

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΥΨΗΛΗΣ
ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ**

Δημήτριος Β. Αβράμπος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Σεπτέμβριος 2007

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΥΨΗΛΗΣ
ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ**

Δημήτριος Β. Αβράμπος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Σεπτέμβριος 2007

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Δημήτριος Αντζουλάκος (Επιβλέπων)
- Μιχάλης Μπούτσικας
- Γεώργιος Τζαβελάς

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS**

**CONTROL CHARTS FOR HIGH YIELD
PROCESSES**

By

Dimitris B. Avrabos

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of
the requirements for the degree of Master of Science in
Applied Statistics

Piraeus, Greece
September 2007

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Περίληψη

Στην παραγωγή, πολλές διεργασίες εμφανίζουν πολύ χαμηλά επίπεδα ελαττωματικών προϊόντων λόγω της προόδου που έχει συντελεστεί στην αυτοματοποίηση της παραγωγής. Σε αυτές τις περιπτώσεις το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων είναι $p \leq 0,001$ και τα n και np διαγράμματα τύπου Shewhart, τα οποία συνήθως χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση του ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων, δεν είναι κατάλληλα για υψηλής απόδοσης διεργασίες. Ο Goh (1987) έδειξε ότι η χρήση αυτών των διαγραμμάτων έχει ως αποτέλεσμα υψηλά ποσοστά λανθασμένων συναγερμών και μειωμένη ικανότητα στην ανίχνευση βελτίωσης στην παραγωγική διεργασία. Στη βιβλιογραφία, τα περισσότερα διαγράμματα για την παρακολούθηση της υψηλής ποιότητας διεργασιών βασίζονται στο μοντέλο της γεωμετρικής κατανομής, δηλαδή στον αριθμό των προϊόντων που επιθεωρούνται μέχρι την εμφάνιση ενός ελαττωματικού.

Σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι η καταγραφή και η παρουσίαση των βασικών διαγραμμάτων που χρησιμοποιούνται σε τέτοιες περιπτώσεις παραγωγικών διεργασιών (Cumulative Count of Conforming (CCC) chart, Geometric control chart), η παρουσίαση των ιδιοτήτων τους και η σύγκρισή τους.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Abstract

High yield production processes that involve a low fraction of non-conforming are becoming more common. In these cases, the fraction of non-conforming is $p \leq 0.001$ and $n-np$ Shewhart control charts are unsatisfactory for monitoring high quality processes. Since they grow many false alarm signals and are not able to detect improvement of the process. In the literature, most charts for monitoring high quality processes are based on the geometric distribution, that is are based on the number of items inspected until one non-conforming item is observed.

The aim of this dissertation is to review and present the use of basic charts in these industrial processes (Cumulative Count of Conforming (CCC), Geometric control chart), to establish their characteristics and make comparisons.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων	xvi
Κατάλογος Σχημάτων	xx
1. Διαγράμματα Ελέγχου για Διακριτά Χαρακτηριστικά	1
1.1 Εισαγωγή	2
1.2 Περιγραφή και χρήση ενός διαγράμματος ελέγχου	4
1.3 Βασικές έννοιες στα διαγράμματα ελέγχου	6
1.4 Διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart	9
1.5 Διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart για διακριτά χαρακτηριστικά	11
1.6 Διαγράμματα ελέγχου για το ποσοστό και τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων	12
1.6.1 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης II (p γνωστό)	12
1.6.2 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I (p άγνωστο)	14
1.6.3 Διαγράμματα ελέγχου p και np : Εφαρμογή	15
1.7 Διαγράμματα ελέγχου για τον αριθμό και το μέσο αριθμό των ελαττωμάτων	21
1.7.1 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης II (c γνωστό)	22
1.7.2 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I (c άγνωστο)	23
1.7.3 Διαγράμματα ελέγχου c : Εφαρμογή	25
1.7.4 Διαγράμματα ελέγχου u : Εφαρμογή	27
2. Γεωμετρικά Διαγράμματα Ελέγχου	29
2.1 Εισαγωγή	30
2.2 Διαγράμματα ελέγχου που βασίζονται στη γεωμετρική κατανομή	30
2.3 Μετασχηματισμός δεδομένων που ακολουθούν γεωμετρική	36

κατανομή	
2.3.1 Ο Q-μετασχηματισμός του Quesenberry	37
2.3.2 Ο λογαριθμικός μετασχηματισμός	38
2.3.3 Μετασχηματισμός διπλής τετραγωνικής ρίζας	39
2.3.4 Αριθμητικές συγκρίσεις των μετασχηματισμών	41
2.4 Βέλτιστη επιλογή ορίων ελέγχου για το γεωμετρικό διάγραμμα	42
2.5 Γεωμετρικά διαγράμματα ελέγχου με εκτιμώμενα όρια ελέγχου	49
2.6 Στατιστικός σχεδιασμός γεωμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου	57
3. Διαγράμματα Ελέγχου CCC και CCC-r	63
3.1 Εισαγωγή	64
3.2 Αδυναμίες των διαγραμμάτων ελέγχου n και np	65
3.3 CCC διαγράμματα ελέγχου	66
3.4 CCC-r διαγράμματα ελέγχου	69
3.5 Επίδραση της συσχέτισης στο ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων	76
3.6 Υπό συνθήκη κανόνας ανακήρυξης εντός ελέγχου μιας υψηλής απόδοσης διεργασίας	83
3.7 Βέλτιστα όρια ελέγχου CCC διαγραμμάτων υπό την παρουσία σφαλμάτων επιθεώρησης	90
Βιβλιογραφία	97

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Κατάλογος Πινάκων

1-1	p διάγραμμα ελέγχου, Phase II control limits (3σ)	13
1-2	np διάγραμμα ελέγχου, Phase II control limits (3σ)	13
1-3	p διάγραμμα ελέγχου, Phase I control limits (3σ)	14
1-4	np διάγραμμα ελέγχου, Phase I control limits (3σ)	15
1-5	Αριθμός ελαττωματικών συσκευασιών σε 94 δείγματα μεγέθους 50	15
1-6	c διάγραμμα ελέγχου, Phase II control limits (3σ)	22
1-7	u διάγραμμα ελέγχου, Phase II control limits (3σ)	23
1-8	c διάγραμμα ελέγχου, Phase I control limits (3σ)	24
1-9	u διάγραμμα ελέγχου, Phase I control limits (3σ)	24
1-10	Αριθμός ελαττωμάτων σε τυχαίο δείγμα 46 μονάδων	25
1-11	Αριθμός ελαττωμάτων σε 20 δείγματα των 5 μονάδων	27
2-1	Σύγκριση των ορίων ελέγχου για $\alpha = 0,0027$, $n=5$ και $k=3$	34
2-2	Συγκρίσεις των μέσων μηκών ροής για $p = 0,2$, $n = 5$ και $k = 3$	35
2-3	Δεδομένα που ακολουθούν αρνητική διωνυμική κατανομή με $p = 0,1$ και $n = 5$	35
2-4	Γεωμετρικά κατανεμημένα δεδομένα με τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς	41
2-5	Έλεγχος κανονικότητας των δεδομένων	42
2-6	Τιμές του ARL για $p = 50 ppm$ και διάφορες τιμές του a	44
2-7	Τιμές του παράγοντα g_a για διάφορες τιμές του a	47
2-8	Τιμές των ARL, LCL και UCL της ισχύουσας e και προτεινόμενης p μεθόδου για $a = 0,0027$	48
2-9	Τιμές του FAR για εκτιμώμενα όρια ελέγχου, $\alpha = 0,0027$	52
2-10	Τιμές του AR για εκτιμώμενα όρια ελέγχου, $\alpha = 0,0027$, $p_0 = 0.0005$	53

2-11	Τιμές ARL (πάνω καταχώρηση) και $SDRL$ (κάτω καταχώρηση) για εκτιμημένα όρια ελέγχου, $p_0 = 0.0005$	56
2-12	(L, U) και (L^*, U^*) σχεδιασμοί για $ARL_0 = 200$	59
2-13	Σχεδόν ARL -αμερόληπτοι σχεδιασμοί (L, U) για $ARL_0 = 200$	60
2-14	Κατάλληλοι TPC σχεδιασμοί (L, U) για p_0 , $ARL_0 = 1/0,005 = 200$	62
3-1	Ακολουθία μη ελαττωματικών προϊόντων για $p = 500 \text{ ppm}$	68
3-2	Όρια ελέγχου για τα διαγράμματα ελέγχου $CCC-1$, $CCC-2$	71
3-3	Όρια ελέγχου για τα διαγράμματα ελέγχου $CCC-3$, $CCC-4$	71
3-4	Σύνολο γεωμετρικά κατανεμημένων δεδομένων με ποσοστό ελαττωματικών p ίσο με 0,05 για τα πρώτα 30, 0,025 για τα επόμενα 30 και 0,10 για τα τελευταία 30	73
3-5	Συσσωρευμένος αριθμός παραγόμενων προϊόντων μέχρι την εμφάνιση τριών ελαττωματικών προϊόντων	74
3-6	Τιμές ARL για $CCC-r$ διαγράμματα και τα τροποποιημένα $CCC-r$ διαγράμματα με r από 2 έως 4	76
3-7	Όρια ελέγχου για το RL_1 διάγραμμα για διάφορα επίπεδα σειριακής συσχέτισης	80
3-8	Σφάλματα τύπου I όταν παραβιάζεται η υπόθεση της ανεξαρτησίας	81
3-9	Όρια ελέγχου για το RL_2 διάγραμμα για διάφορα επίπεδα σειριακής συσχέτισης	82
3-10	Τιμές του δ για διάφορες τιμές των a και s	85
3-11	Τιμές των LCL , UCL για τον υπό συνθήκη κανόνα με $\alpha = 0,0027$	86
3-12	Τιμές των LCL , UCL για τον υπό συνθήκη κανόνα με $\alpha = 0,01$	87
3-13	Τιμές του ARL για διάφορες τιμές του ποσοστού ελαττωματικών	91

	και του ρυθμού λανθασμένων συναγερμών	
3-14	Τιμές του <i>ARL</i> για διάφορες τιμές του ποσοστού ελαττωματικών και των σφαλμάτων επιθεώρησης	92
3-15	Τιμές του ποσοστού των ελαττωματικών στο οποίο το μέγιστο <i>ARL</i> επιτυγχάνεται για διάφορες τιμές του ρυθμού λανθασμένου συναγερμού	94
3-16	Τιμές του ποσοστού των ελαττωματικών στο οποίο το μέγιστο <i>ARL</i> επιτυγχάνεται για διάφορες τιμές των σφαλμάτων επιθεώρησης	95

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Κατάλογος Σχημάτων

1-1	Τυπικό διάγραμμα ελέγχου	5
1-2	p διάγραμμα ελέγχου των ελαττωματικών συσκευασιών	16
1-3	Τροποποιημένο p διάγραμμα ελέγχου	17
1-4	p διάγραμμα ελέγχου για τα πρώτα 54 δείγματα	18
1-5	Τροποποιημένο p διάγραμμα ελέγχου για τα πρώτα 54 δείγματα	19
1-6	p διάγραμμα ελέγχου για τα 94 δείγματα	20
1-7	p διάγραμμα ελέγχου των ελαττωματικών συσκευασιών	21
1-8	c διάγραμμα ελέγχου για τις 26 πρώτες μονάδες	26
1-9	c διάγραμμα ελέγχου χωρίς τις μονάδες 6 και 20	26
1-10	c διάγραμμα ελέγχου για τις 44 μονάδες	27
1-11	μ διάγραμμα ελέγχου των 20 δειγμάτων	28
2-1	Διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2-3	36
2-2	Ιστόγραμμα 200 δεδομένων που κατανέμονται γεωμετρικά ($p = 0.8$).	40
2-3	Ιστόγραμμα των μετασχηματισμένων δεδομένων ($y = x^{1/4}$)	40
2-4	ARL καμπύλες για εντός ελέγχου $p = 50 ppm$ για $\alpha = 0,0027, 0,05$ και $0,01$	45
2-5	ARL καμπύλες της ισχύουσας και της προτεινόμενης μεθόδου για $p = 50 ppm$ και $\alpha = 0,0027$	49
2-6	Κατανομή του μήκους ροής για τρία διαφορετικά μεγέθη δείγματος	55
3-1	CCC διάγραμμα των δεδομένων του Πίνακα 3-1	69
3-2	Το $CCC-3$ διάγραμμα των δεδομένων του Πίνακα 3.5	74
3-3	Γραφική παράσταση του δ συναρτήσει του s για διάφορες τιμές του α	85
3-4	OC καμπύλες του CCC και του υπό συνθήκη κανόνα για $p = 50 ppm$	88
3-5	ARL καμπύλες παραδοσιακού και υπό συνθήκη CCC διαγράμματος για $p = 50 ppm$	89
3-6	ARL καμπύλες με $p_i = 50 ppm$, $\psi = 0,2$ και $\theta = 0,0001$	92

3-7 *ARL* καμπύλες με $p_i=50 \text{ ppm}$, $\alpha = 0,0027$ για διαφορετικές τιμές
σφαλμάτων επιθεώρησης

93

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Διαγράμματα Ελέγχου για Διακριτά
Χαρακτηριστικά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΑΙΑ

1.1 Εισαγωγή

Σε κάθε παραγωγική διεργασία, ανεξάρτητα από το πόσο καλά σχεδιασμένη είναι και το πόσο προσεκτικά επιβλέπεται και συντηρείται, θα υπάρχει πάντα μια μορφή φυσικής μεταβλητότητας που θα τη συνοδεύει. Δηλαδή, όσο καλά ρυθμισμένα και να είναι τα μηχανήματα, όσο ικανοί και να είναι οι χειριστές των μηχανημάτων, όσο ικανοποιητική και να είναι η πρώτη ύλη, ποτέ δύο παραγόμενα προϊόντα δεν θα είναι τα ίδια (θα υπάρχει κάποιο μετρήσιμο μέγεθος του προϊόντος του οποίου η τιμή θα είναι διαφορετική στα δύο προϊόντα). Αυτή η φυσική μεταβλητότητα είναι το αθροιστικό αποτέλεσμα πολλών μικρών αιτιών οι οποίες αναφέρονται ως τυχαίες αιτίες μεταβλητότητας. Η φυσική μεταβλητότητα είναι συνήθως μικρή σε μέγεθος και δεν μπορεί να αποδοθεί σε ελέγξιμους παράγοντες. Μια διεργασία η οποία λειτουργεί μόνο με την παρουσία φυσικής μεταβλητότητας λέμε ότι είναι εντός ελέγχου διεργασία .

Όμως σε μία διεργασία μπορεί να εμφανίζονται περιστασιακά και άλλες μορφές μεταβλητότητας οι οποίες δεν οφείλονται σε τυχαίες αιτίες αλλά αφορούν τη συστηματική αλλαγή στο επίπεδο κάποιου ή κάποιων παραγόντων που καθορίζουν την ποιότητα του προϊόντος. Αυτές οι μορφές μεταβλητότητας οφείλονται συνήθως στους ακόλουθους λόγους: (α) λανθασμένα ρυθμισμένες μηχανές, (β) λάθη των χειριστών των μηχανημάτων, και (γ) κακής ποιότητας ή ελαττωματική πρώτη ύλη. Η μεταβλητότητα που οφείλεται στους παραπάνω λόγους είναι σε μέγεθος πολύ μεγαλύτερη της φυσικής μεταβλητότητας και η παρουσία της οδηγεί συνήθως σε μη αποδεκτά επίπεδα λειτουργίας της παραγωγικής διεργασίας. Αυτή η μεταβλητότητα αναφέρεται ως ειδική μεταβλητότητα και οι αιτίες που οδηγούν σε αυτή ονομάζονται ειδικές ή προσδιορισμένες αιτίες μεταβλητότητας. Μια διεργασία η οποία λειτουργεί με την παρουσία ειδικής μεταβλητότητας λέμε ότι είναι εκτός ελέγχου διεργασία .

Άμεσα συνδεδεμένη έννοια με την παραγωγή ενός προϊόντος είναι τα όρια προδιαγραφών των ποιοτικών χαρακτηριστικών του προϊόντος τα οποία καθορίζονται στη φάση σχεδιασμού

του. Αυτά είναι το κάτω και το άνω όριο προδιαγραφών και εντός αυτών των ορίων πρέπει να βρίσκονται οι τιμές του ποιοτικού χαρακτηριστικού για κάθε παραγόμενο προϊόν προκειμένου να είναι ποιοτικά αποδεκτά. Επίσης, στη φάση σχεδιασμού του προϊόντος ορίζεται και μια επιθυμητή τιμή για το ποιοτικό χαρακτηριστικό που ονομάζεται τιμή στόχος που είναι συνήθως το μέσο του διαστήματος $[LSL, USL]$. Κάτω από συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας η συντριπτική πλειοψηφία των τιμών του ποιοτικού χαρακτηριστικού στα παραγόμενα προϊόντα βρίσκεται εντός των ορίων προδιαγραφών. Όμως κάτω από συνθήκες ειδικής μεταβλητότητας δεν ισχύει το ίδιο.

Το κύριο αντικείμενο του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών είναι η έγκαιρη ανίχνευση της εμφάνισης ειδικών αιτιών μεταβλητότητας σε μια διεργασία έτσι ώστε να προχωρήσουμε σε έρευνα και να προβούμε στις απαραίτητες διορθωτικές ενέργειες προτού κατασκευαστούν αρκετά προϊόντα μη συμμορφούμενα με τις προδιαγραφές. Τα διαγράμματα ελέγχου είναι μια τεχνική που χρησιμοποιείται ευρέως για την ανίχνευση σε πραγματικό χρόνο της εμφάνισης ειδικών αιτιών μεταβλητότητα σε μια διεργασία. Ωστόσο πριν κλείσουμε την παρούσα παράγραφο κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούμε στις έννοιες μη συμμορφούμενο ή ελαττωματικό προϊόν και αριθμός ελαττωμάτων ή ατελειών ενός προϊόντος προκειμένου να αποφύγουμε τη συσχέτιση των διαγραμμάτων ελέγχου μόνο με την περίπτωση που οι τιμές του ποιοτικού χαρακτηριστικού του προϊόντος περιγράφονται από μια συνεχή τυχαία μεταβλητή, δηλαδή από μια μεταβλητή που παίρνει τιμές σε μια συνεχή κλίμακα.

Με τον όρο μη συμμορφούμενο ή ελαττωματικό προϊόν ονομάζουμε το προϊόν για το οποίο τουλάχιστον ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό του έχει τιμή η οποία βρίσκεται εκτός των ορίων προδιαγραφών, δηλαδή παρουσιάζει τουλάχιστον ένα ελάττωμα ή ατέλεια. Όμως σε πολλές περιπτώσεις ανάλογα με τον αριθμό και τη σοβαρότητα των ελαττωμάτων (ατελειών) που παρουσιάζει ένα προϊόν μπορεί να χαρακτηριστεί συμμορφούμενο ή μη ελαττωματικό προϊόν, και να προωθηθεί προς πώληση στην αγορά. Για παράδειγμα, ένα ρούχο μπορεί να χαρακτηριστεί ελαττωματικό εάν το τελικό προϊόν έχει ελάττωμα στις ραφές, ή ελάττωμα στο χρώμα, ή ελαττώματα στο ύφασμα κτλ. Όμως αρκετές φορές το ρούχο δεν θα χαρακτηριστεί (πρακτικά) ελαττωματικό αν παρουσιάζει μόνο ένα από τα παραπάνω ελαττώματα, ή ακόμα και αν παρουσιάζει περισσότερα ελαττώματα αλλά σε μικρότερο βαθμό. Σε τέτοιες περιπτώσεις κατασκευάζονται διαγράμματα ελέγχου για τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων ή ακόμα και για τον αριθμό των ελαττωμάτων ενός προϊόντος που ως ποιοτικά χαρακτηριστικά ενός προϊόντος δεν μετρούνται σε μια συνεχή κλίμακα αλλά παίρνουν

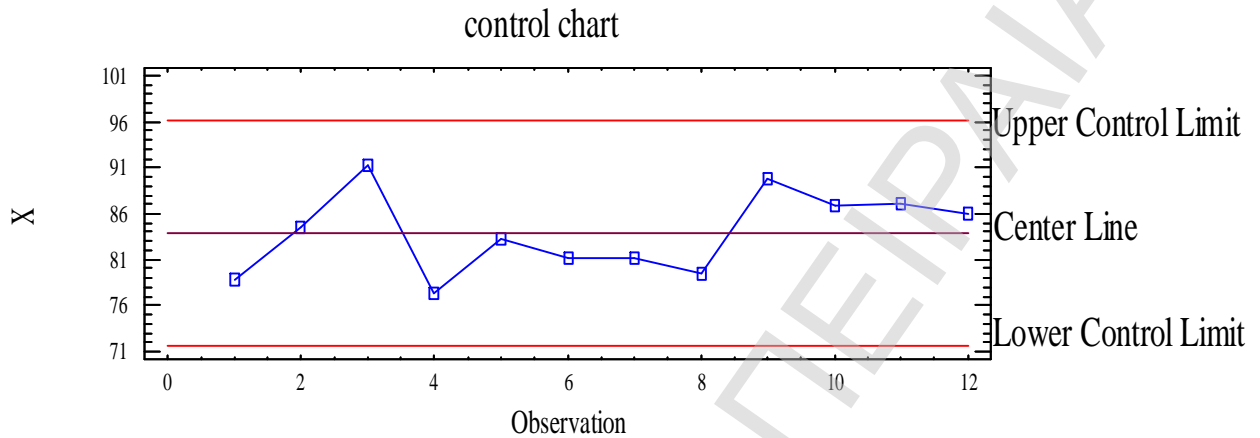
αριθμήσιμο πλήθος τιμών και περιγράφονται με διακριτές τυχαίες μεταβλητές. Τέτοια διαγράμματα χρησιμοποιούνται και στην περίπτωση που η προς πώληση μονάδα είναι μια συσκευασία η οποία περιέχει έναν αριθμό προϊόντων και η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί ως ελαττωματική ή μη, βάσει του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων που περιέχει.

1.2 Περιγραφή και χρήση ενός διαγράμματος ελέγχου.

Ας υποθέσουμε ότι σε μια παραγωγική διεργασία ενδιαφερόμαστε να παρακολουθήσουμε τη συμπεριφορά μιας κρίσιμης ποσότητας ενός (μετρήσιμου) χαρακτηριστικού X στα προϊόντα που παράγονται (για παράδειγμα το X μπορεί να είναι μήκος, βάρος, όγκος προϊόντων). Η διαδικασία θα βασιστεί σε μετρήσεις του χαρακτηριστικού X (τυχαία μεταβλητή), οπότε από την παραγωγή επιλέγουμε τυχαία δείγματα του προϊόντος σε διαφορετικές χρονικές στιγμές στα οποία αντιστοιχούν τυχαία δείγματα τιμών της τυχαίας μεταβλητής X , έστω τα X_1, X_2, \dots . Χρησιμοποιώντας τα δείγματα υπολογίζουμε την τιμή $W_i = g(X_i)$, $i=1,2,\dots$, μιας στατιστικής συνάρτησης (τυχαίας μεταβλητής) που εκτιμά (συνήθως αμερόληπτη εκτιμήτρια) την κρίσιμη ποσότητα (π.χ. μέση τιμή, διακύμανση κτλ.) που μας ενδιαφέρει. Έτσι η παρακολούθηση της συμπεριφοράς της κρίσιμης ποσότητας επιτυγχάνεται με την παρακολούθηση των τιμών που λαμβάνει η στατιστική συνάρτηση W στα διάφορα δείγματα.

Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε να παρακολουθήσουμε τη συμπεριφορά της μέσης τιμής μ της διαμέτρου X των κυλίνδρων που παράγει μια μηχανή. Για το σκοπό αυτό επιλέγονται τυχαία δείγματα μεγέθους n κυλίνδρων από την παραγωγή της μηχανής σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη στατιστική συνάρτηση $W_i = g(\mathbf{X}_i) = (X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}) / n$ (η οποία είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του μέσου της κατανομής της X) για την παρακολούθηση της συμπεριφοράς της μέσης τιμής.

Ένα τυπικό διάγραμμα ελέγχου είναι μια γραφική παράσταση με την ακόλουθη μορφή



Σχήμα 1-1. Τυπικό διάγραμμα ελέγχου.

όπου στο Σχήμα 1-1, εκτός από τις παρατηρούμενες τιμές της W_i που έχουν παρασταθεί με σημεία (τετραγωνάκια) τα οποία έχουν συνδεθεί με μια τεθλασμένη γραμμή, έχουν σχεδιαστεί και άλλες τρεις γραμμές. Η κεντρική γραμμή ή μέσο επίπεδο της διεργασίας παριστάνει συνήθως τη μέση τιμή της W όπως προκύπτει από τη λειτουργία μιας εντός ελέγχου διεργασίας ή γενικότερα την τιμή στόχο του προϊόντος. Οι δύο ακραίες τιμές που εμφανίζονται ονομάζονται άνω και κάτω όρια ελέγχου. Όσο οι τιμές (σημεία, δεδομένα) της W εμφανίζονται εντός των ορίων ελέγχου και η συμπεριφορά τους είναι “τυχαία” μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου (για την ακρίβεια εντός στατιστικού ελέγχου) και δεν χρειάζεται να προβούμε σε κάποια διορθωτική ενέργεια. Αν όμως κάποιο σημείο βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου λέμε ότι υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου οπότε αντιμετωπίζουμε κατάσταση συναγερμού και πρέπει να προχωρήσουμε σε έρευνα για να ανακαλύψουμε τις ειδικές αιτίες μεταβλητότητας που είναι υπεύθυνες για αυτή τη συμπεριφορά και αν κριθεί απαραίτητο να προβούμε σε διορθωτικές ενέργειες. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι ακόμα και στην περίπτωση που όλα τα σημεία βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου αλλά συμπεριφέρονται με ένα συστηματικό ή μη τυχαίο τρόπο τότε και αυτό αποτελεί ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Ως (ακραίο) παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε την περίπτωση όπου όλα τα σημεία στο Σχήμα 1-1 βρίσκονται μεταξύ της κεντρικής γραμμής και του κάτω ορίου ελέγχου.

1.3 Βασικές έννοιες στα διαγράμματα ελέγχου

Στην παρούσα παράγραφο θα περιγράψουμε ορισμένες βασικές έννοιες και κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που συνοδεύουν την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου.

- **Όρια ελέγχου και κεντρική γραμμή**

Στο ακόλουθο πλαίσιο δίνεται ένα γενικό μοντέλο, το μοντέλο ορίων σίγμα, για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου

Sigma Limits model
$UCL = m_w + Ls_w$
$Center\ Line = m_w$
$LCL = m_w - Ls_w$

όπου m_w και s_w δηλώνουν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της στατιστικής συνάρτησης W (συνήθως έχει κανονική κατανομή) που εκτιμά τη συμπεριφορά μιας κρίσιμης ποσότητας ενός χαρακτηριστικού X του προϊόντος και η οποία απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου, ενώ η ποσότητα L δηλώνει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή σε μονάδες τυπικής απόκλισης.

Όταν το $L=3$ ομιλούμε για κατασκευή ορίων ελέγχου τριών σίγμα. Για μεγάλες τιμές του L η απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή μεγαλώνει οπότε μειώνεται ο κίνδυνος (πιθανότητα) να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου και σε αναλογία με τον έλεγχο στατιστικών υποθέσεων μειώνεται η πιθανότητα του σφάλματος τύπου I , αλλά ταυτόχρονα αυξάνεται η πιθανότητα του σφάλματος τύπου II . Για μικρές τιμές του L έχουμε τα αντίθετα αποτελέσματα.

Όταν χρησιμοποιούμε όρια ελέγχου 3σ , και η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης W είναι κανονική, και η διεργασία είναι εντός ελέγχου, τότε η πιθανότητα να πάρει η W τιμή εκτός των ορίων ελέγχου (ή ισοδύναμα να παρουσιαστεί σημείο στο διάγραμμα ελέγχου

εκτός των ορίων ελέγχου ή ισοδύναμα το διάγραμμα ελέγχου να μου δώσει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου) είναι ίση με 0,0027 (όσο και το σφάλμα τύπου I).

Εκτός από το μοντέλο ορίων σίγμα, για την κατασκευή ορίων ελέγχου σε ένα διάγραμμα ελέγχου υπάρχει και το μοντέλο ορίων πιθανότητας που παρουσιάζεται στο ακόλουθο πλαίσιο (μοντέλο πιθανότητας $\alpha/2$) για κανονική ή προσεγγιστικά κανονική κατανομή της W

Probability Limits model
$UCL = m_w + Z_{\alpha/2} S_w$
$Center\ Line = m_w$
$LCL = m_w - Z_{\alpha/2} S_w$

Για εντός ελέγχου διεργασίες με κανονική κατανομή για την W και σύμφωνα με το μοντέλο ορίων πιθανότητας η πιθανότητα εσφαλμένου συναγεμού στη μια πλευρά των ορίων ελέγχου είναι ίση με $\alpha/2$ (α είναι η πιθανότητα εσφαλμένου συναγεμού).

• Μέγεθος δείγματος και συχνότητα δειγματοληψίας

Κατά τον σχεδιασμό ενός διαγράμματος ελέγχου πρέπει να καθοριστεί το μέγεθος των δειγμάτων των προϊόντων και η συχνότητα δειγματοληψίας. Γενικά μεγάλα μεγέθη δειγμάτων κάνουν πιο εύκολη την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων του μέσου επιπέδου της διεργασίας. Πράγματι χρησιμοποιώντας 3σ όρια ελέγχου και υποθέτοντας ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου και η κατανομή της W είναι κανονική, τότε ανεξαρτήτως του μεγέθους του δείγματος, το διάγραμμα ελέγχου με πιθανότητα $\alpha = 0,0027$ δίνει (εσφαλμένη) ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου (σφάλμα τύπου I).

