ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

Μελέτη της απόλυτης χρεοκοπίας μοντέλων κινδύνου με χρεωστικό και πιστωτικό επιτόκιο

Αργύρης Γκρέκος

(ΜΑΕ 21012)

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων*

Πειραιάς

Μάρτιος 2024

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και την Διαχείριση Κινδύνων.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αναπλ. Καθηγητής Κ. Πολίτης
- Καθηγητής Β. Σεβρόγλου
- Αναπλ. Καθηγητής Ε. Χατζηκωνσταντινίδης (Επιβλέπων)

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Statistics

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUADE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

Study of absolute ruin in risk models with debit and credit interest

By

Argyris Gkrekos

(MAE21012)

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece

March 2024

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω την απεριόριστη εκτίμησή μου προς τον επιβλέποντά μου, κύριο Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη για την αμέριστη εμπιστοσύνη, αφοσίωσή του και ανεκτίμητη καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας μου. Επίσης, δεν θα μπορούσα να παραλείψω να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα αξιότιμα μέλη της τριμελούς επιτροπής μου, κύριο Κωνσταντίνο Πολίτη και κύριο Βασίλειο Σεβρόγλου για την πολύτιμη αξιολόγηση και την εποικοδομητική κριτική τους. Είμαι ευγνώμων για τις συμβουλές και την εμπειρογνωμοσύνη τους, οι οποίες συνέβαλαν στη βελτίωση της εργασίας μου.

Πέραν τούτου, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες προς το Πανεπιστήμιο Πειραιώς και το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης για τη στήριξη και την πολύτιμη εκπαίδευση που μου παρείχαν κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Χωρίς την υποστήριξη αυτή, δεν θα ήταν δυνατή η πραγματοποίηση αυτής της ακαδημαϊκής πορείας. Επίσης, δεν μπορώ παρά να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες προς την οικογένειά μου για τη στήριξή τους και την ανελλιπή κατανόησή τους κατά τη διάρκεια αυτής της πορείας μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους αγαπημένους μου φίλους και συμφοιτητές για τη συνεχή υποστήριξή τους και την καλή τους παρέα, η οποία με έκανε να αντέξω τις πιέσεις της ακαδημαϊκής ζωής με χαρά και αισιοδοξία.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η διπλωματική εργασία μελετά την απόλυτη χρεοκοπία μοντέλων κινδύνου με χρεωστικό και πιστωτικό επιτόκιο. Αν και η χρεοκοπία ενός χαρτοφυλακίου μιας ασφαλιστικής εταιρίας στην κλασική θεωρία κινδύνου, που θεωρείται ως το ενδεχόμενο το πλεόνασμα του χαρτοφυλακίου (έσοδα – έξοδα) πέσει για πρώτη φορά κάτω από το μηδέν, είναι ένα πολύ σημαντικό μέτρο κινδύνου για τον σωστό σχεδιασμό του χαρτοφυλακίου, εν τούτοις, το μηδενικό όριο δεν είναι ρεαλιστικό. Σε μεταγενέστερες χρονικές στιγμές τα έσοδα μπορεί να υπερβαίνουν τα έξοδα, οπότε το πλεόνασμα γίνεται πάλι θετικό. Θεωρούμε λοιπόν την υπόθεση ότι όταν το πλεόνασμα γίνει αρνητικό για πρώτη φορά, η ασφαλιστική εταιρία μπορεί να δανειστεί με ένα σταθερό επιτόκιο το ποσό του ελλείμματος και όταν το πλεόνασμα είναι θετικό η εταιρία επενδύει το πλεόνασμα χωρίς ρίσκο με ένα σταθερό επιτόκιο. Στην περίπτωση αυτή, αν το πλεόνασμα γίνει αρνητικό και μικρότερο από μια κριτική αρνητική τιμή, τότε δεν μπορεί να ξαναγίνει θετικό, οπότε έχουμε την απόλυτη χρεοκοπία. Η εργασία μελετά μέτρα κινδύνου σχετικά με την απόλυτη χρεοκοπία (πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας, έλλειμμα τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας κλπ.).

Το Κεφάλαιο 1 αποτελεί ένα εισαγωγικό μέρος στο οποίο δίνονται βασικές έννοιες της θεωρίας χρεοκοπίας, μια σύντομη περιγραφή του κλασικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνων και η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu.

Στο Κεφάλαιο 2 μελετάται η απόλυτη χρεοκοπία στο κλασικό μοντέλο κινδύνου πολλαπλών επιπέδων, στο οποίο θεωρούμε ότι ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρων παύει να είναι σταθερός και είναι μια βηματική συνάρτηση με την τιμή του να εξαρτάται από το επίπεδο στο οποίο βρίσκεται το πλεόνασμα. Επίσης, όταν το πλεόνασμα είναι θετικό, η ασφαλιστική εταιρία επενδύει το πλεόνασμα χωρίς ρίσκο με ένα σταθερό επιτόκιο το οποίο είναι γνωστό εκ των προτέρων και εξαρτάται από το επίπεδο του πλεονάσματος.

Στο Κεφάλαιο 3 μελετάται η απόλυτη χρεοκοπία σε ανανεωτικά και μη-ανανεωτικά μοντέλα κινδύνου, θεωρώντας σταθερό ρυθμό πιστωτικού και δανειστικού τοκισμού.

Στο Κεφάλαιο 4 μελετάται η απόλυτη χρεοκοπία στο κλασικό μοντέλο κινδύνου με σταθερούς ρυθμούς πιστωτικού και δανειστικού τοκισμού θεωρώντας επιπλέον την ύπαρξη στρατηγικής καταβολής μερίσματος στους μετόχους της ασφαλιστικής εταιρίας, σύμφωνα με την οποία όταν το πλεόνασμα ξεπεράσει ένα σταθερό όριο τότε επιστρέφεται μέρισμα στους δικαιούχους με σταθερό ρυθμό, ενώ δεν καταβάλλονται μερίσματα όταν το πλεόνασμα είναι μικρότερο από το εν λόγω όριο.

ABSTRACT

This thesis deals with absolute ruin under debit and credit interest force. Although *classical ruin* is a very important risk metric and happens when the surplus drops below zero for the first time, which is called ruin time, however the boundary of zero is not realistic. It is assumed that the insurance company could borrow money at a debit interest rate when the company is on deficit in order to compensate its obligations. On the other hand, the insurer's debt is paid back by premiums earned. If the debt remains at a reasonable level, it is possible for the surplus to become positive again, and the absolute ruin would be avoided. During the period in which the surplus is negative, once the surplus reaches a negative critical value for the first time, the premiums would cover only the rate of interest for the loan and ruin will occur upon the occurrence of the first claim. For lower surplus levels than this critical negative value, ruin is immediately certain, and is called *absolute ruin*. The objective of this thesis is to study and analyze various risk metrics related to absolute ruin (probability of absolute ruin, deficit at absolute ruin time etc.).

Chapter 1 is an introductory section regarding basic concepts from classical ruin theory, providing a brief description of the classical compound Poisson model, known as the Cramér-Lundberg model and the definition of the expected discounted penalty function or just Gerber-Shiu function.

Chapter 2 examines the absolute ruin problem on a multi-layer compound Poisson risk model assuming that the premium rate is a step function, instead of a constant, dependent on current surplus level. Also, when the surplus is positive, the insurance company earns interest with force of interest which is specified in advance and depends on the current surplus level.

Chapter 3 considers a unifying approach for the determination of the Gerber-Shiu discounted penalty function related to absolute ruin in a Sparre Andersen risk model on the presence of constant credit and debit interest rate.

Chapter 4 analyzes the dividend payments according to a barrier strategy in a compound Poisson risk model with credit and debit interests under absolute ruin.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή 1

1.1 Διαδικασία πλεονάσματος και πιθανότητα χρεοκοπίας στην κλασική θεωρία κινδύνου . 1

1.2 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu 5

1.3 Απόλυτη χρεοκοπία 8

Απόλυτη χρεοκοπία στο κλασικό μοντέλο κινδύνου πολλαπλών επιπέδων 11

2.1 Περιγραφή του μοντέλου 11

2.2 Ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις των συναρτήσεων Gerber-Shiu 13

2.3 Εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις 21

2.4 Απαιτήσεις με *phase-type*(2) οικογένεια κατανομών 35

2.5 Η συνάρτηση Gerber-Shiu για όλα τα επίπεδα 45

2.6 Εφαρμογή: Μοντέλο δύο επιπέδων και εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις 46

2.7 Σύνοψη κεφαλαίου 50

Απόλυτη χρεοκοπία στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου με σταθερό πιστωτικό και δανειστικό επιτόκιο 51

3.1 Περιγραφή του μοντέλου 51

3.2 Εξισώσεις για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής 54

3.3 Οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων απαιτήσεων ακολουθούν γενικευμένη *Erlang*(*n*) κατανομή και οι απαιτήσεις πινακοεκθετική κατανομή 59

3.3.1 Περίπτωση: Η συνάρτηση ποινής ως συνάρτηση μόνο του ελλείμματος τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας 62

3.4 Εφαρμογή: Ενδοαφιξιακοί χρόνοι απαιτήσεων με *γενικευμένη Erlang*(2) κατανομή και μεγέθη απαιτήσεων με εκθετική κατανομή 78

3.4.1 Πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας 79

3.4.2 Κατανομή του ελλείμματος τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας 86

3.5 Σύνοψη κεφαλαίου 88

Απόλυτη χρεοκοπία στο κλασικό μοντέλο κινδύνου με σταθερό χρεωστικό και πιστωτικό επιτόκιο και στρατηγική σταθερού ορίου μερίσματος 89

4.1 Περιγραφή του μοντέλου 89

4.2 Ροπογεννήτρια συνάρτηση της παρούσας αξίας όλων των μερισμάτων μέχρι τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας 92

4.3 Ροπές της παρούσας αξίας όλων των μερισμάτων μέχρι τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας 98

4.4 Εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις 103

4.4.1 Αναλυτικές εκφράσεις των $V_n(u,b)$ και $M(u,y;b)$ 103

4.4.2 Βέλτιστο όριο μερίσματος 113

4.5 Σύνοψη κεφαλαίου 116
Παράρτημα 117
Βιβλιογραφία 119

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Διαδικασία πλεονάσματος και πιθανότητα χρεοκοπίας στην κλασική θεωρία κινδύνου

Μια ασφαλιστική εταιρία λειτουργεί αποτελεσματικά όταν είναι κυρίως σε θέση να δημιουργήσει ικανά (επαρκή) αποθεματικά κεφάλαια, έτσι ώστε να μπορεί να καλύψει τις υποχρεώσεις της τόσο έναντι των ασφαλισμένων (ασφαλιστικά ρίσκα) όσο και έναντι τρίτων (επιχειρηματικά ρίσκα) καθώς επίσης και για την κάλυψη διαφόρων λειτουργικών εξόδων. Με τον όρο πλεόνασμα στην ασφαλιστική ορολογία χαρακτηρίζονται τα αποθεματικά κεφάλαια και αποτελούν τη διαφορά ανάμεσα στο ενεργητικό της ασφαλιστικής εταιρίας και στην καλύτερη δυνατή αναλογιστική αποτίμηση των υποχρεώσεων – αποζημιώσεών της. Η εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας, δηλαδή της πιθανότητας μη επάρκειας των αποθεματικών για την κάλυψη των συνολικών αποζημιώσεων έναντι των ασφαλισμένων, είναι από τα βασικά προβλήματα μελέτης στην κλασική θεωρία κινδύνου.

Τα θεμέλια της ανάπτυξης της μαθηματικής θεωρίας των κινδύνων έθεσε με τη διδακτορική του διατριβή ο F. Lundberg το 1903, και μετέπειτα ο H. Cramér το 1930 μέσω μια σειρά εργασιών στις οποίες ενσωμάτωσε τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών ή στοχαστικών ανελίξεων. Έτσι, εδραιώθηκε το μοντέλο που περιγράφει τη δυναμική εξέλιξη του πλεονάσματος στο χρόνο και ονομάσθηκε κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ή μοντέλο των Cramér – Lundberg και αποτέλεσε τη βάση για την ανάπτυξη της κλασικής θεωρίας κινδύνου. Βασική παραδοχή του μοντέλου είναι ότι το πλήθος των κινδύνων του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου προσδιορίζεται σύμφωνα με τη στοχαστική διαδικασία Poisson, δηλαδή, ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των απαιτήσεων-κινδύνων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου γενικεύτηκε το 1957 από τον Sparre Andersen ο οποίος υπέθεσε ότι ο αριθμός των κινδύνων σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο περιγράφεται από μία ανανεωτική στοχαστική διαδικασία, δηλαδή, το κύριο χαρακτηριστικό του νέου μοντέλου Sparre Andersen είναι ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων του χαρτοφυλακίου της ασφαλιστικής εταιρίας είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που δεν ακολουθούν κατ' ανάγκη την εκθετική κατανομή. Η γενίκευση αυτή του κλασικού μοντέλου ονομάσθηκε μοντέλο Sparre Andersen ή ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου.

Για τη μοντελοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος μιας ασφαλιστικής εταιρίας είναι σημαντικό να προσδιορισθεί το πλήθος των κινδύνων που εμφανίζονται. Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ μια στοχαστική διαδικασία η οποία παριστάνει τον αριθμό των κινδύνων που εμφανίστηκαν στο χρονικό διάστημα $[0,t]$.

Ορισμός 1.1.1. *Μια στοχαστική διαδικασία* $\{N(t), t \geq 0\}$ *ονομάζεται απαριθμήτρια διαδικασία αν και μόνο αν*

i. $N(t) > 0$, *με* $N(0) = 0$,

ii. $N(t)$ *είναι διακριτή,*

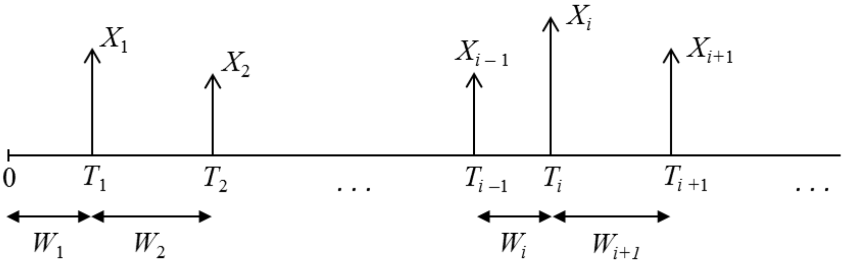
iii. *αν* $s \leq t$ *τότε* $N(s) \leq N(t)$.

Οι ανανεωτικές στοχαστικές διαδικασίες χρησιμοποιούνται ευρέως ως απαριθμήτριες στοχαστικές διαδικασίες στην εφαρμοσμένη θεωρία πιθανοτήτων (θεωρία κινδύνου, θεωρία ουρών αναμονής και αλλού), και ένας τρόπος ορισμού τους, βασίζεται στους ενδιάμεσους χρόνους των ενδεχομένων (απαιτήσεων-κινδύνων στην θεωρία κινδύνου) που απαριθμεί η διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$.

Έστω $\{T_i, i = 0,1,2...\}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με $T_0 = 0$, όπου T_i, $i \geq 1$, συμβολίζει τη χρονική στιγμή εμφάνισης του i-οστού ενδεχομένου (κινδύνου). Έστω τώρα οι τυχαίες μεταβλητές $W_i = T_i - T_{i-1}$, $i \geq 1$. Τότε η W_1 εκφράζει το χρόνο που απαιτείται για την εμφάνιση του πρώτου ενδεχομένου και η W_i, $i \geq 2$, εκφράζει το χρόνο από την εμφάνιση του $i-1$ ενδεχομένου μέχρι και την εμφάνιση του i ενδεχομένου, δηλαδή, $\{W_i,\ i = 1, 2,...\}$ είναι μία ακολουθία μη-αρνητικών και ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που παριστάνει τους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των ενδεχομένων. Αν $W_0 = 0$, τότε $T_n = W_1 + W_2 + ... + W_n$, $n \geq 0$ και η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $\{T_n, n = 0, 1,...\}$ ονομάζεται ακολουθία ανανεώσεων. Έστω, $\{X_i, i = 1, 2,...\}$ μία ακολουθία μη-αρνητικών τυχαίων μεταβλητών όπου η X_i παριστάνει το μέγεθος της απαίτησης από την εμφάνιση του i-οστού κινδύνου. Η ανανεωτική στοχαστική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ ορίζεται ως εξής.

Ορισμός 1.1.2. *Έστω* $\{W_i,\ i = 1,2,...\}$ *μία ακολουθία μη-αρνητικών ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, και* $\{T_i,\ i = 1,2...\}$ *μία ακολουθία ανανεώσεων με* $T_i = W_1 + W_2 + ... + W_i$, $i \geq 1$ *και* $T_0 = W_0 = 0$. *Τότε, η απαριθμήτρια διαδικασία* $\{N(t), t \geq 0\}$ *με* $N(0) = 0$, *που ορίζεται από τη σχέση* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}(T_n \leq t)$ *ονομάζεται ανανεωτική στοχαστική διαδικασία και παριστάνει τον αριθμό των ανανεώσεων στο* $[0,t]$.

Σχηματικά έχουμε,



Σχήμα 1.1.1 Χρόνοι εμφάνισης απαιτήσεων (T_i), μεγέθη απαιτήσεων (X_i), ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων απαιτήσεων (W_i)

Παρατήρηση 1.1.1. Η στοχαστική διαδικασία Poisson αποτελεί ειδική περίπτωση μίας ανανεωτικής στοχαστικής διαδικασίας, αν θεωρήσουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι $W_1, W_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Παρατήρηση 1.1.2. Από τον παραπάνω ορισμό, για κάθε ανανεωτική στοχαστική διαδικασία $\{N(t),\ t \geq 0\}$ ισχύει ότι:

$$\{N(t) = n\} \text{ αν και μόνο αν } \{T_n \leq t < T_{n+1}\}.$$

Επίσης, είναι $N(t) = \max\{n : T_n \leq t\}$ και $P[N(t) \geq n] = P(T_n \leq t)$.

Για τις ανανεωτικές στοχαστικές διαδικασίες ισχύει η επόμενη σημαντική ιδιότητα.

Πρόταση 1.1.1. *Έστω* $\{N(t), t \geq 0\}$ *μία ανανεωτική στοχαστική διαδικασία. Τότε:*

i. *με πιθανότητα* 1 *ισχύει ότι:* $\displaystyle \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{E(W_1)}$,

ii. $\displaystyle \lim_{t\to\infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{1}{E(W_1)}$.

Το αποτέλεσμα (ii) είναι γνωστό ως *στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα* (elementary renewal theorem).

Για τον καθορισμό του πλεονάσματος, στη συνέχεια, θεωρούμε τις συνολικές απαιτήσεις του χαρτοφυλακίου. Έστω $S(t)$, $t \geq 0$, παριστάνει τις συνολικές απαιτήσεις του χαρτοφυλακίου στο χρονικό διάστημα $[0, t]$.

Ορισμός 1.1.3. *Έστω* $N(t)$, $t \geq 0$, *ο αριθμός των κινδύνων στο* $[0,t]$, *και* X_i, $i \geq 1$ *το μέγεθος της* i *-οστής απαίτησης. Τότε, οι συνολικές απαιτήσεις στο* $[0,t]$ *παριστάνονται από τη σύνθετη στοχαστική διαδικασία* $\{S(t), t \geq 0\}$, *όπου*

$$S(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν } N(t) = 0 \\ \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & \text{αν } N(t) \geq 1. \end{cases}.$$

Στην κλασική θεωρία κινδύνου οι τυχαίες μεταβλητές X_i, $i \geq 1$, θεωρούνται ανεξάρτητες και ισόνομες, καθώς επίσης ανεξάρτητες είναι μεταξύ τους οι $\{X_i, i = 1, 2, ...\}$ και η $N(t)$.

Έστω $U(t)$, $t \geq 0$, παριστάνει το πλεόνασμα του χαρτοφυλακίου (έσοδα – έξοδα) της ασφαλιστικής εταιρίας μέχρι το χρόνο t.

Ορισμός 1.1.4. *Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος* $\{U(t), t \geq 0\}$ *ορίζεται ως*

$$U(t) = u + ct - S(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

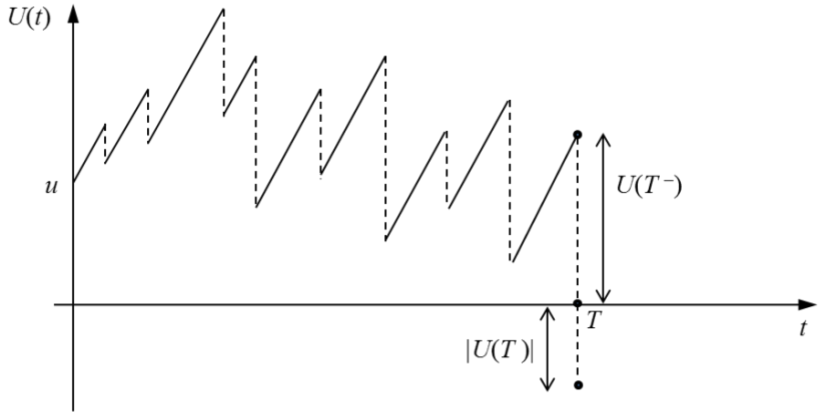
όπου $U(0) = u \geq 0$ *είναι το αρχικό κεφάλαιο,* $c > 0$ *σταθερός ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρου ανά μονάδα χρόνου (ένταση ασφαλίστρου),* $S(t)$ *οι συνολικές αποζημιώσεις στο χρονικό διάστημα* $[0,t]$.

Από τον ορισμό της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος $\{U(t), t \geq 0\}$, βλέπουμε ότι αυτή μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές κατά τις χρονικές στιγμές T_i εμφάνισης των κινδύνων. Στην κλασική θεωρία κινδύνου, όταν η διαδικασία πλεονάσματος γίνεται για πρώτη φορά αρνητική, τότε έχουμε χρεοκοπία. Σχετικά με το χρόνο χρεοκοπίας έχουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.1.5. *Η χρονική στιγμή T κατά την οποία για πρώτη φορά η διαδικασία πλεονάσματος γίνεται αρνητική, καλείται χρόνος χρεοκοπίας και ορίζεται από τη σχέση*

$$T = \begin{cases} \inf\{\, t \geq 0 : \ U(t) < 0\} \\ \infty, & \text{αν } U(t) \geq 0, \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Η διαδικασία πλεονάσματος μπορεί να παρασταθεί και με το επόμενο σχήμα



Σχήμα 1.1.2 Ο χρόνος χρεοκοπίας, το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας

όπου T είναι χρόνος τη στιγμή της χρεοκοπίας, η τυχαία μεταβλητή $U(T^-)$ δηλώνει το μέγεθος του πλεονάσματος αμέσως πριν πληρωθεί από την ασφαλιστική εταιρεία η αποζημίωση η οποία προκαλεί χρεοκοπία, $U(T)$ είναι το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν. Η ποσότητα $U(T^-)$ παίρνει θετικές τιμές, ενώ η ποσότητα $U(T)$ αρνητικές τιμές, οπότε ορίζεται η τυχαία μεταβλητή $|U(T)|$ που δηλώνει τη σφοδρότητα ή δριμύτητα της χρεοκοπίας δηλαδή το μέγεθος του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Με βάση τον ορισμό του χρόνου χρεοκοπίας, η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως εξής.

Ορισμός 1.1.6. *Για αρχικό απόθεμα* $u \geq 0$ *η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται από τη σχέση*

$$\psi(u) = P(T < \infty \,|\, U(0) = u).$$

Η πιθανότητα να μην εμφανίζεται χρεοκοπία, ονομάζεται πιθανότητα μη-χρεοκοπίας ή πιθανότητα επιβίωσης, συμβολίζεται με $\delta(u)$ *και δίνεται από τη σχέση*

$$\delta(u) = 1 - \psi(u).$$

1.2 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu

Με την εργασία τους οι Gerber and Shiu (1997) εισήγαγαν την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτησης ποινής (expected discounted penalty function) ή συνάρτηση των Gerber – Shiu η οποία μοντελοποιεί σε μια συνάρτηση τις τυχαίες μεταβλητές του χρόνου χρεοκοπίας T, του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία $U(T^-)$ και της σφοδρότητας της χρεοκοπίας $|U(T)|$, και έδωσαν τεράστια ώθηση στην Θεωρία Χρεοκοπίας, καθώς άρχισαν να μελετώνται ταυτόχρονα μέτρα κινδύνου που μέχρι τότε η προσέγγισή τους γίνονταν μεμονωμένα. Η συνάρτηση Gerber-Shiu ορίζεται ως εξής.

Ορισμός 1.2.1. *Για* $u \geq 0$, $\delta \geq 0$, *ορίζουμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής*

$$\varphi_\delta(u) = E[e^{-\delta T} w(U(T^-), |U(T)|)\,\mathrm{I}(T < \infty) \,|\, U(0) = u],$$

όπου δ *είναι η ένταση ανατοκισμού,* $w(x_1, x_2)$ *είναι μια μη-αρνητική συνάρτηση, που καλείται συνάρτηση ποινής (penalty function), με* $0 \leq w(x_1, x_2) < \infty$, $0 \leq x_1, x_2 < \infty$, *T είναι ο χρόνος τη στιγμή της χρεοκοπίας όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι u,* $U(T^-)$ *είναι το πλεόνασμα πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας,* $|U(T)|$ *είναι η σφοδρότητα (δριμύτητα) χρεοκοπίας που ισούται με το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας και* $\mathrm{I}(\cdot)$ *είναι δείκτρια συνάρτηση η οποία τονίζει ότι η ποινή ασκείται εάν και εφόσον τελικά συμβεί χρεοκοπία όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι μεγέθους u.*

Σημείωση:
Το δ μπορεί να ερμηνευθεί και ως η παράμετρος s του μετασχηματισμού Laplace, και η ποσότητα $e^{-\delta T}$ ως παράγοντας προεξόφλησης (discount factor).

Συμβολίζοντας με $f(x_1, x_2, t \,|\, u)$ την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T^-)$, $|U(T)|$ και T, η συνάρτηση Gerber-Shiu γράφεται ως

$$\varphi_\delta(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} w(x_1, x_2) f(x_1, x_2, t \,|\, u) dx_1 dx_2\, dt\,.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f(x_1, x_2, t \,|\, u) dx_1 dx_2 dt = P(T < \infty \,|\, U(0) = u) = \psi(u) < 1,$$

δηλαδή η $f(x_1, x_2, t \,|\, u)$ είναι ελλειμματική (defective) συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής μπορεί να ερμηνευτεί ως η προεξοφλημένη ποινή που επιβάλλεται όταν συμβεί η χρεοκοπία. Η συνάρτηση Gerber-Shiu πέρα από την Αναλογιστική επιστήμη βρίσκει εφαρμογές και αλλού, για παράδειγμα στη θεωρία των Χρηματοοικονομικών μαθηματικών (Gerber and Shiu (1998), Gerber and Landry (1998)). Από τον ορισμό της $\phi_\delta(u)$ και για συγκεκριμένες μορφές της συνάρτησης ποινής $w(x_1, x_2)$ και της παραμέτρου δ, προκύπτουν διάφορα μέτρα κινδύνου. Ενδεικτικά αναφέρονται τα παρακάτω (Χατζηκωνσταντινίδης):

i. Για $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = 1$, προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου T τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\varphi_\delta(u) = E[e^{-\delta T}\,\mathrm{I}(T < \infty) \,|\, U(0) = u]\,.$$

ii. Για $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = 1$, προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας,

$$\varphi_0(u) = E[\,\mathrm{I}(T < \infty) \,|\, U(0) = u] = P(T < \infty \,|\, U(0) = u) = \psi(u).$$

iii. Για $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = \mathrm{I}(x_1 \le z_1)\mathrm{I}(x_2 \le z_2)$, προκύπτει η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\varphi_\delta(u) = E[e^{-\delta T}\mathrm{I}(U(T^-) \le z_1)\mathrm{I}(|U(T)| \le z_2)\mathrm{I}(T < \infty) \,|\, U(0) = u] = F_\delta(z_1, z_2 \,|\, u).$$

Η $F_\delta(z_1, z_2 \,|\, u)$ εκφράζει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία, με αρχικό αποθεματικό u, ενώ το πλεόνασμα πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι το πολύ z_1 και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι το πολύ z_2.

iv. Για $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = \mathrm{I}(x_1 \le z_1)\mathrm{I}(x_2 \le z_2)$, προκύπτει η από κοινού συνάρτηση κατανομής των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\begin{aligned}\varphi_0(u) &= E[\mathrm{I}(U(T^-) \le z_1)\mathrm{I}(|U(T)| \le z_2)\mathrm{I}(T < \infty) \,|\, U(0) = u] \\ &= P(U(T^-) \le z_1, |U(T)| \le z_2, T < \infty \,|\, U(0) = u) = F_0(z_1, z_2 \,|\, u).\end{aligned}$$

v. Για $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = \mathrm{I}(x_1 = z_1)\mathrm{I}(x_2 = z_2)$, προκύπτει η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\varphi_\delta(u) = E[e^{-\delta T}\mathrm{I}(U(T^-) = z_1)\mathrm{I}(|U(T)| = z_2)\mathrm{I}(T < \infty) \,|\, U(0) = u] = f_\delta(z_1, z_2 \,|\, u).$$

vi. Για $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = \mathrm{I}(x_1 = z_1)\mathrm{I}(x_2 = z_2)$, προκύπτει η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\varphi_0(u) = E[\mathrm{I}(U(T^-) = z_1)\mathrm{I}(|U(T)| = z_2)\mathrm{I}(T < \infty) \,|\, U(0) = u] = f_0(z_1, z_2 \,|\, u).$$

vii. Για $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = \mathrm{I}(x_1 \le z)$, προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $U(T^-)$ αμέσως πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\varphi_\delta(x) = E[e^{-\delta T}\mathrm{I}(U(T^-) \le z)\mathrm{I}(T < \infty) \,|\, U(0) = u] = F_\delta(z \,|\, u).$$

viii. Για $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = \mathrm{I}(x_1 \le z)$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $U(T^-)$ αμέσως πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\begin{aligned}\varphi_0(u) &= E[\mathrm{I}(U(T^-) \le z)\mathrm{I}(T < \infty) \,|\, U(0) = u] \\ &= P(U(T^-) \le z, T < \infty \,|\, U(0) = u) = F_0(z \,|\, u).\end{aligned}$$

ix. Για $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = \mathrm{I}(x_1 = z)$, προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $U(T^-)$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\varphi_\delta(u) = E[e^{-\delta T}\mathrm{I}(U(T^-) = z)\mathrm{I}(T < \infty) \,|\, U(0) = u] = f_\delta(z \,|\, u).$$

x. Για $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = \mathrm{I}(x_1 = z)$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $U(T^-)$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\varphi_0(u) = E[\mathrm{I}(U(T^-) = z)\mathrm{I}(T < \infty) \,|\, U(0) = u] = f_0(z \,|\, u).$$

xi. Για $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = \mathrm{I}(x_2 \le z)$, προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\varphi_\delta(u) = E[e^{-\delta T}\mathrm{I}(|U(T)| \le z)\mathrm{I}(T < \infty) \,|\, U(0) = u] = F_\delta(z \,|\, u).$$

xii. Για $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = \mathrm{I}(x_2 \le z)$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\begin{aligned}\varphi_0(u) &= E[\mathrm{I}(|U(T)| \le z)\mathrm{I}(T < \infty) \,|\, U(0) = u] \\ &= P(|U(T)| \le z, T < \infty \,|\, U(0) = u) = F_0(z \,|\, u).\end{aligned}$$

xiii. Για $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = \mathrm{I}(x_2 = z)$, προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\varphi_\delta(u) = E[e^{-\delta T}\mathrm{I}(|U(T)| = z)\mathrm{I}(T < \infty) \,|\, U(0) = u] = f_\delta(z \,|\, u).$$

xiv. Για $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = \mathrm{I}(x_2 = z)$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\varphi_0(u) = E[\mathrm{I}(|U(T)| = z)\mathrm{I}(T < \infty) \,|\, U(0) = u] = f_0(z \,|\, u).$$

xv. Για $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = x_1^k$ ή $w(x_1, x_2) = x_2^k$, προκύπτει η ροπή k-τάξης του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία ή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας αντίστοιχα, δηλαδή

$$\varphi_0(u) = E[U(T^-)^k \mathrm{I}(T < \infty) \,|\, U(0) = u]$$

ή

$$\varphi_0(u) = E[|U(T)|^k \; \mathrm{I}(T < \infty) \,|\, U(0) = u]$$

αντίστοιχα.

1.3 Απόλυτη χρεοκοπία

Στην εργασία αυτή εξετάζεται μια πιο ρεαλιστική επέκταση του κλασικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου, στην οποία υποθέτουμε ότι η διαδικασία δεν σταματά όταν το πλεόνασμα βρεθεί για πρώτη φορά αρνητικό, αλλά η ασφαλιστική εταιρεία δανείζεται με ένα σταθερό επιτόκιο το μέγεθος του ελλείμματος και όταν το πλεόνασμα είναι θετικό, επενδύει το πλεόνασμα χωρίς ρίσκο με ένα σταθερό επιτόκιο. Στην περίπτωση που το πλεόνασμα γίνει αρνητικό και μικρότερο από μια συγκεκριμένη τιμή, τότε δεν μπορεί να ξαναγίνει θετικό, οπότε έχουμε την απόλυτη χρεοκοπία. Δίνεται έτσι η δυνατότητα στην εταιρεία να δανειστεί το κεφάλαιο που για πρώτη φορά θα έχει ως έλλειμμα, καθώς σε μεταγενέστερες χρονικές στιγμές τα έσοδά της μπορεί να υπερβαίνουν τα έξοδα και το πλεόνασμα να γίνει πάλι θετικό.

Όπως όμως έχει σχολιαστεί στους Embrechts and Schmidli (1994), το μηδενικό όριο αναφοράς κάτω του οποίου αν βρεθεί το πλεόνασμα θεωρείται χρεοκοπία στην κλασική θεωρία κινδύνου, είναι μη ρεαλιστικό και εναλλακτικά χρησιμοποίησαν σαν όριο χρεοκοπίας την τιμή $-\frac{c}{r}$, όπου $c>0$ είναι ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρων και $r>0$ ο ρυθμός δανειστικού επιτοκίου για το κεφάλαιο που έχει έλλειμμα η ασφαλιστική εταιρία. Όταν η διαδικασία πλεονάσματος πάρει την τιμή αυτή ή και μικρότερη, τότε η ασφαλιστική εταιρία δεν είναι σε θέση να ανταποκριθεί στις υποχρεώσεις της και να ξεπληρώσει τα χρέη της. Αν το πλεόνασμα γίνει ίσο με $-\frac{c}{r}$, τα ασφάλιστρα θα καλύπτουν μόνο το ρυθμό δανειστικού επιτοκίου και όταν θα εμφανιστεί η πρώτη απαίτηση, θα συμβεί χρεοκοπία. Για επίπεδα του πλεονάσματος χαμηλότερα από την τιμή $-\frac{c}{r}$, η χρεοκοπία είναι βέβαιη. Συνεπώς, θεωρούμε ότι απόλυτη χρεοκοπία συμβαίνει όταν το πλεόνασμα γίνει μικρότερο ή ίσο από $-\frac{c}{r}$.

Ο χρόνος απόλυτης χρεοκοπίας ορίζεται ως

$$\tau = \begin{cases} \inf\left\{ t \geq 0 : U(t) \leq -\frac{c}{r} \right\}, \\ \infty, \quad \text{εάν } U(t) > -\frac{c}{r}. \end{cases}$$

Είναι προφανές ότι για τον χρόνο χρεοκοπίας T στο κλασικό μοντέλο ισχύει $T \leq \tau$.

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu σε απόλυτη χρεοκοπία κατά αναλογία με τον Ορισμό 1.2.1 δίνεται από τη σχέση

$$\phi_\delta(u) \text{ ή } \phi(u) = E\left[e^{-\delta t} w\left(U(\tau^-), |U(\tau)|\right) I(\tau < \infty) \,|\, U(0) = u \right], \qquad u > -\frac{c}{r},$$

όπου $\delta \geq 0$ είναι η ένταση ανατοκισμού, $w\left(U(\tau^-), |U(\tau)|\right)$ συνάρτηση η οποία ορίζεται στο $\left(-\frac{c}{r}, \infty\right) \times \left[\frac{c}{r}, \infty\right)$ και μπορεί να ερμηνευτεί ως η ποινή τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας όταν το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία είναι $U(\tau^-)$ και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι $|U(\tau)|$.

Θέτοντας διάφορες τιμές στο δ και τη συνάρτηση w προκύπτουν, αντίστοιχα όπως αναφέρθηκε παραπάνω, χρήσιμα μέτρα κινδύνου. Για παράδειγμα, για $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = 1$, η πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας είναι

$$\psi(u) = P(\tau < \infty \,|\, U(0) = u), \qquad u > -\frac{c}{r}.$$

Η μελέτη της χρεοκοπίας στην κλασική θεωρία κινδύνου και της απόλυτης χρεοκοπίας με χρεωστικό και πιστωτικό επιτόκιο έχει απασχολήσει αρκετούς ερευνητές τα τελευταία χρόνια. Σημαντικά αποτελέσματα έχουν ανακοινωθεί μεταξύ άλλων στους Dassios and Embrechts (1989), Embrechts and Schmidli (1994), Dickson and dos Reis (1997), Cai (2004, 2007), Cai and Dickson (2002), Cai and Yang (2005), Yang et al. (2008), Zhu and Yang (2008), Mitric and Sendova (2011), Asmussen and Albrecher (2010), Sundt and Teugels (1995).

Στην εργασία μελετώνται διάφορα μέτρα κινδύνου σχετικά με την απόλυτη χρεοκοπία όπως η πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας, το έλλειμμα τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας κλπ..

Στο Κεφάλαιο 2 μελετάται η απόλυτη χρεοκοπία στο κλασικό μοντέλου κινδύνου στο οποίο θεωρούμε ότι ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρων, καθώς και η ένταση επιτοκίου με το οποίο η ασφαλιστική εταιρία επενδύει το πλεόνασμά της όταν αυτό είναι θετικό, είναι βηματικές συναρτήσεις με τις τιμές τους να κυμαίνονται ανάλογα το επίπεδο στο οποίο βρίσκεται το πλεόνασμα.

Στο Κεφάλαιο 3 μελετάται η απόλυτη χρεοκοπία σε ανανεωτικά και μη-ανανεωτικά μοντέλα κινδύνου, θεωρώντας σταθερό και ίδιο ρυθμό πιστωτικού και δανειστικού τοκισμού.

Στο κεφάλαιο 4 μελετάται η απόλυτη χρεοκοπία στο κλασικό μοντέλο κινδύνου με σταθερούς ρυθμούς πιστωτικού και δανειστικού τοκισμού θεωρώντας επιπλέον την ύπαρξη στρατηγικής καταβολής μερίσματος στους μετόχους της ασφαλιστικής εταιρίας, σύμφωνα με την οποία όταν το πλεόνασμα ξεπεράσει ένα σταθερό όριο τότε επιστρέφεται μέρισμα στους δικαιούχους με σταθερό ρυθμό, ενώ δεν καταβάλλονται μερίσματα όταν το πλεόνασμα είναι μικρότερο από το εν λόγω όριο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Απόλυτη χρεοκοπία στο κλασικό μοντέλο κινδύνου πολλαπλών επιπέδων

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται η απόλυτη χρεοκοπία στο κλασικό μοντέλου κινδύνου στο οποίο θεωρούμε ότι ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρων καθώς και η ένταση επιτοκίου είναι βηματικές συναρτήσεις με τις τιμές τους να κυμαίνονται ανάλογα το επίπεδο στο οποίο βρίσκεται το πλεόνασμα. Όταν το πλεόνασμα βρίσκεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικά όρια, ο ασφαλιστής έχει τη δυνατότητα να επιλέξει τον αντίστοιχο ρυθμό είσπραξης ασφαλίστρων και το ρυθμό επιτοκίου. Το μοντέλο επιτρέπει το δανεισμό του ποσού του ελλείμματος όταν το πλεόνασμα πέσει κάτω από το μηδέν. Αρχικά δίνονται οι ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber-Shiu. Στη συνέχεια για τα μεγέθη των απαιτήσεων εξετάζονται η εκθετική και η phase-type(2) κατανομή, και οι ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις μετατρέπονται σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις για τις οποίες δίνεται η λύση της συνάρτησης Gerber-Shiu σε μορφή σειράς, όπου οι συντελεστές προσδιορίζονται αναδρομικά.

Στην Ενότητα 1.3 αναφέρθηκαν αρκετές μελέτες από την αναλογιστική βιβλιογραφία σχετικά με το πρόβλημα της απόλυτης χρεοκοπίας. Ένα μοντέλο κινδύνου όπου ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρου δεν είναι σταθερός αλλά μεταβλητός σύμφωνα με μια βηματική συνάρτηση μελετάται στην εργασία των Albrecher and Hartinger (2007). Επίσης, πολλαπλά κατώφλια εξετάζονται στο κλασικό μοντέλο στους Lin and Sendova (2008), Yuan and Hu (2009).

Στην παρούσα εργασία μελετάται το μοντέλο που αρχικά εμφανίστηκε στους Mitric and Sendova (2011) και αποτελεί επέκταση της εργασίας των Yang et al. (2008).

2.1 Περιγραφή του μοντέλου

Θεωρούμε το κλασικό μοντέλο κινδύνου συνεχούς χρόνου, στο οποίο το πλεόνασμα $U(t)$ τη χρονική στιγμή t, δίνεται από την εξίσωση

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \qquad t \geq 0, \tag{2.1.1}$$

όπου, $U(0) = u \geq 0$ είναι το αρχικό πλεόνασμα, $c \geq 0$ ο σταθερός ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρου ανά μονάδα χρόνου, $\{X_i, i = 1, 2, ...\}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων μη-αρνητικών τυχαίων μεταβλητών, όπου η X_i παριστάνει το μέγεθος της i-οστής απαίτησης και $N(t)$ είναι το πλήθος των απαιτήσεων μέχρι το χρόνο t. Επιπλέον, η απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη

$\{N(t), t \geq 0\}$ είναι μια ομογενής διαδικασία Poisson με ένταση $\lambda > 0$ (ρυθμός άφιξης απαιτήσεων). Οι $\{N(t), t \geq 0\}$ και $\{X_i, i = 1, 2, \ldots\}$ θεωρούνται αμοιβαία ανεξάρτητες μεταξύ τους. Για τις τυχαίες μεταβλητές X_i, $i = 1, 2, \ldots$, θεωρούμε ότι έχουν συνάρτηση κατανομής $F(x) = P(X_1 \leq x)$, $x \geq 0$, συνάρτηση πυκνότητας $f(x) = F'(x)$ και μέση τιμή $\mu = E(X_1) < \infty$.

Στο μοντέλο κινδύνου που εξετάζουμε, το κλασικό μοντέλο επεκτείνεται ως εξής: Το πλεόνασμα μπορεί να βρεθεί σε $n+1$ επίπεδα και συγκεκριμένα $b_{i-1} \leq U(t) < b_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, όπου για τις τιμές των κατωφλίων είναι $b_{-1} < b_0 < b_1 < \ldots < b_n$ με $b_0 = 0$. Όταν το πλεόνασμα πέσει κάτω από το μηδέν για πρώτη φορά ($U(t) < b_0 = 0$), η ασφαλιστική εταιρεία δανείζεται το ποσό του ελλείμματος με ένα σταθερό ρυθμό δανειστικού τοκισμού $r_0 > 0$ ή ισοδύναμα με δανειστικό επιτόκιο $e^{r_0} - 1 > 0$. Όταν το πλεόνασμα είναι θετικό ($U(t) > 0$) και στο επίπεδο $i = 1, \ldots, n,$ η ασφαλιστική εταιρεία επενδύει το πλεόνασμα χωρίς ρίσκο με ένα σταθερό ρυθμό πιστωτικού τοκισμού $r_i > 0$. Επίσης, ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρων είναι μεταβλητός που εξαρτάται από το επίπεδο που βρίσκεται το τρέχον πλεόνασμα, και παίρνει την τιμή $c_0 > 0$ αν $U(t) < 0$ και την τιμή $c_i > 0$ αν $b_{i-1} \leq U(t) < b_i$, $i = 1, \ldots, n$. Στο δυναμικό αυτό μοντέλο, το πλεόνασμα ικανοποιεί τη σχέση

$$dU(t) = c_i dt + r_i U(t) dt - dS(t), \qquad b_{i-1} \leq U(t) < b_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.1.2}$$

Όταν το πλεόνασμα είναι αρνητικό, το έσοδο που κερδίζεται στη μονάδα του χρόνου είναι

$$c_0 + r_0 U(t).$$

Δεν υπάρχει περίπτωση το πλεόνασμα να γίνει πάλι θετικό εάν

$$c_0 + r_0 U(t) \leq 0 \Leftrightarrow U(t) \leq -\frac{c_0}{r_0}, \tag{2.1.3}$$

αφού το επιτόκιο που πληρώνει η εταιρεία είναι μεγαλύτερο από τα ασφάλιστρα που εισπράττει. Συνεπώς, η ποσότητα $-\frac{c_0}{r_0}$ αποτελεί κριτική τιμή για το πλεόνασμα, καθώς όταν αυτό φτάσει ή γίνει μικρότερο από αυτή τότε έχουμε απόλυτη χρεοκοπία. Η κριτική αυτή τιμή είναι το b_{-1}, δηλαδή $b_{-1} = -\frac{c_0}{r_0}$.

Επιπλέον θεωρούμε τη *συνθήκη καθαρού κέρδους*,

$$c_i > \lambda\mu, \; i = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.1.4}$$

Ο χρόνος απόλυτης χρεοκοπίας ορίζεται ως

$$\tau = \begin{cases} \inf\left\{ t \geq 0 : U(t) \leq -\dfrac{c_0}{r_0} \right\}, \\ \infty, \quad \text{εάν } U(t) > -\dfrac{c_0}{r_0}. \end{cases} \tag{2.1.5}$$

Είναι προφανές ότι για τον χρόνο χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο, έστω *T*, ισχύει $T \leq \tau$.

Η πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας ορίζεται ως

$$\psi(u) = P(\tau < \infty \,|\, U(0) = u), \qquad u > -\frac{c_0}{r_0}. \tag{2.1.6}$$

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ή συνάρτηση των Gerber-Shiu, $\phi(u)$, ορίζεται ως

$$\phi(u) = E\left[e^{-\delta t} w\left(U(\tau^-), \left| U(\tau) \right| \right) I(\tau < \infty) \,|\, U(0) = u \right], \qquad u > -\frac{c_0}{r_0}, \tag{2.1.7}$$

όπου, $w(x_1, x_2)$ είναι η συνάρτηση ποινής με $0 \leq w(x_1, x_2) < \infty$, $(x_1, x_2) \in \left(-\dfrac{c_0}{r_0}, \infty \right) \times \left[\dfrac{c_0}{r_0}, \infty \right)$, $\delta \geq 0$ η ένταση ανατοκισμού για τον υπολογισμό της παρούσας αξίας της ποινής, $I(\cdot)$ είναι δείκτρια συνάρτηση, $U(\tau^-)$ είναι το πλεόνασμα τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας και $\left| U(\tau) \right|$ είναι το έλλειμμα τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας.

Για τη συνάρτηση Gerber-Shiu θεωρούμε ότι αυτή μηδενίζεται καθώς το *u* απειρίζεται, που ισχύει όταν η συνάρτηση ποινής $w(x_1, x_2)$ είναι φραγμένη, δηλαδή,

$$\lim_{u \to \infty} \phi(u) = 0, \quad u \geq 0. \tag{2.1.8}$$

2.2 Ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις των συναρτήσεων Gerber-Shiu

Στην ενότητα αυτή, αναπτύσσεται ένα σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber-Shiu του υπό θεώρηση μοντέλου.

Πρόταση 2.2.1. *Όταν* $b_{i-1} \leq u < b_i, \quad i = 0,1,\ldots,n,$ *η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί την ολοκληροδιαφορική εξίσωση*

$$\phi'(u) = \frac{\lambda + \delta}{r_i u + c_i} \phi(u) - \frac{\lambda}{r_i u + c_i} \left(\int_0^{u + \frac{c_0}{r_0}} \phi(u - x) f(x) dx + A(u) \right) \tag{2.2.1}$$

όπου

$$A(u)=\int_{u+\frac{c_0}{r_0}}^{\infty} w(u,x-u)f(x)dx. \qquad (2.2.2)$$

Απόδειξη. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: $-\dfrac{c_0}{r_0}<u<0$ και $u\geq 0$.

i) Περίπτωση $-\dfrac{c_0}{r_0}<u<0$. Έστω t_0 η χρονική στιγμή όπου για πρώτη φορά το αρνητικό πλεόνασμα γίνεται 0, θεωρώντας ότι δεν υπάρχει καμία απαίτηση πριν το t_0. Θεωρούμε συνάρτηση $h_1(t,u)$ που εκφράζει το πλεόνασμα στο χρόνο $t\leq t_0$, με

$$h_1(t,u)=ue^{r_0t}+c_0\frac{e^{r_0t}-1}{r_0}$$

όπου η ποσότητα στο κλάσμα είναι η μελλοντική αξία στο χρόνο t συνεχούς ράντας με επιτόκιο r_0, δηλαδή $\int_0^t e^{r_0x}dx$. Είναι $h_1(t_0,u)=0$, $h_1(t,u)<0$ για $t<t_0$, $h_1(0,u)=u$. Λύνοντας την εξίσωση $h_1(t_0,u)=0$ προκύπτει

$$ue^{r_0t}+c_0\frac{e^{r_0t}-1}{r_0}=0\Leftrightarrow t_0=\frac{1}{r_0}\ln\left(\frac{c_0}{c_0+r_0u}\right).$$

Επίσης, έστω η συνάρτηση $h_2(t)$ που εκφράζει το πλεόνασμα στο χρόνο t μετά τη χρονική στιγμή t_0, εάν το πλεόνασμα ξεκινά από την αρνητική τιμή u και δεν συμβαίνει καμία απαίτηση στο διάστημα $[t_0,t)$, με

$$h_2(t)=\int_{t_0}^{t}c(h_2(\mathrm{z}))e^{r_i(t-z)}d\,z,$$

με $c(x)=c_i$ όταν $b_{i-1}\leq x\leq b_i$.

