Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο   Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

Τ Μ Η Μ Α   Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ
Κ Α Ι   Α Σ Φ Α Λ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ   Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Η Σ

Μ Ε Τ Α Π Τ Υ Χ Ι Α Κ Ο   Π Ρ Ο Γ Ρ Α Μ Μ Α
Σ Π Ο Υ Δ Ω Ν
Σ Τ Η Ν   Ε Φ Α Ρ Μ Ο Σ Μ Ε Ν Η   Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η

Θεωρία και Εφαρμογές της Συμονοτονικότητας σε Χρηματοοικονομικά και Αναλογιστικά προβλήματα

Σταυρόπουλος Ευάγγελος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Οκτώβριος 2006

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- ………………………………. (Επιβλέπων)
- ……………………………….
- ……………………………….

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS

The Concept of Comonotonicity in actuarial science and finance: Theory and applications

By

Vagelis Stavropoulos

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece
October 2006

Στον πατέρα μου Θοδωρή,
στη μητέρα μου Αρχοντία,
στη γιαγιά μου
Ελευθερία,
και στην αδερφή μου
Δέσποινα.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον Κο. Χατζηκωνσταντινίδη Ευστάθιο, Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την πολύ σημαντική καθοδήγηση, υποστήριξη, βοήθεια και υπομονή σε όλη την διάρκεια υλοποίησης της παρούσας εργασίας.

Παράλληλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Αρτίκη, Καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, και τον κ. Πιτσέλη, Λέκτορα του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος θέλω να ευχαριστήσω όλους τους φίλους μου για την αμέριστη συμπαράσταση τους τελευταίους μήνες.

Σταυρόπουλος Ευάγγελος

Οκτώβριος 2006

Περίληψη

Σε ένα ασφαλιστικό πλαίσιο, μας ενδιαφέρει η συνάρτηση κατανομής ενός αθροίσματος τυχαίων μεταβλητών. Ένα τέτοιο άθροισμα εμφανίζεται κατά την εξέταση της αξίας ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου κατά τη διάρκεια μιας ορισμένης περιόδου αναφοράς. Εμφανίζεται επίσης κατά την εξέταση των πληρωμών που αφορούν ένα χαρτοφυλάκιο σε διαφορετικά μελλοντικά χρονικά σημεία. Η υπόθεση της αμοιβαίας ανεξαρτησίας μεταξύ δύο παραγόντων του αθροίσματος είναι κατάλληλη από υπολογιστική άποψη, αλλά μερικές φορές μη ρεαλιστική. Σε αυτό το έγγραφο, θα καθορίσουμε κάποιες προσεγγίσεις για τα αθροίσματα των τυχαίων μεταβλητών, όταν είναι γνωστές οι κατανομές των όρων του αθροίσματος, αλλά η πιθανή δομή εξάρτησης μεταξύ τους είναι άγνωστη.

Ο στόχος της εργασίας είναι να αναπτυχθούν και να συγκριθούν τα φράγματα για αθροίσματα εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών χρησιμοποιώντας την έννοια της συμονοτονικότητας. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε μια γενική τεχνική για άνω (και κάτω) φράγματα υπό την έννοια της κυρτής διάταξης για τα Stop-loss ασφάλιστρα των αθροισμάτων εξαρτώμενων τυχαίων μεταβλητών. Αποδεικνύουμε ότι το μεγαλύτερο άθροισμα υπό την έννοια της κυρτής διάταξης των όρων ενός τυχαίου διανύσματος με δοσμένες τις περιθώριες, ακολουθεί την συμονοτονική κατανομή το οποίο σημαίνει ότι κάθε δύο πιθανές εκβάσεις του διανύσματος διατάσσονται κατά συνιστώσα. Επιπλέον, υποθέτοντας ότι υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή έτσι ώστε η συνάρτηση κατανομής των όρων του αθροίσματος, δεσμέυοντας στη τυχαία μεταβλητή αυτή, να είναι γνωστή, ορίζουμε άνω και κάτω φράγματα.

Τέλος, παρουσιάζουμε διάφορες εφαρμογές της έννοιας της συμονοτονικότητας στον τομέα της ασφαλιστικής επιστήμης και στα χρηματοοικονομικά. Δίνουμε μερικά αριθμητικά παραδείγματα στο πως να κατασκευάζουμε τα κυρτά κάτω και άνω φράγματα για αθροίσματα τυχαίων μεταβλητών και παράγουμε φράγματα για την τιμολόγηση των αριθμητικών Ασιατικών Δικαιωμάτων

Abstract

In an insurance context, one is often interested in the distribution function of a sum of random variables. Such a sum appears when considering the aggregate claims of an insurance portfolio over a certain reference period. It also appears when considering discounted payments related to a portfolio at different future points in time. The assumption of mutual independence between the components of the sum is very convenient from a computational point of view, but sometimes not realistic. In this paper, we will determine approximations for sums of random variables, when the distributions of the terms are known, but the stochastic dependence structure between them is unknown.

The aim of the paper is to develop and compare bounds for sums of dependent random variables by using the concept of comonotonicity. We also use a general technique for deriving upper (and lower) bounds in the sense of convex order for Stop-loss premiums of sums of dependent random variables. We prove that the convex-largest sum of the components of a random vector with given marginals is obtained in case the random vector has the comonotonic distribution, which means that each two possible outcomes of this vector are ordered componentwise. Further, assuming that there exists a random variable such that the distribution function of the components of the vector, given this random variable, is known, we derive upper and lower bounds.

Finally, we will present several applications of the concept of comonotonicity in the field of actuarial science and finance. We give some numerical examples how to construct convex lower and upper bounds for sums of random variables and we derive lower and upper bounds for the price of arithmetic Asian options.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Στη θεωρία κινδύνου, οι μεμονωμένοι κίνδυνοι ενός χαρτοφυλακίου υποτίθεται ότι συνήθως είναι αμοιβαία ανεξάρτητοι. Υπάρχουν κάποιες τεχνικές για να καθορίσουμε τη συνάρτηση κατανομής της συνολικής αξίας ενός χαρτοφυλακίου, όπως η θεωρία του Panjer, η θεωρία του Pril, η συνέλιξη ή κάποιες προσεγγίσεις που βασίζονται σε ροπές τυχαίων μεταβλητές. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις υποθέτουμε την ανεξαρτησία μεταξύ των μεταβλητών. Η ασφάλιση βασίζεται στο γεγονός ότι με την αύξηση του αριθμού των ασφαλιστικών κινδύνων, που υποτίθεται ότι είναι αμοιβαία ανεξάρτητοι και ταυτόσημοι (έχουν δηλ. την ίδια κατανομή), ο μέσος κίνδυνος γίνεται ολοένα και περισσότερο προβλέψιμος λόγω του Νόμου των μεγάλων αριθμών. Ο άλλος γνωστός θεμελιώδης Νόμος της στατιστικής, το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.), δηλώνει κάτω από την υπόθεση της αμοιβαίας ανεξαρτησίας, ότι η συνολική αξία ενός χαρτοφυλακίου μπορεί προσεγγιστικά να ακολουθεί την Κανονική Κατανομή, αν βέβαια ο αριθμός των ασφαλιστικών κινδύνων είναι αρκετά μεγάλος. Είναι πολύ βολικό να υποθέτουμε την ανεξαρτησία δεδομένου ότι τα μαθηματικά για τους εξαρτώμενους κινδύνους είναι πιο πολύπλοκα, και επίσης επειδή, γενικά, τα στατιστικά αποτελέσματα που δίνονται από τον ασφαλιστή δίνουν μόνο πληροφορίες για τις περιθωριακές κατανομές των κινδύνων και όχι για την από κοινού κατανομή τους, δηλ. τον τρόπο που αυτοί οι κίνδυνοι συνδέονται.

Αρχικά υποθέτουμε κάποιες τυχαίες πληρωμές X_i που αναφέρονται αντίστοιχα στους σταθερούς και γνωστούς χρόνους t_i , $i = 1,2,...,n$. Ακόμα ονομάζουμε Y_t τον παράγοντα προεξόφλησης στο διάστημα $[0,t]$, $t \geq 0$. Αυτό σημαίνει ότι το ποσό που κάποιος πρέπει να επενδύσει στο χρόνο 0 για να πάρει ένα ποσό 1 στο χρόνο t είναι η τυχαία μεταβλητή Y_t. Σε αυτήν την περίπτωση, μια τυχαία μεταβλητή που μας ενδιαφέρει είναι το κλιμακωτό γινόμενο των δύο τυχαίων διανυσμάτων

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_{t_i} .$$

Αν οι πληρωμές X_i στο χρόνο t_i είναι ανεξάρτητες από τον πληθωρισμό, τότε τα διανύσματα $\underline{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ και $\underline{Y} = (Y_{t_1}, Y_{t_2}, ..., Y_{t_n})$ μπορεί να υποθέσουμε ότι είναι αμοιβαία ανεξάρτητα. Αφ' ετέρου, αν οι πληρωμές ρυθμίζονται με τον πληθωρισμό, τότε τα διανύσματα $\underline{X}$ και $\underline{Y}$ δεν είναι πια αμοιβαία ανεξάρτητα. Ορίζοντας τον παράγοντα του πληθωρισμού κατά τη διάρκεια της περιόδου $[0,t]$ ως Z_t, η τυχαία μεταβλητή S μπορεί, σε αυτήν την περίπτωση, να ξαναγραφεί ως $S=\sum_{i=1}^{n} X_i^{'} Y_{t_i}^{'}$, όπου οι πραγματικές πληρωμές $X_i^{'}$ και οι πραγματικοί παράγοντες προεξόφλησης $Y_{t_i}^{'}$ δίνονται από το $X_i^{'}=X_i/Z_{t_i}$ και $Y_{t_i}^{'}=Y_{t_i}/Z_{t_i}$, αντίστοιχα. Σε αυτήν την περίπτωση το S είναι το κλιμακωτό γινόμενο των δύο αμοιβαία ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων $(X_1^{'},X_2^{'},...,X_n^{'})$ και $(Y_{t_1}^{'},Y_{t_2}^{'},...,Y_{t_n}^{'})$. Γενικά, κάθε διάνυσμα από μόνο του θα έχει συνιστώσες που θα έχουν μεταξύ τους εξάρτηση. Ειδικά, οι συνιστώσες του διανύσματος προεξόφλησης θα έχουν μια ισχυρή θετική εξάρτηση.

Η εισαγωγή των στοχαστικών χρηματοοικονομικών θεωριών στα ασφαλιστικά μοντέλα φανερώνει αμέσως την ανάγκη να ορίσουμε συναρτήσεις κατανομών σε αθροίσματα εξαρτώμενων τυχαίων μεταβλητών. Παρακάτω περιγράφουμε μερικά παραδείγματα στα οποία προκύπτουν τυχαίες μεταβλητές, που είναι κλιμακωτά γινόμενα δύο διανυσμάτων.

Κατ'αρχάς, θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $S=\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$, όπου τα X_i αντιπροσωπεύουν τα ποσά μιας σύμβασης ασφάλισης (ή ενός χαρτοφυλακίου) στους διαφορετικούς χρόνους i, $i=1,2,...,n$. Ακόμα κι αν οι παράγοντες Y_i προεξόφλησης είναι γνωστοί, το S θα είναι συχνά ένα άθροισμα εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών. Ένα παράδειγμα είναι η περίπτωση ενός μεμονωμένου συμβολαίου ασφάλισης αυτοκινήτου όπου το X_i αντιπροσωπεύει την απώλεια στο έτος i του συμβολαίου ασφάλισης. Υψηλές τιμές του X_1 και του X_2 θα δείχνουν ότι ο ασφαλισμένος είναι ένας κακός κίνδυνος για την ασφαλιστική τα επόμενα έτη.

Στην περίπτωση των στοχαστικών παραγόντων προεξόφλησης Y_i (όταν δηλ. Y_i είναι τ.μ.), το άθροισμα $S=\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$ θα είναι ένα άθροισμα ισχυρά θετικών εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών, όπου η εξάρτηση προκαλείται επίσης από την εξάρτηση μεταξύ των Y_i. Εξετάζουμε για παράδειγμα το Y_i και το Y_{i+j} με το j μικρό. Η προεξόφληση κατά τη διάρκεια της περιόδου $[0,i+j]$ είναι ίση με την προεξόφληση κατά τη διάρκεια της περιόδου $[0,i]\cup[i,i+j]$. Έτσι, σε οποιοδήποτε ρεαλιστικό πρότυπο αυτοί οι παράγοντες Y_i και Y_{i+j} προεξόφλησης έχουν μια ισχυρή θετική εξάρτηση.

Διαισθητικά, με την παρουσία των θετικών εξαρτήσεων, μεγάλες τιμές ενός όρου σε ένα άθροισμα των τυχαίων μεταβλητών σημαίνει και μεγάλες τιμές των άλλων όρων. Ο Νόμος των μεγάλων αριθμών δεν θα ισχύει και ο συνολικός κίνδυνος S θα παρουσιάσει μεγαλύτερη διακύμανση απ'ό,τι στην περίπτωση ενός αθροίσματος των αμοιβαία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών. Σε αυτήν την περίπτωση, η υπόθεση ανεξαρτησίας τείνει να εξαλείψει τις ουρές που θα έχει η συνάρτηση κατανομής του S.

Στο σημείο αυτό θα αναφέρουμε κάποιους μεμονωμένους κίνδυνου X_i που δεν είναι αμοιβαία ανεξάρτητοι επειδή επηρεάζονται από το ίδιο οικονομικό ή φυσικό περιβάλλον. Οι μεμονωμένοι κίνδυνοι π.χ. ενός σεισμού ή μιας πλημμύρας σ'ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων που βρίσκονται στην ίδια γεωγραφική περιοχή συσχετίζονται, δεδομένου ότι εξαρτώνται από το περιστατικό και τη δριμύτητα του σεισμού ή της πλημμύρας. Σε μια ομιχλώδη ημέρα όλα τα αυτοκίνητα μιας περιοχής έχουν μεγάλη πιθανότητα να πάθουν κάποιο ατύχημα. Κατά τη διάρκεια των ξηρών καυτών καλοκαιριών, όλα τα ξύλινα εξοχικά σπίτια εκτίθενται περισσότερο στην πυρκαγιά.

Σαν ένα θεωρητικό παράδειγμα, εξετάζουμε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από n κινδύνους. Οι πληρωμές που γίνονται από τον ασφαλιστή περιγράφονται από ένα τυχαίο διάνυσμα $(X_1, X_2, ..., X_n)$, όπου X_i είναι το ποσό αξίας του εγγράφου ασφάλισης i κατά τη διάρκεια της ασφαλιστικής περιόδου. Υποθέτουμε ότι όλες οι πληρωμές πρέπει να γίνουν στο τέλος της ασφαλιστικής περιόδου $[0,1]$. Σε μια ντιτερμινιστική οικονομική ρύθμιση, η παρούσα αξία στο χρόνο 0 της συνολικής αποζημίωσης $X_1 + X_2 + ... + X_n$ που πληρώνεται από τον ασφαλιστή στο χρόνο 1 καθορίζεται από τη σχέση

$$S = (X_1 + X_2 + ... + X_n)v,$$

όπου $v = (1+r)^{-1}$ είναι ο ντιτερμινιστικός παράγοντας προεξόφλησης και το r το τεχνικό επιτόκιο. Υποθέτουμε ότι όλοι οι κίνδυνοι X_i είναι μη αρνητικοί, ανεξάρτητοι και ότι έχουν την ίδια κατανομή, και ας πούμε ότι $X \stackrel{d}{=} X_i$, όπου το σύμβολο $\stackrel{d}{=}$ χρησιμοποιείται για να δείξει την ισότητα στην κατανομή. Η μέση πληρωμή S/n έχει μέσο όρο και διακύμανση που είναι

$$E[S/n] = vE[X]$$

και

$$Var[S/n] = \frac{v^2}{n} Var[X].$$

Η απαραίτητη σταθερότητα και για τους ασφαλισμένους και για τον ασφαλιστή διατηρείται από το Νόμο των μεγάλων αριθμών, υπό τον όρο ότι το n είναι πράγματι "μεγάλο" και ότι οι κίνδυνοι είναι αμοιβαία ανεξάρτητοι και μάλλον συμπεριφέρονται καλά, μην περιγράφοντας παραδείγματος χάριν τους κινδύνους καταστροφικής φύσης για τους οποίους η διακύμανση είναι πολύ μεγάλη ή και άπειρη.

Τώρα εξετάζουμε τις συνέπειες αν εισάγουμε στα παραπάνω την στοχαστική προεξόφληση. Αντικαθιστώντας το σταθερό παράγοντα προεξόφλησης v από μια τυχαία μεταβλητή Y, που αντιπροσωπεύει το στοχαστικό ποσό που επενδύεται στο χρόνο 0 με αξία 1 στο τέλος της περιόδου $[0,1]$, η παρούσα αξία της συνολικής αξίας που πληρώνεται από τον ασφαλιστή γίνεται

$$S = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)Y.$$

Αν υποθέσουμε ότι ο παράγοντας προεξόφλησης είναι ανεξάρτητος από πληρωμές, διαπιστώνουμε ότι η μέση πληρωμή ανά έγγραφο ασφάλισης S/n έχει μέσο όρο και διακύμανση:

$$E[S/n] = E[X]E[Y]$$

και

$$Var[S/n] = \frac{Var[X]}{n} E[Y^2] + (E[X])^2 Var[Y].$$

Υποθέτοντας ότι το $E[X]$ και το $Var\,[Y]$ είναι θετικά, ο Νόμος των μεγάλων αριθμών δεν αποβάλλει πλέον τον σχετικό κίνδυνο. Αυτό είναι επειδή για $n \to \infty$, το $Var[S/n]$ συγκλίνει στο δεύτερο όρο του. Έτσι για να αξιολογήσουμε το συνολικό κίνδυνο, απαιτούνται η κατανομή και του ασφαλιστικού κινδύνου και του οικονομικού κινδύνου. Αυτή η παρατήρηση τονίζει ότι η εισαγωγή των στοχαστικών χρηματοοικονομικών πλευρών στα ασφαλιστικά μοντέλα οδηγεί αμέσως στην ανάγκη να ορίσουμε συναρτήσεις κατανομών για αθροίσματα εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών.

Με την υπόθεση ότι τα διανύσματα $\underline{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ και $\underline{Y} = (Y_{t_1}, Y_{t_2}, ..., Y_{t_n})$ είναι αμοιβαία ανεξάρτητα και ότι οι περιθώριες κατανομές του X_i και του Y_{t_i} δίνονται, το πρόβλημα για να ορίσουμε φράγματα για τη συνάρτηση κατανομής του αθροίσματος $S = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_{t_i}$ μπορεί να περιοριστεί στον καθορισμό φραγμάτων για τη συνάρτηση κατανομής του αθροίσματος

$$S = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n$$

των τυχαίων μεταβλητών $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ με δεδομένες περιθώριες κατανομές, αλλά των οποίων η από κοινού κατανομή είναι δύσκολο να προσδιοριστεί. Η άγνωστη ή η σύνθετη φύση της εξάρτησης μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών Z_i είναι ο λόγος για τον οποίο είναι αδύνατο να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής του S ακριβώς.

Σε αυτή την εργασία θα ορίσουμε στοχαστικά άνω και κάτω φράγματα για αθροίσματα S αυτού του τύπου. Αυτά τα φράγματα θα οριστούν υπό την έννοια της κυρτής διάταξης. Η έννοια της κυρτής διάταξης σχετίζεται με την έκφραση της Stop-loss διάταξης η οποία είναι γνωστή στην ασφαλιστική επιστήμη. Και οι δύο μορφές στοχαστικής διάταξης δείχνουν ανάμεσα σε δύο τυχαίες μεταβλητές ποια είναι η λιγότερη «επικίνδυνη». Αντικαθιστώντας το S από μια λιγότερο «ελκυστική» τυχαία μεταβλητή S' έχουμε μια πιο ασφαλής στρατηγική από την πλευρά του ασφαλιστή. Θεωρώντας πιο «ελκυστικές» τ.μ. μας βοηθάει στο να πάρουμε μια ιδέα του βαθμού υπερεκτίμησης του πραγματικού κινδύνου.

Στο Κεφάλαιο 1, δίνουμε τον ορισμό του Stop-loss ασφαλίστρου και της μέσης τιμής μιας τ.μ. μέσω της συνάρτησης κατανομής της και υπολογίζουμε το Stop-loss ασφάλιστρο. Επίσης περιγράφουμε τα δύο είδη στοχαστικής διάταξης μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών μαζί με τις ιδιότητές τους.

Στο Κεφάλαιο 2, παρουσιάζουμε την έννοια της συμονοτονικότητας ορίζοντας τα συμονοτονικά σύνολα και τα συμονοτονικά τυχαία διανύσματα. Σαν μια ειδική περίπτωση θεωρούμε τη συμονοτονικότητα για διανύσματα που προέρχονται από την ίδια Θέσης Κλίμακας(*Location-Scale*) οικογένεια κατανομών και ορίζουμε την σχέση με τον συντελεστή συσχέτισης κατά *Pearson.* Τέλος αποδεικνύουμε ότι τα Stop-loss ασφάλιστρα ενός αθροίσματος συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών μπορούν να καθοριστούν από τα Stop-loss ασφάλιστρα των όρων του αθροίσματος.

Στο Κεφάλαιο 3, ορίζουμε τα κυρτά φράγματα για αθροίσματα τυχαίων μεταβλητών. Τα φράγματα αυτά είναι: το συμονοτονικό άνω φράγμα, το βελτιωμένο άνω φράγμα και το κάτω φράγμα. Τα δύο τελευταία φράγματα προκύπτουν μέσα από δέσμευση σε μια τυχαία μεταβλητή που έχει γνωστή συνάρτηση κατανομής. Στην τελευταία ενότητα υπολογίζουμε τα φράγματα μέσω θεωρητικών παραδειγμάτων.

Στο Κεφάλαιο 4, θεωρούμε ως άθροισμα την παρούσα αξία από μια Λογαριθμοκανονική διαδικασία προεξόφλησης και συνεπώς υπολογίζουμε το Stop-loss ασφάλιστρο για το άθροισμα αυτό καθώς και τα φράγματα που αναφέραμε παραπάνω.

Τέλος , στο Κεφάλαιο 5 χρησιμοποιούμε τη θεωρία της συμονοτονικότητας για την τιμολόγηση αριθμητικών Ασιατικών Παραγώγων και συνεπώς κατασκευάζουμε και πάλι φράγματα για την τιμή αυτή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγικές έννοιες για τη Συμονοτονικότητα και τα Stop-Loss Ασφάλιστρα

Στον ασφαλιστικό τομέα, γενικά, συναντάμε κάποια συμβόλαια που υπογράφονται μεταξύ του ασφαλιστή και του ασφαλιζομένου στα οποία, αν θεωρήσουμε την τ.μ. X να εκφράζει το μέγεθος ζημιάς του κινδύνου, τότε ο ασφαλιζόμενος συμφωνεί να καλύπτει μέγεθος ζημιάς μέχρι d. Αυτό σημαίνει ότι αν το μέγεθος ζημιάς από τον κίνδυνο X είναι μικρότερο ή ίσο από d ($X \le d$), τότε δεν καλείται ο ασφαλιστής να αποζημιώσει τον ασφαλιζόμενο. Αν όμως το μέγεθος ζημιάς X είναι μεγαλύτερο από d τότε η ασφαλιστική δίνει αποζημίωση ίση με $X - d$. Το d ονομάζεται «όριο ιδίας κράτησης». Έτσι αν θεωρήσουμε την τ.μ. I_d να εκφράζει την αποζημίωση που καλύπτει η ασφαλιστική, τότε έχουμε

$$I_d = \begin{cases} 0, & X \le d \\ X-d, & X > d \end{cases} \quad \text{ή} \quad I_d = \max(X-d,0) = (X-d)_+ .$$

Από την άλλη πλευρά αν θεωρήσουμε την τ.μ. Y να εκφράζει το κόστος που καλύπτει ο ασφαλιζόμενος τότε

$$Y = \begin{cases} X, & X \le d \\ d, & X > d \end{cases} .$$

Τώρα μπορούμε να δώσουμε τον παρακάτω ορισμό για το Stop-Loss Ασφάλιστρο με όριο ιδίας κράτησης d.

Ορισμός (Stop-loss Ασφάλιστρο)

Θεωρούμε την τ.μ. $I_d = \max(X-d,0) = (X-d)_+$. Τότε το Stop-loss Ασφάλιστρο μιας τ.μ. X με όριο ιδίας κράτησης d ορίζεται ως

$$E[I_d] = E[(X-d)_+] \ ,$$

με $(x-d)_+ = \max(x-d, 0)$, όπου x είναι μια πραγματοποίηση της τ.μ. X.

1.1. Διάταξη Τυχαίων Μεταβλητών

Στην ενότητα αυτή θα προσπαθήσουμε να διατάξουμε τις τυχαίες μεταβλητές(τ.μ.) με βάση κάποια κριτήρια. Θα μιλάμε γενικά για τυχαίες μεταβλητές που έχουν πεπερασμένο μέσο. Αρχικά θα μιλήσουμε για την αθροιστική συνάρτηση κατανομής(α.σ.κ.) F_X μιας τυχαίας μεταβλητής X και θα ορίσουμε την μέση τιμή της τ.μ. μέσω της αθροιστικής της.

Ορισμός 1.1.2. (Μέση τιμή μιας τ.μ. *X* μέσω της αθροιστικής της (α.σ.κ.) F_X)

Γνωρίζουμε ότι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής F_X μιας τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως: $F_X(x) = \Pr[X \le x]$. Επειδή θεωρούμε ότι η τ.μ. X έχει πεπερασμένο μέσο έχουμε ότι: $\lim_{x\to\infty} x(1-F_X(x)) = \lim_{x\to-\infty} xF_X(x) = 0$. Η μέση τιμή της τ.μ. X μπορεί να οριστεί με βάση την αθροιστική της F_X ως εξής

$$E[X] = \int_{-\infty}^{0} x dF_X(x) - \int_{0}^{\infty} x d(1-F_X(x)) . \tag{1}$$

Χρησιμοποιώντας τεχνικές ολοκλήρωσης μπορούμε να βρούμε την ακόλουθη έκφραση για τη μέση τιμή $E[X]$:

$$E[X] = -\int_{-\infty}^{0} F_X(x)dx + \int_{0}^{\infty} (1-F_X(x))dx . \tag{2}$$

Τώρα θα υπολογίσουμε το Stop-loss ασφάλιστρο, όπως το ορίσαμε στην αρχή του κεφαλαίου, μέσω του ορισμού που δώσαμε παραπάνω για τη μέση τιμή μιας τ.μ. X.

1.1.3. Υπολογισμός Stop-loss ασφαλίστρου

Στην εισαγωγή του κεφαλαίου είπαμε ότι το stop-loss ασφάλιστρο με όριο ιδίας κράτησης d της τ.μ. X ορίζεται ως $E[(X-d)_+]$, με τη σημείωση ότι $(x-d)_+ = \max(x-d,0)$. Κάνοντας μια ολοκλήρωση κατά μέρη και με τη βοήθεια της σχέσης (2) βρίσκουμε ότι

$$E[(X-d)_+] = \int_d^{\infty} (1-F_X(x))dx, \ \ -\infty < d < +\infty . \tag{3}$$

Από την παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι το Stop-loss ασφάλιστρο με όριο ιδίας κράτησης d μπορεί να θεωρηθεί ως το βάρος μιας ανώτερης ουράς (της συνάρτησης κατανομής) του X. Ουσιαστικά είναι η επιφάνεια μεταξύ της α.σ.κ. F_X της X και της σταθερής συνάρτησης 1, ως προς d. Επίσης παρατηρούμε ότι το $E[(X-d)_+]$ είναι μια φθίνουσα συνεχής συνάρτηση ως προς d, με παράγωγο $F_X(d)-1$ ως προς d, η οποία πηγαίνει στο $+\infty$.

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να διατάξουμε τις τυχαίες μεταβλητές με βάση το Stop-loss ασφάλιστρό τους. Σκοπός μας είναι να αντικατασταθεί μια τ.μ. από μια άλλη τ.μ. με απλούστερη δομή της οποίας είναι πιο εύκολο να υπολογίσουμε τη συνάρτηση κατανομής της.

Ορισμός 1.1.4. (Stop-Loss Διάταξη)

Θεωρούμε δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y. Θα λέμε ότι η X προηγείται της Y υπό την έννοια της stop-loss διάταξης, και θα συμβολίζουμε $X \leq_{sl} Y$, αν και μόνο αν η X έχει κατώτερο stop-loss ασφάλιστρο από την Y, δηλ. όταν ισχύει

$$E[(X-d)_+] \leq E[(Y-d)_+], \ \ -\infty < d < +\infty \tag{4}$$

Όταν θα ισχύει $X \leq_{sl} Y$, θα σημαίνει ότι η X έχει ομοιόμορφα μικρότερες ανώτερες ουρές από την Y, που σημαίνει ότι αν θεωρήσουμε την Y ως μια πληρωμή, θα είναι «λιγότερο ελκυστική» από μια πληρωμή X. Η Stop-loss διάταξη έχει μια φυσική οικονομική ερμηνεία υπό την έννοια της αναμενόμενης χρησιμότητας. Μπορεί δηλ.

να αποδειχθεί ότι $X \leq_{sl} Y$, αν και μόνο αν $E[u(-X)] \geq E[u(-Y)]$ το οποίο ισχύει για όλες τις μη φθίνουσες και κοίλες πραγματικές συναρτήσεις *u* για τις οποίες υπάρχει η μέση τιμή. Αυτό σημαίνει ότι ο ασφαλιστής θα προτιμούσε να πληρώσει X αντί για *Y*. Ο χαρακτηρισμός της Stop-loss διάταξης στα πλαίσια των παραπάνω χρήσιμων συναρτήσεων είναι ισοδύναμος με τη σχέση $E[\nu(-X)] \geq E[\nu(-Y)]$ που ισχύει για όλες τις μη φθίνουσες κυρτές συναρτήσεις *v* για τις οποίες υπάρχει η μέση τιμή. Για αυτό το λόγο, η stop-loss διάταξη καλείται συχνά «αυξανόμενη κυρτή διάταξη» και συμβολίζεται ως $\leq_{icx}$.

Η stop-loss διάταξη μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών *X* και *Y* δηλώνει μια αντίστοιχη σχέση των μέσων τους. Για να αποδείξουμε αυτό, υποθέτουμε ότι $d < 0$. Από τη σχέση (3) και το χαρακτηρισμό των stop-loss ασφαλίστρων ως ανώτερες ουρές, βρίσκουμε την παρακάτω ισότητα

$$d + E[(X-d)_+] = -\int_d^0 F_X(x)dx + \int_0^\infty (1 - F_X(x))dx,$$

και επίσης, αν το $d \to -\infty$, τότε

$$\lim_{d \to -\infty} (d + E[(X-d)_+]) = E[X].$$

Έτσι, προσθέτοντας το *d* και στα δύο μέλη της ανισότητας (4) στον Ορισμό 1.1.4., και παίρνοντας το όριο για $d \to -\infty$, έχουμε ότι $E[X] \leq E[Y]$.

Καταλήγουμε τελικά ότι μια ικανοποιητική συνθήκη για να ισχύει $X \leq_{sl} Y$ είναι ότι $E[X] \leq E[Y]$, με τον όρο όμως ότι οι αθροιστικές συναρτήσεις κατανομών τους (α.σ.κ.) έχουν μόνο ένα σημείο τομής. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός c έτσι ώστε $F_X(x) \leq F_Y(x)$, για $x < c$, αλλά $F_X(x) \geq F_Y(x)$, για $x \geq c$.

Πράγματι, αν εξετάσουμε τη συνάρτηση $f(d) = E[(Y-d)_+] - E[(X-d)_+]$, έχουμε ότι το $\lim_{d \to -\infty} f(d) = E[Y] - E[X] \geq 0$ και το $\lim_{d \to +\infty} f(d) = 0$.

Περαιτέρω, παρατηρούμε ότι η $f(d)$ αρχικά αυξάνεται, και μετά μειώνεται (από το *c* και πάνω) αλλά παραμένει μη αρνητική.

Στόχος μας ήταν να αντικαταστήσουμε μια τυχαία πληρωμή *X* από μια λιγότερο ευνοϊκή τυχαία πληρωμή *Y*, για την οποία όμως η συνάρτηση κατανομής της είναι πιο εύκολο να καθοριστεί. Αν έχουμε ότι $X \leq_{sl} Y$, τότε έχουμε $E[X] \leq E[Y]$, και είναι φανερό ότι καλύτερες προσεγγίσεις προκύπτουν στην περίπτωση όπου $E[X]=E[Y]$. Όταν ισχύει αυτό οδηγούμαστε στον παρακάτω Ορισμό 1.1.5. που ονομάζεται «Κυρτή Διάταξη».

Ορισμός 1.1.5. (Κυρτή Διάταξη)

Έστω οι τυχαίες μεταβλητές X και Y. Θα λέμε ότι η τ.μ. X προηγείται της Y υπό την έννοια της κυρτής διάταξης, και θα συμβολίζουμε με $X \leq_{cx} Y$, αν και μόνο αν

$$\begin{cases} E[X] = E[Y], \\ E[(X-d)_+] \leq E[(Y-d)_+] \end{cases}, \tag{5}$$

για κάθε d.

Από το ότι ισχύει: $E[(X-d)_+] - E[(d-X)_+] = E[X] - d$, βρίσκουμε ότι

$$X \leq_{cx} Y \Leftrightarrow \begin{cases} E[X] = E[Y], \\ E[(d-X)_+] \leq E[(d-Y)_+] \end{cases}, \quad -\infty < d < +\infty \quad . \tag{6}$$

Παρατηρήσεις

Η μερική ολοκλήρωση οδηγεί στο ότι

$$E[(d-X)_+] = \int_{-\infty}^{d} F_X(x)dx, \tag{7}$$

το οποίο σημαίνει ότι η μέση τιμή $E[(d-X)_+]$ μπορεί να ερμηνευθεί ως το βάρος μιας κατώτερης ουράς της α.σ.κ. της τ.μ. X: είναι η επιφάνεια μεταξύ της σταθερής συνάρτησης 0 και της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής (α.σ.κ.) της X, από το $-\infty$ μέχρι το d. Είδαμε στον προηγούμενο Ορισμό 1.1.4. ότι η Stop-Loss διάταξη συνεπάγεται ομοιόμορφα βαρύτερες ανώτερες ουρές. Η επιπλέον συνθήκη της ισότητας των μέσων στον παραπάνω Ορισμό 1.1.5. δηλώνει ότι η κυρτή διάταξη οδηγεί και σε ομοιόμορφα κατώτερες ουρές.

Αν $d > 0$, τότε από τη σχέση (7) βρίσκουμε ότι

$$d - E[(d-X)_+] = -\int_{-\infty}^{0} F_X(x)dx + \int_{0}^{d}(1-F_X(x))dx,$$

και επίσης

$$\lim_{d\to-\infty}(d - E[(d-X)_+]) = E[X].$$

Από τα παραπάνω μπορούμε να πούμε ότι η κυρτή διάταξη χαρακτηρίζεται και ως

$$X \leq_{cx} Y \Leftrightarrow \begin{cases} E[(X-d)_+] \leq E[(Y-d)_+], \\ E[(d-X)_+] \leq E[(d-Y)_+] \end{cases}, \quad -\infty < d < +\infty \quad . \tag{8}$$

Το αντίστροφο της παραπάνω συνεπαγωγής δηλ. το $\Leftarrow$ ισχύει πράγματι αν παρατηρήσουμε ότι οι ανισότητες μεταξύ των ανώτερων ουρών δηλώνουν ότι $E[X] \leq E[Y]$, ενώ οι ανισότητες μεταξύ των κατώτερων ουρών δηλώνουν ότι $E[X] \geq E[Y]$. Αυτό σημαίνει ότι τελικά πρέπει να ισχύει $E[X] = E[Y]$.

Παρατηρούμε ότι με τη Stop-loss Διάταξη, μας ενδιαφέρουν μεγάλες τιμές μιας τυχαίας απώλειας, και τότε καλούμε την τυχαία μεταβλητή Y λιγότερο «ελκυστική» από την X αν οι αναμενόμενες τιμές όλων των $(Y-d)_+$ είναι μεγαλύτερες από εκείνες της τ.μ. X. Οι αρνητικές τιμές για αυτές τις τυχαίες μεταβλητές είναι πραγματικά κέρδη. Τα υπερβολικά κέρδη μπορεί όμως να μην είναι ελκυστικά για τον ασφαλιστή. Σε αυτήν την περίπτωση, η τ.μ. X θα μπορούσε να θεωρηθεί πιο «ελκυστική» από την Y αν και τα ανώτερα μέρη $(X-d)_+$ και τα κατώτερα μέρη $(d-X)_+$ έχουν χαμηλότερη αναμενόμενη τιμή απ'ότι για την τ.μ. Y. Και οι δύο όροι καθορίζουν ακριβώς την κυρτή διάταξη που αναφέραμε παραπάνω.

Μια ικανοποιητική συνθήκη για να ισχύει ότι $X \leq_{cx} Y$ είναι να ισχύει: $E[X] = E[Y]$, με την προυπόθεση όμως ότι οι αθροιστικές συναρτήσεις κατανομών τους έχουν ένα μόνο σημείο τομής. Αυτή η συνθήκη μπορεί να ισχύει στα περισσότερα παραδείγματα, αλλά είναι εύκολο επίσης να κατασκευαστούν παραδείγματα όπου $X \leq_{cx} Y$ και οι αθροιστικές συναρτήσεις κατανομών τους έχουν περισσότερα σημεία τομής.

Μπορεί να αποδειχθεί από την εργασία των **Kaas et al.[1]** ότι $X \leq_{cx} Y$ αν και μόνο αν $E[v(X)] \leq E[v(Y)]$ για όλες τις κυρτές συναρτήσεις *v*, υπό τον όρο ότι οι αναμενόμενες τιμές υπάρχουν. Αυτό εξηγεί την ονομασία «Κυρτή Διάταξη».

Σημειώνουμε ότι όταν μιλάμε για τη Stop-loss Διάταξη, οι κυρτές συναρτήσεις *v* πρέπει να είναι μη φθίνουσες. Έτσι, βλέπουμε ότι η Stop-loss διάταξη είναι πιο αδύναμη: απαιτούνται δηλ. περισσότερα ζεύγη τυχαίων μεταβλητών.

Επίσης, μπορούμε να πούμε ότι $X \leq_{cx} Y$ αν και μόνο αν $E[X]$=Ε[Y] και $E[u(-X)] \geq E[u(-Y)]$ για όλο το σύνολο των κοίλων και μη φθίνουσων συναρτήσεων *u*, υπό τον όρο ότι οι αναμενόμενες τιμές υπάρχουν.

Στην περίπτωση που $X \leq_{cx} Y$, οι ανώτερες ουρές καθώς επίσης και οι κατώτερες ουρές της *Y* είναι βαρύτερες από τις αντίστοιχες ουρές της *X*, το οποίο σημαίνει ότι οι ακραίες τιμές είναι πιθανότερο να εμφανιστούν για την τ.μ. *Y* απ'ό,τι για την τ.μ. *X*. Αυτό επίσης δηλώνει ότι το $X \leq_{cx} Y$ είναι ισοδύναμο με το $-X \leq_{cx} -Y$. Για αυτό το λόγο, η ερμηνεία των τυχαίων μεταβλητών ως πληρωμές ή ως εισοδήματα δεν έχει σχέση για την έννοια της «Κυρτής Διάταξης».

Παράδειγμα 1.1.6.

Αν ορίσουμε τη συνάρτηση *v*, ως $v(x) = x^2$ που είναι μια κυρτή συνάρτηση, τότε αν ισχύει ότι $X \leq_{cx} Y$ έχουμε ότι: $Var[X] \leq Var[Y]$. Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι η τ.μ *X* ακολουθεί την *Ομοιόμορφη* Κατανομή στο σύνολο $\{0,1,2,3\}$ και ότι: $\Pr[Y=0] = \frac{1}{6}, \Pr[Y=1] = \frac{1}{2}, \Pr[Y=3] = \frac{1}{3}$, τότε

$E[X] = E[Y] = \frac{3}{2}$ και $Var[X] = Var[Y] = 2$. Όμως δεν ισχύει ούτε $X \leq_{cx} Y$ ούτε $Y \leq_{cx} X$.