Στην περίπτωση που για το ποιοτικό χαρακτηριστικό X του προϊόντος είναι γνωστό ότι $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και μας ενδιαφέρει η παρακολούθηση της μέσης τιμής μ , τότε χρησιμοποιώντας ένα διάγραμμα ελέγχου στο οποίο απεικονίζεται ο δειγματικός μέσος $W = \bar{X}$, τα παραπάνω περιγράφονται με τη σχέση

$$\alpha = P\left(\bar{X} < \mu - 3 \frac{S}{\sqrt{n}} \text{ ή } \bar{X} > \mu + 3 \frac{S}{\sqrt{n}} \mid X \sim N(\mu, \sigma^2)\right) = 2(1 - \Phi(3)) = 0,0027.$$

(προφανώς η πιθανότητα α δεν εξαρτάται από το μέγεθος δείγματος n)

Σε αναλογία με την έννοια του σφάλματος τύπου II στους ελέγχους υποθέσεων έχουμε ότι η πιθανότητα β να μου δώσει το διάγραμμα ένδειξη (εσφαλμένη) ότι η διαδικασία είναι εντός ελέγχου ενώ στην πραγματικότητα είναι εκτός ελέγχου λόγω μετατόπισης του μέσου επιπέδου της διεργασίας από μ σε μ^* είναι ίση με

$$\beta = P\left(\mu - 3 \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu + 3 \frac{S}{\sqrt{n}} \mid X \sim N(\mu^*, \sigma^2)\right) = \Phi\left(\sqrt{n} \frac{\bar{m} - \bar{m}^*}{S} + 3\right) - \Phi\left(\sqrt{n} \frac{\bar{m} - \bar{m}^*}{S} - 3\right)$$

(προφανώς η πιθανότητα β εξαρτάται από το μ^* και το μέγεθος δείγματος n).

Μπορεί να αποδειχτεί ότι αυξάνοντας το μέγεθος δείγματος η πιθανότητα β μικραίνει και συνεπώς αυξάνεται η ικανότητα του διαγράμματος ελέγχου να ανιχνεύει τις μετατοπίσεις του μέσου επιπέδου της διεργασίας. Συνεπώς το κατάλληλο μέγεθος του δείγματος εξαρτάται από το είδος της μετατόπισης (μικρής ή μεγάλης) του μέσου επιπέδου της διεργασίας που θέλουμε να ανιχνεύσουμε.

Σχετικά με τη συχνότητα της δειγματοληψίας η επιθυμητή κατάσταση θα ήταν να παίρνουμε δείγματα πολύ συχνά και προφανώς η βέλτιστη κατάσταση θα ήταν να ελέγχουμε όλα τα παραγόμενα προϊόντα. Όμως αυτές οι πολιτικές δειγματοληψίας συνεπάγονται μεγάλο οικονομικό κόστος. Γενικά η πολιτική που ακολουθείται σε τέτοιου είδους προβλήματα είναι μικρά μεγέθη δειγμάτων αρκετά συχνά (ιδιαίτερα σε περιπτώσεις μαζικής παραγωγής προϊόντων ή όταν εμφανίζονται συχνά ειδικές αιτίες μεταβλητότητας) παρά μεγάλα μεγέθη δειγμάτων λιγότερο συχνά.

- **Μέσο μήκος ροής (Average run length, ARL)**

Μια άλλη έννοια που σχετίζεται με τα διαγράμματα ελέγχου είναι το μέσο μήκος ροής του διαγράμματος που ορίζεται με τη σχέση

$$ARL = 1/p$$

όπου p συμβολίζει την πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος ελέγχου εκτός των ορίων ελέγχου.

Είναι προφανές ότι η ποσότητα ARL δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό των διαδοχικών σημείων (δειγμάτων) που πρέπει να σχεδιαστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου για να εμφανιστεί ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου, αφού το μήκος ροής ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή $G(p)$.

Για μια διεργασία που βρίσκεται εντός ελέγχου και στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε 3σ όρια ελέγχου και η κατανομή της W είναι κανονική, έχουμε ότι το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ARL_0 είναι ίσο με

$$ARL_0 = \frac{1}{0,0027} = 370$$

Προφανώς στην πράξη θέλουμε να έχουμε μεγάλο ARL_0 .

Για μια διεργασία που βρίσκεται εκτός ελέγχου λόγω μετατόπισης του μέσου επιπέδου της διεργασίας από μ σε μ^* το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής ARL_1 είναι ίσο με

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - b}$$

αφού η πιθανότητα να βρεθεί σε αυτή την περίπτωση ένα σημείο του διαγράμματος ελέγχου εντός των ορίων ελέγχου είναι ίσο με β , οπότε βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου με πιθανότητα $1-\beta$. Προφανώς στην πράξη θέλουμε να έχουμε μικρό ARL_1 αφού το ARL_1 δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό δειγμάτων που πρέπει να ληφθούν για να εντοπιστεί η αλλαγή στο μέσο επίπεδο της διεργασίας από τη στιγμή που αυτή η μετατόπιση συνέβη.

Η χρήση του ARL ως μέτρου για την περιγραφή της απόδοσης μιας διεργασίας έχει υποστεί αρκετή κριτική τα τελευταία χρόνια γιατί το ARL που παρατηρείται στην πράξη διαφέρει συνήθως αρκετά από το “θεωρητικό” ARL (είτε είναι αρκετά μεγαλύτερο είτε είναι αρκετά μικρότερο) αφού η κατανομή του μήκους ροής είναι πολύ ασυμμετρική ($G(p)$) και συνεπώς η μέση τιμή δεν μπορεί να θεωρηθεί ως αντιπροσωπευτικό μέτρο κεντρικής τάσης της κατανομής (ιδιαίτερα για μικρές τιμές του p).

1.4 Διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart

Έχουμε αναφέρει στην Παράγραφο 1.3 ότι για να παρακολουθήσουμε τη συμπεριφορά μιας κρίσιμης ποσότητας ενός χαρακτηριστικού στα διάφορα προϊόντα που παράγονται

βασιζόμαστε σε μετρήσεις του χαρακτηριστικού X (τυχαία μεταβλητή) του προϊόντος. Έτσι από την παραγωγή επιλέγουμε τυχαία δείγματα του προϊόντος (όχι απαραίτητα μεγέθους $n > 1$) στα οποία αντιστοιχούν τυχαία δείγματα τιμών της τυχαίας μεταβλητής X , έστω τα X_1, X_2, \dots . Χρησιμοποιώντας τα δείγματα υπολογίζουμε την τιμή $W_i = g(X_i)$, $i=1, 2, \dots$, μιας στατιστικής συνάρτησης (τυχαίας μεταβλητής) που εκτιμά (συνήθως αμερόληπτη εκτιμήτρια) την κρίσιμη ποσότητα που μας ενδιαφέρει (π.χ. μέση τιμή, ποσοστό ελαττωματικών προϊόντων, αριθμό ελαττωμάτων κτλ.). Με ένα διάγραμμα τύπου Shewhart παρακολουθούμε τη συμπεριφορά της κρίσιμης ποσότητας απεικονίζοντας σε αυτό τις διαδοχικές τιμές τις W (W_1, W_2, \dots) όπως προκύπτουν από κάθε δείγμα, ελέγχοντας αν κάποια από αυτές τις τιμές βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου του διαγράμματος. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει ένδειξη ότι η συμπεριφορά της κρίσιμης ποσότητας έχει αλλάξει και συνεπώς η παραγωγική διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Όσο οι τιμές (σημεία) που απεικονίζονται στο διάγραμμα είναι εντός των ορίων ελέγχου του διαγράμματος και δεν παρατηρούμε κάποια μη τυχαία συμπεριφορά των σημείων του διαγράμματος τότε υποθέτουμε ότι η παραγωγική διεργασία είναι εντός ελέγχου (δηλαδή λειτουργεί κάτω από συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας).

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν δύο φάσεις για τον έλεγχο μιας παραγωγικής διεργασίας με τη χρήση διαγραμμάτων ελέγχου, η Φάση *I* και η Φάση *II*.

Φάση *I* : Σε αυτή τη φάση τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται αναδρομικά για να ελέγξουν αν η διεργασία ήταν εντός ή εκτός ελέγχου εξετάζοντας δείγματα που συλλέχθηκαν σε παρελθόντα χρόνο. Σε αυτή τη φάση τα διαγράμματα ελέγχου βοηθούν τον διαχειριστή της διαδικασίας να φέρει τη διεργασία εντός στατιστικού ελέγχου. Όταν αυτό επιτευχθεί τα διαγράμματα ελέγχου που προκύπτουν (κεντρική γραμμή και όρια ελέγχου) είναι κατάλληλα για την παρακολούθηση της μελλοντικής συμπεριφοράς της διεργασίας. Αυτή η χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου αναφέρεται και ως αναδρομική χρήση. Γενικά πολύ περισσότερες δράσεις και σκέψεις εξελίσσονται κατά τη διάρκεια αυτής της φάσης πλην της απλής διαγραμματοποίησης κάποιων δεδομένων. Ο διαχειριστής της διαδικασίας μελετά σε βάθος τη διεργασία και αυτό γιατί δεν είναι εύκολο να αποφασίσει αν η διεργασία ήταν εντός ή εκτός στατιστικού ελέγχου κατά τη χρονική περίοδο που τα δεδομένα συλλέχθηκαν.

Φάση *II* : Σε αυτή τη φάση τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται προκειμένου να ελέγξουμε συνεχώς αν η διαδικασία παραμένει εντός ελέγχου. Στη φάση αυτή ο διαχειριστής έχει στα χέρια του ένα πολύτιμο εργαλείο μέσω του οποίου είναι δυνατόν να παρακολουθεί συνεχώς την παραγωγική διεργασία και να ανιχνεύει εγκαίρως μια πιθανή αλλαγή στο μέσο

επίπεδο των χαρακτηριστικών που καθορίζουν την ποιότητα του παραγόμενου προϊόντος. Δηλαδή σε κάθε χρονική περίοδο που ένα δείγμα λαμβάνεται από τη διεργασία ο διαχειριστής παίρνει μια απάντηση στο ερώτημα “παραμένει η διεργασία εντός ελέγχου;”. Σε αυτή την φάση ο διαχειριστής αδιαφορεί για τον τρόπο με τον οποίο το μέσο επίπεδο της διεργασίας είχε εκτιμηθεί, ή αν αυτό ήταν εκ των προτέρων γνωστό.

1.5 Διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart για διακριτά χαρακτηριστικά

Σε αρκετές περιπτώσεις ταξινομούμε ένα προϊόν σαν ελαττωματικό ή μη συμμορφούμενο αν τουλάχιστον ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό του έχει τιμή η οποία βρίσκεται εκτός των ορίων προδιαγραφών. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το προϊόν παρουσιάζει τουλάχιστον ένα ελάττωμα ή ατέλεια

Ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων μιας παραγωγικής διεργασίας, όπως και ο αριθμός των ελαττωμάτων ενός προϊόντος είναι ποιοτικά χαρακτηριστικά που περιγράφονται με διακριτές τυχαίες μεταβλητές οι οποίες στα πλαίσια του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας ονομάζονται ιδιότητες .

Επί του παρόντος θα παρουσιάσουμε τρία βασικά είδη διαγραμμάτων ελέγχου που χρησιμοποιούνται σε αυτές τις περιπτώσεις. Το πρώτο διάγραμμα αφορά το ποσοστό p των ελαττωματικών προϊόντων μιας παραγωγικής διεργασίας γνωστό ως p διάγραμμα. Το δεύτερο διάγραμμα ελέγχου αφορά το συνολικό αριθμό των ελαττωμάτων σε μια μονάδα ελέγχου γνωστό ως c διάγραμμα. Το τρίτο διάγραμμα ελέγχου αφορά το μέσο αριθμό των ελαττωμάτων ανά μονάδα ελέγχου γνωστό ως u διάγραμμα.

Ο όρος μονάδα ελέγχου δεν σημαίνει απαραίτητα ένα προϊόν. Η μονάδα ελέγχου ή απλά μονάδα μπορεί να είναι το ίδιο το προϊόν (π.χ. ένα τόπι ύφασμα), είτε τμήμα του προϊόντος (π.χ. 2 τρέχοντα μέτρα από το τόπι), είτε ένα σύνολο προϊόντων (π.χ. 10 τόπια ύφασμα). Επίσης τα ελαττώματα που παρουσιάζει μια μονάδα ελέγχου δεν είναι αναγκαστικά του ίδιου τύπου(π.χ. σε ένα H/Y ελάττωμα μπορεί να χαρακτηριστεί η απουσία κάποιων εξαρτημάτων, αστοχίες συγκολλήσεων, ελαττωματική RAM, απουσία αυτοκόλλητου του σειριακού αριθμού, κτλ.).

1.6 Διαγράμματα ελέγχου για το ποσοστό και τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων

Στην παρούσα παράγραφο θα αναπτύξουμε την κατασκευή διαγράμματος τύπου Shewhart για την παρακολούθηση της συμπεριφοράς του ποσοστού p των ελαττωματικών ή μη συμμορφούμενων προϊόντων μιας παραγωγικής διεργασίας. Με τον όρο ποσοστό ελαττωματικών προϊόντων ορίζουμε το πηλίκο του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων δια του συνολικού αριθμού των παραγόμενων προϊόντων.

Επίσης θα αναπτύξουμε την κατασκευή διαγράμματος τύπου Shewhart για την παρακολούθηση της συμπεριφοράς του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων μιας παραγωγικής διεργασίας.

1.6.1 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης II (p γνωστό)

Η κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου για το ποσοστό p των ελαττωματικών προϊόντων μιας διεργασίας βασίζεται στη Διωνυμική κατανομή. Ας υποθέσουμε ότι το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων είναι γνωστό και ίσο με p και ότι από την παραγωγή επιλέγουμε ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους n προϊόντων το καθένα. Ας συμβολίσουμε με X_{ij} , $i \geq j$, $1 \leq j \leq n$, την τυχαία μεταβλητή με τιμές 1 και 0 ανάλογα με το αν το αντίστοιχο προϊόν (i,j) είναι ελαττωματικό ή όχι. Για την τυχαία μεταβλητή X_{ij} έχουμε ότι $X_{ij} \sim B(1,p)$, ενώ για την τυχαία μεταβλητή $X_i = X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}$ που δηλώνει τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων στο i δείγμα έχουμε ότι $X_i \sim B(n,p)$.

Αν $X \sim B(n,p)$ είναι γνωστό ότι

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} I_A(x), A = \{0,1,\dots,n\}$$

και $m_x = np$, $s_x^2 = np(1-p)$

Για την τυχαία μεταβλητή

$$W_i = p_i = \frac{X_i}{n}, i \geq 1$$

που δηλώνει το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων στο i δείγμα ισχύει ότι

$$m_{w_i} = p, \quad s_{w_i}^2 = \frac{p(1-p)}{n}, \quad i \leq 1$$

Επομένως μπορούμε να αναπτύξουμε ένα διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων στο οποίο θα απεικονίζεται η τιμή της $W_i = p_i = \frac{X_i}{n}$ στα διάφορα δείγματα που επιλέγουμε από την παραγωγή. Τα όρια του διαγράμματος ελέγχου συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-1

p διάγραμμα ελέγχου

Phase II control limits (3σ)
$UCL = p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
$Center\ Line = p$
$LCL = p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

Η κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου για την παρακολούθηση του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της τυχαίας μεταβλητής X_i . Στο διάγραμμα ελέγχου θα απεικονίζεται η τιμή της $X_i (=W_i)$ στα διάφορα δείγματα που επιλέγουμε από την παραγωγή, και τα όρια του διαγράμματος ελέγχου δίνονται στον ακόλουθο πίνακα

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-2

np διάγραμμα ελέγχου

Phase II control limits (3σ)
$UCL = np + 3\sqrt{np(1-p)}$
$Center\ Line = np$
$LCL = np - 3\sqrt{np(1-p)}$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι στην πράξη αρκεί να κατασκευάσουμε ένα από τα δύο παραπάνω διαγράμματα αφού είναι “ισοδύναμα” .

1.6.2 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I (p άγνωστο)

Όταν το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων της διεργασίας είναι άγνωστο πρέπει να εκτιμηθεί από τις πληροφορίες που θα μας δώσουν m ανεξάρτητα προκαταρκτικά δείγματα μεγέθους n το καθένα, έστω τα $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $1 \leq i \leq m$. Θέτοντας

$$p_i = \frac{X_i}{n} = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}}{n}, \quad 1 \leq i \leq m$$

$$\bar{P} = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_m}{m} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{mn} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}}{mn}$$

έχουμε ότι $E(\bar{P}) = p$ αφού $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} \sim B(nm, p)$. Η ποσότητα \bar{P} χρησιμοποιείται ως

εκτίμηση της ποσότητας p , δηλαδή $\hat{p} = \bar{P}$

Συνεπώς ο Πίνακας 1-1 παίρνει τη μορφή

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-3

p διάγραμμα ελέγχου

Phase I control limits (3σ)
$UCL = \bar{P} + 3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}$
$Center\ Line = \bar{P}$
$LCL = \bar{P} - 3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}$

ενώ ο Πίνακας 1-2 παίρνει τη μορφή

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-4

np διάγραμμα ελέγχου

Phase I control limits (3σ)
$UCL = n\bar{P} + 3\sqrt{n\bar{P}(1-\bar{P})}$
$Center\ Line = n\bar{P}$
$LCL = n\bar{P} - 3\sqrt{n\bar{P}(1-\bar{P})}$

1.6.3 Διαγράμματα ελέγχου p και np : Εφαρμογή

Από την παραγωγή μιας βιομηχανίας συσκευασίας ζάχαρης επιλέχθηκαν από την παραγωγή μιας συγκεκριμένης μηχανής ανά μισή ώρα $m = 94$ δείγματα μεγέθους $n = 50$ συσκευασιών το καθένα και καταγράφηκε ο αριθμός των ελαττωματικών συσκευασιών σε κάθε δείγμα (ελαττωματική συσκευασία στο παρών παράδειγμα σημαίνει ότι η συσκευασία δεν έχει καλές ραφές και επομένως υπάρχει διαρροή ζάχαρης). Τα αποτελέσματα της επιθεώρησης των δειγμάτων παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-5

Αριθμός ελαττωματικών συσκευασιών σε 94 δείγματα μεγέθους 50.

Δείγμα	X_i	p_i	Δείγμα	X_i	p_i	Δείγμα	X_i	p_i
1	12	0,24	33	12	0,24	65	6	0,12
2	15	0,3	34	5	0,1	66	5	0,1
3	8	0,16	35	6	0,12	67	5	0,1
4	10	0,2	36	4	0,08	68	3	0,06
5	4	0,08	37	6	0,12	69	7	0,14
6	7	0,14	38	3	0,06	70	9	0,18
7	16	0,32	39	7	0,14	71	6	0,12
8	9	0,18	40	6	0,12	72	10	0,2
9	14	0,28	41	2	0,04	73	4	0,08
10	10	0,2	42	4	0,08	74	3	0,06
11	5	0,1	43	3	0,06	75	5	0,1
12	6	0,12	44	6	0,12	76	8	0,16
13	17	0,34	45	5	0,1	77	11	0,22
14	12	0,24	46	4	0,08	78	9	0,18
15	22	0,44	47	8	0,16	79	7	0,14
16	8	0,16	48	5	0,1	80	3	0,06
17	10	0,2	49	6	0,12	81	5	0,1
18	5	0,1	50	7	0,14	82	2	0,04

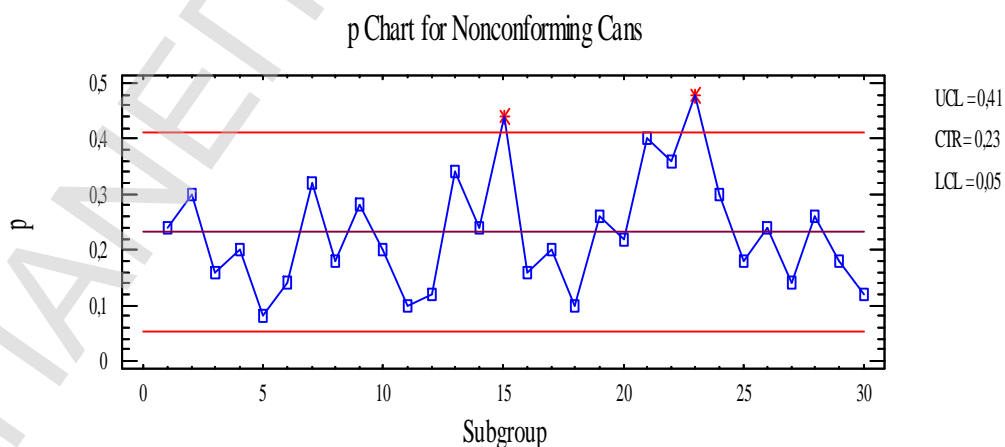
19	13	0,26	51	5	0,1	83	1	0,02
20	11	0,22	52	6	0,12	84	4	0,08
21	20	0,4	53	3	0,06	85	5	0,1
22	18	0,36	54	5	0,1	86	3	0,06
23	24	0,48	55	8	0,16	87	7	0,14
24	15	0,3	56	7	0,14	88	6	0,12
25	9	0,18	57	5	0,1	89	4	0,08
26	12	0,24	58	6	0,12	90	4	0,08
27	7	0,14	59	4	0,08	91	6	0,12
28	13	0,26	60	5	0,1	92	8	0,16
29	9	0,18	61	2	0,04	93	5	0,1
30	6	0,12	62	3	0,06	94	6	0,12
31	9	0,18	63	4	0,08			
32	6	0,12	64	7	0,14			

Θα χρησιμοποιήσουμε τα πρώτα 30 δείγματα για να προβούμε στην κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου Φάσης I για το ποσοστό των ελαττωματικών συσκευασιών. Από τα στοιχεία του Πίνακα 1-5 και χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 1-3 προκύπτουν τα ακόλουθα δοκιμαστικά όρια του διαγράμματος ελέγχου

$$CL = \bar{P} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{nm} = \frac{347}{50 \times 30} = 0,2313$$

$$UCL = \bar{P} + 3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}} = 0,4102$$

$$LCL = \bar{P} - 3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}} = 0,0524$$



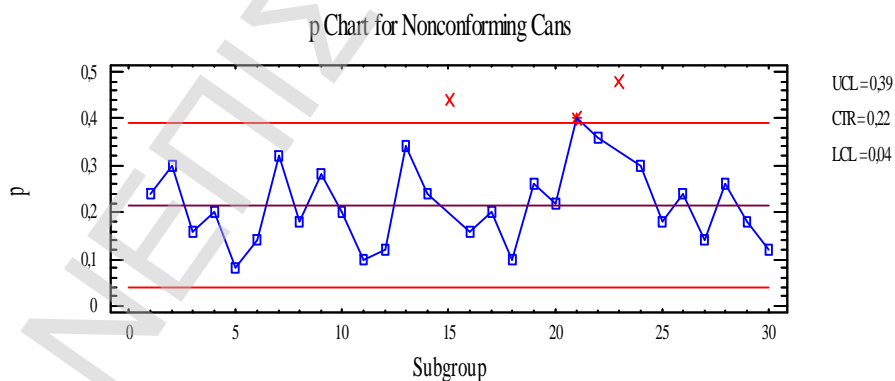
Σχήμα 1-2. p διάγραμμα ελέγχου των ελαττωματικών συσκευασιών.

Παρατηρούμε ότι τα σημεία του διαγράμματος που αντιστοιχούν στα δείγματα 15 και 23 είναι εκτός των ορίων ελέγχου, οπότε πρέπει να ελέγξουμε την ύπαρξη ειδικών αιτιών μεταβλητότητας που μπορεί να ευθύνονται για αυτό το αποτέλεσμα. Ας υποθέσουμε ότι και στα δύο σημεία ανακαλύφθηκαν ειδικές αιτίες μεταβλητότητας (π.χ. άπειροι εργάτες χειρίστηκαν προσωρινά το μηχάνημα) οπότε τα δοκιμαστικά όρια ελέγχου θα πρέπει να αλλάξουν χρησιμοποιώντας πλέον πληροφορίες από τα εναπομείναντα δείγματα. Έτσι προκύπτει ότι

$$CL = \bar{P} = \frac{\sum_{i=1}^{30} X_i - X_{15} - X_{23}}{m \cdot n} = \frac{301}{28 \times 50} = 0,2150$$

$$UCL = \bar{P} + 3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}} = 0,3893$$

$$LCL = \bar{P} - 3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}} = 0,0407$$

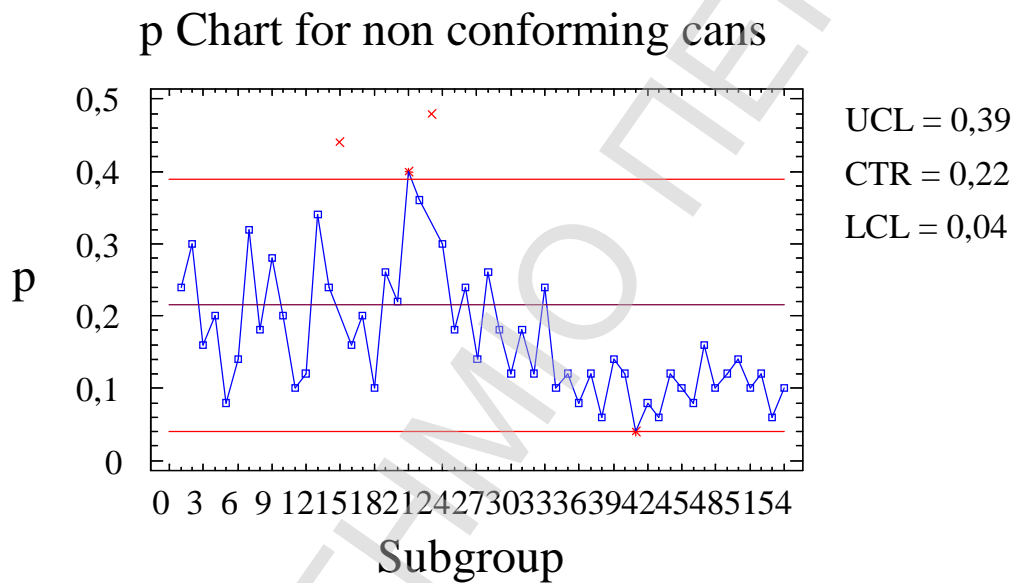


Σχήμα 1-3. Τροποποιημένο p διάγραμμα ελέγχου.

Στο νέο διάγραμμα ελέγχου το σημείο που αντιστοιχεί στο δείγμα 21 έχει βρεθεί εκτός ορίων ελέγχου. Ας υποθέσουμε ότι σχετική έρευνα έδειξε ότι δεν υπήρχαν ειδικές αιτίες

μεταβλητότητας οπότε αποφασίζουμε να κρατήσουμε το σημείο και να μην διορθώσουμε τα παραπάνω όρια ελέγχου.

Με τα στοιχεία που προέκυψαν από τα 30 πρώτα δείγματα, αν και η διεργασία είναι εντός ελέγχου, κρίθηκε απαράδεκτη η λειτουργία της μηχανής (μέσο επίπεδο διεργασίας $\hat{p}=0,2150$). Έτσι έγιναν ρυθμίσεις στη μηχανή και στη συνέχεια επιλέχθηκαν 24 επιπλέον δείγματα. Το διάγραμμα ελέγχου με τα πρώτα 54 δείγματα πήρε την ακόλουθη μορφή



Σχήμα 1-4. *p* διάγραμμα ελέγχου για τα πρώτα 54 δείγματα.

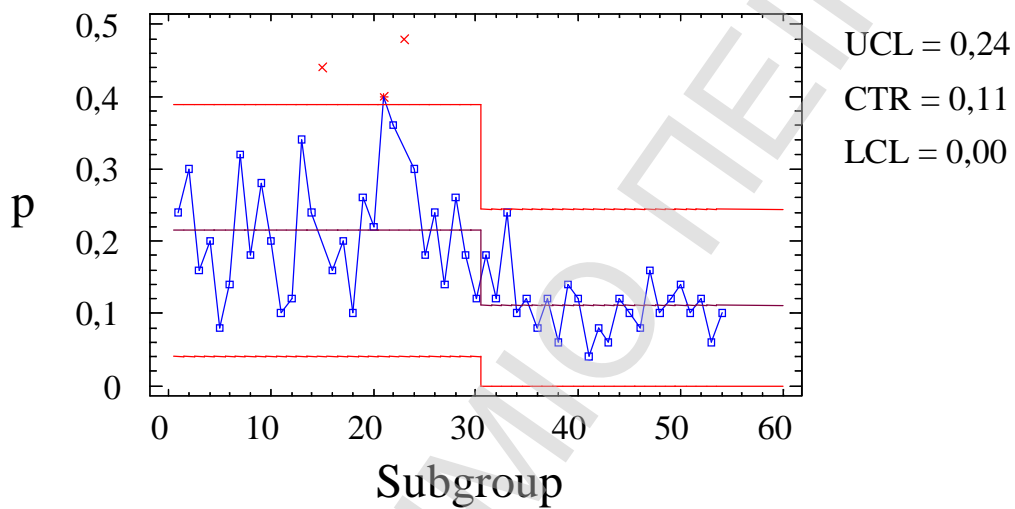
Το παραπάνω διάγραμμα παρέχει ενδείξεις ότι η διεργασία λειτουργεί σε ένα χαμηλότερο μέσο επίπεδο. Σε τέτοιες περιπτώσεις φαίνεται λογικό να διορθώσουμε τα όρια ελέγχου. Έτσι χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες από τα τελευταία 24 δείγματα (μετά τη ρύθμιση της μηχανής) προχωρούμε στην εύρεση νέων ορίων ελέγχου Φάσης *I* που είναι τα ακόλουθα

$$CL = \bar{P} = \frac{X_{31} + X_{32} + \dots + X_{54}}{m \cdot n} = \frac{133}{24 \times 50} = 0,1108$$

$$UCL = \bar{P} + 3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}} = 0,2440$$

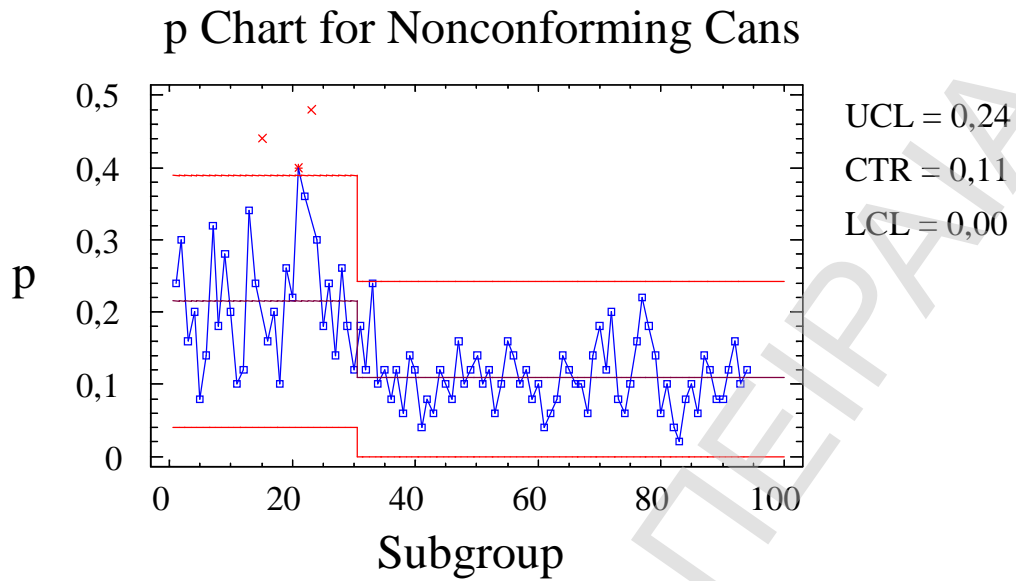
$$LCL = \bar{P} - 3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}} = -0,02236 \equiv 0,000$$

p Chart for Nonconforming Cans



Σχήμα 1-5. Τροποποιημένο p διάγραμμα ελέγχου για τα πρώτα 54 δείγματα.

