ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ»

ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΥΠΟΛΕΙΠΟΜΕΝΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΖΩΗΣ ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΟ ΚΑΙ ΤΟ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΓΡΗΓΟΡΙΑΔΗΣ

Διπλωματική εργασία
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων*

Πειραιάς
Μάρτιος 2024

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από την Συνέλευση του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμό …. Συνεδρίαση της , σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων .

Τα μέλη της επιτροπής ήταν :

-Αναπληρωτής καθηγητής: ΨΑΡΡΑΚΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ (Επιβλέπων)

- Αναπληρωτής καθηγητής: ΠΟΛΙΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

- Αναπληρωτής καθηγητής: ΤΖΑΒΕΛΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα .

UNIVERSITY OF PIRAEUS

SCHOOL OF FINANCE AND STATISTICS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRATUATED PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

ON THE MEAN RESIDUAL LIFETIME FOR THE ADDITIVE AND THE PROPORTIONAL HAZARD RATE MODELS

By
KONSTANTINOS GREGORIADES

MSc Disseration

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

PIRAEUS, GREECE
March 2024

Ευχαριστίες

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία έχει υλοποιηθεί στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων του Πανεπιστημίου Πειραιώς με σκοπό την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Τίτλου.

Κατά τη διάρκεια της εργασίας αυτής είχα διπλά μου τους ανθρώπους της οικογένειας μου τους οποίους θα ήθελα να ευχαριστήσω για την στήριξη τους σε όλη την διάρκεια του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών καθώς και την κ. Νίκη Παπουτσή και τον κ. Γιώργο Βακουφτσή, οι οποίοι με βοήθησαν πάρα πολύ και ήταν πάντα δίπλα μου.

Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές του Μεταπτυχιακού Προγράμματος για τις γνώσεις που μου έχουν μεταλαμπαδεύσει και τα σημαντικά εφόδια που μου δόθηκαν ώστε να είμαι έτοιμος να αντιμετωπίσω τις επαγγελματικές προκλήσεις του μέλλοντος.

Ξεχωριστά, θα ήθελα να ευχαριστήσω μέσα από την καρδιά μου τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Ψαρράκο Γεώργιο ο οποίος με καθοδήγησε πλήρως για την εκπόνηση αυτής της διπλωματικής με την εκπαιδευτική του εμπειρία αλλά και ιδέες καθώς και τα μέλη της επιτροπής, κ. Πολίτη Κωνσταντίνο και κ. Τζαβελά Γεώργιο.

Στον πολυαγαπημένο μου παππού
που έφυγε από κοντά μας

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται το αθροιστικό και το αναλογικό μοντέλο κινδύνων με σκοπό να δειχθεί η άμεση επίδραση που επιφέρει η μεταβολή της συνάρτησης της έντασης κινδύνου σε αυτή του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής και αντίστροφα.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται βασικές έννοιες οι οποίες είναι απαραίτητες για την μετέπειτα ανάλυση καθώς και θεωρήματα τα οποία έχουν σκοπό την καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών μέσα από παραδείγματα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια του αθροιστικού μοντέλου κινδύνου όπου μελετάται η μονοτονία και τα σημεία αλλαγής μονοτονίας της συνάρτησης έντασης κινδύνου και του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής μέσα από διάφορα παραδείγματα, γνωστές και ειδικές κατανομές και καθώς και γραφήματα.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύεται το αναλογικό μοντέλο κινδύνου παρουσιάζοντας την μονοτονία και τα σημεία αλλαγής μονοτονίας των συναρτήσεων έντασης κινδύνου και μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής και πως αυτά αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους μέσω παραδειγμάτων και γνωστών κατανομών αναπαριστώντας τα γραφικά.

Τέλος παρατίθονται συνολικά τα συμπεράσματα που έχουμε εξάγει από την όλη μελέτη που έχει γίνει.

Abstract

This diploma thesis deals with the additive and proportional risk models in order to show the direct effect of changing the function of risk intensity to that of the average residual lifetime and vice versa.

The first chapter presents basic concepts that are necessary for subsequent analysis as well as theorems that aim to better understand mathematical concepts through examples.

The second chapter introduces the concept of the additive risk model where the monotony and inflection points of the risk intensity function and the average residual lifetime are studied through various examples, known and specific distributions and as well as graphs.

In the third chapter, the proportional risk model is analyzed, presenting the monotony and the turning points of the risk intensity and average residual lifetime functions and how these interact with each other through examples and known distributions by representing the graphics.

Finally we summarize the conclusions we have drawn from the whole of the study has been made.

Πίνακας περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βασικές Έννοιες

1.1 Συνάρτηση Κατανομής

Θεωρούμε την $f(t)$ η οποία είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου Τ . Τότε για την τυχαία μεταβλητή Τ έχει συνάρτηση κατανομής την $F(t)$ η οποία εκφράζει την πιθανότητα να λάβει τιμές στο χρονικό πεδίο (0, t] και ορίζεται ως εξής :

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(x)dx.$$

Η συνάρτηση αυτή είναι αύξουσα με $F(0) = 0$ και $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$.

Στην αναλογιστική επιστήμη το πιο πάνω ισοδυναμεί με την πιθανότητα ένα άτομο να αποβιώσει σε οποιαδήποτε στιγμή πριν από την χρονική στιγμή t .

1.2 Συνάρτηση Επιβίωσης

Λόγω του πιο πάνω ορισμού δημιουργείται η ανάγκη να ορισθεί το συμπληρωματικό ενδεχόμενο αυτού. Η συνάρτηση επιβίωσης συμβολίζεται με $S(t)$ και εκφράζει την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή T να λάβει τιμές στο διάστημα (t,∞) και ορίζεται ως :

$$S(t) = P(T > t) = \int_t^\infty f(x)dx.$$

Η συνάρτηση είναι φθίνουσα με $S(0) = 1$ και $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$. Επίσης ισχύει ότι:

$$F(t) = 1 - S(t).$$

Διαισθητικά μπορούμε να ορίσουμε την πιο πάνω συνάρτηση ως την πιθανότητα που έχει ένα άτομο να ζήσει μετά από την ηλικία t. Ειδικά στον αναλογισμό αλλά και σε άλλες επιστήμες ορίζεται μια μέγιστη ηλικία ω αντί του ∞ διότι είναι πρακτικά αδύνατον ένα άτομο ή μια μηχανή να επιβιώσει ως το άπειρο.

1.3 Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Συμβολίζουμε αυτή την συνάρτηση με το $f(t)$ και για την συνεχή τυχαία μεταβλητή ισχύουν τα εξής :

1. $f(t) \geq 0$ για κάθε $t \geq 0$,
2. $\int_0^\infty f(x)dx = 1$.

Επίσης αν γνωρίζουμε την συνάρτηση κατανομής μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας από τον πιο κάτω τύπο:

$$f(t) = \frac{d}{dt}F(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{\Delta t},$$

το οποίο ισχύει για οποιοδήποτε μικρό διάστημα Δt. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η συνάρτηση αυτή υποδηλώνει την πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός σε ένα απειροελάχιστα μικρό διάστημα $(t, \Delta t)$. Επίσης μπορούμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας γνωρίζοντας την συνάρτηση επιβίωσης ως εξής :

$$f(t) = -\frac{d}{dt}S(t) = S'(t),$$

κάτι το οποίο αναμένουμε καθώς γνωρίζουμε την σχέση μεταξύ συνάρτησης κατανομής και επιβίωσης .

1.4 Συνάρτηση Έντασης Κινδύνου

Η συνάρτηση έντασης κινδύνου συμβολίζεται το $h(t)$ από τον αγγλικό όρο hazard ratio την χρονική στιγμή t και ορίζεται ως η στιγμιαία πιθανότητα αποτυχίας. Μπορεί να υπολογισθεί με τους κάτωθι τύπους :

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)}\ , \quad (1.1)$$

$$h(t) = -\frac{d}{dt}\ln S(t). \quad (1.2)$$

Εναλλακτικά μπορεί να υπολογισθεί ως :

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t}.$$

Στην αναλογιστική επιστήμη συνήθως ονομάζουμε αυτή την συνάρτηση και ένταση θνησιμότητας. Μπορεί κανείς να καταλάβει ότι η συνάρτηση αυτή είναι άμεσα συνδεδεμένη με την συνάρτηση επιβίωσης και ουσιαστικά καταδεικνύει την πιθανότητα αποτυχίας σε ένα πάρα πολύ μικρό διάστημα του χρόνου όταν δηλαδή το Δt τείνει στο 0 και για αυτό τον λόγο την ονομάζουμε και στιγμιαία πιθανότητα αποτυχίας.

Μέσω της συνάρτησης έντασης κινδύνου μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις $S(t)$, $F(t)$ και $f(t)$. Επομένως μπορούμε να καταλάβουμε ότι γνωρίζοντας μια εκ των τεσσάρων μπορούμε να βρούμε και τις υπόλοιπες χρησιμοποιώντας τους τύπους.

$$S(t) = e^{-\int_0^t h(x)dx} \text{ . } \quad (1.3)$$

1.5 Μέση Τιμή

Η μέση τιμή του χρόνου T συμβολίζεται με $E(T)$, είναι πεπερασμένη και μπορεί να υπολογισθεί ως :

$$E(T) = \int_0^\infty t\, f(t)dt.$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (1.4) , η πιο πάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως :

$$E(T) = -\int_0^\infty t\, S'(t)dt,$$

και εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η μέση τιμή μπορεί να υπολογιστεί απλούστερα ως :

$$E(T) = \int_0^\infty S(t)dt \text{ .}$$

Γενικά, για κάθε $k = 1,2,..$ ισχύει :

$$E(T^k) = k\int_0^\infty t^{k-1}\, S(t)dt,$$

οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε την ροπή κάθε τάξης.

1.6 Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής

Η συνάρτηση του μέσου υπολειπομένου χρόνου ζωής (mean residual lifetime function – MRLF) εκφράζει τον μέσο χρόνο ζωής ενός ατόμου ή μιας μηχανής μετά από την ηλικία t και συμβολίζεται με $m(t)$. Είναι μη- αρνητική και συνεχής συνάρτηση και υπολογίζεται ως :

$$m(t) = E(T - t | T > t) = \frac{\int_t^\infty S(x)dx}{S(t)}. \quad (1.4)$$

Ο υπολογισμός της συνάρτησης αυτής μπορεί να εκτιμήσει την εναπομείναντα ζωή ενός ατόμου ή ενός μηχανήματος στην ηλικία t.

Επίσης η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής είναι κοινά αποδεκτό ότι είναι πιο αξιόπιστη από την αντίστοιχη της έντασης κινδύνου καθώς λαμβάνεται υπόψη όλη η κατανομή του χρόνου ζωής ενώ η τελευταία σχετίζεται μόνο με την ακαριαία πιθανότητα αποτυχίας. Εκτός από την τεράστια σημασία που έχει στην αναλογιστική επιστήμη συνεισφέρει επίσης και στην σωστή λήψη αποφάσεων όταν πρόκειται για αντικατάσταση και συντήρηση ενός συστήματος ή μιας μηχανής .

Με σημείο αναφοράς την εργασία του Gupta (2016) παρουσιάζεται η ακόλουθη σχέση που συνδέει την συνάρτηση της έντασης κίνδυνου με αυτή του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

$$h(t) = \frac{1+m'(t)}{m(t)}. \qquad (1.5)$$

Επομένως μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι εφόσον ξέρουμε μια εκ των συναρτήσεων κατανομής, επιβίωσης, πυκνότητας πιθανότητας, έντασης κινδύνου και μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής μπορούμε να υπολογίσουμε τις υπόλοιπες .

1.7 Μαθηματικές Έννοιες

1.7.1 Μονοτονία

Έστω ότι μια συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ με A , B να ανήκουν στο σύνολο πραγματικών αριθμών και $B \subset A$. Τότε για οποιαδήποτε δυο σημεία τα οποία ανήκουν στο Β , η συνάρτηση f θα λέγεται ότι είναι :

- Αύξουσα στο Β αν για $t_1 < t_2$ ισχύει ότι $f(t_1) \leq f(t_2)$,
- Φθίνουσα στο Β αν για $t_1 < t_2$ ισχύει ότι $f(t_1) \geq f(t_2)$,

1.7.2 Ακρότατα

Έστω μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με$A \subset \mathbb{R}$.Τότε στο σημείο $t_0 \in A$, συνάρτηση f παρουσιάζει

- Μέγιστο ή ολικό μέγιστο , αν ισχύει ότι $f(t) \leq f(t_0)$ για κάθε $t \in A$
- Ελάχιστο ή ολικό ελάχιστο , αν ισχύει ότι $f(t) \geq f(t_0)$ για κάθε $t \in A$

1.7.3 Σημείο Αλλαγής Μονοτονίας

Έστω μια συνάρτηση $f\ :\ A \to \mathbb{R}$, συνεχής και παραγωγίσιμη τότε το σημείο $t_0 \in A$, θα λέγεται σημείο αλλαγής μονοτονίας όταν η συνάρτηση f είναι αύξουσα πριν απο αυτό και φθίνουσα μετά ή το αντίστροφο και η πρώτη παράγωγος ισούται με μηδέν.

1.8 Γραφική Απεικόνιση Έντασης Κινδύνου

Η συνάρτηση της έντασης κινδύνου $h(t)$ μπορεί να έχει μια εκ των βασικών γραφικών απεικονίσεων:

- Αύξουσα εάν $h'(t) > 0\ ,\ \forall t$
- Φθίνουσα εάν $h'(t) < 0\ ,\ \forall t$
- Λεκανοειδές σχήμα εάν $h'(t) < 0\ \ \forall t \in (0, t_0)\ ,\ h'(t_0) = 0$ και $h'(t) > 0\ \forall t > t_0$
- Ανάποδο λεκανοειδές σχήμα εάν $h'(t) > 0\ \ \forall t \in (0, t_0)$, $h'(t_0) = 0$ και $h'(t) < 0\ \ \forall t > t_0$

1.9 Γραφική Αναπαράσταση Συναρτήσεων

Μέσω των παρακάτω θεωρημάτων που παρουσιάζονται μπορεί κανείς να καταλάβει πως αλληλεξαρτώνται γραφικά οι συναρτήσεις έντασης κινδύνου και μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, κάτι το οποίο μας βοηθά στο να καταλάβουμε πως επιδρά άμεσα η μια στην άλλη. Μπορούμε δηλαδή να προβλέψουμε την γραφική αναπαράσταση των συναρτήσεων αυτών ξέροντας την μια εκ των δυο κάτι το οποίο είναι πολύ χρήσιμο σε όλους τους τομείς του αναλογισμού.

Ακολούθως θα παρουσιάσουμε θεωρήματα από το βιβλίο των Lai and Xie (2006), ώστε να γίνει καλύτερη η κατανόηση της συμπεριφοράς των δυο αυτών συναρτήσεων που μας ενδιαφέρουν, καθώς και την επιρροή που έχει η καθεμία στην άλλη, αλλά και παραδείγματα ώστε να έχουμε μια πιο σαφή εικόνα των σχημάτων αυτών.

Θεώρημα 1.1:

Έστω η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m(t)$ και $h(t)$ η αντίστοιχη συνάρτηση της έντασης κινδύνου , τότε θα ισχύουν τα ακόλουθα :

(i) Αν η $m(t)$ είναι φθίνουσα και κυρτή συνάρτηση , τότε η $h(t)$ θα είναι γνησίως αύξουσα $\forall t \geq 0$.

(ii) Αν η $m(t)$ είναι αύξουσα και κοίλη συνάρτηση , τότε η $h(t)$ θα είναι γνησίως φθίνουσα $\forall t \geq 0$.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται δυο θεωρήματα τα οποία δίνουν μια σαφή εικόνα της αντιστοιχίας της μονοτονίας ή μη μονοτονίας μεταξύ των δυο αυτών συναρτήσεων έχοντας υπόψιν ότι η ένταση κινδύνου είναι μη μονότονη συνάρτηση.

Θεώρημα 1.2:

Αν η ένταση κινδύνου $h(t)$ έχει λεκανοειδές σχήμα , τότε η $m(t)$ θα είναι :

- Φθίνουσα συνάρτηση , όταν ισχύει $h(0) \leq \frac{1}{m(0)}$.

- Ανάποδο λεκανοειδές σχήμα , διαφορετικά.

Θεώρημα 1.3:

Αν η ένταση κινδύνου $h(t)$ έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα τότε η $m(t)$ θα είναι:

- Αύξουσα συνάρτηση, όταν ισχύει $h(0) \geq \frac{1}{m(0)}$,

- Λεκανοειδές σχήμα, διαφορετικά

Ακολούθως οι Gupta and Akman (1995) στην εργασία τους, αναφέρουν το πιο κάτω λήμμα που ισχύει για τα σημεία αλλαγής μονοτονίας.

Λήμμα 1.1 : (Σημείο αλλαγής μονοτονίας)

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $h(t)$ και $m(t)$ της τυχαίας μεταβλητής T οι οποίες είναι η ένταση κινδύνου και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής αντίστοιχα. Τότε έχουμε :

i. Αν η $h(t)$ έχει λεκανοειδές σχήμα με σημείο αλλαγής μονοτονίας t_0, η $m(t)$ θα έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα με σημείο αλλαγής μονοτονίας t_1 εάν $h(0) > \frac{1}{m(0)}$.

ii. Αν η $h(t)$ έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα με σημείο αλλαγής μονοτονίας t_0, η $m(t)$ θα έχει λεκανοειδές σχήμα με σημείο αλλαγής μονοτονίας t_1 εάν $h(0) < \frac{1}{m(0)}$.

Επιπρόσθετα ισχύει ότι $t_1 < t_0$.

<u>Παράδειγμα 1.1 :</u>

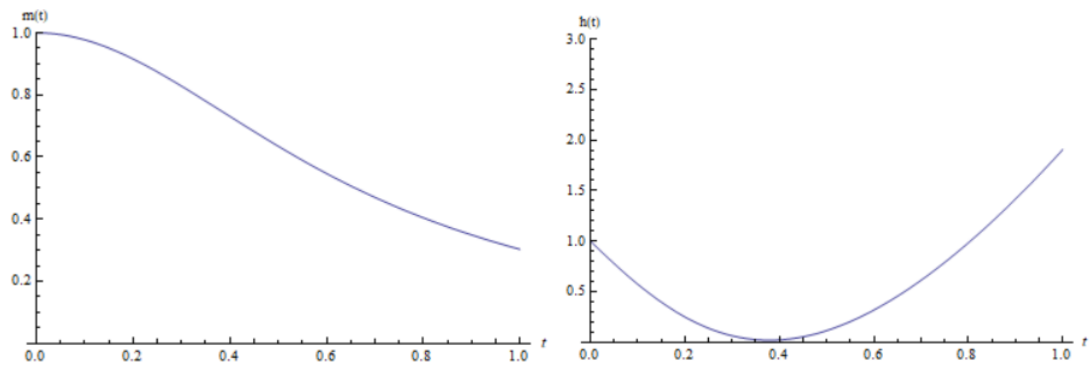
Θεωρούμε την συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής

$$m(t) = \frac{1}{1 + 2.3t^2}\ , t \geq 0,$$

η οποία είναι φθίνουσα . Μέσω του Σχέσης (1.5) μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την συνάρτηση έντασης κινδύνου η οποία είναι

$$h(t) = \frac{(1 + 2.3t^2)^2 - 4.6t}{1 + 2.3t^2}.$$

Μέσω του ακόλουθου σχήματος μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση αυτή έχει λεκανοειδές σχήμα διότι $h(0) \leq \frac{1}{m(0)}, \forall t \geq 0$.



<u>Σχήμα 1.1</u> *: Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής και η ένταση κινδύνου των συναρτήσεων.*

Η πιο πάνω γραφική παράσταση του Σχήματος 1.1 μας δείχνει την εφαρμογή του Θεωρήματος 1.2 . Με απλά λόγια στο πρώτο σχήμα βλέπουμε την φθίνουσα συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής όπου έχει ως αποτέλεσμα την λεκανοειδή καμπύλη του δεύτερου γραφήματος

Παράδειγμα 1.2 :

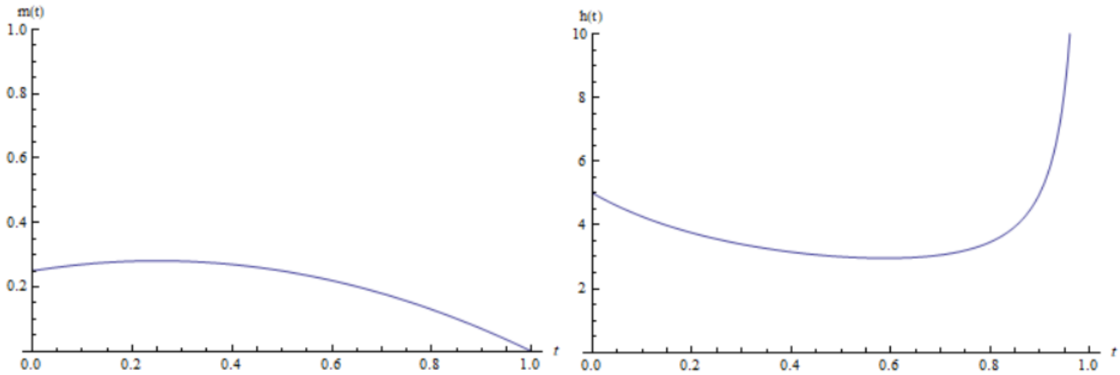
Θεωρούμε ότι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής είναι

$$m(t) = \frac{1}{4}(1-t)(1+2t)\,, 0 \le t < 1,$$

και μπορούμε να δούμε στο πιο κάτω Σχήμα 1.2 ότι έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα , ενώ η συνάρτηση έντασης κινδύνου μέσω της Σχέσης (1.5) είναι :

$$h(t) = \frac{5-4t}{(1-t)(1+2t)},$$

η οποία έχει λεκανοειδές σχήμα $\forall t \in [0,1)$.



