

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΩΝ
ΓΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΕΣ ΜΙΚΡΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ**

Γαλάτιος Σιγανός

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Απρίλιος 2007

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΩΝ
ΓΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΕΣ ΜΙΚΡΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ**

Γαλάτιος Σιγανός

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Απρίλιος 2007

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- (Επιβλέπων)
-
-

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS**

**STATISTICAL PROCESS CONTROL
FOR SHORT PRODUCTION RUNS**

By

Galatios Siganos

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of
the requirements for the degree of Master of Science in
Applied Statistics

Piraeus, Greece
April 2007

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

*Στους γονείς μου
Στέλιο και Ευτυχία*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Περίληψη

Ο Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών ασχολείται κυρίως με την εφαρμογή διαγραμμάτων ελέγχου. Τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση της ποιότητας και της σταθερότητας των διεργασιών.

Τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart, που χρησιμοποιούνται ευρέως στη βιομηχανία, έχουν κάποια μειονεκτήματα. Ένα από αυτά είναι ότι για να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά χρειάζονται συνήθως 20-25 προκαταρκτικά δείγματα μεγέθους 4-5 μονάδων το καθένα για να καθοριστούν αξιόπιστα όρια ελέγχου. Έτσι απαιτείται η παραγωγή και μέτρηση 80-100 μονάδων προϊόντος.

Όμως, ορισμένες παραγωγικές διεργασίες δεν δίνουν τόσες μονάδες σε ένα παραγωγικό κύκλο. Επίσης η μέτρηση τόσων πολλών μονάδων μπορεί να έχει υψηλό κόστος. Εμφανίζεται επίσης η ανάγκη να χρησιμοποιηθεί διάγραμμα ελέγχου από την πρώτη κιόλας παραγόμενη μονάδα, δηλαδή από την πρώτη κιόλας διαθέσιμη μέτρηση. Σε αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιούνται ειδικά διαγράμματα ελέγχου όπως τα DNOM, τα Q, κτλ.

Σκοπός της διπλωματικής είναι η καταγραφή και η αναλυτική παρουσίαση των διαγραμμάτων ελέγχου που εφαρμόζονται σε προβλήματα παραγωγής μικρού μεγέθους.

Abstract

Statistical process control is mainly about applications of quality control charts. Quality control charts are used to observe the quality and stability of processes.

Shewhart control charts, which are mainly used in manufacture, have some cons. One of them is that for a control chart to be reliable, 20 to 25 preliminary samples of size 4 to 5 should be used. In other words, quality control process cannot start unless a production of about 80 to 100 units is at hand.

Some manufacturing lines are not capable of producing such amount of units in a single production circle. Other than that, the cost of measuring so many units can be inaffordable and therefore not worthy. Also, the need of plotting a single unit as soon as we have that, is increasing. A solution to all these problems would be the use of control charts such as DNOM or Q etc.

This master thesis aims at gathering and describing control charting methods which are applied to short production runs.

Περιεχόμενα

Περίληψη	viii
Abstract	ix
Περιεχόμενα	1
Κατάλογος Πινάκων	4
Κατάλογος Σχημάτων	6
Διαγράμματα ελέγχου	
1.1 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart	9
1.2 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart για μεταβλητές	11
1.2.1 Διαγράμματα ελέγχου για τη μέση τιμή	11
1.2.1.1 Διαγράμματα ελέγχου φάσης II (μ, σ γνωστά)	11
1.2.1.2 Διαγράμματα ελέγχου φάσης I (μ, σ άγνωστα)	12
1.2.2 Διαγράμματα ελέγχου για τη διασπορά	16
1.2.2.1 Διαγράμματα ελέγχου φάσης II (σ γνωστό)	16
1.2.2.2 Διαγράμματα ελέγχου φάσης I (σ άγνωστο)	18
1.2.3 Διαγράμματα ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις	20
1.2.3.1 Διαγράμματα ελέγχου φάσης II (μ, σ γνωστά)	20
1.2.3.2 Διαγράμματα ελέγχου φάσης I (μ, σ άγνωστα)	21
1.3 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart για ιδιότητες	22
1.3.1 Διαγράμματα ελέγχου για το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων	23
1.3.1.1 Διαγράμματα ελέγχου φάσης II (p γνωστό)	23
1.3.1.2 Διαγράμματα ελέγχου φάσης I (p άγνωστο)	25
1.3.2 Διαγράμματα ελέγχου για τον αριθμό και μέσο αριθμό ελαττωμάτων	26
1.3.2.1 Διαγράμματα ελέγχου φάσης II (c γνωστό)	26
1.3.2.2 Διαγράμματα ελέγχου φάσης I (c άγνωστο)	28
1.4 Κανόνες ευαισθητοποίησης ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart	29
1.5 Διαγράμματα ελέγχου CUSUM	30
1.6 Διαγράμματα ελέγχου EWMA	34
Q διαγράμματα ελέγχου	
2.1 Εισαγωγή στα Q διαγράμματα ελέγχου	38
2.2 Αρχές κατασκευής Q διαγραμμάτων ελέγχου	39
2.3 Q διαγράμματα ελέγχου για μεταβλητές	40
2.3.1 Q διαγράμματα ελέγχου για δείγματα	40
2.3.2 Q διαγράμματα ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις	49

2.3.3	Το EWMA Q διάγραμμα ελέγχου	52
2.3.4	Το CUSUM Q διάγραμμα ελέγχου	58
2.3.5	Το Εκθετικό Q διάγραμμα ελέγχου	58
2.4	Q διαγράμματα ελέγχου για ιδιότητες	60
2.4.1	Διωνυμικά Q διαγράμματα ελέγχου	61
2.4.2	Poisson Q διαγράμματα ελέγχου	68
2.4.3	Γεωμετρικά Q διαγράμματα ελέγχου	74
2.4.4	Σταθμισμένα Poisson Q διαγράμματα ελέγχου	79
Άλλες μέθοδοι - διαγράμματα ελέγχου		
3.1	X και R διαγράμματα ελέγχου για μικρό αριθμό δειγμάτων	85
3.2	DNOM διαγράμματα ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις	91
3.3	DNOM διαγράμματα ελέγχου για δείγματα	103
3.4	Δυναμικό EWMA διάγραμμα ελέγχου	112
Παραρτήματα		
Π1.	Περιπτώσεις Π1, Π2, Π3, Π4, Π5, Π6	116
Π2.	Περιπτώσεις Π11, Π12, Π13, Π14, Π15, Π16	117
Π3.	Η μέθοδος του Hillier (1969)	119
Π4.	Η μέθοδος του Farnum (1992)	122
Βιβλιογραφία		123

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Κατάλογος Πινάκων

1.1	Συσσωρευμένα αθροίσματα για $K = 0.5$	32
1.2	Δεδομένα για την επίδειξη ενός διαγράμματος ελέγχου EWMA	36
2.1	Δείγματα, δειγματικοί μέσοι και δειγματικές διασπορές	41
2.2	Δεδομένα 30 δειγμάτων μεγέθους 5	45
2.3	Δεδομένα 20 δειγμάτων από διάφορες κανονικές κατανομές	53
2.4	Συνάρτηση πιθανότητας κ κατανομής των κατανομών $b(63,0.1)$ κ $Qb(63,0.1)$	62
2.5	Πιθανότητες ζωνών για τις τυχαίες μεταβλητές Q, Y, Z	67
2.6	Συνάρτηση πιθανότητας και κατανομής των κατανομών $P(6.8)$ και $QP(6.8)$	69
2.7	Πιθανότητες ζωνών για τις τυχαίες μεταβλητές Q, Y, Z	73
2.8	15 δεδομένα από κατανομή Poisson και 4 διαφορετικά είδη ελαττωμάτων	81
3.1	Σφάλμα τύπου I στην παρακολούθηση μελλοντικών δειγμάτων μεγέθους 5	85
3.2	Τιμές του A_2^{**} για δείγματα μεγέθους 5 για το \bar{X} διάγραμμα ελέγχου Φάσης I	87
3.3	Τιμές του D_3^{**} για δείγματα μεγέθους 5 για το R διάγραμμα ελέγχου Φάσης I	87
3.4	Τιμές του D_4^{**} για δείγματα μεγέθους 5 για το R διάγραμμα ελέγχου Φάσης I	88
3.5	Τιμές του A_2^* για δείγματα μεγέθους 5 για το \bar{X} διάγραμμα ελέγχου Στάδιου II	89
3.6	Τιμές του D_3^* για δείγματα μεγέθους 5 για το R διάγραμμα ελέγχου Στάδιου II	89
3.7	Τιμές του D_4^* για δείγματα μεγέθους 5 για το R διάγραμμα ελέγχου Στάδιου II	89
3.8	Δεδομένα για την επίδειξη της μεθόδου του Hillier	90
3.9	Δεδομένα για την επίδειξη αδυναμιών των X και MR διαγραμμάτων ελέγχου για διεργασίες παραγωγής διαφορετικών τύπων προϊόντων	92
3.10	Δεδομένα για την επίδειξη του DNOM διαγράμματος ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις	96
3.11	Τιμές της σταθεράς H	98
3.12	Δεδομένα για την επίδειξη του Z διαγράμματος ελέγχου	100
3.13	Επιπρόσθετα δεδομένα για την επίδειξη του Z και του MR διαγράμματος ελέγχου	101
3.14	Δεδομένα για την επίδειξη του DNOM διαγράμματος ελέγχου για δείγματα	104

3.15	Δεδομένα για την επίδειξη του τυποποιημένου DNOM διαγράμματος ελέγχου	106
3.16	Δείγματα για το Μοντέλο II με $K = 0.05$ και $k = 0.001$	109
3.17	Στατιστικές συναρτήσεις για τα δεδομένα του Πίνακα 3.16	110
3.18	Δεδομένα για την επίδειξη του δυναμικού EWMA διαγράμματος ελέγχου	114

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart	10
1.2	Διάγραμμα ελέγχου Shewhart και προειδοποιητικά όρια	29
1.3	Διάγραμμα ελέγχου CUSUM για τα δεδομένα του Πίνακα 1.1 για $K = 0.5$ και $H = 5$	33
1.4	Διάγραμμα ελέγχου EWMA για τα δεδομένα του Πίνακα 1.2	37
2.1	Τυποποιημένο \bar{X} διάγραμμα ελέγχου	43
2.2	$Q(\bar{X})$ διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π4)	44
2.3	$Q(S^2)$ διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π6)	45
2.4	$Q(\bar{X})$ διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π4)	46
2.5	$Q(S^2)$ διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π5)	47
2.6	$Q(\bar{X})$ διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π1)	47
2.7	EWMA $Q(S^2)$ διάγραμμα ελέγχου	54
2.8	Shewhart $Q(S^2)$ διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π6)	54
2.9	EWMA $Q(\bar{X})$ διάγραμμα ελέγχου	55
2.10	Shewhart $Q(\bar{X})$ διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π4)	55
2.11	EWMA $Q(S^2)$ διάγραμμα ελέγχου	56
2.12	Shewhart $Q(S^2)$ διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π5)	56
2.13	EWMA $Q(\bar{X})$ διάγραμμα ελέγχου	57
2.14	Shewhart $Q(\bar{X})$ διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π1)	54
2.15	Shewhart Q διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π22)	59
2.16	Γραφική παράσταση της συνάρτησης $b(x;63,0.1)$	63
2.17	Γραφική παράσταση της συνάρτησης $Qb(q;63,0.1)$	63
2.18	Διωνυμικό Shewhart Q διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π23)	64
2.19	Διωνυμικό Shewhart Q διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π24)	64
2.20	Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(c;6,8)$	70
2.21	Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f_{QP}(q;6,8)$	70
2.22	Poisson Shewhart Q διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π25)	71
2.23	Poisson Shewhart Q διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π26)	71

2.24	Γεωμετρικό <i>Shewhart Q</i> διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π27)	74
2.25	<i>EWMA Q</i> διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π27)	77
2.26	Γεωμετρικό <i>Shewhart Q</i> διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π28)	78
2.27	<i>EWMA Q</i> διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π28)	79
2.28	Σταθμισμένο <i>Poisson Q</i> διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π26')	82
2.29	Σταθμισμένο <i>Poisson Q</i> διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π25')	82
2.30	Σταθμισμένο <i>EWMA Poisson Q</i> διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π26')	83
2.31	Σταθμισμένο <i>EWMA Poisson Q</i> διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π25')	83
3.1	<i>X</i> διάγραμμα ελέγχου για το προϊόν 1	93
3.2	<i>MR</i> διάγραμμα ελέγχου για το προϊόν 1	94
3.3	<i>X</i> διάγραμμα ελέγχου για το προϊόν 2	94
3.4	<i>MR</i> διάγραμμα ελέγχου για το προϊόν 2	95
3.5	Διάγραμμα διαδοχικών τιμών για τα δεδομένα του Πίνακα 3.9	95
3.6	DNOM <i>X</i> διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 3.10	97
3.7	DNOM <i>MR</i> διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 3.10	97
3.8	Διάγραμμα των μέσων των κινούμενων μέσων για τα δεδομένα του Πίνακα 3.9	99
3.9	Διάγραμμα των μέσων των κινούμενων μέσων για τα δεδομένα του Πίνακα 3.12	101
3.10	<i>Z</i> διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 3.13	102
3.11	<i>MR</i> διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 3.13	103
3.12	DNOM \bar{X} διάγραμμα ελέγχου	105
3.13	DNOM <i>R</i> διάγραμμα ελέγχου	105
3.14	DNOM τυποποιημένο \bar{X} διάγραμμα ελέγχου	107
3.15	DNOM τυποποιημένο <i>R</i> διάγραμμα ελέγχου	107
3.16	Διάγραμμα διασποράς των ζευγών (T_i, S_i) για $i = 1, 2, \dots, 20$	110
3.17	DNOM διάγραμμα ελέγχου για το Μοντέλο II	111
3.18	DNOM διάγραμμα ελέγχου για το Μοντέλο I	111
3.19	<i>EWMA</i> διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του πίνακα 3.18	115

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

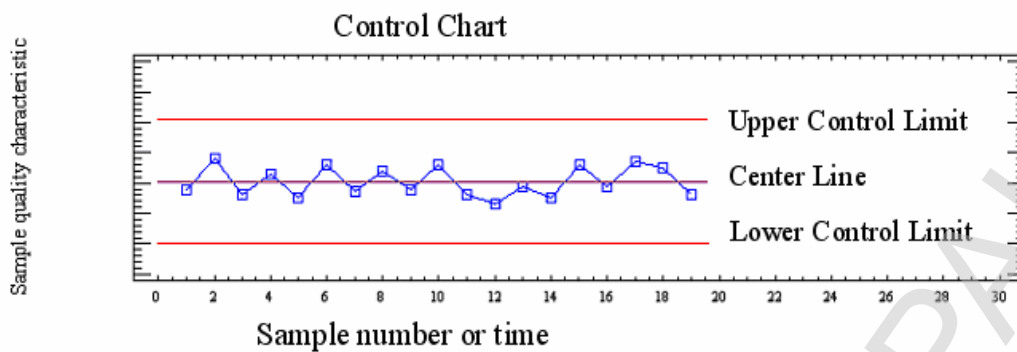
Διαγράμματα Ελέγχου

1.1 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart

Στις παραγωγικές διεργασίες μας ενδιαφέρει η παρακολούθηση της συμπεριφοράς μιας κρίσιμης ποσότητας ενός (μετρήσιμου) χαρακτηριστικού X των προϊόντων που παράγονται. Η διαδικασία παρακολούθησης της κρίσιμης ποσότητας βασίζεται σε μετρήσεις αυτού του χαρακτηριστικού, όπως προκύπτουν από την επιλογή τυχαίων δειγμάτων $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$. Χρησιμοποιώντας τα τυχαία αυτά δείγματα υπολογίζουμε την τιμή $W_t = g(\mathbf{X}_t)$, $t = 1, 2, \dots$, μιας κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης (τυχαίας μεταβλητής) που εκτιμά (συνήθως χρησιμοποιούμε αμερόληπτη εκτιμήτρια) την ποσότητα που μας ενδιαφέρει (π.χ. μέση τιμή ή διακύμανση της X).

Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε να παρακολουθήσουμε τη συμπεριφορά της μέσης τιμής της διαμέτρου X των κυλίνδρων που παράγει μια μηχανή. Για το σκοπό αυτό επιλέγονται τυχαία δείγματα μεγέθους n ($n \geq 1$) κυλίνδρων από την παραγωγή της μηχανής σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη στατιστική συνάρτηση $W_t = g(\mathbf{X}_t) = (X_{t1} + X_{t2} + \dots + X_{tn})/n$ (η οποία είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του μέσου της X) για την παρακολούθηση της συμπεριφοράς της μέσης τιμής.

Ένα τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart είναι μια γραφική παράσταση με την ακόλουθη μορφή



Σχήμα 1.1: Τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart

όπου στο Σχήμα 1.1, εκτός από τις παρατηρούμενες τιμές W_t , που έχουν απεικονιστεί με σημεία τα οποία έχουν συνδεθεί με μια τεθλασμένη γραμμή, έχουν σχεδιαστεί και άλλες τρεις γραμμές. Η κεντρική γραμμή (*center line, CL*) παριστάνει συνήθως τη μέση τιμή (*mean value*) της W όπως προκύπτει από τη λειτουργία μιας εντός ελέγχου διεργασίας, δηλαδή μιας διεργασίας που λειτουργεί μόνο με την παρουσία φυσικής μεταβλητότητας. Οι δύο άλλες γραμμές που εμφανίζονται στο παραπάνω διάγραμμα ονομάζονται άνω και κάτω όριο ελέγχου του διαγράμματος. Όσο οι τιμές της W βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου και η συμπεριφορά τους είναι “τυχαία” μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου. Αν όμως κάποιο σημείο βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου λέμε ότι υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου και πρέπει να προχωρήσουμε σε έρευνα για να ανακαλύψουμε τις ειδικές αιτίες μεταβλητότητας που είναι υπεύθυνες για αυτή τη συμπεριφορά και αν κριθεί απαραίτητο να προβούμε σε διορθωτικές ενέργειες. Ωστόσο, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι ακόμη και στην περίπτωση που όλα τα σημεία του διαγράμματος βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου αλλά συμπεριφέρονται με ένα συστηματικό ή μη τυχαίο τρόπο τότε και αυτό αποτελεί ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου.

Στο ακόλουθο πλαίσιο δίνεται ένα γενικό μοντέλο, το μοντέλο ορίων σίγμα (*sigma limits model*), για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart

Μοντέλο ορίων σίγμα	
UCL	$= m_w + LS_w$
$Center\ Line$	$= m_w$
LCL	$= m_w - LS_w$

Οι ποσότητες m_w και s_w δηλώνουν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της στατιστικής συνάρτησης W που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου (συνήθως γίνεται η υπόθεση ότι ακολουθεί κανονική κατανομή). Η ποσότητα L δηλώνει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Συνήθως $L=3$, οπότε ομιλούμε για διαγράμματα ελέγχου Shewhart με $3s$ όρια ελέγχου.

Στα διαγράμματα ελέγχου Shewhart διακρίνουμε δύο μεγάλες κατηγορίες ανάλογα με το αν το χαρακτηριστικό X είναι συνεχής ή διακριτή τυχαία μεταβλητή. Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής με μέση τιμή m και διακύμανση s^2 , τότε υπάρχουν διαγράμματα ελέγχου Shewhart για την παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διασποράς της X . Στην περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή υπάρχουν διαγράμματα ελέγχου Shewhart για την παρακολούθηση του ποσοστού (και του αριθμού) των ελαττωματικών προϊόντων που αποδίδει η παραγωγική διεργασία, καθώς επίσης και για τον αριθμό (και το μέσο αριθμό) των ελαττωμάτων (ατελειών) σε μια μονάδα ελέγχου (Αντζουλιάκος (2003), Δαμιανού (1996), Καφφές (1996)).

Το πιο απλό και πλέον διαδεδομένο διάγραμμα ελέγχου Shewhart είναι το διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της μέσης τιμής ενός συνεχούς χαρακτηριστικού X το οποίο θα αναπτύξουμε εν συντομία στην επόμενη παράγραφο μέσω ενός παραδείγματος.

1.2 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart για μεταβλητές

Στην παρούσα παράγραφο θα αναπτύξουμε την κατασκευή διαγράμματος τύπου Shewhart για την παρακολούθηση της συμπεριφοράς της μέσης τιμής m ενός συνεχούς ποιοτικού χαρακτηριστικού.

1.2.1 Διαγράμματα ελέγχου για την μέση τιμή

1.2.1.1 Διαγράμματα ελέγχου φάσης II (μ, σ γνωστά)

Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού X ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(m, s^2)$. Αν $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ είναι ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από την X τότε είναι γνωστό ότι ο δειγματικός μέσος \bar{X}_i ακολουθεί την κατανομή $N(m, s^2/n)$, και είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της μέσης τιμής m του ποιοτικού χαρακτηριστικού X . Επομένως

χρησιμοποιώντας ένα διάγραμμα ελέγχου στο οποίο θα απεικονίζεται η τιμή του δειγματικού μέσου $W_i = \bar{X}_i$ στα δείγματα που επιλέγουμε από την παραγωγή με

$$LCL = m_{w_i} - 3s_{w_i} = m - 3 \frac{S}{\sqrt{n}}, \quad CL = m_{w_i} = m, \quad UCL = m_{w_i} + 3s_{w_i} = m + 3 \frac{S}{\sqrt{n}}$$

και με την υπόθεση ότι η διακύμανση (ή γενικότερα η διασπορά) του χαρακτηριστικού X σε όλη τη διαδικασία παραμένει σταθερή μπορούμε να πούμε τα εξής: (α) εφόσον τα σημεία του διαγράμματος βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου θεωρούμε ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου οπότε η μέση τιμή m του χαρακτηριστικού X δεν έχει αλλάξει (μετατοπιστεί) και επομένως το 99.73% των σημείων του διαγράμματος ελέγχου θα βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου, και (β) στην περίπτωση που ένα σημείο του διαγράμματος βρεθεί εκτός των ορίων του διαγράμματος και επειδή η πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου είναι πολύ μικρή (0.0027), τότε υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου λόγω μετατόπισης της μέσης τιμής του χαρακτηριστικού X .

Τα $3s$ όρια του διαγράμματος ελέγχου για τη μέση τιμή του χαρακτηριστικού X συνοψίζονται στο ακόλουθο πλαίσιο

Πλαίσιο 1 (\bar{X} διάγραμμα)	
Phase II control limits (3σ)	
UCL	$= m + As$
$Center Line$	$= m$
LCL	$= m - As$

όπου

$$A = \frac{3}{\sqrt{n}}$$

1.2.1.2 Διαγράμματα ελέγχου φάσης I (μ, σ άγνωστα)

Στην πράξη οι ποσότητες m , s είναι άγνωστες οπότε πρέπει να εκτιμηθούν. Για το σκοπό αυτό παίρνουμε m ανεξάρτητα προκαταρκτικά τυχαία δείγματα μεγέθους n το καθένα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $1 \leq i \leq m$, για να εκτιμήσουμε τις ποσότητες m και s , υποθέτοντας ότι η επιλογή των προκαταρκτικών δειγμάτων έγινε όταν η διεργασία ήταν εντός ελέγχου (τα m και s σταθερά καθόλη τη διάρκεια της δειγματοληψίας). Οι εκτιμήσεις \hat{m} και \hat{s} προκύπτουν συνήθως από 20 έως 25 προκαταρκτικά δείγματα μεγέθους 4 έως 6.

Στην ανάλυση που ακολουθεί υποθέτουμε ότι το χαρακτηριστικό X ακολουθεί κατανομή $N(m, s^2)$ (m, s άγνωστα) και ότι έχουμε m το πλήθος ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους n το καθένα.

- **Εκτίμηση του μ**

Έστω $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$ οι δειγματικοί μέσοι των m δειγμάτων και ας θέσουμε

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m}{m} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}}{mn}$$

Η ποσότητα $\bar{\bar{X}}$ ακολουθεί κατανομή $N(m, s^2 / nm)$ και χρησιμοποιείται ως εκτίμηση της ποσότητας m (αμερόληπτη και συνεπής εκτιμήτρια του m), δηλαδή

$$\hat{m} = \bar{\bar{X}}$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι

$$E(\bar{\bar{X}}) = m, \quad V(\bar{\bar{X}}) = s^2 / nm$$

ανεξάρτητα από την κατανομή του χαρακτηριστικού X .

- **Εκτίμηση του σ (Μέθοδος R)**

Έστω R_1, R_2, \dots, R_m τα εύρη των m δειγμάτων, δηλαδή

$$R_i = X_{i(n)} - X_{i(1)}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Μπορεί να δειχθεί ότι

$$m_{R_i} = E(R_i) = s d_2$$

όπου d_2 είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος n . Θέτοντας

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m}$$

έχουμε ότι $E(\bar{R}) = s d_2$, οπότε η ποσότητα \bar{R} / d_2 είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της ποσότητας s , και χρησιμοποιείται ως εκτίμηση της ποσότητας s , δηλαδή

$$\hat{s} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

- **Εκτίμηση του σ (Μέθοδος S)**

Έστω S_1, S_2, \dots, S_m οι ποσότητες που ορίζονται από τη σχέση

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Αν και η ποσότητα S_i^2 είναι αμερόληπτη (και συνεπώς) εκτιμήτρια της διακύμανσης S^2 , η ποσότητα $S_i = \sqrt{S_i^2}$ δεν αποτελεί αμερόληπτη εκτιμήτρια της τυπικής απόκλισης S . Μπορεί να δειχθεί ότι

$$m_{S_i} = E(S_i) = S c_4$$

όπου c_4 είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος n . Θέτοντας

$$\bar{S} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_m}{m}$$

έχουμε ότι $E(\bar{S}) = S c_4$, οπότε η ποσότητα \bar{S}/c_4 είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της ποσότητας S , και χρησιμοποιείται ως εκτίμηση της ποσότητας S , δηλαδή

$$\hat{S} = \frac{\bar{S}}{c_4}$$

- **Εκτίμηση του σ (Μέθοδος S^2)**

Έστω $S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2$ οι ποσότητες που ορίζονται από τη σχέση

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, \quad 1 \leq i \leq m$$

για τις οποίες είναι γνωστό ότι

$$m_{S_i^2} = E(S_i^2) = S^2.$$

Η ποσότητα $\sqrt{S^2}$ (στα περισσότερα βιβλία συμβολίζεται με $\sqrt{S^2}$) όπου

$$\bar{S}^2 = \frac{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_m^2}{m}$$

(προσέξτε ότι $\sqrt{S^2} \neq \bar{S}$) αν και δεν είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του S χρησιμοποιείται αρκετές φορές (λόγω του ότι έχει μικρότερη διακύμανση από την \bar{S}/c_4) ως εκτίμηση της ποσότητας S , δηλαδή

$$\hat{S} = \sqrt{\bar{S}^2}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση του m την ποσότητα $\hat{m} = \bar{\bar{X}}$ και ως εκτίμηση του S την ποσότητα $\hat{S} = \bar{R} / d_2$, το Πλαίσιο 1 παίρνει την ακόλουθη μορφή

Πλαίσιο 2 (\bar{X} διάγραμμα)	
Phase I control limits (3σ)	
R Method	
UCL	$= \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R}$
$Center\ Line$	$= \bar{\bar{X}}$
LCL	$= \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R}$

όπου η ποσότητα A_2 είναι ίση με $A_2 = \frac{3}{d_2 \sqrt{n}}$.

Χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση του m την ποσότητα $\hat{m} = \bar{\bar{X}}$ και ως εκτίμηση του S την ποσότητα $\hat{S} = \bar{S} / c_4$ τότε το Πλαίσιο 1 παίρνει την ακόλουθη μορφή

Πλαίσιο 3 (\bar{X} διάγραμμα)	
Phase I control limits (3σ)	
S Method	
UCL	$= \bar{\bar{X}} + A_3 \bar{S}$
$Center\ Line$	$= \bar{\bar{X}}$
LCL	$= \bar{\bar{X}} - A_3 \bar{S}$

όπου $A_3 = \frac{3}{c_4 \sqrt{n}}$.

Χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση του m την ποσότητα $\hat{m} = \bar{\bar{X}}$ και ως εκτίμηση του S την ποσότητα $\hat{S} = \sqrt{\bar{S}^2}$, το Πλαίσιο 1 παίρνει την ακόλουθη μορφή

Πλαίσιο 4 (\bar{X} διάγραμμα)	
Phase I control limits (3σ)	
S² Method	
UCL	$= \bar{\bar{X}} + A \sqrt{\bar{S}^2}$
$Center\ Line$	$= \bar{\bar{X}}$
LCL	$= \bar{\bar{X}} - A \sqrt{\bar{S}^2}$

1.2.2 Διαγράμματα ελέγχου για τη διασπορά

1.2.2.1 Διαγράμματα ελέγχου φάσης II (σ γνωστό)

Στην προηγούμενη παράγραφο αναφέραμε ότι στην περίπτωση που ένα σημείο του διαγράμματος ελέγχου για τη μέση τιμή του χαρακτηριστικού X βρεθεί εκτός των ορίων του διαγράμματος τότε υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου με την προϋπόθεση ότι η διασπορά του ποιοτικού χαρακτηριστικού X είχε παραμείνει σταθερή σε όλη τη διάρκεια της διαδικασίας. Στην παρούσα παράγραφο θα αναπτύξουμε την κατασκευή διαγραμμάτων τύπου *Shewhart* για την παρακολούθηση της συμπεριφοράς της διασποράς ενός συνεχούς χαρακτηριστικού X .

Στην ανάλυση που ακολουθεί υποθέτουμε ότι το χαρακτηριστικό X ακολουθεί κατανομή $N(m, s^2)$ και ότι έχουμε m το πλήθος ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από τη X τα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $1 \leq i \leq m$, μεγέθους n το καθένα.

- **R διάγραμμα ελέγχου**

Έστω $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από τη X και ας θέσουμε $W_i = R_i = X_{i(n)} - X_{i(1)}$. Είναι γνωστό ότι

$$m_{R_i} = E(R_i) = s d_2, \quad s_{R_i} = \sqrt{V(R_i)} = s d_3$$

όπου οι ποσότητες d_2 και d_3 εξαρτώνται από το μέγεθος n του δείγματος.

Συνεπώς ένα διάγραμμα ελέγχου για τη διασπορά του ποιοτικού χαρακτηριστικού X μπορεί να βασιστεί σε ένα διάγραμμα όπου η απεικονιζόμενη ποσότητα θα είναι το εύρος R_i των δειγμάτων που ως γνωστό είναι ένα μέτρο διασποράς της X . Το μοντέλο με όρια $3s$ θα έχει τη μορφή

$$LCL = m_{R_i} - 3s_{R_i} = (d_2 - 3d_3)s, \quad CL = m_{R_i} = d_2s, \quad UCL = m_{R_i} + 3s_{R_i} = (d_2 + 3d_3)s.$$

Θέτοντας $D_1 = d_2 - 3d_3$, $D_2 = d_2 + 3d_3$ προκύπτει το ακόλουθο πλαίσιο

Πλαίσιο 5 (R διάγραμμα)	
Phase II control limits (3σ)	
UCL	$= D_2s$
$Center Line$	$= d_2s$
LCL	$= D_1s$

Επειδή $D_1 < 0$ για $n \leq 6$, σε αυτές τις περιπτώσεις θέτουμε $D_1 = 0$.

- **S διάγραμμα ελέγχου**

Έστω $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από τη X και ας θέσουμε

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$m_{S_i} = E(S_i) = s c_4, \quad s_{S_i} = \sqrt{V(S_i)} = s \sqrt{1 - c_4^2}$$

Συνεπώς ένα διάγραμμα ελέγχου για τη διασπορά του χαρακτηριστικού X μπορεί να βασιστεί σε ένα διάγραμμα όπου η απεικονιζόμενη ποσότητα θα είναι οι δειγματικές τυπικές αποκλίσεις S_i που είναι το πιο σύνηθες μέτρο διασποράς της X . Το μοντέλο με όρια $3s$ θα έχει τη μορφή

$$LCL = m_{S_i} - 3s_{S_i} = (c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2})s,$$

$$CL = m_{S_i} = c_4 s, \dots UCL = m_{S_i} + 3s_{S_i} = (c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2})s.$$

Θέτοντας

$$B_5 = c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2}, \quad B_6 = c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2}$$

προκύπτει το ακόλουθο πλαίσιο

Πλαίσιο 6 (S διάγραμμα)	
Phase II control limits (3σ)	
UCL	$= B_6 s$
$Center Line$	$= c_4 s$
LCL	$= B_5 s$

Επειδή $B_5 < 0$ για $n \leq 5$, σε αυτές τις περιπτώσεις θέτουμε $B_5 = 0$.

- **S^2 διάγραμμα ελέγχου**

Έστω $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ είναι ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από τη X ας θέσουμε

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Είναι γνωστό ότι

$$E(S_i^2) = S^2 \quad \text{και} \quad \frac{(n-1)S_i^2}{S^2} \sim c_{n-1}^2.$$

Επιπρόσθετα

$$P\left(c_{n-1;1-a/2}^2 \leq \frac{(n-1)S_i^2}{S^2} \leq c_{n-1;a/2}^2\right) = 1-a$$

οπότε

$$P\left(\frac{S^2}{n-1} c_{n-1;1-a/2}^2 \leq S_i^2 \leq \frac{S^2}{n-1} c_{n-1;a/2}^2\right) = 1-a.$$

Συνεπώς ένα διάγραμμα ελέγχου για τη διασπορά του χαρακτηριστικού X μπορεί να βασιστεί σε ένα διάγραμμα όπου η απεικονιζόμενη ποσότητα θα είναι η δειγματική διακύμανση S_i^2 που είναι μέτρο διασποράς της X , το οποίο περιγράφεται στο ακόλουθο πλαίσιο

Πλαίσιο 7 (S^2 διάγραμμα)	
Phase II control limits ($a/2$)	
UCL	$= \frac{S^2}{n-1} c_{n-1;a/2}^2$
$Center\ Line$	$= S^2$
LCL	$= \frac{S^2}{n-1} c_{n-1;1-a/2}^2$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι τα παραπάνω όρια ελέγχου είναι όρια πιθανότητας (*probability limits*) αφού δεν συνηθίζεται η ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου ορίων $3S$ για την ποσότητα S^2 .

1.2.2.2 Διαγράμματα ελέγχου φάσης I (σ άγνωστο)

Στην πράξη η ποσότητα S είναι άγνωστη οπότε πρέπει να εκτιμηθεί παίρνοντας προκαταρκτικά ανεξάρτητα τυχαία δείγματα.

Στην ανάλυση που ακολουθεί υποθέτουμε ότι το χαρακτηριστικό X ακολουθεί κατανομή $N(m, S^2)$ και ότι έχουμε m το πλήθος ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από τη X τα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $1 \leq i \leq m$, μεγέθους n το καθένα.

- **R** διάγραμμα ελέγχου

Χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση του S την ποσότητα $\hat{S} = \bar{R} / d_2$ τότε το Πλαίσιο 5 παίρνει την ακόλουθη μορφή

Πλαίσιο 8 (R διάγραμμα)	
Phase I control limits (3σ)	
UCL	$= D_4 \bar{R}$
$Center Line$	$= \bar{R}$
LCL	$= D_3 \bar{R}$

όπου

$$D_3 = 1 - 3 \frac{d_3}{d_2}, \quad D_4 = 1 + 3 \frac{d_3}{d_2}$$

Επειδή $D_3 < 0$ για $n \leq 6$, σε αυτές τις περιπτώσεις θέτουμε $D_3 = 0$.

- **S διάγραμμα ελέγχου**

Χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση του S την ποσότητα $\hat{S} = \bar{S} / c_4$ τότε το Πλαίσιο 6 παίρνει την ακόλουθη μορφή

Πλαίσιο 9 (S διάγραμμα)	
Phase I control limits (3σ)	
UCL	$= B_4 \bar{S}$
$Center Line$	$= \bar{S}$
LCL	$= B_3 \bar{S}$

όπου

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}, \quad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}.$$

Επειδή $B_3 < 0$ για $n \leq 5$, σε αυτές τις περιπτώσεις θέτουμε $B_3 = 0$.

- **S² διάγραμμα ελέγχου**

Χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση του S^2 την ποσότητα $\hat{S}^2 = \bar{S}^2$ (δείτε σχέση (5)) το Πλαίσιο 7 παίρνει την ακόλουθη μορφή

Πλαίσιο 10 (S^2 διάγραμμα)	
Phase I control limits ($\alpha/2$)	
UCL	$= \frac{\overline{S^2}}{n-1} c_{n-1;\alpha/2}^2$
$Center\ Line$	$= \overline{S^2}$
LCL	$= \frac{\overline{S^2}}{n-1} c_{n-1;1-\alpha/2}^2$

Σημειώσουμε πάλι ότι τα παραπάνω όρια ελέγχου είναι όρια πιθανότητας (*probability limits*).

Κλείνοντας την παρούσα παράγραφο σημειώνουμε ότι σύμφωνα με όσα έχουν προηγηθεί μπορούμε εύκολα να αναπτύξουμε R και S διαγράμματα ελέγχου Φάσης I με όρια πιθανότητας $\alpha/2$.

1.2.3 Διαγράμματα Ελέγχου για Μεμονωμένες Παρατηρήσεις

Σε ορισμένες περιπτώσεις το μέγεθος του δείγματος είναι ίσο με 1 (αυτόματη επιθεώρηση παραγόμενων προϊόντων, μικρός ρυθμός παραγωγής, κτλ.). Σε αυτή την περίπτωση ομιλούμε για διαγράμματα ελέγχου για μεμονωμένες ή ατομικές παρατηρήσεις (*individual observations*). Οι μέθοδοι που αναπτύξαμε στις προηγούμενες παραγράφους χρειάζονται τροποποίηση. Σε ότι ακολουθήσει στην παρούσα παράγραφο υποθέτουμε ότι το χαρακτηριστικό X ακολουθεί κατανομή $N(m, S^2)$ και ότι έχουμε στη διάθεσή μας m ανεξάρτητες παρατηρήσεις X_1, X_2, \dots, X_m από την X για την ανάλυση Φάσης I .

1.2.3.1 Διαγράμματα ελέγχου φάσης II (μ, σ γνωστά)

Σε αυτή την περίπτωση το Πλαίσιο 1 παίρνει τη μορφή

Πλαίσιο 11 (X διάγραμμα)	
Phase II control limits (3σ)	
UCL	$= m + 3s$
$Center\ Line$	$= m$
LCL	$= m - 3s$

αφού $n=1$, και ομιλούμε για X διάγραμμα ελέγχου αφού στο διάγραμμα απεικονίζονται οι μεμονωμένες παρατηρήσεις X_i ($W_i = X_i, i \geq 1$).

Για τη συμπεριφορά της διασποράς του χαρακτηριστικού X το αντίστοιχο R διάγραμμα ελέγχου δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί επειδή για $n=1$ δεν έχει νόημα η ποσότητα R . Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε το κινούμενο εύρος (*moving range*) των μεμονωμένων παρατηρήσεων που ορίζεται από τη σχέση

$$MR_i = |X_i - X_{i-1}|, \quad 2 \leq i \leq m.$$

Προφανώς, για το κινούμενο εύρος MR_i ισχύει ότι

$$m_{MR_i} = E(MR_i) = s d_2, \quad s_{MR_i} = \sqrt{V(MR_i)} = s d_3.$$

Πρέπει να προσεχθεί ότι οι πιο πάνω σταθερές d_2, d_3 υπολογίζονται για $n=2$. Συνεπώς ένα διάγραμμα ελέγχου για τη διασπορά του χαρακτηριστικού X μπορεί να βασιστεί σε ένα διάγραμμα όπου η απεικονιζόμενη ποσότητα θα είναι το κινούμενο εύρος MR_i των παρατηρήσεων. Το μοντέλο με όρια $3s$ θα έχει τη μορφή

$$LCL = m_{MR_i} - 3s_{MR_i} = (d_2 - 3d_3)s, \quad CL = m_{MR_i} = d_2s, \quad UCL = m_{MR_i} + 3s_{MR_i} = (d_2 + 3d_3)s.$$

Για $D_1 = d_2 - 3d_3, D_2 = d_2 + 3d_3$ προκύπτει το ακόλουθο πλαίσιο

Πλαίσιο 12 (MR διάγραμμα)	
Phase II control limits (3σ)	
UCL	$= D_2s$
<i>Center Line</i>	$= d_2s$
LCL	$= D_1s$

1.2.3.2 Διαγράμματα ελέγχου φάσης I (μ, σ άγνωστα)

Στην περίπτωση που οι ποσότητες m και s είναι άγνωστες πρέπει να εκτιμηθούν. Η εκτίμηση του μέσου δίνεται από τη σχέση

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{m}.$$

Η ποσότητα \bar{X} ακολουθεί κατανομή $N(m, s^2/m)$ και χρησιμοποιείται ως εκτίμηση της ποσότητας m (αμερόληπτη και συνεπής εκτιμήτρια του m), δηλαδή

$$\hat{m} = \bar{X}$$

Για την εκτίμηση του s , θέτοντας

$$\overline{MR} = \frac{MR_2 + MR_3 + \dots + MR_m}{m-1}$$

έχουμε ότι $E(\overline{MR}) = S d_2$, οπότε η ποσότητα \overline{MR}/d_2 είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της ποσότητας S , και χρησιμοποιείται ως εκτίμηση της ποσότητας S , δηλαδή

$$\hat{S} = \frac{\overline{MR}}{d_2}$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εκτιμήσεις το Πλαίσιο 11 παίρνει την ακόλουθη μορφή

Πλαίσιο 13 (X διάγραμμα)	
Phase I control limits (3σ)	
UCL	$= \bar{X} + 3 \frac{\overline{MR}}{d_2}$
$Center\ Line$	$= \bar{X}$
LCL	$= \bar{X} - 3 \frac{\overline{MR}}{d_2}$

ενώ το Πλαίσιο 12, για $D_3 = 1 - 3 \frac{d_3}{d_2}$, $D_4 = 1 + 3 \frac{d_3}{d_2}$ παίρνει τη μορφή

Πλαίσιο 14 (MR διάγραμμα)	
Phase I control limits (3σ)	
UCL	$= D_4 \overline{MR}$
$Center\ Line$	$= \overline{MR}$
LCL	$= D_3 \overline{MR}$

Πρέπει να προσεχθεί ότι οι πιο πάνω σταθερές D_3, D_4 υπολογίζονται για $n = 2$.

1.3 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart για ιδιότητες

Σε αρκετές περιπτώσεις ταξινομούμε ένα προϊόν σαν ελαττωματικό ή μη συμμορφούμενο (*defective or nonconforming*) αν τουλάχιστον ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό του έχει τιμή η

οποία βρίσκεται εκτός των ορίων προδιαγραφών. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το προϊόν παρουσιάζει τουλάχιστον ένα ελάττωμα ή ατέλεια (*defect or nonconformity*).

Ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων μιας παραγωγικής διεργασίας, όπως και ο αριθμός των ελαττωμάτων ενός προϊόντος, είναι ποιοτικά χαρακτηριστικά που περιγράφονται με διακριτές τυχαίες μεταβλητές οι οποίες στα πλαίσια του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας ονομάζονται ιδιότητες (*attributes*).

