ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Αποτίμηση Μερισματικών Δικαιωμάτων Προαίρεσης κάτω από ένα Στοχαστικό Μοντέλο Διάχυσης»

Χατζηγεωργίου Άννα Χαρίκλεια (MXRH2125)

Επιβλέπων Καθηγητής: **Επίκουρος Καθηγητής Εγγλέζος Νικόλαος**

Επιτροπή: **Καθηγητής Κουρογένης Νικόλαος**

Επίκουρος Καθηγητής Ανθρωπέλος Μιχαήλ

Επίκουρος Καθηγητής Εγγλέζος Νικόλαος

Φεβρουάριος 2023

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία, πραγματεύεται την αποτίμηση μερισματικών Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς, αξιοποιώντας ένα μοντέλο που προσεγγίζεται με τη μέθοδο Monte Carlo, όπως αυτό παρουσιάζεται από τον Tunaru (2018), σύμφωνα με το οποίο το ετήσιο σωρευτικό μέρισμα που καταβάλλεται από τον υποκείμενο τίτλο και καθορίζει σε μεγάλο βαθμό την τιμή του και κατ' επέκταση του παραγώγου, περιγράφεται από μία στοχαστική διαδικασία Verhulst-Pearl, που απαντάται στη Βιολογία.

Αρχικά, στο θεωρητικό σκέλος, παρατίθενται βασικές έννοιες και χαρακτηριστικά των απλών δικαιωμάτων προαίρεσης, ενώ διεξάγεται, μία σύντομη ιστορική αναδρομή. Ακόμη, παρουσιάζεται σε μεγάλη έκταση το πρόβλημα ορισμού της μερισματικής πολιτικής μίας εταιρείας και πραγματοποιείται μία επισκόπηση των βασικών ερευνητικών μελετών που άπτονται του θέματος της τιμολόγησης μερισματικών παραγώγων. Εν συνεχεία, αναλύεται το διαχρονικό μοντέλο των Black-Scholes-Merton, το οποίο αποτέλεσε ορόσημο για τη σχετική βιβλιογραφία και καταλήγοντας εκτίθεται και αναπτύσσεται η ερμηνεία του υπό εξέταση μοντέλου.

Ακολουθεί η πραγματοποίηση της ανάλυσης αριθμητικής ακρίβειας στο υψηλής απόδοσης λογισμικό MATLAB για τέσσερις από τις παραμέτρους που περικλείονται στην διαδικασία του σωρευτικού μερίσματος. Τέλος, έπεται η εμπειρική έρευνα όπου αφενός πραγματοποιείται η εκτίμηση αγνώστων παραμέτρων και αφετέρου αντιπαραβάλλεται η προβλεπτική ικανότητα του υπό εξέταση μοντέλου έναντι του Black – Scholes με μερισματική απόδοση, αξιοποιώντας διαθέσιμα δεδομένα αγοράς για δικαιώματα προαίρεσης διαφορετικών ληκτοτήτων της μετοχής της Apple.

Λέξεις Κλειδιά

Ευρωπαϊκό Μερισματικό Δικαίωμα Προαίρεσης, Μέθοδος Monte Carlo, Μοντέλο Black-Scholes, Μερισματική Πολιτική, Μερισματική Απόδοση, Αριθμητική Ανάλυση, Αλγόριθμος Levenberg – Marquardt, Εκτίμηση Παραμέτρων, Προβλεπτική Ικανότητα.

ABSTRACT

This thesis aims to the valuation of European Dividend call options, by introducing a Monte Carlo based model, presented by Tunaru (2018), according to which the annual cumulative dividend paid by the underlying security, which determines its price to a large extent and thus affecting the derivative price, is given by the stochastic diffusion version of the Verhulst-Pearl differential model, often used in Biology.

To begin with, we cite the theoretical part, in which main definitions along with benchmark historical events related to the notion of options are introduced. In addition, the problem of defining the dividend policy of a company is presented and an overview of the basic research studies related to the pricing of dividend derivatives is carried out. Furthermore, we proceed to the analysis of the Black-Scholes-Merton model, which is considered a milestone for the corresponding literature and finally, we develop the interpretation of the above-mentioned model.

Following the completion of the theoretical study, we then carry out numerical accuracy analysis, utilizing MATLAB software, for four of the parameters included in the cumulative dividend process. Finally, we proceed to the empirical study, to initially estimate the model's parameters and afterwards evaluate the model's forecasting ability against the Black – Scholes model that considers the effect of the dividend yield, using available market data for options of different maturities on the Apple stock.

KEY WORDS

European Dividend Option, Monte Carlo Method, Black-Scholes Model, Dividend Policy, Dividend Yield, Numerical Analysis, Levenberg – Marquardt algorithm, Parameter Estimation, Forecasting Ability.

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή 5

1.1 Δικαιωματα Προαιρεσης (Options) 5

1.1.1 Βασικές Έννοιες και Χαρακτηριστικά των Δικαιωμάτων Προαίρεσης 5

1.1.2 Ιστορική Αναδρομή Δικαιωμάτων Προαίρεσης 12

1.2 Μερισματικα Παραγωγα 16

1.2.1 Η επινόηση και χρήση των μερισματικών παραγώγων 16

1.2.2 Ιστορική Αναδρομή Μερισματικών Μοντέλων 23

1.3 Περιγραφη Διπλωματικης 29

Κεφάλαιο 2: Μοντέλο Black & Scholes 31

2.1 Βασικες Έννοιες Χρηματοοικονομικων Μαθηματικων 31

2.1.1 Στοχαστικές Διαδικασίες 31

2.1.2 Διαδικασία Markov 32

2.1.3 Διαδικασία Wiener (Κίνηση Brown) 33

2.1.4 Γενικευμένη Διαδικασία Wiener 35

2.1.5 Γεωμετρική Κίνηση Brown 36

2.1.6 Λήμμα του Itô 38

2.2 Το μαθηματικο μοντελο Black-Scholes-Merton 42

2.2.1 Υποθέσεις μοντέλου Black-Scholes-Merton 42

2.2.2 Διαφορική εξίσωση Black-Scholes-Merton 44

2.2.3 Τύποι αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης Black-Scholes 48

Κεφάλαιο 3: Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης κάτω από ένα Στοχαστικό Μοντέλο Διάχυσης 52

3.1 Στοχαστικο Μοντελο Διαχυσης 52

3.2 Προσομοιωση Monte Carlo 56

3.2.1 Μέθοδος Monte Carlo 56

3.2.2 Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης με τη μέθοδο Monte Carlo 57

3.3 Προσεγγιση Στοχαστικου Μοντελου Διαχυσης με τη μεθοδο Monte Carlo 59

Κεφάλαιο 4: Αριθμητική Ανάλυση και Εμπειρική Μελέτη 62

4.1 Υποκειμενος Τιτλος 62

4.2 Αναλυση Αριθμητικης Ακριβειας 65

4.3 Εμπειρικη Μελετη - Μεθοδολογια 72

4.3.1 Δεδομένα Εμπειρικής Μελέτης 73

4.3.2 Εκτίμηση Παραμέτρων 75

4.3.3 Εκτίμηση Παραμέτρων υπό εξέταση μοντέλων (In the Sample) 77

4.3.4 Προβλεπτική Ικανότητα Μοντέλων (Out of the Sample) 81

Κεφάλαιο 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 83

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 85

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι: Κώδικες MATLAB 88

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο, κρίνεται ωφέλιμο να γίνει μία συνοπτική επισκόπηση των βασικών χαρακτηριστικών που παρουσιάζουν τα δικαιώματα προαίρεσης, καθώς συνιστούν μία από τις κυριότερες κατηγορίες χρηματοοικονομικών παραγώγων, ενώ παράλληλα αποτελούν βασικό αντικείμενο μελέτης της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Εν συνεχεία, γίνεται αναφορά στην επινόηση και χρήση των μερισματικών παραγώγων, ενώ παρατίθενται ορισμένες από τις πιο διαδεδομένες μελέτες που άπτονται του συγκεκριμένου θέματος.

1.1 Δικαιώματα Προαίρεσης (Options)

1.1.1 Βασικές Έννοιες και Χαρακτηριστικά των Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Τις τελευταίες τέσσερις δεκαετίες, έχει καταγραφεί εκθετική αύξηση στην διαπραγμάτευση των χρηματοοικονομικών παραγώγων ανά τον κόσμο, διαμορφώνοντας τοιουτοτρόπως μία τεράστια και αυτόνομη αγορά, το μέγεθος της οποίας είναι πολλαπλάσιο του παγκόσμιου ακαθάριστου εγχώριου προϊόντος και η επίδραση της στην παγκόσμια οικονομική δραστηριότητα, καταλυτική. Η ανάγκη για κατανόηση της δομής και λειτουργίας αυτών των καινοτόμων προϊόντων είναι επομένως επιτακτική και ως εκ τούτου η βιβλιογραφία που καταπιάνεται με την τιμολόγησή τους έχει ομολογουμένως διευρυνθεί.

Ως παράγωγο νοείται μία διμερής σύμβαση του οποίου η αξία προέρχεται και εξαρτάται από την εξελικτική πορεία της τιμής του υποκείμενου τίτλου. Ο υποκείμενος τίτλος, δύναται να είναι εμπορεύσιμα αγαθά, όπως σιτηρά ή πετρέλαιο, καθώς και επενδυτικά προϊόντα, με κυριότερο αλλά όχι αποκλειστικό τις μετοχές. Ωστόσο, με την πάροδο του χρόνου, διαρκώς διευρύνεται η ποικιλία των τίτλων που ορίζουν την αξία των προσφερόμενων χρηματοοικονομικών παραγώγων με απώτερο σκοπό να υφίσταται ένα χρηματοοικονομικό προϊόν για κάθε πιθανή ανάγκη, κλιμακώνοντας έτσι την πολυπλοκότητα και την ευρηματικότητα που τα χαρακτηρίζει.

Τα χρηματοοικονομικά παράγωγα χρησιμοποιούνται για αντιστάθμιση κινδύνου, για κερδοσκοπία ή για κέρδος χωρίς κίνδυνο (arbitrage) και η φαινομενική επιτυχία της εν λόγω αγοράς, οφείλεται εν μέρει στο γεγονός ότι είναι έντονα εμπορεύσιμα και ευρέως διαδεδομένα προϊόντα. Στον αντίποδα, λόγω της φύσης τους ενέχουν σημαντικούς κινδύνους, το μέγεθος των οποίων δεν γίνεται ενίοτε αντιληπτό από τους εκάστοτε διαπραγματευτές, όπως προσφάτως έγινε φανερό με το ξέσπασμα της παγκόσμιας χρηματοπιστωτικής κρίσης που ξεκίνησε το 2007. Εν προκειμένω, η αγορά των παραγώγων συνέβαλε στην εξάπλωση της κρίσης που δημιουργήθηκε από τη «φούσκα» στην αγορά ακινήτων των Η.Π.Α, εξαιτίας της μεγάλης έκθεσης των επενδυτικών τραπεζών σε τέτοιου είδους προϊόντα μέσω της μεθόδου της τιτλοποίησης.

Παρά τις προφανείς συνέπειες που απορρέουν από την έντονη κριτική που δέχθηκε η αγορά παραγώγων για την κλιμάκωση και γεωγραφική επέκταση της κρίσης που προαναφέρθηκε, σήμερα έχει σαφώς ανακάμψει αποτελώντας την πιο ρευστή αγορά παγκοσμίως τόσο ενδοχρηματιστηριακά, όσο και στην Over the Counter (OTC) αγορά. Διεθνώς, τα πιο ευρέως συναλλασσόμενα προϊόντα είναι τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (Forwards/Futures), οι ανταλλαγές επιτοκίων και πιστωτικού κινδύνου (Interest Rate Swaps, Credit Default Swaps) καθώς και τα δικαιώματα προαίρεσης (Call Options, Put Options).

Αντικείμενο ενδιαφέροντος για τη παρούσα διπλωματική εργασία αποτελούν τα δικαιώματα προαίρεσης. Ένα δικαίωμα προαίρεσης, είναι μία σύμβαση που μεταβιβάζει στον κάτοχο του, το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει ή να πωλήσει τον υποκείμενο τίτλο σε μία προκαθορισμένη τιμή, την προσυμφωνημένη ημερομηνία. Αντιθέτως, ο πωλητής του δικαιώματος, φέρει την υποχρέωση να εκπληρώσει τα βάση συμβολαίου συμφωνηθέντα, σε περίπτωση που είναι συμφέρον για τον αγοραστή να εξασκήσει το δικαίωμα προαίρεσης που έχει αγοράσει. Γίνεται εμφανές, ότι πρόκειται για ένα παιχνίδι μηδενικού αθροίσματος, εφόσον τα κέρδη του ενός αντισυμβαλλομένου, αποτελούν ζημίες του άλλου και αντιστρόφως. Βασική υποδιαίρεση των συγκεκριμένων συμβολαίων είναι σε δικαιώματα αγοράς και πώλησης (call options και put options αντίστοιχα).

Οι συναλλαγές των δικαιωμάτων, δύναται να πραγματοποιηθούν είτε σε ρυθμιζόμενες αγορές (Exchange-traded-options), όπου οι διαπραγματεύσιμες τυποποιημένες συμβάσεις διακανονίζονται μέσω ενός γραφείο εκκαθάρισης (Clearing House), είτε σε εξωχρηματιστηριακές αγορές (Over-the Counter), όπου οι όροι είναι προσαρμοσμένοι στις ανάγκες των αντισυμβαλλόμενων, ενώ συνηθίζεται ο εκδότης των δικαιωμάτων να είναι ένα ισχυρά κεφαλαιοποιημένο ίδρυμα.

Ορισμένα από τα πιο ουσιώδη χαρακτηριστικά τους, τα οποία ορίζονται ρητά στο συμβόλαιο είναι τα κάτωθι:

- ***Υποκείμενο αγαθό/τίτλος (Underlying Asset)*** επί του οποίου συνάπτεται το δικαίωμα προαίρεσης. Πλέον, υπάρχει μία πληθώρα οικονομικών μεταβλητών, η μεταβλητότητα των οποίων απασχολεί τους επενδυτές, μερικές εκ των οποίων είναι οι μετοχικοί δείκτες, οι συναλλαγματικές ισοτιμίες και τα επιτόκια.
- ***Η τιμή (Price)*** του υποκείμενου τίτλου, η οποία καθορίζει τις χρηματοροές που θα προκύψουν κατά τη λήξη του δικαιώματος.
- ***Η τιμή εξάσκησης (Strike Price)***, που αποτελεί μία προσυμφωνημένη τιμή, παραμένει αμετάβλητη μέχρι την εκπνοή του προϊόντος και υποδεικνύει την τιμή στην οποία ο υποκείμενος τίτλος μπορεί να πωληθεί ή να αγοραστεί πριν τη λήξη του συμβολαίου.
- ***Η διάρκεια (Time to Maturity)*** του δικαιώματος αναφέρεται στην ημερομηνία λήξης του δικαιώματος. Με την πάροδο της ημερομηνίας αυτής, το δικαίωμα λήγει και δεν μπορεί πλέον να εξασκηθεί.
- ***Το ασφάλιστρο ή τιμή του δικαιώματος (Premium)***, είναι το χρηματικό αντίτιμο που καταβάλει ο αγοραστής του δικαιώματος (Holder), στον πωλητή (Writer), ως αντάλλαγμα χρήσης δικαιώματος συναλλαγής επί του τίτλου. Προσδιορίζεται στην αγορά διαπραγμάτευσης από τις δυνάμεις της αγοράς και της ζήτησης.
- ***Το μέγεθος του συμβολαίου (Contract Size)***, αφορά τις μονάδες του υποκείμενου τίτλου που διαπραγματεύονται βάσει συμβολαίου. Στο Χρηματιστήριο Αθηνών, ένα σχετικό συμβόλαιο με υποκείμενο τίτλο τη μετοχή μίας εταιρείας, αποτελείται από 100 μετοχές έκαστο.
- ***Option class***, είναι το σύνολο όλων των δικαιωμάτων προαίρεσης που φέρουν τον ίδιο υποκείμενο τίτλο
- ***Option series***, είναι το σύνολο των δικαιωμάτων προαίρεσης ενός δεδομένου Option class, με διάρκεια ως τη λήξη και τιμή εξάσκησης.

Μία περαιτέρω κατηγοριοποίηση των δικαιωμάτων προαίρεσης, με κριτήριο τη δυνατότητα εξάσκησης, είναι σε δικαιώματα Ευρωπαϊκού και Αμερικάνικου τύπου. Χαρακτηριστικό κριτήριο των δικαιωμάτων που εμπίπτουν στην πρώτη κατηγορία, είναι ότι ο κάτοχος του δικαιώματος, μπορεί να εξασκήσει το δικαίωμα αγοράς ή πώλησης, στην προβλεπόμενη τιμή εξάσκησης, με την έλευση της προβλεπόμενης ημερομηνίας λήξης του συμβολαίου. Αντιθέτως, ο κάτοχος ενός Αμερικανικού δικαιώματος αγοράς, δύναται να εξασκήσει το δικαίωμα ανά πάσα στιγμή.

Αναφορικά με τις θέσεις που μπορεί να λάβει κάποιος σε ένα δικαίωμα προαίρεσης, αξίζει να διατυπωθούν τα κάτωθι:

<table>
<tr><td rowspan="2">Δικαίωμα Αγοράς
Call Option</td><td>Θέση Αγοραστή
(Long)</td><td>Φέρει το <u>δικαίωμα</u> αγοράς του υποκείμενου τίτλου έναντι καταβολής του ασφαλίστρου στον πωλητή για τη σύναψη του δικαιώματος.</td></tr>
<tr><td>Θέση Πωλητή
(Short)</td><td>Φέρει την <u>υποχρέωση</u> να παραδώσει τον υποκείμενο τίτλο στον αγοραστή, εφόσον ο τελευταίος εξασκήσει το δικαίωμα, έχοντας εισπράξει το ασφάλιστρο κινδύνου ως αμοιβή.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">Δικαίωμα Πώλησης
Put Option</td><td>Θέση Αγοραστή
(Long)</td><td>Φέρει το <u>δικαίωμα</u> πώλησης του υποκείμενου τίτλου έναντι καταβολής του ασφαλίστρου στον πωλητή για τη σύναψη του δικαιώματος.</td></tr>
<tr><td>Θέση Πωλητή
(Short)</td><td>Φέρει την <u>υποχρέωση</u> να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο από τον αγοραστή, εφόσον ο τελευταίος εξασκήσει το δικαίωμα, έχοντας εισπράξει το ασφάλιστρο κινδύνου ως αμοιβή.</td></tr>
</table>

Έχοντας αναλύσει επιγραμματικά τις τέσσερις θέσεις που μπορεί να λάβει ένας επενδυτής, γίνεται εμφανές ότι οι αγοραστές δικαιωμάτων αγοράς και οι πωλητές δικαιωμάτων πώλησης, προσδοκούν αύξηση της τιμής του υποκείμενου τίτλου για να σημειώσουν κέρδη, ενώ αντιθέτως, οι πωλητές δικαιωμάτων αγοράς και οι αγοραστές δικαιωμάτων πώλησης επωφελούνται από μία πτώση στην τιμή του. Επιπροσθέτως, όπως θα προκύψει και από τις συναρτήσεις κέρδους των τεσσάρων θέσεων, η πιθανή ζημία από την αγορά ενός δικαιώματος προαίρεσης, ανεξαρτήτως τύπου, είναι περιορισμένη, σημειώνοντας ένα κάτω φράγμα, γεγονός που δεν απαντάται στη θέση πώλησης, όπου η ζημία είναι δυνητικά απεριόριστη.

Τέλος, κρίνεται σκόπιμο γίνει αναφορά στους έξι προσδιοριστικούς παράγοντες που διαμορφώνουν την τιμή των δικαιωμάτων προαίρεσης, θεωρώντας ως υποκείμενο τίτλο μία μετοχή. Το θετικό πρόσημο, όπου απαντάται, καταδεικνύει τη θετική σχέση μεταξύ του προσδιοριστικού παράγοντα και της τιμής του δικαιώματος προαίρεσης, ενώ αντίθετα το αρνητικό πρόσημο, πιστοποιεί την αρνητική σχέση μεταξύ των δύο. Σε διαφορετική περίπτωση, είναι αβέβαιη η επίδραση του προσδιοριστικού παράγοντα και άρα για να αποφανθεί κανείς, απαιτείται στοχευμένη ανάλυση.

	Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Αγοράς	**Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Πώλησης**	**Αμερικανικό Δικαίωμα Αγοράς**	**Αμερικανικό Δικαίωμα Πώλησης**
Τρέχουσα Τιμή Μετοχής	+	-	+	-
Τιμή Εξάσκησης	-	+	-	+
Χρόνος μέχρι τη Λήξη	?	?	+	+
Μεταβλητότητα	+	+	+	+
Ακίνδυνο Επιτόκιο	+	-	+	-
Ποσό Μελλοντικών Μερισμάτων	-	+	-	+

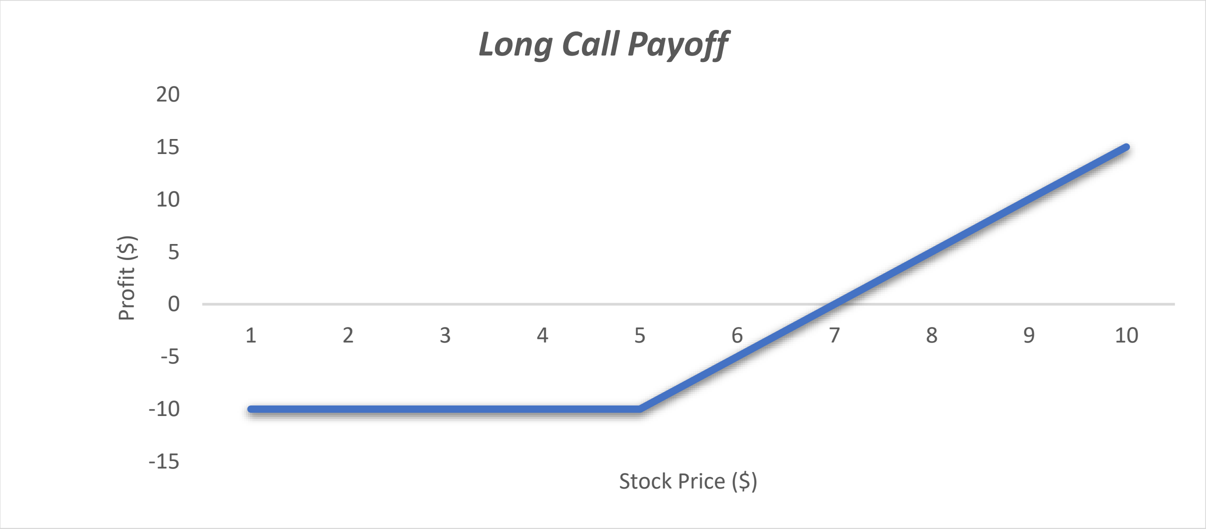
Πίνακας 1 - Παράγοντες Προσδιορισμού της τιμής ενός Δικαιώματος Προαίρεσης

Εν συνεχεία, γίνεται αναφορά στις συναρτήσεις κέρδους/ζημίας κατά τη χρονική στιγμή της λήξης για τις τέσσερις θέσεις που δύναται ένας επενδυτής να κατέχει. Στο εξής, με c και p συμβολίζεται το ασφάλιστρο κινδύνου ενός δικαιώματος αγοράς και πώλησης αντίστοιχα.

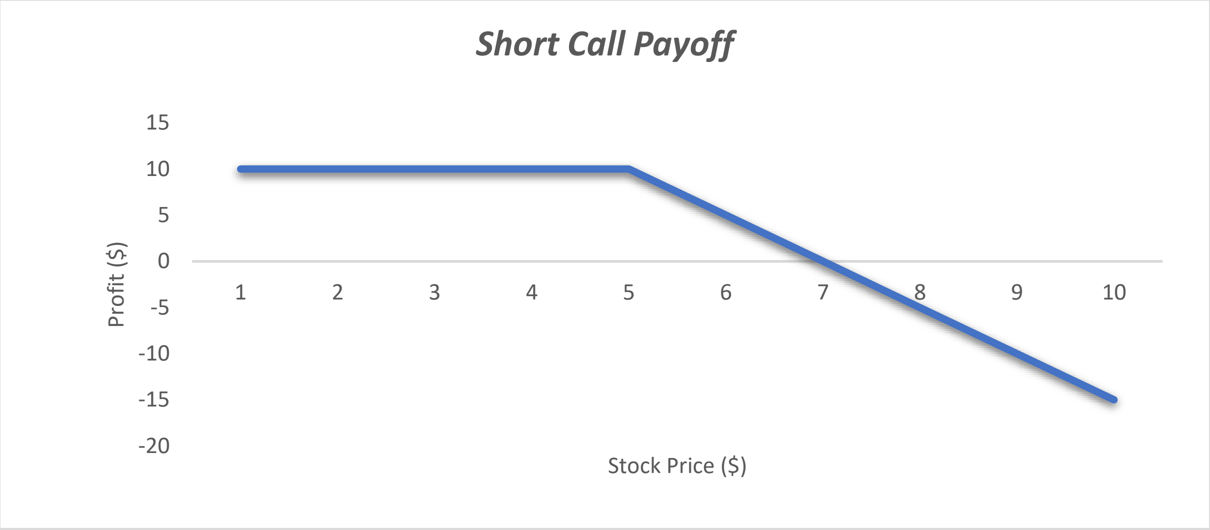
Θέση	Συνάρτηση Κέρδους/Ζημίας
Long Call	$\left(\frac{\text{K}}{\text{Z}}\right)_T = \begin{cases}(S_T - K) - c, & S_T > K \\ -c, & S_T \leq K\end{cases}$ = max (S_T – K, 0) – c
Short Call	$\left(\frac{\text{K}}{\text{Z}}\right)_T = \begin{cases}c - (S_T - K), & S_T > K \\ c, & S_T \leq K\end{cases}$ = c - max (S_T – K, 0)
Long Put	$\left(\frac{\text{K}}{\text{Z}}\right)_T = \begin{cases}(K - S_T) - p, & K > S_T \\ -p, & K \leq S_T\end{cases}$ = max (K – S_T, 0) – p
Short Put	$\left(\frac{\text{K}}{\text{Z}}\right)_T = \begin{cases}p - (K - S_T), & K > S_T \\ p, & K \leq S_T\end{cases}$ = p - max (K – S_T, 0)

Πίνακας 2 - Συναρτήσεις Κέρδους/Ζημίας των τεσσάρων θέσεων σε δικαιώματα προαίρεσης.

Τέλος παρατίθενται και τα διαγράμματα κέρδους/ζημίας, όπως προκύπτουν από τις παραπάνω συναρτήσεις.

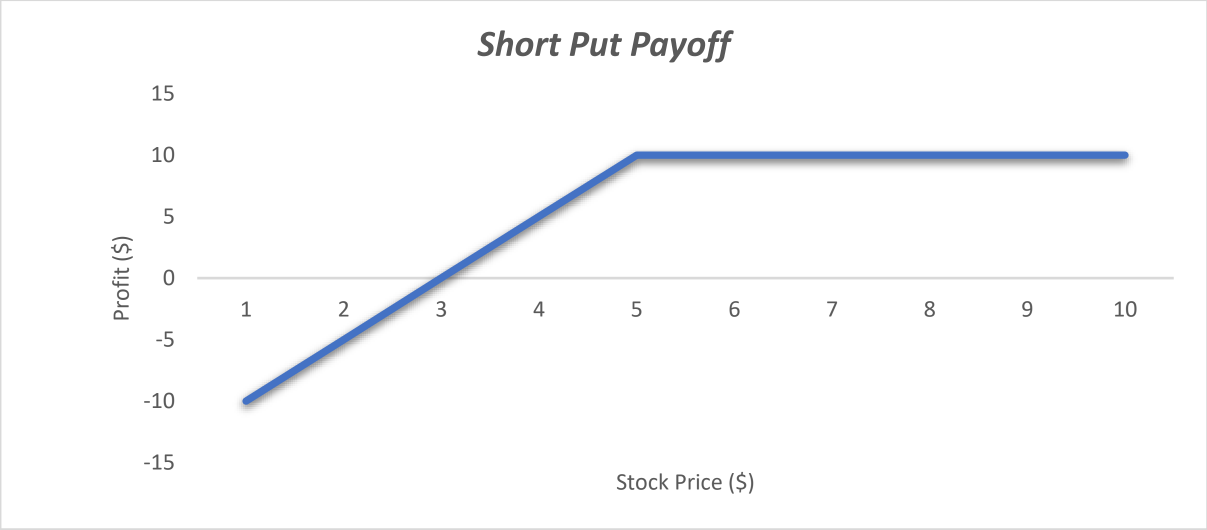


Γράφημα 1 - Διάγραμμα Κέρδους/Ζημίας από Θετική Θέση σε Δικαίωμα Αγοράς



Γράφημα 2 - Διάγραμμα Κέρδους/Ζημίας από Αρνητική Θέση σε Δικαίωμα Αγοράς

Γράφημα 3 - Διάγραμμα Κέρδους/Ζημίας από Θετική Θέση σε Δικαίωμα Πώλησης



Γράφημα 4 - Διάγραμμα Κέρδους/Ζημίας από Αρνητική Θέση σε Δικαίωμα Πώλησης

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει, ο διαχωρισμός των δικαιωμάτων προαίρεσης, με βασικό κριτήριο τις ταμειακές ροές που θα δημιουργούσε η άμεση εξάσκηση τους. Αναλυτικότερα, όταν οι ταμειακές ροές που προκύπτουν είναι θετικές, το δικαίωμα προαίρεσης λέγεται ότι είναι in-the-money, ενώ εφόσον η πρόωρη εξάσκηση αποδειχθεί ζημιογόνα για τον επενδυτή, τότε πρόκειται για ένα out-of-the-money δικαίωμα προαίρεσης. Τέλος, όταν καμία χρηματοροή δεν προκύψει από την άμεση εξάσκηση, δηλαδή η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου ισούται με την τιμή εξάσκησης, τότε το δικαίωμα καλείται at-the-money.

	Call Option	**Put option**
In the money	S > K	S < K
At the money	S = K	S = K
Out of the money	S < K	S > K

Πίνακας 3 - Κατάταξη δικαιωμάτων προαίρεσης βάσει απολαβών από άμεση εξάσκηση.

1.1.2 Ιστορική Αναδρομή Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Μολονότι η επικρατέστερη στις μέρες μας άποψη, είναι ότι τα παράγωγα είναι χρηματιστηριακά προϊόντα, που πρωτοεμφανίστηκαν τις τελευταίες δεκαετίες στις χρηματοπιστωτικές αγορές, κάτι τέτοιο απέχει παρασάγγας από την πραγματικότητα, καθώς απαντώνται ήδη από την αρχαιότητα. Συνοπτικά, ακολουθεί η ιστορική τους αναδρομή:

- Το **330 π.Χ.** ο φιλόσοφος Θαλής ο Μιλήσιος, αξιοποιώντας τη γνώση της αστρολογίας, ήταν σε θέση να προβλέψει μία ανθηρή συγκομιδή ελιάς την ερχόμενη άνοιξη. Αξιοποιώντας τη πληροφορία αυτή, διαπραγματεύτηκε τις τιμές των διαθέσιμων ελαιοτριβείων, καταβάλλοντας ένα ποσό για να αποκτήσει το δικαίωμα της αποκλειστικότητας στη χρήση τους την άνοιξη. Με την πάροδο του χρόνου, οι εκτιμήσεις τους επιβεβαιώθηκαν και ως αποτέλεσμα της κατακόρυφα αυξανόμενης ζήτησης για ελαιοτριβεία, ο Θαλής τα υπεκμίσθωνε με τη σειρά του, σε τιμή που ο ίδιος όριζε.

- Το **1636 μ.Χ.** στο χρηματιστήριο της Ολλανδίας, παρατηρήθηκε το φαινόμενο της «τουλιπομανίας» (Tulip Bulb Mania). Λόγω της παγκόσμιας αυξημένης ζήτησης για το συγκεκριμένο άνθος, ευρεία ήταν η χρήση δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης από παραγωγούς και χονδρεμπόρους, οι οποίοι επιθυμούσαν να εξασφαλίσουν τα κέρδη τους. Επιπροσθέτως, δημιουργήθηκε και δευτερογενής αγορά, στην οποία οι κερδοσκόποι εκτελούσαν συναλλαγές βασιζόμενοι σε διακυμάνσεις των τιμών των συμβολαίων της τουλίπας. Η κερδοσκοπία σε αυτή την αγορά, συντέλεσε στην εμφάνιση φούσκας, απόρροια της οποίας ήταν η ύφεση στην ολλανδική οικονομία. Τα παραπάνω, συνέβαλαν στο να εξαπλωθεί παγκοσμίως ο φόβος για τη χρήση των συγκεκριμένων προϊόντων, τα οποία θεωρήθηκαν υπαίτια για το λεγόμενο πρώτο οικονομικό κραχ, ενώ αξιοσημείωτη είναι η απαγόρευση της χρήσης τους σε πληθώρα χωρών.

- Τον **19ο αιώνα**, ο Αμερικανός χρηματοοικονομικός σύμβουλος Russell Sage, ξεκίνησε το σχεδιασμό της διαπραγμάτευσης δικαιωμάτων προαίρεσης στην OTC αγορά των Η.Π.Α.. Η προσπάθειά του παρόλο που δεν στέφθηκε με επιτυχία, καθώς λόγω εκτεταμένων χρηματικών απωλειών διέκοψε τη διενέργεια των συγκεκριμένων συναλλαγών, στάθηκε αφορμή για διάδοση των δικαιωμάτων και μετέπειτα εξέλιξή τους. Επιπλέον, ήδη μετά τη δημιουργία του New York Stock Exchange το 1970, οι επενδυτές, εξέφραζαν την επιθυμία ύπαρξης ενός οργανωμένου χρηματιστηρίου παραγώγων με ύπαρξη ρυθμιστικών κανονισμών και διαφάνειας στην τιμολόγηση. Η απουσία του, καθιστούσε ως τότε την αγορά επικίνδυνη στα μάτια των επενδυτών και ως εκ τούτου μη ρευστή.

