ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΑΞΙΑΣ ΑΣΙΑΤΙΚΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΣΕ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Όλγα Χ. Γιακουμάκη

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Πειραιάς
Ιούνιος 2007

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΑΞΙΑΣ ΑΣΙΑΤΙΚΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΣΕ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Όλγα Χ. Γιακουμάκη

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Πειραιάς
Ιούνιος 2007

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

-Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος

-Κούτρας Μάρκος

-Μπούτσικας Μιχαήλ

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

U N I V E R S I T Y O F P I R A E U S

DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS

ALGORITHMS FOR PRICING ASIAN OPTIONS, BY LATTICES

Olga C. Giakoumaki

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics.

Piraeus
June 2007

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη για το θέμα που μου εμπιστεύτηκε, καθώς επίσης και για τις οδηγίες και συμβουλές του , οι οποίες με βοήθησαν για την διεκπεραίωση αυτής της εργασίας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η τιμολόγηση των παραγώγων αποτελεί ένα σύνθετο πρόβλημα στο χώρο της χρηματοοικονομίας, και αυτό γιατί αναζητά ακριβείς και ταχύτατες μεθόδους. Στη διεθνή βιβλιογραφία υπάρχουν πολλοί τρόποι τιμολόγησης παραγώγων. Άλλοι από αυτούς βασίζονται σε αριθμητικά υποδείγματα, άλλοι στην προσομοίωση Monte Carlo και άλλοι στα γραφήματα (lattice).

Όσον αφορά τα Ασιατικά παραγώγα, που είναι ένα ιδιαίτερο είδος παραγώγων, η τιμολόγησή τους αποτελεί μία ιδιαίτερα χρονοβόρα διαδικασία.

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να παρουσιαστούν κάποιοι αλγόριθμοι με τους οποίους επιτυγχάνεται η μείωση του χρόνου τιμολόγησης Ασιατικών παραγώγων, Ευρωπαικού και Αμερικανικού τύπου, όταν η τιμολόγησή τους γίνεται με τη βοήθεια γραφημάτων.

Στο πρώτο κεφάλαιο, εισάγονται οι έννοιες του παραγώγου και του Ασιατικού παραγώγου. Ακολουθούν οι τρεις τύποι επενδυτών και δίνεται έμφαση στις έννοιες του hedging και του arbitrage. Τέλος, γίνεται μία σύντομη αναφορά στους τρεις τρόπους τιμολόγησης των παραγώγων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, παρουσιάζεται η εξίσωση των Black - Scholes, η επίλυση της οποίας, αποτελεί την πλέον γνωστή αριθμητική μέθοδο τιμολόγησης απλών παραγώγων. Επίσης, δίνονται οι υποθέσεις που πρέπει να ισχύουν για να μπορεί να εφαρμοστεί. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται το διωνυμικό γράφημα των Cox-Ross-Rubinstein, και περιγράφεται μία μέθοδος μείωσης του χρόνου τιμολόγησης Ασιατικών παραγώγων, που προτάθηκε από τους Hull-White (1993) και βασίζεται στην γραμμική παρεμβολή.

Στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας, παρουσιάζεται ο αλγόριθμος μείωσης του χρόνου τιμολόγησης Ασιατικών παραγώγων Ευρωπαικού τύπου, που πρότειναν οι Chalasani, Jha και Varikooty (1998). Αυτοί, κατάφεραν να ομαδοποιήσουν τα δεδομένα και έτσι να ελαττώσουν το πλήθος τους.

Η μέθοδος τιμολόγησης, πάνω στην οποία εφαρμόστηκε ο αλγόριθμος ΄΄ομαδοποίησης΄΄ των δεδομένων, στηρίζεται στην εύρεση άνω και κάτω φραγμάτων. Τελικά, ο χρόνος υπολογισμού αυτών των φραγμάτων είναι ανάλογος του n^4 .

Στο τέταρτο κεφάλαιο, παρουσιάζεται ο αλγόριθμος μείωσης του χρόνου τιμολόγησης , που πρότειναν πάλι οι Chalasani, Jha και Varikooty (1999) αλλά αυτή τη φορά, για Ασιατικά παράγωγα Αμερικανικού τύπου. Αυτός ο αλγόριθμος είναι αντίστοιχος του προηγούμενου, ενώ ο χρόνος υπολογισμού των φραγμάτων της τιμής του παραγώγου είναι και πάλι ανάλογος του n^4 .

Στο πέμπτο κεφάλαιο, παρουσιάζεται το multiresolution lattice και το Integral Trinomial lattice των Dai-Lyuu . Μέσω αυτών των γραφημάτων, αναπτύσσεται η μέθοδος τιμολόγησης που πρότειναν (2004), η οποία είναι εξαιρετικά ακριβής και ταυτόχρονα ιδιαίτερα γρήγορη, αφού ΄΄σπάει΄΄ το φράγμα του εκθετικού χρόνου τιμολόγησης.

ABSTRACT

One of the most important problems in financial field is the option pricing with accurate and fast algorithms. In academic literature there are a lot of pricing methods. These methods can be grouped into three different categories: approximation analytical formulae, Monte-Carlo simulations, and the lattice approach.

Asian options are popular path-dependent derivatives, and it has been a long-standing problem to price them accurately and fastly.

The goal of this dissertation is the presentation of algorithms that reduce the pricing time of Asian options, Eurorean or American, when the pricing method is based on lattice.

In the first chapter, we introduce the definitions of the option and Asian option. Also, we define the three different types of traders and we have given our attention to hedging and arbitrage. Finally, we present three different categories of pricing methods.

In the second chapter, we describe the Black -Scholes equation. Later, we present the C-R-R binomial lattice and then, we describe a powerful aproximation pricing method by Hull-White. This method is based on linear interpolation.

In the third chapter, we describe the algorithm that has been proposed by Chalasani, Jha and Varikooty (1998). This algorithm reduces the pricing time of European Asian options. Chalasani, Jha and Varikooty make groups of stock-price paths in the binomial lattice, according to the value of a certain random variable. Thus, they reduce the number of data and the option´s value computed in time proportional to n^4 .

In the fourth chapter, we describe the algorithm which reduce the pricing time of American Asian options. This algorithm has been proposed by Chalasani, Jha and Varikooty (1999) and it is similar to the previous algorithm. The pricing time is again proportional to n^4 .

In the fifth chapter, we present the multiresolution lattice and the integral trinomial lattice of Dai -Lyuu (2004). The exact pricing algorithm on these lattices, breaks the exponential time barrier.

<u>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</u>

ΛΙΣΤΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

§ 1.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, εισάγονται οι έννοιες του παραγώγου και του Ασιατικού παραγώγου, και αναλύονται τα χαρακτηριστικά τους. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα είδη των επενδυτών των παραγώγων και περιγράφονται οι συνθήκες που πρέπει να ισχύουν για την σωστή τιμολόγησή τους. Τέλος, γίνεται αναφορά στις τρεις βασικές κατηγορίες μεθόδων τιμολόγησης παραγώγων.

§ 1.2 Ορισμός παραγώγου (option) – Διάκριση κατηγοριών

Τις τελευταίες δεκαετίες, τα χρηματοοικονομικά παράγωγα προιόντα έχουν παίξει σημαντικό ρόλο στον κόσμο της οικονομίας. Παράγωγο προιόν είναι μία διμερής σύμβαση η οποία μπορεί να αναφέρεται σε μετοχές, δείκτες μετοχών, ομολογίες, συνάλλαγμα ή και εμπορεύματα. Το παράγωγο προιόν είναι,δηλαδή, ένα χρηματοοικονομικό προιόν του οποίου η αξία εξόφλησης εξαρτάται από την αξία άλλων πολύ βασικών χρηματιστηριακών προϊόντων.

Τα περισσότερα παράγωγα μπορούμε να τα κατατάξουμε σε τέσσερις κατηγορίες: futures (συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης), forwards (προθεσμιακά συμβόλαια), options (δικαιώματα προαίρεσης) και swaps (ανταλλαγές).

Το option (δικαίωμα προαίρεσης) είναι ένα είδος χρηματοοικονομικού παραγώγου, το οποίο δίνει το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, στον κάτοχό του, να αγοράσει ή να πουλήσει κάποιο συγκεκριμένο χρηματοοικονομικό προιόν σε μία προκαθορισμένη τιμή, κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου ή σε μια συγκεκριμένη ημερομηνία στο μέλλον.

Το option διακρίνεται σε δύο είδη: call option (δικαίωμα αγοράς) και put option (δικαίωμα πώλησης). Συγκεκριμένα, call option (δικαίωμα αγοράς) είναι το συμβόλαιο του οποίου ο αγοραστής έχει το δικαίωμα, και όχι την υποχρέωση, να αγοράσει από τον πωλητή συγκεκριμένη ποσότητα της υποκείμενης αξίας σε προκαθορισμένη τιμή κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου ή σε μια συγκεκριμένη ημερομηνία στο μέλλον.

Αντίστοιχα, put option (δικαίωμα πώλησης) είναι το συμβόλαιο του οποίου ο αγοραστής έχει το δικαίωμα, και όχι την υποχρέωση, να πουλήσει στον πωλητή του συμβολαίου, μια συγκεκριμένη ποσότητα της υποκείμενης αξίας σε προκαθορισμένη τιμή κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου ή σε μια συγκεκριμένη ημερομηνία στο μέλλον.

Επίσης, το option (δικαίωμα) διακρίνεται σε δύο τύπους, ανάλογα με τον χρόνο εξάσκησής του : δικαίωμα Ευρωπαικού τύπου, όταν το δικαίωμα μπορεί να ασκηθεί μόνο την ημερομηνία λήξης του συμβολαίου και δικαίωμα Αμερικανικού τύπου, όταν το δικαίωμα μπορεί να ασκηθεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέχρι την ημερομηνία λήξης του συμβολαίου.

Ένα option (δικαίωμα προαίρεσης) χαρακτηρίζεται από τα παρακάτω:

α. Το είδος και τον τύπο του δικαιώματος (αγοράς ή πώλησης, Ευρωπαικού ή Αμερικανικού τύπου)

β. Τον υποκείμενο τίτλο (underlying asset π.χ. μετοχή Α, δείκτης Β)

γ. Το μέγεθος του συμβολαίου (π.χ. 100 μετοχές Α)

δ. Την ημερομηνία λήξης (maturity date T)

ε. Την προκαθορισμένη τιμή εξάσκησης (strike price X)

Κάθε option αποτελεί μια διμερή σύμβαση, μια συμφωνία δηλαδή μεταξύ του αγοραστή και του πωλητή. Ο αγοραστής του δικαιώματος έχει την ευκαιρία να κερδίσει χρήματα, μη έχοντας καμία υποχρέωση. Μπορεί να ασκήσει το δικαίωμα που του παρέχει το συμβόλαιο (είτε να αγοράσει, είτε να πουλήσει υποκείμενους τίτλους) μόνο στην περίπτωση που αυτό τον συμφέρει οικονομικά.

Ας μιλήσουμε συγκεκριμένα για τα δικαιώματα προαίρεσης Ευρωπαικού τύπου. Υπενθυμίζεται ότι αυτά τα δικαιώματα μπορούν να ασκηθούν μόνο την ημερομηνία λήξης του συμβολαίου.

Η αξία του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή άσκησης του δικαιώματος, δηλ. την χρονική στιγμή T , για δικαίωμα αγοράς είναι ίση με :

$$max\,(0, S(T) - \mathrm{X})$$

ενώ για δικαίωμα πώλησης είναι ίση με :

$$max\,(0, \mathrm{X} - S(T))$$

Η ζημιά που θα έχει ο πωλητής, αν ασκηθεί το δικαίωμα αγοράς, γεγονός που θα συμβεί μόνο αν η τιμή του υποκείμενου τίτλου στο Χ.Α.Α. ($S(T)$) είναι μεγαλύτερη από την προσυμφωνηθείσα τιμή του στο γραφείο(Χ), θα είναι ίση με :

$$-\max(0, S(T) - X) = \min(0, X - S(T))$$

Αντίστοιχα, η ζημιά του πωλητή, αν ασκηθεί το δικαίωμα πώλησης,δηλαδή αν η τιμή του υποκείμενου τίτλου στο Χ.Α.Α. ($S(T)$) είναι μικρότερη από την προσυμφωνηθείσα τιμή του στο γραφείο (Χ) , θα είναι ίση με :

$$-\max(0, X - S(T)) = \min(0, S(T) - X)$$

Τα δικαιώματα Αμερικανικού τύπου είναι περισσότερο πολύπλοκα, διότι η εξάσκησή τους γίνεται οποιαδήποτε χρονική στιγμή επιθυμεί ο κάτοχός τους, μέχρι την ημερομηνία λήξης τους. Θεωρούμε τ την χρονική στιγμή εξάσκησης του δικαιώματος.

Η αξία του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή άσκησης του δικαιώματος τ, για δικαίωμα αγοράς είναι ίση με :

$$\max(0, S(\tau) - X)$$

ενώ για δικαίωμα πώλησης είναι ίση με :

$$\max(0, X - S(\tau))$$

Η ζημιά που θα έχει ο πωλητής του συμβολαίου, αν ασκηθεί το δικαίωμα αγοράς την χρονική στιγμή τ, πράγμα που θα συμβεί αν τη χρονική στιγμή τ η τιμή του υποκείμενου τίτλου στο Χ.Α.Α. ($S(\tau)$) είναι μεγαλύτερη από την προσυμφωνηθείσα τιμή του, θα είναι ίση με :

$$-\max(0, S(\tau) - X) = \min(0, X - S(\tau))$$

Αντίστοιχα, η ζημιά του πωλητή του συμβολαίου, αν ασκηθεί το δικαίωμα πώλησης την χρονική στιγμή τ, πράγμα που θα συμβεί αν τη χρονική στιγμή τ η τιμή του υποκείμενου τίτλου στο Χ.Α.Α. ($S(\tau)$) είναι μικρότερη από την προσυμφωνηθείσα τιμή του, (Χ), θα είναι ίση με :

$$-\max(0, X - S(\tau)) = \min(0, S(\tau) - X).$$

Ένα δικαίωμα μπορεί να τιμολογηθεί μέσω ενός διακριτού μοντέλου, ενός μοντέλου δηλαδή στο οποίο ο χρόνος θεωρείται διακριτός.

Η αξία του χαρτοφυλακίου για Ευρωπαικού τύπου δικαιώματα, την χρονική στιγμή λήξης *n* είναι:

$$Ax.Xart. = \begin{cases} \max\left(S_n - \mathrm{X},0\right), agor\acute{a}V \\ \max\left(\mathrm{X} - S_n,0\right), p\acute{\omega}lhshV \end{cases}$$

Αντίστοιχα, η αξία του χαρτοφυλακίου για Αμερικανικού τύπου δικαιώματα, την χρονική στιγμή εξάσκησης *i*, με $i \le n$ είναι :

$$Ax.Xart. = \begin{cases} \max\left(S_i - \mathrm{X},0\right), agor\acute{a}V \\ \max\left(\mathrm{X} - S_i,0\right), p\acute{\omega}lhshV \end{cases}$$

§ 1.3 Είδη επενδυτών

Τα παράγωγα προιόντα κυρίως χρησιμοποιούνται από τράπεζες, αμοιβαία κεφάλαια, διαχειριστές μεγάλων ιδιωτικών κεφαλαίων, ασφαλιστικά ταμεία και ασφαλιστικές εταιρίες, δημόσιες εταιρίες, επενδυτικές εταιρίες, ιδιωτικές επιχειρήσεις.

Τα δικαιώματα προαίρεσης (options), ελκύουν τρεις διαφορετικούς τύπους επενδυτών: αυτούς που αποσκοπούν στην κερδοσκοπία (speculators), αυτούς που αποσκοπούν στην αντιστάθμιση των κινδύνων στα χαρτοφυλάκιά τους (hedgers), και αυτούς που αποσκοπούν στην εξισορροπητική κερδοσκοπία (arbitragers).

Ο κερδοσκόπος (speculator), στοχεύει στο να κερδίσει χρήματα, μέσω των δικαιωμάτων προαίρεσης, προσπαθώντας να κάνει σωστές προβλέψεις για την πορεία του υποκείμενου τίτλου στο μέλλον. Η αβεβαιότητα της αγοράς του επιτρέπει να είναι σε ετοιμότητα για να εκμεταλλευτεί μια επικείμενη άνοδο ή πτώση της.

Ο hedger, προσπαθεί να αποφύγει το ρίσκο που συνεπάγονται οι αγοραπωλησίες των δικαιωμάτων προαίρεσης. Αυτό που τον ενδιαφέρει είναι να εξαλοιφθεί όσο το δυνατόν περισσότερο ο κίνδυνος στο χαρτοφυλάκειό του, ώστε να μπορεί να αντιμετωπίσει μια επικείμενη κρίση.

Τέλος, ο arbitrager ακολουθεί μια στρατηγική αγοραπωλησιών δικαιωμάτων που του επιτρέπει να έχει σίγουρο κέρδος, χωρίς ρίσκο, εξαιτίας της όχι ΄΄δίκαιης΄΄ τιμολόγησης αυτών των δικαιωμάτων.

Θεωρητικά, υπάρχει μια ΄΄δίκαιη΄΄ τιμή για κάθε δικαίωμα προαίρεσης. Η τιμή κάθε δικαιώματος στο Χ.Α.Α. πρέπει να είναι ίση με την ΄΄δίκαιη΄΄ τιμή του. Αν αυτό δεν συμβαίνει, ο arbitrager το εκμεταλλεύεται και έτσι έχει κέρδος.

§ 1.3.1 Παράδειγμα Αντιστάθμισης Κινδύνου (Hedging)

Έστω ότι μία εταιρία Ε στην Taiwan πρέπει να πληρώσει 1000000 USDs (Αμερικανικά δολλάρια) τον επόμενο μήνα. Θεωρούμε ότι το επιτόκιο είναι ίσο με 0 και ότι σήμερα ισχύει η αναλογία : TWD/USD = 35, γεγονός που σημαίνει ότι 1000000 USDs ισοδυναμούν με 35000000 TWDs. Η εταιρία Ε είτε θα αγοράσει σήμερα 1000000 USDs έναντι 35000000 TWDs και τον επόμενο μήνα θα τα πληρώσει, είτε αν δεν έχει 35000000 TWDs σήμερα, θα αγοράσει 1000000 USDs τον επόμενο μήνα. Αν η εταιρία πράξει το δεύτερο, θα πάρει πολύ μεγάλο ρίσκο, αφού ο λόγος TWD/USD μπορεί να αυξηθεί, και έτσι να έχει ζημιά.

Έστω ότι τον επόμενο μήνα η αναλογία TWD/USD γίνει είτε 34 είτε 36. Στην περίπτωση που γίνει ίση με 34, η εταιρία θα έχει κέρδος 1000000 TWDs, αφού θα αγοράσει 1000000 USDs έναντι 34000000 TWDs και όχι έναντι 35000000 TWDs. Αν όμως η αναλογία γίνει ίση με 36, τότε η εταιρία θα ζημιωθεί κατά 1000000 TWDs, αφού θα αγοράσει 1000000 USDs έναντι 36000000 TWDs και όχι έναντι 35000000 TWDs.

Η στρατηγική του hedging δεν αποσκοπεί στην κερδοσκοπία, αλλά στην αντιστάθμιση και εξάλειψη των κινδύνων. Ένα προτεινόμενο δικαίωμα προαίρεσης που θα βοηθούσε την εταιρία να αποφύγει το τεράστιο ρίσκο είναι το εξής: Δικαίωμα αγοράς Ευρωπαικού τύπου, με ημερομηνία λήξης 1 μήνα από σήμερα και τιμή παράδοσης 35 TWDs για κάθε USD. Αν η αναλογία γίνει ίση με 34, η εταιρία δεν θα ασκήσει το δικαίωμα γιατί δεν θα την συμφέρει,και θα αγοράσει από την Χρηματιστηριακή Αγορά. Στην περίπτωση, όμως, που η αναλογία γίνει ίση με 36, τότε θα ασκήσει το δικαίωμα. Και στις δύο περιπτώσεις η εταιρία θα είναι κερδισμένη.

Είναι σημαντικό να υπολογιστεί η ΄΄δίκαιη τιμή΄΄ αυτού του δικαιώματος προαίρεσης (fair price).

§ 1.3.2 ΄΄Δίκαιη τιμή΄΄ δικαιώματος

Στις χρηματοοικονομικές αγορές, αυτός που αγοράζει ένα δικαίωμα προαίρεσης πληρώνει στον πωλητή του, την χρονική στιγμή αγοράς, ένα ποσό που λέγεται ΄΄πριμ δικαιώματος΄΄. Αυτό το ποσό θεωρείται ότι είναι η ΄΄δίκαιη΄΄ τιμή του δικαιώματος. Η

΄΄δίκαιη΄΄ τιμή του δικαιώματος, μπορεί να προκύψει υπό την προυπόθεση ότι δεν υπάρχει δυνατότητα για arbitrage στην αγορά.

Έστω ένα χαρτοφυλάκιο A το οποίο περιλαμβάνει δικαιώματα προαίρεσης. Το χαρτοφυλάκιο κατασκευάζεται έτσι ώστε η μελλοντική αξία του να είναι συνεχώς ίση με την αξία του δικαιώματος. Διαισθητικά, η ΄΄δίκαιη΄΄ τιμή του δικαιώματος πρέπει να είναι ίση με το κόστος κατασκευής του χαρτοφυλακίου A εφόσον οι μελλοντικές αξίες του χαρτοφυλακίου και του δικαιώματος είναι ίσες.

Ας υπολογίσουμε την ΄΄δίκαιη΄΄ τιμή του δικαιώματος που περιγράψαμε στο παραπάνω παράδειγμα.

Θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο A το οποίο αποτελείται από x μονάδες TWDs και y μονάδες USDs.

Έστω ότι τον επόμενο μήνα από σήμερα, η αναλογία TWD/USD είναι ίση με 36, δηλαδή 1 USD ισοδυναμεί με 36 TWDs.

Σε αυτή την περίπτωση, η αξία του δικαιώματος, την χρονική στιγμή λήξης του συμβολαίου, δηλαδή τον επόμενο μήνα, θα είναι ίση με: $V = max\ (36–35,\ 0)*10^6) =10^6$, και η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι ίση με : $36x + y$. Η αξία του δικαιώματος και η αξία του χαρτοφυλακίου πρέπει να είναι ίσες, δηλαδή πρέπει να ισχύει: $36x + y = 10^6$

Έστω ότι τον επόμενο μήνα από σήμερα,η αναλογία TWD/USD είναι ίση με 34, δηλαδή 1 USD ισοδυναμεί με 34 TWDs.

Σε αυτή την περίπτωση, η αξία του δικαιώματος τον επόμενο μήνα, θα είναι ίση με:

$$V = max\ (34–35,\ 0)*10^6) = 0$$

και η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι ίση με :

$$34x + y$$

Η αξία του δικαιώματος και η αξία του χαρτοφυλακίου πρέπει να είναι ίσες, δηλαδή πρέπει να ισχύει:

$$34x + y = 0$$

Λύνοντας τις δύο αυτές εξισώσεις, βρίσκουμε $x = 5*10^5$ και $y = – 1.7*10^7$. Επομένως, το αρχικό κόστος κατασκευής του χαρτοφυλακίου A είναι :

$$35x + y = 5*10^5*35 – 1.7*10^7 = 5*10^5$$

Άρα, η ΄΄δίκαιη΄΄ τιμή του δικαιώματος είναι $5*10^5$.

§ 1.3.3 Arbitrage & Arbitragers

Στην προηγούμενη παράγραφο, ισχυριστήκαμε ότι η ΄΄δίκαιη΄΄ τιμή του δικαιώματος προαίρεσης πρέπει να είναι ίση με την αρχική αξία κατασκευής του χαρτοφυλακίου. Τώρα, θα ισχυριστούμε επιπλέον, ότι η τιμή του δικαιώματος στην αγορά, πρέπει να είναι ίση με την ΄΄δίκαιη΄΄ τιμή του. Αν δεν ισχύει αυτό, οι arbitragers θα μπορούν να επωφεληθούν από την όχι σωστή τιμολόγηση του δικαιώματος και να έχουν σίγουρο κέρδος, χωρίς ρίσκο.

Συγκεκριμένα, όσον αφορά το παράδειγμα της παραγράφου §1.2.1, έχουμε: Θεωρούμε ότι η τρέχουσα τιμή *V* του δικαιώματος στην αγορά είναι μεγαλύτερη από $5*10^5$. Ο arbitrager θα πουλήσει το δικαίωμα αγοράς,θα εισπράξει *V*, και στη συνέχεια θα αγοράσει το χαρτοφυλάκιο Α από το χρηματηστηριακό γραφείο έναντι $5*10^5$. Θα κερδίσει εκείνη τη στιγμή $V – 5*10^5$. Τον επόμενο μήνα, ούτε θα κερδίσει ούτε θα χάσει τίποτα, αφού οι τελικές τιμές του δικαιώματος και του χαρτοφυλακίου, όπως είπαμε παραπάνω, είναι ίσες. Με αυτό τον τρόπο, ο arbitrager θα έχει κέρδος, χωρίς κανένα ρίσκο.

Από την άλλη πλευρά, αν η τρέχουσα τιμή *V* του δικαιώματος στην αγορά είναι μικρότερη από $5*10^5$, ο arbitrager θα ακολουθήσει την εξής στρατηγική: Θα αγοράσει από την αγορά το δικαίωμα έναντι *V* και στη συνέχεια θα πουλήσει το χαρτοφυλάκιο Α στο γραφείο, εισπράτοντας $5*10^5$.Έτσι, θα έχει και πάλι κέρδος $V – 5*10^5$.

Συμπερασματικά λοιπόν, καταλήγουμε στο ότι οι δυνατότητες για arbitrage δεν πρέπει να υφίστανται στην αγορά, διότι κάποιοι ΄΄εξιδανικευμένοι παίκτες΄΄ του χρηματιστηρίου
μπορούν να έχουν πολλά οφέλη, χωρίς κανένα κόστος. Για αυτόν τον λόγο, η τιμή του δικαιώματος στην αγορά πρέπει να είναι ίση με την ΄΄δίκαιη΄΄ τιμή του, και άρα ίση με το κόστος κατασκευής του χαρτοφυλακίου Α, εφόσον οι μελλοντικές αξίες του χαρτοφυλακίου και του δικαιώματος είναι ίσες.

§1.3.4 Απόδοση ουδέτερου ρίσκου

Μία άλλη πρόταση που πρέπει να ισχύει σύμφωνα με την θεωρία του arbitrage pricing προκειμένου να μην υπάρχει δυνατότητα για arbitrage στην αγορά, είναι η εξής: Πρέπει η παρούσα αξία του δικαιώματος να είναι ίση με την παρούσα αξία του αναμενόμενου κέρδους από την χρήση του δικαιώματος, όταν ο υποκείμενος τίτλος ακολουθεί μία γεωμετρική κίνηση Brown. Δηλαδή, πρέπει η αναμενόμενη τιμή του υποκείμενου τίτλου στο χρόνο t, να είναι ίση με το κέρδος που θα είχαμε αν επενδύαμε τα χρήματα που δώσαμε για την αγορά του υποκείμενου τίτλου, σε μια επένδυση χωρίς ρίσκο (π.χ. αμοιβαία κεφάλαια). Σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να πούμε ότι ο υποκείμενος τίτλος προσφέρει ΄΄απόδοση ουδέτερου ρίσκου΄΄ (risk-neutral).

Συγκεκριμένα, όσον αφορά το παραπάνω παράδειγμα, έχουμε: Θεωρούμε ότι τον επόμενο μήνα από σήμερα, 1 USD θα ισοδυναμεί είτε με 36 TWDs με πιθανότητα P, είτε με 34 TWDs με πιθανότητα 1 – P.

Επομένως, πρέπει να ισχύει :

$$36*P + 34*(1–P) = 35*e^{-r/12}$$

όπου r : το ετήσιο επιτόκιο

Θεωρώντας, για ευκολία ότι r = 0, βρίσκουμε ότι P = 0,5.

Η τιμή του δικαιώματος τον επόμενο μήνα, στην περίπτωση που το 1 USD ισοδυναμεί με 36 TWDs, είναι :

$$max\,(36–35,\ 0)*10^6) =10^6$$

Η τιμή του δικαιώματος τον επόμενο μήνα, στην περίπτωση που το 1 USD ισοδυναμεί με 34 TWDs, είναι :

$$max\,(34–35,\ 0)*10^6) = 0$$

Σύμφωνα με τη θεωρία της απόδοσης ουδέτερου ρίσκου (risk-neutral), η αρχική τιμή του δικαιώματος Vo, πρέπει να είναι ίση με την παρούσα αξία της αναμενόμενης τιμής του χαρτοφυλακίου.

Δηλαδή, πρέπει :

$$V_o = e^{-r/12} \cdot E(V_1) \Leftrightarrow V_o = \frac{10^6 \times P + 0 \times (1-P)}{e^{r/12}} = 5 \times 10^5$$

(r = 0 , P = 0.5)

Συγκεντρωτικά, για ένα μοντέλο συνεχούς χρόνου, η αξία ενός Ευρωπαικού τύπου δικαιώματος, μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$V_0 = \begin{cases} e^{-rT} \cdot E\Big(\max\big(S(T) - \mathrm{X}, 0\big)\Big), agor\acute{a}V \\ e^{-rT} \cdot E\Big(\max\big(\mathrm{X} - S(T), 0\big)\Big), p\acute{\omega}lhshV \end{cases}$$

Αντίστοιχα, η αξία ενός Αμερικανικού τύπου δικαιώματος, μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$V_0 = \begin{cases} E\left(e^{-r\cdot t} \cdot \max\left(S(t) - \mathrm{X}, 0\right)\right), agor\acute{a}V \\ E\left(e^{-r\cdot t} \cdot \max\left(\mathrm{X} - S(t), 0\right)\right), p\acute{\omega}lhshV \end{cases}$$

όπου τ : η χρονική στιγμή στην οποία θα ασκηθεί το δικαίωμα.

Για ένα μοντέλο διακριτού χρόνου, η αξία ενός Ευρωπαικού τύπου δικαιώματος, μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$V_0 = \begin{cases} e^{-r\cdot n} \cdot E\left(\max\left(S_n - \mathrm{X}, 0\right)\right), agor\acute{a}V \\ e^{-r\cdot n} \cdot E\left(\max\left(\mathrm{X} - S_n, 0\right)\right), p\acute{\omega}lhshV \end{cases}$$

Αντίστοιχα, η αξία ενός Αμερικανικού τύπου δικαιώματος, μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$V_0 = \begin{cases} E\left(e^{-r\cdot i\cdot \Delta t} \cdot \max\left(S_i - \mathrm{X}, 0\right)\right), agor\acute{a}V \\ E\left(e^{-r\cdot i\cdot \Delta t} \cdot \max\left(\mathrm{X} - S_i, 0\right)\right), p\acute{\omega}lhshV \end{cases}$$

όπου i : το χρονικό ΄΄βήμα΄΄ στο οποίο θα ασκηθεί το δικαίωμα.

§ 1.4 Εξαρτώμενα δικαιώματα (path-dependent options)

Εξαιτίας της γρήγορα αναπτυσσόμενης χρηματοοικονομικής αγοράς, έχουν δημιουργηθεί σύνθετα δικαιώματα προαίρεσης (nonstandardized options), τα οποία είναι προσαρμοσμένα κατάλληλα στις απαιτήσεις των πελατών. Η αξία πολλών από αυτών των δικαιωμάτων εξαρτάται από την πορεία της αξίας άλλων χρηματιστηριακών παραγόντων, και για αυτόν τον λόγο ονομάζονται path-dependent options.Είναι δηλαδή options που η αξία εξόφλησής τους βασίζεται ουσιαστικά στις τιμές που έχει πάρει στο παρελθόν ο υποκείμενος τίτλος στον οποίο αναφέρονται.

Η συνάρτηση τιμολόγησής τους μπορεί να εξαρτάται από την μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή που έχει πάρει ο υποκείμενος τίτλος στην αγορά, ή από τον μέσο των παρελθόντων τιμών του. Επίσης, μπορεί να εξαρτάται από το κατά πόσο η τιμή του υποκείμενου τίτλου στην αγορά έχει ΄΄χτυπήσει΄΄ την τιμή στόχο που έχει δωθεί, ή από το κατά πόσο η τιμή στην αγορά βρίσκεται ανάμεσα σε δύο τιμές στόχους για συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Τα path-dependent options παίζουν σημαντικό ρόλο στις χρηματοοικονομικές αγορές και η ακριβής και αποτελεσματική τιμολόγησή τους αποτελεί ένα σύνθετο πρόβλημα.

Ασιατικά δικαιώματα

Ένα path-dependent option είναι το Asian option (Ασιατικό δικαίωμα προαίρεσης). Το Ασιατικό δικαίωμα είναι ένα δικαίωμα, του οποίου η αξία εξόφλησης δεν βασίζεται στην τιμή του υποκείμενου τίτλου την στιγμή εξάσκησης του δικαιώματος, αλλά καθορίζεται από την μέση τιμή της αξίας του υποκείμενου τίτλου κατά τη διάρκεια ισχύος του συμβολαίου ή κατά τη διάρκεια μιας συγκεκριμένης χρονικής περιόδου μέχρι τη λήξη του συμβολαίου. Ο μέσος που χρησιμοποιείται είναι είτε ο αριθμητικός, είτε ο γεωμετρικός, και ο χρόνος είναι είτε διακριτός είτε συνεχής.

Τα Ασιατικά δικαιώματα προτάθηκαν από τον Ingersoll το 1987. Αυτά, ασκήθηκαν για πρώτη φορά (1987) στο Tokyo από το Banker's Trust Tokyo Office, και αφορούσαν ακατέργαστο πετρέλαιο.

Η χρήση των Ασιατικών δικαιωμάτων είναι αρκετά διαδεδομένη και συχνή, και αυτό γιατί η τιμή τους βασίζεται στον μέσο όρο της αξίας του υποκείμενου τίτλου και έτσι, οι επενδυτές αυτών των δικαιωμάτων δεν είναι εκτεθειμένοι στις όποιες μεταβολές μπορεί να παρουσιάσει η τιμή του υποκείμενου τίτλου. Οι επενδυτές, δηλαδή, προστατεύονται από το volatility risk της αγοράς.

Επιπλέον, τα Ασιατικά δικαιώματα είναι χρήσιμα για την αντιστάθμιση των κινδύνων που υπάρχουν στις εμπορικές συναλλαγές, όταν το κόστος αυτών των συναλλαγών σχετίζεται με την μέση τιμή του υποκείμενου τίτλου στον οποίο αναφέρονται (π.χ. ακατέργαστο πετρέλαιο).

Τέλος, τα Ασιατικά δικαιώματα είναι φθηνότερα από τα αντίστοιχα απλά δικαιώματα.

§ 1.4.1 Βασικές σχέσεις για Ασιατικά δικαιώματα

Όπως είπαμε και παραπάνω, το Ασιατικό δικαίωμα είναι ένα δικαίωμα, του οποίου η αξία εξόφλησης καθορίζεται από την μέση τιμή της αξίας του υποκείμενου τίτλου κατά τη διάρκεια μιας συγκεκριμένης χρονικής περιόδου.

Θεωρούμε ως A(t) τη μέση τιμή της αξίας του υποκείμενου τίτλου στο χρονικό διάστημα [0 , t] :

$$A(t)=\frac{\int_0^t S(u)\,du}{t}$$

Η αξία ενός Ευρωπαικού τύπου Ασιατικού δικαιώματος, την ημερομηνία λήξης του συμβολαίου *T*, είναι:

$$V_T=\begin{cases}\max\left(A(T)-X,0\right), agor\acute{a}V\\ \max\left(X-A(T),0\right), p\acute{\omega}lhshV\end{cases}$$

Η αξία ενός Αμερικανικού τύπου Ασιατικού δικαιώματος, τον χρόνο εξάσκησης τ , είναι:

$$V_t=\begin{cases}\max\left(A(t)-X,0\right), agor\acute{a}V\\ \max\left(X-A(t),0\right), p\acute{\omega}lhshV\end{cases}$$

Για μοντέλο διακριτού χρόνου , η μέση τιμή της αξίας του υποκείμενου τίτλου ορίζεται ως εξής:

$$A_j=\frac{\sum_{i=0}^{j} S_i}{j+1}$$

Έτσι, η αξία ενός Ευρωπαικού τύπου Ασιατικού δικαιώματος, στον χρόνο λήξης του συμβολαίου *n*, είναι:

$$V_n=\begin{cases}\max\left(A_n-X,0\right), agor\acute{a}V\\ \max\left(X-A_n,0\right), p\acute{\omega}lhshV\end{cases}$$

Η αξία ενός Αμερικανικού τύπου Ασιατικού δικαιώματος, τον χρόνο εξάσκησης ***i***, είναι:

$$V_i=\begin{cases}\max\left(A_i-X,0\right), agor\acute{a}V\\ \max\left(X-A_i,0\right), p\acute{\omega}lhshV\end{cases}$$

§ 1.4.2 Τιμολόγηση Ασιατικών δικαιωμάτων σύμφωνα με τη θεωρία απόδοσης ουδέτερου ρίσκου

Η αξία του Ασιατικού δικαιώματος, μπορεί να υπολογιστεί, όπως και προηγουμένως, σύμφωνα με τη θεωρία της απόδοσης ουδέτερου ρίσκου (risk-neutral).

Επομένως, ισχύουν τα εξής:

Για μοντέλο συνεχούς χρόνου, η αξία ενός Ευρωπαικού τύπου Ασιατικού δικαιώματος, είναι ίση με :

$$V_0 = \begin{cases} e^{-r \cdot T} \cdot E\left(\max\left(A(T) - \mathrm{X}, 0\right)\right), agor\,\acute{\alpha}V \\ e^{-r \cdot T} \cdot E\left(\max\left(\mathrm{X} - A(T), 0\right)\right), p\,\acute{\omega}\,l\,h\,s\,hV \end{cases}$$

Αντίστοιχα, η αξία ενός Αμερικανικού τύπου Ασιατικού δικαιώματος, είναι ίση με :

$$V_0 = \begin{cases} E\left(e^{-r \cdot t} \cdot \max\left(A(t) - \mathrm{X}, 0\right)\right), agor\,\acute{\alpha}V \\ E\left(e^{-r \cdot t} \cdot \max\left(\mathrm{X} - A(t), 0\right)\right), p\,\acute{\omega}\,l\,h\,s\,hV \end{cases}$$

όπου τ : η χρονική στιγμή στην οποία θα ασκηθεί το δικαίωμα.

Για μοντέλο διακριτού χρόνου, η αξία ενός Ευρωπαικού τύπου Ασιατικού δικαιώματος, ισούται με :

$$V_0 = \begin{cases} e^{-r \cdot n} \cdot E\left(\max\left(A_n - \mathrm{X}, 0\right)\right), agor\,\acute{\alpha}V \\ e^{-r \cdot n} \cdot E\left(\max\left(\mathrm{X} - A_n, 0\right)\right), p\,\acute{\omega}\,l\,h\,s\,hV \end{cases}$$

Αντίστοιχα, η αξία ενός Αμερικανικού τύπου Ασιατικού δικαιώματος, μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$V_0 = \begin{cases} E\left(e^{-r \cdot i \cdot \Delta t} \cdot \max\left(A_i - \mathrm{X}, 0\right)\right), agor\,\acute{\alpha}V \\ E\left(e^{-r \cdot i \cdot \Delta t} \cdot \max\left(\mathrm{X} - A_i, 0\right)\right), p\,\acute{\omega}\,l\,h\,s\,hV \end{cases}$$

όπου i : το χρονικό ΄΄βήμα΄΄ στο οποίο θα ασκηθεί το δικαίωμα.

§ 1.5 Αναφορά στις μεθόδους τιμολόγησης Ασιατικών παραγώγων

Η ακριβής και γρήγορη τιμολόγηση των Ασιατικών δικαιωμάτων αποτελεί ένα σημαντικό και δύσκολο πρόβλημα στο χρηματοοικονομικό πεδίο. Μέχρι σήμερα, στη διεθνή βιβλιογραφία έχουν προταθεί αρκετές προσεγγιστικές μέθοδοι τιμολόγησης τέτοιων δικαιωμάτων, πολλές από τις οποίες όμως παρουσιάζουν προβλήματα στην ακρίβεια και στον χρόνο υπολογισμού. Αυτές οι προσεγγιστικές μέθοδοι τιμολόγησης κατατάσσονται σε τρείς κατηγορίες:

1. αριθμητικές μέθοδοι

2. προσομοίωση Monte-Carlo

3. γραφήματα

§ 1.5.1 Αριθμητικές μέθοδοι τιμολόγησης

Το μεγαλύτερο πρόβλημα στην τιμολόγηση των Ασιατικών δικαιωμάτων, είναι το ότι δεν γνωρίζουμε πολλά πράγματα σχετικά με την κατανομή της μέσης τιμής των αξιών του υποκείμενου τίτλου $A(T)$.