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τρία βασικά είδη διαγραμμάτων ελέγχου (*attribute control charts*) που χρησιμοποιούνται σε αυτές τις περιπτώσεις. Το πρώτο διάγραμμα αφορά το ποσοστό p των ελαττωματικών προϊόντων μιας παραγωγικής διεργασίας γνωστό ως p διάγραμμα. Το δεύτερο διάγραμμα ελέγχου αφορά το συνολικό αριθμό των ελαττωμάτων σε μια μονάδα ελέγχου (*inspection unit*) γνωστό ως c διάγραμμα. Το τρίτο διάγραμμα αφορά το μέσο αριθμό των ελαττωμάτων ανά μονάδα ελέγχου γνωστό ως \bar{u} διάγραμμα.

Ο όρος μονάδα ελέγχου δεν σημαίνει απαραίτητα ένα προϊόν. Η μονάδα ελέγχου ή απλά μονάδα μπορεί να είναι είτε το ίδιο το προϊόν (π.χ. ένα τόπι ύφασμα), είτε τμήμα του προϊόντος (π.χ. 2 τρέχοντα μέτρα από το τόπι), είτε ένα σύνολο προϊόντων (π.χ. 10 τόπια ύφασμα). Επίσης τα ελαττώματα που παρουσιάζει μια μονάδα ελέγχου δεν είναι αναγκαστικά του ίδιου τύπου (π.χ. σε ένα Η/Υ ελάττωμα μπορεί χαρακτηριστεί η απουσία κάποιων εξαρτημάτων, αστοχίες συγκολήσεων, ελαττωματική RAM, απουσία αυτοκόλλητου του σειριακού αριθμού, κτλ.).

1.3.1 Διαγράμματα ελέγχου για το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων

Στην παρούσα παράγραφο θα αναπτύξουμε την κατασκευή διαγράμματος τύπου *Shewhart* για την παρακολούθηση της συμπεριφοράς του ποσοστού p των ελαττωματικών ή μη συμμορφούμενων προϊόντων μιας παραγωγικής διεργασίας. Με τον όρο ποσοστό ελαττωματικών προϊόντων ορίζουμε το πηλίκο του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων δια του συνολικού αριθμού των παραγόμενων προϊόντων.

1.3.1.1 Διαγράμματα ελέγχου φάσης II (p γνωστό)

Η κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου για το ποσοστό p των ελαττωματικών προϊόντων μιας διεργασίας βασίζεται στη Διωνυμική κατανομή. Ας υποθέσουμε ότι το

ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων είναι γνωστό και ίσο με p και ότι από την παραγωγή επιλέγουμε ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους n προϊόντων το καθένα. Ας συμβολίσουμε με X_{ij} , $i \geq 1$, $1 \leq j \leq n$, την τυχαία μεταβλητή με τιμές 1 και 0 ανάλογα με το αν το αντίστοιχο προϊόν (i, j) είναι ελαττωματικό ή όχι. Για την τυχαία μεταβλητή X_{ij} έχουμε ότι $X_{ij} \sim B(1, p)$, ενώ για την τυχαία μεταβλητή $X_i = X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}$ που δηλώνει τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων στο i δείγμα έχουμε ότι $X_i \sim B(n, p)$.

Αν $X \sim B(n, p)$ είναι γνωστό ότι

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} I_A(x), \quad A = \{0, 1, \dots, n\}$$

και $m_x = np$, $s_x^2 = np(1-p)$.

Για την τυχαία μεταβλητή

$$W_i = p_i = \frac{X_i}{n}, \quad i \geq 1$$

που δηλώνει το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων στο i δείγμα ισχύει ότι

$$m_{W_i} = p, \quad s_{W_i}^2 = \frac{p(1-p)}{n}, \quad i \geq 1.$$

Έτσι μπορούμε να αναπτύξουμε ένα διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων στο οποίο θα απεικονίζεται η τιμή της $W_i = p_i = X_i/n$ στα διάφορα δείγματα που επιλέγουμε από την παραγωγή. Τα όρια του διαγράμματος ελέγχου συνοψίζονται στο ακόλουθο πλαίσιο

Πλαίσιο 15 (p διάγραμμα)	
Phase II control limits (3σ)	
UCL	$= p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
$Center Line$	$= p$
LCL	$= p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

Η κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου για την παρακολούθηση του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της τυχαίας μεταβλητής X_i . Στο

διάγραμμα ελέγχου απεικονίζεται η τιμή της $X_i (= W_i)$ στα διάφορα δείγματα που επιλέγουμε από την παραγωγή και τα όρια του διαγράμματος ελέγχου δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο

Πλαίσιο 16 (np διάγραμμα)	
Phase II control limits (3σ)	
UCL	$= np + 3\sqrt{np(1-p)}$
$Center Line$	$= np$
LCL	$= np - 3\sqrt{np(1-p)}$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι στην πράξη αρκεί να κατασκευάσουμε ένα από τα δύο παραπάνω διαγράμματα αφού είναι “ισοδύναμα”.

1.3.1.2 Διαγράμματα ελέγχου φάσης I (p άγνωστο)

Όταν το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων της διεργασίας είναι άγνωστο πρέπει να εκτιμηθεί από τις πληροφορίες που θα μας δώσουν m ανεξάρτητα προκαταρκτικά δείγματα μεγέθους n το καθένα, έστω τα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $1 \leq i \leq m$. Θέτοντας

$$p_i = \frac{X_i}{n} = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}}{n}, \quad 1 \leq i \leq m$$

$$\bar{P} = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_m}{m} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{mn} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}}{mn}$$

έχουμε ότι $E(\bar{P}) = p$ αφού $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} \sim B(nm, p)$. Η ποσότητα \bar{P} χρησιμοποιείται ως

εκτίμηση της ποσότητας p , δηλαδή $\hat{p} = \bar{P}$. Συνεπώς το Πλαίσιο 15 παίρνει τη μορφή

Πλαίσιο 17 (p διάγραμμα)	
Phase I control limits (3σ)	
UCL	$= \bar{P} + 3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}$
$Center Line$	$= \bar{P}$
LCL	$= \bar{P} - 3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}$

ενώ το Πλαίσιο 16 παίρνει τη μορφή

Πλαίσιο 18 (np διάγραμμα)	
Phase I control limits (3σ)	
UCL	$= n\bar{P} + 3\sqrt{n\bar{P}(1-\bar{P})}$
$Center\ Line$	$= n\bar{P}$
LCL	$= n\bar{P} - 3\sqrt{n\bar{P}(1-\bar{P})}$

1.3.2 Διαγράμματα ελέγχου για τον αριθμό και το μέσο αριθμό των ελαττωμάτων

Στην παρούσα παράγραφο θα αναπτύξουμε την κατασκευή διαγράμματος τύπου Shewhart για τον (συνολικό) αριθμό των ελαττωμάτων σε μια μονάδα ελέγχου και για το μέσο αριθμό των ελαττωμάτων ανά μονάδα ελέγχου. Η βασική υπόθεση που θα κάνουμε είναι ότι ο (συνολικός) αριθμός των ελαττωμάτων (πιθανόν διαφορετικών τύπων) σε μια μονάδα ελέγχου ακολουθεί την κατανομή *Poisson*. Σύμφωνα με αυτή την υπόθεση θα πρέπει η πιθανότητα εμφάνισης ελαττώματος σε οποιοδήποτε σημείο (περιοχή) μιας μονάδας να είναι μικρή και σταθερή και φυσικά ο αριθμός των ελαττωμάτων είναι θεωρητικά μη πεπερασμένος αριθμός. Επιπλέον απαιτείται οι μονάδες ελέγχου στα δείγματα να είναι ίδιες.

1.3.2.1 Διαγράμματα ελέγχου φάσης II (c γνωστό)

Ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός X των ελαττωμάτων που εμφανίζονται σε μια μονάδα ελέγχου ακολουθεί την κατανομή *Poisson* με παράμετρο c (συμβολικά $X \sim P(c)$), δηλαδή

$$P(X = x) = e^{-c} \frac{c^x}{x!} I_A(x), \quad \text{όπου } A = \{0,1,\dots\} \text{ και } I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Είναι γνωστό ότι $m_X = s_X^2 = c$. Συνεπώς μπορούμε να αναπτύξουμε ένα διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του αριθμού των ελαττωμάτων των μονάδων ελέγχου στο οποίο θα απεικονίζεται η τιμή της $W_i = X_i$ στις διάφορες μονάδες ελέγχου που επιλέγουμε από την παραγωγή. Τα όρια του διαγράμματος ελέγχου συνοψίζονται στο ακόλουθο πλαίσιο

Πλαίσιο 19 (c διάγραμμα)	
Phase II control limits (3σ)	
UCL	$= c + 3\sqrt{c}$
$Center\ Line$	$= c$
LCL	$= c - 3\sqrt{c}$

Έστω τώρα ότι από την παραγωγή επιλέγουμε ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους n μονάδων το καθένα. Ας συμβολίσουμε με X_{ij} , $i \geq 1$, $1 \leq j \leq n$, την τυχαία μεταβλητή που δηλώνει τον αριθμό των ελαττωμάτων της αντίστοιχης μονάδας ελέγχου (i, j) . Για την τυχαία μεταβλητή X_{ij} έχουμε ότι $X_{ij} \sim P(c)$, ενώ για την τυχαία μεταβλητή $X_i = X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}$ που δηλώνει το συνολικό αριθμό των ελαττωμάτων στο i δείγμα έχουμε ότι $X_i \sim P(nc)$.

Για την τυχαία μεταβλητή $U_i = X_i/n$ που δηλώνει το μέσο αριθμό των ελαττωμάτων ανά μονάδα ελέγχου στο i δείγμα έχουμε ότι

$$m_{U_i} = c, \quad s_{U_i}^2 = \frac{c}{n}, \quad i \geq 1.$$

Συνεπώς μπορούμε να αναπτύξουμε ένα διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του μέσου αριθμού των ελαττωμάτων ανά μονάδα ελέγχου σε κάθε δείγμα στο οποίο θα απεικονίζεται η τιμή της $U_i = X_i/n$ στα διάφορα δείγματα που επιλέγουμε από την παραγωγή. Τα όρια του διαγράμματος ελέγχου συνοψίζονται στο ακόλουθο πλαίσιο

Πλαίσιο 20 (u διάγραμμα)	
Phase II control limits (3σ)	
UCL	$= c + 3\sqrt{\frac{c}{n}}$
$Center\ Line$	$= c$
LCL	$= c - 3\sqrt{\frac{c}{n}}$

Στα Πλαίσια 19 και 20, αν το LCL είναι αρνητικό το θέτουμε ίσο με 0. Βέβαια στο Πλαίσιο 20 αυτό μπορεί να αποφευχθεί αυξάνοντας το μέγεθος του δείγματος.

1.3.2.2 Διαγράμματα ελέγχου φάσης I (c άγνωστο)

Σχετικά με το c διάγραμμα όταν η παράμετρος c της κατανομής Poisson είναι άγνωστη πρέπει να εκτιμηθεί από τις πληροφορίες που θα μας δώσουν m προκαταρκτικές μονάδες ελέγχου. Ας συμβολίσουμε με X_i τον αριθμό των ελαττωμάτων της i μονάδος ελέγχου, $1 \leq i \leq m$. Θέτοντας

$$\bar{C} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{m}, \quad 1 \leq i \leq m$$

έχουμε ότι $E(\bar{C}) = c$. Η ποσότητα \bar{C} χρησιμοποιείται ως εκτίμηση της ποσότητας c , δηλαδή

$$\hat{c} = \bar{C}.$$

Συνεπώς το Πλαίσιο 19 παίρνει τη μορφή

Πλαίσιο 21 (c διάγραμμα)	
Phase I control limits (3σ)	
UCL	$= \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}}$
$Center\ Line$	$= \bar{C}$
LCL	$= \bar{C} - 3\sqrt{\bar{C}}$

Στην περίπτωση του u διαγράμματος η παράμετρος c της κατανομής Poisson θα εκτιμηθεί από τις πληροφορίες που θα μας δώσουν m ανεξάρτητα προκαταρκτικά δείγματα μεγέθους n μονάδων ελέγχου το καθένα, έστω τα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $1 \leq i \leq m$. Θέτοντας

$$U_i = \frac{X_i}{n} = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}}{n}, \quad 1 \leq i \leq m$$

και

$$\bar{U} = \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_m}{m} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{mn} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}}{mn}$$

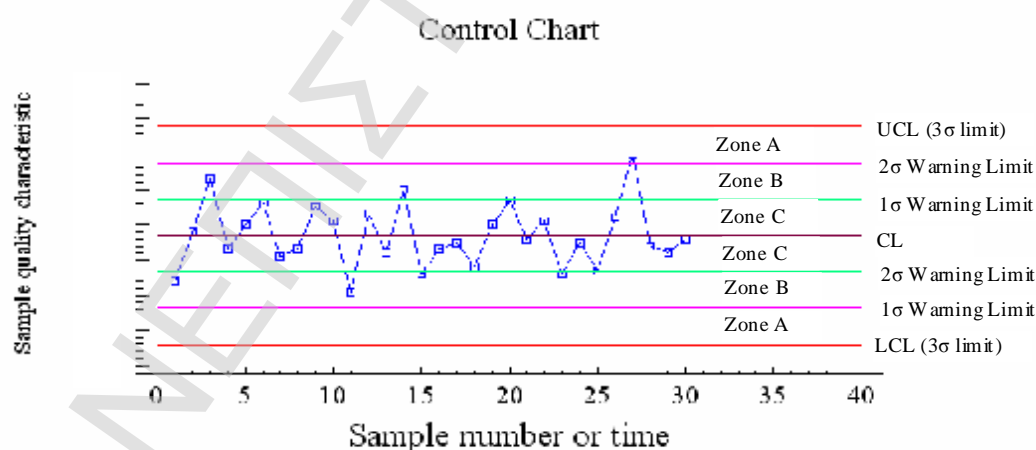
έχουμε ότι $E(\bar{U}) = c$ αφού $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} \sim P(mnc)$. Η ποσότητα \bar{U} χρησιμοποιείται ως

εκτίμηση της ποσότητας c , δηλαδή $\hat{c} = \bar{U}$. Συνεπώς το Πλαίσιο 20 παίρνει τη μορφή

Πλαίσιο 22 (u διάγραμμα)	
Phase I control limits (3σ)	
UCL	$= \bar{U} + 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n}}$
Center Line	$= \bar{U}$
LCL	$= \bar{U} - 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n}}$

1.4 Κανόνες ευαισθητοποίησης ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart

Από μελέτες έχει διαπιστωθεί ότι για μικρές μετατοπίσεις του μέσου m της W (έως και $1.5s$) το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής ARL του διαγράμματος ελέγχου Shewhart δεν είναι ικανοποιητικό (δηλαδή είναι αρκετά μεγάλος αριθμός). Για να γίνει περισσότερο ευαίσθητο ένα διάγραμμα ελέγχου Shewhart με $3s$ όρια ως προς την ικανότητά του να ανιχνεύει πιο γρήγορα εκτός ελέγχου διεργασίες, εκτός από τη σχεδίαση των ορίων ελέγχου, σχεδιάζουμε επίσης και προειδοποιητικά όρια εσωτερικά των ορίων ελέγχου όπως δείχνει το ακόλουθο διάγραμμα



Σχήμα 1.2: Διάγραμμα ελέγχου Shewhart και προειδοποιητικά όρια

Τα προειδοποιητικά όρια χρησιμοποιούνται για την ανάπτυξη κανόνων ευαισθητοποίησης (*sensitizing rules*) οι οποίοι περιγράφουν ενδεχόμενα που σχετίζονται με την εμφάνιση ειδικών ακολουθιών σημείων (*patterns*) σε ένα διάγραμμα ελέγχου. Στην περίπτωση που

συμβεί το ενδεχόμενο που περιγράφει ο κανόνας τότε θεωρούμε ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου χωρίς απαραίτητα να έχουμε κάποιο σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου (*UCL* και *LCL*).

Οι σημαντικότεροι κανόνες που χρησιμοποιούνται για την ευαισθητοποίηση ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart είναι οι ακόλουθοι:

- Κανόνας 1. Ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου (κανόνας 1-από-1)
- Κανόνας 2. Δύο από τρία συνεχόμενα σημεία σε μια από τις δύο ζώνες *A* (κανόνας 2 από-3)
- Κανόνας 3. Τέσσερα από πέντε συνεχόμενα σημεία σε μια από τις δύο περιοχές, πέραν της Ζώνης *C* (κανόνας 4-από-5)
- Κανόνας 4. Πέντε συνεχόμενα σημεία, όλα πέραν της ολικής Ζώνης *C* (και στις δύο περιοχές)
- Κανόνας 5. Έξι συνεχόμενα σημεία σε αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη
- Κανόνας 6. Δεκαπέντε συνεχόμενα σημεία στην ολική Ζώνη *C*
- Κανόνας 7. Δεκατέσσερα συνεχόμενα σημεία σε εναλλασσόμενη μορφή “πάνω-κάτω”
- Κανόνας 8. Εννέα συνεχόμενα σημεία στην ίδια μεριά (επάνω ή κάτω) της κεντρικής γραμμής (κανόνας 9-από-9)

1.5 Διαγράμματα ελέγχου CUSUM

Στα διαγράμματα ελέγχου Shewhart απεικονίζονται τιμές που βασίζονται στις μετρήσεις κάθε δείγματος χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τους μετρήσεις από προηγούμενα δείγματα. Για το λόγο αυτό χαρακτηρίζουμε τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart ως διαγράμματα ελέγχου χωρίς μνήμη (*control charts without memory*). Τα διαγράμματα Shewhart είναι πολύ χρήσιμα στην ανίχνευση μετατοπίσεων του μέσου για τιμές μεγαλύτερες του 1.5σ.

Τα διαγράμματα ελέγχου τύπου CUSUM έχουν μη περιορισμένη και ομοιόμορφη μνήμη αφού λαμβάνουν πληροφορία από όλα τα προηγούμενα δείγματα και το καθένα από αυτά έχει την ίδια βαρύτητα. Χρησιμοποιούνται για να εντοπίζουν γρήγορα μικρές μετατοπίσεις του μέσου και ανήκουν στην κατηγορία των διαγραμμάτων με μνήμη (*control charts with memory*).

Ας θεωρήσουμε μια εντός ελέγχου διεργασία η οποία παράγει προϊόντα στα οποία η τιμή *X* ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού τους που θέλουμε να παρακολουθήσουμε έχει μέση

τιμή m_0 και τυπική απόκλιση s . Από τη διεργασία λαμβάνονται μεμονωμένες παρατηρήσεις X_i , $i \geq 1$, και μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας της μορφής $m_1 = m_0 \pm ds$ ($d > 0$). Τα δίπλευρα (συμμετρικά) διαγράμματα ελέγχου CUCUM (*two-sided CUSUMS*) με διαστήματα απόφασης εισήχθησαν από τον Page (1954). Στα διαγράμματα αυτά απεικονίζονται ταυτόχρονα οι δύο ακόλουθες στατιστικές συναρτήσεις

$$S_t^+ = \max[0, X_t - (m_0 + K) + S_{t-1}^+], \quad S_0^+ = 0,$$

$$S_t^- = \min[0, X_t - (m_0 - K) + S_{t-1}^-], \quad S_0^- = 0.$$

Οι τιμές των ποσοτήτων S_0^+ και S_0^- ονομάζονται τιμές εκκίνησης (*headstart values*). Η ποσότητα K (≥ 0) ονομάζεται τιμή αναφοράς (*reference value*) και η πιο συνήθης τιμή της δίνεται από τη σχέση

$$K = \frac{ds}{2} = \frac{|m_1 - m_0|}{2} = ks, \quad k = d/2.$$

Η ποσότητα S_t^+ συσσωρεύει τις αποκλίσεις των παρατηρήσεων X_i από την ποσότητα $m_0 + K$ από τη στιγμή που θα εμφανιστεί θετική απόκλιση και μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλη για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0 : m = m_0 \quad H_1 : m = m_1 = m_0 + ds, \quad d > 0$$

αφού μεγάλες θετικές τιμές της S_t^+ οδηγούν στην αποδοχή της υπόθεσης H_1^+ . Ανάλογα, η ποσότητα S_t^- συσσωρεύει τις αποκλίσεις των παρατηρήσεων X_i από την ποσότητα $m_0 - K$ από τη στιγμή που θα εμφανιστεί αρνητική απόκλιση και συνεπώς η ποσότητα S_t^- μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλη για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0 : m = m_0 \quad H_1 : m = m_1 = m_0 - ds, \quad d > 0$$

αφού μικρές αρνητικές τιμές της S_t^- οδηγούν στην αποδοχή της υπόθεσης H_1^- .

Για το ποια από τις δύο εναλλακτικές υποθέσεις H_1^+ και H_1^- θα αποδεχθούμε ή όχι σε κάθε βήμα της διαδικασίας η απόφασή μας θα εξαρτηθεί από το αν ισχύει η σχέση $S_t^+ > H$ ή η σχέση $S_t^- < -H$, όπου H μια θετική σταθερά ($H > 0$). Η πιο συνήθης τιμή για το διάστημα απόφασης είναι η

$$H = hs, \quad h = 4,5.$$

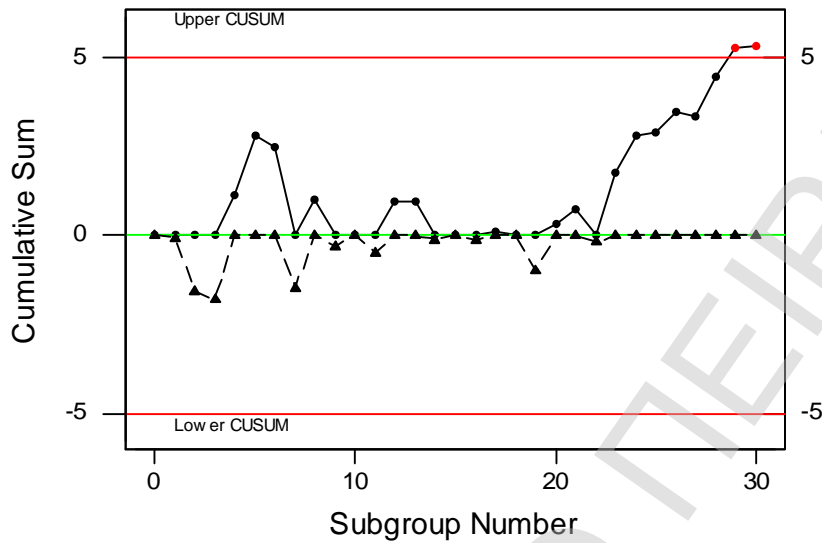
Η ποσότητα H ονομάζεται διάστημα απόφασης (*decision interval*). Φυσικά αν μια από τις δύο εναλλακτικές υποθέσεις H_1^+ ή H_1^- γίνει αποδεκτή τότε θεωρούμε ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου λόγω μετατόπισης του μέσου της διεργασίας σε υψηλότερο ή χαμηλότερο επίπεδο αντίστοιχα.

Για τα δεδομένα του Πίνακα 1.1 έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα για $K = |m_1 - m_0|/2 = |10 - 11|/2 = 0.5$ (επίσης $k = 0.5$)

Πίνακας 1.1: Συσσωρευμένα αθροίσματα για $K = 0.5$

Παρατήρηση	X_t	$X_t - (m_0 + K)$	S_t^+	$X_t - (m_0 - K)$	S_t^-
1	9.45	-1.05	0	-0.05	-0.05
2	7.99	-2.51	0	-1.51	-1.56
3	9.29	-1.21	0	-0.21	-1.77
4	11.66	1.16	1.16	2.16	0
5	12.16	1.66	2.82	2.66	0
6	10.18	-0.32	2.5	0.68	0
7	8.04	-2.46	0.04	-1.46	-1.46
8	11.46	0.96	1	1.96	0
9	9.2	-1.3	0	-0.3	-0.3
10	10.34	-0.16	0	0.84	0
11	9.03	-1.47	0	-0.47	-0.47
12	11.47	0.97	0.97	1.97	0
13	10.51	0.01	0.98	1.01	0
14	9.4	-1.1	0	-0.1	-0.1
15	10.08	-0.42	0	0.58	0
16	9.37	-1.13	0	-0.13	-0.13
17	10.62	0.12	0.12	1.12	0
18	10.31	-0.19	0	0.81	0
19	8.52	-1.98	0	-0.98	-0.98
20	10.84	0.34	0.34	1.34	0
21	10.9	0.4	0.74	1.4	0
22	9.33	-1.17	0	-0.17	-0.17
23	12.29	1.79	1.79	2.79	0
24	11.5	1	2.79	2	0
25	10.6	0.1	2.89	1.1	0
26	11.08	0.58	3.47	1.58	0
27	10.38	-0.12	3.35	0.88	0
28	11.62	1.12	4.47	2.12	0
29	11.31	0.81	5.28	1.81	0
30	10.52	0.02	5.3	1.02	0

Για $H = 5s = 5$ (επίσης $h = 5$), το διάγραμμα ελέγχου CUSUM (S_t^+ και S_t^- στο ίδιο διάγραμμα) είναι το ακόλουθο



Σχήμα 1.3: Διάγραμμα ελέγχου CUSUM για τα δεδομένα του Πίνακα 1.1 για $K = 0.5$ και $H = 5$

Από το παραπάνω διάγραμμα προκύπτει ότι $S_{29}^+ > 5$ και συνεπώς η διεργασία είναι εκτός ελέγχου λόγω μετατόπισης του μέσου της διεργασίας σε υψηλότερο επίπεδο.

Στη γενική περίπτωση, τόσο η τιμή αναφοράς K όσο και το διάστημα απόφασης H μπορούν να διαφέρουν σε ένα δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου CUSUM. Τότε ομιλούμε για μη συμμετρικό διάγραμμα ελέγχου CUSUM. Επίσης οι τιμές εκκίνησης S_0^+ και S_0^- δεν είναι υποχρεωτικό να είναι ίσες με το 0. Όταν $0 < S_0^+ < H$ ή/και $-H < S_0^- < 0$ ομιλούμε για εφαρμογή της μέθοδου της άμεσης αρχικής αντίδρασης (*fast initial response*). Συνεπώς στη γενική περίπτωση σε ένα δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου CUSUM απεικονίζονται οι ποσότητες

$$S_t^+ = \max[0, X_t - (m_0 + K^+) + S_{t-1}^+], \quad 0 \leq S_0^+ < H^+,$$

$$S_t^- = \min[0, X_t - (m_0 + K^-) + S_{t-1}^-], \quad H^- < S_0^- \leq 0$$

όπου

$$K^+ > 0, \quad H^+ > 0, \quad K^- < 0, \quad H^- < 0.$$

Το παραπάνω διάγραμμα δίνει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας τη χρονική στιγμή t αν $S_t^+ > H^+ > 0$ ή $S_t^- < H^- < 0$. Φυσικά αν μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε μετατοπίσεις του

μέσου σε υψηλότερο (χαμηλότερο) επίπεδο στο διάγραμμα ελέγχου CUSUM θα απεικονιστεί μόνο η ποσότητα S_t^+ (S_t^-) και το διάστημα απόφασης H^+ (H^-). Σε αυτή την περίπτωση ομιλούμε για μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου συσσωρευμένων αθροισμάτων (*one-sided CUSUM*).

Τα διαγράμματα ελέγχου CUSUM μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στην περίπτωση που δεν έχουμε μεμονωμένες παρατηρήσεις αλλά δείγματα μεγέθους $n > 1$. Σε αυτή την περίπτωση η ποσότητα X_t θα πρέπει να αντικατασταθεί με την ποσότητα \bar{X}_t (δηλαδή με το μέσο του t δείγματος) και η ποσότητα S με την ποσότητα S/\sqrt{n} . Έτσι στο δίπλευρο συμμετρικό διάγραμμα ελέγχου CUSUM απεικονίζονται οι στατιστικές συναρτήσεις

$$S_t^+ = \max[0, \bar{X}_t - (m_0 + K) + S_{t-1}^+]$$

$$S_t^- = \min[0, \bar{X}_t - (m_0 - K) + S_{t-1}^-]$$

όπου

$$K = k \frac{S}{\sqrt{n}}, \quad H = h \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

1.6 Διαγράμματα ελέγχου EWMA

Ας θεωρήσουμε μια εντός ελέγχου διεργασία η οποία παράγει προϊόντα στα οποία η τιμή X ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού τους που θέλουμε να παρακολουθήσουμε έχει μέση τιμή m_0 και τυπική απόκλιση S . Από τη διεργασία λαμβάνονται ανεξάρτητες μεμονωμένες παρατηρήσεις X_i , $i \geq 1$, και μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας της μορφής $m_1 = m_0 \pm dS$. Στα διαγράμματα ελέγχου εκθετικά σταθμισμένου κινητού μέσου ή απλά διαγράμματα ελέγχου EWMA (*exponentially weighted moving average*) τα οποία εισήχθησαν από τον Roberts (1959), απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση

$$Z_t = (1-I)Z_{t-1} + I X_t, \quad t \geq 1, \quad 0 < I \leq 1.$$

Για την εκκίνηση του παραπάνω σχεδίου EWMA απαιτείται ο καθορισμός της τιμής εκκίνησης Z_0 η οποία συνήθως λαμβάνεται ίση με m_0 ($Z_0 = m_0$), ή γενικότερα λαμβάνεται ίση με μια τιμή στόχο (*target value*) T ($Z_0 = T$). Χρησιμοποιώντας διαδοχικά τον παραπάνω τύπο παίρνουμε

$$Z_t = (1-I)^t Z_0 + I \sum_{i=1}^t (1-I)^{t-i} X_i.$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα Z_t αποτελεί ένα σταθμισμένο μέσο των παρατηρήσεων $Z_0, X_1, X_2, \dots, X_{t-1}, X_t$ με αντίστοιχα βάρη $(1-I)^t, I(1-I)^{t-1}, I(1-I)^{t-2}, \dots, I(1-I)^1, I$ (τα βάρη αθροίζουν στη μονάδα). Τα βάρη $I(1-I)^{t-i}$ των ποσοτήτων X_i φθίνουν γεωμετρικά καθώς προχωρούμε από την παρατήρηση X_t προς την παρατήρηση X_1 και συνεπώς η τιμή της παραμέτρου I απεικονίζει τη σπουδαιότητα που δίνουμε στις νέες (μεγάλη τιμή για το I) ή στις παλαιότερες (μικρή τιμή για το I) παρατηρήσεις. Για αυτό το λόγο, ο *Roberts* (1959) ονόμασε τα διαγράμματα που βασίζονται στη ποσότητα Z_t ως διαγράμματα ελέγχου γεωμετρικού κινητού μέσου (*geometric moving average control charts*). Στις μέρες μας βέβαια έχει επικρατήσει ο όρος διαγράμματα ελέγχου EWMA.

Για το μέσο και τη διακύμανση της στατιστικής συνάρτησης Z_t έχουμε ότι ($Z_0 = m_0$)

$$m_{Z_t} = m_0$$

$$s_{Z_t}^2 = \text{Var} \left((1-I)^t Z_0 + I \sum_{i=1}^t (1-I)^{t-i} X_i \right) = I^2 s^2 \sum_{i=1}^t [(1-I)^2]^{t-i} = s^2 \left(\frac{I}{2-I} \right) [1 - (1-I)^{2t}].$$

Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψη τη φιλοσοφία κατασκευής ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart, στο διάγραμμα ελέγχου EWMA απεικονίζεται η τιμή της στατιστικής συνάρτησης Z_t και τα όρια ελέγχου θα δίνονται από τους τύπους

$$UCL = m_{Z_t} + Ls_{Z_t} = m_0 + Ls \sqrt{\frac{I}{2-I} [1 - (1-I)^{2t}]}$$

$$CL = m_{Z_t} = m_0$$

$$LCL = m_{Z_t} - Ls_{Z_t} = m_0 - Ls \sqrt{\frac{I}{2-I} [1 - (1-I)^{2t}]}$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι για $I=1$ το διάγραμμα ελέγχου EWMA ανάγεται στο αντίστοιχο διάγραμμα ελέγχου Shewhart. Επίσης παρατηρούμε ότι τα όρια ελέγχου του παραπάνω διαγράμματος είναι μεταβλητά ($I \neq 1$). Ωστόσο η ποσότητα $(1-I)^{2t}$ τείνει στο μηδέν καθώς το t αυξάνει, οπότε σε σχετικά σύντομο χρονικό διάστημα τα όρια ελέγχου σταθεροποιούνται και δίνονται από τη σχέση

$$UCL = m_{z_t} + LS_{z_t} = m_0 + LS \sqrt{\frac{I}{2-I}}$$

$$LCL = m_{z_t} - LS_{z_t} = m_0 - LS \sqrt{\frac{I}{2-I}}$$

Αν και η μέθοδος των διαγραμμάτων ελέγχου EWMA αναπτύχθηκε για μεμονωμένες παρατηρήσεις μπορεί να τροποποιηθεί άμεσα έτσι ώστε να καλύψει και την περίπτωση όπου έχουμε δείγματα μεγέθους $n > 1$. Σε αυτή την περίπτωση η ποσότητα X_t θα πρέπει να αντικατασταθεί με την ποσότητα \bar{X}_t (δηλαδή με το μέσο του t δείγματος) και η ποσότητα S με την ποσότητα s / \sqrt{n} . Συνεπώς στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζεται η ποσότητα

$$Z_t = (1-I)Z_{t-1} + I \bar{X}_t, \quad 0 < I \leq 1$$

με όρια ελέγχου $UCL = m_{z_t} + LS_{z_t} = m_0 + L \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{I}{2-I}} [1 - (1-I)^{2t}]$

$$Center Line = m_{z_t} = m_0$$

$$LCL = m_{z_t} - LS_{z_t} = m_0 - L \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{I}{2-I}} [1 - (1-I)^{2t}]$$

Τα διαγράμματα ελέγχου EWMA χρησιμοποιούνται, όπως και τα διαγράμματα ελέγχου CUSUM, όταν θέλουμε να εντοπίσουμε μικρές μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας. Το πλεονέκτημα των διαγραμμάτων ελέγχου EWMA έναντι των CUSUM είναι ότι δεν είναι ευαίσθητα στην υπόθεση της κανονικότητας των παρατηρήσεων και για το λόγο αυτό είναι ιδανικά στην περίπτωση που έχουμε μεμονωμένες παρατηρήσεις.

Για την επίδειξη ενός διαγράμματος ελέγχου EWMA θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα του Πίνακα 1.2. Για $Z_0 = m_0 = 10$, $s = 1$, $I = 0.1$ και $L = 2.7$ προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας για τις τιμές Z_t που θα απεικονιστούν στο διάγραμμα

Πίνακας 1.2: Δεδομένα για την επίδειξη ενός διαγράμματος ελέγχου EWMA

Παρατήρηση	X_t	Z_t	Παρατήρηση	X_t	Z_t
1	9.45	9.4500	16	9.37	9.98426
2	7.99	9.4950	17	10.62	10.0478
3	9.29	9.0355	18	10.31	10.0740

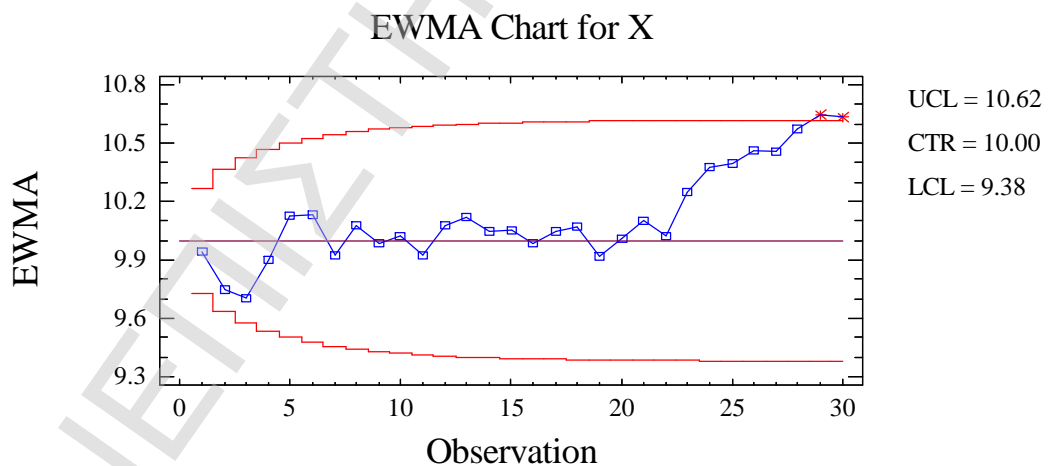
4	11.66	9.9920	19	8.52	9.9186
5	12.16	10.2530	20	10.84	10,0108
6	10.18	10.3070	21	10.90	10.0997
7	8.04	9.2167	22	9.33	10.0227
8	11.46	10.755	23	12.29	10.2495
9	9.20	9.8796	24	11.50	10.3745
10	10.34	10.232	25	10.60	10.3971
11	9.03	9.2384	26	11.08	10.4654
12	11.47	10.9785	27	10.38	10.4568
13	10.51	10.1216	28	11.62	10.5731
14	9.40	10.0495	29	11.31	10.6468
15	10.08	10.0525	30	10.52	10.6341

Τα σταθεροποιημένα όρια ελέγχου ($t \rightarrow \infty$) είναι ίσα με

$$UCL = m_0 + LS \sqrt{\frac{I}{2-I}} = 10 + 2.7 \cdot 1 \cdot \sqrt{\frac{0.1}{(2-0.1)}} = 10.62$$

$$LCL = m_0 - LS \sqrt{\frac{I}{2-I}} = 10 - 2.7 \cdot 1 \cdot \sqrt{\frac{0.1}{(2-0.1)}} = 9.38$$

και το διάγραμμα ελέγχου EWMA είναι το ακόλουθο



Σχήμα 1.4: Διάγραμμα ελέγχου EWMA για τα δεδομένα του Πίνακα 1.2

Στο συγκεκριμένο διάγραμμα παρατηρούμε ότι μετά την 23^η παρατήρηση διαφαίνεται μια μετατόπιση του μέσου της διεργασίας σε υψηλότερο επίπεδο η οποία γίνεται αντιληπτή στην 29^η παρατήρηση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Q διαγράμματα ελέγχου

2.1 Εισαγωγή

Η χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου *Shewhart* απαιτεί την ύπαρξη συνήθως 20-25 προκαταρκτικών δειγμάτων μεγέθους 4-5 μονάδων το καθένα για να καθοριστούν αξιόπιστα όρια ελέγχου. Έτσι απαιτείται η παραγωγή και μέτρηση 80-100 μονάδων προϊόντος. Όμως, ορισμένες παραγωγικές διεργασίες δεν δίνουν τόσες μονάδες σε ένα παραγωγικό κύκλο, όπως οι υπηρεσίες παροχής υπηρεσιών που συμπεριλαμβάνουν εκπαιδευτικούς οργανισμούς, τράπεζες, ασφαλιστικούς και επενδυτικούς οργανισμούς, μεταφορικές εταιρείες κτλ. . Για τέτοιου είδους βιομηχανίες ή οργανισμούς δεν έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι ελέγχου ποιότητας ή οι υπάρχουσες μέθοδοι κρίνονται ανεπαρκείς. Εμφανίζεται έτσι η ανάγκη χρήσης διαγραμμάτων ελέγχου από την πρώτη κιάλας παραγόμενη μονάδα, δηλαδή από την πρώτη κιάλας διαθέσιμη μέτρηση.

Ένα άλλο πρόβλημα που εμφανίζεται στη χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου *Shewhart* είναι στην περίπτωση που έχουμε δείγματα μεταβλητού μεγέθους από το ποιοτικό χαρακτηριστικό X . Σε αυτή την περίπτωση η διακύμανση της στατιστικής συνάρτησης W που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου μεταβάλλεται από δείγμα σε δείγμα με αποτέλεσμα να εμφανίζονται μεταβλητά όρια ελέγχου. Η ύπαρξη μεταβλητών ορίων ελέγχου σε ένα διάγραμμα ελέγχου καθιστά αδύνατη την ανίχνευση ειδικών ακολουθιών σημείων (*patterns*) στο διάγραμμα ελέγχου αφού τα σημεία που απεικονίζονται στο διάγραμμα είναι σε διαφορετικές κλίμακες τυπικής απόκλισης. Έτσι ένα σημαντικό εργαλείο ανίχνευσης ειδικών αιτιών μεταβλητότητας σε ένα διάγραμμα ελέγχου αποκτά ελάχιστη ισχύ.

Επίσης, στα S και R διαγράμματα ελέγχου ορίων $3S$ όταν το μέγεθος δείγματος είναι μικρότερο του 6 δεν υπάρχει κάτω όριο ελέγχου και έτσι εκ των πραγμάτων δεν μπορούμε να ανιχνεύσουμε μετατοπίσεις της διασποράς της διεργασίας σε χαμηλότερο επίπεδο. Φυσικά αν χρησιμοποιήσουμε διαγράμματα ελέγχου με όρια πιθανότητας, το προαναφερθέν μειονέκτημα μπορεί να αρθεί, αλλά ακόμη και σε αυτή την περίπτωση είναι γνωστό ότι το

διάγραμμα ελέγχου έχει μικρή ευαισθησία στο να ανιχνεύει μετατοπίσεις της διασποράς της διεργασίας σε χαμηλότερο επίπεδο.

Για να λυθούν όλα τα παραπάνω προβλήματα που συνοδεύουν τη χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου *Shewhart* ο Quesenberry προχώρησε στην ανάπτυξη των Q διαγραμμάτων ελέγχου. Λεπτομέρειες για αυτά διαγράμματα ελέγχου μπορούν να βρεθούν στις εργασίες των Quesensberry (1997, 1991a, 1991b, 1991c), Farnum (1992), Hillier (1969),

2.2 Αρχές κατασκευής Q διαγραμμάτων ελέγχου

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι σε ένα διάγραμμα ελέγχου *Shewhart* για την παρακολούθηση της συμπεριφοράς μιας κρίσιμης ποσότητας ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού X απεικονίζονται οι τιμές W_i ($i=1,2,\dots$) μιας κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης ($W = g(\mathbf{X})$) που εκτιμά την κρίσιμη ποσότητα που μας ενδιαφέρει. Στο μοντέλο ορίων 3σ , τα όρια ελέγχου του διαγράμματος είναι ίσα με $E(W_i) \pm 3SD(W_i)$. Η μέθοδος αυτή δίνει σχετικά καλά αποτελέσματα όταν η κατανομή της W_i είναι προσεγγιστικά σταθερή και πολύ καλά αποτελέσματα όταν είναι σταθερή και προσεγγιστικά κανονική.