Στην περίπτωση της κυρτής διάταξης, δεν διατάσσονται μόνο οι διασπορές μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών. Πράγματι, αν $X \leq_{cx} Y$, τότε όλες οι ροπές τάξης $2k$ (k = 1,2,…) της τ.μ. *X* είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες ροπές της τ.μ. *Y*.

Έχει αποδειχθεί από την εργασία των **Kaas et al.[1, page 68]** ότι η σύγκριση των διασπορών έχει νόημα όταν συγκρίνουμε Stop-loss ασφάλιστρα κυρτά διατεταγμένων τυχαίων μεταβλητών. Η παρακάτω πρόταση συνδέει τις διασπορές με τα Stop-loss ασφάλιστρα.

Πρόταση 1.1.7. (Διασπορά και Stop-loss Ασφάλιστρα)

Για κάθε τυχαία μεταβλητή X μπορούμε να γράψουμε ότι

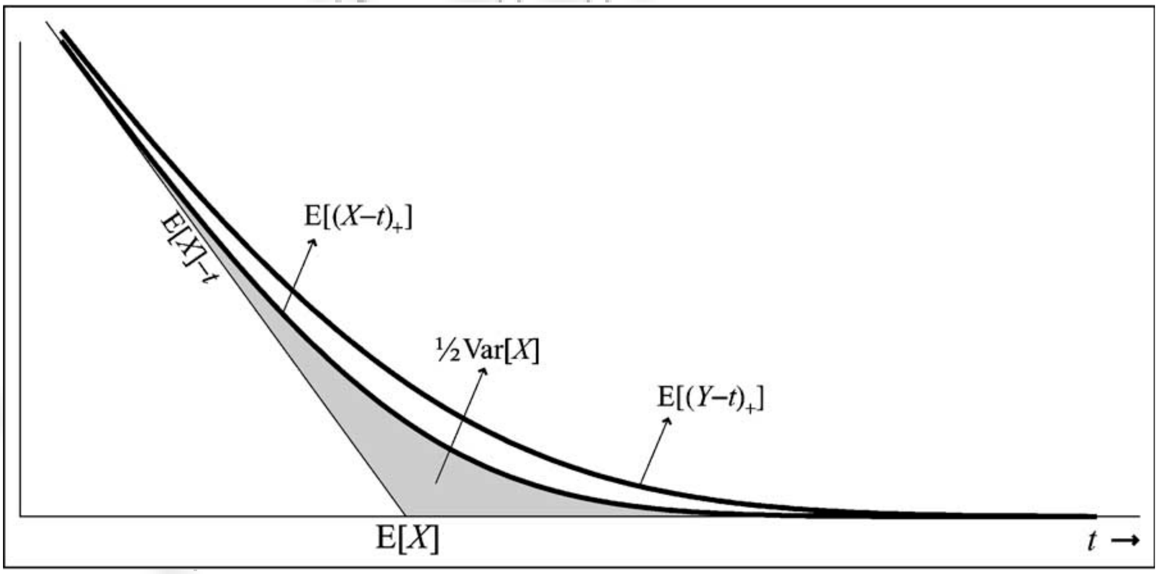
$$\frac{1}{2}Var[X] = \int_{-\infty}^{+\infty}(E[(X-t)_+] - (E[X]-t)_+)dt \quad . \tag{9}$$

Απόδειξη: Για να αποδείξουμε αυτή τη σχέση γράφουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(E[(X-t)_+] - (E[X]-t)_+)dt = \int_{-\infty}^{E[X]} E[(t-X)_+]dt + \int_{E[X]}^{+\infty} E[(X-t)_+]dt \, . \tag{10}$$

Αλλάζοντας τη διάταξη των ολοκληρωμάτων και χρησιμοποιώντας μερική ολοκλήρωση, βρίσκουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{E[X]} E[(t-X)_+]dt = \int_{-\infty}^{E[X]}\int_{-\infty}^{t} F_X(x)dxdt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{E[X]} (x-E[X])^2 dF_X(x) \, . \tag{11}$$



Σχήμα 1.1.8. Δύο stop-loss μετασχηματισμοί $\pi_X(t) = E[(X-t)_+]$ και $\pi_Y(t) = E[(Y-t)_+]$,όπου $X \leq_{cx} Y$.

Όμοια,

$$\int_{E[X]}^{\infty} E[(X-t)_+]dt = \frac{1}{2}\int_{E[X]}^{\infty}(x-E[X])^2 dF_X(x)\,. \tag{12}$$

Η σχέση (10) με τη βοήθεια των σχέσεων (11) και (12) γίνεται

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(E[(X-t)_+]-(E[X]-t)_+)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{E[X]}(x-E[X])^2 dF_X(x) + \frac{1}{2}\int_{E[X]}^{\infty}(x-E[X])^2 dF_X(x)$$

$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E[X])^2 dF_X(x) = \frac{1}{2}Var[X]$, το οποίο είναι και το ζητούμενο.

Από τη σχέση (9), παίρνουμε ότι, αν $X \le_{cx} Y$, τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|E[(Y-t)_+]-E[(X-t)_+]\right|dt = \frac{1}{2}\{Var[Y]-Var[X]\}. \tag{13}$$

Μια γραφική ερμηνεία των σχέσεων (9) και (13) δίνεται στο παραπάνω Σχήμα 1.1.8.

Έτσι, αν ισχύει $X \le_{cx} Y$, τότε η stop-loss απόσταση τους, δηλ. η ενσωματωμένη απόλυτη διαφορά των αντίστοιχων stop-loss ασφαλίστρων τους, είναι ίση με τη μισή διαφορά των διακυμάνσεων των δύο αυτών τυχαίων μεταβλητών. Το πρώτο μέλος επομένως στην ισότητα της παραπάνω σχέσης είναι μη αρνητικό, έτσι αν επιπλέον ισχύει: $Var[X] = Var[Y]$, τότε πρέπει οι X και Y απαραίτητα να έχουν ίσα stop-loss ασφάλιστρα, το οποίο σημαίνει ότι έχουν ίδια κατανομή. Επίσης διαπιστώνουμε ότι αν $X \le_{cx} Y$, και οι τ.μ. X και Y δεν έχουν ίδια κατανομή, τότε η $Var[X]$ είναι αυστηρά μικρότερη από την $Var[Y]$. Σημειώνουμε ότι οι σχέσεις (9) και (13) έχουν οριστεί κάτω από την υπόθεση ότι οι τ.μ. X και Y έχουν πεπερασμένες δεύτερες ροπές. Έτσι και τα δύο όρια $\lim_{x\to\infty} x^2(1-F_X(x))$ και $\lim_{x\to-\infty} x^2 F_X(x)$ είναι ίσα με μηδέν (και όμοια για τη τ.μ. Y).

1.2. Αντίστροφες Συναρτήσεις Κατανομών

Ορισμός 1.2.1. (Συνάρτηση Κατανομής)

Η συνάρτηση κατανομής(α.σ.κ.) μιας τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως: $F_X(x) = \Pr[X \le x]$ και είναι μια δεξιά συνεχής και μη φθίνουσα συνάρτηση με

$$F_X(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \text{ και } F_X(\infty) = \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1.$$

Ορισμός 1.2.2. (Αντίστροφη της Συνάρτησης κατανομής)

Η αντίστροφη της συνάρτησης κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι μια μη φθίνουσα και δεξιά συνεχής συνάρτηση $F_X^{-1}(p)$ που ορίζεται ως εξής

$$F_X^{-1}(p) = \inf\{x \in \Re \mid F_X(x) \ge p\},\ p \in [0,1] \quad , \tag{14}$$

με $\inf \varnothing = +\infty$ από ορισμό. Για κάθε $x \in \Re$ και για $p \in [0,1]$, έχουμε ότι

$$F_X^{-1}(p) \le x \Leftrightarrow p \le F_X(x). \tag{15}$$

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε ένα πιο περίπλοκο ορισμό για τις αντίστροφες των συναρτήσεων κατανομής. Για κάθε πραγματικό $p \in [0,1]$, μια πιθανή επιλογή για την αντίστροφη της F_X στο p είναι οποιοδήποτε σημείο στο κλειστό διάστημα

$$[\inf\{x \in \Re \mid F_X(x) \ge p\}, \sup\{x \in \Re \mid F_X(x) \le p\}],$$

όπου, $\inf \varnothing = +\infty$ και επίσης $\sup \varnothing = -\infty$. Αν πάρουμε το αριστερά σύνορο από το παραπάνω διάστημα να είναι η αξία της αντίστροφης α.σ.κ. στο p, παίρνουμε την $F_X^{-1}(p)$ που ορίσαμε παραπάνω.

Ομοίως, καθορίζουμε το $F_X^{-1+}(p)$ ως το δεξιά σύνορο του παραπάνω διαστήματος

$$F_X^{-1+}(p) = \sup\{x \in \Re \mid F_X(x) \le p\},\ p \in [0,1] \quad , \tag{16}$$

που είναι μια μη φθίνουσα και και αριστερά συνεχής συνάρτηση. Σημειώνουμε ότι $F_X^{-1+}(0) = -\infty, F_X^{-1+}(1) = \infty$ και έτσι όλη η μάζα πιθανότητας της X περιέχεται στο διάστημα: $[F_X^{-1+}(0), F_X^{-1+}(1)]$. Επίσης παρατηρούμε ότι οι $F_X^{-1}(p)$ και $F_X^{-1+}(p)$ είναι πεπερασμένες για όλα τα $p \in (0,1)$. Κατά συνέπεια, θα χρησιμοποιούμε πάντα το p σαν μια μεταβλητή στο ανοικτό διάστημα (0,1).

Ορισμός 1.2.3. (*α*-Μικτή αντίστροφη της συνάρτησης κατανομής της τ.μ. *X*)

Για κάθε $\alpha \in [0,1]$, ορίζουμε την *α*-μικτή αντίστροφη συνάρτηση της F_X ως εξής

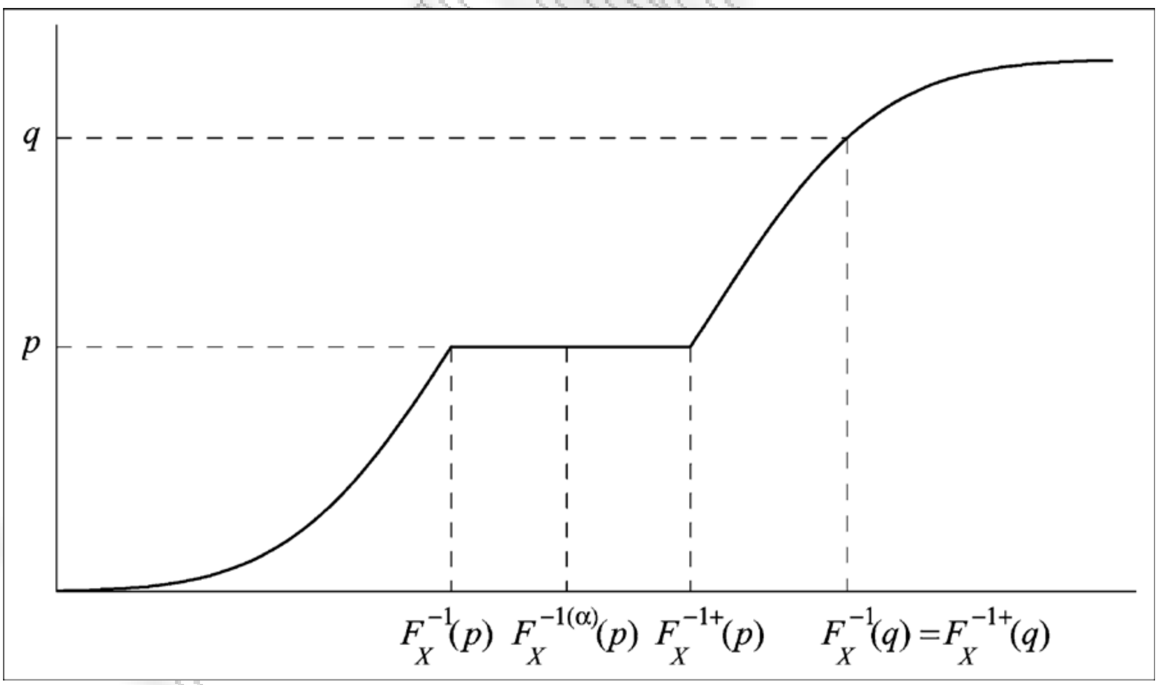
$$F_X^{-1(\alpha)}(p) = \alpha F_X^{-1}(p) + (1-\alpha) F_X^{-1+}(p),\ p \in (0,1) \tag{17}$$

που είναι μια μη φθίνουσα συνάρτηση.

Από τον παραπάνω ορισμό, βρίσκουμε ότι $F_X^{-1(0)}(p) = F_X^{-1+}(p)$ και $F_X^{-1(1)}(p) = F_X^{-1}(p)$.

Επίσης βρίσκουμε ότι για όλα τα $\alpha \in [0,1]$ ισχύει

$$F_X^{-1}(p) \le F_X^{-1(a)}(p) \le F_X^{-1+}(p),\ p \in (0,1). \tag{18}$$



Σχήμα 1.2.4. Γραφική απεικόνιση των F_X^{-1}, F_X^{-1+} και $F_X^{-1(a)}$

Παρατηρήσεις

Σημειώνουμε ότι μόνο οι τιμές του p που αντιστοιχούν σε ένα οριζόντιο τμήμα της F_X οδηγούν σε διαφορετικές τιμές των $F_X^{-1}(p), F_X^{-1+}(p), F_X^{-1(a)}(p)$. Αυτό το φαινόμενο απεικονίζεται στο Σχήμα 1.2.4.

Τώρα παίρνουμε το όριο ιδίας κράτησης d να είναι τέτοιο ώστε να ισχύει $0 < F_X(d) < 1$. Επομένως οι $F_X^{-1}(F_X(d))$ και $F_X^{-1+}(F_X(d))$ είναι πεπερασμένες,και $F_X^{-1}(F_X(d)) \le d \le F_X^{-1+}(F_X(d))$). Έτσι για κάποια τιμή $\alpha_d \in [0,1]$, το d μπορεί να εκφραστεί ως

$$d = \alpha_d F_X^{-1}(F_X(d)) + (1-\alpha_d)F_X^{-1+}(F_X(d)) = F_X^{-1(\alpha_d)}(F_X(d)).$$

Αυτό σημαίνει ότι τελικά για οποιοδήποτε τυχαία μεταβλητή X και για οποιοδήποτε d με $0 < F_X(d) < 1$, υπάρχει ένα $\alpha_d \in [0,1]$ έτσι ώστε: $F_X^{-1(\alpha_d)}(F_X(d)) = d$.

Στο παρακάτω θεώρημα, δηλώνουμε τη σχέση μεταξύ της αντίστροφης των συναρτήσεων κατανομής των τυχαίων μεταβλητών X και g(X) για μια μονότονη συνάρτηση g.

Θεώρημα 1.2.5. (Αντίστροφη της συνάρτησης κατανομής της g(X))

Θεωρούμε δύο πραγματικές τυχαίες μεταβλητές X και g(X) και $0 < p < 1$.

(α) Αν η g είναι μια μη φθίνουσα και αριστερά συνεχής πραγματική συνάρτηση, τότε

$$F_{g(X)}^{-1}(p) = g(F_X^{-1}(p)). \tag{19}$$

(β) Αν η g είναι μια μη φθίνουσα και δεξιά συνεχής πραγματική συνάρτηση, τότε

$$F_{g(X)}^{-1+}(p) = g(F_X^{-1+}(p)). \tag{20}$$

(γ) Αν η g είναι μια μη αύξουσα και αριστερά συνεχής πραγματική συνάρτηση, τότε

$$F_{g(X)}^{-1+}(p) = g(F_X^{-1}(1-p)). \tag{21}$$

(δ) Αν η g είναι μια μη αύξουσα και δεξιά συνεχής πραγματική συνάρτηση, τότε

$$F_{g(X)}^{-1}(p) = g(F_X^{-1+}(1-p)). \tag{22}$$

Απόδειξη:

(α) Θεωρούμε μια μη φθίνουσα και αριστερά συνεχής συνάρτηση g και $0<p<1$. Από τη σχέση (15) για κάθε πραγματικό x βρίσκουμε ότι

$F_{g(X)}^{-1}(p) \leq x \Leftrightarrow p \leq F_{g(X)}(x)$.

Επειδή η g είναι αριστερά συνεχής(α.σ.), έχουμε ότι

$g(z) \leq x \Leftrightarrow z \leq \sup\{y | g(y) \leq x\}$,

που ισχύει για όλους τους πραγματικούς z και x. Έτσι

$p \leq F_{g(X)}(x) \Leftrightarrow p \leq F_X[\sup\{y | g(y) \leq x\}]$.

Αν το $\sup\{y | g(y) \leq x\}$ είναι πεπερασμένο τότε βρίσκουμε από τη σχέση (15) και από την παραπάνω ισοδυναμία ότι

$p \leq F_X[\sup\{y | g(y) \leq x\}] \Leftrightarrow F_X^{-1}(p) \leq \sup\{y | g(y) \leq x\}$.

Στην περίπτωση που το $\sup\{y | g(y) \leq x\}$ είναι $-\infty$ ή $+\infty$, τότε δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (15). Θα αποδείξουμε όμως ότι και σε αυτές τις ειδικές περιπτώσεις, η παραπάνω ισοδυναμία ισχύει.

Πράγματι, αν το *sup* ισούται με $-\infty$, τότε η ισοδυναμία γίνεται $p \leq 0 \Leftrightarrow F_X^{-1}(p) \leq -\infty$.

Αν το *sup* ισούται με $+\infty$, τότε η ισοδυναμία γίνεται $p \leq 1 \Leftrightarrow F_X^{-1}(p) \leq +\infty$.

Επειδή η g είναι μια μη φθίνουσα και αριστερά συνεχής πραγματική συνάρτηση, παίρνουμε ότι

$F_X^{-1}(p) \leq \sup\{y | g(y) \leq x\} \Leftrightarrow g(F_X^{-1}(p)) \leq x$.

Τέλος, αν ενώσουμε τις παραπάνω ισοδυναμίες παίρνουμε:

$F_{g(X)}^{-1}(p) \leq x \Leftrightarrow g(F_X^{-1}(p)) \leq x$

που ισχύει για όλες τις τιμές του x. Αυτό σημαίνει πως πρέπει:

$F_{g(X)}^{-1}(p) = g(F_X^{-1}(p))$, το οποίο είναι το ζητούμενο.

Όμοια αποδεκνύονται και τα άλλα ερωτήματα.

Ειδικές Περιπτώσεις

Όταν οι g και F_X είναι συνεχείς και γνησίως αύξουσες συναρτήσεις επάνω στο $[F_X^{-1+}(0), F_X^{-1}(1)]$, μπορούμε να κάνουμε μια απλούστερη απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος. Πράγματι αν πάρουμε: $F_{g(X)}(x) = (F_X \circ g^{-1})(x)$, η οποία είναι μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση του *x*, τότε τα ερωτήματα (α) και (β) προκύπτουν απλά από την αντιστροφή της παραπάνω σχέσης. Μια παρόμοια απόδειξη ισχύει για τα ερωτήματα (γ) και (δ) αν η g και F_X είναι και οι δύο συνεχείς, ενώ η g είναι μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση και η F_X είναι γνησίως αύξουσα.

Αν συμβολίσουμε τώρα με U μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την *Ομοιόμορφη* κατανομή στο $(0,1)$ τότε: $F_U(p) = p$ και $F_U^{-1}(p) = p$ για όλα τα $0 < p < 1$. Αποδεικνύεται ότι για όλα τα $\alpha \in [0,1]$,

$$X \overset{d}{=} F_X^{-1}(U) \overset{d}{=} F_X^{-1+}(U) \overset{d}{=} F_X^{-1(a)}(U). \tag{23}$$

Το παραπάνω σημαίνει πως ένα δείγμα από τυχαίους αριθμούς μιας γενικής συνάρτησης κατανομής F_X μπορεί να παραχθεί από ένα δείγμα τυχαίων αριθμών από την *Ομοιόμορφη* κατανομή στο $(0,1)$. Σημειώνουμε ότι η F_X έχει ένα μικρό αριθμό οριζόντιων τμημάτων, που σημαίνει ότι οι τρεις τυχαίες μεταβλητές στη σχέση (23) διαφέρουν μόνο σε ένα μηδενικό σύνολο τιμών της *U*. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές είναι ίσες με πιθανότητα 1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Συμονοτονικότητα: Συμονοτονικά σύνολα και τυχαίες μεταβλητές, αθροίσματα συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών

2.1. Συμονοτονικά σύνολα και τυχαία διανύσματα

Όπως αναφέραμε στην Εισαγωγή, αρκετά συχνά ιδιαίτερα στον Οικονομικο-ασφαλιστικό τομέα υπολογίζουμε αθροίσματα του τύπου $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, όπου οι όροι (τυχαίες μεταβλητές) X_i δεν είναι αμοιβαία ανεξάρτητοι, και η πολυμεταβλητή (από κοινού) συνάρτηση κατανομής του τυχαίου διανύσματος $\underline{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ δεν μπορεί να οριστεί ακριβώς επειδή γνωρίζουμε μόνο την περιθώρια συνάρτηση κατανομής των τυχαίων μεταβλητών X_i. Σε τέτοιες περιπτώσεις, για να λάβουμε κάποιες αποφάσεις, μπορεί να είναι χρήσιμο να βρεθεί η δομή εξάρτησης για το τυχαίο διάνυσμα $(X_1, X_2, ..., X_n)$ παράγοντας τις λιγότερο ευνοϊκές (ελκυστικές) συνολικές αξίες του S με δοσμένες τις περιθώριες κατανομές. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη τις περιθώριες κατανομές των όρων σε μια τυχαία μεταβλητή $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, θα ψάξουμε για την από-κοινού κατανομή με το μεγαλύτερο άθροισμα, υπό την έννοια της κυρτής διάταξης που αναφέραμε στο Κεφάλαιο 1. Όπως θα αποδείξουμε στην Ενότητα 2.1, το μεγαλύτερο κυρτό άθροισμα των συνιστωσών ενός τυχαίου διανύσματος $(X_1, X_2, ..., X_n)$ με δοσμένες τις περιθώριες κατανομές θα ληφθεί στην περίπτωση που το τυχαίο διάνυσμα $(X_1, X_2, ..., X_n)$ ακολουθεί τη συμονοτονική κατανομή, το οποίο σημαίνει ότι κάθε δύο πιθανά αποτελέσματα

$(x_1, x_2, ..., x_n)$ και $(y_1, y_2, ..., y_n)$ του τυχαίου διανύσματος $(X_1, X_2, ..., X_n)$ είναι διαταγμένα κατά συνιστώσες.

Αρχικά θα ορίσουμε τη συμονοτονικότητα ενός συνόλου από διανύσματα μέσα στον $\mathbb{R}^n$. Ένα διάνυσμα $(x_1, x_2, ..., x_n)$ θα οριστεί ως $\underline{x}$. Για δύο διανύσματα $\underline{x}$ και $\underline{y}$, η σχέση $\underline{x} \leq \underline{y}$ θα χρησιμοποιηθεί για την κατά συνιστώσα διάταξη που ορίζεται ως $x_i \leq y_i$ για όλα τα $i = 1, 2, ..., n$.

Ορισμός 2.1.1. (Συμονοτονικό Σύνολο)

Θα λέμε ότι το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι συμονοτονικό αν για κάθε $\underline{x}$ και $\underline{y}$ στο *A,* ή ισχύει το $\underline{x} \leq \underline{y}$ ή ότι $\underline{y} \leq \underline{x}$.

Έτσι, για να λέγεται το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ συμονοτονικό πρέπει για κάθε $\underline{x}$ και $\underline{y}$ στο *A,* αν ισχύει ότι $x_i \leq y_i$, τότε να ισχύει επίσης ότι $\underline{x} \leq \underline{y}$. Επομένως, ένα συμονοτονικό σύνολο είναι ταυτόχρονα ένα μη φθίνων σύνολο για κάθε συνιστώσα. Παρατηρούμε ότι ένα συμονοτονικό σύνολο δεν μπορεί να περιέχει οποιοδήποτε υποσύνολο διάστασης μεγαλύτερης από 1 και επίσης ότι κάθε υποσύνολο ενός συμονοτονικού συνόλου είναι επίσης συμονοτονικό.

Λήμμα 2.1.2. (Συμονοτονικότητα Κατά ζεύγη)

Αρχικά ορίζουμε την *(i, j)* - προβολή ενός συνόλου *A* στο $\mathbb{R}^n$, που θα τη συμβολίζουμε ως $A_{i,j}$, ως εξής:

$$A_{i,j} = \{(x_i, x_j) | \underline{x} \in A\}. \quad (24)$$

Θα λέμε ότι το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι συμονοτονικό αν και μόνο αν το $A_{i,j}$ είναι συμονοτονικό για κάθε $i \neq j$ στο $\{i = 1, 2, ..., n\}$.

Απόδειξη: Η απόδειξη του Λήμματος είναι απλή.

Παρατήρηση

Από το Λήμμα φαίνεται ότι για ένα γενικό σύνολο *A*, η συμονοτονικότητα των (*i,i* +1) – προβολών $A_{i,i+1}$ $(i = 1, 2, ..., n-1)$, δεν θα σημαίνει απαραίτητα ότι το *A* είναι συμονοτονικό.

Για παράδειγμα, εξετάζουμε το σύνολο $A = \{(x_1, 1, x_3) \mid 0 < x_1, x_3 < 1\}$. Αυτό το σύνολο δεν είναι συμονοτονικό, αν και το $A_{1,2}$ και $A_{2,3}$ είναι συμονοτονικά.

Τώρα μπορούμε να καθορίσουμε την έννοια της «**υποστήριξης**» ενός *n*-διάστατου τυχαίου διανύσματος $\underline{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$. Οποιοδήποτε υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ θα λέγεται «**υποστήριξη**» του $\underline{X}$ αν $\Pr[\underline{X} \in A] = 1$. Γενικά, θα ενδιαφερθούμε για τις υποστηρίξεις που είναι "όσο το δυνατόν μικρότερες". Ανεπίσημα, η μικρότερη «υποστήριξη» ενός τυχαίου διανύσματος $\underline{X}$ είναι το υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ που λαμβάνεται με την αφαίρεση από τον $\mathbb{R}^n$ όλων των σημείων που έχουν μια γειτονιά μηδενικής πιθανότητας (όσον αφορά το $\underline{X}$). Αυτή η υποστήριξη μπορεί να ερμηνευθεί ως το σύνολο όλων των πιθανών εκβάσεων του $\underline{X}$.

Ορισμός 2.1.3. (Συμονοτονικό Τυχαίο διάνυσμα)

Ένα τυχαίο διάνυσμα $\underline{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ θα λέγεται ότι είναι συμονοτονικό αν έχει μια συμονοτονική «υποστήριξη».

Παρατηρήσεις

(i) Από τον Ορισμό, βλέπουμε ότι η συμονοτονικότητα είναι μια πολύ ισχυρή θετική δομή εξάρτησης. Πράγματι, αν το $\underline{x}$ και $\underline{y}$ είναι στοιχεία της (συμονοτονικής) «υποστήριξης» του $\underline{X}$, δηλ. το $\underline{x}$ και $\underline{y}$ είναι πιθανές εκβάσεις του $\underline{X}$, τότε πρέπει να διαταχτούν κατά συνιστώσα.

(ii) Η συμονοτονικότητα ενός τυχαίου διανύσματος $\underline{X}$ δηλώνει ότι όσο υψηλότερη είναι η αξία ενός όρου X_j, τόσο υψηλότερη είναι η αξία οποιουδήποτε άλλου όρου X_k.

Στο παρακάτω Θεώρημα δίνουμε μερικούς ισοδύναμους χαρακτηρισμούς για τη συμονοτονικότητα ενός τυχαίου διανύσματος.

Θεώρημα 2.1.4. (Ισοδύναμες συνθήκες για τη Συμονοτονικότητα)

Ένα τυχαίο διάνυσμα $\underline{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ είναι συμονοτονικό αν και μόνο αν μια από τις ακόλουθες ισοδύναμες συνθήκες ισχύει:

(α) Το $\underline{X}$ έχει μια συμονοτονική «υποστήριξη».

(β) Για όλα τα $\underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, έχουμε

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \min\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), ..., F_{X_n}(x_n)\}. \tag{25}$$

(γ) Για μια τυχαία μεταβλητή U~Uniform(0,1), έχουμε

$$\underline{X} \overset{d}{=} (F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U), ..., F_{X_n}^{-1}(U)). \tag{26}$$

(δ) Αν υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή Z και μη φθίνουσες συναρτήσεις $f_i (i = 1, 2, ..., n)$, έτσι ώστε

$$\underline{X} \overset{d}{=} (f_1(Z), f_2(Z), ..., f_n(Z)). \tag{27}$$

Απόδειξη:

Θα αποδείξουμε αρχικά πως από το (α) συνεπάγεται το (β).

[(α) $\Rightarrow$ (β)] Υποθέτουμε ότι το $\underline{X}$ έχει τη συμονοτονική «υποστήριξη» B. Παίρνουμε το $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ και το A_j να ορίζεται ως

$$A_j = \{\underline{y} \in B \,|\, y_j \le x_j\},\ j = 1, 2, ..., n.$$

Επειδή το B είναι ένα συμονοτονικό σύνολο, υπάρχει ένα i έτσι ώστε $A_i = \cap_{j=1}^{n} A_j$. Έτσι βρίσκουμε ότι

$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \Pr(\underline{X} \in \cap_{j=1}^{n} A_j) = \Pr(\underline{X} \in A_i) = F_{X_i}(x_i)$.

Από την άλλη όμως, επειδή $A_i \subset A_j$, έχουμε ότι $F_{X_i}(x_i) \le F_{X_j}(x_j)$ που ισχύει για όλες τις τιμές του j. Επομένως

$F_{X_i}(x_i) = \min\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), ..., F_{X_n}(x_n)\}$, το οποίο είναι το ζητούμενο.

Τώρα θα δείξουμε πως από το ερώτημα (β) συνεπάγεται το (γ).

[(β)$\Rightarrow$(γ)] Υποθέτουμε ότι $F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \min\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), ..., F_{X_n}(x_n)\}$ για όλα τα $\underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Τότε βρίσκουμε από τη σχέση (15) ότι

$\Pr[F_{X_1}^{-1}(U) \le x_1, ..., F_{X_n}^{-1}(U) \le x_n] = \Pr[U \le F_{X_1}(x_1), ..., U \le F_{X_n}(x_n)]$

$= \Pr[U \le \min_{j=1,2,...,n}\{F_{X_j}(x_j)\}] = \min_{j=1,2,...,n}\{F_{X_j}(x_j)\}$

[(γ)$\Rightarrow$(δ)] Η απόδειξη είναι απλή.

Τέλος θα δείξουμε πως από το ερώτημα (δ) συνεπάγεται το (α).

[(δ)$\Rightarrow$(α)] Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή Z με «υποστήριξη» B, και μη φθίνουσες συναρτήσεις $f_i (i = 1, 2, ..., n)$, έτσι ώστε

$\underline{X} \overset{d}{=} (f_1(Z), f_2(Z), ..., f_n(Z))$.

Παρατηρούμε ότι το σύνολο των πιθανών εκβάσεων του $\underline{X}$ είναι $\{(f_1(z), f_2(z), ..., f_n(z)) | z \in B\}$ το οποίο είναι προφανώς συμονοτονικό, και το οποίο δηλώνει ότι το $\underline{X}$ είναι πράγματι συμονοτονικό.

Σχόλια

Από τη σχέση (25) βλέπουμε ότι, προκειμένου να βρεθεί η πιθανότητα όλων των εκβάσεων των n συμονοτονικών κινδύνων X_i που είναι μικρότεροι από τους $x_i (i = 1, 2, ..., n)$, απλά παίρνουμε την πιθανότητα των λιγότερο πιθανών αυτών εκβάσεων n. Είναι προφανές ότι για οποιοδήποτε τυχαίο διάνυσμα $(X_1, X_2, ..., X_n)$, όχι απαραιτήτως συμονοτονικό, ισχύει η ακόλουθη ανισότητα

$$\Pr[X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, ..., X_n \le x_n] \le \min\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), ..., F_{X_n}(x_n)\} \quad (28)$$

Όπως έχει αποδειχθεί στις εργασίες των **Hoeffding[2]** και **Fréchet[3]**, η συνάρτηση κατανομής του ελαχίστου $\min\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), ..., F_{X_n}(x_n)\}$ είναι πράγματι η πολυμεταβλητή(από-κοινού) α.σ.κ. ενός τυχαίου διανύσματος, δηλ. $(F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U), ..., F_{X_n}^{-1}(U))$, το οποίο έχει τις ίδιες περιθώριες με το $(X_1, X_2, ..., X_n)$. Η ανισότητα (28) δηλώνει ότι στην κατηγορία όλων των τυχαίων διανυσμάτων $(X_1, X_2, ..., X_n)$ με τις ίδιες περιθώριες, η πιθανότητα όλα τα X_i να έχουν ταυτόχρονα «μικρές» τιμές, μεγιστοποιείται αν το διάνυσμα είναι συμονοτονικό, εφόσον η συμονοτονικότητα φανερώνει μια πολύ ισχυρή θετική δομή εξάρτησης.

Από τη σχέση (26) διαπιστώνουμε ότι στην ειδική περίπτωση που όλες οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομής F_{X_i} είναι ίδιες, η συμονοτονικότητα του $\underline{X}$ είναι ισοδύναμη με το να πούμε ότι η σχέση $X_1 = X_2 = ... = X_n$ ισχύει σχεδόν βέβαια.

Ένας τυποποιημένος τρόπος για να μοντελοποιήσουμε τις καταστάσεις στις οποίες οι μεμονωμένες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, ..., X_n$ υπόκειται στον ίδιο εξωτερικό μηχανισμό είναι να χρησιμοποιήσουμε μια δευτέρου βαθμού μικτική κατανομή. Η αβεβαιότητα για τον εξωτερικό μηχανισμό περιγράφεται από μια μεταβλητή *z*,που είναι μια πραγματοποίηση της τυχαίας μεταβλητής *Z*, και ενεργεί σαν μια (τυχαία) παράμετρος της κατανομής του $\underline{X}$. Οι συνολικές αξίες μπορούν να θεωρηθούν ως μια διαδικασία δύο σταδίων: Κατ' αρχάς, η εξωτερική παράμετρος *Z*=*z* προέρχεται από τη συνάρτηση κατανομής F_Z του *z*. Το μέγεθος ζημιάς κάθε μεμονωμένου κινδύνου X_i λαμβάνεται ως μια πραγματοποίηση από την δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής της X_i, δοθέντος δηλ. ότι $Z = z$.

Ένας ειδικός τύπος ενός τέτοιου μικτικού προτύπου είναι η περίπτωση όπου $Z = z$, τα ποσά αξίας X_i είναι εκφυλισμένα σε x_i, όπου τα $x_i = x_i(z)$ είναι μη φθίνουσες συναρτήσεις στο *z*. Αυτό σημαίνει ότι $(X_1, ..., X_n) \stackrel{d}{=} (f_1(z), ..., f_n(z))$ όπου όλες οι συναρτήσεις f_i είναι μη φθίνουσες. Επομένως από προηγούμενο Θεώρημα διαπιστώνουμε ότι το $(X_1, X_2, ..., X_n)$ είναι συμονοτονικό. Ένα τέτοιο πρότυπο είναι από μία άποψη μια ακραία μορφή ενός μικτικού μοντέλου,δεδομένου ότι σε αυτήν την περίπτωση η εξωτερική παράμετρος *Z* = *z* καθορίζει τις συνολικές αξίες (αποζημιώσεις).

Αφού τα τυχαία διανύσματα $(F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U), ..., F_{X_n}^{-1}(U))$ και $(F_{X_1}^{-1(a_1)}(U), F_{X_2}^{-1(a_2)}(U), ..., F_{X_n}^{-1(a_n)}(U))$ είναι ίσα με πιθανότητα 1, διαπιστώνουμε ότι η συμονοτονικότητα του $\underline{X}$ μπορεί να χαρακτηριστεί από:

$$\underline{X} \stackrel{d}{=} (F_{X_1}^{-1(a_1)}(U), F_{X_2}^{-1(a_2)}(U), ..., F_{X_n}^{-1(a_n)}(U)) \tag{29}$$

για μια μεταβλητή U~Uniform(0,1) και για δοσμένους πραγματικούς αριθμούς $\alpha_i \in [0,1]$.

Γνωρίζουμε ότι αν U~Uniform(0,1), τότε και η *1-U~Uniform*(0,1). Αυτό δηλώνει ότι η συμονοτονικότητα του $\underline{X}$ μπορεί να χαρακτηριστεί από:

$$\underline{X} \stackrel{d}{=} (F_{X_1}^{-1}(1-U), F_{X_2}^{-1}(1-U), ..., F_{X_n}^{-1}(1-U)) \ . \tag{30}$$

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι το $\underline{X}$ είναι συμονοτονικό αν και μόνο αν υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή Z και μη αύξουσες συναρτήσεις $f_i (i = 1, 2, ..., n)$, έτσι ώστε:

$$\underline{X} \stackrel{d}{=} (f_1(z), f_2(z), ..., f_n(z)). \tag{31}$$

Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του χαρακτηρισμού (δ) στο Θεώρημα 2.1.4..

Κατά συνέπεια, για οποιοδήποτε τυχαίο διάνυσμα $(X_1, X_2, ..., X_n)$, η έκφραση $(X_1^c, X_2^c, ..., X_n^c)$ θα χρησιμοποιείται για να δηλώνει ένα συμονοτονικό τυχαίο διάνυσμα με τις ίδιες περιθώριες όπως το $(X_1, X_2, ..., X_n)$. Από τη σχέση (26), βρίσκουμε ότι για οποιοδήποτε τυχαίο διάνυσμα $\underline{X}$ η πραγματοποίηση του αντίστοιχου συμονοτονικού του $\underline{X}^c = (X_1^c, X_2^c, ..., X_n^c)$ ανήκει με πιθανότητα 1 στο ακόλουθο σύνολο:

$$\{(F_{X_1}^{-1}(p), F_{X_2}^{-1}(p), ..., F_{X_n}^{-1}(p)) \big| 0 < p < 1\}. \tag{32}$$

Αυτή η «υποστήριξη» του $\underline{X}^c$ που βρήκαμε στη σχέση (32) δεν είναι απαραιτήτως μια συνεχής καμπύλη. Πράγματι, όλα τα οριζόντια τμήματα της α.σ.κ. του X_i οδηγούν σε "ελλειπόντα κομμάτια" στην καμπύλη. Αυτή η «υποστήριξη» μπορεί να φανεί για ένα σύνολο διαταγμένων συνεχών καμπυλών. Τώρα με τη σύνδεση των σημείων των διαδοχικών καμπυλών με ευθείες γραμμές, λαμβάνουμε μια συμονοτονική συνεχής καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$. Έτσι, μπορεί να έρθει σε μια κατεύθυνση που είναι ανοδική για όλες τις συνιστώσες ταυτόχρονα. Αυτό το σύνολο θα το ονομάζουμε «συνεχής υποστήριξη» του $\underline{X}^c$. Μπορεί να παραμετροποιηθεί ως εξής:

$$\{(F_{X_1}^{-1(a)}(p), F_{X_2}^{-1(a)}(p), ..., F_{X_n}^{-1(a)}(p)) \big| 0 < p < 1, 0 \leq \alpha \leq 1\}. \tag{33}$$

Παρατηρούμε ότι αυτή η παραμετροποίηση δεν είναι απαραιτήτως μοναδική: μπορούν να υπάρξουν όροι στη «συνεχής υποστήριξη» που να χαρακτηρίζονται από διαφορετικές τιμές του α.

Θεώρημα 2.1.5. (Συμονοτονικότητα Κατά Ζεύγη για Τυχαία Διανύσματα)

Ένα τυχαίο διάνυσμα $\underline{X}$ είναι συμονοτονικό αν και μόνο αν τα ζεύγη (X_i, X_j) είναι συμονοτονικά για όλα τα $i \neq j$ στο $\{1,2,...,n\}$.

Απόδειξη:

Η απόδειξη του "$\Rightarrow$" είναι απλή.