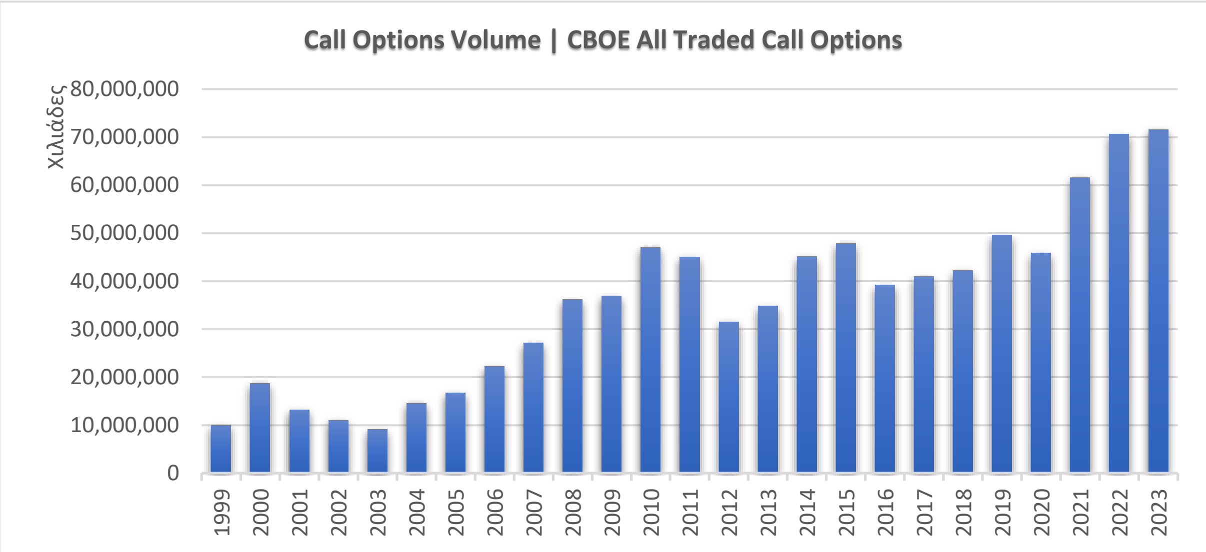
- Τον **20ο αιώνα**, μια σειρά από καινοτόμες ανακαλύψεις συντέλεσαν στην ουσιαστικότερη κατανόηση της δομής και λειτουργίας τους. Αναλυτικότερα, το 1900 ο Γάλλος μαθηματικός Louis Bachelier, κατόρθωσε να μοντελοποιήσει τη γνωστή με το όνομα «Κίνηση Brown» στοχαστική διαδικασία, που χρησιμοποιείται ευρέως για τη τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης στο πλαίσιο της διδακτορικής του διατριβής. Σε συνέχεια της ανακάλυψης αυτής, ο Sprenkle (1961), υπέθεσε ότι οι αποδόσεις ακολουθούν λογαριθμοκανονική κατανομή, αποκλείοντας έτσι αρνητικές τιμές μετοχών. Καθοριστικής σημασίας ήταν η συμβολή του Boness (1964), ο οποίος συνυπολόγισε τη χρονική αξία του χρήματος, προεξοφλώντας με τον αναμενόμενο ρυθμό απόδοσης της μετοχής.

- Το **1973**, αποτελεί έτος ορόσημο για την αγορά δικαιωμάτων για ποικίλους λόγους. Πρωτίστως, θεσπίστηκε το χρηματιστήριο “Chicago Board Options Exchange”, που αποτέλεσε το πρώτο χρηματιστήριο που εισήγαγε τυποποιημένα, διαπραγματεύσιμα δικαιώματα προαίρεσης με υποκείμενο τίτλο μετοχές. Εξίσου σημαντική, ήταν η δημοσιοποίηση του άρθρου δύο εξεχόντων ακαδημαϊκών του κλάδου, του Fisher Black και του Myron Scholes, οι οποίοι πρότειναν ένα μαθηματικό μοντέλο που εκτιμά τη δίκαιη τιμή ενός δικαιώματος και εισήγαγαν τύπους κλειστής μορφής, των οποίων η πρακτική αξία παραμένει απαράμιλλης σημασίας. Το μοντέλο τους αποτέλεσε σημείο εκκίνησης για κάθε μελέτη που επακολούθησε και παραμένει το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο ακόμη και στις μέρες μας, χωρίς να διαφαίνεται στον ορίζοντα ότι αυτό πρόκειται να αλλάξει.

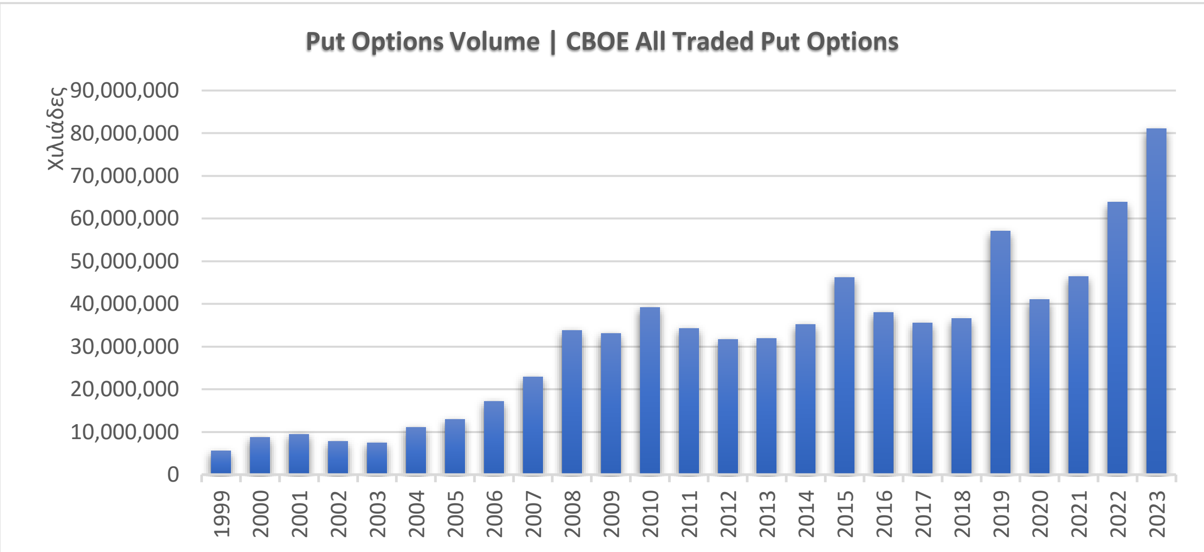
- Το **1979**, οι Cox, Ross και Rubinstein, ανέπτυξαν ένα μοντέλο διακριτού χρόνου και διακριτών τιμών που επαφίεται στη χρήση διωνυμικών δένδρων για τη διεξαγωγή αποτελεσμάτων. Σύμφωνα με την προσέγγισή τους, η τιμή της μετοχής ακολουθεί έναν τυχαίο περίπατο (random walk), ενώ σε κάθε χρονικό βήμα, η τιμή της επόμενης περιόδου δύναται να αυξηθεί ή να μειωθεί κατά ένα συγκεκριμένο ποσοστό, ανάλογα με την πιθανότητα ανόδου ή καθόδου αντίστοιχα. Στην περίπτωση όπου ο αριθμός των ενδιάμεσων βημάτων προσεγγίζει το άπειρο, το μοντέλο παράγει ίδια αποτελέσματα με τους τύπους των Black-Scholes. Μία ευρεία γκάμα παραλλαγών του διωνυμικού μοντέλου απαντάται στην βιβλιογραφία, ενώ το τριωνυμικό μοντέλο συνιστά μία βελτίωσή του, που προσφέρει μεγαλύτερη ακρίβεια αποτελεσμάτων.

Η επίσημη και οργανωμένη Αγορά Παραγώγων στην Ελλάδα, θεσμοθετήθηκε το 1997 και η λειτουργία της ξεκίνησε τον Αύγουστο του 1999. Η οργάνωση και η υποστήριξη των συναλλαγών της γίνεται από το Χρηματιστήριο Αθηνών (Χ.Α.), ενώ ο Εκκαθαριστικός Οίκος της Αγοράς Παραγώγων στην Ελλάδα, που φέρει τον ρόλο του κεντρικού αντισυμβαλλόμενου είναι η Εταιρεία Εκκαθάρισης Α.Ε..

Έχοντας αναφερθεί, στις σημαντικότερες χρονικές στιγμές που καθόρισαν την δομή των συγκεκριμένων εργαλείων, αξίζει να επισημανθεί ότι έκτοτε η αγορά των δικαιωμάτων προαίρεσης έχει μετατραπεί σε μία αγορά δίχως όρια και σύνορα, ξεπερνώντας οποιαδήποτε αρχική εκτίμηση και εικασία, ακόμη και των πιο αισιόδοξων, για τη μελλοντική τους εξέλιξη. Ενδεικτικά, παρατίθενται σχετικά διαγράμματα με την εμπορευσιμότητα όλων των διαπραγματεύσιμων στο χρηματιστήριο «Chicago Board Options Exchange» δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης την πρώτη ημέρα διαπραγμάτευσης κάθε έτους από το 1999 έως και το 2023.Τα στοιχεία αντλήθηκαν από τη βάση δεδομένων Refinitiv.



Γράφημα 5 - Εμπορευσιμότητα Διαπραγματεύσιμων Δικαιωμάτων Αγοράς του Χρηματιστηρίου CBOE.



Γράφημα 6 - Εμπορευσιμότητα Διαπραγματεύσιμων Δικαιωμάτων Πώλησης του Χρηματιστηρίου CBOE.

1.2 Μερισματικά Παράγωγα

1.2.1 Η επινόηση και χρήση των μερισματικών παραγώγων

Τα μερισματικά παράγωγα είναι σύγχρονα, καινοτόμα προϊόντα, που εισήχθησαν σχετικά πρόσφατα στις αγορές, όπου από αρκετά νωρίς γνώρισαν σημαντική επιτυχία. Για την πληρέστερη κατανόηση της χρήσης και λειτουργίας τους, αξίζει να ανατρέξει κανείς σε βασικές έννοιες, όπως αυτές που έπονται.

Μέρισμα είναι το μερίδιο ανά μετοχή των καθαρών κερδών μιας εταιρείας, που διανέμεται στους μετόχους της. Είναι σύνηθες να λαμβάνει τη μορφή μετρητών, αλλά μερίσματα μπορούν να δοθούν και με τη μορφή μετοχών ή άλλων περιουσιακών στοιχείων. Συχνά αναφέρεται και ως ποσοστό επί της αγοραίας αξίας της μετοχής, όρος γνωστός και ως μερισματική απόδοση. Έχει διατυπωθεί η άποψη ότι ως έννοια είναι συγκρίσιμη με τα κουπόνια ενός ομολόγου, με κυριότερη διαφορά ότι το ύψος των μερισμάτων είναι συνιστώσα των αποφάσεων της διοίκησης και σχετίζονται άμεσα με την επίδοση της εταιρείας (Buehler-Dhouibi-Sluys, 2010).

Μερισματική Απόδοση
$$\text{Ποσοστό Διανεμηθέντων Κερδών} = \frac{\text{Μέρισμα ανά Μετοχή}}{\text{Κέρδη ανά Μετοχή}}$$

Ως μερισματική πολιτική, νοείται το σύνολο των αποφάσεων που λαμβάνει μία εταιρεία σχετικά με τη διαχείριση και διανομή των κερδών της, και εμπεριέχει μεταξύ άλλων την συμφωνημένη πολιτική για το μέγεθος, το είδος αλλά και το χρόνο της διανομής των μερισμάτων προς τους κοινούς μετόχους. Κρίνεται σκόπιμο, να γίνει αναφορά στις τρεις ακόλουθες βασικές, σχετικές ημερομηνίες:

- ***Ημερομηνία Δήλωσης Μερίσματος***, είναι η ημερομηνία κατά την οποία αποφασίζεται από το διοικητικό συμβούλιο της εταιρείας ότι πρόκειται να καταβληθεί μέρισμα στους μετόχους.
- ***Ημερομηνία Αποκοπής***, είναι δύο ημέρες πριν την ημερομηνία καταχώρησης, οπότε και λήγει το δικαίωμα ιδιοκτησίας του μερίσματος.

- ***<u>Ημερομηνία Καταχώρησης</u>***, είναι η ημερομηνία έως την οποία οφείλει ένας επενδυτής να έχει κάνει επίσημη καταχώρηση των τίτλων ιδιοκτησίας, ώστε να δικαιούται να λάβει το μέρισμα που έχει αποφασιστεί να διανεμηθεί. Με την πάροδο της εν λόγω ημέρας, η αγορά της μετοχής δεν συνεπάγεται τη λήψη μερίσματος, ενώ σε αντίθετη περίπτωση, το μέρισμα θα καταβληθεί κανονικά σε περίπτωση πώλησής της.
- ***<u>Ημερομηνία πληρωμής</u>***, είναι η ημερομηνία κατά την οποία οι επενδυτές λαμβάνουν την πληρωμή του μερίσματος. Ενώ αποτελεί σημαντικό γεγονός για τους μετόχους, εντούτοις η τιμή της μετοχής δεν επηρεάζεται αρνητικά τη δεδομένη ημέρα.

Αναφορικά με τις προτιμήσεις των επενδυτών για τη μερισματική πολιτική, έχουν προταθεί τρεις θεωρίες που προσπαθούν να προσεγγίσουν την οπτική τους:

- ***<u>Dividend Irrelevance Theory (Modigliani-Miller,1961):</u>*** Εξέχουσας σημασίας όσον αφορά στο θέμα της μερισματικής πολιτικής είναι το πρωτοποριακό για την εποχή του άρθρο των Modigliani και Miller. Βασιζόμενοι σε ορισμένες ουτοπικές υποθέσεις, όπως ενδεικτικά είναι η ύπαρξη τέλειων αγορών, η ορθολογική συμπεριφορά των επενδυτών, η βεβαιότητα για την επενδυτική πολιτική της εταιρείας και η προς όφελος των μετόχων δράση των διοικητικών στελεχών, υποστήριξαν ότι οι επενδυτές είναι αδιάφοροι για τη μερισματική πολιτική μιας εταιρείας καθώς μπορούν να δημιουργήσουν τα λεγόμενα homemade dividends, με αγοροπωλησίες μεριδίων μετοχών. Τοιουτοτρόπως, η αξία της επιχείρησης προσδιορίζεται αποκλειστικά από τη δυνατότητά της να παράγει κέρδη και να εξαλείφει τους επιχειρηματικούς κινδύνους που αντιμετωπίζει. Μολονότι η θεωρία τους αποτέλεσε πηγή έμπνευσης για τη σχετική βιβλιογραφία, έχει δεχθεί έντονη κριτική δεδομένου του ότι οι υποθέσεις τις οποίες χρησιμοποιεί ως αφετηρία, δεν βρίσκουν εφαρμογή στην πράξη.
- ***<u>The bird in the hand Theory (Gordon & Lintner):</u>*** O Lintner, ήταν από τους πρώτους που επιχείρησαν να εξετάσουν ένα μοντέλο που να συσχετίζει τα κέρδη και το μέγεθος των μερισμάτων. Στην προσωπική του έρευνα, που γνώρισε μεγάλη απήχηση, καταλήγει στο ότι η αγορά είναι θετικά διακείμενη απέναντι σε εταιρείες με σταθερή μερισματική πολιτική. Σύμφωνα με τη θεωρία των Gordon & Lintner, οι επενδυτές πιστεύουν ότι τα μερίσματα ενέχουν

μικρότερο κίνδυνο από τα προβλεπόμενα μελλοντικά κεφαλαιακά κέρδη, και άρα αξιολογούν καλύτερα επιχειρήσεις που διανέμουν μεγάλο ποσοστό των κερδών. Προκύπτει ότι η παρούσα θεωρία έρχεται σε πλήρη αντίθεση με τη θεωρία των Modigliani and Miller, καθώς η αξία της μετοχής μιας επιχείρησης αποτελεί εξαρτημένη μεταβλητή του ποσοστού των προς διανομή μερισμάτων.

- ***Tax Preference or Differential Theory (Lichtenberger & Ramaswamy):*** Η θεωρία επιλογής φορολογίας βασίζεται στους διαφορετικούς φορολογικούς συντελεστές με τους οποίους φορολογούνται τα μερίσματα και τα κεφαλαιακά κέρδη. Αναλυτικότερα, τα παρακρατηθέντα κέρδη μετασχηματίζονται σε κεφαλαιακά κέρδη, τα οποία φορολογούνται με χαμηλότερα ποσοστά από ότι τα μερίσματα. Σε εκτενέστερη ανάλυση της θεωρίας τους, διατυπώνεται η άποψη ότι οι μέτοχοι θα πρέπει να αναζητούν μακροπρόθεσμες μετοχές με υψηλά κεφαλαιακά κέρδη και χαμηλά μερίσματα, ιδίως αν δεν σκοπεύουν να ρευστοποιήσουν άμεσα τα κέρδη τους με τη μορφή πώλησης των μετοχών τους, ώστε η μη πληρωμή του αντίστοιχου φόρου να ενισχύει τη συνολική απόδοση τους.

Μολονότι δεν έχει πλήρως διασαφηνιστεί ο λόγος για τον οποίο οι εταιρείες διανέμουν μέρος των κερδών τους ως μερίσματα, ούτε το ακόρεστο ενδιαφέρον των επενδυτών για αυτά (Black, 1976), υπάρχουν τρεις ευρέως διαδεδομένες θεωρίες, που προσπαθούν να ερμηνεύσουν τις μερισματικές αποφάσεις μιας εταιρείας:

- Ορισμένες προσεγγίσεις έχουν ως αφετηρία την “ασύμμετρη πληροφόρηση” μεταξύ στελεχών και μετόχων, και διατείνονται ότι οι εταιρείες μέσω της καταβολής μερίσματος προμηνύουν μελλοντική κερδοφορία. Πιο συγκεκριμένα, η Θεωρία της Σήμανσης (Information Signaling Theory) υποστηρίζει ότι τα μερίσματα εμπεριέχουν ουσιώδες φορτίο πληροφορίας για τους επενδυτές σχετικά με τις αναπτυξιακές προοπτικές της εταιρείας, οι οποίοι στερούνται πρόσβασης σε δεδομένα που είναι γνωστά στα εσωτερικά στελέχη. Ως θεωρία, συνδέεται άρρηκτα με θεμελιώδεις έννοιες της Θεωρίας Παιγνίων, και μολονότι έχει αντιμετωπιστεί με έντονο σκεπτικισμό από αναλυτές και επενδυτές, η ύπαρξη σχέσης μεταξύ της μερισματικής πολιτικής και των μελλοντικών επιδόσεων της εταιρείας, είναι εμφανής σε πληθώρα μελετών.

- Μία ακόμη εύλογη εξήγηση είναι ότι οι διανομές μερισμάτων αμβλύνουν τη σύγκρουση συμφερόντων μεταξύ στελεχών και μετόχων, καθώς μειώνουν το ποσό ρευστών που οι πρώτοι έχουν στη διάθεσή τους. Ειδικότερα, η Free Cash Flow Hypothesis (FCF) προέκυψε ως αποτέλεσμα της προσπάθειας της εμπειρικής έρευνας να δοκιμάσει να προσαρμόσει τη θεωρητική προσέγγιση και ανάπτυξη της Θεωρίας της Σήμανσης, στις διαστάσεις των δεδομένων της πραγματικότητας (Bhattacharyya N., 2007). Υπό αυτό το πρίσμα τα μερίσματα χρησιμοποιούνται από τους μετόχους ως μέσο που εξαναγκάζει τα στελέχη να περιορίζουν τις άσκοπες διανομές ρευστότητας. Προς αυτή την κατεύθυνση, ο Easterbrook (1984) υποθέτει ότι τα μερίσματα χρησιμοποιούνται για να απομακρύνουν την περίσσεια μετρητών από τον έλεγχο των στελεχών. Κύριο απότοκο είναι ότι τα στελέχη θα αποταθούν στις χρηματαγορές, προκειμένου να εξασφαλίσουν την απαραίτητη ρευστότητα για τα επιχειρηματικά πλάνα. Ως εκ τούτου, αφενός επιβάλλεται πειθαρχία στα στελέχη και αφετέρου συρρικνώνεται το κόστος παρακολούθησης των στελεχών (monitoring). Επιπρόσθετα, η ανάγκη των στελεχών να απευθυνθούν στην αγορά για αναζήτηση κεφαλαίων λειτουργεί ως αντίβαρο στην αποστροφή τους για ανάληψη κινδύνου.

- Οι Shefrin και Statman (1984) διατύπωσαν τη “Behavioural Life-Cycle” θεωρία, η οποία βασίζεται στον αυτοέλεγχο του ορθολογικού (rational) ιδιώτη επενδυτή. Αυτή η θεωρία αναφέρεται κυρίως σε επενδυτές που επιλέγουν να βιοπορίζονται από χρηματοροές που λαμβάνουν ως καρπό των επενδύσεών τους και κατά μία έννοια επομένως απαιτούν την λήψη μερισμάτων. Ένα επιπλέον χαρακτηριστικό των ορθολογικών επενδυτών είναι ότι επιδεικνύουν έντονο ενδιαφέρον για την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου τους σε σχέση με τον κίνδυνο που αναλαμβάνουν, σε αντίθεση με τους “φυσιολογικούς” (normal) επενδυτές οι οποίοι, σύμφωνα με τους παραπάνω συγγραφείς, επηρεάζονται από μεροληψία και συναισθηματισμό κατά τη λήψη αποφάσεων (Statman, 2005).

Τα τελευταία χρόνια, έχει καταγραφεί αυξανόμενο ενδιαφέρον για επένδυση με άμεση έκθεση σε μερίσματα, καθώς είναι πλέον σύνηθες να αντιμετωπίζονται ως μία αυτόνομη κατηγορία των περιουσιακών στοιχείων μίας εταιρείας, παρά ως μία χρηματοροή που απορρέει από την επένδυση σε μία μετοχή. Μολονότι είναι καθοριστικής σημασίας για τη διαμόρφωση της τελικής απόδοσης και την αξιολόγηση του ρίσκου ενός μετοχικού χαρτοφυλακίου, τα τυποποιημένη εισηγμένα χρηματοπιστωτικά μέσα δεν ενδεικνύονταν για την διαχείριση της σχετικής έκθεσης. Προς αυτή την κατεύθυνση, δημιουργήθηκαν τα μερισματικά παράγωγα, τα οποία αντιπροσωπεύουν απαιτήσεις στις πληρωμές μερισμάτων κατά τη διάρκεια ενός ημερολογιακού έτους μίας μεμονωμένης εταιρείας, ή ενός συνόλου εταιρειών που αποτελούν στοιχεία ενός μετοχικού δείκτη.

Ο Brennan (1998), πρώτος οραματίστηκε τη δημιουργία μιας αγοράς μερισμάτων, αναλογιζόμενος τη καθοριστική σημασία τους στην τιμολόγηση των μετοχών και άρα πρότεινε να διαχωριστούν τα μερίσματα από τον μετοχικό δείκτη. Στην εξωχρηματιστηριακή αγορά, τα μερίσματα έχουν αποτελέσει αντικείμενο διαπραγμάτευσης κυρίως με τη μορφή συμφωνίας ανταλλαγής (swaps) μερισμάτων εταιρειών που ήταν μέλη μετοχικών δεικτών. Το χρηματιστήριο «South African Futures Exchange (SAFEX)» ήταν το πρώτο που έθεσε προς διαπραγμάτευση το 2002 μερισματικά συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, τα οποία μόλις το 2006 γνώρισαν ορισμένη επιτυχία (Wilkens and Wimschulte, 2009). Το 2008, το Ευρωπαϊκό Χρηματιστήριο (Eurex), το μεγαλύτερο χρηματιστήριο παραγώγων παγκοσμίως, εισήγαγε τα πρώτα μερισματικά συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, των οποίων η επιτυχία ήταν πρωτοφανής, δεδομένου του ότι η μερισματική απόδοση του εν λόγω δείκτη αποτελούσε σχεδόν τη μισή συνολική του απόδοση από τα τέλη Δεκεμβρίου του 1991 (Radu Tunaru, 2013).

Τα μερισματικά παράγωγα επιτρέπουν στους ενδιαφερόμενους επενδυτές να λαμβάνουν θέσεις ή να αντισταθμίζουν μελλοντικές πληρωμές μερισμάτων, ενώ μπορεί να βασίζονται σε μεμονωμένες μετοχές ή ακόμη και σε μετοχικούς δείκτες. Οι δυνητικές χρήσεις και εφαρμογές τους παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, ενώ η συμπερίληψή τους σε ένα επενδυτικό χαρτοφυλάκιο, ενέχει κοινώς παραδεκτά οφέλη, πέρα από την σαφή και προφανή βελτίωση της διαφοροποίησής του λόγω της μικρότερης συσχέτισης που επιδεικνύουν με άλλες τυπικές επενδύσεις. Πρωτίστως, παρέχουν προστασία του αναμενόμενου από επενδύσεις εισοδήματος, αφού ο επενδυτής κατοχυρώνει τη λήψη των μελλοντικών μερισμάτων, ενώ συνάμα επιτυγχάνεται η αντιστάθμιση του μερισματικού κινδύνου, ιδίως για δικαιώματα προαίρεσης επί μετοχών. Επιπλέον, ένας επενδυτής δύναται πλέον να τοποθετηθεί σε μία επένδυση με γνώμονα τις προσδοκίες του για τη μερισματική της πολιτική, έχοντας απομονώσει τις αναπτυξιακές προοπτικές του υποκείμενου τίτλου.

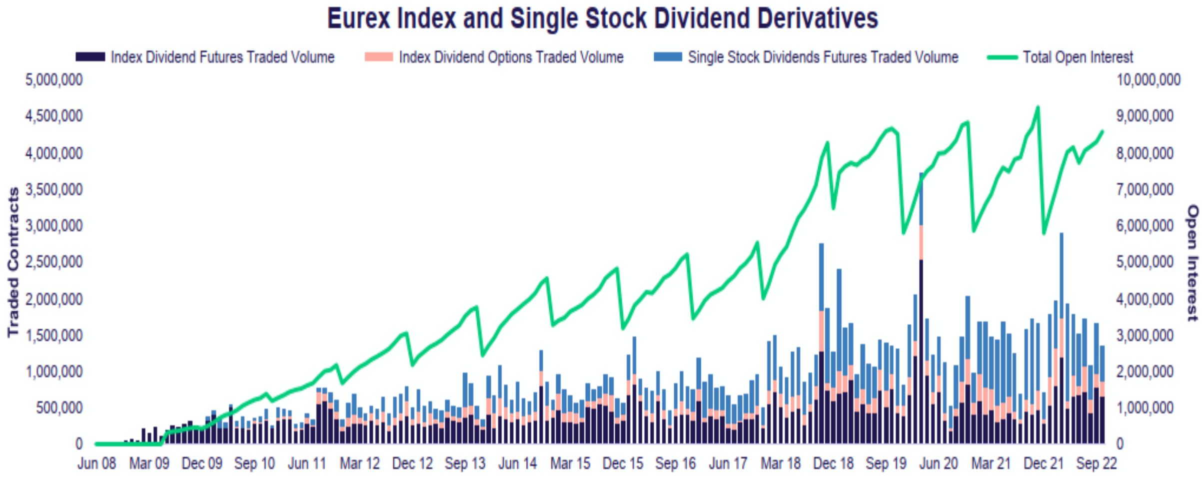
Αναφορικά με ορισμένα διαδικαστικά λειτουργίας της συγκεκριμένης αγοράς, τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, αλλά και τα δικαιώματα προαίρεσης διακανονίζονται με την πραγματοποιηθείσα αξία των πληρωμών μερισμάτων σε μία μελλοντική χρονική περίοδο που αναγράφεται στη σύμβαση. Στην Ευρώπη, η πιο συνηθισμένη περίοδος διακανονισμού είναι η ετήσια (ως μήνας διακανονισμού ορίζεται ο Δεκέμβριος) και η αξία ισοδυναμεί με τα καταβληθέντα μερίσματα σε μετρητά για μεμονωμένες μετοχές και σε ποσό μερίσματος που προκύπτει από ισοδυναμία με τα λεγόμενα «index points» για τους μετοχικούς δείκτες.

Έπεται μία σύντομη ανασκόπηση των σημαντικότερων με χρονική σειρά γεγονότων που καθόρισαν τη συγκεκριμένη αγορά, από την εισαγωγή των συγκεκριμένων προϊόντων στο διεθνές χρηματιστήριο παραγώγων Eurex Exchange.

Eurex Dividend Derivatives	Date
Launch of EuroStoxx 50 Index Dividend Futures (FEDX)	Jun 2008
Launch of 4 additional index futures (SMI, DAX, EuroStoxx Select Dividend, DivDAX)	Jun 2009
Launch of options on EURO STOXX 50 Index Dividend Futures (OEXD)	May 2010
Launch of sector index dividend futures	Mar 2012
FEXD – CFTC approval for U.S. Participants	Jan 2017
Launch 2 sector index dividend futures	Jul 2019
Launch of 3 MSCI Index Dividend Futures	Oct 2019
Launch of June expiries for EURO STOXX 50 Index Dividend Futures	Oct 2020
Launch of the FTSE 100 Declared Dividend Index Futures (FTDD)	Mar 2021
Launch of June expiries and additional December expiries up to 7 years for EURO STOXX Banks Index Dividend Futures	May 2022

Πίνακας 4 - Εξέλιξη των Μερισματικών Παραγώγων στο διεθνές χρηματιστήριο Eurex Exchange

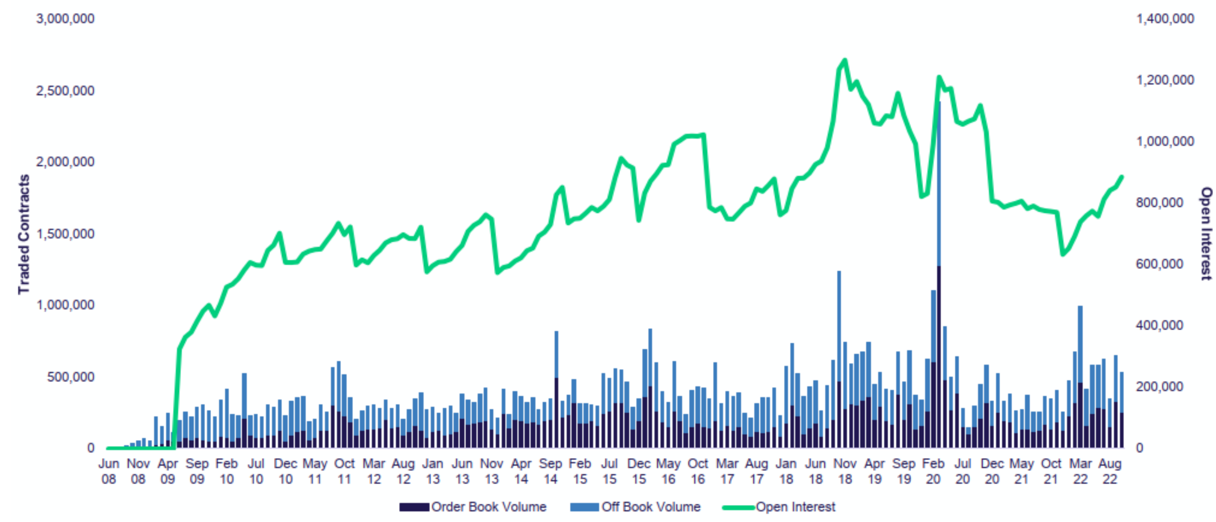
Παρατίθεται επίσης το διάγραμμα με την εμπορευσιμότητα των διαπραγματεύσιμων μερισματικών παραγώγων στο σύνολό τους, στο συγκεκριμένο χρηματιστήριο παραγώγων από την ημερομηνία έναρξης της διαπραγμάτευσής τους έως και το Σεπτέμβριο του 2022. Τα στοιχεία αντλήθηκαν από τη σχετική ιστοσελίδα.



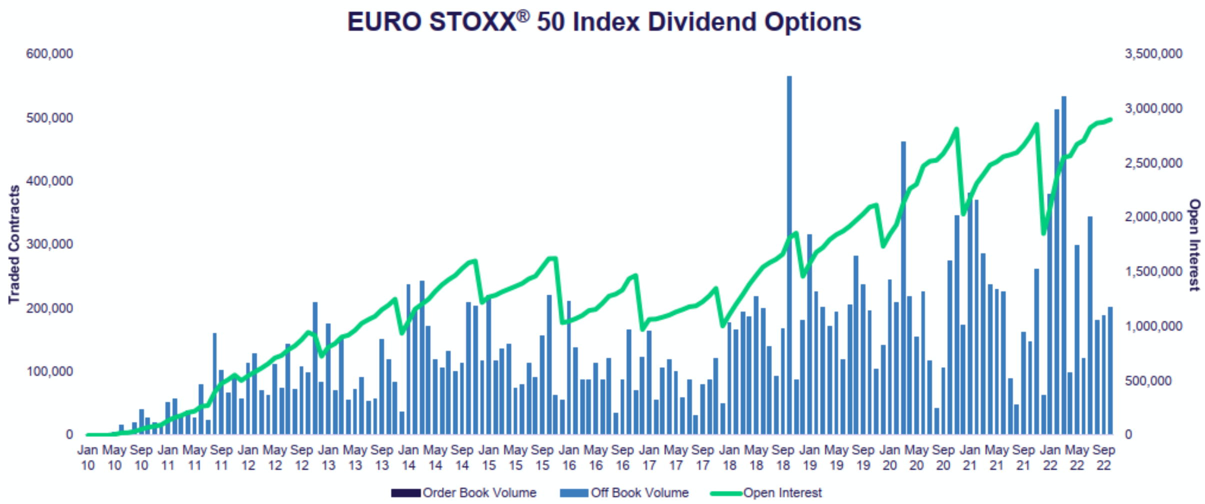
Γράφημα 7 - Εμπορευσιμότητα Μερισματικών Παραγώγων χρηματιστηριακής αγοράς Eurex.

Με το ξέσπασμα της πανδημίας του κορονοϊού στις αρχές του 2020, η συγκεκριμένη αγορά, ήρθε αντιμέτωπη με τη μεγαλύτερη πρόκληση από την θέσπισή της· την σαρωτική ακύρωση των μερισμάτων των εταιρειών λόγω των απρόσμενων και φαινομενικά νέων εξελίξεων. Η κρίση περαιτέρω ενισχύθηκε από περιορισμούς που επέβαλε η Ευρωπαϊκή Κεντρική Τράπεζα στις ευρωπαϊκές τράπεζες, οι οποίες ανέστειλαν τυχόν πληρωμές μερίσματος μέχρι το τέλος του 2021, για λόγους εξασφάλισης ρευστότητας εντός του χρηματοοικονομικού συστήματος. Η επερχόμενη αναταραχή ήταν ιδιαίτερα έντονη, καθώς ο κίνδυνος μιας πανδημίας δεν υφίστατο, και επομένως δεν θα μπορούσε να είχε προβλεφθεί. Η εισβολή της Ρωσίας στην Ουκρανία, αποτέλεσε το επόμενο σημαντικό γεγονός χρηματοπιστωτικής αστάθειας που συγκλόνισε τις αγορές, σε μικρό χρονικό διάστημα από το προηγούμενο. Οι οικονομικές επιπτώσεις ήταν έντονες για τα μερισματικά παράγωγα, όπως άλλωστε και για τις περισσότερες κατηγορίες περιουσιακών στοιχείων, αφού για άλλη μία φορά οι αγορές κλονίστηκαν από ένα συμβάν που πριν διαδραματιστεί, φάνταζε εντελώς απίθανο.