Η μέθοδος που πρότεινε ο Quesenberry μετασχηματίζει την ακολουθία των στατιστικών συναρτήσεων W_1, W_2, \dots στην ακολουθία των στατιστικών συναρτήσεων Q_1, Q_2, \dots που είναι ακριβώς ή προσεγγιστικά ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $N(0, 1)$. Αν η στατιστική συνάρτηση W_i ακολουθεί κανονική κατανομή τότε απλά την τυποποιούμε (αφαιρούμε τη μέση τιμή και διαιρούμε με την τυπική απόκλιση). Αν η στατιστική συνάρτηση W_i δεν ακολουθεί ή δεν προσεγγίζεται από κανονική κατανομή, τότε χρησιμοποιούμε ένα μη γραμμικό μετασχηματισμό. Έστω ότι η στατιστική συνάρτηση W_i έχει συνάρτηση κατανομής $G_i(\cdot)$ η οποία είναι γνωστή και έστω $F^{-1}(\cdot)$ η αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής $N(0, 1)$. Ο μετασχηματισμός των στατιστικών συναρτήσεων W_i είναι ο ακόλουθος

$$\begin{aligned} u_i &= G_i(W_i) \\ Q_i &= F^{-1}(u_i), \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Όταν οι συναρτήσεις κατανομής $G_i(\cdot)$ δεν είναι τελείως γνωστές (κάποιοι παράμετροι είναι άγνωστοι) θα παρουσιάσουμε μεθόδους οι οποίες επιτρέπουν την εκτίμηση της συνάρτησης μετασχηματισμού από τα δεδομένα και αποδίδουν ακολουθία τιμών Q_1, Q_2, \dots που είναι είτε ακριβώς είτε προσεγγιστικά ακολουθία από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $N(0, 1)$. Οι μέθοδοι για γνωστές και άγνωστες τιμές δεν «συναγωνίζονται» μεταξύ τους. Όμως όταν υπάρχουν αρκετά δεδομένα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις μεθόδους για γνωστές τιμές παραμέτρων. Μια τυπική εφαρμογή της μεθόδου θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε τους μετασχηματισμούς για άγνωστες τιμές παραμέτρων και όταν συγκεντρώσουμε επαρκές πλήθος δεδομένων να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο για γνωστές τιμές παραμέτρων.

Αφού η ακολουθία των στατιστικών συναρτήσεων Q_1, Q_2, \dots είναι (ακριβώς ή προσεγγιστικά) ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $N(0, 1)$, τα όρια ελέγχου των (τυπικών) *Shewhart Q* διαγραμμάτων ελέγχου θα είναι σχεδιασμένα πάντα στις τιμές ± 3 . Έτσι είναι δυνατή η ανίχνευση ειδικών ακολουθιών σημείων (*patterns*) στο διάγραμμα ελέγχου χρησιμοποιώντας εσωτερικά όρια σχεδιασμένα στις τιμές ± 1 και ± 2 .

Τέλος, στην περίπτωση που θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε διαγράμματα ελέγχου με όρια πιθανότητας $a = a_U + a_L$ ($P(Q_i > 3) = a_U$ και $P(Q_i < -3) = a_L$), έχουμε ότι

$$UCL = z_{a_U}, \quad CL = 0, \quad LCL = -z_{a_L}.$$

2.3 Q διαγράμματα ελέγχου για μεταβλητές

2.3.1 Q διαγράμματα ελέγχου για δείγματα

Έστω ότι το ποιοτικό χαρακτηριστικό X ακολουθεί κανονική κατανομή $N(m, s^2)$ (όταν η διεργασία λειτουργεί σε ευσταθή κατάσταση) και ότι έχουμε στη διάθεσή μας δείγματα μετρήσεων του ποιοτικού χαρακτηριστικού X μεγέθους μεγαλύτερου της μονάδας. Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζουμε τα δείγματα και συμβολισμούς για τις δύο σημαντικότερες στατιστικές συναρτήσεις που συνοδεύουν τη στατιστική ανάλυση δειγμάτων, το δειγματικό μέσο και τη δειγματική διασπορά.

Πίνακας 2.1: Δείγματα, δειγματικοί μέσοι και δειγματικές διασπορές

Δείγμα				Δειγματικός μέσος	Δειγματική διασπορά
X_{11}	X_{12}	...	X_{1n_1}	\bar{X}_1	S_1^2
X_{21}	X_{22}	...	X_{2n_2}	\bar{X}_2	S_2^2
	
X_{i1}	X_{i2}	...	X_{in_i}	\bar{X}_i	S_i^2

Οι στατιστικές συναρτήσεις

$$\bar{\bar{X}}_i = \frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2 + \dots + n_i \bar{X}_i}{n_1 + n_2 + \dots + n_i}$$

και

$$S_{pi}^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + \dots + (n_i - 1)S_i^2}{n_1 + n_2 + \dots + n_i - i}$$

χρησιμοποιούνται για να εκτιμήσουν το μέσο m και τη διασπορά S^2 ενός πληθυσμού όταν έχουμε στη διάθεσή μας i το πλήθος δείγματα από αυτόν ($i \geq 1$). Μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της τυπικής απόκλισης S του πληθυσμού δίνεται από τον τύπο

$$\hat{S} = \frac{S_{pi}}{c_4(n)}$$

όπου $n = n_1 + n_2 + \dots + n_i - i + 1$.

Για την παρακολούθηση του μέσου m του ποιοτικού χαρακτηριστικού X , απεικονίζονται στο $Q(\bar{X})$ διάγραμμα ελέγχου τα σημεία (i, Q_i) , όπου για τον υπολογισμό της τεταγμένης Q_i υπάρχουν οι ακόλουθες τέσσερις περιπτώσεις ανάλογα με το ποιες ποσότητες από τις m και S^2 είναι γνωστές.

Π1. Γνωστό m , γνωστό S

$$Q_i = Q_i(\bar{X}_i) = \frac{\sqrt{n_i}(\bar{X}_i - m)}{S}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Π2. Άγνωστο m , γνωστό S

$$Q_i = Q_i(\bar{X}_i) = \frac{\sqrt{n_i(n_1 + n_2 + \dots + n_{i-1})}}{n_1 + n_2 + \dots + n_i} \left(\frac{\bar{X}_i - \bar{\bar{X}}_{i-1}}{S} \right), \quad i = 2, 3, \dots$$

Π3. Γνωστό m , άγνωστο s

$$Q_i = Q_i(\bar{X}_i) = F^{-1} \left[H_{n_1+n_2+\dots+n_i-i} \left(\frac{\sqrt{n_i}(\bar{X}_i - m)}{S_{pi}} \right) \right], \quad i = 1, 2, \dots$$

Π4. Άγνωστο m , άγνωστο s

$$Q_i = Q_i(\bar{X}_i) = F^{-1} \left(H_{n_1+n_2+\dots+n_i-i} \left[\sqrt{\frac{n_i(n_1+n_2+\dots+n_{i-1})}{n_1+n_2+\dots+n_i}} \cdot \left(\frac{\bar{X}_i - \bar{X}_{i-1}}{S_{pi}} \right) \right] \right), \quad i = 2, 3, \dots$$

Στις περιπτώσεις Π3 και Π4, με $H_n(\cdot)$ και με $F(\cdot)$ έχουμε συμβολίσει τη συνάρτηση κατανομής της κατανομής t με n βαθμούς ελευθερίας (t_n) και της κατανομής $N(0,1)$, αντίστοιχα.

Οι ακολουθίες των στατιστικών συναρτήσεων Q που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις Π1, Π2 και Π4 είναι ακολουθίες ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών από την τυπική κανονική κατανομή (δείτε Παράρτημα Π1). Η ακολουθία της περίπτωσης Π3 είναι ακολουθία προσεγγιστικά ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών από την τυπική κανονική κατανομή.

Για την παρακολούθηση της διασποράς του ποιοτικού χαρακτηριστικού X , απεικονίζονται στο $Q(S^2)$ διάγραμμα ελέγχου τα σημεία (i, Q_i) όπου για τον υπολογισμό της τεταγμένης Q_i υπάρχουν οι ακόλουθες δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν η τυπική απόκλιση s είναι γνωστή ή όχι:

Π5. Γνωστό s

$$Q_i = Q_i(S_i^2) = \Phi^{-1} \left[G_{n_i-1} \left(\frac{(n_i-1)S_i^2}{s^2} \right) \right], \quad i = 1, 2, \dots$$

Π6. Άγνωστο s

$$Q_i = Q_i(S_i^2) = \Phi^{-1} [F_{n_i-1, n_1+n_2+\dots+n_{i-1}-i+1}(S_i^2/S_{p,i-1}^2)], \quad i = 2, 3, \dots$$

Στην περίπτωση Π5, με G_n έχουμε συμβολίσει τη συνάρτηση κατανομής της κατανομής χι τετράγωνο με n βαθμούς ελευθερίας (C_n^2). Επίσης, στην περίπτωση Π6 έχουμε ότι

$$\frac{S_i^2}{S_{p,i-1}^2} = \frac{(n_1+n_2+\dots+n_{i-1}-i+1)S_i^2}{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2 + \dots + (n_{i-1}-1)S_{i-1}^2}, \quad i = 2, 3, \dots$$

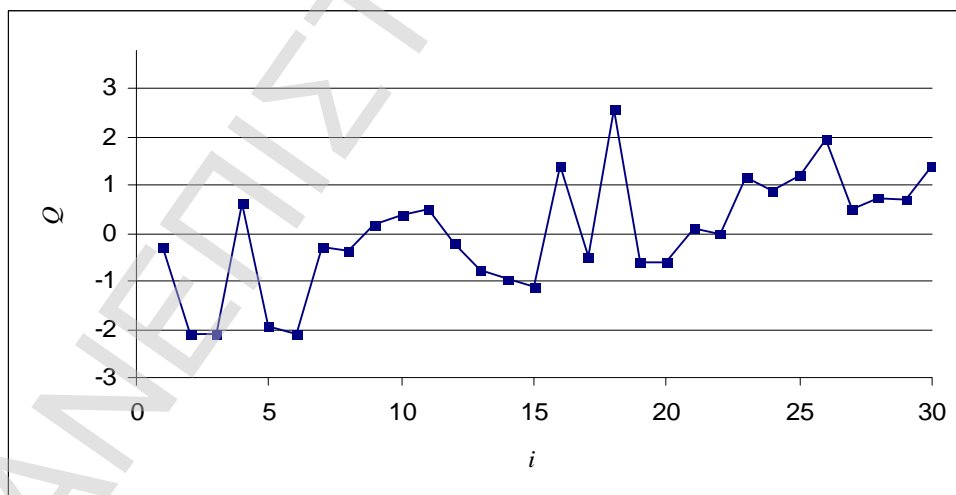
Και η τυχαία μεταβλητή αυτή έχει συνάρτηση κατάνομής την $F_{n_i-1, n_1+n_2+\dots+n_{i-1}-i+1}$. Οι ακολουθίες των στατιστικών συναρτήσεων Q που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις Π5 και Π6

είναι ακολουθίες ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών από την τυπική κανονική κατανομή (δείτε Παράρτημα Π1).

Στη συνέχεια θα δώσουμε μερικά παραδείγματα (Quesensberry (1997)) για να επιδείξουμε τη χρήση των Q διαγραμμάτων ελέγχου. Στο πρώτο παράδειγμα θα συγκρίνουμε την απόδοση των Q διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση του μέσου μιας διεργασίας με τα αντίστοιχα \bar{X} διαγράμματα ελέγχου (Φάση I, άγνωστα m και s). Θα μελετήσουμε την περίπτωση που έχουμε m προκαταρκτικά δείγματα μεγέθους n από κανονική κατανομή όπου τα πρώτα m_1 δείγματα προέρχονται από την κατανομή $N(m, s^2)$ και τα υπόλοιπα $m - m_1$ προέρχονται από την κατανομή $N(m + ds, s^2)$. Τότε

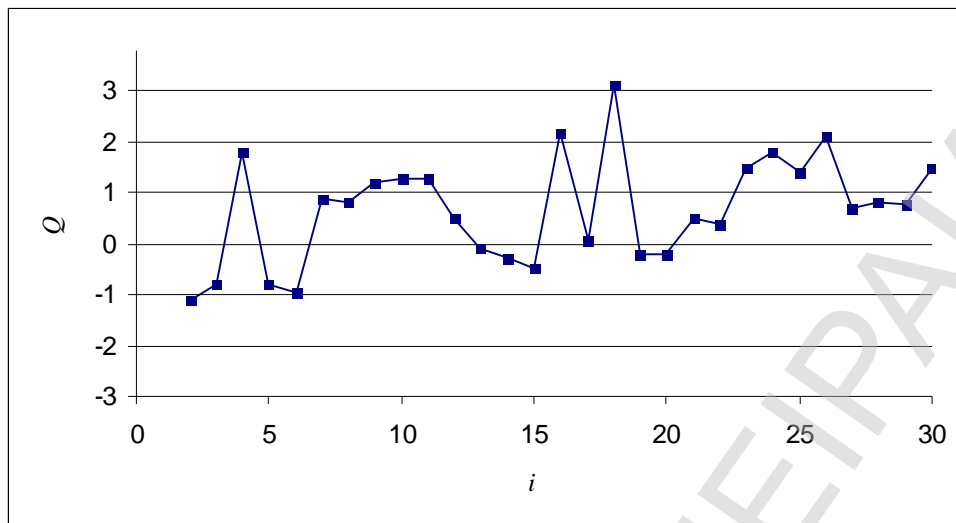
$$E(\bar{X}) = m + (m - m_1) \frac{ds}{m}, \quad V(\bar{X}) = \frac{s^2}{mn}$$

(στην περίπτωση που $m_1 = m/2$ έχουμε ότι $E(\bar{X}) = m + (ds/2)$). Με προσομοίωση εξετάστηκε η περίπτωση $n = 5$, $m = 30$, $m_1 = m/2 = 15$, $d = 5$, $s = 1$ και $d = 0.75$ για την οποία προέκυψε ότι $\bar{X} = 5.370733$ και $\hat{s} = 1.016495$. Σημειώνουμε ότι η ποσότητα \bar{X} εκτιμά την μέση τιμή του m πριν και μετά την αλλαγή του. Το τυποποιημένο \bar{X} διάγραμμα ελέγχου Φάσης I συμπίπτει με το $Q(\bar{X})$ διάγραμμα ελέγχου της περίπτωσης Π1 για $m = 5.370733$ και $s = 1.016495$ και δίνεται στο ακόλουθο σχήμα



Σχήμα 2.1: Τυποποιημένο \bar{X} διάγραμμα ελέγχου

Το $Q(\bar{X})$ διάγραμμα ελέγχου της περίπτωσης Π4 (άγνωστα m και s) είναι το ακόλουθο



Σχήμα 2.2: $Q(\bar{X})$ διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π4)

Καταρχήν παρατηρούμε ότι στο Σχήμα 2.2 δεν υπάρχει σημείο για το πρώτο δείγμα. Επίσης, είναι εμφανής η απότομη αύξηση του μέσου μετά το 16^ο δείγμα και η ένδειξη για εκτός ελέγχου διεργασία στο 18^ο δείγμα. Επίσης ο 4-από-5 κανόνας μας δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στο 26^ο δείγμα. Επίσης παρατηρούμε και την τάση του διαγράμματος να διορθώσει την απότομη αλλαγή του μέσου.

Στο Σχήμα 2.1 παρατηρούμε ότι δεν έχουμε ένδειξη για εκτός ελέγχου διεργασία. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η ακολουθία των σημείων του διαγράμματος βρίσκεται χαμηλότερα σε σχέση με αυτή του Σχήματος 2.2 αφού η ποσότητα $\bar{\bar{X}}$ δεν εκτιμά το μέσο $m=5$ αλλά το μέσο $m+(ds/2)=5.375$. Έτσι δεν υπάρχουν σημεία εκτός ορίων ελέγχου.

Μια ακόμα σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο διαγραμμάτων είναι ότι η κατασκευή του (τυποποιημένου) \bar{X} διαγράμματος ελέγχου γίνεται όταν έχουν συλλεχθεί και τα 30 δείγματα, ενώ η κατασκευή του $Q(\bar{X})$ διαγράμματος ελέγχου γίνεται σταδιακά (νέο σημείο στο διάγραμμα με κάθε νέο δείγμα) και οι διάφορες τάσεις της διεργασίας γίνονται αντιληπτές τη στιγμή που συμβαίνουν. Έτσι το $Q(\bar{X})$ διάγραμμα ελέγχου μας δίνει τη δυνατότητα να παρακολουθήσουμε την παραγωγική διεργασία σε πραγματικό χρόνο κερδίζοντας χρόνο και χωρίς ουσιαστικά να «χάνουμε» δεδομένα.

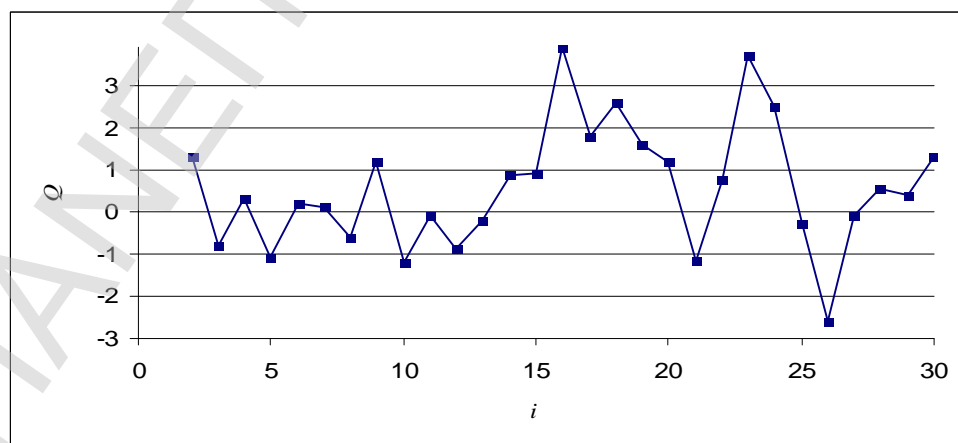
Στο δεύτερο παράδειγμα θα συγκρίνουμε την απόδοση των Q διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς και του μέσου μιας διεργασίας όταν οι παράμετροι του πληθυσμού είναι άγνωστοι και τις θέτουμε να είναι ίσες με τις εκτιμήσεις των που

προκύπτουν από τα διαθέσιμα δείγματα (περίπτωση με γνωστές παραμέτρους). Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται τα δεδομένα (Quesensberry (1997)) που θα χρησιμοποιήσουμε

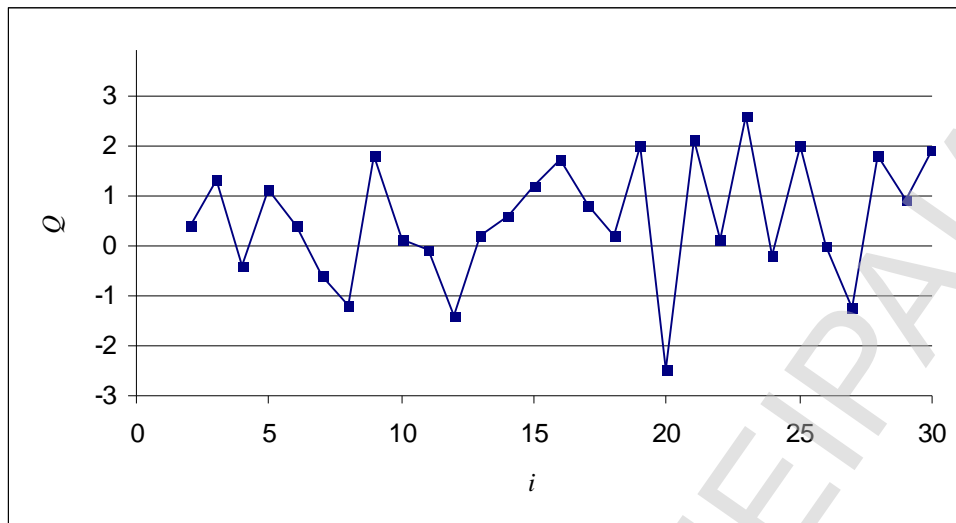
Πίνακας 2.2: Δεδομένα 30 δειγμάτων μεγέθους 5

Δείγμα	Δεδομένα				
1	5.001	4.959	4.996	4.979	4.986
2	4.981	5.019	4.951	5.026	4.972
3	5.006	4.976	4.999	5.018	5.018
4	5.011	4.953	4.973	5	5.005
5	5.012	4.99	5.01	5.016	4.998
6	4.986	5.01	5.006	5.021	4.966
7	4.985	4.98	4.962	4.991	5.02
8	4.999	4.966	4.969	4.995	4.974
9	5.014	5.024	5.044	4.965	5.008
10	5.012	4.987	5.002	4.992	4.983
11	4.981	4.968	5	5.018	4.998
12	4.998	4.969	4.984	4.984	4.966
13	5.006	4.989	4.991	4.971	5.018
14	5.014	4.999	5.025	4.998	4.959
15	5.026	4.962	5.004	5.017	5.021
16	5.058	5.056	5.018	4.912	5.031
17	5.005	5.021	4.959	5.064	4.974
18	4.909	4.993	5.024	5.023	5.048
19	4.994	5.01	4.993	5.018	5.104
20	4.977	4.901	4.944	4.978	5.008
21	5.016	5.005	5.025	5.051	5.026
22	4.976	5.026	4.958	5.043	4.991
23	4.979	5.168	5.052	4.993	4.999
24	4.937	4.928	5.059	5.067	4.989
25	5.003	5.026	5.029	5.078	5.022
26	5.002	5.01	4.997	5.001	4.991
27	4.983	4.973	4.94	4.979	5.027
28	5.059	5.07	5.012	4.971	5.03
29	5.034	4.966	5.047	5.044	4.981
30	5.101	4.968	5.028	5.057	5.007

Από τη στιγμή που λαμβάνουμε το 1^ο δείγμα μπορούμε να ξεκινήσουμε την κατασκευή του $Q(S^2)$ διαγράμματος ελέγχου και του $Q(\bar{X})$ διαγράμματος ελέγχου με άγνωστες παραμέτρους που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις Π6 και Π4 (άγνωστα m και s). Τα διαγράμματα ελέγχου δίνονται στα ακόλουθα σχήματα



Σχήμα 2.3: $Q(S^2)$ διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π6)



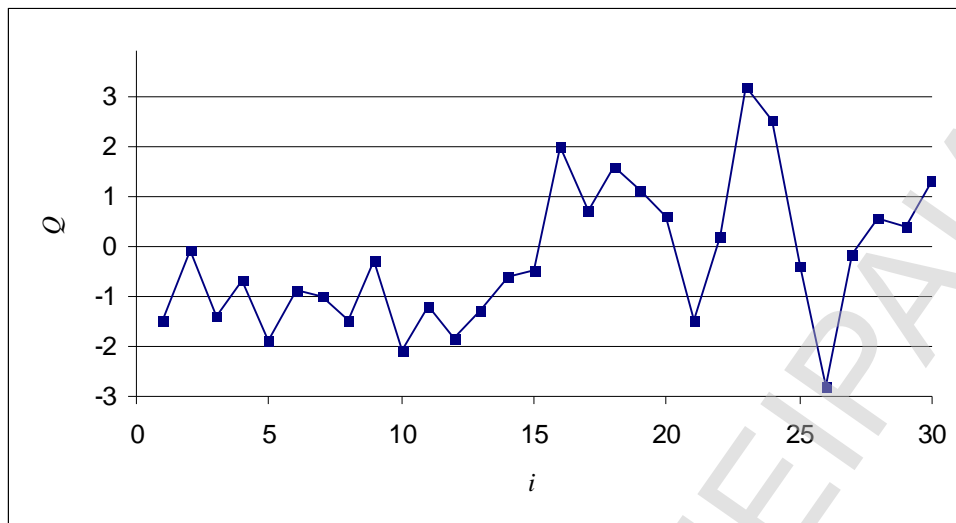
Σχήμα 2.4: $Q(\bar{X})$ διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π4)

Στο Σχήμα 2.3 βλέπουμε ότι τα σημεία που αντιστοιχούν στα δείγματα 16 και 23 βρίσκονται εκτός των ορίων ελέγχου. Επίσης ο κανόνας 3, παράγραφος 1.5, μας δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας λόγω μετατόπισης της διασποράς στο 19^ο δείγμα. Επίσης, παρατηρείται αύξηση στον τρόπο που διασκορπίζονται τα σημεία στο διάγραμμα μετά το 16^ο δείγμα που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι πιθανώς η διασπορά έχει αυξηθεί.

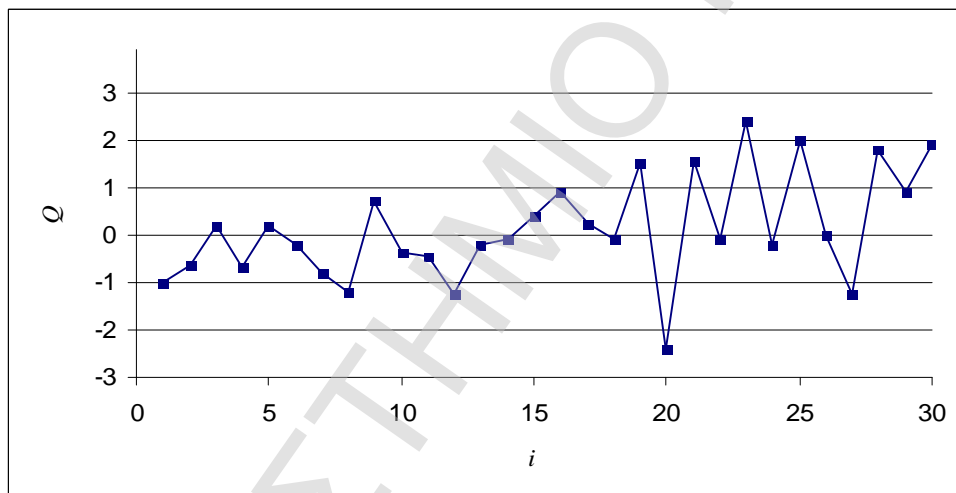
Στο Σχήμα 2.4 αν και δεν υπάρχουν σημεία εκτός των ορίων ελέγχου, παρατηρούμε ότι μετά το 16^ο δείγμα αλλάζει το πρότυπο των σημείων στο διάγραμμα, οπότε αντιλαμβανόμαστε ότι αυτό ίσως να οφείλεται σε αύξηση της διασποράς.

Για να συγκρίνουμε τα παραπάνω διαγράμματα με αντίστοιχα κλασικά διαγράμματα που κατασκευάζονται αφού πρώτα συγκεντρωθούν και τα 30 δείγματα, προχωρούμε στην δημιουργία των διαγραμμάτων αυτών θεωρώντας ότι οι τιμές των παραμέτρων είναι γνωστές. Δηλαδή εκτιμούμε το μέσο και την τυπική απόκλιση της διεργασίας με τις ποσότητες $\bar{\bar{X}} = 5.00212$ και $S_p = S_{p,30} = 0.03552056$ που υπολογίζονται χρησιμοποιώντας και τα 30 δείγματα και θεωρούμε ότι $m = 5.00212$ και $s = 0.03552056$.

Κατόπιν κατασκευάζουμε τα διαγράμματα για την μέση τιμή (περίπτωση Π1) και για τη διασπορά (περίπτωση Π5) που δίνονται στα ακόλουθα σχήματα



Σχήμα 2.5: $Q(S^2)$ διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π5)



Σχήμα 2.6: $Q(\bar{X})$ διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π1)

Στο Σχήμα 2.6 παρατηρούμε ότι μετά το 16^ο δείγμα υπάρχει αλλαγή στον τρόπο με τον οποίο διασκορπίζονται τα σημεία στο διάγραμμα που υποδηλώνει πιθανή αύξηση της διασποράς. Στο Σχήμα 2.5 παρατηρούμε ότι μόνο ένα σημείο βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου, το 23^ο σημείο. Επίσης παρατηρούμε ότι τα πρώτα 15 σημεία βρίσκονται όλα κάτω από την κεντρική γραμμή και διασκορπίζονται λιγότερο από ότι τα επόμενα 15 σημεία. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μετά το 15^ο δείγμα η διασπορά έχει αυξηθεί. Έτσι η εκτίμηση S_p θα είναι μεγαλύτερη από την πραγματική τυπική απόκλιση της διεργασίας κατά τη χρονική περίοδο συλλογής των πρώτων 15 δειγμάτων και μικρότερη από τη τυπική απόκλιση της διεργασίας κατά τη χρονική περίοδο συλλογής των τελευταίων 15 δειγμάτων.

Παρατηρούμε ότι και για τις δύο περιπτώσεις τα διαγράμματα διασποράς δίνουν καλά αποτελέσματα αλλά εμείς προτείνουμε τη χρήση του Q διαγράμματος που αντιστοιχεί στο Σχήμα 2.3, δεδομένου ότι η κατασκευή του ξεκινάει από τη στιγμή που λαμβάνεται το πρώτο δείγμα.

Κλείνοντας την παρούσα παράγραφο θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο Q στην περίπτωση που έχουμε στη διάθεσή μας εκτιμήσεις για το μέσο και τη διασπορά της διεργασίας από ιστορικά (*historical*) δεδομένα. Έστω $\bar{X}_{h,a}$ η εκτίμηση του m και $S_{h,b}^2$ η εκτίμηση του s^2 , όπου a είναι το πλήθος των δεδομένων από τα οποία προέκυψε η εκτίμηση του m και b οι βαθμοί ελευθερίας της στατιστικής συνάρτησης $S_{h,b}^2$. Για κάθε νέο δείγμα που είναι διαθέσιμο υπολογίζουμε τις ποσότητες

$$\bar{\bar{X}}'_i = \frac{a\bar{X}_{h,a} + (n_1 + n_2 + \dots + n_i)\bar{X}_i}{a + n_1 + n_2 + \dots + n_i}, \quad (S'_{pi})^2 = \frac{bS_{h,b}^2 + (n_1 + n_2 + \dots + n_i - i)S_{pi}^2}{b + n_1 + n_2 + \dots + n_i - i}.$$

Για την παρακολούθηση του μέσου m του ποιοτικού χαρακτηριστικού X , απεικονίζονται στο $Q(\bar{X})$ διάγραμμα ελέγχου τα σημεία (i, Q_i) όπου για τον υπολογισμό της τεταγμένης Q_i υπάρχουν τρεις περιπτώσεις ανάλογα με το ποιες ποσότητες από τις m και s^2 είναι άγνωστες.

Π7. Άγνωστο m , γνωστό s

$$Q_i(\bar{X}_i) = \frac{\sqrt{n_i(a + n_1 + n_2 + \dots + n_{i-1})}}{a + n_1 + n_2 + \dots + n_{i-1}} \left(\frac{\bar{X}_i - \bar{\bar{X}}'_{i-1}}{s} \right), \quad i = 1, 2, \dots$$

Π8. Γνωστό m , άγνωστο s

$$Q_i(\bar{X}_i) = F^{-1} \left[H_{b+n_1+n_2+\dots+n_i-i} \left(\frac{\sqrt{n_i}(\bar{X}_i - m)}{S'_{pi}} \right) \right], \quad i = 1, 2, \dots$$

Π9. Άγνωστο m , άγνωστο s

$$Q_i(\bar{X}_i) = F^{-1} \left\{ H_{b+n_1+n_2+\dots+n_i-i} \left[\sqrt{\frac{n_i(a + n_1 + n_2 + \dots + n_{i-1})}{a + n_1 + n_2 + \dots + n_{i-1}}} \left(\frac{\bar{X}_i - \bar{\bar{X}}'_i}{S'_{pi}} \right) \right] \right\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Για την παρακολούθηση της διασποράς του ποιοτικού χαρακτηριστικού X απεικονίζονται στο $Q(S^2)$ διάγραμμα ελέγχου τα σημεία (i, Q_i) όπου για τον υπολογισμό της τεταγμένης Q_i έχουμε την ακόλουθη περίπτωση:

Π10. Άγνωστο m , άγνωστο S

$$Q_i = Q_i(S_i^2) = F^{-1}[F_{n_i-1, b+n_1+n_2+\dots+n_{i-1}-i+1}(S_i^2/(S'_{p,i-1})^2)], \quad i=1,2,\dots$$

Για την τελευταία περίπτωση έχουμε ότι

$$\frac{S_i^2}{(S'_{pi})^2} = \frac{(b+n_1+n_2+\dots+n_{i-1}-i+1)S_i^2}{bS_{h,b}^2 + (n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2 + \dots + (n_{i-1}-1)S_{i-1}^2}$$

Μια τυπική περίπτωση που χρησιμοποιούνται οι παραπάνω περιπτώσεις είναι όταν η παραγωγική διαδικασία ξεκινά ύστερα από διακοπή η οποία πραγματοποιήθηκε προκειμένου να ελεγχθεί η ύπαρξη ειδικής αιτίας μεταβλητότητας ή για οποιονδήποτε άλλο λόγο.

2.3.2 Q διαγράμματα ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις

Σε ορισμένες περιπτώσεις το μέγεθος του δείγματος είναι ίσο με 1 (αυτόματη επιθεώρηση παραγόμενων προϊόντων, μικρός ρυθμός παραγωγής, κτλ.). Πολλές βιομηχανίες σήμερα έχουν την δυνατότητα να ελέγξουν και να μετρήσουν σε πραγματικό χρόνο κάθε ένα προϊόν που παράγεται ξεχωριστά. Οι μέθοδοι που αναπτύξαμε στην προηγούμενη παράγραφο για την παρακολούθηση του μέσου και της διασποράς ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού X δεν μπορούν να εφαρμοστούν αυτομάτως στην περίπτωση των μεμονωμένων παρατηρήσεων και χρειάζονται κατάλληλη τροποποίηση.

Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού X των προϊόντων που παράγονται ακολουθεί κανονική κατανομή $N(m, S^2)$ και ότι έχουμε στη διάθεσή μας τις παρατηρήσεις X_1, X_2, \dots . Για την παρακολούθηση του μέσου m του ποιοτικού χαρακτηριστικού X , απεικονίζονται στο Q διάγραμμα ελέγχου τα σημεία (r, Q_r) όπου για τον υπολογισμό της τεταγμένης Q_r υπάρχουν τέσσερις περιπτώσεις ανάλογα με το ποιες ποσότητες από τις m και S^2 είναι γνωστές.

Π11. Γνωστό m , γνωστό s

$$Q_r(X_r) = \frac{X_r - m}{s}, \quad r = 1, 2, \dots$$

Π12. Άγνωστο m , γνωστό s

$$Q_r(X_r) = \sqrt{\frac{r-1}{r}} \left(\frac{X_r - \bar{X}_{r-1}}{s} \right), \quad r = 2, 3, \dots$$

Π13. Γνωστό m , άγνωστο s

$$Q_r(X_r) = F^{-1} \left[H_{r-2} \left(\frac{X_r - m}{S_{r-1}} \right) \right], \quad r = 3, 4, \dots$$

Π14. Άγνωστο m , άγνωστο s

$$Q_r(X_r) = F^{-1} \left\{ H_{r-2} \left[\sqrt{\frac{r-1}{r}} \left(\frac{X_r - \bar{X}_{r-1}}{S_{r-1}} \right) \right] \right\}, \quad r = 3, 4, \dots$$

Στις περιπτώσεις Π13 και Π14, με $H_n(\cdot)$ και με $F(\cdot)$ έχουμε συμβολίσει τη συνάρτηση κατανομής της κατανομής t με n βαθμούς ελευθερίας (t_n) και της κατανομής $N(0,1)$, αντίστοιχα.

Οι ακολουθίες των στατιστικών συναρτήσεων Q που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις Π11, Π12 και Π14 είναι ακολουθίες ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών από την τυπική κανονική κατανομή (δείτε Παράρτημα Π2). Η ακολουθία της περίπτωσης Π13 είναι ακολουθία προσεγγιστικά ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών από την τυπική κανονική κατανομή

Για την παρακολούθηση της διασποράς του ποιοτικού χαρακτηριστικού X , απεικονίζονται στο Q διάγραμμα ελέγχου τα σημεία (r, Q_r) όπου για τον υπολογισμό της τεταγμένης Q_r υπάρχουν δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν η τυπική απόκλιση s είναι γνωστή ή όχι.

Π15. Γνωστό s

$$Q_r = F^{-1} \left[G_1 \left(\frac{R_r^2}{2s^2} \right) \right], \quad r = 2, 4, 6, \dots$$

Π16. Άγνωστο s

$$Q_r = F^{-1} \left[F_{1,n} \left(\frac{vR_r^2}{R_2^2 + R_4^2 + \dots + R_{r-2}^2} \right) \right], \quad r = 4, 6, 8, \dots, \quad n = (r/2) - 1.$$

Στις παραπάνω περιπτώσεις έχουμε ότι $R_r = X_r - X_{r-1}$. Επίσης παρατηρούμε ότι οι τιμές της στατιστικής συνάρτησης Q που λαμβάνουμε, αφορούν ζυγές τιμές του υποδείκτη r . Αυτό συμβαίνει γιατί σε αυτή την περίπτωση οι Q τιμές είναι ανεξάρτητες.

Κλείνοντας την παρούσα παράγραφο θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο Q στην περίπτωση που έχουμε στη διάθεσή μας εκτιμήσεις για το μέσο και τη διασπορά της διεργασίας από ιστορικά (*historical*) δεδομένα. Έστω $\bar{X}_{h,a}$ η εκτίμηση του m και $S_{h,b}^2$ η εκτίμηση του s^2 , όπου a είναι το πλήθος των δεδομένων από τα οποία προέκυψε η εκτίμηση του m , και b οι βαθμοί ελευθερίας της στατιστικής συνάρτησης $S_{h,b}^2$. Για κάθε νέο δείγμα που είναι διαθέσιμο υπολογίζουμε τις ποσότητες

$$\bar{X}'_{a+r} = \frac{r\bar{X}_r + a\bar{X}_{h,a}}{r+a}, \quad (S'_{b+r})^2 = \frac{bS_{h,b}^2 + (r-1)S_r^2}{b+r-1}.$$

Για την παρακολούθηση του μέσου m του ποιοτικού χαρακτηριστικού X , απεικονίζονται στο Q διάγραμμα τα σημεία (r, Q_r) όπου για τον υπολογισμό της τεταγμένης Q_r υπάρχουν τρεις περιπτώσεις ανάλογα με το ποιες ποσότητες από τις m και s^2 είναι άγνωστες.

Π17. Άγνωστο m , γνωστό s

$$Q_r(X_r) = \sqrt{\frac{a+r-1}{a+r}} \left(\frac{X_r - \bar{X}'_{a+r-1}}{s} \right), \quad r=1,2,\dots$$

Π18. Γνωστό m , άγνωστο s

$$Q_r(X_r) = \Phi^{-1} \left[H_{b+r-2} \left(\frac{X_r - m}{S'_{b+r-1}} \right) \right], \quad r=1,2,\dots$$

Π19. Άγνωστο m , άγνωστο s

$$Q_r(X_r) = F^{-1} \left\{ H_{b+r-2} \left[\sqrt{\frac{a+r-1}{a+r}} \left(\frac{X_r - \bar{X}'_{r-1}}{S'_{b+r-1}} \right) \right] \right\}, \quad r=1,2,\dots$$

Για την παρακολούθηση της διασποράς του ποιοτικού χαρακτηριστικού X απεικονίζονται στο Q διάγραμμα ελέγχου τα σημεία (r, Q_r) όπου για τον υπολογισμό της τεταγμένης Q_r έχουμε την ακόλουθη περίπτωση.