Για να αποδείξουμε το αντίστροφο ("$\Leftarrow$"), αρχικά ορίζουμε ένα σύνολο A στον $\mathbb{R}^n$ ως εξής:

$A = \{(F_{X_1}^{-1}(p), F_{X_2}^{-1}(p), ..., F_{X_n}^{-1}(p)) \big| 0 < p < 1\}$.

Έπειτα ορίζουμε τις (i, j) - προβολές ως:

$A_{i,j} = \{(F_{X_i}^{-1}(p), F_{X_j}^{-1}(p)) \big| 0 < p < 1\}$.

Το γεγονός ότι "$\underline{X} \in A$" είναι ισοδύναμο με το ότι "$(X_i, X_j) \in A_{i,j}$ για όλα τα (i, j)". Όμως από υπόθεση έχουμε ότι τα ζεύγη (X_i, X_j) είναι συμονοτονικά για όλα τα $i \neq j$ στο $\{1,2,...,n\}$. Επομένως το δεύτερο γεγονός ισχύει. Έτσι έχουμε ότι: $\Pr[\underline{X} \in A] = 1$. Αυτό σημαίνει ότι το συμονοτονικό σύνολο A είναι μια «υποστήριξη» του $\underline{X}$. Άρα το $\underline{X}$ είναι ένα συμονοτονικό τυχαίο διάνυσμα.

Παρατηρήσεις:

(i) Το παραπάνω Θεώρημα δηλώνει ότι η συμονοτονικότητα ενός τυχαίου διανύσματος είναι ισοδύναμη με τη συμονοτονικότητα κατά ζεύγη.

(ii) Αν εξετάσουμε το τυχαίο διάνυσμα $(U,1,V)$, όπου οι U και V είναι αμοιβαία ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που είναι και οι δύο *Ομοιόμορφα* κατανεμημένες στο διάστημα $(0,1)$, τότε είναι σαφές ότι τα $(U,1)$ και $(1,V)$ είναι και τα δύο συμονοτονικά ζεύγη, αλλά το $(U,1,V)$ δεν είναι συμονοτονικό.
Έτσι, για ένα γενικό τυχαίο διάνυσμα $\underline{X}$, η συμονοτονικότητα των ζευγαριών $(X_i, X_{i+1})(i=1,2,...,n-1)$, δηλώνει απαραίτητα τη συμονοτονικότητα του $\underline{X}$.

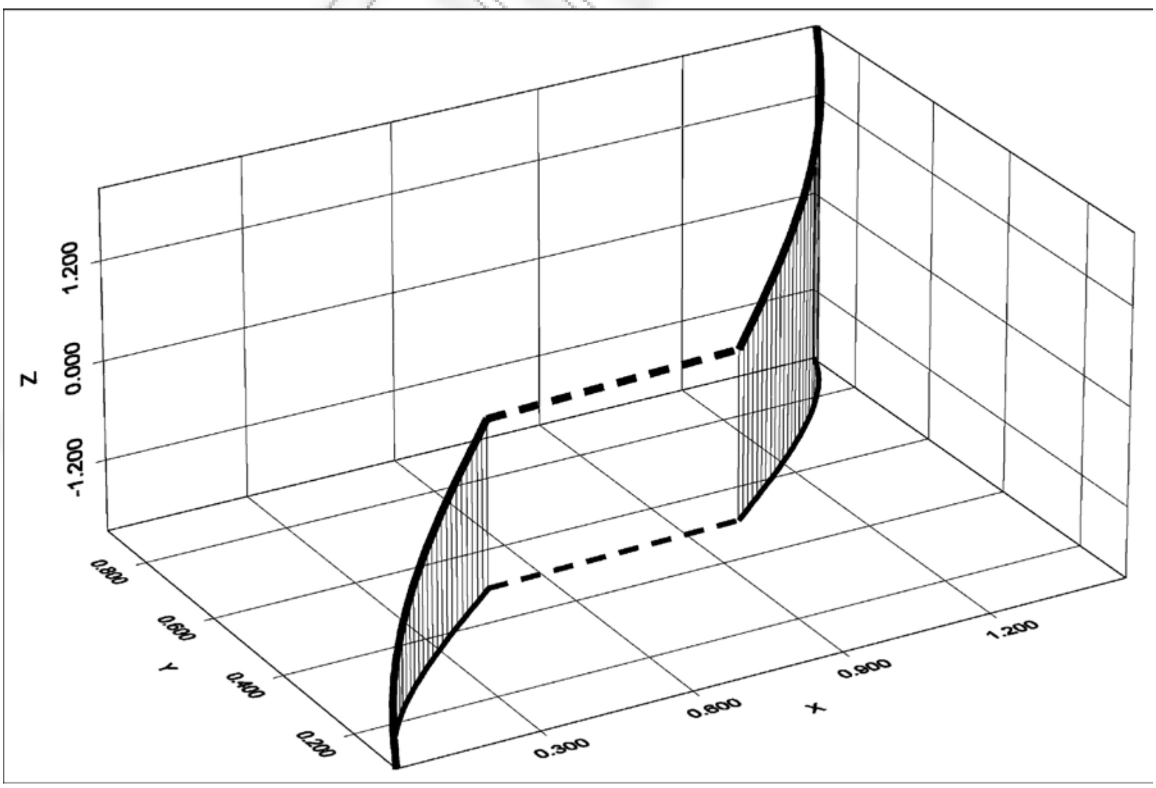
Παραδείγματα

1. Συνεχές Παράδειγμα

Θα δώσουμε αρχικά ένα παράδειγμα με συνεχείς κατανομές. Θεωρούμε δηλ. ότι η $X \sim Uniform$ στο σύνολο $(0,\frac{1}{2})\cup(1,\frac{3}{2})$, η $Y \sim Beta(2,2)$ δηλ. η συνάρτηση κατανομής της Y είναι: $F_Y(y) = 3y^2 - 2y^3$ στο $(0,1)$ και η $Z \sim \text{Normal}(0,1)$.

Αν οι X, Y και η Z είναι αμοιβαία ανεξάρτητες, τότε η «υποστήριξη» του (X,Y,Z) είναι το σύνολο:

$\{(x,y,z) \,|\, x \in (0,\frac{1}{2})\cup(1,\frac{3}{2}), y \in (0,1), z \in \mathbb{R}\}$.



Σχήμα 2.1.6. Ένα συνεχές παράδειγμα με $n = 3$.

Η «υποστήριξη» του συμονοτονικού τυχαίου διανύσματος (X^c, Y^c, Z^c) δίνεται από: $\{(F_X^{-1}(p), F_Y^{-1}(p), F_Z^{-1}(p)) \mid 0 < p < 1\}$, η οποία απεικονίζεται στο Σχήμα 2.1.6.

Πραγματικά, στο σχήμα δεν απεικονίζεται όλη αυτή η υποστήριξη.Το μέρος που μένει έξω αντιστοιχεί στο $p \notin (\Phi(-2), \Phi(2))$ και επεκτείνεται κατά μήκος των κάθετων ασυμπτωτικών γραμμών $(0,\ 0,\ z)$ και $(3/2, 1, z)$. Η παχιά συνεχής γραμμή είναι η «υποστήριξη» του $\underline{X}^c$, ενώ η διακεκομμένη γραμμή είναι η ευθεία γραμμή που απαιτείται για να μετασχηματίσει αυτήν την «υποστήριξη» σε «συνεχή υποστήριξη». Σημειώνουμε ότι η F_X έχει ένα οριζόντιο τμήμα μεταξύ του 1/2 και του 1. Η προβολή της συνεχής καμπύλης κατά μήκος του άξονα *z* φαίνεται ότι αποτελεί μια αύξουσα καμπύλη, όπως οι προβολές κατά μήκος των άλλων αξόνων.

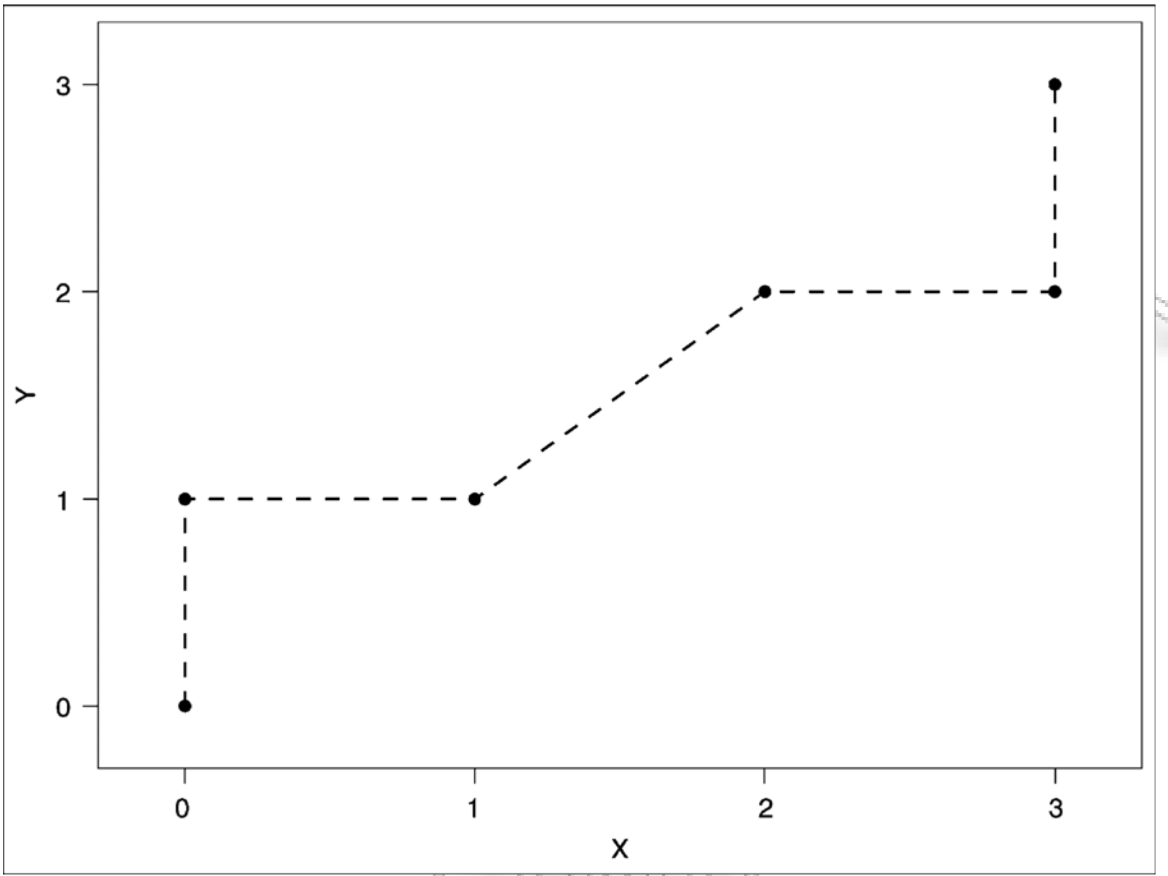
2. Διακριτό Παράδειγμα

Παρακάτω δίνουμε ένα παράδειγμα με διακριτές κατανομές. Θεωρούμε λοιπόν ότι: $X \sim Uniform$ στο *{0,1,2,3*) και η $Y \sim Binomial(3, 1/2)$. Αν οι *X, Y* είναι αμοιβαία ανεξάρτητες, τότε η «υποστήριξη» του *(X,Y)* είναι το σύνολο

$\{(F_X^{-1}(p), F_Y^{-1}(p)) \mid 0 < p < 1\}$.

Πιο συγκεκριμένα μπορούμε να βρούμε τα σημεία που αποτελούν την «υποστήριξη» του *(X,Y)* αφού οι κατανομές είναι διακριτές. Έτσι βρίσκουμε ότι

$$((F_X^{-1}(p), F_Y^{-1}(p)) = \begin{cases} (0,0) \text{ για } 0 < p \le 1/8 \\ (0,1) \text{ για } 1/8 < p \le 2/8 \\ (1,1) \text{ για } 2/8 < p \le 4/8 \\ (2,2) \text{ για } 4/8 < p \le 6/8 \\ (3,2) \text{ για } 6/8 < p \le 7/8 \\ (3,3) \text{ για } 7/8 < p \le 1 \end{cases}$$



Σχήμα 2.1.7. Ένα διακριτό παράδειγμα.

Η «υποστήριξη» του (X^c, Y^c) είναι ακριβώς αυτά τα έξι σημεία, και η «συνεχής υποστήριξη» προκύπτει απλά συνδέοντάς τα με ευθείες γραμμές, δηλ. οι διακεκομμένες γραμμές στο Σχήμα 2.1.7. Η ευθεία γραμμή που συνδέει τα σημεία (1,1) και (2,2) δεν βρίσκεται κατά μήκος ενός από τους άξονες. Αυτό συμβαίνει διότι στο επίπεδο $p = 1/2$, και οι δύο $F_X(y)$ και $F_Y(y)$ έχουν οριζόντια τμήματα. Σημειώνουμε ότι οποιαδήποτε μη φθίνουσα καμπύλη που συνδέει τα σημεία (1,1) και (2,2) θα οδηγεί σε μια εφικτή συνεχής καμπύλη. Αυτά τα δύο σημεία έχουν πιθανότητα 2/8, ενώ τα άλλα σημεία έχουν πιθανότητα 1/8.

2.2. Κλίμακα – Θέσης(*Location-Scale*) Οικογένειες Συναρτήσεων Κατανομής και Συμονοτονικότητα μέσω του Συντελεστή Συσχέτισης

Ορισμός 2.2.1. (Συντελεστής Συσχέτισης Κατά Pearson)

Θεωρούμε δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y. Ο συντελεστής συσχέτισης κατά **Pearson** για το ζεύγος τ.μ. (X,Y) ορίζεται ως εξής

$$r(X,Y) = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}},$$

όπου $\mathrm{Cov}[X,Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$ είναι η συνδιακύμανση του X και του Y.

Συμπεράσματα

(i) Γνωρίζουμε ότι $r(\mathrm{X},Y) = 1$ αν και μόνο αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\alpha > 0$ και β έτσι ώστε η $Y = \alpha X + \beta$ να ισχύει με πιθανότητα 1. Έτσι, αν ισχύει ότι $r(\mathrm{X},Y) = 1$, τότε το ζεύγος τ.μ. (X,Y) είναι συμονοτονικό. Σε αυτή την περίπτωση η συνεχής «υποστήριξη» του παραπάνω διανύσματος είναι μια ευθεία γραμμή. Από αυτή την άποψη, η συμονοτονικότητα είναι μια επέκταση της έννοιας της θετικά τέλειας συσχέτισης.

(ii) Όπως αποδείχθηκε στο Θεώρημα 2.1.4., στην κατηγορία όλων των n - διάστατων τυχαίων μεταβλητών με δοσμένες περιθώριες συναρτήσεις κατανομών F_i, $i = 1, 2..., n$, το συμονοτονικό άνω φράγμα επιτυγχάνεται από το διάνυσμα $(F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U), ..., F_n^{-1}(U))$. Όμως για να δείξουμε ότι το διάνυσμα είναι συμονοτονικό, στη πράξη είναι δύσκολο να βρεθεί ένα ζευγάρι τ.μ. (X,Y) με $r(\mathrm{X},Y) = 1$ στην κατηγορία όλων των διμεταβλητών τυχαίων μεταβλητών με δοσμένες περιθώριες F_1 και F_2. Για να ισχύει το παραπάνω, πρέπει να υπάρχουν $\alpha > 0$ και β έτσι ώστε: $F_2(y) = F_1(y - b/\alpha)$ για όλα *τα* y, το οποίο σημαίνει ότι οι F_1 και F_2 πρέπει να ανήκουν στην ίδια Κλίμακα-Θέσης(*Location-Scale*) Οικογένεια κατανομών.

Ορισμός 2.2.2. (Κλίμακα-Θέσης(*Location-Scale*) Οικογένεια Κατανομών)

Ένα τυχαίο διάνυσμα $\underline{X}$ έχει περιθώριες α.σ.κ F_{X_i} που ανήκουν στην ίδια Κλίμακα-Θέσης(*Location-Scale*) Οικογένεια κατανομών, αν υπάρχουν μια τυχαία μεταβλητή *Y*, θετικές πραγματικές σταθερές α_i και πραγματικές σταθερές b_i έτσι ώστε η παρακάτω σχέση

$$X_i \overset{d}{=} \alpha_i Y + b_i\,, \tag{34}$$

να ισχύει για $i = 1,2,..,n$.

Ο παραπάνω Ορισμός είναι ισοδύναμος με το να πούμε ότι υπάρχουν μια α.σ.κ. F_Y, θετικές πραγματικές σταθερές α_i και πραγματικές σταθερές b_i έτσι ώστε η $F_{X_i}(x) = F_Y(x - b_i / \alpha_i)$ να ισχύει για $i = 1,2,...,n$.

Για ένα τυχαίο διάνυσμα $\underline{X}$ με περιθώριες α.σ.κ. F_{X_i} που ανήκουν στην ίδια Κλίμακα-Θέσης(*Location-Scale*) Οικογένεια κατανομών, βρίσκουμε από το Θεώρημα 1.2.5. ότι

$$F_{X_i}^{-1}(p) = \alpha_i F_Y^{-1}(p) + b_i,\, p \in (0,1)\ . \tag{35}$$

Στη περίπτωση αυτή, το συμονοτονικό άθροισμα

$$X_1^c + ... + X_n^c = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_Y^{-1}(U) + \sum_{i=1}^{n} b_i\ ,$$

έχει μια συνάρτηση κατανομής που ανήκει επίσης στην ίδια Κλίμακα-Θέσης(*Location-Scale*) Οικογένεια κατανομών.

Θεώρημα 2.2.3. (Συμονοτονικότητα και Κλίμακα-Θέσης(*Location-Scale*) Οικογένεια κατανομών)

Ένα τυχαίο διάνυσμα $\underline{X}$ με δοσμένες περιθώριες F_{X_i} που ανήκουν στην ίδια Κλίμακα-Θέσης(*Location-Scale*) Οικογένεια κατανομών είναι συμονοτονικό αν και μόνο αν $r(X_i, X_j) = 1$ για όλα τα $i, j \in \{1,2,...,n\}$.

Απόδειξη:

Από τη σχέση (35) και το Θεώρημα 2.1.4., βρίσκουμε ότι το $\underline{X}$ είναι συμονοτονικό αν και μόνο αν

$\underline{X} \stackrel{d}{=} (\alpha_1 F_Y^{-1}(U) + b_1, ..., \alpha_n F_Y^{-1}(U) + b_n)$.

Έτσι, η συμονοτονικότητα του $\underline{X}$ δηλώνει ότι $r(X_i, X_j) = 1$ για όλα τα ζεύγη *(i, j)*.

Αντίστροφα, αν όλες οι συσχετίσεις είναι ίσες με 1, τότε όλα τα ζεύγη (X_i, X_j) είναι συμονοτονικά. Οπότε το $\underline{X}$ είναι ένα συμονοτονικό τυχαίο διάνυσμα από το Θεώρημα 2.1.5..

Παράδειγμα 2.2.4. (Ομοιόμοφες περιθώριες)

Έστω ένα τυχαίο διάνυσμα $\underline{X}$ με ομοιόμορφες περιθώριες F_{X_i} . Για κάθε X_i υποθέτουμε ότι $X_i \sim Uniform(\alpha_i, \beta_i)$ με $\alpha_i < \beta_i$.

Σε αυτήν την περίπτωση, οι περιθώριες ανήκουν στην ίδια Κλίμακα-Θέσης(*Location-Scale*) Οικογένεια κατανομών αφού για κάθε X_i, έχουμε ότι

$$X_i \stackrel{d}{=} \alpha_i + (\beta_i - \alpha_i)U . \tag{36}$$

Επίσης έχουμε ότι

$F_{X_i}^{-1}(p) = \alpha_i + (\beta_i - \alpha_i)p,\ 0 < p < 1,$

από την οποία βρίσκουμε ότι το συμονοτονικό άθροισμα:

$S^c = X_1^c + ... + X_n^c \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i)U$ ακολουθεί την *Ομοιόμορφη* κατανομή στο διάστημα $(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \sum_{i=1}^{n} \beta_i)$.

Παράδειγμα 2.2.5. (Κανονικές Περιθώριες μεταβλητές)

Έστω ένα τυχαίο διάνυσμα $\underline{X}$ με κανονικές περιθώριες F_{X_i}. Υποθέτουμε δηλ. για κάθε X_i ότι $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$. Σε αυτήν την περίπτωση, οι περιθώριες ανήκουν στην ίδια Κλίμακα-Θέσης(*Location-Scale*) Οικογένεια κατανομών διότι

$X_i \stackrel{d}{=} \mu_i + \sigma_i Z$, όπου η τ.μ. Z ακολουθεί την *Τυπική Κανονική* κατανομή ,δηλ. $Z \sim N(0,1)$.

Έπειτα βρίσκουμε ότι

$F_{X_i}^{-1}(p) = \sigma_i \Phi^{-1}(p) + \mu_i,\ 0 < p < 1$, όπου *Φ* είναι η *Τυποποιημένη κανονική* αθροιστική συνάρτηση κατανομής(α.σ.κ.).

Από το Θεώρημα 2.2.3., διαπιστώνουμε ότι το $\underline{X}$ είναι συμονοτονικό αν και μόνο αν $r(X_i, X_j) = 1$ για όλα τα $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Επομένως το συμονοτονικό άθροισμα: $X_1^c + ... + X_n^c$ ακολουθεί την *Κανονική* κατανομή με μέσο $\sum_{i=1}^{n} \mu_i$ και διασπορά $(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i)^2$. Αν τα X_i ήταν ανεξάρτητα, θα παίρναμε για το συμονοτονικό άθροισμα την *Κανονική* κατανομή με μέσο $\sum_{i=1}^{n} \mu_i$ και διασπορά $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} \sigma_i)^2$.

2.3. Αθροίσματα των συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών

Σε αυτή την ενότητα, θα προσεγγίσουμε τη συνάρτηση κατανομής του αθροίσματος $S = X_1 + ... + X_n$ από τη συνάρτηση κατανομής του συμονοτονικού αθροίσματος S^c υπό την έννοια της κυρτής διάταξης όταν δηλ. ισχύει ότι $S \leq_{cx} S^c$. Η έκφραση S^c χρησιμοποιείται για το άθροισμα των όρων του συμονοτονικού διανύσματος $(X_1^c, ..., X_n^c)$ του τυχαίου διανύσματος $(X_1, ..., X_n)$, δηλ. $S^c = X_1^c + ... + X_n^c$.

Τονίζουμε ότι η παραπάνω προσέγγιση θα έχει νόημα αν μπορούμε να καθορίσουμε τη συνάρτηση κατανομής και το Stop-loss ασφάλιστρο του S^c. Στα

Θεωρήματα που ακολουθούν, θα αποδείξουμε ότι οι παραπάνω ποσότητες μπορούν πράγματι να καθοριστούν μέσα από τις περιθώριες συναρτήσεις κατανομών των όρων του αθροίσματος.

Στο ακόλουθο Θεώρημα, θα δείξουμε ότι η αντίστροφη συνάρτηση κατανομής του αθροίσματος των συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών είναι το άθροισμα των αντίστροφων συναρτήσεων κατανομής των περιθώριων κατανομών τους.

Θεώρημα 2.3.1. (Αντίστροφη α.σ.κ. του αθροίσματος συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών)

Η α – μικτή αντίστροφη συνάρτηση κατανομής $F_{S^c}^{-1(a)}$ του αθροίσματος S^c των συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών $(X_1^c,...,X_n^c)$ δίνεται από τον τύπο

$$F_{S^c}^{-1(a)}(p)=\sum_{i=1}^{n}F_{X_i}^{-1(a)}(p),\ 0<p<1,\ 0\le\alpha\le1. \tag{37}$$

Απόδειξη:

Θεωρούμε αρχικά το τυχαίο διάνυσμα $(X_1,...,X_n)$ και το αντίστοιχο συμονοτονικό του $(X_1^c,...,X_n^c)$. Έπειτα θεωρούμε ότι το συμονοτονικό άθροισμα όπως έχουμε πει σε προηγούμενη ενότητα: $S^c=X_1^c+...+X_n^c\overset{d}{=}g(U)$, όπου η τ.μ. U ακολουθεί την *Ομοιόμορφη* Κατανομή στο $(0,1)$ και η συνάρτηση g ορίζεται ως εξής

$$g(U)=\sum_{i=1}^{n}F_{X_i}^{-1}(u),\ 0<u<1.$$

Βλέπουμε ότι η συνάρτηση g είναι μη φθίνουσα και αριστερά συνεχής. Έτσι από το Θεώρημα 1.2.5.(α) έχουμε ότι

$$F_{S^c}^{-1}(p)=F_{g(U)}^{-1}(p)=g(F_U^{-1}(p))=g(p),\ 0<p<1.$$

Επομένως η αντίστροφη συνάρτηση κατανομής του S^c μπορεί να υπολογιστεί από τη παρακάτω σχέση

$$F_{S^c}^{-1}(p)=\sum_{i=1}^{n}F_{X_i}^{-1}(p),\ 0<p<1\ .$$

Ομοίως αν θεωρήσουμε ότι $g(U)=\sum_{i=1}^{n}F_{X_i}^{-1+}(u),\ 0<u<1$, τότε η g είναι μη φθίνουσα δεξιά συνεχής συνάρτηση. Επομένως από το Θεώρημα 1.2.5.(β) έχουμε ότι

$F_{S^c}^{-1+}(p)=F_{g(U)}^{-1+}(p)=g(F_U^{-1+}(p))=g(p),\ 0<p<1.$

Έτσι η αντίστροφη συνάρτηση κατανομής του S^c υπολογίζεται ως

$F_{S^c}^{-1+}(p)=\sum_{i=1}^{n}F_{X_i}^{-1+}(p),\ 0<p<1$.

Αν πολλαπλασιάσουμε τις δύο τελευταίες ισότητες με α και 1-α, αντίστοιχα, και τις προσθέσουμε κατά μέλη, βρίσκουμε ότι

$F_{S^c}^{-1(a)}(p)=\sum_{i=1}^{n}F_{X_i}^{-1(a)}(p),\ 0<p<1,\ 0\le\alpha\le1$, το οποίο είναι το ζητούμενο.

Στο σημείο αυτό σημειώνουμε ότι:

$S^c\overset{d}{=}\sum_{i=1}^{n}F_{X_i}^{-1(a)}(U)$.

Συμπεράσματα στο Θεώρημα 2.3.1.

Από το Θεώρημα διαπιστώνουμε ότι η συνεχής «υποστήριξη» του S^c είναι τα σημεία που ανήκουν στο σύνολο

$\{F_{S^c}^{-1(a)}(p)\,|\,0<p<1,0\le\alpha\le1\}=\{\sum_{i=1}^{n}F_{X_i}^{-1(a)}(p),\ 0<p<1,\ 0\le\alpha\le1\}$.

Ακόμα από την παραπάνω ισότητα βλέπουμε ότι

$$F_{S^c}^{-1+}(0)=\sum_{i=1}^{n}F_{X_i}^{-1+}(0)\ , \tag{38}$$

$$F_{S^c}^{-1}(1)=\sum_{i=1}^{n}F_{X_i}^{-1}(1) \tag{39}$$

Έτσι, διαπιστώνουμε ότι η ελάχιστη τιμή του συμονοτονικού αθροίσματος είναι ίση με το άθροισμα των ελάχιστων τιμών κάθε όρου. Ομοίως, η μέγιστη τιμή του συμονοτονικού αθροίσματος είναι ίση με το άθροισμα των μέγιστων τιμών κάθε όρου.

Πιο συγκεκριμένα, το άθροισμα $\sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1+}(0)$, το οποίο είναι είτε πεπερασμένο είτε $-\infty$ (εάν οποιοσδήποτε από τους όρους στο άθροισμα είναι ίσος με $-\infty$), είναι η ελάχιστη πιθανή τιμή του S^c, και το $\sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(1)$ είναι η μέγιστη.

Επιπλέον σημειώνουμε ότι ισχύει

$$F_{S^c}^{-1+}(1) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1+}(1) = +\infty \quad , \quad F_{S^c}^{-1}(0) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1+}(0) = -\infty \ .$$

Σε οποιοδήποτε τυχαίο διάνυσμα $(X_1,...,X_n)$, αν πάρουμε το άθροισμα των όρων του, τότε το γεγονός $S = X_1 + ... + X_n \geq \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1+}(0)$ πρέπει να ισχύει με πιθανότητα 1.

Αυτό δηλώνει ότι

$$\sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1+}(0) \leq F_S^{-1+}(0) \ .$$

Όμοια πρέπει το $S = X_1 + ... + X_n \leq \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(1)$ να ισχύει με πιθανότητα1. Έτσι

$$F_S^{-1}(1) \leq \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(1) \ .$$

Επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το άθροισμα S των συνιστωσών κάθε τυχαίου διανύσματος $(X_1,...,X_n)$ έχει μια υποστήριξη που περιλαμβάνεται στο διάστημα $[\sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1+}(0), \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(1)]$. Η ελάχιστη τιμή του S είναι μεγαλύτερη ή ίση από αυτή του S^c, δεδομένου ότι, από τη συμονοτονικότητα, όλοι οι όροι του S^c είναι ταυτόχρονα μικροί.

Όταν είναι γνωστές οι αντίστροφες συναρτήσεις $F_{X_i}^{-1}$, τότε η α.σ.κ. του $S^c = X_1^c + ... + X_n^c$ μπορεί να καθοριστεί ως εξής

$$\begin{aligned} F_{S^c}(x) &= \sup\{p \in (0,1) \big| F_{S^c}(x) \geq p\} = \sup\{p \in (0,1) \big| F_{S^c}^{-1}(p) \leq x\} \\ &= \sup\{p \in (0,1) \Big| \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(p) \leq x\} . \end{aligned} \qquad (40)$$

Επομένως, για οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή *X*, η έκφραση ότι η "F_X είναι γνησίως αύξουσα" θα σημαίνει ότι η "F_X είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(F_X^{-1+}(0), F_X^{-1}(1))$.

Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή *X*, οι ακόλουθες ισοδυναμίες ισχύουν

F_X είναι γνησίως αύξουσα $\Leftrightarrow$ F_X^{-1} είναι συνεχής στο (0,1),

και επίσης

F_X είναι συνεχής $\Leftrightarrow$ F_X^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1).

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομής F_{X_i}, $i = 1, 2, ..., n$ του συμονοτονικού τυχαίου διανύσματος $(X_1^c, ..., X_n^c)$ είναι γνησίως αύξουσες και συνεχείς. Τότε κάθε αντίστροφη συνάρτηση κατανομής $F_{X_i}^{-1}$ είναι συνεχής στο (0,1), το οποίο σημαίνει ότι η $F_{S^c}^{-1}$ είναι συνεχής στο (0,1) επειδή η σχέση $F_{S^c}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(p)$ ισχύει για $0<p<1$. Αυτό από τις παραπάνω ισοδυναμίες σημαίνει ότι η F_{S^c} είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$.

Έτσι, στην περίπτωση των γνησίως αύξουσων και συνεχών περιθωρίων συναρτήσεων κατανομής, για οποιοδήποτε $F_{S^c}^{-1+}(0) < x < F_{S^c}^{-1}(1)$, η πιθανότητα $F_{S^c}(x)$ καθορίζεται από την επίλυση της: $F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(x)) = x$, ή ισοδύναμα,

$$\sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(x)) = x \ , \quad F_{S^c}^{-1+}(0) < x < F_{S^c}^{-1}(1) \ . \tag{41}$$

Αρκεί λοιπόν να λύσουμε την τελευταία εξίσωση για να πάρουμε την $F_{S^c}(x)$.

Στο παρακάτω Θεώρημα, αποδεικνύουμε ότι και τα Stop-loss ασφάλιστρα ενός αθροίσματος συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών μπορούν να καθοριστούν από τα Stop-loss ασφάλιστρα των όρων του αθροίσματος.

Θεώρημα 2.3.2. (Stop-loss ασφάλιστρο αθροίσματος συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών)

Τα Stop-loss ασφάλιστρα του αθροίσματος S^c των συνιστωσών του συμονοτονικού τυχαίου διανύσματος $(X_1^c, ..., X_n^c)$ δίνονται από τον τύπο

$$E[(S^c-d)_+]=\sum_{i=1}^{n}E[(X_i-d_i)_+], \quad F_{S^c}^{-1+}(0)<d<F_{S^c}^{-1}(1) \tag{42}$$

με τα d_i να δίνονται από τον τύπο

$$d_i = F_{X_i}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)) \quad (i=1,2,...,n), \tag{43}$$

και τα $\alpha_d \in (0,1)$ να ορίζονται από την επίλυση της

$$F_{S^c}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d))=d \ . \tag{44}$$

Απόδειξη:

Αρχικά παίρνουμε το όριο ιδίας κράτησης $d\in(F_{S^c}^{-1+}(0),F_{S^c}^{-1}(1))$. Έτσι $0<F_{S^c}(d)<1$.

Έχοντας ορίσει τη συνεχής «υποστήριξη» του $\underline{X}^c$ στη σχέση (33) και λόγω της συμονοτονικότητας της, μπορούμε να πούμε ότι το παραπάνω σύνολο έχει το πολύ ένα σημείο τομής με τον υπερχώρο $\{\underline{x}|x_1+x_2+...+x_n=d\}$. Αυτό ισχύει διότι ο υπερχώρος δεν μπορεί να περιέχει διαφορετικά σημεία $\underline{x}$ και $\underline{y}$ έτσι ώστε να ισχύει $\underline{x}\le\underline{y}$ ή $\underline{x}\ge\underline{y}$.

Θα αποδείξουμε λοιπόν ότι το διάνυσμα $\underline{d}=(d_1,d_2,...,d_n)$ όπως ορίστηκε παραπάνω είναι το μοναδικό σημείο τομής. Επειδή πρέπει να ισχύει $0<F_{S^c}(d)<1$, γνωρίζουμε από την Ενότητα 1.2. και από το Σχήμα 1.2.4. ότι πρέπει να υπάρχει ένα $\alpha_d\in(0,1)$ που να ικανοποιεί τη σχέση (44). Επίσης από το Θεώρημα 2.3.1. έχουμε ότι: $\sum_{i=1}^{n}d_i=d$. Επομένως το διάνυσμα $\underline{d}$ είναι ένα στοιχείο και της συνεχής «υποστήριξης» του $\underline{X}^c$ και του υπερχώρου $\{\underline{x}|x_1+x_2+...+x_n=d\}$. Μπορούμε να αποδείξουμε τώρα το $\underline{d}$ είναι το μοναδικό σημείο τομής της συνεχής «υποστήριξης» του $\underline{X}^c$ και του υπερχώρου $\{\underline{x}|x_1+x_2+...+x_n=d\}$.

Παίρνουμε το $\underline{x}$ να είναι ένα σημείο της συνεχής «υποστήριξης» του $\underline{X}^c$. Τότε πρέπει να ισχύει η ακόλουθη ισότητα:

$$(x_1+x_2+...+x_n-d)_+\equiv(x_1-d_1)_++(x_2-d_2)_++...+(x_n-d_n)_+ .$$

Η παραπάνω ισότητα ισχύει επειδή το $\underline{x}$ και το $\underline{d}$ είναι και τα δύο στοιχεία της συνεχής «υποστήριξης» του $\underline{X}^c$, και έτσι, επειδή πρόκειται για ένα συμονοτονικό σύνολο, αν υπάρχει οποιοδήποτε j έτσι ώστε να ισχύει $x_j > d_j$, τότε πρέπει να ισχύει και $x_k \geq d_k$ για όλα *τα k*. Άρα το αριστερό μέλος πρέπει να είναι ίσο με το δεξιό αφού επιλέον έχουμε: $\sum_{i=1}^{n} d_i = d$. Αφ' ετέρου, όταν όλα τα $x_j \leq d_j$, προφανώς το αριστερό μέλος είναι 0.

Τώρα αντικαθιστώντας τις σταθερές από τις αντίστοιχες μεταβλητές στην παραπάνω ισότητα και παίρνοντας μέσες τιμές, βρίσκουμε τη σχέση (42).
Επιπλέον βρίσκουμε ότι

$$E[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] - d \text{ αν } d \leq F_{S^c}^{-1+}(0), \tag{45}$$

και

$$E[(S^c - d)_+] = 0 \text{ αν } d \geq F_{S^c}^{-1+}(1). \tag{46}$$

Από τις σχέσεις (38),(39),(45),(46) και από το Θεώρημα 2.3.2. μπορούμε να καταλήξουμε ότι για κάθε πραγματικό *d*, υπάρχουν d_i με $\sum_{i=1}^{n} d_i = d$, έτσι ώστε να ισχύει: $E[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - d_i)_+]$.

Εναλλακτική έκφραση για τα Stop-loss ασφάλιστρα

Η έκφραση για τα Stop-loss ασφάλιστρα ενός συμονοτονικού αθροίσματος S^c μπορεί να γραφτεί και με την βοήθεια των συνηθισμένων αντιστρόφων συναρτήσεων κατανομής. Πράγματι, για οποιοδήποτε $d \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E[(X_i - F_{X_i}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)))_+] &= E[(X_i - F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(d)))_+] \\ &\quad -(F_{X_i}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)) - F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(d)))(1 - F_{S^c}(d)). \end{aligned}$$

Αθροίζοντας την παραπάνω ισότητα ως προς *i*, και λαμβάνοντας υπόψη την έκφραση για τα $\alpha_d \in (0,1)$ όπως δόθηκε στο Κεφάλαιο 1, βρίσκουμε την έκφραση που περιέχεται στον **Dhaene et al.[5]**, όπου οι τυχαίες μεταβλητές υποτίθεται ότι είναι μη αρνητικές.

Η έκφραση θα ισχύει για οποιοδήποτε $d \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$ και είναι η εξής

$$E[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(d)))_+] - (d - F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(d)))(1 - F_{S^c}(d)). \tag{47}$$

Σε περίπτωση που οι περιθώριες αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής F_{X_i} είναι γνησίως αύξουσες, η σχέση (47) μειώνεται ως εξής:

$$E[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(d)))_+]. \tag{48}$$

Μπορούμε από το Θεώρημα 2.3.2. να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι οποιοδήποτε Stop-loss ασφάλιστρο ενός αθροίσματος συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών μπορεί να γραφτεί ως το άθροισμα των Stop-loss ασφαλίστρων για τις μεμονωμένες τυχαίες μεταβλητές που βρίσκονται στο άθροισμα. Το θεώρημα μας δίνει ένα αλγόριθμο για τον άμεσο υπολογισμό των Stop-loss ασφαλίστρων αθροισμάτων των συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών, χωρίς να πρέπει να υπολογίσουμε την συνάρτηση κατανομής του ίδιου του αθροίσματος. Προκειμένου δηλ. να υπολογιστεί το Stop-loss ασφάλιστρο με δοσμένο *d*, αρκεί να είναι γνωστή η $F_{S^c}(d)$, η οποία μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση (40).

Τέλος αν εφαρμόσουμε τη σχέση: $E[(X-d)_+] = E[(d-X)_+] + E[X] - d$ για S^c και X_i μέσω της σχέσης (42) οδηγούμαστε στην ακόλουθη έκφραση για τις κατώτερες ουρές του αθροίσματος των συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών:

$$E[(d - S^c)_+] = \sum_{i=1}^{n} E[(d_i - X_i)_+], \quad d \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1)) , \tag{49}$$

με τα d_i όπως ορίζονται στις σχέσεις (43) και (44).

Παρακάτω δίνουμε κάποια παραδείγματα για τον υπολογισμό του Stop-loss αφαλίστρου ενός αθροίσματος συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών.

Παράδειγμα 2.3.3. (Εκθετικές Περιθώριες)

Έστω ένα τυχαίο διάνυσμα $\underline{X}$ όπου οι συνιστώσες του X_i ακολουθούν την *Εκθετική* κατανομή. Πιο συγκεκριμένα έχουμε ότι: $X_i \sim \exp(1/\beta_i)$.

Έτσι η α.σ.κ. των X_i δίνεται ως εξής:

$F_{X_i}(x) = 1 - e^{-(x/\beta_i)}, \ \beta_i > 0, \ x \geq 0$.

