του υποδείγματος VAR (1.67)  $s$  περιόδους μπροστά είναι της μορφής

$$y_{t+s} - \hat{y}_{t+s/t} = \sum_{i=0}^{s-1} \Psi_i u_{t+s-i}, \Psi_0 = I,$$

όπου  $\hat{y}_{t+s/t}$  είναι η υπό συνθήκη προσδοκώμενη τιμή της  $y_{t+s}$ ,  $s$  περιόδους μπροστά δηλαδή

$$\hat{y}_{t+s/t} = E(y_{t+s} | y_t, y_{t-1}, K, u_t, u_{t-1}, K).$$

Το μέσο του τετραγώνου του σφάλματος αυτής της πρόβλεψης  $s$  περιόδους μπροστά είναι

$$\begin{aligned} MSE(\hat{y}_{t+s/t}) &= E[(y_{t+s} - \hat{y}_{t+s/t})(y_{t+s} - \hat{y}_{t+s/t})^T] \\ &= \Omega + \Psi_1 \Omega \Psi_1^T + \Psi_2 \Omega \Psi_2^T + K + \Psi_{s-1} \Omega \Psi_{s-1}^T. \end{aligned} \quad (1.171)$$

Με βάση τα ανωτέρω, η συνεισφορά των ορθογωνοποιημένων καταλοίπων  $(v_{1t}, \dots, v_{mt})$  στο  $MSE(\hat{y}_{t+s/t})$  υπολογίζεται ως κατωτέρω:

$$u_t = Av_t = a_1 v_{1t} + \dots + a_m v_{mt},$$

όπου  $a_i$  είναι η  $i$ -οστή στήλη του πίνακα  $A$ .

Δεδομένου ότι τα κατάλοιπα  $v_t$  δεν συσχετίζονται μεταξύ τους, προκύπτει ότι

$$\Omega = a_1 a_1^T \text{Var}(v_{1t}) + \dots + a_m a_m^T \text{Var}(v_{mt}).$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση αυτή στη σχέση (1.171) προκύπτει ότι

$$MSE(\hat{y}_{t+s/t}) = \sum_{i=1}^m \text{Var}(v_{it}) (a_i a_i^T + \Psi_1 a_i a_i^T \Psi_1^T + K + \Psi_{s-1} a_i a_i^T \Psi_{s-1}^T).$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η συνεισφορά του  $i$ -οστού ορθογωνοποιημένου καταλοίπου  $v_{it}$  στο  $MSE(\hat{y}_{t+s/t})$  είναι

$$\text{Var}(v_{it}) (a_i a_i^T + \Psi_1 a_i a_i^T \Psi_1^T + \dots + \Psi_{s-1} a_i a_i^T \Psi_{s-1}^T).$$

Η διάσπαση της διακύμανσης του σφάλματος πρόβλεψης εξαρτάται από τη σειρά κατάταξης των μεταβλητών στο υπόδειγμα VAR όπως και στην περίπτωση της συνάρτησης των αιφνίδιων αντιδράσεων. Αντί της συνάρτησης αυτής, συνήθως χρησιμοποιείται η γενικευμένη διάσπαση του σφάλματος πρόβλεψης *GFEVD* (*Generalized Forecast Error Decomposition*) η οποία δεν εξαρτάται από τη σειρά κατάταξης των μεταβλητών στο υπόδειγμα VAR (Mills,

2000).

Οι διασπάσεις της διακύμανσης του σφάλματος πρόβλεψης (*FEVD's*) ονομάζονται εκτός της περιόδου του δείγματος (*out of sample*) έλεγχοι αιτιότητας δεδομένου ότι η διάσπαση της διακύμανσης του σφάλματος πρόβλεψης μιας μεταβλητής σε αναλογίες αποδιδόμενες στις αιφνίδιες αντιδράσεις των υπολοίπων μεταβλητών συμπεριλαμβανομένης και της αρχικής μεταβλητής αποτελεί ένδειξη για τις μεταξύ τους σχέσεις. Υψηλές αναλογίες αποδιδόμενες στις αιφνίδιες αντιδράσεις μιας συγκεκριμένης μεταβλητής αποτελούν μια ένδειξη ότι η ίδια η μεταβλητή πρωταρχικά επηρεάζεται κυρίως από τις προηγούμενες τιμές της και ολιγότερο από τις άλλες. Η ένδειξη αυτή δύναται να ερμηνευθεί ως σχετική εξωγένεια (*relative exogeneity*) της μεταβλητής αυτής.