Π20. Άγνωστο m , άγνωστο s

$$Q_r = Q_r(R_r^2) = \Phi^{-1}[F_{1,n}(nR_r^2 / (2bS_{h,b}^2 + R_2^2 + R_4^2 + \dots + R_{r-2}^2))], \quad r = 4, 6, \dots, \quad n = b + (r/2) - 1$$

2.3.3 Το EWMA Q διάγραμμα ελέγχου

Η κατασκευή ενός κατάλληλου EWMA διαγράμματος ελέγχου για την Q μέθοδο δεν διαφέρει ουσιαστικά από την αντίστοιχη κατασκευή που αφορούσε την παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διασποράς του ποιοτικού χαρακτηριστικού X. Έτσι στο EWMA Q διάγραμμα ελέγχου (είτε μέσης τιμής, είτε διασποράς) απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση

$$Z_t = (1-I)Z_{t-1} + I Q_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

όπου Q_1, Q_2, \dots , είναι η κατάλληλη ακολουθία Q τιμών και $Z_0 = Q_1$. Αξίζει να σημειώσουμε ότι $m_Q = 0$ και $s_Q = 1$ για μια ευσταθή διεργασία. Έτσι, είναι εύκολο να δειχθεί ότι

$$E(Z_t) = 0,$$

$$\text{Var}(Z_t) = \frac{1}{2-I} [I + 2(1-I)^{2t-1}],$$

$$s_{Z_t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{I}{2-I}}.$$

Συνεπώς τα όρια ελέγχου του EWMA Q διαγράμματος ελέγχου είναι τα ακόλουθα

$$UCL = L \cdot s_{Z_t}, \quad LCL = -L \cdot s_{Z_t}.$$

Στη συνέχεια θα προβούμε σε μια συγκριτική παρουσίαση των Shewhart Q και EWMA Q διαγραμμάτων ελέγχου διαμέσου ενός παραδείγματος (Quesensberry (1997)). Λαμβάνουμε 20 ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από κανονικές κατανομές σύμφωνα με την ακόλουθη διαδικασία

1. 10 δείγματα από την κατανομή $N(50, 1)$
2. 5 δείγματα από την κατανομή $N(50.7, 1)$
3. 5 δείγματα από την κατανομή $N(50.7, 1.5)$

Στα πρώτα δέκα δείγματα θεωρούμε ότι η διεργασία βρίσκεται εντός στατιστικού ελέγχου και επομένως ο εντός ελέγχου μέσος είναι ίσος με $m = 50$ και η εντός ελέγχου τυπική απόκλιση είναι ίση με $s = 1$. Τα δεδομένα δίνονται στον ακόλουθο πίνακα

Πίνακας 2.3: Δεδομένα 20 δειγμάτων από διάφορες κανονικές κατανομές

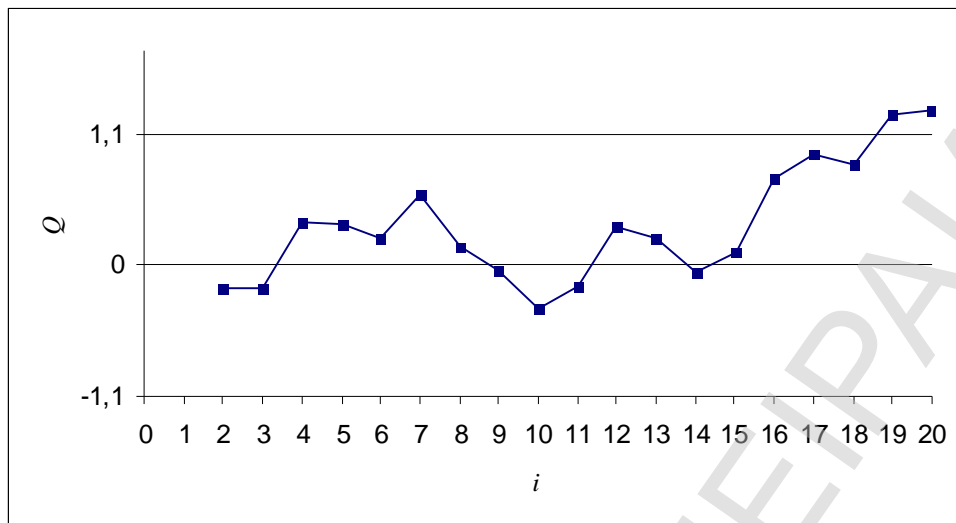
Δείγμα	Τιμές						
1	50,84	80,44	49,16	51,15	49,85	50,44	
2	48,63	49,58	49,12	49,04			
3	49,61	49,07	50,27	49,91	50,45		
4	50,73	50,44	50,74	48,75	48,10	51,10	
5	48,60	50,71	49,73	49,55	49,86	51,13	
6	49,13	51,20	50,71	59,97	50,13		
7	50,35	48,41	50,52	51,12	50,37	52,41	48,80
8	49,84	48,57	50,78	48,88	49,89	49,40	50,00
9	49,44	50,96	50,47	50,70	50,63	50,67	
10	49,60	50,96	50,47	50,70	50,63	50,67	
11	51,72	49,37	50,54	50,93	51,12	51,70	52,05
12	51,85	51,32	50,68	52,14	48,62	49,24	
13	50,82	49,89	50,60	52,36	51,26	51,21	
14	50,10	51,08	49,79	50,95	50,07		
15	51,76	50,30	49,37	48,60	49,63	50,88	50,37
16	49,58	49,90	49,18	52,77	48,02	51,68	
17	53,07	52,93	50,66	52,29	51,73	49,40	
18	49,01	51,91	49,95	49,46	49,66	51,41	
19	51,43	52,51	46,94	50,93	53,23	60,69	52,12
20	51,87	50,45	51,23	51,10	47,63		

Για το *EWMA Q* διάγραμμα ελέγχου χρησιμοποιούμε τις τιμές $I = 0.25$ και $L = 2.9$ (οι τιμές αυτές για μια ευσταθή διεργασία δίνουν εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ίσο με 372). Οι οριακές τιμές του άνω και κάτω ορίου του *EWMA Q* διαγράμματος ελέγχου είναι ίσες με

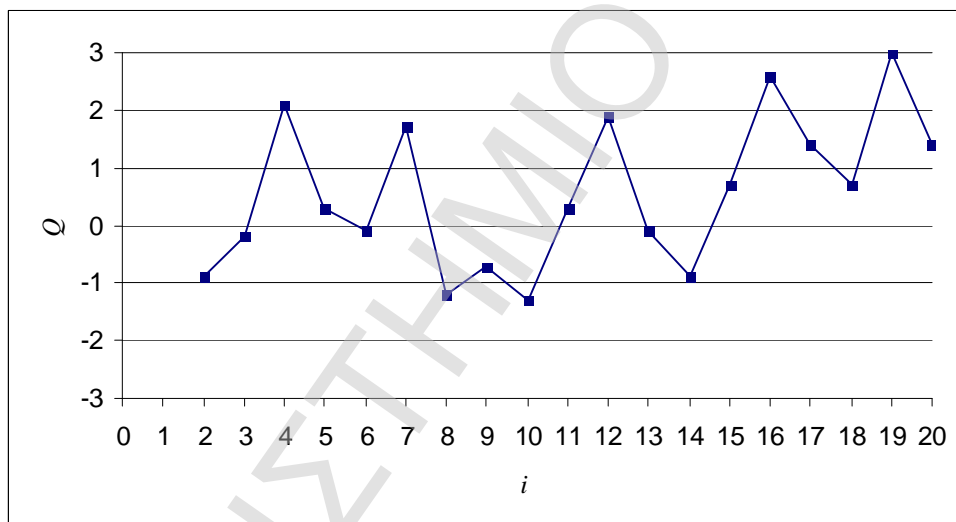
$$UCL = L \cdot s_{z_i} = 2.9 \sqrt{\frac{0.25}{1.75}} = 1.10,$$

$$LCL = -L \cdot s_{z_i} = -2.9 \sqrt{\frac{0.25}{1.75}} = -1.10.$$

Το *EWMA Q* διάγραμμα ελέγχου για τη διασπορά που θεωρείται άγνωστη (Σχήμα 2.7) και το αντίστοιχο *Shewhart Q* διάγραμμα ελέγχου για τη διασπορά που θεωρείται άγνωστη (Σχήμα 2.8) είναι τα ακόλουθα



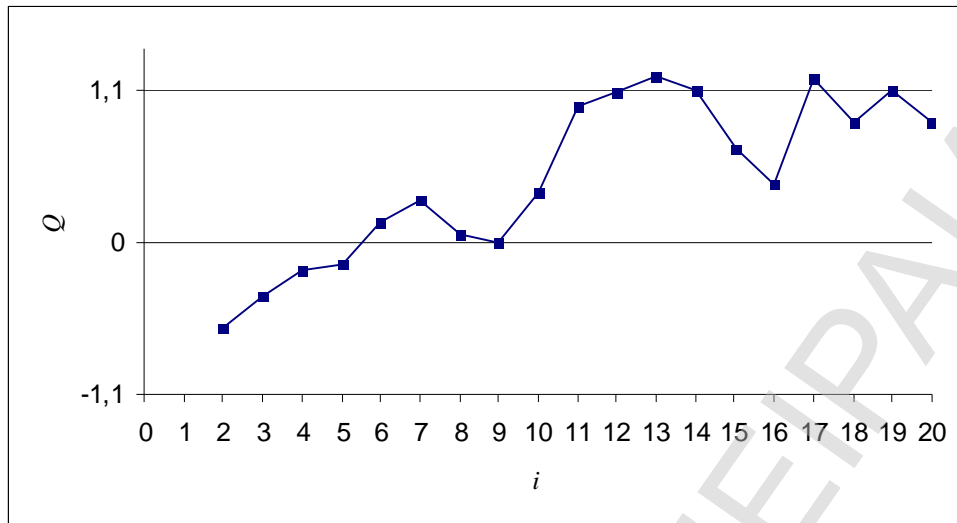
Σχήμα 2.7: $EWMA Q(S^2)$ διάγραμμα ελέγχου



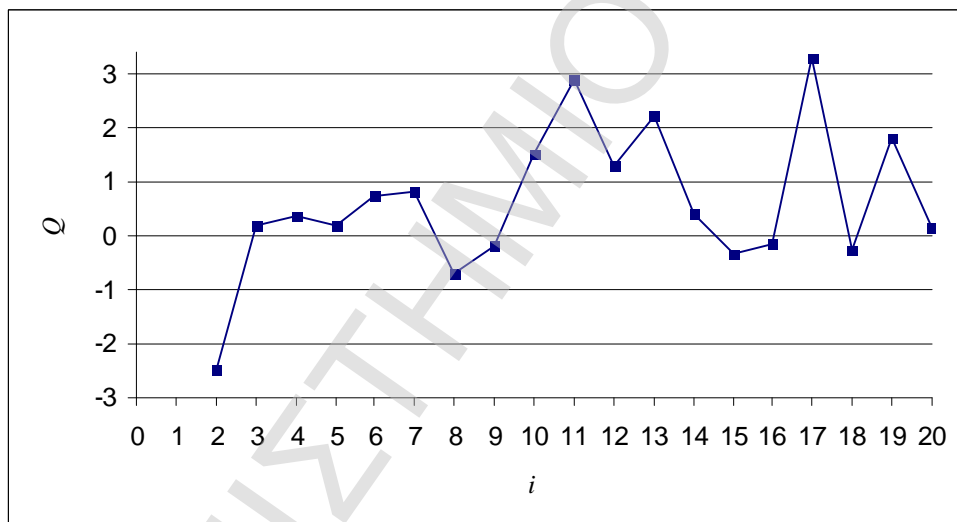
Σχήμα 2.8: $Shewhart Q(S^2)$ διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π6)

Παρατηρούμε ότι το $EWMA Q(S^2)$ διάγραμμα ελέγχου δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στο 19^ο και στο 20^ο δείγμα, ενώ το $Shewhart Q(S^2)$ διάγραμμα ελέγχου αποτυγχάνει οριακά να δώσει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στο 19^ο δείγμα. Επίσης, προκύπτει και από τα δύο διαγράμματα ότι υπάρχει αύξηση στη διασπορά της διεργασίας, μετά το 15^ο δείγμα.

Το $EWMA Q$ διάγραμμα ελέγχου για τη μέση τιμή με άγνωστες παραμέτρους (Σχήμα 2.9) και το αντίστοιχο $Shewhart Q$ διάγραμμα ελέγχου για τη μέση τιμή με άγνωστες παραμέτρους (Σχήμα 2.10) είναι τα ακόλουθα



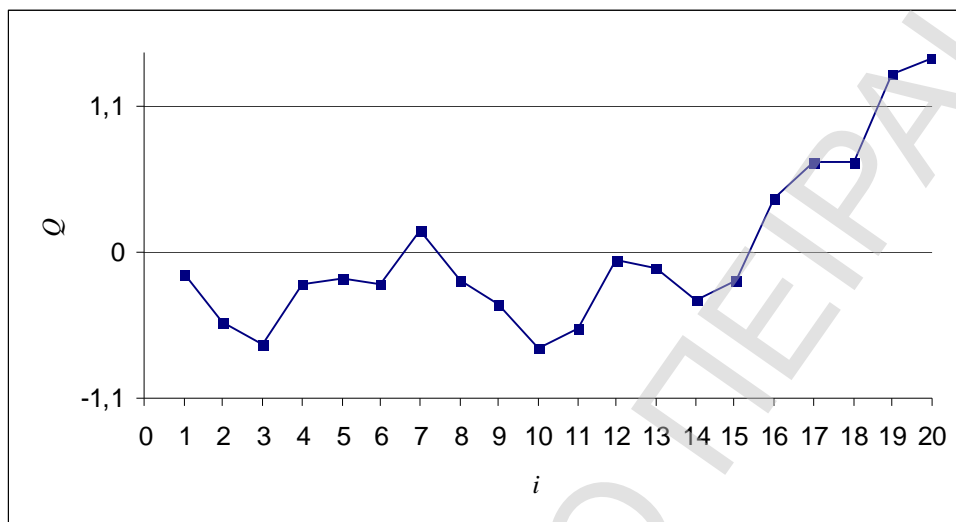
Σχήμα 2.9: $EWMA Q(\bar{X})$ διάγραμμα ελέγχου



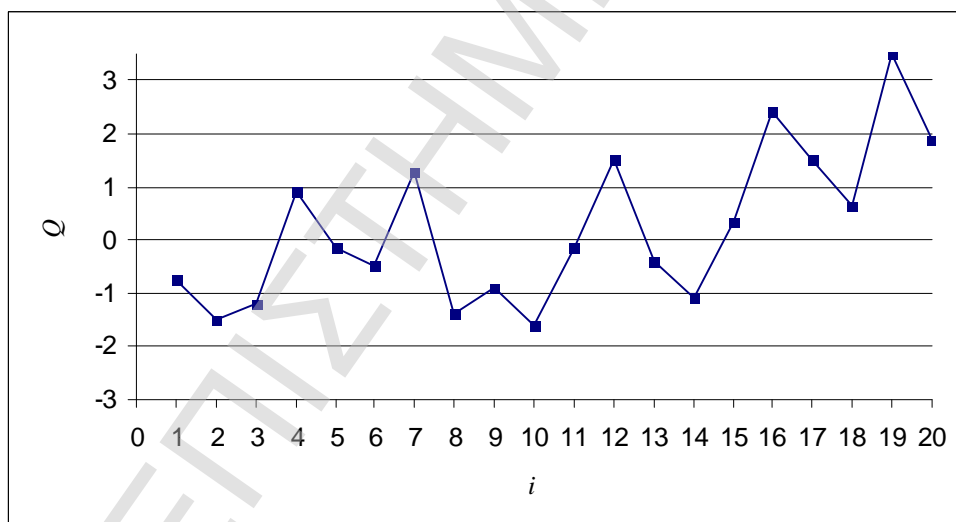
Σχήμα 2.10: $Shewhart Q(\bar{X})$ διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π4)

Παρατηρούμε ότι το $EWMA Q(\bar{X})$ διάγραμμα ελέγχου δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στο 13^ο δείγμα, ενώ το $Shewhart Q(\bar{X})$ διάγραμμα ελέγχου δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στο 17^ο δείγμα. Επίσης, παρατηρούμε ότι το $EWMA Q(\bar{X})$ διάγραμμα ελέγχου μετά την ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στο 13^ο δείγμα, παρουσιάζει μια συμπεριφορά επιστροφής σε μια ευσταθή κατάσταση.

Το *EWMA Q* διάγραμμα ελέγχου για τη διασπορά που θεωρείται γνωστή και ίση με 1 (Σχήμα 2.11) και το αντίστοιχο *Shewhart Q* διάγραμμα ελέγχου για τη διασπορά που θεωρείται γνωστή και ίση με 1 (Σχήμα 2.12) είναι τα ακόλουθα



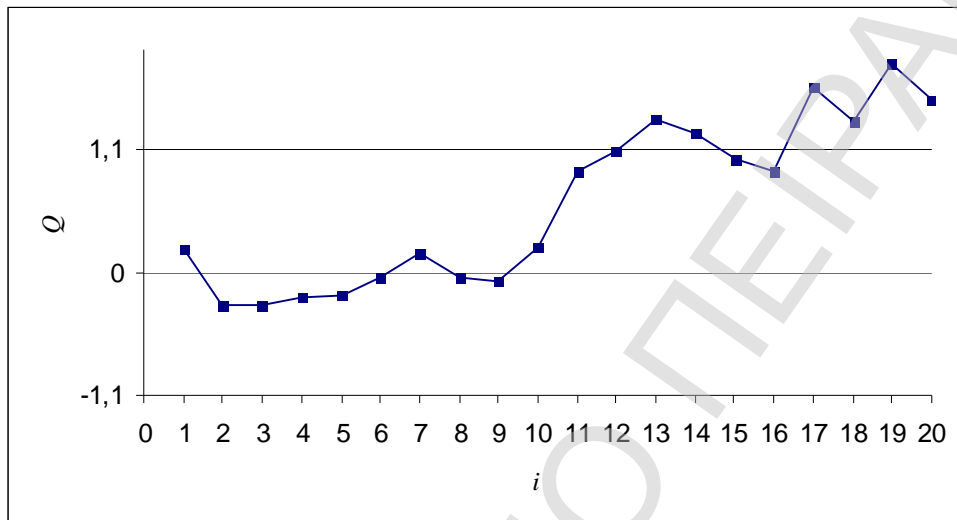
Σχήμα 2.11: *EWMA Q* (S^2) διάγραμμα ελέγχου



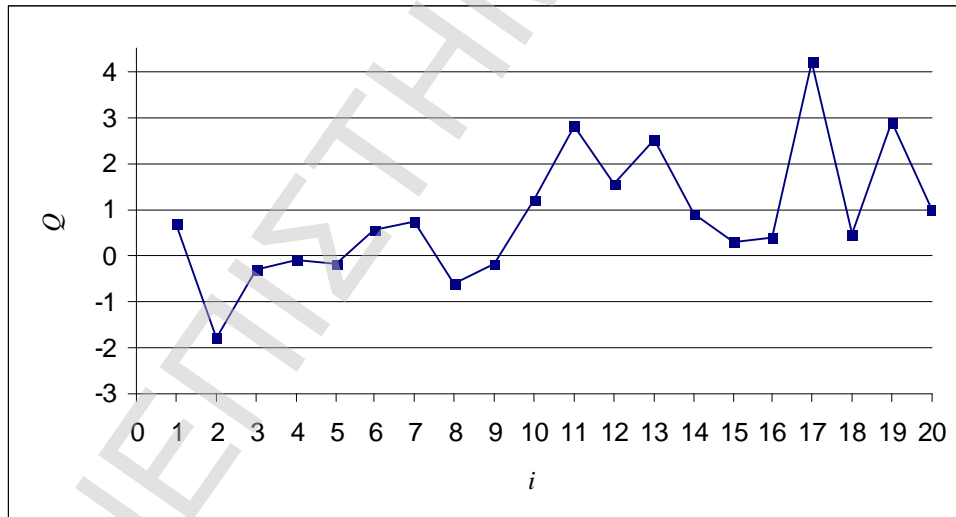
Σχήμα 2.12: *Shewhart Q* (S^2) διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π5)

Παρατηρούμε ότι και τα δύο διαγράμματα ελέγχου δίνουν ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στο 19^ο δείγμα, ενώ δεν υπάρχει καμία ένδειξη πριν το 16^ο δείγμα. Τα διαγράμματα είναι συγκρίσιμα με αυτά των Σχημάτων 2.7 και 2.8 που αντιστοιχούν στην περίπτωση των άγνωστων παραμέτρων.

Το EWMA Q διάγραμμα ελέγχου για τη μέση τιμή με γνωστές παραμέτρους $m=50$ και $s=1$ (Σχήμα 2.13) και το αντίστοιχο Shewhart Q διάγραμμα ελέγχου για τη μέση τιμή με γνωστές παραμέτρους $m=50$ και $s=1$ (Σχήμα 2.14) είναι τα ακόλουθα



Σχήμα 2.13: EWMA $Q(\bar{X})$ διάγραμμα ελέγχου



Σχήμα 2.14: Shewhart $Q(\bar{X})$ διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π1)

Συγκρίνοντας τα δύο παραπάνω διαγράμματα ελέγχου με τα αντίστοιχα των Σχημάτων 2.9 και 2.10 που αντιστοιχούν σε άγνωστες τιμές παραμέτρων, παρατηρούμε ότι όλα δίνουν μια ένδειξη για αύξηση της μέσης τιμής μετά το 13^ο δείγμα. Όμως τα διαγράμματα τα οποία

λαμβάνονται για άγνωστες τιμές παραμέτρων έχουν την τάση δείχνουν επαναφορά της διεργασίας σε ευσταθή κατάσταση.

2.3.4 Το *CUSUM Q* διάγραμμα ελέγχου

Η κατασκευή ενός κατάλληλου *CUSUM* διαγράμματος ελέγχου για την *Q* μέθοδο δεν διαφέρει ουσιαστικά από την αντίστοιχη κατασκευή του *CUSUM* διαγράμματος ελέγχου που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 1. Έτσι στο *CUSUM Q* διάγραμμα ελέγχου απεικονίζονται οι στατιστικές συναρτήσεις

$$S_t^+ = \max[0, Q_t - k + S_{t-1}^+], \quad S_0^+ = 0,$$

$$S_t^- = \min[0, Q_t + k + S_{t-1}^-], \quad S_0^- = 0$$

που προκύπτουν από το γεγονός ότι $m_Q = 0$ και $s_Q = 1$ για μια ευσταθή διεργασία. Αν $S_t^+ > h$ ή $S_t^- < -h$, όπου h μια θετική σταθερά, τότε λαμβάνουμε σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας. Γενικά η κατασκευή και χρήση ενός *CUSUM Q* διαγράμματος ελέγχου ακολουθεί τους κανόνες που ισχύουν στα συνήθη *CUSUM* διαγράμματα ελέγχου.

2.3.5 Το εκθετικό *Q* διάγραμμα ελέγχου

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να παρακολουθήσουμε την πορεία του ρυθμού a μιας στοχαστικής διαδικασίας *Poisson* που σχετίζεται με μια παραγωγική διεργασία (π.χ. εμφάνιση ελαττωμάτων σε προϊόντα). Είναι γνωστό ότι ο χρόνος X που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών ενδεχόμενων (ενδιάμεσος χρόνος αναμονής), τα οποία απαρτιμεί η στοχαστική διαδικασία *Poisson*, ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο a . Ωστόσο οι ενδιάμεσοι χρόνοι αναμονής δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή διαγράμματος ελέγχου επειδή η εκθετική κατανομή είναι εξαιρετικά λοξή. Συνεπώς οι ενδιάμεσοι χρόνοι αναμονής θα πρέπει να μετασχηματιστούν σε δεδομένα που ακολουθούν κανονική κατανομή έτσι ώστε να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε διαγράμματα ελέγχου που αναφέρονται σε μεμονωμένες παρατηρήσεις.

Αν έχουμε στη διάθεσή μας τους ενδιάμεσους χρόνους αναμονής X_1, X_2, \dots , για την παρακολούθηση του ρυθμού a της διαδικασίας *Poisson* απεικονίζονται στο *Q* διάγραμμα

ελέγχου τα σημεία (n, Q_n) , όπου για τον υπολογισμό της τεταγμένης Q_n υπάρχουν οι ακόλουθες δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν ο ρυθμός a είναι γνωστός ή όχι.

Π21. Γνωστό a

$$u_n = 1 - e^{-aX_n}$$

$$Q_n = Q_n(u_n) = -F^{-1}(u_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Π22. Άγνωστο a

$$u_n = 1 - \left[1 - \frac{X_n}{n\bar{X}_n} \right]^{n-1}$$

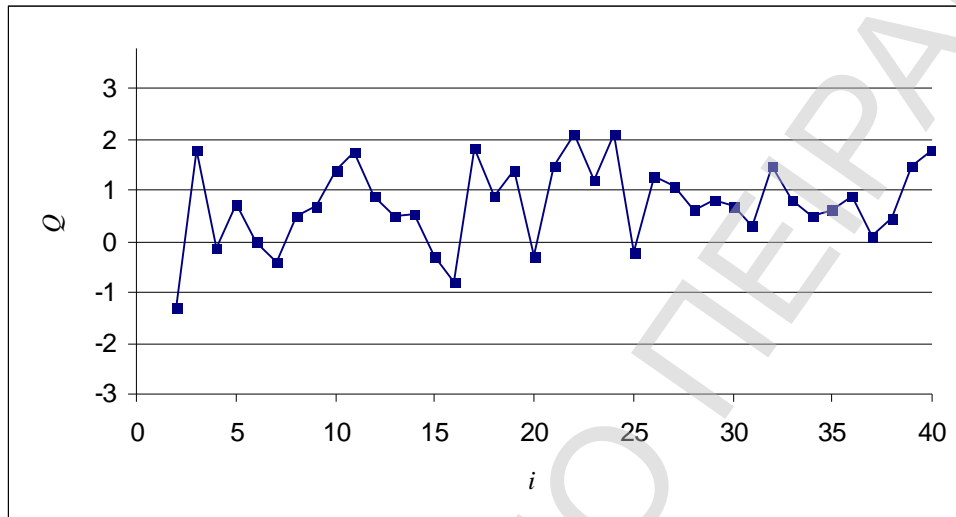
$$Q_n = Q_n(u_n) = -F^{-1}(u_n), \quad n = 2, 3, \dots$$

Αν η ακολουθία X_1, X_2, \dots, X_n ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο a , τότε οι ακολουθίες των στατιστικών συναρτήσεων Q που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις Π21 και Π22 είναι ακολουθίες ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών από την τυπική κανονική κατανομή.

Ας δούμε τώρα τι επίπτωση θα έχει μια αλλαγή του ρυθμού a της διαδικασίας *Poisson* στην ακολουθία των Q τιμών. Αν ο ρυθμός a μετατοπιστεί στη νέα θέση da με $0 < d < 1$, τότε οι ποσότητες $m_{X_i} = s_{X_i} = 1/a$ θα μετατοπιστούν στη νέα θέση $m_{X_i} = s_{X_i} = 1/da$, δηλαδή η μέση τιμή και η διασπορά θα αυξηθούν. Αν όμως $d > 1$, τότε η μέση τιμή και η διασπορά θα μειωθούν. Εξετάζοντας τους μετασχηματισμούς των περιπτώσεων Π21 και Π22 παρατηρούμε ότι μια αύξηση του ρυθμού a της διαδικασίας *Poisson* ($d > 1$) προκαλεί αύξηση της μέσης τιμής και μείωση της τυπικής απόκλισης των στατιστικών συναρτήσεων Q . Συνεπώς, αύξηση του ρυθμού a της διαδικασίας *Poisson* προκαλεί μετατόπιση των σημείων του *Shewhart Q* διαγράμματος ελέγχου σε υψηλότερο επίπεδο μειώνοντας ταυτόχρονα τη διασπορά τους. Μια μείωση του ρυθμού a της διαδικασίας *Poisson* ($0 < d < 1$) προκαλεί μετατόπιση των σημείων του *Shewhart Q* διαγράμματος ελέγχου σε χαμηλότερο επίπεδο αυξάνοντας ταυτόχρονα τη διασπορά τους.

Για την επίδειξη της σημασίας μιας μετατόπισης του ρυθμού a , ας θεωρήσουμε ότι μια παραγωγική διεργασία παράγει ελαττωματικές μονάδες στην αρχή κατά μέσο όρο κάθε 30

ημέρες και κατόπιν μια φορά την εβδομάδα. Για την προσομοίωση αυτή της διεργασίας λαμβάνουμε 20 παρατηρήσεις από την κατανομή $Exp(1/30)$ και κατόπιν άλλες 20 παρατηρήσεις από την $Exp(1/7)$. Θεωρώντας ότι ο ρυθμός a είναι άγνωστος προκύπτει το ακόλουθο διάγραμμα



Σχήμα 2.15: Shewhart Q διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π22)

Παρατηρούμε ότι όντως μετά το 21^ο σημείο η ακολουθία μετακινείται προς μεγαλύτερες τιμές και ταυτόχρονα μειώνεται η διασπορά τους. Επίσης ο 4-από-5 κανόνας μας δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας άμεσα (τα σημεία 21 έως 24 βρίσκονται στη ζώνη Β και στην Α).

2.4 Q διαγράμματα ελέγχου για ιδιότητες

Στην Παράγραφο 2.1 παρουσιάστηκαν ορισμένα προβλήματα που συνοδεύουν την κατασκευή και χρήση των Shewhart διαγραμμάτων ελέγχου για μεταβλητές. Τα προβλήματα αυτά υπάρχουν και στην περίπτωση των Shewhart διαγραμμάτων ελέγχου για ιδιότητες καθιστώντας επιτακτική την ανάγκη εύρεσης και ανάπτυξης Q διαγραμμάτων ελέγχου για ιδιότητες. Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιαστεί η κατασκευή και η χρήση των Q διαγραμμάτων ελέγχου για ιδιότητες. Πιο συγκεκριμένα, θα αντιμετωπισθούν περιπτώσεις δεδομένων τα οποία ακολουθούν διωνυμική και Poisson κατανομή και θα αναπτυχθούν Q διαγράμματα ελέγχου αντίστοιχα των p , np , c και u διαγραμμάτων ελέγχου.

2.4.1 Διωνυμικά Q διαγράμματα ελέγχου

Για να παρακολουθήσουμε διεργασίες που παράγουν διωνυμικά δεδομένα χρησιμοποιούμε p διαγράμματα ελέγχου τα οποία για μικρές τιμές του p (0.1 ή και μικρότερες) δεν ακολουθούν προσεγγιστικά κανονική κατανομή. Ο Quesenberry (1991b) παρουσίασε μεθόδους οι οποίες μετασχηματίζουν δεδομένα που προέρχονται από διωνυμική κατανομή έτσι ώστε να βελτιωθεί η κανονικότητά τους. Αυτές οι μέθοδοι θα αποτελέσουν το αντικείμενο της παρούσας παραγράφου.

Έστω X_1, X_2, \dots , μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών όπου η τυχαία μεταβλητή X_i ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n_i και p ($i \geq 1$). Έστω $b(x_i; n_i, p) = P(X_i = x_i)$ και $B(x_i; n_i, p) = P(X_i \leq x_i)$. Για την παρακολούθηση του ποσοστού p των ελαττωματικών προϊόντων που αποδίδει η παραγωγική διεργασία απεικονίζονται στο διωνυμικό Q διάγραμμα ελέγχου για το ποσοστό p των ελαττωματικών προϊόντων τα σημεία (i, Q_i) , όπου για τον υπολογισμό της τεταγμένης Q_i υπάρχουν οι ακόλουθες δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν το ποσοστό p των ελαττωματικών προϊόντων είναι γνωστό.

Π23. Γνωστό p

$$u_i = B(x_i; n_i, p)$$

$$Q_i = F^{-1}(u_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

Π24. Άγνωστο p

$$u_i = H(x_i; t_i, n_i, N_{i-1}), \quad N_i = \sum_{j=1}^i n_j, \quad t_i = \sum_{j=1}^i x_j$$

$$Q_i = F^{-1}(u_i), \quad i = 2, 3, \dots$$

Στην περίπτωση Π24 με $H(x_i; t_i, n_i, N_{i-1})$ έχουμε συμβολίσει τη συνάρτηση κατανομής της υπεργεωμετρικής κατανομής με παραμέτρους $n = t_i$, $a = n_i$ και $b = N_{i-1}$.

Οι ακολουθίες των στατιστικών συναρτήσεων Q που αντιστοιχούν στην περίπτωση Π23 κατανέμονται σύμφωνα με την επονομαζόμενη Q διωνυμική κατανομή οι οποία ορίζεται ως εξής: Έστω X τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $b(n, p)$. Η τυχαία

μεταβλητή Q ακολουθεί την Q διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p (συμβολισμός $Qb(n, p)$) αν η συνάρτηση πιθανότητάς της δίνεται από τον τύπο

$$Qb(q; n, p) = P(Q = q) = P(X = B^{-1}[\Phi(q); n, p]), \quad q = \Phi^{-1}(B(x; n, p)), \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

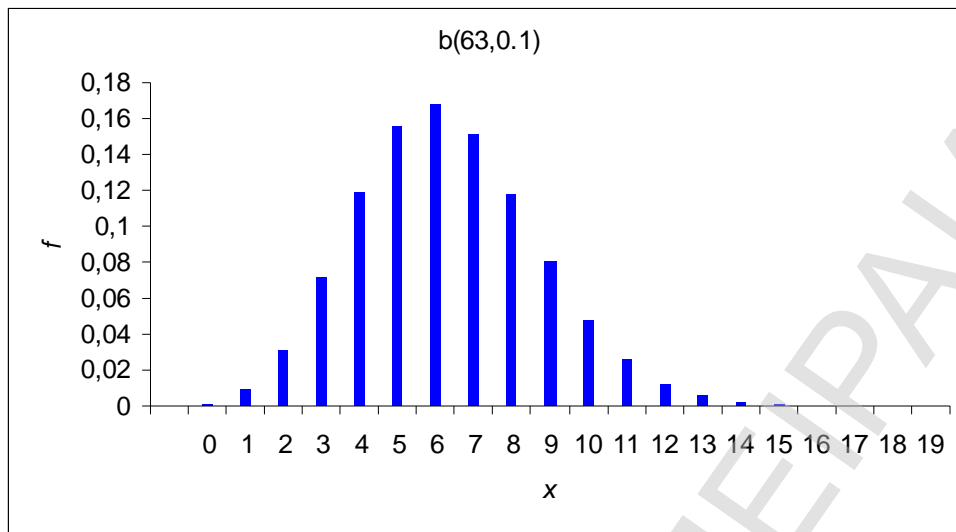
Έτσι η ακολουθία των στατιστικών συναρτήσεων Q που αντιστοιχούν στην περίπτωση Π23 είναι ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών από την Q διωνυμική κατανομή με τιμές που είναι σε τυποποιημένη κλίμακα.

Για την καλύτερη κατανόηση της Q διωνυμικής κατανομής ας θεωρήσουμε την κατανομή $b(63, 0.1)$ και την κατανομή $Qb(63, 0.1)$. Ο ακόλουθος πίνακας δίνει διάφορες ποσότητες για αυτές τις δύο κατανομές.

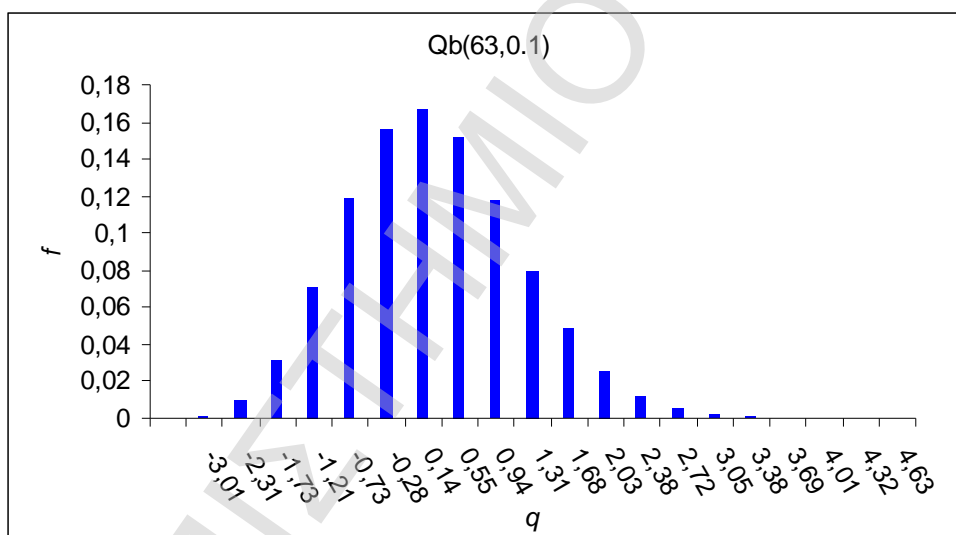
Πίνακας 2.4: Συνάρτηση πιθανότητας και κατανομής των κατανομών $b(63, 0.1)$ και $Qb(63, 0.1)$

x	$b(x; 63, 0.1)$ $Qb(q; 63, 0.1)$	$B(x; 63, 0.1)$ $QB(q; 63, 0.1)$	q
0	0.00131	0.00131	-3.01
1	0.00917	0.01048	-2.31
2	0.03159	0.04207	-1.73
3	0.07136	0.11343	-1.21
4	0.11894	0.23236	-0.73
5	0.15594	0.38830	-0.28
6	0.16749	0.55579	0.14
7	0.15154	0.70732	0.55
8	0.11786	0.82519	0.94
9	0.08003	0.90522	1.31
10	0.04802	0.95323	1.68
11	0.02571	0.97894	2.03
12	0.01238	0.99132	2.38
13	0.00540	0.99671	2.72
14	0.00214	0.99885	3.05
15	0.00078	0.99963	3.38
16	0.00026	0.99989	3.72
17	0.00008	0.99997	4.01
18	0.00002	0.99999	4.32
19	0.00001	1.00000	4.63

Στα δύο ακόλουθα σχήματα δίνεται η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $b(x; 63, 0.1)$ και $Qb(q; 63, 0.1)$



Σχήμα 2.16: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $b(x;63,0.1)$



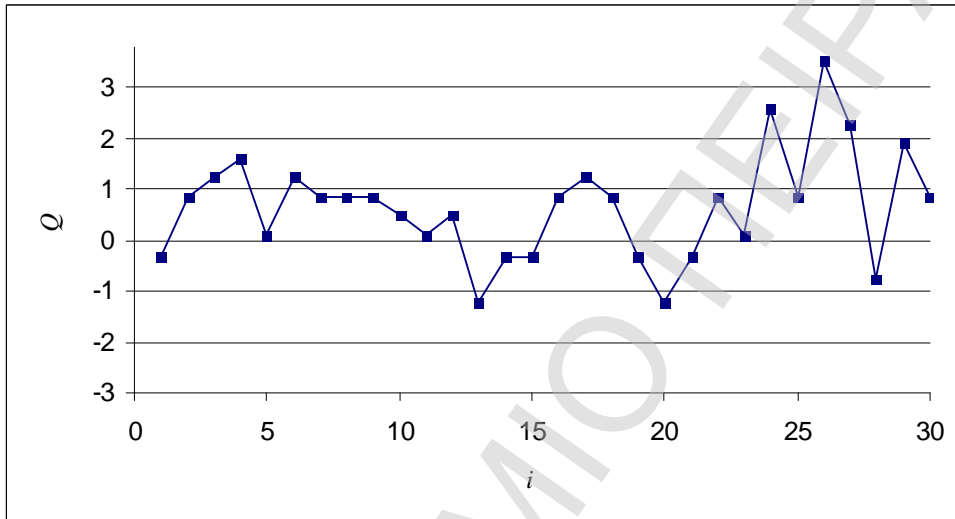
Σχήμα 2.17: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $Qb(q;63,0.1)$

Στη συνέχεια θα συγκρίνουμε την απόδοση των Q διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση του ποσοστού p των ελαττωματικών προϊόντων που αποδίδει μια διεργασία στην περίπτωση που το ποσοστό p θεωρηθεί είτε γνωστό είτε άγνωστο. Έστω τα ακόλουθα 30 δεδομένα

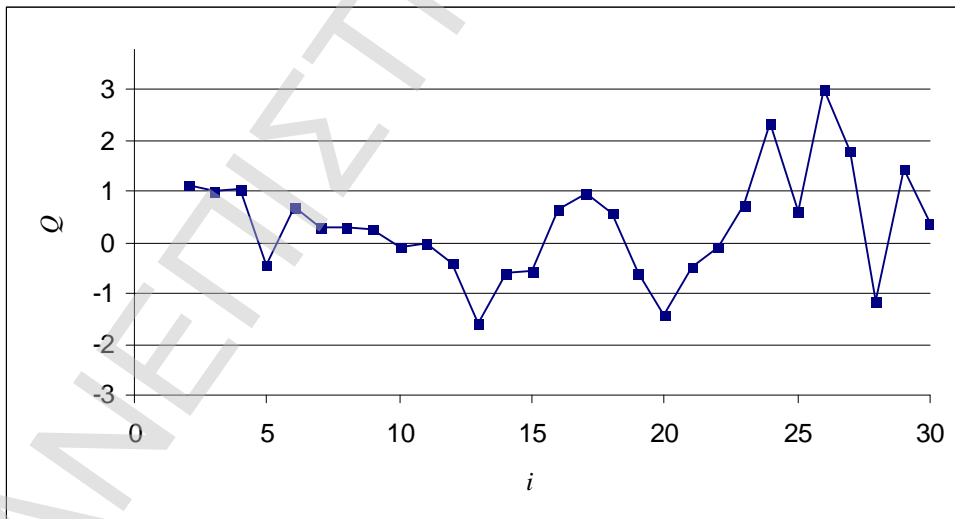
5 8 9 10 6 9 8 8 8 7 6 7 3 5 5 8 9 8 5 3 5 8 6 13 8 16 12 4 11 8
 όπου τα πρώτα 20 προέρχονται από την κατανομή $b(107, 0.06)$ και τα τελευταία 10 προέρχονται από την κατανομή $b(107, 0.08)$. Το μέγεθος n των δειγμάτων έχει τεθεί ίσο με 107 που είναι η ελάχιστη τιμή του n που ικανοποιεί την ανίσωση

$$n > \frac{\ln(a_L)}{\ln(1-p)}$$

για $a_L = 0.00135$ ($p = 0.06$). Το συγκεκριμένο μέγεθος εγγυάται ότι υπάρχει θετική πιθανότητα να βρεθεί σημείο κάτω από το κάτω όριο ελέγχου σε ένα p διάγραμμα ελέγχου οπότε και στο αντίστοιχο Q διάγραμμα ελέγχου.



Σχήμα 2.18: Διωνυμικό *Shewhart Q* διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π23)



Σχήμα 2.19: Διωνυμικό *Shewhart Q* διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π24)

Παρατηρούμε ότι και στα δύο διαγράμματα η ακολουθία των σημείων είναι περίπου η ίδια πριν την αλλαγή του p . Το ίδιο μπορούμε να διαπιστώσουμε και για τα σημεία μετά την αλλαγή του p . Όμως παρατηρούμε ότι το Σχήμα 2.18 μας δίνει πιο σαφή ένδειξη για την

αλλαγή του p σε σχέση με το Σχήμα 2.19. Επίσης πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η αύξηση της τιμής του p αυξάνει τη διασπορά των σημείων και στα δύο διαγράμματα.

Οι επιπτώσεις που επιφέρει μια αλλαγή του p στα διωνυμικά Q διαγράμματα ελέγχου είναι ίδιες με αυτές που εμφανίζονται στα συνήθη p διαγράμματα ελέγχου. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι στατιστικές συναρτήσεις Q είναι γνησίως μονότονες συναρτήσεις του X (δείτε περιπτώσεις Π23 και Π24). Έτσι μια αλλαγή του ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων από p σε dp μετατοπίζει τη μέση τιμή της X από np σε ndp , και την τυπική της απόκλιση από $\sqrt{np(1-p)}$ σε $\sqrt{ndp(1-dp)}$. Στην πράξη μας ενδιαφέρουν οι τιμές του ποσοστού p που ικανοποιούν την ανισότητα $p < 0.05$. Σε αυτή την περίπτωση τόσο η μέση τιμή όσο και η τυπική απόκλιση της X είναι αύξουσα συνάρτηση του p και ισχύουν τα ακόλουθα συμπεράσματα

- Αν το p αυξηθεί ($1 < d < 1/p$), τότε η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της X και της Q αυξάνονται.
- Αν το p μειωθεί και ($0 < d < 1$), τότε η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της X και της Q μειώνονται.

Οι πληροφορίες αυτές μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι είτε χρησιμοποιώντας το κλασικό p διάγραμμα ελέγχου είτε το διωνυμικό Q διάγραμμα ελέγχου έχουμε μειωμένη ικανότητα ανίχνευσης μετατοπίσεων του ποσοστού p σε χαμηλότερο επίπεδο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι μπορεί η μέση τιμή να μειώνεται αλλά ταυτόχρονα μειώνεται και η διασπορά των σημείων και στα δύο διαγράμματα ελέγχου με αποτέλεσμα να υπάρχει μικρή πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος κάτω από το κάτω όριο ελέγχου.

Σχετικά με το κατάλληλο μέγεθος δείγματος για την χρησιμοποίηση των διωνυμικών Q διαγραμμάτων ελέγχου έχει προταθεί ο τύπος

$$n > \frac{\ln(0.00135)}{\ln(1-p)} = \frac{-6.608}{\ln(1-p)}$$

που μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν το ποσοστό p είναι γνωστό. Όταν το ποσοστό p είναι άγνωστο τότε και πάλι το μέγεθος δείγματος λαμβάνεται από τον ίδιο τύπο αφού πρώτα εκτιμήσουμε το p με τη βοήθεια ενός προκαταρκτικού δείγματος. Πρέπει πάντως να σημειωθεί ότι το ελάχιστο μέγεθος δείγματος αυξάνεται δραματικά καθώς το p μικραίνει. Ενδεικτικός είναι ο ακόλουθος πίνακας.

p	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
Ελάχιστο n	63	129	658	1319	6605

Πρακτικές δυσκολίες εμφανίζονται όταν το $p < 0.01$ με αποτέλεσμα να απαιτείται μεγάλο μέγεθος δείγματος για την ικανοποιητική χρήση των διωνυμικών Q διαγραμμάτων ελέγχου. Σε αυτή την περίπτωση μια εναλλακτική λύση προσφέρουν γεωμετρικά Q διαγράμματα ελέγχου που θα παρουσιαστούν σε επόμενη παράγραφο.

