Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

Τ Μ Η Μ Α Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ
Κ Α Ι Α Σ Φ Α Λ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Η Σ

Μ Ε Τ Α Π Τ Υ Χ Ι Α Κ Ο Π Ρ Ο Γ Ρ Α Μ Μ Α Σ Π Ο Υ Δ Ω Ν
Σ Τ Η Ν Ε Φ Α Ρ Μ Ο Σ Μ Ε Ν Η Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η

ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ

Παναγιώτης Χ. Ποιμενίδης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Μάιος 2007

Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο   Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

Τ Μ Η Μ Α Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ
Κ Α Ι Α Σ Φ Α Λ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Η Σ

Μ Ε Τ Α Π Τ Υ Χ Ι Α Κ Ο Π Ρ Ο Γ Ρ Α Μ Μ Α
Σ Π Ο Υ Δ Ω Ν
Σ Τ Η Ν Ε Φ Α Ρ Μ Ο Σ Μ Ε Ν Η Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η

ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ

Παναγιώτης Χ. Ποιμενίδης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Μάιος 2007

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. #9/19.12.05 συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Καθηγητής *Κούτρας Μάρκος*...
- Επικ. Καθηγητής *Πολίτης Κωνσταντίνος* ....
- Επικ. Καθηγητής *Μπούτσικας Μιχαήλ* (Επιβλέπων) ....

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS

STOCHASTIC ORDERS AND APPLICATIONS IN ECONOMICS

By

Panagiotis Chr. Poimenidis

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece
May 2007

Στην οικογένειά μου

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Μπούτσικα Μιχαήλ για την πολύτιμη συνεισφορά και αμέριστη συμπαράστασή του κατά τη συγγραφή της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελεί μία ***επισκόπηση*** πάνω στις κυριότερες στοχαστικές διατάξεις, όπως και μία αναφορά σε μερικές εφαρμογές αυτών στα πεδία των αναλογιστικών και χρηματοοικονομικών επιστημών. Παράλληλα, επιχειρείται μία ενδεικτική σύνδεση μεταξύ των εννοιών των στοχαστικών διατάξεων και των συνδέσμων (copulas).

Στο πρώτο κεφάλαιο η εργασία επικεντρώνεται στις ***μονομεταβλητές στοχαστικές διατάξεις***. Εδώ πραγματοποιείται μία παρουσίαση των κυριοτέρων διατάξεων, όπως είναι η *συνήθης στοχαστική διάταξη*, η *διάταξη ρυθμού κινδύνου*, η *διάταξη λόγου πιθανοφάνειας* και οι *κυρτές διατάξεις*, με την απόδοση των ορισμών τους και τη θεώρηση βασικών θεωρημάτων και πορισμάτων.

Με τον ίδιο τρόπο έχει δομηθεί και το δεύτερο κεφάλαιο το οποίο αναφέρεται σε ***πολυμεταβλητές στοχαστικές διατάξεις***. Στην αρχή του κεφαλαίου προσδιορίζονται οι έννοιες των *ανώτερων – κατώτερων ορίων Frechet* με μία ταυτόχρονη νύξη στην έννοια των *συνδέσμων* (copulas). Στη συνέχεια εξετάζονται η *συνήθης στοχαστική διάταξη* και μερικές γενικεύσεις αυτής, όπως επίσης και η *κυρτή διάταξη*, η *supermodular* διάταξη και η *directionally κυρτή διάταξη*. Επιπρόσθετα γίνεται μία αναφορά σε μερικά σχέδια εξάρτησης, όπως η *συνάφεια* (association).

Από το τρίτο κεφάλαιο εισερχόμαστε στις ***εφαρμογές*** των στοχαστικών διατάξεων με μία έμμεση εφαρμογή αυτών διαμέσου των συνδέσμων (copulas). Στο κεφάλαιο αυτό διαφαίνεται η στενή σχέση που υπάρχει μεταξύ στοχαστικών διατάξεων και των συνδέσμων με την πρακτική εφαρμογή αυτής της σχέσης στα χρηματοοικονομικά. Συγκεκριμένα, θα βρεθούν φράγματα για το μέτρο κινδύνου ***Value-at-Risk*** (VaR) για συναρτήσεις εξαρτημένων κινδύνων.

Ένα μεγάλο μέρος του τέταρτου κεφαλαίου αναλώνεται σε θεωρητικά αποτελέσματα της *διάταξης αποκοπής ζημιάς* (stop-loss διάταξη) που βρίσκουν εφαρμογή στο ***αναλογιστικό πεδίο***. Από τη διάταξη αποκοπής ζημιάς για *χαρτοφυλάκια εξαρτημένων κινδύνων* και τα όρια για τις συνολικές απαιτήσεις των εξαρτημένων κινδύνων, η εργασία επεκτείνεται σε δύο τύπους μοντέλων εξαρτημένων κινδύνων και συνεχίζει με την περίπτωση των μη διακεκριμένων ατομικών κινδύνων ενός χαρτοφυλακίου. Τελικώς, το κεφάλαιο εξετάζει την έννοια της s-κυρτότητας και την αποστροφή κινδύνου (risk aversion).

Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο διαπιστώνουμε πως διάφορες στοχαστικές διατάξεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη συνέπεια των κανόνων της μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης, όπως επίσης και σε ***ζητήματα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου***. Οι χρηματοοικονομικές εφαρμογές των στοχαστικών διατάξεων περατώνονται με την παρουσίαση ενός εύκολα υπολογίσιμου άνω ορίου για την ***τιμή ενός αριθμητικού Ασιατικού δικαιώματος***.

Abstract

This thesis constitutes a ***review*** on most important stochastic orders that can be found in contemporary literature. A major part of this work is devoted to specific illustrating ***applications*** of stochastic orders in Actuarial Science and Finance. At the same time, an attempt was made to present a connection between stochastic orders and copulas.

The First Chapter focuses on the ***univariate stochastic orders***. Basic stochastic orders, as the *usual stochastic order*, the *hazard ratio order*, the *likelihood ratio order* and the *convex orders*, are presented in some detail along with their most interesting properties.

The Second Chapter has the same structure as the first one and is concentrated on ***multivariate stochastic orders***. It reviews the *usual stochastic order*, most variations of the (multivariate) *convex order*, and the *supermodular order*. Moreover, some concepts of dependence, such as *association* of random variables, are described and connected to the theory of stochastic orders. In the same chapter, the *upper-lower Frechet bounds* and the notion of *copulas* is also presented.

The next three chapters of this thesis present specific ***applications*** of stochastic orders. Specifically, in the Third Chapter a close relation between stochastic orders and copulas is exploited in order to produce effective bounds for the measure of risk *Value-at-Risk* (VaR) for dependent risks.

An important part of the Fourth Chapter is devoted to theoretical results on stop-loss orders which are then applied to several models arising from ***actuarial context*** and concern portfolios of dependent risks. A connection between s-convexity and risk aversion is also presented.

Finally, in the Fifth Chapter, it is shown how several stochastic orders can be useful for studying the consistency of *mean-deviation rules* and *portfolio optimization* problems. An easy computable upper bound for the price of an *arithmetic Asian option* is also presented.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

1.1 Μερική διάταξη

Πριν υπεισέλθουμε στη θεωρία των στοχαστικών διατάξεων πρέπει να γίνει αναφορά στη μερική διάταξη, καθώς οι σχέσεις των διάφορων στοχαστικών διατάξεων αποτελούν ειδικές περιπτώσεις των σχέσεων μερικής διάταξης. Από τις σχέσεις συνόλων έχουμε τον ακόλουθο ορισμό της διάταξης.

Ορισμός 1 : Μία διμελής σχέση $\leq$ σε ένα αυθαίρετο σύνολο S καλείται μερική διάταξη αν πληροί τις τρεις επόμενες συνθήκες:

1) *Ανακλαστικότητα* : $x \leq x$ για κάθε $x \in S$.

2) *Μεταβατικότητα* : Αν $x \leq y$ και $y \leq z$, τότε $x \leq z$.

3) *Αντισυμμετρικότητα* : Αν $x \leq y$ και $y \leq x$, τότε $x = y$.

Για να συνδέσουμε την έννοια της στοχαστικής διάταξης με τη μερική διάταξη, θεωρούμε την περίπτωση όπου το S είναι το σύνολο (ή ένα κατάλληλο υποσύνολο) όλων των συναρτήσεων κατανομής των πραγματικών τυχαίων μεταβλητών. Κάθε μερική διάταξη εντός αυτού του συνόλου S ονομάζεται στοχαστική διάταξη.

Έστω X μία πραγματική τυχαία μεταβλητή. Τότε P_X είναι η κατανομή της και F_X είναι η συνάρτηση κατανομής, που δίνεται από τη σχέση

$$F_X(t) = P_X((-\infty, t]) = P(X \leq t) \text{ για κάθε πραγματικό } t .$$

1.2 Διατάξεις θέσης τυχαίων μεταβλητών

1.2.1 Συνήθης στοχαστική διάταξη

Ορισμός 1 : *Η τυχαία μεταβλητή X καλείται μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς τη συνήθη στοχαστική διάταξη και συμβολίζεται* $X \leq_{st} Y$, *αν*

$$F_X(t) \geq F_Y(t),$$

για κάθε πραγματικό t, ή ισοδύναμα αν

$$\overline{F}_X(t) \leq \overline{F}_Y(t),$$

για κάθε πραγματικό t, όπου $\overline{F}_X(t) = 1 - F_X(t)$, $\overline{F}_Y(t) = 1 - F_Y(t)$ *είναι οι συναρτήσεις επιβίωσης των τυχαίων μεταβλητών X, Y αντίστοιχα.*

Στα οικονομικά, η συνήθης στοχαστική διάταξη ονομάζεται και διάταξη πρώτης στοχαστικής κυριαρχίας (first stochastic dominance $\leq_{FSD}$). Η συνήθης στοχαστική διάταξη συγκρίνει τη θέση δύο τυχαίων μεταβλητών (όχι την μεταβλητότητα) και είναι μία διάταξη θέσης (όχι κλίμακας).

Η ανισοτική σχέση $F_X(t) \geq F_Y(t)$ για κάθε t, υπονοεί ότι η X λαμβάνει μικρές τιμές με υψηλότερη πιθανότητα (συχνότερα) απ' ό,τι η Y, ή ότι η X λαμβάνει μεγάλες τιμές με μικρότερη πιθανότητα (λιγότερο συχνά) απ' ό,τι η Y.

Θεώρημα 1 : *Για τυχαίες μεταβλητές X και Y με συναρτήσεις κατανομής* F_X *και* F_Y, *οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(1) $X \leq_{st} Y$

(2) *Υπάρχει ένας χώρος πιθανότητας (Ω, A, P) και τυχαίες μεταβλητές* $\widehat{X}$ *και* $\widehat{Y}$ *μέσα σε αυτόν με συναρτήσεις κατανομής* F_X *και* F_Y *έτσι ώστε*

$$\widehat{X}(\omega) \leq \widehat{Y}(\omega)$$

για όλα τα $\omega \in \Omega$.

Απόδειξη. (1)$\Rightarrow$(2) Έστω μια τυχαία μεταβλητή U που κατανέμεται ομοιόμορφα στο (0,1). Θέτουμε

$$\widehat{X} = F_X^{-1}(U) \text{ και } \widehat{Y} = F_Y^{-1}(U)$$

όπου F^{-1} είναι η γενικευμένη αντίστροφη συνάρτηση κατανομής της F με $F^{-1}(u) = \inf\{x: F(x) \geq u\}$ για $0 < u < 1$. Η σχέση $X \leq_{st} Y$ υπονοεί ότι $F_X \geq F_Y$ και $F_X^{-1} \leq F_Y^{-1}$. Επίσης, η τ.μ. $\widehat{X}$ έχει την κατανομή F_X και η $\widehat{Y}$ έχει την κατανομή F_Y. Οπότε

$$\widehat{X}(\omega) = F_X^{-1}(U(\omega)) \leq F_Y^{-1}(U(\omega)) = \widehat{Y}(\omega)$$

για όλα τα $\omega \in \Omega$.

(2)$\Rightarrow$(1) Αν $\widehat{X}(\omega) \leq \widehat{Y}(\omega)$ για όλα τα $\omega \in \Omega$ τότε

$$F_Y(x) = P(\widehat{Y} \leq x) \leq P(\widehat{X} \leq x) = F_X(x)$$

για κάθε πραγματικό x.■

Έστω ότι έχουμε δύο κατανομές F και G. Η συνήθης στοχαστική διάταξη των F, G μπορεί να εξαχθεί διαμέσου του γραφήματος Q-Q plot. Το Q-Q plot (quantile – quantile plot, όπου quantile το ποσοστιαίο σημείο) χρησιμοποιείται στη στατιστική ανάλυση δεδομένων και κατασκευάζεται αναπαριστώντας γραφικά τις $G^{-1}(p)$ (στον άξονα των x) και $F^{-1}(p)$ (στον άξονα των y) για όλα τα p με $0 < p < 1$. Επειδή οι αντίστροφες G^{-1} και F^{-1} ονομάζονται και ποσοστιαία σημεία, το γράφημα καλείται Q-Q plot. Αν οι κατανομές F και G είναι συνεχείς, το Q-Q plot ταυτίζεται με τη γραφική παράσταση της σχετικής αντίστροφης συνάρτησης κατανομής, που για τις δύο παραπάνω κατανομές συμβολίζεται $\varphi_{F,G}(t)$ και ορίζεται από τη σχέση $\varphi_{F,G}(t) = G^{-1}(F(t))$. Γενικά όμως το Q-Q plot αποτελεί μόνο ένα μέρος του γραφήματος της $\varphi_{F,G}(t)$ (όπως στις εμπειρικές κατανομές). Με τη βοήθεια του Q-Q plot διαισθητικά συμπεραίνουμε ότι $G \leq_{st} F$ αν και μόνο αν το Q-Q plot της G^{-1} και F^{-1} βρίσκεται κάτω από τη διχοτόμο της αρχής των αξόνων, ενώ αυστηρά μπορούμε να διατυπώσουμε το παρακάτω θεώρημα μέσω της σχετικής αντίστροφης συνάρτησης κατανομής.

Θεώρημα 2 : *Έστω F και G αυθαίρετες συναρτήσεις κατανομής. Τότε $G \leq_{st} F$ αν και μόνο αν $\varphi_{F,G}(x) = G^{-1}(F(x)) \leq x$ για κάθε x.*

Απόδειξη. Αν $G \leq_{st} F$ έπεται $G(x) \geq F(x)$ για κάθε x και

$$G^{-1}(F(x)) \leq G^{-1}(G(x)) \leq x$$

για κάθε x, καθώς από τον ορισμό της γενικευμένης αντίστροφης προκύπτει ότι $G^{-1}(G(x)) \leq x$. Άρα $\varphi_{F,}G(x) = G^{-1}(F(x)) \leq x$. Αντίστροφα, αν $G^{-1}(F(x)) \leq x$ για κάθε x τότε

$$G(x) \geq G(G^{-1}(F(x)) \geq F(x)$$

για κάθε x, αφού $G(G^{-1}(x)) \geq x$ για κάθε x. ■

Το προηγούμενο θεώρημα, με την επιλογή της σχετικής αντίστροφης ως $\varphi_{F,G}(x)$ = $G^{-1}(F(x))$, παραμένει αληθές στα συμπεράσματά του, τόσο για τη γραφική θέση του Q-Q plot ως προς τη διχοτόμο, όσο και για την ανισοτική σχέση $\varphi_{F,G}(x) = G^{-1}(F(x)) \leq x$, είτε πρόκειται για συνεχείς είτε για διακριτές κατανομές. Αν οι κατανομές είναι συνεχείς μπορούμε να επιλέξουμε τη σχετική αντίστροφο $\varphi_{G,F}(x) = F^{-1}(G\,(x))$ για όλα τα πραγματικά x ώστε

$$G \leq_{st} F \Leftrightarrow \varphi_{G,F}(x) = F^{-1}(G\,(x)) \geq x$$

και το γράφημα του Q-Q plot βρίσκεται πλέον πάνω από τη διχοτόμο (εδώ F^{-1} στον άξονα των x και G^{-1} στον άξονα των y). Για διακριτές όμως F και G η επιλογή $\varphi_{G,F}(x) = F^{-1}(G(x))$ παρότι διατηρεί τη γραφική θέση του Q-Q plot, δεν οδηγεί πάντα στη σχέση $F^{-1}(G(x)) \geq x$.

Ανάλογα με το Q-Q plot χρησιμοποιούμε και το P-P plot (probability-probability plot) ως έναν γραφικό έλεγχο για τη συνήθη στοχαστική διάταξη των κατανομών. Το P-P plot κατασκευάζεται από την γραφική αναπαράσταση των συναρτήσεων κατανομής $G(x)$ (άξονας των x) και $F(x)$ (άξονας των y) για όλα τα x. Όταν οι κατανομές F και G είναι συνεχείς, το γράφημα της συνάρτησης $\psi_{F,G}(t)= G(F^{-1}(t))$ για $0<t<1$ είναι το P-P plot.

Θεώρημα 3 : *Ισχύει $F \leq_{st}$ G αν και μόνο αν το P-P plot των F, G (το γράφημα της συνάρτησης $\psi_{F,G}(t)= G(F^{-1}(t))$) βρίσκεται κάτω από τη διχοτόμο της αρχής των αξόνων.*

Επίσης ισχύει το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4 : *Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(1) $X \leq_{st} Y$.

(2) *Ισχύει $Ef(X) \leq Ef(Y)$ για όλες τις αύξουσες f για τις οποίες υπάρχουν οι μέσες τιμές.*

Επιπλέον, αν για δεδομένη f, η ανισότητα $Ef\,(X) \leq Ef\,(Y)$ είναι αληθής για όλες τις X και Y με $X \leq_{st} Y$, η f πρέπει να είναι αύξουσα.

Απόδειξη. (1)$\Rightarrow$(2) Από το Θεώρημα 1 γνωρίζουμε ότι $X \leq_{st} Y$ αν και μόνο αν $F_X \leq_{st} F_Y$ που ισοδυναμεί με $X \leq_{a.s} Y$. Επίσης, η f είναι αύξουσα και άρα $f(X) \leq f(Y)$ σχεδόν βέβαια. Επομένως, $Ef(X) \leq Ef(Y)$.

(2)$\Rightarrow$(1) Ορίζουμε τη δείκτρια συνάρτηση $f_t(x)$ ως εξής

$$f_t(x) = I_{(t,\infty)}(x) = \begin{cases} 1, & x > t \\ 0, & x \leq t \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η $f_t(x)$ είναι αύξουσα, $Ef_t(X) = P(X > t)$ και από την υπόθεση προκύπτει ότι

$$1 - F_X(t) = P(X > t) = Ef_t(X) \le Ef_t(Y) = P(Y > t) = 1 - F_Y(t)$$

για κάθε t, οπότε $X \le_{st} Y$. Έστω τέλος ότι για δεδομένη f η ανισότητα $Ef(X) \le Ef(Y)$ είναι αληθής για όλες τις X και Y με $X \le_{st} Y$. Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι αύξουσα και επομένως υπάρχουν x, y: $x \le y$, $f(x) > f(y)$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι $P(X = x) = P(Y = y) = 1$. Τότε παρατηρούμε ότι η ανισότητα $Ef(X) \le Ef(Y)$ δεν ισχύει, ενώ $X \le_{st} Y$: άτοπο. Άρα η f πρέπει να είναι αύξουσα.■

Θεώρημα 5 : *Έστω X και Y τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένες μέσες τιμές.*

(1) *Αν $X \le_{st} Y$, τότε $EX \le EY$.*

(2) *Αν $X \le_{st} Y$ και $EX = EY$, τότε X και Y έχουν την ίδια κατανομή.*

Απόδειξη. (1) Σύμφωνα με το Θεώρημα 4, η ισοδυναμία $X \le_{st} Y \Leftrightarrow Ef(X) \le Ef(Y)$ ισχύει για όλες τις αύξουσες f για τις οποίες οι μέσες τιμές υπάρχουν. Θέτουμε $f(x) = x$ (ταυτοτική συνάρτηση) και έχουμε $X \le_{st} Y \Rightarrow EX \le EY$.

(2) Γνωρίζουμε ότι για μία τυχαία μεταβλητή X η μέση τιμή της δίνεται από τον τύπο

$$EX = \int_0^{\infty} [1 - F_X(t)]dt - \int_{-\infty}^{0} F_X(t)dt .$$

Επομένως, η διαφορά των μέσων τιμών των Y, X θα είναι

$$EY - EX = \int_{-\infty}^{\infty} (F_X(t) - F_Y(t))dt .$$

Το παραπάνω είναι ένα ολοκλήρωμα επί μίας μη αρνητικής (διότι $X \le_{st} Y$), δεξιά συνεχούς συνάρτησης. Αν επιπλέον, $EY = EX$ τότε το ολοκλήρωμα αυτό είναι ίσο με 0, και επομένως θα πρέπει $F_X = F_Y$. ■

Η συνήθης στοχαστική διάταξη υπονοεί και μία άλλη διάταξη, πιο απλή ως προς τη μαθηματική της ερμηνεία, η οποία συγκρίνει μέσες τιμές και συνήθως καλείται «διάταξη του μηχανικού» (engineer's order). Γράφουμε $X \le_{\mu} Y$, αν $EX \le EY$.

Η δεύτερη πρόταση του Θεωρήματος 5 μας πληροφορεί ότι διαφορετικές κατανομές, που έχουν ίσες μέσες τιμές, δεν διατάσσονται σε συνήθη στοχαστική διάταξη καθώς αν $X \le_{st} Y$ και $EX = EY$ είναι αληθείς, αναγκαστικά X και Y έχουν την ίδια κατανομή. Αυτό μας βοηθάει κατά την πραγματοποίηση ελέγχων υποθέσεων και την εξαγωγή στατιστικών συμπερασμάτων. Έστω ότι έχουμε δύο δείγματα και θέλουμε να ελέγξουμε κατά πόσο αυτά προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό ή όχι, δηλαδή αν έχουν την ίδια κατανομή ή όχι. Ορίζουμε τη μηδενική υπόθεση $H_0 : F_X = F_Y$ κάτω από την οποία τα δύο δείγματα έχουν την ίδια κατανομή και $EX = EY$. Επίσης υπό την εναλλακτική υπόθεση $H_α$: $F_X \leq_{st} F_Y$ τα δείγματα προέρχονται από διαφορετική κατανομή και $EX \leq EY$. Κάνουμε τον έλεγχο χρησιμοποιώντας ως ελεγχοσυνάρτηση τη διαφορά των δειγματικών μέσων τιμών. Αν και αυτός ο έλεγχος είναι συνεπής, η επιλογή της ελεγχοσυνάρτησης $\max\{\hat{F}_X - \hat{F}_Y, 0\}$ αποδίδει καλύτερα αποτελέσματα, αφού υπό την H_0: $F_X = F_Y$ η $F_X - F_Y = 0$ και υπό την $H_α$: $F_X \leq_{st} F_Y$ η $F_X - F_Y > 0$.

Η διάταξη των πρώτων ροπών (δηλαδή των μέσων τιμών) που υπονοείται από τη συνήθη στοχαστική διάταξη, γενικεύεται και για ροπές μεγαλύτερης τάξης. Η απόδειξη των δύο ακόλουθων αποτελεσμάτων είναι άμεση από τον ορισμό.

Θεώρημα 6 : *Αν $X \leq_{st} Y$ τότε $EX^n \leq EY^n$ όταν ο n περιττός, $n = 1,3,\ldots$ και οι μέσες τιμές υπάρχουν. Επιπλέον, αν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι μη αρνητικές, η διάταξη $EX^n \leq EY^n$ είναι αληθής για όλα τα $n = 1,2,3,4,\ldots$.*

Θεώρημα 7 : *Αν $X \leq_{st} Y$ τότε $f(X) \leq_{st} f(Y)$ για όλες τις αύξουσες συναρτήσεις f.*

Θεώρημα 8 : *Η συνήθης στοχαστική διάταξη είναι κλειστή ως προς την ασθενή σύγκλιση. Αν $F_n \leq_{st} G_n$ ισχύει για όλα τα n και οι ακολουθίες (F_n) και (G_n) συγκλίνουν ασθενώς στις συναρτήσεις κατανομής F και G, αντίστοιχα, τότε $F \leq_{st} G$.*

Απόδειξη. Επειδή $F_n \leq_{st} G_n$, τότε $F_n(t) \geq G_n(t)$ για κάθε πραγματικό t. Ξέρουμε ότι οι ακολουθίες (F_n) και (G_n) συγκλίνουν ασθενώς στις συναρτήσεις κατανομής F και G αντίστοιχα. Άρα η $F_n(t) \geq G_n(t)$ έπεται $F(t) \geq G(t)$ για κάθε τιμή t που είναι σημείο συνέχειας των F και G. Όμως, οι συναρτήσεις κατανομής είναι εξ' ορισμού δεξιά συνεχείς ακόμα και όταν το σύνολο τιμών τους είναι το πολύ αριθμήσιμο, δηλαδή τα σημεία ασυνέχειας είναι το πολύ αριθμήσιμα. Έτσι τα σημεία συνέχειας των συναρτήσεων κατανομής είναι πυκνά στο R και $F(t) \geq G(t)$ για κάθε πραγματική τιμή t .■

Θεώρημα 9 : *Η συνήθης στοχαστική διάταξη είναι κλειστή ως προς μίξεις. Αν X, Y και Θ είναι τυχαίες μεταβλητές έτσι ώστε*

$$[X \mid \Theta = \theta] \leq_{st} [Y \mid \Theta = \theta]$$

για όλα τα θ εντός του συνόλου τιμών της Θ, τότε $X \leq_{st} Y$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $E_\Theta E[f(X) \mid \Theta] = Ef(X)$ και $E_\Theta E[f(Y) \mid \Theta] = Ef(Y)$. Επίσης για κάθε αύξουσα συνάρτηση f, $Ef(X) \leq Ef(Y)$ αν και μόνο αν $X \leq_{st} Y$. ■

Θεώρημα 10 : *Έστω $X_1,\ldots,X_n$ και $Y_1,\ldots,Y_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \leq_{st} Y_i$, για $i = 1,.., n$, και ψ: $R^n \rightarrow R$ μία αύξουσα (κατά συντεταγμένες) συνάρτηση. Τότε*

$$\psi(X_1,\ldots,X_n) \leq_{st} \psi(Y_1,\ldots,Y_n) .$$

Απόδειξη. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο n. Για $n = 1$, $Ef(\psi(X_1)) \le Ef(\psi(Y_1))$ καθώς για κάθε αύξουσα συνάρτηση f, $Ef(X) \le Ef(Y)$ αν και μόνο αν $X \le_{st} Y$, και η σύνθεση των αυξουσών συναρτήσεων f και ψ είναι πάλι μία αύξουσα συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n-1$,

$$Ef\,(\psi(X_1,\ldots,X_{n-1})) \le Ef\,(\psi(Y_1,\ldots,Y_{n-1})).$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$g(x) = Ef(\psi(X_1,\ldots,X_{n-1}, x)) \quad \text{και} \quad h(x) = Ef(\psi(Y_1,\ldots,Y_{n-1}, x))$$

για κάθε πραγματική τιμή x. Καθώς οι g, h είναι αύξουσες ως συνθέσεις αυξουσών συναρτήσεων και ισχύει ότι $X_i \le_{st} Y_i$, για $i=1,..,n$, έπεται $X_n \le_{st} Y_n$ αν και μόνο αν

$$Eh(X_n) \le Eh(Y_n)$$

σύμφωνα με το Θεώρημα 4, ενώ ικανοποιείται η ανισότητα $g(x) \le h(x)$ για κάθε x λόγω επαγωγής. Οπότε $Eg(X_n) \le Eh(X_n)$, όπου

$$Eg(X_n) = Ef(\psi(X_1,\ldots,X_{n-1}, X_n)) \quad \text{και} \quad Eh(X_n) = Ef(\psi(Y_1,\ldots,Y_{n-1},X_n))$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, $Eg(X_n) \le Eh(X_n) \le Eh(Y_n)$, από την οποία ακολουθεί

$$Ef\,(\psi(X_1,\ldots,X_{n-1}, X_n)) \le Ef\,(\psi(Y_1,\ldots,Y_{n-1},Y_n))$$

για f αύξουσα, δηλαδή $\psi(X_1,\ldots,X_{n-1}, X_n) \le_{st} \psi(Y_1,\ldots,Y_{n-1},Y_n)$. ■

Θεώρημα 11 : *Η συνήθης στοχαστική διάταξη διατηρείται υπό τη συνέλιξη (convolution), δηλαδή υπό την πρόσθεση ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών. Αν $X_1,\ldots,X_n$ και $Y_1,\ldots,Y_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \le_{st} Y_i$, για $i=1,..,n$, τότε*

$$X_1 + \ldots + X_n \le_{st} Y_1 + \ldots + Y_n\,.$$

Θεώρημα 12 : *Έστω $X_1,\ldots,X_n$ και $Y_1,\ldots,Y_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \le_{st} Y_i$, για $i = 1, \ldots, n$, και έστω $X_{(1:n)} \le \ldots \le X_{(n:n)}$ και $Y_{(1:n)} \le \ldots \le Y_{(n:n)}$ οι διατεταγμένες τυχαίες μεταβλητές (order statistics) που αντιστοιχούν στις $X_1,\ldots,X_n$* και *$Y_1,\ldots,Y_n$ αντίστοιχα. Τότε $X_{(i:n)} \le_{st} Y_{(i:n)}$* για $i = 1,..,n$.

1.2.2 Διατάξεις ρυθμού κινδύνου και αντίστροφου ρυθμού κινδύνου

Ορισμός 1: *Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς τη διάταξη ρυθμού κινδύνου (hazard rate order) και γράφουμε $X \le_{hr} Y$, αν η συνάρτηση*

$$\frac{\overline{F}_Y(t)}{\overline{F}_X(t)}$$

είναι αύξουσα για κάθε t, όπου $\overline{F}_X, \overline{F}_Y$ *είναι οι συναρτήσεις επιβίωσης των τυχαίων μεταβλητών X και Y αντίστοιχα.*

Η διάταξη ρυθμού κινδύνου είναι πιο ισχυρή από τη συνήθη στοχαστική διάταξη. Ας υποθέσουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X και Y αναπαριστούν τους τυχαίους χρόνους ζωής δύο διαφορετικών τύπων του ίδιου αντικειμένου και υπάρχει ένας αγοραστής που πρέπει να επιλέξει μεταξύ των δύο τύπων. Αν οι X και Y διατάσσονται ως προς τη συνήθη στοχαστική διάταξη και η Y υπερέχει στοχαστικά της X, ο αγοραστής θα αγοράσει τον τύπο του αντικειμένου με χρόνο ζωής Y υπό την προϋπόθεση ότι βρισκόμαστε στο χρόνο 0. Αν, όμως, τα αντικείμενα είναι μεταχειρισμένα, η υπεροχή ενός εκ των δύο ως προς τη συνήθη στοχαστική διάταξη δεν αρκεί πάντοτε για να αποφασίσει ο αγοραστής ποιο θα αγοράσει. Έστω X_t και Y_t οι υπολοιπόμενοι χρόνοι ζωής δύο τύπων του αντικειμένου ηλικίας t και

$$P(X_t > s) = P(X > s + t \mid X > t), \quad P(Y_t > s) = P(Y > s + t \mid Y > t),$$

οι συναρτήσεις επιβίωσης των X_t και Y_t. Στην προκειμένη περίπτωση η διάταξη των χρόνων ζωής $X_t \leq_{st} Y_t$ δεν είναι πάντα αληθής, καθώς πλέον απαιτούμε την

$$[X \mid X > t] \leq_{st} [Y \mid Y > t]$$

για όλα τα t. Από τον ορισμό της συνήθους στοχαστικής διάταξης η $[X \mid X > t] \leq_{st} [Y \mid Y > t]$ προϋποθέτει την

$$P(X > s + t \mid X > t) \leq P(Y > s + t \mid Y > t)$$

μέσω των συναρτήσεων επιβίωσης για κάθε $s \geq 0$ και t. Αλλά η προηγούμενη σχέση ισοδυναμεί με την

$$\frac{\overline{F}_X(s+t)}{\overline{F}_X(t)} \leq \frac{\overline{F}_Y(s+t)}{\overline{F}_Y(t)} \quad \text{ή} \quad \frac{\overline{F}_Y(t)}{\overline{F}_X(t)} \leq \frac{\overline{F}_Y(s+t)}{\overline{F}_X(s+t)}$$

για κάθε $s \geq 0$ και t. Επομένως, η συνήθης στοχαστική διάταξη για να παραμένει αληθής για όλα τα t και $s \geq 0$, θα πρέπει να ισχύει η τελευταία σχέση για κάθε $s \geq 0$ και t, η οποία συνεπάγεται τη διάταξη ρυθμού κινδύνου. Παρατηρούμε ότι η διάταξη ρυθμού κινδύνου έπεται τη συνήθη στοχαστική διάταξη.

Ο ρυθμός κινδύνου (ή ρυθμός αποτυχίας) $r_X(t)$ είναι ο απειροστός ρυθμός αποτυχίας στον χρόνο t , δηλαδή,

$$r_X(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P(X \le t + \varepsilon | X > t)}{\varepsilon} = \frac{f_X(t)}{\overline{F}_X(t)} = -\frac{d \ln[\overline{F}_X(t)]}{dt}$$

για κάθε $\overline{F}_X(t) > 0$.

Θεώρημα 2 : *Αν X και Y έχουν συνεχείς πυκνότητες, τότε* $X \le_{hr} Y$ *ισοδυναμεί με* $r_X(t) \ge r_Y(t)$ *για κάθε πραγματικό t.*

Απόδειξη. Η σχέση $X \le_{hr} Y$ είναι αληθής, αν η συνάρτηση $\overline{F}_Y(t)/\overline{F}_X(t)$ είναι αύξουσα ως προς t. Η παραπάνω συνάρτηση είναι αύξουσα αν και μόνο αν η

$$\ln\left(\frac{\overline{F}_Y(t)}{\overline{F}_X(t)}\right) = \ln(\overline{F}_Y(t)) - \ln(\overline{F}_X(t))$$

είναι αύξουσα. Οπότε πρέπει

$$\frac{d}{dt}\left(\ln\left(\frac{\overline{F}_Y(t)}{\overline{F}_X(t)}\right)\right) \ge 0 \Leftrightarrow -\frac{f_Y(t)}{\overline{F}_Y(t)} \ge -\frac{f_X(t)}{\overline{F}_X(t)} \Leftrightarrow \frac{f_X(t)}{\overline{F}_X(t)} \ge \frac{f_Y(t)}{\overline{F}_Y(t)} \Leftrightarrow r_X(t) \ge r_Y(t) \;. \blacksquare$$

Από τη διατύπωση του θεωρήματος συμπεραίνουμε ότι η διάταξη ρυθμού κινδύνου αναφέρεται σε συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Αντίθετα στον Ορισμό 1, που δόθηκε προηγουμένως, εφαρμόζεται σε οποιεσδήποτε κατανομές (π.χ. συνεχείς, διακριτές μικτές κατανομές).

Η διάταξη ρυθμού κινδύνου μεταξύ δύο κατανομών F και G μπορεί να επαληθευτεί και μέσω του γραφήματος P-P plot των F και G, όταν η συνάρτηση που αναπαριστά το P-P plot, $G(F^{-1}(x))$, είναι «star-shaped» ως προς το (1,1), το οποίο ισοδυναμεί με το ότι η συνάρτηση

$$\frac{G(F^{-1}(x)) - 1}{x - 1}$$

είναι αύξουσα ως προς x. Συγκεκριμένα, ένα υποσύνολο A ενός Ευκλείδιου χώρου ονομάζεται «star-shaped» ως προς ένα σημείο s, αν $x \in A$ υπονοεί ότι το A περιέχει ολόκληρο το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ x και s. Επίσης, μία πραγματική συνάρτηση f είναι «star-shaped» ως προς το (α, β), αν η «επιγραφή» της είναι «star-shaped» ως προς το (α, β) ή αν

$$\frac{f(x) - \beta}{x - \alpha}$$

είναι αύξουσα ως προς x.

Θεώρημα 3 : *Ισχύει ότι* $F \le_{hr} G$ *αν και μόνο αν το* P-P *plot των F, G είναι «star-shaped» ως προς το* (1, 1).

Απόδειξη. Αν $F \leq_{hr} G$ τότε η συνάρτηση $\overline{G}(t)/\overline{F}(t)$ είναι αύξουσα ως προς t. Θέτουμε $t = F^{-1}(x)$, η οποία είναι αύξουσα ως προς x, και έχουμε

$$\frac{\overline{G}\left(F^{-1}(x)\right)}{\overline{F}\left(F^{-1}(x)\right)} = \frac{1-G\left(F^{-1}(x)\right)}{1-F\left(F^{-1}(x)\right)} = \frac{G\left(F^{-1}(x)\right)-1}{x-1}$$

που είναι αύξουσα ως προς x δεδομένου ότι $F(F^{-1}(x)) = x$ και η F^{-1} είναι αύξουσα. ■

Θεώρημα 4 : *Η διάταξη ρυθμού κινδύνου είναι κλειστή ως προς την ασθενή σύγκλιση.*

Απόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι αν η σχέση $F_n \leq_{hr} G_n$ ισχύει για όλα τα n και οι ακολουθίες (F_n) και (G_n) συγκλίνουν ασθενώς στις συναρτήσεις κατανομής F και G, αντίστοιχα, τότε $F \leq_{hr} G$. Όταν $F_n \leq_{hr} G_n$ είναι αληθής, τότε η $h_n(t) = \overline{G}_n(t)/\overline{F}_n(t)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς t. Η $h_n(t)$ είναι μία ακολουθία δεξιά συνεχών και αυξουσών συναρτήσεων καθώς οι F_n και G_n είναι ακολουθίες συναρτήσεων κατανομής και επιπρόσθετα, είναι αύξουσα ως προς t. Επειδή (F_n) και (G_n) συγκλίνουν ασθενώς στις συναρτήσεις κατανομής F και G για όλα τα t στα οποία είναι συνεχείς, η ακολουθία $h_n(t)$ συγκλίνει ασθενώς στην συνάρτηση

$$h(t) = \frac{\overline{G}(t)}{\overline{F}(t)}$$

για όλα τα t. Η $h(t)$ είναι δεξιά συνεχής στο t, με F και G συνεχείς στο t, και επίσης, είναι αύξουσα στο t. Άρα $F \leq_{hr} G$. ■

Η διάταξη δύο τυχαίων μεταβλητών ως προς το ρυθμό κινδύνου δεν εξακολουθεί να είναι αληθής όταν προστίθενται νέες μεταβλητές στις ήδη υπάρχουσες ή για οποιεσδήποτε μίξεις τους. Συνεπώς, η συγκεκριμένη διάταξη δεν είναι κλειστή ως προς τη συνέλιξη, δηλαδή η σχέση $X \leq_{hr} Y$ δεν συνεπάγεται την $X + Z \leq_{hr} Y + Z$. Το ίδιο ισχύει και για τη μίξη. Σε περίπτωση που και οι δύο τυχαίες μεταβλητές έχουν αύξουσα κατανομή ρυθμού αποτυχίας ή ισοδύναμα, αύξουσα συνάρτηση ρυθμού αποτυχίας r (ή η $\overline{F}$ είναι log-κοίλη ή η $\log \overline{F}$ είναι κοίλη), οι Shanthikumar και Yao (1991) απέδειξαν την κλειστότητα της διάταξης ως προς τη συνέλιξη. Ωστόσο, η διάταξη ρυθμού κινδύνου είναι αναλλοίωτη ως προς οποιοδήποτε μονότονο μετασχηματισμό κλίμακας.

Θεώρημα 5 : *Υποθέτουμε ότι $X \leq_{hr} Y$ και g:$R \rightarrow R$ είναι μία αύξουσα συνάρτηση. Τότε* $g(X) \leq_{hr} g(Y)$.

Απόδειξη Ισχύει ότι $g(X) \leq_{hr} g(Y)$, αν η συνάρτηση $\overline{F}_{g(Y)}(t)/\overline{F}_{g(X)}(t)$ είναι αύξουσα ως προς t. Ισχύει $X \leq_{hr} Y$, οπότε η συνάρτηση $\overline{F}_Y(t)/\overline{F}_X(t)$ είναι αύξουσα ως προς t. Παρατηρούμε ότι

$$\overline{F}_{g(X)}(t) = \overline{F}_X\left(g^{-1}(t)\right) \quad \text{και} \quad \overline{F}_{g(Y)}(t) = \overline{F}_Y\left(g^{-1}(t)\right)$$

με g αύξουσα, όπως και g^{-1} αύξουσα. Η συνάρτηση

$$\frac{\overline{F}_{g(Y)}(t)}{\overline{F}_{g(X)}(t)} = \frac{\overline{F}_Y\left(g^{-1}(t)\right)}{\overline{F}_X\left(g^{-1}(t)\right)}$$

είναι αύξουσα ως προς t ως συνθέση των αυξουσών συναρτήσεων $\overline{F}_Y/\overline{F}_X$ και g^{-1}. ■

Θεώρημα 6 : *Αν $X \leq_{hr} Y$ τότε $X \leq_{st} Y$.*

Απόδειξη. Αν ισχύει ότι $X \leq_{hr} Y$, τότε η συνάρτηση $\overline{F}_Y(t)/\overline{F}_X(t)$ είναι αύξουσα ως προς t και επειδή

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{\overline{F}_Y(t)}{\overline{F}_X(t)} = 1$$

προκύπτει ότι

$$\overline{F}_Y(t)/\overline{F}_X(t) \geq 1 \Leftrightarrow 1 - F_Y(t) \geq 1 - F_X(t) \Leftrightarrow F_X(t) \geq F_Y(t)$$

από όπου έπεται ότι $X \leq_{st} Y$. ■

Η διάταξη αντίστροφου ρυθμού κινδύνου (reversed hazard rate order) προκύπτει, αν στον ορισμό της διάταξης ρυθμού κινδύνου αντικαταστήσουμε τη συνάρτηση επιβίωσης με τη συνάρτηση κατανομής.

1.2.3 Διάταξη λόγου πιθανοφάνειας

Στην ανάπτυξη της διάταξης του ρυθμού κινδύνου εξασφαλίστηκε ότι

$$[X \mid X > t] \leq_{st} [Y \mid Y > t],$$

για δύο τυχαίες μεταβλητές που διατάσσονται ως προς τη διάταξη ρυθμού κινδύνου ($X \leq_{rh} Y$). Όταν εξετάζουμε περιπτώσεις που αφορούν χρόνους ζωής, η παραπάνω διάταξη αποτελεί σημαντική βοήθεια για τη σύγκριση κατανομών χρόνων ζωής. Ωστόσο, η σχέση $[X \mid X > t] \leq_{st}$ $[Y \mid Y > t]$ μας δίνει περιορισμένη πληροφορία, αφού οι κατανομές δεσμεύονται για ενδεχόμενα συγκεκριμένης έκτασης ($X > t$ ή $Y > t$). Κατά συνέπεια προσδοκούμε την ισχύ της ισχυρότερης $[X \mid X\in A] \leq_{st} [Y \mid Y\in A]$ για όλα τα ενδεχόμενα A προκειμένου να συγκρίνουμε κατανομές και σε άλλες περιπτώσεις εκτός των κατανομών χρόνου ζωής. Η διάταξη που υπονοεί την

$$[X \mid X\in A] \leq_{st} [Y \mid Y\in A]$$

για όλα τα A, είναι η διάταξη του λόγου πιθανοφάνειας και όχι η διάταξη ρυθμού κινδύνου.

Ορισμός 1 : *Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς τη διάταξη λόγου πιθανοφάνειας και γράφουμε $X \leq_{lr} Y$, αν οι X και Y έχουν πυκνότητες (ως προς κάποιο μέτρο μ) έτσι ώστε*

$$f_X(t)\, f_Y(s) \leq f_X(s)\, f_Y(t)$$

για κάθε $s \leq t$.

Επειδή το μέτρο μ είναι αυθαίρετο, ο ορισμός εφαρμόζεται είτε σε συνεχείς κατανομές (όπου το μ είναι το μέτρο Lebesgue), είτε σε διακριτές (όπου το μ είναι το μέτρο απαρίθμησης), είτε σε μίξεις συνεχών και διακριτών.

Θεώρημα 2 : *$X \leq_{lr} Y$ ισχύει αν και μόνο αν το* P-P *plot (που δίνεται γραφικά από την συνάρτηση $F_Y(F_X^{-1}(t))$) είναι κυρτό.*

Θεώρημα 3 *: Η διάταξη του λόγου πιθανοφάνειας είναι ισχυρότερη από την συνήθη στοχαστική διάταξη*. Αν $X \leq_{lr} Y$ *τότε* $X \leq_{st} Y$.

Θεώρημα 4 : *Αν $X \leq_{lr} Y$ τότε $X \leq_{hr} Y$.*

Θεώρημα 5 : *Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες* :

(1) $X \leq_{lr} Y$

(2) $P(X \in V)P(Y\in U) \leq P(X\in U)P(Y\in V)$ *για κάθε* $U = [\alpha, \beta]$ *και* $V = [\gamma, \delta]$ *με* $\alpha < \beta < \gamma < \delta$.

(3) $[X \mid \alpha \leq X \leq \beta] \leq_{st} [Y \mid \alpha \leq Y \leq \beta]$ *για κάθε* $\alpha < \beta$ *με* $P(\alpha \leq X \leq \beta) > 0$ *και* $P(\alpha \leq Y \leq \beta) > 0$.

(4) $[X \mid X\in A] \leq_{st} [Y \mid Y\in A]$ *για όλα τα ενδεχόμενα A με* $P(X\in A) > 0$ *και* $P(Y\in A) > 0$.

(5) $[X \mid X \in A] \leq_{lr} [Y \mid Y\in A]$ *για όλα τα ενδεχόμενα A με* $P(X\in A) > 0$ *και* $P(Y\in A) > 0$.

Θεώρημα 6 : *Υποθέτουμε ότι $X \leq_{lr} Y$ και $g:R\rightarrow R$ είναι μία αύξουσα συνάρτηση. Τότε*

$$g(X) \leq_{lr} g(Y)$$

δηλαδή, η διάταξη λόγου πιθανοφάνειας παραμένει αναλλοίωτη ως προς μονότονους μετασχηματισμούς.

Θεώρημα 7 : *Η διάταξη λόγου πιθανοφάνειας είναι κλειστή ως προς την ασθενή σύγκλιση. Αν* $P_n \leq_{lr} Q_n$, *τότε* $P \leq_{lr} Q$ *με* (P_n), (Q_n) *ακολουθίες μέτρων πιθανότητας που συγκλίνουν ασθενώς στα μέτρα πιθανότητας* P, Q.

1.3 Διατάξεις κλίμακας τυχαίων μεταβλητών

1.3.1 Κυρτές διατάξεις

1.3.1.1 *Θεμελιώδεις ιδιότητες*

Πρώτα θα ορίσουμε πότε μία συνάρτηση είναι κυρτή και κοίλη.

Ορισμός 1 : *Μία πραγματική συνάρτηση f είναι κυρτή (κοίλη), αν*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq (\geq)\ \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

για κάθε x και y με $0 < \alpha < 1$.

Άρα μία συνάρτηση f είναι κοίλη, αν η $-f$ είναι κυρτή. Οι διατάξεις αυτών των συναρτήσεων, όπως επίσης και των αυξουσών κυρτών και αυξουσών κοίλων, ορίζονται ως ακολούθως.

