ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΣΤΗΝ **ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΔΟΜΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Χαρά-Νικολέτα Παπαδάκη

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς

Σεπτέμβριος 2023

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΣΤΗΝ **ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΔΟΜΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Χαρά-Νικολέτα Παπαδάκη

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς

Σεπτέμβριος 2023

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Μιχαήλ Μπούτσικας, Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Μάρκος Κούτρας, Καθηγητής
- Κωνσταντίνος Πολίτης , Αναπληρωτής Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Statistics

Department of Statistics and Insurance Science

POSTGRADUATE PROGRAM IN

APPLIED STATISTICS

A REVIEW OF STRUCTURAL CREDIT RISK MODELS

By

Chara-Nikoleta Papadaki

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece
September 2023

Στη μαμά μου

Καλλιόπη

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών, «Εφαρμοσμένης Στατιστικής», του Τμήματος «Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης», του Πανεπιστημίου Πειραιά, υπό την επίβλεψη του Αναπλ. Καθηγητή κ. Μιχαήλ Μπούτσικα, τον οποίο ευχαριστώ θερμά για τη βοήθεια και την υπομονή του κατα τη διάρκεια της συγγραφής της εργασίας.

Περίληψη

Η μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου αποτελεί αναγκαίο στοιχείο για την οικονομική ευημερία τόσο των επιχειρήσεων όσο και των τραπεζών. Η κρίση του 2008 αποτελεί πρόσφατο παράδειγμα που επιδεικνύει τη σημασία της σωστής μέτρησης του πιστωτικού κινδύνου, καθώς η λανθασμένη αξιολόγηση από τις τράπεζες συνέβαλε στην εξάπλωση της κρίσης.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η παρουσίαση μοντέλων πιστωτικού κινδύνου που ανήκουν στη κατηγορία των δομικών μοντέλων. Τα δομικά μοντέλα θεωρούν ότι το πιστωτικό γεγονός (αθέτηση) εμφανίζεται όταν μια συγκεκριμένη στοχαστική ανέλιξη που μπορεί να εκφράζει την αξία του ενεργητικού της οντότητας αναφοράς, περάσει κάτω από κάποιο κατώφλι (π.χ. κάτω από το σύνολο των υποχρεώσεων της οντότητας). Στο πλαίσιο αυτό, αναλύθηκαν τρία δομικά μοντέλα, το μοντέλο του Merton, το μοντέλο KMV και το μοντέλο CreditGrades. Το μοντέλο του Merton αποτελεί το θεμελιώδες δομικό μοντέλο, καθώς τα επόμενα μοντέλα που αναπτύχθηκαν στηρίζονται σε αυτό. Το KMV μοντέλο, όπως και το CreditGrades αποτελούν επεκτάσεις του μοντέλου του Merton και διορθώνουν κάποια απο τα μειονεκτήματα του μοντέλου. Τέλος, παρουσιάζεται ένα αριθμητικό παράδειγμα εφαρμογής των παραπάνω μοντέλων. Η εταιρία για την οποία εφαρμόστηκαν τα μοντέλα είναι η αμερικάνικη εταιρία Bed Bath and Beyond η οποία ασχολείται με τη λιανική πώληση ειδών σπιτιού και βρίσκεται σε διαδικασία πτώχευσης απο τις αρχές του 2023. Το υπολογιστικό πακέτο που χρησιμοποιήθηκε είναι αυτό της R.

Abstract

The measurement of credit risk is necessary for the economic prosperity of companies and banks. The 2008 crisis is a recent example that demonstrates the importance of the correct measurement of credit risk, as poorly made assessments by banks contributed to the spread of the crisis.

The purpose of this paper is the presentation of credit risk models that belong to the category of structural models. Structural models assume that the credit event (default) occurs when a stochastic process that can express the value of the assets of an entity, passes below some threshold (eg below the total liabilities of the entity). In this perspective, three structural models were analyzed, the Merton model, the KMV model and the CreditGrades model. Merton's model is the foundational structural model, and subsequent models developed from it. The KMV model, like CreditGrades, are extensions of Merton's model and correct some of the model's shortcomings. Finally, a numerical example of the above models is presented. The company for the application of the models is the American company Bed Bath and Beyond retail company specializing in home goods and is in the process of bankruptcy from the beginning of 2023. The computing package used is R.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1 Εισαγωγή

Είναι γεγονός ότι σε ένα οικονομικό σύστημα, οι εταιρίες, για να έχουν κέρδος θα πρέπει να αναλαμβάνουν κινδύνους. Εξάλλου είναι γνωστό από τη χρηματοοικονομική θεωρία, ότι η ανάληψη μεγάλου κινδύνου επιφέρει μεγάλες αποδόσεις. Βέβαια, ορισμένοι κίνδυνοι μπορούν να προβλεφθούν και να αντισταθμιστούν, ενώ άλλοι όχι. Ωστόσο, είναι βέβαιο, ότι όταν εμφανιστούν, θα έχουν αρνητική επίδραση στην εταιρία, και η κακή διαχείρισή τους μπορεί να οδηγήσει σε πτώχευση. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στις Πανεπιστημιακές σημειώσεις του Αντζουλάτου (2017).

Υπάρχουν πολλά είδη κινδύνων που μια εταιρία πρέπει να αντιμετωπίσει, όπως ο κίνδυνος για τη φήμη της, ο λειτουργικός κίνδυνος και άλλοι. Η παρούσα διπλωματική εργασία, θα επικεντρωθεί στον **πιστωτικό κίνδυνο**.

Η αξία της μέτρησης του πιστωτικού κινδύνου, έχει αναδειχθεί ιδιαίτερα μετά την οικονομική κρίση του 2008 και έχει απασχολήσει πολλούς αναλυτές στο χρηματοπιστωτικό σύστημα.

Ο πιστωτικός κίνδυνος αφορά την ικανότητα των επιχειρήσεων να εκπληρώνουν τις οικονομικές τους υποχρεώσεις προς τρίτους. Επομένως, η ποσοτικοποίηση του κινδύνου που αναλαμβάνουν είναι ιδιαίτερα σημαντική προκειμένου να ληφθούν τα αντίστοιχα μέτρα πρόληψης και διαχείρισης.

1.2 Έννοια Πιστωτικού Κινδύνου

Ένας σύντομος ορισμός που μπορεί να δοθεί για το πιστωτικό κίνδυνο είναι ο παρακάτω:

Ο Πιστωτικός κίνδυνος σύμφωνα με τους McNeil Frey και Embrechts (2005), είναι ο κίνδυνος να αλλάξει η αξία ενός χαρτοφυλακίου λόγω απροσδόκητων αλλαγών στην πιστωτική ποιότητα των εκδοτών ή των εμπορικών εταίρων. Αυτό συνυπολογίζει και τις ζημιές λόγω χρεοκοπίας και τις ζημιές που προκαλούνται από αλλαγές στην πιστωτική ποιότητα όπως, υποβάθμιση του αντισυμβαλλόμενου στο εσωτερικό ή εξωτερικό σύστημα αξιολόγησης.

Ο πιστωτικός κίνδυνος χωρίζεται στις παρακάτω υποκατηγορίες :

Κίνδυνος αθέτησης (default risk) όπου αφορά την αβεβαιότητα σχετικά με την ικανότητα αποπληρωμής ολόκληρου του ποσού μιας οικονομικής υποχρέωσης.

Κίνδυνος υποβάθμισης (downgrade risk) όπου αφορά την αβεβαιότητα σχετικά με ενδεχόμενη υποβάθμιση της πιστοληπτικής ικανότητας μιας οντότητας από τους οίκους αξιολόγησης.

Κίνδυνος πιστωτικού περιθωρίου (credit spread risk) αφορά την αβεβαιότητα στην απόδοση ενός ομολόγου με κίνδυνο. Η αύξηση της απόδοσης σχετίζεται με την αύξηση του κινδύνου αθέτησης του ομολόγου.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι ο πιστωτικός κίνδυνος είναι παρών σε κάθε οικονομική συναλλαγή.

Ο πιστωτικός κίνδυνος είναι ένας μετρήσιμος ως ένα βαθμό κίνδυνος. Για να μπορέσει να μετρηθεί, έχουν αναπτυχθεί τα παρακάτω είδη ποσοτικών μοντέλων. Τα κυριότερα είδη μοντέλων μέτρησης πιστωτικού κινδύνου είναι δύο :

Τα **Δομικά Μοντέλα (Structural Models)** όπου ως μεταβλητές των μοντέλων είναι ουσιαστικά η οικονομική διάρθρωση μιας εταιρίας δηλαδή το Ενεργητικό και το Παθητικό και πιο συγκεκριμένα, τα περιουσιακά της στοιχεία και οι υποχρεώσεις της. Σύμφωνα με αυτή τη προσέγγιση το πιστωτικό γεγονός εμφανίζεται μόλις οι υποχρεώσεις της εταιρίας υπερβούν το ενεργητικό της, ή πιο γενικά μόλις η τιμή μιας κατάλληλης στοχαστικής διαδικασίας πέσει κάτω από ένα κατώφλι. Σε αυτή την περίπτωση μια εταιρική υποχρέωση μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένα συμβόλαιο δικαιώματος προαίρεσης (option) επί των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης.

Τα **Μοντέλα Μειωμένης Μορφής (Reduced Form Models)** τα οποία βασίζονται σε μια τυχαία μεταβλητή τ που εκφράζει το χρόνο εμφάνισης του πιστωτικού γεγονότος χωρίς να αναφέρεται ο μηχανισμός που καθορίζει αυτό το χρόνο.

1.3 Χρήσιμοι Ορισμοί

Με σκοπό τη καλύτερη κατανόηση της παρούσας διπλωματικής θα πρέπει να αναφερθούν και να εξηγηθούν κάποιες βασικές έννοιες που θα χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση των δομικών μοντέλων.

Στοχαστική Διαδικασία

Μια στοχαστική διαδικασία $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ είναι ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών που ορίζονται σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και εξαρτώνται από το χρόνο t.

Οι συναρτήσεις $t \to X_t(\omega)$ που συνδέονται με τα αποτελέσματα ονομάζονται τυχαία μονοπάτια δείγματος στο χρόνο t. Μια στοχαστική διαδικασία ή αλλιώς μια στοχαστική ανέλιξη είναι μια τυχαία συνάρτηση που έχει ως πραγματοποιήσεις τα τυχαία μονοπάτια δείγματος.

<u>**Κίνηση Brown**</u>

Η κίνηση Brown είναι μια από τις σημαντικότερες στοχαστικές διαδικασίες στα χρηματοοικονομικά. Είναι ένας τύπος Μαρκοβιανής ανέλιξης, δανεισμένος από τη φυσική, που π.χ. περιγράφει την κίνηση των μορίων σε ένα υγρό ή αέριο, όταν υποβάλλονται σε μεγάλο αριθμό κρούσεων. Κυρίως χρησιμοποιείται για να περιγράψει τη κίνηση των αποδόσεων των μετοχών στο χρόνο αλλά αποτελεί και βάση για τη δημιουργία άλλων διαδικασιών. Μια κίνηση Brown συχνά συμβολίζεται με το γράμμα W, καθώς είναι επίσης γνωστή από τη διαδικασία Wiener.

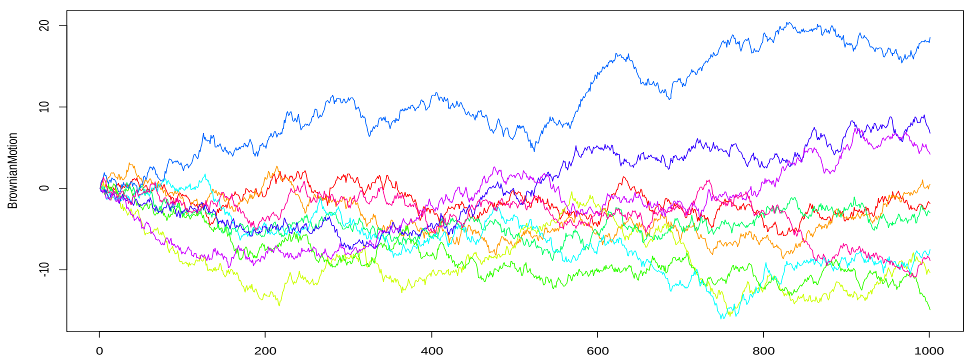
Μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t \geq 0\}$ είναι κίνηση Brown (ή διαδικασία Wiener) εάν ισχύει για κάθε $y \geq 0, t > 0$,

1. η τυχαία μεταβλητή $X_{y+t} - X_y \sim N(t\mu\,, t\sigma^2)$, δηλαδή, κάθε προσάυξηση έχει την ίδια κατανομή για κάθε $y \geq 0$.
2. η τυχαία μεταβλητή $X_{y+t} - X_y$ είναι ανεξάρτητη από τις $X_u, 0 \leq u \leq y$. Αυτό σημαίνει ότι η συμπεριφορά της διαδικασίας X σε ένα χρονικό διάστημα $(y, y+t)$ είναι ανεξάρτητη απο τη συμπεριφορά της X σε οποιονδήποτε άλλο χρονικό διάστημα, ξένο απο το $(y, y+t)$. Άρα ξένα χρονικά διαστήματα θεωρούνται ανεξάρτητα μεταξύ τους ως προς την συμπεριφορά της $\{X_t, t \geq 0\}$.

Οι παράμετροι μ και σ εκφράζουν τη τάση και τη μεταβλητότητα της στοχαστικής διαδικασίας. Ειδικότερα αν η παράμετρος είναι $\mu > 0$ τότε η διαδικασία έχει την τάση να κινείται ανοδικά ενώ αν $\mu < 0$ τότε η διαδικασία έχει καθοδική τάση.

Το παρακάτω σχήμα δείχνει την τυχαία πραγματοποίηση 10 διαδρομών μιας τυπικής κίνηση Brown ($\mu = 0, \sigma = 1$)

Σχήμα 1.1:Κινηση Brown



Παρατηρούμε ότι η κίνηση Brown λαμβάνει και αρνητικές τιμές πράγμα που τη καθιστά ακατάλληλη για τη περιγραφή κίνησης τιμών μετοχών. Επίσης οι προσαυξήσεις είναι ανεξάρτητες της τιμής της. Για αυτό και χρησιμοποιείται η γεωμετρική κίνηση Brown, όπου ο λογάριθμός της είναι κίνηση Brown.

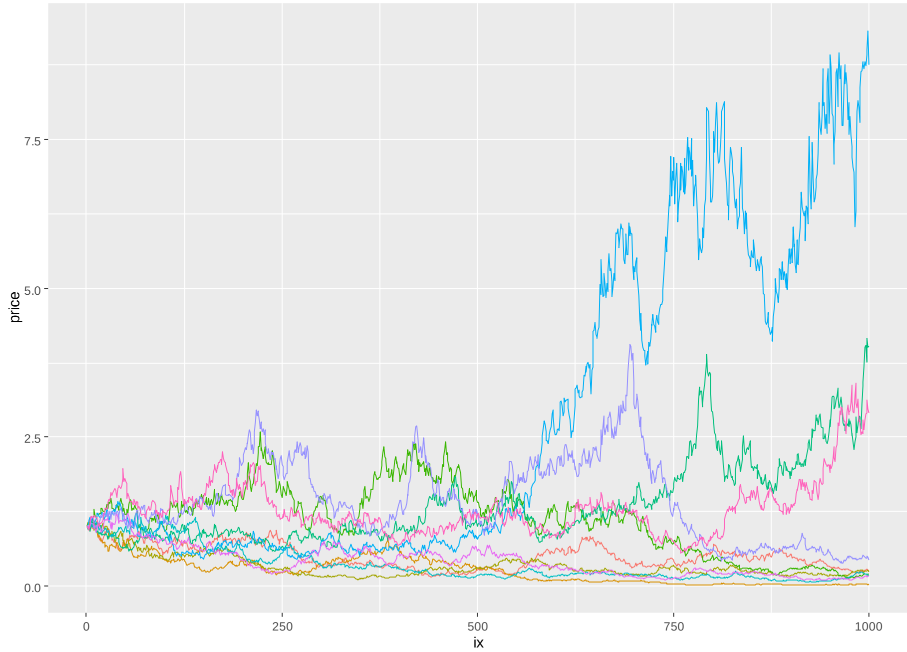
Η γεωμετρική κίνηση Brown, η οποία κατασκευάζεται από μια κανονική κίνηση Brown, είναι μία από τις πιο δημοφιλείς στοχαστικές διαδικασίες στα χρηματοοικονομικά. Για παράδειγμα είναι η βάση του μοντέλου των Black and Scholes (1973) για τη δυναμική των τιμών των μετοχών σε συνεχή χρόνο.

Μια στοχαστική ανέλιξη $S = \{S_t, t \geq 0\}$ της οποίας ο λογάριθμος είναι κίνηση Brown καλείται γεωμετρική κίνηση Brown GBM(μ, σ^2).

Το παραπάνω μεταφράζεται μαθηματικά ως εξής :

Η διαδικασία $S = \{S_t, t \geq 0\}$ που περιγράφει τη κίνηση μιας μετοχής είναι γεωμετρική κίνηση Brown GBM(μ, σ^2), άρα, $S_t = \exp(X_t), t \geq 0$, όπου η $X = \{X_t, t \geq 0\}$ είναι μια BM(μ, σ^2). Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται πως είναι 10 τυχαίες πραγματοποιήσεις μιας Γεωμετρικής Κίνησης Brown.