Χρησιμοποιώντας το ανανεωτικό επιχείρημα, δεσμεύουμε ως προς το χρόνο T_1 της πρώτης ανανέωσης (άφιξης πρώτης απαίτησης) και το μέγεθος αυτής της απαίτησης x και έχουμε για τη συνάρτηση $\phi(u)$,

$$\phi(u)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\phi(u\,|\,t,x)f(x)f_{T_1}(t)dxdt$$

$$=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\int_0^{\infty}\phi(u\,|\,t,x)f(x)dxdt \qquad (2.2.3)$$

Η πρώτη απαίτηση μπορεί να εμφανιστεί πριν ή μετά τη στιγμή t_0. Ανάλογα με το μέγεθος αυτής της απαίτησης, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) $t \le t_0$

- εάν $x < h_1(t,u) + \frac{c_0}{r_0}$, η διαδικασία ανανεώνεται με αρχικό πλεόνασμα ίσο με $h_1(t,u) - x < 0$

- εάν $x \ge h_1(t,u) + \frac{c_0}{r_0}$, έχουμε απόλυτη χρεοκοπία και εφαρμόζεται η συνάρτηση ποινής $w\left(U(\tau^-), |U(\tau)|\right)$. Το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία είναι $U(\tau^-) = h_1(t,u)$ ενώ το έλλειμμα τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας είναι $|U(\tau)| = x - h_1(t,u)$.

Έχουμε δηλαδή,

$$\phi(u \mid t, x) = \begin{cases} e^{-\delta t}\phi(h_1(t,u) - x), & x < h_1(t,u) + \frac{c_0}{r_0} \\ e^{-\delta t} w(h_1(t,u), x - h_1(t,u)), & x \ge h_1(t,u) + \frac{c_0}{r_0} \end{cases} \tag{2.2.4}$$

ii) $t > t_0$

- εάν $x \le h_2(t) + \frac{c_0}{r_0}$, η διαδικασία ανανεώνεται με αρχικό πλεόνασμα ίσο με $h_2(t) - x$

- εάν $x > h_2(t) + \frac{c_0}{r_0}$, έχουμε απόλυτη χρεοκοπία και εφαρμόζεται η συνάρτηση ποινής $w\left(U(\tau^-), |U(\tau)|\right)$. Το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία είναι $U(\tau^-) = h_2(t)$ ενώ το έλλειμμα τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας είναι $|U(\tau)| = x - h_2(t)$.

Έχουμε δηλαδή,

$$\phi(u \mid t, x) = \begin{cases} e^{-\delta t}\phi(h_2(t) - x), & x \le h_2(t) + \frac{c_0}{r_0} \\ e^{-\delta t} w(h_2(t), x - h_2(t)), & x \ge h_2(t,u) + \frac{c_0}{r_0} \end{cases} \tag{2.2.5}$$

Αντικαθιστώντας τις (2.2.4) και (2.2.5) στην (2.2.3) έχουμε

$$\phi(u) = \int_0^{t_0} \lambda e^{-\lambda t} \left(\int_0^{h_1(t,u)+\frac{c_0}{r_0}} e^{-\delta t}\phi(h_1(t,u) - x) f(x)dx + \int_{h_1(t,u)+\frac{c_0}{r_0}}^{\infty} e^{-\delta t} w(h_1(t,u), x - h_1(t,u)) f(x)dx \right) dt$$

$$+ \int_{t_0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \left(\int_0^{h_2(t)+\frac{c_0}{r_0}} e^{-\delta t}\phi(h_2(t) - x) f(x)dx + \int_{h_2(t)+\frac{c_0}{r_0}}^{\infty} e^{-\delta t} w(h_2(t), x - h_2(t)) f(x)dx \right) dt$$

$$=\int_0^{t_0}\lambda e^{-(\lambda+\delta)t}\left(\int_0^{h_1(t,u)+\frac{c_0}{r_0}}\phi(h_1(t,u)-x)f(x)dx+\int_{h_1(t,u)+\frac{c_0}{r_0}}^{\infty}w(h_1(t,u),x-h_1(t,u))f(x)dx\right)dt$$

$$+\int_{t_0}^{\infty}\lambda e^{-(\lambda+\delta)t}\left(\int_0^{h_2(t)+\frac{c_0}{r_0}}\phi(h_2(t)-x)f(x)dx+\int_{h_2(t)+\frac{c_0}{r_0}}^{\infty}w(h_2(t),x-h_2(t))f(x)dx\right)dt\,.$$

Ορίζοντας $A(u)=\int_{u+\frac{c_0}{r_0}}^{\infty}w(u,x-u)f(x)dx$, η παραπάνω γίνεται

$$\phi(u)=\int_0^{t_0}\lambda e^{-(\lambda+\delta)t}\left(\int_0^{h_1(t,u)+\frac{c_0}{r_0}}\phi(h_1(t,u)-x)f(x)dx+A(h_1(t,u))\right)dt$$

$$+\int_{t_0}^{\infty}\lambda e^{-(\lambda+\delta)t}\left(\int_0^{h_2(t)+\frac{c_0}{r_0}}\phi(h_2(t)-x)f(x)dx+A(h_2(t))\right)dt\,. \qquad (2.2.6)$$

Στη συνέχεια προχωρούμε με κάποιες αλλαγές μεταβλητών: για το πρώτο εσωτερικό ολοκλήρωμα,

$$y=h_1(t,u)=ue^{r_0t}+c_0\frac{e^{r_0t}-1}{r_0}\Rightarrow r_0y=r_0ue^{r_0t}+c_0e^{r_0t}-c_0\Rightarrow e^{r_0t}(r_0u+c_0)=r_0y+c_0$$

$$\Rightarrow t=\frac{1}{r_0}\ln\left(\frac{r_0y+c_0}{r_0u+c_0}\right)$$

το διαφορικό γίνεται

$$y=h_1(t,u)\Rightarrow dy=\frac{dh_1(t,u)}{dt}=(ur_0e^{r_0t}+c_0e^{r_0t})dt=(ur_0+c_0)e^{r_0t}dt=(ur_0+c_0)e^{r_0\frac{1}{r_0}\ln\left(\frac{r_0y+c_0}{r_0u+c_0}\right)}dt$$

$$=(ur_0+c_0)\frac{r_0y+c_0}{r_0u+c_0}dt=(r_0y+c_0)dt\Rightarrow dt=\frac{1}{r_0y+c_0}dy$$

και για τα άκρα του ολοκληρώματος είναι: $0\le t\le t_0\Rightarrow h_1(0,u)\le y\le h_1(t_0,u)\Rightarrow u\le y\le 0$.

Επίσης είναι,

$$e^{-(\lambda+\delta)t}=e^{-(\lambda+\delta)\frac{1}{r_0}\ln\left(\frac{r_0y+c_0}{r_0u+c_0}\right)}=\left(\frac{r_0y+c_0}{r_0u+c_0}\right)^{-\frac{\lambda+\delta}{r_0}}=(r_0y+c_0)^{-\frac{\lambda+\delta}{r_0}}(r_0u+c_0)^{\frac{\lambda+\delta}{r_0}}\,.$$

Όμοια, για το δεύτερο εσωτερικό ολοκλήρωμα, θέτουμε

$$y=h_2(t)=\int_{t_0}^{t}c(h_2(z))e^{r_i(t-z)}dz$$

$$\Rightarrow dy = \left(c(h_2(t))\cdot 1 - 0 + \int_{t_0}^{t} c(h_2(z)) r_i e^{r_i(t-z)} dz \right) dt$$

$$= \left(c(h_2(t)) + r_i \int_{t_0}^{t} c(h_2(z)) e^{r_i(t-z)} dz \right) dt = \left(c(y) + r_i y \right) dt \Rightarrow dt = \frac{1}{r_i y + c(y)} dy \, .$$

Με ολοκλήρωση έχουμε $t = \int_0^y \frac{1}{r_i z + c(z)} dz + t_0$. Επίσης είναι

$$e^{-(\lambda+\delta)t} = e^{-(\lambda+\delta)\left(\int_0^y \frac{1}{r_i z + c(z)} dz + t_0\right)} = e^{-(\lambda+\delta)\int_0^y \frac{1}{r_i z + c(z)} dz} e^{-(\lambda+\delta)t_0}$$

(και με αντικατάσταση του t_0)

$$= e^{-(\lambda+\delta)\int_0^y \frac{1}{r_i z + c(z)} dz} e^{-(\lambda+\delta)\frac{1}{r_0}\ln\left(\frac{c_0}{c_0 + r_0 u}\right)} = e^{-(\lambda+\delta)\int_0^y \frac{1}{r_i z + c(z)} dz} \left(\frac{r_0 u + c_0}{c_0} \right)^{\frac{\lambda+\delta}{r_0}} .$$

Με αντικατάσταση των παραπάνω στην (2.2.6) προκύπτει

$$\phi(u) = \lambda (r_0 u + c_0)^{\frac{\lambda+\delta}{r_0}} \int_u^0 (r_0 y + c_0)^{-\frac{\lambda+\delta}{r_0} - 1} \left(\int_0^{y + \frac{c_0}{r_0}} \phi(y-x) f(x) dx + A(y) \right) dy$$

$$+ \lambda \left(\frac{r_0 u + c_0}{c_0} \right)^{\frac{\lambda+\delta}{r_0}} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\delta)\int_0^y \frac{1}{r_i z + c(z)} dz} \frac{1}{r_i y + c(y)} \left(\int_0^{y + \frac{c_0}{r_0}} \phi(y-x) f(x) dx + A(y) \right) dy \, . \qquad (2.2.7)$$

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε ως προς u την (2.2.7), με τη βοήθεια του Παραρτήματος Π1, και είναι

$$\frac{d}{du} \left[\int_u^0 (r_0 y + c_0)^{-\frac{\lambda+\delta}{r_0} - 1} \left(\int_0^{y + \frac{c_0}{r_0}} \phi(y-x) f(x) dx + A(y) \right) dy \right]$$

$$= -(r_0 u + c_0)^{-\frac{\lambda+\delta}{r_0} - 1} \left(\int_0^{u + \frac{c_0}{r_0}} \phi(u-x) f(x) dx + A(u) \right),$$

και η (2.2.7) γίνεται

$$\phi'(u) = \lambda(\lambda+\delta)(r_0 u + c_0)^{\frac{\lambda+\delta}{r_0} - 1} \int_u^0 (r_0 y + c_0)^{-\frac{\lambda+\delta}{r_0} - 1} \left(\int_0^{y + \frac{c_0}{r_0}} \phi(y-x) f(x) dx + A(y) \right) dy$$

$$+ \lambda (r_0 u + c_0)^{\frac{\lambda+\delta}{r_0}} \left(-(r_0 u + c_0)^{-\frac{\lambda+\delta}{r_0} - 1} \left(\int_0^{u + \frac{c_0}{r_0}} \phi(u-x) f(x) dx + A(u) \right) \right)$$

$$+\lambda\frac{\lambda+\delta}{r_0}\frac{r_0}{c_0}\left(\frac{r_0u+c_0}{c_0}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r_0}-1}\int_0^{\infty}e^{-(\lambda+\delta)\int_0^y\frac{1}{r_iz+c(z)}dz}\frac{1}{r_iy+c(y)}\left(\int_0^{y+\frac{c_0}{r_0}}\phi(y-x)f(x)dx+A(y)\right)dy$$

$$=\frac{\lambda+\delta}{r_0u+c_0}\lambda(r_0u+c_0)^{\frac{\lambda+\delta}{r_0}}\int_u^0(r_0y+c_0)^{-\frac{\lambda+\delta}{r_0}-1}\left(\int_0^{y+\frac{c_0}{r_0}}\phi(y-x)f(x)dx+A(y)\right)dy$$

$$-\frac{\lambda}{r_0u+c_0}\left(\int_0^{u+\frac{c_0}{r_0}}\phi(u-x)f(x)dx+A(u)\right)$$

$$+\frac{\lambda+\delta}{r_0u+c_0}\lambda\left(\frac{r_0u+c_0}{c_0}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r_0}}\int_0^{\infty}e^{-(\lambda+\delta)\int_0^y\frac{1}{r_iz+c(z)}dz}\frac{1}{r_iy+c(y)}\left(\int_0^{y+\frac{c_0}{r_0}}\phi(y-x)f(x)dx+A(y)\right)dy\,.$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα το $\dfrac{\lambda+\delta}{r_0u+c_0}$,

$$\phi'(u)=\frac{\lambda+\delta}{r_0u+c_0}\Bigg[\lambda(r_0u+c_0)^{\frac{\lambda+\delta}{r_0}}\int_u^0(r_0y+c_0)^{-\frac{\lambda+\delta}{r_0}-1}\left(\int_0^{y+\frac{c_0}{r_0}}\phi(y-x)f(x)dx+A(y)\right)dy$$

$$+\lambda\left(\frac{r_0u+c_0}{c_0}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r_0}}\int_0^{\infty}e^{-(\lambda+\delta)\int_0^y\frac{1}{r_iz+c(z)}dz}\frac{1}{r_iy+c(y)}\left(\int_0^{y+\frac{c_0}{r_0}}\phi(y-x)f(x)dx+A(y)\right)dy\Bigg]$$

$$-\frac{\lambda}{r_0u+c_0}\left(\int_0^{u+\frac{c_0}{r_0}}\phi(u-x)f(x)dx+A(u)\right)$$

όπου η παράσταση μέσα στις ορθογώνιες παρενθέσεις είναι η $\phi(u)$ της σχέσης (2.2.7), οπότε

$$\phi'(u)=\frac{\lambda+\delta}{r_0u+c_0}\phi(u)-\frac{\lambda}{r_0u+c_0}\left(\int_0^{u+\frac{c_0}{r_0}}\phi(u-x)f(x)dx+A(u)\right)$$

που είναι η Εξίσωση (1.1) για $b_{i-1}\le u<b_i$ με $i=0$, δηλαδή, για $b_{-1}\le u<b_0$ ή $-\dfrac{c_0}{r_0}\le u<0$.

ii) Περίπτωση $u\ge 0$. Με παρόμοια διαδικασία καταλήγουμε στη σχέση

$$\phi(u)=\int_u^{\infty}\lambda e^{-(\lambda+\delta)\int_u^y \frac{1}{r_i z+c(z)}dz}\frac{1}{r_i y+c(y)}\left(\int_0^{y+\frac{c_0}{r_0}}\phi(y-x)f(x)dx+A(y)\right)dy. \qquad (2.2.8)$$

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε την (2.2.8) ως προς *u* (Παράρτημα Π1) και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι:

$$\frac{d}{du}e^{-(\lambda+\delta)\int_u^y \frac{1}{r_i z+c(z)}dz}=e^{-(\lambda+\delta)\int_u^y \frac{1}{r_i z+c(z)}dz}[-(\lambda+\delta)]\frac{d}{du}\int_u^y\frac{1}{r_i z+c(z)}dz=e^{-(\lambda+\delta)\int_u^y \frac{1}{r_i z+c(z)}dz}(\lambda+\delta)\frac{1}{r_i u+c(u)},$$

από την (2.2.8) έχουμε

$$\phi'(u)=-\lambda\frac{1}{r_i u+c(u)}\left(\int_0^{u+\frac{c_0}{r_0}}\phi(u-x)f(x)dx+A(u)\right)$$

$$+\int_u^{\infty}\lambda e^{-(\lambda+\delta)\int_u^y \frac{1}{r_i z+c(z)}dz}(\lambda+\delta)\frac{1}{r_i u+c(u)}\cdot\frac{1}{r_i y+c(y)}\left(\int_0^{y+\frac{c_0}{r_0}}\phi(y-x)f(x)dx+A(y)\right)dy.$$

Αλλά $c(u)=c_i$ για $b_{i-1}\le u<b_i$, οπότε η παράγωγος γίνεται

$$\phi'(u)=-\frac{\lambda}{r_i u+c_i}\left(\int_0^{u+\frac{c_0}{r_0}}\phi(u-x)f(x)dx+A(u)\right)$$

$$+\frac{\lambda+\delta}{r_i u+c_i}\int_u^{\infty}\lambda e^{-(\lambda+\delta)\int_u^y \frac{1}{r_i z+c(z)}dz}\frac{1}{r_i y+c(y)}\left(\int_0^{y+\frac{c_0}{r_0}}\phi(y-x)f(x)dx+A(y)\right)dy.$$

Στο ολοκλήρωμα του δεύτερου όρου στο άθροισμα του δεξιού μέλους της παραπάνω, αναγνωρίζουμε την $\phi(u)$ της σχέσης (2.2.8), οπότε

$$\phi'(u)=\frac{\lambda+\delta}{r_i u+c_i}\phi(u)-\frac{\lambda}{r_i u+c_i}\left(\int_0^{u+\frac{c_0}{r_0}}\phi(u-x)f(x)dx+A(u)\right)$$

που είναι η Εξίσωση (2.2.1) για $b_{i-1}\le u<b_i$ για $i=1,2,...,n$. □

Στη συνέχεια θεωρείται η περίπτωση όπου τα μεγέθη των απαιτήσεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή και μια *phase-type*(2) κατανομή. Για το συγκεκριμένο μοντέλο πολλαπλών επιπέδων, θα βρεθεί η συνάρτηση Gerber-Shiu, θεωρώντας ότι ο παράγοντας προεξόφλησης είναι $\delta\ge 0$ και χωρίς να ληφθεί κάποιος περιορισμός για τη συνάρτηση ποινής. Για την κάθε περίπτωση κατανομής, η επίλυση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης της Πρότασης 2.2.1 που ικανοποιεί η συνάρτηση

Gerber-Shiu, γίνεται μέσω μετασχηματισμού αυτής σε διαφορική εξίσωση για την οποία δίνεται λύση σε μορφή σειράς με άπειρη ακτίνα σύγκλισης, έτσι ώστε να ορίζεται σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Πέραν της (2.1.8), επιπλέον συνθήκες που ικανοποιεί η $\phi(u)$ είναι:

(Σ1) *Η συνάρτηση Gerber-Shiu είναι συνεχής στο* $u = b$, *δηλαδή*

$$\phi(b_i^-) = \phi(b_i^+), \qquad i = 0,1,\ldots,n-1,$$

και οι εξισώσεις αυτές αποτελούν τις αρχικές συνθήκες της διαφορικής εξίσωσης της $\phi(u)$

(Σ2) *Στα επίπεδα των κατωφλίων ισχύουν οι εξισώσεις*

$$(r_i b_i + c_i)\phi'(b_i^-) = (r_{i+1} b_i + c_{i+1})\phi'(b_i^+), \qquad \textit{για } i = 0,1,\ldots,n-1$$

οι οποίες αποτελούν συνοριακές συνθήκες

(Σ3) *Εάν* $\lim\limits_{u\to -\frac{c_0}{r_0}} \int_u^0 (r_0 y + c_0) e^{-\frac{\lambda+\delta}{r_0}-1} A(y)dy = \infty$, *τότε* $\lim\limits_{u\to -\frac{c_0}{r_0}} \phi(u) = \frac{\lambda}{\lambda+\delta} A\left(-\frac{c_0}{r_0}\right)$

(Σ4) *Εάν* $\lim\limits_{u\to -\frac{c_0}{r_0}} \int_u^0 (r_0 y + c_0) e^{-\frac{\lambda+\delta}{r_0}-1} A(y)dy < \infty$, *τότε* $\lim\limits_{u\to -\frac{c_0}{r_0}} \phi(u) = 0$

(Σ5) $\lim\limits_{u\to\infty} \phi'(u) = 0$

(Σ6) *Εάν η συνάρτηση πυκνότητας f του μεγέθους των απαιτήσεων έχει συνεχή παράγωγο, τότε*

$$(r_i b_i + c_i)\phi''(b_i^-) + (r_i - \lambda - \delta)\phi'(b_i^-) = (r_{i+1} b_i + c_{i+1})\phi''(b_i^+) + (r_{i+1} - \lambda - \delta)\phi'(b_i^+)$$

για $i = 0,1,\ldots,n-1$

Για την εύρεση της συνάρτησης Gerber-Shiu, στην περίπτωση που η κατανομή των μεγεθών των απαιτήσεων είναι η εκθετική γίνεται χρήση της (2.1.8) και των (Σ1)-(Σ4), ενώ στην περίπτωση της *phase-type*(2) κατανομής, χρησιμοποιούνται επιπλέον οι (Σ5), (Σ6).

Παρατηρούμε ότι όλες οι εξισώσεις της (2.2.1) έχουν την ίδια δομή και μπορούν να αντιμετωπιστούν ταυτοχρόνως, και η μόνη διαφορά είναι οι αρχικές συνθήκες και οι αντίστοιχες σταθερές r_i και c_i. Επιπλέον, στην (2.2.1) δεν έχει σημασία εάν $i = 0$ ή $i > 0$. Συνεπώς, στις επόμενες δύο ενότητες, θεωρούμε την Εξίσωση (2.2.1) με r και c στη θέση των r_i και c_i αντίστοιχα.

2.3 Εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις

Στην ενότητα αυτή θεωρούμε την περίπτωση όπου τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένα με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \beta e^{-\beta x}\,,\ x > 0\,,\ \beta > 0 \tag{2.3.1}$$

και η παράμετρος δ (ένταση ανατοκισμού), που εμπλέκεται στην αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $\phi(u)$, παίρνει οποιαδήποτε θετική τιμή συμπεριλαμβανομένου του μηδενός, δηλαδή, $\delta \geq 0$. Η τελευταία παραδοχή, άρει τον περιορισμό δ = 0 που είχε θεωρηθεί στις εργασίες των Cai (2007) και Yang et al. (2008). Η συνάρτηση Gerber-Shiu σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.1 και θεωρώντας, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, r και c στη θέση των r_i και c_i αντίστοιχα, ικανοποιεί την εξίσωση

$$(ru+c)\phi'(u) - (\lambda+\delta)\phi(u) = -\lambda[M_\phi(u) + A(u)], \qquad u > -\frac{c_0}{r_0}, \tag{2.3.2}$$

όπου

$$M_\phi(u) = \int_0^{u+\frac{c_0}{r_0}} \phi(u-x) f(x)dx = \int_{-\frac{c_0}{r_0}}^{u} \phi(x) f(u-x)dx\,. \tag{2.3.3}$$

Στην περίπτωση των εκθετικά κατανεμημένων απαιτήσεων, το Λήμμα 2.3.1 μας παρέχει βοηθητικά αποτελέσματα για την περαιτέρω ανάλυση.

Λήμμα 2.3.1. *Στην περίπτωση εκθετικά κατανεμημένων απαιτήσεων της μορφής* (2.3.1) *ισχύουν τα κάτωθι:*

i. *Για την* $M_\phi(u)$,

$$M'_\phi(u) + \beta M_\phi(u) = \beta\phi(u). \tag{2.3.4}$$

ii. *Για την* $A(u)$, *όταν η συνάρτηση ποινής είναι συνάρτηση μόνο του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, δηλαδή* $w(x_1,x_2) = w(x_2)$ *με* $x_1 > -\frac{c_0}{r_0},\ x_2 \geq \frac{c_0}{r_0}$,

$$A'(u) + \beta A(u) = 0. \tag{2.3.5}$$

iii. *Η Εξίσωση* (2.3.2) *της συνάρτησης Gerber-Shiu γίνεται*

$$(ru+c)\phi''(u) + (r-\lambda-\delta+\beta(ru+c)]\phi'(u) - \beta\delta\,\phi(u) = -\lambda[A'(u) + \beta A(u)], \tag{2.3.6}$$

και στην ειδική περίπτωση όπου η συνάρτηση ποινής $w(x_1,x_2) = w(x_2)$,

$$(ru+c)\phi''(u) + (r-\lambda-\delta+\beta(ru+c)]\phi'(u) - \beta\delta\,\phi(u) = 0. \tag{2.3.7}$$

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι για την εκθετική κατανομή που δίνεται στην (2.3.1) ισχύει

$$f'(x)+\beta f(x)=-\beta^2 e^{-\beta x}+\beta\beta e^{-\beta x}=0 \tag{2.3.8}$$

i. Εφαρμόζοντας τον κανόνα παραγώγισης του Leibniz (Παράρτημα Π1) στο δεύτερο ολοκλήρωμα της (2.3.3) προκύπτει

$$M'_\phi(u)+\beta M_\phi(u)=\phi(u)f(0)\cdot 1-\phi\left(-\frac{c_0}{r_0}\right)f\left(u+\frac{c_0}{r_0}\right)\cdot 0+\int_{-\frac{c_0}{r_0}}^{u}\phi(x)f'(u-x)dx+\beta\int_{-\frac{c_0}{r_0}}^{u}\phi(x)f(u-x)dx$$

$$=\phi(u)f(0)+\int_{-\frac{c_0}{r_0}}^{u}\phi(x)[f'(u-x)+\beta f(u-x)]dx$$

$$=f(0)\phi(u) \qquad \text{(από την (2.3.8))}$$

$$=\beta\phi(u)$$

ii. Όταν $w(x_1,x_2)=w(x_2)$ από την (2.2.2) είναι

$$A(u)=\int_{u+\frac{c_0}{r_0}}^{\infty}w(x-u)f(x)dx\,.$$

Με αλλαγή μεταβλητής $t=x-u\Rightarrow dt=dx$ είναι $u+\dfrac{c_0}{r_0}\le x\le\infty\Rightarrow\dfrac{c_0}{r_0}\le t\le\infty$ και προκύπτει

$$A(u)=\int_{\frac{c_0}{r_0}}^{\infty}w(t)f(t+u)dt\,.$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα παραγώγισης Leibniz (Παράρτημα Π1) στην τελευταία σχέση έχουμε

$$A'(u)+\beta A(u)=\int_{\frac{c_0}{r_0}}^{\infty}w(t)f'(t+u)dt+\beta\int_{\frac{c_0}{r_0}}^{\infty}w(t)f(t+u)dt$$

$$=\int_{\frac{c_0}{r_0}}^{\infty}w(t)[f'(t+u)+\beta f(t+u)]dt$$

$$=0 \qquad \text{(λόγω της (2.3.8))}$$

iii. Παραγωγίζοντας την (2.3.2) ως προς *u* κατά μέλη, παίρνουμε

$$r\phi'(u)+(ru+c)\phi''(u)-(\lambda+\delta)\phi'(u)=-\lambda[M'_\phi(u)+A'(u)] \tag{2.3.9}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (2.3.2) με β έχουμε

$$\beta(ru+c)\phi'(u)-\beta(\lambda+\delta)\phi(u)=-\lambda\beta[M_\phi(u)+A(u)] \tag{2.3.10}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2.3.9) και (2.3.10) προκύπτει

$$(ru+c)\phi''(u)+[r-\lambda-\delta+\beta(ru+c)]\phi'(u)-\beta(\lambda+\delta)\phi(u)=-\lambda[M'_\phi(u)+\beta M_\phi(u)+A'(u)+\beta A(u)]$$

η οποία από την (2.3.4) γίνεται

$$(ru+c)\phi''(u)+[r-\lambda-\delta+\beta(ru+c)]\phi'(u)-\beta(\lambda+\delta)\phi(u)=-\lambda[A'(u)+\beta A(u)]\,.$$

Στην περίπτωση όπου $w(x_1, x_2) = w(x_2)$, από την (2.3.5), η ανωτέρω εξίσωση γίνεται

$$(ru+c)\phi''(u) + [r - \lambda - \delta + \beta(ru+c)]\phi'(u) - \beta(\lambda+\delta)\phi(u) = 0 . \qquad \square$$

Για την εύρεση της συνάρτησης Gerber-Shiu, $\phi(u)$, αρχικά διαμορφώνουμε κατάλληλα την εξίσωση την οποία αυτή ικανοποιεί, σύμφωνα με την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.3.1. *Η Εξίσωση (2.3.6), έχει τη μορφή*

$$xy''(x) + \left(1 - \frac{\lambda+\delta}{r} + \beta x\right) y'(x) - \frac{\beta\delta}{r} y(x) = m(x) \qquad (2.3.11)$$

όπου

$$m(x) = -\frac{\lambda}{r}\left[A'\left(x - \frac{c}{r}\right) + \beta A\left(x - \frac{c}{r}\right)\right].$$

Απόδειξη. Για το μετασχηματισμό της Εξίσωσης (2.3.6), θεωρούμε x και $y(x)$ τέτοια ώστε

$$x = u + \frac{c}{r} \qquad \text{και} \qquad \phi(u) = \phi\left(x - \frac{c}{r}\right) = y(x) .$$

Η πρώτη και δεύτερη παράγωγος της $\phi(u)$ είναι αντίστοιχα:

$$\phi'(u) = \frac{d\phi(u)}{du} = \frac{dy(x)}{du} = \frac{dy(x)}{dx}\frac{dx}{du} = y'(x)\cdot 1 = y'(x) ,$$

$$\phi''(u) = \frac{d^2\phi(u)}{du^2} = \frac{d^2}{du^2} y(x) = \frac{d}{du}\left(\frac{dy(x)}{du}\right) = \frac{d}{du} y'(x) = y''(x)\frac{dx}{du} = y''(x)\cdot 1 = y''(x) \; .$$

Διαιρώντας την (2.3.6) με r προκύπτει η σχέση

$$\frac{ru+c}{r}\phi''(u) + \frac{r - \lambda - \delta + \beta(ru+c)}{r}\phi'(u) - \frac{\beta\delta}{r}\phi(u) = -\frac{\lambda}{r}\left[A'\left(x - \frac{c}{r}\right) + \beta A\left(x - \frac{c}{r}\right)\right]$$

η οποία σύμφωνα με τα παραπάνω γράφεται ως

$$xy''(x) + \left(1 - \frac{\lambda+\delta}{r} + \beta x\right) y'(x) - \frac{\beta\delta}{r} y(x) = m(x)$$

με $m(x) = -\frac{\lambda}{r}\left[A'\left(x - \frac{c}{r}\right) + \beta A\left(x - \frac{c}{r}\right)\right]$. $\square$

Η μορφή της συνάρτησης Gerber-Shiu ως λύση της Εξίσωσης (2.3.11), όταν οι απαιτήσεις είναι εκθετικά κατανεμημένες, δίνεται στην Πρόταση 2.3.2.

Πρόταση 2.3.2. *Στην περίπτωση που τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένα με μέσο* $1/\beta$ *, η συνάρτηση Gerber-Shiu έχει τη μορφή*

$$\phi(u)=k_1y_1\left(u+\frac{c}{r}\right)+k_2y_2\left(u+\frac{c}{r}\right)+k_3\left(u+\frac{c}{r}\right)y_1\left(u+\frac{c}{r}\right)+k_4\left(u+\frac{c}{r}\right)y_2\left(u+\frac{c}{r}\right),$$

όπου, k_1, k_2 *είναι αυθαίρετες σταθερές, οι οποίες μπορούν να βρεθούν από τις συνοριακές συνθήκες,*

$$y_1(x)=x^{\frac{\lambda+\delta}{r}}M\left(\frac{\lambda}{r},1+\frac{\lambda+\delta}{r},-\beta x\right), \tag{2.3.12}$$

$$y_2(x)=\begin{cases} M\left(-\frac{\delta}{r},1-\frac{\lambda+\delta}{r},-\beta x\right), & \text{όταν } \frac{\lambda+\delta}{r}\neq 1,2,..., \\ 1+\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n + k y_1(x)\ln(x), & \text{όταν } \frac{\lambda+\delta}{r}=1,2,..., \end{cases} \tag{2.3.13}$$

με

$$M(a,b,x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n}\frac{x^n}{n!},\qquad (a)_n=a(a+1)...(a+n-1),\ (a)_0=1, \tag{2.3.14}$$

$$k_3(x)=-\int_0^x \frac{y_2(z)m(z)}{z[y_1(z)y_2'(z)-y_1'(z)y_2(z)]}dz, \tag{2.3.15}$$

$$k_4(x)=\int_0^x \frac{y_1(z)m(z)}{z[y_1(z)y_2'(z)-y_1'(z)y_2(z)]}dz, \tag{2.3.16}$$

$$m(x)=-\frac{\lambda}{r}\left[A'\left(x-\frac{c}{r}\right)+\beta A\left(x-\frac{c}{r}\right)\right], \tag{2.3.17}$$

και οι συντελεστές $k, b_1, b_2, ...$ *προσδιορίζονται ως εξής:*

(i) *Όταν* $\frac{\lambda+\delta}{r}=1$

$$k=\frac{\beta\delta}{r},\qquad b_1=0, \tag{2.3.18}$$

και οι άλλοι συντελεστές προσδιορίζονται μέσω της αναδρομικής σχέσης

$$(n+2)(n+1)b_{n+2}+\beta\left(n+1-\frac{\delta}{r}\right)b_{n+1}+k(2n+3)a_{n+1}+k\beta a_n=0,\qquad n=0,1,..., \tag{2.3.19}$$

όπου

$$a_0=1,\qquad a_n=\frac{(-\beta)^n\left(\frac{\lambda}{r}\right)_{(n)}}{\left(1+\frac{\lambda+\delta}{r}\right)_{(n)}n!},\ n=1,2,..., \tag{2.3.20}$$

(ii) *Όταν* $\frac{\lambda+\delta}{r}=2,3,...,$

$$b_n = \frac{(-\beta)^n \left(-\frac{\delta}{r}\right)_{(n)}}{(1-M)_{(n)} n!}, \quad n = 1, 2, \ldots, M-1, \qquad \text{με } M = \frac{\lambda+\delta}{r} \tag{2.3.21}$$

$$k = -\frac{\beta\left(M-1-\frac{\delta}{r}\right) b_{M-1}}{M}, \tag{2.3.22}$$

$$b_{n+M-1} = -\frac{\beta\left(n+M-\frac{\delta}{r}\right) b_{n+M} + k(2n+M+2)a_{n+1} + k\beta a_n}{(n+M+1)(n+1)}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2.3.23}$$

με $b_M = 0,$ *αυθαίρετη επιλογή και* a_n *δίνεται στην* (2.3.20).

Απόδειξη. Η Εξίσωση (2.3.11) είναι μια μη-ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση (Δ.Ε.) 2ης τάξης, η γενική λύση της οποίας είναι της μορφής

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \tag{2.3.24}$$

όπου $y_h(x)$ είναι η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε.

$$xy''(x) + \left(1 - \frac{\lambda+\delta}{r} + \beta x\right) y'(x) - \frac{\beta\delta}{r} y(x) = 0 \tag{2.3.25}$$

και $y_p(x)$ είναι μια μερική λύση της μη ομογενούς Εξίσωσης (2.3.11). Η ομογενής Δ.Ε. (2.3.25) προκύπτει ως περίπτωση στην οποία, για τη συνάρτηση ποινής ισχύει $w(x_1, x_2) = w(x_2)$, καθώς από την (2.3.5) είναι $m(x) = 0$. Η γενική της λύση της ομογενούς Δ.Ε. είναι της μορφής

$$y_h(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$$

με $y_1(x)$, $y_2(x)$ είναι δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. οι οποίες θα αναπτυχθούν στη συνέχεια, και k_1, k_2 αυθαίρετες σταθερές οι οποίες μπορούν να βρεθούν από τις συνοριακές συνθήκες. Μια μερική λύση της μη ομογενούς Εξίσωσης (2.3.25), έχει τη μορφή (Logan (2015), σελ. 121),

$$y_p(x) = k_3(x) y_1(x) + k_4(x) y_2(x)$$

όπου,

$$k_3(x) = -\int_0^x \frac{y_2(z)m(z)}{z \cdot w(z)} dz, \qquad k_4(x) = \int_0^x \frac{y_1(z)m(z)}{z \cdot w(z)} dz, \qquad w(z) = y_1(z)y_2'(z) - y_1'(z)y_2(z).$$

Για τη λύση της ομογενούς Δ.Ε. (2.3.25) επειδή δεν γνωρίζουμε μια λύση της, θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο των σειρών. Η (2.3.25) είναι της μορφής

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$$

με $P(x) = x$, $Q(x) = 1 - \frac{\lambda+\delta}{r} + \beta x$, $R(x) = -\frac{\beta\delta}{r}$.

Επειδή $P(x_0)=0$ για $x_0=0$, το τελευταίο είναι *ανώμαλο σημείο*. Επίσης είναι

$$Q_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 0}x\frac{1-\frac{\lambda+\delta}{r}+\beta x}{x}=1-\frac{\lambda+\delta}{r}$$

και

$$R_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 0}x^2\frac{-\frac{\beta\delta}{r}}{x}=0\,.$$

Επειδή τα παραπάνω όρια υπάρχουν, το $x_0=0$ είναι *κανονικό ανώμαλο σημείο* της Δ.Ε. Στην περίπτωση αυτή, μπορεί να εφαρμοστεί η *μέθοδος Frobenius*. Συγκεκριμένα, η (2.3.25) θα έχει λύση σε μορφή γενικευμένης δυναμοσειράς, δηλαδή

$$y_i(x)=x^h\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+h}\,,\qquad i=1,2\,, \tag{2.3.26}$$

όπου h είναι κατάλληλος πραγματικός αριθμός ο οποίος υπολογίζεται από την *εξίσωση των δεικτών (indicial equation)*

$$h(h-1)+Q_0h+R_0=0\,.$$

Από την τελευταία προκύπτει

$$h(h-1)+\left(1-\frac{\lambda+\delta}{r}\right)h=0 \tag{2.3.27}$$

ή

$$h\left(h-\frac{\lambda+\delta}{r}\right)=0 \text{ με λύσεις } h_1=\frac{\lambda+\delta}{r}\,,\ h_2=0\,.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1) $h_1-h_2=\dfrac{\lambda+\delta}{r}\neq 1,2,\ldots$ (η διαφορά των λύσεων της εξίσωσης δεικτών δεν είναι ακέραιος)

Τότε η Δ.Ε. (2.3.25) δέχεται δύο λύσεις:

$$y_1(x)=x^{h_1}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n \text{ με } b_0\neq 0 \qquad \text{και} \qquad y_2(x)=x^{h_2}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_nx^n \text{ με } \gamma_0\neq 0\,.$$

Για τον προσδιορισμό των $y_i(x)$, $i=1,2$, αντικαθιστούμε τη γενική μορφή (2.3.26) στη Δ.Ε. Είναι:

$$y_i'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+h)a_nx^{n+h-1}\,,\qquad y_i''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+h)(n+h-1)a_nx^{n+h-2}$$

οπότε η (2.3.25) γίνεται

$$x\sum_{n=0}^{\infty}(n+h)(n+h-1)a_nx^{n+h-2}+\left(1-\frac{\lambda+\delta}{r}+\beta x\right)\sum_{n=0}^{\infty}(n+h)a_nx^{n+h-1}-\frac{\beta\delta}{r}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+h}=0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+h)(n+h-1)a_n x^{n+h-1}+\left(1-\frac{\lambda+\delta}{r}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(n+h)a_n x^{n+h-1}+\beta\sum_{n=0}^{\infty}(n+h)a_n x^{n+h}-\frac{\beta\delta}{r}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+h}=0$$

μετατοπίζοντας κατάλληλα το δείκτη στα δύο τελευταία αθροίσματα, ώστε να έχουν όλα τα αθροίσματα την ίδια δύναμη του *x*, η παραπάνω ισότητα γίνεται

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+h)(n+h-1)a_n x^{n+h-1}+\left(1-\frac{\lambda+\delta}{r}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(n+h)a_n x^{n+h-1}$$
$$+\beta\sum_{n=1}^{\infty}(n+h-1)a_{n-1}x^{n+h-1}-\frac{\beta\delta}{r}\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n+h-1}=0$$

και η οποία, με σκοπό οι δείκτες σε όλα τα αθροίσματα να ξεκινούν από την ίδια τιμή, θεωρώντας ξεχωριστά τους όρους για $n = 0$ στα δύο πρώτα αθροίσματα και συγκεντρώνοντας όλα τα αθροίσματα σε ένα, καταλήγει στην

$$h(h-1)a_0x^{h-1}+\left(1-\frac{\lambda+\delta}{r}\right)ha_0x^{h-1}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+h)(n+h-1)a_n+\left(1-\frac{\lambda+\delta}{r}\right)(n+h)a_n+\beta(n+h-1)a_{n-1}-\frac{\beta\delta}{r}a_{n-1}\right]x^{n+h-1}=0$$

που για να ισχύει για κάθε $\forall\, x\in\mathbf{R}$ πρέπει:

$$(n+h)(n+h-1)a_n+\left(1-\frac{\lambda+\delta}{r}\right)(n+h)a_n+\beta(n+h-1)a_{n-1}-\frac{\beta\delta}{r}a_{n-1}=0 \quad \forall\, n\geq 1 \tag{2.3.28}$$

$$a_0\left[h(h-1)+\left(1-\frac{\lambda+\delta}{r}\right)h\right]=0 \tag{2.3.29}$$

Παρατηρούμε ότι η (2.3.29) για $a_0\neq 0$ είναι η εξίσωση των δεικτών (2.3.27) που για $h_1=\dfrac{\lambda+\delta}{r}$, $h_2=0$ ικανοποιείται.

Προσδιορισμός της $y_1(x)$

Για $h=h_1=\dfrac{\lambda+\delta}{r}$ και με b_n όπου το a_n, από την (2.3.28) έχουμε

$$\left(n+\frac{\lambda+\delta}{r}\right)\left(n+\frac{\lambda+\delta}{r}-1\right)b_n+\left(1-\frac{\lambda+\delta}{r}\right)\left(n+\frac{\lambda+\delta}{r}\right)b_n+\beta\left(n+\frac{\lambda+\delta}{r}-1\right)b_{n-1}-\frac{\beta\delta}{r}b_{n-1}=0 \Rightarrow$$

$$\left(n+\frac{\lambda+\delta}{r}\right)nb_n=(-\beta)\left(\frac{\lambda}{r}+(n-1)\right)b_{n-1} \Rightarrow$$

$$b_n=\frac{\left(\dfrac{\lambda}{r}+(n-1)\right)(-\beta)}{n\left(\dfrac{\lambda+\delta}{r}+n\right)}b_{n-1} \qquad \forall\, n\geq 1$$

για $b_0\neq 0$ ο αναδρομικός τύπος δίνει:

$$n=1 \qquad b_1=\frac{\frac{\lambda}{r}(-\beta)}{\frac{\lambda+\delta}{r}+1}b_0$$

$$n=2 \qquad b_2=\frac{\left(\frac{\lambda}{r}+1\right)(-\beta)}{2\left(\frac{\lambda+\delta}{r}+2\right)}b_1$$

$$n=3 \qquad b_3=\frac{\left(\frac{\lambda}{r}+2\right)(-\beta)}{3\left(\frac{\lambda+\delta}{r}+3\right)}b_2$$

$$n=4 \qquad b_4=\frac{\left(\frac{\lambda}{r}+3\right)(-\beta)}{4\left(\frac{\lambda+\delta}{r}+4\right)}b_3$$

$\ldots$

$$n=n \qquad b_n=\frac{\left(\frac{\lambda}{r}+(n-1)\right)(-\beta)}{n\left(\frac{\lambda+\delta}{r}+n\right)}b_{n-1}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ανωτέρω παίρνουμε

$$b_n=\frac{\frac{\lambda}{r}(-\beta)}{\frac{\lambda+\delta}{r}+1}\cdot\frac{\left(\frac{\lambda}{r}+1\right)(-\beta)}{2\left(\frac{\lambda+\delta}{r}+2\right)}\cdot\frac{\left(\frac{\lambda}{r}+2\right)(-\beta)}{3\left(\frac{\lambda+\delta}{r}+3\right)}\cdot\frac{\left(\frac{\lambda}{r}+3\right)(-\beta)}{4\left(\frac{\lambda+\delta}{r}+4\right)}\cdot\ldots\cdot\frac{\left(\frac{\lambda}{r}+(n-1)\right)(-\beta)}{n\left(\frac{\lambda+\delta}{r}+n\right)}b_0$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{(-\beta)^n\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{\lambda}{r}+i\right)}{n!\prod_{i=0}^{n-1}\left(1+\frac{\lambda+\delta}{r}+i\right)}b_0$$

ή

$$b_n=\frac{(-\beta)^n\left(\frac{\lambda}{r}\right)_n}{n!\left(1+\frac{\lambda+\delta}{r}\right)_n}b_0, \qquad n\geq 1, \tag{2.3.30}$$

όπου $(.)_n$ με $n\geq 0$, είναι το *σύμβολο του Pochhammer* γνωστό και ως *ανοδικό παραγοντικό n τάξης* και ορίζεται από την

$$(r)_n = r(r+1)...(r+n-1) = \prod_{i=0}^{n-1}(r+i)\,, \qquad \text{με } (r)_0 = 1$$

για κάθε πραγματικό αριθμό r. Άρα,

$$y_1(x) = x^{\frac{\lambda+\delta}{r}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = x^{\frac{\lambda+\delta}{r}} \left(b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \right)$$

$$= x^{\frac{\lambda+\delta}{r}} \left(b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\beta)^n \left(\frac{\lambda}{r}\right)_n}{n!\left(1+\frac{\lambda+\delta}{r}\right)_n} b_0 x^n \right)$$

$$= x^{\frac{\lambda+\delta}{r}} b_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{r}\right)_n}{n!\left(1+\frac{\lambda+\delta}{r}\right)_n} (-\beta)^n x^n \right).$$

Με $b_0 = 1$ (πρέπει $b_0 \neq 0$ γιατί αλλιώς η λύση είναι ταυτοτικά μηδέν), μια μερική λύση είναι η

$$y_1(x) = x^{\frac{\lambda+\delta}{r}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{r}\right)_n}{n!\left(1+\frac{\lambda+\delta}{r}\right)_n} (-\beta)^n x^n \right)$$

$$= x^{\frac{\lambda+\delta}{r}} M\left(\frac{\lambda}{r}, 1+\frac{\lambda+\delta}{r}, -\beta x \right) \tag{2.3.31}$$

όπου $M(a,b,z)$ η συμφυής υπεργεωμετρική συνάρτηση πρώτου είδους (Παράρτημα Π2).

Προσδιορισμός της $y_2(x)$

Για $h = h_2 = 0$ και με γ_n όπου το a_n, από την (2.3.28) έχουμε

$$n(n-1)\gamma_n + \left(1 - \frac{\lambda+\delta}{r}\right) n\gamma_n + \beta(n-1)\gamma_{n-1} - \frac{\beta\delta}{r}\gamma_{n-1} = 0 \Rightarrow$$

$$\left[n(n-1) + \left(1 - \frac{\lambda+\delta}{r}\right) n \right] \gamma_n = \left(\frac{\beta\delta}{r} - \beta(n-1) \right) \gamma_{n-1} \Rightarrow$$

$$\gamma_n = \frac{\frac{\beta\delta}{r} - \beta(n-1)}{n(n-1) + \left(1 - \frac{\lambda+\delta}{r}\right) n} \gamma_{n-1} = \frac{\left(-\frac{\delta}{r} + (n-1) \right)(-\beta)}{n\left(1 - \frac{\lambda+\delta}{r} + n - 1\right)} \gamma_{n-1} \qquad \forall\ n \geq 1$$

για $\gamma_0 \neq 0$ ο αναδρομικός τύπος δίνει:

$$n = 1 \qquad \gamma_1 = \frac{-\frac{\delta}{r}(-\beta)}{1 - \frac{\lambda+\delta}{r}} \gamma_0$$

$$n=2 \qquad \gamma_2=\frac{\left(-\frac{\delta}{r}+1\right)(-\beta)}{2\left(1-\frac{\lambda+\delta}{r}+1\right)}\gamma_1$$

$$n=3 \qquad \gamma_3=\frac{\left(-\frac{\delta}{r}+2\right)(-\beta)}{3\left(1-\frac{\lambda+\delta}{r}+2\right)}\gamma_2$$

$$n=4 \qquad \gamma_4=\frac{\left(-\frac{\delta}{r}+3\right)(-\beta)}{4\left(1-\frac{\lambda+\delta}{r}+3\right)}\gamma_3$$

$\ldots$

$$n=n \qquad \gamma_n=\frac{\left(-\frac{\delta}{r}+(n-1)\right)(-\beta)}{n\left(1-\frac{\lambda+\delta}{r}+n-1\right)}\gamma_{n-1}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ανωτέρω παίρνουμε

$$\gamma_n=\frac{-\frac{\delta}{r}(-\beta)}{1-\frac{\lambda+\delta}{r}}\cdot\frac{\left(-\frac{\delta}{r}+1\right)(-\beta)}{2\left(1-\frac{\lambda+\delta}{r}+1\right)}\cdot\frac{\left(-\frac{\delta}{r}+2\right)(-\beta)}{3\left(1-\frac{\lambda+\delta}{r}+2\right)}\cdot\frac{\left(-\frac{\delta}{r}+3\right)(-\beta)}{4\left(1-\frac{\lambda+\delta}{r}+3\right)}\cdot\ldots\cdot\frac{\left(-\frac{\delta}{r}+(n-1)\right)(-\beta)}{n\left(1-\frac{\lambda+\delta}{r}+n-1\right)}\gamma_0$$

$$\Rightarrow \gamma_n=\frac{(-\beta)^n\prod_{i=0}^{n-1}\left(-\frac{\delta}{r}+i\right)}{n!\prod_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{\lambda+\delta}{r}+i\right)}\gamma_0=\frac{(-\beta)^n\left(-\frac{\delta}{r}\right)_n}{n!\left(1-\frac{\lambda+\delta}{r}\right)_n}\gamma_0, \qquad n\geq 1$$

άρα

$$y_2(x)=x^0\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n x^n=\gamma_0+\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n x^n$$

$$=\gamma_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\beta)^n\left(-\frac{\delta}{r}\right)_n}{n!\left(1-\frac{\lambda+\delta}{r}\right)_n}\gamma_0 x^n$$

$$=\gamma_0+\gamma_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{\delta}{r}\right)_n}{n!\left(1-\frac{\lambda+\delta}{r}\right)_n}(-\beta)^n x^n$$

με $\gamma_0=1$ (πρέπει $\gamma_0\neq 0$ γιατί αλλιώς η λύση είναι ταυτοτικά μηδέν), μια μερική λύση είναι η

$$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\delta}{r}\right)_n}{n!\left(1 - \frac{\lambda+\delta}{r}\right)_n} (-\beta)^n x^n$$

$$= M\left(-\frac{\delta}{r}, 1 - \frac{\lambda+\delta}{r}, -\beta x\right).$$

2) $h_1 - h_2 = \dfrac{\lambda+\delta}{r} = 1, 2, 3, \ldots$ (η διαφορά των λύσεων της εξίσωσης δεικτών είναι θετικός ακέραιος)

(*Σημείωση: η περίπτωση* $h_1 = h_2 \Rightarrow h_1 - h_2 = 0$ *δεν μπορεί να συμβεί καθώς τότε* $\lambda = -\delta$. *Αλλά* λ *και* δ *είναι θετικές ποσότητες*).