Σχήμα 1.2: *Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $m(t)$ και $h(t)$.*

Όπως μπορούμε να διακρίνουμε στο πιο πάνω Σχήμα 1.2 η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής έχει λεκανοειδές σχήμα ενώ η αντίστοιχη της συνάρτησης έντασης κινδύνου έχει λεκανοειδές σχήμα , κάτι το οποίο αναμέναμε λόγω του Θεωρήματος 1.2.

Παράδειγμα 1.3 :

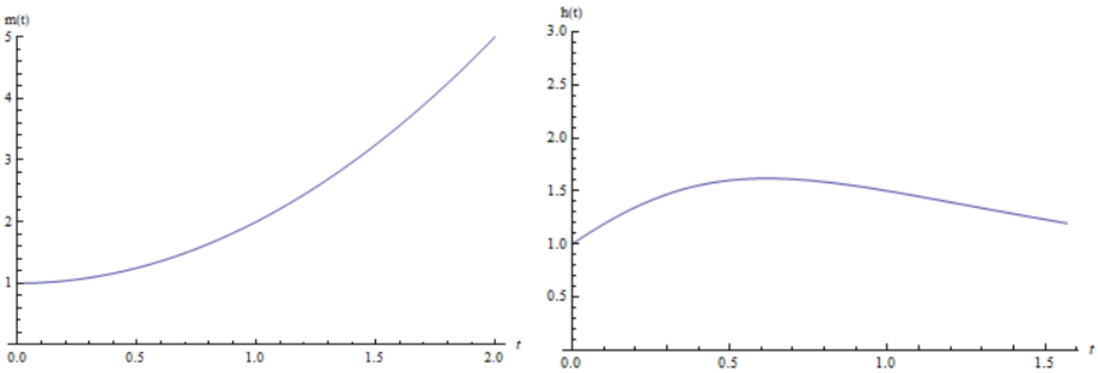
Θεωρώντας τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής

$$m(t) = 1 + t^2\,, 0 \le t \le \frac{\pi}{2},$$

η οποία είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση , εφαρμόζοντας και πάλι την Σχέση (1.5) μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η ένταση κινδύνου είναι

$$h(t) = \frac{1+2t}{1+t^2},$$

όπου για το διάστημα $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα. Πράγμα το οποίο επαληθεύεται από το Θεώρημα 1.3 καθώς και την ακόλουθη γραφική παράσταση .



<u>Σχήμα 1.3:</u> *Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής και της έντασης κινδύνου.*

Όπως μπορούμε να δούμε πιο πάνω η συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση κάτι που οδηγεί σε μια συνάρτηση έντασης κινδύνου με ανάποδο λεκανοειδές σχήμα στο διάστημα $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Ο λόγος που ορίζουμε το διάστημα αυτό είναι διότι δεξιά του διαστήματος αυτού , η συνάρτηση ξεκινά να στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Προσθετικό Μοντέλο Κινδύνων

2.1 *Εισαγωγή*

Το κεφάλαιο αυτό αναλύεται κατά κύριο λόγο με οδηγό τις εργασίες των Bebbington et al. (2008) και του Gupta (2016). Η χρήση της συνάρτησης της έντασης κινδύνου και ως επέκταση αυτή του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής έχει εφαρμογές σε αρκετούς τομείς όπως την αναλογιστική επιστήμη, την οικονομετρία, την μηχανική ακόμα και την ιατρική. Είναι πλέον κοινά αποδεκτό ότι σε ένα άτομο ή σύστημα , μπορούν να του ασκηθούν διάφορες εξωτερικές δυνάμεις οι οποίες μπορούν να συμβάλουν στη μείωση του χρόνου ζωής του. Μαθηματικά αυτό μπορεί να επιφέρει πολλές αλλαγές στα δεδομένα μας και επομένως στις προαναφερθείσες συναρτήσεις. Ενδιαφερόμαστε λοιπόν, για τις επιπτώσεις που αυτές οι δυνάμεις μπορούν να επιφέρουν στους τομείς που εξετάζουμε, προσπαθώντας ταυτόχρονα να εφαρμόσουμε πολιτικές ώστε να μειώσουμε τα κόστη είτε θέτοντας ασφάλιστρα κάτι που είναι και το πιο σύνηθες. Συνεπώς, θα δούμε στην συνέχεια πως ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής ενός ατόμου ή μηχανήματος επηρεάζεται άμεσα από τις αυξομειώσεις της συνάρτησης της έντασης κινδύνου.

2.2 *Περιγραφή Μοντέλου*

Έστω ότι $h(t)$ η ένταση κινδύνου ενός συστήματος και $m(t)$ ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής. Λόγω των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα παρατηρούμε ότι γεννιέται μια καινούρια συνάρτηση έντασης κινδύνου η οποία ονομάζεται “Προσθετικό Μοντέλο Έντασης Κινδύνου -Additive Hazard Rate Model” και αναφέρεται ως AHFR το οποία είναι τα αρχικά του αγγλικού όρου. Συμβολίζεται ως εξής :

$$h_\theta(t) = h(t) + \theta, \qquad (2.1)$$

όπου θ είναι μια θετική σταθερά.

Οι Bebbington et al. (2008) αναφέρονται στη σταθερά αυτή ως παράμετρος άρσης αφού αυξάνει την συνάρτηση αυτή. Η προσθήκη του θ στο σύστημα δεν αλλάζει την γραφική απεικόνιση της έντασης κινδύνου αλλά έχει σημαντική επίδραση στον υπολειπόμενο χρόνο ζωής. Είναι λοιπόν προφανές ότι η αύξηση αυτή θα επιφέρει στην μείωση του υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Διαισθητικά μπορούμε να σκεφτούμε ότι αυξάνοντας τον κίνδυνο σε ένα σύστημα αναμένουμε ότι αφού θα αντιμετωπίσει περισσοτέρους κινδύνους σε εισαγωγικά, ο χρόνος ζωής του θα μειωθεί και η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής θα γίνει

$$m_\theta(t) = m(t) - \theta(t).$$

Επιπρόσθετα, ορίζεται και το "Προσθετικό Μοντέλο Μέσου Υπολειπόμενου Χρόνου Ζωής -Additive Mean Residual Life Function" το οποίο αναφέρεται ως AMRLF και συμβολίζεται ως εξής :

$$m_\theta(t) = m(t) + \theta.$$

Όμοια αυξάνοντας τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής, είναι φυσικό επακόλουθο ότι η ένταση κινδύνου θα μειωθεί , πράγμα το οποίο είναι λογικό αφού προστίθεται μια θετική ποσότητα στο σύστημα που το κάνει να επιβιώνει για περισσότερο διάστημα τότε θα αντιμετωπίσει λιγότερους κινδύνους, οπότε η ένταση κινδύνου θα μειωθεί. Είναι προφανές ότι ισχύουν και τα αντίστροφα, δηλαδή μειώνοντας την ένταση κινδύνου αναμένουμε αύξηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Αποτελεί ενδιαφέρον η μελέτη της σύνδεσης των συναρτήσεων $m(t)$ και $m_\theta(t)$ και πως αυτές αλλάζουν αυξάνοντας την ένταση κινδύνου.

<u>Παρατήρηση 2.1:</u>

Αν και η συνάρτηση της έντασης κινδύνου αυξάνεται κατά μια θετική σταθερά θ , η αντίστοιχη συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής , γενικά , δεν μειώνεται κατα μια θετική σταθερά, με εξαιρουμένη την περίπτωση της εκθετικής κατανομής όπως θα δούμε στη συνέχεια.

2.3 Υπολογισμός Συναρτήσεων

Αρχικά θεωρούμε την συνάρτηση επιβίωσης της Σχέσης (1.2) ($S(t) = e^{-\int_0^t h(x)dx}$) η οποία μέσω της σχέσης (2.1) βρίσκουμε εύκολα ότι η νέα συνάρτηση επιβίωσης υπολογίζεται ως :

$$S_\theta(t) = e^{-\theta t} S(t), \qquad (2.2)$$

όπου η συνάρτηση αυτή είναι η αντίστοιχη για την $h_\theta(t)$.

Οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω και την σχέση (1.4) μπορούμε να εκφράσουμε την καινούρια συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής η οποία γράφεται ως :

$$m_\theta(t) = E[T_\theta - t | T_\theta > t] = \frac{\int_t^\infty S_\theta(x)dx}{S_\theta(t)}, \qquad (2.3)$$

όπου η T_θ η τυχαία μεταβλητή που έχει συνάρτηση επιβίωσης την $S_\theta(t)$. Η παραπάνω Σχέση (2.3) με μια αλλαγή μεταβλητής μπορεί να γραφεί εναλλακτικά ως :

$$m_\theta(t) = \int_0^\infty e^{-\theta x} S(x|t)dx = \int_0^\infty e^{-\theta x} {}_t p_x dx \,.$$

Επομένως μπορούμε να δούμε την συνάρτηση αυτή μέσω μιας άλλης σκοπιάς, πιο συγκεκριμένα μπορούμε να διακρίνουμε μια συνεχή ράντα ζωής στο δεξί μέλος της πιο πάνω σχέσης η οποία μπορεί να εκφράσει τον νέο μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής του οποίου η αντίστοιχη ένταση κινδύνου του έχει αυξηθεί κατά θ.

<u>Παρατήρηση 2.2:</u>

Σε αρκετές περιπτώσεις πιο σύνθετων συναρτήσεων όπου δεν υπάρχει κλειστός τύπος και οι συναρτήσεις κατανομής και επιβίωσης εκφράζονται από ολοκληρώματα , πράγμα το οποίο δυσκολεύει τους υπολογισμούς μας καθώς εμφανίζονται διπλά ολοκληρώματα στους τύπους που έχουμε για να υπολογίσουμε τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής. Για το λόγο αυτό μέσω της Σχέσης (2.2) και (2.3) και με ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα:

$$m_\theta(t) = \frac{\int_t^\infty e^{-\theta x} S(x)dx}{e^{-\theta t} S(t)} = \frac{1}{\theta}\left[1 - \frac{\int_t^\infty e^{-\theta x} f(x)dx}{e^{-\theta t} S(t)}\right], \quad (2.4)$$

με $f(x)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της αρχικής κατανομής και μέσω του θεωρήματος του del' Hospital έχουμε ότι ισχύει :

$$m(t) = \frac{\int_t^\infty x f(x)dx}{S(t)} - t. \quad (2.5)$$

<u>Παράδειγμα 2.1 :</u>

Έστω ότι $h(t) = 1 + t$ και προσθέτοντας ένα θετικό αριθμό έχουμε $h_\theta(t) = 1 + t + \theta$, και χρησιμοποιώντας την Σχέση (1.3) βρίσκουμε ότι η συνάρτηση επιβίωσης είναι:

$$S(t) = e^{-t-\frac{t^2}{2}} \,, t \geq 0,$$

οπότε μέσω της Σχέσης (2.2) μπορούμε να βρούμε της νέα συνάρτηση επιβίωσης η οποία είναι:

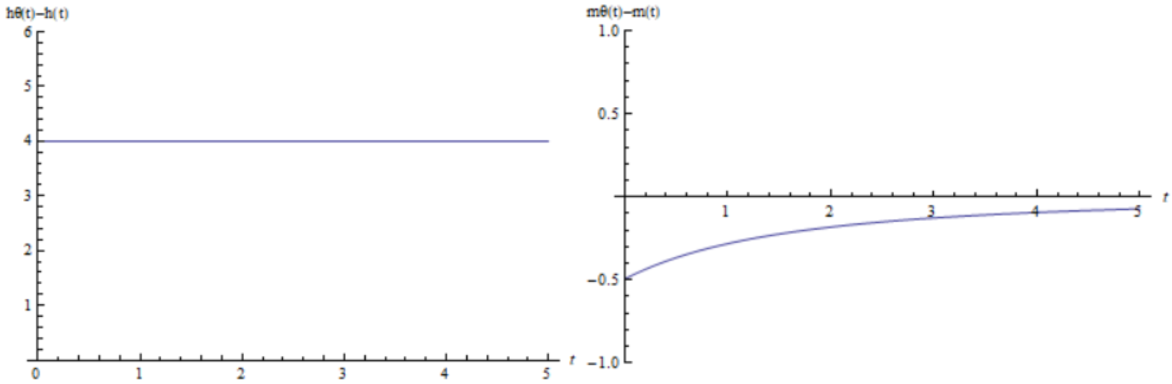
$$S_\theta(t) = e^{-\theta t} e^{-t-\frac{t^2}{2}}.$$

Επομένως εφαρμόζοντας την Σχέση (2.4) εύκολα δείχνουμε ότι :

$$m_\theta(t)=\frac{\int_t^\infty e^{-\theta x}e^{-x-\frac{x^2}{2}}dx}{e^{-\theta t}e^{-t-\frac{t^2}{2}}}$$

$$=\frac{1-\Phi[\sqrt{t}+\theta+1]}{\varphi[\sqrt{t}+\theta+1]}$$

όπου $\Phi(.),\varphi(.)$ οι συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας της τυπικής κανονικής κατανομής, αντίστοιχα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι έχουμε σταθερή αύξηση της έντασης κινδύνου και μη σταθερή μείωση της αντίστοιχης συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής όπως φαίνεται πιο κάτω.



Σχήμα 2.1: *Στην αριστερή γραφική παράσταση απεικονίζεται η συνάρτηση $h_\theta(t)-h(t)$ και στο δεξιό γράφημα η $m_\theta(t)-m(t)$, όταν $\theta=4$.*

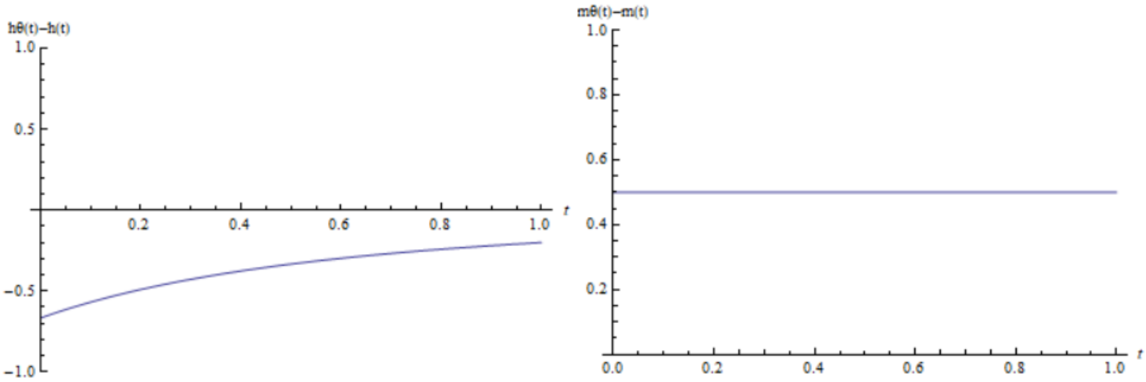
Αυτό είναι ένα παράδειγμα με μια συνάρτηση έντασης κινδύνου η οποία είναι γραμμική και εφαρμόζεται συνήθως σε αναλογιστικές μελέτες που ασχολούνται με δεδομένα του χρόνου ζωής των ατόμων .

Παράδειγμα 2.2 :

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $m(t)=1+t$ με $t\in[0,1],\theta\in(0,1)$ και αφαιρώντας ένα σταθερό θετικό αριθμό έχουμε ότι $m_\theta(t)=1+t-\theta$ και εφαρμόζοντας την Σχέση (1.5) μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η αντίστοιχη συνάρτηση έντασης κινδύνου δίνεται από την παρακάτω σχέση :

$$h_\theta(t)=\frac{1+m_\theta{}'(t)}{m_\theta(t)}=\frac{2}{1+t-\theta},$$

και επομένως η διαφορά $h_\theta(t)-h(t)=\frac{2\theta}{(1+t)(1+t-\theta)}$ καταλαβαίνουμε ότι είναι μη σταθερή συνάρτηση .



<u>Σχήμα 2.2:</u> *Οι συναρτήσεις $h_\theta(t) - h(t)$ και $m_\theta(t) - m(t)$ απεικονίζονται αριστερά και δεξιά αντίστοιχα για $\theta = 5$.*

Μπορούμε να διακρίνουμε στο Σχήμα 2.2 ότι η αύξηση τώρα του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής κατά μια σταθερά συνεπάγεται την μη σταθερή μείωση της έντασης κινδύνου. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι γενικά, μειώνοντας (αυξάνοντας) την μια εκ των δυο συναρτήσεων κατά ένα θετικό σταθερό αριθμό δεν συνεπάγεται την αντίστοιχη σταθερή αύξηση (μείωση) της άλλης. Όπως θα δούμε στην συνέχεια η σταθερή αυξομείωση στο προσθετικό μοντέλο που μελετάμε μπορεί να επιτευχθεί κάτω από την επόμενη κατανομή.

2.4 Εκθετική κατανομή

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε πως συμπεριφέρεται η τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την εκθετική κατανομή μέσω κάποιων θεωρημάτων και στη συνέχεια θα δειχθεί γραφικά πως επηρεάζεται ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής αυξάνοντας την αντίστοιχη ένταση κινδύνου κατά μια σταθερά. Η ιδιότητα της έλλειψης μνήμης που χαρακτηρίζει την κατανομή αυτή «ξεχνώντας» τι έγινε στο παρελθόν και θεωρώντας κάθε γεγονός σαν να συμβαίνει πρώτη φορά, διευκολύνει κατά πολύ τους υπολογισμούς μας.

Στο ακόλουθο παράδειγμα θα διαπιστώσουμε ότι οι συναρτήσεις του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής και έντασης κινδύνου αυξομειώνονται σταθερά αν και μόνον αν η τυχαία μεταβλητή του χρόνου ζωής ακολουθεί την εκθετική κατανομή.

<u>Παράδειγμα 2.3:</u>

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή T η οποια ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μια παράμετρο $\lambda > 0$. Η T έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0,$$

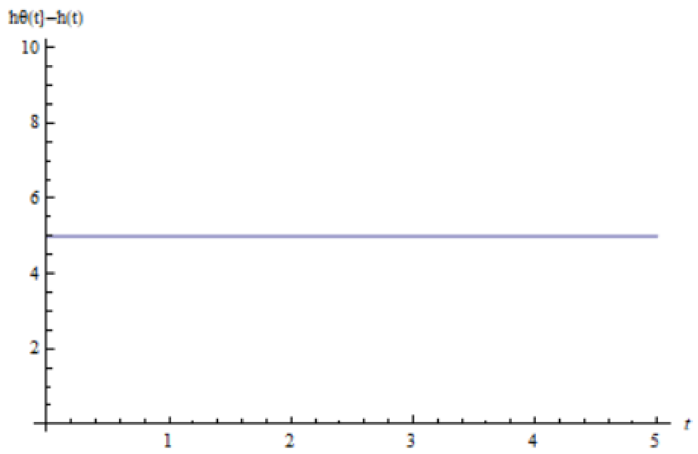
και συνάρτηση επιβίωσης :

$$S(t) = e^{-\lambda t}.$$

Επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε την ένταση κινδύνου και τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής μέσω της Σχέσης (1.1) και (1.4) αντίστοιχα και έχουμε ότι $h(t) = \lambda$ και $m(t) = \frac{1}{\lambda}$.
Μέσω της Σχέσης (2.2) μπορούμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση $m_\theta(t)$ η οποία είναι :

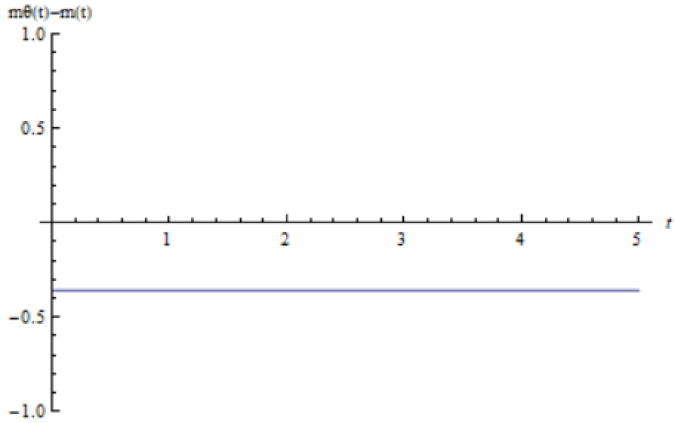
$$m_\theta(t) = \frac{1}{\lambda + \theta}.$$

Μπορούμε να δούμε ότι ο νέος μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής δεν εξαρτάται από το t.
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η $h_\theta(t) = h(t) + \theta$ οδηγει σε σταθερη μείωση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, δηλαδή $m_\theta(t) = m(t) - \frac{\theta}{\lambda(\lambda+\theta)}$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα για το οποίο υποθέτουμε ότι έχουμε την εκθετική κατανομή με $\lambda = 2$ και $\theta = 5$.