Ορισμός 2 : *Έστω τυχαίες μεταβλητές X και Y με πεπερασμένες μέσες τιμές. Τότε*

(1) *Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς τη κυρτή διάταξη (convex order) και γράφουμε* $X \leq_{cx} Y$, *αν* $Ef(X) \leq Ef(Y)$ *για όλες τις πραγματικές κυρτές συναρτήσεις f ώστε οι μέσες τιμές να υπάρχουν.*

(2) *Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y σε αύξουσα κυρτή διάταξη (increasing convex order) και γράφουμε* $X \leq_{icx} Y$, *αν* $Ef(X) \leq Ef(Y)$ *για όλες τις αύξουσες κυρτές συναρτήσεις f ώστε οι μέσες τιμές να υπάρχουν.*

(3) *Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y σε αύξουσα κοίλη διάταξη (increasing concave order) και γράφουμε* $X \leq_{icv} Y$, *αν* $Ef(X) \leq Ef(Y)$ *για όλες τις αύξουσες κοίλες συναρτήσεις f ώστε οι μέσες τιμές να υπάρχουν. Ισχύει* $X \leq_{cx} Y \Leftrightarrow -Y \leq_{cv} -X$ *και* $X \leq_{icx} Y \Leftrightarrow -Y \leq_{icv} -X$.

Η απαίτηση πεπερασμένων μέσων τιμών για τις τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι σημαντική. Όταν οι μέσες τιμές των X και Y απειρίζονται και η f είναι μία κυρτή ή κοίλη συνάρτηση, οι $Ef(X)$ και $Ef(Y)$ μπορεί να είναι πεπερασμένες μόνο αν η f είναι σταθερή.

Έστω ότι οι τυχαίες μεταβλητές X και Y αναπαριστούν τους κινδύνους που επιφέρουν οι μελλοντικές πραγματοποιήσεις δύο ενδεχόμενων επενδύσεων. Κάθε επενδυτής που είναι σε θέση αποστροφής προς τον κίνδυνο (risk-averse) θα επιλέξει την επένδυση με την μικρότερη αναμενόμενη τιμή κινδύνου. Ωστόσο αν οι X και Y έχουν ίσες μέσες τιμές ($EX = EY$), η επιλογή της πιο ασφαλούς επένδυσης δεν μπορεί να γίνει με το κριτήριο της μικρότερης αναμενόμενης τιμής και ο επενδυτής θα επιλέξει την επένδυση με τη μικρότερη μεταβλητότητα. Η μεταβλητότητα περιγράφεται από διάφορα μέτρα κι όσο μεγαλύτερη είναι τόσο πιο επικίνδυνη είναι η επένδυση με την οποία σχετίζεται. Συνεπώς, οι διατάξεις που συγκρίνουν το μέγεθος των τυχαίων μεταβλητών δίνοντας σχέσεις διάταξης για τις μέσες τιμές των τυχαίων μεταβλητών (ή κατανομών) δεν είναι πλέον κατάλληλες και αναζητούμε άλλες σχέσεις διάταξης για την μεταβλητότητα των τυχαίων μεταβλητών. Διαπιστώνεται ότι οι στοχαστικές διατάξεις συναρτήσεων, που ενέχουν την ιδιότητα της κυρτότητας, αποδίδουν σχέσεις διάταξης που σχετίζονται με τη μεταβλητότητα των τυχαίων μεταβλητών.

Όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια των εφαρμογών, οι κυρτές διατάξεις είναι γνωστές και με άλλες ονομασίες. Η αύξουσα κυρτή διάταξη είναι η διάταξη «stop-loss» (διάταξη «αποκοπής ζημίας») και η κυρτή διάταξη είναι η διάταξη «stop-loss» με ίσες μέσες τιμές. Επίσης η αύξουσα κοίλη διάταξη είναι η διάταξη «δεύτερης στοχαστικής κυριαρχίας».

Θεώρημα 3 : *Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες*

(1) $X \leq_{cx} Y$.

(2) $X \leq_{icx} Y$ *και* $EX = EY$.

Απόδειξη. (1)$\Rightarrow$(2) Έστω $f(x) = x$ και $f(x) = -x$ οι οποίες είναι κυρτές. Αν $X \leq_{cx} Y$, τότε για $f(x) = x$, θα έχουμε $EX \leq EY$ και για $f(x) = -x$, $-EX \leq -EY$. Οπότε από $EX \leq EY$ και $-EX \leq -EY$ ή $EX \geq EY$ προκύπτει ότι $EX = EY$. Επειδή $Ef(X) \leq Ef(Y)$ για όλες τις πραγματικές κυρτές συναρτήσεις f, τότε $Ef(X) \leq Ef(Y)$ και για όλες τις αύξουσες κυρτές f. Άρα $X \leq_{icx} Y$.

(2)$\Rightarrow$(1) Αν $X \leq_{icx} Y$, τότε $Ef(X) \leq Ef(Y)$ για όλες τις αύξουσες κυρτές f. Για να ισχύει η κυρτή διάταξη για τις X και Y, πρέπει $Ef(X) \leq Ef(Y)$ για όλες τις πραγματικές κυρτές συναρτήσεις f. Επομένως, αναζητούμε τις κυρτές f που περιλαμβάνουν τις αύξουσες κυρτές f για τις οποίες ξέρουμε ήδη ότι $Ef(X) \leq Ef(Y)$.

Θεωρούμε μία αυθαίρετη κυρτή συνάρτηση f και κάποιο πεπερασμένο α έτσι ώστε $f(x) + \alpha x$ να είναι αύξουσα (έστω αρχικά ότι υπάρχει τέτοιο α). Τότε για κάθε $x \leq y$ θα έχουμε

$$f(x) + \alpha x \leq f(y) + \alpha y$$

που συνεπάγεται ότι $Ef(X) + \alpha EX \leq Ef(Y) + \alpha EY$ και λόγω της ισότητας $EX = EY$, ισχύει ότι $Ef(X) \leq Ef(Y)$ για όλες τις κυρτές συναρτήσεις f για τις οποίες μπορεί να βρεθεί ένα τέτοιο α.

Έστω τώρα μία κυρτή f για την οποία δεν μπορεί να βρεθεί ένα τέτοιο α. Ορίζουμε την αύξουσα ακολουθία συναρτήσεων που προσεγγίζει την f,

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x), & x\geq -n \\ f(-n)+f'_+(-n)(x+n) & ,x<-n \end{cases}$$

για $n = 1,2,\ldots$, όπου f_+' είναι η δεξιά παράγωγος της f και υπάρχει πάντοτε εξαιτίας της κυρτότητας της f. Επιπλέον, για τις κυρτές f_n έχουμε ότι $f_n(x) + \alpha x$ είναι αύξουσα όταν $\alpha = -f_+'(-n)$ και επομένως, από τα παραπάνω, $Ef_n(X) \leq Ef_n(Y)$. Από το Θεώρημα μονότονης σύγκλισης (υπενθ. ότι αν οι τ.μ. $Y_1 \leq Y_2 \leq \ldots$, τότε $\lim EY_n = E(\lim Y_n)$) προκύπτει ότι

$$\lim Ef_n(X) = E(\lim f_n(X)) = Ef(X),\ \lim Ef_n(Y) = E(\lim f_n(Y)) = Ef(Y),$$

και άρα $Ef(X) \leq Ef(Y)$ και για αυτές τις συναρτήσεις f. Άρα τελικά $X \leq_{cx} Y$. ■

Για την σύγκριση των ροπών και της μεταβλητότητας, από τον ορισμό προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 4 : *Αν $X \leq_{cx} Y$, τότε*

$$EX^n \leq EY^n \text{ και } E(X-EX)^n \leq E(Y-EY)^n$$

όταν n άρτιος $n = 2, 4, \ldots$. Μάλιστα, αν $X \leq_{cx} Y$ τότε $\mathrm{Var}(X) \leq \mathrm{Var}(Y)$.

Αν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι μη αρνητικές, η διάταξη $EX^n \leq EY^n$ είναι αληθής για όλα τα $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

Θεώρημα 5 : *Η κυρτή και αύξουσα κυρτή διάταξη είναι κλειστή ως προς τη συνέλιξη.*
(1) *Αν $X \leq_{cx} Y$ και Z ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή των X και Y, τότε $X + Z \leq_{cx} Y + Z$.*
(2) *Αν $X \leq_{icx} Y$ και Z ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή των X και Y, τότε $X + Z \leq_{icx} Y + Z$.*

Απόδειξη. Αν $X \leq_{cx} Y$, τότε $Ef(X) \leq Ef(Y)$ για όλες τις πραγματικές κυρτές συναρτήσεις f. Αφού η $f(\cdot)$ είναι κυρτή, και η $f(\,\cdot + z)$ θα είναι κυρτή. Το ίδιο ισχύει και για την $f(\,\cdot + z)$. Επομένως,

$$E(f(X+Z)) = E(E(f(X+Z)\,|\,Z)) \leq E(E(f(Y+Z)\,|\,Z)) = E(f(Y+Z))$$

για όλες τις κυρτές συναρτήσεις f. Άρα $X + Z \leq_{cx} Y + Z$. Η (2) αποδεικνύεται όμοια. ■

Θεώρημα 6 : *Η κυρτή και αύξουσα κυρτή διάταξη είναι κλειστές ως προς τις μίξεις. Αν X, Y και Θ είναι τυχαίες μεταβλητές έτσι ώστε*

$$[\,X|\Theta=\theta\,] \leq_{cx} [Y|\Theta=\theta\,] \quad (\text{ή } [X|\Theta=\theta\,] \leq_{icx} [Y|\Theta=\theta\,]\,)$$

για όλα τα θ εντός του συνόλου τιμών της Θ, τότε $X \leq_{cx} Y$ (ή $X \leq_{icx} Y$).

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $E_\Theta E[\,f(X) \mid \Theta] = Ef(X)$ και $E_\Theta E[f(Y) \mid \Theta] = Ef(Y)$. Επίσης, για κάθε κυρτή ή αύξουσα κυρτή συνάρτηση f ισχύει $Ef(X) \le Ef(Y)$, που συνεπάγεται ότι $X \le_{cx} Y$ ή $X \le_{icx} Y$ αντίστοιχα. ■

Μέχρι αυτό το σημείο, για να ελέγξουμε ότι δύο τυχαίες μεταβλητές διατάσσονται ως προς την κυρτή ή την αύξουσα κυρτή διάταξη, προσπαθούμε να δείξουμε ότι η ανισότητα $Ef(X) \le Ef(Y)$ παραμένει αληθής για όλες τις κυρτές ή αύξουσες κυρτές συναρτήσεις f, που αποτελούν ένα «μεγάλο» σύνολο συναρτήσεων. Χρησιμοποιώντας μια μικρότερη κλάση συναρτήσεων είμαστε σε θέση να δείχνουμε ευκολότερα την ισχύ της $Ef(X) \le Ef(Y)$. Η κλάση αυτή απαρτίζεται από τις συναρτήσεις

$$\phi_t(x) = (x-t)_+ = \max\{x-t, 0\}, \;\; t \in R.$$

Χρησιμοποιούμε αυτή την κλάση διότι κάθε κυρτή συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως όριο αθροισμάτων από συναρτήσεις της μορφής αυτής. Η συνάρτηση

$$\pi_X(t) = E(X-t)_+ = \int_t^\infty \overline{F}_X(z)\,dz$$

ονομάζεται *ολοκληρωμένη συνάρτηση επιβίωσης*. Στο κεφάλαιο των αναλογιστικών εφαρμογών θα δούμε ότι η $\pi_X(t)$ ονομάζεται και μετασχηματισμός stop-loss, αφού αποτελεί το καθαρό ασφάλιστρο μίας αντασφάλισης stop-loss. Με την ολοκληρωμένη συνάρτηση επιβίωσης μπορούμε να προσδιορίσουμε την αύξουσα κυρτή διάταξη.

Θεώρημα 7 : *Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(1) $X \le_{icx} Y$.

(2) $E(X-t)_+ \le E(Y-t)_+$ *για κάθε πραγματικό* t.

Θεώρημα 8 : *Έστω* (X_n) *και* (Y_n) *ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών με* $X_n \le_{icx} Y_n$ *για κάθε* $n \in N$. *Αν* $X_n \to X$ *και* $Y_n \to Y$ *κατά κατανομή κι αν* $E(X_n)_+ \to EX_+$ *και* $E(Y_n)_+ \to EY_+$, *τότε* $X \le_{icx} Y$.

Για τις αποδείξεις των δύο προηγούμενων θεωρημάτων παραπέμπουμε στο βιβλίο των Muller and Stoyan (2002).

Θεώρημα 9 : (α) *Η ολοκληρωμένη συνάρτηση επιβίωσης* π_X *μίας τυχαίας μεταβλητής* X, *με πεπερασμένη μέση τιμή, έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.*

(1) *Η* $\pi_X(t) = E(X-t)_+ = \int_t^\infty \overline{F}_X(z)\,dz$ *είναι φθίνουσα και κυρτή.*

(2) $\lim_{t\to\infty} \pi_X(t) = 0$ *και* $\lim_{t\to-\infty} (\pi_X(t) + t) = EX$.

(β) *Για κάθε συνάρτηση π, που ικανοποιεί τις ιδιότητες* (1) *και* (2) *του* (α), *υπάρχει μία τυχαία μεταβλητή X έτσι ώστε η π είναι η ολοκληρωμένη συνάρτηση επιβίωσης της X. Η συνάρτηση κατανομής της X δίνεται από την σχέση* $F_X(t) = 1 + \pi_+'(t)$, *όπου* π_+' *είναι η δεξιά παράγωγος της συνάρτησης π.*

Απόδειξη (α) (1) Είναι άμεσο. (2) Η π_X είναι συγκλίνουσα στο R και (χρησιμοποιώντας και το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης)

$$\lim_{t\to -\infty} (\pi_X(t) + t) = \lim_{t\to -\infty} E(\max\{X, t\}) = EX$$

γιατί όταν $t \to -\infty$, $\max\{X, t\} \to X$ και επίσης,

$$\lim_{t\to\infty} \pi_X(t) = \lim_{t\to\infty} E(\max\{X - t, 0\}) = 0$$

γιατί όταν $t \to \infty$, $\max\{X - t, 0\} \to 0$.

(β) Εξαιτίας της κυρτότητας της π υπάρχει πάντοτε η δεξιά παράγωγός της π_+'. Η π_+' είναι δεξιά συνεχής και αύξουσα συνάρτηση λόγω μονοτονίας και κυρτότητας αντίστοιχα. Αφού $\lim_{t\to\infty} \pi(t) = 0$, το όριο της δεξιάς παραγώγου θα είναι $\lim_{t\to\infty} \pi_+'(t) = 0$. Το όριο $\lim_{t\to-\infty} (\pi_X(t) + t)$ υπάρχει μόνο αν $\lim_{t\to-\infty} \pi_+'(t) = -1$ (καθώς $(\pi_X(t) + t)' = \pi_+'(t) + 1$). Επομένως πληρούνται οι ιδιότητες (1) και (2) του (α) και η π είναι η ολοκληρωμένη συνάρτηση επιβίωσης της τυχαίας μεταβλητής X. Επιπλέον, η συνάρτηση $1 + \pi_+'(t)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις μίας συνάρτησης κατανομής (αύξουσα, δεξιά συνεχής) και αποτελεί την συνάρτηση κατανομής της X με π_+' τη δεξιά παράγωγο της π . ■

Θεώρημα 10 : *Έστω X και* X_n, *για* $n = 1, 2,\ldots$, *τυχαίες μεταβλητές και έστω π και* π_n *οι ολοκληρωμένες συναρτήσεις επιβίωσής τους. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*
(1) $\pi_n \to \pi$ *σημειακά (pointwise).*
(2) $X_n \to X$ *κατά κατανομή και* $E(X_n)_+ \to EX_+$.

Θεώρημα 11 : *Ισχύουν τα παρακάτω,*
(1) $X \leq_{st} Y$ *αν και μόνο αν η συνάρτηση* $\pi_Y(t) - \pi_X(t)$ *είναι φθίνουσα.*
(2) $X \leq_{icx} Y$ *αν και μόνο αν* $\pi_X(t) \leq \pi_Y(t)$ *για κάθε πραγματικό t.*
(3) $X \leq_{cx} Y$ *αν και μόνο αν* $\pi_X(t) \leq \pi_Y(t)$ *για κάθε πραγματικό t και*

$$\lim_{t\to-\infty} [\pi_Y(t) - \pi_X(t)] = 0.$$

Απόδειξη. (1) $X \leq_{st} Y$ έπεται ότι $F_X(t) \geq F_Y(t)$. Η $\pi_Y(t) - \pi_X(t)$ είναι φθίνουσα, καθώς $(\pi_Y(t) - \pi_X(t))' = F_Y(t) - F_X(t) \leq 0$. (2) $X \leq_{icx} Y$ ισοδυναμεί με $E(X - t)_+ \leq E(Y - t)_+$ για κάθε πραγματικό t . Άρα $X \leq_{icx} Y$ αν και μόνο αν $\pi_X(t) \leq \pi_Y(t)$ για κάθε πραγματικό t . (3) Γνωρίζου-

με ότι $X \leq_{cx} Y$ αν και μόνο αν $X \leq_{icx} Y$ και $EX = EY$ και επιπρόσθετα, γνωρίζουμε ότι $\lim_{t\to-\infty} (\pi_X(t) + t) = EX$.
Συνεπώς,

$$\lim_{t\to-\infty} [\pi_Y(t) - \pi_X(t)] = \lim_{t\to-\infty} [(\pi_Y(t) + t) - (\pi_X(t) + t)] = EY - EX = 0.$$

■

Θεώρημα 12 : *Έστω τυχαίες μεταβλητές X και Y και ισχύει $X \leq_{icx} Y$. Τότε υπάρχει μία τυχαία μεταβλητή Z έτσι ώστε $X \leq_{st} Z \leq_{cx} Y$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε την $\pi_Z(t) = \max\{\pi_X(t), EY - t\}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η $\pi_Z(t)$ είναι η ολοκληρωμένη συνάρτηση επιβίωσης της Z και η Z ικανοποιεί την $X \leq_{st} Z \leq_{cx} Y$. Η π_Z είναι το μέγιστο μίας κυρτής φθίνουσας συνάρτησης $\pi_X(t)$ και μίας γραμμικής συνάρτησης $EY - t$. Έτσι η π_Z είναι κυρτή και φθίνουσα με $\lim_{t\to\infty} \pi_Z(t) = 0$, και

$$\lim_{t\to-\infty}(\pi_Z(t) + t) = \lim_{t\to-\infty}\max\{\pi_X(t) + t, EY\} = \max\{EX, EY\} = EY,$$

γιατί από το Θεώρημα 9 έχουμε $\lim_{t\to-\infty}(\pi_X(t) + t) = EX$ και $EX \leq EY$ καθώς $X \leq_{icx} Y$ αν και μόνο αν $E(X - t)_+ \leq E(Y - t)_+$ για κάθε πραγματικό t. Σύμφωνα με το Θεώρημα 9 (β) η π_Z μπορεί να θεωρηθεί ως η ολοκληρωμένη συνάρτηση επιβίωσης μιας τυχαίας μεταβλητής Z, με συνάρτηση κατανομής την $F_Z(t) = 1 + \pi_+'(t)$ όπου π_+' η δεξιά παράγωγος της συνάρτησης π_Z. Η

$$\pi_Z(t) - \pi_X(t) = (EY - t - \pi_X(t))_+ = (EY - E(\max\{X, t\}))_+,$$

είναι φθίνουσα και από το Θεώρημα 11 (1) έχουμε ότι $X \leq_{st} Z$. Μένει να δείξουμε ότι $Z \leq_{cx} Y$. Από την ανισότητα Jensen έχουμε ότι

$$EY - t \leq (EY - t)_+ \leq E(Y - t)_+$$

αλλά, $E(Y - t)_+ = \pi_Y(t)$ και $X \leq_{icx} Y \Leftrightarrow E(X - t)_+ \leq E(Y - t)_+ \Leftrightarrow \pi_X(t) \leq \pi_Y(t)$. Συνεπώς,

$$\pi_Z(t) = \max\{\pi_X(t), EY - t\} \leq \pi_Y(t),$$

και από το Θεώρημα 11 (2) θα είναι $Z \leq_{icx} Y$. Επίσης,

$$\lim_{t\to-\infty}[\pi_Z(t) - \pi_Y(t)] = \lim_{t\to-\infty}[(\pi_Z(t) + t) - (\pi_Y(t) + t)] = EY - EY = 0$$

γιατί $\lim_{t\to-\infty}(\pi_Z(t) + t) = EY$. Άρα από το Θεώρημα 11 (3) έχουμε $Z \leq_{cx} Y$, και τελικώς, ισχύει $X \leq_{st} Z \leq_{cx} Y$. ■

1.3.1.2 *Επαρκείς συνθήκες και θεώρημα του Strassen*

1.3.1.2.α *Πρώτη επαρκής συνθήκη για την κυρτότητα*

Με τον όρο επαρκείς συνθήκες της κυρτότητας εννοούμε τις συνθήκες εκείνες, που αρκούν προκειμένου να δείξουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές διατάσσονται ως προς κάποια από τις κυρτές διατάξεις (κυρτή, αύξουσα κυρτή, κοίλη, αύξουσα κοίλη). Μία επαρκής συνθήκη για συγκρίσεις, που αφορούν τη μεταβλητότητα τυχαίων μεταβλητών, και για την εξασφάλιση στοχαστικών κυρτών διατάξεων είναι το κριτήριο τομής (cut criterion) των Karlin και Novikoff (1963).

Ορισμός 13 : *Έστω τυχαίες μεταβλητές* X *και* Y *με συναρτήσεις κατανομής* F_X *και* F_Y. *Τότε η τυχαία μεταβλητή* X *είναι λιγότερο «επικίνδυνη» από την τυχαία μεταβλητή* Y *και γράφουμε* $X \leq_D Y$, *αν υπάρχει κάποιο* $t_0 \in R$ *έτσι ώστε*

$$F_X(t) \leq F_Y(t) \quad \text{για κάθε } t < t_0 \qquad \text{και} \qquad F_X(t) \geq F_Y(t) \text{ για κάθε } t \geq t_0$$

και αν, επιπροσθέτως, $EX \leq EY$.

Άμεσα διαπιστώνουμε ότι η διάταξη των τυχαίων μεταβλητών ως προς την «επικινδυνότητά» τους αρκεί για να ελέγξουμε την κυρτή τους διάταξη.

Θεώρημα 14 : $X \leq_D Y$ *έπεται ότι* $X \leq_{icx} Y$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι

$$\pi_Y(t) - \pi_X(t) = \int_t^\infty [\overline{F}_Y(x) - \overline{F}_X(x)]dx = \int_t^\infty [F_X(x) - F_Y(x)]dx \ .$$

Ισχύει $X \leq_D Y$, οπότε $F_X(t) \leq F_Y(t)$ για κάθε $t < t_0$ και $F_X(t) \geq F_Y(t)$ για κάθε $t \geq t_0$ και επιπροσθέτως, $EX \leq EY$. Επομένως $\pi_Y(t) - \pi_X(t) \geq 0$ για κάθε $t \geq t_0$. Επίσης, $\lim_{t\to-\infty}[\pi_Y(t) - \pi_X(t)] = EY - EX \geq 0$ γιατί $EX \leq EY$ λόγω της $X \leq_D Y$. Άρα για κάθε $t < t_0$,

$$\pi_Y(t) - \pi_X(t) = EY - EX + \int_{-\infty}^t [F_Y(x) - F_X(x)]dx \geq 0,$$

καθώς $F_X(t) \leq F_Y(t)$ για κάθε $t < t_0$ και $EX \leq EY$. ■

Μία εφαρμογή του προηγούμενου θεωρήματος είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα 15 : *Έστω* X *μία τυχαία μεταβλητή και* $EX = 0$. *Αν* $0 \leq \alpha \leq c$ *και* $b \leq d$, *τότε* $\alpha X + b \leq_{icx} cX + d$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $F_{\alpha X+b}(t) = F_X(t-b/\alpha))$ και $F_{cX+d}(t) = F_Y(t-d/c))$. Θα ισχύει $F_{\alpha X+b}(t) \leq F_{cX+d}(t)$ αν και μόνο αν $t < t_0$. Το t_0 δίνεται από τη λύση της εξίσωσης

$$\frac{t-b}{\alpha} = \frac{t-d}{c} \Leftrightarrow t(c-\alpha) = bc - \alpha d$$

οπότε

$$t_0 = \frac{bc - \alpha d}{c - \alpha}.$$

Αν $b \leq d$, τότε $E(\alpha X + b) \leq E(cX + d)$, γιατί $EX = 0$ και μπορούμε να εφαρμόσουμε την «επικινδυνότητα», αφού υπάρχει $t_0 = (bc - \alpha d) / (c - \alpha) \in R$, με $0 \leq \alpha \leq c$ και $b \leq d$, έτσι ώστε $F_{\alpha X+b}(t) \leq F_{cX+d}(t)$ αν και μόνο αν $t < t_0$ και επιπροσθέτως, $E(\alpha X + b) \leq E(cX + d)$. Έτσι $\alpha X + b \leq_D cX + d$, που έπεται ότι $\alpha X + b \leq_{icx} cX + d$ για $0 \leq \alpha \leq c$ και $b \leq d$. ■

Σύμφωνα με τη μεταβατική ιδιότητα, αν $x \leq y$ και $y \leq z$, τότε $x \leq z$. Παρατηρούμε ότι η «επικινδυνότητα» τυχαίων μεταβλητών δεν ικανοποιεί τη μεταβατική ιδιότητα. Έστω οι κατανομές F, G και H. Αν η F και η G τέμνονται μία φορά ($F \leq G$) και οι G, H μία φορά ($G \leq H$), τότε οι F και H μπορούν να τέμνονται και δύο φορές ($F \leq H$ και $H \leq F$). Άπό την παραπάνω εφαρμογή συμπεραίνουμε ότι η «επικινδυνότητα» αποκτά τη μεταβατική ιδιότητα διαμέσου της αύξουσας κυρτής διάταξης, την οποία έπεται, απαιτώντας μόνο $F_{\alpha X+b}(t) \leq F_{cX+d}(t)$ αν και μόνο αν $t < t_0$ για κάποιο $t_0 = (bc - \alpha d) / (c - \alpha) \in R$, με $0 \leq \alpha \leq c$ και $b \leq d$, δηλαδή, οι κατανομές $F_{\alpha X+b}(t)$ και $F_{cX+d}(t)$ τέμνονται μόνο μία φορά.

Το ακόλουθο θεώρημα έχει αποδειχθεί από τον Muller A. (1996) για μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές. Εντούτοις, η ίδια μεθοδολογία χρησιμοποιείται και για τη γενική περίπτωση.

Θεώρημα 16 : *$X \leq_{icx} Y$ αν και μόνο αν υπάρχει μία ακολουθία (X_n) τυχαίων μεταβλητών έτσι ώστε $X = X_1$, $X_n \leq_D X_{n+1}$ για κάθε n, $X_n \to Y$ κατά κατανομή και $E(X_n)_+ \to EY_+$.*

1.3.1.2.β *Θεώρημα Strassen και επέκταση του θεωρήματος*

Ο Strassen διατύπωσε ότι η κυρτή διάταξη δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y ισοδυναμεί με την ύπαρξη δύο τυχαίων μεταβλητών $\widehat{X}$ και $\widehat{Y}$, που είναι ισόνομες με τις X και Y, ώστε η δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή της $\widehat{Y}$, με δέσμευση την $\widehat{X}$, να ισούται με την τυχαία μεταβλητή $\widehat{X}$. Πιο παραστατικά, $X \leq_{cx} Y$ αν και μόνο αν υπάρχουν $\widehat{X}$ και $\widehat{Y}$, που είναι ισόνομες με τις X και Y, έτσι ώστε $E(\widehat{Y} \mid \widehat{X}) = \widehat{X}$. Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί μία επέκταση του θεωρήματος του Strassen και στην περίπτωση κατανομών με πεπερασμένο σύνολο τιμών. Μία νεότερη απόδειξή του, η οποία βασίζεται σε στοχαστικά αύξοντες πυρήνες μετάβασης, δόθηκε από τους Muller and Ruschendorf (2001). Παρόμοιες ιδέες, όμως, έχουν αναπτυχθεί και από τους Machina and Pratt (1997) και Muller (1998a).

Θεώρημα 17 : *Για δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y, με πεπερασμένες μέσες τιμές*, οι *ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(1) $X \leq_{cx} Y$.

(2) *Υπάρχουν τυχαίες μεταβλητές* $\widehat{X}$ *και* $\widehat{Y}$, *με ίδια κατανομή όπως οι* X *και* Y, *έτσι ώστε* $E(\widehat{Y} \mid \widehat{X}) = \widehat{X}$ *σχεδόν βέβαια και επιπροσθέτως*

$$[\widehat{Y} \mid \widehat{X} = s] \leq_{st} [\widehat{Y} \mid \widehat{X} = t]$$

για κάθε $s < t$.

Πόρισμα 18 : *Για δύο τυχαίες μεταβλητές* X *και* Y, *με πεπερασμένες μέσες τιμές, οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες*

(1) $X \leq_{icx} Y$.

(2) *Υπάρχουν τυχαίες μεταβλητές* $\widehat{X}$ *και* $\widehat{Y}$, *με ίδια κατανομή όπως οι* X *και* Y, *έτσι ώστε* $E(\widehat{Y} \mid \widehat{X}) \geq \widehat{X}$, *σχεδόν βέβαια, και επιπροσθέτως, ο στοχαστικός νόμος* $[\widehat{Y} \mid \widehat{X} = x]$ *είναι στοχαστικά αύξων στο* x, *δηλαδή*

$$[\widehat{Y} \mid \widehat{X} = s] \leq_{st} [\widehat{Y} \mid \widehat{X} = t]$$

για κάθε $s < t$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το θεώρημα 17 (α) ισχύει ότι $Z \leq_{cx} Y$ και με το (β) υπάρχουν τυχαίες μεταβλητές $\widehat{Z}$ και $\widehat{Y}$, με ίδια κατανομή όπως οι Z και Y έτσι ώστε $E(\widehat{Y} \mid \widehat{Z}) = \widehat{Z}$, σχεδόν βέβαια, και επιπροσθέτως, ο στοχαστικός νόμος $[\widehat{Y} \mid \widehat{Z} = x]$ είναι στοχαστικά αύξων στο x, δηλαδή, $[\widehat{Y} \mid \widehat{Z} = s] \leq_{st} [\widehat{Y} \mid \widehat{Z} = t]$ για κάθε $s < t$. Ακόμη από το Θεώρημα 1 της συνήθους στοχαστικής διάταξης έχουμε ότι $X \leq_{st} Z$ αν και μόνο αν υπάρχει ένας χώρος πιθανότητας (Ω, A, P) και τυχαίες μεταβλητές $\widehat{X}$ και $\widehat{Z}$ μέσα σε αυτόν, με συναρτήσεις κατανομής F_X και F_Z, έτσι ώστε $\widehat{X}(\omega) \leq \widehat{Z}(\omega)$ για όλα τα $\omega \in \Omega$. Λαμβάνοντας υπόψη και το Θεώρημα 12 των κυρτών διατάξεων, όπου $X \leq_{icx} Y$ έπεται ότι υπάρχει μία τυχαία μεταβλητή Z έτσι ώστε $X \leq_{st} Z \leq_{cx} Y$, αποδεικνύεται ότι $X \leq_{icx} Y$. ■

1.3.1.2.γ *Εφαρμογές του θεωρήματος του Strassen και της επέκτασής του*

Η σημαντικότητα της ύπαρξης κυρτών διατάξεων για την σύγκριση κατανομών μέσα από την σχεδόν βέβαιη σύγκλιση αποτυπώνεται στην περίπτωση των ανταλλάξιμων τυχαίων μεταβλητών με συνέπειες και στον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών. Οι τυχαίες μεταβλητές $X_1,\ldots,X_n$ ονομάζονται ανταλλάξιμες (exchangeable) αν για οποιαδήποτε μετάθεση p, το διάνυσμα $(X_{p(1)},\ldots, X_{p(n)})$ έχει την ίδια κατανομή με το διάνυσμα $(X_1,\ldots,X_n)$. Πιο απλά, η κατανομή του διανύσματος $(X_1,\ldots,X_n)$ δεν επηρεάζεται από τις μεταθέσεις των $X_1,\ldots,X_n$. Τις ανταλλάξιμες μεταβλητές θα τις εξετάσουμε και στο κεφάλαιο των αναλογιστικών εφαρμογών.

Θεώρημα 19 : *Έστω* $X_1,\ldots,X_n$ *ανταλλάξιμες τυχαίες μεταβλητές και* $f_1,\ldots,f_n$ *πραγματικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Ορίζουμε την* $\bar{f}$ *ως*

$$\bar{f}(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i(x)\ .$$

Τότε

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{f}(X_i)\leq_{cx}\sum_{i=1}^{n}f_i(X_i).$$

Απόδειξη. Έστω p είναι το σύνολο όλων των μεταθέσεων των αριθμών 1, 2, ..., n και π είναι μία τυχαία μετάθεση. Η π μπορεί να θεωρηθεί ως μία τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο σύνολο p. Θα είναι

$$E[\sum_{i=1}^{n}f_{\pi(i)}(X_i)\mid X_1,\ldots,X_n]=\frac{1}{n!}\sum_{p\in P}\left(f_{p(1)}(X_1)+\ldots+f_{p(n)}(X_n)\right)=\sum_{i=1}^{n}\bar{f}(X_i),$$

συνεπώς,

$$E[\sum_{i=1}^{n}f_{\pi(i)}(X_i)\ |\sum_{i=1}^{n}\bar{f}(X_i)]=\sum_{i=1}^{n}\bar{f}(X_i),$$

και επειδή

$$\sum_{i=1}^{n}f_{\pi(i)}(X_i)=\sum_{i=1}^{n}f_i(X_i),$$

από το Θεώρημα 17 προκύπτει το ζητούμενο. ■

Αν έχουμε μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών (iid) με πεπερασμένη μέση τιμή, από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών μας είναι γνωστό ότι ο δειγματικός μέσος συγκλίνει στην EX_1 σχεδόν βέβαια. Θέτοντας $f_i(x) = x/n-1$ για $i = 1, .., n-1$ και $f_n = 0$ στο προηγούμενο θεώρημα, η σύγκλιση του ισχυρού νόμου των μεγάλων αριθμών γίνεται μονότονη σε κυρτή διάταξη. Συγκεκριμένα, η μεταβλητότητα του δειγματικού μέσου φθίνει σε κυρτή διάταξη όσο αυξάνει ο αριθμός των παρατηρήσεων (δηλαδή όσο αυξάνει ο αριθμός των τυχαίων μεταβλητών X_1, X_2, … μέχρι X_n) και κάθε δειγματικός μέσος προσεγγίζει καλύτερα τη μέση τιμή EX_1 σε σχέση με τον προηγούμενο όσο λαμβάνεται περισσότερη πληροφορία. Το γεγονός αυτό θα το χειριστούμε και στο κεφάλαιο των αναλογιστικών εφαρμογών.

Πόρισμα 20 : *Έστω* $X_1,\ldots,X_n$ *ανταλλάξιμες τυχαίες μεταβλητές. Τότε*

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}X_i\geq_{cx}\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}X_i$$

για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

1.3.1.2.δ *Η Διάταξη MPS*

Μία άλλη επαρκής συνθήκη για την ύπαρξη κυρτών διατάξεων σχετίζεται με τη διάταξη MPS (Mean Preserving Spread). Με τη φράση αυτή εννοούμε το άπλωμα της κατανομής στα άκρα, ώστε η μέση τιμή της κατανομής να παραμένει η ίδια.

Ορισμός 21 : *Η συνάρτηση κατανομής G διαφέρει από τη συνάρτηση κατανομής F κατά MPS και γράφουμε* $F \leq_{MPS} G$, *αν οι F και G έχουν την ίδια πεπερασμένη μέση τιμή και αν υπάρχει ένα διάστημα* (α, b) *έτσι ώστε η G να μην κατανέμει μεγαλύτερη πιθανότητα από την F σε οποιοδήποτε υποδιάστημα του* (α, b) *και η G να μην κατανέμει μικρότερη πιθανότητα από την F σε οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα είτε αριστερά, είτε δεξιά του* (α, b).

Εναλλακτικά, η διάταξη MPS ορίζεται και ως εξής.

Ορισμός 22 : *Η συνάρτηση κατανομής G διαφέρει από τη συνάρτηση κατανομής F κατά MPS και γράφουμε* $F \leq_{MPS} G$ *αν και μόνο αν υπάρχουν πεπερασμένοι πραγματικοί αριθμοί* $\alpha < b$ *έτσι ώστε η συνάρτηση* $G - F$ *είναι αύξουσα στο* $(-\infty, \alpha) \cup (b, \infty)$ *και φθίνουσα στο* (α, b) .

Ο ορισμός προϋποθέτει ότι υπάρχει ένα σημείο $t_0 \in [\alpha, b]$ τέτοιο ώστε $G(x) \geq F(x)$ για κάθε $x < t_0$ και $G(x) \leq F(x)$ για κάθε $x > t_0$.

Θεώρημα 23 : *Αν* $F \leq_{MPS} G$, *τότε* $F \leq_D G$ *και* $F \leq_{cx} G$.

Παρατηρούμε ότι η διάταξη MPS είναι αυστηρώς ισχυρότερη από την διάταξη επικινδυνότητας και μπορεί να ισχύει $F \leq_D G$, χωρίς να έπεται ότι $F \leq_{MPS} G$. Στο $(-\infty, t_0)$ η «επικινδυνότητα» ικανοποιεί την προϋπόθεση η $G - F$ να είναι μη αρνητική. Αντίθετα, στην ίδια περιοχή το MPS ικανοποιεί την επιπλέον προϋπόθεση η $G - F$ να είναι και μονοκόρυφη (με επικρατούσα τιμή) και ισχυροποιείται έναντι της «επικινδυνότητας».

Σε αντιδιαστολή με το Θεώρημα 16, οι Rothschild and Stiglitz (1970) έχουν αποδείξει ότι για κατανομές F και G με πεπερασμένο στήριγμα, $F \leq_{cx} G$ αν και μόνο αν η συνάρτηση κατανομής G προκύπτει από τη συνάρτηση κατανομής F μέσω μίας ακολουθίας MPS.

Θεώρημα 24 : *Ισχύει* $X \leq_{cx} Y$ *αν και μόνο αν υπάρχει μία ακολουθία* (X_n) *τυχαίων μεταβλητών έτσι ώστε* $X = X_1$, $X_n \leq_{MPS} X_{n+1}$ *για κάθε n*, $X_n \to Y$ *κατά κατανομή και* $EX_n \to EY$.

Η έννοια του «mean preserving spread» μπορεί να διευρυνθεί και να ισχυροποιηθεί ακόμη περισσότερο για κατανομές με πεπερασμένο στήριγμα με την εισαγωγή της έννοιας του τοπικού απλώματος («local mean preserving spread») από τη μετατόπιση της μάζας (συνάρτηση πιθανότητας) της πιθανότητας από ένα σημείο $x \in R$ σε δύο το πολύ σημεία του συνόλου τιμών της κατανομής αμέσως στα αριστερά και στα δεξιά του x. Αντιθέτως στο «mean preserving spread», η μάζα μετατοπίζεται όσο πιο αριστερά και όσο πιο δεξιά γίνεται . Επιπρόσθετα, το «local mean preserving spread» των κατανομών με πεπερασμένο σύνολο τιμών ενισχύεται από τη απαίτηση της μετακίνησης όλης της μάζας από το $x \in R$.

Ορισμός 25 : *Έστω F και G διακριτές συναρτήσεις κατανομής, των οποίων κοινό στήριγμα είναι ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων $x_1 < \ldots < x_n$, με συναρτήσεις μάζας πιθανότητας f και g, αντίστοιχα. Τότε η G διαφέρει από την F κατά ένα τοπικό άπλωμα (local spread), αν υπάρχει κάποιο i με $i \in \{2,\ldots, n-1\}$ τέτοιο ώστε*

$$0 = g(x_i) \le f(x_i), \quad g(x_{i+1}) \ge f(x_{i+1}), \quad g(x_{i-1}) \ge f(x_{i-1})$$

και

$$g(x_j) = f(x_j) \text{ για κάθε } j \notin \{i-1, i, i+1\}.$$

Το τοπικό άπλωμα λέγεται ότι διαφυλάττει τη μέση τιμή, αν οι F και G έχουν την ίδια μέση τιμή. Γράφουμε $F \le_{ls} G$, αν η G προκύπτει από ένα «local mean preserving spread» της F.

Στην περίπτωση των διακριτών κατανομών το «local mean preserving spread» και το «mean preserving spread» είναι τα ίδια.

Θεώρημα 26 : *Έστω F και G συναρτήσεις κατανομής διακριτών κατανομών με πεπερασμένο σύνολο τιμών. Τότε $F \le_{cx} G$ αν και μόνο αν υπάρχει μία ακολουθία $F_1,\ldots,F_k$, με $F = F_1$, $F_k = G$, τέτοια ώστε F_{i+1} διαφέρει από F_i κατά ένα τοπικό άπλωμα της κατανομής που διαφυλάσσει τη μέση τιμή (mean preserving local spread), για $i = 1,\ldots,k-1$.*

1.3.1.3 Πλειονοποίηση (Majorization)

Η πλειονοποιήση τυχαίων διανυσμάτων έπεται την κυρτή διάταξη τυχαίων μεταβλητών. Για να γίνει πιο κατανοητή η έννοια της πλειονοποίησης, θα αναφερθούμε σε μια οικονομική εφαρμογή της για τη σύγκριση της ανισότητας των κατανομών εισοδήματος. Έστω τα διανύσματα $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ και $\boldsymbol{y} = (y_1,\ldots,y_n)$, με x_i και y_i τον πλούτο του i-ατόμου σε κάθε πληθυσμό, αναπαριστούν το συνολικό πλούτο δύο πληθυσμών n-ατόμων και θέλουμε να συγκρίνουμε την κατανομή του πλούτου μεταξύ των δύο πληθυσμών. Υποθέτουμε ότι οι πληθυσμοί έχουν τον ίδιο συνολικό πλούτο

$$W = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \ .$$

Με τη βοήθεια της πλειονοποίησης μπορούμε να συγκρίνουμε την ανομοιότητα του πλούτου των ατόμων εντός των πληθυσμών και να εξάγουμε συμπεράσματα για την ορθότερη κατανομή του συνολικού πλούτου κάθε πληθυσμού. Για παράδειγμα, αν στον πληθυσμό $\boldsymbol{y}$ ο συνολικός πλούτος των k πλουσιότερων ατόμων είναι μεγαλύτερος και ο συνολικός πλούτος των k φτωχότερων ατόμων είναι μικρότερος απ' ότι στον πληθυσμό $\boldsymbol{x}$, μπορούμε να πούμε ότι η κατανομή του πλούτου στον πληθυσμό $\boldsymbol{x}$ μπορεί να θεωρηθεί πιο δίκαιη σε σχέση με τον πληθυσμό $\boldsymbol{y}$. Η διάταξη μεταξύ των $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ που υπονοείται από το παραπάνω παράδειγμα θα καλείται διάταξη πλειονοποίησης (βλ. Ορισμό 27 παρακάτω).

Για κάθε πραγματικό διάνυσμα $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ υποθέτουμε ότι $x_{[1]} \geq \ldots \geq x_{[n]}$ είναι η φθίνουσα διάταξη των $x_1,\ldots,x_n$ του $\boldsymbol{x}$ και $x_{(1)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$ είναι η αύξουσα διάταξη των $x_1,\ldots,x_n$ του $\boldsymbol{x}$. Ακόμη, $\boldsymbol{x}_\downarrow = (x_{[1]},\ldots, x_{[n]})$ είναι η φθίνουσα αναδιάταξη (rearrangement) των συντεταγμένων του $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{x}_\uparrow = (x_{(1)},\ldots, x_{(n)})$ είναι η αύξουσα αναδιάταξη των συντεταγμένων του $\boldsymbol{x}$.

Η ορολογία, όπως και η ιδέα της πλειονοποίησης (majorization) εισήχθησαν από τον Hardy et al. (1934) (βλ. επίσης Marshall and Olkin (1979)).

Ορισμός 27 : *Για κάθε* $\boldsymbol{x}$ *και* $\boldsymbol{y}$ *στο* R^n,

$$\boldsymbol{x} \leq_M \boldsymbol{y} \quad \text{αν} \quad \sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{k} y_{[i]},\ k = 1,2,..,n-1 \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{[i]} = \sum_{i=1}^{n} y_{[i]} .$$

Όταν $\boldsymbol{x} \leq_M \boldsymbol{y}$, *τότε λέμε ότι το* $\boldsymbol{x}$ *πλειονοποιείται* (*majorized*) *από το* $\boldsymbol{y}$.

Ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας την αύξουσα διάταξη

$$\boldsymbol{x} \leq_M \boldsymbol{y} \quad \text{αν} \quad \sum_{i=1}^{k} x_{(i)} \leq \sum_{i=1}^{k} y_{(i)},\ k = 1,2,..,n-1 \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{(i)} = \sum_{i=1}^{n} y_{(i)} .$$

Στο πιο πάνω παράδειγμα παίρνουμε τον πληθυσμό που περιγράφεται από το διάνυσμα $\boldsymbol{x}$ και διατάσσουμε τα n-άτομα από τον φτωχότερο προς τον πλουσιότερο με το διάνυσμα των ατομικών πλούτων σε αύξουσα διάταξη $(x_{(1)},\ldots, x_{(n)})$. Επίσης, υποθέτουμε ότι $S_0 = 0$ και $S_k = \sum x_{(i)}$, για $1 \leq i \leq k$, είναι ο συνολικός πλούτος των k φτωχότερων ατόμων. Αναπαριστώντας γραφικά τα σημεία $(k/n,\ S_k/S_n)$, όπου S_n είναι ο συνολικός πλούτος των n-ατόμων, και ενώνοντας τα με ευθύγραμμα τμήματα προκύπτει η καμπύλη Lorenz. Η πλειονοποίηση εκφράζεται μέσα από την τελευταία, γιατί $\boldsymbol{x} \leq_M \boldsymbol{y}$ αν και μόνο αν οι αντίστοιχες καμπύλες Lorenz μπορούν να διαταχθούν σημειακά (pointwise) και γι' αυτό μερικές φορές απαντάται και ως διάταξη Lorenz.

Αν το $\boldsymbol{y}$ προκύπτει από το $\boldsymbol{x}$ μέσω μίας μετάθεσης των στοιχείων $x_1,\ldots,x_n$ ($\boldsymbol{x}_{\downarrow} = \boldsymbol{y}_{\downarrow}$), τότε $\boldsymbol{x} \leq_M \boldsymbol{y}$ και $\boldsymbol{y} \leq_M \boldsymbol{x}$ αλλά $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ και άρα $\leq_M$ είναι μία προδιάταξη (preorder). Στο σύνολο όμως όλων των διανυσμάτων $\boldsymbol{x}$ με $x_1 \geq \ldots \geq x_n$ είναι μία μερική διάταξη.

