ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΣΤΗΝ **ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ**

«ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΥΣΗ»

Κωνσταντίνος Βασιλακάκης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων

Πειραιάς

Απρίλιος 2023

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Financial and Statistics

Department of Statistics and Insurance Science

POSTGRADUATE PROGRAM IN **ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT**

«STUDY OF RISK MODELS WITH DEPENDENCE AND PETURBATION»

Konstantinos Vasilakakis

MSc Dissertation
submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece

April 2023

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστικη Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ’ αριθμό ……. συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Ε. Χατζηκωνσταντινίδης (Επιβλέπων)
  - Αναπληρωτής Καθηγητής
- Γ. Βερροπούλου
  - Καθηγήτρια
- Γ. Ψαρράκος
  - Αναπληρωτής Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους ανθρώπους που με στήριξαν καθ' όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου. Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για όλη τη στήριξη και την κατανόηση που μου έδειξαν, καθώς και το διδακτικό προσωπικό που ανταποκρίθηκε στις φοιτητικές μου ανάγκες. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη για την καθοδήγηση και την βοήθεια του, κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας

Περίληψη

Για την μοντελοποίηση ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου, μία από τις πιο βασικές παραμέτρους που θα πρέπει να ληφθεί υπόψη, είναι αυτό της φερεγγυότητας. Για να χαρακτηρίσουμε ένα χαρτοφυλάκιο φερέγγυο, θα πρέπει ο ασφαλιστής να έχει επαρκή αποθέματα για να είναι σε θέση να αποπληρώσει τις υποχρεώσεις του σε περίπτωση που εμφανιστεί κάποια μεγάλη απαίτηση. Καθώς για κάθε ασφαλιστική επιχείριση αυτό διαφέρει, κάποιες φορές αυτό ρυθμίζεται από κάποια ρυθμιστική αρχή που ορίζει την πιθανότητα αποπληρωμής των υποχρεώσεων του ασφαλιστή (πχ 95%). Μια πολύ βασική έννοια στο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο είναι αυτή του ασφαλιστικού πλεονάσματος. Το ασφαλιστικό πλεόνασμα εκφράζει το κέρδος του ασφαλιστή στη διάρκεια του χρόνου. Όταν το πλεόνασμα μηδενιστεί ή γίνει αρνητικό, τότε το ενδεχόμενο αυτό ονομάζεται χρεοκοπία. Φυσικά και δεν αναφέρεται στο γεγονός ότι αν αυτό συμβεί, τότε ο ασφαλιστής έχει χρεοκοπήσει, καθώς υπάρχουν διάφορες στρατηγικές που μπορεί να ακολουθήσει ο ασφαλιστής ώστε να αντισταθμίσει την απώλεια (π.χ. capital injections).

Η θεωρία που μελετά το ενδεχόμενο της χρεοκοπίας ονομάζεται Θεωρία Χρεοκοπίας. Η θεωρία χρεοκοπίας, με τη χρήση μαθηματικών εργαλείων, μελετάει το ενδεχόμενο η ασφαλιστική επιχείριση να μην είναι ικανή να αποπληρώσει τις ασφαλιστικές της υποχρεώσεις σύμφωνα με κάποιες παραδοχές. Η μελέτη δεν περιορίζεται μόνο στο ενδεχόμενο της αποπληρωμής των υποχρεώσεών της, αλλά και σε επιπλέον «μέτρα χρεοκοπίας» τα οποία παρέχουν συγκεκριμένες πληροφορίες για την πορεία και τη συμπεριφορά του ασφαλιστικού πλεονάσματος πριν και αφού μηδενιστεί.

Οι πρώτες προσπάθειες για να μοντελοποιηθεί κατάλληλα το ασφαλιστικό πλεόνασμα, έγιναν από τον αναλογιστή Filip Lundberg το 1903. Στην διδακτορική διατριβή που δημοσίευσε με τίτλο: «*Approximations of the Probability Function/Reinsurance of Collective Risks»,* εισήγαγε το Κλασσικό Μοντέλο της Θεωρίας Χρεοκοπίας, το οποίο αργότερα ο Harald Cramér ενέταξε στις στοχαστικές διαδικασίες. Το μοντέλο αυτό, θεωρείται εξαιρετικά πρωτοπόρο για την εποχή του, καθώς δεν είχαν θεμελιωθεί ακόμα οι στοχαστικές διαδικασίες με τη σημερινή έννοια.

Από τότε, διάφορες γενικεύσεις αυτού του μοντέλου έχουν δημοσιευτεί κατά καιρούς, με τη σημαντικότερη ίσως από αυτές να είναι το ανανεωτικό μοντέλο χρεοκοπίας που δημοσιεύτηκε το 1957 από τον Erik Sparre Andersen. Το μοντέλο του Erik Sparre Andersen γενικεύει την υπόθεση σχετικά με την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης των απαιτήσεων, κάτι που στην πράξη εφαρμόζει αποτελεσματικότερα από την υπόθεση του μοντέλου του Lundberg.

Το 1997, στη δημοσίευση με τίτλο *The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin* από τους Hans Gerber και Elias Shiu εισήγαγαν την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής. Η τελευταία, έχει αποτελέσει εκτενές αντικείμενο μελέτης από τους αναλογιστές για τις ασυνήθιστες ιδιότητες της και τις πληροφορίες που παρέχει σχετικά με κάποια μέτρα χρεοκοπίας.

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία, στο πρώτο κεφάλαιο, θα αναπτυχθούν οι βασικές έννοιες για το κλασσικό και το ανανεωτικό μοντέλο χρεοκοπίας, και θα παραχθούν κάποια βασικά αριθμητικά αποτελέσματα με τη χρήση της συνάρτησης προεξοφλημένης ποινής Gerber-Shiu. Στα επόμενα κεφάλαια, θα μελετηθούν κάποιες από αυτές τις γενικεύσεις που έχουν προταθεί για το ανανεωτικό μοντέλο χρεοκοπίας. Στο τελευταίο κεφάλαιο, θα μελετηθεί το δυϊκό μοντέλο χρεοκοπίας, όπου ανταποκρίνεται κυρίως σε επιχειρήσεις και οργανισμούς που χαρακτηρίζονται από συνεχή εκροή εξόδων και περιστασιακά έσοδα.

Abstract

For the modeling of an insurance portfolio, one of the most basic parameters that should be considered is that of solvency. To qualify a portfolio as solvent, the insurer must have sufficient capital reserves to be able to compensate the customers in the event of a large claim. As this is different for each insurance company, sometimes it is regulated by some regulatory authority that regulates the probability of repayment of the insurer's obligations (eg 95%). A very basic concept in the insurance portfolio is that of insurance surplus. The insurance surplus expresses the insurer's profit over time. When the surplus becomes zero or negative, this event is called bankruptcy. Of course, it does not refer to the fact that given this happens, the insurer is bankrupt, as there are various strategies that the insurer can follow to compensate for the loss (e.g. capital injections).

The theory that studies the possibility of ruin is called Ruin Theory. Ruin theory, using mathematical tools, studies the probability that the insurance company will not be able to repay its insurance obligations according to certain assumptions. The study is not only limited to the possibility of repayment of its obligations, but also to additional "ruin measures" which provide specific information on the course and behavior of the insurance surplus before and after it is written off.

The first attempts to properly model the insurance surplus were made by the actuary Filip Lundberg in 1903. In his published doctoral thesis with title: "Approximations of the Probability Function/Reinsurance of Collective Risks", he introduced the Classical Model of Ruin Theory, which Harald Cramér later included in the contemplative processes. This model is considered extremely pioneering for its time, as contemplative processes in today's sense had not yet been established.

Since then, various generalizations of this model have been published from time to time, with the most important perhaps being the renewal ruin model published in 1957 by Erik Sparre Andersen. Erik Sparre Andersen's model generalizes the assumption about the distribution of interarrival claim occurrence times, which in practice applies more effectively than the assumption of Lundberg's model.

In 1997, in the paper with title “The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin” by Hans Gerber and Elias Shiu they introduced the discounted penalty function. The latter has been the subject of extensive study by actuaries for its properties and the information it provides about some ruin measures.

In this thesis, the first chapter covers the basic concepts for the classical and the corresponding renewal ruin model, and some basic numerical results will be provided using the discounted Gerber-Shiu penalty function. In the following chapters, some of these generalizations that have been proposed for the renewal ruin model will be explored. In the last chapter, the binary model of bankruptcy will be studied, where it mainly responds to businesses and organizations characterized by continuous outflow of expenses and occasional income.

Πίνακας Περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας

1.1 Βασικές έννοιες θεωρίας πιθανοτήτων

1.1.1 Τυχαία μεταβλητή ονομάζεται μια συνάρτηση που ορίζεται σε κάποιον δειγματοχώρο που συμβολίζεται Ω, ο οποίος λαμβάνει τιμές στους πραγματικούς αριθμούς ή σε υποσύνολά του.

Με την έννοια δειγματοχώρο εκφράζουμε ένα σύνολο αποτελεσμάτων τα οποία συμβολίζουμε συνήθως $\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ που ανήκουν στο σύνολο ή δειγματοχώρο Ω.

Από μαθηματικής άποψης εκφράζεται ως εξής:

$$X: \Omega \to \mathcal{M}$$

Όπου $\mathcal{M}$ κάποιο σύνολο αριθμών (πραγματικοί, φυσικοί κλπ). Οι τυχαίες μεταβλητές χωρίζονται σε τρεις κύριες κατηγορίες:

1. Συνεχείς
2. Διακριτές
3. Μεικτού τύπου

Η τελευταία κατηγορία χαρακτηρίζεται από ένα **συνεχές** και ένα **διακριτό** κομμάτι. Στην παρούσα πτυχιακή θα μας απασχολήσουν κυρίως οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές.

1.1.2 *Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής:*

Αποτελεί μια συνάρτηση που συμβολίζεται ως $F_X(a)$ και ορίζεται στο πραγματικό σύνολο ή σε υποσύνολά του και εκφράζει την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να λάβει τιμή μικρότερη ή ίση με το $a \in \mathcal{M}$. Μαθηματικά αυτό εκφράζεται ως:

$$F_X(a) = \Pr(X \leq a)$$

Όπου $\mathcal{M}$ κάποιο σύνολο αριθμών.

1.1.3 *Δεξιά Ουρά Κατανομής μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής:*

Αποτελεί μια συνάρτηση που συμβολίζεται ως $\bar{F}_X(a)$ και ορίζεται στο πραγματικό σύνολο ή σε υποσύνολά του και εκφράζει την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να λάβει τιμή μεγαλύτερη του $a \in \mathcal{M}$. Μαθηματικά αυτό εκφράζεται ως:

$$\bar{F}_X(a) = \Pr(X > a)$$

Όπου $\mathcal{M}$ κάποιο σύνολο αριθμών. Η σχέση που τη συνδέει με την αθροιστική συνάρτηση κατανομής:

$$\bar{F}_X(a) = 1 - F_X(a)$$

1.1.4 *Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας:*

Συμβολίζεται ως $f_X(a)$ και εκφράζει την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να λάβει την τιμή $a \in \mathcal{M}$. Μαθηματικά αυτό εκφράζεται ως:

$$f_X(a) = \Pr(X = a)$$

Στην περίπτωση που η συνάρτηση $f_X(a)$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0, x]$:

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(y)dy$$

1.1.5 *Μέση τιμή μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής:*

Η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής X συμβολίζεται $E[X]$ και δίνεται από τον τύπο:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x)$$

1.1.6 *Μη-Κεντρικές ροπές μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής:*

Οι μη-κεντρικές ροπές ή οι ροπές «γύρω» από το σημείο 0, συμβολίζονται $E[X^k]$ ή μ_k με $k = 0,1,2,\ldots$ και υπολογίζονται από τον τύπο:

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_X(x)$$

Για $k = 0$, έχουμε την αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας, ενώ για $k = 1$ την μέση τιμη.

1.1.7 *Ροπογενήτρια και μετασχηματισμός Laplace*

Η **ροπογεννήτρια συνάρτηση,** ονομάζεται και γεννήτρια παραγοντικών ροπών αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για να μας δώσει κάποιες πληροφορίες για την κατανομή που μελετάμε. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση για μια συνεχή τυχαία μεταβλητή δίνεται από τη σχέση:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} dF_X(x)$$

Αν υπολογίσουμε τη $n-$οστή παράγωγο της $M_X(t)$ στο σημείο 0, μας δίνει την $n-$οστή μη-κεντρική ροπή μ_k.

Ο **μετασχηματισμός Laplace** μιας συνάρτησης συμβολίζεται $\hat{f}_X(s)$, αποτελεί έναν ολοκληρωτικό μετασχηματισμό που μετρατρέπει μια συνάρτηση με μεταβλητή $x \in \mathbb{C}$, σε μια συνάρτηση συχνοτήτων με μεταβλητή $s \in \mathbb{C}$. Μαθηματικά ορίζεται ως:

$$\hat{f}_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} dF_X(x)$$

Η σχέση που συνδέει τη ροπογεννήτρια με το μετασχηματισμό Laplace είναι:

$$\hat{f}_X(s) = M_X(-t)$$

1.2 Το συλλογικό πρότυπο κινδύνων

1.2.1 *Βασικές έννοιες στοχαστικών ανελίξεων (Κωνσταντινίδης Δ., 2011-Κουτσόπουλος Κ., 1999)*

Η στοχαστική ανέλιξη, αποτελείται από μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_t: t \in T\}$, όπου εξελίσσονται σε ένα χρονικό διάστημα/σύνολο T. Μια από τις πιο γνωστές κατηγορίες στοχαστικών ανελίξεων είναι αυτή της *ανέλιξης Poisson*. Αυτή η ανέλιξη είναι μαρκοβιανού χαρακτήρα καθώς ικανοποιεί την παρακάτω ιδιότητα της μαρκοβιανής αλυσίδας:

$$P(X_n = x | X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = P(X_n = x | X_{n-1} = x_{n-1}), \qquad n = 1,2, \dots$$

Η ανέλιξη Poisson είναι στοχαστική ανέλιξη συνεχούς χρόνου και ονομάζεται και απαρριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη, καθώς μελετάει πόσα γεγονόντα θα συμβούν σε ένα χρονικό διάστημα. Η απαρριθμήτρια ανέλιξη συμβολίζεται ως $\{N(t): t \geq 0\}$, και ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

- Με πιθανότητα 1, σε χρόνο $t = 0$, δεν αναμένουμε κανένα γεγονός, δηλαδή $N(0) = 0$
- Δεν μπορούμε να έχουμε σε ένα μικρό διάστημα s παραπάνω από ένα γεγονότα, και όσο μεγαλύτερο είναι το μήκος του διαστήματος, τόσο μεγαλύτερη είναι και η πιθανότητα να εμφανιστεί ένα γεγονός
- Η μεταβλητή $N(t)$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις

Η απαρριθμήτρια ανέλιξη $N(t)$ ορίζει μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών W_k με $k = 1,2, \dots$ που παριστάνουν τον χρόνο άφιξης γεγονότων ως:

$$W_k = \min\{t: N(t) = k\}$$

Με $W_0 = \min\{t: N(t) = 0\} = 0$. Με την παραπάνω σχέση, ορίζουμε την έννοια των *ενδιάμεσων χρόνων* άφιξης ως την παρακάτω ακολουθία συνεχών τυχαίων μεταβλητών:

$$T_k = W_k - W_{k-1}$$

Οι τυχαίες μεταβλητές T_k, W_k είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, ενώ η απαρριθμήτρια ανέλιξη poisson είναι διακριτή. Βιβλιογραφικά, αποδεικνύεται η επόμενη πρόταση:

- Εάν οι τυχαίες μεταβλητές T_k είναι ανεξάρτητες και ισόνομες μεταξύ τους και ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, τότε η απαρριθμήτρια ανέλιξη είναι *ανέλιξη poisson* με την ίδια παράμετρο λ.

Μια εξίσου σημαντική κατηγορία ανελίξεων, είναι αυτή των *ανανεωτικών ανελίξεων*. Ανανεωτικές ανελίξεις χαρακτηρίζονται οι ανελίξεις που οι ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων, δεν ακολουθούν απαραίτητα την εκθετική κατανομή αλλά κάποια άλλη κατανομή. Στην παρούσα πτυχιακή εργασία, θα μας απασχολήσουν εκτενώς οι ανανεωτικού τύπου ανελίξεις.

1.2.2 *Σύνθετες κατανομές*

Έστω οι συνεχείς τυχαίες και ανεξάρτητες μεταβλητές X_1, X_2 με συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας f_{X_1}, f_{X_2} αντίστοιχα. Έστω τώρα η τυχαία μεταβλητή $Y = X_1 + X_2$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την τυχαία μεταβλητή Y δίνεται από τη σχέση:

$$f_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y) f_{X_2}(x-y)dy$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται συνέλιξη κατανομών και συμβολίζεται ισοδύναμα ως:

$$f_Y(x) = f_{X_1} * f_{X_2}(x)$$

Ένας άλλος τρόπος να προσεγγίσουμε τη σύνθετη κατανομή της μεταβλητής Y είναι μέσω της μεθόδου των ροπογεννητριών. Συγκεκριμένα, αν για τις τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2 η ροπογεννήτρια είναι πεπερασμένη, τότε συνδέονται με την κατανομή της Y με τον εξής τρόπο:

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t)$$

Έστω τώρα μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών X_i, και η τυχαία μεταβλητή S:

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} X_i & N > 0 \\ 0 & N = 0 \end{cases}$$

Η τυχαία μεταβλητή S σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο, περιγράφει το ύψος των απαιτήσεων μέσα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα που μελετάμε. Η μέση τιμή και η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής S δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$E[S] = E[X_i]E[N]$$

$$Var[S] = Var[N](E[X_i])^2 + E[N](Var[X_i])^2$$

Η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής S βρίσκεται ως:

$$M_S(t) = E_N[E(e^{tS}|N=n)] = \prod_{i=1}^{n} E(e^{tX_i}) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$

1.3 Το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας

1.3.1 *Ορισμός*

Το μοντέλο ***Cramer-Lundberg***, εισήχθηκε αρχικά από τον μαθηματικό Filip Lundberg, στην εποχή που δεν είχε θεμελιωθεί ακόμα κάποια γενική θεωρία για τις στοχαστικές διαδικασίες. Το μοντέλο που εισήχθηκε μελετήθηκε και μεταγενέστερα από τους αναλογιστές για τις ιδιότητες που προσφέρει, καθώς και προτάθηκαν πολλές γενικεύσεις του μοντέλου αυτού.

Η στοχαστική διαδικασία που περιγράφει το μοντέλο Cramer-Lundberg είναι η πορεία του ασφαλιστικού πλεονάσματος $U(t)$, ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου στο βάθος του χρόνου. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος του μοντέλου είναι:

$$U(t) = u + ct - S(t) \tag{1.1}$$

Ο πρώτος όρος του αθροίσματος, u, αναφέρεται στο αρχικό ασφαλιστικό αποθεματικό που κρατάει η ασφαλιστική εταιρεία, προκειμένου να διασφαλίσει χαμηλότερη πιθανότητα χρεοκοπίας, από την απότομη εμφάνιση απαιτήσεων. Διαισθητικά, περιμένουμε ότι όσο μεγαλύτερο είναι το αρχικό αποθεματικό, τόσο μικρότερη είναι και η πιθανότητα η ποσότητα $U(t) < 0$.

Ο δεύτερος όρος του αθροίσματος, ct, εκφράζει την γραμμική συνάρτηση του χρόνου t, ως προς μια θετική σταθερή ποσότητα c. Στο μοντέλο, αυτή η σταθερή ποσότητα, ονομάζεται ένταση ασφαλίστρου, και εκφράζει το ασφάλιστρο που χρεώνει ένας ασφαλιστής για τις ασφαλιστικές υπηρεσίες που παρέχει.

Ο τελευταίος όρος του αθροίσματος $S(t)$ περιγράφεται από την στοχαστική ανέλιξη:

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i & N(t) > 0 \\ 0 & N(t) = 0 \end{cases}$$

Και αποτελεί το στοχαστικό άθροισμα τυχαίων μεταβλητών X_i, όπου εκφράζουν το ύψος των ασφαλιστικών απαιτήσεων που εμφανίζονται ανά περιόδους. Η μεταβλητή $N(t)$, αποτελεί μια σύνθετη ανέλιξη Poisson και εκφράζει το πλήθος των απαιτήσεων X_i που εμφανίζονται ανά περίοδο.

Μια από τις βασικές έννοιες στο μοντέλο Cramer-Lundberg είναι ο *χρόνος χρεοκοπίας*, που εκφράζει το χρονικό διάστημα που θα εμφανιστεί η χρεοκοπία:

$$T = inf\{t \geq 0: U(t) < 0\}$$

Πάνω στον χρόνο χρεοκοπίας, βασίζεται και η έννοια της *πιθανότητας χρεοκοπίας*. Στο μοντέλο, η πιθανότητα αυτή ορίζεται ως:

$$\psi(u) = Pr[U(t) < 0 | \, T < \infty] \tag{1.2}$$

Η πιθανότητα αυτή εκφράζει το ενδεχόμενο η ποσότητα $U(t)$ να λάβει αρνητικές τιμές σε πεπερασμένο χρόνο.

1.3.2 *Βασικές παραδοχές του μοντέλου*

Κύρια παραδοχή του μοντέλου αποτελεί το γεγονός πως τα ασφάλιστρα που εισπράττει η ασφαλιστική εταιρεία αποτελούν γραμμική συνάρτηση ως προς το χρόνο, κάτι που υποδηλώνει ότι δεν υπάρχει κάποια καθυστέρηση στην είσπραξη των ασφαλίστρων, δηλαδή ότι όλοι οι ασφαλισμένοι είναι συνεπείς ως προς τις υποχρεώσεις τους.

Στην πραγματικότητα όμως, αυτή η υπόθεση απέχει από την πραγματικότητα, καθώς είναι αδύνατο όλοι οι ασφαλισμένοι του χαρτοφυλακίου να είναι συνεπείς ως προς τις υποχρεώσεις τους. Στις γενικεύσεις του μοντέλου, το πρόβλημα αυτό λύνεται κυρίως με την εισαγωγή ενός στοχαστικού όρου διάχυσης, που εκφράζει την αβεβαιότητα της είσπραξης ως μια *διαδικασία Wienner*.

Μια επιπλέον παραδοχή του μοντέλου είναι πως η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων T_i των αφίξεων, ακολουθούν την εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνόντητας πιθανότητας:

$$b(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Και η ανέλιξη πλεονάσματος είναι μια σύνθετη ανέλιξη Poisson. Στην πράξη αυτή η υπόθεση έχει θεωρηθεί ανεπαρκής καθώς σε πολλά ασφαλιστικά χαρτοφυλάκια έχει παρατηρηθεί ότι η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων των αφίξεων δεν είναι εκθετική (Erlang, Weibull κλπ).