Τότε η Δ.Ε. (2.3.25) έχει μια λύση της μορφής

$$y_1(x) = x^{h_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+M}, \qquad M = h_1 = \frac{\lambda+\delta}{r}, \tag{2.3.32}$$

που βρίσκεται με αντικατάσταση στη Δ.Ε. και προκύπτει η λύση (2.3.31), και μια δεύτερη λύση, γραμμικώς ανεξάρτητη της $y_1(x)$, που έχει τη μορφή

$$y_2(x) = k \cdot y_1(x) \ln x + x^{h_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n .$$

$$= k \cdot y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \qquad \text{(λόγω ότι } h_2 = 0\text{)}.$$

Παραγωγίζοντας την $y_2(x)$ βρίσκουμε

$$y_2'(x) = k\, y_1'(x) \ln x + k\, y_1(x) \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1}$$

και

$$y_2''(x) = k\, y_1''(x) \ln x + k\, y_1'(x) \frac{1}{x} + k\, y_1'(x) \frac{1}{x} - k\, y_1(x) \frac{1}{x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2}$$

$$= k\, y_1''(x) \ln x + 2k\, y_1'(x) \frac{1}{x} - k\, y_1(x) \frac{1}{x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2}$$

και αντικαθιστώντας στην (2.3.25) παίρνουμε

$$x\left(k\, y_1''(x) \ln x + 2k\, y_1'(x) \frac{1}{x} - k\, y_1(x) \frac{1}{x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2} \right)$$

$$+(1 - M + \beta x)\left(k\, y_1'(x) \ln x + k\, y_1(x) \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} \right)$$

$$-\frac{\beta\delta}{r}\left(k \cdot y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = 0. \tag{2.3.33}$$

Αλλά η $y_1(x)$ είναι λύση της (2.3.25) οπότε

$$xy_1''(x)+(1-M+\beta x)\,y_1'(x)-\frac{\beta\delta}{r}\,y_1(x)=0$$

ή

$$k\ln x\left(xy_1''(x)+(1-M+\beta x)\,y_1'(x)-\frac{\beta\delta}{r}\,y_1(x)\right)=0\,, \tag{2.3.34}$$

συνεπώς, η (2.3.33) λόγω της (2.3.34) απλοποιείται στην

$$x\left(2k\,y_1'(x)\frac{1}{x}-k\,y_1(x)\frac{1}{x^2}+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)b_nx^{n-2}\right)$$
$$+(1-M+\beta x)\left(k\,y_1(x)\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}nb_nx^{n-1}\right)-\frac{\beta\delta}{r}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=0$$

ή

$$2k\,y_1'(x)-k\,y_1(x)\frac{1}{x}+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)b_nx^{n-1}$$
$$+k\,y_1(x)\frac{1}{x}-M\,k\,y_1(x)\frac{1}{x}+\beta k\,y_1(x)+(1-M)\sum_{n=1}^{\infty}nb_nx^{n-1}+\beta\sum_{n=1}^{\infty}nb_nx^n-\frac{\beta\delta}{r}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=0$$

ή

$$2k\,y_1'(x)-M\,k\,y_1(x)\frac{1}{x}+\beta k\,y_1(x)$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)b_nx^{n-1}+(1-M)\sum_{n=1}^{\infty}nb_nx^{n-1}+\beta\sum_{n=1}^{\infty}nb_nx^n-\frac{\beta\delta}{r}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=0\,. \tag{2.3.35}$$

Αλλά από την (2.3.32) είναι

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+M}\qquad\text{και}\qquad y_1'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+M)a_nx^{n+M-1}\,.$$

Επίσης, σχετικά με τα αθροίσματα που περιέχουν το b_n είναι

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)b_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nb_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)nb_{n+1}x^n\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}nb_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}x^n\qquad\text{και}\qquad\sum_{n=1}^{\infty}nb_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}nb_nx^n\,.$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην (2.3.25) βρίσκουμε

$$2k\sum_{n=0}^{\infty}(n+M)a_nx^{n+M-1}-M\,k\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+M-1}+\beta k\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+M}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)nb_{n+1}x^n+(1-M)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}x^n+\beta\sum_{n=0}^{\infty}nb_nx^n-\frac{\beta\delta}{r}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=0\,.$$

Απομονώνοντας τον όρο $n=0$ στα δύο πρώτα αθροίσματα και ομαδοποιώντας τα τελευταία τέσσερα αθροίσματα, η παραπάνω γίνεται

$$2kMa_0x^{M-1}+2k\sum_{n=1}^{\infty}(n+M)a_nx^{n+M-1}-kMa_0x^{M-1}-kM\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+M-1}+\beta k\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+M}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+1-M)b_{n+1}+\beta\left(n-\frac{\delta}{r}\right)b_n\right]x^n=0\,.$$

Απλοποιώντας τους δύο όρους εκτός αθροισμάτων και μετατοπίζοντας τον δείκτη στα δύο πρώτα αθροίσματα, παίρνουμε

$$kMa_0x^{M-1}+2k\sum_{n=0}^{\infty}(n+1+M)a_{n+1}x^{n+M}-M\,k\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^{n+M}+\beta k\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+M}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+1-M)b_{n+1}+\beta\left(n-\frac{\delta}{r}\right)b_n\right]x^n=0\,,$$

και ομαδοποιώντας τα τρία πρώτα αθροίσματα, η εξίσωση γίνεται

$$kMa_0x^{M-1}+\sum_{n=0}^{\infty}[k(2n+2+M)a_{n+1}+k\beta a_n]x^{n+M}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+1-M)b_{n+1}+\beta\left(n-\frac{\delta}{r}\right)b_n\right]x^n=0\,, \tag{2.3.36}$$

όπου για $a_0=1$, οι συντελεστές a_n είναι (θέτοντας a_n όπου b_n στην (2.3.30) αφού η $y_1(x)$ είναι λύση της (2.3.25)),

$$a_n=\frac{\left(\frac{\lambda}{r}\right)_n}{n!\left(1+\frac{\lambda+\delta}{r}\right)_n}(-\beta)^n\,,\qquad n=1,2,\ldots.$$

Για $M=1$ η (2.3.36) γίνεται

$$ka_0+\sum_{n=0}^{\infty}[k(2n+3)a_{n+1}+k\beta a_n]x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)nb_{n+1}+\beta\left(n-\frac{\delta}{r}\right)b_n\right]x^n=0.$$

Απομονώνοντας τον όρο $n=0$ από το δεύτερο άθροισμα, έχουμε

$$ka_0+\sum_{n=0}^{\infty}[k(2n+3)a_{n+1}+k\beta a_n]x^{n+1}-\beta\frac{\delta}{r}b_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)nb_{n+1}+\beta\left(n-\frac{\delta}{r}\right)b_n\right]x^n=0$$

και μετατοπίζοντας τον δείκτη στο τελευταίο άθροισμα, γίνεται

$$ka_0+\sum_{n=0}^{\infty}[k(2n+3)a_{n+1}+k\beta a_n]x^{n+1}-\beta\frac{\delta}{r}b_0+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)b_{n+2}+\beta\left(n+1-\frac{\delta}{r}\right)b_{n+1}\right]x^{n+1}=0\,.$$

Για να ισχύει η παραπάνω ισότητα, εξισώνοντας τους συντελεστές των δυνάμεων του x, παίρνουμε

$$ka_0-\beta\frac{\delta}{r}b_0=0\overset{\substack{a_0=1\\ b_0=1}}{\Rightarrow}k=\frac{\beta\delta}{r}$$

και

$$k(2n+3)a_{n+1}+k\beta a_n+(n+2)(n+1)b_{n+2}+\beta\left(n+1-\frac{\delta}{r}\right)b_{n+1}=0\,,\qquad n=0,1,\ldots.$$

με έστω $b_1 = 0$.

Για $M = 2,3,...,$ από την (2.3.36) έχουμε

$$kMa_0x^{M-1} + \sum_{n=0}^{\infty}[k(2n+2+M)a_{n+1} + k\beta a_n]x^{n+M}$$

$$+\sum_{n=0}^{M-1}\left[(n+1)(n+1-M)b_{n+1} + \beta\left(n-\frac{\delta}{r}\right)b_n\right]x^n$$

$$+\sum_{n=M}^{\infty}\left[(n+1)(n+1-M)b_{n+1} + \beta\left(n-\frac{\delta}{r}\right)b_n\right]x^n = 0.$$

Απομονώνοντας τον όρο για $n = M-1$ στο δεύτερο άθροισμα και μετατοπίζοντας τον δείκτη στο τελευταίο άθροισμα, η εξίσωση γίνεται

$$kMa_0x^{M-1} + \sum_{n=0}^{\infty}[k(2n+2+M)a_{n+1} + k\beta a_n]x^{n+M}$$

$$+\beta\left(M-1-\frac{\delta}{r}\right)b_{M-1}x^{M-1} + \sum_{n=0}^{M-2}\left[(n+1)(n+1-M)b_{n+1} + \beta\left(n-\frac{\delta}{r}\right)b_n\right]x^n$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+M+1)(n+1)b_{n+M+1} + \beta\left(n+M-\frac{\delta}{r}\right)b_{n+M}\right]x^{n+M} = 0.$$

Για να ισχύει η παραπάνω ισότητα, εξισώνοντας τους συντελεστές των δυνάμεων του *x*, παίρνουμε

$$kMa_0 + \beta\left(M-1-\frac{\delta}{r}\right)b_{M-1} = 0 \overset{a_0=1}{\Rightarrow} k = -\frac{\beta\left(M-1-\frac{\delta}{r}\right)b_{M-1}}{M},$$

$$k(2n+2+M)a_{n+1} + k\beta a_n + (n+M+1)(n+1)b_{n+M+1} + \beta\left(n+M-\frac{\delta}{r}\right)b_{n+M} = 0$$

$$\Rightarrow b_{n+M+1} = -\frac{\beta\left(n+M-\frac{\delta}{r}\right)b_{n+M} + k(2n+2+M)a_{n+1} + k\beta a_n}{(n+M+1)(n+1)}, \qquad n = 0,1,....$$

με $b_M = 0$ αυθαίρετη επιλογή,

$$(n+1)(n+1-M)b_{n+1} + \beta\left(n-\frac{\delta}{r}\right)b_n = 0 \Rightarrow b_{n+1} = -\frac{\beta\left(n-\frac{\delta}{r}\right)}{(n+1)(n+1-M)}b_n, \qquad n = 0,1,...,M-2$$

για $b_0 \neq 0$ ο αναδρομικός τύπος δίνει:

$$n = 0 \qquad b_1 = -\frac{\beta\left(-\frac{\delta}{r}\right)}{1(1-M)}b_0$$

$$n=1 \qquad b_2 = -\frac{\beta\left(1-\frac{\delta}{r}\right)}{2(2-M)} b_1$$

$$n=2 \qquad b_3 = -\frac{\beta\left(2-\frac{\delta}{r}\right)}{3(3-M)} b_2$$

$$\ldots$$

$$n=M-2 \qquad b_{M-1} = -\frac{\beta\left(M-2-\frac{\delta}{r}\right)}{(M-1)(-1)} b_{M-2}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ανωτέρω παίρνουμε

$$b_{M-1} = \frac{-\beta\left(-\frac{\delta}{r}\right)}{1(1-M)} \cdot \frac{-\beta\left(1-\frac{\delta}{r}\right)}{2(2-M)} \cdot \frac{-\beta\left(2-\frac{\delta}{r}\right)}{3(3-M)} \cdot \ldots \cdot \frac{-\beta\left(M-2-\frac{\delta}{r}\right)}{(M-1)(-1)} b_0 = \frac{(-\beta)^{M-1}\prod_{n=0}^{M-2}\left(-\frac{\delta}{r}+n\right)}{(M-1)!\prod_{n=0}^{M-2}(1-M+n)} b_0$$

$$\text{ή } b_l = \frac{(-\beta)^l\prod_{n=0}^{l-1}\left(-\frac{\delta}{r}+n\right)}{l!\prod_{n=0}^{l-1}(1-M+n)} b_0 = \frac{(-\beta)^l\left(-\frac{\delta}{r}\right)_l}{l!(1-M)_l} b_0 \qquad l=1,\ldots,M-1$$

με $b_0=1$ αυθαίρετη επιλογή. Τέλος, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που $\delta=0$, η λύση γίνεται $y_2(x)=1$, δηλαδή η λύση της ομογενούς Εξίσωσης (2.3.25) είναι σταθερά. □

2.4 Απαιτήσεις με *phase-type*(2) οικογένεια κατανομών

Στην ενότητα αυτή θεωρούμε ότι τα μεγέθη των απαιτήσεων ακολουθούν μια κατανομή τύπου φάσεων και συγκεκριμένα την *phase-type*(2) οικογένεια κατανομών. Η διαφορά με την κατανομή της προηγούμενης ενότητας, είναι ότι εδώ δεν έχουμε κλειστό τύπο για τη συνάρτηση πυκνότητας f των απαιτήσεων αλλά μια οικογένεια συναρτήσεων που ικανοποιεί μια γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης:

$$A_2 f''(x) + A_1 f'(x) + f(x) = 0, \quad x \geq 0, \tag{2.4.1}$$

όπου A_1 και A_2 σταθερές και $A_2 > 0$. Επιπλέον,

$$A_1^2 - 4A_2 \geq 0. \tag{2.4.2}$$

Η οικογένεια κατανομών τύπου φάσεων εμφανίστηκε από τον Neuts (1975 και 1981) ως γενίκευση της εκθετικής κατανομής. Η *phase-type*(2) οικογένεια κατανομών, περιλαμβάνει αρκετές κατανομές που χρησιμοποιούνται στη μοντελοποίηση των μεγεθών των απαιτήσεων, όπως την κατανομή

Erlang(2), τον γραμμικό συνδυασμό δύο εκθετικών κατανομών, τη συνέλιξη δύο εκθετικών κατανομών, την κατανομή Cox με δύο διαφορετικούς ρυθμούς απαιτήσεων.

Στη συνέχεια, θα μετασχηματίσουμε την Εξίσωση (2.2.1) την οποία ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber-Shiu. Προς απλοποίηση του συμβολισμού, όταν $b_{i-1} \le u < b_i$ για κάποιο $i = 0,1,...,n$, θεωρούμε c και r αντί των c_i και r_i αντίστοιχα.

Λήμμα 2.4.1. *Η Εξίσωση* (2.2.1) *που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber-Shiu* $\phi(u)$ *εκφράζεται ως*

$$zY'(z) = \frac{\lambda+\delta}{r} Y(z) - \frac{\lambda}{r}\left[N_Y(z) + A\left(z - \frac{c}{r} \right) \right] \tag{2.4.3}$$

όπου

$$N_Y(z) = \int_0^{z+\frac{c_0}{r_0}-\frac{c}{r}} Y(z-x) f(x) dx = \int_{-\frac{c_0}{r_0}+\frac{c}{r}}^{z} Y(x) f(z-x) dx \tag{2.4.4}$$

Απόδειξη. Θέτοντας $z = u + \frac{c}{r}$, ορίζεται η συνάρτηση $Y(z)$ ως

$$\phi(u) = \phi\left(z - \frac{c}{r} \right) = Y(\text{z}).$$

Είναι

$$\phi'(u) = \frac{d\phi(u)}{du} = \frac{dY(z)}{du} = \frac{dY(z)}{dz}\frac{dz}{du} = Y'(z)\cdot 1 = Y'(z) \quad \text{και} \quad \phi(u-x) = \psi(z-x)$$

οπότε η (2.2.1) γίνεται

$$Y'(z) = \frac{\lambda+\delta}{r\left(z - \frac{c}{r} \right) + c} Y(z) - \frac{\lambda}{r\left(z - \frac{c}{r} \right) + c}\left(\int_0^{z-\frac{c}{r}+\frac{c_0}{r_0}} Y(z-x) f(x) dx + A\left(z - \frac{c}{r} \right) \right)$$

$$= \frac{\lambda+\delta}{rz} Y(\text{z}) - \frac{\lambda}{rz}\left(\int_0^{z-\frac{c}{r}+\frac{c_0}{r_0}} Y(z-x) f(x) dx + A\left(z - \frac{c}{r} \right) \right)$$

και πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη με z προκύπτει η (2.4.3) με $N_Y(z)$ όπως στην (2.4.4). □

Ένα παρόμοιο αποτέλεσμα της σχέσης (2.4.1), που ικανοποιούν οι παράγωγοι της συνάρτησης πυκνότητας f, μπορεί να δοθεί για τις παραγώγους της N_Y, όπως φαίνεται στο Λήμμα 2.4.2.

Λήμμα 2.4.2. *Για την $N_Y(z)$ ισχύει*

$$A_2 N_Y''(z) + A_1 N_Y'(z) + N_Y(z) = A_2 f(0) Y'(z) + [A_2 f'(0) + A_1 f(0)] Y(z) . \tag{2.4.5}$$

Απόδειξη. Παραγωγίζοντας το δεύτερο ολοκλήρωμα της (2.4.4) διαδοχικά δύο φορές προκύπτει

$$N_Y'(z) = Y(z) f(z-z)\cdot 1 - 0 + \int_{-\frac{c_0}{r_0}+\frac{c}{r}}^{z} Y(x)\frac{d}{dz} f(z-x)dx = Y(z) f(0) + \int_{-\frac{c_0}{r_0}+\frac{c}{r}}^{z} Y(x)\frac{d}{dz} f(z-x)dx$$

και

$$N_Y''(z) = Y'(z) f(0) + Y(z)\frac{d}{dz} f(z-z)\cdot 1 - 0 + \int_{-\frac{c_0}{r_0}+\frac{c}{r}}^{z} Y(x)\frac{d^2}{dz^2} f(z-x)dx$$

$$= Y'(z) f(0) + Y(z) f'(0) + \int_{-\frac{c_0}{r_0}+\frac{c}{r}}^{z} Y(x)\frac{d^2}{dz^2} f(z-x)dx$$

Οπότε

$$A_2 N_Y''(z) + A_1 N_Y'(z) + N_Y(z)$$

$$= A_2\left(Y'(z) f(0) + Y(z) f'(0) + \int_{-\frac{c_0}{r_0}+\frac{c}{r}}^{z} Y(x)\frac{d^2}{dz^2} f(z-x)dx \right)$$

$$+ A_1\left(Y(z) f(0) + \int_{-\frac{c_0}{r_0}+\frac{c}{r}}^{z} Y(x)\frac{d}{dz} f(z-x)dx \right) + \int_{-\frac{c_0}{r_0}+\frac{c}{r}}^{z} Y(x) f(z-x)dx$$

$$= A_2 f(0) Y'(z) + [A_2 f'(0) + A_1 f(0)] Y(z)$$

$$+ \int_{-\frac{c_0}{r_0}+\frac{c}{r}}^{z} Y(x)\left(A_2\frac{d^2}{dz^2} f(z-x) + A_1\frac{d}{dz} f(z-x) + f(z-x)\right)dx$$

$$= A_2 f(0) Y'(z) + [A_2 f'(0) + A_1 f(0)] Y(z)$$

αφού λόγω της (2.4.1) το ολοκλήρωμα είναι μηδέν. □

Στην Πρόταση 2.4.1 δίνεται μια έκφραση της εξίσωσης που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber-Shiu, μέσω των ποσοτήτων A_1 και A_2 της σχέσης (2.4.1).

Πρόταση 2.4.1. *Η διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber-Shiu γράφεται στη μορφή*

$$Y'''(z) + \left(C_0 + \frac{C_1}{z}\right) Y''(z) + \left(D_0 + \frac{D_{-1}}{z}\right) Y'(z) - \frac{E_{-1}}{z} Y(z) = q(z) \tag{2.4.6}$$

όπου,

$$C_0 = \frac{A_1}{A_2}, \qquad C_1 = 2 - \frac{\lambda+\delta}{r}, \qquad D_0 = \frac{1}{A_2}, \qquad D_{-1} = \frac{A_1}{A_2}\left(1 - \frac{\lambda+\delta}{r}\right) + \frac{\lambda}{r} f(0),$$

$$E_{-1} = \frac{\delta}{A_2 r z}, \quad q(z) = \frac{p(z)}{A_2 z}, \qquad p(z) = -\frac{\lambda}{r}\left[A_2 A''\left(z - \frac{c}{r}\right) + A_1 A'\left(z - \frac{c}{r}\right) + A\left(z - \frac{c}{r}\right)\right].$$

Απόδειξη. Παραγωγίζοντας την (2.4.3) ως προς z διαδοχικά δύο φορές παίρνουμε

$$Y'(z) + zY''(z) = \frac{\lambda+\delta}{r} Y'(z) - \frac{\lambda}{r}\left[N_Y'(z) + A'\left(z - \frac{c}{r}\right)\right] \tag{2.4.7}$$

και

$$Y''(z) + Y''(z) + zY'''(z) = \frac{\lambda+\delta}{r} Y''(z) - \frac{\lambda}{r}\left[N_Y''(z) + A''\left(z - \frac{c}{r}\right)\right]. \tag{2.4.8}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (2.4.7) με A_1 και την (2.4.8) με A_2 και προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις που προκύπτουν με την (2.4.3), οπότε προκύπτει

$$\begin{aligned} &A_1 Y'(z) + A_1 zY''(z) + A_2 Y''(z) + A_2 Y''(z) + A_2 zY'''(z) + zY'(z) \\ &\qquad = A_1 \frac{\lambda+\delta}{r} Y'(z) - A_1 \frac{\lambda}{r}\left[N_Y'(z) + A'\left(z - \frac{c}{r}\right)\right] \\ &\qquad\quad + A_2 \frac{\lambda+\delta}{r} Y''(z) - A_2 \frac{\lambda}{r}\left[N_Y''(z) + A''\left(z - \frac{c}{r}\right)\right] \\ &\qquad\quad + \frac{\lambda+\delta}{r} Y(z) - \frac{\lambda}{r}\left[N_Y(z) + A\left(z - \frac{c}{r}\right)\right] \end{aligned}$$

η οποία ισοδύναμα γίνεται

$$\begin{aligned} &A_2 zY'''(z) + \left[A_1 z + A_2\left(2 - \frac{\lambda+\delta}{r}\right)\right] Y''(z) + \left[z + A_1\left(1 - \frac{\lambda+\delta}{r}\right)\right] Y'(z) - \frac{\lambda+\delta}{r} Y(z) \\ &\quad = -\frac{\lambda}{r}\left[A_2 A''\left(z - \frac{c}{r}\right) + A_1 A'\left(z - \frac{c}{r}\right) + A\left(z - \frac{c}{r}\right)\right] - \frac{\lambda}{r}\left[A_2 N_Y''(z) + A_1 N_Y'(z) + N_Y(z)\right] \\ &\qquad \text{(λόγω της (2.4.5)} \\ &\quad = -\frac{\lambda}{r}\left[A_2 A''\left(z - \frac{c}{r}\right) + A_1 A'\left(z - \frac{c}{r}\right) + A\left(z - \frac{c}{r}\right)\right] \\ &\qquad - \frac{\lambda}{r}\{ A_2 f(0) Y'(z) + [A_2 f'(0) + A_1 f(0)] Y(z)\} \end{aligned}$$

ισοδύναμα

$$\begin{aligned} &A_2 zY'''(z) + \left[A_1 z + A_2\left(2 - \frac{\lambda+\delta}{r}\right)\right] Y''(z) + \left[z + A_1\left(1 - \frac{\lambda+\delta}{r}\right) + \frac{\lambda}{r} A_2 f(0)\right] Y'(z) \\ &\qquad - \left[\frac{\lambda+\delta}{r} - \frac{\lambda}{r}[A_2 f'(0) + A_1 f(0)]\right] Y(z) = p(z) \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

όπου

$$p(z) = -\frac{\lambda}{r}\left[A_2 A''\left(z-\frac{c}{r}\right) + A_1 A'\left(z-\frac{c}{r}\right) + A\left(z-\frac{c}{r}\right)\right].$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $A_2 f'(0) + A_1 f(0) = 1$ (Εξ. (2.1) στο Dickson and Hipp, (2000)), διαιρώντας την (2.4.9) με $A_2 z$ προκύπτει

$$Y'''(z) + \left[\frac{A_1}{A_2} + \frac{1}{z}\left(2 - \frac{\lambda+\delta}{r}\right)\right]Y''(z) + \left[\frac{1}{A_2} + \frac{A_1}{A_2 z}\left(1 - \frac{\lambda+\delta}{r}\right) + \frac{\lambda}{rz} f(0)\right]Y'(z) - \frac{\delta}{rA_2 z}Y(z) = \frac{p(z)}{A_2 z}$$

η οποία γράφεται ως

$$Y'''(z) + \left(C_0 + \frac{C_1}{z}\right)Y''(z) + \left(D_0 + \frac{D_{-1}}{z}\right)Y'(z) - \frac{E_{-1}}{z}Y(z) = q(z)$$

με

$$C_0 = \frac{A_1}{A_2}, \qquad C_1 = 2 - \frac{\lambda+\delta}{r}, \qquad D_0 = \frac{1}{A_2}, \qquad D_{-1} = \frac{A_1}{A_2}\left(1 - \frac{\lambda+\delta}{r}\right) + \frac{\lambda}{r} f(0),$$

$$E_{-1} = \frac{\delta}{A_2 rz}, \quad q(z) = \frac{p(z)}{A_2 z}. \qquad \square$$

Το Λήμμα 2.4.3 μας παρέχει μία αντίστοιχη σχέση, με την (2.3.5) στην περίπτωση εκθετικά κατανεμημένων απαιτήσεων, για τη συνάρτηση $A(u)$ όταν η συνάρτηση ποινής εξαρτάται μόνο από το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Λήμμα 2.4.3. *Στην περίπτωση που η συνάρτηση ποινής έχει τη μορφή*

$$w(x_1, x_2) = w(x_2) \ \text{με} \ x_1 > -\frac{c_0}{r_0}, \ x_2 \geq \frac{c_0}{r_0},$$

τότε

$$A_2 A''(u) + A_1 A'(u) + A(u) = 0, \qquad u > -\frac{c_0}{r_0}. \tag{2.4.10}$$

Απόδειξη. Όταν $w(x_1, x_2) = w(x_2)$ από το Λήμμα 2.3.1 (απόδειξη της περίπτωσης (ii)) η $A(u)$ εκφράζεται ως

$$A(u) = \int_{\frac{c_0}{r_0}}^{\infty} w(t) f(t+u) dt .$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα παραγώγισης Leibniz (Παράρτημα Π1) στην τελευταία έχουμε

$$A_2 A''(u) + A_1 A'(u) + A(u) = A_2 \int_{\frac{c_0}{r_0}}^{\infty} w(t) f''(t+u) dt + A_1 \int_{\frac{c_0}{r_0}}^{\infty} w(t) f'(t+u) dt + \int_{\frac{c_0}{r_0}}^{\infty} w(t) f(t+u) dt$$

$$= \int_{\frac{c_0}{r_0}}^{\infty} w(t)[A_2 f''(t+u) + A_1 f'(t+u) + f(t+u)]dt$$

$$= 0 \qquad \text{λόγω της (2.4.1)} \qquad \square$$

Στην επόμενη πρόταση, δίνεται η λύση της ομογενούς διαφορικής Εξίσωσης (2.4.6) για την εύρεση της $\phi(u)$.

Πρόταση 2.4.2. *Όταν οι απαιτήσεις ακολουθούν την phase-type*(2) οικογένεια κατανομών*, η συνάρτηση Gerber-Shiu έχει τη μορφή*

$$\phi(u) = k_1 Y_1\left(u + \frac{c}{r}\right) + k_2 Y_2\left(u + \frac{c}{r}\right) + k_3 Y_3\left(u + \frac{c}{r}\right) + Y_0\left(u + \frac{c}{r}\right),$$

όπου k_1, k_2, k_3 *είναι αυθαίρετες σταθερές οι οποίες μπορούν να προσδιοριστούν από τις συνοριακές συνθήκες,* $Y_0(z)$ *είναι μία μερική λύση της μη-ομογενούς διαφορικής εξίσωσης* $(2.4.9)$ *η οποία μπορεί να προσδιοριστεί εφαρμόζοντας για παράδειγμα τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων και* $Y_i(z)$, $i = 1,2,3,$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης, με μορφή:*

(i) *Όταν* $\dfrac{\lambda+\delta}{r}$ *δεν είναι ακέραιος*

$$Y_1(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,1} z^n, \qquad Y_2(z) = z\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,2} z^n\right), \qquad Y_3(z) = z^{\frac{\lambda+\delta}{r}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,3} z^n\right),$$

με συντελεστές που προσδιορίζονται αναδρομικά ως εξής:

$$a_{1,1} = 0, \qquad a_{1,i} = -\frac{\left(h_i - \frac{\lambda+\delta}{r}\right)\frac{A_1}{A_2} + \frac{\lambda}{r} f(0)}{(h_i+1)\left(h_i + 1 - \frac{\lambda+\delta}{r}\right)}, \qquad i = 2,3,$$

$$a_{2,1} = \frac{\delta}{2[2r - (\lambda+\delta)]A_2},$$

$$a_{2,i} = -\frac{(h_i+1)\left[\left(h_i + 1 - \frac{\delta}{r}\right)\frac{A_1}{A_2} + \frac{\lambda}{r} f(0)\right]a_{1,i} + \left(h_i - \frac{\delta}{r}\right)\frac{1}{A_2}}{(h_i+2)(h_i+1)\left(h_i + 2 - \frac{\lambda+\delta}{r}\right)}, \qquad i = 2,3,$$

$$a_{n+3,i} = -\frac{(n+2+h_i)\left[\left(n+2+h_i - \frac{\lambda+\delta}{r}\right)\frac{A_1}{A_2} + \frac{\lambda}{r} f(0)\right]}{(n+2+h_i)(n+3+h_i)\left(n+3+h_i - \frac{\lambda+\delta}{r}\right)} a_{n+2,i}$$

$$-\frac{\frac{1}{A_2}\left(n+1+h_i-\frac{\delta}{r}\right)}{(n+2+h_i)(n+3+h_i)\left(n+3+h_i-\frac{\lambda+\delta}{r}\right)}a_{n+1,i}\,,\qquad i=1,2,3,\qquad n=0,1,\ldots,$$

$$h_1=0\,,\qquad h_2=1\,,\qquad h_3=\frac{\lambda+\delta}{r}.$$

(ii) *Όταν* $\frac{\lambda+\delta}{r}=1,$

$$Y_1(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,1}z^n,\quad Y_2(z)=z\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,2}z^n\right),\qquad Y_3(z)=Y_2(z)\ln z+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n,3}z^n,$$

με συντελεστές που προσδιορίζονται αναδρομικά ως εξής

$$a_{1,1}=0,\qquad a_{1,2}=-\frac{\lambda}{2r}f(0),\qquad a_{1,3}=0,\qquad a_{2,3}=\frac{3\lambda}{4r}f(0)-\frac{A_1}{2A_2},$$

$$a_{2,i}=-\frac{(h_i+1)\left(h_i\frac{A_1}{A_2}+\frac{\lambda}{r}f(0)\right)+\left(h_i-\frac{\delta}{r}\right)\frac{1}{A_2}}{(h_i+2)(h_i+1)^2},\qquad i=1,2,$$

$$a_{n+3,i}=-\frac{(n+2+h_i)\left((n+1+h_i)\frac{A_1}{A_2}+\frac{\lambda}{r}f(0)\right)}{(n+3+h_i)(n+2+h_i)^2}a_{n+2,i}$$

$$-\frac{\frac{1}{A_2}\left(n+1+h_i-\frac{\delta}{r}\right)}{(n+3+h_i)(n+2+h_i)^2}a_{n+1,i}\,,\qquad i=1,2,\quad n=0,1,\ldots,$$

$$h_1=0\,,\qquad h_2=1\,,$$

$$(n+3)(n+2)^2a_{n+3,3}+(n+2)\left((n+1)\frac{A_1}{A_2}+\frac{\lambda}{r}f(0)\right)a_{n+2,3}+\left(n+1-\frac{\delta}{r}\right)\frac{1}{A_2}a_{n+1,3}$$

$$+(n+2)(3n+8)a_{n+2,2}+\left((2n+3)\frac{A_1}{A_2}+\frac{\lambda}{r}f(0)\right)a_{n+1,3}+\frac{1}{A_2}a_{n,2}=0,\qquad n=0,1,\ldots$$

(iii) *Όταν* $\frac{\lambda+\delta}{r}=2,$

$$Y_1(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,1}z^n,\qquad Y_2(z)=z^2\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,2}z^n\right),\qquad Y_3(z)=Y_2(z)\ln z+\sum_{n=1,n\neq 2}^{\infty}a_{n,3}z^n,$$

με συντελεστές που προσδιορίζονται αναδρομικά ως εξής

$$a_{1,1}=\frac{\delta}{A_2\lambda f(0)-A_1r},\quad a_{2,1}=0,$$

$$a_{1,2}=-\frac{\lambda}{3r}f(0),\qquad a_{2,2}=\frac{1}{24}\left[\frac{\lambda}{r}\frac{A_1}{A_2}f(0)+\left(\frac{\lambda}{r}f(0)\right)^2-\frac{2r-\delta}{A_2 r}\right],$$

$$a_{1,3}=\frac{2A_2 r}{A_1 r-A_2\lambda f(0)},\quad a_{2,3}=0,$$

$$a_{n+3,i}=-\frac{(n+2+h_i)\left[(n+h_i)\dfrac{A_1}{A_2}+\dfrac{\lambda}{r}f(0)\right]}{(n+3+h_i)(n+2+h_i)(n+1+h_i)}a_{n+2,i}$$

$$-\frac{\left(n+1+h_i-\dfrac{\delta}{r}\right)\dfrac{1}{A_2}}{(n+3+h_i)(n+2+h_i)(n+1+h_i)}a_{n+1,i},\qquad i=1,2,\ n=0,1,\ldots,$$

$$h_1=0,\qquad h_2=1,$$

$$(n+3)(n+2)(n+1)a_{n+3,3}+(n+2)\left(n\frac{A_1}{A_2}+\frac{\lambda}{r}f(0)\right)a_{n+2,3}+\left(n+1-\frac{\delta}{r}\right)\frac{1}{A_2}a_{n+1,3}$$

$$+(3n^2+12n+11)a_{n+1,2}+\left((2n+2)\frac{A_1}{A_2}+\frac{\lambda}{r}f(0)\right)a_{n,2}+\frac{1}{A_2}a_{n-1,2}=0,\quad n=0,1,\ldots$$

με $a_{-1,2}=0.$

(iv) *Όταν* $\dfrac{\lambda+\delta}{r}=M=3,4,\ldots$

$$Y_1(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,1}z^n,\qquad Y_2(z)=z^M\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,2}z^n\right),\qquad Y_3(z)=Y_2(z)\ln z+\sum_{n=1,n\neq M}^{\infty}a_{n,3}z^n,$$

με συντελεστές τέτοιους ώστε τα $a_{1,1},a_{2,1},\ldots,a_{M-1,1}$ *είναι μοναδικές λύσεις του μη-ομογενούς συστήματος*

$$2(2-M)a_{2,1}+\left((1-M)\frac{A_1}{A_2}+\frac{\lambda}{r}f(0)\right)a_{1,1}-\frac{\delta}{A_2 r}=0,$$

$$(n+3)(n+2)(n+3-M)a_{n+3,1}+(n+2)\left((n+2-M)\frac{A_1}{A_2}+\frac{\lambda}{r}f(0)\right)a_{n+2,1}+\left(n+1-\frac{\delta}{r}\right)\frac{1}{A_2}a_{n+1,1}=0,$$

$$n=0,1,\ldots,M-4$$

$$(M-1)\left(-\frac{A_1}{A_2}+\frac{\lambda}{r}f(0)\right)a_{M-1,1}+\left(M-2-\frac{\delta}{r}\right)\frac{1}{A_2}a_{M-2,1}=0.$$

Οι υπόλοιποι συντελεστές της $Y_1(z)$ *προσδιορίζονται αναδρομικά ως εξής*

$$a_{M,1}=0,$$

$$(n+3)(n+2)(n+3-M)a_{n+3,1}+(n+2)\left((n+2-M)\frac{A_1}{A_2}+\frac{\lambda}{r}f(0)\right)a_{n+2,1}+\left(n+1-\frac{\delta}{r}\right)\frac{1}{A_2}a_{n+1,1}=0,$$

$$n = M-2, M-1, \ldots$$

Οι συντελεστές της $Y_2(z)$ προσδιορίζονται αναδρομικά ως εξής

$$a_{1,2} = -\frac{\lambda}{r(M+1)} f(0), \qquad a_{2,2} = \frac{\frac{\lambda}{r}\frac{A_1}{A_2} f(0) + \left(\frac{\lambda}{r} f(0)\right)^2 - \left(M - \frac{\delta}{r}\right)\frac{1}{A_2}}{2(1+M)(2+M)}$$

$$(n+3+M)(n+2+M)(n+3)a_{n+3,2} + (n+2+M)\left((n+2)\frac{A_1}{A_2} + \frac{\lambda}{r} f(0)\right)a_{n+2,2}$$

$$+\left(n+M+1-\frac{\delta}{r}\right)\frac{1}{A_2} a_{n+1,2} = 0, \qquad n = 0,1,\ldots$$

Οι συντελεστές $a_{1,3}, a_{2,3}, \ldots, a_{M-1,3}$ *είναι μοναδικές λύσεις του μη-ομογενούς συστήματος*

$$2(2-M)a_{2,3} + \left((1-M)\frac{A_1}{A_2} + \frac{\lambda}{r} f(0)\right)a_{1,3} = 0,$$

$$(n+3)(n+2)(n+3-M)a_{n+3,3} + (n+2)\left((n+2-M)\frac{A_1}{A_2} + \frac{\lambda}{r} f(0)\right)a_{n+2,3} + \left(n+1-\frac{\delta}{r}\right)\frac{1}{A_2} a_{n+1,3} = 0,$$

$$n = 0,1,\ldots, M-4$$

$$(M-1)\left(-\frac{A_1}{A_2} + \frac{\lambda}{r} f(0)\right)a_{M-1,3} + \left(M-2-\frac{\delta}{r}\right)\frac{1}{A_2} a_{M-2,3} + M^2 - M = 0.$$

Οι υπόλοιποι συντελεστές της $Y_3(z)$ προσδιορίζονται αναδρομικά ως

$$a_{M,3} = 0,$$

$$(n+3)(n+2)(n+3-M)a_{n+3,3} + (n+2)\left((n+2-M)\frac{A_1}{A_2} + \frac{\lambda}{r} f(0)\right)a_{n+2,3}$$

$$+\left(n+1-\frac{\delta}{r}\right)\frac{1}{A_2} a_{n+1,3} + [(2n+5)(2-M) + 3n^2 + 12n + 11]a_{n+3-M,2}$$

$$+\left((2n+4-M)\frac{A_1}{A_2} + \frac{\lambda}{r} f(0)\right)a_{n+2-M,2} + \frac{1}{A_2} a_{n+1-M,2} = 0, \qquad n = M-2, M-1, \ldots$$

όπου $a_{-1,2} = 0$.

Επιπλέον, οι $Y_1(z), Y_2(z), Y_3(z)$ έχουν άπειρη ακτίνα σύγκλισης.

Απόδειξη. Εφαρμόζεται παρόμοια μεθοδολογία με την απόδειξη της Πρότασης 2.3.2 Λεπτομέρειες δίνονται στο Θεώρημα 3.1 στο Mitric and Sendova (2011).

Παρατήρηση 2.4.1. Στις περισσότερες εφαρμογές που εμφανίζονται στην πράξη, ο λόγος $\frac{\lambda+\delta}{r}$ δεν είναι ακέραιος. Έτσι, από τις περιπτώσεις που αναπτύχθηκαν στην Πρόταση 2.4.2, αυτή που βρίσκει πιο συχνά εφαρμογή είναι η (*i*) στην οποία οι εκφράσεις των Y_1, Y_2 και Y_3 είναι αντικειμενικά πιο απλές.

Σε συνέχεια της Πρότασης 2.4.2, για τον προσδιορισμό της γενικής λύσης της μη-ομογενούς διαφορικής εξίσωσης τρίτης τάξης (2.4.6), εφαρμόζοντας τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων (μέθοδος Lagrange), μια μερική λύση $Y_0(z)$ είναι

$$Y_0(z) = C_1(z)Y_1(z) + C_2(z)Y_2(z) + C_3(z)Y_3(z), \tag{2.4.11}$$

όπου οι $Y_1(z),\ Y_2(z)$ και $Y_3(z)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης και οι συναρτήσεις $C_1(z),\ C_2(z)$ και $C_3(z)$ είναι λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} &C_1'(z)Y_1(z) + C_2'(z)Y_2(z) + C_3'(z)Y_3(z) = 0, \\ &C_1'(z)Y_1'(z) + C_2'(z)Y_2'(z) + C_3'(z)Y_3'(z) = 0, \\ &C_1'(z)Y_1''(z) + C_2'(z)Y_2''(z) + C_3'(z)Y_3''(z) = q(z), \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

όπου $q(z)$ ορίστηκε στην Πρόταση 2.4.1.

Παρατήρηση 2.4.2. *Περιπτώσεις λύσεων*

i) Η περίπτωση όπου $\delta = 0$, απλοποιεί πολύ τον υπολογιστικό φόρτο για την εύρεση της συνάρτησης Gerber-Shiu $\phi(u)$. Πράγματι, τότε από την Πρόταση 2.4.1 είναι $E_{-1} = 0$, οπότε δεν υπάρχει ο όρος $Y(z)$ στην (2.4.6). Στην περίπτωση αυτή, η ομογενής διαφορική εξίσωση που προκύπτει, επιδέχεται και σταθερές ως λύσεις. Αυτό μπορεί να φανεί και από την Πρόταση 2.4.2. Συγκεκριμένα, από τη μορφή της $Y_1(z)$ και στις τέσσερις περιπτώσεις, αν $\delta = 0$ τότε $a_{n,1} = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, οπότε προκύπτει η λύση $Y_1(z) = 1$.

   Επίσης, στην περίπτωση $\delta = 0$, μπορεί να βρεθεί εύκολα η μερική λύση της μη ομογενούς Εξίσωσης (2.4.6). Καθώς τώρα ο όρος $Y(z)$ δεν υπάρχει, η Εξίσωση (2.4.6) θέτοντας $\xi(z) = Y'(z)$ μετασχηματίζεται σε μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης: είναι $\xi'(z) = Y''(z)$ και $\xi''(z) = Y'''(z)$, οπότε προκύπτει η εξίσωση

$$\xi''(z) + \left(C_0 + \frac{C_1}{z} \right) \xi'(z) + \left(D_0 + \frac{D_{-1}}{z} \right) \xi(z) = q(z).$$

   Αν $\xi_1(z)$ και $\xi_2(z)$ είναι οι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης, τότε μια μερική λύση της παραπάνω μη ομογενούς εξίσωσης έχει τη μορφή (Logan (2015), σελ. 121),

$$\xi_p(z) = -\xi_1(z)\int_0^z \frac{\xi_2(x)q(x)}{w(x)}dx + \xi_2(z)\int_0^z \frac{\xi_1(x)q(x)}{w(x)}dx,$$

με $w(z) = \xi_1(z)\xi_2'(z) - \xi_1'(z)\xi_2(z)$. Και η ζητούμενη λύση $Y(z)$ θα είναι $Y(z) = \int \xi(z)dz$.

ii) Μια άλλη περίπτωση που επίσης απλοποιεί τους υπολογισμούς είναι αυτή στην οποία η συνάρτηση ποινής εξαρτάται μόνο από το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, δηλαδή, $w(x_1, x_2) = w(x_2)$. Τότε, η ποσότητα $q(z)$ στην (2.4.6) μηδενίζεται, οπότε η διαφορική εξίσωση που προκύπτει είναι μόνο η ομογενής και συνεπώς αρκεί η Πρόταση 2.4.2.

2.5 Η συνάρτηση Gerber-Shiu για όλα τα επίπεδα

Στις Ενότητες 2.3 και 2.4 αναπτύχθηκε η συνάρτηση Gerber-Shiu για ένα τυχαίο επίπεδο. Συγκεκριμένα, όταν $b_{i-1} < u < b_i$, $i = 0,1,...,n,$ θεωρούμε ρυθμό ασφαλίστρου c_i και επιτόκιο r_i. Η συνάρτηση Gerber-Shiu για το εν λόγω επίπεδο, $\phi_i(u)$, είδαμε ότι εξαρτάται από τα c_i και r_i, και συγκεκριμένα μέσω δύο αυθαίρετων σταθερών, $k_{1,i}$, $k_{2,i}$, όταν τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένα (Πρόταση 2.3.2), και μέσω τριών αυθαίρετων σταθερών, $k_{1,i}$, $k_{2,i}$, $k_{3,i}$, όταν τα μεγέθη των απαιτήσεων ακολουθούν την *phase-type*(2) οικογένεια κατανομών (Πρόταση 2.4.2). Οι εν λόγω σταθερές, οι οποίες μπορούν να προσδιοριστούν μέσω συνοριακών συνθηκών, εξαρτώνται από τη συνάρτηση $A(u)$ η οποία με τη σειρά της εξαρτάται από τη συνάρτηση ποινής w και από τα c_0, r_0. Στην περίπτωση όπου η συνάρτηση ποινής εξαρτάται μόνο από το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, τότε οι όροι που περιέχουν τη συνάρτηση $A(u)$ εξαλείφονται (Λήμμα 2.3.1 (ii), (iii), Λήμμα 2.4.3 και Εξίσωση (2.4.6)).
Για να είναι η συνάρτηση Gerber-Shiu συνεχής, θα πρέπει να γίνει κατάλληλη επιλογή των σταθερών που αναφέρθηκαν παραπάνω. Σε αυτό μας βοηθά η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.5.1. *Εάν οι απαιτήσεις ακολουθούν την εκθετική ή την phase-type*(2) οικογένεια κατανομών*, τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση Gerber-Shiu* $\phi(u)$ *τέτοια ώστε*

$$\phi(u) = \phi_i(u), \quad b_{i-1} < u < b_i, \quad i = 0,1,...,n. \tag{2.5.1}$$

Απόδειξη. *i*) Οι απαιτήσεις είναι εκθετικά κατανεμημένες. Για κάθε επίπεδο πρέπει να καθοριστούν δύο σταθερές, συγκεκριμένα οι k_1, k_2 της Πρότασης 2.3.2. Συνεπώς για τα $n+1$ επίπεδα απαιτούνται συνολικά $2(n+1) = 2n+2$ συνοριακές συνθήκες. Η συνάρτηση Gerber-Shiu σύμφωνα με την (Σ1) είναι συνεχής. Συνεπώς,

$$\phi_i(b_i^-) = \phi_{i+1}(b_i^+), \qquad i = 0,1,\ldots,n-1. \tag{2.5.2}$$

Από την (Σ2) έχουμε ότι

$$(r_i b_i + c_i)\phi_i'(b_i^-) = (r_{i+1} b_i + c_{i+1})\phi_{i+1}'(b_i^+), \qquad i = 0,1,\ldots,n-1. \tag{2.5.3}$$

Επίσης από τις (Σ3) και (Σ4) έχουμε

$$\lim_{u\to -\frac{c_0}{r_0}} \phi(u) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\lambda+\delta} A\left(-\dfrac{c_0}{r_0}\right), & \varepsilon\acute{\alpha}\nu \quad \lim\limits_{u\to -\frac{c_0}{r_0}} \displaystyle\int_u^0 (r_0 y + c_0) e^{-\frac{\lambda+\delta}{r_0}-1} A(y)dy = \infty, \\ 0, & \varepsilon\acute{\alpha}\nu \quad \lim\limits_{u\to -\frac{c_0}{r_0}} \displaystyle\int_u^0 (r_0 y + c_0) e^{-\frac{\lambda+\delta}{r_0}-1} A(y)dy < \infty. \end{cases} \tag{2.5.4}$$

Από την Εξίσωση (2.1.8) είναι

$$\lim_{u\to\infty} \phi_n(u) = 0. \tag{2.5.5}$$

Συνεπώς, από τις (2.5.2) – (2.5.5) έχουμε τις απαιτούμενες $2n+2$ συνθήκες για τον προσδιορισμό των σταθερών $k_{1,i}$ και $k_{2,i}$ για κάθε επίπεδο *i*.

ii) Οι απαιτήσεις ακολουθούν την *phase-type*(2) οικογένεια κατανομών. Στην περίπτωση αυτή, θα πρέπει να προσδιοριστούν οι σταθερές $k_{1,i}, k_{2,i}$ και $k_{3,i}$ για $i = 0,1,\ldots,n$, δηλαδή απαιτούνται συνολικά $3(n+1) = 3n+3$ συνοριακές συνθήκες. Πέραν των $2n+2$ συνθηκών που αναφέρθηκαν παραπάνω, χρειάζονται άλλες $n+1$ συνθήκες. Από την (Σ5) έχουμε

$$\lim_{u\to\infty} \phi_n(u) = 0. \tag{2.5.6}$$

Από την (Σ6) προκύπτουν

$$(r_i b_i + c_i)\phi_i''(b_i^-) - (\lambda+\delta-r_i)\phi_i'(b_i^-) = (r_{i+1} b_i + c_{i+1})\phi_{i+1}''(b_i^+) - (\lambda+\delta-r_{i+1})\phi_{i+1}'(b_i^+),$$
$$i = 0,1,\ldots,n-1. \tag{2.5.7}$$

Συνεπώς, από τις (2.5.6) και (2.5.7) έχουμε τις απαιτούμενες $n+1$ επιπλέον συνθήκες. □

Στη συνέχεια ως εφαρμογή της παραπάνω μεθοδολογίας, δίνεται ένα μοντέλο με δύο επίπεδα και εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις, στο οποίο θεωρώντας $\delta = 0$, υπολογίζεται η πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας.