Η μέση τιμή των αξιών του υποκείμενου τίτλου $A(T)$, μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα από λογαριθμοκανονικές τυχαίες μεταβλητές. Η συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας αυτής της κατανομής δεν είναι διαθέσιμη.

Πολλές εργασίες που ανήκουν στην κατηγορία των αριθμητικών μεθόδων τιμολόγησης, προσπαθούν να προσεγγίσουν την συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας της μέσης τιμής των αξιών του υποκείμενου τίτλου $A(T)$. Ενδεικτικά, οι Turnbull και Wakeman (1991), όπως και ο Levy (1992), προσπάθησαν να προσεγγίσουν την σ.π.π. του A, μέσω του αναπτύγματος Edgeworth. Οι Milevsky και Posner (1998) την προσέγγισαν μέσω της κατανομής της αντίστροφης Γάμμα. Οι Caverhill, Clewlow και Benhamou (1990), χρησιμοποίησαν τον μετασχηματισμό Fourier προκειμένου να προσεγγίσουν την συνάρτηση τιμολόγησης την ημερομηνία λήξης του συμβολαίου. Οι Hull-White (1993) πρότειναν μεθόδους παρεμβολής για την τιμολόγηση path-dependent δικαιωμάτων. Την ίδια χρονιά, οι Geman και Yor χρησιμοποίησαν τον μετασχηματισμό Laplace προσαρμοσμένο σε Ασιατικά δικαιώματα , και οι Geman, Eydeland και Shaw χρησιμοποίησαν τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. Οι Abate και Whitt (1995), πρότειναν κάποιους αλγόριθμους βασισμένους στις μεθόδους των Euler και των Post-Widder. Οι Rogers και Shi (1995) πρότειναν άνω και κάτω φράγματα της αξίας του δικαιώματος. Τέλος, ο Zhang (2001) προσέγγισε την αξία του δικαιώματος προσαρμόζοντας σε μία αναλυτική μέθοδο μια αριθμητική εφαρμογή.

Το μεγαλύτερο πρόβλημα των περισσότερων προσεγγιστικών αριθμητικών μεθόδων, είναι το γεγονός ότι στερούνται έλεγχο σφάλματος. Επίσης, πολλές από αυτές τις μέθοδους, δεν δίνουν ακριβή και αξιόπιστα αποτελέσματα. Επιπροσθέτως, η αξία του Αμερικανικού τύπου Ασιατικού δικαιώματος δεν μπορεί να προσεγγιστεί από αυτές τις μεθόδους εύκολα.

§ 1.5.2 Προσομοίωση Monte – Carlo

Η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία το 1977 από τον Boyle. Λίγες δεκαετίες αργότερα, προτάθηκαν αρκετές μέθοδοι προσέγγισης της αξίας Αμερικανικών δικαιωμάτων, οι οποίες βασίζονταν στην προσομοίωση Monte Carlo. Άλλες από αυτές τις μεθόδους προσπάθησαν να πλησιάσουν στην εύρεση συνάρτησης που να οδηγεί στην αξία του δικαιώματος και άλλες ασχολήθηκαν με τον καθορισμό χρονικών ορίων για την πρόωρη εξάσκηση του δικαιώματος.

Η προσεγγιστική μέθοδος Monte-Carlo, συνοπτικά, είναι η εξής: Το χρονικό διάστημα μεταξύ της στιγμής αγοράς του συμβολαίου και της στιγμής εξάσκησης του δικαιώματος διαχωρίζεται σε μικρότερα χρονικά διαστήματα (time steps). Στη συνέχεια, θεωρώντας ότι ο χρόνος είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή, προσομοιώνονται κάποια απ'τα ΄΄μονοπάτια΄΄ (paths) των τιμών που ακολουθεί η υποκείμενη αξία. Κάθε ένα από αυτά τα ΄΄μονοπάτια΄΄ είναι μία σειρά από τιμές που παίρνει ο υποκείμενος τίτλος σε κάθε χρονική στιγμή. Η αξία του δικαιώματος υπολογίζεται ξεχωριστά σε κάθε μονοπάτι, και τελικά, υπολογίζεται η μέση αξία του δικαιώματος.

Εργασίες που αναφέρονται στη μέθοδο προσομοίωσης Monte Carlo είναι των Kemma και Vorst (1990), των Broadie και Glasserman (1997), των Broadie, Glasserman και Kou (1999), των Fu, Wu, Laprise, Madan και Su (2001), και των Longstaff και Schwartz (2001).

Πιο συγκεκριμένα, οι Broadie και Glasserman (1997), πρότειναν αλγορίθμους που βασίζονται σε προσομοιωμένα ΄΄μονοπάτια΄΄ τιμών του υποκείμενου τίτλου, και που οδηγούν στη δημιουργία μεροληπτικών εκτιμητών οι οποίοι συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές των Αμερικανικών δικαιωμάτων.

Οι Longstaff και Schwartz (2001), ανέπτυξαν μία προσεγγιστική μέθοδο τιμολόγησης Αμερικανικών δικαιωμάτων, η οποία ήταν ένας συνδυασμός των μεθόδων ελαχίστων τετραγώνων και Monte Carlo, και δημοσίευσαν αρκετά αριθμητικά παραδείγματα με τα οποία απεδείκνυαν την αποτελεσματικότητα της μεθόδου τους.

Προκειμένου να τιμολογηθεί ένα Ευρωπαικού τύπου Ασιατικό δικαίωμα, η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo χωρίζει το χρονικό διάστημα μεταξύ του χρόνου έναρξης και λήξης του συμβολαίου σε n χρονικές στιγμές. Στη συνέχεια, προσομοιώνει το κάθε

´´μονοπάτι´´ τιμών που ακολουθεί ο υποκείμενος τίτλος, μέσω του παρακάτω τύπου:

$$S_i = S_{i-1} \cdot exp[(r\text{-}0{,}5\sigma^2)\Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot w\,]$$

όπου S_i : η τιμή του υποκείμενου τίτλου την χρονική στιγμή i , $\Delta t = T/n$,

ω : τυχαία μεταβλητή από την τυποποιημένη κανονική κατανομή ($\omega \sim Z(0,1)$)

Σημειώνεται ότι η κατανομή του τυχαίου διανύσματος ($S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n$) είναι η ίδια με την κατανομή του τυχαίου διανύσματος ($S(0)$, $S(\Delta t)$, $S(2\Delta t)$, … ,$S(n\Delta t)$).

Η μέση τιμή των τιμών σε κάθε ´´μονοπάτι´´ υπολογίζεται από τον τύπο :

$$A_j = \frac{\sum_{i=0}^{j} S_i}{j+1}$$

Έτσι, η αξία του Ασιατικού δικαιώματος Ευρωπαικού τύπου, την χρονική στιγμή n, για κάθε ´´μονοπάτι´´ τιμών του υποκείμενου τίτλου, υπολογίζεται από τον τύπο:

$$V_n = \begin{cases} \max\left(A_n - \mathrm{X}, 0\right), agor\acute{a}V \\ \max\left(\mathrm{X} - A_n, 0\right), p\acute{\omega}lhshV \end{cases}$$

Τελικά, η τιμή του δικαιώματος είναι ίση με τον μέσο των τιμών του δικαιώματος σε κάθε ´´μονοπάτι´´.

Από τους πρώτους που ασχολήθηκαν με την τιμολόγηση Ασιατικών δικαιωμάτων Ευρωπαικού τύπου χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Monte-Carlo ήταν οι Kemma και Vorst (1990).

Η μέθοδος Monte Carlo παρουσιάζει τα παρακάτω προβλήματα:

1. Το αποτέλεσμα της τιμολόγησης εξαρτώνται από το τυχαίο δείγμα τιμών της ω.

2. Για να προκύψουν ικανοποιητικά αποτελέσματα από την τιμολόγηση, θα πρέπει να προσομοιωθεί πολύ μεγάλος αριθμός μονοπατιών των τιμών του υποκείμενου τίτλου.

3. Τα Αμερικανικού τύπου δικαιώματα δεν μπορούν να τιμολογηθούν εύκολα .

Κάποιες από τις εργασίες που αναφέρονται στα τρία πρώτα προβλήματα της μεθόδου Monte Carlo είναι οι εξής: των Boyle, Broadie και Glasserman, των Broadie και Glasserman, των Broadie, Glasserman και Kou, των Kemma και Vorst, και των Lapeyre και Temam. Αυτοί προσπάθησαν να μειώσουν την διακύμανση των αποτελεσμάτων της τιμολόγησης και να βελτιώσουν την ποιότητα της τυχαίας μεταβλητής (ω) που χρησιμοποιείται.

§ 1.5.3 Γραφήματα (Lattice)

Το γράφημα είναι μία αναπαράσταση της πορείας της τιμής του υποκείμενου τίτλου σε διακριτό χρόνο. Το χρονικό διάστημα ισχύος του δικαιώματος [0 ,T], όπου 0: ο αρχικός χρόνος ισχύος και T: ο χρόνος λήξης, διαιρείται σε n ίσες χρονικές στιγμές (time steps). Το μήκος κάθε χρονικού διαστήματος είναι $\Delta t = T/n$.

Το γράφημα αποτελείται από κόμβους και κλαδιά που συνδέουν τους κόμβους μεταξύ τους. Κάθε κόμβος που υπάρχει τη χρονική στιγμή i, δείχνει την πιθανή τιμή του τίτλου, τη χρονική στιγμή i. Κάθε κλαδί που συνδέει l κόμβους, αναπαριστά την πιθανή εξέλιξη της τιμής του τίτλου.

Η τιμολόγηση Ασιατικών παραγώγων μέσω γραφημάτων είναι μια δύσκολη διαδικασία, διότι η αξία αυτών των δικαιωμάτων εξαρτάται από την πορεία των τιμών του αντίστοιχου υποκείμενου τίτλου στο παρελθόν, και συνεπώς η τιμολόγησή τους είναι αρκετά χρονοβόρα.

Πολλοί είναι αυτοί που ασχολήθηκαν με την τιμολόγηση Ασιατικών παραγώγων μέσω γραφημάτων.

Μια πολύ επιτυχημένη προσέγγιση έγινε από τους Hull – White (1993), οι οποίοι μείωσαν τον χρόνο υπολογισμού της τιμής του παραγώγου, περιορίζοντας τον αριθμό των πιθανών αθροισμάτων των τιμών του υποκείμενου τίτλου που αντιστοιχούσαν σε κάθε κόμβο, σε έναν συγκεκριμένο αριθμό κ. Στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας, παρουσιάζεται εκτενέστερα, η συγκεκριμένη μέθοδος.

Οι Ritchken, Sankarasubramanian και Vijh (1993) και αργότερα ο Klassen (2001), πρότειναν αλγορίθμους τάξης $O(kn^2)$, οι οποίοι όμως δεν ήταν αρκετά ακριβείς, εξαιτίας των σφαλμάτων παρεμβολής.

Οι Barraquand και Pudet (1996), καθώς επίσης και οι Forsyth, Vetzal και Zvan (2001), ασχολήθηκαν με τη σύγκλιση των προσεγγιστικών αποτελεσμάτων των μέχρι τότε αλγορίθμων προς τις πραγματικές τιμές του παραγώγου.

Οι Rogers-Shi (1995), και αργότερα οι Chalasani, Jha και Varikooty (1998,1999), προσέγγισαν τις τιμές των Ασιατικών παραγώγων, δημιουργώντας άνω και κάτω φράγματα. Αυτοί, πρότειναν αλγόριθμους μείωσης του χρόνου τιμολόγησης, τους οποίους περιγράφουμε στο τρίτο και τέταρτο κεφάλαιο της εργασίας.

Τέλος, οι Dai και Lyuu (2002,2004), πρότειναν μια μέθοδο τιμολόγησης Ασιατικών παραγώγων μέσω trinomial lattice, η οποία είναι απόλυτα ακριβής και επιπλέον ΄΄σπάει΄΄ το φράγμα του εκθετικού χρόνου. Αυτή η μέθοδος, αναπτύσσεται στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΚΥΡΙΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

§ 2.1 Εισαγωγή

Αυτό το κεφάλαιο χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος, αναλύεται ο τρόπος με τον οποίο δημιουργήθηκε η μερική διαφορική εξίσωση των Black – Scholes, η επίλυση της οποίας, αποτελεί την πλέον γνωστή αριθμητική μέθοδο τιμολόγησης απλών παραγώγων.

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου, παρουσιάζεται το διωνυμικό γράφημα των Cox-Ross-Rubinstein, και περιγράφεται μία μέθοδος μείωσης του χρόνου τιμολόγησης Ασιατικών παραγώγων, που προτάθηκε από τους Hull-White, το 1993.

Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου, η παράγραφος §2.1.1 είναι εισαγωγική και αναφέρεται στην εξίσωση των Black – Scholes και στις αιτίες απόκλισης της υπολογίσιμης τιμής του παραγώγου, μέσω αυτής, από την πραγματική. Στην §2.1.2 ορίζεται και περιγράφεται η κίνηση Brown, ενώ στην παράγραφο §2.1.3 αναφέρεται το λήμμα του Itô. Τέλος, στην παράγραφο §2.1.4 δίνεται η εξίσωση των Black – Scholes και στην παράγραφο §2.1.5 σημειώνονται οι υποθέσεις που πρέπει να ισχύουν για να μπορεί να εφαρμοστεί η εξίσωση.

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου, η παράγραφος §2.2.1 είναι εισαγωγική. Στην παράγραφο §2.2.2 παρουσιάζεται το διωνυμικό γράφημα των Cox-Ross-Rubinstein , και στις παραγράφους §2.2.3_A και §2.2.3_B περιγράφεται ο τρόπος κατασκευής binomial και l-nomial γραφήματος, αντίστοιχα. Στην παράγραφο §2.2.4 δίνεται ένα παράδειγμα κατασκευής διωνυμικού γραφήματος με n = 2. Στη συνέχεια, στην παράγραφο §2.2.5 δίνονται οι τύποι που χρησιμοποιούνται για την τιμολόγηση απλών και Ασιατικών δικαιωμάτων, μέσω της backward recursion. Τέλος, στην παράγραφο §2.2.6 αναπτύσσεται η μέθοδος μείωσης του χρόνου τιμολόγησης Ασιατικών παραγώγων, των Hull-White (1993), ενώ στην παράγραφο §2.2.7 δείχνεται ο τρόπος εύρεσης των δεδομένων που λείπουν, μέσω της γραμμικής παρεμβολής.

Α΄ ΜΕΡΟΣ

ΕΞΙΣΩΣΗ BLACK-SCHOLES

§ 2.1.1 Εξίσωση Black-Scholes

Η μαθηματική επεξεργασία των χρηματοοικονομικών προιόντων, και ιδιαίτερα των παραγώγων προαίρεσης, έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία μιας συγκεκριμένης μερικής διαφορικής εξίσωσης,της εξίσωσης των Black – Scholes. Αυτή η εξίσωση προκύπτει από τον συνδυασμό μιας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης, και της συνθήκης του μη βέβαιου κέρδους.

Η εξίσωση των Black – Scholes χρησιμοποιείται για να τιμολογηθεί ένα παράγωγο προιόν. Γνωρίζοντας την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος X, την αρχική αξία του υποκείμενου τίτλου S_0 ,τον χρόνο εξάσκησης t, το επιτόκιο της αγοράς r, και έχοντας εκτιμήσει την διακύμανση σ^2, προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης, η τιμή του δικαιώματος, η οποία δεν οδηγεί σε σίγουρο κέρδος (no arbitrage option price).

Είναι πιθανό, η τιμή που προκύπτει από την εξίσωση των Black – Scholes, να διαφέρει από την πραγματική τιμή του δικαιώματος στην αγορά. Αυτό οφείλεται κυρίως στον τρόπο με τον οποίο εκτιμάται το σ. Κάποιοι αναλυτές προτείνουν να εκτιμάται μέσω της τιμής του δικαιώματος στην αγορά, ενώ κάποιοι άλλοι το εκτιμούν μέσω της εξέλιξης της τιμής του τίτλου στο παρελθόν.

Επίσης, η απόκλιση της πραγματικής τιμής του δικαιώματος από την τιμή που προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης των Black – Scholes, οφείλεται και στο γεγονός ότι στην πραγματικότητα οι τιμές του υποκείμενου τίτλου δεν ακολουθούν τη γεωμετρική κίνηση Brown, αλλά προσέγγιση αυτής.

Τέλος, η τιμή ενός δικαιώματος εξαρτάται και από άλλους παράγοντες, όπως είναι η ΄΄ψυχολογία΄΄ της αγοράς, η ρευστότητα της αγοράς στους συγκεκριμένους υποκείμενους τίτλους, η απόδοση της αγοράς στο σύνολό της κ.α.

§ 2.1.2 Κίνηση Brown

Η τιμή που παίρνει ο υποκείμενος τίτλος καθώς επίσης και το επιτόκιο, είναι στοχαστικές ανελίξεις. Είναι, δηλαδή, μεταβλητές που αλλάζουν τιμές στο πέρασμα του χρόνου, με τυχαίο τρόπο. Η τυχαιότητα αυτών των ακολουθιών συνήθως κατευθύνεται από θεμελιώδεις στοχαστικές ανελίξεις, όπως είναι η κίνηση Brown. Θεωρούμε B_t την κίνηση Brown, όπου B_s είναι η τιμή της ανέλιξης στον χρόνο s.

Για την ανέλιξη Brown ισχύουν τα εξής:

1. Οι προσαυξήσεις της είναι ανεξάρτητες, δηλαδή η ποσότητα $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη από το B_u, όπου $0 \leq u \leq s$.

2. Οι προσαυξήσεις είναι ισόνομες και μάλιστα ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση $(t - s)\cdot\sigma^2$.

3. Τα B_t είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου *t*.

Η κίνηση Brown με συντελεστή ολίσθησης (drift), περιγράφεται από την στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dx = \mu dt + \sigma dW$$

$$x(t_0) = x_0$$

ή αλλιώς

$$x(t) = x_0 + \mu \cdot \int_{t_0}^{t} ds + s \cdot \int_{t_0}^{t} dW(s)$$

όπου $W(s)$: η τυπική κίνηση Brown σε δεδομένο χώρο πιθανότητας (Ω, F, P) (ή στοχαστική διαδικασία Wienner), x_0 : η αρχική συνθήκη, μ : ο συντελεστής ολίσθησης και σ : η τυπική απόκλιση.

Ισχύει:

$$\int_{t_0}^{t} dW(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_{j=0}^{N-1} \left[W(s_{j+1}) - W(s_j) \right] = W(t) - W(t_0)$$

όπου $\Delta s = (t - t_0)/N$, N : ο αριθμός των χρονικών βημάτων

Επομένως, η κίνηση Brown με συντελεστή ολίσθησης , δίνεται από τη σχέση:

$$x(t) = x_0 + \mu(t - t_0) + \sigma[W(t) - W(t_0)]$$

Η στοχαστική διαφορική εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη της τιμής του υποκείμενου τίτλου που αντιστοιχεί σε ένα παράγωγο είναι η εξής:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

όπου *S* : στοχαστική μεταβλητή

Η παραπάνω εξίσωση είναι ισοδύναμη με την du = μdt + σdW, για u = lnS, και έτσι, με αυτόν τον τρόπο, το πρόβλημα ανάγεται σε απλής μορφής κίνηση Brown.

Η μεταβλητή S δεν είναι διαφορίσιμη, και έτσι δεν ισχύει: du(t) = $\frac{dS(t)}{S(t)}$

§ 2.1.3 Λήμμα Itô

Έστω X(t) μία στοχαστική ανέλιξη Itô . Τότε, ισχύει:

dX(t) = α(X,t)dt + b(X,t)dWt

X(0) = x_0

Θεωρούμε *u(t,x)* μία συνάρτηση με ανεξάρτητες μεταβλητές *t* , *x*.

Τότε, ισχύει:

$$du(X,t)=\left[\frac{\partial u}{\partial t}+a(X,t)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}b^2(X,t)\right]dt+b(X,t)\frac{\partial u}{\partial x}dW$$

Απόδειξη

$$du(X,t)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(dx)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(dt)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}dxdt\right)+\ldots =$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}(adt+bdW)+\frac{\partial u}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(adt+bdW)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(dt)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}(a\,dt+bdW)dt\right)+\ldots$$

$$=\left[\frac{\partial u}{\partial t}+a(X,t)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}b^2(X,t)\right]dt+b(X,t)\frac{\partial u}{\partial x}dW+O(dt)^{3/2}$$

Αν εφαρμόσουμε το λήμμα του Itô στο *u = lnS* , όπου για το *S* ισχύει:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

και είναι : *X= S, α(X,t) = μ·S, b(X, t) = σ ·S,* τότε θα έχουμε:

$$du(X,t)=\left[\frac{\partial u}{\partial t}+a(X,t)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}b^2(X,t)\right]dt+b(X,t)\frac{\partial u}{\partial x}dW =$$

$$=\left(0+m\cdot S\cdot\frac{1}{S}-\frac{1}{2S^2}\cdot s^{2}\cdot S^2\right)dt+\frac{s\cdot S}{S}dW=\left(m-\frac{s^{2}}{2}\right)dt+s\,dW$$

Ισοδύναμα, έχουμε:

$$d(\ln S)=\left(m-\frac{s^{2}}{2}\right)dt+s\,dW \Leftrightarrow \ln S-\ln S_0=\left(m-\frac{s^{2}}{2}\right)(t-t_0)+s\,\big(W(t)-W(t_0)\big)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{S}{S_0}=\left(m-\frac{s^{2}}{2}\right)(t-t_0)+s\,\big(W(t)-W(t_0)\big)\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{S}{S_0}=\exp\left[\left(m-\frac{s^{2}}{2}\right)(t-t_0)+s\,\big(W(t)-W(t_0)\big)\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S=S_0\cdot\exp\left[\left(m-\frac{s^{2}}{2}\right)(t-t_0)+s\,\big(W(t)-W(t_0)\big)\right]$$

Επομένως, θα ισχύει: $S(t) = S(t_0)\exp\left[\left(m-\frac{s^{2}}{2}\right)(t-t_0)+s\,\big(W(t)-W(t_0)\big)\right]$

Η παραπάνω στοχαστική ανέλιξη, ονομάζεται γεωμετρική κίνηση Brown.

§ 2.1.4 Δημιουργία εξίσωσης Black – Scholes

Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση των Black – Scholes προκειμένου να υπολογίσουμε την αξία ενός δικαιώματος προαίρεσης, του οποίου ο υποκείμενος τίτλος ικανοποιεί τις παραπάνω εξισώσεις.

Έστω V : η αξία ενός δικαιώματος (αγοράς ή πώλησης) και S(t) : η αξία του υποκείμενου τίτλου, που αντιστοιχεί στο δικαίωμα, τη χρονική στιγμή t.

Θεωρούμε ότι η αξία του δικαιώματος V , εξαρτάται από δύο ανεξάρτητες μεταβλητές που είναι η αξία του υποκείμενου τίτλου S(t) και ο χρόνος t.

Σύμφωνα με το λήμμα του Itô , ισχύει:

$$du(X,t)=\left[\frac{\partial u}{\partial t}+a(X,t)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}b^2(X,t)\right]dt+b(X,t)\frac{\partial u}{\partial x}dW \quad (*)$$

Για $u = V$, $X= S$, $\alpha(X,t) = \mu\cdot S$, $b(X, t) = \sigma\cdot S$, η σχέση (*) γίνεται:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + mS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{s^{2}}{2}S^{2}\frac{\partial^{2}V}{\partial S^{2}} \right)dt + s\,S\frac{\partial V}{\partial S}dW$$

Θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από ένα δικαίωμα προαίρεσης αξίας *V*, και από *Δ* κομμάτια υποκείμενου τίτλου (π.χ. μετοχής).

Η αξία του χαρτοφυλακίου , τον χρόνο *t*, είναι : $\pi_t = V(S, t) + \Delta \cdot S_t$

Η μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου, στο απειροελάχιστο χρονικό διάστημα *dt*, είναι :

$$d\pi = dV(S_t,t) + \Delta \cdot dS_t$$

δηλαδή :

$$d\pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + mS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{s^{2}}{2}S^{2}\frac{\partial^{2}V}{\partial S^{2}} \right)dt + s\,S\frac{\partial V}{\partial S}dW + \Delta \cdot \left(mSdt + s\,SdW \right)$$

Για $\Delta = -\frac{\partial V}{\partial S}$, απαλοίφεται ο όρος τυχαιότητας, δηλαδή ο όρος που περιέχει το *dW*, και η παραπάνω εξίσωση γίνεται :

$$d\pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + m \cdot S \cdot \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{s^{2}}{2} \cdot S^{2} \cdot \frac{\partial^{2}V}{\partial S^{2}} \right)dt + s \cdot S \cdot \frac{\partial V}{\partial S}dW - \frac{\partial V}{\partial S} \cdot \left(m \cdot S \cdot dt + s \cdot S \cdot dW \right)$$

=

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{s^{2}}{2}S^{2}\frac{\partial^{2}V}{\partial S^{2}} \right)dt \qquad \text{(A)}$$

Επιπλέον ισχύει:

$$d\pi = r \cdot \pi \cdot dt = r \cdot (V + \Delta \cdot S) \cdot dt$$

Για $\Delta = -\frac{\partial V}{\partial S}$, είναι :

$$d\pi = r \cdot \left(V - \frac{\partial V}{\partial S}S \right) \cdot dt \qquad \text{(B)}$$

Εξισώνουμε τις σχέσεις (Α) και (Β) , και προκύπτει η εξίσωση :

$$\frac{s^{2}}{2}S^{2}\frac{\partial^{2}V}{\partial S^{2}} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV + \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση , είναι η εξίσωση των Black – Scholes.

Παρατηρούμε ότι στην εξίσωση δεν εμφανίζεται ο συντελεστής ολίσθησης μ. Συνεπώς, η λύση της δεν εξαρτάται από το μ, αλλά εξαρτάται μόνο από το επιτόκιο, χωρίς κίνδυνο, r.

§ 2.1.5 Υποθέσεις για να ισχύει η εξίσωση των Black – Scholes

Οι υποθέσεις που πρέπει να ισχύουν, για να μπορεί να εφαρμοστεί η εξίσωση των Black – Scholes, είναι οι εξής:

1. Η αξία του υποκείμενου τίτλου πρέπει να περιγράφεται με τη βοήθεια της γεωμετρικής κίνησης Brown.

2. Τα δικαιώματα και τα κομμάτια του υποκείμενου τίτλου μπορούν να αγοράζονται και να πωλούνται οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

3. Το $\frac{\partial V}{\partial S}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση του S. Επομένως, ο αριθμός των κομματιών του υποκείμενου τίτλου επιτρέπεται να αλλάζει συνεχώς ανάλογα με την τιμή του S.

4. Η αλλαγή της αξίας του χαρτοφυλακίου οφείλεται μεμονωμένα στις αλλαγές του V και του S .

5. Θεωρείται ότι δεν υπάρχουν έξοδα διεκπεραίωσης, όταν τα δικαιώματα και οι υποκείμενοι τίτλοι αγοράζονται και πωλούνται.

Β΄ ΜΕΡΟΣ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΩΝ HULL -WHITE

§ 2.2.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε ότι οι τιμές που παίρνει ο υποκείμενος τίτλος ακολουθούν μία γεωμετρική κίνηση Brown, και το χρονικό διάστημα στο οποίο αναφερόμαστε είναι το $[0,T]$.

Έστω, S(t) η τιμή του υποκείμενου τίτλου στο χρόνο t .Τότε, ισχύει η σχέση:

$$S(t+dt) = S(t)exp[(r - 0.5\sigma^2)dt+\sigma dBt]$$

όπου r : το ετήσιο επιτόκιο, σ : η ετήσια διακύμανση και B_t : η κίνηση Brown

Η συνεχής λογαριθμοκανονική στοχαστική διαδικασία των τιμών του υποκείμενου τίτλου μπορεί να προσεγγιστεί από ένα μοντέλο διακριτού χρόνου, όπως είναι το γράφημα.

Το γράφημα διαχωρίζει τον χρόνο μεταξύ της χρονικής στιγμής 0 και της χρονικής στιγμής T, σε n ίσα χρονικά διαστήματα. Το μήκος κάθε διαστήματος Δt είναι ίσο με T/n.

Έστω S_i η τιμή του υποκείμενου τίτλου στον διακριτό χρόνο i . Σε μοντέλο συνεχούς χρόνου το S_i είναι ισοδύναμο με $S(i{\cdot}\Delta t)$.

§2.2.2 Διωνυμικό γράφημα (binomial lattice) των Cox-Ross-Rubinstein.

Έστω ότι χωρίζουμε τον χρόνο ισχύος του δικαιώματος σε n ίσες χρονικές στιγμές (i = 1,2,…,n). Έστω S_i η τιμή του υποκείμενου τίτλου στην Αγορά τη χρονική στιγμή i, και S_0 η τιμή του υποκείμενου τίτλου στην Αγορά τον αρχικό χρόνο 0. Έτσι, η τιμή του υποκείμενου τίτλου στην Αγορά τη χρονική στιγμή 1 θα είναι S_1, τη χρονική στιγμή 2 θα είναι S_2, κ.ο.κ. Η τιμή του υποκείμενου τίτλου στην Αγορά την χρονική στιγμή i+1, S_{i+1} , είτε θα ισούται με $Si{\cdot}u$ με πιθανότητα P_u , αν σημειώσει άνοδο, είτε με $Si{\cdot}d$ με πιθανότητα P_d, αν σημειώσει κάθοδο, όπου $d < u$.

Για τους υπολογισμούς μας, θεωρούμε ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$u = e^{s\sqrt{\Delta t}}$$

όπου σ : η ετήσια διακύμανση των τιμών του υποκείμενου τίτλου, και

$$P_u = \frac{e^{r\cdot\Delta t} - d}{u - d}$$

όπου r είναι το risk-free interest rate.

Για να αποφευχθεί η δυνατότητα για arbitrage, ισχύουν οι περιορισμοί :

$$d \le e^{r\cdot\Delta t} \le u \quad \text{και} \quad 0 < P_u < 1\ ,\ 0 < P_d < 1$$

Η τιμή του υποκείμενου τίτλου στην Αγορά, την χρονική στιγμή i, η οποία έχει προκύψει μετά από j κάτω κινήσεις και $i - j$ άνω κινήσεις στο γράφημα, είναι ίση με :

$$So\cdot u^{i-j}\cdot d^{j}$$

με ολική πιθανότητα :

$$\binom{i}{j} P_u^{\,i-j} P_d^{\,j}$$

Δηλαδή, στον κόμβο N(i,j), όπου το i δηλώνει τον χρόνο στον οποίο βρισκόμαστε και το j δηλώνει τον αριθμό των κάτω κινήσεων που γίνονται για να φτάσουμε σε αυτό τον κόμβο, η τιμή του υποκείμενου τίτλου στην Αγορά είναι ίση με $S_i = So\cdot u^{i-j}\cdot d^{j}$ και η ολική πιθανότητα μέχρι αυτόν τον κόμβο είναι ίση με $\binom{i}{j} P_u^{\,i-j} P_d^{\,j}$. Η επόμενη κίνηση θα είναι είτε στον κόμβο $N(i+1, j)$, δηλαδή κίνηση προς τα πάνω, με πιθανότητα P_u, είτε στον κόμβο $N(i+1, j+1)$, δηλαδή κίνηση προς τα κάτω, με πιθανότητα P_d.

Στο γράφημα CRR έχει εισαχθεί η έννοια του discretization σφάλματος, το οποίο οφείλεται στο γεγονός ότι ο χρόνος που χρησιμοποιείται είναι διακριτός. Όταν το σφάλμα τείνει στο 0 και είναι της τάξης $O(n^{-1})$, τότε η τιμή του δικαιώματος που υπολογίζεται από το γράφημα, συγκλίνει στην πραγματική τιμή του δικαιώματος.

§2.2.3$_A$ Κατασκευή του διωνυμικού γραφήματος C-R-R

Σύμφωνα με το C-R-R διωνυμικό μοντέλο, η μέση τιμή και η διακύμανση των τιμών του υποκείμενου τίτλου σε ένα χρονικό βήμα, είναι ίσες με:

$$\mu = (r - 0{,}5\sigma^2)\cdot\Delta t \qquad \text{και} \qquad Var = \sigma^2\cdot\Delta t$$

Για να συγκλίνουν οι τιμές του υποκείμενου τίτλου του γραφήματος προς τις πραγματικές τιμές του τίτλου στον συνεχή χρόνο, πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$P_u \cdot lnu + P_d \cdot lnd = \mu$$
$$P_u \cdot (lnu - \mu)^2 + P_d \cdot (lnd - \mu)^2 = Var$$
$$P_u + P_d = 1$$
$$u \cdot d = 1$$

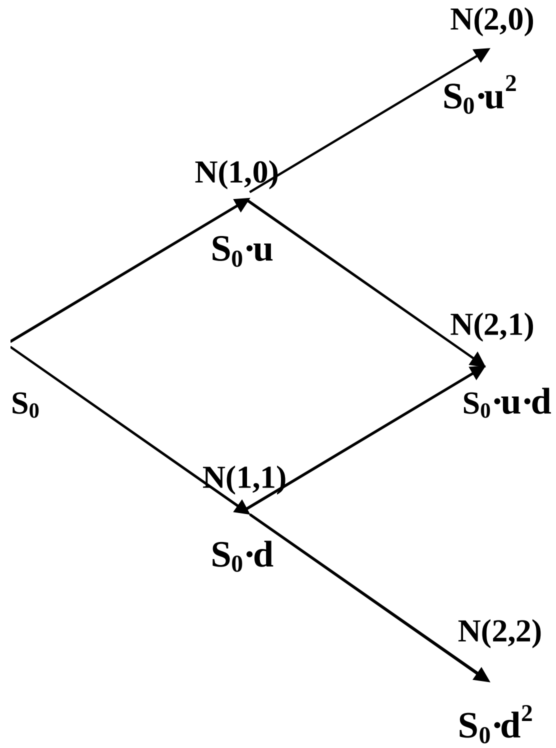
Το παραπάνω σύστημα είναι ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους, επομένως έχει μοναδική λύση την (u ,d , P_u , P_d).

§2.2.3Β Κατασκευή του l – nomial lattice

Ένα γράφημα ονομάζεται l – nomial αν και μόνο αν κάθε κόμβος του ενώνεται με l κόμβους την επόμενη χρονική στιγμή. Στο l – nomial γράφημα υπάρχουν συνολικά $2\cdot l$ βαθμοί ελευθερίας, l για τους πολλαπλασιαστικούς παράγοντες (στο binomial είναι οι u, d) και l για τις πιθανότητες (στο binomial είναι οι P_u και P_d). Για να υπολογιστούν μοναδικά οι $2l$ άγνωστοι, πρέπει να βρεθούν $2l$ ανεξάρτητες μεταξύ τους εξισώσεις. Μία από αυτές είναι η : $P_a + P_b + \ldots + P_l = 0$. Άλλες δύο αφορούν τη μέση τιμή και τη διακύμανση των τιμών του υποκείμενου τίτλου. Επομένως, πρέπει να βρεθούν $2l - 3$ εξισώσεις, οι οποίες θα αναφέρονται στους πολλαπλασιαστικούς παράγοντες $a,b,\ldots,l$ (η αντίστοιχη εξίσωση στο binomial είναι η $u\cdot d = 1$).

§2.2.4 Παράδειγμα διωνυμικού γραφήματος με n = 2

Στο διωνυμικό γράφημα με δύο χρονικά βήματα, το συνολικό χρονικό διάστημα ισχύος του δικαιώματος προαίρεσης χωρίζεται σε δύο χρονικές στιγμές, σε δύο χρονικά βήματα. Η τιμή του υποκείμενου τίτλου στην Αγορά, τον χρόνο 0 είναι ίση με S_0 (τιμή που αναγράφεται στον κόμβο $N(0,0)$). Η τιμή του υποκείμενου τίτλου στον χρόνο 1 είτε θα έχει σημειώσει άνοδο, θα έχει αυξηθεί, και θα έχει γίνει ίση με $S_0 \cdot u$ (η τιμή στον κόμβο $N(1,0)$), είτε θα έχει μειωθεί και θα έχει γίνει ίση με $S_0 \cdot d$ (η τιμή στον κόμβο $N(1,1)$). Όμοια, για τον χρόνο 2, η τιμή του υποκείμενου τίτλου που αναγράφεται στον κόμβο $N(1,0)$, είτε θα αυξηθεί και θα γίνει ίση με $S_0 \cdot u^2$ (κόμβος $N(2,0)$), είτε θα μειωθεί και θα γίνει ίση με $S_0 \cdot u \cdot d$ (κόμβος $N(2,1)$).Αντίστοιχα, για τον χρόνο 2, η τιμή του υποκείμενου τίτλου που αναγράφεται στον κόμβο $N(1,1)$, είτε θα αυξηθεί και θα γίνει ίση με $S_0 \cdot d \cdot u$ (κόμβος $N(2,1)$), είτε θα μειωθεί και θα γίνει ίση με $S_0 \cdot d^2$ (κόμβος $N(2,2)$).



Γράφημα 1 : Διωνυμικό γράφημα με $n = 2$

Έστω ότι $r = 0{,}1$, $\sigma = 0{,}2$ και $T = 0{,}5$.

Τότε, $\mu = (r - 0{,}5\sigma^2)\cdot\Delta t = (0{,}1 - 0{,}5\cdot 0{,}2^2)\cdot 0{,}25 = 0{,}02$ και $Var = \sigma^2 \cdot \Delta t = 0{,}2^2 \cdot 0{,}25=$ $=0{,}01$

Προκειμένου να υπολογίσουμε τις ποσότητες u, d, P_u , P_d , λύνουμε το παρακάτω σύστημα:

$$P_u \cdot \ln u + P_d \cdot \ln d = \mu \quad \Leftrightarrow \quad P_u \cdot \ln u + P_d \cdot \ln d = 0{,}02$$

$$P_u \cdot (\ln u - \mu)^2 + P_d \cdot (\ln d - \mu)^2 = Var \quad \Leftrightarrow \quad P_u \cdot (\ln u - 0{,}02)^2 + P_d \cdot (\ln d - 0{,}02)^2 = 0{,}01$$

$$P_u + P_d = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P_u = 1 - P_d$$

$$u \cdot d = 1 \quad \Leftrightarrow \quad u = 1/d$$

Τα αποτελέσματα της επίλυσης του συστήματος είναι :

$(u, d, P_u , P_d) =$ (1,107 , 0,903 , 0,598 , 0,402)

§2.2.5$_A$ Τιμολόγηση απλών παραγώγων Ευρωπαικού τύπου μέσω της backward induction

Ένας τρόπος τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης σε γράφημα, είναι μέσω της μεθόδου backward induction. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, το δικαίωμα τιμολογείται ξεκινώντας από την τελική χρονική στιγμή n, και καταλήγοντας στην αρχική χρονική στιγμή 0.

Γνωρίζουμε ότι η αξία ενός δικαιώματος Ευρωπαικού τύπου, σε μοντέλο διακριτού χρόνου όπως είναι το γράφημα, την χρονική στιγμή λήξης του συμβολαίου n, είναι ίση με:

$$V_n = \begin{cases} \max\left(S_n - \mathrm{X},0\right), \text{agor ά}V \\ \max\left(\mathrm{X} - S_n,0\right), \text{p ώ l h s h}V \end{cases}$$

Έτσι, αρχικά υπολογίζονται οι τιμές V_n του δικαιώματος, σε όλους τους κόμβους της χρονικής στιγμής n, δηλαδή στους κόμβους $N(n, j)$, $j = 0,1,\ldots,n$, j: κάτω κινήσεις

Στη συνέχεια, υπολογίζονται διαδοχικά οι τιμές του δικαιώματος V_{n-1} , V_{n-2} , … , και τελικά V_0, χρησιμοποιώντας τον παρακάτω τύπο:

$$C = e^{-r\cdot\Delta t}(P_u\cdot C_u + P_d\cdot C_d) \quad (*)$$

όπου C: η τιμή του παραγώγου στον κόμβο $N(i\ ,j)$,

C_u : η τιμή του παραγώγου στον κόμβο $N(\ i+1, j)$

και C_d : η τιμή του παραγώγου στον κόμβο $N(i+1, j+1)$.

Συνεπώς, για να υπολογιστεί η ποσότητα V_{n-1}, αντικαθιστούμε στον τύπο (*) όπου $C = V_{n-1}$ και όπου C_u και C_d τις ήδη υπολογισμένες τιμές του παραγώγου στους αντίστοιχους κόμβους της χρονικής στιγμής n.

Κατόπιν, για να υπολογιστεί η ποσότητα V_{n-2}, αντικαθιστούμε στον τύπο (*) όπου $C = V_{n-2}$ και όπου C_u και C_d τις ήδη υπολογισμένες τιμές του παραγώγου στους αντίστοιχους κόμβους της χρονικής στιγμής $n-1$, κ.ο.κ.