Επιπροσθέτως, το μοντέλο προϋποθέτει την ανεξαρτησία μεταξύ της κατανομής του ύψους της ατομικής ζημιάς, με την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων. Αυτή η παραδοχή επίσης παρουσιάζει αρκετές αδυναμίες, καθώς στην πράξη έχει παρατηρηθεί ότι το ύψος της ατομικής ζημιάς παρουσιάζει μια μορφή εξάρτησης τόσο με το ύψος της προηγούμενης απαίτησης, όσο και με την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων των αφίξεων.

1.3.3 *Βασικοί συμβολισμοί*

Στο κλασσικό μοντέλο Cramer-Lundber το περιθώριο ασφαλείας, εκφράζει το καθαρό κέρδος του ασφαλιστή ως προς το ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο που μελετάμε. Ο τύπος υπολογισμού του περιθωρίου ασφαλείας:

$$\theta = \frac{c}{\lambda \mu_1} - 1$$

Όπου,

λ: Η ένταση της ανέλιξης Poisson

c: Η ένταση ασφαλίστρου που εισπράττει η ασφαλιστική

$f_X(x)$: Η σ.π.π. του ύψους της ατομικής ζημιάς με συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$

μ_1: Η πρώτη ροπή της κατανομής του ύψους της ατομικής ζημιάς, συμβολίζεται επίσης ως $E[X_i]$

Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτουν 3 διαφορετικές περιπτώσεις:

- Αν $\theta > 0$, τότε σημαίνει πως $\frac{c}{\lambda \mu_1} - 1 > 0$, δηλαδή ότι $c > \lambda \mu_1$
- Αν $\theta = 0$, τότε $c = \lambda \mu_1$
- Αν $\theta < 0$, τότε $c < \lambda \mu_1$

Αποδεικνύεται, ότι στην μοναδική περίπτωση που δεν θα έχουμε βέβαιη χρεοκοπία στο διηνεκές, είναι η περίπτωση όπου $\theta > 0$ ή $c > \lambda \mu_1$. Αυτό ονομάζεται *συνθήκη καθαρού κέρδους*.

Στις τελευταίες 2 περιπτώσεις, αποδεικνύεται ότι η χρεοκοπία στο διηνεκές είναι βέβαιη. Ο τρόπος για να αποφευχθεί η χρεοκοπία, είναι η κατάλληλη επιλογή του ασφαλίστρου c, ώστε να ίκανοποιείται η συνθήκη του καθαρού ασφαλίστρου.

Αν η ποσότητα θ είναι πολύ μεγάλη, αυτό σημαίνει ότι το ασφάλιστρο που εισπράττει η ασφαλιστική είναι πολύ μεγάλο. Σε αυτή την περίπτωση τίθεται θέμα ανταγωνιστικότητας του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου, καθώς σημαίνει πως η ασφαλιστική χρεώνει πολύ παραπάνω ασφάλιστρα από τον κίνδυνο στον οποίο εκτίθεται.

1.3.4 *Ανανεωτικές εξισώσεις*

Η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$, εκφράζει την πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου που μελετάμε, ως συνάρτηση του αρχικού αποθεματικού u. Η πιθανότητα της μη-χρεοκοπίας $\varphi(u)$, δηλαδή η πιθανότητα το χαρτοφυλάκιο να έχει θετικό πλεόνασμα στο διηνεκές, δίνεται από τον τύπο:

$$\varphi(u) = 1 - \psi(u)$$

Σύμφωνα με το κλασσικό μοντέλο, η πιθανότητα της μη-χρεοκοπίας, να ικανοποιεί την παρακάτω ελλειμματική ολοκληροδιαφορική ανανεωτική εξίσωση:

$$\varphi'(u) = \frac{\lambda}{c}\left(\varphi(u) - \int_0^x \varphi(u-y) f_X(y)\, dy\right)$$

Για αρχικό αποθεματικό $u = 0$ στην παραπάνω συνάρτηση, αποδεικνύεται ότι η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας και χρεοκοπίας αντίστοιχα:

$$\varphi(0) = \frac{\theta}{1+\theta}, \qquad \psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$$

Αυτό που μας ενδιαφέρει πιο πολύ, είναι να βρούμε την σχέση ανάμεσα στην πιθανότητα χρεοκοπίας, σε συνάρτηση με το αρχικό αποθεματικό, όταν αυτό είναι $u > 0$. Ολοκληρώνοντας την ανανεωτική εξίσωση από 0 έως u και χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση:

$$\int_0^u \varphi'(x) dx = \frac{\lambda}{c}\left\{\int_0^u \varphi(x) dx - \int_0^u \int_0^x \varphi(u-y) f_X(y)\, dy dx\right\}$$

Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα στα αριστερά:

$$\varphi(u) - \varphi(0) = \frac{\lambda}{c}\left\{\int_0^u \varphi(x) dx - \int_0^u \int_0^x \varphi(u-y) dF_X(y)\, dx\right\}$$

Αντικαθιστώντας τώρα για $\psi(u) = 1 - \varphi(u)$, αποκτούμε την ανανεωτική εξίσωση για την πιθανότητα χρεοκοπίας:

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c}\left\{\int_u^\infty 1 - F_X(x) dx + \int_0^u \psi(u-x)\big(1 - F_X(x)\big) dx\right\} \tag{1.3}$$

Για να δείξουμε ότι η παραπάνω εξίσωση αποτελεί ανανεωτική εξίσωση ελλειμματικής μορφής ορίζουμε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\overline{H}(u) = \frac{1}{\mu_1}\int_u^\infty (1 - F_X(x)) dx \tag{1.4}$$

$$dH(x) = \frac{1}{\mu_1}[1 - F_X(x)] \text{ ή } 1 - F_X(x) = dH(x)\mu_1$$

Η συνάρτηση $H(u)$, ονομάζεται και αθροιστική κατανομή ισορροπίας, και η πρώτη παράγωγός της $dH(x) = h(x)$ όπου $h(x) = \frac{1}{\mu_1}[1 - F(x)]$ ονομάζεται κατανομή ισορροπίας.

Οπότε, η πιθανότητα χρεοκοπίας καταλήγει μετά από μερικές πράξεις στη μορφή:

$$\psi(u) = \frac{\lambda\mu_1}{c}\overline{H}(u) + \frac{\lambda\mu_1}{c}\int_0^u \psi(x-u) dH(x) \tag{1.5}$$

Από την συνθήκη καθαρού ασφαλίστρου $c > \lambda\mu_1$ ξέρουμε ότι ο λόγος $\frac{\lambda\mu_1}{c}$ είναι μικρότερος της μονάδας. Αποδεικνύεται λοιπόν ότι η πρόκειται για ελλειμματική ανενωτική εξίσωση της μορφής:

$$g(t) = F(t) + q\int_0^t g(t-s) dF(s)$$

Με $0 < q < 1$. Για να μετατρέψουμε την παραπάνω εξίσωση σε κανονική ανανεωτική εξίσωση με $q = 1$, θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη του Lundberg. Θα πρέπει να υπάρχει ένας αριθμός $R > 0$, όπου θα ισχύει ο εξής μετασχηματισμός Laplace:

$$\int_0^{\infty} e^{Rx} dH(x) = \frac{c}{\lambda \mu_1}$$

Με την προϋπόθεση ότι υπάρχει η ροπογεννήτρια της f_X, η σταθερά R λέγεται συντελεστής προσαρμογής του μοντέλου, και αποδεικνύεται ότι είναι η ***<u>μικρότερη θετική ρίζα</u>*** της εξίσωσης:

$$\frac{1}{R} M_X(R) - \frac{1}{R} = \frac{c}{\lambda} \tag{1.6}$$

Όπου $M_X(R)$ η ροπογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής του ύψους των ζημιών. Η εξίσωση (1.6) ονομάζεται *θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg*. Στην περίπτωση που η κατανομή του ύψους της ατομικής ζημιάς είναι η εκθετική κατανομή με σ.π.π. $f_X(x) = ae^{-ax}$ και ροπογεννήτρια $M_X(r) = \frac{a}{a-r}$, λύνοντας την θεμελιώδη εξίσωση του Lundberg ως προς r, η πιθανότητα χρεοκοπίας σε συνάρηση του αρχικού αποθεματικού $u \geq 0$ είναι:

$$\psi(u) = \psi(0)e^{-Ru}$$

1.3.5 *Η προσέγγιση της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής*

Θεωρούμε τις διακριτές χρονικές στιγμές $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ όπου εμφανίζεται η αντίστοιχη πτώση του πλεονάσματος. Θεωρούμε επίσης, τις τιμές του πλεονάσματος $U_{t_1}, U_{t_2}, \dots, U_{t_n}$ όταν συμβαίνει η αντίστοιχη πτώση του πλεονάσματος σε αυτές τις χρονικές στιγμές.

Μπορούμε από αυτό, να ορίσουμε μια νέα τυχαία μεταβλητή L_1, η οποία θα εκφράζει την πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u. Η τυχαία μεταβλητή μαθηματικά ορίζεται ως:

$$L_1 = \begin{cases} 0 & \alpha\nu\ u > U(t_1) - S_{t_1} \\ u - U(t_1) & \alpha\nu\ u < U(t_1) - S_{t_1} \end{cases}$$

Η τυχαία μεταβλητή L_1 εκφράζει το *ύψος της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος* $U(t_1)$ κάτω από το αρχικό αποθεματικό $U(0) = u$.

Διαδοχικά, μπορούμε να ορίσουμε επίσης μια δεύτερη δεσμευμένη τυχαία μεταβλητή L_2, η οποία δοθέντος ότι έχει συμβεί η πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό, εκφράζει την πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αποθεματικό $U(t_1)$:

$$L_2 = \begin{cases} 0 & \alpha\nu\ U(t_2) > U(t_1) \\ U(t_1) - U(t_2) & \alpha\nu\ U(t_2) < U(t_1) \end{cases}$$

Ακολουθώντας παρόμοια προσέγγιση, ορίζουμε την εξής πεπερασμένη ακολουθία L_1, $L_2, \dots, L_n$. Πεπερασμένη θα είναι καθώς είτε το πλεόνασμα $U(t)$ κάποια στιγμή θα λάβει αρνητική τιμή, ή από κάποιο σημείο και μετά θα αυξάνεται συνεχώς ώστε οι τιμές L_j θα είναι μηδενικές. Αυτό προκύπτει ως απόρροια της συνθήκης του καθαρού κέρδους $c > \lambda\mu_1$ που έχουμε ορίσει ως βασική προϋπόθεση ώστε να είναι κερδοφόρο το χαρτοφυλάκιο.

Εφόσον η εμφάνιση κάποιας πτώσης πλεονάσματος L_j είναι πεπερασμένη, διακριτή και οι τιμές τις έχουν πεδίο τιμών στο $[0, +\infty]$, μας επιτρέπει να ορίσουμε την τυχαία μεταβλητή M, η οποία δηλώνει το πλήθος των τυχαίων μεταβλητών L_i στην στοχαστική ανέλιξη που μελετάμε

Η τυχαία μεταβλητή M, ως απόρροια των παραπάνω, θα είναι επίσης διακριτή και θα λαμβάνει τιμές ακέραιες και μη-αρνητικές. Λόγω του ανανεωτικού χαρακτήρα της ανέλιξης του πλεονάσματος που μελετάμε, κάθε φορά που εμφανίζεται μια πτώση του πλεονάσματος L_j , η πιθανότητα να εμφανιστεί ένα νέο ελάχιστο, δηλαδή μια επιπλέον πτώση πλεονάσματος L_{j+1}, ισούται με την πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό $u = 0$, δηλαδή $\psi(0)$.

Θεωρώντας τώρα ως «αποτυχία» την εμφάνιση μιας νέας πτώσης πλεονάσματος ή μιας νέας εμφάνισης νέου ελάχιστου, μπορούμε να προτείνουμε την εξής σχέση:

$$Pr(L = m) = [\psi(0)]^m \varphi(0)$$

Όπου ως ***<u>«επιτυχία»</u>*** ορίζουμε την πιθανότητα να μην υπάρξει χρεοκοπία με αρχικό αποθεματικό $u = 0$. Από αυτό καταλαβαίνουμε ότι πρόκειται για μια σύνθετη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο m, που απαριθμεί τον αριθμό των αποτυχιών $\psi(0)$, μέχρι να έχουμε την πρώτη επιτυχία $\varphi(0)$.
Επίσης, ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $L = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$ όπου εκφράζει το σύνολο της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό. Η νέα τυχαία μεταβλητή έχει τις εξής ιδιότητες:

- Η κατανομή της, έχει μάζα στο σημείο 0 ίση με $\varphi(0)$, δηλαδή $\Pr(L = 0) = \varphi(0)$. Οπότε η πιθανότητα να μην πέσει το πλεόνασμα κάτω από το αρχικό αποθεματικό, ισούται με την πιθανότητα μη-χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό 0. Επίσης είναι συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$

- Η πιθανότητα $\Pr(L > u) = \psi(u)$, εκφράζει τη συνολική πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου που παρακολουθούμε, καθώς προκύπτει επίσης ότι $\Pr(L \leq u) = \varphi(u)$.

Από υπόθεση, η τυχαία μεταβλητή L, ακολουθεί την σύνθετη γεωμετρική κατανομή με $Pr(L = 0) = \varphi(0)$ και:

$$Pr(L \leq u) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(0) * \left(\psi(0)\right)^n \bar{F}_X^{*n}(u)\,, \quad u \geq 0$$

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της γεωμετρικής κατανομής ορίζεται ως:

$$M_G(t) = \sum_{0}^{\infty} P(L = k) e^{tk}$$

Καθώς πρόκειται για γεωμετρική σειρά, η σειρά συγκλίνει στον παρακάτω τύπο:

$$M_G(t) = \frac{\varphi(0)}{1 - \psi(0) e^t}$$

Για να βρούμε μια σχέση που να συνδέει την κατανομή των ξεχωριστών κλιμακωτών υψών L_i με την κατανομή των απαιτήσεων X, θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των ροπογεννητριών για σύνθετες κατανομές, ώστε:

$$M_L(r) = M_G\{log[M_{L_i}(r)]\}$$

Κάνοντας αντικατάσταση στον προηγούμενο τύπο:

$$M_L(r) = \frac{\varphi(0)}{1 - \psi(0)e^{log\left[M_{L_i}(r)\right]}} = \frac{\varphi(0)}{1 - \psi(0)M_{L_i}(r)}$$

Μια σχέση που επίσης συνδέει την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής L_1, με την κατανομή των αποζημιώσεων X είναι:

$$M_{L_1}(r) = \frac{1}{\mu_1 r}(M_X(r) - 1)$$

Τελικά, με απλή αντικατάσταση στον τύπο, προκύπτει η εξής σχέση μεταξύ της κατανομής των ζημιών και της τυχαίας μεταβλητής L:

$$M_L(r) = \frac{\varphi(0)}{1 - \psi(0)\left\{\frac{1}{\mu_1 r}(M_X(r) - 1)\right\}}$$

Κάνοντας κάποιες πράξεις, και αντικαθιστώντας $\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}, \varphi(0) = \frac{\theta}{1+\theta}$:

$$M_L(r) = \varphi(0) + \frac{\theta(M_X(r) - 1)}{1 + \theta[(1+\theta)\mu_1 r - M_X(r) + 1]} \tag{1.7}$$

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας ως προς το αρχικό αποθεματικό u, ένας τρόπος είναι να αντικαταστήσουμε την ροπογεννήτρια με τον μετασχηματισμό Laplace. Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης, $\hat{f}_X(s)$, συνδέεται με την ροπογεννήτρια συνάρτηση ως εξής:

$$\hat{f}_X(s) = M_X(-s)$$

Με τη μέθοδο αυτή, μπορούμε να αντιστρέψουμε τον μετασχηματισμό Laplace για να λάβουμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής L, όπου εύκολα βρίσκουμε και την πιθανότητα χρεοκοπίας. Ακόμα και αν η αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace είναι πολύπλοκη, τα σύγχρονα μαθηματικά πακέτα μπορούν εύκολα να αντιστρέψουν το μετασχηματισμό.

1.3.6 *Η μέθοδος Fast Fourier Transform*

(Susan M. Pitts, (2006). THE FAST FOURIER TRANSFORM ALGORITHM IN RUIN THEORY FOR THE CLASSICAL RISK MODEL)

Για περιπτώσεις όπου η πιθανότητα χρεοκοπίας δεν μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά σε αλγεβρική μορφή, η αριθμητική προσέγγιση μέσω ***FFT*** αποτελεί ένα αποτελεσματικό εργαλείο για την εύρεσή της. Η περίπτωση αυτή είναι αρκετά χρήσιμη για κατανομές που δεν μπορεί να βρεθεί ο συντελεστής προσαρμογής της κατανομής των αποζημιώσεων.

Όμως, καθώς ο ***FFT*** αποτελεί διακριτή μέθοδο μετασχηματισμού Fourier, αρκετές φορές είναι απαραίτητη η διακριτοποίηση κάποιας συνεχούς κατανομής με τρόπο που διατηρεί ικανοποιητικά τις ιδιότητές της σε όλο το σύνολο των τιμών της.

Υπάρχουν αρκετοί τρόποι διακριτοποίησης κατανομών, όμως για λόγους συντομίας θα αναφερθούμε στο βιβλιογραφικό τρόπο διακριτοποίησης όπου και αξιοποιήσουμε για τον υπολογισμό πιθανότητας χρεοκοπίας.

Έστω μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X, με συνάρτηση κατανομής $F(x)$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$. Ορίζουμε μια διακριτή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας g_k με διακριτό σύνολο τιμών στα σημεία $k = \{1,2,3, \dots K\}$. Έστω επίσης μια σταθερά w, όπου ονομάζουμε παράμετρο διακριτοποίησης έτσι ώστε η g_k να υπολογίζεται ως εξής:

$$g_k = F[(k + 0.5)w] - F[(k + 0.5)w],$$

$$g_0 = F(0.5 \cdot w)$$

Η ακρίβεια με την οποία θα γίνει η διακριτοποίηση εξαρτάται κυρίως από το πλήθος των σημείων k που θα επιλέξουμε, καθώς και την παράμετρο διακριτοποίησης w που θα ορίσουμε.

Είναι προφανές ότι όσο το k γίνεται μεγαλύτερο και το βήμα w μικρότερο, η προσέγγισή μας είναι ακριβέστερη, καθώς επιλέγουμε περισσότερα διακριτά σημεία από το άπειρο σύνολο τιμών που είναι διαθέσιμα. Όμως, για απλότητα υπολογισμών, δεν θα πρέπει το k να είναι πολύ μεγάλο καθώς από κάποιο σημείο και έπειτα, ειδικά σε κατανομές με ελαφριά ουρά, η πιθανότητα g_k για πολύ μεγάλο k, είναι **αμελητέα**.

Βήματα του αλγορίθμου για τον υπολογισμό της $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{u})$:

Διακριτοποιούμε την κατανομή ισορροπίας $h(x)$ στη διακριτή της μορφή h_k στα σημεία $k = \{1,2,3, \dots K - 1\}$, για τα οποία επιλέγουμε το K να είναι δύναμη του 2. Η διακριτοποίηση γίνεται ως εξής:

$$h_k = H[(k + 0.5)w] - H[(k + 0.5)w]$$
$$h_0 = F(0.5 \cdot w)$$

Για να υπολογιστεί όμως η διακριτή κατανομή h_k, θα χρειαστεί πρώτα να προσεγγίσουμε την μάζα πιθανότητας $H[(k + 0.5)w] - H[(k + 0.5)w]$ που αναθέτουμε στην ποσότητα h_k. Για να γίνει αυτό θα χρειαστεί να γίνει πρώτα διακριτοποίηση της κατανομής των ζημιών F_X. Θεωρούμε την διακριτή συνάρτηση κατανομής κινδύνων $F_{D,k}$ με αντίστοιχη κατανομή δεξιάς ουράς $\bar{F}_{D,k}$ και αντίστοιχη διακριτοποιημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f_k^D.

$$h_k = H[(k + 0.5)w] - H[(k - 0.5)w] = \int_{(k-0.5)w}^{(k+0.5)w} \bar{F}_D(x)dx$$

Δηλαδή, η μάζα πιθανότητας της h_k υπολογίζεται ως το ολοκλήρωμα της διακριτοποιημένης κατανομής της δεξιάς ουράς των κινδύνων, στα αντίστοιχα άκρα $[(k + 0.5)w, (k - 0.5)w]$. Καθώς όμως η $\bar{F}_{D,k}$ πρόκειται για διακριτή κατανομή, βιβλιογραφικά αποδεικνύεται ότι:

$$h_k = \frac{w}{2\mu_1} f_k^D + \frac{w}{\mu_1} \sum_{j>k} f_j^D$$

$$h_0 = \frac{w}{2\mu_1} \sum_{j>0} f_j^D$$

Επόμενο βήμα για την επίλυση του αλγόριθμου είναι αξιοποιώντας την διακριτοποιημένη συνάρτηση ισορροπίας h_k βρίσκουμε τον ***FFT*** της συνάρτησης ως:

$$\tilde{h}_k = \sum_{k=0}^{K-1} h_k e^{itk}$$

Καθώς ξέρουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας προσεγγίζεται από τη σύνθετη γεωμετρική κατανομή $P(L > u) = \psi(u)$. Η σύνθετη κατανομή αυτή είναι

$$\bar{G}(u) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{j} H^{*j}(u)$$

Εφόσον έχουμε υπολογίσει το σύνολο τιμών της διακριτής συνάρτησης $\tilde{h}_k$, ο FFT της συνάρτησης πυκνότητας g_k της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής που αναφέραμε υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\tilde{g}_k = \frac{\delta(0)}{1-\psi(0)\tilde{h}_k}$$

Καθώς έχουμε το σύνολο τιμών της $\tilde{g}_k$, αντιστρέφοντας τον ***FFT***, βρίσκουμε το διακριτό σύνολο τιμών της πυκνότητας της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής $\boldsymbol{g} = \{\boldsymbol{g_1}, \boldsymbol{g_2}, \dots, \boldsymbol{g_{K-1}}\}$ στα αντίστοιχα διαστήματα $((\boldsymbol{k}-\mathbf{0.5})\boldsymbol{w}, (\boldsymbol{k}+\mathbf{0.5})\boldsymbol{w}]$. Τελικά η προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας με τη μέθοδο FFT, βρίσκεται παρακάτω ως:

$$\psi_k = 1 - \sum\nolimits_{j\le k} g_j$$

Όπου η παραπάνω σχέση, μας δίνει την προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi[(k+0.5)w]$ για αποθεματικό $u = (k+0.5)w$. Απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή, καθώς για τις κατανομές με βαριά ουρά, για καλύτερη προσέγγιση θα χρειαστεί η επιλογή μεγάλου αριθμού δειγμάτων K, καθώς και μικρό διάστημα διακριτοποίησης w. Αυτό συμβαίνει καθώς για τις κατανομές με βαριά ουρά, μπορούμε να έχουμε αρκετά μεγάλες ζημιές με μη αμελητέα πιθανότητα.