Σχήμα 1.2 : Γεωμετρική Κίνηση Brown



(*Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για τη κατασκευή του παραπάνω σχήματος όπως και του προηγούμενου σχήματος βρίσκεται στο παράρτημα* B)

Martingale

Μια στοχαστική διαδικασία $X = \{X_t, t \geq 0\}$ είναι ένα $\mathcal{F}_t$ martingale, όπου $\mathcal{F}_t, t \geq 0$ είναι μια διήθηση (αύξουσα ακολουθία σ-αλγεβρών), εάν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

1. Η X είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση $\mathcal{F}_t, t \geq 0$ (δηλ. κάθε X_t είναι $\mathcal{F}_t$ μετρήσιμη τ.μ.)
2. $E[|X_t|] < \infty$ για κάθε t. Δηλαδή η μέση τιμή είναι πεπερασμένη για κάθε t.
3. Για όλα τα s και t έτσι ώστε $s \leq t$, ισχύει η ακόλουθη σχέση:$E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$.

Η πρώτη συνθήκη δηλώνει ότι σε κάθε χρόνο t, μπορούμε να παρατηρήσουμε την τιμή X_t του X. Η τρίτη συνθήκη δηλώνει ότι η αναμενόμενη τιμή του X, δεδομένων των διαθέσιμων πληροφοριών σήμερα, ισούται με την τρέχουσα τιμή του X.

<u>Αυτοχρηματοδοτούμενο Χαρτοφυλάκιο</u>

Είναι ένα δυναμικό χαρτοφυλάκιο όπου σε κάθε χρονική στιγμή που αλλάζει η σύνθεσή του, η αξία του παραμένει ίδια. Αυτό σημαίνει ότι δεν εισέρχεται ούτε εξέρχεται κάποιο χρηματικό ποσό από το χαρτοφυλάκιο σε κάθε χρονικό σημείο που αυτό αλλάζει σύνθεση.

<u>Arbitrage</u>

Είναι μια στρατηγική αγοραπωλησιών με σίγουρο κέρδος και καθόλου κίνδυνο. Μόλις εμφανιστεί ευκαιρία για σίγουρο κέρδος χωρίς κίνδυνο τότε πολλοί επενδυτές θα εκμεταλλευτούν την ευκαιρία με αποτέλεσμα αυτή η ευκαιρία να χαθεί. Δηλαδή, η αγορά θα βρεθεί από μόνη της σε κατάσταση ισορροπίας. Πιο αναλυτικά,

- Αν το arbitrage παρουσιάζεται λόγω της πολύ χαμηλής τιμής ενός τίτλου, τότε θα αυξηθεί η ζήτησή του με αποτέλεσμα να αυξηθεί η τιμή του.
- Αν το arbitrage παρουσιάζεται λόγω της πολύ υψηλής τιμής ενός τίτλου, τότε θα αυξηθεί η προσφορά του με αποτέλεσμα να μειωθεί η τιμή του.

Επομένως, η τιμή του τίτλου θα σταθεροποιηθεί σε μια τιμή ισορροπίας η οποία δε προσφέρεται για arbitrage.

<u>Βασικές υποθέσεις που θεωρούμε ότι ισχύουν σε μια Αγορά</u>

Σύμφωνα με το κλασικό υπόδειγμα των Black και Scholes (1973) θεωρούμε ότι:

1. Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών
2. Υπάρχει μια τιμή για το αγαθό σε κάθε πιθανή κατάσταση του κόσμου
3. Όλοι οι συναλλασσόμενοι έχουν τον ίδιο φορολογικό συντελεστή
4. Τα περιουσιακά στοιχεία μπορούν να λαμβάνουν κλασματικές τιμές
5. Οι επενδυτές ενεργούν ως αποδέκτες τιμών (δηλαδή η διαπραγμάτευση περιουσιακών στοιχείων δεν έχει επίδραση στις τιμές) και έχουν ίση πρόσβαση στις πληροφορίες
6. Η διαπραγμάτευση των περιουσιακών στοιχείων πραγματοποιείται συνεχώς στο χρόνο
7. Δεν υπάρχουν περιορισμοί έναντι ανοικτών πωλήσεων (short selling).

Οι παραπάνω υποθέσεις γίνονται στη βιβλιογραφία για την ουδέτερη ως προς τον κίνδυνο αποτίμηση των παραγώγων, όπως για παράδειγμα από τους Black and Scholes (1973) και Merton (1973).

Αγορά χωρίς arbitrage

Θα υποθέσουμε ότι εργαζόμαστε σε μια αγορά όπου οι ευκαιρίες για σίγουρο κέρδος χωρίς κίνδυνο (arbitrage) δεν είναι δυνατές. Συγκεκριμένα, θα τιμολογήσουμε οποιαδήποτε αξιόγραφο με τέτοιο τρόπο ώστε να μην υπάρχει τέτοια ευκαιρία στην αγορά. Η arbitrage-free προϋπόθεση συνεπάγεται ότι με μηδενικό κεφάλαιο δεν είναι δυνατό να γίνει κανένα σίγουρο κέρδος. Μία αγορά βρίσκεται σε ισορροπία αν δεν υπάρχει ευκαιρία για arbitrage.

Παράγωγα Αξιόγραφα

Τα παράγωγα προϊόντα είναι προθεσμιακές συμβάσεις μεταξύ δύο συμβαλλομένων που διαπραγματεύονται συνεχώς σε οργανωμένη αγορά και μέσω των οποίων μπορούν οι επενδυτές να απεικονίσουν μελλοντικές προσδοκίες για την αξία ενός υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου ή ενός δείκτη. Το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο μπορεί να είναι ένα ομόλογο, μια μετοχή συνάλλαγμα ή και εμπόρευμα.

Τα παράγωγα προϊόντα είναι συμβάσεις μεταξύ δύο συμβαλλομένων όπου ο ένας από τους δυο αναλαμβάνει να αγοράσει μια ποσότητα του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, σε μια καθορισμένη χρονική στιγμή T και σε μια προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής K.

Οι κυριότερες κατηγορίες παραγώγων είναι οι παρακάτω :

- *Προθεσμιακά Συμβόλαια* → απλούστερη μορφή παραγώγου, η οποία συνάπτεται συνήθως μεταξύ δυο ιδρυμάτων και δεν γίνεται η διαπραγμάτευσή του στη χρηματιστηριακή αγορά
- *Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης* → ίδια λογική με τα προθεσμιακά συμβόλαια, με μόνη διαφορά ότι αυτά συναλλάσσονται καθημερινά στο Χρηματιστήριο και άρα έχουν κάποια τυποποιημένα χαρακτηριστικά. Επιπλέον, υπάρχει και η εγγύηση του χρηματιστηρίου για την εκπλήρωση των συμβολαίων
- *Ανταλλαγές* → είναι συμφωνία η οποία αφορά την ανταλλαγή συγκεκριμένων χρηματοροών μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων, που θα εκπληρωθεί σε μια μελλοντική χρονική περίοδο
- *Δικαιώματα Προαίρεσης* → πρόκειται για μια συμφωνία μεταξύ δύο συμβαλλομένων του holder και του writer όπου με βάση το συμβόλαιο αυτό ο holder έχει το δικαίωμα

αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει (ή να πουλήσει, ανάλογα το συμβόλαιο) στον writer :

- Μια συγκεκριμένη ποσότητα ενός αγαθού
- Σε μια καθορισμένη ημερομηνία T στο μέλλον
- Σε μία προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής K

Τα δικαιώματα προαίρεσης διακρίνονται οι παρακάτω κατηγορίες :

- Δικαίωμα Αγοράς (call option)
- Δικαίωμα Πώλησης (put option)

Ένας αγοραστής ενός δικαιώματος (holder) δεν είναι υποχρεωμένος να εξασκήσει το δικαίωμά του, αλλά μόνο εάν τον συμφέρει.

Ένας πωλητής του δικαιώματος (writer) είναι υποχρεωμένος να πράξει ό,τι τελικά αποφασίσει ο αγοραστής του δικαιώματος.

Συνεπάγεται ότι, επειδή ο αγοραστής είναι σε πλεονεκτική θέση σε σχέση με το πωλητή, είναι υποχρεωμένος να καταβάλλει ένα αντίτιμο C, στο πωλητή για να αποκτήσει το δικαίωμα.

Για παράδειγμα, ένας επενδυτής καταβάλλει ποσό C και αγοράζει ένα δικαίωμα αγοράς. Αποκτά, το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να αγοράσει από τον πωλητή μετά από κάποιο χρονικό διάστημα T το υποκείμενο αγαθό στη συμφωνημένη τιμή K.

- Αν $S_T > K$ τότε ο holder θα εξασκήσει το δικαίωμα με κέρδος $S_T - K$
- Αν $S_T \leq K$ τότε ο holder δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα με κέρδος 0

Το κέρδος του επενδυτή γενικά είναι

$$(S_T - K)_+ = \max\{S_T - K, 0\} = \begin{cases} S_T - K, & S_T > K \\ 0, & S_T \leq K \end{cases}$$

Λήμμα Ito

Το λήμμα του Ito είναι σημαντικό αποτέλεσμα γιατί βοηθάει στη μοντελοποίηση που αφορά τις αλλαγές στις κινήσεις των τιμών των μετοχών οι οποίες ακολουθούν Γεωμετρική Κίνηση Brown, και με τη κλασσική ανάλυση δεν είναι εφικτή η μοντελοποιησή τους.

Αρχικά θα παρουσιάσουμε σύντομα και χωρίς την μέγιστη μαθηματική αυστηρότητα την έννοια του στοχαστικού ολοκληρώματος του Ito. Στόχος είναι να οριστεί ένα ολοκλήρωμα τέτοιο ώστε για h μικρό

$$\int_0^t \Delta_x dS_x \approx \sum_{i=1}^{[t/h]} \Delta_{(i-1)h}\big(S_{ih} - S_{(i-1)h}\big)$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι δεν μπορούμε να το γράψουμε ως ολοκλήρωμα Riemann – Stieltjes αφού οι διαδρομές της στοχαστικής ανέλιξης S δεν είναι φραγμένης κύμανσης. Όμως επειδή είναι τεχνικά δύσκολο να ορίσουμε ένα τέτοιο ολοκλήρωμα για οποιαδήποτε στοχαστική ανέλιξη S, θα θεωρήσουμε αρχικά στη θέση της S την στοχαστική διαδικασία $W \sim BM(0,1)$ η οποία ακολουθεί κίνηση Brown με τάση 0 και μεταβλητότητα 1.

Θα εργαστούμε σε ένα χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ εφοδιασμένο με μία διήθηση $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, και έστω

$$W = \{W_t,\ t \geq 0\} \text{ μία } \mathcal{F}_t - BM(0,1).$$

Έστω επίσης μία στοχαστική ανέλιξη $\{\delta_t, t \in [0,T]\}$, προσαρμοσμένη στην $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, δηλαδή, $E\left(\int_0^t \delta_x^2 dx\right) < \infty$ για κάθε $t \in [0,T]$. Θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^t \delta_x dW_x$ αρχικά για $\{\delta_t, t \in [0,T]\}$ απλή συνάρτηση. Μια στοχαστική διαδικασία είναι απλή ως προς μια διαμέριση $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ του $[0,T]$ όταν:

I. Είναι $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,1]\}$
II. Είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη
III. Είναι σταθερή σε κάθε χρονικό διάστημα $[t_{i-1}, t_i)$

Ορίζουμε ως στοχαστικό ολοκλήρωμα $It\hat{o}$ μιας απλής $\{\delta_t, t \in [0,T]\}$ ως προς $\{W_t,\ t \in [0,T]\}$ στο διάστημα $[0,t]$, τη τυχαία μεταβλητή,

$$I_t = \int_0^t \delta_x dW_x := \sum_{i=0}^{k-1} \delta_{t_i}\big(W_{t_{i-1}} - W_{t_i}\big) + \delta_{t_k}\big(W_t - W_{t_k}\big)$$

όπου k τέτοιο ώστε $t_k < t \leq t_{k+1}$.

Η οικογένεια $\{I_t, t \in [0,t]\}$ είναι μια στοχαστική ανέλιξη η οποία παρουσιάζει συνεχείς διαδρομές το οποίο προκύπτει απ' το ότι η κίνηση Brown παρουσιάζει συνεχείς διαδρομές.

Τα παραπάνω επεκτείνονται και για μη απλές ανελίξεις δ. Δηλαδή, εξακολουθούμε να θεωρούμε στοχαστικές ανελίξεις $\delta = \{\delta_t, t \in [0,T]\}$ προσαρμοσμένες στην $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ οι οποίες είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες. Αποδεικνύεται ότι για κάθε στοχαστική ανέλιξη δ υπάρχει μια ακολουθία από απλές συναρτήσεις $\delta^{(j)} = \{\delta_t^j, t \in [0,T]\}$, $j = 1,2 \dots$ οι οποίες συγκλίνουν στη δ.

Το στοχαστικό ολοκλήρωμα $It\hat{o}$ της $\delta = \{\delta_t, t \in [0,T]\}$ ως προς τη $\{W_t,\ t \in [0,T]\}$ στο διάστημα $[0,t], t \leq T$, ορίζουμε τη τυχαία μεταβλητή

$$\int_0^t \delta_x dW_x = \lim_{j \to \infty} \int_0^t \delta_x^{(j)} dW_x$$

όπου $\delta^{(j)} = \{\delta_t^j, t \in [0,T]\}, j = 1,2, \dots$ είναι μια ακολουθία απλών στοχαστικών ανελίξεων που συγκλίνουν στη δ. Οι κανόνες της κλασσικής ολοκλήρωσης δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογίστεί το ολοκλήρωμα $It\hat{o}$.

Στη κλασσική ανάλυση ισχύει ο κανόνας της αλυσίδας για παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g

$$\frac{d}{dt} f\big(g(t)\big) = f'\big(g(t)\big)g'(t) \text{ ή } d\Big(f\big(g(t)\big)\Big) = f'\big(g(t)\big)dg(t)$$

Η παραπάνω γράφεται σε ολοκληρωτική μορφή

$$f\big(g(t)\big) - f\big(g(0)\big) = \int_0^t f'\big(g(x)\big)dg(x)$$

Εάν ίσχυε ο παραπάνω τύπος και για τα ολοκληρώματα $It\hat{o}$ θα έπρεπε :

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_x)dW_x, \text{ δηλαδή } d\big(f(W_t)\big) = f'(W_t)dW_t$$

Όμως δεν ισχύει και αυτό οφείλεται στο ότι θα πρέπει να προστεθεί και ένας επιπλέον όρος που οφείλεται στη μη μηδενική τετραγωνική κύμανση της κίνησης Brown. Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω καταλήγουμε στο *Λήμμα του Ito*, το οποίο παρουσιάζεται παρακάτω:

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία έχει συνεχή πρώτη f' και δεύτερη f'' παράγωγο και $W \sim BM(0,1)$. Για κάθε $t \geq 0$ ισχύει ότι

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_x)dW_x + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_x)dx$$

Ή ισοδύναμα σε διαφορική μορφή

$$d\big(f(W_t)\big) = f'(W_t)dW_t + \frac{1}{2}f''(W_t)dt$$

Ένα σχέδιο απόδειξης του παραπάνω τύπου είναι το παρακάτω. Από το Θεώρημα Taylor ισχύει ότι

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \varepsilon \text{ για κάθε } x$$

όπου ε είναι ένα υπόλοιπο της τάξης $(x - x_0)^3$. Αν τώρα στο ανάπτυγμα Taylor θέσουμε $x = W_{t+h}, x_0 = W_t$ τότε

$$f(W_{t+h}) - f(W_t) = f'(W_t)(W_{t+h} - W_t) + \frac{1}{2}f''(W_t)(W_{t+h} - W_t)^2 + \varepsilon$$

θεωρώντας ότι $h \to 0$ γράφεται

$$d\big((W_t)\big) = f'(W_t)dW_t + \frac{f''(W_t)}{2}(dW_t)^2 = f'(W_t)dW_t + \frac{f''(W_t)}{2}dt$$

διότι $(dW_t)^2 = dt$ αφού αποδεικνύεται ότι $\int_0^t (dW_t)^2 = t$.

Το ολοκλήρωμα του Ito και το παραπάνω λήμμα επεκτείνεται για στοχαστικές διαδικασίες που έχουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και καλούνται ανελίξεις Ito (σε αυτές περιλαμβάνεται και η γεωμετρική κίνηση Brown S). Συγκεκριμένα, αν για μια στοχαστική διαδικασία Y ισχύει ότι $dY_x = H_x dW_x + G_x dx$ (όπου H, G στοχαστικές διαδικασίες προσαρμοσμένες στην διήθηση του χώρου) τότε

$$d\big(f(x, Y_x)\big) = f^{(0,1)}(x, Y_x)dY_x + f^{(1,0)}(x, Y_x)dx + \frac{1}{2}f^{(0,2)}(x, Y_x)(dY_x)^2$$

όπου $(dY_x)^2 = (H_x dW_x + G_x dx)^2 = H_x^2 dx$ και $f(t, x): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους $2^{ης}$ τάξης.

Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με το Λήμμα του Ito και τις γενικεύσεις του μπορεί κανείς να ανατρέξει στις πανεπιστημιακές σημειώσεις του Μπούτσικα (2019) καθώς και το βιβλίο του Thierry Roncalli (2020)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ ΜΕΡΤΟΝ

2.1 Εισαγωγή

Τα βασικά στοιχεία που θα αναφερθούν σε αυτό το κεφάλαιο βασίζονται στο βιβλίο των McNeil, Frey and Embrechts(2005). Το μοντέλο του Merton, το οποίο δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά το 1974, οδηγεί στην πιθανότητα αθέτησης των υποχρεώσεων μιας επιχείρησης σε κάποια χρονική στιγμή στο μέλλον. Η βάση του μοντέλου είναι η θεωρία της τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης που αναπτύχθηκε από τους Black & Scholes το 1973. Οι μεταβλητές του μοντέλου είναι ουσιαστικά ένας απλοποιημένος Ισολογισμός της εταιρίας ο οποίος αποτελείται από το Ενεργητικό και το Παθητικό της. Στο Παθητικό, ανήκει το Μετοχικό Κεφάλαιο, και ένα Ομόλογο μηδενικού κουπονιού με ονομαστική αξία D και χρόνο λήξης T. Σε αυτό το ομόλογο αντικατοπτρίζονται οι υποχρεώσεις της εταιρίας, ενώ στο Ενεργητικό αντικατοπτρίζονται τα περιουσιακά της στοιχεία. Πρέπει να σημειωθεί ότι ισχύει η λογιστική εξίσωση ότι το Ενεργητικό θα πρέπει να είναι ίσο με το Παθητικό. Για να υπολογιστεί η πιθανότητα αθέτησης της επιχείρησης το μοντέλο θεωρεί ότι η αξία της μετοχής της, ή αλλιώς η αξία του μετοχικού κεφαλαίου της επιχείρησης μπορεί να θεωρηθεί ως ένα call option επί των στοιχείων ενεργητικού της επιχείρησης με τιμή εξάσκησης την ονομαστική αξία του ομολόγου D, και χρησιμοποιεί το μοντέλο των Black & Scholes για να υπολογίσει τη τιμή του δικαιώματος. Αξίζει να σημειωθεί ότι ανήκει στα δομικά μοντέλα γιατί παρέχει μια σχέση μεταξύ του κινδύνου αθέτησης και της δομής του ενεργητικού (κεφαλαίου) της επιχείρησης.

2.2 Υποθέσεις μοντέλου Merton

Η παρουσίαση του μοντέλου θα πρέπει να ξεκινήσει από τη περιγραφή των υποθέσεων κάτω από τις οποίες το μοντέλο του Merton έχει εφαρμογή για τον υπολογισμό της πιθανότητας αθέτησης. Περισσότερες πληροφορίες για τις υποθέσεις του μοντέλου μπορεί κανείς να δει στο σύγγραμμα του Merton (1974)

<u>Υποθέσεις</u>

1. Ισχύουν οι βασικές υποθέσεις που αναφέρθηκαν στο 1$^{\text{ο}}$ Κεφάλαιο. Δηλαδή, δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών, κόστη χρεοκοπίας και φόροι, ενώ ο δανεισμός γίνεται με το ίδιο σταθερό επιτόκιο.
2. Το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο είναι σταθερό και γνωστό
3. Το Ενεργητικό της εταιρίας (περιουσιακά στοιχεία), $V_t, t \geq 0,$ ακολουθεί τη Γεωμετρική Κίνηση Brown. Συγκεκριμένα ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\frac{dV_t}{V_t} = \mu_V dt + \sigma_V dW_t$$

από όπου αποδεικνύεται ότι

$$V_t = V_0 e^{\left(\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)t + \sigma_V W_t}, t \geq 0,$$

όπου

μ_V είναι η αναμενόμενη απόδοση του Ενεργητικού της εταιρίας

σ_V είναι η μεταβλητότητα των στοιχείων της εταιρίας

$W_t, t \geq 0$ είναι μία τυπική κίνηση Brown

4. Δεν υπάρχει περιθώριο κέρδους χωρίς κίνδυνο (no arbitrage) στην αγορά.

2.3 Περιγραφή μοντέλου

Το μοντέλο θεωρεί ότι η υπό μελέτη εταιρία έχει μόνο την εξής υποχρέωση : την αποπληρωμή ενός ομόλογου (δανείου) ονομαστικής αξίας D με χρόνο λήξης T.

Επειδή είναι δύσκολο να καταγραφεί στη διάρκεια του χρόνου το Ενεργητικό V_t της εταιρίας (ίδια κεφάλαια, τα οποία δεν είναι γνωστά στο ευρύ κοινό) θεωρείται ότι αυτό μπορεί να προκύψει έμμεσα από την χρηματιστηριακή της αξία, S_t και τις υποχρεώσεις της D. Στη συνέχεια θα οδηγηθούμε σε μια εξίσωση που περιλαμβάνει αυτές τις τρείς ποσότητες (S_t, V_t, D). Ως συνέπεια, μπορεί να εκτιμηθεί έμμεσα το Ενεργητικό της εταιρίας από την χρηματιστηριακή της αξία (τεκμαρτή τιμή ενεργητικού).

Στο χρόνο $t = T$, δηλαδή στη λήξη του ομολόγου, διακρίνονται οι παρακάτω 2 περιπτώσεις :

a) $V_T \geq D$: η αγοραία αξία του Ενεργητικού υπερβαίνει τις υποχρεώσεις/αξία δανεισμού. Σε αυτή τη περίπτωση οι κάτοχοι του ομολόγου λαμβάνουν D, ενώ το εναπομείναν ενεργητικό μπορεί να θεωρηθεί ότι εμμέσως εκφράζει την χρηματιστηριακή αξία της εταιρίας $S_T = V_T - D$, και δεν υπάρχει πιστωτικό γεγονός.

b) $V_T < D$: η αγοραία αξία του Ενεργητικού είναι μικρότερη από την αξία των Υποχρεώσεων, που σημαίνει ότι η εταιρία αδυνατεί να αποπληρώσει τις υποχρεώσεις της και άρα θεωρητικά χρεοκοπεί (πτώχευση). Σε αυτή τη περίπτωση οι κάτοχοι των ομολόγων λαμβάνουν ολόκληρη την αξία του Ενεργητικού (ρευστοποιημένη), δηλαδή, V_T και οι κάτοχοι των μετοχών της εταιρίας δεν λαμβάνουν τίποτα, δηλαδή η χρηματιστηριακή αξία γίνεται 0 ($S_T = 0$).

Αναλυτικά, οι χρηματοροές που δημιουργούνται είναι οι παρακάτω :

$S_T = \max(V_T - D, 0) = (V_T - D)_+$

$B_T = \min(V_T, D) = D - (D - V_T)_+$ όπου $V_T = S_T + B_T$.

Δηλαδή η χρηματιστηριακή αξία της εταιρίας στον χρόνο T, είναι ίση με το ενεργητικό μείον τις υποχρεώσεις.

Από τις παραπάνω εξισώσεις (και ιδιαίτερα την $S_T = (V_T - D)_+$), στο μοντέλο του Merton, προκύπτει άμεσα ότι η χρηματιστηριακή αξία E_T μιας εταιρίας στο χρόνο T είναι ουσιαστικά ίση με την αξία ενός Ευρωπαϊκού Δικαιώματος αγοράς με υποκείμενο προϊόν το Ενεργητικό της εταιρίας, με τιμή εξάσκησης και λήξη, την ονομαστική αξία των δανειακών υποχρεώσεων και την ημερομηνία πληρωμής τους, αντίστοιχα. Πιο περιγραφικά, στη περίπτωση που η αγοραία αξία του Ενεργητικού της εταιρίας ξεπεράσει την αξία του δανεισμού της οι μέτοχοι θα εξασκήσουν το δικαίωμά τους να επαναγοράσουν τις μετοχές της εταιρίας, εξοφλώντας ταυτόχρονα και την αξία δανεισμού της εταιρίας. Ενώ, στην αντίθετη περίπτωση, δε θα εξασκηθεί το δικαίωμα αγοράς και η εταιρία θα πτωχεύσει. Επομένως, η πιθανότητα πτώχευσης μέχρι τη λήξη του δανείου είναι ίση με τη πιθανότητα να μην εξασκηθεί το παραπάνω δικαίωμα αγοράς στη λήξη του. Ο υπολογισμός της χρηματιστηριακής αξίας αυτής της εταιρίας μπορεί να γίνει συνεκτιμώντας την ονομαστική αξία και τη λήξη των δανειακών κεφαλαίων, την τρέχουσα αξία του ενεργητικού σήμερα και την διακύμανση της τρέχουσας αξίας του ενεργητικού, εφαρμόζοντας το υπόδειγμα αποτίμησης των Black-Scholes.

Το γεγονός ότι η χρηματιστηριακή αξία μιας εταιρίας μπορεί να παρομοιαστεί με ένα Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Αγοράς με υποκείμενο αγαθό την αξία του Ενεργητικού της εταιρίας έχει ως αποτέλεσμα ότι η αξία της χρηματιστηριακής αξίας της εταιρίας, E_t, είναι συνάρτηση του Ενεργητικού της εταιρίας και του χρόνου t, $S_t = S_t(V_t, t)$.

Αρχικός στόχος είναι να βρεθεί αναλυτικός τύπος που εκφράζει την παραπάνω χρηματιστηριακή αξία και την αξία των υποχρεώσεων της εταιρίας θεωρώντας ότι τα στοιχεία του Ενεργητικού της ακολουθούν μια Γεωμετρική Κίνηση Brown.

Θα πρέπει πρώτα να βρεθεί η no-arbitrage αξία του δικαιώματος αγοράς με υποκείμενο αγαθό το Ενεργητικό της εταιρίας. Για αυτό το σκοπό θα χρειαστεί η θεωρία τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης των Black & Scholes. Η τιμή του δικαιώματος βρίσκεται υπό το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου (Q).

Χρησιμοποιούνται λοιπόν οι ακόλουθοι συμβολισμοί:

- E_t είναι η χρηματιστηριακή αξία της εταιρίας (αξία δικαιώματος) στο χρόνο t
- V_t είναι η αξία των περιουσιακών της στοιχείων (υποκείμενο αγαθό) στο χρόνο t
- D είναι η ονομαστική αξία ενός ομολόγου με μηδενικό κουπόνι (προκαθορισμένη τιμή εξάσκησης)

Σύμφωνα με το μοντέλο Black and Scholes, η δίκαιη (no-arbitrage) αξία του παραπάνω δικαιώματος αγοράς, θα είναι ίση με (risk neutral pricing formula)

$$S_t = e^{-r(T-t)} E_Q((V_T - D)_+ | V_t), \qquad t \in [0, T].$$

όπου r είναι το επιτόκιο των ομολόγων χωρίς κίνδυνο της αγοράς. Συνεπώς η χρηματιστηριακή αξία σε χρόνο $t \leq T$ μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ίση με την παρούσα αξία της αναμενόμενης χρηματιστηριακής αξίας της στο χρόνο T (χρόνο αποπληρωμής του δανείου), λαμβάνοντας υπόψη ότι βρισκόμαστε σε μια αγορά που είναι σε κατάσταση ισορροπίας (no-arbitrage).

Ο παραπάνω τύπος (που είναι γνωστός και ως τύπος των Black and Scholes) μπορεί εύκολα να υπολογιστεί αναλυτικά και είναι ίσος με

$$S_t = V_t \Phi(d_1) - D\, e^{-r(T\,-\,t)} \Phi(d_2)$$

όπου

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{D}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)T}{\sigma_V \sqrt{T}} \qquad \text{και} \quad d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{T}$$

- Φ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής $N(0,1)$
- σ_V είναι η μεταβλητότητα της τιμής των περιουσιακών στοιχείων
- r το επιτόκιο των ομολόγων της αγοράς

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, ισχύει η λογιστική εξίσωση, $D_t = V_t - S_t$, και άρα μπορεί να βρεθεί και η τιμή του χρέους τη στιγμή t,

$$\begin{aligned} B_t &= V_t - S_t = V_t - V_t \Phi(d_1) + De^{-r(T\,-\,t)} \Phi(d_2) \\ &= V_t\big(1 - \Phi(d_1)\big) + De^{-r(T\,-\,t)} \Phi(d_2) \\ &= V_t \Phi(-d_1) + De^{-r(T\,-\,t)} \Phi(d_2) \end{aligned}$$

Επίσης, η αξία του χρέους B_t μπορεί να θεωρηθεί ως η τιμή ενός ομολόγου χωρίς κίνδυνο μείον την τιμή ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης, τότε βρίσκουμε ότι η αξία του χρέους δίνεται επίσης από

$$\begin{aligned} B_t &= De^{-r(T-t)} \; - \; P_t(V_t, D, T - t) \\ &= De^{-r(T-t)} - \left(De^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - V_t \Phi(-d_1)\right) \\ &= V_t \Phi(-d_1) + D\, e^{-r(T\,-\,t)} \Phi(d_2) \end{aligned}$$

όπου P_t είναι η τιμή ενός BS European put option, με υποκείμενο τίτλο την αξία της εταιρίας.

Στις παραπάνω εξισώσεις υπάρχουν δύο άγνωστοι οι οποίοι θα πρέπει να εκτιμηθούν, για να υπολογιστεί η πιθανότητα αθέτησης της εταιρίας. Αυτοί είναι : η μεταβλητότητα της αξίας των περιουσιακών στοιχείων της εταιρίας σ_V και η αξία των περιουσιακών στοιχείων V_t.

2.4 Εκτίμηση Αξίας και μεταβλητότητας Ενεργητικού

Για την εκτίμηση της αξίας του Ενεργητικού V_t και της μεταβλητότητας σ_V μιας εταιρίας στο μοντέλο του Merton χρησιμοποιούμε τις παρακάτω εξισώσεις.

Η πρώτη εξίσωση είναι από το γνωστό τύπο των Black and Scholes ισχύει ότι :

$$S_t = V_t \Phi(d_1) - De^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

Όπως ήδη αναφέρθηκε παραπάνω, για τον υπολογισμό της πιθανότητας αθέτησης της εταιρείας χρειάζεται να γνωρίζουμε τις ποσότητες σ_V, V_t. Από την αγορά όμως μπορούμε να γνωρίζουμε μόνο την S_t και μπορούμε επίσης να εκτιμήσουμε την μεταβλητότητά της, έστω σ_S. Άρα θα πρέπει με κάποιο τρόπο να βρούμε τις άγνωστες ποσότητες σ_V, V_t από τις σ_S, S_t. Έχουμε υποθέσει ότι η αξία των περιουσιακών στοιχείων V_t ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown με τάση μ_V και διακύμανση σ_V ($V_t \sim GBM(\mu_V, \sigma_V^2)$). Από το λήμμα του Ito θα ισχύει ότι:

$$dS_t = \frac{\partial S_t}{\partial V_t} dV_t + \frac{\partial S_t}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_t}{\partial^2 V_t}(dV_t)^2$$

και επειδή, $(dV_t)^2 = (V_t\mu_V dt + V_t\sigma_V dW_t)^2 = (V_t\sigma_V)^2(dW_t)^2 = (V_t\sigma_V)^2 dt$ θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} dS_t &= \frac{\partial S_t}{\partial V_t} dV_t + \frac{\partial S_t}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_t}{\partial^2 V_t}(V_t\sigma_V)^2 dt \\ &= \frac{\partial S_t}{\partial V_t}(V_t\mu_V dt + V_t\sigma_V dW_t) + \left(\frac{\partial S_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_t}{\partial^2 V_t}(V_t\sigma_V)^2\right) dt \\ &= \frac{\partial S_t}{\partial V_t} V_t\sigma_V dW_t + \left(\frac{\partial S_t}{\partial V_t} V_t\mu_V + \frac{\partial S_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_t}{\partial^2 V_t}(V_t\sigma_V)^2\right) dt \end{aligned}$$

και άρα, η στοχαστική διαδικασία S θα ικανοποιεί μια SDE(στοχαστική διαφορική εξίσωση) της μορφής

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_S(t, V_t)dt + \sigma_S(t, V_t)dW_t$$

όπου

$$\mu_S(t, V_t) = \frac{\partial S_t}{\partial V_t} V_t\mu_V + \frac{\partial S_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_t}{\partial^2 V_t}(V_t\sigma_V)^2, \qquad \sigma_S(t, V_t) = \frac{1}{S_t}\frac{\partial S_t}{\partial V_t} V_t\sigma_V,$$

ανάλογη με αυτήν που ικανοποιεί η V: $\frac{dV_t}{V_t} = \mu_V dt + \sigma_V dW_t$, μόνο που τώρα οι συντελεστές των dt, dW_t δεν είναι σταθεροί. Μάλιστα, ο συντελεστής $\sigma_S(t, V_t)$ του dW_t θα εκφράζει την μεταβλητότητα σ_S που είναι εκτιμήσιμη από την αγορά. Είναι τέλος γνωστό ότι ο συντελεστής Δέλτα, $\frac{\partial S_t}{\partial V_t}$, είναι ίσος με $\Phi(d_1)$ οπότε

$$\sigma_S = \sigma_S(t, V_t) = \frac{1}{S_t}\Phi(d_1)V_t\sigma_V.$$

Άρα προκύπτει ένα σύστημα δύο μη γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους απ όπου μπορούμε να βρούμε μια λύση. Το σύστημα το οποίο πρέπει να λυθεί (ως προς V_t, σ_V) είναι το παρακάτω:

$$\begin{cases} S_t = V_t\Phi(d_1) - De^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \qquad d_1 = \dfrac{\ln\left(\frac{V_t}{D}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)T}{\sigma_V\sqrt{T}}, d_2 = d_1 - \sigma_V\sqrt{T} \\ \sigma_S = \dfrac{\Phi(d_1)V_t\sigma_V}{S_t} \end{cases}$$

Για να λυθεί το παραπάνω σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων οι τρόποι είναι πολλοί και γνωστοί. Ένας τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο των Newton-Raphson ή τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Στη παρούσα εργασία, σε επόμενο κεφάλαιο, θα παρουσιαστεί μόνο η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων.