§2.2.5$_B$ Τιμολόγηση απλών παραγώγων Αμερικανικού τύπου μέσω της backward recursion

Γνωρίζουμε ότι το δικαίωμα προαίρεσης Αμερικανικού τύπου είναι ένα δικαίωμα το οποίο μπορεί να εξασκηθεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή θελήσει ο κάτοχός του, μέσα στο διάστημα ισχύος του $[0,T]$, πιστεύοντας ότι αυτή του η ενέργεια τον συμφέρει.

Ένας τρόπος τιμολόγησης παραγώγων Αμερικανικού τύπου σε γράφημα, είναι μέσω της μεθόδου backward recursion, τρόπος αντίστοιχος με τον παραπάνω.

Αρχικά υπολογίζονται οι τιμές V_n του δικαιώματος, σε όλους τους κόμβους της τελικής χρονικής στιγμής ***n***, δηλαδή στους κόμβους $N(n, j)$, $j = 0,1,\ldots,n$, θεωρώντας ότι το δικαίωμα εξασκείται τη χρονική στιγμή ***n***.

Έτσι, με τη βοήθεια της γνωστής σχέσης, έχουμε :

$$V_n = \begin{cases} \max\left(S_n - \mathrm{X}, 0\right), agor\acute{a}V \\ \max\left(\mathrm{X} - S_n, 0\right), p\acute{\omega}lhshV \end{cases}$$

Στη συνέχεια, υπολογίζονται διαδοχικά οι τιμές του δικαιώματος V_{n-1} , V_{n-2} , … , και τελικά V_0, χρησιμοποιώντας τον παρακάτω τύπο:

$$C = max(Exercise\ value,\ e^{-r\cdot\Delta t}(P_u \cdot C_u + P_d \cdot C_d))$$

όπου ***Exercise value*** είναι η τιμή του δικαιώματος, αν θεωρηθεί ότι εξασκείται τη χρονική στιγμή για την οποία εφαρμόζεται ο τύπος.

Στην παραπάνω μέθοδο τιμολόγησης (backward recursion), τόσο για τα δικαιώματα Ευρωπαικού τύπου όσο για τα δικαιώματα Αμερικανικού τύπου, ο συνολικός χρόνος που απαιτείται είναι $O(n^2)$, όσος δηλαδή είναι ο συνολικός αριθμός των κόμβων που υπάρχουν στο γράφημα.

§2.2.5$_Γ$ Τιμολόγηση Ασιατικών παραγώγων Ευρωπαικού ή Αμερικανικού τύπου μέσω της backward recursion

Τα Ασιατικά παράγωγα μπορούν να τιμολογηθούν με την βοήθεια γραφημάτων.Ο αλγόριθμος, όμως, της τιμολόγησής τους, είναι αρκετά σύνθετος, και η όλη διαδικασία είναι χρονοβόρα. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι τα Ασιατικά δικαιώματα είναι δικαιώματα path-dependent, δηλαδή η αξία τους εξαρτάται από την πορεία των τιμών του αντίστοιχου υποκείμενου τίτλου στο παρελθόν.

Σε κάθε κόμβο του γραφήματος αναγράφονται όλοι οι μέσοι των τιμών του τίτλου που καταλήγουν στον συγκεκριμένο κόμβο. Συνεπώς, στους περισσότερους κόμβους υπάρχουν περισσότερες από μία πιθανές τιμές V_i που πρέπει να υπολογιστούν.

Το πρόβλημα αυτής της προσεγγιστικής μεθόδου είναι ο αριθμός των πιθανών τιμών του μέσου που αντιστοιχεί σε κάθε κόμβο, ο οποίος σε κάθε χρονικό βήμα αυξάνεται εκθετικά.

Υποθέτουμε ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου, είναι ένας διωνυμικός τυχαίος περίπατος (διωνυμικό γράφημα). Μετά από ***n*** χρονικά βήματα, θα έχουν σημειωθεί συνολικά 2^n πιθανές διαδρομές της τιμής του υποκείμενου τίτλου. Δηλαδή, η τιμή μπορεί να ακολουθήσει συνολικά 2^n πιθανά ΄΄μονοπάτια΄΄. Καθένα από αυτά τα ΄΄μονοπάτια΄΄ έχει τον δικό του μέσο των τιμών που του αντιστοιχούν. Γνωρίζουμε ότι η τιμή ενός Ασιατικού παραγώγου την χρονική στιγμή *n*, εξαρτάται από τον μέσο των τιμών που έχει πάρει ο υποκείμενος τίτλος στο χρονικό διάστημα [0, n]. Συνολικά στο γράφημα, υπάρχουν $2^{n+1} – 1$ τιμές V_i του παραγώγου.

Ο συνολικός αριθμός των πιθανών τιμών του παραγώγου σε ένα διωνυμικό γράφημα με ***n*** χρονικές στιγμές είναι $2^{n+1} – 1$

<u>Απόδειξη</u>

Τη χρονική στιγμή 0, υπάρχει 1 τιμή του παραγώγου, V_0. (2^0)

Τη χρονική στιγμή 1, υπάρχουν 2 τιμές του παραγώγου, V_1^+, V_1^-. (2^1)

Τη χρονική στιγμή 2, υπάρχουν 4 τιμές του παραγώγου, V_2^{++}, V_2^{+-}, V_2^{-+}, V_2^{--}. (2^2)

…..

Τη χρονική στιγμή n, υπάρχουν 2^n τιμές του παραγώγου (2^n)

Επομένως, το σύνολο των πιθανών τιμών του παραγώγου που υπάρχουν στο γράφημα είναι:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + ... +2^n = 2^{n+1} – 1$$

Ένας τρόπος τιμολόγησης Ασιατικών παραγώγων σε γράφημα, είναι και πάλι μέσω της μεθόδου backward recursion. Ξεκινώντας από την τελική χρονική στιγμή *n*, υπολογίζεται η αξία του παραγώγου σε όλους τους κόμβους $N(n, j)$, $j = 0,1,…,n$, από τον γνωστό τύπο :

$$V_n = \begin{cases} \max\left(A_n - \mathrm{X}, 0\right), agor\acute{a}V \\ \max\left(\mathrm{X} - A_n, 0\right), p\acute{\omega}lhshV \end{cases}$$

όπου

$$A_n = \frac{\sum_{i=0}^{n} S_i}{n+1}$$

Στη συνέχεια, υπολογίζονται διαδοχικά οι τιμές του δικαιώματος $V_{n\text{-}1}$, $V_{n\text{-}2}$, … , και τελικά V_0, χρησιμοποιώντας τους παρακάτω τύπους:

$V(i, S_i, M) = e^{-r\cdot\Delta t}(P_u\cdot V(i+1, S_{i+1}^{+}, M+S_{i+1}^{+}) + P_d\cdot V(i+1, S_{i+1}^{-}, M+S_{i+1}^{-})$, για δικαίωμα Ευρωπαικού τύπου

ή

$V(i, S_i, M) = max[E, e^{-r\cdot\Delta t}(P_u\cdot V(i+1, S_{i+1}^{+}, M+S_{i+1}^{+}) + P_d\cdot V(i+1, S_{i+1}^{-}, M+S_{i+1}^{-})]$, για δικαίωμα Αμερικανικού τύπου,

όπου $M = \sum_{j=0}^{i} S_j$, Ε = η αξία του δικαιώματος όταν αυτό εξασκείται τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή i, S_{i+1}^{+} = η τιμή του τίτλου τη χρ.στιγμή i+1, μετά από ανοδική κίνηση, και S_{i+1}^{-} η τιμή του τίτλου τη χρ.στιγμή i+, μετά από καθοδική κίνηση .

§2.2.6 Μέθοδος μείωσης χρόνου τιμολόγησης Ασιατικών παραγώγων, των Hull -White

Σε κάθε κόμβο N(i,j) του διωνυμικού γραφήματος, υπάρχουν $\frac{i!}{(i-j)!\,j!}$ ΄΄μονοπάτια΄΄ τιμών του υποκείμενου τίτλου που καταλήγουν σε αυτόν. Σε κάθε τέτοιο ΄΄μονοπάτι΄΄, υπολογίζεται ο μέσος των τιμών $S_{i,j}$ που υπάρχουν, και έτσι δημιουργούνται τα δεδομένα μας, που είναι τα $A_{i,j}$.

Ο αριθμός των δεδομένων αυξάνεται εκθετικά σε κάθε χρονικό βήμα, με αποτέλεσμα η διαδικασία υπολογισμού της τιμής του παραγώγου, να γίνεται εξαιρετικά χρονοβόρα.

Ένας αρκετά γρήγορος προσεγγιστικός αλγόριθμος τιμολόγησης Ασιατικών παραγώγων, προτάθηκε από τους Hull-White, το 1993. Η μέθοδος που ανέπτυξαν ήταν η εξής: Προκειμένου να μειωθεί ο χρόνος υπολογισμού της τιμής του παραγώγου, περιόρισαν τον αριθμό των πιθανών αθροισμάτων των τιμών του υποκείμενου τίτλου $\sum_{j=0}^{i} S_j$ που αντιστοιχούσαν σε κάθε κόμβο, σε έναν συγκεκριμένο αριθμό κ. Προφανώς, ο αριθμός των μονοπατιών που φτάνει σε έναν κόμβο, είναι και ο αριθμός των πιθανών τιμών του παραγώγου στον κόμβο αυτό.

Η τιμή του δικαιώματος που αντιστοιχούσε στα δεδομένα που έλειπαν, που δεν είχαν υπολογιστεί, υπολογιζόταν από τους Hull – White με την βοήθεια της γραμμικής παρεμβολής μεταξύ δύο γειτονικών δεδομένων.

Έτσι, η αξία του δικαιώματος για κάποιο ΄΄μονοπάτι΄΄ που καταλήγει στον κόμβο $N(i,j)$,του οποίου δεν έχει υπολογιστεί το A , είναι ίση με:

$$V(i, j, A) = \frac{A - A^-}{A^+ - A^-} \cdot v\left(i, j, A^+\right) + \frac{A^+ - A}{A^+ - A^-} \cdot v\left(i, j, A^-\right) \quad ,$$

όπου A^- : ο μέσος των τιμών του υποκείμενου τίτλου ενός μονοπατιού, γειτονικού με αυτό που έχει παραληφθεί, που καταλήγει στον κόμβο $N(i,j)$, και ισχύει: $A^- < A$

και A^+ : ο μέσος των τιμών του υποκείμενου τίτλου ενός μονοπατιού, γειτονικού με αυτό που έχει παραληφθεί, που καταλήγει στον κόμβο $N(i,j)$, και ισχύει: $A < A^+$

Σημειώνουμε, ότι σε αυτή τη μέθοδο, υπάρχει σφάλμα παρεμβολής (interpolation error), το οποίο οφείλεται στην παρεμβολή που γίνεται προκειμένου να υπολογιστεί το $V(i, j, A)$. Το σφάλμα παρεμβολής, παρουσιάζεται σε κάθε χρονική στιγμή όλο και πιο έντονα, όσο το n αυξάνεται.

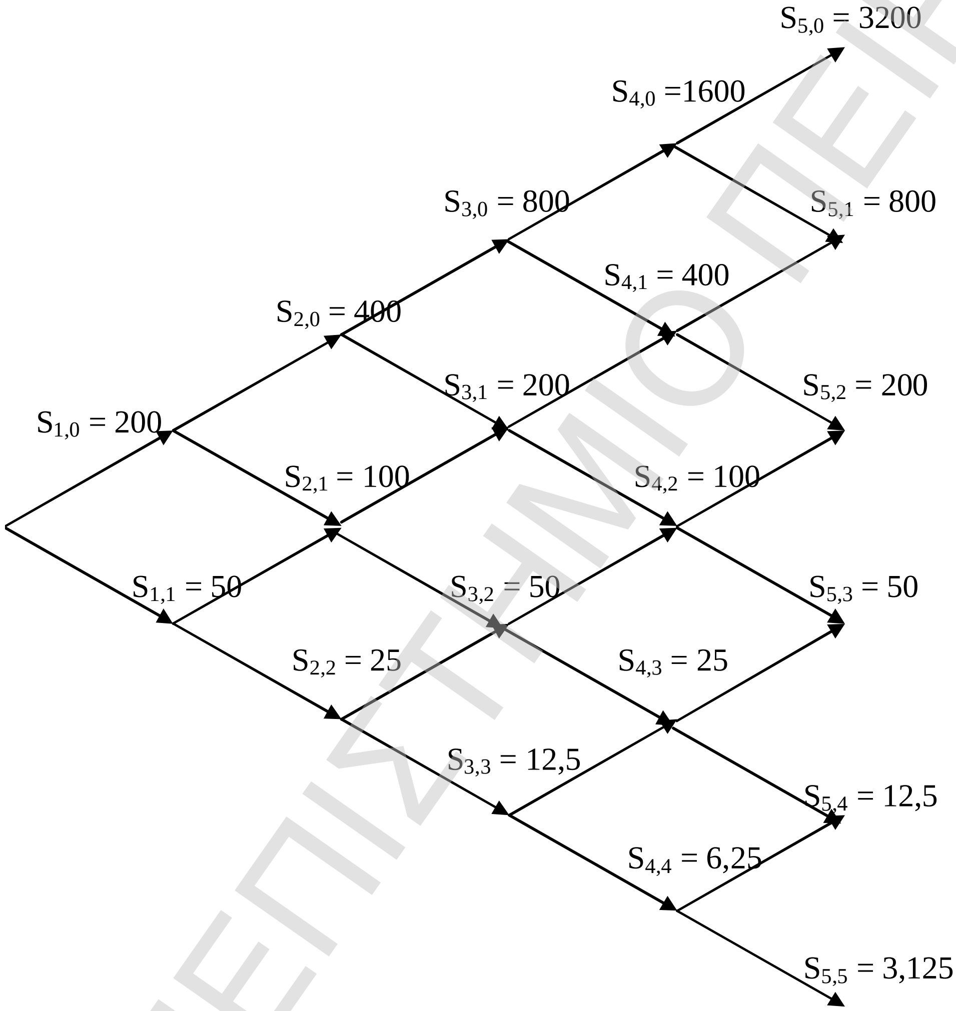
Ο χρόνος που απαιτείται για να τιμολογηθεί το παράγωγο από τον προσεγγιστικό αλγόριθμο των Hull–White είναι $O(n^2 \cdot \kappa)$.

Ο Klassen (2001) ασχολήθηκε με τον αλγόριθμο των Hull –White, θεώρησε ότι το σφάλμα της τιμολόγησης είναι $O(1/n)$ και εξήγαγε συμπεράσματα για την εξαλοιφή του σφάλματος.

Το μεγαλύτερο πρόβλημα που υπάρχει στον αλγόριθμο των Hull και White είναι η σύγκλιση. Ο Forsyth (2002), απέδειξε ότι η αξία του δικαιώματος που υπολογίζεται μέσω του αλγορίθμου των Hull-White δεν συγκλίνει πάντα στην πραγματική αξία του παραγώγου όταν $n \to \infty$, παρά μόνο υπό συγκεκριμένες συνθήκες, όταν δηλαδή οι ποσότητες κ, n είναι συγκεκριμένες.

§2.2.7 Παράδειγμα της μεθόδου των Hull - White

Θεωρούμε το παρακάτω διωνυμικό γράφημα, στο οποίο S_0 = 100, u = 2, d = 1/2, n = 5, X =50, $P_u = P_d$ = 0,5 (N(i,j): ο κόμβος που εμφανίζεται τη χρονική στιγμή i, μετά από j κάτω κινήσεις)



Γράφημα 2 : Διωνυμικό γράφημα με n = 5

Διαλέγουμε τον κόμβο N(4,2), στον οποίο καταλήγουν 6 μονοπάτια. Το ανώτερο μονοπάτι, με $\max\sum_{i=0}^{4} S_i = 1000$, το κατώτερο μονοπάτι με $\min\sum_{i=0}^{4} S_i = 325$, και άλλα τέσσερα μονοπάτια, εκ των οποίων ένα, έχει $\sum_{i=0}^{4} S_i = 700$.

Η τιμή του υποκείμενου τίτλου στον κόμβο $N(4,2)$, S_4 = 100, την επόμενη χρονική στιγμή είτε θα γίνει 200, είτε 50, και θα αναγράφεται στους κόμβους $N(5,2)$ και $N(5,3)$ αντίστοιχα. Στον κόμβο $N(5,2)$, καταλήγουν 10 μονοπάτια. Το ανώτερο μονοπάτι, με $\max \sum_{i=0}^{5} S_i = 2100$, το κατώτερο μονοπάτι με $\min \sum_{i=0}^{5} S_i = 525$, και άλλα οκτώ μονοπάτια, εκ των οποίων το ένα είναι αυτό που προηγουμένως έφτανε στον κόμβο $N(4, 2)$. Άρα, το άθροισμα τιμών που δίνει είναι $\sum_{i=0}^{5} S_i = 700 + 200 = 900$.

Ομοίως, στον κόμβο $N(5,3)$ καταλήγουν 10 μονοπάτια. Το ανώτερο μονοπάτι, με $\max \sum_{i=0}^{5} S_i = 1050$, το κατώτερο μονοπάτι με $\min \sum_{i=0}^{5} S_i = 262{,}5$, και άλλα οκτώ μονοπάτια, εκ των οποίων το ένα είναι αυτό που προηγουμένως έφτανε στον κόμβο $N(4,2)$.Άρα, το άθροισμα τιμών που δίνει είναι : $\sum_{i=0}^{5} S_i = 700 + 50 = 750$.

Συγκεντρωτικά, τα αθροίσματα των τιμών του υποκείμενου τίτλου, των μονοπατιών που καταλήγουν στους κόμβους $N(4,2)$, $N(5,2)$ και $N(5,3)$, παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

N(4,2)	N(5,2)	N(5,3)
max : 1000	max : 2100	max : 1050
700	1500	750
550	1200	600
550	1200	600
500	1050	550
min : 325	900	525
	750	375
	750	375
	600	300
	min : 525	min : 262,5

Όπως είπαμε παραπάνω, οι Hull–White περιόρισαν τον αριθμό των πιθανών αθροισμάτων των τιμών του υποκείμενου τίτλου $\sum_{j=0}^{i} S_j$ που φτάνουν σε κάθε κόμβο.

Έστω ότι τα αθροίσματα 900 και 750 παραλείπονται.

Οι τιμές του παραγώγου που αντιστοιχούν σε αυτά τα δύο αθροίσματα, εκτιμώνται μέσω της γραμμικής παρεμβολής.

Για παράδειγμα, η ποσότητα *V*(5, 200, 900) εκτιμάται από τις γειτονικές γνωστές ποσότητες *V*(5,200,1050) και *V*(5,200,750), ενώ η ποσότητα *V*(5, 50, 750) εκτιμάται από τις γειτονικές γνωστές ποσότητες *V*(5,50,1050) και *V*(5, 50,600).

Ισχύει :

$$V(i, j, A) = \frac{A - A^-}{A^+ - A^-} \cdot v\left(i, j, A^+\right) + \frac{A^+ - A}{A^+ - A^-} \cdot v\left(i, j, A^-\right)$$

Έτσι, έχουμε: $\mathrm{V}(5,200,900) = \dfrac{\frac{900}{6} - \frac{750}{6}}{\frac{1050}{6} - \frac{750}{6}} \cdot \left(175 - 50\right) + \dfrac{\frac{1050}{6} - \frac{900}{6}}{\frac{1050}{6} - \frac{750}{6}} \cdot \left(125 - 50\right) =$

$$= \frac{150 - 125}{50} \cdot 125 + \frac{175 - 150}{50} \cdot 75 = 100$$

και $\mathrm{V}(5,50,750) = \dfrac{\frac{750}{6} - \frac{600}{6}}{\frac{1050}{6} - \frac{600}{6}} \cdot \left(175 - 50\right) + \dfrac{\frac{1050}{6} - \frac{750}{6}}{\frac{1050}{6} - \frac{600}{6}} \cdot \left(100 - 50\right) =$

$$= \frac{125 - 100}{75} \cdot 125 + \frac{175 - 125}{75} \cdot 50 = 75$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΑΣΙΑΤΙΚΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΕΥΡΩΠΑΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΤΩΝ CHALASANI, JHA, ΚΑΙ VARIKOOTY

§ 3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε έναν αλγόριθμο που πρότειναν οι Chalasani, Jha και Varikooty, το 1998, προκειμένου να μειωθεί ο χρόνος τιμολόγησης Ασιατικών παραγώγων Ευρωπαικού τύπου. Οι παραπάνω, έχοντας ως βάση το διωνυμικό γράφημα των Cox- Ross- Rubinstein (1979), ομαδοποίησαν τα μονοπάτια τιμών του υποκείμενου τίτλου, σύμφωνα με τις τιμές μίας τυχαίας μεταβλητής Z. Έτσι, στην τιμολόγηση των παραγώγων που στηριζόταν στην εύρεση άνω και κάτω φραγμάτων, δεν χρησιμοποίησαν τον αριθμητικό μέσο A_n κάθε μονοπατιού ξεχωριστά, αλλά τον μέσο των αριθμητικών μέσων των μονοπατιών κάθε ομάδας. Με αυτό τον τρόπο, κατάφεραν να υπολογίσουν τα φράγματα της αξίας των Ασιατικών παραγώγων, σε χρόνο τάξης n^4.

Η παράγραφος §3.1.1 είναι εισαγωγική, και παρουσιάζεται το άνω και κάτω φράγμα της αξίας του Ασιατικού παραγώγου Ευρωπαικού τύπου. Στη συνέχεια, στην παράγραφο §3.2 αναφέρονται τα βασικά στοιχεία του διωνυμικού γραφήματος, και ορίζονται κάποιες μεταβλητές, σημαντικές για την δημιουργία του αλγορίθμου. Στις παραγράφους §3.3 και §3.4 αναπτύσσεται ο αλγόριθμος. Στην παράγραφο §3.5 δίνεται ο ψευδοκώδικας και μία εφαρμογή. Τέλος, στην παράγραφο §3.6, υπολογίζεται ο χρόνος που απαιτείται για να δώσει ο αλγόριθμος αποτελέσματα.

§3.1.1 Φράγματα αξίας Ασιατικού παραγώγου Ευρωπαικού τύπου

Οι Chalasani, Jha και Varikooty, το 1998, δημοσίευσαν έναν αλγόριθμο με τον οποίο κατάφεραν να μειώσουν τον χρόνο τιμολόγησης Ασιατικών παραγώγων Ευρωπαικού τύπου. Η μέθοδος τιμολόγησης που χρησιμοποίησαν, βασίζεται στην εύρεση άνω και κάτω φραγμάτων της αξίας του δικαιώματος. Πιο συγκεκριμένα, δημιούργησαν κάτω φράγματα της τιμής του παραγώγου, τα οποία προέκυπταν από την ομαδοποίηση των ΄΄μονοπατιών΄΄ που ακολουθούσε η τιμή του υποκείμενου τίτλου στο διωνυμικό γράφημα, ανάλογα με την τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής Ζ. Επίσης, θεώρησαν ότι όλα τα μονοπάτια τιμών κάθε ομάδας (group), έχουν τον ίδιο αριθμητικό μέσο, που είναι η μέση τιμή των αριθμητικών μέσων τους.

Η ιδέα της παραπάνω ομαδοποίησης ήταν αρχικά των Rogers και Shi (1995). Αυτοί, απέδειξαν ότι για συγκεκριμένες τιμές της τυχαίας μεταβλητής Ζ, το σφάλμα υπολογισμού του κάτω φράγματος της αξίας του παραγώγου, είναι μικρό. Εκτίμησαν αριθμητικά το άνω και κάτω φράγμα, θεωρώντας ότι είναι ολοκληρώματα σε συνεχή χρόνο. Η επιλογή που έκαναν στις τιμές του Ζ ήταν τέτοιες που ο υπολογισμός των φραγμάτων ήταν δύσκολη διαδικασία.

Οι Chalasani κ.α., έδωσαν τιμές για την τυχαία μεταβλητή Ζ, τέτοιες ώστε να υπολογίζονται με ακρίβεια τα φράγματα της αξίας του δικαιώματος, σε χρόνο τάξης n^4. Επιπλέον, τα φράγματα που πρότειναν είχαν πολύ μικρότερο εύρος σε σχέση με προηγούμενων δημοσιεύσεων.

Όπως είπαμε και παραπάνω, οι Rogers και Shi (1995), πρότειναν μια μέθοδο υπολογισμού κάτω φραγμάτων της αξίας Ασιατικού παραγώγου, μέσω της μεθόδου του διωνυμικού γραφήματος. Η πρότασή τους βασίστηκε στην ανισότητα Jensen, η οποία είναι η εξής:

Έστω μία συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$, με $I \subseteq \mathbb{R}$.

Η f είναι κυρτή στο Ι αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ με $\sum_{i=1}^{n} l_i = 1$, ισχύει η ανισότητα (Jensen) :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} l_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} l_i f\left(x_i\right)$$

Η συνάρτηση $f(x) = x^+ = max(x,0)$, είναι κυρτή, και επομένως, για κάθε τυχαία μεταβλητή Ζ, ισχύει:

$$E\left[(A_T - \mathrm{X})^+\right] = E[E[(A_T - \mathrm{X})^+ \mid \mathrm{Z}]] \geq E[E(A_T - \mathrm{X} \mid \mathrm{Z})^+] = \mathrm{E}[[\mathrm{E}(\mathrm{A_T} \mid \mathrm{Z}) - \mathrm{X}]^+]$$

Η ποσότητα $E[[E(A_T \mid \mathrm{Z}) - \mathrm{X}]^+]$ αποτελεί ένα κάτω φράγμα της αξίας ενός Ασιατικού δικαιώματος αγοράς. Η ποιότητα αυτού του φράγματος, το οποίο αποτελεί προσέγγιση της αξίας του δικαιώματος, εξαρτάται από την μεταβλητή Ζ.

Το σφάλμα υπολογισμού της παραπάνω προσέγγισης, φράσσεται άνω, σύμφωνα με τους Rogers και Shi, από την ποσότητα :

$$\frac{1}{2} E[Var(A_T \mid \mathrm{Z})^{1/2}]$$

η οποία σε συνδυασμό με το κάτω φράγμα μπορεί να δώσει ένα άνω φράγμα της αξίας του δικαιώματος.

Τα παραπάνω φράγματα είναι ολοκληρώματα συνεχούς χρόνου, τα οποία εκτιμήθηκαν από τους Rogers και Shi αριθμητικά, για διάφορες τιμές της τυχαίας μεταβλητής Ζ. Ο απαιτούμενος χρόνος υπολογισμού των φραγμάτων ήταν ανάλογος του 2^n, για n-step διωνυμικό γράφημα.

Τρία χρόνια αργότερα, οι Chalasani, Jha και Varikooty (1998), πρότειναν έναν τρόπο επιλογής τιμών του Ζ, έτσι ώστε τα άνω και κάτω φράγματα να υπολογίζονται με μεγάλη ακρίβεια και σε χρόνο ανάλογο του n^4, δηλαδή σε χρόνο πολύ μικρότερο του 2^n.

Έστω A_n ο αριθμητικός μέσος των τιμών του υποκείμενου τίτλου σε διακριτό χρόνο. Σύμφωνα με τους Rogers και Shi, το κάτω φράγμα της αξίας ενός Ασιατικού δικαιώματος αγοράς είναι :

$$\mathrm{E}[[\mathrm{E}(\mathrm{A_n} \mid \mathrm{Z}) - \mathrm{X}]^+]$$

και το άνω φράγμα του σφάλματος είναι :

$$\frac{1}{2} E[Var(A_n \mid \mathrm{Z})^{1/2}]$$

Η δυσκολία για τον ακριβή υπολογισμό της ποσότητας $E\left[(A_n - \mathrm{X})^+\right]$, έγγυται στο γεγονός, ότι κάθε΄΄μονοπάτι΄΄ τιμών του τίτλου ,έχει διαφορετικό αριθμητικό μέσο A_n, και άρα στο *n*-step διωνυμικό γράφημα υπάρχουν συνολικά 2^{n+1} -1 διαφορετικά A_n .

Επιπλέον, προκειμένου να εκτιμηθεί ακριβώς η ποσότητα $E\left[\left(A_n - X\right)^{+}\right]$, πρέπει σε κάθε μονοπάτι τιμών, να εξεταστεί αν ο εκάστοτε αριθμητικός μέσος A_n είναι ή όχι μεγαλύτερος της τιμής εξάσκησης του δικαιώματος Χ.

Οι Chalasani κ.α, προκειμένου να υπολογίσουν το κάτω φράγμα $E[[E(A_n \mid Z) - X]^{+}]$, ακολούθησαν την παρακάτω διαδικασία :

Για κάθε πιθανή τιμή z_i της τυχαίας μεταβλητής Z, ομαδοποίησαν τα μονοπάτια τιμών του υποκείμενου τίτλου. Μετά, υπολόγισαν την ποσότητα : $E[A_n \mid Z = z_i]$, η οποία είναι η μέση τιμή των A_n της ομάδας μονοπατιών με $Z= z_i$, και στη συνέχεια εξέτασαν αν

$E[A_n \mid Z = z_i] > X$. Δηλαδή, αντί να εξετάσουν για κάθε μονοπάτι ξεχωριστά αν $A_n > X$, εξέτασαν τον μέσο των A_n σε κάθε ομάδα αν είναι μεγαλύτερος ή όχι του Χ.

Από το άνω φράγμα του σφάλματος προσέγγισης της αξίας του δικαιώματος, $1/2 \cdot E[Var(A_n \mid Z)^{1/2}]$, προκύπτει ότι αν η διακύμανση των A_n κάθε ομάδας μονοπατιών είναι μικρή, τότε το κάτω φράγμα θα είναι ακριβές.

Αν δεν υπάρχουν πολλές τιμές z_I που να μπορεί να πάρει η τυχαία μεταβλητή Z, τότε θα υπάρχουν λίγα $E[A_n \mid Z = z_i]$, και έτσι η προσεγγιστική μέθοδος θα είναι γρήγορη.

Οι Rogers και Shi απέδειξαν ότι θεωρώντας ως Z το ολοκλήρωμα της κίνησης Brown στο διάστημα $[0, T]$, δηλαδή θεωρώντας

$$Z = \int_0^T B_u du$$

προκύπτει ένα εξαιρετικά ακριβές κάτω φράγμα της τιμής ενός Ασιατικού παραγώγου.

Στο **n**-step διωνυμικό γράφημα, οι τιμές του υποκείμενου τίτλου είτε παρουσιάζουν άνοδο, είτε κάθοδο, σε κάθε χρονική στιγμή. Έχουμε, δηλαδή, έναν τυχαίο περίπατο με $X_i = \pm 1$, $i = 1,2,\ldots,n$

Θεωρούμε ότι $X_i = 1$, για την άνοδο και $X_i = -1$, για την κάθοδο.

Η θέση του Χ την χρονική στιγμή κ είναι :

$$X_\kappa = \sum_{i=1}^{k} X_i, \ \kappa = 1,2,...,n \quad (\text{θεωρείται } X_0 = 0) \text{ , όπου } X_i = \pm 1$$

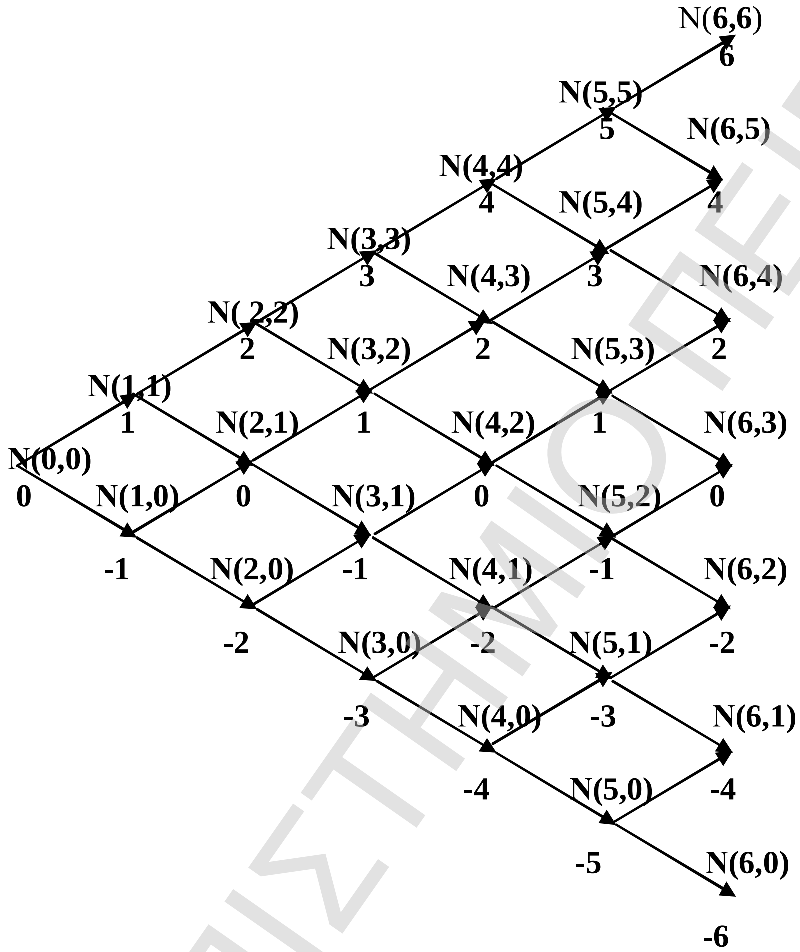
Το άθροισμα των θέσεων, στον χρόνο κ , είναι :

$$X_\kappa = \sum_{i=0}^{k} X_i, \ i = 0,1,2,\ldots,n$$

Είναι, δηλαδή, το άθροισμα των θέσεων του X ,στο διάστημα [0,κ].

π.χ. Έστω ένα διωνυμικό γράφημα με n = 6, δηλαδή με 6 διακριτές χρονικές στιγμές.

Αυτό το γράφημα θα έχει την παρακάτω μορφή :



Γράφημα 3 : Διωνυμικό γράφημα με **n = 6**. *Κάτω από κάθε κόμβο* ***N(κ,j)***, *αναγράφεται η τιμή της μεταβλητής* X_κ

Στον κόμβο $N(6,4)$, φτάνουν 15 μονοπάτια τιμών του υποκείμενου τίτλου, εκ των οποίων ένα μονοπάτι έχει $X_6 = 1$ (0+(-1)+0+(-1)+0+1+2).

Στον κόμβο $N(6,3)$, φτάνουν 20 μονοπάτια τιμών του υποκείμενου τίτλου, εκ των οποίων τρία μονοπάτια έχουν $X_6 = 1$

Αυτά είναι τα εξής: 0+1+0+1+0+(-1)+0, 0+(-1)+0+1+0+1+0, 0+1+0+(-1)+0+1+0

Τέλος, στον κόμβο $N(6,2)$ φτάνουν 15 μονοπάτια τιμών του υποκείμενου τίτλου, εκ των οποίων ένα μονοπάτι έχει $X_6 = 1$ (0+1+2 +1+0+(-1)+(-2)).

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι υπάρχουν διαφορετικά μονοπάτια που από τη χρονική στιγμή 0 μέχρι την χρονική στιγμή 6 δίνουν ίδια αθροίσματα X_6, αλλά καταλήγουν σε διαφορετικούς κόμβους της χρονικής στιγμής 6.

Οι Rogers και Shi (1995), για μοντέλο συνεχούς χρόνου, όρισαν Z = $\int_0^T B_u du$, και αντίστοιχα, για μοντέλο διακριτού χρόνου, όρισαν Z = X_n . Η επιλογή, όμως, του Z = X_n, δημιουργεί προβλήματα, διότι στο γράφημα υπάρχουν διαφορετικά μονοπάτια που από τη χρονική στιγμή 0 μέχρι την χρονική στιγμή n δίνουν ίδια αθροίσματα X_n , αλλά καταλήγουν σε διαφορετικούς κόμβους της χρονικής στιγμής *n*. Δηλαδή, φτάνουν στη θέση n, με διαφορετικές πιθανότητες, αλλά έχοντας ίδιο X_n.

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, να μην μπορεί να υπολογιστεί το κάτω φράγμα της αξίας του Ασιατικού παραγώγου, το οποίο, όπως αναφέραμε παραπάνω, είναι ίσο με:

$$E[[E(A_n \mid Z) - X]^+] = E[[E(A_n \mid X_n) - X]^+].$$

Προκειμένου να ξεπεραστεί αυτό το πρόβλημα, οι Chalasani, Jha και Varikooty (1998), θεώρησαν Z = (X_n , S_n), όπου S_n είναι η τιμή του υποκείμενου τίτλου στην αγορά, την χρονική στιγμή *n*, και επιπροσθέτως, έκαναν τις παρακάτω δύο υποθέσεις:

1. Όλα τα μονοπάτια που έχουν την ίδια τιμή Z, έχουν το ίδιο άθροισμα X_n στο χρονικό διάστημα $[0,n]$ και καταλήγουν στον ίδιο κόμβο στο χρόνο *n*, στον οποίο ο υποκείμενος τίτλος έχει τιμή S_n.

Έτσι, τα μονοπάτια έχουν τον ίδιο αριθμό άνω κινήσεων και άρα φτάνουν στην τελική θέση *n*, με ίδια πιθανότητα.

2. Για $\kappa = 1,2,\ldots,n$, ο αριθμός των πιθανών τιμών του X_κ, είναι ανάλογος του κ^3.

Σύμφωνα με τους Chalasani κ.α., λοιπόν, για Z = (X_n , S_n), και χρησιμοποιώντας τις παραπάνω υποθέσεις, μπορεί να υπολογιστεί εύκολα η ποσότητα $E[\, A_\kappa \mid X_\kappa, S_\kappa]$ και άρα το κάτω φράγμα της αξίας του Ασιατικού παραγώγου $E[[E(A_n \mid X_\kappa, S_\kappa) - X]^+]$, σε χρόνο ανάλογο του n^4.

Επίσης, για Z = (X_n , S_n), προκύπτουν ποιοτικά καλύτερα άνω και κάτω φράγματα της αξίας του παραγώγου, δηλαδή φράγματα που οι τιμές μεταξύ τους είναι κοντά.

§3.2 Διωνυμικό γράφημα για δικαιώματα Ευρωπαικού τύπου

Το διωνυμικό γράφημα των Cox- Ross- Rubinstein (1979), αποτελεί μία προσέγγιση διακριτού χρόνου, της συνεχούς χρόνου γεωμετρικής κίνησης Brown. Η τιμολόγηση απλών δικαιωμάτων προαίρεσης, αγοράς ή πώλησης, μπορεί να γίνει εύκολα και με ακρίβεια, χρησιμοποιώντας το παραπάνω γράφημα. Η τιμολόγηση, όμως, σύνθετων δικαιωμάτων, όπως είναι τα path dependent δικαιώματα, είναι αρκετά δύσκολη. Επιπλέον, η λύση της εξίσωσης των Black - Scholes δεν είναι γνωστή για τα Ασιατικά δικαιώματα.

Η τιμή εξόφλησης ενός Ασιατικού δικαιώματος εξαρτάται από τον αριθμητικό μέσο των τιμών του υποκείμενου τίτλου στην Αγορά. Αν θεωρήσουμε ότι ο χρόνος λήξης του συμβολαίου είναι Τ, και ο αριθμητικός μέσος των τιμών του τίτλου στο διάστημα [0, Τ] είναι A_T, τότε η τιμή εξόφλησης ενός Ασιατικού δικαιώματος αγοράς, είναι ίση με $(A_T - X)^+$, και πώλησης με $(X - A_T)^+$.

Σύμφωνα με τους Black-Scholes (1973), η βασική υπόθεση για την τιμή του υποκείμενου τίτλου στην αγορά, τον χρόνο t, $S(t)$, είναι το γεγονός ότι ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση της γεωμετρικής κίνησης Brown.

Δηλαδή, ισχύει:

$$dS(t) = \mu \cdot S(t)dt + \sigma \cdot S(t)dB(t)$$

όπου μ: ο συντελεστής ολίσθησης, σ: διακύμανση, $B(t)$: η κίνηση Brown.
(μ, σ : σταθερά)

Επίσης, γίνεται η υπόθεση ότι το επιτόκιο χωρίς ρίσκο, r, είναι σταθερό.

Έστω ότι το παράγωγο προαίρεσης έχει ισχύ στο χρονικό διάστημα [0, T]. Σύμφωνα με τους Cox- Ross- Rubinstein (1979), το χρονικό διάστημα [0, T], χωρίζεται σε n ίσα χρονικά διαστήματα, μήκους $\Delta t = T/n$. Στο χρονικό διάστημα Δt, η τιμή του υποκείμενου τίτλου είτε θα σημειώσει άνοδο, με πιθανότητα p, και θα πολλαπλασιαστεί με u, είτε θα σημειώσει κάθοδο, με πιθανότητα $q = 1 - p$, και θα πολλαπλασιαστεί με $d = 1/u$.