1.4 Το ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας

1.4.1 *Ορισμός*

Το 1957, ο Eric Sparre Andersen, πρότεινε την γενίκευση του κλασσικού μοντέλου Cramer-Lundberg, ως προς την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων των αφίξεων. Η τυχαία μεταβλητή $T_k = W_{k+1} - W_k$, εκφράζει την κατανομή των χρονικών διαστημάτων μεταξύ των αφίξεων της πτώσης του πλεονάσματος. Στο κλασσικό μοντέλο, ξέρουμε ότι αν ο χρόνος T_1 ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, τότε η κατανομή της απαρριθμήτριας συνάρτησης $N(t)$, είναι η σύνθετη κατανομή Poisson, παράμετρο λ της εκθετικής κατανομής.

Στο μοντέλο του Eric Sparre Andersen (ή αλλιώς ανανεωτικό μοντέλο), προϋποθέτουμε ότι η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων T_1, $T_2, \dots, T_k$ είναι κάποια αυθαίρετη κατανομή, και όχι πλέον την εκθετική. Στα επόμενα κεφάλαια, θα μελετηθεί η περίπτωση που η κατανομή των χρόνων των αφίξεων είναι η κατανομή $Erlang(n,\lambda)$ όπου αποτελεί γενίκευση της εκθετικής κατανομής καθώς και παραλλαγές αυτού του μοντέλου. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος στο ανανεωτικό μοντέλο του Andersen είναι:

$$U(t) = u + ct - S(t)$$

Όπου $S(t) = \sum_{N(t)} X_i$. Η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος, είναι παρόμοια με αυτή του κλασσικού μοντέλου χρεοκοπίας,με τη διαφορά ότι η απαρριθμήτρια συνάρτηση $N(t)$ δεν είναι πλέον διαδικασία Poisson.

1.4.2 *Το ανανεωτικό μοντέλο για Erlang(2,β) ενδιάμεσους χρόνους* (David C.M. Dickson & Christian Hipp, (1998). Ruin Probabilities for Erlang(2) risk processes.)

Μια εκδοχή του ανανεωτικού μοντέλου αποτελεί και το μοντέλο όπου η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων, ακολουθεί την κατανομή Erlang(2,β) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$b(t) = \beta^2 t e^{-\beta t}$$

Για το συγκεκριμένο μοντέλο, η συνθήκη που θα πρέπει να ικανοποιήται για να μην έχουμε βέβαιη χρεοκοπία στο διηνεκές (συνθήκη καθαρού ασφαλίστρου) είναι:

$$c > \frac{E[X]}{E[T]} \text{ ή } c > \frac{\beta}{2\mu_1}$$

Όπου $E[T] = {}^{2}/_{\beta}$ η πρώτη ροπή της κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων. Παράλληλα, η πιθανότητα χρεοκοπίας για το μοντέλο ορίζεται ως:

$$\psi(u) = Pr\left(u + \sum_{i=1}^{n}(cT_i - X_i) < 0\right), \qquad n = 1,2, \dots$$

Στο κλασσικό μοντέλο Cramer-Lundberg, τόσο η $\psi(u)$ και η $\varphi(u)$ ικανοποιούν μια ανανεωτική ολοκληροδιαφορική εξίσωση. Γενικεύοντας ως προς την υπόθεση των Erlang(2,β) ενδιάμεσων χρόνων, η ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας:

$$\varphi(u) = \int_0^\infty b(t) \int_0^{u+ct} \varphi(u + ct - x) dF_X(x) dt$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της $\varphi(u)$:

$$\hat{\varphi}(u) = \frac{c^2 s\varphi(0) + \beta^2\mu_1 - 2\beta c}{c^2 s^2 - 2\beta cs + \beta^2\left(1 - \hat{f}_X(s)\right)} \tag{1.8}$$

Ορίζοντας τώρα την τυχαία μεταβλητή L ως τη μέγιστη σωρρευτική απώλεια, η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας από την προσέγγιση της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής είναι $\varphi(u) = \Pr(L \leq u)$. Ο μετασχηματισμός Laplace της τυχαίας μεταβλητής είναι παρόμοιος με την προσέγγιση της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής στο κλασσικό μοντέλο. Ο μετασχηματισμός Laplace της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής L με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g_L(u)$ στο Erlang(2,β) μοντέλο:

$$g_L(u) = \frac{c^2 s^2 \varphi(0) + \beta^2\mu_1 s - 2\beta cs}{c^2 s^2 - 2\beta cs + \beta^2\left(1 - \hat{f}_X(s)\right)}$$

Τέλος, η συνάρτηση ισορροπίας και ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης ισορροπίας δίνονται αντίστοιχα:

$$H(u) = \frac{1}{\mu_1}\int_0^u \bar{F}_X(y)\, dy, \qquad \hat{h}(s) = \frac{1 - \hat{f}_X(s)}{\mu_1 s}$$

1.4.3 *Αποτελέσματα για το ανανεωτικό μοντέλο για Erlang(2,β) ενδιάμεσους χρόνους*

Αντικαθιστώντας τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης ισορροπίας στη σχέση (1.8) έχουμε:

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{c^2 s\varphi(0) + \beta^2\mu_1 - 2\beta c}{c^2 s^2 - 2\beta c + \beta^2\mu_1 \hat{h}(s)}$$

Ο παρονομαστής του κλάσματος, έχει τουλάχιστον μια θετική ρίζα ρ_0. Επιπλέον, η ρίζα ρ_0 είναι και ρίζα του παρονομαστή, καθώς η $\hat{\varphi}(s)$ είναι θετική για $s > 0$. Η ρίζα αυτή θεωρείται ο αντίστοιχος συντελεστής προσαρμογής R για το ανανεωτικό μοντέλο με Erlang(2,β) ενδιάμεσους χρόνους.

Η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας για αρχικό αποθεματικό $u = 0$, ορίζεται με τη χρήση του συντελεστή προσαρμογής:

$$\varphi(0) = \frac{2\beta c - \beta^2\mu_1}{c^2\rho_0}$$

Τέλος, με την προσέγγιση της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής, η κατανομή των κλιμακωτών υψών $L(u)$ με μετασχηματισμό Laplace $\hat{l}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dL(x)$ συνδέεται με τον μετασχηματισμό Laplace της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής $g_L(u)$ ως:

$$\hat{g}_L(u) = \frac{\varphi(0)}{1 - \psi(0)\,\hat{l}(s)}$$

Αποδεικνύεται βιβλιογραφικά, ότι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης κλιμακωτών υψών δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{l}(s) = \kappa\mu_1 \frac{\hat{h}(s) - \hat{h}(\rho_0)}{\rho_0 - s}$$

Με

$$\kappa = \frac{\beta^2}{c^2 - \frac{2\beta c}{\rho_0} + \frac{\beta^2\mu_1}{\rho_0}}$$

Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό Laplace, παίρνουμε την κατανομή κλιμακωτών υψών για το ανανεωτικό Erlang(2,β) μοντέλο για $u \geq 0$:

$$L(u) = \kappa \int_u^\infty e^{-\rho_0(x-u)} \bar{F}_X(x) dx$$

1.5 Η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής Gerber-Shiu

1.5.1 *Ορισμός*

Ο Hans Gerber και ο Elias Shiu, το 1998 εισήγαγαν την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, γνωστή και ως συνάρτηση Gerber-Shiu. Η συνάρτηση αυτή, αποτελεί σημαντικό αντικείμενο μελέτης λόγω των μαθηματικών ιδιοτήτων που παρουσιάζει:

$$m_\delta(u) = E\left[e^{-\delta t} w\{U(T-), |U(T)|\} I[T < \infty | U(0) = u]\right] \tag{1.9}$$

Ουσιαστικά, πρόκειται για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, πολλαπλασιασμένο με μια συνάρτηση ποινής που καλείται να πληρώσει ο ασφαλιστής στην περίπτωση που έχουμε χρεοκοπία.

Ο παράγοντας $e^{-\delta t}$ εκτός από μετασχηματισμός Laplace με μεταβλητή δ, λειτουργεί και ως παράγοντας προεξόφλησης με επιτόκιο δ συνεχούς ανατοκισμού.

Η διμεταβλητή συνάρτηση ποινής $w\{U(T-), |U(T)|\}$ εκφράζει την ποινή που θα πληρώσει ο ασφαλιστής, εξαρτώμενη από 2 βασικούς παράγοντες:

- Ο παράγοντας $U(T-)$ εκφράζει το πλεόνασμα του ασφαλιστή, αμέσως πριν συμβεί η χρεοκοπία.
- Ο παράγοντας $|U(T)|$ εκφράζει την απόλυτη τιμή του ελλείμ΄ματος αμέσως αφού συμβεί χρεοκοπία.

Η δείκτρια μεταβλητή $I[T < \infty | U(0) = u]$ λαμβάνει την τιμή 0 αν ο χρόνος $T = \infty$, και την τιμή 1 αν ο χρόνος $T < \infty$. Ουσιαστικά εκφράζει το ενδεχόμενο να έχουμε χρεοκοπία σε πεπερασμένο χρόνο.

1.5.2 *Κάποιες ιδιότητες της συνάρτησης προεξοφλημένης ποινής*

Έστω η τριμεταβλητή συνάρτηση $g(x, y, t|u)$. Η συνάρτηση αυτή, είναι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της του χρόνου χρεοκοπίας T, του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρεοκοπία $U(T-)$ και του ελλείμματος αμέσως μετά τη χρεοκοπία $|U(T)|$. Η συνάρτηση Gerber-Shiu μπορεί να οριστεί μαθηματικά ως:

$$m_\delta(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty w(x, y) e^{-\delta t} g(x, y, t|u) dx dy dt \tag{1.10}$$

Για $w(x, y) = 1$ και $\delta = 0$ η παραπάνω συνάρτηση συγκλίνει στην πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό $u \geq 0$.

Επιπλέον, για $w(x, y) = 1$ και $\delta \geq 0$:

$$m_\delta(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} g(x, y, t|u) dx dy dt$$

Τώρα, ορίζουμε την συνάρτηση $f_\delta(x, y|u)$ ολοκληρώνοντας την συνάρτηση $e^{-\delta t} g(x, y, t|u)$ ως προς τον χρόνο t:

$$f_\delta(x,y|u)=\int_0^\infty e^{-\delta t}g(x,y,t|u)dt \tag{1.11}$$

Η παραπάνω συνάρτηση, αποτελεί την από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για τις μεταβλητές $U(T-), |U(T)|$. Παράλληλα, ολοκληρώνοντας την συνάρτηση $f_\delta(x,y|u)$ ως προς y βρίσκουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μεταβλητής $U(T-)$:

$$f_\delta(x|u)=\int_0^\infty f_\delta(x,y|u)dy$$

Ολοκληρώνοντας την συνάρτηση $f_\delta(x,y|u)$ ως προς x βρίσκουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μεταβλητής $|U(T)|$:

$$f_\delta(y|u)=\int_0^\infty f_\delta(x,y|u)dx$$

Προφανώς για $\delta=0$ προκύπτουν απλώς οι συναρτήσεις $f_0(x,y|u)$ όπου είναι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για τις μεταβλητές $U(T-), |U(T)|$, καθώς και για τις πιθανότητες $f_0(x|u), f_0(y|u)$ αντίστοιχα.

1.5.3 *Η γενικευμένη θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg για το μοντέλο Cramer-Lundberg*

Στην περίπτωση όπου η κατανομή του ύψους της ατομικής ζημιάς $F_X(x)$ έχει πεπερασμένο μετασχηματισμό Laplace, η γενικευμένη θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg για το κλασσικό μοντέλο θεωρίας χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda\hat{f}_X(s)=\delta+\lambda-cs$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει μία μοναδική ρίζα ρ_δ στον θετικό ημιάξονα και για $\delta>0$ η ρίζα είναι αύξουσα συνάρτηση του δ.

1.5.4 *Ανανεωτικές εξισώσεις για την συνάρτηση Gerber-Shiu*

Η ανανεωτική εξίσωση για το κλασσικό μοντέλο Cramer-Lundberg που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber-Shiu δίνεται από τη σχέση:

$$m_\delta(u)=\int_0^u m_\delta(u-y)g_\delta(y)dy+h_\delta(u) \tag{1.12}$$

Όπου οι συναρτήσεις:

$$g_\delta(x)=\frac{\lambda}{c}\int_x^\infty e^{-\rho_\delta(x-y)}f_X(y)dy$$

$$h_\delta(u)=\frac{\lambda}{c}\int_x^\infty\int_0^\infty e^{-\rho_\delta(u-x)}w(u,y)\,f_X(u+y)dydu$$

Καθώς η συνάρτηση $m_\delta(u)$ μπορεί να γραφτεί και με τη μορφή συνελίξεων ως:

$$m_\delta = m_\delta * g_\delta + h_\delta$$

Η τελευταία σχέση μας δείχνει ότι πρόκειται για μια ελλειματική ανανεωτική εξίσωση. Ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση λέγεται διότι το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^\infty g_\delta(y)dy = \int_0^\infty \frac{\lambda}{c}\int_x^\infty e^{-\rho_\delta(x-y)} f_X(y)dy < 1$$

Εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς Laplace για τις συνελίξεις των συναρτήσεων, προκύπτει ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu για το κλασσικό μοντέλο Cramer-Lundberg, υπολογίζεται ως:

$$\hat{m}_\delta(s) = \frac{\hat{h}_\delta(s)}{1-\hat{g}_\delta(s)} \tag{1.13}$$

1.6 Αριθμητικά αποτελέσματα

1.6.1 *Η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής*

Για να παρέχουμε απλά αριθμητικά αποτελέσματα θα κάνουμε τις εξής υποθέσεις:

- Η κατανομή του ύψους της ατομικής ζημιάς, είναι η εκθετική κατανομή:

$$f_X(x) = 3e^{-3x}$$

- Η ένταση ασφαλίστρου $c = 2$
- Η παράμετρος της κατανομής Poisson είναι $\lambda = 3$
- Η ένταση επιτοκίου $\delta = 0.1$

Λύνοντας τη γενικευμένη εξίσωση του Lundberg προκύπτει ότι η μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης είναι $\rho_\delta = 0.193928$.

Για συνάρτηση ποινής $w(x,y) = e^{x+y}$ και αντικατάσταση στις συναρτήσεις $g_\delta(x)$ και $h_\delta(u)$ προκύπτουν:

$$g_\delta(x) = 1.40892e^{-3x}$$

$$h_\delta(u) = 1.125e^{-2u}$$

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace των παραπάνω συναρτήσεων:

$$\hat{g}_\delta(s) = \frac{1.40892}{3+s}$$

$$\hat{h}_\delta(s) = \frac{1.02556}{2+s}$$

Τελικά από τη σχέση (1.13) και αντιστρέφοντας το μετασχηματισμό Laplace, η συνάρτηση **προεξοφλημένης ποινής δίνεται από τη σχέση**:

$$m_\delta(u) = 1.02556(-2.445e^{-2u} + 3.445e^{-1.59u})$$

1.6.2 Μέση τιμή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία:

Από τις ιδιότητες της συνάρτησης Gerber-Shiu, αν θέσουμε τη συνάρτηση ποινής $w(x,y) = e^{x}$ και $\delta \to 0^{+}$ λαμβάνουμε την αναμενόμενη τιμή του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρεοκοπία $k_{E[U(T-)]}(u)$, σε συνάρτηση με το αρχικό αποθεματικό:

$$k_{E[U(T-)]}(u) = \lim_{\delta \to 0^{+}} m_{\delta}(u) = 0.75e^{-2u}(-2 + 3e^{-0.5u})$$

1.6.3 Μέση τιμή του ελλείμματος αμέσως μετά τη χρεοκοπία:

Από τις ιδιότητες της συνάρτησης Gerber-Shiu, αν θέσουμε τη συνάρτηση ποινής $w(x,y) = e^{y}$ και $\delta \to 0^{+}$ λαμβάνουμε την αναμενόμενη τιμή του ελλείμματος αμέσως μετά τη χρεοκοπία $k_{E[|U(T)|]}(u)$, σε συνάρτηση με το αρχικό αποθεματικό:

$$k_{E[|U(T)|]}(u) = \lim_{\delta \to 0^{+}} m_{\delta}(u) = \frac{1}{6}e^{-3u/2}$$

1.6.3 Η πιθανότητα χρεοκοπίας

Από τις ιδιότητες της συνάρτησης Gerber-Shiu, αν θέσουμε τη συνάρτηση ποινής $w(x,y) = 1$ και $\delta \to 0^{+}$ λαμβάνουμε σαν ειδική περίπτωση την πιθανότητα χρεοκοπίας σε συνάρτηση του αρχικού αποθεματικού:

$$\psi(u) = \lim_{\delta \to 0^{+}} m_{\delta}(u) = \frac{1}{2}e^{-3u/2}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ένα ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με εξάρτηση μεταξύ των ενδιάμεσων χρόνων και του ύψους ατομικής ζημιάς

(Stathis Chadjiconstantinidis & Spyridon Vrontos, (2014). On a renewal risk process with dependence under a Farlie–Gumbel–Morgenstern copula.)

2.1 Εισαγωγή

Το 1957, ο Eric Sparre Andersen, πρότεινε μια γενίκευση του κλασσικού μοντέλου χρεοκοπίας που αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Το μοντέλο του Sparre Andersen ή απλώς ανανεωτικό μοντέλο, περιγράφει την στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος όπου η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης δεν είναι πλέον εκθετική, αλλά οποιαδήποτε αυθαίρετη κατανομή. Η σημασία αυτής της γενίκευσης είναι μεγάλη, καθώς τα δεδομένα δεν συμφωνούσαν πάντα με την παραδοχή της εκθετικής κατανομής ως κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων των αφίξεων. Ως απόρροια αυτής της γενίκευσης προκύπτει ότι η τυχαία μεταβλητή $N(t)$, δεν είναι πλέον μια διαδικασία Poisson. Σε αυτή την παράγραφο, η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων των αφίξεων ακολουθεί την κατανομή Erlang με παραμέτρους (λ, n).Η επιλογή της συγκεκριμένης κατανομής γίνεται επειδή αποτελεί γενίκευση της εκθετικής κατανομής και επιτρέπει μια πιο ευέλικτη προσέγγιση στο πρόβλημα της χρεοκοπίας. Επιπλέον θα εξετάσουμε μια ακόμα γενίκευση του μοντέλου, αυτό της εξάρτησης μεταξύ των ενδιάμεσων χρόνων, και του ύψους της ατομικής ζημιάς. Στην πράξη, η παραδοχή της ανεξαρτησίας μεταξύ αυτών των τυχαίων μεταβλητών σπάνια είναι κοντά στην πραγματικότητα. Για παράδειγμα, σε ένα καταστροφικό γεγονός, το ύψος της ατομικής ζημιάς και του χρόνου που παρήλθε από μια προηγούμενη καταστροφή, παρουσιάζουν κάποιο βαθμό εξάρτησης. Επιπροσθέτως, με τη χρήση της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής Gerber-Shiu θα βρούμε την από κοινού συνάρτηση κατανομής των τυχαίων μεταβλητών $U(T-), |U(T)|$ και θα δωθούν αριθμητικά αποτελέσματα για την περίπτωση όπου η κατανομή του ύψους της ατομικής ζημιάς είναι η εκθετική.

2.2 Το ανανεωτικό μοντέλο χρεοκοπίας με εξάρτηση

Η διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t), t \geq 0\}$ που θα ορίσουμε είναι της μορφής:

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

Η τυχαία μεταβλητή X_i περιγράφει το ύψους της ατομικής ζημιάς i, με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)$, συνάρτηση κατανομής $F_X(x) = 1 - \bar{F}_X(x)$ και μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}_X(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_X(x)dx$.

Η στοχαστική διαδικασία $N(t)$, είναι ανανεωτικού τύπου, και ορίζεται ως το τυχαίο άθροισμα ανεξάρτητων και και ισόνομων μεταβλητών των ενδιάμεσων χρόνων $\{T_1, T_2, \dots\}$. Η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων είναι η κατανομή Erlang(n,λ) με παραμέτρους n,λ και μέση τιμή $\mu_1 = n/\lambda$.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για $t \geq 0$ και n μη μηδενικός θετικός αριθμός:

$$f_T(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}$$

Η αθροιστική συνάρτηση της κατανομής για $t \geq 0$ και n μη μηδενικός θετικός αριθμός:

$$F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace:

$$\hat{f}_T(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_T(t) dt = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^n$$

Ο σκοπός είναι να προσδιορίσουμε μια μορφή εξάρτησης μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών (T_i, X_i). Βιβλιογραφικά, αυτό επιτυγχάνεται με την χρήση της <u>σύζευξης (copula)</u>. Η σύζευξη ορίζεται ως μια συνάρτηση που περιγράφει μια δομή εξάρτησης, και περιέχει πληροφορίες που συνδέουν τις οριακές κατανομές σε μια από κοινού συνάρτηση κατανομής. Μια από τις πιο σημαντικές παραμετρικές οικογένειες συζεύξεων είναι η <u>Farlie-Gumbel-Morgensten (FGM)</u>. Η σύζευξη ορίζεται ως:

$$C_\theta^{FGM}(u,v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v) \tag{2.1}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας της σύζευξης FGM, δίνεται:

$$\frac{\partial^2 C_\theta^{FGM}(u,v)}{\partial u \partial v} = \theta(2u-1)(2v-1) + 1$$

Η συνάρτηση $C_\theta^{FGM}(u,v)$, ορίζεται για οποιαδήποτε $u, v \in [0,1]$. Η παράμετρος $\theta \in [-1,1]$ ονομάζεται και παράμετρος εξάρτησης, αποτελεί τον βαθμό στον οποίο είναι εξαρτημένες οι μεταβλητές u, v. Για $\theta > 0$ έχουμε την περίπτωση όπου η σύζευξη παρουσιάζει θετική εξάρτηση, ενώ για $\theta < 0$ αρνητική. Για $\theta = 0$, παίρνουμε την περίπτωση όπου η σύζευξη παρουσιάζει ανεξαρτησία. Η συνάρτηση πυκνότητας της σύζευξης FGM, δίνεται:

$$\frac{\partial^2 C_\theta^{FGM}(u,v)}{\partial u \partial v} = \theta(2u-1)(2v-1) + 1$$

Με τη χρήση της παραπάνω σύζευξης, ορίζουμε τη διμεταβλητή συνάρτηση κατανομής και διμεταβλητή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας βασισμένη στη σύζευξη **FGM**:

$$F_{X,T}(x,t) = C_\theta^{FGM}\big(F_X(x), F_T(t)\big) = F_X(x)F_T(t) + \theta F_X(x)F_T(t)\bar{F}_X(x)\bar{F}_T(t) \quad x, t \in \mathbb{R}^+ \tag{2.2}$$

$$f_{X,T}(x,t) = C_\theta^{FGM}\big(F_X(x), F_T(t)\big) f_X(x) f_T(t) = f_X(x)f_T(t) + \theta h(x) f_T(t)[2\bar{F}_T(t) - 1] \quad x, t \in \mathbb{R}^+ \tag{2.3}$$

Η συνάρτηση $h(x) = f_X(x)[2\bar{F}_X(x) - 1]$ έχει μετασχηματισμό Laplace $\hat{h}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} h(x) dx$.