Από το παραπάνω διάγραμμα φαίνεται ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου και φυσικά τα παραπάνω όρια ελέγχου θα χρησιμοποιηθούν για το διάγραμμα ελέγχου Φάσης II. Στο ακόλουθο διάγραμμα ελέγχου έχουν απεικονιστεί τα σημεία που αντιστοιχούν και στα 94 δείγματα



Σχήμα 1-6. *p* διάγραμμα ελέγχου για τα 94 δείγματα.

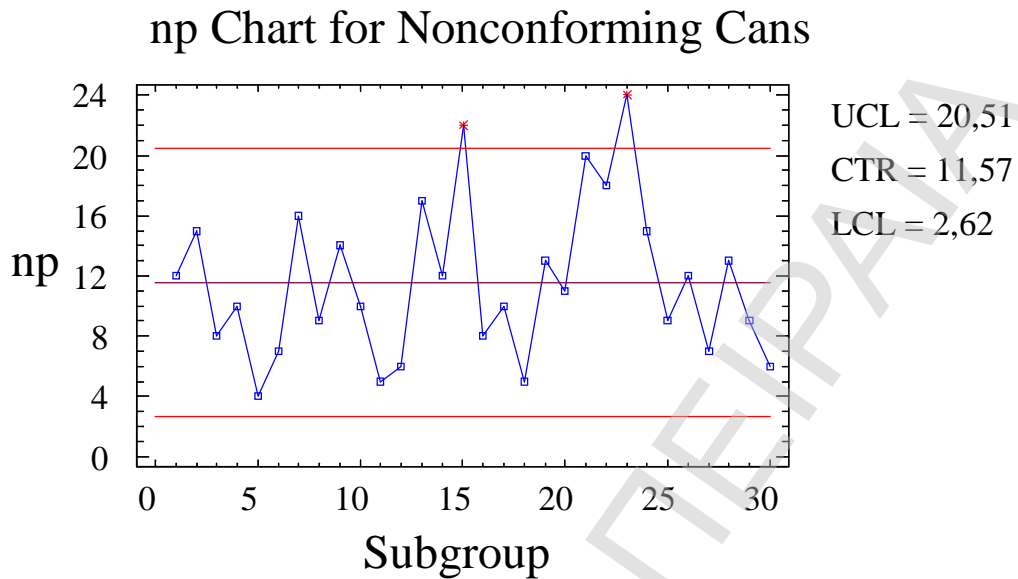
Αν και η διεργασία είναι εντός ελέγχου δεν θεωρούμε ότι το μέσο επίπεδο της διεργασίας είναι ικανοποιητικό ($\hat{p} = 0.1108$) και συνεπώς θα πρέπει να γίνουν επιπρόσθετες δράσεις για τη βελτίωση της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων.

Για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου για τον αριθμό των ελαττωματικών συσκευασιών θα χρησιμοποιήσουμε αρχικά τα πρώτα 30 δείγματα για να προβούμε στην κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου για τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων Φάσης I. Από τα στοιχεία του Πίνακα 1-5 και χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 1-4 προκύπτουν τα ακόλουθα δοκιμαστικά όρια του διαγράμματος ελέγχου

$$CL = n\hat{P} = 50 \times 0,2313 = 11,5667$$

$$UCL = n\hat{P} + 3\sqrt{n\hat{P}(1-\hat{P})} = 50 \times 0,4102 = 20,5120$$

$$LCL = n\hat{P} - 3\sqrt{n\hat{P}(1-\hat{P})} = 50 \times 0,0524 = 2,6214$$



Σχήμα 1-7. *p* διάγραμμα ελέγχου των ελαττωματικών συσκευασιών.

Το παραπάνω διάγραμμα ελέγχου για τον αριθμό των ελαττωματικών συσκευασιών είναι “όμοιο” με το αντίστοιχο διάγραμμα ελέγχου για το ποσοστό των ελαττωματικών συσκευασιών αφού τα όριά του έχουν προκύψει από τα αντίστοιχα όρια του *p* διαγράμματος πολλαπλασιασμένα με τον αριθμό $n = 50$. Συνεπώς η ανάλυση είναι ίδια με αυτή του *p* διαγράμματος ελέγχου.

1.7 Διαγράμματα Ελέγχου για τον Αριθμό και το Μέσο Αριθμό των Ελαττωμάτων

Στην παρούσα παράγραφο θα αναπτύξουμε την κατασκευή διαγράμματος τύπου Shewhart για τον (συνολικό) αριθμό των ελαττωμάτων σε μια μονάδα ελέγχου και για το μέσο αριθμό των ελαττωμάτων ανά μονάδα ελέγχου. Η βασική υπόθεση που θα κάνουμε είναι ότι ο (συνολικός) αριθμός των ελαττωμάτων σε μια μονάδα ελέγχου ακολουθεί την κατανομή *Poisson*. Σύμφωνα με αυτή την υπόθεση θα πρέπει η πιθανότητα εμφάνισης ελαττώματος σε οποιοδήποτε σημείο μιας μονάδας να είναι μικρή και σταθερή και φυσικά ο αριθμός των ελαττωμάτων είναι θεωρητικά μη πεπερασμένος αριθμός. Επιπλέον απαιτείται οι μονάδες ελέγχου στα δείγματα να είναι ίδιες.

1.7.1 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης II (c γνωστό)

Ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός X των ελαττωμάτων που εμφανίζονται σε μια μονάδα ελέγχου ακολουθεί την κατανομή *Poisson* με παράμετρο c δηλαδή

$$P(X=x) = e^{-c} \frac{c^x}{x!} I_A(x), A = \{0,1,\dots\}.$$

Είναι γνωστό ότι $m_x = s_x^2 = c$. Συνεπώς μπορούμε να αναπτύξουμε ένα διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του αριθμού των ελαττωμάτων των μονάδων ελέγχου στο οποίο θα απεικονίζεται η τιμή της $W_i = X_i$ στις διάφορες μονάδες ελέγχου που επιλέγουμε από την παραγωγή. Τα όρια του διαγράμματος ελέγχου συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-6

c διάγραμμα ελέγχου

Phase II control limits (3σ)
$UCL = c + 3\sqrt{c}$
Center Line = c
$LCL = c - 3\sqrt{c}$

Έστω τώρα ότι από την παραγωγή επιλέγουμε ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους n μονάδων το καθένα. Ας συμβολίσουμε με X_{ij} , $i \geq 1$, $1 \leq j \leq n$, την τυχαία μεταβλητή που δηλώνει τον αριθμό των ελαττωμάτων της αντίστοιχης μονάδος ελέγχου (i,j) . Για την τυχαία μεταβλητή X_{ij} έχουμε ότι $X_{ij} \sim P(c)$, ενώ για την τυχαία μεταβλητή $X_i = X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}$ που δηλώνει το συνολικό αριθμό των ελαττωμάτων στο i δείγμα έχουμε ότι $X_i \sim P(nc)$.

Για την τυχαία μεταβλητή $U_i = X_i/n$ που δηλώνει το μέσο αριθμό των ελαττωμάτων ανά μονάδα ελέγχου στο i δείγμα έχουμε ότι

$$m_{U_i} = c, s_{U_i}^2 = \frac{c}{n}, i \geq 1$$

Συνεπώς μπορούμε να αναπτύξουμε ένα διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του μέσου αριθμού των ελαττωμάτων ανά μονάδα ελέγχου σε κάθε δείγμα στο οποίο θα απεικονίζεται η τιμή της $U_i = \frac{X_i}{n}$ στα διάφορα δείγματα που επιλέγουμε από την παραγωγή.

Τα όρια του διαγράμματος ελέγχου συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-7

ο διάγραμμα ελέγχου

Phase II control limits (3σ)
$UCL = c + 3\sqrt{\frac{c}{n}}$
Center Line = c
$LCL = c - 3\sqrt{\frac{c}{n}}$

Στους Πίνακες 1-6 και 1-7, αν το LCL είναι αρνητικό το θέτουμε ίσο με 0. Βέβαια στον Πίνακα 1-7 αυτό μπορεί να αποφευχθεί αυξάνοντας το μέγεθος του δείγματος.

1.7.2 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I (c άγνωστο)

Σχετικά με το c διάγραμμα όταν η παράμετρος c της κατανομής *Poisson* είναι άγνωστη πρέπει να εκτιμηθεί από τις πληροφορίες που θα μας δώσουν m προκαταρκτικές μονάδες ελέγχου. Ας συμβολίσουμε με X_i τον αριθμό των ελαττωμάτων της i μονάδος ελέγχου, $1 \leq i \leq m$. Θέτοντας

$$\bar{C} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{m}, \quad 1 \leq i \leq m$$

Έχουμε ότι $E(\bar{C}) = c$. Η ποσότητα \bar{C} χρησιμοποιείται ως εκτίμηση της ποσότητας c , δηλαδή

$$\hat{c} = \bar{C}$$

Συνεπώς ο Πίνακας 1-6 παίρνει τη μορφή

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-8

c διάγραμμα ελέγχου

Phase I control limits (3σ)
$UCL = \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}}$
Center Line = \bar{C}
$LCL = \bar{C} - 3\sqrt{\bar{C}}$

Στην περίπτωση του *u* διαγράμματος η παράμετρος *c* της κατανομής *Poisson* θα εκτιμηθεί από τις πληροφορίες που θα μας δώσουν *m* ανεξάρτητα προκαταρκτικά δείγματα μεγέθους *n* μονάδων ελέγχου το καθένα, έστω τα $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $1 \leq i \leq m$. Θέτοντας

$$U_i = \frac{X_i}{n} = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}}{n}, 1 \leq i \leq m$$

και

$$\bar{U} = \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_m}{m} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{m} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}}{mn}$$

έχουμε ότι $E(\bar{U}) = c$ αφού $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} \sim P(mnc)$. Η ποσότητα \bar{U} χρησιμοποιείται ως

εκτίμηση της ποσότητας *c*, δηλαδή $\hat{c} = \bar{C}$. Συνεπώς ο Πίνακας 1-7 παίρνει τη μορφή

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-9

u διάγραμμα ελέγχου

Phase I control limits (3σ)
$UCL = \bar{U} + 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n}}$
Center Line = \bar{U}
$LCL = \bar{U} - 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n}}$

1.7.3 Διάγραμμα ελέγχου c : Εφαρμογή

Στον ακόλουθο πίνακα δίνεται ο αριθμός των ελαττωμάτων σε ένα τυχαίο δείγμα 46 μονάδων ελέγχου από μια βιομηχανία παραγωγής τυπωμένων κυκλωμάτων (η μονάδα ελέγχου αποτελείται από 100 τυπωμένα κυκλώματα).

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-10

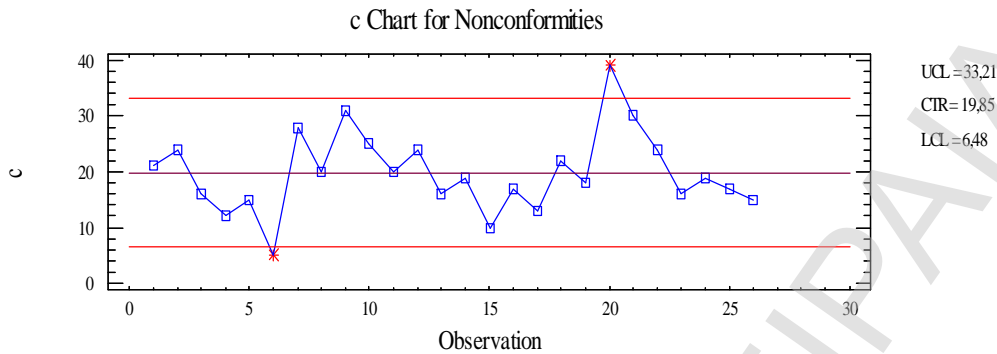
Αριθμός ελαττωμάτων σε τυχαίο δείγμα 46 μονάδων.

Μονάδα ελέγχου	X_i	Μονάδα ελέγχου	X_i	Μονάδα ελέγχου	X_i	Μονάδα ελέγχου	X_i
1	21	13	16	25	17	37	18
2	24	14	19	26	15	38	21
3	16	15	10	27	16	39	16
4	12	16	17	28	18	40	22
5	15	17	13	29	12	41	19
6	5	18	22	30	15	42	12
7	28	19	18	31	24	43	14
8	20	20	39	32	21	44	9
9	31	21	30	33	28	45	16
10	25	22	24	34	20	46	21
11	20	23	16	35	25		
12	24	24	19	36	19		

Θα χρησιμοποιήσουμε τις πρώτες 26 μονάδες ελέγχου για να προβούμε στην κατασκευή ενός c διαγράμματος Φάσης I . Σύμφωνα με τον Πίνακα 1-8 έχουμε ότι

$$CL = \bar{C} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{26}}{26} = \frac{516}{26} = 19,8462$$

$$UCL = \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}} = 33,2109, \quad LCL = \bar{C} - 3\sqrt{\bar{C}} = 6,4814$$

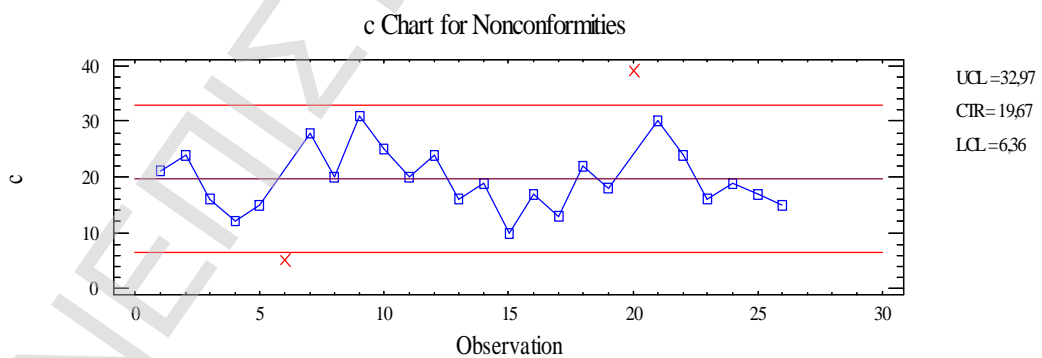


Σχήμα 1-8. *c* διάγραμμα ελέγχου για τις 26 πρώτες μονάδες.

Παρατηρούμε ότι τα σημεία του διαγράμματος που αντιστοιχούν στις μονάδες ελέγχου 6 και 20 είναι εκτός ορίων ελέγχου. Ας υποθέσουμε ότι και στα δύο σημεία ανακαλύφθηκαν ειδικές αιτίες μεταβλητότητας (π.χ. λάθος καταμέτρηση των ελαττωμάτων) οπότε τα δοκιμαστικά όρια ελέγχου θα πρέπει να αλλάξουν χρησιμοποιώντας πλέον πληροφορίες από τις υπόλοιπες 24 μονάδες ελέγχου. Έτσι προκύπτει ότι

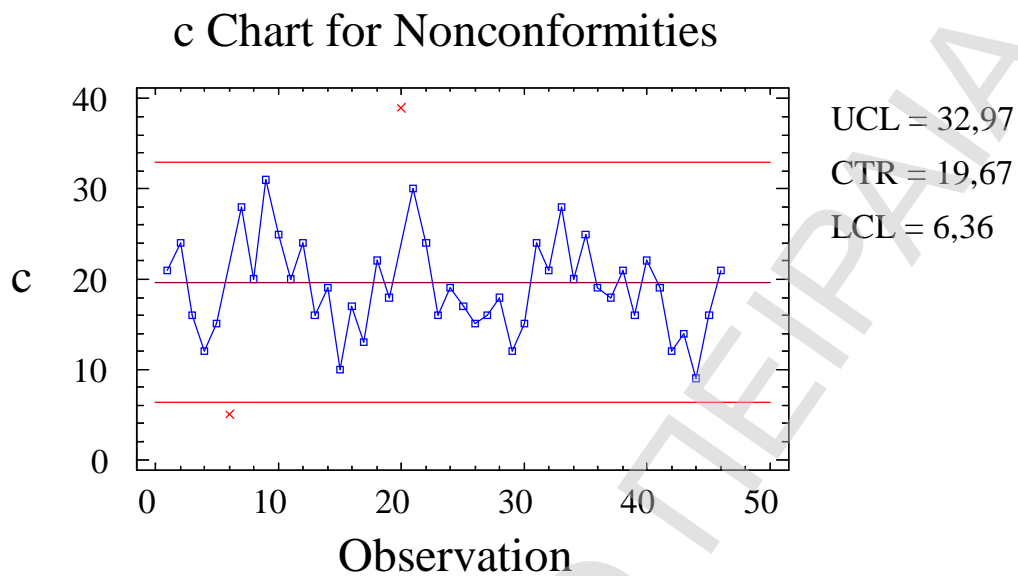
$$CL = \bar{C} = \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_{26}) - X_6 - X_{20}}{24} = \frac{472}{24} = 19,6667$$

$$UCL = \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}} = 32,9708 \quad LCL = \bar{C} - 3\sqrt{\bar{C}} = 6,3625$$



Σχήμα 1-9. *c* διάγραμμα ελέγχου χωρίς τις μονάδες 6 και 20.

Στο νέο διάγραμμα ελέγχου όλα τα σημεία είναι εντός των ορίων ελέγχου οπότε τα παραπάνω όρια μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως όρια ελέγχου Φάσης II. Το ακόλουθο διάγραμμα δείχνει την εξέλιξη του αριθμού των ελαττωμάτων από το οποίο προκύπτει ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου



Σχήμα 1-10. *c* διάγραμμα ελέγχου για τις 44 μονάδες.

1.7.4 Διάγραμμα ελέγχου *u* : Εφαρμογή

Στον ακόλουθο πίνακα δίνεται ο αριθμός των ελαττωμάτων σε $m = 20$ τυχαία δείγματα που το καθένα αποτελείται από $n = 5$ μονάδες ελέγχου από μια βιομηχανία παραγωγής H/Y (η μονάδα ελέγχου είναι ένας H/Y).

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-11

Αριθμός ελαττωμάτων σε 20 δείγματα των 5 μονάδων.

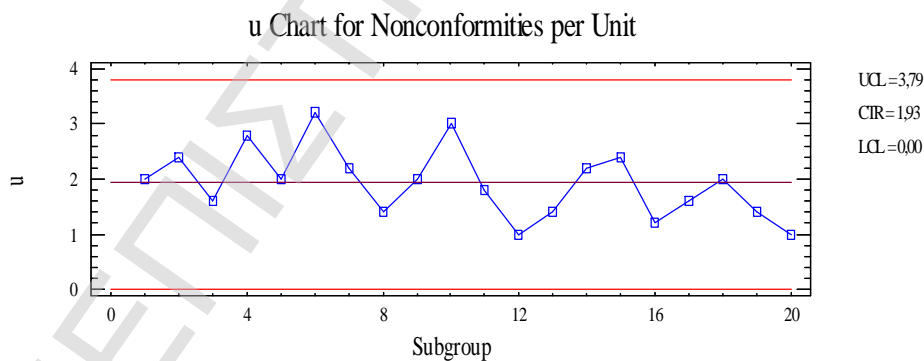
Δείγμα	Μέγεθος Δείγματος (n)	Συνολικός αριθμός ελαττωμάτων(X_i)	Μέσος αριθμός ελαττωμάτων (U_i)
1	5	10	2.0
2	5	12	2.4
3	5	8	1.6
4	5	14	2.8
5	5	10	2.0
6	5	16	3.2
7	5	11	2.2
8	5	7	1.4
9	5	10	2.0

10	5	15	3.0
11	5	9	1.8
12	5	5	1.0
13	5	7	1.4
14	5	11	2.2
15	5	12	2.4
16	5	6	1.2
17	5	8	1.6
18	5	10	2.0
19	5	7	1.4
20	5	5	1.0

Για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου Φάσης I για το μέσο αριθμό των ελαττωμάτων ανά μονάδα ελέγχου σύμφωνα με τον Πίνακα 1-9 έχουμε ότι

$$\bar{U} = \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_{20}}{20} = \frac{38,6}{20} = 1,93$$

$$UCL = \bar{U} + 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n}} = 3,7939, \quad LCL = \bar{U} - 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n}} = 0,0661$$



Σχήμα 1-11. u διάγραμμα ελέγχου των 20 δειγμάτων.

Το u διάγραμμα δηλώνει ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Παρατηρούμε όμως ότι το μέσο επίπεδο της διεργασίας είναι σχετικά υψηλό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Γεωμετρικά Διαγράμματα Ελέγχου

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΑΙΑ

2.1 Εισαγωγή

Τα παραδοσιακά c και u διαγράμματα βασίζονται στην υπόθεση ότι η βασική κατανομή που διέπει τη διαδικασία παραγωγής είναι η κατανομή Poisson. Η υπόθεση αυτή δεν επαληθεύεται συχνά στην πράξη, και συνεπώς πρέπει να αναζητηθούν εναλλακτικά διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση της διεργασίας. Οι Kaminsky, Benneyan, Davis και Burke (1992) έδειξαν ότι αν η διεργασία περιγράφεται καλύτερα από την γεωμετρική κατανομή, τότε στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται τα παραδοσιακά c -διαγράμματα ελέγχου συχνά λαμβάνονται λανθασμένες αποφάσεις.

Έτσι πρότειναν νέα όρια ελέγχου για γεωμετρική κατανομή. Τα όρια ελέγχου βασίζονται στα $\pm 3\sigma$ όρια, υποθέτοντας ότι η κατανομή είναι γεωμετρική. Αν και η χρήση γεωμετρικής κατανομής αποτελεί βελτίωση του παραδοσιακού c -διαγράμματος παρατηρούνται κάποια προβλήματα. Τα ακριβή πιθανοθεωρητικά όρια ελέγχου που παρουσιάζονται στις παρακάτω ενότητες ξεπερνούν κάποια από τα προβλήματα αυτά. Επίσης ο μετασχηματισμός των δεδομένων που ακολουθούν γεωμετρική κατανομή κρίνεται απαραίτητος, αφού η υπόθεση της κανονικότητας των δεδομένων δεν υφίσταται ούτε προσεγγιστικά στην γεωμετρική κατανομή. Μεγιστοποιώντας το μέσο μήκος ροής τα παραπάνω πιθανοθεωρητικά όρια ελέγχου μετατρέπονται σε βέλτιστα όρια ελέγχου. Στη συνέχεια παρουσιάζονται γεωμετρικά διαγράμματα ελέγχου με εκτιμώμενα όρια ελέγχου αφού στην πράξη οι παράμετροι της εντός ελέγχου διεργασίας είναι άγνωστοι ή δεν έχουν εκτιμηθεί επακριβώς. Τέλος παρουσιάζεται ένας στατιστικός σχεδιασμός γεωμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου ο οποίος προκύπτει από την εφαρμογή κάποιων κριτηρίων.

2.2 Διαγράμματα ελέγχου που βασίζονται στη γεωμετρική κατανομή

Υποθέτουμε ότι μια διεργασία παράγει παρατηρήσεις X που ακολουθούν γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p (συμβολισμός $G(p)$), δηλαδή

$$P(X = x) = p(1 - p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Έτσι σε ένα δείγμα μεγέθους n , το άθροισμα $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ παριστάνει το συνολικό άθροισμα των μετρήσεων στο δείγμα και ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή ή κατανομή Pascal, δηλαδή

$$P(Z = z) = \binom{n+z-1}{n-1} p^n (1-p)^z, \quad z=0,1,2,\dots$$

Η αναμενόμενη τιμή και η διακύμανση της Z είναι αντίστοιχα

$$E(Z) = \frac{n(1-p)}{p}, \quad \text{Var}(Z) = \frac{n(1-p)}{p^2}.$$

Βασιζόμενοι στην βασική ιδέα των k -σίγμα ορίων, τα όρια ελέγχου του διαγράμματος ελέγχου για την παρακολούθηση της διεργασίας μέσω της τ.μ. Z υπολογίζονται ως k φορές η τυπική της απόκλιση και έτσι καταλήγουμε στα κάτωθι όρια ελέγχου :

$$UCL_k = \frac{n(1-p)}{p} + k \sqrt{\frac{n(1-p)}{p^2}}$$

και

$$LCL_k = \frac{n(1-p)}{p} - k \sqrt{\frac{n(1-p)}{p^2}}$$

με την κεντρική γραμμή να είναι

$$CL = \frac{n(1-p)}{p}.$$

Δεδομένου ότι η ιδέα των k -σίγμα ορίων βασίζεται στην κανονικότητα των δεδομένων, το μέγεθος του δείγματος πρέπει να είναι μεγάλο ώστε η πιθανότητα λανθασμένου συναγερωμού να είναι ίση με αυτή της περίπτωσης του παραδοσιακού Shewhart διαγράμματος. Πιο συγκεκριμένα, είναι γνωστό ότι η αρνητική διωνυμική κατανομή για να

προσεγγιστεί από την κανονική κατανομή πρέπει το np να είναι μεγάλο. Όταν το p είναι μικρό, το μέγεθος δείγματος n πρέπει να είναι εξαιρετικά μεγάλο.

Το βασικότερο πρόβλημα στο παραπάνω διάγραμμα ελέγχου έγκειται στο LCL . Αυτό, όπως και στο παραδοσιακό c -διάγραμμα ελέγχου παίρνει και αρνητικές τιμές. Όταν συμβαίνει αυτό, δεν μπορεί να εντοπιστεί βελτίωση της διεργασίας χωρίς την χρήση πιο σύνθετων κανόνων ροής. Από την εξίσωση των ορίων μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το LCL δεν μπορεί σχεδόν ποτέ να είναι μεγαλύτερο του μηδενός. Για να συμβεί αυτό πρέπει

$$\frac{n(1-p)}{p^2} > k \sqrt{\frac{n(1-p)}{p^2}}$$

και απλοποιώντας προκύπτει η ανίσωση

$$n(1-p) > k^2$$

ή ισοδύναμα

$$p < 1 - k^2/n.$$

Για $k=3$ και $n=5$, που είναι οι πιο συνηθισμένες τιμές, τότε $p < -0,8$, που είναι αδύνατον. Επίσης, για συνεχή επιθεώρηση, $n=1$ και $k=1$, τότε έχουμε $p < 0$, που είναι πάλι αδύνατο. Συμπερασματικά η χρήση των LCL κρίνεται μη πρακτική.

Τα ακριβή όρια ελέγχου για δεδομένη πιθανότητα λανθασμένου συναγερομού α , δίνονται από την λύση των παρακάτω εξισώσεων :

$$P(Z < LCL_a) = \sum_{z < LCL_a} \binom{n+z-1}{n-1} p^n (1-p)^z < \alpha/2 \quad (2.1)$$

και

$$P(Z > UCL_a) = \sum_{z > UCL_a} \binom{n+z-1}{n-1} p^n (1-p)^z < \alpha/2 \quad (2.2)$$

Οι εξισώσεις αυτές λύνονται με τη βοήθεια προγραμμάτων H/Y. Στην περίπτωση που το $n=1$, που είναι συνήθης περίπτωση στην συνεχή επιθεώρηση, τα όρια ελέγχου προκύπτουν χρησιμοποιώντας την σχέση

$$\sum_{z=0}^{z_0} \binom{n+z-1}{n-1} p^n (1-p)^z = \sum_{z=0}^{z_0} p(1-p)^z = 1 - (1-p)^{z_0}.$$

Έτσι τα κάτω και άνω όρια ελέγχου δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους

$$LCL_a = \frac{\ln(1-a/2)}{\ln(1-p)}, \quad UCL_a = \frac{\ln(a/2)}{\ln(1-p)}.$$

Επισημαίνεται ότι με τη χρήση των ακριβών πιθανοθεωρητικών ορίων, για να είναι το κάτω όριο ελέγχου μεγαλύτερο του μηδενός θα πρέπει $P(Z=0) = p^n < \alpha/2$. Η σχέση αυτή ικανοποιείται εύκολα στην πράξη. Για παράδειγμα όταν το α είναι 0,0027 και το $n=5$, το p πρέπει να είναι μεγαλύτερο του 0,267 ώστε το LCL_a να βρεθεί κάτω του μηδενός. Για $p < 0,267$, μεταβολές της διεργασίας μπορούν να εντοπιστούν ακόμα και με τον κανόνα του ενός σημείου εκτός ελέγχου.

Επίσης θα πρέπει να λεχθεί ότι τα πιθανοθεωρητικά όρια είναι καταλληλότερα, όταν δεν ισχύει η προσέγγιση από κανονική κατανομή. Ένα μειονέκτημα τους είναι ότι τα όρια ελέγχου δεν είναι συμμετρικά, όπως είναι χρήσιμο να φαίνονται έτσι, όταν π.χ. θέλουμε να ελέγξουμε αν τα όρια έχουν σχεδιαστεί σωστά.