Ισχύουν:

$$u = e^{s \cdot \sqrt{\Delta t}} \quad \text{και} \quad p = \frac{e^{r \cdot \Delta t} - d}{u - d}$$

Στο διακριτό μοντέλο, η κάθε χρονική στιγμή είναι κ, και αντίστοιχα στο συνεχές, είναι $\kappa \cdot \Delta t$.

Επίσης, θεωρείται ότι $1+r = R$.

Έστω ο δειγματικός χώρος Ω, ο οποίος περιέχει όλες τις πιθανές ακολουθίες (μονοπάτια) των άνω και κάτω κινήσεων της τιμής του υποκείμενου τίτλου, στο χρονικό διάστημα $[0,n]$.

Γενικά, μια ακολουθία που περιέχεται στον Ω είναι της μορφής: $\omega=\omega_1\omega_2\ldots\omega_n$, όπου $\omega_i \in \{H, T\}$ (το H αντιστοιχεί σε μία άνω κίνηση και το T σε κάτω κίνηση της τιμής του υποκείμενου τίτλου).

Το μήκος της ακολουθίας(του μονοπατιού), είναι ίσο με τον αριθμό των ´´κλαδιών´´ που αποτελείται.

Για $\kappa = 1,2,\ldots, n$, ορίζεται δίτιμη τυχαία μεταβλητή X_κ, με τιμές ± 1. Η τιμή 1 αντιστοιχεί σε άνω κίνηση και η τιμή -1 σε κάτω κίνηση της τιμής του τίτλου. Έτσι, η ακολουθία των X_κ είναι ένας συμμετρικός τυχαίος περίπατος.

Επίσης, για $\kappa = 1,2,\ldots, n$, ορίζεται τυχαία μεταβλητή $H_\kappa(\omega)$, η οποία εκφράζει τον αριθμό των άνω κινήσεων που σημειώνονται στο μονοπάτι των τιμών ω του υποκείμενου τίτλου, μέχρι τη χρονική στιγμή κ.

Ορίζεται, $H_0(\omega) = 0$, για κάθε ω.

Προφανώς, για τη θέση του X την χρονική στιγμή κ, ισχύει:

$$X_\kappa = \sum_{i=1}^{k} X_i = H_\kappa \cdot 1 + (\kappa - H_\kappa)\cdot(-1) = 2H_\kappa - \kappa, \ \ \kappa \geq 1 \quad , X_i = \pm 1$$

Έτσι, τα μονοπάτια που φτάνουν στον κόμβο (κ,h), όπου κ: χρ.στιγμή, h: ο αριθμός των άνω κινήσεων, έχουν την ίδια τιμή: $X_\kappa = 2h - \kappa$

Η τιμή του υποκείμενου τίτλου τη χρονική στιγμή κ, S_κ, είναι ίση με :

$$S_\kappa = S_0 \cdot u^{X_1+X_2+\ldots+X_k} = S_0 \cdot u^{X_\kappa} = S_0 \cdot u^{2H_k - k}$$

Επομένως, στον κόμβο (κ,h), η τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι : $S_\kappa = S_0 \cdot u^{2h-k}$

Ο αριθμητικός μέσος των τιμών του υποκείμενου τίτλου, μέχρι τον χρόνο κ είναι ίσος με :

$$A_k = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_k}{k+1} \quad , \kappa \geq 0$$

Είναι γνωστό ότι η αξία εξόφλησης ενός Ασιατικού παραγώγου αγοράς, με τιμή εξάσκησης X, είναι ίση με $(A_n - X)^+$, ενώ η αξία εξόφλησης ενός Ασιατικού παραγώγου πώλησης, είναι ίση με $(X - A_n)^+$.

Γενικά, γράφουμε W_n^+, την αξία εξόφλησης των παραπάνω παραγώγων, τον χρόνο n. Η αξία εξόφλησης αυτών των παραγώγων, τον χρόνο 0, είναι ίση με :

$$V = \frac{\mathrm{E}\left(W_n^+\right)}{\left(1+r\right)^n} = \frac{\mathrm{E}\left(W_n^+\right)}{R^n}$$

§ 3.3 Αλγόριθμος μείωσης χρόνου τιμολόγησης Ασιατικών παραγώγων Ευρωπαικού τύπου

Όπως είπαμε και παραπάνω, οι Chalasani, Jha και Varikooty, θεώρησαν την τ. μ. $Z = (X_n , S_n)$.

Επειδή η τιμή του υποκείμενου τίτλου S_n, εξαρτάται μόνο από το πόσες άνω κινήσεις έχουν γίνει μέχρι τον χρόνο n ($S_n = S_0 \cdot u^{2h-n}$), η τ.μ. $Z = (X_n , S_n)$, είναι ισοδύναμη με την τ.μ. $Z = (X_n , H_n)$, όπου H_n : το σύνολο των άνω κινήσεων μέχρι τον χρόνο n.

Για να υπολογιστεί το κάτω φράγμα της αξίας του Ασιατικού παραγώγου, $[[E(A_n \mid X_\kappa,H_\kappa) - X]^+]$, πρέπει να γνωρίζουμε τις πιθανές τιμές του αθροίσματος X_n, σε κάθε κόμβο (n,h).

Για $\kappa = 0,1,2,..., n$ και $h = 0,1,2,\dots,\kappa$, ορίζεται $N(\kappa,h)$: ο αριθμός των διαφορετικών πιθανών τιμών του X_κ, στον κόμβο (κ, h).

Οι διαφορετικές τιμές του X_κ, γράφονται σε αύξουσα σειρά, και έχουν τη μορφή $\xi(\kappa,h,i)$, όπου i: μετρητής

$$\xi(\kappa,h, 0) ,\ \xi(\kappa,h, 1) ,\ \xi(\kappa,h, 2) ,\ \xi(\kappa,h, N(\kappa,h) - 1)$$

Λέμε ότι το μονοπάτι ω φτάνει στον κόμβο (κ, h, i), αν $H_\kappa(\omega) = h$ και $X_\kappa(\omega) = \xi(\kappa,h,i)$.

Επίσης, ορίζεται $M(\kappa,h,i)$: ο αριθμός των μονοπατιών που φτάνουν στον κόμβο (κ, h, i), δηλαδή τον αριθμό των μονοπατιών που φτάνουν στον ίδιο κόμβο (κ, h), και δίνουν το ίδιο άθροισμα X_κ.

Σε κάθε κόμβο (n, h, i), αντιστοιχεί μία αναμενόμενη τιμή των A_n , η

$$E[A_n \mid H_n = h, X_n=\xi(n, h, i)]$$

η οποία συμβολίζεται $\tilde{A}(n,h,i)$.

Έτσι, τα $M(\kappa,h,i)$ μονοπάτια που φτάνουν στον κόμβο (κ,h,i), αποτελούν ένα group,το οποίο συμμετέχει στους υπολογισμούς των φραγμάτων με μέση τιμή $\tilde{A}(k,h,i)$.

Όλα τα μονοπάτια που φτάνουν στον κόμβο (n, h) και γενικά στον (n,h,i), $\forall i \in \left(0, N(n,h)-1\right)$, φτάνουν με πιθανότητα

$$P(n,h,i) = P(H_n = h\ ,\ X_n = \xi(n,h,i)) = p^h q^{n-h}$$

Έτσι, τα μονοπάτια που ανήκουν στο ίδιο group, έχουν την ίδια πιθανότητα $p^h q^{n-h}$.

Επιπλέον, τα μονοπάτια που ανήκουν στο ίδιο group έχουν ίδιους γεωμετρικούς μέσους G_n, και αυτό γιατί:

$$G_n = \left(S_0 S_1 S_2 \ldots S_n\right)^{\frac{1}{n+1}} = \left(S_0^{\,n+1} \cdot u^{(2h-1)+(2h-2)+\ldots+(2h-n)}\right)^{\frac{1}{n+1}} = S_0 \cdot (u^{X_1+X_2+\ldots+X_n})^{1/n+1} =$$

$$= S_0\,(u^{X_n})^{1/n+1}$$

Οι Chalasani, κ.α. θεώρησαν ότι οι πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει ο γεωμετρικός μέσος G_n, είναι ανάλογος του n^3.

Επίσης, θεώρησαν ότι οι αριθμητικοί μέσοι των μονοπατιών που έχουν ίδιους γεωμετρικούς μέσους, δεν διαφέρουν κατά πολύ.

Μια ιδέα θα ήταν να χρησιμοποιηθεί ο γεωμετρικός μέσος αντί του αριθμητικού, προκειμένου να προσεγγιστεί η αξία του παραγώγου. Όμως, οι Turnbull και Wakeman, το 1991, είχαν αποδείξει ότι η χρήση του γεωμετρικού μέσου δεν οδηγεί σε καλές προσεγγίσεις.

Τελικά, για να προσεγγιστεί η αξία του παραγώγου, υπολογίζεται το κάτω φράγμα, το οποίο γίνεται:

$$E[[E(A_n \mid X_\kappa, H_\kappa) - X]^+] = \sum_{h=0}^{n} \sum_{i=0}^{N(n,h)-1} P(n,h,i) \cdot \left[\tilde{A}(n,h,i) - X\right]^+ =$$

$$= \sum_{h=0}^{n} \sum_{i=0}^{N(n,h)-1} p^h q^{n-h} M(n,h,i) \cdot \left[\tilde{A}(n,h,i) - X\right]^+$$

Οι Chalasani, Jha και Varikooty, απέδειξαν ότι στον κόμβο (κ,h), οι πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει το άθροισμα X_κ, όταν αυτές γραφούν σε αύξουσα σειρά, διαφέρουν διαδοχικά κατά 2 μονάδες.

Δηλαδή, απέδειξαν ότι ισχύει: $\xi(\kappa,h,i+1) = \xi(\kappa,h,i) + 2$, $i = 0,1,\ldots,N(\kappa,h) - 2$

Επίσης, απέδειξαν τις παρακάτω τρεις προτάσεις:

1. Η i-οστή πιθανή τιμή του X_κ στον κόμβο (κ,h), δίνεται από τον τύπο:
   $\xi(\kappa,h,i) = h^2 + h - (\kappa^2+\kappa)/2 + 2i \quad , i = 0,1,2,\ldots, N(\kappa,h) - 1$

2. Ο αριθμός των διαφορετικών τιμών που μπορεί να πάρει το άθροισμα X_κ, στον κόμβο (κ, h), δίνεται από τον τύπο: $N(\kappa, h) = 1 + \kappa h - h^2$

3. Έστω ένα μονοπάτι που φτάνει στον κόμβο (κ,h,i). Ορίζεται δίτιμη μεταβλητή ν, που παίρνει τιμή 1, αν την επόμενη χρονική στιγμή υπάρξει ανοδική κίνηση, και 0, διαφορετικά.

Την χρονική στιγμή $\kappa+1$, το παραπάνω μονοπάτι περνάει από τον κόμβο $(\kappa+1,h+\nu,j)$, όπου $j = i + (1 - \nu)\cdot h$

§ 3.4 Forward induction

Προκειμένου να υπολογιστεί το κάτω φράγμα

$$\sum_{h=0}^{n} \sum_{i=0}^{N(n,h)-1} p^h q^{n-h} M(n,h,i) \cdot \left[\tilde{A}(n,h,i) - \mathrm{X}\right]^+ ,$$

πρέπει να υπολογιστούν οι ποσότητες $M(n,h,i)$, και $\tilde{A}(n,h,i)$.

Οι παραπάνω ποσότητες υπολογίστηκαν από τους Chalasani, κ.α., μέσω της προτεινόμενης μεθόδου τους, που είναι η forward induction.

Αρχικά, ορίστηκαν οι παρακάτω τυχαίες μεταβλητές:

1. S_k : το άθροισμα των τιμών του υποκείμενου τίτλου στο χρονικό διάστημα $[0,\kappa]$, δηλαδή:

$$S_k = \sum_{i=0}^{k} S_i \text{ , όπου } \kappa = 0,1,\ldots, n$$

2. $\hat{S}(\kappa,h,i)$: το άθροισμα των S_k , όλων των μονοπατιών $(M(\kappa, h, i))$ που καταλήγουν στον κόμβο (κ, h, i).

Έτσι, με την βοήθεια των παραπάνω τ.μ., η μέση τιμή $\tilde{A}(n,h,i)$, γράφεται ως εξής :

$$\tilde{A}(n,h,i) = \frac{A_1 + A_2 + A_M}{M(n,h,i)} = \frac{\dfrac{\hat{S}(n,h,i)}{n+1}}{M(n,h,i)} = \frac{\hat{S}(n,h,i)}{(n+1)\cdot M(n,h,i)}$$

Για $\kappa = 1,2,...,n$, $h = 0,1,2,\dots,\kappa$, $i = 0,1,\dots,N(\kappa,h) - 1$, οι αρχικές τιμές των $M(\kappa, h, i)$ και $\hat{S}(k,h,i)$ είναι 0.

Οι αρχικές συνθήκες της μεθόδου είναι : $M(0,0,0) = 1$ και $\hat{S}(0,0,0) = S_0$.

Έστω ότι έχουν υπολογιστεί οι ποσότητες $M(m,h,i)$ και $\hat{S}(m,h,i)$, για $m = 0,1,\dots, \kappa$, και πρέπει να υπολογιστούν οι αντίστοιχες ποσότητες για τη χρονική στιγμή $\kappa+1$.

Από τον κόμβο (κ,h,i), η τιμή του υποκείμενου τίτλου Sκ , είτε θα κινηθεί ανοδικά και θα φτάσει στον κόμβο $(\kappa+1, h+1, j)$, είτε θα κινηθεί καθοδικά, και θα φτάσει στον κόμβο $(\kappa+1, h, j)$, όπου $j = i + (1 - v)\cdot h$

Τα $M(\kappa, h, i)$ μονοπάτια που φτάνουν στον κόμβο (κ, h) και έχουν ίδιο άθροισμα X_κ, δηλαδή φτάνουν στον κόμβο (κ,h,i), θα φτάνουν και στον επόμενο κόμβο $(\kappa+1, h+v, j)$. Δηλαδή, αν στον κόμβο (κ, h, i) υπάρχει ένα group με M μονοπάτια, τότε στον κόμβο $(\kappa+1, h+v, j)$, θα υπάρχει group με τουλάχιστον M μονοπάτια.

Επιπλέον, το άθροισμα των S_κ όλων των μονοπατιών που καταλήγουν στον κόμβο $(\kappa+1, h+v, j)$, θα είναι ίσο με :

$$\hat{S}(\kappa+1, h+v, j) = \hat{S}(\kappa,h,i) + M(\kappa, h, i)\cdot S_{\kappa+1} = \hat{S}(\kappa,h,i) + M(\kappa, h, i)\cdot S_0\cdot u^{2(h+v)-(\kappa+1)}$$

Συμπερασματικά, λοιπόν, αν γνωρίζουμε πόσα μονοπάτια περιλαμβάνει κάθε group στον κόμβο (κ,h), και πόσο είναι το ολικό άθροισμα $\hat{S}$ του κάθε group, τότε μπορούμε άμεσα να γνωρίζουμε τις αντίστοιχες ποσότητες για τον κόμβο $(\kappa+1, h+v)$.

§ 3.5 Ψευδοκώδικας - Εφαρμογή

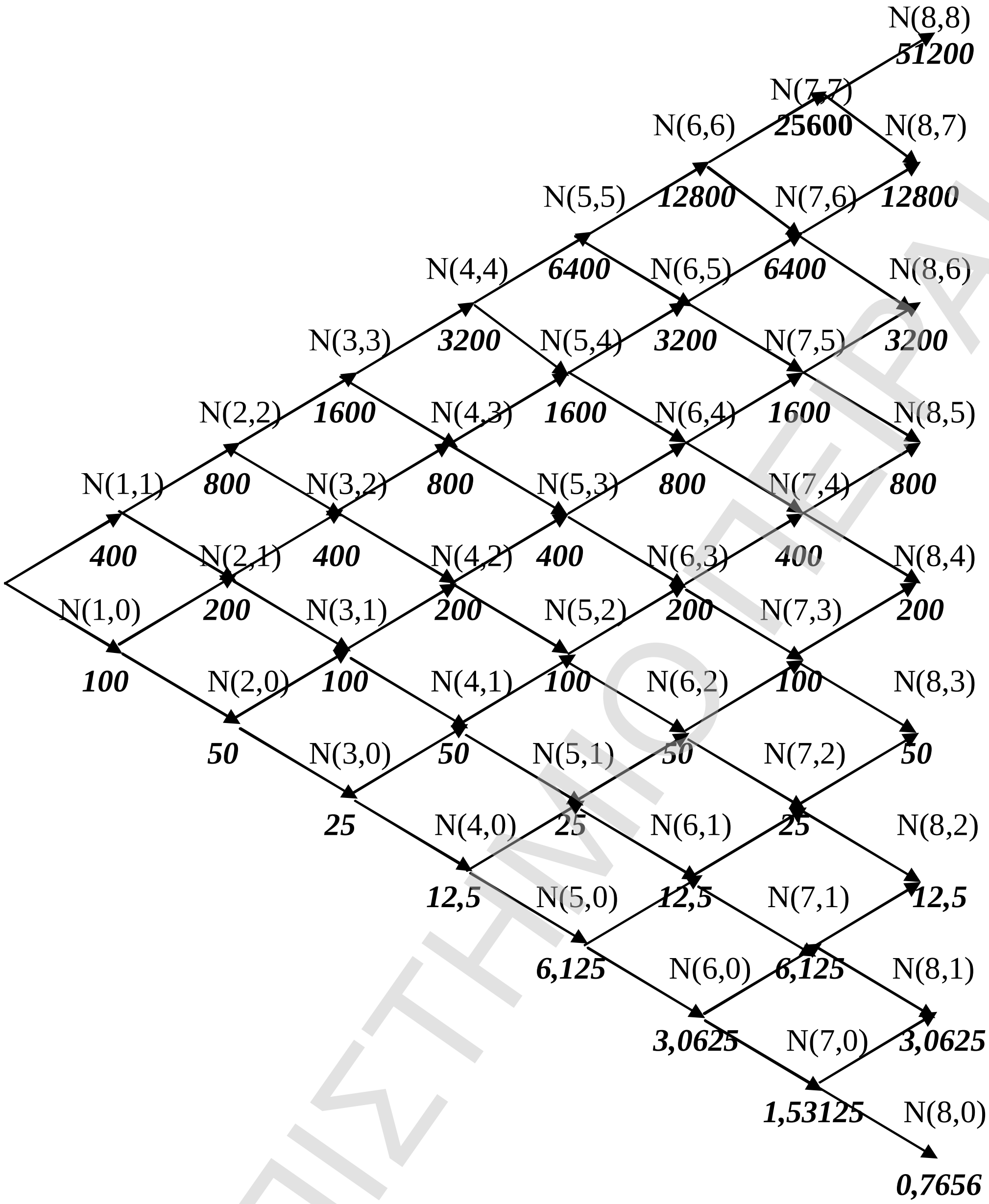
Ψευδοκώδικας για τον υπολογισμό των ποσοτήτων M και S $\hat{S}$

```
M(0,0,0)=1
S(0,0,0)=S0
for  k: = 1  to n do
  for  h: = 0  to k do
      for  i: = 0  to k*h-h^2  do
             M(k,h,i):=0;
             S(k,h,i):=0;
            end
     end
 end
```

```
for  k: = 0  to n-1  do
   for  h: = 0  to k  do
         for  i: = 0  to  k*h-h^2  do
               for  v: = 0  to 1  do
                        j:=i+(1-v)*h;
                        M(k+1,h+v,j)+ = M(k,h,i);
                        S(k+1,h+v,j)+ = S(k,h,i)+M(k,h,i)*S0*u^[2*(h+v)-(k+1)];
                 end
         end
     end
end
```

Εφαρμογή

Δίνεται το παρακάτω διωνυμικό γράφημα, στο οποίο ο χρόνος ισχύος του παραγώγου [0,T] , έχει χωριστεί σε $n = 8$ χρονικές στιγμές. Επίσης, δίνονται: $S_0 = 200$, $u = 2$, $d = 0,5$, X = 200.



Γράφημα 4 : Διωνυμικό γράφημα με n = 8

Ακολουθούν πίνακες στους οποίους έχει υπολογιστεί ο αριθμός των ομάδων των μονοπατιών που φτάνον σε κάθε κόμβο.

n = 1

	N(1,1)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0		1
		1//1

	N(1,0)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0		1
		1//1

n = 2

	N(2,2)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	3	1
		1//1

	N(2,1)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-1	1
1	1	1
		2//2

	N(2,0)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-3	1
		1//1

n = 3

	N(3,3)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	6	1
		1//1

	N(3,2)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	0	1
1	2	1
2	4	1
		3//3

	N(3,1)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-4	1
1	-2	1
2	0	1
		3//3

	N(3,0)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-6	1
		1//1

n = 4

	N(4,4)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	10	1
		1//1

	N(4,3)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	2	1
1	4	1
2	6	1
3	8	1
		4//4

	N(4,2)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-4	1
1	-2	1
2	0	2
3	2	1
4	4	1
		5//6

	N(4,1)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-8	1
1	-6	1
2	-4	1
3	-2	1
		4//4

	N(4,0)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-10	1
		1//1

n = 5

	N(5,5)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	15	1
		1//1

	N(5,4)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	5	1
1	7	1
2	9	1
3	11	1
4	13	1
		5//5

	N(5,3)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-3	1
1	-1	1
2	1	2
3	3	2
4	5	2
5	7	1
6	9	1
		7//10

	N(5,2)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-9	1
1	-7	1
2	-5	2
3	-3	2
4	-1	2
5	1	1
6	3	1
		7//10

	N(5,1)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-13	1
1	-11	1
2	-9	1
3	-7	1
4	-5	1
		5//5

	N(5,0)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-15	1
		1//1

n = 6

	N(6,6)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	21	1
		1//1

	N(6,5)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	9	1
1	11	1
2	13	1
3	15	1
4	17	1
5	19	1
		6//6

	N(6,4)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-1	1
1	1	1
2	3	2
3	5	2
4	7	3
5	9	2
6	11	2
7	13	1
8	15	1
		9//15

	N(6,3)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-9	1
1	-7	1
2	-5	2
3	-3	3
4	-1	3
5	0	3
6	1	3
7	3	2
8	5	1
9	9	1
		10//20

	N(6,2)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-15	1
1	-13	1
2	-11	2
3	-9	2
4	-7	3
5	-5	2
6	-3	2
7	-1	1
8	1	1
		9//15

	N(6,1)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-19	1
1	-17	1
2	-15	1
3	-13	1
4	-11	1
5	-9	1
		6//6

	N(6,0)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-21	1
		1//1

n = 7

	N(7,7)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	28	1
		1//1

	N(7,6)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	14	1
1	16	1
2	18	1
3	20	1
4	22	1
5	24	1
6	26	1
		7//7

	N(7,5)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	2	1
1	4	1
2	6	2
3	8	2
4	10	3
5	12	3
6	14	3
7	16	2
8	18	2
9	20	1
10	22	1
		11//21

	N(7,4)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-8	1
1	-6	1
2	-4	2
3	-2	3
4	0	4
5	2	4
6	4	5
7	6	4
8	8	4
9	10	3
10	12	2
11	14	1
12	16	1
		13//35

	N(7,3)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-16	1
1	-14	1
2	-12	2
3	-10	3
4	-8	4
5	-6	4
6	-4	5
7	-2	4
8	0	4
9	2	3
10	4	2
11	6	1
12	8	1
		13//35

	N(7,2)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-22	1
1	-20	1
2	-18	2
3	-16	2
4	-14	3
5	-14	3
6	-12	3
7	-10	2
8	-8	2
9	-6	1
10	-4	1
		11//21

	N(7,1)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-26	1
1	-24	1
2	-22	1
3	-20	1
4	-18	1
5	-16	1
6	-14	1
		7//7

	N(7,0)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-28	1
		1//1

n = 8

	N(8,8)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	36	1
		1//1

	N(8,7)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	20	1
1	22	1
2	24	1
3	26	1
4	28	1
5	30	1
6	32	1
7	34	1
		8//8

	N(8,6)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	6	1
1	8	1
2	10	2
3	12	2
4	14	3
5	16	3
6	18	4
7	20	3
8	22	3
9	24	2
10	26	2
11	28	1
12	30	1
		13//28

	N(8,5)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-6	1
1	-4	1
2	-2	2
3	0	3
4	2	4
5	4	5
6	6	6
7	8	6
8	10	6
9	12	6
10	14	5
11	16	4
12	18	3
13	20	2
14	22	1
15	24	1
		16//56

	N(8,4)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-16	1
1	-14	1
2	-12	2
3	-10	3
4	-8	5
5	-6	5
6	-4	7
7	-2	7
8	0	8
9	2	7
10	4	7
11	6	5
12	8	5
13	10	3
14	12	2
15	14	1
16	16	1
		17//70

	N(8,3)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-24	1
1	-22	1
2	-20	2
3	-18	3
4	-16	4
5	-14	5
6	-12	6
7	-10	6
8	-8	6
9	-6	6
10	-4	5
11	-2	4
12	0	3
13	2	2
14	4	1
15	6	1
		16//56

	N(8,2)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-30	1
1	-28	1
2	-26	2
3	-24	2
4	-22	3
5	-20	3
6	-18	4
7	-16	3
8	-14	3
9	-12	2
10	-10	2
11	-8	1
12	-6	1
		13//28

	N(8,1)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-34	1
1	-32	1
2	-30	1
3	-28	1
4	-26	1
5	-24	1
6	-22	1
7	-20	1
		8//8

	N(8,0)	
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)
0	-36	1
		1//1

Θεωρούμε ότι έχουν υπολογιστεί όλες οι ποσότητες $M(\kappa,h,i)$ και $\hat{S}\,(\kappa,\, h,\, i)$ στους κόμβους της χρονικής στιγμής $n = 5$, οι οποίες είναι οι εξής:

n = 5

N(5,5)			
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)	S^(k,h,i)
0	15	1	12600
		1//1	

N(5,4)			
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)	S^(k,h,i)
0	5	1	3300
1	7	1	3600
2	9	1	4200
3	11	1	5400
4	13	1	7800
		5//5	

N(5,3)			
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)	S^(k,h,i)
0	-3	1	1050
1	-1	1	1200
2	1	2	1500+1500
3	3	2	2100+1800
4	5	2	2400+2400
5	7	1	3000
6	9	1	4200
		7//10	

N(5,2)			
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)	S^(k,h,i)
0	-9	1	525
1	-7	1	600
2	-5	2	750+750
3	-3	2	900+1050
4	-1	2	1200+1200
5	1	1	1500
6	3	1	2100
		7//10	

N(5,1)			
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)	S^(k,h,i)
0	-13	1	412,5
1	-11	1	450
2	-9	1	525
3	-7	1	675
4	-5	1	975
		5//5	

	N(5,0)		
i	ξ(k,h,i)	M(k,h,i)	S^(k,h,i)
0	-15	1	393,75
		1//1	

Οι ποσότητες $M(\kappa,h,i)$ και $\hat{S}(\kappa, h,i)$ που αντιστοιχούν στους κόμβους της χρονικής στιγμής $n = 6$, καθορίζονται πλήρως από τις παραπάνω τιμές που αντιστοιχούν στους κόμβους της χρονικής στιγμής $n = 5$, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις :

$j = i + (1\text{-v}) \cdot h$, $M(k+1,h+\text{v},j) = M(k,h,i)$ και $\hat{S}(k+1,h+\text{v},j) = \hat{S}(k,h,i)+M(k,h,i) \cdot S_{\kappa+1}$

Τα αποτελέσματα είναι τα εξής:

N(5,5,0)	j N(6,6,j) = N(6,6,0) N(6,5,j) = N(6,5,5)	S΄ 12600+1·12800 12600+1·3200

N(5,4,0)	j N(6,5,j) = N(6,5,0) N(6,4,j) = N(6,4,4)	S΄ 3300+1·3200 3300+1·800

N(5,4,1)	j N(6,5,,j) = N(6,5,1) N(6,5,j) = N(6,4,5)	S΄ 3600+1·3200 3600+1·800

N(5,4,2)	j N(6,5,j) = N(6,5,2) N(6,4,j) = N(6,4,6)	S΄ 4200+1·3200 4200+1·800

N(5,4,3)	j N(6,5,,j) = N(6,5,3) N(6,4,j) = N(6,4,7)	S΄ 5400+1·3200 5400+1·800

N(5,4,4)	j N(6,5,j) = N(6,5,4) N(6,4,j) = N(6,4,8)	S΄ 7800+1·3200 7800+1·800

N(5,3,0)	j N(6,4,j) = N(6,4,0) N(6,3,j) = N(6,3,3)	S΄ 1050+1·800 1050+1·200

N(5,3,1)	j N(6,4,j) = N(6,4,1) N(6,3,j) = N(6,3,4)	S΄ 1200+1·800 1200+1·200

N(5,3,2)	j N(6,4, j) = N(6,4,2) N(6,3,j) = N(6,3,5)	S΄ 3000+2·800 3000+2·200

N(5,3,3)	N(6,4,j) = N(6,4,3)	3900+2·800
	N(6,3,j) = N(6,3,6)	3900+2·200

	j	S′
N(5,3,4)	N(6,4,j) = N(6,4,4)	4800+2·800
	N(6,3,j) = N(6,3,7)	4800+2·200

	j	S′
N(5,3,5)	N(6,4,j) = N(6,4,5)	3000+1·800
	N(6,3,j) = N(6,3,8)	3000+1·200

	j	S′
N(5,3,6)	N(6,4,j) = N(6,4,6)	4200+1·800
	N(6,3,j) = N(6,3,9)	4200+1·200

	j	S′
N(5,2,0)	N(6,3,j) = N(6,3,0)	525 +1·200
	N(6,2,j) = N(6,2,2)	525 +1·50

	j	S′
N(5,2,1)	N(6,3,j) = N(6,3,1)	600 +1·200
	N(6,2,j) = N(6,2,3)	600+1·50

N(5,2,2)	j	S′
	N(6,3,j) = N(6,3,2)	1500+2·200
	N(6,2,j) = N(6,2,4)	1500+2·50

N(5,2,3)	j	S′
	N(6,3,j) = N(6,3,3)	1950+2·200
	N(6,2,j) = N(6,2,5)	1950+2·50

N(5,2,4)	j	S′
	N(6,3,j) = N(6,3,4)	2400+2·200
	N(6,2,j) = N(6,2,6)	2400+2·50

N(5,2,5)	j	S′
	N(6,3,j) = N(6,3,5)	1500+1·200
	N(6,2,j) = N(6,2,7)	1500+1·50

N(5,2,6)	j	S′
	N(6,3,j) = N(6,3,6)	2100+1·200
	N(6,2,j) = N(6,2,8)	2100+1·50

N(5,1,0)	j N(6,2,j) = N(6,2,0) N(6,1,j) = N(6,1,1)	S΄ 412,5 + 1·50 412,5 + 1·12,5

N(5,1,1)	j N(6,2,j) = N(6,2,1) N(6,1,j) = N(6,1,2)	S΄ 450 + 1·50 450 + 1·12,5

N(5,1,2)	j N(6,2,j) = N(6,2,2) N(6,1,j) = N(6,1,3)	S΄ 525 + 1·50 525 + 1·12,5

N(5,1,3)	j N(6,2,j) = N(6,2,3) N(6,1,j) = N(6,1,4)	S΄ 675 + 1·50 675 + 1·12,5

N(5,1,4)	j N(6,2,j) = N(6,2,4) N(6,1,j) = N(6,1,5)	S΄ 975 + 1·50 975 + 1·12,5

	j	S΄
N(5,0,0)	N(6,1,j) = N(6,1,0)	393,75 + 1·12,5
	N(6,0,j) = N(6,0,0)	393,75+1·3,125

Στη συνέχεια, υπολογίζονται οι αντιπροσωπευτικοί αριθμητικοί μέσοι $\tilde{A}$ κάθε ομάδας μονοπατιών στους κόμβους της χρονικής στιγμής n = 6.

$$\tilde{A}(6,6,0)=\frac{\hat{S}(6,6,0)}{(6+1)\cdot M(6,6,0)} = \frac{25400}{7}=3628,57$$

$$\tilde{A}(6,5,0)=\frac{\hat{S}(6,5,0)}{(6+1)\cdot M(6,5,0)}=\frac{15800}{7}=2257,14$$

$$\tilde{A}(6,5,1)=\frac{\hat{S}(6,5,1)}{(6+1)\cdot M(6,5,1)}=\frac{6800}{7}=971,43$$

$$\tilde{A}(6,5,2)=\frac{\hat{S}(6,5,2)}{(6+1)\cdot M(6,5,2)}=\frac{7400}{7}=1057,14$$

$$\tilde{A}(6,5,3)=\frac{\hat{S}(6,5,3)}{(6+1)\cdot M(6,5,3)}=\frac{8600}{7}=1228,57$$

$$\tilde{A}(6,5,4)=\frac{\hat{S}(6,5,4)}{(6+1)\cdot M(6,5,4)}=\frac{11000}{7}=1571,43$$

$$\tilde{A}(6,5,5)=\frac{\hat{S}(6,5,5)}{(6+1)\cdot M(6,5,5)}=\frac{15800}{7}=2257,14$$

$$\tilde{A}(6,4,0)=\frac{\hat{S}(6,4,0)}{(6+1)\cdot M(6,4,0)}=\frac{1850}{7}=264,29$$

$$\tilde{A}(6,4,1)=\frac{\hat{S}(6,4,1)}{(6+1)\cdot M(6,4,1)}=\frac{2000}{7}=285,71$$

$$\tilde{A}(6,4,2)=\frac{\hat{S}(6,4,2)}{(6+1)\cdot M(6,4,2)}=\frac{4600}{14}=328,57$$

$$\tilde{A}(6,4,3)=\frac{\hat{S}(6,4,3)}{(6+1)\cdot M(6,4,3)}=\frac{5500}{14}=392,86$$

$$\tilde{A}(6,4,4)=\frac{\hat{S}(6,4,4)}{(6+1)\cdot M(6,4,4)}=\frac{6400+4100}{21}=500$$

$$\tilde{A}(6,4,5)=\frac{\hat{S}(6,4,5)}{(6+1)\cdot M(6,4,5)}=\frac{4400+3800}{14}=585,71$$

$$\tilde{A}(6,4,6)=\frac{\hat{S}(6,4,6)}{(6+1)\cdot M(6,4,6)}=\frac{5000+5000}{14}=714,29$$

$$\tilde{A}(6,4,7)=\frac{\hat{S}(6,4,7)}{(6+1)\cdot M(6,4,7)}=\frac{6200}{7}=885,71$$

$$\tilde{A}(6,4,8)=\frac{\hat{S}(6,4,8)}{(6+1)\cdot M(6,4,8)}=\frac{8600}{7}=1228,57$$

$$\tilde{A}(6,3,0)=\frac{\hat{S}(6,3,0)}{(6+1)\cdot M(6,3,0)}=\frac{725}{7}=103,57$$

$$\tilde{A}(6,3,1)=\frac{\hat{S}(6,3,1)}{(6+1)\cdot M(6,3,1)}=\frac{800}{7}=114,29$$

$$\tilde{A}(6,3,2)=\frac{\hat{S}(6,3,2)}{(6+1)\cdot M(6,3,2)}=\frac{1900}{14}=135,71$$

$$\tilde{A}(6,3,3)=\frac{\hat{S}(6,3,3)}{(6+1)\cdot M(6,3,3)}=\frac{1250+2350}{21}=171,43$$

$$\tilde{A}(6,3,4)=\frac{\hat{S}(6,3,4)}{(6+1)\cdot M(6,3,4)}=\frac{1400+2800}{21}=200$$

$$\tilde{A}(6,3,5)=\frac{\hat{S}(6,3,5)}{(6+1)\cdot M(6,3,5)}=\frac{3400+1700}{21}=242,86$$

$$\tilde{A}(6,3,6)=\frac{\hat{S}(6,3,6)}{(6+1)\cdot M(6,3,6)}=\frac{4300+2300}{21}=314,29$$

$$\tilde{A}(6,3,7)=\frac{\hat{S}(6,3,7)}{(6+1)\cdot M(6,3,7)}=\frac{5200}{14}=371,43$$

$$\tilde{A}(6,3,8)=\frac{\hat{S}(6,3,8)}{(6+1)\cdot M(6,3,8)}=\frac{3200}{7}=457,14$$

$$\tilde{A}(6,3,9)=\frac{\hat{S}(6,3,9)}{(6+1)\cdot M(6,3,9)}=\frac{4400}{7}=628,57$$

$$\tilde{A}(6,2,0)=\frac{\hat{S}(6,2,0)}{(6+1)\cdot M(6,2,0)}=\frac{462,5}{7}=66,07$$

$$\tilde{A}(6,2,1)=\frac{\hat{S}(6,2,1)}{(6+1)\cdot M(6,2,1)}=\frac{500}{7}=71,43$$

$$\tilde{A}(6,2,2)=\frac{\hat{S}(6,2,2)}{(6+1)\cdot M(6,2,2)}=\frac{575+575}{14}=82,14$$

$$\tilde{A}(6,2,3)=\frac{\hat{S}(6,2,3)}{(6+1)\cdot M(6,2,3)}=\frac{650+725}{14}=98,21$$

$$\tilde{A}(6,2,4)=\frac{\hat{S}(6,2,4)}{(6+1)\cdot M(6,2,4)}=\frac{1600+1025}{21}=125$$

$$\tilde{A}(6,2,5)=\frac{\hat{S}(6,2,5)}{(6+1)\cdot M(6,2,5)}=\frac{2050}{14}=146,43$$

$$\tilde{A}(6,2,6)=\frac{\hat{S}(6,2,6)}{(6+1)\cdot M(6,2,6)}=\frac{2500}{14}=178,57$$

$$\tilde{A}(6,2,7)=\frac{\hat{S}(6,2,7)}{(6+1)\cdot M(6,2,7)}=\frac{1550}{7}=221,43$$

$$\tilde{A}(6,2,8)=\frac{\hat{S}(6,2,8)}{(6+1)\cdot M(6,2,8)}=\frac{2150}{7}=307,14$$

$$\tilde{A}(6,1,0)=\frac{\hat{S}(6,1,0)}{(6+1)\cdot M(6,1,0)}=\frac{406,25}{7}=58,04$$

$$\tilde{A}(6,1,2)=\frac{\hat{S}(6,1,2)}{(6+1)\cdot M(6,1,2)}=\frac{462,5}{7}=66,07$$

$$\tilde{A}(6,1,3)=\frac{\hat{S}(6,1,3)}{(6+1)\cdot M(6,1,3)}=\frac{537,5}{7}=76,79$$

$$\hat{A}(6,1,4)=\frac{\hat{S}(6,1,4)}{(6+1)\cdot M(6,1,4)}=\frac{687,5}{7}=98,21$$

$$\hat{A}(6,1,5)=\frac{\hat{S}(6,1,5)}{(6+1)\cdot M(6,1,5)}=\frac{987,5}{7}=141,07$$

$$\hat{A}(6,0,0)=\frac{\hat{S}(6,0,0)}{(6+1)\cdot M(6,0,0)}=\frac{396,875}{7}=56,69$$

§ 3.6 Χρόνος υπολογισμού των $M(\kappa,h,\alpha)$ και $\hat{S}(m,h,a)$

Οι ποσότητες $M(\kappa, h, i)$ και $\hat{S}(\kappa,h,i)$, προσδιορίζονται από τρεις παράγοντες, οι οποίοι είναι η χρονική στιγμή κ (κ =0,1,...,n), το σύνολο των ανοδικών κινήσεων h (h = 0,1,...,κ), και το άθροισμα X_κ μέχρι τον κόμβο (κ,h) (i = 0,1,…,$N(\kappa,h)$).

Έτσι, ο χρόνος που απαιτείται για να δώσει αποτελέσματα ο αλγόριθμος, εξαρτάται από τον συνολικό αριθμό κόμβων (κ, h, i), που υπάρχουν στο γράφημα, από τη χρονική στιγμή 0 μέχρι τη χρονική στιγμή n.

