ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

Αξιολόγηση κινδύνου χρεοκοπίας και λήψη αποφάσεων μέσω συγκριτικής ανάλυσης των πιθανοτήτων χρεοκοπίας, με βάση το μέγεθος και τη συχνότητα αποζημιώσεων

Αικατερίνη Γ. Γιαννάκη

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων

Πειραιάς,

Νοέμβριος 2023

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη Συνέλευση του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή της, σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Πολίτης Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Ψαρράκος Γεώργιος, Αναπληρωτής Καθηγητής
- Μπερσίμης Σωτήριος, Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Statistics

Department of Statistics and Insurance Science

POSTGRADUATE PROGRAM IN
ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

Assessment of the risk of ruin and decision making, by comparison of ruin probabilities, based on the severity & the frequency of claims

Aikaterini G. Giannaki

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus,

November 2023

Στον Ιάσονα

Ευχαριστίες

Πρωτίστως θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα Καθηγητή μου κ. Κ. Πολίτη για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του. Επίσης θέλω να τον ευχαριστήσω για τη συμπαράστασή του και την υπομονή του καθ' όλη τη διάρκεια της συγγραφής της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Αποτελεί τιμή για εμένα η επιστημονική του καθοδήγηση, η οποία προσμένω με χαρά να συνεχιστεί στο μέλλον. Επίσης θέλω να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής κ. Σ. Μπερσίμη και κ. Γ. Ψαρράκο για την επίβλεψη της διπλωματικής εργασίας.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ θα ήθελα να απευθύνω στον άνθρωπο που πιστεύει σε εμένα περισσότερο από όλους, τον σύζυγό μου Ιάσονα, ο οποίος ήταν δίπλα μου σε κάθε στιγμή κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών κι η παρουσία του λειτούργησε καταλυτικά για την ολοκλήρωση αυτών. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω την μητέρα μου Ελένη και την αδελφή μου Κωνσταντίνα που με υποστηρίζουν σε κάθε μου απόφαση. Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω την θεία μου Βάσω για την υποστήριξη που μου έχει προσφέρει καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου στο Πανεπιστήμιο Πειραιώς αλλά και σε όλη την πορεία μου μέχρι σήμερα.

Περίληψη

Η θεωρία κινδύνων (risk theory) κι οι πιθανότητες χρεοκοπίας (ruin probabilities) έχουν αποτελέσει πεδίο έρευνας από την εποχή του Lundberg έως και σήμερα. Η θεωρία χρεοκοπίας (ruin theory) προσφέρει τη μαθηματική βάση για τη μελέτη των ασφαλιστικών κινδύνων και της πιθανότητας χρεοκοπίας ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου. Σύμφωνα με τη θεωρία κινδύνων (risk theory), ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας παρέχει ένα μέτρο μέτρησης της φερεγγυότητας (solvency) ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου. Στην παρούσα εργασία μελετάμε τις πιθανότητες χρεοκοπίας μέσα από τη συγκριτική τους ανάλυση, για ασφαλιστικά χαρτοφυλάκια που παρουσιάζουν διαφορετικές κατανομές μεγεθών αποζημιώσεων. Στόχος μας είναι η εύρεση της μεγαλύτερης πιθανότητας χρεοκοπίας, κι ως εκ τούτου η εύρεση του πιο ριψοκίνδυνου ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου. Συγκεκριμένα μελετώνται χαρτοφυλάκια που παρουσιάζουν υψηλή συχνότητα εμφάνισης ζημιών αλλά χαμηλή σφοδρότητα ζημιών, και χαρτοφυλάκια που λειτουργούν αντίστροφα, εμφανίζουν χαμηλή συχνότητα ζημιών αλλά μεγάλη σφοδρότητα ζημιών, κάνοντας συνάμα την παραδοχή της διατήρησης σταθερού του περιθωρίου ασφαλείας (security loading) και των ασφαλίστρων (premiums) και για τα δύο χαρτοφυλάκια. Μέσα από την παρούσα εργασία αναδεικνύεται τόσο η συσχέτιση της θεωρίας χρεοκοπίας με την κεφαλαιακή επάρκεια και τη φερεγγυότητα μια ασφαλιστικής εταιρίας, όσο κι η σημασία της στο σύγχρονο τρόπο διαχείρισης κινδύνων (risk management) και κατ’ επέκταση στη λήψη αποφάσεων (decision making). Τέλος, γίνεται αναφορά και στο ευρωπαϊκό κανονιστικό πλαίσιο της Φερεγγυότητας ΙΙ (Solvency II). Η εργασία διαρθρώνεται σε πέντε κεφάλαια, όπου ξεκινά με εισαγωγικά θεωρητικά θέματα, προχωρά σε μεθοδολογικές λεπτομέρειες κι ανάλυση αριθμητικών εφαρμογών, και καταλήγει στη συσχέτιση και την αναγκαιότητα εφαρμογής της θεωρίας χρεοκοπίας αναφορικά με την κεφαλαιακή επάρκεια, τη φερεγγυότητα και τη διαχείριση κινδύνων.

Abstract

Risk theory and ruin probabilities have been a field of research from Lundberg's era to contemporary times. The ruin theory provides the mathematical basis for the study of insurance risks and the probability of ruin of an insurance portfolio. According to the risk theory, the calculation of the ruin probability provides a measure of the insurance portfolio's solvency. This dissertation delves into the study of ruin probabilities through their comparative analysis across diverse insurance portfolios, that present different claims distributions, aiming to find the highest ruin probability, thus identifying the portfolio with the greatest risk exposure. Specifically, are examined portfolios with high claim frequency but low severity, contrasted with those exhibiting low claim frequency but high severity, maintaining fixed security loading and premiums for both portfolios. This dissertation highlights the correlation of ruin theory with the capital adequacy and solvency of an insurance company, as well as the importance of this theory in modern risk management practices and decision-making processes. Furthermore, an overview of the Solvency II regulatory framework is incorporated. The dissertation is structured into five chapters, starting with foundational theoretical concepts, proceeding to methodological details and numerical application analysis, and concluding with the integral role of ruin theory in capital adequacy, solvency and effective risk management within the insurance industry.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Πινάκων

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η θεωρία κινδύνων (risk theory) κι ειδικότερα οι πιθανότητες χρεοκοπίας (ruin probabilities) θεωρούνται παραδοσιακά κομμάτι των ασφαλιστικών μαθηματικών, κι έχουν αποτελέσει ενεργό πεδίο έρευνας από την εποχή του Lundberg έως και σήμερα. Είναι ευρέως αποδεκτό ότι ο «τρόπος σκέψης» που πρεσβεύεται από τη θεωρία χρεοκοπίας (ruin theory), που αποτελεί την βάση της θεωρίας συλλογικού κινδύνου (collective risk theory), είναι σημαντικός για τη σύγχρονη διαχείριση κινδύνων (risk management). Η θεωρία χρεοκοπίας παρέχει τη μαθηματική βάση για τη μελέτη ασφαλιστικών κινδύνων και της πιθανότητας χρεοκοπίας ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου. Στην παρούσα εργασία, η θεωρία χρεοκοπίας (ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου), διαδραματίζει σημαντικό ρόλο.

Σύμφωνα με τη θεωρία κινδύνων, ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας παρέχει ένα μέτρο μέτρησης της φερεγγυότητας (solvency) ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου. Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη ενός προβλήματος που έχει απασχολήσει τους ερευνητές, και κατ’ επέκταση τους αναλογιστές, τα τελευταία χρόνια. Το πρόβλημα αυτό αφορά την εύρεση του πιο ριψοκίνδυνου χαρτοφυλακίου, δηλαδή εκείνου που διατηρεί τη μεγαλύτερη πιθανότητα χρεοκοπίας, συγκριτικά πάντα ανάμεσα σε δύο χαρτοφυλάκια.
Τα δύο αυτά χαρτοφυλάκια εμφανίζουν τα εξής κύρια χαρακτηριστικά, το πρώτο χαρτοφυλάκιο παρουσιάζει υψηλή συχνότητα εμφάνισης ζημιών αλλά χαμηλή σφοδρότητα ζημιών, ενώ το δεύτερο χαρτοφυλάκιο λειτουργεί αντίστροφα, δηλαδή παρουσιάζει χαμηλή συχνότητα εμφάνισης ζημιών αλλά μεγάλη σφοδρότητα ζημιών. Στις παραδοχές μας συμπεριλαμβάνεται η διατήρηση σταθερού περιθωρίου ασφαλείας (security loading) και ασφαλίστρων (premiums) και για τα δύο χαρτοφυλάκια. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη μελέτη και τη συγκριτική ανάλυση των πιθανοτήτων χρεοκοπίας, μπορούν να αξιοποιηθούν για την αποτελεσματικότερη διαχείριση του κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου και ως εκ τούτου στη λήψη αποφάσεων (decision-making), αναφορικά με τις στρατηγικές που θα ακολουθηθούν από την ασφαλιστική εταιρία για τη μείωση του κινδύνου χρεοκοπίας και την αύξηση της φερεγγυότητάς τους.

Η παρούσα εργασία αποτελείται από πέντε κεφάλαια. Το πρώτο Κεφάλαιο είναι το παρόν κι έχει ως στόχο αφενός να συστήσει στον αναγνώστη τις έννοιες της θεωρίας κινδύνων, της θεωρίας χρεοκοπίας, των πιθανοτήτων χρεοκοπίας, του ριψοκίνδυνου χαρτοφυλακίου, της διαχείρισης κινδύνων και της φερεγγυότητας, κι αφετέρου να αναφέρει τον κύριο στόχο της εργασίας.
Το δεύτερο Κεφάλαιο αναφέρεται εκτενώς στη θεωρία χρεοκοπίας και στα κομμάτια που αυτή περικλείει, καθώς είναι σημαντικό να αποκτηθούν οι γνώσεις κι η εξοικείωση που απαιτείται με το αντικείμενο αυτό προτού φτάσουμε στα καίρια σημεία. Συγκεκριμένα, εισάγεται το συλλογικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνων και το κλασικό

μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων, στο οποίο και θα βασιστούμε για τη συγκριτική ανάλυση των πιθανοτήτων χρεοκοπίας που θα συναντήσουμε παρακάτω.

Στο τρίτο Κεφάλαιο αναφέρονται οι μεθοδολογίες που μπορούν να ακολουθηθούν προκειμένου να υπολογίζεται η πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω συγκεκριμένου τύπου για τη συνάρτηση $\psi(u)$, για συγκεκριμένο αρχικό αποθεματικό u. Οι μεθοδολογίες που παρατίθενται είναι δύο, εξετάζονται υπό το πρίσμα του κλασικού μοντέλου και μόνο, κι αφορούν τις περιπτώσεις εκείνες όπου τα ύψη των αποζημιώσεων ακολουθούν συνδυασμό εκθετικών κατανομών, συνδυασμό Γάμμα κατανομών και συνδυασμό Erlang με εκθετικές κατανομές. Η πρώτη μεθοδολογία αφορά τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi(u)$ μέσω της συνάρτησης κατανομής της μέγιστης σωρευτικής απώλειας L, ενώ η δεύτερη μεθοδολογία περιγράφηκε από τους Gerber, Goovaerts και Kaas (1987) κι αφορά ακριβείς τύπους υπολογισμού για τις αποζημιώσεις που ακολουθούν μίξη εκθετικών και γάμμα κατανομών όπως προαναφέραμε λίγο παραπάνω.

Στο τέταρτο Κεφάλαιο αρχικά αναφέρεται η διάταξη πιθανοτήτων χρεοκοπίας για την περίπτωση ανέλιξης πλεονάσματος με διάχυση, καθώς και τα αποτελέσματα αυτής. Η έρευνα αυτή διεξήχθη από τον Cary Chi-Liang Tsai (2009) σε επίπεδο θεωρητικών εφαρμογών και παρουσιάστηκε σε δημοσιευμένο άρθρο του. Έπειτα παρατίθενται οι αριθμητικές εφαρμογές που υπολογίζουν και μελετούν τις πιθανότητες χρεοκοπίας συναρτήσει της ανέλιξης πλεονάσματος $U(t)$ για το κλασικό μοντέλο. Μελετώνται πέντε εφαρμογές όπου τα αριθμητικά τους αποτελέσματα υποστηρίζονται από το πρόγραμμα αλγεβρικών υπολογισμών Mathematica, καθώς σε ορισμένες περιπτώσεις δε θα ήταν εφικτός ο υπολογισμός των πιθανοτήτων χρεοκοπίας. Στην πρώτη εφαρμογή υπολογίζονται και συγκρίνονται οι πιθανότητες χρεοκοπίας για δύο χαρτοφυλάκια όπου η κατανομή αποζημιώσεων και των δύο είναι η Εκθετική. Η δεύτερη αριθμητική εφαρμογή υπολογίζει και συγκρίνει πιθανότητες χρεοκοπίας για δύο χαρτοφυλάκια όπου στο πρώτο η κατανομή αποζημιώσεων είναι η εκθετική και στο δεύτερο ένας συνδυασμός εκθετικών κατανομών. Στην τρίτη εφαρμογή υπολογίζονται και συγκρίνονται οι πιθανότητες χρεοκοπίας για δύο χαρτοφυλάκια όπου η κατανομή αποζημιώσεων και των δύο είναι μίξεις εκθετικών κατανομών. Η τέταρτη εφαρμογή υπολογίζει και συγκρίνει πιθανότητες χρεοκοπίας για δύο χαρτοφυλάκια όπου στο πρώτο η κατανομή αποζημιώσεων είναι η Erlang και στο δεύτερο η εκθετική κατανομή. Τέλος, στην πέμπτη αριθμητική εφαρμογή υπολογίζονται και συγκρίνονται οι πιθανότητες χρεοκοπίας για δύο χαρτοφυλάκια όπου στο πρώτο η κατανομή αποζημιώσεων είναι μια μίξη Erlang κατανομών και στο δεύτερο η εκθετική κατανομή. Επιπλέον, γίνεται μία σύντομη αναφορά στο σημαντικό μετασχηματισμό Laplace που χρησιμοποιείται για την εύρεση των πιθανοτήτων χρεοκοπίας.

Στο πέμπτο Κεφάλαιο επιχειρείται να εξεταστεί η συσχέτιση κι η αναγκαιότητα της θεωρίας χρεοκοπίας αναφορικά με την κεφαλαιακή επάρκεια, τη φερεγγυότητα και τη διαχείριση κινδύνων μιας ασφαλιστικής εταιρίας. Επιπλέον, αναφέρεται το κανονιστικό πλαίσιο Φερεγγυότητα ΙΙ (*Solvency II*), του Ευρωπαϊκού Κοινοβουλίου και Συμβουλίου (2009), που επηρεάζει τη λειτουργικότητα των ασφαλιστικών εταιριών.

□

Κεφάλαιο 2

Θεωρία Χρεοκοπίας

2.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα αναφέρουμε την έννοια της χρεοκοπίας, τον τεχνικό αυτό όρο που χρησιμοποιείται διεθνώς ως ένα μέτρο φερεγγυότητας (solvency) ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου, υπό το πρίσμα της μελέτης των ασφαλιστικών κινδύνων. Η θεωρία χρεοκοπίας μελετά τις εισροές και εκροές χρηματικών ποσοτήτων, δηλαδή τα έσοδα και έξοδα, όπως αυτές μεταβάλλονται στο χρόνο.
Κατ' επέκταση η θεωρία χρεοκοπίας (ruin theory) συνδέεται άρρηκτα με την θεωρία συλλογικού κινδύνου (collective risk theory), που αποτελεί την βάση αυτής.
Συνεπώς, προκειμένου να κατανοήσουμε καλύτερα κι εις βάθος την έννοια της χρεοκοπίας, θα κάνουμε μία σύντομη αναδρομή στο συλλογικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνων.

2.2 Το συλλογικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνων

Το συλλογικό πρότυπο, που επιχειρούμε να εξετάσουμε με συνοπτικό και περιεκτικό τρόπο, αποτελεί ένα από τα πιο σημαντικά μοντέλα στη θεωρία κινδύνων, αλλά και στην αναλογιστική επιστήμη.
Εδώ μελετώνται οι συνολικές απαιτήσεις όπου θα χρειαστεί να καταβάλει η ασφαλιστική εταιρία προς τους ασφαλισμένους ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου (π.χ. χαρτοφυλάκιο ζημιών οχημάτων), αρχικά σε ένα συγκεκριμένο σταθερό χρονικό διάστημα, φέρ' ειπείν ένα έτος.

Συνεπώς, ορίζουμε το μέγεθος S ως το συνολικό ποσό των αποζημιώσεων που θα καταβάλει η εταιρία στους ασφαλισμένους.

Η μελέτη των συνολικών αυτών απαιτήσεων έγκειται στην εκτίμηση αυτών. Στην προσπάθειά μας να εκτιμήσουμε την ποσότητα αυτή συναντάμε δύο ποσότητες άγνωστες, που εμπεριέχουν αβεβαιότητα:

1. Το πλήθος των ζημιών (απαιτήσεων)
2. Το μέγεθος αυτών των ζημιών

Εφόσον οι τιμές των ποσοτήτων αυτών είναι άγνωστες ως προς εμάς, παριστάνονται με μια τυχαία μεταβλητή η καθεμία.

Ειδικότερα, οι υποθέσεις που ορίζουμε για το συλλογικό πρότυπο και οι συμβολισμοί που χρησιμοποιούμε είναι οι παρακάτω:

1. Τη διακριτή τυχαία μεταβλητή N, που αναπαριστά το συνολικό πλήθος των απαιτήσεων που λαμβάνει η εταιρία, για το χρονικό διάστημα που εξετάζουμε. Λαμβάνει τιμές στο σύνολο {0,1,2,…}, δηλαδή η τ.μ. N είναι πάντοτε μια μη-αρνητική ακέραια τ.μ.

2. Τις τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots$ που συμβολίζουν τα μεγέθη των απαιτήσεων. Οι X_i *(το ύψος των ατομικών απαιτήσεων)* είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, δηλαδή ακολουθούν την ίδια διακριτή ή συνεχή κατανομή F.

Είναι εύλογο λοιπόν οι συνολικές απαιτήσεις S να δίνονται από τη σχέση

$$S = \begin{cases} X_1 + X_2 + \cdots + X_N = \sum_{i=1}^{N} X_i, & \text{αν } N \geq 1 \\ 0, & \text{αν } N = 0 \end{cases}$$

Από την παραπάνω σχέση διαπιστώνουμε ότι η S είναι μία ***σύνθετη τυχαία μεταβλητή***, δηλαδή μπορεί να είναι είτε διακριτή, είτε συνεχής, είτε μικτού τύπου τ.μ., καθώς μπορεί να λάβει συγκεκριμένες τιμές $\chi_1, \chi_{2,} \ldots, \chi_\nu$ ενώ συγχρόνως μπορεί να λάβει τιμές σε ένα (συνεχές) διάστημα.

Η F αποτελεί την κοινή συνάρτηση κατανομής των απαιτήσεων X_i, κι η συνάρτηση πιθανότητας του πλήθους των απαιτήσεων N είναι

$$p_n = P(N = n), \qquad n = 0,1,2, \ldots$$

2.3 Εισαγωγή στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων

Το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων εισήχθη το 1903, στη διατριβή του Σουηδού αναλογιστή Filip Lundberg. Ωστόσο αξίζει να σημειωθεί και η σημαντική συμβολή του Σουηδού στατιστικού και αναλογιστή Harald Cramér, που χρησιμοποίησε για πρώτη φορά τις στοχαστικές ανελίξεις για τη μοντελοποίηση των απαιτήσεων που έφταναν σε μια ασφαλιστική εταιρία.
Το κύριο αντικείμενο μελέτης της χρεοκοπίας θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι αποτελεί γενίκευση του συλλογικού προτύπου, στο οποίο αναφερθήκαμε προηγουμένως.

Ωστόσο είναι σημαντικό να αποσαφηνίσουμε τη διαφορά μεταξύ του κλασικού μοντέλου και του συλλογικού προτύπου.

Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων μελετώνται:

- Τα έξοδα (αποζημιώσεις) και τα έσοδα (ασφάλιστρα) ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου

- Ο τρόπος με τον οποίο αυτές οι δύο ποσότητες αλληλοεπιδρούν και μεταβάλλονται στην πορεία του χρόνου

Ο χρόνος στον οποίο μελετάμε τη χρεοκοπία, δηλαδή το χρονικό πλαίσιο στο οποίο μελετώνται από κοινού τα έσοδα και τα έξοδα της εταιρίας, μπορεί να είναι συνεχής ή διακριτός, άπειρος ή πεπερασμένος.

Στην παρούσα εργασία θα επικεντρωθούμε στη μελέτη της χρεοκοπίας *σε άπειρο και συνεχή χρόνο*, καθότι έχει αποτελέσει αντικείμενο μεγαλύτερου ενδιαφέροντος και μελέτης για τους ερευνητές, λόγω της ευκολότερης διαχείρισης του προβλήματος της χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο παρά σε πεπερασμένο.

Το κλασικό πρότυπο της θεωρίας των κινδύνων, όπως αναπτύχθηκε από τους Lundberg και Cramér, αναφέρεται σε συνεχή χρόνο.

Στην μελέτη του προβλήματος της χρεοκοπίας διατηρούμε ως βασικό εργαλείο μια κατάλληλη στοχαστική ανέλιξη, πιο συγκεκριμένα τη *στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος*. Κι αυτό διότι συναντάμε την ύπαρξη της αβεβαιότητας, τουλάχιστον σε σχέση με τα έξοδα (απαιτήσεις) που προκύπτουν στην εταιρία, κι εφόσον τόσο τα έξοδα όσο και τα έσοδα μελετώνται διαχρονικά.

2.3.1 Στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος

Η έννοια της στοχαστικής ανέλιξης χρησιμοποιείται για τη μελέτη των στοιχείων (εσόδων – εξόδων) εκείνων που έχουν *τυχαίο μέγεθος* και εμφανίζονται με *τυχαίο ρυθμό*. Τέτοιου είδους μεγέθη συναντάμε τόσο σε χαρτοφυλάκια ασφαλιστικών εταιριών όσο και διαφόρων χρηματοοικονομικών υπηρεσιών.

Προκειμένου να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια της στοχαστικής ανέλιξης θα υποθέσουμε ότι μελετάμε το χαρτοφυλάκιο μια ασφαλιστικής εταιρίας.
Μια ασφαλιστική εταιρία είναι υπεύθυνη για την ανάληψη κινδύνων, μέσω της σύναψης ασφαλιστηρίων συμβολαίων, έναντι προκαθορισμένων ασφαλίστρων που καταβάλλουν οι ασφαλιζόμενοι. Σε περίπτωση που επέλθει ένας ή περισσότεροι κίνδυνοι, η εταιρία υποχρεούται να καταβάλει στον ασφαλισμένο την αποζημίωση (απαίτηση) που περιγράφεται στους όρους των καλύψεων του συμβολαίου. Για τον λόγο αυτό η εταιρία θα πρέπει να διαθέτει κατάλληλο αποθεματικό, έστω u.

Όπως είχαμε αναφέρει παραπάνω, στο συλλογικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνων, χρησιμοποιούμε τη σύνθετη τυχαία μεταβλητή $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, που περιγράφει τις συνολικές απαιτήσεις των ασφαλισμένων προς την ασφαλιστική εταιρία, σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα $[0, t]$.

Στη θεωρία χρεοκοπίας οι συνολικές αυτές απαιτήσεις *εξελίσσονται στο χρόνο*. Συνεπώς, για να περιγραφεί το συνολικό μέγεθος των αποζημιώσεων χρησιμοποιούμε, όχι μία τυχαία μεταβλητή, αλλά την παρακάτω στοχαστική ανέλιξη

$$\{S(t):\ t \geq 0\}$$

Συγκεκριμένα, το πλήθος των αποζημιώσεων N (διακριτή τ.μ.) αντικαθίσταται από την απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη

$$\{N(t):\ t \geq 0\},$$

η οποία εξακολουθεί να εκφράζει τον αριθμό των ζημιών στο διάστημα $[0, t]$ και είναι ανεξάρτητη των τυχαίων μεταβλητών X_i, $\forall i$.
Η $N(t)$ ως απαριθμήτρια ανέλιξη λαμβάνει ακέραιες και μη αρνητικές τιμές.

Μπορούμε τώρα να γράψουμε τη στοχαστική ανέλιξη των συνολικών απαιτήσεων, δηλαδή εξόδων, ως μία *σύνθετη στοχαστική ανέλιξη*, ως κάτωθι

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i & \text{αν } N(t) \geq 1 \\ 0, & \text{αν } N(t) = 0 \end{cases} \qquad (2.3.1)$$

η οποία ορίζεται $\forall t \geq 0$.

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί πως η $\{N(t):\ t \geq 0\}$ είναι μια ανέλιξη Poisson, κι ως εκ τούτου η $\{S(t):\ t \geq 0\}$ είναι μία **σύνθετη ανέλιξη Poisson**.

Παρατήρηση

Η *ανέλιξη Poisson* είναι η απλούστερη μορφή μιας στοχαστικής ανέλιξης Markov κι αποτελεί μια απαριθμήτρια ανέλιξη[1]. Αυτού του τύπου οι ανελίξεις χρησιμοποιούνται για να αποτυπώσουν πόσες φορές έχει συμβεί μέσα στο χρόνο ένα γεγονός που μας ενδιαφέρει. *(Πολίτης Κ. (2012))*

[1] Δηλαδή είναι μια αύξουσα ανέλιξη με πιθανότητα ένα, όπου λαμβάνει ακέραιες και μη αρνητικές τιμές.

Ο ορισμός μιας ανέλιξης Poisson είναι ο κάτωθι.