Για την πληρέστερη παρουσίαση των συγκεκριμένων χρηματοπιστωτικών εργαλείων, παρατίθενται τα διαγράμματα με την εμπορευσιμότητα των μερισματικών συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης αλλά και των μερισματικών δικαιωμάτων προαίρεσης επί του δείκτη Euro Stoxx 50, από την έναρξη της διαπραγμάτευσής τους έως και το καλοκαίρι του 2022, από στοιχεία που αντλήθηκαν από σχετική ιστοσελίδα.



Γράφημα 8 - Εμπορευσιμότητα Μερισματικών Συμβολαίων Μελλοντικής Εκπλήρωσης επί του δείκτη Euro Stoxx 50



Γράφημα 9 - Εμπορευσιμότητα Μερισματικών Δικαιωμάτων προαίρεσης επί του δείκτη Euro Stoxx 50

1.2.2 Ιστορική Αναδρομή Μερισματικών Μοντέλων

Η βιβλιογραφία που άπτεται του συγκεκριμένου θέματος είναι αρκετά περιορισμένη, δεδομένου του ότι τα μερισματικά παράγωγα είναι χρηματοοικονομικά προϊόντα που εισήχθησαν σχετικά πρόσφατα στις αγορές. Επιπλέον, το ενδιαφέρον των ακαδημαϊκών, προσηλώνεται στο ερώτημα εάν τα μερίσματα είναι εύλογο να αντιμετωπίζονται ως αναλογικά της τιμής του υποκείμενου τίτλου, σταθερά ή ως ένας συνδυασμός των δύο. Στην συγκεκριμένη ενότητα, κρίνεται ωφέλιμο να παρουσιαστούν ορισμένες μελέτες που έχουν εκπονηθεί από κορυφαίους μελετητές του κλάδου και συνεισφέρουν στην ολοένα και πληρέστερη κατανόηση των μερισμάτων και της επίδρασής τους στην αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης:

- Οι **Black-Scholes (1973)**, στην θεμελιώδη εργασία τους, επινόησαν ένα μαθηματικό μοντέλο συνεχούς χρόνου και συνεχών τιμών, με το οποίο υπολογίζεται η δίκαιη τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης, υπό ορισμένες προϋποθέσεις. Η μελέτη αυτή, αποτέλεσε ορόσημο στην ιστορία της τιμολόγησης παραγώγων, τα οποία πλέον φαντάζουν περισσότερο προσιτά στο επενδυτικό κοινό. Οι τύποι κλειστής μορφής που προτάθηκαν, για δικαιώματα αγοράς και πώλησης, παραμένουν ακόμη ευρέως χρησιμοποιούμενοι, τόσο για λόγους ευχρηστίας και μαθηματικής ευκολίας, όσο και για λόγους αποτελεσματικότητας. Μεταξύ άλλων, τα αποτελέσματα της έρευνάς τους, προϋποθέτουν ότι η στοχαστική διαδικασία που περιγράφει την κίνηση της τιμής του υποκείμενου τίτλου είναι η γεωμετρική κίνηση Brown και ως εκ τούτου η καταβολή μερισμάτων δεν είναι εφικτή πριν τη λήξη του δικαιώματος στα πλαίσια του μοντέλου που ανέπτυξαν. Παρά την αδιαμφισβήτητη συμβολή της μελέτης τους στην τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης, οι περισσότερες μετοχές που λειτουργούν ως υποκείμενοι τίτλοι, πληρώνουν μέρισμα στους μετόχους και χρήζουν επομένως διαφορετικής μοντελοποίησης.

- Ο **Merton (1973)** επακολούθως, με εφαλτήριο την καθοριστική μελέτη που προαναφέρθηκε, πρώτος αποπειράθηκε να αναιρέσει την υπόθεση της μη ύπαρξης μερίσματος, αποδεικνύοντας ότι η τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης είναι εφικτή, επιτρέποντας μία ντετερμινιστική μερισματική απόδοση. Τα αποτελέσματα της μελέτης του, καταδεικνύουν ότι η εξίσωση των Black-Scholes, συστηματικά υπερτιμά τα δικαιώματα που φέρουν ως υποκείμενο τίτλο μία μετοχή που καταβάλει μέρισμα στους επενδυτές. Αξίζει να αναφερθεί ότι η προσπάθειά του να μοντελοποιήσει διακριτά μερίσματα, δεν στέφθηκε με επιτυχία καθώς υπονομεύεται η απλότητα της χρήσης του μοντέλου.

- Ο **Geske (1978)** παρουσίασε ένα μοντέλο, σύμφωνα με το οποίο τα μερίσματα είναι στοχαστικά, όπως εξάλλου επιβεβαιώνεται και από πραγματικά οικονομικά στοιχεία εισηγμένων εταιρειών. Στη μελέτη του, αναφέρει ότι η υπόθεση του σταθερού μερίσματος, είναι ρεαλιστική μόνο στην περίπτωση βραχυπρόθεσμων δικαιωμάτων προαίρεσης, όπου η αλλαγή της μερισματικής πολιτικής είναι λιγότερο πιθανή, και έχοντας αποκλείσει το ενδεχόμενο μιας χρεοκοπίας. Υπέρ της σταθερότητας των μερισμάτων, συνηγορεί και η απροθυμία των διοικητικών στελεχών να μεταβάλουν προς οποιαδήποτε κατεύθυνση τις διανομές μετρητών προς τους επενδυτές, των οποίων οι προσδοκίες έχουν καθοριστικό ρόλο για την τιμή της μετοχής. Κύριο απότοκο της έρευνάς τους είναι ότι η στοχαστικότητα των μερισμάτων, αυξάνει τη διακύμανση του υποκείμενου τίτλου, επηρεάζοντας έτσι και τη τιμή του δικαιώματος προαίρεσης. Εμπειρικά, παρατηρεί ότι η συγκεκριμένη προσαρμογή, ενδεχομένως εξαλείφει μία βασική τάση του μοντέλου των Black-Scholes, να υποτιμά δικαιώματα που είναι deep-out-of-the-money. Μοναδική κριτική που έχει προσαφθεί στη συγκεκριμένη προσέγγιση και έχει βαρύνουσα σημασία, είναι ότι τα μερίσματα δύναται να λάβουν αρνητικές τιμές.

- Οι **Korn-Rogers (2005)**, συνείσφεραν ουσιαστικά στην εν λόγω βιβλιογραφία με την δημοσιοποίηση του άρθρου τους, στο οποίο δόθηκε έμφαση στο γεγονός του ότι στην πράξη, τα μερίσματα αποτελούν πληρωμές ρευστού που λαμβάνουν χώρα σε διακριτές χρονικές στιγμές, σε συνέχεια σχετικής από την εταιρεία ανακοίνωσης. Στηρίζουν την προσέγγιση τους στην εύρεση της διαδικασίας που περιγράφει τη πληρωμή των μερισμάτων, αναφέροντας ότι πρόκειται για μία log-Levy διαδικασία, που αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως η διαδικασία του τυχαίου περίπατου (random walk) σε συνεχές χρόνο. Κάνοντας χρήση του κατοχυρωμένου μοντέλου Προεξόφλησης Μερισμάτων, σύμφωνα με το οποίο η τιμή της μετοχής είναι η παρούσα αξία των μελλοντικών μερισμάτων που διανέμει, καταλήγουν στη διαδικασία της τιμής της μετοχής και κατ' επέκταση αντλούν τύπους τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης. Η μελέτη τους είναι περισσότερο αξιόπιστη, όταν τα επικείμενα μερίσματα είναι γνωστά εκ των προτέρων.

- Ο **Lioui (2006)**, αποσκοπεί με τη μελέτη του να γεφυρώσει το χάσμα που παρατηρεί ότι υπάρχει όσον αφορά στην τιμολόγηση παραγώγων όπου ο υποκείμενος τίτλος παρουσιάζει στοχαστική μερισματική απόδοση. Καταλήγει σε ορισμένα χρήσιμα συμπεράσματα για παράγωγα προϊόντα με γραμμικές συναρτήσεις κέρδους στη λήξη, όπως ότι έχουν μοναδική τιμή υπό την υπόθεση των πλήρων αγορών καθώς και ότι είναι απαραίτητο ένας επενδυτής να ακολουθεί δυναμική στρατηγική αντιστάθμισης κινδύνου για να εξισορροπήσει μεταβολές της οικονομίας που επηρεάζουν το χαρτοφυλάκιό του.

- Οι **Kruse-Muller (2009)**, αναγνωρίζοντας την στοχευμένη προσέγγιση της προαναφερθείσας ανάλυσης των Korn-Rogers (2005), την επεκτείνουν εισάγοντάς τη στο πλαίσιο των Black-Scholes, με κύριο στόχο την τιμολόγηση δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου, όπου ο υποκείμενος τίτλος διανέμει μερίσματα. Θεμέλιοι λίθοι της προσέγγισής τους είναι ορισμένες ρεαλιστικές υποθέσεις, εκ των οποίων εξέχουσας σημασίας είναι η συσχέτιση της τρέχουσας τιμής της μετοχής με το μέρισμα καθώς και ότι προσεγγίζοντας την ημερομηνία πληρωμής του μερίσματος, η τυχαιότητα που παρουσιάζει σταδιακά ελαττώνεται. Πράγματι, ολοκληρώνουν την έρευνά τους, παρουσιάζοντας εύχρηστους τύπους κλειστής μορφής υπό την υπόθεση πολλαπλών στοχαστικών μερισμάτων ως τη λήξη του δικαιώματος προαίρεσης, αφού όμως έχει προηγηθεί μία σταθερή, γνωστή πρώτη πληρωμή μερίσματος.

- Οι **Wilken-Wimschulte (2009)**, το ίδιο έτος, με την ανάλυσή τους, αποτέλεσαν τους πρώτους ακαδημαϊκούς που αποπειράθηκαν να μελετήσουν εμπειρικά τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης με υποκείμενο δείκτη τον Euro Stoxx 50, μετά την εισαγωγή τους από το Ευρωπαϊκό Χρηματιστήριο (Eurex) στα μέσα του 2008. Όπως αναφέρουν, εναποθέτουν τη διεξαγωγή των συμπερασμάτων τους σε μία ανάλυση arbitrage, ενώ δεν κάνουν χρήση κάποιου μοντέλου πρόβλεψης των μελλοντικών μερισμάτων. Προκύπτει ότι κατά τους πρώτους μήνες διαπραγμάτευσης αυτών των συμβολαίων, οι δίκαιες τιμές τους αποκλίνουν σε μεγάλο βαθμό από αυτές των χαρτοφυλακίων αντιστάθμισης που βασίζονται σε δικαιώματα προαίρεσης πάνω σε δείκτες. Καταλήγοντας, σπείρουν την υποψία δημιουργίας εύκολου και σίγουρου κέρδους από τα εν λόγω συμβόλαια, καθώς υποστηρίζουν ότι οι συγκεκριμένες αποκλίσεις δεν δικαιολογούνται από τυπικούς περιορισμούς της αγοράς, όπως είναι το κόστος συναλλαγών ή το bid-ask spread.

- Οι **Buehler-Dhouibi-Sluys (2011)** επιχείρησαν να μελετήσουν την από κοινού τιμολόγηση μετοχών και μερισματικών παραγώγων, υποστηρίζοντας ότι η τιμή της μετοχής εκτινάσσεται στις ανακοινωμένες ημερομηνίες καταβολής μερισμάτων, ενώ ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ημερομηνίες πληρωμής. Τα άλματα αυτά που πραγματοποιούνται, περιγράφονται από μία διαδικασία Ornstein–Uhlenbeck που έχει ως απότοκο η μερισματική απόδοση να περιστρέφεται γύρω από ένα μακροπρόθεσμο μέσο επίπεδο απόδοσης. Μολονότι η προσέγγιση τους μπορεί να επιφέρει αρνητικά μερίσματα, το μοντέλο τους είναι ιδιαίτερα ευέλικτο καθώς επιτρέπει την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης χρησιμοποιώντας προσομοίωση Monte Carlo.

- Ο **Golez (2011)** εξέτασε την πιθανότητα το dividend-price ratio, να ενισχύει τη δυνατότητα πρόβλεψης μελλοντικών αποδόσεων. Χρησιμοποιώντας το απλό μοντέλο παρούσης αξίας, επιδίωξε μέσω της τεκμαρτής μερισματικής ανάπτυξης να διορθώσει τον παραδοσιακό δείκτη πληρωμής μερισμάτων (Dividend Payout ratio, DP) για προβλήματα που σχετίζονται με τις έντονες μεταβολές στο χρόνο που παρουσιάζει η μερισματική πολιτική μιας εταιρείας.

- Ο **Suzuki (2014)**, στη μελέτη του επιδίωξε να υπολογίσει την αξία του δείκτη Euro Stoxx 50, χρησιμοποιώντας τις τιμές των μερισματικών συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης, δεδομένου ότι σχετικά ιστορικά στοιχεία είναι διαθέσιμα από τις 30 Ιουνίου, 2008. Από τα σημαντικότερα συμπεράσματα που πηγάζουν από την συγκεκριμένη ανάλυση, είναι ότι τόσο ο αναμενόμενος ρυθμός αύξησης των μερισμάτων, όσο και τα ασφάλιστρα κινδύνου, έχουν άμεση επιρροή στα επίπεδα της μεταβλητότητας ενός μετοχικού δείκτη. Αξιοσημείωτο είναι ότι λαμβάνεται υπόψη και η χρονική διάρθρωση των επιτοκίων καθώς η μελέτη αναφέρεται σε μία χρονική περίοδο διαδοχικών μειώσεων τους από την Ευρωπαϊκή Κεντρική Τράπεζα.

- Ο **Tunaru (2018)**, εξετάζει δύο διαφορετικά μοντέλα για την αποτίμηση μερισματικών παραγώγων, κάνοντας αναφορά στα θεωρητικά και πρακτικά τους πλεονεκτήματα. Το πρώτο μοντέλο που παρουσιάζει είναι ένα μοντέλο διάχυσης άλματος, όπου όλα τα άλματα επηρεάζουν αρνητικά τον μετοχικό δείκτη, αντανακλώντας έτσι την προσαρμογή του για τη διανομή μερισμάτων. Εν συνεχεία, χρησιμοποιώντας προσομοίωση Monte Carlo, τιμολογούν μερισματικά δικαιώματα προαίρεσης. Το δεύτερο είναι ένα στοχαστικό μοντέλο διάχυσης, που περιγράφει το σωρευτικό μέρισμα του δείκτη στη διάρκεια ενός έτους. Πρόκειται για μία διαδικασία Verhulst-Pearl, με ευρεία χρήση στη βιολογία και αραιή εμφάνιση στην χρηματοοικονομική βιβλιογραφία. Σχετικά με τις παραμέτρους που υπεισέρχονται στην συγκεκριμένη εξίσωση, η προσέγγισή τους γίνεται κάνοντας χρήση παρελθοντικών στοιχείων. Η προσέγγιση γίνεται επίσης με προσομοιώσεις Monte Carlo, γεγονός που επιτρέπει την τιμολόγηση χρηματοοικονομικών προϊόντων, που εξαρτώνται από τα παραχθέντα μονοπάτια που δημιουργούνται. Αξίζει να σημειωθεί ότι το τελευταίο εκ των δύο μοντέλο, θα αξιοποιηθεί για του σκοπούς της παρούσας διπλωματικής.

➢ Οι **Filipovic-Willems (2020)**, με πρόφαση το ότι τα μερίσματα έχουν κατοχυρωθεί ως μία αυτόνομη κατηγορία περιουσιακού στοιχείου για πληθώρα επενδυτών, εισήγαγαν ένα μοντέλο για την από κοινού τιμολόγηση των μερισμάτων και των επιτοκίων. Στο πλαίσιο αυτό, εξάγουν τύπους κλειστής μορφής για τη τιμολόγηση ομολόγων, μερισματικών συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης, μεμονωμένων μετοχών που προσφέρουν μέρισμα στους επενδυτές αλλά και δικαιωμάτων προαίρεσης, λαμβάνοντας υπόψη τη σχετική συνάρτηση κέρδους. Υποθέτουν ότι τα μερίσματα καταβάλλονται σε συνεχές χρόνο, ενώ αγνοούν την πιθανότητα χρεοκοπίας. Αυτές οι παραδοχές, είναι θεμιτές στο πλαίσιο τιμολόγησης παραγώγων επί ενός χρηματιστηριακού δείκτη, αλλά δεν αντικατοπτρίζουν την πραγματικότητα για μία μεμονωμένη μετοχή.

Συγγραφείς	Τίτλος Έρευνας	Χρονολογία
Black, Scholes	**Pricing of Options and Corporate Liabilities**	1973
Merton	**Theory of Rational Option Pricing**	1973
Geske	**The pricing of option with Stochastic Dividend Yield**	1978
Korn, Rogers	**Stocks paying discrete dividends: modelling and option pricing**	2005
Lioui	**Stochastic dividend yields and derivatives pricing in complete markets**	2006
Kruse, Muller	**Pricing American Call Options under the Assumption of Stochastic Dividends – An application of the Korn-Rogers-Model**	2009
Wilkens, Wimschulte	**The pricing of dividend futures in the European market: A first empirical analysis**	2009
Buehler, Dhouibi, Sluys	**Stochastic Proportional Dividends**	2011
Golez	**Expected Returns and Dividend Growth Rates Implied in Derivative Markets**	2011
Suzuki	**Measuring the Fundamental Value of a Stock Index through Dividend Future Prices**	2014
Tunaru	**Dividend Derivatives**	2013
Filipovic, Willems	**A term structure model for dividends and interest rates**	2020

Πίνακας 5 - Ανασκόπηση Εμπειρικών Μελετών

1.3 Περιγραφή Διπλωματικής

Στην παρούσα ενότητα, γίνεται μία σύντομη περιγραφή της δομής της παρούσας διπλωματικής. Ξεκινώντας με το **Πρώτο Κεφάλαιο**, πραγματοποιήθηκε εκτενής αναφορά στην έννοια και φύση των δικαιωμάτων προαίρεσης, προσανατολίζοντας το ενδιαφέρον στις βασικές θέσεις αγοράς και πώλησης αλλά και στους παράγοντες που επηρεάζουν την τιμή τους. Ορισμένα ιστορικά στοιχεία, σε συνδυασμό με μία συνοπτική παρουσίαση της διαπραγματευτικής τους δυναμικής στις σύγχρονες χρηματιστηριακές αγορές, ανέδειξαν το ενδιαφέρον που χαρακτηρίζει τα συγκεκριμένα εργαλεία. Επίσης, ο αναγνώστης εισάγεται στις πολύ βασικές έννοιες του μερίσματος και της μερισματικής πολιτικής, προκειμένου εν τέλει να παρουσιαστεί η δομή και φιλοσοφία των Μερισματικών Παραγώγων, που αποτελούν το κύριο αντικείμενο ενδιαφέροντος της εν λόγω εργασίας. Για λόγους πληρότητας κειμένου, στο τέλος του κεφαλαίου παρατίθενται με χρονική σειρά οι πιο διαδεδομένες μελέτες που άπτονται του θέματος της τιμολόγησής τους.

Στο **Δεύτερο Κεφάλαιο**, εισάγονται βασικές χρηματοοικονομικές έννοιες, μαθηματικής φύσεως, που έχουν δεσπόζουσα θέση στη σχετική βιβλιογραφία για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης. Αναλυτικότερα, μεταξύ άλλων, εκθέτονται και αναλύονται σε μεγάλο βαθμό οι στοχαστικές διαδικασίες, η Γεωμετρική Κίνηση Brown και το περίφημο λήμμα του Ito, με απώτερο σκοπό να προκύψει η διαφορική εξίσωση Black-Scholes-Merton για την τιμολόγηση Ευρωπαϊκών Δικαιωμάτων Προαίρεσης, υπό τις υποθέσεις του γνωστού επιτοκίου και ρυθμού μερισματικής απόδοσης. Η ανάδειξη του συγκεκριμένου μοντέλου είναι βαρύνουσας σημασίας, καθώς έθεσε τα θεμέλια για τη μετέπειτα μελέτη της αποτίμησης των χρηματοοικονομικών αυτών παραγώγων από πλήθος ερευνητών.

Στο **Τρίτο Κεφάλαιο**, παρουσιάζεται ένα στοχαστικό μοντέλο διάχυσης, εφαρμόσιμο τόσο για μετοχικούς δείκτες, όσο και για μεμονωμένες εταιρείες υπό την προϋπόθεση της διανομής μερίσματος προς τους επενδυτές. Το εν λόγω μοντέλο, αποσκοπεί στην αποτύπωση της διαδικασίας που περιγράφει το σωρευτικό μέρισμα για ένα δεδομένο, ετήσιο επενδυτικό χρονικό ορίζοντα και επηρεάζει άμεσα την τιμή διαπραγμάτευσης του υποκείμενου τίτλου. Επιπλέον, περιγράφεται η μέθοδος Monte Carlo που θα χρησιμοποιηθεί στα πλαίσια της παρούσης διπλωματικής εργασίας για την τιμολόγηση των μερισματικών δικαιωμάτων προαίρεσης.

Στο **Τέταρτο Κεφάλαιο**, γίνεται η περιγραφή και ανάλυση των εμπειρικών δεδομένων, όπου ως υποκείμενος τίτλος έχει επιλεχθεί η μετοχή της Apple Inc, μίας εδραιωμένης εταιρείας, που πρωταγωνιστεί στη παγκόσμια χρηματιστηριακή αγορά τις τελευταίες δεκαετίες. Εφαρμόζεται ανάλυση αριθμητικής ακρίβειας, κάνοντας χρήση του υψηλής αποδόσεως λογισμικού MATLAB για τις μη παρατηρήσιμες παραμέτρους που υπεισέρχονται στη διαδικασία που περιγράφει το σωρευτικό μέρισμα και αναλύεται η επίδραση μιας πιθανής μεταβολής της τιμής τους στην τιμή του υποκείμενου τίτλου. Εν συνεχεία, έπεται η εμπειρική μελέτη, όπου πραγματοποιείται εκτίμηση εντός δείγματος παρατήρησης (in sample) για την εκτίμηση παραμέτρων, και εκτός δείγματος παρατήρησης (out of sample) για τον έλεγχο της προβλεπτικής ικανότητας του μοντέλου, αξιοποιώντας δεδομένα για δικαιώματα προαίρεσης επί της επιλεγμένης μετοχής.

Στο **Πέμπτο Κεφάλαιο**, με την ολοκλήρωση της αριθμητικής και την περάτωση της εμπειρικής ανάλυσης, παρατίθενται τα συμπεράσματα που πηγάζουν από την εν λόγω εργασία. Ακολουθούν βιβλιογραφικές αναφορές, καθώς και ένα παράρτημα που εμπεριέχει τους κώδικες που χρησιμοποιήθηκαν για τους σκοπούς περάτωσης της εργασίας. Καθ' όλη την έκταση της εργασίας, η ύπαρξη επεξηγηματικών γραφημάτων και πινάκων, συνεπικουρεί τη λογική που αναπτύσσεται στο κυρίως κείμενο.

Κεφάλαιο 2: Μοντέλο Black & Scholes

Το μοντέλο των Black & Scholes για την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης, παραμένει ακόμη και στις μέρες μας το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο μοντέλο, ενώ η συνεισφορά του στη σχετική βιβλιογραφία είναι καθολικά παραδεκτή. Επομένως, στο παρόν κεφάλαιο, περιγράφονται αρχικά ορισμένες μαθηματικές έννοιες, βαρύνουσας σημασίας, με απώτερο σκοπό να προκύψει η κλειστή εξίσωση τιμολόγησης Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης μετοχών, υπό το πρίσμα της γνωστής μερισματικής απόδοσης και του σταθερού, εξωγενώς δοσμένου επιτοκίου.

2.1 Βασικές Έννοιες Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

2.1.1 Στοχαστικές Διαδικασίες

Το πρόβλημα της τιμολόγησης των παραγώγων γενικώς και των δικαιωμάτων προαίρεσης ειδικότερα, είναι κατά βάση ένα πρόβλημα που σχετίζεται άμεσα με την έννοια της στοχαστικής διαδικασίας. Κάθε μεταβλητή, η τιμή της οποίας μεταβάλλεται με τρόπο αβέβαιο και απρόβλεπτο με την πάροδο του χρόνου, λέγεται ότι ακολουθεί μία στοχαστική διαδικασία (Stochastic Process). Η υπόθεση της στοχαστικότητας, είναι απολύτως ρεαλιστική, εφόσον η μοντελοποίηση της τιμής που φέρει ο υποκείμενος τίτλος, διαδραματίζεται σε περιβάλλον που διέπεται από πλήρη αβεβαιότητα. Ορίζουμε ως στοχαστική διαδικασία, μία παραμετρισμένη συλλογή τυχαίων μεταβλητών $\{X(t), t \epsilon T\}$ που ορίζεται στον χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ και λαμβάνει τιμές στο R. Το σύνολο T αποτελεί το σύνολο δεικτών (Index Set) της στοχαστικής διαδικασίας, και είναι κατάλληλα ορισμένο ώστε να επιτρέπεται η ταξινόμηση των στοχαστικών διαδικασιών ως ακολούθως:

- ***Διαδικασίες διακριτού χρόνου (Discrete Time)***, όταν το σύνολο T είναι αριθμήσιμο και τοιουτοτρόπως η τιμή της μεταβλητής δύναται να λάβει διαφορετική τιμή σε συγκεκριμένα σημεία του χρόνου. Θεωρώντας ως επιπλέον κριτήριο το σύνολο των δυνατών τιμών που επιτρέπεται να λάβει η τυχαία μεταβλητή $X(t)$, διακρίνονται σε διαδικασίες διακριτής ή συνεχούς μεταβλητής.

- ***Διαδικασίες συνεχούς χρόνου (Continuous Time)***, όταν το σύνολο T ∈ R και τοιουτοτρόπως η τιμή της μεταβλητής δύναται να λάβει διαφορετική τιμή κάθε χρονική στιγμή. Κατ' αντιστοιχία, με επιπλέον κριτήριο το σύνολο των δυνατών τιμών της τυχαίας μεταβλητής $X(t)$, διακρίνονται σε διαδικασίες διακριτής ή συνεχούς μεταβλητής.

Αξίζει να σημειωθεί, ότι στην πραγματικότητα, οι τιμές των περιουσιακών στοιχείων, λαμβάνουν διακριτές τιμές, ενώ ο χρόνος διαπραγμάτευσής τους δεν είναι συνεχής. Πρόκειται επομένως για στοχαστικές διαδικασίες διακριτού χρόνου και διακριτών τιμών. Εντούτοις, για την εξέλιξη των τιμών των μετοχών και των παραγώγων τους, γίνεται χρήση μοντέλων συνεχούς χρόνου και συνεχών τιμών που, αν και δεν επαφίονται στην πραγματικότητα, στην πράξη παρουσιάζουν μεγάλη ευχρηστία και οδηγούν σε ασφαλή αποτελέσματα.

2.1.2 Διαδικασία Markov

Στη θεωρία Πιθανοτήτων και τη Στατιστική, η ιδιότητα Markov αναφέρεται στην αμνήμων ιδιότητα μιας στοχαστικής διαδικασίας. Μία στοχαστική διαδικασία φέρει την ιδιότητα Markov εάν η κατανομή της δεσμευμένης πιθανότητας των μελλοντικών καταστάσεων της διαδικασίας εξαρτάται μόνο από την παρούσα κατάσταση και όχι από την αλληλουχία γεγονότων που τη διαδέχθηκαν ή θα τη διαδεχθούν. Η παρελθούσα ιστορία της διαδικασίας δεν λαμβάνεται υπόψη, καθώς η τιμή της μετοχής ενσωματώνει όλη την ιστορική πληροφόρηση. Επιπλέον, οι προβλέψεις για το μέλλον είναι αβέβαιες και μπορούν να εκφραστούν αμιγώς μέσω κατανομών πιθανοτήτων. Τα κυριότερα πλεονεκτήματα της ανάλυσης Markov, είναι η απλότητα στη χρήση και η ακρίβεια πρόβλεψης εκτός δείγματος. Στον αντίποδα, η έλλειψη ρεαλιστικότητας και η αδυναμία εξήγησης και ανάλυσης γεγονότων, ανήκουν στα κύρια μειονεκτήματα. Πρόκειται για μία στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου και μεταβλητής.

Η ιδιότητα Markov των τιμών της μετοχής είναι συνεπής με την ασθενή αποτελεσματικότητα της αγοράς. Αναλυτικότερα, η παρούσα τιμή της μετοχής περικλείει όλη τη διαθέσιμη πληροφορία, καθώς σε διαφορετική περίπτωση, οι τεχνικοί αναλυτές θα παρήγαγαν με συνέπεια ανώτερες αποδόσεις με έναν επενδυτικό κανόνα βασισμένο στην ιστορία των τιμών της μετοχής. Στην πράξη, η ασθενής αποτελεσματικότητα της αγοράς εξασφαλίζεται από τον οξύ ανταγωνισμό.

Κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούμε σε δύο ιδιότητες που επιδεικνύουν οι διαδικασίες Markov:

- Θεωρούμε μία μεταβλητή, που ακολουθεί μία στοχαστική διαδικασία Markov, ενώ παράλληλα, η αλλαγή στην τιμή της κατά τη διάρκεια ενός έτους ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή N ~ (0,1). Αποδεικνύεται, ότι η κατανομή για την αλλαγή της τιμής της μεταβλητής κατά τη διάρκεια μίας περιόδου μήκους Δt ακολουθεί τη N (0,$\sqrt{\Delta t}$).

- Στις στοχαστικές διαδικασίες Markov, οι αλλαγές στη τιμή των μεταβλητών που παρουσιάζονται σε διαδοχικές χρονικές περιόδους είναι ανεξάρτητες.

2.1.3 Διαδικασία Wiener (Κίνηση Brown)

Στην ενότητα αυτή, γίνεται λόγος για την Κίνηση Brown, μία στοχαστική διαδικασία, που αποτελεί ακρογωνιαίο λίθο στη σύγχρονη ποσοτικοποιημένη χρηματοοικονομική επιστήμη. Η ιστορία της ανακάλυψης της, παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Το 1829, ο βοτανολόγος Robert Brown, παρατήρησε κάνοντας χρήση μικροσκοπίου ότι τα επιπλέοντα σωματίδια γύρης, κινούνται με έναν τυχαίο και ακανόνιστο τρόπο, σχηματίζοντας μία οδοντωτή κίνηση. Η παρατήρηση αυτή, στάθηκε αφορμή για την άτυπη επινόηση της Κίνησης Brown. Η πρώτη απόπειρα χρήσης της διαδικασίας αυτής για τη μοντελοποίηση των τιμών των αξιογράφων, αποδίδεται στον Γάλλο μαθηματικό Louis Bachelier στο πλαίσιο της διδακτορικής του διατριβής με τίτλο “Theorie de la Speculation» (Η Θεωρία της Κερδοσκοπίας) το 1900, που ωστόσο δεν κατόρθωσε να κεντρίσει το ενδιαφέρον των επιστημόνων της εποχής. Το ενδιαφέρον για την Κίνηση Brown αναθερμάνθηκε εκ νέου το 1905 από τον Albert Einstein, ο οποίος τη χρησιμοποίησε στις μελέτες του, ως ένα στοχαστικό μοντέλο για τη μελέτη της κίνησης ενός σωματιδίου μέσα σε υγρό, ως αποτέλεσμα της τυχαίας σύγκρουσης του με τα μόρια του υγρού. Τέλος, το 1923 ο μαθηματικός Nobert Wiener, κατόρθωσε να προσφέρει έναν αυστηρό μαθηματικό ορισμό και να αποδείξει πολλές από τις ιδιότητές της. Για αυτό το λόγο, φέρει και το όνομα διαδικασία Wiener.

Πληροφοριακά, αξίζει να αναφερθεί ότι το έργο του Bachelier, αναδύθηκε από την αφάνεια και έτυχε της αναγνώρισης που του άρμοζε σχεδόν μισό αιώνα αργότερα, όταν και αναγνωρίστηκε ως ένα από τα πιο πρωτοπόρα εγχειρήματα της εποχής. Ήταν αυτός που πρώτος ισχυρίστηκε ότι η παρούσα τιμή ενός τίτλου αποτελεί τον καλύτερο δείκτη πρόβλεψης για τη μελλοντική του τιμή, καθώς και ότι εμπεριέχει όλη την απαραίτητη πληροφορία, άποψη που προηγήθηκε κατά πολλού της πρώτης αυστηρής μαθηματικής απεικόνισης της Κίνησης Brown από τον Wiener. Για τον λόγο αυτό, ο Bachelier, θεωρείται από αρκετούς επιστήμονες του κλάδου ως ο ιδρυτής των σύγχρονων οικονομικών μαθηματικών.

Τη διαδικασία χαρακτηρίζει η μηδενική μεταβολή μέσης τιμής ανά μονάδα χρόνου και ο μοναδιαίος ρυθμός διακύμανσης. Αναλυτικότερα, ο μηδενικός ρυθμός τάσης υποδηλώνει ότι η αναμενόμενη αξία της μεταβλητής Z σε οποιαδήποτε τυχαία μελλοντική στιγμή, ισούται με την τρέχουσα, ενώ η διακύμανση της αλλαγής της μεταβλητής Z, ισούται με το χρονικό διάστημα μήκους Τ.

Σε εκτενέστερη ανάλυση, περιγράφει την εξέλιξη στο χρόνο μίας τυχαίας μεταβλητής z, η οποία ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή, δηλαδή $\mathrm{Z} \sim N(0,1)$. Μία μεταβλητή, ακολουθεί διαδικασία Wiener εάν πληροί τις κάτωθι ιδιότητες:

- Η μεταβολή $\Delta\mathrm{Z}$, κατά τη διάρκεια μίας μικρής χρονικής περιόδου μήκους Δt ισούται με $\Delta\mathrm{Z} = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$, όπου $\varepsilon \sim N\,(0,1)$, δηλαδή είναι μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί επίσης την τυποποιημένη κανονική κατανομή.

- Οι τιμές που λαμβάνει η μεταβολή $\Delta\mathrm{Z}$, για κάθε δύο μη επικαλυπτόμενες χρονικές περιόδους είναι ανεξάρτητες, υπονοώντας την προαναφερθείσα ιδιότητα Markov. Προκύπτει επομένως από την πρώτη ιδιότητα, ότι η μεταβολή $\Delta\mathrm{Z}$ ακολουθεί κανονική κατανομή, και συγκεκριμένα $\Delta\mathrm{Z} \sim N(0,\sqrt{\Delta t})$.