2.6 Εφαρμογή: Μοντέλο δύο επιπέδων και εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις

Θεωρούμε ένα μοντέλο δύο επιπέδων με φράγματα b_{-1}, b_0 και b_1 τέτοια ώστε

$$-\frac{c_0}{r_0} = b_{-1} < 0 = b_0 < b_1 < \infty.$$

Το πλεόνασμα $U(t)$ μπορεί να βρεθεί σε δύο επίπεδα, ένα αρνητικό και ένα θετικό, για τα οποία έχουμε τους παρακάτω ρυθμούς ασφαλίστρου και επιτοκίων:

Όταν $b_{-1} < U(t) < b_0$ θεωρούμε ρυθμό ασφαλίστρου c_0 και ρυθμό δανειστικού επιτοκίου r_0.

Όταν $b_0 < U(t) < b_1$ θεωρούμε ρυθμό ασφαλίστρου c_1 και ρυθμό επιτοκίου επένδυσης r_1.

Θεωρούμε ότι τα μεγέθη των απαιτήσεων ακολουθούν εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \beta e^{-\beta x}, \ x > 0, \beta > 0,$$

και επίσης ότι ισχύει $\frac{\lambda}{r_i} \neq 1, 2, \dots$ για $i = 0,1$.

Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας, η οποία δίνεται από τη συνάρτηση Gerber-Shiu για $\delta = 0$ και συνάρτηση ποινής $w(x_1, x_2) = 1$. Έστω $\psi_0(u)$ και $\psi_1(u)$ οι πιθανότητες απόλυτης χρεοκοπίας που αντιστοιχούν στα επίπεδα $b_{-1} < U(t) < b_0$ και $b_0 < U(t) < b_1$ αντίστοιχα. Από την Πρόταση 2.3.2, έχουμε ότι

$$\psi_i(u) = k_{1,i} y_1\left(u + \frac{c_i}{r_i}\right) + k_{2,i} y_2\left(u + \frac{c_i}{r_i}\right) + k_3\left(u + \frac{c_i}{r_i}\right) y_1\left(u + \frac{c_i}{r_i}\right) + k_4\left(u + \frac{c_i}{r_i}\right) y_2\left(u + \frac{c_i}{r_i}\right),$$

όπου οι συναρτήσεις $k_3(x)$ και $k_4(x)$ ορίστηκαν στην ίδια πρόταση και $k_{1,i}$, $k_{2,i}$, $i = 0,1$ είναι αυθαίρετες σταθερές για τον προσδιορισμό των οποίων θα χρησιμοποιηθούν οι συνοριακές συνθήκες μέσω της Πρότασης 2.5.1. Αφού η συνάρτηση ποινής είναι σταθερή και ως εκ τούτου ανεξάρτητη από το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία, έχουμε την περίπτωση της Εξίσωσης (2.3.5), συνεπώς η διαφορική εξίσωση που προκύπτει είναι η ομογενής, άρα $k_3(x) = k_4(x) = 0$. Από την Πρόταση 2.3.2 παίρνουμε

$$\begin{aligned}\psi_i(u) &= k_{1,i} y_1\left(u + \frac{c_i}{r_i}\right) + k_{2,i} y_2\left(u + \frac{c_i}{r_i}\right)\\ &= k_{1,i}\left(u + \frac{c_i}{r_i}\right)^{\frac{\lambda}{r_i}} M\left(\frac{\lambda}{r_i}, 1 + \frac{\lambda}{r_i}; -\beta\left(u - \frac{c_i}{r_i}\right)\right) + k_{2,i} M\left(0, 1 - \frac{\lambda}{r_i}; -\beta\left(u - \frac{c_i}{r_i}\right)\right)\end{aligned}$$

όπου, $M(0, b, x) = 1$, και θέτοντας $x_i = u + \frac{c_i}{r_i}$ η παραπάνω γράφεται ως

$$\psi_i(u) = k_{1,i} x_i^{\frac{\lambda}{r_i}} M\left(\frac{\lambda}{r_i}, 1 + \frac{\lambda}{r_i}; -\beta x_i\right) + k_{2,i}.$$

Για τον υπολογισμό της πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας, εκφράζουμε τη συμφυή υπεργεωμετρική συνάρτηση πρώτου είδους $M\left(\frac{\lambda}{r_i}, 1 + \frac{\lambda}{r_i}; -\beta x_i\right)$ με τη μορφή ολοκληρώματος (Παράρτημα Π2). Είναι

$$M\left(\frac{\lambda}{r_i},1+\frac{\lambda}{r_i};-\beta x_i\right)=\frac{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{r_i}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{r_i}\right)\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{r_i}-\frac{\lambda}{r_i}\right)}\int_0^1 e^{-\beta x_i t}t^{\frac{\lambda}{r_i}-1}(1-t)^{1+\frac{\lambda}{r_i}-\frac{\lambda}{r_i}-1}dt$$

$$=\frac{\frac{\lambda}{r_i}\Gamma\left(\frac{\lambda}{r_i}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{r_i}\right)\Gamma(1)}\int_0^1 e^{-\beta x_i t}t^{\frac{\lambda}{r_i}-1}dt=\frac{\lambda}{r_i}\int_0^1 e^{-\beta x_i t}t^{\frac{\lambda}{r_i}-1}dt\,.$$

Θέτοντας $y=x_i\,t\Rightarrow dy=x_i\,dt$ και $0\le t\le 1\Rightarrow 0\le y\le x_i$, οπότε

$$M\left(\frac{\lambda}{r_i},1+\frac{\lambda}{r_i};-\beta x_i\right)=\frac{\lambda}{r_i}\int_0^{x_i}e^{-\beta y}\left(\frac{y}{x_i}\right)^{\frac{\lambda}{r_i}-1}\frac{1}{x_i}dy=\frac{1}{x_i^{\frac{\lambda}{r_i}}}\int_0^{x_i}\frac{\lambda}{r_i}e^{-\beta y}y^{\frac{\lambda}{r_i}-1}dy$$

και συνεπώς

$$\psi_i(u)=k_{1,i}x_i^{\frac{\lambda}{r_i}}\frac{1}{x_i^{\frac{\lambda}{r_i}}}\int_0^{x_i}\frac{\lambda}{r_i}e^{-\beta y}y^{\frac{\lambda}{r_i}-1}dy+k_{2,i}$$

$$=k_{1,i}\int_0^{x_i}\frac{\lambda}{r_i}e^{-\beta y}y^{\frac{\lambda}{r_i}-1}dy+k_{2,i}$$

$$=k_{1,i}\int_0^{u+\frac{c_i}{r_i}}\frac{\lambda}{r_i}e^{-\beta y}y^{\frac{\lambda}{r_i}-1}dy+k_{2,i}\,. \tag{2.6.1}$$

Για τον προσδιορισμό των σταθερών $k_{1,i}$, $k_{2,i}$, $i=0,1$ χρειαζόμαστε τέσσερις σχέσεις.

i) Από την Εξίσωση (2.5.4) και με χρήση της συνάρτησης $A(u)$ από την (2.2.2), έχουμε

$$\lim_{u\to-\frac{c_0}{r_0}}\psi_i(u)=A\left(-\frac{c_0}{r_0}\right)=\int_{-\frac{c_0}{r_0}+\frac{c_0}{r_0}}^{\infty}w(u,x-u)f(x)dx=\int_0^{\infty}1\cdot f(x)dx=1$$

αφού το τελευταίο ολοκλήρωμα αφορά στη συνάρτηση πυκνότητας της εκθετικής στο στήριγμά της. Με βάση το αποτέλεσμα αυτό, από την (2.6.1) για $i=0$ βρίσκουμε

$$\lim_{u\to-\frac{c_0}{r_0}}\psi_0(u)=k_{1,0}\int_0^{-\frac{c_0}{r_0}+\frac{c_0}{r_0}}\frac{\lambda}{r_0}e^{-\beta y}y^{\frac{\lambda}{r_0}-1}dy+k_{2,0}=1$$

οπότε

$$k_{2,0}=1 \tag{2.6.2}$$

ii) Από την (2.1.8) είναι $\lim_{u\to\infty}\psi_1(u)=0$, οπότε από την (2.5.1) παίρνουμε

$$\lim_{u\to\infty}\psi_1(u)=k_{1,1}\int_0^\infty \frac{\lambda}{r_1}e^{-\beta y}y^{\frac{\lambda}{r_1}-1}dy+k_{2,1}=0$$

ισοδύναμα

$$k_{1,1}\frac{\lambda}{r_1}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{r_1}\right)}{\beta^{\frac{\lambda}{r_1}}}\int_0^\infty \frac{\beta^{\frac{\lambda}{r_1}}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{r_1}\right)}e^{-\beta y}y^{\frac{\lambda}{r_1}-1}dy+k_{2,1}=0$$

αλλά το ολοκλήρωμα ισούται με 1 καθώς ολοκληρώνει τη συνάρτηση πυκνότητας μίας κατανομής $Gamma\left(\frac{\lambda}{r_1},\beta\right)$ στο στήριγμά της, οπότε

$$k_{1,1}\frac{\lambda}{r_1}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{r_1}\right)}{\beta^{\frac{\lambda}{r_1}}}+k_{2,1}=0 \tag{2.6.3}$$

όπου $\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ η συνάρτηση Γάμμα.

iii) Από την Εξίσωση (2.5.3) για $i=0$ παίρνουμε

$$(r_0 b_0+c_0)\phi_0'(b_0^-)=(r_1 b_0+c_1)\phi_1'(b_0^+)$$

όπου με $b_0=0$ και με ψ τη συνάρτηση Gerber-Shiu γίνεται

$$c_0\,\psi_0'(0)=c_1\,\psi_1'(0)\,. \tag{2.6.4}$$

Από την (2.5.1) έχουμε

$$\psi_0(u)=k_{1,0}\int_0^{u+\frac{c_0}{r_0}}\frac{\lambda}{r_0}e^{-\beta y}y^{\frac{\lambda}{r_0}-1}dy+k_{2,0}\ \Rightarrow\ \psi_0'(u)=k_{1,0}\frac{\lambda}{r_0}e^{-\beta\left(u+\frac{c_0}{r_0}\right)}\left(u+\frac{c_0}{r_0}\right)^{\frac{\lambda}{r_0}-1}$$

και

$$\psi_1(u)=k_{1,1}\int_0^{u+\frac{c_1}{r_1}}\frac{\lambda}{r_1}e^{-\beta y}y^{\frac{\lambda}{r_1}-1}dy+k_{2,1}\ \Rightarrow\ \psi_1'(u)=k_{1,1}\frac{\lambda}{r_1}e^{-\beta\left(u+\frac{c_1}{r_1}\right)}\left(u+\frac{c_1}{r_1}\right)^{\frac{\lambda}{r_1}-1}.$$

Αντικαθιστώντας στην (2.6.4) έχουμε

$$c_0k_{1,0}\frac{\lambda}{r_0}e^{-\beta\frac{c_0}{r_0}}\left(\frac{c_0}{r_0}\right)^{\frac{\lambda}{r_0}-1}=c_1k_{1,1}\frac{\lambda}{r_1}e^{-\beta\frac{c_1}{r_1}}\left(\frac{c_1}{r_1}\right)^{\frac{\lambda}{r_1}-1}. \tag{2.6.5}$$

(iv) Από τη συνθήκη συνέχειας (2.5.2) για $i=0$ παίρνουμε

$$\phi_0(b_0^-)=\phi_1(b_0^+)$$

όπου με $b_0=0$ και με ψ τη συνάρτηση Gerber-Shiu γίνεται

$$\psi_0(0) = \psi_1(0)$$

και από την (2.6.1) προκύπτει

$$k_{1,0} \int_0^{\frac{c_0}{r_0}} \frac{\lambda}{r_0} e^{-\beta y} y^{\frac{\lambda}{r_0}-1} dy + k_{2,0} = k_{1,1} \int_0^{\frac{c_1}{r_1}} \frac{\lambda}{r_1} e^{-\beta y} y^{\frac{\lambda}{r_1}-1} dy + k_{2,1}. \qquad (2.6.6)$$

Οι Εξισώσεις (2.6.2), (2.6.3), (2.6.5) και (2.6.6) προσδιορίζουν τους συντελεστές $k_{1,i}$, $k_{2,i}$, $i = 0,1$ και συνεπώς την πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας $\psi_i(u)$, $i = 0,1$.

2.7 Σύνοψη κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήθηκε η απόλυτη χρεοκοπία στο κλασικό μοντέλου κινδύνου πολλαπλών επιπέδων, στο οποίο θεωρούμε ότι ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρων παύει να είναι σταθερός και είναι μια βηματική συνάρτηση με την τιμή του να εξαρτάται από το επίπεδο στο οποίο βρίσκεται το πλεόνασμα. Επίσης, όταν το πλεόνασμα είναι θετικό, η ασφαλιστική εταιρία επενδύει το πλεόνασμα χωρίς ρίσκο με ένα σταθερό επιτόκιο το οποίο είναι γνωστό εκ των προτέρων και εξαρτάται από το επίπεδο του πλεονάσματος. Δηλαδή, όταν το πλεόνασμα βρίσκεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικά όρια, ο ασφαλιστής έχει τη δυνατότητα να επιλέξει τον αντίστοιχο ρυθμό είσπραξης ασφαλίστρων και το ρυθμό επιτοκίου επένδυσης. Αρχικά δίνονται οι ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber-Shiu. Στη συνέχεια για τα μεγέθη των απαιτήσεων εξετάζονται δύο μοντέλα. Αυτό της εκθετικής κατανομής και αυτό της *phase-type*(2) οικογένειας κατανομών. Σε κάθε μία περίπτωση οι ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις μετατρέπονται σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις για τις οποίες δίνεται η λύση της συνάρτησης Gerber-Shiu σε μορφή σειράς, όπου οι συντελεστές προσδιορίζονται αναδρομικά. Τέλος δίνεται μια εφαρμογή όπου το πλεόνασμα μπορεί να βρεθεί σε δύο επίπεδα, ένα όταν το πλεόνασμα είναι αρνητικό και ένα όταν το πλεόνασμα είναι θετικό. Για μεγέθη απαιτήσεων να ακολουθούν εκθετική κατανομή, δίνεται η έκφραση για την πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας με τις σχετικές συνθήκες για τον πλήρη προσδιορισμό όλων των εμπλεκόμενων συντελεστών στην εξίσωση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Απόλυτη χρεοκοπία στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου με σταθερό πιστωτικό και δανειστικό επιτόκιο

Το κεφάλαιο αναφέρεται στη μελέτη της απόλυτης χρεοκοπίας σε ανανεωτικά και μη-ανανεωτικά μοντέλα κινδύνου, θεωρώντας σταθερό ρυθμό πιστωτικού και δανειστικού τοκισμού. Αρχικά ως μοντέλο των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ των αφίξεων των απαιτήσεων θεωρείται μια γενική Μαρκοβιανή Διαδικασία Αφίξεων και δίνονται οι ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις για τις συναρτήσεις Gerber-Shiu. Στη συνέχεια, εξετάζεται το ανανεωτικό μοντέλο γενικευμένης *Erlang*(*n*) κατανομής για τους ενδοαφιξιακούς χρόνους και θεωρώντας ότι τα μεγέθη των απαιτήσεων ακολουθούν μια πινακοεκθετική (*Matrix-Exponential*) κατανομή, δίνονται οι συναρτήσεις Gerber-Shiu με τη μορφή σειράς όπου οι συντελεστές προσδιορίζονται αναδρομικά, όταν η συνάρτηση ποινής δίνεται μόνο ως συνάρτηση του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας. Λύσεις κλειστής μορφής δίνονται για κάποια μέτρα απόλυτης χρεοκοπίας (πιθανότητα χρεοκοπίας, κατανομή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας), όταν οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων ακολουθούν τη γενικευμένη Erlang(2) κατανομή και τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένα.

Αν και η απόλυτη χρεοκοπία στο κλασικό μοντέλο κινδύνου έχει μελετηθεί σε μεγάλο βαθμό (σχετικές οι αναφορές στην Ενότητα 1.3), εντούτοις δεν έχει συμβεί το ίδιο για το ανανεωτικό μοντέλο. Μια σχετική εργασία είναι των Konstantinides et al. (2010) στην οποία παρουσιάζονται ασυμπτωτικά αποτελέσματα για την πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο.

Η ανάλυση που ακολουθεί βασίζεται στην εργασία των Mitric et al. (2012).

3.1 Περιγραφή του μοντέλου

Στο μοντέλο κινδύνου που εξετάζουμε, θεωρούμε ότι όταν το πλεόνασμα είναι θετικό η ασφαλιστική εταιρεία επενδύει το πλεόνασμα χωρίς ρίσκο με ένα σταθερό ρυθμό πιστωτικού τοκισμού $r>0$, ή ισοδύναμα με πιστωτικό επιτόκιο $e^r-1>0$, έτσι ώστε μετά από χρόνο t ένα κεφάλαιο ύψους x γίνεται xe^{rt}, ενώ όταν το πλεόνασμα πέσει κάτω από το μηδέν για πρώτη φορά, η ασφαλιστική εταιρεία δανείζεται το ποσό του ελλείμματος με ένα σταθερό ρυθμό δανειστικού τοκισμού που στην παρούσα εργασία, θα υποθέσουμε ότι είναι ίσος με το ρυθμό πιστωτικού τοκισμού *r*.

Έστω με $U(t)$ συμβολίζεται η διαδικασία πλεονάσματος τη χρονική στιγμή t. Είναι

$$U(t)=ue^{rt}+c\bar{s}_{\overline{t|}}^{(r)}-\int_0^t e^{r(t-y)}dS(y)\,, \tag{3.1.1}$$

όπου u είναι το αρχικό πλεόνασμα, $c>0$ ο σταθερός ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρου ανά μονάδα χρόνου (ένταση ασφαλίστρου), $S(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}X_i$ είναι σύνθετη ανανεωτική διαδικασία συνολικών απαιτήσεων στο $[0,t]$, με $S(t)=0$ όταν $N(t)=0$, $N(t)$ απαριθμήτρια ανανεωτική διαδικασία με $N(t)$ = το πλήθος των χρονικών στιγμών διαδοχικών αφίξεων απαιτήσεων στο διάστημα $[0,t]$ και $X_1, X_2,\ldots$, η ακολουθία των διαδοχικών μεγεθών των απαιτήσεων, $\bar{s}_{\overline{t|}}^{(r)}$ η μελλοντική αξία στο χρόνο t συνεχούς ράντας με επιτόκιο r με

$$\bar{s}_{\overline{t|}}^{(r)}=\int_0^t e^{r(t-y)}dy=\frac{e^{rt}-1}{t}\,. \tag{3.1.2}$$

Εάν οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών εμφανίσεων απαιτήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένοι με μέσο $1/\lambda$, ή ισοδύναμα, η $\{N(t),t\geq 0\}$ είναι διαδικασία Poisson με σταθερή ένταση λ, τότε το παραπάνω μοντέλο (3.1.1) απλοποιείται στο μοντέλο κινδύνου σύνθετης Poisson ή αλλιώς κλασικό μοντέλο κινδύνου.

Θεωρούμε ότι η διαδικασία αφίξεων των απαιτήσεων περιγράφεται από μια Μαρκοβιανή Διαδικασία Αφίξεων (*Markovian Arrival Process – MAP*). Οι Μαρκοβιανές Διαδικασίες Αφίξεων (Neuts (1979) και (1981)) αποτελούν μια γενική κλάση σημειακών στοχαστικών διαδικασιών (*point processes*) για τη μοντελοποίηση των ενδοαφιξιακών χρόνων του συστήματος που μελετάμε και λαμβάνουν υπ' όψιν τη συσχέτιση ανάμεσα στις αφίξεις, κάτι που είναι σημαντικό σε μοντέλα στα οποία η ροή των αφίξεων παρουσιάζει εκρηκτικότητα. Οι MAP είναι ένα κατάλληλο εργαλείο για τη μοντελοποίηση τόσο ανανεωτικών όσο και μη-ανανεωτικών αφίξεων και περιέχουν ως ειδικές περιπτώσεις μεταξύ άλλων τη διαδικασία Poisson, τη σύνθετη διαδικασία Poisson, τη διαδικασία ανανέωσης τύπου φάσεων (*phase-type (PH) renewal process*), την Προσαρμοσμένη Μαρκοβιανή Διαδικασία Poisson (*Markov Modulated Poisson Process - MMPP*) κ.α.

Η υπό εξέταση διαδικασία του αριθμού των απαιτήσεων θεωρείται ότι επηρεάζεται από μια συνεχούς χρόνου αδιαχώριστη (irreducible) αλυσίδα Markov, $J(t)$ ή J_t, με n καταστάσεις, και η Μαρκοβιανή Διαδικασία Αφίξεων συμβολίζεται με $MAP(\underline{\alpha},\mathbf{D_0},\mathbf{D_1})$ η οποία θεωρεί δύο τύπους μεταβάσεων μεταξύ των καταστάσεων. Ο πρώτος τύπος αναφέρεται στις μεταβάσεις όταν δεν υπάρχει άφιξη κάποιας απαίτησης και ο σχετικός πίνακας με τους ρυθμούς μεταβάσεων συμβολίζεται $\mathbf{D_0}=(d_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, ενώ ο δεύτερος τύπος μεταβάσεων αναφέρεται σε μεταβάσεις κατά τις στιγμές αφίξεων απαιτήσεων και ο σχετικός πίνακας με τους ρυθμούς αυτών των μεταβάσεων συμβολίζεται $\mathbf{D_1}=(D_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$. Ο πίνακας $\mathbf{D_0}$ έχει αρνητικά στοιχεία στην κύρια διαγώνια και μη-αρνητικά στοιχεία εκτός αυτής, ενώ ο πίνακας $\mathbf{D_1}$ είναι μη αρνητικός. Η αλυσίδα Markov, ως αδιαχώριστη και με πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων, είναι επαναληπτική (recurrent) και ισχύει ότι

$$(\mathbf{D_0}+\mathbf{D_1})\times(1,1,...,1)^T = \underline{0}. \tag{3.1.3}$$

Τέλος, $\underline{\alpha}$ είναι το διάνυσμα με τις πιθανότητες αρχικής κατάστασης της αλυσίδας Markov, με *i*-οστό στοιχείο την πιθανότητα $\alpha_i = P(J_0 = i)$ για $1 \le i \le n$.

Τα μεγέθη των απαιτήσεων θεωρείται ότι εξαρτώνται από τις φάσεις της αλυσίδας Markov. Όταν εμφανίζεται μια απαίτηση καθώς το σύστημα μεταβαίνει από την κατάσταση i στην κατάσταση j, το μέγεθος της αντίστοιχης απαίτησης συμβολίζεται με X_{ij} με συνάρτηση κατανομής $F_{ij}(x) = P(X_{ij} \le x)$, συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{ij}(x)$ και μετασχηματισμό Laplace $\tilde{f}_{ij}(s) = E(e^{-sX_{ij}})$.

Στη βιβλιογραφία της αναλογιστικής επιστήμης, η πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο ορίζεται ως η πιθανότητα το πλεόνασμα να πέσει κάτω από το μηδέν. Σχετικές εργασίες στο κλασικό μοντέλο κινδύνου με σταθερή ένταση επιτοκίου είναι για παράδειγμα των Sundt and Teugels (1995, 1997). Όπως όμως έχει σχολιαστεί στους Embrechts and Schmidli (1994), το μηδενικό όριο αναφοράς είναι μη ρεαλιστικό και εναλλακτικά χρησιμοποίησαν σαν όριο χρεοκοπίας την τιμή $-\frac{c}{r}$. Όταν η διαδικασία πλεονάσματος πάρει την τιμή αυτή ή και μικρότερη, τότε η ασφαλιστική εταιρία δεν είναι σε θέση να ανταποκριθεί στις υποχρεώσεις της και να ξεπληρώσει τα χρέη της. Αν το πλεόνασμα γίνει ίσο με $-\frac{c}{r}$, τα ασφάλιστρα θα καλύπτουν μόνο το ρυθμό δανειστικού επιτοκίου και όταν θα εμφανιστεί η πρώτη απαίτηση, θα συμβεί χρεοκοπία. Για επίπεδα του πλεονάσματος χαμηλότερα από την τιμή $-\frac{c}{r}$, η χρεοκοπία είναι βέβαιη. Συνεπώς, θεωρούμε ότι απόλυτη χρεοκοπία συμβαίνει όταν το πλεόνασμα γίνει μικρότερο ή ίσο από $-\frac{c}{r}$.

Ο χρόνος απόλυτης χρεοκοπίας ορίζεται ως

$$\tau = \begin{cases} \inf\left\{t \ge 0 : U(t) \le -\frac{c}{r}\right\}, \\ \infty, \quad \text{εάν } U(t) > -\frac{c}{r}. \end{cases} \tag{3.1.4}$$

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ή συνάρτηση των Gerber-Shiu σε απόλυτη χρεοκοπία σε διανυσματική μορφή είναι $\underline{\phi}(u) = (\phi_1(u),...,\phi_n(u))^T$, όπου το *i*-οστό στοιχείο ορίζεται ως

$$\phi_i(u) = E\left[e^{-\delta t} w\left(U(\tau^-), |U(\tau)|\right) I(\tau < \infty) \,|\, U(0) = u, J(0) = i\right], \quad u > -\frac{c}{r}, \quad i = 1, ..., n, \qquad (3.1.5)$$

όπου, $w(x_1, x_2)$ καλείται συνάρτηση ποινής κατά τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας με $0 \le w(x_1, x_2) < \infty$, $(x_1, x_2) \in \left(-\frac{c}{r}, \infty\right) \times \left[\frac{c}{r}, \infty\right)$, $\delta \ge 0$ η ένταση ανατοκισμού για τον υπολογισμό της παρούσας αξίας της ποινής, $I(\cdot)$ είναι δείκτρια συνάρτηση, $U(\tau^-)$ είναι το πλεόνασμα πριν τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας και $|U(\tau)|$ είναι το έλλειμμα τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας, $J(0)$ συμβολίζει τη φάση που βρίσκεται η αλυσίδα Markov τη στιγμή 0.

Η πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο σε διανυσματική μορφή είναι $\underline{\psi}(u) = (\psi_1(u), ..., \psi_n(u))^T$, όπου το i-οστό στοιχείο ορίζεται ως

$$\psi_i(u) = P(\tau < \infty \,|\, U(0) = u, J(0) = i), \qquad u > -\frac{c}{r}, \qquad i = 1, ..., n. \qquad (3.1.6)$$

3.2 Εξισώσεις για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής

Ένα σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων για τη συνάρτηση Gerber-Shiu, στην περίπτωση που οι ενδοαφιξιακοί χρόνοι μεταξύ απαιτήσεων περιγράφονται από μια MAP διαδικασία αφίξεων με παραμέτρους που δόθηκαν στην Ενότητα 3.1, δίνεται στην επόμενη πρόταση, η οποία γενικεύει το Θεώρημα 1.1 της εργασίας των Mitric and Sendova (2011) για το μοντέλο κινδύνου σύνθετης διαδικασίας Poisson.

Πρόταση 3.2.1. *Οι προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής Gerber-Shiu* $\phi_i(u)$, $i = 1, ..., n$, *ικανοποιούν το επόμενο σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων:*

$$(c + ru)\phi_i'(u) = \delta\, \phi_i(u) - \sum_{j=1}^{n} d_{ij}\phi_j(u) - \sum_{j=1}^{n} D_{ij} \left(\int_0^{u+\frac{c}{r}} \phi_j(u - x) f_{ij}(x) dx + A_{ij}(u) \right), \qquad (3.2.1)$$

όπου

$$A_{ij}(u) = \int_{u+\frac{c}{r}}^{\infty} w(u, x - u) f_{ij}(x) dx. \qquad (3.2.2)$$

Απόδειξη. Έστω ότι τη χρονική στιγμή 0 βρισκόμαστε στην κατάσταση *j*. Θεωρώντας το απειροστό χρονικό διάστημα (0, *dt*), τρία διαφορετικά γεγονότα μπορούν να συμβούν: Να μην υπάρξει αλλαγή φάσης, να γίνει αλλαγή σε φάση χωρίς απαίτηση, να γίνει αλλαγή φάσης με άφιξη απαίτησης.

Δεσμεύοντας ως προς το χρόνο, το μέγεθος της απαίτησης x και τα γεγονότα αυτά στο εν λόγω διάστημα παίρνουμε

$$\phi_i(u) = (1+d_{ii}dt)e^{-\delta dt}\phi_i(ue^{rdt} + c\overline{s}_{\overline{dt}|}^{(r)}) + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} d_{ij}dte^{-\delta dt}\phi_j(ue^{rdt} + c\overline{s}_{\overline{dt}|}^{(r)})$$

$$+\sum_{j=1}^{n} D_{ij}dte^{-\delta dt}\left(\int_{0}^{ue^{rdt}+c\overline{s}_{\overline{dt}|}^{(r)}+\frac{c}{r}} \phi_j(ue^{rdt} + c\overline{s}_{\overline{dt}|}^{(r)} - x) f_{ij}(x)dx \right.$$

$$\left. + \int_{ue^{rdt}+c\overline{s}_{\overline{dt}|}^{(r)}+\frac{c}{r}}^{\infty} w(ue^{rdt} + c\overline{s}_{\overline{dt}|}^{(r)}, x - ue^{rdt} - c\overline{s}_{\overline{dt}|}^{(r)}) f_{ij}(x)dx \right) + o(dt), \qquad (i=1,\dots,n). \tag{3.2.3}$$

Από το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor έχουμε $e^{-\delta dt} = 1 - \delta dt + o(dt)$, οπότε παίρνουμε

$$\begin{aligned}(1+d_{ii}dt)e^{-\delta dt} &= (1+d_{ii}dt)[1-\delta dt + o(dt)] \\ &= 1 - \delta dt + d_{ii}dt - \delta d_{ii}(dt)^2 + o(dt) \\ &= 1 - \delta dt + d_{ii}dt + o(dt), \qquad (\text{αφού } (dt)^n = 0,\ \forall\ n \geq 2)\end{aligned}$$

$$d_{ij}dte^{-\delta dt} = d_{ij}dt[1-\delta dt + o(dt)] = d_{ij}dt - \delta d_{ij}(dt)^2 + o(dt) = d_{ij}dt + o(dt),$$

και όμοια $D_{ij}dte^{-\delta dt} = D_{ij}dt + o(dt)$.

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην (3.2.3) προκύπτει ότι

$$\phi_i(u) = (1-\delta dt + d_{ii}dt)\phi_i(ue^{rdt} + c\overline{s}_{\overline{dt}|}^{(r)}) + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} d_{ij}dt\phi_j(ue^{rdt} + c\overline{s}_{\overline{dt}|}^{(r)})$$

$$+\sum_{j=1}^{n} D_{ij}dt\left(\int_{0}^{ue^{rdt}+c\overline{s}_{\overline{dt}|}^{(r)}+\frac{c}{r}} \phi_j(ue^{rdt} + c\overline{s}_{\overline{dt}|}^{(r)} - x) f_{ij}(x)dx \right.$$

$$\left. + \int_{ue^{rdt}+c\overline{s}_{\overline{dt}|}^{(r)}+\frac{c}{r}}^{\infty} w(ue^{rdt} + c\overline{s}_{\overline{dt}|}^{(r)}, x - ue^{rdt} - c\overline{s}_{\overline{dt}|}^{(r)}) f_{ij}(x)dx \right) + o(dt)$$

ισοδύναμα

$$\phi_i(ue^{rdt} + c\overline{s}_{\overline{dt}|}^{(r)}) - \phi_i(u) = \delta dt\phi_i(ue^{rdt} + c\overline{s}_{\overline{dt}|}^{(r)}) - d_{ii}dt\phi_i(ue^{rdt} + c\overline{s}_{\overline{dt}|}^{(r)})$$

$$-\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} d_{ij}dt\phi_j(ue^{rdt} + c\overline{s}_{\overline{dt}|}^{(r)})$$

$$-\sum_{j=1}^{n} D_{ij}dt\left(\int_{0}^{ue^{rdt}+c\overline{s}_{\overline{dt}|}^{(r)}+\frac{c}{r}} \phi_j(ue^{rdt} + c\overline{s}_{\overline{dt}|}^{(r)} - x) f_{ij}(x)dx \right.$$

$$+\int\limits_{ue^{rdt}+c\bar{s}_{\overline{dt|}}^{(r)}+\frac{c}{r}}^{\infty} w(ue^{rdt}+c\bar{s}_{\overline{dt|}}^{(r)}, x-ue^{rdt}-c\bar{s}_{\overline{dt|}}^{(r)}) f_{ij}(x)dx \Bigg) + o(dt) .$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της ισότητας με dt και εν συνεχεία παίρνοντας το όριο καθώς $dt \to 0$ έχουμε

$$\lim_{dt\to 0}\frac{\phi_i(ue^{rdt}+c\bar{s}_{\overline{dt|}}^{(r)})-\phi_i(u)}{dt} = \lim_{dt\to 0}\delta\phi_i(ue^{rdt}+c\bar{s}_{\overline{dt|}}^{(r)}) - \lim_{dt\to 0} d_{ii}\phi_i(ue^{rdt}+c\bar{s}_{\overline{dt|}}^{(r)})$$

$$-\lim_{dt\to 0}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} d_{ij}\phi_j(ue^{rdt}+c\bar{s}_{\overline{dt|}}^{(r)})$$

$$-\lim_{dt\to 0}\sum_{j=1}^{n} D_{ij}\left(\int\limits_{0}^{ue^{rdt}+c\bar{s}_{\overline{dt|}}^{(r)}+\frac{c}{r}} \phi_j(ue^{rdt}+c\bar{s}_{\overline{dt|}}^{(r)}-x) f_{ij}(x)dx\right.$$

$$\left. + \int\limits_{ue^{rdt}+c\bar{s}_{\overline{dt|}}^{(r)}+\frac{c}{r}}^{\infty} w(ue^{rdt}+c\bar{s}_{\overline{dt|}}^{(r)}, x-ue^{rdt}-c\bar{s}_{\overline{dt|}}^{(r)}) f_{ij}(x)dx \right) + \lim_{dt\to 0}\frac{o(dt)}{dt} . \qquad (3.2.4)$$

Είναι

$$\lim_{dt\to 0}(ue^{rdt}+c\bar{s}_{\overline{dt|}}^{(r)}) = \lim_{dt\to 0}\left(ue^{rdt}+c\frac{e^{rdt}-1}{r}\right) = u \qquad \text{και} \qquad \lim_{dt\to 0}\frac{o(dt)}{dt} = 0 .$$

Για το όριο στο αριστερό μέλος της (3.2.4), θέτουμε $h = ue^{rdt}+c\bar{s}_{\overline{dt|}}^{(r)}-u$. Καθώς $dt \to 0$ είναι

$$\lim_{dt\to 0} h = \lim_{dt\to 0}(ue^{rdt}+c\bar{s}_{\overline{dt|}}^{(r)}-u) = \lim_{dt\to 0}\left(ue^{rdt}+c\frac{e^{rdt}-1}{r}-u\right) = u + c\cdot 0 - u = 0 .$$

Επίσης,

$$h = ue^{rdt}+c\bar{s}_{\overline{dt|}}^{(r)}-u = ue^{rdt}+c\frac{e^{rdt}-1}{r}-u = u(e^{rdt}-1)+c\frac{e^{rdt}-1}{r} = (c+ru)\frac{e^{rdt}-1}{r}$$

$$\Rightarrow e^{rdt} = \frac{rh}{c+ru}+1 \Rightarrow dt = \frac{1}{r}\ln\left(\frac{rh}{c+ru}+1\right).$$

Οπότε το όριο του αριστερού μέλους της (3.2.4) γίνεται

$$\lim_{dt\to 0}\frac{\phi_i(ue^{rdt}+c\bar{s}_{\overline{dt|}}^{(r)})-\phi_i(u)}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{\phi_i(u+h)-\phi_i(u)}{\frac{1}{r}\ln\left(\frac{rh}{c+ru}+1\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{\frac{1}{r}\ln\left(\frac{rh}{c+ru}+1\right)}\lim_{h\to 0}\frac{\phi_i(u+h)-\phi_i(u)}{h}$$

$$= (c+ru)\phi_i'(u)$$

αφού, σύμφωνα με τον ορισμό της παραγώγου για μια συνάρτηση g : $g'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$, και $\lim_{h\to 0}\dfrac{h}{\frac{1}{r}\ln\left(\frac{rh}{c+ru}+1\right)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} r=\lim_{h\to 0}\dfrac{h'}{\left[\ln\left(\frac{rh}{c+ru}+1\right)\right]'}=r\lim_{h\to 0}\dfrac{\frac{rh}{c+ru}+1}{\frac{r}{c+ru}}=\lim_{h\to 0}(rh+c+ru)=c+ru$.

Έτσι, από την (3.2.4) παίρνουμε

$$(c+ru)\phi_i'(u)=\delta\phi_i(u)-d_{ii}\phi_i(u)-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n} d_{ij}\phi_j(u)-\sum_{j=1}^{n} D_{ij}\left(\int_0^{u+\frac{c}{r}}\phi_j(u-x)f_{ij}(x)dx+\int_{u+\frac{c}{r}}^{\infty} w(u,x-u)f_{ij}(x)dx\right)$$

και ενσωματώνοντας τον όρο $d_{ii}\phi_i(u)$ στο πρώτο άθροισμα του δεξιού μέλους,

$$(c+ru)\phi_i'(u)=\delta\phi_i(u)-\sum_{j=1}^{n} d_{ij}\phi_j(u)-\sum_{j=1}^{n} D_{ij}\left(\int_0^{u+\frac{c}{r}}\phi_j(u-x)f_{ij}(x)dx+\int_{u+\frac{c}{r}}^{\infty} w(u,x-u)f_{ij}(x)dx\right)$$

που είναι η ζητούμενη σχέση. □

Παρατήρηση 3.2.1. Στην περίπτωση του κλασικού μοντέλου κινδύνου, η ομογενής διαδικασία Poisson με παράμετρο $\lambda>0$, η οποία είναι μια ανανεωτική διαδικασία με τα χρονικά διαστήματα που μεσολαβούν μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων να ακολουθούν εκθετική κατανομή, αποτελεί μια *MAP* με $n=1$, $d_{ij}=-\lambda$, $D_{ij}=\lambda$ και άρα $\mathbf{D_0}=-\lambda$, $\mathbf{D_1}=\lambda$. Τότε η Εξίσωση (3.2.1) γίνεται

$$(c+ru)\phi'(u)=(\delta+\lambda)\phi(u)-\lambda\left(\int_0^{u+\frac{c}{r}}\phi(u-x)f(x)dx+A(u)\right),$$

που είναι το μοντέλο που μελετήθηκε από τους Cai (2007) και Yang et al. (2008).

Για τη συνάρτηση Gerber-Shiu $\phi_i(u)$, $i=1,...,n,$ έχουμε τις παρακάτω οριακές συνθήκες που εξασφαλίζουν τη μοναδικότητα της λύσης της (3.2.1).

(Σ1) *Για τη διαδικασία κινδύνου MAP τάξης n με κατανομή απαιτήσεων που έχει συνάρτηση κατανομής* $F_{ij}(x)$, *είναι*

$$\lim_{u\to -\frac{c}{r}}\begin{pmatrix}\phi_1\left(-\frac{c}{r}\right)\\ \phi_2\left(-\frac{c}{r}\right)\\ \vdots\\ \phi_n\left(-\frac{c}{r}\right)\end{pmatrix}=(\delta\,\mathbf{I_n}-\mathbf{D_0})^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} \qquad \text{ή} \qquad \lim_{u\to -\frac{c}{r}}\underline{\phi}(u)=\mathbf{C}^{-1}\underline{a}, \tag{3.2.5}$$

όπου $\mathbf{I_n}$ *ο μοναδιαίος πίνακας τάξης n και*

$$\mathbf{C} = \delta \mathbf{I_n} - \mathbf{D_0}, \qquad a_i = \sum_{j=1}^{n} D_{ij} A_{ij}\left(-\frac{c}{r}\right), \qquad i = 1,\dots,n. \tag{3.2.6}$$

Σημειώνεται ότι ο πίνακας **C** είναι αντιστρέψιμος για κάθε $\delta \geq 0$, καθώς ο πίνακας $\mathbf{D_0}$ έχει ιδιοτιμές, έστω ξ_i, $i = 1,\dots,n$, αυστηρά αρνητικές, οπότε $\delta - \xi_i > 0$ για κάθε $i = 1,\dots,n$.

Παρατήρηση 3.2.2. Παραγωγίζοντας ως προς u την (3.2.3) έχουμε για την *k*-παράγωγο

$$\lim_{u \to -\frac{c}{r}} \underline{\phi}^{(k)}(u) = [(\delta - kr)\mathbf{I_n} - \mathbf{D_0}]^{-1} \underline{a}_k, \tag{3.2.7}$$

όπου το *i*-οστό στοιχείο του $\underline{a}_k$ είναι

$$\sum_{j=1}^{n} D_{ij} \left\{ \sum_{l=0}^{k-1} \left[\phi_j^{(l)}\left(-\frac{c}{r}\right) f_{ij}^{(k-1-l)}(0) \right] + A_{ij}^{(k)}\left(-\frac{c}{r}\right) \right\}, \qquad i = 1,\dots,n.$$

Υποθέτοντας ότι για $k > 0$ ακέραιο ισχύει $\delta - kr - \xi_i \neq 0$ για κάθε $i = 1,\dots,n$, όπου ξ_i οι ιδιοτιμές του $\mathbf{D_0}$, ο πίνακας $(\delta - kr)\mathbf{I_n} - \mathbf{D_0}$ είναι αντιστρέψιμος, άρα η (3.2.7) ισχύει. Επίσης, οι επιλογές στην πράξη της συνάρτησης ποινής *w* και της πινακοεκθετικής (*Matrix-Exponential*) κατανομής για τα μεγέθη των απαιτήσεων εξασφαλίζουν ότι η ποσότητα $A_{ij}^{(k)}\left(-\frac{c}{r}\right)$ είναι φραγμένη. Σε συνδυασμό με την ύπαρξη του ορίου $\lim_{u \to -\frac{c}{r}} \underline{\phi}(u)$, εξασφαλίζεται η ύπαρξη της παραγώγου *k*-τάξης $\underline{\phi}^{(k)}(u)$.

(Σ2) $$\lim_{u \to \infty} \phi_i(u) = 0, \qquad i = 1,\dots,n \tag{3.2.8}$$

(Σ3) *Έστω ότι για τον θετικό ακέραιο αριθμό k ισχύει* $\delta - kr - \xi_i \neq 0$ *για κάθε* $i = 1,\dots,n$. *Τότε η k-παράγωγος της συνάρτησης Gerber-Shiu ικανοποιεί τη σχέση*

$$\lim_{u \to -\infty} \phi_i^{(k)}(u) = 0, \qquad i = 1,\dots,n, \ \ k = 1, 2, \dots. \tag{3.2.9}$$

Το σύστημα εξισώσεων της (3.2.1), στην περίπτωση που για τις αφίξεις των απαιτήσεων θεωρείται το γενικό μοντέλο των Μαρκοβιανών Διαδικασιών Αφίξεων (MAP), είναι πολύ δύσκολο να λυθεί αναλυτικά. Στη συνέχεια, στην Ενότητα 3.3 εξετάζεται το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου (ή μοντέλο Sparre-Andersen) και ως κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ διαδοχικών αφίξεων απαιτήσεων θεωρείται η γενικευμένη *Erlang*(*n*) κατανομή. Επίσης, γίνεται η υπόθεση ότι τα ύψη των απαιτήσεων ακολουθούν την πινακοεκθετική (*Matrix-Exponential*) κατανομή. Από τις συνοριακές συνθήκες που αναφέρθηκαν προηγουμένως, και θεωρώντας ότι η συνάρτηση ποινής εξαρτάται μόνο από το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, υπολογίζεται η συνάρτηση Gerber-Shiu με μορφή σειράς. Στην Ενότητα 3.4, θεωρείται η περίπτωση των εκθετικά κατανεμημένων απαιτήσεων, και η κατανομή *Erlang*(2) για τους ενδοαφιξιακούς χρόνους και δίνονται αναλυτικές εκφράσεις για την πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο και την κατανομή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας.

3.3 Οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων απαιτήσεων ακολουθούν γενικευμένη *Erlang*(*n*) κατανομή και οι απαιτήσεις πινακοεκθετική κατανομή

Στην ενότητα αυτή θεωρούμε ότι οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων απαιτήσεων ακολουθούν τη γενικευμένη *Erlang*(*n*) κατανομή. Στην περίπτωση αυτή, οι πίνακες $\mathbf{D_0}$ και $\mathbf{D_1}$ έχουν τη μορφή:

$$\mathbf{D_0} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & \cdots & d_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & d_{n3} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_n \end{pmatrix}$$

και

$$\mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & \cdots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & \cdots & D_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & D_{n3} & \cdots & D_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Παρατήρηση 3.3.1. Στην περίπτωση που $\lambda_1 = ... = \lambda_n = \lambda$ προκύπτει η κατανομή *Erlang*(*n*, *λ*), ενώ θέτοντας $n = 1$ και $\lambda_1 = \lambda$ προκύπτει η εκθετική κατανομή $\varepsilon(\lambda)$.

Παρατήρηση 3.3.2. Με τη γενικευμένη *Erlang*(*n*) ως κατανομή των διαστημάτων που μεσολαβούν μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων, η οποία είναι μια κατανομή τύπου φάσεων (phase-type distribution), η διαδικασία αφίξεων πλέον είναι μια PH ανανεωτική διαδικασία.

Περαιτέρω, θεωρούμε ότι τα ύψη των απαιτήσεων ακολουθούν πινακοεκθετική (*Matrix-Exponential*) κατανομή και ότι είναι ανεξάρτητα από τις καταστάσεις i και j της αλυσίδας Markov, συνεπώς στο εξής παραλείπονται οι δείκτες i, j από τα σχετικά εμπλεκόμενα μεγέθη. Η οικογένεια αυτή των κατανομών στο $[0,\infty)$ έχει μετασχηματισμό Laplace που είναι ρητή συνάρτηση (Asmussen and O' Cinneide (1997)), δηλαδή, είναι πηλίκο δύο πολυωνύμων, και έστω έχει τη μορφή

$$\tilde{f}_{ij}(s) = \tilde{f}(s) = \frac{p_1 s^{m-1} + p_2 s^{m-2} + ... + p_{m-1} s + p_m}{q_0 s^m + q_1 s^{m-1} + ... + q_{m-1} s + q_m}, \tag{3.3.1}$$

όπου, $m \ge 1$, $p_1, p_2, ..., p_m, q_0, q_1, ..., q_m$ είναι όλοι πραγματικοί. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $q_0 = 1$. Οι συναρτήσεις πυκνότητας $f(x)$ των οποίων ο μετασχηματισμός Laplace είναι ρητή συνάρτηση της μορφής (3.3.1), ικανοποιούν τη σχέση:

$$f^{(m)}(\cdot) + q_1 f^{(m-1)}(\cdot) + ... + q_m f(\cdot) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{m} q_{m-k} f^{(k)}(\cdot) = 0 \text{ με } q_0 = 1. \tag{3.3.2}$$

Με βάση τις παραπάνω τιμές των d_{ij} και D_{ij}, $i, j = 1, ..., n$, το σύστημα των ολοκληροδιαφορικών Εξισώσεων (3.2.1) απλοποιείται στο επόμενο σύστημα:

$$\begin{cases} (c+ru)\phi_1'(u) = (\delta + \lambda_1)\phi_1(u) - \lambda_1 \phi_2(u), \\ (c+ru)\phi_2'(u) = (\delta + \lambda_2)\phi_2(u) - \lambda_2 \phi_3(u), \\ \vdots \\ (c+ru)\phi_{n-1}'(u) = (\delta + \lambda_{n-1})\phi_{n-1}(u) - \lambda_{n-1}\phi_n(u) \\ (c+ru)\phi_n'(u) = (\delta + \lambda_n)\phi_n(u) - \lambda_n [N_{\phi_1}(u) - A(u)], \end{cases} \tag{3.3.3}$$

όπου

$$N_{\phi_i}(u) = \int_0^{u+\frac{c}{r}} \phi_i(u-x) f(x) dx, \qquad i = 1, ..., n. \tag{3.3.4}$$

Για την επίλυση του συστήματος (3.3.3), θα πρέπει αρχικά να εξαλειφθεί ο όρος με το ολοκλήρωμα στην τελευταία εξίσωση. Το επόμενο λήμμα παρέχει ένα βοηθητικό αποτέλεσμα για το σκοπό αυτό.

Λήμμα 3.3.1. *Εάν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί μια κατανομή της οποίας ο μετασχηματισμός Laplace είναι ρητή συνάρτηση της μορφής* (3.3.1)*, τότε*

$$\sum_{j=0}^{m} q_j N_{\phi_i}^{(m-j)}(u) = \sum_{j=0}^{m-1} \xi_j \phi_i^{(m-1-j)}(u), \qquad i = 1, ..., m, \tag{3.3.5}$$

όπου $\xi_j = \sum_{k=0}^{j} q_{j-k} f^{(k)}(0)$ *και* $\xi_j = 0$ *για* $j < 0$.