Αν αντιστρέψουμε την παραπάνω σχέση, βρίσκουμε την ακόλουθη έκφραση για την αντίστροφη της συνάρτησης κατανομής

$F_{X_i}^{-1}(p) = -\beta_i \ln(1-p), \quad 0 < p < 1.$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε το Stop-loss ασφάλιστρο με δοσμένο όριο ιδίας κράτησης d αναλυτικά ως εξής

$$E[(X_i - d)_+] = \int_d^{+\infty} (1 - F_{X_i}(x))dx = \int_d^{+\infty} e^{-x/\beta_i} dx = \left[-\beta_i e^{-x/\beta_i}\right]_d^{+\infty} = \beta_i e^{-d/\beta_i}, \ d > 0.$$

Η αντίστροφη της συνάρτησης κατανομής του συμονοτονικού αθροίσματος S^c δίνεται ως

$$F_{S^c}^{-1}(p) = -(\sum_{i=1}^{n} \beta_i) \ln(1-p), \quad 0 < p < 1.$$

Η παραπάνω έκφραση δηλώνει ότι το συμονοτονικό άθροισμα των εκθετικά κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών, κατανέμεται και αυτό εκθετικά με παράμετρο $\beta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$. Έτσι το Stop-loss ασφάλιστρο του συμονοτονικού αθροίσματος S^c δίνεται από τη σχέση

$$E[(S^c - d)_+] = \beta e^{-(d/\beta)}, \ d > 0.$$

Παράδειγμα 2.3.4. (Περιθώριες που ακολουθούν την κατανομή Pareto)

Παίρνουμε τώρα το τυχαίο διάνυσμα $\underline{X}$ όπου οι συνιστώσες του X_i ακολουθούν την *Κατανομή Pareto* δηλ.: $X_i \sim Pareto(\alpha, x_i)$. Επομένως γνωρίζουμε ότι η α.σ.κ. των X_i δίνεται ως εξής

$$F_{X_i}(x) = 1 - (\frac{x_i}{x})^{\alpha}, \quad \alpha > 0, \ x > x_i > 0.$$

Αντιστρέφοντας τη σχέση αυτή, βρίσκουμε την ακόλουθη έκφραση για την αντίστροφη της συνάρτησης κατανομής

$$F_{X_i}^{-1}(p) = \frac{x_i}{(1-p)^{1/\alpha}}, \ 0 < p < 1.$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τώρα το Stop-loss ασφάλιστρο με δοσμένο όριο ιδίας κράτησης d και να βρούμε ότι τελικά

$$E[(X_i - d)_+] = (\frac{x_i}{d})^{\alpha-1} \frac{x_i}{\alpha - 1}, \quad x_i < d < \infty, \quad \alpha > 1.$$

Έτσι η αντίστροφη της συνάρτησης κατανομής του συμονοτονικού αθροίσματος S^c δίνεται από τη σχέση

$$F_{S^c}^{-1}(p) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{(1-p)^{1/\alpha}}, \; 0 < p < 1.$$

Καταλήγουμε με άλλα λόγια στο ότι το συμονοτονικό άθροισμα τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την *Κατανομή Pareto* (με την ίδια πρώτη παράμετρο α), ακολουθεί και αυτό την *Κατανομή Pareto*.

Παράδειγμα 2.3.5. (Περιθώριες που ακολουθούν την Εκθετικά-Αντίστροφη Gaussian Κατανομή)

Θεωρούμε το τυχαίο διάνυσμα $\underline{X}$ όπου οι συνιστώσες του X_i ακολουθούν την *Εκθετικά αντίστροφη Gaussian* κατανομή. Γνωρίζουμε έτσι ότι η συνάρτηση κατανομής των X_i δίνεται από τον τύπο

$$F_{X_i}(x) = 1 - \exp\left[-2\sqrt{\beta_i}\left(\sqrt{x+\alpha_i} - \sqrt{\alpha_i}\right)\right], \quad \alpha_i, \beta_i > 0, \; x \ge 0.$$

Σε αυτή την περίπτωση, η αντίστροφη της συνάρτησης κατανομής των X_i είναι

$$F_{X_i}^{-1}(p) = \frac{1}{4\beta_i}(\ln(1-p))^2 - \sqrt{\frac{\alpha_i}{\beta_i}}\ln(1-p),$$

και έτσι για τα συμονοτονικά X_i, βρίσκουμε ότι

$$F_{S^c}^{-1}(p) = \frac{1}{4\beta}(\ln(1-p))^2 - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\ln(1-p),$$

όπου $\beta = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^{-1}\right)^{-1}$ και $\alpha = \beta\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\alpha_i / \beta_i}\right)^2$.

Παρατηρούμε δηλ. ότι το συμονοτονικό άθροισμα τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την *Εκθετικά αντίστροφη Gaussian* κατανομή , ακολουθεί και αυτό την *Εκθετικά αντίστροφη Gaussian* κατανομή με παραμέτρους *α* και *β* όπως ορίστηκαν παραπάνω. Για το Stop-loss ασφάλιστρο έχουμε ότι

$$E[(S^c - d)_+] = \exp\left[-2\sqrt{\beta}\left(\sqrt{d+\alpha} - \sqrt{\alpha}\right)\right]\left(\sqrt{\frac{d+\alpha}{\beta}} + \frac{1}{2\beta}\right) \text{ για κάθε } d \ge 0.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Κυρτά Φράγματα για αθροίσματα τυχαίων μεταβλητών

3.1. Το συμονοτονικό άνω φράγμα για το άθροισμα $\sum_{i=1}^{n} X_i$

Σε αυτό το Κεφάλαιο, θα παράγουμε φράγματα για αθροίσματα $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$ των τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, ..., X_n$ με τις περιθώριες κατανομές των X_i να είναι γνωστές. Ουσιαστικά τα φράγματα είναι τυχαίες μεταβλητές που είναι μεγαλύτερες (ή μικρότερες) από το S υπό την έννοια της κυρτής διάταξης. Επομένως, θα καλέσουμε αυτά τα φράγματα ως «Κυρτά φράγματα». Ο λόγος που θα ασχοληθούμε με τα κυρτά φράγματα είναι ότι η από κοινού κατανομή του τυχαίου διανύσματος $(X_1, X_2, ..., X_n)$ είναι δύσκολο να οριστεί εφόσον οι τ.μ. X_i δεν είναι ανεξάρτητες.

Το άνω φράγμα που θα παράγουμε σε αυτή την ενότητα έχει νόημα στην κατηγορία όλων των τυχαίων διανυσμάτων με δεδομένες τις περιθώριες κατανομές τους, και επιτυγχάνεται από τα συμονοτονικά τυχαία διανύσματα που ανήκουν σε αυτήν την κατηγορία. Έτσι, το άνω φράγμα είναι ένα *supremum* υπό την έννοια της κυρτής διάταξης.

Θεώρημα 3.1.1. (Συμονοτονικό άνω φράγμα για άθροισμα τυχαίων μεταβλητών)

Για οποιοδήποτε τυχαίο διάνυσμα $(X_1, X_2, ..., X_n)$ έχουμε ότι

$$X_1 + X_2 + ... + X_n \leq_{cx} X_1^c + X_2^c + ... + X_n^c \quad . \qquad (50)$$

Απόδειξη:

Αρχικά είναι προφανές ότι οι μέσες τιμές αυτών των δύο αθροισμάτων είναι ίσες. Επομένως, πρέπει να αποδείξουμε την ιδιότητα της Stop-loss διάταξης δηλ. ότι

$$E[(X_1+X_2+...+X_n-d)_+] \leq_{cx} E[X_1^c+X_2^c+...+X_n^c-d)_+],$$

ισχύει για όλα τα d με $d \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$, δεδομένου ότι τα Stop-loss ασφάλιστρα είναι ίσα για άλλες τιμές του *d*.

Ο ακόλουθος τύπος ισχύει για όλα τα $(x_1, x_2, ..., x_n)$ με $\sum_{i=1}^{n} d_i = d$:

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+...+x_n-d)_+ &= ((x_1-d_1)+(x_2-d_2)+...+(x_n-d_n))_+ \\ &\leq ((x_1-d_1)_+ +(x_2-d_2)_+ +...+(x_n-d_n)_+)_+ \\ &= (x_1-d_1)_+ +(x_2-d_2)_+ +...+(x_n-d_n)_+\end{aligned}$$

Έτσι αν αντικαταστήσουμε τις σταθερές από τις αντίστοιχες τυχαίες μεταβλητές στην παραπάνω ανισότητα και πάρουμε μέσες τιμές, βρίσκουμε ότι

$$E[(X_1+X_2+...+X_n-d)_+] \leq E[(X_1-d_1)_+]+E[(X_2-d_2)_+]+...+E[(X_n-d_n)_+] \quad , \quad (51)$$

ισχύει για όλα τα d και τα d_i τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{n} d_i = d$.

Αν επιλέξουμε το $d \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$ και τα d_i όπως ορίστηκαν στο Θεώρημα 2.3.2., τότε από την παραπάνω ανισότητα αποδεικνύεται το ζητούμενο.

Το παραπάνω θεώρημα δηλώνει ότι το λιγότερα "ελκυστικό" τυχαίο διάνυσμα $(X_1, X_2, ..., X_n)$ με δεδομένες τις περιθώριες F_i, δεδομένου ότι το άθροισμα των συνιστωσών του είναι το μεγαλύτερο υπό την έννοια της κυρτής διάταξης, έχει τη συμονοτονική από κοινού κατανομή, το οποίο σημαίνει ότι έχει την από κοινού κατανομή του διανύσματος $(F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U), ..., F_n^{-1}(U))$. Οι συνιστώσες αυτού του τυχαίου διανύσματος είναι μέγιστα εξαρτημένες μεταξύ τους, έτσι ώστε όλες οι συνιστώσες να είναι μη φθίνουσες συναρτήσεις της ίδιας τυχαίας μεταβλητής.

Σημειώνουμε ότι η ανισότητα (51) ισχύει, ειδικότερα, αν το $(X_1, X_2, ..., X_n)$ είναι συμονοτονικό. Από τα Θεωρήματα 2.3.2. και 3.1.1., βρίσκουμε ότι για οποιοδήποτε τυχαίο διάνυσμα $\underline{X}$ ισχύουν οι ανισότητες

$$E[(X_1+X_2+...+X_n-d)_+] \leq \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - F_{X_i}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)))_+] \leq \sum_{i=1}^{n} E[(X_i-d_i)_+],$$

για όλα τα $d \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$ τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{n} d_i = d$. Επομένως, το μικρότερο άνω φράγμα της μορφής $\sum_{i=1}^{n} E[(X_i-d_i)_+]$ με $\sum_{i=1}^{n} d_i = d$ για το Stop-loss ασφάλιστρο

$E[(X_1+X_2+...+X_n-d)_+]$ είναι το συμονοτονικό άνω φράγμα. Μπορούμε να γενικεύσουμε το Θεώρημα 3.1.1. με την παρακάτω Πρόταση 3.1.2.

Πρόταση 3.1.2. (Συμονοτονικότητα και Stop-loss διατεταγμένες συνιστώσες)

Έστω τα τυχαία διανύσματα $(X_1,X_2,...,X_n)$ και $(Y_1,Y_2,...,Y_n)$. Αν $X_i \le_{sl} Y_i$ ισχύει για όλα τα $i = 1,2, ..,n$, τότε

$$X_1+X_2+...+X_n \le_{sl} Y_1^c+Y_2^c+...+Y_n^c. \tag{52}$$

Απόδειξη:

Επειδή το άθροισμα $Y_1^c+Y_2^c+...+Y_n^c$ είναι συμονοτονικό, για οποιοδήποτε πραγματικό d, μπορούμε να βρούμε $d_1,d_2,...,d_n$ με $\sum_{i=1}^{n} d_i = d$ και

$$E[(Y_1^c+Y_2^c+...+Y_n^c-d)_+] = E[(Y_1-d_1)_+]+E[(Y_2-d_2)_+]+...+E[(Y_n-d_n)_+].$$

Έτσι προκύπτουν τα παρακάτω

$$E[(X_1+X_2+...+X_n-d)_+] \le E[(X_1-d_1)_+]+E[(X_2-d_2)_+]+...+E[(X_n-d_n)_+]$$

$$\le E[(Y_1-d_1)_+]+E[(Y_2-d_2)_+]+...+E[(Y_n-d_n)_+] = E[(Y_1^c+Y_2^c+...+Y_n^c-d)_+].$$

Από την παραπάνω ανισότητα αποδεικνύεται το ζητούμενο.

Στο Θεώρημα 2.2.3., αποδείξαμε ότι ένα τυχαίο διάνυσμα με περιθώριες που ανήκουν στην ίδια Κλίμακα-Θέσης(*Location-Scale*) Οικογένεια κατανομών είναι συμονοτονικό αν και μόνο αν ο συντελεστής συσχέτισης κάθε ζευγαριού των συνιστωσών είναι ίσος με 1. Αν πάρουμε, όπως αποδείξαμε, ότι στην κατηγορία όλων των τυχαίων διανυσμάτων με δεδομένες τις περιθώριες κατανομές το συμονοτονικό άθροισμα είναι το μεγαλύτερο υπό την έννοια της κυρτής διάταξης, τότε μπορούμε να δείξουμε ότι η συμονοτονικότητα μπορεί να χαρακτηριστεί από τις μέγιστες συσχετίσεις όλων των ζευγαριών των τυχαίων μεταβλητών του αθροίσματος. Προκειμένου να αποδειχθεί αυτό το αποτέλεσμα, χρειαζόμαστε μια έκφραση για τα Stop-loss ασφάλιστρα ενός αθροίσματος δύο τυχαίων μεταβλητών λαμβάνοντας υπόψιν φυσικά την διμεταβλητή συνάρτηση κατανομής τους.

Λήμμα 3.1.3. (Stop-loss ασφάλιστρα ενός διμεταβλητού αθροίσματος)

Έστω το διμεταβλητό τυχαίο διάνυσμα (*X,Y*). Για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό *d*, το Stop-loss ασφάλιστρο $X + Y$ στο *d* δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$E[(X+Y-d)_+] = E[X] + E[Y] - d + \int_{-\infty}^{+\infty} F_{X,Y}(x, d-x)dx .$$

Απόδειξη:

Γνωρίζουμε ότι το Stop-loss ασφάλιστρο $X + Y$ με όριο ιδίας κράτησης d δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$E[(X+Y-d)_+] = E[(d-X-Y)_+] + E[X] + E[Y] - d .$$

Θα υπολογίσουμε τώρα τη μέση τιμή $E[(d-X-Y)_+]$. Αν αντιστρέψουμε τη σειρά στα ολοκληρώματα, όπως φαίνεται παρακάτω,παίρνουμε:

$$E[(d-X-Y)_+] = \int_{x=-\infty}^{+\infty}\int_{y=-\infty}^{d-x}\int_{t=x}^{d-y} dt dF_{X,Y}(x,y) = \int_{t=-\infty}^{+\infty}\int_{x=-\infty}^{t}\int_{y=-\infty}^{d-t} dF_{X,Y}(x,y)dx$$

$= \int_{t=-\infty}^{+\infty} F_{X,Y}(t, d-t)dt$, όπου $F_{X,Y}$ είναι η από κοινού συνάρτηση κατανομής του τυχαίου διανύσματος (*X,Y*). Επομένως αποδείξαμε το ζητούμενο.

Θεώρημα 3.1.4. (Συμονοτονικότητα και μέγιστη συσχέτιση)

Ένα τυχαίο διάνυσμα $\underline{X}$ είναι συμονοτονικό αν και μόνο αν $r(X_i, X_j) = r(X_i^c, X_j^c)$ για όλα τα $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Απόδειξη:

Έχουμε αποδείξει στο Κεφάλαιο 2 ότι η συμονοτονικότητα είναι ισοδύναμη με την συμονοτονικότητα κατά ζεύγη. Επομένως αρκεί να δώσουμε την απόδειξη για ένα διδιάστατο τυχαίο διάνυσμα (X_i, X_j).

Η απόδειξη του "$\Rightarrow$" είναι απλή.

Θέλουμε τώρα να αποδείξουμε το αντίστροφο δηλ. το "$\Leftarrow$".

Αρχικά υποθέτουμε ότι $r(X_i, X_j) = r(X_i^c, X_j^c)$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι $Var(X_i + X_j) = Var(X_i^c + X_j^c)$. Γνωρίζουμε όμως ότι $X_i + X_j \leq_{cx} X_i^c + X_j^c$ αφού το διάνυσμα $X^c = (X_i^c, X_j^c)$ είναι το συμονοτονικό του (X_i, X_j). Από την ιδιότητα όμως της κυρτής διάταξης ισχύει ότι: $E[X_i + X_j] = E[X_i^c + X_j^c]$. Οπότε τελικά το συμονοτονικό άθροισμα τυχάιων μεταβλητών $X_i^c + X_j^c$ ακολουθεί την ίδια κατανομή με το άθροισμα $X_i + X_j$, δηλ.: $X_i + X_j \overset{d}{=} X_i^c + X_j^c$. Επομένως, για όλα τα πραγματικά d, πρέπει να έχουμε ότι

$$E[(X_i + X_j - d)_+] = E[(X_i^c + X_j^c - d)_+].$$

Αν χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 3.1.3., η παραπάνω ισότητα μπορεί να γραφτεί ως:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [F_{X_i^c, X_j^c}(x, d-x) - F_{X_i, X_j}(x, d-x)]dx = 0.$$

Από τη σχέση (28), έχουμε ότι η έκφραση που είναι υπό ολοκλήρωση είναι μη αρνητική, το οποίο σημαίνει ότι

$$F_{X_i, X_j}(x, d-x) = F_{X_i^c, X_j^c}(x, d-x),$$

ισχύει για όλες τις τιμές του x. Δεδομένου ότι πρέπει να ισχύει για όλες τις τιμές του d, το διάνυσμα (X_i, X_j) είναι και αυτό συμονοτονικό που σημαίνει τελικά ότι το διάνυσμα $\underline{X}$ είναι συμονοτονικό.

Από την παραπάνω απόδειξη διαπιστώνουμε ότι το τυχαίο διάνυσμα $\underline{X}$ είναι συμονοτονικό αν και μόνο αν $Var(X_i + X_j) = Var(X_i^c + X_j^c)$ για όλα τα $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Επίσης από την σχέση της κυρτής διάταξης στο Θεώρημα 3.1.1., βρίσκουμε ότι για οποιοδήποτε τυχαίο διάνυσμα (X_1, X_2) ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$Var(X_1 + X_2) \leq Var(X_1^c + X_2^c),$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με την παρακάτω σχέση:

$$r(X_1, X_2) \leq r(X_1^c, X_2^c), \tag{53}$$

με τις ανισότητες να ισχύουν αυστηρώς όταν το (X_1, X_2) δεν είναι συμονοτονικό. Σαν μια ειδική περίπτωση της σχέσης (53), βρίσκουμε ότι πρέπει να ισχύει πάντα η ακόλουθη σχέση: $r(X_1^c, X_2^c) \geq 0$. Επίσης σημειώνουμε ότι ένα τυχαίο διάνυσμα (X_1, X_2) είναι συμονοτονικό και έχει αμοιβαία ανεξάρτητες συνιστώσες αν και μόνο αν η τ.μ. X_1 ή η X_2 είναι εκφυλισμένες, δείτε την εργασία του **Luan[6]**.

Παράδειγμα 3.1.5. (Λογαριθμοκανονικές περιθώριες)

Θεωρούμε το τυχαίο διάνυσμα $(\alpha_1 X_1, \alpha_2 X_2, ..., \alpha_n X_n)$ του οποίου τα α_i είναι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και τα X_i είναι τ.μ. που ακολουθούν ην *Λογαριθμοκανονική* Κατανομή: $\ln(X_i) \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$. Έχουμε δηλ. ότι

$$E[X_i] = e^{\mu_i + (1/2)\sigma_i^2},$$

$$Var[X_i] = e^{2\mu_i + \sigma_i^2}(e^{\sigma_i^2} - 1).$$

Ας υποθέσουμε π.χ. τη κατάσταση όπου τα α_i είναι ντιτερμινιστικές πληρωμές κατά την περίοδο *i*, και τα X_i είναι οι αντίστοιχοι Λογαριθμοκανονικά κατανεμημένοι παράγοντες προεξόφλησης. Έτσι το $(\alpha_1 X_1, \alpha_2 X_2, ..., \alpha_n X_n)$ είναι το διάνυσμα προεξόφλησης των παραπάνω πληρωμών. Σημειώνουμε εδώ ότι από Μαθηματικής πλευράς, θα μπορούσαμε να συνδέσουμε τα α_i και τα μ_i σε μία παράμετρο $\alpha_i e^{\mu_i}$ και έτσι να απλοποιηθούν οι τύποι. Όμως με αυτό τον τρόπο θα χάσουμε την πραγματική σημασία των παραμέτρων. Αφού γνωρίζουμε ότι $\Phi^{-1}(1-p) = -\Phi^{-1}(p)$, από το Θεώρημα 1.2.5. βρίσκουμε ότι

$$F_{\alpha_i X_i}^{-1}(p) = \alpha_i e^{\mu_i + sign(\alpha_i)\sigma_i \Phi^{-1}(p)}, \ 0 < p < 1, \tag{54}$$

οπού το $sign(\alpha_i)$ είναι ίσο με 1 αν $\alpha_i > 0$ και -1 αν $\alpha_i < 0$.

Επειδή το άθροισμα *n* συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την *Κανονική* Κατανομή ακολουθεί και αυτό την *Κανονική* Κατανομή, διαπιστώνουμε ότι το γινόμενο *n* συμονοτονικών *Λογαριθμοκανονικών* τυχαίων μεταβλητών είναι και πάλι μια τ.μ. που ακολουθεί την *Λογαριθμοκανονική* Κατανομή, δηλ.

$$\prod_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(U) \overset{d}{=} e^{\sum_{i=1}^{n}\mu_i + \sum_{i=1}^{n}\sigma_i \Phi^{-1}(U)}.$$

Τα Stop-loss ασφάλιστρα μιας *Λογαριθμοκανονικά* κατανεμημένης τυχαίας μεταβλητής δίνονται από τον παρακάτω τύπο

$$E[(X_i - d_i)_+] = e^{\mu_i + (\sigma_i^2/2)}\Phi(d_{i,1}) - d_i \Phi(d_{i,2}), d_i > 0. \tag{55}$$

όπου τα $d_{i,1}$ και τα $d_{i,2}$ ορίζονται ως

$$d_{i,1} = \frac{\mu_i + \sigma_i^2 - \ln(d_i)}{\sigma_i}, \quad d_{i,2} = d_{i,1} - \sigma_i. \tag{56}$$

Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί εύκολα να αποδειχθεί. Πράγματι, αν διαφοροποιήσουμε τα δύο μέλη της ισότητας στη σχέση (55) σύμφωνα με τα d_i, βλέπουμε ότι και στα δύο μέλη η παράγωγος ως προς d_i είναι ίση με $F_X(d_i) - 1$. Επίσης, όταν $d_i \to \infty$, και τα δύο μέλη τείνουν στο μηδέν.

Για τις κατώτερες ουρές έχουμε ότι

$$E[(d_i - X_i)_+] = -e^{\mu_i + (\sigma_i^2/2)}\Phi(-d_{i,1}) + d_i\Phi(-d_{i,2}), d_i > 0 \ . \tag{57}$$

Αφού ισχύει ότι: $E[(\alpha_i(X_i - d_i))_+] = -\alpha_i E[(d_i - X_i)_+]$ όταν τα α_i είναι αρνητικά, βρίσκουμε από τις σχέσεις (56) και (57) , για $d_i > 0$

$$E[(\alpha_i(X_i - d_i))_+] = \alpha_i e^{\mu_i + (\sigma_i^2/2)}\Phi(sign(\alpha_i)d_{i,1}) - \alpha_i d_i \Phi(sign(\alpha_i)d_{i,2}), d_i > 0, \tag{58}$$

Όπου τα $d_{i,1}$ και τα $d_{i,2}$ έχουν οριστεί παραπάνω.

Εν συνεχεία παίρνουμε το άθροισμα $S = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_n X_n$ και το αντίστοιχο συμονοτονικό του: $S^c = F^{-1}_{\alpha_1 X_1}(U) + F^{-1}_{\alpha_2 X_2}(U) + ... + F^{-1}_{\alpha_n X_n}(U)$.

Δεδομένου ότι οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομής είναι γνησίως αύξουσες και συνεχείς, βρίσκουμε από τη σχέση (41) ότι η συνάρτηση κατανομής $F_{S^c}(x)$ καθορίζεται από την επίλυση της: $F^{-1}_{S^c}(F_{S^c}(x)) = x$, ή ισοδύναμα ,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\mu_i + sign(\alpha_i)\sigma_i \Phi^{-1}(F_{S^c}(x))} = x, \quad F^{-1+}_{S^c}(0) < x < F^{-1}_{S^c}(1). \tag{59}$$

Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο ότι αν τα α_i είναι θετικά, τότε η «υποστήριξη» του S βρίσκεται στη περιοχή $(F^{-1+}_{S^c}(0), F^{-1}_{S^c}(1)) = (0, +\infty)$, αν τα α_i είναι αρνητικά, η «υποστήριξη» του S βρίσκεται στη περιοχή $(F^{-1+}_{S^c}(0), F^{-1}_{S^c}(1)) = (-\infty, 0)$ και αν τα α_i έχουν μικτά πρόσημα τότε $(F^{-1+}_{S^c}(0), F^{-1}_{S^c}(1)) = (-\infty, +\infty)$.

Για $F^{-1+}_{S^c}(0) < d < F^{-1}_{S^c}(1)$, το Stop-loss ασφάλιστρο του S^c με όριο ιδίας κράτησης d προκύπτει από τη σχέση (48):

$$E[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} E[(\alpha_i X_i - F^{-1}_{\alpha_i X_i}(F_{S^c}(d)))_+] = \sum_{i=1}^{n} E[(\alpha_i(X_i - e^{\mu_i + sign(\alpha_i)\sigma_i \Phi^{-1}(F_{S^c}(d))}))_+].$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (58) και (59), βρίσκουμε την ακόλουθη έκφραση για το Stop-loss ασφάλιστρο του S^c με δεδομένο d όπου $F_{S^c}^{-1+}(0) < d < F_{S^c}^{-1}(1)$:

$$E[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\mu_i + (\sigma_i^2/2)} \Phi(sign(\alpha_i)\sigma_i - \Phi^{-1}(F_{S^c}(d))) - d(1 - F_{S^c}(d)). \qquad (60)$$

Οι κατώτερες ουρές δίνονται ως εξής

$$E[(d - S^c)_+] = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\mu_i + (\sigma_i^2/2)} \Phi(-sign(\alpha_i)\sigma_i + \Phi^{-1}(F_{S^c}(d))) + dF_{S^c}(d).$$

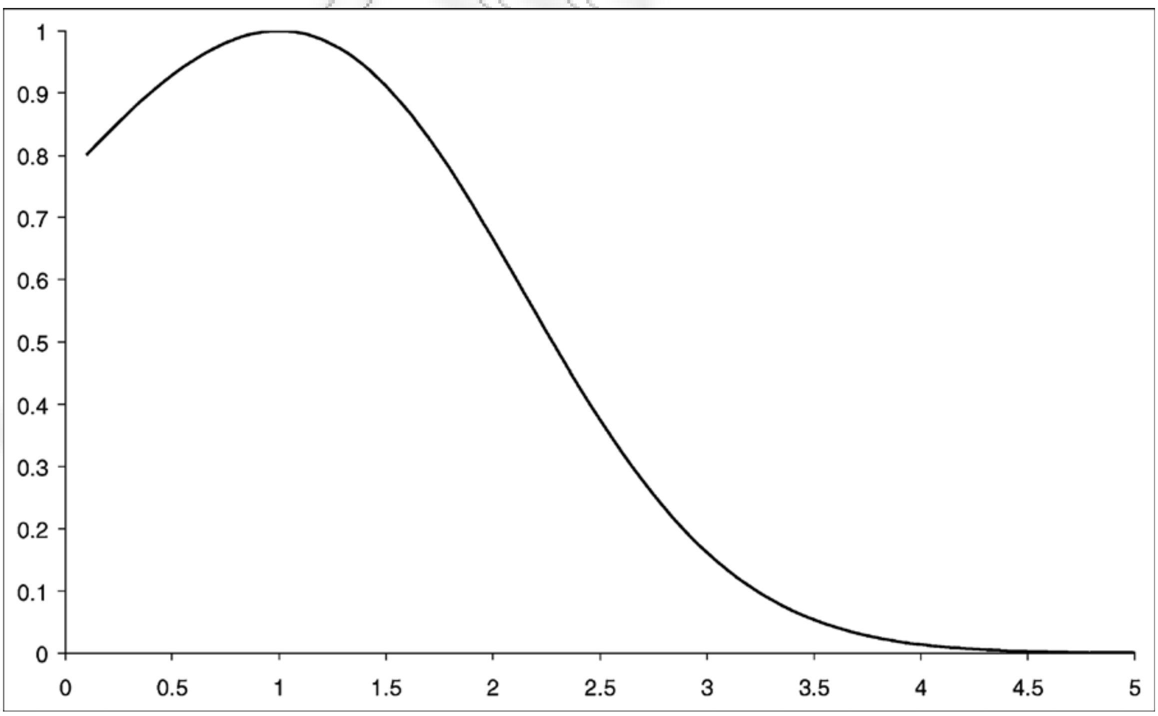
Επίσης βρίσκουμε την ακόλουθη έκφραση για το συντελεστή συσχέτισης δύο συμονοτονικών *Λογαριθμοκανονικά* κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών με τις διασπορές να δίνονται ως σ_i^2 και σ_j^2, αντίστοιχα

$$r(F_{X_i}^{-1}(U), F_{X_j}^{-1}(U)) = \frac{e^{\sigma_i \sigma_j} - 1}{\sqrt{e^{\sigma_i^2} - 1}\sqrt{e^{\sigma_j^2} - 1}}.$$

Αν εξετάσουμε την ειδική περίπτωση όπου $\ln(X_1) \sim N(0,1)$ και $\ln(X_2) \sim N(0,\sigma^2)$, δείτε την εργασία των **Embrechts et al.[7]**, τότε ο συντελεστής συσχέτισης γίνεται:

$$r(F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U)) = \frac{e^{\sigma} - 1}{\sqrt{e^{\sigma^2} - 1}\sqrt{e - 1}},$$

ο οποίος προσεγγίζει το 0 αν $\sigma \to \infty$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1.6.



Σχήμα 3.1.6..Ο συντελεστής συσχέτισης του συμονοτονικού τυχαίου ζεύγους (X_1, X_2) ως συνάρτηση του σ.

Κατά συνέπεια, υπάρχουν συμονοτονικά τυχαία ζεύγη των οποίων η συσχέτιση είναι σχεδόν 0. Γνωρίζοντας ότι η συμονοτονικότητα οδηγεί στην υψηλότερη πιθανή συσχέτιση για ένα δεδομένο ζευγάρι των περιθωρίων μεταβλητών, αυτή η παρατήρηση δείχνει ότι στην κατηγορία των τυχαίων διανυσμάτων με δεδομένες τις περιθώριες δεν είναι πάντα εφικτό ο συντελεστής συσχέτισης να είναι ίσος με 1.

Πλεονεκτήματα της χρησιμοποίησης του $S^c = X_1^c + X_2^c + ... + X_n^c$ αντί του $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

• Η αντικατάσταση της α.σ.κ. του S από την α.σ.κ. του S^c οδηγεί σε μια συνετή στρατηγική στα πλαίσια της Θεωρίας χρησιμότητας: η πραγματική α.σ.κ. αντικαθίσταται από μια λιγότερο «ελκυστική».

• Οι τυχαίες μεταβλητές S και S^c έχουν την ίδια αναμενόμενη τιμή. Όπως αυτές οι τυχαίες μεταβλητές διατάσσονται υπό την έννοια της κυρτής διάταξης, έχουμε ότι η ροπή τάξης $2k$ ($k = 1, 2,...,n$) του S είναι μικρότερη από την αντίστοιχη ροπή του S^c. Αυτό δηλώνει ότι κάποιες ποσότητες σχετικές με την Ασφαλιστική επιστήμη, όπως τα μηδενικής χρησιμότητας ασφάλιστρα (π.χ. το Εκθετικό ασφάλιστρο) και φυσικά τα Stop-loss ασφάλιστρα για οποιοδήποτε d, που απεικονίζουν την κυρτή διάταξη αυξάνονται όταν αντικαθίσταται η κατανομή του αθροίσματος από μια μεγαλύτερη κυρτή.

• Η α.σ.κ. του S^c καθορίζεται ευκολότερα, το S^c έχει μια μονοδιάστατη κατανομή, που εξαρτάται μόνο από την τυχαία μεταβλητή U. Η α.σ.κ. του S μπορεί να ληφθεί μόνο αν η δομή εξάρτησης των όρων του αθροίσματος είναι γνωστή. Ακόμα κι αν αυτή η δομή είναι γνωστή, μπορεί να είναι δύσκολο να καθοριστεί η α.σ.κ. του S.

3.2. Βελτιωμένα άνω φράγματα για το $\sum_{i=1}^{n} X_i$

Στην προηγούμενη ενότητα, δείξαμε πως οι συμονοτονικοί κίνδυνοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να φτιάξουμε άνω φράγματα υπό την έννοια της κυρτής διάταξης για αθροίσματα εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών. Πιο συγκεκριμένα είδαμε ότι αν η μόνη πληροφορία που έχουμε διαθέσιμη σχετίζεται με τη πολυμεταβλητή συνάρτηση κατανομής του τυχαίου διανύσματος $(X_1, X_2, ..., X_n)$ που αποτελείται από τις περιθώριες συναρτήσεις κατανομής των X_i, τότε η συνάρτηση κατανομής του $S^c = F_{X_1}^{-1}(U) + F_{X_2}^{-1}(U) + ... + F_{X_n}^{-1}(U)$ είναι η κατάλληλη για να προσεγγίσουμε την άγνωστη συνάρτηση κατανομής του $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Είναι ένα *supremum* υπό την έννοια της κυρτής διάταξης, και επομένως είναι το καλύτερο άνω φράγμα που μπορεί να παραχθεί υπό αυτές τις συνθήκες.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε κάποιες πρόσθετες πληροφορίες διαθέσιμες σχετικά με την στοχαστική φύση του $(X_1, X_2, ..., X_n)$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποια τυχαία μεταβλητή *Λ* με δεδομένη συνάρτηση κατανομής, έτσι ώστε να γνωρίζουμε τις υπό συνθήκη α.σ.κ. (δοθέντος ότι *Λ* = *λ*) των τυχαίων μεταβλητών X_i, για όλες τις πιθανές τιμές του *λ*. Θα δείξουμε σε αυτήν την περίπτωση ότι μπορούμε να παράγουμε βελτιωμένα άνω φράγματα υπό την έννοια της κυρτής διάταξης για το *S*, τα οποία είναι μικρότερα στην κυρτή διάταξη από το συμονοτονικό άνω φράγμα S^c. Ουσιαστικά, η ιδέα αυτής της ενότητας είναι να καθορίσουμε συμονοτονικά άνω φράγματα για το άθροισμα *S*, λαμβάνοντας υπόψη ότι *Λ* = *λ*. Έπειτα, αναμιγνύουμε τις προκύπτουσες κατανομές με βάρη $dF_\Lambda(\lambda)$. Με αυτή την διαδικασία, η κυρτή διάταξη διατηρείται. Το άνω φράγμα που κατασκευάζεται με αυτό τον τρόπο αποδεικνύεται ότι είναι πιο αξιόπιστο από το συμονοτονικό άνω φράγμα S^c επειδή έχει τις σωστές περιθώριες α.σ.κ. για κάθε όρο του αθροίσματος.

Στο ακόλουθο θεώρημα, εισάγουμε την έκφραση $F_{X_i|\Lambda=\lambda}^{-1}(U)$ για τη τυχαία μεταβλητή $f_i(U, \Lambda)$, όπου οι συναρτήσεις f_i καθορίζονται από τη σχέση: $f_i(u, \lambda) = F_{X_i|\Lambda=\lambda}^{-1}(u)$.

Θεώρημα 3.2.1. (Βελτιωμένα άνω φράγματα για αθροίσματα τυχαίων μεταβλητών)

Θεωρούμε την τ.μ. U που κατανέμεται *Ομοιόμορφα* στο (0,1) δηλ. $U \sim$ Uniform(*0,1*) να είναι ανεξάρτητη της τυχαίας μεταβλητής *Λ*. Τότε έχουμε

$$X_1 + X_2 + ... + X_n \leq_{cx} F_{X_1|\Lambda}^{-1}(U) + F_{X_2|\Lambda}^{-1}(U) + ... + F_{X_n|\Lambda}^{-1}(U). \quad (61)$$

Απόδειξη:

Από το Θεώρημα 3.1.1., βρίσκουμε ότι για οποιαδήποτε κυρτή συνάρτηση v ισχύει

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[v(X_1 + X_2 + ... + X_n)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{E}[v(X_1 + X_2 + ... + X_n) \big| \Lambda = \lambda] \, dF_\Lambda(\lambda) \\ &\le \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{E}[v(f_1(U,\lambda) + f_2(U,\lambda) + ... + f_n(U,\lambda))] dF_\Lambda(\lambda) \\ &= E[v(f_1(U,\Lambda) + f_2(U,\Lambda) + ... + f_n(U,\Lambda))]. \end{aligned}$$

Με το παραπάνω αποτέλεσμα αποδείξαμε το Θεώρημα από τον Ορισμό της «Κυρτής Διάταξης» όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 1.

Επίσης διαπιστώνουμε ότι το τυχαίο διάνυσμα $(F^{-1}_{X_1|\Lambda}(U), F^{-1}_{X_2|\Lambda}(U), ..., F^{-1}_{X_n|\Lambda}(U))$ έχει τις περιθώριες συναρτήσεις κατανομής $F_{X_1}, F_{X_2}, ..., F_{X_n}$, αφού ισχύει

$$\begin{aligned} F_{X_i}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pr[X_i \le x \big| \Lambda = \lambda] \, dF_\Lambda(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pr[F^{-1}_{X_i|\Lambda=\lambda}(U) \le x] dF_\Lambda(\lambda) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pr[f_i(U,\lambda) \le x] dF_\Lambda(\lambda) = \Pr[f_i(U,\Lambda) \le x]. \end{aligned}$$

Επομένως από το Θεώρημα 3.1.1. έχουμε ότι

$$F^{-1}_{X_1|\Lambda}(U) + F^{-1}_{X_2|\Lambda}(U) + ... + F^{-1}_{X_n|\Lambda}(U) \le_{cx} F^{-1}_{X_1}(U) + F^{-1}_{X_2}(U) + ... + F^{-1}_{X_n}(U).$$

Η παραπάνω σχέση δηλώνει ότι το άνω φράγμα που ορίσαμε στην ενότητα αυτή είναι πράγματι ένα βελτιωμένο άνω φράγμα.

Παρατηρήσεις

Αν η τ.μ. Λ είναι ανεξάρτητη των $X_1, X_2, ..., X_n$, τότε δεν έχουμε κάποια πρόσθετη πληροφορία και το βελτιωμένο άνω φράγμα είναι λιγότερο αξιόπιστο από το συμονοτονικό άνω φράγμα που παράγαμε στο Θεώρημα 3.1.1.

Θεωρούμε σε αυτό το σημείο τα αθροίσματα S και S^u να ορίζονται ως εξής

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

και

$$S^u = F^{-1}_{X_1|\Lambda}(U) + F^{-1}_{X_2|\Lambda}(U) + ... + F^{-1}_{X_n|\Lambda}(U).$$

Αν το τυχαίο διάνυσμα $(X_1, X_2, ..., X_n)$ είναι συμονοτονικό, τότε οποιαδήποτε επιλογή του *Λ* είναι βέλτιστη αφού μπορούμε να βρούμε την ακριβή συνάρτηση κατανομής για το άθροισμα.
Επίσης παρατηρούμε ότι αν για οποιαδήποτε πιθανή έκβαση *λ*, δεσμεύοντας στο *Λ* = *λ*, το τυχαίο διάνυσμα $(X_1, X_2, ..., X_n)$ είναι συμονοτονικό, τότε $S \overset{d}{=} S^u$.

Γενικά, για να κρίνουμε την ποιότητα του στοχαστικού άνω φράγματος S^u, πρέπει να συγκρίνουμε την διακύμανση του με τη διακύμανση του *S*.