Για παράμετρο εξάρτησης $\theta = 0$, καταλήγουμε στην ειδική περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου χωρίς τη γενίκευση της εξάρτησης.

Ο χρόνος χρεοκοπίας, οριζεται ως $t = \inf\{t, U(t) < 0\}$ όπου $t \in [0, \infty)$. Αν $t = \infty$, τότε σημαίνει πως δεν έχουμε χρεοκοπία. Οπότε, η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως $\psi(u) = \Pr(t < \infty | U(0) = u)$ για κάθε αρχικό αποθεματικό $u \geq 0$. Για να μην υπάρχει βέβαιη χρεοκοπία σε αυτή την περίπτωση, θα πρέπει:

$$E[cT_i - X_i] > 0$$

Για οποιαδήποτε χρονική περίοδο $i = \{1,2, \dots\}$. Χρησιμοποιώντας τις βασικές ιδιότητες της μέσης τιμής έχουμε:

$$E[cT] - E[X] > 0$$

$$cE[T] - E[X] > 0$$

Καθώς η κατανομή των χρόνων ακολουθεί κατανομή Erlang με μέση τιμή $^{n}/_{\lambda}$, έτσι αντικαθιστώντας στην σχέση:

$$c\frac{\lambda}{n} > E[X]$$

Άρα, η συνθήκη του καθαρού ασφαλίστρου για το ασφάλιστρο που θα πρέπει να εισπράττουμε για να μην έχουμε βέβαιη χρεοκοπία σε άπειρο χρόνο θα πρέπει να είναι:

$$c > \frac{\lambda}{n} E[X] \tag{2.4}$$

2.3 Ανάλυση με τη χρήση της συνάρτησης Gerber-Shiu

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, αναπτύξαμε τις βασικές ιδιότητες της συνάρτησης Gerber-Shiu για το κλασσικό μοντέλο με εκθετική κατανομή ενδιάμεσων χρόνων και δίχως εξάρτηση. Η συνάρτηση Gerber-Shiu έχει οριστεί από τη σχέση (χ.1).

Ορίζουμε το άθροισμα των τυχαίων μεταβλητών του ενδιάμεσου χρόνου των αφίξεων ως $Y_i = \sum_{i=1}^{k} T_i$, για $k = 1,2, \dots$ ενώ για $k = 0$ η μεταβλητή $Y_0 = 0$. Αναπαριστώντας την συνεχούς χρόνου διαδικασία πλεονάσματος ως διαδικασία διακριτού χρόνου που αναφέρεται στην k −οστή πτώση πλεονάσματος:

$$U_k = U(Y_k) = u + cY_k - \sum_{i=1}^{k} X_i = u + \sum_{i=1}^{k} (cT_i - X_i)$$

Για να κατασκευάσουμε την γενικευμένη εξίσωση του Lundberg, θα πρέπει να βρούμε στη στοχαστική διαδικασία $\{e^{-\delta Y_k + sU_k}; k = 0,1,2, \dots\}$ όλους τους αριθμούς s που ικανοποιούν το martingale:

$$E\left[e^{-\delta T} e^{s(cT - X)}\right] = 1$$

Με αντικατάσταση από (2.2) και (2.3):

$$E\left[e^{-\delta T}e^{s(cT-X)}\right] = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{t(cs-\delta)}e^{-sx}f_{X,T}(x,t)dxdt = \left[\hat{f}(s)-\theta\hat{h}(s)\right]\hat{f}_T(\delta-cs)+2\theta\hat{h}(s)\int_0^\infty e^{-t(\delta-cs)}f_T(t)\bar{F}_W(t)dt \tag{2.5}$$

Το ολοκλήρωμα στο τέλος αντικαθιστώντας με τον τύπο της κατανομής Erlang(n,λ):

$$\int_0^\infty e^{-t(\delta-cs)}f_T(t)\bar{F}_W(t)dt = \lambda^n \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\frac{\lambda^i}{(\delta+2\lambda-cs)^{n+i}} \tag{2.6}$$

Επίσης, ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{f}_T(\delta-cs)$ δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{f}_T(\delta-cs) = \left(\frac{\lambda}{\delta+\lambda-cs}\right)^n \tag{2.7}$$

Με αντικατάσταση στον τύπο (2.5) από τους (2.6) και (2.7), η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg που προκύπτει:

$$\left[\hat{f}(s)-\theta\hat{h}(s)\right]\left(\frac{\lambda}{\delta+\lambda-cs}\right)^n + 2\theta\hat{h}(s)\lambda^n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\frac{\lambda^i}{(\delta+2\lambda-cs)^{n+i}} = 1 \tag{2.8}$$

<u>Πρόταση 1:</u> Για $\delta > 0$ και $\theta \neq 0$, η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg (2.8) έχει ακριβώς $3n-1$ ρίζες της μορφής $\rho_1(\delta),\ \rho_2(\delta), \dots, \rho_{3n-1}(\delta)$ στον δεξιό ημιάξονα του μιγαδικού επιπέδου. Το πραγματικό μέρος των ριζών της παραπάνω εξίσωσης $Re\big(\rho_i(\delta)\big) > 0$ για κάθε $i = 1,2,\dots,3n-2$. (Vrontos & Chadjiconstantinidis, 2014)

<u>Πρόταση 2:</u> Για $\delta = 0$ και $\theta \neq 0$, η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg (2.8) έχει ακριβώς $3n-2$ ρίζες στον δεξιό ημιάξονα του μιγαδικού επιπέδου και μια μηδενική ρίζα. Αποτελεί μεγάλης σημασίας για την μελέτη των ιδιοτήτων της συνάρτησης Gerber-Shiu, καθώς για $\delta = 0$ μας επιτρέπει να μελετήσουμε ποσότητες ενδιαφέροντος όπως η πιθανότητα χρεοκοπίας και η από κοινού συνάρτηση των μεταβλητών $U(T-), |U(T)|$.

2.4 Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης G-S

Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης G-S:

$$\widehat{m}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-su}m_\delta(u)du$$

Για να βρούμε το μετασχηματισμό ορίζουμε τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\gamma_1(u) = \int_u^{\infty} w(u, x-u) f_X(x) dx\,, \qquad \hat{\gamma}_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} \gamma_1(u) du$$

$$\gamma_2(u) = \int_u^{\infty} w(u, x-u) h(x) dx, \qquad \hat{\gamma}_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} \gamma_2(u) du$$

$$\sigma_{1,\delta}(u) = \int_0^{u} m_\delta(u-x) f_X(x) dx + \gamma_1(u), \qquad \hat{\sigma}_{1,\delta}(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} \sigma_{1,\delta}(u) du$$

$$\sigma_{2,\delta}(u) = \int_0^{u} m_\delta(u-x) h(x) dx + \gamma_2(u), \qquad \hat{\sigma}_{2,\delta}(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} \sigma_{2,\delta}(u) du$$

Με τη χρήση της σύζευξης FGM και δοθέντως ότι έχει συμβεί η πρώτη πτώση πλεονάσματος, έχουμε ότι η συνάρτηση G-S ικανοποιεί την παρακάτω ανανεωτική εξίσωση:

$$\begin{aligned} m_\delta(u) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f_T \big[\sigma_{1,\delta}(u+ct) - \theta \sigma_{2,\delta}(u+ct)\big]\, dt \\ + 2\theta \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f_T(t) \bar{F}_T(t) \sigma_{2,\delta}(u+ct) dt \end{aligned} \tag{2.9}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = u + ct$, και αντικαθιστώντας τις συναρτήσεις $f_T(t)$, $\bar{F}_T(t)$ με τους τύπους της κατανομής Erlang, προκύπτει τελικά:

$$\begin{aligned} c^n m_\delta(u) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_u^{\infty} e^{-\frac{(\delta+\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1} \big[\sigma_{1,\delta}(y) - \theta \sigma_{2,\delta}(y)\big] dy \\ + \frac{2\theta \lambda^n}{(n-1)!} \int_u^{\infty} e^{-\frac{(\delta+2\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{i!} \Big(\frac{y-u}{c}\Big)^i\right] \sigma_{2,\delta}(y) dy \end{aligned}$$

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace της παραπάνω εξίσωσης και μετά από κάποιες πράξεις, βρίσκουμε τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης G-S:

$$\widehat{m}_\delta(s) = \frac{\hat{\beta}_{1,\delta}(s) + \hat{\beta}_{2,\delta}(s)}{\hat{h}_{1,\delta}(s) - \hat{h}_{2,\delta}(s)} \tag{2.10}$$

Όπου οι $\hat{h}_{1,\delta}(s), \hat{h}_{2,\delta}(s)$:

$$\hat{h}_{1,\delta}(s) = \Big(\frac{\delta+\lambda}{c} - s\Big)^n \Big(\frac{\delta+2\lambda}{c} - s\Big)^{2n-1}$$

$$\begin{aligned} \hat{h}_{2,\delta}(s) = \frac{\lambda^n}{c^n} \hat{f}_X(s) \Big(\frac{\delta+2\lambda}{c} - s\Big)^{2n-1} \\ + \theta \frac{\lambda^n}{c^n} \hat{h}(s) \Bigg\{ 2\Big(\frac{\delta+\lambda}{c} - s\Big)^n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{c^i} \binom{n+i-1}{i} \Big(\frac{\delta+2\lambda}{c} - s\Big)^{n-i-1} \\ - \Big(\frac{\delta+2\lambda}{c} - s\Big)^{2n-1} \Bigg\} \end{aligned}$$

Και $\hat{\beta}_{1,\delta}(s), \hat{\beta}_{2,\delta}(s)$:

$$\hat{\beta}_{1,\delta}(s) = \frac{\lambda^n}{c^n}\hat{\gamma}_1(s)\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-1} + \theta\frac{\lambda^n}{c^n}\hat{\gamma}_2(s)\left\{2\left(\frac{\delta+\lambda}{c}-s\right)^n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{c^i}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{n-i-1} - \left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-1}\right\}$$

$$\hat{\beta}_{2,\delta}(s) = -\sum_{j=1}^{3n-1}\hat{\beta}_{1,\delta}(\rho_j)\prod_{k=1,k\neq j}^{3n-1}\frac{s-\rho_k}{\rho_j-\rho_k}$$

Η συνάρτηση $\hat{\beta}_{1,\delta}(s)$ αποδεικνέται ότι είναι πολυωνυμική συνάρτηση τουλάχιστον $(3n-2)$-βαθμού.

2.5 Μέτρα χρεοκοπίας για $u = 0$

2.5.1 ***Η συνάρτηση Gerber-Shiu για αρχικό αποθεματικό $u = 0$, μπορεί να βρεθεί από το παρακάτω όριο:***

$$m_\delta(0) = \lim_{s\to\infty} s\hat{m}(s) = \sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\hat{\beta}_{1,\delta}(\rho_j)}{\prod_{k=1,k\neq j}^{3n-1}(\rho_k-\rho_j)} \tag{2.11}$$

Για να μπορέσουμε να βρούμε τις κατανομές του πλεονάσματος πριν και μετά τη χρεοκοπία, θα είναι χρήσιμο να εκφράσουμε την παραπάνω συνάρτηση στη μορφή της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής G-S για μηδενικό αρχικό αποθεματικό:

$$m_\delta(0) = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\delta t}w(x,y)f(x,y,t|0)dtdydx \tag{2.12}$$

Η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των μεταβλητών $U(T-), |U(T)|$ για μηδενικό αρχικό αποθεματικό όπως προαναφέρθηκε, είναι ο μετασχηματισμός Laplace της από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας με μεταβλητή δ:

$$f_\delta(x,y|0) = \int_0^\infty e^{-\delta t}f(x,y,t|0)dt$$

Στη σχέση (16) από (Cheung, 2010), για αποδεικνύνεται ότι:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\delta t}w(x,y)f(x,y,t|0)dtdydx = \int_0^\infty\int_0^\infty w(x,y)\int_0^\infty e^{-\delta t}f(x,y,t|0)dtdydx\int_0^\infty\int_0^\infty w(x,y)f_\delta(x,y|0)dydx$$

2.5.2 *Η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των μεταβλητών $U(T-), |U(T)|$ δίνεται από τη σχέση:*

$$f_\delta(x,y|0)=f_X(x+y)\sum_{j=1}^{3n-1}b_{1,j}e^{-\rho_j x}+h(x+y)\sum_{j=1}^{3n-1}b_{2,j}e^{-\rho_j x} \tag{2.13}$$

Όπου:

$$b_{1,\delta}(s)=\frac{\lambda^n}{c^n}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-1}$$

$$b_{2,\delta}(s)=\theta\frac{\lambda^n}{c^n}\left\{2\left(\frac{\delta+\lambda}{c}-s\right)^n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{c^i}\binom{n+i-1}{n-1}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{n-i-1}-\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-1}\right\}$$

$$b_{ij}=\frac{b_{i,\delta}(\rho_j)}{\prod_{k=1,k\neq j}^{3n-1}(\rho_k-\rho_j)}$$

2.5.3 *Οι προεξοφλημένες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των μεταβλητών* $\boldsymbol{U(T-), |U(T)|}$ *για αρχικό αποθεματικό* $\boldsymbol{u=0}$

Η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μεταβλητής $U(T-)$:

$$f_{1,\delta}(x|0)=\int_0^\infty f_\delta(x,y|0)dy=\bar{F}_X(x)\left[\sum_{j=1}^{3n-1}b_{1,j}e^{-\rho_j x}+F_X(x)\sum_{j=1}^{3n-1}b_{2,j}e^{-\rho_j x}\right] \tag{2.14}$$

Η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μεταβλητής $|U(T)|$

$$\begin{aligned} f_{2,\delta}(y|0)&=\int_0^\infty f_\delta(x,y|0)dx \\ &=\sum_{j=1}^{3n-1}b_{1,j}\int_0^\infty e^{-\rho_j x}f_X(x+y)dx+\sum_{j=1}^{3n-1}b_{2,j}\int_0^\infty e^{-\rho_j x}h(x+y)dx \end{aligned} \tag{2.15}$$

2.5.4 *Ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας για* $\boldsymbol{\delta>0}$ *και* $\boldsymbol{u=0}$

Ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας m_T προκύπτει υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα στην (2.12) ως προς τις μεταβλητές x,y και θέτοντας $w(x,y)=1$. Η χρησιμότητα αυτού είναι ότι καθώς το $\delta\to 0^+$ υπολογίζουμε την πιθανότητα χρεκοπίας για μηδενικό αρχικό αποθεματικό.

$$m_T(0)=E\left[e^{-\delta t}I(t<\infty)|U(0)=0\right]=\int_0^\infty\int_0^\infty f_\delta(x,y|0)dydx \tag{2.16}$$

Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα ως προς x:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f_\delta(x,y|0)dydx = \int_0^\infty f_{2,\delta}(y|0)dy = \lim_{s\to 0} \hat{f}_{2,\delta}(s)$$

Το παραπάνω όριο μπορεί να υπολογιστεί για να βρούμε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $f_{2,\delta}(y|0)$. Στη βιβλιογραφία αποδεικνύεται ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{f}_{2,\delta}(s)$ είναι της μορφής:

$$\hat{f}_{2,\delta}(s) = 1 - \frac{\hat{h}_{1,\delta}(s) - \hat{h}_{2,\delta}(s)}{\prod_{i=1}^{3n-1}(\rho_i - s)}$$

Αντικαθοστώντας στη σχέση (2.16) και υπολογίζοντας το όριο, ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας:

$$m_T(0) = 1 - \frac{(\delta + 2\lambda)^{2n-1}[(\delta+\lambda)^n - \lambda^n]}{c^{3n-1}\prod_{i=1}^{3n-1}\rho_i} \tag{2.17}$$

2.5.4 *Η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό* $\boldsymbol{u = 0}$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας, μπορεί να βρεθεί από την σχέση (2.17) για $\delta \to 0$ υπολογίζοντας το παρακάτω όριο:

$$\psi(0) = \lim_{\delta\to 0^+} E[e^{-\delta t} I(t < \infty)|U(0) = 0]$$

Τελικά, το όριο για την πιθανότητα χρεοκοπίας για $u = 0$, συγκλίνει:

$$\psi(0) = 1 - \frac{2^{2n-1}\lambda^{3n-2}[nc - \lambda E(X)]}{c^{3n-1}\prod_{i=2}^{3n-1}\rho_i(0)} \tag{2.18}$$

2.6 Οι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις για μέτρα χρεοκοπίας

2.6.1 *Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση της συνάρτησης Gerber-Shiu*

Από το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας, γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu, ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Στο μοντέλο της εξάρτησης FGM, αυτή η συνάρτηση που ικανοποιεί είναι:

$$m_\delta(u) = \int_0^u m_\delta(u-y)\, f_{2,\delta}(y|0)dy + G_\delta(u), u \geq 0 \tag{2.19}$$

Όπου:

$$G_\delta(u) = \int_0^\infty \int_u^\infty w(s,t) f_\delta\,(s-u, t+u|0)dsdt$$

Ο λόγος για τον οποίο η εξίσωση (2.19) θεωρείται ελλειμματική είναι καθώς ισχύει ότι $\int_0^\infty f_{2,\delta}(y|0)dy = m_T(0) < 1.$ Μια επιπλέον προσέγγιση της παραπάνω ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης είναι να εκφράσουμε τις συναρτήσεις $f_{2,\delta}(y|0)$ και $G_\delta(u)$ με τη βοήθεια των τελεστών Dickson-Hipp.

Ο τελεστής Dickson-Hipp T_r μιας πραγματικής ολοκληρώσιμης συνάρτησης $g(x)$ αποτελεί μια γενίκευση του μετασχηματισμού Laplace και ορίζεται ως:

$$T_r g(x) = \int_x^\infty e^{-r(y-x)} g(y)dy\,, x \geq 0$$

Για τη μεταβλητή $r \in \mathbb{C}$, το πραγματικό της κομμάτι $Re(r) \geq 0$. Κάποιες ιδιότητες του τελεστή:

1. $T_r g(x) = \int_x^\infty e^{-r(y)} g(y)dy = \hat{g}(r)$
2. $T_{r_1}T_{r_2}g(x) = T_{r_2}T_{r_1}g(x) = \frac{T_{r_1}g(x) - T_{r_2}g(x)}{r_2 - r_1}$
3. $\widehat{(T_r g)}(s) = T_r\hat{g}(s) = T_s T_r g(0) = \frac{\hat{g}(s) - \hat{g}(r)}{r - s}$
4. Έστω οι αριθμοί $r_1, r_2, \dots, r_m \in \mathbb{C}$ και είναι διαφορετικοί μεταξύ τους

Επίσης θέτοντας $\pi_m(s) = \prod_{i=1}^m (s - r_i)$. Τότε ισχύει ότι:

$$T_{r_1} \dots T_{r_m} g(x) = (-1)^m \sum_{i=1}^m \frac{T_{r_i} g(x)}{\pi'_m(r_i)}$$

Με την χρήση των παραπάνω ιδιοτήτων μπορούμε να εκφράσουμε τις συναρτήσεις $f_{2,\delta}(y|0)$ και $G_\delta(u)$ με την βοήθεια των τελεστών Dickson-Hipp:

$$f_{2,\delta}(y|0) = T_{\rho_1} \dots T_{\rho_{3n-1}} h_{2,\delta}(y)$$

$$G_\delta(u) = T_{\rho_1} \dots T_{\rho_{3n-1}} \beta_{1,\delta}(u)$$

2.6.2 *Η προσέγγιση της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής*

Με τη χρήση των τελεστών Dickson-Hipp, ορίζουμε την κ_δ έτσι ώστε:

$$\frac{1}{1+\kappa_\delta} = T_0 T_{\rho_1} \dots T_{\rho_{3n-1}} h_{2,\delta}(0) = m_T(0) \tag{2.20}$$

Στην ανανεωτική εξίσωση (2.19) βγάζοντας κοινό παράγοντα την (2.20) έχουμε:

$$m_\delta(u) = \frac{1}{1+\kappa_\delta} \int_0^u m_\delta(u-y)(1+\kappa_\delta)\,(f_{2,\delta}(y|0)dy + \frac{1}{1+\kappa_\delta}(1+\kappa_\delta)G_\delta(u), u \geq 0$$

Στη συνέχεια ορίζω τις παρακάτω συναρτήσεις ως:

$$\Lambda_\delta(u) = (1+\kappa_\delta)G_\delta(u)$$

$$\theta_\delta(y) = (1+\kappa_\delta)f_{2,\delta}(y|0)$$

Οπότε η παραπάνω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση αντικαθιστώντας με τις παραπάνω συναρτήσεις γράφεται:

$$m_\delta(u) = \frac{1}{1+\kappa_\delta} \int_0^u m_\delta(u-y)\theta_\delta(y)\,dy + \frac{1}{1+\kappa_\delta} \Lambda_\delta(u), u \geq 0 \tag{2.21}$$

Για $w(x_1, x_2) = 1$, οι συναρτήσεις $\gamma_1(u), \gamma_2(u)$ μπορούν να γραφτούν με την βοήθεια των τελεστών Dickson-Hipps ως:

$$\gamma_1(u) = T_0 f(u), \gamma_2(u) = T_0 h(u)$$

$$\begin{aligned}
G_\delta(u) &= \int_0^\infty \int_u^\infty w(s,t) f_\delta\,(s-u, t+u|0) ds dt \\
&= \int_0^\infty \int_u^\infty w(s,t) \left[f_X(s+t) \sum_{j=1}^{3n-1} b_{1,j} e^{-\rho_j(s-u)} + h(s+t) \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2,j} e^{-\rho_j(s-u)} \right] \\
&= \sum_{j=1}^{3n-1} b_{1,j} \int_u^\infty e^{-\rho_j(s-u)} \int_0^\infty w(s,t) f_X(s+t) dt ds \\
&+ \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2,j} \int_u^\infty e^{-\rho_j(s-u)} \int_0^\infty w(s,t) h(s+t) dt ds \\
&= \sum_{j=1}^{3n-1} b_{1,j} \int_u^\infty e^{-\rho_j(s-u)} \gamma_1(s) ds + \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2,j} \int_u^\infty e^{-\rho_j(s-u)} \gamma_2(s) ds \\
&= \sum_{j=1}^{3n-1} b_{1,j} T_{\rho_j} T_0 f_X(u) + \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2,j} T_{\rho_j} T_0 h(u)
\end{aligned}$$