Απόδειξη. Θέτοντας $y = u - x + \frac{c}{r} \Rightarrow dy = -dx$, οπότε $0 \le x \le u + \frac{c}{r} \Rightarrow u + \frac{c}{r} \le y \le 0$, το ολοκλήρωμα της (3.3.4) γίνεται

$$N_{\phi_i}(u) = \int_{u+\frac{c}{r}}^{0} \phi_i\left(y - \frac{c}{r}\right) f\left(u + \frac{c}{r} - y\right)(-dy) = \int_0^{u+\frac{c}{r}} \phi_i\left(y - \frac{c}{r}\right) f\left(u + \frac{c}{r} - y\right) dy.$$

Παραγωγίζοντας ως προς *u* διαδοχικά την τελευταία ισότητα προκύπτει η σχέση

$$N_{\phi_i}^{(k)}(u) = \sum_{h=0}^{k-1} f^{(k-1-h)}(0)\phi_i^{(h)}(u) + \int_0^{u+\frac{c}{r}} \phi_i\left(y - \frac{c}{r}\right) f^{(k)}\left(u + \frac{c}{r} - y\right) dy, \quad k = 1, 2, ... \tag{3.3.6}$$

Πράγματι με επαγωγή είναι: Από την παραγώγιση ολοκληρώματος του Leibnitz (Παράρτημα Π1),

$$N'_{\phi_i}(u)=\phi_i(u)\,f(0)+\int_0^{u+\frac{c}{r}}\phi_i\left(y-\frac{c}{r}\right)f'\left(u+\frac{c}{r}-y\right)dy$$

δηλαδή, η (3.3.6) ισχύει για k = 1. Έστω ότι η (3.3.6) ισχύει για k = n, δηλαδή

$$N_{\phi_i}^{(n)}(u)=\sum_{h=0}^{n-1}f^{(n-1-h)}(0)\phi_i^{(h)}(u)+\int_0^{u+\frac{c}{r}}\phi_i\left(y-\frac{c}{r}\right)f^{(n)}\left(u+\frac{c}{r}-y\right)dy \qquad \text{(επαγωγική υπόθεση).}$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία ως προς u, παίρνουμε

$$N_{\phi_i}^{(n+1)}(u)=\frac{d}{du}N_{\phi_i}^{(n)}(u)=\sum_{h=1}^{n}f^{(n-h)}(0)\phi_i^{(h)}(u)+\phi_i(u)\,f^{(n)}(0)+\int_0^{u+\frac{c}{r}}\Phi_i\left(y-\frac{c}{r}\right)f^{(n+1)}\left(u+\frac{c}{r}-y\right)dy$$

$$=\sum_{h=0}^{n}f^{(n-h)}(0)\phi_i^{(h)}(u)+\int_0^{u+\frac{c}{r}}\phi_i\left(y-\frac{c}{r}\right)f^{(n+1)}\left(u+\frac{c}{r}-y\right)dy$$

η οποία είναι η (3.3.6) για k = n +1. Πολλαπλασιάζοντας την (3.3.6) με q_{m-k} και παίρνοντας το άθροισμα και στα δύο μέλη από k = 0 έως m έχουμε

$$\sum_{k=0}^{m}q_{m-k}N_{\phi_i}^{(k)}(u)=\sum_{k=0}^{m}q_{m-k}\left(\sum_{h=0}^{k-1}f^{(k-1-h)}(0)\phi_i^{(h)}(u)\right)+\sum_{k=0}^{m}q_{m-k}\int_0^{u+\frac{c}{r}}\phi_i\left(y-\frac{c}{r}\right)f^{(k)}\left(u+\frac{c}{r}-y\right)dy$$

θεωρούμε ξεχωριστά την περίπτωση $k=0$ στο πρώτο άθροισμα στο δεξί μέλος και εναλλάσσοντας το δεύτερο άθροισμα με το ολοκλήρωμα

$$=q_m\sum_{h=0}^{-1}f^{(-1-h)}(0)\phi_i^{(h)}(u)+\sum_{k=1}^{m}q_{m-k}\left(\sum_{h=0}^{k-1}f^{(k-1-h)}(0)\phi_i^{(h)}(u)\right)$$

$$+\int_0^{u+\frac{c}{r}}\phi_i\left(y-\frac{c}{r}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}q_{m-k}f^{(k)}\left(u+\frac{c}{r}-y\right)\right)dy$$

και αφού το πρώτο άθροισμα είναι 0

$$=\sum_{k=1}^{m}q_{m-k}\left(\sum_{h=0}^{k-1}f^{(k-1-h)}(0)\phi_i^{(h)}(u)\right)+\int_0^{u+\frac{c}{r}}\phi_i\left(y-\frac{c}{r}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}q_{m-k}f^{(k)}\left(u+\frac{c}{r}-y\right)\right)dy$$

με αλλαγή μεταβλητής $l=k-1$ στο διπλό άθροισμα

$$=\sum_{l=0}^{m-1}q_{m-l-1}\left(\sum_{h=0}^{l}f^{(l-h)}(0)\phi_i^{(h)}(u)\right)+\int_0^{u+\frac{c}{r}}\phi_i\left(y-\frac{c}{r}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}q_{m-k}f^{(k)}\left(u+\frac{c}{r}-y\right)\right)dy\,.$$

Όμως από την (3.3.2) το άθροισμα μέσα στο ολοκλήρωμα είναι ίσο με 0. Οπότε έχουμε,

$$\sum_{k=0}^{m}q_{m-k}N_{\phi_i}^{(k)}(u)=\sum_{l=0}^{m-1}q_{m-l-1}\left(\sum_{h=0}^{l}f^{(l-h)}(0)\phi_i^{(h)}(u)\right).$$

Από τη σχέση $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}a_{ij}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n}a_{ij}$ αλλαγής της σειράς στο άθροισμα, προκύπτει

$$\sum_{k=0}^{m}q_{m-k}N_{\phi_i}^{(k)}(u)=\sum_{h=0}^{m-1}\left(\sum_{l=h}^{m-1}q_{m-l-1}f^{(l-h)}(0)\right)\phi_i^{(h)}(u) \qquad \text{και θέτοντας } k=l-h$$

$$=\sum_{h=0}^{m-1}\left(\sum_{k=0}^{m-1-h}q_{m-1-h-k}f^{(k)}(0)\right)\phi_i^{(h)}(u)\,. \tag{3.3.7}$$

Θέτοντας $j=m-k$ στο άθροισμα του 1[ου] μέλους και $j=m-1-h$ στο άθροισμα του 2[ου] μέλους,

$$\sum_{j=m}^{0}q_jN_{\phi_i}^{(m-j)}(u)=\sum_{j=m-1}^{0}\left(\sum_{k=0}^{j}q_{j-k}f^{(k)}(0)\right)\phi_i^{(m-1-j)}(u)$$

και αλλάζοντας τη σειρά άθροισης και στα δύο μέλη παίρνουμε

$$\sum_{j=0}^{m}q_jN_{\phi_i}^{(m-j)}(u)=\sum_{j=0}^{m-1}\xi_j\phi_i^{(m-1-j)}(u)\,, \qquad \text{με } \xi_j=\sum_{k=0}^{j}q_{j-k}f^{(k)}(0)\,. \qquad \square$$

Από την (3.3.7) έχουμε μια εναλλακτική μορφή της Εξίσωσης (3.3.5),

$$\sum_{j=0}^{m}q_{m-j}N_{\phi_i}^{(j)}(u)=\sum_{j=0}^{m-1}\xi_{m-1-j}\phi_i^{(j)}(u)\,, \qquad i=1,\dots,n. \tag{3.3.8}$$

Εισάγοντας τον τελεστή παραγώγισης $D_{(\cdot)}^{(j)}:=\dfrac{\partial^j}{\partial(\cdot)^j}$ με $D_{(\cdot)}^{(0)}=1$, η (3.3.8) γράφεται ως

$$\left(\sum_{j=0}^{m}q_{m-j}D_u^{(j)}\right)N_{\phi_i}(u)=\left(\sum_{j=0}^{m-1}\xi_{m-1-j}D_u^{(j)}\right)\phi_i(u)\,, \qquad i=1,\dots,n. \tag{3.3.9}$$

Η τελευταία εξίσωση του συστήματος (3.3.3) γράφεται ως

$$(\delta+\lambda_n)\phi_n(u)-(c+ru)\phi_n'(u)=\lambda_n[N_{\phi_1}(u)-A(u)]$$

διαιρώντας και τα δύο μέλη της ισότητας με $\delta+\lambda_n$, γίνεται

$$\phi_n(u)-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_n}\phi_n'(u)=\frac{\lambda_n}{\delta+\lambda_n}[N_{\phi_1}(u)-A(u)]$$

και με χρήση του τελεστή παραγώγισης έχουμε

$$\left(1-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_n}D_u\right)\phi_n(u)=\frac{\lambda_n}{\delta+\lambda_n}[N_{\phi_1}(u)-A(u)]\,. \tag{3.3.10}$$

3.3.1 Περίπτωση: Η συνάρτηση ποινής ως συνάρτηση μόνο του ελλείμματος τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας

Στη συνέχεια, για να μπορέσουμε να επεξεργαστούμε περαιτέρω τα αποτελέσματα που αναπτύχθηκαν προηγουμένως και να καταλήξουμε σε μια αναλυτική συμπαγή μορφή, θεωρούμε την περίπτωση όπου η συνάρτηση ποινής είναι συνάρτηση μόνο του ελλείμματος τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας, δηλαδή έχει τη μορφή,

$$w(x,y)=w(y)\,.$$

Αρχικά, για τη συνάρτηση $A(u)$, έχουμε τη σχέση του παρακάτω λήμματος.

Λήμμα 3.3.2. *Στην περίπτωση που για τη συνάρτηση ποινής ισχύει* $w(x,y)=w(y)$*, τότε*

$$\left(\sum_{j=0}^{m} q_{m-j} D_u^{(j)}\right) A(u)=0\,. \tag{3.3.11}$$

Απόδειξη. Από την (3.2.2) είναι

$$A(u)=\int_{u+\frac{c}{r}}^{\infty} w(x-u)\, f(x)dx\,.$$

Θέτοντας $y=x-u \Rightarrow x=y+u \Rightarrow dx=dy$ και $u+\frac{c}{r}\le x<\infty \Rightarrow \frac{c}{r}\le y<\infty$, συνεπώς

$$A(u)=\int_{\frac{c}{r}}^{\infty} w(y)\, f(y+u)dy\,. \tag{3.3.12}$$

Παραγωγίζοντας διαδοχικά ως προς u την (3.3.12) παίρνουμε

$$D_u^{(0)} A(u)=A(u)\,,$$

$$D_u^{(1)} A(u)=\int_{\frac{c}{r}}^{\infty} w(y)\frac{\partial}{\partial u} f(y+u)dy\,,$$

$$D_u^{(2)} A(u)=\int_{\frac{c}{r}}^{\infty} w(y)\frac{\partial^2}{\partial u^2} f(y+u)dy\,,$$

$$\ldots$$

$$D_u^{(m)} A(u)=\int_{\frac{c}{r}}^{\infty} w(y)\frac{\partial^m}{\partial u^m} f(y+u)dy\,.$$

Είναι

$$\left(\sum_{j=0}^{m} q_{m-j} D_u^{(j)}\right) A(u)=q_m D_u^{(0)}A(u)+q_{m-1}D_u^{(1)}A(u)+q_{m-2}D_u^{(2)}A(u)+\ldots+q_1 D_u^{(m-1)}A(u)+q_0 D_u^{(m)}A(u)$$

$$=q_m\int_{\frac{c}{r}}^{\infty} w(y)\, f(y+u)dy+q_{m-1}\int_{\frac{c}{r}}^{\infty} w(y)\frac{\partial}{\partial u} f(y+u)dy+q_{m-2}\int_{\frac{c}{r}}^{\infty} w(y)\frac{\partial^2}{\partial u^2} f(y+u)dy$$

$$+\ldots+q_1\int_{\frac{c}{r}}^{\infty} w(y)\frac{\partial^{m-1}}{\partial u^{m-1}} f(y+u)dy+q_0\int_{\frac{c}{r}}^{\infty} w(y)\frac{\partial^{m}}{\partial u^{m}} f(y+u)dy$$

$$=\int_{\frac{c}{r}}^{\infty} w(y)\sum_{k=0}^{m} q_{m-k}\frac{\partial^{k}}{\partial u^{k}} f(y+u)\,dy$$

$$=\int_{\frac{c}{r}}^{\infty} w(y)\cdot 0\,dy \qquad \text{από την (3.3.2)}$$

$$=0. \qquad \square$$

Η επόμενη πρόταση μας δίνει τη διαφορική εξίσωση για τη συνάρτηση $\phi_1(u)$.

Πρόταση 3.3.1. *Η συνάρτηση Gerber-Shiu* $\phi_1(u)$ *ικανοποιεί την παρακάτω διαφορική εξίσωση τάξης* $(n+m)$ *με μεταβλητούς συντελεστές:*

$$K\left(\sum_{j=0}^{m} q_{m-j}D_u^{(j)}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_i}D_u\right)\right)\phi_1(u)-\left(\sum_{j=0}^{m-1}\xi_{m-1-j}D_u^{(j)}\right)\phi_1(u)=0\,, \tag{3.3.13}$$

όπου

$$K=\prod_{i=1}^{n}\frac{\delta+\lambda_i}{\lambda_i}.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας τον τελεστή πολυώνυμο-παραγώγιση ως προς *u*, $\left(\sum_{j=0}^{m} q_{m-j}D_u^{(j)}\right)$, και στα δύο μέλη της (3.3.10) έχουμε

$$\left(\sum_{j=0}^{m} q_{m-j}D_u^{(j)}\right)\left(1-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_n}D_u\right)\phi_n(u)=\left(\sum_{j=0}^{m} q_{m-j}D_u^{(j)}\right)\left\{\frac{\lambda_n}{\delta+\lambda_n}[N_{\phi_1}(u)-A(u)]\right\}$$

$$=\frac{\lambda_n}{\delta+\lambda_n}\left(\sum_{j=0}^{m} q_{m-j}D_u^{(j)}\right)N_{\phi_1}(u)-\left(\sum_{j=0}^{m} q_{m-j}D_u^{(j)}\right)A(u)$$

και λόγω της (3.3.9) για *i* = 1 και της (3.3.11)

$$=\frac{\lambda_n}{\delta+\lambda_n}\left(\sum_{j=0}^{m-1}\xi_{m-1-j}D_u^{(j)}\right)\phi_1(u)\,. \tag{3.3.14}$$

Από το σύστημα των εξισώσεων (3.3.3) προχωράμε ως εξής: Λύνουμε την πρώτη εξίσωση του συστήματος ως προς $\phi_2(u)$ και με χρήση του τελεστή παραγώγισης, βρίσκουμε:

$$\phi_2(u)=\frac{\delta+\lambda_1}{\lambda_1}\phi_1(u)-\frac{c+ru}{\lambda_1}\phi_1'(u)$$

$$=\frac{\delta+\lambda_1}{\lambda_1}\left(\phi_1(u)-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_1}\phi_1'(u)\right)$$

$$=\frac{\delta+\lambda_1}{\lambda_1}\left(1-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_1}D_u\right)\phi_1(u). \qquad (3.3.15)$$

Όμοια, λύνοντας τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος (3.3.3) ως προς $\phi_3(u)$ και χρησιμοποιώντας από την πρώτη εξίσωση την $\phi_2(u)$ και την παράγωγό της, $\phi_2'(u)$, μέσω της (3.3.15), έχουμε διαδοχικά

$$\phi_3(u)=\frac{\delta+\lambda_2}{\lambda_2}\phi_2(u)-\frac{c+ru}{\lambda_2}\phi_2'(u)$$

$$=\frac{\delta+\lambda_2}{\lambda_2}\frac{\delta+\lambda_1}{\lambda_1}\left(\phi_1(u)-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_1}\phi_1'(u)\right)-\frac{c+ru}{\lambda_2}\frac{\delta+\lambda_1}{\lambda_1}\left(\phi_1'(u)-\frac{r}{\delta+\lambda_1}\phi_1'(u)-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_1}\phi_1''(u)\right)$$

$$=\frac{\delta+\lambda_1}{\lambda_1}\frac{\delta+\lambda_2}{\lambda_2}\left(\phi_1(u)-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_1}\phi_1'(u)\right)-\frac{c+ru}{\lambda_2}\frac{\delta+\lambda_1}{\lambda_1}\frac{\delta+\lambda_2}{\delta+\lambda_2}\left(\phi_1'(u)-\frac{r}{\delta+\lambda_1}\phi_1'(u)-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_1}\phi_1''(u)\right)$$

$$=\frac{\delta+\lambda_1}{\lambda_1}\frac{\delta+\lambda_2}{\lambda_2}\left(\phi_1(u)-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_1}\phi_1'(u)-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_2}\phi_1'(u)+\frac{c+ru}{\delta+\lambda_1}\frac{r}{\delta+\lambda_2}\phi_1'(u)+\frac{c+ru}{\delta+\lambda_1}\frac{c+ru}{\delta+\lambda_2}\phi_1''(u)\right)$$

$$=\frac{\delta+\lambda_1}{\lambda_1}\frac{\delta+\lambda_2}{\lambda_2}\left(1-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_1}D_u\right)\left(\phi_1(u)-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_2}\phi_1'(u)\right)$$

$$=\frac{\delta+\lambda_1}{\lambda_1}\frac{\delta+\lambda_2}{\lambda_2}\left(\left(1-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_1}D_u\right)\left(1-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_2}D_u\right)\right)\phi_1(u)$$

$$=\left(\prod_{i=1}^{3-1}\frac{\delta+\lambda_i}{\lambda_i}\left(1-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_i}D_u\right)\right)\phi_1(u). \qquad (3.3.16)$$

Συνεχίζοντας όμοια, δηλαδή, αντικαθιστώντας μια εξίσωση του συστήματος (3.3.3) στην επόμενή της και απλοποιώντας, έχουμε την παρακάτω σχέση, που είναι γενίκευση των (3.3.15) και (3.3.16),

$$\phi_n(u)=\prod_{i=1}^{n-1}\frac{\delta+\lambda_i}{\lambda_i}\left(1-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_i}D_u\right)\phi_1(u). \qquad n=2,3,\ldots \qquad (3.3.17)$$

Αντικαθιστώντας την (3.3.17) στην (3.3.14) προκύπτει η διαφορική εξίσωση τάξης $(n+m)$ της $\phi_1(u)$ με μεταβλητούς συντελεστές

$$\left(\sum_{j=0}^{m}q_{m-j}D_u^{(j)}\right)\left(1-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_n}D_u\right)\phi_n(u)=\frac{\lambda_n}{\delta+\lambda_n}\left(\sum_{j=0}^{m-1}\xi_{m-1-j}D_u^{(j)}\right)\phi_1(u)$$

$$\left(\sum_{j=0}^{m} q_{m-j} D_u^{(j)}\right)\left(1-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_n} D_u\right)\prod_{i=1}^{n-1}\frac{\delta+\lambda_i}{\lambda_i}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_i} D_u\right)\phi_1(u)=\frac{\lambda_n}{\delta+\lambda_n}\left(\sum_{j=0}^{m-1}\xi_{m-1-j} D_u^{(j)}\right)\phi_1(u)$$

$$\left(\sum_{j=0}^{m} q_{m-j} D_u^{(j)}\right)\left(1-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_n} D_u\right)\frac{\delta+\lambda_n}{\lambda_n}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{\delta+\lambda_i}{\lambda_i}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_i} D_u\right)\phi_1(u)=\left(\sum_{j=0}^{m-1}\xi_{m-1-j} D_u^{(j)}\right)\phi_1(u)$$

$$\left(\sum_{j=0}^{m} q_{m-j} D_u^{(j)}\right)\prod_{i=1}^{n}\frac{\delta+\lambda_i}{\lambda_i}\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_i} D_u\right)\phi_1(u)=\left(\sum_{j=0}^{m-1}\xi_{m-1-j} D_u^{(j)}\right)\phi_1(u)$$

$$K\left(\sum_{j=0}^{m} q_{m-j} D_u^{(j)}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_i} D_u\right)\right)\phi_1(u)=\left(\sum_{j=0}^{m-1}\xi_{m-1-j} D_u^{(j)}\right)\phi_1(u)$$

όπου, $K=\prod_{i=1}^{n}\frac{\delta+\lambda_i}{\lambda_i}$. □

Με την αλλαγή μεταβλητής $x=c+ru$ και θέτοντας $\phi_1(u)=z(x)$ η εξίσωση (3.3.13) γίνεται

$$K\left(\sum_{j=0}^{m} q_{m-j} r^j D_x^{(j)}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{rx}{\delta+\lambda_i} D_x\right)\right)z(x)-\left(\sum_{j=0}^{m-1}\xi_{m-1-j} r^j D_x^{(j)}\right)z(x)=0\,. \qquad (3.3.18).$$

Για την επίλυση της Εξίσωσης (3.3.18), αναζητάμε λύσεις της μορφής

$$z(x)=z(x,h)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+h} \qquad (3.3.19)$$

όπου $a_k=a_k(h)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θέτουμε $a_0=1$. Στην επόμενη πρόταση η Εξίσωση (3.3.18) διαμορφώνεται σε κατάλληλη μορφή προς επίλυση.

Πρόταση 3.3.2. *Η Εξίσωση* (3.3.18) *εκφράζεται ως*

$$\sum_{l=0}^{m-1}\left(\sum_{j=m-l}^{m} r^j[Kq_{m-j}\gamma_{j-(m-l)}(h)-\xi_{m-j-1}]a_{j-(m-l)}[h+j-(m-l)]_j\right)x^{h-(m-l)}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{m} r^j a_{k+j}[h+k+j]_j[Kq_{m-j}\gamma_{k+j}(h)-\xi_{m-j-1}]\right)x^{h+k}=0. \qquad (3.3.20)$$

όπου $K=\prod_{i=1}^{n}\frac{\delta+\lambda_i}{\lambda_i}$.

Απόδειξη. Με βάση την (3.3.19) ο όρος του γινομένου της (3.3.18) γίνεται

$$\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{rx}{\delta+\lambda_i} D_x\right)\right)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+h}=\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{rx}{\delta+\lambda_i} D_x\right)a_k x^{k+h}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\left(a_k x^{k+h}-\frac{rx}{\delta+\lambda_i} a_k(k+h)x^{k+h-1}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{r(k+h)}{\delta + \lambda_i}\right) a_k x^{k+h} . \tag{3.3.21}$$

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό

$$\gamma_k(h) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{r(k+h)}{\delta + \lambda_i}\right), \tag{3.3.22}$$

αντικαθιστούμε την (3.3.21) και την (3.3.19) στην (3.3.18) παίρνουμε

$$K\left(\sum_{j=0}^{m} q_{m-j} r^j D_x^{(j)}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(h) a_k x^{k+h} - \left(\sum_{j=0}^{m-1} \xi_{m-1-j} r^j D_x^{(j)}\right) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+h} = 0 ,$$

ισοδύναμα

$$K \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(h) a_k \left(\sum_{j=0}^{m} q_{m-j} r^j D_x^{(j)}\right) x^{k+h} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\sum_{j=0}^{m-1} \xi_{m-1-j} r^j D_x^{(j)}\right) x^{k+h} = 0 . \tag{3.3.23}$$

Έστω με $[r]_n$, $n \geq 0$, συμβολίζουμε το *καθοδικό παραγοντικό n τάξης* για κάθε πραγματικό αριθμό r που ορίζεται από την

$$[r]_n = r(r-1)...(r-n+1) \text{ με } [r]_0 = 1 .$$

Είναι

$$\left(\sum_{j=0}^{m} q_{m-j} r^j D_x^{(j)}\right) x^{k+h} = q_m r^0 D_x^{(0)} x^{k+h} + q_{m-1} r^1 D_x^{(1)} x^{k+h} + q_{m-2} r^2 D_x^{(2)} x^{k+h} + ... + q_0 r^m D_x^{(m)} x^{k+h}$$

$$= q_m x^{k+h} + q_{m-1} r(k+h) x^{k+h-1} + q_{m-2} r^2 (k+h)(k+h-1) x^{k+h-2} + ...$$

$$+ q_0 r^m (k+h)(k+h-1)...(k+h-m+1) x^{k+h-m}$$

$$= \sum_{j=0}^{m} q_{m-j} r^j [k+h]_j x^{k+h-j}$$

και όμοια

$$\left(\sum_{j=0}^{m-1} \xi_{m-1-j} r^j D_x^{(j)}\right) x^{k+h} = \sum_{j=0}^{m-1} \xi_{m-1-j} r^j [k+h]_j x^{k+h-j} ,$$

οπότε η (3.3.23) γράφεται

$$K \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(h) a_k \left(\sum_{j=0}^{m} q_{m-j} r^j [k+h]_j x^{k+h-j}\right) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\sum_{j=0}^{m-1} \xi_{m-1-j} r^j [k+h]_j x^{k+h-j}\right) = 0 . \tag{3.3.24}$$

Για την επίλυση της (3.3.24) θα ομαδοποιήσουμε τους συντελεστές των όρων x^{k+a}. Αρχικά οι δύο όροι αθροισμάτων θα διαμορφωθούν κατάλληλα. Ο πρώτος όρος της (3.3.24) γράφεται ως

$$K \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(h) a_k \left(\sum_{j=0}^{m} q_{m-j} r^j [k+h]_j x^{k+h-j}\right)$$

(απομονώνουμε τον όρο $j = 0$ στο εσωτερικό άθροισμα)

$$= K\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(h)a_k\left(q_m x^{k+h}+\sum_{j=1}^{m}q_{m-j}r^j[k+h]_j x^{k+h-j}\right)$$

$$= K\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(h)a_k q_m x^{k+h}+K\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(h)a_k\sum_{j=1}^{m}q_{m-j}r^j[k+h]_j x^{k+h-j}$$

(εναλλάσσουμε τη σειρά αθροισμάτων στο δεύτερο όρο)

$$= K\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(h)a_k q_m x^{k+h}+K\sum_{j=1}^{m}q_{m-j}r^j\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(h)a_k[k+h]_j x^{k+h-j}$$

(αναλύουμε το τρίτο άθροισμα σε δύο επιμέρους αθροίσματα)

$$= K\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(h)a_k q_m x^{k+h}+K\sum_{j=1}^{m}q_{m-j}r^j\left(\sum_{k=0}^{j-1}\gamma_k(h)a_k[k+h]_j x^{k+h-j}+\sum_{k=j}^{\infty}\gamma_k(h)a_k[k+h]_j x^{k+h-j}\right)$$

$$= K\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(h)a_k q_m x^{k+h}+K\sum_{j=1}^{m}q_{m-j}r^j\sum_{k=0}^{j-1}\gamma_k(h)a_k[k+h]_j x^{k+h-j}$$

$$+K\sum_{j=1}^{m}q_{m-j}r^j\sum_{k=j}^{\infty}\gamma_k(h)a_k[k+h]_j x^{k+h-j}$$

(κάνουμε αλλαγή δείκτη αθροίσματος στο τελευταίο άθροισμα: $t=k-j$)

$$= K\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(h)a_k q_m x^{k+h}+K\sum_{j=1}^{m}q_{m-j}r^j\sum_{k=0}^{j-1}\gamma_k(h)a_k[k+h]_j x^{k+h-j}$$

$$+K\sum_{j=1}^{m}q_{m-j}r^j\sum_{t=0}^{\infty}\gamma_{t+j}(h)a_{t+j}[t+j+h]_j x^{t+h}$$

(θέτουμε *k* αντί *t* στο τελευταίο άθροισμα)

$$= K\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(h)a_k q_m x^{k+h}+K\sum_{j=1}^{m}q_{m-j}r^j\sum_{k=0}^{j-1}\gamma_k(h)a_k[k+h]_j x^{k+h-j}$$

$$+K\sum_{j=1}^{m}q_{m-j}r^j\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_{k+j}(h)a_{k+j}[k+j+h]_j x^{k+h}\,. \qquad (3.3.25)$$

Με παρόμοια ανάλυση, ο δεύτερος όρος της (3.3.24) γίνεται

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(\sum_{j=0}^{m-1}\xi_{m-1-j}r^j[k+h]_j x^{k+h-j}\right)$$

(απομονώνουμε τον όρο j = 0 στο εσωτερικό άθροισμα)

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(\xi_{m-1}x^{k+h}+\sum_{j=1}^{m-1}\xi_{m-1-j}r^j[k+h]_j x^{k+h-j}\right)$$

(κάνουμε αλλαγή δείκτη αθροίσματος στο τελευταίο άθροισμα: $t=j+1$)

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(\xi_{m-1}x^{k+h}+\sum_{t=2}^{m}\xi_{m-t}r^{t-1}[k+h]_{t-1}x^{k+h-(t-1)}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi_{m-1} x^{k+h} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{t=2}^{m} \xi_{m-t} r^{t-1} [k+h]_{t-1} x^{k+h-(t-1)}$$

(εναλλάσσουμε τη σειρά αθροισμάτων στο δεύτερο όρο)

$$=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi_{m-1} x^{k+h} + \sum_{t=2}^{m} \xi_{m-t} r^{t-1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k [k+h]_{t-1} x^{k+h-(t-1)}$$

(αναλύουμε το τρίτο άθροισμα σε δύο επιμέρους αθροίσματα)

$$=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi_{m-1} x^{k+h} + \sum_{t=2}^{m} \xi_{m-t} r^{t-1} \left(\sum_{k=0}^{t-2} a_k [k+h]_{t-1} x^{k+h-(t-1)} + \sum_{k=t-1}^{\infty} a_k [k+h]_{t-1} x^{k+h-(t-1)} \right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi_{m-1} x^{k+h} + \sum_{t=2}^{m} \xi_{m-t} r^{t-1} \sum_{k=0}^{t-2} a_k [k+h]_{t-1} x^{k+h-(t-1)} + \sum_{t=2}^{m} \xi_{m-t} r^{t-1} \sum_{k=t-1}^{\infty} a_k [k+h]_{t-1} x^{k+h-(t-1)}$$

(κάνουμε αλλαγή δείκτη αθροίσματος στο τελευταίο άθροισμα: $j = k-(t-1)$)

$$=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi_{m-1} x^{k+h} + \sum_{t=2}^{m} \xi_{m-t} r^{t-1} \sum_{k=0}^{t-2} a_k [k+h]_{t-1} x^{k+h-(t-1)}$$

$$+\sum_{t=2}^{m} \xi_{m-t} r^{t-1} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+t-1} [j+t-1+h]_{t-1} x^{j+h}$$

(θέτουμε k αντί j στο τελευταίο άθροισμα)

$$=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi_{m-1} x^{k+h} + \sum_{t=2}^{m} \xi_{m-t} r^{t-1} \sum_{k=0}^{t-2} a_k [k+h]_{t-1} x^{k+h-(t-1)}$$

$$+\sum_{t=2}^{m} \xi_{m-t} r^{t-1} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+t-1} [k+t-1+h]_{t-1} x^{k+h}$$

(θέτουμε j αντί t στα αθροίσματα των δύο τελευταίων όρων)

$$=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi_{m-1} x^{k+h} + \sum_{j=2}^{m} \xi_{m-j} r^{j-1} \sum_{k=0}^{j-2} a_k [k+h]_{j-1} x^{k+h-(j-1)}$$

$$+\sum_{j=2}^{m} \xi_{m-j} r^{j-1} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+j-1} [k+j-1+h]_{j-1} x^{k+h} \, . \tag{3.3.26}$$

Αντικαθιστώντας τις (3.3.25) και (3.3.26) στην (3.3.24) έχουμε

$$K\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(h) a_k q_m x^{k+h} + K\sum_{j=1}^{m} q_{m-j} r^j \sum_{k=0}^{j-1} \gamma_k(h) a_k [k+h]_j x^{k+h-j} + K\sum_{j=1}^{m} q_{m-j} r^j \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k+j}(h) a_{k+j} [k+j+h]_j x^{k+h}$$

$$-\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi_{m-1} x^{k+h} + \sum_{j=2}^{m} \xi_{m-j} r^{j-1} \sum_{k=0}^{j-2} a_k [k+h]_{j-1} x^{k+h-(j-1)} + \sum_{j=2}^{m} \xi_{m-j} r^{j-1} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+j-1} [k+j-1+h]_{j-1} x^{k+h} \right) = 0$$

(3.3.27)

Αναγνωρίζουμε δύο τύπους όρων: αυτούς με x^{h+k} και αυτούς με x^{h-k}, για $k \geq 0$. Οι συντελεστές των όρων της (3.3.27) που περιέχουν x^{h+k} μπορούν να ομαδοποιηθούν περαιτέρω:

$$K\gamma_k(h)a_k q_m + K\sum_{j=1}^{m} q_{m-j} r^j \gamma_{k+j}(h) a_{k+j}[h+k+j]_j - a_k \xi_{m-1} - \sum_{j=2}^{m} a_{k+j-1}\xi_{m-j} r^{j-1}[h+k+j-1]_{j-1}$$

(ο πρώτος όρος ενσωματώνεται στο άθροισμα του δευτέρου όρου για τιμή $j = 0$, ο τρίτος όρος ενσωματώνεται στο άθροισμα του τέταρτου όρου για τιμή $j = 1$)

$$= K\sum_{j=0}^{m} q_{m-j} r^j \gamma_{k+j}(h) a_{k+j}[h+k+j]_j - \sum_{j=1}^{m} a_{k+j-1}\xi_{m-j} r^{j-1}[h+k+j-1]_{j-1}$$

(κάνουμε αλλαγή δείκτη αθροίσματος στο τελευταίο άθροισμα: $t = j-1$)

$$= K\sum_{j=0}^{m} q_{m-j} r^j \gamma_{k+j}(h) a_{k+j}[h+k+j]_j - \sum_{t=0}^{m-1} a_{k+t}\xi_{m-t-1} r^{t}[h+k+t]_{t}$$

(στο τελευταίο άθροισμα ενσωματώνουμε τον όρο $t = m$, αφού είναι

$a_{k+m}\xi_{m-m-1} r^m [h+k+m]_m = a_{k+m}\xi_{-1} r^m [h+k+m]_m = 0$ λόγω ότι $\xi_j = 0$ για $j < 0$)

$$= K\sum_{j=0}^{m} q_{m-j} r^j \gamma_{k+j}(h) a_{k+j}[h+k+j]_j - \sum_{t=0}^{m} a_{k+t}\xi_{m-t-1} r^{t}[h+k+t]_{t}$$

(θέτουμε j αντί t στο τελευταίο άθροισμα)

$$= K\sum_{j=0}^{m} q_{m-j} r^j \gamma_{k+j}(h) a_{k+j}[h+k+j]_j - \sum_{j=0}^{m} a_{k+j}\xi_{m-j-1} r^{j}[h+k+j]_{j}$$

$$= \sum_{j=0}^{m} r^j a_{k+j}[h+k+j]_j [K q_{m-j}\gamma_{k+j}(h) - \xi_{m-j-1}]. \tag{3.3.28}$$

Για τους όρους της (3.3.27) που περιέχουν x^{h-k} με $k = 1,\dots,m$, έχουμε

$$K\sum_{j=1}^{m} q_{m-j} r^j \sum_{k=0}^{j-1} \gamma_k(h) a_k [k+h]_j x^{k+h-j} - \sum_{j=2}^{m} \xi_{m-j} r^{j-1} \sum_{k=0}^{j-2} a_k [k+h]_{j-1} x^{k+h-(j-1)}$$

(απομονώνουμε στο πρώτο άθροισμα τον όρο για $j = m$, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $q_0 = 1$, ενώ στον δεύτερο όρο θέτουμε $t = j-1$)

$$= Kr^m \sum_{k=0}^{m-1} \gamma_k(h) a_k [k+h]_m x^{k+h-m} + K\sum_{j=1}^{m-1} q_{m-j} r^j \sum_{k=0}^{j-1} \gamma_k(h) a_k [k+h]_j x^{k+h-j}$$
$$- \sum_{t=1}^{m-1} \xi_{m-t-1} r^{t} \sum_{k=0}^{t-1} a_k [k+h]_{t} x^{k+h-t}$$

(θέτουμε j αντί t στο τελευταίο άθροισμα)

$$= Kr^m \sum_{k=0}^{m-1} \gamma_k(h) a_k [k+h]_m x^{k+h-m} + K\sum_{j=1}^{m-1} q_{m-j} r^j \sum_{k=0}^{j-1} \gamma_k(h) a_k [k+h]_j x^{k+h-j}$$
$$- \sum_{j=1}^{m-1} \xi_{m-j-1} r^{j} \sum_{k=0}^{j-1} a_k [k+h]_{j} x^{k+h-j}$$

(ομαδοποιούμε τα δύο τελευταία αθροίσματα)

$$= Kr^m \sum_{k=0}^{m-1} \gamma_k(h) a_k [k+h]_m x^{k+h-m} + \sum_{j=1}^{m-1} r^j \left(\sum_{k=0}^{j-1} [Kq_{m-j}\gamma_k(h) - \xi_{m-j-1}] a_k [k+h]_j x^{k+h-j} \right)$$

(ο πρώτος όρος ενσωματώνεται στο άθροισμα του δεύτερου όρου, αφού για $j = m$ ο δεύτερος όρος γίνεται

$$r^m \left(\sum_{k=0}^{m-1} [Kq_0 \gamma_k(h) - \xi_{-1}] a_k [k+h]_m x^{k+h-m} \right) = Kr^m \left(\sum_{k=0}^{m-1} \gamma_k(h) a_k [k+h]_m x^{k+h-m} \right)$$

λόγω του ότι $\xi_j = 0$ για $j < 0$ και $q_0 = 1$)

$$= \sum_{j=1}^{m} r^j \left(\sum_{k=0}^{j-1} [Kq_{m-j}\gamma_k(h) - \xi_{m-j-1}] a_k [k+h]_j x^{k+h-j} \right). \tag{3.3.29}$$

Με την αλλαγή του δείκτη αθροίσματος $i = m - j$ η (3.3.29) γράφεται

$$\sum_{i=m-1}^{0} r^{m-i} \left(\sum_{k=0}^{m-i-1} [Kq_i \gamma_k(h) - \xi_{i-1}] a_k [k+h]_{m-i} x^{k+h+i-m} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} r^{m-i} \left(\sum_{k=0}^{m-i-1} [Kq_i \gamma_k(h) - \xi_{i-1}] a_k [k+h]_{m-i} x^{k+h+i-m} \right)$$

(κάνουμε αλλαγή δείκτη αθροίσματος στο εσωτερικό άθροισμα: $l = k + i$)

$$= \sum_{i=0}^{m-1} r^{m-i} \left(\sum_{l=i}^{m-1} [Kq_i \gamma_{l-i}(h) - \xi_{i-1}] a_{l-i} [h+l-i]_{m-i} x^{h+l-m} \right)$$

(εφαρμόζουμε τη σχέση $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} a_{ij} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij}$ αλλαγής της σειράς στο άθροισμα)

$$= \sum_{l=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{l} r^{m-i} [Kq_i \gamma_{l-i}(h) - \xi_{i-1}] a_{l-i} [h+l-i]_{m-i} x^{h+l-m}$$

(κάνουμε αλλαγή δείκτη αθροίσματος στο εσωτερικό άθροισμα: $j = m - i$)

$$= \sum_{l=0}^{m-1}\sum_{j=m-l}^{m} r^j [Kq_{m-j}\gamma_{j-(m-l)}(h) - \xi_{m-j-1}] a_{j-(m-l)} [h+j-(m-l)]_j x^{h-(m-l)}. \tag{3.3.30}$$

Με χρήση των (3.3.28) και (3.3.30) η Εξίσωση (3.3.27) και συνεπώς η (3.3.24) γράφεται στη ζητούμενη μορφή

$$\sum_{l=0}^{m-1} \left(\sum_{j=m-l}^{m} r^j [Kq_{m-j}\gamma_{j-(m-l)}(h) - \xi_{m-j-1}] a_{j-(m-l)} [h+j-(m-l)]_j \right) x^{h-(m-l)}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{m} r^j a_{k+j} [h+k+j]_j [Kq_{m-j}\gamma_{k+j}(h) - \xi_{m-j-1}] \right) x^{h+k} = 0. \qquad \square$$

Η Εξίσωση (3.3.20) είναι η βασική εξίσωση στο μοντέλο που εξετάζουμε. Οι συντελεστές a_k, $k \ge 0$ προσδιορίζονται αναδρομικά από αυτήν. Για να το πετύχουμε αυτό, αρχικά απαιτούμε όλοι οι συντελεστές του όρου x^{h+k}, από το δεύτερο άθροισμα της (3.3.20), να είναι μηδέν. Δηλαδή,

$$h_k(a_k, a_{k+1}, ..., a_{k+m}) \equiv \sum_{j=0}^{m} r^j [Kq_{m-j}\gamma_{k+j}(h) - \xi_{m-j-1}] a_{k+j} [h + j + k]_j = 0, \tag{3.3.31}$$

για κάθε $k = 0,1,...$ και κάθε h. Παρατηρούμε ότι για κάθε k παίρνουμε μια αναδρομική σχέση εκφρασμένη στις $m+1$ τιμές των συντελεστών $a_{(\cdot)}$, με αρχικό σημείο $a_0 = 1$. Επίσης, απαιτούμε όλοι οι συντελεστές που περιέχουν τον όρο x^{h-k}, $k = 1,...,m$, από το πρώτο άθροισμα της (3.3.20), να είναι μηδέν. Στην περίπτωση αυτή, για συγκεκριμένες τιμές του $l = 0,...,m-1$, παίρνουμε ένα σύστημα εξισώσεων της μορφής:

$$\begin{cases} p_0(a_0) = 0, \\ p_1(a_0, a_1) = 0, \\ \vdots \\ p_{m-1}(a_0, ..., a_{m-1}) = 0, \end{cases} \tag{3.3.32}$$

όπου, $p_l(\cdot, \cdot, ..., \cdot)$ είναι συναρτήσεις με γενικό όρο της μορφής

$$p_l(a_0, ..., a_l) \equiv \sum_{j=m-l}^{m} r^j [Kq_{m-j}\gamma_{j-(m-l)}(h) - \xi_{m-j-1}] a_{j-(m-l)} [h + j - (m-l)]_j . \tag{3.3.33}$$

Από την πρώτη εξίσωση του συστήματος (3.3.32) και με τη βοήθεια της (3.3.33), είναι

$$p_0(a_0) = 0 \Rightarrow \sum_{j=m}^{m} r^j [Kq_{m-j}\gamma_{j-m}(h) - \xi_{m-j-1}] a_{j-m} [h + j - m]_m = 0$$

$$\Rightarrow r^m [Kq_0\gamma_0(h) - \xi_{-1}] a_0 [h]_m = 0 .$$

Αλλά $q_0 = 1$, $\xi_{-1} = 0$, $a_0 = 1$, οπότε η τελευταία σχέση γίνεται

$$r^m K\gamma_0(h)[h]_m = 0 . \tag{3.3.34}$$

Συνεπώς, αναζητάμε τις τιμές του h ώστε να ισχύει η (3.3.34). Επίσης, από την (3.3.22) είναι

$$\gamma_0(h) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{rh}{\delta + \lambda_i} \right),$$

οπότε, υπάρχουν $n+m$ λύσεις για την (3.3.34). Τέλος, η σειρά-λύση της (3.3.20) που αναζητάμε, ικανοποιεί την εξίσωση που δίνεται στο Λήμμα 3.3.3.

Λήμμα 3.3.3. *Η λύση* $z(x)$ *της Εξίσωσης* (3.3.20) *ικανοποιεί την Εξίσωση*

$$Lz(x) = 0, \tag{3.3.35}$$

όπου

$$Lz(x) = Lz(x,h) = f(h)a_0(h)x^h + \sum_{l=1}^{m-1}\left(f(h+l)a_l(h) - \sum_{k=0}^{l-1} g_l(k,h)a_k(h) \right)x^{h+l}$$

$$+\sum_{l=m}^{\infty}\left(f(h+l)a_l(h) - \sum_{s=l-m}^{l-1} g_l(s,h)a_s(h) \right)x^{h+l}, \qquad (3.3.36)$$

με

$$f(h+l) = r^m K\gamma_l(h)[h+l]_m,$$

$$g_i(j,h) = -r^{m-i+j}[Kq_{i-j}\gamma_j(h) - \xi_{i-j-1}][h+j]_{m-i+j}.$$

Απόδειξη. Πολλαπλασιάζοντας την (3.3.20) με x^m προκύπτει

$$\sum_{l=0}^{m-1}\left(\sum_{j=m-l}^{m} r^j [Kq_{m-j}\gamma_{j-(m-l)}(h) - \xi_{m-j-1}]a_{j-(m-l)}[h+j-(m-l)]_j \right)x^{h+l}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{m} r^j a_{k+j}[h+k+j]_j [Kq_{m-j}\gamma_{k+j}(h) - \xi_{m-j-1}] \right)x^{h+k+m} = 0. \qquad (3.3.37)$$

Στη συνέχεια, διαμορφώνουμε κατάλληλα το κάθε ένα από τα δύο αθροίσματα στο αριστερό μέλος της (3.3.37). Για το πρώτο άθροισμα έχουμε: γράφουμε ξεχωριστά τον όρο για $l=0$, οπότε στο εσωτερικό άθροισμα γίνεται $j=m$, και προκύπτει

$$r^m[Kq_0\gamma_0(h) - \xi_{-1}]a_0[h]_m x^h + \sum_{l=1}^{m-1}\left(\sum_{j=m-l}^{m} r^j [Kq_{m-j}\gamma_{j-(m-l)}(h) - \xi_{m-j-1}]a_{j-(m-l)}[h+j-(m-l)]_j \right)x^{h+l}.$$

Αλλά $q_0 = 1$, $\xi_{-1} = 0$, $a_0 \equiv a_0(h)$, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$r^m K\gamma_0(h)a_0(h)[h]_m x^h + \sum_{l=1}^{m-1}\left(\sum_{j=m-l}^{m} r^j [Kq_{m-j}\gamma_{j-(m-l)}(h) - \xi_{m-j-1}]a_{j-(m-l)}[h+j-(m-l)]_j \right)x^{h+l}.$$

Για το εσωτερικό άθροισμα, θέτουμε $k = j-(m-l)$ οπότε $m-l \le k \le m \Rightarrow 0 \le k \le l$ και έχουμε

$$r^m K\gamma_0(h)[h]_m a_0(h)x^h + \sum_{l=1}^{m-1}\left(\sum_{k=0}^{l} r^{k+m-l}[Kq_{l-k}\gamma_k(h) - \xi_{l-k-1}]a_k[h+k]_{k+m-l} \right)x^{h+l}.$$

Γράφουμε ξεχωριστά τον όρο για $k = l$ οπότε προκύπτει

$$r^m K\gamma_0(h)[h]_m a_0(h)x^h + \sum_{l=1}^{m-1}\Big(r^m[Kq_0\gamma_l(h) - \xi_{-1}]a_l[h+l]_m$$

$$+\sum_{k=0}^{l-1} r^{k+m-l}[Kq_{l-k}\gamma_k(h) - \xi_{l-k-1}]a_k[h+k]_{k+m-l} \Big)x^{h+l},$$

και λόγω ότι $q_0 = 1$, $\xi_{-1} = 0$, $a_l \equiv a_l(h)$, γίνεται

$$r^m K\gamma_0(h)[h]_m a_0(h)x^h + \sum_{l=1}^{m-1}\Big(r^m K\gamma_l(h)a_l(h)[h+l]_m$$

$$+\sum_{k=0}^{l-1} r^{k+m-l}[Kq_{l-k}\gamma_k(h)-\xi_{l-k-1}]a_k(h)[h+k]_{k+m-l}\Bigg)x^{h+l}.$$

Θέτοντας

$$f(h+l)=r^m K\gamma_l(h)[h+l]_m, \tag{3.3.38α}$$

και

$$g_i(j,h)=-r^{m-i+j}[Kq_{i-j}\gamma_j(h)-\xi_{i-j-1}][h+j]_{m-i+j}, \tag{3.3.38β}$$

η παραπάνω εκφάζεται ως

$$f(h)a_0(h)x^h+\sum_{l=1}^{m-1}\left(f(h+l)a_l(h)-\sum_{k=0}^{l-1}g_l(k,h)a_k(h)\right)x^{h+l}. \tag{3.3.39}$$

Για το δεύτερο άθροισμα στο αριστερό μέλος της (3.3.37) έχουμε: θέτουμε $l=k+m$, οπότε είναι $0\le k<\infty \Rightarrow m\le l<\infty$ και το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{m} r^j a_{k+j}[h+k+j]_j[Kq_{m-j}\gamma_{k+j}(h)-\xi_{m-j-1}]\right)x^{h+k+m}$$

γίνεται

$$\sum_{l=m}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{m} r^j a_{l-m+j}[h+l-m+j]_j[Kq_{m-j}\gamma_{l-m+j}(h)-\xi_{m-j-1}]\right)x^{h+l}.$$

Στο εσωτερικό άθροισμα, θέτουμε $s=l-m+j$ οπότε $0\le j\le m \Rightarrow l-m\le s\le l$ και η παραπάνω γίνεται

$$\sum_{l=m}^{\infty}\left(\sum_{s=l-m}^{l} r^{s-l+m}a_s[h+s]_{s-l+m}[Kq_{l-s}\gamma_s(h)-\xi_{l-s-1}]\right)x^{h+l}.$$

Γράφοντας ξεχωριστά τον όρο για $s=l$, έχουμε

$$\sum_{l=m}^{\infty}\left(r^m a_l[h+l]_m[Kq_0\gamma_l(h)-\xi_{-1}]+\sum_{s=l-m}^{l-1} r^{s-l+m}a_s[h+s]_{s-l+m}[Kq_{l-s}\gamma_s(h)-\xi_{l-s-1}]\right)x^{h+l},$$

και λόγω ότι $q_0=1$, $\xi_{-1}=0$, $a_l\equiv a_l(h)$, $a_s\equiv a_s(h)$, η ανωτέρω γίνεται

$$\sum_{l=m}^{\infty}\left(r^m a_l(h)[h+l]_m K\gamma_l(h)+\sum_{s=l-m}^{l-1} r^{s-l+m}a_s(h)[h+s]_{s-l+m}[Kq_{l-s}\gamma_s(h)-\xi_{l-s-1}]\right)x^{h+l}$$

και από τις (3.3.38α), (3.3.38β) καταλήγουμε στην

$$\sum_{l=m}^{\infty}\left(f(h+l)a_l(h)-\sum_{s=l-m}^{l-1} g_l(s,h)a_s(h)\right)x^{h+l}. \tag{3.3.40}$$

Από τις (3.3.35), (3.3.37), (3.3.39) και (3.3.40) έχουμε τη ζητούμενη σχέση (3.3.36). □

Για να ισχύει η (3.3.35), θα πρέπει, μηδενίζοντας τους συντελεστές του x^{h+l} να ισχύουν οι επόμενες αναδρομικές σχέσεις:

$$a_0 \equiv a_0(h) = 1,$$

$$f(h+l)a_l(h) - \sum_{k=0}^{l-1} g_l(k,h)a_k(h) = 0 \Rightarrow a_l \equiv a_l(h) = \frac{\sum_{k=0}^{l-1} g_l(k,h)a_k(h)}{f(h+l)}, \qquad l = 1,2,\dots,m-1$$

$$f(h+l)a_l(h) - \sum_{k=0}^{l-1} g_l(k,h)a_k(h) = 0 \Rightarrow a_l \equiv a_l(h) = \frac{\sum_{k=0}^{l-1} g_l(k,h)a_k(h)}{f(h+l)}, \qquad l = m, m+1,\dots$$

(3.3.41)

Η μορφή της λύσης για τη συνάρτηση $\phi_1(u)$, όταν η συνάρτηση ποινής εξαρτάται από το έλλειμμα τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας, εξαρτάται από τις λύσεις της Εξίσωσης (3.3.34). Στις επόμενες δύο προτάσεις δίνεται χωρίς απόδειξη η συνάρτηση Gerber-Shiu, με τη μορφή σειράς όπου οι συντελεστές υπολογίζονται αναδρομικά, αρχικά όταν οι ενδοαφιξιακοί χρόνοι ακολουθούν *Erlang*(*n*) κατανομή, και στη συνέχεια τη γενικευμένη *Erlang*(*n*) κατανομή, και τα ύψη των απαιτήσεων ακολουθούν την πινακοεκθετική κατανομή. Οι υπόλοιπες συναρτήσεις Gerber-Shiu $\phi_i(u)$, $i = 2,\dots,n$, υπολογίζονται μία-μία αντικαθιστώντας την $\phi_1(u)$ στο σύστημα Εξισώσεων (3.3.3).