Σχήμα 2.3 : *Η συνάρτηση $h_\theta(t) - h(t)$ όταν $\theta = 5$.*

Όπως φαίνεται στο πιο πάνω Σχήμα 2.3 βλέπουμε αυτό που αναμένουμε , δηλαδή την θετική σταθερή διαφορά μεταξύ της συνάρτησης έντασης κινδύνου και της αυξημένης συνάρτησης έντασης κινδύνου κατά 5.



Σχήμα 2.4 :*Η συνάρτηση* $m_\theta(t) - m(t)$ *όταν* $\theta = 5$.

Στο Σχήμα 2.4 μπορούμε να δούμε ότι όταν αυξήσουμε την συνάρτηση έντασης κινδύνου κατά μια θετική σταθερά, η αντίστοιχη του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής θα έχει σταθερή μείωση.

Στη συνέχεια θα δούμε ένα Θεώρημα που χαρακτηρίζει την εκθετική κατανομή σύμφωνα με τους Bebbington et al. (2008) και επιβεβαιώνει το αντίστροφο του Παραδείγματος 2.3, δηλαδή όταν αυτή η αυξομείωση είναι σταθερή μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η τυχαία μεταβλητή του χρόνου ζωής ακολουθεί την εκθετική κατανομή.

Θεώρημα 2.1: (Χαρακτηρισμός εκθετικής κατανομής)

Έστω $\theta > 0\,, c > 0$ οι σταθερές των παρακάτω μοντέλων και οι δυο ανεξάρτητες συναρτήσεις έντασης κινδύνου $h_*(t)$ και $h(t)$ και οι αντίστοιχες συναρτήσεις μέσων υπολειπομένων χρόνων ζωής $m_*(t)$ και $m(t)$ οι οποίες ικανοποιούν τις εξισώσεις :

$$h_*(t) = h(t) + \theta \;\textit{και}\; m_*(t) = m(t) - c$$

για κάθε $t \geq 0$. Τότε θα ισχύει ότι η συνάρτηση επιβίωσης $S(t)$ θα είναι η εκθετική με μέση τιμή την :

$$\lambda(\theta, c) = \frac{2}{\sqrt{\theta^2 + \frac{4\theta}{c}} - \theta}.$$

Απόδειξη :

Ξέρουμε ότι $m_*'(t) - m'(t) = 0$ και αφού ισχύει ότι $m_*'(t) = m_*(t)h_*(t) - 1$ και $m'(t) = m(t)h(t) - 1$ παίρνουμε ότι :

$$0 = m_*(t)h_*(t) - m(t)h(t) = \theta m(t) - ch(t) - c\theta \,.$$

Ισοδύναμα έχουμε :

$$\theta \int_t^{\infty} S(x)dx + cS'(t) - c\theta S(t) = 0,$$

και παραγωγίζοντας έχουμε ότι :

$$S''(t) - \theta S'(t) - \frac{\theta}{c} S(t) = 0.$$

Αυτή είναι μια ομογενής εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές και έχει λύση η οποία είναι της μορφής :

$$S(t) = c_1 e^{x_1 t} + c_2 e^{x_2 t} ,$$

με $x_1 = \frac{\theta+\sqrt{\theta^2+4\theta c^{-1}}}{2}$ και $x_2 = \frac{\theta-\sqrt{\theta^2+4\theta c^{-1}}}{2}$.

Συνεπώς αφού η λύση αποτελεί συνάρτηση επιβίωσης χρησιμοποιούμε τις συνθήκες $S(0) = 1$ και $S(\infty) = 0$ από τα οποία παίρνουμε ότι $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. Άρα έχουμε ότι η λύση της εξίσωσης μπορεί να γραφεί στη μορφή :

$$S(t) = e^{-t\lambda(\theta,c)},$$

το οποίο είναι και το ζητούμενο αφού έχουμε την εκθετική με την παράμετρο αυτή .

2.5 Γραφική Απεικόνιση και Σημείο Αλλαγής Μονοτονίας

Στην παράγραφο αυτή μας ενδιαφέρει η γραφική απεικόνιση των μοντέλων που μελετάμε καθώς και το πως επηρεάζονται από την προσθήκη της σταθεράς και έπειτα. Στην περίπτωση που έχουμε μη μονότονες συναρτήσεις, ελέγχουμε τα λεγόμενα σημεία αλλαγής μονοτονίας τα οποία αλλάζουν την μονοτονία των συναρτήσεων. Στον αναλογισμό, αυτό είναι ένα σημαντικό κομμάτι καθώς μπορούν να καθοριστούν διάφορα μοτίβα τα οποία αφορούν την πιθανότητα θανάτου σε κάποια ηλικία. Είναι κοινά αποδεκτό ότι στην περίπτωση μονότονης έντασης κινδύνου στην οποία προστίθεται μια σταθερά, αυτή η μονοτονία διατηρείται καθώς και όταν ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής είναι μονότονη συνάρτηση μπορεί με σχετική ευκολία να διαπιστωθεί ότι αυξάνοντας την ένταση κινδύνου, μειώνεται ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής και ανάποδα. Τώρα όσον αφορά στις μη μονότονες συναρτήσεις ισχύουν τα Θεωρήματα 1.1, 1.2, 1.3 αλλά και το Λήμμα 1.1 σύμφωνα με τους Gupta and Akman (1995). Επίσης οι Lai and Xie (2006) επισημαίνουν ότι με την Σχέση (2.4) μπορούμε να δούμε ότι λόγω του όπου $e^{-\theta x}$ που βρίσκεται μέσα στο ολοκλήρωμα, συμπεραίνουμε ότι πάντα θα ισχύει ότι $m_\theta(t) \leq m(t)$, κάτι το οποίο μας επιβεβαιώνει ότι αυξάνοντας την ένταση κινδύνου, μειώνεται ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής.

Στην συνέχεια θα δούμε κάποια αποτελέσματα ώστε να γίνει κατανοητή η μεταβολή των σημείων αλλαγής μονοτονίας όταν αλλάζει η ένταση κινδύνου, καθώς και πως αυτή επηρεάζει το σημείο αλλαγής μονοτονίας του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Ο Gupta (2016) αναφέρει το ακόλουθο θεώρημα για τα σημεία αλλαγής μονοτονίας των συναρτήσεων που ενδιαφερόμαστε όσον αφορά στην διάταξη τους.

Θεώρημα 2.2: *(Διάταξη Σημείων Αλλαγής Μονοτονίας)*

Το σημείο αλλαγής μονοτονίας t^* του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής στο αθροιστικό μοντέλο $m_\theta(t)$ είναι μεταξύ των σημείων αλλαγής μονοτονίας t_0 και t_1 της συνάρτησης $h(t)$ και $m(t)$ αντίστοιχα, δηλαδή θα ισχύει ότι $t_1 < t^* < t_0$.

Οι Belzunce et al. (2007) παρουσιάζουν το ακόλουθο Θεώρημα που αφορά την σχέση των σημείων αλλαγής μονοτονίας των συναρτήσεων $m(t)$ και $m_\theta(t)$, ως επέκταση του Θεωρήματος 2.2.

Θεώρημα 2.3 :

Έστω ότι η συνάρτηση $m(t)$ έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα. Τότε για κάθε $\theta > 0$ το σημείο αλλαγής μονοτονίας t^* της συνάρτησης $m_\theta(t)$ θα είναι μεγαλύτερο από το σημείο αλλαγής μονοτονίας t_1 της συνάρτησης $m(t)$.

Παρατήρηση 2.3:

Είναι προφανές ότι το σημείο αλλαγής μονοτονίας της συνάρτησης έντασης κινδύνου δεν μεταβάλλεται όταν προσθέσουμε μια σταθερά στην συνάρτηση αυτή, πράγμα που σημαίνει ότι η συναρτήσεις $h(t)$ και $h_\theta(t)$ έχουν το ίδιο σημείο αλλαγής μονοτονίας.

Παράδειγμα 2.4 :

Θεωρούμε τις συναρτήσεις :

$$h(t) = \frac{5-4t}{(1-t)(1+2t)} \ ,0 \le t \le 1,$$

και

$$\mathrm{m(t)} = \frac{1}{4}(1-\mathrm{t})(1+2\mathrm{t})\ ,0 \le \mathrm{t} < 1.$$

Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 1.2 η συνάρτηση $h(t)$ έχει λεκανοειδές σχήμα και η $m(t)$ έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα. Τα σημεία αλλαγής μονοτονίας τους είναι $t_0 = 0.588$ και $\tau_0 = 0.25$ αντίστοιχα. Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3 το σημείο αλλαγής μονοτονίας της συνάρτησης $m_\theta(t)$ θα είναι $0.25 < \tau^* < 0.588$.

<u>Παράδειγμα 2.5 :</u> (Συνάρτηση Hjorth)

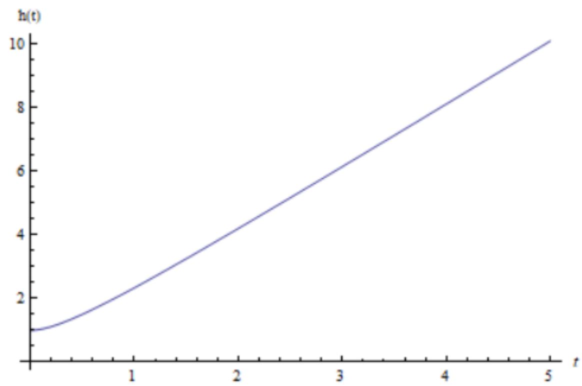
Η συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής Hjorth με παραμέτρους $\delta, \lambda, \beta > 0$, δίνεται από :

$$S(t) = (1+\beta t)^{-\frac{\lambda}{\beta}} e^{-\frac{\delta t^2}{2}}, t \geq 0.$$

Επομένως εύκολα βρίσκουμε ότι η ένταση κινδύνου είναι :

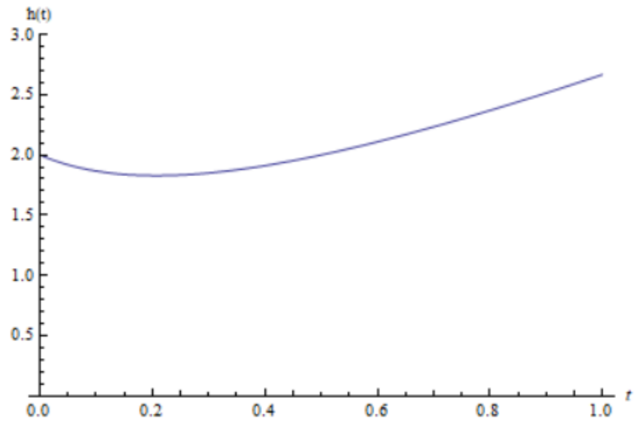
$$h(t) = \delta t + \frac{\lambda}{1+\beta t}.$$

Άρα, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση $h(t)$ είναι αύξουσα εάν και μόνο αν ισχύει ότι $\frac{\lambda\beta}{\delta} \leq 1$.



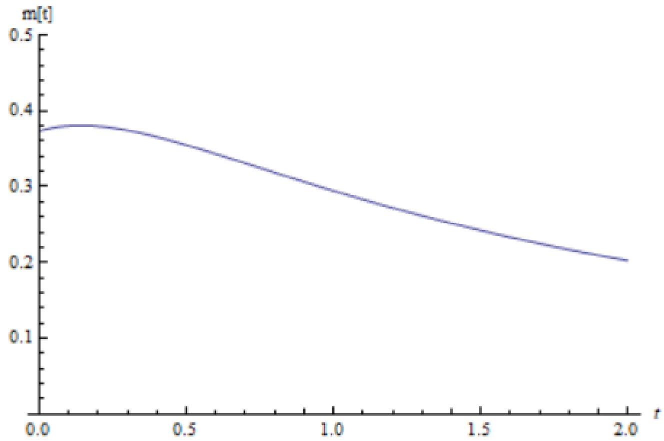
<u>Σχήμα 2.5:</u> *Η συνάρτηση $h(t)$ όταν $\lambda = \beta = \delta = 1$.*

Μπορούμε να δούμε ότι η συνάρτηση $h(t)$ είναι αύξουσα όπως φαίνεται πάνω Σχήμα 2.5 όταν ο όρος $\frac{\lambda\beta}{\delta}$ είναι μικρότερος ή ίσος της μονάδας. Επίσης όταν ισχύει $\frac{\lambda\beta}{\delta} > 1$, η συναρτηση $h(t)$ έχει λεκανοειδές σχήμα με σημείο αλλαγής μονοτονίας το $t_0 = \left(\sqrt{\frac{\lambda\beta}{\delta}} - 1\right)\frac{1}{\beta}$.



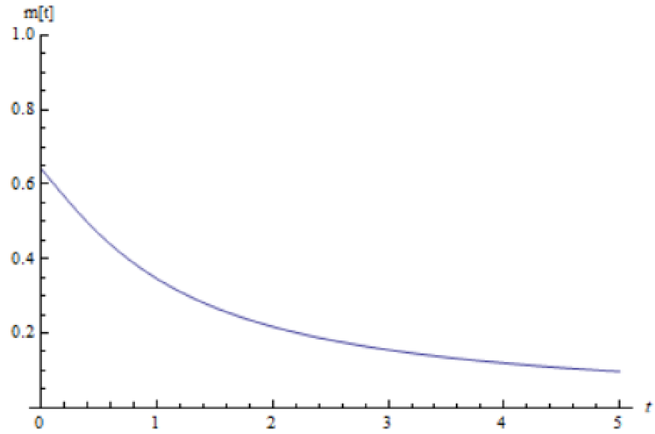
<u>Σχήμα 2.6 :</u> *Η συνάρτηση $h(t)$ όταν $\lambda, \beta, \delta = 2$.*

Θεωρώντας ότι βρισκόμαστε στη τελευταία περίπτωση δηλαδή $\frac{\lambda\beta}{\delta} > 1$, σύμφωνα με το Λήμμα 1.1 ξέρουμε ότι αν $h(0) > \frac{1}{m(0)}$, τοτε η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m(t)$ θα έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα με σημείο αλλαγής μονοτονίας t_1 για το οποίο θα ισχύει $0 < t_1 < t_0$.



<u>Σχήμα 2.7 :</u> *Η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής όταν $\lambda = \beta = \delta = 2$.*

Στην πιο πάνω γραφική παράσταση μπορούμε να δούμε ότι εφόσον ισχύουν κάποιοι περιορισμοί που αναφέρονται η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα και όπως βλέπουμε το σημείο αλλαγής μονοτονίας της είναι μικρότερη από αυτό της αντίστοιχης έντασης κινδύνου. Αντίθετα αν $h(0) < \frac{1}{m(0)}$, τότε η $m(t)$ θα είναι φθίνουσα συνάρτηση.



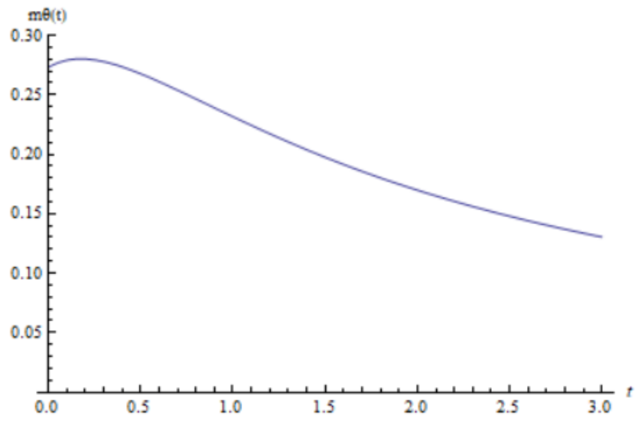
Σχήμα 2.8: *Η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής όταν ισχύει* $h(0) < \frac{1}{m(0)}$.

Η συνάρτηση $m(t)$ δείχνει να φθίνει καθώς το t μεγαλώνει, κάτι το οποίο και αναμένουμε σύμφωνα με το Λήμμα 1.1.

Περνώντας τώρα στο προσθετικό μοντέλο μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m_\theta(t)$ στο οποίο αντιστοιχεί η αυξημένη ένταση κινδύνου κατά θ, $h_\theta(t) = h(t) + \theta$ και έχει σημείο αλλαγής μονοτονίας το t_0 τότε για την $m_\theta(t)$ έχουμε:

$$(\theta + \lambda) \int_0^\infty e^{-\theta x} S(x) dx > 1,$$

και άρα έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα με σημείο αλλαγής μονοτονίας t^* για το οποίο ξέρουμε ότι $0 < t^* < t_0$.



Σχήμα 2.9: *Η νέα συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής για* $\theta = 5$.

Στο Σχήμα 2.9 μπορούμε να διακρίνουμε ότι η νέα συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα με το σημείο αλλαγής μονοτονίας να είναι μικρότερο της αντίστοιχης έντασης κινδύνου. Αν η τελευταία σχέση δεν ισχύει, προφανώς θα έχουμε ότι η $m_\theta(t)$ θα είναι φθίνουσα.

2.6 Μελέτη Γνωστών Κατανομών

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την συμπεριφορά κάποιων γνωστών κατανομών ώστε να δούμε πως μεταβάλλεται η μονοτονία τους και τα σημεία αλλαγής μονοτονίας αυτών με σκοπό να δειχθεί πως μεταβάλλεται ο μέσος υπολειπόμενός χρόνος ζωής αυξάνοντας την συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής κατά ένα θετικό αριθμό, όταν η τυχαία μεταβλητή που εξετάζουμε είναι μια συγκεκριμένη κατανομή.

2.6.1 Κατανομή Γάμμα

Θεωρούμε αρχικά την συνάρτηση επιβίωσης μιας κατανομής γάμμα με παραμέτρους $\alpha, \beta > 0$ η οποια δίνεται από την σχέση :

$$S(t) = \frac{\Gamma(\beta, \alpha t)}{\Gamma(\beta)}, t \geq 0.$$

όπου η συνάρτηση $\Gamma(\nu, x) = \int_x^\infty z^{\nu-1} e^{-z} \delta z$ ορίζεται ως η μη πλήρης γάμμα κατανομή και $\Gamma(\beta) = (\beta - 1)!$, όταν το β είναι ακέραιος. Η συνάρτηση πιθανότητας δίνεται από:

$$f(t) = \frac{\alpha^\beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t}}{\Gamma(\beta)},$$

και εύκολα βρίσκουμε ότι η συνάρτηση έντασης κινδύνου μέσω της (1.1) είναι :

$$h(t) = \frac{\alpha^\beta t^{\beta-1} e^{-at}}{\Gamma(\beta, \alpha t)},$$

η οποία μπορεί να γραφεί και στην μορφή ολοκληρώματος ως εξής :

$$h(t) = \int_0^\infty (1 + \tfrac{x}{t})^{\beta-1} e^{-ax} dx.$$

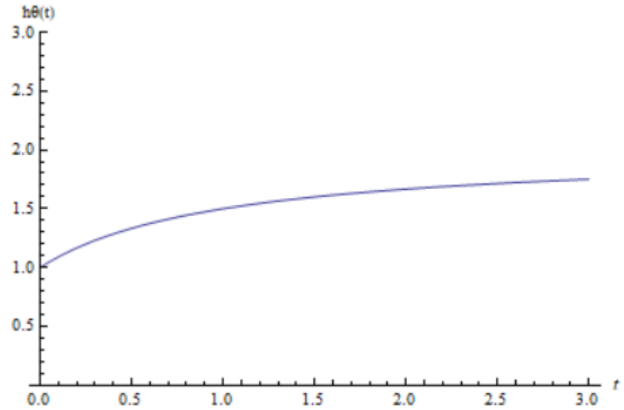
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η συνάρτηση έντασης κινδύνου μπορεί να είναι :

1. Φθίνουσα εάν $0 < \beta < 1$,
2. Σταθερή εάν $\beta = 1$,
3. Αύξουσα εάν $\beta > 1$.

Προσθέτοντας την θετική σταθερά στην συνάρτηση έντασης κινδύνου έχουμε την νέα ένταση κινδύνου η οποία είναι:

$$h_\theta(t) = h(t) + \theta,$$

και απεικονίζεται από το παρακάτω γράφημα.

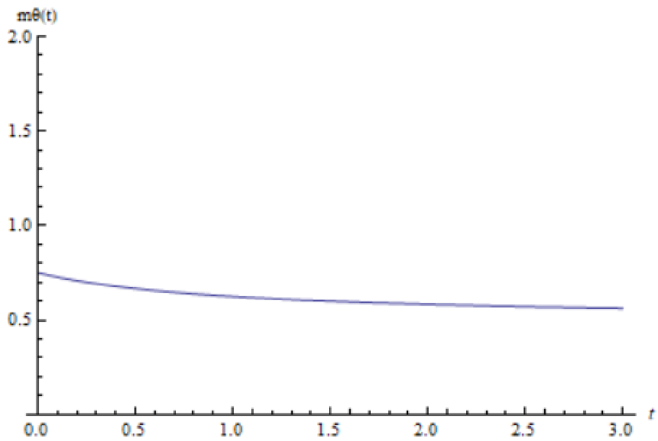


Σχήμα 2.10: *Η συνάρτηση έντασης κινδύνου αυξημένη κατά* $\theta = 1$ *με* $\alpha = 1$ *και* $\beta = 2$.