Οι προηγούμενοι έλεγχοι αιτιότητας κατά Granger μέσω των υποδειγμάτων *VARL*, *VAR* και *VECM* δύναται να ερμηνευθούν ως εντός της περιόδου του δείγματος έλεγχοι αιτιότητας (*within-sample causality tests*). Οι έλεγχοι αυτοί αν και υποδηλώνουν την αιτιότητα κατά Granger της εξηρημένης μεταβλητής εντός της περιόδου του δείγματος δεν παρέχουν καμία ένδειξη περί των δυναμικών ιδιοτήτων των υποδειγμάτων *VAR* αλλά ούτε και επιτρέπουν την αποτίμηση της σχετικής ισχύος της αλυσίδας αιτιότητας κατά Granger (*Granger-causality chain*) ή του βαθμού εξωγένειας μεταξύ των μεταβλητών πέραν της περιόδου του δείγματος όπως οι έλεγχοι αιτιότητας μέσω των *FEVD's*.

### **1.7.7 Διαγνωστικός έλεγχος των υποδειγμάτων VAR**

Ο διαγνωστικός έλεγχος αναφέρεται στο βαθμό προσαρμογής ενός υποδείγματος *VAR* με τα δεδομένα, δεδομένου ότι είναι δυνατό κάποιο άλλο υπόδειγμα *VAR* να παρουσιάζει καλύτερη προσαρμοστικότητα με τα δεδομένα. Ο διαγνωστικός έλεγχος αφορά την τάξη του υποδείγματος *VAR* καθώς και τη συμπεριφορά των διαταρακτικών όρων (καταλοίπων).

#### **A - Έλεγχος της τάξης του υποδείγματος VAR**

Η καταλληλότητα του εκτιμημένου υποδείγματος *VAR* ελέγχεται κατόπιν συγκρίσεως του με ένα άλλο υπόδειγμα *VAR* μεγαλύτερης τάξης. Αυξάνοντας όμως την τάξη του υποδείγματος *VAR* μειώνεται το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων αλλά ταυτόχρονα μειώνονται και οι βαθμοί ελευθερίας δεδομένου ότι εκτιμώνται περισσότεροι παράμετροι. Επομένως δεν υπάρχει μόνο κέρδος από την προσθήκη μεταβλητών αλλά και κόστος.

Η σύγκριση της ερμηνευτικής ικανότητας εναλλακτικών υποδειγμάτων τα οποία διαφέρουν ως προς τον αριθμό των παραμέτρων επιτυγχάνεται με την εφαρμογή δύο γνωστών κριτηρίων: το κριτήριο πληροφοριών Akaike (*Akaike Information Criterion - AIC*)  $AIC = -2/lT + 2k/T$  και το κριτήριο πληροφοριών Schwartz (*Schwartz Information Criterion - SIC*)  $SIC = -2/lT + (k/T) \log T$ , όπου  $l$  = άθροισμα τετραγώνων καταλοίπων,  $T$  = αριθμός παρατηρήσεων

και  $k$ = αριθμός των εκτιμώμενων παραμέτρων ( $k=m^2p$ ).

Τα δύο κριτήρια επιβάλλουν κάποια ποινή για τη μείωση του αθροίσματος των τετραγώνων των καταλοίπων  $l$  η οποία αυξάνει με τον αριθμό  $k$  των εκτιμώμενων παραμέτρων. Επομένως με βάση τα παραπάνω κριτήρια πληροφοριών επιλέγεται το υπόδειγμα  $VAR$  με τη μικρότερη τιμή.