Συνεχίζουμε με την οικονομική εφαρμογή της πλειονοποίησης και υποθέτουμε ότι η ανισότητα εισοδήματος μεταξύ των ατόμων εντός ενός πληθυσμού μπορεί να εξαλειφθεί, αν κάποιος j-πλούσιος δώσει χρήματα σε κάποιον k-φτωχό, αλλά, τα χρήματα πρέπει να είναι τόσα ώστε να μην τροποποιείται η τάξη (ranking) μεταξύ του πλούσιου και του φτωχού. Πιο σχηματικά, πρέπει να υπάρχουν j και k με $1 \leq j,\, k \leq n$ και $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε ο πλούτος κάθε i-ατόμου

$$x_i = \begin{cases} y_i - \varepsilon & \gamma\iota\alpha \quad i = j \\ y_i + \varepsilon & \gamma\iota\alpha \quad i = k \\ y_i & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

και $x_j \geq x_k$. Στο σημείο αυτό εισάγεται η αρχή της μεταφοράς ή μεταβίβασης, που είναι σημαντική για την πλειονοποίηση. Όταν ικανοποιούνται οι δύο αμέσως προηγούμενες σχέσεις της αρχής μεταφοράς προκύπτει ότι το $\boldsymbol{x}$ αποκτάται από το $\boldsymbol{y}$ μέσω ενός T-μετασχηματισμού, που ισοδυναμεί με $\boldsymbol{x} \leq_M \boldsymbol{y}$.

Θεώρημα 28 : *Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(1) $\boldsymbol{x} \leq_M \boldsymbol{y}$.

(2) *Το $\boldsymbol{x}$ μπορεί να προκύψει από το $\boldsymbol{y}$ μέσω ενός πεπερασμένου αριθμού T-μετασχηματισμών*

(3) *Υπάρχει ένας διπλά στοχαστικός πίνακας $n\times n$ $\boldsymbol{A}$ έτσι ώστε $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y}$.*

Μία λεπτομερής απόδειξη του πιο πάνω θεωρήματος υπάρχει στους Marshall and Olkin (1979).

Ορισμός 29 : *Μία συνάρτηση $f : R^n \to R$ ονομάζεται Schur-κυρτή, αν $\boldsymbol{x} \leq_M \boldsymbol{y}$ έπεται ότι $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{y})$.*

Θεώρημα 30 : *Έστω g μία αυθαίρετη πραγματική συνάρτηση και ορίζουμε*

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

για κάθε $\boldsymbol{x} \in R^n$. Τότε η f είναι Schur-κυρτή αν και μόνο αν η g είναι κυρτή.

Με μία πρώτη παρατήρηση του παραπάνω θεωρήματος διαφαίνεται η σχέση μεταξύ της πλειονοποίησης και της κυρτής διάταξης τυχαίων μεταβλητών, αφού $\boldsymbol{x} \leq_M \boldsymbol{y}$ υπονοεί $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{y})$ με f Schur-κυρτή και $f(\boldsymbol{x}) = \sum g(x_i)$ τότε και μόνο τότε αν η g είναι κυρτή. Συγκεκριμένα, κάθε $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ ταυτίζεται με μία τυχαία μεταβλητή X, που προσδίδει πιθανότητα $1/n$ σε κάθε x_i υπό τον περιορισμό ότι τα x_i είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Διαφορετικά, όταν k από τα x_i συμπίπτουν, σε κάθε x_i κατανέμεται πιθανότητα k/n.

Για μία πιο αυστηρή σύνδεση τυχαίων μεταβλητών, που διατάσσονται ως προς την κυρτή διάταξη, και διανυσμάτων που διατάσσονται ως προς την πλειονοποίηση, θεωρούμε το δειγματικό χώρο $\Omega = \{1,\ldots,n\}$. Το δυναμοσύνολο του Ω θα είναι $\wp(\Omega)$ και έστω P είναι η ομοιόμορφη κατανομή στον Ω, που κατανέμει πιθανότητα $1/n$ σε κάθε τιμή ω του δειγματικού χώρου. Τότε για δοσμένο διάνυσμα $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, η τυχαία μεταβλητή X ορίζεται στο χώρο $(\Omega, \wp(\Omega), P)$ ως

$$X: \Omega \to R \text{ με } X(i) = x_i,\ i = 1,\ldots,n.$$

Παραστατικά, στο παράδειγμα της ανισότητας εισοδήματος, όπου το $\boldsymbol{x}$ περιγράφει το συνολικό πλούτο ενός πληθυσμού, η τυχαία μεταβλητή X μπορεί να θεωρηθεί ως ο πλούτος ενός i-ατόμου το οποίο επιλέγεται τυχαία. Αντίστοιχα το ίδιο και η Y.

Πόρισμα 31 : *Αν για διανύσματα* $\boldsymbol{x}$ *και* $\boldsymbol{y}$, *οι τυχαίες μεταβλητές* X *και* Y *ορίζονται όπως προηγουμένως, τότε* $\boldsymbol{x} \le_M \boldsymbol{y}$ *αν και μόνο αν* $X \le_{cx} Y$.

1.3.2 Διατάξεις υψηλότερης κυρτότητας και διάταξη μετασχηματισμού Laplace

Οι διατάξεις υψηλότερης κυρτότητας ανέκυψαν από την προσπάθεια να οριστούν στοχαστικές διατάξεις για συναρτήσεις f με μη αρνητικές παραγώγους μεγαλύτερου του πρώτου και δευτέρου βαθμού. Έτσι δύο τυχαίες μεταβλητές διατάσσονται ως προς μια διάταξη κυρτότητας μεγαλύτερου βαθμού αν $Ef(X) \le Ef(Y)$ για όλες τις f με μη αρνητικές παραγώγους μεγαλύτερου βαθμού. Τέτοιες σχέσεις διάταξης έχουν εξεταστεί από τους Rolski and Stoyan (1974). Στη θεωρία των αποφάσεων τις έχει εισάγει ο Fishburn (1976, 1980), ενώ στις αναλογιστικές επιστήμες πρόσφατα έχουν μελετηθεί από τους Denuit, Lefevre and Shaked (1998). Στο παρόν κείμενο χρησιμοποιείται η ορολογία των Denuit *et al.* (1998).

Τη βάση για τη δημιουργία τέτοιων στοχαστικών διατάξεων αποτέλεσε η ιδιότητα της s-κυρτότητας της f. Γνωρίζουμε ότι μία διαφορίσιμη συνάρτηση f είναι αύξουσα, αν η πρώτη παράγωγός της είναι μη αρνητική. Επίσης, η f είναι κυρτή, αν η δεύτερη παράγωγός της είναι μη αρνητική. Όμοια, μία s διαφορίσιμη συνάρτηση f θα είναι s-κυρτή αν η s-παράγωγός της είναι μη αρνητική. Σχηματικά έχουμε

$$f \text{ αύξουσα, αν } f' \ge 0, \quad f \text{ κυρτή, αν } f'' \ge 0, \quad f\ s\text{-κυρτή, αν } f^{(s)} \ge 0\ .$$

Αν ορίσουμε τον τελεστή διαφοράς $\Delta^{\varepsilon}f(x) = f(x + \varepsilon) - f(x)$ για κάθε $\varepsilon > 0$, μπορούμε να ορίσουμε εναλλακτικά και πιο γενικά τη μονοτονία, την κυρτότητα και την s-κυρτότητα της f. Χρησιμοποιώντας διαφορές αντί παραγώγους αποφεύγουμε την απαίτηση της διαφορισιμότητας για την f. Αναλυτικά, έχουμε ότι

$$f \text{ αύξουσα} \Leftrightarrow \Delta^{\varepsilon}f(x) \geq 0$$

για κάθε $\varepsilon > 0$ και πραγματικό x. Όμοια,

$$f \text{ κυρτή} \Leftrightarrow \Delta^{\varepsilon_1}\Delta^{\varepsilon_2} f(x) \geq 0$$

για όλα τα ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ και πραγματικά x . Προχωρώντας σε διαφορές υψηλότερης τάξης, οδηγούμαστε στον ορισμό της s-κυρτότητας για την f.

Ορισμός 1 : *Έστω s ένας φυσικός αριθμός ($s \in N$). Μία πραγματική συνάρτηση f ονομάζεται s-κυρτή, αν*

$$\Delta^{\varepsilon_1} ... \Delta^{\varepsilon_s} f(x) \geq 0$$

για κάθε $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$ και πραγματικό x .

Η f είναι s-κοίλη, αν η $-f(-x)$ είναι s-κυρτή. Αρκετές ιδιότητες των s-κυρτών συναρτήσεων προκύπτουν αποδίδοντας τη μονοτονία, την κυρτότητα και την s-κυρτότητα διαμέσου οριζουσών. Μία συνάρτηση f είναι αύξουσα αν και μόνο αν η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ f(x_0) & f(x_1) \end{vmatrix}$$

είναι μη αρνητική για $x_0 < x_1$. Η f είναι κυρτή αν και μόνο αν η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ f(x_0) & f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix}$$

είναι μη αρνητική για $x_0 < x_1 < x_2$. Η f είναι s-κυρτή αν και μόνο αν η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{s-1} & x_1^{s-1} & \cdots & x_s^{s-1} \\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_s) \end{vmatrix}$$

είναι μη αρνητική και $x_0 < x_1 < \ldots < x_s$.

Ορισμός 2 : *Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς την s-κυρτή (s-αύξουσα κυρτή διάταξη, s-κοίλη, s-αύξουσα κοίλη) διάταξη και γράφουμε* $X \leq_{s\text{-}cx} Y$, *(αντ.* $X \leq_{s\text{-}icx} Y$, $X \leq_{s\text{-}cv} Y$, $X \leq_{s\text{-}icv} Y$*) αν* $Ef(X) \leq Ef(Y)$ *για όλες τις s-κυρτές (αντ. k-κυρτές με* $k = 1, ..., s$, *s-κοίλες, k-κοίλες με* $k = 1, ..., s$*) συναρτήσεις f ώστε οι μέσες τιμές να υπάρχουν.*

Τις s-κυρτές/κοίλες στοχαστικές διατάξεις θα τις χρησιμοποιήσουμε και στο κεφάλαιο των αναλογιστικών εφαρμογών. Εκτός από τις διατάξεις πρώτης και δεύτερης στοχαστικής κυριαρχίας (συνήθης στοχαστική διάταξη και κοίλη διάταξη αντίστοιχα) υπάρχει και ο τρίτος βαθμός στοχαστικής κυριαρχίας, που είναι η διάταξη $\leq_{3\text{-}icv}$ που έχει εισαχθεί από τον Whitmore (1970). Οι s-κυρτές και s-κοίλες διατάξεις γίνονται ασθενέστερες όσο αυξάνεται ο βαθμός κυρτότητας ή κοιλότητας s, αντίστοιχα.

Θεώρημα 3 : $X \leq_{s\text{-}cx} Y$ *αν και μόνο αν* $EX^k = EY^k$ *για* $k = 1,.., s-1$ *και*

$$E(X-\alpha)_+^{s-1} \leq E(Y-\alpha)_+^{s-1}$$

για κάθε πραγματικό α.

Παρατηρούμε ότι οι ροπές των τυχαίων μεταβλητών X και Y είναι ίσες μέχρι το $s-1$ βαθμό, με s το βαθμό της κυρτότητας, και οι κεντρικές ροπές των X, Y περί ενός πραγματικού α διατηρούν σταθερή την ανισοτική σχέση $\leq$ για το βαθμό κυρτότητας $s-1$. Οι Denuit *et al.* (1998) έχουν αποδείξει αρκετές ιδιότητες αυτών των διατάξεων.

Όταν έχουμε την s-αύξουσα κοίλη διάταξη και παίρνουμε το όριο του s στο άπειρο, προκύπτει η διάταξη του μετασχηματισμού Laplace. Σχετικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό

Ορισμός 4 : *Έστω X και Y πραγματικές τυχαίες μεταβλητές. Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς τη διάταξη μετασχηματισμού Laplace και γράφουμε* $X \leq_{Lt} Y$, *αν οι μετασχηματισμοί Laplace*

$$\widehat{f}_X(t) = Ee^{-tX} \quad \text{και} \quad \widehat{f}_Y(t) = Ee^{-tY}$$

των X, Y υπάρχουν και ικανοποιούν τη σχέση $\widehat{f}_X(t) \geq \widehat{f}_Y(t)$ *για κάθε* $t > 0$.

Από τον ορισμό διαπιστώνουμε ότι $X \leq_{Lt} Y$ αν και μόνο αν $Ef(X) \leq Ef(Y)$ για όλες τις συναρτήσεις f που δίνονται από τον τύπο $f(x) = -e^{-tX}$ για κάποιο $t > 0$. Γενικά, η διάταξη του μετασχηματισμού Laplace έχει θεωρηθεί για μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές. Ωστόσο, η σύγκριση αυθαίρετων πραγματικών κατανομών ως προς τη διάταξη μετασχηματισμού Laplace απαιτεί η κατανομή να έχει μόνο μία λεπτή ουρά στο $-\infty$. Εκτός από τη συναρτησιακή μορφή $-e^{-tx}$ υπάρχει ακόμη μία μεγαλύτερη κλάση συναρτήσεων που οδηγεί στη σύγκριση τυχαίων μεταβλητών ως προς τη διάταξη μετασχηματισμού Laplace. Μία τέτοια κλάση είναι αυτή των πλήρως μονότονων συναρτήσεων.

Ορισμός 5 : *Μία πραγματική συνάρτηση f ονομάζεται πλήρως μονότονη, αν όλες οι παράγωγοί της* $f^{(n)}$ *υπάρχουν και ικανοποιούν τη σχέση*

$$(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$$

για όλα τα x και $n = 0,1,2,\ldots$.

Το επόμενο θεώρημα έχει αποδειχθεί από τους Reuter and Riedrich (1981).

Θεώρημα 6 : $X \leq_{Lt} Y$ *αν και μόνο αν* $Ef(X) \leq Ef(Y)$ *για όλες τις συναρτήσεις f με μία πλήρως μονότονη παράγωγο, για την οποία υπάρχουν οι μέσες τιμές.*

Πόρισμα 7 : *Αν* $X \leq_{s\text{-}icv} Y$ *για κάποιο* $s \in N$, *τότε* $X \leq_{Lt} Y$.

Το ακόλουθο θεώρημα δεν είναι αληθές για συνεχείς κατανομές.

Θεώρημα 8 : *Αν X και Y έχουν κατανομές με πεπερασμένο σύνολο τιμών, τότε* $X \leq_{Lt} Y$ *αν και μόνο αν* $X \leq_{s\text{-}icv} Y$ *για κάποιο* $s \in N$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

2.1 Εισαγωγικά

2.1.1 Κατανομές δύο ή περισσότερων τυχαίων μεταβλητών

Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάσαμε στοχαστικές διατάξεις που αφορούσαν μία τυχαία μεταβλητή ή μονομεταβλητές κατανομές. Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε σε στοχαστικές διατάξεις τυχαίων διανυσμάτων ή πολυμεταβλητών κατανομών.

Η (από κοινού) συνάρτηση κατανομής του $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ είναι η

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = P(\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{x}) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n)$$

ενώ οι συναρτήσεις κατανομής $F_i(x) = P(X_i \leq x)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$ αντιστοιχούν στις περιθώριες κατανομές. Όμοια, η συνάρτηση επιβίωσης του $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ δίνεται από τον τύπο

$$\overline{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P(\mathbf{X} > \mathbf{x}) = P(X_1 > x_1, \ldots, X_n > x_n).$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί ότι η σχέση $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$, που συνδέει τις συναρτήσεις κατανομής και τις συναρτήσεις επιβίωσης στην περίπτωση των μονομεταβλητών κατανομών, δεν ισχύει πάντοτε για τις πολυμεταβλητές κατανομές με αποτέλεσμα η παράσταση $\overline{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 1 - F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ να μην είναι πάντα αληθής. Για παράδειγμα, αναφέρουμε τη διμεταβλητή περίπτωση ($n = 2$) όπου για το διάνυσμα (X_1, X_2) η συνάρτηση επιβίωσης είναι η

$$\overline{F}_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)$$

για όλα τα x_1, x_2, ενώ για περιπτώσεις διανυσμάτων με περισσότερες από δύο μεταβλητές ($n > 2$), δεν υπάρχει κάποια απλή σχέση που να συνδέει τη συνάρτηση κατανομής και τη συνάρτηση επιβίωσης.

Πριν προχωρήσουμε, θα ορίσουμε τη μερική διάταξη (≤) στο R^n, όπως κάναμε και στις μονομεταβλητές διατάξεις για τη μερική διάταξη στο R. Αν $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots, x_n)$ και $\boldsymbol{y} = (y_1,\ldots,y_n)$, τότε θα θεωρούμε ότι

$$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}, \text{ αν } x_i \leq y_i\,,\ \ i = 1,\ldots,n \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}, \text{ αν } x_i \leq y_i\,,\ \ i = 1,\ldots,n\,.$$

Μία συνάρτηση $f:R^n \rightarrow R^k$ θα θεωρείται αύξουσα, αν $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ έπεται $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{y})$.

2.1.2 Σύνδεσμοι (Copulas) και όρια Frechet.

Ο **σύνδεσμος (copula ή σύζευξη)** είναι η συνάρτηση κατανομής ενός τυχαίου διανύσματος $\boldsymbol{U} = (U_1,\ldots,U_n)$ του οποίου τα στοιχεία κατανέμονται ομοιόμορφα στο (0,1) και περιγράφει τη δομή εξάρτησης ενός οποιουδήποτε τυχαίου διανύσματος.

Πολλές πολυμεταβλητές κατανομές τυχαίων διανυσμάτων $(X_1,\ldots,X_n)$ με ίδιες περιθώριες κατανομές έχουν διάφορα είδη εξάρτησης μεταξύ των $X_1,\ldots,X_n$. Για δεδομένο σύνδεσμο (copula) C και περιθώριες $F_1,\ldots,F_n$, παρατηρούμε ότι η

$$F(\boldsymbol{x}) = C(F_1(x_1),\ldots, F_n(x_n))$$

είναι μία συνάρτηση κατανομής με περιθώριες κατανομές $F_1,\ldots,F_n$. Έστω $\boldsymbol{U}$ ένα τυχαίο διάνυσμα με συνάρτηση κατανομής το σύνδεσμο C. Τότε το διάνυσμα

$$\mathbf{X} = (F_1^{-1}(U_1),\ldots,F_n^{-1}(U_n)\ )$$

έχει συνάρτηση κατανομής την $F(\boldsymbol{x}) = C(F_1(x_1),\ldots, F_n(x_n))$. Αποδεικνύεται ότι (Sklar 1959) για κάθε πολυμεταβλητή συνάρτηση κατανομής F, με περιθώριες $F_1,\ldots,F_n$, υπάρχει ένας σύνδεσμος C ώστε να ισχύει

$$F(\boldsymbol{x}) = C(F_1(x_1),\ldots, F_n(x_n)).$$

Αν η F είναι συνεχής, ο σύνδεσμος C είναι μοναδικός. Διαφορετικά, ορίζεται μοναδικά μόνο στο εύρος της F (range(F)). Σύμφωνα με τα παραπάνω, διαπιστώνουμε ότι ο σύνδεσμος συνδέει την από κοινού συνάρτηση κατανομής με τις περιθώριες κατανομές της. Εφ' όσον η από κοινού κατανομή είναι δύσκολο να βρεθεί όταν οι τυχαίες μεταβλητές των διανυσμάτων δεν είναι ανεξάρτητες, ο σύνδεσμος καθιστά δυνατή την έκφρασή της μέσω των περιθωρίων κατανομών (που είναι πιο εύχρηστες). Εξάλλου, για διανύσματα με ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, η από κοινού κατανομή εκφράζεται μέσω του γινομένου των περιθωρίων.

Παραδείγματα συνδέσμων αποτελούν ο ανεξάρτητος σύνδεσμος $C(\boldsymbol{u}) = u_1u_2\ldots u_n$ του τυχαίου διανύσματος $\boldsymbol{U} = (U_1,\ldots,U_n)$ των ανεξάρτητων ομοιόμορφα κατανεμημένων

$U_1,\ldots,U_n$, όπως και ο σύνδεσμος του ανώτερου ορίου Frechet. Ο τελευταίος δίνεται από τη σχέση $C^+(\boldsymbol{u}) = \min\{u_1,\ldots,u_n\}$ και είναι ο σύνδεσμος (copula) του τυχαίου διανύσματος $\boldsymbol{U} = (U_1,\ldots,U_n)$ των ανεξάρτητων ομοιόμορφα κατανεμημένων $U_1, \ldots, U_n$ με $U_1 = U_2 = \ldots = U_n$. Το $C^+(\boldsymbol{u})$ περιγράφει μία ισχυρή μορφή εξάρτησης.

Η κλάση Frechet των $F_1,\ldots,F_n$ συμβολίζεται ως $\Gamma(F_1,\ldots,F_n)$ και είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων κατανομής με δεδομένες περιθώριες $F_1,\ldots,F_n$. Κάθε συνάρτηση κατανομής με περιθώριες $F_1,\ldots,F_n$ εντός μίας κλάσης Frechet $\Gamma(F_1,\ldots,F_n)$ έχει ανώτερα και κατώτερα όρια τα οποία ονομάζονται όρια Frechet.

Θεώρημα 1 : *Έστω F μία συνάρτηση κατανομής με περιθώριες $F_1,\ldots,F_n$. Τότε*

$$F^-(\boldsymbol{x}) \leq F(\boldsymbol{x}) \leq F^+(\boldsymbol{x}) \quad \text{για κάθε } \boldsymbol{x} \in R^n$$

με $F^-(\boldsymbol{x}) = \max\{0, F_1(x_1)+\ldots+F_n(x_n) - (n-1)\}$, $F^+(\boldsymbol{x}) = \min\{F_1(x_1),\ldots, F_n(x_n)\}$.

Προκειμένου ένα τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X}$ να έχει συνάρτηση κατανομής την $F^+(\boldsymbol{x})$, θεωρούμε μία ομοιόμορφα κατανεμημένη στο (0,1) τυχαία μεταβλητή U. Αν

$$\mathbf{X} = (F_1^{-1}(U),\ldots,F_n^{-1}(U))$$

τότε η συνάρτηση κατανομής του $\boldsymbol{X}$ είναι $F = F^+$, γιατί το $\boldsymbol{U} = (U,\ldots,U)$ έχει ως συνάρτηση κατανομής το σύνδεσμο του ανώτερου ορίου Frechet C^+. Το F^+ ονομάζεται ανώτερο όριο Frechet και είναι πάντοτε μία συνάρτηση κατανομής με περιθώριες $F_1,\ldots,F_n$. Αν ένα τυχαίο διάνυσμα έχει κατανομή το F^+, ονομάζεται συμμονότονο (comonotone) και παρουσιάζει ισχυρή θετική εξάρτηση μεταξύ των στοιχείων του. Κάθε συμμονότονο διάνυσμα έχει την ακόλουθη ιδιότητα

$$\text{αν } X_i(\omega) < X_i(\omega') \text{ τότε } X_j(\omega) \leq X_j(\omega') \text{ για κάθε } j \neq i.$$

Εξαιτίας αυτού ενυπάρχει η ισχυρή θετική εξάρτηση.

Το F^- ονομάζεται κατώτερο όριο Frechet και στη διμεταβλητή περίπτωση ($n = 2$) είναι μία συνάρτηση κατανομής με περιθώριες F_1, F_2. Ένα τυχαίο διάνυσμα με συνάρτηση κατανομής το F^- είναι το $(X_1, X_2) = (F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(1-U))$, με U μία ομοιόμορφα κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή στο (0,1). Το διάνυσμα αυτό, μερικές φορές, ονομάζεται αντιμονότονο (countermonotonic). Ωστόσο για περιπτώσεις $n \geq 3$, το κατώτερο όριο Frechet δεν αποτελεί απαραίτητα μία συνάρτηση κατανομής. Το F^- μπορεί να είναι μία συνάρτηση κατανομής υπό κάποιους περιορισμούς των περιθωρίων $F_1,\ldots,F_n$ όπως διαφαίνεται και από το ακόλουθο θεώρημα (Dall' Aglio (1972)).

Θεώρημα 2 : *Για διάσταση $n \geq 3$ το κατώτερο όριο Frechet είναι μία συνάρτηση κατανομής αν και μόνο αν ισχύει μια από τις ακόλουθες συνθήκες.*

(1) $\sum_{j=1}^{n} F_j(x_j) \leq 1$, *για όλα τα* $\boldsymbol{x}$ *με* $F_j(x_j) < 1$, *για κάθε j.*

(2) $\sum_{j=1}^{n} F_j(x_j) \geq n-1$, *για όλα τα* $\boldsymbol{x}$ *με* $F_j(x_j) > 0$, *για κάθε j.*

Παρατηρούμε ότι και για τις δύο συνθήκες του παραπάνω θεωρήματος υπάρχουν ανώτερα και κατώτερα πεπερασμένα όρια. Όταν ισχύει η (1) τότε υπάρχουν ανώτερα πεπερασμένα όρια ξ_j^+ για τα στηρίγματα των F_j που αθροίζουν τουλάχιστον στο $n-1$. Αντίστοιχα, όταν ισχύει η (2) τότε υπάρχουν κατώτερα πεπερασμένα όρια ξ_j^- για τα στηρίγματα των F_j με την ίδια ιδιότητα. Μία ειδική περίπτωση της δεύτερης συνθήκης είναι αυτή των μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών. Τότε οι τυχαίες μεταβλητές X_j ικανοποιούν τη συνθήκη (2) αν και μόνο αν το πολύ μία από τις τυχαίες μεταβλητές X_j λαμβάνει γνήσια θετική τιμή. Οι τυχαίες μεταβλητές (τυχαίων διανυσμάτων) με αυτήν την ιδιότητα ονομάζονται αμοιβαίως αποκλειόμενοι κίνδυνοι (mutually exclusive risks) και θα τις εξετάσουμε στο κεφάλαιο των αναλογιστικών εφαρμογών (Dhaene and Denuit, 1999).

2.2 Συνήθης στοχαστική διάταξη και διατάξεις Orthant

Ορισμός 1 : Έστω τυχαία διανύσματα $\boldsymbol{X}$ και $\boldsymbol{Y}$ με τιμές στο R^n.

(α) *Το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{X}$ *είναι μικρότερο από το τυχαίο διάνυσμα* $\mathbf{Y}$ ως προς τη συνήθη στοχαστική διάταξη και γράφουμε $\boldsymbol{X} \leq_{st} \boldsymbol{Y}$, *αν* $Ef(\boldsymbol{X}) \leq Ef(\boldsymbol{Y})$ *για όλες τις φραγμένες αύξουσες* (*κατά συντεταγμένη*) *συναρτήσεις* f με $f: R^n \to R$.

(β) *Το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{X}$ *είναι μικρότερο από το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{Y}$ *ως προς την ανώτερη διάταξη orthant και γράφουμε* $\boldsymbol{X} \leq_{uo} \boldsymbol{Y}$, αν $\overline{F}_{\mathbf{X}}(t) \leq \overline{F}_{\mathbf{Y}}(t)$ *για κάθε t.*

(γ) *Το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{X}$ *είναι μικρότερο από το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{Y}$ *ως προς την κατώτερη διάταξη orthant και γράφουμε* $\boldsymbol{X} \leq_{lo} \boldsymbol{Y}$, *αν* $F_{\mathbf{X}}(t) \geq F_{\mathbf{Y}}(t)$ *για κάθε t.*

Παρατηρούμε ότι η συνήθης στοχαστική διάταξη ορίζεται για φραγμένες αύξουσες f τόσο για τυχαίες μεταβλητές (μονομεταβλητή συνήθης στοχαστική διάταξη) όσο και για τυχαία διανύσματα. Η συνήθης στοχαστική διάταξη είναι πιο ισχυρή και έπεται τις άλλες δύο. Ωστόσο, αποδεικνύεται ότι υπάρχουν περιπτώσεις κατά τις οποίες ισχύει η ανώτερη και η κατώτερη διάταξη orthant, αλλά η συνήθης στοχαστική διάταξη δεν ισχύει. Η ταυτόχρονη διάταξη των $\boldsymbol{X}$ και $\boldsymbol{Y}$ υπό τις σχέσεις $\boldsymbol{X} \leq_{uo} \boldsymbol{Y}$ και $\boldsymbol{X} \leq_{lo} \boldsymbol{Y}$, αποτελεί ικανή συνθήκη για μία άλλη πολυμεταβλητή στοχαστική διάταξη που θα εξετάσουμε παρακάτω.

Μερικές πρώτες αναφορές για τη συνήθη στοχαστική διάταξη μπορούν να βρεθούν στις εργασίες των Lehmann (1955), Kamae *et al*. (1977), Marshall and Olkin (1979) και Veinott (1965). Για τις διατάξεις orthant παραπέμπουμε στις εργασίες των Veinott (1965), Cambanis, Simons and Stout (1976), Bergmann (1978), Marshall and Olkin (1979), Ruschendorf (1980) και Tchen (1980).

Θεώρημα 2 : *Αν* $\boldsymbol{X} \leq_{st} \boldsymbol{Y}$, *τότε* $\boldsymbol{X} \leq_{uo} \boldsymbol{Y}$ *και* $\boldsymbol{X} \leq_{lo} \boldsymbol{Y}$.

Από το επόμενο θεώρημα διαπιστώνουμε ότι η συνήθης στοχαστική διάταξη ορίζεται χρησιμοποιώντας μικρότερα σύνολα συναρτήσεων από το σύνολο των φραγμένων αυξουσών *f*. Γενικά, τα σύνολα συναρτήσεων, πάνω στα οποία ορίζονται οι στοχαστικές διατάξεις τα ονομάζουμε γεννήτορες.

Θεώρημα 3 : *Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(1) $\boldsymbol{X} \leq_{st} \boldsymbol{Y}$.

(2) $Ef(\boldsymbol{X}) \leq Ef(\boldsymbol{Y})$ *για όλες τις φραγμένες συνεχείς αύξουσες συναρτήσεις f.*

(3) $Ef(\boldsymbol{X}) \leq Ef(\boldsymbol{Y})$ *για όλες τις φραγμένες διαφορίσιμες αύξουσες συναρτήσεις f.*

(4) $P(\boldsymbol{X} \in U) \leq P(\boldsymbol{Y} \in U)$ *για όλα τα ανώτερα σύνολα U.*

(5) $P(\boldsymbol{X} \in U) \leq P(\boldsymbol{Y} \in U)$ *για όλα τα κλειστά ανώτερα σύνολα U.*

Υπενθυμίζεται ότι ένα σύνολο $U \subseteq R^n$ καλείται ανώτερο αν και μόνο αν $\boldsymbol{x} \in U$ και $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ έπεται ότι $\boldsymbol{y} \in U$. Παρόμοια με τη συνήθη στοχαστική διάταξη για κατανομές μίας μεταβλητής πραγματοποιείται και η σύγκριση πολυμεταβλητών κατανομών ως προς την $\leq_{st}$.

Θεώρημα 4 : *Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισο*δύναμες.

(1) $\boldsymbol{X} \leq_{st} \boldsymbol{Y}$

(2) *Υπάρχουν τυχαία διανύσματα* $\widehat{\mathbf{X}} =_{st} \boldsymbol{X}$ *και* $\widehat{\mathbf{Y}} =_{st} \boldsymbol{Y}$ *έτσι ώστε* $P(\widehat{\mathbf{X}} \leq \widehat{\mathbf{Y}}) = 1$.

Το παρακάτω θεώρημα αποδίδεται στον Veinott (1965).

Θεώρημα 5 : *Έστω* $\boldsymbol{X}$ *και* $\boldsymbol{Y}$ *n-διάστατα τυχαία διανύσματα. Αν* $X_1 \leq_{st} Y_1$ *και*

$$(X_i \mid X_1 = x_1, \ldots, X_{i-1} = x_{i-1}) \leq_{st} (Y_i \mid Y_1 = y_1, \ldots, Y_{i-1} = y_{i-1})$$

για $i = 2,3,\ldots, n$ *οπουδήποτε* $x_j \leq y_j$ *για* $j = 1,\ldots, i-1$, *τότε* $\boldsymbol{X} \leq_{st} \boldsymbol{Y}$.

Το επόμενο θεώρημα που αναφέρεται σε δύο τυχαία διανύσματα με κοινό σύνδεσμο (copula) έχει αποδειχθεί από τον Scarsini (1988). Η απόδειξη που περιλαμβάνεται εδώ οφείλεται στους Muller and Scarsini (2001).

Θεώρημα 6 : *Έστω ότι τα* $\boldsymbol{X} = (X_1,\dots,X_n)$ *και* $\boldsymbol{Y} = (Y_1,\dots,Y_n)$ *έχουν έναν κοινό σύνδεσμο (copula). Αν* $X_i \leq_{st} Y_i$, *για* $i=1,..,n$, *τότε* $\boldsymbol{X} \leq_{st} \boldsymbol{Y}$.

Απόδειξη. Αν $F_{\boldsymbol{X}}$ και $F_{\boldsymbol{Y}}$ είναι οι συναρτήσεις κατανομής των $\boldsymbol{X}$ και $\boldsymbol{Y}$ αντίστοιχα, τότε θα έχουμε $F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = C(F_1(x_1),\dots,F_n(x_n))$ και $F_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{x}) = C(G_1(x_1),\dots,G_n(x_n))$ για κάθε $\boldsymbol{x}$. Επειδή ισχύει $X_i \leq_{st} Y_i$, για $i=1,..,n$, έπεται ότι $F_i \geq G_i$ και $F_i^{-1} \leq G_i^{-1}$ για $i=1, 2, ..., n$. Έστω $\boldsymbol{U} = (U_1,\dots,U_n)$ τυχαίο διάνυσμα με συνάρτηση κατανομής το σύνδεσμο C. Θα ισχύει ότι,

$$\widehat{\mathbf{X}} = (F_1^{-1}(U_1),\dots,F_n^{-1}(U_n)) \text{ και } \widehat{\mathbf{Y}} = (G_1^{-1}(U_1),\dots,G_n^{-1}(U_n))$$

με αποτέλεσμα $\widehat{\mathbf{X}} \leq \widehat{\mathbf{Y}}$ σχεδόν βέβαια με $\widehat{\mathbf{X}} =_{st} \boldsymbol{X}$ και $\widehat{\mathbf{Y}} =_{st} \boldsymbol{Y}$. Από το Θεώρημα 4 έπεται ότι $\boldsymbol{X} \leq_{st} \boldsymbol{Y}$. ■

Το ακόλουθο θεώρημα αποδείχθηκε από τον Ruschendorf (1981b)

Θεώρημα 7 : *Αν* $\boldsymbol{X}$ *και* $\boldsymbol{Y}$ *είναι τυχαία διανύσματα με τις ίδιες μονομεταβλητές περιθώριες, τότε* $\boldsymbol{X} \leq_{st} \boldsymbol{Y}$ *έπεται* $\boldsymbol{X} =_{st} \boldsymbol{Y}$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4 έχουμε ότι $\widehat{\mathbf{X}} =_{st} \boldsymbol{X}$ και $\widehat{\mathbf{Y}} =_{st} \boldsymbol{Y}$ με $P(\widehat{\mathbf{X}} \leq \widehat{\mathbf{Y}}) = 1$. Συνεπώς για κάθε $i=1,..,n$, θα ισχύει ότι $P(\widehat{X}_i \leq \widehat{Y}_i) = 1$. Όμως, τα $\boldsymbol{X}$ και $\boldsymbol{Y}$ είναι τυχαία διανύσματα με τις ίδιες μονομεταβλητές περιθώριες. Επομένως κάθε X_i θα έχει την ίδια κατανομή με κάθε Y_i και λόγω ισονομίας κάθε $\widehat{X}_i$ θα έχει την ίδια κατανομή με κάθε $\widehat{Y}_i$, το οποίο είναι δυνατό μόνο αν $\widehat{X}_i = \widehat{Y}_i$ σχεδόν βέβαια. Άρα $P(\widehat{\mathbf{X}} = \widehat{\mathbf{Y}}) = 1$ αν και μόνο αν $\boldsymbol{X} =_{st} \boldsymbol{Y}$ δηλαδή, το $\boldsymbol{X}$ είναι ίσο με το $\boldsymbol{Y}$ κατά κατανομή. ■

Θεώρημα 8 : *Αν* $\boldsymbol{X} \leq_{st} \boldsymbol{Y}$ *και* $g: R^n \to R^k$ *είναι αύξουσα (κατά συντεταγμένες), τότε* $g(\boldsymbol{X}) \leq_{st} g(\boldsymbol{Y})$.

Απόδειξη. Η σχέση $\boldsymbol{X} \leq_{st} \boldsymbol{Y}$ έπεται ότι $Ef(\boldsymbol{X}) \leq Ef(\boldsymbol{Y})$ για όλες τις φραγμένες αύξουσες συναρτήσεις f, με $f: R^n \to R$. Επίσης $g: R^n \to R^k$ αύξουσα . Άρα η συνήθης στοχαστική διάταξη θα ισχύει, αφού η σύνθεση δύο αυξουσών συναρτήσεων $f \circ g$ είναι πάλι αύξουσα. ■

Το ακόλουθο Θεώρημα 9 είναι γνωστό ως θεώρημα του Efron (1965). Αποδείξεις και προεκτάσεις του θεωρήματος μπορούν να βρεθούν και στις εργασίες των Shanthikumar (1987), Daduna and Szekli (1996) και Liggett (2000).

Θεώρημα 9: *Έστω* $X_1, X_2,\dots, X_n$ *μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με λογαριθμοκοίλες (logconcave) πυκνότητες και έστω* $S = X_1 + \dots + X_n$. *τότε*

$$[(X_1,\dots,X_n) \mid S = s] \leq_{st} [(X_1,\dots,X_n) \mid S = t]$$

για κάθε $s < t$.

Ορισμός 10 : (α) *Για μία συνάρτηση* $f : R^n \to R$ *ορίζουμε τους τελεστές διαφοράς*

$$\Delta_i^{\varepsilon} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{x})$$

όπου $\boldsymbol{e}_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ *με το* 1 *να βρίσκεται στην i-συντεταγμένη και* $\varepsilon > 0$.

(β) *Μία συνάρτηση* $f : R^n \to R$ *ονομάζεται Δ-μονότονη, αν για κάθε υποσύνολο* $J = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ *και κάθε* $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\kappa > 0$,

$$\Delta_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots \Delta_{i_k}^{\varepsilon_k} f(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{για όλα τα } \boldsymbol{x}.$$

(γ) *Μία συνάρτηση* $f : R^n \to R$ *ονομάζεται Δ-αντίτονη, αν η* $g(\boldsymbol{x}) = f(-\boldsymbol{x})$ *είναι Δ-μονότονη. Δηλαδή, αν για κάθε υποσύνολο* $J = \{i_1,\ldots,i_k\} \subset \{1,2,\ldots, n\}$ *και κάθε* $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\kappa > 0$,

$$(-1)^k \Delta_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots \Delta_{i_k}^{\varepsilon_k} f(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{για όλα τα } \boldsymbol{x}.$$

Οι μέγιστοι γεννήτορες των διατάξεων orthant μπορούν να εκφρασθούν διαμέσου του συνόλου των *Δ*-μονότονων (*Δ*-monotone) και *Δ*-αντίτονων (*Δ*-antitone) συναρτήσεων, καθώς είναι γνωστό ότι οι πολυμεταβλητές συναρτήσεις κατανομής είναι *Δ*-μονότονες (Ruschendorf 1980) και οι πολυμεταβλητές συναρτήσεις επιβίωσης να είναι *Δ*-αντίτονες.

Γενικά, για μία συνάρτηση f ισχύει ότι αν η f είναι n φορές διαφορίσιμη, τότε η f είναι *Δ*-μονότονη αν και μόνο αν όλες οι μερικές παράγωγοι μέχρι τάξης n είναι μη αρνητικές.

Θεώρημα 11 : (α) *Ο μέγιστος γεννήτορας της ανώτερης διάταξης orthant είναι το σύνολο όλων των φραγμένων Δ-μονότονων συναρτήσεων.*

(β) *Ο μέγιστος γεννήτορας της κατώτερης διάταξης orthant είναι το σύνολο όλων των φραγμένων συναρτήσεων* f *τέτοιες ώστε η* $-f$ *είναι Δ-αντίτονη.*

Εκτός από τις *Δ*-μονότονες και *Δ*-αντίτονες συναρτήσεις, υπάρχουν και άλλες κλάσεις συναρτήσεων που παράγουν τις διατάξεις orthant. Το σύνολο των μη αρνητικών αυξουσών συναρτήσεων αποτελεί μία τέτοια κλάση. Για την κατώτερη διάταξη orthant, μία τέτοια κλάση είναι ένα σύνολο μη αρνητικών φθινουσών συναρτήσεων.

Θεώρημα 12 : *Έστω* $\boldsymbol{X}$ *και* $\boldsymbol{Y}$ *n-διάστατα τυχαία διανύσματα. Τότε*

(α) $\boldsymbol{X} \leq_{uo} \boldsymbol{Y}$ *αν και μόνο αν*

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(X_i)\right) \leq E\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(Y_i)\right)$$

για όλες τις μονομεταβλητές μη αρνητικές αύξουσες συναρτήσεις $f_1,\ldots,f_n$.

(β) $\boldsymbol{X} \le_{lo} \boldsymbol{Y}$ *αν και μόνο αν*

$$E\left(-\prod_{i=1}^{n} f_i(X_i)\right) \le E\left(-\prod_{i=1}^{n} f_i(Y_i)\right)$$

για όλες τις μονομεταβλητές μη αρνητικές φθίνουσες συναρτήσεις $f_1,\dots,f_n$.

Θεώρημα 13 : *Έστω* $\boldsymbol{X}$ *και* $\boldsymbol{Y}$ *δύο n-διάστατα μη αρνητικά τυχαία διανύσματα. Τότε*

1) $\boldsymbol{X} \le_{uo} \boldsymbol{Y}$ *αν και μόνο αν*

$$\min\{\alpha_1 X_1,\dots,\alpha_n X_n\} \le_{st} \min\{\alpha_1 Y_1,\dots,\alpha_n Y_n\}, \text{ για όλα τα } \alpha_1,\dots,\alpha_n > 0.$$

2) $\boldsymbol{X} \le_{lo} \boldsymbol{Y}$ *αν και μόνο αν*

$$\max\{\alpha_1 X_1,\dots,\alpha_n X_n\} \le_{st} \max\{\alpha_1 Y_1,\dots,\alpha_n Y_n\}, \text{ για όλα τα } \alpha_1,\dots,\alpha_n > 0.$$

Οι διατάξεις orthant διατηρούνται αναλλοίωτες κατά αύξοντες μετασχηματισμούς των μεταβλητών των τυχαίων διανυσμάτων.

Θεώρημα 14 : *Έστω* $g_1,\dots,g_n : R \to R$ *αύξουσες συναρτήσεις. Τότε*

(1) $(X_1,\dots,X_n) \le_{uo} (Y_1,\dots,Y_n)$ έπεται ότι $(g_1(X_1),\dots,g_n(X_n)) \le_{uo} (g_1(Y_1),\dots,g_n(Y_n))$

(2) $(X_1,\dots,X_n) \le_{lo} (Y_1,\dots,Y_n)$ έπεται ότι $(g_1(X_1),\dots,g_n(X_n)) \le_{lo} (g_1(Y_1),\dots,g_n(Y_n))$.

2.3 Κυρτές διατάξεις

Ορισμός 1 : *Έστω* $\boldsymbol{X}$ *και* $\boldsymbol{Y}$ *n-διάστατα τυχαία διανύσματα με πεπερασμένες μέσες τιμές. Τότε*

(1) *Το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{X}$ *είναι μικρότερο από το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{Y}$ *ως προς την αύξουσα κυρτή διάταξη και γράφουμε* $\boldsymbol{X} \le_{icx} \boldsymbol{Y}$, *αν* $Ef(\boldsymbol{X}) \le Ef(\boldsymbol{Y})$ *για όλες τις αύξουσες κυρτές συναρτήσεις* $f : R^n \to R$, *ώστε οι μέσες τιμές να υπάρχουν.*

(2) *Το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{X}$ *είναι μικρότερο από το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{Y}$ *ως προς την αύξουσα κοίλη διάταξη και γράφουμε* $\boldsymbol{X} \le_{icv} \boldsymbol{Y}$, *αν* $Ef(\boldsymbol{X}) \le Ef(\boldsymbol{Y})$ *για όλες τις αύξουσες κοίλες συναρτήσεις* $f : R^n \to R$, *ώστε οι μέσες τιμές να υπάρχουν.*

(3) *Το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{X}$ *είναι μικρότερο από το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{Y}$ *ως προς την κυρτή διάταξη και γράφουμε* $\boldsymbol{X} \le_{cx} \boldsymbol{Y}$, *αν* $Ef(\boldsymbol{X}) \le Ef(\boldsymbol{Y})$ *για όλες τις κυρτές συναρτήσεις* $f : R^n \to R$, *ώστε οι μέσες τιμές να υπάρχουν.*

Οι κυρτές διατάξεις (όπως και στην μονομεταβλητή περίπτωση) είναι σχέσεις διάταξης που συγκρίνουν τη μεταβλητότητα τυχαίων διανυσμάτων ή πολυμεταβλητών κατανομών.

Θεώρημα 2 : (1) $\boldsymbol{X} \leq_{cx} \boldsymbol{Y}$ *αν και μόνο αν υπάρχουν τυχαία διανύσματα* $\widehat{\mathbf{X}} =_{st} \boldsymbol{X}$ *και* $\widehat{\mathbf{Y}} =_{st} \boldsymbol{Y}$ *έτσι ώστε*

$$E(\widehat{\mathbf{Y}} \mid \widehat{\mathbf{X}}) = \widehat{\mathbf{X}} \text{ σχεδόν βέβαια.}$$

(2) $\boldsymbol{X} \leq_{icx} \boldsymbol{Y}$ *αν και μόνο αν υπάρχουν τυχαία διανύσματα* $\widehat{\mathbf{X}} =_{st} \boldsymbol{X}$ *και* $\widehat{\mathbf{Y}} =_{st} \boldsymbol{Y}$ *έτσι ώστε*

$$E(\widehat{\mathbf{Y}} \mid \widehat{\mathbf{X}}) \geq \widehat{\mathbf{X}} \text{ σχεδόν βέβαια.}$$

(3) $\boldsymbol{X} \leq_{icv} \boldsymbol{Y}$ *αν και μόνο αν υπάρχουν τυχαία διανύσματα* $\widehat{\mathbf{X}} =_{st} \boldsymbol{X}$ *και* $\widehat{\mathbf{Y}} =_{st} \boldsymbol{Y}$ *έτσι ώστε*

$$E(\widehat{\mathbf{Y}} \mid \widehat{\mathbf{X}}) \leq \widehat{\mathbf{X}} \text{ σχεδόν βέβαια.}$$

Για κατανομές με πεπερασμένο στήριγμα, οι Elton and Hill (1998) πρότειναν μια κατασκευαστική απόδειξη του (1) παραπάνω. Το ακόλουθο θεώρημα αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος 12 της παραγράφου 1.3.

Θεώρημα 3 : *Αν* $\boldsymbol{X} \leq_{icx} \boldsymbol{Y}$, *τότε υπάρχει ένα τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{Z}$ *έτσι ώστε* $\boldsymbol{X} \leq_{st} \boldsymbol{Z} \leq_{cx} \boldsymbol{Y}$.