Πρόταση 3.3.3. *Έστω ότι τα μεγέθη των απαιτήσεων ακολουθούν την πινακοεκθετική (Matrix-Exponential) κατανομή με πυκνότητα που ικανοποιεί την Εξίσωση* (3.3.1) *και οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων απαιτήσεων ακολουθούν την* $Erlang(n)$ *κατανομή που ορίζεται από τους πίνακες* $\mathbf{D_0}$ *και* $\mathbf{D}_1$, *με* $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$. *Η συνάρτηση Gerber-Shiu* $\phi_1(u)$ *έχει τη μορφή*

$$\phi_1(u) = \sum_{i=1}^{n+m} k_i z_i(ru+c),$$

όπου οι σταθερές k_i *προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες των Εξισώσεων* (3.2.4), (3.2.9), (3.2.10)*, και οι* $z_i(x)$ *ορίζονται ως ακολούθως:*

(i) *Εάν* $\frac{\delta+\lambda}{r} \notin \mathbf{Z}_+$ *τότε,*

$$z_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(h_1) x^{k+h_1}, \qquad (3.3.42)$$

όπου,

$$h_1 = m-1. \qquad (3.3.43)$$

Για $i = 2,3,\dots,m,$ *οι όροι* $z_i(x)$ *ορίζονται ως*

$$z_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b'_{k,i}(h_i) x^{k+h_i} \,, \qquad (3.3.44)$$

με

$$h_i = m - i, \qquad b_{k,i}(h) = (h - h_i) a_k(h), \qquad (3.3.45)$$

όπου οι όροι $a_k(h)$ *ορίστηκαν στην* (3.3.41).

Για $j = 1, 2, ..., n,$ *οι όροι* $z_{m+j}(x)$ *ορίζονται ως*

$$z_{m+j}(x) = \frac{\partial^{j-1}}{\partial h^{j-1}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k(h) x^{k+h} \right]_{h=\frac{\lambda+\delta}{r}} , \qquad (3.3.46)$$

όπου οι όροι $a_k(h)$ *ορίστηκαν στην* (3.3.41).

(ii) *Εάν* $\frac{\delta+\lambda}{r} \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0,1,...,m-1\},$ *τότε, οι* $z_{m+j}(x),\ \ j = 1, 2, ..., n,$ *ορίζονται από την* (3.3.46), *και για* $i = 1, 2, ..., m,$ *οι* $z_i(x)$ *ορίζονται από τη σχέση*

$$z_i(x) = b_{N_i,i}(h_i) z_{m+1}(x) \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} b'_{k,i}(h_i) x^{k+h_i}, \qquad (3.3.47)$$

με

$$N_i = \frac{\delta+\lambda}{r} - h_i \qquad (3.3.48)$$

και h_i, $b_{k,i}(h)$ *όπως στην* (3.3.45).

(iii) *Εάν* $\frac{\delta+\lambda}{r} = h_{l_0} = m - l_0 \in \{0,1,...,m-1\},$ *οι* $z_i(x)$, $i = 1, 2, ..., m,$ *ορίζονται όπως στο* (i) *από τις Εξισώσεις* (3.3.42) - (3.3.45), *ενώ για* $j = 1, 2, ..., n,$ *ορίζονται ως*

$$z_{m+j}(x) = \frac{\partial^j}{\partial h^j} (z_{l_0}(x)) \bigg|_{h=m-l_0} . \qquad (3.3.49)$$

Απόδειξη. Theorem 6, Mitric et al. (2012). □

Η μορφή της συνάρτησης Gerber-Shiu στην περίπτωση που οι ενδοαφιξιακοί χρόνοι ακολουθούν τη γενικευμένη *Erlang*(*n*) κατανομή δίνεται στην επόμενη πρόταση. Η περίπτωση (i), όπου όλες οι ρίζες της (3.3.34) είναι διαφορετικές και η διαφορά ανάμεσα στους μη ακέραιους $\frac{\lambda_i+\delta}{r}$ και $\frac{\lambda_j+\delta}{r}$ δεν είναι ακέραιος για όλα τα $i, j = 1, ..., n$, είναι αυτή που συναντάται συχνότερα στην πράξη.

Πρόταση 3.3.4. *Έστω ότι τα μεγέθη των απαιτήσεων ακολουθούν την πινακοεκθετική (Matrix-Exponential) κατανομή με πυκνότητα που ικανοποιεί την Εξίσωση* (3.3.1) *και οι χρόνοι μεταξύ* *διαδοχικών αφίξεων απαιτήσεων ακολουθούν τη γενικευμένη* $Erlang(n)$ *κατανομή που ορίζεται από τους πίνακες* $\mathbf{D_0}$ *και* $\mathbf{D}_1$, *με* $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n$.

(i) *Έστω ότι* $\dfrac{\delta+\lambda_j}{r} \neq 1, 2, \ldots,\ \ j = 1, \ldots, n$ *και η διαφορά* $\dfrac{\lambda_i - \lambda_j}{r} = \dfrac{\delta+\lambda_i}{r} - \dfrac{\delta+\lambda_j}{r}$ *δεν είναι ακέραιος για* $i, j = 1, \ldots, n$. *Η συνάρτηση Gerber-Shiu* $\phi_1(u)$ *έχει τη μορφή*

$$\phi_1(u) = \sum_{i=1}^{n+m} k_i z_i(ru+c),$$

όπου οι σταθερές k_i *προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες των Εξισώσεων* (3.2.5), (3.2.9), (3.2.10), *και οι* $z_i(x)$ *ορίζονται ως:*

$$z_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(h_1) x^{k+h_1}, \qquad h_1 = m-1, \tag{3.3.50}$$

και για $i = 2, 3, \ldots, m,$

$$z_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b'_{k,i}(h_i) x^{k+h_i}, \tag{3.3.51}$$

με

$$h_i = m-i, \qquad b_{k,i}(h) = (h-h_i) a_k(h), \tag{3.3.52}$$

όπου οι όροι $a_k(h)$ *ορίστηκαν στην* (3.3.41).

Οι υπόλοιπες λύσεις είναι

$$z_{m+j}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(h_{m+k}) x^{k+h_{m+j}}, \qquad h_{m+k} = \frac{\lambda_j+\delta}{r}. \tag{3.3.53}$$

(ii) *Εάν μία ή περισσότερες λύσεις* $h_{m+j} = \dfrac{\delta+\lambda_j}{r}$ *είναι ακέραιοι, μεγαλύτεροι από* $m-1$,

$$z_k(x) = b_{N_k,k}(h_k) z_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b'_{n,k}(h_k) x^{n+h_k}, \tag{3.3.54}$$

όπου,

$$N_k = h_1 - h_k.$$

Εάν οι λύσεις $h_{m+l} = \dfrac{\delta+\lambda_l}{r}$ *δεν είναι ακέραιοι,*

$$z_{m+l}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(h_{m+l}) x^{k+h_m+l}, \tag{3.3.56}$$

(iii) *Εάν μία ή περισσότερες λύσεις* h_{m+j} *είναι ακέραιοι, μικρότεροι ή ίσοι από* $m-1$, *(έχουμε την περίπτωση διπλών ριζών),*

$$z_{m+k_0}(x)=\frac{\partial}{\partial h}z_{l_0}(x,h_{l_0})=z_{l_0}(x)\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}h'_k(h_{l_0})x^{k+l_0}\,. \qquad (3.3.57)$$

Απόδειξη. Theorem 7, Mitric et al. (2012). □

3.4 Εφαρμογή: Ενδοαφιξιακοί χρόνοι απαιτήσεων με *γενικευμένη Erlang*(2) κατανομή και μεγέθη απαιτήσεων με εκθετική κατανομή

Θεωρούμε την ειδική περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου (Sparre Andersen) όπου οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων απαιτήσεων ακολουθούν τη *γενικευμένη Erlang*(2) κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(t)=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}(e^{-\lambda_2 t}-e^{-\lambda_1 t}),\ t\geq 0,\ \lambda_1\neq\lambda_2 \qquad (3.4.1)$$

και οι απαιτήσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x)=\beta e^{-\beta x},\ x>0. \qquad (3.4.2)$$

Συνεπώς, οι παράμετροι του μοντέλου αυτού, λόγω της κατανομής των ενδοαφιξιακών χρόνων είναι:

$$n=2,\ \mathbf{D_0}=\begin{pmatrix}d_{11} & d_{12}\\ d_{21} & d_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda_1 & \lambda_1\\ 0 & -\lambda_2\end{pmatrix},\ \mathbf{D_1}=\begin{pmatrix}D_{11} & D_{12}\\ D_{21} & D_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \lambda_2 & 0\end{pmatrix}.$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της εκθετικής κατανομής είναι $\tilde{f}(s)=\dfrac{\beta}{\beta+s}$ που είναι της μορφής (3.3.1) με $m=1,\ q_0=1,\ q_1=\beta$.

Επίσης από το Λήμμα 3.3.1, έχουμε $\xi_0=\sum_{k=0}^{0}q_{0-k}f^{(k)}(0)=q_0f^{(0)}(0)=q_0f(0)=1\cdot\beta e^{-\beta\cdot 0}=\beta$.

Η Εξίσωση (3.3.13) γίνεται

$$\prod_{i=1}^{2}\frac{\delta+\lambda_i}{\lambda_i}\left(\sum_{j=0}^{1}q_{1-j}D_u^{(j)}\right)\left(\prod_{i=1}^{2}\left(1-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_i}D_u\right)\right)\phi_1(u)=\left(\sum_{j=0}^{1-1}\xi_{1-1-j}D_u^{(j)}\right)\phi_1(u)$$

ή

$$\frac{\delta+\lambda_1}{\lambda_1}\frac{\delta+\lambda_2}{\lambda_2}\left(q_1D_u^{(0)}+q_0D_u^{(1)}\right)\left(\prod_{i=1}^{2}\left(1-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_i}D_u\right)\right)\phi_1(u)=\xi_0D_u^{(0)}\phi_1(u)$$

ή

$$\frac{\delta+\lambda_1}{\lambda_1}\frac{\delta+\lambda_2}{\lambda_2}\left(\beta+D_u\right)\left(\prod_{i=1}^{2}\left(1-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_i}D_u\right)\right)\phi_1(u)=\beta\phi_1(u) \qquad (3.4.3)$$

και από την (3.3.16) για το ανάπτυγμα του γινομένου, προκύπτει

$$\frac{\delta+\lambda_1}{\lambda_1}\frac{\delta+\lambda_2}{\lambda_2}\left(\beta+D_u\right)\left(\phi_1(u)-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_1}\phi_1'(u)-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_2}\phi_1'(u)\right.$$

$$\left.+\frac{c+ru}{\delta+\lambda_1}\frac{r}{\delta+\lambda_2}\phi_1'(u)+\frac{c+ru}{\delta+\lambda_1}\frac{c+ru}{\delta+\lambda_2}\phi_1''(u)\right)=\beta\phi_1(u)$$

ισοδύναμα

$$\frac{\delta+\lambda_1}{\lambda_1}\frac{\delta+\lambda_2}{\lambda_2}\times$$

$$\left(\beta\phi_1(u)-\beta\frac{c+ru}{\delta+\lambda_1}\phi_1'(u)-\beta\frac{c+ru}{\delta+\lambda_2}\phi_1'(u)+\beta\frac{c+ru}{\delta+\lambda_1}\frac{r}{\delta+\lambda_2}\phi_1'(u)+\beta\frac{c+ru}{\delta+\lambda_1}\frac{c+ru}{\delta+\lambda_2}\phi_1''(u)\right.$$

$$+\phi_1'(u)-\frac{r}{\delta+\lambda_1}\phi_1'(u)-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_1}\phi_1''(u)-\frac{r}{\delta+\lambda_2}\phi_1'(u)-\frac{c+ru}{\delta+\lambda_2}\phi_1''(u)$$

$$\left.+\frac{r}{\delta+\lambda_1}\frac{r}{\delta+\lambda_2}\phi_1'(u)+\frac{c+ru}{\delta+\lambda_1}\frac{r}{\delta+\lambda_2}\phi_1''(u)+\frac{2(c+ru)r}{(\delta+\lambda_1)(\delta+\lambda_2)}\phi_1''(u)+\frac{c+ru}{\delta+\lambda_1}\frac{c+ru}{\delta+\lambda_2}\phi_1'''(u)\right)$$

$$=\beta\phi_1(u)$$

και απλοποιώντας καταλήγουμε στην ομογενή διαφορική εξίσωση τρίτης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές

$$(c+ru)^2\phi_1'''(u)+[\beta(c+ru)^2+(3r-\lambda_1-\lambda_2-2\delta)(c+ru)]\phi_1''(u)$$
$$+[\beta(r-\lambda_1-\lambda_2-2\delta)(c+ru)+(r-\lambda_1-\delta)(r-\lambda_2-\delta)]\phi_1'(u)$$
$$+\beta\delta(\delta+\lambda_1+\lambda_2)\phi_1(u)=0\,. \tag{3.4.4}$$

3.4.1 Πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας

Ενδιαφερόμαστε για την πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας. Για τον υπολογισμό της, θεωρούμε $\delta=0$ και $w(x,y)=w(y)=1$. Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση Gerber-Shiu γίνεται $\phi_1(u)=\psi_1(u)$,

$$A(u)=\int_{u+\frac{c}{r}}^{\infty}w(u,x-u)f(x)dx=\int_{u+\frac{c}{r}}^{\infty}w(x-u)f(x)dx=\int_{u+\frac{c}{r}}^{\infty}f(x)dx \text{ με } A\left(-\frac{c}{r}\right)=\int_{0}^{\infty}f(x)dx=1,$$

και η Εξίσωση (3.4.4) διαμορφώνεται στην

$$(c+ru)^2\psi_1'''(u)+[\beta(c+ru)^2+(3r-\lambda_1-\lambda_2)(c+ru)]\psi_1''(u)$$
$$+[\beta(r-\lambda_1-\lambda_2)(c+ru)+(r-\lambda_1)(r-\lambda_2)]\psi_1'(u)=0\,. \tag{3.4.5}$$

Θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής

$$x = c + ru \qquad \text{και} \qquad \psi_1(u) = \psi_1\left(\frac{x-c}{r}\right) = \zeta(x).$$

Είναι

$$\psi_1'(u) = \frac{d\psi_1(u)}{du} = \frac{d\zeta(x)}{du} = \frac{d\zeta(x)}{dx}\frac{dx}{du} = r\zeta'(x),$$

$$\psi_1''(u) = \frac{d^2\psi_1(u)}{du^2} = \frac{d^2\zeta(x)}{du^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{d\zeta(x)}{du}\right) = \frac{d}{du}[r\zeta'(x)] = r\frac{d\zeta'(x)}{dx}\frac{dx}{du} = r^2\zeta''(x),$$

$$\psi_1'''(u) = \frac{d^3\psi_1(u)}{du^3} = \frac{d^3\zeta(x)}{du^3} = \frac{d}{du}\left(\frac{d^2\zeta(x)}{du^2}\right) = \frac{d}{du}[r^2\zeta''(x)] = r^2\frac{d\zeta''(x)}{dx}\frac{dx}{du} = r^3\zeta'''(x),$$

οπότε, η Εξίσωση (3.4.5) γίνεται

$$x^2r^3\zeta'''(x) + [\beta x^2 + (3r - \lambda_1 - \lambda_2)x]r^2\zeta''(x) + [\beta(r - \lambda_1 - \lambda_2)x + (r-\lambda_1)(r-\lambda_2)]r\zeta'(x) = 0.$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με x^2r^3 προκύπτει

$$\zeta'''(x) + \left(\frac{\beta}{r} + \left(3 - \frac{\lambda_1}{r} - \frac{\lambda_2}{r}\right)x^{-1}\right)\zeta''(x) + \left[\frac{\beta}{r}\left(1 - \frac{\lambda_1}{r} - \frac{\lambda_2}{r}\right)x^{-1} + \left(1-\frac{\lambda_1}{r}\right)\left(1-\frac{\lambda_2}{r}\right)x^{-2}\right]\zeta'(x) = 0. \tag{3.4.6}$$

Στην περίπτωση της γενικευμένης *Erlang*(2), από την (3.2.5) είναι

$$\begin{pmatrix} \psi_1\left(-\frac{c}{r}\right) \\ \psi_2\left(-\frac{c}{r}\right) \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (\delta\,\mathbf{I_2} - \mathbf{D_0})^{-1}\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{2} D_{ij}A\left(-\frac{c}{r}\right) \\ \sum_{j=1}^{2} D_{ij}A\left(-\frac{c}{r}\right) \end{pmatrix}$$

$$\overset{(\delta=0)}{=} -\begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 A\left(-\frac{c}{r}\right) \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\begin{pmatrix} -\lambda_2 & -\lambda_1 \\ 0 & -\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 A\left(-\frac{c}{r}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_2 A\left(-\frac{c}{r}\right) \\ \lambda_1\lambda_2 A\left(-\frac{c}{r}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A\left(-\frac{c}{r}\right) \\ A\left(-\frac{c}{r}\right) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}. \tag{3.4.7}$$

Έστω $y(x)=\zeta'(x)$ και από την αρχική συνθήκη $\zeta(0)=\psi_1\left(-\frac{c}{r}\right)=1$, με ολοκλήρωση προκύπτει

$\int_0^{c+ru}\zeta'(x)dx=\int_0^{c+ru}y(x)dx \Rightarrow \zeta(c+ru)-\zeta(0)=\int_0^{c+ru}y(x)dx$ ή

$$\psi_1(u)=\zeta(c+ru)=1+\int_0^{c+ru}y(x)dx. \tag{3.4.8}$$

Από την (3.4.6), αντικαθιστώντας $y'(x)=\zeta''(x)$ και $y''(x)=\zeta'''(x)$, αναζητάμε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές

$$y''(x)+\left(\frac{\beta}{r}+\left(3-\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r}\right)x^{-1}\right)y'(x)+\left[\frac{\beta}{r}\left(1-\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r}\right)x^{-1}+\left(1-\frac{\lambda_1}{r}\right)\left(1-\frac{\lambda_2}{r}\right)x^{-2}\right]y(x)=0 \tag{3.4.9}$$

με συνοριακές συνθήκες (από τις (3.2.8) και (3.2.9))

$$\lim_{u\to\infty}\psi_1(u)=\lim_{u\to\infty}\psi_1'(u)=0.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε $\lambda_1\geq\lambda_2$. Θέτοντας $y(x)=x^{\frac{\lambda_1}{r}-1}\omega(x)$, είναι

$$y'(x)=\left(\frac{\lambda_1}{r}-1\right)x^{\frac{\lambda_1}{r}-2}\omega(x)+x^{\frac{\lambda_1}{r}-1}\omega'(x),$$

$$y''(x)=\left(\frac{\lambda_1}{r}-1\right)\left(\frac{\lambda_1}{r}-2\right)x^{\frac{\lambda_1}{r}-3}\omega(x)+\left(\frac{\lambda_1}{r}-1\right)x^{\frac{\lambda_1}{r}-2}\omega'(x)+\left(\frac{\lambda_1}{r}-1\right)x^{\frac{\lambda_1}{r}-2}\omega'(x)+x^{\frac{\lambda_1}{r}-1}\omega''(x)$$

$$=\left(\frac{\lambda_1}{r}-1\right)\left(\frac{\lambda_1}{r}-2\right)x^{\frac{\lambda_1}{r}-3}\omega(x)+2\left(\frac{\lambda_1}{r}-1\right)x^{\frac{\lambda_1}{r}-2}\omega'(x)+x^{\frac{\lambda_1}{r}-1}\omega''(x),$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (3.4.9) αυτή γίνεται

$$\left(\frac{\lambda_1}{r}-1\right)\left(\frac{\lambda_1}{r}-2\right)x^{\frac{\lambda_1}{r}-3}\omega(x)+2\left(\frac{\lambda_1}{r}-1\right)x^{\frac{\lambda_1}{r}-2}\omega'(x)+x^{\frac{\lambda_1}{r}-1}\omega''(x)$$

$$+\left(\frac{\beta}{r}+\left(3-\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r}\right)x^{-1}\right)\left(\left(\frac{\lambda_1}{r}-1\right)x^{\frac{\lambda_1}{r}-2}\omega(x)+x^{\frac{\lambda_1}{r}-1}\omega'(x)\right)$$

$$+\left[\frac{\beta}{r}\left(1-\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r}\right)x^{-1}+\left(1-\frac{\lambda_1}{r}\right)\left(1-\frac{\lambda_2}{r}\right)x^{-2}\right]x^{\frac{\lambda_1}{r}-1}\omega(x)=0.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $x^{-\frac{\lambda_1}{r}+2}$ προκύπτει

$$\left(\frac{\lambda_1}{r}-1\right)\left(\frac{\lambda_1}{r}-2\right)x^{-1}\omega(x)+\left(\frac{2\lambda_1}{r}-2\right)\omega'(x)+x\omega''(x)$$

$$+\left(\frac{\beta}{r}+\left(3-\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r}\right)x^{-1}\right)\left(\left(\frac{\lambda_1}{r}-1\right)\omega(x)+x\omega'(x)\right)$$

$$+\left[\frac{\beta}{r}\left(1-\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r}\right)x^{-1}+\left(1-\frac{\lambda_1}{r}\right)\left(1-\frac{\lambda_2}{r}\right)x^{-2}\right]x\omega(x)=0\,,$$

και κάνοντας τις πράξεις, η εξίσωση απλοποιείται στη μορφή

$$x\omega''(x)+\left(1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r}+\frac{\beta}{r}x\right)\omega'(x)-\frac{\lambda_2}{r}\frac{\beta}{r}\omega(x)=0\,. \tag{3.4.10}$$

Θέτοντας $\omega(x)=e^{-\frac{\beta}{r}x}\tilde{\omega}(x)$, είναι

$$\omega'(x)=-\frac{\beta}{r}e^{-\frac{\beta}{r}x}\tilde{\omega}(x)+e^{-\frac{\beta}{r}x}\tilde{\omega}'(x)\,,$$

$$\omega''(x)=\left(\frac{\beta}{r}\right)^2e^{-\frac{\beta}{r}x}\tilde{\omega}(x)-\frac{\beta}{r}e^{-\frac{\beta}{r}x}\tilde{\omega}'(x)-\frac{\beta}{r}e^{-\frac{\beta}{r}x}\tilde{\omega}'(x)+e^{-\frac{\beta}{r}x}\tilde{\omega}''(x)$$

$$=\left(\frac{\beta}{r}\right)^2e^{-\frac{\beta}{r}x}\tilde{\omega}(x)-2\frac{\beta}{r}e^{-\frac{\beta}{r}x}\tilde{\omega}'(x)+e^{-\frac{\beta}{r}x}\tilde{\omega}''(x)\,,$$

και αντικαθιστώντας στην (3.4.10) αυτή γίνεται

$$x\left(\left(\frac{\beta}{r}\right)^2e^{-\frac{\beta}{r}x}\tilde{\omega}(x)-2\frac{\beta}{r}e^{-\frac{\beta}{r}x}\tilde{\omega}'(x)+e^{-\frac{\beta}{r}x}\tilde{\omega}''(x)\right)$$

$$+\left(1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r}+\frac{\beta}{r}x\right)\left(-\frac{\beta}{r}e^{-\frac{\beta}{r}x}\tilde{\omega}(x)+e^{-\frac{\beta}{r}x}\tilde{\omega}'(x)\right)-\frac{\lambda_2}{r}\frac{\beta}{r}e^{-\frac{\beta}{r}x}\tilde{\omega}(x)=0\,.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $e^{\frac{\beta}{r}x}$ προκύπτει

$$x\left(\left(\frac{\beta}{r}\right)^2\tilde{\omega}(x)-2\frac{\beta}{r}\tilde{\omega}'(x)+\tilde{\omega}''(x)\right)+\left(1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r}+\frac{\beta}{r}x\right)\left(-\frac{\beta}{r}\tilde{\omega}(x)+\tilde{\omega}'(x)\right)-\frac{\lambda_2}{r}\frac{\beta}{r}\tilde{\omega}(x)=0\,.$$

Απλοποιώντας περαιτέρω, η εξίσωση διαμορφώνεται στην

$$x\tilde{\omega}''(x)+\left(1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r}-\frac{\beta}{r}x\right)\tilde{\omega}'(x)-\left(1+\frac{\lambda_1}{r}\right)\frac{\beta}{r}\tilde{\omega}(x)=0\,. \tag{3.4.11}$$

Θεωρώντας μια επιπλέον αλλαγή μεταβλητής,

$$t=\frac{\beta}{r}x \qquad \text{και} \qquad \tilde{\omega}(x)=\tilde{\omega}\left(\frac{r}{\beta}t\right)=\bar{\omega}(t)\,,$$

είναι

$$\tilde{\omega}'(x)=\frac{d}{dx}\bar{\omega}(t)=\frac{d\bar{\omega}(t)}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{\beta}{r}\bar{\omega}'(t),$$

$$\tilde{\omega}''(x)=\frac{d^2}{dx^2}\bar{\omega}(t)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d\bar{\omega}(t)}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\beta}{r}\bar{\omega}'(t)\right)=\frac{\beta}{r}\bar{\omega}''(t)\frac{dt}{dx}=\left(\frac{\beta}{r}\right)^2\bar{\omega}''(t),$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (3.4.11) βρίσκουμε

$$x\left(\frac{\beta}{r}\right)^2\bar{\omega}''(t)+\left(1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r}-\frac{\beta}{r}x\right)\frac{\beta}{r}\bar{\omega}'(t)-\left(1+\frac{\lambda_1}{r}\right)\frac{\beta}{r}\bar{\omega}(t)=0.$$

Διαιρώντας με $\frac{\beta}{r}$ η εξίσωση γίνεται

$$x\frac{\beta}{r}\bar{\omega}''(t)+\left(1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r}-\frac{\beta}{r}x\right)\bar{\omega}'(t)-\left(1+\frac{\lambda_1}{r}\right)\bar{\omega}(t)=0$$

ισοδύναμα

$$t\bar{\omega}''(t)+\left(1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r}-t\right)\bar{\omega}'(t)-\left(1+\frac{\lambda_1}{r}\right)\bar{\omega}(t)=0. \qquad (3.4.12)$$

Η διαφορική Εξίσωση (3.4.12) είναι της μορφής

$$t\bar{\omega}''(t)+(B-t)\bar{\omega}'(t)-A\bar{\omega}(t)=0, \qquad \text{με } B=1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r} \text{ και } A=1+\frac{\lambda_1}{r},$$

δηλαδή, είναι η συμφυής υπεργεωμετρική εξίσωση (confluent hypergeometric equation) ή εξίσωση Kummer ή degenerate hypergeometric equation. Σύμφωνα με τους Abramowitz and Stegun (1972), η γενική λύση της (3.4.12) είναι της μορφής

$$\begin{aligned}\bar{\omega}(t)&=\kappa_1 M(A,B,t)+\kappa_2 U(A,B,t)\\&=\kappa_1 M\left(1+\frac{\lambda_1}{r},1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r},t\right)+\kappa_2 U\left(1+\frac{\lambda_1}{r},1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r},t\right),\end{aligned}$$

όπου κ_1 και κ_2 είναι αυθαίρετες σταθερές, οι $M(a,b,t)$ και $U(a,b,t)$ είναι η συμφυής υπεργεωμετρική συνάρτηση πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα (Παράρτημα Π2) και είναι δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (3.4.12). Έτσι, η Εξίσωση (3.4.9) έχει ως λύση την

$$\begin{aligned}y(x)&=x^{\frac{\lambda_1}{r}-1}\omega(x)=x^{\frac{\lambda_1}{r}-1}e^{-\frac{\beta}{r}x}\tilde{\omega}(x)\\&=\kappa_1 x^{\frac{\lambda_1}{r}-1}e^{-\frac{\beta}{r}x}M\left(1+\frac{\lambda_1}{r},1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r},\frac{\beta}{r}x\right)+\kappa_2 x^{\frac{\lambda_1}{r}-1}e^{-\frac{\beta}{r}x}U\left(1+\frac{\lambda_1}{r},1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r},\frac{\beta}{r}x\right). \qquad (3.4.13)\end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις $M(a,b,x)$ και $U(a,b,x)$ μπορεί να δοθούν στη μορφή (Abramowitz and Stegun (1972), σελίδα 505, σχέσεις 13.1.2, 13.1.3, 13.1.6):

$$M(a,b,x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n}\frac{x^n}{n!}, \qquad \text{με } (a)_n=a(a+1)...(a+n-1),\ (a)_0=1$$

για b όχι ακέραιο,

$$U(a,b,x)=\frac{\pi}{\sin\pi b}\left(\frac{M(a,b,x)}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(b)}-x^{1-b}\frac{M(1+a-b,2-b,x)}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)}\right)$$

για b ακέραιο,

$$U(a,n+1,x)=\frac{(-1)^{n+1}}{n!\Gamma(a-n)}\left(M(a,n+1,x)\ln x+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(a)_l}{(n+1)_l}\frac{x^l}{l!}[\sigma(a+l)-\sigma(1+l)-\sigma(1+n+l)]\right)$$

$$+\frac{(n-1)!}{\Gamma(a)}x^{-n}M(a-n,1-n,x)_n \qquad n=0,1,...$$

όπου ο υποδείκτης n στην τελευταία $M(\cdot)$ δηλώνει το μερικό άθροισμα των πρώτων n όρων. Είναι 0 για $n=0$. Επίσης, $\sigma(a)=\dfrac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$ (συνάρτηση δίγαμμα) με $\sigma(1)=-\gamma$, $\sigma(n)=-\gamma+\sum_{k=1}^{n-1}k^{-1}$ για $n=2,3,4,...$ και $\gamma = 0.5772\ldots$ η σταθερά Euler (Abramowitz and Stegun (1972), σελίδα 258, 6.3.2, σελ. 254, 6.1.3). Καθώς $x\to\infty$, (Abramowitz and Stegun (1972), σελίδα 504, 13.1.5, 13.1.8).

$$x^{\frac{\lambda_1}{r}-1}e^{-\frac{\beta}{r}x}M\left(1+\frac{\lambda_1}{r},1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r},\frac{\beta}{r}x\right)\sim x^{\frac{\lambda_1}{r}-1}e^{-\frac{\beta}{r}x}\frac{\Gamma\left(1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda_1}{r}\right)}e^{\frac{\beta}{r}x}\left(\frac{\beta}{r}x\right)^{\frac{\lambda_2}{r}}\left[1+O\left(\left|\frac{\beta}{r}x\right|^{-1}\right)\right]$$

$$=x^{\frac{\lambda_1}{r}+\frac{\lambda_2}{r}-1}\frac{\Gamma\left(1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda_1}{r}\right)}\left(\frac{\beta}{r}\right)^{\frac{\lambda_2}{r}}\left[1+O\left(\left|\frac{\beta}{r}x\right|^{-1}\right)\right]=\infty \qquad (3.4.14)$$

και

$$x^{\frac{\lambda_1}{r}-1}e^{-\frac{\beta}{r}x}U\left(1+\frac{\lambda_1}{r},1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r},\frac{\beta}{r}x\right)\sim x^{\frac{\lambda_1}{r}-1}e^{-\frac{\beta}{r}x}\left(\frac{\beta}{r}x\right)^{-\left(1+\frac{\lambda_1}{r}\right)}\left[1+O\left(\left|\frac{\beta}{r}x\right|^{-1}\right)\right]$$

$$=x^{-2}e^{-\frac{\beta}{r}x}\left(\frac{\beta}{r}\right)^{-\left(1+\frac{\lambda_1}{r}\right)}\left[1+O\left(\left|\frac{\beta}{r}x\right|^{-1}\right)\right]=O\left(x^{-2}e^{-\frac{\beta}{r}x}\right)=0\,. \qquad (3.4.15)$$

Αφού $x=c+ru$ και $\psi_1'(u)=r\zeta'(x)=ry(x)$, από την $\lim_{u\to\infty}\psi_1'(u)=0$ είναι και

$$\lim_{x\to\infty}y(x)=0\,. \qquad (3.4.16)$$

Παίρνοντας το όριο, καθώς $x\to\infty$, στα δύο μέλη της (3.4.13), από τις (3.4.14) και (3.4.15), έχουμε

$$\kappa_1=0\,.$$

Συνεπώς, από την (3.4.13) είναι

$$y(x)=\kappa_2 x^{\frac{\lambda_1}{r}-1} e^{-\frac{\beta}{r}x} U\left(1+\frac{\lambda_1}{r}, 1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r}, \frac{\beta}{r}x\right), \tag{3.4.17}$$

και από την (3.4.8)

$$\zeta(x)=1+\int_0^x y(\upsilon)d\upsilon=1+\kappa_2\int_0^x \upsilon^{\frac{\lambda_1}{r}-1} e^{-\frac{\beta}{r}\upsilon} U\left(1+\frac{\lambda_1}{r}, 1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r}, \frac{\beta}{r}\upsilon\right)d\upsilon .$$

Από την $\lim_{u\to\infty}\psi_1(u)=0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\zeta(x)=0$, οπότε

$$\lim_{x\to\infty}\zeta(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\kappa_2\int_0^x \upsilon^{\frac{\lambda_1}{r}-1} e^{-\frac{\beta}{r}\upsilon} U\left(1+\frac{\lambda_1}{r}, 1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r}, \frac{\beta}{r}\upsilon\right)d\upsilon\right)$$

ή

$$0=1+\kappa_2\int_0^\infty \upsilon^{\frac{\lambda_1}{r}-1} e^{-\frac{\beta}{r}\upsilon} U\left(1+\frac{\lambda_1}{r}, 1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r}, \frac{\beta}{r}\upsilon\right)d\upsilon$$

από την οποία προκύπτει

$$\kappa_2=-\frac{1}{\int_0^\infty \upsilon^{\frac{\lambda_1}{r}-1} e^{-\frac{\beta}{r}\upsilon} U\left(1+\frac{\lambda_1}{r}, 1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r}, \frac{\beta}{r}\upsilon\right)d\upsilon}. \tag{3.4.18}$$

Επομένως, από την (3.4.8) και τις (3.4.17), (3.4.18), είναι

$$\begin{aligned}\psi_1(u)&=\zeta(c+ru)=1+\int_0^{c+ru} y(x)dx\\ &=1+\int_0^{c+ru}\kappa_2 x^{\frac{\lambda_1}{r}-1} e^{-\frac{\beta}{r}x} U\left(1+\frac{\lambda_1}{r}, 1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r}, \frac{\beta}{r}x\right)dx\\ &=1-\frac{\int_0^{c+ru} x^{\frac{\lambda_1}{r}-1} e^{-\frac{\beta}{r}x} U\left(1+\frac{\lambda_1}{r}, 1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r}, \frac{\beta}{r}x\right)dx}{\int_0^\infty \upsilon^{\frac{\lambda_1}{r}-1} e^{-\frac{\beta}{r}\upsilon} U\left(1+\frac{\lambda_1}{r}, 1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r}, \frac{\beta}{r}\upsilon\right)d\upsilon}.\end{aligned} \tag{3.4.19}$$

Από την πρώτη εξίσωση του συστήματος (3.3.3) λύνοντας ως προς $\phi_2(u)$ παίρνουμε

$$\phi_2(u)=\frac{\delta+\lambda_1}{\lambda_1}\phi_1(u)-\frac{c+ru}{\lambda_1}\phi_1'(u).$$

Οπότε για $\delta=0$, και υπό τις προϋποθέσεις της συνάρτησης ποινής που εξετάζουμε ($w(x,y)=w(y)=1$), από την τελευταία σχέση έχουμε

$$\psi_2(u)=\psi_1(u)-\frac{c+ru}{\lambda_1}\psi_1'(u). \tag{3.4.20}$$

Από τα ανωτέρω έχουμε ότι από τις (3.4.19) και (3.4.20) ορίζονται αναλυτικά οι πιθανότητες απόλυτης χρεοκοπίας $\psi_1(u)$ και $\psi_2(u)$ στην περίπτωση όπου οι ενδοαφιξιακοί χρόνοι ακολουθούν τη γενικευμένη *Erlang*(2) κατανομή και τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένα.

Παρατήρηση 3.4.1. Στην περίπτωση που οι ενδοαφιξιακοί χρόνοι ακολουθούν την *Erlang*(2) κατανομή, είναι $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ και προκύπτουν οι παρακάτω τύποι κλειστής μορφής για τις πιθανότητες απόλυτης χρεοκοπίας $\psi_1(u)$ και $\psi_2(u)$. Από την (3.4.19) και (3.4.20) είναι αντίστοιχα

$$\psi_1(u) = \zeta(c+ru) = 1 - \frac{\int_0^{c+ru} x^{\frac{\lambda}{r}-1} e^{-\frac{\beta}{r}x} U\left(1+\frac{\lambda}{r}, 1, \frac{\beta}{r}x\right) dx}{\int_0^{\infty} \upsilon^{\frac{\lambda}{r}-1} e^{-\frac{\beta}{r}\upsilon} U\left(1+\frac{\lambda}{r}, 1, \frac{\beta}{r}\upsilon\right) d\upsilon}, \tag{3.4.21}$$

και

$$\psi_2(u) = \psi_1(u) - \frac{c+ru}{\lambda}\psi_1'(u). \tag{3.4.22}$$

3.4.2 Κατανομή του ελλείμματος τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης κατανομής της $|U(\tau)|$, του ελλείμματος τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας, θεωρούμε $\delta = 0$ και $w(x,y) = \mathrm{I}(y \le z)$, $z > \frac{c}{r}$. Στην περίπτωση αυτή είναι, $\phi_i(u) = P\left(|U(\tau)| \le z\right)$ και

$$A(u) = \int_{u+\frac{c}{r}}^{\infty} w(u, x-u) f(x) dx \overset{x-y \le z}{=} \int_{u+\frac{c}{r}}^{z+u} f(x)dx = \int_{u+\frac{c}{r}}^{z+u} \beta e^{-\beta x} dx = e^{-\beta u}\left(e^{-\frac{\beta c}{r}} - e^{-\beta z}\right)$$

με $A\left(-\frac{c}{r}\right) = e^{\frac{\beta c}{r}}\left(e^{-\frac{\beta c}{r}} - e^{-\beta z}\right) = 1 - e^{-\beta\left(z-\frac{c}{r}\right)}$.

Η Εξίσωση (3.4.4) παραμένει ίδια και συνεπώς και η λύση της, που δίνεται από την (3.4.17), ενώ αλλάζουν οι αρχικές συνθήκες, οι οποίες από την (3.4.7) γίνονται

$$\begin{pmatrix} \phi_1\left(-\frac{c}{r}\right) \\ \phi_2\left(-\frac{c}{r}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\left(-\frac{c}{r}\right) \\ A\left(-\frac{c}{r}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - e^{-\beta\left(z-\frac{c}{r}\right)} \\ 1 - e^{-\beta\left(z-\frac{c}{r}\right)} \end{pmatrix}.$$

Από την $y(x) = \zeta'(x)$ και από την αρχική συνθήκη $\zeta(0) = \phi_1\left(-\frac{c}{r}\right) = 1 - e^{-\beta\left(z-\frac{c}{r}\right)}$, η αντίστοιχη σχέση της (3.4.8) είναι

$$\phi_1(u)=\zeta(c+ru)=1-e^{-\beta\left(z-\frac{c}{r}\right)}+\int_0^{c+ru}y(x)dx\,. \tag{3.4.23}$$

Με βάση την (3.4.17) και την (3.4.23) προκύπτει

$$\zeta(x)=1-e^{-\beta\left(z-\frac{c}{r}\right)}+\int_0^x y(\upsilon)d\upsilon=1-e^{-\beta\left(z-\frac{c}{r}\right)}+\kappa_2\int_0^x \upsilon^{\frac{\lambda_1}{r}-1}e^{-\frac{\beta}{r}\upsilon}U\left(1+\frac{\lambda_1}{r},1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r},\frac{\beta}{r}\upsilon\right)d\upsilon\,.$$

Από την $\lim_{u\to\infty}\psi_1(u)=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\zeta(x)=0$, οπότε

$$\lim_{x\to\infty}\zeta(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1-e^{-\beta\left(z-\frac{c}{r}\right)}+\kappa_2\int_0^x \upsilon^{\frac{\lambda_1}{r}-1}e^{-\frac{\beta}{r}\upsilon}U\left(1+\frac{\lambda_1}{r},1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r},\frac{\beta}{r}\upsilon\right)d\upsilon\right)=0$$

από την οποία προκύπτει

$$\kappa_2=-\frac{1-e^{-\beta\left(z-\frac{c}{r}\right)}}{\int_0^\infty \upsilon^{\frac{\lambda_1}{r}-1}e^{-\frac{\beta}{r}\upsilon}U\left(1+\frac{\lambda_1}{r},1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r},\frac{\beta}{r}\upsilon\right)d\upsilon}\,. \tag{3.4.24}$$

Επομένως, από την (3.4.23) και τις (3.4.17), (3.4.21), είναι

$$\begin{aligned}
\psi_1(u)&=\zeta(c+ru)=1-e^{-\beta\left(z-\frac{c}{r}\right)}+\int_0^{c+ru}\kappa_2 x^{\frac{\lambda_1}{r}-1}e^{-\frac{\beta}{r}x}U\left(1+\frac{\lambda_1}{r},1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r},\frac{\beta}{r}x\right)dx\\
&=1-e^{-\beta\left(z-\frac{c}{r}\right)}-1-e^{-\beta\left(z-\frac{c}{r}\right)}\frac{\int_0^{c+ru} x^{\frac{\lambda_1}{r}-1}e^{-\frac{\beta}{r}x}U\left(1+\frac{\lambda_1}{r},1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r},\frac{\beta}{r}x\right)dx}{\int_0^\infty \upsilon^{\frac{\lambda_1}{r}-1}e^{-\frac{\beta}{r}\upsilon}U\left(1+\frac{\lambda_1}{r},1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r},\frac{\beta}{r}\upsilon\right)d\upsilon}\\
&=\left(1-e^{-\beta\left(z-\frac{c}{r}\right)}\right)\times\left(1-\frac{\int_0^{c+ru} x^{\frac{\lambda_1}{r}-1}e^{-\frac{\beta}{r}x}U\left(1+\frac{\lambda_1}{r},1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r},\frac{\beta}{r}x\right)dx}{\int_0^\infty \upsilon^{\frac{\lambda_1}{r}-1}e^{-\frac{\beta}{r}\upsilon}U\left(1+\frac{\lambda_1}{r},1+\frac{\lambda_1}{r}-\frac{\lambda_2}{r},\frac{\beta}{r}\upsilon\right)d\upsilon}\right)\\
&=\left(1-e^{-\beta\left(z-\frac{c}{r}\right)}\right)\psi_1(u)\,.
\end{aligned} \tag{3.4.25}$$

Τέλος για την $\phi_2(u)$ είναι

$$\begin{aligned}
\phi_2(u)&=\frac{\delta+\lambda_1}{\lambda_1}\phi_1(u)-\frac{c+ru}{\lambda_1}\phi_1'(u)\\
&\overset{(\delta=0)}{=}\phi_1(u)-\frac{c+ru}{\lambda_1}\phi_1'(u)\\
&=\left(1-e^{-\beta\left(z-\frac{c}{r}\right)}\right)\psi_1(u)-\frac{c+ru}{\lambda_1}\left(1-e^{-\beta\left(z-\frac{c}{r}\right)}\right)\psi_1'(u)
\end{aligned}$$

$$= \left(1 - e^{-\beta\left(z - \frac{c}{r}\right)}\right)\left(\psi_1(u) - \frac{c + ru}{\lambda_1}\psi_1'(u)\right)$$

(και λόγω της (3.4.20)

$$= \left(1 - e^{-\beta\left(z - \frac{c}{r}\right)}\right)\psi_2(u)\,. \tag{3.4.26}$$

3.5 Σύνοψη κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο εξετάστηκε η απόλυτη χρεοκοπία σε ανανεωτικά και μη-ανανεωτικά μοντέλα κινδύνου, με σταθερό και ίδιο ρυθμό πιστωτικού και δανειστικού τοκισμού. Αρχικά θεωρήθηκε ότι το πλήθος των απαιτήσεων και οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων των απαιτήσεων περιγράφονται από το γενικό μοντέλο των Μαρκοβιανών Διαδικασιών Αφίξεων (*MAP*) και δόθηκαν οι ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις για τις αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής των Gerber-Shiu καθώς και οι απαιτούμενες σχετικές οριακές συνθήκες για τη μοναδικότητα των λύσεων των εν λόγω εξισώσεων. Στη συνέχεια και με στόχο να δοθούν κάποια αναλυτικά αποτελέσματα, θεωρήθηκε η περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου κινδύνου με τα χρονικά διαστήματα που μεσολαβούν μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων να ακολουθούν τη γενικευμένη *Erlang*(*n*) κατανομή και τα μεγέθη των απαιτήσεων να ανήκουν στην πινακοεκθετική (*Matrix-Exponential*) κατανομή. Υπό τον επιπλέον περιορισμό ότι η συνάρτηση ποινής είναι συνάρτηση μόνο του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, δόθηκαν εκφράσεις σε μορφή σειράς για τη συνάρτηση Gerber-Shiu. Τέλος, σαν εφαρμογή εξετάστηκε η περίπτωση της γενικευμένης *Erlang*(2) κατανομής για τους ενδοαφιξιακούς χρόνους και της εκθετικής κατανομής για τα ύψη των απαιτήσεων και δόθηκαν σχέσεις κλειστής μορφής για την πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας και τη συνάρτηση κατανομής τους ελλείμματος της στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας. Πιθανές επεκτάσεις, προκλητικές και συνάμα απαιτητικές σε ανάλυση, της αναφερθείσας προσέγγισης είναι η περίπτωση όπου τα μεγέθη των απαιτήσεων ακολουθούν άλλη κατανομή από την εκθετική, ή όταν οι ενδοαφιξιακοί χρόνοι ακολουθούν τη γενικευμένη *Erlang* κατανομή μεγαλύτερης τάξης $(n \geq 3)$, ή ακόμη και διαφορετική κατανομή. Λύσεις μέσω αριθμητικών μεθόδων θα μπορούσαν να δοθούν για οποιαδήποτε *Matrix-Exponential* κατανομή όσον αφορά τα μεγέθη των απαιτήσεων με εφαρμογή της μεθοδολογίας της Ενότητας 3.3. Τέλος η επέκταση, υπό τη γενικευμένη *Erlang*(*n*) κατανομή, με πολλαπλά επίπεδα τιμών τόσο για το ρυθμό ασφαλίστρου όσο και για το ρυθμό πιστωτικού και δανειστικού τοκισμού, συζητείται στους Mitric et al. (2012).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Απόλυτη χρεοκοπία στο κλασικό μοντέλο κινδύνου με σταθερό χρεωστικό και πιστωτικό επιτόκιο και στρατηγική σταθερού ορίου μερίσματος

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται η απόλυτη χρεοκοπία στο κλασικό μοντέλο κινδύνου με σταθερό ρυθμό πιστωτικού και δανειστικού τοκισμού θεωρώντας επιπλέον την ύπαρξη στρατηγικής καταβολής μερίσματος στους μετόχους της ασφαλιστικής εταιρίας. Όταν το πλεόνασμα ξεπεράσει ένα σταθερό όριο τότε επιστρέφεται μέρισμα στους δικαιούχους με σταθερό ρυθμό, ενώ δεν καταβάλλονται μερίσματα όταν το πλεόνασμα είναι μικρότερο από το εν λόγω όριο. Αρχικά αναπτύσσονται οι ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις για τις ροπογεννήτριες συναρτήσεις και τις ροπές της παρούσας αξίας όλων των μερισμάτων μέχρι τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας. Στη συνέχεια, δίνονται αναλυτικές λύσεις των δύο αυτών μεγεθών, για την περίπτωση όπου τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένα. Τέλος, αναπτύσσεται η εξίσωση για την εύρεση του βέλτιστου ορίου πέραν του οποίου υπάρχει καταβολή μερίσματος, όταν οι στοχαστικές απαιτήσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Μοντέλα κινδύνου τα οποία ενσωματώνουν στρατηγικές μερισμάτων, με τις οποίες η ασφαλιστική εταιρία καταβάλλει πληρωμές στους μετόχους της, βρίσκουν μεγάλο ενδιαφέρον στη θεωρία κινδύνου. Μεταξύ άλλων, ενδεικτικά αναφέρουμε τις εργασίες των Lin and Pavlova (2006), Gerber and Yang (2007), Gerber and Shiu (2004, 2006), Cai (2007), Wang and Yin (2009), Yuan et al. (2011), Peng et al. (2016), Wang et al. (2010), Wang et al. (2011), Cai et al. (2006).