Έχει οριστεί $N(\kappa,h)$: ο αριθμός των διαφορετικών πιθανών τιμών του X_κ, στον κόμβο (κ, h). Επομένως, ο αριθμός των κόμβων (κ, h, i), που υπάρχουν τη χρονική στιγμή κ, είναι ίσος με:

$$\sum_{h=0}^{k} N(k,h)=\sum_{h=0}^{k}\left(1+kh-h^2\right)=1+\frac{k\cdot k\cdot(k+1)}{2}-\frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}=$$

$$=1+\frac{3k^3+3k^2-2k^3-k^2-2k^2-k}{6}=1+\frac{\left(k^3-k\right)}{6}$$

και ο συνολικός αριθμός κόμβων (κ, h, i), που υπάρχουν στο γράφημα, από τη χρονική στιγμή 0, μέχρι τη χρονική στιγμή n, είναι ίσος με:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{k} N(k,h)=\sum_{k=0}^{n}\left[1+\frac{\left(k^3-k\right)}{6}\right]=(n+1)+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k^3-\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k=n+\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{24}-\frac{n\cdot(n+1)}{12}$$

$$= n + 1 + \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{24} - \frac{n^2 + n}{12} = 1 + \frac{24n + n^4 + 2n^3 + n^2 - 2n^2 - 2n}{24} =$$

$$= 1 + \frac{22n - n^2 + n^4 + 2n^3}{24} = 1 + \frac{11n}{12} + \frac{n^4 + 2n^3 - n^2}{24} \le \frac{n^4}{20}$$

Συνεπώς, ο χρόνος που απαιτείται για να δώσει αποτελέσματα ο αλγόριθμος , είναι ανάλογος του n^4 .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΑΣΙΑΤΙΚΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΤΩΝ CHALASANI, JHA, ΚΑΙ VARIKOOTY

§ 4.1 Εισαγωγή

Οι Chalasani, Jha και Varikooty (1999), προκειμένου να δημιουργήσουν έναν αλγόριθμο που να μειώνει τον χρόνο τιμολόγησης Ασιατικών παραγώγων Αμερικανικού τύπου, ομαδοποίησαν τα μονοπάτια των τιμών του υποκείμενου τίτλου ως εξής: Σε κάθε ομάδα, απαίτησαν να περιλαμβάνονται μονοπάτια που να φτάνουν στον ίδιο κόμβο (k, h), και να έχουν ένα κοινό γνώρισμα.

Με αυτόν τον τρόπο, στην τιμολόγησή τους, που στηριζόταν στην εύρεση άνω και κάτω φραγμάτων της αξίας του παραγώγου, δεν χρησιμοποίησαν τον αριθμητικό μέσο A_n κάθε μονοπατιού ξεχωριστά, αλλά τον μέσο των αριθμητικών μέσων των μονοπατιών κάθε ομάδας μονοπατιών.Έτσι, η τιμολόγηση των Ασιατικών παραγώγων Αμερικανικού τύπου έγινε σε χρόνο ανάλογο του συνολικού αριθμού των ομάδων μονοπατιών που υπάρχουν στο n- step διωνυμικό γράφημα, που είναι της τάξης του n^4.

Στην παράγραφο §4.1.1, δίνεται ο ορισμός του stopped node και παρουσιάζεται το άνω και κάτω φράγμα της αξίας του Ασιατικού παραγώγου Αμερικανικού τύπου. Στη συνέχεια, στην παράγραφο §4.2 υπενθυμίζονται τα χαρακτηριστικά σημεία του διωνυμικού γραφήματος, και ορίζονται κάποιες μεταβλητές, σημαντικές για την δημιουργία του αλγορίθμου. Στις παραγράφους §4.3 και §4.4 αναπτύσσεται ο αλγόριθμος μείωσης του χρόνου τιμολόγησης. Στην παράγραφο §4.5 δίνεται ο ψευδοκώδικας και μία εφαρμογή, και στην παράγραφο §4.6, υπολογίζεται ο χρόνος που απαιτείται για να δώσει ο αλγόριθμος αποτελέσματα. Στις παραγράφους §4.7 και §4.8, περιγράφεται ο τρόπος εύρεσης του άνω και κάτω φράγματος, αντίστοιχα, της αξίας Ασιατικού παραγώγου Αμερικανικού τύπου. Τέλος, στην παράγραφο §4.9, συγκρίνονται οι μέθοδοι τιμολόγησης Ασιατικού παραγώγου Αμερικανικού τύπου των Chalasani, Jha,Varikooty και των Hull – White.

§4.1.1 Φράγματα της αξίας Ασιατικού παραγώγου Αμερικανικού τύπου

Η ιδέα των Chalasani, Jha και Varikooty, για την εύρεση κάτω φράγματος της αξίας Ασιατικού παραγώγου Αμερικανικού τύπου, ήταν η εξής:

Σε κάθε κόμβο (*k*,*h*), του γνωστού διωνυμικού μοντέλου των Cox- Ross- Rubinstein (1979), υπολόγισαν τη μέση τιμή $\tilde{A}(k,h)$ των αριθμητικών μέσων A_k , των μονοπατιών που φτάνουν στον κόμβο (*k*,*h*). Ο υπολογισμός του $\tilde{A}(k,h)$ για κάθε κόμβο, γίνεται εύκολα με forward induction, δηλαδή με τη μέθοδο που είχαν ήδη προτείνει σε προηγούμενη δημοσίευσή τους, και έχουμε αναλύσει στο προηγούμενο κεφάλαιο. Το $\tilde{A}(k,h)$ αποτελεί τον αντιπροσωπευτικό αριθμητικό μέσο του κόμβου (*k*,*h*). Στη συνέχεια, υπολόγισαν το άνω φράγμα της αξίας του παραγώγου μέσω των μεθόδων backward recursion και γραμμικής παρεμβολής, που πρώτοι εισήγαγαν οι Hull-White.

Η αξία του παραγώγου τη χρονική στιγμή *k*, θεωρείται ότι είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, των (H_k , A_k). Τη χρονική στιγμή *k*, στους κόμβους (*k*,*h*), υπολογίζονται οι ποσότητες $\tilde{A}(k,h)$, και με τη βοήθεια των ζευγών (*h*, $\tilde{A}(k,h)$), εκτιμάται η αξία του παραγώγου.

Για $k = n$, η αξία του παραγώγου είναι ίση με : $[\tilde{A}(n,h) - X]^+$.

Για $k < n$, η αξία του παραγώγου υπολογίζεται με κίνηση προς τα πίσω (backward recursion), και είναι ίση με το maximum της άμεσης αξίας εξόφλησης $[\tilde{A}(k,h) - X]^+$, και της αναμενόμενης αξίας του δικαιώματος, για τον χρόνο *k*+1. Για να μπορεί να υπολογιστεί αυτή η τιμή, πρέπει να μπορούν να υπολογιστούν όλοι οι μέσοι $\tilde{A}(k+1,h)$. Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιείται η μέθοδος της παρεμβολής, ώστε να υπολογιστούν κάποια $\tilde{A}(k+1,h)$, για τα οποία δεν επαρκούν τα δεδομένα.

Η backward recursion συνεχίζεται μέχρι τη χρονική στιγμή 0, όπου υπολογίζεται η εκτιμώμενη αξία του παραγώγου, και αυτή η τιμή αποτελεί ένα άνω φράγμα της πραγματικής αξίας του παραγώγου.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

Ένας κόμβος (*k*, *h*) ονομάζεται stopped node, αν $k = n$ ή αν η εκτιμώμενη αξία του παραγώγου στον κόμβο (*k*, *h*) είναι ίση με $[\tilde{A}(k,h) - X]^+$.

Οι Chalasani κ.α., για την εύρεση κάτω φραγμάτων βασίστηκαν στον εξής κανόνα :

Αν $H_k = h$ και ο κόμβος $(k\ ,h)$ είναι stopped node, τότε το δικαίωμα προαίρεσης εξασκείται εκείνη τη χρονική στιγμή. Δηλαδή, για κάθε μονοπάτι τιμών του υποκείμενου τίτλου, η χρονική στιγμή εξάσκησης του δικαιώματος είναι αυτή, στην οποία βρίσκεται ο πρώτος stopped node που συναντά το μονοπάτι.

Προφανώς, τα μονοπάτια που φτάνουν στον κόμβο (k, h), και ο χρόνος εξάσκησης είναι k, είναι μονοπάτια που μέχρι τη χρονική στιγμή k δεν είχαν περάσει από stopped node.

Η αναμενόμενη αξία εξόφλησης του παραγώγου που προκύπτει από τον παραπάνω κανόνα, αποτελεί ένα κάτω φράγμα για την τιμή του παραγώγου. Αυτό το κάτω φράγμα είναι ένα άθροισμα των ποσοτήτων $W(k,h)$, όπου $W(k,h)$ είναι ο μέσος των ποσοτήτων $R^{-k} \cdot (A_k - \mathrm{X})^+$, $R = 1+r$, και αναφέρονται σε μονοπάτια που περνούν από stopped nodes (k, h), και που δηλαδή ο χρόνος εξάσκησης είναι k.

Κάθε $W(k,h)$ είναι δύσκολο να υπολογιστεί.Έτσι, αντ΄αυτού, υπολογίζεται η ποσότητα $R^{-k} \cdot (A'(k,h) - \mathrm{X})^+$, η οποία, από την ανισότητα Jensen, είναι ένα κάτω φράγμα του $W(k,h)$. Η ποσότητα $A'(k,h)$ είναι η μέση τιμή των A_k, των μονοπατιών που φτάνουν στον κόμβο (k,h) και που ο χρόνος εξάσκησης είναι k. Οι διάφορες τιμές του $A'(k,h)$ υπολογίζονται με την ήδη γνωστή, από προηγούμενη δημοσίευσή τους, μέθοδο, την forward induction.

§4.2 Διωνυμικό γράφημα για δικαιώματα Αμερικανικού τύπου

Κατά τα γνωστά, η τιμή του υποκείμενου τίτλου στην αγορά τον χρόνο t, $S(t)$, ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση της γεωμετρικής κίνησης Brown, δηλαδή ισχύει:

$$dS(t) = \mu \cdot S(t)dt + \sigma \cdot S(t)dB(t)$$

όπου μ: ο συντελεστής ολίσθησης, σ: διακύμανση , $B(t)$: η κίνηση Brown

Θεωρείται ότι μ, σ : σταθερά και ότι το επιτόκιο χωρίς ρίσκο , r, είναι σταθερό.

Επίσης, στο χρονικό διάστημα $\Delta t = T/n$, η τιμή του υποκείμενου τίτλου είτε θα σημειώσει άνοδο, με πιθανότητα p, και θα πολλαπλασιαστεί με u, είτε θα σημειώσει κάθοδο, με πιθανότητα $q = 1\text{-}p$, και θα πολλαπλασιαστεί με $d = 1/u$.

Ισχύει:

$$u = e^{s\cdot\sqrt{\Delta t}} \;,\; \text{και} \quad p = \frac{e^{r\cdot\Delta t} - d}{u - d}$$

Στο διακριτό μοντέλο, η κάθε χρονική στιγμή είναι κ, και αντίστοιχα στο συνεχές, είναι $\kappa\cdot\Delta t$.

Επίσης, θεωρείται ότι $1+r = R$.

Ορίζεται ο δειγματικός χώρος Ω, ο οποίος περιέχει όλα τα πιθανά μονοπάτια τιμών του υποκείμενου τίτλου που σημειώνονται στο διωνυμικό γράφημα.

Κάθε μονοπάτι που περιέχεται στον Ω είναι της μορφής: $\omega=\omega_1\omega_2\ldots\omega_n$, όπου $\omega_i \in \{H, T\}$ (το H δηλώνει άνω κίνηση και το T κάτω κίνηση της τιμής του υποκείμενου τίτλου). Το μήκος της ακολουθίας (του μονοπατιού), είναι ίσο με τον αριθμό των ΄΄κλαδιών΄΄ που αποτελείται.

Μια μικρή διαφοροποίηση μεταξύ των δύο μεθόδων τιμολόγησης (Ασιατικών παραγώγων Ευρωπαϊκού – Αμερικανικού τύπου) είναι η εξής:

Για $\kappa = 1,2,\ldots, n$, ορίζεται δίτιμη τυχαία μεταβλητή X_κ, με τιμές 0 ή 1 (στα παράγωγα Ευρωπαϊκού τύπου οι τιμές της μεταβλητής ήταν $\pm$ 1). Η τιμή 1 αντιστοιχεί σε άνω κίνηση και η τιμή 0 σε κάτω κίνηση της τιμής του τίτλου. Τώρα, η ακολουθία των X_κ δεν είναι συμμετρικός τυχαίος περίπατος.

Επίσης, για $\kappa = 1,2,\ldots, n$, ορίζεται τυχαία μεταβλητή $H_\kappa(\omega)$, η οποία εκφράζει τον αριθμό των άνω κινήσεων που σημειώνονται στο μονοπάτι των τιμών ω του υποκείμενου τίτλου, μέχρι τη χρονική στιγμή κ.

Ορίζεται

$$H_\kappa(\omega) = \sum_{i=1}^{k} X_\kappa \;,\; \kappa = 1,2,\ldots,n \;\text{ και }\; H_0(\omega) = 0 \,, \text{ για κάθε } \omega$$

Ομοίως, ορίζεται η τυχαία μεταβλητή T_κ, η οποία εκφράζει τον αριθμό των κάτω κινήσεων που σημειώνονται σε ένα μονοπάτι τιμών του υποκείμενου τίτλου, μέχρι τη χρονική στιγμή κ.

Ορίζεται

$$T_\kappa(\omega) = \kappa - H_\kappa$$

Είναι ήδη γνωστά, ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου στον κόμβο (κ, h) είναι ίση με $S_0 \cdot u^{2h-\kappa}$, ότι ο αριθμητικός μέσος των τιμών του τίτλου στο διακριτό χρονικό διάστημα $[0, \kappa]$ είναι ίσος με :

$$A_k = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_k}{k + 1}$$

και ότι η αξία εξόφλησης ενός Ασιατικού παραγώγου με τιμή εξάσκησης X, τη χρονική στιγμή n, δηλαδή στη λήξη του συμβολαίου, είναι ίση με $(A_n - \mathrm{X})^+$.

Η αξία ενός Ασιατικού παραγώγου Αμερικανικού τύπου , τη χρονική στιγμή 0, είναι η μέγιστη τιμή της αναμενόμενης αξίας του , η οποία επιτυγχάνεται σε κάποια από όλες τις πιθανές στρατηγικές εξάσκησης τ.

Ισχύει : $V_0 = \max_{\tau} E[(A_\tau - \mathrm{X})^+ / R^\tau]$, όπου $R = 1+r$

§4.3 Αλγόριθμος μείωσης χρόνου τιμολόγησης Ασιατικών παραγώγων Αμερικανικού τύπου

Οι Chalasani κ.α., προκειμένου να δημιουργήσουν έναν γρήγορο και ακριβή αλγόριθμο, για να τιμολογήσουν Ασιατικά παράγωγα Αμερικανικού τύπου, όρισαν μια νέα τυχαία μεταβλητή, την

$$X_\kappa = \sum_{i=1}^{k} (1 - \mathrm{X}_i) H_i \quad , \kappa = 1,2, \ldots ,n \quad \text{και} \quad X_0 = 0$$

Επίσης, για κάθε κόμβο (κ, h) του γραφήματος, όρισαν το ΄΄κατώτερο΄΄ μονοπάτι που φτάνει στον κόμβο (κ, h), και είναι αυτό στο οποίο γίνονται $\kappa - h$ διαδοχικές κάτω κινήσεις και ακολουθούν h άνω κινήσεις.

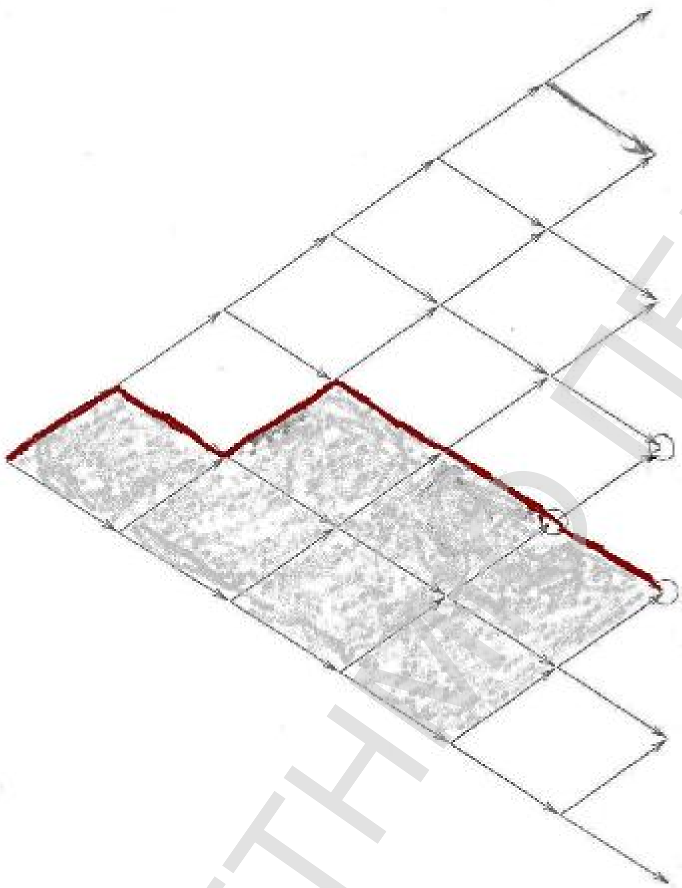
Ομοίως, όρισαν το ΄΄ανώτερο΄΄ μονοπάτι που φτάνει στον κόμβο (κ, h), και είναι αυτό στο οποίο γίνονται h διαδοχικές άνω κινήσεις και στη συνέχεια $\kappa - h$ κάτω κινήσεις.

Έτσι, η ποσότητα $X_\kappa(\omega)$ εκφράζει τον αριθμό των boxes (κουτιών) που περικλείονται μεταξύ του μήκους του εκάστοτε μονοπατιού ω που φτάνει στον κόμβο (κ, h) και του ΄΄κατώτερου΄΄ μονοπατιού που φτάνει στον (κ, h).

Προφανώς, η μέγιστη περιοχή που μπορεί να καταλαμβάνεται από ένα μονοπάτι που φτάνει στον κόμβο (κ, h), είναι ο αριθμός των boxes που περικλείονται μεταξύ του ανώτερου και του κατώτερου μονοπατιού που φτάνουν στον (κ, h). Αυτή η μέγιστη περιοχή περιλαμβάνει $h \cdot (\kappa - h)$ boxes.

Η ελάχιστη περιοχή ενός μονοπατιού που φτάνει στον κόμβο (κ, h) περιλαμβάνει 0 boxes.

Στο παρακάτω γράφημα, είναι γραμμοσκιασμένη η περιοχή που ορίζεται από ένα μονοπάτι που φτάνει στον κόμβο (6,2) και το κατώτερο μονοπάτι που φτάνει στον ίδιο κόμβο.



Γράφημα 5 : Διωνυμικό γράφημα με $n = 6$

Οι Chalasani κ.α., προκειμένου να ομαδοποιήσουν τα μονοπάτια που φτάνουν σε έναν κόμβο (κ , h), απέδειξαν και στη συνέχεια χρησιμοποίησαν το παρακάτω Λήμμα:

Λήμμα

1. Για κάθε κόμβο (κ, h) του γραφήματος, υπάρχει 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των πιθανών γεωμετρικών μέσων των τιμών του υποκείμενου τίτλου για κάθε μονοπάτι που φτάνει στον (κ, h) και των πιθανών περιοχών που καταλαμβάνουν τα μονοπάτια που φτάνουν στον κόμβο (κ, h).

2. Το σύνολο που περιέχει όλες τις πιθανές τιμές των boxes που αποτελούν περιοχές που καταλαμβάνονται από μονοπάτια που φτάνουν στον κόμβο (κ, h) είναι :

{0, 1, 2, ... , $h(\kappa - h)$}

3. Για κάθε μονοπάτι A που φτάνει στον κόμβο (κ, h, α), δηλαδή που φτάνει στον κόμβο (κ, h) και $X_\kappa(\omega)= \alpha$, ισχύει το εξής : Την επόμενη χρονική στιγμή κ+1, το μονοπάτι A είτε θα φτάσει στον κόμβο (κ+1, h+1, α), αν η τιμή του τίτλου κινηθεί ανοδικά, είτε θα φτάσει στον κόμβο (κ+1, h ,α +h), αν η τιμή του τίτλου κινηθεί καθοδικά.

§4.4 Forward induction

Ο ολικός μέσος $\tilde{A}(k,h,a)$, των αριθμητικών μέσων A_κ των τιμών του υποκείμενου τίτλου, όλων των μονοπατιών που φτάνουν στον κόμβο (κ, h, α), ορίζεται ως εξής:

$$\tilde{A}(k,h,a) = E[A_\kappa \,|\, H_\kappa = h \,,\, X_\kappa = \alpha] \,, \quad \kappa = 0,1,\ldots,n \qquad , \ h \le \kappa$$

Για να υπολογιστεί η ποσότητα $\tilde{A}(k,h,a)$, εισάγεται η έννοια της τυχαίας μεταβλητής S_κ η οποία εκφράζει το άθροισμα των τιμών του υποκείμενου τίτλου, από τη χρονική στιγμή 0 μέχρι τη χρονική στιγμή κ.

Προφανώς:

$$S_\kappa = \sum_{i=0}^{k} S_i \quad , \quad \kappa = 0,1,\ldots ,n$$

και άρα

$$A_k = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_k}{k+1} = S_\kappa / \kappa{+}1 \quad , \quad \kappa = 0,1,\ldots ,n$$

Επίσης, ορίζεται η τυχαία μεταβλητή $\hat{S}(k,h,a)$, η οποία εκφράζει το άθροισμα όλων των S_κ των μονοπατιών που φτάνουν στον κόμβο (κ, h, α).

Τέλος, ορίζεται η τυχαία μεταβλητή $M(\kappa, h, \alpha)$ ως ο αριθμός των μονοπατιών που φτάνουν στον κόμβο (κ, h, α).

Ισχύει:

$$\tilde{A}(k,h,a) = \frac{A_1 + A_2 + A_k}{M(k,h,a)} = \frac{\dfrac{\hat{S}(k,h,a)}{k+1}}{M(k,h,a)} = \frac{\hat{S}(k,h,a)}{(k+1)\cdot M(k,h,a)}$$

Οι ποσότητες $M(\kappa, h, \alpha)$ και $\hat{S}(k,h,a)$ υπολογίζονται με τη μέθοδο forward induction ως εξής:

Για $\kappa = 1,2,...,n$, $h = 0,1,2,\ldots,\kappa$ και $\alpha = 0,1,..,h(\kappa - h)$, οι αρχικές τιμές των $M(\kappa, h, \alpha)$ και $\hat{S}(k,h,a)$ είναι 0.

Επίσης, $M(0, 0, 0) = 1$ και $\hat{S}(0,0,0) = S_0$.

Έστω ότι είναι γνωστές οι τιμές $M(m, h, \alpha)$ και $\hat{S}(m,h,a)$, για $m = 0,1,\ldots, \kappa$, και θέλουμε να υπολογίσουμε τις τιμές των αντίστοιχων ποσοτήτων την επόμενη χρονική στιγμή $m = \kappa+1$.

Το μονοπάτι που φτάνει στον κόμβο (κ, h, α), την επόμενη χρονική στιγμή $\kappa+1$, είτε θα φτάσει στον κόμβο $(\kappa+1, h+1, \alpha)$, αν η τιμή του τίτλου κινηθεί ανοδικά, είτε θα φτάσει στον κόμβο $(\kappa+1, h, \alpha +h)$, αν η τιμή του τίτλου κινηθεί καθοδικά.

Αν η τιμή του τίτλου κινηθεί ανοδικά, τότε ο αριθμός των μονοπατιών που θα φτάνουν στον κόμβο $(\kappa+1, h+1, \alpha)$ θα είναι $M(\kappa+1, h+1, \alpha) = M(\kappa, h, \alpha)+b$ και για το άθροισμα $\hat{S}(k+1,h+1,a)$ θα ισχύει:

$$\hat{S}(k+1,h+1,a) = \hat{S}(k,h,a) + \mathrm{M}(k,h,a)\cdot S_{k+1} = \hat{S}(k,h,a) + \mathrm{M}(k,h,a)\cdot S_0 u^{2(h+1)-(k+1)}$$

Αν η τιμή του τίτλου κινηθεί καθοδικά, τότε ο αριθμός των μονοπατιών που θα φτάνουν στον κόμβο $(\kappa+1, h, \alpha+h)$ θα είναι $M(\kappa+1, h, \alpha+h) = M(\kappa, h, \alpha) + c$ και για το άθροισμα $\hat{S}(k+1,h,a+h)$ θα ισχύει:

$$\hat{S}(k+1,h,a+h) = \hat{S}(k,h,a) + \mathrm{M}(k,h,a)\cdot S_{k+1} = \hat{S}(k,h,a) + \mathrm{M}(k,h,a)\cdot S_0 u^{2h-(k+1)}$$

Με τη βοήθεια μίας δίτιμης τυχαίας μεταβλητής v, η οποία παίρνει την τιμή 1, όταν η τιμή του τίτλου κινηθεί ανοδικά, και 0, όταν η τιμή του τίτλου κινηθεί καθοδικά, ισχύει:

$$\hat{S}(k+1,h+v,j) = \hat{S}(k,h,a) + \mathrm{M}(k,h,a)\cdot S_{k+1} = \hat{S}(k,h,a) + \mathrm{M}(k,h,a)\cdot S_0 u^{2(h+v)-(k+1)}$$

όπου $j = \alpha + (1-v)\cdot h$

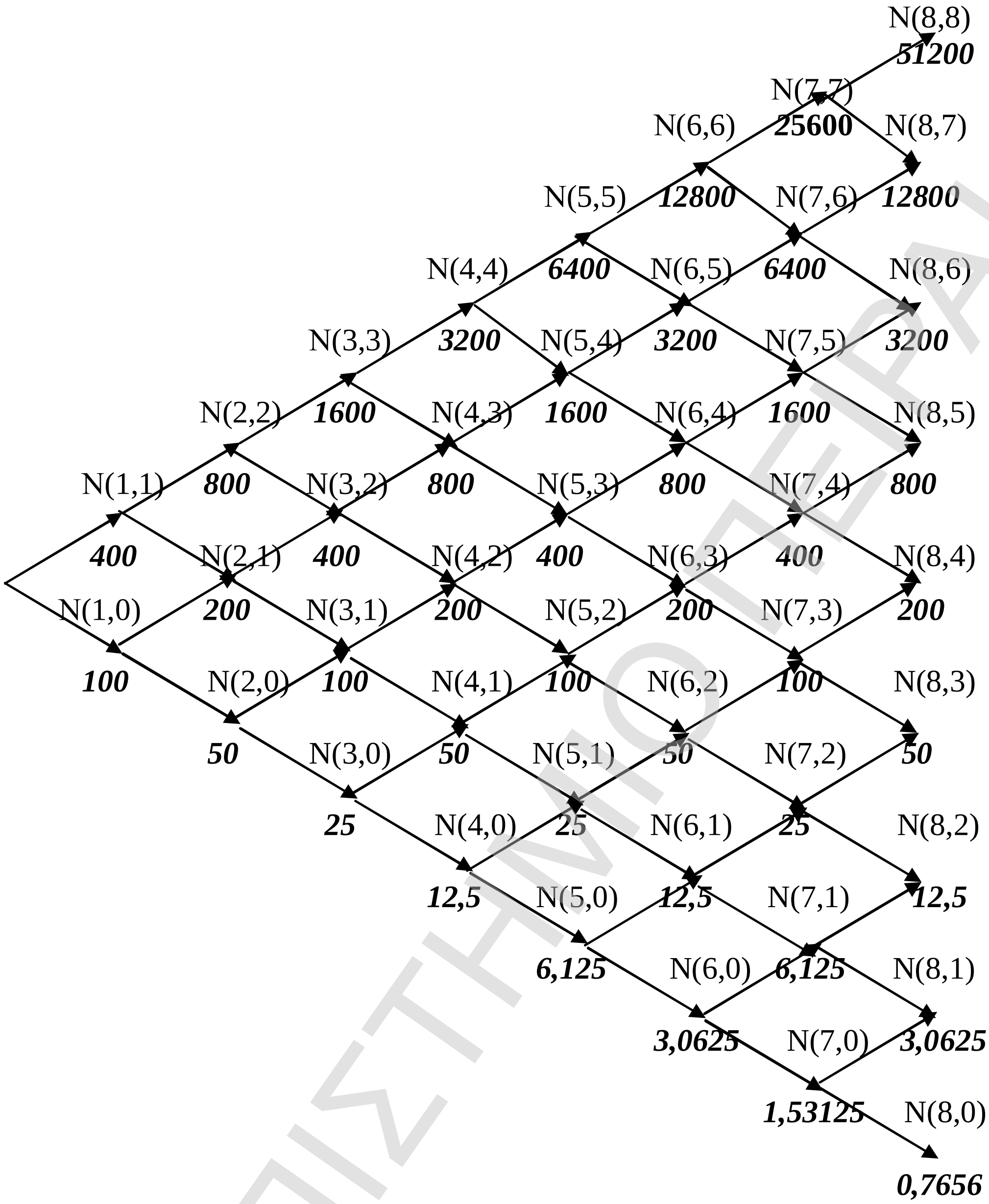
§4.5 Ψευδοκώδικας – Εφαρμογή

Ψευδοκώδικας για τον υπολογισμό των ποσοτήτων M και $\hat{S}$

```
M(0,0,0)=1
S(0,0,0)=S0
for  k: = 1  to n do
   for  h: = 0  to k do
         for  a: = 0  to h*(k-h)  do
                 M(k,h,a):=0;
                 S(k,h,a):=0;
                end
       end
  end
for  k: = 0  to n-1  do
   for  h: = 0  to k  do
         for  a: = 0  to  h*(k-h)  do
               for  v: = 0  to 1  do
                       j:= a +(1-v)*h;
                       M(k+1,h+v,j)+ = M(k,h,a);
                       S(k+1,h+v,j)+ = S(k,h,a)+M(k,h,a)*S0*u^[2*(h+v)-(k+1)];
                 end
         end
     end
end
```

Εφαρμογή

Δίνεται το παρακάτω διωνυμικό γράφημα, στο οποίο ο χρόνος ισχύος του παραγώγου, έχει χωριστεί σε n = 8 χρονικές στιγμές. Επίσης, δίνονται: S_0 = 200, u = 2, d = 0,5, X = 200.



Γράφημα 6 : Διωνυμικό γράφημα με n=8

n = 1

N(1,1)	
area	M(k,h,i)
0	1
	1//1

N(1,0)	
area	M(k,h,i)
0	1
	1//1

n = 2

N(2,2)	
area	M(k,h,i)
0	1
	1//1

N(2,1)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
	2//2

N(2,0)	
area	M(k,h,i)
0	1
	1//1

n = 3

N(3,3)	
area	M(k,h,i)
0	1
	1//1

N(3,2)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	1
	3//3

N(3,1)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	1
	3//3

N(3,0)	
area	M(k,h,i)
0	1
	1//1

n = 4

N(4,4)	
area	M(k,h,i)
0	1
	1//1

N(4,3)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	1
3	1
	4//4

N(4,2)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	2
3	1
4	1
	5//6

N(4,1)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	1
3	1
	4//4

N(4,0)	
area	M(k,h,i)
0	1
	1//1

n = 5

N(5,5)	
area	M(k,h,i)
0	1
	1//1

N(5,4)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	1
3	1
4	1
	5//5

N(5,3)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	2
3	2
4	2
5	1
6	1
	7//10

N(5,2)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	2
3	2
4	2
5	1
6	1
	7//10

N(5,1)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	1
3	1
4	1
	5//5

N(5,0)	
area	M(k,h,i)
0	1
	1//1

n = 6

N(6,6)	
area	M(k,h,i)
0	1
	1//1

N(6,5)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
	6//6

N(6,4)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	2
3	2
4	3
5	2
6	2
7	1
8	1
	9//15

N(6,3)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	2
3	3
4	3
5	3
6	3
7	2
8	1
9	1
	10//20

N(6,2)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	2
3	2
4	3
5	2
6	2
7	1
8	1
	9//15

N(6,1)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
	6//6

N(6,0)	
area	M(k,h,i)
0	1
	1//1

n = 7

N(7,7)	
area	M(k,h,i)
0	1
	1//1

N(7,6)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
	7//7

N(7,5)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	2
3	2
4	3
5	3
6	3
7	2
8	2
9	1
10	1
	11//21

N(7,4)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	2
3	3
4	4
5	4
6	5
7	4
8	4
9	3
10	2
11	1
12	1
	13//35

N(7,3)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	2
3	3
4	4
5	4
6	5
7	4
8	4
9	3
10	2
11	1
12	1
	13//35

N(7,2)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	2
3	2
4	3
5	3
6	3
7	2
8	2
9	1
10	1
	11//21

N(7,1)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
	7//7

N(7,0)	
area	M(k,h,i)
0	1
	1//1

n = 8

N(8,8)	
area	M(k,h,i)
0	1
	1//1

N(8,7)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
	8//8

N(8,6)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	2
3	2
4	3
5	3
6	4
7	3
8	3
9	2
10	2
11	1
12	1
	13//28

N(8,5)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	6
8	6
9	6
10	5
11	4
12	3
13	2
14	1
15	1
	16//56

N(8,4)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	5
6	7
7	7
8	8
9	7
10	7
11	5
12	5
13	3
14	2
15	1
16	1
	17//70

N(8,3)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	6
8	6
9	6
10	5
11	4
12	3
13	2
14	1
15	1
	16//56

N(8,2)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	2
3	2
4	3
5	3
6	4
7	3
8	3
9	2
10	2
11	1
12	1
	13//28

N(8,1)	
area	M(k,h,i)
0	1
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
	8//8

N(8,0)	
area	M(k,h,i)
0	1
	1//1

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα της ομαδοποίησης των μονοπατιών που καταλήγουν στον κάθε κόμβο του γραφήματος, σύμφωνα με τον αριθμό των boxes που αποτελείται η εκάστοτε περιοχή, είναι ακριβώς τα ίδια με αυτά της ομαδοποίησης που περιγράψαμε στην παράγραφο §3.5 του τρίτου κεφαλαίου.

§ 4.6 Χρόνος υπολογισμού των Μ(κ,h,α) και $\hat{S}\left(m,h,a\right)$

Οι ποσότητες $M(\kappa,h,\alpha)$ και $\hat{S}\left(m,h,a\right)$ προσδιορίζονται από τρεις παράγοντες: τη χρονική στιγμή κ, που κυμαίνεται από 0 έως n, τον αριθμό των άνω κινήσεων h που κυμαίνεται από 0 έως κ, και τον αριθμό των boxes α, που περικλείει το κάθε μονοπάτι, ο οποίος κυμαίνεται από 0 έως $h(\kappa - h)$.

Ο συνολικός χρόνος που χρειάζεται ο αλγόριθμος για να δώσει αποτελέσματα, είναι ανάλογος του συνολικού αριθμού των κόμβων (κ, h, α) που υπάρχουν στο διωνυμικό γράφημα.

Οι Chalasani κ.α., απέδειξαν ότι στο n-step διωνυμικό γράφημα, με $n \geq 14$, υπάρχουν λιγότεροι από n^4 /20 κόμβοι. Επομένως, ο συνολικός χρόνος που απαιτείται για να τιμολογηθεί το Ασιατικό παράγωγο Αμερικανικού τύπου, είναι ανάλογος του n^4.

Απόδειξη

Στον κόμβο (*κ*, *h*) υπάρχουν 1+ *h*(*κ*–*h*) διαφορετικές τιμές του *α* (*α* = 0, 1, ... , *h*(*κ* –*h*)). Επομένως, ο αριθμός των κόμβων (*κ*, *h*, *α*), τη χρονική στιγμή *κ* είναι:

$$\sum_{h=0}^{k}\left(1+kh-h^{2}\right)=1+\frac{k\cdot k\cdot(k+1)}{2}-\frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}=$$

$$=1+\frac{3k^{3}+3k^{2}-2k^{3}-k^{2}-2k^{2}-k}{6}=1+\frac{k^{3}-k}{6}$$

Ο συνολικός αριθμός των κόμβων (*κ*, *h*, *α*) που υπάρχουν στο *n*-step διωνυμικό γράφημα είναι :

$$\sum_{k=0}^{n}\left[1+\frac{k^{3}-k}{6}\right]=(n+1)+\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n}k^{3}-\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n}k=n+1+\frac{n^{2}(n+1)^{2}}{24}-\frac{1}{6}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=$$

$$=n+1+\frac{n^{4}+2n^{3}+n^{2}}{24}-\frac{n^{2}+n}{12}=1+\frac{24n+n^{4}+2n^{3}+n^{2}-2n^{2}-2n}{24}=$$

$$=1+\frac{22n-n^{2}+n^{4}+2n^{3}}{24}=1+\frac{11n}{12}+\frac{n^{4}+2n^{3}-n^{2}}{24}\leq\frac{n^{4}}{20}\quad,\text{ για }\ n\geq 14$$

§ 4.7 Άνω φράγμα αξίας Ασιατικού παραγώγου Αμερικανικού τύπου

Εφόσον έχουν υπολογιστεί οι ποσότητες $\tilde{A}(k,h,a)$ για όλους τους επιμέρους κόμβους του γραφήματος (*κ*, *h*, *α*), μπορεί να υπολογιστεί το άνω φράγμα της αξίας του Ασιατικού παραγώγου Αμερικανικού τύπου.

Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιούν οι Chalasani κ.α. βασίζεται στη μέθοδο γραμμικής παρεμβολής των Hull-White.

Αρχικά, ορίζεται η τυχαία μεταβλητή *V*(*κ*, *h*, *x*) ως η τιμή του Ασιατικού παραγώγου Αμερικανικού τύπου, την χρονική στιγμή *κ*, όταν οι άνω κινήσεις που έχουν γίνει είναι *h* και ο αριθμητικός μέσος A_{κ} είναι ίσος με *x*.

Είναι ήδη γνωστό ότι για *κ* = *n* :

$$V(n,h,x)=(x-\mathrm{X})^{+}\quad,\quad h\leq n$$

όπου Χ : η τιμή εξάσκησης,

και για $\kappa < n$, $h \leq \kappa$:

$$V(\kappa, h, x) = max\left\{ (x - \mathrm{X})^{+}, \frac{1}{R}\left[pV\left(k+1, h+1, x^{u}(k,h)\right) + (1-p)V\left(k+1, h, x^{d}(k,h)\right) \right] \right\},$$

όπου $x^u(\kappa,h)$ είναι ο αριθμητικός μέσος $A_{\kappa+1}$, όταν $H_\kappa = h$, $A_\kappa = x$ και η τιμή του τίτλου κινείται ανοδικά τη χρονική στιγμή κ+1, και αντίστοιχα, $x^d(\kappa,h)$ είναι ο αριθμητικός μέσος $A_{\kappa+1}$, όταν $H_\kappa = h$, $A_\kappa = x$ και η τιμή του τίτλου κινείται καθοδικά τη χρονική στιγμή κ+1.

$$x^u(\kappa,h) = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_{k+1}}{k+2} = \frac{x \cdot (k+1) + S_{k+1}}{k+2} = \frac{x \cdot (k+1) + S_0 u^{2(h+1)-(k+1)}}{k+2} =$$

$$= \frac{x \cdot (k+1) + S_0 u^{2h+2-k-1}}{k+2}$$

και

$$x^d(\kappa,h) = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_{k+1}}{k+2} = \frac{x \cdot (k+1) + S_{k+1}}{k+2} = \frac{x \cdot (k+1) + S_0 u^{2h-k-1}}{k+2}$$

Προκειμένου να βρεθεί ένα άνω φράγμα της αξίας του παραγώγου, πρέπει να εκτιμηθεί η ποσότητα $V(0,0,S_0)$, η οποία αποτελεί την αξία του παραγώγου την χρονική στιγμή 0.

Σε κάθε κόμβο (κ, h) του γραφήματος, η αξία του παραγώγου V εκτιμάται μόνο από τους αντιπροσωπευτικούς αριθμητικούς μέσους $\tilde{A}(k,h,a)$ κάθε συνόλου μονοπατιών που ανήκουν στην ίδια ομάδα (κ, h, α).

Έστω $\hat{V}(k,h,x) = W(k,h,x)$, και τώρα όπου x = $\tilde{A}(k,h,a)$. Οι ποσότητες $W(k,h,x)$ υπολογίζονται από το τέλος προς την αρχή με backward recursion.

Για κάθε $h \leq n$ και $\alpha = 0,1,\ldots,h(n-h)$ ισχύει:

$$W(n,h,x) = \left[\tilde{A}(n,h,a) - \mathrm{X}\right]^{+}$$

Για $\kappa < n$, δεν γίνεται να χρησιμοποιηθεί άμεσα η backward recursion για τον υπολογισμό του W, διότι οι ποσότητες $x^u(\kappa,h)$ και $x^d(\kappa,h)$ δεν είναι γενικά ίσες με τους αντιπροσωπευτικούς μέσους $\mathcal{A}(k+1,h+1,a')$ και $\mathcal{A}(k+1,h,a'+1)$ αντίστοιχα. Έτσι, για να βρεθούν οι τιμές της ποσότητας W που λείπουν, χρησιμοποιείται γραμμική παρεμβολή.