Απόδειξη. Αφού ισχύει $\boldsymbol{X} \leq_{icx} \boldsymbol{Y}$ έπεται ότι υπάρχουν τυχαία διανύσματα $\widehat{\mathbf{X}} =_{st} \boldsymbol{X}$ και $\widehat{\mathbf{Y}} =_{st} \boldsymbol{Y}$ έτσι ώστε $P(E(\widehat{\mathbf{Y}} \mid \widehat{\mathbf{X}}) \geq \widehat{\mathbf{X}}) = 1$ (λόγω του Θεωρήματος 2) και θέτουμε $E(\widehat{\mathbf{Y}} \mid \widehat{\mathbf{X}}) = \mathbf{Z}$. Τότε

$$P(\mathbf{Z} \geq \widehat{\mathbf{X}}) = 1 \text{ και } P(E(\widehat{\mathbf{Y}} \mid \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}) = 1.$$

Άρα από το Θεώρημα 2 εξάγεται ότι $\mathbf{Z} \leq_{cx} \mathbf{Y}$ και από το Θεώρημα 4 της πολυμεταβλητής συνήθους στοχαστικής διάταξης $\mathbf{X} \leq_{st} \mathbf{Z}$.■

Θεώρημα 4 : *Έστω* $(\boldsymbol{X}^{(k)})$ *και* $(\boldsymbol{Y}^{(k)})$ *ακολουθίες τυχαίων διανυσμάτων με* $\boldsymbol{X}^{(k)} \leq_{cx} \boldsymbol{Y}^{(k)}$ (ή $\boldsymbol{X}^{(k)} \leq_{icx} \boldsymbol{Y}^{(k)}$) *για όλα τα* k. *Αν*

$$\boldsymbol{X}^{(k)} \to \boldsymbol{X} \text{ και } \boldsymbol{Y}^{(k)} \to \boldsymbol{Y} \text{ κατά κατανομή}$$

και αν $E\boldsymbol{X}^{(k)} \to E\boldsymbol{X}$ *και* $E\boldsymbol{Y}^{(k)} \to E\boldsymbol{Y}$, *τότε* $\boldsymbol{X} \leq_{cx} \boldsymbol{Y}$ (*ή* $\boldsymbol{X} \leq_{icx} \boldsymbol{Y}$).

2.4 Γραμμικές κυρτές διατάξεις

Ορισμός 1 : *Έστω* $\boldsymbol{X}$ *και* $\boldsymbol{Y}$ *n-διάστατα τυχαία διανύσματα.*

(1) *Το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{X}$ *είναι μικρότερο από το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{Y}$ *ως προς τη γραμμική κυρτή διάταξη και γράφουμε* $\boldsymbol{X} \leq_{lcx} \boldsymbol{Y}$, *αν* $\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{X} \leq_{cx} \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{Y}$ *για όλα τα* $\boldsymbol{\alpha} \in R^n$.

(2) *Το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{X}$ *είναι μικρότερο από το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{Y}$ *ως προς τη θετική γραμμική κυρτή διάταξη και γράφουμε* $\boldsymbol{X} \leq_{plcx} \boldsymbol{Y}$, *αν* $\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{X} \leq_{cx} \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{Y}$ *για όλα τα* $\boldsymbol{\alpha} \geq 0$ *δηλαδή* $\boldsymbol{\alpha} \in R_+^n$.

(3) *Το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{X}$ *είναι μικρότερο από το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{Y}$ *ως προς την αύξουσα θετική γραμμική κυρτή διάταξη και γράφουμε* $\boldsymbol{X} \leq_{iplcx} \boldsymbol{Y}$, *αν* $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{X} \leq_{icx} \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{Y}$ *για όλα τα* $\boldsymbol{a} \geq 0$.

Η αύξουσα γραμμική κυρτή διάταξη ($\boldsymbol{X} \leq_{ilcx} \boldsymbol{Y}$, αν $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{X} \leq_{icx} \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{Y}$ για όλα τα $\boldsymbol{a} \in R^n$) έχει αποδειχθεί ισοδύναμη με την γραμμική κυρτή διάταξη και για αυτό δεν ορίστηκε παραπάνω.

Στον ορισμό, παρατηρούμε ότι είναι καθοριστικό να γνωρίζουμε πού ανήκει το διάνυσμα $\boldsymbol{a}$. Το $\boldsymbol{a}$ είτε είναι μη αρνητικό, $\boldsymbol{a} \geq 0$ ($\boldsymbol{a} \in R_+^n$), είτε ανήκει σε όλο το R^n, $\boldsymbol{a} \in R^n$.

Ένα παράδειγμα εφαρμογής των παραπάνω διατάξεων μπορεί εμφανισθεί κατά τη σύγκριση οικονομικών μεγεθών. Υποθέτουμε ότι το τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X} = (X_1,\dots, X_n)$ αναπαριστά το πλήθος n εμπορευμάτων (π.χ. σε να κιβώτιο). Συγκεκριμένα κάθε X_i εκφράζει το πλήθος τεμαχίων του εμπορεύματος i. Κάθε εμπόρευμα i έχει τιμή a_i (περισσότερο με τη σημασία της αξίας παρά της τιμής). Το ίδιο ισχύει και για ένα άλλο τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{Y}=(Y_1,\dots,Y_n)$. Για να συγκρίνουμε τα δύο σύνολα εμπορευμάτων $\boldsymbol{X}$ και $\boldsymbol{Y}$, απλώς συγκρίνουμε τις αξίες (τιμές) τους δηλαδή, τα διανύσματα $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{X}$ και $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{Y}$. Ωστόσο δεν είμαστε πάντα σε θέση να γνωρίζουμε το διάνυσμα τιμών $\boldsymbol{a}$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις, όπου το $\boldsymbol{a} \in R_+^n$ ή $\boldsymbol{a} \in R^n$. Όταν $\boldsymbol{a} \in R_+^n$ τα εμπορεύματα έχουν μη αρνητικές τιμές, ενώ όταν $\boldsymbol{a} \in R^n$ παίρνουν και αρνητικές τιμές υπό την έννοια ότι κάποια εμπορεύματα αποδεικνύονται ζημιογόνα και ο ενδιαφερόμενος πρέπει να απαλλαγεί από την κράτηση αυτών.

Παρόλο που η κυρτή διάταξη είναι γενικά πιο ισχυρή από την γραμμική κυρτή διάταξη, ορισμένες φορές οι δύο διατάξεις συμπίπτουν. Αυτό συμβαίνει στην οικογένεια των πολυμεταβλητών κανονικών κατανομών, όπως επίσης και σε μερικές άλλες παραμετρικές οικογένειες κατανομών.

2.5 Κατά συντεταγμένες κυρτή διάταξη (componentwise convex)

Ορισμός 1 : *Έστω* $\boldsymbol{X}$ *και* $\boldsymbol{Y}$ *τυχαία διανύσματα.*

(1) *Το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{X}$ *είναι μικρότερο από το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{Y}$ ως προς την κατά συντεταγμένες (*componentwise*) *κυρτή διάταξη και γράφουμε* $\boldsymbol{X} \leq_{ccx} \boldsymbol{Y}$, *αν* $Ef(\boldsymbol{X}) \leq Ef(\boldsymbol{Y})$ *για όλες τις κατά συντεταγμένες* (*componentwise*) *κυρτές συναρτήσεις* $f: R^n \to R$, *ώστε οι μέσες τιμές να υπάρχουν.*

(2) *Το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{X}$ *είναι μικρότερο από το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{Y}$ *ως προς την αύξουσα κατά συντεταγμένες κυρτή διάταξη και γράφουμε* $\boldsymbol{X} \leq_{iccx} \boldsymbol{Y}$, *αν* $Ef(\boldsymbol{X}) \leq Ef(\boldsymbol{Y})$ *για όλες τις αύξουσες*

κατά συντεταγμένες (*componentwise*) *κυρτές συναρτήσεις* $f : R^n \to R$, *ώστε οι μέσες τιμές να υπάρχουν*.

Έστω μία συνάρτηση $f(\boldsymbol{x})$ και $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)$. Αν ισχυριστούμε ότι η f είναι κατά συντεταγμένες κυρτή σημαίνει ότι η f είναι κυρτή ως προς ένα οποιοδήποτε x_i, για $i=1,\ldots,n$, με τα υπόλοιπα x_i να κρατούνται σταθερά. Για παράδειγμα η f κυρτή ως προς x_1 με τα $x_2,x_3,\ldots,x_n$ σταθερά κ.ο.κ. Αν η f είναι δύο φορές διαφορίσιμη, τότε η f είναι κυρτή κατά συντεταγμένες αν και μόνο αν

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(\mathbf{x}) \geq 0,$$

για όλα τα $\boldsymbol{x}$. Γενικά, η κατά συντεταγμένες κυρτή διάταξη έπεται την κυρτή διάταξη και καθίσταται πιο ισχυρή από αυτήν. Η διάταξη αυτή εισήχθη από τον Mosler (1982), όπως επίσης, έχει παρουσιασθεί εκτενώς από τους Shaked και Shanthikumar (1994), παράγραφος 5.A.6.

Θεώρημα 2 : *Έστω* $\boldsymbol{X}$ *και* $\boldsymbol{Y}$ *τυχαία διανύσματα.*

(1) *Αν* $\boldsymbol{X} \leq_{ccx} \boldsymbol{Y}$, *τότε* $\boldsymbol{X} \leq_{cx} \boldsymbol{Y}$.

(2) *Αν* $\boldsymbol{X} \leq_{iccx} \boldsymbol{Y}$, *τότε* $\boldsymbol{X} \leq_{icx} \boldsymbol{Y}$.

(3) *Αν* $\boldsymbol{X} \leq_{ccx} \boldsymbol{Y}$, *τότε* $X_i \leq_{cx} Y_i$ *για* $i=1,\ldots,n$.

(4) *Αν* $\boldsymbol{X} \leq_{ccx} \boldsymbol{Y}$, *τότε* $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$ *για* $1 \leq i < j \leq n$.

Η ιδιότητα της κατά συντεταγμένες (componentwise) κυρτής διάταξης δύο τυχαίων διανυσμάτων $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$, για $1 \leq i < j \leq n$, σημαίνει ότι τα δύο διανύσματα έχουν τον ίδιο πίνακα συνδιακυμάνσεων.

Θεώρημα 3 : *Έστω* $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ *και* $\boldsymbol{Y} = (Y_1,\ldots,Y_n)$ *τυχαία διανύσματα με ανεξάρτητα στοιχεία, δηλαδή,* $X_1,\ldots,X_n$ *και* $Y_1,\ldots,Y_n$ *ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Τότε* $\boldsymbol{X} \leq_{ccx} \boldsymbol{Y}$ *αν και μόνο αν* $X_i \leq_{cx} Y_i$ *για* $i=1,\ldots,n$.

2.6 Διατάξεις εξάρτησης

Στην κατά συντεταγμένη κυρτή διάταξη είδαμε ότι αν

$$\boldsymbol{X} \leq_{ccx} \boldsymbol{Y} \quad \text{τότε} \quad \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$$

για $1 \leq i < j \leq n$, γιατί οι συναρτήσεις $f(\boldsymbol{x}) = x_i x_j$ και $f(\boldsymbol{x}) = -x_i x_j$, όπου $1 \leq i < j \leq n$, είναι κατά συντεταγμένη γραμμικές και κατά συντεταγμένη κυρτές. Το γεγονός ότι τα δύο διανύσματα έχουν τον ίδιο πίνακα συνδιακυμάνσεων, μας προϊδεάζει για την έννοια της εξάρτησης, καθώς η συνδιακύμανση συνιστά ένα μέτρο της γραμμικής εξάρτησης. Γενικά, η οποιαδήποτε διάταξη πολυμεταβλητών κατανομών με ίδιες περιθώριες κατανομές ενέχει την έννοια της εξάρτησης.

Η ανάπτυξη των διατάξεων εξάρτησης θα πραγματοποιηθεί βάσει της διάκρισης μεταξύ των περιπτώσεων $n = 2$ και $n \geq 3$. Στην περίπτωση που τα τυχαία διανύσματα ή οι κατανομές έχουν δύο μεταβλητές ($n = 2$) θα εξετάσουμε τη διάταξη συμφωνίας (concordance order, Tchen 1980 ή Joe 1997)

2.6.1 Η περίπτωση $n = 2$ - Διάταξη συμφωνίας (concordance order).

Κάθε διάταξη εξάρτησης παραμένει αναλλοίωτη ως προς μετασχηματισμούς κλίμακας λόγω γραμμικότητας, αφού έπεται τη διάταξη των συνδιακυμάνσεων, με τις τελευταίες να αποτελούν μέτρα γραμμικής εξάρτησης.

Ορισμός 1 : *Έστω $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ και $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)$ διμεταβλητά τυχαία διανύσματα με τις ίδιες περιθώριες κατανομές. Το $\boldsymbol{X}$ είναι μικρότερο από το $\boldsymbol{Y}$ ως προς τη διάταξη συμφωνίας (concordance order) και γράφουμε $\boldsymbol{X} \leq_c \boldsymbol{Y}$, αν*

$$P(X_1 \leq s, X_2 \leq t) \leq P(Y_1 \leq s, Y_2 \leq t)$$

για όλα τα s και t.

Υπάρχουν πάρα πολλοί ισοδύναμοι ορισμοί του συγκεκριμένου είδους στοχαστικής διάταξης όπως διαφαίνεται και από το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2 : *Έστω $\boldsymbol{X}$ και $\boldsymbol{Y}$ διμεταβλητά τυχαία διανύσματα με τις ίδιες περιθώριες κατανομές. Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες.*

(1) $\boldsymbol{X} \leq_c \boldsymbol{Y}$.

(2) $P(X_1 > s, X_2 > t) \leq P(Y_1 > s, Y_2 > t)$ *για όλα τα s και t.*

(3) $E(f_1(x_1) f_2(x_2)) \leq E(f_1(Y_1) f_2(Y_2))$ *για όλες τις αύξουσες f_1 και f_2.*

(4) $\mathrm{Cov}(f_1(x_1), f_2(x_2)) \leq \mathrm{Cov}(f_1(Y_1), f_2(Y_2))$ *για όλες τις αύξουσες f_1 και f_2.*

(5) $E f(\boldsymbol{X}) \leq E f(\boldsymbol{Y})$ *για όλες τις Δ-μονότονες συναρτήσεις $f : R^2 \to R$.*

(6) $E f(\boldsymbol{X}) \leq E f(\boldsymbol{Y})$ *για όλες τις supermodular συναρτήσεις $f : R^2 \to R$ δηλαδή, για όλες τις συναρτήσεις με*

$$f(x_1 + \varepsilon, x_2 + \delta) + f(x_1, x_2) \geq f(x_1, x_2 + \delta) + f(x_1 + \varepsilon, x_2)$$

με x_1, x_2 πραγματικά και $\varepsilon, \delta > 0$.

Για τη σύγκριση δύο διμεταβλητών κατανομών, έστω F και F', που έχουν τις ίδιες περιθώριες F_1 και F_2, ως προς τη διάταξη συμφωνίας ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες οι οποίες έχουν αποδειχθεί από τους Kimeldorf and Sampson (1987, 1989).

(1) $F \leq F'$ έπεται ότι $F(x_1, x_2) \leq F'(x_1, x_2)$ για όλα τα x_1 και x_2.

(2) Ιδιότητα της μεταβατικότητας: $F \leq F'$ και $F' \leq F''$ έπεται ότι $F \leq F''$.

(3) Ιδιότητα της ανακλαστικότητας: $F \leq F$ για όλες τις F.

(4) Ιδιότητα της αντισυμμετρικότητας: $F \leq F'$ και $F' \leq F$ υπονοεί $F = F'$.

(5) Ιδιότητα των φραγμάτων: $F^- \leq F \leq F^+$, όπου $F^-(\boldsymbol{x}) = \max\{F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1\}$ το κατώτερο όριο Frechet και $F^+(\boldsymbol{x}) = \min\{F_1(x_1), F_2(x_2)\}$ το ανώτερο όριο Frechet.

(6) Ιδιότητα της ασθενούς σύγκλισης: $F_\kappa \leq F_\kappa'$, $\kappa \in N$, και $F_\kappa \rightarrow F$, $F_\kappa' \rightarrow F'$ ασθενώς, έπεται $F \leq F'$.

(7) Ιδιότητα του αναλλοίωτου ως προς τη διάταξη των δεικτών: $(X_1, X_2) \leq (X_1', X_2')$ έπεται $(X_2, X_1) \leq (X_2', X_1')$.

(8) Ιδιότητα του αναλλοίωτου ως προς αύξοντες μετασχηματισμούς: $(X_1, X_2) \leq (X_1', X_2')$ έπεται $(g_1(X_1), g_2(X_2)) \leq (g_1(X_1'), g_2(X_2'))$ για όλες τις αύξουσες συναρτήσεις g_1 και g_2.

(9) Ιδιότητα του αναλλοίωτου ως προς φθίνοντες μετασχηματισμούς: $(X_1, X_2) \leq (X_1', X_2')$ έπεται $(g(X_1'), X_2') \leq (g(X_1), X_2)$ για όλες τις φθίνουσες συναρτήσεις g.

Η μόνη ολοκληρωτική στοχαστική διάταξη που ικανοποιεί και τις εννέα ιδιότητες είναι η διάταξη συμφωνίας.

2.6.2. Η περίπτωση $n > 2$ - Πολυμεταβλητές διατάξεις εξάρτησης

Σε αντιδιαστολή με τη διμεταβλητή περίπτωση, για κατανομές με περισσότερες των δύο μεταβλητών ($n \geq 3$) υπάρχουν αρκετές ολοκληρωτικές διατάξεις που είναι πολυμεταβλητές διατάξεις εξάρτησης. Αλλά, οι ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τη διάταξη συμφωνίας δεν εξακολουθούν να παραμένουν αληθείς για διατάξεις κατανομών μεγαλύτερης διάστασης. Για παράδειγμα, η ιδιότητα των φραγμάτων δεν ισχύει, γιατί το κατώτερο όριο Frechet δεν αποτελεί πάντοτε μία συνάρτηση κατανομής όταν $n \geq 3$.

Ορισμός 3 : *$\Gamma(F_1,\ldots,F_n)$ είναι το σύνολο των τυχαίων διανυσμάτων, που έχουν τις ίδιες μονομεταβλητές περιθώριες $F_1, \ldots, F_n$. Μία διμελής σχέση $\leq$ στο $\Gamma(F_1,\ldots,F_n)$ ονομάζεται πολυμεταβλητή διάταξη εξάρτησης και τη συμβολίζουμε MPDO, αν πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες*

(1) *Ιδιότητα της διμεταβλητής συμφωνίας*: $F \leq F' \Rightarrow F_{ij} \leq_c F_{ij}'$ *για* $1 \leq i < j \leq n$, *όπου* F_{ij} *και* F_{ij}' *είναι οι* (i, j) *διμεταβλητές περιθώριες.*

(2) *Ιδιότητα της μεταβατικότητας*: $F \leq F'$ *και* $F' \leq F''$ *έπεται ότι* $F \leq F''$.

(3) *Ιδιότητα της ανακλαστικότητας*: $F \leq F$ *για όλες τις* F.

(4) *Ιδιότητα της αντισυμμετρικότητας*: $F \leq F'$ *και* $F' \leq F$ *έπεται ότι* $F = F'$.

(5) *Ιδιότητα των φραγμάτων*: $F \leq F^{+}$, *όπου* $F^{+}(\boldsymbol{x}) = \min\{F_i(x_i)\}$ *το ανώτερο όριο Frechet*

(6) *Ιδιότητα της ασθενούς σύγκλισης*: $F_\kappa \leq F_\kappa'$, $\kappa \in N$, *και* $F_\kappa \to F$, $F_\kappa' \to F$ *ασθενώς, έπεται ότι* $F \leq F'$.

(7) *Ιδιότητα της μετάθεσης των δεικτών*: $(X_1, \ldots, X_n) \leq (X_1', \ldots, X_n')$ *έπεται ότι* $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}) \leq (X'_{i_1}, \ldots, X'_{i_n})$ *για όλες τις μεταθέσεις* $(i_1, \ldots, i_n)$ *των* $(1, \ldots, n)$.

(8) *Ιδιότητα του αύξοντα μετασχηματισμού*: $(X_1, \ldots, X_n) \leq (X_1', \ldots, X_n')$ *έπεται ότι* $(g_1(X_1), \ldots, g_n(X_n)) \leq (g_1(X_1'), \ldots, g_n(X_n'))$ *για όλες τις αύξουσες συναρτήσεις* $g_1, \ldots, g_n$.

(9) *Ιδιότητα της κλειστότητας ως προς τις περιθώριες*: $(X_1, \ldots, X_n) \leq (X_1', \ldots, X_n')$ *έπεται ότι* $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}) \leq (X'_{i_1}, \ldots, X'_{i_n})$ *για όλα τα* $i_1, \ldots, i_k$ *και* $2 \leq k \leq n$.

Από τον ορισμό των διατάξεων orthant μας είναι γνωστό ότι $\boldsymbol{X} \leq_{uo} \boldsymbol{Y}$ αν $\overline{F}_{\mathbf{X}}(t) \leq \overline{F}_{\mathbf{Y}}(t)$ για κάθε t και $\boldsymbol{X} \leq_{lo} \boldsymbol{Y}$ αν $F_{\boldsymbol{X}}(t) \geq F_{\boldsymbol{Y}}(t)$ για κάθε t. Επίσης, για τη διάταξη συμφωνίας ισχύει ότι $\boldsymbol{X} \leq_c \boldsymbol{Y}$ αν

$$P(X_1 \leq s, X_2 \leq t) \leq P(Y_1 \leq s, Y_2 \leq t) \quad \text{ή} \quad P(X_1 > s, X_2 > t) \leq P(Y_1 > s, Y_2 > t)$$

για όλα τα s και t.

2.7 Supermodular διάταξη

Ορισμός 1 : *Μία συνάρτηση* f: $R^n \to R$ *ονομάζεται supermodular, αν*

$$\Delta_i^\varepsilon \Delta_j^\delta f(\mathbf{x}) \geq 0$$

για όλα τα $\boldsymbol{x} \in R^n$, $1 \leq i < j \leq n$ *και* $\varepsilon, \delta > 0$. *Το σύνολο όλων των supermodular συναρτήσεων συμβολίζεται ως SM και το σύνολο όλων των αυξουσών supermodular συναρτήσεων ως ISM.*

Η διάταξη συμφωνίας δύο τυχαίων διανυσμάτων $\boldsymbol{X}$ και $\boldsymbol{Y}$ είναι ισοδύναμη με $Ef(\boldsymbol{X}) \leq Ef(\boldsymbol{Y})$ για όλες τις supermodular συναρτήσεις $f: R^2 \to R$. Δεδομένου της μεγαλύτερης κλάσης των supermodular συναρτήσεων, η σύγκριση τυχαίων διανυσμάτων ως προς τη supermodular διάταξη είναι ισχυρότερη από αυτή της διάταξης συμφωνίας (concordance order). Η supermodular διάταξη είναι μία διάταξη εξάρτησης και εναλλακτικά ορίζεται μέσω τελεστών διαφοράς. Η ισοδυναμία των δύο ορισμών έχει αποδειχθεί από τον Kemperman (1977).

Ορισμός 2 : *Μία συνάρτηση* $f: R^n \to \mathrm{R}$ *ονομάζεται supermodular, αν*

$$f(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) + f(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$

*για όλα τα **x** και **y**, όπου οι τελεστές* $\wedge$ *και* $\vee$ *ορίζονται*

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = (\min\{x_1, y_1\}, ..., \min\{x_n, y_n\}) \quad \text{και} \quad \mathbf{x} \vee \mathbf{y} = (\max\{x_1, y_1\}, ..., \max\{x_n, y_n\})$$

Θεώρημα 3 : (α) *Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές διαφορίσιμη, τότε η* $f \in SM$ *αν και μόνο αν*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x}) \geq 0$$

*για όλα τα **x** και* $1 \leq i < j \leq n$.

(β) *Αν* $g_1,\ldots,g_n$: $R \rightarrow R$ *είναι αύξουσες και* $f \in SM$, *τότε* $f(g_1(\cdot),...,g_n(\cdot)) \in SM$.

(γ) *Αν* $f, g \in SM$, *τότε* $\alpha f + \beta g \in SM$ *για όλα τα* $\alpha, \beta \geq 0$.

(δ) *Αν* $f, g \in ISM$ *και* $f, g \geq 0$, *τότε* $f \cdot g \in ISM$.

(ε) *Αν* $f \in ISM$, *τότε* $\max\{f, c\} \in ISM$ *για όλες τις πραγματικές σταθερές c*.

(στ) *Αν f είναι αύξουσα και supermodular και φ*: $R \rightarrow R$ *είναι αύξουσα και κυρτή, τότε η σύνθεση* $\varphi \circ f \in ISM$.

Για τις αποδείξεις των πιο πάνω ιδιοτήτων των supermodular συναρτήσεων παραπέμπουμε στους Marshall and Olkin (1979) και Bauerle (1997a).

Ορισμός 4 : (1) *Το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{X} = (X_1 ,\ldots, X_n)$ *είναι μικρότερο από το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots,Y_n)$ *ως προς τη supermodular (αύξουσα supermodular, συμμετρική supermodular) διάταξη και γράφουμε* $\boldsymbol{X} \leq_{sm} \boldsymbol{Y}$ ($\boldsymbol{X} \leq_{ism} \boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{X} \leq_{symsm} \boldsymbol{Y}$ *αντίστοιχα*), *αν*

$$Ef(\boldsymbol{X}) \leq Ef(\boldsymbol{Y})$$

για όλες τις supermodular (αύξουσες supermodular, συμμετρικές supermodular αντίστοιχα) συναρτήσεις f, ώστε οι μέσες τιμές να υπάρχουν.

Η εισαγωγή του ορισμού της supermodular διάταξης πραγματοποιήθηκε από τους Szekli, Disney and Hur (1994). Βέβαια ως έννοια παρουσιάστηκε νωρίτερα σε εργασίες των Tchen (1980), Rolski (1986) και Meester and Shanthikumar (1993). Επιπλέον αναφορές αυτής της διάταξης υπάρχουν στις εργασίες των Bauerle (1997a, b), Bauerle and Muller (1998), Muller (1997c), Muller and Scarsini (2000), Shaked and Shanthikumar (1997) και Szekli (1995).

Στο σημείο αυτό αξίζει να τονιστεί ότι η συμμετρική supermodular διάταξη δεν συνιστά μία διάταξη εξάρτησης, αλλά χρησιμοποιείται για τη σύγκριση τυχαίων διανυσμάτων με ανεξάρτητα στοιχεία (Frostig 2001).

Θεώρημα 5 : *Η supermodular διάταξη έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.*

(α) *Αν* $\boldsymbol{X} \leq_{sm} \boldsymbol{Y}$, *τότε οι* $\boldsymbol{X}$ *και* $\boldsymbol{Y}$ *έχουν τις ίδιες περιθώριες.*

(β) *Αν* $\boldsymbol{X} \leq_{sm} \boldsymbol{Y}$, *τότε* $\boldsymbol{X} \leq_{c} \boldsymbol{Y}$.

(γ) *Αν* $\boldsymbol{X} \leq_{sm} \boldsymbol{Y}$, *τότε* $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) \leq \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$ *για* $1 \leq i < j \leq n$.

(δ) *Αν* $\boldsymbol{X} \leq_{sm} \boldsymbol{Y}$, *τότε* $\boldsymbol{X} \leq_{plcx} \boldsymbol{Y}$.

Βέβαια, στην αύξουσα supermodular διάταξη η ισότητα των περιθωρίων δεν είναι απαραίτητη. Έτσι δύο τυχαία διανύσματα συγκρίνονται υπό τη συγκεκριμένη διάταξη χωρίς να έχουν ίδιες περιθώριες κατανομές, με τον περιορισμό, όμως, ότι τα στοιχεία των τυχαίων διανυσμάτων διατάσσονται ως προς τη συνήθη στοχαστική διάταξη.

Θεώρημα 6 : *Η αύξουσα supermodular διάταξη έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.*

(α) *Αν* $\boldsymbol{X} \leq_{ism} \boldsymbol{Y}$, *τότε* $X_i \leq_{st} Y_i$ *για* $i = 1,\ldots,n$.

(β) *Αν* $\boldsymbol{X} \leq_{ism} \boldsymbol{Y}$, *τότε* $\boldsymbol{X} \leq_{uo} \boldsymbol{Y}$.

(γ) *Αν* $\boldsymbol{X} \leq_{ism} \boldsymbol{Y}$, *τότε* $\boldsymbol{X} \leq_{plcx} \boldsymbol{Y}$.

Όταν οι διαστάσεις των τυχαίων διανυσμάτων ή των κατανομών είναι τάξης 2 ($n = 2$) οι διατάξεις συμφωνίας (concordance) και supermodular συμπίπτουν. Ωστόσο, για μεγαλύτερες διαστάσεις ($n \geq 3$) αυτό παύει να ισχύει. Αναζητώντας την ισχυρότερη διάταξη μεταξύ των δύο έχει αποδειχθεί ότι για $n \geq 4$ (Joe 1990) και $n = 3$ (Muller και Scarsini 2000), η supermodular είναι αυστηρώς ισχυρότερη της διάταξης συμφωνίας.

Το παρακάτω θεώρημα οφείλεται στους Muller και Scarsini (2000).

Θεώρημα 7 : *Η supermodular διάταξη είναι μία πολυμεταβλητή διάταξη θετικής εξάρτησης* (*MPDO*) και *έχει τις εννέα ιδιότητες* (για $n \geq 3$) *των MPDO, που παρουσιάσαμε στις διατάξεις εξάρτησης.*

Προκειμένου να δείξουμε ότι η supermodular διάταξη έχει την ιδιότητα της ασθενούς σύγκλισης, στηριζόμαστε στο γεγονός ότι και η αύξουσα supermodular διάταξη έχει αυτήν την ιδιότητα σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 8 : *Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(1) $\boldsymbol{X} \leq_{ism} \boldsymbol{Y}$.

(2) $Ef(\boldsymbol{X}) \leq Ef(\boldsymbol{Y})$ *για όλες τις φραγμένες συνεχείς αύξουσες supermodular συναρτήσεις f.*

Θεώρημα 9 : *Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(1) $\boldsymbol{X} \leq_{sm} \boldsymbol{Y}$.

(2) $\boldsymbol{X}$ *και* $\boldsymbol{Y}$ *έχουν τις ίδιες περιθώριες και* $\boldsymbol{X} \leq_{ism} \boldsymbol{Y}$.

(3) $\boldsymbol{X}$ *και* $\boldsymbol{Y}$ *έχουν την ίδια μέση τιμή και* $\boldsymbol{X} \leq_{ism} \boldsymbol{Y}$.

Ο συγκερασμός των δύο προηγούμενων θεωρημάτων αποδίδει την ιδιότητα της ασθενούς σύγκλισης για τη supermodular διάταξη.

Θεώρημα 10 : *Η supermodular διάταξη και η αύξουσα supermodular διάταξη είναι κλειστές ως προς την ασθενή σύγκλιση.*

Όταν συγκρίνουμε πολυμεταβλητές κατανομές ως προς διατάξεις εξάρτησης για διάσταση $n \geq 3$, είδαμε ότι ισχύουν εννέα ιδιότητες. Μία εξ' αυτών μας πληροφορεί ότι η συγκρινόμενη κατανομή, έστω F, που ανήκει στη κλάση Frechet $\Gamma(F_1,\ldots,F_n)$, δηλαδή στην κλάση των συναρτήσεων κατανομής με ίσες περιθώριες κατανομές, φράσσεται από το ανώτερο όριο Frechet, το οποίο για $n \geq 3$ είναι μία συνάρτηση κατανομής. Προηγουμένως ισχυριστήκαμε ότι η supermodular διάταξη είναι μία πολυμεταβλητή διάταξη θετικής εξάρτησης (*MPDO*) και σύμφωνα με τις εννέα ιδιότητες των *MPDO*, για μία συγκρινόμενη κατανομή F της κλάσης $\Gamma(F_1,\ldots,F_n)$ θα ισχύει ότι $F \leq_{sm} F^+$. Επομένως, παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα μέγιστο για τη συνάρτηση κατανομής F ως προς τη supermodular διάταξη, που είναι το ανώτερο όριο Frechet.

Αντιθέτως, για $n \geq 3$ η συνάρτηση κατανομής F της κλάσης $\Gamma(F_1,\ldots,F_n)$ δεν φράσσεται από το κατώτερο όριο Frechet καθώς το τελευταίο δεν αποτελεί πάντοτε μία συνάρτηση κατανομής. Συνεπώς, δεν μπορούμε να έχουμε ένα ελάχιστο για την F ως προς τη supermodular διάταξη ώστε $F^- \leq_{sm} F$. Ωστόσο αν πληρούνται ικανές και αναγκαίες συνθήκες, σύμφωνα με το Θεώρημα 2 του παρόντος κεφαλαίου, το κατώτερο όριο Frechet μπορεί να συνιστά μία συνάρτηση κατανομής έτσι ώστε να υπάρχει ένα ελάχιστο για την F ως προς τη supermodular διάταξη.

2.8 Σχέδια εξάρτησης

Από τις διατάξεις εξάρτησης ανακύπτουν διάφορα σχέδια εξάρτησης. Θεωρούμε το τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X}^{\perp}$ το οποίο έχει ανεξάρτητα στοιχεία και το τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X}$ όπου $\boldsymbol{X}^{\perp}$ και $\boldsymbol{X}$ έχουν ίδιες περιθώριες. Έστω ότι η σχέση $\leq$ συμβολίζει μία οποιαδήποτε διάταξη εξάρτησης. Τότε το τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X}$ θα είναι θετικά εξαρτημένο, αν $\boldsymbol{X}^{\perp} \leq \boldsymbol{X}$. Αν $\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{X}^{\perp}$, το $\boldsymbol{X}$ θα είναι αρνητικά εξαρτημένο.

Ορισμός 1 : (*Lehmann* 1966). *Ένα τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *ονομάζεται :*

α) *Θετικά άνω orthant εξαρτημένο* (*PUOD*), *αν*

$$P(X_1 > t_1 \ldots X_n > t_n) \geq \prod_{i=1}^{n} P(X_i > t_i) \text{ για κάθε } t_1, \ldots, t_n.$$

β) *Θετικά κάτω orthant εξαρτημένο* (*PLDO*), *αν*

$$P(X_1 \le t_1 ... X_n \le t_n) \ge \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le t_i) \text{ για κάθε } t_1, \ldots, t_n .$$

γ) *Αρνητικά άνω orthant εξαρτημένο* (*NUOD*), *αν*

$$P(X_1 > t_1 ... X_n > t_n) \le \prod_{i=1}^{n} P(X_i > t_i) \text{ για κάθε } t_1, \ldots, t_n .$$

δ) *Αρνητικά κάτω orthant εξαρτημένο* (*NLDO*), *αν*

$$P(X_1 \le t_1 ... X_n \le t_n) \le \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le t_i) \text{ για κάθε } t_1, \ldots, t_n .$$

Υπάρχουν παρόμοια σχέδια εξάρτησης και για τη supermodular διάταξη.

Ορισμός 2 : *Ένα τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *ονομάζεται* :
α) *Θετικά supermodular εξαρτημένο* (*PSMD*), *αν* $\boldsymbol{X} \ge_{sm} \boldsymbol{X}^{\perp}$.
β) *Αρνητικά supermodular εξαρτημένο* (*NSMD*), *αν* $\boldsymbol{X} \le_{sm} \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Καθώς για τυχαία διανύσματα δύο μεταβλητών οι διατάξεις συμφωνίας και supermodular συμπίπτουν, το ίδιο θα ισχύει και για τα σχέδια εξάρτησης που αναφέρονται σε αυτές τις διατάξεις. Για $n \ge 3$, τα σχέδια εξάρτησης που σχετίζονται με τη supermodular διάταξη είναι ισχυρότερα από τα σχέδια εξάρτησης των άνω και κάτω διατάξεων orthant.

2.8.1 Συναφείς τυχαίες μεταβλητές

Ένα άλλο είδος εξάρτησης είναι αυτό της συνάφειας (association), που εισήχθη από τους Esary, Proschan and Walkup (1967).

Ορισμός 3 : *Ένα τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *ονομάζεται* (*θετικά*) *συναφές, αν*

$$\mathrm{Cov}(f(\boldsymbol{X}), g(\boldsymbol{X})) \ge 0$$

για όλες τις αύξουσες (*κατά συντεταγμένη*) $f, g : R^n \to R$ (*για τις οποίες ορίζεται η Cov*)

Θεώρημα 4 : *Αν* $\boldsymbol{X}$ *είναι συναφές, τότε είναι PUOD και PLDO.*

Απόδειξη. Ισχύει ότι

$$\mathrm{Cov}(f(\boldsymbol{X}), g(\boldsymbol{X})) = E(f(\boldsymbol{X})g(\boldsymbol{X})) - Ef(\boldsymbol{X})Eg(\boldsymbol{X}) \ge 0.$$

Οπότε θα έχουμε $E(f(\boldsymbol{X})g(\boldsymbol{X})) \ge Ef(\boldsymbol{X})Eg(\boldsymbol{X})$ για όλες τις αύξουσες f και g. Μέσω επαγωγής για όλες τις αύξουσες, μη αρνητικές $f_1, \ldots, f_n$ θα ισχύει ότι

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(X_i)\right) \ge \prod_{i=1}^{n} Ef_i(X_i)$$

και σύμφωνα με το Θεώρημα 14 των διατάξεων orthant εξάγουμε το ζητούμενο συμπέρασμα. ■

Παρατηρούμε ότι η συνάφεια, ως είδος θετικής εξάρτησης, είναι πιο ισχυρή από τη θετική άνω και κάτω orthant εξάρτηση. Επίσης, οι Christofides and Vaggelatou (2004) απέδειξαν ότι η συνάφεια είναι πιο ισχυρή από το είδος εξάρτησης που αφορά στη supermodular διάταξη και συνεπώς αν το $\boldsymbol{X}$ συναφές τότε το $\boldsymbol{X}$ είναι και θετικά supermodular εξαρτημένο.

Θεώρημα 5 : (1) *Αν* $\boldsymbol{X}$ *είναι συναφές, τότε* $\boldsymbol{X}_K$ *συναφές για οποιοδήποτε* $K \subset \{1,...,n\}$.
(2) *Αν* $\boldsymbol{X}$ *και* $\boldsymbol{Y}$ *είναι συναφή και ανεξάρτητα, τότε* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ *είναι συναφές.*
(3) *Οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή* X *είναι συναφής.*
(4) *Αν* $\boldsymbol{X}$ *είναι συναφές και* $f_1, \ldots, f_m$: $R^n \rightarrow R$ *είναι αύξουσες (φθίνουσες) συναρτήσεις, τότε το διάνυσμα* $(f_1(\boldsymbol{X}), \ldots, f_m(\boldsymbol{X}))$ *είναι συναφές.*
(5) *Αν* $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *έχει ανεξάρτητα* $X_1, \ldots, X_n$, *τότε είναι συναφές.*

Αν ορίσουμε την έννοια της αρνητικής συνάφειας με τον ίδιο τρόπο, όπως τη θετική, δεν δημιουργείται κάποια σχέση αρνητικής εξάρτησης. Πιο συγκεκριμένα, αν ορίσουμε το τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X}$ αρνητικά συναφές με την απαίτηση

$$\mathrm{Cov}(f(\boldsymbol{X}), g(\boldsymbol{X})) \leq 0,$$

για αύξουσες f, g, δεν ανακύπτει ένα σχέδιο αρνητικής εξάρτησης καθώς υπό την παραπάνω απαίτηση το $\boldsymbol{X}$ θα έπρεπε να είναι εκφυλισμένο. Το τελευταίο συμβαίνει γιατί όταν $\mathrm{Cov}(f(\boldsymbol{X}), g(\boldsymbol{X})) \leq 0$, για αύξουσες f, g, συνεπάγεται ότι $\mathrm{Cov}(X_i, X_i) = \mathrm{Var}(X_i) \leq 0$ για $i = 1, \ldots, n$, και επομένως η τ.μ. X_i είναι σταθερή με πιθανότητα 1. Για το λόγο αυτό, η αρνητική συνάφεια ορίζεται τροποποιώντας κατάλληλα την παραπάνω συνθήκη. Συγκεκριμένα, ένα τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ θα ονομάζεται αρνητικά συναφές, αν

$$\mathrm{Cov}(f(\boldsymbol{X}_K), g(\boldsymbol{X}_L)) \leq 0$$

για όλα τα ξένα υποσύνολα K και L του $\{1, \ldots, n\}$ και όλες τις αύξουσες $f : R^{|K|} \rightarrow R$ και $g : R^{|L|} \rightarrow R$.

2.8.2 Τα είδη στοχαστικής εξάρτησης *PSD*, *CIS* και *CI*

Εκτός από τα προαναφερόμενα είδη εξάρτησης υπάρχουν και άλλα που θα δούμε παρακάτω. Αν η δεσμευμένη κατανομή του $\boldsymbol{X}$ δεδομένου ότι $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}$ είναι στοχαστικά αύξουσα ($\leq_{st}$ - αύξουσα) ως προς το $\boldsymbol{y}$, θα γράφουμε $\boldsymbol{X} \uparrow_{st} \boldsymbol{Y}$.

Ορισμός 6 : (α) *Ένα τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *ονομάζεται PSD (θετικά εξαρτημένο διαμέσου της στοχαστικής διάταξης), αν* $(X_i : i \neq j) \uparrow_{st} X_j$ *για όλα τα* $j = 1, \ldots, n$.
(β) *Ένα τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *ονομάζεται CIS (δεσμευμένα αύξων κατά ακολουθία), αν* $X_i \uparrow_{st} (X_1, X_2, \ldots, X_{i-1})$ *για όλα τα* $i = 1, \ldots, n$.
(γ) *Ένα τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *ονομάζεται CI (δεσμευμένα αύξων), αν* $X_i \uparrow_{st} X_J$ *για όλα τα* $J \subset \{1, \ldots, n\}$.

Παρατηρώντας ότι ένα δεσμευμένα αύξων τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X}$ είναι ισοδύναμο με ένα δεσμευμένα αύξων κατά ακολουθία διάνυσμα $\boldsymbol{X}_\pi = (X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(n)})$ για όλες τις π μεταθέσεις, εξάγουμε το συμπέρασμα ότι το σχέδιο εξάρτησης *CI* είναι πιο ισχυρό και προϋποθέτει το *CIS*.

Θεώρημα 7 : *Αν το* $\boldsymbol{X}$ *είναι CIS, τότε το* $\boldsymbol{X}$ *είναι συναφές.*

Το επόμενο θεώρημα οφείλεται στους Meester and Shanthikumar (1993).

Θεώρημα 8 : *Το είδος εξάρτησης CIS έπεται το είδος της θετικής supermodular εξάρτησης (PSMD).*

2.9 Κατευθυντικά κυρτή διάταξη (directionally convex order)

Ορισμός 1 : *Μία συνάρτηση* $f{:}R^n \rightarrow \mathrm{R}$ *ονομάζεται κατευθυντικά (directionally) κυρτή, αν είναι supermodular και κυρτή κατά συντεταγμένη.*

Στη supermodular διάταξη διερευνήσαμε την εξάρτηση δύο τυχαίων διανυσμάτων διαστάσεων $n \geq 3$ υπό τη βασική προϋπόθεση ότι οι περιθώριες τους είναι σταθερές (υπενθυμίζουμε ότι διανύσματα με ίδιες περιθώριες διατάσσονται ως προς τη supermodular διάταξη για $n \geq 3$). Αν δεν απαιτείται η ισότητα των περιθωρίων κατανομών προκύπτει μία νέα στοχαστική διάταξη, που καλείται directionally κυρτή διάταξη. Σε αυτή τη διάταξη οι συναρτήσεις που περιλαμβάνονται στον γεννήτορα είναι supermodular και έχουν κάποια ιδιότητα κυρτότητας προκειμένου να υπολογίζουμε και τη μεταβλητότητα των περιθωρίων. Οι Shaked and Santhikumar (1990) καθώς και οι Muller και Scarsini (2001) αποτελούν αναφορές για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με αυτή τη διάταξη.

Θεώρημα 2 : (α) *Μία συνάρτηση* $f{:}R^n \rightarrow \mathrm{R}$ *είναι directionally κυρτή αν και μόνο αν μία από τις ακόλουθες ισοδύναμες προτάσεις είναι αληθής.*
(1) $\Delta_i^{\varepsilon}\Delta_j^{\delta} f(\mathbf{x}) \geq 0$ *για όλα τα* $\boldsymbol{x} \in R^n$, $1 \leq i < j \leq n$ *και* $\varepsilon, \delta > 0$.
(2) *Για όλα τα* $\boldsymbol{x}_i \in R^n$, $i = 1,2,3,4$, *με* $\boldsymbol{x}_1 \leq \boldsymbol{x}_2 \leq \boldsymbol{x}_4$, $\boldsymbol{x}_1 \leq \boldsymbol{x}_3 \leq \boldsymbol{x}_4$ *και* $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3$,

$$f(\boldsymbol{x}_2) + f(\boldsymbol{x}_3) \le f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_4).$$

(3) *Για όλα τα* $\boldsymbol{x}_1$ *και* $\boldsymbol{x}_2$ *με* $\boldsymbol{x}_1 \le \boldsymbol{x}_2$ *και για όλα τα* $\boldsymbol{y} \ge 0$,

$$f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}_1) \le f(\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}_2).$$

(4) *Για όλα τα* $\boldsymbol{x} \in R^n$, $1 \le i < j \le n$ *και* $\varepsilon, \delta > 0$,

$$f(\boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{e}_i + \delta \boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x} - \varepsilon \boldsymbol{e}_i) \ge 0.$$

(5) *Για όλα τα* $\alpha, \beta > 0$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ *και όλα τα* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in R^n$ *με* $\boldsymbol{x}_1 \le \boldsymbol{x}_2$ *και* $\boldsymbol{x}_1 + \alpha \boldsymbol{e}_i \le \boldsymbol{x}_2 + \beta \boldsymbol{e}_i$,

$$\beta(f(\boldsymbol{x}_1 + \alpha \boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{x}_1)) \le \alpha(f(\boldsymbol{x}_2 + \beta \boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{x}_2)).$$

β) *Μία διπλά διαφορίσιμη συνάρτηση f είναι directionally κυρτή αν και μόνο αν*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \ln f(\mathbf{x}) \ge 0,$$

για όλα τα $\boldsymbol{x}$ *και* $1 \le i, j \le n$.

Παρακάτω παρατίθενται οι ιδιότητες των directionally κυρτών και αυξουσών directionally κυρτών συναρτήσεων, όπου τα αντίστοιχα σύνολά τους συμβολίζονται ως *DCX* και *IDCX*.

Θεώρημα 3 : (1) *Αν* $g_1,\ldots,g_n$: $R \to R$ *είναι αύξουσες κυρτές και* $f \in DCX$, *τότε*

$$f(g_1(\cdot),\ldots,g_n(\cdot)) \in IDCX.$$

(2) *Αν* $f,g \in DCX$, *τότε* $\alpha f + \beta g \in DCX$ *για όλα τα* $\alpha, \beta \ge 0$.

(3) *Αν* $f,g \in IDCX$ *και* $f, g \ge 0$, *τότε* $f \cdot g \in IDCX$.

(4) *Αν* $f \in IDCX$, *τότε* $\max\{f, c\} \in IDCX$ *για όλες τις πραγματικές σταθερές c*.

(5) *Αν* $f \in IDCX$ *και* φ: $R \to R$ *είναι αύξουσα και κυρτή, τότε η σύνθεση* $\varphi \circ f \in IDCX$.

(6) *Αν* f:$R^2 \to \mathrm{R}$ *και* g:$R^n \to \mathrm{R}$ *ανήκουν στο IDCX, τότε* $f(\cdot, g(\cdot)) \in IDCX$.

Σχέσεις στοχαστικής διάταξης που ορίζονται για directionally κυρτές συναρτήσεις πρωτοεμφανίστηκαν στην εργασία των Meester and Shamthikumar (1993).