2.5 Υπολογισμός της Πιθανότητας Αθέτησης

Αφού έχουν εκτιμηθεί όλοι οι άγνωστοι μπορεί να υπολογιστεί η **πιθανότητα αθέτησης**. Η εταιρία θα αθετήσει τις υποχρεώσεις της όταν η αξία του Ενεργητικού είναι χαμηλότερη από την αξία των υποχρεώσεων. Άρα θα πρέπει υπολογιστεί πιθανότητα η πιθανότητα του Ενεργητικού είναι χαμηλότερη από τις Υποχρεώσεις:

$$P\ (V_T \leq D)\ =\ \Phi\left(\frac{\ln \mathrm{D} - \ln\ V_t - (\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T-t)}{\sigma_V\sqrt{T-t}}\right)$$
$$=\ \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{D}{V_t}\right) - (\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T-t)}{\sigma_V\sqrt{T-t}}\right)$$

Η ποσότητα

$$-\frac{\ln\left(\frac{D}{V_t}\right) - \left(\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)(T-t)}{\sigma_V\sqrt{T-t}}.$$

ονομάζεται απόσταση από την αθέτηση ή distance to default DD.

2.6 Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα Μοντέλου

Το κυριότερο πλεονέκτημα του μοντέλου Merton (1974) είναι η ευκολία εφαρμογής του. Έτσι, το μοντέλο Merton επιτρέπει μια αποτελεσματική προσέγγιση για την αξιολόγηση του πιστωτικού κινδύνου μιας εταιρίας και τον υπολογισμό της αξίας των ιδίων κεφαλαίων και του χρέους της.

Το μοντέλο αποτελεί ένα γενικό μοντέλο πιστωτικού κινδύνου αφού θεωρεί πως η αθέτηση των υποχρεώσεων μιας εταιρείας συνεπάγεται αυτόματα και τη πτώχευσή της, γεγονός που δε συμβαίνει στο πραγματικό κόσμο, και έχει αρκετούς περιορισμούς.

- Αρχικά, το μοντέλο αναγνωρίζει μόνο την αθέτηση υποχρεώσεων κατά τη λήξη του χρέους. Η συμπεριφορά των αξιών του ενεργητικού της εταιρίας πριν τη λήξη δεν λαμβάνεται υπόψη στην εκτίμηση του πιστωτικού κινδύνου της. Δηλαδή, εάν η αξία του Ενεργητικού της εταιρίας πέσει κάτω από το επίπεδο του χρέους πριν από τη λήξη του, το μοντέλο αδυνατεί να γνωρίζει αν η εταιρία είναι σε θέση να το αποπληρώσει.

- Δεύτερον, η διάρθρωση του χρέους της εταιρείας αντιμετωπίζεται ως απλό ομόλογο μηδενικού τοκομεριδίου του οποίου η αξία είναι σταθερή στο χρόνο. Ενώ στη πραγματικότητα η κεφαλαιακή διάρθρωση μιας εταιρίας είναι πολύ πιο περίπλοκη από ό,τι υποτίθεται στο μοντέλο Merton.

- Υπόθεση αγοράς χωρίς τριβές: Οι συναλλαγές γενικά συνοδεύονται από κόστος συναλλαγής, όπως αμοιβές μεσιτείας, προμήθειες κ.λπ. Ωστόσο, το μοντέλο Black Scholes Merton υποθέτει μια αγορά χωρίς τριβές, πράγμα που σημαίνει ότι δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγής. Δεν είναι σχεδόν ποτέ αυτή η πραγματικότητα στην αγορά συναλλαγών.

- Το μοντέλο του Merton υποθέτει ότι δεν υπάρχουν αποδόσεις που να σχετίζονται με τα δικαιώματα προαίρεσης μετοχών. Δεν υπάρχουν μερίσματα και τόκοι. Ωστόσο, αυτό δεν συμβαίνει στην πραγματική αγορά συναλλαγών. Η αγορά και η πώληση των δικαιωμάτων προαίρεσης επικεντρώνονται κυρίως στις αποδόσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ KMV

3.1 Εισαγωγή

Το μοντέλο που θα παρουσιαστεί σε αυτό το κεφάλαιο αποτελεί γενίκευση του μοντέλου του Merton που αναπτύχθηκε αρχικά από την εταιρία KMV. Η παρουσίαση του μοντέλου, έχει στο σύγγραμμα των P. Crosbie και J. Bohn (2003). Το εν λόγω μοντέλο εισάγει την έννοια της αναμενόμενης συχνότητας πτώχευσης - Expected Default Frequency (EDF) που αποτελεί την πιθανότητα αθέτησης υποχρεώσεων κατά τη διάρκεια ενός έτους ή ετών για εταιρείες με μετοχές που βρίσκονται υπό διαπραγμάτευση στο χρηματιστήριο. Βέβαια, αυτό το μοντέλο μπορεί επίσης να τροποποιηθεί για να παράγει αξίες EDF για εταιρείες χωρίς μετοχές που διατίθενται στο κοινό. Η Αναμενόμενη Συχνότητα Αθέτησης εκτιμάται από το λογισμικό Credit Monitor (CM) και συγκρίνεται με τη πραγματική πιθανότητα από 1 έως 5 έτη. Για να γίνει αυτό χρησιμοποιείται μια μεγάλη βάση δεδομένων που περιλαμβάνει πτωχεύσεις οι οποίες έχουν παρατηρηθεί για μεγάλο χρονικό διάστημα και ενημερώνει το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο κάθε μήνα.

3.2 Το μοντέλο

Το μοντέλο KMV υποθέτει ότι η χρηματιστηριακή αξία της εταιρίας είναι ένα διηνεκές δικαίωμα προαίρεσης με το σημείο αθέτησης να λειτουργεί ως το κατώφλι για το Ενεργητικό της εταιρίας. Επίσης εισάγει το μέτρο της Αναμενόμενης Συχνότητας αθέτησης (EDF), δηλαδή τη πιθανότητα αθέτησης πληρωμών ενός δεδομένου οφειλέτη, κατά τη διάρκεια του επόμενου έτους ή ετών.

Οι μεταβλητές για τον υπολογισμό της αξίας της EDF είναι στοιχεία από τις οικονομικές καταστάσεις όπως οι τιμές των ιδίων κεφαλαίων. Στη συνέχεια, η πιθανότητα αθέτησης υπολογίζεται ως συνάρτηση της κεφαλαιακής διάρθρωσης της επιχείρησης, της μεταβλητότητας των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων και της τρέχουσας αξίας του ενεργητικού. Η EDF είναι συγκεκριμένη για κάθε επιχείρηση και μπορεί να αντιστοιχιστεί σε οποιοδήποτε σύστημα αξιολόγησης για να εξαχθεί η ισοδύναμη αξιολόγηση του υπόχρεου.

Σύμφωνα με τους Crosbie και Bohn (2003), υπάρχουν τρία κύρια στοιχεία για τον προσδιορισμό της πιθανότητας αθέτησης υποχρεώσεων μιας επιχείρησης:

Η αγοραία αξία των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης: δηλαδή, η παρούσα αξία των μελλοντικών ελεύθερων ταμειακών ροών που παράγονται από τα περιουσιακά στοιχεία της επιχείρησης που προεξοφλούνται με το κατάλληλο προεξοφλητικό επιτόκιο. Αυτό ενσωματώνει σχετικές πληροφορίες για τον κλάδο της εταιρείας και μετρά τις προοπτικές της εταιρείας.

Κίνδυνος περιουσιακών στοιχείων: δηλαδή, η αβεβαιότητα ή ο κίνδυνος της αξίας του ενεργητικού, ο οποίος μετρά τον επιχειρηματικό και βιομηχανικό κίνδυνο της επιχείρησης. Δεδομένου ότι η αξία των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης είναι μια εκτίμηση, είναι αβέβαιη και, ως εκ τούτου, θα πρέπει πάντα να γίνεται κατανοητή στο πλαίσιο του κινδύνου περιουσιακών στοιχείων ή των δραστηριοτήτων της επιχείρησης.

Μόχλευση-Δανεισμός: δηλαδή, η έκταση των συμβατικών υποχρεώσεων της επιχείρησης. Το ακριβές μέτρο μόχλευσης της επιχείρησης είναι η λογιστική αξία των υποχρεώσεων σε σχέση με την αγοραία αξία των περιουσιακών στοιχείων, καθώς αυτή αντιπροσωπεύει το ποσό που πρέπει να αποπληρώσει η επιχείρηση.

Η πιθανότητα αθέτησης υποχρεώσεων της επιχείρησης αυξάνεται καθώς μειώνεται η τρέχουσα αγοραία αξία των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης, αυξάνεται η μεταβλητότητα των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης ή αυξάνεται το ποσό των υποχρεώσεων. Η επιχείρηση αθετεί όταν η αγοραία αξία των περιουσιακών στοιχείων είναι ανεπαρκής για την αποπληρωμή των υποχρεώσεων, κάτι που συμβαίνει όταν η αγοραία αξία των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης πέσει κάτω από το σημείο αθέτησης.

Ο πιστωτικός κίνδυνος της επιχείρησης αυξάνεται καθώς η αξία των περιουσιακών στοιχείων πλησιάζει τη λογιστική αξία των υποχρεώσεων και τελικά η επιχείρηση αθετεί όταν η αγοραία αξία των περιουσιακών στοιχείων δε μπορεί να καλύψει την αποπληρωμή των υποχρεώσεων. Σύμφωνα όμως με τους Crosbie και Bohn (2003) πολλές εταιρείες δεν αθετούν όταν η αξία του ενεργητικού τους φτάσει τη λογιστική αξία των συνολικών τους υποχρεώσεων. Συνήθως, το σημείο αθέτησης βρίσκεται κάπου μεταξύ των συνολικών υποχρεώσεων και των τρεχουσών υποχρεώσεων. Ορισμένες εταιρείες χρεοκοπούν σε αυτό το σημείο αλλά πολλές συνεχίζουν να εμπορεύονται και να εξυπηρετούν τα χρέη τους. Αυτό προκύπτει από τον μακροπρόθεσμο χαρακτήρα κάποιων υποχρεώσεων που δίνει τη δυνατότητα στις επιχειρήσεις να αποπληρώσουν κάποιες από τις υποχρεώσεις τους. Άρα το σημείο αθέτησης, δηλαδή η αξία του ενεργητικού στο οποίο η επιχείρηση θα αθετήσει, βρίσκεται ανάμεσα στις συνολικές υποχρεώσεις και των τρέχοντων, ή βραχυπρόθεσμων, υποχρεώσεων.

Συνεπώς, η καθαρή αξία της εταιρίας είναι η αγοραία αξία της αξία μείον το σημείο αθέτησης. Η εταιρία θα πτωχεύσει όταν η καθαρή της αξία γίνει ίση με το μηδέν.

$$\begin{bmatrix} Αγοραία\ Αξία \\ Ενεργητικού \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Σημείο \\ Αθέτησης \end{bmatrix}$$

3.3 Η Απόσταση από την αθέτηση (DD)

Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι η μόχλευση μιας επιχείρησης έχει ως αποτέλεσμα να αμβλύνει τη μεταβλητότητα των περιουσιακών στοιχείων. Επομένως, οι βιομηχανίες με χαμηλή μεταβλητότητα των περιουσιακών στοιχείων (για παράδειγμα, ο τραπεζικός κλάδος) τείνουν να αναλαμβάνουν μεγαλύτερα δάνεια, ενώ οι βιομηχανίες με υψηλή μεταβλητότητα περιουσιακών στοιχείων (για παράδειγμα, λογισμικό ηλεκτρονικών υπολογιστών) τείνουν να αναλαμβάνουν λιγότερο. Ως συνέπεια, η μεταβλητότητα των μετοχών διαφοροποιείται πολύ λιγότερο ανά κλάδο και μέγεθος περιουσιακών στοιχείων από ό,τι είναι η μεταβλητότητα του ενεργητικού.

Τα στοιχεία αξία ενεργητικού, ο επιχειρηματικός κίνδυνος και μόχλευση, μπορούν να συνδυαστούν σε ένα ενιαίο μέτρο κινδύνου αθέτησης που συγκρίνει την αξία της εταιρίας στην αγορά με το μέγεθος της τυπικής απόκλισης της αξίας του ενεργητικού. Αναφερόμαστε σε αυτή την αναλογία ως την απόσταση προς την αθέτηση και υπολογίζεται ως εξής:

$$DD = \frac{V_t - DFP}{V_t * \sigma_V}$$

όπου,

DD: η απόσταση από την αθέτηση (distance to default)

DFP: το σημείο αθέτησης (default point)

V_t: η αξία του Ενεργητικού

σ_V: η μεταβλητότητα του Ενεργητικού

Το μέτρο της απόστασης από την αθέτηση συνδυάζει τρία βασικά πιστωτικά ζητήματα: την αξία των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας, σε πιο τομέα δραστηριοποιείται, το κίνδυνο στο κλάδο που δραστηριοποιείται και τη μόχλευση του. Επιπλέον, η απόσταση από την αθέτηση ενσωματώνει επίσης, μέσω της αξίας του ενεργητικού και της μεταβλητότητας, τις επιπτώσεις της βιομηχανία, γεωγραφία και μέγεθος επιχείρησης.

3.4 Το μοντέλο KMV

Σύμφωνα με το μοντέλο KMV, ο υπολογισμός της πιθανότητας αθέτησης μιας επιχείρησης προσδιορίζεται ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα :

Εκτίμηση της αξίας του ενεργητικού και της μεταβλητότητας του ενεργητικού της επιχείρησης: προκύπτει από τη λογιστική αξία των υποχρεώσεων και την αγοραία αξία και τη μεταβλητότητα των ιδίων κεφαλαίων.

Υπολογισμός της απόστασης έως την αθέτηση(DD): προκύπτει από τη λογιστική αξία των υποχρεώσεων και αξίας του ενεργητικού και τη μεταβλητότητα του ενεργητικού τα οποία έχουν εκτιμηθεί στο πρώτο βήμα.

Υπολογισμός την πιθανότητα αθέτησης: προκύπτει από το DD και το ποσοστό πτωχέυσεων για δεδομένες τιμές απόστασης απο την αθέτηση

3.4.1 Εκτίμηση της αξίας του Ενεργητικού και της μεταβλητότητάς τους

Η εκτίμηση της αξίας του Ενεργητικού και της μεταβλητότητας στο μοντέλο KMV δε διαφέρει από αυτή του μοντέλου του Merton.

Ο υπολογισμός της αξίας της εταιρίας είναι δύσκολος και στο μοντέλο KMV καθώς οι υποχρεώσεις της εταιρίας δεν όλες παρατηρήσιμες στην αγορά. Μόνο η χρηματιστηριακή αξία της εταιρίας μπορεί να υπολογιστεί από τις ημερήσιες τιμές της μετοχής της. Συνεπώς, η εκτίμηση της αξίας του Ενεργητικού V_t και της μεταβλητότητας σ_V του γίνεται με τη διαδικασία που ακολουθήθηκε στο μοντέλο του Merton.

Σύμφωνα με τους Crosbie και Bohn (2003), όποτε είναι διαθέσιμη η αγοραία τιμή των μετοχών, η αγοραία αξία της επιχείρησης και η μεταβλητότητα των περιουσιακών στοιχείων μπορούν να προσδιοριστούν απευθείας χρησιμοποιώντας το μοντέλο τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης BSM, το οποίο προσδιορίζει τα ίδια κεφάλαια ως δικαίωμα αγοράς για τα υποκείμενα περιουσιακά στοιχεία της επιχείρησης, με τιμή εξάσκησης ίση με την αξία του χρέους και την ίδια διάρκεια του χρέους, που ορίζεται από (βλ. και μοντέλο του Merton, Παρ. 2.4.):

$$S_t = V_t \Phi(d_1) - D\, e^{-r(T\,-\,t)} \Phi(d_2)$$

Επιπλέον, η μεταβλητότητα των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας (σ_V) σχετίζεται άμεσα με τη μεταβλητότητα της χρηματιστηριακής αξίας (σ_S) μέσω της ακόλουθης εξίσωσης:

$$\sigma_S = \sigma_V \Phi(d_1) \frac{V_t}{S_t}$$

Ως εκ τούτου, αυτές οι δύο εξισώσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό της χρονικής αξίας (time-t) των περιουσιακών στοιχείων (V_t) και της μεταβλητότητας τους (σ_V), καθώς η χρηματιστηριακή αξία είναι παρατηρήσιμη και η μεταβλητότητα της μετοχής μπορεί να εκτιμηθεί, όπως συμβαίνει και στο μοντέλο του Merton.

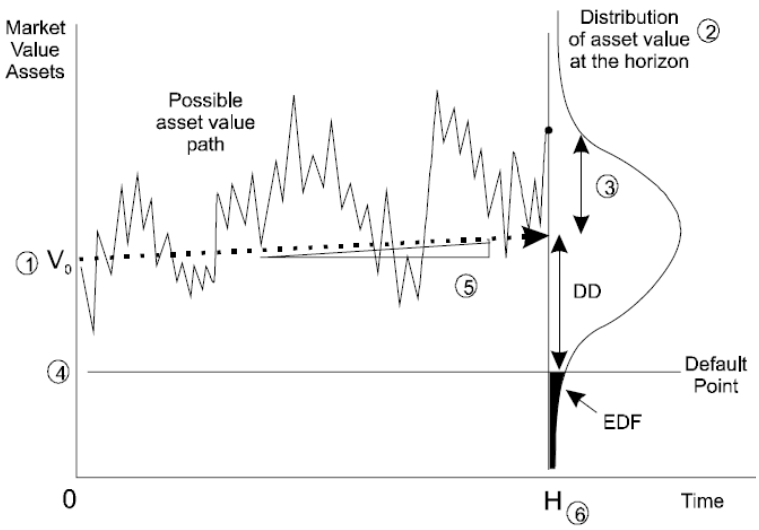
3.4.2 Υπολογισμός απόστασης από την αθέτηση

Σύμφωνα με το μοντέλο, η επιχείρηση θεωρείται ότι αθετεί όταν η αξία των περιουσιακών της στοιχείων φτάνει στο σημείο αθέτησης (DPT), το οποίο αντιπροσωπεύει το ποσό των υποχρεώσεων μιας επιχείρησης που οφείλονται σε έναν δεδομένο χρονικό ορίζοντα, που εάν δεν πληρωθούν εγκαίρως σύμφωνα με τους συμβατικούς τους όρους, θα προκαλούσε αθέτηση υποχρεώσεων της εταιρείας.