Για δεδομένο $x=\mathcal{A}(k,h,a)$, υπάρχει b τέτοιο ώστε για $0 \le \lambda \le 1$, να ισχύει:

$$x^{u}(\kappa,h) = \lambda \cdot \mathcal{A}(k+1,h+1,b) + (1-\lambda)\cdot \mathcal{A}(k+1,h+1,b+1)$$

και

$$W^{u}(\kappa,h) = \lambda\cdot\omega_1 + (1-\lambda)\cdot\omega_2$$

όπου $\omega_1 = W(\kappa+1, h+1, b)$ και $\omega_2 = W(\kappa+1, h+1, b+1)$

Ομοίως, για δεδομένο $x=\mathcal{A}(k,h,a)$, υπάρχει c τέτοιο ώστε για $0 \le \lambda \le 1$, να ισχύει:

$$x^{d}(\kappa,h) = \lambda \cdot \mathcal{A}(k+1,h,c) + (1-\lambda)\cdot \mathcal{A}(k+1,h,c+1)$$

και

$$W^{\mathrm{d}}(\mathrm{\kappa,h}) = \lambda\cdot\omega_1 + (1-\lambda)\cdot\omega_2$$

όπου $\omega_1 = W(\kappa+1, h, c)$ και $\omega_2 = W(\kappa+1, h, c+1)$

Επομένως, για $\kappa < n$, ισχύει :

$$\hat{V}(k,h,a) = W(k,h,a) = \max\left\{\left[\mathcal{A}(k,h,a) - \mathrm{X}\right]^{+}, \frac{1}{R}\left(pW^{u}(k,h,a) + (1-p)W^{d}(k,h,a)\right)\right\}$$

Η ποσότητα $W(k,h,a)$ αποτελεί ένα άνω φράγμα της αξίας του παραγώγου V(κ, h, $\mathcal{A}(k,h,a)$). Το άνω φράγμα της αρχικής αξίας του παραγώγου $V(0, 0, S_0)$ είναι η ποσότητα $W(0, 0, 0)$.

Οι Chalasani κ.α.απέδειξαν ότι ο αντιπροσωπευτικός μέσος $\mathcal{A}(k,h,a)$ είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση του α, και ότι οι ποσότητες b, c μπορούν να βρεθούν εύκολα στους επιμέρους κόμβους των κόμβων (κ+1, h+1) και (κ+1, h) αντίστοιχα. Επίσης, απέδειξαν ότι για κάθε $\alpha = 0,1,\ldots,h(\kappa-h)$, αν $x = \mathcal{A}(k,h,a)$, τότε υπάρχει μία ποσότητα b τέτοια ώστε:

$$\mathcal{A}(k+1,h+1,b) \le x^{u}(\kappa, h) \le \mathcal{A}(k+1,h+1,b+1)$$

και αντίστοιχα, υπάρχει μία ποσότητα c τέτοια ώστε:

$$\mathcal{A}(k+1,h,c) \le x^{d}(\kappa, h) \le \mathcal{A}(k+1,h,c+1)$$

Όταν ο αλγόριθμος υπολογίζει για τον κόμβο (*κ*, *h*, *α*) την εκτίμηση *W* της αξίας του παραγώγου *V*(*κ*, *h*, *α*), χρειάζεται να βρεθεί μια ποσότητα *b* έτσι ώστε το $x^u(\kappa,h)$ να κυμαίνεται μεταξύ των $\mathring{A}(k+1,h+1,b)$ και $\mathring{A}(k+1,h+1,b+1)$, και μια ποσότητα *c* έτσι ώστε το $x^d(\kappa,h)$ να κυμαίνεται μεταξύ των $\mathring{A}(k+1,h,c)$ και $\mathring{A}(k+1,h,c+1)$. Έστω ότι για τον κόμβο (*κ*, *h*, *α*) έχει βρεθεί κατάλληλη ποσότητα *b* από τον κόμβο (*κ*+1, *h*+1). Τότε, για τον επόμενο κόμβο (*κ*, *h*, *α*+1) του κόμβου (*κ*, *h*) η ποσότητα b_1 που θα χρειαστεί θα είναι μεγαλύτερη ή ίση της *b*.

Ο χρόνος που απαιτείται για τον υπολογισμό του άνω φράγματος είναι ανάλογος με τον τριπλάσιο ή τετραπλάσιο συνολικό αριθμό κόμβων (*κ*, *h*, *α*) που υπάρχουν στο βελτιωμένο *n*-step διωνυμικό γράφημα, ο οποίος είναι μικρότερος από n^4 /20.

§ 4.8 Κάτω φράγμα αξίας Ασιατικού παραγώγου Αμερικανικού τύπου

Όπως αναφέραμε και στην αρχή του κεφαλαίου, το κάτω φράγμα της αξίας του Ασιατικού παραγώγου Αμερικανικού τύπου προκύπτει από την εφαρμογή ενός κανόνα εξάσκησης του δικαιώματος, ο οποίος σχετίζεται με τους stopped nodes.

Από την ανισότητα Jensen για την κυρτή συνάρτηση $f(x) = x^+$, ισχύει:

$$E\left[\frac{(A_t - \mathrm{X})^+}{R^t}\right] = \mathrm{E}[E(\frac{(A_t - \mathrm{X})^+}{R^t} \mid \mathrm{Z}_\tau)] \geq \mathrm{E}[\mathrm{E}(\frac{\mathrm{A}_t - \mathrm{X}}{R^t} \mid \mathrm{Z}_\tau)^+]$$

όπου $Z_\kappa = (\kappa, H_\kappa, X_\kappa)$, X_κ : ο αριθμός των boxes που περικλείονται μεταξύ του εκάστοτε μονοπατιού και του κατώτερου μονοπατιού, και *τ*: ο χρόνος εξάσκησης του δικαιώματος.

Αν $Z_i \neq Z_j$, για κάθε $i \neq j$, τότε :

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}(\frac{\mathrm{A}_t - \mathrm{X}}{R^t} \mid \mathrm{Z}_\tau)^+] = \mathrm{E}[\,\mathrm{E}(\mathrm{A}_\tau - \mathrm{X} \mid \mathrm{Z}_\tau)^+/\mathrm{R}^\tau] = \mathrm{E}[\,(\mathrm{E}(\mathrm{A}_\tau \mid \mathrm{Z}_\tau) - \mathrm{X})^+/\mathrm{R}^\tau]$$

Ο κανόνας εξάσκησης του δικαιώματος είναι ο εξής: Η εξάσκηση του δικαιώματος γίνεται στον κόμβο (*κ*, *h*, *α*) αν και μόνο αν ο κόμβος αυτός είναι stopped node. Δηλαδή, για κάθε μονοπάτι τιμών του υποκείμενου τίτλου *ω*, ο χρόνος εξάσκησης του δικαιώματος είναι ο μικρότερος χρόνος *κ* στον οποίο ισχύει: $\mathrm{stop}(\kappa,H_\kappa(\omega),X_\kappa(\omega))=1$.Έτσι, ο χρόνος εξάσκησης του δικαιώματος είναι μια τυχαία μεταβλητή τ, τέτοια ώστε :

$$\tau = min\{\kappa : \text{stop}(\kappa, H_\kappa, X_\kappa) = 1\}$$

Για κάθε μονοπάτι ω, η τιμή της τυχαίας μεταβλητής Z_τ, $Z_\tau(\omega)$, προσδιορίζει όχι μόνο τον χρόνο εξάσκησης του δικαιώματος $\kappa = \tau(\omega)$, αλλά και τον κόμβο (κ, $H_\kappa(\omega)$, $X_\kappa(\omega)$). Για κάθε κόμβο (κ, h, α), η αναμενόμενη τιμή των αριθμητικών μέσων $E(A_\tau \mid Z_\tau = (\kappa, h, \alpha))$, γράφεται :

$$A'(\kappa, h, \alpha) = E(A_\kappa \mid \tau = \kappa, H_\kappa = h, X_\kappa = \alpha)$$

Επομένως, η ποσότητα $A'(\kappa, h, \alpha)$ είναι η μέση τιμή των αριθμητικών μέσων των τιμών του υποκείμενου τίτλου όλων των μονοπατιών που καταλήγουν στον κόμβο (κ, h, α) και ο χρόνος εξάσκησης του δικαιώματος είναι κ.

Οι ποσότητες $A'(\kappa, h, \alpha)$ και $\tilde{A}(k,h,a) = E[A_\kappa \mid H_\kappa = h, X_\kappa = \alpha]$, $\kappa = 0,1,...,n$, $h \leq \kappa$ είναι παραπλήσιες. Η διαφορά τους είναι στο ότι ο μέσος $\tilde{A}(k,h,a)$ αναφέρεται σε όλα τα μονοπάτια που καταλήγουν στον κόμβο (κ, h, α), ενώ ο $A'(\kappa, h, \alpha)$ αναφέρεται στα μονοπάτια που καταλήγουν στον κόμβο (κ, h, α) και ο χρόνος εξάσκησης του δικαιώματος είναι κ. Έτσι, ο μέσος $A'(\kappa, h, \alpha)$ υπολογίζεται όπως ο $\tilde{A}(k,h,a)$ με forward induction, εξαιρώντας όμως τα μονοπάτια που φτάνουν σε stop(κ,h,α) = 0. Οι ποσότητες M, S αναπαράγονται όταν ο τρέχων κόμβος δεν είναι stopped node. Όταν όλες οι τιμές του μέσου A' υπολογιστούν, το κάτω φράγμα της αξίας του παραγώγου:

$$E[\,(E(A_\tau \mid Z_\tau) - X)^+ / R^\tau]$$

υπολογίζεται με backward recursion, ως εξής:

Σε κάθε κόμβο (κ, h, α), υπολογίζεται η ποσότητα $Y(\kappa, h, \alpha)$ από το τέλος προς την αρχή (με backward recursion), δηλαδή αρχικά για $\kappa = n$, στη συνέχεια για $\kappa = n - 1$, $\kappa = n - 2, \ldots$, και τελικά για $\kappa = 0$.

Αν stop(κ, h, α) = 1, τότε θέτουμε :

$$Y(\kappa, h, \alpha) = (A'(\kappa, h, \alpha) - X)^+$$

Αν stop(κ, h, α) = 0, τότε θέτουμε :

$$Y(\kappa, h, \alpha) = \frac{1}{R}\left[p \cdot Y(k+1, h+1, a) + (1-p) \cdot Y(k+1, h, a+h)\right]$$

Η τιμή $Y(0,0,0)$ αποτελεί το κάτω φράγμα της αξίας του Ασιατικού παραγώγου Αμερικανικού τύπου $V(0, 0, S_0)$.

Ο συνολικός χρόνος που απαιτείται για τον υπολογισμό του κάτω φράγματος είναι ανάλογος με τον συνολικό αριθμό των κόμβων που υπάρχουν στο βελτιωμένο n-step διωνυμικό γράφημα, ο οποίος είναι μικρότερος από $n^4/20$, για $n \geq 14$.

§ 4.9 Σύγκριση της μεθόδου των Chalasani κ.α. με την αντίστοιχη μέθοδο των Hull -White

Οι Chalasani κ.α προκειμένου να υπολογίσουν το άνω φράγμα της αξίας του Ασιατικού παραγώγου Αμερικανικού τύπου ανέπτυξαν μια μέθοδο, η οποία βασιζόταν στην μέθοδο γραμμικής παρεμβολής των Hull-White. Αρχικά υπολόγισαν τις εκτιμώμενες τιμές της αξίας του παραγώγου, ***W***, μόνο για συγκεκριμένες τιμές του αντιπροσωπευτικού αριθμητικού μέσου $\tilde{A}$ όλων των επιμέρους κόμβων σε κάθε κόμβο. Στη συνέχεια, χρησιμοποίησαν γραμμική παρεμβολή για να υπολογίσουν τις χαμένες τιμές του ***W***.

Η αντίστοιχη μέθοδος των Hull -White είναι σχεδόν ίδια, με μόνη διαφορά ότι σε κάθε χρονική στιγμή $\kappa = 1,2,...,n$, οι εκτιμώμενες τιμές της αξίας του παραγώγου υπολογίζονταν για συγκεκριμένες τιμές ενός ΄΄ειδικού΄΄ αριθμητικού μέσου της μορφής S_0e^{mh}, όπου $m \in \mathbb{Z}$ και ***h*** είναι ένα προεπιλεγμένο grid size (π.χ. 0,01). Σε κάθε χρονική στιγμή κ, όλες οι ακέραιες τιμές του ***m*** είχαν συγκεκριμένο προεπιλεγμένο εύρος, τέτοιο ώστε η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του S_0e^{mh} να εκτείνονται στο σύνολο όλων των πιθανών τιμών του αριθμητικού μέσου A_κ.

Στη μέθοδο των Chalasani κ.α, υπάρχει σαφής κανόνας για το ποια είναι η κατάλληλη χρονική στιγμή εξάσκησης του δικαιώματος. Κάτι τέτοιο δεν υφίσταται στη μέθοδο των Hull-White.

Επίσης, το άνω φράγμα που προτείνουν οι Chalasani κ.α είναι πιο κοντά στην πραγματική αξία του παραγώγου για κάθε τιμή του ***n***.

Οι δύο μέθοδοι μπορούν να συγκριθούν ως προς τον χρόνο που χρειάζονται οι αλγόριθμοι για να βγάλουν αποτελέσματα, μόνο αν οι Hull-White χρησιμοποιήσουν $n^4/12$ grid points τα οποία αντιστοιχούν στο σύνολο των επιμέρους κόμβων του βελτιωμένου ***n***-step διωνυμικού γραφήματος των Chalasani κ.α.

Επιπλέον, οι δύο μέθοδοι προκειμένου να είναι συγκρίσιμες ως προς την ακρίβεια των αποτελεσμάτων τους, πρέπει για την παράμετρο ***h*** να ισχύει: $h \approx 6\sigma\sqrt{T}\frac{\sqrt{n}}{n^{3}}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΑΣΙΑΤΙΚΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΤΩΝ DAI - LYUU

§ 5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, αρχικά θα παρουσιάσουμε το multiresolution trinomial lattice των Dai-Lyuu (2002), και στη συνέχεια το integral trinomial lattice που πρότειναν οι ίδιοι, δύο χρόνια αργότερα. Βασισμένοι σε αυτά τα δύο γραφήματα, οι Dai-Lyuu κατάφεραν όχι μόνο να μειώσουν τον χρόνο τιμολόγησης των Ασιατικών παραγώγων, αλλά να σπάσουν το φράγμα του εκθετικού χρόνου. Επιπλέον, οι αλγόριθμοι μείωσης του χρόνου τιμολόγησης που πρότειναν, τόσο για τα Ασιατικά παράγωγα Ευρωπαικού τύπου, όσο και για τα Ασιατικά παράγωγα Αμερικανικού τύπου, είναι εξαιρετικά ακριβείς, αφού δεν χρησιμοποιείται παρεμβολή.

Η παράγραφος §5.1.1 είναι εισαγωγική. Αρχικά, παρουσιάζεται η γενική ιδέα των Dai- Lyuu προκειμένου να ελαττώσουν τον χρόνο τιμολόγησης Ασιατικών παραγώγων, και στη συνέχεια δίνεται ένα παράδειγμα. Στην παράγραφο §5.2 περιγράφεται το τριωνυμικό γράφημα και δίνονται οι τύποι που χρησιμοποιούνται για την τιμολόγηση Ασιατικών παραγώγων μέσω της backward recursion. Στην παράγραφο §5.3 αναλύεται ο τρόπος κατασκευής τριωνυμικού γραφήματος στο οποίο οι τιμές του υποκείμενου τίτλου να είναι ακέραιες, ή ρητές με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, ενώ στην παράγραφο §5.4 παρουσιάζεται η γενική εικόνα του multiresolution trinomial lattice. Στη συνέχεια, στην παράγραφο §5.5, δίνεται ένα παράδειγμα δημιουργίας multiresolution trinomial lattice για Ασιατικά παράγωγα Ευρωπαικού τύπου, και υπολογίζεται η αξία αυτού του παραγώγου. Στην παράγραφο §5.6 παρουσιάζεται η βασική ιδέα στην οποία στηρίζεται η νέα μέθοδος μείωσης του χρόνου τιμολόγησης Ασιατικών παραγώγων των Dai-Lyuu (2004). Στην παράγραφο §5.7 γίνεται μία σύντομη αναφορά στο multiresolution lattice και δίνονται οι τύποι που χρησιμοποιούνται για την τιμολόγηση Ασιατικών παραγώγων μέσω της backward recursion. Στην παράγραφο §5.8 περιγράφεται ο τρόπος κατασκευής του νέου τριωνυμικού γραφήματος. Στην παράγραφο §5.9 παρουσιάζεται ο ψευδοκώδικας του αλγορίθμου κατασκευής του τριωνυμικού γραφήματος με ακέραιες τιμές, καθώς επίσης και μία εφαρμογή του. Τέλος, στην παράγραφο §5.10 υπολογίζεται ο χρόνος τιμολόγησης των Ασιατικών παραγώγων, μέσω αυτής της μεθόδου.

§5.1.1 Εισαγωγή στο multiresolution trinomial lattice

Το 2002, οι Dai και Lyuu παρουσίασαν μία νέα μέθοδο τιμολόγησης Ασιατικών παραγώγων αριθμητικού μέσου, Ευρωπαικού και Αμερικανικού τύπου. Αυτή η μέθοδος βασίζεται στο trinomial lattice και είναι η περισσότερο ακριβής μέθοδος σε σύγκριση με τις ήδη υπάρχουσες μεθόδους. Επιπλέον, ο εξαιρετικά ακριβής αλγόριθμος που χρησιμοποιήθηκε, ΄΄έσπασε΄΄ το φράγμα του εκθετικού χρόνου και έτσι για πρώτη φορά η τιμολόγηση έγινε πολύ γρήγορα, σε χρόνο $< 3^n$.

Η γενική ιδέα της μεθόδου των Dai και Lyuu είναι η εξής: Είναι γνωστό ότι στα Ασιατικά παράγωγα, η αξία εξόφλησης του δικαιώματος βασίζεται στη μέση τιμή της αξίας του υποκείμενου τίτλου σε καθορισμένο χρονικό διάστημα. Επίσης, είναι γνωστό ότι ο αριθμός των αθροισμάτων των τιμών του υποκείμενου τίτλου που φθάνουν σε κάποιον κόμβο *N* είναι ίσος με τον αριθμό των πιθανών τιμών της αξίας εξόφλησης του δικαιώματος. Αν δηλαδή σε έναν κόμβο καταλήγουν k ΄΄μονοπάτια΄΄ τιμών και άρα k αθροίσματα, τότε για αυτόν τον κόμβο θα υπάρχουν k πιθανές τιμές εξόφλησης του δικαιώματος.

Αν ο αριθμός των αθροισμάτων που αναφέρονται σε κάποιον κόμβο είναι πάρα πολύ μεγάλος, είναι εκθετικός του n, δηλαδή των χρονικών βημάτων, τότε ο αλγόριθμος υπολογισμού της αξίας εξόφλησης του δικαιώματος παρουσιάζει προβλήματα.Αν, όμως, ο αριθμός των αθροισμάτων που καταλήγουν σε έναν κόμβο μειωθεί σημαντικά, τότε το δικαίωμα θα μπορεί να τιμολογηθεί πολύ πιο γρήγορα και με μεγαλύτερη ακρίβεια.

Η τιμή του υποκείμενου τίτλου *S*, ικανοποιεί την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dS}{S} = r \cdot dt + s \cdot dW$$

όπου *W*: η τυπική διαδικασία Wienner, *r* :ετήσιο επιτόκιο (risk-free), *σ*: ετήσια διακύμανση και $\Delta t = T/n$

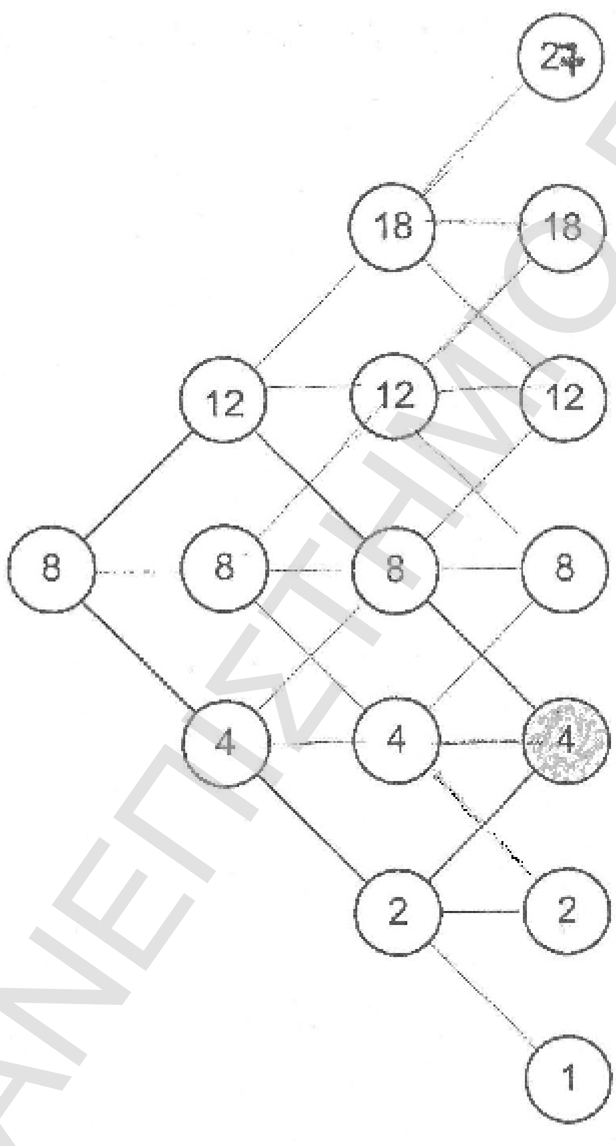
και ο αριθμητικός μέσος των τιμών του τίτλου είναι :

$$A(n) = \frac{S_0 + S_1 + ... + S_n}{n+1} .$$

Η τιμή εξόφλησης ενός Ασιατικού δικαιώματος αγοράς,με τιμή εξάσκησης X, είναι ίση με $max(A(n) - X, 0)$, ενώ η τιμή εξόφλησης ενός Ασιατικού δικαιώματος πώλησης είναι ίση με $max(X - A(n), 0)$.

Οι Dai και Lyuu πολλαπλασίασαν την τιμή εξάσκησης X και όλες τις τιμές του υποκείμενου τίτλου S_i με κάποιον θετικό αριθμό x, τιμολόγησαν το δικαίωμα, και στο τέλος, διαίρεσαν το αποτέλεσμα V_0 με τον αριθμό x. Με αυτόν τον τρόπο, κατάφεραν να δημιουργήσουν ένα γράφημα στο οποίο όλες οι τιμές του υποκείμενου τίτλου που αναγράφονται σε αυτό να είναι ακέραιες (και προφανώς θετικές). Αυτό σημαίνει ότι και όλα τα αθροίσματα των τιμών του υποκείμενου τίτλου θα είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί.

Στο παρακάτω trinomial lattice, είναι $n = 3$, $S_0 = 8$, $u = 3/2$, $d = 1/2$ και $m = 1$.



Γράφημα 7: Τριωνυμικό γράφημα με $n = 3$

Στον κόμβο της χρονικής στιγμής 3, όπου η τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι 4, φτάνουν έξι μονοπάτια. Το ανώτερο μονοπάτι, δηλαδή το μονοπάτι που δίνει το μέγιστο άθροισμα τιμών του τίτλου μέχρι τον συγκεκριμένο κόμβο, είναι το (8, 12, 8, 4) , και δίνει άθροισμα :

$$max\sum_{i=0}^{3} S_i = 8+12+8+4=32$$

Το κατώτερο μονοπάτι, δηλαδή το μονοπάτι που δίνει το ελάχιστο άθροισμα τιμών του τίτλου μέχρι τον συγκεκριμένο κόμβο, είναι το (8, 4, 2, 4), και δίνει άθροισμα :

$$min\sum_{i=0}^{3} S_i = 8+4+2+4=18$$

Τα υπόλοιπα τέσσερα πιθανά αθροίσματα τιμών, θα είναι ακέραιοι αριθμοί και θα βρίσκονται στο διάστημα [18,32]. Έτσι, οι πιθανές τιμές που μπορεί να πάρουν είναι 15 συγκεκριμένοι ακέραιοι αριθμοί.

Γενικότερα, όταν σε έναν κόμβο ενός τριωνυμικού γραφήματος φτάνει πολύ μεγάλος αριθμός μονοπατιών, δεν χρειάζεται να υπολογιστούν όλα τα αθροίσματα τιμών ξεχωριστά. Υπολογίζονται το μέγιστο και το ελάχιστο άθροισμα, και τα υπόλοιπα αθροίσματα θα είναι ακέραιοι αριθμοί μεταξύ των δύο παραπάνω τιμών.

Στην πραγματικότητα, ο αλγόριθμος που χρησιμοποίησαν οι Dai και Lyuu δεν πολλαπλασίαζε τις τιμές του υποκείμενου τίτλου με έναν θετικό ακέραιο x, αλλά ισοδύναμα, επέκτεινε τις τιμές τους κατά κάποια j δεκαδικά ψηφία. Πιο συγκεκριμένα, θεωρώντας ότι ο αριθμός x είναι μια δύναμη του 2, δηλαδή $x=2^j$, $j \geq 0$, αντί να πολλαπλασιάσουν όλες τις τιμές με x, πρόσθεσαν στο τέλος των τιμών j δεκαδικά ψηφία.

Π.χ. στο δυαδικό σύστημα

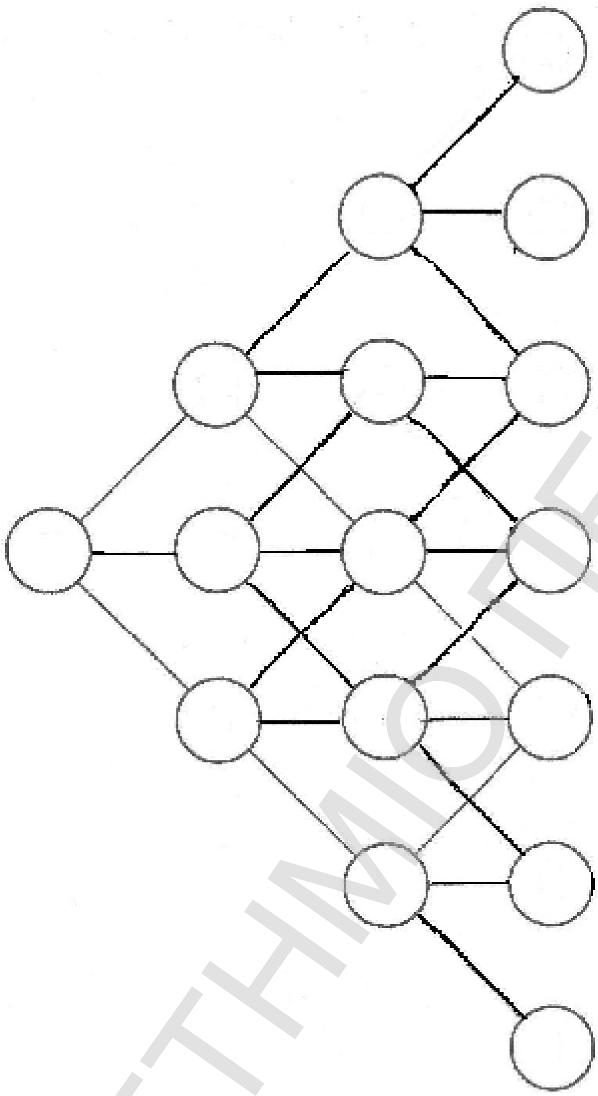
Έστω μια τιμή S_i =101(=5), και $x=2^2$. Τότε, αντί να γίνει $101 \cdot 2^2$ = 10100(=20), ο 101 γράφεται 101,00.

Η επέκταση των δεκαδικών ψηφίων των τιμών του υποκείμενου τίτλου, δεν είναι απαραίτητη σε όλες τις τιμές του γραφήματος. Όταν σε έναν κόμβο N, η τιμή του τίτλου έχει δεκαδικά ψηφία, τότε όλα τα μονοπάτια που θα περάσουν από τον κόμβο N, θα καταλήξουν σε κόμβο που και σε αυτόν η τιμή του τίτλου θα έχει δεκαδικά ψηφία. Από την άλλη πλευρά, τα μονοπάτια που δεν θα περάσουν από τον κόμβο N, θα καταλήξουν σε κόμβους στους οποίους οι τιμές των τίτλων δεν θα έχουν δεκαδικά ψηφία.

Ο αριθμός των δεδομένων του αλγόριθμου είναι ο αριθμός των αθροισμάτων ΣS_i. Περιορίζοντας, λοιπόν, τις τιμές του τίτλου σε ακέραιους αριθμούς ή ισοδύναμα σε ρητούς με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, περιορίζεται αυτόματα ο συνολικός αριθμός των αθροισμάτων των τιμών του τίτλου που πρέπει να υπολογιστούν, και συνεπώς περιορίζεται ο αριθμός των δεδομένων που έχει να επεξεργαστεί ο αλγόριθμος. Με αυτόν τον τρόπο, σπάει το φράγμα του χρόνου 3^n, ενώ ο αλγόριθμος παραμένει εξαιρετικά ακριβής.

§5.2 Τριωνυμικό γράφημα - Backward recursion

Το τριωνυμικό γράφημα είναι παρόμοιο με το διωνυμικό. Στην ουσία, η μόνη τους διαφορά είναι ότι στο διωνυμικό γράφημα οι πιθανές κινήσεις της τιμής του τίτλου από μια χρονική στιγμή στην επόμενη, είναι δύο, ενώ στο τριωνυμικό είναι τρεις. Έτσι, στο τριωνυμικό γράφημα, κάθε κόμβος συνδέεται με τρεις κόμβους της επόμενης χρονικής στιγμής. Η ποσότητα $S_{i,j}$ παριστάνει την j+1 μεγαλύτερη τιμή του τίτλου που αναγράφεται στους κόμβους της χρονικής στιγμής i. Η ποσότητα $S_{i,0}$ παριστάνει τη μεγαλύτερη τιμή του τίτλου, την χρονική στιγμή i. Γενικά, τη χρονική στιγμή i, υπάρχουν $2i+1$ κόμβοι και συνεπώς, $2i+1$ τιμές του υποκείμενου τίτλου. Επομένως, αν έχει χωριστεί το χρονικό διάστημα ισχύος του παραγώγου $[0, T]$ σε n χρονικά βήματα, τότε $i = 0, 1, ..., n$ και $j = 0,1,...,2i$



Γράφημα 8 : Τριωνυμικό γράφημα με n = 3

Έστω $N(i, j)$ ο κόμβος στο trinomial lattice, στον οποίο τη χρονική στιγμή i, αναγράφεται η j μεγαλύτερη τιμή του υποκείμενου τίτλου, όπου, τώρα, $1 \leq j \leq 2i+1$. Η τιμή του υποκείμενου τίτλου στον κόμβο N, $S(N)$, την επόμενη χρονική στιγμή είτε θα κινηθεί ανοδικά, με πιθανότητα $P_u(N)$, και θα φτάσει στον κόμβο $u(N)$, είτε θα κινηθεί καθοδικά, με πιθανότητα $P_d(N)$, και θα φτάσει στον κόμβο $d(N)$, είτε θα παραμείνει ως έχει και απλά θα μεταφερθεί στον κόμβο $m(N)$, με πιθανότητα $P_m(N)$.
Θα ισχύει:

$$S(u(N)) = S(N)+u_N \ , \ S(d(N)) = S(N)+d_N \ , \quad S(m(N)) = S(N)$$

Έστω ότι οι τιμές του υποκείμενου τίτλου που αναγράφονται σε όλους τους κόμβους του γραφήματος είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί και συνεπώς τα αθροίσματά τους είναι και αυτοί θετικοί ακέραιοι αριθμοί.

Συμβολίζουμε $N_{max}(i, j)$ το μέγιστο άθροισμα των τιμών του υποκείμενου τίτλου από τη χρονική στιγμή 0, μέχρι τη χρονική στιγμή i, και συγκεκριμένα μέχρι τον κόμβο $N(i, j)$.

Ομοίως, συμβολίζουμε $N_{min}(i, j)$ το ελάχιστο άθροισμα των τιμών του υποκείμενου τίτλου από τη χρονική στιγμή 0, μέχρι τη χρονική στιγμή i, και συγκεκριμένα μέχρι τον κόμβο $N(i, j)$.

Γενικά, ένα τυχαίο άθροισμα τιμών του υποκείμενου τίτλου από τη χρονική στιγμή 0, μέχρι τον κόμβο $N(i, j)$, συμβολίζεται με $N_\Sigma(i, j)$, και ισχύει:

$$N_\Sigma(i,j) = \{\mathrm{k}\ ,\ \mathrm{k}\text{: ακέραιος, } N_{min}(i, j) \le k \le N_{max}(i, j)\}.$$

Προφανώς, το πλήθος των πιθανών τιμών που μπορεί να πάρει το άθροισμα $N_\Sigma(i, j)$, είναι :

$$\left|N_\Sigma(i, j)\right| = N_{max}(i, j) - N_{min}(i, j)+1$$

Έστω $V(i,j,k)$ η αξία ενός Ασιατικού δικαιώματος στον κόμβο $N(i,j)$, όταν το άθροισμα των τιμών του υποκείμενου τίτλου από τη χρονική στιγμή 0 μέχρι τον κόμβο $N(i,j)$είναι k, δηλαδή $N_\Sigma(i,j) = k$.

Ένας τρόπος τιμολόγησης Ασιατικών παραγώγων σε γράφημα, είναι μέσω της μεθόδου backward recursion. Ξεκινώντας από την τελική χρονική στιγμή n, υπολογίζεται η αξία του παραγώγου σε όλους τους κόμβους $N(n, j)$, $j = 1,\ldots,2n+1$, από τον γνωστό τύπο :

$$V(n,j,k) = max\left[\frac{k}{n+1} - \mathrm{X}, 0\right]$$

Στη συνέχεια, υπολογίζονται διαδοχικά οι τιμές του δικαιώματος V_{n-1}, V_{n-2}, …, και τελικά V_0, χρησιμοποιώντας τους παρακάτω τύπους:

$$V(i, j, k) = \mathrm{e}^{-r\cdot\Delta t}\cdot[P_u\cdot V(i+1, j, k+S(N(i+1, j))) + P_m\cdot V(i+1, j+1, k+S(N(i+1, \mathrm{j}+1)))$$
$$+P_d\cdot V(i+1, j+2, k+S(N(i+1, j+2)))]\ ,\ 0 \le i < n,\ 1 \le j \le 2i+1,\ k\in N_\Sigma(i, j)$$

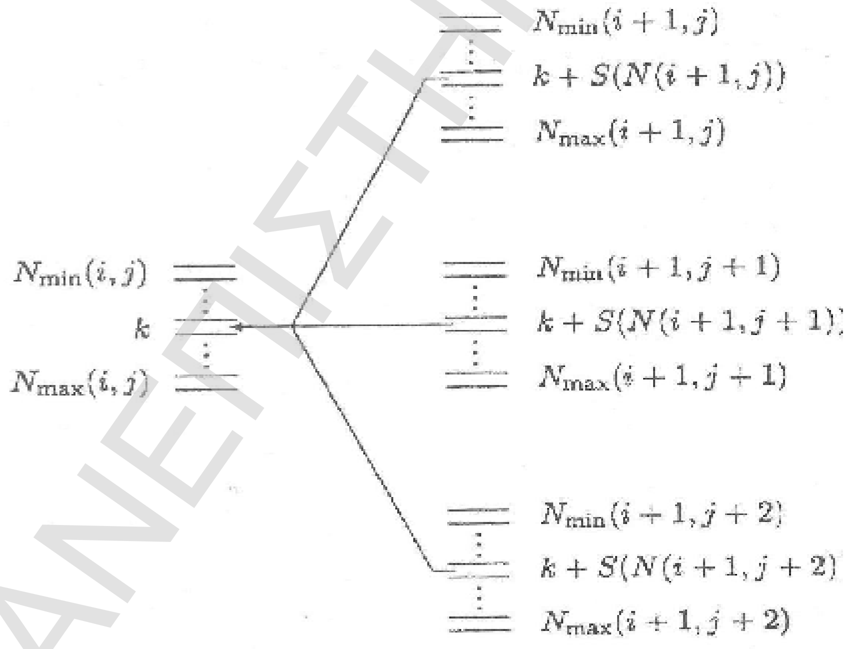
για δικαίωμα Ευρωπαικού τύπου

ή $V(i, j, k) = max\{\frac{k}{i+1} - \mathrm{X}\ ,\ \mathrm{e}^{-r\cdot\Delta t}\cdot[P_u\cdot V(i+1, j, k+S(N(i+1, j)))$
$+ P_m\cdot V(i+1, j+1, k+S(N(i+1, j+1)))$
$+P_d\cdot V(i+1, j+2, k+S(N(i+1, j+2)))]\}$, (1) για δικαίωμα Αμερικανικού τύπου

Σε κάθε κόμβο του γραφήματος, το εύρος των δεδομένων είναι πεπερασμένα αριθμήσιμο, και αυτό διότι έχει γίνει η αρχική υπόθεση ότι οι τιμές του υποκείμενου τίτλου είναι ακέραιοι, και άρα και τα αθροίσματα αυτών θα είναι ακέραιοι αριθμοί.

Συνεπώς, η μέθοδος backward recursion δίνει ακριβή αποτελέσματα καθώς επίσης δεν χρειάζεται να εφαρμοστεί παρεμβολή. Το μόνο σφάλμα που υπάρχει στη μέθοδο είναι το discretization error, δηλαδή το σφάλμα που οφείλεται στη θεώρηση διακριτού χρόνου έναντι συνεχούς πραγματικού χρόνου.

Έστω ότι οι τιμές του υποκείμενου τίτλου είναι πραγματικοί αριθμοί. Τότε, και τα αθροίσματά τους θα είναι πραγματικοί αριθμοί. Έτσι, κατά την εφαρμογή της backward recursion, τα αθροίσματα $k+S(N(i+1,\ m))$, όπου $m \in \{j, j+1, j+2\}$, θα φράσσονται μεταξύ των αθροισμάτων $N_{min}(i+1,\ m)$ και $N_{max}(i+1,\ m)$ του κόμβου $N(i+1,\ m)$. Επομένως, προκειμένου να τιμολογηθεί το παράγωγο, θα πρέπει είτε να βρεθούν μία προς μία όλες οι πιθανές τιμές των αθροισμάτων, είτε κάποια αθροίσματα να παραλειφθούν και στη συνέχεια να εφαρμοστεί παρεμβολή. Στην πρώτη περίπτωση, η διαδικασία τιμολόγησης θα είναι εξαιρετικά χρονοβόρα, αφού ο χρόνος είναι εκθετικός, ενώ στη δεύτερη, θα δημιουργηθεί σφάλμα παρεμβολής.



Γράφημα 9 :Το πλήθος των πιθανών τιμών του δικαιώματος σε κάθε κόμβο, εξαρτάται από το πλήθος των αθροισμάτων των τιμών του υποκείμενου τίτλου από τη χρονική στιγμή 0, έως τον κόμβο αυτό.

§5.3 Κατασκευή τριωνυμικού γραφήματος με ακέραιες τιμές

Έστω ότι η μέση τιμή και η διακύμανση της αξίας του υποκείμενου τίτλου που αναγράφεται στον κόμβο N, είναι ίσες με:

$$\mu(N) = S(N)\cdot e^{r\cdot\Delta t} \qquad \text{και} \qquad Var(N) = S(N)^2 \cdot e^{2r\cdot\Delta t} \cdot \left(e^{s^2\cdot\Delta t} - 1\right) \qquad (2)$$

Για να είναι όλες οι τιμές του υποκείμενου τίτλου στο γράφημα ακέραιοι αριθμοί, θέτουμε:

$$S(u(N)) = S(N) + u_N \quad \text{και} \quad S(d(N)) = S(N) - d_N$$

όπου u_N και d_N είναι θετικοί ακέραιοι .

Οι παραπάνω θετικοί ακέραιοι u_N και d_N πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις, με τις οποίες εξασφαλίζεται η σύγκλιση των αποτελεσμάτων της τιμολόγησης προς την πραγματική αξία του παραγώγου.