Ορισμός 4 : (1) *Το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *είναι μικρότερο από το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ *ως προς τη directionally κυρτή (αύξουσα directionally) διάταξη και γράφουμε* $\boldsymbol{X} \le_{dcx} \boldsymbol{Y}$, *(αντ.* $\boldsymbol{X} \le_{idcx} \boldsymbol{Y}$*) αν* $Ef(\boldsymbol{X}) \le Ef(\boldsymbol{Y})$ *για όλες τις directionally (αντ. αύξουσες directionally) κυρτές συναρτήσεις f.*

Θεώρημα 5 : (1) $\boldsymbol{X} \le_{sm} \boldsymbol{Y} \Rightarrow \boldsymbol{X} \le_{dcx} \boldsymbol{Y}$ *και* $\boldsymbol{X} \le_{ism} \boldsymbol{Y} \Rightarrow \boldsymbol{X} \le_{idcx} \boldsymbol{Y}$.

(2) $\boldsymbol{X} \le_{ccx} \boldsymbol{Y} \Rightarrow \boldsymbol{X} \le_{dcx} \boldsymbol{Y}$ *και* $\boldsymbol{X} \le_{iccx} \boldsymbol{Y} \Rightarrow \boldsymbol{X} \le_{idcx} \boldsymbol{Y}$.

(3) $\boldsymbol{X} \le_{dcx} \boldsymbol{Y} \Rightarrow \boldsymbol{X} \le_{plcx} \boldsymbol{Y}$ *και* $\boldsymbol{X} \le_{idcx} \boldsymbol{Y} \Rightarrow \boldsymbol{X} \le_{iplcx} \boldsymbol{Y}$.

(4) $\boldsymbol{X} \leq_{dcx} \boldsymbol{Y}$ *ή* $\boldsymbol{X} \leq_{idcx} \boldsymbol{Y} \Rightarrow X_i \leq_{cx} Y_i$ *ή* $X_i \leq_{icx} Y_i,$ *για* $1 \leq i \leq n$*, αντίστοιχα.*

Παρατηρούμε ότι η directionally κυρτή διάταξη ($\leq_{idcx}$) έπεται τη κυρτή διάταξη (ή αντίστοιχα την αύξουσα κυρτή) τυχαίων μεταβλητών ή μονομεταβλητών κατανομών. Οι διατάξεις της directionally κυρτότητας δεν είναι κλειστές ως προς την ασθενή σύγκλιση.

Θεώρημα 6 : *Έστω δύο ακολουθίες τυχαίων διανυσμάτων* $(\boldsymbol{X}^{(k)})$ *και* $(\boldsymbol{Y}^{(k)})$ *που διατάσσονται ως προς την directionally κυρτή διάταξη,* $\boldsymbol{X}^{(k)} \leq_{dcx} \boldsymbol{Y}^{(k)}$ *για* $k = 1,2,\ldots$ *. Αν* $\boldsymbol{X}^{(k)} \rightarrow \boldsymbol{X}$ *και* $\boldsymbol{Y}^{(k)} \rightarrow \boldsymbol{Y}$ *κατά κατανομή και επιπλέον,* $E\boldsymbol{X}^{(k)} \rightarrow E\boldsymbol{X}$ *και* $E\boldsymbol{Y}^{(k)} \rightarrow E\boldsymbol{Y}$*, τότε* $\boldsymbol{X} \leq_{dcx} \boldsymbol{Y}$*.*

Με τη βοήθεια της κανονικής κατανομής (βλ. ακόλουθο θεώρημα) παρατηρούμε ότι η πολυμεταβλητή κυρτή διάταξη δεν είναι κατάλληλη για τη σύγκριση διανυσμάτων που έχουν κοινό σύνδεσμο (copula) και διαφορετικές περιθώριες, γιατί προϋποθέτει την ανεξαρτησία των επιμέρους συντεταγμένων των διανυσμάτων ή των περιθωρίων.

Θεώρημα 7 : *Έστω* $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ *και* $\boldsymbol{X}' = (X_1', X_2')$ *κανονικά κατανεμημένα και έχουν τον ίδιο σύνδεσμο (copula), δηλαδή,* $\mathrm{Corr}(X_1,X_2) = \mathrm{Corr}(X_1',X_2')$*. Επίσης,* $E\boldsymbol{X} = E\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{0}$ *και υποθέτουμε ότι* $\mathrm{Var}(X_1) < \mathrm{Var}(X_1')$ *και* $\mathrm{Var}(X_2) = \mathrm{Var}(X_2') > 0$*. Τότε* $\boldsymbol{X} \leq_{cx} \boldsymbol{X}'$ *αν και μόνο αν τα* X_1, X_2 *είναι ανεξάρτητα και τα* X_1', X_2' *είναι ανεξάρτητα.*

Απόδειξη. Έστω ότι για τα διανύσματα $\boldsymbol{X}$ και $\boldsymbol{X}'$ οι πίνακες διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων αντίστοιχα είναι

$$\Sigma_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Sigma_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \sigma_1'^2 & \rho\sigma_1'\sigma_2 \\ \rho\sigma_1'\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

με $\sigma_1 < \sigma_1'$ και $\sigma_2 = \sigma_2'$ από την υπόθεση. Γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής συσχέτισης ρ παίρνει τιμές στο $[1, -1]$. Επίσης είναι γνωστό ότι $\boldsymbol{X} \leq_{cx} \boldsymbol{X}'$ αν και μόνο αν $\Sigma_{X'} - \Sigma_X$ είναι μη αρνητικά ορισμένη και οι μέσες τιμές των δύο διανυσμάτων είναι ίσες. Από την υπόθεση $E\boldsymbol{X} = E\boldsymbol{X}'$ και προκειμένου η $\Sigma_{X'} - \Sigma_X$ να είναι μη αρνητικά ορισμένη πρέπει η ορίζουσα

$$\det(\Sigma_{X'} - \Sigma_X) = -((\sigma_1' - \sigma_1)\,\sigma_2\,\rho) \geq 0$$

δηλαδή, πρέπει $\rho = 0$. Αν όμως $\rho = 0$, τότε $\boldsymbol{X}$ και $\boldsymbol{X}'$ είναι ασυσχέτιστα και υπό την κανονικότητα είναι και ανεξάρτητα. Άρα X_1, X_2 και X_1', X_2' πρέπει να είναι ανεξάρτητα ώστε τα τυχαία διανύσματα να διατάσσονται σε κυρτή διάταξη. ■

Στη directionally κυρτή διάταξη είδαμε ότι η σύγκριση τυχαίων διανυσμάτων ως προς τη $\leq_{ccx}$ ισοδυναμεί με τη μονομεταβλητή κυρτή διάταξη $X_i \leq_{cx} Y_i$, για κάθε $1 \leq i \leq n$, υπό τη βασική απαίτηση ότι οι X_i και Y_i είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Συνεπώς και η $\leq_{ccx}$ αποδεικνύεται ακατάλληλη γιατί εγείρει την απαίτηση της ανεξαρτησίας των τυχαίων μεταβλητών. Η ανεξαρτησία είναι μία αυστηρή υπόθεση και λειτουργεί περιοριστικά. Στις εφαρμογές που θα αναπτύξουμε σε επόμενα κεφάλαια επιζητούμε την εξάρτηση των X_i και Y_i ώστε να μπορούμε να διερευνήσουμε σχέσεις διάταξης για τα εξαρτημένα αθροίσματά τους ΣX_i και ΣY_i. Μάλιστα θέλουμε την θετική εξάρτηση των X_i και Y_i. Υπό αυτό το σκεπτικό μία πιο α-σθενής διάταξη καθίσταται αναγκαία ώστε να έπεται την κυρτή διάταξη των περιθωρίων ($X_i \leq_{cx} Y_i$, για κάθε $1\leq i \leq n$) και να αποκτούμε την κυρτή διάταξη των εξαρτημένων αθροισμάτων τους ($\Sigma X_i \leq_{cx} \Sigma Y_i$). Εστιάζοντας στο Θεώρημα 5 της directionally κυρτής διάταξης παρατηρούμε ότι από $\boldsymbol{X} \leq_{ccx} \boldsymbol{Y}$ έπεται ότι $\boldsymbol{X} \leq_{dcx} \boldsymbol{Y}$ και από την τελευταία σχέση υπονοείται $X_i \leq_{cx} Y_i$ για $1\leq i \leq n$. Άρα η ζητούμενη ασθενέστερη, σε σχέση με τη $\leq_{ccx}$, διάταξη των διανυσμάτων είναι η $\leq_{dcx}$.

Η directionally κυρτή διάταξη αποδίδεται ως πιο ασθενής με την έννοια ότι ενέχει την κυρτή διάταξη των X_i και Y_i χωρίς να απαιτεί την ανεξαρτησία τους. Η παραπάνω συλλογιστική αποδεικνύεται με το επόμενο θεώρημα, όπου για δύο τυχαία διανύσματα με ένα κατάλληλο κοινό σύνδεσμο (copula) και κάτω από την υπόθεση της κυρτής διάταξης των X_i και Y_i προκύπτει η $\leq_{dcx}$ των τυχαίων διανυσμάτων $\boldsymbol{X}$ και $\boldsymbol{Y}$. Το θεώρημα αυτό οδηγεί σε πόρισμα σχετικά με το αναλλοίωτο της κυρτής διάταξης υπό θετικούς γραμμικούς συνδυασμούς.

Θεώρημα 8 : *Έστω* $\boldsymbol{X}$ *και* $\boldsymbol{Y}$ *τυχαία διανύσματα με έναν κοινό, δεσμευμένα αύξων σύνδεσμο (copula) C. Υποθέτουμε ότι* $X_i \leq_{cx} Y_i$ *για όλα τα* $1\leq i \leq n$. *Τότε*

$$\boldsymbol{X} \leq_{dcx} \boldsymbol{Y}.$$

Από το παραπάνω θεώρημα και το γεγονός ότι η συνάρτηση $f(x_1,\ldots,x_n) = g(\alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_n x_n)$ για $\alpha_i \geq 0$ είναι directionally κυρτή, έπεται άμεσα το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 9 : *Έστω* $\boldsymbol{X}$ *και* $\boldsymbol{Y}$ *που ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 8. Τότε για όλα τα μη αρνητικά* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i \leq_{cx} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i .$$

Το πιο κάτω θεώρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αντίστροφο του θεωρήματος 8. Καθώς η συμμονοτονία αποτυπώνει την πιο ισχυρή θετική εξάρτηση, η directionally κυρτή διάταξη καθίσταται η πιο ισχυρή σχέση στοχαστικής διάταξης που εξάγεται από το θεώρημα 8.

Θεώρημα 10 : *Αν* $X_i \leq_{cx} Y_i$ *για όλα τα* $1\leq i \leq n$ *έπεται ότι* $Ef(\boldsymbol{X}) \leq Ef(\boldsymbol{Y})$ *όταν* $\boldsymbol{X}$ *και* $\boldsymbol{Y}$ *συμμονότονα, τότε η f είναι directionally κυρτή συνάρτηση.*

Μερικές εφαρμογές των directionally κυρτών συναρτήσεων μπορούν να βρεθούν στις εργασίες των Meester and Shanthikumar (1993, 1999), Bauerle and Rolski (1998), Muller and Scarsini (2001).

2.10 Πολυμεταβλητές διατάξεις λόγου πιθανοφάνειας

Ορισμός 1 (*Ασθενής διάταξη λόγου πιθανοφάνειας*): *Το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{Y}$ *είναι μεγαλύτερο από το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{X}$ *ως προς την ασθενή διάταξη λόγου πιθανοφάνειας και γράφουμε* $\boldsymbol{X} \leq_r \boldsymbol{Y}$, *αν τα* $\boldsymbol{X}$ *και* $\boldsymbol{Y}$ *έχουν πυκνότητες (ως προς κάποιο μέτρο* μ*) έτσι ώστε*

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{s}) \leq f_{\mathbf{X}}(\mathbf{s})f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t})$$

για όλα τα $\boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{t}$.

Ορισμός 2 (*Ισχυρή διάταξη λόγου πιθανοφάνειας*): *Το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{Y}$ *είναι μεγαλύτερο από το τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{X}$ *ως προς την ισχυρή διάταξη λόγου πιθανοφάνειας ή διάταξη* tp_2 *και γράφουμε* $\boldsymbol{X} \leq_{tp} \boldsymbol{Y}$, *αν τα* $\boldsymbol{X}$ *και* $\boldsymbol{Y}$ *έχουν πυκνότητες (ως προς κάποιο σ-πεπερασμένο μέτρο γινομένου* $\mu = \mu_1 \times \ldots \times \mu_n$*) έτσι ώστε*

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{s})f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) \leq f_{\mathbf{X}}(\mathbf{s} \wedge \mathbf{t})f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{s} \vee \mathbf{t})$$

για όλα τα $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \in R^n$.

Η ισχυρή διάταξη του λόγου πιθανοφάνειας δεν είναι μία διάταξη στο σύνολο όλων των μέτρων πιθανότητας και η ιδιότητα της ανακλαστικότητας δεν ισχύει.

Θεώρημα 3 : (α) *Αν* $\boldsymbol{X} \leq_{tp} \boldsymbol{Y}$ *τότε* $\boldsymbol{X} \leq_{st} \boldsymbol{Y}$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η ασθενής διάταξη του λόγου πιθανοφάνειας δεν έπεται τη συνήθη στοχαστική διάταξη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΣΥΝΔΕΣΜΩΝ (COPULAS) ΣΤΟ VALUE-AT-RISK

3.1 Σύνδεσμοι (Copulas)

Στο προηγούμενο κεφάλαιο συναντήσαμε την έννοια του συνδέσμου (copula), που περιγράφει τη δομή της εξάρτησης ενός τυχαίου διανύσματος. Αν $\boldsymbol{X} = (X_1,...,X_n)$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα, τότε η εξάρτηση μεταξύ των μεταβλητών του διανύσματος, προσδιορίζεται από την από κοινού συνάρτηση κατανομής που δίνεται από τον τύπο

$$F_X(x_1,\ldots,x_n) = P(X_1 \le x_1,\ldots, X_n \le x_n).$$

Επειδή, όμως, η από κοινού συνάρτηση κατανομής είναι αρκετά δύσκολο να βρεθεί, προσπαθούμε να την εκφράσουμε σε δύο μέρη, από τα οποία το ένα να περιγράφει την εξάρτηση των $X_1,\ldots,X_n$ και το άλλο να προσδιορίζει τις περιθώριες κατανομές της $F_1, \ldots, F_n$. Αυτή η συλλογιστική μας οδηγεί στην έννοια του συνδέσμου που μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η συνάρτηση κατανομής ενός τυχαίου διανύσματος $\mathbf{U} = (U_1,\ldots,U_n)$, όπου οι $U_1,\ldots,U_n$ κατανέμονται ομοιόμορφα στο $(0,1)$. Για δεδομένο σύνδεσμο C και περιθώριες $F_1,\ldots,F_n$, η

$$F(\boldsymbol{x}) = C(F_1(x_1),\ldots, F_n(x_n)),$$

είναι μία συνάρτηση κατανομής με περιθώριες κατανομές $F_1,\ldots,F_n$. Επίσης, αν $\mathbf{U}$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα με συνάρτηση κατανομής το σύνδεσμο C, τότε το διάνυσμα

$$\mathbf{X} = (F_1^{-1}(U_1),\ldots,F_n^{-1}(U_n)),$$

έχει συνάρτηση κατανομής την $F(\boldsymbol{x}) = C(F_1(x_1),\ldots, F_n(x_n))$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Sklar, για κάθε πολυμεταβλητή συνάρτηση κατανομής F, με περιθώριες $F_1,\ldots,F_n$, υπάρχει ένας σύνδεσμος C ώστε

$$F(\boldsymbol{x}) = C(F_1(x_1),\ldots, F_n(x_n)).$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι αν ο σύνδεσμος δημιουργείται από μία συνεχή συνάρτηση κατανομής δύο ή περισσότερων μεταβλητών, είμαστε σε θέση να το ορίσουμε ως μία πολυμεταβλητή συνάρτηση κατανομής, που ορίζεται σε ένα μοναδιαίο κύβο $[0,1]^n$, με ομοιόμορφες περιθώριες κατανομές. Ωστόσο, υπάρχουν και άλλες τεχνικές κατασκευής ενός συνδέσμου. Ακολουθεί μία συνοπτική παρουσίαση σχετικά με την έννοια του συνδέσμου.

3.1.1 Θεώρημα του Sklar

Θεώρημα 1 : *Έστω H n-διάστατη συνάρτηση κατανομής με περιθώριες* $F_1, \ldots, F_n$. *Τότε υπάρχει ένας n-σύνδεσμος (copula) C ώστε για όλα τα* $\boldsymbol{x}$ *εντός του* $\overline{R}^n$ *θα ισχύει*

$$H(x_1,\ldots, x_n) = C(F_1(x_1),\ldots, F_n(x_n)) .$$

Αν οι περιθώριες $F_1,\ldots,F_n$ είναι συνεχείς, ο σύνδεσμος C είναι μοναδικός, ενώ διαφορετικά ορίζεται μοναδικά στο εύρος της F (Ran$F$), το οποίο είναι Ran$F_1\times\ldots\times$RanF_n. Αντιστρόφως, για δεδομένο n-σύνδεσμο C και $F_1,\ldots,F_n$ συναρτήσεις κατανομής, η συνάρτηση H, που ορίστηκε στην παραπάνω σχέση, είναι μία n-διάστατη συνάρτηση κατανομής με περιθώριες $F_1, \ldots, F_n$.

Παρατηρούμε ότι για συνεχείς πολυμεταβλητές συναρτήσεις κατανομής, το θεώρημα του Sklar συμβάλλει ώστε οι μονομεταβλητές περιθώριες τους και η δομή της εξάρτησης να χωρισθούν σε δύο μέρη και η εξάρτηση να αναπαρίσταται από το σύνδεσμο.

Υπενθυμίζεται ότι αν η F είναι συνάρτηση κατανομής μίας μεταβλητής, η γενικευμένη αντίστροφη της F είναι $F^{-1}(t)= \inf\{x\in R\colon F(x) \geq t\}$ για κάθε $t\in[0,1]$ και $\inf \varnothing = -\infty$.

Πόρισμα 2 : *Έστω H n*-διάστατη *συνάρτηση κατανομής με συνεχείς περιθώριες* $F_1, \ldots, F_n$ *και σύνδεσμο (copula) C που ικανοποιεί τη σχέση*

$$H(x_1,\ldots, x_n) = C(F_1(x_1),\ldots, F_n(x_n)).$$

Τότε για οποιοδήποτε $\boldsymbol{u}\in[0,1]^n$ *θα έχουμε* $C(u_1,\ldots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1),\ldots, F_n^{-1}(u_n))$.

Στο παραπάνω πόρισμα η απαίτηση της συνέχειας είναι απαραίτητη.

Παράδειγμα *Έστω* Φ *η μονομεταβλητή τυπική κανονική κατανομή και* $\Phi_R^{\,n}$ *η πολυμεταβλητή με πίνακα συσχετίσεων R. Τότε ο Gaussian ή κανονικός n-σύνδεσμος θα είναι* $C(u_1,\ldots, u_n) = \Phi_R^{\,n}(\Phi^{-1}(u_1),\ldots, \Phi^{-1}(u_n))$.

3.1.2 Όρια Frechet-Hoeffding για από κοινού συναρτήσεις κατανομής

Θεωρούμε τις ακόλουθες συναρτήσεις στο $[0,1]^n$,

$$M^n(\boldsymbol{u}) = \min\{u_1,\ldots, u_n\},\quad \Pi^n(\boldsymbol{u}) = u_1 \ldots u_n,\ \ W^n(\boldsymbol{u}) = \max\{u_1 + \ldots + u_n - n + 1, 0\}.$$

Οι συναρτήσεις M^n και Π^n είναι n-σύνδεσμοι (copulas) για όλα τα $n \geq 2$. Αντίθετα, η W^n δεν αποτελεί σύνδεσμο για διάσταση μεγαλύτερη ή ίση του τρία, $n \geq 3$, γιατί δεν είναι συνάρτηση κατανομής.

Θεώρημα 3 (*Ανισότητα ορίων Frechet-Hoeffding*) : *Αν C είναι οποιοσδήποτε n-σύνδεσμος, τότε για κάθε $\boldsymbol{u} \in [0,1]^n$,*

$$W^n(\boldsymbol{u}) \leq C(\boldsymbol{u}) \leq M^n(\boldsymbol{u}).$$

Με $\overline{C}$ παριστάνεται η από κοινού συνάρτηση επιβίωσης n τυχαίων μεταβλητών, οι οποίες έχουν από κοινού συνάρτηση κατανομής C. Πιο απλά, αν το τυχαίο διάνυσμα $(U_1,\ldots,U_n)^T$ έχει συνάρτηση κατανομής C, τότε

$$\overline{C}\,(u_1,\ldots, u_n) = P(U_1 > u_1,\ldots, U_n > u_n).$$

Ορισμός 4 : *Αν C_1, C_2 είναι σύνδεσμοι (copulas), τότε θα λέμε ότι η C_1 είναι μικρότερη της C_2 (συμβ. με $C_1 < C_2$) αν $C_1(\boldsymbol{u}) \leq C_2(\boldsymbol{u})$ και $\overline{C}_1(\mathbf{u}) \leq \overline{C}_2(\mathbf{u})$ για όλα τα $\boldsymbol{u} \in [0,1]^n$.*

Όταν $n = 2$, η W^2 των Frechet-Hoeffding είναι μικρότερη από κάθε διδιάστατο σύνδεσμο, ενώ κάθε n-σύνδεσμος, γενικά, είναι μικρότερος από τη M^n.

3.2 Χρήση του συνδέσμου (copula) ως φράγμα του Value-at-Risk για συναρτήσεις εξαρτημένων κινδύνων

3.2.1 Βασικές έννοιες

Το Value-at-Risk (αξία σε κίνδυνο), που το συμβολίζουμε VaR, αποτελεί ένα από τα πιο γνωστά μέτρα κινδύνου στα χρηματοοικονομικά. Βασικός σκοπός της παρούσης παραγράφου (που βασίζεται στην εργασία των Embrechts, Hoeing and Juri (2003)) καθίσταται η διαχείριση του VaR μιας θέσης η οποία προέρχεται από διάφορους συνδυασμούς εξαρτημένων κινδύνων. Πιο συγκεκριμένα, θα προσπαθήσουμε να φράξουμε το VaR ενός χαρτοφυλακίου $\psi(X_1,\ldots,X_n)$, όπου $\psi: R^n \rightarrow R$ είναι κάποια συνάρτηση που μας ενδιαφέρει δεδομένου ότι γνωρίζουμε μόνο τις περιθώριες κατανομές κέρδους-απώλειας $F_1,\ldots,F_n$ των κινδύνων $X_1,\ldots,X_n$ n-περιόδων. Οι μεταβλητές $X_1,\ldots,X_n$ περιγράφουν διάφορους τύπους χρηματοοικονομικών ή ασφαλιστικών κινδύνων. Προκειμένου το πρόβλημα να γίνει περισσότερο κατανοητό, θα εξετάσουμε τη διμεταβλητή περίπτωση, $n = 2$, όπου το χαρτοφυλάκιο είναι της μορφής $\psi(X_1, X_2) = X_1 + X_2$.

Έστω ότι X_1 και X_2 αναπαριστούν κινδύνους της αγοράς. Η ποσότητα $\mathrm{VaR}_\alpha(X_i)$, για $i = 1,2$, συμβολίζει το Value-at-Risk σε επίπεδο 100α %, δηλαδή το α-ποσοστιαίο σημείο συνάρτησης κατανομής F_i της θέσης X_i.

Ορισμός 1 : *Για $0 \leq \alpha \leq 1$, το VaR μίας τυχαίας μεταβλητής X σε επίπεδο α είναι το α-ποσοστιαίο σημείο της κατανομής της, δηλαδή,*

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha).$$

Καθώς η κατοχή των X_1 και X_2 ενέχει κίνδυνο, για να τον μετρήσουμε χρησιμοποιούμε το $\mathrm{VaR}(X_1 + X_2)$, που αντίστοιχα είναι το α-ποσοστιαίο σημείο της $F_{X_1+X_2}$. Συνεπώς, γνωρίζοντας την από κοινού κατανομή των X_1 και X_2, δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε απλώς το VaR της θέσης $(X_1 + X_2)$ και να περιοριστούμε στις όποιες υπολογιστικές δυσκολίες ανακύψουν.

Τις περισσότερες φορές, όμως, η από κοινού συνάρτηση κατανομής παραμένει άγνωστη και διαθέτοντας ελλιπή ή καθόλου πληροφόρηση για τη σχέση εξάρτησης των κινδύνων X_1 και X_2, που αποτελούν μαζί ένα χαρτοφυλάκιο, είμαστε αναγκασμένοι να καταφεύγουμε στο άθροισμα $\mathrm{VaR}_\alpha(X_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(X_2)$ για τη μέτρηση του κινδύνου σαν ένα άνω φράγμα του $\mathrm{VaR}_\alpha(X_1 + X_2)$. Όπως θα δούμε παρακάτω, για συμμονότονες τυχαίες μεταβλητές έχουμε $\mathrm{VaR}_\alpha(X_1 + X_2) = \mathrm{VaR}_\alpha(X_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(X_2)$.

Γενικά, η γραμμική συσχέτιση έχει αποδειχθεί ανεπαρκής ως μέτρο εξάρτησης των κινδύνων ενός χαρτοφυλακίου. Η εξάρτηση των κινδύνων καθίσταται σημαντική στον προσδιορισμό της τιμής της ποσότητας (disversification)

$$\Delta(\mathrm{VaR}_\alpha) = \mathrm{VaR}_\alpha(X_1 + X_2) - (\mathrm{VaR}_\alpha(X_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(X_2))$$

η οποία δεν μπορεί να εξετασθεί πλήρως χρησιμοποιώντας ως μέτρο εξάρτησης το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης. Αυτό το πρόβλημα του VaR αντιμετωπίζεται με τη συμβολή των γενικευμένων αντίστροφων αυξουσών συναρτήσεων και των συνδέσμων (copula).

3.2.1.1 *Γενικευμένες αντίστροφες και Value-at-Risk*

Θεωρούμε ότι $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^n$ είναι σε διάταξη κατά συντεταγμένες (component order) στο R^n, (συμβ. $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$) αν $x_i \leq y_i$ για $i = 1,\ldots,n$, και μία πραγματική συνάρτηση στο R^n θα είναι αύξουσα όταν είναι αύξουσα ως προς τη διάταξη κατά συντεταγμένες. Επίσης, $\overline{R} = (-\infty,\infty)$ και inf $\varnothing = \sup \varnothing = -\infty$.

Ορισμός 2 : *Έστω $\Phi: R \to R$ μία αύξουσα συνάρτηση. Οι γενικευμένες αριστερές και δεξιές συνεχείς αντίστροφες είναι οι συναρτήσεις*

$$\Phi^{-1}(y) = \inf\{x \in R\colon \Phi(x) \geq y\} \quad \textit{και} \quad \Phi^{\wedge}(y) = \sup\{x \in R\colon \Phi(x) \leq y\}.$$

Λήμμα 3 (*ιδιότητες των γενικευμένων αντίστροφων*):

(1) Οι Φ^{-1} *και* $\Phi^{\wedge}$ *είναι αύξουσες συναρτήσεις.*

(2) Οι Φ^{-1} *και* $\Phi^{\wedge}$ *είναι αριστερά και δεξιά, αντίστοιχα, συνεχείς συναρτήσεις στο* R.

(3) Αν η Φ *είναι δεξιά συνεχής και* $\Phi^{-1}(y) > -\infty$, *τότε* $\Phi(x) \geq y \Leftrightarrow x \geq \Phi^{-1}(y)$.

(4) Αν η Φ *είναι αριστερά συνεχής και* $\Phi^{\wedge}(y) > -\infty$, *τότε* $\Phi(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq \Phi^{\wedge}(y)$.

3.2.1.2 *Δομές εξάρτησης και σύνδεσμοι*

Όπως έχουμε ήδη εξετάσει σε προηγούμενη παράγραφο, ένας n-διάστατος σύνδεσμος (copula) είναι μία n-διάστατη συνάρτηση κατανομής στο $[0,1]^n$ με περιθώριες κατανομές στο (0,1).

Ορισμός 4 : *Έστω* $(U_1,\ldots,U_n)$ *ένα* n*-διάστατο τυχαίο διάνυσμα με ομοιόμορφες περιθώριες (στο* (0,1)*) και* C *η συνάρτηση κατανομής του. Ο δυικός* (dual) *σύνδεσμος ορίζεται από τη σχέση*

$$C^d(u_1,\ldots,u_n) = P[\bigcup_{i=1}^{n}\{U_i \leq u_i\}]$$

και ο σύνδεσμος επιβίωσης (survival copula) $\widehat{C}$ *του* C *είναι η συνάρτηση κατανομής του τυχαίου διανύσματος* $(1-U_1,\ldots,1-U_n)$.

Όταν έχουμε τυχαίες μεταβλητές $X_1,\ldots,X_n$ με από κοινού συνάρτηση κατανομής F, περιθώριες $F_1,\ldots,F_n$ και σύνδεσμο C, από τον Ορισμό 4 εξάγονται οι ακόλουθες σχέσεις :

$$C^d(F_1(x_1),\ldots,F_n(x_n)) = P[\bigcup_{i=1}^{n}\{X_i \leq x_i\}]$$

που είναι αύξουσα σε κάθε τιμή (σημείο) $x_1,\ldots,x_n$ και, επίσης,

$$\widehat{C}(\overline{F}_1(x_1),\ldots,\overline{F}_n(x_n)) = \overline{F}(x_1,\ldots,x_n)$$

που είναι ανάλογη του θεωρήματος Sklar για συναρτήσεις επιβίωσης. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι για κάθε i-περιθώρια, η συνάρτηση επιβίωσης είναι $\overline{F}_i(x_i) = 1 - F_i(x_i)$, ενώ η από κοινού συνάρτηση επιβίωσης των $X_1,\ldots,X_n$ δίνεται από τον τύπο $\overline{F}(x_1,\ldots,x_n) = P(X_1 > x_1,\ldots, X_n > x_n)$.

Ο δυικός σύνδεσμος C^d και ο σύνδεσμος επιβίωσης $\widehat{C}$ συνδέονται με τη σχέση

$$C^d(u_1,\ldots,u_n) = 1 - \widehat{C}(1-u_1,\ldots,1-u_n)$$

και διαπιστώνεται ότι το C^d δεν είναι σύνδεσμος, ενώ ο $\widehat{C}$ είναι.

Όπως δείξαμε και προηγουμένως, κάθε σύνδεσμος C βρίσκεται εντός του κατώτερου και ανώτερου ορίου Frechet $C_L \le C \le C_U$ όπου

$$C_L(u_1,\ldots, u_n) = \max\{u_1 + \ldots + u_n - n + 1, 0\} \quad \text{και} \quad C_U(u_1,\ldots, u_n) = \min\{u_1,\ldots, u_n\},$$

με το C_L να μην αποτελεί μία συνάρτηση κατανομής για $n \ge 3$, εκτός αν πληρούνται κάποιες συνθήκες, και το C_U να συνιστά μία συνάρτηση κατανομής για κάθε n.

Κάθε σύνδεσμος αντιστοιχεί σε μία μορφή εξάρτησης. Το είδος ή ο βαθμός αυτής ποικίλλει ανάλογα με την επιλογή του συνδέσμου επιφέροντας άλλοτε ασθενή και άλλοτε ισχυρή εξάρτηση. Επομένως, η σύγκριση των εξαρτήσεων (η επικινδυνότητα της κάθε εξάρτησης) μπορεί να πραγματοποιηθεί διαμέσου της σύγκρισης των αντίστοιχων συνδέσμων. Η σύγκριση των συνδέσμων γίνεται κατά σημείο (pointwise), όπως στις συναρτήσεις, αφού κάθε σύνδεσμος αποτελεί μία συνάρτηση κατανομής. Αν δύο κατανομές διατάσσονται ως προς κάποια συγκεκριμένη μερική διάταξη, η εξάρτηση μεταξύ των περιθωρίων της μεγαλύτερης, ως προς τη διάταξη, κατανομής θα θεωρείται περισσότερο επικίνδυνη από την εξάρτηση που υπάρχει μεταξύ των περιθωρίων της μικρότερης.

Στην παραπάνω σύγκριση συμβάλλουν τα όρια Frechet καθώς φράσσουν τους συνδέσμους και τους περιορίζουν σε συγκεκριμένες τιμές. Έτσι κάθε σύνδεσμος βρίσκεται εντός των ορίων Frechet. Το ανώτερο όριο Frechet, C_U, αντιστοιχεί στην πιο επικίνδυνη πιθανή εξάρτηση (στοχαστική διάταξη) σχετικά με αρκετές μερικές διατάξεις κατανομών, όπως είναι η κατώτερη διάταξη orthant και η supermodular διάταξη. Επιπρόσθετα, ξέρουμε, ήδη, ότι ένα τυχαίο διάνυσμα που έχει συνάρτηση κατανομής το ανώτερο όριο Frechet, F^+, ονομάζεται συμμονότονο και ενέχει θετική εξάρτηση των μεταβλητών του. Παρόμοια, για τυχαίες μεταβλητές $X_1,\ldots,X_n$ που έχουν εξάρτηση της μορφής C_U, η έννοια της συμμονοτονίας θα συνεχίζει να είναι αληθής και θα έχουμε ότι

$$(X_1,\ldots,X_n) = (f_1(Z),\ldots,f_n(Z)) \text{ κατά κατανομή,}$$

όπου $f_1,\ldots,f_n : R \rightarrow R$ αύξουσες συναρτήσεις και Z μία τυχαία μεταβλητή.

Στο Δεύτερο Κεφάλαιο παρουσιάστηκαν εκτενώς οι διατάξεις orthant, όπως επίσης, και τα σχέδια εξάρτησης *PLOD*, *PUOD*, *POD*, που έπονται από ισχυρότερα σχέδια εξάρτησης, όπως είναι η συνάφεια, η *CIS* και η supermodular εξάρτηση. Όταν στις τυχαίες μεταβλητές $X_1, \ldots, X_n$ αντιστοιχεί ο σύνδεσμος C που ικανοποιεί τη σχέση $C \geq C_I$, με $C_I = u_1 \ldots u_n$ να αποτελεί το σύνδεσμο των ανεξάρτητων αντιγραφών των $X_1,\ldots,X_n$, οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, \ldots, X_n$ είναι θετικά κάτω εξαρτημένες orthant (*PLOD*).

Αξίζει να σημειωθεί ότι όλα οι σύνδεσμοι $C(u_1,\ldots,u_n)$ δεν αποδίδουν το ίδιο «βάρος» εξάρτησης σε κάθε ένα $u_1,\ldots,u_n$, αφού διάφοροι σύνδεσμοι περιέχουν παραμέτρους που ρυθμίζουν ή ελέγχουν τη διανομή της εξάρτησης για κάθε $u_1,\ldots, u_n$. Δύο τέτοια παραδείγματα αποτελούν οι Clayton και Gumbel σύνδεσμοι, που ορίζονται ως εξής:

$$C^{Cl,\alpha}(u_1,\ldots,u_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{-\alpha} - n + 1\right)^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad C^{Gu,\beta}(u_1,\ldots,u_n) = \exp\left(-\left(\sum_{i=1}^{n} (-\log u_i)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta}\right)$$

με $0 < \alpha < \infty$ και $0 < \beta \leq 1$. Αυτοί οι σύνδεσμοι αυξάνουν σε κατώτερη διάταξη orthant καθώς οι παράμετροι α και β αυξάνουν. Όταν οι παράμετροι κινούνται στα όρια των διαστημάτων τους, μπορούμε να έχουμε οριακή ανεξαρτησία και συμμονοτονία.

3.2.2 Φράγματα κατανομής

Θα προσπαθήσουμε να φράξουμε το VaR της κοινής θέσης $\psi(X_1,\ldots,X_n)$, όπου ψ είναι κάποια συνάρτηση. Έστω ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X_1,\ldots,X_n$ αναπαριστούν κινδύνους. Το $\mathrm{VaR}_\alpha(\psi(X_1,\ldots,X_n))$ είναι το α-ποσοστιαίο σημείο της από κοινού συνάρτησης κατανομής της $\psi(X_1,\ldots,X_n)$. Αν ο σύνδεσμος (copula) των κινδύνων $X_1,\ldots,X_n$ είναι γνωστός, η εύρεση του $\mathrm{VaR}_\alpha(\psi(X_1,\ldots,X_n))$ μετατρέπεται απλώς σε ένα υπολογιστικό πρόβλημα. Επειδή, όμως, συνήθως δεν συμβαίνει αυτό, προσπαθούμε να βρούμε όρια μεταξύ των οποίων κυμαίνεται το VaR ή, ισοδύναμα, όρια για τη συνάρτηση κατανομής της $\psi(X_1,\ldots,X_n)$. Για παράδειγμα, όταν η $\psi(X_1,\ldots,X_n)$ ορίζεται από τον τύπο

$$\psi(X_1,\ldots,X_n) = X_1 + \ldots + X_n,$$

προσπαθούμε να προσδιορίσουμε το VaR της κοινής θέσης $X_1 + \ldots + X_n$.

Για μία αύξουσα συνάρτηση $\psi: R^n \rightarrow R$ και $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$, συμβολίζουμε με $\psi_{x_{i_1},\ldots,x_{i_k}}$ την συνάρτηση ψ, όταν οι $i_1,\ldots,i_k$ μεταβλητές κρατούνται σταθερές και παίρνουν τις τιμές $x_{i_1},...,x_{i_k}$. Επίσης, διαθέτουμε ένα δοσμένο σύνδεσμο C, τις περιθώριες F_1, …, F_n και ορίζουμε

$$r_{C,\psi}(F_1,...,F_n)(s) = \sup_{x_1,...,x_{n-1}\in R} C\big(F_1(x_1),...,F_{n-1}(x_{n-1}),\ F_n(\psi^{\wedge}_{x_1,...,x_{n-1}}(s))\big),$$

$$\sigma_{C,\psi}(F_1,...,F_n)(s) = \int_{\{\psi\le s\}} dC\big(F_1(x_1),...,F_n(x_n)\big),$$

$$\rho_{C,\psi}(F_1,...,F_n)(s) = \inf_{x_1,...,x_{n-1}\in R} C^d\big(F_1(x_1),...,F_{n-1}(x_{n-1}),\ F_n(\psi^{\wedge}_{x_1,...,x_{n-1}}(s))\big).$$

Για το τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X} = (X_1,...,X_n)$, που έχει σύνδεσμο C και περιθώριες κατανομές F_1, …, F_n, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\sigma_{C,\psi}(F_1,...,F_n) = F_{\psi(X_1,...,X_n)},$$

δηλαδή, το $\sigma_{C,\psi}$ είναι η συνάρτηση κατανομής της $\psi(X_1,...,X_n)$. Τα $r_{C,\psi}$ και $\rho_{C,\psi}$ αποδεικνύεται ότι αποτελούν συναρτήσεις κατανομής. Άρα τα $r_{C,\psi}$, $\sigma_{C,\psi}$, $\rho_{C,\psi}$ μπορούν να θεωρηθούν ως τελεστές από το σύνολο D^n στο D, με D να είναι το σύνολο των μονοδιάστατων συναρτήσεων κατανομής.

Θεώρημα 6 : (Embrehts *et al.* (2003)) *Έστω ότι το τ.δ. $(X_1,...,X_n)$ έχει περιθώριες F_1, …, F_n και $\psi: R^n \to R$ μία αύξουσα και αριστερά συνεχής συνάρτηση ως προς την τελευταία συντεταγμένη x_n. Αν ένας σύνδεσμος C για το τυχαίο διάνυσμα $(X_1,...,X_n)$ ικανοποιεί τις σχέσεις $C \ge C_0$ και $C^d \ge C_1^{\,d}$, για δεδομένους συνδέσμους C_0 και C_1, τότε*

$$r_{C_0,\psi}(F_1,...,F_n) \le \sigma_{C,\psi}(F_1,...,F_n) \le \rho_{C_1,\psi}(F_1,...,F_n).$$

Η ανισότητα που προκύπτει από το παραπάνω θεώρημα είναι σημαντική, γιατί ξέρουμε ότι το VaR της θέσης $\psi(X_1,...,X_n)$ είναι το α-ποσοστιαίο σημείο της συνάρτησης κατανομής της $\psi(X_1,...,X_n)$ και το $\sigma_{C,\psi}$ είναι η συνάρτηση κατανομής της $\psi(X_1,...,X_n)$. Κατά συνέπεια η ανισότητα μετατρέπεται στην ακόλουθη

$$\rho_{C_1,\psi}(F_1,...,F_n)^{-1}(\alpha) \le \text{VaR}_{\alpha}(\psi(X_1,...,X_n)) \le r_{C_0,\psi}(F_1,...,F_n)^{-1}(\alpha).$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο φράσσουμε το VaR της κοινής θέσης $\psi(X_1,...,X_n)$ και επιζητούμε την ποιότητα των ορίων, δηλαδή, αν το διάστημα εντός του οποίου βρίσκεται το VaR είναι πλατύ ή στενό προκειμένου να εξάγουμε ασφαλή συμπεράσματα. Με το ακόλουθο θεώρημα αποδεικνύεται ότι αυτά τα όρια είναι τα καλύτερα δυνατά.

Θεώρημα 7 : (Embrehts *et al.* (2003)) *Έστω ότι η υπόθεση του Θεωρήματος* 6 *ικανοποιείται και για σταθερό $s \in R$* θεωρούμε ότι

$$\alpha \equiv r_{C_0,\psi}(F_1,...,F_n)(s) \leq \rho_{C_1,\psi}(F_1,...,F_n)(s) \equiv \beta .$$

Τότε υπάρχουν σύνδεσμοι C^α *και* C^β *έτσι ώστε*

$$\sigma_{C^\alpha,\psi}(F_1,...,F_n)(s) = \alpha \quad \textit{και} \quad \sigma_{C^\beta,\psi}(F_1,...,F_n)(s) = \beta .$$

Αν και το $\sigma_{C,\psi}$ είναι η συνάρτηση κατανομής της $\psi(X_1,...,X_n)$, δεν ισχύει κάτι ανάλογο και για τα $r_{C_0,\psi}, \rho_{C_1,\psi}$. Πιο απλά, υποθέτοντας ένα χαρτοφυλάκιο $\psi(Y_1,..., Y_n)$ δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι

$$r_{C_0,\psi}(F_1,...,F_n) = F_{\psi(Y_1,...,Y_n)} \quad \text{και} \quad \rho_{C_1,\psi}(F_1,...,F_n) = F_{\psi(Y_1,...,Y_n)}$$

και συμπεραίνουμε ότι δεν αποτελούν συναρτήσεις κατανομής της $\psi(Y_1,..., Y_n)$. Μάλιστα, για $n = 2$, με χαρτοφυλάκιο της μορφής $\psi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ και κάτω από τους περιορισμούς C_0, $C_1 \neq C_U$, έχει αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f τέτοια ώστε

$$r_{C_0,\psi}(F_1,F_2) = F_{f(X_1,X_2)} \quad \text{και} \quad \rho_{C_1,\psi}(F_1,F_2) = F_{f(X_1,X_2)} .$$

Τα δύο προηγούμενα θεωρήματα διατυπώθηκαν υπό τις παραδοχές $C \geq C_0$ και $C^d \geq C_1^{\,d}$. Γενικά, οι ανισοτικές σχέσεις $C \geq C_0$ και $C^d \geq C_1^{\,d}$ αναπαριστούν τη μερική πληροφόρηση που έχουμε στη διάθεσή μας για την εξάρτηση των $X_1,...,X_n$ ή, ισοδύναμα, προσδιορίζουν διάφορες υποθέσεις εξάρτησης για τις $X_1,...,X_n$. Εξάλλου, όσο πιο αυστηρά ορίζονται οι παραδοχές τόσο περισσότερο στενεύει το διάστημα εντός του οποίου κυμαίνεται το VaR. Με άλλα λόγια, όσο αυξάνεται η πληροφόρηση για την εξάρτηση των κινδύνων $X_1,...,X_n$ τόσο εξάγουμε ασφαλέστερα συμπεράσματα για το μέτρο κινδύνου VaR. Όταν οι κίνδυνοι $X_1,...,X_n$ είναι εξαρτημένοι, το VaR αποτιμάται μεταξύ των ορίων που αναπτύξαμε. Αντιθέτως, για ανεξάρτητους ή συμμονότονους κινδύνους το VaR μπορεί να υπολογισθεί ακριβώς και να έχουμε μία συγκεκριμένη τιμή του. Για συμμονότονους κινδύνους έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 8 : *Έστω* $\psi\!:\!R^n\!\rightarrow\!R$ *αύξουσα και αριστερά συνεχής συνάρτηση σε κάθε τιμή (σημείο),* $0 \leq \alpha \leq 1$, *και* $X_1,...,X_n$ *είναι συμμονότονα. Τότε*

$$\mathrm{VaR}_\alpha(\psi(X_1,...,X_n)) = \psi(\mathrm{VaR}_\alpha(X_1),\ldots,\mathrm{VaR}_\alpha(X_n)).$$

Απόδειξη : Έστω Z μία πραγματική τυχαία μεταβλητή που έχει εύρος $\mathrm{Im}(Z)$ και μία συνάρτηση $\varphi\!:\!\mathrm{Im}(Z)\!\subset\! R\!\rightarrow\! R$ που είναι αύξουσα και αριστερά συνεχής. Για μία σταθερά α, με $0 \leq \alpha \leq 1$, υποθέτουμε ότι το VaR της τυχαίας μεταβλητής Z είναι πεπερασμένο, δηλαδή, $\mathrm{VaR}_\alpha(Z) < \infty$. Η Z υποτίθεται ότι περιγράφει ένα κίνδυνο και απαρτίζει το χαρτοφυλάκιο $\varphi(Z)$. Τότε η συνάρτηση κατανομής της θέσης $\varphi(Z)$ θα είναι $F_{\varphi(Z)} = P(\varphi(Z) \leq t)$ για κάθε πραγματικό t. Επειδή, όμως, η φ είναι αύξουσα και αριστερά συνεχής, σύμφωνα με τις γενικευμένες αντίστροφες έχουμε

$$F_{\varphi(Z)} = P(\varphi(Z) \leq t) = P(Z \leq \varphi^{\wedge}(t)\ ) = F_Z(\varphi^{\wedge}(t))$$

και $\text{VaR}_\alpha(\varphi(Z)) = F^{-1}_{\varphi(Z)}(\alpha)$ λόγω της σχέσης $\text{VaR}_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$. Συνεπώς, από τις γενικευμένες αντίστροφες έπεται ότι

$$\text{VaR}_\alpha(\varphi(Z)) = F^{-1}_{\varphi(Z)}(\alpha) = \inf\{t \in R{:}F_{\varphi(Z)}(t) \geq \alpha\} = \inf\{t \in R{:}F_Z(\varphi^{\wedge}(t)) \geq \alpha\}$$

$$= \inf\{t \in R{:}\ \varphi^{\wedge}(t) \geq F_Z^{-1}(\alpha)\} = \inf\{t \in R{:}t \geq \varphi(F_Z^{-1}(\alpha))\}$$

$$= \varphi(F_Z^{-1}(\alpha)) = \varphi(\text{VaR}_\alpha(Z)).$$

Έστω ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο της μορφής $\psi(X_1,...,X_n)$ με $F_1,\ldots,F_n$ τις συναρτήσεις κατανομής των κινδύνων $X_1,...,X_n$. Επίσης, σημειώνουμε ότι οι X_i είναι συμμονότονες τυχαίες μεταβλητές. Θεωρούμε την αριστερά συνεχή και αύξουσα συνάρτηση φ, η οποία για $0 \leq \alpha \leq 1$ δίνεται από τον τύπο

$$\varphi(\alpha) = \psi(F_1^{-1}(\alpha),\ldots, F_n^{-1}(\alpha)).$$

Αν U είναι μία αυθαίρετη τ. μεταβλητή που κατανέμεται ομοιόμορφα στο (0,1), τότε

$$\text{VaR}_\alpha(\psi(X_1,...,X_n)) = \text{VaR}_\alpha(\psi(F_1^{-1}(U),\ldots, F_n^{-1}(U)) = \text{VaR}_\alpha(\varphi(U))$$

$$= \varphi(\text{VaR}_\alpha(U)) = \varphi(F_U^{-1}(\alpha)) = \varphi(\alpha)$$

γιατί γνωρίζουμε ότι αν $X_1,...,X_n$ συμμονότονες, τότε

$$(X_1,...,X_n) = (F_1^{-1}(U),\ldots, F_n^{-1}(U))$$

και επιπρόσθετα, $F_U^{-1}(\alpha) = \alpha$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\varphi(\alpha) = (F_1^{-1}(\alpha),\ldots, F_n^{-1}(\alpha)) = \psi(\text{VaR}_\alpha(X_1),\ldots, \text{VaR}_\alpha(X_n))$$

τελικώς, προκύπτει

$$\text{VaR}_\alpha(\psi(X_1,...,X_n)) = \psi(\text{VaR}_\alpha(X_1),\ldots, \text{VaR}_\alpha(X_n)). \blacksquare$$

Από την παραπάνω πρόταση παρατηρούμε ότι το VaR ενός χαρτοφυλακίου $\psi(X_1,...,X_n)$ μπορεί να εκφρασθεί ως μία συνάρτηση της αύξουσας, αριστερά συνεχούς συνάρτησης ψ, η οποία είναι συνάρτηση των επιμέρους VaR των διαφόρων τύπων κινδύνων $X_1,...,X_n$. Φυσικά, το τελευταίο προϋποθέτει ότι οι κίνδυνοι είναι συμμονότονοι.