Για να υπολογιστεί η πιθανότητα αθέτησης πρέπει που θα πρέπει να προσδιοριστούν οι παρακάτω μεταβλητές:

Η αξία των περιουσιακών στοιχείων
Η κατανομή των περιουσιακών στοιχείων στο χρονικό ορίζοντα Η
Η μεταβλητότητα των περιουσιακών στοιχείων
Η λογιστική αξία των υποχρεώσεων, το σημείο αθέτησης
Ο αναμενόμενος ρυθμός αύξησης της αξίας των περιουσιακών στοιχείων
Ο χρονικός ορίζοντας Η

Σχήμα 2:KMV model



Πηγή : Crosbie & Bohn (2003)

Εάν η αξία των περιουσιακών στοιχείων πέσει κάτω από το σημείο αθέτησης, τότε η εταιρεία θεωρείται ότι θα πτωχεύσει. Επομένως, η πιθανότητα αθέτησης είναι η πιθανότητα η αξία του ενεργητικού να πέσει κάτω από το σημείο αθέτησης. Δηλαδή η σκιασμένη περιοχή (τιμή EDF) κάτω από το σημείο αθέτησης στο παραπάνω σχήμα.

Εάν ήταν γνωστή η μελλοντική κατανομή της απόστασης από την αθέτηση, η πιθανότητα πτώχευσης (EDF) θα ήταν απλώς η πιθανότητα η τελική τιμή του ενεργητικού να ήταν κάτω από το σημείο αθέτησης (η σκιασμένη περιοχή στο παραπάνω σχήμα). Ωστόσο, στην πράξη, η κατανομή της απόστασης από το σημείο αθέτησης είναι δύσκολο να μετρηθεί. Επιπλέον, οι συνήθεις υποθέσεις κανονικών ή λογαριθμοκανονικών κατανομών δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν.

Για τη μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου, η πιθανότητα μεγάλων αλλαγών στη σχέση της αξίας του ενεργητικού με το σημείο αθέτησης της επιχείρησης είναι κρίσιμες για τον ακριβή προσδιορισμό της πιθανότητας αθέτησης. Αυτές οι αλλαγές μπορεί να προκύψουν από αλλαγές στην αξία του ενεργητικού ή αλλαγές στη μόχλευση της επιχείρησης. Στην πραγματικότητα, οι αλλαγές στην αξία του ενεργητικού και οι αλλαγές στη μόχλευση της εταιρείας μπορεί να συσχετίζονται σε μεγάλο βαθμό. Κατά συνέπεια, το KMV μετρά την απόσταση από την αθέτηση ως τον αριθμό των τυπικών αποκλίσεων που η τιμή του ενεργητικού απέχει από το σημείο αθέτησης και στη συνέχεια χρησιμοποιεί εμπειρικά δεδομένα για τον προσδιορισμό της αντίστοιχης πιθανότητας αθέτησης.

Ο υπολογισμός της απόστασης από την αθέτηση (Distance-to-Default, DD) είναι από τις ενδιάμεσες φάσεις που εφαρμόζεται στο μοντέλο KMV, πριν τον υπολογισμό της πιθανότητας αθέτησης.

Στο βασικό διαρθρωτικό μοντέλο του Merton (1974), δεδομένου ότι θεωρείται μια απλή δομή κεφαλαίου όπου η χρηματιστηριακή αξία αποτελείται από κοινές μετοχές και το χρέος από ένα ομόλογο μηδενικού κουπονιού, ο προσδιορισμός του σημείου αθέτησης είναι απλός. Είναι η ονομαστική αξία αυτού του ομολόγου με λήξη ίση με τον ορίζοντα αθέτησης και, επομένως, η πιθανή αθέτηση μπορεί να συμβεί μόνο κατά την ημερομηνία λήξης του ομολόγου μηδενικού κουπονιού όταν δηλαδή, $V_T < X$.

Ωστόσο, στην πράξη, τα πιθανά γεγονότα αθέτησης υποχρεώσεων δεν περιορίζονται σε μια συγκεκριμένη ημερομηνία λήξης, καθώς οι υποχρεώσεις των επιχειρήσεων συνήθως αποτελούνται από πολλαπλές κατηγορίες χρεών με πολλές λήξεις. Έτσι, λόγω της απλότητάς του, το μοντέλο του Merton (1974) δεν θα παρήγαγε μια βέλτιστη εκτίμηση του σημείου αθέτησης με σκοπό τη πρόβλεψη αθέτησης.

Ως εκ τούτου, προκειμένου να παραχθεί ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο, το μοντέλο KMV της Moody's επεκτείνει το αρχικό δομικό μοντέλο του Merton (1974) επιτρέποντας μια πιο ρεαλιστική κεφαλαιακή δομή. Στο τρέχον μοντέλο Moody's KMV, μοντελοποιούνται πολλαπλές κατηγορίες υποχρεώσεων, όπως: βραχυπρόθεσμες και μακροπρόθεσμες υποχρεώσεις, προνομιούχες και κοινές μετοχές και μετατρέψιμο χρέος.

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, η Moody's KMV παρατήρησε ότι, το σημείο αθέτησης βρίσκεται γενικά κάπου μεταξύ των συνολικών υποχρεώσεων και ή του βραχυπρόθεσμου χρέους.

Επομένως, για χρονικό ορίζοντα ενός έτους, το όριο αθέτησης υποχρεώσεων (DPT) ορίζεται στο 100% των βραχυπρόθεσμων υποχρεώσεων (STD) συν 50% των μακροπρόθεσμων υποχρεώσεων (LTD), δηλαδή:

$$DPT = STD + \frac{1}{2} LTD$$

Αυτό προσπαθεί να συλλάβει την ιδέα ότι σύντομα, το βραχυπρόθεσμο χρέος απαιτεί αποπληρωμή ενώ το μακροπρόθεσμο χρέος απαιτεί μόνο τις πληρωμές με τοκομερίδιο.

Η απόσταση έως την χρεοκοπία (DD) ορίζεται στη συνέχεια από:

$$DD = \frac{V_t - DPT}{\sigma_V V_t}$$

Το KMV μετρά το DD ως τον αριθμό των τυπικών αποκλίσεων που η αξία του ενεργητικού απέχει από την αθέτηση και συνδυάζει τρία βασικά πιστωτικά ζητήματα: την αγοραία αξία των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας, τον κλάδο και τον επιχειρηματικό κίνδυνο και τη μόχλευση της επιχείρησης.

3.4.3 Υπολογισμός της πιθανότητας αθέτησης

Τέλος, η τελευταία φάση της προσέγγισης KMV της Moody's είναι η αντιστοίχιση του DD στις πραγματικές πιθανότητες αθέτησης, που ονομάζονται Αναμενόμενες Συχνότητες Αθέτησης. Η EDF μετρά την πιθανότητα αθέτησης σε μια δεδομένη περίοδο.

Στο μοντέλο του Merton, το DD ακολουθεί μια κανονική κατανομή αφού η υπόθεση κίνησης Brown χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση της δυναμικής των αξιών του ενεργητικού. Ωστόσο, οι προβλέψεις αυτού του μοντέλου αποκλίνουν σημαντικά από την αθέτηση. Αντίθετα, το μοντέλο Moody's KMV έλαβε τη σχέση μεταξύ της απόστασης έως την αθέτηση και της πιθανότητας αθέτησης, από ένα μεγάλο δείγμα δεδομένων αποτελείται απο ιστορικές συχνότητες αθέτησης υποχρεώσεων και χρεοκοπιών. Με βάση τη βάση δεδομένων τους, η οποία περιλαμβάνει δεδομένα για περισσότερα από 250.000 εταιρικά έτη και πάνω από 4.700 γεγονότα αθέτησης ή χρεοκοπίας, δημιουργήθηκε ένας πίνακας συχνοτήτων που συσχετίζει την πιθανότητα αθέτησης πληρωμών με διάφορα επίπεδα από απόσταση έως αθέτηση. Η Moody's KMV εξέτασε τη σχέση μεταξύ της απόστασης από την αθέτηση και της συχνότητας αθέτησης για κάθε κλάδο, το μέγεθος και τον χρόνο, μεταξύ άλλων επιδράσεων, και βρήκε ότι η σχέση είναι σταθερή σε όλες αυτές τις μεταβλητές.

3.5 Εφαρμογή μοντέλου KMV

Μπορούμε να δούμε τα παραπάνω με ένα απλό αριθμητικό παράδειγμα, που θα βοηθήσει να καταλάβουμε καλύτερα πως λειτουργεί το μοντέλο KMV χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα απο το βιβλίο των Saunders & Allen (2010) .

Στο παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα δεδομένα :

Τρέχον Ενεργητικό τη V_0	900
Εκτιμηθέν Ενεργητικό V_t	1000
Μεταβλητότητα ενεργητικού σ_V	0.1
Σημείο αθέτησης DFT	800

Θα υπολογίσουμε την απόσταση απο την αθέτηση :

$$DD = \frac{1000 - 800}{0.1 * 1000} = 2$$

Το παραπάνω σημαίνει ότι η εταιρία για να φτάσει στο σημείο αθέτησης θα πρέπει το Ενεργητικό της να μειωθεί κατά 2 τυπικές αποκλίσεις ή κατά 20 μονάδες τον επόμενο χρόνο. Η αξία του Ενεργητικού ακολουθεί κανονική κατανομή και άρα γνωρίζουμε ότι υπάρχει 95% πιθανότητα η αξία του Ενεργητικού να διαφέρει κατα $\pm 2\sigma$ απο το μέσο. Έτσι, υπάρχει 2,5% πιθανότητα η αξία του Ενεργητικού να αυξηθεί κατά 2σ σε ένα χρόνο ή να μειωθεί κατα 2σ σε ένα χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι η EDF είναι ίση με 2,5%. Η EDF που υπολογίσαμε είναι η θεωρητική αναμενόμενη συχνότητα αθέτησης.

Εάν υποθέσουμε ότι έχουμε μια μεγάλη ιστορική βάση δεδομένων απο πτωχεύσεις, μπορούμε να υπολογίσουμε την εμπειρική απόσταση απο την αθέτηση χρησιμοποιώντας το παρακάτω τύπο σύμφωνα με τους Saunders & Allen (2010) :

$$Empirical\ EDF = \frac{\begin{array}{c} εταιριών\ όπου\ πτώχευσαν\ σε\ ένα\ έτος \\ με\ DD\ 2\sigma\ απο\ την\ αρχή\ του\ έτους \end{array}}{\begin{array}{c} Συνολικός\ αριθμός\ εταιριών \\ με\ DD\ 2\sigma\ απο\ την\ αρχή\ του\ έτους \end{array}}$$

Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμητής του παραπάνω κλάσματος είναι ίσος με 50 ενώ ο παρονομαστής είναι ίσος με 1000 τότε η εμπειρική EDF είναι ίση με 5%.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4 ΔΟΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ CREDIT GRADES

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτή την ενότητα, θα περιγραφεί το δομικό μοντέλο CreditGrades. Το μοντέλο αναπτύχθηκε από τις εταιρίες RiskMetrics, J.P. Morgan, Goldman Sachs και Deutsche Bank με σκοπό να δημιουργηθεί ένα σημείο αναφοράς μέτρησης πιστωτικού κινδύνου. Όπως αναφέρεται από τον Byström (2005) αποτελεί μια απλοποιημένη εκδοχή του μοντέλου του Merton όπου η πιθανότητα αθέτησης είναι συνάρτηση της μεταβλητότητας των μετοχών και του χρέους. Ετσι, προϋποθέτει επίσης ότι η αξία των ιδίων κεφαλαίων και του χρέους της εταιρίας διαμορφώνονται ως δικαίωμα επιλογής στην αξία ενεργητικού. Η παρουσίαση του μοντέλου έχει βασιστεί στην τεχνική αναφορά του Finger (2002).

4.2 Περιγραφή Μοντέλου

Όπως και το μοντέλο Merton (1974), το μοντέλο CreditGrades υποθέτει ότι η τιμή των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας ακολουθεί μια γεωμετρική κίνηση Brown:

$$\frac{dV_t}{V_t} = \mu dt + \sigma dW_t,$$

όπου,

μ_V είναι η τάση των περιουσιακών στοιχείων

σ_V η μεταβλητότητα των περιουσιακών στοιχείων της εταιρίας και

$\{W_t, t \geq 0\}$ είναι μια τυπική κίνηση Brown.

Το μοντέλο υποθέτει ότι η τάση είναι ίση με το μηδέν. Αυτή η υπόθεση εξυπηρετεί στο να διατηρείται σταθερός ο λόγος μόχλευσης ώστε η εταιρία να εκδίδει περισσότερο χρέος ή να πληρώνει μερίσματα σύμφωνα με τη τάση της μετοχής με στόχο να αποφεύγεται το arbitrage.

Μια από τις κυριότερες βελτιώσεις του μοντέλου CreditGrades είναι η υπόθεση της τυχαιότητας επιλογής του χρηματικού ύψους των υποχρεώσεων της εταιρείας. Η τυχαιότητα των υποχρεώσεων γίνεται με την εισαγωγή μιας νέας μεταβλητής L η οποία ονομάζεται ποσοστό ανάκτησης. Οι υποχρεώσεις της εταιρίας δίνονται από το παρακάτω τύπο :

$$L \cdot D$$

όπου D είναι το χρέος ανά μετοχή και L το ποσοστό ανάκτησης. Θεωρούμε ότι το ποσοστό ανάκτησης L ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή με μέση τιμή $\overline{L}$ και τυπική απόκλιση λ.

Άρα το ποσό που πρέπει να καταβάλει η εταιρία μπορεί να γραφεί ως :

$$LD = \overline{L}De^{\lambda Z - \lambda^2/2}$$

όπου $\lambda, \overline{L} \in R_+$ και Z είναι μια τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή.

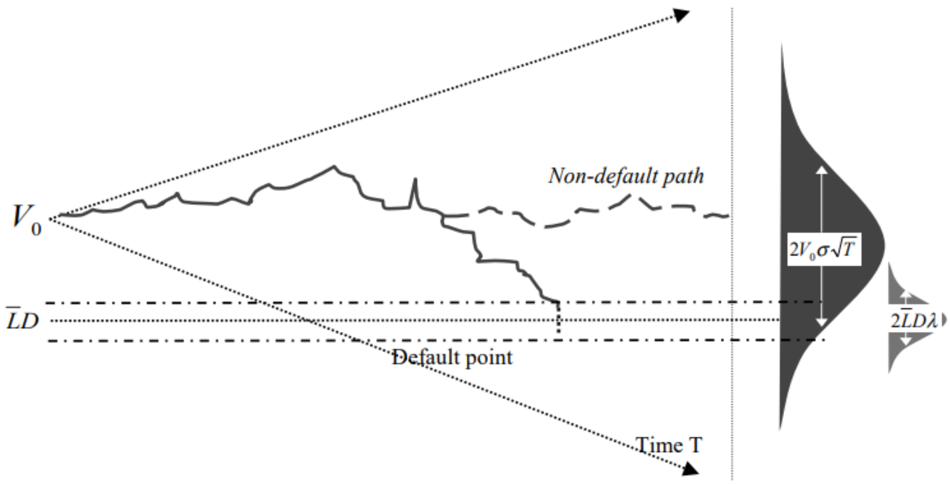
Η Z είναι ανεξάρτητη απο την διαδικασία W η οποία ακολουθεί μια τυπική κίνηση Brown. Έτσι εισάγοντας μια τυχαία μεταβλητή στο μοντέλο αντικατοπτρίζεται η αβεβαιότητα σε πραγματικό επίπεδο χρέους μιας επιχείρησης ανά μετοχή. Με αυτό το τρόπο μια εταιρία μπορεί να φτάσει στο σημείο αθέτησης απροσδόκητα οποιαδήποτε στιγμή. Αυτό αποτελεί μια σημαντική βελτίωση σε σχέση με το μοντέλο του Merton.

Σημειώνεται ότι δεν υπάρχει κίνδυνος αθέτησης όσο ισχύει η παρακάτω ανίσωση. Δηλαδή, όσο η αξία του Ενεργητικού είναι πάνω από το ποσό αθέτησης δεν υπάρχει κίνδυνος πτώχευσης,

$$V_0 e^{\sigma W_t - \sigma^2 \frac{t}{2}} > \overline{L}De^{\lambda Z - \frac{\lambda^2}{2}}$$

Διαγραμματικά το μοντέλο μπορεί να περιγράφει ως παρακάτω :

Εικόνα 4.1: Περιγραφή Μοντέλου



Πηγή : (Finger, et al., 2002)

4.3 Πιθανότητες επιβίωσης

Η πιθανότητα επιβίωσης (π.χ. βλ. Lardy et al., 2000) μιας εταιρίας βασίζεται στην ικανότητα να ανταπεξέρχεται στις υποχρεώσεις της, δηλαδή είναι η πιθανότητα να μην φτάσει στο σημείο αθέτησης το Ενεργητικού της πριν από το χρόνο t.