Με τη χρήση της σχέσης (39) από (Vrontos & Chadjiconstantinidis, 2014), αποδεικνύεται ότι

$$G_\delta(u) = T_0 f_{2,\delta}(u|0) = \int_u^\infty f_{2.\delta}(y|0) dy$$

Οπότε έχουμε:

$$G_\delta(u) = \int_u^\infty f_{2.\delta}(y|0) dy = \int_u^\infty \frac{1}{1+\kappa_\delta} \theta_\delta(y) dy = \frac{1}{1+\kappa_\delta} \int_u^\infty \theta_\delta(y) dy = \frac{1}{1+\kappa_\delta} \bar{\Theta}_\delta(u)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας ικανοποιεί την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση:

$$m_T(u) = \frac{1}{1+\kappa_\delta} \int_0^u m_T(u-y) \theta_\delta(y)\, dy + \frac{1}{1+\kappa_\delta} \bar{\Theta}_\delta(u), u \geq 0$$

Επιπλέον, μπορεί να γραφτεί με την προσέγγιση μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής ως:

$$m_T(u) = \frac{\kappa_\delta}{1+\kappa_\delta} \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{1}{1+\kappa_\delta} \right)^j \bar{\Theta}_\delta{}^{*j}(u), u \geq 0$$

Τέλος, η λύση της εξίσωσης (2.21) μπορεί να γραφτεί επίσης στη μορφή:

$$m_\delta(u) = -\frac{1}{\kappa_\delta} \int_0^u m_T(u-y) d\Lambda_\delta(y) + \frac{1}{\kappa_\delta} \Lambda_\delta(u) - \frac{1}{\kappa_\delta} \Lambda_\delta(0)\, m_T(u)$$

2.7 Οι προεξοφλημένες κατανομές των μεταβλητών $U(T-), |U(T)|$

2.7.1 *Η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των μεταβλητών $U(T-), |U(T)|$*

Η προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής των μεταβλητών $U(T-), |U(T)|$ δίνεται από τη σχέση:

$$F_\delta(x,y|u)=\begin{cases}\dfrac{\kappa_\delta}{1+\kappa_\delta}[m_T(u)-m_T(u+y)]-\dfrac{1}{\kappa_\delta}\Theta_\delta(y)m_T(u)+\dfrac{1}{\kappa_\delta}\displaystyle\int_0^y m_T(u+y-t)d\Theta_\delta(t)+\\ \quad\dfrac{1}{\kappa_\delta}\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{i=1}^{3n-1}w_{i,j}e^{-\rho_j x}\left[\bar{\Gamma}_{i,j}(x)-\bar{\Gamma}_{i,j}(x+y)\right]\times\left[\Psi_j(u)-e^{-\rho_j u}\right],\ 0\le u<x\\ \quad\dfrac{1}{\kappa_\delta}\displaystyle\int_0^x m_T(u-t)[d\Theta_\delta(t)-d\Theta_\delta(y+t)]-\dfrac{1}{\kappa_\delta}\Theta_\delta(y)m_T(u)+\\ \quad\dfrac{1}{\kappa_\delta}\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{i=1}^{3n-1}w_{i,j}e^{-\rho_j x}\left[\bar{\Gamma}_{i,j}(x)-\bar{\Gamma}_{i,j}(x+y)\right]\times\left[\Psi_j(u)-e^{-\rho_j u}\right]\times\\ \quad\left\{\Psi_j(u)-e^{-\rho_j u}\left[m_T(u-x)-\Psi_j(u-x)\right]\right\},\ 0<x\le u\end{cases}$$

Όπου οι συναρτήσεις:

$$\Gamma_{1,j}(y)=\frac{\int_0^y T_{\rho_j}f_X(t)dt}{E_{1,j}},\quad E_{1,j}=\int_0^\infty T_{\rho_j}f_X(t)dt$$

$$\Gamma_{2,j}(y)=\frac{\int_0^y T_{\rho_j}h(t)dt}{E_{2,j}},\quad E_{2,j}=\int_0^\infty T_{\rho_j}h(t)dt$$

$$\Psi_j(u)=m_T(u)+\rho_j\int_0^u e^{\rho_j t}\,m_T(u-t)dt$$

Όταν $y\to\infty$ στην εξίσωση $F_\delta(x,y|u)$, λαμβάνουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής $F_{1,\delta}(x|u)$ που αντιστοιχεί στην μεταβλητή $U(T-)$.

Όταν $x\to\infty$ στην εξίσωση $F_\delta(x,y|u)$, λαμβάνουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής κατανομής $F_{2,\delta}(y|u)$ που αντιστοιχεί στην μεταβλητή $|U(T)|$.

Για να αποκτήσουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T-), |U(T)|$, αρκεί στην εξίσωση $F_\delta(x,y|u)$να παραγωγήσουμε ως προς (x,y):

$$f_\delta(x,y|u)=\frac{\partial^2 F_\delta(x,y|u)}{\partial x\partial y}$$

Όπου τελικά έχουμε:

$$f_\delta(x,y|u)=\begin{cases}\dfrac{1+\kappa_\delta}{\kappa_\delta}\displaystyle\sum_{j=1}^{3n-1}\left[b_{1,j}f_X(x+y)+b_{2,j}h(x+y)\right]e^{-\rho_j x}\left[e^{\rho_j x}-\Psi_j(u)\right], & 0\le u<x\\ \dfrac{1+\kappa_\delta}{\kappa_\delta}\displaystyle\sum_{j=1}^{3n-1}\left[b_{1,j}f_X(x+y)+b_{2,j}h(x+y)\right]\left[\Psi_j(u-x)-e^{-\rho_j x}\Psi_j(u)\right], & 0<x\le u\end{cases}$$

Από την παραπάνω εξίσωση, ολοκληρώνοντας από 0 έως ∞ ως προς y, έχουμε την οριακή προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $U(T-)$:

$$f_{1,\delta}(x|u)=\begin{cases}\dfrac{1+\kappa_\delta}{\kappa_\delta}\displaystyle\sum_{j=1}^{3n-1}\left[b_{1,j}-b_{2,j}F_X(x)\right]\bar{F}_X(x)e^{-\rho_j x}\left[e^{\rho_j x}-\Psi_j(u)\right], & 0\le u<x\\ \dfrac{1+\kappa_\delta}{\kappa_\delta}\displaystyle\sum_{j=1}^{3n-1}\left[b_{1,j}-b_{2,j}F_X(x)\right]\bar{F}_X(x)\left[\Psi_j(u-x)-e^{-\rho_j x}\Psi_j(u)\right], & 0<x\le u\end{cases}$$

Αντίστοιχα λαμβάνουμε και την οριακή προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $|U(T)|$, ολοκληρώνοντας ως προς x από 0 έως ∞.

2.8 Η ειδική περίπτωση των εκθετικών αποζημιώσεων

Σε αυτή την ενότητα, θα μελετήσουμε την ειδική περίπτωση όπου η κατανομή του ύψους της ατομικής ζημιάς ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\alpha>0$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκθετικής κατανομής $f_X(x)=\alpha e^{-\alpha x}$ και ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{f}_X(s)=\frac{\alpha}{\alpha+s}$.

Γνωρίζουμε ότι η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg είναι της μορφής:

$$\hat{h}_{1,\delta}(s)-\hat{h}_{2,\delta}(s)=[1-\hat{f}_{2,\delta}(s)]\prod_{i=1}^{3n-1}(\rho_i-s)$$

Γνωρίζοντας τώρα την κατανομή του ύψους της ατομικής ζημιάς, αντικαθιστώντας στον παραπάνω τύπο, η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg μπορεί να γραφτεί:

$$\hat{h}_{1,\delta}(s)-\hat{h}_{2,\delta}(s)=\frac{Q_{3n+1,\delta}(s)}{c^{3n-1}(a+s)(2a+s)}=0$$

Όπου:

$$\begin{aligned}Q_{3n+1,\delta}(s)&=(\alpha+s)(2\alpha+s)(\delta+\lambda-cs)^2-\alpha\lambda^n(2\alpha+s)(\delta+2\lambda-cs)^{2n-1}\\&\quad-\theta\alpha\lambda^n s\left[2(\delta+\lambda-cs)^n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\lambda^i(\delta+2\lambda-cs)^{n-i-1}-(\delta+2\lambda-cs)^{2n-1}\right]\end{aligned}$$

Η παραπάνω πολυωνυμική εξίσωση $Q_{3n+1,\delta}(s)=0$ είναι $3n-1$ βαθμού, με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $(-c)^{3n-1}$ και ρίζες $\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_{3n-1}$ στο μιγαδικό επίπεδο με θετικό πραγματικό μέρος. Υπάρχουν 2 ρίζες της μορφής $-R_i = -R_i(\delta)$ με θετικό πραγματικό μέρος για $i = 1{,}2$, όπου το πολυώνυμο γράφεται στη μορφή:

$$Q_{3n+1,\delta}(s) = c^{3n-1}\left[\prod_{j=1}^{2}(s+R_j)\right]\left[\prod_{i=1}^{3n-1}(\rho_i - s)\right]$$

Ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις μπορεί να γραφτεί ως:

$$\widehat{m}_T(s) = \frac{m_T(0) - \hat{f}_{2,\delta}(s)}{s[1 - \hat{f}_{2,\delta}(s)]}$$

Με αντικατάσταση των παραπάνω προκύπτει:

$$\widehat{m}_T(s) = \frac{\hat{h}_{1,\delta}(s) - \hat{h}_{2,\delta}(s) - [1 - m_T(0)]\prod_{i=1}^{3n-1}(\rho_i - s)}{s[\hat{h}_{1,\delta}(s) - \hat{h}_{2,\delta}(s)]}$$
$$= \frac{\left[\prod_{j=1}^{2}(s+R_j)\right] - [1 - m_T(0)](a+s)(2a+s)}{s\left[\prod_{j=1}^{2}(s+R_j)\right]}$$

Από τη βιβλιογραφία αποδεικνύεται επίσης ότι:

$$1 - m_T(0) = \frac{R_1 R_2}{2a^2}$$

Οπότε τελικά ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, μπορεί να γραφτεί ως:

$$\widehat{m}_T(s) = \frac{\zeta_{1,\delta}}{s+R_1} + \frac{\zeta_{2,\delta}}{s+R_2}$$

$$\zeta_{1,\delta} = \frac{R_2}{R_2 - R_1}\left(1 - \frac{3R_1}{2\alpha} - \frac{R_1^2}{2a^2}\right), \qquad \zeta_{2,\delta} = \frac{R_1}{R_1 - R_2}\left(1 - \frac{3R_2}{2\alpha} - \frac{R_2^2}{2a^2}\right)$$

Αντιστρέφοντας το μετασχηματισμό Laplace, η προεξοφλημένη συνάρτηση του χρόνου χρεοκοπίας, ορίζεται ως:

$$m_T(u) = \zeta_{1,\delta} e^{-R_1 u} + \zeta_{2,\delta} e^{-R_2 u}$$

Όταν $\delta \to 0$, έχουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u),\ u \geq 0$

Επιπλέον, η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T-), |U(T)|$:

$$f_\delta(x,y|u)=\begin{cases}\dfrac{2\alpha^3}{R_1R_2}e^{-a(x+y)}\displaystyle\sum_{i=1}^{3n-1}\left[b_{1,j}-b_{2,j}\left(1-2e^{-a(x+y)}\right)\right]\times \\ \left[\dfrac{(a+\rho_j)(2\alpha+\rho_j)R_1R_2}{2\alpha^2}e^{-\rho_j(x-u)}-\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\dfrac{\zeta_{i,\delta}}{R_i+\rho_j}e^{(-R_iu+\rho_jx)}\right],\ 0\le u<x \\ \dfrac{2\alpha^3}{R_1R_2}e^{-a(x+y)}\displaystyle\sum_{i=1}^{3n-1}\left[b_{1,j}-b_{2,j}\left(1-2e^{-a(x+y)}\right)\right]\times \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{2}\dfrac{\zeta_{i,\delta}}{R_i+\rho_j}e^{-R_iu}\left[e^{-R_iu}-e^{-\rho_iu}\right],\ 0<x\le u\end{cases}$$

2.9 Αριθμητικά αποτελέσματα

Για τα αριθμητικά αποτελέσματα, γίνονται οι παρακάτω εξής υποθέσεις:

- Η κατανομή του ύψους της ατομικής ζημιάς, είναι η εκθετική με παράμετρο $\alpha=1$
- Η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων είναι $Erlang(2{,}2)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_T(t)=4te^{-2t}$$

- Η είσπραξη ασφαλίστρου $c=1.5$

Παρακάτω, διάφορα αριθμητικά αποτελέσματα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου σύζευξης θ δείχνουν τις διάφορες πιθανότητες χρεοκοπίας:

- Για $\theta=-1$, η πιθανότητα χρεοκοπίας για αρχικό αποθεματικό $u\ge 0$

$$\psi(u)=0.6416701672e^{-0.3487732254\mathrm{u}}-0.0169012248e^{-2.1517194\mathrm{u}}$$

- Για $\theta=-0.5$, η πιθανότητα χρεοκοπίας για αρχικό αποθεματικό $u\ge 0$

$$\psi(u)=0.6111640019e^{-0.3833132642\mathrm{u}}-0.0096651749e^{-2.0792454120\mathrm{u}}$$

- Για $\theta=0.5$, η πιθανότητα χρεοκοπίας για αρχικό αποθεματικό $u\ge 0$

$$\psi(u)=0.5314436215e^{-0.4762087115\mathrm{u}}-0.01332254042e^{-1.911908905\mathrm{u}}$$

- Για $\theta=1$, η πιθανότητα χρεοκοπίας για αρχικό αποθεματικό $u\ge 0$

$$\psi(u)=0.4774717870e^{-0.5409429369\mathrm{u}}-0.03255482730e^{-1.811552947\mathrm{u}}$$

Από τον **Πίνακα 1** και το **Σχήμα 2** των (Vrontos & Chadjiconstantinidis, 2014), γίνεται προφανές ότι όσο μεγαλύτερη είναι η παράμετρος σύζευξης θ, τόσο μικρότερη είναι και η πιθανότητα χρεοκοπίας. Μια εξήγηση είναι ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο χρόνος μεταξύ των αφίξεων, τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η αναμενόμενη απαίτηση. Δηλαδή η ασφαλιστική θα έχει συλλέξει το απαιτούμενο απαραίτητο ασφάλιστρο για να καλύψει τη ζημιά.

Παρόμοια αποτελέσματα λαμβάνουμε και για το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας $m_T(u)$. Για παράμετρο $\delta = 0.05$, έχουμε διάφορα αριθμητικά αποτελέσματα της $m_T(u)$., για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου σύζευξης θ:

- Για $\theta = -1$, ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας για $u \geq 0$

$$m_T(u) = 0.588107070542046e^{-0.4015607208\text{u}} - 0.0169012248e^{-2.150382538\text{u}}$$

- Για $\theta = -0.5$, ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας για $u \geq 0$

$$m_T(u) = 0.558265539590616e^{-0.4358563215\text{u}} - 0.0112379309905072e^{-2.078539964\text{u}}$$

- Για $\theta = 0.5$, ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας για $u \geq 0$

$$m_T(u) = 0.480589531459186e^{-0.5272636613\text{u}} - 0.0151619535823271e^{-1.912699668\text{u}}$$

- Για $\theta = 1$, ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας για $u \geq 0$

$$m_T(u) = 0.427916113486677e^{-0.5905527687\text{u}} - 0.0366819441278372e^{-1.813223037\text{u}}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Το ημι-μαρκοβιανό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου

(Hansjörg Albrecher & Onno J. Boxma, (2005). On the discounted penalty function in a Markov-dependent risk model.)

3.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε την υπόθεση της εξάρτησης της κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων των κινδύνων με το ύψος της ατομικής ζημιας, με τη χρήση της σύζευξης FGM. Κατά τη διάρκεια των χρόνων, έχουν προταθεί περισσότεροι τρόποι αναπαράστασης της εξάρτησης αυτής. Ένας από αυτούς είναι το ημι-μαρκοβιανο μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας. Το μοντέλο αυτό εισήχθηκε πρώτη φορά από τους Janssen & Reinhard, και έχει την ιδιότητα ότι κάθε φορά που συμβαίνει μια πτώση πλεονάσματος τόσο η κατανομή των χρόνων, όσο και του ύψους της ατομικής ζημιάς, ρυθμίζονται από μια διαδικασία Markov διακριτού χρόνου. Η διαδικασία αυτά, αναπαριστά τις διάφορες πιθανές περιβαλλοντικές καταστάσεις που μπορεί να συμβούν στο σύστημα που μελετάμε. Σε αυτή την παράγραφο, θα εξετάσουμε τόσο το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, όσο και το ανανεωτικό μοντέλο Sparre-Andersen κάτω από την υπόθεση της μαρκοβιανής διαδικασίας. Παράλληλα, με τη χρήση της συνάρτησης Gerber-Shiu, θα βρούμε την από κοινού συνάρτηση κατανομής των τυχαίων μεταβλητών $U(T-), |U(T)|$ και θα δωθούν αριθμητικά αποτελέσματα τόσο για τις μεταβλητές αυτές, όσο και για την πιθανότητα χρεοκοπίας για αρχικό αποθεματικό $u \geq 0$.

3.2 Διαδικασία Markov

Η διαδικασία Markov αποτελεί μια συλλογή τυχαίων ανεξάρτητων μεταβλητών $X_0, X_1, X_2, \dots$ με n ακέραιες πιθανές καταστάσεις $\{q_0, q_1, \dots, q_n\}$ που χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα:

$$\Pr(X_n = q_n | X_{n-1} = q_{n-1}) = \Pr(X_n = q_n | X_0 = q_0, X_1 = q_1, \dots, X_{n-1} = q_{n-1})$$

Ουσιαστικά, η ερμηνεία αυτής της ιδιότητας είναι ότι για να προβλέψουμε την κατανομή πιθανότητας που θα έχει η μαρκοβιανή αλυσίδα στην κατάσταση n, είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε μόνο την αμέσως προηγούμενη κατάσταση $n-1$ του συστήματος.

Πίνακας μετάβασης

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης $(P_t)_{i,j}$ της αλυσίδας Markov, περιέχει όλες τις πληροφορίες για την πιθανότητα μετάβασης μεταξύ των πιθανών καταστάσεων. Τα στοιχεία i, j του πίνακα μετάβασης προκύπτουν ως:

$$(P_t)_{i,j} = P(X_{t+1} = j | X_t = i)$$

Ο πολλαπλασιασμός συνεχόμενων πινάκων μετάβασης Markov $P_0 \cdot P_1$, μας δίνει την πιθανότητα $X_2 = j$, δοθέντως ότι $X_0 = i$. Γενικεύοντας, μια σημαντική ιδιότητα της αλυσίδας Markov, είναι ότι ο πολλαπλασιασμός των $P_0 \cdot P_1 \cdot P_k$ μας δίνει την δεσμευμένη πιθανότητα $P(X_{k+1} = j | X_t)$

3.3 Το ημι-μαρκοβιανό μοντέλο

Η διαδικασία πλεονάσματος του ημι-μαρκοβιανού μοντέλου σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφεται από την παρακάτω στοχαστική διαδικασία:

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

Η στοχαστική διαδικασία που αναφέρεται στην παραπάνω σχέση:

1. Η μεταβλητή u αναφέρεται στο αρχικό αποθεματικό που κρατάει η ασφαλιστική επιχείριση
2. Η μεταβλητή ct αναφέρεται στην γραμμική είσπραξη του ασφαλίστρου, σε συνάρτηση με τον χρόνο t που μελετάμε το μοντέλο
3. Η τυχαία μεταβλητή $N(t)$ ονομάζεται απαρριθμήτρια συνάρτηση, και εκφράζει το πλήθος των απαιτήσεων μέχρι τη χρονική στιγμή t
4. Η τυχαία μεταβλητή X_i εκφράζει το ύψος της ατομικής ζημιάς με συνάρτηση κατανομής B_j
    a. Οι ροπές k −τάξης της κατανομής $\mu_i^{(k)}$, με την πρώτη ροπή $\mu_i^{(1)} = \mu_i$
5. Η τυχαία μεταβλητή T_i εκφράζει τους ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ των αφίξεων των απαιτήσεων.
6. Η $\{Z_n, n \geq 0\}$ αποτελεί μια αμείωτη Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων $\{1,2,\dots,M\}$, στάσιμη κατανομή $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_M)$ και πίνακα μετάβασης πιθανοτήτων:

$$P = \left((p_{ij}), 1 \leq i,j \leq M\right)$$

Η μαρκοβιανή εξάρτηση του μοντέλου από μαθηματικής άποψης εκφράζεται ως:

$$P(T_{n+1} \leq x, X_{n+1} \leq y, Z_{n+1} = j | Z_n = i, (T_r, X_r, Z_r), 0 \leq r \leq n) = P(T_1 \leq x, X_1 \leq y, Z_1 = j | Z_0 = i)$$

Για την περίπτωση που η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων είναι η εκθετική, η γενίκευση του μοντέλου προϋποθέτει ότι κάθε φορά που συμβαίνει πτώση πλεονάσματος, η παράμετρος της εκθετικής κατανομής αλλάζει σύμφωνα με τον πίνακα μετάβασης πιθανοτήτων. Οπότε, οι ενδιάμεσοι χρόνοι T_i σε κάθε χρονική περίοδο, κατανέμονται με την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ_i:

$$P(T_1 \leq x, X_1 \leq y, Z_1 = j | Z_0 = i) = \left(1 - e^{-\lambda_i x}\right) p_{ij} B_j(y)$$

Για να μην έχουμε βέβαιη χρεοκοπία, θα πρέπει το ασφάλιστρο c που επιλέγουμε, να ικανοποιεί τη συνθήκη καθαρού ασφαλίστρου. Για το παραπάνω μοντέλο, η συνθήκη που θα πρέπει να ικανοποιείται για να μην έχουμε βέβαιη χρεοκοπία είναι:

$$c > \frac{\sum_i^M \pi_i \mu_i}{\sum_i^M \frac{\pi_i}{\lambda_i}}$$

3.4 Η συνάρτηση προεξοφλημένης ποινής

Η συνάρτηση προεξοφλημένης ποινής ή συνάρτηση Gerber-Shiu, δίνεται από τη σχέση:

$$m_\delta(u) = E\left[e^{-\delta t} w(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty)\right]$$

Για το ημιμαρκοβιανό μοντέλο, ορίζουμε την γενικευμένη συνάρτηση G-S ως $m_{\delta,i}(u)$ δοθέντως ότι $Z_0 = i$. Δεσμεύοντας στο χρονικό διάστημα $(0, dt)$ έχουμε την παρακάτω ανανεωτική εξίσωση για την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής:

$$\begin{aligned} m_{\delta,i}(u) = (1-\lambda_i dt)e^{-\delta dt} m_{\delta,i}(u+cdt) \\ + \lambda_i dt \sum_{j=1}^{M} p_{ij} \int_0^{u+cdt} e^{-\delta dt} m_{\delta,j}(u+cdt-y) dB_j(y) \\ + \lambda_i dt \sum_{j=1}^{M} p_{ij} \int_{u+cdt}^{\infty} e^{-\delta dt} w(u+cdt, y-x-cdt) dB_j(y) + o(dt) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Παίρνοντας το ανάπτυγμα Taylor της παραπάνω ανανεωτικής εξίσωσης:

$$\begin{aligned} c\frac{dm_{\delta,i}}{du}(u) - (\lambda_i + \delta) m_{\delta,i}(u) \\ + \lambda_i \sum_{j=1}^{M} p_{ij} \int_0^{u} m_{\delta,j}(u-y) dB_j(y) + \lambda_i \sum_{j=1}^{M} p_{ij} \int_u^{\infty} w(u, y-u) dB_j(y) = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Για να προσεγγίσουμε κατάλληλα την παραπάνω ανανεωτική εξίσωση, είναι χρήσιμη η προσέγγιση του μετασχηματισμού Laplace. Παίρνοντας τους παρακάτω μετασχηματισμούς Laplace των συναρτήσεων $m_{\delta,i}(u)$και $b_j(y)$:

$$\widehat{m}_{\delta,i}(s) = \int_0^{\infty} e^{-su}\, m_{\delta,i}(u) du$$

$$\widehat{b}_j(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dB_j(x)$$

Επιπλέον ορίζουμε τον παρακάτω μετασχηματισμό Laplace

$$\widehat{\omega}_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \int_x^{\infty} w(x, y-x) dB_j(y)\, dx$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace στην σχέση (3.2) βρίσκουμε ότι:

$$cs\widehat{m}_{\delta,i}(s) - c\widehat{m}_{\delta,i}(0) - (\lambda_i + \delta)\widehat{m}_{\delta,i}(s) + \lambda_i \sum_{j=1}^{M} p_{ij} \left[\widehat{m}_{\delta,j}(s) \widehat{b}_j(s) + \widehat{\omega}_j(s) \right] = 0 \tag{3.3}$$

Για $i = 1,2, \dots M$, οι εξισώσεις αποτελούν ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση (3.3) με συμβολισμούς γραμμικής άλγεβρας ως εξής:

$$\left[(cs-\delta)I - \Lambda + \Lambda P \widehat{B}(s)\right] \vec{\widehat{m}}_{\delta}(s) = c\vec{\widehat{m}}_{\delta}(0) - \Lambda P \vec{\widehat{\omega}}(s) \tag{3.4}$$

Όπου:

- I συμβολίζεται ο ταυτοτικός πίνακας με $I_n = diag(1,1,\dots,1)$.
- $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)$,
- $\hat{B}(s) = diag(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_M)$.
- $\vec{\hat{m}}_\delta(s) = \left(\hat{m}_{\delta,1}(s), \hat{m}_{\delta,2}(s), \dots, \hat{m}_{\delta,M}(s)\right)$

Για να λύσουμε το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων (3.4), θα πρέπει να καθοριστούν οι ποσότητες $m_{\delta,i}(0)$. Για χάρη λακωνικότητας θέτουμε ως:

$$A_\delta(s) = (cs - \delta)I - \Lambda + \Lambda P \hat{B}(s) \tag{3.5}$$

Από την **Πρόταση 2.1** (Albrecher & Boxma, 2005), αποδεικνύεται ότι η παραπάνω εξίσωση:

Για $\delta = 0$, η εξίσωση $det\big(A_0(s)\big) = 0$ έχει μία ρίζα για $s_1 = 0$ και $M - 1$ ρίζες με αυστηρά θετικό πραγματικό μέρος.