Συνήθως το LCL_a υπολογίζεται από την (2.1) και μόνο μερικοί πρώτοι όροι από το άθροισμα χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του. Επειδή οι υπολογισμοί της σχέσης (2.2) παρουσιάζουν δυσκολίες προτείνεται η χρήση της παρακάτω σχέσης

$$P(Z > UCL_a) = 1 - \sum_{z=0}^{UCL_a} \binom{n+z-1}{n-1} p^n (1-p)^z.$$

Τα πιθανοθεωρητικά όρια που παρουσιάστηκαν πριν πρέπει να συγκριθούν με αυτά των k -σίγμα. Στον Πίνακα 2-1 δίνονται τα ακριβή πιθανοθεωρητικά όρια και συγκρίνονται με τα 3-σίγμα όρια (σημειώνεται ότι σε όλες τις περιπτώσεις τα LCL_k είναι μικρότερα του μηδέν). Τα πιθανοθεωρητικά όρια βρίσκονται χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.1) και (2.2) με $\alpha = 0,0027$, το πιο συνηθισμένο επίπεδο πιθανότητας λανθασμένου συναγερμού. Όπως φαίνεται υπάρχει μεγάλη διαφορά ανάμεσα στα δύο ανώτερα όρια. Επειδή η αρνητική διωνυμική κατανομή παρουσιάζει μεγάλη λοξότητα, το UCL_a είναι μεγαλύτερο από εκείνο των 3-σίγμα. Όπως θα περίμενε κανείς τα πιθανοθεωρητικά όρια έχουν πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού πολύ κοντά στην αρχική επιθυμητή τιμή.

Όταν χρησιμοποιούνται πιθανοθεωρητικά όρια, τότε στις περισσότερες περιπτώσεις η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού βρίσκεται στο διάστημα 0,0002-0,0003. Όταν

χρησιμοποιούνται όρια 3-σίγμα, η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού βρίσκεται στο διάστημα 0,009-0,01 δηλαδή είναι 3 έως 5 φορές μεγαλύτερη.

Πρέπει να σημειωθεί ότι τα 3-σίγμα όρια αν και είναι ικανά να ανιχνεύσουν μείωση της τιμής του p , αποτυγχάνουν να την ανιχνεύσουν όταν το p δεν είναι μικρό. Αυτό συμβαίνει γιατί το κάτω όριο ελέγχου είναι μικρότερο του μηδενός.

Από τον Πίνακα 2-2, όπου συγκρίνονται μέσα μήκη ροών για την περίπτωση $p = 0,2$, φαίνεται ότι το μέσο μήκος ροής είναι αύξουσα συνάρτηση του p όταν χρησιμοποιούνται όρια 3-σίγμα. Αυτό σημαίνει ότι όταν η διαδικασία αλλάζει από τον στόχο, υπό την έννοια ότι το p αυξάνει, δεν θα υπάρξει συναγερμός εκτός και αν χρησιμοποιηθούν κανόνες ροών. Εν τούτοις τα πιθανοθεωρητικά όρια μπορούν να ανιχνεύσουν αλλαγές στην παραγωγική διαδικασία. Επίσης ο λόγος για τον οποίο στον Πίνακα 2-2, το ARL δεν φτάνει στο μέγιστο για $p = 0,2$, οφείλεται στο σφάλμα που προκύπτει από τη “στρογγυλοποίηση”.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2-1

Σύγκριση των ορίων ελέγχου για $\alpha = 0,0027$, $n=5$ και $k=3$.

p	LCL_a	UCL_a	UCL_k
0,01	76	1430	1163
0,02	37	710	578
0,03	24	470	382
0,04	17	350	285
0,05	13	278	226
0,06	10	230	187
0,08	7	170	138
0,10	5	134	109
0,12	4	110	90
0,15	3	86	70
0,18	2	70	57
0,20	1	62	50
0,25	1	47	39
0,30	0	37	31

ΠΙΝΑΚΑΣ 2-2

Συγκρίσεις των μέσων μηκών ροής για $p = 0,2$, $n = 5$ και $k = 3$.

p	ARL_a	ARL_k
0,10	5,329	2,897
0,12	11,97	5,127
0,14	29,95	9,962
0,16	81,84	21
0,18	235,9	47,64
0,20	635,7	115,6
0,22	1141	298,6
0,24	1119	819,1
0,26	824,8	2381
0,28	579,1	7326
0,30	411,4	23855
0,32	298	82225
0,34	220,1	300240
0,36	165,4	$>10^6$
0,38	126,2	$>10^6$
0,40	97,67	$>10^6$

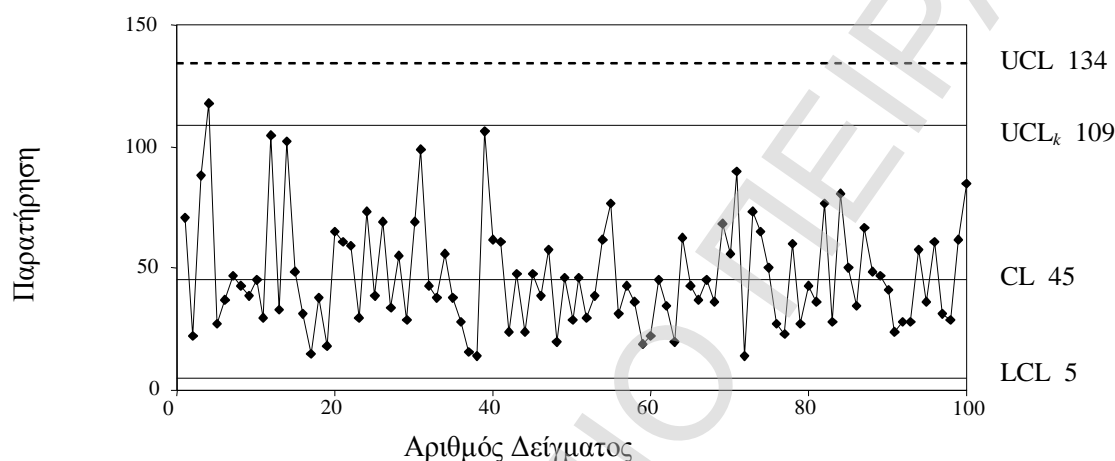
Η χρήση των πιθανοθεωρητικών ορίων αποτυπώνεται στο ακόλουθο παράδειγμα. Στον Πίνακα 2-3 παρουσιάζεται ένα σύνολο δεδομένων που ακολουθούν αρνητική διωνυμική κατανομή με $p=0,1$ και $n= 5$ (εντός ελέγχου διεργασία). Από τον Πίνακα 2-1 τα πιθανοθεωρητικά κάτω και άνω όρια είναι 5 και 134 αντίστοιχα, ενώ το 3-σίγμα άνω όριο ελέγχου είναι 109.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2-3

Δεδομένα που ακολουθούν αρνητική διωνυμική κατανομή με $p =0,1$ και $n = 5$.

71	22	88	118	27	37	47	43	39	45
30	105	33	102	49	31	15	38	18	65
61	59	30	73	39	69	34	55	29	69
99	43	38	56	38	28	16	14	106	62
61	24	48	24	48	39	58	20	46	29
46	30	39	62	77	31	43	36	19	22
45	35	20	63	43	37	45	36	68	56
90	14	73	65	50	27	23	60	27	43
36	77	28	81	50	35	67	49	47	41
24	28	28	58	36	61	31	29	62	85

Στο Σχήμα 2-1 δίνεται το διάγραμμα ελέγχου των δεδομένων όπου ένα μόνο σημείο βρίσκεται άνωθεν του 3-σίγμα ορίου ελέγχου. Πάντως όλα τα σημεία βρίσκονται εντός των πιθανοθεωρητικών ορίων.



Σχήμα 2-1. Διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2-3.

2.3 Μετασχηματισμός δεδομένων που ακολουθούν γεωμετρική κατανομή.

Ένα χαρακτηριστικό της γεωμετρικής κατανομής είναι ότι δεν μπορεί να προσεγγιστεί επαρκώς από μια κανονική κατανομή που συνήθως χρησιμοποιείται στα διαγράμματα ελέγχου με 3-σίγμα όρια ελέγχου. Τα 3-σίγμα όρια παρόλο που είναι βολικά στη χρήση τους έχει αποδειχτεί ότι δεν είναι κατάλληλα για χαρακτηριστικά που ακολουθούν γεωμετρική κατανομή εξαιτίας της μεγάλης κύρτωσης της γεωμετρικής κατανομής. Επιπλέον η υπόθεση της κανονικότητας δεν υφίσταται ούτε προσεγγιστικά στη γεωμετρική κατανομή, αφού η συνάρτηση πιθανότητάς της ελαττώνεται συνεχώς με αποτέλεσμα το σχήμα της να μην συμβαδίζει με αυτό της κανονικής. Εξαιτίας της έλλειψης κανονικότητας δεν μπορούν να

εφαρμοστούν άμεσα συμπληρωματικοί κανόνες ροής. Επίσης προχωρημένες τεχνικές παρακολούθησης της διεργασίας όπως τα διαγράμματα συσσωρευμένων αθροισμάτων (*CUSUM*) και τα διαγράμματα ελέγχου κινούμενου μέσου (*EWMA*) δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν.

Ο Quesenberry (1995) πρότεινε ένα διάγραμμα ελέγχου που ονομάζεται γεωμετρικό Q-διάγραμμα και είναι ένα είδος τυποποιημένου γεωμετρικού διαγράμματος. Χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλο μετασχηματισμό των δεδομένων, το πρόβλημα εντοπισμού των αλλαγών της διεργασίας στην γεωμετρική κατανομή μετατρέπεται σε αυτό της παρακολούθησης μιας κανονικά κατανομημένης μεταβλητής ώστε άλλες καλύτερες τεχνικές όπως οι συμπληρωματικοί κανόνες ροής, τα *CUSUM* και τα *EWMA* σχήματα ελέγχου να μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Πάντως το γεωμετρικό Q-διάγραμμα προϋποθέτει ότι η παράμετρος p είναι γνωστή ή έχει εκτιμηθεί.

Επίσης δύο άλλοι μετασχηματισμοί γεωμετρικών δεδομένων μπορούν να εφαρμοστούν και να συγκριθούν με τον Q-μετασχηματισμό. Ο ένας είναι ο λογαριθμικός μετασχηματισμός που αποτελεί οριακή περίπτωση του τόξου ημιτόνου μετασχηματισμού για μη κανονικά δεδομένα. Πάντως ο μετασχηματισμός αυτός είναι μη ικανοποιητικός για μια γεωμετρική κατανομή.

Παράλληλα με τον μετασχηματισμό της τετραγωνικής ρίζας για θετικά λοξές κατανομές, έχει προταθεί ο μετασχηματισμός της διπλής τετραγωνικής ρίζας, αφού η χρήση του μετασχηματισμού της τετραγωνικής ρίζας δίνει θετικά λοξές κατανομές. Αριθμητικά αποτελέσματα αποδεικνύουν ότι ο παραπάνω μετασχηματισμός είναι καλύτερος από τους υπόλοιπους.

Όπως έχει αναφερθεί προηγουμένως η χρήση των 3-σίγμα ορίων οδηγεί σε πολλαπλά προβλήματα. Μια μέθοδος για την λύση των προβλημάτων που ανακύπτουν είναι ο μετασχηματισμός των παρατηρήσεων που ακολουθούν τη γεωμετρική κατανομή ώστε τα μετασχηματισμένα δεδομένα να είναι πιο κοντά στο μοντέλο της κανονικής κατανομής.

2.3.1 Ο Q-μετασχηματισμός του Quesenberry.

Ο Quesenberry πρότεινε μια γενική μέθοδο για να μετασχηματίσει δεδομένα που κατανέμονται γεωμετρικά. Έστω Φ^{-1} η αντίστροφη συνάρτηση της τυποποιημένης κανονικής κατανομής. Ο μετασχηματισμός Q_i του γεωμετρικού δεδομένου x_i ορίζεται ως

$$Q_i = -\Phi^{-1}(u_i)$$

όπου

$$u_i = F(x_i; p) = 1 - (1 - p)^{x_i}.$$

Για $i=1,2,\dots$ τα Q_i ακολουθούν προσεγγιστικά την τυποποιημένη κανονική κατανομή, και η ακρίβεια της προσέγγισης βελτιώνεται όταν το p πλησιάζει στο μηδέν.

Θεωρητικά ο Q-μετασχηματισμός αποδίδει πολύ καλά. Στην πράξη όμως το πρόβλημα που εμφανίζεται είναι ότι η παράμετρος p του μοντέλου υποτίθεται γνωστή ή έχει εκτιμηθεί και το αποτέλεσμα μπορεί να είναι ευαίσθητο σε λανθασμένες εκτιμήσεις της.

2.3.2 Ο λογαριθμικός μετασχηματισμός.

Η γεωμετρική κατανομή είναι ειδική περίπτωση της αρνητικής διωνυμικής κατανομής. Για αρνητική διωνυμική μεταβλητή U με μέσο m και εκθέτη k

$$P(U = u) = \frac{\Gamma(u+k)}{u!\Gamma(u)} \left(\frac{m}{m+k}\right)^u \left(1 - \frac{m}{m+k}\right)^{-k} = \frac{(u+k-1)!}{u!(k-1)!} \left(\frac{m}{m+k}\right)^u \left(\frac{k}{m+k}\right)^k$$

για $u = 0,1,2,\dots,\infty$, ο Anscombe (1948) έδειξε ότι ο ακόλουθος μετασχηματισμός που βασίζεται σε ένα είδος αντίστροφης υπερβολικής συνάρτησης

$$y = \sinh^{-1} \sqrt{\frac{u+c}{k-2c}}$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να μετασχηματίσει μια αρνητική διωνυμική κατανομή σε μια κανονική (η βέλτιστη τιμή για το c είναι $c = 3/8$). Για την γεωμετρική κατανομή όπου έχουμε $k = 1$ και $u = x - 1$, ο μετασχηματισμός γίνεται

$$y = \sinh^{-1} \sqrt{\frac{u+c}{1-2c}}.$$

Ο Anscombe (1948) έδειξε επίσης ότι ένας πιο απλός μετασχηματισμός για μεγάλο m και $k \geq 1$, είναι ο

$$y = \ln(u + k/2).$$

Για την γεωμετρική κατανομή ο αντίστοιχος μετασχηματισμός γίνεται

$$y = \ln(x - 1/2).$$

Στην πράξη, όταν το x είναι μεγάλο, όπως στην περίπτωση υψηλής απόδοσης διεργασιών η οποία βασίζεται στον συσσωρευμένο αριθμό των μη ελαττωματικών προϊόντων ανάμεσα σε δύο ελαττωματικά, ο αντίστροφος υπερβολικός μετασχηματισμός ταυτίζεται με τον λογαριθμικό. Αυτό επειδή

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \approx \ln(x + x) = \ln 2 + \ln x.$$

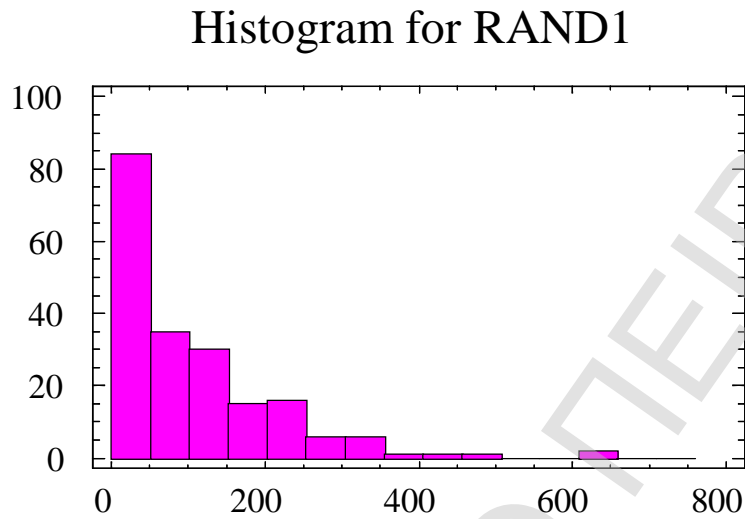
2.3.3. Μετασχηματισμός διπλής τετραγωνικής ρίζας.

Η μέθοδος που προτείνεται για τον κανονικό μετασχηματισμό μιας ποσότητας x που κατανέμεται γεωμετρικά είναι η χρήση της τέταρτης ρίζας

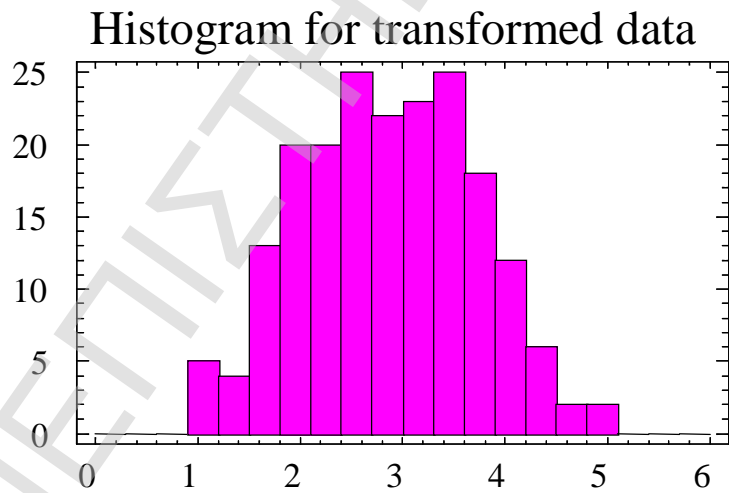
$$y = x^{1/4}, \quad x \geq 0.$$

Είναι γνωστό ότι ο μετασχηματισμός της διπλής τετραγωνικής ρίζας χρησιμεύει στη μετατροπή θετικά λοξών κατανομών σε κανονικές. Η γεωμετρική κατανομή είναι αρκετά λοξή και έχει παρατηρηθεί ότι παρά τον μετασχηματισμό της τετραγωνικής ρίζας συνεχίζει να παραμένει θετικά λοξή. Θεωρητικά θα μπορούσαμε να κάνουμε χρήση του $x^{1/r}$ για κάποιο $r > 2$. Πάντως για λόγους απλότητας και ακρίβειας, ο μετασχηματισμός για $r = 4$ προτιμάται.

Αρκετές μελέτες που έχουν διεξαχθεί έδειξαν ότι ο παραπάνω μετασχηματισμός αποδίδει γενικά πολύ καλά. Μία απεικόνιση ενός συνόλου 200 γεωμετρικών δεδομένων με $p = 0.8$ έχει σχεδιαστεί στα Σχήματα 2-2 και 2-3. Το ιστόγραμμα του Σχήματος 2-2 έχει το τυπικό σχήμα της γεωμετρικής κατανομής. Το μετασχηματισμένο ιστόγραμμα του Σχήματος 2-3 πλησιάζει πιο κοντά σε μια κωδωνοειδή καμπύλη, γεγονός που φανερώνει καλή προσέγγιση κανονικής κατανομής.



Σχήμα 2-2. Ιστόγραμμα 200 δεδομένων που κατανέμονται γεωμετρικά ($p = 0.8$).



Σχήμα 2-3. Ιστόγραμμα των μετασχηματισμένων δεδομένων ($y = x^{1/4}$).

2.3.4 Αριθμητικές συγκρίσεις των μετασχηματισμών.

Στον Πίνακα 2-4 δίνεται ένα σύνολο γεωμετρικών δεδομένων από τον Quesenberry (1995) και τα αποτελέσματα των μετασχηματισμών.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2-4

Γεωμετρικά κατανομημένα δεδομένα με τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ	$x^{1/4}$	$\ln x$	Q
18	2,0598	2,8904	-0,2605
1	1,0000	0,0000	1,6448
19	2,0878	2,9444	-0,3124
32	2,3784	3,4657	-0,8643
28	2,3003	3,3322	-0,7133
8	1,6818	2,0794	0,4218
4	1,4142	1,3863	0,8946
27	2,2795	3,2958	-0,6734
72	2,9130	4,2767	-1,9617
8	1,6818	2,0794	0,4218
41	2,5304	3,7136	-1,1646
75	2,9428	4,3175	-2,0267
29	2,3206	3,3673	-0,7523
4	1,4142	1,3863	0,8946
11	1,8212	2,3979	0,1733
30	2,3403	3,4012	-0,7904
32	2,3784	3,4657	-0,8643
15	1,9680	2,7081	-0,0921
29	2,3206	3,3673	-0,7523
10	1,7783	2,3026	0,2500
25	2,2361	3,2189	-0,5906
4	1,4142	1,3863	0,8946
10	1,7783	2,3026	0,2500
20	2,1147	2,9957	-0,3625
19	2,0878	2,9444	-0,3124
13	1,8988	2,5649	0,0334
4	1,4142	1,3863	0,8946
64	2,8284	4,1589	-1,7801
11	1,8212	2,3979	0,1733
12	1,8612	2,4849	0,1013
2	1,1892	0,6931	1,2959
21	2,1407	3,0445	-0,4109
34	2,4147	3,5264	-0,9352
15	1,9680	2,7081	-0,0921
19	2,0878	2,9444	-0,3124

10	1,7783	2,3026	0,2500
6	1,5651	1,7918	0,6282
7	1,6266	1,9459	0,5196
107	3,2162	4,6728	-2,6408
29	2,3206	3,3673	-0,7523
4	1,4142	1,3863	0,8946
36	2,4495	3,5835	-1,0036
1	1,0000	0,0000	1,6448
20	2,1147	2,9957	-0,3625
23	2,1899	3,1355	-0,5033
28	2,3003	3,3322	-0,7133
24	2,2134	3,1781	-0,5475
55	2,7233	4,0073	-1,5586
7	1,6266	1,9459	0,5196
3	1,3161	1,0986	1,0686

Το Anderson-Darling τεστ χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της κανονικότητας των δεδομένων μετά τους μετασχηματισμούς. Τα αποτελέσματα αποτυπώνονται στον ακόλουθο πίνακα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2-5

Έλεγχος κανονικότητας των δεδομένων.

	Ασυμμετρία	Κύρτωση	Anderson-Darling statistic	<i>p</i> -value
$x^{1/4}$	0,1	2,8	0,30	0,562
$\ln x$	-0,6	3,1	0,69	0,069
<i>Q</i> -μετασχ.	-0,2	3,0	0,31	0,541

Είναι προφανές ότι από το Anderson-Darling τεστ η υπόθεση της κανονικότητας δεν απορρίπτεται για τον *Q*-μετασχηματισμό και τον μετασχηματισμό της διπλής τετραγωνικής ρίζας ενώ απορρίπτεται για τον λογαριθμικό.

2.4 Βέλτιστη επιλογή ορίων ελέγχου για το γεωμετρικό διάγραμμα ελέγχου.

Τα πιθανοθεωρητικά όρια ελέγχου που αναπτύχθηκαν στην Παράγραφο 2.2 για το γεωμετρικό διάγραμμα ελέγχου παρουσιάζουν ένα βασικό μειονέκτημα.. Ο μέσος χρόνος συναγερμού πιθανόν να αυξηθεί αρχικά ενώ η διεργασία επιδεινώνεται. Πρακτικά όταν η

διαδικασία έχει επιδεινωθεί θα χρειαστεί περισσότερος χρόνος ώστε να σημάνει συναγερμός, παρά όταν η διαδικασία κυμαίνεται σε κανονικά επίπεδα.

Η εξάλειψη του προβλήματος που ανέκυψε, οδηγεί σε ένα καινούργιο τρόπο καθορισμού των ορίων ελέγχου της γεωμετρικής κατανομής. Τα νέα όρια ελέγχου προκύπτουν από την μεγιστοποίηση του μέσου μήκους ροής όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Επίσης προτείνεται η χρήση ενός πολλαπλασιαστικού παράγοντα μέσω του οποίου τα όρια ελέγχου τροποποιούνται.

Όπως έχει δειχτεί σε προηγούμενη ενότητα τα κάτω και άνω όρια ελέγχου για σταθερή πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού a για το γεωμετρικό διάγραμμα ελέγχου είναι αντίστοιχα

$$L = LCL = \frac{\ln(1 - a/2)}{\ln(1 - p_0)}, \quad U = UCL = \frac{\ln(a/2)}{\ln(1 - p_0)}. \quad (2.3)$$

Ως γνωστό ένα μέτρο για την απόδοση ενός διαγράμματος αποτελεί το μέσο μήκος ροής ARL , το οποίο συνήθως ορίζεται ως ο μέσος αριθμός σημείων που πρέπει να σχεδιαστούν ώσπου να εμφανιστεί σημείο το οποίο θα σημάνει εκτός ελέγχου κατάσταση. Στην περίπτωση του γεωμετρικού διαγράμματος το ARL για δοσμένο ποσοστό p είναι (δείτε Xie, Goh & Kuralmani (2000))

$$ARL = \frac{1}{1 - (1 - p)^{LCL-1} + (1 - p)^{UCL}}. \quad (2.4)$$

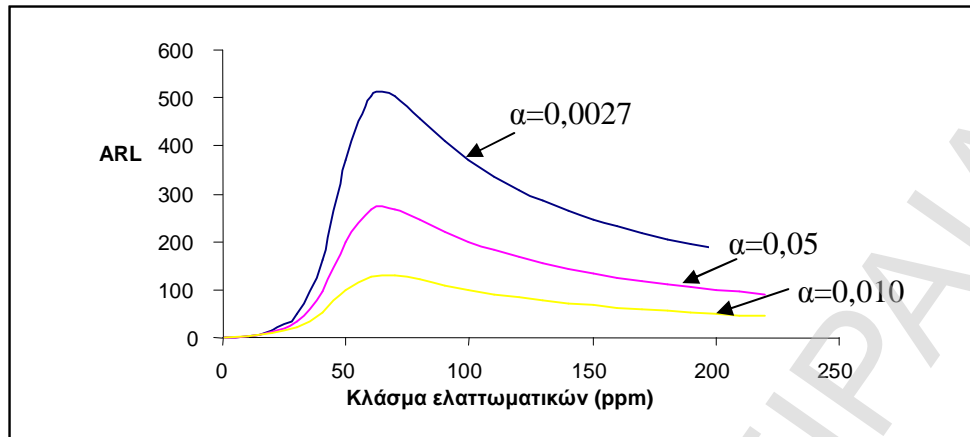
Η τιμή του ARL μπορεί αρχικά να αυξηθεί όταν η διεργασία έχει επιδεινωθεί γεγονός που παρερμηνεύεται ως διεργασία εντός ελέγχου ή ακόμα και ως βελτίωσή της. Στον παρακάτω πίνακα υπάρχουν κάποιες τιμές του ARL για εντός ελέγχου $p = 50 ppm$ και για συγκεκριμένα a .

ΠΙΝΑΚΑΣ 2-6

Τιμές του ARL για $p = 50 ppm$ και διάφορες τιμές του a .

Κλάσμα ελαττωματικών (ppm)	$a = 0,0027$	$a = 0,005$	$a = 0,001$
1	1	1	1
10	4	3	3
20	14	11	8
30	51	35	22
40	163	97	54
50	370	200	100
60	505	266	129
70	504	268	132
80	458	246	122
90	411	221	110
100	370	200	100
110	337	182	91
120	309	167	84
130	285	154	77
140	265	143	72
150	247	134	67
160	232	125	63
170	218	118	59
180	206	111	56
190	195	106	53
200	186	100	50
210	177	96	48
220	169	91	46

Όπως φαίνεται οι τιμές του ARL είναι σημαντικά χαμηλές για $p = 50 ppm$ ανεξάρτητα των πιθανοτήτων λανθασμένου συναγερωμού, στη συνέχεια αυξάνονται για μεγαλύτερες τιμές του p και κατόπιν ελαττώνονται. Αυτό είναι επίσης φανερό και από το παρακάτω σχήμα. Προφανώς το μέγιστο ARL επιτυγχάνεται σε τιμή του p που είναι μεγαλύτερη των $50 ppm$.



Σχήμα 2-4. ARL καμπύλες για εντός ελέγχου $p = 50 \text{ ppm}$ για $\alpha = 0,0027$, $0,05$ και $0,01$.

Μία μέθοδος μεγιστοποίησης της τιμής του ARL για συγκεκριμένο $p = p_0$ προτείνεται από τους Xie, Goh & Kuralmani (2000).