Γενικεύοντας για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα μήκους Τ, που απαρτίζεται από N μικρότερα διαστήματα χρονικής διάρκειας Δt έκαστο, ορισμένα με τέτοιο τρόπο ώστε $N = {}^{\mathrm{T}}/_{\Delta\mathrm{t}}$, η διαφορά της μεταβλητής Z, μπορεί να οριστεί ως ακολούθως:

$$\mathrm{Z(T)} - \mathrm{Z}(0) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}\,, \qquad \varepsilon_i \sim N\,(0,1)$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η μεταβολή της τιμής μιας μεταβλητής που ακολουθεί μία διαδικασία Wiener για ένα χρονικό διάστημα T ισούται με το άθροισμα των μεταβολών της μεταβλητής N για χρονικά διαστήματα μεγέθους Δt.

2.1.4 Γενικευμένη Διαδικασία Wiener

Εάν η υπό εξέταση μεταβλητή x, παρουσιάζει αναμενόμενο ρυθμό τάσης (drift rate) a και ρυθμό διακύμανσης (variance rate) b^2 ανά μονάδα χρόνου, όπου a και b είναι σταθερές, τότε λέγεται ότι ακολουθεί γενικευμένη διαδικασία Wiener, και ισχύει:

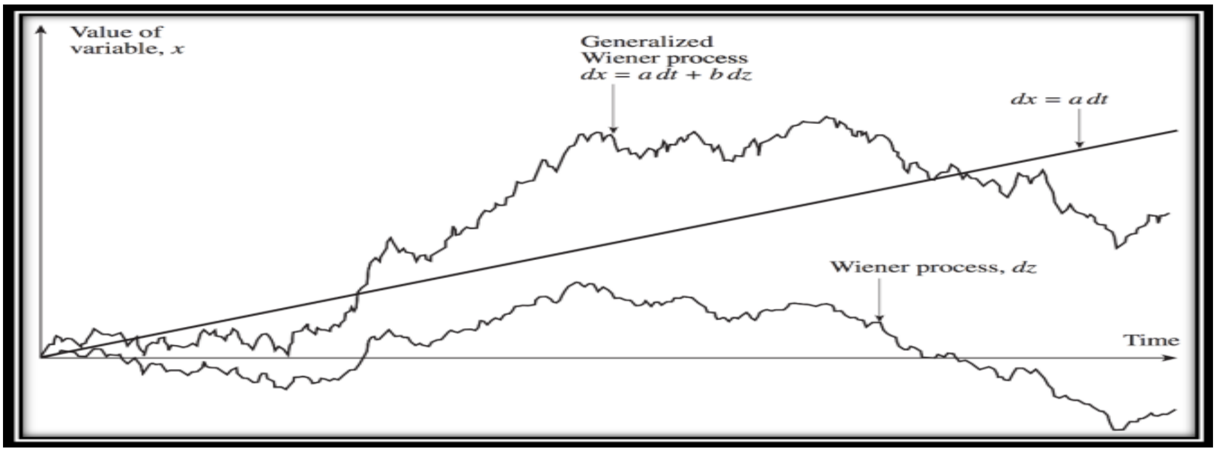
$$\boxed{dx = adt + bdz} \qquad \textbf{(1)}$$

όπου a και b είναι οι επιλεγμένες κάθε φορά σταθερές dz είναι μία διαδικασία Wiener. Ο όρος bdz, μπορεί να θεωρηθεί ως ο επιπρόσθετος θόρυβος, δηλαδή η μεταβλητότητα στο μονοπάτι που ακολουθείται από τη μεταβλητή x, ενώ ο όρος adt είναι ντετερμινιστικός. Αναλυτικότερα:

Αναμενόμενος ρυθμός Μεταβολής	Ρυθμός Διακύμανσης της Μεταβολής
$\frac{E\ (\Delta z)}{\Delta t} = \mathrm{a}$	$\frac{Var(\Delta z)}{\Delta t} = b^2$

Για μικρές μεταβολές του χρόνου, οι μεταβολές στις τιμές της μεταβλητής x δίνονται από την ακόλουθη σχέση:

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}, \sim N(\, a\Delta t,\ b\sqrt{\Delta t}\,).$$



Γράφημα 10 - Γενικευμένη Διαδικασία Wiener.

Στην ειδικότερη περίπτωση, όπου οι παράμετροι a και b είναι συναρτήσεις του χρόνου t και της υποκείμενης μεταβλητής x, τότε αναφερόμαστε σε μία στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου και μεταβλητής που φέρει το όνομα Ito-Process και είναι της ακόλουθης μορφής:

$$\boxed{dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz} \qquad \textbf{(2)}$$

Θεωρώντας μικρό χρονικό διάστημα [t,t+Δt], η μεταβολή της x, Δx, δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\Delta x = \alpha(x,t)\Delta t + b(x,t)\varepsilon\sqrt{\Delta t})$$

Η συγκεκριμένη σχέση βέβαια, προϋποθέτει ότι οι ρυθμοί της τάσης και της διακύμανσης της μεταβλητής x, παραμένουν σταθεροί κατά τη διάρκεια του μικρού χρονικού διαστήματος [t,t+Δt].

2.1.5 Γεωμετρική Κίνηση Brown

Βασικό αντικείμενο της συγκεκριμένης εργασίας είναι η τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης, η τιμολόγηση των οποίων συνδέεται άρρηκτα με την εξέλιξη στον χρόνο των τιμών των μετοχών. Η εφεύρεση ενός μοντέλου για τις τιμές των μετοχών κρίνεται αναγκαία. Η πρώτη απόπειρα, ανήκει στον Louis Bachelier, ο οποίος έκανε την υπόθεση ότι σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα δt, οι μεταβολές στην τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι ανάλογες προς τις προσαυξήσεις μιας κίνησης Brown. Προκύπτει από την ανάλυσή του, ότι η αξία της μετοχής με αρχική τιμή x_0την χρονική στιγμή t είναι:

$$S_t = S_0 + \sigma dz \qquad \textbf{(3)}$$

όπου με σ συμβολίζεται η μεταβλητότητα. Η συγκεκριμένη προσέγγιση, αναμφίβολα είναι πρωτοπόρα για την εποχή που ανήκει, αλλά δεν θα μπορούσε να υιοθετηθεί για δύο λόγους. Πρωτίστως, η τιμή της μετοχής που περιγράφεται από αυτό το μοντέλο, ενδέχεται να λάβει αρνητικές τιμές, εάν η Κίνηση Brown λάβει αρνητικές τιμές, ενώ οι μεταβολές της τιμής της μετοχής είναι ανεξάρτητες από την ίδια την τιμή, κάτι που δεν φαντάζει ρεαλιστικό. Επιπλέον, η προσέγγιση της ποσοστιαίας μεταβολής της τιμής, δηλαδή οι πολλαπλασιαστικές προσαυξήσεις των τιμών έναντι των προσθετικών, ίσως ενέχει περισσότερο ενδιαφέρον. Φαίνεται λοιπόν, ότι όλα τα παραπάνω, απαντώνται στο ακόλουθο μοντέλο:

$$\frac{ds_t}{S_t} = \sigma dz$$

Αξιοποιώντας αυτό το μοντέλο, ο οικονομολόγος Paul Samuelson, το 1965, πρότεινε τον ακόλουθο τρόπο για τη μοντελοποίηση της εξέλιξης των τιμών της μετοχής:

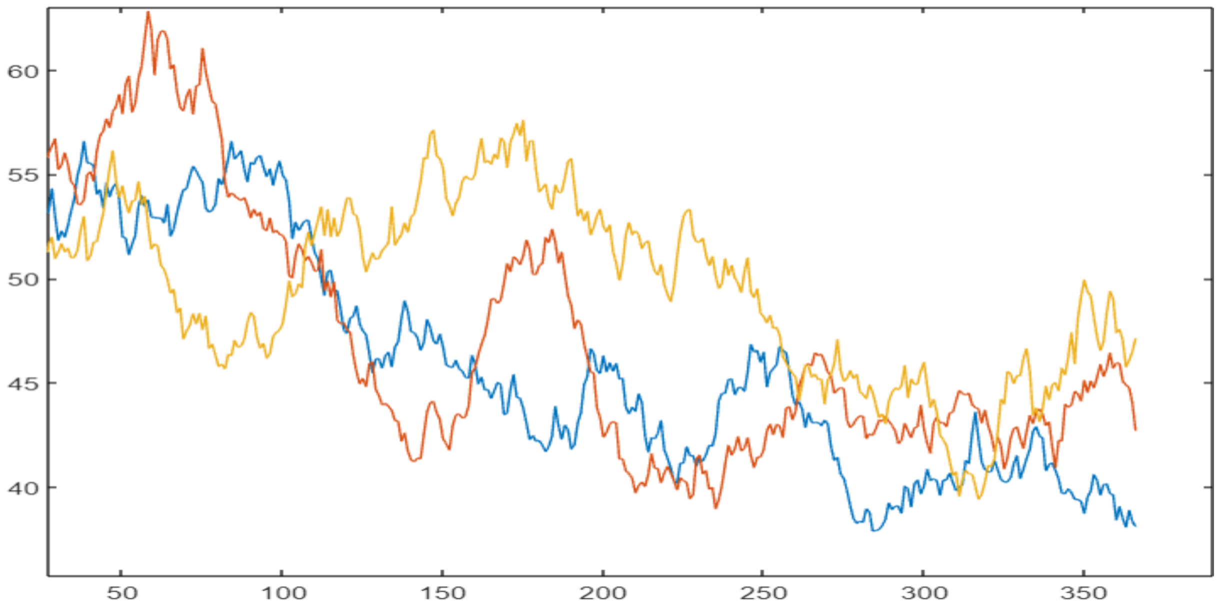
$$\boxed{\frac{dS_t}{S} = \mu dt + \sigma dz}$$

όπου με μ, συμβολίζεται ο αναμενόμενος από τον επενδυτή ρυθμός απόδοσης. Εμβαθύνοντας στο μοντέλο του, γίνεται εμφανές ότι η μεταβολή της τιμής της μετοχής σε ένα μικρό χρονικό διάστημα μήκους dt, επαφίεται στην εξέλιξη δύο παραγόντων:

- Στον ντετερμινιστικό παράγοντα $\mu S_t dt$, που αναπαριστά την αναμενόμενη μεταβολή της τιμής της μετοχής και είναι ανάλογη της χρονικής διάρκειας dt, της αναμενόμενης απόδοσης της μετοχής καθώς και της τιμής της μετοχής τη χρονική στιγμή t,
- Στον τυχαίο παράγοντα $\sigma S_t dz$, ο οποίος μοντελοποιεί τις στοχαστικές διακυμάνσεις γύρω από το ντετερμινιστικό μέρος της εξίσωσης.

Η συντριπτική πλειοψηφία των οικονομολόγων αναγνωρίζουν την διαδικασία αυτή ως πρότυπο για τη μοντελοποίηση των τιμών των αξιογράφων που διαπραγματεύονται στης αγορές. Είναι γνωστή με την ονομασία Γεωμετρική Κίνηση Brown και αποτελεί το βασικό νόμο που διέπει τα υποκείμενα περιουσιακά στοιχεία στον κόσμο των Black & Scholes, που θα παρουσιαστεί ενδελεχώς στην επόμενη ενότητα.

Παρακάτω, παρατίθεται ένα γράφημα από δειγματικά μονοπάτια ενός χρόνου για ένα τίτλο με αρχική τιμή $50, απόδοση 10%, μεταβλητότητα 30% και υπό την υπόθεση ότι το χρονικό βήμα είναι μία ημέρα. Η αναπαράσταση, έγινε κάνοντας χρήση του υψηλής απόδοσης λογισμικού MATLAB, όπου δημιουργήθηκε ένας κώδικας που δημιουργεί δειγματικά μονοπάτια για τις τιμές ενός τίτλου που ακολουθεί τη Γεωμετρική Κίνηση Brown.



Γράφημα 11 - Δειγματικά μονοπάτια για τις τιμές ενός τίτλου που ακολουθεί τη Γεωμετρική Κίνηση Brown.

2.1.6 *Λήμμα* του Itô

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζεται το λήμμα του Itô, ένα λήμμα που ανήκει στον τομέα της στοχαστικής ανάλυσης κατά Itô, του κλάδου των μαθηματικών που μελετά τη στοχαστική ανάλυση. Η ονομασία του, είναι προς τιμή του Ιάπωνα μαθηματικού Kiyoshi Itô, και η ανείπωτη συνεισφορά του έγκειται στο ότι εξυπηρέτησε την βαθύτερη μαθηματικά κατανόηση των τυχαίων γεγονότων, επεκτείνοντας τους τρόπους υπολογισμού και επεξεργασίας των στοχαστικών διαδικασιών. Όλη η απορρέουσα γνώση, βρήκε εκτεταμένη εφαρμογή στον τομέα της χρηματοοικονομικής επιστήμης, όπου η συνεισφορά του στη δημιουργία της εξίσωσης Black & Scholes για την εύρεση της δίκαιης τιμής ενός δικαιώματος προαίρεσης ήταν καθοριστική.

Ουσιαστικά, αποτελεί μία ταυτότητα, για την εύρεση της παραγώγου μιας συνάρτησης στοχαστικής διαδικασίας που εξαρτάται από το χρόνο. Από μαθηματικής σκοπιάς, είναι ένας τρόπος υπολογισμού παραγώγου μέσω του κανόνα της αλυσίδας, καθώς αποτελεί το ανάπτυγμα της σειράς Taylor έως και την παράγωγο δευτέρου βαθμού.

Εάν η στοχαστική διαδικασία που ακολουθείτε από μία μεταβλητή x είναι γνωστή, τότε το λήμμα του Itô, προσφέρει την διαδικασία που ακολουθείται από μία συνάρτηση G(x,t). Εφόσον η τιμή κάθε παραγώγου συμβολαίου είναι μία συνάρτηση της υποκείμενης στοχαστικής μεταβλητής και του χρόνου, τότε η προσφερόμενη αξία του είναι αναμφισβήτητη.

Θεωρούμε ότι η τιμή μιας μεταβλητής x ακολουθεί μία διαδικασία Ito, και άρα είναι της μορφής:

$$dx = \alpha(x,t)dt + b(x,t)dz$$

όπου dz είναι μία διαδικασία Wiener. Η μεταβλητή, έχει ρυθμό τάσης α και ρυθμό διακύμανσης b^2. Κάνοντας χρήση του Λήμματος Itô, μπορεί να δειχθεί ότι μία συνάρτηση G συναρτήσει της μεταβλητής x και του χρόνου t, ακολουθεί την εξής διαδικασία:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x}\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}b\,dz$$

Θέτοντας x = S, α = μS και b = σS, προκύπτει το λήμμα του Itô για την κίνηση της τιμής της μετοχής:

$$\boxed{dG = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S\,dz} \quad \textbf{(4)}$$

Ορίζοντας G=$\ln S$, έχουμε: $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι:

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz$$

Εφόσον οι μεταβλητές μ και σ είναι σταθερές, η εν λόγω εξίσωση πιστοποιεί πως η συνάρτηση G=$\ln S$ ακολουθεί μία γενικευμένη διαδικασία Wiener και κατανέμεται κανονικά με ρυθμό τάσης $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})$ και ρυθμό διακύμανσης ίσο με σ^2. Επακολούθως, η αλλαγή στο λογάριθμο της μετοχής, για δεδομένο χρονικό διάστημα [0,T], ακολουθεί την κανονική κατανομή, όπως κατωτέρω περιγράφεται:

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{T}, \sigma^2 T\right) \quad \Leftrightarrow \quad \ln S_T \sim N\left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{T}, \sigma^2 T\right)$$

Τέλος, προκύπτει ότι ο φυσικός λογάριθμος της τιμής της μετοχής ακολουθεί την κανονική κατανομή. Αυτό συνεπάγεται πως η τιμή της μετοχής θα ακολουθεί την κανονική λογαριθμική κατανομή, φέροντας τα εξής χαρακτηριστικά:

Μέση Τιμή	Διακύμανση
$\mathrm{E}(S_T) = S_0\, e^{\mu T}$	$\mathrm{Var}(S_T) = {S_0}^2\, e^{2\mu T}\, (e^{\sigma^2 T} - 1)$

Συμβολίζοντας με n τον συνεχώς ανατοκιζόμενο ρυθμό απόδοσης ανά έτος μιας μετοχής στο διάστημα [0,T], τότε προκύπτει ότι :

$$S_T = S_0\, e^{nT} \quad \Leftrightarrow \quad \ln S_T = \ln S_0 + - \ln e^{nT} \quad \Leftrightarrow \quad \ln S_T - \ln S_0 = nT \quad \Leftrightarrow$$

$$n = \frac{1}{T} \ln \frac{S_T}{S_0} \sim N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta t}}\right)$$

Ωστόσο, ο όρος μ δεν πρέπει να συγχέεται με τον όρο n. Ο όρος μ αφορά την αναμενόμενη από τους επενδυτές αναμενόμενη απόδοση για ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt ,η οποία σχετίζεται θετικά με τον κίνδυνο της μετοχής και με το ύψος των επιτοκίων.

Η μεταβλητότητα σ μίας μετοχής ποσοτικοποιεί την αβεβαιότητα για τη μελλοντική τιμή της. Για να εκτιμηθεί η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής εμπειρικά, παρατηρείται η τιμή της μετοχής σε σταθερά διαστήματα χρόνου. Εν συνεχεία, συμβολίζεται με τ το μήκος του χρονικού διαστήματος σε έτη, με S_i η τιμή της μετοχής στο τέλος του διαστήματος i, όπου i = 1,2,3,..,n και γίνεται χρήση πλήθους n+1 παρατηρήσεων. Έστω ότι u_i είναι η συνεχώς ανατοκιζόμενη απόδοση στο διάστημα i, τότε:

$$S_i = S_{i-1} e^{u_i} \quad \Leftrightarrow \quad u_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}$$

Στη συνέχεια, διακριτοποιώντας τη γενικευμένη διαδικασία Wiener για την συνάρτηση G=$\ln S$ στο διάστημα i, έχουμε:

$$\Delta G = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t} \Leftrightarrow G_i - G_{i-1} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau + \sigma\varepsilon\sqrt{\tau} \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\ln S_i - \ln S_{i-1}}_{u_i \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau,\ \underbrace{\sigma\sqrt{\tau}}_{s}\right)} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau + \sigma\varepsilon\sqrt{\tau} \Leftrightarrow \ln \frac{S_i}{S_{i-1}} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau + \sigma\varepsilon\sqrt{\tau}$$

Η μεταβλητή s, επομένως αποτελεί μία εκτίμηση του $\sigma\sqrt{\tau}$ και μία εκτίμησή της τυπικής απόκλισης του u_i δίνεται από τη σχέση:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (u_i - \bar{u})^2}$$

Γενικότερα, η επιλογή της κατάλληλης τιμής για την παράμετρο n, είναι μία σύνθετη απόφαση, καθώς μολονότι περισσότερα στοιχεία ενδεχομένως οδηγήσουν σε μεγαλύτερη ακρίβεια, εντούτοις, η λύση αυτή δεν αποτελεί πανάκεια για τη πρόβλεψη της μελλοντικής μεταβλητότητας.. Μία λύση στο συγκεκριμένο ζήτημα, είναι η χρήση ημερήσιων τιμών κλεισίματος για την πιο πρόσφατη περίοδο που είναι ίση με την περίοδο εξέτασης. Τέλος, δεδομένης της γνώσης ότι ένα έτος περιλαμβάνει 252 διαπραγματεύσιμες ημέρες, η μεταβλητότητα ανά έτος, δίνεται από το εξής γινόμενο:

$$\text{Ημερήσια μεταβλητότητα} * \sqrt{Αριθμός\ διαπραγματεύσιμων\ ανά\ έτος\ ημερών}$$

2.2 Το μαθηματικό μοντέλο Black-Scholes-Merton

“ Αν γίνει σωστή τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης σε μία αγορά, τότε δεν θα πρέπει να είναι εφικτή η επίτευξη κερδών, δημιουργώντας ένα χαρτοφυλάκιο στο οποίο ένας επενδυτής λαμβάνει θέσεις αγοράς και πώλησης πάνω σε δικαιώματα και στον υποκείμενο τίτλο τους αντίστοιχα ”

- Fisher Black & Myron Scholes

2.2.1 Υποθέσεις μοντέλου Black-Scholes-Merton

Στις θεμελιώδεις και διαχρονικές μελέτες των Fisher Black και Myron Scholes (1973) και του Robert Merton (1973) αναφορικά με την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης, οι τρεις ακαδημαϊκοί προτείνουν τρεις αξιόλογες εφευρέσεις. Πρωτίστως, βασιζόμενοι σε ένα σύνολο υποθέσεων, κατέληξαν στο πόρισμα ότι η εξάλειψη του κινδύνου που απορρέει από την κατοχή ενός δικαιώματος προαίρεσης είναι εφικτή μέσω αντιστάθμισης, αγοράζοντας ή πουλώντας δηλαδή τον κατάλληλο αριθμό μεριδίων του υποκείμενου τίτλου ενώ διατείνονται ότι εν απουσία κινδύνου, η απαιτούμενη απόδοση, είναι το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο. Επιπλέον, προχώρησαν στη δημοσιοποίηση της διάσημης φόρμουλας τιμολόγησης των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου. Τελευταίο αλλά εξίσου σημαντικό, είναι ότι πολλά είδη συμβολαίων όπως το εταιρικό χρέος, μπορούν όπως αναλύουν λόγω κοινών χαρακτηριστικών δομής να θεωρηθούν ως δικαιώματα και να τιμολογηθούν ανάλογα.

Το μοντέλο των Black & Scholes, σηματοδότησε μία εκθετική ανάπτυξη και ακμή των αγορών διαπραγμάτευσης παραγώγων, καθότι η τιμολόγηση τους και η διαχείριση των συνεπαγόμενων κινδύνων ήταν πλέον εφικτή. Η ευρεία αποδοχή από το ακαδημαϊκό κοινό και η μαζική χρήση του από μεμονωμένους επενδυτές αλλά και διαχειριστές χαρτοφυλακίων, είναι ακράδαντες αποδείξεις της αξίας του, που πιστοποιήθηκε έτι παραπάνω από την απονομή βραβείου Nobel το 1997 στους εμπνευστές του. Η απλότητα στη χρήση και η στοχευμένη αποτελεσματικότητα, είναι βασικοί λόγοι για τους οποίους η χρήση του εν λόγω μοντέλου είναι καθιερωμένη ακόμη και στις μέρες μας.

Αξίζει να αναφερθεί ότι το 1994 οι Scholes και Merton υπήρξαν συνιδρυτές ενός υπέρ του δέοντος μοχλευμένου Hedge Fund, του «Long Term Capital Management», όπου ουσιαστικά κλήθηκαν να εφαρμόσουν στην πράξη, όλα όσα είχαν θεωρητικά αποδείξει. Αναλυτικότερα, πηγή κερδών αποτελούσε η αγορά υποτιμημένων βάσει δίκαιης τιμής που υποδείκνυαν τα ποσοτικά μοντέλα, δικαιωμάτων προαίρεσης με μεγάλη ρευστότητα, κατορθώνοντας έτσι να πετυχαίνουν συστηματικά εντυπωσιακά υψηλές αποδόσεις ήδη από τον πρώτο χρόνο λειτουργίας. Ωστόσο, η υπερβολική έκθεση στη κρίση της Ρωσίας και της Ασίας συνδυαστικά με την ανεξέλεγκτή μόχλευση, συντέλεσαν στην διάλυση και ρευστοποίηση του fund στις αρχές του 2000.

Στην ανάλυσή τους, στηρίζονται σε ένα σύνολο παραδοχών που ιδανικά, πρέπει να πληρούνται για την ορθή και ακριβή διεξαγωγή αποτελεσμάτων του μοντέλου. Αναλυτικότερα, υποθέτουν τα εξής:

Υποθέσεις Μοντέλου Black - Scholes	
1.	Η τιμής της υποκείμενης μετοχής ακολουθεί τυχαίο περίπατο και περιγράφεται από το μοντέλο της Γεωμετρικής Κίνησης Brown, όπου τα μ & σ, θεωρούνται σταθερές. Αναλυτικότερα, η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή t > 0 είναι μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί τη λογαριθμοκανονική κατανομή.
2.	Η μετοχή που ενέχεται στο δικαίωμα προαίρεσης, δεν αποδίδει μερίσματα καθ’ όλη τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος.
3.	Η αγορά, βρίσκεται σε ισορροπία, υπό την έννοια του ότι δεν υπάρχουν ευκαιρίες βέβαια κέρδους που μπορούν να αξιοποιηθούν (no-arbitrage principle). Βασική εφαρμογή της συγκεκριμένης υπόθεσης, είναι ότι δύο χαρτοφυλάκιο με κοινό payoff στη λήξη, θα πρέπει να έχουν την ίδια τιμή και σε ενδιάμεσες χρονικές στιγμές.
4.	Δεν υφίστανται προμήθειες και κόστη συναλλαγής για την αγορά ή πώληση ενός περιουσιακού στοιχείου. Επιπλέον, δεν υφίσταται οποιαδήποτε μορφή φορολογίας, ενώ τα χρεόγραφα είναι δύναται να υποδιαιρεθούν.
5.	Η αγορά είναι αποτελεσματική και η διαθέσιμη πληροφορία ρέει προς όλους τους συμμετέχοντες στην αγορά. Επιπροσθέτως, η διαπραγμάτευση των τίτλων λαμβάνει χώρα σε συνεχές χρόνο καθότι οι αγορές είναι τέλεια ρευστοποιήσιμες.
6.	Τα επιτόκια είναι σταθερά και γνωστά στο χρόνο. Όλοι οι επενδυτές μπορούν να δανείζουν και να δανείζονται στο δίχως κίνδυνο επιτόκιο, που χρησιμοποιείται στο πλαίσιο της Black & Scholes ανάλυσης. Ως ανάλογο του χωρίς κίνδυνο επιτοκίου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η απόδοση ενός κυβερνητικού ομολόγου.
7.	Το υπό τιμολόγηση δικαίωμα προαίρεσης είναι Ευρωπαϊκού τύπου και ως τέτοιο, μπορεί να εξασκηθεί μόνο στη λήξη T.
8.	Επιτρέπεται η ανοιχτή πώληση μετοχών (short selling).

Πίνακας 6 - Υποθέσεις Μοντέλου Black-Scholes-Merton.

Προκύπτει ότι οι περισσότερες από τις προαναφερθείσες υποθέσεις είναι ουτοπικές, απλουστευτικές και εξιδανικευμένες, γεγονός που καθιστά το μοντέλο μη ρεαλιστικό. Εκ των υστέρων, μελέτες που πραγματοποιήθηκαν με σκοπό να εξετάσουν την καταλληλόλητα του μοντέλου σε πραγματικά δεδομένα αγοράς, κατέγραψαν ότι οι υποθέσεις αυτές ίσως λειτουργούν εις βάρος της αποτελεσματικότητας. Αναλυτικότερα, στην πράξη, οι αποδόσεις των μετοχών δεν είναι κανονικά κατανεμημένες και μάλιστα, ακολουθούν μία κατανομή που είναι περισσότερο λεπτόκυρτη από την κανονική κατανομή. Επίσης, τα επιτόκια είναι στοχαστικά, ενώ η πρόσφατη χρηματοοικονομική κρίση διέψευσε την ύπαρξη ενός επιτοκίου χωρίς κίνδυνο, ακόμη και για κρατικά ομόλογα. Επιπλέον, στον πραγματικό κόσμο υπάρχουν μερίσματα, κόστη συναλλαγών αλλά και περιορισμοί στην αγοραπωλησία, ενώ δεν πρέπει να παραμερίζεται και η επίδραση της φορολογίας στα πραγματοποιηθέντα κέρδη. Τελευταίο αλλά εξίσου σημαντικό, είναι ότι η μεταβλητότητα δεν είναι σταθερή, αλλά αντιθέτως αποτελεί μία αυτόνομη στοχαστική διαδικασία.

2.2.2 Διαφορική εξίσωση Black-Scholes-Merton

Η διαφορική εξίσωση των Black-Scholes-Merton είναι μία εξίσωση η οποία ικανοποιείται από κάθε παράγωγο γραμμένο σε μία μετοχή, που δεν διανέμει μέρισμα. Η εξαγωγή της, επαφίεται στην υπόθεση της σύστασης ενός αυτοχρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου που δεν ενέχει κίνδυνο και περιλαμβάνει τη λήψη θέσεων στο παράγωγο προϊόν και την υποκείμενη μετοχή. Η σύνθεση του χαρτοφυλακίου, είναι εφικτή καθότι θεωρείται ότι η μετοχή και το παράγωγο έχουν την ίδια πηγή αβεβαιότητας. Επιπλέον, η συσχέτιση μεταξύ των δύο είναι θετική, και τοιουτοτρόπως, οι ζημιές ή τα κέρδη του ενός, θα εξαλείφουν τα κέρδη ή της ζημίες του άλλου, αφαιρώντας έτσι πλήρως την πηγή αβεβαιότητας. Η σχέση που υφίσταται ανάμεσα στις μεταβολές της τιμής της μετοχής και του παραγώγου, περιγράφεται από το Ελληνικό γράμμα δέλτα (Δ), ενώ η σχετική αντιστάθμιση φέρει την ονομασία Δέλτα αντιστάθμιση κινδύνου. Η επιθυμητή βέβαια συσχέτιση που εξαλείφει τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου, ισχύει για ένα μικρό χρονικό διάστημα, το οποίο αφενός επιτρέπει την εξαγωγή της διαφορικής εξίσωσης, αφετέρου όμως δημιουργεί την ανάγκη συνεχούς αναπροσαρμογής.

Βασικό χαρακτηριστικό του μοντέλου Black-Scholes είναι ότι προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα για πολύ μικρά χρονικά διαστήματα. Όπως προαναφέρθηκε, η διακριτή εκδοχή της διαδικασίας της τιμής της μετοχής στο χρονικό διάστημα [t, t + Δt] είναι:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z, \quad \Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{5}$$

Επιπλέον, θεωρούμε ότι η τιμή ενός παραγώγου που είναι συνάρτηση της τιμής της μετοχής S και της χρονικής στιγμής t συμβολίζεται με f. Εφαρμόζοντας το μοντέλο του Itô, προκύπτει το εξής:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz,$$

η διακριτή έκδοση του οποίου οδηγεί στην ακόλουθη εξίσωση:

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta z, \quad \Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{6}$$

Στόχος είναι η σύσταση ενός ακίνδυνου χαρτοφυλακίου της μετοχής και του παραγώγου, τέτοιο ώστε να εξαλειφθεί η τυχαιότητα που πηγάζει από την ύπαρξη της διαδικασίας Wiener. Προς αυτή την κατεύθυνση, ο κάτοχος του χαρτοφυλακίου κρίνεται σκόπιμο να λάβει τις εξής θέσεις:

- Αρνητική Θέση (Short) σε ένα συμβόλαιο παράγωγου προϊόντος
- Θετική Θέση (Long) σε $\frac{\partial f}{\partial S}$ μετοχές

Συμβολίζοντας με Π την αξία του χαρτοφυλακίου, προκύπτει ότι:

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \tag{7}$$

και η μεταβολή στην αξία (ΔΠ) σε χρονικό διάστημα Δt, δίδεται από:

$$\Delta\Pi = \Pi_{t+\Delta t} - \Pi_t = -f_{t+\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial S} S_{t+\Delta t} - \left(-f_t + \frac{\partial f}{\partial S} S_t\right) =$$

$$-\left(f_{t+\Delta t} - f_t\right) + \frac{\partial f}{\partial S}\left(S_{t+\Delta t} - S_t\right) =$$

$$-\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S \qquad \textbf{(8)}$$

Με διαδοχική αντικατάσταση των εξισώσεων **(5)** και **(6)** που αφορούν την διακριτή εκδοχή της διαδικασίας της τιμής της μετοχής και τη διακριτή έκδοση του λήμματος του Itô αντίστοιχα, στο χρονικό διάστημα [t, t + Δt], στην εξίσωση **(8)** καταλήγει κανείς στα εξής:

$$\Delta\Pi = -\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right]\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\Delta z + \frac{\partial f}{\partial S}\mu S\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\Delta z \Leftrightarrow$$

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\,\sigma^2 S^2\right)\Delta t \qquad \textbf{(9)}$$

Από τη σχέση **(9)** απουσιάζει η πηγή αβεβαιότητας (κινδύνου) που προκύπτει από τη διαδικασία Wiener Δz, καθιστώντας εμφανή τα αποτελέσματα της αντιστάθμισης. Λόγω της μη ανάληψης κινδύνου, η απόδοση που θα επιφέρει η δημιουργία του συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου είναι το δίχως κίνδυνο επιτόκιο r. Σε διαφορετική περίπτωση, αν η εξασφαλισθείσα απόδοση ήταν μεγαλύτερη, θα υπήρχε η δυνατότητα για arbitrage πραγματοποιώντας ανοιχτή πώληση ενός δίχως κίνδυνο κρατικού ομολόγου και αγοράζοντας το χαρτοφυλάκιο με τα παραγόμενα κέρδη, το οποίο βάσει υποθέσεων μοντέλου, απαγορεύεται. Αντιστοίχως, εάν η απόδοση ήταν μικρότερη, ένας κερδοσκόπος θα μπορούσε να πουλήσει το χαρτοφυλάκιο και να επενδύσει τα παραγόμενα χρήματα σε ένα δίχως κίνδυνο κρατικό ομόλογο. Συνοψίζοντας, η θεμελιώδης υπόθεση του μοντέλου περί απαγόρευσης δημιουργίας συνθηκών Arbitrage, εξασφαλίζει ότι:

$$\Delta\Pi = r\,\Pi\,\Delta t. \qquad \textbf{(10)}$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση **(10)** τις σχέσεις **(7)** και **(9)**, αντλούμε την εξής εξίσωση:

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(-f + \frac{\partial f}{\partial S}S\right)\Delta t,$$

όπου εκτελώντας τις κατάλληλες πράξεις προκύπτει μία γραμμική, δευτέρου βαθμού παραβολική εξίσωση, γνωστή ως η μερική διαφορική εξίσωση Black-Scholes-Merton:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = rf \quad \textbf{(11)}$$

Η πραγματική συνεισφορά της συγκεκριμένης εξίσωσης, επαφίεται στην πληθώρα παραγόμενων λύσεων που αντιστοιχούν κάθε φορά σε μία συγκεκριμένη επιλεγμένη συνοριακή συνθήκη ανάλογα με την μορφή του υποκείμενου τίτλου S. Ενδεικτικά, στην περίπτωση ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς, η συνοριακή συνθήκη της μερικής διαφορικής εξίσωσης θα είναι η ακόλουθη:

$$f(S,T) = \max[S_T - K, 0]$$

Αξιοσημείωτο είναι επίσης ότι στην διατύπωση της διαφορικής εξίσωσης, δεν υπεισέρχονται μεταβλητές που επηρεάζονται από τις κινδυνολογικές προτιμήσεις των επενδυτών και κατά λογική συνέπεια, δεν επηρεάζουν και τη λύση της. Επομένως, κάθε σύνολο προτιμήσεων κινδύνου μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατά την προσπάθεια τιμολόγησης του παραγώγου. Η υπόθεση των ουδέτερων προτιμήσεων έναντι του κινδύνου, επιτρέπεται και προσδίδει σε όρους ανάλυσης να αξιοποιηθεί. Σε έναν κόσμο όπου όλοι οι επενδυτές είναι ουδέτεροι στον κίνδυνο, η αναμενόμενη απόδοση για κάθε περιουσιακό στοιχείο είναι το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο r, καθώς οι επενδυτές δεν απαιτούν μία επιπλέον απόδοση για την ανάληψη κινδύνου.