Κλείνοντας την παρούσα παράγραφο σημειώνουμε ότι στη βιβλιογραφία (δείτε π.χ. Johnson and Kotz (1969), Ryan(1989)) έχει εμφανιστεί ένας \arcsin μετασχηματισμός δεδομένων για την περίπτωση της διωνυμικής κατανομής που βελτιώνει την κανονικότητα των δεδομένων. Ο μετασχηματισμός έχει ως ακολούθως: Έστω μια τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $b(n, p)$. Τότε η τυχαία μεταβλητή

$$Y = 2\sqrt{n} \left(\sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{X + 3/8}{n + 3/4}} \right) - \sin^{-1}(\sqrt{p}) \right)$$

ακολουθεί προσεγγιστικά τυποποιημένη κανονική κατανομή. Η προσέγγιση γίνεται ολοένα και καλύτερη καθώς το n αυξάνει και σε κάθε περίπτωση είναι ταχύτερη από αυτή της τυποποιημένης τυχαίας μεταβλητής

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

Στην πράξη τίθεται το ερώτημα ποιες από τις τιμές Q , Y , Z πρέπει να απεικονιστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου με όρια ελέγχου ± 3 για να παρακολουθήσουμε το ποσοστό p των ελαττωματικών προϊόντων μιας διεργασίας έτσι ώστε να έχουμε τα καλύτερα δυνατά αποτελέσματα. Για να απαντήσουμε στο ερώτημα ας θεωρήσουμε τις ακόλουθες ζώνες του διαγράμματος ελέγχου

- | |
|---|
| <p> Ζώνη 1: Τιμές x για τις οποίες $x < -3$
 Ζώνη 2: Τιμές x για τις οποίες $-3 \leq x < -2$
 Ζώνη 3: Τιμές x για τις οποίες $-2 \leq x < -1$
 Ζώνη 4: Τιμές x για τις οποίες $-1 \leq x < 0$
 Ζώνη 5: Τιμές x για τις οποίες $0 \leq x < 1$
 Ζώνη 6: Τιμές x για τις οποίες $1 \leq x < 2$
 Ζώνη 7: Τιμές x για τις οποίες $2 \leq x < 3$
 Ζώνη 8: Τιμές x για τις οποίες $x > 3$ </p> |
|---|

Για γνωστές τιμές των n , p μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα να λάβει κάθε μια από τις τυχαίες μεταβλητές Q , Y , Z τιμές που ανήκουν σε κάθε μια από τις 8 ζώνες. Οι πιθανότητες αυτές για διάφορες τιμές των n , p δίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 2.5: Πιθανότητες ζωνών για τις τυχαίες μεταβλητές Q , Y , Z

Ζώνη		1	2	3	4	5	6	7	8	
n	p	.00135	.02140	.13591	.34134	.34134	.13591	.02140	.00135	
500	.01	.00000	.00657	.11682	.49258	.25172	.10122	.00521	.00521	z
		.00000	.00657	.11682	.32331	.32331	.20598	.02920	.00190	Q
		.00657	.03318	.08363	.31623	.42807	.01260	.01265	.00065	y
700	.01	.00000	.00710	.16451	.42710	.23280	.14214	.02087	.00547	z
		.00088	.00622	.07362	.36824	.38256	.14214	.02407	.00228	Q
		.00088	.02820	.1254	.27734	.38256	.14214	.02545	.00089	y
900	.01	.00012	.02066	.18463	.38200	.21658	.15536	.03557	.00509	z
		.00119	.01959	.09369	.34052	.34900	.15536	.03836	.00230	Q
		.00119	.01959	.09369	.34052	.34900	.17456	.02046	.00099	y
100	.05	.00000	.00592	.11234	.49774	.25604	.09977	.02391	.00427	z
		.00000	.00592	.11234	.31772	.33003	.20580	.02672	.00146	Q
		.00592	.03116	.08118	.31772	.43606	.09977	.02773	.00046	y
200	.05	.00004	.00901	.11469	.45932	.28704	.10609	.02113	.00266	z
		.00004	.00864	.11469	.33097	.34177	.17972	.02113	.00266	Q
		.00234	.02411	.09730	.33097	.34177	.17972	.02264	.00116	y
400	.05	.00020	.01885	.13088	.40918	.28987	.12032	.02864	.00207	z
		.00062	.01843	.13088	.31804	.32472	.17660	.02864	.00207	Q
		.00172	.01733	.13088	.31804	.38101	.13199	.01793	.00110	y
500	.05	.00046	.01940	.15899	.37409	.27059	.14621	.02756	.00270	z
		.00114	.01871	.10738	.34412	.35218	.14621	.02871	.00155	Q
		.00261	.01725	.15899	.29250	.35218	.15683	.01878	.00086	y
100	.1	.00003	.00781	.10932	.46600	.29297	.10328	.01862	.00198	z
		.00032	.00751	.10932	.33413	.35053	.15829	.03791	.00198	Q
		.00194	.02177	.09344	.33413	.35053	.17758	.10979	.00081	y
200	.1	.00048	.01630	.12629	.41610	.29593	.11780	.02418	.00292	z
		.00048	.01630	.12629	.32246	.33276	.17461	.02556	.00154	Q
		.00139	.03066	.11103	.32246	.38957	.11780	.02631	.00078	y
300	.1	.00057	.01655	.12680	.40450	.30624	.11995	.02297	.00242	z
		.00127	.01585	.12680	.32794	.33679	.16597	.02398	.00141	Q
		.00127	.02741	.11524	.32794	.38280	.11995	.02459	.00080	y
500	.1	.00055	.01808	.14783	.37111	.29658	.14080	.02328	.00177	z
		.00100	.01763	.11187	.34770	.35595	.14080	.02328	.00177	Q
		.00176	.02567	.13903	.31174	.35595	.14080	.02391	.00144	y

Για λόγους σύγκρισης, στη δεύτερη γραμμή του πίνακα δίνονται οι αντίστοιχες πιθανότητες της τυποποιημένης κανονικής κατανομής. Παρατηρούμε ότι οι πιθανότητες που αναφέρονται στις τυχαίες μεταβλητές Q και Y είναι κοντύτερα σε αυτές που αντιστοιχούν στην κατανομή $N(0, 1)$. Οι σημαντικότερες πιθανότητες είναι αυτές των Ζωνών 1 και 8 αφού αυτές παριστάνουν τις πιθανότητες να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος ελέγχου κάτω από το LCL και πάνω από το UCL , αντίστοιχα. Από τον παραπάνω πίνακα (δείτε επίσης

Quesenberry (1990)) προκύπτει ότι δεν υπάρχει κάποιο διάγραμμα ελέγχου, μεταξύ των Q και Y , που να έχει καθολικά καλύτερη απόδοση σε όλο το εύρος τιμών των παραμέτρων n , p . Όμως μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι γενικά το Q διάγραμμα ελέγχου δίνει πιο ακριβή πιθανότητα στη Ζώνη 8 αλλά αρκετά συχνά δίνει μικρότερη πιθανότητα στη Ζώνη 1. Από την άλλη μεριά το Y διάγραμμα ελέγχου δίνει μεγαλύτερη πιθανότητα στη Ζώνη 1 και αρκετά μικρή πιθανότητα στη Ζώνη 8.

2.4.2 Poisson Q διαγράμματα ελέγχου

Στην παρούσα παράγραφο θα αναπτύξουμε την κατασκευή του *Poisson Q* διαγράμματος ελέγχου για την παρακολούθηση του (συνολικού) αριθμού των ελαττωμάτων που αποδίδει μια παραγωγική διεργασία. Η βασική υπόθεση που θα κάνουμε είναι ότι ο αριθμός των ελαττωμάτων σε μια μονάδα επιθεώρησης ακολουθεί την κατανομή *Poisson* με παράμετρο I .

Έστω C_i ($i \geq 1$) ο αριθμός των ελαττωμάτων που βρέθηκαν σε ένα δείγμα n_i μονάδων επιθεώρησης. Η τυχαία μεταβλητή C_i ($i \geq 1$) ακολουθεί κατανομή $P(n_i I)$. Έστω $f(c_i; n_i I) = P(C_i = c_i)$ και $F(c_i; n_i I) = P(C_i \leq c_i)$. Για την παρακολούθηση του αριθμού των ελαττωμάτων που αποδίδει η παραγωγική διεργασία απεικονίζονται στο *Poisson Q* διάγραμμα ελέγχου τα σημεία (i, Q_i) , όπου για τον υπολογισμό της τεταγμένης Q_i υπάρχουν οι ακόλουθες δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν η παράμετρος I είναι γνωστή ή όχι.

Π25. Γνωστό I

$$u_i = F(c_i; n_i I)$$

$$Q_i = F^{-1}(u_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

Π26. Άγνωστο I

$$u_i = B(x_i; t_i, n_i / N_i), \quad N_i = \sum_{j=1}^i n_j, \quad t_i = \sum_{j=1}^i c_j$$

$$Q_i = F^{-1}(u_i), \quad i = 2, 3, \dots$$

Οι ακολουθίες των στατιστικών συναρτήσεων Q που αντιστοιχούν στην περίπτωση Π25 κατανέμονται σύμφωνα με την επονομαζόμενη *Poisson Q* κατανομή οι οποία ορίζεται ως εξής: Έστω C τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή $P(I)$. Η τυχαία μεταβλητή Q ακολουθεί την *Poisson Q* κατανομή με παράμετρο I (συμβολισμός $QP(I)$) αν η συνάρτηση πιθανότητάς της δίνεται από τον τύπο

$$f_{QP}(q;I) = P(Q = q) = P(C = F^{-1}[\Phi(q);I]), \quad q = \Phi^{-1}(F(x;I)), \quad x = 0,1,\dots$$

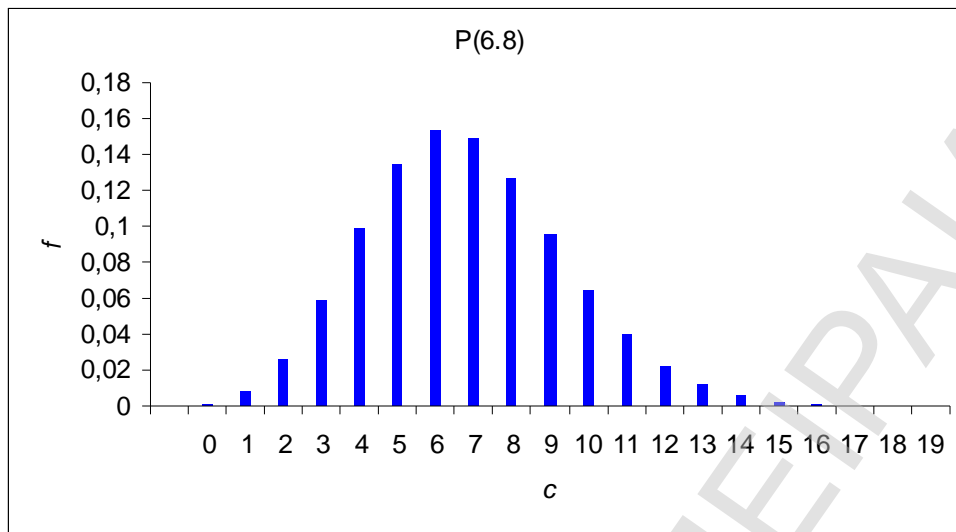
Έτσι η ακολουθία των στατιστικών συναρτήσεων Q που αντιστοιχούν στην περίπτωση Π25 είναι ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών από την *Poisson Q* κατανομή με τιμές που είναι σε τυποποιημένη κλίμακα.

Για την καλύτερη κατανόηση της *Poisson Q* κατανομής ας θεωρήσουμε την κατανομή $P(6.8)$ και την κατανομή $QP(6.8)$. Ο ακόλουθος πίνακας δίνει διάφορες ποσότητες για αυτές τις δύο κατανομές.

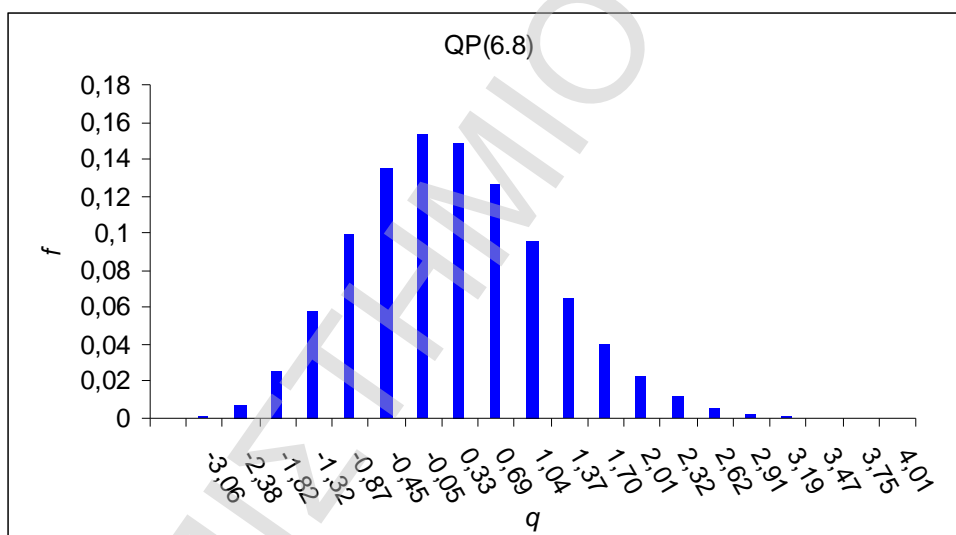
Πίνακας 2.6: Συνάρτηση πιθανότητας και κατανομής των κατανομών $P(6.8)$ και $QP(6.8)$

c	$f(c;6.8)$ $f_{QP}(q;6.8)$	$F(c;6.8)$ $F_{QP}(q;6.8)$	q
0	.00111	.00111	-3.06
1	.00757	.00869	-2.38
2	.02575	.03444	-1.82
3	.05837	.09281	-1.32
4	.09923	.09281	-1.32
5	.13495	.32698	-.45
6	.15294	.47992	-.05
7	.14857	.62849	.33
8	.12628	.75477	.69
9	.09541	.85018	1.04
10	.06488	.91507	1.37
11	.04011	.95517	1.70
12	.02273	.97790	2.01
13	.01189	.98979	2.32
14	.00577	.99557	2.62
15	.00262	.99818	2.91
16	.00111	.99930	3.19
17	.00045	.99974	3.47
18	.00017	.99991	3.75
19	.00006	.99997	4.01

Στα δύο ακόλουθα σχήματα δίνεται η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f(c;6.8)$ και $f_{QP}(q;6.8)$



Σχήμα 2.20: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(c;6.8)$



Σχήμα 2.21: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f_{QP}(q;6.8)$

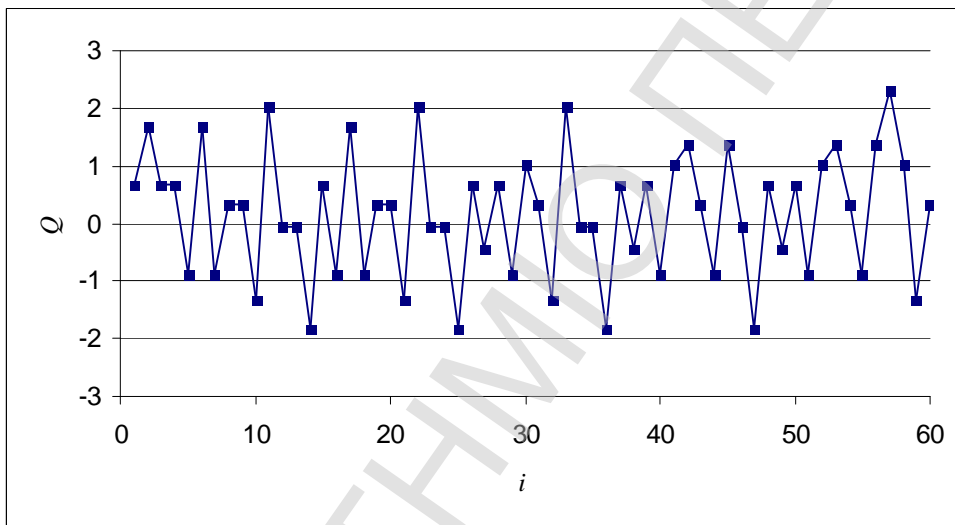
Στη συνέχεια θα συγκρίνουμε την απόδοση των *Poisson Q* διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση του αριθμού των ελαττωμάτων που αποδίδει μια παραγωγική διεργασία στην περίπτωση που η παράμετρος I θεωρηθεί είτε γνωστή είτε άγνωστη. Έστω τα ακόλουθα 60 δεδομένα

8	11	8	8	4	11	4	7	7	3	12	6
6	2	8	4	11	4	7	7	3	12	6	6
2	8	5	8	4	9	7	3	12	6	6	2
8	5	8	4	9	10	7	4	10	6	2	8
5	8	4	9	10	7	4	10	13	9	3	7

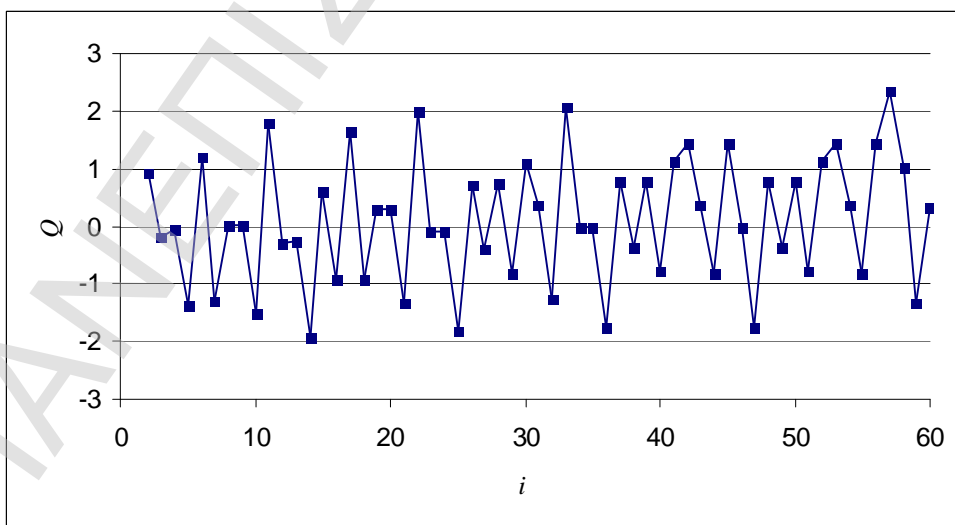
που προέρχονται από 60 δείγματα μεγέθους $n = 4$ μονάδων επιθεώρησης όπου ο αριθμός των ελαττωμάτων σε μια μονάδα επιθεώρησης ακολουθεί την κατανομή *Poisson* με παράμετρο $I = 1.7$. Το μέγεθος n των δειγμάτων έχει τεθεί ίσο με 4 που είναι η ελάχιστη τιμή του n που ικανοποιεί την ανίσωση

$$n > -\frac{\ln(a_L)}{I}$$

για $a_L = 0.00135$ ($I = 1.7$). Το συγκεκριμένο μέγεθος εγγυάται ότι υπάρχει θετική πιθανότητα να βρεθεί σημείο κάτω από το κάτω όριο ελέγχου ενός *Poisson Q* διαγράμματος ελέγχου.



Σχήμα 2.22: *Poisson Shewhart Q* διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π25)



Σχήμα 2.23: *Poisson Shewhart Q* διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π26)

Αξίζει να σημειώσουμε ότι στο *Poisson Q* διάγραμμα ελέγχου του Σχήματος 2.22 έχουμε ότι $(a_L, a_U) = (0.00111, 0.00182)$. Παρατηρούμε ότι τα δύο παραπάνω διαγράμματα ελέγχου παρουσιάζουν πολλές ομοιότητες. Αυτό γενικά ισχύει για διαγράμματα τα οποία αντιστοιχούν σε μια ευσταθή διαδικασία *Poisson*. Πρέπει όμως να σημειωθεί ότι το διάγραμμα στο οποίο αποτυπώθηκαν οι τιμές Q θεωρώντας την τιμή της παραμέτρου άγνωστη, μπορεί να γίνει σε πραγματικό χρόνο, δηλαδή κατά την διάρκεια της λήψης των δεδομένων. Αυτή η στρατηγική μας καθιστά ικανούς να ανιχνεύουμε εγκαίρως τις ειδικές αιτίες μεταβλητότητας και να προσπαθούμε να φέρουμε τη διεργασία εντός ελέγχου όσο πιο γρήγορα γίνεται.

Οι επιπτώσεις που επιφέρει μια αλλαγή του I στα *Poisson Q* διαγράμματα ελέγχου είναι ίδιες με αυτές που εμφανίζονται στα συνήθη c και u διαγράμματα ελέγχου. Έτσι, η αλλαγή του ρυθμού από I σε dI αυξάνει τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση ανάλογα με το αν $d > 1$ ή $d < 1$. Οι πληροφορίες αυτές μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι χρησιμοποιώντας είτε τα κλασικά c και u διαγράμματα ελέγχου είτε τα *Poisson Q* διαγράμματα ελέγχου δεν έχουμε αρκετή ευαισθησία στην ανίχνευση μετατοπίσεων του I σε χαμηλότερο επίπεδο.

Σχετικά με το κατάλληλο μέγεθος δείγματος για την χρησιμοποίηση των *Poisson Q* διαγραμμάτων ελέγχου έχει προταθεί ο τύπος

$$n > \frac{\ln(0.00135)}{I} = \frac{6.608}{I}$$

που μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν ο ρυθμός I είναι γνωστός. Όταν ο ρυθμός I είναι άγνωστος τότε και πάλι το μέγεθος δείγματος λαμβάνεται από τον ίδιο τύπο αφού πρώτα εκτιμήσουμε το I με τη βοήθεια ενός προκαταρκτικού δείγματος. Πρέπει πάντως να σημειωθεί ότι το ελάχιστο μέγεθος δείγματος αυξάνεται καθώς το I μικραίνει. Ενδεικτικός είναι ο ακόλουθος πίνακας.

I	>6.61	6.61	1	0.2	0.05	0.01
Ελάχιστο n	1	2	7	34	133	661

Πρακτικές δυσκολίες εμφανίζονται όταν το I είναι πάρα πολύ μικρό με αποτέλεσμα να απαιτείται μεγάλο μέγεθος δείγματος για την ικανοποιητική χρήση των *Poisson Q*

διαγραμμάτων ελέγχου. Σε αυτή την περίπτωση μια εναλλακτική λύση προσφέρουν εκθετικά Q διαγράμματα ελέγχου.

Κλείνοντας την παρούσα παράγραφο σημειώνουμε ότι στη βιβλιογραφία (δείτε π.χ. Johnson and Kotz (1969), Ryan(1989)) έχει εμφανιστεί ο ακόλουθος μετασχηματισμός δεδομένων για την περίπτωση της *Poissson* κατανομής που βελτιώνει την κανονικότητα των δεδομένων. Ο μετασχηματισμός έχει ως ακολούθως: Έστω μια τυχαία μεταβλητή C που ακολουθεί την κατανομή $P(nI)$. Τότε η τυχαία μεταβλητή

$$Y = 2\sqrt{C} - 2\sqrt{nI}$$

ακολουθεί προσεγγιστικά τυποποιημένη κανονική κατανομή. Η προσέγγιση γίνεται ολοένα και καλύτερη καθώς το n αυξάνει και σε κάθε περίπτωση είναι ταχύτερη από αυτή της τυποποιημένης τυχαίας μεταβλητής

$$Z = \frac{C - nI}{\sqrt{nI}}$$

Στην πράξη τίθεται το ερώτημα ποιες από τις τιμές Q , Y , Z πρέπει να απεικονιστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου με όρια ελέγχου ± 3 για να παρακολουθήσουμε το (συνολικό) αριθμό των ελαττωμάτων που αποδίδει μια παραγωγική διεργασία έτσι ώστε να έχουμε τα καλύτερα δυνατά αποτελέσματα. Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό παρουσιάζουμε τον Πίνακα 2.7 που για γνωστή τιμή του nI περιέχει τις πιθανότητες να λάβει κάθε μια από τις τυχαίες μεταβλητές Q , Y , Z , τιμές που ανήκουν σε κάθε μια από τις 8 ζώνες που ορίστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο.

Πίνακας 2.7: Πιθανότητες ζωνών για τις τυχαίες μεταβλητές Q , Y , Z

Ζώνη	1	2	3	4	5	6	7	8	
nI	.00135	.02140	.13591	.34134	.34134	.13591	.02140	.00135	
5.00	.00000	.00674	.11791	.49131	.25067	.10154	.02637	.00545	z
	.00000	.00674	.11791	.31584	.32169	.20599	.02981	.00202	Q
	.00674	.03369	.22460	.35093	.25067	.11968	.01300	.00070	y
6.00	.00000	.7135	.13385	.45510	.24093	.11014	.03899	.00363	z
	.00000	.01735	.13385	.29448	.29830	.21340	.04122	.00140	Q
	.05949	.05949	.08924	.29448	.40156	.13267	.01958	.00051	y
7.00	.00000	.00730	.16570	.42572	.23178	.14250	.02128	.00572	z
	.00091	.00638	.07447	.36795	.38078	.14250	.02459	.00241	Q
	.00730	.02234	.14336	.42575	.23178	.15669	.01245	.00036	y
8.00	.00000	.01375	.17748	.40131	.22334	.14993	.03046	.00372	z
	.00034	.01342	.08588	.35333	.36292	.14993	.03259	.00159	Q
	.00302	.03936	.14886	.40131	.29553	.09467	.01661	.00065	y
9.00	.00000	.00623	.10946	.47172	.28837	.10219	.01961	.00243	z
	.00123	.01999	.09446	.33996	.34736	.15553	.03904	.00243	Q

	.00623	.01499	.18555	.38063	.28837	.11312	.01067	.00044	y
10.00	.00005	.01029	.11981	.45290	.28142	.10849	.02359	.00345	z
	.00050	.00984	.11981	.32779	.33363	.18140	.02545	.00159	Q
	.00277	.02648	.19097	.36282	.28142	.12126	.01358	.00070	y
15.00	.00021	.01779	.16675	.38334	.25138	.14778	.02943	.00331	z
	.00086	.01715	.10046	.34719	.35382	.14778	.03103	.00172	Q
	.00279	.03465	.14731	.38334	.30713	.10532	.01860	.00086	y
20.00	.00026	.02113	.13513	.40258	.28413	.12244	.03165	.00269	z
	.00078	.02061	.13513	.31374	.31724	.17817	.03284	.00149	Q
	.00209	.03692	.11750	.40258	.28413	.13495	.02101	.00080	y
30.00	.00041	.02147	.13537	.39111	.29427	.12507	.02986	.00245	z
	.00092	.02095	.13537	.31847	.32159	.17038	.03082	.00149	Q
	.00195	.03334	.12196	.39111	.29427	.13528	.02122	.00089	y
40.00	.00073	.01860	.13207	.39051	.30596	.12406	.02516	.00290	z
	.00073	.01860	.13207	.32757	.33068	.16229	.02618	.00188	Q
	.00256	.02682	.12202	.39051	.30596	.13212	.01924	.00076	y
50.00	.00051	.01570	.12729	.39401	.31762	.12126	.02159	.00201	z
	.00092	.01530	.12729	.33769	.34093	.15428	.02159	.00201	Q
	.00269	.02107	.15604	.35772	.31762	.12759	.01638	.00089	y

Παρατηρούμε ότι οι πιθανότητες που αναφέρονται στις τυχαίες μεταβλητές Q και Y είναι κοντύτερα σε αυτές που αντιστοιχούν στην κατανομή $N(0,1)$ σε σχέση με τις πιθανότητες που αντιστοιχούν στην τυχαία μεταβλητή Z . Οι σημαντικότερες πιθανότητες είναι αυτές των Ζωνών 1 και 8 αφού αυτές παριστάνουν τις πιθανότητες να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος ελέγχου κάτω από το LCL και πάνω από το UCL , αντίστοιχα. Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι δεν υπάρχει κάποιο διάγραμμα ελέγχου, μεταξύ των Q και Y , που να έχει καθολικά καλύτερη απόδοση σε όλο το εύρος τιμών του nI . Όμως μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι γενικά το Q διάγραμμα ελέγχου δίνει μεγαλύτερη πιθανότητα στη Ζώνη 8 και μικρότερη πιθανότητα στη Ζώνη 1. Από την άλλη μεριά το Y διάγραμμα ελέγχου δίνει μεγαλύτερη πιθανότητα στη Ζώνη 1 και μικρότερη πιθανότητα στη Ζώνη 8. Γενικά μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η στατιστική συνάρτηση Q προσεγγίζει καλύτερα την τυποποιημένη κανονική κατανομή όταν ισχύει η ανισότητα $nI \geq 7$.

2.4.3 Γεωμετρικά Q διαγράμματα ελέγχου

Στη μελέτη των διωνυμικών Q διαγραμμάτων ελέγχου αναφέρθηκε ότι όταν το $p < 0.01$ απαιτείται μεγάλο μέγεθος δείγματος για την ικανοποιητική χρήση των, δηλαδή απαιτούνται διεργασίες μεγάλου μεγέθους. Σε αυτή την περίπτωση μια εναλλακτική λύση προσφέρουν τα γεωμετρικά Q διαγράμματα ελέγχου που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια.

Ας υποθέσουμε ότι ελέγχουμε διαδοχικά προϊόντα και έστω p η πιθανότητα να εμφανιστεί ελαττωματικό προϊόν σε ένα έλεγχο, η οποία υποθέτουμε δεν αλλάζει από έλεγχο

σε έλεγχο. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X_1 να δηλώνει τον αριθμό των προϊόντων που θα χρειαστεί να ελέγξουμε έως ότου εμφανιστεί το πρώτο ελαττωματικό προϊόν. Επίσης ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές X_i ($i \geq 1$) να δηλώνουν τον αριθμό των προϊόντων που θα χρειαστεί να ελέγξουμε μετά την εμφάνιση του $i-1$ ελαττωματικού προϊόντος και έως ότου εμφανιστεί το επόμενο ελαττωματικό προϊόν (το i στη σειρά). Οι τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots αποτελούν τυχαίο δείγμα από τη γεωμετρική κατανομή $Ge(p)$. Η συνάρτηση πιθανότητας $g(x; p)$ και η συνάρτηση κατανομής $G(x; p)$ της γεωμετρικής κατανομής με παράμετρο p δίνονται από τους τύπους

$$g(x; p) = p(1-p)^{x-1}, \quad x=1,2,\dots$$

και

$$G(x; p) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - (1-p)^x, & x \geq 1 \end{cases}$$

αντίστοιχα.

Για την παρακολούθηση του ποσοστού p των ελαττωματικών προϊόντων που αποδίδει η παραγωγική διεργασία απεικονίζονται στο γεωμετρικό Q διάγραμμα ελέγχου τα σημεία (i, Q_i) , όπου για τον υπολογισμό της τεταγμένης Q_i έχουμε την ακόλουθη περίπτωση όταν το p είναι γνωστό.

Π27. Γνωστό p

$$u_i = G(x_i; p) = 1 - (1-p)^{x_i}$$

$$Q_i = -F^{-1}(u_i), \quad i=1, 2, \dots$$

Όταν το p είναι σταθερό τότε οι στατιστικές συναρτήσεις Q_i είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν προσεγγιστικά τυπική κανονική κατανομή. Η ποιότητα της προσέγγισης καθορίζεται πάντα από την τιμή του p . Γενικά, όσο πιο μικρή είναι η τιμή του p τόσο καλύτερη είναι η προσέγγιση.

Για την ερμηνεία του γεωμετρικού Q διαγράμματος ελέγχου παραθέτουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα. Όταν το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων μεταβληθεί από p σε dp ($0 < d < 1/p$) τότε η μέση τιμή της γεωμετρικής κατανομής θα μεταβληθεί από $1/p$ σε $1/dp$ και η τυπική απόκλιση από $\sqrt{(1-p)/p}$ σε $\sqrt{(1-dp)/dp}$. Οπότε ισχύουν τα ακόλουθα συμπεράσματα

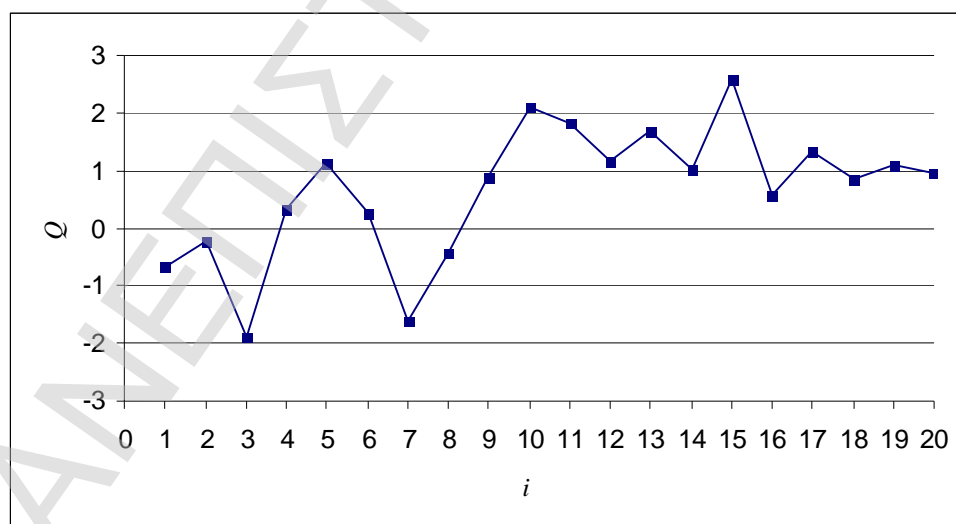
- Αν το p αυξηθεί ($1 < d < 1/p$), τότε η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της X θα μειωθεί.
- Αν το p μειωθεί και ($0 < d < 1$), τότε η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της X θα αυξηθεί.

Έτσι, αν το p αυξηθεί, τότε από τον μετασχηματισμό Π27 προκύπτει ότι η μέση τιμή της στατιστικής συνάρτησης Q θα αυξηθεί και η τυπική απόκλιση θα μειωθεί. Ομοίως, αν το p μειωθεί, τότε από τον μετασχηματισμό Π27 προκύπτει ότι η μέση τιμή της στατιστικής συνάρτησης Q θα μειωθεί και η τυπική απόκλιση θα αυξηθεί.

Για να παρατηρήσουμε τις μεταβολές που προκαλεί η αλλαγή του p στην ακολουθία των σημείων σε ένα γεωμετρικό Q διάγραμμα ελέγχου, λάβαμε 10 τιμές από γεωμετρική κατανομή με $p=0.0001$ και στη συνέχεια άλλες 10 τιμές από την ίδια κατανομή με $p=0.001$. Οι τιμές είναι οι ακόλουθες

p	Τιμές									
0.0001	13766	8903	35001	4645	1432	5056	29635	11084	2075	183
0.001	351	1301	469	1677	47	3298	925	2249	1461	1884

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται το γεωμετρικό *Shewhart Q* διάγραμμα ελέγχου που αντιστοιχεί στα παραπάνω δεδομένα



Σχήμα 2.24: Γεωμετρικό *Shewhart Q* διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π27)

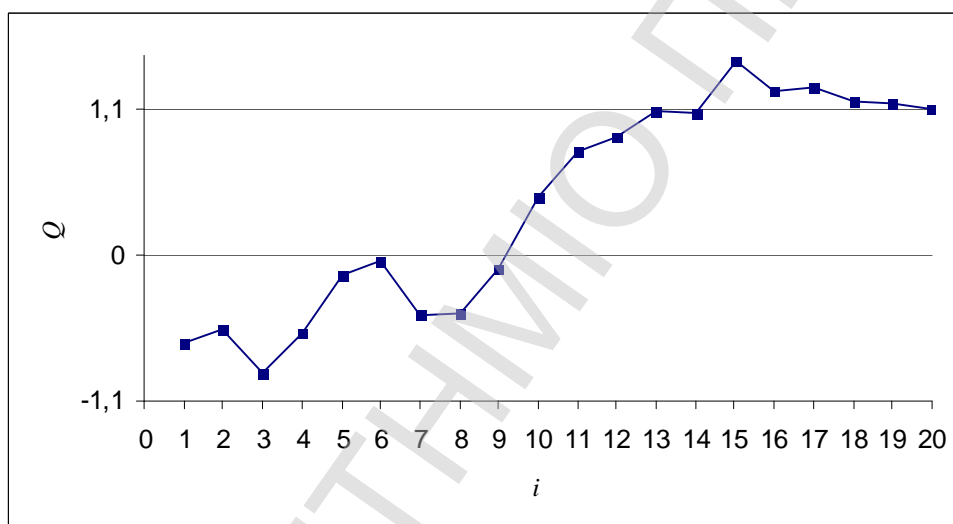
Παρατηρούμε η αύξηση του p απεικονίστηκε στο διάγραμμα με σημεία υψηλότερα της κεντρικής γραμμής και με ταυτόχρονη μείωση της μεταβλητότητας των σημείων (μετά το 10^ο

σημείο). Ωστόσο ο συνήθης κανόνας 1-από-1 έχει πολύ περιορισμένη ικανότητα να ανιχνεύει αυξήσεις του p . Σε αυτές τις περιπτώσεις είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα 4-από-5. Μια εναλλακτική λύση είναι να κατασκευάσουμε ένα $EWMA Q$ διάγραμμα ελέγχου. Για $I = 0.25$ και $L = 2.9$ (οι τιμές αυτές για μια ευσταθή διεργασία δίνουν εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ίσο με 372) έχουμε ότι

$$UCL = L \cdot \sqrt{\frac{I}{2-I}} = 2.9 \sqrt{\frac{0.25}{1.75}} = 1.10,$$

$$LCL = -L \cdot \sqrt{\frac{I}{2-I}} = -2.9 \sqrt{\frac{0.25}{1.75}} = -1.10.$$

Το παραπάνω $EWMA Q$ διάγραμμα ελέγχου δίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 2.25: $EWMA Q$ διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π27)

Γενικά τα $EWMA Q$ διαγράμματα ελέγχου (και τα τύπου $CUSUM$) διαγράμματα έχουν αυξημένη ικανότητα να ανιχνεύουν αυξήσεις του p .

Για την παρακολούθηση του ποσοστού p των ελαττωματικών προϊόντων που αποδίδει η παραγωγική διεργασία όταν το p είναι άγνωστο και έχουμε στη διάθεσή μας την ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών X_1, X_2, \dots, X_n , έχει προταθεί ο ακόλουθος Q μετασχηματισμός.

Π28. Άγνωστο p

$$u_n = \tilde{G}(x_n; t, n), \quad t = \sum_{j=1}^n x_j$$

$$Q_n = -F^{-1}(u_n), \quad n = 2, 3, \dots$$

όπου

$$\tilde{G}(x;t,n) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \sum_{y=1}^{\lfloor x \rfloor} \tilde{g}(y;t,n), & 1 \leq x < t-n+1 \\ 1 & x \geq t-n+1 \end{cases}$$

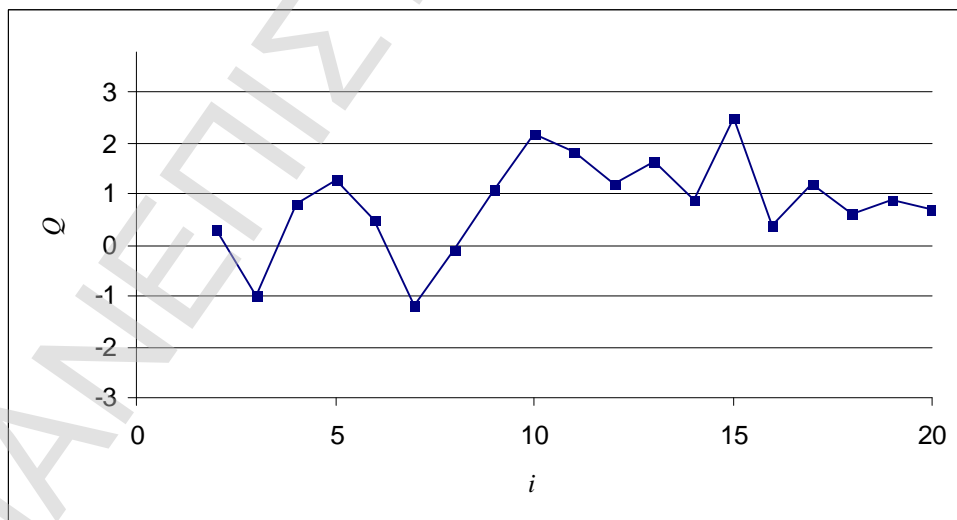
και

$$\tilde{g}(x;t,n) = \frac{(n-1) \cdot (t-n) \dots (t-n-x+2)}{(t-x) \dots (t-1)}, \quad 1 \leq x < t-n+1.$$

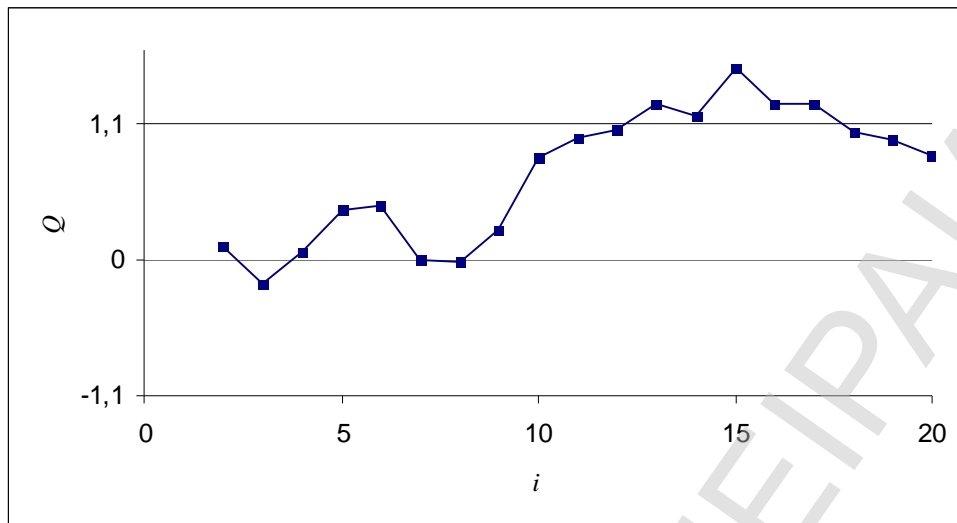
Οι στατιστικές συναρτήσεις Q_i του παραπάνω μετασχηματισμού κατανέμονται προσεγγιστικά ως ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από την τυπική κανονική κατανομή. Η ποιότητα της προσέγγισης (αλλά και η υπόθεση της ανεξαρτησίας) βελτιώνονται καθώς το n αυξάνει.

Αξίζει να σημειώσουμε επίσης ότι οι ποσότητες \tilde{g} και \tilde{G} αποτελούν εκτιμήσεις (MVU) της συνάρτησης πιθανότητας και της συνάρτησης κατανομής της γεωμετρικής κατανομής (δείτε Lehmann (1983) και Patil (1963)).

Το αντίστοιχο του Σχήματος 2.23 γεωμετρικό Q διάγραμμα ελέγχου και το αντίστοιχο του Σχήματος 2.25 EWMA Q διάγραμμα ελέγχου στην περίπτωση που το ποσοστό p θεωρηθεί άγνωστο, δίνονται στα ακόλουθα σχήματα.