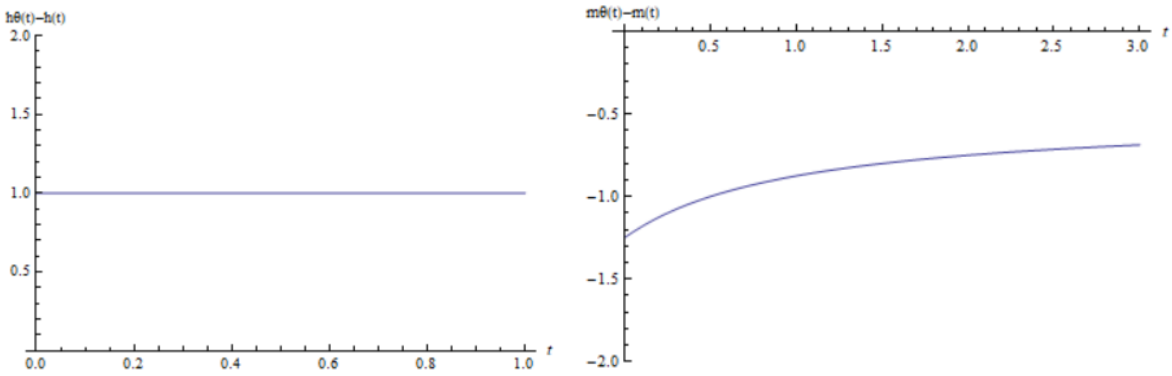
Με την βοήθεια των Σχέσεων (2.4) και (2.5) μπορούμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m_\theta(t)$ και $m(t)$ αντίστοιχα ως :

$$m_\theta(t) = \frac{1}{\theta}\left[1 - \frac{e^{\theta t}\Gamma(\beta,(\alpha+\theta)t)}{\left(1+\frac{\theta}{\alpha}\right)^{\beta}\Gamma(\beta,\alpha t)}\right],$$

$$m(t) = \frac{\alpha^{\beta-1}t^{\beta}e^{-\alpha t}}{\Gamma(\beta,\alpha t)} + \frac{\beta}{\alpha} - t.$$



Σχήμα 2.11: *Η συνάρτηση του νέου μέσου υπολειπομένου χρόνου ζωής με α=1,β=2 και θ=1.*



<u>Σχήμα 2.12:</u> *Οι συναρτήσεις $h_\theta(t) - h(t)$ και $m_\theta(t) - m(t)$ αριστερά και δεξιά αντίστοιχα με* $\theta = 1$.

Εδώ επιβεβαιώνουμε οτι αυξάνοντας την $h(t)$ κατά 1, η αντίστοιχη συνάρτηση $m(t)$ μειώνεται κατά μια μη σταθερή συνάρτηση όπως φαίνεται στο πιο πάνω γράφημα. Συμπερασματικά, στην κατανομή γάμμα η αύξηση την έντασης κινδύνου κατά ένα θετικό αριθμό οδηγεί σε μείωση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής κατά μια αύξουσα συνάρτηση η οποία εξαρτάται από τον χρόνο.

2.6.2 Κατανομή Lomax

Έστω μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή T η οποία ακολουθεί την κατανομή Lomax, με παραμέτρους $\alpha, \beta > 0$. Η συνάρτηση επιβίωσης μια τέτοιας κατανομής είναι:

$$S(t) = \frac{1}{(1+\beta t)^{\alpha}}, t \geq 0.$$

Επομένως, μέσω της Σχέσης (1.2) μπορούμε να βρούμε την συνάρτηση έντασης κινδύνου η οποία είναι:

$$h(t) = \frac{\alpha\beta}{(1+\beta t)},$$

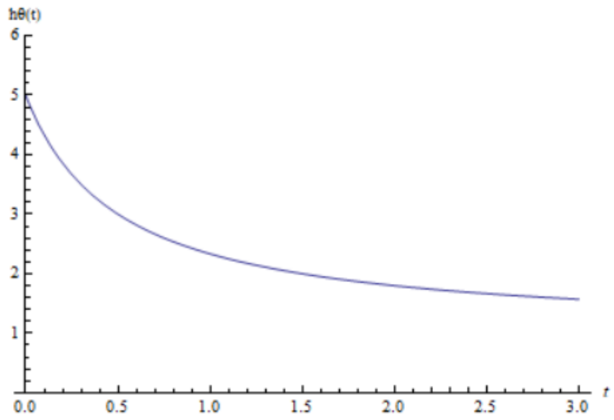
η οποία καταλαβαίνουμε ότι είναι φθίνουσα. Επίσης η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής χρησιμοποιώντας την Σχέση (1.4) είναι:

$$m(t) = \frac{1}{\beta(\alpha-1)} + \frac{t}{\alpha-1}.$$

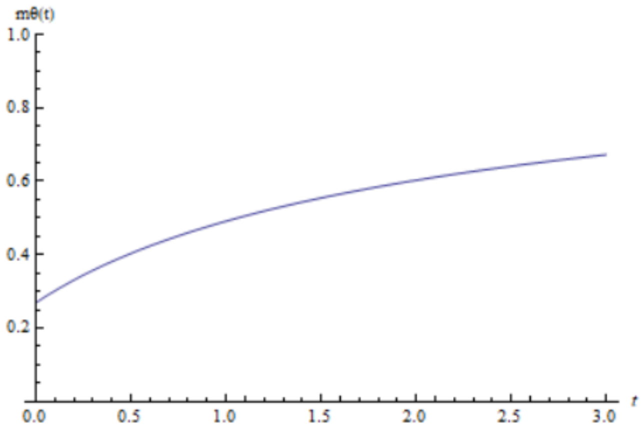
Προσθέτοντας την θετική σταθερά θ στην συνάρτηση $h(t)$, εξάγουμε την νέα συνάρτηση του υπολειπόμενου χρόνου ζωής βασιζόμενοι στις Σχέσεις (2.2) και (2.3) με παραμέτρους $\alpha > 1, \beta > 0$, και άρα έχουμε ότι:

$$m_\theta(t) = \frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{\beta} + \theta t\right)^{\alpha} e^{\frac{\theta}{\beta}+\theta t}\Gamma\left(1-\alpha, \frac{\theta}{\beta}+\theta t\right), \quad \alpha > 1, \beta > 0.$$

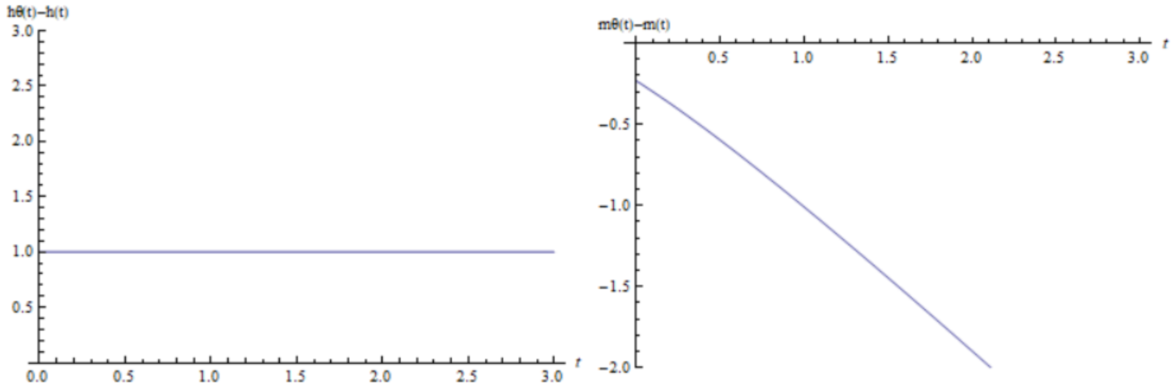
Παρακάτω θα δούμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που μελετάμε ώστε να γίνει κατανοητή η γραφική απεικόνιση αυτών καθώς και το πως εξελίσσονται στον χρόνο t.



<u>Σχήμα 2.13:</u> *Στο γράφημα αυτό παρουσιάζεται η συνάρτηση $h_\theta(t)$ με $\alpha = \beta = 2$ και $\theta = 1$.*



<u>Σχήμα 2.14:</u> *Η συνάρτηση του νέου μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m_\theta(t)$ με $\alpha = \beta = 2$ και $\theta = 1$.*



<u>Σχήμα 2.15:</u> *Οι συναρτήσεις $h_\theta(t) - h(t)$ και $m_\theta(t) - m(t)$ αριστερά και δεξιά αντίστοιχα με $\theta = 1$ και $\alpha = \beta = 2$.*

Όπως μπορούμε να δούμε πιο πάνω στο Σχήμα 2.15 αυξάνοντας την ένταση κινδύνου κατά 1 στην συγκεκριμένη περίπτωση, η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής μειώνεται κατά μια μη σταθερή συνάρτηση.

2.5.3 Λογαριθμολογιστική κατανομή

Θεωρούμε την μη αρνητική τυχαία μεταβλητή T η οποία λέμε ότι ακολουθεί την κατανομή Log-Logistic και συμβολίζεται ως $T \sim LogLogistic(b, a)$ όπου τα $b, a > 0$ και ορίζονται ως η παράμετρος σχήματος και παράμετρος κλίμακας αντίστοιχα. Η συνάρτηση T έχει συνάρτηση επιβίωσης την:

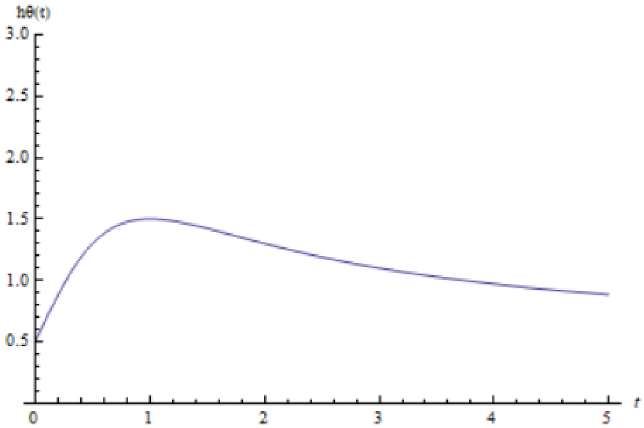
$$S(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^b}, t \geq 0.$$

Η συνάρτηση έντασης κινδύνου δίνεται απο την σχέση:

$$h(t) = \frac{b t^{b-1}}{a\left[1 + \left(\frac{t}{a}\right)^b\right]},$$

και προσθέτοντας την θετική σταθερά στην συνάρτηση $h(t)$ δημιουργείται η συνάρτηση:

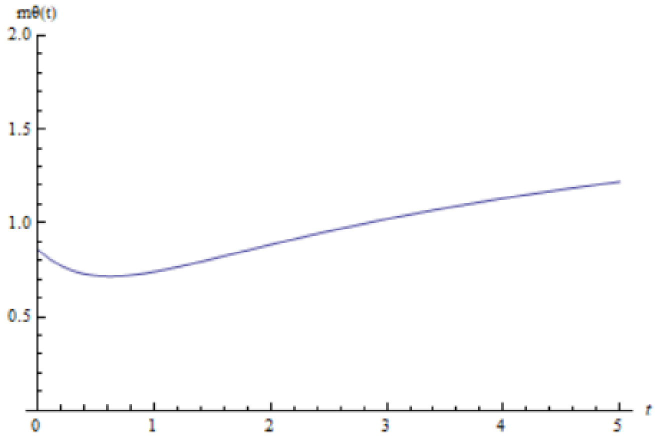
$$h_\theta(t) = h(t) + \theta,$$



<u>Σχήμα 2.16:</u> *Η συνάρτηση της νέας έντασης κινδύνου με* $b = 2, a = 1$ *και* $\theta = 0.5$.

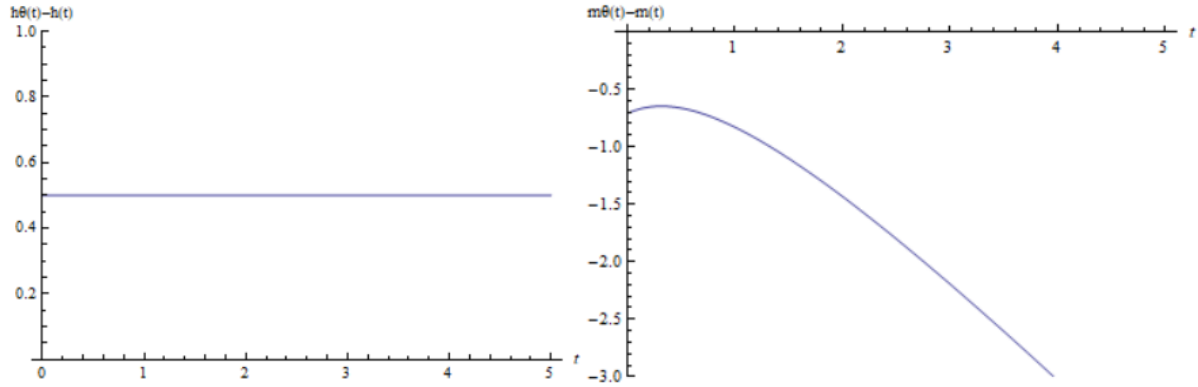
Πιο πάνω στο Σχήμα (2.16) φαίνεται το γράφημα της νέας έντασης κινδύνου η οποία όπως φαίνεται έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα

Παρακάτω θα δούμε τα γραφήματα των συναρτήσεων αυτών για να γίνει κατανοητή η συμπεριφορά τους στην πάροδο του χρόνου καθώς ο υπολογισμός της συνάρτησης $m(t)$ και κατ' επέκταση της $m_\theta(t)$ είναι αρκετά δύσκολο αφού δεν υπάρχει κλειστός τύπος.



<u>Σχήμα 2.17:</u> *Η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής με* β= $2, a = 1$ *και* $\theta = 0.5$.

Όπως αναμέναμε, σύμφωνα με το Λήμμα 1.1 η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής έχει λεκανοειδές σχήμα αφού ισχύει $h(0) < \frac{1}{m(0)}$.



<u>Σχήμα 2.18:</u> *Οι συναρτήσεις $h_\theta(t) - h(t)$ και $m_\theta(t) - m(t)$ αριστερά και δεξιά αντίστοιχα όταν $\beta = 2, a = 1$ και $\theta = 0.5$.*

Στο γράφημα αυτό επιβεβαιώνουμε ότι αυξάνοντας τη συνάρτηση έντασης κινδύνου κατά μια θετική σταθερά, η αντίστοιχη του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής μειώνεται κατά μια μη σταθερή συνάρτηση.

Η συνάρτηση Log-Logistic χρησιμοποιείται στην ανάλυση επιβίωσης στις περιπτώσεις που η ένταση κινδύνου αυξάνεται απότομα και έχει μια σχετική μείωση αργότερα, καθώς και στα οικονομικά για να μοντελοποιηθούν κατανομές μισθών και χρημάτων γενικότερα.

2.7 Ειδικές Κατανομές

Οι Bebbington et al. (2008) αναφέρουν ότι υπάρχει μια συνεχής αναζήτηση νέων κατανομών με λεκανοειδή σχήματα οι οποίες έχουν σκοπό την καλύτερη ανάλυση και μελέτη του χρόνου ζωής ενός ατόμου ή μηχανήματος με την διαφορά ότι είναι πιο μαθηματικοποιημένες και προσδίδουν πιο ρεαλιστικά γεγονότα από τις ήδη υπάρχουσες παρουσιάζοντας τα ακόλουθα θεωρήματα. Στη συνέχεια γίνεται η μελέτη των δυο ειδικών παραμετρικών κατανομών οι οποίες ονομάζονται γενικευμένες Weibull. Οι κατανομές αυτές είναι :

i. Μειωμένη Προσθετική Weibull-Reduced Additive Weibull και θα συμβολίζεται με τα αρχικά του αγγλικού ορού RAW,

ii. Προσαρμοσμένη Weibull-Flexible Weibull η οποία επίσης συμβολίζεται με τα αρχικά του αγγλικού όρου FW.

Πιο συγκεκριμένα οι Bebbington et al. (2007) αναφέρουν ότι η μίξη των κατανομών αυτών χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση των δεδομένων για την ζωή των ατόμων στον Καναδά και την Ινδονησία. Θα γίνει λοιπόν, η μελέτη των συναρτήσεων $h(t), m(t)$ καθώς και της $m_\theta(t)$ αλλά και το πως επηρεάζεται η μονοτονία και το σημείο αλλαγής μονοτονίας όταν προστίθεται η σταθερά στην ένταση κινδύνου.

2.7.1 Μειωμένη Προσθετική Weibull

Θεωρούμε την μη αρνητική τυχαία μεταβλητή T η οποία ακολουθεί την κατανομή RAW με παραμέτρους $a > 0, b > 1$, η οποία έχει συνάρτηση επιβίωσης :

$$S_{RAW}(t) = e^{-(at)^b-(at)^{\frac{1}{b}}} \ , t \geq 0,$$

και η αντίστοιχη συνάρτηση έντασης κίνδυνου δίνεται από την σχέση :

$$h_{RAW}(t) = ab(at)^{b-1} + \frac{a}{b}(at)^{\frac{1}{b-1}}. \qquad (2.6)$$

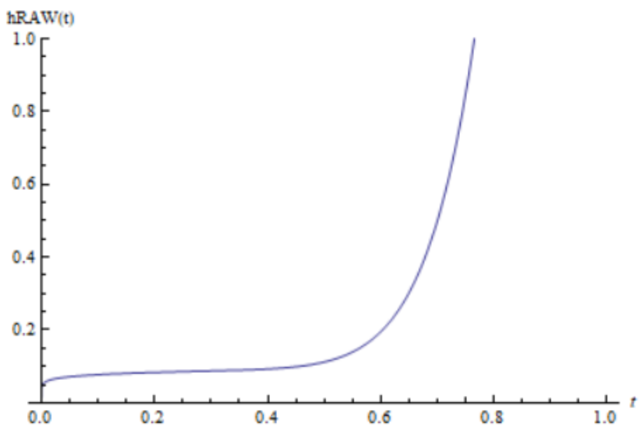
Στη συνέχεια παρουσιάζεται το Θεώρημα το οποίο είναι χρήσιμο στην γραφική απεικόνιση της συνάρτησης που μελετάμε.

Θεώρημα 2.4:

Για την κατανομή η οποία έχει ως συνάρτηση κίνδυνου την (2.6) θα ισχύει :

i. Η συνάρτηση $h_{RAW}(t)$ θα έχει minimum σημείο το $t_0 = a^{-1}b^{\frac{-3b}{b^2-1}}$ και θα είναι γνησίως φθίνουσα για $t < t_0$ και γνησίως αύξουσα για $t > t_0$.

ii. Η συνάρτηση $h_{RAW}(t)$ θα είναι κυρτή όταν $b \geq 2$ ή όταν $1 < b < 2$, και η δεύτερη παράγωγος $h''_{RAW}(t)$ είναι θετική μόνο όταν $t < t_1$ όπου $t_1 = a^{-1}\left[\frac{2b-1}{2b^4-b^5}\right]^{\frac{b}{b^2-1}}$.



Σχήμα 2.19: *Στο γράφημα αυτό βλέπουμε την συνάρτηση της έντασης κινδύνου $h_{RAW}(t)$ για α=1 και β=10.*

Παρατήρηση 2.5 :

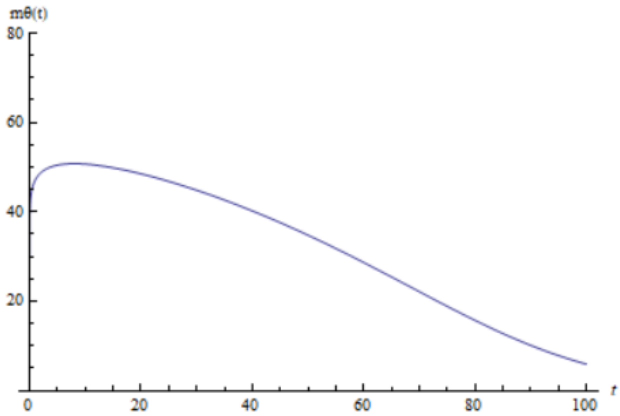
Σημειώνουμε ότι $t_0 < t_1$, γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση που δίνεται από την (2.6) είναι κυρτή όταν $t < t_1$ και κοίλη διαφορετικά.

Πρόταση 2.1 :

Η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m_\theta(t)$ έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα.

Απόδειξη:

Μέσω του Θεωρήματος 2.4 αφού η συνάρτηση $h_{RAW}(t)$ (και η $h_{RAW,\theta}(t)$) είναι κυρτή, έχει δηλαδή λεκανοειδές σχήμα. Μπορούμε με ευκολία να υπολογίσουμε το $\lim_{t\to 0} h_{RAW,\theta}(t) = \infty$ και μέσω του Λήμματος 1.1 μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι αφού $h_{RAW,\theta}(t) > \frac{1}{m_\theta(0)}$, σημαίνει ότι η νέα συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα.



Σχήμα 2.20: *Η νέα συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής με α=1, β=10 και θ=0.01.*

2.7.2 Προσαρμοσμένη Weibull

Έστω η μη αρνητική τυχαία μεταβλητή T η οποία ακολουθεί την προσαρμοσμένη Weibull (FW) με παραμέτρους $a, b > 0$. Η συνάρτηση επιβίωσης αυτής θα δίνεται από :

$$S_{FW}(t) = e^{-e^{at-\frac{b}{t}}}, t \geq 0,$$

και την αντίστοιχη ένταση κινδύνου :

$$h_{FW}(t) = \left(a + \frac{b}{t^2}\right) e^{at - \frac{b}{t}}.$$

Συμφώνα με την εργασία των Bebbington et al. (2007), αν και $\lim_{t \to 0} h_{FW}(t) = 0$ και $\lim_{t \to \infty} h_{FW}(t) = \infty$, δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μέσω του Λήμματος 1.1 η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής είναι φθίνουσα διότι όπως θα δούμε στο παρακάτω θεώρημα η $h_{FW}(t)$ δεν έχει λεκανοειδές σχήμα.