Καταλήγοντας, για τον υπολογισμό της παρούσας αξίας ενός παραγώγου σ 'ένα κόσμο ουδέτερου κινδύνου, ενδείκνυται η ακόλουθη διαδικασία:

- Θεωρούμε ότι η αναμενόμενη απόδοση από τον υποκείμενο τίτλο είναι το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο, δηλαδή μ = r.

- Υπολογίζουμε τις αναμενόμενες απολαβές από το παράγωγο στη λήξη.

- Προεξοφλούμε τις αναμενόμενες απολαβές που υπολογίσαμε με το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο ώστε να βρεθεί η παρούσα αξία τους.

Αξίζει να αναφερθεί, ότι η αποτίμηση ουδέτερου κινδύνου, είναι ένας τεχνητός μηχανισμός για την εύρεση λύσεων για την Μερική Διαφορική Εξίσωση Black-Scholes-Merton, χωρίς όμως αυτό να αναιρεί την εγκυρότητά τους.

2.2.3 Τύποι αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης Black-Scholes

Οι Black και Scholes κατάφεραν να λύσουν την παραπάνω μερική διαφορική εξίσωση **(11)** για την περίπτωση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς και πώλησης, θεωρώντας την κατάλληλη αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη, όπως αυτές έχουν περιγραφεί στο πρώτο κεφάλαιο της παρούσης εργασίας. Συγκεκριμένα, απέδειξαν ότι:

- Η τιμή του δικαιώματος αγοράς μιας μετοχής με τρέχουσα τιμή μετοχής S, τιμή εξάσκησης K και λήξη T, τη δεδομένη χρονική στιγμή t (όπου t < T) δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{c = SN(d_1) - K\, e^{-r(T-t)}\, N(d_2)} \qquad \textbf{(12)}$$

- Η τιμή του δικαιώματος πώλησης μιας μετοχής με τρέχουσα τιμή μετοχής S, τιμή εξάσκησης K και λήξη T, τη δεδομένη χρονική στιγμή t (όπου t < T) δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{p = K\, e^{-r(T-t)}\, N(-d_2) - SN(-d_1)} \qquad \textbf{(13)}$$

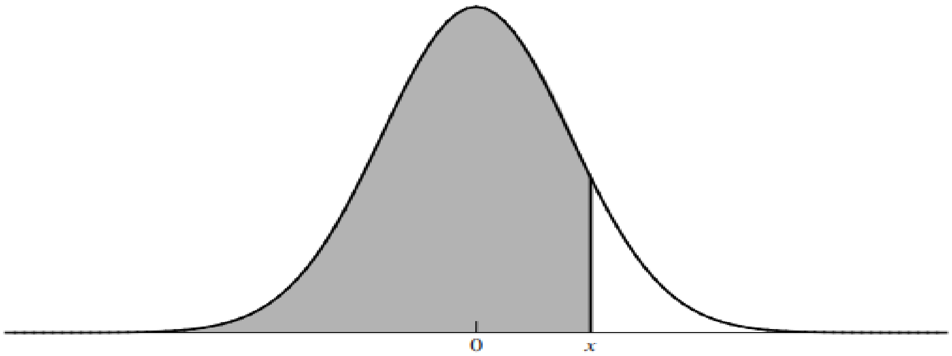
όπου

$$d_1 = \frac{\ln {S_0}/{K} + \left(r + {\sigma^2}/{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln {S_0}/{K} + \left(r - {\sigma^2}/{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

όπου N(x) είναι η αθροιστική συνάρτηση κανονικής τυποποιημένης κατανομής. Με άλλα λόγια, είναι η πιθανότητα μία μεταβλητή που ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή να είναι μικρότερη από x, όπως καταδεικνύεται και στο κάτωθι σχήμα. Το

N(d_2) εκφράζει την πιθανότητα εξάσκησης του υπό εξέταση δικαιώματος προαίρεσης σε περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου και το N(d_1) αναπαριστά την ποσότητα μεριδίων μετοχών που πρέπει να διακραττόνται προκειμένου να αντισταθμιστεί η θέση στο παράγωγο προϊόν.



Γράφημα 12 - Κατανομή N(x).

Η σχέση **Put-Call parity**, ορίζει μία σχέση που συνδέει την τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς και την τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης πάνω στον ίδιο τίτλο, με κοινή ημερομηνία λήξης και κοινή τιμή εξάσκησης. Η ισοτιμία αυτή, ορίζεται ως εξής:

$$c + Ke^{-r(T-t)} = p + S_t \tag{14}$$

Εν γένει, η εξίσωση Black-Scholes μπορεί να είναι δύσκολο να προσεγγιστεί αναλυτικά για την περίπτωση δικαιωμάτων που χαρακτηρίζονται από μία πιο σύνθετη δομή από αυτή των Ευρωπαϊκών. Σε τέτοιες περιπτώσεις, το πρόβλημα της τιμολόγησης επιδιώκεται να λυθεί κάνοντας χρήση αριθμητικών μεθόδων και μεθόδων προσομοίωσης.

Έως τώρα, έχει γίνει η γενναία υπόθεση ότι ο υποκείμενος τίτλος, πάνω στον οποίο έχει γραφεί το δικαίωμα προαίρεσης δεν πληρώνει μερίσματα. Για να συμπεριληφθεί υπόψη η επίδραση των μερισμάτων, γίνεται η υπόθεση ότι ο χρόνος διανομής και το ποσό του δοθέντος μερίσματος μπορούν να προβλεφθούν με βεβαιότητα. Η συγκεκριμένη υπόθεση ίσως δεν είναι παράλογη για παράγωγα προϊόντα όπου η διάρκεια ως τη λήξη δεν είναι τόσο μεγάλη. Η ημερομηνία κατά την οποία το μέρισμα καταβάλλεται θεωρείται ότι είναι η ημερομηνία αποκοπής του μερίσματος, όπως αυτή ορίστηκε στο πρώτο Κεφάλαιο. Την ημερομηνία αυτή, η τιμής της μετοχής μειώνεται κατά το ποσό του μερισματος.

Εν συνεχεία, εισάγεται η τιμολόγηση με συνεχή ντετερμινιστικό ρυθμό μερισματικής απόδοσης σε μεμονωμένη μετοχή, μέλος ενός δείκτη. Υποθέτοντας ότι η μετοχή πληρώνει συνεχή μερισματική απόδοση q, η διαδικασία που ακολουθείτε από την τιμή της μετοχής είναι η εξής:

$$dS = (r - q)Sdt + \sigma Sdz \tag{15}$$

Από την παραπάνω εξίσωση, φαίνεται ότι ο ρυθμός ανάπτυξης της τιμής της μετοχής, ελαττώνεται κατά το ποσοστό q, δηλαδή κατά τον εξωγενώς δοσμένο μέσο ετησιοποιημένο ρυθμό μερισματικής απόδοσης. Εν προκειμένω, η σωστή προσέγγιση είναι η προεξόφληση σε παρόντα χρόνο της γνωστής μερισματικής απόδοσης, ώστε στη τρέχουσα τιμή της μετοχής να αποτυπωθεί η ανάλογη μείωση. Εκτενέστερα, η τιμή της μετοχής μειώνεται σε $S_t e^{-q(T-t)}$, ώστε να μπορεί να μοντελοποιηθεί με παρόμοιο τρόπο ως σαν να μην υπήρχε μέρισμα. Κατά λογική συνέπεια, οι υποθέσεις του μοντέλου των Black – Scholes δεν παραβιάζονται, και κατ' αναλογία:

- Η δίκαιη τιμή του δικαιώματος αγοράς μιας μετοχής με τρέχουσα τιμή μετοχής S, τιμή εξάσκησης K, ρυθμό μερισματικής απόδοσης q και λήξη T, τη δεδομένη χρονική στιγμή t (όπου t < T) δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{c = S_t e^{-q(T-t)} N(d_1) - K\, e^{-r(T-t)}\, N(d_2)} \tag{16}$$

- Η τιμή του δικαιώματος πώλησης μιας μετοχής με τρέχουσα τιμή μετοχής S, τιμή εξάσκησης K, ρυθμό μερισματικής απόδοσης q και λήξη T, τη δεδομένη χρονική στιγμή t (όπου t < T) δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{p = K\, e^{-r(T-t)}\, N(-d_2) - S_t e^{-q(T-t)} N(-d_1)} \tag{17}$$

όπου

$$d_1 = \frac{\ln {S_0}/{K} + \left(r - q + {\sigma^2}/{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln{}^{S_0}/_K + \left(r - q - {}^{\sigma^2}/_2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Η σχέση **Put-Call Parity**, αναδιαμορφώνεται για να συμπεριληφθεί η επίδραση των μερισμάτων:

$$c + Ke^{-r(T-t)} = p + S_t e^{-q(T-t)} \quad \textbf{(18)}$$

Κεφάλαιο 3: Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης κάτω από ένα Στοχαστικό Μοντέλο Διάχυσης

Στον παρόν κεφάλαιο, περιγράφεται η στοχαστική διαδικασία που περιγράφει το σωρευτικό μέρισμα που καταβάλλεται από μία μεμονωμένη εταιρεία ή αθροιστικά από τις εταιρείες που συνθέτουν έναν συγκεκριμένο μετοχικό δείκτη για δεδομένο, ετήσιο επενδυτικό χρονικό ορίζοντα. Πρόκειται για ένα στοχαστικό μοντέλο διάχυσης, που αναφέρεται στη μελέτη του Tunaru (2018) για την αποτίμηση μερισματικών παραγώγων. Αναφορικά με το συμβολισμό που θα χρησιμοποιηθεί για την τιμολόγηση των μερισματικών παραγώγων σύμφωνα με το συγκεκριμένο μοντέλο, θεωρούμε το ακόλουθο χρονικό πλέγμα:

$$T_0 < t_0 < t_1 \ldots < t_{n1} < \ldots < T_1 < \ldots < T_2 < \ldots < T_{10} < \ldots < T^*$$

όπου T* συμβολίζει μία πολύ μακρινή, αλλά πεπερασμένη λήξη για το υπό τιμολόγηση μερισματικό δικαίωμα προαίρεσης. Χρησιμοποιείται ο συμβολισμός T_i για τις ετήσιες λήξεις Δεκεμβρίου με i = 1,…, 10 ενώ με t_j αναπαρίστανται τα ημερήσια στοιχεία που μπορούν να αντληθούν, τέτοια ώστε η διαφορά $t_{j+1} - t_j$ = Δt να αντιπροσωπεύει μία διαπραγματεύσιμη ημέρα για κάθε j > 0. Κατά αντιστοιχία, εύλογα προκύπτει ότι η διαφορά $T_{i+1} - T_i$, αντιπροσωπεύει ένα έτος για κάθε i > 0.

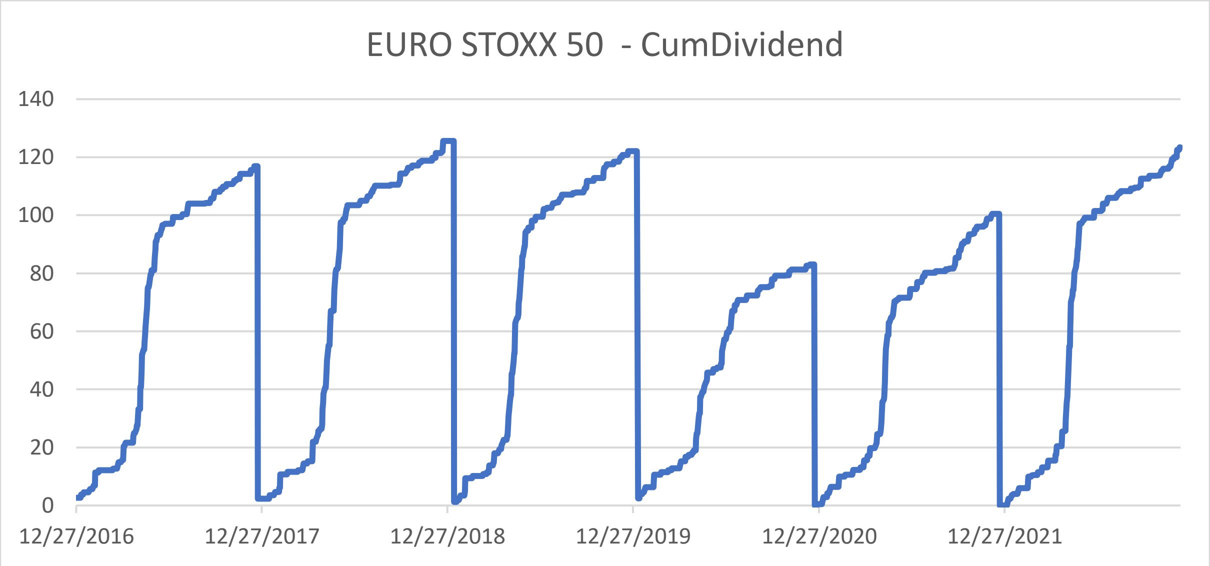
Η τιμολόγηση συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης και Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης, μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας την κατανομή των σωρευτικών μερισμάτων στο τέλος του έτους. Βέβαια, κάτι ανάλογο δεν ισχύει για την τιμολόγηση όλων των παραγώγων σε μερίσματα, καθώς πιο σύνθετα χρηματοπιστωτικά προϊόντα, που διαπραγματεύονται ως επί το πλείστο σε εξωχρηματιστηριακές συναλλαγές απαιτούν την μοντελοποίηση των αναμενόμενων μερισμάτων.

3.1 Στοχαστικό Μοντέλο Διάχυσης

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, μία δημοφιλής προσέγγιση για την τιμολόγηση των μερισματικών παραγώγων επί μετοχικών δεικών, αναφέρει ότι η εστίαση, πρέπει να προσανατολίζεται στο σωρευτικό μέρισμα που καταβάλλεται, στο τέλος κάθε ημερολογιακού έτους. Η εφαρμογή της συγκεκριμένης τακτικής, είναι ιδιαίτερα ωφέλιμη για την τιμολόγηση μερισματικών συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης αλλά και για μερισματικά συμβόλαια ανταλλαγής που διαπραγματεύονται εξωχρηματιστηριακά.

Για την πληρέστερη κατανόηση του μοντέλου, γίνεται αναφορά στον δείκτη Euro STOXX 50, ο οποίος εισήχθη στις χρηματιστηριακές αγορές στις 26 Φεβρουαρίου 1998. Πρόκειται για έναν δείκτη που περιλαμβάνει πενήντα οικονομικά εδραιωμένες εταιρείες από χώρες της Ευρώπης, ανάμεσα στις οποίες ανήκει και η Ελλάδα. Η σύνθεση του δείκτη ανανεώνεται κάθε Σεπτέμβριο με βασικό κριτήριο την κεφαλαιοποίηση της κάθε εταιρείας μέλους του δείκτη, με ανώτατο όριο στάθμισης 10%. Στις 16 Ιουνίου 2008, εισήχθη ο δείκτης Dow Jones EURO STOXX50 DVP, ο οποίος συσσωρεύει μεμονωμένα, το σύνολο των μερισματικών διανομών από την πρώτη εργάσιμη ημέρα που ακολουθεί την τρίτη Παρασκευή του Δεκέμβρη. Ετησίως, ο εν λόγω δείκτης μηδενίζεται την τρίτη ημέρα του Δεκεμβρίου. Παρέχοντας αυτούσια δεδομένα μερισμάτων που καταβάλλονται σε ετήσια περίοδο, επιτρέπει στους επενδυτές να αντισταθμίσουν τις ανοιχτές πωλήσεις αλλά και την μερισματική διακύμανση, δημιουργώντας παράλληλα έναν αυτόνομο προς επένδυση δείκτη.

Στο κάτωθι διάγραμμα, περιλαμβάνονται οι ημερήσιες χρονοσειρές σωρευτικού μερίσματος σε μονάδες δείκτη (index points) που καταβλήθηκαν από τον συγκεκριμένο δείκτη για την περίοδο που μεσολάβησε από 27 Δεκεμβρίου 2016 έως και 7 Δεκεμβρίου 2022.



Γράφημα 13 - Σωρευτικό Μέρισμα δείκτη Dow Jones Euro STOXX50.

Από το παραπάνω γράφημα, προκύπτει ότι οι αθροιστικές χρονοσειρές μερισμάτων που καταβλήθηκαν στους επενδυτές του δείκτη Dow Jones Euro STOXX50, παρουσιάζουν μία ενδιαφέρουσα στασιμότητα και ετήσια περιοδικότητα. Αξίζει να επικεντρώσει κανείς το ενδιαφέρον του, στο σιγμοειδές σχήμα που εμφανίζει η σειρά σε ετήσια βάση καθώς και ότι παρατηρείται μία εκθετική αύξηση στην καταβολή μερισμάτων, συνοδευόμενη από μία μεταβολή στην κυρτότητα της καμπύλης κατά τη διάρκεια της περιόδου που μεσολαβεί από τον Μάιο έως τον Ιούνιο. Επομένως, φαντάζει εύλογη η προσπάθεια μοντελοποίησης των σωρευτικών μερισμάτων.

Στο εξής, συμβολίζονται με X_t τα σωρευτικά μερίσματα, από την αρχή του έτους T_{i-1} έως την τρέχουσα χρονική στιγμή t, όπου t $\leq T_{\mathrm{i}}$, και όπως προαναφέρθηκε, i = {1,…, 10} και T_0 = 0. Το στοχαστικό μοντέλο διάχυσης για την αποτίμηση μερισματικών παραγώγων, αναπαρίσταται από την ακόλουθη μερική διαφορική εξίσωση:

$$\boxed{\mathrm{d}X_t = \mathrm{v}X_t\left(1 - \frac{X_t}{F}\right)\mathrm{dt} + \sigma X_t \mathrm{d}W_t^{\mathbb{P}}} \quad \textbf{(19)}$$

όπου X_o, v, F και σ λαμβάνουν αποκλειστικά μη αρνητικές τιμές. Πρόκειται για τη στοχαστική έκδοση του διαφορικού μοντέλου Verhulst-Pearl, γνωστό και ως λογιστικό μοντέλο που δημιουργήθηκε για να περιγράφει την αυτοπεριοριζόμενη ανάπτυξη ενός βιολογικού πληθυσμού. Το μοντέλο αυτό, απαντάται επίσης και με την ονομασία Geometric Mean Reversion model και μολονότι εμφανίστηκε στη χρηματοοικονομική βιβλιογραφία αρκετά νωρίς, εντούτοις η αναφορά σε αυτό είναι αρκετά περιορισμένη. Ενδεικτικά, απαντάται σε μελέτη του Merton (1975) αλλά και των Metcalf-Hasset (2006). Εν συνεχεία, παρατίθεται ο τρόπος επίλυσης αλλά και η τελική λύση του στοχαστικού μοντέλου διάχυσης που περιγράφεται από την σχέση (19).

Θεωρώντας ότι $Z_t = \frac{F}{X_t}$ και κάνοντας χρήση του λήμματος του Ito, προκύπτει ότι:

$$\mathrm{d}Z_t = [(\sigma^2 - \nu)Z_t + \nu]\mathrm{dt} - \sigma Z_t \mathrm{d}W_t^{\mathbb{P}} \quad \textbf{(20)}$$

Τυπικές ιδιότητες στοχαστικού λογισμού, θα χρησιμοποιηθούν για την άμεση επίλυση εξισώσεων της μορφής που περιγράφεται με την παρακάτω γενική μορφή εξίσωσης, και στην οποία εμπίπτει και η (20):

$$du_t = (a_1 u_t + a_2)\,\mathrm{dt} + \nu_1 u_t\,\mathrm{d}W_t^{\mathbb{P}}.$$

Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι η λύση που προκύπτει βάσει ιδιοτήτων είναι της ακόλουθης μορφής:

$$u_t = \Psi_t \left[u_0 + \ a_2 \ \int_0^t \Psi_s^{-1} \, ds\right] \quad \textbf{(21)}$$

όπου,

$$\Psi_t = \exp\left(\left(a_1 - \frac{\nu_1^2}{2}\right) t + \nu_1 W_t^{\mathbb{P}}\right)$$

Εν προκειμένω, θεωρώντας $a_1 = \sigma^2 - \nu$, $a_2 = \nu$ και $\nu_1 = -$σ, αντικαθιστώντας, εξάγεται η εξής σχέση:

$$\Psi_t = \exp\left(\left(\frac{\sigma^2}{2} - \nu\right) t + \sigma W_t^{\mathbb{P}}\right)$$

Έπειτα, είναι εφικτή η αντικατάσταση στη σχέση (21):

$$Z_{\mathrm{t}} = \ \exp\left(\left(\frac{\sigma^2}{2} - \mathrm{\nu}\right) t + \mathrm{\sigma}\, W_t^{\mathbb{P}}\right) \left[Z_0 + \nu \int_0^t \exp\left(\left(\frac{\sigma^2}{2} - \nu\right) s - \sigma W_s^{\mathbb{P}}\right)\right]$$

Τέλος, προκύπτει η λύση της διαφορικής εξίσωσης, όπως αναγράφεται στη συνέχεια:

$$\boxed{X_t = \frac{X_0 \exp\left(\left(\nu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right)}{1 + \frac{\nu X_0}{F} \int_0^t \exp\left(\left(\nu - \frac{\sigma^2}{2}\right) s + \sigma W_s\right) ds}} \quad \textbf{(22)}$$

όπου $X_0 \triangleq X_{T_{i-1}}$ είναι το αρχικό σημείο που θεωρούμε κάθε φορά για την ανάλυση. Ένα απότοκο που απορρέει από τη παραπάνω λύση είναι ότι η μεταβλητή X_t λαμβάνει θετικές τιμές σε κάθε χρονική στιγμή εντός έτους, t ∈ $(T_{i-1}, T_i]$, ανεξαρτήτως της τιμής των παραμέτρων ν, F, σ και έχοντας ως αρχικό σημείο τη μεταβλητή $X_0 > 0$. Αυτό είναι αναμενόμενο, αν αναλογιστεί κανείς ότι η συνάρτηση του αθροιστικού μερίσματος, δεν θα ήταν λογικό να φέρει αρνητικές τιμές.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ερμηνεία των δοθέντων παραμέτρων, όταν η παραπάνω εξίσωση χρησιμοποιείται για την αποτίμηση μερισματικών παραγώγων. Αναλυτικότερα, με F αναπαρίσταται το άνω όριο της εν λόγω στοχαστικής διαδικασίας, ενώ με ν συμβολίζεται ο ρυθμός με τον οποίον διανέμονται τα μερίσματα από την εκάστοτε εταιρεία. Σύμφωνα με τη μελέτη του Merton (1975), την οποία επιβεβαίωσε και η πιο πρόσφατη μελέτη των Yang and Ewald (2010), όσον αφορά στη μεταβλητή F της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης, δεν επιβεβαιώνεται ότι

$$\lim_{t\to\infty} E^{\mathbb{P}}\,(X_t) = \mathrm{F}$$

3.2 Προσομοίωση Monte Carlo

3.2.1 Μέθοδος Monte Carlo

Η προσομοίωση Monte Carlo, είναι μία στατιστική μέθοδος, που εφαρμόζεται εν γένει στη χρηματοοικονομική μοντελοποίηση, όταν η πιθανότητα διαφορετικών εκβάσεων στην επίλυση ενός προβλήματος, δεν μπορεί να προσεγγιστεί εύκολα, λόγω της παρεμβολής μιας τυχαίας μεταβλητής. Η χρήση της, επιτρέπει την κατανόηση της επίδρασης της αβεβαιότητας και της τυχαιότητας στα μοντέλα πρόβλεψης της συμπεριφοράς μιας οικονομικής μεταβλητής.

Εφαρμογές της μεθόδου Monte Carlo ως εργαλείο έρευνας, απαντώνται πρώτη φορά κατά τη διάρκεια του δεύτερου Παγκοσμίου Πολέμου, στο έργο των Neumann και Ulam στο στάδιο δημιουργίας της πρώτης ατομικής βόμβας. Η ονομασία της μεθόδου, χρονολογείται επίσης την ίδια περίοδο, και προέρχεται από την πρωτεύουσα του Μονακό, η οποία κατά την περίοδο αναφοράς, αποτελούσε το κέντρο των τυχερών παιχνιδιών και πόλο έλξης των οπαδών τους. Το κοινό στοιχεία των τυχερών παιχνιδιών και της στατιστικής μεθόδου προσομοίωσης, που δεν είναι άλλο από την τυχαιότητα, αποτέλεσε το αίτιο σύνδεσης της ονομασίας της τεχνικής με την πόλη Monte Carlo.

Κατά τη δεκαετία του 1950, η αλόγιστη και υπερβολική εφαρμογή της μεθόδου, οδήγησε παραδόξως στη δυσφήμισή της, καθώς λόγω της σχετικής απλότητάς της χρησιμοποιούταν για την επίλυση προβλημάτων στα οποία δεν μπορούσε να ανταποκριθεί ικανοποιητικά. Από το 1960 και έπειτα, η έλλογη χρήση της, οδηγεί εκ νέου στην διάδοση της. Στον κλάδο της χρηματοοικονομικής, εμφανίζεται πρώτη φορά το 1968 από τον David Hertz. Έχει έντονη απήχηση και ευρεία εφαρμογή στους κλάδους της μηχανικής, της αστροφυσικής και των εφαρμοσμένων μαθηματικών.

Βασικό προαπαιτούμενο για κάθε προσομοίωση είναι η παραγωγή μιας ακολουθίας από φαινομενικά τυχαίους αριθμούς, οι οποίοι συνήθως παράγονται από αναδρομικούς αλγόριθμους. Ως εκ τούτου, η ακολουθία των παραγόμενων αριθμών είναι ντετερμινιστική, γεγονός που εξηγεί γιατί αποκαλούνται και ψευδοτυχαίοι αριθμοί. Βασίζεται στον γνωστό από τις πιθανότητες νόμο των μεγάλων αριθμών. Η λογική της μεθόδου είναι η προσομοίωση μιας τυχαία μεταβλητής X με τη χρήση πολλαπλών, ανεξάρτητων κάθε φορά μεταξύ τους, επαναλήψεων και στην συνέχεια υπολογισμό της μέσης τιμής αυτών των τυχαίων αριθμών ως εκτίμηση της μέσης τιμής της X. Αυξάνοντας το πλήθος των επαναλήψεων, είναι αναμενόμενο να προσεγγίζεται καλύτερα η πραγματική τιμή της E(X), βελτιώνοντας έτσι την εκτίμηση.

Νόμος των μεγάλων αριθμών

Έστω X_n, n $\in \mathrm{N}$ μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, όπου οι τιμές $X_n \in \mathrm{R}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Επίσης, έστω μ = E(X_i), τότε ισχύει ότι:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_i \xrightarrow{n\to\infty} \mu$$

όπου μ είναι η θεωρητική μέση τιμή των τυχαίων μεταβλητών (X_n), n $\in \mathrm{N}$. Αναλυτικότερα, ο αριθμητικός μέσος των $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τείνει στην θεωρητική μέση τιμή μ.

3.2.2 Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης με τη μέθοδο Monte Carlo

Η τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης, αποτελεί ένα φλέγον αντικείμενο μελέτης του χρηματοοικονομικού κλάδου. Για ένα απλό δικαίωμα προαίρεσης, δεν υφίσταται η ανάγκη παραγωγής μονοπατιού, καθώς για τον καθορισμό της τιμής του, η γνώση της αξίας του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου κατά τη λήξη είναι επαρκής. Εξαιρώντας όμως, τις παραδοσιακές μορφές των δικαιωμάτων, ενδεχομένως η τιμή να εξαρτάται από το μονοπάτι που ακολουθεί η υποκείμενη μεταβλητή και ως εκ τούτου να είναι αναγκαία η γνώση ολόκληρης της διαδρομής ή τουλάχιστον μιας ακολουθίας τιμών σε δεδομένες χρονικές στιγμές. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η χρήση αποτελεσματικών υπολογιστικών μεθόδων, είναι επιτακτική.

Εξαιτίας της τυχαιότητας που προέρχεται από τη διαδικασία της τιμής της μετοχής, την Γεωμετρική Κίνηση Brown, η παραγωγή των μονοπατιών εμπεριέχει δύο είδη σφαλμάτων. Το πρώτο είδος σφάλματος, το δειγματοληπτικό σφάλμα, προέρχεται από τον τυχαίο παράγοντα της μεθόδου Monte Carlo και μπορεί να συρρικνωθεί με κατάλληλες στρατηγικές μείωσης διακύμανσης καθώς και με αύξηση των επαναλήψεων της μεθόδου. Το δεύτερο είδος σφάλματος είναι το σφάλμα διακριτοποίησης που πηγάζει από τη μετατροπή μιας διαφορικής εξίσωσης σε πεπερασμένο αριθμό διαφορών και ελαχιστοποιείται ελαττώνοντας το μήκος του χρονικού διαστήματος δt που αξιοποιούμε.

Το σφάλμα διακριτοποίησης, ενδέχεται να αλλάξει ακόμη και τη κατανομή πιθανότητας που περιγράφει τη λύση. Αυτό θα αναδειχθεί, ανασύροντας για άλλη μία φορά το γεωμετρικό μοντέλο της Κίνησης Brown.

$$dS_t = \mu S_t \mathrm{dt} + \sigma S_t dz_t \qquad \textbf{(23)}$$

Η απλούστερη προσέγγιση διακριτοποίησης, γνωστή ως σχήμα Euler, η εφαρμογή του οποίου σε μία ντετερμινιστική διαφορική εξίσωση οδηγεί σε ένα σφάλμα αποκοπής, το οποίο γίνεται αμελητέο όταν το βήμα διακριτοποίησης ελαχιστοποιείται. Εν προκειμένω, έχει ως αποτέλεσμα το εξής μοντέλο διακριτού χρόνου:

$$S_{t+\delta t} = (1 + \mu\delta t)\, S_t + \sigma S_t \sqrt{\delta t}\varepsilon, \quad \varepsilon \sim N\ (0{,}1)$$

Το συγκεκριμένο μοντέλο, είναι αρκετά εύκολο να εφαρμοστεί αλλά η περιθώρια κατανομή των μεταβλητών της για κάθε τιμή S_i δεν είναι λογαριθμοκανονική, αλλά κανονική. Εφαρμόζοντας ένα πολύ μικρό χρονικό βήμα δt, ενδεχομένως το σφάλμα να μειωνόταν, με αντίκτυπο όμως στη χρονική διάρκεια που απαιτείται για την εκτέλεση της προσομοίωσης.

Υποθέτοντας ότι τα επιτόκια είναι σταθερά, μπορούμε να εκτιμήσουμε την αξία ενός δικαιώματος προαίρεσης, εφαρμόζοντας τα ακόλουθα βήμ

Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης με τη Μέθοδο Monte Carlo	
(1)	Δημιουργία ενός τυχαίου μονοπατιού της τιμής του υποκείμενου τίτλου, εισάγοντας την υπόθεση του κόσμου ουδέτερου κινδύνου.
(2)	Υπολογισμός της αξίας του δικαιώματος προαίρεσης κατά τη λήξη T. Οι απολαβές καθορίζονται ως: ➢ c = max (S_T – K, 0) για ένα δικαίωμα αγοράς ➢ p = max (K – S_T, 0) για ένα δικαίωμα πώλησης.
(3)	Επανάληψη των βημάτων (1) και (2), N φορές.
(4)	Προεξόφληση των μελλοντικών από την εξάσκηση του δικαιώματος απολαβών, στο παρόν με το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο, ως εξής: ➢ c = $e^{-r(T-t)}$ max (S_T – K, 0) για ένα δικαίωμα αγοράς ➢ p = $e^{-r(T-t)}$ max (K – S_T, 0) για ένα δικαίωμα πώλησης.
(5)	Εκτίμηση της μέσης τιμής των απολαβών που υπολογίστηκαν στο βήμα (4).

Πίνακας 7 - Αποτίμηση Ευρωπαϊκών Δικαιωμάτων Προαίρεσης με τη Μέθοδο Monte Carlo.

3.3 Προσέγγιση Στοχαστικού Μοντέλου Διάχυσης με τη μέθοδο Monte Carlo

Το στοχαστικό μοντέλο που παρουσιάζεται στα πλαίσια αυτού του κεφαλαίου, δομείται έχοντας απομονώσει οποιαδήποτε επιρροή που ενδεχομένως προέρχεται από τον υποκείμενο δείκτη. Αναπόφευκτη συνέπεια της συγκεκριμένης προσέγγισης, είναι ότι συνεπάγεται την ύπαρξη μίας μη πλήρους αγοράς για τις πληρωμές μερίσματος. Η ύπαρξη μίας μη πλήρους αγοράς, υπονοεί ότι ενίοτε η τελική συνάρτηση κέρδους ή ζημίας μίας θέσης, δεν μπορεί να προσομοιωθεί μέσω διαπραγμάτευσης των υφιστάμενων αξιογράφων. Ωστόσο, κάνοντας χρήση των διαθέσιμων δεδομένων που υπάρχουν για τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης σε μερίσματα που διαπραγματεύονται στην χρηματιστηριακή αγορά Eurex, είναι εφικτό να υποβοηθηθεί η τιμολόγηση άλλων παραγώγων, όπως είναι τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς και πώλησης.