Σημείωση: Αν έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές *X,Y* τότε ισχύει ο ακόλουθος τύπος για τη διακύμανση της *X*:
$Var[X] = E[Var[X / Y]] + Var[E[X / Y]]$.

Αρχικά γνωρίζουμε ότι ισχύει: $Var[\mathrm{E}(S^u | \Lambda)] = Var[\mathrm{E}(S | \Lambda)]$. Επομένως θα ισχύει ότι $Var[S^u] = Var[S]$ αν και μόνο αν $E[Var(S^u | \Lambda)] = E[Var(S | \Lambda)]$. Αυτή η συνθήκη θα ισχύει αν για οποιαδήποτε έκβαση *λ* της *Λ*, έχουμε ότι $Var[S^u | \Lambda = \lambda] = Var[S | \Lambda = \lambda]$.
Επομένως, αν βρούμε μια τυχαία μεταβλητή δέσμευσης *Λ* έτσι ώστε για οποιαδήποτε έκβαση *λ* του *Λ*, να έχουμε ότι, δεσμεύοντας στο *Λ* = *λ*, το διάνυσμα $(X_1, X_2, ..., X_n)$ είναι συμονοτονικό, τότε η συνάρτηση κατανομής του βελτιωμένου άνω φράγματος συμπίπτει με την ακριβή συνάρτηση κατανομής.

Σαν ειδική περίπτωση, υποθέτουμε ότι: $S = X_1 + X_2$. Τότε η βέλτιστη επιλογή είναι να ληφθεί $\Lambda \equiv X_1$ (ή $\Lambda \equiv X_2$), έτσι ώστε οι α.σ.κ. του *S* και του S^u να συμπίπτουν. Αυτό το παράδειγμα εξηγεί το γεγονός ότι η βέλτιστη τυχαία μεταβλητή δέσμευσης *Λ*, γενικά, δεν θα είναι το *S*. Είναι σαφές , γενικά, ότι η βέλτιστη επιλογή για την τυχαία μεταβλητή δέσμευσης *Λ* θα εξαρτηθεί από τη δομή εξάρτησης του τυχαίου διανύσματος $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Υπολογισμός του Stop-loss ασφαλίστρου(με δεδομένο *d*) για το S^u

Προκειμένου τώρα να ληφθεί η συνάρτηση κατανομής του S^u, παρατηρούμε ότι δοθέντος $\Lambda = \lambda$, η τυχαία μεταβλητή S^u είναι ένα άθροισμα συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών.
Έτσι ισχύει ότι:

$$F^{-1}_{S^u|\Lambda=\lambda}(p) = \sum_{i=1}^{n} F^{-1}_{X_i|\Lambda=\lambda}(p), 0 < p < 1 \ . \tag{62}$$

Δοθέντος ότι $\Lambda = \lambda$, η α.σ.κ. του S^u προκύπτει από τη σχέση (40):

$$F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x) = \sup\left\{ p \in (0,1) \middle| \sum_{i=1}^{n} F^{-1}_{X_i|\Lambda=\lambda}(p) \le x \right\} . \tag{63}$$

Επομένως η α.σ.κ. του S^u προκύπτει από την παρακάτω σχέση

$$F_{S^u}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x) dF_{\Lambda}(\lambda) . \tag{64}$$

Από τη σχέση (41), βρίσκουμε ότι αν οι περιθώριες α.σ.κ. $F_{X_i|\Lambda=\lambda}$ είναι γνησίως αύξουσες και συνεχείς, τότε η $F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x)$ προκύπτει από την επίλυση της σχέσης:

$$\sum_{i=1}^{n} F^{-1}_{X_i|\Lambda=\lambda}(F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x)) = x, \ \ F^{-1+}_{S^u|\Lambda=\lambda}(0) < x < F^{-1}_{S^u|\Lambda=\lambda}(1) .$$

Σε αυτήν την περίπτωση, βρίσκουμε επίσης από τη σχέση (48) ότι για οποιοδήποτε $d \in (F^{-1+}_{S^u|\Lambda=\lambda}(0), F^{-1}_{S^u|\Lambda=\lambda}(1))$:

$$E[(S^u - d)_+ \left| \Lambda = \lambda \right.] = \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - F^{-1}_{X_i|\Lambda=\lambda}(F_{S^u|\Lambda=\lambda}(d)))_+ \left| \Lambda = \lambda \right.] ,$$

από το οποίο μπορεί να υπολογιστεί το Stop-loss ασφάλιστρο με δεδομένο d του S^u. Παρακάτω στις Εφαρμογές μας θα δώσουμε ένα αποτέλεσμα των όσων αναφέραμε όταν οι περιθώριες τ.μ. X_i ακολουθούν την *Λογαριθμοκανονική* Κατανομή.

3.3. Κάτω φράγματα για $\sum_{i=1}^{n} X_i$

Αρχικά θεωρούμε το $\underline{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ να είναι ένα τυχαίο διάνυσμα με δοσμένες περιθώριες α.σ.κ. $F_{X_1}, F_{X_2}, ..., F_{X_n}$. Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποια τυχαία μεταβλητή Λ με δοσμένη συνάρτηση κατανομής, έτσι ώστε να γνωρίζουμε τις υπό συνθήκη α.σ.κ. (λαμβάνοντας υπόψη δηλ. ότι $\Lambda = \lambda$) των τυχαίων μεταβλητών X_i, για όλες τις πιθανές τιμές λ της τ.μ. Λ. Θα δείξουμε πως μπορούμε να λάβουμε ένα κάτω φράγμα, υπό την έννοια της κυρτής διάταξης, για το $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$ δεσμεύοντας σε αυτή την τυχαία μεταβλητή. Η εύρεση μιας «ελκυστικότερης» τυχαίας μεταβλητής από το S θα μας βοηθήσει στο να εξετάσουμε τον βαθμό υπερεκτίμησης του κινδύνου που περιλαμβάνεται με την αντικατάσταση του S από μια λιγότερο «ελκυστική τυχαία» μεταβλητή S^u ή S^c.

Η ιδέα αυτής της ενότητας είναι να παρατηρηθεί ότι η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής είναι πάντα μικρότερη ή ίση υπό την έννοια της κυρτής διάταξης από την ίδια την τυχαία μεταβλητή, και επίσης ότι η κυρτή διάταξη διατηρείται κάτω από αυτή τη μίξη.

Θεώρημα 3.3.1. (Κάτω Φράγματα για αθροίσματα τυχαίων μεταβλητών)

Για οποιοδήποτε τυχαίο διάνυσμα $\underline{X}$ και οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή Λ, έχουμε ότι:

$$E[X_1|\Lambda] + E[X_2|\Lambda] + ... + E[X_n|\Lambda] \leq_{cx} X_1 + X_2 + ... + X_n .$$

Απόδειξη:

Από την ανισότητα *Jensen*, αποδεικνύουμε ότι για οποιαδήποτε κυρτή συνάρτηση v, ισχύει η ακόλουθη ανισότητα

$$\begin{aligned} E[v(X_1 + X_2 + ... + X_n)] &= E_\Lambda E[v(X_1 + X_2 + ... + X_n)|\Lambda] \geq E_\Lambda[v(E[X_1 + X_2 + ... + X_n|\Lambda])] \\ &= E_\Lambda[v(E[X_1|\Lambda] + E[X_2|\Lambda] + ... + E[X_n|\Lambda])]. \end{aligned}$$

Από την παραπάνω ανισότητα αποδεικνύεται το Θεώρημα από τον Ορισμό της «Κυρτής Διάταξης» όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 1.

Αρχικά ορίζουμε το S όπως παραπάνω, και το S^l ως εξής

$$S^l = E[S|\Lambda]. \qquad (65)$$

Σημειώνουμε ότι αν οι τ.μ. Λ και S είναι αμοιβαία ανεξάρτητες, τότε βρίσκουμε το τετριμμένο αποτέλεσμα

$$E[S] \leq_{cx} S .$$

Από την άλλη, αν οι τ.μ *Λ* και *S* έχουν ένα προς ένα σχέση(δηλ. η *Λ* καθορίζει εντελώς το *S*), τότε το κάτω φράγμα συμπίπτει με το *S*.

Σημειώνουμε περαιτέρω ότι η σχέση $E[E[X_i|\Lambda]] = E[X_i]$ ισχύει πάντα, ενώ η σχέση $Var[E[X_i|\Lambda]] < Var[X_i]$ ισχύει όταν: $E[Var[X_i|\Lambda]] \neq 0$ που σημαίνει ότι η X_i, δοθέντος ότι *Λ* = *λ*, είναι εκφυλισμένη για κάθε *λ*. Αυτό δηλώνει ότι το τυχαίο διάνυσμα $(E[X_1|\Lambda], E[X_2|\Lambda], ..., E[X_n|\Lambda])$ γενικά, δεν θα έχει τις ίδιες περιθώριες συναρτήσεις κατανομής με το $\underline{X}$. Αν μπορέσουμε να βρούμε μια τυχαία μεταβλητή δέσμευσης *Λ* με την ιδιότητα όλες οι τυχαίες μεταβλητές $E[X_i|\Lambda]$ να είναι μη αύξουσες συναρτήσεις του *Λ*(ή να μη-φθίνουσες συναρτήσεις του *Λ*), τότε το κάτω φράγμα S^l είναι ένα άθροισμα συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών. Η α.σ.κ. αυτού του αθροίσματος μπορεί τότε να ληφθεί από προηγούμενα αποτελέσματα. Εφαρμογή του Θεωρήματος 3.3.1. στην περίπτωση όπου οι περιθώριες X_i ακολουθούν την *Λογαριθμοκανονική* κατανομή βρίσκουμε στην επόμενη ενότητα.

Για να κρίνουμε την ποιότητα του στοχαστικού κάτω φράγματος *E*[*S*|*Λ*], πρέπει να εξετάσουμε τη διακύμανση του. Για να τη μεγιστοποιήσουμε, δηλ. να την φέρουμε όσο το δυνατόν πιο κοντά στην *Var*[*S*], η μέση τιμή του *Var*[*S*|*Λ*=*λ*] πρέπει να ελαχιστοποιηθεί. Με άλλα λόγια, για να πάρουμε καλύτερο κάτω φράγμα, το *Λ* και το *S* πρέπει να είναι σχεδόν ίδια.

Υπολογισμός του Stop-loss ασφαλίστρου (με δεδομένο *d*) για το S^l

Ας υποθέσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή *Λ* είναι τέτοια ώστε όλες οι $g_i(\lambda) = E[X_i|\Lambda = \lambda]$ να είναι μη-αύξουσες και συνεχείς συναρτήσεις του *λ*. Τα ποσοστημόρια του κάτω φράγματος S^l προκύπτουν από την παρακάτω σχέση

$$F_{S^l}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{E[X_i|\Lambda]}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{g_i(\Lambda)}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} E[X_i|\Lambda = F_\Lambda^{-1+}(1-p)],\ p \in (0,1). \tag{66}$$

Επίσης, η α.σ.κ. του S^l προκύπτει από τη σχέση (40):

$$F_{S^l}(x) = \sup\left\{ p \in (0,1) \left| \sum_{i=1}^{n} E[X_i|\Lambda = F_\Lambda^{-1+}(1-p)] \le x \right\} \right.. \tag{67}$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι οι α.σ.κ. των τυχαίων μεταβλητών $E[X_i|\Lambda]$ είναι γνησίως αύξουσες και συνεχείς, τότε η α.σ.κ. του S^l είναι επίσης γνησίως αύξουσα και συνεχής, και από τη σχέση (41) , παίρνουμε ότι η $F_{S^l}(x)$ προκύπτει από την επίλυση της παρακάτω σχέσης για όλα τα $x \in (F^{-1+}_{E[S|\Lambda]}(0), F^{-1}_{E[S|\Lambda]}(1))$:

$$\sum_{i=1}^{n} F^{-1}_{E[X_i|\Lambda]}(F_{S^l}(x)) = x ,$$

ή ισοδύναμα,

$$\sum_{i=1}^{n} E[X_i \left| \Lambda = F^{-1+}_{\Lambda}(1 - F_{S^l}(x))\right] = x \quad ,$$

η οποία καθορίζει την α.σ.κ. του κάτω φράγματος $S^l = E[S|\Lambda]$ για το *S*.

Τότε τα Stop-loss ασφάλιστρα του S^l μπορούν να καθοριστούν από τη σχέση (48):

$$E[(S^l - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} E[(E[X_i|\Lambda] - E[X_i \left| \Lambda = F^{-1+}_{\Lambda}(1 - F_{S^l}(d))\right])_+] \ , \tag{68}$$

η οποία ισχύει για όλα τα $d \in (F^{-1+}_{S^l}(0), F^{-1}_{S^l}(1))$.

Μέχρι τώρα, εξετάσαμε την περίπτωση που όλα τα $E[X_i|\Lambda]$ είναι μη αύξουσες συναρτήσεις του *Λ*. Η περίπτωση που όλα τα $E[X_i|\Lambda]$ είναι μη-φθίνουσες συναρτήσεις του *Λ* οδηγεί επίσης σε ένα συμονοτονικό διάνυσμα $(E[X_1|\Lambda], E[X_2|\Lambda], ..., E[X_n|\Lambda])$, και μπορεί να αντιμετωπιστεί με παρόμοιο τρόπο.

Τώρα εξετάζουμε τη γενική περίπτωση όπου όλες οι $E[X_i|\Lambda]$ δεν είναι μη αύξουσες (ή μη φθίνουσες). Σε αυτή τη περίπτωση το κάτω φράγμα δεν είναι ένα άθροισμα συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών. Αυτό κάνει πιο περίπλοκο τον προσδιορισμό της συνάρτησης κατανομής του κάτω φράγματος. Η α.σ.κ. και τα Stop-loss ασφάλιστρα του S^l μπορούν να καθοριστούν σε αυτήν την περίπτωση από τις σχέσεις

$$F_{S^l}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pr[\sum_{i=1}^{n} E[X_i|\Lambda] \le x | \Lambda = \lambda] dF_{\Lambda}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\sum_{i=1}^{n} E[X_i|\Lambda = \lambda] \le x) dF_{\Lambda}(\lambda) , \tag{69}$$

$$E[(S^l - d)_+] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\sum_{i=1}^{n} E[X_i|\Lambda = \lambda] - d)_+ dF_{\Lambda}(\lambda) .$$

Μια κάπως διαφορετική διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν η F_Λ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Σε αυτήν την περίπτωση, καθορίζουμε τη τυχαία μεταβλητή $U = F_\Lambda(\Lambda)$ που ακολουθεί την *Ομοιόμορφη* κατανομή στο (0,1). Έχουμε λοιπόν ότι $U = u \Leftrightarrow \Lambda = F_\Lambda^{-1}(u)$ που ισχύει για όλα τα 0<*u*<1. Τότε, η α.σ.κ. και τα Stop-loss ασφάλιστρα του S^l προκύπτουν από τις παρακάτω σχέσεις

$$F_{S^l}(x) = \int_0^1 \Pr[\sum_{i=1}^n E[X_i|\Lambda] \leq x | U = u]du = \int_0^1 I(\sum_{i=1}^n E[X_i|\Lambda = F_\Lambda^{-1}(u)] \leq x)du,$$

$$E[(S^l - d)_+] = \int_0^1 (\sum_{i=1}^n E[X_i|\Lambda = F_\Lambda^{-1}(u)] - d)_+ du. \tag{70}$$

3.4. Θεωρητικά Παραδείγματα

Σε αυτή την ενότητα, θα δείξουμε την τεχνική στο να καθορίζουμε τα κυρτά κάτω και άνω φράγματα για αθροίσματα τυχαίων μεταβλητών, μέσα από μερικά αριθμητικά παραδείγματα. Πιο συγκεκριμένα, θα εξετάσουμε αθροίσματα τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την *Κανονική* ή την *Λογαριθμοκανονική* κατανομή.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα τυχαίο διάνυσμα $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ ακολουθή την *Πολυμεταβλητή Κανονική* Κατανομή αν και μόνο αν κάθε γραμμικός συνδυασμός των μεταβλητών του διανύσματος ακολουθεί την *Κανονική* Κατανομή. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι το τυχαίο διάνυσμα $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ ακολουθεί την *Πολυμεταβλητή Κανονική* Κατανομή. Παίρνουμε τις τ.μ. *Y* και *Λ* να είναι γραμμικοί συνδυασμοί των μεταβλητών του διανύσματος: $Y = \sum_{i=1}^n \alpha_i Y_i$ και $\Lambda = \sum_{i=1}^n \beta_i Y_i$. Επομένως το διάνυσμα (*Y*, *Λ*) ακολουθεί μια *Διδιάστατη Κανονική* Κατανομή. Επίσης, αν το διάνυσμα (*Y*,*Λ*) ακολουθεί μια *Διδιάστατη Κανονική* Κατανομή, τότε, δοθέντος ότι *Λ* = *λ*, η τ.μ. *Y* ακολουθεί την *Κανονική* Κατανομή με μέσο όρο και διασπορά που δίνονται παρακάτω ως εξής

$$E[Y|\Lambda = \lambda] = E[Y] + r[Y,\Lambda]\frac{\sigma_Y}{\sigma_\Lambda}(\lambda - E[\Lambda]) \tag{71}$$

και

$$Var[Y|\Lambda = \lambda] = \sigma_Y^2(1 - r[Y,\Lambda]^2) \quad , \tag{72}$$

όπου το *r* (*Y*, *Λ*) είναι ο συντελεστής συσχέτισης *Pearson* για το ζεύγος (*Y*, *Λ*).

3.4.1. Αθροίσματα *Κανονικών* τυχαίων μεταβλητών

Θεωρούμε τις τ.μ. Y_1 και Y_2 να είναι αμοιβαία ανεξάρτητες και *Κανονικές* $N(0,1)$. Προφανώς, το άθροισμα $S = Y_1 + Y_2$ ακολουθεί την *Κανονική* Κατανομή $N(0,2)$. Για τα κυρτά φράγματα του S, θα θεωρήσουμε μεταβλητή δέσμευσης του τύπου $\Lambda = Y_1 + \alpha Y_2$ για κάποιους πραγματικούς α. Η δεσμευμένη κατανομή του Y_1, δοθέντος ότι $\Lambda = \lambda$, είναι *Κανονική* $N((\lambda/1+\alpha^2),(\alpha^2/1+\alpha^2))$.

Αυτό σημαίνει ότι για την δεσμευμένη μέση τιμή $\mathrm{E}[Y_1|\Lambda]$ και για τη τ.μ. $F^{-1}_{Y_1|\Lambda}(U)$, με την U να κατανέμεται *Ομοιόμορφα* στο (0,1) και να είναι ανεξάρτητη της Λ παίρνουμε

$$\mathrm{E}[Y_1|\Lambda] = \frac{\Lambda}{1+\alpha^2} \quad \text{και} \quad F^{-1}_{Y_1|\Lambda}(U) = \mathrm{E}[Y_1|\Lambda] + \frac{|\alpha|\Phi^{-1}(U)}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

Λόγω του ότι $E[Y_1 + \alpha Y_2 |\Lambda] \equiv \Lambda$, έχουμε επίσης

$$\mathrm{E}[Y_2|\Lambda] = \frac{\alpha\Lambda}{1+\alpha^2} \quad \text{και} \quad F^{-1}_{Y_2|\Lambda}(U) = \mathrm{E}[Y_2|\Lambda] + \frac{\Phi^{-1}(U)}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

Και οι δύο τ.μ. $F^{-1}_{Y_1|\Lambda}(U)$ και $F^{-1}_{Y_2|\Lambda}(U)$ ακολουθούν την *Τυπική Κανονική* Κατανομή $N(0,1)$. Για το συμονοτονικό άνω φράγμα S^c, το βελτιωμένο άνω φράγμα S^u και το κάτω φράγμα S^l, όπως ορίστηκαν στις προηγούμενες ενότητες, παίρνουμε

$$S = Y_1 + Y_2 \sim N(0,2), \quad S^l = E[Y_1 + Y_2 |\Lambda] = \frac{1+\alpha}{1+\alpha^2}\Lambda \sim N\left(0, \frac{(1+\alpha)^2}{1+\alpha^2}\right),$$

$$S^u = \frac{1+\alpha}{1+\alpha^2}\Lambda + \frac{1+|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\Phi^{-1}(U) \sim N\left(0, \frac{(1+\alpha)^2 + (1+|\alpha|)^2}{1+\alpha^2}\right), \quad S^c \overset{d}{=} 2Y_1 \sim N(0,4).$$

Για κάποιες ειδικές περιπτώσεις του α, παίρνουμε τις ακόλουθες κατανομές για τα κάτω και άνω φράγματα S^l και S^u:

$\alpha = 0 : N(0,1) \leq_{cx} S \leq_{cx} N(0,2)$,

$\alpha = 1 : N(0,2) \leq_{cx} S \leq_{cx} N(0,4)$,

$\alpha = -1 : N(0,0) \leq_{cx} S \leq_{cx} N(0,2)$,

$|\alpha| \to \infty : N(0,1) \leq_{cx} S \leq_{cx} N(0,2)$.

Σημειώνουμε ότι η πραγματική κατανομή του S είναι $N(0, 2)$.

Παρατηρήσεις

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι το καλύτερο κυρτό κάτω φράγμα επιτυγχάνεται όταν (α = 1) και το καλύτερο άνω φράγμα όταν ($\alpha \leq 0$ ή $\alpha \to \infty$) όταν δηλαδή οι κατανομές αντίστοιχα S^l και S^u συμπίπτουν με την πραγματική κατανομή του *S*. Φυσικά παίρνοντας $|\alpha| \to \infty$ έχουμε τα ίδια αποτελέσματα με το να παίρναμε την μεταβλητή δέσμευσης $\Lambda = Y_2$. Η διασπορά του S^l φαίνεται ότι έχει ένα μέγιστο στο $\alpha = 1$, και ένα ελάχιστο στο $\alpha = -1$. Από την άλλη, η διασπορά $Var[S^u]$ έχει επίσης ένα μέγιστο στο $\alpha = 1$, και ελάχιστα στο $\alpha \leq 0$ και στο $\alpha \to \infty$. Έτσι το καλύτερο κάτω φράγμα επιτυγχάνεται για *Λ* = *S*, και το χειρότερο για *Λ* ανεξάρτητο του *S*. Το καλύτερο βελτιωμένο άνω φράγμα βρίσκεται όταν παίρνουμε $\Lambda = Y_1$, $\Lambda = Y_2$, ή οποιοδήποτε $\alpha < 0$, περιλαμβάνοντας την περίπτωση $\alpha = -1$ με το *Λ* ανεξάρτητο του *S*. Το χειρότερο, εντούτοις , λαμβάνεται όταν *Λ* = *S*.

Για να συγκρίνουμε τη διασπορά του στοχαστικού άνω φράγματος S^u με τη διασπορά του *S* αρκεί να συγκρίνουμε την $Cov(F^{-1}_{Y_1|\Lambda}(U), F^{-1}_{Y_2|\Lambda}(U))$ με την $Cov(Y_1, Y_2)$. Είναι σαφές ότι, γενικά, η βέλτιστη επιλογή για τη μεταβλητή δέσμευσης *Λ* θα εξαρτηθεί από τη συσχέτιση των Y_1 και Y_2. Αν αυτή η συσχέτιση είναι ίση με 1, οποιαδήποτε *Λ* οδηγεί στο ότι $S \overset{d}{=} S^c \overset{d}{=} S^u$.

Στη περίπτωσή μας όπου οι τ.μ. Y_1 και Y_2 είναι αμοιβαία ανεξάρτητες, η βέλτιστη επιλογή αποδεικνύεται ότι είναι αν πάρουμε $\Lambda \equiv Y_1$, το οποίο αντιστοιχεί στην περιπτώση όπου $\alpha = 0$ ή $\Lambda \equiv Y_2$, το οποίο αντιστοιχεί στο $\alpha \to \infty$, εξασφαλίζοντας με τον τρόπο αυτό ότι τα S και S^u συμπίπτουν. Επίσης για οποιοδήποτε $\alpha < 0$ οδηγούμαστε στο ότι $S \overset{d}{=} S^u$.

3.4.2. Αθροίσματα *Λογαριθμοκανονικών* τυχαίων μεταβλητών

Στο σημείο αυτό, θα εξετάσουμε μια απλή ειδική περίπτωση της Θεωρίας που θα ασχοληθούμε στο επόμενο Κεφάλαιο. Το παρουσιάζουμε εδώ σαν ένα αριθμητικό παράδειγμα. Πιο συγκεκριμένα, παίρνουμε τις τ.μ. Y_1 και Y_2 να είναι ανεξάρτητες *N*(0,1). Επομένως η $X_1 = e^{Y_1+Y_2} \sim \log normal(0,2)$ και η $X_2 = e^{Y_2} \sim \log normal(0,1)$.

Το άθροισμα $S = X_1 + X_2$ μπορεί να ερμηνευθεί ως η τιμή στο χρόνο 2 της επένδυσης μιας μονάδας στο χρόνο 0 και μιας μονάδας στο χρόνο 1, όπου οι επιστροφές από την επένδυση στα έτη 1 και 2 δίνονται από τις Y_1 και Y_2, αντίστοιχα. Για το κάτω φράγμα S^l, παίρνουμε την μεταβλητή δέσμευσης $\Lambda = Y_1 + Y_2$.

Σημειώνουμε ότι $E[X_1 | \Lambda] = e^{\Lambda}$, ενώ η τ.μ. $Y_2 | \Lambda = \lambda \sim N(\frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{2})$. Επομένως:

$$E(e^{Y_2} | Y_1 + Y_2 = \lambda) = m(1; \frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{2}),$$

όπου $m(t; \mu, \sigma^2) = e^{\mu t + 1/2(\sigma^2 t^2)}$ είναι η Ροπογεννήτρια συνάρτηση της *Κανονικής* Κατανομής $N(\mu, \sigma^2)$. Αυτό οδηγεί στη σχέση

$$E(e^{Y_2} | \Lambda) = e^{(1/2\Lambda)+(1/4)}.$$

Έτσι το κάτω φράγμα είναι

$$S^l = E[X_1 + X_2 | \Lambda] = e^{\Lambda} + e^{(1/2\Lambda)+(1/4)}.$$

Το άνω φράγμα S^c προκύπτει από το $(X_1^c, X_2^c) \overset{d}{=} (e^{\sqrt{2}Z}, e^Z)$ για $Z \sim N(0,1)$. Το βελτιωμένο άνω φράγμα S^u έχει ως πρώτο όρο πάλι το e^{Λ}, και ως δεύτερο όρο το $e^{(1/2\Lambda)+(1/2\sqrt{2}\Lambda)}$, με τις *Z* και *Λ* να είναι αμοιβαία ανεξάρτητες τ.μ.. Όλοι οι όροι που εμφανίζονται στα φράγματα όπως δίνονται παραπάνω είναι *Λογαριθμικοκανονικές* τυχαίες μεταβλητές που καθορίζονται από τις *Λ* και *Z*, οι οποίες είναι αμοιβαία ανεξάρτητες. Έτσι οι διασπορές των φραγμάτων είναι εύκολο να υπολογιστούν. Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε ότι

$$(E[S])^2 = e + 2e^{3/2} + e^2,$$

$$E[(S^l)^2] = e^{3/2} + 2e^{5/2} + e^4,$$

$$E[S^2] = E[(S^u)^2] = e^2 + 2e^{5/2} + e^4,$$

$$E[(S^c)^2] = e^2 + 2e^{3/2} + \sqrt{2} + e^4.$$

Επομένως

$$Var[S^l] = 64,374,$$

$$Var[S] = Var[S^u] = 67,281,$$

$$Var[S^c] = 79,785.$$

Έτσι το στενό στοχαστικό κάτω φράγμα S^l για το S λαμβάνεται όταν δεσμεύσουμε στο $Y_1 + Y_2$. Το βελτιωμένο άνω φράγμα S^u σε αυτή τη περίπτωση αποδεικνύεται ότι είναι πολύ καλό. Πράγματι, όταν $S \leq_{cx} S^u$ και οι διασπορές τους είναι ίσες, το βελτιωμένο άνω φράγμα S^u έχει την ίδια κατανομή με το *S*. Αυτό το αποτέλεσμα αναμενόταν επειδή δεσμεύοντας στο *Λ* = *λ*, η τ.μ. $X_1 = e^{\Lambda}$ ορίζεται και τότε το τυχαίο διάνυσμα (X_1, X_2) είναι συμονοτονικό. Υπενθυμίζουμε ότι το κάτω φράγμα θα είναι το καλύτερο αν η μεταβλητή δέσμευσης *Λ* μοιάζει με το *S* όσο το δυνατόν περισσότερο, όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα. Προσεγγίζοντας το e^{Y_2} και το $e^{Y_1+Y_2}$ από τις $1+Y_2$ και $1+Y_1+Y_2$, αντίστοιχα,βλέπουμε ότι $S \approx 2 + Y_1 + 2Y_2$, έτσι θα μπορούσαμε να περιμένουμε ότι παίρνοντας το $Y_1 + 2Y_2$ αντί του $Y_1 + Y_2$ σαν μεταβλητή δέσμευσης οδηγούμαστε σε καλύτερο κάτω φράγμα. Αυτό όμως δεν ισχύει αφού η διασπορά του κάτω φράγματος είναι 61,44 σε αυτήν την περίπτωση. Αποδεικνύεται ότι το βέλτιστο κάτω φράγμα επιτυγχάνεται όταν η μεταβλητή δέσμευσης είναι του τύπου $Y_1 + \alpha Y_2$ με *α* = 1,27 και τότε η διασπορά του S^l είναι 66,082.

3.4.3. Αθροίσματα Δεσμευμένων ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών

Εξετάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο ασφάλειας πυρός ακινήτων, αποτελούμενο από *n* κινδύνους X_i, με $\Pr[X_i = 0] = 0,90, \Pr[X_i = 1] = 0,04$ και $\Pr[X_i = 2] = 0,06$.

Υποθέτουμε ότι η αξία του χαρτοφυλακίου εξαρτάται από τις καιρικές συνθήκες κατά τη διάρκεια του ασφαλιστικού έτους. Παίρνουμε τη μεταβλητή δέσμευσης *Λ* που ακολουθεί την κατανομή *Bernoulli*, να είναι ίση με 1 (με πιθανότητα 1/3) σε περίπτωση ξηρού καυτού καλοκαιριού και 0 σε άλλη περίπτωση. Επίσης υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε τις δεσμευμένες κατανομές, δοθέντος δηλ. της τ.μ. *Λ*, των κινδύνων X_i. Πιο συγκεκριμένα παίρνουμε

$\Pr[X_i = 0,1 | \Lambda = 0] = 0,94$, $0,06$ και $\Pr[X_i = 0,2 | \Lambda = 1] = 0,82$, $0,18$.

Έτσι, ένα ξηρό και καυτό καλοκαίρι οδηγεί σε υψηλή πιθανότητα εμφάνισης των κινδύνων. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι, δοθέντος *Λ* = *λ*, οι κίνδυνοι X_i είναι δεσμευμένα ανεξάρτητοι.

Βρίσκουμε ότι: Var[Λ] = 2/9 και Var[X_i] = 0,2544. Η κατανομή του συμονοτονικού άνω φράγματος S^c είναι

$$S^c \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(U) \stackrel{d}{=} nX_1 ,$$

από το οποίο βρίσκουμε ότι: Var[S^c] = 0,2544 n^2 .

Η α.σ.κ. του κάτω φράγματος S^l είναι

$$S^l \stackrel{d}{=} nE[X_1 | \Lambda] \stackrel{d}{=} n\{0,06(1-\Lambda)+0,36\Lambda\}.$$

Έτσι, $Var[S^l] = 0,02n^2$.

Η α.σ.κ. του βελτιωμένου άνω φράγματος S^u προκύπτει ως

$$S^u \stackrel{d}{=} nF_{X_1|\Lambda}^{-1}(U) \stackrel{d}{=} nX_1 .$$

Σε αυτή την περίπτωση βρίσκουμε ότι $S^u \stackrel{d}{=} S^c$. Προκειμένου να υπολογιστεί η ακριβής διασπορά του $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$, σημειώνουμε ότι:

$Var[S] = Var[S^l]+E[Var[S | \Lambda]]$.

Βρίσκουμε αρχικά ότι $Var[X_i | \Lambda] = \{0,0564(1-\Lambda)+0,5904\Lambda\}$.

Υποθέσαμε ότι, δοθέντος $\Lambda = \lambda$, οι τ.μ. X_i είναι αμοιβαία ανεξάρτητες.

Έτσι βρίσκουμε ότι:

$E[Var[S|\Lambda]] = nE[Var[X_i|\Lambda]] = 0,2344n$. Τελικά παίρνουμε ότι:

Var[S] =(0,02n +0,2344)n. Έτσι,

$$\frac{Var[S]}{Var[S^l]} = 1 + \frac{11,72}{n}.$$

Από τον παραπάνω λόγο βλέπουμε ότι η απόδοση του κάτω φράγματος βελτιώνεται όσο το μέγεθος του χαρτοφυλακίου αυξάνεται. Ακόμη και για ένα σχετικά μικρό χαρτοφυλάκιο, το κάτω φράγμα φαίνεται να είναι αρκετά αξιόπιστο.

Γενικά Συμπεράματα

Εξετάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο *n* κινδύνων X_i. Υποθέτουμε ότι για οποιαδήποτε πιθανή έκβαση *λ* της τ.μ *Λ* έχουμε ότι, δοθέντος *Λ* = *λ*, οι κίνδυνοι X_i ακολουθούν την ίδια κατανομή, αλλά δεν είναι απαραιτήτως αμοιβαία ανεξάρτητοι. Σε αυτήν την περίπτωση, βρίσκουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(U) \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{n} F_{X_i|\Lambda}^{-1}(U) \overset{d}{=} nX_1,$$

όπου οι τ.μ. *U* και *Λ* είναι αμοιβαία ανεξάρτητες και η τ.μ. *U* κατανέμεται *Ομοιόμορφα* στο διάστημα (0,1). Έτσι,

$$S^c \overset{d}{=} S^u \overset{d}{=} nX_1, \quad Var[S^c] = Var[S^u] = n^2 Var[X_1].$$

Για το κάτω φράγμα S^l, βρίσκουμε ότι

$$S^l \overset{d}{=} nE[X_1|\Lambda], \quad Var[S^l] = n^2 Var[E[X_1|\Lambda]].$$

Τώρα υποθέτουμε ότι οι δεσμευμένοι κίνδυνοι X_i, δοθέντος ότι *Λ* = *λ,* είναι αμοιβαία ανεξάρτητοι. Στη περίπτωση αυτή η διασπορά του αθροίσματος $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$ λαμβάνεται ως εξής:

$$Var[S] = Var[S^l] + E[Var[S|\Lambda]] = n^2 Var[E[X_1|\Lambda]] + nE[Var[X_1|\Lambda]].$$

Επομένως βρίσκουμε ότι:

$$\frac{Var[S^c]}{Var[S]} = \frac{1 + (E[Var[X_1|\Lambda]] / Var[E[X_1|\Lambda]])}{1 + ((1/n)(E[Var[X_1|\Lambda]] / Var[E[X_1|\Lambda]]))}, \tag{73}$$

η οποία είναι μια αύξουσα συνάρτηση ως προς το μέγεθος *n* του χαρτοφυλακίου, με οριακή τιμή(όταν $n \to \infty$) $1 + (E[Var[X_1|\Lambda]] / Var[E[X_1|\Lambda]])$.

Αυτό σημαίνει ότι όσο μεγαλύτερο είναι το χαρτοφυλάκιο, τόσο χειρότερη είναι η σχετική απόδοση του συμονοτονικού(και βελτιωμένου) άνω φράγματος.

Για το κάτω φράγμα βρίσκουμε ότι:

$$\frac{Var[S]}{Var[S^l]} = 1 + \frac{1}{n} \frac{E[Var[X_1|\Lambda]]}{Var[E[X_1|\Lambda]]}. \tag{74}$$

Έτσι παρατηρούμε ότι όσο περισσότερο η διασπορά των μεμονωμένων κινδύνων X_i οφείλεται στη $Var[E[X_1|\Lambda]]$, τόσο καλύτερο είναι το κάτω φράγμα. Για ένα μεγάλο χαρτοφυλάκιο, το κάτω φράγμα S^l θα είναι αρκετά αξιόπιστο.

Αν ορίσουμε το z ως την αναλογία $wn/(wn \quad +\upsilon)$ όπου $w = Var[E[X_1|\Lambda]]$ και $\upsilon = E[Var[X_1|\Lambda]]$ τότε μπορούμε να ξαναγράψουμε τις σχέσεις (73) και (74) ως εξής $Var[S^c] = (z + (1-z)n)Var[S]$ και $Var[S^l] = zVar[S]$.

Όσο μεγαλύτερο είναι το z, τόσο καλύτερο είναι το κάτω φράγμα.

Η μέγιστη απόδοση(δηλ. όταν z = 1) επιτυγχάνεται αν $n \to \infty$, $w = Var[X_1]$ ή $\upsilon = 0$.

Για ένα χαρτοφυλάκιο δεδομένου μεγέθους n, έχουμε ότι όσο μεγαλύτερο είναι το z, τόσο καλύτερο είναι το συμονοτονικό άνω φράγμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Λογαριθμοκανονική Διαδικασία προεξόφλησης και υπολογισμός Stop-loss Ασφαλίστρων

4.1. Ορισμός του Προβλήματος και υπολογισμός των Φραγμάτων

Θεωρούμε αρχικά μια σειρά ντιτερμινιστικών πληρωμών $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, που αντιστοιχούν στις περιόδους 1, 2, ..,*n*. Θέλουμε να βρούμε το χρηματικό ποσό που απαιτείται στο χρόνο 0 (όπως θα ορίσουμε παρακάτω μέσω της τ.μ. S) προκειμένου να μπορούμε να εκπληρώσουμε αυτές τις μελλοντικές υποχρεώσεις $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Το επίπεδο αυτής της πληρωμής θα εξαρτηθεί έντονα από τον τρόπο με τον οποίο το ποσό θα επενδυθεί. Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι το ποσό επενδύεται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να παράγει μια στοχαστική επιστροφή Y_j στο έτος j, $j = 1, 2, ..., n$. Δηλαδή αν επενδύσουμε μια μονάδα στο χρόνο $j-1$ θα αυξηθεί κατά e^{Y_j} στο χρόνο j. Ο παράγοντας προεξόφλησης κατά τη διάρκεια της περιόδου $[0,i]$ δίνεται από τον παράγοντα $e^{-(Y_1+Y_2+...+Y_i)}$. Ορίζουμε την τ.μ. S ως

$$S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-(Y_1+Y_2+...+Y_i)} \quad . \qquad (75)$$

Στο σημείο αυτό αρκεί να γνωρίζουμε την συνάρτηση κατανομής(α.σ.κ.) της *S*. Ο λόγος είναι ότι αν ξέραμε την ακριβή α.σ.κ. της *S*, θα μπορούσαμε μέσα από την αντίστροφη της συνάρτησης κατανομής να καθορίσουμε το σημείο $F_S^{-1}(0,99)$. Τότε θα λέγαμε ότι υπάρχει 99% πιθανότητα να εκπληρώσουμε τις μελλοντικές υποχρεώσεις μας, το οποίο σημαίνει ότι υπάρχει 99% πιθανότητα ότι μετά από την τελευταία πληρωμή στο χρόνο *n*, θα αφήσουμε ένα μη αρνητικό ποσό.

Σε αυτή την ενότητα, θα υποθέσουμε ότι το διάνυσμα επιστροφών $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ ακολουθεί την *Πολυδιάστατη Κανονική* Κατανομή. Η τ.μ. S τότε είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των εξαρτημένων Λογαριθμοκανονικών τυχαίων μεταβλητών. Σε οποιοδήποτε ρεαλιστικό πρότυπο επιστροφής, είναι αδύνατο να καθορίσουμε τη συνάρτηση κατανομής του S αναλυτικά. Επομένως, θα παράγουμε τα κυρτά άνω και κάτω φράγματα , S^c, S^u και S^l του S.