Για $\delta > 0$, εξίσωση $det\big(A_\delta(s)\big) = 0$ έχει M ρίζες με αυστηρά θετικό πραγματικό μέρος.

Η εξίσωση $det\big(A_\delta(s)\big) = 0$, για $M = 1$ είναι η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg. Για καταστάσεις $M > 1$ αποτελεί τη γενικευμένη εξίσωση του Lundberg για το ημι-μαρκοβιανό μοντέλο εξάρτησης. Κάτω από την υπόθεση ότι οι ποσότητες $m_{\delta,i}(u)$ δεν αυξάνονται εκθετικά γρήγορα και ότι οι $\hat{m}_{\delta,i}(s)$ αποτελούν αναλυτικές συναρτήσεις με μη-αρνητικό πραγματικό μέρος, θέλουμε να προσδιορίσουμε το σύνολο των μη-αμελητέων ριζών $\vec{k}_i$:

$$A_\delta^T(s_i)\vec{k}_i = 0, \quad i = 1,2,\dots,M$$

Όπου $A_\delta^T(s_i)$ ο ανάστροφος πίνακας του $A_\delta(s_i)$. Αντικαθιστώντας στον παραπάνω πίνακα για $A_\delta(s_i) = c\vec{m}_\delta(0) - \Lambda P \vec{\hat{\omega}}(s_i)$:

$$\left[c\vec{m}_\delta(0) - \Lambda P \vec{\hat{\omega}}(s_i)\right]^T \vec{k}_i = 0 \tag{3.6}$$

Από τον τύπο (3.6) προκύπτουν συνολικά M γραμμικές εξισώσεις $\{m_{\delta,1}(0), m_{\delta,2}(0), \dots, m_{\delta,M}(0)\}$.

3.5 Μέτρα χρεοκοπίας για $u = 0$

3.5.1 *Η προεξοφλημένη συνάρτηση* $m_{i,\delta}$ *για* $u = 0$

Θέτωντας ως $K = \left(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_M\right)^T$ όπου K ο ανάστροφος πίνακας των διανυσμάτων $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_M$. Συμβολίζοντας ως $K_{j_2,i}$ τον περικομμένο πίνακα ως προς την σειρά j_2 και τις στήλες i. Από την **Πρόταση 3.1** (Albrecher & Boxma, 2005), αποδεικνύεται πως οι προεξοφλημένες συναρτήσεις $\vec{m}_\delta(0)$, υπολογίζονται από την συνάρτηση:

$$m_{i,\delta}(0) = \sum_{j_1=1}^{M} \sum_{j_2=1}^{M} C_{j_1,j_2}^{(i)}(s_1, s_2, \dots, s_M, \delta)\hat{\omega}_{j_1}\left(s_{j_2}\right)$$

$$C_{j_1,j_2}^{(i)} = \frac{(-1)^{i+j_2} det\left(K_{j_2,i}\right) \sum_{l=1}^{M} \lambda_l p_{l,j_1} k_{j_2,l}}{cdet(K)}$$

Και $k_{j_2,l}$ συμβολίζει το l συστατικό του διανύσματος k_{j_2}

3.5.2 *Η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των ποσοτήτων* $\boldsymbol{U(T-), |U(T)|}$

Με την προϋπόθεση ότι η κατανομή του ύψους της ατομικής ζημιάς $B_i(x)(i = 1,2, \dots, M)$ είναι απόλυτα συνεχής, η κατανομή των $U(T-), |U(T)|$:

$$f_i(x, y|0) = \sum_{j}^{M} \sum_{k}^{M} C_{j,k}^{(i)} (s_1, s_2, \dots, s_M, \delta)\, e^{-s_k x} b_j(x + y) \tag{3.7}$$

Όπου $b_i(x)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής $B_i(x)$. Ολοκληρώνοντας τη σχέση (3.7) ως προς y από το 0 έως το άπειρο, προκύπτει η προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία $U(T-)$:

$$f_i(x|0) = \int_0^\infty f_i(x, y|0)\, dy = \sum_{j}^{M} \sum_{k}^{M} C_{j,k}^{(i)} (s_1, s_2, \dots, s_M, \delta) e^{-s_k x}\left[1 - B_j(x)\right], \;\; i = (1,2, \dots, M)$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (3.7) ως προς x από το 0 έως το άπειρο, προκύπτει η προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος μετά τη χρεοκοπία $|U(T)|$:

$$f_i(y|0) = \int_0^\infty f_i(x, y|0)\, dx = \sum_{j}^{M} \sum_{k}^{M} C_{j,k}^{(i)} (s_1, s_2, \dots, s_M, \delta) e^{-s_k y} \left[\hat{b}_j(s_k) - \int_0^y e^{-s_k z} b_j(z) dz\right],$$
$$i = (1,2, \dots, M)$$

3.6 Ροπές για διάφορα μέτρα χρεοκοπίας

3.6.1 *Ροπές του χρόνου χρεοκοπίας*

Θέτοντας την συνάρτηση ποινής $w(x, y) = 1$, ορίζουμε την συνάρτηση:

$$f_i^{(n)}(s) = \left.\frac{\partial^n \widehat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial \delta^n}\right|_{\delta = 0} \tag{3.8}$$

Η συνάρτηση (3.8) απότελεί την $n-$οστή παράγωγο του μετασχηματισμού Laplace της $m_{\delta,i}(u)$, στο σημείο $\delta = 0$. Στη **σχέση 17**(Albrecher & Boxma, 2005), αποδεικνύεται ότι οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας βρίσκονται με τη χρήση του αναδρομικού τύπου:

$$A_0(s) \vec{f}^{(n)}(s) = c \left.\frac{\partial^n \vec{\widehat{m}}_\delta(s)}{\partial \delta^n}\right|_{\delta = 0} + n \vec{f}^{(n-1)}(s)$$

Για $n = 1$, $\vec{f}_0(s) = \vec{\widehat{m}}_0(s) = \vec{\hat{\psi}}(s)$.

3.6.2 *Ροπές της μεταβλητής* $U(T-)$

Θέτοντας την συνάρτηση ποινής $w(x,y)=e^{-\alpha x}$, έτσι ώστε ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης:

$$\widehat{\omega}_i(s)=\frac{\hat{b}_i(a)-\hat{b}_i(s)}{s-a}$$

Η συνάρτηση:

$$g_i^{(n)}(s)=\frac{\partial^n \widehat{m}_{0,i}(s)}{\partial a^n}\bigg|_{\alpha=0} \tag{3.9}$$

Η συνάρτηση (3.9) απότελεί την n −οστή παράγωγο του μετασχηματισμού Laplace της $m_{\delta,i}(u)$, στο σημείο $a=0$, για $\delta=0$. Με παραγώγηση της σχέσης 6 (της βιβλιογραφίας) και για $a=0$ βρίσκουμε τις ροπές της μεταβλητής $U(T-)$:

$$A_0(s)\vec{g}^{(n)}(s)=c\frac{\partial^n \vec{m}_0(0)}{\partial a^n}\bigg|_{\alpha=0}-\Lambda P diag\left(\xi_1^{(n)}(s),\xi_2^{(n)}(s),\dots,\xi_M^{(n)}(s)\right)$$

Όπου:

$$\xi_i^{(n)}(s):=\frac{\partial^n \widehat{\omega}_i(s)}{\partial a^n}\bigg|_{\alpha=0}=\frac{(-1)^n n!}{s^{n+1}}\left(1-\hat{b}_i(s)-\sum_{j=1}^{n}\frac{(-s)^j}{j!}\frac{\partial^j \hat{b}_i(s)}{\partial s^j}\right)$$

Καθορίζοντας πρώτα τις M σταθερές $c\frac{\partial^n \vec{m}_0(0)}{\partial a^n}\big|_{\delta=0}$ από τις ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg, μας δίνει το μετασχηματισμό Laplace για την n −οστή ροπή.

3.6.2 *Ροπές της μεταβλητής* $|U(T)|$

Θέτοντας την συνάρτηση ποινής $w(x,y)=e^{-\alpha y}$, έτσι ώστε ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης:

$$\widehat{\omega}_i(s)=\frac{\hat{b}_i(a)-\hat{b}_i(s)}{s-a}$$

Η συνάρτηση:

$$k_i^{(n)}(s)=\frac{\partial^n \widehat{m}_{0,i}(s)}{\partial a^n}\bigg|_{\alpha=0} \tag{3.10}$$

Η συνάρτηση (3.10) απότελεί την n −οστή παράγωγο του μετασχηματισμού Laplace της $m_{\delta,i}(u)$, στο σημείο $a=0$, για $\delta=0$. Με παραγώγηση της **σχέσης 6** (Albrecher & Boxma, 2005) και για $a=0$ βρίσκουμε τις ροπές της μεταβλητής $|U(T)|$:

$$A_0(s)\vec{k}^{(n)}(s)=c\frac{\partial^n \vec{m}_0(0)}{\partial a^n}\bigg|_{\alpha=0}-\Lambda P diag\left(\eta_1^{(n)}(s),\eta_2^{(n)}(s),\dots,\eta_M^{(n)}(s)\right)$$

Όπου:

$$\eta_i^{(n)}(s) := \left.\frac{\partial^n \widehat{\omega}_i(s)}{\partial a^n}\right|_{\alpha=0} = -\frac{n!}{s^{n+1}}\left(\widehat{b}_i(s) - \sum_{j=1}^{n}\frac{(-s)^j}{j!}E\left[B_i^j\right]\right)$$

Καθορίζοντας πρώτα τις M σταθερές $c\left.\frac{\partial^n \vec{m}_0(0)}{\partial a^n}\right|_{\delta=0}$ από τις ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg, μας δίνει το μετασχηματισμό Laplace για την n −οστή ροπή.

3.7 Γενικευμένη κατανομή Erlang(n) για τους ενδιάμεσους χρόνους

Με την προϋπόθεση ότι ξεκινάμε από την κατάσταση 1 και ότι ο πίνακας μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

Επιπλέον, για $M = n$ και με τις υποθέσεις ότι:

1. Μπορεί να συμβεί απαίτηση μόνο στην πρώτη κατάσταση
2. Η κατανομή $B_1 = B$ είναι αυθαίρετη, και οι κατανομές $B_2, \dots, B_n$ είναι η εκφυλισμένη κατανομή στο σημείο 0
   a. $\widehat{B}(s) = diag(\widehat{b}(s), 1, \dots, 1)$
   b. $\vec{\widehat{\omega}}(s) = (\widehat{\omega}(s), 0, \dots, 0)^T$

Η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $m_\delta(u) := m_{\delta,1}(u)$ αποτελεί την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για γενικευμένη Erlang(n) κατανομή ενδιάμεσων χρόνων. Ο πίνακας $A_\delta(s)$ είναι της μορφής:

$$A_\delta(s) = \begin{pmatrix} cs-\delta-\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & cs-\delta-\lambda_2 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & cs-\delta-\lambda_{n-2} & \lambda_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & cs-\delta-\lambda_{n-1} & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n \widehat{b}(s) & 0 & \cdots & \cdots & 0 & cs-\delta-\lambda_n \end{pmatrix}$$

Η ορίζουσα $\det[A_\delta(s)]$ του πίνακα είναι εύκολο να βρεθεί:

$$\det[A_\delta(s)] = (-1)^n\left[\prod_{j=1}^{n}(\lambda_j + \delta - cs) - \widehat{b}(s)\prod_{j=1}^{n}\lambda_j\right] \tag{3.12}$$

Με τη χρήση του πίνακα μετάβασης P στη σχέση (3.11) και με τη **σχέση 5** (Albrecher & Boxma, 2005), η ανανεωτική ολοκληροδιαφορική εξίσωση που ικανοποιείται από τη συνάρτηση $m_\delta(u)$:

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1 + \frac{\delta - c\partial}{\lambda_j}\right)m_\delta(u) = \int_0^u m_\delta(u-y)dB(y) + \int_u^\infty w(u, y-u)dB(y) \tag{3.13}$$

Όπου ∂ συμβολίζει τον διαφορικό τελεστή.

3.7.1 $\boldsymbol{Μέτρα\ χρεοκοπίας\ για\ u = 0}$

Για μηδενικό αρχικό αποθεματικό, η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής:

$$m_\delta(0) = \sum_{l}^{n} \frac{\lambda_1 \cdots \lambda_n}{c^n} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq l}}^{n} \frac{1}{s_k - s_l} \widehat{\omega}(s_l) \tag{3.14}$$

Από (Boxma, 2005), η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T-), |U(T)|$ είναι:

$$f(x,y|0) = \sum_{l}^{n} \frac{\lambda_1 \cdots \lambda_n}{c^n} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq l}}^{n} \frac{1}{s_k - s_l} e^{-s_l x} b(x+y) \tag{3.15}$$

3.7.2 $\boldsymbol{Μέτρα\ χρεοκοπίας\ για\ u \geq 0}$

Για την γενίκευση της υπόθεσης της κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων, ο μετασχηματισμός Laplace της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής:

$$\widehat{m}_\delta(s) = \frac{\widehat{\omega}(s) - \sum_{l=1}^{n} \widehat{\omega}(s_l) \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq l}}^{n} \frac{s - s_k}{s_l - s_k}}{\prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{\delta - cs}{\lambda_j}\right) - \hat{b}(s)} \tag{3.16}$$

Με την αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace, αποκτούμε την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής. Για $\delta = 0$ και $w(x,y) = 1$ είναι απλά η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$. Επιπλέον, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T-), |U(T)|$ δίνεται από τη **σχέση (30)** (Albrecher & Boxma, 2005):

$$f(x,y|u) = \frac{\lambda_1 \cdots \lambda_n b(x+y)}{c^n \varphi(0)} \sum_{l=1}^{n} \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq l}}^{n} \frac{1}{s_k - s_l} \right) e^{-s_l(x-u)} \int_{\max(0,u-x)}^{u} e^{-s_l z} d\varphi(z) \tag{3.17}$$

Με μετασχηματισμό Laplace:

$$\hat{f}(x,y|s) = \frac{\lambda_1 \cdots \lambda_n b(x+y)}{c^n \varphi(0)} \sum_{l=1}^{n} s\hat{\varphi}(s) \frac{e^{-s_l x} - e^{-sx}}{s - s_l} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq l}}^{n} \frac{1}{s_k - s_l}$$

Εδώ η $\varphi(x)$ είναι η πιθανότητα επιβίωσης $1 - \psi(u)$.

3.8 Μέτρα χρεοκοπίας για phase-type κατανεμημένους ενδιάμεσους χρόνους

Η κατανομή phase-type αποτελεί μια κατανομή πιθανότητας που η κατασκευή της αποτελείται είναι από συνέλιξη εκθετικών κατανομών είτε από συνδιασμό τους. Η αλληλουχία στην οποία γίνονται οι εκάστοτε φάσεις της κατανομής αυτής αποτελεί μια στοχαστική διαδικασία που αναπαρίσταται από μια τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το χρόνο μέχρι την απορρόφηση μιας διαδικασίας Markov $\{J_t\}$ με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων E που αποτελείται από μία κατάστασης απορρόφησης.

Για το μοντέλο μας, θεωρούμε ότι:

1. Μπορεί να συμβεί απαίτηση μόνο στην πρώτη κατάσταση
2. Η κατανομή $B_1 = B$ είναι αυθαίρετη, και οι κατανομές $B_2, \dots, B_n$ είναι η εκφυλισμένη κατανομή στο σημείο 0
    a. $\hat{B}(s) = diag(\hat{b}(s), 1, \dots, 1)$
3. $\vec{\hat{\omega}}(s) = (\hat{\omega}(s), 0, \dots, 0)$
4. Στον πίνακα μετάβασης πιθανοτήτων P η πρώτη σειρά του πίνακα:
    a. $p_{11} = 0$
    b. $p_{1j} = a_j$ όπου το διάνυσμα a_j για $j = 2, .., M$ αποτελεί τις αρχικές πιθανότητες της διαδικασίας $\{J_t\}$
    c. Οι στήλες $p_{21}, \dots, p_{M1}$ είναι οι πιθανότητες εξόδου της κατάστασης $\{J_t\}$ στην κατάσταση απορρόφησης, δηλαδή την 1η κατάσταση.

Καθώς η διδικασία που μελετάμε ξεκινάει από την κατάσταση 1, όταν εμφανιστεί η πρώτη απαίτηση, η διαδικασία μεταβαίνει σε μια από τις επόμενες καταστάσεις, σύμφωνα με το διάνυσμα $\vec{\alpha}$. Υπολογίζοντας το παρακάτω όριο για $i = 1$:

$$\lim_{\lambda_1 \to \infty} \left\{ cs\hat{m}_{\delta,i}(s) - c\hat{m}_{\delta,i}(0) - (\lambda_i + \delta)\hat{m}_{\delta,i}(s) + \lambda_i \sum_{j=1}^{M} p_{ij}\left[\hat{m}_{\delta,j}(s)\hat{b}_j(s) + \hat{\omega}_j(s)\right] \right\}$$

Βρίσκουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής:

$$m_\delta(u) := m_{\delta,1}(u) = \sum_{j=2}^{M} a_j m_{\delta,j} \tag{3.18}$$

Επίσης, για το όριο $\lambda_1 \to \infty$:

$$A'_\delta(s)\vec{\hat{m}}_\delta(s) = c\left(0, m_{\delta,2}(0), \dots, m_{\delta,M}(0)\right)^T - \Lambda' P \vec{\hat{\omega}}(s)$$

Όπου:

1. $\Lambda' = diag(0, \lambda_1, \dots, \lambda_M)$
2. $A'_\delta(s) := \left[(cs - \delta)I - \Lambda' + \Lambda' P \hat{B}(s)\right] - (cs - \delta)I\vec{e}_1\vec{e}_1^T$
3. $\vec{e}_1 = (1,0, \dots, 0)^T$.

Κάνοντας τις πράξεις για τον πίνακα $A'_{\delta}(s)$ καταλήγουμε:

$$A'_{\delta}(s) = \begin{pmatrix} -1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_M \\ \lambda_2 p_{21}\hat{b}(s) & cs - \delta - \lambda_2 p'_{22} & \lambda_2 p_{23} & \cdots & \lambda_2 p_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \lambda_M p_{M1}\hat{b}(s) & \lambda_M p_{M2} & \cdots & \cdots & cs - \delta - \lambda_M p'_{MM} \end{pmatrix}$$

Ο συμβολισμός $p'_{ij} = 1 - p_{ij}$. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, ο μετασχηματισμός Laplace της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής για phase-type κατανεμημένους ενδιάμεσους χρόνους, δίνεται από τη σχέση 34 της βιβλιογραφίας:

$$\vec{\hat{m}}_{\delta}(s) = \frac{A'_{\delta,adj}(s)\begin{pmatrix} 0 \\ m_{\delta,2}(0) - \lambda_2 p_{21}\hat{\omega}(s) \\ \vdots \\ m_{\delta,M}(0) - \lambda_M p_{M1}\hat{\omega}(s) \end{pmatrix}}{det\left(A'_{\delta}(s)\right)} \tag{3.19}$$

Γνωρίζουμε ότι $m_{\delta}(0) = \lim_{s\to\infty} s\hat{m}_{\delta}(s)$. Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση:

$$g_{\delta}(s) = det[(cs - \delta)I - \Lambda' - \Lambda' P] + {}^{(1,1)}A'_{\delta}(s)$$

Ο πίνακας ${}^{(1,1)}A'_{\delta}(s)$ είναι ο περικομμένος πίνακας $A'_{\delta}(s)$ ως προς τη στήλη και σειρά (1,1). Τελικά, από τη **σχέση (38)** (Albrecher & Boxma, 2005), το όριο συγκλίνει:

$$m_{\delta}(0) = -\frac{1}{c^{M-1}}\sum_{j=1}^{M-1} g_{\delta}\left(s_j\right)\hat{\omega}(\,s_j)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M-1}\frac{1}{s_j - s_k} \tag{3.20}$$

Επιπλέον, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T\,-), |U(T)|$ δίνεται από τη σχέση:

$$f(x, y|0) = (-1)^{M-1}\frac{b(x+y)}{c^{M-1}}\sum_{j=1}^{M-1} g_{\delta}\left(s_j\right)e^{-s_j x}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M-1}\frac{1}{s_k - s_j}$$

Για $u \geq 0, \delta = 0$ η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T\,-), |U(T)|$ δίνεται από τη **συνέπεια 6.1** (Albrecher & Boxma, 2005):

$$f(x, y|u) = \frac{1 - B(x)}{c^{M-1}}\sum_{j=1}^{M-1} g_0\left(s_j\right)e^{-s_j x}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M-1}\frac{1}{s_j - s_k} \tag{3.21}$$

3.9 Αριθμητικά αποτελέσματα

Σε αυτό το αριθμητικό παράδειγμα, θα ακολουθήσουμε την εξής υπόθεση:

- Οι πιθανές καταστάσεις της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι $M = 2$
- Αν η απαίτηση ξεπεράσει κάποιο κατώφλι V, ο χρόνος της επόμενης απαίτησης, κατανέμεται εκθετικά με παράμετρο λ_1, διαφορετικά κατανέμεται εκθετικά με παράμετρο λ_2.