Ορισμός 2.3.1. Η στοχαστική ανέλιξη $\{N(t):\ t \geq 0\}$ λέγεται **ανέλιξη Poisson** όταν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

i) Η $\{N(t):\ t \geq 0\}$ είναι μία απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη και $N(0) = 0$.

ii) Για ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα πλάτους h, μπορεί να συμβεί το πολύ ένα γεγονός, με πιθανότητα να συμβεί αυτό το γεγονός ανάλογη με το πλάτος του διαστήματος. Μαθηματικά μπορούμε να το εκφράσουμε ως εξής:

$$Pr(N(t+h) = n+k | N(t) = n) = \begin{cases} \lambda h + o(h)^2 & k = 1 \\ 1 - \lambda h + o(h) & k = 0 \\ o(h) & k \geq 2 \end{cases}$$

*Το λ που εμφανίζεται στην παραπάνω σχέση αποτελεί μια θετική σταθερά που ονομάζεται **ένταση ή ρυθμός** (rate) της ανέλιξης Poisson.*

iii) Η τυχαία μεταβλητή $N(u) - N(s)$ είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής $N(t)$, για κάθε $t \leq s < u$. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός των γεγονότων που εμφανίστηκαν σε ένα φραγμένο διάστημα μετά τη χρονική στιγμή t είναι **ανεξάρτητος** από τον αριθμό των γεγονότων που εμφανίστηκαν μέχρι αυτή τη χρονική στιγμή. Η *έλλειψη μνήμης (memoryless)* είναι χαρακτηριστικό γνώρισμα της ανέλιξης Poisson.[3]

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφέρουμε ότι στη διεθνή βιβλιογραφία η *ανέλιξη Poisson ορίζεται ισοδύναμα* κι ως εξής:

Η απαριθμήτρια ανέλιξη $N(t)$ είναι μία ανέλιξη Poisson αν, για κάποιο $\lambda > 0$ που καλείται ένταση της ανέλιξης, οι προσαυξήσεις της ανέλιξης έχουν την ακόλουθη ιδιότητα:

$$N(t+h) - N(t) \sim Poisson(\lambda h),$$

για όλα τα $t > 0, h > 0$ *και για κάθε* $N(s),\ s \leq t$.

Ως εκ τούτου οι προσαυξήσεις σε μια ανέλιξη Poisson έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

i) **Ανεξαρτησία**: οι προσαυξήσεις $N(t_i + h_i) - N(t_i)$ είναι ανεξάρτητες για διαφορετικά διαστήματα $(t_i, t_i + h)$, $i = 1,2, \ldots$

ii) **Σταθερότητα**: η $N(t+h) - N(t)$ ακολουθεί κατανομή $Poisson(\lambda h)$, $\forall t$

[2] Εδώ η ποσότητα $o(h)$ συγκλίνει στο 0 πιο γρήγορα από ότι το h καθώς $h \to 0$.

[3] Πλεονέκτημα του χαρακτηριστικού αυτού είναι η μαθηματική απλότητα, ωστόσο συχνά δεν είναι ρεαλιστικό.

Τα συνολικά ασφάλιστρα εισρέουν στην εταιρία με συνεχή τρόπο για το χρονικό διάστημα $[0, t]$ και είναι $P(t)$.

Μια υπόθεση που κάνουμε είναι ότι τα ασφάλιστρα είναι προκαθορισμένα από την ασφαλιστική εταιρία, κι ως εκ τούτου δεν μεταβάλλονται ως προς την εξέλιξή τους στην πορεία του χρόνου, γι' αυτό η $P(t)$ είναι αύξουσα και ντετερμινιστική συνάρτηση.

Ακόμη, θα πρέπει να τονιστεί ότι η ασφαλιστική εταιρία προκειμένου να ανταπεξέλθει στην επέλευση μεγάλου ζημιογόνου συμβάντος στην αρχή της λειτουργίας του χαρτοφυλακίου, έχει ορίσει ένα *αποθεματικό* ίσο με u.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2.3.2. Η στοχαστική ανέλιξη, $\{U(t)\colon\ t \geq 0\}$, καλείται ως **στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος** *(surplus process)*, ορίζεται για $\forall t \geq 0$ και δίνεται από τη σχέση

$$U(t) = u + P(t) - S(t) \tag{2.3.2}$$

όπου

- u = αρχικό αποθεματικό του χαρτοφυλακίου
- $P(t)$ = τα συνολικά ασφάλιστρα που λαμβάνει η ασφαλιστική εταιρία στο διάστημα $[0, t]$ (έσοδα)
- $S(t)$ = οι συνολικές απαιτήσεις που καλείται να καλύψει η εταιρία στο διάστημα $[0, t]$ (έξοδα)

Το $U(t)$ είναι η τιμή του πλεονάσματος ή αποθεματικού τη χρονική στιγμή t.

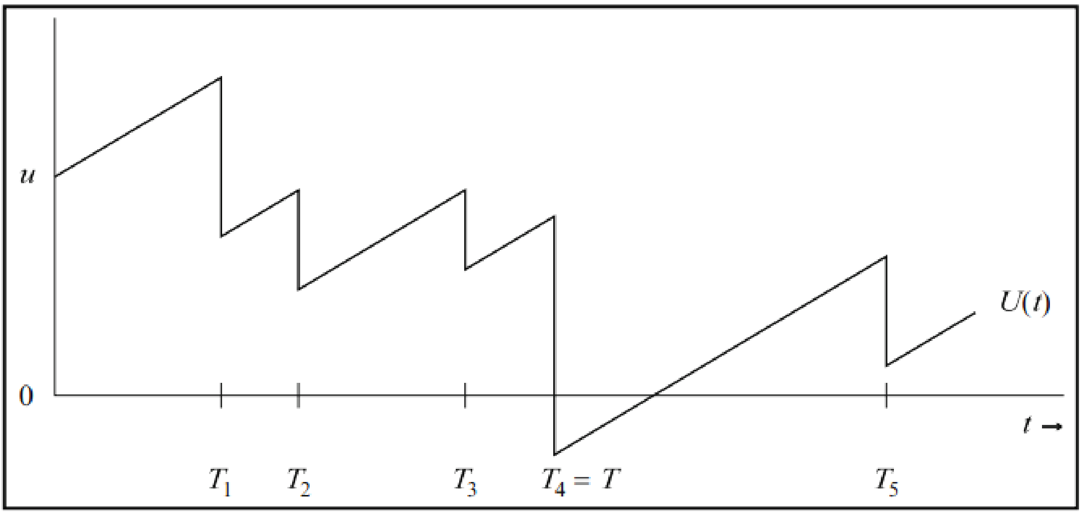
Αξίζει δε να σημειωθεί ότι το $U(0) = u$ είναι το **αρχικό αποθεματικό** ή αρχικό πλεόνασμα *(initial surplus).*

Να αναφέρουμε επίσης ότι στο κλασικό μοντέλο που εξετάζουμε, το **σύνολο των ασφαλίστρων**, που εκφράζει η $P(t)$ στο χρονικό διάστημα $[0, t]$, είναι ίσο με ct.

Συνεπώς, η

$$P(t) = ct, \forall t$$

είναι μία γραμμική συνάρτηση, όπου c μια θετική σταθερά.



Σχήμα 2.1: Ανέλιξη πλεονάσματος. Kaas et al. (2008)

Το Σχήμα 2.1 παρουσιάζει τη μεταβολή του πλεονάσματος με την πάροδο του χρόνου, δηλαδή την ανέλιξη πλεονάσματος στο κλασικό μοντέλο.

Θα ήταν χρήσιμο στο σημείο αυτό να αναφέρουμε ότι η $S(t)$ και η $U(t)$ θεωρούνται ως τυχαίες μεταβλητές για μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή t. Επομένως ορθώς μιλάμε για τη μέση τιμή τους, διακύμανση, ροπογεννήτρια κλπ.

Στον Ορισμό 2.3.2. αναφορικά με την ανέλιξη πλεονάσματος, αναφερθήκαμε σε υποθέσεις που παρουσιάζουν με απλότητα τον πραγματικό τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται το πλεόνασμα στον χρόνο, εντός ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου, προκειμένου να διευκολυνθεί η μελέτη της ανέλιξης $\{U(t):\ t \geq 0\}$.

Η πραγματικότητα διαφέρει από αυτό που συναντήσαμε παραπάνω, καθώς η έννοια της αβεβαιότητας συναντάται στα έσοδα της εταιρίας. Επιπλέον δε μπορούμε επ' ουδενί να θεωρήσουμε πως τα έσοδα της εταιρίας προέρχονται μόνο από τα ασφάλιστρα[4].

Μία ρεαλιστικότερη προσέγγιση του πλεονάσματος τη χρονική στιγμή t είναι η παρακάτω

$$U(t) = u + P(t) + I(t) - S(t), \quad t \geq 0 \qquad (2.3.3)$$

όπου $I(t)$ θεωρούμε τα έσοδα των επενδύσεων της εταιρίας στο χρονικό διάστημα $[0, t]$.

[4] Η άμεση καταβολή των αποζημιώσεων αποτελεί μια ακόμη μη ρεαλιστική υπόθεση.

Παρατηρούμε λοιπόν πως η παραπάνω σχέση (2.3.3) ελάχιστα διαφέρει από τον Ορισμό 2.3.1, καθώς μπορεί να γραφεί με την παρακάτω μορφή

$$U(t) = u + \tilde{P}(t) - S(t), \quad t \geq 0$$

όπου $\tilde{P}(t) = P(t) + I(t)$ το σύνολο των εσόδων που έχει η εταιρία στο διάστημα $[0, t]$.

Αξίζει ακόμη να αναφέρουμε πως αν για κάθε διαφορετικό t η ποσότητα $I(t)$ θεωρείται μία τυχαία μεταβλητή, γεγονός που εκφράζει την αβεβαιότητα που εμπεριέχεται στο επενδυόμενο ποσό, η ανάλυση που απαιτείται περιπλέκεται περεταίρω. Συνεπώς, από εδώ και στο εξής για τον *υπολογισμό του πλεονάσματος* της εταιρίας θα χρησιμοποιούμε τη σχέση (2.3.2), όπως αυτή περιγράφεται στον παραπάνω Ορισμό 2.3.2.

2.3.2 Το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων

Στην προηγούμενη παράγραφο εξετάσαμε την έννοια της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος, την οποία και θα αξιοποιήσουμε ώστε να εισάγουμε τον *ορισμό* του *κλασικού μοντέλου* της Θεωρίας Κινδύνων. Συνεχίζοντας με τις επόμενες παραγράφους θα συναντήσουμε και θα μελετήσουμε μία νέα σημαντική ποσότητα, αυτή της *πιθανότητας χρεοκοπίας*.

Προτού προχωρήσουμε στον ορισμό του κλασικού μοντέλου της Θεωρίας Κινδύνων, υπενθυμίζουμε πως διατηρούμε την υπόθεση ότι το πλεόνασμα της ασφαλιστικής εταιρίας τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση (2.3.2) και οι συνολικές απαιτήσεις στο διάστημα $[0, t]$ υπολογίζονται από τη σχέση (2.3.1).

(Πολίτης Κ. (2012), Kaas et al. (2008))

Ορισμός 2.3.2. Αν σε μια στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος $\{U(t): \ t \geq 0\}$ ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις:

i) $P(t) = ct$, για κάποιο $c > 0$ και $t \geq 0$, δηλαδή η $P(t)$ είναι μία *γραμμική συνάρτηση* του χρόνου

ii) Οι τυχαίες μεταβλητές X_i, που εκφράζουν το μέγεθος των αποζημιώσεων, είναι *θετικές, ανεξάρτητες και ισόνομες* με κοινή συνάρτηση κατανομής $F(x) = Pr(X \leq x)$ και n-τάξης ροπή της F γύρω από το μηδέν, δηλαδή $\mu_n = E(X_n) = \int_0^\infty x^n \, dF(x)$, για $n = 0,1,2, \ldots$, και είναι επίσης *ανεξάρτητες* από τον *αριθμό των αποζημιώσεων* $N(t)$ σε ένα διάστημα.

iii) Η απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη $\{N(t)\colon\ t \geq 0\}$ είναι μια ανέλιξη Poisson, έτσι ώστε η $\{S(t)\colon\ t \geq 0\}$ να είναι μία σύνθετη ανέλιξη Poisson,

τότε μιλάμε για το **κλασικό μοντέλο** της Θεωρίας Κινδύνων ή αλλιώς **μοντέλο Cramér-Lundberg**.

Παραπάνω αναφέραμε τη σχέση $P(t) = ct$ από την οποία προκύπτει κι ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 2.3.3. Στο κλασικό μοντέλο η θετική σταθερά

$$c = \frac{P(t)}{t}\ , \tag{2.3.4}$$

εκφράζει το ασφάλιστρο που λαμβάνει η εταιρία στη μονάδα του χρόνου και ονομάζεται **ένταση του ασφαλίστρου** (premium rate).

Μια σημαντική υπόθεση που κάνουμε στο κλασικό μοντέλο είναι ότι

$$c > \lambda\mu_1 \tag{2.3.5}$$

όπου λ η ένταση της ανέλιξης Poisson, δηλαδή ο μέσος ρυθμός των αποζημιώσεων στην μονάδα του χρόνου και μ_1 η μέση αποζημίωση η οποία ορίζεται ως

$$\mu_1 = \int_0^\infty x f(x)dx = E(X_i)$$

(Πολίτης Κ. (2012), Cary Chi-Liang Tsai (2009), Δερμιτζάκης Β. (2011))

Στην παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος της εκφράζει τα αναμενόμενα έσοδα της ασφαλιστικής εταιρίας, ενώ το δεξιό μέλος δηλώνει τα αναμενόμενα έξοδα στη μονάδα του χρόνου.

Η συνθήκη (2.3.5) αναφέρεται ως **συνθήκη του καθαρού κέρδους** (net profit condition) καθώς εξασφαλίζει ότι τα *έσοδα* θα *υπερβαίνουν* κατά μέσο όρο τα *έξοδα* σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Κατ’ επέκταση θα μπορούσαμε να πούμε ότι η συνθήκη αυτή εξασφαλίζει την κερδοφορία του χαρτοφυλακίου και είναι αναγκαίο να ισχύει πάντα.

Πέραν τη συνθήκης (2.3.5) μία ασφαλιστική εταιρία επιδιώκει το κέρδος το οποίο κι επιτυγχάνεται μέσω της ασφάλισης του κινδύνου. Ένα ποσοτικό μέτρο φερεγγυότητας του χαρτοφυλακίου αποτελεί ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 2.3.4. Στο κλασικό μοντέλο ο συντελεστής

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1 \tag{2.3.6}$$

καλείται **περιθώριο ασφαλείας** ή συντελεστής ασφαλείας (premium loading factor) και εκφράζει το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους για την ασφαλιστική εταιρία.

Παρατήρηση

1. Μια σημαντική υπόθεση που κάναμε είναι η (2.3.5) από την οποία διαπιστώνουμε ότι το θ παίρνει πάντα θετικές τιμές

$$E(ct) > E\left(\sum_{i=0}^{N(t)} X_i\right)$$

$$\Rightarrow\ ct > \lambda\mu t$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\lambda\mu} - \ 1 > 0$$

2. Ο συντελεστής ασφαλείας, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω στον ορισμό, εκφράζει πόσο μεγαλύτερα είναι τα έσοδα από τα έξοδα σε ένα χαρτοφυλάκιο. Είναι εύλογο λοιπόν το θ να λαμβάνει στην πράξη τιμές μεταξύ 0 και 1 (ή από 0 έως 100% εφόσον εκφραστεί ως ποσοστό), καθώς είναι σημαντικό να υπάρχει ισορροπία μεταξύ της κερδοφορίας του χαρτοφυλακίου και της ανταγωνιστικότητας αυτού[5].

3. Το περιθώριο ασφαλείας θ μπορεί να καθοριστεί με ακρίβεια από την ασφαλιστική εταιρία. Επιπλέον η ένταση της ανέλιξης Poisson λ και η μέση τιμή των αποζημιώσεων μ_1 που χρειάζονται για τον υπολογισμό του θ μπορούν να εκτιμηθούν με παραμετρικές και μη-παραμετρικές μεθόδους.

(Πολίτης Κ. (2022), Πολίτης Κ. (2012), Δερμιτζάκης Β. (2011), Μαλαξιανάκης Δ. (2009))

Όπως αναφέραμε στην αρχή της παραγράφου μία πολύ σημαντική και ενδιαφέρουσα ποσότητα στην θεωρία χρεοκοπίας είναι η *πιθανότητα χρεοκοπίας*.

[5] Σε διαφορετική περίπτωση το κέρδος για την ασφαλιστική εταιρία από τα ασφάλιστρα θα ήταν τεράστιο κι ως εκ τούτου ασύμφορο για τον ασφαλιζόμενο να την επιλέξει.

2.3.3 Πιθανότητα Χρεοκοπίας

Στην αναλογιστική επιστήμη, και φυσικά στη θεωρία χρεοκοπίας, συναντάμε ένα βασικό πρόβλημα, αυτό του *υπολογισμού της* ***πιθανότητας χρεοκοπίας***. Το ενδεχόμενο να επέλθει η χρεοκοπία μελετάται στον ανάλογο χρονικό ορίζοντα. Εδώ η πιθανότητα χρεοκοπίας θα εξεταστεί σε άπειρο και συνεχή χρόνο, δηλαδή στο **κλασικό πρότυπο**. Συνεπώς, θεωρούμε ότι το χαρτοφυλάκιο υφίσταται τις ίδιες υποθέσεις για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα.
Στην παρούσα παράγραφο θα αναφέρουμε τον ορισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας, του συντελεστή προσαρμογής και θα μελετήσουμε συνοπτικά θεμελιώδη αποτελέσματα και τυχαίες μεταβλητές σχετικές με το φαινόμενο της χρεοκοπίας. Τέλος θα θέσουμε το θεωρητικό υπόβαθρο για τον υπολογισμό της *πιθανότητας χρεοκοπίας* μέσω της χρήσης προσεγγιστικών μεθόδων και φραγμάτων, για τις περιπτώσεις όπου ο ακριβής τύπος της πιθανότητα χρεοκοπίας δε μπορεί να βρεθεί αναλυτικά.
Συνεπακόλουθα στο επόμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας και θα την υπολογίσουμε μέσω αριθμητικών εφαρμογών.

Η **πιθανότητα χρεοκοπίας** (ανά χαρτοφυλάκιο) με αρχικό αποθεματικό u ορίζεται από την παρακάτω σχέση[6]

$$\psi(u) = Pr[U(t) < 0 \;για\; κάποιο\; t \geq 0 | U(0) = u] \tag{2.3.7}$$

Αντιλαμβανόμαστε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας υποδεικνύει πόσο φερέγγυο και κατ' επέκταση βιώσιμο είναι το κάθε χαρτοφυλάκιο.

(Πολίτης Κ. (2022), Πολίτης Κ. (2012))

Η πιθανότητα αυτή είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για το management της εκάστοτε ασφαλιστικής εταιρίας καθώς λειτουργεί ως δείκτης ευρωστίας της σχέσης μεταξύ ασφαλίστρων και αποζημιώσεων, σε σχέση πάντα με το αρχικό αποθεματικό $u = U(0)$. Μία μεγάλη πιθανότητα χρεοκοπίας αποτελεί ένα πρώτο δείγμα κινδύνου αναφορικά με τη σταθερότητα της εταιρίας και συνεπάγεται ότι άμεσα θα πρέπει να ληφθούν μέτρα αποφυγής του κινδύνου χρεοκοπίας (δια μέσω της κάλυψης των ζημιών μέσω αντασφάλισης, αύξησης των ασφαλίστρων, αναπλήρωσης της απώλειας από άλλο χαρτοφυλάκιο κ.α.).

Ωστόσο πρέπει να αναφέρουμε ότι ο όρος χρεοκοπία απέχει παρασάγγας από την κυριολεκτική χρεοκοπία της εταιρίας. Η πιθανότητα χρεοκοπίας ενισχύει τη συγκρισιμότητα των χαρτοφυλακίων σχετικά με τη φερεγγυότητά τους. Μία πραγματική χρεοκοπία μπορεί να απέχει ακόμη και αιώνες από την επέλευσή της. Είναι σημαντικό να θέσουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας αναφέρεται στον

[6] Στη σχέση αυτή πολλές φορές η δέσμευση παραλείπεται από το συμβολισμό και γράφουμε $\psi(u) = P[U(t) < 0 \;για\; κάποιο\; t \geq 0]$

ασφαλιστικό κίνδυνο κι όχι σε τυχόν λανθασμένες πρακτικές διαχείρισης ή λήψης αποφάσεων από την πλευρά του management.

Ανακαλώντας τη συνθήκη καθαρού κέρδους (2.3.5) και συνδυάζοντάς την με την πιθανότητα χρεοκοπίας, που αναφέραμε παραπάνω, προκύπτει το κάτωθι αποτέλεσμα:

$$\text{Αν } c \leq \lambda\mu_1 \ \ \textit{τότε} \ \ \psi(u) = 1, \forall u \geq 0$$

Αυτό σημαίνει ότι αν κάθε χρονική στιγμή έχω μικρότερα έσοδα από τα αναμενόμενα έξοδα, όσο μεγάλο αποθεματικό και να έχω το αποτέλεσμα παραμένει αμετάβλητο, δηλαδή η χρεοκοπία είναι βέβαιη.

Επιπλέον η ψ είναι φθίνουσα συνάρτηση του u, δηλαδή το μεγάλο αποθεματικό ελαχιστοποιεί την πιθανότητα χρεοκοπίας, και ισχύει ότι $\lim_{u\to\infty} \psi(u) = 0$.

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να ορίσουμε την πιθανότητα να μην προκύψει χρεοκοπία έχοντας αρχικό αποθεματικό u. Η **πιθανότητα μη χρεοκοπίας** $\delta(u)$ δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned}\delta(u) &= Pr(U(t) \geq 0, \quad \forall\, t\, |u) \\ &= Pr(u + P(t) - S(t) \geq 0, \quad \forall\, t\, |u) \\ &= 1 - \psi(u), \quad u \geq 0 \end{aligned} \qquad (2.3.8)$$

Η $\delta(u)$, σε αντίθεση με την ψ, είναι αύξουσα συνάρτηση του u και κατ' αντιστοιχία ισχύει ότι $\lim_{u\to\infty} \delta(u) = 1$. Παρατηρούμε επίσης ότι η δ είναι συνεχής από δεξιά.

Σύμφωνα λοιπόν με τις τρεις προαναφερθείσες ιδιότητες, η $\delta(u)$ θεωρείται *αθροιστική συνάρτηση κατανομής*. Συγχρόνως η $\delta(u)$ είναι μια μικτή κατανομή, καθώς $\delta(u) > 0$ (δηλαδή η πιθανότητα μη χρεοκοπίας όταν έχουμε μηδενικό αρχικό αποθεματικό u είναι θετική) και είναι συνεχής στο διάστημα $(0, \infty)$.

(Πολίτης Κ. (2022), Kaas et al. (2008), Δερμιτζάκης Β. (2011))

Μία ποσότητα ιδιαίτερα σημαντική για τη θεωρία χρεοκοπίας, αλλά και γενικά για τη θεωρία κινδύνων, αποτελεί ο ***συντελεστής προσαρμογής*** R (adjustment coefficient R) με τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2.3.5. Για τυχαίες μεταβλητές X_i, που εκφράζουν το μέγεθος των αποζημιώσεων, με μέση τιμή $E(X_i) = \mu_1 > 0,$ ο **συντελεστής προσαρμογής** R είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης (λύνοντας ως προς r)

$$M_X(r) = (1+\theta)\mu_1 r + 1 \qquad (2.3.9)$$

Η εξίσωση του συντελεστή προσαρμογής έχει μία και *μοναδική* θετική λύση.
Καθώς η ροπογεννήτρια συνάρτηση των τ.μ. X_i, $m_X(t)$ είναι κυρτή συνάρτηση αφού:

- $m_X''(t) = E(X^2 et^X) > 0$
- $m_X'(0) < (1+\theta)\mu_1$
- $m_X(t) \to \infty \ \ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\omega}\varsigma$

Εναλλακτικά, ο υπολογισμός του *συντελεστή προσαρμογής* γίνεται μέσω της παρακάτω εξίσωσης

$$\int_0^\infty e^{Rx}\, dH(x) = \frac{c}{\lambda\mu_1} = 1+\theta \qquad \textbf{\textit{εξίσωση του Lundberg}}$$

Αντικαθιστώντας την αθροιστική συνάρτηση κατανομής $H(x) = \frac{1}{\mu_1}\int_0^\chi \bar{F}\,(y)dy$ λαμβάνουμε

$$\frac{1}{\mu_1}\int_0^\infty e^{Rx}\,\bar{F}(x)dx = \frac{c}{\lambda\mu_1}$$

$$\int_0^\infty e^{Rx}\,\bar{F}(x)dx = \frac{c}{\lambda}$$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση, παίρνουμε

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{R}e^{Rx}\right)'\,\overline{F}(x)dx = \frac{c}{\lambda}$$

$$\left[\frac{1}{R}e^{Rx}\,\overline{F}(x)\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{R}e^{Rx}f(x)dx = \frac{c}{\lambda} \qquad (2.3.10)$$

Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} e^{Rx}\,\overline{F}(x) = 1$ και με βάση τον ορισμό της συνάρτησης κατανομής $H(x)$ προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to\infty} e^{Rx}\,\overline{F}(x) = 0$

Συνεπώς, λαμβάνουμε ότι

$$\left[\frac{1}{R}e^{Rx}\,\overline{F}(x)\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{R}$$

Στη σχέση (2.3.10) παρατηρούμε ότι ο δεύτερος όρος είναι η ροπογεννήτρια της κατανομής F των αποζημιώσεων πολλαπλασιασμένη επί $\frac{1}{R}$.

Καταλήγουμε λοιπόν στην παρακάτω ισοδύναμη σχέση όπου η **θετική** λύση αυτής της εξίσωσης (ως προς r) είναι ο **συντελεστής προσαρμογής**

$$-\frac{1}{R}+\frac{1}{R}M_X(R)=\frac{c}{\lambda} \tag{2.3.11}$$

Παρατήρηση

1. Αν η ροπογεννήτρια $M_X(R)$ απειρίζεται, δηλαδή $M_X(r)=\infty$ για κάθε $r>0$, τότε ο συντελεστής προσαρμογής *δεν υπάρχει.*[7] Καθίσταται σαφές ότι για τον υπολογισμό του συντελεστή προσαρμογής αναγκαία συνθήκη είναι να υπάρχει η ροπογεννήτρια του μεγέθους των αποζημιώσεων.

2. Στο κλασικό πρότυπο, όπως αναφέραμε παραπάνω, ο συντελεστής προσαρμογής υπάρχει, όμως όχι πάντα! Στις περιπτώσεις εκείνες όπου υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής, η τιμή του δε μπορεί πάντα να υπολογιστεί με ακρίβεια. Για τον λόγο αυτό είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε ένα φράγμα ή μία προσέγγιση για την τιμή του. Οι παρακάτω δυο νέες σχέσεις στις οποίες θα καταλήξουμε, αποτελούν ισοδύναμα φράγματα για το R.

   Από τη σχέση (2.3.11), πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη επί $R,$ προκύπτει η σχέση $\lambda+cR=\lambda M_X(R)$.