Αρχικά ορίζουμε τις τ.μ. X_i και $Y(i)$ ως εξής

$$Y(i) = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_i, \tag{76}$$

$$X_i = e^{-Y(i)}. \tag{77}$$

Τότε η στοχαστική υποχρέωση S μπορεί να γραφτεί

$$S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n .$$

Σημειώνουμε, όπως αναφέραμε σε προηγούμενο Κεφάλαιο, ότι αν όλα τα α_i είναι θετικά, τότε η «υποστήριξη» του S βρίσκεται στην περιοχή $[F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1)] = (0, \infty)$, αν όλα τα α_i είναι αρνητικά, τότε $[F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1)] = (-\infty, 0)$, και αν τα α_i έχουν μεικτά πρόσημα, τότε $[F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1)] = (-\infty, +\infty)$.

Στο ακόλουθο Θεώρημα, παράγουμε τις προσεγγίσεις για (τη συνάρτηση κατανομής) τη στοχαστική υποχρέωση S.

Θεώρημα 4.1.1. (Φράγματα για τη στοχαστική υποχρέωση *S*)

Θεωρούμε την τ.μ. S που δίνεται από τη σχέση (75), όπου το τυχαίο διάνυσμα $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ ακολουθεί μια *Πολυδιάστατη Κανονική* Κατανομή. Παίρνουμε ως μεταβλητή δέσμευσης την $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \beta_i Y_i$. Τότε το κάτω φράγμα S^l, το βελτιωμένο άνω φράγμα S^u και το συμονοτονικό άνω φράγμα S^c δίνονται ως εξής

$$S^l = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-E[Y(i)] - r_i \sigma_{Y(i)} \Phi^{-1}(V) + (1/2(1-r_i^2)\sigma_{Y(i)}^2)}, \tag{78}$$

$$S^u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-E[Y(i)] - r_i \sigma_{Y(i)} \Phi^{-1}(V) + sign(\alpha_i)\sqrt{1-r_i^2}\,\sigma_{Y(i)} \Phi^{-1}(U)}, \tag{79}$$

$$S^c = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-E[Y(i)] + sign(\alpha_i)\sigma_{Y(i)} \Phi^{-1}(U)}, \tag{80}$$

όπου οι V και U είναι αμοιβαία ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν την *Ομοιόμορφη* Κατανομή στο (0,1), Φ είναι η α.σ.κ. της $N(0,1)$ και οι συσχετίσεις r_i καθορίζονται από τη σχέση

$$r_i = r(Y(i),\Lambda) = \frac{Cov(Y(i),\Lambda)}{\sigma_{Y(i)}\sigma_\Lambda}. \tag{81}$$

Απόδειξη:

(α) Αρχικά πρέπει να βρούμε την δεσμευμένη κατανομή της τ.μ. $-Y(i)$, δοθέντος ότι *Λ* = *λ*. Από τις σχέσεις (71) και (72), βρίσκουμε ότι, δεσμεύοντας στη τ.μ. *Λ* = *λ*, η τ.μ. $-Y(i)$ ακολουθεί την *Κανονική* Κατανομή με παραμέτρους
$\mu_i(\lambda) = -E[Y(i)] - r_i(\sigma_{Y(i)}/\sigma_\Lambda)(\lambda - E[\Lambda])$ και $\sigma_i^2 = (1-r_i^2)\sigma_{Y(i)}^2$.
Έτσι, δοθέντος ότι *Λ* = *λ*, οι τ.μ. X_i ακολουθούν την *Λογαριθμοκανονική* Κατανομή με παραμέτρους $\mu_i(\lambda)$ και σ_i^2. Επομένως ισχύει
$E[X_i \,|\, \Lambda = \lambda] = e^{\mu_i(\lambda)+(1/2\sigma_i^2)}$. Από αυτή την σχέση με αντικατάσταση των $\mu_i(\lambda)$ και σ_i^2 όπως ορίσαμε παραπάνω βρίσκουμε ότι
$E[\alpha_i X_i \,|\, \Lambda = \lambda] = \alpha_i e^{-E[Y(i)] - r_i\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(V) + 1/2(1-r_i^2)\sigma_{Y(i)}^2}$.
όπου η τ.μ. $V \equiv \Phi((\Lambda - E[\Lambda])/\sigma_\Lambda)$ κατανέμεται *Ομοιόμορφα* στο διάστημα $(0,1)$.
Γνωρίζουμε για το κάτω φράγμα ότι ισχύει
$S^l = \sum_{i=1}^{n} E[\alpha_i X_i \,|\, \Lambda]$. Με αντικατάσταση του $E[\alpha_i X_i \,|\, \Lambda]$ από την παραπάνω σχέση, προκύπτει το ζητούμενο.

(β) Από τη σχέση (54), βρίσκουμε ότι: $F^{-1}_{\alpha_i X_i|\Lambda=\lambda}(p) = \alpha_i e^{\mu_i(\lambda) + sign(\alpha_i)\sigma_i\Phi^{-1}(p)}$, όπου τα $\mu_i(\lambda)$ και σ_i ορίστηκαν στο (α). Αυτό δηλώνει ότι
$F^{-1}_{\alpha_i X_i|\Lambda}(p) = \alpha_i e^{-E[Y(i)] - r_i\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(V) + sign(\alpha_i)\sqrt{1-r_i^2}\,\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(p)}$.
Για το βελτιωμένο άνω φράγμα γνωρίζουμε ότι ισχύει
$S^u = \sum_{i=1}^{n} F^{-1}_{\alpha_i X_i|\Lambda}(U)$. Με αντικατάσταση του $F^{-1}_{\alpha_i X_i|\Lambda}(U)$ από την παραπάνω σχέση, προκύπτει το ζητούμενο.

(γ) Οι τ.μ. X_i ακολουθούν την *Λογαριθμοκανονική* Κατανομή με παραμέτρους $\mu_i = -E[Y(i)]$ και $\sigma_i^2 = \sigma_{Y(i)}^2$.

Από τη σχέση (54), έχουμε ότι: $F^{-1}_{\alpha_i X_i}(p) = \alpha_i e^{-E[Y(i)]+sign(\alpha_i)\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(p)}$.

Το συμονοτονικό άνω φράγμα S^c υπολογίζεται ως εξής

$S^c = \sum_{i=1}^{n} F^{-1}_{\alpha_i X_i}(U)$. Με αντικατάσταση του $F^{-1}_{\alpha_i X_i}(U)$ από την παραπάνω σχέση, προκύπτει το ζητούμενο.

Συμπεράσματα

Στο Κεφάλαιο 3, αποδείξαμε ότι τα φράγματα στο παραπάνω Θεώρημα διατάσσονται υπό την έννοια του κυρτής διάταξης ως εξής

$$S^l \leq_{cx} S \leq_{cx} S^u \leq_{cx} S^c. \tag{82}$$

Επομένως για να συγκριθεί η α.σ.κ. του $S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-(Y_1+Y_2+\ldots+Y_i)}$ με τις α.σ.κ. των κυρτών φραγμάτων S^l, S^u και S^c, πρέπει να εξετάσουμε τις διασπορές τους. Γι'αυτό το λόγο χρειαζόμαστε τις συσχετίσεις μεταξύ των διαφορετικών τ.μ. σε κάθε άθροισμα. Για μια *Λογαριθμοκανονική* διαδικασία προεξόφλησης βρίσκουμε τα παρακάτω αποτελέσματα

$$r[\alpha_i X_i, \alpha_j X_j] = s_{ij} \frac{e^{Cov[Y(i),Y(j)]-1}}{\sqrt{e^{\sigma^2_{Y(i)}}-1}\sqrt{e^{\sigma^2_{Y(j)}}-1}}, \tag{83}$$

$$r[E[\alpha_i X_i|\Lambda], E[\alpha_j X_j|\Lambda]] = s_{ij} \frac{e^{r_i r_j \sigma_{Y(i)}\sigma_{Y(j)}}-1}{\sqrt{e^{r_i^2\sigma^2_{Y(i)}}-1}\sqrt{e^{r_j^2\sigma^2_{Y(j)}}-1}},$$

$$r[F^{-1}_{\alpha_i X_i|\Lambda}(U), F^{-1}_{\alpha_j X_j|\Lambda}(U)] = s_{ij} \frac{e^{[r_i r_j + s_{ij}\sqrt{1-r_i^2}\sqrt{1-r_j^2}]\sigma_{Y(i)}\sigma_{Y(j)}}-1}{\sqrt{e^{\sigma^2_{Y(i)}}-1}\sqrt{e^{\sigma^2_{Y(j)}}-1}},$$

$$r[F^{-1}_{\alpha_i X_i}(U), F^{-1}_{\alpha_j X_j}(U)] = s_{ij} \frac{e^{s_{ij}\sigma_{Y(i)}\sigma_{Y(j)}}-1}{\sqrt{e^{\sigma^2_{Y(i)}}-1}\sqrt{e^{\sigma^2_{Y(j)}}-1}}, \tag{84}$$

όπου το s_{ij} συμβολίζει το πρόσημο του γινομένου $\alpha_i \alpha_j$ δηλ. το $sign(\alpha_i \alpha_j)$. Από αυτές τις συσχετίσεις, μπορούμε να συμπαιράνουμε ότι αν όλες οι πληρωμές α_i είναι θετικές και $r[Y(i), Y(j)] = 1$ για όλα τα i και j, τότε $S \overset{d}{=} S^c$. Στην πράξη όμως, οι παράγοντες προεξόφλησης δεν μπορούν να συσχετιστούν τέλεια. Μπορούμε να πούμε ότι για μια οποιαδήποτε ρεαλιστική διαδικασία προεξόφλησης, ο συντελεστής συσχέτισης $r[Y(i),Y(j)]=r[Y_1+Y_2+...+Y_i, Y_1+Y_2+...+Y_j]$ θα είναι κοντά στο 1 υπό τον όρο ότι οι δείκτες i και j είναι ο ένας κοντά στον άλλο.

Το παραπάνω αποδεικνύει ότι η α.σ.κ. του S^c χρησιμοποιείται ως προσέγγιση για τη α.σ.κ. του S όταν έχουμε τέτοιες διαδικασίες προεξόφλησης. Αυτό θα φανεί στα αριθμητικά παραδείγματα της παρακάτω Ενότητας 4.4. Ένας παρόμοιος συλλογισμός οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η α.σ.κ. του S^c δεν θα προσεγγίζει ως ένα κυρτό άνω φράγμα την α.σ.κ. του S αν οι πληρωμές α_i έχουν μικτά πρόσημα.

Τέλος, σημειώνουμε ότι όταν $S=\alpha_i e^{-Y(i)}$, η βέλτιστη επιλογή για τη μεταβλητή δέσμευσης *Λ* είναι: *Λ* = *Y*(*i*), καθώς αυτή η επιλογή δηλώνει ότι $S^l \overset{d}{=} S \overset{d}{=} S^u \overset{d}{=} S^c$. Στην παρακάτω Ενότητα θα παράγουμε εκφράσεις για τις α.σ.κ. των S^l, S^u και S^c.

4.2. Η α.σ.κ. και τα Stop-loss ασφάλιστρα των φραγμάτων

4.2.1. Η α.σ.κ. και τα Stop-loss ασφάλιστρα για το συμονοτονικό άνω φράγμα S^c

Τα ποσοστημόρια του S^c που προκύπτουν από τα Θεωρήματα 1.2.5. και 2.3.2. έχουν τον εξής τύπο

$$F_{S^c}^{-1}(p)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e^{-E[Y(i)]+sign(\alpha_i)\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(p)},\ p\in(0,1). \qquad (85)$$

Οι F_{X_i} είναι γνησίως αύξουσες και συνεχείς συναρτήσεις. Από τη σχέση (41), έχουμε ότι για $F_{S^c}^{-1+}(0)<x<F_{S^c}^{-1}(1)$, η συνάρτηση κατανομής του S^c, $F_{S^c}(x)$, προκύπτει από την επίλυση της παρακάτω εξίσωσης

$$F_{S^c}^{-1}((F_{S^c}(x))=x \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e^{-E[Y(i)]+sign(\alpha_i)\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(F_{S^c}(x))}=x.$$

Στη σχέση (60) αν θέσουμε όπου $\mu_i=-E[Y(i)]$ και $\sigma_i^2=\sigma_{Y(i)}^2$, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το Stop-loss ασφάλιστρο με όριο ιδίας κράτησης d και $F_{S^c}^{-1+}(0)<d<F_{S^c}^{-1}(1)$ για το S^c που είναι

$$E[(S^c-d)_+]=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e^{-E[Y(i)]+(\sigma_{Y(i)}^2/2)}\Phi[sign(\alpha_i)\sigma_{Y(i)}-\Phi^{-1}(F_{S^c}(d))]-d(1-F_{S^c}(d)). \qquad (86)$$

4.2.2. Η α.σ.κ. και τα Stop-loss ασφάλιστρα για το κάτω φράγμα S^l

Για να βρούμε τις εκφράσεις για την α.σ.κ. και τα Stop-loss ασφάλιστρα του S^l, θα ακολουθήσουμε την διαδικασία που εξηγήσαμε στην Ενότητα 3.3. Έτσι από τη σχέση (69) με τη βοήθεια της σχέσης (78) βρίσκουμε ότι

$$F_{S^l}(x) = \int_0^1 I\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-E[Y(i)] - r_i \sigma_{Y(i)} \Phi^{-1}(\upsilon) + 1/2(1-r_i^2)\sigma_{Y(i)}^2} \le x \right) d\upsilon .$$

Επίσης για τα Stop-loss ασφάλιστρα έχουμε ότι

$$E[(S^l - d)_+] = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-E[Y(i)] - r_i \sigma_{Y(i)} \Phi^{-1}(\upsilon) + 1/2(1-r_i^2)\sigma_{Y(i)}^2} - d \right)_+ d\upsilon .$$

Ειδική Περίπτωση

Εξετάζουμε τώρα την ειδική περίπτωση που όλα τα $\alpha_i \ge 0$ και όλα τα $r_i \ge 0$. Αυτές οι συνθήκες εξασφαλίζουν ότι το κάτω φράγμα S^l είναι ένα άθροισμα n συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών. Δοθέντος ότι η τ.μ. $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \beta_i Y_i$ ακολουθεί την *Κανονική* Κατανομή, βρίσκουμε ότι

$F_{\Lambda}^{-1}(1-p) = E[\Lambda] - \sigma_{\Lambda} \Phi^{-1}(p)$.

Έτσι από τη σχέση (66) και από τα Θεωρήματα 1.2.5. και 2.3.2. έχουμε

$$F_{S^l}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-E[Y(i)] + r_i \sigma_{Y(i)} \Phi^{-1}(p) + 1/2(1-r_i^2)\sigma_{Y(i)}^2}, \ p \in (0,1). \qquad (87)$$

Επίσης από την Ενότητα 3.3. βρίσκουμε ότι για οποιοδήποτε $0 < x < \infty$, η $F_{S^l}(x)$ μπορεί να ληφθεί από την επίλυση της

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-E[Y(i)] + r_i \sigma_{Y(i)} \Phi^{-1}(F_{S^l}(x)) + 1/2(1-r_i^2)\sigma_{Y(i)}^2} = x . \qquad (88)$$

Από τη σχέση (78), βλέπουμε ότι το S^l είναι το συμονοτονικό άθροισμα των n τυχαίων μεταβλητών $\alpha_i Z_i$, όπου οι τ.μ. Z_i ακολουθούν την *Λογαριθμοκανονική* Κατανομή. Επομένως, από τη σχέση (60) βρίσκουμε την ακόλουθη έκφραση για το Stop-loss ασφάλιστρο με δεδομένο $d > 0$

$$E[(S^l - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-E[Y(i)] + (\sigma_{Y(i)}^2/2)} \Phi[r_i \sigma_{Y(i)} - \Phi^{-1}(F_{S^l}(d))] - d(1 - F_{S^l}(d)). \qquad (89)$$

4.2.3. Η α.σ.κ. και τα Stop-loss ασφάλιστρα για το βελτιωμένο άνω φράγμα S^u

Τέλος θα καθορίσουμε την α.σ.κ. του βελτιωμένου άνω φράγματος S^u. Επειδή η $F_{S^u}(x|V=\upsilon)$ είναι η α.σ.κ. ενός αθροίσματος *n* συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών, βρίσκουμε ότι

$$F^{-1}_{S^u|V=\upsilon}(p)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e^{-E[Y(i)]-r_i\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(\upsilon)+sign(\alpha_i)\sqrt{1-r_i^2}\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(p)}. \tag{90}$$

Για $F^{-1+}_{S^u|V=\upsilon}(0)<x<F^{-1}_{S^u|V=\upsilon}(1)$, οι δεσμευμένες πιθανότητες $F_{S^u}(x|V=\upsilon)$ προκύπτουν από την επίλυση της παρακάτω σχέσης

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e^{-E[Y(i)]-r_i\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(\upsilon)+sign(\alpha_i)\sqrt{1-r_i^2}\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(F_{S^u}(x|V=\upsilon))}=x. \tag{91}$$

Επομένως η α.σ.κ. του S^u προκύπτει από τη σχέση

$$F_{S^u}(x)=\int_0^1 F_{S^u}(x|V=\upsilon)d\upsilon. \tag{92}$$

4.3. Συνεχείς ετήσιες πληρωμές

Πολλά από τα αποτελέσματα που παράγονται στη διακριτή περίπτωση (αθροίσματα των τυχαίων μεταβλητών) έχουν ένα συνεχές αντίστοιχο (ολοκληρώματα στοχαστικών διαδικασιών). Κάποια από τα αποτελέσματα αυτά βρίσκονται στην εργασία των **Goovaerts et al.[10]**.

Εξετάζουμε αρχικά τη συνεχής ετήσια υποχρέωση *S* στο διάστημα [*0*,*t*] που καθορίζεται από την παρακάτω σχέση

$$S=\int_0^t \alpha(\tau)\exp[-\delta\tau-\sigma B(\tau)]d\tau, \tag{93}$$

όπου η $\{B(\tau),\tau\geq 0\}$ αντιπροσωπεύει μια τυποποιημένη κίνηση *Brown*, δηλ. μια διαδικασία που έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις, *B*(0) = 0 και για οποιοδήποτε $\tau\geq 0$, η τ.μ. *B*(*τ*) ακολουθεί την *Κανονική* Κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά *τ*.

Επιπλέον, η κλίση (*drift*) δ και η μεταβλητότητα (*volatility*) σ είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Οι πληρωμές περιγράφονται από τη συνάρτηση α(τ) που είναι μια μη αρνητική και συνεχής συνάρτηση του τ.

Παίρνουμε τώρα $Y(\tau) = \delta\tau + \sigma B(\tau)$ και $X(\tau) = \exp\{-Y(\tau)\}$. Αποδεικνύεται ότι $S \leq_{cx} S^c$, όπου η τ.μ. S^c καθορίζεται από τη σχέση

$$S^c = \int_0^t F^{-1}_{\alpha(\tau)X(\tau)}(U)d\tau = \int_0^t \alpha(\tau)\exp[-\delta\tau + \sigma\sqrt{\tau}\Phi^{-1}(U)]d\tau, \tag{94}$$

με την τ.μ. U να ακολουθεί την *Ομοιόμορφη* Κατανομή στο $(0,1)$. Τα ποσοστιμόρια του S^c προκύπτουν ως

$$F^{-1}_{S^c}(p) = \int_0^t \alpha(\tau)\exp[-\delta\tau + \sigma\sqrt{\tau}\Phi^{-1}(p)]d\tau,\ (0 < p < 1). \tag{95}$$

Επιλέον τα Stop-loss ασφάλιστρα με δεδομένο $d > 0$ υπολογίζονται ως

$$E[(S^c - d)_+] = \int_0^t \alpha(\tau)\,\mathrm{e}^{-\delta\tau+\sigma^2\tau/2}\,\Phi[\sigma\sqrt{\tau} - \Phi^{-1}(F_{S^c}(d))]d\tau - d(1 - F_{S^c}(d)), \tag{96}$$

όπου η $F_{S^c}(d)$ μπορεί να ληφθεί με την επίλυση της εξίσωσης

$F^{-1}_{S^c}(F_{S^c}(d)) = d$, αν θέσουμε στη σχέση (95), $p = F_{S^c}(d)$.

Στο υπόλοιπο αυτής της ενότητας, θεωρούμε ότι έχουμε σταθερή ετήσια πληρωμή. Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι $\alpha(\tau) \equiv 1$. Για να παράγουμε ένα κάτω φράγμα υπό την έννοια της γραμμικής διάταξης για το *S*, παίρνουμε ως μεταβλητή δέσμευσης την $\Lambda = \int_0^t e^{-\delta\tau}B(\tau)d\tau$ που είναι ένα γραμμικός μετασχηματισμός μιας πρώτης προσέγγισης του *S*. Έχουμε τότε ότι η τ.μ. Λ ακολουθεί την *Κανονική* Κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά

$$\sigma^2_\Lambda = Var[\Lambda] = \int_0^t\int_0^t e^{-\delta(\tau+v)}\min(\tau, v)d\tau dv = \frac{1}{2\delta^3} + \frac{3 + 2\delta t - 4e^{\delta t}}{2\delta^3 e^{2\delta t}}. \tag{97}$$

Επειδή η $B(\tau)$ είναι μια Κίνηση *Brown*, η τ.μ. $Y(\tau)|\Lambda = \lambda$ κατανέμεται *Κανονικά* με μέση τιμή

$$\mathrm{E}[Y(\tau)|\Lambda = \lambda] = \delta\tau + r(\tau)\sigma\sqrt{\tau}\,\frac{\lambda}{\sigma_\Lambda} \tag{98}$$

και διασπορά

$$Var[Y(\tau)|\Lambda = \lambda] = \sigma^2\tau(1 - r^2(\tau)) , \tag{99}$$

όπου ο συντελεστής συσχέτισης $r(\tau)$ ορίζεται ως εξής

$$r(\tau)=\frac{Cov(Y(\tau),\Lambda)}{\sigma_{\Lambda}\sigma\sqrt{\tau}}=\frac{1}{\sigma_{\Lambda}\sqrt{\tau}}\left[\frac{1-e^{-\delta\tau}}{\delta^{2}}-\frac{\tau e^{-\delta t}}{\delta}\right],\tau\leq t. \qquad (100)$$

Ανάλογα από τη σχέση (78), μπορεί να αποδειχθεί ότι $S^{l}\leq_{cx}S$ όπου το κάτω φράγμα S^{l} ορίζεται ως εξής

$$S^{l}=E[S|\Lambda]=\int_{0}^{t}\exp\left\{-\delta\tau-r(\tau)\sigma\sqrt{\tau}\Phi^{-1}(V)+\frac{1}{2}\sigma^{2}\tau(1-r^{2}(\tau))\right\}d\tau, \qquad (101)$$

με τη τ.μ. $V=\Phi((\Lambda-E[\Lambda])/\sigma_{\Lambda})$ να ακολουθεί την *Τυποποιημένη Ομοιόμορφη* Κατανομή.

Η συνάρτηση $f(\tau)=Cov(Y(\tau),\Lambda)$ αποδεικνύεται ότι είναι μια μη αρνητική συνάρτηση, δηλ. $f(\tau)\geq 0$ για $0\leq\tau\leq t$. Επομένως η $f(\tau)$ είναι συνεχής και ισχύει

$$f(0)=0\ ,\quad f^{'}(\tau)=\frac{\sigma}{\delta}(e^{-\delta\tau}-e^{-\delta t}),\ \tau<t\ .$$

Κατά συνέπεια, η $r(\tau)$ είναι επίσης μια μη αρνητική συνάρτηση και η υπό ολοκλήρωση έκφραση στη σχέση (101) είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του *V*. Αυτό δηλώνει ότι το κάτω φράγμα S^{l} είναι ένα ολοκλήρωμα συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών. Έτσι, τα ποσοστιμόρια του S^{l} προκύπτουν από τη σχέση

$$F_{S^{l}}^{-1}(p)=\int_{0}^{t}\exp\left\{-\delta\tau+r(\tau)\sigma\sqrt{\tau}\Phi^{-1}(p)+\frac{1}{2}\sigma^{2}\tau(1-r^{2}(\tau))\right\}d\tau, \qquad (102)$$

για $0<p<1$. Τα Stop-loss ασφάλιστρα του S^{l} με δεδομένο $d>0$ είναι

$$E[(S^{l}-d)_{+}]=\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{-\delta\tau+\sigma^{2}\tau/2}\Phi[r(\tau)\sigma\sqrt{\tau}-\Phi^{-1}(F_{S^{l}}(d))]d\tau-d(1-F_{S^{l}}(d)), \qquad (103)$$

οπού τα $F_{S^{l}}(d)$ προκύπτουν με την επίλυση της εξίσωσης: $F_{S^{l}}^{-1}(F_{S^{l}}(d))=d$. Παρόμοια αποτελέσματα μπορούν να προκύψουν στη περίπτωση που η $\alpha(\tau)$ είναι μια γενική συνάρτηση και όχι κατ'ανάγκη σταθερή.

4.4. Αριθμητικά Παραδείγματα

4.4.1. Διακριτές ετήσιες πληρωμές

Στην υποενότητα αυτή θα εξηγήσουμε με αριθμητικά αποτελέσματα τα φράγματα που παράγαμε για την $S=\sum_{i=1}^{20}\alpha_i e^{-(Y_1+Y_2+\ldots+Y_i)}$. Αρχικά υποθέτουμε ότι οι τ.μ. Y_i είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και ταυτόνομες. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε ότι ακολουθούν την *Κανονική* Κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$. Η μεταβλητή δέσμευσης Λ ορίζεται ως

$$\Lambda=\sum_{i=1}^{20}\beta_i Y_i\,. \tag{104}$$

Κάτω από τις παραπάνω συνθήκες, βρίσκουμε ότι

$$E[Y(i)]\;=i\mu,$$

$$Var[Y(i)]=i\sigma^2,$$

$$Var[\Lambda]=\sigma^2\sum_{i=1}^{20}\beta_k^2\,,$$

$$r_i=\frac{Cov(Y(i),\Lambda)}{\sigma_\Lambda\sigma_{Y(i)}}=\frac{\sum_{i=1}^{20}\beta_k}{\sqrt{i\sum_{i=1}^{20}\beta_k^2}}.$$

Στα αριθμητικά παραδείγματα μας, επιλέγουμε τις παραμέτρους της Κανονικής Κατανομής ως εξής: μ = 0,07, σ = 0,1.
Θα υπολογίσουμε τα κάτω και άνω φράγματα με τις παραμέτρους β_i να υπολογίζονται από την παρακάτω σχέση

$$\beta_i=\sum_{j=1}^{20}\alpha_j e^{-j\mu},\; i=1,\ldots,20.$$

Έτσι η τ.μ. Λ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός μιας πρώτης προσέγγισης του S. Αυτό φαίνεται από τα παρακάτω

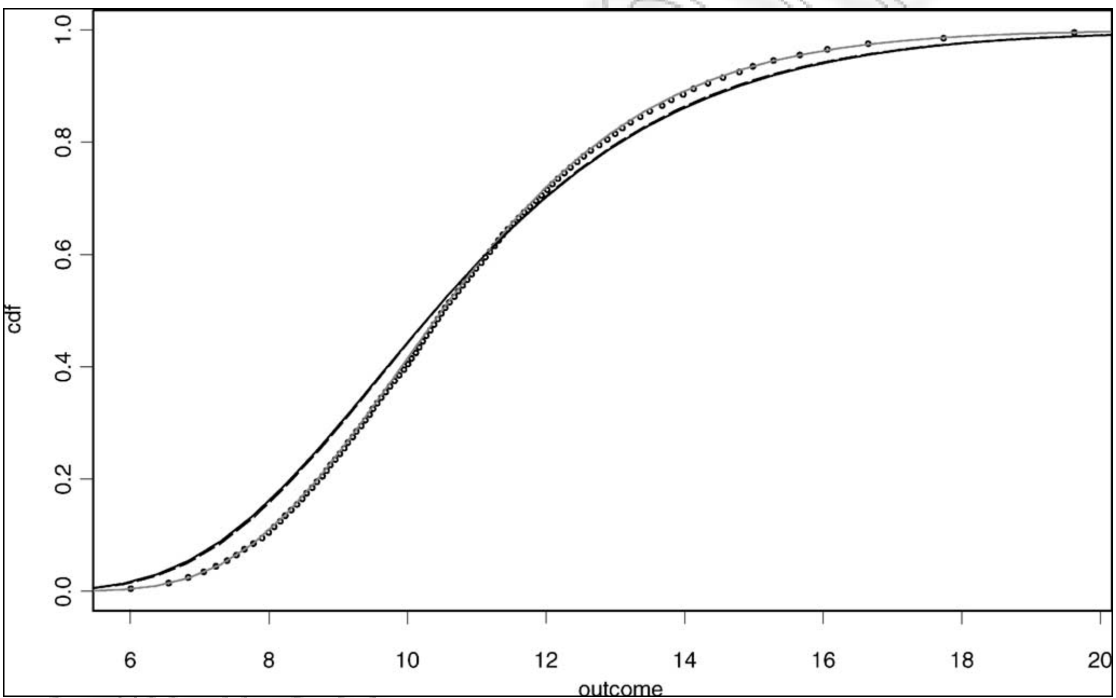
$$S=\sum_{j=1}^{20}\alpha_j e^{-j\mu-\sum_{i=1}^{j}(Y_i-\mu)} \approx \sum_{j=1}^{20}\alpha_j e^{-j\mu}\left[1-\sum_{i=1}^{j}(Y_i-\mu)\right]$$

$$=C-\sum_{j=1}^{20}\alpha_j e^{-j\mu}\sum_{i=1}^{j}Y_i=C-\sum_{i=1}^{20}Y_i\sum_{j=1}^{20}\alpha_j e^{-j\mu} \ ,$$

όπου το C είναι μια κατάλληλη σταθερά. Από τις παρατηρήσεις στην Ενότητα 4.1, βλέπουμε ότι το κάτω φράγμα S^l θα είναι "κοντά" στο S, όταν το $(Y_i-\mu)$ είναι αρκετά μικρό, ή ισοδύναμα, όταν το σ είναι αρκετά μικρό.

Στο παρακάτω Σχήμα 4.1. απεικονίζονται οι α.σ.κ. των S, S^l, S^u και S^c όταν οι πληρωμές είναι

$\alpha_k=1, \ \ k=1,2,...,20$.



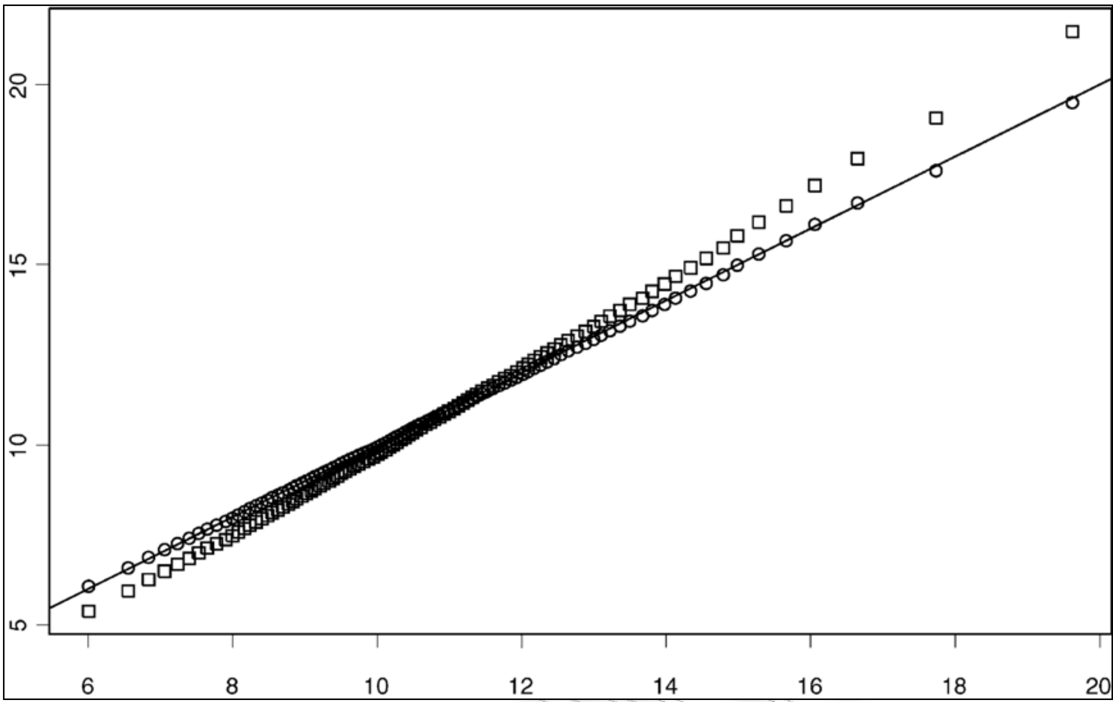
Σχήμα 4.1. Οι α.σ.κ. των S (γραμμή με τελείες), S^l (παχιά γκρίζα γραμμή), S^u (γραμμή με παύλες) και S^c (παχιά μαύρη γραμμή): θετικές πληρωμές($\alpha_k=1, \ \ k=1,2,...,20$).

Επειδή έχουμε αποδείξει ότι ισχύει $S^l \le_{cx} S \le_{cx} S^u \le_{cx} S^c$, και η ίδια ακριβώς διάταξη ισχύει για τις ουρές των αντίστοιχων συναρτήσεων κατανομής τους οι οποίες μπορεί να παρατηρηθεί ότι τέμνονται μόνο μια φορά, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις α.σ.κ. αυτών. Η γραμμή με τις τελείες είναι η "ακριβής" συνάρτηση κατανομής(α.σ.κ.) του S, η οποία λήφθηκε με την παραγωγή 10.000 τυχαίων διαδρομών με την τεχνική της προσομοίωσης. Παρατηρούμε επίοσης από το παραπάνω Σχήμα ότι η α.σ.κ. του S^l είναι πολύ κοντά στη κατανομή του *S*, το οποίο αναμενόταν επειδή η τ.μ. *Λ* κατασκευάζεται έτσι ώστε να είναι "κοντά" στο *S*. Σημειώνουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση το κάτω φράγμα S^l είναι ένα άθροισμα συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών, ώστε τα ποσοστημόρια να μπορούν να υπολογιστούν εύκολα. Η α.σ.κ. του S^c αποδίδει επίσης καλά σαν μια προσέγγιση της α.σ.κ. του *S*. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί από το γεγονός ότι η δομή εξάρτησης στο διάνυσμα $(X_1, X_2, ..., X_n)$ είναι σχεδόν συμονοτονική. Πράγματι, αν το *i* είναι κοντά στο j , τότε ο συντελεστής συσχέτισης $r(Y(i), Y(j)) = \min(i, j) / \sqrt{ij}$ είναι κοντά στο 1. Έτσι, από τις σχέσεις (83) και (84), διαπιστώνουμε ότι το $r(X_i, X_j)$ είναι κοντά στο $r[F_{X_i}^{-1}(U), F_{X_j}^{-1}(U)]$, αν το *i* είναι κοντά στο *j*.

Διαπιστώνουμε επίσης ότι το βελτιωμένο άνω φράγμα S^u είναι πολύ κοντά στο συμονοτονικό άνω φράγμα S^c. Αυτό είναι λογικό επειδή τα r_i είναι κοντά στα r_j για οποιοδήποτε ζευγάρι (*i, j*) με τα *i* και *j* αρκετά κοντά. Αυτό δηλώνει ότι για οποιοδήποτε ζευγάρι (*i, j*) έχουμε ότι το $Cov(F_{X_i|\Lambda}^{-1}(U), F_{X_j|\Lambda}^{-1}(U))$ είναι κοντά στο $Cov(F_{X_i}^{-1}(U), F_{X_j}^{-1}(U))$.

Προκειμένου να έχουμε μια καλύτερη εικόνα σχετικά με τη συμπεριφορά του συμονοτονικού άνω φράγματος S^u (και του κάτω φράγματος S^l) στις ουρές τους, φτιάχνουμε ένα διάγραμμα **QQ-Plot** όπου τα ποσοστημόρια του S^u (και του S^l) σχεδιάζονται σε σχέση με τα ποσοστημόρια του *S* που τα παράγαμε με προσομοίωση. Το συμονοτονικό άνω φράγμα S^c (και το κάτω φράγμα S^l) θα είναι μια καλή προσέγγιση για το *S* αν τα σχεδιασμένα σημεία $(F_S^{-1}(p), F_{S^c}^{-1}(p))$ (και επίσης τα σημεία $(F_S^{-1}(p), F_{S^l}^{-1}(p))$) για όλες τις τιμές του *p* στο (0,1) βρίσκονται κοντά στην ευθεία γραμμή *y* = *x*. Από το **QQ-Plot** στο παρακάτω Σχήμα 4.2., μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι το συμονοτονικό άνω φράγμα υπερεκτιμά τις ουρές του *S*, ενώ αντίθετα το κάτω φράγμα είναι εξαιρετικά ακριβές. Ο παρακάτω Πίνακας 4.1. επιβεβαιώνει αυτές τις παρατηρήσεις.

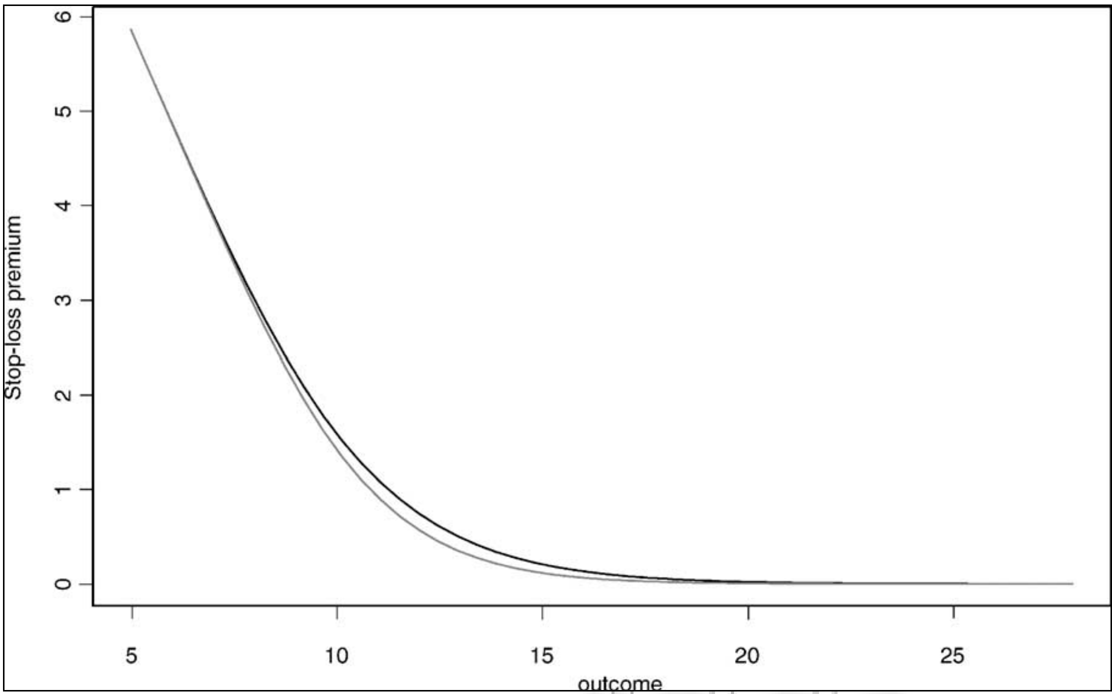
Τα Stop-loss ασφάλιστρα για το S^l και το S^c συγκρίνονται στο Σχήμα 4.3.. Το άνω και κάτω φράγμα φαίνονται ότι είναι πολύ κοντά. Ο Πίνακας 4.2. παρουσιάζει τα Stop-loss ασφάλιστρα για συγκεκριμένες τιμές του d .



Σχήμα 4.2. Τα QQ-plot των ποσοστημορίων του S^l (○) και αυτών του S^c (□) σε αντίθεση με τα ποσοστημόρια του S : θετικές πληρωμές.

p	$F_{S^l}^{-1}(p)$	$F_S^{-1}(p)$	$F_{S^c}^{-1}(p)$
0.95	15.4656	15.3868	16.3915
0.975	16.7108	16.7233	17.9432
0.99	18.3080	18.3942	19.9578
0.995	19.4966	19.9644	21.4739
0.999	22.2381	22.2271	25.0210

Πίνακας 4.1. Τα ποσοστημόρια των S^l και S^c σε αντίθεση με τα ποσοστημόρια του S : θετικές πληρωμές



Σχήμα 4.3. Τα Stop-loss ασφάλιστρα για το S^l (παχιά γκρίζα γραμμή), το S (γραμμή με τελείες) και S^c (παχιά μαύρη γραμμή): θετικές πληρωμές.