Σύμφωνα με τον Bjork (2009), η αγοραία τιμή κινδύνου $\lambda(t, X_t)$, μπορεί να προσδιοριστεί με τέτοιο τρόπο ώστε:

$$\mathrm{d}X_t = X_t \left(\nu - \lambda(t, X_t)\sigma - \frac{X_t}{F}\right) \mathrm{dt} + \sigma X_t \mathrm{d}W_t^Q \quad \textbf{(24)}$$

Δεδομένου ότι σε κάθε χρονική στιγμή t, η αγορά θα είναι πλήρης και για τα δέκα έτη στα οποία εκτείνεται η ανάλυση, από τα διαπραγματεύσιμα μερισματικά συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, γίνεται η υπόθεση ότι $\lambda(t, X_t) \triangleq \lambda$. Κάθε μεταβλητή λ θα προσδιορίζεται επακριβώς από προσαρμογές στα μερισματικά συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης σύμφωνα με τη δυναμική του στοχαστικού μοντέλου διάχυσης για $T_{i-1} < t \leq T_i$

$$\mathrm{d}X_t = X_t \left(\nu - \lambda\sigma - \frac{X_t}{F}\right) \mathrm{dt} + \sigma X_t \mathrm{d}W_t^Q. \quad \textbf{(25)}$$

Οι Yang - Ewald (2010), κατέληξαν σε μία κλειστή μορφή για την κατανομή της λύσης του στοχαστικού μοντέλου διάχυσης, όπως αυτή περιγράφεται από τη σχέση (22). Ωστόσο, η συγκεκριμένη προσέγγιση είναι δύσχρηστη ακόμη και για τα πιο συνήθη και απλά χρηματοοικονομικά παράγωγα, οπότε η αναφορά της δεν προσδίδει σε όρους ανάλυσης. Όπως αναφέρει και ο Bjork (2009), η προθεσμιακή τιμή της πληρωμής Div(T_{i-1}, T_i] ισούται με $E_t^Q\left(X_{T_i}\right)$. Ως εκ τούτου, η κάθε παράμετρος λ, μπορεί να προσεγγιστεί διακριτοποιώντας την παρακάτω σχέση:

$$X_{T_{i-1}+j\Delta t} = X_{T_{i-1}+(j-1)\Delta t}\left[1 + \left(\nu - \lambda\sigma - \frac{X_{T_{i-1}+(j-1)\Delta t}}{F}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\, Z_j\right]$$

όπου $Z_j \sim$ N(0,1), ∀ j. Μετέπειτα, έχοντας πρωτίστως δημιουργήσει υπολογιστικά ένα σύνολο από N διαφορετικά τυχαία μονοπάτια που μπορεί να ακολουθήσει η υπό εξέταση μεταβλητή, μεταξύ $X_{T_{i-1}}$ και X_{T_i}, μπορεί να υπολογιστεί η αναμενόμενη τιμή της, εκτελώντας προσομοίωση Monte Carlo, η ακρίβεια της οποίας συστηματικά θα βελτιώνεται, όσο αυξάνονται τα παραγόμενα τυχαία μονοπάτια.

$$E_t^Q\left(X_{T_i}\right) = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} X_{T_i}^{(k)}.$$

Η προσομοίωση Monte Carlo, αφενός είναι μία προσιτή υπολογιστικά διαδικασία και αφετέρου, επιτρέπει την τιμολόγηση και άλλων παραγώγων των οποίων η τιμή εξαρτάται από τα μονοπάτια που έχουν παραχθεί.

Εν συνεχεία, έχοντας εκτελέσει την παραπάνω μεθοδολογία, είναι εφικτή η αποτίμηση ενός Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματος προαίρεσης, θεωρώντας την κατάλληλη κάθε φορά συνοριακή συνθήκη για τον υπολογισμό της τελικής συνάρτησης κέρδους ή ζημίας. Υποθέτουμε, όπως και πριν τη δημιουργία Ν τυχαίων δειγματικών μονοπατιών στο πλαίσιο της Monte Carlo αποτίμησης.

- Η τιμή ενός μερισματικού δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου, συμβολίζοντας με S_T την τιμή του υποκείμενου τίτλου στη λήξη T, με K την συμφωνημένη βάσει όρων συμβολαίου τιμή εξάσκησης και με X_T το σωρευτικό μέρισμα που διανέμεται, δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{c = e^{-rT}\, E^{Q}\left[\, max\left(S_T - X_T - K, 0\right) \right]} \qquad \textbf{(26)}$$

$$= e^{-rT}\, \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left[\, max\left({S_T}^{(n)} - {X_T}^{(n)} - K, 0\right) \right]$$

- Η τιμή ενός μερισματικού δικαιώματος πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου, συμβολίζοντας με S_T την τιμή του υποκείμενου τίτλου στη λήξη T, με K την συμφωνημένη βάσει όρων συμβολαίου τιμή εξάσκησης και με X_T το σωρευτικό μέρισμα που διανέμεται, δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{p = e^{-rT}\, E^{Q}\left[\, max\left(K - S_T - X_T, 0\right) \right]} \qquad \textbf{(27)}$$

$$= e^{-rT}\, \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left[\, max\left(K - {S_T}^{(n)} - {X_T}^{(n)}, 0\right) \right]$$

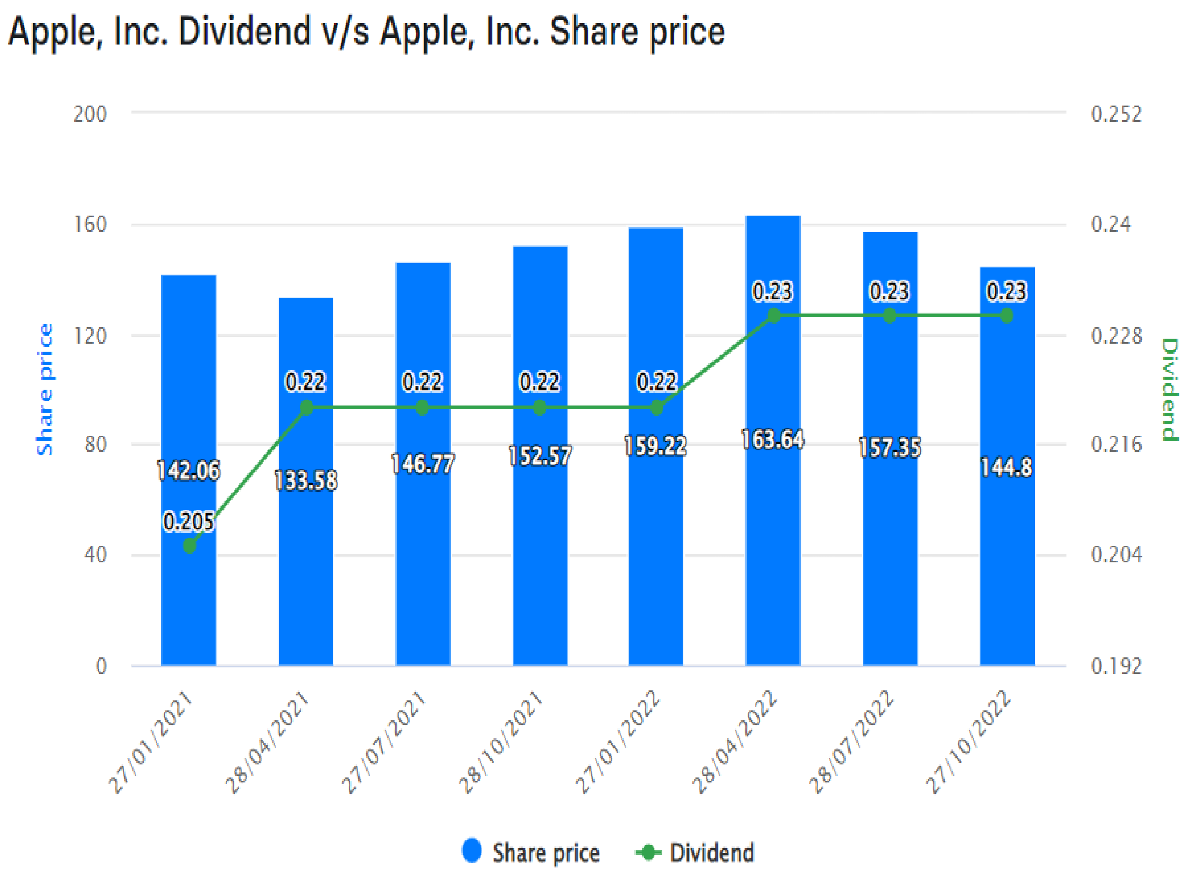
Κεφάλαιο 4: Αριθμητική Ανάλυση και Εμπειρική Μελέτη

Στο τέταρτο κεφάλαιο της εργασίας, αξιοποιώντας οικονομικά στοιχεία της μετοχή της εταιρείας Apple Inc, εφαρμόζεται ανάλυση αριθμητικής ακρίβειας για τις μη παρατηρήσιμες παραμέτρους που υπεισέρχονται στη διαδικασία που περιγράφει το σωρευτικό μέρισμα και αναλύεται η επίδραση μιας πιθανής μείωσης ή αύξησης της τιμής τους στην τιμή του υποκείμενου τίτλου. Εν συνεχεία, αξιοποιώντας δεδομένα αγοράς που έχουν αντληθεί για την επιλεγμένη εταιρεία, διεξάγεται εμπειρική ανάλυση με απώτερο σκοπό να αξιολογηθεί η προβλεπτική ικανότητα του μοντέλου στοχαστικής διάχυσης, έναντι του καθιερωμένου μοντέλου Black – Scholes, που συμπεριλαμβάνει τη μερισματική απόδοση.

4.1 Υποκείμενος Τίτλος

Για τους σκοπούς διεξαγωγής της ανάλυσης, χρησιμοποιείται ως υποκείμενος τίτλος η μετοχή της εταιρείας Apple Inc, μίας αμερικανικής πολυεθνικής που φημίζεται για τις υψηλής τεχνολογίας ηλεκτρονικές συσκευές που δημιουργεί, αλλά και για τις διαδικτυακές υπηρεσίες που προσφέρει. Ιδρύθηκε το 1976 από τον οραματιστή Steve Jobs και τον ιδιοφυή Steve Wozniak με έδρα την Καλιφόρνια, ενώ εισήχθη στις χρηματιστηριακές αγορές το 1980. Τον Αύγουστο του 2018, αποτέλεσε την πρώτη αμερικανική εταιρεία της οποίας η αγοραία αξία ξεπέρασε το ένα τρισεκατομμύριο δολάρια, και έκτοτε είναι η πολυτιμότερη εταιρεία παγκοσμίως με γνώμονα την χρηματιστηριακή αξία. Αποτελεί μία από τις σημαντικότερες τεχνολογικές εταιρείες ανά τον κόσμο μαζί με την Alphabet, την Amazon, την Meta και τη Microsoft.

Μολονότι οι μετοχές τεχνολογικών εταιρειών συνηθίζεται να μην καταβάλλουν μέρισμα προς τους μετόχους τους με σκοπό την παρακράτηση και επανεπένδυση των εσόδων στον τομέα της έρευνας και ανάπτυξης, η Apple, από το 2012 διαφοροποιείται. Έκτοτε, πραγματοποιεί τριμηνιαίες καταβολές μερίσματος και συγκεκριμένα με την έλευση του Φεβρουαρίου, του Μαΐου, του Αυγούστου και του Νοέμβρη. Ενδεικτικά, και όπως πιστοποιεί το ακόλουθο διάγραμμα, το τελευταίο τρίμηνο του 2022, δήλωσε μέρισμα της τάξεως $0.23 ανά μετοχή, μία καθόλου αμελητέα αύξηση κατά 7% σε σχέση με το τελευταίο τρίμηνο του 2021 και η οποία μεταφράζεται σε μερισματική απόδοση 0.78%. Αξιοσημείωτο, είναι το γεγονός του ότι η εταιρεία δεν έχει παραλείψει ποτέ την πληρωμή μερίσματος, ενώ τα τελευταία 10 χρονιά στοχεύει στη συστηματική αύξησή τους, με στόχο να αναδειχθεί ως μία ασφαλής επιλογή για τους επενδυτές που επιζητούν εισόδημα από τις μετοχικές τους επενδύσεις.



Γράφημα 14 - Apple Inc, Dividend & Share price.

Ιστορικά έχει πραγματοποιήσει πέντε φορές διάσπαση μετοχών (Stock Split), και συγκεκριμένα τον Αύγουστο του 2020 (4 προς 1), τον Ιούνιο του 2014 (7 προς 1), τον Φεβρουάριο του 2005 (2 προς 1), τον Ιούνιο του 2000 (2 προς 1) και τον Ιούνιο του 1987 (2 προς 1). Πρόκειται για μία εταιρική πράξη κατά την οποία οι υπάρχουσες μετοχές διαιρούνται σε περισσότερες με κύρια συνέπεια τη μείωση της τιμής αναλογικά ώστε να μην επηρεαστεί η συνολική αξία των μετοχών που έχουν στη διάθεση τους οι επενδυτές. Η κύρια αιτία που συντέλεσε στην απόφαση αυτή, ήταν ο επηρεασμός της ψυχολογίας των δυνητικών μετόχων, καθότι η υψηλή τιμή της μετοχής της Apple αποθάρρυνε τους νέους ενδιαφερόμενους επενδυτές. Επιπλέον, μολονότι η πράξη της διάσπασης καθαυτή, δεν επηρεάζει τη συνολική κεφαλαιοποίηση, καθιστώντας τη μετοχή περισσότερο προσιτή και δελεαστική αγοραστικά για ένα ευρύτερο επενδυτικό κοινό, η διοίκηση της εταιρείας αποσκοπούσε όλες τις φορές σε τόνωση της ζήτησης και επακολούθως σε αύξηση της μελλοντικής τιμής και της χρηματιστηριακής της αξίας. Όλα τα παραπάνω, αποτυπώνονται στο ακόλουθο διάγραμμα.

Γράφημα 15 - Apple, Stock Split

Στο συγκεκριμένο διάγραμμα, γίνεται αισθητή η εκθετική ανάπτυξη της Apple, με την πάροδο του χρόνου. Ως εταιρεία, εξακολουθεί να βρίσκεται στον «ενάρετο κύκλο», υπό την έννοια ότι το πετυχημένο λειτουργικό της μοντέλο, εξασφαλίζει τη συνεχή και αδιάκοπη δημιουργία αξίας στους μετόχους αλλά και τους καταναλωτές. Η καινοτομία είναι το βασικό στοιχείο που εξασφαλίζει την αυξημένη ζήτηση των προϊόντων της, αλλά και τη διεύρυνση των περιθωρίων κέρδους της, γεγονός που συμβάλει στην εκτόξευση της τιμής της μετοχής και ενισχύει τη δυνατότητα επιστροφής κεφαλαίων στους μετόχους.

4.2 Ανάλυση Αριθμητικής Ακρίβειας

Σε αυτή την ενότητα, αναλύεται η αριθμητική ακρίβεια του προτεινόμενου μοντέλου για την ποσοτικοποίηση και μοντελοποίηση του σωρευτικού μερίσματος. Το υπολογιστικό κομμάτι αλλά και τα γραφήματα γίνονται αξιοποιώντας, το σύγχρονο ολοκληρωμένο μαθηματικό λογισμικό πακέτο MATLAB. Η συγκεκριμένη επιλογή, οφείλεται στο ότι είναι ένα διαδραστικό πρόγραμμα για αριθμητικούς υπολογισμούς και οπτικοποίηση δεδομένων (Data Visualization). Για τους σκοπούς της ανάλυσης, γίνεται χρήση ενός δικαιώματος προαίρεσης που περιγράφεται από την εξής πληροφορία:

S0	K	r	TTM	σ	ν	λ	X0	F	NSteps
220.79	220	2.18%	0.2410	23.04%	14	0.5	0.73	0.73	88

Πρόκειται για ένα at-the-money δικαίωμα αγοράς της Apple Inc. με ημερομηνία λήξης 21/12/2018 το οποίο με δεδομένα 24/09/2018 κοστίζει $10.63. Εν προκειμένω, η μεταβλητή F, το ανώτατο όριο της διαδικασίας του σωρευτικού μερίσματος, λαμβάνει την τιμή 0.73 καθότι στο διάστημα που μεσολαβεί ως τη λήξη του δικαιώματος, λαμβάνει χώρα μία μερισματική πληρωμή που ως εκ τούτου αναπαριστά το σωρευτικό μέρισμα. Οι τιμές των παραμέτρων ν και λ, επιλέχθηκαν βάσει παρατηρήσεως των συνήθων τιμών που έχουν χρησιμοποιηθεί για το συγκεκριμένο μοντέλο, σύμφωνα με το άρθρο του Tunaru (2018) όταν ο υποκείμενος τίτλος είναι μία μεμονωμένη μετοχή. Τέλος, η μεταβλητότητα σ (implied volatility), αντλήθηκε ως δεδομένο από τη βάση Refinitiv, ενώ το χρονικό βήμα (NSteps = 88) επιλέχθηκε με τέτοιο τρόπο, ώστε να αντιστοιχεί σε μία ημερολογιακή μέρα, σύμφωνα με τον εναπομείναντα χρόνο ως τη λήξη (TTM) που εκφράζεται σε ετησιοποιημένη μορφή.

Όπως αναλύεται στο τρίτο κεφάλαιο, το σημείο εκκίνησης για την εφαρμογή των μεθόδων Monte Carlo για την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης, είναι η παραγωγή τυχαίων δειγματικών μονοπατιών για την υποκείμενη μεταβλητή με στόχο να αντλήσουμε την αναμενόμενη αριθμητική μέση τιμή τους υπό την υπόθεση του ουδέτερου ως προς τον κίνδυνο κόσμου, που αποτελεί μία εκτίμηση του πραγματικού μέσου. Επίσης, όπως αναφέρθηκε ότι αυξάνοντας το πλήθος των επαναλήψεων, βελτιώνεται και η εκτίμηση της μέσης τιμής, προσεγγίζοντας με μεγαλύτερη ακρίβεια τα πραγματικά δεδομένα.

Γενικότερα, είναι λογικό και καθολικά παραδεκτό, ότι σε κάθε μοντέλο που χρησιμοποιείται η μέθοδος Monte Carlo, από ένα συγκεκριμένο πλήθος επαναλήψεων και έπειτα, η διακύμανση των αποτελεσμάτων μειώνεται αισθητά, επιτρέποντας στις παρατηρούμενες βάσει μοντέλου τιμές να συγκλίνουν ολοένα και περισσότερο.

Προκειμένου να εξασφαλιστεί ότι το μοντέλο θα παράγει υψηλής ποιότητας αποτελέσματα, κρίνεται σκόπιμο να αποπειραθούμε να προσεγγίσουμε το ιδανικό από άποψης ακρίβειας πλήθος επαναλήψεων αλγεβρικά. Προς αυτή την κατεύθυνση, θα αξιοποιήσουμε τη μεθοδολογία των Consecutive Relative Errors.

Η συγκεκριμένη μεθοδολογία, στοχεύει στην ποσοτικοποίηση του οφέλους σε όρους ακρίβειας εκτίμησης, που συνεπάγεται κάθε φορά η προσθήκη μίας επιπλέον εκτέλεσης του εκάστοτε μοντέλου. Έστω ότι με P(n) συμβολίζεται η εκτιμώμενη τιμή του υπό εξέταση μοντέλου, πραγματοποιώντας n επαναλήψεις του αλγόριθμου, και αντιστοίχως με P(n-1) η τιμή που προκύπτει από n-1 επαναλήψεις. Δεδομένου ενός επιθυμητού επιπέδου ακρίβειας e, όπου e είναι ένας θετικός αλλά μικρός αριθμός που θεωρείται ως το εξωγενώς δοσμένο μέγιστο σχετικό σφάλμα που γίνεται ανεκτό, τότε ο θετικός αριθμός N προκύπτει ως εξής:

$$N_e = \min\left\{\{N : \left|\frac{P(n) - P(n-1)}{P(n-1)}\right| < \mathrm{e}, \ \text{για κάθε n} \geq \mathrm{N}\right\}$$

Ο αριθμός N, συμβολίζει τον ελάχιστο αριθμό απαιτούμενων επαναλήψεων που αναμένεται να εξασφαλίσουν ότι τα διαδοχικά σχετικά σφάλματα θα θεωρούνται τόσο μικρά, που δεν αναμένεται να επηρεάζουν την αποδοτικότητα του μοντέλου αποτίμησης μερισματικών δικαιωμάτων προαίρεσης. Κατά λογική συνέπεια, η προσέγγιση του αριθμού απαιτούμενων επαναλήψεων και η μετέπειτα αξιοποίηση του, σηματοδοτεί ένα μοντέλο του οποίου η στοχευμένη ακρίβεια, είναι η επιθυμητή.

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω, μπορούμε να εξετάσουμε το απαιτούμενο πλήθος επαναλήψεων για διαφορετικά επίπεδα ακρίβειας e. Στον επόμενο πίνακα, συνοψίζονται τα αποτελέσματα.

Επίπεδο Ακρίβειας	Απαιτούμενο Πλήθος Επαναλήψεων
e = 0.01 %	3.300
e = 0.001 %	12.500
e = 0.0001 %	50.100

Πίνακας 8 - Προσδιορισμός πλήθους Επαναλήψεων για τη μέθοδο Monte Carlo.

Όπως είναι αναμενόμενο, όσο μικρότερο είναι το επίπεδο ακρίβειας e που προσδιορίζει τα διαδοχικά σφάλματα, τόσο θα αυξάνει το πλήθος των απαιτούμενων επαναλήψεων. Εν προκειμένω, για επίπεδο ακρίβειας της τάξεως e = 0.0001%, απαιτούνται 50.000 επαναλήψεις, ενώ η απορρέουσα ακρίβεια είναι ικανοποιητική και μπορούμε με ασφάλεια να αποφανθούμε ότι τα αποτελέσματα θα είναι ασφαλή. Αξίζει να αναφερθεί ότι η αύξηση του πλήθους επαναλήψεων, αυξάνει την υπολογιστική πολυπλοκότητα. Μολονότι επομένως, η χρήση ενός μεγαλύτερου αριθμού επαναλήψεων, ενδεχομένως να επέφερε ολοένα και ασφαλέστερα αποτελέσματα, εντούτοις η εφαρμογή τους ενέχει τον κίνδυνο της εξαιρετικά χρονοβόρας εκτέλεσης του κώδικα, χωρίς να προσφέρει επιπρόσθετη αξία για την διεξαχθείσα ανάλυση.

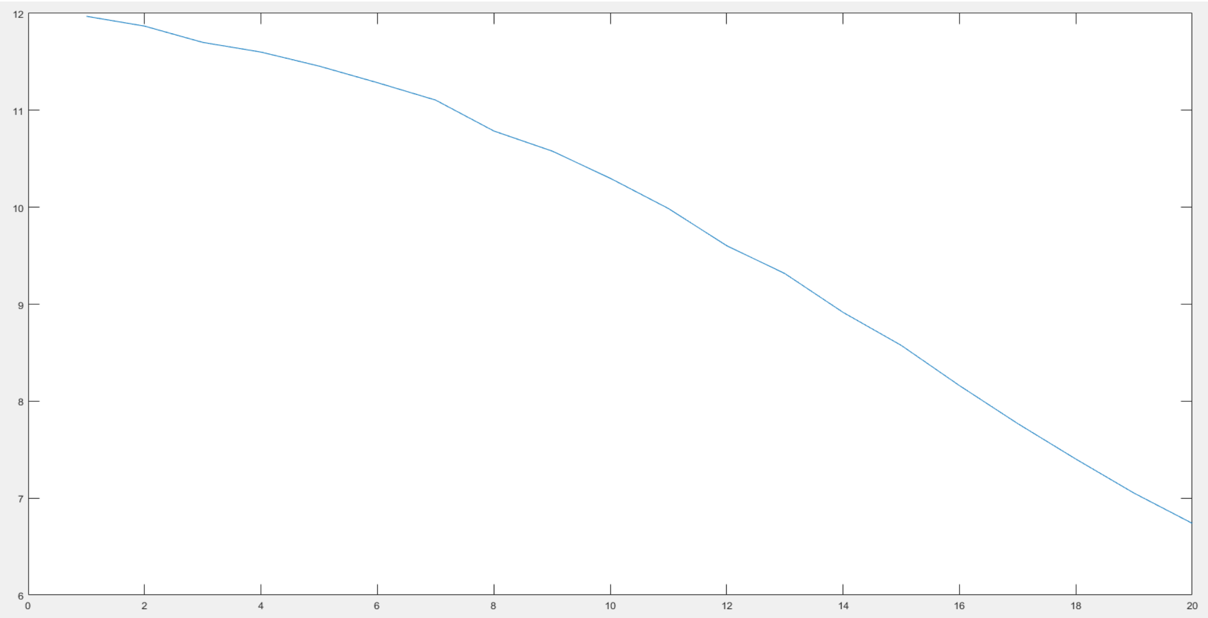
Εν κατακλείδι, το υπό εξέταση δικαίωμα προαίρεσης, έχοντας πλέον διασαφηνίσει τη διαδικασία υπολογισμού του χρονικού βήματος αλλά και του πλήθους επαναλήψεων, φέρει τα εξής χαρακτηριστικά:

S0	K	r	TTM	σ	ν	λ	X0	F	NSteps	NRepl
220.79	220	2.18%	0.2410	23.04%	14	0.5	0.73	0.73	88	50.000

Έπειτα, θα εξεταστεί η αριθμητική επιρροή της μεταβολής των τιμών των παραμέτρων που υπεισέρχονται στον αλγόριθμο υπολογισμού της τιμής του μερισματικού παραγώγου. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη των τεσσάρων παραμέτρων (v, λ, σ, F) που χαρακτηρίζουν τη διαδικασία του σωρευτικού μερίσματος και η επίδραση της μεταβολής των οποίων ceteris paribus, δεν είναι τόσο προφανής εκ πρώτης όψεως, όσο άλλων μεταβλητών, όπως για παράδειγμα της τιμής εξάσκησης K, η αύξηση της οποίας θα έχει ως επακόλουθο τη μείωση της εκτιμώμενης τιμής, υποδηλώνοντας μία σαφή αρνητική σχέση μεταξύ των δύο. Ομοίως, μία αύξηση της τιμής του υποκείμενου τίτλου S0, θα συντελέσει σε αύξηση της εκτιμώμενης τιμής, ορίζοντας έτσι μία θετική σχέση.

Για την προσέγγιση των παραπάνω σχέσεων, αναπαράχθηκαν εντολές στη MATLAB, ενώ για την ευκρινή διατύπωσή τους, ακολουθούν τα συναφή γραφήματα, τα οποία και παρατίθενται προς διευκόλυνση της διεξαγωγής συμπερασμάτων.

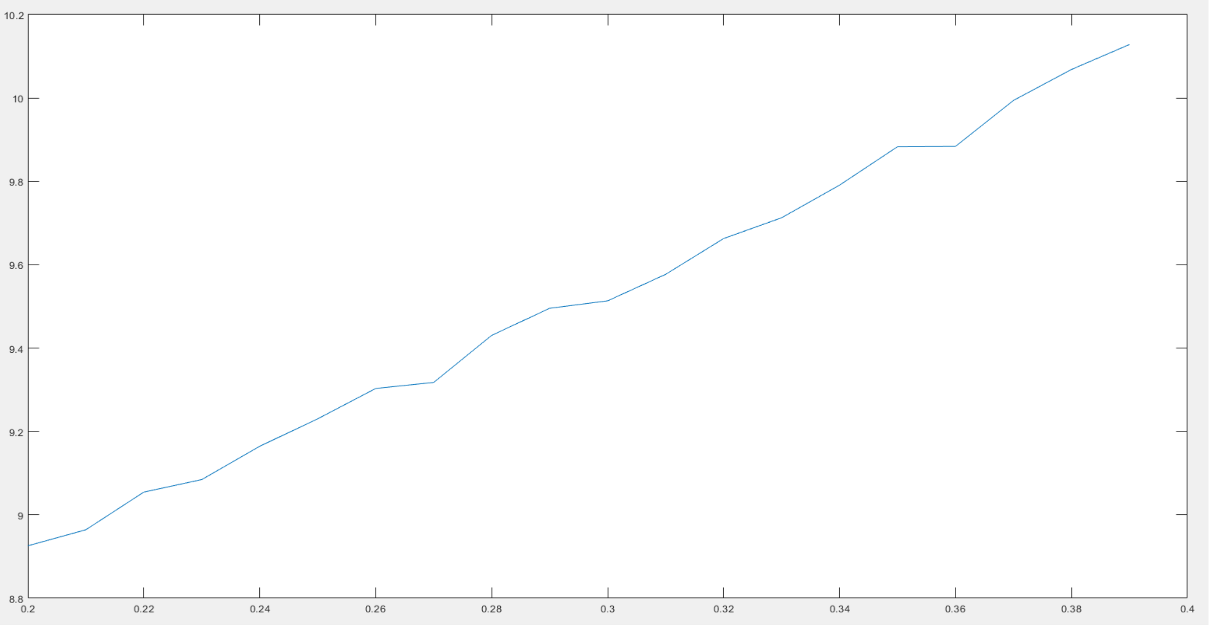
- Το διάγραμμα που προκύπτει μεταβάλλοντας την τιμή της μεταβλητής **v**, που αναπαριστά την ταχύτητα δημιουργίας μερισμάτων είναι το εξής:



Γράφημα 16 -Αριθμητική Ανάλυση παραμέτρου v.

Από τη συγκεκριμένη γραφική αναπαράσταση, τεκμαίρεται ότι η αύξηση της τιμής της μεταβλητής **v**, οδηγεί σε μείωση της τιμής του μερισματικού παραγώγου, υποδηλώνοντας μία αρνητική σχέση. Εμβαθύνοντας σε αυτή τη σχέση, όσο αυξάνεται η ταχύτητα και επομένως η αθροιστική αξία των μερισμάτων που δίνονται από τον υποκείμενο τίτλο και τα οποία εν τέλει αφαιρούνται από την τιμή του περιουσιακού στοιχεία, τόσο μειώνεται η αξία ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς.

- Το διάγραμμα που προκύπτει μεταβάλλοντας την τιμή της μεταβλητής **λ**, που αναπαριστά την αγοραία τιμή κινδύνου είναι το εξής:

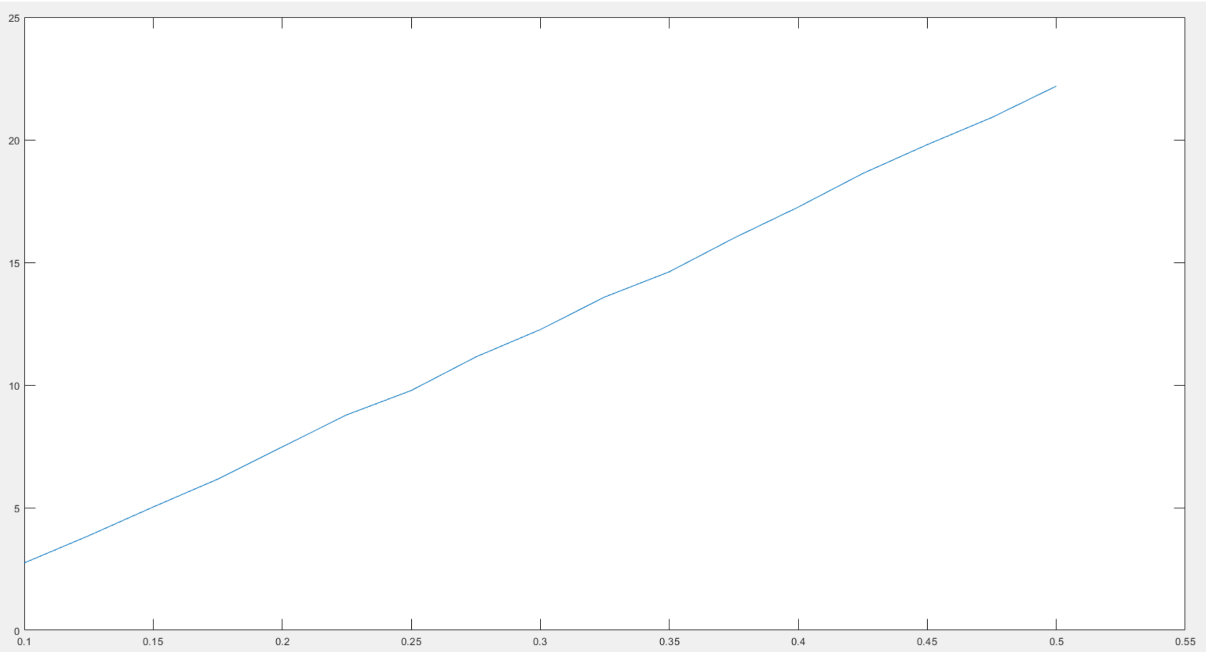


Γράφημα 17 - Αριθμητική Ανάλυση παραμέτρου λ.

Από την απορρέουσα γραφική απεικόνιση, είναι ορατή μία θετική σχέση μεταξύ της αγοραίας τιμής κινδύνου **λ** και της τιμής του μερισματικού παραγώγου. Η αγοραία τιμή κινδύνου αναπαριστά το ρίσκα που πηγάζει από βασικές οικονομικές μεταβλητές, όπως είναι τα επιτόκια, οι συναλλαγματικές ισοτιμίες κ.α.. Πρόκειται για την επιπλέον απόδοση που αναζητούν οι επενδυτές, προκειμένου να ανταπεξέλθουν στην ανάληψη μεγαλύτερου ρίσκου.

Στην εξίσωση (24) που αξιοποιείται από το υπό εξέταση μοντέλο, η μεταβλητή λ, λειτουργεί αφαιρετικά μειώνοντας εν τέλει το αθροιστικό μέρισμα, το οποίο προκύπτει κλιμακωτά μικρότερο με την αύξηση της συγκεκριμένης παραμέτρου. Τοιουτοτρόπως, ανακαλώντας πρωτίστως τον τύπο αποτίμησης ενός μερισματικού δικαιώματος αγοράς όπως περιγράφεται από τη σχέση (26), προκύπτει ότι το μικρότερο σωρευτικό μέρισμα, δικαιολογεί μία μεγαλύτερη τιμή του παραγώγου.

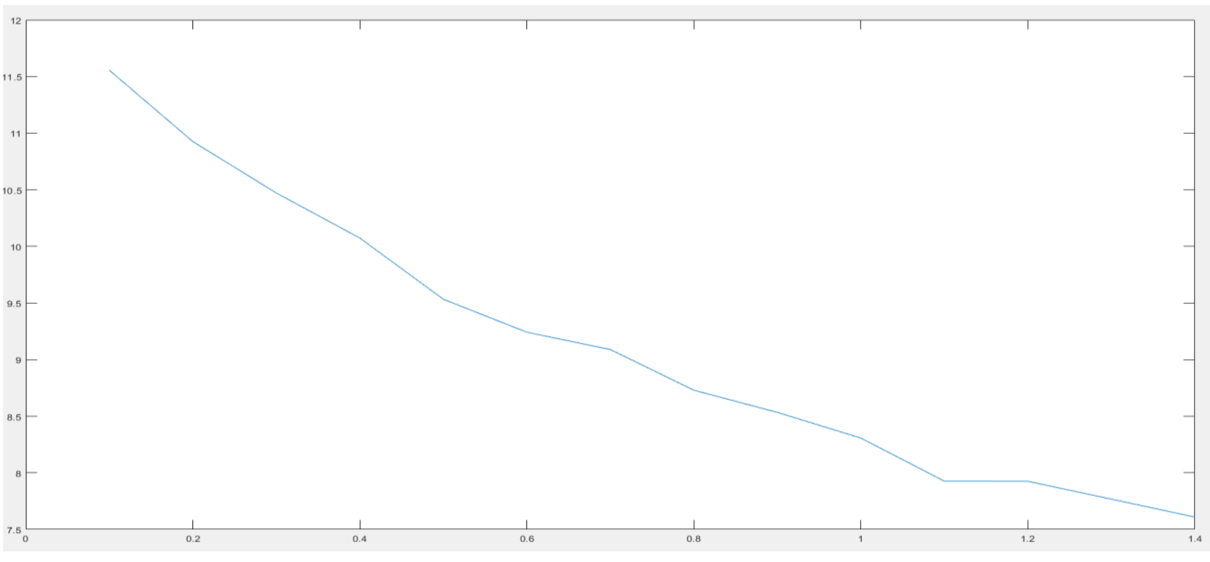
- Το διάγραμμα που προκύπτει μεταβάλλοντας την τιμή της μεταβλητής **σ**, που αναπαριστά την μεταβλητότητα είναι το εξής:



Γράφημα 18 - Αριθμητική Ανάλυση παραμέτρου σ.