Υπάρχουν δύο εναλλακτικές προσεγγίσεις της πιθανότητας επιβίωσης. Η πρώτη είναι η προσεγγιστική και η δεύτερη είναι η ακριβής.

4.3.1 Προσεγγιστική πιθανότητα επιβίωσης

Για την προσεγγιστική μέθοδο θα εισάγουμε τη παρακάτω στοχαστική διαδικασία

$$X_t \ = \ \sigma W_t - \lambda Z \ - \ \frac{\sigma^2 t}{2} - \frac{\lambda^2}{2}$$

Και λογαριθμίζοντας την πιο πάνω ανισότητα :

$$Log(V_0 e^{\sigma W_t - \sigma^2 \frac{t}{2}}) \quad > log(\bar{L} D e^{\lambda Z - \frac{\lambda^2}{2}})$$

προκύπτει ότι

$$X_t \ > \ log\left(\frac{\bar{L}D}{V_0}\right) - \lambda^2$$

Για $t \ \geq 0$ η X_t ακολουθεί κανονική κατανομή με

$$E(X_t) \ = \ -\frac{\sigma^2}{2}\left(t \ + \ \frac{\lambda^2}{\sigma^2}\right)$$

$$Var(X_t) \ = \ \sigma^2 \ \left(t \ + \ \frac{\lambda^2}{\sigma^2}\right)$$

Μπορούμε να προσεγγίσουμε τη X από τη διαδικασία $\hat{X}$ η οποία ακολουθεί κίνηση Brown με τάση $-\frac{\sigma^2}{2}$ και διακύμανση σ^2 και ξεκινάει από ένα σημείο Δt έτσι ώστε $E(X_t) = E(\hat{X}_t)$. Παρατηρείται ότι για $t \ \geq \ 0$ οι ροπές της $\hat{X}_t$ είναι ίσες με αυτές της X_t. Με αυτό το τρόπο, η προσέγγιση μέσω της $\hat{X}$ αντικαθιστά την αβεβαιότητα στο σημείο αθέτησης με την αβεβαιότητα σε επίπεδο αξίας του ενεργητικού τη χρονική στιγμή 0. Αυτή η προσέγγιση δεν επηρεάζει δεδομένου ότι η απόσταση μεταξύ της αξίας του ενεργητικού απο το κατώφλι αθέτησης δείχνει πόσο κοντά είναι η εταιρία στη πτώχευση.

Τελικά, η πιθανότητα επιβίωσης (μη αθέτησης) μέχρι το χρόνο t προκύπτει από την κατανομή του χρόνου πρώτης άφιξης της κίνησης Brown σε ένα κατώφλι (first hitting time) και αποδεικνύεται ότι δίνεται από τον παρακάτω κλειστό τύπο :

$$P(t) = P\left(X_s > \log\frac{\bar{L}D}{V_0} - \lambda^2, s < t\right) = \ \Phi\left(-\frac{A_t}{2} + \ \frac{\log d}{A_t}\right) - \ d \cdot \Phi\left(-\frac{A_t}{2} + \ \frac{\log d}{A_t}\right),$$

όπου,

$$d = \frac{V_0 e^{\lambda^2}}{\bar{L}D}$$

και

$$A_t^2 = \sigma^2 t + \lambda^2$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η παραπάνω πιθανότητα είναι μη μηδενική για $t = 0$ το οποίο αποτελεί μειονέκτημα της πιθανότητας το οποίο έχει τη βάση του στην υπόθεση της λογαριθμοκανονικότητας του σημείου αθέτησης.

4.3.2 Ακριβής Πιθανότητα επιβίωσης

Μια εναλλακτική μέθοδος προσέγγισης της X από τη $\hat{X}$ είναι χρησιμοποιώντας την αθροιστική διμεταβλητή κανονική κατανομή

$$\Phi_2(a, b\,;\,\rho) = \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\, exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{1-\rho^2}\right)\right) dxdy$$

Η ακριβής πιθανότητα επιβίωσης τη χρονική στιγμή t αποδεικνύεται ότι δίνεται από

$$P(t) = \Phi_2\left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\log d}{\lambda}, -\frac{A_t}{2} + \frac{\log d}{A_t}\,;\,\frac{\lambda}{A_t}\right) - d \cdot \Phi_2\left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\log d}{\lambda}, -\frac{A_t}{2} + \frac{\log d}{A_t}\,;-\frac{\lambda}{A_t}\right)$$

όπου τα d και A_t ορίζονται όπως παραπάνω.

Οι διαφορές μεταξύ των δύο προσεγγίσεων της πιθανότητας επιβίωσης είναι πρακτικά πολύ μικρές.

4.4 Credit Spread

Στη συνέχεια θα πρέπει να μετατραπεί η πιθανότητα επιβίωσης σε μια τιμή. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να οριστεί :

1) r το σταθερό επιτόκιο χωρίς κινδύνου
2) R ποσοστό ανάκτησης

Το R διαφέρει απο το το $\bar{L}$ γιατί το R είναι το αναμενόμενο ποσοστό ανάκτησης για μία συγκεκριμένη κλάση υποχρεώσεων της εταιρίας (π.χ. unsecured debts) ενώ το $\bar{L}$ είναι το μέσο αναμενόμενο ποσοστό ανάκτησης για όλες τις κλάσεις υποχρεώσεων της εταιρίας.

Για ένα δεδομένο σταθερό επιτόκιο μηδενικού κινδύνου r, την πιθανότητα αθέτησης που δίνεται από την παραπάνω εξίσωση και το ειδικό ποσοστό ανάκτησης R, μπορούμε να εκφράσουμε το συνεχώς ανατοκιζόμενο spread c^* ενός CDS με οντότητα αναφοράς την συγκεκριμένη εταιρία. Εξισώνοντας τα σκέλη της αποζημίωσης και των ασφαλίστρων του CDS αποδεικνύεται ότι το ουδέτερο spread πρέπει να είναι

$$c^* = r(1-R)\frac{1-P(0)+e^{r\xi}(G(t+\xi)+G(\xi))}{P(0)-P(t)e^{-r\xi}-e^{r\xi}(G(t+\xi)-G(\xi))}$$

όπου $\xi = \frac{\lambda^2}{\sigma^2}$, και η συνάρτηση G δίνεται από τους Rubinstein και Reiner (1991),

$$G(u) = d^{z+\frac{1}{2}}\Phi\left(-\frac{log(d)}{\sigma\sqrt{u}}-z\sigma\sqrt{u}\right) + d^{-z+\frac{1}{2}}\Phi\left(-\frac{log(d)}{\sigma\sqrt{u}}+z\sigma\sqrt{u}\right),$$

όπου $z = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{2r}{\sigma^2}}$.

Στην πράξη, βλέπουμε μικρή διαφορά μεταξύ των περιθωρίων που υπολογίζονται με την παραδοχή συνεχών πληρωμών προμηθειών και αυτών που υπολογίζονται με βάση το πρότυπο αγοράς των τριμηνιαίων πληρωμών.

4.5 Εφαρμογή του Μοντέλου

Για την εφαρμογή του μοντέλου CreditGrades, θα πρέπει να υπολογιστούν : η αξία ενεργητικού στο χρόνο $t = 0$, η μεταβλητότητα των περιουσιακών στοιχείων και το χρέος ανά μετοχή τα οποία εκτιμώνται από τα δεδομένα της αγοράς.

Συμβολίζουμε με S τη *χρηματιστηριακή αξία* της εταιρίας και σ_S τη διακύμανση της.

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο από το Λήμμα του Ito ισχύει η παρακάτω εξίσωση :

$$\sigma_S = \sigma_V \frac{V}{S}\frac{\partial S}{\partial V}$$

όπου V το Ενεργητικό της εταιρίας.

Θεωρούμε τη μεταβλητή η, ως την απόσταση από την αθέτηση. Αυτή υπολογίζεται ως ο αριθμός των ετησιοποιημένων τυπικών αποκλίσεων της τρέχουσας χρηματιστηριακής αξίας της εταιρίας από το σημείο αθέτησης.

$$\eta = \frac{1}{\sigma_V}\log\frac{V}{LD} = \frac{V}{\sigma_S S}\frac{\partial S}{\partial V}\log\frac{V}{LD}$$

1. Η μεταβλητή η είναι πολύ σημαντική για το προσδιορισμό της πιθανότητας επιβίωσης (διότι εμπεριέχεται στον τύπο της απόστασης DD καθώς και της πιθανότητας μη αθέτησης, $P(t)$), και γι' αυτό θα πρέπει μελετηθεί η συμπεριφορά της σε οριακές συνθήκες. Η πρώτη οριακή συνθήκη είναι η αξία των περιουσιακών στοιχείων να είναι κοντά στο σημείο αθέτησης LD. Η βασική υπόθεση εδώ είναι ότι όσο πιο κοντά φτάνουμε στην αθέτηση η αξία της χρηματιστηριακής αξίας πλησιάζει στο 0. Δηλαδή θα ισχύει η παρακάτω εξίσωση στο όριο,

   $V|_{S=0} = LD$

   Και $V \approx LD + \frac{\partial V}{\partial S} S$ στο σημείο αθέτησης

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην εξίσωση για την η, θα ισχύει ότι:

$$\eta = \frac{V}{\sigma_S S}\frac{\partial S}{\partial V}\log\frac{V}{LD} = \frac{V}{\sigma_S S}\frac{\partial S}{\partial V}\log\left(1+\frac{\partial V}{\partial S}\frac{S}{LD}\right) \approx \frac{V}{\sigma_S S}\frac{\partial S}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial S}\frac{S}{LD} \approx \frac{1}{\sigma_S}$$

2. Η δεύτερη οριακή συνθήκη που θα εξεταστεί είναι αυτή μακριά από το σημείο αθέτησης ($S \gg LD$). Η υπόθεση εδώ είναι ότι

$$\frac{S}{V} \to 1$$

   Δηλαδή το ενεργητικό και τα ίδια κεφάλαια αυξάνονται με τον ίδιο τρόπο. Άρα,

$$\eta = \frac{V}{\sigma_S S}\frac{\partial S}{\partial V}\log\frac{V}{LD} \approx \frac{1}{\sigma_S}\log\frac{S}{LD}$$

Οι απλούστερες εξισώσεις για τις οποίες ικανοποιούνται και οι δυο παραπάνω συνθήκες για τις δυο μεταβλητές είναι οι παρακάτω :

$$V = S + LD$$

και

$$\eta = \frac{S+LD}{\sigma_S S}\log\frac{S+LD}{LD}$$

Επομένως, η αρχική αξία των περιουσιακών στοιχείων V_0 τη $t = 0$ υπολογίζεται απο τη παρακάτω εξίσωση :

$$V_0 = S_0 + \bar{L}D$$

όπου S_0 είναι η τρέχουσα τιμή της μετοχής. Σύμφωνα με τον τύπο της αξίας των περιουσιακών στοιχείων, η σχέση μεταξύ των ιδίων κεφαλαίων και της μεταβλητότητας περιουσιακών στοιχείων δίνεται από

$$\sigma_V = \sigma_S \frac{S_t}{S_t + \bar{L}D}$$

Η παραπάνω εξίσωση δείχνει ότι όταν η μεταβλητότητα των περιουσιακών στοιχείων είναι σταθερή, η μεταβλητότητα της χρηματιστηριακής αξίας αυξάνεται με τη μείωση της τιμής των μετοχών, και τελικά φτάνει σε πολύ υψηλά επίπεδα για μια εταιρεία που βρίσκεται στα πρόθυρα της χρεοκοπίας. Συχνά χρησιμοποιείται μια τιμή αναφοράς για τη τιμή της μετοχής S^* και μια τιμή αναφοράς για τη διακύμανση σ_S^*. Η τιμή αναφοράς της διακύμανσης μπορεί να είναι η ιστορική, βάσει των ημερήσιων αποσόσεων των μετοχών ή implied. Σε αυτή τη περίπτωση η διακύμανση των περιουσιακών στοιχείων δίνεται από τη παρακάτω εξίσωση.

$$\sigma_V = \sigma_S \frac{S_t^*}{S_t^* + \bar{L}D}$$

Στο μοντέλο έχει γίνει και η υπόθεση ότι η αξία του ενεργητικού έχει μηδενική τάση ($\mu_V = 0$). Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι για την τιμολόγηση του πιστωτικού κινδύνου, η τάση του Ενεργητικού από μόνη της δεν έχει τόση σημασία για μελέτη, όσο η τάση του Ενεργητικού σε σχέση με την σημείο αθέτησης.

Υποθέτουμε ότι κατά μέσο όρο με την πάροδο του χρόνου μια επιχείρηση εκδίδει περισσότερο χρέος για να διατηρήσει ένα σταθερό επίπεδο μόχλευσης, διαφορετικά πληρώνει μερίσματα έτσι ώστε το χρέος να έχει την ίδια τάση με την τιμή της μετοχής. Δεδομένου ότι $V_0 = S_0 + \bar{L}D$ για να αποφευχθεί το arbitrage η ίδια μετατόπιση θα πρέπει να φανεί και στην αξία του ενεργητικού V , ώστε η μετατόπιση των περιουσιακών στοιχείων σε σχέση με το σημείο αθέτησης να είναι μηδέν.

Το χρέος ανά μετοχή D βασίζεται σε οικονομικά στοιχεία από τις οικονομικές καταστάσεις της εταιρίας. Αρχικά υπολογίζονται όλες οι υποχρεώσεις που αφορούν τη μόχλευση της επιχείρησης. Αυτές περιλαμβάνουν την κύρια αξία όλων των χρηματοοικονομικών χρεών, βραχυπρόθεσμους και μακροπρόθεσμους δανεισμούς και μετατρέψιμα ομόλογα. Επιπλέον, συμπεριλαμβάνουμε και μελλοντικές χρηματοοικονομικές οφειλές όπως μισθώσεις κεφαλαίου, υπεχρηματοδοτούμενες συνταξιοδοτικές υποχρεώσεις ή προνομιούχες μετοχές και μη χρηματοοικονομικές υποχρεώσεις όπως πληρωτέοι λογαριασμοί. Οι αναβαλλόμενοι φόροι και τα αποθεματικά δεν περιλαμβάνονται. Το χρέος ανά μετοχή είναι τότε η αναλογία της αξίας των υποχρεώσεων προς τον ισόποσο αριθμό μετοχών. Ο ισοδύναμος αριθμός μετοχών περιλαμβάνει κοινές μετοχές σε κυκλοφορία, καθώς και οποιεσδήποτε μετοχές περιλαμβάνονται στο μετοχικό κεφάλαιο της εταιρείας. Στην πράξη, τα οικονομικά στοιχεία που χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό του χρέους ανά μετοχή, θα πρέπει να είναι προσαρμοσμένα στα πρόσφατα γεγονότα που έχουν ήδη τιμολογηθεί από την αγορά.

Ο μέσος όρος ($\bar{L}$) και η ποσοστιαία τυπική απόκλιση (λ) της συνολικής ανάκτησης L υπολογίζονται χρησιμοποιώντας δεδομένα διαχείρισης χαρτοφυλακίου χρησιμοποιώντας δεδομένα από τη βάση δεδομένων της Standard & Poor's (Hu and Lawrence (2000)). Η βάση δεδομένων περιέχει πραγματικά δεδομένα ανάκτησης για περίπου 300 μη χρηματοοικονομικές εταιρείες των Η.Π.Α. που χρεοκόπησαν από το 1987 έως1997. Τα χρεόγραφα περιλαμβάνουν ομόλογα και τραπεζικά δάνεια. Με βάση τη μελέτη αυτών των ιστορικών δεδομένων, ο $\bar{L}$ και λ εκτιμώνται ότι είναι 0,5 και 0,3, αντίστοιχα. Χαμηλότερο λ αναμένεται για τον χρηματοοικονομικό τομέα λόγω των ειδικών κυβερνητικών κανονισμών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ-ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετηθεί η εφαρμογή των ανωτέρω υποδειγμάτων σε πραγματικά δεδομένα. Συγκεκριμένα θα μελετηθεί η εταιρία Bed Bath & Beyond Inc. (BBBY) η οποία από την αρχή του έτους 2023 αναφέρει πιθανή χρεοκοπία καθώς δε μπορεί να ανταποκριθεί στις υποχρεώσεις της.

Οι πληροφορίες και τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν προέρχονται από το διαδίκτυο και αφορούν τις χρονικές περιόδους 2018-2022. Συγκεκριμένα, οι ημερήσιες τιμές των μετοχών προέρχονται από την ιστοσελίδα της Yahoo Finance, ενώ όλες οι πληροφορίες σχετικά με τις οικονομικές καταστάσεις όπως το χρέος κ.α. προέρχονται από τις δημοσιευμένες οικονομικές καταστάσεις της εταιρίας.

5.2 Μεθοδολογία

Θα παρουσιαστεί η μεθοδολογία εκτίμησης της πιθανότητας αθέτησης χρησιμοποιώντας το μοντέλο του Merton (1974) και το μοντέλο CreditGrades στα δεδομένα της παραπάνω εταιρίας.

Merton Model

Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη ενότητα το μοντέλο του Merton αποτελεί τη πιο απλή μορφή δομικού μοντέλου καθώς υποθέτει ότι η υπό εξέταση εταιρία αποτελείται από έναν απλό ισολογισμό. Οι παράμετροι του μοντέλου περιγράφονται παρακάτω.

Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι παρακάτω και υπολογίστηκαν ανά έτος:

1) το χρέος D το οποίο υπολογίζεται ως το άθροισμα των μακροπρόθεσμων και βραχυπρόθεσμων υποχρεώσεων
2) το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, το οποίο είναι libor 12-months
3) η τιμή της χρηματιστηριακής αξίας S_t, η οποία είναι το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού της τιμής της μετοχής τη χρονική στιγμή t και του αριθμού των μετοχών σε κυκλοφορία.
4) Η ιστορική μεταβλητότητα σ_S, των ημερήσιων λογαριθμικών αποδόσεων της επιχείρησης για 252 ημέρες.

Στόχος είναι να προσδιοριστεί η αξία του Ενεργητικού V_t και η μεταβλητότητά του σ_V τη χρονική στιγμή ή t. Χρησιμοποιώντας τους παρακάτω τύπους :

$$S_t = V_t \Phi(d_1) - De^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

όπου,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{D}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)T}{\sigma_V\sqrt{T}} \qquad \text{και} \quad d_2 = d_1 - \sigma_V\sqrt{T}$$

και

$$\sigma_S = \frac{\Phi(d_1)\, V_t\sigma_V}{S_t}$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εξισώσεις δημιουργείται ένα μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων το οποίο θα επιλυθεί με τη μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων (OLS) με τη χρήση του στατιστικού προγράμματος R.

Για να γίνει η παραπάνω διαδικασία θα πρέπει να λυθούν οι παραπάνω εξισώσεις και στη συνέχεια να ελαχιστοποιηθεί το άθροισμα των τετραγώνων τους. Δηλαδή,

$$S_t = V_t\Phi(d_1) - De^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \quad \Rightarrow \; V_t\Phi(d_1) - De^{-r(T-t)}\Phi(d_2) - S_t = F$$

Την πρώτη διαφορά η οποία προκύπτει από το τύπο των Black &Sholes την ονομάζουμε για ευκολία F.

$$\sigma_S = \frac{\Phi(d_1)\, V_t\sigma_V}{S_t} \Rightarrow$$

$$\sigma_S S_t = \Phi(d_1)\, V_t\sigma_V \Rightarrow$$

$$\sigma_S S_t - \Phi(d_1) V_t\sigma_V = G$$

Την διαφορά που προκύπτει από την εξίσωση της διακύμανσης την ονομάζουμε G.

Συνεπώς η ποσότητα που θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί (ως προς V_t, σ_V) είναι η παρακάτω :

$$F^2 + G^2$$

Για να γίνει αυτό θα πρέπει να οριστούν αρχικές τιμές τόσο για το Ενεργητικό όσο και για τη μεταβλητότητα. Ως αρχική τιμή για το Ενεργητικό V_t ορίσαμε τη τιμή που προκύπτει απο το κλασσικό τύπο της λογιστικής αξίας και βασιζόμενοι στην απλή δομή της εταιρίας που ορίζεται στο μοντέλο του Merton, ότι το Ενεργητικό της εταιρίας ισούται με το χρέος D και τη χρηματηστιριρκή αξία S_t. Ως αρχική τιμή της μεταβλητότητας δίνεται η ιστορική μεταβλητότητα των λογαριθμικών αποδόσεων των μετοχών της εταιρίας Bed Bath and Beyond.

Τέλος υπολογίζεται η πιθανότητα αθέτησης χρησιμοποιώντας το παρακάτω τύπο :

$$PD = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{D}{V_t}\right) - \left(\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)(T-t)}{\sigma_V\sqrt{T-t}}\right)$$

CreditGrades Model

Η κυριότερη διαφορά με το μοντέλο Merton είναι η τυχαιότητα επιλογής του σημείου αθέτησης.

Για να εκτιμηθεί η πιθανότητα αθέτησης της επιχείρησης μέσω του μοντέλου CreditGrades, χρησιμοποιούνται οι παρακάτω παράμετροι :

1) η μέση τιμή του ποσοστού ανάκτησης ($\hat{L}$) και η ποσοστιαία τυπική απόκλιση (λ), οι οποίες είναι ίσες με 0,5 και 0,3 αντίστοιχα.
2) το χρέος D ανά μετοχή προκύπτει διαιρώντας τις υποχρεώσεις με τον αριθμό των μετοχών.
3) Οι υποχρεώσεις τις εταιρίας είναι ίσες με το άθροισμα του μακροπρόθεσμου χρέους, του βραχυπρόθεσμου και το μισό από το άθροισμα των υπόλοιπων μακροπρόθεσμων και βραχυπρόθεσμων υποχρεώσεων, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι πληρωτέοι λογαριασμοί. Δηλαδή, σύμφωνα με το παρακάτω τύπο,

$$D = ST_{Borrow} + LT_{Borrow} + \frac{1}{2} * Liabilities_{other} - Accounts\ Payable$$

Η ιστορική μεταβλητότητα έχει εκτιμηθεί για τις 252 ημέρες από τα δεδομένα της αγοράς για κάθε έτος.

Στη συνέχεια υπολογίζονται οι παράμετροι d και A_t^2 απο τις παρακάτω εξισώσεις

$$d = \frac{S_0 + \bar{L}D}{\bar{L}D} e^{\lambda^2},$$

και

$$A_t^2 = \left(\sigma_S \frac{S}{S + \bar{L}D}\right)^2 t + \lambda^2$$

Τέλος υπολογίζεται η προσεγγιστική πιθανότητα επιβίωσης από τον παρακάτω τύπο :

$$P_t = \Phi\left(-\frac{A_t}{2} + \frac{log(d)}{A_t}\right) - d\Phi\left(-\frac{A_t}{2} + \frac{log(d)}{A_t}\right)$$

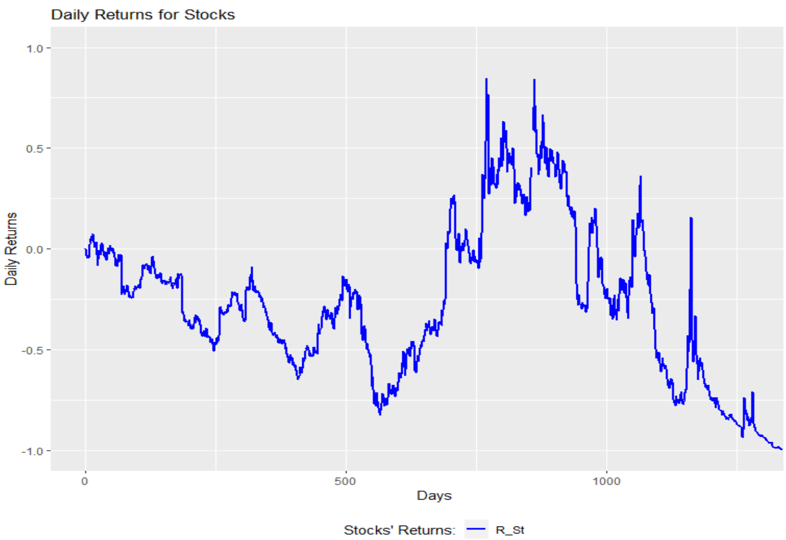
Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στον Finger (2002)

5.3 Αποτελέσματα

Θα μελετηθεί η πιθανότητα αθέτησης για τις χρονιές από το 2018 έως και το τέλος του 2022 για την εταιρία Bed Bath and Beyond.

Για να δούμε τη πτώση της μετοχής της BBBY μπορούμε να δούμε τη πορεία της τη χρονική αυτή περίοδο. Στις αρχές του 2018 η τιμή της μετοχής ήταν στις 19.97 μονάδες, έφτασε στο υψηλότερο σημείο της τη χρονιά του 2021 στις 52.89 μονάδες και τελικά έκλεισε τη χρονιά του 2022 στις 2.51 μονάδες. Αυτή η πορεία περιγράφεται καλύτερα στο παρακάτω σχήμα που απεικονίζει τη ποσοστιαία αλλαγή της τιμής της μετοχής σε σχέση με τη πρώτη ημέρα. Φαίνεται ότι η εταιρία από το 2018 έως και το 2019 (0-500 ημέρες) εμφανίζει μια συνεχή πτωτική πορεία. Ωστόσο, από το 2020 έως και τα μέσα του 2021(550-800 ημέρες) αρχίζει να ανακάμπτει και δείχνει μια θετική πορεία. Από τα τέλη του 2021(1000- σήμερα), όμως, η εταιρία ξαναπαρουσιάζει μια πτωτική πορεία που τελικά θα την οδηγήσει σε διαδικασία πτώχευσης.

Σχήμα 3: Ημερήσιες αποδόσεις BBBY



(Ο κώδικας για το παραπάνω γράφημα βρίσκεται στο παράρτημα Β)

Για να εξάγουμε τα αποτελέσματα χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πακέτο R και η διαδικασία που ακολουθήθηκε καθώς και τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν είναι τα παρακάτω :

Πρώτα καθορίσαμε τις τιμές του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο. Χρησιμοποιήθηκε το 12-months libor (δολαρίου) απο την ιστοσελίδα Global Rates για τα έτη 2018 έως 2022. Οι τιμές του επιτοκίου που χρησιμοποιήθηκαν φαίνονται στο παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 5.1: Επιτόκιο μηδενικού κινδύνου

Έτος	12-month libor
2018	0.02759
2019	0.02371
2020	0.00766

2021	0.00299
2022	0.034

Για το μοντέλο Merton:

Υπολογίστηκε η χρηματιστηριακή αξία της εταιρίας η οποία είναι ίση με την τιμή της μετοχής επί το πλήθος των μετοχών σε κυκλοφορία. Άρα χρησιμοποιήθηκε ο παρακάτω τύπος :

$$Χρηματιστηριακή\ αξία = Τιμή\ μετοχής * Μετοχές\ σε\ κυκλοφορία$$

Οι μετοχές σε κυκλοφορία ανά έτος καθώς και οι τιμές των μετοχών ανά έτος παρουσιάζονται στο παρακάτω πίνακα :

Πίνακας 5.2: Μετοχές σε κυκλοφορία ανα έτος

Έτος	outstanding shares	Τιμή μετοχής S_t
2018	140000	19.97124
2019	134000	11.131
2020	124000	15.96711
2021	121000	18.03
2022	99000	15.16

Στη συνέχεια, υπολογίστηκε το χρέος ως το άθροισμα του μακροπρόθεσμου χρέους της εταιρίας και του βραχυπρόθεσμου χρέους και φαίνεται στο παρακάτω πίνακα :

Πίνακας 5.3 : Χρέος ανα έτος

Έτος	Χρέος
2018	3658000
2019	3566000
2020	3955000
2021	3485000
2022	3255000

Με βάση τα παραπάνω, η αρχική τιμή του Ενεργητικού, που θα χρησιμοποιηθεί στον αλγόριθμο για την επίλυση του μη γραμμικού συστήματος, υπολογίστηκε απο το παρακάτω τύπο :

$$Ενεργητικό = Χρηματιστηριακή\ Αξία + Χρέος$$

Επίσης υπολογίσαμε και τη μεταβλητότητα της χρηματιστηριακής αξίας των ημερήσιων λογαριθμικών αποδόσεων της εταιρίας χρησιμοποιώντας της εντολή $sd()$ της R. Οι τιμές της παρουσιάζονται στο παρακάτω πίνακα :

Πίνακας 5.4:Τιμές μεταβλητότητας χρηματιστηριακής αξίας

Έτος	σ_S
2018	0.4846234

2019	0.576291
2020	1.073488
2021	1.143207
2022	1.374796

Για την αρχική τιμή της μεταβλητότητας του Ενεργητικού μπορούμε να θεωρήσουμε τη τιμή της μεταβλητότητας της χρηματιστηριακής αξίας σ_S όπως αναφέρουν στο σύγγραμά τους οι Vassalou & Xing (2004).

Αφού υπολογίσουμε τις παραπάνω ποσότητες πρέπει να λύσουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων (ως προς V_t, σ_V)

$$S_t = V_t \Phi(d_1) - De^{-r(T-t)} \Phi(d_2)$$

όπου,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{D}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)T}{\sigma_V \sqrt{T}} \qquad \text{και} \quad d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{T}$$

και

$$\sigma_S = \frac{\Phi(d_1)\, V_t \sigma_V}{S_t}$$

Αυτό θα γίνει κατασκευάζοντας τη συνάρτηση $merton$ στην R, η οποία υπολογίζει τη ποσότητα $F^2 + G^2$. Για να βρεθεί η τελικά η τελική πιθανότητα αθέτησης χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση optim() δίνοντας αρχικές τιμές στο Ενεργητικό και στη μεταβλητότητα του Ενεργητικού τις τιμές που βρήκαμε παραπάνω. Επειδή η συνάρτηση optim() εξαρτάται απο τις αρχικές τιμές, θα χρειαστεί να τον τρέξουμε τον αλγόριθμο παραπάνω απο μία φορές μέχρι να φτάσουμε σε σύγκλιση. Οι τιμές του Ενεργητικού που εκτιμήθηκαν ακολουθώντας τη παραπάνω διαδικασία είναι οι παρακάτω :

Πίνακας 5.5: Εκτιμήσεις Ενεργητικού & μεταβλητότητας

Έτος	V_t	σ_V
2018	6353396	0.2137869
2019	4968080	0.1761232
2020	5679232	0.4370328
2021	5391286	0.5370586
2022	4148515	0.6427046

Τέλος, υπολογίζουμε τη πιθανότητα αθέτησης απο το παρακάτω τύπο

$$PD = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{D}{V_t}\right) - \left(\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)(T-t)}{\sigma_V\sqrt{T-t}}\right) = \Phi(-d_2)$$

Για το μοντέλο CreditGrades:

ορίσαμε ως recovery rate L ίσο με 0,5 και τη τυπική απόκλιση ίσε με l ίση με 0,3.

Στη συνέχεια υπολογίσαμε το χρέος ανα μετοχή. Το CreditGrades μοντέλο υπολογίζει το χρέος σύμφωνα με το παρακάτω τύπο :

$$D = ST_{Borrow} + LT_{Borrow} + \frac{1}{2} * Liabilities_{other} - Accounts\ Payable$$

Επομένως, το συνολικό χρέος που προκύπτει για αυτό το μοντέλο εμφανίζεται στο παρακάτω πίνακα :

Πίνακας 5.6: Χρέος CreditGrades

Έτος	Χρέος
2018	2707496
2019	2693922
2020	4046310
2021	3346450
2022	3233050

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το χρέος ανα μετοχή χρησιμοποιώντας το παρακάτω τύπο :

$$Χρέος\ ανά\ μετόχη = \frac{Χρέος}{Μετοχές\ σε\ κυκλοφορία}$$

στη συνέχεια υπολογίζουμε το σημείο αθέτησης απο το τύπο

$$LD = \bar{L} * D$$

Τέλος, υπολογίζουμε τις παρακάτω ποσότητες απο τις εξισώσεις και θέτοντας ως S_0 τη τιμή της μετοχής την $t = 0$

$$d = \frac{V_0 e^{\lambda^2}}{\bar{L}D} = \frac{S_0 + \bar{L}D}{\bar{L}D} e^{\lambda^2}$$

και

$$A_t^2 = \sigma_V^2 t + \lambda^2 = \left(\sigma_S \frac{S_0}{S_0 + \bar{L}D}\right)^2 t + \lambda^2$$

Και την προσεγγιστική πιθανότητα επιβίωσης από τον παρακάτω τύπο :

$$P_t = \Phi\left(-\frac{A_t}{2} + \frac{log(d)}{A_t}\right) - d\Phi\left(-\frac{A_t}{2} + \frac{log(d)}{A_t}\right)$$

Άρα, η πιθανότητα αθέτησης είναι υπολογίζεται απο το τύπο,

$$1 - P_t$$

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν σχετικά με τη πιθανότητα αθέτησης της εταιρίας δείχνουν ότι η πιθανότητα αθέτησης αυξάνεται με το χρόνο και στα δυο μοντέλα, κάτι το οποίο είναι αναμενόμενο αφού η εταιρία BBBY θα βρεθεί τελικώς σε διαδικασία πτώχευσης.

Πίνακας 5.7: Πιθανότητες Αθέτησης

Year	PDMerton	PD Credit-Grades
2018	0.370%	1.139%
2019	2.114%	7.467%
2020	23.339%	29.375%
2021	26.037%	29.756%
2022	37.391%	42.658%

Γενικά το μοντέλο CreditGrades δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα σε σχέση με το μοντέλο του Merton, καθώς λαμβάνει υπόψιν του ότι η αθέτηση μπορεί να συμβεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή και αξιοποιεί περισσότερη πληροφορία σχετικά με το χρέος μιας οντότητας. Αυτό μπορούμε να το δούμε και στα παραπάνω αποτελέσματα καθώς παρατηρούμε ότι το μοντέλο CreditGrades δίνει πιθανότητες αθέτησης που εκφράζουν καλύτερα τη πραγματικότητα σε σχέση με το μοντέλο του Merton.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

6 ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Ο πιστωτικός κίνδυνος είναι ένας μετρήσιμος κίνδυνος και ιδιαίτερα, μετά την οικονομική κρίση του 2007-2009, η μέτρηση και η διαχείριση του έχει γίνει αναγκαία για πολλές επιχειρήσεις. Επίσης, είναι ένας κλάδος των χρηματοοικονομικών που λαμβάνει αυξανόμενο ενδιαφέρον τόσο από ακαδημαϊκά όσο και από χρηματοπιστωτικά ιδρύματα.