<u>Θεώρημα 2.5:</u>

Η συνάρτηση $h_{FW}(t)$ μπορεί να:

i. είναι αύξουσα ως προς t αν και μόνον αν $ab > \frac{27}{64}$,

ii. είναι γνησίως αύξουσα παντού όταν $ab = \frac{27}{64}$, με το μόνο εξαιρούμενο σημείο το $t = \frac{3}{8a}$, στο οποίο γίνεται στιγμιαία σταθερή,

iii. έχει τροποποιημένο λεκανοειδές σχήμα όταν $ab < \frac{27}{64}$.
Συγκεκριμένα, στην περίπτωση αυτή, συνάρτηση της έντασης κινδύνου θα είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, t_1)$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (t_1, t_2) και γνησίως αύξουσα στο (t_2, ∞), με τα σημεία t_1, t_2 τα δυο σημεία αλλαγής μονοτονίας της συνάρτησης με $t_1 < t_2$ και να ορίζονται ως εξής:

$$t_1 = \left(\frac{\sqrt{y}}{2} - \sqrt{-\frac{y}{4} + \frac{d}{2\sqrt{y}}}\right)^2, \quad t_2 = \left(\frac{\sqrt{y}}{2} + \sqrt{-\frac{y}{4} + \frac{d}{2\sqrt{y}}}\right)^2,$$

όπου

$$d = -\frac{\sqrt{2b}}{a},$$

και

$$y = \left[\frac{b}{a^2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{64}{27}ab}\right)\right]^{\frac{1}{3}} + \left[\frac{b}{a^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{64}{27}ab}\right)\right]^{1/3}.$$

Απόδειξη:

Αρχικά εξετάζουμε την βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης $h_{FW}(t)$ η οποία είναι:

$$h'_{FW}(t) = \left((\mathrm{a} + \frac{b}{t^2})^2 - \frac{2b}{t^3}\right) e^{at - \frac{b}{t}},$$

και εξισώνοντας την με το μηδέν και έχοντας υπόψη ότι το εκθετικό είναι πάντα θετικό προκύπτει ότι:

$$at^2 - \sqrt{2bt} + b = 0,$$

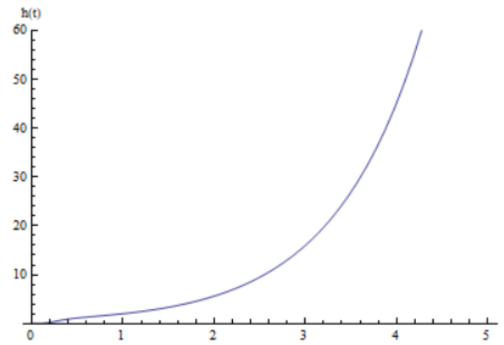
και κάνοντας αλλαγή μεταβλητής ώστε να κάνουμε απαλοιφή της ρίζας θέτοντας όπου $t = x^2$, έχουμε την εξίσωση τέταρτου βαθμού:

$$x^4 + dx + c = 0,$$

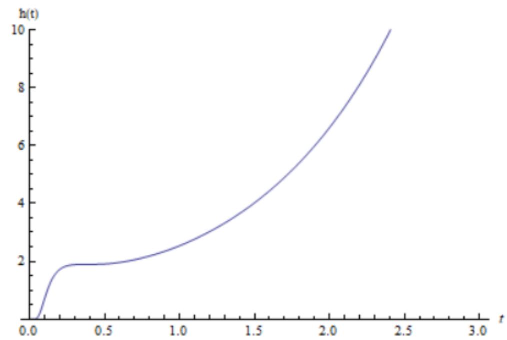
όπου $c = \frac{b}{a}$. Βρίσκουμε λοιπόν τις ρίζες αυτής της εξίσωσης είναι της μορφής:

$$\frac{\sqrt{y}}{2} + \varepsilon_1 \sqrt{-\frac{y}{4} + \varepsilon_2 \frac{d}{2\sqrt{y}}}, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1,1\},$$

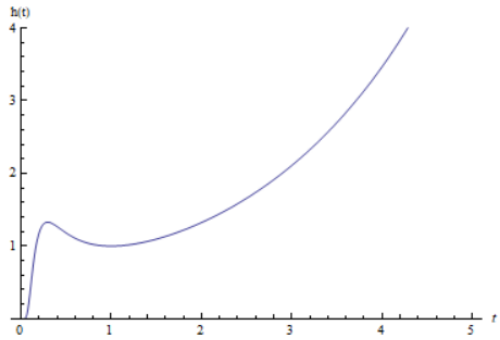
με το y να είναι μια από τις θετικές λύσεις της εξίσωσης τρίτου βαθμού $y^3 - 4cy - d^2 = 0$ ή σε «κανονική» μορφή $y^3 + 3py + 2q = 0$, με $p = \frac{-4c}{3}$ και $q = -\frac{d^2}{2}$.Η τελευταία εξίσωση έχει θετική διακρίνουσα $\Delta = p^3 + q^2 = \frac{b^2}{a^4}\left(1 - \frac{64}{27}ab\right)$ όταν $ab \leq \frac{27}{64}$. Επομένως, σύμφωνα με τους Bronshtein et al.(2004) η πιο πάνω εξίσωση τρίτου βαθμού έχει μόνο μια θετική λύση την $y = (-q + \sqrt{\Delta})^{\frac{1}{3}} + (-q - \sqrt{\Delta})^{\frac{1}{3}}$ η οποία με απλή αντικατάσταση μπορεί να γραφεί στην μορφή που θέλουμε και άρα προκύπτει το ζητούμενο.



(α)



(β)

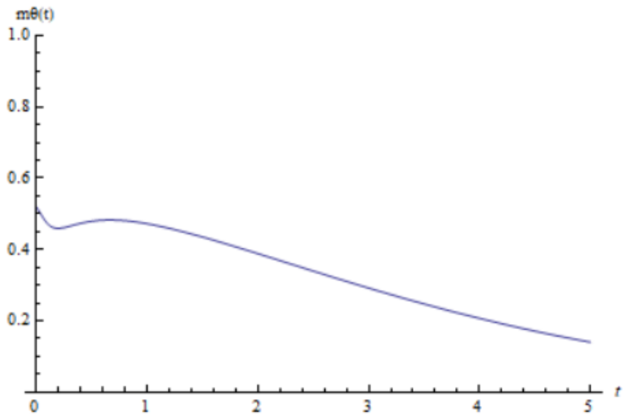


(γ)

Σχήμα 2.21: *Στο γράφημα (α) βλέπουμε την συνάρτηση έντασης κινδύνου όταν* $ab > \frac{27}{64}$. *Επίσης στην γραφική παράσταση (β) έχουμε* $ab = \frac{27}{64}$, *οπου* $a = 1, b = \frac{27}{64}$. *Τέλος στο σχήμα (γ) διακρίνουμε το τροποποιημένο λεκανοειδές σχήμα όταν* $ab < \frac{27}{64}$, *με* $a = b = \frac{1}{2}$.

Οπότε, καταλαβαίνουμε ότι η γραφική απεικόνιση των συναρτήσεων $m(t)$ και $m_\theta(t)$ είναι δύσκολη υπόθεση και ειδικότερα όταν βρισκόμαστε στην περίπτωση που έχουμε το τροποποιημένο λεκανοειδές σχήμα και όταν προστεθεί η σταθερά στην συνάρτηση της έντασης κινδύνου.

Παρακάτω θα δούμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $m(t)$ και $m_\theta(t)$, στην περίπτωση που η συνάρτηση της έντασης κινδύνου έχει τροποποιημένο λεκανοειδές σχήμα οι οποίες όπως φαίνεται είναι αρκετά πιο περίπλοκες από τις αντίστοιχες της συνάρτησης RAW που έχει αναλυθεί στην προηγουμένη παράγραφο, αφού τώρα έχουμε δυο σημεία αλλαγής μονοτονίας.



Σχήμα 2.22: *Στις παραπάνω γραφικές παραστάσεις βλέπουμε την περιπλοκότητα της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής με τα δύο σημεία αλλαγής μονοτονίας όταν έχουμε συνάρτηση έντασης κινδύνου με τροποποιημένο λεκανοειδές σχήμα όταν* $a = b = \frac{1}{2}$.

Πολλές κατανομές οι οποίες είναι πιο ρεαλιστικές και χρησιμότερες σε πραγματικά δεδομένα είναι αρκετά δύσκολες στην ανάλυση τους όπως φαίνεται και στις πιο πάνω ειδικές κατανομές Weibull. Αυτό αποτελεί ένα από τα κυριότερα προβλήματα στο πεδίο του αναλογισμού καθώς η κατανόηση της συμπεριφοράς της ζωής ενός ατόμου σε περιβάλλον με αυξημένο κίνδυνο, το οποίο για εμάς σημαίνει αύξηση στην ένταση κινδύνου δυσκολεύει πολύ την περαιτέρω ανάλυση.

Συμπερασματικά στο κεφάλαιο αυτό, βάσει τα όσα λέχθηκαν γίνεται κατανοητό ότι η προσθήκη της θετικής σταθεράς θ στην συνάρτηση της έντασης κινδύνου επηρεάζει άμεσα την συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Πιο συγκεκριμένα η σταθερά αυτή επιφέρει την μείωση του χρόνου ζωής του ατόμου ή της μηχανής την οποία μελετάμε. Επίσης, παρατηρούμε ότι αν και για την συνάρτηση $h_{\theta}(t)$ όταν αυτή είναι μονότονη ισχύει ότι μετά την προσθήκη του θετικού αριθμού θ δεν αλλάζει η μονοτονία της, κάτι αντίστοιχο δεν ισχύει για την συνάρτηση $m_{\theta}(t)$ η οποία αλλάζει σχήμα όπως είδαμε πιο πάνω. Επιπλέον, για τις μη μονότονες συναρτήσεις $h_{\theta}(t)$ πρεπει να ληφθούν υπόψη τα Θεωρήματα 1.1, 1.2, 1.3 καθώς και το Λήμμα 1.1 τα οποία μας δίνουν μια πρώτη εικόνα για το πως να αναμένουμε την αντίστοιχη συνάρτηση $m_{\theta}(t)$ υπό τις αναφερθείσες προϋποθέσεις καθώς και τα σημεία αλλαγής μονοτονίας, μέσα από τα παραδείγματα που έχουν γίνει επιβεβαιώνουμε τα Θεωρήματα 2.3 και 2.4 στα οποία έχουν γίνει γραφικές παραστάσεις ώστε να γίνει αντιληπτή η διάταξη τους. Τέλος, είδαμε την συμπεριφορά κάποιων γνωστών και μη κατανομών οι οποίες έχουν εφαρμογή όχι μόνο στην αναλογιστική επιστήμη αλλά και σε πολλά άλλα πεδία δείχνοντας έτσι την χρησιμότητα της μελέτης που έχουμε κάνει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Αναλογικό Μοντέλο Κινδύνων

3.1 Εισαγωγή

Στο τρίτο κεφάλαιο θα αναλυθεί το Αναλογικό Μοντέλο Κινδύνου με κύριο γνώμονα το βιβλίο των Lai and Xie (2006) καθώς και την εργασία του Gupta (2016). Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πως επιδρά η νέα συνάρτηση την έντασης κινδύνου η οποία είναι πολλαπλασιασμένη κατά ένα θετικό αριθμό, στην αντίστοιχη του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Όπως έχει αναφερθεί και το Κεφάλαιο 2, οι συναρτήσεις αυτές έχουν καθοριστικό ρόλο όχι μόνο σε μαθηματικά πεδία αλλά και γενικότερα καθώς είναι χρήσιμο για παράδειγμα στην ιατρική επιστήμη ή στις ασφαλιστικές επιχειρήσεις να μπορούν να προβλέψουν κάποια απροσδόκητα ενδεχόμενα που μπορεί να συμβούν ώστε να δοθούν θεραπείες ή να καθοριστούν ασφάλιστρα αντίστοιχα. Επίσης θα γίνει ανάλυση των γραφημάτων των αντίστοιχων συναρτήσεων καθώς και των σημείων αλλαγής μονοτονίας τους, έχοντας κατά νου τα Θεωρήματα 1.1, 1.2, 1.3 και το Λήμμα 1.1. Τέλος, θα δούμε κάποιες γνωστές κατανομές στις οποίες οι εντάσεις κινδύνου τους θα πολλαπλασιαστούν με ένα θετικό αριθμό ώστε να δημιουργηθεί ο νέος μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής.

3.2 Περιγραφή Μοντέλου

Έστω η μη αρνητική τυχαία μεταβλητή T με συνάρτηση έντασης κινδύνου $h(t)$ και τον αντίστοιχο μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής $m(t)$. Θεωρώντας ότι ασκούνται κάποιες εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα αυτό, δημιουργείται μια καινούρια τυχαία μεταβλητή T^* η οποία έχει συνάρτηση έντασης κινδύνου την $h_\theta(t)$ και συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m_\theta(t)$, και $\theta > 0$. Η $h_\theta(t)$ ονομαζεται «Πολλαπλασιαστικό Μοντέλο Έντασης Κινδύνου-Proportional Hazard Rate Model», συμβολίζεται ως PHRM τα οποία είναι τα αρχικά του αγγλικού όρου και ορίζεται ως:

$$h_\theta(t) = \theta h(t). \qquad (3.1)$$

Είναι προφανές ότι η σταθερά αυτή δεν αλλάζει το σχήμα της έντασης κινδύνου, παρα μόνο το μετατοπίζει. Επίσης είναι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής αναμένουμε να μειωθεί όταν το $\theta > 1$, αφού η ένταση κινδύνου θα αυξηθεί και όταν $\theta < 1$, περιμένουμε την αύξηση της συνάρτησης $m(t)$. Η συνάρτηση αυτή θα είναι:

$$m_\theta(t) = \theta(t)m(t),$$

όπου το $\theta(t)$ μπορεί να είναι σταθερό σε κάποιες περιπτώσεις όπως θα δούμε στην συνέχεια.

Αντίστοιχα ορίζεται και το «Πολλαπλασιαστικό Μοντέλο Μέσου Υπολειπόμενου Χρόνου Ζωής-Proportional Mean Residual Life Function» το οποία συμβολίζουμε με PMRLF και είναι:

$$m_\theta(t) = \theta m(t),$$

και όταν το $\theta > 1$, η αντίστοιχη ένταση κινδύνου θα μειωθεί και όταν $\theta < 1$, αναμένουμε αυξημένη $h_\theta(t)$.

Αποτελεί λοιπόν ενδιαφέρον η μελέτη των συναρτήσεων αυτών έτσι ώστε να δειχθεί η συμπεριφορά τους καθώς περνάει ο χρόνος με σκοπό την εξαγωγή αποτελεσμάτων και συμπερασμάτων για τις υποθέσεις που μας απασχολούν. Επίσης, αντίθετα με το Κεφάλαιο 2 στο οποίο μας ενδιέφερε η διαφορά μεταξύ των συναρτήσεων, στο παρών Κεφάλαιο μελετάμε τον λόγο μεταξύ τους.

3.3 Υπολογισμός Συναρτήσεων

Στη παράγραφο αυτή θα δούμε πως μπορούμε να υπολογίζουμε τις συναρτήσεις που μας ενδιαφέρουν, κάτι το οποίο δεν είναι πάντα εύκολη υπόθεση. Αρχικά θεωρούμε την συνάρτηση επιβίωσης $S(t)$ και την συνάρτηση έντασης κινδύνου $h(t)$, για τις οποίες ισχύει η Σχέση (1.2). Πολλαπλασιάζοντας με τη θετική σταθερά θ την ένταση κινδύνου προκύπτει η Σχέση (3.1). Επομένως εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι χρησιμοποιώντας την Σχέση (1.2) για την νέα πλέον συνάρτηση έντασης κινδύνου της (3.1) προκύπτει για την νέα συνάρτηση κινδύνου η εξής σχέση:

$$\begin{aligned} S_\theta(t) &= e^{-\int_0^t h_\theta(x)dx} \\ &= e^{-\int_0^t \theta h(x)dx} \\ &= \left(e^{-\int_0^t h(x)dx}\right)^\theta, \end{aligned}$$

απο το οποίο εξάγουμε τελικά το συμπέρασμα ότι η νέα συνάρτηση επιβίωσης θα δίνεται απο:

$$S_\theta(t) = [S(t)]^\theta. \qquad (3.2)$$

Επίσης η αντίστοιχη συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής της οποίας η τυχαία μεταβλητή T έχει την συνάρτηση επιβίωσης της τελευταίας σχέσης θα δίνεται από:

$$m_\theta(t) = \frac{\int_t^\infty S_\theta(x)dx}{S_\theta(t)} = \frac{\int_t^\infty [S(x)]^\theta dx}{[S(t)]^\theta}. \quad (3.3)$$

Μέσω της σχέσης αυτής μπορούμε λοιπόν να υπολογίσουμε τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής της μεταβλητής που μελετάμε γνωρίζοντας την αντίστοιχη συνάρτηση επιβίωσης της οποίας η ένταση κινδύνου έχει πολλαπλασιαστεί με τη θετική σταθερά θ.

Στην συνέχεια θα δούμε κάποια παραδείγματα ώστε να γίνει κατανοητό ότι γενικά ο πολλαπλασιασμός της θετικής σταθεράς αυτής στην μια εκ των δυο συναρτήσεων που μας ενδιαφέρουν, δεν συνεπάγεται την αντίστοιχη σταθερή μείωση της άλλης.

<u>Παράδειγμα 3.1:</u>

Θεωρούμε αρχικά την συνάρτηση έντασης κινδύνου με την παράμετρο $a > 0$ η οποία δίνεται από:

$$h(t) = at, t > 0.$$

Τότε μέσω της Σχέσης (1.3) μπορούμε να βρούμε την συνάρτηση επιβίωσης η οποία είναι:

$$S(t) = e^{-\frac{at^2}{2}},$$

και με την βοήθεια της Σχέσης (1.4) βρίσκουμε την συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής δίνεται από:

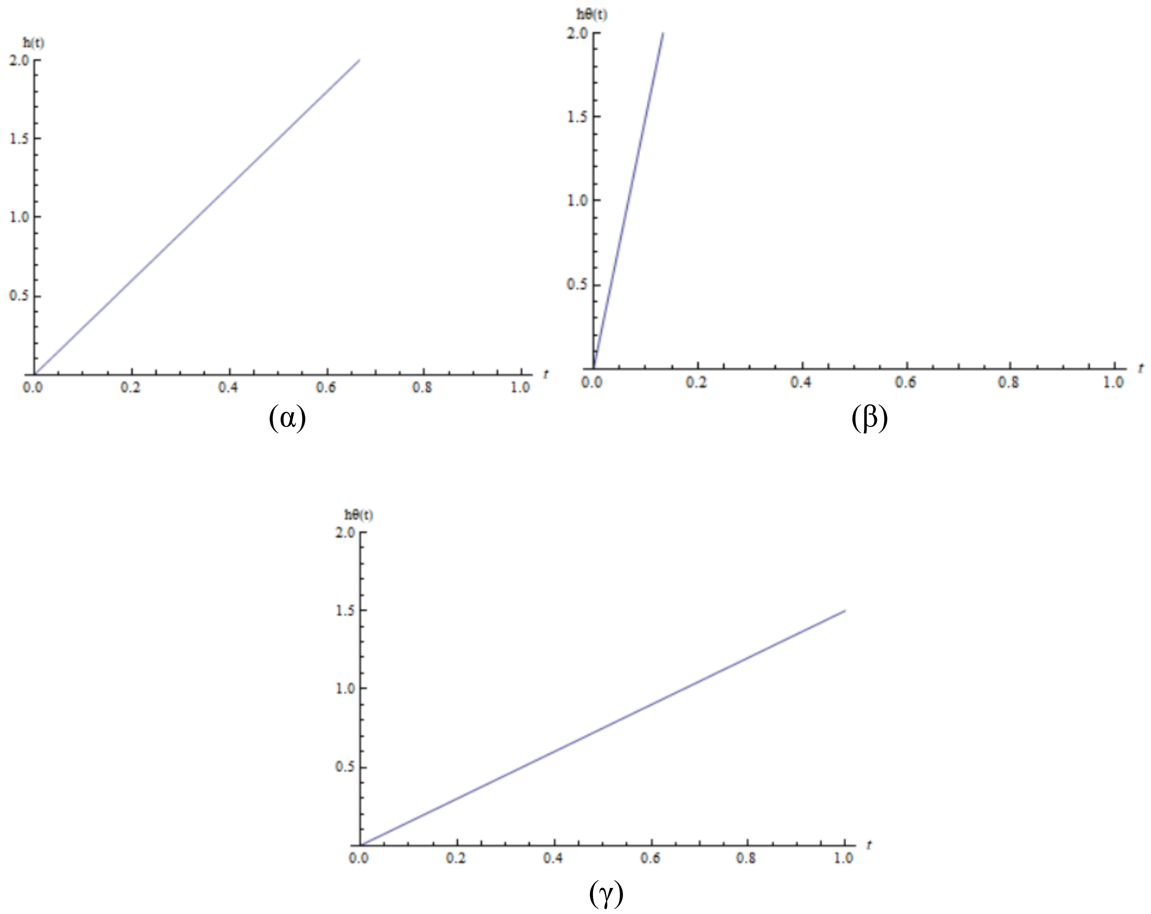
$$m(t) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{\frac{at^2}{2}} [1 - \Phi(\sqrt{a}t)],$$