Για το αριθμητικό παράδειγμα, ορίζουμε τις αυθαίρετες τιμές για τις συναρτήσεις:

- $V \sim Exp(2)$, $B \sim Exp(1)$
- $c = 2, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$

Ο πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων της αλυσίδας Markov, καθώς και η διαγώνιος Λ:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \ \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Οι μετασχηματισμοί Laplace:

$$\hat{b}_1(s) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1+s} - \frac{1}{3+s}\right), \qquad \hat{b}_2(s) = \frac{3}{3+s}$$

Για $\delta = 0$, ο πίνακας $A_0(s)$ έχει ορίζουσα:

$$\det\big(A_0(s)\big) = 3 - 8s + 4s^2 + \frac{6s-3}{1+s} - \frac{4s}{3+s}$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει μια μηδενική και μια θετική ρίζα $s_2 = 1.226$. Οι υπόλοιπες ρίζες της εξίσωσης είναι αρνητικές. Για αυθαίρετη συνάρτηση ποινής w, η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής με μηδενικό αρχικό αποθεματικό:

$$m_0(0) = \begin{pmatrix} 0.328 \\ 0.781 \end{pmatrix} \hat{\omega}_1(0) + \begin{pmatrix} 0.672 \\ -0.448 \end{pmatrix} \hat{\omega}_1(1.226) + \begin{pmatrix} 0.164 \\ 0.391 \end{pmatrix} \hat{\omega}_2(0) + \begin{pmatrix} 0.336 \\ -0.224 \end{pmatrix} \hat{\omega}_2(1.226)$$

Αν θέσουμε την συνάρτηση ποινής $w(x, y) = 1$, τότε οι συναρτήσεις:

$$\hat{\omega}_1(s) = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{3}{2+2s} + \frac{3}{6+2s}\right), \qquad \hat{\omega}_2(s) = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{3}{3+s}\right)$$

Και τελικά, η πιθανότητες χρεοκοπίας για κάθε κατάσταση με αντικατάσταση για τις παραπάνω συναρτήσεις και αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace:

$$\psi_1(u) = 0.007e^{-3.161u} + 0.938e^{-0.065u}$$

$$\psi_2(u) = 0.003e^{-3.161u} + 0.867e^{-0.065u}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μεταβλητής $U(T-)$:

$$\begin{aligned}\vec{f}(x|u) = I_{\{u \le x\}} \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} e^{-x} + e^{-3.161u} \left[\begin{pmatrix} 0.106 \\ 0.045 \end{pmatrix} e^{-2.226x} - \begin{pmatrix} 0.061 \\ 0.026 \end{pmatrix} e^{-x}\right] \\ + e^{-0.065u} \left[\begin{pmatrix} -0.574 \\ -0.531 \end{pmatrix} e^{-2.226x} - \begin{pmatrix} 8.446 \\ 7.802 \end{pmatrix} e^{-x}\right] + I_{\{u \le x\}} e^{1.226u - 2.226x} \begin{pmatrix} 1.476 \\ -0.186 \end{pmatrix} \\ + I_{\{u \ge x\}} \left[\begin{pmatrix} 9.020 \\ 8.333 \end{pmatrix} e^{-0.0645u - 0.935x} - \begin{pmatrix} 0.045 \\ 0.019 \end{pmatrix} e^{-3.161u + 2.161x}\right]\end{aligned}$$

Τέλος, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T-)$, $|U(T)|$:

$$\vec{f}(x, y|u) = e^{-y} \vec{f}(x|u)$$

3.9.1 *Ροπές της μεταβλητής $U(T-)$*

Η πρώτη και η δεύτερη ροπή του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρεοκοπία αντίστοιχα:

$$E[\, U(T-)I_{T<\infty}] = \binom{1.746}{1.613} e^{-0.065u} - \binom{0.050}{0.021} e^{-3.161u} - \binom{1}{0.556} e^{-u}$$

$$E[\, U(T-)^2 I_{T<\infty}] = \binom{5.041}{4.657} e^{-0.065u} - \binom{0.095}{0.040} e^{-3.161u} - \binom{2u+3.778}{1.111u+2.395} e^{-u}$$

3.9.1 *Ροπές του χρόνου χρεοκοπίας*

Η πρώτη και η δεύτερη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας αντίστοιχα

$$E[\, T_u I_{T<\infty}] = \binom{4.330u + 4.431}{4u + 9.114} e^{-0.065u} - \binom{0.457}{0.193} e^{-3.161u}$$

$$E\left[\, {T_u}^2 I_{T<\infty}\right] = \binom{19.980u^2 + 711.096u + 681.816}{18.458u^2 + 703.242u + 1469.25} e^{-0.065u} - \binom{75.458}{32.806} e^{-3.161u}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ένα ανανεωτικό μοντέλο με εξάρτηση και έναν όρο διάχυσης

(Franck Adékambi & Essodina Takouda, (2022). On the Discounted Penalty Function in a Perturbed Erlang Renewal Risk Model with Dependence)

4.1 Εισαγωγή

Στο Κεφάλαιο 2 εξετάσαμε την γενίκευση του μοντέλου της θεωρίας χρεοκοπίας, με την υπόθεση των μη-εκθετικά κατανεμημένων χρόνων αφίξεων. Επιπλέον, εισήχθηκε μια μορφή εξάρτησης μεταξύ των ενδιάμεσων χρόνων, και του ύψους της ατομικής ζημιάς. Η εξάρτηση αυτή είναι η σύζευξη **Farlie-Gumbel-Morgensten (FGM)**. Στο κεφάλαιο αυτό, θα εξετάσουμε μια επιπλέον γενίκευση του μοντέλου αυτού, που είναι η υπόθεση της μη γραμμικότητας της είσπραξης του ασφαλίστρου. Σε πραγματικά δεδομένα, η γραμμικότητα της είσπραξης του ασφαλίστρου σπάνια εντοπίζεται. Πολλές φορές λόγω καθυστέρησης ή προπληρωμής των ασφαλίστρων ή ακόμα και σφάλματος του μοντέλου, η είσπραξή τους «διαταράσσεται» στο πέρασμα του χρόνου. Η προσέγγιση αυτής της μη-γραμμικής είσπραξης γίνεται με την προσθήκη ενός παράγοντα διάχυσης (θορύβου) στο μοντέλο, αυτό της κίνησης Brown ή διαδικασία Wienner.

4.2 Διαδικασία Wienner

Η διαδικασία Wienner αποτελεί μια στοχαστική διεργασία Lévy συνεχούς χρόνου με πραγματικό σύνολο τιμών. Το όνομά της, προέρχεται από τον μαθηματικό Norbet Wienner. Καλείται συχνά και κίνηση Brown λόγω ότι παρατηρήθηκε πρώτη φορά από τον βοτανολόγο Robert Brown. Κύριες ιδιότητες της διαδικασίας αυτής:

- $W_0 = 0$
- Κάθε προσαύξηση $W_{t+s} - W_t$ για $t > 0, s \geq 0$ είναι ανεξάρτητη από την προηγούμενη
- Κάθε προσαύξηση $W_{t+s} - W_t \sim N(0, s)$, δηλαδή ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $E[W_t] = 0$ και διακύμανση $Var[W_t] = t$
- Κάθε «τυχαίος περίπατος» της κίνησης αυτής είναι συνεχής σε χρόνο t, αλλά δεν είναι πουθενά διαφορίσιμος. Είναι όμως ολοκληρώσιμος.

Επίσης, η κίνηση Brown, μπορεί να εκφραστεί με την προσέγγιση του τυχαίου περίπατου ως εξής:

Έστω οι τυχαίες μεταβλητές $\xi_1, \xi_2, \dots$ να είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}, t \in [0,1]$ η διαδικασία Wienner ορίζεται:

$$W_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{1 \leq k \leq \lfloor nt \rfloor} \xi_k$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Donsker το οποίο αποτελεί επέκταση του κεντρικού οριακού θεωρήματος, όταν το $n \to \infty$, η διαδικασία $W_n(t)$ προσεγγίζει μια διαδικασία Wienner.

4.3 Το μοντέλο FGM με την προσθήκη κίνησης Brown

Η διαδικασία πλεονάσματος που θα μελετήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφεται από την παρακάτω στοχαστική διαδικασία:

$$U(t) = u + ct + \sigma B_t - \sum_{N(t)} X_i$$

1. Η μεταβλητή u αναφέρεται στο αρχικό αποθεματικό που κρατάει η ασφαλιστική επιχείριση
2. Η μεταβλητή ct αναφέρεται στην γραμμική είσπραξη του ασφαλίστρου, σε συνάρτηση με τον χρόνο t που μελετάμε το μοντέλο
3. Η τυχαία μεταβλητή $N(t)$ ονομάζεται απαρριθμήτρια συνάρτηση, και εκφράζει το πλήθος των απαιτήσεων μέχρι τη χρονική στιγμή t
4. Η τυχαία μεταβλητή T_i εκφράζει τους ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ των αφίξεων των απαιτήσεων και ακολουθεί κατανομή Erlang με παράμετρους (n, λ)

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η άθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής T_i:

$$f_T(t) = \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}$$

$$F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

5. Η τυχαία μεταβλητή X_i εκφράζει το ύψος της ατομικής ζημιάς με αυθαίρετη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$. Είναι αμοιβαίως ανεξάρτητη από την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων, απλά συνδέονται μέσω της σύζευξης FGM.
6. Ο παράγοντας σB_t που προσθέσαμε είναι μια κανονική κίνηση Brown, πολλαπλασιασμένη με μια σταθερά σ που αφορά την μεταβλητότητα της κίνησης Brown. Η κίνηση αυτή περιγράφει την «αντικανονική» είσπραξη ασφαλίστρων.

Η από κοινού συνάρτηση κατανομής των μεταβλητών X_i, T_i σύμφωνα με την σύζευξη FGM, όπως και στο Κεφάλαιο 2, είναι:

$$F_{X,T}(x,t) = C_\theta^{FGM}\big(F_X(x), F_T(t)\big) = F_X(x)F_T(t) + \theta F_X(x)F_T(t)\bar{F}_X(x)\bar{F}_T(t) \quad x,t \in \mathbb{R}^+$$

Και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_{X,T}(x,t) = \frac{\partial^2 F_{X,T}(x,t)}{\partial x \partial dt} = f_X(x)f_T(t) + \theta h(x) f_T(t)[2\bar{F}_T(t) - 1] \qquad x,t \in \mathbb{R}^+$$

Όπου $h(x) = f_X(x)[2\bar{F}_X(x) - 1]$. Καθώς γνωρίζουμε ότι $f_T(t) \sim Erlang(n,\lambda)$, με αντικατάσταση στον παραπάνω τύπο βρίσκουμε:

$$f_{X,T}(x,t) = [f_X(x) - \theta h(x)]\frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} + 2\theta h(x) e^{-2\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^{n+k} t^{n+k-1}}{(n-1)!\,k!}$$

4.4 Η συνάρτηση Gerber-Shiu

Η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής Gerber-Shiu στο μοντέλο με διάχυση ορίζεται ως:

$$m_\delta(u) = m_\delta^{(\varphi)}(u) + m_\delta^{(\psi)}(u) \tag{4.1}$$

Η συνάρτηση προεξοφλημένης ποινής $m_\delta^{(\varphi)}(u)$ αναφέρεται στο ενδεχόμενο να έχουμε χρεοκοπία από κάποια απαίτηση, ενώ η προεξοφλημένης ποινής $m_\delta^{(\psi)}(u)$ αναφέρεται στο ενδεχόμενο τα αίτια της χρεοκοπίας να οφείλονται στις ταλαντώσεις που προκύπτουν από την κίνηση Brown.

Για να βρούμε την γενικευμένη εξίσωση του Lundberg, κατασκευάζουμε την παρακάτω διακριτή διαδικασία πλεονάσματος, όπου αναφέρεται στην n −οστή απαίτηση:

$$U_n = u + cW_n - \sum_{k=1}^{N_{W_n}} X_k + \sigma B_{W_n}$$

Όπου $W_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$. Σύμφωνα με την ιδιότητα της κίνησης Brown σχετικά με τις στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις, κατασκευάζουμε την ισοδύναμη κατανομή:

$$U_n \overset{\mathrm{d}}{=} u + \sum_{k=1}^{n} \left(cT_k - X_k + \sigma B_{T_k} \right)$$

Αν στην παραπάνω διαδικασία θέσουμε $Z_n = e^{-\delta T_n + sU_n}$ και $Z_{n+1} = Z_n e^Q$ με:

$$Q = e^{-\delta T_{n+1} + s\left(cT_{n+1} - X_{n+1} + \sigma B_{T_{n+1}}\right)}$$

Για να είναι η παραπάνω διαδικασία martingale, ψάχνουμε όλες τις πιθανές τιμές του s, ώστε να ικανοποιούν την συνθήκη martingale. Για να ισχύει η συνθήκη αυτή, θα πρέπει να ικανοποιείται η παρακάτω ισότητα:

$$E[Q] = 1$$

Αυτή η ισότητα ονομάζεται και γενικευμένη εξίσωση του Lundberg. Στη βιβλιογραφία, από τη σχέση (12), κάνοντας κάποιες πράξεις, βρίσκουμε την γενικευμένη εξίσωση:

$$\begin{aligned} &[A_1(s)]^n [A_2(s)]^{2n-1} \\ &\quad = \left[\hat{f}_X(s) - \theta \hat{h}(s)\right] \left(\frac{-2\lambda}{\sigma^2}\right)^n [A_2(s)]^{2n-1} \\ &\quad + 2\theta \hat{h}(s) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{-2\lambda}{\sigma^2}\right)^{n+k} [A_1(s)]^n [A_2(s)]^{n-k-1} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Όπου $\hat{h}(s)$ και $\hat{f}_X(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων $h(x), f_X(x)$ αντίστοιχα, και οι συναρτήσεις:

$$A_1(s) = s^2 + \frac{2c}{\sigma^2} s - \frac{2(\lambda + \delta)}{\sigma^2}$$

$$A_2(s) = s^2 + \frac{2c}{\sigma^2}s - \frac{2(2\lambda+\delta)}{\sigma^2}$$

Από (Franck Adékambi & Essodina Takouda 2022), αποδεικνύονται οι εξής προτάσεις:

- Για $\delta > 0$ και $\theta \neq 0$, η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg (4.2) έχει ακριβώς $3n-1$ ρίζες της μορφής $\rho_1(\delta)$, $\rho_2(\delta), \dots, \rho_{3n-1}(\delta)$ στον δεξιό ημιάξονα του μιγαδικού επιπέδου. Το πραγματικό μέρος των ριζών της παραπάνω εξίσωσης $Re\big(\rho_i(\delta)\big) > 0$ για κάθε $i = 1,2,\dots,3n-2$.
- Για $\delta = 0$ και $\theta \neq 0$, η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg (4.2) έχει ακριβώς $3n-2$ ρίζες στον δεξιό ημιάξονα του μιγαδικού επιπέδου και μια μηδενική ρίζα. Αποτελεί μεγάλης σημασίας για την μελέτη των ιδιοτήτων της συνάρτησης Gerber-Shiu, καθώς για $\delta = 0$ μας επιτρέπει να μελετήσουμε ποσότητες ενδιαφέροντος όπως η πιθανότητα χρεοκοπίας και η από κοινού συνάρτηση των μεταβλητών $U(T-), |U(T)|$.

Επιπλέον, όπως είναι γνωστό, η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί κάποιες ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις. Στο ανανεωτικό μοντέλο με εξάρτηση και διάχυση, αυτές οι εξισώσεις χωρίζονται:

- Στο ενδεχόμενο να έχουμε χρεοκοπία από κάποια απαίτηση. Η συνάρτηση Gerber-Shiu για αυτή την περίπτωση είναι:

$$m_\delta^{(\varphi)}(u) = E\big[e^{-\delta t} w(U(T-), |U(T)|) I(T<\infty, U(t)<0) | U(0)=u\big] \tag{4.3}$$

- Στο ενδεχόμενο να έχουμε χρεοκοπία την ταλάντωση της κίνησης Brown. Η συνάρτηση Gerber-Shiu για αυτή την περίπτωση είναι:

$$m_\delta^{(\psi)}(u) = E\big[e^{-\delta t} w(U(T-), |U(T)|) I(T<\infty, U(t)=0) | U(0)=u\big] \tag{4.4}$$

Για να ορίσουμε τις ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις, παίρνουμε τις παρακάτω βοηθητικές συναρτήσεις:

$$\sigma_f(u) = \int_u^\infty w(u, x-u) f(x)\,dx\,, \qquad \sigma_h(u) = \int_u^\infty w(u, x-u) h(x)\,dx$$

4.4.1 *Ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις για την* $\boldsymbol{m_\delta^{(\varphi)}(u)}$

Στη **σχέση (35)** (Franck Adékambi & Essodina Takouda 2022), αποδεικνύεται ότι η ολοκληροδιαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber-Shiu $m_\delta^{(\varphi)}(u)$, δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}[A_1(\mathcal{D})]^n [A_2(\mathcal{D})]^{2n-1} m_\delta^{(\varphi)}(u) \\ = \left(\frac{-2\lambda}{\sigma^2}\right)^n [A_2(\mathcal{D})]^{2n-1} \left(\sigma_f(u) - \theta\sigma_h(u)\right) \\ + 2\theta \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{-2\lambda}{\sigma^2}\right)^{n+k} [A_1(\mathcal{D})]^n [A_2(\mathcal{D})]^{n-k-1} \sigma_h(u)\end{aligned} \tag{4.5}$$

Όπου $\mathcal{D}$ είναι ο διαφορικός τελεστής, $\mathcal{I}$ ο ταυτοτικός τελεστής, και οι συναρτήσεις:

$$A_1(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^2 + \frac{2c}{\sigma^2}\mathcal{D} - \frac{2(\lambda+\delta)}{\sigma^2}\mathcal{I}$$

$$A_2(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^2 + \frac{2c}{\sigma^2}\mathcal{D} - \frac{2(2\lambda+\delta)}{\sigma^2}\mathcal{I}$$

4.4.2 *Ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις για την $m_\delta^{(\psi)}(u)$*

Στη **σχέση (57)** (Franck Adékambi & Essodina Takouda 2022), αποδεικνύεται ότι η ολοκληροδιαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber-Shiu $m_\delta^{(\psi)}(u)$, δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
&[A_1(\mathcal{D})]^n [A_2(\mathcal{D})]^{2n-1} m_\delta^{(\psi)}(u) \\
&\quad = \left(\frac{-2\lambda}{\sigma^2}\right)^n [A_2(\mathcal{D})]^{2n-1}\left(\zeta_f(u) - \theta\zeta_h(u)\right) \\
&\quad + 2\theta \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{-2\lambda}{\sigma^2}\right)^{n+k} [A_1(\mathcal{D})]^n [A_2(\mathcal{D})]^{n-k-1} \zeta_h(u)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Όπου $\zeta_f(u) = \int_0^u m_\delta^{(\psi)}(u-x) f(x) dx$ και $\zeta_h(u) = \int_0^u m_\delta^{(\psi)}(u-x) h(x) dx$.

4.5 Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu και οι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις

4.5.1 *Ο μετασχηματισμός Laplace*

Στο ανανεωτικό μοντέλο με εξάρτηση και διάχυση, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu $\hat{m}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-su} m_\delta(u) du = \hat{m}_\delta^{(\varphi)}(s) + \hat{m}_\delta^{(\psi)}(s)$.