Η ανάλυση που ακολουθεί έχει βασιστεί στην εργασία των Wang et al. (2010).

4.1 Περιγραφή του μοντέλου

Θεωρούμε το κλασικό μοντέλο κινδύνου στο οποίο επιπλέον δεχόμαστε ότι στην περίπτωση που το πλεόνασμα είναι θετικό, τότε η ασφαλιστική εταιρία επενδύει το πλεόνασμα χωρίς ρίσκο με ένα σταθερό ρυθμό πιστωτικού τοκισμού $r>0$ (οπότε ένα αρχικό κεφάλαιο $u>0$, μετά από χρόνο $t>0$ γίνεται $ue^{rt}>u$), ενώ στην περίπτωση που το πλεόνασμα γίνει αρνητικό (που αντιστοιχεί στο έλλειμμα), η ασφαλιστική εταιρία δανείζεται το μέγεθος του ελλείμματος με σταθερό ρυθμό δανειστικού τοκισμού $\delta>0$, δίνοντας έτσι την ευκαιρία στον εαυτό της να επιβιώσει καλύπτοντας το έλλειμμα, και να επανέλθει στη συνέχεια, μέσω της είσπραξης ασφαλίστρων και αποπληρωμής του δανείου, στην κερδοφορία. Συνήθως είναι $\delta>r$ και η διαφορά αυτή ανάμεσα στους δύο ρυθμούς οφείλεται στην ανάγκη για κερδοφορία στις τραπεζικές συναλλαγές. Συμβολίζοντας με $U(t)$ το συνολικό πλεόνασμα της ασφαλιστικής εταιρίας στο χρόνο t υπό το πρίσμα του δανειστικού και πιστωτικού τοκισμού, η δυναμική της διαδικασίας πλεονάσματος περιγράφεται ως εξής:

$$dU(t)=\begin{cases} cdt+rU(t)dt-dS(t), & U(t)\geq 0 \\ cdt+\delta U(t)dt-dS(t), & -\dfrac{c}{\delta}\leq U(t)<0 \end{cases} \tag{4.1.1}$$

όπου, $c>0$ είναι ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρων, $S(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ είναι η σύνθετη ανανεωτική διαδικασία που αντιπροσωπεύει το ποσό των συνολικών απαιτήσεων στο διάστημα $[0,t]$, με $S(t)=0$ για $N(t)=0$. Στο κλασικό μοντέλο θεωρούμε ότι $\{N(t), t\geq 0\}$ είναι διαδικασία Poisson με ένταση $\lambda>0$ που απαριθμεί τον αριθμό των απαιτήσεων στο διάστημα $[0,t]$. Οι αποζημιώσεις X_i, $i=1,2,\ldots$, σχηματίζουν ακολουθία ανεξάρτητων μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών, με γενική μορφή X, κοινή συνάρτηση κατανομής $F(x)=P(X\leq x)$ όπου $F(0)=0$, συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$ και $\mu=E(X)=\int_0^\infty \bar{F}(x)dx$ τη μέση απαίτηση όπου $\bar{F}(x)=1-F(x)$.

Στο μοντέλο που εξετάζουμε, θεωρούμε την εξής στρατηγική σταθερού ορίου μερίσματος: όταν το πλεόνασμα γίνει ίσο με το όριο $b>0$, τότε τα ασφάλιστρα που εισπράττονται δεν προστίθενται στο πλεόνασμα, αλλά αποδίδονται ως μέρισμα στους δικαιούχους μετόχους της εταιρίας. Δηλαδή, όταν η διαδικασία πλεονάσματος φτάσει στο όριο b, μερίσματα πληρώνονται συνεχώς με ρυθμό $c+rb$ (που είναι ο ρυθμός ασφαλίστρου που εισπράττεται και το όριο b με το σταθερό ρυθμό πιστωτικού τοκισμού), μέχρι να εμφανιστεί η επόμενη απαίτηση.

Έστω $U_b(t)$ συμβολίζει την τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος κάτω από την ύπαρξη της ανωτέρω στρατηγικής μερίσματος. Αν με $D(t)$ συμβολίζονται τα συνολικά μερίσματα που έχουν καταβληθεί στο χρονικό διάστημα $[0,t]$, τότε

$$U_b(t)=U(t)-D(t). \tag{4.1.2}$$

Παρατηρούμε ότι καθώς το b τείνει στο άπειρο, η διαδικασία πλεονάσματος χωρίς μερίσματα $\{U(t):t\geq 0\}$, είναι μια ειδική περίπτωση της $\{U_b(t):t\geq 0\}$, δηλαδή, $\lim_{b\to\infty} U_b(t)=U(t)$.

Ο χρόνος απόλυτης χρεοκοπίας της τροποποιημένης διαδικασίας πλεονάσματος $\{U_b(t):t\geq 0\}$ ορίζεται για κάθε $t\geq 0$ ως

$$\tau=\begin{cases} \inf\left\{t\geq 0: U_b(t)\leq -\dfrac{c}{\delta}\right\}, \\ \infty, \qquad \text{εάν } U_b(t)>-\dfrac{c}{\delta}. \end{cases} \tag{4.1.3}$$

Η πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας ορίζεται ως

$$\psi(u,b) = P(\tau < \infty \,|\, U_b(0) = u). \tag{4.1.4}$$

Για σταθερή ένταση προεξόφλησης $a > 0$, ορίζονται με

$$D_{u,b} = \int_0^\tau e^{-at} dD(t) = \int_0^\tau e^{-at} c \cdot I(U_b(t) \geq b) dt, \tag{4.1.5}$$

η παρούσα αξία όλων των μερισμάτων μέχρι τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας τ, και με

$$V(u,b) = E[D_{u,b} \,|\, U_b(0) = u] = E\left(\int_0^\tau e^{-at} dD(t) \,|\, U_b(0) = u \right), \quad -\frac{c}{\delta} \leq u \leq b \tag{4.1.6}$$

οι αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων μέχρι την απόλυτη χρεοκοπία.

Παρατηρούμε ότι για όλα τα t για τα οποία είναι $U_b(t) \geq b$, έχουμε $\tau = \infty$. Συνεπώς, από τη σχέση (4.1.5) έχουμε την ιδιότητα

$$D_{u,b} = c\int_0^\tau e^{-at} I(U_b(t) \geq b) dt \leq c\int_0^\infty e^{-at} dt = \frac{c}{a}. \tag{4.1.7}$$

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της $D_{u,b}$ συμβολίζεται με

$$M(u,y;b) = E[e^{yD_{u,b}}], \qquad -\frac{c}{\delta} < u \leq b \tag{4.1.8}$$

και υπάρχει για κάθε πεπερασμένο y λόγω της (4.1.5).

Η n-οστή ροπή της $D_{u,b}$ συμβολίζεται με

$$V_n(u,b) = E[D_{u,b}^n], \qquad -\frac{c}{\delta} < u \leq b, \; n \in \mathbf{N}, \tag{4.1.9}$$

όπου $V_0(u,b) = E[D_{u,b}^0] = E[1] = 1.$

Επειδή οι $M(u,y;b)$ και $V_n(u,b)$ έχουν διαφορετική τροχιά για $-\frac{c}{\delta} < u < 0$ και $0 \leq u \leq b$, για την περαιτέρω ανάλυση γίνεται η διάκριση των εν λόγω ποσοτήτων για τα διαφορετικά διαστήματα τιμών του u ως εξής:

$$M(u,y;b) = \begin{cases} M_1(u,y;b), & 0 \leq u \leq b, \\ M_2(u,y;b), & -\frac{c}{\delta} \leq u < 0, \end{cases} \tag{4.1.10}$$

και

$$V_n(u,b) = \begin{cases} V_{n1}(u,b), & 0 \leq u \leq b, \\ V_{n2}(u,b), & -\frac{c}{\delta} \leq u < 0. \end{cases} \tag{4.1.11}$$

4.2 Ροπογεννήτρια συνάρτηση της παρούσας αξίας όλων των μερισμάτων μέχρι τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας

Στην ενότητα αυτή μελετάται η ροπογεννήτρια συνάρτηση $M(u,y;b)$ από την οποία θα προκύψουν οι ροπές οποιασδήποτε τάξης της $D_{u,b}$. Η εν λόγω ροπογεννήτρια έχει αποτελέσει αντικείμενο μελέτης, μεταξύ άλλων, στους Albrecher (2004), Albrecher et al. (2005), Li (2006). Η επόμενη πρόταση δίνει τις ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις που διέπουν τη συμπεριφορά της ροπογεννήτριας συνάρτησης.

Πρόταση 4.2.1. *Οι $M_1(u,y;b)$ και $M_2(u,y;b)$ ικανοποιούν αντίστοιχα τις ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις:*

Για $0<u<b$,

$$(ru+c)\frac{\partial M_1(u,y;b)}{\partial u}=ay\frac{\partial M_1(u,y;b)}{\partial y}+\lambda M_1(u,y;b)-\lambda\left(\int_0^u M_1(u-x,y;b)f(x)dx\right.$$
$$\left.+\int_u^{u+\frac{c}{\delta}} M_2(u-x,y;b)f(x)dx\right)-\lambda\bar{F}\left(u+\frac{c}{\delta}\right), \qquad (4.2.1)$$

και για $-\frac{c}{\delta}<u<0$,

$$(\delta u+c)\frac{\partial M_2(u,y;b)}{\partial u}=ay\frac{\partial M_2(u,y;b)}{\partial y}+\lambda M_2(u,y;b)$$
$$-\lambda\int_0^{u+\frac{c}{\delta}} M_2(u-x,y;b)f(x)dx-\lambda\bar{F}\left(u+\frac{c}{\delta}\right). \qquad (4.2.2)$$

Απόδειξη. Από την ισχυρή ιδιότητα Markov *(η Μαρκοβιανή ιδιότητα της έλλειψης μνήμης - οι μελλοντικές καταστάσεις της διαδικασίας εξαρτώνται από το παρόν - ισχύει όχι μόνο για αιτιοκρατικούς χρόνους αλλά και για μια συγκεκριμένη κατηγορία τυχαίων χρόνων, τους χρόνους διακοπής ή στάσης (stopping times). Διαισθητικά, στις περισσότερες περιπτώσεις, ένας χρόνος διακοπής είναι η πρώτη φορά κατά την οποία συμβαίνει ένα γεγονός)* για τη διαδικασία πλεονάσματος $\{U_b(t),t\geq 0\}$ είναι,

$$M(u,y;b)=E[M(U_b(t),e^{-at}y;b)]+o(t), \qquad (4.2.3)$$

όπου για τη συνάρτηση $o(t)$ είναι $\lim_{t\to 0}\frac{o(t)}{t}=0$.

Η (4.2.3) μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής: Στη χρονική στιγμή $t>0$, το πλεόνασμα είναι $U_b(t)$, ενώ η παρούσα αξία όλων των πληρωτέων μερισμάτων μέχρι τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας, είναι

$D_{U_b(t),b}$. Για τον υπολογισμό της παρούσας αξίας στο χρόνο $t=0$, με ένταση προεξόφλησης $\alpha>0$, για τη μεταβλητή $D_{U_b(t),b}$ είναι $e^{-at}D_{U_b(t),b}$. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τελευταίας είναι

$$E[e^{ye^{-at}D_{U_b(t),b}}]=M(U_b(t),e^{-at}y;b)\ .$$

i) *Περίπτωση* $0<u<b$. Θεωρούμε ένα μικρό χρονικό διάστημα $[0,\,t]$, $t>0$, τέτοιο ώστε η διαδικασία πλεονάσματος να μην πάρει την τιμή *b*, δηλαδή, $U_b(s)<b$, $\forall s\in[0,\,t]$, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει πληρωτέο μέρισμα στο $[0,\,t]$. Έστω t_1 η χρονική στιγμή όπου το πλεόνασμα γίνεται μηδέν, θεωρώντας ότι δεν υπάρχει καμία απαίτηση πριν το t_1. Έστω συνάρτηση $h_1(t,u)$ που εκφράζει το πλεόνασμα στο χρόνο *t*, με

$$h_1(t,u)=ue^{rt}+c\frac{e^{rt}-1}{r}, \qquad t\le t_1$$

όπου η ποσότητα στο κλάσμα είναι η μελλοντική αξία στο χρόνο *t* συνεχούς ράντας με ένταση r, δηλαδή $\bar{s}_{\overline{t|}}^{(r)}=\int_0^t e^{rx}dx$. Είναι $h_1(t_1,u)=0$ και $h_1(0,u)=u$. Για τη χρονική στιγμή t_1 είναι

$$h_1(t_1,u)=0\Rightarrow ue^{rt_1}+c\frac{e^{rt_1}-1}{r}=0\Leftrightarrow t_1=\frac{1}{r}\ln\left(\frac{c}{c+ru}\right).$$

Θεωρούμε $t<t_1$. Στο χρονικό διάστημα $[0,\,t]$ μπορεί να συμβεί μία απαίτηση ή καμία, δηλαδή, για τον αριθμό των απαιτήσεων $N(t)$ είναι αντίστοιχα $N(t)=1$ με $P[N(t)=1]=\lambda t$ ή $N(t)=0$ με $P[N(t)=0]=1-\lambda t$. Δεσμεύοντας ως προς το χρόνο της πρώτης απαίτησης και ως προς το μέγεθος αυτής, με χρήση της (4.2.3) και του ανανεωτικού επιχειρήματος, από το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε

$$\begin{aligned}M_1(u,y;b)&=E[M_1(U_b(t),e^{-at}y;b)\\&=\sum_{k=0}^{1}E[M_1(U_b(t),e^{-at}y;b)\,|\,N(t)=k]P(N(t)=k)+o(t)\,.\end{aligned}\tag{4.2.4}$$

Στην περίπτωση που $N(t)=0$, είναι $U_b(t)=h_1(t,u)$, οπότε,

$$E[M_1(U_b(t),e^{-at}y;b)\,|\,N(t)=0]=M_1(h_1(t,u),e^{-at}y;b)\,.\tag{4.2.5}$$

Στην περίπτωση που $N(t)=1$, ανάλογα το μέγεθος x της πρώτης απαίτησης, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- αν $0<x\le h_1(t,u)$, η διαδικασία ανανεώνεται και είναι $U_b(t)=h_1(t,u)-x>0$,
- αν $h_1(t,u)<x<h_1(t,u)+\dfrac{c}{\delta}$, η διαδικασία ανανεώνεται και είναι $U_b(t)=h_1(t,u)-x<0$,

- αν $x \geq h_1(t,u) + \dfrac{c}{\delta}$, έχουμε απόλυτη χρεοκοπία, δεν υπάρχουν πληρωτέα μερίσματα $(D=0)$ και συνεπώς η ροπογεννήτρια ισούται με 1.

Συνοψίζοντας τις τρεις αυτές περιπτώσεις είναι:

$$M_1(U_b(t), e^{-at}y; b \mid N(t)=1) = \begin{cases} M_1(h_1(t,u)-x, e^{-at}y; b), & 0 < x \leq h_1(t,u), \\ M_2(h_1(t,u)-x, e^{-at}y; b), & h_1(t,u) < x < h_1(t,u) + \dfrac{c}{\delta}, \\ 1, & x \geq h_1(t,u) + \dfrac{c}{\delta}. \end{cases} \qquad (4.2.6)$$

Οπότε η (4.2.4), λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (4.2.5) και (4.2.6), γίνεται

$$M_1(u,y;b) = (1-\lambda t) M_1(h_1(t,u), e^{-at}y; b) + \lambda t \left(\int_0^{h_1(t,u)} M_1(h_1(t,u)-x, e^{-at}y; b) f(x)dx \right.$$

$$\left. + \int_{h_1(t,u)}^{h_1(t,u)+\frac{c}{\delta}} M_2(h_1(t,u)-x, e^{-at}y; b) f(x)dx + \int_{h_1(t,u)+\frac{c}{\delta}}^{\infty} f(x)dx \right) + o(t). \qquad (4.2.7)$$

Έστω $M_1(h_1(t,u), e^{-at}y; b) = M_1(h_1(t,u), y(t); b)$, με $y(t) = e^{-at}y$. Από το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor της $M_1(h_1(t,u), y(t); b)$ στο σημείο $t=0$, παίρνουμε

$$M_1(h_1(t,u), y(t); b) = M_1(h_1(0,u), y(0); b) + t\left[\frac{d}{dt} M_1(h_1(t,u), y(t); b) \right]_{t=0} + o(t)$$

$$= M_1(u,y;b) + t\left(\frac{\partial M_1(h_1(0,u), y(0); b)}{\partial u} \cdot \left[\frac{\partial (h_1(t,u)}{\partial t} \right]_{t=0} \right.$$

$$\left. + \frac{\partial M_1(h_1(0,u), y(0); b)}{\partial y} \cdot \left[\frac{\partial y(t)}{\partial t} \right]_{t=0} \right) + o(t)$$

$$= M_1(u,y;b) + t\left(\frac{\partial M_1(u,y;b)}{\partial u} \cdot (ru+c) + \frac{\partial M_1(u,y;b)}{\partial y} (-ay) \right) + o(t)$$

$$= M_1(u,y;b) + (ru+c)t \frac{\partial M_1(u,y;b)}{\partial u} - ayt \frac{\partial M_1(u,y;b)}{\partial y} + o(t). \qquad (4.2.8)$$

Με αντικατάσταση της (4.2.8) στην (4.2.7) προκύπτει

$$M_1(u,y;b) = (1-\lambda t)\left(M_1(u,y;b) + (ru+c)t \frac{\partial M_1(u,y;b)}{\partial u} - ayt \frac{\partial M_1(u,y;b)}{\partial y} + o(t) \right)$$

$$+ \lambda t \left(\int_0^{h_1(t,u)} M_1(h_1(t,u)-x, e^{-at}y; b) f(x)dx \right.$$

$$+\int_{h_1(t,u)}^{h_1(t,u)+\frac{c}{\delta}} M_2(h_1(t,u)-x, e^{-at}y; b) f(x)dx + \int_{h_1(t,u)+\frac{c}{\delta}}^{\infty} f(x)dx \Bigg) + o(t). \qquad (4.2.9)$$

Απλοποιώντας τον όρο $M_1(u, y; b)$ και διαιρώντας με t και τα δύο μέλη της (4.2.9) έχουμε

$$0 = (ru+c)\frac{\partial M_1(u,y;b)}{\partial u} - ay\frac{\partial M_1(u,y;b)}{\partial y} + \frac{o(t)}{t}$$

$$-\lambda M_1(u,y;b) - \lambda(ru+c)t\frac{\partial M_1(u,y;b)}{\partial u} + \lambda ayt\frac{\partial M_1(u,y;b)}{\partial y} - \lambda t\frac{o(t)}{t}$$

$$+\lambda\Bigg(\int_0^{h_1(t,u)} M_1(h_1(t,u)-x, e^{-at}y; b) f(x)dx$$

$$+\int_{h_1(t,u)}^{h_1(t,u)+\frac{c}{\delta}} M_2(h_1(t,u)-x, e^{-at}y; b) f(x)dx + \int_{h_1(t,u)+\frac{c}{\delta}}^{\infty} f(x)dx \Bigg) + \frac{o(t)}{t}. \qquad (4.2.10)$$

Παίρνοντας το όριο καθώς $t \to 0$ και στα δύο μέλη της (4.2.10), λαμβάνοντας υπ’ όψιν ότι $h_1(0,u) = u$ και $\lim_{t\to 0}\frac{o(t)}{t} = 0$, προκύπτει

$$0 = (ru+c)\frac{\partial M_1(u,y;b)}{\partial u} - ay\frac{\partial M_1(u,y;b)}{\partial y} - \lambda M_1(u,y;b)$$

$$+\lambda\left(\int_0^{u} M_1(u-x, y; b) f(x)dx + \int_{u}^{u+\frac{c}{\delta}} M_2(u-x, y; b) f(x)dx + \int_{u+\frac{c}{\delta}}^{\infty} f(x)dx \right).$$

Όμως $\bar{F}\left(u+\frac{c}{\delta}\right) = \int_{u+\frac{c}{\delta}}^{\infty} f(x)dx$ και αναδιατάσσοντας τους όρους της τελευταίας σχέσης προκύπτει η ζητούμενη Εξίσωση (4.2.1).

ii) *Περίπτωση* $-\frac{c}{\delta} < u < 0$. Προχωρούμε με παρόμοιο συλλογισμό με την περίπτωση *i*). Θεωρούμε ένα μικρό χρονικό διάστημα $[0,\ t]$, $t > 0$, τέτοιο ώστε η διαδικασία πλεονάσματος να μην πάρει την τιμή 0, δηλαδή, $U_b(s) < 0$, $\forall s \in [0,\ t]$. Έστω t_0 η χρονική στιγμή όπου το αρνητικό πλεόνασμα γίνεται για πρώτη φορά μηδέν, θεωρώντας ότι δεν υπάρχει καμία απαίτηση πριν το t_0. Έστω συνάρτηση $h_2(t,u)$ που εκφράζει το πλεόνασμα στο χρόνο *t*, θεωρώντας ότι δεν υπάρχει καμία απαίτηση πριν το *t*, με

$$h_2(t,u) = ue^{\delta t} + c\frac{e^{\delta t}-1}{\delta}, \qquad t \le t_0$$

όπου η ποσότητα στο κλάσμα είναι η μελλοντική αξία στο χρόνο t συνεχούς ράντας με ένταση δ, $\bar{s}_{\overline{t|}}^{(\delta)}$. Είναι $h_2(t_0,u)=0$ και $h_2(0,u)=u$. Για τη χρονική στιγμή t_0 είναι

$$h_2(t_0,u)=0 \Rightarrow ue^{\delta t_0}+c\frac{e^{\delta t_0}-1}{\delta}=0 \Leftrightarrow t_0=\frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{c}{c+\delta u}\right).$$

Θεωρούμε $t<t_0$. Στο χρονικό διάστημα $[0,\ t]$ μπορεί να συμβεί μία απαίτηση ή καμία, δηλαδή, για τον αριθμό των απαιτήσεων $N(t)$ είναι αντίστοιχα $N(t)=1$ με $P[N(t)=1]=\lambda t$ ή $N(t)=0$ με $P[N(t)=0]=1-\lambda t$. Δεσμεύοντας ως προς το χρόνο της πρώτης απαίτησης και ως προς το μέγεθος αυτής, με χρήση της (4.2.3) και του ανανεωτικού επιχειρήματος, από το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε

$$\begin{aligned} M_2(u,y;b) &= E[M_2(U_b(t),e^{-at}y;b) \\ &= \sum_{k=0}^{1} E[M_2(U_b(t),e^{-at}y;b)\mid N(t)=k]P(N(t)=k)+o(t). \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

Στην περίπτωση που $N(t)=0$, είναι $U_b(t)=h_2(t,u)$, οπότε,

$$E[M_2(U_b(t),e^{-at}y;b)\mid N(t)=0]=M_2(h_2(t,u),e^{-at}y;b). \tag{4.2.12}$$

Στην περίπτωση που $N(t)=1$, ανάλογα το μέγεθος x της πρώτης απαίτησης, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- αν $0<x<h_2(t,u)+\frac{c}{\delta}$, η διαδικασία ανανεώνεται και είναι $U_b(t)=h_2(t,u)-x<0$,
- αν $x\geq h_2(t,u)+\frac{c}{\delta}$, έχουμε απόλυτη χρεοκοπία, δεν υπάρχουν πληρωτέα μερίσματα $(D=0)$ και συνεπώς η ροπογεννήτρια ισούται με 1.

Συνοψίζοντας τις δύο αυτές περιπτώσεις είναι:

$$M_2(U_b(t),e^{-at}y;b\mid N(t)=1)=\begin{cases} M_2(h_2(t,u)-x,e^{-at}y;b), & 0<x\leq h_2(t,u)+\dfrac{c}{\delta}, \\ 1, & x\geq h_2(t,u)+\dfrac{c}{\delta}. \end{cases} \tag{4.2.13}$$

Οπότε η (4.2.11), λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (4.2.12) και (4.2.13), γίνεται

$$\begin{aligned} M_2(u,y;b) &= (1-\lambda t)M_2(h_2(t,u),e^{-at}y;b)+\lambda t\left(\int_0^{h_2(t,u)+\frac{c}{\delta}} M_2(h_2(t,u)-x,e^{-at}y;b)f(x)dx\right. \\ &\left. +\int_{h_2(t,u)+\frac{c}{\delta}}^{\infty} f(x)dx\right)+o(t). \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

Έστω $M_2(h_2(t,u),e^{-at}y;b)=M_2(h_2(t,u),y(t);b)$, με $y(t)=e^{-at}y$.

Από το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor της $M_2(h_2(t,u),y(t);b)$ στο σημείο $t=0$, παίρνουμε

$$M_2(h_2(t,u),y(t);b)=M_2(h_2(0,u),y(0);b)+t\left[\frac{d}{dt}M_2(h_2(t,u),y(t);b)\right]_{t=0}+o(t)$$

$$=M_2(u,y;b)+t\left(\frac{\partial M_2(h_2(0,u),y(0);b)}{\partial u}\cdot\left[\frac{\partial(h_2(t,u)}{\partial t}\right]_{t=0}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial M_2(h_2(0,u),y(0);b)}{\partial y}\cdot\left[\frac{\partial y(t)}{\partial t}\right]_{t=0}\right)+o(t)$$

$$=M_2(u,y;b)+t\left(\frac{\partial M_2(u,y;b)}{\partial u}\cdot(\delta u+c)+\frac{\partial M_2(u,y;b)}{\partial y}(-ay)\right)+o(t)$$

$$=M_2(u,y;b)+(\delta u+c)t\frac{\partial M_2(u,y;b)}{\partial u}-ayt\frac{\partial M_2(u,y;b)}{\partial y}+o(t). \quad (4.2.15)$$

Με αντικατάσταση της (4.2.15) στην (4.2.14) προκύπτει

$$M_2(u,y;b)=(1-\lambda t)\left(M_2(u,y;b)+(\delta u+c)t\frac{\partial M_2(u,y;b)}{\partial u}-ayt\frac{\partial M_2(u,y;b)}{\partial y}+o(t)\right)$$

$$+\lambda t\left(\int_0^{h_2(t,u)+\frac{c}{\delta}}M_2(h_2(t,u)-x,e^{-at}y;b)f(x)dx+\int_{h_2(t,u)+\frac{c}{\delta}}^{\infty}f(x)dx\right)+o(t). \quad (4.2.16)$$

Απλοποιώντας τον όρο $M_2(u,y;b)$ και διαιρώντας με t και τα δύο μέλη της (4.2.16) έχουμε:

$$0=(\delta u+c)\frac{\partial M_2(u,y;b)}{\partial u}-ay\frac{\partial M_2(u,y;b)}{\partial y}+\frac{o(t)}{t}$$

$$-\lambda M_2(u,y;b)-\lambda(\delta u+c)t\frac{\partial M_2(u,y;b)}{\partial u}+\lambda ayt\frac{\partial M_2(u,y;b)}{\partial y}-\lambda t\frac{o(t)}{t}$$

$$+\lambda\left(\int_0^{h_2(t,u)+\frac{c}{\delta}}M_2(h_2(t,u)-x,e^{-at}y;b)f(x)dx+\int_{h_2(t,u)+\frac{c}{\delta}}^{\infty}f(x)dx\right)+\frac{o(t)}{t}. \quad (4.2.17)$$

Παίρνοντας το όριο καθώς $t\to 0$ και στα δύο μέλη της (4.2.17), λαμβάνοντας υπ’ όψιν ότι $h_2(0,u)=u$ και $\lim_{t\to 0}\frac{o(t)}{t}=0$, προκύπτει

$$0=(\delta u+c)\frac{\partial M_2(u,y;b)}{\partial u}-ay\frac{\partial M_2(u,y;b)}{\partial y}-\lambda M_2(u,y;b)$$

$$+\lambda\left(\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}M_2(u-x,y;b)f(x)dx+\int_{u+\frac{c}{\delta}}^{\infty}f(x)dx\right).$$

Όμως $\bar{F}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)=\int_{u+\frac{c}{\delta}}^{\infty} f(x)dx$ και αναδιατάσσοντας τους όρους της τελευταίας σχέσης προκύπτει η ζητούμενη Εξίσωση (4.2.2). □

Η επόμενη πρόταση, για την απόδειξη της οποίας παραπέμπουμε στους Wang et al. (2010), παρέχει συνοριακές συνθήκες για τη ροπογεννήτρια $M(u,y;b)$ καθώς τη συνέχειά της στο $u=0$.

Πρόταση 4.2.2. *Οι ροπογεννήτριες συναρτήσεις* $M_1(u,y;b)$ *και* $M_2(u,y;b)$ *ικανοποιούν τις σχέσεις:*

$$\left.\frac{\partial M_1(u,y;b)}{\partial u}\right|_{u=b} = yM_1(b,y;b), \tag{4.2.18}$$

$$M_2\left(-\frac{c}{\delta},y;b\right)=1, \tag{4.2.19}$$

$$M_1(0^+,y;b)=M_2(0^-,y;b). \tag{4.2.20}$$

4.3 Ροπές της παρούσας αξίας όλων των μερισμάτων μέχρι τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας

Στην ενότητα αυτή θα δοθούν οι ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις που ικανοποιούν οι ροπές της $D_{u,b}$, της παρούσας αξίας των μερισμάτων μέχρι τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας. Η λύση των εν λόγω εξισώσεων ώστε να προκύψουν οι *n*-οστές ροπές $V_n(u,b)=E[D_{u,b}^n]$, θα αναλυθεί στη συνέχεια της εργασίας στην περίπτωση που τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένα.

Αρχικά, το επόμενο λήμμα μας παρέχει μια βοηθητική σχέση ανάμεσα στη ροπογεννήτρια συνάρτηση της $D_{u,b}$ και στη *n*-οστή ροπή της.

Λήμμα 4.3.1. *Οι* $M(u,y;b)$ *και* $V_n(u,b)$ *συνδέονται μέσω της σχέσης*

$$M(u,y;b)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}V_n(u,b). \tag{4.3.1}$$

Απόδειξη. Με χρήση της σειράς Taylor γύρω από το μηδέν για την εκθετική συνάρτηση, δηλαδή την

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

για τη ροπογεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής *Y* ισχύει

$$M_Y(t)=E[e^{tY}]=E\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tY)^n}{n!}\right]=E\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}Y^n\right]=1+\sum_{n=1}^{\infty}E\left[\frac{t^n}{n!}Y^n\right]=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}E[Y^n].$$

Οπότε, για την $M(u,y;b)$ έχουμε

$$M(u,y;b)=E[e^{yD_{u,b}}]=E\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(yD_{u,b})^n}{n!}\right]=E\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^nD_{u,b}^n}{n!}\right]=1+\sum_{n=1}^{\infty}E\left[\frac{y^nD_{u,b}^n}{n!}\right]$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}E[D_{u,b}^n]=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}V_n(u,b). \qquad \square$$

Στη συνέχεια, αναπτύσσονται οι ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις που διέπουν τις ροπές $V_n(u,b)$.

Πρόταση 4.3.1. *Οι ροπές $V_n(u,b)$ της $D_{u,b}$ για $n\in\mathbf{N}^+$ ικανοποιούν τις ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις:*

Για $0<u<b$,

$$(ru+c)V'_{n1}(u,b)=(\lambda+na)V_{n1}(u,b)-\lambda\left(\int_0^u V_{n1}(u-x,b)f(x)dx+\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}V_{n2}(u-x,b)f(x)dx\right), \qquad (4.3.2)$$

και για $-\dfrac{c}{\delta}<u<0$,

$$(\delta u+c)V'_{n2}(u,b)=(\lambda+na)V_{n2}(u,b)-\lambda\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}V_{n2}(u-x,b)f(x)dx. \qquad (4.3.3)$$

Απόδειξη. i) Για $0<u<b$, αντικαθιστώντας την (4.3.1) στην (4.2.1) παίρνουμε

$$(ru+c)\frac{\partial}{\partial u}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}V_{n1}(u,b)\right)=ay\frac{\partial}{\partial y}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}V_{n1}(u,b)\right)+\lambda\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}V_{n1}(u,b)\right)$$

$$-\lambda\left[\int_0^u\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}V_{n1}(u-x,b)\right)f(x)dx\right.$$

$$\left.+\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}V_{n2}(u-x,b)\right)f(x)dx\right]-\lambda\bar{F}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)$$

ισοδύναμα

$$(ru+c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}V'_{n1}(u,b)=ay\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ny^{n-1}}{n!}V_{n1}(u,b)+\lambda+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}V_{n1}(u,b)$$

$$-\lambda\int_0^u f(x)dx-\lambda\int_0^u\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}V_{n1}(u-x,b)f(x)dx$$

$$-\lambda\int_{u}^{u+\frac{c}{\delta}} f(x)dx-\lambda\int_{u}^{u+\frac{c}{\delta}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}V_{n2}(u-x,b)f(x)dx-\lambda\bar{F}\left(u+\frac{c}{\delta}\right). \qquad (4.3.4)$$

Αλλά,

$$-\lambda\int_{0}^{u} f(x)dx-\lambda\int_{u}^{u+\frac{c}{\delta}} f(x)dx-\lambda\bar{F}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)$$

$$=-\lambda\left(\int_{0}^{u} f(x)dx+\int_{u}^{u+\frac{c}{\delta}} f(x)dx)\right)-\lambda\left[1-F\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\right]$$

$$=-\lambda\int_{0}^{u+\frac{c}{\delta}} f(x)dx-\lambda+\lambda F\left(u+\frac{c}{\delta}\right)$$

$$=-\lambda F\left(u+\frac{c}{\delta}\right)-\lambda+\lambda F\left(u+\frac{c}{\delta}\right)=-\lambda\,.$$

Βάσει του τελευταίου αποτελέσματος, εναλλάσσοντας τα ολοκληρώματα στο δεύτερο μέλος της (4.3.4) με τα αθροίσματα, και συγκεντρώνοντας τα αθροίσματα σε ένα, προκύπτει

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ru+c)V'_{n1}(u,b)\frac{y^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\lambda+an)V_{n1}(u,b)-\lambda\left(\int_{0}^{u}V_{n1}(u-x,b)f(x)dx+\int_{u}^{u+\frac{c}{\delta}}V_{n2}(u-x,b)f(x)dx\right)\right]\frac{y^n}{n!}\,.$$

Συγκρίνοντας τους συντελεστές του y^n, $n\in\mathbf{N}^+$, στα δύο μέλη της ανωτέρω ισότητας, παίρνουμε την ολοκληροδιαφορική εξίσωση (4.3.4)

$$(ru+c)V'_{n1}(u,b)=(\lambda+an)V_{n1}(u,b)-\lambda\left(\int_{0}^{u}V_{n1}(u-x,b)f(x)dx+\int_{u}^{u+\frac{c}{\delta}}V_{n2}(u-x,b)f(x)dx\right).$$

ii) Για $-\frac{c}{\delta}<u<0$, αντικαθιστώντας την (4.3.1) στην (4.2.2) παίρνουμε

$$(\delta u+c)\frac{\partial}{\partial u}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}V_{n2}(u,b)\right)=ay\frac{\partial}{\partial y}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}V_{n2}(u,b)\right)+\lambda\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}V_{n2}(u,b)\right)$$

$$-\lambda\int_{0}^{u+\frac{c}{\delta}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}V_{n2}(u-x,b)\right)f(x)dx-\lambda\bar{F}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)$$

ισοδύναμα

$$(\delta u+c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}V'_{n2}(u,b)=ay\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ny^{n-1}}{n!}V_{n2}(u,b)+\lambda+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}V_{n2}(u,b)$$

$$-\lambda \int_0^{u+\frac{c}{\delta}} f(x)dx - \lambda \int_0^{u+\frac{c}{\delta}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n!} V_{n2}(u-x,b) f(x)dx$$

$$-\lambda \bar{F}\left(u+\frac{c}{\delta}\right). \tag{4.3.5}$$

Αλλά

$$-\lambda \int_0^{u+\frac{c}{\delta}} f(x)dx - \lambda \bar{F}\left(u+\frac{c}{\delta}\right) = -\lambda F\left(u+\frac{c}{\delta}\right) - \lambda\left[1-F\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\right] = -\lambda .$$

Οπότε, βάσει του τελευταίου αποτελέσματος, εναλλάσσοντας τα ολοκληρώματα στο δεύτερο μέλος της (4.3.5) με τα αθροίσματα, και συγκεντρώνοντας τα τελευταία σε ένα, προκύπτει

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\delta u + c) V'_{n2}(u,b) \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left((an+\lambda) V_{n2}(u,b) - \int_0^{u+\frac{c}{\delta}} V_{n2}(u-x,b) f(x)dx \right) \frac{y^n}{n!} .$$

Συγκρίνοντας τους συντελεστές του y^n, $n \in \mathbf{N}^+$, στα δύο μέλη της ανωτέρω ισότητας, παίρνουμε την ολοκληροδιαφορική εξίσωση (4.3.3)

$$(\delta u + c) V'_{n2}(u,b) = (an+\lambda) V_{n2}(u,b) - \int_0^{u+\frac{c}{\delta}} V_{n2}(u-x,b) f(x)dx . \qquad \square$$

Η επόμενη πρόταση παρέχει σχέσεις συνοριακών συνθηκών της $V_n(u,b)$ στα σημεία b και $-\dfrac{c}{\delta}$ καθώς και σχέσεις λόγω της συνέχειάς της στο 0.

Πρόταση 4.3.2. *Η* $V_n(u,b)$ *για τις συνοριακές τιμές* b *και* $-\dfrac{c}{\delta}$, *ικανοποιεί τις σχέσεις:*

$$V'_{n1}(u,b)\Big|_{u=b} = nV_{n-1,1}(b,b), \qquad n \in \mathbf{N}^+ \tag{4.3.6}$$

$$V_{n2}\left(-\frac{c}{\delta}, b\right) = 0, \qquad n \in \mathbf{N}^+. \tag{4.3.7}$$

Επιπλέον, οι $V_n(u,b)$ *και* $V'_n(u,b)$ *είναι συνεχείς για* $u=0$, *και συγκεκριμένα*

$$V_{n1}(0^+,b) = V_{n2}(0^-,b), \qquad n \in \mathbf{N}^+, \tag{4.3.8}$$

$$V'_{n1}(0^+,b) = V'_{n2}(0^-,b), \qquad n \in \mathbf{N}^+. \tag{4.3.9}$$

Απόδειξη. Αντικαθιστώντας την (4.3.1) στην (4.2.18) παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial u} M_1(u,y;b)\Big|_{u=b} = yM_1(u,y;b) \Rightarrow$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}V_{n1}(u,b)\right)\right]_{u=b}=y\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}V_{n1}(b,b)\right)$$

ισοδύναμα

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}V'_{n1}(u,b)\right]_{u=b}=y+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{n+1}}{n!}V_{n1}(b,b).$$

Θέτοντας $i=n+1$ στο άθροισμα του δευτέρου μέλους, προκύπτει

$$\sum_{n=1}^{\infty}V'_{n1}(u,b)\Big|_{u=b}\frac{y^n}{n!}=y+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{y^i}{(i-1)!}V_{i-1,1}(b,b)$$

και αφού $V_{01}(b,b)=1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}V'_{n1}(u,b)\Big|_{u=b}\frac{y^n}{n!}=yV_{01}(b,b)+\sum_{i=2}^{\infty}i\frac{y^i}{i!}V_{i-1,1}(b,b)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}V'_{n1}(u,b)\Big|_{u=b}\frac{y^n}{n!}=\sum_{i=1}^{\infty}iV_{i-1,1}(b,b)\frac{y^i}{i!}.$$

Συγκρίνοντας τους συντελεστές του y^n, $n\in\mathbf{N}^+$, στα δύο μέλη της ανωτέρω ισότητας, παίρνουμε

$$V'_{n1}(u,b)\Big|_{u=b}=nV_{n-1,1}(b,b),\qquad n\in\mathbf{N}^+.$$

Αντικαθιστώντας την (4.3.1) στην (4.2.19) παίρνουμε

$$M_2\left(-\frac{c}{\delta},y;b\right)=1\Rightarrow$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}V_{n2}\left(-\frac{c}{b},b\right)=1\ \Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}V_{n2}\left(-\frac{c}{b},b\right)\frac{y^n}{n!}=0\Rightarrow$$

$$V_{n2}\left(-\frac{c}{b},b\right)=0,\qquad n\in\mathbf{N}^+.$$

Για τη συνέχεια της $V_n(u,b)$ στο $u=0$, αντικαθιστώντας την (4.3.1) στην (4.2.20) παίρνουμε

$$M_1(0^+,y;b)=M_2(0^-,y;b)\Rightarrow$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}V_{n1}(0^+,b)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}V_{n2}(0^-,b)\Rightarrow$$

$$V_{n1}(0^+,b)=V_{n2}(0^-,b),\qquad n\in\mathbf{N}^+.$$

Σχετικά με τη συνέχεια της $V'_n(u,b)$ στο $u=0$, παίρνοντας το όριο της (4.3.2) καθώς $u\to0^+$ προκύπτει

$$cV'_{n1}(0^+,b)=(\lambda+na)V_{n1}(0^+,b)-\lambda\int_{0^+}^{\frac{c}{\delta}}V_{n2}(-x,b)f(x)dx. \tag{4.3.10}$$

Επίσης, παίρνοντας το όριο της (4.3.3) καθώς $u \to 0^-$ προκύπτει

$$cV'_{n2}(0^-,b) = (\lambda + na)V_{n2}(0^-,b) - \lambda\int_0^{\frac{c}{\delta}} V_{n2}(-x,b)\,f(x)dx\,. \tag{4.3.11}$$

Από τη (4.3.8), τα δεξιά μέλη των (4.3.10) και (4.3.11) είναι ίσα, άρα και τα αριστερά, συνεπώς

$$V'_{n1}(0^+,b) = V'_{n2}(0^-,b)\,, \qquad n \in \mathbf{N}^+\,. \qquad \square$$

4.4 Εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις

Στην ενότητα αυτή θεωρούμε την περίπτωση όπου τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένα με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \beta e^{-\beta x}\,,\ x \ge 0\,,\ \beta > 0\,. \tag{4.4.1}$$

Η εκθετική κατανομή αποτελεί το κατ' εξοχήν μοντέλο στη βιβλιογραφία της θεωρίας κινδύνου καθότι είναι μια εύκολα διαχειρίσιμη μαθηματική συνάρτηση. Υπό το πρίσμα αυτής της κατανομής, οι ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις της Πρότασης 4.3.1 θα αναλυθούν περαιτέρω και θα επιλυθούν.

4.4.1 Αναλυτικές εκφράσεις των $V_n(u,b)$ και $M(u,y;b)$

Αρχικά θα δείξουμε ότι οι ροπές $V_n(u,b)$ της παρούσας αξίας όλων των μερισμάτων μέχρι τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας τ, ικανοποιούν ομογενείς διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης. Έτσι έχουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.4.1. *Οι ροπές $V_n(u,b)$ της $D_{u,b}$ ικανοποιούν τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης:*

Για $0 < u < b$,

$$(ru+c)V''_{n1}(u,b) + [\beta(ru+c) + r - (\lambda+na)]V''_{n1}(u,b) - \beta naV_{n1}(u,b) = 0\,, \tag{4.4.2}$$

ενώ για $-\dfrac{c}{\delta} < u < 0$,

$$(\delta u+c)V''_{n2}(u,b) + [\beta(\delta u+c) + \delta - (\lambda+na)]V''_{n2}(u,b) - \beta naV_{n2}(u,b) = 0\,. \tag{4.4.3}$$

Απόδειξη. *i*) Για $0 < u < b$, αντικαθιστούμε την $f(x)$ από την (4.4.1) στην (4.3.2) και παίρνουμε

$$(ru+c)V'_{n1}(u,b) = (\lambda+na)V_{n1}(u,b) - \lambda\left(\int_0^u V_{n1}(u-x,b)\beta e^{-\beta x}dx + \int_u^{u+\frac{c}{\delta}} V_{n2}(u-x,b)\beta e^{-\beta x}dx\right).$$

Θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής $z=u-x$ οπότε $dz=-dx$. Τα όρια στο πρώτο και δεύτερο ολοκλήρωμα γίνονται $0\le x\le u \Rightarrow u\le x\le 0$ και $u\le x\le u+\frac{c}{\delta}\Rightarrow 0\le x\le -\frac{c}{\delta}$ αντίστοιχα, οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$(ru+c)V'_{n1}(u,b)=(\lambda+na)V_{n1}(u,b)-\lambda\left(\int_u^0 V_{n1}(z,b)\beta e^{-\beta(u-z)}(-dz)+\int_0^{-\frac{c}{\delta}} V_{n2}(z,b)\beta e^{-\beta(u+z)}(-dz)\right)$$

και ισοδύναμα

$$(ru+c)V'_{n1}(u,b)=(\lambda+na)V_{n1}(u,b)-\lambda\beta e^{-\beta u}\left(\int_0^u V_{n1}(z,b)e^{\beta z}dz+\int_{-\frac{c}{\delta}}^0 V_{n2}(z,b)e^{\beta z}dz\right). \qquad (4.4.4)$$

Παραγωγίζοντας την (4.4.4) ως προς u, έχουμε

$$rV'_{n1}(u,b)+(ru+c)V''_{n1}(u,b)=(\lambda+na)V'_{n1}(u,b)$$

$$+\lambda\beta^2 e^{-\beta u}\left(\int_0^u V_{n1}(z,b)e^{\beta z}dz+\int_{-\frac{c}{\delta}}^0 V_{n2}(z,b)e^{\beta z}dz\right)-\lambda\beta e^{-\beta u}V_{n1}(u,b)e^{\beta u}. \qquad (4.4.5)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4.4.4) με β, βρίσκουμε

$$\beta(ru+c)V'_{n1}(u,b)=\beta(\lambda+na)V_{n1}(u,b)-\lambda\beta^2 e^{-\beta u}\left(\int_0^u V_{n1}(z,b)e^{\beta z}dz+\int_{-\frac{c}{\delta}}^0 V_{n2}(z,b)e^{\beta z}dz\right). \qquad (4.4.6)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (4.4.5) και (4.4.6) προκύπτει

$$rV'_{n1}(u,b)+(ru+c)V''_{n1}(u,b)+\beta(ru+c)V'_{n1}(u,b)=(\lambda+na)V'_{n1}(u,b)-\beta\lambda V_{n1}(u,b)$$
$$+\beta(\lambda+na)V_{n1}(u,b)$$

και αναδιατάσσοντας τους όρους,

$$(ru+c)V''_{n1}(u,b)+[\beta(ru+c)+r-(\lambda+na)]V'_{n1}(u,b)-\beta naV_{n1}(u,b)=0$$

που είναι η ζητούμενη Εξίσωση (4.4.2).

ii) Για $-\frac{c}{\delta}<u<0$, αντικαθιστούμε την $f(x)$ από την (19.1) στην (4.3.3) και παίρνουμε

$$(\delta u+c)V'_{n2}(u,b)=(\lambda+na)V_{n2}(u,b)-\lambda\int_0^{u+\frac{c}{\delta}} V_{n2}(u-x,b)\beta e^{-\beta x}dx.$$

Θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής $z=u-x$, οπότε $dz=-dx$. Τα όρια στο ολοκλήρωμα γίνονται $0\le x\le u+\frac{c}{\delta}\Rightarrow u\le x\le -\frac{c}{\delta}$, οπότε,

$$(\delta u+c)V'_{n2}(u,b)=(\lambda+na)V_{n2}(u,b)-\lambda\int_u^{-\frac{c}{\delta}}V_{n2}(z,b)\beta e^{-\beta(u-z)}(-dz)$$

ισοδύναμα

$$(\delta u+c)V'_{n2}(u,b)=(\lambda+na)V_{n2}(u,b)-\lambda\beta e^{-\beta u}\int_{-\frac{c}{\delta}}^{u}V_{n2}(z,b)e^{\beta z}dz\,. \tag{4.4.7}$$

Παραγωγίζοντας την (4.4.7) ως προς u, προκύπτει

$$\delta V'_{n2}(u,b)+(\delta u+c)V''_{n2}(u,b)=(\lambda+na)V'_{n2}(u,b)$$

$$+\lambda\beta^2e^{-\beta u}\int_{-\frac{c}{\delta}}^{u}V_{n2}(z,b)e^{\beta z}dz-\lambda\beta e^{-\beta u}V_{n2}(u,b)e^{\beta u}\,. \tag{4.4.8}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4.4.7) με β, βρίσκουμε

$$\beta(\delta u+c)V'_{n2}(u,b)=\beta(\lambda+na)V_{n2}(u,b)-\lambda\beta^2e^{-\beta u}\int_{-\frac{c}{\delta}}^{u}V_{n2}(z,b)e^{\beta z}dz\ . \tag{4.4.9}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (4.4.8) και (4.4.9) προκύπτει

$$\delta V'_{n2}(u,b)+(\delta u+c)V''_{n2}(u,b)+\beta(\delta u+c)V'_{n2}(u,b)=(\lambda+na)V'_{n2}(u,b)$$

$$-\lambda\beta V_{n2}(u,b)+\beta(\lambda+na)V_{n2}(u,b)$$

όπου με αναδιάταξη των όρων, έχουμε την (4.4.3)

$$(\delta u+c)V''_{n2}(u,b)+[\beta(\delta u+c)+\delta-(\lambda+na)]V'_{n2}(u,b)-\beta naV_{n2}(u,b)=0\,. \quad \square$$

Η Πρόταση 4.4.2 μας παρέχει τις ποσότητες $V_n(u,b)$ που προκύπτουν από την επίλυση των διαφορικών Εξισώσεων (4.4.2) και (4.4.3) τις οποίες ικανοποιούν.