όπου η συνάρτηση $\Phi(.)$ θυμίζουμε ότι είναι η συνάρτηση κατανομής της κανονικής τυχαίας μεταβλητής. Ακολούθως πολλαπλασιάζοντας την συνάρτηση $h(t)$ με την θετική σταθερά θ, παιρνουμε:

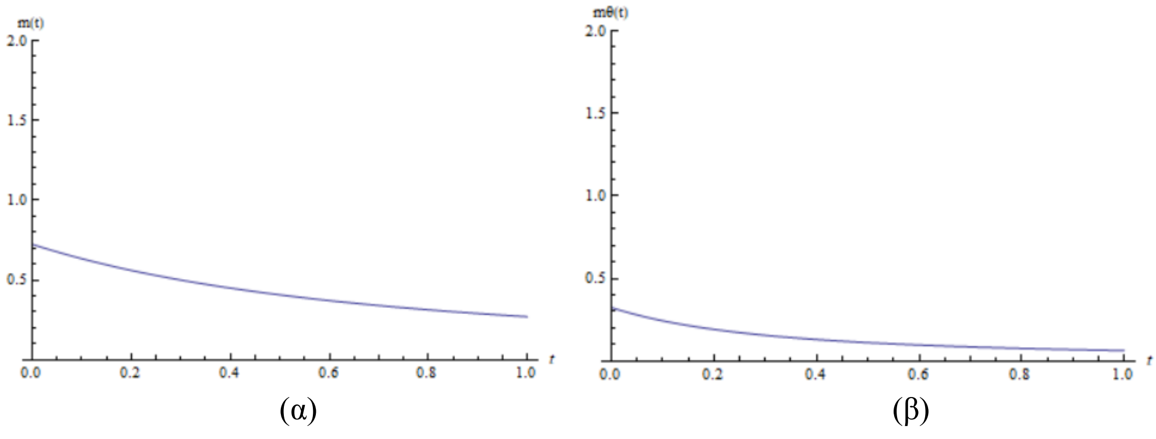
$$h_\theta(t) = \theta h(t).$$

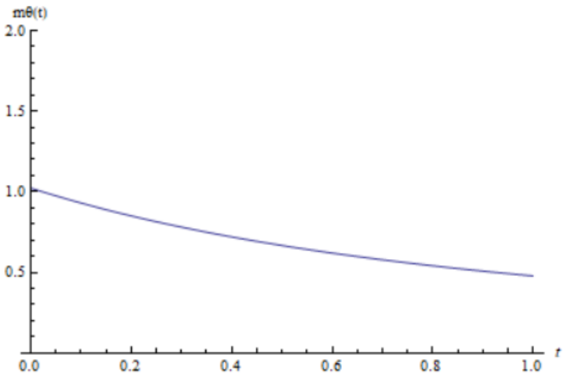
Οπότε μέσω των πιο πάνω Σχέσεων (3.2) και (3.3) μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η νέα συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής θα είναι η εξής:

$$m_\theta(t) = \sqrt{\frac{2\pi}{a\theta}} e^{\frac{a\theta t^2}{2}} [1 - \Phi(\sqrt{\theta a}t)].$$



Σχήμα 3.1: *Η συνάρτηση της έντασης κινδύνου* $h(t)$ *στο γράφημα (α) και η συνάρτηση* $h_\theta(t)$ *για* $\theta = 5$ *και* $\theta = 0.5$, *στα γραφήματα (β) και (γ) αντίστοιχα για* $\alpha = 3$.



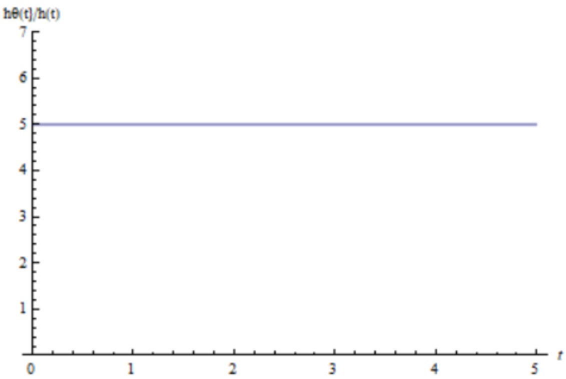


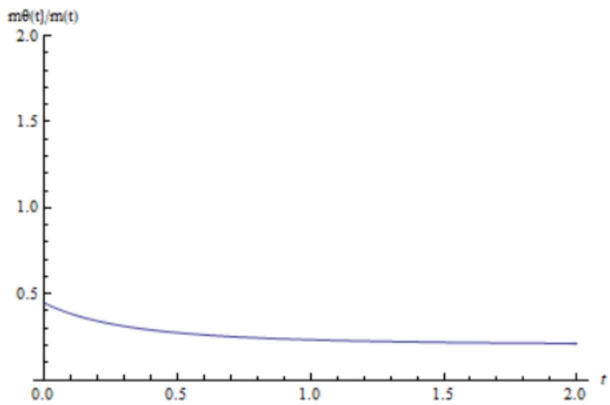
(γ)

Σχήμα 3.2: *Η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m(t)$ στο γράφημα (α) και αυτή της $m_\theta(t)$ στα γραφήματα (β) και (γ) για $\theta = 5$ και $\theta = 0.5$ αντίστοιχα με $\alpha = 3$.*

Επομένως, καταλαβαίνουμε ότι η σταθερή αύξηση της έντασης κινδύνου με την σταθερά θ δεν σημαίνει η σταθερή μείωση την συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής κατά μια θετική σταθερά αφού ο λόγος μεταξύ των $m_\theta(t)$ και $m(t)$ δεν δίνει σταθερό αριθμό σαν αποτέλεσμα όπως θα δειχθεί και μέσω των παρακάτω γραφημάτων. Προφανώς όταν έχουμε $\theta < 1$, η ενταση κινδύνου θα μειωθεί οπότε αναμένουμε αύξηση στην συνάρτηση $m_\theta(t)$. Επίσης μέσω του Θεωρήματος 1.1 βλέπουμε ότι και για τις 3 περιπτώσεις που φαίνονται στα Σχήματα 3.1 και 3.2 όταν η συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής είναι φθίνουσα και κοίλη συνάρτηση, αυτή της έντασης κινδύνου είναι αύξουσα.

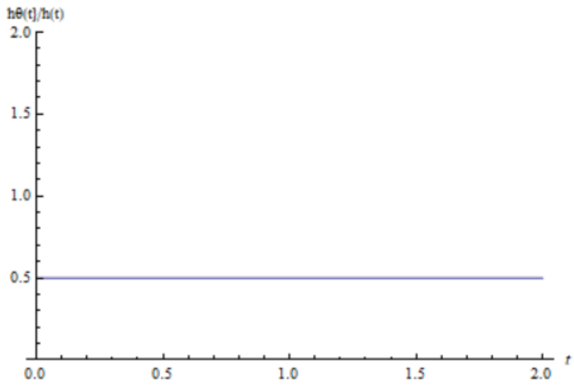
Στην συνέχεια θα δούμε τις γραφικές παραστάσεις των λόγων των συναρτήσεων αυτών, αφού μιλάμε για πολλαπλασιαστικό μοντέλο, μεταξύ τους ώστε να καταστεί μια πιο σαφής εικόνα για την σχήματα αυτών και πως αυτά αυξομειώνονται.

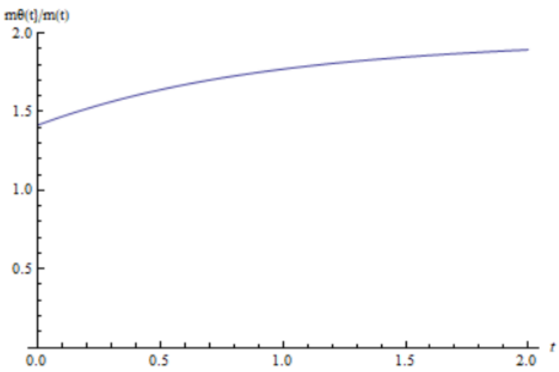




Σχήμα 3.3: *Οι συναρτήσεις $\frac{h_\theta(t)}{h(t)}$ και $\frac{m_\theta(t)}{m(t)}$ για $\alpha = 3$ και $\theta = 5$.*

Είναι φανερό ότι ο λόγος των μέσων υπολειπομένων χρόνων ζωής δεν είναι σταθερός καθώς ο λόγος των εντάσεων κινδύνου παραμένει σταθερός. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $m_\theta(t)$ μειώνεται όταν η συνάρτηση $h(t)$ πολλαπλασιαστεί με τη θετική σταθερά.





Σχήμα 3.4: *Οι συναρτήσεις* $\frac{h_\theta(t)}{h(t)}$ *και* $\frac{m_\theta(t)}{m(t)}$ *για* $\alpha = 3$ *και* $\theta = 0.5$.

Πολλαπλασιάζοντας την συνάρτηση έντασης κινδύνου με την θετική σταθερά η οποία είναι μικρότερη της μονάδας αναμένουμε την μείωση της νέας συνάρτησης $h_\theta(t)$, πράγμα που αυξάνει τον νέο μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής. Όπως μπορούμε να δούμε στο τελευταίο σχήμα, ο λόγος $\frac{m_\theta(t)}{m(t)}$ έχει μη σταθερή αύξηση.

Παράδειγμα 3.2:

Έστω η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής η οποία δίνεται από την σχέση:

$$m(t) = \frac{1+t}{1+2t}, t > 0,$$

και η αντίστοιχη συνάρτηση της έντασης κινδύνου μέσω της Σχέσης (1.5):

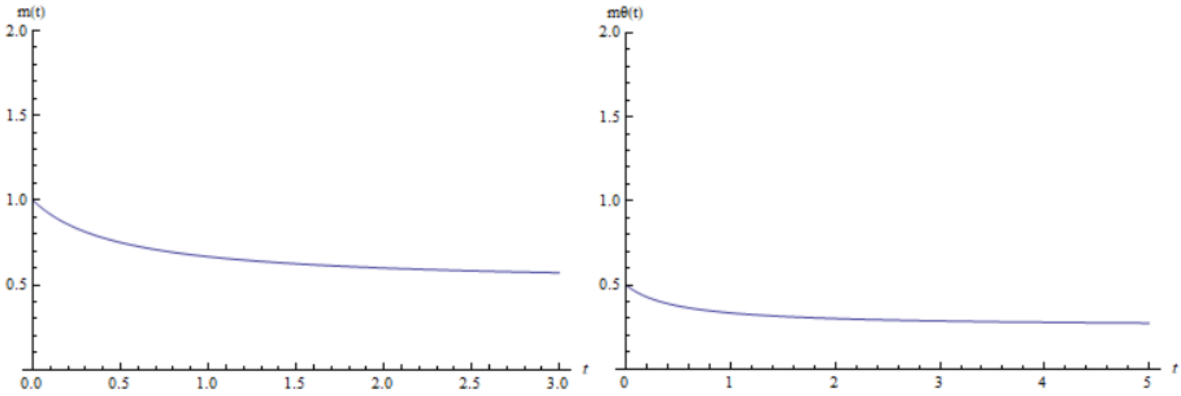
$$h(t) = \frac{4t}{1+2t}.$$

Θεωρώντας τώρα ότι $\theta = 0.5$, η συνάρτηση $m(t)$ θα γίνει:

$$m_\theta(t) = 0.5\frac{1+t}{1+2t}$$

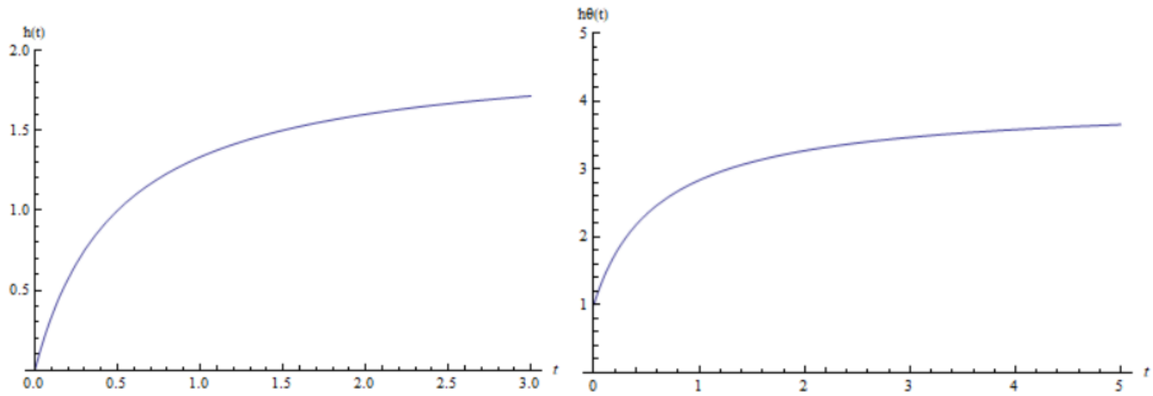
και η συνάρτηση $h(t)$ θα πάρει την μορφή:

$$h_\theta(t) = \frac{(1+2t)^2 - 0.5}{0.5(1+2t)(1+t)}.$$



Σχήμα 3.5: *Οι συναρτήσεις* $m(t)$ *και* $m_\theta(t)$ *με* $\theta = 0.5$.

Διαπιστώνουμε και πάλι την ισχύ του Θεωρήματος 1.1 όσον αφορά στην μονοτονία των συναρτήσεων αυτών καθώς βλέπουμε και γραφικά την μείωση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής καθώς πολλαπλασιάζεται με την σταθερά θ, η οποία συνεπάγεται την αύξηση αυτής της έντασης κινδύνου, όπως θα δειχθεί στο παρακάτω σχήμα.

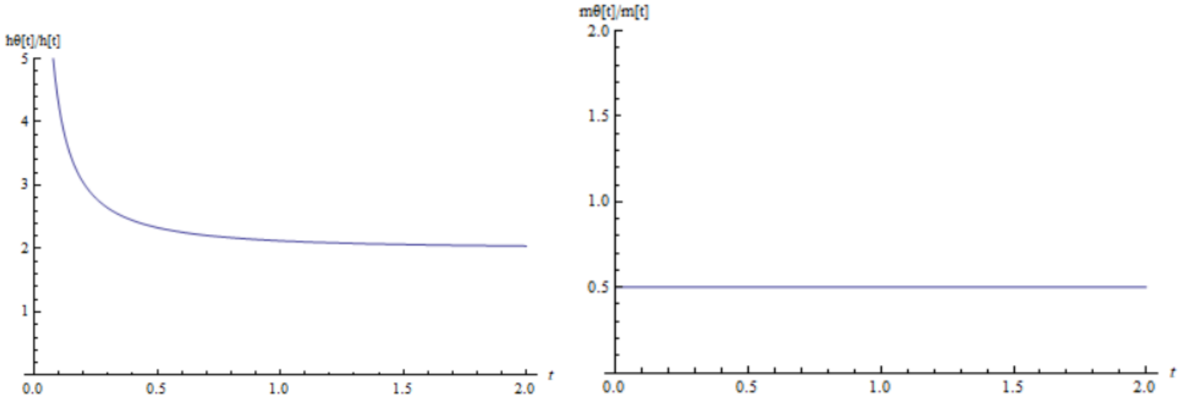


Σχήμα 3.6: *Οι συναρτήσεις έντασης κινδύνου* $h(t)$ *και* $h_\theta(t)$ *για* $\theta = 0.5$.

Με σχετική ευκολία βλέπουμε ότι ο λόγος μεταξύ των δυο σχέσεων της έντασης κινδύνου μας δίνει:

$$\frac{h_\theta(t)}{h(t)} = 1 + \frac{(1+2t)^2}{4t(1+t)}.$$

Οπότε διαπιστώνουμε ότι ενώ ο λόγος $\frac{m_\theta(t)}{m(t)} = 0.5$, η τελευταία σχέση καταλήγει σε θετικό μη σταθερό αριθμό. Ακολούθως θα δούμε τα γραφήματα αυτών για να αντιληφθούμε την συμπεριφορά των συναρτήσεων αυτών όταν πολλαπλασιαστεί η σταθερά αυτή στο μοντέλο μας.



Σχήμα 3.7: *Οι συναρτήσεις* $\frac{h_\theta(t)}{h(t)}$ *και* $\frac{m_\theta(t)}{m(t)}$ *για* $\theta = 0.5$.

Το ερώτημα που τίθεται τώρα και πάλι είναι πότε αυτά τα δυο μοντέλα είναι σταθερά ως προς το πηλίκο τους. Η απάντηση αυτού θα δοθεί στην επόμενη παράγραφο μέσα από παραδείγματα καθώς και τα αντίστοιχα γραφήματα με σκοπό να δειχθεί η σταθερότητα στον λόγο μεταξύ των συναρτήσεων που μελετάμε.

3.4 Περιπτώσεις με σταθερή αυξομείωση

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την συμπεριφορά των δυο αυτών συναρτήσεων ώστε να δείξουμε ότι μόνο στις περιπτώσεις που η τυχαία μεταβλητή του χρόνου ζωής ακολουθεί μια εκ των δυο κατανομών, θα έχουμε την σταθερή αυξομείωση μεταξύ των δυο μοντέλων κάτι το οποίο όσον αφορά στο αθροιστικό μοντέλο όπως έχει αναφερθεί συμβαίνει μόνο για την εκθετική κατανομή.

3.4.1 Εκθετική Κατανομή

Θεωρούμε ότι η αρνητική τυχαία μεταβλητή T ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$ και συνάρτηση επιβίωσης:

$$S(t) = \lambda e^{-\lambda t}\,,\ \ t > 0.$$

Σύμφωνα με τις Σχέσεις (1.2) και (1.4) η συνάρτηση έντασης κινδύνου και μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής δίνεται από:

$$h(t) = \lambda,$$

$$m(t) = \frac{1}{\lambda}.$$

Θεωρώντας τώρα την θετική σταθερά θ, η οποια πολλαπλασιάζεται με την συνάρτηση $h(t)$ παίρνουμε την:

$$h_\theta(t) = \theta\lambda,$$

και επομένως έχουμε και την αντίστοιχη συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής η οποία είναι:

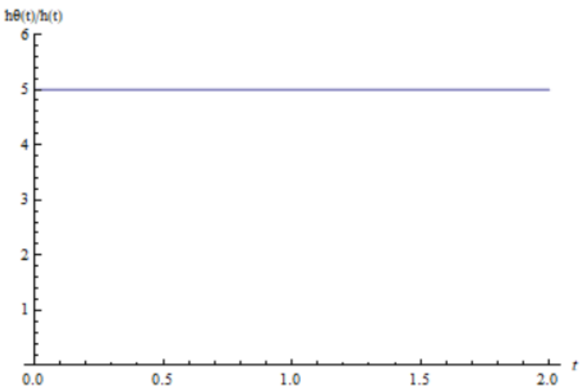
$$m_\theta(t) = \frac{1}{\theta\lambda}.$$

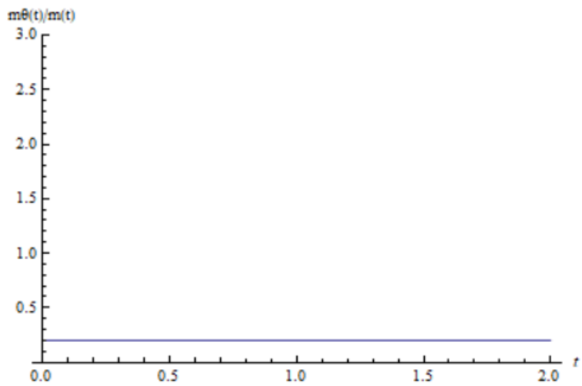
Ενδιαφερόμαστε λοιπόν για τους λόγους αυτών των συναρτήσεων ώστε να ελέγξουμε την σταθερή αυξομείωση. Έχουμε:

$$\frac{h_\theta(t)}{h(t)} = \theta,$$

$$\frac{m_\theta(t)}{m(t)} = \frac{1}{\theta}.$$

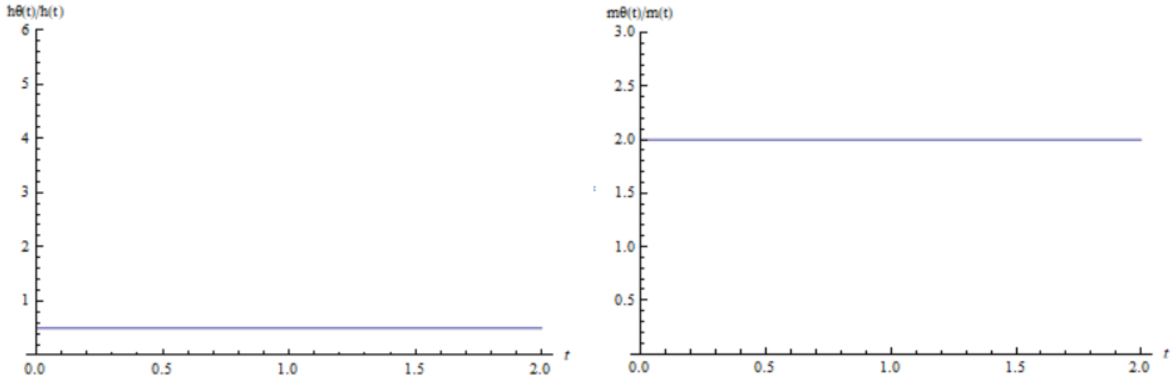
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο λόγος μεταξύ νέας και παλιάς συνάρτησης έχει ως αποτέλεσμα ένα σταθερό αριθμό. Στην περίπτωση που το $\theta < 1$ προφανώς έχουμε μείωση της συνάρτησης έντασης κινδύνου και αύξηση αυτής του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής και όταν $\theta > 1$, συμβαίνει το ανάποδο όπως θα δούμε και στα παρακάτω σχήματα.