Σχήμα 2.26: Γεωμετρικό Shewhart Q διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π28)



Σχήμα 2.27: EWMA Q διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π28)

Τα παραπάνω διαγράμματα ελέγχου είναι παρόμοια με τα αντίστοιχα της περίπτωσης Π27. Στο γεωμετρικό *Shewhart* Q διάγραμμα ελέγχου ο κανόνας 3 δίνει ένδειξη στο 13^ο σημείο, ενώ στο αντίστοιχο διάγραμμα της περίπτωσης Π27 ο ίδιος κανόνας δίνει ένδειξη στο 12^ο σημείο. Όσον αφορά τώρα τα *EWMA* Q διαγράμματα ελέγχου παρατηρούμε ότι και τα δύο δίνουν ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στο 13^ο σημείο.

2.4.4 Σταθμισμένα *Poisson* Q διαγράμματα ελέγχου

Τα ελαττώματα που παρουσιάζει μια μονάδα ελέγχου δεν είναι αναγκαστικά του ίδιου τύπου. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν k διαφορετικοί τύποι ελαττωμάτων. Έστω C_{ij} ($i \geq 1$) ο αριθμός των ελαττωμάτων τύπου j ($1 \leq j \leq k$) που βρέθηκαν σε ένα δείγμα n_i μονάδων επιθεώρησης και ας υποθέσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή C_{ij} ($i \geq 1$) ακολουθεί κατανομή $P(n_i, I_j)$ (η τυχαία μεταβλητή $C_i = C_{i1} + C_{i2} + \dots + C_{ik}$ που δηλώνει το συνολικό αριθμό των ελαττωμάτων στο δείγμα των n_i μονάδων επιθεώρησης ακολουθεί κατανομή $P(n_i, I)$ όπου $I = I_1 + I_2 + \dots + I_k$). Οι στατιστικές συναρτήσεις Q στην περίπτωση που οι παράμετροι I_j είναι γνωστές προκύπτουν από τον μετασχηματισμό

Π25'. Γνωστά I_j

$$u_{ij} = F(c_{ij}; n_i I_j)$$

$$Q_{ij} = F^{-1}(u_{ij}), \quad i=1, 2, \dots, \quad j=1, 2, \dots, k.$$

Σε αρκετές περιπτώσεις οι τύποι των ελαττωμάτων δεν είναι όλοι το ίδιο σημαντικοί και συνηθίζεται να σταθμίζονται με βάρη. Έστω ότι το ελάττωμα τύπου j έχει στάθμη w_j , $1 \leq j \leq k$. Οι στάθμες ικανοποιούν τη σχέση

$$w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_k^2 = 1$$

ειδάλλως αντικαθίστανται με τις κανονικές στάθμες

$$\frac{w_j}{\sqrt{\sum_{r=1}^k w_r^2}}, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Οι στατιστικές συναρτήσεις Q_i που ορίζονται από τη σχέση

$$Q_i = w_1 Q_{i1} + w_2 Q_{i2} + \dots + w_k Q_{ik}, \quad i \geq 1$$

κατανέμονται προσεγγιστικά ως τυπικές κανονικές κατανομές και χρησιμοποιούνται για την κατασκευή σταθμισμένων *Poisson Q* διαγραμμάτων ελέγχου.

Αν οι παράμετροι I_j είναι άγνωστες και έχουμε στη διάθεσή μας m προκαταρκτικά δείγματα τότε μπορούν να εκτιμηθούν με τη βοήθεια των σχέσεων

$$\hat{I}_j = \frac{\sum_{i=1}^m c_{ij}}{\sum_{i=1}^m n_i}$$

Οι παραπάνω εκτιμήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο μετασχηματισμό Π25'.

Οι στατιστικές συναρτήσεις Q στην περίπτωση που μια ή περισσότερες από τις παραμέτρους I_j είναι άγνωστες προκύπτουν από την παραπάνω σχέση με τη βοήθεια του ακόλουθου μετασχηματισμού.

Π26'. Άγνωστα I_j

$$u_{ij} = B(c_{ij}; t_{ij}, n_i / N_i), \quad N_i = \sum_{j=1}^i n_j, \quad t_{ij} = \sum_{r=1}^i c_{rj}$$

$$Q_{ij} = F^{-1}(u_{ij}), \quad i=2, 3, \dots, \quad j=1, 2, \dots, k$$

Από την στιγμή που η κατανομή των Q_{ij} είναι προσεγγιστικά η τυπική κανονική κατανομή τότε και τα Q_i που αποτελούν γραμμική συνάρτηση αυτών ακολουθούν προσεγγιστικά τυπική κανονική κατανομή.

Για την επίδειξη των σταθμισμένων *Poisson Q* διαγραμμάτων ελέγχου ας θεωρήσουμε τα δεδομένα του ακόλουθου πίνακα

Πίνακας 2.8: 15 δεδομένα από κατανομή Poisson με 4 διαφορετικά είδη ελαττωμάτων

Δείγμα (<i>i</i>)	Μέγεθος δείγματος (<i>n_i</i>)	<i>c_{i1}</i>	<i>c_{i2}</i>	<i>c_{i3}</i>	<i>c_{i4}</i>
1	191	1	5	10	17
2	142	0	1	6	14
3	203	2	5	15	34
4	409	2	11	22	25
5	333	2	8	21	41
6	187	2	8	24	21
7	168	3	6	16	16
8	234	1	3	19	20
9	346	3	5	32	29
10	411	6	11	34	25
11	512	11	16	42	61
12	617	9	18	51	72
13	567	10	17	40	52
14	592	9	16	45	49
15	556	8	15	47	62
Άθροισμα	5468	69	145	424	538

και τις στάθμες $w_1 = 100$, $w_2 = 50$, $w_3 = 20$, $w_4 = 1$. Οι κανονικές στάθμες δίνονται από τους τύπους

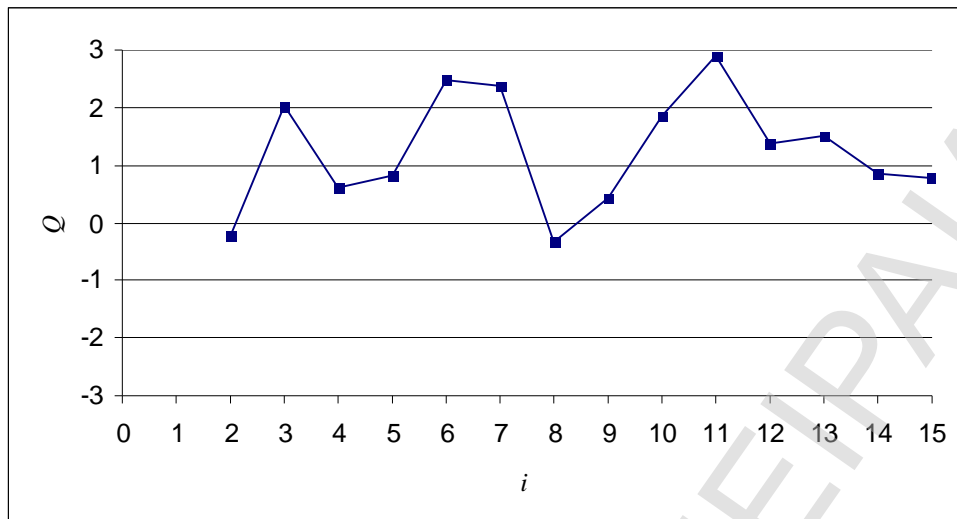
$$\frac{w_1}{\sqrt{\sum_{r=1}^4 w_r^2}} = \frac{100}{\sqrt{12901}}, \quad \frac{w_2}{\sqrt{\sum_{r=1}^4 w_r^2}} = \frac{50}{\sqrt{12901}}, \quad \frac{w_3}{\sqrt{\sum_{r=1}^4 w_r^2}} = \frac{20}{\sqrt{12901}},$$

$$\frac{w_4}{\sqrt{\sum_{r=1}^4 w_r^2}} = \frac{1}{\sqrt{12901}}$$

ενώ οι εκτιμήσεις των I_j από τους τύπους

$$\hat{I}_1 = \frac{69}{5468} = 0.0126, \quad \hat{I}_2 = \frac{145}{5468} = 0.0265, \quad \hat{I}_3 = \frac{424}{5468} = 0.0775, \quad \hat{I}_4 = \frac{538}{5468} = 0.0984.$$

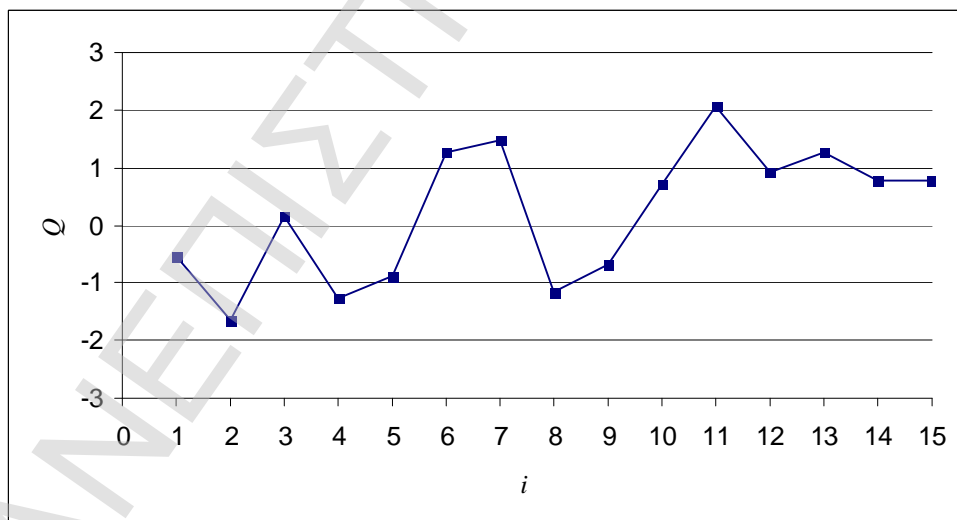
Το σταθμισμένο *Poisson Q* διάγραμμα ελέγχου στην περίπτωση που οι παράμετροι I_j είναι άγνωστες, είναι το ακόλουθο



Σχήμα 2.28: Σταθμισμένο *Poisson Q* διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π26')

Παρατηρώντας το παραπάνω διάγραμμα ελέγχου βλέπουμε ότι ο κανόνας 4-από-5 δίνει ένδειξη στο 13^ο σημείο ενώ παρατηρούμε επίσης ότι τα 12 από τα 14 σημεία του διαγράμματος βρίσκονται πάνω από την κεντρική γραμμή. Συνεπώς υπάρχουν σαφείς ενδείξεις για αύξηση του ρυθμού παραγωγής ελαττωμάτων.

Το σταθμισμένο *Poisson Q* διάγραμμα ελέγχου στην περίπτωση που οι παράμετροι I_j έχουν εκτιμηθεί από τα δεδομένα είναι το ακόλουθο

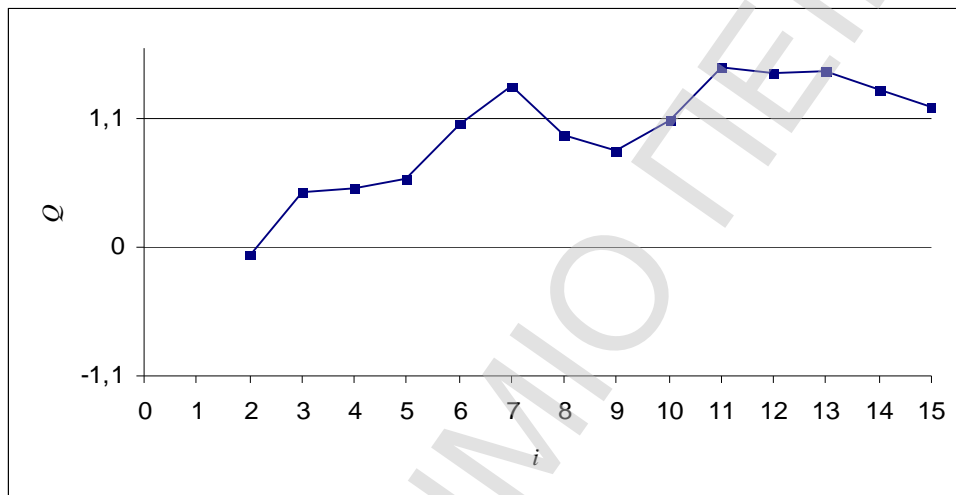


Σχήμα 2.29: Σταθμισμένο *Poisson Q* διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π25')

Παρατηρώντας το παραπάνω διάγραμμα βλέπουμε ότι δεν υπάρχει απολύτως καμιά ένδειξη για αλλαγή του ρυθμού παραγωγής ελαττωμάτων οπότε θα συμπεραίναμε ότι η διαδικασία

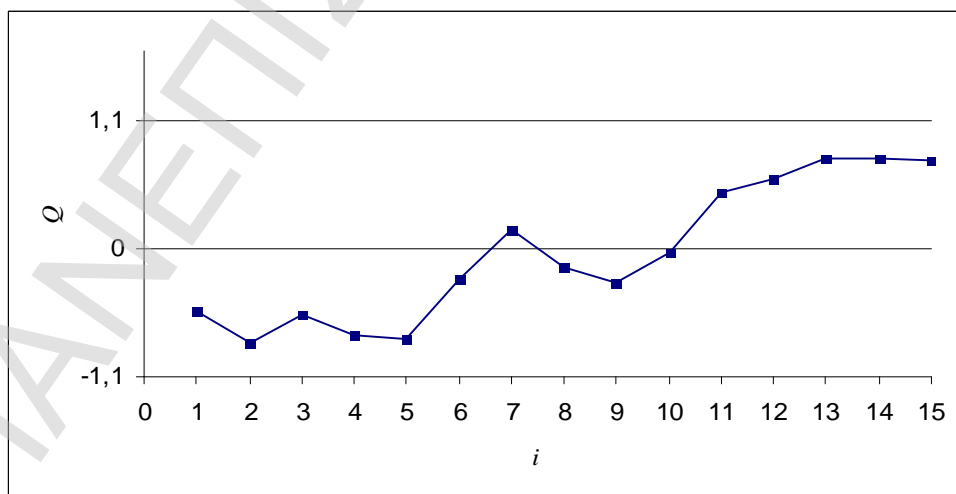
είναι ευσταθής. Το συμπέρασμα αυτό έρχεται σε αντίθεση με τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε στην περίπτωση που οι παράμετροι I_j είναι άγνωστες αφού τώρα χρησιμοποιούμε όλα τα δεδομένα για την εκτίμηση των I_j και των ορίων ελέγχου. Αυτό ενισχύει το φαινόμενο της «επικέντρωσης» των σημείων ενός διαγράμματος ελέγχου γύρω από την κεντρική γραμμή του.

Το σταθμισμένο *EWMA Poisson Q* διάγραμμα ελέγχου στην περίπτωση που οι παράμετροι I_j είναι άγνωστες είναι το ακόλουθο



Σχήμα 2.30: Σταθμισμένο *EWMA Poisson Q* διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π26')

Το σταθμισμένο *EWMA Poisson Q* διάγραμμα ελέγχου στην περίπτωση που οι παράμετροι I_j έχουν εκτιμηθεί από τα δεδομένα είναι το ακόλουθο



Σχήμα 2.31: Σταθμισμένο *EWMA Poisson Q* διάγραμμα ελέγχου (περίπτωση Π25')

Παρατηρώντας τα παραπάνω διαγράμματα ελέγχου βλέπουμε ότι έχουν ίδια συμπεριφορά με τα αντίστοιχα *Shewhart* διαγράμματα ελέγχου. Διαπιστώνουμε για μια ακόμη φορά, ότι τα διαγράμματα που λαμβάνουμε χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς για άγνωστες τιμές των παραμέτρων δίνουν καλύτερα αποτελέσματα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Άλλες μέθοδοι - διαγράμματα ελέγχου

3.1 \bar{X} και R διαγράμματα ελέγχου για μικρό αριθμό δειγμάτων

Τα \bar{X} και R διαγράμματα ελέγχου αποτελούν σημαντικά εργαλεία για τον έλεγχο της μέσης τιμής και της διασποράς μιας διεργασίας. Στην περίπτωση που δεν γνωρίζουμε τη μέση τιμή και τη διακύμανση του υπό παρακολούθηση ποιοτικού χαρακτηριστικού X , τα όρια ελέγχου που χρησιμοποιούνται στα προαναφερθέντα διαγράμματα ελέγχου δεν είναι αξιόπιστα αν δεν βασίζονται σε ένα ικανοποιητικό πλήθος προκαταρκτικών δειγμάτων (τουλάχιστον 25). Έτσι οι εφαρμοζόμενες μέθοδοι δεν είναι αξιόπιστες στην περίπτωση που θέτουμε μια νέα διεργασία σε λειτουργία ή όταν επανεκκινούμε (start-up) μια διεργασία την οποία φέραμε εντός στατιστικού ελέγχου ενώ ήταν εκτός στατιστικού ελέγχου.

Ο Hillier (1969) ανέπτυξε μια μέθοδο η οποία δίνει αξιόπιστα όρια ελέγχου για τα \bar{X} και R διαγράμματα ελέγχου ανεξάρτητα από το πλήθος m των δειγμάτων τα οποία έχουμε συλλέξει. Η μέθοδος αυτή, η οποία αναλύεται στη συνέχεια και περιλαμβάνει τα ακόλουθα δύο στάδια:

Στάδιο I (Φάση I): Θεωρούμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας m το πλήθος προκαταρκτικά δείγματα μεγέθους n . Υπολογίζουμε με κατάλληλη διαδικασία τα όρια ελέγχου για το \bar{X} και το R διάγραμμα ελέγχου. Στη συνέχεια ελέγχουμε αν υπάρχουν δείγματα, από τα m , τα οποία μας δίνουν σημεία στα διαγράμματα ελέγχου που βρίσκονται εκτός των ορίων ελέγχου. Αν υπάρχουν τέτοια σημεία αφαιρούμε τα αντίστοιχα δείγματα και υπολογίζουμε ξανά τα όρια ελέγχου. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρις ότου όλα τα σημεία των διαγραμμάτων ελέγχου βρεθούν εντός των ορίων ελέγχου. Προφανώς, η διαδικασία που περιγράφεται στο Στάδιο I είναι ίδια με αυτή της ανάπτυξης διαγραμμάτων Φάσης I.

Στάδιο II: Χρησιμοποιώντας τον αριθμό των δειγμάτων που βρίσκονται εντός στατιστικού ελέγχου στο Στάδιο I υπολογίζουμε με κατάλληλη διαδικασία τα όρια ελέγχου για το \bar{X} και το R διάγραμμα ελέγχου που θα χρησιμοποιηθούν για την παρακολούθηση μελλοντικών δειγμάτων. Συνήθως τα όρια ελέγχου στο Στάδιο II αναθεωρούνται χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τα δείγματα που έχουν βρεθεί εντός στατιστικού ελέγχου κα στις δύο φάσεις.

Υπενθυμίζουμε ότι το σενάριο που αντιμετωπίζουμε στην ανάπτυξη \bar{X} και R διαγραμμάτων ελέγχου Φάσης I είναι το εξής: Το ποιοτικό χαρακτηριστικό X ακολουθεί κατανομή $N(m, s^2)$ (m, s άγνωστα) και έχουμε στη διάθεσή μας m ανεξάρτητα προκαταρκτικά τυχαία δείγματα μεγέθους n το καθένα, τα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $1 \leq i \leq m$. Για το \bar{X} διάγραμμα ελέγχου ($3s$ όρια) τα όρια ελέγχου Φάσης I δίνονται από τις σχέσεις

$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R}, \quad CL = \bar{\bar{X}}, \quad UCL = \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R}$$

ενώ για το R διάγραμμα ελέγχου ($3s$ όρια) από τις σχέσεις

$$LCL = D_3 \bar{R}, \quad CL = \bar{R}, \quad UCL = D_4 \bar{R}.$$

Υποθέτοντας ότι όλα τα σημεία στα παραπάνω δύο διαγράμματα ελέγχου βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου των διαγραμμάτων, τότε για την μελλοντική παρακολούθηση δειγμάτων από το ποιοτικό χαρακτηριστικό X χρησιμοποιούμε τα όρια ελέγχου που προέκυψαν στη Φάση I. Σε αυτή την περίπτωση το σφάλμα τύπου I για το \bar{X} διάγραμμα ελέγχου δεν είναι πλέον 0.0027, αλλά εξαρτάται από το μέγεθος m των προκαταρκτικών δειγμάτων που βρίσκονται εντός ελέγχου. Στον Πίνακα 3.1 (Hillier (1969)) δίνονται ακριβείς τιμές για το σφάλμα τύπου I στα \bar{X} και R διαγράμματα ελέγχου ανάλογα με την τιμή του m για $n = 5$.

Πίνακας 3.1: Σφάλμα τύπου I στην παρακολούθηση μελλοντικών δειγμάτων μεγέθους 5

m	\bar{X} διάγραμμα ελέγχου	R διάγραμμα ελέγχου
5	0.012	0.018
10	0.0067	0.0102
15	0.0051	0.0081
20	0.0044	0.0072
25	0.0040	0.0066
50	0.0033	0.0056
100	0.0030	0.0050
∞	0.0027	0.0046

Φυσικά στη Φάση I οι παραπάνω πιθανότητες είναι ελαφρά μικρότερες. Λαμβάνοντας αυτά υπόψη ο Hillier (1969) πρότεινε μια νέα μεθοδολογία ανάπτυξης ορίων ελέγχου στα \bar{X} και R διαγράμματα ελέγχου που βασίζεται στις ακόλουθες πιθανότητες

a_2 : πιθανότητα σφάλματος τύπου I σε ένα \bar{X} διάγραμμα ελέγχου,

a_3 : πιθανότητα σφάλματος τύπου I που οφείλεται στο LCL του R διαγράμματος ελέγχου,

a_4 : πιθανότητα σφάλματος τύπου I που οφείλεται στο UCL του R διαγράμματος ελέγχου.

Για να πετύχει ο Hillier (1969) τις προαναφερθείσες πιθανότητες στα διαγράμματα ελέγχου Φάσης I (Στάδιο I του Hillier) στα \bar{X} και R διαγράμματα ελέγχου πρότεινε τη χρησιμοποίηση των ακόλουθων ορίων για το \bar{X} και το R διάγραμμα ελέγχου

$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2^{**} \bar{R}, \quad CL = \bar{\bar{X}}, \quad UCL = \bar{\bar{X}} + A_2^{**} \bar{R},$$

$$LCL = D_3^{**} \bar{R}, \quad CL = \bar{R}, \quad UCL = D_4^{**} \bar{R},$$

αντίστοιχα. Τιμές για τις σταθερές A_2^{**} , D_3^{**} και D_4^{**} δίνονται στους ακόλουθους πίνακες

Πίνακας 3.2: Τιμές του A_2^{**} για δείγματα μεγέθους 5 για το \bar{X} διάγραμμα ελέγχου Φάσης I

m	a_2				
	0.001	0.0027	0.01	0.025	0.05
2	0.684	0.575	0.449	0.366	0.306
3	0.679	0.590	0.476	0.397	0.337
4	0.669	0.589	0.483	0.408	0.349
5	0.662	0.588	0.487	0.414	0.356
6	0.658	0.587	0.489	0.418	0.360
7	0.655	0.586	0.490	0.420	0.362
8	0.652	0.585	0.491	0.421	0.363
9	0.650	0.584	0.492	0.423	0.366
10	0.648	0.584	0.493	0.425	0.368
15	0.643	0.581	0.493	0.426	0.370
20	0.639	0.579	0.493	0.427	0.372
25	0.637	0.578	0.493	0.428	0.372
50	0.636	0.578	0.495	0.430	0.375
100	0.634	0.577	0.495	0.430	0.375
∞	0.633	0.577	0.495	0.431	0.377

Πίνακας 3.3: Τιμές του D_3^{**} για δείγματα μεγέθους 5 για το R διάγραμμα ελέγχου Φάσης I

m	a_3				
	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05
2	0.236	0.339	0.394	0.487	0.560

3	0.202	0.296	0.349	0.434	0.513
4	0.189	0.279	0.330	0.414	0.493
5	0.182	0.270	0.320	0.403	0.482
6	0.177	0.264	0.314	0.396	0.475
7	0.174	0.259	0.309	0.391	0.470
8	0.172	0.257	0.307	0.388	0.466
9	0.170	0.255	0.304	0.383	0.461
10	0.169	0.253	0.302	0.383	0.461
15	0.165	0.248	0.296	0.377	0.455
20	0.163	0.246	0.294	0.374	0.452
25	0.162	0.244	0.292	0.372	0.450
50	0.160	0.241	0.289	0.369	0.446
100	0.159	0.240	0.287	0.367	0.445
∞	0.159	0.239	0.286	0.365	0.443

Πίνακας 3.4: Τιμές του D_4^* για δείγματα μεγέθους 5 για το R διάγραμμα ελέγχου Φάσης Ι

m	a_4				
	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05
2	1.78	1.67	1.62	1.53	1.44
3	2.02	1.84	1.76	1.63	1.52
4	2.12	1.92	1.82	1.68	1.56
5	2.18	1.96	1.85	1.71	1.58
6	2.21	1.98	1.88	1.72	1.60
7	2.23	2.00	1.89	1.73	1.60
8	2.25	2.01	1.90	1.74	1.61
9	2.26	2.02	1.91	1.75	1.62
10	2.27	2.03	1.92	1.76	1.62
15	2.30	2.06	1.94	1.77	1.63
20	2.32	2.07	1.95	1.78	1.64
25	2.32	2.07	1.96	1.79	1.64
50	2.34	2.09	1.97	1.80	1.65
100	2.35	2.09	1.97	1.80	1.65
∞	2.36	2.10	1.98	1.80	1.66

Η ίδια διαδικασία με τον ορισμό των πιθανοτήτων a_2 , a_3 και a_4 ακολουθείται και για την παρακολούθηση μελλοντικών δειγμάτων. Τα όρια ελέγχου στα \bar{X} και R διαγράμματα ελέγχου (Στάδιο ΙΙ του Hillier) δίνονται από τις σχέσεις

$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2^* \bar{R}, \quad CL = \bar{\bar{X}}, \quad UCL = \bar{\bar{X}} + A_2^* \bar{R},$$

$$LCL = D_3^* \bar{R}, \quad CL = \bar{R}, \quad UCL = D_4^* \bar{R},$$

αντίστοιχα. Τιμές για τις σταθερές A_2^* , D_3^* και D_4^* δίνονται στους ακόλουθους πίνακες

Πίνακας 3.5: Τιμές του A_2^* για δείγματα μεγέθους 5 για το \bar{X} διάγραμμα ελέγχου Στάδιου II

m	a_2				
	0.001	0.0027	0.01	0.025	0.05
1	2.27	1.74	1.21	0.911	0.720
2	1.19	1.00	0.781	0.637	0.532
3	0.960	0.834	0.673	0.562	0.477
4	0.864	0.760	0.624	0.527	0.451
5	0.811	0.720	0.596	0.507	0.436
6	0.779	0.695	0.579	0.495	0.426
7	0.756	0.677	0.566	0.485	0.418
8	0.793	0.662	0.557	0.477	0.412
9	0.726	0.653	0.550	0.473	0.409
10	0.717	0.645	0.545	0.470	0.407
15	0.687	0.621	0.527	0.455	0.396
20	0.672	0.609	0.518	0.449	0.391
25	0.663	0.602	0.513	0.445	0.387
50	0.649	0.590	0.505	0.439	0.383
100	0.640	0.583	0.500	0.434	0.379
∞	0.633	0.577	0.495	0.431	0.377

Πίνακας 3.6: Τιμές του D_3^* για δείγματα μεγέθους 5 για το R διάγραμμα ελέγχου Στάδιου II

m	a_3				
	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05
1	0.134	0.204	0.245	0.317	0.389
2	0.144	0.219	0.263	0.388	0.413
3	0.148	0.255	0.270	0.346	0.422
4	0.151	0.228	0.274	0.351	0.427
5	0.152	0.230	0.276	0.353	0.430
6	0.153	0.231	0.278	0.355	0.432
7	0.154	0.232	0.279	0.357	0.433
8	0.154	0.233	0.280	0.358	0.434
9	0.155	0.234	0.280	0.359	0.435
10	0.155	0.234	0.281	0.359	0.436
15	0.156	0.236	0.282	0.361	0.438
20	0.156	0.236	0.283	0.362	0.439
25	0.157	0.237	0.284	0.363	0.440
50	0.157	0.238	0.285	0.364	0.441
100	0.158	0.238	0.285	0.365	0.442
∞	0.158	0.239	0.286	0.365	0.443

Πίνακας 3.7: Τιμές του D_4^* για δείγματα μεγέθους 5 για το R διάγραμμα ελέγχου Στάδιου II

m	a_4				
	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05
1	7.94	5.10	4.20	3.22	2.60

2	4.14	3.19	2.83	2.39	2.07
3	3.39	2.76	2.50	2.17	1.92
4	3.08	2.57	2.36	2.07	1.85
5	2.91	2.47	2.27	2.01	1.81
6	2.81	2.40	2.22	1.98	1.78
7	2.74	2.35	2.18	1.95	1.77
8	2.69	2.32	2.16	1.93	1.75
9	2.65	2.30	2.14	1.92	1.74
10	2.62	2.27	2.12	1.91	1.73
15	2.53	2.21	2.07	1.87	1.71
20	2.48	2.18	2.05	1.85	1.70
25	2.46	2.17	2.03	1.84	1.60
50	2.41	2.13	2.01	1.82	1.67
100	2.83	2.12	1.99	1.81	1.67
∞	2.36	2.10	1.98	1.80	1.66

Το μαθηματικό υπόβαθρο για την εύρεση των ποσοτήτων που δίνονται στους Πίνακες 3.2-3.7 δίνεται στο Παράρτημα Π3.

Στη συνέχεια δίνουμε ένα παράδειγμα για να επιδείξουμε τη μεθοδολογία του (Hillier (1969)).

Έστω μια επιχείρηση, η οποία προκειμένου να παρακολουθήσει ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό X ενός προϊόντος που παράγει, χρησιμοποιεί \bar{X} και R διαγράμματα ελέγχου. Η επιχείρηση θέλει να ελέγξει το χαρακτηριστικό από την εκκίνηση της παραγωγικής διαδικασίας. Για τον έλεγχο αποφασίστηκε να χρησιμοποιηθούν δείγματα μεγέθους 5 και πιθανότητες $a_2 = 0.0027$, $a_3 = 0.001$, $a_4 = 0.005$ για τα Στάδια I και II. Αποφασίστηκε επίσης να καθοριστούν τα όρια ελέγχου και για τα δύο στάδια μόλις συλλεχθούν 5 δείγματα. Επίσης αποφασίστηκε ότι τα όρια ελέγχου για το Στάδιο II να αναθεωρηθούν μετά την εμφάνιση 10, 25 και 100 εντός ελέγχου δειγμάτων.

Τα αποτελέσματα αυτής της διαδικασίας δίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 3.8: Δεδομένα για την επίδειξη της μεθόδου του Hillier

Δείγμα													\bar{X}		R	
	\bar{X}	R	$\bar{\bar{X}}$	\bar{R}	m	A_2^{**}	A_2^*	D_3^{**}	D_3^*	D_4^{**}	D_4^*	LCL	UCL	LCL	UCL	
1	505.6	17														
2	501.2	9														
3	508.0	14														

4	507.6	37											
5	504.4	12	505.36	17.8	5	0.588	0.182	1.96	494.9	515.8	3.2	34.9	
			504.80	13.0	4	0.589	0.189	1.92	497.1	512.5	2.5	25.0	
					4		0.760	0.151	2.57	494.9	514.7	2.0	32.6
6	504.8	19							494.9	514.7	2.0	32.6	
7	503.6	11							494.9	514.7	2.0	32.6	
8	493.2	29							494.9	514.7	2.0	32.6	
9	509.0	15							494.9	514.7	2.0	32.6	
10	500.2	8							494.9	514.7	2.0	32.6	
11	504.6	21							494.9	514.7	2.0	32.6	
12	501.8	16	504.32	14.2	10		0.645	0.155	2.77	494.9	514.7	2.0	32.6

Λαμβάνουμε 5 δείγματα και βρίσκουμε τα όρια των \bar{X} και R διαγραμμάτων ελέγχου για το Στάδιο I. Παρατηρούμε ότι η τιμή R του 4^{ου} δείγματος βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου. Μετά από έλεγχο ανακαλύφθηκε ειδική αιτία μεταβλητότητας στην οποία οφείλεται η μεγάλη τιμή του R του 4^{ου} και ελήφθησαν τα απαραίτητα μέτρα για να μην ξαναεμφανιστεί. Στη συνέχεια επανυπολογίστηκαν τα όρια των \bar{X} και R διαγραμμάτων χρησιμοποιώντας μόνο τα υπόλοιπα 4 δείγματα και διαπιστώθηκε ότι οι τιμές των \bar{X} και R βρίσκονται πλέον όλες εντός ορίων ελέγχου. Έτσι προχωρούμε στην εύρεση ορίων για τα \bar{X} και R διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση μελλοντικών δειγμάτων (Στάδιο II). Η πορεία των μελλοντικών δειγμάτων καταγράφεται στον Πίνακα 3.8. Παρατηρούμε ότι η τιμή \bar{X} του 8^{ου} κατά σειρά δείγματος βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου. Ειδική αιτία μεταβλητότητας ανακαλύφθηκε και απομακρύνθηκε. Μετά την λήψη και του 12^{ου} δείγματος τα όρια ελέγχου επανυπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας τα 10 εντός στατιστικού ελέγχου δείγματα τα οποία είχαν βρεθεί μέχρι τότε.

3.2 DNOM διαγράμματα ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις

Τα DNOM (deviation from nominal) διαγράμματα ελέγχου (ή difference διαγράμματα ελέγχου) αποτελούν μια αξιολογή προσέγγιση αντιμετώπισης του προβλήματος του στατιστικού ελέγχου διεργασιών για παραγωγές μικρού μεγέθους στην περίπτωση που έχουμε μικρό αριθμό δεδομένων για τους διαφορετικούς τύπους προϊόντος που αποδίδει η ίδια παραγωγική διεργασία. Ως παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε μια παραγωγική διεργασία επιμετάλλωσης τυπωμένων κυκλωμάτων, όπου τα τυπωμένα κυκλώματα προωθούνται για

επιμετάλλωση σε ροές που αποτελούνται από τυπωμένα κυκλώματα που να μην είναι του ίδιου τύπου σε κάθε ροή αλλά μπορεί ο τύπος των τυπωμένων κυκλωμάτων να διαφέρει από ροή σε ροή (πχ, τυπωμένα κυκλώματα διαφορετικού εμβαδού και πάχους).

Σε τέτοιες περιπτώσεις είναι απαγορευτική η χρήση των γνωστών X και MR διαγραμμάτων ελέγχου για κάθε ένα τύπο προϊόντος αφού έχουμε μικρό αριθμό δεδομένων για κάθε τύπο. Στα DNOM διαγράμματα ελέγχου απεικονίζονται στο ίδιο διάγραμμα οι αποκλίσεις όλων των παρατηρούμενων τιμών κάθε τύπου προϊόντος από την ονομαστική τους τιμή (nominal value).

Τα DNOM (deviation from nominal) διαγράμματα ελέγχου εισήχθησαν από τον Montgomery (1991) και η κατασκευή τους είναι πάρα πολύ απλή. Έστω ότι έχουμε στη διάθεσή μας δεδομένα της μορφής X_i , όπου X_i συμβολίζει την τιμή του i προϊόντος στο οποίο αντιστοιχεί μια ονομαστική τιμή T_i ($i \geq 1$). Σημειώνουμε ότι οι ονομαστικές τιμές T_i δεν είναι απαραίτητο να είναι όλες διαφορετικές μεταξύ των, δηλαδή να αναφέρονται σε προϊόντα διαφορετικού τύπου. Η κατασκευή των DNOM (deviation from nominal) διαγραμμάτων ελέγχου βασίζεται στα δεδομένα $Y_i = X_i - T_i$ ($i \geq 1$).

Τα πλεονεκτήματα και η κατασκευή των DNOM διαγραμμάτων ελέγχου θα αποκαλυφθούν με μια σειρά παραδειγμάτων (δείτε Wheeler (1991)). Ας θεωρήσουμε τα δεδομένα που παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα και αναφέρονται σε μια μονάδα παράγει δύο διαφορετικούς τύπους προϊόντων εναλλάσσοντας τη λειτουργία της από τον ένα τύπο προϊόντος στον άλλο (τα δεδομένα είναι ως συνήθως διατεταγμένα ως προς τη χρονική στιγμή που επιλέχθηκε κάθε προϊόν). Η ονομαστική τιμή του προϊόντος 1 είναι 35, ενώ του προϊόντος 2 είναι 25.

Πίνακας 3.9: Δεδομένα για την επίδειξη αδυναμιών των X και MR διαγραμμάτων ελέγχου για διεργασίες παραγωγής διαφορετικών τύπων προϊόντων

Δείγμα	Προϊόν	Τιμή	Δείγμα	Προϊόν	Τιμή	Δείγμα	Προϊόν	Τιμή
1	1	33	18	2	22	35	2	24
2	1	37	19	1	33	36	2	23
3	2	24	20	1	36	37	1	34
4	1	35	21	1	38	38	1	34
5	2	22	22	2	22	39	1	34
6	2	23	23	2	21	40	2	21
7	2	25	24	2	23	41	2	23
8	2	23	25	1	35	42	1	34

9	1	32	26	2	26	43	1	30
10	1	34	27	1	35	44	2	22
11	1	33	28	2	24	45	2	25
12	1	37	29	1	33	46	1	35
13	2	26	30	2	21	47	1	36
14	1	36	31	1	35	48	1	37
15	1	35	32	2	27	49	1	35
16	2	23	33	2	26	50	2	25
17	2	26	34	2	25			

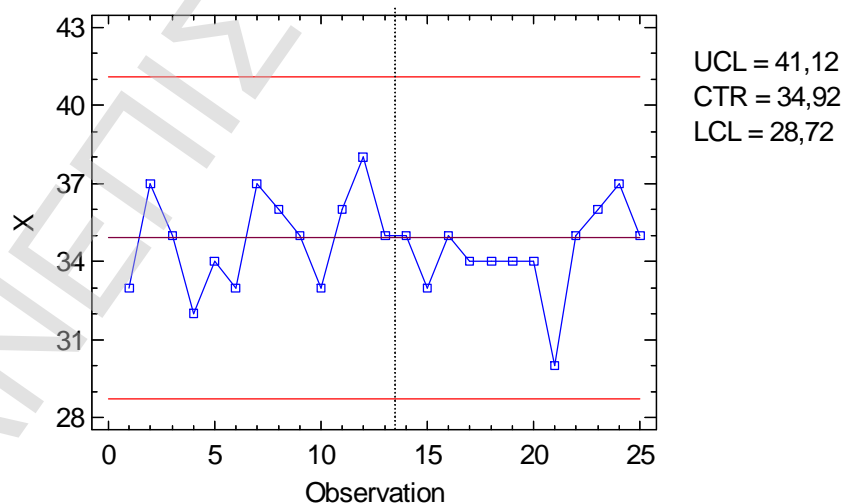
Για κάθε ένα προϊόν ξεχωριστά μπορεί να κατασκευαστεί X και MR διάγραμμα ελέγχου. Για το προϊόν 1, χρησιμοποιώντας τα πρώτα 13 δείγματα για να κατασκευαστούν διαγράμματα ελέγχου φάσης I, έχουμε

$$\bar{X}_{\text{III}} = \frac{X_1 + X_2 + X_4 + \dots + X_{25}}{13} = \frac{33 + 37 + 35 + \dots + 35}{13} = 34,92$$

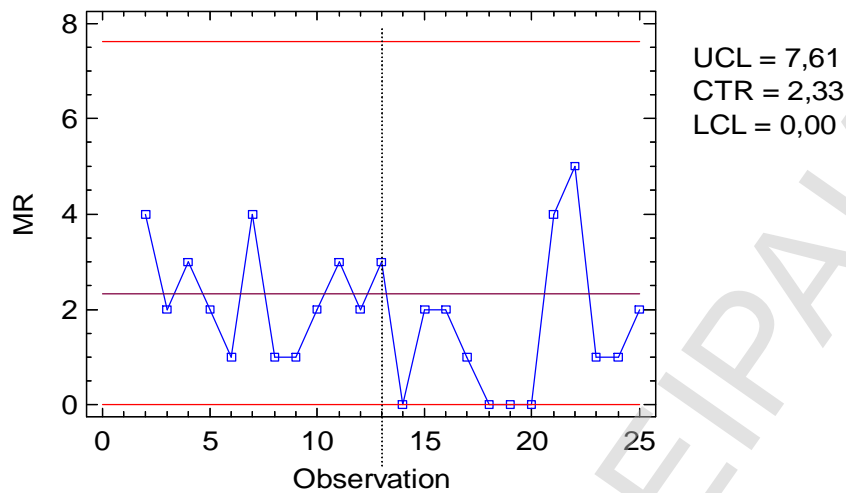
και

$$\overline{MR}_{\text{III}} = \frac{MR_2 + MR_3 + \dots + MR_{12}}{12} = \frac{4 + 2 + 3 + \dots + 3}{12} = 2,33$$

Τα X και MR διαγράμματα ελέγχου για το προϊόν 1 κατασκευάζονται σύμφωνα με τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 1 και είναι τα ακόλουθα



Σχήμα 3.1: X διάγραμμα ελέγχου για το προϊόν 1



Σχήμα 3.2: MR διάγραμμα ελέγχου για το προϊόν 1

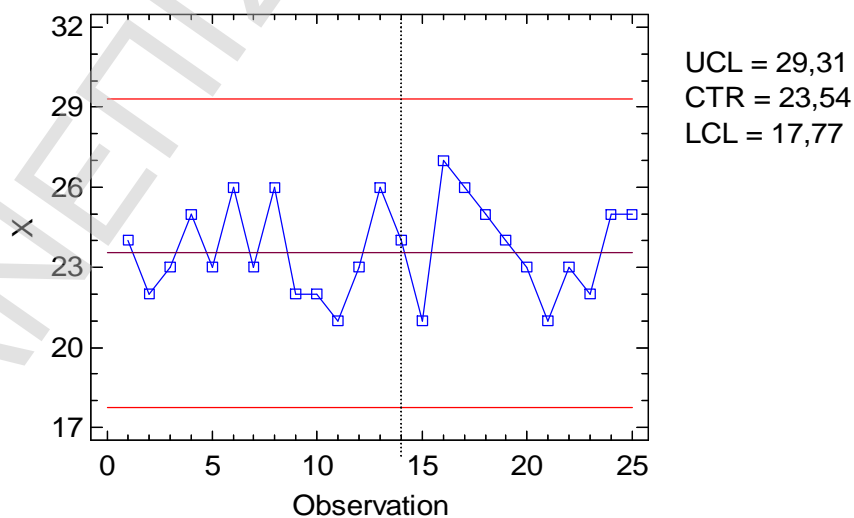
Αντίστοιχα, για το προϊόν 2, χρησιμοποιώντας τα πρώτα 13 δείγματα για να κατασκευαστούν διαγράμματα ελέγχου Φάσης I, έχουμε

$$\bar{X}_{\Pi 2} = \frac{X_3 + X_5 + \dots + X_{26}}{13} = \frac{24 + 22 + \dots + 26}{13} = 23.54$$

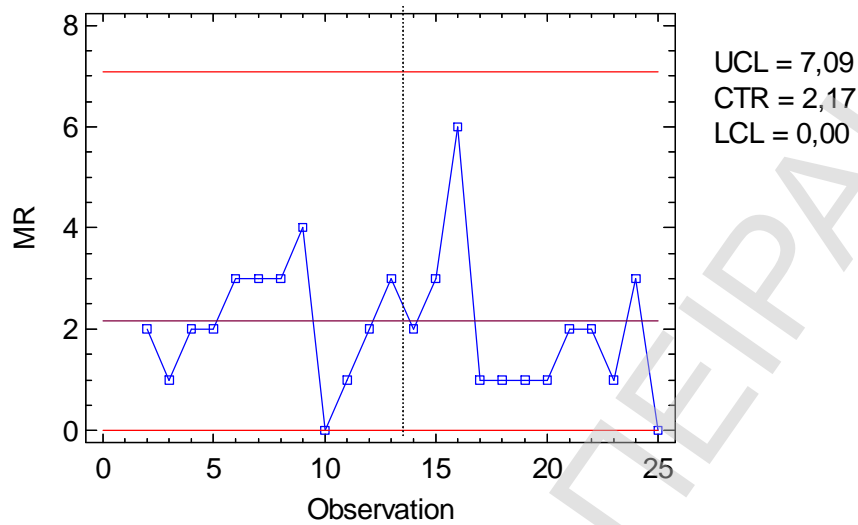
και

$$\overline{MR}_{\Pi 2} = \frac{MR_2 + MR_3 + \dots + MR_{12}}{12} = \frac{2 + 1 + \dots + 3}{12} = 2.17.$$

Τα X και MR διαγράμματα ελέγχου για το προϊόν 1 κατασκευάζονται σύμφωνα με τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 1 και είναι τα ακόλουθα

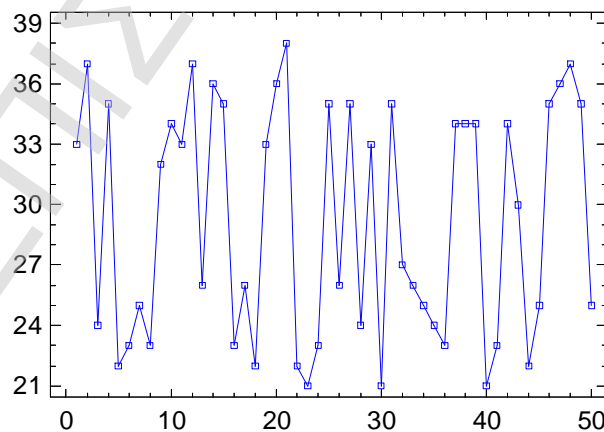


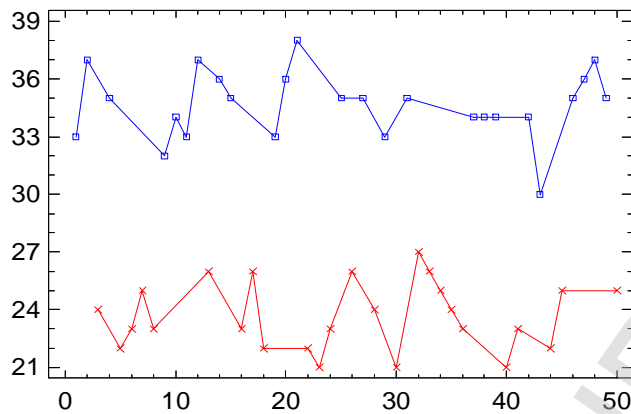
Σχήμα 3.3: X διάγραμμα ελέγχου για το προϊόν 2



Σχήμα 3.4: MR διάγραμμα ελέγχου για το προϊόν 2

Τέτοιου είδους διαγράμματα, από την στιγμή που χωρίζεται το αρχείο καταγραφής των δεδομένων της διαδικασίας σε δύο κομμάτια, θα δημιουργήσουν πρόβλημα σε αυτούς οι οποίοι χειρίζονται την διαδικασία αφού χάνεται η χρονολογική σειρά όλων των δεδομένων. Από την άλλη ένα διάγραμμα διαδοχικών τιμών (run chart), όπου η σειρά εμφάνισης των δεδομένων διατηρείται, δεν μπορεί να αποκαλύψει τις πληροφορίες που θα παίρναμε με ένα κατάλληλο διάγραμμα ελέγχου (δείτε Σχήμα 3.5).