Πρόταση 4.4.2. *Οι n-οστές ροπές της $D_{u.b}$ δίνονται από τις σχέσεις:*

$$V_{n1}(u,b)=a_{n1}h_{n1}(u)+a_{n2}h_{n2}(u),\qquad 0<u<b, \tag{4.4.10}$$

$$V_{n2}(u,b)=a_{n4}h_{n4}(u),\qquad -\frac{c}{\delta}<u<0, \tag{4.4.11}$$

με a_{n1}, a_{n2}, a_{n4} αυθαίρετες σταθερές,

$$h_{n1}(u)=e^{-\frac{\beta}{r}(ru+c)}U\left(1-\frac{\lambda}{r},1-\frac{\lambda+na}{r},\frac{\beta}{r}(ru+c)\right), \tag{4.4.12}$$

$$h_{n2}(u)=\left(\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)^{\frac{\lambda+na}{r}}e^{-\frac{\beta}{r}(ru+c)}M\left(1+\frac{na}{r},1+\frac{\lambda+na}{r},\frac{\beta}{r}(ru+c)\right), \tag{4.4.13}$$

$$h_{n4}(u)=\left(\frac{\beta}{\delta}(\delta u+c)\right)^{\frac{\lambda+na}{\delta}} e^{-\frac{\beta}{\delta}(\delta u+c)} M\left(1+\frac{na}{\delta},1+\frac{\lambda+na}{\delta},\frac{\beta}{\delta}(\delta u+c)\right), \tag{4.4.14}$$

$M(d_1,d_2,y)$ και $U(d_1,d_2,y)$ η συμφυής υπεργεωμετρική συνάρτηση πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.

Απόδειξη. Η επίλυση της ομογενούς διαφορικής Εξίσωσης δεύτερης τάξης (4.4.2) και της (4.4.3) προκύπτει μετασχηματίζοντας κάθε μια αρχικά σε συμφυή υπεργεωμετρική διαφορική εξίσωση (confluent hypergeometric equation), γνωστή και ως εξίσωση Kummer (ή degenerate hypergeometric equation).

i) $0<u<b$. Θεωρούμε το μετασχηματισμό

$$V_{n1}(u,b)=g_n(y) \qquad \text{και} \qquad y=-\frac{\beta}{r}(ru+c) \qquad \text{για } 0<u<b \tag{4.4.15}$$

και υπολογίζουμε τις παραγώγους:

$$\frac{dy}{du}=-\beta\,, \qquad \frac{d^2y}{du^2}=0$$

$$\frac{d}{du}V_{n1}(u,b)=\frac{d}{du}g_n(y)=\frac{dg_n(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{du}=-\beta g_n'(y)$$

$$\frac{d^2}{du^2}V_{n1}(u,b)=\frac{d^2}{du^2}g_n(y)=\frac{d}{du}\left(\frac{dg_n(y)}{du}\right)=\frac{d}{du}[-\beta g_n'(y)]=-\beta g_n''(y)\frac{dy}{du}=\beta^2 g_n''(y)\,.$$

Αντικαθιστούμε τις παραπάνω ποσότητες στην (4.4.2) και έχουμε

$$-\frac{yr}{\beta}\beta^2 g_n''(y)+[-yr+r-(\lambda+na)](-\beta)g_n'(y)-\beta na g_n(y)=0$$

και απλοποιώντας προκύπτει

$$yg_n''(y)+\left(1-\frac{\lambda+na}{r}-y\right)g_n'(y)+\frac{na}{r}g_n(y)=0 \tag{4.4.16}$$

όπου οι τιμές τις οποίες παίρνει το y είναι

$$0<u<b\Rightarrow c<ru+c<rb+c\Rightarrow -\frac{\beta}{r}c>-\frac{\beta}{r}(ru+c)>-\frac{\beta}{r}(rb+c)\Rightarrow -\frac{\beta(rb+c)}{r}<y<-\frac{\beta c}{r}\,.$$

Η Εξίσωση (4.4.16) είναι της μορφής

$$yg_n''(y)+(B-y)g_n'(y)-Ag_n(y)=0\,, \text{ με } B=1-\frac{\lambda+na}{r} \text{ και } A=-\frac{na}{r}\,.$$

Η γενική λύση της, στην περίπτωση που ο λόγος $\dfrac{\lambda+na}{r}$ δεν είναι ακέραιος, και είναι αυτή που συναντάται συνήθως στην πράξη, δίνεται ως γραμμικός συνδυασμός δύο γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων και, με βάση τις σχέσεις (13.1.18) και (13.1.15) στο Abramowitz and Stegun (1972), έχει μορφή

$$g_n(y) = a_{n1}e^y U(B-A, B, -y) + a_{n2} y^{1-B} e^y M(1-A, 2-B, -y)$$

δηλαδή

$$g_n(y) = a_{n1}e^y U\left(1-\frac{\lambda}{r}, 1-\frac{\lambda+na}{r}, -y\right) + a_{n2}(-y)^{\frac{\lambda+na}{r}} e^y M\left(1+\frac{na}{r}, 1+\frac{\lambda+na}{r}, -y\right)$$

όπου a_{n1} και a_{n2} είναι αυθαίρετες σταθερές, $M(d_1, d_2, y)$ είναι η συμφυής υπεργεωμετρική συνάρτηση πρώτου είδους και $U(d_1, d_2, y)$ είναι η συμφυής υπεργεωμετρική συνάρτηση δεύτερου είδους (Παράρτημα Π2). Σημειώνεται εδώ, ότι το αρνητικό πρόσημο στο *y* στην ποσότητα $(-y)^{\frac{\lambda+na}{r}}$ αρχικά δεν αλλοιώνει το αποτέλεσμα, καθώς το $(-1)^{\frac{\lambda+na}{r}}$ είναι σταθερά. Συνεπώς, για την $V_{n1}(u,b)$ από την (4.4.15) είναι

$$V_{n1}(u,b) = g_n\left(-\frac{\beta}{r}(ru+c)\right) = a_{n1}h_{n1}(u) + a_{n2}h_{n2}(u), \qquad 0 < u < b, \tag{4.4.17}$$

όπου $h_{n1}(u)$ και $h_{n2}(u)$ δίνονται στις (4.4.12) και (4.4.13) αντίστοιχα.

ii) $-\frac{c}{\delta} < u < 0$. Με την ίδια μεθοδολογία όπως πριν, αλλά θέτοντας *δ* στη θέση του *r*, προκύπτει η λύση της Εξίσωσης (4.4.3):

$$V_{n2}(u,b) = a_{n3}h_{n3}(u) + a_{n4}h_{n4}(u), \tag{4.4.18}$$

με a_{n3}, a_{n4} αυθαίρετες σταθερές,

$$h_{n3}(u) = e^{-\frac{\beta}{\delta}(\delta u+c)} U\left(1-\frac{\lambda}{\delta}, 1-\frac{\lambda+na}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}(\delta u+c)\right), \tag{4.4.19}$$

$$h_{n4}(u) = \left(\frac{\beta}{\delta}(\delta u+c)\right)^{\frac{\lambda+na}{\delta}} e^{-\frac{\beta}{\delta}(\delta u+c)} M\left(1+\frac{na}{\delta}, 1+\frac{\lambda+na}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}(\delta u+c)\right), \tag{4.4.20}$$

και $M(d_1, d_2, y)$ και $U(d_1, d_2, y)$ οι συμφυής υπεργεωμετρική συνάρτηση πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα. Από την (13.5.5) στο Abramowitz and Stegun (1972) όπου

$$\lim_{|z|\to 0} M(a,b,z) = 1, \qquad b \neq -1, -2, -3, \ldots,$$

είναι

$$\lim_{u\to\left(-\frac{c}{\delta}\right)^+} h_{n4}(u) = \lim_{u\to\left(-\frac{c}{\delta}\right)^+}\left[\left(\frac{\beta}{\delta}(\delta u+c)\right)^{\frac{\lambda+na}{\delta}} e^{-\frac{\beta}{\delta}(\delta u+c)} M\left(1+\frac{na}{\delta}, 1+\frac{\lambda+na}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}(\delta u+c)\right)\right] = 0. \tag{4.4.21}$$

Επίσης σύμφωνα με την (13.5.12) στο Abramowitz and Stegun (1972) όπου

$$\lim_{z\to 0} U(a,b,) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1+a-b)} \text{ για } b < 0,$$

είναι

$$\lim_{u\to\left(-\frac{c}{\delta}\right)^+} h_{n3}(u) = U\left(1-\frac{\lambda}{\delta}, 1-\frac{\lambda+na}{\delta}, 0\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+na}{\delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{\delta+na}{\delta}\right)} \tag{4.4.22}$$

με $1-\dfrac{\lambda+na}{\delta}<0$ ή $\delta<\lambda+na$, όπου στην πράξη η ανισότητα αυτή ισχύει, καθώς είναι συνήθως $\delta<1$ και λ > 1 (Cai (2007)). Συνεπώς, βάσει των (4.4.21), (4.4.22) και (4.3.7), από την (4.4.18) βρίσκουμε

$$\lim_{u\to\left(-\frac{c}{\delta}\right)^+} V_{n2}(u,b) = \lim_{u\to\left(-\frac{c}{\delta}\right)^+}[a_{n3}h_{n3}(u)+a_{n4}h_{n4}(u)] = a_{n3}\lim_{u\to\left(-\frac{c}{\delta}\right)^+} h_{n3}(u)+a_{n4}\lim_{u\to\left(-\frac{c}{\delta}\right)^+} h_{n4}(u)$$

$$\Rightarrow 0 = a_{n3}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+na}{\delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{\delta+na}{\delta}\right)}+a_{n4}\cdot 0 \Rightarrow a_{n3}=0\,.$$

Οπότε η (4.4.18) γίνεται

$$V_{n2}(u,b) = a_{n4}h_{n4}(u)\,, \qquad -\frac{c}{\delta}<u<0\,. \qquad \square$$

Αναλυτικές εκφράσεις για τη ροπογεννήτρια συνάρτηση $M(u,y;b)$ παρέχει το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 4.4.1. *Όταν ο λόγος* $\dfrac{\lambda+na}{\delta}$ *δεν είναι ακέραιος, για τη ροπογεννήτρια συνάρτηση* $M(u,y;b)$ *ισχύει:*

$$M_1(u,y;b) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}[a_{n1}h_{n1}(u)+a_{n2}h_{n2}(u)], \qquad 0<u<b$$

και

$$M_2(u,y;b) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}a_{n4}h_{n4}(u), \qquad -\frac{c}{\delta}<u<0\,.$$

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα προκύπτει με άμεση αντικατάσταση των λύσεων $V_n(u,b)$ από τις (4.4.10) και (4.4.11) στην (4.3.1). Συγκεκριμένα,

$$M(u,y;b) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}V_n(u,b) = \begin{cases} 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}[a_{n1}h_{n1}(u)+a_{n2}h_{n2}(u)], & 0<u<b, \\ 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}a_{n4}h_{n4}(u), & -\frac{c}{\delta}<u<0. \end{cases} \qquad \square$$

Στις επόμενες δύο προτάσεις δίνονται αναλυτικές εκφράσεις για τις ροπές n-οστής τάξης της $D(u,b)$, υπολογίζοντας τις σταθερές a_{n1}, a_{n2} και a_{n4}. Στην Πρόταση 4.4.3 εξετάζουμε την περίπτωση για $n=1$, δηλαδή, τη ροπή πρώτης τάξης της $D(u,b)$, η οποία είναι η αναμενόμενη τιμή της παρούσας αξίας όλων των μερισμάτων μέχρι τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας τ.

Πρόταση 4.4.3. *Οι ροπές πρώτης τάξης* $V_1(u,b)=E[D_{u,b}]$, *δίνονται από τις σχέσεις:*

$$V_{11}(u,b)=\frac{\ell_1(u)}{\ell_1'(b)}, \qquad 0<u<b, \tag{4.4.23}$$

$$V_{12}(u,b)=\frac{\dfrac{\ell_1(0)}{h_{14}(0)}h_{14}(u)}{\ell_1'(b)}, \qquad -\frac{c}{\delta}<u<0, \tag{4.4.24}$$

όπου

$$\ell_1(u)=[h_{11}(0)h_{14}'(0)-h_{11}'(0)h_{14}(0)]h_{12}(u)-[h_{12}(0)h_{14}'(0)-h_{12}'(0)h_{14}(0)]h_{11}(u). \tag{4.4.25}$$

Απόδειξη. Θέτοντας n = 1 στις (4.4.10) και (4.4.11) και παραγωγίζοντάς τες ως προς u βρίσκουμε αντίστοιχα:

$$V_{11}'(u,b)=a_{11}h_{11}'(u)+a_{12}h_{12}'(u), \qquad 0<u<b, \tag{4.4.26}$$

$$V_{12}'(u,b)=a_{14}h_{14}'(u), \qquad -\frac{c}{\delta}<u<0. \tag{4.4.27}$$

Από την (4.3.6) για n = 1 και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $V_0(u,b)=1$ για $-\frac{c}{\delta}<u\le b$, έχουμε

$$V_{n1}'(u,b)\big|_{u=b}=nV_{n-1,1}(b,b)\overset{n=1}{\Rightarrow}V_{11}'(u,b)\big|_{u=b}=V_{0,1}(b,b)\Rightarrow V_{11}'(b,b)=1.$$

Θέτοντας στην (4.4.26) $u=b$, και από την προηγούμενη σχέση προκύπτει

$$a_{11}h_{11}'(b)+a_{12}h_{12}'(b)=1. \tag{4.4.28}$$

Αντικαθιστώντας τις (4.4.26) και (4.4.27) στην (4.3.9) έχουμε

$$V_{n1}'(0^+,b)=V_{n2}'(0^-,b)\overset{n=1}{\Rightarrow}V_{11}'(0^+,b)=V_{12}'(0^-,b)$$

$$a_{11}h_{11}'(0)+a_{12}h_{12}'(0)=a_{14}h_{14}'(0). \tag{4.4.29}$$

Αντικαθιστώντας τις (4.4.10) και (4.4.11) στην (4.3.8) παίρνουμε

$$V_{n1}(0^+,b)=V_{n2}(0^-,b)\overset{n=1}{\Rightarrow}V_{11}(0^+,b)=V_{12}(0^-,b)$$

$$a_{11}h_{11}(0)+a_{12}h_{12}(0)=a_{14}h_{14}(0). \tag{4.4.30}$$

Οι (4.4.28) - (4.4.29) σχηματίζουν ένα σύστημα (Σ) τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους, a_{11}, a_{12}, a_{14},

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} a_{11}h'_{11}(b)+a_{12}h'_{12}(b)=1 \\ a_{11}h'_{11}(0)+a_{12}h'_{12}(0)=a_{14}h'_{14}(0) \\ a_{11}h_{11}(0)+a_{12}h_{12}(0)=a_{14}h_{14}(0) \end{cases}$$

όπου οι ποσότητες $h_{11}(0)$, $h_{12}(0)$, $h_{14}(0)$, $h'_{11}(0)$, $h'_{12}(0)$, $h'_{14}(0)$, $h'_{11}(b)$, $h'_{12}(b)$ υπολογίζονται από τις σχέσεις (4.4.12)-(4.4.14). Συγκεκριμένα οι εμπλεκόμενες παράγωγοι των $h_{n1}(u)$, $h_{n2}(u)$ και $h_{n4}(u)$ δίνονται στο Λήμμα 4.4.1. Από τη λύση του συστήματος (Σ) προκύπτει:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{h_{12}(0)h'_{14}(0)-h'_{12}(0)h_{14}(0)}{\ell'_1(b)}, \\ a_{12} &= \frac{h_{11}(0)h'_{14}(0)-h'_{11}(0)h_{14}(0)}{\ell'_1(b)}, \\ a_{14} &= \frac{\dfrac{\ell_1(0)}{h_{14}(0)}}{\ell'_1(b)}, \end{aligned} \tag{4.4.31}$$

όπου $\ell'_1(b)$ είναι η εκτιμημένη στο $u=b$ παράγωγος της συνάρτησης $\ell_1(u)$ που δίνεται στην (4.4.25). Αντικαθιστώντας τους συντελεστές a_{11}, a_{12} και a_{14} από την (4.4.31) στις (4.4.10) και (4.4.11), βρίσκουμε αντίστοιχα

$$\begin{aligned} V_{11}(u,b) &= a_{11}h_{11}(u)+a_{12}h_{12}(u) \\ &= -\frac{h_{12}(0)h'_{14}(0)-h'_{12}(0)h_{14}(0)}{\ell'_1(b)}h_{11}(u)+\frac{h_{11}(0)h'_{14}(0)-h'_{11}(0)h_{14}(0)}{\ell'_1(b)}h_{12}(u) \\ &= \frac{\ell_1(u)}{\ell'_1(b)}, \qquad 0<u<b, \end{aligned}$$

και

$$V_{12}(u,b)=a_{14}h_{14}(u)=\frac{\dfrac{\ell_1(0)}{h_{14}(0)}}{\ell'_1(b)}h_{14}(u), \qquad -\frac{c}{\delta}<u<0. \qquad \square$$

Η επόμενη πρόταση δίνει αναλυτικές εκφράσεις για τις ροπές n-οστής τάξης της $D(u,b)$ για $n\geq 2$.

Πρόταση 4.4.4. *Οι ροπές $n\geq 2$ τάξης, $V_n(u,b)=E[D^n_{u,b}]$, δίνονται από τις σχέσεις:*

$$V_{n1}(u,b)=\frac{nV_{n-1,1}(b,b)\ell_n(u)}{\ell'_n(b)}, \qquad 0<u<b, \tag{4.4.32}$$

$$V_{n2}(u,b)=\frac{nV_{n-1,1}(b,b)\dfrac{\ell_{1n}(0)}{h_{n4}(0)}h_{n4}(u)}{\ell'_n(b)}, \qquad -\frac{c}{\delta}<u<0 \tag{4.4.33}$$

όπου

$$\ell_n(u) = [h_{n1}(0)h'_{n4}(0) - h'_{n1}(0)h_{n4}(0)]h_{n2}(u) - [h_{n2}(0)h'_{n4}(0) - h'_{n2}(0)h_{n4}(0)]h_{n1}(u) \qquad (4.4.34)$$

και η $V_{11}(b,b)$ *δίνεται στην* (4.4.23).

Απόδειξη. Παραγωγίζοντας τις (4.4.10) και (4.4.11) ως προς *u* βρίσκουμε αντίστοιχα:

$$V'_{n1}(u,b) = a_{n1}h'_{n1}(u) + a_{n2}h'_{n2}(u), \qquad 0 < u < b, \qquad (4.4.35)$$

$$V'_{n2}(u,b) = a_{n4}h'_{n4}(u), \qquad -\frac{c}{\delta} < u < 0. \qquad (4.4.36)$$

Από την (4.3.6) έχουμε

$$V'_{n1}(u,b)\big|_{u=b} = nV_{n-1,1}(b,b)$$

και για $u = b$ από την (4.4.35) παίρνουμε

$$a_{n1}h'_{n1}(b) + a_{n2}h'_{n2}(b) = nV_{n-1,1}(b,b). \qquad (4.4.37)$$

Αντικαθιστώντας τις (4.4.35) και (4.4.36) στην (4.3.9) έχουμε

$$V'_{n1}(0^+,b) = V'_{n2}(0^-,b)$$

$$a_{n1}h'_{n1}(0) + a_{n2}h'_{n2}(0) = a_{n4}h'_{n4}(0). \qquad (4.4.38)$$

Αντικαθιστώντας τις (4.4.10) και (4.4.11) στην (4.3.8) παίρνουμε

$$V_{n1}(0^+,b) = V_{n2}(0^-,b)$$

$$a_{n1}h_{n1}(0) + a_{n2}h_{n2}(0) = a_{n4}h_{n4}(0). \qquad (4.4.39)$$

Οι (4.4.37) - (4.4.39) σχηματίζουν ένα σύστημα (Σ) τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους, a_{n1}, a_{n2}, a_{n4},

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} a_{n1}h'_{n1}(b) + a_{n2}h'_{n2}(b) = nV_{n-1,1}(b,b) \\ a_{n1}h'_{n1}(0) + a_{n2}h'_{n2}(0) = a_{n4}h'_{n4}(0) \\ a_{n1}h_{n1}(0) + a_{n2}h_{n2}(0) = a_{n4}h_{n4}(0) \end{cases}$$

όπου οι ποσότητες $h_{n1}(0)$, $h_{n2}(0)$, $h_{n4}(0)$ υπολογίζονται από τις σχέσεις (4.4.12)-(4.4.14) και οι $h'_{n1}(0)$, $h'_{n2}(0)$, $h'_{n4}(0)$, $h'_{n1}(b)$, $h'_{n2}(b)$ από το Λήμμα 4.4.1. Από τη λύση του συστήματος (Σ) προκύπτει:

$$a_{n1} = -\frac{nV_{n-1,1}(b,b)[h_{n2}(0)h'_{n4}(0) - h'_{n2}(0)h_{n4}(0)]}{\ell'_n(b)},$$

$$a_{n2} = \frac{nV_{n-1,1}(b,b)[h_{n1}(0)h'_{n4}(0) - h'_{n1}(0)h_{n4}(0)]}{\ell'_n(b)}, \qquad (4.4.40)$$

$$a_{n4} = \frac{nV_{n-1,1}(b,b)\dfrac{\ell_n(0)}{h_{n4}(0)}}{\ell'_n(b)},$$

όπου $\ell'_n(b)$ είναι η εκτιμημένη στο $u=b$ παράγωγος της συνάρτησης $\ell_n(u)$ που δίνεται στην (4.4.34). Αντικαθιστώντας τους συντελεστές a_{n1}, a_{n2} και a_{n4} από την (4.4.40) στις (4.4.10) και (4.4.11), βρίσκουμε αντίστοιχα

$$V_{n1}(u,b) = a_{n1}h_{n1}(u) + a_{n2}h_{n2}(u)$$

$$= -\frac{nV_{n-1,1}(b,b)[h_{n2}(0)h'_{n4}(0) - h'_{n2}(0)h_{n4}(0)]}{\ell'_n(b)} h_{n1}(u) + \frac{nV_{n-1,1}(b,b)[h_{n1}(0)h'_{n4}(0) - h'_{n1}(0)h_{n4}(0)]}{\ell'_n(b)} h_{n2}(u)$$

$$= \frac{nV_{n-1,1}(b,b)\ell_n(u)}{\ell'_n(b)}, \qquad 0 < u < b,$$

και

$$V_{n2}(u,b) = a_{n4}h_{n4}(u) = \frac{nV_{n-1,1}(b,b)\dfrac{\ell_n(0)}{h_{n4}(0)}}{\ell'_n(b)} h_{n4}(u), \qquad -\frac{c}{\delta} < u < 0$$

όπου η $V_{11}(b,b)$ δίνεται στην (4.4.23). □

Για τις παραγώγους των ποσοτήτων $h_{n1}(u),\ h_{n2}(u)$ και $h_{n4}(u)$ που εμπλέκονται στις ροπές $V_n(u,b) = E[D^n_{u,b}]$, έχουμε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 4.4.1. *Οι πρώτες παράγωγοι των* $h_{n1}(u),\ h_{n2}(u)$ *και* $h_{n4}(u)$ *είναι αντίστοιχα ίσες με*

$$h'_{n1}(u) = -\beta e^{-\frac{\beta}{r}(ru+c)} \left[U\left(1-\frac{\lambda}{r}, 1-\frac{\lambda+na}{r}, \frac{\beta}{r}(ru+c)\right) + \frac{r-\lambda}{r} U\left(2-\frac{\lambda}{r}, 2-\frac{\lambda+na}{r}, \frac{\beta}{r}(ru+c)\right)\right], \tag{4.4.41}$$

$$h'_{n2}(u) = \left(\frac{\beta(ru+c)}{r}\right)^{\frac{\lambda+na}{\delta}} e^{-\frac{\beta(ru+c)}{r}} \left[\frac{\lambda+na-\beta(ru+c)}{ru+c} M\left(1+\frac{na}{r}, 1+\frac{\lambda+na}{r}, \frac{\beta(ru+c)}{r}\right) + \frac{\beta(r+na)}{\lambda+r+na} M\left(2+\frac{na}{r}, 2+\frac{\lambda+na}{r}, \frac{\beta(ru+c)}{r}\right)\right], \tag{4.4.42}$$

$$h'_{n4}(u) = \left(\frac{\beta(\delta u+c)}{\delta}\right)^{\frac{\lambda+na}{\delta}} e^{-\frac{\beta(\delta u+c)}{\delta}} \left[\frac{\lambda+na-\beta(\delta u+c)}{\delta u+c} M\left(1+\frac{na}{\delta}, 1+\frac{\lambda+na}{\delta}, \frac{\beta(\delta u+c)}{\delta}\right) + \frac{\beta(\delta+na)}{\lambda+\delta+na} M\left(2+\frac{na}{\delta}, 2+\frac{\lambda+na}{\delta}, \frac{\beta(\delta u+c)}{\delta}\right)\right]. \tag{4.4.43}$$

Απόδειξη. Για την παραγώγιση των εμπλεκόμενων συμφυών υπεργεωμετρικών συναρτήσεων $M(d_1,d_2,z)$ και $U(d_1,d_2,z)$, χρησιμοποιούμε αντίστοιχα τις ιδιότητες (Παράρτημα Π2)

$$\frac{d}{dz}M(d_1,d_2,z)=\frac{d_1}{d_z}M(d_1+1,d_2+1,z) \quad \text{και} \quad \frac{d}{dz}U(d_1,d_2,z)=-d_1U(d_1+1,d_2+1,z). \quad (4.4.44)$$

Από την (4.4.12) είναι

$$h_{n1}'(u)=-\beta e^{-\frac{\beta}{r}(ru+c)}U\left(1-\frac{\lambda}{r},1-\frac{\lambda+na}{r},\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)$$

$$-\beta e^{-\frac{\beta}{r}(ru+c)}\left(1-\frac{\lambda}{r}\right)U\left(2-\frac{\lambda}{r},2-\frac{\lambda+na}{r},\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)$$

$$=-\beta e^{-\frac{\beta}{r}(ru+c)}\left[U\left(1-\frac{\lambda}{r},1-\frac{\lambda+na}{r},\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{r-\lambda}{r}U\left(2-\frac{\lambda}{r},2-\frac{\lambda+na}{r},\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)\right].$$

Από την (4.4.13) και την ιδιότητα $(f\cdot g\cdot h)'=f'\cdot g\cdot h+f\cdot g'\cdot h+f\cdot g\cdot h'$, είναι

$$h_{n2}'(u)=\beta\frac{\lambda+na}{r}\left(\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)^{\frac{\lambda+na}{r}-1}e^{-\frac{\beta}{r}(ru+c)}M\left(1+\frac{na}{r},1+\frac{\lambda+na}{r},\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)$$

$$-\beta\left(\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)^{\frac{\lambda+na}{r}}e^{-\frac{\beta}{r}(ru+c)}M\left(1+\frac{na}{r},1+\frac{\lambda+na}{r},\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)$$

$$+\beta\left(\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)^{\frac{\lambda+na}{r}}e^{-\frac{\beta}{r}(ru+c)}\frac{1+\frac{na}{r}}{1+\frac{\lambda+na}{r}}M\left(2+\frac{na}{r},2+\frac{\lambda+na}{r},\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)$$

$$=\beta\left(\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)^{\frac{\lambda+na}{r}}e^{-\frac{\beta}{r}(ru+c)}\left(\frac{\lambda+na}{r}\frac{r}{\beta(ru+c)}-1\right)M\left(1+\frac{na}{r},1+\frac{\lambda+na}{r},\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)$$

$$+\beta\left(\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)^{\frac{\lambda+na}{r}}e^{-\frac{\beta}{r}(ru+c)}\frac{r+na}{r+\lambda+na}M\left(2+\frac{na}{r},2+\frac{\lambda+na}{r},\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)$$

$$=\left(\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)^{\frac{\lambda+na}{r}}e^{-\frac{\beta}{r}(ru+c)}\left[\frac{\lambda+na-\beta(ru+c)}{ru+c}M\left(1+\frac{na}{r},1+\frac{\lambda+na}{r},\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\beta(r+na)}{r+\lambda+na}M\left(2+\frac{na}{r},2+\frac{\lambda+na}{r},\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)\right].$$

Η παράγωγος $h_{n4}'(u)$ είναι ίδια με την $h_{n2}'(u)$ θέτοντας δ στη θέση του r. □

4.4.2 Βέλτιστο όριο μερίσματος

Στην ενότητα αυτή, θεωρούμε την εύρεση της βέλτιστης τιμής του ορίου b, πέρα από την οποία δίνονται μερίσματα στους μετόχους της ασφαλιστικής εταιρίας. Αναζητάμε την τιμή $b^* \geq 0$ η οποία μεγιστοποιεί την αναμενόμενη τιμή της παρούσας αξίας όλων των μερισμάτων μέχρι τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας τ,

$$V(u,b) = E[D_{u,b}].$$

Θεωρούμε την περίπτωση των εκθετικά κατανεμημένων απαιτήσεων.

Από την Πρόταση 4.4.3, παρατηρούμε ότι οι αριθμητές των (4.4.23) και (4.4.24) δεν εξαρτώνται από το b, ενώ και οι δύο παρονομαστές είναι $\ell_1'(b)$. Συνεπώς, η μεγιστοποίηση της $V(u,b)$ για την εύρεση του βέλτιστου ορίου μερίσματος b^*, προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της ποσότητας $\ell_1'(b)$. Το b^* είναι λύση της εξίσωσης

$$\ell_1''(b) = 0. \tag{4.4.45}$$

Από την (4.4.25) είναι

$$\ell_1'(u) = [h_{11}(0)h_{14}'(0) - h_{11}'(0)h_{14}(0)]h_{12}'(u) - [h_{12}(0)h_{14}'(0) - h_{12}'(0)h_{14}(0)]h_{11}'(u)$$

και

$$\ell_1''(u) = [h_{11}(0)h_{14}'(0) - h_{11}'(0)h_{14}(0)]h_{12}''(u) - [h_{12}(0)h_{14}'(0) - h_{12}'(0)h_{14}(0)]h_{11}''(u). \tag{4.4.46}$$

Από τις (4.4.12)-(4.4.14) είναι

$$h_{11}(0) = e^{-\frac{\beta c}{r}} U\left(1-\frac{\lambda}{r}, 1-\frac{\lambda+a}{r}, \frac{\beta c}{r}\right), \tag{4.4.47}$$

$$h_{12}(0) = \left(\frac{\beta c}{r}\right)^{\frac{\lambda+a}{r}} e^{-\frac{\beta c}{r}} M\left(1+\frac{a}{r}, 1+\frac{\lambda+a}{r}, \frac{\beta c}{r}\right), \tag{4.4.48}$$

$$h_{14}(0) = \left(\frac{\beta c}{\delta}\right)^{\frac{\lambda+a}{\delta}} e^{-\frac{\beta c}{\delta}} M\left(1+\frac{a}{\delta}, 1+\frac{\lambda+a}{\delta}, \frac{\beta c}{\delta}\right). \tag{4.4.49}$$

Από τις (4.4.41)-(4.4.43) είναι

$$h_{11}'(0) = -\beta e^{-\frac{\beta c}{r}} U\left(1-\frac{\lambda}{r}, 1-\frac{\lambda+a}{r}, \frac{\beta c}{r}\right) + e^{-\frac{\beta c}{r}} \left(\frac{\lambda}{r}-1\right) U\left(2-\frac{\lambda}{r}, 2-\frac{\lambda+a}{r}, \frac{\beta c}{r}\right), \tag{4.4.50}$$

$$\begin{aligned} h_{12}'(0) = \left(\frac{\beta c}{r}\right)^{\frac{\lambda+a}{\delta}} e^{-\frac{\beta}{r}} \Bigg[& \frac{\lambda+a-\beta c}{c} M\left(1+\frac{a}{r}, 1+\frac{\lambda+a}{r}, \frac{\beta c}{r}\right), \\ & + \frac{r+a}{\lambda+r+a} M\left(2+\frac{a}{r}, 2+\frac{\lambda+a}{r}, \frac{\beta c}{r}\right)\Bigg], \end{aligned} \tag{4.4.51}$$

$$\begin{aligned} h_{14}'(0) = \beta \left(\frac{\beta c}{\delta}\right)^{\frac{\lambda+a}{\delta}} e^{-\frac{\beta c}{\delta}} \Bigg[& \frac{\lambda+a-\beta c}{\beta c} M\left(1+\frac{a}{\delta}, 1+\frac{\lambda+a}{\delta}, \frac{\beta c}{\delta}\right) \\ & + \frac{\delta+a}{\lambda+\delta+a} M\left(2+\frac{a}{\delta}, 2+\frac{\lambda+a}{\delta}, \frac{\beta c}{\delta}\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{4.4.52}$$

Από τις (4.4.41), (4.4.42) και (4.4.44) οι δεύτερες παράγωγοι των $h_{n1}(u)$ και $h_{n2}(u)$ αντίστοιχα είναι:

$$h''_{n1}(u)=\beta^2 e^{-\frac{\beta}{r}(ru+c)}U\left(1-\frac{\lambda}{r},1-\frac{\lambda+na}{r},\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)$$

$$+\beta^2 e^{-\frac{\beta}{r}(ru+c)}\left(1-\frac{\lambda}{r}\right)U\left(2-\frac{\lambda}{r},2-\frac{\lambda+na}{r},\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)$$

$$+\beta^2 e^{-\frac{\beta}{r}(ru+c)}\left(1-\frac{\lambda}{r}\right)U\left(2-\frac{\lambda}{r},2-\frac{\lambda+na}{r},\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)$$

$$+\beta^2 e^{-\frac{\beta}{r}(ru+c)}\left(1-\frac{\lambda}{r}\right)\left(2-\frac{\lambda}{r}\right)U\left(3-\frac{\lambda}{r},3-\frac{\lambda+na}{r},\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)$$

$$=\beta^2 e^{-\frac{\beta}{r}(ru+c)}\left[U\left(1-\frac{\lambda}{r},1-\frac{\lambda+na}{r},\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)\right.$$

$$+\frac{2(r-\lambda)}{r}U\left(2-\frac{\lambda}{r},2-\frac{\lambda+na}{r},\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)$$

$$\left.+\frac{(r-\lambda)(2r-\lambda)}{r^2}U\left(3-\frac{\lambda}{r},3-\frac{\lambda+na}{r},\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)\right], \tag{4.4.53}$$

και

$$h''_{n2}(u)=\beta^2\left(\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)^{\frac{\lambda+na}{r}}e^{-\frac{\beta}{r}(ru+c)}\left[\frac{[\lambda+na-\beta(ru+c)]^2}{\beta^2(ru+c)^2}M\left(1+\frac{na}{r},1+\frac{\lambda+na}{r},\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)\right.$$

$$+\frac{2[(\lambda+na)-\beta(ru+c)](r+na)}{\beta(ru+c)(r+\lambda+na)}M\left(2+\frac{na}{r},2+\frac{\lambda+na}{r},\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)$$

$$\left.+\frac{(r+na)(2r+na)}{(r+\lambda+na)(2r+\lambda+na)}M\left(3+\frac{na}{r},3+\frac{\lambda+na}{r},\frac{\beta}{r}(ru+c)\right)\right]. \tag{4.4.54}$$

Συνεπώς, για $n=1$ και $u=b$, από τις (4.4.53) και (4.4.54) έχουμε

$$h''_{11}(b)=\beta^2 e^{-\frac{\beta}{r}(rb+c)}\left[U\left(1-\frac{\lambda}{r},1-\frac{\lambda+a}{r},\frac{\beta}{r}(rb+c)\right)\right.$$

$$+\frac{2(r-\lambda)}{r}U\left(2-\frac{\lambda}{r},2-\frac{\lambda+a}{r},\frac{\beta}{r}(rb+c)\right)$$

$$\left.+\frac{(r-\lambda)(2r-\lambda)}{r^2}U\left(3-\frac{\lambda}{r},3-\frac{\lambda+a}{r},\frac{\beta}{r}(rb+c)\right)\right], \tag{4.4.55}$$

και

$$h''_{12}(\mathrm{b})=\beta^2\left(\frac{\beta}{r}(rb+c)\right)^{\frac{\lambda+a}{r}}e^{-\frac{\beta}{r}(rb+c)}\left[\frac{[\lambda+a-\beta(rb+c)]^2}{\beta^2(rb+c)^2}M\left(1+\frac{a}{r},1+\frac{\lambda+a}{r},\frac{\beta}{r}(rb+c)\right)\right.$$

$$+\frac{2[(\lambda+a)-\beta(rb+c)](r+a)}{\beta(rb+c)(r+\lambda+a)}M\left(2+\frac{a}{r},2+\frac{\lambda+a}{r},\frac{\beta}{r}(rb+c)\right)$$

$$+\frac{(r+a)(2r+a)}{(r+\lambda+a)(2r+\lambda+a)}M\left(3+\frac{a}{r},3+\frac{\lambda+a}{r},\frac{\beta}{r}(rb+c)\right)\Bigg]. \tag{4.4.56}$$

Έχοντας προσδιορίσει όλες τις απαραίτητες ποσότητες, από τις (4.4.45) και (4.4.46) το ζητούμενο b^* ικανοποιεί την εξίσωση

$$[h_{11}(0)h'_{14}(0)-h'_{11}(0)h_{14}(0)]h''_{12}(b^*)-[h_{12}(0)h'_{14}(0)-h'_{12}(0)h_{14}(0)]\,h''_{11}(b^*)=0\,.$$

4.5 Σύνοψη κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήθηκε η απόλυτη χρεοκοπία στο κλασικό μοντέλο κινδύνου με σταθερούς ρυθμούς πιστωτικού και δανειστικού τοκισμού και επιπλέον θεωρήθηκε η ύπαρξη στρατηγικής καταβολής μερίσματος στους μετόχους της ασφαλιστικής εταιρίας. Σύμφωνα με τη στρατηγική αυτή, όταν η διαδικασία πλεονάσματος ξεπεράσει ένα σταθερό όριο $b>0$, τότε επιστρέφεται μέρισμα στους δικαιούχους με σταθερό ρυθμό, ενώ δεν καταβάλλονται μερίσματα όταν το πλεόνασμα είναι μικρότερο από το εν λόγω όριο. Δόθηκαν οι ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις για τις ροπογεννήτριες συναρτήσεις και τις ροπές της παρούσας αξίας όλων των μερισμάτων μέχρι τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας. Στη συνέχεια, παρουσιάστηκαν αναλυτικές λύσεις των δύο αυτών μεγεθών, για την περίπτωση όπου τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένα. Τέλος, αναπτύχθηκε η εξίσωση για την εύρεση του βέλτιστου ορίου πέραν του οποίου υπάρχει καταβολή μερίσματος, όταν οι στοχαστικές απαιτήσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Παράρτημα

Π1. Παραγώγιση ολοκληρώματος

Για μια συνάρτηση υπό μορφή ολοκληρώματος της μορφής

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,t)dt$$

σύμφωνα με τον κανόνα Leibniz, η παράγωγός της είναι

$$F'(x) = f(x,\varphi_2(x))\varphi_2'(x) - f(x,\varphi_1(x))\varphi_1'(x) + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt\,.$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $\varphi_1(x) = a$, $\varphi_2(x) = x$, $f(x,t) = f(t)$, έχουμε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού για συναρτήσεις μιας μεταβλητής

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)\,.$$

Π2. Η «συμφυής» υπεργεωμετρική συνάρτηση (confluent hypergeometric function)

Η συμφυής υπεργεωμετρική συνάρτηση πρώτου είδους[1], γνωστή επίσης και ως συνάρτηση του Kummer πρώτου είδους, συμβολικά ${}_1F_1(a;b;z)$ ή $M(a,b,z)$, ορίζεται από τη σχέση

$${}_1F_1(a;b;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k}\frac{z^k}{k!}$$

όπου $(.)_k$ με $k \geq 0$, είναι το «*σύμβολο του Pochhammer*» γνωστό και ως «*ανοδικό παραγοντικό*» και ορίζεται από την

$$(r)_k = r(r+1)...(r+k-1) \text{ με } (r)_0 = 1$$

για κάθε πραγματικό αριθμό *r*.

Η συμφυής υπεργεωμετρική συνάρτηση πρώτου είδους, $M(a,b,z)$, και η συμφυής υπεργεωμετρική συνάρτηση δευτέρου είδους[2], γνωστή επίσης και ως συνάρτηση του Kummer δευτέρου είδους, συμβολικά $U(a,b,z)$, εκφράζονται επίσης μέσω ολοκληρώματος, αντίστοιχα ως (Abramowitz and Stegun (1972), σελ. 505, 13.2.1 και 13.2.5)

$$M(a,b,z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}\int_0^1 e^{zt}t^{a-1}(1-t)^{b-a-1}dt\,, \qquad b > a > 0$$

και

[1] https://mathworld.wolfram.com/ConfluentHypergeometricFunctionoftheFirstKind.html

[2] https://mathworld.wolfram.com/ConfluentHypergeometricFunctionoftheSecondKind.html

$$U(a,b,z)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty} e^{-zt}t^{a-1}(1+t)^{b-a-1}dt\,, \qquad a>0, z>0$$

όπου

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

η συνάρτηση Γάμμα.

Οι παράγωγοι των $M(a,b,z)$ και $U(a,b,z)$ είναι αντίστοιχα (Abramowitz and Stegun (1972), σελ. 507, 13.4.8 και 13.4.21)

$$\frac{d}{dz}M(a,b,z)=\frac{a}{b}M(a+1,b+1,z)$$

και

$$\frac{d}{dz}U(a,b,z)=-aU(a+1,b+1,z)\,.$$

Βιβλιογραφία

1. M. Abramowitz and I. A. Stegun (1972), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Tenth Printing, U.S. Department of Comerse, National Bureau of Standards, Washicton, D.C. (https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/)
2. H. Albrecher (2004), Discussion of Optimal dividends: Analysis with Brownian motion, *North American Actuarial Journal*, Vol. 8, Issue 1, pp. 111-113.
3. H. Albrecher, M. M. Claramunt and M. Marmol (2005), On the distribution of dividend payments in a Sparre Andersen model with generalized Erlang(n) interclaim times, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 37, Issue 2, pp. 324-334.
4. H. Albrecher and J. Hartinger (2007), A risk model with multilayer dividend strategy, *North American Actuarial Journal*, Vol. 11, Issue 2, pp. 43-64.
5. S. Asmussen and H. Albrecher (2010), *Ruin Probabilities*, 2nd Edition, Advanced Series on Statistical Sciences and Applied Probabilities, Vol 14.
6. S. Asmussen and C. A. O' Cinneide (1997), Matrix-exponential distributions – distributions with a rational Laplace transform. *In Encyclopedia of Statistical Sciences*, eds S. Kotz and C. B. Read, John Wiley, New York, pp. 435–440.
7. J. Cai (2004), Ruin probabilities and penalty functions with stochastic rates of interest, *Stochastic Processes and their Applications*, Vol. 112, Issue 1, pp. 53-78.
8. J. Cai (2007), On the time value of absolute ruin with debit interest, *Advances in Applied Probability*, Vol. 39, No. 2, pp. 343-359.
9. J. Cai and D. C. M. Dickson (2002), On the expected discounted penalty function at ruin of a surplus process with interest, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 30, Issue 3, pp. 389-404.
10. J. Cai and H. Yang (2005), Ruin in the perturbed compound Poisson risk process under interst force, *Advances in Applied Probabilities*, Vol. 37, Issue 3, pp. 819-835.
11. J. Cai, H. U. Gerber and H. Yang (2006), Optimal dividends in an Ornstein-Uhlenbeck type model with credit and debit interest, *North American Actuarial Journal*, Vol. 10, Issue 2, pp. 94-108.
12. A. Dassios and P. Embrechts (1989), Martingales and insurance risk, *Stochastic Models*, Vol. 5, Issue 2, pp. 181-217.
13. D. C. M. Dickson and A. D. E. dos Reis (1997), The effect of interest on negative surplus, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 21, Issue 1, pp. 1-16.
14. D. C. M. Dickson and C. Hipp (2000), Ruin problems for phase-type(2) risk processes, *Scandinavian Actuarial Journal*, Issue 2, pp. 147-167.

15. P. Embrechts and H. Schmidli (1994), Ruin estimation for a general insurance risk model, *Advances in Applied Probability*, Vol. 26, Issue 2, pp. 404-422.
16. H. U. Gerber and E. S. W. Shiu (1997), On the time value of ruin, *Actuarial Research Clearing House,* Vol. 1, pp. 145-199.
17. H. U. Gerber and E. S. W. Shiu (1998), On the time value of ruin, *North American Actuarial Journal*, Vol. 2, No. 1, pp. 48-72.
18. H. U. Gerber and B. Landry (1998), On the discounted penalty at ruin in a jump-diffusion and the perpetual put option. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 22, Issue 3, pp. 263-276.
19. H. U. Gerber and E. S. W. Shiu (2004), Optimal dividends: Analysis with Brownian motion, *North American Actuarial Journal*, Vol. 8, Issue 1, pp. 1-20.
20. H. U. Gerber and E. S. W. Shiu (2006), On optimal dividend strategies in the compound Poisson model, *North American Actuarial Journal*, Vol. 10, Issue 2, pp. 76-93.
21. H. U. Gerber and H. Yang (2007), Asbolute ruin probabilities in a jump diffusion risk model with investment, *North American Actuarial Journal*, Vol. 11, Issue 3, pp. 159-169.
22. D. G. Konstantinides, K. W. Ng and Q. Tang (2010), The probabilities of absolute ruin in the renewal risk model with constant force of interest, *Journal of Applied Probabilities*, Vol. 47, No. 2, pp. 323-334.
23. S. Li (2006), The distribution of the dividend payments in the compound Poisson risk model perturbed by diffusion, *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 2006, Issue 2, pp. 73-85.
24. X. S. Lin and K. P. Pavlova (2006), The compound Poisson risk model with a threshold dividend strategy, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 38, Issue 1, pp. 57-80.
25. X. S. Lin and K. P. Sendova (2008), The compound Poisson risk model with multiple thresholds, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 42, Issue 2, pp. 617-627.
26. J. D. Logan (2015), *A First Course in Differential Equations*, Third Edition, Springer-Verlag. (https://www.math.unl.edu/~jlogan1/PDFfiles/New3rdEditionODE.pdf)
27. I. R. Mitric and K. P. Sendova (2011), On a multi-threshold compound Poisson surplus process with interest, *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 2011, Issue 2, pp. 75-95.
28. I. R. Mitric, A. L. Badescu and D. A. Stanford (2012), On the absolute ruin problem in a Sparre Andersen risk model with constant interest, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 50, Issue 1, pp. 167-178.
29. M. F. Neuts (1975), Probability distributions of phase-type, In *Liber Amicorum Prof. Emeritus H. Florin*, Department of Mathematics, University of Louvain, Belgium, 173-206.
30. M. F. Neuts (1979), A versatile Markovian point process, *Journal of Applied Probability*, Vol. 16, No. 4, pp. 764-779.

31. M. F. Neuts (1981), *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach*, The John Hopkins University Press: Baltimore. (*Reprinted*: *Dover* Publications: New York, 1994).
32. D. Peng, D. H. Liu and Z. T. Hou (2016), Absolute ruin problems in a compound Poisson risk model with constant dividend barrier and liquid reserves, *Advances in Difference Equations*, Article number 72.
33. B. Sundt and J. L. Teugels (1995), Ruin estimates under interest force, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 16, Issue 1, pp. 7-22.
34. B. Sundt and J. L. Teugels (1997), The adjustment function in ruin estimates under interest force, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 19, Issue 2, pp. 85-94.
35. C. W. Wang and C. C. Yin (2009), Dividend payments in the classical risk model under absolute ruin with debit interest, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, Vol. 25, Issue 3, pp. 247–262.
36. C. W. Wang, X. G. Du and Q. Y. Chen (2011), On the compound Poisson risk model with debit interest and a threshold dividend strategy, *In Proceedings of the Information Computing and Applications - Second International Conference,* ICICA, Qinhuangdao, China, 28-31, October 2011, 243, pp. 596–603.
37. C. Wang, C. Yin and E. Li (2010), On the classical risk model with credit and debit interests under absolute ruin, *Statistics and Probability Letters*, Vol. 80, Issues 5-6, pp. 427-436.
38. H. Z. Yang, Z. Zhang and C. Lan (2008), On the time value of absolute ruin for a multi-layer compound Poisson model under interest force, *Statistics and Probability Letters*, Vol. 78, Issue 13, pp. 1835-1845.
39. H. L. Yuan and Y. J. Hu (2009), The compound Poisson risk model with interest and a threshold strategy, *Stochastic Models*, Vol 25, Issue 2, pp. 197-220.
40. H. L. Yuan, Y. J. Hu and Q. Q. Qin (2011), Absolute ruin problems for the risk process with interest and a constant dividend barrier, *Wuhan University Journal of Natural Sciences*, Vol. 16, Issue 3, pp. 199-205.
41. J. Zhu and H. Yang (2008), Estimates for the absolute ruin probability in the compound Poisson risk model with credit and debit interest, *Journal of Applied Probability*, Vol. 45, Issue 3, pp. 818-830.
42. Κ. Πολίτης (2012), *Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου: Το Συλλογικό Πρότυπο και Θεωρία Χρεοκοπίας*, Εκδόσεις Σταμούλη Α.Ε.
43. Ε. Χατζηκωνσταντινίδης, *Θεωρία Κινδύνου Ι & ΙΙ, Σημειώσεις Παραδόσεων, ΠΜΣ στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου*, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.