   Κάνοντας την υπόθεση ότι οι αποζημιώσεις έχουν πυκνότητα f λαμβάνουμε

$$\lambda+cR=\lambda\int_0^{\infty}e^{Rx}f(x)dx$$

$$\lambda+cR>\lambda\int_0^{\infty}\left(1+Rx+\frac{1}{2}R^2x^2\right)f(x)dx$$

$$>\lambda\left[\int_0^{\infty}f(x)dx+\int_0^{\infty}Rxf(x)dx+\int_0^{\infty}\frac{1}{2}R^2x^2f(x)dx\right]$$

$$>\lambda\left(1+R\mu_{1+}\frac{1}{2}R^2\mu_2\right)$$

[7] Σε αποζημιώσεις που ακολουθούν την κατανομή Pareto, τη λογαριθμοκανονική κατανομή και γενικά όλες εκείνες τις κατανομές με βαριά ουρά, ο συντελεστής προσαρμογής δεν υπάρχει.

Κατόπιν απλών υπολογισμών καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση

$$2(c - \lambda\mu_1)R > \lambda R^2 \mu_2$$

όπου λύνοντας ως προς R και λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο συντελεστής προσαρμογής παίρνει γνήσια θετικές τιμές, καταλήγουμε στο πρώτο φράγμα

$$R < \frac{2(c-\lambda\mu_1)}{\lambda\mu_2} \tag{2.3.12}$$

Ακόμη, από τον τύπο (2.3.6) προκύπτει η σχέση $c = (1+\theta)\lambda\mu_1$ όπου καταλήγουμε στο δεύτερο ισοδύναμο φράγμα για το R

$$R < \frac{2\theta\mu_1}{\mu_2} \tag{2.3.13}$$

(Kaas et al. (2008), Πολίτης Κ. (2022), Πολίτης Κ. (2012), Δερμιτζάκης Β. (2011))

Συντελεστής προσαρμογής για την *εκθετική κατανομή*

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η τ.μ. X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\beta = \frac{1}{\mu_1}$.

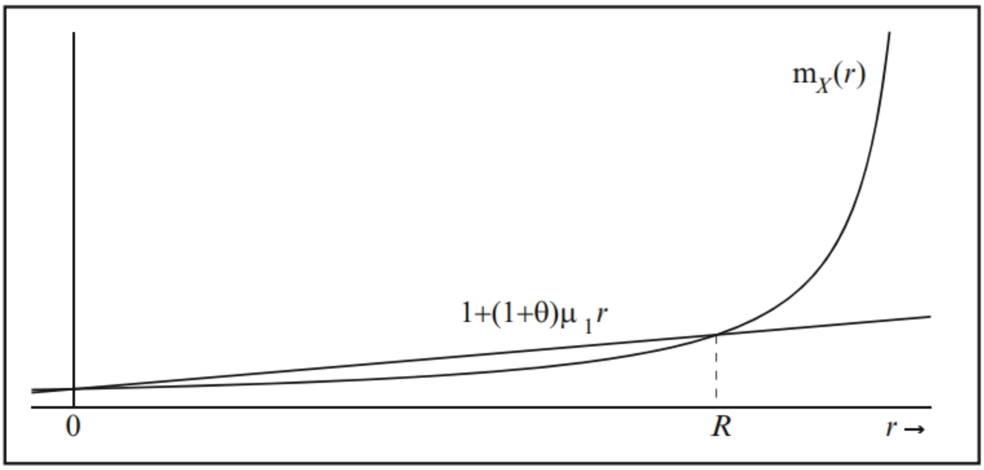
Ο αντίστοιχος συντελεστής προσαρμογής είναι η θετική λύση της παρακάτω σχέσης

$$(1+\theta)\mu_1 r + 1 = M_X(r) = \frac{\beta}{\beta - r} \tag{2.3.14}$$

Οι λύσεις της εξίσωσης είναι το $r = 0$ και

$$r = R = \frac{\theta\beta}{1+\theta} \tag{2.3.15}$$

Στο Σχήμα 2.2 που ακολουθεί εικονίζεται ο προσδιορισμός του συντελεστή προσαρμογής για την εκθετική κατανομή.



Σχήμα 2.2: Γραφική επίλυση του συντελεστή προσαρμογής. Kaas et al. (2008)

(Kaas et al. (2008))

Στο κλασικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνων συναντάμε **δύο θεμελιώδη αποτελέσματα** για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Τα αποτελέσματα αυτά είναι ιδιαιτέρως χρήσιμα αφενός γιατί μπορούν να γενικευτούν και κατ' επέκταση να αξιοποιηθούν σε άλλα γενικότερα μοντέλα χρεοκοπίας[8] και αφετέρου γιατί μας παρέχουν μια μερική γνώση της πιθανότητας χρεοκοπίας σε περιπτώσεις όπου δεν υπάρχει κάποιος ακριβής τύπος για τη συνάρτηση $\psi(u)$.

Η γνώση αυτή παρέχεται με τη μορφή φράγματος και πιο συγκεκριμένα ως ένα ***άνω φράγμα*** μέσω της **ανισότητας του Lundberg**, αλλά και με τη μορφή μιας ***προσέγγισης***[9] μέσω του **ασυμπτωτικού τύπου των Cramér-Lundberg**.

Θεώρημα 2.3.6. Στο κλασικό μοντέλο Θεωρίας Κινδύνων ή αλλιώς μοντέλο των Cramér-Lundberg, η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ ικανοποιεί την κάτωθι ανισότητα

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}, \text{ για κάθε } u \geq 0 \quad \textbf{ανισότητα του Lundberg} \quad (2.3.16)$$

Απόδειξη *(Η απόδειξη που ακολουθεί βασίζεται στη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής κι επιχειρείται να παρουσιαστεί με όσο το δυνατό πιο κατανοητό και συνοπτικό τρόπο.)*

[8] Φέρ' ειπείν σε αποζημιώσεις όπου δεν είναι ανεξάρτητες τ.μ. ή όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των αποζημιώσεων δεν είναι εκθετικοί.
[9] Όταν το αρχικό αποθεματικό u λαμβάνει μεγάλες τιμές.

Ας ορίσουμε ως $\psi_k(u)$, με $-\infty \le u \le +\infty$ και $k = 0, 1, 2, \ldots$, την πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία μέχρι την αποζημίωση k, δηλαδή κατά την k-οστή αποζημίωση ή πριν την k-οστή αποζημίωση.

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή ως προς k.

Αν $k \to \infty$ τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_k(u)$ αυξάνεται για όλα τα u. Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι $\psi_k(u) \le e^{-Ru}$ για κάθε k.

- Για $k = 0$ η παραπάνω ανισότητα ισχύει, αφού $\psi_0(u) = 1$ αν $u < 0$ και $\psi_0(u) = 0$ αν $u \ge 0$

Θα διαχωρίσουμε την πιθανότητα 'να συμβεί χρεοκοπία κατά την k-οστή αποζημίωση ή πριν την k-οστή αποζημίωση με βάση τον χρόνο και το μέγεθος της *πρώτης αποζημίωσης*.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι:

- οι απαιτήσεις φτάνουν στην ασφαλιστική εταιρία με ανέλιξη Poisson και η χρεοκοπία επέρχεται μεταξύ των χρονικών στιγμών t και $t + dt$, τότε η πιθανότητα ισούται με $\lambda e^{-\lambda t} dt$

- το μέγεθος της χρεοκοπίας βρίσκεται μεταξύ x και $x + dx$ με πιθανότητα $dP(x)$

Τότε το πλεόνασμα μετά τη χρονική στιγμή t είναι ίσο με $u + ct - x$.

Ολοκληρώνοντας ως προς x και t προκύπτει η πιθανότητα

$$\psi_k(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \psi_{k-1}(u + ct - x)\, dP(x) \lambda e^{-\lambda t} dt \qquad (2.3.17)$$

Ακόμη, ας υποθέσουμε ότι με βάση τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής ισχύει, για $k - 1$, ότι η $\psi_{k-1}(u) \le e^{-Ru}$ για όλα τα πραγματικά u.

Συνεπώς, οδηγούμαστε στην παρακάτω σχέση

$$\psi_k(u) \le \int_0^\infty \int_0^\infty exp\{-R(u + ct - x)\}\, dP(x) \lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda exp\{-t(\lambda + Rc)\} dt \int_0^\infty e^{Rx}\, dP(x) \qquad (2.3.18)$$

όπου $\int_0^\infty \lambda exp\{-t(\lambda + Rc)\} dt = \frac{\lambda}{\lambda + cR}$ και $\int_0^\infty e^{Rx}\, dP(x) = M_X(r)$

Οπότε η (2.3.18) έχει μορφή

$$\psi_k(u) \le e^{-Ru} \frac{\lambda}{\lambda + cR} M_X(r)$$

και από την (2.3.14) προκύπτει ότι

$$\psi_k(u) \le e^{-Ru} \frac{\lambda}{\lambda + cR} [1 + (1+\theta)\mu_1 R]$$

$$= e^{-Ru} \frac{\lambda}{\lambda + [(\theta+1)\lambda\mu_1]R} [1 + (1+\theta)\mu_1 R] = e^{-Ru}$$

Επομένως ένα εκθετικό (άνω) φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας μας δίνεται από την ανισότητα του Lundberg, η οποία αποδείχτηκε για πρώτη φορά από τον Lundberg πριν από έναν αιώνα. Έκτοτε έχουν αποδειχθεί κι άλλες γενικεύσεις καθώς και βελτιώσεις του. Ωστόσο λόγω της πολυπλοκότητάς τους, η ανισότητα του Lundberg εξακολουθεί σήμερα να βρίσκει εφαρμογή τόσο στον αναλογισμό όσο και σε άλλες εφαρμογές των πιθανοτήτων αναφορικά με σύνθετες κατανομές.

(Πολίτης Κ. (2012), Kaas et al. (2008))

Παρακάτω θα αναφέρουμε ένα άλλο σημαντικό αποτέλεσμα, το οποίο αποτυπώνει την ασυμπτωτική συμπεριφορά της πιθανότητας χρεοκοπίας καθώς το αρχικό αποθεματικό u τείνει στο άπειρο, αναφερόμενοι πάντα στο κλασικό μοντέλο.

Σε αυτό το σημείο θα ήταν χρήσιμο να ανακαλέσουμε στη μνήμη μας όσα αναφέρθηκαν για τις ανανεωτικές εξισώσεις και το βασικό ανανεωτικό θεώρημα στο Κεφάλαιο 1.

Θεώρημα 2.3.7. Έχοντας ως προϋπόθεση ότι $\int_0^\infty x e^{Rx} \bar{F}(x)dx < \infty$, στο κλασικό υπόδειγμα η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\psi(u) \sim Ce^{-Ru} \qquad \text{καθώς } u \to \infty,$$

αυτό σημαίνει ότι το όριο

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{e^{-Ru}} = C$$

όπου $C > 0$ μια σταθερά που υπολογίζεται από τον τύπο

$$C = \frac{\theta\mu_1}{R\int_0^\infty x e^{Rx} \bar{F}(x)dx}$$

Η *προσέγγιση των Cramér-Lundberg*, δίνεται από τη συνάρτηση Ce^{-Ru}, δηλαδή την (ασυμπτωτική) προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας, και συμβολίζεται με $\psi_{CL}(u)$.

Απόδειξη Το *βασικό ανανεωτικό θεώρημα* θα αξιοποιηθεί για την απόδειξη του ασυμπτωτικού τύπου των Cramér-Lundberg.

Ξεκινώντας με τον ορισμό των συναρτήσεων $\psi_R(u) = e^{Ru}\psi(u)$ και

$$g(u) = \frac{\lambda\mu_1}{c} e^{Ru}\overline{H}(u), \qquad u \geq 0,$$

παρατηρούμε ότι η κανονική ανανεωτική εξίσωση για τη συνάρτηση $e^{Ru}\psi(u)$ μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\psi_R(u) = \frac{\lambda\mu_1}{c} e^{Ru}\overline{H}(u) + \int_0^u \psi_R(u-x)dH_R\,(x)$$

Για να χρησιμοποιηθεί το βασικό ανανεωτικό θεώρημα στην παραπάνω εξίσωση $\psi_R(u)$ θα πρέπει να δείξουμε ότι η συνάρτηση $g(u)$ είναι φραγμένη και ολοκληρώσιμη στο διάστημα $(0,\infty)$, καθώς επίσης κι ότι $\lim_{u\to\infty} g(u) = 0$.

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση στη συνάρτηση $g(u)$, καταλήγουμε ότι μπορεί να γραφεί με την παρακάτω μορφή

$$g(u) = \frac{\lambda\mu_1}{c}\int_0^u e^{Rx}dH(x) - \frac{R\lambda\mu_1}{c}\int_0^u e^{Rx}\overline{H}(x)\,dx$$

Αντιλαμβανόμαστε ότι η $g(u)$ συγκλίνει στο μηδέν όταν $u \to \infty$, όπως επίσης κι ότι είναι μία φραγμένη συνάρτηση.

Η ολοκλήρωση κατά παράγοντες συνδυαστικά με την προϋπόθεση ότι ισχύει η συνθήκη $\int_0^\infty xe^{Rx}\,\overline{F}(x)dx < \infty$, μας βοηθά να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση $g(u)$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $(0,\infty)$.

Επομένως έχουμε φτάσει στο σημείο εκείνο όπου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το βασικό ανανεωτικό θεώρημα, από το οποίο προκύπτει ότι

$$\lim_{u\to\infty} \psi_R(u) = \frac{\int_0^\infty g(x)dx}{\widetilde{\mu}_R},$$

όπου $\widetilde{\mu}_R = \int_0^\infty xdH_R(x)$ είναι η μέση τιμή της κατανομής H_R.

Προτού προχωρήσουμε στην ολοκλήρωση της απόδειξης θα πρέπει να αποσαφηνίσουμε ότι από εδώ και στο εξής, ορισμένα υπολογιστικά σημεία θα παραληφθούν προκειμένου να καταλήξουμε στο ουσιαστικό ζητούμενο της απόδειξης (βλέπε Πολίτης Κ. (2012)).

- Για το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty g(x)\,dx$, έπειτα από πράξεις καταλήγουμε στη σχέση

$$\int_0^\infty g(x)\,dx = \frac{\lambda\mu_1}{c}\int_0^u e^{Rx}\overline{H}(x)\,dx$$

$$= \frac{c-\lambda\mu_1}{Rc}$$

- Επανερχόμαστε στη μέση τιμή της κατανομής H_R, $\tilde{\mu}_R = \int_0^\infty x dH_R(x)$ όπου από τον ορισμό της κατανομής H_R έχουμε ότι

$$dH_R(x) = \lambda\mu_1 c^{-1} e^{Rx} dH(x)$$

Συνεπώς, η μέση τιμή

$$\tilde{\mu}_R = \int_0^\infty x dH_R(x)$$

$$= \frac{\lambda\mu_1}{c}\int_0^\infty x e^{Rx}\,dH(x)$$

$$= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty x e^{Rx}\,\overline{F}(x)dx$$

Δείξαμε τελικά ότι

$$\lim_{u\to\infty}\psi_R(u) = \frac{\int_0^\infty g(x)\,dx}{\tilde{\mu}_R}$$

$$= \frac{\theta\mu_1}{R\int_0^\infty x e^{Rx}\overline{F}(x)dx},$$

καταλήγοντας στο ζητούμενο του θεωρήματος.

(Πολίτης Κ. (2012))

Στην εισαγωγή της παραγράφου αναφερθήκαμε στη μελέτη **τυχαίων μεταβλητών** που σχετίζονται με τη χρεοκοπία, κατ' επέκταση και με την πιθανότητα χρεοκοπίας, στο κλασικό μοντέλο κινδύνου. Οι μεταβλητές αυτές είναι οι παρακάτω:

- ο **χρόνος** κατά τον οποίο συμβαίνει η χρεοκοπία
- το **πλεόνασμα** ακριβώς πριν τη χρεοκοπία
- το **έλλειμμα** τη στιγμή της χρεοκοπίας
- η **πτώση του πλεονάσματος** κάτω από το αρχικό αποθεματικό u
- η **μέγιστη σωρευτική απώλεια**

Η σημαντικότητα των παραπάνω μεταβλητών έγκειται στην κατανόηση του φαινομένου της εμφάνισης ή μη της χρεοκοπίας. Ο πρώτος ορισμός που θα δώσουμε αφορά τον *χρόνο της χρεοκοπίας*.

Ορισμός 2.3.8. Ο **χρόνος της χρεοκοπίας**, δηλαδή η χρονική στιγμή κατά την οποία το πλεόνασμα λαμβάνει αρνητική τιμή για πρώτη φορά, συμβολίζεται με T κι ορίζεται ως ακολούθως:

$$T = \begin{cases} inf\{t: U(t) < 0\} \\ \infty, \qquad αν\ U(t) \geq 0\ \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Παρατήρηση

1. Ο χρόνος χρεοκοπίας είναι μία **ελαττωματική** (ή **ελλειμματική**) **τυχαία μεταβλητή** (defective random variable) καθώς μπορεί να λάβει την τιμή άπειρο με θετική πιθανότητα, δηλαδή

   $$Pr(T < \infty) < 1 \textit{ (πιθανότητα χρεοκοπίας) } ή$$

   $$Pr(T = \infty) > 0 \textit{ (πιθανότητα μη χρεοκοπίας)}$$

   Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η εταιρία μπορεί να μην χρεοκοπήσει σχεδόν ποτέ και συμβαίνει διότι ισχύει η συνθήκη του καθαρού κέρδους $c > \lambda\mu_1$. Επομένως η παραπάνω σχέση μπορεί να συνδεθεί με την πιθανότητα μη χρεοκοπίας, όπου κι ισχύει η σχέση

   $$Pr(T = \infty) = Pr(U(t) \geq 0\ \forall t) = 1 - \psi(u) = \delta(u).$$

2. Διαισθητικά, αλλά κι από την παραπάνω σχέση, μπορούμε να αντιληφθούμε ότι ο χρόνος χρεοκοπίας εξαρτάται από την τιμή του αρχικού αποθεματικού . Ο κάτωθι συμβολισμός είναι πληρέστερος για τον χρόνο χρεοκοπίας

$$T_u = inf\{t: U(t) < 0 | \, U(0) = u\}.$$

   Καθότι η τιμή του αρχικού αποθεματικού είναι γνωστή, ο συμβολισμός που είθισται να χρησιμοποιείται είναι T αντί του T_u.

Η αμέσως επόμενη σημαντική τυχαία μεταβλητή είναι το **έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας**, δηλαδή η *σφοδρότητα της χρεοκοπίας* (severity of ruin) που εκφράζει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν τη χρονική στιγμή $t = T$.

Το έλλειμμα αυτό συμβολίζεται με $U(T)$ και παίρνει αρνητικές τιμές. Λόγω των τιμών αυτών το έλλειμμα εκφράζεται κατ' απόλυτη τιμή και ορίζεται από την τ.μ. $-U(T)$.

Μια άλλη συναφής τυχαία μεταβλητή είναι το **πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία,** δηλαδή το πλεόνασμα που έχει το χαρτοφυλάκιο ακριβώς πριν καταβληθεί η αποζημίωση από την ασφαλιστική εταιρία και που προκαλεί τη χρεοκοπία.

Συμβολίζεται με $U(T-) = \lim_{t \to T^-} U(t)$ και λαμβάνει θετικές τιμές.

Μία ακόμα ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα τυχαία μεταβλητή είναι η **πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό *u*,** δηλαδή το μέγεθος της πτώσης, και συμβολίζεται με L_1[10].

Αν η πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από την τιμή u του αρχικού αποθεματικού γίνει τη χρονική στιγμή t_1 και το πλεόνασμα είναι $u_1 = U(t_1)$ τότε η τ.μ. L_1 είναι ίση με $L_1 = u - u_1$.

Κατ' αντιστοιχία ορίζουμε την τ.μ. L_2 η οποία δηλώνει το μέγεθος της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος κάτω από την προηγούμενη τιμή του αποθεματικού u_1.

Η L_2 λαμβάνει την τιμή $L_2 = u_1 - u_2$.

Συνεπώς, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία μπορούμε να ορίσουμε επαγωγικά την ακολουθία των τ.μ. $L_3, L_4, L_5, \dots$

[10] Αν δεν υπάρξει πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό τότε $L_1 = 0$.

Μία εύλογη απορία που αξίζει να απαντήσουμε είναι η παρακάτω:

Το πλήθος των L_j *(με μη μηδενική τιμή!) είναι άπειρο;*

Η απάντηση στην ερώτηση αυτή είναι *αρνητική*.
Αυτό ισχύει λόγω της συνθήκης του καθαρού κέρδους $c > \lambda\mu_1$, που εξασφαλίζει ότι ακόμη και στην περίπτωση που συμβεί χρεοκοπία, το πλεόνασμα δε θα συνεχίσει να μειώνεται επ' άπειρον.
Το πλεόνασμα από κάποιο χρονικό σημείο κι έπειτα θα αυξάνεται, αφού $U(t) \rightarrow \infty$ $καθώς\ o\ χρόνος\ t \rightarrow \infty$. Κατ' επέκταση, από κάποιο χρονικό σημείο και μετά, το πλήθος των τιμών της ακολουθίας των τ.μ. L_1, L_2, L_3,… είναι πεπερασμένο, εφόσον οι τιμές της είναι μηδενικές (δηλαδή $L_j = 0$ για $j = i, i + 1, \ldots$).

Παρατηρήσεις

1. Οι τυχαίες μεταβλητές L_1, L_2, L_3,… ονομάζονται *κλιμακωτά ύψη*[11] (ladder heights), είναι αυστηρά θετικές, συνδέονται με την ανέλιξη πλεονάσματος $\{U(t): t \geq 0\}$ και παρουσιάζουν τη σταδιακή μείωση (πτώση) του πλεονάσματος από την τιμή του αρχικού αποθεματικού u έως την εμφάνιση της χρεοκοπίας. Αν δεν προκύψει χρεοκοπία τότε η πτώση του πλεονάσματος είναι από την τιμή του αρχικού αποθεματικού u έως την ελάχιστη τιμή που θα λάβει η ανέλιξη $\{U(t): t \geq 0\}$.

2. Οι L_1, L_2, L_3,… είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. Η ανεξαρτησία προκύπτει από το γεγονός ότι για $i \neq j$, οι μεταβλητές αυτές προέρχονται από τη συμπεριφορά της ανέλιξης $\{U(t): t \geq 0\}$ σε ξένα μεταξύ τους χρονικά διαστήματα. Ενώ η ισονομία οφείλεται στον "ανανεωτικό" χαρακτήρα της ανέλιξης $\{U(t): t \geq 0\}$.

Στο σημείο αυτό μπορούμε να ορίσουμε την τυχαία μεταβλητή K που δηλώνει το **πλήθος των κλιμακωτών υψών**. Όπως αναφέραμε παραπάνω το πλήθος αυτό είναι πεπερασμένο. Είναι σαφές λοιπόν ότι η τ.μ. K παίρνει ακέραιες και μη αρνητικές τιμές, κι ως εκ τούτου είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή.

Με βάση όσα αναφέραμε παραπάνω για την τ.μ. K μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ακολουθεί τη *γεωμετρική κατανομή* με πιθανότητα επιτυχίας $\delta(0)$, δηλαδή

$$K \sim Geo(\delta(0))$$

[11] Μια αντιπροσωπευτικότερη ονομασία είναι τα καθοδικά κλιμακωτά ύψη (descending ladder heights).

Αναλυτικότερα, αν θεωρήσουμε ως "αποτυχία" την εμφάνιση της πτώσης κάτω από το αρχικό αποθεματικό u, τότε η τ.μ. K μετρά τον αριθμό των αποτυχιών μέχρι να εμφανιστεί η πρώτη επιτυχία (δηλαδή να μην υπάρξει πτώση του πλεονάσματος, όπου $K = 0$).

Αντίστοιχα κάθε φορά που προκύπτει ένα νέο ελάχιστο στην ανέλιξη πλεονάσματος, δηλαδή εμφανίζεται ένα L_i, η πιθανότητα αυτή ισούται με την $\psi(0)$.

Επομένως,

$$Pr(K = 0) = \delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta}$$

$$Pr(K = 1) = \psi(0)\delta(0) = \frac{1}{1+\theta} \cdot \frac{\theta}{1+\theta}$$ [12]

$$Pr(K = 2) = (\psi(0))^2\delta(0) = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^2 \cdot \frac{\theta}{1+\theta}$$

Γενικεύοντας,

$$Pr(K = k) = (\psi(0))^k\delta(0), \qquad k = 0,1,2,\ldots \tag{2.3.18}$$

Επιπλέον η πιθανότητας χρεοκοπίας ισούται με $\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$, συνεπώς η (2.3.18) γράφεται ως εξής

$$Pr(K = k) = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k \cdot \frac{\theta}{1+\theta}, \qquad k = 0,1,2,\ldots \tag{2.3.19}$$

Η τελευταία τυχαία μεταβλητή που χρειάζεται να γνωρίζουμε όταν μελετάμε το φαινόμενο της χρεοκοπίας είναι η *μέγιστη σωρευτική απώλεια*. Παρακάτω ακολουθεί ο ορισμός.

Ορισμός 2.3.9. Στο κλασικό μοντέλο, ορίζουμε τη σύνθετη τυχαία μεταβλητή L που εκφράζει τη *συνολική πτώση του πλεονάσματος* κάτω από το αρχικό αποθεματικό u μέχρι την ελάχιστη τιμή που λαμβάνει η ανέλιξη πλεονάσματος $\{U(T): t \geq 0\}$, δηλαδή έως τη στιγμή της χρεοκοπίας. Η τ.μ. L ονομάζεται **μέγιστη σωρευτική απώλεια** (maximal aggregate loss) και ισούται με

[12] Η πιθανότητα αυτή ερμηνεύεται ως η πιθανότητα να συμβεί μία πτώση του πλεονάσματος και να μην προκύψει άλλη.

$$L = \begin{cases} L_1 + L_2 + \ldots + L_K = \sum_{i=1}^{K} L_i\,, & \alpha\nu\ K \geq 1 \\ 0, & \alpha\nu\ K = 0 \end{cases} \tag{2.3.20}$$

Παρατηρήσεις

1. Η τυχαία μεταβλητή L έχει μικτή κατανομή, καθώς η μάζα της γύρω από το 0 είναι θετική, δηλαδή μπορεί να λάβει την τιμή 0 με θετική πιθανότητα[13] και συγχρόνως είναι συνεχής στο διάστημα $(0, \infty)$.

2. Η κατανομή της L είναι η σύνθετη γεωμετρική κατανομή, αφού η τ.μ. K ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή.