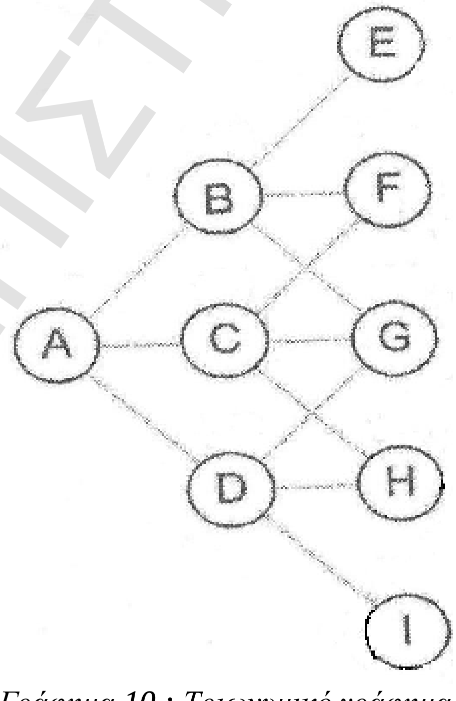
$$\mu(N) = p_u(N)\cdot (S(N)+u_N) + p_m(N)\cdot S(N) + p_d(N)\cdot(S(N) - d_N) \qquad (3)$$

$$Var(N) = p_u(N)\cdot[S(N)+u_N-\mu(N)]^2 + p_m(N)\cdot[S(N)-\mu(N)]^2 + p_d(N)\cdot[S(N)-d_N-\mu(N)]^2 \qquad (4)$$

$$p_u(N) + p_m(N) + p_d(N) = 1 \qquad (5)$$

$$0 < p_u(N)\ ,\ p_m(N)\ ,\ p_d(N) < 1 \qquad (6)$$

Θεωρούμε το παρακάτω τριωνυμικό γράφημα , με n = 2 :



Γράφημα 10 : Τριωνυμικό γράφημα με n = 2

Οι τιμές του υποκείμενου τίτλου στους κόμβους που έχουν δημιουργηθεί από ΄΄ευθεία΄΄ κίνηση, είναι μοναδικά καθορισμένες από τις τιμές του τίτλου που αναγράφονται στους αντίστοιχους κόμβους της προηγούμενης χρονικής στιγμής. Έτσι, στο συγκεκριμένο γράφημα, οι τιμές του υποκείμενου τίτλου στους κόμβους C, F, G, H είναι ίδιες με τις τιμές του τίτλου στους κόμβους A, B, A, D αντίστοιχα. Επομένως, αρκεί να ασχοληθούμε μόνο με τους κόμβους A, B, E, D, I, που είναι οι ανώτεροι και οι κατώτεροι κόμβοι του γραφήματος.

Οι ποσότητες $u=u_N$ και $d=d_N$ καθορίζονται πλήρως από την ποσότητα $\left\lceil \sqrt{Var(N)} \right\rceil$, που είναι το ακέραιο μέρος της τετραγωνικής ρίζας της διακύμανσης των τιμών του τίτλου στον κόμβο *N*. Πολλές φορές, όμως, τα u_N και d_N που προκύπτουν, δεν ικανοποιούν τις απαιτούμενες σχέσεις (3)-(6). Αυτό το πρόβλημα εντοπίζεται μόνο στο κατώτερο μονοπάτι του γραφήματος, όπου οι τιμές του υποκείμενου τίτλου μειώνονται, και συνεπώς μειώνεται και η διακύμανσή τους.

Η κατασκευή του ακέραιου τριωνυμικού γραφήματος είναι η εξής: Αρχικά, κατασκευάζεται γράφημα στο οποίο όλες οι τιμές του υποκείμενου τίτλου πολλαπλασιάζονται με έναν θετικό ακέραιο m, για να γίνουν ακέραιες, και στη συνέχεια, διαιρείται το αποτέλεσμα της τιμολόγησης με τον m. Στην περίπτωση που από τον τύπο $\left\lceil \sqrt{Var(N)} \right\rceil$ προκύψουν u_N και d_N που δεν ικανοποιούν τις συνθήκες (3)-(6), πολλαπλασιάζονται ξανά όλες οι τιμές του τίτλου με έναν νέο θετικό ακέραιο $m>1$, τέτοιον ώστε οι μεταβλητές u_N, d_N, $p_u(N)$, $p_m(N)$, $p_d(N)$, που αναφέρονται στο κατώτερο μονοπάτι τιμών που θα προκύψει, να ικανοποιούν τις απαιτούμενες σχέσεις.

Έστω ότι ο ακέραιος αριθμός m με τον οποίο πολλαπλασιάζονται οι τιμές του υποκείμενου τίτλου, είναι μία δύναμη του 2, είναι δηλαδή της μορφής $m=2^j$. Σε αυτή την περίπτωση, αντί να πολλαπλασιαστούν οι τιμές του τίτλου με τον m, ισοδύναμα οι τιμές του τίτλου επεκτείνονται και αποκτούν j δεκαδικά ψηφία. Το πλεονέκτημα αυτής της ισοδυναμίας είναι ότι στο τέλος δεν χρειάζεται να διαιρεθεί το αποτέλεσμα της τιμολόγησης με τον m.

Π.χ. Έστω μια τιμή $S_i=101$ (=5), και $x=2^3$. Τότε, αντί να γίνει $101\cdot 2^3=101000$ (=40), ο 101 γράφεται 101,000

Έστω $A_j = \left\{ \frac{i}{2^j}, i=1,2,\dots \right\}$, j :θετικός ακέραιος, το σύνολο των θετικών ρητών αριθμών που αυξάνονται κατά 2^{-j}, και έστω A_0 το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων.

π.χ. $A_1 = \{0{,}5\ ,\ 1\ ,\ 1{,}5\ ,\ 2\ ,\ 2{,}5\ ,\ 3\ ,\ ...\}$

$A_2 = \{0{,}25\ ,\ 0{,}5\ ,\ 0{,}75\ ,\ 1\ ,\ 1{,}25\ ,\ 1{,}5\ ,\ 1{,}75\ ,\ 2\ ,\ ...\}$

κ.ο.κ.

Προφανώς, ισχύει: $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset ...$

Επίσης, το άθροισμα οποιονδήποτε αριθμών του συνόλου A_j, θα ανήκει στο A_j.

Έστω, $\lceil x \rceil_k$: ο αριθμός που προκύπτει μετά από στρογγυλοποίηση στο ***k*** δεκαδικό ψηφίο του αριθμού ***x***.

π.χ. $\lceil 1{,}0101 \rceil_3 = 1{,}011$ και $\lceil 1{,}0100 \rceil_3 = 1{,}010$

Θεωρούμε ότι εργαζόμαστε στο σύνολο A_κ. Όπως είπαμε και παραπάνω, οι ποσότητες $\boldsymbol{u_N}$ και $\boldsymbol{d_N}$ καθορίζονται πλήρως από την ποσότητα $\lceil \sqrt{Var(N)} \rceil$.

Τώρα, επειδή είμαστε στο A_κ, θα ισχύει:

$$u_N = d_N = \lceil \sqrt{Var(N)} \rceil_\kappa > 0$$

Έστω ότι η ποσότητα $d_N = \lceil \sqrt{Var(N)} \rceil_\kappa > 0$ δεν ικανοποιεί τις συνθήκες (3)-(6), ή ότι $\sqrt{Var(N)} < 2^{-(\kappa+1)}$. Τότε, προκειμένου να ξεπεραστούν αυτά τα προβλήματα, πρέπει να αυξηθούν τα δεκαδικά ψηφία της συγκεκριμένης τιμής του τίτλου, δηλαδή της τιμής που αναγράφεται στον κόμβο *N*.

Για κάποιο $\lambda > \kappa$, θα ισχύει:

$$2^{-(\lambda+1)} \leq \sqrt{Var(N)} < 2^{-\lambda}$$

Τότε, για κάθε $j = \lambda, \lambda+1, \lambda+2, ...$, $(j > \kappa)$, ψάχνουμε $2^{j-\kappa-1}$ αριθμούς στο σύνολο A_j, για να βρεθεί κατάλληλο d_N που να ικανοποιεί τις συνθήκες (3)-(6).

Έστω ότι $\kappa = 0$. Τότε, $\lambda = 1,2,...$ και άρα $j = 1,2,...$.Ψάχνουμε 2^{j-1} αριθμούς στο A_j όπου ένας από αυτούς θα είναι το κατάλληλο d_N.

Για $j = 1$: $2^{-1} + 0*2^0 = 0{,}5$(δεκαδικό) $= 0{,}1$(δυαδικό)

Άρα, υποψήφιο $d_N = 0{,}1$

Για j =2: $2^{-2} + 0*2^{-1} = 0,25$(δεκαδικό) = 0,01(δυαδικό)

$2^{-2} + 1*2^{-1} = 0,75$(δεκαδικό) = 0,11(δυαδικό) (ανά 0,5)

Άρα, υποψήφια d_N : $d_N = 0,01$ ή $d_N = 0,11$

Γενικά, για j:
$$2^{-j} + 0*2^{-j+1} = 0,000......0001$$
$$2^{-j} + 1*2^{-j+1} = 0,000......0011$$
$$2^{-j} + 2*2^{-j+1} = 0,000......0101$$
$$2^{-j} + 3*2^{-j+1} = 0,000......0111$$
$$2^{-j} + 4*2^{-j+1} = 0,000......1001$$

.

.

.

$$2^{-\kappa} - 2^{-j} = 0,000.....0111$$

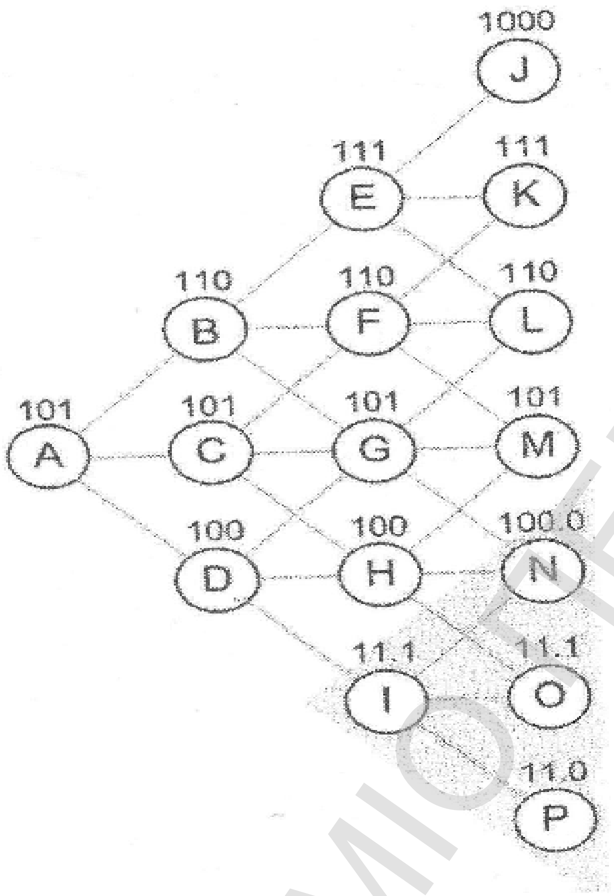
<---κ--->

Η διαδικασία σταματάει όταν βρεθεί το κατάλληλο j για το οποίο το υποψήφιο d_N που θα προκύψει, θα ικανοποιεί τις σχέσεις (3)-(6). Τότε, η τιμολόγηση θα συνεχιστεί στο σύνολο A_j.

§5.4 Γενική μορφή multiresolution trinomial lattice

Όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό m, ή ισοδύναμα, όταν προστίθενται στην τιμή του τίτλου $log_2 m$ δεκαδικά ψηφία, τότε τα δεδομένα που έχει να επεξεργαστεί ο αλγόριθμος αυξάνονται, και συνεπώς αυξάνεται και ο χρόνος τιμολόγησης.

Είπαμε, όμως, προηγουμένως, ότι ο πολλαπλασιασμός ή ισοδύναμα, η επέκταση των ψηφίων μιας τιμής, δεν είναι απαραίτητο να γίνει σε όλες τις τιμές του γραφήματος. Θεωρούμε το παρακάτω γράφημα:

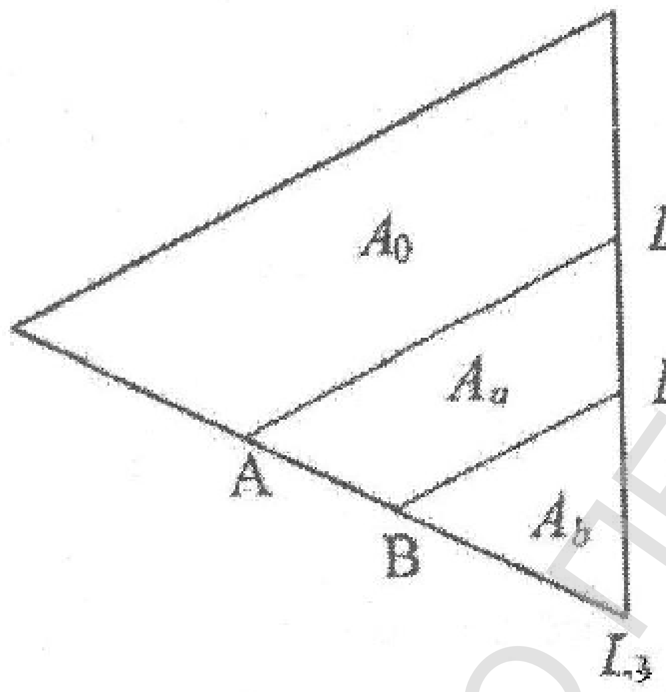


Γράφημα 11 : Τριωνυμικό γράφημα με $n = 3$

Παρατηρούμε ότι αρχικά, για $n<2$, οι τιμές του γραφήματος είναι ακέραιες, δηλαδή ανήκουν στο σύνολο A_0. Έστω ότι ο κόμβος I είναι ο πρώτος κόμβος του κατώτερου μονοπατιού τιμών του τίτλου, στον οποίο αναγράφεται δεκαδική τιμή. Έστω ότι η τιμή αυτή ανήκει στο σύνολο A_1. Τα μονοπάτια που περνούν από τον κόμβο I, θα φτάνουν σε κόμβους στους οποίους οι τιμές του τίτλου που αναγράφονται σε αυτούς, θα έχουν τουλάχιστον τόσα δεκαδικά ψηφία όσα έχει και η τιμή του κόμβου I, για το συγκεκριμένο γράφημα, θα έχουν τουλάχιστον ένα δεκαδικό ψηφίο και θα ανήκουν τουλάχιστον στο A_1.

Προφανώς, τα μονοπάτια που δεν περνούν από τον κόμβο I, θα δίνουν αθροίσματα τιμών του τίτλου ΣS_i, που θα ανήκουν στο σύνολο A_0.

Η γενική μορφή του γραφήματος, όσον αφορά το σύνολο στο οποίο ανήκουν οι τιμές του υποκείμενου τίτλου, είναι η εξής:



Γράφημα 12 : Γενική μορφή γραφήματος με διαχωρισμένες τις περιοχές των τιμών του υποκείμενου τίτλου

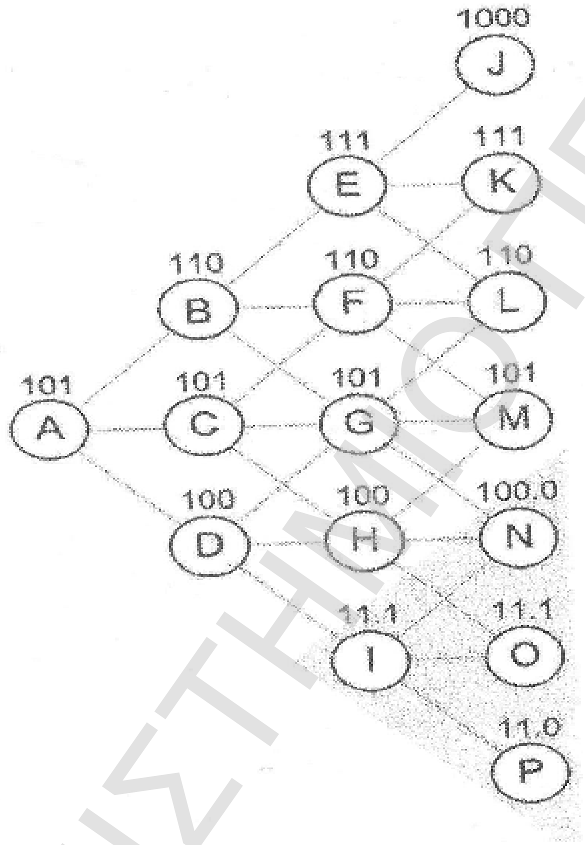
Έστω ότι ο κόμβος Α είναι ο πρώτος κόμβος του κατώτερου μονοπατιού, στον οποίο η τιμή του τίτλου ανήκει στο σύνολο A_α. Επίσης, έστω ότι ο κόμβος Β είναι ο πρώτος κόμβος του κατώτερου μονοπατιού, στον οποίο η τιμή του τίτλου ανήκει στο σύνολο A_b, όπου $A_\alpha \subset A_b$.

- Τα αθροίσματα των τιμών του τίτλου που δίνουν τα μονοπάτια που δεν περνούν από τους κόμβους Α, Β, είναι τιμές που ανήκουν στο σύνολο A_0.
- Τα αθροίσματα των τιμών του τίτλου που δίνουν τα μονοπάτια που περνούν από τον κόμβο Α αλλά όχι από τον Β, είναι τιμές που ανήκουν στο σύνολο A_α.
- Τα αθροίσματα των τιμών του τίτλου που δίνουν τα μονοπάτια που περνούν και από τους δύο κόμβους Α, Β, είναι τιμές που ανήκουν στο σύνολο A_b, κ.ο.κ.

Αν μια τιμή ανήκει στο σύνολο A_1, την πολλαπλασιάζω με 2^1, αν ανήκει στο σύνολο A_2, την πολλαπλασιάζω με 2^2, ..., γενικά αν μια τιμή ανήκει στο σύνολο A_α την πολλαπλασιάζω με 2^α.

§5.5 Παράδειγμα τιμολόγησης Ασιατικού δικαιώματος αγοράς Ευρωπαικού τύπου

Έστω το παρακάτω τριωνυμικό γράφημα στο οποίο n=3, S_0 = 101 (δυαδικό σύστημα) ή αλλιώς S_0 = 5 (δεκαδικό σύστημα), r =10%, σ = 20%, T = 0,75, X= 4,8. Αρχικά, για n <2, οι τιμές του τίτλου είναι ακέραιες, δηλαδή ανήκουν στο A_0.



Γράφημα 13 : Τριωνυμικό γράφημα με $n = 3$

<u>Για τον κόμβο Α</u> : $\text{Var(A)}=\text{S(A)}^2 \cdot e^{2r\cdot\Delta t} \cdot \left(e^{s^2\cdot\Delta t}-1\right) = 5^2 \cdot e^{0,2\cdot 0,25} \cdot (e^{0,04\cdot 0,25}-1) = 0,2641$

Άρα, $\sqrt{Var(\text{A})} = \sqrt{0,2641} = 0,514 > 2^{-1}$

$\left\lceil \sqrt{Var(\text{A})} \right\rceil_0 = 1$. Άρα, $u_N = d_N = 1$

Επομένως, $S(B) = S(A) + u_N = 5+1 = 6$ (ή ισοδύναμα 110)

$\mu(A) = S(A)\cdot e^{r\cdot\Delta t} = 5\cdot e^{0,1\cdot 0,25} = 5,1266$

Θα λύσουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$\mu(A) = p_u(A)\cdot(S(A)+u_A)+p_m(A)\cdot S(A)+p_d(A)\cdot(S(A) - d_A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5{,}1266 = p_u(A)\cdot 6 + p_m(A)\cdot 5 + p_d(A)\cdot 4$

$Var(A) = p_u(A)\cdot[S(A)+u_A - \mu(A)]^2 + p_m(A)\cdot[S(A) - \mu(A)]^2 + p_d(A)\cdot[S(A) - d_A - \mu(A)]^2$

$\Leftrightarrow 0{,}2641 = p_u(A)\cdot 0{,}76287 + p_m(A)\cdot 0{,}01602 + p_d(A)\cdot 1{,}269173$

$p_u(A) + p_m(A) + p_d(A) = 1$

Οι λύσεις του συστήματος είναι : $p_u(A) = 0{,}2033$, $p_m(A) = 0{,}7198$, $p_d(A) = 0{,}0769$

Για τους κόμβους C, G, M ισχύουν ακριβώς τα ίδια με παραπάνω, αφού S(A)= S(C) =S(G) = S(M)

<u>Για τον κόμβο B</u> : $Var(B) = S(B)^2\cdot e^{2r\cdot\Delta t}\cdot\left(e^{s^2\cdot\Delta t} - 1\right) = 6^2\cdot e^{0,2\cdot 0,25}\cdot(e^{0,04\cdot 0,25} - 1) = 0{,}38$

Άρα, $\sqrt{Var(B)} = \sqrt{0{,}38} = 0{,}615 > 2^{-1}$

$\left\lceil \sqrt{Var(B)} \right\rceil_0 = 1$. Άρα, $u_N = d_N = 1$

Επομένως, $S(E) = S(B) + u_N = 6+1 = 7$ (ή ισοδύναμα 111)

$\mu(B) = S(B)\cdot e^{r\cdot\Delta t} = 6\cdot e^{0,1\cdot 0,25} = 6{,}1519$

Θα λύσουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$\mu(B) = p_u(B)\cdot(S(B)+u_B) + p_m(B)\cdot S(B) + p_d(B)\cdot(S(B) - d_B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6{,}1519 = p_u(B)\cdot 7 + p_m(B)\cdot 6 + p_d(B)\cdot 5$

$Var(B) = p_u(B)\cdot[S(B)+u_B - \mu(B)]^2 + p_m(B)\cdot[S(B) - \mu(B)]^2 + p_d(B)\cdot[S(B) - d_B - \mu(B)]^2$

$\Leftrightarrow 0{,}38 = p_u(B)\cdot 0.7193 + p_m(B)\cdot 0.023 + p_d(B)\cdot 1.3269$

$p_u(B) + p_m(B) + p_d(B) = 1$

Οι λύσεις του συστήματος είναι : $p_u(B) = 0{,}2775$, $p_m(B) = 0{,}597$, $p_d(B) = 0{,}126$

Για τους κόμβους F, L ισχύουν ακριβώς τα ίδια με παραπάνω, αφού S(B)= S(F) =S(L)

Για τον κόμβο E : $Var(E)= S(E)^2 \cdot e^{2r\cdot\Delta t} \cdot \left(e^{s^2\cdot\Delta t} - 1\right) = 7^2 \cdot e^{0,2\cdot 0,25} \cdot (e^{0,04\cdot 0,25} - 1) = 0,5177$

Άρα, $\sqrt{Var(E)} = \sqrt{0,5177} = 0,719 > 2^{-1}$

$\left\lceil \sqrt{Var(E)} \right\rceil_0 = 1$. Άρα, $u_N = d_N = 1$

Επομένως, $S(J) = S(E) + u_N = 7+1 = 8$ (ή ισοδύναμα 1000)

$\mu(E) = S(E)\cdot e^{r\cdot\Delta t} = 7 \cdot e^{0,1\cdot 0,25} = 7,1772$

Θα λύσουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$\mu(E) = p_u(E)\cdot(S(E)+u_E) + p_m(E)\cdot S(E) + p_d(E)\cdot(S(E) - d_E) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7,1772 = p_u(E)\cdot 8 + p_m(E)\cdot 7 + p_d(E)\cdot 6$

$Var(E) = p_u(E)\cdot[S(E)+u_E - \mu(E)]^2 + p_m(E)\cdot[S(E) - \mu(E)]^2 + p_d(E)\cdot[S(E) - d_E - \mu(E)]^2 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,5177 = p_u(E)\cdot 0,677 + p_m(E)\cdot 0,0314 + p_d(E)\cdot 1,3858$

$p_u(E) + p_m(E) + p_d(E) = 1$

Οι λύσεις του συστήματος είναι : $p_u(E) = 0,363$, $p_m(E) = 0,451$, $p_d(E) = 0,186$

Για τον κόμβο K ισχύουν ακριβώς τα ίδια με παραπάνω, αφού S(E)= S(K)

Για τον κόμβο J : $Var(J) = S(J)^2 \cdot e^{2r\cdot\Delta t} \cdot \left(e^{s^2\cdot\Delta t} - 1\right) = 8^2 \cdot e^{0,2\cdot 0,25} \cdot (e^{0,04\cdot 0,25} - 1) = 0,6761$

Άρα, $\sqrt{Var(J)} = \sqrt{0,6761} = 0,822 > 2^{-1}$

$\left\lceil \sqrt{Var(J)} \right\rceil_0 = 1$. Άρα, $u_N = d_N = 1$

$\mu(J) = S(J)\cdot e^{r\cdot\Delta t} = 8 \cdot e^{0,1\cdot 0,25} = 8,2026$

Για τον κόμβο D : $Var(D) = S(D)^2 \cdot e^{2r\cdot\Delta t}\cdot\left(e^{s^2\cdot\Delta t} - 1\right) = 4^2\cdot e^{0,2\cdot 0,25}\cdot(e^{0,04\cdot 0,25} - 1) = 0,1682$

Άρα, $\sqrt{Var(D)} = \sqrt{0,1682} = 0,41 < 2^{-1}$, $\left\lceil \sqrt{Var(D)} \right\rceil_0 = 0$.

Ισχύει: $2^{-2} < \sqrt{Var(D)} < 2^{-1}$. Επομένως, λ=1 και j = 1,2,...

Ψάχνουμε 2^{j-1} αριθμούς στο A_j όπου ένας από αυτούς θα είναι το κατάλληλο d_N.
Για j =1: $2^{-1} + 0*2^0 = 0,5$ (δεκαδικό) = 0,1 (δυαδικό)

Για $d_N = 0,5$, ικανοποιούνται οι συνθήκες (3) - (6). Άρα, παίρνουμε $d_N = 0,5$, ενώ $u_N = 1$

Έτσι, $S(I) = S(D) - d_N = 4-0,5 = 3,5$

$\mu(D) = S(D)\cdot e^{r\cdot\Delta t} = 4 \cdot e^{0,1\cdot 0,25} = 4,1013$

Θα λύσουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$\mu(D) = p_u(D)\cdot(S(D)+u_D) + p_m(D)\cdot S(D) + p_d(D)\cdot(S(D) - d_D) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4,1013 = p_u(D)\cdot 5 + p_m(D)\cdot 4 + p_d(D)\cdot 3,5$

$Var(D) = p_u(D)\cdot[S(D)+u_D - \mu(D)]^2 + p_m(D)\cdot[S(D) - \mu(D)]^2 + p_d(D)\cdot[S(D) - d_D - \mu(D)]^2$

$\Leftrightarrow 0,1682 = p_u(D)\cdot 0,8077 + p_m(D)\cdot 0,01 + p_d(D)\cdot 0,3616$

$p_u(D) + p_m(D) + p_d(D) = 1$

Οι λύσεις του συστήματος είναι : $p_u(D) = 0,1532$, $p_m(D) = 0,7429$, $p_d(D) = 0,1039$

Για τους κόμβους H, N ισχύουν ακριβώς τα ίδια με παραπάνω, αφού S(D)=S(H)=S(N)

Για τον κόμβο I : $Var(I) = S(I)^2 \cdot e^{2r\cdot\Delta t} \cdot \left(e^{s^2\cdot\Delta t} - 1\right) = 3,5^2 \cdot e^{0,2\cdot 0,25} \cdot (e^{0,04\cdot 0,25} - 1) = 0,1287$

Άρα, $\sqrt{Var(I)} = \sqrt{0,1287} = 0,3598 < 2^{-1}$, $\left\lceil \sqrt{Var(I)} \right\rceil_0 = 0$.

Ισχύει: $2^{-2} < \sqrt{Var(I)} < 2^{-1}$. Επομένως, λ=1 και j = 1,2,...

Ψάχνουμε 2^{j-1} αριθμούς στο A_j όπου ένας από αυτούς θα είναι το κατάλληλο d_N.
Για j =1: $2^{-1} + 0*2^0 = 0,5$ (δεκαδικό) = 0,1 (δυαδικό)

Για $d_N = u_N = 0,5$, ικανοποιούνται οι συνθήκες (3)-(6). Άρα, παίρνουμε $d_N = u_N = 0,5$.

Έτσι, $S(P) = S(I) - d_N = 3,5-0,5 = 3$

$\mu(I) = S(I)\cdot e^{r\cdot\Delta t} = 3,5 \cdot e^{0,1\cdot 0,25} = 3,588$

Θα λύσουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$\mu(I) = p_u(I)\cdot(S(I)+u_I) + p_m(I)\cdot S(I) + p_d(I)\cdot(S(I) - d_I) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3{,}588 = p_u(I)\cdot 4 + p_m(I)\cdot 3{,}5 + p_d(I)\cdot 3$

$Var(I) = p_u(I)\cdot[S(I)+u_I - \mu(I)]^2 + p_m(I)\cdot[S(I) - \mu(I)]^2 + p_d(I)\cdot[S(I) - d_I - \mu(I)]^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}1287 = p_u(I)\cdot 0{,}1697 + p_m(I)\cdot 0{,}0077 + p_d(I)\cdot 0{,}3457$

$p_u(I) + p_m(I) + p_d(I) = 1$

Οι λύσεις του συστήματος είναι : $p_u(I) = 0{,}3634$, $p_m(I) = 0{,}451$, $p_d(I) = 0{,}1856$

Για τον κόμβο O, ισχύουν ακριβώς τα ίδια με παραπάνω, αφού S(I)= S(O)

Για τον κόμβο P : $Var(P) = S(P)^2 \cdot e^{2r\cdot\Delta t}\cdot\left(e^{s^2\cdot\Delta t} - 1\right) = 3^2 \cdot e^{0,2\cdot 0,25}\cdot(e^{0,04\cdot 0,25} - 1) = 0{,}095$

Άρα, $\sqrt{Var(P)} = \sqrt{0{,}095} = 0{,}3 < 2^{-1}$, $\left\lceil \sqrt{Var(P)} \right\rceil_0 = 0$.

$\mu(P) = S(P)\cdot e^{r\cdot\Delta t} = 3\cdot e^{0,1\cdot 0,25} = 3{,}076$

Για τον κόμβο G : Για τα μονοπάτια που φτάνουν στον κόμβο G, ισχύουν:

$$\max\Sigma S_i = 5+6+5 = 16 \quad \text{και} \quad \min\Sigma S_i = 5+4+5 = 14$$

Επομένως, όλα τα αθροίσματα τιμών του τίτλου ΣS_i των μονοπατιών που φτάνουν στον κόμβο G, θα είναι ακέραιοι αριθμοί, δηλαδή αριθμοί που θα ανήκουν στο σύνολο A_0 και επιπλέον θα ανήκουν στο διάστημα [14,16]. Έτσι, οι πιθανές τιμές που μπορεί να έχουν τα αθροίσματα των τιμών του τίτλου μέχρι τον κόμβο G είναι:

$$N_\Sigma(G) = \{14,15,16\}$$

Για τον κόμβο N : Για τα μονοπάτια που φτάνουν στον κόμβο N, ισχύουν:

$$\max\Sigma S_i = 5+6+5+4 = 20 \quad \text{και} \quad \min\Sigma S_i = 5+4+3{,}5+4 = 16{,}5$$

Η τιμή του κόμβου N ανήκει στο σύνολο A_1, επομένως όλα τα αθροίσματα τιμών του τίτλου ΣS_i των μονοπατιών που φτάνουν στον κόμβο N, θα είναι αριθμοί που θα ανήκουν στο σύνολο A_1, δηλαδή ρητοί αυξανόμενοι κατά 0,5, και επιπλέον θα ανήκουν στο διάστημα [16,5 ,20]. Έτσι, οι πιθανές τιμές που μπορεί να έχουν τα αθροίσματα των τιμών του τίτλου μέχρι τον κόμβο N είναι:

$$N_{\Sigma}(N) = \{16{,}5\ ,\ 17,\ 17{,}5\ ,\ 18,\ 18{,}5\ ,\ 19,\ 19{,}5,\ 20\}.$$

Για τον κόμβο L : Για τα μονοπάτια που φτάνουν στον κόμβο L, ισχύουν:

$$\max\Sigma S_i = 5+6+7+6 = 24 \quad \text{και} \quad \min\Sigma S_i = 5+4+5+6 = 20$$

Επομένως, όλα τα αθροίσματα τιμών του τίτλου ΣS_i των μονοπατιών που φτάνουν στον κόμβο L, θα είναι ακέραιοι αριθμοί, δηλαδή αριθμοί που θα ανήκουν στο σύνολο A_0 και επιπλέον θα ανήκουν στο διάστημα [20,24]. Έτσι, οι πιθανές τιμές που μπορεί να έχουν τα αθροίσματα των τιμών του τίτλου μέχρι τον κόμβο L είναι:

$$N_{\Sigma}(L) = \{20,21,22,23,24\}$$

Για τον κόμβο M : Για τα μονοπάτια που φτάνουν στον κόμβο M, ισχύουν:

$$\max\Sigma S_i = 5+6+6+5 = 22 \quad \text{και} \quad \min\Sigma S_i = 5+4+4+5 = 18$$

Επομένως, όλα τα αθροίσματα τιμών του τίτλου ΣS_i των μονοπατιών που φτάνουν στον κόμβο M, θα είναι ακέραιοι αριθμοί, δηλαδή αριθμοί που θα ανήκουν στο σύνολο A_0 και επιπλέον θα ανήκουν στο διάστημα [18,22]. Έτσι, οι πιθανές τιμές που μπορεί να έχουν τα αθροίσματα των τιμών του τίτλου μέχρι τον κόμβο M είναι:

$$N_{\Sigma}(M) = \{18,19,20,21,22\}$$

Χωρίς τη χρήση του αλγορίθμου MR, ο χρόνος τιμολόγησης ενός παραγώγου θα ήταν πολύ μεγαλύτερος, αφού τα δεδομένα του γραφήματος θα ήταν πολύ περισσότερα από αυτά που πραγματικά χρειάζονται.

Για παράδειγμα, η τιμή του κόμβου I, ανήκει στο σύνολο A_1, και αυτό εξαιτίας της διακύμανσης του κόμβου D. Αν δεν υπήρχε η ιδέα του MR αλγορίθμου, θα θεωρούσαμε ότι όλες οι τιμές του υποκείμενου τίτλου στο γράφημα, θα ανήκουν στο σύνολο A_1, δηλαδή θα είναι ρητές τιμές που αυξάνονται κατά 0,5, έχοντας ένα δεκαδικό ψηφίο. Έτσι, οι πιθανές τιμές που μπορεί να έχουν τα αθροίσματα των τιμών του τίτλου μέχρι κάποιον κόμβο, θα είναι πολύ περισσότερες. Έτσι, για τον κόμβο G, π.χ., οι πιθανές τιμές που μπορεί να έχουν τα αθροίσματα των τιμών του τίτλου μέχρι εκεί θα είναι: $N_{\Sigma}(G) = \{14,\ 14{,}5,\ 15,\ 15{,}5,\ 16\}$ και όχι $\{14,\ 15,\ 16\}$.

Η τιμολόγηση γίνεται με τη μέθοδο backward recursion, ξεκινώντας από τη χρονική στιγμή n=3, και πηγαίνοντας διαδοχικά προς την αρχική χρονική στιγμή n = 0.
Έτσι, για n = 3, υπολογίζονται όλες οι τιμές του παραγώγου στους κόμβους J, K, L, M, N, O, P, από τον τύπο:

$$V(n,j,k) = max\left[\frac{\sum_{i=0}^{n} S_i}{n+1} - \mathrm{X}, 0\right]$$

Στη συνέχεια, υπολογίζονται οι τιμές του δικαιώματος στους κόμβους E, F, G, H, I, χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$\begin{aligned} V(i, j, k) = \mathrm{e}^{-r\cdot\Delta t}\cdot[&P_u\cdot V(i+1, j, k+S(N(i+1, j))) \\ &+ P_m\cdot V(i+1, j+1, k+S(N(i+1, j+1))) \\ &+ P_d\cdot V(i+1, j+2, k+S(N(i+1, j+2)))], \quad 0 \le i < n,\ 1 \le j \le 2i+1,\ k \in N_\Sigma(i,j) \end{aligned}$$

Ομοίως, υπολογίζονται οι τιμές του δικαιώματος στους κόμβους B, C, D και τέλος, στον κόμβο A

Τα αποτελέσματα των υπολογισμών που έγιναν, χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις, δίνονται στον παρακάτω πίνακα :

	J	K	L	M	N	O	P
V	1,7	1,45	1,2	1,2	0,7	0	0
		1,2	0,95	0,95	0,45	0	
		0,95	0,7	0,95	0,2	0	
			0,7	0,7	0,2		
			0,45	0,45	0		
			0,2	0,2	0		
				0			
		E	F	G	H	I	
V		1,494	1,052	0,47	0	0	
			0,8	0,23	0		
				0,04			
			B	C	D		
V			1,1026	0,328	0,00612		
				A			
Vo				0,46			

§ 5.6 Διαισθητικός τρόπος μείωσης του χρόνου τιμολόγησης Ασιατικών παραγώγων, των Dai – Lyuu (2004)

Ο χρόνος υπολογισμού της αξίας εξόφλησης ενός παραγώγου μέσω της μεθόδου των γραφημάτων, είναι εκθετικός του *n*, δηλαδή του αριθμού των χρονικών στιγμών που έχει χωριστεί το χρονικό διάστημα ισχύος του παραγώγου, $[0,T]$.

Στο διωνυμικό γράφημα, τη χρονική στιγμή *n*, φτάνουν 2^n μονοπάτια τιμών του υποκείμενου τίτλου. Επομένως, τη χρονική στιγμή *n*, υπάρχουν 2^n αθροίσματα $\sum_{i=0}^{n} S_i$ και άρα υπάρχουν 2^n πιθανές τιμές του παραγώγου. Αντίστοιχα, στο τριωνυμικό γράφημα, τη χρονική στιγμή *n*, φτάνουν 3^n μονοπάτια τιμών του υποκείμενου τίτλου. Επομένως, τη χρονική στιγμή *n*, υπάρχουν 3^n αθροίσματα $\sum_{i=0}^{n} S_i$ και άρα υπάρχουν 3^n πιθανές τιμές του παραγώγου.

Προκειμένου να μειωθεί ο χρόνος τιμολόγησης του παραγώγου, εισήχθει η έννοια του integral lattice από τους Dai και Lyuu (2004), δηλαδή του γραφήματος στο οποίο οι τιμές του υποκείμενου τίτλου και κατ΄επέκταση οι τιμές των αθροισμάτων τους, είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί.

Θεωρούμε ότι τη χρονική στιγμή *n*, το μέγιστο άθροισμα τιμών του τίτλου είναι *α*, δηλαδή

$$max \sum_{i=0}^{n} S_i = \alpha.$$

Τότε, όλα τα πιθανά αθροίσματα $\sum_{i=0}^{n} S_i$ θα είναι ακέραιοι αριθμοί που θα ανήκουν στο διάστημα [1,*α*]. Τη χρονική στιγμή *n*, υπάρχουν $O(n)$ κόμβοι, και επομένως, θα υπάρχουν $O(n \cdot \alpha)$ πιθανά αθροίσματα τιμών του τίτλου $\sum_{i=0}^{n} S_i$. Το μέγιστο άθροισμα τιμών του τίτλου στο διάστημα [0,*n*], μπορεί να εκτιμηθεί μέσω του διωνυμικού γραφήματος ως εξής:

$$\alpha \;\; ; \;\; S_0 + S_0 \cdot u + S_0 \cdot u^2 + \ldots + S_0 \cdot u^n = S_0 \cdot \left(1 + u + u^2 + \ldots + u^n\right) = S_0 \cdot \frac{u^{n+1} - 1}{u - 1}$$

Αλλά, $\quad u = e^{s\sqrt{\Delta t}} \Rightarrow u^{n+1} = e^{(n+1)\cdot s\sqrt{\frac{T}{n}}} = e^{s\sqrt{T}\cdot\frac{n+1}{\sqrt{n}}} = e^{s\sqrt{T}\cdot\frac{(n+1)\sqrt{n}}{n}} = e^{s\sqrt{T\cdot n} + s\frac{\sqrt{T\cdot n}}{n}}$

Επομένως,

$$\alpha = \;\; S_0 \cdot \frac{e^{s\cdot\sqrt{T\cdot n}} - 1}{e^{s\cdot\sqrt{\frac{T}{n}}} - 1}$$

Θεωρούμε τις δύο συναρτήσεις του *n*, $ln(n \cdot \alpha)$ και $ln2^n$.

Για *n* = 1: $ln\alpha$, $ln2$

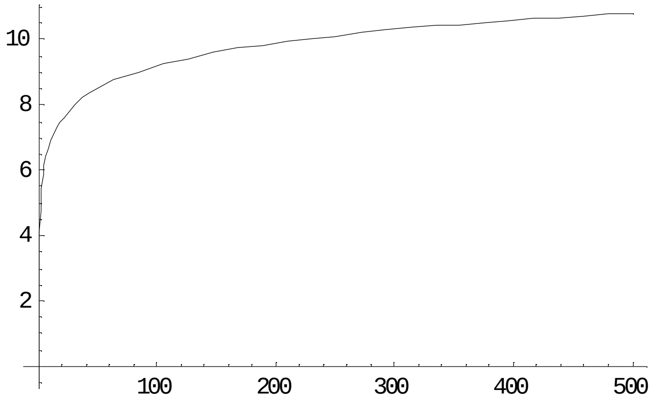
Για *n* = 2: $ln2\alpha = ln2 + ln\alpha$, $ln4$

Για *n* = 3: $ln3\alpha = ln3 + ln\alpha$, $ln8$

Για *n* = 4: $ln4\alpha = ln4 + ln\alpha$, $ln16$ κ.ο.κ.