#### B - Έλεγχος της συμπεριφοράς των καταλοίπων του υποδείγματος $VAR$

Ο έλεγχος της συμπεριφοράς των καταλοίπων αναφέρεται στους εξής ελέγχους:

α) Έλεγχος αυτοσυσχέτισης (*test for autocorrelation*), β) Έλεγχος ετεροσκεδαστικότητας (*test for heteroscedasticity*), γ) Έλεγχος αυτοπαλινδρόμησης υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας (*test for autoregressive conditional heteroscedasticity*) και δ) Έλεγχος κανονικότητας (*test for normality*).

Ο έλεγχος της συμπεριφοράς των καταλοίπων του υποδείγματος  $VAR$  πρέπει να γίνεται σε συνάρτηση με τον έλεγχο της τάξης του υποδείγματος υπό την έννοια ότι η επιλογή της τάξης του υποδείγματος μέσω των κριτηρίων πληροφοριών  $AIC$  ή  $SIC$  πρέπει πάντα να είναι τέτοια ούτως ώστε τα κατάλοιπα να είναι Gaussian, δηλαδή να μη παρουσιάζουν αυτοσυσχέτιση, ετεροσκεδαστικότητα, κλπ. (Harris, 1995).

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

### Υπολογισμός των σταθμίσεων του φίλτρου Baxter-King και του τροποποιημένου φίλτρου Baxter-King

#### A. Το φίλτρο των Baxter-King

Με βάση τα αναφερόμενα στην παράγραφο 1.4.5 για το φίλτρο των Baxter-King και στην περίπτωση ετησίων δεδομένων προκύπτουν οι κατωτέρω σταθμίσεις ως εξής:

Για ετήσια δεδομένα  $\omega_1=2\pi/8$ ,  $\omega_2=\pi$  και  $\kappa=3$ :

Για  $j=0$ ,  $b_0=\omega_2-\omega_1/\pi=0.75$

Για  $j=1$ ,  $b_1=(1/\pi)(\sin\omega_2-\sin\omega_1)=b_{-1}$ ,

οπότε προκύπτει ότι  $b_1=-0.225079079$ .

Ομοίως για  $j=2$ ,  $b_2=(1/2\pi)(\sin(2\omega_2)-\sin(2\omega_1))=-0.159154943$ .

Κατ' ανάλογο τρόπο για  $j=3$ ,  $b_3=(1/3\pi)(\sin(3\omega_2)-\sin(3\omega_1))=-0.07502636$ .

Με βάση τα ανωτέρω, προκύπτει ότι  $\theta=-[b_0+2(b_1+b_2+b_3)/7]=0.024074394$ .

Επομένως από τη σχέση  $a_j=b_j+\theta$  προκύπτουν οι σταθμίσεις του φίλτρου των Baxter-King  $a_0=0.774074394$ ,  $a_1=-0.201004685$ ,  $a_2=-0.135080549$ ,  $a_3=-0.050951966$ .

#### B. Το τροποποιημένο φίλτρο των Baxter – King

Με βάση τα αναφερόμενα στην παράγραφο 1.5.6 για το τροποποιημένο φίλτρο των Baxter-King και στην περίπτωση ετησίων δεδομένων προκύπτουν οι κατωτέρω τροποποιημένες σταθμίσεις ως εξής:

Για ετήσια δεδομένα  $\omega_1=2\pi/8$ ,  $\omega_2=\pi$  και  $\kappa=3$ :

Από την σχέση,  $b_j^*=b_j \frac{\sin[(2p_j)/(2k+1)]}{(2p_j)/(2k+1)}=b_j\sigma_j$  προκύπτουν τα εξής:

Για  $j=0$ ,  $b_0^*=b_0$ .

Για  $j=1$ ,  $b_1^*=b_1\sigma_1=(-0.225079079)(0.871026416)=-0.196049823$ .

Για  $j=2$ ,  $b_2^*=b_2\sigma_2=(-0.159154943)(0.543076087)=-0.086433243$ .

Για  $j=3$   $b_3^*=b_3\sigma_3=(-0.07502636)(0.161127731)=-0.012088827$ .