3. Η πιθανότητα η L να πάρει την τιμή 0 ισούται με $P(L = 0) = P(K = 0) = \delta(0)$

Η μέγιστη σωρευτική απώλεια L συνδέεται με την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι η πιθανότητα η συνολική πτώση του πλεονάσματος να υπερβαίνει την τιμή του αρχικού αποθεματικού u είναι ισοδύναμη με την πιθανότητα να έχουμε χρεοκοπία, δηλαδή

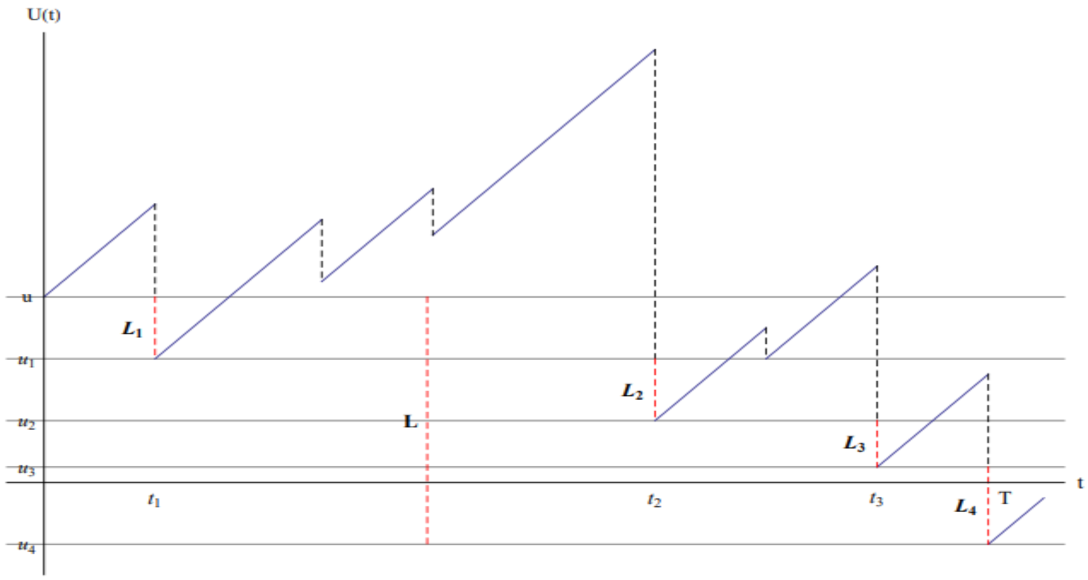
$$P(L > u) = \psi(u)$$

ή αντίστοιχα

$$P(L \leq u) = \delta(u)$$

Στο Σχήμα 2.3 που ακολουθεί, αναπαρίστανται τα κλιμακωτά ύψη L_i και η μέγιστη σωρευτική απώλεια L της ανέλιξης πλεονάσματος, συναρτήσει του χρόνου t. Παρατηρούμε λοιπόν πως εξελίσσεται το πλεόνασμα στο πέρασμα του χρόνου, σε σχέση με την άφιξη των ζημιών που μεταβάλλουν τις τιμές του πλεονάσματος.

[13] Το διακριτό τμήμα στο μηδέν είναι μεγέθους $\theta/(1+\theta)$.



Σχήμα 2.3: Γραφική παράσταση των ποσοτήτων L_i και της μέγιστης σωρευτικής απώλειας L. Κ. Πολίτης. (2022)

(Πολίτης Κ. (2012), Δερμιτζάκης Β. (2011), Πολίτης Κ. (2022), François Dufresne and Hans U. Gerber (1989))

Η πρόταση που έπεται μας δίνει τη σχέση που συνδέει τη ροπογεννήτρια των κλιμακωτών υψών L_1, L_2, L_3,…, και συμβολίζεται με $M_{L_1}(r)$, με τη ροπογεννήτρια της μέγιστης σωρευτικής απώλειας $M_L(r)$.[14]

Πρόταση 2.3.10. Στο κλασικό μοντέλο, με περιθώριο ασφαλείας $\theta > 0$, οι ροπογεννήτριες $M_L(r)$ και $M_{L_1}(r)$ συνδέονται μεταξύ τους με την παρακάτω σχέση

$$M_L(r) = \frac{\theta}{1+\theta - M_{L_1}(r)} \qquad (2.3.20)$$

Απόδειξη Βλέπε Πολίτης Κ. (2012)

Ένα ακόμη σημαντικό αποτέλεσμα που χρειάζεται να αναφέρουμε είναι η σχέση που συνδέει την κατανομή των κλιμακωτών υψών με την κατανομή των αποζημιώσεων.

Πρόταση 2.3.10. Στο κλασικό πρότυπο, το κλιμακωτό ύψος L_1 ακολουθεί μία συνεχής κατανομή με σ.π.π. $[1 - F(x)]/\mu_1$, όπου

$$Pr(L_1 \leq x) = \int_0^x \frac{1}{\mu_1}[1 - F(x)]dy, \qquad x \geq 0 \qquad (2.3.21)$$

[14] Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι όταν γνωρίζουμε τη ροπογεννήτρια των κλιμακωτών υψών μπορούμε να υπολογίσουμε τη ροπογεννήτρια της μέγιστης σωρευτικής απώλειας.

Απόδειξη Βλέπε Πολίτης Κ. (2012)

Με βάση την παραπάνω Πρόταση 2.3.10 μπορούμε να προχωρήσουμε στην παρουσίαση του κάτωθι πορίσματος, αναφορικά με τη σύνδεση της ροπογεννήτριας των κλιμακωτών υψών $M_{L_1}(r)$ και της ροπογεννήτριας των αποζημιώσεων $M_X(r)$.

Πόρισμα 2.3.11. Έστω $M_X(r)$ η ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων, τότε η ροπογεννήτρια $M_{L_1}(r)$ μπορεί να υπολογιστεί από την παρακάτω σχέση

$$M_{L_1}(r) = \frac{1}{\mu_1 r}\left(M_X(r) - 1\right) \qquad (2.3.22)$$

Απόδειξη Βλέπε Πολίτης Κ. (2012)

(Πολίτης Κ. (2012))

□

Κεφάλαιο 3

Ακριβής υπολογισμός πιθανότητας χρεοκοπίας στο κλασικό πρότυπο

3.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 2, ένα από τα πιο βασικά αντικείμενα της Θεωρίας Κινδύνων είναι ο *υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας*. Στο παρόν κεφάλαιο, θα επιχειρήσουμε να παρουσιάσουμε τις μεθοδολογίες εκείνες, που μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας με ακρίβεια και υπό το πρίσμα του *κλασικού υποδείγματος*. Συγκεκριμένα, στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι να μελετήσουμε τον ***ακριβή υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας*** μέσω συγκεκριμένου τύπου για τη συνάρτηση $\psi(u)$, για συγκεκριμένο αρχικό αποθεματικό u. Ο τρόπος αυτός υπολογισμού βασίζεται στον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας συναρτήσει του αρχικού αποθεματικού u, για τις περιπτώσεις εκείνες όπου γνωρίζουμε την συνάρτηση κατανομής F των αποζημιώσεων.
Η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια για την ακόλουθη σειρά κατανομών για αποζημιώσεις:

- Εκθετική κατανομή,
- μίξεις Εκθετικών κατανομών,
- κατανομή Γάμμα,
- μίξεις κατανομών Γάμμα,
- μίξεις κατανομών Γάμμα με Εκθετικές κατανομές.

Ωστόσο, για αρκετές κατανομές ο υπολογισμός ενός αναλυτικού τύπου για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι δύσκολος κι ενίοτε ακατόρθωτος.
Για τον λόγο αυτό θα επικεντρωθούμε στην παρουσίαση δύο μεθοδολογιών για τις περιπτώσεις που τα ύψη των αποζημιώσεων ακολουθούν ***συνδυασμό εκθετικών κατανομών***, ***συνδυασμό Γάμμα κατανομών*** και ***συνδυασμό Erlang με εκθετικές κατανομές***. Η εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας θα συνδυαστεί και με αριθμητικές εφαρμογές που θα υποστηριχθούν από το Mathematica και θα παρουσιαστούν στο Κεφάλαιο 4.
Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ως «τροφή για σκέψη» το αντίστροφο πρόβλημα, που είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον για τους αναλογιστές από πρακτικής απόψεως, δηλαδή την εύρεση της καταλληλότερης τιμής αποθετικού u έτσι ώστε η πιθανότητα χρεοκοπίας να μην υπερβαίνει μία συγκεκριμένη τιμή.

(Πολίτης Κ. (2012), Δερμιτζάκης Β. (2011), Πολίτης Κ. (2022))

3.2 Ακριβής υπολογισμός πιθανότητας χρεοκοπίας

Όπως αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου, η βασική επιδίωξή μας είναι η μελέτη του ακριβή τρόπου υπολογισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας. Παρακάτω παραθέτουμε τις μεθόδους υπολογισμού για τις περιπτώσεις εκείνες όπου τα ύψη των αποζημιώσεων ακολουθούν τους συνδυασμούς των κατανομών που προαναφέρθηκαν.

3.2.1 Δύο Μέθοδοι υπολογισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας

Μέθοδος 1

Στη μέθοδο αυτή, η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ υπολογίζεται μέσω της συνάρτησης κατανομής της μέγιστης σωρευτικής απώλειας L, όπου θα αξιοποιήσουμε τη ροπογεννήτρια της τ.μ. L. Παραθέτουμε την ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 3.2.1. Η ροπογεννήτρια της μέγιστης σωρευτικής απώλειας υπολογίζεται από τη σχέση

$$M_L(r) = \frac{\theta \mu_1 r}{(1+\theta)\mu_1 r - M_X(r) + 1} \tag{3.2.1}$$

Απόδειξη Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (2.3.20), από το Κεφάλαιο 2, στην οποία θα αντικαταστήσουμε το Πόρισμα 2.3.11.

$$M_L(r) = \frac{\theta}{1+\theta \ - M_{L_1}(r)}$$

$$= \frac{\theta}{1+\theta \ - \frac{1}{\mu_1 r}(M_X(r)-1)}$$

$$= \frac{\theta}{[(1+\theta)\mu_1 r \ - M_X(r)+1] \ /\mu_1 r}$$

$$= \frac{\theta \mu_1 r}{(1+\theta)\mu_1 r \ - M_X(r)+1}$$

(Πολίτης Κ. (2012), Δερμιτζάκης Β. (2011))

Μέθοδος 2

Η μεθοδολογία που θα εξετάσουμε περιγράφηκε από τους Gerber, Goovaerts και Kaas (1987) και οδηγεί σε μια ακριβή σχέση για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται για τις αποζημιώσεις που ακολουθούν μίξη εκθετικών και γάμμα κατανομών.

Ας θεωρήσουμε τώρα τις συναρτήσεις πυκνότητας $f_i(x)$ για κατανομές ίδιου τύπου, αλλά με διαφορετικές παραμέτρους. Ορίζουμε ως συνάρτηση πυκνότητας, των αποζημιώσεων, για *συνδυασμό κατανομών* (combination) την εξής

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i f_i(x), \tag{3.2.2}$$

όπου οι σταθερές A_i μπορεί να είναι είτε θετικές είτε αρνητικές. Ωστόσο έχουν την ιδιότητα να αθροίζουν στη μονάδα

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = 1.$$

Αξίζει να αναφέρουμε ότι η μίξη εκθετικών κατανομών είναι μια οικογένεια κατανομών αρκετά πλούσια και με εκτεταμένη χρήση στη θεωρία χρεοκοπίας, αλλά κι ευρύτερα στη θεωρία κινδύνων.

Α. Συνδυασμός Εκθετικών κατανομών

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κατανομή του μεγέθους των αποζημιώσεων είναι η ***μίξη εκθετικών*** (mixture of exponential densities), με την εξής συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i \beta_i e^{-\beta_i x}, \qquad x > 0 \tag{3.2.3}$$

όπου οι παράμετροι β_i είναι θετικές και, για λόγους απλότητας, θεωρούμε ότι ισχύει η σχέση $0 < \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n$.

Επιπλέον, ισχύει κι εδώ ότι $\sum_{i=1}^{n} A_i = 1$, καθώς κι ότι η συνάρτηση πυκνότητας για εκθετικές κατανομές είναι η $f_i(x) = \beta_i e^{-\beta_i x}$, $x > 0$.

Η πυκνότητα (3.2.3) είναι μια διακριτή μίξη k εκθετικών κατανομών με παραμέτρους β_i και τα αντίστοιχα βάρη A_i.

Επομένως, για το συνδυασμό των εκθετικών κατανομών, η πιθανότητα χρεοκοπίας συναρτήσει του αρχικού αποθεματικού u υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{-r_k u}, \qquad u \geq 0 \qquad (3.2.4)^{15}$$

όπου $k = 1,2,3,\ldots,n$ και οι θετικές σταθερές C_k ευρίσκονται από τη σχέση

$$C_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_{ik}}{\beta_i} \qquad (3.2.5)$$

Οι σταθερές C_{ik} υπολογίζονται από τον τύπο του συντελεστή των $exp(-\beta_i x)$ δηλαδή[16],

$$C_{im} = \frac{\dfrac{A_i}{(\beta_i - r_m)}}{\dfrac{\sum_{j=1}^{n} A_j}{\left(\beta_j - r_m\right)^2}} \qquad (3.2.6)$$

Ενώ οι $r_1, r_2, \ldots, r_n$ είναι οι n ρίζες της εξίσωσης του Lundberg, που έχουμε αναφέρει και στο Κεφάλαιο 2. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης βρίσκονται ανάμεσα στις τιμές των παραμέτρων β_i, όπου και ισχύει ότι $0 < r_1 = R < \beta_1 < r_2 < \beta_2 <\ldots< r_n < \beta_n$.

Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει αξιοποιούμε όλες τις ρίζες της εξίσωσης του Lundberg, ενώ μέχρι πρότινος γνωρίζαμε ότι η λύση της εξίσωσης είναι η μικρότερη θετική ρίζα, κι όλες οι υπόλοιπες απορρίπτονται. Επιπλέον, η σχέση αυτή ισχύει για την περίπτωση όπου οι σταθερές A_i είναι θετικές. Σε περίπτωση που οι εν λόγω σταθερές είναι αρνητικές, η κατάσταση είναι πιο περίπλοκη κι απαιτεί διαφορετική διαχείριση.

Στο τμήμα που ακολουθεί θα δείξουμε ότι η μίξη ή ο συνδυασμός των γάμμα κατανομών μπορεί να διαχειριστεί με παρόμοιο τρόπο με εκείνον των εκθετικών κατανομών.

Β. Συνδυασμός Γάμμα κατανομών

Η ***μίξη ή ο συνδυασμός γάμμα κατανομών*** (mixture of gamma distributions), αναφορικά με την εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας, που θα μελετήσουμε παρακάτω, θα αναφέρεται στις περιπτώσεις εκείνες όπου η παράμετρος είναι ένας ακέραιος αριθμός. Ειδικότερα, προκειμένου να μην εισάγουμε πολύπλοκους τύπους,

---

[15] Ο τύπος (3.2.4) έχει αναφερθεί κι από τους Cramér (1955) και Bowers (1987).

[16] Εφόσον οι ρίζες $r_1, r_2, \ldots, r_m$ έχουν προσδιοριστεί, ο συντελεστής των $exp(-\beta_i x)$ μπορεί να υπολογιστεί με ευκολία.

θα περιορίσουμε τη μελέτη μας στην περίπτωση όπου η παράμετρος α είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός[17] και ισούται με δύο.

Θυμίζουμε ότι για τις γάμμα κατανομές με παραμέτρους $\alpha = 2$ και $\beta_i > 0$, η συνάρτηση πυκνότητας είναι της μορφής

$$f_i(x) = \frac{(\beta_i x)\beta_i e^{-\beta_i x}}{\Gamma(2)}$$

όπου $\Gamma(2) = 1$ και $x > 0$.

Επομένως, η συνάρτηση πυκνότητας είναι η παρακάτω

$$f_i(x) = {\beta_i}^2 x e^{-\beta_i x}, \qquad x > 0.$$

Θεωρούμε τώρα ότι η συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$ για *μίξη γάμμα κατανομών* δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i {\beta_i}^2 x e^{-\beta_i x}, \qquad x > 0 \tag{3.2.7}$$

με $\beta_i > 0$ και $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = 1$.

Συνεπώς, για το συνδυασμό γάμμα κατανομών $Ga(2, \beta_i)$, $i = 1,2, \ldots, n$, η πιθανότητα χρεοκοπίας, υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{2n} {C_k}' e^{-r_k u} \tag{3.2.8}$$

όπου $k = 1,2,3, \ldots ,2n$ και οι θετικές σταθερές ${C_k}'$ δίνονται από τη σχέση

$${C_k}' = \sum_{i=1}^{n} \int_0^\infty {C_{ik}}'(y) e^{-\beta_i y} dy$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \frac{(3 - 2r_k/\beta_i)}{(\beta_i - r_k)^2}}{\sum_{i=1}^{n} A_i \frac{3\beta_i - r_k}{(\beta_i - r_k)^3}}. \tag{3.2.9}$$

---

[17] Θυμίζουμε ότι στην περίπτωση όπου η παράμετρος α της gamma κατανομής είναι θετικός ακέραιος αριθμός, η κατανομή αναφέρεται κι ως κατανομή Erlang, προς τιμήν του Δανού μαθηματικού και μηχανικού A. K. Erlang (1878-1929). Η συνάρτηση πυκνότητας παραμένει ίδια.

Οι $r_1, r_2, \dots, r_{2n}$ είναι οι ρίζες της παρακάτω εξίσωσης

$$1 - \frac{\lambda}{c} \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{2\beta_i - r}{(\beta_i - r)^2} = 0. \qquad (3.2.10)$$

Η μικρότερη τιμή από τις ρίζες αντιστοιχεί στον συντελεστή προσαρμογής.

(Πολίτης Κ. (2012), Δερμιτζάκης Β. (2011), Dufresne F. and Gerber H. (1989), Gerber et al. (1987))

Γ. Συνδυασμός Εκθετικών και Erlang κατανομών

Στην κατηγορία αυτή θα παρουσιάσουμε την περίπτωση εκείνη όπου η κατανομή των αποζημιώσεων αποτελεί μία ***μίξη Εκθετικής κατανομής*** με μία ***κατανομή Erlang***. Η συγκεκριμένη μίξη κατανομών ανήκει στην κατηγορία των *phase-type distributions*, όπου η ανάλυσή τους γίνεται με τη χρήση γραμμικής άλγεβρας, και συγκεκριμένα με τη χρήση πινάκων. Καθώς η ανάλυσή τους ξεφεύγει από τη στοχοθεσία του παρόντος κεφαλαίου, θα περιοριστούμε στη συνοπτική παρουσίαση των κυριότερων βημάτων για την εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας. Ωστόσο, αξίζει να αφιερώσουμε λίγο χρόνο στην παράθεση συνοπτικών και περιεκτικών πληροφοριών για τις κατανομές *phase-type*.

Οι *phase-type* κατανομές προέρχονται από το πρωτότυπο έργο του Erlang (1909) και του Jensen (1953), και καθιερώθηκαν μέσα από τον Marcel F. Neuts και τους συνεργάτες του (1981, 1989, 1995). Όμως έχουν μελετηθεί κι από τον Asmussen (2003).
Οι *phase-type* κατανομές είναι στενά συσχετισμένες με τις *Μαρκοβιανές αλυσίδες* (Markov processes or Markov chain). Σύμφωνα με τον ορισμό από τον Mogens Bladt, οι phase-type κατανομές αφορούν τον χρόνο μέχρι την απορρόφηση σε μία Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων, δηλαδή τον χρόνο εκείνο όπου μια διαδικασία φτάνει σε ένα στάδιο όπου σταματά να εξελίσσεται. Ο χρόνος αυτός συμβολίζεται με τ (*time until absorption*). Ο τύπος της phase-type κατανομής εξαρτάται από τον αριθμό των *παροδικών καταστάσεων* (transient states) και τις *πιθανότητες μετάβασης* (transition probabilities). Συνεπώς, σύμφωνα με τον ορισμό στο χωρίο Definition 3.1., pg. 148, στο άρθρο Bladt M. (2005), ο χρόνος μέχρι την απορρόφηση $\tau = inf\{t \geq 0 | X_t = p + 1\}$ λέμε ότι ακολουθεί phase-type κατανομή και γράφουμε $\tau \sim PH(\pi, T)$, όπου το σύνολο των παραμέτρων (π, T) αποτελούν μια απεικόνιση της phase-type κατανομής.

Όπως αναφέραμε και στη αρχή της παραγράφου, στόχος μας είναι να υπολογίσουμε με ακρίβεια την πιθανότητα χρεοκοπίας για την περίπτωση όπου οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία μίξη Εκθετικής κατανομής με κατανομή Erlang.

Η συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$ της κατανομής αποζημιώσεων όπου ακολουθεί μία *μίξη Εκθετικής κατανομής και Erlang κατανομής*, δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f(x) = \alpha\beta e^{-\beta x} + (1-\alpha)\beta^2 x e^{-\beta x}, \qquad x \geq 0 \tag{3.2.11}$$

Επιπλέον, ο συντελεστής προσαρμογής ευρίσκεται από τη λύση της εξίσωσης

$$(1+\theta)r^2 - [2(1+\theta) - \alpha']\beta r + \theta\beta^2 = 0,$$

όπου οι ρίζες της εξίσωσης δίνονται από τη σχέση

$$r_{1,2} = \frac{2(1+\theta) - \alpha' \pm \sqrt{4(1+\theta)(1-\alpha') + \alpha'^2}}{2(1+\theta)}\beta.$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ υπολογίζεται από τον κάτωθι τύπο

$$\psi(u) = \frac{(2-\alpha')\beta - r_1}{(1+\theta)(r_2 - r_1)} e^{-r_1 u} + \frac{r_2 - (2-\alpha')\beta}{(1+\theta)(r_2 - r_1)} e^{-r_2 u}, \quad u \geq 0 \tag{3.2.12}$$

(Πολίτης Κ. (2012), Bladt M. (2005))

□

Κεφάλαιο 4

Αριθμητικές εφαρμογές υπολογισμού πιθανότητας χρεοκοπίας στο κλασικό πρότυπο

4.1 Εισαγωγή

Στόχος του παρόντος κεφαλαίου είναι ο ακριβής υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας μέσα από αριθμητικές εφαρμογές, προκειμένου να διερευνήσουμε ένα πρόβλημα που απασχολεί τους ερευνητές τα τελευταία χρόνια, κατ' επέκταση και τους αναλογιστές, αναφορικά με τα ασφαλιστικά χαρτοφυλάκια και την πιθανότητα χρεοκοπίας μιας ασφαλιστικής εταιρίας. Μέσα από τα αριθμητικά παραδείγματα που ακολουθούν επιθυμούμε να εξετάσουμε αν η υψηλή συχνότητα εμφάνισης ζημιών, που συνεπάγεται μεγάλο λ[18], δημιουργεί μεγαλύτερο ή μικρότερο κίνδυνο από μία κατανομή με πιο βαριά ουρά για τα μεγέθη των ζημιών, όπου εν προκειμένω έχουμε μεγάλη μέση τιμή μ_1. Με άλλα λόγια, η έρευνα που διενεργούμε επιχειρεί να δώσει απάντηση στην ακόλουθη ερώτηση: ***Ποιο χαρτοφυλάκιο χαρακτηρίζεται ως πιο ριψοκίνδυνο, εκείνο που εμπεριέχει πολλούς σε πλήθος αλλά μικρούς σε μέγεθος κινδύνους ή εκείνο που εμπεριέχει λίγους σε πλήθος αλλά μεγάλους σε μέγεθος κινδύνους;***

Κάθε εφαρμογή θα συμπεριλαμβάνει δύο περιπτώσεις χαρτοφυλακίων, με διαφορετική κατανομή ζημιών για το κάθε ένα, έχοντας κάνει συνάμα την παραδοχή ότι το περιθώριο ασφαλείας θ και τα ασφάλιστρα c παραμένουν αμετάβλητα. Τα μεγέθη των αποζημιώσεων θα ακολουθούν την Εκθετική κατανομή, μία μίξη Εκθετικών κατανομών, την Erlang κατανομή και μία μίξη Erlang κατανομών. Οι παραπάνω κατανομές θα χρησιμοποιηθούν συνδυαστικά ανά δύο χαρτοφυλάκια κι η εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας θα υποστηριχθεί και με τη χρήση του προγράμματος αλγεβρικών υπολογισμών Mathematica, καθότι σε ορισμένες περιπτώσεις ο υπολογισμός της δεν καθίσταται εφικτός με διαφορετικό τρόπο. Τέλος, προτού παραθέσουμε τις εφαρμογές, θα κάνουμε μία σύντομη αναφορά στον μετασχηματισμό Laplace, προκειμένου να θυμηθούμε την έννοια αυτή και να κατανοήσουμε καλύτερα τη χρήση του στις αριθμητικές εφαρμογές.

Στο σημείο αυτό θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμο να αναφέρουμε ότι η εν λόγω έρευνα έχει διενεργηθεί στο παρελθόν και σε επίπεδο θεωρητικών εφαρμογών. Αποδόθηκε σε άρθρο που δημοσιεύθηκε από τον Cary Chi-Liang Tsai (2009). Στην παράγραφο που ακολουθεί θα αναφερθούμε στα αξιοσημείωτα αποτελέσματα αυτής της έρευνας όσο το δυνατόν με πιο μεστό και συνοπτικό τρόπο.

---

[18] Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει σε προηγούμενα Κεφάλαια, υπενθυμίζουμε ότι το λ είναι η ένταση της ανέλιξης Poisson και εκφράζει τη συχνότητα άφιξης των ζημιών.

4.2 Διάταξη πιθανοτήτων χρεοκοπίας για την περίπτωση ανέλιξης πλεονάσματος με διάχυση

Η αναγκαιότητα για τη διαχείριση του κινδύνου, και κατ' επέκταση την ταξινόμηση του ρίσκου και τη διάταξη των πιθανοτήτων χρεοκοπίας, γίνεται ολοένα και πιο επιτακτική αλλά και σημαντική. Η ταξινόμηση των κινδύνων έχει αξιοποιηθεί ευρέως για τη σύγκριση και την αξιολόγηση αυτών, τόσο στην περίπτωση των ασφαλίσεων κατά ζημιών όσο και στην περίπτωση των ασφαλίσεων υγείας. Επομένως, η ταξινόμηση του ρίσκου, μέσω της διάταξης των πιθανοτήτων χρεοκοπίας, είναι κρίσιμη καθώς, από ασφαλιστική σκοπιά, δίνεται η δυνατότητα στις ασφαλιστικές εταιρίες να αξιολογήσουν τα χαρτοφυλάκιά τους και κατ' επέκταση τις στρατηγικές τους και την ευαλωτότητά τους απέναντι στο ρίσκο.