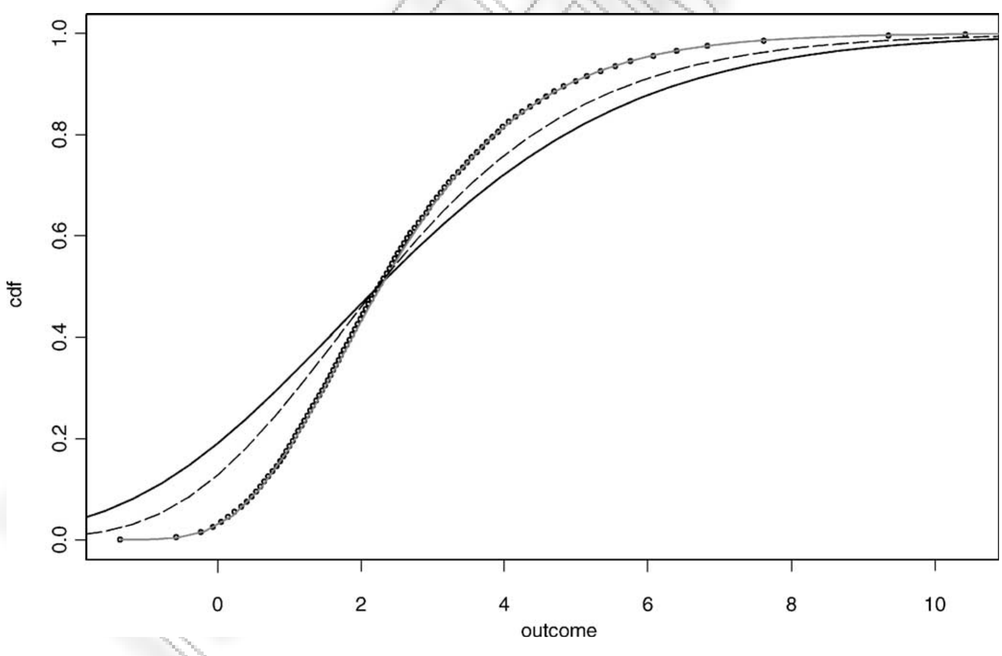
d	$E[(S^l-d)_+]$	$E[(S-d)_+]$	$E[(S^c-d)_+]$
0	10.8320	10.8346	10.8320
5	5.8321	5.8346	5.8327
10	1.4136	1.4141	1.5804
15	0.1148	0.1156	0.2067
20	0.0064	0.0042	0.0216
25	0.0004	0.0003	0.0023

Πίνακας 4.2. Τα Stop-loss ασφάλιστρα για τα S^l, S και S^c : θετικές πληρωμές

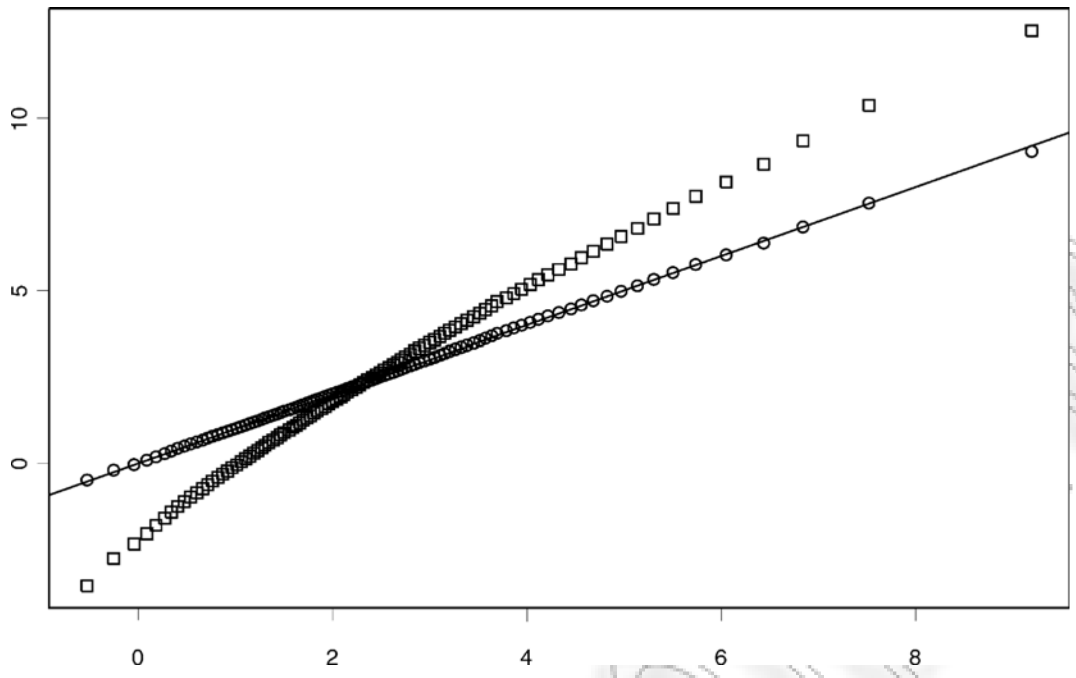
Έπειτα, εξετάζουμε μια σειρά αρνητικών και θετικών πληρωμών. Το Σχήμα 4.4. παρουσιάζει τις α.σ.κ. των S, S^l, S^u και S^c για τις ακόλουθες πληρωμές:

$$\alpha_k = \begin{cases} -1, & k = 1,...,5 \\ 1, & k = 6,...,20 \end{cases}.$$

Τονίζουμε ότι το κάτω φράγμα S^l δεν είναι ένα συμονοτονικό άθροισμα σε αυτήν την περίπτωση. Βλέπουμε ότι το κάτω φράγμα S^l αποδίδει ακόμα πολύ καλά δεδομένου ότι η α.σ.κ. του είναι σχεδόν όμοια με την α.σ.κ. του S που λαμβάνεται με προσομοίωση. Το συμονοτονικό άνω φράγμα S^c δεν αποδίδει καλά σε αυτήν την περίπτωση. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι κάποια ζεύγη όπως το ζεύγος $(-X_5, X_6)$ είναι αντίθετα μονοτονικά. Επιπλέον, κάποια ζεύγη του τύπου $(-X_k, X_l)$ με $k \leq 5$ και $l \geq 6$ παρουσιάζουν ένα είδος αρνητικής δομής εξάρτησης. Το βελτιωμένο άνω φράγμα αποδίδει καλύτερα όταν οι πληρωμές έχουν μικτά πρόσημα. Αυτές οι παρατηρήσεις επιβεβαιώνονται από τα **QQ-Plot** στο Σχήμα 4.5. και στον Πίνακα 4.3.



Σχήμα 4.4. Οι α.σ.κ. των S (γραμμή με τελείες), S^l (παχιά γκρίζα γραμμή), S^u (γραμμή με παύλες) και S^c (παχιά μαύρη γραμμή): θετικές και αρνητικές πληρωμές

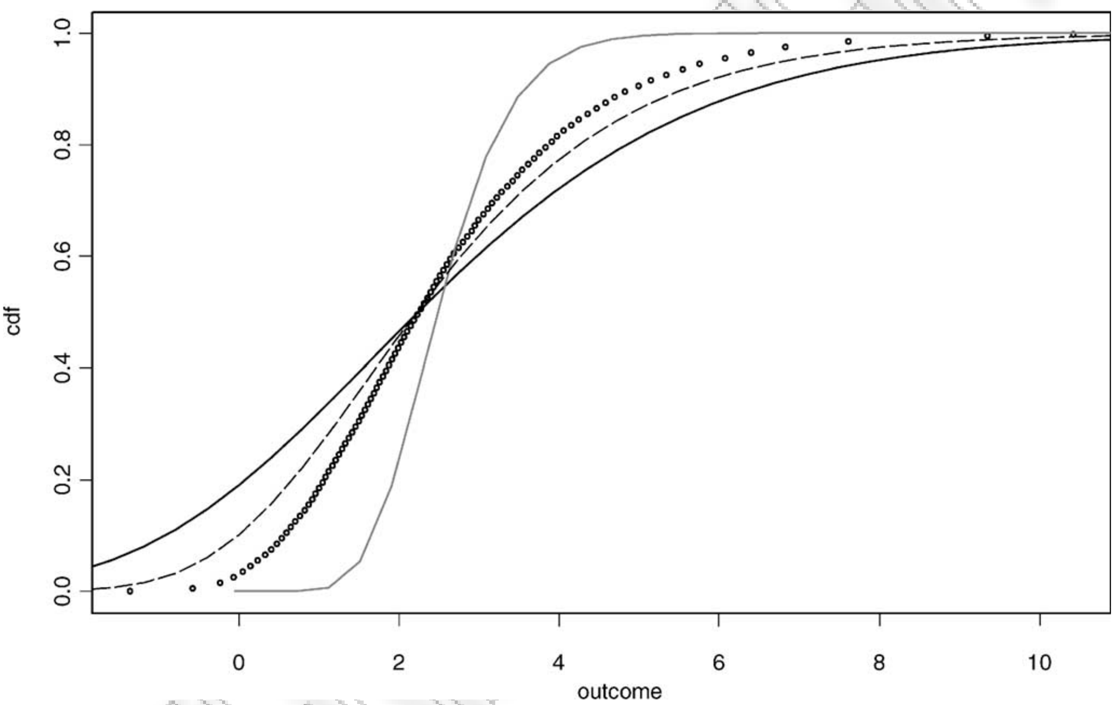


Σχήμα 4.5. Τα QQ-plot των ποσοστημορίων του S^l (○) και αυτών του S^c (□) σε αντίθεση με τα ποσοστημόρια του S : θετικές και αρνητικές πληρωμές

p	$F_{S^l}^{-1}(p)$	$F_S^{-1}(p)$	$F_{S^c}^{-1}(p)$
0.95	5.8849	5.8805	7.9282
0.975	6.8400	6.8391	9.3450
0.99	8.0881	8.0206	11.1716
0.995	9.0321	9.1935	12.53998
0.999	11.2519	11.3833	15.7310

Πίνακας 4.3. Τα ποσοστημόρια των S^l και S^c σε αντίθεση με τα ποσοστημόρια του S : θετικές και αρνητικές πληρωμές

Στο παρακάτω Σχήμα 4.6. εξετάζουμε τον ίδιο τρόπο πληρωμών όπως στο Σχήμα 4.4. Η διαφορά όμως τώρα είναι ότι υπλογίζουμε τις α.σ.κ. του κάτω και του βελτιωμένου άνω φράγματος για μια διαφορετική επιλογή της μεταβλητής δέσμευσης *Λ*. Επιλέγουμε τη τ.μ. *Λ* ως ένα γραμμικό μετασχηματισμό μιας πρώτης προσέγγισης του αθροίσματος $-\sum_{j=1}^{5} e^{-Y(j)}$ που είναι το άθροισμα των αρνητικών όρων στο *S*. Έτσι, $\Lambda = \sum_{j=1}^{5} e^{-j\mu} Y(j)$, ή $\beta_i = \sum_{j=i}^{5} e^{-j\mu}$, $i = 1,\ldots,5$ και $\beta_i = 0$ αλλού. Η (προσομοιωμένη) α.σ.κ. του *S* είναι η γραμμή με τις τελείες. Η μεγαλύτερη υπό την έννοια της κυρτής διάταξης α.σ.κ. είναι το συμονοτονικό άνω φράγμα. Σημειώνουμε ότι το κάτω φράγμα αποδίδει χειρότερα σε αυτήν την περίπτωση, το οποίο αναμένεται επειδή η "νέα" τ.μ. *Λ* είναι διαφορετική από το *S*. Το βελτιωμένο άνω φράγμα S^u αποδίδει πολύ καλύτερα σε αυτή περίπτωση. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι δεσμεύοντας στο $X_1 + ... + X_5 = \lambda$, το $S = -X_1 - ... - X_5 + X_6 + ... + X_{20}$ μπορεί να προσεγγιστεί από ένα συμονοτονικό άθροισμα. Από αυτή την άποψη, περιμένουμε ότι το άθροισμα των αρνητικών όρων θα είναι μια καλή επιλογή για τη μεταβλητή δέσμευσης *Λ* για το βελτιωμένο άνω φράγμα.



Σχήμα 4.6. Οι α.σ.κ. των S (γραμμή με τελείες), S^l (παχιά γκρίζα γραμμή), S^u (γραμμή με παύλες) και S^c (παχιά μαύρη γραμμή):θετικές και αρνητικές πληρωμές, άλλες επιλογές της τ.μ. *Λ*.

4.4.2. Συνεχείς ετήσιες πληρωμές

Στην υποενότητα αυτή εξετάζουμε τη συνεχής ετήσια πληρωμή με σταθερό ρυθμό πληρωμής

$$S_t = \int_0^t \exp[-\delta\tau - \sigma B(\tau)]d\tau ,$$

όπου η $B(\tau)$ αντιπροσωπεύει μια τυποποιημένη κίνηση *Brown*. Για αυτή την ετήσια πληρωμή , οι **De Schepper et al.[11]** έχουν βρει την ακριβή κατανομή της. Στη περίπτωση που ο χρονικός ορίζοντας t πηγαίνει στο άπειρο, η συνάρτηση κατανομής του S_∞ μπορεί να υπολογιστεί πολύ εύκολα αφού μπορούμε να αποδείξουμε ότι η S_∞^{-1} ακολουθεί την Κατανομή *Gamma* με παραμέτρους $2\delta/\sigma^2$ και $\sigma^2/2$. Αυτό το αποτέλεσμα αποδεικνύεται στους **Dufresne[12]** και **Milevsky[13]**. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Κατανομής *Gamma* με παραμέτρους $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ καθορίζεται ως εξής

$$g(x;a,b) = \frac{1}{b\Gamma(a)}\exp\left\{\frac{-x}{b}\right\}\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1},\ x > 0.$$

Έτσι μπορούμε να συγκρίνουμε τις συναρτήσεις κατανομής του κάτω φράγματος S_∞^l και του συμονοτοικού άνω φράγματος S_∞^c, όπως ορίζονται στην Ενότητα 4.3., με την ακριβή συνάρτηση κατανομής του S_∞.

Από τη σχέση (97) με $t \to \infty$, έχουμε ότι η διασπορά της μεταβλητής δέσμευσης $\Lambda = \int_0^\infty e^{-\delta\tau}B(\tau)d\tau$ είναι

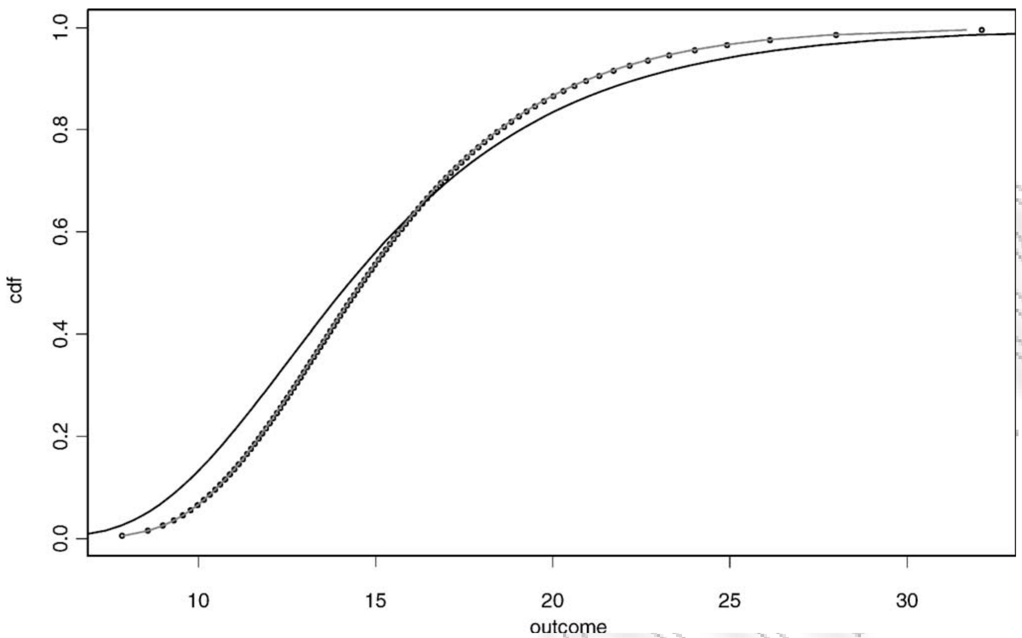
$$Var[\Lambda] = \frac{1}{2\delta^3},$$

ενώ, από τη σχέση (100), ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των τ.μ. $Y(\tau)$ και Λ δίνεται παρακάτω

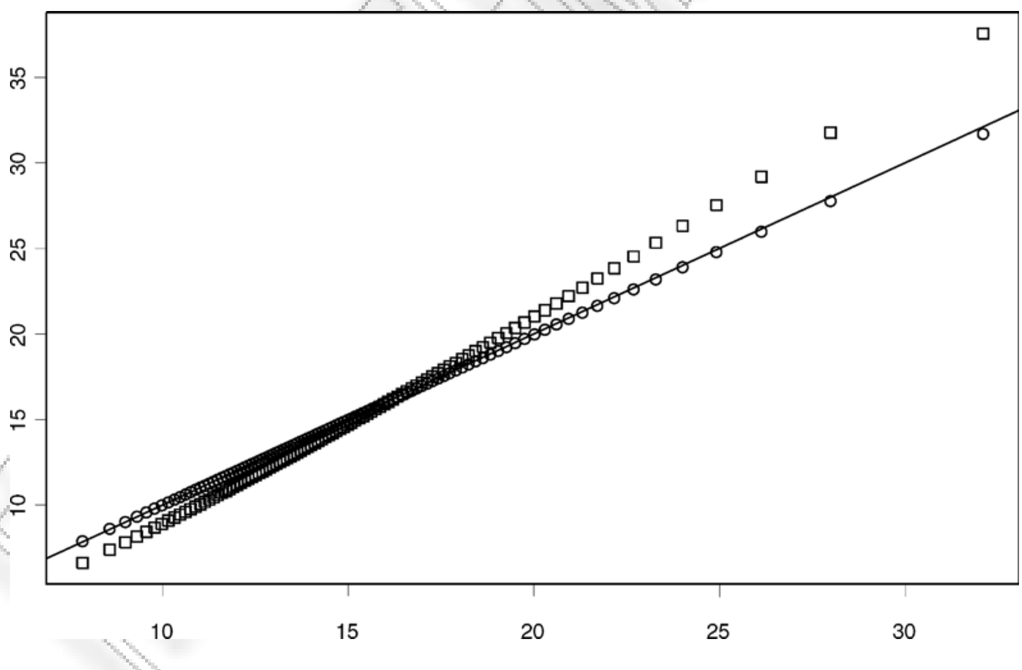
$$r(\tau) = \frac{1}{\sigma_\Lambda\sqrt{\tau}}\frac{1-e^{-\delta\tau}}{\delta^2}.$$

Το Σχήμα 4.7. παρουσιάζει τις συναρτήσεις κατανομής του S_∞^l, S_∞^c και S_∞ για δ = 0,07 και σ = 0,1. Και εδώ, το κάτω φράγμα αποδεικνύεται ότι είναι μια καλή προσέγγιση για την α.σ.κ. του S_∞. Για να αξιολογήσουμε την ακρίβεια των φραγμάτων στις ουρές τους, σχεδιάζουμε τα ποσοστημόρια τους σε σχέση με εκείνα του S_∞ στο Σχήμα 4.8. Το μεγαλύτερο ποσοστημόριο (*quantile*) για p = 0. 995 του S_∞^l στο **QQ-Plot** υποεκτιμά το ακριβές ποσοστημόριο σε ποσοστό 1,3%. Ο Πίνακας 4.4., παρουσιάζει αριθμητικές τιμές για κάποια υψηλά ποσοστημόρια.

Τα Stop-loss ασφάλιστρα για διαφορετικές επιλογές του d παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.9. και στον Πίνακα 4.5.



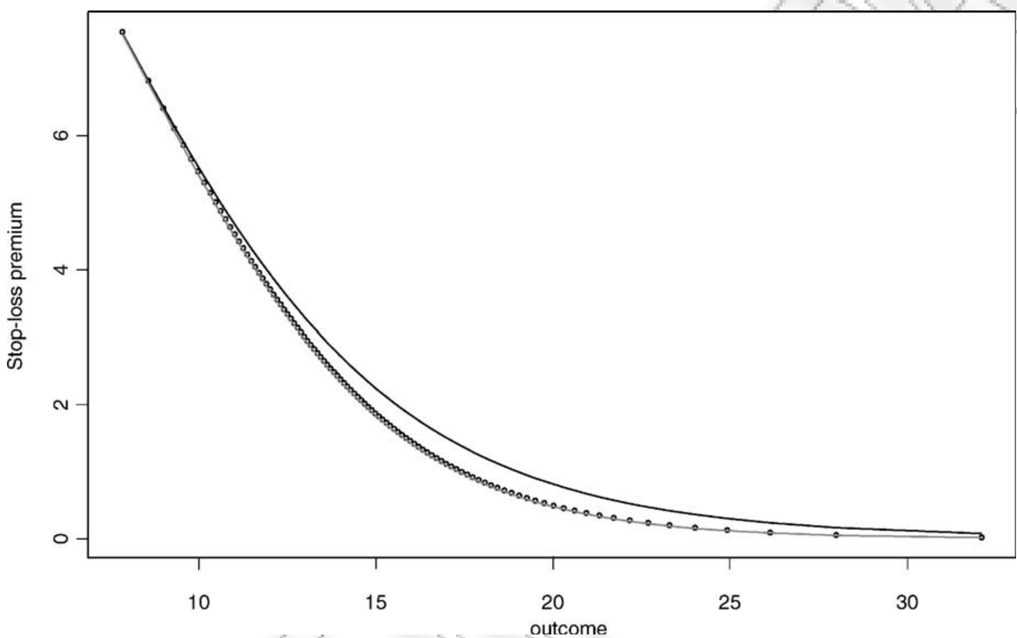
Σχήμα 4.7. Οι α.σ.κ. των S_∞ (γραμμή με τελείες), S_∞^l (παχιά γκρίζα γραμμή) και S_∞^c (παχιά μαύρη γραμμή).



Σχήμα 4.8. Τα QQ-plot των ποσοστημορίων του S_∞^l (○) και αυτών του S_∞^c (□) σε αντίθεση με τα ποσοστημόρια του S_∞.

p	$F^{-1}_{S^l_\infty}(p)$	$F^{-1}_{S_\infty}(p)$	$F^{-1}_{S^c_\infty}(p)$
0.95	23.5271	23.6297	25.7881
0.975	25.9633	26.1304	29.1857
0.99	29.1972	29.4883	33.8523
0.995	31.6810	32.0993	37.5561
0.999	37.6492	38.4953	46.8616

Πίνακας 4.4. Τα ποσοστημόρια των S^l_∞ και S^c_∞ σε αντίθεση με τα ποσοστημόρια του S_∞



Σχήμα 4.9. Τα stop-loss ασφάλιστρα για το S^l_∞ (παχιά γκρίζα γραμμή), το S_∞ (γραμμή με τελείες) και S^c_∞ (παχιά μαύρη γραμμή).

d	$E[(S^l_\infty - d)_+]$	$E[(S_\infty - d)_+]$	$E[(S^c_\infty - d)_+]$
10	5.4099	5.4457	5.5210
15	1.8354	1.8626	2.2405
20	0.4787	0.4961	0.8152
25	0.1172	0.1270	0.2973
30	0.0294	0.0342	0.1134

Πίνακας 4.5. Τα stop-loss ασφάλιστρα για τα S^l_∞, S^c_∞ και S_∞.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Εφαρμογές της Συμονοτονικότητας στα Παράγωγα: Αριθμητικά Ασιατικά Δικαιώματα

5.1. Ορισμοί και μερικά θεωρητικά αποτελέσματα

Αρχικά υποθέτουμε ότι είμαστε στο χρόνο 0. Εξετάζουμε ένα περιουσιακό στοιχείο με κάποιο κίνδυνο με τιμές που περιγράφονται από τη στοχαστική διαδικασία $\{A(t), t \geq 0\}$ και ένα συνεχές σύνθετο επιτόκιο δ ουδέτερο κινδύνου που είναι σταθερό στο χρόνο. Σε αυτή την ενότητα, θα θεωρούμε ότι όλες οι πιθανότητες και οι μέσες τιμές είναι δεσμευμένες ως προς την πληροφορία που είναι διαθέσιμη στο χρόνο 0 ($\mathcal{F}_0$), δηλ. οι τιμές του περιουσιακού στοιχείου με κίνδυνο μέχρι το χρόνο 0. Σημειώνουμε ότι γενικά, η δεσμευμένη μέση τιμή (όσον αφορά το φυσικό μέτρο πιθανότητας) του $e^{-\delta t}A(t)$, λαμβάνοντας υπόψη την πληροφορία που είναι διαθέσιμη στο χρόνο 0, θα διαφέρει από την τρέχουσα τιμή A(0). Ωστόσο, θα υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα μοναδικό "ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας Q" έτσι ώστε η διαδικασία προεξόφλησης $\{e^{-\delta t}A(t), t \geq 0\}$ να είναι ένα ***Martingale*** κάτω από αυτό το ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας. Αυτό δηλώνει ότι για οποιοδήποτε $t \geq 0$, η δεσμευμένη μέση τιμή (όσον αφορά το ισοδύναμο μέτρο ***Martingale***) του $e^{-\delta t}A(t)$, λαμβάνοντας υπόψη την διαθέσιμη πληροφορία στο χρόνο 0, θα είναι ίση με την τρέχουσα τιμή A(0). Σημειώνοντας αυτή τη δεσμευμένη μέση τιμή κάτω από το ισοδύναμο ***Martingale*** μέτρο ως $E^Q[e^{-\delta t}A(t)]$, έχουμε ότι

$$E^Q[e^{-\delta t}A(t) \mid \mathcal{F}_0] = A(0), \ t \geq 0 \ . \qquad (105)$$

Η έκφραση $F_{A(t)}(x)$ χρησιμοποιείται για την δεσμευμένη πιθανότητα ότι το *A(t)* είναι μικρότερο ή ίσο του *x*, κάτω από το ισοδύναμο ***Martingale*** μέτρο *Q*, και λαμβάνοντας υπόψη την διαθέσιμη πληροφορία στο χρόνο 0. Η αντίστροφη της παραπάνω συνάρτησης κατανομής θα συμβολίζεται ως $F^{-1}_{A(t)}(p)$.

Η ύπαρξη ενός ισοδύναμου ***Martingale*** μέτρου σχετίζεται με την απουσία κερδοσκοπίας στην αγορά των περιουσιακών στοιχείων με κίνδυνο (π.χ. μετοχές), ενώ η μοναδικότητα του ισοδύναμου ***Martingale*** μέτρου αφορά την πλήρη αγορά. Δύο πρότυπα στα οποία υπάρχει ένα τέτοιο μοναδικό ισοδύναμο ***Martingale*** μέτρο είναι το Δυωνυμικό Μοντέλο (*Binomial three model*) του **Cox et al.[15]** και το μοντέλο της Γεωμετρικής κίνησης *Brown* (*Geometric Brownian motion model*) των *Black and Scholes (1973).*

Η ύπαρξη του ισοδύναμου ***Martingale*** μέτρου μας επιτρέπει να μειώσουμε τον κίνδυνο κατά την τιμολόγηση των Δικαιωμάτων και να υπολογίσουμε τις αναμενόμενες τιμές των εξοφλήσεων αυτών των Δικαιωμάτων, όχι όσον αφορά το φυσικό μέτρο πιθανότητας φυσικά αλλά όσον αφορά το ισοδύναμο ***Martingale*** μέτρο. Τα παραπάνω εξηγούνται στους **Harrison and Kreps[16]** ή **Harrison and Pliska[17]**. Μια αναφορά στην Ασφαλιστική Βιβλιογραφία έχουμε στους **Gerber and Shiu[18]**.

Ένα Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα αγοράς ενός περιουσιακού στοιχείου με κίνδυνο, με τιμή εξάσκησης *K* και ημερομηνία άσκησης *T* παράγει μια εξόφληση $(A(T)-K)_+$ στο χρόνο *T*, δηλ. αν η τιμή του περιουσιακού στοιχείου στο χρόνο *T* υπερβεί την τιμή άσκησης, τότε η εξόφληση είναι ίση με τη διαφορά. Αν όχι, η εξόφληση είναι μηδέν. Σημειώνουμε την ομοιότητα μεταξύ μιας τέτοιας εξόφλησης και της πληρωμής σε μια Stop-loss σύμβαση. Στον τρέχοντα χρόνο $t = 0$, η τιμή αυτού του Δικαίωματος Αγοράς δίνεται από τη σχέση

$$EC(K,T) = e^{-\delta T} E^{Q}[(A(T)-K)_+]. \tag{106}$$

Ένα Ευρωπαϊκού τύπου Ασιατικό Δικαίωμα Αγοράς με ημερομηνία άσκησης *T*, *n* κατά μέσο όρο ημερομηνίες και τιμή εξάσκησης *K* παράγει μια εξόφληση $\left(1/n\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i)-K\right)_+$ στο χρόνο *T*, δηλ. αν ο μέσος όρος των τιμών του περιουσιακού στοιχείου τις τελευταίες *n* ημέρες πριν τη χρονική στιγμή *T* είναι μεγαλύτερος από *K*, τότε η εξόφληση είναι ίση με τη διαφορά. Αν όχι, η εξόφληση είναι μηδέν. Τέτοια Διακαιώματα προστατεύουν τον κάτοχο ενάντια στους χειρισμούς της τιμής του περιουσιακού στοιχείου κοντά στην ημερομηνία λήξης. Η τιμή του Ασιατικού Δικαιώματος στο χρόνο $t = 0$ δίνεται από τη σχέση

$$AC(n,K,T) = e^{-\delta T} E^{Q}\left[\left(1/n\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i)-K\right)_+\right]. \tag{107}$$

Ο καθορισμός της τιμής ενός Ασιατικού Δικαιώματος δεν είναι εφικτός, επειδή γενικά δεν έχουμε μια αναλυτική έκφραση για τη κατανομή του μέσου όρου $\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i)$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις τεχνικές προσομοίωσης ***Monte Carlo*** για να λάβουμε μια αριθμητική εκτίμηση της τιμής. Όμως επειδή οι προσεγγίσεις είναι μάλλον χρονοβόρες, θα ήταν χρήσιμο να βρούμε ένα ακριβές και εύκολα υπολογίσιμο φράγμα αυτής της τιμής. Στην εργασία του **Jacques[19]**, λαμβάνεται μια προσέγγιση με την αντικατάσταση της κατανομής του αθροίσματος $\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i)$ από μια κατανομή που υπολογίζεται εύκολα.

Από την έκφραση για την τιμή ενός αριθμητικού Ασιατικού Δικαιώματος Αγοράς, βλέπουμε ότι το πρόβλημα της τιμολόγησης τέτοιου είδους Δικαιωμάτων αποδεικνύεται ότι είναι ισοδύναμο με τον υπολογισμό των Stop-loss ασφαλίστρων ενός αθροίσματος εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε τα προηγούμενα αποτελέσματά μας για τα φράγματα των Stop-loss ασφαλίστρων προκειμένου να βρεθούν τα ακριβή κάτω και άνω φράγματα για την τιμή των Ασιατικών Δικαιωμάτων. Σημειώνουμε τέλος ότι το κάτω φράγμα που θα λάβουμε σχετίζεται πολύ με το κάτω φράγμα που παράγεται από τους **Rogers and Shi[20]**.

5.2. Ασιατικά Δικαιώματα, η γενική περίπτωση

Υποθέτουμε ότι τη χρονική στιγμή 0, ο υπολογισμός του μέσου όρου δεν έχει αρχίσει ακόμα. Αυτό σημαίνει ότι οι n μεταβλητές $A(T-n+1),...,A(T)$ είναι τυχαίες. Τα άνω φράγματα για την τιμή $AC(n,K,T)$ μπορούν να κατασκευαστούν για οποιεσδήποτε τιμές K_i και K, με $K=\sum_{i=1}^{n} K_i$ ως εξής

$$AC(n,K,T)=\frac{e^{-\delta T}}{n}E^{Q}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i)-nK\right)_{+}\right]\leq\frac{e^{-\delta T}}{n}\sum_{i=0}^{n-1} E^{Q}[(A(T-i)-nK_i)_{+}]$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\delta i} EC(nK_i,T-i). \qquad (108)$$

Η παραπάνω διαδικασία μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε έναν απεριόριστο αριθμό άνω φραγμάτων για την τιμή ενός αριθμητικού Ασιατικού Δικαιώματος Αγοράς ως ένας μέσος όρος των τιμών των Ευρωπαϊκών Δικαιωμάτων Αγοράς. Η θεωρία των συμονοτονικών κινδύνων θα μας επιτρέψει να βρούμε το καλύτερο, δηλ. το μικρότερο, άνω φράγμα που κατασκευάζεται με αυτό τον τρόπο. Σημειώνουμε ότι όλα τα αποτελέσματα μπορούν εύκολα να επεκταθούν αν πάρουμε γενικές κατά μέσο όρο ημερομηνίες $T-t_1,...,T-t_n$. Στο Κεφάλαιο αυτό, ωστόσο, θεωρούμε μόνο ίδιου μήκους κατά μέσο όρο ημερομηνίες για να μην γίνει ο τύπος πιο περίπλοκος.

Με την εισαγωγή της έκφρασης $S^c = \sum_{i=0}^{n-1} F^{-1}_{A(T-i)}(U)$, όπου η τ.μ. U ακολουθεί την *Ομοιόμορφη* κατανομή στο διάστημα [0,1], βρίσκουμε από το Θεώρημα 3.1.1. ότι για οποιαδήποτε τιμή εξάσκησης K έχουμε ότι

$$AC(n,K,T) \leq \frac{e^{-\delta T}}{n} E^Q\left[\left(S^c - nK\right)_+\right]. \tag{109}$$

Από το Θεώρημα 2.3.2., βρίσκουμε ότι για όλα τα K με $F^{-1+}_{S^c}(0) < nK < F^{-1}_{S^c}(1)$,

$$\begin{aligned}\frac{e^{-\delta T}}{n} E^Q\left[\left(S^c - nK\right)_+\right] &= \frac{e^{-\delta T}}{n}\sum_{i=0}^{n-1} E^Q[(A(T-i) - F^{-1(\alpha)}_{A(T-i)}(F_{S^c}(nK)))_+] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\delta i} EC(F^{-1(\alpha)}_{A(T-i)}(F_{S^c}(nK)), T-i),\end{aligned} \tag{110}$$

όπου το α καθορίζεται από τη σχέση:

$$F^{-1(\alpha)}_{S^c}(F_{S^c}(nK)) = nK. \tag{111}$$

Έτσι, ένα άνω φράγμα για την τιμή του Ασιατικού Δικαιώματος $AC(n,K,T)$ με $F^{-1+}_{S^c}(0) < nK < F^{-1}_{S^c}(1)$ δίνεται από τη σχέση

$$AC(n,K,T) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\delta i} EC(F^{-1(\alpha)}_{A(T-i)}(F_{S^c}(nK)), T-i). \tag{112}$$

Βρίσκουμε επίσης ότι για οποιαδήποτε K_i και K, με $K = \sum_{i=1}^{n} K_i$,

$$\frac{e^{-\delta T}}{n} E^Q\left[\left(S^c - nK\right)_+\right] \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\delta i} EC(nK_i, T-i). \tag{113}$$

Από τις σχέσεις (109), (110), (112) και (113) διαπιστώνουμε ότι η συμονοτονική δομή εξάρτησης οδηγεί στο βέλτιστο άνω φράγμα για την τιμή ενός αριθμητικού Ασιατικού Δικαιώματος που είναι ένας σταθμικός μέσος όρος των τιμών Ευρωπαϊκών Δικαιωμάτων Αγοράς από τη σχέση (108).

Σημειώνουμε ότι αν $nK \le F_{S^c}^{-1+}(0)$ ή $nK \ge F_{S^c}^{-1}(1)$, η τιμή του Ασιατικού Δικαιώματος μπορεί να καθοριστεί ακριβώς. Στην πρώτη περίπτωση, είναι σίγουρο ότι το Δικαίωμα θα αποφέρει κέρδος αφού θα ασκηθεί στην ημερομηνία λήξης, ενώ στη δεύτερη περίπτωση το Δικαίωμα δεν θα έχει κέρδος γιατί δεν θα ασκηθεί, και ως εκ τούτου δεν έχει νόημα να μιλάμε για φράγματα.

Το άνω φράγμα στη σχέση (112) μπορεί να γραφτεί με τη βοήθεια των συνηθισμένων αντίστροφων συναρτήσεων $F_{A(T-i)}^{-1}$.

Πράγματι, μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$AC(n,K,T) \le \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\delta i} EC(F_{A(T-i)}^{-1(\alpha)}(F_{S^c}(nK)), T-i)$$
$$-e^{-\delta T}[nK - F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(nK))](1-F_{S^c}(nK)).$$

Μέχρι τώρα, υποθέσαμε ότι $T-n+1>0$. Θα θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση που $T-n+1 \le 0$. Τότε γνωρίζουμε τις τιμές $A(T-n+1), A(T-n+2)..., A(0)$. Έτσι στο χρόνο 0 μόνο οι μεταβλητές $A(1),..., A(T)$ παραμένουν τυχαίες. Επομένως μπορούμε να βρούμε ότι

$$AC(n,K,T) = \frac{e^{-\delta T}}{n} E^Q\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i) - nK\right)_+\right]$$
$$= \frac{e^{-\delta T}}{n} E^Q\left[\left(\sum_{i=0}^{T-1} A(T-i) - \left(nK - \sum_{i=T}^{n-1} A(T-i)\right)\right)_+\right] \tag{114}$$

Σε αυτές τις περιπτώσεις, μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια μέθοδο όπως παραπάνω προκειμένου να ληφθούν τα άνω φράγματα για την τιμή του Ασιατικού Δικαιώματος. Τώρα καθορίζουμε το S^c ως $S^c = \sum_{i=0}^{T-1} F_{A(T-i)}^{-1}(U)$.

Για $F_{S^c}^{-1+}(0) < nK - \sum_{i=T}^{n-1} A(T-i) < F_{S^c}^{-1}(1)$, παίρνουμε ότι:

$$AC(n,K,T) \le \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{T-1} e^{-\delta i} EC\left[F_{A(T-i)}^{-1(\alpha)}\left(F_{S^c}\left(nK - \sum_{i=T}^{n-1} A(T-i)\right)\right), T-i\right], \tag{115}$$

όπου το α καθορίζεται από την εξίσωση

$$F_{S^c}^{-1(\alpha)}\left[F_{S^c}\left(nK - \sum_{i=T}^{n-1} A(T-i)\right)\right] = nK - \sum_{i=T}^{n-1} A(T-i). \tag{116}$$

Μια παρόμοια διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παράγουμε άνω φράγματα για την τιμή των αριθμητικών Ασιατικών Δικαιωμάτων Πώλησης.

Χρησιμοποιώντας τη θεωρία που εξηγήθηκε στην Ενότητα 3.3., μπορούμε επίσης να παράγουμε κάτω φράγματα για την τιμή των Ασιατικών Δικαιωμάτων. Αυτό θα εξηγηθεί στην επόμενη ενότητα.

5.3. Εφαρμογή στο μοντέλο *Black and Scholes*

Στο μοντέλο των *Black and Scholes (1973)*, η τιμή του περιουσιακού στοιχείου (π.χ. μετοχή) περιγράφεται από μια στοχαστική διαδικασία $\{A(t), t \geq 0\}$ που είναι μια Γεωμετρική Κίνηση *Brown* με σταθερή κλίση(*drift*) μ και σταθερή μεταβλητότητα(*volatility*) σ. Επομένως ισχύει:

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = \mu dt + \sigma d\overline{B}(t),\ t \geq 0 \ , \qquad (117)$$

με αρχική αξία στο χρόνο 0, $A(0) > 0$, και με την $\{\overline{B}(t),\ t \geq 0\}$ να είναι μια τυποποιημένη Κίνηση *Brown*.