F[n_]:=Log[n*a];

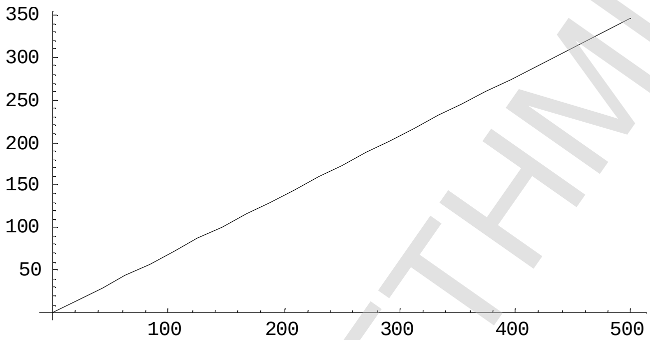
Plot[F[n],{n,0,500}]



Γράφημα 14

F[n_]:=Log[2^n];

Plot[F[n],{n,0,500}]



Γράφημα 15

Είναι προφανές ότι η ποσότητα $n{\cdot}\alpha$ αυξάνεται με πολύ μικρότερο ρυθμό από ότι το 2^n. Συνεπώς, στο integral lattice, έχουμε ένδειξη ότι θα υπάρχουν λιγότερα αθροίσματα τιμών του τίτλου από ότι σε ένα συνηθισμένο διωνυμικό γράφημα.

§ 5.7 Αναφορά στο Multiresolution Lattice και στους τύπους τιμολόγησης μέσω της backward recursion

Στο πρώτο γράφημα που πρότειναν οι Dai και Lyuu (2004), το multiresolution lattice, το οποίο αναπτύξαμε στις προηγούμενες παραγράφους, οι τιμές του υποκείμενου τίτλου σε όλους τους κόμβους είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί ή δεκαδικοί, με συγκεκριμένο, πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων. Κατά συνέπεια, και τα αθροίσματα των τιμών του τίτλου που προκύπτουν από τα μονοπάτια τιμών, είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί ή δεκαδικοί με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων. Το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων μεταβάλλεται όταν κριθεί απαραίτητο, όταν δηλαδή δεν ισχύουν κάποιες συγκεκριμένες συνθήκες που έχουν τεθεί εξ΄αρχής.

Αλλάζοντας τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων, και μάλιστα μειώνοντάς τον, μειώνεται σημαντικά ο αριθμός των πιθανών αθροισμάτων που αντιστοιχεί σε κάθε κόμβο, και έτσι ο αλγόριθμος γίνεται πιο αυστηρός και πιο γρήγορος.

Έστω ότι οι τιμές του υποκείμενου τίτλου πολλαπλασιάζονται με μια σταθερά *K*, πριν να αρχίσει η τιμολόγηση του παραγώγου. Στο τέλος της τιμολόγησης, η αξία του παραγώγου που προέκυψε, διαιρείται με τη σταθερά *K*, και έτσι προκύπτει η αξία του παραγώγου που συγκλίνει στην πραγματική.

Προκειμένου να εξασφαλιστεί η σύγκλιση των αποτελεσμάτων τιμολόγησης στην πραγματική αξία του παραγώγου, θα πρέπει οι τιμές του υποκείμενου τίτλου του γραφήματος, να συγκλίνουν στις αντίστοιχες τιμές του τίτλου, όταν ο χρόνος θεωρείται συνεχής. Θα πρέπει δηλαδή, να ισχύει:

$$S(t+dt) = S(t)\cdot exp[(r - 0{,}5\sigma^2)dt+\sigma\cdot dB_t]$$

όπου $S(t)$: η τιμή του τίτλου τη χρονική στιγμή t, r :ετήσιο επιτόκιο (risk-free),
σ: ετήσια διακύμανση τιμών του τίτλου, B_t : στοχαστική ανέλιξη Brown.

Οι συνθήκες που πρέπει επιπλέον να ισχύουν, έχουν να κάνουν με τη μέση τιμή και τη διακύμανση των τιμών του τίτλου.

Η τιμολόγηση του παραγώγου γίνεται με τη μέθοδο backward recursion, δηλαδή με κίνηση προς τα πίσω, υπολογίζοντας αρχικά την τιμή του παραγώγου τη χρονική στιγμή n, στη συνέχεια την τιμή του παραγώγου τη χρονική στιγμή $n - 1$, $n - 2$, ..., και τελικά, την τιμή του παραγώγου την χρονική στιγμή 0.

Τη χρονική στιγμή n, η τιμή ενός Ασιατικού δικαιώματος Ευρωπαικού τύπου είναι ίση με :

$$V_n = \begin{cases} \max\left(A_n - \mathrm{X}, 0\right), agor\acute{\alpha}V \\ \max\left(\mathrm{X} - \mathrm{A}_n, 0\right), p\acute{\omega}lhshV \end{cases}$$

και τη χρονική στιγμή *n*, η τιμή ενός Ασιατικού δικαιώματος Αμερικανικού τύπου είναι ίση με :

$$V_n = \begin{cases} \max\left(A_t - X,0\right), agor\acute{a}V \\ \max\left(X - A_t ,0\right), p\acute{\omega}lhshV \end{cases}$$

όπου τ : η χρονική στιγμή εξάσκησης του δικαιώματος

Για την τιμολόγηση του παραγώγου τις χρονικές στιγμές *n*-1, *n*-2, ..., 0, χρησιμοποιούνται οι παρακάτω τύποι:

$V(i, S_{i,j}, X) = e^{-r\Delta t} \cdot [P_u \cdot V(i+1, S_{i+1,j}, X+S_{i+1,j}) + P_m \cdot V(i+1, S_{i+1,j+1}, X+S_{i+1,j+1}) +$

$+ P_d \cdot V(i+1, S_{i+1,j+2}, X+S_{i+1,j+2})]$, για δικαίωμα Ευρωπαικού τύπου

ή

$V(i, S_{i,j}, X) = max(e^{-r\Delta t} \cdot [P_u \cdot V(i+1, S_{i+1,j}, X+S_{i+1,j})+P_m \cdot V(i+1, S_{i+1,j+1}, X+S_{i+1,j+1})+$

$+P_d \cdot V(i+1, S_{i+1,j+2}, X+S_{i+1,j+2})], E)$, για δικαίωμα Αμερικανικού τύπου

E: η τιμή του παραγώγου , όταν εξασκηθεί το δικαίωμα τη χρονική στιγμή *i*, δηλαδή :

$$E = \begin{cases} \max\left(A_i - X,0\right), agor\acute{a}V \\ \max\left(X - A_i ,0\right), p\acute{\omega}lhshV \end{cases}$$

§ 5.8 Κατασκευή του νέου τριωνυμικού γραφήματος με ακέραιες τιμές

Έστω ότι οι τιμές του υποκείμενου τίτλου και η τιμή εξάσκησης X πολλαπλασιάζονται με μια σταθερά *K*, πριν να αρχίσει η τιμολόγηση του παραγώγου. Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, στο τέλος της τιμολόγησης, η αξία του παραγώγου που θα προκύψει, θα πρέπει να διαιρεθεί με τη σταθερά *K*.

Ισχύει:

$$\frac{1}{K} \cdot E\left(\max\left(K \cdot A - K \cdot X,0\right)\right) = \frac{1}{K} \cdot K \cdot E\left(\max\left(A - X,0\right)\right) = E\left(\max\left(A - X,0\right)\right)$$

Αρχικά, πολλαπλασιάζεται η αρχική τιμή του υποκείμενου τίτλου, S_0, και η τιμή εξάσκησης, X, με μια σταθερά *K*, όπου

$$K = \left(0{,}25 S_0 s\right)^{-1} \cdot \sqrt{\frac{n}{T}} \cdot \exp\left[\left(0{,}5 s^2 - r\right) \cdot T + 2s \cdot \sqrt{T \cdot n}\right]$$

Η τιμή του τίτλου τη χρονική στιγμή 0, είναι : $S_0' = K \cdot S_0$.

Επίσης, ορίζεται η ποσότητα

$$c_{i,j} = (r - 0{,}5\sigma^2)i\Delta t + 2(i-j)\sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \, .$$

Σκοπός είναι να προκύψουν θετικές ακέραιες τιμές $S_{i,j}$, $0 < i \leq n$, $0 \leq j \leq 2i$, των οποίων οι ποσότητες $\ln\left(\frac{S_{i,j}}{KS_0}\right)$να ανήκουν στο διάστημα ($c_{i,j} - 0{,}25\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}$, $c_{i,j} + 0{,}25\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}$)

Οι ακέραιες τιμές $S_{i,j}$ που θα προκύψουν μπορεί να είναι περισσότερες από μία. Σε αυτή την περίπτωση, για τις τιμές που αντιστοιχούν στους ακραίους κόμβους του γραφήματος ,δηλαδή τους κόμβους $N(i, 0)$ και $N(i, 2i)$,καθώς επίσης και στους κόμβους $N(i, j)$ με $i > j$ επιλέγουμε την μικρότερη ακέραια τιμή που προέκυψε. Για τις τιμές των υπόλοιπων κόμβων, επιλέγουμε την μεγαλύτερη ακέραια τιμή που προέκυψε.

Η μόνη τιμή του υποκείμενου τίτλου που μπορεί να μην είναι ακέραια, στο νέο γράφημα, είναι η τιμή S_0' .

Έστω ότι τη χρονική στιγμή i, η τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι $S_{i,j}$. Την επόμενη χρονική στιγμή i+1, η τιμή του τίτλου είτε θα αυξηθεί και θα είναι ίση με $S_{i+1,\, j}$, με πιθανότητα P_u, είτε θα παραμείνει ίδια, και ίση με $S_{i+1,j+1}$, με πιθανότητα P_m, είτε θα μειωθεί και θα είναι ίση με $S_{i+1,j+2}$, με πιθανότητα P_d.

Ορίζουμε τις ποσότητες :

$$\alpha = \ln\left(\frac{S_{i+1,j}}{S_{i,j}}\right) - m$$

$$\beta = \ln\left(\frac{S_{i+1,j+1}}{S_{i,j}}\right) - m$$

$$\gamma = \ln\left(\frac{S_{i+1,j+2}}{S_{i,j}}\right) - m \qquad \text{, όπου } \mu = (r - 0{,}5\sigma^2) \cdot \Delta t$$

Οι πιθανότητες P_u , P_m και P_d πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$P_u \cdot \alpha + P_m \cdot \beta + P_d \cdot \gamma = 0$$

$$P_u \cdot \alpha^2 + P_m \cdot \beta^2 + P_d \cdot \gamma^2 = \mathrm{Var}$$

$$P_u + P_m + P_d = 1 \qquad \text{, όπου } Var = \sigma^2 \cdot \Delta t$$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας ακέραιος $S_{i,j}$ του οποίου η ποσότητα $\ln\left(\frac{S_{i,j}}{KS_0}\right)$ να ανήκει στο διάστημα ($c_{i,j} - 0{,}25\sigma \cdot\sqrt{\Delta t}$, $c_{i,j} + 0{,}25\sigma \cdot\sqrt{\Delta t}$).

<u>Απόδειξη</u>:

$$\ln\left(\frac{S_{i,j}}{KS_0}\right) \in \left(c_{i,j} - 0{,}25s\sqrt{\Delta t}, c_{i,j} + 0{,}25s\sqrt{\Delta t}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_{i,j} - 0{,}25s\sqrt{\Delta t} < \ln\left(\frac{S_{i,j}}{KS_0}\right) < c_{i,j} + 0{,}25s\sqrt{\Delta t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exp\left(c_{i,j} - 0{,}25s\sqrt{\Delta t}\right) < \frac{S_{i,j}}{K\cdot S_0} < \exp\left(c_{i,j} + 0{,}25s\sqrt{\Delta t}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K\cdot S_0 \cdot \exp\left(c_{i,j} - 0{,}25s\sqrt{\Delta t}\right) < S_{i,j} < K\cdot S_0 \cdot \exp\left(c_{i,j} + 0{,}25s\sqrt{\Delta t}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K\cdot S_0 \cdot [\exp\left(c_{i,j} + 0{,}25s\sqrt{\Delta t}\right) - \exp\left(c_{i,j} - 0{,}25s\sqrt{\Delta t}\right)] > 1 \quad \Leftrightarrow$$

(και όχι >0, διότι $S_{i,j}$: θετικός ακέραιος) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow K > S_0^{-1} \cdot \left[\exp\left(c_{i,j} + 0{,}25s\sqrt{\Delta t}\right) - \exp\left(c_{i,j} - 0{,}25s\sqrt{\Delta t}\right)\right]$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας ασχολούμαστε με την τιμή του τίτλου $S_{n,2n}$, για την οποία η ποσότητα $c_{n,2n}$ ελαχιστοποιείται διότι εμφανίζεται αρνητικός όρος.

$$S_0^{-1} \cdot \left[\exp\left(c_{i,j} + 0{,}25s\sqrt{\Delta t}\right) - \exp\left(c_{i,j} - 0{,}25s\sqrt{\Delta t}\right)\right] =$$

$$= S_0^{-1} \cdot \left[\exp\left(c_{n,2n} + 0{,}25s\sqrt{\Delta t}\right) - \exp\left(c_{n,2n} - 0{,}25s\sqrt{\Delta t}\right)\right] =$$

$$= S_0^{-1} \cdot \left(e^{c_{n,2n}}\right)^{-1} \cdot \left(e^{0{,}25s\sqrt{\Delta t}} - e^{-0{,}25s\sqrt{\Delta t}}\right)^{-1} =$$

$$S_0^{-1} \cdot \left(e^{\left(-r+0{,}5s^2\right)n\frac{T}{n} + 2ns\sqrt{\Delta t}}\right) \cdot \left(e^{0{,}25s\sqrt{\Delta t}} - e^{-0{,}25s\sqrt{\Delta t}}\right)^{-1} =$$

$$= S_0^{-1} \cdot e^{\left(-r+0{,}5s^2\right)\mathrm{T} + 2s\sqrt{\mathrm{T}n}} \cdot \left(e^{0{,}25s\sqrt{\Delta t}} - e^{-0{,}25s\sqrt{\Delta t}}\right)^{-1}$$

Ισχύει: $e^x - e^{-x} > x$, επομένως:

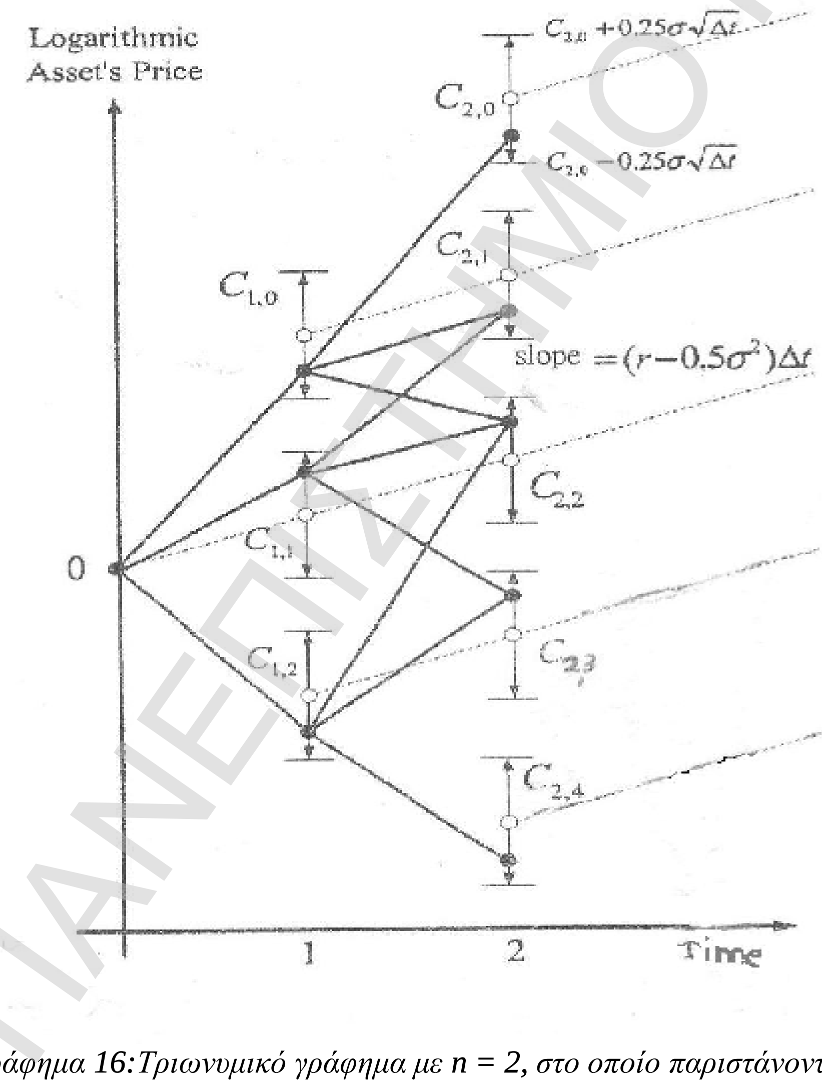
$$S_0^{-1} \cdot e^{\left(-r+0{,}5s^2\right)\mathrm{T} + 2s\sqrt{\mathrm{T}n}} \cdot \left(e^{0{,}25s\sqrt{\Delta t}} - e^{-0{,}25s\sqrt{\Delta t}}\right)^{-1} < \frac{S_0^{-1} \cdot e^{\left(0{,}5s^2 - r\right)T + 2s\sqrt{\mathrm{T}n}}}{0{,}25s\sqrt{\Delta t}} <$$

$$<\left(S_0\cdot 0,25\cdot s\right)^{-1}\cdot\sqrt{\frac{n}{T}}\cdot e^{\left(0,5s^{2}-r\right)T+2s\sqrt{Tn}} \quad = \quad e^{O\left(\sqrt{n}\right)}$$

Αλλά, $K\in e^{O\left(\sqrt{n}\right)}$

Επομένως, ισχύει: $K > S_0^{-1}\cdot\left[\exp\left(c_{i,j}+0,25s\sqrt{\Delta t}\right)-\exp\left(c_{i,j}-0,25s\sqrt{\Delta t}\right)\right]$

Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση, υπάρχει θετικός ακέραιος $S_{i,j}$,για τον οποίο η ποσότητα $\ln\left(\frac{S_{i,j}}{KS_0}\right)$ανήκει στο διάστημα : $\left(c_{i,j}-0,25s\sqrt{\Delta t},c_{i,j}+0,25s\sqrt{\Delta t}\right)$.



Γράφημα 16:Τριωνυμικό γράφημα με n = 2, στο οποίο παριστάνονται οι ποσότητες $\ln\left(\frac{S_{i,j}}{KS_0}\right)$

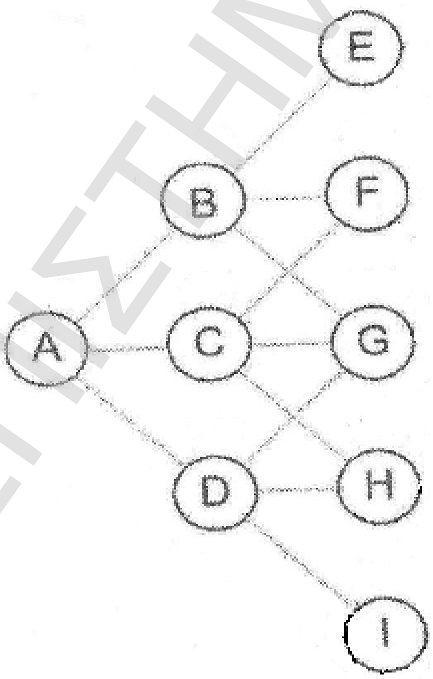
§ 5.9 Ψευδοκώδικας – Εφαρμογή

```
K : = (0,25*So*σ)^-1*Sqrt[n/T]*Exp[(0,5*σ^2 – r)*T + 2*σ*Sqrt[T*n]];
for  i : = 1  to  n   do
     for  j : = 0   to   2*i   do
c(i,j) : = (r – 0,5*σ^2)*i*Δt+2*(i – j)*σ*Sqrt[Δt];
S(i,j) : = Floor[K*So*Exp[c(i,j) ± 0,25*σ*Sqrt[Δt]]];
If [j<i or j = =2*i, s(i,j) =Min[S(i,j)] , Max[S(i,j)]];
       end
end
```

Εφαρμογή

Θα τιμολογήσουμε ένα Ασιατικό παράγωγο Ευρωπαικού τύπου με τα εξής χαρακτηριστικά : $S_0 = 5$, X = 5, $r = 0{,}1$, $\sigma = 0{,}2$ και $T = 0{,}5$.

Θεωρούμε το παρακάτω τριωνυμικό γράφημα με $n = 2$



Γράφημα 17 : Τριωνυμικό γράφημα με n = 2

Η σταθερά *K* είναι ίση με: $K = \left(0,25\cdot S_0\cdot s\right)^{-1}\cdot\sqrt{\frac{n}{T}}\cdot\exp\left[\left(0,5s^{2}-r\right)\cdot T+2s\cdot\sqrt{\mathrm{T}\cdot n}\right]=$

=11,46

Αρχικά πολλαπλασιάζουμε την αρχική τιμή του υποκείμενου τίτλου S_0 και την τιμή εξάσκησης X, με την σταθερά *K*.

$S_0' \to S_0\cdot K = 57,33$

$X' \to X\cdot K = 57,33$

Πρέπει να βρούμε ακέραιες τιμές $S_{i,j}$, τέτοιες ώστε οι ποσότητες $\ln\left(\frac{S_{i,j}}{KS_0}\right)$ να ανήκουν στο διάστημα : $\left(c_{i,j}-0,25s\sqrt{\Delta t},c_{i,j}+0,25s\sqrt{\Delta t}\right)$

$S_{1,0}$: $c_{1,0} = 0,02 + 0,2 = 0,22$

Πρέπει : $\ln\left(\frac{S_{1,0}}{57,33}\right)\in\left(0.22-0.025,0.22+0.025\right)\Leftrightarrow\ln\left(\frac{S_{1,0}}{57,33}\right)\in\left(0.195,0.245\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{1,0} = 70, 71, 72, 73$

Από τις ακέραιες τιμές που προέκυψαν, επιλέγουμε την μικρότερη.
Επομένως, $S_{1,0} = 70$

$S_{1,1}$: $c_{1,1} = 0,02 + 0 = 0,02$

Πρέπει : $\ln\left(\frac{S_{1,1}}{57,33}\right)\in\left(0.02-0.025,0.02+0.025\right)\Leftrightarrow\ln\left(\frac{S_{1,1}}{57,33}\right)\in\left(-0.005,0.045\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{1,1} = 58, 59$

Από τις ακέραιες τιμές που προέκυψαν, επιλέγουμε την μεγαλύτερη .
Επομένως, $S_{1,1} = 59$

$S_{1,2}$: $c_{1,2} = 0,02 - 0,2 = -0,18$

Πρέπει : $\ln\left(\frac{S_{1,2}}{57,33}\right)\in\left(-0.18-0.025,-0.18+0.025\right)\Leftrightarrow\ln\left(\frac{S_{1,2}}{57,33}\right)\in\left(-0.205,-0.155\right)$

$\Leftrightarrow S_{1,2} = 47, 48, 49$

Από τις ακέραιες τιμές που προέκυψαν, επιλέγουμε την μικρότερη.
Επομένως, $S_{1,2} = 47$

$S_{2,0}$: $c_{2,0} = 0{,}02 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 2 = 0{,}04 + 0{,}4 = 0{,}44$

Πρέπει : $\ln\left(\dfrac{S_{2,0}}{57{,}33}\right) \in (0.44 - 0.025, 0.44 + 0.025) \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{S_{2,0}}{57{,}33}\right) \in (0.415, 0.465) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $S_{2,0}$ = 87, 88, 89, 90, 91

Από τις ακέραιες τιμές που προέκυψαν, επιλέγουμε την μικρότερη.

Επομένως, $S_{2,0} = 87$

$S_{2,1}$: $c_{2,1} = 0{,}02 \cdot 2 + 0{,}2 = 0{,}24$

Πρέπει : $\ln\left(\dfrac{S_{2,1}}{57{,}33}\right) \in (0.24 - 0.025, 0.24 + 0.025) \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{S_{2,1}}{57{,}33}\right) \in (0.215, 0.265) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $S_{2,1}$ = 72, 73, 74

Από τις ακέραιες τιμές που προέκυψαν, επιλέγουμε την μικρότερη.

Επομένως, $S_{2,1} = 72$

$S_{2,2}$: $c_{2,2} = 0{,}02 \cdot 2 + 0 = 0{,}04$

Πρέπει : $\ln\left(\dfrac{S_{2,2}}{57{,}33}\right) \in (0.04 - 0.025, 0.04 + 0.025) \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{S_{2,2}}{57{,}33}\right) \in (0.015, 0.065) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $S_{2,2}$ = 59, 60, 61

Από τις ακέραιες τιμές που προέκυψαν, επιλέγουμε την μεγαλύτερη.

Επομένως, $S_{2,2} = 61$

$S_{2,3}$: $c_{2,3} = 0{,}02 \cdot 2 - 0{,}2 = - 0{,}16$

Πρέπει : $\ln\left(\dfrac{S_{2,3}}{57{,}33}\right) \in (-0.16 - 0.025, -0.16 + 0.025) \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{S_{2,3}}{57{,}33}\right) \in (-0.185, -0.135)$

$\Leftrightarrow$ $S_{2,3}$ = 48, 49, 50

Από τις ακέραιες τιμές που προέκυψαν, επιλέγουμε την μεγαλύτερη.

Επομένως, $S_{2,3} = 50$

$S_{2,4}$: $c_{2,4} = 0{,}02 \cdot 2 - 0{,}2 \cdot 2 = 0{,}04 - 0{,}4 = -0{,}36$

Πρέπει : $\ln\left(\frac{S_{2,4}}{57{,}33}\right) \in (-0.36 - 0.025, -0.36 + 0.025)$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{S_{2,4}}{57{,}33}\right) \in (-0.385, -0.335) \Leftrightarrow$ $S_{2,4} = 40,\ 41$

Από τις ακέραιες τιμές που προέκυψαν, επιλέγουμε την μικρότερη.

Επομένως, $S_{2,4} = 40$

Θα υπολογίσουμε τις ποσότητες α, β, γ , για τους κόμβους A, B, C και D , από τις σχέσεις :

$$\alpha = \ln\left(\frac{S_{i+1,j}}{S_{i,j}}\right) - m \quad , \quad \beta = \ln\left(\frac{S_{i+1,j+1}}{S_{i,j}}\right) - m \quad , \quad \gamma = \ln\left(\frac{S_{i+1,j+2}}{S_{i,j}}\right) - m$$

όπου $\mu = (r - 0{,}5\sigma^2) \cdot \Delta t = 0{,}02$

Στη συνέχεια, θα λύσουμε το σύστημα :

$P_u \cdot \alpha + P_m \cdot \beta + P_d \cdot \gamma = 0$

$P_u \cdot \alpha^2 + P_m \cdot \beta^2 + P_d \cdot \gamma^2 = Var$, όπου $Var = \sigma^2 \cdot \Delta t = 0{,}01$

$P_u + P_m + P_d = 1$

και θα βρούμε τις πιθανότητες P_u, P_m, P_d, για τους κόμβους A, B, C και D

Τα αποτελέσματα των υπολογισμών είναι συγκεντρωμένα στον παρακάτω πίνακα :

	A	B	C	D
α	0,1796	0,1974	0,1791	0,2407
β	0,0087	0,008	0,0133	0,04187
γ	-0,2186	-0,1576	-0,1855	-0,1813
Pu	0,1189	0,13	0,125	0,028
Pm	0,7536	0,673	0,705	0,758
Pd	0,1275	0,197	0,17	0,214

Η αξία του παραγώγου στους κόμβους E, F, G, H και I, υπολογίζεται από την σχέση:

$$V_n = max(A_n - X, 0)$$

Η αξία του παραγώγου στους κόμβους B, C, D και A υπολογίζεται από την σχέση:

$$V(i, S_{i,j}, X) = e^{-r\Delta t} \cdot [P_u \cdot V(i+1, S_{i+1,j}, X+S_{i+1,j}) + P_m \cdot V(i+1, S_{i+1,j+1}, X+S_{i+1,j+1}) + $$
$$+ P_d \cdot V(i+1, S_{i+1,j+2}, X+S_{i+1,j+2})]$$

Τα αποτελέσματα των υπολογισμών είναι συγκεντρωμένα στον παρακάτω πίνακα :

	E	F	G	H	I
V	14,113	9,113	5,4466	0	0
		5,4466	1,78	0	
			0		
		B	C	D	
V		8,8175	1,8879	0	
			A		
			2,41:11,46		
V_0			0,21		

§ 5.10 Χρόνος τιμολόγησης

Ο χρόνος τιμολόγησης ενός παραγώγου, μέσω ενός ακριβούς αλγορίθμου σε γράφημα, είναι ανάλογος του συνολικού αριθμού των αθροισμάτων των τιμών του υποκείμενου τίτλου $\Sigma S_{i,j}$ που υπάρχουν σε αυτό το γράφημα. Επομένως, αν ο συνολικός αριθμός των αθροισμάτων φραχτεί από μία συνάρτηση που να είναι υποεκθετική (subexponential)του *n*, δηλαδή του συνολικού αριθμού των χρονικών στιγμών που έχει χωριστεί το χρονικό διάστημα ισχύος του παραγώγου, τότε και ο χρόνος τιμολόγησης θα είναι υποεκθετικός (subexponential) του *n*.

Η μέγιστη τιμή του τίτλου στο γράφημα, τη χρονική στιγμή *n*, είναι η $S_{n,0}$, για την οποία τιμή ισχύει:

$$S_{n,0} \in \text{Ά}^{+} \quad \text{και} \quad \ln\left(\frac{S_{n,0}}{KS_0}\right) \in \left(c_{n,0} - 0,25s\sqrt{\Delta t}, c_{n,0} + 0,25s\sqrt{\Delta t}\right)$$

όπου

$$c_{n,0} = (r - 0,5\sigma^2)n\Delta t + 2(n-0)\sigma\sqrt{\Delta t}$$

Άρα,

$$\left|\ln\left(\frac{S_{n,0}}{KS_0}\right)\right| < c_{n,0} + 0,25s\sqrt{\Delta t} \Leftrightarrow \left|\frac{S_{n,0}}{K \cdot S_0}\right| < \exp\left(c_{n,0} + 0,25s\sqrt{\Delta t}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left|S_{n,0}\right| < K \cdot S_0 \cdot \exp\left(c_{n,0} + 0,25s\sqrt{\Delta t}\right)$$

Η τιμή $S_{n,0}$ φράσσεται άνω, από συνάρτηση subexponential του n, αφού οι ποσότητες $exp\left(c_{n,0} + 0,25s\sqrt{\Delta t}\right)$ και $K \in e^{O(\sqrt{n})}$. Επομένως, όλες οι τιμές $S_{i,j}$ του γραφήματος, θα φράσσονται άνω, από συνάρτηση subexponential του n.

Το μέγιστο άθροισμα τιμών του υποκείμενου τίτλου στο γράφημα, μέχρι τη χρονική στιγμή n, είναι ίσο με $\sum_{i=0}^{n} S_{i,0}$ και ισχύει:

$$\sum_{i=0}^{n} S_{i,0} \leq (n+1) \cdot S_{n,0}$$

Θέτουμε : $F = (n+1) \cdot S_{n,0}$. Η F είναι μία συνάρτηση subexponential του n, αφού το $S_{n,0}$ και άρα, όλα τα $S_{i,j}$, φράσσονται άνω, από subexponential συνάρτηση του n.

Όλες οι τιμές του υποκείμενου τίτλου που αναγράφονται στους κόμβους του γραφήματος είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Η μόνη τιμή που μπορεί να μην είναι ακέραια, είναι η αρχική τιμή KS_0.

Έστω

$$KS_0 = S' + \alpha$$

όπου S': φυσικός αριθμός και $0 \leq \alpha < 1$.

Όλα τα αθροίσματα τιμών του τίτλου, θα παίρνουν τιμές X, οι οποίες τιμές θα ανήκουν στο σύνολο:

$$\{X : X \leq F,\ X = I + \alpha,\ I: \text{φυσικός}\}$$

Τα στοιχεία του παραπάνω συνόλου είναι το πολύ $\lceil F \rceil$. Επομένως, και το μέγιστο πλήθος των αθροισμάτων σε κάθε κόμβο, φράσσεται από την ποσότητα $\lceil F \rceil$.

Στο *n*- step trinomial lattice, υπάρχουν συνολικά $(n+1)^2$ κόμβοι, και αυτό γιατί ισχύει:

$$\sum_{i=0}^{n} 2i+1 = (n+1) + 2\sum_{i=0}^{n} i = (n+1) + 2 \cdot \frac{n}{2} \cdot (n+1) = (n+1)^2$$

Επομένως, ο συνολικός αριθμός των αθροισμάτων φράσσεται άνω, από τη συνάρτηση $(n+1)^2 \cdot \lceil F \rceil$, η οποία είναι subexponential του *n*, αφού $\lceil F \rceil$ είναι subexponential συνάρτηση του *n*.

Έτσι, λοιπόν καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο χρόνος τιμολόγησης του παραγώγου είναι subexponential του *n*.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Τα παράγωγα προιόντα είναι διμερείς συμβάσεις, με τις οποίες ο κάτοχός τους έχει το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να τα χρησιμοποιήσει, εφόσον αυτή του η ενέργεια τον συμφέρει οικονομικά.

Τα παράγωγα διακρίνονται, εκτός των άλλων, σε δύο κατηγορίες: στα απλά και στα path-dependent. Ένα path-dependent option είναι το Ασιατικό δικαίωμα. Αυτό το δικαίωμα έχει το εξής χαρακτηριστικό : η τιμή του εξαρτάται από τον μέσο των τιμών που έχει πάρει ο υποκείμενος τίτλος, κατά τη διάρκεια ισχύος του δικαιώματος. Έτσι, λοιπόν, η τιμολόγηση των Ασιατικών δικαιωμάτων αποτελεί μία αρκετά χρονοβόρα διαδικασία, αφού θα πρέπει να είναι γνωστές όλες οι πιθανές τιμές και άρα όλοι οι πιθανοί μέσοι τιμών που έχει πάρει ο υποκείμενος τίτλος.

Σε αυτή την εργασία, παρουσιάσαμε αλγορίθμους που έχουν προταθεί στη διεθνή βιβλιογραφία, με τους οποίους μειώνεται ο χρόνος τιμολόγησης των Ασιατικών δικαιωμάτων. Οι αλγόριθμοι με τους οποίους ασχοληθήκαμε είναι των Hull-White, των Chalasani-Jha-Varikooty και των Dai-Lyuu. Αυτοί είναι αλγόριθμοι που στηρίζονται σε διαφορετικές βάσεις, αλλά έχουν ακριβώς τον ίδιο σκοπό. Την, όσο το δυνατόν, ταχύτερη και ακριβή τιμολόγηση των Ασιατικών παραγώγων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ABATE, J. , AND W. WHITT. (1995) : "Numerical Inversion of Laplace Transforms of Probability Distributions." ORSA Journal of Computing , Vol. 7, pp. 36-43.

.

AINGWORTH, D. , R. MOTWANI AND J.D.OLDHAM. (2000) : " Accurate Approximations for Asian Options." In Proc.11th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, pp. 891-900.

AKCOGLU, K. , M.Y. KAO AND S.V.RAGHAVAN. (2001) : " Fast Pricing of European Asian Options with Provable Accuracy: Single-Stock and Basket Options." In Lecture Notes in Computer Science, 2161. Berlin : Springer-Verlag, 2001, pp. 404-415.

BARRAQUAND J. AND T. PUDET. (1996) : " Pricing of American Path-Dependent Contingent Claims." Mathematcal Finance, Vol. 6 , pp. 17-51.

BLACK F. AND M.S.SCHOLES. (1973) : "The Pricing of Options and Corporate Liabilities." Journal of Political Economy, Vol. 81, No. 3, pp 637-659.

BOYLE P.P. , M. BROADIE AND P. GLASSERMAN. (1997) : " Monte Carlo Methods for Security Pricing." Journal of Economic Dynamics & Control, Vol. 21, pp. 1267-1321.

BROADIE M. AND P. GLASSERMAN. (1996) : " Estimating Security Price Derivatives Using Simulation." Management Science, Vol. 42, pp. 269-285.

BROADIE M. , P. GLASSERMAN AND S. KOU. (1999) : " Connecting Discrete and Continuous Path-Dependent Options." Finance and Stochastics, Vol.3, pp. 55-82.

CHALASANI P. , S. JHA AND I. SAIAS (1994) : Approximate Option Pricing. In. Proc. IEEE Symp. Foundations of Computer Science, 1994.

CHALASANI P. , S. JHA AND A.VARIKOOTY. (1999) : "A Refined Binomial Lattice for Pricing American Asian Options." Review of Derivatives Research, Vol. 3, pp. 85-105.

CHALASANI P. , S. JHA AND A.VARIKOOTY. (1998) : "Accurate Approximations for European Asian Options." Technical Report CMU-CS-97-140, Carnegie Mellon University,1997. Submitted to J. Computational Finance.

J.COX , S.ROSS AND M.RUBINSTEIN. (1979) : "Option Pricing: a Simplified Approach." Journal of Financial Economics, Vol. 7, No. 3, pp. 229-263.

DAI T.S. AND Y.D. LYUU. (2002) : " Efficient, Exact Algorithms for Asian options with Multiresolution Lattices." Review of Derivatives Researches, Vol. 5, No. 2, pp. 181-203.

DAI T.S. AND Y.D. LYUU. (2004) : "An Exact Subexponential-Time Lattice Algorithm for Asian Options." In Proc.ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, New Orleans, LA, January 11-13, 2004, pp. 703-710.

DAI T.S. , G.S. HUANG AND Y.D. LYUU. (2004) : "An Efficient Convergent Lattice Algorithm for European Asian Options." Review of Derivatives Researches.

DAI T.S. (2004) : " Pricing Asian Options on Lattices."

FORSYTH P. , K.R. VETZAL AND R. ZVAN.(2002) : "Convergence of Numerical Methods for Valuing Path-Dependent Options Using Interpolation." Review of Derivatives Research, Vol. 5, pp. 273-314.

FU M.C. , D.B. DILIP AND T.WANG. (1998/9) : " Pricing Continuous Asian Options: a Comparison of Monte-Carlo and Laplace Transform Inversion Methods." Journal of Computational Finance, Vol. 2, No. 2, pp. 49-74.

GEMAN H. AND A. EYDELAND. (1995): " Domino Effect." Risk, Vol. 8, No.4, pp. 65-67.

GEMAN H. AND M. YOR. (1993) : " Bessel Processes, Asian Options and Perpetuities." Mathematical Finance, Vol.3, pp. 349-375.

HULL J. AND A. WHITE. (1993) : " Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options." Journal of Derivatives, Vol.1, pp. 21-31.

HULL J. (1997) : Options, Futures and Other Derivatives. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall.

KEMNA A. AND A.VORST. (1990) : " A Pricing Method for Options Based on Average Values." Journal of Banking and Finance, Vol. 14, pp. 113-129.

KLASSEN T.R. (2001) : " Simple, Fast and Flexible Pricing of Asian Options." Journal of Computational Finance, Vol.4, pp. 89-124.

LEVY E. (1992) : " Pricing European Average Rate Currency Options." Journal of International Money and Finance, Vol. 11, pp.474-491.

LONGSTAFF F.A. AND E.S. SCHWARTZ. (2001) : " Valuing American Options by Simulation: a Simple Least-Squares Approach." Review of Financial Studies, Vol. 14, No.1, pp. 113-147.

LYUU Y.D. (2002) : Financial Engineering and Computation: Principles, Mathematics and Algorithms. Cambridge, U.K. : Cambridge University Press.

MILEVSKY M.A. AND S.E. POSNER.(1998) : " Asian Options, the Sum of Lognormals, and the Reciprocal Gamma Distribution." Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 33, No. 3, pp. 409-422.

ROGERS L. AND Z. SHI. (1995) : The Value of an Asian Option. J. Appl. Prob., Vol. 32, No. 4, pp. 1077-1088.
SUNGJOO LEE. (2004) : " Pricing Path-Dependent Derivative Securities Using Monte Carlo Simulation & Intra-Market Statistical Trading Model."

TURNBULL S.M. AND L.M. WAKEMAN. (1991) : " A Quick Algorithm for Pricing European Average Options." Financial and Quantitative Analysis, Vol. 26, No. 3, pp. 377-389.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. BOUTSIKAS M.V. (2004) : Σημειώσεις μαθήματος «Μέθοδοι προσομοίωσης και Στατιστικές Υπολογιστικές Τεχνικές»

2. ΧΑΤΖΗΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΙΔΗΣ Ε. (2004) : Σημειώσεις μαθήματος « Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προιόντα »