Εν προκειμένω, επίσης διαφαίνεται μία θετική σχέση μεταξύ της μεταβλητότητας που χαρακτηρίζει τη διανομή μερισμάτων και ποσοτικοποιεί την αβεβαιότητα για τη μελλοντική μερισματική πολιτική και της τιμής του μερισματικού δικαιώματος αγοράς.

- Τέλος, το διάγραμμα που προκύπτει μεταβάλλοντας την τιμή της μεταβλητής **F**, που αναπαριστά το ανώτατο όριο για τη στοχαστική διαδικασία του σωρευτικού μερίσματος είναι το εξής:



Γράφημα 19 - Αριθμητική Ανάλυση παραμέτρου F.

Καθώς η μεταβλητή F λαμβάνει όλο και μεγαλύτερες θετικές τιμές, είναι έκδηλη μία αρνητική επίπτωση στο ύψος της εκτιμώμενης τιμής, πιστοποιώντας έτσι μία αρνητική σχέση.

Για την αιτιολόγηση της συγκεκριμένης σχέσης, αρκεί να ανατρέξουμε για άλλη μία φορά στη σχέση (24). Πράττοντας έτσι, προκύπτει ότι οι υψηλότερες τιμές για τη μεταβλητή F, συνάδουν με αύξηση του αθροιστικού μερίσματος, που με τη σειρά του, οδηγεί σε μείωση της τιμής του μερισματικού δικαιώματος αγοράς στη σχέση (26).

Εν κατακλείδι, η επίδραση που ασκείται στην τιμή του μερισματικού παραγώγου μεταβάλλοντας κάθε φορά μία από τις τέσσερις παραμέτρους που μελετήθηκαν, και διατηρώντας όλα τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά του υπό τιμολόγηση δικαιώματος προαίρεσης αμετάβλητα, συνοψίζεται στον κάτωθι πίνακα:

	Ευρωπαϊκό Μερισματικό Δικαίωμα Αγοράς
ν	–
λ	+
σ	+
F	–

Πίνακας 9 - Παράγοντες Προσδιορισμού της τιμής ενός Μερισματικού Δικαιώματος Προαίρεσης

4.3 Εμπειρική Μελέτη - Μεθοδολογία

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα προσεγγιστούν εκτελώντας εμπειρική ανάλυση το μοντέλο των Black – Scholes που έχει επεκταθεί ώστε να συνυπολογίζει γνωστή μερισματική απόδοση αλλά και το μοντέλο που διεξοδικά αναπτύχθηκε στην τρίτη ενότητα για την αποτίμηση μερισματικών δικαιωμάτων αγοράς όταν το σωρευτικό μέρισμα ακολουθεί μία στοχαστική διαδικασία διάχυσης. Απώτερος σκοπός, είναι η σύγκριση της αποτελεσματικότητάς τους όσον αφορά στην ακρίβεια των εκτιμώμενων τιμών. Προς αυτή την κατεύθυνση, η διαδικασία που ακολουθήθηκε ήταν η εξής:

- Συλλογή απαραίτητων πραγματικών δεδομένων από αξιόπιστη πηγή (Refinitiv DataStream) για την μετοχή της εταιρείας Apple, και κατάλληλη επεξεργασία που μέλλεται να περιγραφεί, σε αρχείο Excel.

- Δεδομένων των ημερήσιων τιμών κλεισίματος της μετοχής της Apple, του επιτοκίου που φέρει μηδενικό κίνδυνο, των τιμών εξάσκησης αλλά και του χρόνου ως τη λήξη, διεξήχθη η από κοινού εκτίμηση της μερισματικής απόδοσης q αλλά και της τεκμαρτής μεταβλητότητας (implied volatility) σ για το μοντέλο Black - Scholes, με τέτοιο τρόπο, ώστε να ελαχιστοποιούνται τα αθροίσματα τετραγωνικών σφαλμάτων μεταξύ των παρατηρούμενων τιμών αγοράς και των θεωρητικών βάσει μοντέλου τιμών για το σύνολο των υπό εξέταση δικαιωμάτων αγοράς *(εντός δείγματος παρατήρησης, in sample).*

- Ομοίως, διεξάγεται η εκτίμηση των τεσσάρων αγνώστων παραμέτρων του στοχαστικού μοντέλου διάχυσης *(εντός δείγματος παρατήρησης, in sample)*, που θα διασφαλίσουν την καλύτερη δυνατή αντιστοίχιση στις διαθέσιμες τιμές αγοράς.

- Έχοντας προβεί σε εκτίμηση ημερήσιων παραμέτρων εντός δείγματος, υπολογίζεται και αξιοποιείται ο αριθμητικός τους μέσος για τον έλεγχο της προβλεπτικής ικανότητας *(εκτός δείγματος παρατήρησης, out of sample)* των υπό σύγκριση μοντέλων.

Με την περάτωση της προαναφερθείσας διαδικασίας, μπορούμε υπεύθυνα να αποφανθούμε για το αν το στοχαστικό μοντέλο διάχυσης, είναι μία καλή προσέγγιση για την αποτίμηση μερισματικών παραγώγων.

4.3.1 Δεδομένα Εμπειρικής Μελέτης

Για σκοπούς περάτωσης της εμπειρικής ανάλυσης, δεδομένα για δικαιώματα αγοράς επί της μετοχής της Apple, αντλήθηκαν από τη βάση δεδομένων Refinitiv για την περίοδο από 24.09.2018 έως και 31.12.2018, χρονική περίοδος που επιλέχθηκε ως επί τω πλείστο λόγω αφθονίας διαθέσιμων δεδομένων. Η επιλογή διαπραγματεύσιμου τίτλου, οφείλεται στο ότι αφενός είναι μία εταιρεία διεθνούς βεληνεκούς που λειτουργεί ως υποκείμενος τίτλος για πληθώρα παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων, ενώ αφετέρου, όπως έχει ήδη επισημανθεί, διακρίνεται από μία έντονη, και με αυξητική διαχρονικά τάση, μερισματική πολιτική.

Τα κυριότερα ιστορικά στοιχεία που αντλήθηκαν αφορούν τα εξής:

- Ημερήσιες τιμές κλεισίματος και τιμές δικαιωμάτων αγοράς για διαφορετικές ληκτότητες και διαφορετικές τιμές εξάσκησης.
- Τεκμαρτή μεταβλητότητα για κάθε δικαίωμα αγοράς.
- Καταβληθέντα μερίσματα, καθώς και μερισματική απόδοση περιόδου.
- Ύψος επιτοκίου μηδενικού κινδύνου. Εν προκειμένω, γίνεται χρήση του τριμηνιαίου US T-Bill.

Αναφορικά με την επεξεργασία των δεδομένων, πρωταρχική προσαρμογή ήταν η αναθεώρηση των ημερήσιων τιμών κλεισίματος, με τέτοιο τρόπο ώστε να αντικατοπτρίζουν τη διάσπαση μετοχών (4-1) που έλαβε χώρα τον Αύγουστο 2020.

Για κάθε ημέρα που συνιστά την επιλεγμένη χρονική περίοδο, γίνεται χρήση δώδεκα διαφορετικών δικαιωμάτων αγοράς, η επιλογή των οποίων έγκειται στη διαφορά της τρέχουσας κάθε φορά τιμής και της τιμής εξάσκησης. Αναλυτικότερα, κρίνεται ωφέλιμο να υπάρχουν στοιχεία για τέσσερα in-the-money, τέσσερα at-the-money και τέσσερα out-of-the-money δικαιώματα αγοράς. Αναφορικά με την εναπομένουσα περίοδο ως τη λήξη τους, θεωρούνται τέσσερα διαστήματα· ένα βραχυπρόθεσμο διάστημα των τριών, ένα μεσοπρόθεσμο διάστημα των έξι έως εφτά μηνών, ένα μακροπρόθεσμο διάστημα των δώδεκα έως δεκαέξι μηνών και τέλος ένα δείγμα μεικτών ληκτοτήτων που περιλαμβάνει όλα τα επιμέρους δικαιώματα προαίρεσης, καθώς και δικαιώματα προαίρεσης που λήγουν σε τέσσερις μήνες.

Λαμβάνοντας υπόψη, την τιμή εξάσκησης και την περίοδο ως τη λήξη, δημιουργούνται με τη βοήθεια σχετικής συνάρτησης στο Excel, τα tickers τα οποία είναι απαραίτητα για την απόκτηση των τιμών των δικαιωμάτων προαίρεσης, της τερμακτής μεταβλητότητας και της ημερομηνίας λήξης του δικαιώματος. Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι κατ' αντιστοιχία προκύπτει ότι για κάθε ένα από τα τέσσερα ως τη λήξη διαστήματα, υπάρχουν ένα in-the-money, ένα at-the-money και ένα out-of-the-money δικαιώματα αγοράς. Ενδεικτικά παρατίθενται στον επόμενο πίνακα τα tickers για τις πρώτες τέσσερις ημέρες της επιλέξιμης χρονικής περιόδου ανά moneyness:

	ATM | 3m.	**ATM | 4 m.**	**ATM | 7 m.**	**ATM | 16 m.**
24.09.2018	AAQ$1218220C	AAQ$0119220C	AAQ$0419220C	AAQ$0120220C
25.09.2018	AAQ$1218220C	AAQ$0119220C	AAQ$0419220C	AAQ$0120220C
26.09.2018	AAQ$1218220C	AAQ$0119220C	AAQ$0419220C	AAQ$0120220C
27.09.2018	AAQ$1218225C	AAQ$0119225C	AAQ$0419225C	AAQ$0120225C

Πίνακας 10 - ATM Tickers.

	OTM | 3m.	**OTM | 4 m.**	**OTM | 7 m.**	**OTM | 16 m.**
24.09.2018	AAQ$1218225C	AAQ$0119225C	AAQ$0419225C	AAQ$0120225C
25.09.2018	AAQ$1218225C	AAQ$0119225C	AAQ$0419225C	AAQ$0120225C
26.09.2018	AAQ$1218225C	AAQ$0119225C	AAQ$0419225C	AAQ$0120225C
27.09.2018	AAQ$1218230C	AAQ$0119230C	AAQ$0419230C	AAQ$0120230C

Πίνακας 11 - OTM Tickers.

	ITM | 3m.	**ITM | 4 m.**	**ITM | 7 m.**	**ITM | 16 m.**
24.09.2018	AAQ$1218215C	AAQ$0119215C	AAQ$0419215C	AAQ$0120215C
25.09.2018	AAQ$1218215C	AAQ$0119215C	AAQ$0419215C	AAQ$0120215C
26.09.2018	AAQ$1218215C	AAQ$0119215C	AAQ$0419215C	AAQ$0120215C
27.09.2018	AAQ$1218220C	AAQ$0119220C	AAQ$0419220C	AAQ$0120220C

Πίνακας 12 - ITM Tickers.

4.3.2 Εκτίμηση Παραμέτρων

Στο υπό εξέταση μοντέλο, υπεισέρχονται τέσσερις μεταβλητές, η τιμή των οποίων είναι άγνωστη και χρήζει εκτίμησης. Στο πλαίσιο της παρούσης διπλωματικής, θα αξιοποιηθεί ο επαναληπτικός αλγόριθμος Levenberg Marquardt (1944 & 1963), η δομή του οποίου προϋποθέτει την ύπαρξη ενός μοντέλου και ενός συνόλου προς εκτίμηση παραμέτρων. Η συγκεκριμένη τεχνική, εντοπίζει τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης που εκφράζεται ως άθροισμα τετραγώνων μη γραμμικών συναρτήσεων. Με την πάροδο του χρόνου, έχει καθιερωθεί ως μία από τις δημοφιλέστερες τεχνικές επίλυσης μη γραμμικών προβλημάτων.

Η διαδικασία ελαχιστοποίησης των τετραγωνικών σφαλμάτων αναπαρίσταται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\boxed{\text{Σετ παραμέτρων μοντέλου } \hat{\theta} = \arg\min \sum_{i=0}^{N} \left(f_i^{market} - f_i^{model} \right)^2} \qquad \textbf{(28)}$$

Περιγραφικά, η διαδικασία αυτή αποσκοπεί στην εύρεση των κατάλληλων τιμών των παραμέτρων, για τις οποίες τα τετράγωνα των διαφορών από τις τιμές των δικαιωμάτων που προήλθαν από το θεωρητικό μοντέλο με τις πραγματικές τιμές των δικαιωμάτων αγοράς, έχουν την κατά δύναμιν μικρότερη τιμή. Η δομή του αλγόριθμου είναι η ακόλουθη:

Υποθέτοντας ότι έχουμε αντλήσει N παρατηρήσεις, όπου i = 1 ,2,…, N και μία εξίσωση g : $R^n \to$ R με παραμέτρους $x_1, x_2, \dots , x_n$, ενώ ισχύει N ≥ n. Περεταίρω, γίνεται η υπόθεση ότι y_i είναι οι τιμές των δικαιωμάτων, όπως έχουν συλλεχθεί από την αγορά. Εν συνεχεία, γίνεται ο υπολογισμός των τιμών βάσει μοντέλου, g(x) = $\hat{y}_i$, καθώς και των καταλοίπων r_i(x) = $\hat{y}_i$ - y_i. Ολοκληρώνοντας τη συγκεκριμένη διαδικασία, έχει υπολογιστεί το διάνυσμα διάστασης N των καταλοίπων R = ($r_1, \dots , r_N$)^T.

Τέλος, πρέπει να επιλυθεί το εξής πρόβλημα ελαχιστοποίησης:

$$\boxed{\min_x f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} r_i(x)^2 = \frac{1}{2} R(x)^T R(x)} \qquad \textbf{(29)}$$

Οι Levenberg K. (1944) και Marquardt D. (1963) πρότειναν μία λύση του προβλήματος προσαρμογής της καμπύλης χρησιμοποιώντας έναν επαναληπτικό αλγόριθμο που συνδυάζει τη μέθοδο Steepest Descent με την μέθοδο των Gauss-Newton (επέκταση της μεθόδου Laplace για την προσέγγιση ενός ολοκληρώματος).

Στο άρθρο του, ο Levenberg (1944) προτείνει τον υπολογισμό της κατεύθυνση d_k ως τη λύση στην παρακάτω τροποποιημένη εξίσωση των Gauss-Newton:

$$(R'(x^k)^T R'(x^{k)} + \lambda_\kappa I) d_k = - R'(x^k)^T R'(x^k)$$

όπου I είναι μοναδιαία μήτρα και $\lambda_\kappa > 0$ είναι μία παράμετρος απόσβεσης. Ο πίνακας στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης είναι θετικά ορισμένος, έτσι ώστε η λύση d_k να εξασφαλίζει πως είναι μία δίκαιη κατεύθυνση για την συνάρτηση f για όλες τις θετικές παραμέτρους απόσβεσης.

Για μικρές τιμές του λ_κ, η μέθοδος συμπεριφέρεται σαν την επανάληψη των Gauss-Newton και δείχνει έναν ρυθμό σύγκλισης των επικρατουσών x_k που είναι κοντά στο x^* . Για επαναλήψεις μακριά από την βέλτιστη, η παράμετρος απόσβεσης είναι πολύ μεγάλη και η κατεύθυνση μπορεί να αποδοθεί ως:

$$d_k \approx - \frac{1}{\lambda_\kappa} (R'(x^k)^T R'(x^k)).$$

Για την επίλυση του προβλήματος ελαχιστοποίησης χρησιμοποιείται η εντολή lsqnonlin του MATLAB. Η σύνταξή της, είναι της μορφής x=lsqnonlin(fun,x_0,lb,ub,options) και ουσιαστικά, ξεκινώντας από ένα αρχικό σημείο x_0 εντοπίζεται ένα (τοπικό) ελάχιστο του αθροίσματος των τετραγώνων της συνάρτησης fun. Οι πρόσθετες συνθήκες lb και ub, διασφαλίζουν ότι η λύση θα είναι εντός του διαστήματος [lb,ub] ενώ διάφορες επιλογές βελτιστοποίησης μπορούν να προστεθούν με τη συνθήκη options, όπως ενδεικτικά είναι η ελάττωση του μήκους του βήματος.

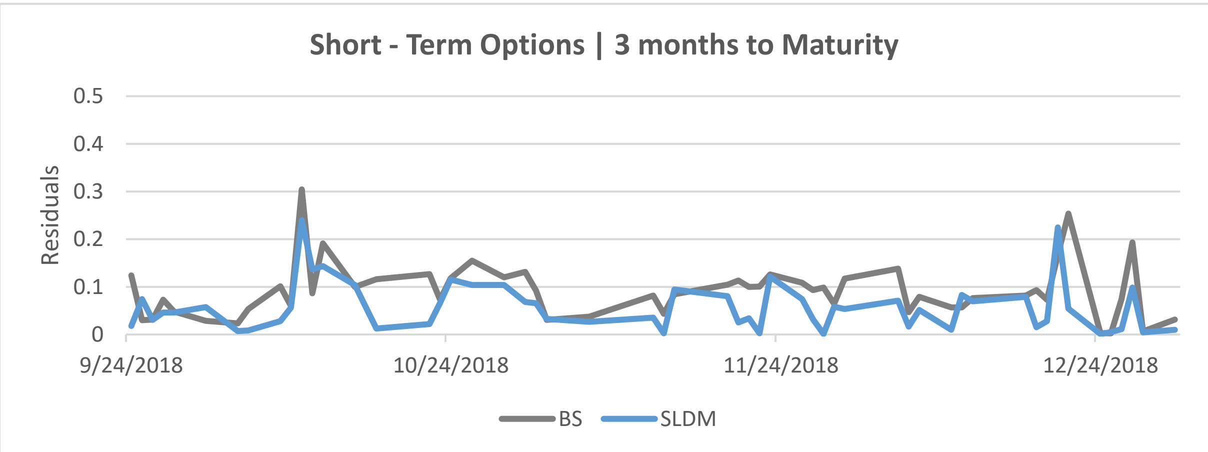
Αξίζει να αναφερθεί ότι η εντολή lsqnonlin είναι αρκετά ευαίσθητη ως προς τις αρχικές παραμέτρους x_0 και ως εκ τούτου πρέπει να επιλεχθούν με σύνεση και προσοχή. Επίσης, ακόμη και αν καταλήξουμε σε ένα ελάχιστο, δεν είναι εφικτό να γνωρίζουμε αν πρόκειται για τοπικό ή ολικό ελάχιστο και κατά συνέπεια, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε εάν οι τιμές των παραμέτρων που εκτιμήθηκα είναι οι καλύτερες δυνατές. Στη βιβλιογραφία, για την αντιμετώπιση του τελευταίου ζητήματος, έχει προταθεί να αξιολογείται η καταλληλότητα των εκτιμώμενων παραμέτρων βάσει επιπρόσθετων κριτηρίων. Ενδεικτικά, μπορεί να εξεταστεί εάν η διαφορά της τιμής του μοντέλου βάσει εκτιμώμενων παραμέτρων και των παρατηρούμενων στην αγορά τιμών, βρίσκεται εντός του διαστήματος $^{bid}/_{ask}$ spread.

4.3.3 Εκτίμηση Παραμέτρων υπό εξέταση μοντέλων (In the Sample)

Στη συγκεκριμένη υποενότητα, εκτίθενται τα αποτελέσματα της εμπειρικής ανάλυσης για το μοντέλο Black – Scholes με μερισματική απόδοση, αλλά και για το Στοχαστικό Μοντέλο Διάχυσης. Επισημαίνεται, ότι για το μοντέλο Black – Scholes γίνεται εκτίμηση της μεταβλητότητας σ και της μερισματικής απόδοσης q, ενώ για το στοχαστικό μοντέλο διάχυσης, γίνεται εκτίμηση των τεσσάρων παραμέτρων για τις οποίες διεξήχθη και αριθμητική ανάλυση. Τα αποτελέσματα εξετάζονται για καθένα από τα τέσσερα δείγματα που έχουν οριστεί ανάλογα με τις εξεταζόμενες κάθε φορά ληκτότητες. Οι πίνακες που έπονται συνοψίζουν τη σχετική πληροφορία.

Parameter Estimation Results | 3 months to Maturity								
	Black – Scholes Model			Stochastic Logistic Diffusion Model				
	q	σ	Residuals	σ	v	λ	F	Residuals
Average	0.00118	0.30155	**0.09107**	0.30226	13.2737	0.35828	0.75962	**0.05663**
St. Deviation	0.00106	0.04810	**0.05756**	0.04543	1.25425	0.06983	0.44941	**0.05132**
Minimum	0.00108	0.21791	**0.00261**	0.21498	8.23064	0.12088	0.10000	**0.00101**
Maximum	0.00745	0.41636	**0.30445**	0.41827	15.000	0.40000	2.74953	**0.23977**

Πίνακας 13 - Αποτελέσματα Εμπειρικής Μελέτης | 3 months to maturity.



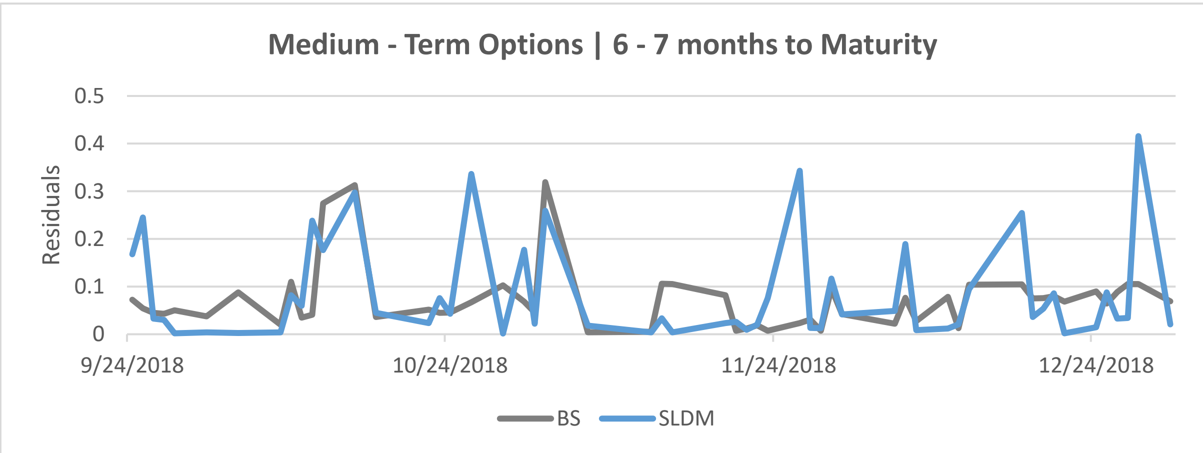
Γράφημα 20 - Σύγκριση Καταλοίπων των δύο μοντέλων | In sample | 3 months to Maturity

Παρατηρούμε ότι το στοχαστικό μοντέλο διάχυσης, υπερτερεί έναντι του καθιερωμένου Black – Scholes μοντέλου για τα δικαιώματα προαίρεσης με λήξη σε τρεις μήνες. Αυτό δικαιολογείται από το γεγονός του ότι η Apple, καταβάλει μερίσματα τριμηνιαία, οπότε το μοντέλο αθροιστικών μερισμάτων βάσει υποθέσεων, αποτυπώνει ακριβέστερα τη συμπεριφορά του υποκείμενου τίτλου στο διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο μερισματικών πληρωμών καθώς η προσεγγίσει καλύτερα την επίδραση της μερισματικής πληρωμής που λαμβάνει χώρα.

Εν συνεχεία, διεξάγονται robustness checks για τα δείγματα των μεσοπρόθεσμων (έξι έως εφτά μήνες ως τη λήξη) και των μακροπρόθεσμων (δώδεκα έως δεκαέξι μήνες ως τη λήξη) δικαιωμάτων προαίρεσης. Αναμένουμε τα αποτελέσματα του στοχαστικού μοντέλου διάχυσης να χειροτερεύουν καθώς απομακρυνόμαστε από το χρονικό πλαίσιο των τριών μηνών.

Parameter Estimation Results | 6-7 months to Maturity								
	Black – Scholes Model			Stochastic Logistic Diffusion Model				
	q	σ	Residuals	σ	v	λ	F	Residuals
Average	0.00258	0.28519	**0.07063**	0.27546	13.4691	0.30675	0.73731	**0.08374**
St. Deviation	0.00739	0.03290	**0.06506**	0.03132	1.13774	0.11255	0.23411	**0.10393**
Minimum	0.00103	0.23035	**0.00409**	0.20144	9.72477	0.00142	0.17384	**0.00144**
Maximum	0.04531	0.37228	**0.31918**	0.33496	14.8192	0.03823	1.60159	**0.41577**

Πίνακας 14 - Αποτελέσματα Εμπειρικής Μελέτης | 6-7 months to maturity

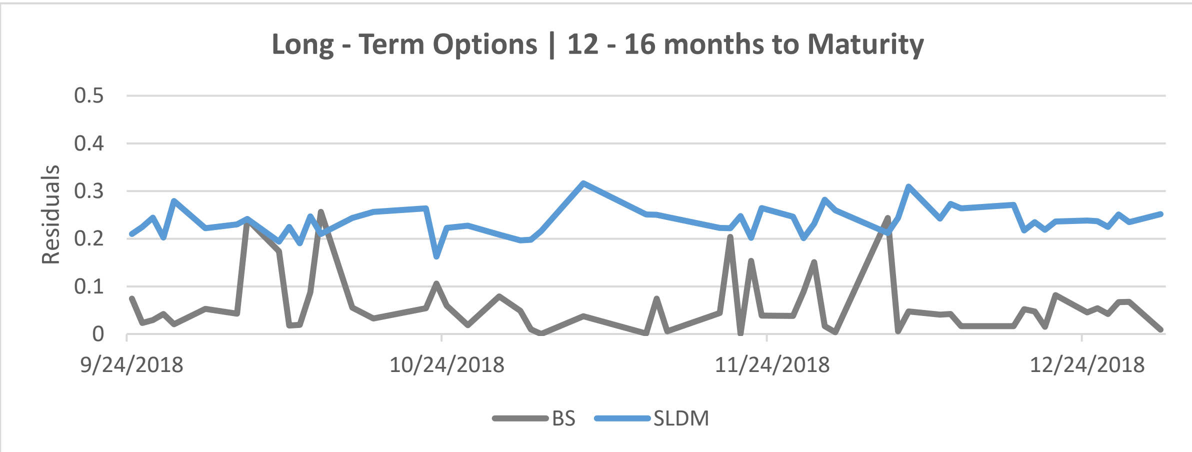


Γράφημα 21 - Σύγκριση Καταλοίπων των δύο μοντέλων | In sample | 6-7 months to Maturity

Για το δείγμα που περιλαμβάνει δικαιώματα προαίρεσης με λήξη σε έξι έως εφτά μήνες, παρατηρούμε ότι η απόδοση των δύο μοντέλων δεν είναι αντίστοιχη του προηγούμενου δείγματος, με το μοντέλο των Black – Scholes να υπερτερεί. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το μοντέλο στοχαστικής διάχυσης για μεμονωμένες μετοχές παράγει ασφαλή αποτελέσματα για το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο μερισματικών πληρωμών. Ξεπερνώντας το συγκεκριμένο χρονικό όριο, η προσαρμογή στα πραγματικά δεδομένα, αναμένουμε να είναι ολοένα και ασθενέστερη.

Parameter Estimation Results | 12-16 months to Maturity								
	Black – Scholes Model			Stochastic Logistic Diffusion Model				
	q	σ	Residuals	σ	v	λ	F	Residuals
Average	0.00176	0.27552	**0.06093**	0.24563	13.9146	0.22478	0.78670	**0.23541**
St. Deviation	0.00546	0.02112	**0.06252**	0.03469	0.84499	0.11286	0.27746	**0.02888**
Minimum	0.00106	0.24447	**0.00005**	0.16237	8.75610	0.00152	0.14324	**0.16237**
Maximum	0.04680	0.33808	**0.25634**	0.33051	14.7649	0.37491	1.89994	**0.31627**

Πίνακας 15 - Αποτελέσματα Εμπειρικής Μελέτης | 12-16 months to maturity.



Γράφημα 22 – Σύγκριση Καταλοίπων των δύο μοντέλων | In sample | 12-16 months to Maturity

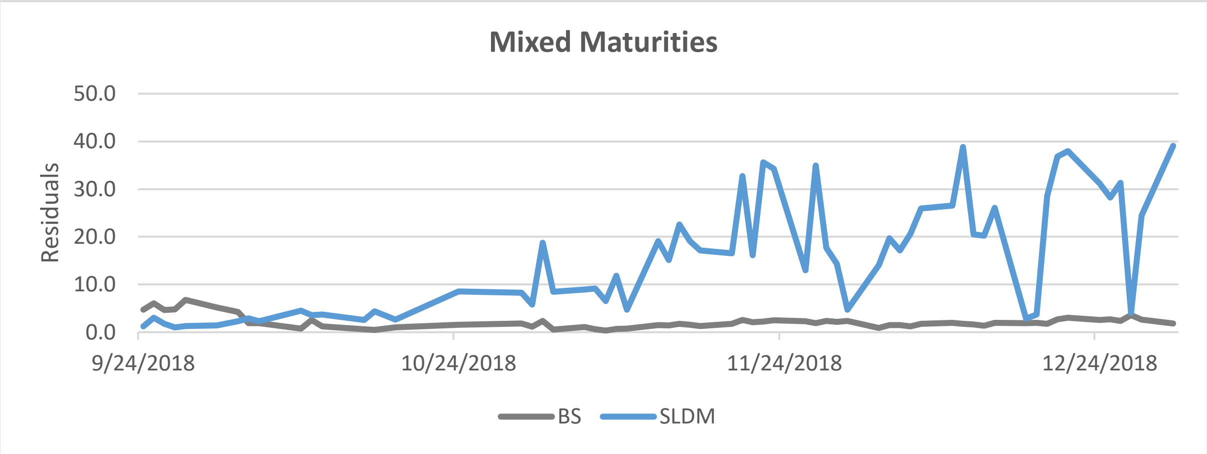
Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερο είναι το χρονικό διάστημα ως τη λήξη, και κατά συνέπεια δεν ανταποκρίνεται στο χρονικό πλαίσιο που ορίζεται από την περιγραφή του στοχαστικού μοντέλου διάχυσης, τα μοντέλο Black – Scholes είναι σαφώς καλύτερο.

Με τη διεξαγωγή των συγκεκριμένων robustness checks, επιβεβαιώνεται ότι μολονότι το μοντέλο αθροιστικών μερισμάτων επιφέρει καλύτερα αποτελέσματα, εντούτοις η εικόνα αλλοιώνεται αν η εξέταση γίνεται για χρονικό διάστημα, μεγαλύτερο από αυτό που οριοθετεί δύο διαδοχικές μερισματικές πληρωμές του υποκείμενου τίτλου.

Τέλος, ακολουθεί ο πίνακας με τις εκτιμώμενες παραμέτρους και τα κατάλοιπα των δυο μοντέλων, αλλά και το διάγραμμα σύγκρισης των καταλοίπων για το δείγμα μεικτών ληκτοτήτων που περιλαμβάνει δικαιώματα προαίρεσης με λήξη από τρεις έως δεκαέξι μήνες.

Parameter Estimation Results | 12-16 months to Maturity								
	Black – Scholes Model			Stochastic Logistic Diffusion Model				
	q	σ	Residuals	σ	v	λ	F	Residuals
Average	0.02764	0.31504	**2.05970**	0.27291	6.95384	0.10863	1.00579	**13.7786**
St. Deviation	0.02298	0.05533	**1.39059**	0.03392	1.94883	0.02472	0.84072	**11.0411**
Minimum	0.00127	0.23624	**0.33869**	0.21325	5.50012	0.10458	0.10702	**0.99897**
Maximum	0.07935	0.45426	**6.77216**	0.37073	13.1978	0.25379	2.95528	**38.8264**

Πίνακας 16 - Αποτελέσματα Εμπειρικής Μελέτης | Mixed Maturities.



Γράφημα 23 - Σύγκριση Καταλοίπων των δύο μοντέλων | In sample | Mixed Maturities

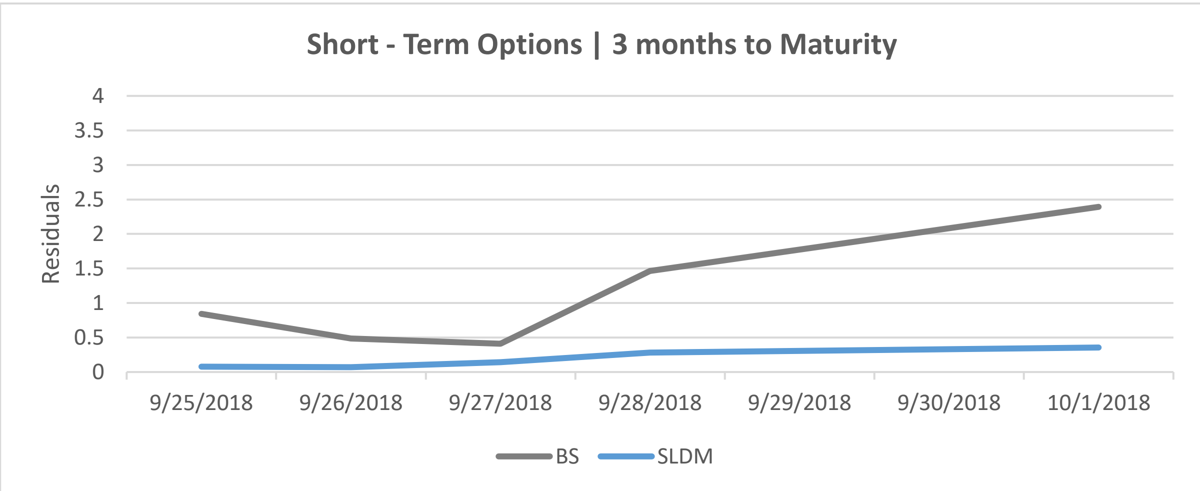
Στο δείγμα μεικτών ληκτοτήτων, η εικόνα είναι αρκετά συγκεχυμένη για το στοχαστικό μοντέλο διάχυσης, το οποίο εμφανώς μειονεκτεί έναντι του Black – Scholes. Αυτό ωστόσο, ήταν αναμενόμενο καθώς περιλαμβάνει ως επί τω πλείστο δικαιώματα προαίρεσης που δεν εμπεριέχονται όπως προαναφέρθηκε στο χρονικό ορίζοντα που ορίζεται βάσει υποθέσεων.