Με βάση τα ανωτέρω, προκύπτει ότι  $\theta^*=-[b_0^*+2(b_1^*+b_2^*+b_3^*)/7]=-0.022979459$

και επομένως οι σταθμίσεις του τροποποιημένου φίλτρου των Baxter – King

$a_0^*=b_0^*+\theta=0.72702054$ ,  $a_1^*=b_1^*+\theta=-0.0219029282$ ,  $a_2^*=b_2^*+\theta=-0.109412702$  και

$a_3^*=b_3^*+\theta=-0.035068286$ .

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

## Προγράμματα Η/Υ που χρησιμοποιήθηκαν στη Διδακτορική Διατριβή

TSP 3 (Time Series Processor)

EViews 3

Mathematica 3

Statistica

Demetra Version 2.04

Tess

TSW (Tramo Seats for Windows)

mfit 4

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ



## BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Anderson, B. and Moore, J. (1979). *Optimal Filtering*, New Jersey: Prentice-Hall
- Ansley, C.F. and Kohn, R. (1985). Estimation, Filtering and Smoothing in State Space Models with Incompletely Specified Initial Conditions, *Annals of Statistics*, 13, 1286-1316
- Antoniou, A. (1993). *Digital Filters, Analysis, Design and Applications*, McGraw-Hill, New York, 2nd edn.
- Arnold, F.A., Bulatao, R.A., Buripakdi, C., Chung, B.J., Fawcett, J.T., Iritani, T., Lee, S.J. and Wu, T.S. (1975). The Value of Children: A Cross-National Study, Introduction and Comparative Analysis, vol 1, Honolulu: East-West Population Institute
- Backus, D.K. and Kehoe P.J. (1992). International Evidence on the Historical Properties of Business Cycles, *The American Economic Review*, vol 82, no 4, pp. 864-888
- Bagozzi, R.P. and Van Loo, M.F. (1978). Fertility as Consumption: Theories from the Behavioral Sciences, *Journal of Consumer Research*, 4, 199-228
- Bagozzi, R.P. and Van Loo, M.F. (1980). Decision-making and Fertility: A Theory of Exchange in the Family, pp.91-124 in *Demographic Behaviour*, T.K. Burch, Boulder, Colorado: Westview Press
- Barrios S., Brulhart, H. Robert J.R. Elliot and Sensier, M. (2001). A Tale of Two Cycles: Co-fluctuations Between UK Regions and the Euro Zone, *Discussion Paper Series*, Centre of Growth and Business Cycles Research, University of Manchester
- Baxter, M. and King, R.G. (1995). Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series, NBER, *Working Paper* no 5022, Revised version, Sept. 1998
- Baxter, M. and Stockman, A.C. (1989). Business Cycles and the Exchange Rate Regime: Some International Evidence, *Journal of Monetary Economics*, vol 23, no 3, pp. 377-400
- Beckman, L.J. (1978). Couples' Decision-making Processes Regarding Fertility, PP. 57-81 in *Social Demography*, K.E. Taeuber, L.L. Bumpass and T.E. Sweet, New York: Academic Press
- Bell, W.R. (1984). Signal Extraction for Nonstationary Time Series, *Annals of Statistics*, 12, 646-664
- Bell, W.R. and Hillmer, S.C. (1984). Issues Involved with the Seasonal Adjustment of Economic Time Series, *Journal of Business and Economic Statistics*, 2, 291-320
- Blake, A.P. and Young, G. (2000). Evaluating Macroeconomic Models of the Business Cycle, National Institute of Economic and Social Research 2 Dean Trench Street, Smith Square, London SHIP 3HE, UK