Το άρθρο του C. C-L Tsai (2009) μελετά τη διάταξη των πιθανοτήτων χρεοκοπίας ανά ζεύγη για την περίπτωση δύο ανελίξεων πλεονάσματος (*surplus processes*) με διάχυση (*diffusion*) σε συνεχή χρόνο.

Εισάγετε λοιπόν μία νέα έννοια σχετικά με τη γνωστή σε εμάς στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος $U(t) = u + P(t) - S(t)$, ως επέκταση αυτής. Ειδικότερα, ο Gerber (1970) προσθέτει στον προαναφερθέν τύπο της ανέλιξης πλεονάσματος $U(t)$ μία ανεξάρτητη ανέλιξη διάχυσης (*diffusion process*), την ανέλιξη Wiener $\{W(t): t \geq 0\}$.

Ως εκ τούτου, η στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος με διάχυση δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$U(t) = u + ct - S(t) + \sigma W(t), \quad t \geq 0, \tag{4.2.1}$$

όπου $\sigma > 0$ (σ^2 είναι η διακύμανση) και η ανέλιξη διάχυσης $\{W(t): t \geq 0\}$ είναι ανεξάρτητη της ανέλιξης Poisson $\{S(t): t \geq 0\}$ και του μεγέθους των αποζημιώσεων $X_1, \dots, X_N$. Συνεπακόλουθα μεταβάλλεται κι ο ορισμός του χρόνου χρεοκοπίας ως $T = inf\{t: U(t) \leq 0\}$.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι οι Dufresne & Gerber (1991) μελέτησαν τα τρία παρακάτω διαφορετικά είδη πιθανοτήτων χρεοκοπίας, βασισμένα στον τύπο (4.2.1) :

- $\psi_d(u) = Pr\,(T < \infty, U(T) = 0 | U(0) = u)$: πιθανότητα χρεοκοπίας που προκύπτει από ταλάντωση (*oscillation*), λόγω της παρουσίας της ανέλιξης Wiener

- $\psi_s(u) = Pr\,(T < \infty, U(T) < 0 | U(0) = u)$: πιθανότητα χρεοκοπίας που προκύπτει από αποζημίωση

- $\psi_t(u) = \psi_d(u) + \psi_s(u)$: πιθανότητα χρεοκοπίας

Τα ευρήματα της έρευνας που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι δύο και παρατίθενται αμέσως παρακάτω.

Το πρώτο εύρημα αφορά τις συνθήκες και τα θεωρήματα που παρατίθενται προκειμένου να διενεργηθεί η σύγκριση των πιθανοτήτων χρεοκοπίας ανά ζεύγη για αποζημιώσεις δύο τυχαίων μεταβλητών X, Y, κι εν κατακλείδι να εξαχθεί το συμπέρασμα. Εν προκειμένω, στο άρθρο του C. C-L Tsai (2009), οι συνθήκες αυτές αφορούν τη διαφοροποίηση των ασφαλίστρων, την ύπαρξη του περιθωρίου ασφαλείας και των παραμέτρων διάχυσης (όπου εισάγουν την έννοια της τυχαιότητας στην ανέλιξη πλεονάσματος). Η μελέτη καταλήγει στο συμπέρασμα ότι οι ζημιές υψηλής συχνότητας και χαμηλής σφοδρότητας εμφανίζουν μικρότερες πιθανότητες χρεοκοπίας συγκριτικά με τις ζημιές χαμηλής συχνότητας και υψηλής σφοδρότητας. Μάλιστα για την περίπτωση των εκθετικών κατανομών ζημιών, όπου το περιθώριο ασφαλείας και τα ασφάλιστρα παραμένουν σταθερά, ο ακριβής υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι εφικτός. Για διαφορετικές περιπτώσεις κατανομών, το πρόβλημα μελετήθηκε πιο γενικό πλαίσιο και χρειάστηκε να οριστούν συγκεκριμένες συνθήκες, όπως αναφέραμε και στην αρχή της παραγράφου.

Το δεύτερο εύρημα αφορά την εύρεση των άνω και κάτω φραγμάτων των πιθανοτήτων χρεοκοπίας για Erlang και Εκθετικές κατανομές αποζημιώσεων. Στη διαδικασία αυτή συμβάλει η διάταξη των πιθανοτήτων χρεοκοπίας αναφορικά με Εκθετικές, Μίξεις Εκθετικών, Gamma, Pareto ή Λογαριθμοκανονικές κατανομές αποζημιώσεων. Σε Μίξεις Εκθετικών και Gamma κατανομών αποζημιώσεων καθίσταται δυνατή σχετικά εύκολα η εύρεση των άνω και κάτω φραγμάτων των πιθανοτήτων χρεοκοπίας, ενώ για άλλες κατανομές γίνεται χρήση των Θεωρημάτων 5 & 6 που αναφέρονται στο άρθρο στις σελίδες 195, 196.

(Tsai C. C-L (2009))

4.3 Αριθμητικές εφαρμογές

Στην παρούσα παράγραφο θα μελετήσουμε τις πιθανότητες χρεοκοπίας, συναρτήσει της ανέλιξης πλεονάσματος $U(t)$ για το κλασικό μοντέλο, για διαφορετικούς συνδυασμούς κατανομών αποζημιώσεων χαρτοφυλακίων. Η περίπτωση του μοντέλου με διάχυση δε θα εξεταστεί στην παρούσα εργασία. Στόχος της παραγράφου αυτής είναι να παραθέσουμε πέντε αριθμητικές εφαρμογές, με τα χαρακτηριστικά που προαναφέραμε, προκειμένου να συγκρίνουμε τις πιθανότητες χρεοκοπίας που θα προκύψουν ανά συνδυασμό χαρτοφυλακίων, με σκοπό να εξάγουμε συμπεράσματα για το ποιο χαρτοφυλάκιο εμφανίζει μεγαλύτερο ρίσκο. Τα αριθμητικά αποτελέσματα των πιθανοτήτων χρεοκοπίας έχουν υποστηριχθεί σημαντικά από το πρόγραμμα αλγεβρικών υπολογισμών Mathematica, και φυσικά σημαντική συμβολή στους μαθηματικούς υπολογισμούς έχει ο μετασχηματισμός Laplace που ακολουθεί αμέσως παρακάτω.

4.3.1 Ο μετασχηματισμός Laplace

Η έννοια το μετασχηματισμού Laplace είναι μία έννοια από τη μαθηματική ανάλυση που συνδέεται στενά με την έννοια της ροπογεννήτριας. Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένα χρήσιμο εργαλείο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση διαφορικών και ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων.

Υπενθυμίζουμε ότι για μια τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής F, η ροπογεννήτρια ορίζεται από τις παρακάτω σχέσεις

$$M_X(t) = E(e^{tX}), \qquad t \geq 0$$

ή

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} dF(x), \qquad t \geq 0.$$

Με άλλα λόγια, η έννοια του μετασχηματισμού Laplace αποτελεί ουσιαστικά μια επέκταση της παραπάνω σχέσης για **αρνητικές** τιμές που λαμβάνει το t.
Ας ορίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace.

Ορισμός 4.3.1. Έστω η συνάρτηση κατανομής F μίας μεταβλητής που δε λαμβάνει αρνητικές τιμές, δηλαδή $F(0-) = 0$. Ο **μετασχηματισμός Laplace** της συνάρτησης F, συμβολίζεται με L_F και ορίζεται από την παρακάτω σχέση

$$L_F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x), \qquad s \geq 0. \tag{4.3.1}$$

Ανάλογα με το είδος της τυχαίας μεταβλητής X, αν είναι συνεχής ή διακριτή τ.μ., ο μετασχηματισμός Laplace ορίζεται κατά αντιστοιχία από τις κάτωθι δύο σχέσεις:

1. Η F είναι συνεχής συνάρτηση κατανομής με πυκνότητα f, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της f συμβολίζεται με $\hat{f}(s)$ και ορίζεται ως

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx, \qquad s \geq 0. \tag{4.3.2}$$

2. Η F είναι η συνάρτηση κατανομής μιας διακριτής τ.μ. X, η οποία λαμβάνει ακέραιες μη αρνητικές τιμές, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της F συμβολίζεται με L_F και ορίζεται ως

$$L_F = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} \Pr(X = k) \tag{4.3.3}$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι μια σημαντική ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace είναι το γεγονός ότι, εφόσον γνωρίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace μιας συνάρτησης, μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι υπάρχει μόνο μία συγκεκριμένη συνάρτηση που αντιστοιχεί σε αυτόν. Αυτή είναι μία παρόμοια ιδιότητα με αυτή της ροπογεννήτριας, όπου αν τη γνωρίζουμε τότε μπορούμε να καθορίσουμε μοναδικά και την κατανομή που αντιπροσωπεύει.

(Πολίτης Κ. (2022), Dickson D. (2017))

4.3.2 Υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας για Εκθετική κατανομή

Στην εφαρμογή που ακολουθεί θα θέσουμε δύο σύντομα κι εύκολα αριθμητικά παραδείγματα, αφενός γιατί θα μελετήσουμε την απλούστερη μορφή κατανομής αποζημιώσεων που μπορούμε να συναντήσουμε κι αφετέρου γιατί σκοπός μας είναι να εξοικειωθούμε πρωτίστως με τα απλά παραδείγματα προτού προχωρήσουμε σε πιο σύνθετα.

Θεωρούμε ότι στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων, έχουμε δύο ασφαλιστικά χαρτοφυλάκια, όπου η κατανομή των αποζημιώσεων και των δύο είναι η Εκθετική με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \beta e^{-\beta x}, \qquad x \geq 0.$$

Για το **πρώτο χαρτοφυλάκιο** έστω ότι η κατανομή των αποζημιώσεων έχει πυκνότητα

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-x/2}, \qquad x \geq 0.$$

Δίνεται ότι η ένταση της ανέλιξης Poisson για την άφιξη των αποζημιώσεων είναι $\lambda = 4$ και η ένταση του ασφαλίστρου είναι $c = 10$.

Εφόσον πρόκειται για εκθετικές αποζημιώσεις, η μέση τιμή ισούται με $\mu_1 = 2$.

Το περιθώριο ασφαλείας υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση

$$\theta = \frac{c}{\lambda \mu_1} - 1 = \frac{10}{4 \cdot 2} - 1 = \frac{1}{4}$$

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι εφόσον η β είναι παράμετρος της εκθετικής κατανομής για τις αποζημιώσεις, ο συντελεστής προσαρμογής δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$R = \frac{\theta\beta}{1+\theta} = \frac{{}^{1}/_{4} \cdot {}^{1}/_{2}}{1+{}^{1}/_{4}} = \frac{1}{10}$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας για τις εκθετικές αποζημιώσεις, με αρχικό αποθεματικό u, υπολογίζεται από τον τύπο

$$\psi_1(u) = \frac{1}{1+\theta}e^{-Ru} = \frac{1}{1+{}^{1}/_{4}}e^{-{}^{1}/_{10}u} = \frac{4}{5}e^{-{}^{u}/_{10}}.$$

Οι υπολογισμοί που ακολουθούν, αφορούν το 2$^{\text{ο}}$ χαρτοφυλάκιο με διαφορετικές τιμές για τα λ, μ_1 αλλά για σταθερό c.

Για το **δεύτερο χαρτοφυλάκιο** έστω ότι η κατανομή των αποζημιώσεων έχει πυκνότητα

$$f(x) = \frac{1}{4}e^{-{}^{x}/_{4}}, \qquad x \geq 0.$$

Δίνεται λοιπόν ότι το $\lambda = 2$ και το $c = 10$.

Και σε αυτό το χαρτοφυλάκιο έχουμε εκθετικές αποζημιώσεις, οπότε η μέση τιμή ισούται με $\mu_1 = 4$.

Το περιθώριο ασφαλείας υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1 = \frac{10}{2 \cdot 4} - 1 = \frac{1}{4}$$

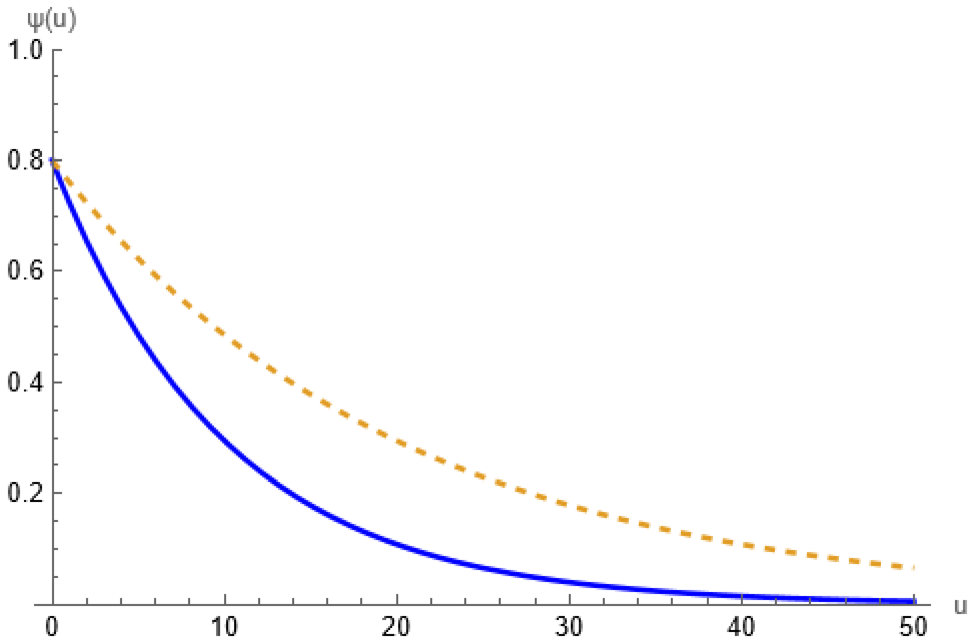
Επιπλέον γνωρίζουμε ότι η β είναι παράμετρος της εκθετικής κατανομής για τις αποζημιώσεις, ο συντελεστής προσαρμογής λοιπόν δίνεται κι εδώ από την παρακάτω σχέση

$$R = \frac{\theta\beta}{1+\theta} = \frac{{}^{1}/_{4} \cdot {}^{1}/_{4}}{1+{}^{1}/_{4}} = \frac{1}{20}$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u, υπολογίζεται από τον τύπο

$$\psi_2(u) = \frac{1}{1+\theta}e^{-Ru} = \frac{1}{1+{}^{1}/_{4}}e^{-{}^{1}/_{20}u} = \frac{4}{5}e^{-{}^{u}/_{20}}.$$

Παρακάτω αναπαριστούμε γραφικά την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_1(u)$ και $\psi_2(u)$ ως συνάρτηση του u, για τις διαφορετικές τιμές λ, μ_1.



Σχήμα 4.1: Γραφική αναπαράσταση πιθανοτήτων χρεοκοπίας $\psi_1(u)$ & $\psi_2(u)$ με αρχικό αποθεματικό $0 \le u \le 50$. Με μπλε χρώμα αναπαρίσταται η $\psi_1(u)$ και με πορτοκαλί αντίστοιχα η $\psi_2(u)$.

Επιπλέον ενδιαφέρον παρουσιάζει η μεταβολή των τιμών των πιθανοτήτων χρεοκοπίας συναρτήσει διαφορετικών τιμών του πλεονάσματος u, όπως αυτή εμφανίζεται στον κάτωθι πίνακα.

u	$\psi_1(u)$	$\psi_2(u)$
0	0.8	0.8
0.5	0.760984	0.760984
1	0.72387	0.780248
1.5	0.688566	0.742195
2	0.654985	0.72387
2.5	0.623041	0.705998
3	0.592655	0.688566
3.5	0.56375	0.671566
4	0.536256	0.654985
4.5	0.510103	0.638813
5	0.485225	0.623041
5.5	0.46156	0.607658
6	0.439049	0.592655
6.5	0.417637	0.578022
7	0.397268	0.56375

7.5	0.377893	0.549831
8	0.359463	0.536256
8.5	0.341932	0.523016
9	0.325256	0.510103
9.5	0.309393	0.497508
10	0.294304	0.485225

Πίνακας 1: Πίνακας τιμών των πιθανοτήτων χρεοκοπίας $\psi_1(u)$ & $\psi_2(u)$ για Εκθετική κατανομή αποζημιώσεων, με εύρος πλεονάσματος ενδεικτικά μεταξύ των τιμών 0 και 10, ειδικότερα $0 \leq u \leq 10$, και με αύξηση του ρυθμού μεταβολής του u κατά 0,5.

Για τα παραπάνω δύο χαρτοφυλάκια που μελετήσαμε, όπως αναφέραμε και στην αρχή της παραγράφου, έχουμε επιλέξει η κατανομή των αποζημιώσεων να είναι η **Εκθετική**.
Στο πρώτο χαρτοφυλάκιο επιλέξαμε η τιμή του λ να είναι μεγαλύτερη από την τιμή της μέσης τιμής μ_1. Ειδικότερα, επιδιώξαμε η συχνότητα με την οποία θα εμφανίζονται οι κίνδυνοι, εν προκειμένω οι αποζημιώσεις, να είναι μεγάλη. Ενώ για το μέγεθος αυτών των κινδύνων, δηλαδή το ύψος των αποζημιώσεων, επιλέξαμε να είναι μικρό. Στο δεύτερο χαρτοφυλάκιο κάναμε την αντίστροφη επιλογή. Θέσαμε τιμές στα λ, μ_1, τέτοιες ώστε να υποδηλώνετε ότι η συχνότητα εμφάνισης των αποζημιώσεων είναι μικρή, ωστόσο το μέγεθος αυτών είναι υψηλό.
Επιπλέον, θέσαμε μία σταθερή τιμή για την ένταση ασφαλίστρου c. Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να παρατηρήσουμε, πως και για τις δύο περιπτώσεις χαρτοφυλακίων, το γινόμενο $\lambda\mu_1$ παραμένει σταθερό. Με αυτό τον τρόπο εξασφαλίζουμε ότι το περιθώριο ασφαλείας θ θα έχει σταθερά την ίδια τιμή και για τα δύο χαρτοφυλάκια.

Η επιλογή των τιμών για τις ποσότητες λ, μ_1, c έγινε με κατάλληλο τρόπο προκειμένου να διερευνήσουμε σε ποιο από τα δύο χαρτοφυλάκια θα λάβουμε τη μεγαλύτερη τιμή για την πιθανότητα χρεοκοπίας, έχοντας και τα δύο την ίδια κατανομή αποζημιώσεων, σταθερό περιθώριο ασφαλείας αλλά διαφορετικές τιμές για την ένταση άφιξης των ζημιών και το μέγεθος αυτών.

Από τις γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 4.1, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ισχύει η ακόλουθη σχέση, $\psi_2(u) \geq \psi_1(u),\ \forall\, u \geq 0$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση της $\psi_1(u) = \frac{4}{5}e^{-u/10}$ φθίνει πιο γρήγορα συγκριτικά με τη συνάρτηση $\psi_2(u) = \frac{4}{5}e^{-u/20}$, γεγονός που μπορούμε να συμπεράνουμε κι από τη σύγκριση των εκθετών των δύο συναρτήσεων.

Επιπλέον, σύμφωνα με τον Πίνακα 1 παρατηρούμε ότι τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας του 2^{ου} χαρτοφυλακίου $\psi_2(u)$ είναι σταθερά μεγαλύτερη από την τιμή της $\psi_1(u)$, με εξαίρεση τις δύο πρώτες τιμές που είναι ίδιες και το πλεόνασμα λαμβάνει τις μικρότερες δυνατές τιμές που ορίσαμε. Ακόμη, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η τιμή του πλεονάσματος τόσο αυξάνεται κι η διαφορά μεταξύ των τιμών των πιθανοτήτων χρεοκοπίας, με τη μεγαλύτερη να εμφανίζεται για την μεγαλύτερη τιμή του πλεονάσματος $u = 10$.

Συνεπώς, το χαρτοφυλάκιο με μικρή συχνότητα άφιξης αποζημιώσεων και μεγάλο μέγεθος αποζημιώσεων έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα χρεοκοπίας, κι ως εκ τούτου χαρακτηρίζεται ως πιο ριψοκίνδυνο.

4.3.3 Υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας για Εκθετική κατανομή με Συνδυασμό Εκθετικής κατανομής

Στην αριθμητική εφαρμογή που ακολουθεί θα συγκρίνουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας Εκθετικής κατανομής αποζημιώσεων, με την πιθανότητα χρεοκοπίας όπου η κατανομή των αποζημιώσεων είναι ένας συνδυασμός Εκθετικής κατανομής. Στόχος μας κι εδώ παραμένει η εύρεση του πιο ριψοκίνδυνου χαρτοφυλακίου, δηλαδή εκείνου με τη μεγαλύτερη πιθανότητα χρεοκοπίας.

Για το **πρώτο χαρτοφυλάκιο**, υποθέτουμε ότι $\lambda = 7/12,\ c = 1$ και η $f(x)$ δίνεται από

$$f(x) = e^{-x}, \qquad x \geq 0.$$

Από την πυκνότητα αποζημιώσεων έχουμε, $\mu_1 = 1$.

Οπότε,

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1 = \frac{1}{{}^{7}/_{12} \cdot 1} - 1 = \frac{5}{7}.$$

Ο συντελεστής προσαρμογής υπολογίζεται από τη σχέση,

$$R = \frac{\theta\beta}{1+\theta} = \frac{{}^{5}/_{7} \cdot 1}{1 + {}^{5}/_{7}} = \frac{5}{12}.$$

Ως εκ τούτου,

$$\psi_1(u) = \frac{7}{12} e^{-{}^{5}/_{12}u} \qquad u \geq 0.$$

Για το **δεύτερο χαρτοφυλάκιο**, θα διατηρήσουμε σταθερή την τιμή του ασφαλίστρου c και θα διαφοροποιήσουμε τις τιμές των λ, μ_1.

Έστω ότι $\lambda = 1,\ c = 1$ και η πυκνότητα αποζημιώσεων είναι

$$f(x) = 12e^{-3x} - 12e^{-4x}, \qquad x \geq 0.$$

Οι τιμές των παραμέτρων είναι $\beta_1 = 3,\ \beta_2 = 4,\ A_1 = 4,\ A_2 = -3.$

Από την $f(x)$ έχουμε ότι η ροπογεννήτρια ισούται με

$$M_X(r) = \frac{\beta}{\beta - r} = 4\frac{3}{3-r} - 3\frac{4}{4-r} = \frac{12}{12 - 7r + r^2}, \quad r < 3$$

και

$$\mu_1 = 4\frac{1}{3} - 3\frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

Επιπλέον,

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1 = \frac{1}{1 \cdot {}^{7}\!/_{12}} - 1 = \frac{5}{7}.$$

Οι ρίζες $r_1,\ r_2$ θα βρεθούν από την εξίσωση του Lundberg

$$1 + (1+\theta)\mu_1 r = M_X(r)$$

$$1 + (1 + \frac{5}{7})\frac{7}{12}r = \frac{12}{3-r} - \frac{12}{4-r}$$

$$1 + r = \frac{12}{3-r} - \frac{12}{4-r}$$

Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών προκύπτει η παρακάτω τριτοβάθμια εξίσωση

$$r^3 - 6r^2 + 5r = 0$$

Όπου για $r \neq 0$, και διαιρώντας με r, προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση $r^2 - 6r + 5 = 0$.

Οι ρίζες είναι $r_1 = R = 1$ και $r_2 = 5$.

Με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα και τον τύπο (3.2.6) οι συντελεστές είναι

$$C_{11} = \frac{\dfrac{A_1}{\beta_1 - r_1}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{2} A_i}{(\beta_1 - r_1)^2}} = 3$$

$$C_{12} = \frac{\dfrac{A_1}{\beta_1 - r_2}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{2} A_i}{(\beta_1 - r_2)^2}} = 1$$

$$C_{21} = \frac{\dfrac{A_2}{\beta_2 - r_1}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{2} A_i}{(\beta_2 - r_1)^2}} = -\frac{3}{2}$$

$$C_{22} = \frac{\dfrac{A_2}{\beta_2 - r_2}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{2} A_i}{(\beta_2 - r_2)^2}} = -\frac{3}{2}$$

Επομένως, από με τον τύπο (3.2.7) προκύπτει

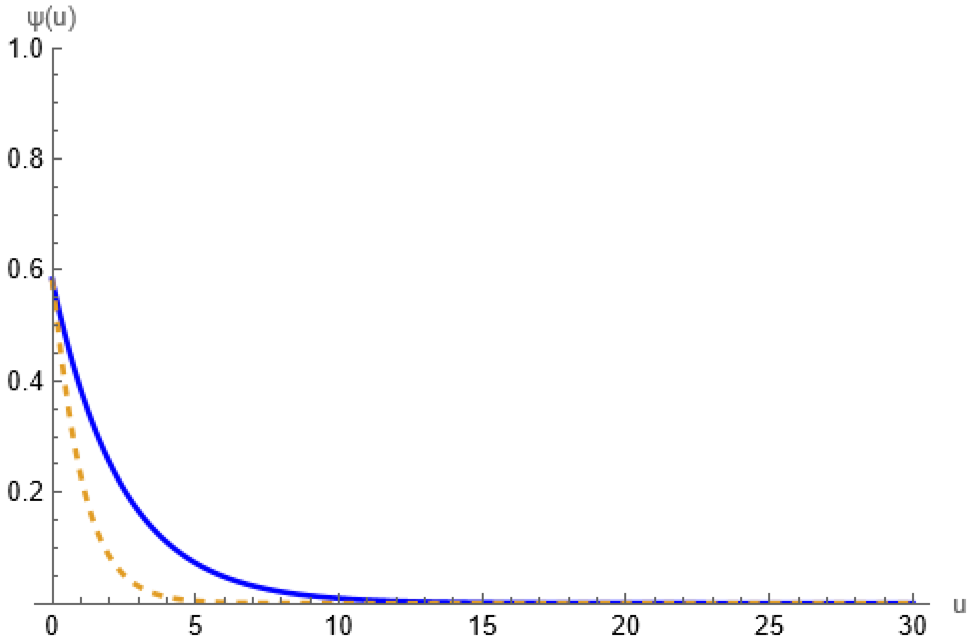
$$C_1 = \sum_{i=1}^{2} \frac{C_{i1}}{\beta_i} = \frac{5}{8}$$

$$C_2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{C_{i2}}{\beta_i} = -\frac{1}{24}.$$

Συνεπώς,

$$\psi_2(u) = \frac{5}{8} e^{-u} - \frac{1}{24} e^{-5u} \qquad u \geq 0.$$

Στο διάγραμμα που ακολουθεί αναπαρίστανται γραφικά οι πιθανότητες χρεοκοπίας $\psi_1(u)$ και $\psi_2(u)$ συναρτήσει του u, για διαφορετικές τιμές λ, μ_1 για κάθε χαρτοφυλάκιο, αλλά σταθερό περιθώριο ασφαλείας θ.