4.3.4 Προβλεπτική Ικανότητα Μοντέλων (Out of the Sample)

Έχοντας προβεί στην εκτίμηση των παραμέτρων των μοντέλων, έπεται η αξιολόγησή τους βάσει της προβλεπτικής του ικανότητας. Προς επίτευξη του τελευταίου, τα διαθέσιμα δικαιώματα προαίρεσης εξετάζονται έχοντας διαχωριστεί σε βραχυπρόθεσμα, μεσοπρόθεσμα και μακροπρόθεσμα. Αναλυτικότερα, υπάρχει η κατηγορία των βραχυπρόθεσμων δικαιωμάτων με λήξη σε τρεις μήνες, των μεσοπρόθεσμων δικαιωμάτων με λήξη σε έξι έως εφτά μήνες και τέλος η κατηγορία των μακροπρόθεσμων δικαιωμάτων με λήξη σε 12 έως 16 μήνες.

Κατ' αντιστοιχία, αναμένουμε ότι για το χρονικό διάστημα που ορίζει το μοντέλο, το στοχαστικό μοντέλο διάχυσης θα υπερτερεί έναντι του Black – Scholes, ενώ για μεγαλύτερα διαστήματα ως τη λήξη, η προβλεπτική του ικανότητα θα βαίνει κλιμακωτά ασθενέστερη. Η εξέταση της προβλεπτικής ικανότητας, θα γίνει για το διάστημα που διαρκεί από 25.09.2018 έως 1.10.2018.

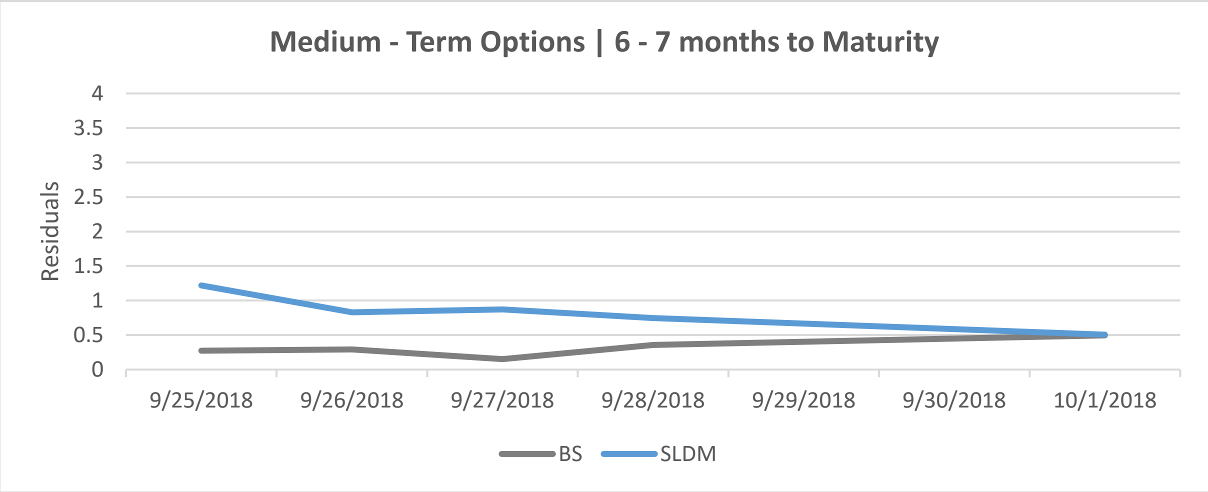
Το διάγραμμα καταλοίπων για τα βραχυπρόθεσμα δικαιώματα προαίρεσης είναι το ακόλουθο:



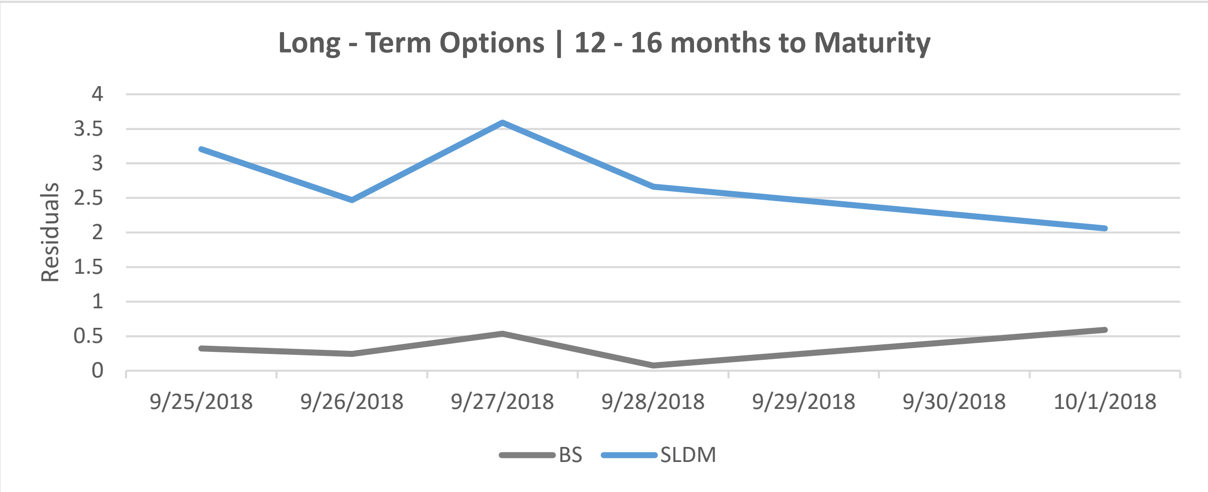
Γράφημα 24 - Σύγκριση Καταλοίπων των δύο μοντέλων | Out of sample | 3 months to Maturity

Μολονότι, και τα δύο μοντέλα οδηγούν στην παραγωγή ανεπαίσθητων καταλοίπων, όπως ήταν αναμενόμενο, το μοντέλο που περιγράφει τα αθροιστικά μερίσματα, υπερτερεί. Καταλήγοντας, λαμβάνοντας υπόψη και εξετάζοντας το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο μερισματικές πληρωμές για την περίπτωση μεμονωμένων μετοχών, και το ετήσιο διάστημα για την περίπτωση δεικτών, το μοντέλο του Tunaru (2018) αποτελεί μία βελτίωση του καθιερωμένου μοντέλου.

Εν συνεχεία, παρατίθενται τα διαγράμματα καταλοίπων, αρχικά για το μεσοπρόθεσμα δικαιώματα προαίρεσης, και έπειτα για τα μακροπρόθεσμα.



Γράφημα 26 - Σύγκριση Καταλοίπων των δύο μοντέλων | Out of sample | 6-7 months to Maturity



Γράφημα 25 - Σύγκριση Καταλοίπων των δύο μοντέλων | Out of sample | 12-16 months to Maturity

Όπως ήταν αναμενόμενο, η προβλεπτική ικανότητα του υπό εξέταση μοντέλου, βαίνει κλιμακωτά ασθενέστερη για διαστήματα που ολοένα και ξεπερνούν το επιθυμητό χρονικό διάστημα που οριοθετεί η κατασκευή του.

Ωστόσο, παρουσιάζει ενδιαφέρον ότι η τάση της διαγραμματικής απεικόνισης των σφαλμάτων και σε αντίθεση με αυτή του Black – Scholes μοντέλου, είναι καθοδική. Παρ' όλα αυτά, δεν συνίσταται η χρήση του για τα δικαιώματα προαίρεσης με τις συγκεκριμένες ληκτότητες.

Κεφάλαιο 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα δικαιώματα προαίρεσης, έχουν ευρέως κατοχυρωθεί ως μία από τις δημοφιλέστερες, επικερδέστερες και πλέον ενδιαφέρουσες από άποψη οικονομικής μελέτης κατηγορίες συναλλασσόμενων αξιογράφων στις σύγχρονες χρηματιστηριακές αγορές ανά τον κόσμο. Η εκτεταμένη και στοχευμένη χρήση τους, τόσο για λόγους αντιστάθμισης, όσο και για επενδυτικούς σκοπούς, συντέλεσε στην εκθετική αύξηση του παρατηρούμενου όγκου συναλλαγών τους, σε λίγα μόνο έτη. Η πρώτη μελέτη ορόσημο που καταπιάνεται με το ζήτημα της τιμολόγησής τους, χρονολογείται το 1973 και ανήκει στους Black-Scholes-Merton, οι οποίοι προτείνοντας την περίφημη και διαχρονική φόρμουλα τιμολόγησης τους, έθεσαν τα θεμέλια για τη δημιουργία πληθώρας επακόλουθων ερευνών με στόχο τη βελτίωση της παρατηρούμενης ακρίβειας.

Με την πάροδο του χρόνου, έχουν δημιουργηθεί πολλά πρωτότυπα μοντέλα, στην εκτίμηση των οποίων υπεισέρχονται διαφορετικές παράμετροι που μπορούν εν δυνάμει να καθορίσουν την τιμή του υπό τιμολόγηση δικαιώματος προαίρεσης. Ένας από τους καθοριστικούς παράγοντες, η μεταβολή του οποίου επηρεάζει την τιμή ενός δικαιώματος είναι η μερισματική πολιτική του υποκείμενου τίτλου. Εκτενέστερα, η καταβολή μερίσματος, έχει ως άμεσο αντίκτυπο τη μείωση της τιμής του υποκείμενου τίτλου και τοιουτοτρόπως, μεταβάλλεται και η τιμή του μερισματικού παράγωγου προϊόντος. Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας τέθηκε η σε βάθος μελέτη και κατανόηση αυτής της σχέσης, θεωρώντας μία διαδικασία Verhulst-Pearl για το ετήσιο καταβληθέν σωρευτικό μέρισμα. Έπειτα, έχοντας προσδιορίσει την ετήσια μερισματική πληρωμή, αξιοποιείται η μέθοδος Monte Carlo για τη διεξαγωγή της εκτιμώμενης τιμής για ένα μερισματικό δικαίωμα προαίρεσης είτε μίας μεμονωμένης μετοχής είτε ενός δείκτη. Οι προσομοιώσεις Monte Carlo είναι μία εξέχουσα τεχνική για την τιμολόγηση παραγώγων στα χρηματοοικονομικά, λόγω της απλότητας και της απλής εφαρμογής που τη χαρακτηρίζει.

Στο πλαίσιο αυτό, αφού πρωτίστως προσδιορίστηκε ο απαιτούμενος αναγκαίος αριθμός επαναλήψεων που θα διασφαλίσει την εγκυρότητα της ακρίβειας του υπό εξέταση μοντέλου με τη μέθοδο των διαδοχικών σχετικών σφαλμάτων για ένα συγκεκριμένο επιθυμητό επίπεδο ακρίβειας, διεξήχθη ανάλυση αριθμητικής ακρίβειας για τέσσερις από τις παραμέτρους που περικλείονται στην διαδικασία του σωρευτικού μερίσματος, των οποίων η επιρροή δεν είναι άμεσα ορατή. Βάσει αποτελεσμάτων και με τη σύμπραξη σχετικών διαγραμμάτων, αποφανθήκαμε ότι η ταχύτητας παραγωγής μερισμάτων αλλά και η ύπαρξη ενός νοητού ανώτατου ορίου για το αθροιστικό ετήσιο μέρισμα, ασκούν αρνητική επίδραση στην τιμή ενός μερισματικού δικαιώματος αγοράς, ενώ θετική φαίνεται να είναι η επιρροή της μεταβλητότητας και της αγοραίας τιμής κινδύνου.

Τέλος, εφαρμόστηκε εμπειρική ανάλυση εντός και εκτός δείγματος με σκοπό να καταστούν συγκρίσιμα το στοχαστικό μοντέλο διάχυσης και το μοντέλο Black – Scholes που έχει επεκταθεί για να συμπεριλαμβάνει την επίδραση της μερισματικής απόδοσης. Τα δικαιώματα προαίρεσης για τα οποία αντλήθηκαν δεδομένα αγοράς κατατάχθηκαν σε επιμέρους κατηγορίες ανάλογα με το χρονικό διάστημα ως τη λήξη, με τα βραχυπρόθεσμα δικαιώματα προαίρεσης να λήγουν σε τρεις μήνες, τα μεσοπρόθεσμα σε έξι έως εφτά μήνες και τα μακροπρόθεσμα σε δώδεκα έως δεκαέξι μήνες.

Τα απορρέοντα αποτελέσματα είναι κοινά τόσο εντός όσο και εκτός δείγματος. Αναλυτικότερα, για τα βραχυπρόθεσμα δικαιώματα προαίρεσης το στοχαστικό μοντέλο διάχυσης , αφενός επιδεικνύει καλύτερη προσαρμογή στα πραγματικά δεδομένα και αφετέρου παρουσιάζει καλύτερη προβλεπτική ικανότητα. Η συγκεκριμένη έκβαση οφείλεται στο ότι η Apple χαρακτηρίζεται από τριμηνιαία μερισματική πολιτική και εφόσον πρόκειται για μία μεμονωμένη μετοχή, το χρονικό διάστημα στο οποίο ορίζεται και παράγει ασφαλή αποτελέσματα το εν λόγω μοντέλο, είναι αυτό που μεσολαβεί μεταξύ δύο μερισματικών πληρωμών, δηλαδή εν προκειμένω, το τριμηνιαίο. Εμβαθύνοντας, το μοντέλο αποτυπώνει ακριβέστερα και πιο αποτελεσματική την επίδραση που θα έχει το επερχόμενο μέρισμα στην τιμή του παράγωγου προϊόντος.

Ξεπερνώντας ωστόσο το χρονικό όριο των τριών μηνών στο πλαίσιο εξέτασης της συμπεριφοράς των μεσοπρόθεσμων και μακροπρόθεσμων δικαιωμάτων προαίρεσης, τα αποτελέσματα αντιστρέφονται. Η προσαρμογή στα δεδομένα αλλά και η προβλεπτική ικανότητα είναι κλιμακωτά ασθενέστερη, με το μοντέλο Black – Scholes να υπερτερεί σε κάθε μία από τις δύο κατηγορίες, ιδίως σε αυτή των μακροπρόθεσμων δικαιωμάτων προαίρεσης. Τα εν λόγω αποτελέσματα, λειτουργούν ως robustness checks του μοντέλου στοχαστικής διάχυσης, επιβεβαιώνοντας ότι αγνοώντας τις υποθέσεις κατασκευής του, χάνει την αξιοπιστία του.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Άρθρα:

1. Amaro de Matos, J., Dilão, R. and Ferreira, B. (2009) “On the value of European options on a stock paying a discrete dividend,” *Journal of Modelling in Management*, 4(3), pp. 235–248. Available at: https://doi.org/10.1108/17465660911006468

2. Bhattacharyya, N., 2007, “Dividend policy: a review”, Managerial Finance, Vol.33, No. 1, 4-13.

3. Black, F. and Scholes, M. (1973) “The pricing of options and corporate liabilities,” Journal of Political Economy, 81(3), pp. 637–654. Available at: https://doi.org/10.1086/260062

4. Buehler, H. (2015) “Volatility and dividends II - consistent cash dividends,” SSRN Electronic Journal [Preprint]. Available at: https://doi.org/10.2139/ssrn.2639318.

5. Buehler, H., Dhouibi, A.S. and Sluys, D. (2010) “Stochastic proportional dividends,” SSRN Electronic Journal [Preprint]. Available at: https://doi.org/10.2139/ssrn.1706758.

6. Easterbrook, F. H., 1984, “Two agency-cost explanations of dividends”, American Economic Review, Vol.74, 650-659.

7. Filipovic, D. and Willems, S. (2017) “A term-structure model for dividends and interest rates,” SSRN Electronic Journal [Preprint]. Available at: https://doi.org/10.2139/ssrn.3016310.

8. Geske, R. (1978) “The pricing of options with stochastic dividend yield,” The Journal of Finance, 33(2), pp. 617–625. Available at: https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1978.tb04871.x.

9. Golez, B. (2011) “Expected returns and dividend growth rates implied in derivative markets,” SSRN Electronic Journal [Preprint]. Available at: https://doi.org/10.2139/ssrn.1271607.

10. Guennoun, H. (2017) “Equity modeling with stochastic dividends,” SSRN Electronic Journal [Preprint]. Available at: https://doi.org/10.2139/ssrn.2960141.

11. Haug, E.G. (2007) The Complete Guide to option pricing formulas. New York: McGraw-Hill.

12. Korn, R. and Rogers, L.C. (2005) “Stocks paying discrete dividends,” The Journal of Derivatives, 13(2), pp. 44–48. Available at: https://doi.org/10.3905/jod.2005.605354.

13. Kruse, S. and Müller, M. (2009) “Pricing American call options under the assumption of stochastic dividends - an application of the Korn-Rogers-model,” SSRN Electronic Journal [Preprint]. Available at: https://doi.org/10.2139/ssrn.1093287.

14. Lioui, A. (2006) “Stochastic dividend yields and derivatives pricing in complete markets,” Review of Derivatives Research, 8(3), pp. 151–175. Available at: https://doi.org/10.1007/s11147-006-9000-4.

15. Merton, R.C. (2005) “Theory of rational option pricing,” Theory of Valuation, pp. 229–288. Available at: https://doi.org/10.1142/9789812701022_0008.

16. Miller, Merton and Franco Modigliani, “Dividend policy, Growth and the valuation of Shares”, Journal of Business 34, October 1961, pp.411-43.

17. Robert C. Merton, 1973.; Theory of Rational Option Pricing; Bell Journal of Economics, The RAND Corporation, vol. 4(1), pages 141-183, Spring.

18. Shefrin, H. and M. Statman, 1984, “Explaining investor preference for cash dividends”, Journal of Financial Economics, Vol.13, No. 2, 253-282

19. Statman, M., 2005, “Normal investors, then and now”, Financial Analysts Journal, Vol.61, No. 2, 31-36.

20. Suzuki, M. (2013) “Measuring the fundamental value of a stock index through dividend future prices,” SSRN Electronic Journal [Preprint]. Available at: https://doi.org/10.2139/ssrn.2339000.

21. Tunaru, R.S. (2018) “Dividend derivatives,” Quantitative Finance, 18(1), pp. 63–81. Available at: https://doi.org/10.1080/14697688.2017.1322218.

22. Wilkens, S. and Wimschulte, J. (2010) “The pricing of dividend futures in the European market: A first empirical analysis,” Journal of Derivatives & Hedge Funds, 16(2), pp. 136–143. Available at: https://doi.org/10.1057/jdhf.2009.21.

Βιβλία:

1. Hull John C. (2009),‘Options, Futures, and other Derivatives 9th Edition’.

2. I. Karaztas & S.E. Shreve, Brownian motion and stochastic calculus, Springer, Second edition, (1991).

Ακαδημαϊκές Σημειώσεις:

1. Εγγλέζος, Ν. , Ειδικά Θέματα Ποσοτικών Μεθόδων στη Χρηματοοικονομική, Σημειώσεις 2022, ΠΜΣ Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

2. Ανθρωπέλος, Μ. ,Παράγωγα Αξιόγραφα, Σημειώσεις 2022, ΠΜΣ Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

3. Εγγλέζος, Ν. ,Παράγωγα Αξιόγραφα, Σημειώσεις 2020, Προπτυχιακό Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Ιστοσελίδες:

1. Apple Stock Split History: What you need to know. Available at: https://www.ig.com/en/news-and-trade-ideas/shares-news/apple-stock-split-history what-you-need-to-know-190523 (Accessed: January 29, 2023).

2. Investopedia. Available at: https://www.investopedia.com/ (Accessed: January 29, 2023).

3. Wikipedia. Available at: https://www.wikipedia.org/ (Accessed: January 29, 2023).

4. Mathworks . Available at: https://www.mathworks.com (Accessed: January 29, 2023).

5. Eurex. Available at: https://www.eurex.com/ex-en/ (Accessed: January 31, 2023).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι: Κώδικες MATLAB

Κώδικας για τη δημιουργία δειγματικών μονοπατιών για τις τιμές ενός τίτλου που ακολουθούν τη Γεωμετρική Κίνηση Brown.

```
function [SPaths]=AssetPaths(S0,mu,sigma,T,NSteps,NRepl)
    SPaths=zeros(NRepl,1+NSteps);
    SPaths(:,1)=S0;
    dt=T/NSteps;
    nudt=(mu-0.5*sigma^2)*dt;
    sidt=sigma*sqrt(dt);
    for i=1:NRepl
        for j=1:NSteps
            SPaths(i,j+1)=SPaths(i,j)*exp(nudt+sidt*randn);
        end

    end
```

Κώδικας για την αποτίμηση Μερισματικών Δικαιωμάτων αγοράς με τη μέθοδο Monte Carlo.

```
function [Price] =MC_Call_Div(S0,K,r,T,sigma,n,lamda,X0,F,NSteps,NRepl)
    nuT=(r+lamda*sigma-0.5*sigma^2)*T;
    siT=sigma*sqrt(T);
    XPaths=zeros(NRepl,NSteps+1);
    XPaths(:,1)=X0;
    dt=T/NSteps;
    for i=1:NRepl
        for j=1:NSteps
            XPaths(i,j+1)=XPaths(i,j)*(1+(n-lamda*sigma-
XPaths(i,j)/F)*dt+sigma*sqrt(dt)*randn);
        end
    end
    DiscPayoff=exp(-r*T)*max(0,S0*exp(siT*randn(NRepl,1)+nuT)-
XPaths(:,NSteps+1)-K);
    Price=mean(DiscPayoff);
end
```

Κλειστή φόρμουλα τιμολόγησης δικαιωμάτων αγοράς υπό γνωστό επιτόκιο με ενσωματωμένη γνωστή μερισματική απόδοση.

```
function [Price] = BSMformula_Call_Div(S0,K,r,T,q,sigma)
    d1=(log(S0/K)+T*(r-q+0.5*(sigma^2)))/(sigma*sqrt(T));
    d2=d1-sigma*sqrt(T);
    N1=normcdf(d1);
    N2=normcdf(d2);
    Price=S0*exp(-q*T)*N1-K*exp(-r*T)*N2;

End
```

Αριθμητική προσέγγιση απαιτούμενου αριθμού επαναλήψεων για την σύγκλιση τιμής του κώδικα αποτίμησης Μερισματικών Δικαιωμάτων αγοράς με δοθέν επίπεδο ακρίβειας e.

```
randn('state',0)
for i=2:50000
current=MC_Call_Div(220.79,220,0.0218,0.2410,0.2304,14,0.5,0.73,0.73,88,i);
previous=MC_Call_Div(220.79,220,0.0218,0.2410,0.2304,14,0.5,0.73,0.73,88,i-1);
k=abs((current-previous)/previous);
if k<e
break
end

end
```

Αριθμητική ανάλυσης της παραμέτρου ν.

```
randn('state',0)
ni_analysis_call=zeros(1,20);
for i=1:20
ni=i;
ni_analysis_call(i)=MC_Call_Div(220.79,220,0.0218,0.2410,0.2304,ni,0.5,0.73
,0.73,88,50000);
end

plot(1:i,ni_analysis_call)
```

Αριθμητική ανάλυσης της παραμέτρου λ.

```
randn('state',0)
lamda_lattice=zeros(1,10);
lamda_analysis_call=zeros(1,10);
lamda=-1.5;
for i=1:30
lamda_lattice(i)=lamda;
lamda_analysis_call(i)=MC_Call_Div(220.79,220,0.0218,0.2410,0.2304,14,lamda
,0.73,0.73,88,5000);
lamda=lamda+0.1;
end

plot(lamda_lattice,lamda_analysis_call)
```

Αριθμητική ανάλυσης της παραμέτρου σ.

```
randn('state',0)
sigma_lattice=zeros(1,17);
sigma_analysis_call=zeros(1,17);
sigma=0.1;
for i=1:17
sigma_lattice(i)=sigma;
sigma_analysis_call(i)=MC_Call_Div(220.79,220,0.0218,0.2410,sigma,14,0.5,0.
73,0.73,88,5000);
sigma=sigma+0.025;
```

```
end
plot(sigma_lattice,sigma_analysis_call)
```

Αριθμητική ανάλυσης της παραμέτρου F.

```
randn('state',0)
F_lattice=zeros(1,14);
F_analysis_call=zeros(1,14);
F=0.1;
for i=1:14
F_lattice(i)=F;
F_analysis_call(i)=MC_Call_Div(220.79,220,0.0218,0.2410,0.2304,14,0.5,0.73,
F,88,5000);
F=F+0.1;
end
plot(F_lattice,F_analysis_call)
```

Calculation of Least Square Errors | Stochastic Logistic Diffusion Model

```
function [SLDM_lsqd] = SLDMLSQD(x)
    global S0;
    global Strike;
    global rate;
    global TTM;
    global marketprice;
    global numberofoptions;
    global Dividend;
    global k;
    SLDM_lsqd=zeros(1,numberofoptions);
    for j=1:numberofoptions
        SLDM_lsqd(j)=marketprice(k,j)-
MC_Call_Div(S0(k),Strike(k,j),rate(k),TTM(k,j),x(1),x(2),x(3),Dividend(k),x
(4),100,50000);
    end
end
```

Calculation of Least Square Errors | Black – Scholes model with Dividend Yield

```
function [BS_errorsc]=BSC(x)
global S0;
global strike;
global ttm;
global marketcall;
global r;
global k;
global numberofoptions;
BS_errorsc=zeros(1,numberofoptions);
for j=1:numberofoptions
    BS_errorsc(j)=marketcall(k,j)-
BSMformula_Call_Div(S0(k),strike(k,j),r(k),ttm(k,j),x(1),x(2));
end
end
```

In sample Residual Calculaton | Stochastic Logistic Diffusion Model

```
function [x,resnorm,residual,exitflag]=SLDFCalibration(~) %σ,ν,λ,F
global S0;
global Strike;
global rate;
global TTM;
global impvol;
global marketprice;
global numberofoptions;
global Dividend;
global k;
numberofoptions=3;
S0=zeros(71);
Strike=zeros(71,numberofoptions);
rate=zeros(71);
TTM=zeros(71,numberofoptions);
impvol=zeros(71,numberofoptions);
marketprice=zeros(71,numberofoptions);
Dividend=zeros(71);
parameter=zeros(71,4);
res=zeros(71,1);
exit=zeros(71,1);
%Εισάγω τις τιμές από το εκάστοτε αρχείο.
S0=xlsread('Data_Apple_12to16m.xlsx','price','C4:C74');
Strike=xlsread('Data_Apple_12to16m.xlsx','Strike','B2:M72');
rate=xlsread('Data_Apple_12to16m.xlsx','rate','D4:D74');
TTM=xlsread('Data_Apple_12to16m.xlsx','TTM','B2:D72');
impvol=xlsread('Data_Apple_12to16m.xlsx','impvol','B2:D72');
marketprice=xlsread('Data_Apple_12to16m.xlsx','marketprice','B2:D72');
Dividend=xlsread('Data_Apple_12to16m.xlsx','Dividend','B4:B74');
SLDM_call_matrix=zeros(71,numberofoptions);
for i=1:71
% Θέτω αρχική τιμή για κάθε παράμετρο. Επιλέγω την πιο ρεαλιστική τιμή κάθε
φορά.
    x0=[0.296,14,0.35,0.73];
    lb=[0,1,0.001,0.1];
    ub=[1,15,0.4,3];
    k=i;
    options=optimoptions('lsqnonlin','display','iter-
detailed','FiniteDifferenceStepSize',1e-1);
    [x,resnorm,residual,exitflag]=lsqnonlin(@SLDMLSQD,x0,lb,ub,options);
    parameter(i,:)=x;
    res(i)=resnorm;
    exit(i)=exitflag;
    for j=1:numberofoptions
        days=round(TTM(i,j)*365);

SLDM_call_matrix(i,j)=MC_Call_Div(S0(i),Strike(i,j),rate(i),TTM(i,j),x(1),x
(2),x(3),Dividend(i),x(4),days,50000);
    end
    pricedata=(SLDM_call_matrix);
 end
xlswrite('SLDMresults_12to16m_final.xlsx',pricedata,'SLDMresults_CALLprices
','B2:M72');
xlswrite('SLDMresults_12to16m_final.xlsx',res,'SLDMresults_RESC','B2:M72');
xlswrite('SLDMresults_12to16m_final.xlsx',parameter,'SLDMresults_PARAMETERS
','B2:E72');

end
```

In sample Residual Calculaton | Black – Scholes model with Dividend Yield

```
function [x,resnorm,residual,exitflag]=BSCalibration(~)  %q, σ
global S0;
global strike;
global ttm;
global marketcall;
global r;
global k;
global numberofoptions;
numberofoptions=3;
S0=zeros(71);
strike=zeros(71,numberofoptions);
ttm=zeros(71,numberofoptions);
marketcall=zeros(71,numberofoptions);
r=zeros(71);
q=zeros(71);
parameterc=zeros(71,2);
resc=zeros(71,1);
exit=zeros(71,1);
%Εισάγω τις τιμές από το εκάστοτε αρχείο.
S0=xlsread('Data_Apple_12to16m.xlsx','price','C4:C74');
strike=xlsread('Data_Apple_12to16m.xlsx','Strike','B2:D72');
ttm=xlsread('Data_Apple_12to16m.xlsx','TTM','B2:D72');
marketcall=xlsread('Data_Apple_12to16m.xlsx','marketprice','B2:D72');
r=xlsread('Data_Apple_12to16m.xlsx','rate','D4:D74');
BS_call_matrix=zeros(71,numberofoptions);
for i=1:71
    % Θέτω αρχική τιμή για κάθε παράμετρο. Επιλέγω την πιο ρεαλιστική τιμή
κάθε φορά.
    x0=[0.0152,0.3066];
    lb=[0.001,0.01];
    ub=[3,2];
    k=i;
    options=optimoptions('lsqnonlin','display','iter-
detailed','FiniteDifferenceStepSize',1e-1);
    [x,resnorm,residual,exitflag]=lsqnonlin(@BSC,x0,lb,ub,options);
    parameterc(i,:)=x;
    resc(i)=resnorm;
    exit(i)=exitflag;
    for j=1:numberofoptions

BS_call_matrix(i,j)=BSMformula_Call_Div(S0(i),strike(i,j),r(i),ttm(i,j),x(1
),x(2));
    end
    pricedatacall=(BS_call_matrix);

xlswrite('BSresults_12to16m_final.xls',pricedatacall,'BSresultsCALLprices',
'B2:D72');
    xlswrite('BSresults_12to16m_final.xls',resc,'BSresultsRESC','B2:D72');

xlswrite('BSresults_12to16m_final.xls',parameterc,'BSresultsPARAMETERS','B2
:C72');
end

end
```

Out-of-Sample Forecasting Calculation | Stochastic Logistic Diffusion Model

```
function[pricedata,pricedata_squares,res]=forecastSLDM(~)
clear all
% Τιμές τελευταίας μέρας.
sigma=0.231943;
ni=5.5378;
lamda=0.1166;
F=1.2817;
S0=zeros(9);
r=zeros(9);
Dividend=zeros(9);
Strike=zeros(9,3);
TTM=zeros(9,3);
marketcall=zeros(9,3);
%Εισάγω τις τιμές από το εκάστοτε αρχείο.
S0=xlsread('Data_Apple_3m.xlsx','price','C5:C13');
r=xlsread('Data_Apple_3m.xlsx','rate','D5:D13');
Dividend=xlsread('Data_Apple_3m.xlsx','Dividend','B5:B13');
Strike=xlsread('Data_Apple_3m.xlsx','Strike','B3:G11');
TTM=xlsread('Data_Apple_3m.xlsx','TTM','B3:G11');
marketcall=xlsread('Data_Apple_3m.xlsx','marketprice','B3:G11');
res=zeros(9,1);
matrix=zeros(9,3);
matrix_squares=zeros(9,3);
for i=1:9
    for j=1:3
        matrix(i,j)=abs(marketcall(i,j)-
MC_Call_Div(S0(i),Strike(i,j),r(i),TTM(i,j),sigma,ni,lamda,Dividend(i),F,10
00,50000));
        matrix_squares(i,j)=(abs(marketcall(i,j)-
MC_Call_Div(S0(i),Strike(i,j),r(i),TTM(i,j),sigma,ni,lamda,Dividend(i),F,10
00,50000))^2);
    end
    pricedata=[matrix];
    pricedata_squares=[matrix_squares];
end
for i=1:9
    res(i)=(sum(matrix_squares(i,:)));
end
xlswrite('ForecastSLDMresultscall_3m.xls',pricedata,'forecast_pd','B2:G10')
;
xlswrite('ForecastSLDMresultscall_3m.xls',pricedata_squares,'forecast_pdsqu
ares','B2:G10');
xlswrite('ForecastSLDMresultscall_3m.xls',res,'forecastres','B2:B10');

end
```

Out-of-Sample Forecasting Calculation | Black – Scholes with Dividend Yield

```
function[pricedata,pricedata_squares,res]=forecastBSc(~)
clear all
% Τιμές τελευταίας μέρας.
q=0.001;
sigma=0.236347;
S0=zeros(9);
r=zeros(9);
Strike=zeros(9,3);
TTM=zeros(9,3);
marketcall=zeros(9,3);
%Εισάγω τις τιμές από το εκάστοτε αρχείο.
S0=xlsread('Data_Apple_3m.xlsx','price','C5:C13');
r=xlsread('Data_Apple_3m.xlsx','rate','D5:D13');
Strike=xlsread('Data_Apple_3m.xlsx','Strike','B3:D11');
TTM=xlsread('Data_Apple_3m.xlsx','TTM','B3:D11');
marketcall=xlsread('Data_Apple_3m.xlsx','marketprice','B3:D11');
res=zeros(9,1);
matrix=zeros(9,3);
matrix_squares=zeros(9,3);
for i=1:9
    for j=1:3
        matrix(i,j)=abs(marketcall(i,j)-
BSMformula_Call_Div(S0(i),Strike(i,j),r(i),TTM(i,j),q,sigma));
        matrix_squares(i,j)=(abs(marketcall(i,j)-
BSMformula_Call_Div(S0(i),Strike(i,j),r(i),TTM(i,j),q,sigma))^2);
    end
    pricedata=[matrix];
    pricedata_squares=[matrix_squares];
end
for i=1:9
    res(i)=(sum(matrix_squares(i,:)));
end
xlswrite('ForecastBSresultscall_3m.xls',pricedata,'forecast_pd','B2:G10');
xlswrite('ForecastBSresultscall_3m.xls',pricedata_squares,'forecast_pdsquar
es','B2:G10');
xlswrite('ForecastBSresultscall_3m.xls',res,'forecastres','B2:B10');

end
```