- Box, G.E.P., Hillmer, S.C. and Tiao, G.C. (1978). Analysis and Modelling of Seasonal Time Series in Zellner, S. (eds) *Seasonal Analysis of Time Series*, Washington, D.C: US Dept. of Commerce, Bureau of Census, 309-334
- Brandner, P. and Neusser, K. (1992). Business cycles in open economies: Stylized facts for Austria and Germany, *Weltwirtschaftliches Archiv*, 128(1), 67-87
- Bratti, M. (2002). Labour Force Participation and Marital Fertility of Italian Women: The Role of Education, *working paper* no 154 September 2001, Dipartimento di Economia, Università degli di Ancona, Italy
- Bumpass, L.L. (1982). The Changing Linkage of Nuptiality and Fertility in the United States, pp. 195-209, in *Nuptiality and Fertility*, L.T. Ruzicka, Liege: Ordina Editions
- Burman, J.P. (1980). Seasonal Adjustment by Signal Extraction, *Journal of the Royal Statistical Society A*, 143, 321-337
- Canova, F. (1998). Detrending and Business Cycles Facts, *Journal of Monetary Economics*, vol 41, pp.475-512
- Charemza, W.W. and Deadman, D.F. (1993). *New directions in econometric practice*. Cheltenham: Edward Elgar
- Chow, G.C. and Levitan, R.E. (1969). Spectral Properties of Non-Stationary Difference Equations, *JASA*, pp. 581-590
- Cleveland, W.P. and Tiao, G.C. (1976). Decomposition of Seasonal Time Series: A Model for the X-II Program, *Journal of the American Statistical Association*, 71, 581-587
- Cogley, T. and Nason, J.M. (1995a). Output Dynamics in Real Business Cycle Models, *American Economic Review*, 85(3), 492-511
- Cogley, T. and Nason, J.M. (1995b). Effects of the Hodrick-Prescott Filter on Trend and Difference Stationary Time Series: Implications for Business Cycle Research, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 19(1-2), 253-278
- Danthine, J.P. and Girardin, M. (1989). Business Cycles in Switzerland. A Comparative Study, *European Economic Review*, 33, 31-50
- Davidson, A.R and Jaccard, J.J. (1976). Social Psychological Determinants of Fertility Intentions, pp. 131-137 in *Population Educational Issues*, S.H. Newman and V.D. Thompson, Washington DC, Government Printing Office
- Davidson, A.R and Jaccard, J.J. (1979). Variables that Moderate the Attitude Behaviour Relation: Results of a Longitudinal Survey, *Journal of Personality and Social Psychology*, 37, 364-376
- DeJong, P. (1988). The Likelihood of the State Space Model, *Biometrika* 75, 165-169

- Denhaan, W.J. and Stunner, S.W. (2002). *The Comovement between Real Activity and Prices in the G7*, Affiliations Denhaan University of California at San Diego, CEPR & NBER, Sumner University of California at San Diego
- Dhrymes, P.J. (1970). *ECONOMETRICS Statistical Foundations and Applications*, Harper International Edition, Harper & Row, Publishers, New York, Evanston and London
- Diebold, F.X., Lee, E.O. and Berkowitz, J. (1998). Dynamic Equilibrium Economies: A Framework for Comparing Models and Data, *Staff Report 243*, Research Dept. The Federal Reserve Bank of Minneapolis
- Ehlgren, J. (1998). Distortionary Effects of the Optimal Hodrick-Prescott Filter, *Economics Letters*, vol 61, pp. 345-349
- Enders, W. (1995). *Applied Econometric Time Series*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics
- Engle, R.F., Hendry, D.F. and Richard, J.F. (1983). Exogeneity, *Econometrica*, Vol 21
- Ericsson N.R., Hendry, D.F. and Mizon, G.E. (1998). Exogeneity, Cointegration, and Economic Policy Analysis, *International Finance Discussion Papers*, no 616, Board of Governors of the Federal Reserve System
- Fawcett, J.T. (1972). *The Satisfaction and Costs of Children: Theories, Concepts and Methods*. Honolulu: East-West Population Institute
- Fawcett, J.T. (1976). *The Value and Cost of Children: Converging Theory and Research in Economic and Social Support of High Fertility*, L. Ruzicka, Canberra: Australian National University
- Fishbein, M. (1972). Towards an Understanding of Family Planning Behaviour, *Journal of Applied Social Psychology*, 2, 214-227
- Fishbein, M., Jaccard, J.J., Davidson, A.R., Ajzen, I. and Loken, B. (1980). Predicting and Understanding Family Planning Behaviors, pp.130-147 in *Understanding Attitudes and Predicting Social Behaviour*, I. Ajzen and Fishbein, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall
- Freedman, R. (1962). The Sociology of Human Fertility: A Trend Report and Bibliography, *Current Sociology*, 38 10/11
- Goldberger, A.S., Nagar, A.L. and Odeh, H.S. (1961). The covariance matrices of reduced-form coefficients and of forecasts for a structural econometric model, *Econometrica*, vol 29, 4, pp.556-573
- Granger, C.W.J. (1996). The Typical Spectral Shape of an Economic Variable, *Econometrica*, 34(1), 150-161
- Granger, C.W.J. and Newbold, P. (1974). Spurious Regressions in Econometrics, *Journal of Econometrics*, vol 2
- Green, W.H. (2000). *Econometric Analysis*, Prentice Hall International Inc, New York