Σχήμα 4.2: Γραφική αναπαράσταση πιθανοτήτων χρεοκοπίας $\psi_1(u)$ & $\psi_2(u)$ με αρχικό αποθεματικό $0 \leq u \leq 30$. Με μπλε χρώμα αναπαρίσταται η $\psi_1(u)$ και με πορτοκαλί η $\psi_2(u)$.

Έπεται ο πίνακας τιμών των πιθανοτήτων χρεοκοπίας ως συνάρτηση των διαφορετικών τιμών του πλεονάσματος u.

u	$\psi_1(u)$	$\psi_2(u)$
0	0.583333	0.583333
0.5	0.47363	0.375661
1	0.384557	0.229644
1.5	0.312236	0.139433
2	0.253516	0.0845827
2.5	0.205839	0.051303
3	0.167128	0.0311169
3.5	0.135697	0.0188734
4	0.110177	0.0114473
4.5	0.0894571	0.00694312
5	0.0726334	0.00421122
5.5	0.0589737	0.00255423
6	0.0478829	0.00154922
6.5	0.0388779	0.000939649

7	0.0315664	0.000569926
7.5	0.0256299	0.000345678
8	0.0208098	0.000209664
8.5	0.0168963	0.000127168
9	0.0137187	0.0000771311
9.5	0.0111387	0.0000467824
10	0.00904391	0.000028375

Πίνακας 2: Πίνακας τιμών των πιθανοτήτων χρεοκοπίας $\psi_1(u)$ για Εκθετική κατανομή αποζημιώσεων και $\psi_2(u)$ για συνδυασμό Εκθετικής κατανομής, με εύρος πλεονάσματος ενδεικτικά μεταξύ των τιμών 0 και 10, ειδικότερα $0 \leq u \leq 10$, και με αύξηση του ρυθμού μεταβολής του u κατά 0,5.

Σε αυτό το παράδειγμα τόσο το περιθώριο ασφαλείας $\theta = 5/7$ όσο και τα ασφάλιστρα $c = 1$ παραμένουν σταθερά και για τα δύο χαρτοφυλάκια. Μεταβάλαμε τις τιμές των λ, μ_1. Για το πρώτο χαρτοφυλάκιο η τιμή του λ είναι μικρότερη της τιμής του μ_1, υποθέσαμε δηλαδή ότι η σφοδρότητα των ζημιών ήταν μεγαλύτερη της συχνότητας. Ενώ για το δεύτερο χαρτοφυλάκιο κάναμε την παραδοχή ότι η τιμή του $\lambda = 1$ είναι μεγαλύτερη από εκείνη του $\mu_1 = 7/12$.
Σύμφωνα λοιπόν με τα αποτελέσματα που προέκυψαν για τις πιθανότητες χρεοκοπίας, συνδυαστικά και με το Σχήμα 4.2 διαπιστώνουμε ότι πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_1(u) = \frac{7}{12} e^{-5/12 u}$ είναι μεγαλύτερη της πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi_2(u) = \frac{5}{8} e^{-u} - \frac{1}{24} e^{-5u}$. Παρατηρώντας συνάμα το παραπάνω γράφημα αντιλαμβανόμαστε ότι η $\psi_2(u)$ συγκλίνει γρηγορότερα στο μηδέν συγκριτικά με την $\psi_1(u)$.

Από τις τιμές των πιθανοτήτων που έχουν καταγραφεί στον Πίνακα 2 διαπιστώνουμε ότι οι τιμές της $\psi_1(u)$ είναι μεγαλύτερες από τις τιμές της $\psi_2(u)$. Ειδικότερα παρατηρούμε πως για μικρές τιμές πλεονάσματος οι διαφορά μεταξύ των δύο πιθανοτήτων αυξάνεται, με τη μεγαλύτερη διαφορά να σημειώνεται για τιμή πλεονάσματος $u = 1.5$.

Συμπερασματικά, ένα χαρτοφυλάκιο με Εκθετική κατανομή αποζημιώσεων, όπου η σφοδρότητα των αποζημιώσεων είναι μεγαλύτερη της συχνότητας, εμφανίζει τη μεγαλύτερη πιθανότητα χρεοκοπίας, συγκριτικά με την πιθανότητα χρεοκοπίας ενός χαρτοφυλακίου με Μίξη Εκθετικής κατανομής αποζημιώσεων όπου η συχνότητα των αποζημιώσεων εδώ είναι μεγαλύτερη της συχνότητας. Συνεπώς, το πρώτο χαρτοφυλάκιο κατατάσσεται ως πιο ριψοκίνδυνο συγκριτικά με το δεύτερο χαρτοφυλάκιο.

4.3.4 Υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας για Μίξεις Εκθετικών κατανομών

Με τη μελέτη της παρακάτω αριθμητικής εφαρμογής ο στόχος μας παραμένει ο ίδιος, η εύρεση του πιο ριψοκίνδυνου χαρτοφυλακίου ανάμεσα σε δύο χαρτοφυλάκια με διαφορετική κατανομή αποζημιώσεων, αλλά ίδιο περιθώριο ασφαλείας. Και σε αυτή την εφαρμογή η σταθερότητα του θ εξασφαλίζεται μέσω της διατήρησης σταθερού γινομένου $\lambda\mu_1$ και ασφαλίστρου c. Στο πρώτο αλλά και στο δεύτερο χαρτοφυλάκιο η κατανομή αποζημιώσεων θα είναι μία Μίξη Εκθετικής κατανομής.

Για το **πρώτο χαρτοφυλάκιο**, υποθέτουμε ότι $\lambda = 3,\ c = 1$.

Η πυκνότητα των αποζημιώσεων δίνεται από την

$$f(x) = \frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{16}{3}e^{-6x}, \qquad x \geq 0.$$

Οι τιμές των παραμέτρων είναι $\beta_1 = 3,\ \beta_2 = 6,\ A_1 = {}^{1}\!/_{9},\ A_2 = {}^{8}\!/_{9}$.

Η μέση τιμή ισούται με $\mu_1 = 5/27$.

Το περιθώριο ασφαλείας είναι

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1 = \frac{4}{5}.$$

Ο συντελεστής προσαρμογής προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης του Lundberg και της ροπογεννήτριας που δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$M_x(r) = \frac{54 - 17r}{54 - 27r + 3r^2}, \quad r < 3.$$

Οι ρίζες που προκύπτουν είναι $r_1 = 0$ και η ρίζα που αξιοποιούμε $r_2 = R = 2$.

Μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, του τύπου (3.2.7) και τη συμβολή του μαθηματικού προγράμματος Mathematica, η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με

$$\psi_1(u) = \frac{1}{9}e^{-4u} + \frac{4}{9}e^{-2u}, \qquad u \geq 0.$$

Για το **δεύτερο χαρτοφυλάκιο**, διατηρούμε σταθερή την τιμή του ασφαλίστρου $c = 1$ και θα διαφοροποιούμε τις τιμές των λ, μ_1.

Έστω ότι $\lambda = 5/27$, $c = 1$ και η πυκνότητα αποζημιώσεων είναι

$$f(x) = \frac{1}{4}e^{-x/2} + \frac{1}{8}e^{-x/4}, \qquad x \geq 0.$$

Οι τιμές των παραμέτρων είναι $\beta_1 = {}^1/_2$, $\beta_2 = {}^1/_4$, $A_1 = {}^1/_2$, $A_2 = {}^1/_2$.

Η μέση τιμή ισούται με $\mu_1 = 3$ και το $\theta = {}^4/_5$, ίδια τιμή με το περιθώριο ασφαλείας του πρώτου χαρτοφυλακίου.

Οι ρίζες r_1, r_2 θα βρεθούν από την επίλυση της εξίσωσης του Lundberg και της ροπογεννήτριας που δίνεται από την παρακάτω σχέση

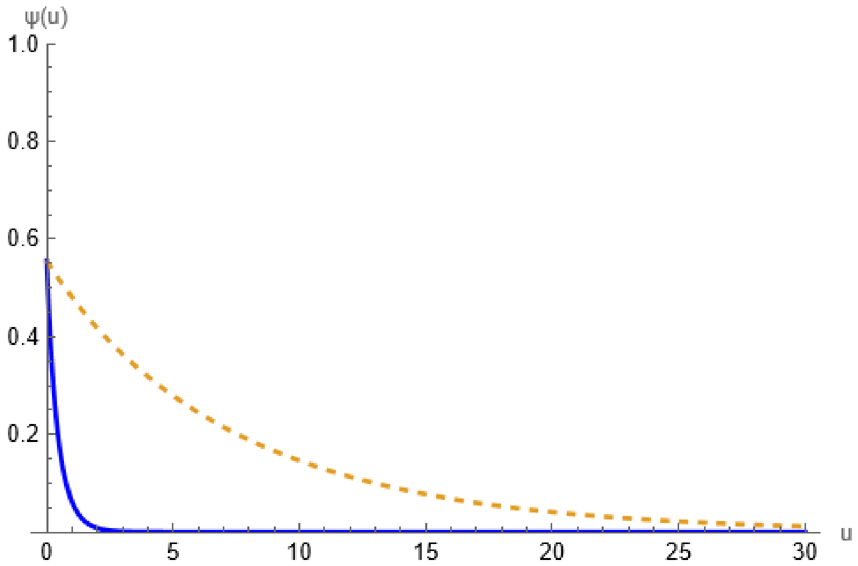
$$M_X(r) = \frac{1-3r}{1-6r+8r^2}, \quad r < {}^1/_4.$$

Οι ρίζες είναι $r_1 = 0$ και $r_2 = R = 0.126849$.

Συνεπώς, μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, του τύπου (3.2.7) και τω αλγεβρικών υπολογισμών του προγράμματος Mathematica, η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με

$$\psi_2(u) = 0.0380e^{-0.4379u} + 0.5175e^{-0.1268u}, \qquad u \geq 0.$$

Στο Σχήμα 4.3 που ακολουθεί αναπαρίστανται γραφικά οι πιθανότητες χρεοκοπίας $\psi_1(u)$ και $\psi_2(u)$ συναρτήσει του u, για διαφορετικές τιμές λ, μ_1 για κάθε χαρτοφυλάκιο, αλλά σταθερό περιθώριο ασφαλείας θ.



Σχήμα 4.3: Γραφική αναπαράσταση πιθανοτήτων χρεοκοπίας $\psi_1(u)$ & $\psi_2(u)$ με αρχικό αποθεματικό $0 \leq u \leq 30$. Με μπλε χρώμα αναπαρίσταται η $\psi_1(u)$ και με πορτοκαλί η $\psi_2(u)$.

Και σε αυτό το παράδειγμα θα μας φανεί χρήσιμος, στην σύγκριση και κατ' επέκταση στην εξαγωγή συμπερασμάτων, ο πίνακας τιμών των πιθανοτήτων χρεοκοπίας συναρτήσει των διαφορετικών τιμών του πλεονάσματος u.

u	$\psi_1(u)$	$\psi_2(u)$
0	0.555556	0.555556
0.5	0.178539	0.516271
1	0.0621841	0.480413
1.5	0.022403	0.44757
2	0.00817756	0.417399
2.5	0.00299969	0.389606
3	0.00110235	0.363942
3.5	0.000405373	0.340194
4	0.000149107	0.318177
4.5	0.0000548505	0.297731
5	0.000020178	0.278718
5.5	$7.42301*10^{-6}$	0.261013
6	$2.73077*10^{-6}$	0.24451
6.5	$1.00459*10^{-6}$	0.229113
7	$3.69568*10^{-7}$	0.214734
7.5	$1.35957*10^{-7}$	0.201298
8	$5.00156*10^{-8}$	0.188734
8.5	$1.83997*10^{-8}$	0.176981
9	$6.76888*10^{-9}$	0.16598
9.5	$2.49013*10^{-9}$	0.15568
10	$9.16068*10^{-10}$	0.146033

Πίνακας 3: Πίνακας τιμών των πιθανοτήτων χρεοκοπίας $\psi_1(u)$ και $\psi_2(u)$ για Μίξη Εκθετικής κατανομής αποζημιώσεων και στα δύο χαρτοφυλάκια, με εύρος πλεονάσματος ενδεικτικά μεταξύ των τιμών 0 και 10, ειδικότερα $0 \leq u \leq 10$, και με αύξηση του ρυθμού μεταβολής του u κατά 0,5.

Και σε αυτή την αριθμητική εφαρμογή υπενθυμίζουμε ότι διατηρήσαμε σταθερό το περιθώριο ασφαλείας $\theta = 5/7$ και τα ασφάλιστρα $c = 1$. Οι τιμές των λ, μ_1 μεταβλήθηκαν. Ειδικότερα, στο πρώτο χαρτοφυλάκιο η τιμή του $\lambda = 3$ είναι μεγαλύτερη της τιμής του $\mu_1 = 5/27$, κάναμε δηλαδή την παραδοχή ότι η συχνότητα των αποζημιώσεων είναι μεγαλύτερη της σφοδρότητας αυτών.

Στο δεύτερο χαρτοφυλάκιο κινηθήκαμε αντίστροφα, υποθέσαμε ότι η σφοδρότητα των αποζημιώσεων με $\mu_1 = 3$ είναι μεγαλύτερη της συχνότητας με $\lambda = 5/27$ (διατηρώντας έτσι σταθερό το γινόμενο $\lambda\,\mu_1$ και για τα δύο χαρτοφυλάκια).
Από τα αποτελέσματα που προέκυψαν για τις πιθανότητες χρεοκοπίας, συνδυαστικά και με το Σχήμα 4.3 διαπιστώνουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_2(u) = 0.0380e^{-0.4379u} + 0.5175e^{-0.1268u}$ είναι μεγαλύτερη της πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi_1(u) = \frac{1}{9}e^{-4u} + \frac{4}{9}e^{-2u}$. Όπως εμφανίζεται και στο διάγραμμα του παραπάνω Σχήματος 4.3, η $\psi_2(u)$ φθίνει πιο αργά σε σχέση με την $\psi_1(u)$, που παρουσιάζει απότομη κλίση προς το μηδέν.

Το παραπάνω συμπέρασμα υποστηρίζεται κι από τον Πίνακα 3, όπου παρουσιάζονται οι τιμές των πιθανοτήτων χρεοκοπίας δύο χαρτοφυλακίων με Μίξεις Εκθετικών κατανομών αποζημιώσεων. Οι τιμές της $\psi_2(u)$ είναι εμφανώς μεγαλύτερες από εκείνες της $\psi_1(u)$. Ειδικότερα, όσο αυξάνεται η τιμή του πλεονάσματος u τόσο μεγαλώνει κι διαφορά τους, με την μεγαλύτερη διαφορά να σημειώνεται για $u = 9$. Ενώ και σε αυτό το παράδειγμα παρατηρούμε ότι για $u = 0$ οι τιμές των δύο πιθανοτήτων χρεοκοπίας συμπίπτουν.

Εν κατακλείδι, για δύο χαρτοφυλάκια με τις αποζημιώσεις τους να ακολουθούν Μίξη Εκθετικών κατανομών, το δεύτερο χαρτοφυλάκιο που παρουσιάζει τη σφοδρότητα των αποζημιώσεων να είναι μεγαλύτερη της συχνότητας, χαρακτηρίζεται ως πιο ριψοκίνδυνο.

4.3.5 Υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας για Erlang κατανομή με Εκθετική κατανομή

Στο παράδειγμα αυτό θα κινηθούμε κατά αντιστοιχία με τα παραπάνω παραδείγματα που έχουμε παραθέσει. Οι βασικές μας παραδοχές εξακολουθούν να αφορούν το γεγονός ότι και για τα δύο χαρτοφυλάκια η τιμή για το περιθώριο ασφαλείας θ και των ασφαλίστρων c παραμένει η ίδια, ενώ μεταβάλλουμε τις τιμές λ, μ_1. Στο πρώτο χαρτοφυλάκιο η κατανομή των αποζημιώσεων θα είναι η Erlang και στο δεύτερο χαρτοφυλάκιο η Εκθετική.

Για το **πρώτο χαρτοφυλάκιο**, υποθέτουμε ότι $\lambda = 2,\ c = 3.$

Η πυκνότητα των αποζημιώσεων δίνεται από την

$$f(x) = 4xe^{-2x}, \qquad x \geq 0.$$

Οι τιμές των παραμέτρων είναι $\alpha = 2,\ \beta = 2.$

Η μέση τιμή ισούται με $\mu_1 = \frac{\alpha}{\beta} = 1$.

Το περιθώριο ασφαλείας είναι

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Ο συντελεστής προσαρμογής προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης του Lundberg και της ροπογεννήτριας που δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$M_x(r) = \frac{4}{(-2+r)^2}, \quad r < 2.$$

Οι ρίζες που προκύπτουν είναι $r_1 = 0$ και αυτή που αξιοποιούμε $r_2 = R = 0.464816$.

Μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace και τη συμβολή του μαθηματικού προγράμματος Mathematica, η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με

$$\psi_1(u) = 0.7031e^{-0.4648u} - 0.0365\, e^{-2.8685u}, \qquad u \geq 0.$$

Για το **δεύτερο χαρτοφυλάκιο**, έστω ότι $\lambda = 1,\ c = 3$, διατηρούμε σταθερή την τιμή του ασφαλίστρου και διαφοροποιούμε τις τιμές των λ, μ_1.

Η πυκνότητα αποζημιώσεων είναι

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}, \qquad x \geq 0.$$

Η μέση τιμή ισούται με $\mu_1 = 2$ και το $\theta = {}^1\!/_2$, όπου η τιμή του περιθωρίου ασφαλείας είναι ίδια με αυτή του πρώτου χαρτοφυλακίου.

Οι ρίζες $r_1,\ r_2$ θα βρεθούν από την επίλυση της εξίσωσης του Lundberg και της ροπογεννήτριας που δίνεται από την παρακάτω σχέση

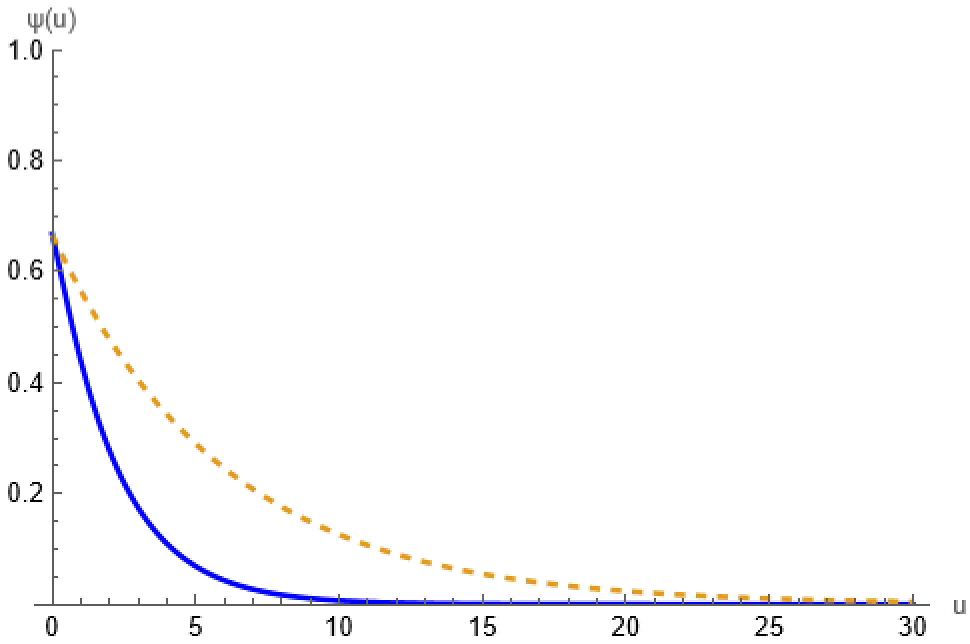
$$M_x(r) = \frac{1}{1-2r}, \quad r < {}^1\!/_2.$$

Οι ρίζες είναι $r_1 = 0$ και $r_2 = R = {}^1\!/_6$.

Με τη συμβολή του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace και των αλγεβρικών υπολογισμών από το πρόγραμμα Mathematica, η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με

$$\psi_2(u) = \frac{2}{3}e^{-u/6}, \qquad u \geq 0.$$

Στο Σχήμα 4.4 που ακολουθεί αναπαρίστανται γραφικά οι πιθανότητες χρεοκοπίας $\psi_1(u)$ και $\psi_2(u)$ συναρτήσει του u, για διαφορετικές τιμές λ, μ_1 για κάθε χαρτοφυλάκιο, αλλά σταθερό περιθώριο ασφαλείας θ.



Σχήμα 4.4: Γραφική αναπαράσταση πιθανοτήτων χρεοκοπίας $\psi_1(u)$ & $\psi_2(u)$ με αρχικό αποθεματικό $0 \leq u \leq 30$. Με μπλε χρώμα αναπαρίσταται η $\psi_1(u)$ και με πορτοκαλί η $\psi_2(u)$.

Στον παρακάτω πίνακα έχουμε τη δυνατότητα να διαπιστώσουμε τα παραπάνω ευρήματα αναφορικά με διαφορετικές τιμές που λαμβάνουν οι πιθανότητες χρεοκοπίας σε συνάρτηση με το πλεόνασμα u.

u	$\psi_1(u)$	$\psi_2(u)$
0	0.666667	0.666667
0.5	0.54863	0.613363
1	0.439673	0.564321
1.5	0.349643	0.519201
2	0.277408	0.477688
2.5	0.219945	0.439494
3	0.174349	0.404354
3.5	0.138197	0.372023
4	0.109539	0.342278

4.5	0.0868231	0.314911
5	0.068818	0.289732
5.5	0.0545467	0.266566
6	0.043235	0.245253
6.5	0.034269	0.225644
7	0.0271624	0.207602
7.5	0.0215295	0.191003
8	0.0170648	0.175731
8.5	0.0135259	0.161681
9	0.010721	0.148753
9.5	0.00849767	0.13686
10	0.00673545	0.125917

Πίνακας 4: Πίνακας τιμών των πιθανοτήτων χρεοκοπίας $\psi_1(u)$ και $\psi_2(u)$ για Erlang κατανομής αποζημιώσεων και Εκθετική αντίστοιχα, με εύρος πλεονάσματος ενδεικτικά μεταξύ των τιμών 0 και 10, ειδικότερα $0 \leq u \leq 10$, και με αύξηση του ρυθμού μεταβολής του u κατά 0,5.

Στην εν λόγω αριθμητική εφαρμογή υπενθυμίζουμε ότι διατηρούμε σταθερό το περιθώριο ασφαλείας $\theta = 1/2$ και τα ασφάλιστρα $c = 3$. Οι τιμές των λ, μ_1 μεταβλήθηκαν. Ειδικότερα, στο πρώτο χαρτοφυλάκιο η τιμή του $\lambda = 2$ είναι μεγαλύτερη της τιμής του $\mu_1 = 1$, κάνοντας έτσι την παραδοχή ότι η συχνότητα των αποζημιώσεων είναι μεγαλύτερη της σφοδρότητας αυτών.
Στο δεύτερο χαρτοφυλάκιο κινηθήκαμε αντίστροφα, υποθέσαμε ότι η σφοδρότητα των αποζημιώσεων με μέση τιμή $\mu_1 = 2$ είναι μεγαλύτερη της συχνότητας με $\lambda = 1$ (διατηρώντας έτσι σταθερό το γινόμενο $\lambda\, \mu_1$ και για τα δύο χαρτοφυλάκια).
Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που προέκυψαν για τις πιθανότητες χρεοκοπίας, συνδυαστικά και με το Σχήμα 4.4 διαπιστώνουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_2(u) = \frac{2}{3} e^{-u/6}$ είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_1(u) = 0.7031 e^{-0.4648u} - 0.0365\, e^{-2.8685u}$. Στο διάγραμμα του παραπάνω Σχήματος 4.4, εμφανίζεται η $\psi_2(u)$ να φθίνει πιο αργά συγκριτικά με την $\psi_1(u)$.

Υπενθυμίζουμε ότι στον Πίνακα 3 παρουσιάζονται οι τιμές των πιθανοτήτων χρεοκοπίας ενός χαρτοφυλακίου με Erlang κατανομή αποζημιώσεων κι ενός δεύτερου χαρτοφυλακίου με Εκθετική κατανομή αποζημιώσεων. Παρατηρώντας τις τιμές αυτές διαπιστώνουμε ότι οι τιμές της $\psi_2(u)$ είναι μεγαλύτερες από εκείνες της $\psi_1(u)$. Ειδικότερα, τη μεγαλύτερη διαφορά μεταξύ των τιμών των πιθανοτήτων χρεοκοπίας τη συναντάμε σε μικρές τιμές πλεονάσματος u, με την μεγαλύτερη διαφορά να σημειώνεται για $u = 3{,}5$. Επιπλέον και σε αυτό το παράδειγμα παρατηρούμε ότι για $u = 0$ οι τιμές των δύο πιθανοτήτων χρεοκοπίας συμπίπτουν. Αξίζει ακόμη να αναφέρουμε πως παρατηρούμε ότι η διαφορά μεταξύ των τιμών των δύο πιθανοτήτων είναι σχετικά μικρή, γεγονός που δε διαπιστώθηκε στις προηγούμενες αριθμητικές εφαρμογές.

Συμπερασματικά, για δύο χαρτοφυλάκια με τις αποζημιώσεις του πρώτου να ακολουθούν την Erlang κατανομή και τις αποζημιώσεις του δεύτερου να ακολουθούν την Εκθετική, το δεύτερο χαρτοφυλάκιο που παρουσιάζει τη σφοδρότητα των αποζημιώσεων να είναι μεγαλύτερη της συχνότητας, χαρακτηρίζεται ως πιο ριψοκίνδυνο.

4.3.6 Υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας για Μίξη Erlang κατανομών με Εκθετική κατανομή

Αυτή η αριθμητική εφαρμογή έχει ως στόχο να μελετήσει την πιθανότητα χρεοκοπίας για δύο χαρτοφυλάκια όπου η κατανομές αποζημιώσεων είναι μία Μίξη Erlang και μια Εκθετική κατανομή, αντίστοιχα για το πρώτο και το δεύτερο χαρτοφυλάκιο. Όπως είδαμε και στις προηγούμενες εφαρμογές, η βασική μας παραδοχή είναι το περιθώριο ασφάλειας θ να παραμένει το ίδιο και για τα δύο χαρτοφυλάκια. Επιπλέον, σταθερή θα διατηρήσουμε και την ποσότητα των ασφαλίστρων c. Οι τιμές των τιμές λ, μ_1 θα μεταβληθούν κατάλληλα.