Το μέγιστο ARL προκύπτει παραγωγίζοντας την εξίσωση (2.4) ως προς p , θέτοντας την ίση με το μηδέν και λύνοντας ως προς p . Έτσι η εξίσωση που πρέπει να λυθεί είναι η

$$0 = (1 - p)^{L-1} \ln(1 - p) \frac{dL}{dp} - (1 - p)^{U-1} \ln(1 - p) \frac{dU}{dp}$$

Από την παραπάνω εξίσωση έχουμε την τιμή του p για την οποία το ARL φτάνει στο μέγιστο και είναι η

$$p = 1 - \exp\left(\frac{\ln(1 - p_0) \ln\left(\frac{a/2}{1 - a/2}\right)}{\ln\left(\frac{\ln(1 - a/2)}{\ln(a/2)}\right)}\right) \quad (2.5)$$

Αντικαθιστώντας αυτή την συνάρτηση στις εξισώσεις (2.3) προκύπτουν τα νέα όρια ελέγχου ως

$$LCL = \frac{\ln\left(1 - \frac{a}{2}\right) \ln\left[\frac{\ln(1 - a/2)}{\ln(a/2)}\right]}{\ln(1 - p_0) \ln\left[\frac{(a/2)}{(1 - a/2)}\right]}$$

και

$$UCL = \frac{\ln(a/2) \ln\left[\frac{\ln(1-a/2)}{\ln(a/2)}\right]}{\ln(1-p_0) \ln\left[\frac{(a/2)}{(1-a/2)}\right]}$$

Η απόδειξη της σχέσης (2.5) έγκειται στην απόδειξη των εξής συνθηκών :

$$\frac{dARL}{dp} = 0 \text{ και } \frac{d^2 ARL}{dp^2} < 0 .$$

Ουσιαστικά τα νέα όρια ελέγχου προκύπτουν πολλαπλασιάζοντας τα αρχικά πιθανοθεωρητικά όρια με μία σταθερά. Η σταθερά αυτή συμβολίζεται με g_a και η τιμή της δίνεται από τον τύπο

$$g_a = \frac{\ln\left[\frac{\ln(1-a/2)}{\ln(a/2)}\right]}{\ln\left[\frac{a/2}{1-a/2}\right]} .$$

Αφού ο παράγοντας g_a είναι μία απλή συνάρτηση της πιθανότητας λανθασμένου συναγερμού, ο αρχικός μέσος της διεργασίας παραμένει αμετάβλητος για τα νέα όρια ελέγχου. Η προσαρμογή αυτή στην ουσία απλώς μετατοπίζει τα ισχύοντα όρια ελέγχου κατά ένα παράγοντα g_a . Τιμές του παράγοντα αυτού συναρτήσει του a παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2-7

Τιμές του παράγοντα g_a για διάφορες τιμές του a .

a	g_a
0,0001	1,2315
0,0002	1,2411
0,0005	1,2551
0,0010	1,2669
0,0015	1,2743
0,0020	1,2799
0,0025	1,2844
0,0030	1,2881
0,0035	1,2914
0,0040	1,2942
0,0045	1,2968
0,0050	1,2991
0,0055	1,3013
0,0060	1,3033
0,0065	1,3051
0,0070	1,3069
0,0075	1,3085
0,0080	1,3100
0,0085	1,3115
0,0090	1,3129
0,0100	1,3155

Το πλεονέκτημα της καινούργιας αυτής μεθόδου είναι ότι μέσο μήκος ροής θα ελαττώνεται πάντα όταν η διεργασία έχει μετατοπιστεί από το κανονικό της (εντός ελέγχου) επίπεδο. Η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού μειώνεται ακόμη περισσότερο. Αριθμητικές τιμές των UCL , LCL και ARL της ισχύουσας μεθόδου καθώς και της προτεινόμενης μεθόδου για $a = 0,0027$ παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

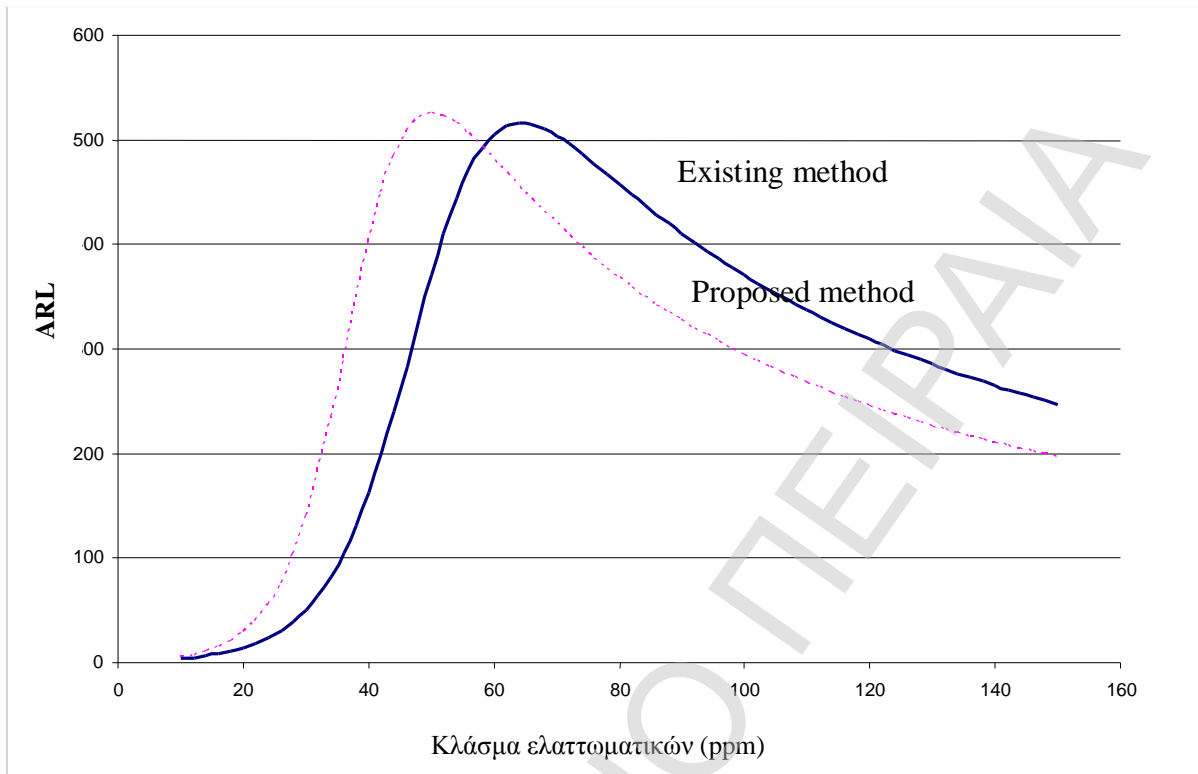
ΠΙΝΑΚΑΣ 2-8

Τιμές των ARL , LCL και UCL της ισχύουσας e και προτεινόμενης p μεθόδου για $\alpha = 0,0027$.

Μέσος Διεργασίας (ppm)	LCL_e	UCL_e	ARL_e	LCL_p	UCL_p	ARL_p
10	135	660762	4	174	849690	5
20	68	330379	14	87	424843	29
30	45	220252	51	58	283227	140
40	34	165188	163	43	212419	404
50	27	132150	370	35	169935	526
60	23	110124	505	29	141611	482
70	19	94392	504	25	121381	419
80	17	82592	458	22	106208	368
90	15	73415	411	19	94406	327
100	14	66073	371	17	84965	295
200	7	33035	186	9	42480	148
300	5	22022	124	6	28319	99
400	3	16516	93	4	21238	74
500	3	13212	75	3	16990	59

Συγκρίνοντας τα ARL για $p_0 = 0,05$ παρατηρούμε ότι είναι 526 και 370 για την προτεινόμενη και την ισχύουσα μέθοδο αντίστοιχα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η προτεινόμενη μέθοδος θα σημαίνει ένδειξη λανθασμένου συναγερμού κάθε 526 σημεία ενώ η ισχύουσα κάθε 370. Άρα η προτεινόμενη μέθοδος μειώνει τον λανθασμένο συναγερμό σχεδόν κατά 40 %.

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται οι ARL καμπύλες των δύο μεθόδων για $p_0 = 50$ ppm και $\alpha = 0,0027$



Σχήμα 2-5. ARL καμπύλες της ισχύουσας και της προτεινόμενης μεθόδου για $p = 50 \text{ ppm}$ και $\alpha = 0,0027$.

Όταν η διεργασία έχει μετατοπιστεί για 70 ppm , το μέσο μήκος ροής για τη νέα μέθοδο είναι 419 ενώ για την αρχική 504. Άρα η προτεινόμενη μέθοδος χρειάζεται μόλις 419 σημεία για να σημάνει μετατόπιση στη διεργασία σε αντίθεση με την αρχική μέθοδο που χρειάζεται 23 % περισσότερο χρόνο ώστε να πιστοποιήσει την μετατόπιση.

2.5 Γεωμετρικά διαγράμματα ελέγχου με εκτιμώμενα όρια

Στην πράξη, οι στατιστικές ιδιότητες ενός διαγράμματος ελέγχου βασίζονται συχνά στην υπόθεση ότι οι παράμετροι της εντός ελέγχου διεργασίας, όπως το ποσοστό ή ο αριθμός των ελαττωματικών, είναι γνωστοί ή έχουν εκτιμηθεί επακριβώς. Σε υψηλής ποιότητας διεργασίες, ακριβής εκτίμηση της παραμέτρου p απαιτεί μεγάλο μέγεθος δείγματος γεγονός που σπάνια πραγματοποιείται.

Είναι σημαντικό να ερευνηθεί η επίδραση των ορίων ελέγχου που έχουν εκτιμηθεί στην απόδοση των γεωμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου. Στην περίπτωση αυτή χρειάζεται ένα μεγάλο μέγεθος δείγματος ώστε να εκτιμηθεί ακριβώς η παράμετρος. Το σφάλμα στην εκτίμηση του ποσοστού των ελαττωματικών p μπορεί να οδηγήσει σε εκτιμήσεις των ορίων ελέγχου που να απέχουν αρκετά από τα όρια που βασίζονται στην πραγματική τιμή της παραμέτρου.

Αρχικά πρέπει να υπολογιστούν εκτιμήσεις των ορίων ελέγχου. Έστω Y_i το πλήθος των μη ελαττωματικών προϊόντων ανάμεσα στο $(i-1)$ -στό και στο i -στό ελαττωματικό προϊόν μιας συνεχούς διεργασίας ενός αυτοματοποιημένου περιβάλλοντος όπου η εντός ελέγχου πιθανότητα ενός μη ελαττωματικού προϊόντος είναι p_0 . Η διεργασία αυτή διέπεται από μία ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με την ίδια πιθανότητα επιτυχίας p_0 . Έτσι η Y_i+1 είναι μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p_0 , δηλαδή

$$g(y_i) = P(Y = y_i) = (1 - p_0)^{y_i} p_0, \quad y_i = 0, 1, \dots$$

$$\text{με } P(Y_i \geq y_i) = (1 - p_0)^{y_i}.$$

Έστω α η επιθυμητή πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού. Τότε τα LCL και UCL πρέπει να ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\sum_{y_i=0}^{LCL-1} (1 - p_0)^{y_i} p_0 = \frac{\alpha}{2}, \quad \sum_{y_i=UCL+1}^{\infty} (1 - p_0)^{y_i} p_0 = \frac{\alpha}{2}$$

οι οποίες είναι ισοδύναμες με τις

$$1 - (1 - p_0)^{LCL} = \frac{\alpha}{2}, \quad (1 - p_0)^{UCL+1} = \frac{\alpha}{2}.$$

Έτσι τα όρια ελέγχου για το γεωμετρικό διάγραμμα ελέγχου είναι τα

$$LCL = \frac{\ln(1 - a/2)}{\ln(1 - p_0)}, \quad UCL = \frac{\ln(a/2)}{\ln(1 - p_0)} - 1.$$

Αυτά τα όρια ελέγχου βασίζονται στο γεγονός ότι το p_0 είναι γνωστό. Όταν η τιμή του p_0 είναι άγνωστη, μία κοινή πρακτική είναι να επιθεωρήσουμε ένα αρχικό αριθμό προϊόντων και να εκτιμήσουμε το ποσοστό των ελαττωματικών. Ένας παραδοσιακός εκτιμητής είναι ο

$$\hat{p}_0 = \frac{N}{m}$$

όπου N ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων ανάμεσα σε ένα σύνολο m προϊόντων. Σημειώνουμε ότι το N είναι μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους m και p_0 . Τα νέα όρια που προκύπτουν με τη χρήση του εκτιμητή \hat{p}_0 είναι τα

$$L\hat{C}L(N) = \frac{\ln(1 - a/2)}{\ln(1 - N/m)}, \quad U\hat{C}L(N) = \frac{\ln(a/2)}{\ln(1 - N/m)} - 1.$$

Έστω X_i μια μελλοντική παρατήρηση (πλήθος μη ελαττωματικών προϊόντων ανάμεσα σε δύο διαδοχικά ελαττωματικά προϊόντα) της διεργασίας με ποσοστό ελαττωματικών πιθανώς μετατοπισμένο από p_0 σε p . Ορίζουμε το συμβάν B_i ως εξής

$$B_i = \{X_i > U\hat{C}L(N) \quad \text{ή} \quad X_i < L\hat{C}L(N)\}.$$

Τότε η πιθανότητα $P(B_i)$ είναι ο ρυθμός συναγερμού (*AR alarm rate*), η οποία μετατρέπεται σε ρυθμό λανθασμένου συναγερμού (*FAR false alarm rate*) όταν $p = p_0$. Με χρήση του θεωρήματος ολικής πιθανότητας έχουμε

$$P(B_i) = \sum_{n=0}^m P(B_i | N = n) P(N = n) = \sum_{n=0}^m P(B_i | N = n) \binom{m}{n} p_0^n (1 - p_0)^{m-n}$$

όπου

$$P(B_i | N = n) = P\{X_i > U\hat{C}L(N) | N = n\} + P\{X_i < L\hat{C}L(N) | N = n\}$$

$$= (1-p)^{\ln(a/2)/\ln(1-n/m)} - (1-p)^{\ln(1-a/2)/\ln(1-n/m)} + 1 \quad (2.6)$$

Στον ακόλουθο πίνακα φαίνονται οι τιμές του FAR για διάφορους συνδυασμούς του p_0 και του m .

ΠΙΝΑΚΑΣ 2-9

Τιμές του FAR για εκτιμώμενα όρια ελέγχου, $\alpha = 0,0027$.

$m \setminus p_0$	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006
10000	,38651	,14718	,05911	,02623	,01371	,00878
20000	,14719	,02623	,00878	,00575	,00492	,00452
50000	,01372	,00492	,00415	,00379	,00357	,00343
100000	,00492	,00379	,00343	,00325	,00314	,00306
200000	,00378	,00324	,00306	,00297	,00291	,00288
300000	,00343	,00306	,00294	,00288	,00284	,00282
400000	,00324	,00297	,00288	,00283	,00281	,00279
500000	,00314	,00292	,00285	,00281	,00279	,00277
600000	,00306	,00288	,00282	,00279	,00279	,00277
700000	,00301	,00286	,00280	,00278	,00276	,00275
800000	,00297	,00284	,00279	,00277	,00276	,00275
900000	,00294	,00282	,00278	,00276	,00274	,00274
1000000	,00292	,00281	,00277	,00276	,00274	,00273
2000000	,00281	,00276	,00274	,00273	,00272	,00272
∞	,00270	,00270	,00270	,00270	,00270	,00270
$m \setminus p_0$	0,0007	0,0008	0,0009	0,001	0,005	
10000	,00671	,00575	,00524	,00492	,00314	
20000	,00425	,00406	,00391	,00379	,00292	
50000	,00332	,00325	,00319	,00314	,00279	
100000	,00301	,00297	,00294	,00292	,00274	
200000	,00286	,00283	,00282	,00281	,00272	
300000	,00281	,00279	,00278	,00277	,00271	
400000	,00278	,00277	,00276	,00276	,00271	
500000	,00276	,00276	,00275	,00275	,00271	
600000	,00276	,00275	,00274	,00274	,00271	
700000	,00275	,00274	,00274	,00273	,00271	
800000	,00274	,00274	,00273	,00273	,00271	
900000	,00274	,00273	,00273	,00273	,00271	
1000000	,00273	,00273	,00273	,00272	,00270	
2000000	,00272	,00272	,00271	,00271	,00270	
∞	,00270	,00270	,00270	,00270	,00270	

Είναι φανερό ότι το FAR μπορεί διαφέρει σημαντικά από την επιθυμητή τιμή του 0,0027 όταν το πραγματικό ποσοστό ελαττωματικών της διεργασίας p_0 έχει εκτιμηθεί από m προϊόντα, ιδίως όταν το p_0 είναι πολύ μικρό. Για σταθερή τιμή του p_0 , αυξάνοντας το m μειώνονται σημαντικά οι αποκλίσεις. Αυτό συμβαίνει επειδή η μεταβλητότητα της εκτίμησης του p_0 γίνεται μικρότερη καθώς το m αυξάνει. Όταν το μέγεθος δείγματος m είναι αρκετά μεγάλο, το FAR μπορεί να φτάσει κοντά στην τιμή 0,0027, και ως εκ τούτου οι επιδράσεις της εκτίμησης στην πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού του γεωμετρικού διαγράμματος εξαφανίζονται.

Ο ακόλουθος πίνακας παρέχει τις τιμές του AR όταν η διεργασία έχει μετατοπιστεί από την εντός ελέγχου τιμή $p_0=0,0005$

ΠΙΝΑΚΑΣ 2-10

Τιμές του AR για εκτιμώμενα όρια ελέγχου, $\alpha =0,0027$, $p_0=0,0005$.

$m \setminus p$,0001	,0002	,0004	,0005	,0008	,001	,005
$p_0=0,0005$							
10000	,25860	,09028	,02047	,01371	,01000	,01031	,02384
20000	,25751	,07797	,01027	,00492	,00270	,00313	,01521
50000	,26268	,07421	,00786	,00357	,00234	,00283	,01403
100000	,26479	,07296	,00702	,00314	,00226	,00276	,01372
200000	,26592	,07234	,00658	,00292	,00222	,00273	,01358
300000	,26631	,07213	,00640	,00285	,00221	,00272	,01354
400000	,26650	,07203	,00637	,00281	,00220	,00271	,01352
500000	,26662	,07197	,00632	,00278	,00220	,00271	,01350
600000	,26670	,07190	,00629	,00277	,00220	,00271	,01349
700000	,26676	,07190	,00627	,00276	,00219	,00271	,01349
800000	,26680	,07188	,00626	,00276	,00219	,00271	,01348
900000	,26683	,07186	,00624	,00274	,00219	,00271	,01348
1000000	,26686	,07185	,00623	,00274	,00219	,00271	,01348
∞	,26707	,07171	,00614	,00270	,00219	,00270	,01345

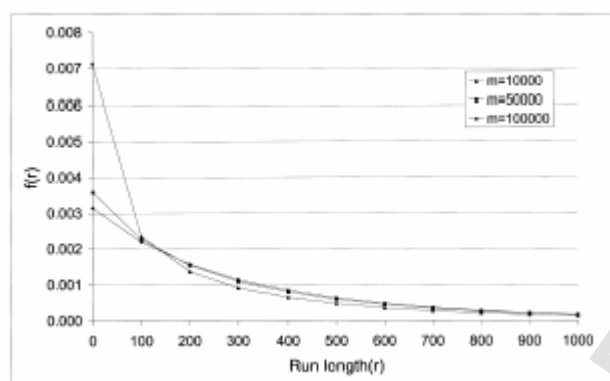
Όπως προκύπτει από τον προηγούμενο πίνακα για δοσμένο $p \neq p_0$, το AR συμπεριφέρεται παρόμοια με το FAR καθώς το m αυξάνεται. Για δοσμένη τιμή του m , το AR αυξάνεται καθώς

το p φθίνει σε σχέση με το p_0 , αλλά καθώς το p αυξάνει σε σχέση με το p_0 το AR αρχικά μειώνεται και μετά αυξάνεται πολύ αργά. Αυτό εξηγεί γιατί το γεωμετρικό διάγραμμα είναι ικανό να εντοπίσει την βελτίωση μιας διεργασίας αλλά αδυνατεί να εντοπίσει επιδείνωση της διεργασίας εκτός κι αν το μέγεθος της επιδείνωσης είναι σημαντικά μεγάλο. Όταν το p_0 είναι μικρό, τότε συνήθως το LCL είναι μικρό. Όταν το p μειώνεται, η ποσότητα που απεικονίζεται στο γεωμετρικό διάγραμμα ελέγχου τείνει να γίνει μεγαλύτερη, και έτσι έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να υπερβεί το UCL , καταλήγοντας σε ένα αυξημένο AR . Όταν το p αυξάνεται, η ποσότητα που απεικονίζεται στο γεωμετρικό διάγραμμα ελέγχου τείνει να είναι μικρότερη, και είναι λιγότερο πιθανό να υπερβεί το UCL . Παράλληλα, η πιθανότητα να βρεθεί η απεικονιζόμενη ποσότητα κάτω του LCL δεν αυξάνεται πολύ αφού το LCL είναι ήδη πολύ μικρό, εκτός κι αν το p αυξηθεί σε μεγάλο βαθμό. Γι' αυτό το AR μειώνεται αρχικά και αυξάνεται αργά όταν το p αυξάνεται σε σχέση με το p_0 .

Έστω τώρα R ο αριθμός των σημείων που έχουν σχεδιαστεί σε ένα διάγραμμα ώσπου να σημάνει εκτός ελέγχου σήμα. Το R καλείται μήκος ροής και η κατανομή του καλείται κατανομή μήκους ροής. Η μελέτη της κατανομής αυτής για δοσμένο διάγραμμα ελέγχου παρουσιάζει ενδιαφέρον, ιδίως όταν τα όρια ελέγχου έχουν εκτιμηθεί. Δηλώνουμε την πιθανότητα $P(B_i|N)$ που ορίστηκε στην εξίσωση (2.6) ως $a(N)$. Έτσι η κατανομή του R δοθέντος του N είναι γεωμετρική με παράμετρο $a(N)$. Η συνάρτηση πιθανότητας δίνεται από τον τύπο

$$f_R(r, p_0, p) = \sum_{n=0}^m [1 - a(n)]^{r-1} a(n) P(N = n) = \sum_{n=0}^m [1 - a(n)]^{r-1} a(n) \binom{m}{n} p_0^n (1 - p_0)^{m-n}$$

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η κατανομή μήκους ροής για $p = p_0 = 0.0005$ τριών διαφορετικών μεγεθών δείγματος. Φαίνεται ότι οι τρεις κατανομές μήκους ροής διαφέρουν κυρίως στο αριστερό άκρο. Μικρότερη τιμή του m αποφέρει μικρότερα μήκη ροών.



Σχήμα 2-6. Κατανομή του μήκους ροής για τρία διαφορετικά μεγέθη δείγματος.

Επίσης, το μέσο μήκος ροής (ARL) και η τυπική απόκλιση του ($SDRL$ *standard deviation run length*) δίνονται από τις σχέσεις

$$ARL(p_0, p) = E_N \left[\frac{1}{a(N)} \right] \quad (2.7)$$

και

$$SDRL(p_0, p) = \sqrt{\text{Var}_N \left[\frac{1}{a(N)} \right] + E_N \left[\frac{1 - a(N)}{a^2(N)} \right]} \quad (2.8)$$

αντιστοίχως. Έτσι, χρησιμοποιώντας την κατανομή του N , οι ποσότητες που εμπλέκονται στις παραπάνω εξισώσεις υπολογίζονται ως

$$E_N \left[\frac{1}{a(N)} \right] = \sum_{n=0}^m \frac{1}{a(n)} \binom{n}{m} p_0^n (1 - p_0)^{m-n}$$

και

$$E_N \left[\frac{1}{a^2(N)} \right] = \sum_{n=0}^m \frac{1}{a^2(n)} \binom{n}{m} p_0^n (1 - p_0)^{m-n}.$$

Τα αντίστοιχα ARL και $SDRL$ για γνωστά όρια ελέγχου είναι

$$ARL_0(p_0, p) = \frac{1}{P(A_i)} \quad (2.9)$$

και

$$SDRL_0(p_0, p) = \frac{\sqrt{1 - P(A_i)}}{P(A_i)} = \sqrt{ARL_0(ARL_0 - 1)} \quad (2.10)$$

όπου τα ενδεχόμενα A_i , ορίζονται παρόμοια με τα B_i , αλλά αντιστοιχούν στην περίπτωση των γνωστών ορίων ελέγχου. Έτσι ένας εύλογος τρόπος για να αποφασίσουμε, όταν το μέγεθος δείγματος m είναι αρκετά μεγάλο, αν τα $U\hat{C}L$ και $L\hat{C}L$ είναι ουσιαστικά τα ίδια με τα UCL και LCL , είναι να προσδιορίσουμε αν τα ARL και $SDRL$ των εκτιμημένων ορίων ελέγχου είναι ίδια με εκείνα των εξισώσεων (2.9) και (2.10). Για παράδειγμα, για $\alpha = 0,0027$ και $p = p_0$, πρέπει $ARL \cong SDRL = 370$.

Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζονται οι τιμές της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της κατανομής του μήκους ροής, ARL και $SDRL$, που προκύπτουν από τις εξισώσεις (2.7) και (2.8) για ένα εύρος τιμών των m και p και για σταθερή τιμή $p_0 = 0.0005$.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2-11

Τιμές ARL (πάνω καταχώρηση) και $SDRL$ (κάτω καταχώρηση) για εκτιμημένα όρια ελέγχου, $p_0 = 0.0005$.

$m \setminus p$	0.0001	0.0003	0.0005	0.0007	0.0009	0.005
10000	18.55	138.51	291.8	362.3	356.7	74.37
	95.05	262.73	374.1	406.9	397.1	87.39
50000	4.18	78.43	353.0	460.8	403.6	74.36
	4.50	134.84	398.8	467.6	415.1	76.76
100000	3.93	63.25	362.9	480.9	407.8	74.36
	3.16	87.26	394.8	483.4	414.0	75.32
200000	3.83	56.33	367.5	492.0	409.3	74.36
	3.38	65.55	387.6	492.8	412.4	74.59
500000	3.78	52.70	369.5	498.9	410.1	74.36
	3.27	55.45	379.0	498.9	411.1	74.15
800000	3.77	51.85	369.9	500.7	410.3	74.36
	3.25	53.29	376.0	500.5	410.7	74.04
1000000	3.76	51.58	370.0	501.3	410.3	74.36
	3.24	52.61	374.9	501.0	410.6	74.00
2000000	3.75	51.04	370.2	502.4	410.4	74.36
	3.22	51.28	372.5	502.1	410.3	73.93
∞	3.74	50.52	370.4	503.1	410.5	74.36
	3.21	50.02	369.9	503.1	410.0	73.85

Οι εκτιμήσεις των ορίων ελέγχου επιφέρουν στο ARL και $SDRL$ μεγαλύτερες ή μικρότερες τιμές από τις αρχικές τους, αναλόγως αν το p είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο από το p_0 . Αυτό συμβαίνει εξαιτίας της μείωσης ή αύξησης της πιθανότητας των ενδεχομένων $\{B_i\}$. Επίσης το $SDRL$ μπορεί να υπερβεί το ARL ιδίως όταν το m δεν είναι πολύ μεγάλο, γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με την περίπτωση των γνωστών ορίων ελέγχου όπου $SDRL = \sqrt{ARL(ARL-1)} < ARL$.

Παρόμοια με την συμπεριφορά της AR συνάρτησης σε μετατόπιση του p , τα ARL και $SDRL$ ελαττώνονται καθώς το p φθίνει του p_0 , αλλά όταν το p αυξάνεται σε σχέση με το p_0 τα ARL και $SDRL$ αυξάνονται αρχικά και μετά ελαττώνονται. Το φαινόμενο αυτό είναι μη επιθυμητό και εξηγείται με τον ίδιο τρόπο όπως στην AR συνάρτηση.

Συγκρίνοντας τους Πίνακες 2.10 και 2.11 παρατηρούμε ότι η επίδραση των εκτιμημένων ορίων ελέγχου στο ARL είναι μικρότερη από το AR . Το ίδιο ισχύει για το $SDRL$ εκτός και αν τα m και p είναι πολύ μικρά. Το γεγονός ότι το ARL αντιστέκεται περισσότερο στην εκτίμηση των ορίων ελέγχου το κάνει πιο ελκυστικό σαν μέτρο της απόδοσης του διαγράμματος. Στη πράξη, η χρήση του ARL είναι πιο σημαντική αφού η εξάρτηση ανάμεσα στα ενδεχόμενα B_i δυσκολεύει την ερμηνεία του AR .

2.6 Στατιστικός σχεδιασμός γεωμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου

Το γεωμετρικό διάγραμμα ελέγχου (G -διάγραμμα) όπως έχει αναφερθεί αποτελείται από σημεία που ακολουθούν τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p , δηλαδή

$$P(X_i = k) = (1-p)^k p, \quad k=0,1,2,\dots$$

Ένα σήμα εκτός ελέγχου παράγεται όταν το X_i ξεφύγει των ορίων ελέγχου δηλαδή όταν $X_i < L$ ή $X_i > U$. Υποθέτοντας ότι το $p = \rho p_0$, όπου p_0 με $0 < p_0 < 1$ είναι η τιμή στόχος που θεωρείται γνωστή, και $0 < \rho < 1/p_0$ μία άγνωστη σταθερά. Αν $\rho=1$ τότε η διεργασία είναι εντός ελέγχου, σε αντίθετη περίπτωση είναι εκτός ελέγχου. Δεδομένου ότι $E(X_i) = 1/p - 1 = 1/(\rho p_0) - 1$, υπερβαίνοντας το άνω όριο ελέγχου παρατηρούμε ότι $\rho < 1$ και υπερβαίνοντας το κάτω όριο ελέγχου τότε $\rho > 1$. Ο σκοπός του στατιστικού σχεδιασμού

είναι να βρεθούν οι τιμές των ορίων ελέγχου U και L ώστε το G -διάγραμμα να ικανοποιεί τα παρακάτω κριτήρια :

(C1) όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, το μέσο μήκος ροής (ARL) του G -διαγράμματος να είναι ίσο (ή σχεδόν ίσο) με μία προκαθορισμένη τιμή και

(C2) αν η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, το ARL πρέπει να είναι μικρό.

Ο πιο συνηθισμένος τρόπος εύρεσης των L και U ορίων ελέγχου γίνεται με τη χρήση των ορίων πιθανότητας. Δηλαδή για δοσμένη πιθανότητα λανθασμένου συναγερού α , το L είναι η ακέραια λύση της εξίσωσης

$$P_l(L) = \sum_{k=0}^{L-1} (1-p_0)^k p_0 = 1 - (1-p_0)^L \quad (2.11)$$

όταν αυτή είναι πολύ κοντά στο $\alpha/2$, και το U είναι η ακέραια λύση της εξίσωσης

$$P_r(U) = \sum_{k=U+1}^{\infty} (1-p_0)^k p_0 = (1-p_0)^{U+1}$$

όταν αυτή είναι πολύ κοντά στο $\alpha/2$. Αφού τα L και U πρέπει να είναι ακέραιοι ο παραπάνω σχεδιασμός καταφεύγει σε δύο προσεγγίσεις των για τον καθορισμό του ARL .

Ο σχεδιασμός των ορίων πιθανότητας εμπλέκει μερικώς το πρώτο κριτήριο (C1) και αγνοεί το δεύτερο (C2). Από στατιστικής άποψης ο σχεδιασμός αυτός δεν προτιμάται. Ένας εναλλακτικός σχεδιασμός των ορίων για τα G -διαγράμματα ελέγχου προτείνεται από τους Zhang, Govindaraju, Bebbington & Lai (2004). Ο σχεδιασμός αυτός καλείται ARL -αμερόληπτος (ARL -unbiased) σχεδιασμός και διασφαλίζει στην ARL καμπύλη ύπαρξη μέγιστου στην τιμή στόχο.