Όταν οι $X_1,...,X_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, έχουμε ότι

$$F_{\psi(X_1,...,X_n)}(s) = P(\psi(X_1,...,X_n) \leq s) = \int dF_n(t_n) P(\psi_{t_n}(X_1,...,X_{n-1}) \leq s)$$

$$= \int dF_n(t_n) \int dF_{n-1}(t_{n-1}) ... \int dF_2(t_2) F_1\left(\psi^{\wedge}_{t_2,...,t_n}(s)\right)$$

και μπορούμε, κατ' αυτόν τον τρόπο, να υπολογίσουμε επακριβώς το VaR διαμέσου επαναλαμβανόμενων δεσμεύσεων.

Εφ' όσον, όμως, οι κίνδυνοι δεν συνιστούν μία από τις δύο προηγούμενες ειδικές περιπτώσεις και είναι απλώς εξαρτημένοι, το VaR της θέσης $\psi(X_1,...,X_n)$ φράσσεται από τις

$$\rho_{C_1,\psi}(F_1,...,F_n)^{-1}(\alpha) \text{ και } r_{C_0,\psi}(F_1,...,F_n)^{-1}(\alpha),$$

όπως είδαμε στο Θεώρημα 6. Αλλά, τα $\rho_{C_1,\psi}(F_1,...,F_n)$ και $r_{C_0,\psi}(F_1,...,F_n)$ ορίζονται ως infimum και supremum, αντίστοιχα, σε όλο το μη φραγμένο σύνολο R^{n-1} και γι' αυτό ο ακριβής υπολογισμός τους (και των αντιστροφών τους) δεν είναι δυνατός. Αφού, λοιπόν, αυτές οι ποσότητες δεν μπορούν να αποδοθούν σε μία κλειστή μορφή, πρέπει να προσεγγισθούν και για ευκολία τις αντικαθιστούμε με τις $F_{\min}$ και $F_{\max}$, αντίστοιχα. Στο σημείο αυτό αξίζει να τονιστεί ότι αν το χαρτοφυλάκιο είναι $\psi(X_1,...,X_n) = X_1 +...+X_n$ και οι συναρτήσεις κατανομής F_i των X_i, για $i = 1,…,n$, είναι όλες του ίδιου τύπου (π.χ. εκθετικές, Pareto, Weibull ή ομοιόμορφη), τα όρια $F_{\min}$ και $F_{\max}$ μπορούν να υπολογισθούν αριθμητικά.

Μία πρώτη μέθοδος προσέγγισης των $F_{\min}$ και $F_{\max}$ μας παρέχεται μέσω του θεωρήματος συμβατότητας.

Θεώρημα 9 : *Έστω* $-\infty \leq a < b \leq \infty$ *και* $\psi:[a , b]^n \rightarrow [a , b]$ *μία αύξουσα, συνεχής συνάρτηση με εύρος* $[a, b]$. *Για έναν σύνδεσμο C, περιθώριες* $F_1,…,F_n$ *και κάθε* $0 \leq \alpha < 1$ *θα έχουμε ότι :*

$$F_{\min}^{-1}(\alpha) = \inf_{C_0(u_1,...,u_n)=\alpha} \psi\left(F_1^{-1}(u_1),...,F_n^{-1}(u_n)\right), \quad F_{\max}^{-1}(\alpha) = \sup_{C_1^d(u_1,...,u_n)=\alpha} \psi\left(F_1^{-1}(u_1),...,F_n^{-1}(u_n)\right)$$

Ο πρακτικός υπολογισμός των ορίων $F_{\min}{}^{-1}$ και $F_{\max}{}^{-1}$ πραγματοποιείται αν διακριτοποιήσουμε κατάλληλα τα σύνολα $\{C_0 = \alpha\}$ και $\{C_1{}^d = \alpha\}$ και τα ελαχιστοποιήσουμε ή μεγιστοποιήσουμε, αντίστοιχα. Είναι γεγονός όμως ότι αυτός ο πρακτικός υπολογισμός ενέχει δυσκολίες, αφού η εύρεση των ορίων αυτών δεν είναι εύκολη όσο αυξάνει ο αριθμός των διαστάσεων n αυξάνοντας, ταυτόχρονα, τον υπολογιστικό χρόνο εκθετικά. Επιπλέον, η άγνωστη επίδραση της αύξησης των βημάτων διακριτοποίησης αποτελεί ένα ακόμη μειονέκτημα. Βέβαια, υπάρχουν και άλλοι τρόποι υπολογισμού, όπως αυτός που πραγματοποιείται βάσει της θεωρίας του ημιορισμένου προγραμματισμού (Semidefinite Programming SPD).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

4.1 Διάταξη αποκοπής ζημίας (stop-loss order) για χαρτοφυλάκια εξαρτημένων κινδύνων και όρια για τις συνολικές απαιτήσεις των εξαρτημένων κινδύνων

Στο πρώτο κεφάλαιο κατά την παρουσίαση της κυρτής διάταξης ασχοληθήκαμε με την συνάρτηση

$$\pi_X(t) = E(X - t)_+ = \int_t^\infty \overline{F}_X(z)dz\,,$$

η οποία ονομάζεται ολοκληρωμένη συνάρτηση επιβίωσης ή μετασχηματισμός stop-loss. Αν η τυχαία μεταβλητή X περιγράφει έναν αναλογιστικό κίνδυνο (συνήθως τότε την συμβολίζουμε με S), ο μετασχηματισμός stop-loss του κινδύνου S,

$$\pi_S(t) = E(S - t)_+ = \int_t^\infty \overline{F}_S(x)dx\,,$$

καλείται καθαρό ασφάλιστρο (net premium) στο πεδίο των ασφαλίσεων και είναι το αναμενόμενο κόστος του αντασφαλιστή. Όταν ο ασφαλιστής δεν θέλει ή δεν μπορεί να αναλάβει ολόκληρο τον κίνδυνο, έστω S, κρατάει ένα μέρος αυτού, το οποίο καλείται διατήρηση (retention) και το υπόλοιπο το μεταβιβάζει στον αντασφαλιστή. Αν το ποσό της διατήρησης t είναι σταθερό, το συμβόλαιο, που συνάπτεται μεταξύ ασφαλιστή και αντασφαλιστή, ονομάζεται stop-loss συμβόλαιο. Στην περίπτωση που ο κίνδυνος S είναι μικρότερος από την διατήρηση t, ο ασφαλιστής αναλαμβάνει ολόκληρη την ευθύνη, ενώ όταν $S > t$ ο αντασφαλιστής αναλαμβάνει την ποσότητα $S - t$ και ο ασφαλιστής την διατήρηση t.

Όσα θα αναπτύξουμε σε αυτό το κεφάλαιο προέρχονται από το βιβλίο των Muller and Stoyan (2002), καθώς, επίσης και από την εργασία του Muller (1997).

Στην σύγκριση αναλογιστικών κινδύνων σημαντικό ρόλο διαδραματίζει η διάταξη stop-loss, που δεν είναι άλλη από την αύξουσα κυρτή διάταξη $\leq_{icx}$ των Κεφαλαίων 1 και 2.

Ορισμός 1: *Αν S και S΄ είναι δύο κίνδυνοι, τότε ο S προηγείται του S΄ ως προς τη stop-loss διάταξη και γράφουμε* $S \leq_{sl} S'$, *αν*

$$\pi_S(t) \leq \pi_{S'}(t)$$

για όλα τα πραγματικά t.

Από τον ορισμό συμπεραίνουμε ότι ο κίνδυνος S' είναι πιο επικίνδυνος από τον κίνδυνο S επειδή επιφέρει υψηλότερο καθαρό ασφάλιστρο για κάθε διατήρηση t, δηλαδή, χωρίς εξάρτηση από το ποσό της διατήρησης.

Στο ατομικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου το συνολικό ποσό των απαιτήσεων εντός μίας περιόδου για ένα χαρτοφυλάκιο n πολιτικών δίνεται από την σχέση

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i ,$$

όπου X_i είναι μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή, που περιγράφει τις συνολικές απαιτήσεις που ανακύπτουν από την πολιτική i και $i = 1,2,\ldots,n$. Συχνά οι κίνδυνοι X_i θεωρούνται (για ευκολία) ανεξάρτητοι και η από κοινού κατανομή των X_i μπορεί να εκφρασθεί διαμέσου των περιθωρίων κατανομών. Αυτό, όμως, μπορεί να οδηγήσει σε σφάλματα κατά την εξαγωγή συμπερασμάτων, ιδιαίτερα, σε περιπτώσεις καταστροφικών κινδύνων (τυφώνες, πλημμύρες, σεισμοί), αφού τότε υπάρχει ισχυρή εξάρτηση μεταξύ των ατομικών κινδύνων X_i ακόμα και όταν υποθέτουμε μικρή συσχέτιση μεταξύ αυτών. Επομένως, το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στη δομή εξάρτησης του τυχαίου διανύσματος $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ και στην περαιτέρω μελέτη στοχαστικών διατάξεων μεταξύ ενός τυχαίου διανύσματος $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ και ενός $\boldsymbol{X}' = (X_1',\ldots,X_n')$ έτσι ώστε από οποιαδήποτε σχέση $\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{X}'$ να έπεται ότι

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \leq \sum_{i=1}^{n} X_i' .$$

Οι πολυμεταβλητές εκδοχές της συνήθους στοχαστικής και της αύξουσας κυρτής διάταξης ενέχουν την παραπάνω ιδιότητα, αλλά πιο ενδιαφέρουσες είναι οι διατάξεις εξάρτησης που είδαμε στο Δεύτερο Κεφάλαιο, όπως η supermodular διάταξη (Muller (1997)).

Θεώρημα 2 : *Έστω* $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ *και* $\boldsymbol{X}' = (X_1',\ldots,X_n')$ *τυχαία διανύσματα και ισχύει* $\boldsymbol{X} \leq_{sm} \boldsymbol{X}'$. *Τότε*

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \leq_{sl} S' = \sum_{i=1}^{n} X_i' .$$

Απόδειξη : Από τον ορισμό της αύξουσας κυρτής διάταξης γνωρίζουμε ότι $S \leq_{sl} S'$ αν και μόνο αν $Ef(S) \leq Ef(S')$ για όλες τις αύξουσες κυρτές συναρτήσεις f, αφού η διάταξη stop-loss είναι η αύξουσα κυρτή διάταξη. Αρκεί να δείξουμε ότι για μία τέτοια συνάρτηση f, η συνάρτηση

$$g(x) = f(x_1 + \ldots + x_n)$$

είναι supermodular. Εξ' ορισμού, η g είναι supermodular αν και μόνο αν

$$f(t+\varepsilon+\delta)+f(t) \geq f(t+\varepsilon)+f(t+\delta)$$

για όλα τα πραγματικά t και όλα τα ε, $\delta > 0$, το οποίο είναι αληθές λόγω της κυρτότητας της f. ■

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα ένα χαρτοφυλάκιο που απαρτίζεται από θετικά supermodular εξαρτημένους κινδύνους (όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2) είναι πιο επικίνδυνο από ένα χαρτοφυλάκιο ανεξάρτητων κινδύνων με τις ίδιες περιθώριες κατανομές.

Παρόμοια με την supermodular διάταξη προκύπτουν ανάλογα αποτελέσματα και για τις συναφείς τυχαίες μεταβλητές (associated).

Θεώρημα 3 : *Έστω* $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ *και* $\boldsymbol{X}' = (X_1',\ldots,X_n')$ *τυχαία διανύσματα με τις ίδιες περιθώριες κατανομές και υποθέτουμε ότι τα στοιχεία του* $\boldsymbol{X}$ *είναι ανεξάρτητα, ενώ του* $\boldsymbol{X}'$ *είναι συναφή. Τότε*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \leq_{sl} \sum_{i=1}^{n} X_i' .$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3 (Denuit, Dhaene and Ribas 2001) βασίζεται στο γεγονός ότι η f είναι αύξουσα και κυρτή. Συνεπώς, τα συμπεράσματα, που εξάγονται από αυτό, θα ισχύουν για κάθε στοχαστική διάταξη (ολοκληρωτική) της οποίας ο γεννήτορας περιέχει συναρτήσεις των $x_1+\ldots+x_n$ της μορφής $f(x_1+\ldots+x_n)$, με f αύξουσα και κυρτή. Τέτοιες διατάξεις είναι οι $\leq_{idcx}$ και $\leq_{iplcx}$, που είναι ασθενέστερες της supermodular.

Οι ιδιότητες της supermodular διάταξης, τις οποίες αναπτύξαμε στο Κεφάλαιο 2, την καθιστούν σημαντική στις εφαρμογές της αναλογιστικής επιστήμης. Σύμφωνα με μία από αυτές, η supermodular διάταξη παραμένει αναλλοίωτη κατά αύξοντες μετασχηματισμούς των περιθωρίων. Αρκετές φορές ο ασφαλιστής πληρώνει ως αποζημίωση ένα ποσό της μορφής $\varphi_i(X_i)$, όπου φ_i είναι αύξουσα συνάρτηση με $0 \leq \varphi_i(x) \leq x$. Για παράδειγμα $\varphi_i(x) = \min\{(x-d)_+, M\}$, όπου M είναι η μέγιστη πληρωμή και d το αφαιρετέο ποσό. Στην περίπτωση αυτή, η απώλεια της ασφαλιστικής εταιρείας θα είναι

$$S = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(X_i)$$

(και όχι $S = \sum X_i$) και υπό την αναφερόμενη ιδιότητα της supermodular διάταξης θα συνεχίζει να παραμένει αληθές ότι $\boldsymbol{X} \leq_{sm} \boldsymbol{X}' \Rightarrow S \leq_{sl} S'$ (κάτι που δεν θα ισχύει για τις διατάξεις $\leq_{idcx}$ και $\leq_{iplcx}$).

Με τη βοήθεια μίας άλλης ιδιότητας της supermodular διάταξης είμαστε σε θέση να βρούμε ένα ανώτερο όριο για το καθαρό ασφάλιστρο ενός συμβολαίου stop-loss αντασφάλισης διαμέσου του Frechet ανώτερου ορίου όταν γνωρίζουμε τις κατανομές των ατομικών κινδύνων. Σύμφωνα με αυτήν, υπάρχει ένα μέγιστο στοιχείο ως προς τη supermodular διάταξη εντός μίας Frechet κλάσης $\Gamma(F_1,\ldots,F_n)$, δηλαδή, εντός του συνόλου όλων των κατανομών με σταθερές περιθώριες $F_1,\ldots,F_n$, το οποίο ονομάζεται ανώτερο όριο Frechet και δίνεται από τη σχέση

$$F(\boldsymbol{x}) = \min_i F_i(x_i).$$

Εκτός από το ανώτερο όριο, γνωρίζουμε και το κατώτερο όριο Frechet, το οποίο δίνεται από τη σχέση

$$F^{-}(\boldsymbol{x}) = \max\{0\ ,\ \sum_{i=1}^{n} F_i(x_i) - (n-1)\}$$

και σύμφωνα με γνωστό θεώρημα της supermodular διάταξης (βλ. Κεφάλαιο 2) αποτελεί το ελάχιστο στοιχείο εντός μίας Frechet κλάσης $\Gamma(F_1,\ldots,F_n)$, αρκεί το κατώτερο όριο να μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση κατανομής. Το τελευταίο συμβαίνει στην περίπτωση των αμοιβαία αποκλειόμενων κινδύνων οι οποίοι ικανοποιούν τις συνθήκες του Θεωρήματος 2 στην εισαγωγή του Δευτέρου Κεφαλαίου. Ο επόμενος ορισμός έχει δοθεί από τους Dhaene and Denuit (1999).

Ορισμός 4 : *Το διάνυσμα μη αρνητικών κινδύνων* $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ *ονομάζεται αμοιβαία αποκλειόμενο αν* $P(X_i > 0, X_j > 0) = 0$ *για όλα τα* $1 \leq i < j \leq n$.

Ως εκ τούτου συμπεραίνουμε ότι αν ένας από τους κινδύνους $X_1,\ldots,X_n$ είναι θετικός, οι υπόλοιποι πρέπει να είναι μηδέν, δηλαδή,

$$\sum_{i=1}^{n} P(X_i > 0) \leq 1 \quad \text{ή ισοδύναμα,} \quad \sum_{i=1}^{n} P(X_i = 0) \geq n-1 .$$

Πόρισμα 5 : *Έστω* $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ *ένα διάνυσμα αμοιβαία αποκλειόμενων κινδύνων και* $\boldsymbol{X}' = (X_1',\ldots,X_n')$ *ένα διάνυσμα κινδύνων με τις ίδιες περιθώριες κατανομές* $F_1,\ldots,F_n$. *Τότε*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \le_{sl} \sum_{i=1}^{n} X_i' .$$

Θεώρημα 6 : *Έστω* $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$*, όπου* $n \ge 3$*, με κατανομή το κατώτερο όριο Frechet. Τότε η συνάρτηση κατανομής του* $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ *δίνεται είτε* (α) *από την σχέση*

$$F_S(t) = \sum_{i=1}^{n} F_i(t + \xi_i - \xi)$$

αν η πρώτη συνθήκη του Θεωρήματος 2 *της εισαγωγής του Δευτέρου Κεφαλαίου ικανοποιείται με* ξ_i, $1 \le i \le n$*, να είναι το μέγιστο του στηρίγματος της* X_i*, και* $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n$*, είτε* (β) *από την σχέση*

$$F_S(t) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \left(\ 1 - F_i(t + \xi_i - \xi)\ \right)$$

αν η δεύτερη συνθήκη του Θεωρήματος 2 *της εισαγωγής του δευτέρου κεφαλαίου ικανοποιείται με* ξ_i, $1 \le i \le n$*, να είναι το ελάχιστο του στηρίγματος της* X_i *και* $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

Αν και γενικά το κατώτερο όριο Frechet δεν αποτελεί μία κατάλληλη συνάρτηση κατανομής, αρκετές φορές καθίσταται δυνατός ο προσδιορισμός μίας δομής εξάρτησης με ελάχιστο κίνδυνο της συνολικής απαίτησης (με τη μέση τιμή της S). Αυτό συμβαίνει όταν υπάρχει μία δομή εξάρτησης, όπου η συνολική απαίτηση S είναι σταθερή. Παρακάτω παρατίθενται περιπτώσεις, όπου υπάρχει μία δομή εξάρτησης τέτοια ώστε η κατανομή της συνολικής απαίτησης να είναι σταθερή είτε για διακριτές είτε για συνεχείς κατανομές.

Θεώρημα 7 : *Ας υποθέσουμε ότι για τις διακριτές τυχαίες μεταβλητές* $X_1,\ldots,X_n$ *ισχύει ότι* $P(X_i = a_j) = p_j / n$ *για* $j = 1,\ldots,m$ *για κάποια* m, $n \in N$, $a_j \in R$ *και* $p_j \in N_0$, $j = 1,\ldots,m$*. Τότε υπάρχει ένα τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ *με αυτές τις περιθώριες κατανομές τέτοιο ώστε*

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i = ES = \sum_{j=1}^{m} p_j a_j$$

με πιθανότητα 1.

Απόδειξη : Έστω U μία τυχαία μεταβλητή που κατανέμεται ομοιόμορφα στο [0,1], F η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X_1 και F^{-1} η γενικευμένη αντίστροφη συνάρτηση της X_1. Υποθέτουμε ότι

$$X_i = F^{-1}(\mathrm{frac}(U + ((i-1)/n)))$$

για $i = 1,\ldots,n$, όπου $\mathrm{frac}(u) = u - [u]$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι $\mathrm{frac}(u) = u$ για $0 \le u < 1$ και $\mathrm{frac}(u) = u - 1$για $1 \le u < 2$. Επομένως, η F^{-1} είναι σταθερή σε κάθε διάστημα $[(i-1)/n, i/n]$. Άρα θα έχουμε

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} F^{-1}\left(\frac{i-1}{n}\right) = ES$$

με πιθανότητα 1. ■

Για συνεχείς κατανομές ισχύει το επόμενο θεώρημα το οποίο αποτελεί γενίκευση της περίπτωσης ενός σταθερού αθροίσματος $n = 2$ ισόνομων τυχαίων μεταβλητών. Όταν έχουμε συμμετρικές μονοκόρυφες κατανομές, μπορούμε να βρούμε τυχαίες μεταβλητές με την ίδια κατανομή και σταθερό άθροισμα (Ruschendorf and Uckelmann (2002)).

Θεώρημα 8 : *Έστω ότι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής* X_1 *είναι συμμετρική, δηλαδή,* $X_1 - x_0 =_{st} x_0 - X_1$, *για κάποιο πραγματικό* x_0. Τότε *για κάθε φυσικό n υπάρχει ένα διάνυσμα* $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ *με ισόνομες* τ.μ. $X_1,\ldots,X_n$ *έτσι ώστε*

$$S = \sum_{i=1}^{2n} X_i = ES$$

με πιθανότητα 1.

Απόδειξη : Θέτουμε $X_{2\kappa-1} = X_1$ και $X_{2\kappa} = 2x_0 - X_1$ για $\kappa = 1,\ldots,n$. Επειδή η X_1 είναι συμμετρική ως προς x_0 και οι τυχαίες μεταβλητές $X_1,\ldots,X_{2n}$ εκφράζονται συναρτήσει των x_0 και X_1, οι τ.μ. $X_1,\ldots,X_{2n}$ έχουν την ίδια κατανομή με την X_1. Άρα

$$S = \sum_{i=1}^{2n} X_i = 2nx_0 = ES$$

με πιθανότητα 1καθώς $X_{2\kappa-1} + X_{2\kappa} = 2x_0$. ■

Οι υποθέσεις του Θεωρήματος 7 παραμένουν αληθείς για κατανομές με μη φραγμένο στήριγμα, όπως είναι η κανονική κατανομή. Όμως υπάρχουν και περιπτώσεις στις οποίες δεν μπορεί να βρεθεί μία δομή εξάρτησης τέτοια ώστε η συνολική απαίτηση να είναι σταθερή με πιθανότητα 1. Αυτό συμβαίνει στην εκθετική κατανομή, όπου οι ατομικοί κίνδυνοι είναι μη αρνητικοί και μη φραγμένοι άνω. Με το παρακάτω θεώρημα δίνονται όρια για το στήριγμα της συνολικής απαίτησης S. Αυτά τα όρια είναι τα καλύτερα δυνατά όταν η κατανομή F έχει φραγμένο στήριγμα. Υπενθυμίζεται ότι

$$\text{ess sup } S = \sup\{t : P(S > t) > 0\} \text{ και } \text{ess inf } S = \inf\{t : P(S < t) > 0\}$$

είναι τα ουσιώδη (essential) supremum και infimum της συνολικής απαίτησης S, αντίστοιχα.

Θεώρημα 9 : *Έστω F μία αυθαίρετη συνάρτηση κατανομής. Τότε υπάρχει ένα τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n) \in \Gamma(F,\ldots,F)$ *(όλες οι περιθώριες έχουν την κατανομή F) ώστε τα ακόλουθα όρια να ισχύουν για το στήριγμα της* $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$,

$$\textbf{(α)}\ \text{ess inf}\, S \geq \sum_{i=1}^{n-1} F^{-1}\left(\frac{i}{n}\right) \geq ES - (\text{ess sup}\, X_1 - \text{ess inf}\, X_1)$$

και

$$\textbf{(β)}\ \text{ess sup}\, S \leq \sum_{i=1}^{n} F^{-1}\left(\frac{i}{n}\right) \leq ES + (\text{ess sup}\, X_1 - \text{ess inf}\, X_1).$$

Απόδειξη : Έστω U μία τυχαία μεταβλητή που κατανέμεται ομοιόμορφα στο [0,1] και

$$X_i = F^{-1}(\text{frac}(U + ((i-1)/n)))$$

για $i = 1,\ldots,n$. Αφού η $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ είναι συνάρτηση των X_i, διαπιστώνουμε ότι είναι συνάρτηση της U, έστω $g(U)$. Η $g(U)$ είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $1/n$ ($g(x + \kappa/n) = g(x)$ για $\kappa = 1,2,\ldots$) και επειδή η F^{-1} είναι αύξουσα και η g θα είναι αύξουσα. Άρα θα έχουμε

$$\text{ess inf}\, S \geq \sum_{i=1}^{n-1} F^{-1}\left(\frac{i}{n}\right) = g(0) \quad \text{και} \quad \text{ess sup}\, S \leq \lim_{x \to \frac{1}{n}} g(x) \leq \sum_{i=1}^{n} F^{-1}\left(\frac{i}{n}\right).$$

Επειδή η F^{-1} είναι αύξουσα, τα αθροίσματα

$$\sum_{i=1}^{n-1} F^{-1}\left(\frac{i}{n}\right) \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{n} F^{-1}\left(\frac{i}{n}\right)$$

μπορούν να θεωρηθούν ως κάτω και άνω αθροίσματα Riemann για τα αντίστοιχα ολοκληρώματα. Οπότε

$$\sum_{i=1}^{n-1} F^{-1}\left(\frac{i}{n}\right) = F^{-1}(0) + n\sum_{i}^{n-1} \frac{1}{n} F^{-1}\left(\frac{i}{n}\right) \geq \text{ess inf}\, X_1 + n\int_0^{\frac{n-1}{n}} F^{-1}(x)dx$$

$$= \text{ess inf}\, X_1 + ES - n\int_{\frac{n-1}{n}}^{1} F^{-1}(x)dx \geq ES + \text{ess inf}\, X_1 - \text{ess sup}\, X_1$$

και

$$\sum_{i=1}^{n} F^{-1}\left(\frac{i}{n}\right) \leq F^{-1}(1) + n\int_{\frac{1}{n}}^{1} F^{-1}(x)dx \leq ES + \text{ess sup}\, X_1 - \text{ess inf}\, X_1$$

γνωρίζοντας ότι ισχύει

$$EX_1 = \int_0^1 F^{-1}(x)dx \ \text{ και ess inf}\, X_1 \leq F^{-1} \leq \text{ess sup}\, X_1.$$

Τα παραπάνω όρια συνεχίζουν να παραμένουν εν ισχύ για κάθε αυθαίρετο κ και μας δίνουν μία συνολική απαίτηση S με αρκετά μικρή μεταβλητότητα. ■

4.2 Μοντέλα εξαρτημένων κινδύνων

Τα μοντέλα που παρατίθενται παρακάτω προέρχονται από το βιβλίο των Muller and Stoyan (2002) καθώς και από την εργασία των Bauerle and Muller (1998).

4.2.1 Μοντέλο με τοπικά εξαρτημένους κινδύνους

Στο πρώτο μοντέλο θεωρούμε ότι το χαρτοφυλάκιο κινδύνου απαρτίζεται από διάφορες ομάδες και κάθε ομάδα ενέχει ισχυρή (θετική) εξάρτηση μεταξύ των μελών της, ενώ υπάρχει μικρότερη εξάρτηση μεταξύ των μελών που ανήκουν σε διαφορετικές ομάδες. Στην πραγματικότητα αυτό το μοντέλο αντανακλά τη δράση καταστροφικών κινδύνων, όπως σεισμοί ή τυφώνες, όπου οι ομάδες προσδιορίζονται βάσει γεωγραφικών περιοχών. Για τα άτομα της ίδιας περιοχής υπάρχει δυνατή εξάρτηση ως προς τις αναμενόμενες απώλειες, ενώ για τα άτομα που διαμένουν σε διαφορετικές περιοχές η εξάρτηση είναι πάρα πολύ μικρή (υπάρχει σχεδόν ανεξαρτησία). Ο στόχος συνίσταται στη σύγκριση τέτοιων μοντέλων, που προσδιορίζονται από χαρτοφυλάκια κινδύνων με θετικά εξαρτημένους ατομικούς κινδύνους, διαμέσου στοχαστικών διατάξεων. Το συγκεκριμένο μοντέλο έχει εισαχθεί από τον Tong (1989) και έχει εξεταστεί περαιτέρω από τον Bauerle (1997a).

Έστω $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ ένα διάνυσμα που αποτελεί ένα χαρτοφυλάκιο ατομικών κινδύνων $X_1,\ldots,X_n$ και χωρίζουμε τους κινδύνους αυτούς σε r ομάδες, όπου $r \le n$, βάσει ενός n-διάστατου διανύσματος $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1,\ldots,\kappa_r,0,\ldots,0)$ υπό τους περιορισμούς

$$\kappa_v \in N \text{ και } \sum_{v=1}^{r} \kappa_v = n .$$

Κάθε κίνδυνος X_i ανήκει στην v ομάδα αν και μόνο αν $\kappa_1+\ldots+\kappa_{v-1} < i \le \kappa_1+\ldots+\kappa_v$.

Θα θεωρήσουμε ότι οι X_i επηρεάζονται (εξαρτώνται) από τρεις τυχαίες μεταβλητές: τις V, G_v και Z_i που είναι ανεξάρτητες. Η τυχαία μεταβλητή V εκφράζει ένα καθολικό παράγοντα κινδύνου για όλους τους κινδύνους του χαρτοφυλακίου. Η τυχαία μεταβλητή G_v συμβολίζει έναν ειδικό παράγοντα κινδύνου που επηρεάζει μόνο τους κινδύνους της ομάδας v με $1 \le v \le r$ και η τυχαία μεταβλητή Z_i είναι ένας ατομικός παράγοντας κινδύνου που εκφράζει το μεμονωμένο μερίδιο του κινδύνου X_i. Για παράδειγμα, στην ιδιωτική ασφάλιση υγείας η V είναι η γενικότερη περιβαλλοντική κατάσταση, η G_v το επάγγελμα του κάθε ατόμου και η Z_i είναι η κατάσταση της υγείας του.

Ο i-ατομικός κίνδυνος X_i εκφράζεται συναρτήσει των τυχαίων μεταβλητών V, G_v και Z_i, $X_i = g(V, G_v, Z_i)$, όταν ανήκει στην v ομάδα. Επίσης, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $g: R^3 \rightarrow R$ είναι αύξουσα αφού όσο μεγαλύτερος γίνεται κάποιος από αυτούς τους τρεις παράγοντες κινδύνου, τόσο αυξάνει και ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου. Κάτω από αυτή την εξάρτηση μεταξύ των κινδύνων, το ενδιαφέρον έγκειται στην επίδραση που ασκείται από τα μεγέθη των ομάδων στη συνολική απαίτηση του χαρτοφυλακίου, καθώς η θετική συσχέτιση μεταξύ των κινδύνων του χαρτοφυλακίου αυξάνει το πληρωτέο ποσό του ασφαλιστή.

Θεωρούμε δύο n-διάστατα διανύσματα $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1,\ldots,\kappa_r,0,\ldots,0)$ και $\boldsymbol{\kappa}' = (\kappa_1', \ldots, \kappa_r', 0, \ldots, 0)$ όπου $1 \le r, l \le n$, $\kappa_i, \kappa_i' \in N$ για όλα τα i και

$$\sum_{i=1}^{n} \kappa_i = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i' = n.$$

Επίσης, $\boldsymbol{X}$ και $\boldsymbol{X}'$ είναι δύο n-διάστατα χαρτοφυλάκια που ορίζονται από τις σχέσεις

$$\begin{array}{ll}
X_1 = g(Z_1, G_1, V) & X_1' = g(Z_1', G_1, V) \\
\vdots & \vdots \\
X_{\kappa_1} = g(Z_{\kappa_1}, G_1, V) & X_{\kappa_1'}' = g(Z_{\kappa_1'}', G_1, V) \\
X_{\kappa_1+1} = g(Z_{\kappa_1+1}, G_2, V) & X_{\kappa_1'+1}' = g(Z_{\kappa_1'+1}', G_2, V) \\
\vdots & \vdots \\
X_{\kappa_1+\kappa_2} = g(Z_{\kappa_1+\kappa_2}, G_2, V) & X_{\kappa_1'+\kappa'}' = g(Z_{\kappa_1'+\kappa_2'}', G_2, V) \\
\vdots & \vdots \\
X_n = g(Z_n, G_r, V) & X_n' = g(Z_n', G_l, V)
\end{array}$$

Οι ατομικοί παράγοντες κινδύνου $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, Z_1', \ldots, Z_n'$ και οι ειδικοί παράγοντες κινδύνου κάθε ομάδας, $G_1,\ldots,G_{\max\{r,l\}}$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, ενώ ο καθολικός παράγοντας V είναι ανεξάρτητος των Z_i, Z_i' και G_v.

Για τη σύγκριση των δύο παραπάνω χαρτοφυλακίων προκειμένου να εξεταστεί η επικινδυνότητά τους χρησιμοποιείται η συμμετρική supermodular διάταξη μέσω της stop-loss διάταξης.

Θεώρημα 1 : *Έστω* $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ *και* $\boldsymbol{X}' = (X_1',\ldots,X_n')$ *τυχαία διανύσματα με* $\boldsymbol{X} \le_{symsm} \boldsymbol{X}'$. *Τότε*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \le_{sl} \sum_{i=1}^{n} X_i' .$$

Όταν θέλουμε να συγκρίνουμε τους παράγοντες ομαδοποίησης $\boldsymbol{\kappa}$ και $\boldsymbol{\kappa}'$, η πλέον κατάλληλη διάταξη είναι η διάταξη πλειονοποίησης (majorization) που είδαμε στις μονομεταβλητές διατάξεις. Με τη βοήθεια αυτής της διάταξης μπορούμε να συγκρίνουμε δύο χαρτοφυλάκια ακόμα και όταν ο αριθμός ή τα μεγέθη των ομάδων αλλάζουν, παρόλη τη δυσκολία μίας τέτοιας σύγκρισης.

Θεώρημα 2 : *Υπό τις συνθήκες του πρώτου μοντέλου από* $\boldsymbol{\kappa} \leq_M \boldsymbol{\kappa}'$ *έπεται* $\boldsymbol{X} \leq_{symsm} \boldsymbol{X}'$ *και επομένως* $S \leq_{sl} S'$.

Από το παραπάνω θεώρημα (βλ. Bauerle and Muller (1998)) διαπιστώνουμε ότι υπό αυτή τη μοντελοποίηση μπορεί να προσδιοριστεί το πιο επικίνδυνο και το πιο ασφαλές χαρτοφυλάκιο ως προς τη stop-loss διάταξη των συνολικών απαιτήσεων S και S'.

Πόρισμα 3 : *Έστω* $\boldsymbol{\kappa}^r = (n,0, \ldots,0)$ *και* $\boldsymbol{\kappa}^s = (1,\ldots,1)$ *δύο n-διάστατα διανύσματα και* S^r, S^s *αναπαριστούν τις συνολικές απαιτήσεις των αντίστοιχων χαρτοφυλακίων όπως στο πρώτο μοντέλο. Τότε για αυθαίρετο* $\boldsymbol{\kappa}$ *με* $\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_n = n$ *και συνολική απαίτηση S, ισχύει*

$$S^s \leq_{sl} S \leq_{sl} S^r.$$

Τα διανύσματα $\boldsymbol{\kappa}^r = (n, 0, \ldots, 0)$ και $\boldsymbol{\kappa}^s = (1, \ldots, 1)$ συνιστούν το μέγιστο και ελάχιστο, αντίστοιχα, ως προς την πλειοψηφοποίηση υπό όλα τα διανύσματα $\boldsymbol{\kappa}$ με $\sum \kappa_i = n$. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το πιο επικίνδυνο χαρτοφυλάκιο απαρτίζεται από μία μόνο ομάδα, ενώ το πιο ασφαλές συνίσταται όταν κάθε ατομικός κίνδυνος αποτελεί από μόνος του μία ομάδα. Το μοντέλο αυτό είναι παρόμοιο με τα component models (Wang 1998).

4.2.2 Μοντέλο κοινής μίξης

Το μοντέλο αυτό ονομάζεται μοντέλο κοινής μίξης (common mixture model). Εδώ θα επικεντρωθούμε στη σύγκριση δύο τέτοιων μοντέλων θεωρώντας μία τυχαία μεταβλητή W (και για το άλλο μοντέλο V και W) που περιγράφει έναν εξωτερικό μηχανισμό. Αυτός ο εξωτερικός μηχανισμός ασκεί επίδραση σε όλους τους κινδύνους ενός χαρτοφυλακίου και μπορεί να θεωρηθεί ως μία περιβαλλοντική παράμετρος που αναπαριστά μία φυσική ή μία οικονομική ή μία νομική κατάσταση. Στο μοντέλο κοινής μίξης οι ατομικοί κίνδυνοι είναι ανεξάρτητοι για δοσμένη περιβαλλοντική παράμετρο. Τέτοια μοντέλα έχουν εξεταστεί από τους Shaked and Tong (1985) και Bauerle (1997a).

Έχουμε δύο n-διάστατα τυχαία διανύσματα $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ και $\boldsymbol{X}' = (X_1', \ldots, X_n')$ που ορίζονται από τις σχέσεις

$$\boldsymbol{X} = (g_1(Z_1,W), \ldots, g_n(Z_n,W)) \quad \text{και} \quad \boldsymbol{X}' = (\tilde{g}_1(Z_1',V,W), \ldots, \tilde{g}_n(Z_n',V,W)).$$

Οι τυχαίες μεταβλητές Z_1, Z_2, …, Z_n, Z_1', …, Z_n' είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές (iid) και το τυχαίο διάνυσμα (V,W) είναι ανεξάρτητο αυτών. Επίσης, οι $g, \tilde{g}$ είναι ίσες κατά κατανομή για όλα τα $i = 1,\ldots,n$ και για κάθε σταθερό w, δηλαδή,

$$g_i(Z_i,w) =_{st} \tilde{g}_i(Z_i',V,w).$$

Το ακόλουθο θεώρημα έχει αποδειχθεί από τους Bauerle and Muller (1998).

Θεώρημα 4 : *Αν οι συναρτήσεις $\tilde{g}_i$ είναι αύξουσες ως προς τη δεύτερη παράμετρο, τότε $\boldsymbol{X} \leq_{sm} \boldsymbol{X}'$ και επομένως $S \leq_{sl} S'$.*

Από τον ορισμό των διανυσμάτων $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ και $\boldsymbol{X}' = (X_1',\ldots,X_n')$ παρατηρούμε ότι το $\boldsymbol{X}$ είναι συνάρτηση των μεταβλητών Z_i, W, ενώ το $\boldsymbol{X}'$ εξαρτάται από μία επιπλέον μεταβλητή, τη V (το $\boldsymbol{X}'$ επηρεάζεται από δύο περιβαλλοντικούς παράγοντες, τους V και W). Αυτός ο επιπρόσθετος παράγοντας του $\boldsymbol{X}'$ επηρεάζει όλα τα $X_1',\ldots,X_n'$ κατά τον ίδιο τρόπο, με αποτέλεσμα να αυξάνει την εξάρτηση μεταξύ των ατομικών κινδύνων του $\boldsymbol{X}'$ σε σχέση με την εξάρτηση μεταξύ των ατομικών κινδύνων του $\boldsymbol{X}$ και το χαρτοφυλάκιο $\boldsymbol{X}'$ να καθίσταται πιο επισφαλές.

Όταν η εξωτερική παράμετρος W εκφυλίζεται (είναι σταθερή) μπορούμε να έχουμε μία ειδική περίπτωση του προηγούμενου θεωρήματος. Αν η W είναι εκφυλισμένη τα $\boldsymbol{X}$ και $\boldsymbol{X}'$ δίνονται, πλέον, από τις σχέσεις

$$\boldsymbol{X} = (g_1(Z_1),\ldots,g_n(Z_n)) \quad \text{και} \quad \boldsymbol{X}' = (\tilde{g}_1(Z_1',V),\ldots, \tilde{g}_n(Z_n',V)).$$

Άρα οι $X_1',\ldots,X_n'$ είναι δεσμευμένα ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, δεδομένου ότι $V = v$, και καθώς οι $\tilde{g}_i$ είναι αύξουσες ως προς τη δεύτερη παράμετρο, η δεσμευμένη κατανομή κάθε X_i', δεδομένου $V = v$, είναι στοχαστικά αύξουσα ως προς v για όλα τα $i = 1,\ldots,n$. Επιπροσθέτως, οι $X_1,\ldots,X_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που έχουν τις ίδιες περιθώριες κατανομές με τις $X_1',\ldots,X_n'$.

Πόρισμα 5 : *Έστω V μία τυχαία μεταβλητή και $\boldsymbol{X}' = (X_1',\ldots,X_n')$ ένα τυχαίο διάνυσμα έτσι ώστε οι τ.μ. $X_1',\ldots,X_n'$ είναι δεσμευμένα ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, δεδομένου $V = v$, και οι δεσμευμένες κατανομές $P(X_i' \in \cdot \mid V = v)$ είναι στοχαστικά αύξουσες ως προς v για όλα τα $i = 1,\ldots,n$. Επιπλέον, έστω $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ ένα διάνυσμα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με τις ίδιες περιθώριες κατανομές όπως το $\boldsymbol{X}'$. Τότε $\boldsymbol{X} \leq_{sm} \boldsymbol{X}'$ και επομένως $S \leq_{sl} S'$.*

4.3 Μη διακεκριμένοι ατομικοί κίνδυνοι ενός χαρτοφυλακίου

Θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ που απαρτίζεται από μη διακεκριμένους (indistinguishable) κινδύνους, δηλαδή θεωρούμε ότι η από κοινού κατανομή του τυχαίου διανύσματος $\boldsymbol{X}$ είναι ίδια για οποιαδήποτε μετάθεση των X_i. Ως συνέπεια, οι τ.μ. $X_1,\ldots,X_n$ έχουν την ίδια περιθώρια κατανομή. Μία τέτοια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών καλείται ανταλλάξιμη (exchangeable ή interchangeable, Feller (1971) ή Chow and Teicher (1978)).

Θεωρούμε ότι οι $X_1,\ldots,X_n$ παίρνουν τιμές στο 0 και σε κάποιο σημείο α με πιθανότητα p *με* $p \in (0,1)$ και $\alpha > 0$ για όλα τα $i = 1,\ldots,n$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θέτουμε $\alpha = 1$, οπότε οι τυχαίες μεταβλητές X_1, $X_2,\ldots$ σχηματίζουν μία ακολουθία ανταλλάξιμων Bernoulli μεταβλητών και συνιστούν το χαρτοφυλάκιο n κινδύνων $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα de Finetti (Feller 1971), η κατανομή της συνολικής απαίτησης ζημιάς S_n των ατομικών κινδύνων του χαρτοφυλακίου μπορεί να γραφεί ως μία μίξη διωνυμικών κατανομών, δηλαδή,

$$P(S_n = k) = \int_0^1 \binom{n}{k} \theta^k (1-\theta)^{n-k} F(d\theta),$$

για κάποια μικτική κατανομή F. Επομένως, η κατανομή της S_n προσδιορίζεται πλήρως από την κατανομή F.

Θεώρημα 1 : *Έστω* S_n (ή S_n') *η συνολική απαίτηση ενός χαρτοφυλακίου n κινδύνων που ανακύπτουν από μία ακολουθία ανταλλάξιμων Bernoulli μεταβλητών με μικτική κατανομή* F (ή F'). *Τότε από* $F \leq_{sl} F'$ *έπεται* $S \leq_{sl} S'$.

Από το παραπάνω θεώρημα (συνέπεια του Πορίσματος 3.7 των Lefevre and Utev (1996)) διαπιστώνουμε ότι το πιο ασφαλές χαρτοφυλάκιο ανταλλάξιμων Bernoulli μεταβλητών, με δοσμένες περιθώριες, είναι αυτό που αποτελείται από ανεξάρτητους κινδύνους, ενώ το πιο επικίνδυνο συνίσταται από συμμονότονους κινδύνους, δηλαδή, η μικτική κατανομή των ατομικών κινδύνων είναι συγκεντρωμένη στο $\{0,1\}$ (οι κίνδυνοι είναι μέγιστα εξαρτημένοι). Όταν οι κίνδυνοι είναι συμμονότονοι, οι τυχαίες μεταβλητές $X_1,\ldots,X_n$ (που περιγράφουν τους κινδύνους) είναι ταυτοτικές και το χαρτοφυλάκιο λαμβάνει την μορφή $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_1)$ καθώς οι $X_2,\ldots,X_n$ ταυτίζονται με την X_1. Συνεπώς, το συνολικό ποσό απαίτησης θα είναι $S_n = nX_1$ και όχι $\sum X_i$. Επίσης η S_n θα κατανέμεται σε δύο σημεία, στα 0 και n, με πιθανότητα $P(S_n = 0) = 1 - P(S_n = n) = p$.

Θεώρημα 2 : *Έστω* $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ *ένα χαρτοφυλάκιο ισόνομων κινδύνων Bernoulli με μία αυθαίρετη δομή εξάρτησης και* $\boldsymbol{Y} = (Y_1,\ldots,Y_1)$ *ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων με την ίδια κατανομή. Επιπλέον, έστω*

$$\pi_{\boldsymbol{X}}(t) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i - t)_+$$

το καθαρό ασφάλιστρο μίας stop-loss αντασφάλισης του χαρτοφυλακίου $\boldsymbol{X}$ *και* $\pi_{\boldsymbol{Y}}(t)$ *ορίζεται αναλόγως. Τότε ο λόγος*

$$\pi_{\boldsymbol{X}}(t) \,/\, \pi_{\boldsymbol{Y}}(t)$$

είναι αύξων εντός του [0,1).

Το Θεώρημα 2, στο οποίο πραγματοποιείται σύγκριση μεταξύ των ασφαλίστρων stop-loss του χαρτοφυλακίου συμμονότονων κινδύνων και ενός αυθαίρετου χαρτοφυλακίου κινδύνων Bernoulli, δεν είναι αληθές για γενικές κατανομές.