Για το **πρώτο χαρτοφυλάκιο**, υποθέτουμε ότι $\lambda = 1,\ c = 2$.

Η πυκνότητα των αποζημιώσεων δίνεται από την

$$f(x) = \frac{9}{2} x e^{-3x} + 18 x e^{-6x}, \qquad x \geq 0.$$

Οι τιμές των παραμέτρων είναι $\alpha = 3,\ \beta_1 = 3,\ \beta_2 = 6,\ A_1 = 1/2,\ A_2 = 1/2$.

Η μέση τιμή ισούται με $\mu_1 = 1/2$ και το περιθώριο ασφαλείας είναι $\theta = 3$.

Ο συντελεστής προσαρμογής προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης του Lundberg και της ροπογεννήτριας που δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$M_x(r) = \frac{9}{2}\left(\frac{4}{(-6+r)^2} + \frac{1}{(-3+r)^2}\right), \quad r < 3.$$

Οι ρίζες που προκύπτουν είναι $r_1 = 0$ και αυτή που αξιοποιούμε $r_2 = R = 1.9019$.

Μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, του τύπου (3.2.9) και τη συμβολή του μαθηματικού προγράμματος Mathematica, η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με

$$\psi_1(u) = 0.25e^{-18.4414u} + 0.2819e^{-1.9019u} - 0.0512e^{-7.098u} - 0.2308e^{-4u}.$$

Για $u \geq 0$.

Για το **δεύτερο χαρτοφυλάκιο**, έστω ότι $\lambda = 1/2$, $c = 2$, διατηρούμε σταθερή την τιμή του ασφαλίστρου.

Η πυκνότητα αποζημιώσεων είναι

$$f(x) = e^{-x}, \qquad x \geq 0.$$

Η μέση τιμή ισούται με $\mu_1 = 1$ και το $\theta = 3$, όπου η τιμή του περιθωρίου ασφαλείας είναι ίδια με αυτή του πρώτου χαρτοφυλακίου.

Οι ρίζες r_1, r_2 θα βρεθούν από την επίλυση της εξίσωσης του Lundberg και της ροπογεννήτριας που δίνεται από την παρακάτω σχέση

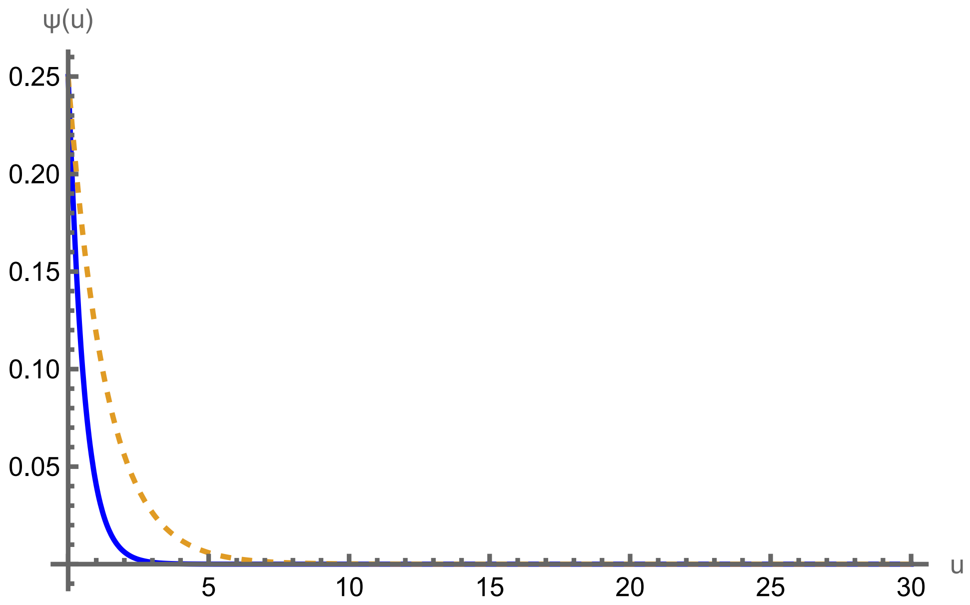
$$M_x(r) = \frac{1}{1-r}, \quad r < 1.$$

Οι ρίζες είναι $r_1 = 0$ και $r_2 = R = 3/4$.

Με τη συμβολή του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace και των αλγεβρικών υπολογισμών από το πρόγραμμα Mathematica, η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με

$$\psi_2(u) = \frac{1}{4}e^{-3u/4}, \qquad u \geq 0.$$

Στο Σχήμα 4.5 που ακολουθεί αναπαρίστανται γραφικά οι πιθανότητες χρεοκοπίας $\psi_1(u)$ και $\psi_2(u)$ συναρτήσει του u, για διαφορετικές τιμές λ, μ_1 για κάθε χαρτοφυλάκιο, αλλά σταθερό περιθώριο ασφαλείας θ.



Σχήμα 4.5: Γραφική αναπαράσταση πιθανοτήτων χρεοκοπίας $\psi_1(u)$ & $\psi_2(u)$ με αρχικό αποθεματικό $0 \leq u \leq 30$. Με μπλε χρώμα αναπαρίσταται η $\psi_1(u)$ και με πορτοκαλί η $\psi_2(u)$.

Στον παρακάτω πίνακα έχουμε τη δυνατότητα να παρατηρήσουμε τις διαφορετικές τιμές που λαμβάνουν οι πιθανότητες χρεοκοπίας συναρτήσει του πλεονάσματος u.

u	$\psi_1(u)$	$\psi_2(u)$
0	0.25	0.25
0.5	0.102576	0.171822
1	0.0405948	0.118092
1.5	0.0159804	0.0811631
2	0.00623613	0.0557825
2.5	0.00242023	0.0383387
3	0.000936817	0.0263498
3.5	0.000362217	0.0181099
4	0.000139988	0.0124468
4.5	0.0000540923	0.00855453
5	0.0000209004	0.00587944
5.5	8.07537*10-6	0.00404087
6	3.12009*10-6	0.00277725
6.5	1.20551*10-6	0.00190877
7	4.65772*10-7	0.00131188
7.5	1.7996*10-7	0.000901641
8	6.95309*10-8	0.000619688
8.5	2.68646*10-8	0.000425905
9	1.03797*10-8	0.00029272

9.5	4.01038*10-9	0.000201183
10	1.54949*10-9	0.000138271

Πίνακας 5: Πίνακας τιμών των πιθανοτήτων χρεοκοπίας $\psi_1(u)$ και $\psi_2(u)$ για Μίξη Erlang κατανομής αποζημιώσεων και Εκθετική αντίστοιχα, με εύρος πλεονάσματος ενδεικτικά μεταξύ των τιμών 0 και 10, ειδικότερα $0 \leq u \leq 10$, και με αύξηση του ρυθμού μεταβολής του u κατά 0,5.

Σε αυτό το παράδειγμα, καθώς και στα προηγούμενα, υπενθυμίζουμε ότι διατηρούμε σταθερό το περιθώριο ασφαλείας $\theta = 3$ και τα ασφάλιστρα $c = 2$. Οι τιμές των λ, μ_1 μεταβλήθηκαν. Συγκεκριμένα, στο πρώτο χαρτοφυλάκιο η τιμή του $\lambda = 1$ είναι μεγαλύτερη της τιμής του $\mu_1 = 1/2$, κάνοντας έτσι την παραδοχή ότι η συχνότητα των αποζημιώσεων είναι μεγαλύτερη της σφοδρότητας αυτών.
Και σε αυτή την εφαρμογή, με το δεύτερο χαρτοφυλάκιο κινηθήκαμε αντίστροφα, υποθέτοντας ότι η σφοδρότητα των αποζημιώσεων με μέση τιμή $\mu_1 = 1$ είναι μεγαλύτερη της συχνότητας με $\lambda = 1/2$ (διατηρώντας έτσι σταθερό το γινόμενο $\lambda\,\mu_1$ και για τα δύο χαρτοφυλάκια).
Μελετώντας τα αποτελέσματα που προέκυψαν για τις πιθανότητες χρεοκοπίας, συνδυαστικά και με το Σχήμα 4.5 διαπιστώνουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_2(u) = \frac{1}{4}e^{-3u/4}$ είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_1(u) = 0.25e^{-18.4414u} + 0.2819e^{-1.9019u} - 0.0512e^{-7.098u} - 0.2308e^{-4u}$. Στο διάγραμμα του Σχήματος 4.5, παρατηρούμε ότι η $\psi_2(u)$ να φθίνει πιο αργά συγκριτικά με την $\psi_1(u)$. Ωστόσο και οι δύο πιθανότητες χρεοκοπίας τείνουν να συγκλίνουν στο μηδέν σχετικά γρήγορα.

Υπενθυμίζουμε ότι στον Πίνακα 5 παρουσιάζονται οι τιμές των πιθανοτήτων χρεοκοπίας ενός χαρτοφυλακίου με Μίξη Erlang κατανομής αποζημιώσεων κι ενός δεύτερου χαρτοφυλακίου με Εκθετική κατανομή αποζημιώσεων. Παρατηρώντας τις τιμές αυτές διαπιστώνουμε ότι οι τιμές της $\psi_2(u)$ είναι μεγαλύτερες από εκείνες της $\psi_1(u)$. Ειδικότερα, τη μεγαλύτερη διαφορά μεταξύ των τιμών των πιθανοτήτων χρεοκοπίας τη συναντάμε σε μικρές τιμές πλεονάσματος u, με την μεγαλύτερη διαφορά να σημειώνεται για $u = 1{,}5$. Επιπλέον και σε αυτό το παράδειγμα παρατηρούμε ότι για $u = 0$ οι τιμές των δύο πιθανοτήτων χρεοκοπίας συμπίπτουν. Αξίζει ακόμη να αναφέρουμε πως η διαφορά που παρατηρείται μεταξύ των τιμών των δύο πιθανοτήτων είναι αρκετά μικρή, γεγονός που διαπιστώθηκε μονάχα στην προηγούμενη αριθμητική εφαρμογή.

Εν κατακλείδι, για δύο χαρτοφυλάκια με τις αποζημιώσεις του πρώτου να ακολουθούν μια Μίξη Erlang κατανομή και τις αποζημιώσεις του δεύτερου να ακολουθούν την Εκθετική, το δεύτερο χαρτοφυλάκιο που παρουσιάζει τη σφοδρότητα των αποζημιώσεων να είναι μεγαλύτερη της συχνότητας, χαρακτηρίζεται ως πιο ριψοκίνδυνο.

□

Κεφάλαιο 5

Θεωρία Χρεοκοπίας και Φερεγγυότητα Ασφαλιστικών Εταιριών

5.1 Εισαγωγή

Με το παρόν κεφάλαιο εξετάζεται η συσχέτιση κι η αναγκαιότητα της θεωρίας χρεοκοπίας αναφορικά με την κεφαλαιακή επάρκεια, τη φερεγγυότητα και τη διαχείριση κινδύνων μιας ασφαλιστικής εταιρίας. Η θεωρία χρεοκοπίας είναι συνυφασμένη με το ρίσκο και τη δυναμική της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος. Αυτό που ενδεχομένως να μην αναγνώσετε με την πρώτη ματιά είναι η ιδιαίτερη χρησιμότητα της θεωρίας χρεοκοπίας σε πρακτικά ζητήματα φερεγγυότητας, καθώς συμπεριλαμβάνει ανώτερα μαθηματικά μοντέλα και πρακτικές που μπορούν να υποστηρίξουν τη λήψη αποφάσεων (decision making) σε συνθήκες αβεβαιότητας και ύπαρξης ρίσκου, ιδιαίτερα στον ασφαλιστικό κλάδο.

Όπως έχουμε αναφέρει και στο Κεφάλαιο 2, η θεωρία χρεοκοπίας μελετά την εξέλιξη της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος $U(t)$ σε ένα χαρτοφυλάκιο. Υπενθυμίζουμε ότι οι πρωτεργάτες σε αυτό το εγχείρημα Lundberg και Cramér, είχαν δείξει ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ μειώνεται εκθετικά γρήγορα στο μηδέν όταν το αρχικό πλεόνασμα είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός, δηλαδή $u \geq 0$, δεδομένου ότι ισχύει η συνθήκη καθαρού κέρδους, δηλαδή η συνεχής εισροή ασφαλίστρων είναι μεγαλύτερη των αποζημιώσεων.

Ο Gerber (1974) συνέδεσε τον συντελεστή προσαρμογής R με τον συντελεστή αποφυγής ρίσκου a (*risk aversion coefficient*). Με αυτόν τον τρόπο αξιοποιώντας την εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας (*utility function*)

$$u(x) = \frac{(1 - e^{-xa})}{a}$$

και τη μέθοδο τιμολόγησης με αδιαφορία[19] (*indifference pricing method*) δημιούργησε τον ακόλουθο τύπο υπολογισμού ασφαλίστρων,

$$\pi = \frac{1}{a} ln(E(e^{ax})).$$

Ως εκ τούτου απέδειξε ότι ακολουθώντας τον παραπάνω τύπο υπολογισμού ασφαλίστρων, ο συντελεστής προσαρμογής R ταυτίζεται με τον συντελεστή αποφυγής ρίσκου a, κι έτσι η ασφαλιστική εταιρία επιτυγχάνει να μειώσει εκθετικά γρήγορα την πιθανότητα χρεοκοπίας.

[19] Στη μέθοδο αυτή η ασφαλιστική εταιρία δεν εμφανίζει προτίμηση αναφορικά με την ανάληψη του κινδύνου ή όχι.

Η παραπάνω μέθοδος διαφέρει από την παραδοσιακή Αξία σε Κίνδυνο ή αλλιώς Value-at-Risk (VaR) μέθοδο.

Η Αξία σε Κίνδυνο (*Value-at-Risk*) δημιουργήθηκε από την ολοένα και πιο αυξανόμενη ρυθμιστική ανάγκη για ποσοτικά εργαλεία της διαχείρισης κινδύνων, μια ανάγκη που προέκυψε από την κατάρρευση των ασιατικών χρηματοπιστωτικών αγορών και τις καταστροφικές απώλειες από συναλλαγές παραγώγων από οργανισμούς όπως η Lehman Brothers Holdings Inc., η American International Group, Inc. (AIG), η Merrill Lynch και το Ταμείο Διαχείρισης Κεφαλαιακών Μέσων Μακροπρόθεσμης Χρήσης (Long-Term Capital Management Fund). Η Αξία σε Κίνδυνο (VaR) ένα από τα ευρύτερα χρησιμοποιούμενα μέτρα για την αποτίμηση του κινδύνου που συνδέεται με ένα χαρτοφυλάκιο στο χώρο της ασφαλιστικής και των χρηματοοικονομικών. Ουσιαστικά αποτελεί μια στατιστική εκτίμηση του ανώτατου χρηματικού ποσού, μέσα σε ένα συγκεκριμένο διάστημα εμπιστοσύνης (π.χ. 95%), που αντέχει να απωλέσει ένα χαρτοφυλάκιο ή ένα ίδρυμα μέσα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα.

Σύμφωνα με την μέθοδο του Gerber, η τιμολόγηση του ασφαλίστρου δίνεται από τον τύπο $\pi \cong E(X) + bq\sqrt{Var(X)}$, όπου b είναι η παράμετρος που ποσοτικοποιεί το κόστος κεφαλαίου, και q είναι ο παράγοντας που συνδέει τον συντελεστή του τυπικού σφάλματος με την Αξία σε Κίνδυνο - VaR με επίπεδο σημαντικότητας 99.5%.

Συνεπώς, αντιλαμβανόμαστε ότι η θεωρία χρεοκοπίας παρέχει ένα πιο βιώσιμο μοντέλο υπολογισμού των ασφαλίστρων σε σχέση με αυτό της μεθόδου Value-at-Risk. Κυρίως όμως, η θεωρία χρεοκοπίας μπορεί να προσφέρει σημαντικές πληροφορίες για τη φερεγγυότητα μιας ασφαλιστικής εταιρίας, μέσω του υπολογισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας με ακρίβεια ή κατά προσέγγιση. Στην παράγραφο που ακολουθεί θα αναφερθούμε στο τρόπο με τον οποίο οι θεωρία χρεοκοπίας μπορεί να αξιοποιηθεί κι εφαρμοστεί στην διαχείριση του ρίσκου.

5.2 Θεωρία Χρεοκοπίας, κεφαλαιακή επάρκεια και διαχείριση κινδύνων

Η θεωρία χρεοκοπίας μπορεί να είναι ιδιαιτέρως χρήσιμη στη διαχείριση ασφαλιστικών κινδύνων, αλλά και στο ευρύτερο πεδίο της διαχείρισης κινδύνων (*risk management*). Σύμφωνα με το κανονιστικό πλαίσιο Φερεγγυότητα ΙΙ (*Solvency II*)[20], που εκδόθηκε από το Ευρωπαϊκό Κοινοβούλιο και Συμβούλιο το 2009, καταδεικνύεται ο υποχρεωτικός υπολογισμός των κεφαλαιακών απαιτήσεων φερεγγυότητας (*Solvency Capital Requirement – SCR*) μέσω μιας τυποποιημένης μεθόδου ή μέσω ενός εσωτερικού μοντέλου που διαθέτει η εκάστοτε ασφαλιστική εταιρία (εγκεκριμένη πάντα από την εκάστοτε εποπτεύουσα αρχή). Την έννοια του εσωτερικού μοντέλου δε θα την αναλύσουμε περεταίρω καθώς ξεφεύγει από τη στοχοθεσία της εν λόγω παραγράφου.

Στόχος των ασφαλιστικών εταιριών είναι να εξασφαλίσουν ότι το μέγεθος των κεφαλαιακών απαιτήσεων φερεγγυότητας θα ξεπερνά ένα συγκεκριμένο κατώφλι. Η μοντελοποίηση του μεγέθους αυτού είναι απαιτητική υπολογιστικά και χρονοβόρα. Ο μέσος όρος των ασφαλιστικών εταιριών μελετούν δυσμενή οικονομικά σενάρια χωρίς ωστόσο να προσπαθούν να αποδώσουν κάποια πιθανότητα για την πραγματοποίηση αυτών των σεναρίων.

Η έννοια της κεφαλαιακής απαίτησης φερεγγυότητας έχει εισαχθεί στις λειτουργίες της διαχείρισης του ρίσκου των ασφαλιστικών εταιριών με στόχο την εξασφάλιση της κεφαλαιακής τους επάρκειας. Με άλλα λόγια, οι ασφαλιστικές εταιρίες επιθυμούν να εξασφαλίσουν ότι θα μπορέσουν να ανταπεξέλθουν στις αποζημιώσεις που θα προκύψουν, αν επέλθουν οι ασφαλιστικοί κίνδυνοι σε όλο το εύρος του χαρτοφυλακίου τους. Σε διαφορετική περίπτωση επέρχεται η χρεοκοπία. Σε ένα ευρύ και μεταβαλλόμενο οικονομικό περιβάλλον, είναι σημαντικό η έννοια της χρεοκοπίας να προσεγγίζεται κι από την ιδέα ότι η ύπαρξη κεφαλαίου δεν είναι πάντα η απάντηση, κι ότι η ικανότητα για γρήγορη αντίδραση είναι ένα κρίσιμο στοιχείο της αποτελεσματικής διαχείρισης κινδύνου.

Αξίζει ακόμη να σημειωθεί ότι οι ερευνητές στο πεδίο της θεωρίας χρεοκοπίας, μεταξύ άλλων, ερευνούν και την ικανότητα μιας ασφαλιστικής εταιρίας να δραστηριοποιείται με επενδύσεις υψηλού ρίσκου ή να μεταφέρει μέρος του κινδύνου σε τρίτο, δηλαδή να αντασφαλίζεται (*reinsurance*).

(Gerber H. and Loisel S. (2012), Wu L. (2023))

[20] Ειδικότερα, πρόκειται για την ευρωπαϊκή ΟΔΗΓΙΑ 2009/138/ΕΚ, της 25ης Νοεμβρίου 2009, αναφορικά με την ανάληψη και την άσκηση δραστηριοτήτων ασφάλισης και αντασφάλισης.

5.3 Φερεγγυότητα II

Στην αρχή της προηγούμενης παραγράφου αναφερθήκαμε στην ανάγκη των ασφαλιστικών εταιριών για τον καθορισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων φερεγγυότητας. Με την παρούσα παράγραφο επιθυμούμε να αναφερθούμε στην έννοια της κεφαλαιακής απαίτησης φερεγγυότητας (Solvency Capital Requirement – SCR).

Όπως αναφέρεται στην ευρωπαϊκή οδηγία Φερεγγυότητας ΙΙ, στο άρθρο 104, παράγραφος 1, ο υπολογισμός των βασικών κεφαλαιακών απαιτήσεων φερεγγυότητας γίνεται μέσω του παρακάτω τύπου

$$\text{Basic SCR} = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{ij} \times SCR_i \times SCR_j},$$

όπου το SCR_i αντιστοιχεί στην κατηγορία κινδύνου i και το SCR_j αντιστοιχεί στην κατηγορία κίνδυνου j.

Ο συμβολισμός i,j αναφέρεται στο γεγονός ότι στο άθροισμα θα πρέπει να εμπεριέχονται όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί των i,j κινδύνων.

Κατά τον υπολογισμό, τα SCR_i, SCR_j αντικαθίστανται από τις παρακάτω κατηγορίες κινδύνων για κεφαλαιακή απαίτηση:

- $SCR_{ζημιών} = SCR_{non-life}$: αφορά τους κινδύνους στον κλάδο ζημιών
- $SCR_{ζωής} = SCR_{life}$: αφορά τους κινδύνους στον κλάδο ζωής
- $SCR_{υγείας} = SCR_{health}$: αφορά τους κινδύνους στον κλάδο υγείας
- $SCR_{αγοράς} = SCR_{market}$: αφορά τον κίνδυνο αγοράς
- $SCR_{αθέτησης} = SCR_{default}$: αφορά τον κίνδυνο αθέτησης

Σε αυτό το σημείο κρίνεται χρήσιμο να επεξηγήσουμε τις έννοιες του κινδύνου αγοράς και κινδύνου αθέτησης αντισυμβαλλομένου. Όπως αναγράφεται και στη ντιρεκτίβα της Φερεγγυότητας ΙΙ, σελίδα 17 και 92:

Ο κίνδυνος αγοράς αναφέρεται ως «ο κίνδυνος ζημίας ή δυσμενούς μεταβολής στη χρηματοοικονομική κατάσταση, που απορρέει, άμεσα ή έμμεσα, από τις διακυμάνσεις στο επίπεδο και στη μεταβλητότητα των αγοραίων τιμών των περιουσιακών στοιχείων, των υποχρεώσεων και των χρηματοπιστωτικών μέσων».

Ενώ ο κίνδυνος αθέτησης του αντισυμβαλλομένου αντικατοπτρίζει «πιθανές ζημίες λόγω μη αναμενόμενης αθέτησης, ή επιδείνωσης στην πιστωτική θέση των αντισυμβαλλομένων και οφειλετών των ασφαλιστικών και αντασφαλιστικών επιχειρήσεων κατά τη διάρκεια των προσεχών 12 μηνών. Η ενότητα κινδύνου αθέτησης του αντισυμβαλλομένου καλύπτει συμβάσεις μείωσης του κινδύνου, όπως συμφωνίες αντασφάλισης, τιτλοποιήσεις και παράγωγα, και απαιτήσεις από μεσολαβητές, καθώς και οποιεσδήποτε άλλες πιστωτικές εκθέσεις οι οποίες δεν καλύπτονται στην υποενότητα για τον κίνδυνο πιστωτικού περιθωρίου. Λαμβάνει κατάλληλα υπόψη εγγυήσεις ή άλλες διασφαλίσεις της επιχείρησης ασφάλισης ή αντασφάλισης ή για λογαριασμό της καθώς και τους σχετικούς κινδύνους».

Τέλος, ο παράγοντας $Corr_{ij}$ αναφέρεται στο στοιχείο που αντιστοιχεί στη γραμμή i και στη στήλη j του κάτωθι πίνακα συσχέτισης (*correlation matrix*):

i \ j	Αγορά	Αθέτηση	Ζωή	Υγεία	Ζημιές
Αγορά	1	0,25	0,25	0,25	0,25
Αθέτηση	0,25	1	0,25	0,25	0,5
Ζωή	0,25	0,25	1	0,25	0
Υγεία	0,25	0,25	0,25	1	0
Ζημιές	0,25	0,5	0	0	1

Πίνακας 5.1: Πίνακας συσχέτισης των δυνατών συνδυασμών των i, j κινδύνων. DIRECTIVE 2009/138/EC OF THE EUROPEAN PARLIAMENT AND OF THE COUNCIL. (2009)

Για τις παραπάνω επιμέρους κατηγορίες κινδύνων υπάρχει ο αντίστοιχος τύπος υπολογισμού κεφαλαιακών απαιτήσεων φερεγγυότητας, όπου συμπεριλαμβάνει τις σχετικές υποκατηγορίες κινδύνων, που εμπεριέχονται αναλυτικά στην ευρωπαϊκή οδηγία Φερεγγυότητας ΙΙ.

Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε από τις προαναφερθείσες παραγράφους, η κεφαλαιακή επάρκεια συσχετίζεται με την πιθανότητα χρεοκοπίας.
Μικρή κεφαλαιακή επάρκεια συνεπάγεται αυξημένη πιθανότητα χρεοκοπίας. Η φερεγγυότητα με τη σειρά της είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την κεφαλαιακή επάρκεια. Τέλος, θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε ότι η αφερεγγυότητα εξαρτάται από την εξέλιξη των περιουσιακών στοιχείων και των υποχρεώσεων μια εταιρίας. Ωστόσο, η εξέλιξη του ισολογισμού μιας εταιρείας είναι πιο περίπλοκη υπόθεση από τα εκάστοτε μοντέλα κινδύνου της, γι' αυτό κι είναι χρήσιμο να λαμβάνονται υπόψη σημεία αναφοράς από τη θεωρία χρεοκοπίας όταν εφαρμόζονται στρατηγικές διαχείρισης κινδύνων.
(Gerber H. and Loisel S. (2012), European Parliament and Council (2009))

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Περιγραφή εντολών στο πρόγραμμα **Mathematica**

Σκοπός της δημιουργίας του παρόντος παραρτήματος είναι να παραθέσουμε τις εντολές που χρησιμοποιήθηκαν στο πρόγραμμα Mathematica προκειμένου να γίνουν οι υπολογισμοί και τα διαγράμματα που χρειαζόμασταν. Σε ορισμένες περιπτώσεις ενδέχεται να μην είναι σαφές πως βρέθηκαν κάποιες ποσότητες τόσο εύκολα, καθώς ο υπολογισμός τους χωρίς τη συμβολή του Mathematica καθίσταται δύσκολος και ιδιαίτερα χρονοβόρος. Γι’ αυτό και κύριο μέλημα του συγκεκριμένου παραρτήματος να παραθέσει στον αναγνώστη τις εντολές αυτές που βοήθησαν στην επίλυση των εφαρμογών, κι εν συνεχεία να παραθέσει τις εντολές που χρησιμοποιήθηκαν για συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα. Επισημαίνουμε ότι κάποιες από αυτές αξιοποιήθηκαν παραπάνω από μία φορές για τον υπολογισμό της ίδιας ποσότητας, ωστόσο αναφέρονται εδώ μόνο μία φορά καθώς είναι οι ίδιες εντολές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για άλλες περιπτώσεις.