- Guay, A. and St-Amant, P. (1996). Do Mechanical Filters Provide a Good Approximation of Business Cycles?, *Technical Reports*, Bank of Canada
- Harris, R. (1995). Using Cointegration Analysis in Econometric Modelling, University of Portsmouth, An imprint of Pearson Education
- Harvey, A.C. and Jaeger, A. (1993). Detrending, Stylized Facts and the Business Cycle, *Journal of Applied Econometrics*, 8(3), 231-247
- Harvey, A.C. and Koopman, S.J. (1992). Diagnostic Checking of Unobserved Components Time Series Models, *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 377-390
- Hillmer, S.C. and Tiao, G.C. (1982). An Arima-Model Based Approach to Seasonal Adjustment, *Journal of the Statistical American Association*, 77, 63-70
- Hodrick, R. and Prescott, E. (1980). *Post-War U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation*, Carnegie Mellon University Manuscript
- Hoffman, L.W. and Hoffman, M.L. (1973). The Value of Children to Parents, pp. 19-76 in *Psychological Perspectives on Population*, J.T. Fawcett, New York, Basic Books
- Hoffman, L.W. and Manis, J.D. (1979). The Value of Children in the United States, *Journal of Marriage and the Family*, 41, 583-596
- Jaccard, J.J. and Davidson, A.R. (1971). Toward an Understanding of Family Planning Behaviors, *Journal of Applied Social Psychology*, 2, 228-235
- Jaeger, A. (1994). Mechanical Detrending by Hodrick-Prescott Filtering: A Note, *Empirical Economics*, 19, 493-500
- Johansen, S. (1988). Statistical analysis of cointegration vectors, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 231-254
- Johnston, J. and Dinardo, J. (1997). *Econometric Methods*, McGraw-Hill International Editions
- Kaiser, R. and Maravall, A. (1999). Estimation of the Business Cycle: A Modified Hodrick-Prescott Filter, *Spanish Economic Review*, 1, 175-206
- Kim, K., Buckle, R.A. and Hall, V.B. (1994). Key Features of New Zealand Business Cycles, *The Economic Record*, vol 70(208) pp. 56-73, The Economic Society of Australia
- King, R.G. and Rebelo, S.T. (1989). Low Frequency Filtering and Real Business Cycles, Rochester Center for Economic Research, *Working Paper* no 205
- King, R.G. and Rebelo, S.T. (1993). Low Frequency Filtering and Real Business Cycles, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 207-231
- Koopmans, L.H. (1974). *The Spectral Analysis of Time Series*, New York, Academic Press
- Kydland, F.E. and Prescott, E.C. (1990). Business cycles: Real facts and a Monetary Myth, *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, Spring, 3-18
- Maravall, A. (1988). A Note on Minimum Mean Squared Error Estimation of Signals with Unit Roots, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 13, 81-91