Υποθέτουμε ότι $Y, X_1,\ldots,X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές (iid) και χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι συγκεντρώνονται στο [0,1]. Επιπροσθέτως, τα stop-loss ασφάλιστρα του πιο ασφαλούς και του πιο επικίνδυνου χαρτοφυλακίου δίνονται από τους τύπους

$$\pi^n{}_{\boldsymbol{X}}(t) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i - nt)_+ \quad \text{και} \quad \pi^n{}_{\boldsymbol{Y}}(t) = E(nY - nt)_+$$

αντίστοιχα, όπου $t \in (0,1)$ προσδιορίζει το ποσοστό διατήρησης του κινδύνου. Κάτω από αυτές τις συνθήκες μπορεί να διατυπωθεί το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3 : *Υποθέτουμε ότι* $Y, X_1,\ldots,X_n$ *είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές* (iid) *και έστω* $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ *και* $\boldsymbol{Y} = (Y,\ldots,Y)$. *Τότε ο λόγος*

$$\pi^n{}_{\boldsymbol{Y}}(t) \,/\, \pi^n{}_{\boldsymbol{X}}(t)$$

είναι αύξων ως προς τον αριθμό των απαιτήσεων n *και το όριο του όταν* $n \to \infty$ *είναι ίσο με*

$$E(Y - t)_+ \,/\, (EY - t)$$

αν $t < EY$ *και* $+\infty$ *αν* $t \geq EY$.

Απόδειξη : Ισχύει ότι

$$\frac{\pi^n_{\mathbf{Y}}(t)}{\pi^n_{\mathbf{X}}(t)} = \frac{E(nY - nt)_+}{E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - nt\right)_+} = \frac{E(Y - t)_+}{E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - t\right)_+}$$

και αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - t)_+$ είναι φθίνουσα ως προς n ώστε ο λόγος να είναι αύξων ως προς n. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι οι $X_1,\ldots,X_n$ είναι iid τυχαίες μεταβλητές και σύμφωνα με το Πόρισμα 21 της μονομεταβλητής κυρτής διάταξης ισχύει ότι

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} X_i \leq_{sl} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \,.$$

Επίσης, από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών έχουμε ότι για μία ακολουθία iid τυχαίων μεταβλητών με πεπερασμένη μέση τιμή, ο δειγματικός μέσος συγκλίνει στην μέση τιμή (EX_1) σχεδόν βέβαια. Αυτή η σύγκλιση σύμφωνα με την παραπάνω διάταξη είναι μονότονη καθώς η μεταβλητότητα του δειγματικού μέσου φθίνει όσο αυξάνει το n. Άρα ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = EX_1 = EY$$

από όπου προκύπτει άμεσα το ζητούμενο. ■

Αφού το Πόρισμα 20 της μονομεταβλητής κυρτής διάταξης του Κεφαλαίου 1 ισχύει για ανταλλάξιμες τυχαίες μεταβλητές, ο λόγος $\pi^n{}_Y(t)$ / $\pi^n{}_X(t)$ είναι αύξων ως προς τον αριθμό των απαιτήσεων n και για μία γενικότερη περίπτωση ανταλλάξιμων τυχαίων μεταβλητών. Όμως τώρα, το όριο του δειγματικού μέσου (σύμφωνα με τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών για μία ακολουθία ανταλλάξιμων τυχαίων μεταβλητών) όταν $n \to \infty$ δεν είναι ίσο με τη μέση τιμή, αλλά με τη δεσμευμένη μέση τιμή ως προς Θ και έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E(X_1 \mid \Theta) = E(Y \mid \Theta).$$

Η τυχαία μεταβλητή Θ συνιστά τον παράγοντα μίξης στο θεώρημα de Finetti (βλ. Feller (1971) ή Chow and Teicher (1978)). Άρα ο λόγος γίνεται

$$\pi^n{}_Y(t) \,/\, \pi^n{}_X(t) = E(Y - t)_+ \,/\, E(\, E(Y \mid \Theta) - t)_+$$

αν $t < E(Y \mid \Theta)$.

Από το Θεώρημα 3 παρατηρούμε ότι το σχετικό ασφάλιστρο δύο τέτοιων χαρτοφυλακίων παίρνει μικρές τιμές αν η διατήρηση t είναι μικρότερη από την αναμενόμενη συνολική απαίτηση, ενώ παίρνει πολύ μεγάλες τιμές αν η διατήρηση κινδύνου t υπερβαίνει την αναμενόμενη συνολική απαίτηση αποδεικνύοντας τη σημαντικότητα της εξάρτησης των κινδύνων εντός ενός χαρτοφυλακίου.

4.4 S-κυρτότητα και αποστροφή κινδύνου (risk aversion)

Σε αυτή την παράγραφο θα αναφερθούμε σε s-κυρτότητα και αποστροφή κινδύνου μέσω της θεωρίας της αναμενόμενης ωφελιμότητας, αντικείμενο το οποίο κατά κύριο λόγο προέρχεται από την εργασία των Denuit, Lefevre and Scarsini (2001).

Κάθε ωφελιμοσυνάρτηση u παίρνει μία τιμή $u(x)$ για x νομισματικές μονάδες και περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο ένα άτομο, που λαμβάνει αποφάσεις (αποφασιολήπτης ή ιθύνων, decision maker), εκτιμά μία περιουσία μεγέθους x νομισματικών μονάδων. Βάσει της θεωρίας της αναμενόμενης ωφελιμότητας (Von Neumann and Morgenstern 1947) το άτομο, που λαμβάνει αποφάσεις, έχει μία ωφελιμοσυνάρτηση και ενεργεί κατά τρόπο που να μεγιστοποιεί την αναμενόμενη ωφελιμότητά του. Επομένως κάθε άτομο, που έχει μία ωφελιμοσυνάρτηση u, θα προτιμά μία περιουσία Y αντί μίας περιουσίας X, και γράφουμε

$$X \leq_u Y$$

αν η αναμενόμενη ωφελιμότητα της Y υπερέχει της αναμενόμενης ωφελιμότητας της X,

$$E(u(X)) \leq E(u(Y))$$

Εντός του συνόλου των συναρτήσεων κατανομής τυχαίων περιουσιών, η σχέση διάταξης $\leq_u$ δύο τυχαίων περιουσιών, έστω X και Y, είναι ασθενής και προσδιορίζει ισοδύναμες κλάσεις στις οποίες υπάρχει μία ολική διάταξη. Για αυτό τον λόγο όταν δύο τυχαίες περιουσίες έχουν την ίδια κατανομή με την ίδια αναμενόμενη ωφελιμότητα, δεν αποτελούν κριτήριο απόφασης για τον ιθύνοντα ή αποφασιολήπτη (decision maker). Η σχέση διάταξης $\leq_u$ είναι ανακλαστική, μεταβατική και ολική, αλλά, όχι αντισυμμετρική.

Μία ωφελιμοσυνάρτηση u είναι μία μη φθίνουσα συνάρτηση, αφού διέπεται από κοινές αλήθειες μεταξύ του συνόλου των ωφελιμοσυναρτήσεων, όπως ότι μία περιουσία μεγαλύτερης χρηματικής αξίας είναι ελκυστικότερη από μία περιουσία μικρότερης χρηματικής αξίας. Συνεπώς, το κίνητρο του κέρδους του αποφασιολήπτη συνίσταται όταν η πρώτη παράγωγος της ωφελιμοσυνάρτησης u είναι θετική, δηλαδή

$$u^{(1)} \geq 0$$

με τη προϋπόθεση ότι η u είναι διαφορίσιμη. Αν η u είναι δύο φορές διαφορίσιμη και ισχύει

$$u^{(2)} \leq 0$$

τότε η ωφελιμοσυνάρτηση u είναι κοίλη. Στην περίπτωση αυτή το άτομο που λαμβάνει αποφάσεις είναι σε θέση αποστροφής προς τον κίνδυνο (risk averse) και επιλέγει ένα βέβαιο παρά ένα τυχαίο εισόδημα με την ίδια αναμενόμενη τιμή. Επιπλέον, δεδομένης μίας κοίλης u, η ανισοτική σχέση

$$Eu(X) \leq u(EX)$$

είναι αληθής για κάθε τυχαίο X μέσω της ανισότητας του Jensen. Επομένως, ένα άτομο με κοίλη ωφελιμοσυνάρτηση θα προτιμά πάντα το βέβαιο ποσό $E(X)$ από το τυχαίο X.

Στο πεδίο της αναλογιστικής επιστήμης, η έννοια του κινδύνου περιγράφει ένα τυχαίο ενδεχόμενο που μπορεί να επιφέρει κάποιες οικονομικές απώλειες και αναπαρίσταται από μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές. Όταν ο κίνδυνος συμβαίνει, ο ασφαλιστής υποχρεούται να καταβάλει ένα τυχαίο χρηματικό ποσό προκειμένου να αποζημιώσει τον ασφαλισμένο (ή/και κάποιο τρίτο μέρος αν συμπεριλαμβάνεται στο ασφαλιστήριο συμβόλαιο) για τις επιπτώσεις που ο τελευταίος υπόκειται από το συμβάν.

Η συνάρτηση v που ορίζεται από την σχέση

$$v(x) = -\,u(-\,x),$$

όπου $x \in R$, είναι μία μη φθίνουσα συνάρτηση και ονομάζεται συνάρτηση pain του αποφασιολήπτη (βλ. Denuit, Dhaene and Van Wouve (1999)) καθώς το $v(x)$ μπορεί να θεωρηθεί ως η συνάρτηση που συνδέεται με ένα χρέος του αποφασιολήπτη. Όπως είδαμε, και η συνάρτηση ωφελιμότητας u είναι μία μη φθίνουσα συνάρτηση. Αυτές οι δύο συναρτήσεις συνδέονται μεταξύ τους και μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η θέση αποστροφής κινδύνου ενός αποφασιολήπτη με ωφελιμοσυνάρτηση u ισοδυναμεί με την κυρτότητα της συνάρτησης pain του. Με άλλα λόγια η u είναι κυρτή αν και μόνο αν η v είναι κοίλη. Για έναν κίνδυνο X γνωρίζουμε ότι

$$Eu(-X) = -Ev(X)$$

και για τους κινδύνους X και Y θα έχουμε ότι

$$E(u(-X)) \geq E(u(-Y)) \text{ αν και μόνο αν } Ev(X) \leq Ev(Y).$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι

$$-Y \leq_u -X \text{ αν και μόνο αν } X \leq_v Y$$

και στη βάση των συναρτήσεων pain, είμαστε σε θέση να ισχυριστούμε ότι, σύμφωνα με την υπόθεση της αναμενόμενης ωφελιμότητας, ο κίνδυνος X προτιμάται από τον κίνδυνο Y και γράφουμε

$$X \leq_v Y$$

αν και μόνο αν

$$Ev(X) \leq Ev(Y)$$

Η ανάπτυξη των παραπάνω σχέσεων διάταξης, για τη σύγκριση των κινδύνων X και Y, πραγματοποιείται διαμέσου υποκειμενικών ωφελιμοσυναρτήσεων κάθε φορά (και όχι μέσω αντικειμενικής παρατήρησης) οι οποίες δεν μπορούν να εκφραστούν επακριβώς για κάθε αποφασιολήπτη και λειτουργούν αποτρεπτικά για γενικές διαπιστώσεις. Εξαιτίας αυτού, θεωρούμε όλους τους «λογικούς» αποφασιολήπτες χωρίζοντας τους σε διάφορες κλάσεις και επικεντρωνόμαστε, πλέον, στις κοινές τους προτιμήσεις έτσι ώστε η πληροφόρηση για τις προτιμήσεις των κινδύνων να βασίζεται στην κατανομή του κάθε κινδύνου χωριστά και όχι στη συνάρτηση ωφελιμότητας του (εκτός των περιπτώσεων που μία συνάρτηση ωφελιμότητας ικανοποιεί κάποιες γενικές συνθήκες). Ο διαχωρισμός των αποφασιοληπτών σε κλάσεις μας οδηγεί στις στοχαστικές διατάξεις (βλέπε για παράδειγμα, Mosler and Scarsini 1991). Σύμφωνα με τις τελευταίες, ένας κίνδυνος X προτιμάται από ένα κίνδυνο Y ως προς μία στοχαστική διάταξη $\leq_F$, αν $X \leq_v Y$ για όλες τις συναρτήσεις pain εντός μία κλάσης F. Η σύγκριση των παραπάνω κινδύνων ενέχει την παραδοχή ότι X και Y έχουν μερικές ίδιες πρώτες ροπές και συνεπώς, τα ασφάλιστρα για την ασφάλιση των κινδύνων X και Y είναι ίσα.

Επιλέγουμε την κλάση F έτσι ώστε να συνιστά το σύνολο όλων των συναρτήσεων pain v, με $v^{(1)} \geq 0$, και η σχετιζόμενη στοχαστική διάταξη είναι η συνήθης στοχαστική διάταξη $\leq_{st}$. Οπότε έχουμε

$$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow -Y \leq_u -X$$

και μπορούμε να πούμε ότι η απώλεια X (που επιφέρει ο κίνδυνος) είναι προτιμότερη από την απώλεια Y από όλους τους αποφασιολήπτες που επιζητούν το κέρδος. Μία άλλη επιλογή για την F αποτελεί το σύνολο όλων των συναρτήσεων pain v, με $v^{(1)} \geq 0$ και $v^{(2)} \geq 0$, που μας οδηγεί στη διάταξη stop-loss. Στην προκειμένη περίπτωση θα ισχύει

$$X \leq_{sl} Y \Leftrightarrow -Y \leq_u -X$$

για όλες τις συναρτήσεις u ώστε $u^{(1)} \geq 0$, $u^{(2)} \leq 0$. Η σχέση $X \leq_{sl} Y$ ερμηνεύεται ως εξής : αν οι αποφασιολήπτες, που είναι σε θέση αποστροφής κινδύνου και επιζητούν το κέρδος, πρέπει να επιλέξουν μεταξύ των απωλειών X και Y, θα επιλέξουν την απώλεια X, που είναι μικρότερη από την Y ως προς τη διάταξη stop-loss, εντός της κλάσης των συγκεκριμένων συναρτήσεων. Άρα και η κατανομή του αντίστοιχου κινδύνου που προκαλεί την απώλεια X θα είναι μικρότερη από αυτή της Y.

Αν θεωρήσουμε ότι η κλάση F είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων pain v, με $v^{(1)}$, $v^{(2)}, \ldots, v^{(s)} \geq 0$, προκύπτει μία γενίκευση της διάταξης stop-loss (βλ. Goovaerts *et al.* 1990), η οποία καλείται stop-loss διάταξη s-βαθμού (ή μερικές φορές s + 1 - βαθμού, βλ. Kaas and Hesselager 1995) και συμβολίζεται $\leq_{s\text{-}sl}$. Για $s \in N_0$,

$$X \leq_{s\text{-}sl} Y$$

για όλες τις συναρτήσεις pain, όπως ορίστηκαν προηγουμένως, και

$$X \leq_{s\text{-}sl} Y \Leftrightarrow -Y \leq_u -X$$

για όλες τις συναρτήσεις ωφελιμότητας u ώστε $u^{(1)} \geq 0$, $u^{(2)} \leq 0,\ldots, (-1)^{s+1}u^{s} \geq 0$. Η ερμηνεία της σχέσης διάταξης $X \leq_{s\text{-}sl} Y$ είναι ότι η απώλεια X προτιμάται από την απώλεια Y από όλους τους ιθύνοντες που κατέχουν μη φθίνουσες ωφελιμοσυναρτήσεις των οποίων τα πρόσημα των s πρώτων παραγώγων τους εναλλάσσονται. Υπό την υπόθεση της ισότητας των $s-1$ πρώτων ροπών των X και Y (Denuit et al. 1998) ενισχύονται οι διατάξεις $\leq_{s\text{-}sl}$ και, πλέον, έχουμε τις s-κυρτές διατάξεις που παρουσιάσαμε στο πρώτο (και δεύτερο) κεφάλαιο. Από τον ορισμό της s-κυρτής ξέρουμε ότι

$$X \leq_{s\text{-}cx} Y \Leftrightarrow \begin{cases} X \leq_{s-sl} Y \\ EX^k = EY^k \ \gamma\iota\alpha\ k = 1,2,\ldots,s-1 \end{cases}$$

και σχετικά με τις συναρτήσεις pain v αποδεικνύεται ότι ισχύει $X \leq_{s\text{-}cx} Y$ αν και μόνο αν $X \leq_v Y$ για όλες τις συναρτήσεις pain v ώστε $v^{(s)} \geq 0$.

Εναλλακτικά, $X \leq_{s\text{-}cx} Y$ αν και μόνο αν $X \leq_v Y$ για όλες τις συναρτήσεις pain $v \in \bar{u}_{s\text{-}cx}$ όπου $\bar{u}_{s\text{-}cx}$ είναι το σύνολο των κυρτών συναρτήσεων βαθμού s (βλ. Pecaric *et al.* (1992) και Roberts and Varberg (1973)). Επίσης, $\bar{u}_{s\text{-}cx}$ είναι η κλειστότητα του $u_{s\text{-}cx}$ (ως προς την σύγκλιση κατά σημείο) που είναι η οικογένεια των συναρτήσεων $u_{s\text{-}cx} = \{v{:}R^{+} \to R \mid v^{(s)} \geq 0\}$ και μπορεί να αποδοθεί ισοδύναμα μέσω επαναλαμβανόμενων προς τα εμπρός (forward) διαφορών. Δεδομένης οποιασδήποτε συνάρτησης $v{:}R^{+} \to R$, για $\varepsilon > 0$, θεωρούμε τις επαναλαμβανόμενες προς τα εμπρός διαφορές

$$\Delta_\varepsilon^{k} v(x) = \Delta_\varepsilon^{k-1} v(x+\varepsilon) - \Delta_\varepsilon^{k-1} v(x)$$

με αρχική συνθήκη $\Delta_\varepsilon^{0} v \equiv v$. Τότε η συνάρτηση v (από τον ορισμό 1.45 των Pecaric *et al.* (1992)) είναι Jensen-κυρτή τάξης s αν

$$\Delta_\varepsilon^{s} v(x) \geq 0$$

για όλα τα $x \in R^{+}$ και $\varepsilon > 0$. Συνεπώς, αποδεικνύεται ότι $\bar{u}_{s\text{-}cx}$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων που είναι Jensen-κυρτές τάξης s.

Η ανάγκη να εξάγουμε ρεαλιστικά συμπεράσματα και να κατανοήσουμε την οικονομική σημασία των παραπάνω σχέσεων διάταξης, μας οδηγεί στην προσπάθεια ταξινόμησης της συμπεριφοράς διάφορων οικονομικών φορέων διαμέσου της σύγκρισης επαναλαμβανόμενων λαχειοφόρων αγορών (βλ. Mosler and Scarsini (1991)). Παρόλο το διαχωρισμό των αποφασιοληπτών σε κλάσεις, ώστε να πραγματοποιούνται αντικειμενικότερες παρατηρήσεις μέσω των κατανομών των κινδύνων βάσει των κοινών προτιμήσεών τους, δεν μπορέσαμε να ορίσουμε κάποια κοινά λογικά κριτήρια που να περιγράφουν την συμπεριφορά όλων των αποφασιοληπτών που κατέχουν μία s-κυρτή συνάρτηση pain.

Η σύγκριση θα εκτελεστεί βήμα-βήμα, με κάθε βήμα να αναπροσδιορίζει την ταξινόμηση που προέκυψε από το τελευταίο βήμα (δηλαδή κάθε βήμα δεν λειτουργεί σωρευτικά). Έχουμε την συνάρτηση pain v και για κάθε $\varepsilon \in R_0^+$ θέτουμε $v_0(\cdot \mid \varepsilon) \equiv v$. Η ακολουθία $v_k(\cdot \mid \varepsilon)$, $k \in \mathrm{N}_0$, είναι οι διαδοχικές εμπρόσθιες διαφορές της v. Άρα

$$v_k(x \mid \varepsilon) = \Delta_\varepsilon^k v(x)$$

με $k \geq 1$ και, επίσης,

$$v_k(x \mid \varepsilon) = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j v[x + (k-j)\varepsilon],$$

$k \in N_0$. Εξ' ορισμού $v_k(x \mid \varepsilon) \geq 0$ και έχουμε :

- Για $k = 1$ και $j = 0, 1$ είναι $v_1(x \mid \varepsilon) \geq 0$ και

$$v_1(x \mid \varepsilon) = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j v[x + (k-j)\varepsilon] = v(x + \varepsilon) - v(x).$$

Συνεπώς,

$$v(x + \varepsilon) - v(x) \geq 0 \text{ ή } v(x) \leq v(x + \varepsilon)$$

και μπορούμε να πούμε ότι ένας ιθύνοντας με συνάρτηση pain v προτιμά τον κίνδυνο $X_1(x, \varepsilon) \equiv x$ από τον κίνδυνο $Y_1(x, \varepsilon) \equiv x + \varepsilon$. Επιπροσθέτως, $v_1(x \mid \varepsilon) \geq 0$ και για όλα τα $x \in R^+$ και $\varepsilon > 0$ αν και μόνο αν v μη φθίνουσα. Οι κίνδυνοι X_1 και Y_1, που συναρτώνται από τα x και ε, ταυτίζονται με τις τιμές x και $x + \varepsilon$, αντίστοιχα, σχεδόν βέβαια.

- Για $k = 2$ και $j = 0, 1, 2$ είναι $v_2(x \mid \varepsilon) \geq 0$ και

$$v_2(x \mid \varepsilon) = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j v[x + (k-j)\varepsilon] = [v(x) + v(x + 2\varepsilon)] / 2 - v(x + \varepsilon).$$

Άρα

$$[v(x) + v(x + 2\varepsilon)] / 2 - v(x + \varepsilon) \geq 0 \quad \text{ή} \quad v(x + \varepsilon) \leq [v(x) + v(x + 2\varepsilon)] / 2,$$

και συμπεραίνουμε ότι ο κίνδυνος $X_2(x, \varepsilon) \equiv x + \varepsilon$ (σχεδόν βέβαια) προτιμάται από τον κίνδυνο

$$Y_2(x, \varepsilon) \equiv \begin{cases} x, \ \text{με πιθανότητα } \dfrac{1}{2} \\ x + 2\varepsilon, \ \text{με πιθανότητα } \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

από έναν αποφασιολήπτη που κατέχει μία συνάρτηση pain v. Επιπλέον, όπως γνωρίζουμε, $v_2(x \mid \varepsilon) \geq 0$ και για όλα τα $x \in R^+$ και $\varepsilon > 0$ αν και μόνο αν η v είναι κυρτή.

Προκειμένου να γενικεύσουμε την διαδικασία για $k \geq 2$ μέχρι την τάξη s (s είναι η τάξη της κυρτότητας των εμπλεκομένων pain συναρτήσεων v) θεωρούμε την ακολουθία των κινδύνων $\{X_s(x, \varepsilon), Y_s(x, \varepsilon)\}$, $s \in N_0$.

- Για $s = 1$ οι κίνδυνοι $X_1(x, \varepsilon)$ και $Y_1(x, \varepsilon)$ ορίζονται όπως προηγουμένως.

- Για $s \geq 2$ οι κίνδυνοι ορίζονται ως εξής :

$$X_s(x, \varepsilon) = \begin{cases} X_{s-1}(x,\varepsilon)+\varepsilon, \ \mu\varepsilon\, \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \frac{1}{2} \\ Y_{s-1}(x,\varepsilon), \ \mu\varepsilon\, \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

και

$$Y_s(x, \varepsilon) = \begin{cases} X_{s-1}(x,\varepsilon), \ \mu\varepsilon\, \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \frac{1}{2} \\ Y_{s-1}(x,\varepsilon)+\varepsilon, \ \mu\varepsilon\, \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Μέσα από την εκτέλεση της παραπάνω διαδικασίας εξάγεται το συμπέρασμα ότι ένας αποφασιολήπτης, ο οποίος έχει μία συνάρτηση pain v s-κυρτή, επιλέγει να υποστεί την ενδεχόμενη ζημιά που προκαλείται από τον κίνδυνο $X_s(x, \varepsilon)$ παρά την ενδεχόμενη ζημιά του κινδύνου $Y_s(x, \varepsilon)$ για όλα τα $x \in R^+$ και $\varepsilon > 0$.

Μία πρώτη γενική διαπίστωση είναι ότι οι κίνδυνοι $X_s(x, \varepsilon)$ και $Y_s(x, \varepsilon)$ έχουν τις ίδιες πρώτες $s-1$ ροπές, δηλαδή, τις ροπές που έχουν τάξη (k) μικρότερη από την τάξη (s) της κυρτότητας των συναρτήσεων pain v.

Λήμμα 1: *Για $s \in N_0$ και όλα τα $x \in R^+$, $\varepsilon > 0$ ισχύει*

$$E[X_s(x, \varepsilon)]^k = E[Y_s(x, \varepsilon)]^k$$

για $k = 0,1,\ldots,s-1$.

Απόδειξη : Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της επαγωγής ως προς s. Παρατηρούμε ότι η σχέση

$$E[X_s(x, \varepsilon)]^k = E[Y_s(x, \varepsilon)]^k, \ \ k = 0,1,\ldots,s-1,$$

είναι αληθής για $s = 1$ καθώς $E[X_1(x, \varepsilon)]^0 = E[Y_1(x, \varepsilon)]^0 = 1$. Υποθέτουμε ότι η συγκεκριμένη ισότητα ισχύει για $s-1 \in N_0$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για s. Επειδή

$$X_s(x, \varepsilon) = \begin{cases} X_{s-1}(x,\varepsilon)+\varepsilon, \ \mu\varepsilon\, \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \frac{1}{2} \\ Y_{s-1}(x,\varepsilon), \ \mu\varepsilon\, \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \frac{1}{2} \end{cases},$$

μπορούμε να υπολογίσουμε τη ροπή k-τάξης του κινδύνου $X_s(x, \varepsilon)$. Για όλα τα $k \in N$ θα είναι

$$E[X_s(x, \varepsilon)]^k = \frac{1}{2} E[X_{s-1}(x, \varepsilon) + \varepsilon]^k + \frac{1}{2} E[Y_{s-1}(x, \varepsilon)]^k = \frac{1}{2} (E[X_{s-1}(x, \varepsilon) + \varepsilon]^k + E[Y_{s-1}(x, \varepsilon)]^k)$$

$$= \frac{1}{2} (\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \varepsilon^j E[X_{s-1}(x, \varepsilon)]^{k-j} + E[Y_{s-1}(x, \varepsilon)]^k).$$

Επίσης, επειδή

$$Y_s(x, \varepsilon) = \begin{cases} X_{s-1}(x, \varepsilon), \ \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \frac{1}{2} \\ Y_{s-1}(x, \varepsilon) + \varepsilon, \ \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

η ροπή k-τάξης του κινδύνου θα είναι

$$E[Y_s(x, \varepsilon)]^k = \frac{1}{2} E[X_{s-1}(x, \varepsilon)]^k + \frac{1}{2} E[Y_{s-1}(x, \varepsilon) + \varepsilon]^k = \frac{1}{2} (E[X_{s-1}(x, \varepsilon)]^k + E[Y_{s-1}(x, \varepsilon) + \varepsilon]^k)$$

$$= \frac{1}{2} (E[X_{s-1}(x, \varepsilon)]^k + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \varepsilon^j E[Y_{s-1}(x, \varepsilon)]^{k-j}).$$

Όμως, από την υπόθεση της επαγωγής ισχύει ότι $E[X_{s-1}(x, \varepsilon)]^j = E[Y_{s-1}(x, \varepsilon)]^j$ για $j = 0,1,\ldots, s-2$ και άρα η ζητούμενη σχέση αποδεικνύεται αληθής για s. ■

Η δεύτερη γενική διαπίστωση είναι ότι η ροπή τάξης k του κινδύνου $X_s(x, \varepsilon)$ υπολείπεται της ροπής τάξης k του κινδύνου $Y_s(x, \varepsilon)$ (αποδεικνύεται με τη μέθοδο της επαγωγής) όταν η τάξη των ροπών είναι μεγαλύτερη ή ίση της τάξης της κυρτότητας της συνάρτησης pain. Με άλλα λόγια, αν $k \geq s$,

$$E[X_s(x, \varepsilon)]^k \leq E[Y_s(x, \varepsilon)]^k.$$

Τέλος αποδεικνύεται ότι, για $s \in N_0$ και όλα τα $x \in R^+$, $\varepsilon > 0$,

$$X_s(x, \varepsilon) \leq_{s\text{-}cx} Y_s(x, \varepsilon).$$

Επίσης μπορεί να διαπιστωθεί η ότι ο κίνδυνος $X_s(x, \varepsilon)$ είναι ο s-κυρτός ελάχιστος, ενώ ο $Y_s(x, \varepsilon)$ είναι s-κυρτός μέγιστος στο διάστημα $[x, x + s\varepsilon]$. Επομένως, ένας αποφασιολήπτης, που έχει στην κατοχή του μία s-κυρτή συνάρτηση pain, επιλέγει τον κίνδυνο $X_s(x, \varepsilon)$ σε σχέση με τον κίνδυνο $Y_s(x, \varepsilon)$ μεταξύ όλων των κινδύνων που λαμβάνουν τιμές στο κλειστό διάστημα $[x, x + s\varepsilon]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

5.1 Συνέπεια των κανόνων μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, αναπτύξαμε συνοπτικά τη θεωρία των συναρτήσεων ωφελιμότητας και τις διατάξεις της πρώτης και της δεύτερης στοχαστικής κυριαρχίας (*FSD* και *SSD*). Οι τελευταίες δεν είναι άλλες από την συνήθη στοχαστική και την αύξουσα κοίλη διάταξη, αντίστοιχα. Η τελευταία συνδέεται με την αύξουσα κυρτή διάταξη (διάταξη stop-loss) με την ισοδυναμία

$$X \leq_{icv} Y \Leftrightarrow -Y \leq_{icx} -X.$$

Επιπλέον, γενικεύσαμε αυτές τις στοχαστικές διατάξεις σε διατάξεις μεγαλύτερου βαθμού (*s*-κυρτές ή ισοδύναμα, *s*-κοίλες) για έναν αποφασιολήπτη που έχει μία συνάρτηση pain v ή ισοδύναμα, μία ωφελιμοσυνάρτηση u καθώς

$$X \leq_v Y \Leftrightarrow -Y \leq_u -X.$$

Τα παραπάνω βασίζονται στα οικονομικά της αβεβαιότητας και επεκτείνονται στα χρηματοοικονομικά, όπου οι τυχαίες μεταβλητές X και Y αναπαριστούν δύο «επικίνδυνες» επενδύσεις και τις ονομάζουμε προσδοκώμενα κέρδη (prospects).

Μία από τις πιο γνωστές προσεγγίσεις στη σύγκριση τέτοιων προσδοκώμενων κερδών είναι η προσέγγιση του Markowitz (1959), κατά τη βελτιστοποίηση ενός χαρτοφυλακίου. Σύμφωνα με τον Markowitz, προκειμένου να συγκρίνουμε δύο προσδοκώμενα κέρδη X και Y συγκρίνουμε την μέση τιμή και την διακύμανσή τους. Η ωφελιμότητα που προσδίδεται σε ένα X από έναν αποφασιολήπτη σε θέση αποστροφής κινδύνου, ορίζεται από τη σχέση

$$U(X) = EX - \alpha \mathrm{Var}(X)$$

με $\alpha > 0$ να αποτελεί το βαθμό της αποστροφής κινδύνου. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση ωφελιμότητας αποτελείται από τρία μέρη: τη μέση τιμή της X, τη διακύμανση της X, που συνιστά ένα μέτρο μεταβλητότητας, και το βαθμό αποστροφής του αποφασιολήπτη, που αυξάνει ή ελαττώνει τη μεταβλητότητα της τυχαίας μεταβλητής X.

Εκτός από την γνωστή διακύμανση Var υπάρχουν και άλλα μέτρα μεταβλητότητας για την X, όπως η κάτω ημιδιακύμανση (lower semi-variance), κάποια μερική ροπή, ένα ποσοστιαίο σημείο ή μία συνάρτηση ενός ή περισσοτέρων εξ' αυτών των μέτρων. Αυτά τα μέτρα μεταβλητότητας, συμπεριλαμβανομένης και της διακύμανσης, μετρούν τον κίνδυνο που ανακύπτει από μία επένδυση. Έτσι η συνάρτηση ωφελιμότητας ενός αποφασιολήπτη σε θέση αποστροφής κινδύνου επαναπροσδιορίζεται σε μία πιο γενική μορφή

$$U(X) = EX - \alpha R(X)$$

με $R(X)$ να εκφράζει κάποιο από τα πιο πάνω αναφερόμενα μέτρα μεταβλητότητας.

Επειδή η σύγκριση μέσης τιμής-διασποράς (ή μέσης τιμής-κάτω ημιδιακύμανσης ή μέσης τιμής - ενός άλλου μέτρου κινδύνου) δύο προσδοκόμενων κερδών X και Y διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στη λήψη αποφάσεων σχετικά με την επιλογή μίας επενδυτικής κίνησης, η διάταξη των συναρτήσεων ωφελιμότητας για τα προσδοκώμενα κέρδη πρέπει να συμβαδίζει με τη διάταξη των X, Y. Δηλαδή, αν $X \leq Y$, διατεταγμένα ως προς κάποια διάταξη στοχαστικής κυριαρχίας, τότε θα πρέπει $U(X) \leq U(Y)$. Διαπιστώνεται ότι η σύγκριση μέσης τιμής-διακύμανσης, με $U(X) = EX - \alpha\mathrm{Var}(X)$, για δύο προσδοκώμενα κέρδη X και Y δεν είναι συνεπής με τη συνήθη στοχαστική διάταξη και έχουμε ότι η σχέση $X \leq_{FSD} Y$ δεν συνεπάγεται πάντα $U(X) \leq U(Y)$. Αντίθετα, για αρκετά μεγάλες τιμές της X θα ισχύει $U(X) \geq U(Y)$ (η ωφελιμότητα της X υπερισχύει της ωφελιμότητας της Y) και ο αποφασιολήπτης θα προτιμά την προοπτική X από την προοπτική Y παρόλο που η στοχαστική διάταξή τους υποδεικνύει διαφορετικά. Το ίδιο ισχύει αν αντικαταστήσουμε τη διασπορά από τη κάτω ημιδιακύμανση και η απόφαση λαμβάνεται ύστερα από τη σύγκριση μέσης τιμής - κάτω ημιδιακύμανσης δύο προσδοκωμένων κερδών, με

$$U(X) = EX - \alpha R(X)$$

και $R(X)$ είναι η κάτω ημιδιακύμανση $\mathrm{Var}^{-}(X) = E(\max\{EX - X, 0\})^2$.

Από την άλλη, ο κανόνας απόφασης μέσης τιμής - διακύμανσης παραμένει συνεπής με την αύξουσα κοίλη διάταξη για σημαντικές οικογένειες κατανομών, όπως είναι η οικογένεια των κανονικών κατανομών. Αν X και Y είναι δύο κανονικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές, τότε $X \leq_{SSD} Y$ αν και μόνο αν $EX \leq EY$ και $\mathrm{Var}(X) \geq \mathrm{Var}(Y)$ (ισχύει και για άλλες κλάσεις κατανομών, βλ. Bigelow (1993)). Βεβαίως, υπάρχουν και άλλοι κανόνες απόφασης οι οποίοι είναι πάντα συνεπείς είτε με την πρώτη είτε με τη δεύτερη στοχαστική κυριαρχία. Μία τέτοια περίπτωση συμβαίνει όταν στην ωφελιμοσυνάρτηση $U(X) = EX - \alpha R(X)$, $R(X)$ είναι η απόλυτη ημιτυπική απόκλιση

$$\delta^{(1)}(X) = E(X - EX)_{-} = E(\max\{EX - X, 0\}) = \frac{1}{2}E|X - EX|.$$

Οι Ogryczk and Ruszczynski (1999) απέδειξαν το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1 : *Έστω η συνάρτηση ωφελιμότητας* $U(X) = EX - \alpha\delta^{(1)}(X)$ *με* $\alpha \leq 1$. *Τότε* $X \leq_{SSD} Y$ *έπεται ότι* $U(X) \leq U(Y)$.

Απόδειξη : Έστω $0 \leq s \leq t$. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι

$$0 \leq E(X - t)_{-} - E(X - s)_{-} \leq t - s, \qquad (*)$$

για κάθε $s \leq t$. Επειδή ισχύει $X \leq_{SSD} Y$ έπεται ότι $EX \leq EY$ και $E(X - t)_{-} \geq E(Y - s)_{-}$, δεδομένου ότι η συνάρτηση $f(x) = -(x - t)_{-}$ είναι αύξουσα κοίλη. Θέτουμε $t = EY$ και $s = EX$ και από την προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} EY - EX &\geq E(X - EY)_{-} - E(X - EX)_{-} \geq \alpha(E(X - EY)_{-} - E(X - EX)_{-}) \\ &\geq \alpha(E(Y - EY)_{-} - E(X - EX)_{-}), \end{aligned}$$

και επομένως $U(X) \leq U(Y)$. ■

Ένας άλλος κανόνας απόφασης, που είναι συνεπής με τη δεύτερη στοχαστική κυριαρχία, ανακύπτει από τη σύγκριση μέσης τιμής και κάποιας χαμηλότερης μερικής ροπής που ορίζεται από τη σχέση

$$\delta^{(k)}(X) = \left(E\left(\max\{EX - X\}^{k}\right)\right)^{\frac{1}{k}}$$

(βλ. Ogryczak and Ruszczynski 2001).

5.2 Βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου

Θεωρούμε το διάνυσμα $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ που αναπαριστά ένα χαρτοφυλάκιο n αποδόσεων για κάποιες μετοχές $1,2,\ldots,n$. Καθένα από τα στοιχεία $X_1,\ldots,X_n$ του διανύσματος αποτελεί τυχαία μεταβλητή και περιγράφει την απόδοση που προκύπτει, αντίστοιχα, για καθεμία από τις μετοχές $1,2,\ldots,n$. Από την άλλη, υπάρχει ένας επενδυτής που έχει στη διάθεσή του ένα συνολικό ποσό m και θέλει να επενδύσει στις μετοχές $1,\ldots,n$ με αποδόσεις X_i, $i = 1,\ldots,n$. Για κάθε επένδυση σε μία μετοχή δαπανάται ένα ποσό α_i (μέρος του συνολικού ποσού m), με $i = 1,2,\dots,n$. Καθώς ο επενδυτής επιθυμεί να επενδύσει σε n διαφορετικές μετοχές δημιουργείται το πρόβλημα της ορθής διανομής του χρηματικού ποσού m για να αγοραστούν αυτές οι μετοχές. Η αναζήτηση της βέλτιστης απόδοσης του χαρτοφυλακίου από την πλευρά του επενδυτή απαιτεί την βέλτιστη διανομή των ποσών $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ για την αγορά των $1,2,\dots,n$ μετοχών.

Έστω ότι ο επενδυτής (ο αποφασιολήπτης) έχει τη συνάρτηση ωφελιμότητας u. Υπό τον περιορισμό

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = m$$

με $\alpha_i \geq 0$, $i = 1,\dots,n$, το ζήτημα της βελτιστοποίησης της διανομής των α_i συγκεκριμενοποιείται την εύρεση του

$$\max_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} Eu(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i).$$

Όταν έχουμε ότι το $\sum \alpha_i^* X_i$ υπερέχει του $\sum \alpha_i X_i$ ως προς κάποια από τις γνωστές διατάξεις στοχαστικής κυριαρχίας, συμπεραίνουμε την βέλτιστη διανομή (α_1^*, …, α_n^*) του ποσού m, ακόμη και αν γνωρίζουμε μερικώς την ωφελιμοσυνάρτηση. Επίσης, όταν η συνάρτηση ωφελιμότητας του επενδυτή είναι κοίλη, (είναι σε θέση αποστροφής προς τον κίνδυνο), και το χαρτοφυλάκιο των αποδόσεων απαρτίζεται από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, η επιλογή της μέγιστης διαφοροποίησης της διανομής είναι πάντοτε βέλτιστη. Το τελευταίο επεκτείνεται και στην γενικότερη περίπτωση των ανταλλάξιμων τυχαίων μεταβλητών ενός χαρτοφυλακίου. Ως μία εφαρμογή του Θεωρήματος Strassen του κεφαλαίου 1 έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1 : *Έστω* $\mathbf{X} = (X_1,\dots,X_n)$ *ένα ανταλλάξιμο διάνυσμα και η συνάρτηση ωφελιμότητας* u *είναι κοίλη. Τότε το πρόβλημα της βελτιστοποίησης της ποσότητας*

$$\max_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} Eu(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i)$$

έχει την βέλτιστη λύση $\boldsymbol{\alpha}^* = (m/n, \dots, m/n)$.

Κάτω από την υπόθεση ότι οι αποδόσεις $X_1,\dots,X_n$ των μετοχών είναι ανεξάρτητες και κατανέμονται διαφορετικά η καθεμία, είναι φυσικό να θεωρήσουμε ότι η βέλτιστη διανομή ενός λογικού επενδυτή (που έχει μία αύξουσα συνάρτηση ωφελιμότητας), θα ρίξει το μεγαλύτερο βάρος στις αποδόσεις που υπερέχουν στοχαστικά. Όμως, αυτό αποδεικνύεται ότι δεν είναι αληθές γενικά. Επομένως, για να διανέμει βέλτιστα ο επενδυτής το διαθέσιμο ποσό του σύμφωνα με τη στοχαστική διάταξη των αποδόσεων των μετοχών, θα πρέπει η ωφελιμοσυνάρτησή του να έχει περισσότερες ιδιότητες (δηλαδή δεν αρκεί να είναι αύξουσα) ή θα πρέπει η στοχαστική διάταξη των αποδόσεων να είναι ισχυρότερη από τη συνήθη στοχαστική διάταξη. Στο παρακάτω θεώρημα (Landsberger and Meilijson (1990a)) αποδεικνύεται ότι αρκεί να θεωρήσουμε τις αποδόσεις διατεταγμένες σύμφωνα με την διάταξη του λόγου πιθανοφάνειας, που όπως γνωρίζουμε, είναι ισχυρότερη από τη συνήθη στοχαστική διάταξη.

Θεώρημα 2 : *Υποθέτουμε ότι* $X_1,\ldots,X_n$ *είναι ανεξάρτητες και διατάσσονται στοχαστικά* $X_1 \geq_{lr} \ldots \geq_{lr} X_n$. *Τότε το πρόβλημα της βελτιστοποίησης της ποσότητας*

$$\max_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} Eu(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i)$$

με u *αύξουσα, έχει μία βέλτιστη λύση* $\alpha_1^*,\ldots,\alpha_n^*$ *με διάταξη* $\alpha_1^* \geq \ldots \geq \alpha_n^*$.

Απόδειξη : Υποθέτουμε ότι το παραπάνω πρόβλημα βελτιστοποίησης έχει μία βέλτιστη λύση $\boldsymbol{\alpha}^* = (\alpha_1^*,\ldots,\alpha_n^*)$ με $\alpha_j^* < \alpha_k^*$ για κάποια $j < k$. Επίσης, θεωρούμε το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}' = (\alpha_1', \ldots, \alpha_n')$ όπου $\alpha_j' = \alpha_k^*$, $\alpha_k' = \alpha_j^*$ και $\alpha_j' = \alpha_i^*$ για κάθε άλλο i εκτός των j, k. Θα δείξουμε ότι η $\boldsymbol{\alpha}' = (\alpha_1', \ldots, \alpha_n')$ είναι επίσης μια βέλτιστη λύση του προβλήματος. Για τη διμεταβλητή συνάρτηση

$$g(x,y) = \alpha_k' x + \alpha_j' y = \alpha_j^* x + \alpha_k^* y,$$

θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\Delta g(x,y) &= g(x,y) - g(y,x) = \alpha_j^* y + \alpha_k^* x - (\alpha_j^* x + \alpha_k^* y) = \alpha_j^* y + \alpha_k^* x - \alpha_j^* x - \alpha_k^* y \\ &= (\alpha_k^* - \alpha_j^*)x - (\alpha_k^* - \alpha_j^*)y = (x-y)(\alpha_k^* - \alpha_j^*).\end{aligned}$$

Αν $x \geq y$ έπεται ότι $x - y \geq 0$ και επειδή $j < k$ με $\alpha_j^* < \alpha_k^*$ θα έχουμε ότι $\alpha_k^* - \alpha_j^* > 0$. Άρα $\Delta g(x,y) \geq 0$ με συνέπεια $g(x,y) - g(y,x) \geq 0$ και $g(x,y) \geq g(y,x)$. Από γνωστό θεώρημα ισχύει ότι αν $g(x,y) \geq g(y,x)$, τότε $g(Y,X) \leq_{st} g(X,Y)$ με αποτέλεσμα

$$\alpha_j^* X_j + \alpha_k^* X_k \leq_{st} \alpha_j^* X_k + \alpha_k^* X_j \,.$$

Από την κλειστότητα της $\leq_{st}$ ως προς τη συνέλιξη θα έχουμε ότι

$$Eu(\sum \alpha_i' X_i) \geq Eu(\sum \alpha_i^* X_i)$$

για κάθε αύξουσα u και άρα η $\boldsymbol{\alpha}' = (\alpha_1',\ldots,\alpha_n')$ είναι μία βέλτιστη λύση. ■

Όταν η συνάρτηση ωφελιμότητας του επενδυτή είναι αύξουσα και κοίλη, ο επενδυτής βρίσκεται σε θέση αποστροφής προς τον κίνδυνο, όπως είδαμε και στην τέταρτη εφαρμογή του Κεφαλαίου 4. Σε αυτή την περίπτωση, η απαίτηση της διάταξης $\geq_{lr}$ στο προηγούμενο θεώρημα μπορεί να γίνει ασθενέστερη και συγκεκριμένα $\geq_{rh}$.

Θεώρημα 3: *Υποθέτουμε ότι* $X_1,\ldots,X_n$ *είναι ανεξάρτητες και διατάσσονται στοχαστικά* $X_1 \geq_{rh} \ldots \geq_{rh} X_n$. *Τότε το πρόβλημα της βελτιστοποίησης της ποσότητας*

$$\max_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} Eu(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i)$$

με u αύξουσα και κοίλη έχει μία άριστη λύση $\alpha_1^*,\ldots,\alpha_n^*$ *με διάταξη* $\alpha_1^* \geq \ldots \geq \alpha_n^*$.

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος οφείλεται στους Kijima and Ohnishi (1996).

Στην περίπτωση που ο επενδυτής θέλει να αγοράσει και δικαιώματα αγοράς (call options) επί των ίδιων n μετοχών το πρόβλημα της βελτιστοποίησης του διαθέσιμου ποσού του m παίρνει διαφορετική μορφή (βλ. Muller and Scarsini 2001). Υπό τον περιορισμό

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + b_i) = m$$

(b_i τα διαθέσιμα ποσά για τα n δικαιώματα αγοράς και α_i όπως ορίστηκαν προηγουμένως), με α_i, $b_i \geq 0$, $i = 1,\ldots,n$, θα έχουμε

$$\max_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n,b_1,\ldots,b_n} Eu\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i X_i + b_i Y_i\right)\right)$$

για έναν λογικό αποφασιολήπτη, που είναι σε θέση αποστροφής προς τον κίνδυνο, δηλαδή έχει μία αύξουσα, κοίλη ωφελιμοσυνάρτηση. Η απόδοση Y_i ενός call option επί της i-μετοχής με απόδοση X_i, δίνεται από τη σχέση $Y_i = (X_i - K_i)_+/p_i$ ανά μονάδα χρήματος. Με K_i συμβολίζουμε την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος αγοράς (call option) και με $p_i = E(X_i - K_i)_+/EX_i$ τη σχετική τιμή του δικαιώματος ώστε $EY_i = EX_i$.