Σε αυτή την εργασία παρουσιάσαμε μερικά από τα πιο γνωστά μοντέλα μέτρησης πιστωτικού κινδύνου που ανήκουν στην οικογένεια των δομικών μοντέλων. Η προσέγγιση των δομικών μοντέλων πιστωτικού κινδύνου έχει τις ρίζες της στο θεμελιώδες μοντέλο του Merton (1974), και χρησιμοποιεί τις αρχές της τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης των Black and Scholes (1973) για την αποτίμηση των εταιρικών υποχρεώσεων. Με βάση αυτό, διερευνήθηκαν τρία δομικά μοντέλα πιστωτικού κινδύνου – το αρχικό μοντέλο Merton (1974) και δύο επεκτάσεις αυτού , το μοντέλο KMV και το μοντέλο CreditGrades. Τα τελευταία δύο μοντέλα αποτελούν εμπορικές επεκτάσεις του μοντέλου του Merton, αφού και τα δύο παρουσιάστηκαν από εταιρίες αξιολόγησης. Το KMV μοντέλο, δημιουργήθηκε από την εταιρία KMV, η επωνυμία της οποίας προέρχεται από τα αρχικά των ιδρυτών της Kealhofer, McQuown, and Vasicek. Στη συνέχεια η KMV εξαγοράστηκε από τον οίκο αξιολόγησης Moody's και το μοντέλο αναπτύχθηκε παραπάνω. Το μοντέλο CreditGrades παρουσιάστηκε από τη RiskMetrics Group σε συνεργασία με Goldman Sachs, JPMorgan, Deutsche Bank όπου ο σκοπός του μοντέλου είναι να δημιουργήσει ένα ισχυρό αλλά απλό πλαίσιο που συνδέει την πίστωση με τις αγορές μετοχών.

Αρχικά, παρουσιάστηκε το θεμελιώδες μοντέλο του Merton. Όπως έχει αναφερθεί και νωρίτερα, το μοντέλο θεωρεί ότι τόσο η χρηματιστηριακή αξία όσο και το χρέος μπορεί να θεωρηθούν ως δικαιώματα προαίρεσης επί της αξίας των περιουσιακών στοιχείων μιας επιχείρησης, δηλαδή ότι οι τεχνικές τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης μετοχών μπορούν να προσαρμοστούν για να εκτιμηθεί ο κίνδυνος αθέτησης. Το μοντέλο έχει εφαρμογή μόνο σε εταιρίες οι οποίες διαθέτουν μετοχές υπό διαπραγμάτευση στο χρηματιστήριο, ενώ κάποιες από τις μεταβλητές που χρησιμοποιεί δεν είναι γνωστές στο κοινό και θα πρέπει να εκτιμηθούν. Αυτές είναι η αξία του Ενεργητικού, δηλαδή η αξία των περιουσιακών στοιχείων και η μεταβλητότητά τους. Η εκτίμηση αυτών γίνεται με τη λύση ενός μη γραμμικού συστήματος που όμως δεν παράγει προσεγγιστικές τιμές για την πιθανότητα αθέτησης.

Στη συνέχεια, στο μοντέλο KMV όπως περιγράφηκε στη παρούσα εργασία, η πιθανότητα αθέτησης μπορεί να εκτιμηθεί μόνο για εισηγμένες εταιρείες. Ωστόσο, σύμφωνα με το βιβλίο Saunders & Allen (2010) η Moody's KMV προσφέρει το RiskCalc ως μοντέλο εκτίμησης κινδύνου αθέτησης υποχρεώσεων μιας ιδιωτικής εταιρείας, δηλαδή μιας εταιρίας που οι μετοχές της δεν βρίσκονται υπό δημόσια διαπραγμάτευση, το οποίο δημιουργεί μια τεκμαρτή σειρά τιμών μετοχών για ιδιωτικές εταιρείες χρησιμοποιώντας συγκρίσιμες δημόσιες επιχειρήσεις. Όπως σημειώνεται στο βιβλίο, το μοντέλο προσδιορίζει χρηματοοικονομικούς δείκτες-κλειδί που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως επεξηγηματικές μεταβλητές στην εκτίμηση του κίνδυνου αθέτησης. Αυτές οι μεταβλητές αφορούν συγκεκριμένα οικονομικά μέτρα της επιχείρησης για παράδειγμα μόχλευση, κερδοφορία κ.α. Τα οικονομικά δεδομένα που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση καθεμιάς από αυτές τις μεταβλητές μετασχηματίζονται, χρησιμοποιώντας έναν μη γραμμικό μετασχηματισμό, που αντικατοπτρίζει τη σχέση μεταξύ της μεταβλητής και του κινδύνου αθέτησης. Εκτός από τις συγκεκριμένες μεταβλητές για την εταιρεία σε αυτό το μοντέλο, η Moody's KMV RiskCalc εισάγει στο μοντέλο πληροφορίες όπως η βιομηχανία που ανήκει η επιχείρηση, στις εκτιμήσεις κινδύνου αθέτησης.

Για παράδειγμα, ο κίνδυνος αθέτησης υποχρεώσεων γενικά αυξάνεται κατά τη διάρκεια μιας γενικής οικονομικής ύφεσης. RiskCalcTM εισάγει έναν συντελεστή προσαρμογής που είναι συνάρτηση της μέσης μέτρησης της απόστασης έως την αθέτηση από το μοντέλο της δημόσιας επιχείρησης προκειμένου να ενσωματωθούν τάσεις σε επίπεδο βιομηχανίας ή οικονομίας. Αναφέρεται ότι ο λόγος ακρίβειας του μοντέλου σε ορίζοντα ενός έτους είναι πάνω από 50 τοις εκατό, το οποίο αντιπροσωπεύει στατιστικά σημαντική αύξηση της επεξηγηματικής ισχύος του μοντέλου.

Σύμφωνα με το συγκεκριμένο σύγγραμμα, πιθανό πρόβλημα στις εκτιμήσεις που δίνουν τα δομικά μοντέλα προέρχεται από την υποτιθέμενη σχέση μεταξύ της παρατηρήσιμης μεταβλητότητας των μετοχών και της μη παρατηρήσιμης μεταβλητότητας του ενεργητικού. Όπως είδαμε η εφαρμογή του μοντέλου Merton χρησιμοποιεί δύο εξισώσεις για να βρεθούν οι δύο άγνωστες μεταβλητές—τιμές ενεργητικού V και μεταβλητότητα ενεργητικού σ_V. Η δεύτερη εξίσωση που συνδέει τη μεταβλητότητα της χρηματιστηριακής αξίας με τη μεταβλητότητα του ενεργητικού καθορίζει μια μη στοχαστική σχέση μεταξύ παρατηρούμενης μεταβλητότητας μετοχών σ_E και μη παρατηρήσιμης μεταβλητότητας περιουσιακών στοιχείων σ_V. Ωστόσο, έχει αποδειχθεί ότι αυτό ισοδυναμεί με την υπόθεση ότι η μεταβλητότητα των μετοχών είναι σταθερή. Αυτό δεν συνάδει με τη στοχαστική μεταβλητότητα του Ενεργητικού όπως υπονοείται από το μοντέλο Merton. Επομένως προτείνεται η χρήση μιας στατιστικής μεθοδολογίας για την επίλυση των δύο αγνώστων στην εξίσωση που συνδέει τη μεταβλητότητα της χρηματιστηριακής αξίας με τη μεταβλητότητα του ενεργητικού, αντικαθιστώντας αυτή την εξίσωση με τη συνάρτηση της μέγιστης πιθανότητας που αντιστοιχίζει τη μη παρατηρούμενη αξία ενεργητικού της εταιρείας στην παρατηρούμενη αξία χρηματιστηριακής αξίας, υποθέτοντας ότι η αξία του ενεργητικού ακολουθεί κανονική κατανομή. Για περισσότερες λεπτομέρειες μπορεί κανείς να δει το σύγγραμμα των Reneby και Ericsson (2002). Η μεθοδολογία που ακολουθείται μεγιστοποιεί την πιθανότητα ότι οποιοδήποτε ζεύγος αξιών περιουσιακών στοιχείων και μεταβλητοτήτων θα είναι συνεπές με παρατηρούμενες αξίες μετοχών σε κάθε χρονική στιγμή. Έχει εκτιμηθεί η προσέγγιση της μέγιστης πιθανότητας αποδίδει ανώτερες εκτιμήσεις πιστωτικών περιθωρίων. Το μοντέλο του Merton, υπερεκτιμά τα πιστωτικά περιθώρια κατά μέσο όρο 23 τοις εκατό, ενώ η προσέγγιση της μέγιστης πιθανότητας έχει αμελητέα σφάλματα κατά την εκτίμηση των περιθωρίων ομολόγων. Το Moody's KMV μοντέλο χρησιμοποιεί την προσέγγιση της μέγιστης πιθανότητας για να εκτιμήσει την εμπειρική μεταβλητότητα που χρησιμοποιείται στον υπολογισμό της απόστασης έως την αθέτηση, εκτός από τη περίπτωση ενός μεγάλου εταιρικού γεγονός όπως π.χ. συγχώνευση ή εξαγορά .

Τέλος, περιεγράφηκε το μοντέλου CreditGrades όπου ως στόχο έχει να δημιουργήσει ένα ισχυρό αλλά απλό πλαίσιο που να συνδέει την πίστωση και αγορές μετοχών. Όπως ήδη έχει αναφερθεί, η παρατήρηση ότι χρηματιστηριακή αξία μπορεί να μοντελοποιηθεί ως δικαίωμα προαίρεσης επί των περιουσιακών στοιχείων μιας επιχείρησης έγινε αρχικά από το Merton (1974). Η προσέγγιση του Merton αναπτύχθηκε περαιτέρω από τους Black and Cox (1976) και αργότερα από τον Leland (1994). Σύμφωνα με την προσέγγισή τους ένα πιστωτικό γεγονός συμβαίνει όταν η αξία του Ενεργητικού μιας επιχείρησης υπερβεί ένα προκαθορισμένο κατώφλι. Το μοντέλο χρησιμοποιεί το πλαίσιο των δομικών μοντέλων για να δημιουργηθεί μια σύνδεση μεταξύ πιστωτικών γεγονότων και μετοχικών παραγώγων.

Το μοντέλο CreditGrades μπορεί να θεωρηθεί ως πρακτική εφαρμογή του τυπικού δομικού μοντέλου. Χρησιμοποιεί προσεγγίσεις για την αξία του ενεργητικού, τη μεταβλητότητα και τη τάση και τις συσχετίζει με τα παρατηρήσιμα στοιχεία της αγοράς. Ο μαθηματικός τύπος που προκύπτει είναι απλός αλλά μπορεί να προσεγγίσει οποιαδήποτε εξελιγμένο μοντέλο που βασίζεται σε παρόμοιες θεμελιώδεις παραδοχές.

Γενικά, το μοντέλο CreditGrades είναι αυτό που δίνει τις πιο ακριβείς τιμές της πιθανότητας αθέτησης. Ο λόγος επικεντρώνεται στο ότι η κεφαλαιακή διάρθρωση είναι πιο ολοκληρωμένη, και επομένως πιο κοντά στην πραγματικότητα της αγοράς, οι παράμετροι που χρησιμοποιεί το μοντέλο είναι όλες παρατηρήσιμες στην αγορά και το κατώφλι αθέτησης είναι μεταβλητό, ενσωματώνοντας έτσι την αβεβαιότητα της αγοράς.

7 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΜΕΘΟΔΟΣ Newton-Raphson

Η μέθοδος Newton-Raphson είναι ένας επαναληπτικός αλγόριθμος για την εύρεση ρίζας, ο οποίος ξεκινά από μια αρχική τιμή που θεωρούμε εμείς, και επαναλαμβάνεται με διαδοχικά βήματα για να βρούμε τη ρίζα.

Κάθε βήμα έχει μια κατεύθυνση, η οποία καθορίζεται τόσο από την τιμή όσο και από την κλίση της συνάρτηση στόχου. Επομένως η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $f'(x)$ ειναι χρησιμοποιείται στην ανάλυση.

Έστω x_0 η μια αρχική εκτίμηση της ρίζας $\tilde{x}$, και έστω $\lambda = \tilde{x} - x_0$ η απόσταση μεταξύ της εκτίμησης και της ρίζας. Η γραμμική προσέγγιση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι

$$0 = f(\tilde{x}) = f(x_0 + \lambda) \approx f(x_0) + \lambda f'(x_0)$$

Έτσι ώστε $\lambda \approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Από αυτό προκύπτει ότι η πραγματική ρίζα προσεγγίζεται με

$$\tilde{x} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Και μια νέα βελτίωση στην εκτίμηση x_1του $\tilde{x}$ δίνεται από

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

και η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να προσεγγιστεί ικανοποιητικά η ρίζα.

8 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Κώδικας R

Κώδικας για κίνηση Brown

```
install.packages("tidyverse", type="binary")
library(tidyverse)
n=1000 ;t=1;t.s = seq(0,t,length=n+1)
dt=t/n;bt=sqrt(dt)*cumsum(rnorm((n+1),mean=0,sd=1))
df = data.frame(bt,t.s);df
ggp= ggplot(data=df,aes(t.s,bt)) +
 geom_line(color="red");ggp
```

Κωδικας για γεωμετρική κίνηση Brown

```
X_analytic = numeric(N+1) #vector of zeros, N+1 elements
X_analytic[1] = X0 #first element of X_analytic is X0. with the for loop we find the other N elements
for(i in 2:length(X_analytic)){
  X_analytic[i] = X_analytic[1]*exp(mu - 0.5*sigma^2*i*dt + sigma*W[i-1])
}
#plot X against time
plot(time, X_analytic, type = "l", main = "Geometric Brownian Motion",
     xlab = expression("t"[i]), ylab = expression("W"[t[i]]))
```

Κεφαλαιοποίηση μετοχών

```
R_St=d$St/d$St[1]-1
N=length(d$Date)-1
days = 1:(n+1)
library(tidyverse)
df =data.frame(days, R_St)
ggplot(df, aes(x = days)) +
```

```
geom_line(aes(y = R_St, color = "R_St"), size = 1) +
ylim(-1, 1) +
labs(color = "Stocks' Returns:", y = "Daily Returns",
     x = "Days", title = "Daily Returns for Stocks") +
scale_color_manual(values = c("R_St" = "blue"),
                   labels = c("R_St")) +
theme(legend.position = "bottom")
```

<u>Merton Model</u> (έτος 2022)

```
rf_libor = 0.034

out_shares= 99000

debt= 3255000

day=1; St[day]

equity = St[day]*out_shares; equity


R_St= diff(log(St),lag=1)

T=1

sd=sd(R_St)*sqrt(252); sd

V = equity+debt; V

D = debt ;D

Merton_model = function(merton) {

  V=merton[1]

  sV=merton[2]

  d1 = (log(V/D)+(rf_libor+sV^2/2)*T)/(sV*sqrt(T))

  d2 = d1-sV*sqrt(T)

  F = V*pnorm(d1)-D*exp(-rf_libor*T)*pnorm(d2)-equity

  G = pnorm(d1)*sV*V-(sd*equity)

  return(F^2+G^2)

}

Merton_model(c(V,sd))

V0=V;sigmaV=sd

solutions = optim(c(V0,sigmaV), Merton_model); solutions

V0=solutions$par[1]; V0

sigmaV=solutions$par[2]; sigmaV


d1=(log(V/D)+(rf_libor+sigmaV^2/2)*T)/(sigmaV*sqrt(T))

d2=d1-sigmaV*sqrt(T);d2

pnorm(-d2)
```

CreditGrades Model (έτος 2022)

```
lamda_bar = 0.5;lamda = 0.3
DPS= 3233050/out_shares
LD= lamda_bar * DPS
a = sqrt((sd*St[1]/(St[1]+LD))^2+lamda ^2)
d= (St[1] + LD)/LD*exp(lamda ^2)
pd = pnorm((-a/2) + log(d)/a) - d*pnorm((-a/2) - log(d)/a)
100-pd*100
```

9 Βιβλιογραφία

Ελληνική

1. Α. Α. Αντζουλάτος (2017) : «*Τραπεζική*», Σημειώσεις μαθήματος, Τμήμα Χρηματοοικονομικής & Τραπεζικής Διοικητικής, Πανεπιστήμιο Πειραιώς
2. Μ. Μπούτσικας (2005-2007) : «*Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα*» Σημειώσεις μαθήματος, Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Ξένη

1. Allen & Saunders (2010)- «*Credit Risk Measurement In and Out of the Financial Crisis*», John Wiley & Sons, Inc
2. Jeff Bohn and Peter Crosbie (2003) : «*Modeling Default Risk*», Moody's KMV Company
3. Fischer Black and Myron Scholes (1973): «*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*» Source: The Journal of Political Economy, Vol. 81, No. 3 (May - Jun., 1973), pp. 637-654
4. Bystrom, H. (2006), «*CreditGrades and the iTraxx CDS index market*». Financial Analysts Journal, Vol. 62, No. 6, pp. 65-76
5. Embrechts and McNeil, Frey (2005) «*Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*», Princeton University Press
6. Ericsson, J. and J. Reneby (2001) : «T*he valuation of corporate liabilities: theory and tests*». Working paper Series in Economics and Finance, No. 445
7. Christopher C. Finger (2002) . «*CreditGrades™ Technical Document*» RiskMetrics Group, Inc.
8. Merton, R.C., (1974) «*On the pricing of corporate debt : «The risk structure of interest rates*». Journal of Finance 29, 449-470
9. Thierry Roncalli (2020) «*Handbook of Financial Risk Management*». Chapman and Hall.
10. Maria Vassalou and Yuang Xing (2004): «*Default Risk in Equity Returns*», The Journal of Finance, Vol. Lix, No. 2 April 2004 p 831- 868