Στον σχεδιασμό των ορίων πιθανότητας εφαρμόστηκαν δύο προσεγγίσεις. Προφανώς αν μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο μία προσέγγιση θα έχουμε πιο ακριβή εντός ελέγχου ARL . Αυτό μπορεί να επιτευχθεί ακολουθώντας μια διαδικασία δύο βημάτων που έχει ως εξής : Πρώτον βρίσκουμε όλους τους πιθανούς σχεδιασμούς (L,U) και δεύτερον επιλέγουμε τον καλύτερο σχεδιασμό, σύμφωνα με ένα κριτήριο το οποίο θα ονομάζεται νέα όρια πιθανότητας. Έστω $INT(x)$ το ακέραιο μέρος του x . Στο πρώτο βήμα, $L \in A = \{1,2,\dots,L_{\max}\}$ όπου

$$L_{\max} = INT(\ln(1-\alpha)/\ln(1-p_0)). \quad (2.12)$$

Το όρισμα του $INT(\cdot)$ εξάγεται θέτοντας $P_l(L) = a$ στην (2.11). Για $L \in A$, μπορούμε να βρούμε αντίστοιχη τιμή του U ώστε η πιθανότητα

$$1 - [P_l(L) + P_r(U)] = (1 - p_0)^L - (1 - p_0)^{U+1}$$

να είναι πολύ κοντά στο $1-a$. Τα ζευγάρια (L, U) απαρτίζουν ένα σύνολο, έστω C , των πιθανών σχεδιασμών. Στο δεύτερο βήμα επιλέγουμε το ζευγάρι $(L^*, U^*) \in C$ έτσι ώστε

$$|P_l(L^*) - P_r(U^*)| = \min_{(L, U) \in C} |P_l(L) - P_r(U)|.$$

Κάποια αριθμητικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα. Είναι φανερό ότι ο σχεδιασμός των νέων ορίων πιθανότητας βελτιώνει τον σχεδιασμό των ορίων πιθανότητας αφού το εντός ελέγχου ARL πλησιάζει περισσότερο την προκαθορισμένη τιμή.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2-12

(L, U) και (L^*, U^*) σχεδιασμοί για $ARL_0 = 200$.

p_0	L	U	ARL_0	L^*	U^*	ARL_0
0,00001	250	599142	200,1240	250	599018	199,9999
0,0001	25	59911	200,1235	25	59899	200,0033
0,001	3	5987	181,8786	3	6209	199,9998

Το σύνολο C περιέχει σχεδιασμούς ώστε για κάθε L , το ARL να βρίσκεται όσο το δυνατόν πιο κοντά στο εντός ελέγχου ARL , $ARL_0 = 1/a$. Οι σχεδιασμοί αυτοί με λίγα λόγια ικανοποιούν το κριτήριο (C1). Στη συνέχεια θα εξεταστεί το πρόβλημα επιλογής σχεδιασμού από το C ώστε να ικανοποιείται και το άλλο κριτήριο (C2).

Θυμίζουμε ότι $p = \rho p_0$ όπου, αν $\rho=1$ η διεργασία είναι εντός ελέγχου, αλλιώς η διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Το μέσο μήκος ροής $ARL(\rho)$ είναι συνεπώς μια συνάρτηση του ρ με παραμέτρους το L και U , όπου $0 < \rho < 1/p_0$. Το εντός ελέγχου ARL είναι το $ARL(1)$,

και το $ARL(\rho)$, για $\rho \neq 1$, είναι το εκτός ελέγχου ARL . Ένας σχεδιασμός (L, U) ονομάζεται ARL -αμερόληπτος αν :

- (i) $(L, U) \in C$, όπως έχει οριστεί προηγουμένως
- (ii) $ARL(1) > ARL(\rho)$, για κάθε $0 < \rho < 1/p_0$ και $\rho \neq 1$.

Μπορεί να δειχθεί ότι για $(L, U) \in C$ και

$$r^* = [1 - \left(\frac{L}{1+U}\right)^{1/(U-L+1)}] / p_0$$

το $ARL(\rho)$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες :

- (i) το $ARL(\rho)$ είναι αύξουσα συνάρτηση για $\rho < \rho^*$
- (ii) το $ARL(\rho)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση για $\rho > \rho^*$ και
- (iii) το $ARL(\rho)$ πετυχαίνει μέγιστο στο ρ^* .

Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν $(L, U) \in C$, και το ρ^* είναι ίσο με 1, τότε το ζευγάρι (L, U) είναι ARL -αμερόληπτος σχεδιασμός. Πάντως αφού τα L και U είναι ακέραιοι, το ρ^* συνήθως δεν είναι 1, και γι' αυτό ένας ARL -αμερόληπτος σχεδιασμός για το G -διάγραμμα συνήθως δεν υπάρχει. Αφού το σύνολο C περιέχει μόνο L_{\max} (όπως έχει οριστεί στην (2.7)) ζευγάρια (L, U) , μπορούμε να επιλέξουμε το ζευγάρι $(L, U) \in C$ με ρ^* όσο πιο κοντά στη μονάδα. Ένα τέτοιο ζευγάρι ονομάζεται σχεδόν ARL -αμερόληπτος σχεδιασμός. Ο παρακάτω πίνακας περιέχει κάποιες αριθμητικές τιμές για σχεδόν ARL -αμερόληπτους σχεδιασμούς.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2-13

Σχεδόν ARL -αμερόληπτοι σχεδιασμοί (L, U) για $ARL_0 = 200$.

p_0	L	U	ρ^*	ARL_0
0,00001	442	743580	0,9995285	200,0001
0,0001	44	74025	1,0039750	200,0003
0,001	4	6897	1,0804563	199,9869

Το σύνολο C που ορίστηκε προηγουμένως περιέχει τους σχεδιασμούς (L, U) όπου για κάθε L , το εντός ελέγχου ARL είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στο προκαθορισμένο εντός ελέγχου

ARL. Έτσι σύμφωνα με το κριτήριο (C2), η απόδοση του διαγράμματος προσδιορίζεται από τα εκτός ελέγχου *ARL*.

Μπορεί να δειχθεί ότι αν $(L_1, U_1) \in C$ και $(L_2, U_2) \in C$, με $ARL(\rho; L_1, U_1)$ να δηλώνει το *ARL* του σχεδιασμού (L_1, U_1) , και $ARL(\rho; L_2, U_2)$ να δηλώνει το *ARL* του σχεδιασμού (L_2, U_2) , τότε για $L_1 < L_2$

$$ARL(\rho; L_1, U_1) < ARL(\rho; L_2, U_2), \text{ για } 0 < \rho < 1$$

και

$$ARL(\rho; L_1, U_1) > ARL(\rho; L_2, U_2), \text{ για } 1 < \rho < 1/p_0.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι δεν υπάρχει σχεδιασμός που να παρέχει *G*-διάγραμμα με σταθερά μικρότερο εκτός ελέγχου *ARL* από οποιοδήποτε άλλο *G*-διάγραμμα. Αν $(L, U) \in C$, τότε μια μικρή τιμή του *L* κάνει το διάγραμμα ευαίσθητο σε μείωση της τιμής του *p*, ενώ μεγάλο *L* κάνει το διάγραμμα ευαίσθητο σε αύξηση της τιμής του *p*. Έτσι, όταν αναφερόμαστε σε ένα κατάλληλο σχεδιασμό που δίνει στο διάγραμμα το προκαθορισμένο εντός ελέγχου *ARL* και δίνει σταθερά μικρότερο εκτός ελέγχου *ARL* από τα άλλα διαγράμματα, τότε ένας τέτοιος σχεδιασμός δεν υφίσταται. Γι' αυτό, χρειάζεται να αντικαταστήσουμε το κριτήριο (C2) με ένα εναλλακτικό, πιο ασθενές κριτήριο. Το κριτήριο που προτάθηκε από τους Zhag, Govindaraju, Bebbington & Lai (2004) είναι το ακόλουθο :

(C2') Κατάλληλος σχεδιασμός είναι αυτός που ελαχιστοποιεί την ποσότητα

$$ARL(1-\varepsilon_1; L, U) + ARL(1+\varepsilon_2; L, U)$$

ανάμεσα στα $(L, U) \in C$.

Οι παράμετροι ε_1 και ε_2 είναι τα ποσοστά μείωσης και αύξησης, αντιστοίχως, από την τιμή στόχο p_0 οι οποίοι θεωρούνται σημαντικοί στην παρακολούθηση της διεργασίας και οι οποίοι καθορίζονται από τους χρήστες. Στην συνηθισμένη περίπτωση όπου το p_0 είναι πολύ μικρό, είναι λογικό να έχουμε $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,5$. Στην πράξη, η ανίχνευση της επιδείνωσης της διεργασίας έχει περισσότερο ενδιαφέρον από την βελτίωση αυτής. Λαμβάνοντας υπόψη το προηγούμενο αρκεί να θέσουμε $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Προσπαθούμε να χαμηλώσουμε την *ARL* καμπύλη από τα επιλεγμένα σημεία, $(1-\varepsilon_1, ARL(1-\varepsilon_2))$ και $(1+\varepsilon_2, ARL(1+\varepsilon_1))$, και καλούμε το κριτήριο αυτό ως κριτήριο δύο σημείων (*TPC two points criterion*).

Στον Πίνακα 2-14 παρουσιάζονται κατάλληλοι *TPC* σχεδιασμοί για p_0 και $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,5$. Συγκρίνοντας τους Πίνακες 2-13 και 2-14, παρατηρούμε ότι ο κατάλληλος *TPC* σχεδιασμός συμπίπτει με τον σχεδόν *ARL*-αμερόληπτο σχεδιασμό για $p_0 = 0,001$. Αυτό γενικά συμβαίνει για σχετικά μεγάλο p_0 .

Πίνακας 2-14

Κατάλληλοι *TPC* σχεδιασμοί (L, U) για p_0 , $ARL_0 = 1/0,005 = 200$.

p_0	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$	L	U	ARL_0
0,00001	0,5	447	752398	200,0000
0,0001	0,5	45	75808	199,9991
0,001	0,5	4	6897	199,9869

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Διαγράμματα Ελέγχου CCC και CCC-r.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

3.1 Εισαγωγή

Τα παραδοσιακά διαγράμματα ελέγχου για διακριτά χαρακτηριστικά (όπως τα p και np), είναι βασισμένα στην παρακολούθηση των ελαττωματικών προϊόντων ή του ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων σε δείγματα σταθερού μεγέθους. Τα διαγράμματα αυτά είναι αναποτελεσματικά για την παρακολούθηση υψηλής ποιότητας διεργασιών με χαμηλό ποσοστό ελαττωματικών προϊόντων. Για παράδειγμα η χρήση των n και np διαγραμμάτων ελέγχου έχει ως αποτέλεσμα υψηλά ποσοστά λανθασμένων συναγερμών και μειωμένη ικανότητα στην ανίχνευση βελτίωσης στην παραγωγική διεργασία.

Οι παραπάνω αδυναμίες οδήγησαν σε μια νέα τεχνική παρακολούθησης της διεργασίας που βασίζεται στο συνολικό αριθμό των μη ελαττωματικών προϊόντων ανάμεσα σε δύο ελαττωματικά προϊόντα. Αυτού του τύπου τα διαγράμματα (CCC διαγράμματα) καθώς και μια παραλλαγή τους ($CCC-r$ διαγράμματα), αναπτύχθηκαν κυρίως για υψηλής απόδοσης διεργασίες όπου το ποσοστό ελαττωματικών προϊόντων είναι πολύ χαμηλό, και η χρήση τους αποδείχτηκε ικανοποιητική.

Κάτω από κάποιες συνθήκες τα προηγούμενα CCC και $CCC-r$ διαγράμματα τροποποιούνται κατάλληλα. Η επίδραση για παράδειγμα της συσχέτισης στο ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων οδήγησε στην ανάπτυξη του μοντέλου συσχέτισης. Ο υπό συνθήκη κανόνας ανακήρυξης εντός ελέγχου της διεργασίας προέκυψε από την ενσωμάτωση κάποιων κανόνων ροής στα CCC διαγράμματα. Τέλος η υπόθεση ότι στην πράξη η επιθεώρηση γίνεται υπό την παρουσία κάποιων σφαλμάτων οδήγησε στα αντίστοιχα βέλτιστα όρια ελέγχου.

3.2 Αδυναμίες των διαγραμμάτων ελέγχου n και np .

Πολλές διαδικασίες παραγωγής έχουν μπει πια σε περίοδο όπου η αυτοματοποιημένη και συνεχής επιθεώρηση εκπληρώνεται σε μεγάλο βαθμό με τη βοήθεια σύγχρονων μέσων επιθεώρησης και ηλεκτρονικών υπολογιστών. Αυτή η αξιοσημείωτη αλλαγή στην βιομηχανία επέφερε δυσκολίες στην εφαρμογή των παραδοσιακών διαγραμμάτων ελέγχου όπως θα φανεί παρακάτω.

Ένας από τους πιο βασικούς παράγοντες στον σχεδιασμό ενός συνηθισμένου διαγράμματος Shewhart για διακριτά χαρακτηριστικά είναι η εκλογή του μεγέθους δείγματος. Παρόλο που έχουν προταθεί τιμές για το μέγεθος δείγματος, η πραγματική επιλογή αποφασίζεται υποκειμενικά από τους χρήστες των εργαλείων των διαγραμμάτων παρά από τις εσωτερικές ιδιότητες της διαδικασίας που βρίσκεται υπό παρακολούθηση. Όταν ένα σταθερό μέγεθος δείγματος χρειάζεται για τον σχεδιασμό ενός σημείου, αποφάσεις δεν μπορούν να παρθούν προτού ένας προκαθορισμένος αριθμός προϊόντων σε ένα δείγμα έχει παραχθεί και επιθεωρηθεί. Έτσι ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων ενδέχεται να είναι μεγάλος όσο το μέγεθος του δείγματος μεγαλώνει, γεγονός βεβαίως ανεπιθύμητο, το οποίο πρέπει να αποφευχθεί.

Είναι γνωστό ότι το κάτω όριο ελέγχου LCL παίρνει την τιμή μηδέν όταν ο τύπος υπολογισμού του δίνει αρνητική τιμή. Αυτό σημαίνει ότι το διάγραμμα ελέγχου δεν μπορεί να δώσει ένδειξη βελτίωσης της διαδικασίας αφού κανένα σημείο δεν μπορεί να βρεθεί κάτω από το LCL . Το LCL είναι μη αρνητικό μόνο όταν το μέγεθος δείγματος είναι πολύ μεγάλο. Για ποσοστό ελαττωματικών $p=0,0001$ το μέγεθος δείγματος n πρέπει να είναι μεγαλύτερο του 10000 ώστε να ισχύει $LCL > 0$. Επίσης, ένα μεγάλο μέγεθος δείγματος επιδεινώνει το πρόβλημα μιας εκτεταμένης εκτός ελέγχου κατάστασης.

Όταν η τιμή του p είναι πολύ μικρή το άνω όριο ελέγχου UCL για ένα np διάγραμμα μπορεί να είναι μικρότερο του ένα, ενώ το άνω όριο ελέγχου για το p διάγραμμα είναι μικρότερο του $1/n$. Σε αυτή την περίπτωση με τον εντοπισμό ενός ελαττωματικού προϊόντος το διάγραμμα θα δώσει σήμα εκτός ελέγχου. Έτσι η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού είναι πολύ υψηλότερη με τη χρήση 3-σ ορίων σε σχέση με το προκαθορισμένο επίπεδο.

Όταν το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων p είναι χαμηλό και το μέγεθος δείγματος όχι πολύ μεγάλο, η κανονική προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής δεν ισχύει,

παρόλο που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των 3-σ ορίων. Έτσι η πιθανότητα ενός σημείου, ενός p ή ενός np διαγράμματος, να εμφανιστεί εκτός των 3-σ ορίων απέχει μακράν από την επιθυμητή τιμή 0,00135.

Σε ένα p ή np διάγραμμα, οι ενδείξεις εκτός ελέγχου εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από την επιλογή του μεγέθους δείγματος. Με τα ίδια δεδομένα, μια συγκεκριμένη τιμή του μεγέθους του δείγματος μπορεί να οδηγήσει σε συχνή εμφάνιση ενδείξεων εκτός ελέγχου, ενώ ένα ελαφρώς μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος μπορεί να οδηγήσει σε σπάνια εμφάνιση ενδείξεων εκτός ελέγχου. Για παράδειγμα, έστω ότι 8160 προϊόντα έχουν επιθεωρηθεί, και τα προϊόντα στις ακόλουθες 48 θέσεις της ακολουθίας έχουν βρεθεί ελαττωματικά : 113, 218, 282, 505, 664, 792, 963, 1110, 1184, 1341, 1547, 1733, 1808, 1861, 2030, 2186, 2337, 2569, 2704, 2889, 3063, 3263, 3373, 3433, 3559, 3809, 4021, 4206, 4472, 4517, 4833, 5032, 5325, 5375, 5553, 5729, 5988, 6338, 6424, 6692, 6996, 7201, 7314, 7578, 7703, 7879, 7963. Το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων εκτιμώμενο από τα δεδομένα είναι $p = 48/8160 = 0,00588$. Αν επιλέξουμε μέγεθος δείγματος $n=15$, το UCL του np διαγράμματος είναι $np + 3\sqrt{np(1-p)} = 0,979 < 1$, και σε αυτή τη περίπτωση σε κάθε ένα από τα 48 ελαττωματικά προϊόντα έχουμε ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Επιλέγοντας μέγεθος δείγματος $n = 16$ έχουμε $UCL = 1,014 > 1$, γεγονός που σημαίνει ότι μόνο με την εμφάνιση δύο ή περισσότερων ελαττωματικών σε ένα μέγεθος δείγματος 16 είναι σήμα εκτός ελέγχου. Αυτό βέβαια δε συμβαίνει στη προκειμένη περίπτωση αφού ανάμεσα στα παραπάνω 48 ελαττωματικά προϊόντα παρεμβάλλονται μη ελαττωματικά των οποίων το πλήθος ξεπερνά την τιμή 16 του μεγέθους δείγματος.

3.3 CCC διαγράμματα ελέγχου

Η υψηλή ποιότητα στις διαδικασίες παραγωγής είναι πια γεγονός. Τα παραδοσιακά διαγράμματα Shewhart δεν μπορούν να ανταποκριθούν σε αυτή την εξέλιξη μιας και η χρήση τους οδηγεί σε προβλήματα, όπως μεγάλη πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού ή αδυναμία εντοπισμού βελτίωσης της διαδικασίας.

Έτσι αναπτύχθηκε ένας νέος τύπος διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση της διαδικασίας βασισμένος στον συσσωρευμένο αριθμό των μη ελαττωματικών προϊόντων

(*Cumulative Count of Conforming CCC*) ανάμεσα σε δύο ελαττωματικά προϊόντα. Τα διαγράμματα αυτά προτάθηκαν από τους Xie και Goh (1997). Η βασική ιδέα είναι αντί να επικεντρωθούμε στον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων να καταμετρηθούν τα συνεχόμενα μη ελαττωματικά προϊόντα. Ο αριθμός (N) αυτός παίρνει τιμές με πιθανότητα η οποία διέπεται από την γεωμετρική κατανομή και τα όρια ελέγχου προκύπτουν σύμφωνα με αυτή την πιθανότητα.

Έτσι στο *CCC* διάγραμμα ελέγχου η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου προσδιορίζονται από την γεωμετρική κατανομή. Υποθέτοντας ότι η διαδικασία παραγωγής έχει ποσοστό ελαττωματικών προϊόντων p , κατά την επιθεώρηση, η πιθανότητα να είναι το n -οστό προϊόν το πρώτο ελαττωματικό προϊόν που θα εντοπιστεί είναι ίση με

$$P(N = n) = g(n) = (1 - p)^{n-1} p, \quad n = 1, 2, \dots$$

Συνεπώς το N ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με μέση τιμή $1/p$. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής δίνεται από τον τύπο

$$F(n) = \sum_{i=1}^n p(1-p)^{i-1} = 1 - (1-p)^n \quad (3.1)$$

Έστω α η αποδεκτή πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού. Τότε από την εξίσωση (3.1) για τις τιμές $1 - \alpha/2$ και $\alpha/2$ προκύπτει το κάτω και το άνω όριο ελέγχου αντιστοίχως. Έτσι

$$LCL = \frac{\ln(1 - \alpha/2)}{\ln(1 - p)}$$

και

$$UCL = \frac{\ln(\alpha/2)}{\ln(1 - p)}$$

Το μέσο μήκος ροής (*ARL average run length*) είναι ένα γνωστό μέτρο αποτίμησης της απόδοσης του διαγράμματος και γενικά ορίζεται ως ο μέσος αριθμός σημείων που χρειάζεται να σχεδιαστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου μέχρι να εμφανιστεί σημείο που να σημάνει ένδειξη για κατάσταση εκτός ελέγχου. Ένα καλό διάγραμμα ελέγχου πρέπει να έχει μεγάλη τιμή *ARL* όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου και μικρό *ARL* όταν η διεργασία

μετατοπίζεται του στόχο. Η τιμή του στην περίπτωση του CCC διαγράμματος δίνεται από τον τύπο

$$ARL = \frac{1}{1 + (1 - p)^{UCL} - (1 - p)^{LCL}}$$

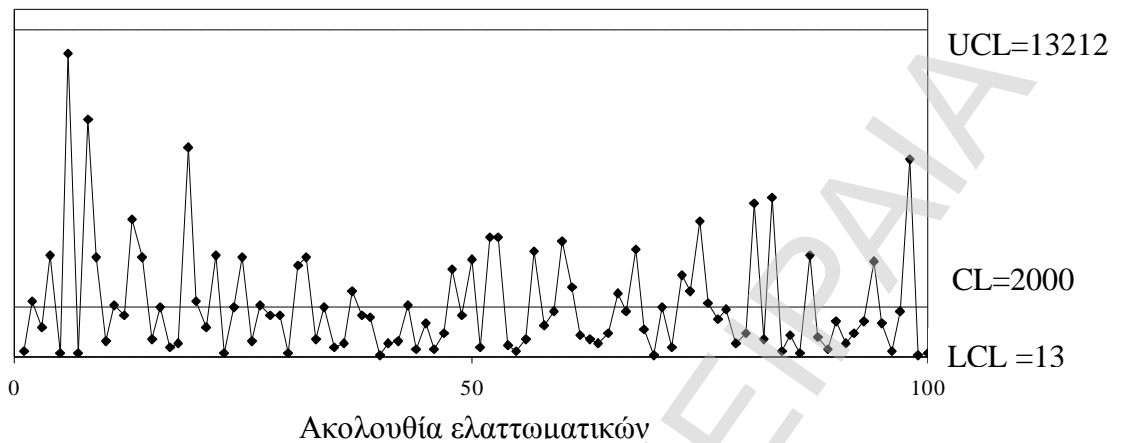
Ένα σύνολο CCC δεδομένων παρουσιάζεται στον ακόλουθο Πίνακα 3-1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3-1

Ακολουθία μη ελαττωματικών προϊόντων για $p = 500$ ppm.

A/A	CCC	A/A	CCC	A/A	CCC	A/A	CCC
1	227	26	678	51	409	76	2196
2	2269	27	2088	52	4845	77	1494
3	1193	28	1720	53	4809	78	1906
4	4106	29	1656	54	504	79	548
5	154	30	201	55	257	80	987
6	12198	31	3705	56	702	81	6216
7	201	32	4042	57	4298	82	704
8	9612	33	716	58	1320	83	6477
9	4045	34	2010	59	1845	84	233
10	678	35	402	60	4641	85	855
11	2088	36	539	61	2815	86	188
12	1720	37	2665	62	903	87	4133
13	5562	38	1711	63	755	88	780
14	4042	39	1602	64	565	89	315
15	716	40	71	65	973	90	1425
16	2010	41	546	66	2555	91	580
17	402	42	655	67	1822	92	957
18	539	43	2065	68	4324	93	1443
19	8465	44	286	69	1140	94	3880
20	2269	45	1385	70	109	95	1357
21	1193	46	354	71	1981	96	234
22	4106	47	934	72	387	97	1836
23	154	48	3539	73	3268	98	7984
24	2011	49	1671	74	2666	99	110
25	4045	50	3955	75	5498	100	128

Στο ακόλουθο Σχήμα 3-1 απεικονίζεται το αντίστοιχο CCC διάγραμμα ελέγχου.



Σχήμα 3-1. CCC διάγραμμα των δεδομένων του Πίνακα 3-1.

Όπως φαίνεται στην περίπτωση αυτή, όλα τα σημεία βρίσκονται ανάμεσα στα όρια ελέγχου και η διεργασία είναι εντός ελέγχου.

3.4 CCC-r διαγράμματα ελέγχου.

Μία επέκταση των CCC διαγραμμάτων είναι τα CCC-r διαγράμματα τα οποία παρακολουθούν το συσσωρευμένο αριθμό των μη ελαττωματικών προϊόντων που παράγονται μέχρι την εμφάνιση r ελαττωματικών. Ο συσσωρευμένος αριθμός των μη ελαττωματικών προϊόντων μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα r ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την γεωμετρική κατανομή. Υποθέτοντας ότι η πιθανότητα να βρεθεί ελαττωματικό προϊόν είναι p_0 και X ο συσσωρευμένος αριθμός των προϊόντων που επιθεωρούνται ώσπου να παρατηρηθεί το r -οστό ελαττωματικό προϊόν, τότε το X ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή με παραμέτρους (r, p_0) , με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1} (1-p_0)^{x-r} p_0^r, \quad x = r, r+1, \dots$$

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της X γράφεται ως εξής

$$F(x) = \sum_{i=r}^x \binom{i-1}{r-1} (1-p_0)^{i-r} p_0^r$$

Για $r=1$ η παραπάνω κατανομή ανάγεται στη γεωμετρική κατανομή. Για $r=2$ ο τύπος της $F(x)$ έχει ως εξής

$$F(x) = 1 + (x-1)(1-p_0)^x - x(1-p_0)^{x-1}.$$

Όταν το r παίρνει τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του 3 η $F(x)$ έχει πιο σύνθετη έκφραση, η οποία όμως μπορεί εύκολα να υπολογιστεί με τυπικά υπολογιστικά προγράμματα.

Για α ίσο με το αποδεκτό ρίσκο λανθασμένου συναγερομού τα όρια ελέγχου του CCC-r διαγράμματος ικανοποιούν τις σχέσεις :

$$\text{Άνω όριο ελέγχου } (UCL_r) : F(UCL_r) = \sum_{i=r}^{UCL_r} \binom{i-1}{r-1} p_0^r (1-p_0)^{i-r} = 1 - \alpha/2$$

$$\text{Κεντρική γραμμή } (CL_r) : F(CL_r) = \sum_{i=r}^{CL_r} \binom{i-1}{r-1} p_0^r (1-p_0)^{i-r} = 0,5$$

$$\text{Κάτω όριο ελέγχου } (LCL_r) : F(LCL_r) = \sum_{i=r}^{LCL_r} \binom{i-1}{r-1} p_0^r (1-p_0)^{i-r} = \alpha/2$$

Οι παραπάνω εξισώσεις λύνονται με τη βοήθεια υπολογιστικών προγραμμάτων. Κάποιες τιμές των ορίων ελέγχου ενός CCC-r διαγράμματος χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εξισώσεις υπολογισμένες για πιθανότητα λανθασμένου συναγερομού $\alpha = 0,0027$ δίνονται στους κάτωθι Πίνακες 3-2 και 3-3 :

ΠΙΝΑΚΑΣ 3-2

Όρια ελέγχου για τα διαγράμματα ελέγχου CCC-1 , CCC-2.

<i>p</i>	CCC-1			CCC-2		
	<i>UCL</i>	<i>CL</i>	<i>LCL</i>	<i>UCL</i>	<i>CL</i>	<i>LCL</i>
0,0001	66074	6932	13	91895	16786	530
0,0002	33035	3466	7	43522	8391	265
0,0003	22023	2311	5	29487	5594	177
0,0004	16516	1733	4	22316	4196	133
0,0005	13212	1386	3	17953	3357	107
0,0006	11010	1155	3	14744	2797	89
0,0007	9437	990	2	12699	2398	77
0,0008	8257	867	2	11158	2098	67
0,0009	7339	770	2	9831	1865	60
0,001	6605	693	2	8876	1678	54
0,002	3301	347	1	4436	839	27
0,003	2200	231	1	2968	560	19
0,004	1649	173	1	2222	420	14
0,005	1319	139	1	1776	336	12
0,006	1098	116	1	1479	280	10
0,007	941	99	1	1269	240	9
0,008	823	87	1	1110	210	8
0,009	731	77	1	986	187	7
0,01	658	69	1	886	168	6
0,02	328	35	1	441	84	4
0,03	217	23	1	293	56	3
0,04	162	17	1	219	42	2
0,05	129	14	1	175	34	2

ΠΙΝΑΚΑΣ 3-3

Όρια ελέγχου για τα διαγράμματα ελέγχου CCC-3 , CCC-4.

CCC-3				CCC-4			
<i>p</i>	<i>UCL</i>	<i>CL</i>	<i>LCL</i>	<i>p</i>	<i>UCL</i>	<i>CL</i>	<i>LCL</i>
0,0001	114341	26746	2118	0,0002	61309	18357	2328
0,0002	52817	13368	1060	0,0004	31872	9181	1165
0,0003	35959	8913	707	0,0006	20936	6120	777
0,0004	27284	6685	531	0,0008	15930	4590	583
0,0005	21990	5349	425	0,0010	12628	3672	467
0,0006	17973	4457	354	0,0020	6312	1836	234
0,0007	15505	3820	304	0,0030	4231	1224	157
0,0008	13640	3343	266	0,0040	3168	918	118
0,0009	11982	2971	237	0,0050	2528	735	95

0,001	10833	2674	213	0,0060	2107	612	79
0,002	5414	1337	107	0,0070	1809	525	68
0,003	3626	892	72	0,0080	1582	459	60
0,004	2715	669	54	0,0090	1405	408	53
0,005	2169	535	44	0,0100	1263	367	48
0,006	1806	446	37	0,0200	630.	184	25
0,007	1550	382	32	0,0300	418	123	17
0,008	1355	334	28	0,0400	313	92	13
0,009	1204	297	25	0,0500	249	74	11
0,01	1083	268	23	0,0600	207	61	10
0,02	539	134	12	0,0700	177	53	9
0,03	358	89	9	0,0800	154	46	8
0,04	268	67	7	0,0900	136	41	7
0,05	213	54	6	0,1000	122	37	7

Η επιλογή του r σε ένα $CCC-r$ διάγραμμα θεωρείται σημαντική. Όσο το r είναι μικρό η επιλογή του είναι ευκολότερη. Τα όρια ελέγχου ενός $CCC-r$ διαγράμματος διευρύνονται πολύ γρήγορα καθώς το ποσοστό p των ελαττωματικών προϊόντων πλησιάζει στο μηδέν. Έτσι τα όρια ελέγχου ενός μεγάλου r είναι πολύ μεγαλύτερα από εκείνα ενός μικρού r για το ίδιο επίπεδο p . Συνήθως στις περισσότερες περιπτώσεις η τιμή του r είναι από 2 έως 5. Όταν η τιμή του p είναι πολύ μικρή, η τιμή της κεντρικής γραμμής, η οποία δείχνει το μέσο όρο επιθεωρημένων προϊόντων ώσπου να απεικονιστεί ένα σημείο στο διάγραμμα ελέγχου, είναι μεγάλη. Τότε δεν είναι πρόσφορο να χρησιμοποιηθεί $CCC-r$ διάγραμμα με μεγάλη τιμή r . Έτσι για $p < 0,0001$ είναι προτιμότερη η χρήση του $CCC-1$ διαγράμματος το οποίο ταυτίζεται με το CCC διάγραμμα.