- Maravall, A. and del Rio, A. (2001). Time Aggregation and the Hodrick-Prescott Filter, *Working Paper* 0108, Research Department, Banco de Espana
- Mills, T.C. (2000). *The econometric modelling of financial time series*, Cambridge University Press
- Mitra, S.K. and Kaiser, J.F., eds (1993). *Handbook for Digital Signal Processing*, John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore
- Namboodiri, N.K. (1972). Some Observations on the Economic Framework for Fertility Analysis, *Population Studies*, 26, 185-206
- Nelson, C.R. and Plosser, C.I. (1982). Trends and Random Walks in Macro-Economic Time Series: Some Evidence and Implications, *Journal of Monetary Economics*, 10, 139-162
- Ortega, E. (1998a). Assessing the Fit of Simulated Multivariate Dynamic Models, Documento de Trabajo 9821, Servicio de Estudios, Banco de Espana
- Ortega, E. (1998b). Comparing Evaluation Methodologies for Stochastic Dynamic General Equilibrium Models, Documento de Trabajo 9820, Servicio de Estudios, Banco de Espana
- Osterwald-Lenum, M. (1992). A note with quantiles of the asymptotic distribution of the ML cointegration rank test statistics, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 54, pp. 461-472
- Pakko, M. (1997). The Cyclical Relationship between Output and Prices: An Analysis in the Frequency Domain, *Working Paper* 1997-007B, The Federal Reserve Bank of St. Louis
- Pedersen, T.M. (1999). *Spectral Analysis, Business Cycles and Filtering of Economic Time Series. A Survey*, Institute of Economics, University of Copenhagen, Denmark
- Pesaran, M.H and Shin, Y. (1997). Generalized Impulse Response Analysis in Linear Multivariate Models, *Economics Letters*, 58(1), 17-29
- Pierce, D.A. (1978). *Data Revisions with Moving Average Seasonal Adjustment Procedures*, Federal Reserve Board
- Priestley, M.B. (1981). *Spectral Analysis and Time Series*, New York, Academic Press
- Ravn, M.O. and Uhlig, H. (1997). On Adjusting the HP-Filter for the Frequency of Observations, *Center for Economic Research Discussion Paper* no 9750, Tilburg University
- Sims, C. (1972). Money, Income and causality, *American Economic Review*, 62, 540-552
- Sims, C.A., Stock, J.H. and Watson, M.W. (1990). Inference in linear time series models with unit roots, *Econometrica*, 58, 113-144
- Stock, J.H. (1987). Asymptotic properties of least-square estimators of cointegrating vectors, *Econometrica*, 55, 1035-1056
- Theil, H. and Boot, J.C.G. (1962). The Final Form of Econometric Equation Systems, *Review of the International Statistical Institute*, Vol 30:2, pp. 136-152

- Toda, H.Y. and Phillips, P.C.B. (1993). Vector autoregressions and causality, *Econometrica* 61, 1367-1393
- Toda, H.Y. and Phillips, P.C.B. (1994). Vector autoregressions and causality: a theoretical overview and simulation study, *Economic Reviews*, 13, 259-285
- Toda, H.Y. and Yamamoto, T. (1995). Statistical inference in vector autoregressions with possibly integrated processes, *Journal of Econometrics*, 66, 225-250
- Westoff, C.F. and Potvin, R.H. (1967). *College Women and Fertility Values*, Princeton, Princeton University Press
- Westoff, C.F., Potter, R. Jr, and Sagi, P. (1961). *Family Growth in Metropolitan America*, Princeton, Princeton University Press
- Westoff, C.F., Potter, R. Jr, and Sagi, P. (1963). *The third Child*, Princeton, Princeton University Press
- Whittle, P. (1963). *Prediction and Regulation by Linear Least-Squares Methods*, London: English University Press
- Whittle, P. (1983). *Prediction and Regulation*, 2nd, ed. Oxford
- Wiener, N. (1949). *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series*, Cambridge, Ma: MIT Press
- Woitek, U. (1998). *A Note on the Baxter-King Filter*, Department of Economics, University of Glasgow
- Young, P.C. and Pedregal, D.J. (2001). Some Comments on the Use and Abuse of the Hodrick-Prescott Filter, *Unpublished Paper* presented at the International Conference "New Techniques and Technologies for Statistics - Exchange of Technology and Know-how, Crete 18-22 June 2001