Κάτω από το ισοδύναμο ***Martingale*** μέτρο *Q*, η διαδικασία τιμών $\{A(t), t \geq 0\}$ ακολουθεί επίσης μια Γεωμετρική Κίνηση *Brown*, με την ίδια μεταβλητότητα αλλά με κλίση ίση με το συνεχές σύνθετο επιτόκιο ουδέτερο κινδύνου δ, δηλ.

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = \delta dt + \sigma dB(t),\ t \geq 0 \ , \qquad (118)$$

με αρχική αξία $A(0)$, και με τη $\{B(t),\ t \geq 0\}$ να είναι μια τυποποιημένη Κίνηση *Brown* υπό το μέτρο Q. Έτσι, κάτω από το ισοδύναμο ***Martingale*** μέτρο, έχουμε ότι

$$A(t) = A(0)e^{(\delta - (\sigma^2/2))t + \sigma B(t)},\ \ t \geq 0 \,. \qquad (119)$$

Αυτό δηλώνει ότι κάτω από το ισοδύναμο ***Martingale*** μέτρο, οι τ.μ. $A(t)/A(0)$ ακολουθούν την *Λογαριθμοκανονική* Κατανομή με παράμετρους $(\delta - (\sigma^2/2))t$ και $t\sigma^2$. Οπότε αντίστοιχα έχουμε

$$F_{A(t)}(x) = \Pr[A(0)e^{(\delta - (\sigma^2/2))t + \sqrt{t}\sigma\Phi^{-1}(U)} \leq x], \qquad (120)$$

όπου η τ.μ. U ακολουθεί την *Ομοιόμορφη* κατανομή στο διάστημα $(0,1)$.

Από τις σχέσεις (56) και (58), βρίσκουμε την τιμή ενός Ευρωπαϊκού Δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης *K* και χρόνο εξάσκησης *T* που είναι

$$EC(K,T) = e^{-\delta T}E^{Q}[(A(T) - K)_+] = A(0)\Phi(d_1) - Ke^{-\delta T}\Phi(d_2), \qquad (121)$$

όπου τα d_1 και d_2 δίνονται από τις σχέσεις

$$d_1 = \frac{\ln(A(0)/K) + (\delta + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{122}$$

και

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \ . \tag{123}$$

Αυτός ο τύπος είναι ο γνωστός κατά *Black and Scholes* τύπος τιμολόγησης για τα Ευρωπαϊκού Τύπου Δικαιώματα Αγοράς.

Μέσα στο μοντέλο *Black and Scholes*, δεν έχουμε καμία ακριβής έκφραση για την τιμή ενός αριθμητικού Ασιατικού Δικαιώματος Αγοράς. Επομένως θα παράγουμε τα άνω και κάτω φράγματα για την τιμή τέτοιων Δικαιωμάτων. Θα εξετάσουμε μόνο τη περίπτωση που ο υπολογισμός του μέσου όρου δεν έχει αρχίσει ακόμα. Η άλλη περίπτωση μπορεί να εξεταστεί με παρόμοιο τρόπο.

Συμονοτονικό Άνω Φράγμα

Από τις σχέσεις (109) και (60), βρίσκουμε το ακόλουθο συμονοτονικό άνω φράγμα για την τιμή ενός αριθμητικού Ασιατικού Δικαιώματος Αγοράς:

$$\begin{aligned} AC(n,K,T) &\leq \frac{e^{-\delta T}}{n} E^{Q}\left[\left(S^{c} - nK\right)_{+}\right] \\ &= \frac{A(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\delta i}\Phi[\sigma\sqrt{T-i} - \Phi^{-1}(F_{S^c}(nK))] - e^{-\delta T}K(1 - F_{S^c}(nK)) \end{aligned} \tag{124}$$

ο οποίος ισχύει για οποιαδήποτε τιμή εξάσκησης $K > 0$. Σημειώνουμε ότι αυτό το άνω φράγμα αντιστοιχεί στο βέλτιστο γραμμικό συνδυασμό των τιμών των Ευρωπαϊκών Δικαιωμάτων Αγοράς όπως αναφέρθηκε στη προηγούμενη ενότητα.

Το υπόλοιπο πρόβλημα είναι πως να υπολογίσουμε τη συνάρτηση κατανομής $F_{S^c}(nK)$. Η τελευταία προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης

$$\sum_{i=0}^{n-1} F^{-1}_{A(T-i)}(F_{S^c}(nK)) = nK \ ,$$

ή, ισοδύναμα, από τη σχέση (119) και το Θεώρημα 1.2.5. διαπιστώνουμε ότι η $F_{S^c}(nK)$ προκύπτει από την επίλυση της

$$A(0)\sum_{i=0}^{n-1}\exp\left[\left(\delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-i) + \sigma\sqrt{T-i}\,\Phi^{-1}(F_{S^c}(nK))\right] = nK \ . \tag{125}$$

Κάτω Φράγμα

Τα κάτω φράγματα για την *AC*(*n,K,T*) μπορούν να ληφθούν από την Ενότητα 3.3. Αρχικά θεωρούμε τη μεταβλητή δέσμευσης *Λ* να ορίζεται ως εξής

$$\Lambda = \sum_{j=0}^{n-1} e^{(\delta-(\sigma^2/2))(T-j)} B(T-j)\,. \tag{126}$$

Από τη σχέση (119) παρατηρούμε ότι κάτω από το μέτρο Q ισχύει

$$\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i) = A(0)\sum_{i=0}^{n-1} e^{(\delta-(\sigma^2/2))(T-i)+\sigma B(T-i)}\,. \tag{127}$$

Έτσι, η τ.μ. *Λ* είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός μιας πρώτης προσέγγισης του $\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i)$. Η διασπορά του *Λ* δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_\Lambda^2 = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} e^{(\delta-(\sigma^2/2))(2T-j-k)} \min(T-j, T-k)\,. \tag{128}$$

Επίσης έχουμε ότι το τυχαίο διάνυσμα $(B(T-n+1), B(T-n+2),\dots,B(T))$ ακολουθεί τη *Πολυδιάστατη Κανονική* Κατανομή. Αυτό δηλώνει ότι, δοθέντος *Λ* = *λ*, η τ.μ. $B(T-i)$ ακολουθεί την *Κανονική* Κατανομή με μέσο $r_{T-i}(\sqrt{T-i}/\sigma_\Lambda)\lambda$ και διασπορά $(T-i)(1-r_{T-i}^2)$, όπου

$$r_{T-i} = \frac{Cov(B(T-i),\Lambda)}{\sqrt{T-i}\,\sigma_\Lambda} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} e^{(\delta-(\sigma^2/2))(T-j)} \min(T-i, T-j)}{\sqrt{T-i}\,\sigma_\Lambda}\,. \tag{129}$$

Τελικά βρίσκουμε ότι το κάτω φράγμα είναι

$$S^l \overset{d}{=} E^Q\left[\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i)\,\Big|\,\Lambda\right] \overset{d}{=} A(0)\sum_{i=0}^{n-1} e^{(\delta-(\sigma^2/2)r_{T-i}^2)(T-i)+\sigma r_{T-i}\sqrt{T-i}\,\sigma\Phi^{-1}(U)}\,, \tag{130}$$

όπου η τ.μ. U ακολουθεί την *Ομοιόμορφη* κατανομή στο διάστημα $(0,1)$.

Από αυτήν την έκφραση, βλέπουμε ότι το S^l είναι ένα συμμονοτονικό άθροισμα Λογαριθμοκανονικών τυχαίων μεταβλητών. Έτσι, από την Ενότητα 3.3. και τη σχέση (60), βρίσκουμε το ακόλουθο κάτω φράγμα για την τιμή του Ασιατικού Δικαιώματος Αγοράς

$$AC(n,K,T) \ge \frac{e^{-\delta T}}{n} E^Q[(S^l - nK)_+]$$

$$= \frac{A(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\delta i}\Phi[\sigma r_{T-i}\sqrt{T-i} - \Phi^{-1}(F_{S^l}(nK))] - e^{-\delta T}K(1 - F_{S^l}(nK)), \quad (131)$$

ο οποίος ισχύει για οποιοδήποτε $K > 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση κατανομής $F_{S^l}(nK)$ προκύπτει από την επίλυση της

$$A(0)\sum_{i=0}^{n-1}\exp\left[\left(\delta - \frac{\sigma^2}{2}r_{T-i}^2\right)(T-i) + \sigma r_{T-i}\sqrt{T-i}\,\Phi^{-1}(F_{S^l}(nK))\right] = nK. \quad (132)$$

Όταν ο αριθμός του μέσου όρου των ημερομηνιών n είναι ίσος με 1, τότε το Ασιατικό Δικαίωμα Αγοράς είναι ουσιαστικά ένα Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Αγοράς. Είναι απλό να αποδείξουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση τα άνω και κάτω φράγματα (124) και (131) για την τιμή του Ασιατικού Δικαιώματος βρίσκονται ουσιατικά από τον τύπο των *Black and Scholes* για την τιμή του Ευρωπαϊκού Δικαιώματος Αγοράς.

5.4. Αριθμητικό Παράδειγμα

Σε αυτή την ενότητα, θα δείξουμε με αριθμητικά δεδομένα τα φράγματα για την τιμή των Ασιατικών Δικαιωμάτων σύμφωνα με το μοντέλο των *Black and Scholes*, όπως υπολογίστηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Εξετάζουμε μια χρονική μονάδα 1 ημέρας. Θεωρούμε αρχικό χρονικό ορίζοντα $t = 0$. Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν για να παράγουμε τα αποτελέσματα που δίνονται στους παρακάτω Πίνακες είναι οι ίδιες όπως στον **Jacques[19]**.

Δίνονται μια αρχική τιμή $A(0) = 100$, ένα ετήσιο επιτόκιο ουδέτερο κινδύνου 9% , 3 τιμές (0,2, 0,3 και 0.4) για την ετήσια μεταβλητότητα, και πέντε τιμές (80,90,100,110 και 120) για την τιμή εξάσκησης *K*. Σημειώνουμε ότι το ουδέτερο κινδύνου επιτόκιο ανά ημέρα δίνεται ως $\delta = \ln(1,09)/365$, ενώ η μεταβλητότητα ανά ημέρα σ βρίσκεται αν διαιρέσουμε την ετήσια μεταβλητότητα με $\sqrt{365}$.

σ	K	LB	UB	MC (S.E.)
0.2	80	21.9212	21.9269	21.9233 (0.0468)
	90	12.6768	12.7204	12.6714 (0.0432)
	100	5.4609	5.5557	5.4726 (0.0329)
	110	1.6252	1.7072	1.6114 (0.0183)
	120	0.3317	0.3673	0.3336 (0.0080)
0.3	80	22.2332	22.2720	22.2651 (0.0684)
	90	13.8521	13.9512	13.8473 (0.0609)
	100	7.4787	7.6229	7.4395 (0.0484)
	110	3.4826	3.6214	3.5405 (0.0346)
	120	1.4125	1.5105	1.4003 (0.0219)
0.4	80	22.9646	23.0525	22.9694 (0.0880)
	90	15.3589	15.5115	15.3927 (0.0788)
	100	9.5113	9.7041	9.5987 (0.0665)
	110	5.4794	5.6720	5.5574 (0.0517)
	120	2.9608	3.1222	2.9519 (0.0377)

Πίνακας 5.1. Κάτω (LB) και άνω φράγματα (UB) για την τιμή ενός Ασιατικού Δικαιώματος με T = 120 και n = 30,σε σύγκριση με τις εκτιμήσεις Monte Carlo (MC) και τα τυπικά σφάλματά τους (S.E.)

Στον Πίνακα 5.1., συγκρίνουμε τα άνω και κάτω φράγματα που παράγαμε στις σχέσεις (123) και (130) με τις εκτιμήσεις *Monte Carlo* (βασισμένες σε 50.000 τυχαίες διαδρομές με την τεχνική της προσομοίωσης) στη περίπτωση που T = 120 και n = 30. Σημειώνουμε, ότι οι τυχαίες διαδρομές μέσω της προσομοίωσης είναι βασισμένες σε αντιθετικές μεταβλητές ώστε να μειωθεί η διασπορά της εκτίμησης *Monte Carlo*. Επίσης βρίσκουμε τις εκτιμήσεις *Monte Carlo* για κάθε τιμή $σ$ και K, καθώς και το τυπικό σφάλμα για κάθε εκτίμηση. Όπως γνωρίζουμε, το 95% (ασυμπτωτικό) διάστημα εμπιστοσύνης δίνεται από την εκτίμηση συν ή μείον 1,96 φορές το τυπικό σφάλμα. Αφ' ετέρου, το εύρος τιμών μεταξύ του κάτω και άνω φράγματος θα περιέχει την ακριβή τιμή με βεβαιότητα.

Παρά τον αρκετά μεγάλο αριθμό τιμών που παράγουμε με την τεχνική της προσομοίωσης (και συνεπώς τον χρονοβόρο υπολογισμό) και την μείωση της διασποράς με την τεχνική των αντιθετικών μεταβλητών, το διάστημα εμπιστοσύνης 95% είναι πλατύτερο από το [LB,UB] διάστημα στις 10 περιπτώσεις από τις 15.Αυτό δείχνει ότι τα φράγματα πρέπει να προτιμηθούν από την προσομοίωση σε αυτήν την περίπτωση. Επιπλέον, η εκτίμηση *Monte Carlo* υπερβαίνει το κάτω φράγμα 6 φορές. Αυτό μάλλον δείχνει ότι το κάτω φράγμα είναι πολύ κοντά στην πραγματική τιμή. Το άνω φράγμα αποδίδει καλύτερα όσο περισσότερο το Δικαίωμα είναι βέβαιο ότι θα ασκηθεί.

σ	K	LB	UB	MC (S.E.)
0.2	80	20.7841	20.7845	20.7839 (0.0297)
	90	11.0273	11.0599	11.0205 (0.0287)
	100	3.2013	3.3443	3.1984 (0.0196)
	110	0.3373	0.4080	0.3383 (0.0064)
	120	0.0116	0.0185	0.0128 (0.0011)
0.3	80	20.8122	20.8268	20.8055 (0.0441)
	90	11.4929	11.6017	11.5160 (0.0410)
	100	4.5063	4.7221	4.4711 (0.0289)
	110	1.1516	1.3134	1.1458 (0.0150)
	120	0.1915	0.2503	0.1945 (0.0059)
0.4	80	20.9708	21.0309	20.9719 (0.0581)
	90	12.2468	12.4384	12.2183 (0.0514)
	100	5.8157	6.1038	5.8711 (0.0393)
	110	2.2082	2.4582	2.2224 (0.0248)
	120	0.6783	0.8223	0.6802 (0.0135)

Πίνακας 5.2. Κάτω (LB) και άνω φράγματα (UB) για την τιμή ενός Ασιατικού Δικαιώματος με T = 60 και n = 30,σε σύγκριση με τις εκτιμήσεις Monte Carlo (MC) και τα τυπικά σφάλματά τους (S.E.)

Στον Πίνακα 5.2., χρησιμοποιούμε τις ίδιες παραμέτρους όπως πριν, αλλά αλλάζουμε το χρόνο λήξης σε T = 60. Τώρα, το διάστημα εμπιστοσύνης 95% είναι πλατύτερο από το [LB,UB] διάστημα σε 6 περιπτώσεις, αλλά η εκτίμηση *Monte Carlo* υπερβαίνει το κάτω φράγμα 7 φορές. Επομένως, πάλι το κάτω φράγμα πρέπει να είναι κοντά στην πραγματική τιμή.

σ	K	LB	UB	MC (S.E.)
0.2	80	22.1712	22.1735	22.1718 (0.0495)
	90	13.0085	13.0232	13.0219 (0.0460)
	100	5.8630	5.8934	5.8793 (0.0351)
	110	1.9169	1.9442	1.9411 (0.0211)
	120	0.4534	0.4665	0.4517 (0.0098)
0.3	80	22.5656	22.5795	22.5524 (0.0720)
	90	14.3149	14.3475	14.2825 (0.0644)
	100	8.0101	8.0563	8.0009 (0.0522)
	110	3.9475	3.9928	3.9788 (0.0382)
	120	1.7297	1.7633	1.7322 (0.0250)
0.4	80	23.4194	23.4493	23.4137 (0.0933)
	90	15.9549	16.0045	15.9191 (0.0833)
	100	10.1735	10.2354	10.1853 (0.0705)
	110	6.1019	6.1643	6.0895 (0.0563)
	120	3.4683	3.5220	3.4844 (0.0431)

Πίνακας 5.3. Κάτω (LB) και άνω φράγματα (UB) για την τιμή ενός Ασιατικού Δικαιώματος με T = 120 και n = 10, σε σύγκριση με τις εκτιμήσεις Monte Carlo (MC) και τα τυπικά σφάλματά τους (S.E.)

Τέλος στον Πίνακα 5.3., αλλάζουμε το χρόνο λήξης πάλι σε T = 120, αλλά μειώνουμε τον αριθμό του μέσου όρου των ημερών σε n = 10. Με αυτές τις παραμέτρους, η προσομοίωση δεν δίνει αξιόπιστες εκτιμήσεις δεδομένου ότι το προσομοιωμένο διάστημα εμπιστοσύνης είναι ευρύτερο από το πραγματικό διάστημα εμπιστοσύνης σε όλες τις περιπτώσεις. Η εκτίμηση *Monte Carlo* υπερβαίνει πάλι το κάτω φράγμα 7 φορές.

Το άνω φράγμα αποδίδει καλύτερα όταν $n = 10$ απ'ό,τι όταν επιλέξουμε $n = 30$. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι η δομή εξάρτησης του $A(T-i)$ είναι περισσότερο "συμονοτονική" αν όλα τα $T-i$ είναι κοντά το ένα με το άλλο.

Παράρτημα

Στο σημείο αυτό, θα παρουσιάσουμε κάποιες χρήσιμες έννοιες που θα μας βοηθήσουν στο Κεφάλαιο 5 για να παράγουμε φράγματα για τα αριθμητικά Ασιατικά Δικαιώματα. Αρχικά θα ορίσουμε την έννοια του Ασιατικού Δικαιώματος.

1. Ασιατικά δικαιώματα (*Asian options*)

Τα Ασιατικά δικαιώματα είναι δικαιώματα των οποίων η αξία στο χρόνο εξάσκησης T εξαρτάται από τη μέση τιμή της μετοχής κατά τη διάρκεια του χρόνου μεταξύ 0 (όταν το δικαίωμα αγοράστηκε) και του χρόνου άσκησης T. Δεδομένου ότι αυτοί οι μέσοι όροι γίνονται συνήθως από τις τιμές της μετοχής στο τέλος της ημέρας, και έστω N να δηλώνει τον αριθμό των εμπορικών ημερών σε ένα έτος (συνήθως παίρνουμε $N = 252$), τότε το

$$S_d(i) = S(i/N)$$

δηλώνει την τιμή της μετοχής στο τέλος της i ημέρας. Ο μέσος όρος υπολογίζεται συνήθως αριθμητικά,

$$\textit{arithmetic average} = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}$$

ή γεωμετρικά,

$$\textit{geometric average} = \sqrt[n]{s_1 s_2 \ldots s_n}\ .$$

Τα Ασιατικά δικαιώματα έχουν διάφορες παραλλαγές. Κάποιες από αυτές είναι:

α) Με Σταθερή τιμή εξάσκησης (*fixed Asian option*)

Το πιο κοινό Ασιατικού τύπου δικαίωμα αγοράς είναι αυτό στο οποίο ο χρόνος άσκησης είναι το τέλος των n εμπορικών ημερών, η τιμή εξάσκησης είναι σταθερή K, και η εξόφληση στο χρόνο άσκησης T είναι

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{S_d(i)}{n} - K\right)_+ .$$

β) Με Κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης (*floating Asian option*)

Μια άλλη περίπτωση είναι η εξής: η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος K δεν είναι προκαθορισμένη, αλλά είναι ίση με τη μέση τιμή που είχε η μετοχή από το χρόνο αγοράς του δικαιώματος μέχρι τον χρόνο άσκησης T (π.χ. μετρούμενη κατά το τέλος των συνεδριάσεων κάθε ημέρα) και με ποσοστό β (για κάποια σταθερά $\beta \in \mathbb{R}_+$) παρέχει στο χρόνο T εξόφληση

$$\left(\beta S_d(n) - \sum_{i=1}^{n} \frac{S_d(i)}{n} \right)_+ .$$

Θεωρητικά τουλάχιστον μπορούμε επιπλέον να διακρίνουμε μεταξύ ενός αριθμητικού μέσου όρου που υπολογίζεται βάσει πεπερασμένων τιμών μετοχών κατά τη διάρκεια του χρόνου και ενός συνεχώς υπολογίσιμου αριθμητικού μέσου όρου. Τα δικαιώματα με μέσο όρο βασισμένο στις πεπερασμένες τιμές των μετοχών κατά τη διάρκεια του χρόνου καλούνται διακριτά Ασιατικά δικαιώματα σε διάκριση με τα συνεχή Ασιατικά διακαιώματα. Στην πράξη μόνο τα διακριτά Ασιατικά δικαιώματα κυκλοφορούν στο εμπόριο, ενώ η πλειοψηφία των ερευνητικών εργασιών εξετάζει τα συνεχή Ασιατικά δικαιώματα. Εμείς στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με την τιμολόγηση των διακριτών αριθμητικών Ασιατικών δικαιωμάτων με σταθερή τιμή εξάσκησης.

Ένα συμβόλαιο Ασιατικού δικαιώματος γράφεται στο χρόνο $t = 0$ και λήγει στο χρόνο $T > 0$. Αν στον τρέχοντα χρόνο 0, ο υπολογισμός μέσου όρου δεν έχει αρχίσει ακόμα, δηλαδή είναι $n \leq T+1$ τότε έχουμε τα «*forward starting*» Ασιατικά δικαιώματα και οι n μεταβλητές $S(T-n+1),\ldots,S(T)$ είναι τυχαίες. Αυτή η περίπτωση επικρατεί σε αντίθεση με την περίπτωση που $n \geq T+1$ (στο χρόνο 0 ο υπολογισμός μέσου όρου έχει ξεκινήσει) όπου μόνο οι τιμές $S(1), \ldots, S(T)$ παραμένουν τυχαίες. Στη βιβλιογραφία, αυτό το Ασιατικό δικαίωμα καλείται «*in progress*».

Παρακάτω παραθέτουμε κάποιες εισαγωγικές έννοιες και ορισμούς για την τιμολόγηση των παραγώγων (*Asian options*).

2. Κίνηση *Brown*

Μια απλοποιημένη περιγραφή του μοντέλου αυτού είναι η ακόλουθη: σε κάθε απειροστό χρονικό διάστημα θεωρούμε ότι η $X(t)$ αυξάνεται ή μειώνεται απειροστά (και με πιθανότητα σχεδόν 0,5), ανεξάρτητα από το παρελθόν. Αν λοιπόν χωρίσουμε το χρονικό διάστημα $[0, t]$ σε n υποδιαστήματα πλάτους Δ το καθένα ($\Delta = t/n$) και υποθέσουμε ότι $X(0) = 0$ (ή $X(0) = c$) έχουμε την προσαύξηση

$$X(i\Delta) = \begin{cases} X((i-1)\Delta) + \sigma\sqrt{\Delta}, & \text{με πιθ. } p \\ X((i-1)\Delta) - \sigma\sqrt{\Delta}, & \text{με πιθ. } 1-p \end{cases} \quad \text{όπου } p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{r}{\sigma}\sqrt{\Delta}\right),\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ορισμός (Κίνηση *Brown*)

Μία στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t > 0\}$ καλείται κίνηση *Brown* με παραμέτρους r (*drift parameter*) και σ^2 (*volatility* ή *variance parameter*) (συμβ. BM(r, σ^2)) αν ισχύει ότι

(i) Η τ.μ. $X(t + y) - X(y) \sim N(rt, t\sigma^2)$.

(ii) Η τ.μ. $X(t + y) - X(y)$, $t > 0$ είναι ανεξάρτητη από τις $X(u)$, $0 \le u < y$, δηλαδή η $\{X(t), t \ge 0\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Συνήθως λαμβάνεται $X(0) = 0$ (ή c).

3. Γεωμετρική Κίνηση *Brown*

Προκειμένου να περιγράψουμε την εξέλιξη τιμών αγαθών ή μετοχών $\{S(t), t \ge 0\}$ (όπου $S(t)$ είναι η τιμή στο χρόνο t) θα καταφύγουμε στη Γεωμετρική Κίνηση *Brown*. Η κίνηση *Brown* δεν είναι κατάλληλη για την περιγραφή τέτοιων φαινομένων διότι : (α) μπορεί να λάβει και αρνητικές τιμές, κάτι που δεν είναι αποδεκτό, ενώ (β) η αύξηση ή μείωση μιας τιμής είναι, σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, ανεξάρτητη από την ίδια την τιμή (π.χ. είναι το ίδιο πιθανό το ενδεχόμενο «η τιμή 100 να κινηθεί στο 100+10=110 σε διάστημα μήκους Δ» με το ενδεχόμενο «η τιμή 10 να κινηθεί στο 10+10=20 σε διάστημα μήκους Δ») κάτι που δεν φαίνεται λογικό και δεν ταιριάζει σε πραγματικά δεδομένα. Θεωρούμε εναλλακτικά λοιπόν τώρα ότι, σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα μήκους Δ, η τιμή $S(t)$ μπορεί είτε να αυξηθεί είτε να μειωθεί με κάποια πιθανότητα και ανεξάρτητα από το παρελθόν ως εξής

$$S(t+\Delta)=\begin{cases} S(t)e^{\sigma\sqrt{\Delta}}, & \text{με πιθ. } p \\ S(t)e^{-\sigma\sqrt{\Delta}}, & \text{με πιθ. } 1-p \end{cases} \quad \text{όπου } p=\frac{1}{2}\left(1+\frac{r}{\sigma}\sqrt{\Delta}\right).$$

Δηλαδή, η ποσοστιαία μείωση ή αύξηση της τιμής ($S(t+\Delta)/S(t)$) σε κάθε απειροστό διάστημα χρόνου είναι σταθερή και ανεξάρτητη από το παρελθόν, ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα αύξησης ή μείωσης είναι «κοντά» στο 0,5.

Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $X(t) = \ln S(t)$, τότε η $X(t+\Delta)=X(t) \pm \sigma\Delta^{1/2}$ (με πιθ. p το + και $1-p$ το −), και επομένως η ανέλιξη $\{X(t),\ t \geq 0\} = \{\ln S(t),\ t \geq 0\}$ είναι μια κίνηση *Brown*. Δηλαδή, η τ.μ. $X(t+y) - X(t) = \ln S(t+y) - \ln S(y) = \ln(S(t+y)/S(y))$ ακολουθεί *Κανονική* κατανομή $N(rt, t\sigma^2)$ και είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν $S(u)$, $0 \leq u < y$.

Μια στοχαστική ανέλιξη με τις παραπάνω ιδιότητες καλείται γεωμετρική κίνηση *Brown*. Έτσι, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός (Γεωμετρική Κίνηση *Brown*)

Μία στοχαστική ανέλιξη $\{S(t),\ t \geq 0\}$ καλείται γεωμετρική κίνηση ***Brown*** με παραμέτρους r (*drift parameter*) και σ^2 (*volatility parameter*) (συμβ. GBM(r, σ^2)) αν ισχύει ότι:

(i) Η τυχαία μεταβλητή

$$\ln\frac{S(t+y)}{S(y)} \sim N(tr, t\sigma^2),\quad y>0.$$

(ii) Η τ.μ. $S(t+y)/S(y)$ είναι ανεξάρτητη από τις $S(u)$, $0 \leq u < y$.

Είναι προφανές ότι αν $\{X(t),\ t \geq 0\} \sim$ BM(r, σ^2), τότε η $\{e^{X(t)},\ t \geq 0\} \sim$ GBM(r, σ^2). Άρα, ένα σχετικά απλό μοντέλο που μπορεί να περιγράψει την εξέλιξη τιμών στο χρόνο είναι η γεωμετρική κίνηση *Brown*. Αν λοιπόν $\{S(t),\ t \geq 0\} \sim$ GBM(r, σ^2) τότε η $S(t)$ ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή, δηλαδή ο λογάριθμός της ακολουθεί την κανονική κατανομή,

$$\ln S(t) \sim N(tr + \ln S(0), t\sigma^2).$$

4. Το μοντέλο της γεωμετρικής κίνησης *Brown*

Έστω $S(t)$ η τιμή της μετοχής που μας ενδιαφέρει στον χρόνο t. Θεωρούμε ότι η αρχική τιμή $S(0)$ είναι γνωστή (π.χ. είναι η τιμή της μετοχής στο παρόν). Προφανώς, η $S(t)$ είναι τυχαία μεταβλητή και η οικογένεια $\{S(t),\ t \geq 0\}$ είναι μία στοχαστική ανέλιξη. Ξεκινώντας τη μελέτη της τιμής $S(t)$ μιας μετοχής, θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε τη συμπεριφορά της διαδικασίας $\{S(t),\ t \geq 0\}$ σε ένα πολύ μικρό διάστημα του χρόνου. Χωρίζουμε λοιπόν το χρονικό διάστημα $(0,t]$ σε n υποδιαστήματα πλάτους $\Delta t = t/n$ το καθένα (με Δt «μικρό»). Στο i-οστό διάστημα χρόνου $(t_i,\ t_i + \Delta t] = ((i-1)\Delta t,\ i\Delta t]$ θεωρούμε ότι η ποσοστιαία αυξομείωση της S είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί Κανονική κατανομή με μέση τιμή και διασπορά ανάλογη του Δt, και ανεξάρτητη από το παρελθόν της διαδικασίας. Δηλαδή,

$$\frac{S(t_i + \Delta t) - S(t_i)}{S(t_i)} = r\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} Z_i\,,$$

όπου οι τυχαίες μεταβλητές $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν την κατανομή $N(0,1)$, δηλαδή $r\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \sim N(r\Delta t, \sigma^2\Delta t)$ για κάποιες σταθερές r, σ^2. Οι τ.μ. $\sqrt{\Delta t}Z_1, \sqrt{\Delta t}Z_2, ..., \sqrt{\Delta t}Z_n$ τώρα μπορούν να θεωρηθούν ως οι προσαυξήσεις μιας BM (γνωρίζουμε ότι οι προσαυξήσεις μιας κίνησης *Brown* είναι ανεξάρτητες κανονικές τ.μ.) και επομένως μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\frac{S(t_i + \Delta t) - S(t_i)}{S(t_i)} = r\Delta t + \sigma(B(t_i + \Delta t) - B(t_i))\,,$$

όπου $\{B(t),\ t \geq 0\} \sim \text{BM}(0,1)$ (και άρα $B(t_i + \Delta t) - B(t_i) \sim N(0,\Delta t)$). Απλούστερα, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\frac{\Delta S(t)}{S(t)} = r\Delta t + \sigma\Delta B(t)\,.$$

Αν θεωρήσουμε το $\Delta t \to 0$, τότε η παραπάνω εξίσωση θα μπορούσε να γραφεί στη μορφή

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma dB(t) \text{ ή ισοδύναμα, } dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dB(t) \text{ όπου } B \sim \text{BM}(0,1)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι μια στοχαστική διαφορική εξίσωση (SDE) για την διαδικασία S. Η στοχαστική διαδικασία $S = \{S(t),\ t \geq 0\}$ που περιγράφει την εξέλιξη της τιμής μιας μετοχής θα πρέπει να ικανοποιεί τη SDE (δηλ. την ισοδύναμη στοχαστική ολοκληρωτική εξίσωση). Αποδεικνύεται (χρησιμοποιώντας το γνωστό ως λήμμα του Ito) ότι ο λογάριθμος της διαδικασίας S θα ικανοποιεί τη SDE

$$d\ln S(t) = (r - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dB(t)\,.$$

όπου B ~ BM(0,1). Ολοκληρώνοντας κατά μέλη από 0 έως t την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$\ln S(t) - \ln S(0) = (r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B(t) \text{ και άρα } \ln S(t) \sim N(\ln S(0) + (r - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma^2 t)\,.$$

Δηλαδή η διαδικασία ln $S(t)$ ~ BM($r - \sigma^2/2$, σ^2) και επομένως η S που ικανοποιεί την παραπάνω SDE θα είναι μια γεωμετρική κίνηση *Brown*. Φαίνεται επίσης ότι

$$\ln\frac{S(t)}{S(0)} = (r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B(t) \text{ και άρα } \ln\frac{S(t)}{S(0)} \sim N((r - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma^2 t)\,.$$

και ως εκ τούτου, οι τυχαίες μεταβλητές S(t)/S(0) κατανέμονται Λογαριθμοκανονικά με παραμέτρους $(r - \frac{\sigma^2}{2})t$ και $t\sigma^2$.

5. Αποτίμηση της αξίας παραγώγων (*risk-neutral valuation*)

Στόχος μας είναι να βρεθεί η τιμή C πώλησης/αγοράς ενός δικαιώματος προαίρεσης (συγκεκριμένα για την εργασία μας του διακριτού αριθμητικού Ασιατικού δικαιώματος) όταν είναι γνωστά όλα τα υπόλοιπα μεγέθη (r, σ, S(0), t, K) με κλίση(*drift*) ίση με τη δύναμη του επιτοκίου r ουδέτερου κινδύνου. Πιο συγκεκριμένα, μας ενδιαφέρει να βρούμε την τιμή C ενός παραγώγου το οποίο αποδίδει κέρδος $h(S)$ από τη χρήση του στο χρόνο εξάσκησης t, όπου S είναι η διαδικασία που εκφράζει την εξέλιξη της τιμής του χρηματιστηριακού προϊόντος (μετοχής).

Αρχικά υποθέτουμε ότι στην αγορά υπάρχει μια επένδυση χωρίς ρίσκο που προσφέρει επιτόκιο r. Επομένως, επενδύοντας ποσό A, μετά από χρόνο t θα λάβουμε Ae^{rt}. Επίσης, αν υπάρχει μια στρατηγική αγοραπωλησιών μετοχών, δικαιωμάτων και ομολόγων που επιτρέπει σε έναν εξιδανικευμένο παίκτη χρηματιστηρίου να έχει σίγουρο κέρδος (ο οποίος μπορεί να κάνει στιγμιαία συναλλαγές μετοχών χωρίς κόστος συναλλαγών), τότε λέγεται ότι η αγορά προσφέρει ευκαιρία για *arbitrage* (κερδοσκοπία). Σύμφωνα με την θεωρία του *arbitrage pricing*(εξισορροπητική κερδοσκοπία), αποδεικνύεται το παρακάτω.

Πρόταση (*arbitrage pricing ή risk-neutral valuation*)

Για να μην υπάρχει δυνατότητα για *arbitrage* στην αγορά θα πρέπει η παρούσα αξία του παραγώγου (που αποδίδει κέρδος $h(S)$ στο χρόνο t), να είναι ίση με

$$E[e^{-rt}h(S)/\ln S \sim BM(r-\frac{\sigma^2}{2},\sigma^2)].$$

Η παρούσα αξία του παραγώγου δηλ. θα πρέπει να είναι ίση με την παρούσα αξία του αναμενόμενου κέρδους από την χρήση του παραγώγου όταν η υποκείμενη μετοχή προσφέρει απόδοση ουδέτερου ρίσκου.

Παρατήρηση:

Η πρόταση δεν υπονοεί ότι η τιμή της μετοχής ακολουθεί στην πραγματικότητα την GBM με τις παραπάνω παραμέτρους, αλλά ότι προκειμένου να αποτιμηθεί η αξία του παραγώγου θα πρέπει να «προσποιηθούμε» ότι η τιμή της μετοχής ακολουθεί την συγκεκριμένη GBM και να υπολογίσουμε την παραπάνω αναμενόμενη τιμή.

6. Εφαρμογή στα Ασιατικά δικαιώματα

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, ένα διακριτό αριθμητικό Ασιατικό δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με ημερομηνία άσκησης T, n κατά μέσο όρο ημερομηνίες και σταθερή τιμή εξάσκησης K, αποδίδει κέρδος $h(S)$ στο χρόνο T που είναι ίσο με

$$h(S)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}S(T-i)-K\right)_+,$$

όπου $x_+=\max\{x,0\}$ και $S(T-i)$ είναι η τιμή της μετοχής με ρίσκο στο χρόνο $T-i$, $i = 0,\dots,n-1$. Η τιμή του δικαιώματος αγοράς κάτω από ένα **Martingale** μέτρο Q και με κάποιο επιτόκιο r ουδέτερου κινδύνου στον τρέχοντα χρόνο $t=0$ σύμφωνα με τα παραπάνω είναι

$$E^Q[e^{-rT}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}S(T-i)-K\right)_+/\ln S \sim BM(r-\frac{\sigma^2}{2},\sigma^2)]$$ δηλαδή είναι

$$AC(n,K,T)=\frac{e^{-rT}}{n}E^Q\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1}S(T-i)-nK\right)_+\right].$$

Βιβλιογραφία

[1] Kaas, R., Van Heerwaarden, A.E., Goovaerts, M.J., 1994. Ordering of Actuarial Risks. Institute for Actuarial Science and Econometrics,University of Amsterdam, Amsterdam.

[2] Hoeffding,W., 1940. Masstabinvariante Korrelations theorie. Schriften des mathematischen Instituts und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin 5, 179–233.

[3] Fréchet, M., 1951. Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont donnés. Annals of University of Lyon Section A, Series 3 14, 53–77.

[4] Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M.J., Kaas, R.,Vyncke, D., 2002. The concept of comonotonicity in actuarial science and finance:theory. Insurance: Mathematics & Economics 31, 3–33.

[5] Dhaene, J., Wang, S., Young, V., Goovaerts, M.J., 2000b. Comonotonicity and maximal stop-loss premiums. Mitteilungen der Schweiz. Aktuarvereinigung 2000 (2), 99–113.

[6] Luan, C., 2001. Insurance premium calculations with anticipated utility theory. ASTIN Bulletin 31 (1), 23–35.

[7] Embrechts, P., McNeil, A., Straumann, D., 2001. Correlation and dependency in risk management: properties and pitfalls. In: Dempster, M., Moffatt, H.K. (Eds.), Risk Management: Value at Risk and Beyond. Cambridge University Press, Cambridge.

[8] Dhaene, J., Wang, S., Young, V., Goovaerts, M.J., 2000b. Comonotonicity and maximal stop-loss premiums. Mitteilungen der Schweiz. Aktuarvereinigung 2000 (2), 99–113.

[9] Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M.J., Kaas, R., Vyncke, D., 2002. The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: applications, Insurance: Mathematics and Economics 31, 133–161.

[10] Goovaerts, M.J., Dhaene, J., De Schepper, A., 2000. Stochastic upper bounds for present value functions. Journal of Risk and Insurance Theory 67 (1), 1–14.

[11] De Schepper, A., Teunen, M., Goovaerts, M.J., 1994. An analytical inversion of a Laplace transform related to annuities certain. Insurance:Mathematics & Economics 14 (1), 33–37.

[12] Dufresne, D., 1990. The distribution of a perpetuity with applications to risk theory and pension funding. Scandinavian Actuarial Journal 9,39–79.

[13] Milevsky, M.A., 1997. The present value of a stochastic perpetuity and the Gamma distribution. Insurance: Mathematics & Economics 20 (3), 243–250.

[14] Black, F., Scholes, M., 1973. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy 81, 637–659.

[15] Cox, J.C., Ross, S.A., Rubinstein, M., 1979. Option pricing: a simplified approach. Journal of Financial Economics 7, 229–263.

[16] Harrison, J., Kreps, D., 1979. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. Journal of Economic Theory 20, 381–408.

[17] Harrison, J., Pliska, R., 1981. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. Stochastic Processes and their Applications 11, 215–260.

[18] Gerber, H.U., Shiu, E.S.W., 1996. Actuarial bridges to dynamic hedging and option pricing. Insurance: Mathematics & Economics 18, 183–218.

[19] Jacques, M., 1996. On the hedging portfolio of Asian options. ASTIN Bulletin 26, 165–183.

[20] Rogers, L.C.G., Shi, Z., 1995. The value of an Asian option. Journal of Applied Probability 32, 1077–1088.

[21] Embrechts, P., Mc.Neil, A., Straumann, D., 2001. Correlation and dependency in risk management: properties and pitfalls. In: Dempster, M., Moffatt, H.K. (Eds.), Risk Management: Value at Risk and Beyond. Cambridge University Press, Cambridge.

[22] David Vyncke, 2003. Comonotonicity: The Perfect Dependence, Phd. Thesis, Katholieke Universiteit Leuven.