Θα πρέπει να αναφερθεί ότι η διαδικασία για τη λήψη απόφασης είναι διαφορετική από αυτή των παραδοσιακών p και np διαγραμμάτων. Στο $CCC-r$ διάγραμμα ελέγχου, εάν ένα σημείο εμφανίζεται άνωθεν του άνω ορίου ελέγχου, τότε η διεργασία θεωρείται ότι έχει βελτιωθεί, ενώ αν ένα σημείο βρίσκεται κάτωθι του κάτω ορίου ελέγχου, τότε η διεργασία θεωρείται ότι έχει επιδεινωθεί. Τα παραπάνω έρχονται σε αντίθεση με όσα συμβαίνουν στα παραδοσιακά n και np διαγράμματα. Αυτό αποτελεί πλεονέκτημα αφού μπορεί κανείς να εστιάσει στην βελτίωση της διεργασίας. Έτσι το $CCC-r$ διάγραμμα δίνει την ευκαιρία στον χρήστη να εντοπίσει το επίπεδο βελτίωσης.

Για την κατανόηση της χρήσης των $CCC-r$ διαγραμμάτων, ένα σύνολο προσομοιωμένων δεδομένων, το οποίο καταγράφει τον αθροιστικό αριθμό προϊόντων που επιθεωρούνται ώσπου να εμφανιστεί ένα ελαττωματικό, συνοψίζονται στον Πίνακα 3-4. Τα

πρώτα 30 σημεία έχουν παραχθεί με ποσοστό ελαττωματικών $p=0,05$, τα επόμενα με $p=0,025$ και τα τελευταία με $p=0,10$.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3-4

Σύνολο γεωμετρικά κατανεμημένων δεδομένων με ποσοστό ελαττωματικών p ίσο με 0,05 για τα πρώτα 30, 0,025 για τα επόμενα 30 και 0,10 για τα τελευταία 30.

1	27	6	11	4	61	1	10	3	19
81	11	14	35	31	32	48	19	21	39
12	3	25	3	30	60	7	3	67	3
2	54	11	23	7	124	1	21	5	39
164	22	29	71	62	65	96	37	42	78
23	5	49	5	59	122	14	6	136	5
30	13	3	1	2	1	6	40	2	10
5	16	7	17	15	6	23	9	11	19
6	2	12	2	15	30	4	2	33	2

Θα χρησιμοποιήσουμε το CCC-3 διάγραμμα. Τα πρώτα 30 δεδομένα προέρχονται από μια εντός ελέγχου διεργασία όπου το ποσοστό ελαττωματικών θεωρείται ίσο με $p_0 = 0,05$. Από τον Πίνακα 3-3, τα όρια ελέγχου του CCC-3 διαγράμματος για τη συνηθισμένη πιθανότητα λανθασμένου συναγερού $\alpha = 0,0027$ είναι τα ακόλουθα

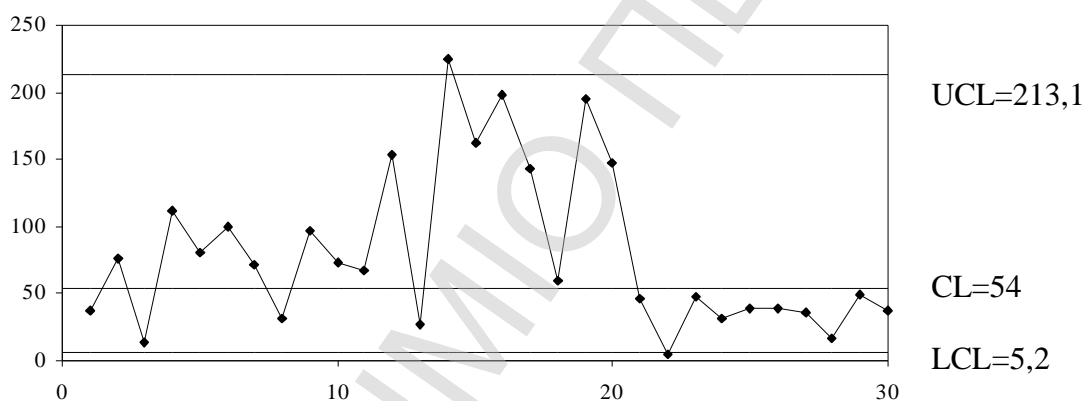
$$UCL_3 = 213, \quad CL_3 = 54 \quad \text{και} \quad LCL_3 = 6.$$

Ο Πίνακας 3-4 μετατρέπεται τώρα στον Πίνακα 3-5, όπου θεωρούμε το συσσωρευμένο αριθμό προϊόντων που έχουν επιθεωρηθεί ανάμεσα σε κάθε τρία ελαττωματικά προϊόντα. Στο Σχήμα 3-2 απεικονίζεται το CCC-3 διάγραμμα ελέγχου.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3-5

Συσσωρευμένος αριθμός παραγόμενων προϊόντων μέχρι την εμφάνιση τριών ελαττωματικών προϊόντων.

34	76	14	111	80	99	72	31	97	73
67	154	27	225	162	198	143	59	195	147
46	4	48	31	39	38	36	16	49	37



Σχήμα 3-2. Το CCC-3 διάγραμμα των δεδομένων του Πίνακα 3.5.

Όπως φαίνεται καθαρά και από το διάγραμμα του Σχήματος 3-2, δεν πρέπει να υπάρχουν σημεία εκτός των ορίων ελέγχου πριν την επιθεώρηση 687 προϊόντων, γεγονός που συμφωνεί με το ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου για ποσοστό ελαττωματικών $p = 0,05$. Πάντως, ένα σημείο βρίσκεται άνωθεν του UCL όταν έχουν επιθεωρηθεί 1322 προϊόντα, και ένα άλλο σημείο βρίσκεται κάτωθεν του LCL όταν έχουν επιθεωρηθεί 2114 προϊόντα. Αυτό ανταποκρίνεται στο γεγονός ότι η ποιότητα της διεργασίας έχει βελτιώνεται από $p = 0,05$ σε $p = 0,025$ και μετά επιδεινώνεται σε $p = 0,1$.

Η χαρακτηριστική συνάρτηση (*operating characteristic OC function*) η οποία ορίζεται ως η πιθανότητα ο συσσωρευμένος αριθμός να βρεθεί ανάμεσα στα όρια ελέγχου, υπολογίζεται με τον τύπο

$$\beta = F(UCL_r) - F(LCL_r).$$

Η απόδοση ενός διαγράμματος ελέγχου αποτιμάται συνήθως από το μέσο μήκος ροής (ARL). Η ποσότητα ARL δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό των διαδοχικών σημείων (δειγμάτων) που πρέπει να σχεδιαστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου για να εμφανιστεί ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου. Όταν η διαδικασία είναι σε κανονικό επίπεδο ($p = p_0$) το ARL (εντός ελέγχου) πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μεγάλο. Αντιθέτως όταν η διαδικασία μετατοπίζεται σε ανεπιθύμητο επίπεδο ($p = p_1$) το ARL (εκτός ελέγχου) πρέπει να είναι μικρό. Το εκτός ελέγχου ARL ορίζεται ως

$$ARL = \frac{1}{(1 - b)}$$

ενώ το εντός ελέγχου ARL εκφράζεται ως

$$ARL = \frac{1}{a}$$

Τα $CCC-r$ διαγράμματα παρά τη χρησιμότητά τους παρουσιάζουν μια ανεπιθύμητη ιδιότητα. Το εκτός ελέγχου ARL ίσως αυξηθεί αρχικά όσο η διεργασία έχει επιδεινωθεί. Αυτό σημαίνει ότι θα χρειαστεί περισσότερος χρόνος για να σημάνει συναγερμός όταν η διεργασία έχει επιδεινωθεί παρά όταν είναι σε κανονικά επίπεδα. Για την αποφυγή τέτοιων καταστάσεων οι Sheng & Chen (2003) προτείνουν την εισαγωγή ενός προσαρμοσμένου συντελεστή. Ο συντελεστής αυτός τροποποιεί τα όρια ελέγχου έτσι ώστε αυτά να εξασφαλίζουν μέγιστο ARL όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Έτσι αυξάνεται η ευαισθησία των $CCC-r$ διαγραμμάτων. Ο παράγοντας αυτός ορίζεται ως:

$$k_r = \frac{\ln\left(\frac{LCL_r}{UCL_r}\right)^r}{(UCL_r - LCL_r) \ln(1 - p_0)}$$

Υποθέτοντας ότι το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων είναι $p_0 = 0,001$ και η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού $\alpha = 0,0027$, στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται

τα ARL για τα $CCC-r$ διαγράμματα και τα τροποποιημένα $CCC-r$ διαγράμματα με r από 2 έως 4.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3-6

Τιμές ARL για $CCC-r$ διαγράμματα και τα τροποποιημένα $CCC-r$ διαγράμματα με r από 2 έως 4.

p	$CCC-2$	$CCC-2_{mod}$	$CCC-3$	$CCC-3_{mod}$	$CCC-4$	$CCC-4_{mod}$
0,0008	241,350	302,650	279,450	307,930	254,360	274,590
0,00085	269,120	316,800	296,750	332,650	289,650	312,530
0,0009	276,980	347,910	309,770	362,170	302,470	351,060
0,00095	287,970	360,830	323,240	374,560	341,980	369,450
0,001	296,365	365,540	344,385	381,650	355,740	384,120
0,00105	318,380	358,240	362,780	379,980	365,620	375,460
0,00110	343,260	354,269	397,750	361,760	388,970	341,230
0,00115	375,170	333,451	405,680	354,485	384,241	306,510
0,00120	370,505	304,150	374,560	287,615	380,925	258,310
0,00125	367,980	294,150	328,825	257,270	328,730	213,940
0,00130	365,740	266,625	304,390	236,905	298,005	203,125

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των $CCC-r$ διαγραμμάτων και των τροποποιημένων $CCC-r$ διαγραμμάτων του πίνακα παρατηρούμε ότι το μέγιστο ARL για τα τροποποιημένα $CCC-r$ είναι για $p = p_0$.

3.5 Επίδραση της συσχέτισης στο ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων

Στον στατιστικό έλεγχο ποιότητας τα ποιοτικά χαρακτηριστικά ή η κατάσταση μιας μονάδας (ελαττωματική μη ελαττωματική) είναι συνήθως ανεξάρτητα. Δηλαδή υποθέτουμε ότι η διαδικασία παραγωγής συμπεριφέρεται ως ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων

δοκιμών Bernoulli. Σε πολλές περιπτώσεις, ιδίως στην αυτοματοποιημένη παραγωγή η υπόθεση αυτή φαντάζει μη ρεαλιστική. Έτσι κρίνεται απαραίτητη η μελέτη υψηλής ποιότητας διεργασιών σε συνθήκες συσχέτισης.

Ο Madsen (1993) θεώρησε αρκετά γενικευμένα διωνυμικά μοντέλα, ένα εκ των οποίων ονομάζεται το μοντέλο συσχέτισης. Το βασικό γνώρισμα αυτού του μοντέλου είναι η σειριακή συσχέτιση των δοκιμών Bernoulli. Με αυτή την υπόθεση εξάγουμε την κατανομή του μήκους ροής (RL) και το μέσο μήκος ροής (ARL) της ροής μη ελαττωματικών μονάδων. Βασίζομενοι σε αυτή την κατανομή εξάγουμε τα CCC όρια ελέγχου.

Το μοντέλο του Madsen (1993) είναι το ακόλουθο. Έστω

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν το } i\text{-στό προϊόν είναι ελαττωματικό} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και

$$P(X_1 = e_1, X_2 = e_2, \dots, X_n = e_n) = P(X_1 = e_{a_1}, X_2 = e_{a_2}, \dots, X_n = e_{a_n}) \quad (3.2)$$

όπου $e_i = 0$ ή 1 και (a_1, a_2, \dots, a_n) οποιαδήποτε μετάθεση των $(1, 2, \dots, n)$.

Έστω $Z_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ και $p_k = P(X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_k = 1)$. Από την (3.2) έχουμε

$$P(Z_n = k) = \binom{n}{k} a_{n,k}$$

όπου

$$a_{n,k} = P(X_1 = e_1, X_2 = e_2, \dots, X_n = e_n | \sum e_j = k)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.2) προκύπτει ότι

$$P(Z_n = k) = \binom{n}{j} \sum_j^{n-k} \binom{n-j}{j} (-1)^j p_{k+j} \quad (3.3)$$

όπου

$$p_k = P(X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_k = 1) = rp + (1-r)p^k. \quad (3.4)$$

(p είναι η πιθανότητα εμφάνισης ελαττωματικού προϊόντος και $r \geq 0$ ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ X_i και X_j , δηλαδή $\rho = \text{Corr}(X_i, X_j)$, για $i \neq j$).

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.4) στην εξίσωση (3.3), καταλήγουμε στη γενικευμένη διωνυμική κατανομή του μοντέλου συσχέτισης που έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$P(Z_n = k) = \begin{cases} r(1-p) + (1-r)(1-p)^n, & \text{για } k = 0 \\ (1-r) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, & \text{για } 0 < k \leq n-1 \\ rp + (1-r)p^n, & \text{για } k = n \end{cases} \quad (3.5)$$

Μπορεί να επαληθευτεί από την εξίσωση (3.5) ότι το παραπάνω διωνυμικό μοντέλο επιτρέπει μόνο θετική σειριακή συσχέτιση. Ωστόσο, αυτό είναι ρεαλιστική υπόθεση σε πολλές παραγωγικές διεργασίες. Ο Madsen (1993) έδειξε επίσης ότι μια σημειακή εκτίμηση του ρ δίνεται από τον τύπο

$$\hat{r} = \frac{[S^2 - np(1-p)]}{[n(n-1)p(1-p)]}$$

όπου S^2 η δειγματική διακύμανση των δεδομένων που έχουν παρατηρηθεί (διαιρούμε με n).

Έστω τώρα Y ο συνολικός αριθμός δοκιμών μέχρι την εμφάνιση του πρώτου ελαττωματικού προϊόντος με αρχική συνθήκη $X_0 = 1$. Από την (3.4) έχουμε ότι

$$P(X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_{i-1} = 0, X_i = 1) = (1-r)p^2(1-p)^{i-1}$$

Τώρα, η συνάρτηση πιθανότητας της Y είναι

$$P(Y = i) = P(X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_{i-1} = 0, X_i = 1 | X_0 = 1)$$

$$= P(X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_{i-1} = 0, X_i = 1) / P(X_0 = 1)$$

$$= (1-r)p(1-p)^{i-1}, \quad i \geq 2 \quad (3.6)$$

Για $i = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= P(X_1 = 1 | X_0 = 1) = P(X_0 = 1, X_1 = 1) / P(X_0 = 1) \\ &= r + (1 - r)p. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Αν $\rho = 1$, από τις εξισώσεις (3.6) και (3.7) προκύπτει ότι η ακολουθία $\{X_i\}$ είναι πλήρως εξαρτημένη, αφού $P(X_1 = 1 | X_0 = 1) = 1$. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.6) και (3.7) προκύπτει ότι

$$P(Y = i) = \begin{cases} r + (1 - r)p, & i = 1 \\ (1 - r)p(1 - p)^{i-1}, & i \geq 2 \end{cases} \quad (3.8)$$

Είναι φανερό ότι όταν $\rho = 0$ η εξίσωση (3.8) ανάγεται στη γεωμετρική κατανομή. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού η εξίσωση (3.3) ανάγεται στη διωνυμική κατανομή όταν υπάρχει μηδενική συσχέτιση στο διωνυμικό μοντέλο συσχέτισης.

Από την εξίσωση (3.8) προκύπτει ότι το $P(Y=1)$ είναι ίσο με $r + (1 - r)p$, δηλαδή ο ρυθμός λανθασμένου συναγερμού είναι μεγαλύτερος του ρ εάν χρησιμοποιηθεί το κάτω όριο ελέγχου. Στο στατιστικό έλεγχο διεργασιών, συνήθως το σφάλμα τύπου I είναι πολύ μικρό όπως 0,001. Έτσι όταν εμφανίζεται στην διεργασία μικρή σειριακή συσχέτιση όπως 0,01 τότε αυξάνεται ο ρυθμός λανθασμένου συναγερμού τουλάχιστον κατά 0,01. Γι' αυτό δεν είναι πιθανόν η χρήση ενός LCL να εντοπίσει μια αύξηση στο ποσοστό των ελαττωματικών. Σε αυτή την περίπτωση, αναμένεται η εμφάνιση μεγάλου αριθμού λανθασμένων συναγερμών εάν χρησιμοποιηθεί διωνυμική κατανομή χωρίς σειριακή συσχέτιση, επειδή η πραγματική πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού θα υπερβεί το προκαθορισμένο επίπεδο, ακόμη και όταν η συσχέτιση είναι μικρή.

Η συνάρτηση κατανομής της Y δίνεται από τον τύπο

$$P(Y \leq k) = r + (1 - r)[1 - (1 - p)^k], \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

και

$$P(Y > k) = (1 - r)(1 - p)^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

Από τις εξισώσεις (3.9) και (3.10) κατασκευάζεται ο Πίνακας 3-7 ο οποίος μας παρέχει τα όρια ελέγχου για το RL_1 διάγραμμα ελέγχου για τη συνηθισμένη σταθερή τιμή του σφάλματος τύπου I 0,0027. Ο Bourke (1991) ονόμασε ως RL_1 διάγραμμα το διάγραμμα ελέγχου που βασίζεται στη μεταβλητή X , το οποίο είναι ίδιο με το CCC διάγραμμα του Goh (1987). Όπως επισημάνθηκε προηγουμένως το LCL δεν υφίσταται εάν υπάρχει μικρή σειριακή συσχέτιση στην διεργασία.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3-7

Όρια ελέγχου για το RL_1 διάγραμμα για διάφορα επίπεδα σειριακής συσχέτισης.

p (ppm)	$\rho=0$		$\rho=0,05$		$\rho=0,2$	
	LCL	UCL	LCL	UCL	LCL	UCL
50	28	132150	-	131124	-	127687
100	14	66074	-	65561	-	63842
200	7	33035	-	32779	-	31920
500	3	13212	-	13110	-	12766
1000	2	6605	-	6554	-	6382

Το ARL (μέσος αριθμός δοκιμών Bernoulli που απαιτούνται για την εμφάνιση του πρώτου ελαττωματικού προϊόντος.) προκύπτει ως

$$E(Y) = \rho + \frac{(1-r)}{p}.$$

Έτσι

$$\frac{1}{p} - E(Y) = \frac{r(1-p)}{p}.$$

Από τον παραπάνω τύπο μπορεί να διαπιστωθεί ότι το ARL μειώνεται καθώς το ρ αυξάνεται, αφού το ρ παίρνει θετικές τιμές.

Ο Πίνακας 3-8 δίνει τα σφάλματα τύπου I για το RL_1 διάγραμμα με όρια ελέγχου υπολογισμένα για $\rho=0$. Από τον πίνακα φαίνεται ότι θα υπάρξουν πολλοί λανθασμένοι συναγερμοί.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3-8

Σφάλματα τύπου I όταν παραβιάζεται η υπόθεση της ανεξαρτησίας.

$p(ppm)$	$\rho=0,05$			$\rho=0,1$		
	$P(Y>UCL)$	$P(Y>LCL)$	a	$P(Y>UCL)$	$P(Y>LCL)$	a
50	0,00128	0,05128	0,05256	0,00122	0,10121	0,10243
100	0,00128	0,05123	0,05251	0,00122	0,10117	0,10239
200	0,00128	0,05113	0,05241	0,00122	0,10108	0,10230
500	0,00128	0,05095	0,05223	0,00122	0,10090	0,10212
1000	0,00128	0,05095	0,05223	0,00121	0,10090	0,10211

Ο Bourke (1991) επισήμαινε ότι για το RL_1 διάγραμμα, η απόφαση για το αν η διεργασία είναι εντός ελέγχου εξαρτάται μόνο από το πιο πρόσφατο RL . Το διάγραμμα δεν θεωρείται αρκετά αποτελεσματικό στο να εντοπίζει μέτριες μετατοπίσεις του ποσοστού των ελαττωματικών. Επιπλέον, υπάρχει απροθυμία να δεχτούμε ένα εκτός ελέγχου σήμα από το RL_1 διάγραμμα, δεδομένου ότι αυτό βασίζεται στην αναμονή ενός μόνο ελαττώματος. Για να ξεπεραστεί αυτό το εμπόδιο και να δοθεί μια δεύτερη ευκαιρία ο Bourke (1991) περιγράφει το RL_2 διάγραμμα, το οποίο δίνει το άθροισμα δύο διαδοχικών RL .

Έστω Z το άθροισμα των δύο πιο πρόσφατων RL . Τότε, το ενδεχόμενο $\{ Z = k \}$ αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο

{μόνο ένα εκ των X_i ισούται με 1, $i = 1, 2, \dots, k-1$ και $X_k = 1$, δεδομένου ότι $X_0 = 1$ }

Εξαιτίας της ανταλλαξιμότητας των $\{X_i\}$ και της εξίσωσης (3.3), έπεται ότι

$$P(Z = k) = \begin{cases} r + (1-r)p^2, & k = 2 \\ (1-r)(k-1)p^2(1-p)^{k-2}, & k \geq 3 \end{cases} \quad (3.11)$$

Εύκολα προκύπτει ότι για κάποιο $r \geq 2$ έχουμε

$$P(Z > r) = (1-r)q^{r-1}(rp + q)$$

και

$$P(Z < r) = 1 - (1-r)q^{r-2}[(r-1)p + q].$$

Η μέση τιμή του Z είναι

$$E(Z) = 2 \left[r + \frac{(1-r)}{p} \right] = 2E(Y)$$

Παρατηρούμε ότι το $2E(Y)$ είναι επίσης η μέση τιμή του αθροίσματος δύο ανεξάρτητων RL . Αυτό το άθροισμα έχει κατανομή που δίνεται από τη σχέση

$$P(Z = k) = \begin{cases} [r + (1-r)p]^2 + 2(1-r)pq[r + (1-r)p] + (1-r)^2 p^2 q^1, & k = 2 \\ 2(1-r)p[r + (1-r)p]q^{k-1} + (1-r)^2 p^2 (k-1)q^k, & k \geq 3 \end{cases}$$

η οποία διαφέρει από την (3.11).

Τα όρια ελέγχου για δεδομένο ρυθμό λανθασμένου συναγερμού $\alpha = 0,0027$ συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα για επιλεγμένες τιμές του ρ .

ΠΙΝΑΚΑΣ 3-9

Όρια ελέγχου για το RL_2 διάγραμμα για διάφορα επίπεδα σειριακής συσχέτισης.

p (ppm)	$\rho = 0$		$\rho = 0,05$		$\rho = 0,2$	
	LCL	UCL	LCL	UCL	LCL	UCL
50	1059	178001	*	176859	*	173029
100	530	88999	*	88428	*	86513
200	265	44498	*	44212	*	43255
500	107	17797	*	17683	*	17300
1000	54	8897	*	8840	*	8648

Στον Πίνακα 3-9, όπου δεν μπορεί να βρεθεί LCL , έχουμε ότι $P(RL_2 < LCL) \leq \alpha/2 = 0,00135$. Όντως, $P(RL_2 < 3) = P(Z=2) = \rho + (1-\rho)p^2 > \rho$ για όλες τις περιπτώσεις. Έτσι με την εμφάνιση σειριακής συσχέτισης μεγαλύτερης του $\alpha/2$, είναι αδύνατον να διατηρήσουμε το σφάλμα τύπου I μικρότερο του ρ . Αν χρησιμοποιηθεί το μη συσχετισμένο δυωνυμικό μοντέλο, τότε θα εμφανιστεί μεγαλύτερη πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού.

3.6 Υπό συνθήκη κανόνας ανακήρυξης εντός ελέγχου μιας υψηλής απόδοσης διεργασίας.

Παρόλο που τα CCC διαγράμματα είναι κατάλληλα για υψηλής ποιότητας διεργασίες βασίζονται μόνο στην τρέχουσα τιμή του συσσωρευμένου αριθμού των μη ελαττωματικών προϊόντων για την λήψη απόφασης. Γι' αυτό οι Kuralmani, Xie, Goth & Gan (2002) παρουσίασαν ένα υπό συνθήκη κανόνα ανακήρυξης εντός ελέγχου μιας υψηλής απόδοσης διεργασίας (*conditional control procedure*) στον οποίο ενσωματώνονται κάποιοι κανόνες ροής. Η ευαισθησία των νέων διαγραμμάτων είναι σημαντικά βελτιωμένη. Σύμφωνα με τον νέο υπό συνθήκη κανόνα καταμετρώνται τα μη ελαττωματικά προϊόντα ώσπου να εμφανιστεί ένα ελαττωματικό, και η διεργασία είναι εντός ελέγχου εάν

1. ο αριθμός των μη ελαττωματικών προϊόντων βρίσκεται ανάμεσα στο κάτω και άνω όριο ελέγχου; ή
2. εάν οι s προηγούμενες ροές ήταν εντός ελέγχου ακόμα και όταν η τρέχουσα ροή μη ελαττωματικών προϊόντων δεν βρίσκεται ανάμεσα στα όρια ελέγχου.

Τα όρια ελέγχου με τον νέο υπό συνθήκη κανόνα είναι στενότερα από τα παραδοσιακά. Έτσι η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού μπορεί να παραμένει η ίδια ενώ η ευαισθησία μπορεί να αυξηθεί.

Για την εφαρμογή του υπό συνθήκη κανόνα θεωρούμε ότι το s είναι μία σταθερά. Η επιλογή του s θα συζητηθεί αργότερα. Για σταθερό s , τα όρια ελέγχου για πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού ίση με a δίνονται από τους τύπους

$$LCL_{cond} = \frac{\ln(1 - (1 - d)/2)}{\ln(1 - p)} \quad (3.12)$$

και

$$UCL_{cond} = \frac{\ln((1 - d)/2)}{\ln(1 - p)} \quad (3.13)$$

όπου δ η λύση της ακόλουθης εξίσωσης

$$1 - a = d + (1 - d)d^s.$$

Πράγματι, έστω P_{inc} (P_{out}) η πιθανότητα να είναι το CCC εντός (εκτός) των ορίων ελέγχου. Τότε

$$P_{inc} = Pr(LCL \leq CCC \leq UCL)$$

και

$$P_{out} = Pr(LCL > CCC \text{ ή } CCC > UCL).$$

Βασιζόμενοι στον υπό συνθήκη κανόνα, η πιθανότητα να μην θεωρείται η διεργασία εκτός ελέγχου ακόμα κι αν παρατηρηθεί τρέχουσα ροή εκτός των ορίων ελέγχου δίνεται από τη σχέση

$$b_{cond} = P_{inc} + P_{out} Pr(\text{οι } s \text{ προηγούμενες ή περισσότερες ροές ήταν εντός ελέγχου})$$

$$= P_{inc} + P_{out} (P_{inc}^s P_{out} + P_{inc}^{s+1} P_{out} + P_{inc}^{s+2} P_{out} + \dots)$$

$$= P_{inc} + P_{inc}^s P_{out} P_{out} / (1 - P_{inc}) = P_{inc} + P_{inc}^s (1 - P_{inc})$$

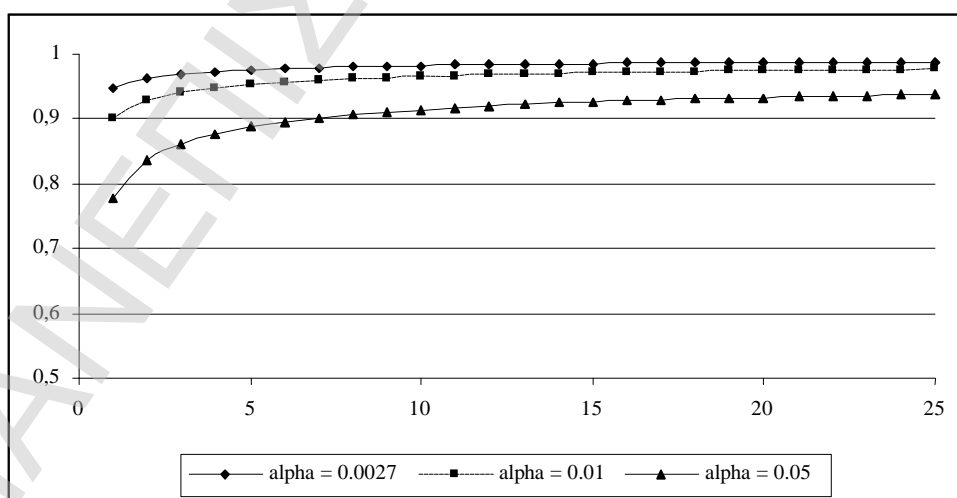
Η τελευταία ισότητα προκύπτει από τη σχέση $P_{inc} + P_{out} = 1$. Έτσι για αποδεκτή πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού α , μπορούμε να βρούμε την $P_{inc} = \delta$ δεδομένου ότι $b_{cond} = 1 - \alpha$.

Μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι το δ είναι μικρότερο του $1 - \alpha$, πράγμα που σημαίνει ότι η ροή μπορεί να βρεθεί εκτός ορίων ελέγχου συχνότερα. Κάποιες αριθμητικές τιμές του δ δίνονται στον Πίνακα 3-10. Ένα σχεδιάγραμμα του δ σαν συνάρτηση του s φαίνεται στο Σχήμα 3-3. Όταν το s τείνει στο άπειρο το δ προσεγγίζει το $1 - \alpha$, ήτοι το CCC διάγραμμα είναι οριακή περίπτωση της υπό συνθήκη διαδικασίας που μόλις περιγράψαμε.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3-10

Τιμές του δ για διάφορες τιμές των α και s .

s	α	α	α
	0,0027	0,01	0,05
1	0,94804	0,90000	0,77639
2	0,96291	0,92798	0,83493
3	0,96954	0,94050	0,86142
4	0,97349	0,94800	0,87732
5	0,97620	0,95313	0,88820
6	0,97820	0,95693	0,89622
7	0,97976	0,95988	0,90245
8	0,98101	0,96226	0,90744
9	0,98205	0,96423	0,91157
10	0,98293	0,96589	0,91504
15	0,98591	0,97155	0,92661
20	0,98769	0,97490	0,93324
25	0,98891	0,97719	0,93754
50	0,99191	0,98288	0,94657
50	0,99323	0,98516	0,94899
75	0,99402	0,98653	0,94971
100	0,99547	0,98882	0,95000
200	0,94804	0,90000	0,77639



Σχήμα 3-3. Γραφική παράσταση του δ συναρτήσει του s για διάφορες τιμές του α .