<u>Σχήμα 3.8:</u> *Οι συναρτήσεις* $\frac{h_\theta(t)}{h(t)}$ *και* $\frac{m_\theta(t)}{m(t)}$ *όταν η παράμετρος της εκθετικής κατανομής είναι* $\lambda = 2$ *και* $\theta = 5$.

Φαίνεται λοιπόν η σταθερή μείωση στις συναρτήσεις καθώς πολλαπλασιάζεται η μια εκ των δυο που μελετάμε με μια θετική σταθερά. Η συνάρτηση $h_\theta(t)$ η οποία έχει πολλαπλασιαστεί με το $\theta = 5$, και αυξάνεται σταθερά, η αντίστοιχη συνάρτηση $m_\theta(t)$ μειώνεται σταθερά.



<u>Σχήμα 3.9:</u> *Οι συναρτήσεις* $\frac{h_\theta(t)}{h(t)}$ *και* $\frac{m_\theta(t)}{m(t)}$ *όταν η παράμετρος της εκθετικής κατανομής είναι* $\lambda = 2$ *και* $\theta = 0.5$.

Πολλαπλασιάζοντας την συνάρτηση κινδύνου με το $\theta = 0.5$, αναμένουμε την σταθερή μείωση της νέας συνάρτησης $h_\theta(t)$ και την αντίστοιχη σταθερή αύξηση στον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής κάτι το οποίο φαίνεται στο τελευταίο σχήμα.

3.4.2 Κατανομή Pareto

Θεωρούμε μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή T η οποία θα ακολουθεί την κατανομή Pareto με τις μεταβλητές $a > 1, b > 0$, και συνάρτηση επιβίωσης την:

$$S(t) = \left[\frac{b}{t}\right]^a, t \geq b.$$

Η συνάρτηση έντασης κινδύνου δίνεται με τη βοήθεια της Σχέσης (1.2) και είναι:

$$h(t) = \frac{a}{t},$$

και ο αντίστοιχος μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής μέσω της (1.4) θα είναι:

$$m(t) = \frac{t}{a-1}.$$

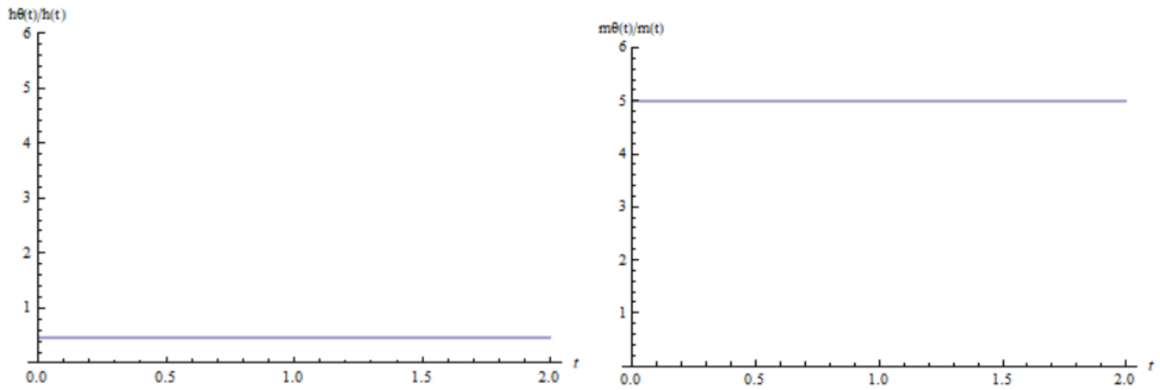
Έστω τώρα ότι λόγω εξωτερικών συνθηκών ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής πολλαπλασιάζεται με την θετική σταθερά θ με αποτέλεσμα να έχουμε την εξής συνάρτηση:

$$m_\theta(t) = \theta\left(\frac{t}{a-1}\right),$$

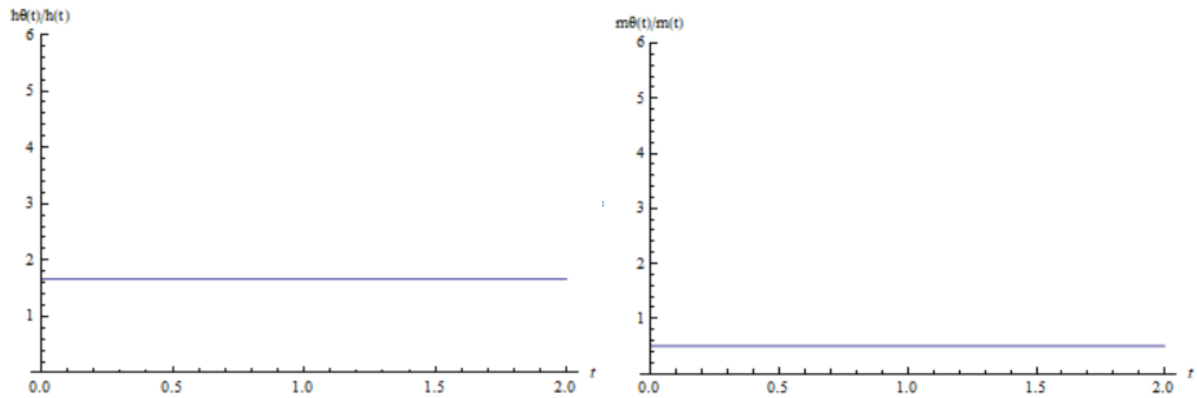
με το οποίο συνεπάγεται μέσω της Σχέσης (1.5):

$$h_\theta(t) = \frac{a - 1 + \theta}{\theta t}.$$

Επομένως μπορούμε να δούμε ότι ο όρος $\frac{h_\theta(t)}{h(t)} = \frac{a-1+\theta}{a\theta}$ είναι σταθερός, καθώς ο αντίστοιχος όρος $\frac{m_\theta(t)}{m(t)} = \theta$. Άρα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα δυο μοντέλα έντασης κινδύνου και μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής συνυπάρχουν στο πολλαπλασιαστικό μοντέλο όταν η κατανομή του χρόνου ζωής είναι Pareto με τα πηλίκα που μελετάμε να παραμείνουν σταθερά μετά την επίδραση της θετικής σταθεράς. Παρακάτω θα δούμε γραφικά τα σχήματα των συναρτήσεων αυτών ώστε να γίνει πιο κατανοητή η συμπεριφορά τους.



Σχήμα 3.10: *Οι συναρτήσεις* $\frac{h_\theta(t)}{h(t)}$ *και* $\frac{m_\theta(t)}{m(t)}$ *όταν η παράμετροι της κατανομής Pareto είναι* $a = b = 3$ *και* $\theta = 5$.



Σχήμα 3.11: *Οι συναρτήσεις* $\frac{h_\theta(t)}{h(t)}$ *και* $\frac{m_\theta(t)}{m(t)}$ *όταν η παράμετροι της κατανομής Pareto είναι* $a = b = 3$ *και* $\theta = 0.5$.

Μέσω των Σχημάτων 3.10 και 3.11 καταλαβαίνουμε ότι πολλαπλασιάζοντας την συνάρτηση $m(t)$ αρχικά με $\theta = 5$ και ακολούθως με $\theta = 0.5$, η συνάρτηση έντασης κινδύνου μειώνεται στην πρώτη περίπτωση και αυξάνεται στην δεύτερη, ακριβώς όπως αναμέναμε.

3.4.3 Γραμμική Συνάρτηση Μέσου Υπολειπόμενου Χρόνου Ζωής

Οι Gupta and Kirmani (1998) εξάγουν το ακόλουθο θεώρημα το οποίο αναφέρεται στη διατήρηση του σταθερού λόγου μεταξύ των δυο συναρτήσεων.

Θεώρημα 3.1:

Τα δυο μοντέλα συνυπάρχουν (αυξομειώνονται σταθερά) στην περίπτωση όπου η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m(t)$ είναι γραμμική συνάρτηση ως προς t.

Παρακάτω θα δούμε το παράδειγμα στο οποίο έχουμε την συνάρτηση αυτή ώστε να διαπιστώσουμε ότι ισχύει και μέσω των αντίστοιχων γραφημάτων θα είμαστε σε θέση να δούμε τα σχήματα αυτών.

Παράδειγμα 3.3:

Θεωρούμε τη γραμμική συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής η οποία δίνεται από:

$$m(t) = 2 + 3t, t > 0,$$

το οποίο μας δίνει μέσω της Σχέσης (1.5) η συνάρτηση της έντασης κινδύνου είναι:

$$h(t) = \frac{4}{2 + 3t}.$$

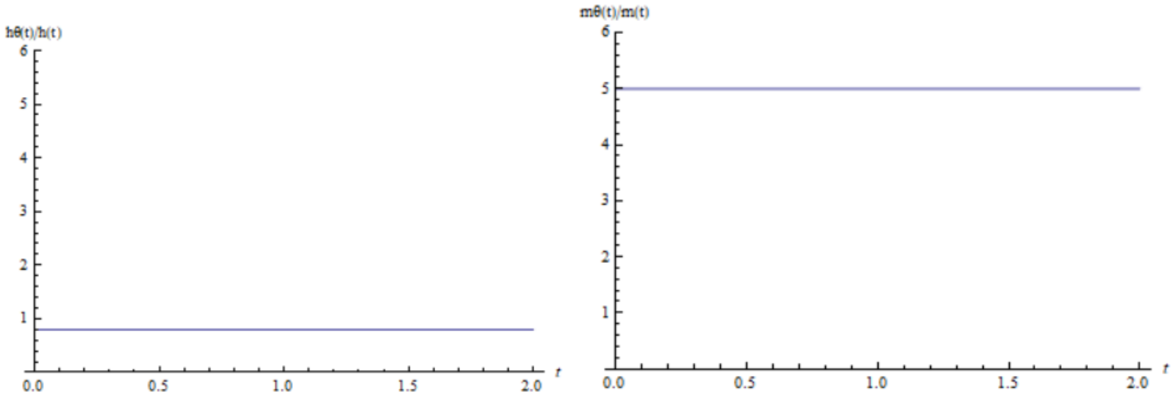
Εφαρμόζοντας το πολλαπλασιαστικό μοντέλο στην συνάρτηση $m(t)$ έχουμε ότι:

$$m_\theta(t) = \theta(2 + 3t),$$

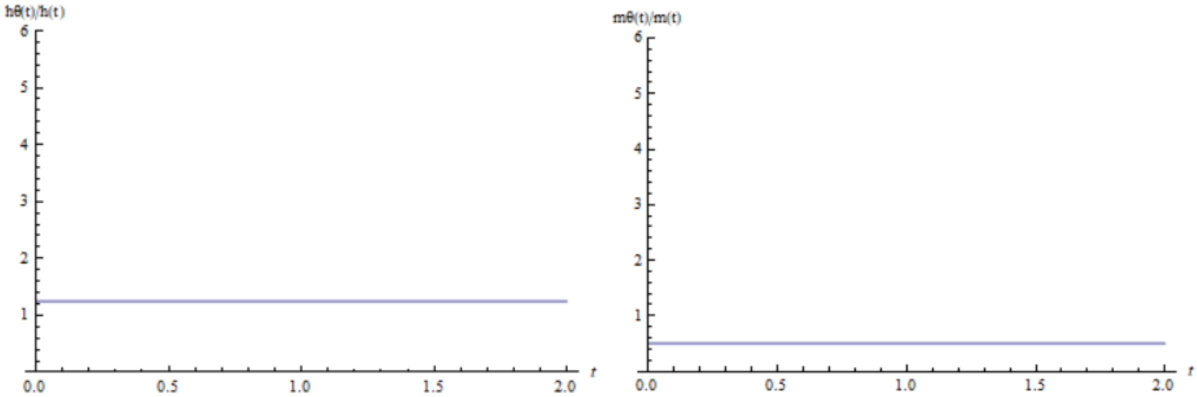
και με αντίστοιχο τρόπο βρίσκουμε την νέα συνάρτηση $h(t)$ η οποία είναι:

$$h_\theta(t) = \frac{1 + 3\theta}{\theta(2 + 3t)}.$$

Βλέπουμε τώρα ότι καθώς ο όρος $\frac{m_\theta(t)}{m(t)} = \theta$, το άλλο πηλίκο το οποίο μας ενδιαφέρει είναι $\frac{h_\theta(t)}{h(t)} = \frac{1+3\theta}{4\theta}$, όπου είναι σταθερό αφού δεν εξαρτάται από το t. Επομένως επιβεβαιώνουμε το Θεώρημα 3.1 και πιο κάτω θα δούμε και την γραφική απεικόνιση τους.



<u>*Σχήμα 3.12:*</u> *Οι συναρτήσεις* $\frac{h_\theta(t)}{h(t)}$ *και* $\frac{m_\theta(t)}{m(t)}$ *όταν* $\theta = 5$.



<u>*Σχήμα 3.13:*</u> *Οι συναρτήσεις* $\frac{h_\theta(t)}{h(t)}$ *και* $\frac{m_\theta(t)}{m(t)}$ *όταν* $\theta = 0.5$.

3.5 Μονοτονία και Σημεία Αλλαγής Μονοτονίας Μέσω Γνωστών Κατανομών

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε την μονοτονία και τα σημεία αλλαγής μονοτονίας στις δυο συναρτήσεις που μελετάμε και πως αυτές αλλάζουν καθώς πολλαπλασιάζουμε με την σταθερά θ. Όπως και στο προσθετικό μοντέλο, είναι προφανές ότι η μονοτονία στην συνάρτηση $h_\theta(t) = \theta h(t)$ διατηρείται. Επίσης στην περίπτωση που έχουμε συνάρτηση έντασης κινδύνου η οποία είναι μονότονη, μπορούμε με σχετική ευκολία να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι η αύξουσα συνάρτηση έντασης κινδύνου οδηγεί σε φθίνουσα συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής και αντίστροφα. Ενδιαφερόμαστε για τη μη μονότονη ένταση κινδύνου και χρησιμοποιούμε το Λήμμα 1.1 σύμφωνα με τους Gupta and Akman (1995) για να εξετάσουμε την γραφική απεικόνιση της συνάρτησης που μας ενδιαφέρει. Το επόμενο Θεώρημα σύμφωνα με τους Gupta and Kirmani (1998) αποσκοπεί στην εύρεση των σημείων αλλαγής μονοτονίας στις περιπτώσεις που η θετική σταθερά είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη της μονάδας.

Θεώρημα 3.1:

Έστω t_0 και t_1 τα σημεία αλλαγής μονοτονίας των συναρτήσεων $h(t)$ και $m(t)$ αντίστοιχα. Τότε:

i. Αν το $\theta > 1$, το σημείο αλλαγής μονοτονίας t^* της συνάρτησης μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m_\theta(t)$, θα είναι $t_1 < t^* < t_0$.

ii. Αν το $\theta < 1$, το σημείο αλλαγής μονοτονίας της $m_\theta(t)$ θα είναι μικρότερο από αυτό της $m(t)$, δηλαδή $t^* < t_1$.

3.5.1 Κατανομή Gompertz-Makeham

Θεωρούμε την μη αρνητική τυχαία μεταβλητή T η οποια ακολουθεί την κατανομή Gompertz-Makeham με τις παραμέτρους $\alpha, \beta > 0$. Η μεταβλητή αυτή έχει συνάρτηση επιβίωσης:

$$S(t) = e^{\beta(1-e^{\alpha t})},\ \ t \geq 0,$$

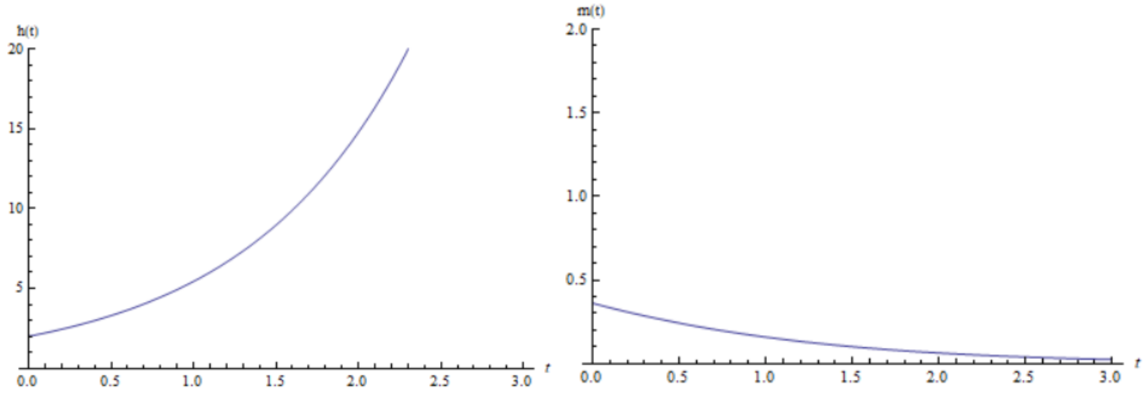
και η ένταση κινδύνου δίνεται από:

$$h(t) = \alpha\beta e^{\alpha t}.$$

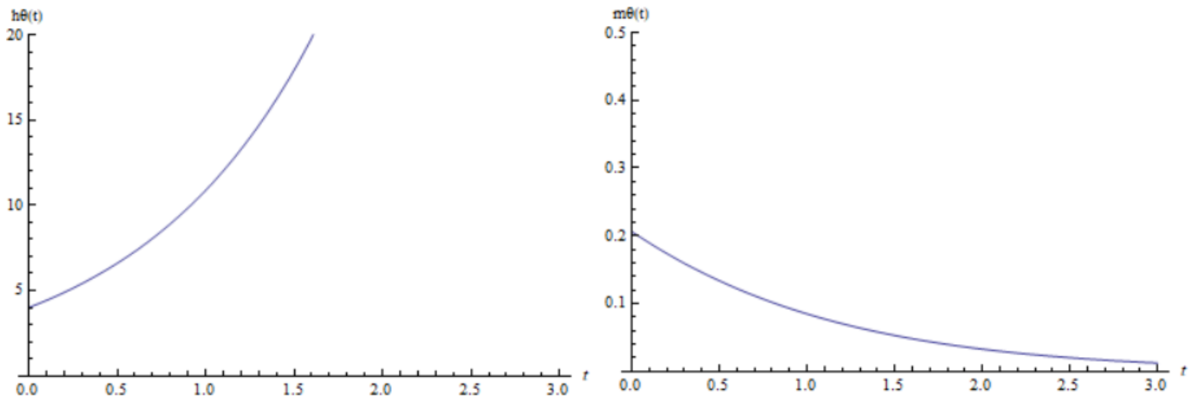
Πολλαπλασιάζοντας την συνάρτηση $h(t)$ με την θετική σταθερά θ, έχουμε την νέα συνάρτηση έντασης κινδύνου η οποία δίνεται από:

$$h_\theta(t) = \theta\alpha\beta e^{\alpha t}.$$

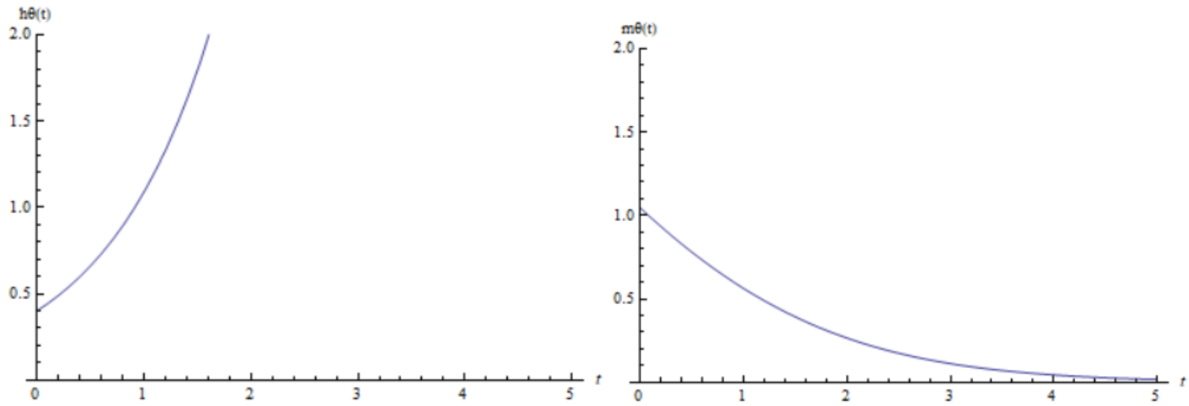
Όπως μπορούμε να δούμε, η συνάρτηση $h_\theta(t)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς t, πράγμα που σημαίνει ότι μέσω του Θεωρήματος 1.1 η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m_\theta(t)$ αναμένουμε να είναι φθίνουσα και κυρτή συνάρτηση και υπολογίζεται μέσω των Σχέσεων (3.2) και (3.3). Παρακάτω παρατίθενται τα γραφήματα των συναρτήσεων αυτών ώστε να διαπιστώσουμε γραφικά την ισχύ του θεωρήματος που προανέφερα.