Σχήμα 3.5: Διάγραμμα διαδοχικών τιμών για τα δεδομένα του Πίνακα 3.9

Για να μη χαθεί η σειρά λήψης των δεδομένων, αλλά και για αφαιρεθεί η παλινδρόμηση των τιμών του Σχήματος 3.5, προτείνεται η χρήση DNOM διαγραμμάτων ελέγχου. Για την παρουσίαση της μεθόδου θεωρούμε τα δείγματα 27-50 του Πίνακα 3.9 για την κατασκευή DNOM διαγραμμάτων ελέγχου Φάσης I. Τα δεδομένα που χρειάζονται για την κατασκευή των διαγραμμάτων δίνονται στον ακόλουθο πίνακα

Πίνακας 3.10: Δεδομένα για την επίδειξη του DNOM διαγράμματος ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις

Δείγμα	Προϊόν	X_i	$Y_i = X_i - T_i$	MR	Δείγμα	Προϊόν	X_i	$Y_i = X_i - T_i$	MR
27	1	35	0		39	1	34	-1	0
28	2	24	0	0	40	2	21	-3	2
29	1	33	-2	2	41	2	23	-1	2
30	2	21	-3	1	42	1	34	-1	0
31	1	35	0	3	43	1	30	-5	4
32	2	27	3	3	44	2	22	-2	3
33	2	26	2	1	45	2	25	1	3
34	2	25	1	1	46	1	35	0	1
35	2	24	0	1	47	1	36	1	1
36	2	23	-1	1	48	1	37	2	1
37	1	34	-1	0	49	1	35	0	2
38	1	34	-1	0	50	2	25	1	0

Το DNOM X διάγραμμα ελέγχου φάσης I έχει

$$LCL = 0 - \frac{3}{d_2} \overline{MR} = -2.66\overline{MR}, \quad CL = 0, \quad UCL = 0 + \frac{3}{d_2} \overline{MR} = 2.66\overline{MR}$$

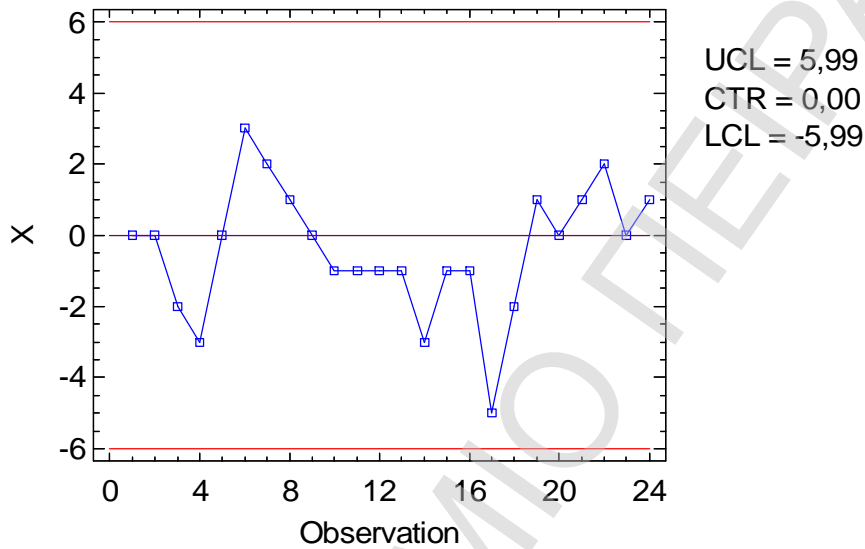
όπου η τιμή για το \overline{MR} μπορεί να προκύψει με το συνήθη τρόπο ή από ιστορικά δεδομένα ως

$$\overline{MR} = (\overline{MR}) = \frac{\overline{MR}_{\Pi 1} + \overline{MR}_{\Pi 2}}{2} = \frac{2.33 + 2.17}{2} = 2.25$$

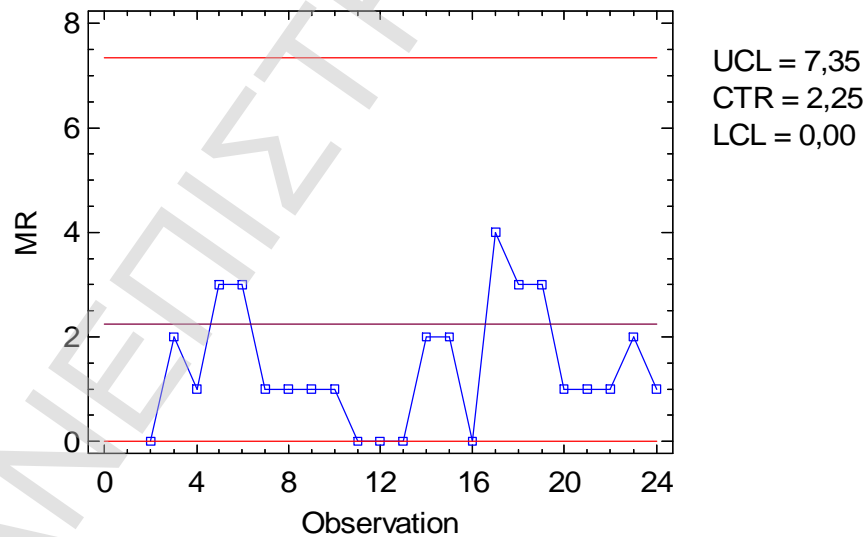
Το DNOM MR διάγραμμα ελέγχου φάσης II έχει

$$LCL = D_3 \overline{MR} = 0, \quad CL = \overline{MR}, \quad UCL = D_4 \overline{MR} = 3.268 \overline{MR}$$

Τα δύο διαγράμματα ελέγχου δίνονται στα δύο ακόλουθα σχήματα



Σχήμα 3.6: DNOM X διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 3.10



Σχήμα 3.7: DNOM MR διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 3.10

Τα DNOM διαγράμματα ελέγχου δίνουν αξιόπιστα αποτελέσματα όταν η διακύμανση της διαδικασίας είναι σχεδόν η ίδια για κάθε τύπο προϊόντος. Σε αντίθετη περίπτωση πρέπει να

κατασκευαστούν τυποποιημένα διαγράμματα ελέγχου γνωστά ως Z διαγράμματα ελέγχου. Για να ελεγχθεί η ισότητα των διακυμάνσεων για κάθε τύπο προϊόντος, ο Wheeler (1991) πρότεινε την εξής μεθοδολογία: Ας θεωρήσουμε ότι υπάρχουν m το πλήθος διαφορετικά προϊόντα και για το καθένα έχουμε στη διάθεσή μας k κινούμενους μέσους. Έστω \overline{MR}_j ο μέσος των k κινούμενων μέσων του προϊόντος j ($1 \leq j \leq m$), και

$$\overline{\overline{MR}} = \frac{\overline{MR}_1 + \overline{MR}_2 + \dots + \overline{MR}_m}{m}$$

Για να ελέγξουμε την ισότητα των διακυμάνσεων για κάθε τύπο προϊόντος κατασκευάζουμε ένα διάγραμμα (διάγραμμα των μέσων των κινούμενων μέσων) που απεικονίζονται οι ποσότητες \overline{MR}_j ($1 \leq j \leq m$) και τα όρια ελέγχου δίνονται από τις σχέσεις

$$LCL = \overline{\overline{MR}} - \frac{Hd_3\overline{\overline{MR}}}{d_2\sqrt{k}}, \quad CL = \overline{\overline{MR}}, \quad UCL = \overline{\overline{MR}} + \frac{Hd_3\overline{\overline{MR}}}{d_2\sqrt{k}}$$

όπου οι σταθερές d_2 και d_3 υπολογίζονται προφανώς για μέγεθος δείγματος $n = 2$, ενώ τιμές τις σταθεράς H για διάφορες τιμές του m δίνονται στον ακόλουθο πίνακα

Πίνακας 3.11: Τιμές της σταθεράς H

m	2	3	4	5	6	7	8 και πάνω
H	1.82	2.38	2.61	2.75	2.87	2.94	3

Για να διαπιστώσουμε πως ακριβώς εφαρμόζεται το διάγραμμα μέσων των κινούμενων μέσων θα θεωρήσουμε και πάλι τη γραμμή παραγωγής του Πίνακα 3.9 όπου για τα πρώτα 13 δεδομένα από κάθε τύπο προϊόντος έχουμε $m = 2$, $k = 12$, $MR_1 = MR_{\Pi 1} = 2.25$, $MR_2 = MR_{\Pi 2} = 2.17$,

$$\overline{\overline{MR}} = \frac{\overline{MR}_1 + \overline{MR}_2}{2} = \frac{2.33 + 2.17}{2} = 2.25.$$

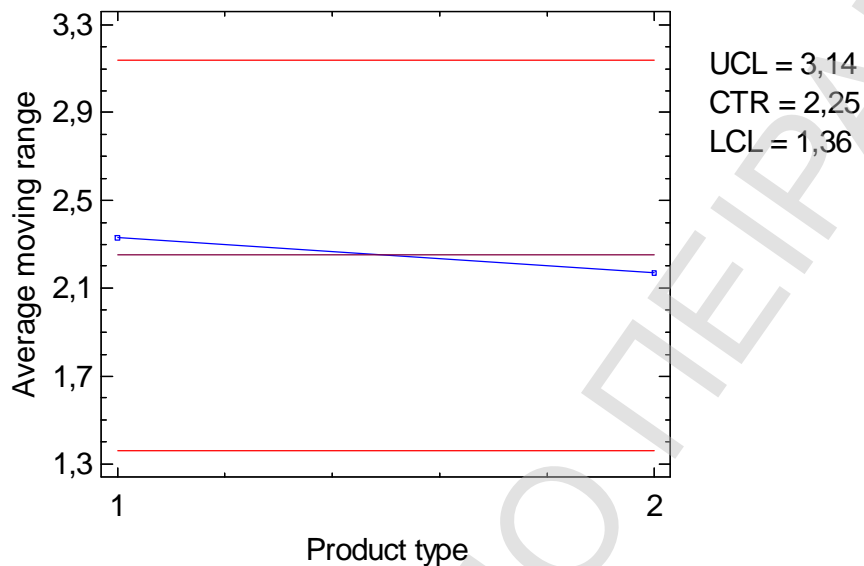
Συνεπώς

$$LCL = 2.25 - \frac{1.82(0.8525)2.25}{1.128\sqrt{12}} = 1.36$$

$$CL = 2.25$$

$$UCL = 2.25 + \frac{1.82(0.8525)2.25}{1.128\sqrt{12}} = 3.14$$

και το διάγραμμα των μέσων των κινούμενων μέσων είναι το ακόλουθο



Σχήμα 3.8: Διάγραμμα των μέσων των κινούμενων μέσων για τα δεδομένα του Πίνακα 3.9

Αφού τα δύο σημεία του διαγράμματος βρίσκονται εντός των ορίων του διαγράμματος ελέγχου η υπόθεση των ίσων διακυμάνσεων μπορεί να γίνει δεκτή οπότε προκρίνεται η κατασκευή των DNOM διαγραμμάτων ελέγχου. Όμως σε αντίθετη περίπτωση, όπως έχουμε ήδη προαναφέρει πρέπει να κατασκευαστούν τυποποιημένα διαγράμματα ελέγχου γνωστά ως Z διαγράμματα ελέγχου που κατασκευάζονται με τον ακόλουθο τρόπο: Έστω ότι έχουμε στη διάθεσή μας δεδομένα της μορφής X_i , όπου X_i συμβολίζει την τιμή του i προϊόντος στο οποίο αντιστοιχεί μια ονομαστική τιμή T_i ($i \geq 1$). Σημειώνουμε ότι οι ονομαστικές τιμές T_i δεν είναι απαραίτητο να είναι όλες διαφορετικές μεταξύ των, δηλαδή να αναφέρονται σε προϊόντα διαφορετικού τύπου. Η κατασκευή του Z διαγράμματος ελέγχου βασίζεται στα δεδομένα

$$Z_i = \frac{X_i - T_i}{s_i}, \quad i \geq 1$$

όπου με s_i συμβολίζουμε την τυπική απόκλιση του i προϊόντος. Όταν η ποσότητα s_i είναι άγνωστη εκτιμάται συνήθως με τον τύπο

$$\hat{s}_i = \frac{\overline{MR}_j}{d_2} = \frac{\overline{MR}_j}{1.128}$$

όπου θεωρούμε ότι η μέτρηση από το i κατά σειρά προϊόν αφορά τύπο προϊόντος j και με \overline{MR}_j συμβολίζουμε τον μέσο των κινούμενων μέσων που αφορούν τον τύπο προϊόντος j . Οι τιμές των ποσοτήτων \overline{MR}_j προκύπτουν συνήθως από ιστορικά δεδομένα.

Το Z διάγραμμα ελέγχου έχει όρια ελέγχου

$$LCL = -3, \quad CL = 0, \quad UCL = 3.$$

Επίσης γίνεται κατασκευή και ενός MR διαγράμματος ελέγχου για τις τιμές Z όπου

$$LCL = 0, \quad CL = d_2 = 1.128, \quad UCL = d_2 + 3d_3 = 3.686.$$

Για την επίδειξη του Z διαγράμματος ελέγχου ας θεωρήσουμε τα δεδομένα του ακόλουθου πίνακα (η ονομαστική τιμή του προϊόντος 1 είναι 19, ενώ του προϊόντος 2 είναι 8).

Πίνακας 3.12: Δεδομένα για την επίδειξη του Z διαγράμματος ελέγχου

Δείγμα	Προϊόν	Τιμή	Δείγμα	Προϊόν	Τιμή	Δείγμα	Προϊόν	Τιμή
1	1	20	11	1	19	21	1	23
2	2	5	12	2	7	22	1	18
3	1	25	13	2	9	23	2	9
4	1	17	14	1	18	24	1	23
5	1	21	15	1	23	25	2	9
6	1	15	16	1	18	26	1	16
7	2	9	17	2	7	27	2	8
8	2	8	18	2	7	28	1	21
9	2	12	19	2	10	29	2	12
10	2	7	20	1	15	30	2	6

Από τα παραπάνω δεδομένα προκύπτει ότι $m = 2$, $k = 14$, $MR_1 = MR_{\Pi 1} = 5.07$, $MR_2 = MR_{\Pi 2} = 2.36$,

$$\overline{MR} = \frac{\overline{MR}_1 + \overline{MR}_2}{2} = \frac{5.07 + 2.36}{2} = 3.71.$$

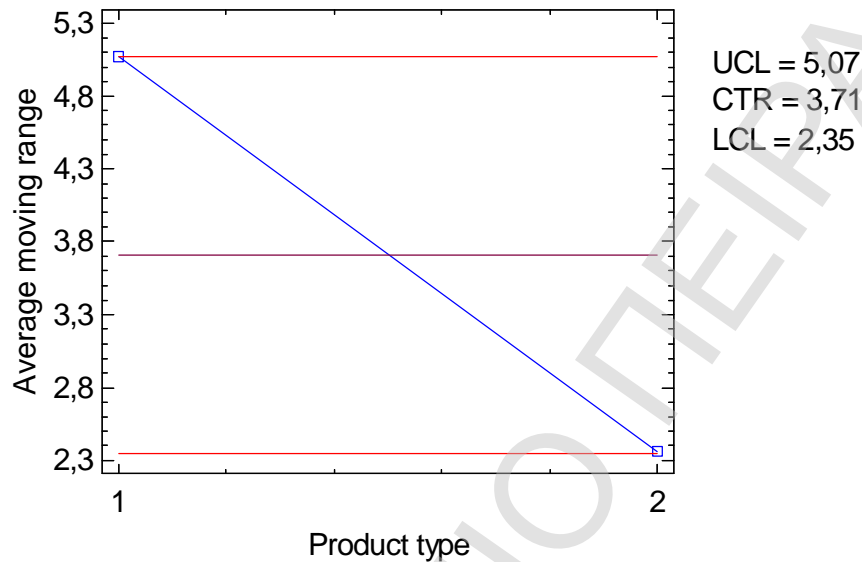
Συνεπώς

$$LCL = 3.71 - \frac{1.82(0.8525)3.71}{1.128\sqrt{14}} = 2.35$$

$$CL = 3.71$$

$$UCL = 3.71 + \frac{1.82(0.8525)3.71}{1.128\sqrt{14}} = 5.07$$

και το διάγραμμα των μέσων των κινούμενων μέσων είναι το ακόλουθο



Σχήμα 3.9: Διάγραμμα των μέσων των κινούμενων μέσων για τα δεδομένα του Πίνακα 3.12

Επειδή τα δύο σημεία του διαγράμματος πέφτουν πάνω στα όρια του διαγράμματος ελέγχου η υπόθεση των ίσων διακυμάνσεων για τους δύο τύπους προϊόντων δεν μπορεί να γίνει δεκτή οπότε προκρίνεται η κατασκευή Z διαγράμματος ελέγχου.

Στη συνέχεια συγκεντρώθηκαν 20 επιπλέον δείγματα που οι τιμές τους δίνονται στον ακόλουθο πίνακα μαζί με τις τιμές που θα απεικονιστούν στο Z και το αντίστοιχο MR διάγραμμα ελέγχου.

Πίνακας 3.13: Επιπρόσθετα δεδομένα για την επίδειξη του Z και του MR διαγράμματος ελέγχου

Δείγμα	Προϊόν	Τιμή	$Z_i = \frac{X_i - T_i}{s_i}$	MR_i
1	1	15	-0.89	
2	2	7	-0.48	0.41
3	1	20	0.22	0.70
4	1	22	0.67	0.45
5	1	22	0.67	0.00
6	1	25	1.34	0.67
7	2	12	1.91	0.58
8	2	9	0.48	1.44

9	2	9	0.48	0.00
10	2	10	0.96	0.48
11	2	11	1.44	0.48
12	2	8	0.00	1.44
13	1	17	-0.45	0.45
14	2	9	0.48	0.92
15	2	11	1.44	0.96
16	1	20	0.22	1.21
17	1	22	0.67	0.45
18	1	15	-0.89	1.56
19	2	4	-1.91	1.02
20	1	11	-1.78	0.13

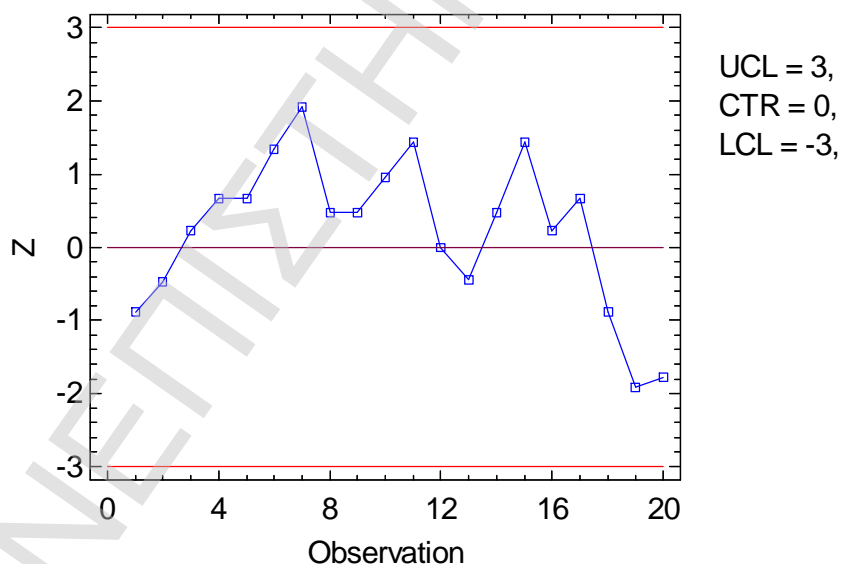
Οι τιμές Z_i για το προϊόν 1 έχουν προκύψει με χρήση της σχέσης

$$Z_i = \frac{X_i - 19}{4.49}$$

ενώ οι τιμές Z_i για το προϊόν 2 έχουν προκύψει με χρήση της σχέσης

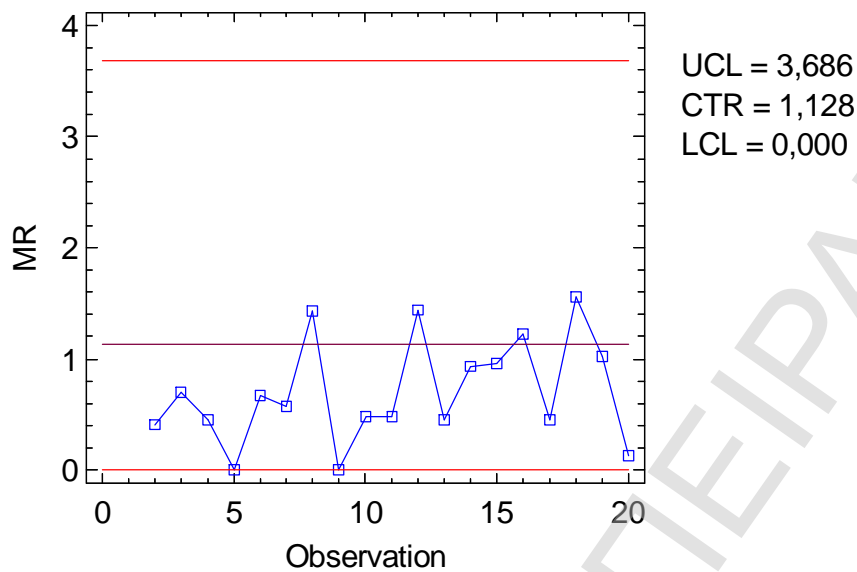
$$Z_i = \frac{X_i - 8}{2.09}$$

Το Z διάγραμμα ελέγχου είναι το ακόλουθο



Σχήμα 3.10: Z διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 3.13

Στο Σχήμα 3.10 παρατηρείται μια ασυνήθιστη μεγάλη ροή από σημεία πάνω από την κεντρική γραμμή του διαγράμματος. Το MR διάγραμμα ελέγχου είναι το ακόλουθο



Σχήμα 3.11: MR διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 3.13

3.3 DNOM διαγράμματα ελέγχου για δείγματα

Αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι τα DNOM διαγράμματα ελέγχου αποτελούν μια αξιόλογη προσέγγιση αντιμετώπισης του προβλήματος του στατιστικού ελέγχου διεργασιών για παραγωγές μικρού μεγέθους στην περίπτωση που έχουμε μικρό αριθμό δεδομένων για κάθε διαφορετικό τύπο προϊόντος που αποδίδει η ίδια παραγωγική διεργασία. Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιαστούν τα DNOM διαγράμματα ελέγχου στην περίπτωση που για κάθε τύπο προϊόντος έχουμε στη διάθεσή μας δείγματα παρατηρήσεων και όχι μεμονωμένες παρατηρήσεις. Σε τέτοιες περιπτώσεις είναι απαγορευτική η χρήση των γνωστών \bar{X} και R διαγραμμάτων ελέγχου για κάθε ένα τύπο προϊόντος αφού έχουμε μικρό αριθμό δειγμάτων για κάθε τύπο. Στα DNOM διαγράμματα ελέγχου απεικονίζονται στο ίδιο διάγραμμα οι αποκλίσεις όλων των παρατηρούμενων τιμών κάθε τύπου προϊόντος από την ονομαστική τους τιμή (nominal value).

Τα DNOM (deviation from nominal) διαγράμματα ελέγχου εισήχθησαν από τον Montgomery (1991) και η κατασκευή τους είναι πάρα πολύ απλή. Έστω ότι έχουμε στη διάθεσή μας δεδομένα της μορφής X_{ij} , όπου X_{ij} συμβολίζει ως συνήθως την τιμή του j προϊόντος (όλα του ίδιου τύπου) από το i δείγμα στο οποίο αντιστοιχεί μια ονομαστική τιμή T_i ($1 \leq i \leq m$ και $1 \leq j \leq n$). Σημειώνουμε ότι οι ονομαστικές τιμές T_i δεν είναι απαραίτητο να είναι όλες διαφορετικές μεταξύ των, δηλαδή να αναφέρονται σε προϊόντα διαφορετικού

τύπου. Η κατασκευή των DNOM (deviation from nominal) διαγραμμάτων ελέγχου βασίζεται στα δεδομένα $Y_{ij} = X_{ij} - T_i$ ($1 \leq i \leq m$ και $1 \leq j \leq n$). Έτσι αν έχουμε δεδομένα από ένα συνεχές ποιοτικό χαρακτηριστικό X μπορούμε να κατασκευάσουμε τα συνήθη \bar{X} και R διαγράμματα ελέγχου όπου τη θέση της απεικονιζόμενης ποσότητας \bar{X}_i του \bar{X} διαγράμματος ελέγχου έχει πάρει η ποσότητα $\bar{Y}_i = \bar{X}_i - T_i$, ενώ η απεικονιζόμενη ποσότητα R_i του R διαγράμματος ελέγχου έχει παραμείνει η ίδια.

Σύμφωνα με τον Montgomery (1991) τα DNOM διαγράμματα ελέγχου δίνουν αξιόπιστα αποτελέσματα όταν

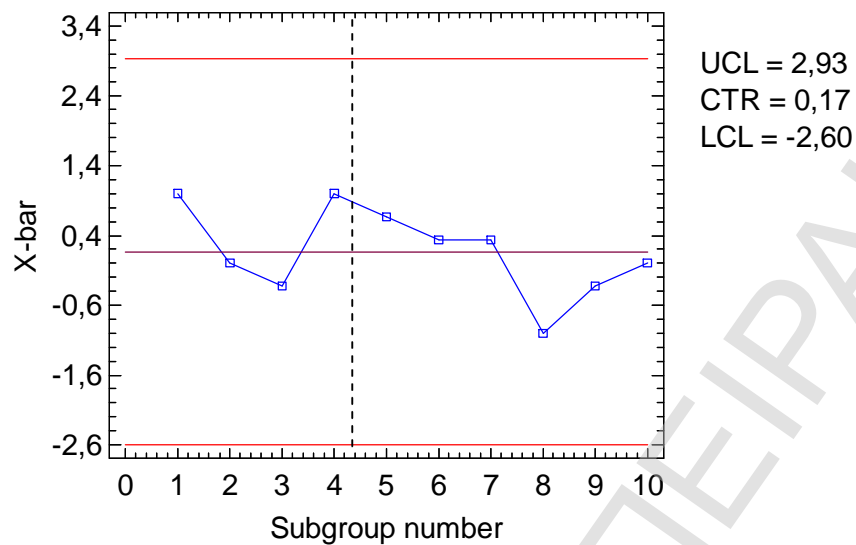
- η διακύμανση της διαδικασίας είναι σχεδόν η ίδια για κάθε τύπο προϊόντος. Σε αντίθετη περίπτωση πρέπει να κατασκευαστούν τυποποιημένα \bar{X} και R διαγράμματα ελέγχου,
- το μέγεθος των δειγμάτων είναι σταθερό για κάθε προϊόν,
- η ονομαστική τιμή για κάθε προϊόν είναι η τιμή στόχος,

Για την επίδειξη της χρήσης ενός DNOM διαγράμματος ελέγχου θεωρούμε μια παραγωγική διεργασία από την οποία έχουμε συνολικά 10 δείγματα μεγέθους 10 από δύο διαφορετικά προϊόντα που δίνονται στον Πίνακα 3.14 (το προϊόν Α έχει ονομαστική τιμή $T_A = 50$, ενώ το προϊόν Β έχει ονομαστική τιμή $T_B = 25$).

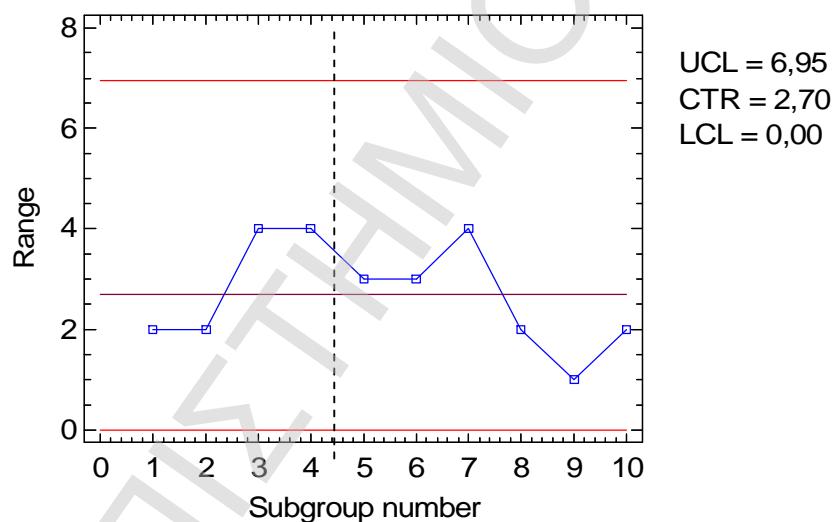
Πίνακας 3.14: Δεδομένα για την επίδειξη του DNOM διαγράμματος ελέγχου για δείγματα

Δείγμα i	Προϊόν	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	T_i	Y_{i1}	Y_{i2}	Y_{i3}	$\bar{Y}_i = \bar{X}_i - T_i$	R_i
1	A	50	51	52	50	0	1	2	1	2
2	A	49	50	51	50	-1	0	1	0	2
3	A	48	49	52	50	-2	-1	2	-0.33	4
4	A	49	53	51	50	-1	3	1	1	4
5	B	24	27	26	25	-1	2	1	0.67	3
6	B	25	27	24	25	0	2	-1	0.33	3
7	B	27	26	23	25	2	1	-2	0.33	4
8	B	25	24	23	25	0	-1	-2	-1	2
9	B	24	25	25	25	-1	0	0	-0.33	1
10	B	26	24	25	25	1	-1	0	0	2

Τα \bar{X} και R διαγράμματα ελέγχου φάσης I με όρια 3σ που αντιστοιχούν στα δεδομένα $Y_{ij} = X_{ij} - T_i$ δίνονται στα δύο ακόλουθα σχήματα



Σχήμα 3.12: DNOM \bar{X} διάγραμμα ελέγχου



Σχήμα 3.13: DNOM R διάγραμμα ελέγχου

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, μια από τις προϋποθέσεις για να εφαρμόσουμε την θεωρία του Montgomery είναι αυτή της σταθερής διακύμανση της διαδικασίας για κάθε τύπο προϊόντος. Όταν δεν ισχύει αυτή η προϋπόθεση, τότε ο Montgomery προτείνει την χρησιμοποίηση τυποποιημένων (standardised) \bar{X} και R διαγραμμάτων ελέγχου.

Έστω ότι από τον τύπο προϊόντος k έχουμε i_k το πλήθος δείγματα τα i_1, i_2, \dots, i_k με αντίστοιχα εύρη $R_{i_1}, R_{i_2}, \dots, R_{i_k}$. Θέτουμε

$$\bar{R}_k = \frac{R_{i_1} + R_{i_2} + \dots + R_{i_k}}{k}.$$

Τότε στο τυποποιημένο R διάγραμμα ελέγχου, αντί των ποσοτήτων $R_{i_1}, R_{i_2}, \dots, R_{i_k}$ που απεικονίζονταν στο R διάγραμμα ελέγχου, θα απεικονιστούν οι ποσότητες

$$R_{i_k}^s = \frac{R_{i_k}}{\bar{R}_k}.$$

Τα όρια ελέγχου του τυποποιημένου R διαγράμματος ελέγχου είναι τα $LCL = D_3$ και $UCL = D_4$. Στο τυποποιημένο \bar{X} διάγραμμα ελέγχου, αντί των ποσοτήτων $\bar{Y}_{i_1} = \bar{X}_{i_1} - T_{i_1}, \bar{Y}_{i_2} = \bar{X}_{i_2} - T_{i_2}, \dots, \bar{Y}_{i_k} = \bar{X}_{i_k} - T_{i_k}$ ($T_{i_1} = T_{i_2} = \dots = T_{i_k}$) που απεικονίζονταν στο \bar{X} διάγραμμα ελέγχου, θα απεικονιστούν οι ποσότητες

$$\bar{Y}_{i_k}^s = \frac{\bar{Y}_{i_k}}{\bar{R}_k}.$$

Τα όρια ελέγχου του τυποποιημένου \bar{X} διαγράμματος ελέγχου είναι τα $LCL = -A_2$ και $UCL = +A_2$.

Για την επίδειξη της χρήσης των τυποποιημένων DNOM διαγραμμάτων ελέγχου θεωρούμε τα δεδομένα του Πίνακα 3.14 από τα οποία προκύπτει ότι

$$\bar{R}_A = \frac{R_1 + R_1 + R_3 + R_4}{4} = 3,$$

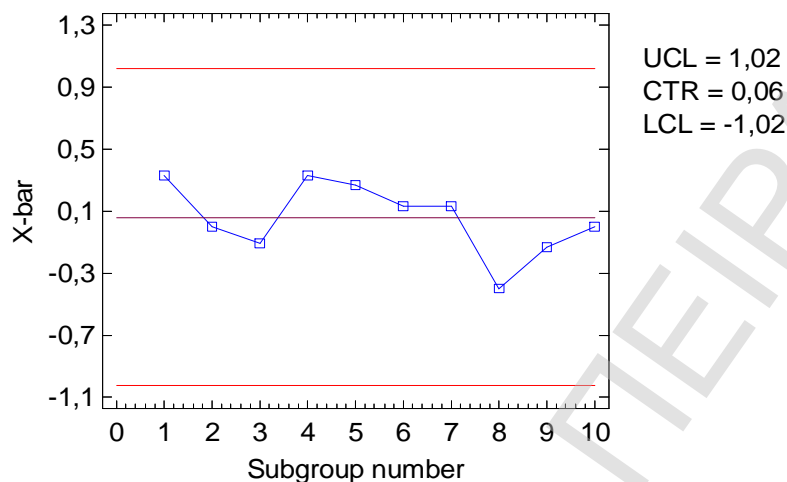
$$\bar{R}_B = \frac{R_5 + R_6 + \dots + R_{10}}{6} = 2.5.$$

Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας.

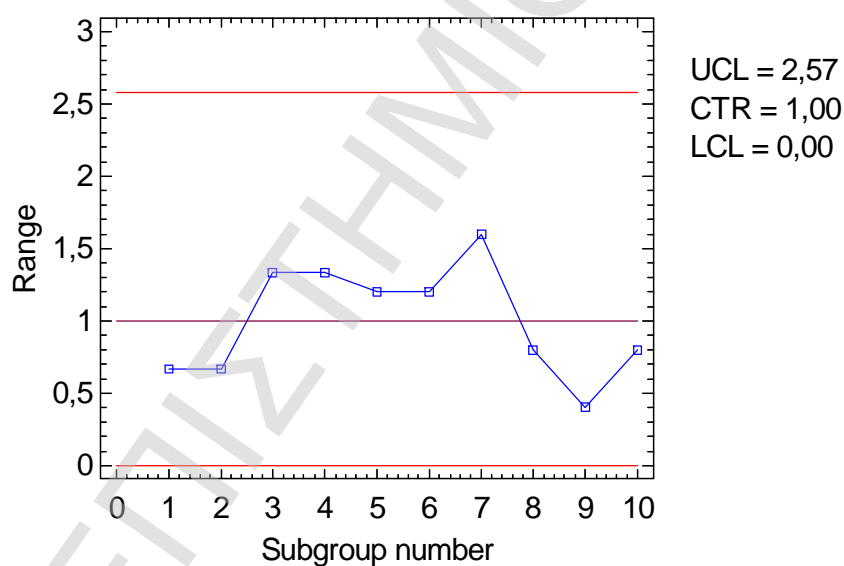
Πίνακας 3.15: Δεδομένα για την επίδειξη του τυποποιημένου DNOM διαγράμματος ελέγχου

Δείγμα i	Προϊόν	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	T_i	$\bar{Y}_i = \bar{X}_i - T_i$	R_i	R_i^s	Y_i^s
1	A	50	51	52	50	1	2	0.67	0.33
2	A	49	50	51	50	0	2	0.67	0.00
3	A	48	49	52	50	-0.33	4	1.33	-0.11
4	A	49	53	51	50	1	4	1.33	0.33
5	B	24	27	26	25	0.67	3	1.20	0.27
6	B	25	27	24	25	0.33	3	1.20	0.13
7	B	27	26	23	25	0.33	4	1.60	0.13
8	B	25	24	23	25	-1	2	0.80	-0.40
9	B	24	25	25	25	-0.33	1	0.40	-0.13
10	B	26	24	25	25	0	2	0.80	0.00

Τα τυποποιημένα \bar{X} και R διαγράμματα ελέγχου Φάσης Ι που αντιστοιχούν στα δεδομένα Y_i^s και R_i^s δίνονται στα δύο ακόλουθα σχήματα



Σχήμα 3.14: DNOM τυποποιημένο \bar{X} διάγραμμα ελέγχου



Σχήμα 3.15: DNOM τυποποιημένο R διάγραμμα ελέγχου

Ο Farnum (1992) εξέτασε σε βάθος την υπόθεση της ίδιας διακύμανσης σε κάθε τύπο προϊόντος. Θεώρησε ότι ισχύει το μοντέλο

$$X_m = X + e$$

όπου X_m συμβολίζει την μετρούμενη τιμή ενός προϊόντος, X συμβολίζει την πραγματική τιμή του προϊόντος, και e συμβολίζει το σφάλμα μέτρησης. Υποθέτοντας στον παραπάνω

τύπο ότι η πραγματική τιμή X του προϊόντος αναφέρεται σε προϊόν με ονομαστική τιμή T_i μπορεί να δειχθεί ότι η διακύμανση S_i^2 των μετρημένων τιμών του συγκεκριμένου προϊόντος δίνεται από τον τύπο

$$S_i^2 = \text{Var}(X_m | T_i) = \text{Var}(X | T_i) + E(\text{Var}(\mathbf{e} | X))$$

όταν $E(X | T_i) = T_i$ και $E(\mathbf{e} | X) = 0$ (για λεπτομέρειες δείτε Παράρτημα Π4).

Το παραπάνω γενικό μοντέλο εξειδικεύθηκε από τον Farnum (1992) σε δύο ειδικά μοντέλα.