Το χαρτοφυλάκιο συνίσταται από n μετοχές που έχουν αποδόσεις $X_1, \ldots, X_n$. Οι $X_1, \ldots, X_n$ μπορεί να είναι ανεξάρτητες ή εξαρτημένες (θετικά ή αρνητικά). Αν είναι ανεξάρτητες, το πρόβλημα της βελτιστοποίησης έχει την λύση $b_i = 0$ για $i = 1,\ldots,n$ και ο επενδυτής αποφασίζει να μην προβεί στην αγορά δικαιωμάτων. Αυτό εξηγείται και χωρίς την παραδοχή της ανεξαρτησίας λόγω της φυσικής ροπής κάθε επενδυτή, που είναι σε θέση αποστροφής προς τον κίνδυνο, να επενδύει στις λιγότερο «επικίνδυνες» μετοχές και να αποφεύγει επενδυτικά τα πιο «επικίνδυνα» δικαιώματα επί των μετοχών. Το ίδιο συμβαίνει όταν $X_1,\ldots,X_n$ είναι θετικά εξαρτημένες. Μάλιστα αυτό αποδεικνύεται στο επόμενο θεώρημα υποθέτοντας ότι το διάνυσμα των αποδόσεων των μετοχών, $\boldsymbol{X}$, είναι δεσμευμένα αύξον. Αντίθετα αν $X_1,\ldots,X_n$ είναι αρνητικά εξαρτημένες, ο επενδυτής αγοράζει δικαιώματα γιατί η αγορά ενός δικαιώματος πώλησης (put option) επί της X_i λειτουργεί ως ένα δικαίωμα αγοράς στο $-X_i$ και κατ' αυτόν τον τρόπο αντισταθμίζει τον κίνδυνο που ενέχει η αγορά δικαιωμάτων.

Θεώρημα 4 : *Αν το διάνυσμα των αποδόσεων των μετοχών* $\boldsymbol{X}$ *είναι δεσμευμένα αύξον, τότε υπάρχει μία βέλτιστη λύση στο πρόβλημα βελτιστοποίησης της ποσότητας*

$$\max_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n,b_1,\ldots,b_n} Eu\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i X_i + b_i Y_i\right)\right)$$

με $b_i = 0$ *για* $i = 1,\ldots,n$.

Απόδειξη : Αρκεί να δείξουμε ότι

$$Eu(\sum(\alpha_i X_i + b_i Y_i)) \le Eu(\sum(\alpha_i + b_i)X_i) \qquad (*)$$

για όλα τα α_i, $b_i \ge 0$ με $i = 1,\ldots,n$. Θεωρούμε δύο διανύσματα $\boldsymbol{X}' = (X_1',\ldots,X_n')$ και $\boldsymbol{Y}' = (Y_1',\ldots,Y_n')$. Κάθε X_i' του $\boldsymbol{X}'$ ορίζεται από τη σχέση $X_i' = \alpha_i X_i + b_i Y_i$ και κάθε Y_i' του $\boldsymbol{Y}'$ από τη σχέση $Y_i' = (\alpha_i + b_i)\, X_i$. Παρατηρούμε ότι

$$X_i' = f_i(X_i) = \alpha_i X_i + b_i(X_i - K_i)_+/p_i \quad \text{και} \quad Y_i' = g_i(X_i) = (\alpha_i + b_i)\, X_i,$$

με f_i, g_i μονότονες. Άρα τα διανύσματα $\boldsymbol{X}'$ και $\boldsymbol{Y}'$ έχουν ένα κοινό σύνδεσμο. Επίσης ισχύει ότι $EY_i = EX_i$. Συνεπώς, $EX_i' = EY_i' = \alpha_i + b_i$. Επίσης, παρατηρούμε ότι $p_i = E(X_i - K_i)_+/EX_i < 1$. Οι μονότονες συναρτήσεις f_i και g_i θα τέμνονται ακριβώς μία φορά στο σημείο $x_i = K_i/(1 - p_i)$, και επομένως, από το κριτήριο της τομής (cut criterion) των επαρκών συνθηκών της κυρτής διάταξης (βλ. Κεφάλαιο 1), το Y_i' είναι λιγότερο «επικίνδυνο» από το X_i' ($Y_i' \le X_i'$). Επομένως, τότε $Y_i' \le_{icx} X_i'$ και σύμφωνα με το Θεώρημα 4 της μονομεταβλητής κυρτής διάταξης, ισχύει $Y_i' \le_{icx} X_i'$ και $EX_i' = EY_i'$ αν και μόνο αν $Y_i' \le_{cx} X_i'$. Από το Θεώρημα 8 της directionally κυρτής διάταξης του 2ου Κεφαλαίου για $\boldsymbol{X}$ δεσμευμένα αύξον θα έχουμε ότι $\boldsymbol{Y}' \le_{dcx} \boldsymbol{X}'$ και επομένως

$$Eu(\sum X_i') \ge Eu(\sum Y_i')$$

για όλες τις κοίλες u, που είναι ισοδύναμο με την ζητούμενη σχέση (*) παραπάνω. ■

5.3 Ένα εύκολα υπολογίσιμο άνω φράγμα για την τιμή ενός αριθμητικού Asian option

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε μία εφαρμογή των στοχαστικών διατάξεων που οφείλεται στους Simon, Goovaerts and Dhaene (2000). Ένα αριθμητικό δικαίωμα αγοράς Ασιατικού τύπου (Asian call-option) συναρτάται από τη στοχαστική διαδικασία των τιμών $S(t)$ του περιουσιακού στοιχείου επί του οποίου ασκείται το δικαίωμα, την ημερομηνία εξάσκησης T, το σταθερό τρέχον επιτόκιο της περιόδου r (spot-rate) και τις n περιόδους διαπραγμάτευσης. Αυτό το δικαίωμα αγοράς συμβολίζεται ως ΑΑ(t,$S(t)$,n,K,T,r). Κατά την ημερομηνία εξάσκησης T το Asian option δημιουργεί μία εξόφληση

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} S(T-i)-K\right]_+ ,$$

και επιζητούμε την αποτίμηση του δικαιώματος σε κάποια χρονική στιγμή t λαμβάνοντας υπόψη n ημερομηνίες διαπραγμάτευσης, δηλαδή, n τιμές της στοχαστικής διαδικασίας των τιμών $S(t)$. Η εκτίμηση της τιμής ενός Asian option ενέχει υπολογιστικές δυσκολίες καθώς η τιμή του για τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο

$$\text{AA}(t,S(t),n,K,T,r) = e^{-(T-t)r} E^{Q}\left(\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(T-i)-K\right]_+ \middle| F_t\right)$$

όπου η F_t εκφράζει την πληροφορία μέχρι τη χρονική στιγμή t, και Q είναι ένα μέτρο martingale, που μας εξασφαλίζει τη διαπραγμάτευση σε μία πλήρη και χωρίς κερδοσκοπία αγορά (Harrison and Kreps (1979) και Harrison and Pliska (1981)). Υπό το Q, η $S(t)$, $t \geq 0$ είναι μία γεωμετρική κίνηση Brown με συγκεκριμένες παραμέτρους. Στην περίπτωση αυτή όμως, η κατανομή του αθροίσματος των $S(T-i)$, για $i = 0,\ldots,n-1$,

$$\sum_{i=1}^{n-1} S(T-i),$$

παραμένει άγνωστη και συνεπώς δεν είμαστε σε θέση να έχουμε έναν αναλυτικό τύπο της τιμής του Asian option για τη χρονική στιγμή t.

Για την αντιμετώπιση του παραπάνω προβλήματος υπάρχουν δύο μέθοδοι επίλυσης. Μπορούμε είτε να χρησιμοποιήσουμε την προσομοίωση Monte-Carlo (Kemna and Vorst (1990) και Vazquez-Abad and Dufresne (1998)) και να έχουμε μία αριθμητική εκτίμηση της τιμής, είτε να προσφύγουμε στην αριθμητική επίλυση μίας παραβολικής μερικής διαφορικής εξίσωσης (Rogers and Shi (1995)). Όμως και οι δύο τρόποι επίλυσης απαιτούν αρκετό υπολογιστικό χρόνο. Μία πρώτη εναλλακτική προσέγγιση του προβλήματος πραγματοποιήθηκε διαμέσου της προσέγγισης της κατανομής του $\sum_i S(T-i)$ (Jacques 1996). Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι ενώ η κατανομή του $\sum_i S(T-i)$ είναι άγνωστη, οι κατανομές των $S(T)$, $S(T-1)$,…, $S(T-n+1)$ είναι γνωστές. Αυτές τις περιθώριες κατανομές των $S(T-i)$, $i = 0,\ldots,n-1$, μπορούμε να τις συνδέσουμε με τις περιθώριες κατανομές μίας κλάσης Frechet κατανομών, τους συμμονότονους κινδύνους και τους μετασχηματισμούς stop-loss. Συνεπώς θεωρώντας το

$$\sum_{i=1}^{n-1} S(T-i)$$

ως άθροισμα εξαρτημένων μεταβλητών, το πρόβλημα της αποτίμησης ενός Asian option τη χρονική στιγμή t ανάγεται σε πρόβλημα υπολογισμού του μετασχηματισμού stop-loss ενός αθροίσματος εξαρτημένων κινδύνων. Σκεπτόμενοι κατ' αυτόν τον τρόπο αποκτούμε ένα αποτελεσματικό άνω φράγμα για την τιμή του Ασιατικού δικαιώματος (ένα αποτελεσματικό κάτω φράγμα έχει επίσης προταθεί από τους Rogers and Shi (1995)).

Στα Κεφάλαια 1, 2 και 4 αναπτύξαμε τις έννοιες της κλάσης Frechet, του ανώτερου (και κατώτερου) ορίου Frechet, των συμμονότονων κινδύνων και των μετασχηματισμών stop-loss (ολοκληρωμένες συναρτήσεις επιβίωσης). Επίσης στο 4ο Κεφάλαιο των αναλογιστικών εφαρμογών παρουσιάσαμε όρια για τις συνολικές απαιτήσεις ενός αθροίσματος εξαρτημένων κινδύνων. Για τη συγκεκριμένη εφαρμογή συνοψίζουμε τα ακόλουθα.

(α) $F \leq_{sl} G$, αν $\Psi_F(r) \leq \Psi_G(r)$ για κάθε $r \in R^+$, όπου Ψ_F και Ψ_G είναι οι μετασχηματισμοί stop-loss των συναρτήσεων κατανομής F και G (οι F, G έχουν στήριγμα το R^+).

(β) Το ανώτερο όριο Frechet μίας κλάσης Frechet $R_n(F_1,\ldots,F_n)$ δίνεται από τη σχέση

$$W_R(x_1,\ldots,x_n) = \min(F_1(x_1),\ldots,F_n(x_n))$$

με $F_1, \ldots, F_n$ τις περιθώριες κατανομές της από κοινού κατανομής F της κλάσης Frechet.

(γ) Για δοσμένο συμμονότονο διάνυσμα $(X_1,\ldots,X_n) \sim R_n(F_1,\ldots,F_n)$, η συνάρτηση κατανομής

$$F_R(x) = P(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x)$$

ορίζεται μοναδικά καθώς το συμμονότονο διάνυσμα είναι ορισμένο μοναδικά.

(δ) Ισχύει

$$F_R^{-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i^{-1}(x),$$

δηλαδή, η αντίστροφη της συνάρτησης κατανομής F_R της Frechet κλάσης είναι ίση με το άθροισμα των αντίστροφων των περιθωρίων (βλ. Dennenberg 1994).

(ε) Ο μετασχηματισμός stop-loss της συνάρτησης κατανομής F_R της Frechet κλάσης δίνεται από τη σχέση

$$\psi_{F_R}(r) = \sum_{i=1}^{n} \psi_{F_i}\left[F_i^{-1}(F_R(r))\right]$$

για κάθε $r \in R^+$. Οι Goovaerts and Dhaene (1999) απέδειξαν μία πιο γενική εκδοχή αυτού του αποτελέσματος.

(στ) Συνδυάζοντας το (ε) και (δ) αποκτούμε ένα άνω φράγμα για τον μετασχηματισμό stop-loss οποιουδήποτε αθροίσματος $\sum X_i$, n εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών διαμέσου του ανώτερου ορίου Frechet. Αυτό το ανώτερο όριο δεν είναι άλλο από τη συνάρτηση κατανομής F_R. Για όλα τα μη αρνητικά τυχαία διανύσματα $(X_1, \ldots, X_n) \sim R_n(F_1, \ldots, F_n)$ ισχύει

$$F_W \leq_{sl} F_R$$

με $W = \sum X_i$, για $i = 1,\ldots,n$. Συνεπώς

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i - d\right]_+ \leq \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i - d_i^*\right]_+$$

για κάθε $d \in R^+$ και $d_i^* = F_i^{-1}(F_R(d))$. Με d συμβολίζουμε το ποσό διατήρησης, που είδαμε στο 4ο Κεφάλαιο.

(ζ) Για οποιοδήποτε ποσό διατήρησης $d \in R^+$ και για ποσά διατήρησης d_i, $i = 1,\ldots,n$, έτσι ώστε $\sum d_i = d$, έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} E\left[X_i - d_i^*\right]_+ \leq \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i - d_i\right]_+$$

υπό την προϋπόθεση ότι $d_i^* = F_i^{-1}(F_R(d))$. Η επιλογή $d_i^* = F_i^{-1}(F_R(d))$ είναι βέλτιστη.

Θεωρούμε το stop-loss μετασχηματισμό του αθροίσματος

$$W_n(T) = \sum_{i=1}^{n} S(T-i).$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\mathrm{AA}(t, S(t), n, K, T, r) = e^{-(T-t)r} E^Q\left(\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(T-i) - K\right]_+ \middle| F_t\right)$$

$$= [e^{-(T-t)r} / n]\, E_t^Q\left[\sum_{i=1}^{n-1} S(T-i) - nK \middle| F_t\right]_+ .$$

Για μία δεδομένη τιμή s της $S(t)$, η τιμή του Ασιατικού δικαιώματος δίνεται από τον τύπο

$$\mathrm{AA}(t, s, n, K, T, r) = [e^{-(T-t)r} / n]\, \psi_{F^s_{W_n(r)}}(nK)$$

με

$$F^s_{W_n(T)}(x) = Q(W_n(T) \leq x \mid S(t) = s).$$

Άρα για να προσεγγίσουμε την τιμή του δικαιώματος τη χρονική στιγμή t, αρκεί να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό stop-loss του αθροίσματος $W_n(T)$ ο οποίος φράσσεται από το ανώτερο όριο Frechet, όπως προκύπτει από τη supermodular διάταξη. Μάλιστα, σύμφωνα με μία από τις ιδιότητες της τελευταίας, εντός της κλάσης Frechet $R_n(F_1,\ldots,F_n)$ υπάρχει ένα supermodular διατεταγμένο μέγιστο στοιχείο το οποίο είναι το ανώτερο όριο Frechet.

Για τον υπολογισμό της τιμής του Ασιατικού δικαιώματος $\mathrm{AA}(t, s, n, K, T, r)$ κατά τη χρονική στιγμή t, όταν $S(t) = s$, υποθέτουμε την ύπαρξη μίας αγοράς χρεογράφων που περιλαμβάνει ένα περιουσιακό στοιχείο με τυχαία απόδοση $S(t)$ (π.χ. μετοχή), και μία εγγυημένη χρηματική επένδυση (δηλ. χωρίς κίνδυνο) στην οποία τα χρήματα επενδύονται με ένα σταθερό τρέχον επιτόκιο r (π.χ. ομόλογο δημοσίου). Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας Q, το οποίο διασφαλίζει τη διαπραγμάτευση των επενδυτών μέσα σε μία πλήρη και χωρίς κερδοσκοπία αγορά. Υπό αυτό το μέτρο, η δεσμευμένη κατανομή της τιμής $S(t_2)$ κατά τη χρονική στιγμή t_2 θα είναι

$$F(x_2, t_2, x_1, t_1) = Q(S(t_2) \leq x_2 \mid S(t_1) = x_1)$$

για κάθε $t_2 \geq t_1$. Επομένως σε κάθε επόμενη χρονική στιγμή, η τιμή του περιουσιακού στοιχείου εξαρτάται από τη τιμή της προηγούμενης χρονικής στιγμής.

Το $\sum S(T - i)$, για $i = 1,\ldots,n$, είναι το άθροισμα n (εξαρτημένων) αποδόσεων $S(T)$, $S(T - 1),\ldots,S(T - n + 1)$, του περιουσιακού στοιχείου, που ανακύπτουν από τις διαπραγματεύσεις n χρονικών στιγμών ξεκινώντας από τη χρονική στιγμή $T - n + 1$ και καταλήγοντας στην ημερομηνία εξάσκησης του δικαιώματος T. Επειδή αποσκοπούμε σε μία προσέγγιση της αξίας του Ασιατικού δικαιώματος τη στιγμή t (και t μπορεί να είναι οποιαδήποτε χρονική στιγμή), προβαίνουμε στην ακόλουθη διάκριση.

Περίπτωση Α. $t < T - n + 1$, δηλαδή, η χρονική στιγμή t προηγείται της χρονικής στιγμής $T - n + 1$ κατά την οποία αρχίζει η διαδικασία πληροφόρησης σχετικά με τις n τιμές $S(T - i)$, για $i = 0, \ldots, n - 1$. Στην περίπτωση αυτή, οι τιμές $S(T - n + 1), \ldots, S(T)$ είναι άγνωστες και οι αντίστοιχες κατανομές τους $F(x, T - n + 1, s, t), \ldots, F(x, T, s, t)$, με $S(t) = s$, απαρτίζουν μία κλάση Frechet $R_n(F(x, T - n + 1, s, t),\ldots,F(x, T, s, t))$. Γνωρίζουμε ήδη ότι για $S(t) = s$,

$$\mathrm{AA}(t, s, n, K, T, r) = [e^{-(T-t)r} / n]\,\psi_{F^s_{W_n(r)}}(nK),$$

και από την (**στ**) παραπάνω, για κάθε $S(t)$,

$$\mathrm{AA}(t, S(t), n, K, T, r) \leq [e^{-(T-t)r} / n]\,\psi_{F_R}(nK).$$

Άρα ο μετασχηματισμός stop-loss της κατανομής του αθροίσματος

$$W_n(T) = \sum_{i=1}^{n} S(T-i)$$

φράσσεται άνω από τον μετασχηματισμό stop-loss της κατανομής F_R της κλάσης Frechet. Η κατανομή F_R ορίζεται μοναδικά

$$F_R(x) = P(\sum_{i=1}^{n} X_i \le x)$$

Επίσης ο μετασχηματισμός stop-loss της κατανομής F_R είναι

$$\psi_{F_R}(r) = \sum_{i=1}^{n} \psi_{F_i}\left[F_i^{-1}(F_R(r))\right],$$

για κάθε $r \in R^+$, σύμφωνα με το (στ),

$$\mathrm{AA}(t, n, K, T, r) \le [e^{-(T-t)r} / n] \sum_{i=0}^{n-1} \psi_{F(\cdot, T-i, s, t)} [F^{-1}(F_R(K), T-i, s, t)]_+$$

και η τιμή του δικαιώματος φράσσεται από το άθροισμα των μετασχηματισμών stop-loss των περιθώριων κατανομών των $S(T-n+1)$, …, $S(T)$ (που προσδιορίζουν την κλάση Frechet $R_n(F(x, T-n+1, s, t),\dots,F(x, T, s, t))$. Οι μετασχηματισμοί των περιθώριων συναρτώνται από τις αντίστροφες των δεσμευμένων κατανομών των τιμών $S(t)$ ($F^{-1}(x_2, t_2, x_1, t_1)$ είναι η αντίστροφη της $F(x_2, t_2, x_1, t_1)$) οι οποίες με τη σειρά τους εκφράζονται από την συνάρτηση κατανομής F_R για την τιμή K (η οποία είναι η γνωστή τιμή εξάσκησης του δικαιώματος).

Περίπτωση Β. $t \ge T-n+1$, δηλαδή, η χρονική στιγμή t έπεται της αρχικής στιγμής $T-n+1$. Εδώ η t μπορεί να ακολουθεί της ημερομηνίας εξάσκησης του δικαιώματος ($T < t$) ή να προηγείται αυτής με $T-n+1 \le t \le T$. Θα ασχοληθούμε με την τελευταία περίπτωση, όπου κάποιες από τις τιμές $S(T-n+1),\dots,S(T)$ θα είναι γνωστές (αν οι χρονικές στιγμές των $S(T-i)$ προηγούνται της t) και κάποιες άγνωστες (αν οι χρονικές στιγμές των $S(T-i)$ έπονται της t). Θεωρούμε κάποιο i^* για το οποίο έχουμε $T-i^* \le t < T-i^*+1$. Συνεπώς μας παρέχεται πληροφόρηση για τις πρώτες $n-i^*$ τιμές, ενώ οι υπόλοιπες τελευταίες i^* τιμές παραμένουν άγνωστες και $S(T-i^*),\dots,S(T)$ προσδιορίζουν μία κλάση Frechet. Η τιμή του Asian option θα είναι

$$\mathrm{AA}(t,n,K,T,r) = \left[e^{-(T-t)r}/n\right] E^Q\left[\sum_{i=0}^{i^*-1} S(T-i) - \left(nK - \sum_{i=i^*}^{n-1} S(T-i)\right) \middle| F_t\right]_+$$

$$= \left[e^{-(T-t)r}/n\right] E^Q\left[\sum_{i=0}^{i^*-1} S(T-i) - K_{i^*} \middle| F_t\right]_+$$

με κάθε j-τιμή εξάσκησης

$$K_j = nK - \sum_{i=j}^{n-1} S(T-i),$$

αν $j < n$ και $K_n = nK$. Παρατηρούμε ότι, πλέον, δεν έχουμε μία τιμή εξάσκησης K σταθερή καθώς εξαρτάται από την χρονική θέση της t. Έτσι η K διαφοροποιείται και ορίζουμε ως τιμή εξάσκησης την K_{i^*} η οποία μεταβάλλεται ανάλογα με την κάθε i^* τιμή. Διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις :

Υποπερίπτωση α. $K_{i^*} > 0$. Εργαζόμαστε όπως στην $t < T - n + 1$. Οι άγνωστες τιμές $S(T-i^*),\ldots, S(T)$ ορίζουν την κλάση Frechet $R_{i^*}(F_{T-i^*},\ldots,F_T)$ και K_{i^*} αντί για K. Επομένως, η τιμή του δικαιώματος θα φράσσεται από πάνω

$$\mathrm{AA}(t, s, n, K, T, r) \le [e^{-(T-t)r} / n] \sum_{i=0}^{i^*-1} \psi_{F(\cdot,T-t,s,t)} [F^{-1}(F_R(K_{i^*}), T-i, s, t)]$$

και κάθε k_i, για $i = 0,1,\ldots,i^*$, υπολογίζεται από τη σχέση

$$k_i = F^{-1}(F_R(K_{i^*}), T-i, s, t).$$

Άρα

$$\mathrm{AA}(t, s, n, K, T, r) \le [e^{-(T-t)r} / n] \sum_{i=0}^{i^*-1} \psi_{F(\cdot,T-t,s,t)} (k_i).$$

Υποπερίπτωση β. $K_{i^*} \le 0$. Θεωρούμε το

$$W_{i^*} = \sum_{i=0}^{i^*-1} S(T-i)$$

των άγνωστων τελευταίων i^*-τιμών και K_{i^*} η τιμή εξάσκησης για κάθε i^*. Υπό το ισοδύναμο μέτρο martingale Q θα έχουμε

$$E^Q[W_{i^*} - K_{i^*}]_+ = E^Q[W_{i^*}] - K_{i^*} = \sum_{i=0}^{i^*-1} E^Q S(T-i) - K_{i^*}$$

και επειδή η ελαττωμένη στοχαστική διαδικασία των τιμών $e^{-tr}S(t)$ είναι ένα martingale κάτω από το μέτρο Q θα ισχύει

$$\sum_{i=0}^{i^*-1} E^Q S(T-i) - K_{i^*} = S(t) \sum_{i=0}^{i^*-1} e^{(T-i-t)r} - K_{i^*}\ .$$

Για

$$\text{AA}(t, S(t), n, K, T, r) = e^{-(T-t)r} E^Q\left(\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} S(T-i) - K\right]_+ \middle| F_t\right)$$

και

$$E^Q[W_{i^*} - K_{i^*}]_+ = S(t)\sum_{i=0}^{i^*-1} e^{(T-i-t)r} - K_{i^*}.$$

Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή η τιμή του option για $S(t) = s$ δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}\text{AA}(t,s,n,K,T,r) &= \left[e^{-(T-t)r}/n\right]\left(S(t)\sum_{i=0}^{i^*-1} e^{(T-i-t)r} - K_{i^*}\right)\\ &= \frac{1}{n}\left[S(t)\sum_{i=0}^{i^*-1} e^{-ir} + e^{-(T-t)r}\sum_{i=i^*}^{n-1} S(T-i)\right] - e^{-(T-t)r}K\end{aligned}$$

Ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (European call option) συναρτάται από την ημερομηνία εξάσκησης του δικαιώματος T, την τιμή εξάσκησης K, το spot-rate r και συμβολίζεται $EC(t, T, K, r)$. Όταν $K_{i^*} > 0$, το ανώτερο όριο της τιμής ενός αριθμητικού Ασιατικού δικαιώματος μπορεί να γραφεί ως ένα άθροισμα τιμών ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1 : *Στα πλαίσια μίας αγοράς, όπως περιγράφηκε προηγουμένως, προκειμένου να υπολογίσουμε την τιμή ενός αριθμητικού Ασιατικού δικαιώματος αγοράς την χρονική στιγμή t, για μία δεδομένη τιμή s, διακρίνουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις* :

(1) *Αν* $K_{i^*} > 0$, *τότε*

$$\text{AA}(t, s, n, K, T, r) \leq [e^{-(T-t)r}/n]\sum_{i=0}^{i^*-1}\psi_{F(\cdot,T-t,s,t)}(k_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i^*-1} e^{-ir} EC(t,s,k_i,T-i,r)$$

όπου $k_i = F^{-1}(F_R(K_{i^*}), T-i, s, t)$, *για* $i = 0,\ldots,i^*$, *και οι τιμές εξάσκησης* k_i *είναι άριστες, όπως τα επίπεδα διατήρησης στο* (ζ).

(2) *Αν* $K_{i^*} \leq 0$, *τότε*

$$\text{AA}(t,s,n,K,T,r) = \frac{1}{n}\left[S(t)\sum_{i=0}^{i^*-1} e^{-ir} + e^{-(T-t)r}\sum_{i=i^*}^{n-1} S(T-i)\right] - e^{-(T-t)r}K\,.$$

Το άνω φράγμα της τιμής ενός Ασιατικού δικαιώματος που εκφράζεται ως άθροισμα τιμών ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς, μπορεί να εφαρμοστεί στο μοντέλο Black και Scholes. Στο μοντέλο των Black και Scholes μπορούμε να αποτιμήσουμε τα ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς ή πώλησης υπό τη βασική προϋπόθεση ότι η στοχαστική διαδικασία των τιμών $S(t)$ του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου (επί του οποίου πραγματεύεται το δικαίωμα) ακολουθεί μία εκθετική Brownian motion με σταθερούς συντελεστές. Από το προηγούμενο θεώρημα γνωρίζουμε ότι αν $K_{i^*} > 0$

$$\mathrm{AA}(t, s, n, K, T, r) \le [e^{-(T-t)r} / n] \sum_{i=0}^{i^*-1} \psi_{F(\cdot, T-t, s, t)}(k_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i^*-1} e^{-ir} EC(t, s, k_i, T-i, r)$$

και λαμβάνοντας υπόψη τον τύπο των Black και Scholes έχουμε ότι

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i^*-1} e^{-ir} EC(t, s, k_i, T-i, r) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i^*-1} e^{-ir} \left[sN(d_{i,1}) - k_i e^{(T-i-t)r} N(d_{i,2}) \right],$$

οπότε

$$\mathrm{AA}(t, s, n, K, T, r) \le \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i^*-1} e^{-ir} \left[sN(d_{i,1}) - k_i e^{(T-i-t)r} N(d_{i,2}) \right]$$

με

$$d_{i,1} = \frac{\log(s / k_i) + (r + \sigma^2 / 2)(T-i-t)}{\sigma \sqrt{T-i-t}}, d_{i,2} = d_{i,1} - \sigma \sqrt{T-i-t} \, .$$

Επίσης, η κατανομή $F(x_2, t_2, x_1, t_1) = Q(S(t_2) \le x_2 \mid S(t_1) = x_1)$ για κάθε $t_2 \ge t_1$ υπό το μέτρο πιθανότητας Q είναι η γνωστή λογαριθμοκανονική κατανομή και

$$F(x_2, t_2, x_1, t_1) = \mathrm{LN}(x_2 ; \ln(x_1) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_1), \sigma \sqrt{t_2 - t_1})$$

με μέση τιμή $\ln(x_1) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_1)$ και διακύμανση $\sigma \sqrt{t_2 - t_1}$. Το μόνο που απομένει είναι υπολογίσουμε τις τιμές εξάσκησης k_i.

Ξέρουμε από το (**δ**) ότι

$$F_R^{-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i^{-1}(x)$$

και όταν $K_{i^*} > 0$, τα k_i ορίζονται από τη σχέση $k_i = F^{-1}(F_R(K_{i^*}), T - i, s, t)$. Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις λαμβάνουμε τη σχέση

$$K_{i^*} = \sum_{i=0}^{i^*-1} F^{-1}(F(k_i, T-i, s, t), T-k, s, t),$$

που είναι ισοδύναμη με

$$K_{i^*} = \sum_{i=0}^{i^*-1} S^{\left(1-\sqrt{\frac{T-k-t}{T-i-t}}\right)} k_i^{\sqrt{\frac{T-k-t}{T-i-t}}} e^{\left(r-\sigma^2/2\right)\left(\sqrt{(T-k-t)(T-i-t)}\right)}.$$

Όμως, $K_{i^*} = \Gamma_i(k_i, S)$ όταν $\alpha_k(i) = e^{\left(r-\sigma^2/2\right)\left(\sqrt{(T-k-t)(T-i-t)}\right)}$ και

$$\beta_k(i) = \sqrt{\frac{T-k-t}{T-i-t}}$$

με $\Gamma_i(x, s) = \sum_{i=0}^{i^*-1} \alpha_k(i) s^{1-\beta_k(i)} x^{\beta_k(i)}$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bauerle, N (1997a). Inequalities for stochastic models via supermodular orderings. *Communications in Statistics – Stochastic models* **13**, 181 – 201.

Bauerle, N (1997b). Monotonicity results for MR/GI/1 queues. *Journal of Applied Probability* **34**, 514 – 524.

Bauerle, N. and Muller, A. (1998). Modelling and comparing dependencies in multivariate risk portfolios. *ASTIN Bull*. **28**, 59 – 76.

Bauerle, N. and Rieder, U. (1997). Comparison results for Markov – modulated recursive models. *Probability in the Engineering and Informational Sciences* **11**, 203 – 217.

Bauerle, N. and Rolski, T. (1998). A monotonicity result for the workload in Markov-modulated queues. . *J. Appl. Prob.* **24**, 123 – 136.

Bergmann, R. (1978). Some classes of semi-ordering relations for random vectors and their use for comparing covariances. *Math. Nachr.* **82**, 103 – 114.

Bigelow, J.P. (1993). Consistency of mean-variance analysis and expected utility analysis: a complete characterization. *Econom. Lett.* **43**, 187 – 192.

Block, H.W. and A.R. Sampson (1988). Conditionally ordered Distributions. *Journal of Multivariate Analysis* **27**, 91 – 104.

Borch, K. (1974). *The Mathematical Theory of Insurance*. Lexington: D.C. Heath & Company.

Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones O.A. and Nesbitt, C.J. (1996). *Actuarial Mathematics*. Itasca, IL: Society of Actuaries.

Cambanis, S., Simons, G. and Stout, W. (1976). Inequalities for Ek(X, Y) when the marginals are fixed. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **36**, 285 – 294.

Chow, Y.S. and Teicher, H. (1978). *Probability thery.* New York: Springer-Verlag.

Christofides, T. and Vaggelatou E. (2004) A connection between supermodular ordering and positive/negative association. *Journal of Multivariate Analysis* **88**, 138-151

Daduna, H. and Szekli, R. (1996). A queuing theoretical proof of increasing property of Polya frequency functions. *Statist. Probab. Lett.* **26**, 233 – 242.

Dall' Aglio, G. (1972). Frechet classes and compatibility of distribution functions. In *Symposia mathematica*, *vol ix* (pp. 131 – 150). London: Academic Press.

Dennenberg, D. (1994). *Non-additive Measure and Integral*. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA.

Denuit Michel, Lefevre Claude and Scarsini Marco (2001). On *s*-convexity and risk aversion. *Theory and Decision* **50**, 239 – 248.

Denuit, M., DeVylder, E. and Lefevre, Cl. (1999). Extremal generators and extermal distributions for the continuous *s*-convex stochastic orderings. *Insurance*: *Mathematics and Economics* **24**, 201 – 217.

Denuit, M., Dhaene, J. and Ribas, C. (2001). Does positive dependence between individual risks increase stop-loss premiums? *Insurance*: *Mathematics and Economics* **28**, 305 – 308.

Denuit, M., Dhaene, J. and Van Wouwe, M. (1999). The economics of insurance: a review and some recent developments. *Bulletin de l' Association Suisse des Actuaires* **2**, 137 – 175.

Denuit, M., Lefevre, Cl. and Shaked, M. (1998). The *s*-convex orders among real random variables, with applications. *Mathematical Inequalities and Their Applications* **1**, 585 – 613.

DeVylder, F.E. (1996). *Advanced Risk Theory. A Self-Contained Introduction*. Bruxelles: Editions de l'Universite Libre de Bruxelles – Swiss Association of Actuaries.

Dhaene, J. and Denuit, M. (1999). The safest dependence structure among risks. *Insurance*: *Mathematics and Economics* **25**, 11 – 21.

Dhaene, J. and M.J. Goovaerts (1996). Dependency of risks and stop–loss order. *ASTIN – Bulletin* **26**, 201 – 212.

Dhaene, J. and M.J. Goovaerts (1997). On the dependency of risks in the individual life model. *Insurance*: *Mathematics and Economics* **19**, 243 – 253.

Dhaene, J., Wang, S., Young, V. and Goovaerts, M. (1997). Comonotonicity and Maximal Stop-loss Premiums. Research Report 9730, Department of Applied Economics, K.U. Leuven.

Efron, B. (1965). Increasing properties of Polya frequency functions. *Ann. Math. Statist*. **36**, 272 – 279.

Elton, J. and Hill. T.P. (1998). On the basic representation theorem for convex domination of measures. *J. Math. Anal. Appl*. **228**, 449 – 466.

Embrechts Paul , Hoing Andrea and Alessandro Juri (2003). Using copulae to bound the Value-at-Risk for functions of dependent risks. *Finance stochast*. **7**, 145 – 167.

Embrechts, P., Kluppelberg, C. and Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Berlin Heidelberg New York: Springer 1997.

Embrechts, P., Lindskog, F. and McNeil, A. (2001). Modelling dependence with copulas and applications to risk management. Preprint ETHZ.

Embrechts, P., McNeil, A. and Straumann, D. (2002). Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. In *Risk Management: Value at Risk and Beyond*. Dempster, M. (ed.) Cambridge: Cambridge University Press, 176 – 223.

Esary, J.D., Proschan, F. and Walkup, D.W. (1967). Association of random variables, with applications. *Ann. Math. Statist*. **38**, 1466 – 1474.

Feller, W. (1971). *An introduction to probability theory and its applications*. *Vol*. II. New York: John Wiley & Sons Inc.

Fishburn, P.C. (1976). Continua of stochastic dominance relations for bounded probability distributions. *J. Math. Econom*. **3**, 295 – 311.

Fishburn, P.C. (1980). Continua of stochastic dominance relations for bounded probability distributions. *J. Math. Econom*. **7**, 271 – 285.

Fishburn, P.C. (1982a). *The Foundations of Expected Utility*. Dordrecht: Reidel Publising Co.

Fishburn, P.C. (1982b). Moment-preserving shifts and stochastic dominance. *Mathematics of Operations Research* **7**, 629 – 634.

Frostig, E. (2001). A comparison between homogeneous and heterogeneous portfolios. *Insurance*: *Mathematics and Economics* **29**, 59 – 71.

Goovaerts, M.J. and Dhaene, J. (1999). Supermodular ordering and stochastic annuities. *Insurance*: *Mathematics and Economics* **24**, 281 – 290.

Goovaerts, M.J., Dhaene, J. and De Schepper, A. (1999). Stochastic boumds for present value functions. Research Report 9914, Department of Applied Economics, K.U. Leuven.

Goovaerts, M.J., Kaas, R., Van Heerwaarden, A.E. and Bauwelinckx, T. (1990). *Effective Actuarial Methods*. Amsterdam: North-Holland.

Hardy, G.H., Littlewood, J.E. and Polya, G. (1934). *Inequalities*. Gambridge: Gambridge University Press.

Harrison, J. and Kreps, D. (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory* **20**, 381 – 408.

Harrison, J. and Pliska, R. (1981). Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications* **11**, 215 – 260.

Hurlimann, W. (1998). Extremal Moment Methods and Stochastic Orders. *Application in Actuarial Sciences*. Monograph manuscript.

Jacques, M. (1996). On the hedging portfolio of Asian options. *ASTIN Bulletin* **26**, 165 – 183.

Joe, H. (1990). Multivariate concordance. *J. Multivariate Anal*. **35**, 12 – 30.

Joe, H. (1997). *Multivariate models and Dependence Concepts*. London: Chapman and Hall 1997.

Kaas , R. and Hesselager, O. (1995). Ordering claim size distributions and mixed Poisson probabilities. *Insurance*: *Mathematics and Economics* **17**, 193 – 201.

Kaas , R., Van Heerwaarden, A.E. and Goovaerts M.J. (1994). Ordering of Actuarial Risks. Bruxelles: *CAIRE Educations Series*, vol. 1.

Kamae,T., Krengel, U. and O' Brien, G.L. (1977). Stochastic inequalities on partially ordered spaces. *Ann. Probab.* **5**, 899 – 912.

Karlin, S. and Novikoff, A. (1963). Generalized convex inequalities. *Pacific J. Math*. **13**, 1251 – 1279.

Karlin, S. and Rinott, Y. (1980a). Classes of orderings of measures and related correlation inequalities. I. Multivariate totally positive distributions. *J. Multivariate Anal*. **10**, 467 – 498.

Kemna, A.G.Z. and Vorst, A.C.F. (1990). A pricing method for options based on average asset values. *Journal of banking and Finance* **14**, 113 – 129.

Kemperman, J.H.B. (1977). On the FKG-inequality for measures on a partially ordered space. *Indag. Math*. **39**, 313 – 331.

Kijima, M. and Ohnishi, M. (1996). Portfolio selection problems via the bivariate characterization of stochastic dominance relations. *Math. Finance* **6**, 237 – 277.

Kimeldorf , G. and Sampson, A.R. (1987). Positive dependence orderings. *Ann. Inst. Statist. Math.* **39**, 113 – 128.

Kimeldorf , G. and Sampson, A.R. (1989). A framework for positive dependence. *Ann. Inst. Statist. Math.* **41**, 31 – 45.

Landsberger, M. and Meilijson, I. (1990a). Demand for risky financial assets: a portfolio analysis. *J. Econom. Theory* **50**, 204 – 213.

Lefevre, C. and Utev, S. (1996). Comparing sums of exchangeable Bernoulli random variables. *J. Appl. Probab.* **33**, 285 – 310.

Lehmann, E.L. (1966). Some concepts of dependence. *Ann. Math. Statist.* **37**, 1137 – 1153.

Ligett, T.M. (2000). Monotonicity of conditional distributions and growth models on trees. *Ann. Probab*. **28**, 1645 – 1665.

Machina, M.J. and Pratt, J.W. (1997). Increasing risk: some direct constructions. *J. Risk Uncertain*. **14**, 103 – 127.

Markovitz, H.M. (1959). *Portfolio selection:Efficient diversification of investments*. New York: John Wiley & Sons Inc.

Marshall, A.W. and I. Olkin (1979). *Inequalities : Theory of Majorization and its Applications*. Academic Press, New York.

Meester, L.E. and Shanthikumar, J.G. (1993). Regularity of stochastic processes: A theory of directional convexity. *Prob. Eng. Inform. Sci.* **7**, 343 – 360.

Meester, L.E. and Shanthikumar, J.G. (1999). Stochastic convexity on general space. *Math. Oper. Res.* **24**, 472 – 494.

Milgrom. P. and Weber, R.J. (1982). A theory of auctions and competitive bidding. *Econometrica* **50**, 1089 – 1122.

Mosler, K. and Scarsini, M. (1991). Some theory of stochastic dominance. In: K. Mosler and M. Scarsini, eds, *Stochastic Orders and Decision under Risk*. IMS Lecture Notes **19**, 261 – 284.

Mosler, K. (1982). *Entscheidungsregeln bei Risiko: Multivariate stochastiche Dominanz*. Berlin: Springer-Verlag.

Muller A. and Stoyan, D. (2002). *Comparison methods for stochastic models and risks*. Wiley series in probability and statistics.

Muller, A. (1996). Orderings of risks: A comparative study via stop-loss transforms. *Insurance*: *Mathematics and Economics* **17**, 215 – 222.

Muller Alfred (1997a). Stop–loss order for portfolio dependent risks. *Insurance*: *Mathematics and Economics* **21**, 219 – 223.

Muller, A. (1997a). Stochastic orders generated by integrals : A unified study. *Advances in Applied Probability* **29**, 414 – 428.

Muller, A. (1998). Comparing risks with unbounded distributions. *J. Math. Econom.* **30**, 229 – 239.

Muller, A. and Ruschendorf, L. (2001). On the optimal stopping values induced by general dependence structures. *J. Appl. Prob.* **38**, 672 – 684.

Muller, A. and Scarsini, M. (2001). Stochastic comparison of random vectors with a common copula. *Math. Oper. Res.* **26**, 723 – 740.

Muller, A. and Scarsini, M. (2000). Some remarks on the supermodular order. *J. Multivariate Anal.* **73**, 107 – 119.

Ogryczk, W. and Ruszczynski, A. (1999). From stochastic dominance to mean-risk models: Semideviations as risk measures. *European J. Oper. Res.* **116**, 33 – 50.

Pecaric, J.E., Prochan, F. and Tong, Y.L. (1992). *Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications*. New York: Academic Press.

Reuter, H. and Riedrich, T. (1981). On maximal sets of functions compatible with a partial ordering for distribution functions. *Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optim.* **12**, 597 – 605.

Roberts, A.W. and Varberg, D.E. (1973). *Convex Functions*. New York: Academic Press.

Rogers, L.C.G. and Shi, Z. (1995). The value of an Asian option. *Journal of Applied Proabability* **32**, 1077 – 1088.

Rolski, T. and Stoyan, D. (1974). Two classes of semi-orderings and their application in the queuing theory. *Z. Angew. Math. Mech.* **54**, 127 – 128.

Rothschild, M. and Stiglitz, J.E. (1970). Increasing risk, I. A definition. *J. Econom. Theory* **2**, 225 – 243.

Ruschendorf, L. (1980). Inequalities for the expectation of Δ-monotone functions. *Zeitschrift fur Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* **54**, 341 – 349.

Ruschendorf, L. (1981). Weak association of random variables. *J. Multivariate Anal.* **11**, 448 – 451.

Ruschendorf, L. (1981b). Stochastically ordered distributions and monotonicity of the OC-function of sequential probability ratio tests. *Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Statist.* **12**, 327 – 338.

Ruschendorf, L. (1982). Random variables with maximum sums. *Adv. Appl. Probab.* **14**, 623 – 632.

Ruschendorf, L. and Uckelmann, L. (2002). Variance minimization and random variables with constant sum. In *Proceedings of the fourth conference on distributions with given marginals* (*Barcelona* 2000). Dordrecht: Kluwer, to appear.

Scarsini, M. (1988). Multivariate stochastic dominance with fixed dependence structure. *Oper. Res. Lett.* **7**, 237 – 240.

Scarsini, M. (1994). Comparing risk and risk aversion. In: M. Shaked and J.G. Shanthikumar, *Stochastic Orders and their Applications*, 351 – 378. New York: Academic Press.

Schmidt, U. (1998). Axiomatic Utility Theory under Risk. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 461. Berlin: Springer Verlag.

Schweizer, B. and Sklar, A. (1974). Operations on distributions functions not derivable from operations on random variables. *Studia Math.* **52**, 43 – 52.

Shaked, M. and J.G. Shanthikumar (1990). Parametric stochastic convexity and concavity of stochastic processes. *Ann. Inst. Statist. Math.* **42**, 509 – 531.

Shaked, M. and J.G. Shanthikumar (1994). *Stochastic Orders and their Applications*. Academic Press, London.

Shaked, M. and J.G. Shanthikumar (1997). Supermodular stochastic orders and positive dependence of random vectors. *Journal of Multivariate Analysis* **61**, 86 – 101.

Shaked, M. and Tong, Y.L. (1985). Some partial orderings of exchangeable random variables by positive dependence. *Journal of Multivariate Analysis* **17**, 333 – 349.

Shanthikumar, J.G. and Yao, D.D. (1991). Bivariate characterization of some stochastic order relations. *Adv. in Appl. Prob.* **23**, 642 – 659.

Shanthikumar, J.G. (1987). On stochastic comparison of random vectors. *J. Appl. Prob.* **24**, 123 – 136.

Simon S., Goovaerts M.J. and Dhaene J. (2000). An easy computable upper bound for the price of an arithmetic Asian option. *Insurance*: *Mathematics and Economics* **26**, 175 – 183.

Sklar, A. (1959). Functions de repartition a *n* dimensions et leurs marges. *Publ. Inst. Statist. Univ.* Paris **8**, 229 – 231.

Szekli, R. (1995). *Stochastic ordering and dependence in applied probability*. New York: Springer-Verlag.

Szekli, R., Disney, R.L. and Hur, S. (1994). MR/GI/1 queues with positively correlated arrival stream. *J. Appl. Prob.* **31**, 497 – 514.

Tchen, A.H. (1980). Inequalities for distributions with given marginals. *Annals of Probability* **8**, 814 – 827.

Tong, Y.L. (1989). Inequalities for a class of positively dependent random variables with a common marginal. *Ann. Statist.* **17**, 429 – 435.

Trowbridge, C.L. (1989*). Fundamental Concepts of Actuarial Sciences*. Itasca, IL: Actuarial Education and Research Fund.

Vazquez-Abad, F.J. and Dufresne, D. (1998). Accelerated simulation for pricing Asian options. *Research Paper No*. **62**. Centre for Actuarial Studies, The University of Melbourne.

Veinott, A.F., Jr. (1965). Optimal policy in a dynamic, single product, non-stationary inventory model with several demand classes. *Operations Res.* **13**, 761 – 778.

Von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1947). *Theory of Games and Economic Behavior*, second edn. Princeton: Princeton University Press.

Wang, S. and Dhaene, J. (1998). Comonotonicity, Correlation Order and Premium Principles. *Insurance: Mathematics and Economics* **22,** 235 – 242.

Whitmore, G.A. (1970). Third degree stochastic dominance. *Amer. Econ. Rev.* **60**, 457 – 459.