Σχήμα 3.14: *Η συνάρτηση $h(t)$ και $m(t)$ για $\alpha = 1, \beta = 2$ αριστερά και δεξιά αντίστοιχα.*



Σχήμα 3.15: Η συνάρτηση $h_\theta(t)$ και $m_\theta(t)$ για $\alpha = 1, \beta = 2$ και $\theta = 2$.



Σχήμα 3.16: Η συνάρτηση $h_\theta(t)$ και $m_\theta(t)$ για $\alpha = 1, \beta = 2$ και $\theta = 0.2$.

Συνεπώς επιβεβαιώνουμε και γραφικά το Θεώρημα 1.1 καθώς και το γεγονός ότι όταν το $\theta < 1$, η συνάρτηση $h_\theta(t)$ μικραίνει προκαλώντας την αύξηση της $m_\theta(t)$ συγκρίνοντας το Σχήμα 3.14 και 3.15. Προφανώς συμβαίνει και το ανάποδο όταν $\theta > 1$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.16.

3.5.2 Κατανομή Burr XII

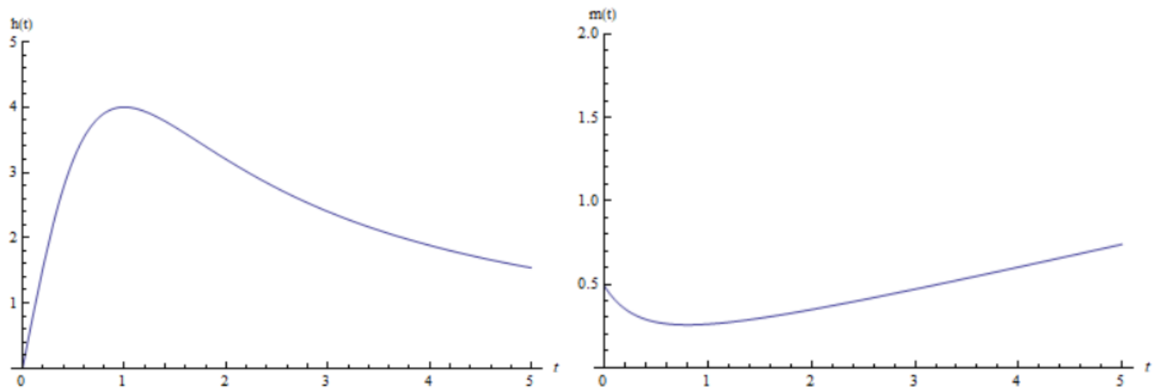
Έστω μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή T η οποία ακολουθεί την κατανομή Burr XII με παραμέτρους $c, d > 0$, και συμβολίζεται ως $T \sim Br(c, d)$. Η συνάρτηση επιβίωσης της δίνεται από:

$$S(t) = \frac{1}{(1+t^c)^d}\ , t \geq 0,$$

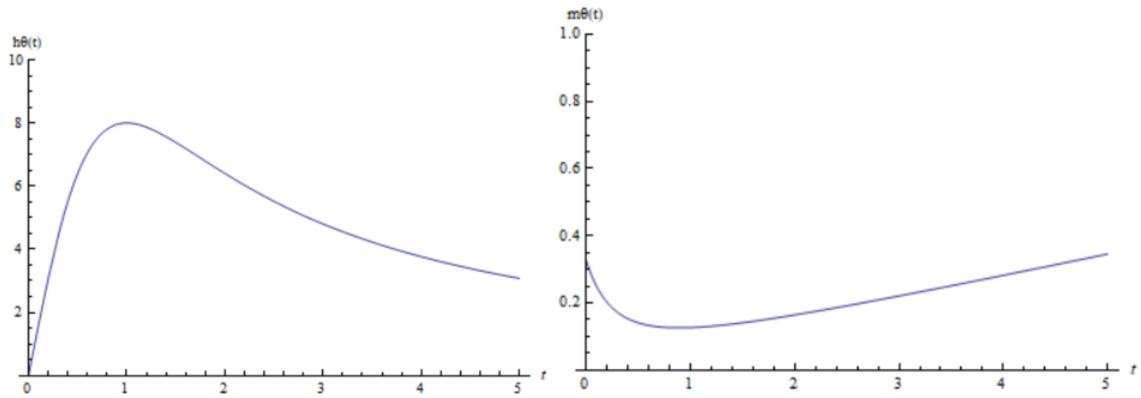
και συνάρτηση έντασης κινδύνου η οποία είναι:

$$h(t) = \frac{cdt^{c-1}}{1+t^c}.$$

Στην συνέχεια θα πολλαπλασιάσουμε την συνάρτηση αυτή με την θετική σταθερά θ στις δυο περιπτώσεις που είναι μεγαλύτερο και μικρότερο της μονάδας ώστε να δούμε την συμπεριφορά της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής και του σημείου αλλαγής μονοτονίας στην κάθε περίπτωση η οποία λόγω της περιπλοκότητας της παραλείπεται.

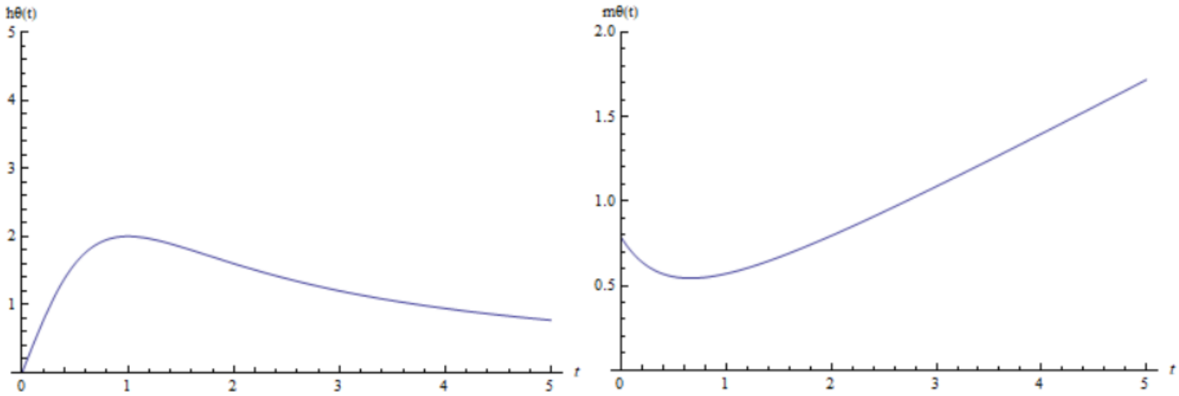


Σχήμα 3.17: Η συνάρτηση $h(t)$ και $m(t)$ για $c = 2, d = 4$ αριστερά και δεξιά αντίστοιχα.



Σχήμα 3.18: Η συνάρτηση $h_\theta(t)$ και $m_\theta(t)$ για $c = 2, d = 4$ και $\theta = 2$ στα αριστερά και στα δεξιά αντίστοιχα.

Μέσω του Θεωρήματος 1.3 αφού η συνάρτηση της έντασης κινδύνου έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα και ισχύει ότι $h(0) < \frac{1}{m(0)}$, αναμένουμε ότι η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής θα έχει λεκανοειδές σχήμα, κάτι το οποίο επιβεβαιώνουμε και μέσω του επομένου σχήματος.



<u>Σχήμα 3.19:</u> Η συνάρτηση $h_\theta(t)$ και $m_\theta(t)$ για $c = 2, d = 4$ και για $\theta = 0.5$ στο αριστερό γράφημα και στο δεξιό αντίστοιχα.

Επιπλέον μέσω του Θεωρήματος 3.1 μπορούμε δούμε ότι όταν $\theta > 1$, το σημείο αλλαγής μονοτονίας της συνάρτησης $m_\theta(t)$ βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία αλλαγής μονοτονίας της συνάρτησης $m(t)$ και $h_\theta(t)$. Ακόμα, όταν $\theta < 1$, βλέποντας τις γραφικές παραστάσεις επιβεβαιώνουμε το προαναφερθέν Θεώρημα, δηλαδή το σημείο αλλαγής μονοτονίας της $m_\theta(t)$ είναι μικρότερο από αυτό της $m(t)$.

3.5.3 Κατανομή Weibull

Θεωρούμε την μη αρνητική τυχαία μεταβλητή T η οποια ακολουθεί την κατανομή Weibull με τις παραμέτρους σχήματος και κλίμακας $\alpha, \beta > 0$. Η συνάρτηση επιβίωσης της είναι:

$$S(t) = e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}}, t \geq 0.$$

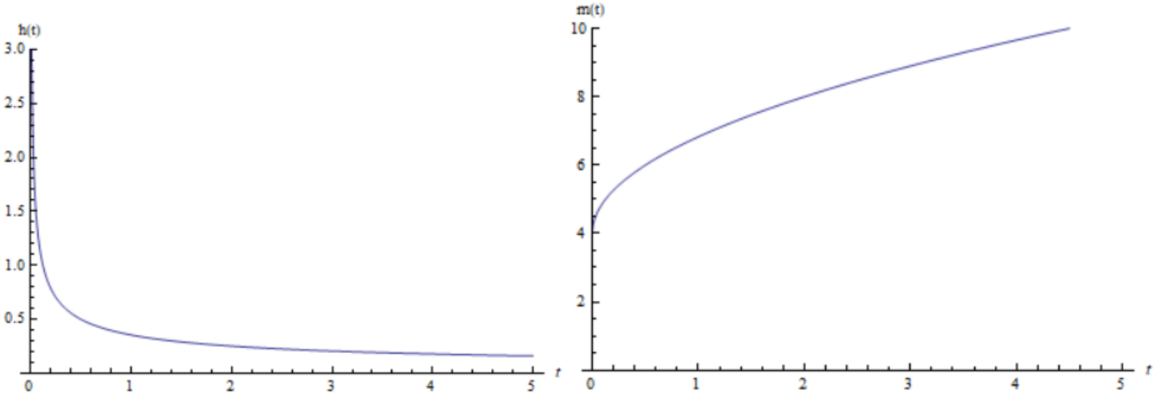
Η συνάρτηση έντασης κινδύνου χρησιμοποιώντας την Σχέση (1.2) δίνεται από:

$$h(t) = \frac{\alpha}{\beta^{\alpha}} t^{\alpha-1},$$

και η συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής είναι:

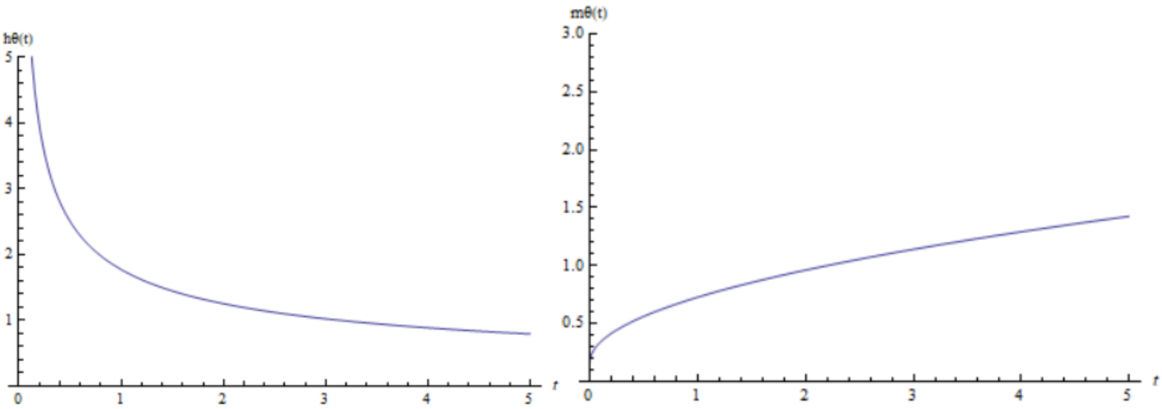
$$m(t) = \frac{\alpha}{\beta} e^{\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{t^{\alpha}}{\beta^{\alpha}}\right),$$

με τις παρακάτω απεικονίσεις.



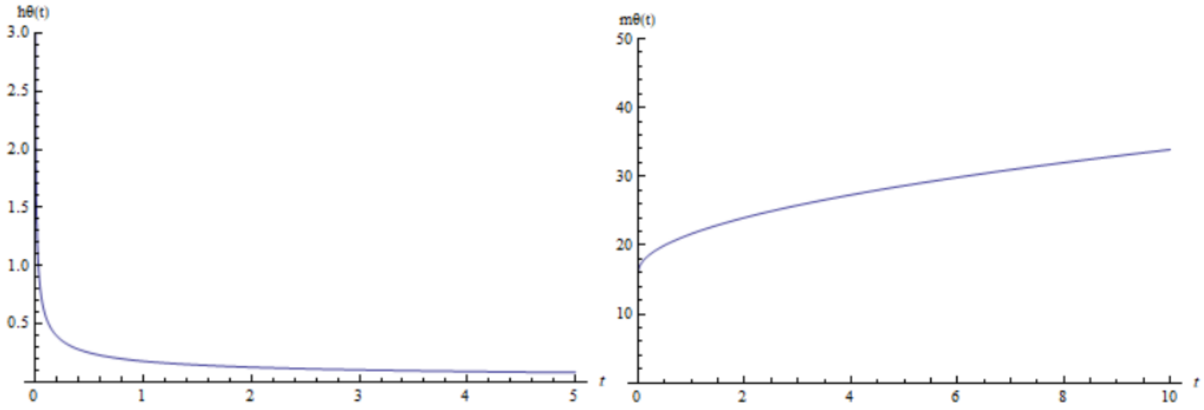
<u>Σχήμα 3.20:</u> Η συνάρτηση $h(t)$ και $m(t)$ για $\alpha = 0.5$, $\beta = 2$.

Ακολούθως θα πολλαπλασιάσουμε και πάλι με την σταθερά θ έτσι ώστε να δούμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης μετά την αλλαγή αυτή. Θα δημιουργηθεί δηλαδή η συνάρτηση $h_\theta(t) = \theta h(t)$, και μέσω των Σχέσεων (1.3), (3.2) και (3.3) βρίσκουμε την συνάρτηση $m_\theta(t)$, η οποία παραλείπεται λόγω της περιπλοκότητας της. Παρακάτω οι γραφικές παραστάσεις των νέων συναρτήσεων.



<u>Σχήμα 3.21:</u> Η συνάρτηση $h_\theta(t)$ και $m_\theta(t)$ αντίστοιχα για $\alpha = 0.5$, $\beta = 2$ και $\theta = 5$.

Στο Σχήμα 3.21 μπορούμε να δούμε ότι πολλαπλασιάζοντας την $h(t)$ με το 5 η νέα αυξημένη ένταση κινδύνου διατηρεί τη φθίνουσα κατάσταση της. Αντίστοιχα, όπως αναμένεται μετά την αύξηση της $h(t)$, η συνάρτηση $m_\theta(t)$ μειώνεται διατηρώντας και πάλι το αύξων σχήμα της. Εν συνεχεία θα δούμε τι συμβαίνει όταν το $\theta < 1$.



<u>Σχήμα 3.22:</u> Η συνάρτηση $h_\theta(t)$ και $m_\theta(t)$ αντίστοιχα για $\alpha = 0.5$, $\beta = 2$ και $\theta = 0.5$.

Η συνάρτηση $h(t)$ πολλαπλασιάζεται με το $\theta = 0.5$, οπότε αναμένουμε την μείωση της συνάρτησης αυτής καθώς και αύξηση της $m_\theta(t)$ διατηρώντας και πάλι την μονοτονία τους όπως ακριβώς φαίνεται στο Σχήμα 3.22.

Συμπεράσματα

Στην διπλωματική εργασία αυτή έχουμε ασχοληθεί με την μελέτη του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής και πως αυτός μεταβάλλεται με την αύξηση της αντίστοιχης έντασης κινδύνου κατά μια θετική σταθερά στο αθροιστικό και το αναλογικό μοντέλο. Έχει δειχθεί ότι καθώς η συνάρτηση έντασης κινδύνου αυξηθεί ή πολλαπλασιαστεί κατά μια σταθερά αναλόγως το μοντέλο που μελετάμε, γενικά η μεταβολή της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής δεν είναι καθόλου εύκολη υπόθεση. Πέραν από κάποιες περιπτώσεις που έχουν αναφερθεί στα προηγούμενα κεφάλαια όπου έχουμε σταθερή αυξομείωση, γενικά δεν μεταβάλλονται με σταθερό ρυθμό, δηλαδή αυξάνοντας την ένταση κινδύνου κατά ένα θετικό αριθμό δεν συνεπάγεται την σταθερή μείωση του αντίστοιχου μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Επίσης, έχει μελετηθεί η συμπεριφορά της μονοτονίας των συναρτήσεων αυτών καθώς περνάει ο χρόνος παρατηρώντας τις αλλαγές που επιφέρει η προσθήκη μιας απλής σταθεράς καθώς και τα σημεία αλλαγής μονοτονίας αυτών μέσω θεωρημάτων και παραδειγμάτων, αλλά και μέσω γνωστών κατανομών που συνηθίζεται να χρησιμοποιούν οι αναλογιστές και όχι μόνο κατά την μελέτη αρκετών πεδίων και ειδικότερα στην κατανόηση του το πως συμπεριφέρεται η θνησιμότητα ενός ατόμου σε περιβάλλον που υπάρχει αυξημένος κίνδυνος. Τέλος, μέσα από την διπλωματική εργασία αυτή καταλαβαίνουμε την άμεση επίδραση και σημασία που έχει ο «κίνδυνος» στην συνάρτηση επιβίωσης και κατ' επέκταση στον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής και ο ακριβής υπολογισμός τους είναι πολύ δύσκολος εώς αδύνατος σε πολλές περιπτώσεις καταλαβαίνοντας παράλληλα την περιπλοκότητα τους.

Παράρτημα

Όλες οι γραφικές παραστάσεις έχουν γίνει με την βοήθεια του προγράμματος MATHEMATICA όπου χρησιμοποιήθηκαν οι πιο κάτω εντολές για την εξαγωγή τους.

h[t_]:= γραφουμε την συνάρτηση που θέλουμε

S[t_]:= Exp[-Integrate[h[x],{x,0,t},Assumptions→t>0]]

m[t_]:=Integrate[S[x],{x,t,Infinity}, Assumptions→t>0]/S[t]

Plot[h[t],{t,0,x},PlotRange→{0,y},AxesLabel→{t,"h(t)"}]

Plot[m[t],{t,0,x},PlotRange→{0,y},AxesLabel→{t,"m(t)"}]

Για το αθροιστικό μοντέλο:

h1[t_]:=h[t]+θ

S1[t_]:= Exp[-Integrate[h1[x],{x,0,t},Assumptions→t>0]]

m1[t_]:=Integrate[S1[x],{x,t,Infinity}, Assumptions→t>0]/S1[t]

Plot[h1[t],{t,0,x},PlotRange→{0,y},AxesLabel→{t,"hθ(t)"}]

Plot[m1[t],{t,0,x},PlotRange→{0,y},AxesLabel→{t,"mθ(t)"}]

Plot[h1[t]-h[t],{t,0,x},PlotRange→{z,y},AxesLabel→{t,"hθ(t)-h(t)"}]

Plot[m1[t]-m[t],{t,0,x},PlotRange→{z,y},AxesLabel→{t,"mθ(t)-m[t]"}]

Για το αναλογικό μοντέλο:

h1[t_]:=h[t]*θ

S1[t_]:= Exp[-Integrate[h1[x],{x,0,t},Assumptions→t>0]]

m1[t_]:=Integrate[S1[x],{x,t,Infinity}, Assumptions→t>0]/S1[t]

Plot[h1[t],{t,0,x},PlotRange→{0,y},AxesLabel→{t,"hθ(t)"}]

Plot[m1[t],{t,0,x},PlotRange→{0,y},AxesLabel→{t,"mθ(t)"}]

Plot[h1[t]/h[t],{t,0,x},PlotRange→{z,y},AxesLabel→{t,"hθ(t)/h(t)"}]

Plot[m1[t]/m[t],{t,0,x},PlotRange→{z,y},AxesLabel→{t,"mθ(t)/m[t]"}]

Όπου x,y,z $\in R$ και έχουν χρησιμοποιηθεί αναλόγως για την καλύτερη επίτευξη και κατανόηση των γραφικών παραστάσεων.

Βιβλιογραφία

<u>Ξενόγλωσση</u>

Bebbington, M., Lai, C.D. and Zitikis, R. (2007). A flexible Weibull extension. *Reliability Engineering and System Safety* 92, 719-726.

Bebbington, M., Lai C.D. and Zitikis, R. (2008). Reduction in mean residual life in the presence of a constant competing risk. *Applied Stochastic Models in Business and Industry* 24, 51-63.

Belzunce, F., Ortega, E. and Ruiz, J.M. (2007). On non-monotonic ageing properties from the Laplace transform, with actuarial applications. *Insurance: Mathematics and Economics* 40, 1-14.

Bronshtein, I.N., Semendyayev, K.A., Musiol, G. and Muehlig, H. (2004). *Handbook of Mathematics* (4th edn.). Springer: Berlin.

Gupta, R.C. (2016). Mean residual life function for additive and multiplicative hazard rate models. *Probability in the Engineering and Informational Sciences* 30, 281-297.

Gupta, R.C. and Akman O.H. (1995). Mean residual life function for certain types of non-monotonic ageing. *Communications in Statistics-Stochastic Models* 11, 219-225.

Gupta, R.C. and Kirmani, S.N.U.A. (1998). On the proportional mean residual life model and its implications. *Statistics* 32, 175-187.

Lai, C.D. and Xie M. (2006). *Stochastic Ageing and Dependence for Reliability*. Springer: New York.