Εντολές για υπολογισμό ποσοτήτων στο Κεφάλαιο 4

Δίνονται οι βασικότερες εντολές που χρησιμοποιήθηκαν για την αριθμητική εφαρμογή 4.3.4.

Για να ορίσουμε τη **σ.π.π** δίνουμε την εξής εντολή:

$$f[x\_] = A1 * b1 * Exp[-b1 * x] + A2 * b2 * Exp[-b2 * x]$$

Υπολογισμός ολοκληρώματος:

$$Integrate[f[x], \{x, 0, Infinity\}]$$

Υπολογισμός της 1ης ροπής της $f(x)$:

$$m1 = Integrate[x * f[x], \{x, 0, Infinity\}]$$

Υπολογισμός της ροπογεννήτριας $M_X(r)$:

$$M[t\_] := Integrate[Exp[y * t] * f[y], \{y, 0, Infinity\}]$$

Επίλυση της εξίσωσης Lundberg:

$$Solve[M[t] == (1+\theta) * m1 * t + 1, t]$$

Υπολογισμός της ουράς της κατανομής F την $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$:

$$F[x\_] := Integrate[f[y], \{y, 0, x\}]$$

$$TailF[x\_] := 1 - F[x]$$

Υπολογισμός κατανομής ισορροπίας $F_e(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \bar{F}(x)dy$ και ουράς της:

$$Fe[x\_] := Integrate[TailF[y], \{y, 0, x\}, Assumptions \to x > 0]/m1$$

$$TailFe[x\_] := 1 - Fe[x]$$

Απλοποίηση παραστάσεων (εν προκειμένω της ουράς κατανομής):

$$FullSimplify[TailFe[x]]$$

Ο υπολογισμός πιθανότητας χρεοκοπίας μέσω του μετασχηματισμού Laplace:

- Υπολογισμός $f_e(x) = \frac{1}{\mu_1}\bar{F}(s)$

$$fe[x\_] := D[Fe[x], x]$$

- Υπολογισμός μετασχηματισμού Laplace της $(\bar{H})(s) = 1 - \frac{1}{\mu_1}\int_0^s \bar{F}(y)\, dy$

$$LaplaceH1[s\_] := LaplaceTransform[1 - Fe[t], t, s]$$

- Υπολογισμός μετασχηματισμού Laplace της $f_e(s)$

$$Laplacefe[s\_] := LaplaceTransform[fe[t], t, s]$$

- Υπολογισμός της $\hat{\psi}(s) = \frac{(\hat{\bar{H}})(s)}{1-\theta-\hat{f}_e(s)}$

$$LaplaceTransformPsi1[s\_] := LaplaceH1[s]/(1+\theta - Laplacefe[s])$$

- Υπολογισμός πιθανότητας χρεοκοπίας με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace

  $$psi1[u\_] := InverseLaplaceTransform[LaplaceTransformPsi1[s], s, u]$$

Υπολογισμός αριθμητικής τιμής:

$$N[\dots]$$

Διάγραμμα πιθανοτήτων χρεοκοπίας:

$$Plot[\{psi1[u], psi2[u]\}, \{u, 0{,}30\}, AxesLabel \rightarrow \{"u", "\psi(u)"\}, PlotRange \rightarrow \{0{,}1\}, PlotStyle \rightarrow \{Blue, Dashed\}]$$

Πίνακας τιμών πιθανοτήτων χρεοκοπίας συναρτήσει τιμών u:

$$Do[Print[\{psi1[u], psi2[u]\}], \{u, 0{,}10{,}0.5\}]$$

Κώδικας για την αριθμητική εφαρμογή 4.3.4

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΓΙΑ ΜΙΞΕΙΣ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Οι εντολές που ακολουθούν αφορούν το 1ο χαρτοφυλάκιο

*Αρχικά, ορίζουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας *f*(*x*) και τις σταθερές λ,c.*

```
In[ ]:= A1 = 1 / 9
Out[ ]=
```

$$\frac{1}{9}$$

```
In[ ]:= A2 = 8 / 9
Out[ ]=
```

$$\frac{8}{9}$$

```
In[ ]:= b1 = 3
Out[ ]=
3

In[ ]:= b2 = 6
Out[ ]=
6

In[ ]:= l = 3
Out[ ]=
3

In[ ]:= c = 1
Out[ ]=
1

In[ ]:= f[x_] = A1 * b1 * Exp[-b1 * x] + A2 * b2 * Exp[-b2 * x]
                           ⌊εκθετική συνάρτηση      ⌊εκθετική συνάρτ
Out[ ]=
```

$$\frac{16\,e^{-6x}}{3} + \frac{e^{-3x}}{3}$$

```
In[ ]:= Integrate[f[x], {x, 0, Infinity}]
        ⌊αόριστο ολοκλήρωμα    ⌊άπειρο
Out[ ]=
1

In[ ]:= m1 = Integrate[x * f[x], {x, 0, Infinity}]
             ⌊αόριστο ολοκλήρωμα        ⌊άπειρο
Out[ ]=
```

$$\frac{5}{27}$$

In[ ]:= θ = (c / (l * m1)) - 1

Out[ ]=

$$\frac{4}{5}$$

In[ ]:= M[t_] := Integrate[Exp[y * t] * f[y], {y, 0, Infinity}]

αόριστο ολ··· εκθετική συνάρτηση άπειρο

In[ ]:= M[t]

Out[ ]=

$$\boxed{\frac{54 - 17\,t}{54 - 27\,t + 3\,t^2} \quad \text{if } \mathrm{Re}[t] < 3}$$

In[ ]:= Solve[M[t] == (1 + θ) * m1 * t + 1, t]

λύση εξισώσεων και ανισώσεων

Out[ ]=

{{t → 0}, {t → 2}}

In[ ]:= R = 2

Out[ ]=

2

* Υπολογισμός της ουράς της κατανομής F, την $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$*

In[ ]:= F[x_] := Integrate[f[y], {y, 0, x}]

αόριστο ολοκλήρωμα

In[ ]:= F[x]

Out[ ]=

$$1 - \frac{8\,e^{-6x}}{9} - \frac{e^{-3x}}{9}$$

In[ ]:= TailF[x_] := 1 - F[x]

In[ ]:= TailF[x]

Out[ ]=

$$\frac{8\,e^{-6x}}{9} + \frac{e^{-3x}}{9}$$

Υπολογισμός κατανομής ισορροπίας $F_e(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(y)\,d\,y$ και ουράς της

In[ ]:= Fe[x_] := Integrate[TailF[y], {y, 0, x}, Assumptions → x > 0] / m1

αόριστο ολοκλήρωμα υποθέσεις

In[ ]:= Fe[x]

Out[ ]=

$$\frac{1}{5}\left(5 - e^{-6x}\left(4 + e^{3x}\right)\right)$$

In[ ]:= TailFe[x_] := 1 - Fe[x]

In[ ]:= `TailFe[x]`

Out[ ]=

$$1+\frac{1}{5}\left(-5+e^{-6x}\left(4+e^{3x}\right)\right)$$

In[ ]:= `FullSimplify[TailFe[x]]`

πλήρης απλοποίηση

Out[ ]=

$$\frac{1}{5}e^{-6x}\left(4+e^{3x}\right)$$

Ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας θα γίνει με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace

$\hat{\psi}(s)=\frac{\hat{\bar{H}}(s)}{1-\theta-\hat{f}_e(s)}$, όπου $\left(\bar{H}\right)(s)=1-\frac{1}{\mu_1}\int_0^s\bar{F}(y)\,dy$ και $f_e(s)=\frac{1}{\mu_1}\bar{F}(s)$

*Υπολογισμός $f_e(x)$

In[ ]:= `fe[x_] := D[Fe[x], x]`

μερική παράγωγ

In[ ]:= `fe[x]`

Out[ ]=

$$\frac{1}{5}\left(-3e^{-3x}+6e^{-6x}\left(4+e^{3x}\right)\right)$$

*Υπολογισμός μετασχηματισμού Laplace της $\left(\bar{H}\right)(s)$

In[ ]:= `LaplaceH1[s_] := LaplaceTransform[1 - Fe[t], t, s]`

λαπλασιανός μετασχηματισμός

In[ ]:= `LaplaceH1[s]`

Out[ ]=

$$\frac{1}{5(3+s)}+\frac{4}{5(6+s)}$$

*Υπολογισμός μετασχηματισμού Laplace της $f_e(s)$

In[ ]:= `Laplacefe[s_] := LaplaceTransform[fe[t], t, s]`

λαπλασιανός μετασχηματισμός

In[ ]:= `Laplacefe[s]`

Out[ ]=

$$\frac{1}{5}\left(\frac{3}{3+s}+\frac{24}{6+s}\right)$$

*Υπολογισμός της παράστασης $\hat{\psi}(s)=\frac{\hat{\bar{H}}(s)}{1+\theta-\hat{f}_e(s)}$

In[ ]:= `LaplaceTransformPsi1[s_] := LaplaceH1[s] / (1 + θ - Laplacefe[s])`

In[ ]:= LaplaceTransformPsi1[s]

Out[ ]=

$$\frac{\frac{1}{5(3+s)}+\frac{4}{5(6+s)}}{\frac{9}{5}+\frac{1}{5}\left(-\frac{3}{3+s}-\frac{24}{6+s}\right)}$$

In[ ]:= FullSimplify[LaplaceTransformPsi1[s]]
πλήρης απλοποίηση

Out[ ]=

$$\frac{18+5s}{9\left(8+6s+s^2\right)}$$

*Υπολογισμός πιθανότητας χρεοκοπίας με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace

In[ ]:= psi1[u_] := InverseLaplaceTransform[LaplaceTransformPsi1[s], s, u]
αντίστροφος λαπλασιανός

In[ ]:= psi1[u]

Out[ ]=

$$\frac{1}{9}e^{-4u}\left(1+4e^{2u}\right)$$

Οι εντολές που ακολουθούν αφορούν το 2ο χαρτοφυλάκιο, με διαφορετικές τιμές λ & μ

In[ ]:= Clear[x, y, t]
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

*Αρχικά, ορίζουμε κι εδώ τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας *f*(*x*) και τις σταθερές λ,c.*

In[ ]:= A1 = 1 / 2

Out[ ]=

$$\frac{1}{2}$$

In[ ]:= A2 = 1 − A1

Out[ ]=

$$\frac{1}{2}$$

In[ ]:= b1 = 1 / 2

Out[ ]=

$$\frac{1}{2}$$

In[ ]:= b2 = 1 / 4

Out[ ]=

$$\frac{1}{4}$$

In[ ]:= l = 5 / 27

Out[ ]=

$$\frac{5}{27}$$

In[ ]:= c = 1

Out[ ]= 1

In[ ]:= f[x_] = A1 * b1 * Exp[-b1 * x] + (1 - A1) * b2 * Exp[-b2 * x]
εκθετική συνάρτηση εκθετική συνάρτη

Out[ ]=

$$\frac{e^{-x/2}}{4} + \frac{e^{-x/4}}{8}$$

In[ ]:= Integrate[f[x], {x, 0, Infinity}]
αόριστο ολοκλήρωμα άπειρο

Out[ ]= 1

In[ ]:= m1 = Integrate[x * f[x], {x, 0, Infinity}]
αόριστο ολοκλήρωμα άπειρο

Out[ ]= 3

In[ ]:= θ = (c / (l * m1)) - 1

Out[ ]=

$$\frac{4}{5}$$

In[ ]:= M[t_] := Integrate[Exp[y * t] * f[y], {y, 0, Infinity}]
αόριστο ολ··· εκθετική συνάρτηση άπειρο

In[ ]:= M[t]

Out[ ]=

$$\boxed{\frac{1 - 3t}{1 - 6t + 8t^2} \text{ if } \mathrm{Re}[t] < \frac{1}{4}}$$

In[ ]:= Solve[M[t] == (1 + θ) * m1 * t + 1, t]
λύση εξισώσεων και ανισώσεων

Out[ ]=

$$\left\{\{t \to 0\}, \left\{t \to \frac{1}{216}\left(61 - \sqrt{1129}\right)\right\}\right\}$$

In[ ]:= $N\left[\frac{1}{216}\left(61 - \sqrt{1129}\right)\right]$
αριθμητική τιμή

Out[ ]= 0.126849

In[ ]:= R = 0.1268490961443385`

Out[ ]= 0.126849

* Υπολογισμός της ουράς της κατανομής F, την $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$*

In[ ]:= F[x_] := Integrate[f[y], {y, 0, x}]
αόριστο ολοκλήρωμα

In[ ]:= F[x]

Out[ ]= $1 - \frac{e^{-x/2}}{2} - \frac{e^{-x/4}}{2}$

In[ ]:= TailF[x_] := 1 - F[x]

In[ ]:= TailF[x]

Out[ ]= $\frac{e^{-x/2}}{2} + \frac{e^{-x/4}}{2}$

Υπολογισμός κατανομής ισορροπίας $F_e(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(y)\,d\,y$ και ουράς της

In[ ]:= Fe[x_] := Integrate[TailF[y], {y, 0, x}, Assumptions → x > 0] / m1
αόριστο ολοκλήρωμα υποθέσεις

In[ ]:= Fe[x]

Out[ ]= $\frac{1}{3}\left(3 - e^{-x/2} - 2\,e^{-x/4}\right)$

In[ ]:= TailFe[x_] := 1 - Fe[x]

In[ ]:= TailFe[x]

Out[ ]= $1 + \frac{1}{3}\left(-3 + e^{-x/2} + 2\,e^{-x/4}\right)$

In[ ]:= FullSimplify[TailFe[x]]
πλήρης απλοποίηση

Out[ ]= $\frac{1}{3}\,e^{-x/2}\left(1 + 2\,e^{x/4}\right)$

Ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας θα γίνει με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace

$\hat{\psi}(s) = \frac{\hat{(\overline{H})}(s)}{1-\theta-\hat{f}_e(s)}$, όπου $(\overline{H})(s) = 1 - \frac{1}{\mu_1}\int_0^s \overline{F}(y)\,d\,y$ και $f_e(s) = \frac{1}{\mu_1}\,\overline{F}(s)$

*Υπολογισμός $f_e(x)$

In[•]:= `fe[x_] := D[Fe[x], x]`
μερική παράγωγ

In[•]:= `fe[x]`

Out[•]=

$$\frac{1}{3}\left(\frac{e^{-x/2}}{2}+\frac{e^{-x/4}}{2}\right)$$

*Υπολογισμός μετασχηματισμού Laplace της $\left(\overline{H}\right)(s)$

In[•]:= `LaplaceH2[s_] := LaplaceTransform[1 - Fe[t], t, s]`
λαπλασιανός μετασχηματισμός

In[•]:= `LaplaceH2[s]`

Out[•]=

$$\frac{2}{3\left(\frac{1}{4}+s\right)}+\frac{1}{3\left(\frac{1}{2}+s\right)}$$

*Υπολογισμός μετασχηματισμού Laplace της $f_e(s)$

In[•]:= `Laplacefe[s_] := LaplaceTransform[fe[t], t, s]`
λαπλασιανός μετασχηματισμός

In[•]:= `Laplacefe[s]`

Out[•]=

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\left(\frac{1}{4}+s\right)}+\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}+s\right)}\right)$$

In[•]:= `FullSimplify[Laplacefe[s]]`
πλήρης απλοποίηση

Out[•]=

$$\frac{3+8s}{3+18s+24s^2}$$

*Υπολογισμός της παράστασης $\hat{\psi}(s)=\frac{\hat{\overline{(H)}}(s)}{1+\theta-\hat{f}_e(s)}$

In[•]:= `LaplaceTransformPsi2[s_] := LaplaceH2[s] / (1 + θ - Laplacefe[s])`

In[•]:= `LaplaceTransformPsi2[s]`

Out[•]=

$$\frac{\frac{2}{3\left(\frac{1}{4}+s\right)}+\frac{1}{3\left(\frac{1}{2}+s\right)}}{\frac{9}{5}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2\left(\frac{1}{4}+s\right)}-\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}+s\right)}\right)}$$

In[•]:= `FullSimplify[LaplaceTransformPsi2[s]]`
πλήρης απλοποίηση

Out[•]=

$$\frac{25+60s}{6+s(61+108s)}$$

*Υπολογισμός πιθανότητας χρεοκοπίας με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace

In[•]:= `psi2[u_] := InverseLaplaceTransform[LaplaceTransformPsi2[s], s, u]`
αντίστροφος λαπλασιανός

In[ ]:= psi2[u]

Out[ ]=

$$\frac{5\left(-29\, e^{\left(-\frac{61}{216}-\frac{\sqrt{1129}}{216}\right) u}+\sqrt{1129}\, e^{\left(-\frac{61}{216}-\frac{\sqrt{1129}}{216}\right) u}+29\, e^{\left(-\frac{61}{216}+\frac{\sqrt{1129}}{216}\right) u}+\sqrt{1129}\, e^{\left(-\frac{61}{216}+\frac{\sqrt{1129}}{216}\right) u}\right)}{18 \sqrt{1129}}$$

In[ ]:= FullSimplify[psi2[u]]
πλήρης απλοποίηση

Out[ ]=

$$\frac{5\, e^{-\frac{1}{216}\left(61+\sqrt{1129}\right) u}\left(-29+\sqrt{1129}+\left(29+\sqrt{1129}\right) e^{\frac{\sqrt{1129}\, u}{108}}\right)}{18 \sqrt{1129}}$$

In[ ]:= $N\left[\frac{1}{216}\left(61+\sqrt{1129}\right)\right]$
αριθμητική τιμή

Out[ ]=

0.437966

In[ ]:= $N\left[-29+\sqrt{1129}\right]$
αριθμητική τιμή

Out[ ]=

4.6006

In[ ]:= $N\left[\left(29+\sqrt{1129}\right)\right]$
αριθμητική τιμή

Out[ ]=

62.6006

In[ ]:= $N\left[\frac{\sqrt{1129}\, u}{108}\right]$
αριθμητική τιμή

Out[ ]=

0.311117 u

In[ ]:= $N\left[18 \sqrt{1129}\right]$
αριθμητική τιμή

Out[ ]=

604.811

```
In[ ]:= psi2[u] = (5 * Exp[-0.4379657186704763` u] * (4.600595232822883` +
                 εκθετική συνάρτηση
        62.60059523282288` * Exp[0.3111166225261378` u])) / 604.810714190812`
                             εκθετική συνάρτηση
```

Out[ ]=

$$0.00826705\, e^{-0.437966 u}\left(4.6006+62.6006\, e^{0.311117 u}\right)$$

In[ ]:= FullSimplify[psi2[u]]
πλήρης απλοποίηση

Out[ ]=

$$e^{-0.437966 u}\left(0.0380333+0.517522\, e^{0.311117 u}\right)$$

Διάγραμμα των 2 πιθ. χρεοκοπίας ψ1(u) & ψ2(u)

In[ ]:=
$$\text{psi1[u\_]} := \frac{1}{9} e^{-4u}\left(1+4e^{2u}\right)$$

In[ ]:=
```
psi1[u]
```

Out[ ]=
$$\frac{1}{9} e^{-4u}\left(1+4e^{2u}\right)$$

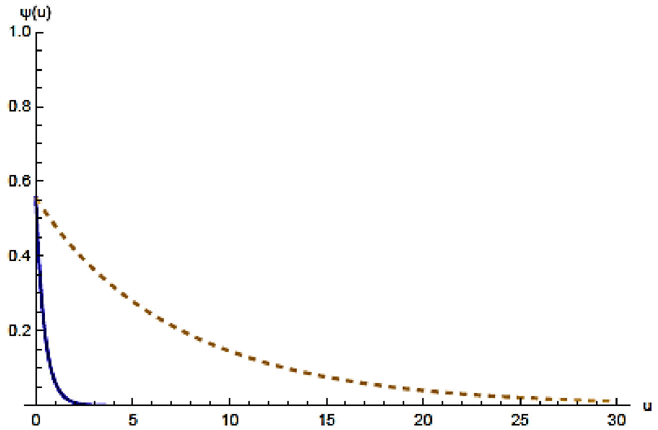
In[ ]:=
$$\text{psi2[u\_]} := e^{-0.4379657186704763\text{`}\,u}\left(0.03803334766463346\text{`} + 0.5175222078909221\text{`}\, e^{0.3111166225261378\text{`}\,u}\right)$$

In[ ]:=
```
psi2[u]
```

Out[ ]=
$$0.00826705\, e^{-0.437966\,u}\left(4.6006 + 62.6006\, e^{0.311117\,u}\right)$$

In[ ]:=
```
Plot[{psi1[u], psi2[u]}, {u, 0, 30}, AxesLabel → {"u", "ψ(u)"},
 PlotRange → {0, 1}, PlotStyle → {Blue, Dashed}]
```
διάγραμμα, ετικέτες αξόνων, εύρος διαγράμματος, στυλ διαγράμμ···, μπλε, διακεκομμένη

Out[ ]=



Πίνακας τιμών πιθανοτήτων χρεοκοπίας συναρτήσει τιμών u

In[ ]:=
```
Do[Print[{psi1[u], psi2[u]}], {u, 0, 10, 0.5}]
```
··· εκτύπωση

{0.555556, 0.555556}

{0.178539, 0.516271}

{0.0621841, 0.480413}

{0.022403, 0.44757}

{0.00817756, 0.417399}

{0.00299969, 0.389606}

{0.00110235, 0.363942}

{0.000405373, 0.340194}

{0.000149107, 0.318177}

{0.0000548505, 0.297731}

{0.000020178, 0.278718}

$\{7.42301 \times 10^{-6}, 0.261013\}$

$\{2.73077 \times 10^{-6}, 0.24451\}$

$\{1.00459 \times 10^{-6}, 0.229113\}$

$\{3.69568 \times 10^{-7}, 0.214734\}$

$\{1.35957 \times 10^{-7}, 0.201298\}$

$\{5.00156 \times 10^{-8}, 0.188734\}$

$\{1.83997 \times 10^{-8}, 0.176981\}$

$\{6.76888 \times 10^{-9}, 0.16598\}$

$\{2.49013 \times 10^{-9}, 0.15568\}$

$\{9.16068 \times 10^{-10}, 0.146033\}$

Βιβλιογραφία

Α. Ελληνική

[1] Δερμιτζάκης Ν. Β. (2011) *Μελέτη ανανεωτικών εξισώσεων με εφαρμογές στη Θεωρία Χρεοκοπίας*, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

[2] Κούτρας Β. Μ. (2004) *Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Θεωρία και Εφαρμογές, Μέρος Ι, Β΄ Έκδοση*, Εκδόσεις Σταμούλη, Αθήνα

[3] Κουτσόπουλος Κ.Ι. (1999) *Αναλογιστικά Μαθηματικά – Θεωρία των Κινδύνων Μέρος Ι*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα

[4] Μαλαξιανάκης Μ. Δ. (2009) *Προσεγγίσεις για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας*, Διπλωματική Διατριβή, ΠΜΣ 'Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου, Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

[5] Πολίτης Κ. (2012) *Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου*, Εκδόσεις Σταμούλη, Αθήνα

[6] Πολίτης Κ. (2013) *Σημειώσεις του μαθήματος Θεωρία Χρεοκοπίας*, Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

[7] Πολίτης Κ. (2022) *Σημειώσεις του μαθήματος Θεωρία Κινδύνου ΙΙ*, Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

[8] Χατζηκωνσταντινίδης Ε. (2021) *Σημειώσεις Π.Μ.Σ. «Αναλογιστική Επιστήμη & Διοικητική Κινδύνου»*, Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Β. Ξενόγλωσση

[9] Cary Chi-Liang Tsai (2009), *On the ordering of ruin probabilities for the surplus process perturbed by diffusion,* Scandinavian Actuarial Journal, 2009, 3, 187-204

[10] David C. M. Dickson & Christian Hipp (1998), *Ruin probabilities for Erlang(2) risk processes*, Insurance: Mathematics and Economics, 22, 251-262

[11] David C. M. Dickson (2017), *Insurance Risk and Ruin,* Second Edition, Cambridge University Press, United Kingdom

[12] François Dufresne and Hans U. Gerber (1989), *Three Methods to Calculate the Probability of Ruin,* University of Lausanne, Switzerland, ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, Volume 19, Issue 1, April 1989, pp. 71 – 90

[13] Hans U. Gerber, Marc J. Goovaerts and Rob Kaas (1987), *On the Probability and Severity of Ruin,* Université de Lausanne, K. U. Leuven and University of Amsterdam,

University of Amsterdam, ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, Volume 17, Issue 2, November 1987, pp. 151 – 163

[14] Hans U. Gerber, Stéphane Loisel (2012), *Why ruin theory should be of interest for insurance practitioners and risk managers nowadays,* Université de Lausanne, Université de Lyon, Actuarial and Financial Mathematics, Feb. 2012, pp.17-21

[15] Lianghong Wu (2023), *Risk Analysis: Changing the Story with the Statistical Stochastic Process and VaR*, Feng Chia University, Axioms 2023, 12, 418

[16] Mogens Bladt (2005), *A Review on Phase-type Distributions and their Use in Risk Theory,* ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, Volume 35, Issue 1, May 2005, pp. 145 - 161

[17] Newton L. Bowers, Hans U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbitt (1997), *Actuarial Mathematics,* The Society of Actuaries, Schaumburg, Illinois

[18] Rob Kaas, Marc Goovaerts, Jan Dhaene, Michel Denuit (2008), *Modern Actuarial Risk Theory, Using R*, Second Edition, Springer Heidelberg Dordrecht London New York

[19] The European Parliament and the Counsil (1998), *DIRECTIVE 2009/138/EC OF THE EUROPEAN PARLIAMENT AND OF THE COUNCIL of 25 November 2009 on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance (Solvency II)*, OJ L 335, 17.12.2009, p. 1–155

[20] Yujuan Huang, Jing Li, Hengyu Liu, Wenguang Yu (2021), *Estimating Ruin Probability in an Insurance Risk Model with Stochastic Premium Income Based on the CFS Method*, Mathematics 2021, 9, 982