Η επιλογή του s είναι σημαντικό ζήτημα στην υλοποίηση του υπό συνθήκη κανόνα. Όταν το s είναι μεγάλο χρησιμοποιείται περισσότερη προηγούμενη πληροφορία, αλλά ένα μικρό s είναι πιο αποδεκτό όταν η προηγούμενη πληροφορία δεν θεωρείται αρκετά αντιπροσωπευτική. Μικρό s οδηγεί σε στενότερα όρια ελέγχου, εγείροντας έτσι αρχικά σημάδια συναγερμού πιο συχνά. Από την άλλη για μικρό s η απαίτηση ότι τα προηγούμενα s σημεία βρίσκονται ανάμεσα στα όρια γίνεται λιγότερο αυστηρή.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, τα όρια ελέγχου για τον υπό συνθήκη κανόνα υπολογίζονται για κάθε δοσμένο ποσοστό p με προκαθορισμένη πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.12) και (3.13) οι τιμές των LCL και UCL για διάφορους συνδυασμούς p και a δίνονται από τους Πίνακες 3-11 και 3-12.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3-11

Τιμές των LCL , UCL για τον υπό συνθήκη κανόνα με $\alpha = 0,0027$.

s		p					
		0,00001	0,00002	0,00005	0,0001	0,0002	0,0005
1	LCL	2634	1317	527	263	132	53
	UCL	364964	182481	72991	36495	18246	7297
2	LCL	1872	936	374	187	94	37
	UCL	398727	199362	79744	39871	19934	7973
3	LCL	1537	768	307	154	77	31
	UCL	418315	209157	83661	41830	20914	8364
4	LCL	1334	667	267	133	67	27
	UCL	432374	216186	86473	43235	21617	8645
5	LCL	1197	599	239	120	60	24
	UCL	443119	221559	88622	44310	22154	8860
6	LCL	1096	548	219	110	55	22
	UCL	451897	225947	90378	45188	22593	9036
8	LCL	955	477	191	95	48	19
	UCL	465644	232821	93127	46562	23280	9311
10	LCL	857	429	171	86	43	17
	UCL	476356	238177	95269	47633	23816	9525
15	LCL	706	353	141	71	35	14
	UCL	495612	247805	99120	49559	24778	9910
20	LCL	617	308	123	62	31	12
	UCL	509128	254563	101824	50910	25454	10180

ΠΙΝΑΚΑΣ 3-12

Τιμές των LCL , UCL για τον υπό συνθήκη κανόνα με $\alpha = 0,01$.

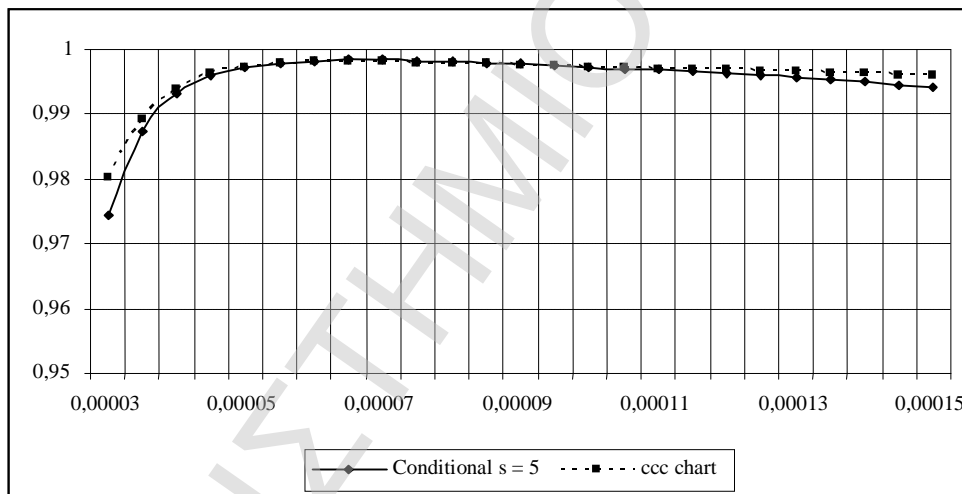
s		p					
		0,00001	0,00002	0,00005	0,0001	0,0002	0,0005
1	LCL	5129	2565	1026	513	256	103
	UCL	299572	149785	59913	29956	14977	5990
2	LCL	3666	1833	733	367	183	73
	UCL	332422	166210	66483	33241	16620	6647
3	LCL	3020	1510	604	302	151	60
	UCL	351491	175745	70297	35148	17573	7028
4	LCL	2634	1317	527	263	132	53
	UCL	364964	182481	72991	36495	18246	7297
5	LCL	2373	1186	475	237	119	47
	UCL	375287	187642	75056	37527	18763	7504
6	LCL	2179	1089	436	218	109	44
	UCL	383736	191867	76746	38372	19185	7673
8	LCL	1904	952	381	190	95	38
	UCL	397069	198534	79412	39705	19852	7939
10	LCL	1720	860	344	172	86	34
	UCL	407158	203578	81430	40714	20356	8141
15	LCL	1435	717	287	143	72	29
	UCL	425133	212565	85025	42511	21255	8501
20	LCL	1263	631	253	126	63	25
	UCL	437801	218900	87559	43778	21888	8754

Από τον Πίνακα 3-10 για $p = 0,00005$ και $\alpha = 0,0027$ η τιμή του δ για $s = 5$ είναι 0,97620. Τότε τα κάτω και άνω όρια ελέγχου του υπό συνθήκη κανόνα από τον Πίνακα 3-11 είναι 239 και 88622 αντίστοιχα. Συγκρινόμενα με τα CCC όρια τα οποία είναι 27 και 132150, φαίνεται ότι τα όρια του υπό συνθήκη κανόνα είναι σημαντικά στενότερα. Ωστόσο, εξαιτίας της επιπλέον απαίτησης να μην σημάνει συναγερωμός εάν οι προηγούμενες πέντε ροές είναι εντός ελέγχου, ο ρυθμός λανθασμένου συναγερωμού παραμένει στο 0,0027.

Ο υπό συνθήκη κανόνας μπορεί να συγκριθεί με το κανονικό CCC διάγραμμα. Υπενθυμίζεται ότι η πιθανότητα μη συναγερωμού ή αλλιώς χαρακτηριστική συνάρτηση (*operating characteristic function*) δίνεται από τον τύπο

$$b_{cond} = P_{inc} + P_{inc}^s (1 - P_{inc}) \quad (3.14)$$

όπου P_{inc} είναι η πιθανότητα ότι η ροή έχει μήκος ανάμεσα στα όρια ελέγχου των (3.12) και (3.13). Οι χαρακτηριστικές καμπύλες (*OC curves*) του προηγούμενου αριθμητικού παραδείγματος φαίνονται στο Σχήμα 3-4. Παρατηρείται ότι η υπό συνθήκη καμπύλη έχει μεγαλύτερη διαχωριστική ισχύ σε ακραία επίπεδα ποιότητας σε σχέση με την καμπύλη του *CCC* διαγράμματος. Αυτό σημαίνει ότι το υπό συνθήκη διάγραμμα έχει μεγαλύτερη ευαισθησία στις αλλαγές της διεργασίας, όπως επιδείνωση ή βελτίωση, από το *CCC* διάγραμμα εξαιτίας των στενότερων υπό συνθήκη ορίων ελέγχου. Τα όρια αυτά είναι πολύ χρήσιμα σε υψηλής ποιότητας διεργασίες για να προειδοποιήσουν, προκαταβολικά, ότι η διεργασία παρεκκλίνει του προτεινόμενου επιπέδου.



Σχήμα 3-4. *OC* καμπύλες του *CCC* και του υπό συνθήκη κανόνα για $p=50 ppm$.

Είναι γνωστό ότι το *ARL* αναφέρεται ως ο αναμενόμενος αριθμός ροών σε ένα συναγερμό και δίνεται από τον τύπο

$$ARL = 1 / (1 - \beta). \quad (3.15)$$

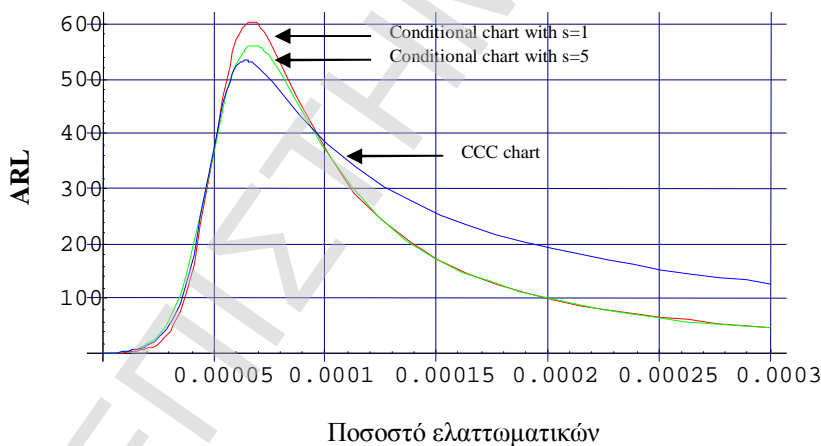
Σε ένα παραδοσιακό διάγραμμα *Shewhart*, ως ροή ορίζεται ο αριθμός των συνεχόμενων μονάδων (ή δειγμάτων) ανάμεσα σε δύο διαδοχικά σήματα συναγερμού. Σε ένα *CCC* διάγραμμα, ορίζεται ως ο μέσος αριθμός των σχεδιασμένων σημείων στο διάγραμμα ανάμεσα σε δύο συναγερμούς.

Συνεπώς, η ARL συνάρτηση για το υπό συνθήκη CCC διάγραμμα προκύπτει με αντικατάσταση της (3.14) στην (3.15), δηλαδή

$$ARL_{cond} = 1/[1 - P_{inc} + P_{inc}^s(1 - P_{inc})] = 1/[1 - (q^L - q^U) + (q^L - q^U)^s(1 - q^L - q^U)],$$

όπου $q = 1-p$ είναι η πιθανότητα ένα προϊόν να είναι μη ελαττωματικό.

Στο Σχήμα 3-5 μπορούμε να συγκρίνουμε τα ARL ανάμεσα στα υπό συνθήκη και στα παραδοσιακά CCC διαγράμματα του προηγούμενου παραδείγματος. Ο υπό συνθήκη κανόνας είναι πιο γρήγορος στο να σημάνει συναγερμό όταν η διεργασία έχει μετατοπιστεί σε οποιαδήποτε κατεύθυνση εκτός από μικρές μετατοπίσεις της διεργασίας ιδίως στην περίπτωση της επιδείνωσης. Έτσι υιοθετώντας τον υπό συνθήκη κανόνα στη θέση του CCC διαγράμματος έχουμε ένα επιπλέον πλεονέκτημα. Πάντως, και τα δύο διαγράμματα ελέγχου αποτυγχάνουν στο να παρέχουν τα υψηλότερα ARL στον ονομαστικό μέσο της διεργασίας. Γενικά η CCC προσέγγιση δίνει πολύ πλατιά όρια ελέγχου ενώ τα όρια του υπό συνθήκη κανόνα είναι πιο στενά, και γι' αυτό μας παρέχει προειδοποιήσεις πιο συχνά. Επίσης η διαδικασία αυτή είναι πιο ευαίσθητη σε μεγάλες αλλαγές της διεργασίας.



Σχήμα 3-5. ARL καμπύλες παραδοσιακού και υπό συνθήκη CCC διαγράμματος για $p = 50$ ppm.

3.7 Βέλτιστα όρια ελέγχου CCC διαγραμμάτων υπό την παρουσία σφαλμάτων επιθεώρησης.

Τα CCC διαγράμματα έχουν φανεί πολύ χρήσιμα στην παρακολούθηση διεργασιών υψηλής ποιότητας. Όμως, όπως και σε άλλα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart, υποθέτουμε ότι η επιθεώρηση γίνεται συνήθως χωρίς σφάλματα. Αυτή η υπόθεση πιθανόν να μην είναι έγκυρη και αυτό να έχει σημαντικό αντίκτυπο στην ερμηνεία των διαγραμμάτων ελέγχου και στον καθορισμό των ορίων ελέγχου. Στην πράξη παρατηρούνται σφάλματα επιθεώρησης, γεγονός που κάνει απαραίτητη τη μελέτη της επίδρασης των σφαλμάτων επιθεώρησης σε CCC διαγράμματα. Πάντως ακόμα κι αν θεωρήσουμε επιθεώρηση με σφάλματα, ο μέσος χρόνος συναγερμού αυξάνει στην αρχή όταν η διεργασία επιδεινώνεται. Έτσι τα όρια ελέγχου πρέπει να καθοριστούν ώστε να μεγιστοποιηθεί το μέσο μήκος ροής (ARL) όταν η διεργασία λειτουργεί σε κανονικό επίπεδο.

Υπάρχουν δύο ειδών σφάλματα επιθεώρησης τα οποία πρέπει να θεωρήσουμε. Ένα μη ελαττωματικό προϊόν κατηγοριοποιείται ως ελαττωματικό και ένα ελαττωματικό προϊόν κατηγοριοποιείται ως μη ελαττωματικό. Όταν εμφανίζονται σφάλματα επιθεώρησης, το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων της διεργασίας που παρατηρείται (εκτιμάται) διαφέρει από την πραγματική τιμή. Οι Burke, Davis, Kaminsky & Roberts (1995) έδειξαν ότι το παρατηρούμενο (εκτιμώμενο) κλάσμα ελαττωματικών προϊόντων είναι ίσο με

$$p_0 = (1-\psi)p_t + \psi(1-p_t) \quad (3.16)$$

όπου p_t είναι η πιθανότητα το προϊόν να είναι ελαττωματικό, θ είναι η πιθανότητα κατηγοριοποίησης ενός μη ελαττωματικού προϊόντος ως ελαττωματικό και ψ είναι η πιθανότητα κατηγοριοποίησης ενός ελαττωματικού προϊόντος ως μη ελαττωματικό. Με την ύπαρξη σφαλμάτων επιθεώρησης τα όρια ελέγχου μπορούν να τροποποιηθούν έτσι ώστε αυτά να ληφθούν υπόψη. Η εξίσωση (3.16) γράφεται αλλιώς ως

$$p_t = (p_0 - \theta) / (1 - \theta - \psi).$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση αυτή, τα προσαρμοσμένα για την εμφάνιση σφαλμάτων επιθεώρησης όρια ελέγχου, αποδεικνύεται ότι είναι τα

$$LCL = \frac{\ln\left(1 - \frac{0,5ap_t}{p_0}\right)}{\ln(1 - p_0)},$$

$$CL = \frac{\ln(0,5)}{\ln(1 - p_0)},$$

$$UCL = \frac{\ln\left(\frac{0,5ap_t}{p_0}\right)}{\ln(1 - p_0)},$$

όπου α η επιθυμητή πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου με συνηθισμένη τιμή την 0,0027. Τώρα το ARL δίνεται από τον τύπο

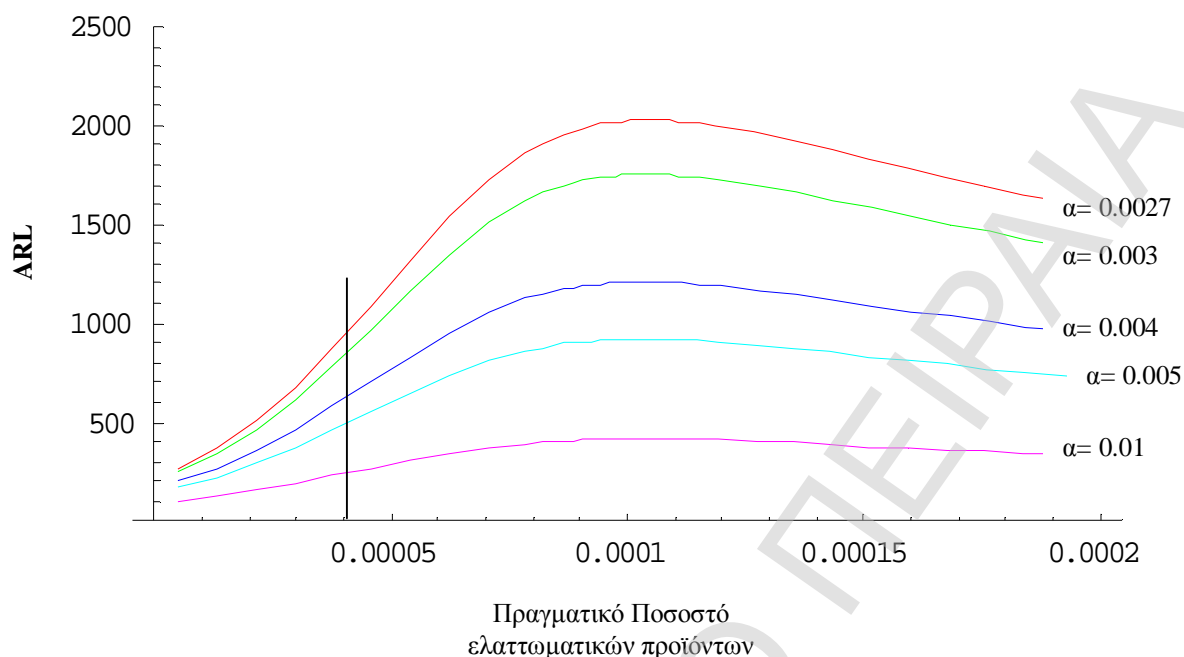
$$ARL = \frac{1}{1 - (1 - p_0)^{LCL-1} + (1 - p_0)^{UCL}}.$$

Στον Πίνακα 3-13 δίνονται κάποιες τιμές του ARL μιας διεργασίας για διάφορες τιμές του α με $p_t=0,005$, $\psi=0,2$ και $\theta=0,0001$. Στο Σχήμα 3-6 δίνονται διάφορες ARL καμπύλες για διάφορα σφάλματα επιθεώρησης.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3-13

Τιμές του ARL για διάφορες τιμές του ποσοστού ελαττωματικών και του ρυθμού λανθασμένων συναγερμών.

P_t	$\alpha=0,0027$	$\alpha=0,001$	$\alpha=0,05$
10	330	113	30
20	483	150	37
30	686	195	43
40	936	243	50
50	1213	291	56
60	1485	335	62
70	1716	370	67
80	1883	395	70
90	1982	409	72
100	2023	415	73
120	1993	409	73
140	1895	391	71
160	1782	369	68
200	1572	327	61
300	1203	250	47
400	974	203	38
500	818	170	32



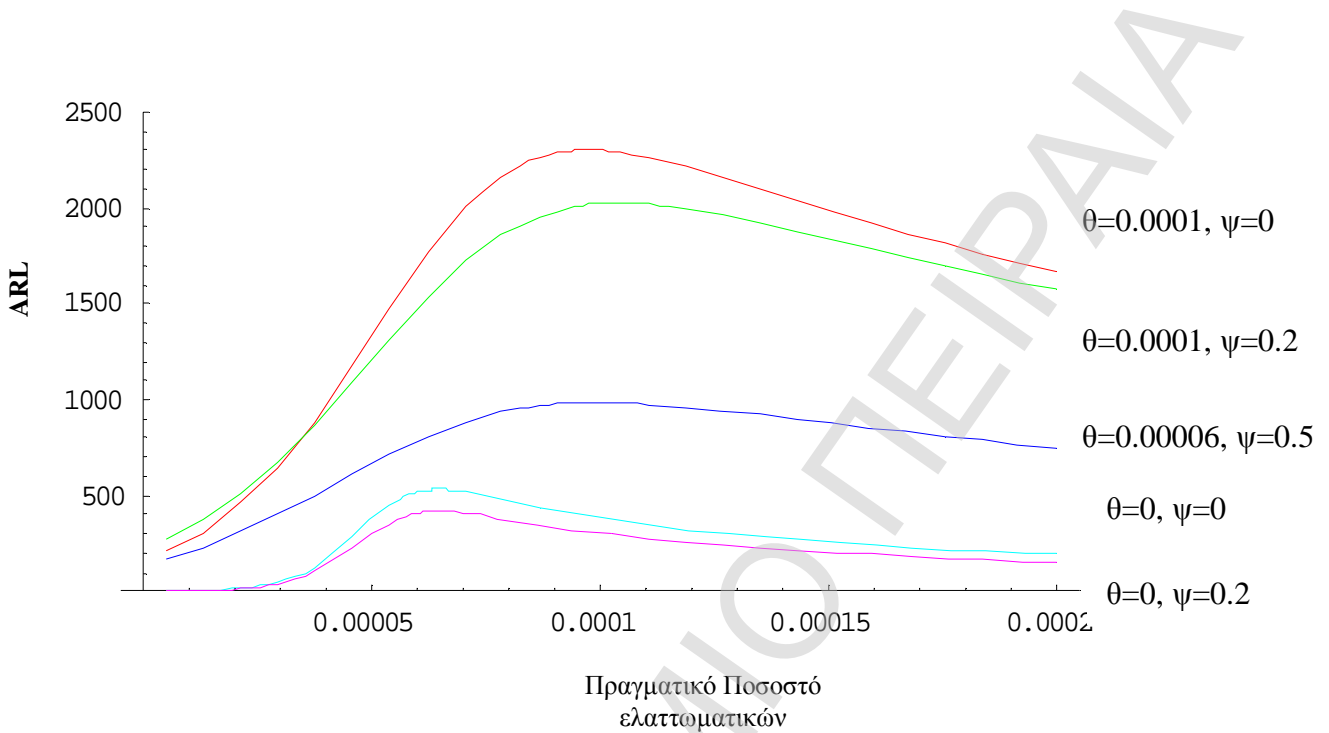
Σχήμα 3-6. *ARL* καμπύλες με $p_t=50$ ppm , $\psi = 0,2$ και $\theta = 0,0001$.

Είναι επίσης ενδιαφέρον να μελετηθούν οι ιδιότητες του *ARL* για διάφορες τιμές σφαλμάτων επιθεώρησης. Στον Πίνακα 3-14 δίνονται τιμές του *ARL* μιας διεργασίας με σταθερό $\alpha = 0,0027$ και $p_t = 0,005$ για διάφορες τιμές των θ και ψ . Στο Σχήμα 3-7 δίνονται οι αντίστοιχες καμπύλες.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3-14

Τιμές του *ARL* για διάφορες τιμές του ποσοστού ελαττωματικών και των σφαλμάτων επιθεώρησης.

p_t	$\theta=0,00001$ $\psi=0,5$	$\theta=0,00006$ $\psi=0,5$	$\theta=0,00006$ $\psi=0,2$
10	14	208	136
20	34	296	231
30	78	406	377
40	158	533	575
50	262	665	800
60	339	786	1003
70	363	881	1140
80	353	944	1205
90	330	976	1213
100	306	985	1188
120	264	959	1101
140	231	907	1008
160	206	851	924
200	168	748	791
300	116	571	580
400	88	461	458
500	72	387	378



Σχήμα 3-7. ARL καμπύλες με $p_i=50 ppm$, $\alpha = 0,0027$ για διαφορετικές τιμές σφαλμάτων επιθεώρησης.

Είναι προφανές από τα Σχήματα 3-6 και 3-7 ότι το ARL φτάνει στη μέγιστη τιμή όταν το p_i υπερβαίνει την εντός ελέγχου τιμή του, γεγονός μη επιθυμητό. Θέλουμε να έχουμε το μέγιστο ARL στην εντός ελέγχου τιμή του p_i .

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη σχετική διαφορά ανάμεσα στο μέγιστο ARL (ARL_{max}) και στο ARL που είναι υπολογισμένο στην εντός ελέγχου τιμή του ποσοστού της διεργασίας (ARL_0). Το σχετικό σφάλμα δίνεται από τον τύπο

$$\text{Σχετικό σφάλμα ARL} = \frac{ARL_{max} - ARL_0}{ARL_0}.$$

Επίσης το σχετικό σφάλμα ανάμεσα στο p του μέγιστου ARL (p_{\max}) και του ονομαστικού επιπέδου p_0 δίνεται από τη σχέση

$$\text{Σχετικό σφάλμα } p = \frac{p_{\max} - p_0}{p_0}$$

Ο Πίνακας 3-15 δίνει τα δύο σχετικά σφάλματα για $\theta = 0,0001$ και $\psi = 0,2$ ενώ ο Πίνακας 3-16 δίνει τα σφάλματα για $\alpha = 0,0027$.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3-15

Τιμές του ποσοστού των ελαττωματικών στο οποίο το μέγιστο ARL επιτυγχάνεται για διάφορες τιμές του ρυθμού λανθασμένου συναγερμού.

$\alpha=0,0027$					
p_t	ARL_0	Observed maximum (ppm)	Maximum ARL	Relative Error (p)	Relative Error (ARL)
20	2861	70	5881	2,5	1,0556
30	1889	80	3418	1,67	0,8094
40	1457	90	2503	1,25	0,7179
50	1213	100	2023	1	0,6678
100	757	170	1209	0,7	0,5971
150	617	240	977	0,6	0,5835
200	550	300	874	0,5	0,5891
$\alpha=0,0027$					
20	1340	60	2208	2	0,6478
30	921	80	1446	1,67	0,57
40	723	90	1110	1,25	0,5353
50	608	100	919	1	0,5115
100	385	170	567	0,7	0,4727
150	314	240	458	0,6	0,4586
200	279	300	407	0,5	0,4588

ΠΙΝΑΚΑΣ 3-16

Τιμές του ποσοστού των ελαττωματικών στο οποίο το μέγιστο *ARL* επιτυγχάνεται για διάφορες τιμές των σφαλμάτων επιθεώρησης.

$\theta=0,00001 \quad \psi=0,5$					
p_t	ARL_0	Observed maximum (ppm)	Maximum <i>ARL</i>	Relative Error (p)	Relative Error (<i>ARL</i>)
20	373	30	521	0,5	0,3968
30	311	50	424	0,67	0,3633
40	280	60	388	0,5	0,3857
50	262	70	363	0,4	0,3855
100	225	140	311	0,4	0,3822
150	214	200	296	0,33	0,3832
200	208	270	290	0,35	0,3942
$\theta=0,00001 \quad \psi=0$					
20	565	30	802	0,5	0,4195
30	504	40	716	0,33	0,4206
40	474	50	662	0,25	0,3966
50	457	70	651	0,4	0,4245
100	426	130	618	0,3	0,4507
150	422	200	622	0,33	0,4739
200	423	270	635	0,35	0,5012

Παρόλο που το σφάλμα επιθεώρησης θ έχει μεγάλη επίδραση στο *ARL*, αυτός ο τύπος σφάλματος μπορεί εύκολα να ρυθμιστεί. Ένα προϊόν το οποίο θεωρείται ελαττωματικό πιθανόν θα ελέγχει ξανά και αν αποδειχτεί μη ελαττωματικό, δεν θα καταμετρηθεί ως ελαττωματικό. Ένα ελαττωματικό προϊόν όταν θεωρείται μη ελαττωματικό τότε μάλλον περνάει ως ένα από τα πολλά μη ελαττωματικά προϊόντα. Γι' αυτό, σε περιπτώσεις διεργασιών υψηλής ποιότητας με σφάλματα επιθεώρησης πρέπει να εστιάζουμε στο σφάλμα επιθεώρησης ψ .

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

Δ. Αντζουλάκος (2003). Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Ξένη

Anscombe (1948). The transformation of Poisson, binomial and negative binomial data, *Biometrika*, 35, 246-254.

Bourke, P.D. (1991). Detecting a shift in fraction nonconforming using run-length control charts with 100 % inspection, *Journal of Quality Technology*, 23, pp. 225-238.

Burke R.J., Davis R.D., Kaminsky F.C., Roberts A.E.P. The effects of inspection errors on the true fraction nonconforming : An industrial experiment; *Quality Engineering*; 7: 543-550.

Chan L.U., Lai C.D., Xie M., & Goh T.N.(2003). A two-stage decision procedure for monitoring processes with low fraction nonconforming, *European Journal of Operational Research*, 150, 420-436.

Chuen-Sheng & Pei-Wen-Chen (2003). The Development of Attributes Control Charts for High-Yield Process, Technical Report, Yuan-Ze University.

Douglas C. Montgomery (2001). *Introduction to Statistical Quality Control*, 4th edition, Wiley, New York.

Kaminsky F.C., Benneyan J.C., Davis R.D. and Burke R.J. (1991). Statistical control charts based on a geometric distribution, *Journal of Quality Technology*, vol. 24 No. 2, pp. 69-75.

Kuralmani V. , Xie M. , Goh T. N. and Gan F. F. (2002). A conditional decision procedure for high yield process , *IIE Transactions*, 34, 1021-1030.

Lai C. D. , Govindaraju K. & Xie M. (1998). Effects of correlation on fraction non-conforming statistical process control procedures , *Journal of Applied Statistics* , 25, 4 535-543.

Quesenberry C.P. (1995). Geometric Q-charts for high quality process, *Journal of Quality Technology* , 27, 304-315.

Ranjan P. , Xie M. and Goh T. N. (2003). Optimal control limits for CCC charts in the presence of inspection errors , *Quality and Reliability Engineering International* , 19 149-160.

- Xie M. and Goh T. N. (1997). The use of probability limits for process control based on geometric distribution , *International Journal of Quality & Reliability Management* , 14, 1, 64-73.
- Xie, M., Lu, X. S. , Goh, T. N. and Chan, L.Y.(1999). A quality monitoring and decision-making scheme for automated production processes, *International Journal of Quality & Reliability Management*, 16, 2, 148-157.
- Xie M. ,Goh T. N. and Tang X. Y. (2000). Data transformation for geometrically distributed quality characteristics , *Quality and Reliability Engineering International* , 16, 9-15.
- Xie M. ,Goh T. N. and Kuralmani V. (2000). On optimal setting of control limits for geometric chart , *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering* , 7, 1, 17-25 .
- Xie M., TN Goh & V Kuralmani (2002) *Statistical Models and Control Charts for High-Quality Processes*, Kluwer Academic Publisher.
- Yang Z., Xie M., Kuralmani V. and Tsui K. (2002). On the performance of geometric charts with estimated control limits, *Journal of Quality Technology*, Vol34, No 4. 448-458.
- Zhang Lingyung, Govindaraju K. ,Bebbington M. and Lai C. D. (2004). On the statistical design of geometric control charts , *Quality Technology & Quantitative Management* ,1, 2, 233-243.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