- **Μοντέλο I:** Στο Μοντέλο I υποθέτουμε ότι για κάθε X και για κάθε ονομαστική τιμή T_i ισχύει ότι $E(X | T_i) = T_i$ και $\text{Var}(X | T_i) = S^2$. Επίσης για το σφάλμα μέτρησης υποθέτουμε ότι για κάθε X ισχύει ότι $E(\mathbf{e} | X) = 0$ και $\text{Var}(\mathbf{e} | X) = S_e^2$. Είναι προφανές ότι όταν ισχύουν οι προαναφερθείσες υποθέσεις τότε έχουμε ίδια διακύμανση για κάθε τύπο προϊόντος, δηλαδή

$$S_i^2 = S^2 + S_e^2.$$

Έτσι το Μοντέλο I συμπίπτει με το μοντέλο που εξέτασε ο Montgomery (1991). Αξίζει να σημειώσουμε ότι σε αυτή την περίπτωση η κοινή διακύμανση κάθε τύπου προϊόντος μπορεί να εκτιμηθεί χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$S^2 = \frac{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_m^2}{m}$$

όπου

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, \quad 1 \leq i \leq m.$$

- **Μοντέλο II:** Στο Μοντέλο II υποθέτουμε ότι για κάθε X και για κάθε ονομαστική τιμή T_i ισχύει ότι $E(X | T_i) = T_i$ και $\text{Var}(X | T_i) = K^2 T_i^2$. Επίσης για το σφάλμα μέτρησης υποθέτουμε ότι για κάθε X ισχύει ότι $E(\mathbf{e} | X) = 0$ και $\text{Var}(\mathbf{e} | X) = k^2 X^2$. Όταν ισχύουν οι προαναφερθείσες υποθέσεις τότε η διακύμανση κάθε τύπου προϊόντος μπορεί να εκτιμηθεί χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$\hat{S}_i^2 = S^2 T_i^2$$

όπου

$$S^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{S_i}{T_i} \right)^2$$

(για λεπτομέρειες δείτε Παράρτημα Π4). Υποθέτοντας επιπλέον ότι $X_{ij} \sim N(T_i, S_i^2)$, προκύπτει άμεσα ότι $\bar{X}_i \sim N(T_i, S_i^2/n)$, και αντικαθιστώντας το S_i με την εκτίμησή του \hat{S}_i προκύπτει ότι $\bar{X}_i \sim N(T_i, S^2 T_i^2/n)$. Συνεπώς

$$\frac{\bar{X}_i}{T_i} \sim N(1, S^2/n).$$

Έτσι για το Μοντέλο Π η πιο κατάλληλη μορφή ενός DNOM διαγράμματος ελέγχου είναι εκείνη που στο διάγραμμα ελέγχου (με όρια ελέγχου $3S$) απεικονίζονται οι τιμές της στατιστικής συνάρτησης \bar{X}_i/T_i και

$$LCL = 1 - 3 \frac{S}{\sqrt{n}}, \quad CL = 1, \quad UCL = 1 + 3 \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Για την επίδειξη του Μοντέλου Π ο Farnum (1992) θεώρησε ένα παράδειγμα όπου τα προσομοιωμένα δεδομένα ήταν 20 δείγματα μεγέθους 5 με τιμές αυτές που προέκυψαν για $K=0.05$ και $k=0.001$. Τα δεδομένα μαζί με άλλες ποσότητες χρήσιμες για την κατασκευή του DNOM διαγράμματος ελέγχου, δίνονται στους δύο ακόλουθους πίνακες.

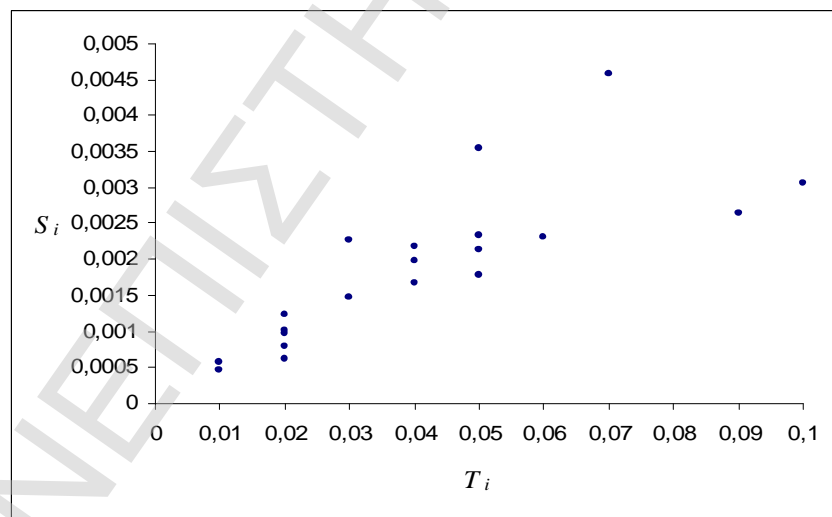
Πίνακας 3.16: Δείγματα για το Μοντέλο Π με $K = 0.05$ και $k = 0.001$

i	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}
1	0.0305	0.02798	0.02923	0.03397	0.02945
2	0.01024	0.0106	0.01033	0.00954	0.01073
3	0.04893	0.04748	0.05181	0.05123	0.05071
4	0.08753	0.09107	0.09154	0.08517	0.08946
5	0.09813	0.09508	0.10348	0.09754	0.09854
6	0.02901	0.0327	0.03199	0.03113	0.03003
7	0.03847	0.04215	0.03973	0.03776	0.03713
8	0.0466	0.04866	0.0453	0.04915	0.05135
9	0.01887	0.0209	0.01937	0.0192	0.02169
10	0.00962	0.00969	0.01073	0.01075	0.00976
11	0.06137	0.05569	0.05735	0.05732	0.06014
12	0.05554	0.04969	0.04997	0.05144	0.04569
13	0.02013	0.02053	0.0195	0.02012	0.02118
14	0.02078	0.0201	0.02017	0.02107	0.02252
15	0.04305	0.04046	0.03895	0.04205	0.03982
16	0.05437	0.05033	0.04879	0.05179	0.0527
17	0.06479	0.07049	0.06383	0.07218	0.06142
18	0.02027	0.02092	0.0194	0.01897	0.01934
19	0.04118	0.04164	0.03955	0.03707	0.0371
20	0.02055	0.02007	0.02021	0.02041	0.02255

Πίνακας 3.17: Στατιστικές συναρτήσεις για τα δεδομένα του Πίνακα 3.16

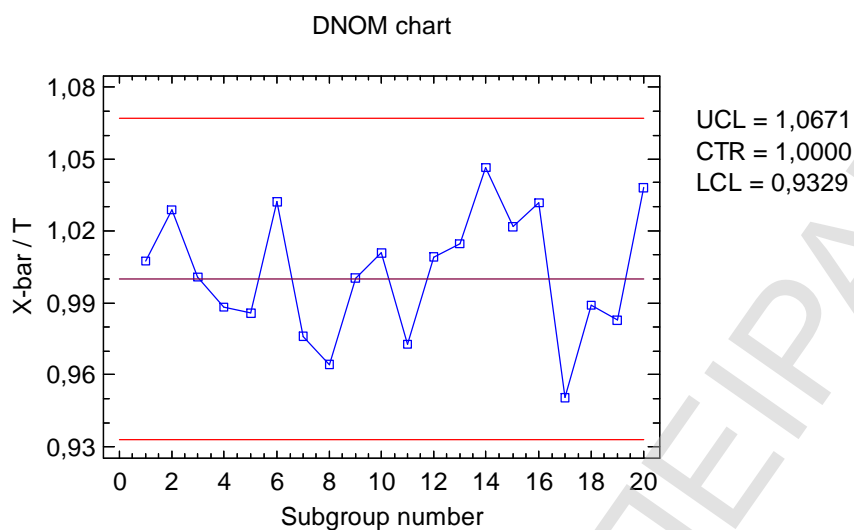
T_i	\bar{X}_i	S_i	\bar{X}_i/T_i	S_i/T_i
0.03	0.030226	0.0022766	1.00753	0.0758861
0.01	0.010288	0.0004627	1.02880	0.0462677
0.05	0.050032	0.0017877	1.00064	0.0357537
0.09	0.088954	0.0026347	0.98838	0.0292748
0.1	0.098554	0.0030636	0.98554	0.0306359
0.03	0.030972	0.0014819	1.03240	0.0493966
0.04	0.039048	0.0019849	0.97620	0.0496224
0.05	0.048212	0.0023455	0.96424	0.0469104
0.02	0.020006	0.0012227	1.00030	0.0611337
0.01	0.010110	0.0005773	1.01100	0.0577278
0.06	0.058374	0.0023161	0.97290	0.0386024
0.05	0.050466	0.0035480	1.00932	0.0709595
0.02	0.020292	0.0006181	1.01460	0.0309059
0.02	0.020928	0.0009794	1.04640	0.0489686
0.04	0.040866	0.0016660	1.02165	0.0416491
0.05	0.051596	0.0021464	1.03192	0.0429278
0.07	0.066542	0.0045835	0.95060	0.0654783
0.02	0.019780	0.0007959	0.98900	0.0397948
0.04	0.039308	0.0021728	0.98270	0.0543212
0.02	0.020758	0.0010185	1.03790	0.0509245

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται ένα διάγραμμα διασποράς των ζευγών (T_i, S_i) που μπορεί να δώσει πληροφορίες σχετικά με το η διακύμανση της διαδικασίας είναι σχεδόν η ίδια για κάθε προϊόν.



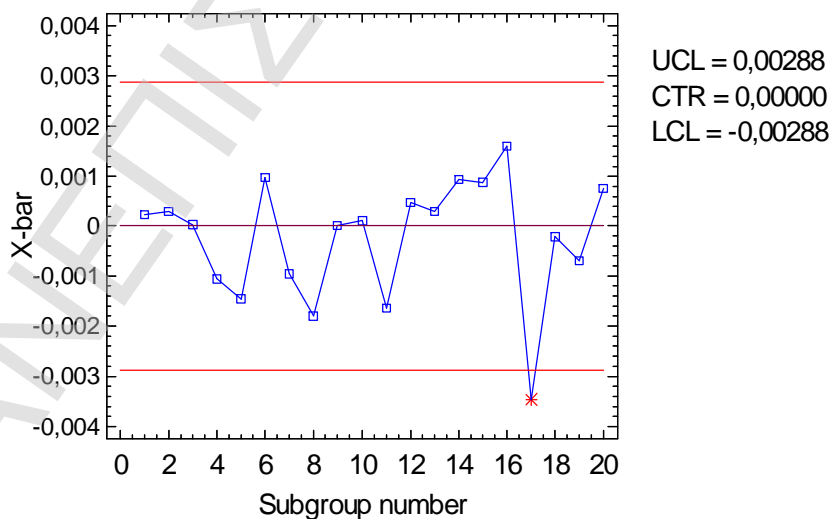
Σχήμα 3.16: Διάγραμμα διασποράς των ζευγών (T_i, S_i) για $i = 1, 2, \dots, 20$

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι η διακύμανση δεν είναι ίδια και μάλιστα είναι αύξουσα συνάρτηση της ονομαστικής τιμής των προϊόντων. Έτσι προχωρούμε στην κατασκευή ενός DNOM διαγράμματος ελέγχου θεωρώντας ως το πλέον κατάλληλο μοντέλο το Μοντέλο II.



Σχήμα 3.17: DNOM διάγραμμα ελέγχου για το Μοντέλο II

Από το παραπάνω διάγραμμα ελέγχου προκύπτει ότι ο μέσος της διεργασίας είναι εντός στατιστικού ελέγχου. Στην περίπτωση που εφαρμόζαμε το Μοντέλο I στα δεδομένα μας, το DNOM διάγραμμα ελέγχου θα μας έδινε λάθος πληροφορίες όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα (τα όρια ελέγχου στο παρακάτω διάγραμμα είναι $UCL = 3S/\sqrt{n}$ και $LCL = -3S/\sqrt{n}$).



Σχήμα 3.18: DNOM διάγραμμα ελέγχου για το Μοντέλο I

3.4 Δυναμικό EWMA διάγραμμα ελέγχου

Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέραμε την μεθοδολογία κατασκευής των EWMA διαγραμμάτων ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις. Υπενθυμίζουμε ότι τα διαγράμματα αυτά έχουν μεγάλη ευαισθησία σε μικρές μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας και χρησιμοποιούν πληροφορίες από όλα τα δείγματα μετρήσεων δίνοντας μεγαλύτερη σημασία στα πιο πρόσφατα.

Στη κλασική EWMA μέθοδο χρησιμοποιείται η στατιστική συνάρτηση

$$Z_t = (1 - I) \cdot Z_{t-1} + I \cdot X_t$$

όπου το X_t είναι η t κατά σειρά παρατήρηση που έχουμε από ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό X και το Z_t εκφράζει το σταθμισμένο μέσο όλων των παρατηρήσεων μέχρι τη χρονική στιγμή t .

Ο Wasserman (1995) τροποποίησε την μεθοδολογία κατασκευής των EWMA διαγραμμάτων ελέγχου έτσι ώστε να δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα στην περίπτωση δεδομένων με μικρό μήκος ροής. Ο Wasserman (1995) χρησιμοποίησε τη στατιστική συνάρτηση

$$Z_t = (1 - I_t) \cdot Z_{t-1} + I_t \cdot X_t$$

όπου η σταθερά I_t εξαρτάται πλέον από την χρονική στιγμή t κατά την οποία ελήφθη το δείγμα. Η νέα αυτή μέθοδος ονομάζεται δυναμική EWMA μέθοδος. Το μοντέλο που οδηγεί στην παραπάνω σχέση είναι το

$$\{X_t = m_t + v_t, \quad m_t = m_{t-1} + w_t\}$$

όπου $v_t \sim N(0, V)$ και $w_t \sim N(0, W)$. Η σχέση για το X_t εξηγεί τις αλλαγές (σφάλματα) στην τιμή κάθε παρατήρησης, ενώ η σχέση για το m_t εξηγεί τις αλλαγές στον μέσο της διεργασίας. Πριν τεθεί σε εκκίνηση μια διεργασία θα πρέπει χρησιμοποιώντας παρελθοντικά δεδομένα να εκτιμήσουμε τις ποσότητες m_1 , V και W . Τα παρελθοντικά αυτά δεδομένα αποτελούν πληροφορίες οι οποίες στηρίζονται είτε στην κρίση του μηχανικού ο οποίος κάνει έλεγχο ποιότητας, είτε στις γνώσεις του γύρω από παρόμοιες διεργασίες είτε χρησιμοποιούν δεδομένα από παρόμοιες διεργασίες.

Οι εκτιμήσεις των ποσοτήτων που πρέπει να έχουμε κατά την εκκίνηση μιας διεργασίας ($t=1$), είναι οι εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{m}_1 = Z_0 \\ \hat{S}_m^2 = R_1 \\ \hat{S}_{Y|m}^2 = V_0 \end{array} \right\}.$$

Λίγο πριν την χρονική στιγμή t , δηλαδή λίγο πριν λάβουμε την παρατήρηση X_t , οι ίδιες ποσότητες θα έχουν τις τιμές

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{m}_t = Z_{t-1} \\ \hat{S}_m^2 = R_t \\ \hat{S}_{Y|m}^2 = V_{t-1} \end{array} \right\}$$

ενώ αφού λάβουμε την παρατήρηση X_t οι ίδιες ποσότητες έχουν τις ακόλουθες τιμές

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{m}_t = Z_t \\ \hat{S}_m^2 = C_t = I_t \cdot V_t \\ \hat{S}_{Y|m}^2 = V_t \end{array} \right\}$$

Χρησιμοποιώντας αποτέλεσμα των West M. (1985), West M. & Harrison P.J. (1989) μπορούμε να καταλήξουμε στις ακόλουθες σχέσεις

$$W_t \approx V_t \cdot \frac{I^2}{(1-I)} \approx C_t \cdot \frac{I^2}{(1-I)}$$

$$I_t = \frac{I_{t-1}}{I_{t-1} + 1 - I}$$

$$V_t = \frac{b_t}{a_t}, \quad t=1,2,\dots, \quad a_t = a_{t-1} + 1, \quad b_t = b_{t-1} + (1-I)(X_t - Z_{t-1})^2$$

Οι ποσότητες V_t και W_t συγκλίνουν στις τιμές V και W αντίστοιχα. Η γενική διαδικασία σύμφωνα με την οποία λειτουργεί η δυναμική EWMA μέθοδος είναι η ακόλουθη:

Βήμα 1: Επιλέγουμε την τιμή της παραμέτρου λ

Βήμα 2: Επιλέγουμε τις τιμές των παραμέτρων με τις οποίες θα ξεκινήσουμε την διαδικασία. Οι τιμές αυτές είναι οι X_0 , R_1 , V_0 . Επίσης θεωρούμε τις εξής ποσότητες $a_0 = 1$, $b_0 = V_0$, $I_1 = R_1 / (R_1 - V_0)$

Βήμα 3: Βρίσκουμε την τιμή I_t σύμφωνα με την εξίσωση $I_t = I_{t-1} / (I_{t-1} + (1 - I))$. Η τιμή I_t έχει ήδη βρεθεί.

Βήμα 4: Βρίσκουμε την τιμή Z_t , σύμφωνα με την εξίσωση $Z_t = (1 - I_t)Z_{t-1} + I_t X_t$

Βήμα 5: Βρίσκουμε τις τιμές $a_t = a_t + 1$, $b_t = b_{t-1} + (1 - I)(X_t - Z_{t-1})$, $V_t = b_t / a_t^2$ και $C_t = I_t \cdot V_t$

Βήμα 6: Προχωράμε στην επόμενη χρονική στιγμή, δηλαδή θέτουμε $t = t + 1$, βρίσκουμε $R_t = C_{t-1} / (1 - I)$ και επανερχόμαστε στο Βήμα 3.

Η δυναμική EWMA μέθοδος δίνει διαγράμματα με μεταβλητά όρια ακριβώς όπως και η κλασική. Τα όρια ελέγχου τη χρονική στιγμή t είναι τα εξής

$$(LCL_t, UCL_t) = (m_0 - L \cdot \sqrt{C_t}, m_0 + L \cdot \sqrt{C_t}) = (m_0 - L \cdot \sqrt{I_t \cdot V}, m_0 + L \cdot \sqrt{I_t \cdot V}).$$

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την μέθοδο, προχωράμε στο εξής παράδειγμα στο οποίο μέσω προσομοίωσης λαμβάνουμε 15 τιμές από $N(0,1)$ και 19 τιμές από $N(1,1)$. Δηλαδή μετά το 15^ο δείγμα η μέση τιμή άλλαξε. Θα δείξουμε πως η δυναμική EWMA μέθοδος αντιμετωπίζει το πρόβλημα αυτό.

Οι αρχικές τιμές m_0 , R_1 και V_0 , οι οποίες λαμβάνονται από προηγούμενες προσομοιώσεις είναι $m_0 = 0$, $R_1 = 0.600$, $V_0 = 1.250$. Παράλληλα με την δειγματοληψία βρίσκουμε τις υπόλοιπες τιμές m_t , R_t , V_t και αφού βρούμε τα όρια του EWMA διαγράμματος, τα συγκεντρώνουμε όλα στον παρακάτω πίνακα.

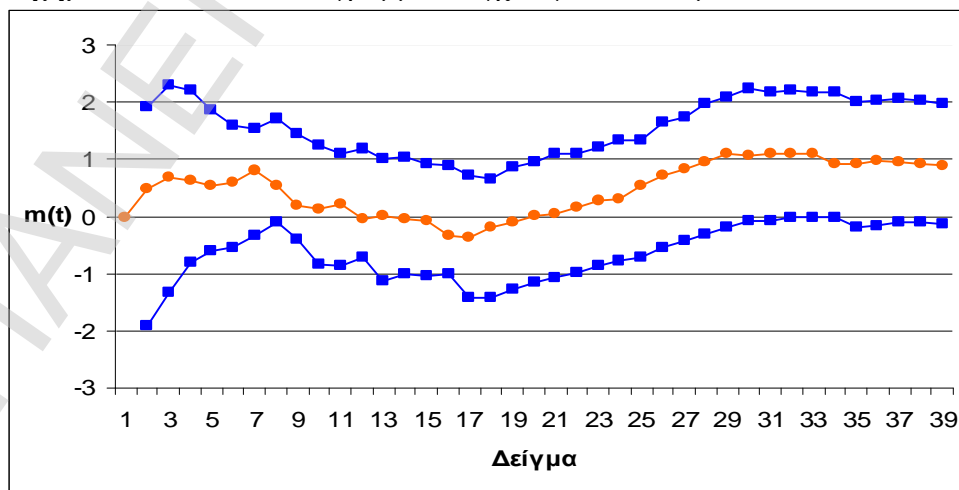
Πίνακας 3.18 Δεδομένα για την επίδειξη του δυναμικού EWMA διαγράμματος ελέγχου,

t	Y_t	m_t	V_t	I_{t-1}	UCL_t	LCL_t
0		0	1.250	0.324		
1	1.497	0.486	1.382	0.265	1.909	-1.909
2	1.353	0.699	1.111	0.227	2.301	-1.329
3	0.416	0.627	0.848	0.202	2.206	-0.808
4	0.305	0.540	0.694	0.183	1.867	-0.613
5	0.792	0.607	0.586	0.169	1.609	-0.529
6	1.366	0.805	0.563	0.158	1.551	-0.337
7	-0.395	0.527	0.631	0.149	1.700	-0.090
8	-1.239	0.197	0.843	0.142	1.448	-0.394
9	0.395	0.118	0.789	0.137	1.236	-0.842

10	0.869	0.221	0.761	0.132	1.103	-0.867
11	-1.767	-0.051	0.982	0.128	1.171	-0.729
12	0.605	0.018	0.936	0.124	1.011	-1.113
13	-0.641	-0.054	0.897	0.121	1.041	-1.005
14	-0.141	-0.064	0.838	0.119	0.936	-1.044
15	-2.488	-0.350	1.109	0.117	0.883	-1.011
16	0.523	-0.366	1.046	0.115	0.729	-1.429
17	1.343	-0.201	1.134	0.113	0.673	-1.405
18	0.875	-0.105	1.130	0.112	0.873	-1.275
19	1.213	0.015	1.152	0.110	0.960	-1.170
20	0.377	0.047	1.103	0.109	1.084	-1.054
21	1.322	0.168	1.120	0.108	1.088	-0.994
22	1.332	0.277	1.125	0.107	1.212	-0.876
23	0.595	0.307	1.082	0.107	1.319	-0.765
24	2.781	0.550	1.259	0.106	1.325	-0.712
25	2.460	0.713	1.339	0.105	1.645	-0.545
26	2.266	0.841	1.371	0.105	1.739	-0.413
27	2.264	0.957	1.389	0.104	1.977	-0.295
28	2.576	1.090	1.424	0.104	2.098	-0.184
29	0.648	1.054	1.382	0.103	2.243	-0.063
30	1.587	1.100	1.346	0.103	2.188	-0.080
31	1.070	1.097	1.304	0.103	2.217	-0.017
32	1.147	1.102	1.265	0.102	2.195	-0.001
33	-0.878	0.912	1.332	0.102	2.182	-0.022
34	1.114	0.930	1.295	0.102	2.019	-0.195
35	1.500	0.984	1.267	0.102	2.020	-0.160
36	0.746	0.961	1.234	0.102	2.061	-0.093
37	0.617	0.927	1.204	0.101	2.023	-0.101
38	0.476	0.881	1.178	0.101	1.980	-0.126

Προχωράμε τώρα στην δημιουργία του δυναμικού EWMA διαγράμματος (σχήμα 3.19) από το οποίο συμπεραίνουμε ότι η διεργασία μας είναι εντός ελέγχου.

Σχήμα 3.19: EWMA διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του πίνακα 3.18



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Π1. Περιπτώσεις Π1, Π2, Π4, Π5, Π6

Λήμμα 1. Έστω Y_1 και Y_2 δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομές $C_{n_1}^2$ και $C_{n_2}^2$ αντίστοιχα. Τότε οι ποσότητες $\frac{Y_1}{Y_2}$ και $Y_1 + Y_2$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Απόδειξη: Δείτε Quesenberry (1997).

Λήμμα 2. Αν οι τυχαίες μεταβλητές Y_1 , Y_2 και Y_3 είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομές $C_{n_1}^2$, $C_{n_2}^2$ και $C_{n_3}^2$ αντίστοιχα, τότε οι τυχαίες μεταβλητές

$$W_1 = \frac{n_2 Y_1}{n_1 Y_2}, \quad W_2 = \frac{n_1 + n_2}{n_3} \cdot \frac{Y_3}{Y_1 + Y_2}$$

είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομές F_{n_1, n_2} και $F_{n_3, n_1 + n_2}$ αντίστοιχα.

Απόδειξη: Δείτε Quesenberry (1997).

Καταρχήν θα δείξουμε ότι στην περίπτωση Π4 που η ακολουθία των στατιστικών συναρτήσεων Q είναι η ακόλουθη

$$Q_i = Q_i(\bar{X}_i) = \Phi^{-1} \left(H_{n_1 + n_2 + \dots + n_{i-1}} \left[\sqrt{\frac{n_i(n_1 + n_2 + \dots + n_{i-1})}{n_1 + n_2 + \dots + n_i}} \cdot \left(\frac{\bar{X}_i - \bar{\bar{X}}_{i-1}}{S_{pi}} \right) \right] \right), \quad i = 2, 3, \dots$$

(άγνωστο m, S), είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών από την τυπική κανονική κατανομή.

Έστω ότι το ποιοτικό χαρακτηριστικό X ακολουθεί κατανομή $N(m, S^2)$. Είναι προφανές ότι η ακολουθία των στατιστικών συναρτήσεων Q είναι ακολουθία ισόνομων τυχαίων μεταβλητών από την τυπική κανονική κατανομή. Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε στη διάθεσή μας τα ζευγάρια (\bar{X}_j, S_j^2) για $j = 1, 2, \dots, i$ (το). Μπορεί να δειχθεί ότι η στατιστική συνάρτηση $(\bar{\bar{X}}_i, S_i^2)$ είναι πλήρης και επαρκής στατιστική συνάρτηση για το (m, S) . Θέτουμε

$$A_i = \frac{\bar{X}_i - \bar{\bar{X}}_{i-1}}{S_{pi}}.$$

Αν δείξουμε ότι οι ποσότητες A_i και A_{i-1} είναι ανεξάρτητες τότε αυτομάτως αποδεικνύουμε η ακολουθία των στατιστικών συναρτήσεων Q είναι ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών. Θεωρούμε το διάνυσμα $T = (\bar{X}_{i-1}, S_{i-1}^2, \bar{X}_i, S_i)$. Λόγω του θεωρήματος του Basu (δείτε Basu (1955)) προκύπτει ότι η ποσότητα A_{i-1} είναι ανεξάρτητη της $(\bar{X}_{i-1}, S_{i-1}^2)$, οπότε και τα \bar{X}_i και S_i είναι ανεξάρτητα από το A_{i-1} . Έτσι το διάνυσμα T είναι ανεξάρτητο από την ποσότητα A_{i-1} και επιπροσθέτως η ποσότητα A_i είναι ανεξάρτητη από την A_{i-1} αφού είναι συνάρτηση των συνιστωσών του διανύσματος T .

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι στην περίπτωση Π6 που η ακολουθία των στατιστικών συναρτήσεων Q είναι η ακόλουθη

$$Q_i = Q_i(S_i^2) = F^{-1}[F_{n_i-1, n_1+n_2+\dots+n_{i-1}-i+1}(S_i^2/S_{p,i-1}^2)], \quad i = 2, 3, \dots$$

με

$$\frac{S_i^2}{S_{p,i-1}^2} = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_{i-1} - i + 1)S_i^2}{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2 + \dots + (n_{i-1} - 1)S_{i-1}^2}, \quad i = 2, 3, \dots$$

(άγνωστο S), είναι ακολουθία των στατιστικών συναρτήσεων Q είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών από την τυπική κανονική κατανομή. Αρκεί να δείξουμε ότι οι ποσότητες

$$w_i = \frac{S_i^2}{S_{p,i-1}^2} = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_{i-1} - i + 1)S_i^2}{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2 + \dots + (n_{i-1} - 1)S_{i-1}^2}, \quad i = 2, 3, \dots$$

είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $F_{n_i-1, n_1+n_2+\dots+n_{i-1}-i+1}$. Αυτό όμως προκύπτει από το Λήμμα 2 αφού οι τυχαίες μεταβλητές $(n_i - 1)S_i^2$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από την κατανομή $\chi_{n_i-1}^2$, για $i = 1, 2, \dots$.

Με ανάλογο τρόπο μπορούν να αντιμετωπιστούν οι περιπτώσεις Π1, Π2, και Π5.

Π2. Περιπτώσεις Π11, Π12, Π13, Π14, Π15, Π16

Με ανάλογο τρόπο, όπως του παραρτήματος Π1, θα δείξουμε ότι η ακολουθία των στατιστικών συναρτήσεων Q των περιπτώσεων Π11-Π16 είναι ακολουθία ισόνομων τυχαίων μεταβλητών από την τυπική κανονική κατανομή.

Καταρχήν θα εξετάσουμε την περίπτωση Π11 που η ακολουθία των στατιστικών συναρτήσεων Q είναι η ακόλουθη

$$Q_r(X_r) = \frac{X_r - m}{s}, \quad r = 1, 2, \dots$$

(γνωστό m , γνωστό s). Για αυτή την περίπτωση θέτουμε

$$Y_1 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{r-1} (X_i - \bar{X}_{r-1})^2$$

$$Y_2 = \left(\frac{r-1}{r} \right) \frac{(X_r - \bar{X}_{r-1})^2}{\sigma^2}$$

$$Y_3 = \left(\frac{r}{r+1} \right) \frac{(X_{r+1} - \bar{X}_r)^2}{\sigma^2}$$

Οι τυχαίες μεταβλητές Y_2 και Y_3 ακολουθούν και οι δυο κατανομή c_1^2 ενώ η Y_1 ακολουθεί κατανομή c_{r-2}^2 . Επίσης, οι μεταβλητές αυτές είναι ανά δύο ανεξάρτητες. Για παράδειγμα θα δείξουμε την ανεξαρτησία των Y_1 και Y_2 . Για $i = 1, 2, \dots, r-1$ έχουμε

$$\text{Cov}(X_i - \bar{X}_{r-1}, X_r - \bar{X}_{r-1}) = E[(X_i - \bar{X}_{r-1})(X_r - \bar{X}_{r-1})] = E(\bar{X}_{r-1}^2)E(X_i - \bar{X}_{r-1}) = \frac{\sigma^2}{r-1} - \frac{\sigma^2}{r-1} = 0.$$

Επίσης αφού οι $(X_i - \bar{X}_{r-1})$, $(X_r - \bar{X}_{r-1})$ ακολουθούν κανονική κατανομή προκύπτει ότι είναι ανεξάρτητες. Με παρόμοιο τρόπο εξηγείται και η ανεξαρτησία των υπολοίπων ζευγαριών. Θεωρούμε τώρα τις εξής ποσότητες:

$$A_r^2 = (r-2) \frac{Y_2}{Y_1} = \left(\frac{r-1}{r} \right) \frac{(X_r - \bar{X}_{r-1})^2}{S_{r-1}^2}$$

$$A_{r+1}^2 = (r-1) \frac{Y_3}{Y_1 + Y_2} = \left(\frac{r}{r+1} \right) \frac{(X_{r+1} - \bar{X}_r)^2}{S_r^2}.$$

Η ανεξαρτησία των A_r και A_{r+1} προκύπτει από το Λήμμα 2. Έτσι οι ποσότητες οι Q_r και Q_{r+1} είναι ανεξάρτητες από τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $N(0,1)$ λόγω του ολοκληρωτικού μετασχηματισμού πιθανότητας (probability integral transform).

Για την περίπτωση Π16 που η ακολουθία των στατιστικών συναρτήσεων Q είναι η ακόλουθη

$$Q_r = \Phi^{-1} \left[F_{1,n} \left(\frac{vR_r^2}{R_2^2 + R_4^2 + \dots + R_{r-2}^2} \right) \right], \quad r = 4, 6, 8, \dots, \quad n = (r/2) - 1.$$

(άγνωστο s , $R_r = X_r - X_{r-1}$) αρκεί να δείξουμε ότι οι ποσότητες

$$\frac{vR_r^2}{R_2^2 + R_4^2 + \dots + R_{r-2}^2}$$

είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $F_{1,n}$. Όμως αυτό προκύπτει από το Λήμμα 2 παρατηρώντας ότι οι τυχαίες μεταβλητές $R_r^2/2$ ακολουθούν κατανομή c_1^2 .

Με ανάλογο τρόπο μπορούν να αντιμετωπιστούν οι περιπτώσεις Π12, Π13 Π14 και Π5.

Π3. Μεθοδολογία του Hillier (1969)

Έστω ότι ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό X ακολουθεί κατανομή $N(m, s^2)$ (m, s άγνωστα) και έχουμε στη διάθεσή μας m ανεξάρτητα προκαταρκτικά τυχαία δείγματα μεγέθους n το καθένα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $1 \leq i \leq m$. Για το \bar{X} διάγραμμα ελέγχου στο Στάδιο II απαιτούμε να ισχύει η σχέση

$$P(\bar{X} - A_2^* \bar{R} \leq \bar{X} \leq \bar{X} + A_2^* \bar{R}) = 1 - a_2$$

όπου \bar{X} δηλώνει το δειγματικό μέσο ενός μελλοντικού δείγματος, $\bar{\bar{X}}$ και \bar{R} είναι οι γνωστές ποσότητες που βρέθηκαν στο Στάδιο I (Φάση I) από τα m εντός ελέγχου προκαταρκτικά δείγματα μεγέθους n . Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$P\left(-A_2^* \leq \frac{\bar{X} - \bar{\bar{X}}}{\bar{R}} \leq +A_2^*\right) = 1 - a_2$$

Η τυχαία μεταβλητή $\bar{X} - \bar{\bar{X}}$ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο 0 και διακύμανση

$$\frac{m+1}{nm} \cdot s^2.$$

Ο Patnaik (1950) έδειξε ότι

$$\frac{n \bar{R}^2}{c^2 s^2} \approx c_n^2,$$

(η παραπάνω προσέγγιση είναι εξαιρετική για $n=5$) όπου n και c είναι συναρτήσεις των ποσοτήτων m και n , αντίστοιχα, που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$d_2(n) = c \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \left\{ \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right\}, \quad \frac{d_3^2(n)}{m} = \frac{c^2}{n} \left[n - 2 \left\{ \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right\}^2 \right].$$

Μια καλή προσέγγιση του c δίνεται από τη σχέση

$$c = d_2(n) \left\{ 1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} - \frac{5}{128n^3} \right\}.$$

Πίνακες που δίνουν τιμές των n και c για διάφορες τιμές των m και n μπορούν να βρεθούν στις εργασίες των Patnaik (1950) και Duncan (1958).

Έτσι

$$\frac{\frac{\bar{X} - \bar{\bar{X}}}{\sqrt{\frac{m+1}{nm} S^2}}}{\sqrt{\frac{n \bar{R}}{c^2 S^2} \cdot \frac{1}{n}}} \stackrel{a}{\sim} t_n$$

δηλαδή

$$c \cdot \sqrt{\frac{nm}{m+1}} \left(\frac{\bar{X} - \bar{\bar{X}}}{\bar{R}} \right) \stackrel{a}{\sim} t_n.$$

Έτσι η δεύτερη στήλη του Πίνακα 3.1 δίνει ουσιαστικά την πιθανότητα a_2 η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$t_{n;a_2/2} = A_2 \cdot c \cdot \sqrt{\frac{nm}{m+1}}$$

για $n=5$ και $A_2 = 0.577$.

Ομοίως, οι τιμές στον Πίνακα 3.5 βρέθηκαν από τον τύπο (για $n=5$)

$$A_2^* = \frac{t_{n;a_2/2}}{c} \cdot \sqrt{\frac{m+1}{nm}}.$$

Για το \bar{X} διάγραμμα ελέγχου στο Στάδιο I απαιτούμε να ισχύει η σχέση

$$P\left(-A_2^{**} \leq \frac{\bar{X}_i - \bar{\bar{X}}}{\bar{R}} \leq +A_2^{**}\right) = 1 - a_2$$

όπου με \bar{X}_i έχουμε συμβολίσει το δειγματικό μέσο κάποιου προκαταρκτικού δείγματος. Η τυχαία μεταβλητή $\bar{X}_i - \bar{\bar{X}}$ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο 0 και διακύμανση

$$\frac{m-1}{nm} \cdot S^2.$$

Ο παραπάνω τύπος για τη διακύμανση προκύπτει από τη σχέση

$$\bar{X}_i - \bar{\bar{X}} = \bar{X}_i - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m X_j = \frac{m-1}{m} \bar{X}_i - \frac{1}{m} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \bar{X}_j,$$

οπότε

$$\text{Var}(\bar{X}_i - \bar{\bar{X}}) = \frac{(m-1)^2 + (m-1)}{m^2} \cdot \frac{s^2}{n} = \frac{m-1}{nm} \cdot s^2.$$

Συνεπώς εφαρμόζοντας την προηγούμενη μεθοδολογία καταλήγουμε στον τύπο

$$A_2^{**} = \frac{t_{n;a_2/2}}{c} \cdot \sqrt{\frac{m-1}{nm}} = A_2^* \sqrt{\frac{m-1}{m+1}}.$$

Η μελέτη των R διαγραμμάτων ελέγχου στο Στάδιο ΙΙ ισοδυναμεί με τη μελέτη της πιθανοτικής σχέσης

$$P(R \leq K_a \bar{R}) = P\left(\frac{R}{\bar{R}} \leq K_a\right) = a$$

όπου η σταθερά K_a είναι ίση με το a -ποσοστιαίο σημείο της στατιστικής συνάρτησης R/\bar{R} .

Οι Harter H. Leon & Clemm Donald S (1959) και ο Harter H. Leon (1960) έδωσαν πίνακες για τα a -ποσοστιαία σημεία $q_{n;a}$ της τυχαίας μεταβλητής cR/\bar{R} η οποία ονομάζεται studentized range κατανομή. Συνεπώς

$$K_a = \frac{q_{n;a}}{c}.$$

Έτσι η τρίτη στήλη του Πίνακα 3.1 δίνει ουσιαστικά την πιθανότητα $a_3 + a_4$ όπου

$$a_3 = P(R < D_3(n)\bar{R}) = P\left(\frac{R}{\bar{R}} \leq D_3(n)\right),$$

$$a_4 = P(R > D_4(n)\bar{R}) = P\left(\frac{R}{\bar{R}} > D_4(n)\right),$$

για $n=5$ (τότε $D_3(5)=0$ και $D_4(5)=2.115$). Ομοίως, οι τιμές των D_3^* και D_4^* στους Πίνακες 3.6 και 3.7 βρέθηκαν από τους τύπους

$$D_3^* = \frac{q_{a_3;n}}{c}, \quad D_4^* = \frac{q_{1-a_4;n}}{c}.$$

Τέλος, για δεδομένες τιμές των m , a_3 , a_4 , μπορεί να δειχθεί ότι οι τιμές των D_3^{**} και D_4^{**} στους Πίνακες 3.3 και 3.4 δίνονται από τους τύπους

$$D_3^{**} = \frac{mD_{3,m-1}^*}{m-1+D_{3,m-1}^*}, \quad D_4^{**} = \frac{mD_{4,m-1}^*}{m-1+D_{3,m-1}^*}$$

όπου οι ποσότητες $D_{3,m-1}^*$ και $D_{4,m-1}^*$ είναι οι τιμές των D_3^* και D_4^* για $m-1$ δείγματα.

Π4. Μεθοδολογία του Farnum (1992)

Για ευκολία τους συμβολισμούς με $E(X_m)$ και $Var(V_m)$ θα δηλώνουμε τις ποσότητες $E(X_m | T_i)$ και $Var(X_m | T_i)$. Ομοίως $E(X | T_i) = T_i$ θα γράφεται ως $E(X) = T_i$, κτλ.. Αφού $E(X) = T_i$ και $E(\mathbf{e} | X) = 0$ μπορεί να δειχθεί ότι

$$E(X_m) = T_i, \quad Var(X_m) = Var(X) + E(Var(\mathbf{e} | X)).$$

Έτσι

$$S_i^2 = Var(X_m | T_i) = Var(X | T_i) + E(Var(\mathbf{e} | X)).$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του Μοντέλου II και τη σχέση $E(X | T_i) = E(X) = T_i$, η προηγούμενη ισότητα, θα δώσει

$$\begin{aligned} S_i^2 &= K^2 T_i^2 + E(k^2 X^2) = K^2 T_i^2 + k^2 (Var(X) + E(X)^2) \\ &= K^2 T_i^2 + k^2 (K^2 T_i^2 + T_i^2) = (K^2 + k^2 \cdot K^2 + k^2) T_i^2 \end{aligned}$$

Επομένως

$$\frac{S_i^2}{T_i^2} = K^2 + k^2 K^2 + k^2.$$

Αφού γνωρίζουμε ότι το S_i^2 εκτιμά το S_i^2 , τότε κάθε λόγος S_i^2 / T_i^2 εκτιμά την ποσότητα $K^2 + k^2 K^2 + k^2$. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, για m δείγματα προκύπτει ότι

$$S^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{S_i}{T_i} \right)^2, \quad s^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{s_i}{T_i} \right)^2.$$

Δηλαδή κάθε S_i εκτιμάται από την ποσότητα ST_i .

Επίσης, η τιμή του k προκύπτει από τις προδιαγραφές του κατασκευαστή ενώ η τιμή του K από τη σχέση

$$K^2 = (S^2 - k^2) / (1 + k^2).$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξένη

Basu, D. (1955), On statistics independent of a complete sufficient statistic, *Sankhya* 15, pp 377-380

Duncan Acheson J. (june 1958), Design and operation of a double-limit variables sampling plan, *Journal of the American statistical association*, vol 53, no 282, pp 513-550

Farnum R. Nicholas (1992), Control Charts for Short Runs: Nonconstant Process and measurement Error, *Journal of Quality Technology*, New York

Harter H. Leon (1960), Tables of range and studentized range, *Annals of mathematical statistics*, Vold 31, pp 1122-1147

Harter H. Leon & Clemm Donald S. (april 1959), the probability integrals of the range and of the studentized range- probability integral, percentage points, and moments of the range, Wright air development center technical report 58-484

Hillier S. Frederick (1969), Xbar and R-Chart Control Limits Based on A Small Number of Subgroups, *Journal of Quality Technology*, New York

Johnson N.L & Kotz S. (1970), Distributions in statistics: Discrete Distributions, Houghton Mifflin Company, Boston

Lehman E.L (1983), Theory of Point estimation, John Wiley and Sons, New York

Montgomery C. Douglas (1997), Introduction to Statistical Quality Control, John Wiley and Sons, UK

Patil G. P. (1963), Classical and contagious discrete distributions, pp 552

Patnaik P.B (1950), The use of mean range as an estimator of variance in statistical tests, *Biometrika*, Vol 37, p 78-87

Quesenberry P. Charles (1991a), SPC Q Charts for a Binomial Parameter p: Short or Long Runs, *Journal of Quality Technology*, New York

Quesenberry P. Charles (1991b), SPC Q Charts for Start-Up Processes and Short or Long Runs, *Journal of Quality Technology*, New York

Quesenberry P. Charles (1997), SPC Methods for Quality Improvement, John Wiley and Sons, New York

Ryan T.P (1989), Statistical methods for quality improvement, John Wiley & Sons, New York

Wasserman S. G.(1995), An adaptation of the EWMA chart for short run SPC, Taylor and Francis Ltd, New York

West M (1985), Dynamic generalized linear models and bayesian forecasting (with discussion), *journal of the american statistical association*, pp 73-97

West M & Harrison P.J (1989), bayesian forecasting and dynamic models, Springer verlag, New York

Wheeler J. Donald (1991), Short Run SPC, SPC Press Inc, Tennessee

Ελληνική

Αντζουλάκος Δημήτριος (2005), Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, Σημειώσεις Παραδόσεων, Πειραιάς

Δαμιανού Χαράλαμπος (1996), Εισαγωγή στη Στατιστική: Μέρος II 2η έκδ. σελ. 325, Εκδόσεις Συμμετρία

Καφές 1996

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