Από (Franck Adékambi & Essodina Takouda 2022), αποδεικνύεται ότι ο **μετασχηματισμός Laplace** της συνάρτησης $\hat{m}_\delta^{(\varphi)}(s)$ που οφείλεται σε **χρεοκοπία από απαίτηση**:

$$\hat{m}_\delta^{(\varphi)}(s) = \frac{\mathcal{V}_{1,\delta}(s) + \mathcal{L}_{1,\delta}(s)}{\mathcal{R}_{1,\delta}(s) - \mathcal{R}_{2,\delta}(s)} \tag{4.7}$$

Οι συναρτήσεις $\mathcal{R}_{1,\delta}(s), \mathcal{R}_{2,\delta}(s)$:

$$\mathcal{R}_{1,\delta}(s) = [A_1(s)]^n [A_2(s)]^{2n-1}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{2,\delta}(s) = &\left(\frac{-2\lambda}{\sigma^2}\right)^n [A_2(s)]^{2n-1}\left(\hat{f}_X(s) - \theta\hat{h}(s)\right) \\
&+ 2\theta \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{-2\lambda}{\sigma^2}\right)^{n+k} [A_1(s)]^n [A_2(s)]^{n-k-1} \hat{h}(s)
\end{aligned}$$

Η συνάρτηση $\pi_i(s)$ περιέχει τις $3n-1$, ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg

$$\pi_i(s) = s^2 + \frac{2c}{\sigma^2}s - \left(\rho_i(\delta)\right)^2 - \frac{2c}{\sigma^2}\rho_i(\delta), \qquad i = 1,2,\dots,3n-1$$

Και οι συναρτήσεις $\mathcal{V}_{1,\delta}(s)$, $\mathcal{L}_{1,\delta}(s)$

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{1,\delta}(s) = \left(\frac{-2\lambda}{\sigma^2}\right)^n [A_2(s)]^{2n-1}\left(\widehat{w}_f(s) - \theta\widehat{w}_h(s)\right) \\ + 2\theta\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{-2\lambda}{\sigma^2}\right)^{n+k}[A_1(s)]^n[A_2(s)]^{n-k-1}(s)\widehat{w}_h(s)\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{1,\delta}(s) = -\sum_{k=1}^{3n-1}\mathcal{V}_{1,\delta}(\rho_k(\delta))\left[\prod_{i=1,i\neq k}^{3n-1}\frac{\pi_i(s)}{\pi_i(\rho_k(\delta))}\right]$$

Από (Franck Adékambi & Essodina Takouda 2022), επίσης αποδεικνύεται ότι **ο μετασχηματισμός Laplace** της συνάρτησης $\widehat{m}_\delta^{(\psi)}(s)$ που οφείλεται σε **χρεοκοπία από ταλάντωση**:

$$\widehat{m}_\delta^{(\psi)}(s) = \frac{\mathcal{V}_{2,\delta}(s) + \mathcal{L}_{2,\delta}(s)}{\mathcal{R}_{1,\delta}(s) - \mathcal{R}_{2,\delta}(s)} \tag{4.8}$$

Όπου οι συναρτήσεις $\mathcal{V}_{2,\delta}(s)$, $\mathcal{L}_{2,\delta}(s)$:

$$\mathcal{V}_{1,\delta}(s) = \left(s + \frac{2c}{\sigma^2}\right)[A_1(s)]^{n-1}[A_2(s)]^{2n-1}$$

$$\mathcal{L}_{2,\delta}(s) = -\sum_{k=1}^{3n-1}\mathcal{V}_{2,\delta}(\rho_k(\delta))\left[\prod_{i=1,i\neq k}^{3n-1}\frac{\pi_i(s)}{\pi_i(\rho_k(\delta))}\right]$$

4.5.2 *Ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις*

Αποδεικνύεται ότι τόσο η συνάρτηση $m_\delta^{(\varphi)}(u)$ που οφείλεται σε χρεοκοπία από πτώση πλεονάσματος, όσο και η $m_\delta^{(\psi)}(u)$ που οφείλεται σε χρεοκοπία από ταλάντωση, ικανοποιούν ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις. Αυτές δίνονται από τη **σχέση (71)** (Franck Adékambi & Essodina Takouda 2022):

$$m_\delta^{(\varphi)}(u) = \int_0^u m_\delta^{(\varphi)}(u-x)g_\delta(x)dx + \eta_{\delta,1}(u) \tag{4.9}$$

$$m_\delta^{(\psi)}(u) = \int_0^u m_\delta^{(\psi)}(u-x)g_\delta(x)dx + \eta_{\delta,2}(u) \tag{4.10}$$

Με τη βοήθεια των συναρτήσεων $\tau_{3n-1}(x) = \prod_{j=1}^{3n-1}\left(x - \pi\left(\rho_j(\delta)\right)\right)$ και $\tau'_{3n-1}\left[\pi\left(\rho_j(\delta)\right)\right] = \prod_{i=1,i\neq j}^{3n-1}\pi\left(\rho_j(\delta)\right)$:

$$g_\delta(x) = \sum_{j=1}^{3n-1}\frac{f_{X,\delta,j}(x) * e^{-x\left(\rho_j(\delta)+\frac{2c}{\sigma^2}\right)}}{\tau'_{3n-1}\left[\pi\left(\rho_j(\delta)\right)\right]}$$

$$\eta_{\delta,1}(x) = \sum_{j=1}^{3n-1}\frac{h_{\delta,j}(x) * e^{-x\left(\rho_j(\delta)+\frac{2c}{\sigma^2}\right)}}{\tau'_{3n-1}\left[\pi\left(\rho_j(\delta)\right)\right]}$$

$$\eta_{\delta,2}(x) = \sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\left[A_1\left(\rho_j(\delta)\right)\right]^{n-1}\left[A_2\left(\rho_j(\delta)\right)\right]^{2n-1}}{\tau'_{3n-1}\left[\pi\left(\rho_j(\delta)\right)\right]}e^{-x\left(\rho_j(\delta)+\frac{2c}{\sigma^2}\right)}$$

4.6 Το μοντέλο εξάρτησης και διάχυσης για ύψος ατομικής ζημιάς $\boldsymbol{X\sim Erlang\left(m,\widetilde{\theta}\right)}$.

Η κατανομή που ακολουθεί το ύψος της ατομικής ζημιάς δίνεται από τον τύπο της κατανομής Erlang με παραμέτρους $(m,\widetilde{\theta})$:

$$f_X(x) = \frac{1}{(m-1)!}\lambda^m x^{m-1}e^{-\widetilde{\theta}x}$$

Με την χρήση των παραπάνω, μπορούμε να εκφράσουμε τους μετασχηματισμούς Laplace $\widehat{m}_\delta^{(\varphi)}(u), \widehat{m}_\delta^{(\psi)}(u)$ με $w(x,y) \equiv 1$, με την χρήση ως

Από το θεώρημα 6 σελ 28 της βιβλιογραφίας, ο μετασχηματισμός Laplace για της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής για πιθανότητα χρεοκοπίας από πτώση πλεονάσματος, δίνεται από τη σχέση:

$$\widehat{m}_\delta^{(\varphi)} = \frac{Q_{1,\delta}}{\prod_{j=1}^{3n+3m-2}\left(s + r_j(\delta)\right)}$$

Οι ρίζες $-r_j(\delta)$, αποτελούν τη λύση της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg για $Erlang(m,\widetilde{\theta})$ απαιτήσεις ζημιών. Οι ρίζες $r_j(\delta)$ έχουν θετικό πραγματικό μέρος και βρίσκονται στον αριστερό μιγαδικό ημιάξονα. Ο όρος $Q_{1,\delta}$, αποτελεί πολυώνυμο $3n+3m-4$ βαθμού. Το πολυώνυμο αυτό ορίζεται ως:

$$
\begin{aligned}
Q_{1,\delta}(s) = -\sum_{j=1}^{3n-1} \Bigg\{ & \left(\frac{-2\lambda}{\sigma^2}\right)^n \left[A_2(\rho_j(\delta))\right]^{2n-1} \prod_{i=1, i\neq j}^{3n-1} \left(\frac{s+\rho_i(\delta)+\dfrac{2c}{\sigma^2}}{\pi\left(\rho_j(\delta)\right)} \right) \\
& \times \left[\left(s+2\tilde{\theta}\right)^{2m-1} \beta^{f}_{\rho_j(\delta),m-1}(s) - \theta \beta^{h}_{\rho_j(\delta)3,m-2}(s) \right] \\
& + 2\theta \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{-2\lambda}{\sigma^2}\right)^{n+k} \\
& \times \left[A_1(\rho_j(\delta))\right]^n \left[A_2(\rho_j(\delta))\right]^{n-k-1} \prod_{i=1, i\neq j}^{3n-1} \left(\frac{s+\rho_i(\delta)+\dfrac{2c}{\sigma^2}}{\pi_i\left(\rho_j(\delta)\right)} \right) \beta^{h}_{\rho_j(\delta)3,m-2}(s) \Bigg\}
\end{aligned}
$$

Όπου οι συναρτήσεις $\beta^{f}_{\rho_j(\delta),m-1}(s), \beta^{h}_{\rho_j(\delta)3,m-2}(s)$:

$$
\beta^{f}_{\rho_j(\delta),m-1}(s) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{i} \frac{\tilde{\theta}^i}{\left(\rho_j(\delta)+\tilde{\theta}\right)^{i-l+1}} \left(s+\tilde{\theta}\right)^{m-l-1}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta^{h}_{\rho_j(\delta)3,m-2}(s) = \sum_{i_1=0}^{m-1} \Bigg\{ & \sum_{i_2=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{i_1+i_2} \frac{\binom{i_1+i_2}{i_1} \tilde{\theta}^{i_1+i_2} \left(s+\tilde{\theta}\right)^m \left(s+\widetilde{2\theta}\right)^{2m-l-2}}{\left(\rho_j(\delta)+2\tilde{\theta}\right)^{i_1+i_2-l+1}} \\
& - \sum_{l=0}^{i_1} \frac{\tilde{\theta}^{i_1}\left(s+\tilde{\theta}\right)^{m-l-1}\left(s+2\tilde{\theta}\right)^{2m-1}}{\left(\rho_j(\delta)+\tilde{\theta}\right)^{i_1-l+1}} \Bigg\}
\end{aligned}
$$

Επιπλέον, αν οι ρίζες $r_j(\delta)$ είναι ξεχωριστές, η προεξοφλημένη συνάρτηση Gerber-Shiu που οφείλεται σε χρεοκοπία από πτώση πλεονάσματος και για $X{\sim}Erlang(m, \tilde{\theta})$ απαιτήσεις ζημιών δίνεται από τον τύπο:

$$
m_\delta^{(\varphi)}(u) = \sum_{j=1}^{3n+3m-2} p_{\delta,j} e^{-r_j(\delta)u}
$$

Όπου:

$$
p_{\delta,j} = \frac{Q_{1,\delta}\left(-r_j(\delta)\right)}{\prod_{i=1,i\neq j}^{3n+3m-2}\left(r_i(\delta)-r_j(\delta)\right)}
$$

Από το **θεώρημα 6** (Franck Adékambi & Essodina Takouda 2022), ο μετασχηματισμός Laplace για της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής για πιθανότητα χρεοκοπίας από ταλάντωση που οφείλεται στην κίνηση Brown, δίνεται από τη σχέση:

$$
\widehat{m}_\delta^{(\psi)} = \frac{Q_{2,\delta}}{\prod_{j=1}^{3n+3m-2}\left(s+r_j(\delta)\right)}
$$

Σε αυτή την περίπτωση ο όρος $Q_{2,\delta}$, αποτελεί πολυώνυμο $3n+3m-3$ βαθμού. Το πολυώνυμο αυτό ορίζεται ως:

$$Q_{2,\delta}(s) = \left(s + 2\tilde{\theta}\right)^{2m-1}\left(s + \tilde{\theta}\right)^{m} \sum_{j=1}^{3n-1} \left[A_1(\rho_j(\delta))\right]^{n-1}\left[A_2(\rho_j(\delta))\right]^{2n-1} \prod_{i=1,i\neq j}^{3n-1} \left(\frac{s + \rho_i(\delta) + \frac{2c}{\sigma^2}}{\pi_i\left(\rho_j(\delta)\right)}\right)$$

Επιπλέον, αν οι ρίζες $r_j(\delta)$ είναι ξεχωριστές, η προεξοφλημένη συνάρτηση Gerber-Shiu που οφείλεται σε χρεοκοπία από από ταλάντωση που οφείλεται στην κίνηση Brown και για $X{\sim}Erlang(m,\tilde{\theta})$ απαιτήσεις ζημιών δίνεται από τον τύπο:

$$m_\delta^{(\psi)}(u) = \sum_{j=1}^{3n+3m-2} q_{\delta,j} e^{-r_j(\delta)u}$$

Όπου:

$$q_{\delta,j} = \frac{Q_{q,\delta}\left(-r_j(\delta)\right)}{\prod_{i=1,i\neq j}^{3n+3m-2}\left(r_i(\delta) - r_j(\delta)\right)}$$

4.7 Αριθμητικά αποτελέσματα για $X{\sim}Erlang(m,\tilde{\theta})$

Παρακάτω, θα παραθέσουμε κάποια αριθμητικά αποτελέσματα για τις τιμές που λαμβάνουν οι συναρτήσεις $m_\delta^{(\varphi)}(u), m_\delta^{(\psi)}(u)$. Έστω ότι:

- $\delta = 0.035$
- $c = 2.5$
- $\theta = 0.25$
- $T{\sim}Erlang(n = 2, \lambda = 1.25)$
- $X{\sim}Erlang(m = 2, \tilde{\theta} = 2.25)$
- $\sigma = 0.25$

Για την προεξοφλημένη συνάρτηση Gerber-Shiu που οφείλεται σε χρεοκοπία από πτώση πλεονάσματος, βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} m_\delta^{(\varphi)}(u) = 0.14027e^{-1.67962u} - 0.043044e^{-2.64634u} - 0.02274e^{-4.95971u} + 0.02082e^{-4.28403u} \\ - 0.469768e^{-80.79945u} + 1.227182e^{-80.62486u} + 0.12715e^{-81.0776u} \\ - 1.10612e^{-80.4461u} + 0.1262484e^{-81.0776} \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, για την προεξοφλημένη συνάρτηση Gerber-Shiu που οφείλεται σε χρεοκοπία από ταλάντωση της κίνησης Brown, βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} m_\delta^{(\psi)}(u) = 0.004165e^{-1.67962u} - 0.001975e^{-2.64634u} - 0.00181e^{-4.95971u} + 0.00146e^{-4.28403u} \\ - 0.4419e^{-80.79945u} + 0.921602e^{-80.62486u} + 0.052458e^{-81.0776u} \\ + 0.4135e^{-80.4461u} + 0.052492e^{-81.0776} \end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Χρόνος χρεοκοπίας για το δυϊκό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας

(Chen Yang & Kristina P. Sendova, (2013). The ruin time under the Sparre-Andersen dual model)

5.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο, θα μελετήσουμε μια διαφορετική εκδοχή του μοντέλου χρεοκοπίας. Το συνηθισμένο μοντέλο χρεοκοπίας μελετά την πορεία ενός ασφαλιστικού πλεονάσματος που αναπαριστά την είσπραξη ασφαλίστρου στην πορεία του χρόνου και την πληρωμή απαιτήσεων που προκύπτουν από την φύση της λειτουργία της ασφαλιστικής επιχείρισης. Στο δυϊκό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας, αναπαριστά επιχειρήσεις οι οποίες έχουν εκροή κεφαλαίου στην πορεία του χρόνου, και στοχαστικές εισροές κεφαλαίου. Ένα παράδειγμα αυτής της παραλλαγής είναι τα πανεπιστημιακά ιδρύματα τα οποία επενδύουν συνεχώς κεφάλαια για την παραγωγή κάποιας καινοτομίας. Όταν παρουσιάζεται αυτή η καινοτομία, το πανεπιστήμιο παρουσιάζει εισροή εσόδων που «σπρώχνει» το πλεόνασμα προς τα πάνω. Άλλο ένα παράδειγμα που περιγράφει το μοντέλο αυτό είναι οι επιχειρήσεις που ασχολούνται με το Real-Estate.

5.2 Το δυϊκό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας

Η διαδικασία πλεονάσματος που θα μελετήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφεται από την παρακάτω στοχαστική διαδικασία:

$$U(t) = u - ct + \sum_{N(t)} X_i$$

7. Η μεταβλητή u αναφέρεται στο αρχικό αποθεματικό που κρατάει η επιχείριση
8. Η μεταβλητή ct αναφέρεται στην γραμμική εκροή κεφαλαίου, σε συνάρτηση με τον χρόνο t που μελετάμε το μοντέλο
9. Η τυχαία μεταβλητή $N(t) = max\{V_1 + V_2 + \cdots + V_k \leq t\}$ ονομάζεται απαρριθμήτρια συνάρτηση, και εκφράζει το πλήθος των εισπράξεων μέχρι τη χρονική στιγμή t
10. Η τυχαία μεταβλητή V_i εκφράζει τους ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ των αφίξεων των εισπρακτικών γεγονότων. Για παράδειγμα, η τυχαία μεταβλητή $V_1 \overset{\mathrm{d}}{=} \sum_{j=1}^{n} T_i$.

Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής T_i είναι η εκθετική κατανομή με παράμετρο λ_i. Οπότε, η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής V_1, είναι η γενικευμένη Erlang-n κατανομή (ονομάζεται και υπερ-εκθετική) με παραμέτρους $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και ο μετασχηματισμός Laplace της V_1:

$$f_{V_1}(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{-\lambda_i x} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} \right)$$

$$\hat{f}_{V_1}(t) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda_j + s}$$

11. Η τυχαία μεταβλητή X_i εκφράζει το ύψος της ατομικής ζημιάς με αυθαίρετη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$.

Η συνθήκη για να μην έχουμε βέβαιη χρεοκοπία σε αυτό το μοντέλο, ονομάζεται και συνθήκη καθαρού κέρδους (καθαρού ασφαλίστρου στο μοντέλο χρεοκοπίας), θα πρέπει να ικανοποιείται η παρακάτω εξίσωση:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j} < \frac{E[X_1]}{c}$$

Επιπλέον, ο χρόνος χρεοκοπίας σε αυτό το μοντέλο ορίζεται ως $T \coloneqq \inf\{t \geq 0: U(t) = 0\}$, όπου inf η συνάρτηση infimum. Επιπλέον, η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται παρόμοια με το προηγούμενο μοντέλο ως η πιθανότητα ο χρόνος χρεοκοπίας να μην είναι άπειρος, για κάποιο αρχικό αποθεματικό $u > 0$. Για $\delta = 0$, η πιθανότητα αυτή είναι:

$$\psi_0(u) = E[I(T < \infty)|U(0) = u]$$

Για $\delta > 0$, ο μετασχηματισμός Laplace $\psi_\delta(u)$ της πιθανότητας χρεοκοπίας:

$$\psi_\delta(u) = E\left[e^{-\delta t} I(T < \infty)|U(0) = u\right]$$

5.3 Ολοκληροδιαφορικές ανανεωτικές εξισώσεις για το δυϊκό μοντέλο χρεοκοπίας

Για $v = u - ct$, η ανανεωτική ολοκληροδιαφορική εξίσωση που ικανοποιεί ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\psi_\delta(u) = \frac{1}{c}\int_0^u e^{-\delta\frac{u-v}{c}}\left[\int_0^\infty \psi_\delta(v+y)dP(y)\right] f_{V_1}\left(\frac{u-v}{c}\right)dv + e^{-\delta\frac{u}{c}}\bar{\bar{F}}_{V_1}\left(\frac{u}{c}\right) \tag{5.1}$$

Για $g_c(t) = e^{-\delta\frac{t}{c}}\frac{1}{c}f_{V_1}(\frac{t}{c})$, ξαναγράφοντας την παραπάνω εξίσωση έχουμε:

$$\psi_\delta(u) = \int_0^u \left[\int_0^\infty \psi_\delta(v+y)dP(y)\right] g_c(u-v)dv + e^{-\delta\frac{u}{c}}\bar{\bar{F}}_{V_1}\left(\frac{u}{c}\right)$$

Η παραπάνω εξίσωση, είναι της ολοκληροδιαφορικής μορφής μιας ανανεωτικής συνάρτησης συνελικτικού τύπου:

$$\zeta(u) = \int_0^u \mathcal{J}[\zeta]\,(v) g_c(u-v)dv + G(u) \tag{5.2}$$

Όπου η συνάρτηση $G(u) = e^{-\delta\frac{u}{c}}\bar{\bar{F}}_{V_1}\left(\frac{u}{c}\right)$. Ο τελεστής $\mathcal{J}: C_{(0,\infty)} \mapsto C_{(0,\infty)}$:

$$\int_0^u \mathcal{J}[\zeta]\,(u) = \int_0^\infty \zeta(u+y)dP(y)$$

Επιπλέον, από το **Θεώρημα 3.1** (Chen Yang & Kristina P. Sendova, 2013)., αν η συνάρτηση $\zeta(u)$ ικανοποιεί την εξίσωση (5.2), για $u > 0$ ικανοποιεί επίσης την παρακάτω ομογενή ολοκληροδιαφορική εξίσωση:

$$\left[\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda_j + \delta + c\frac{\partial}{\partial u}\right)\right]\zeta(u) = \left(\prod_{j=1}^{n}\lambda_j\right)\mathcal{I}[\zeta](u) \tag{5.3}$$

Ως απόρροια του παραπάνω θεωρήματος, από την **Πρόταση 3.1** της βιβλιογραφίας, ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, δίνεται από τη σχέση:

$$\left[\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda_j + \delta + c\frac{\partial}{\partial u}\right)\right]\psi_\delta(u) = \left(\prod_{j=1}^{n}\lambda_j\right)\int_0^\infty \psi_\delta(u+y)dP(y) \tag{5.4}$$

5.4 Η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg για το δυϊκό μοντέλο χρεοκοπίας

5.4.1 Η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg

Ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης $f(x)$ με μεταβλητή $\xi \epsilon R$, συμβολίζεται ως $\tilde{f}(\xi)$ και δίνεται από τη σχέση:

$$\tilde{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx$$

Παίρνοντας τώρα τον μετασχηματισμό Fourier της ολοκληροδιαφορικής συνάρτησης (5.4), έχουμε:

$$\left[\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda_j + \delta + ci\xi\right)\right]\tilde{\psi}_\delta(\xi) = \left(\prod_{j=1}^{n}\lambda_j\right)\tilde{\psi}_\delta(\xi)\hat{f}_X(-i\xi)$$

Αν η ξ δεν αποτελεί ρίζα του πολυώνυμου:

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda_j + \delta + ci\xi\right) = \left(\prod_{j=1}^{n}\lambda_j\right)\hat{f}_X(-i\xi) \tag{5.5}$$

Προκύπτει ότι $\tilde{\psi}_\delta(\xi) = 0$. Θέτοντας επιπλέον $s = -i\xi$ στην (5.5), μας δίνει την γενικευμένη εξίσωση του Lundberg για το δυϊκό μοντέλο χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση:

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1 + \frac{\delta - cs}{\lambda_j}\right) = \hat{f}_X(s) \tag{5.6}$$

5.4.2 Οι ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg

Σύμφωνα με το **Θεώρημα 4.1** (Chen Yang & Kristina P. Sendova, 2013), αποδεικνύεται ότι για $\delta > 0$, η εξίσωση (5.6) έχει n ρίζες με θετικό πραγματικό μέρος. Σύμφωνα με το **Θεώρημα 4.2** (Chen Yang

& Kristina P. Sendova, 2013), για $\delta = 0$, έχει n ρίζες με θετικό πραγματικό μέρος και μια ρίζα $s = 0$. Και τα 2 θεωρήματα ισχύουν υπό την προϋπόθεση να ισχύει η συνθήκη καθαρού ασφαλίστρου.

5.5 Ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας

Από τα **Λήμμα 5.1, 5.2** της βιβλιογραφίας, αποδεικνύεται στο **Θεώρημα 5.3** της βιβλιογραφίας, ότι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας για οποιοδήποτε $u > 0$, είναι της μορφής:

$$\psi_\delta(u) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=0}^{h_j - 1} r_{j,k} u^k \right) e^{-\rho_j(\delta) u} \tag{5.7}$$

Στην παραπάνω εξίσωση:

- Οι m ρίζες $\rho_j(\delta)$, αποτελούν τις ξεχωριστές ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg, όπου $m \leq n$
- Οι h_j, για $j = 1,2, \dots, m$ εκφράζουν τις πολλαπλότητες των ριζών της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg
- Οι συντελεστές $r_{j,k}$, αποκτώνται λύνοντας το παρακάτω γραμμικό σύστημα εξισώσεων για $i = 1,2, \dots, n-1$

$$\sum_{k=0}^{i} \sum_{j:h_j > k} \frac{i!\,(-1)^k}{(i-k)!} {\rho_j}^{i-k}(\delta) r_{j,k} = \left(\frac{\delta}{c}\right)^i \tag{5.8}$$

Στην **ειδική περίπτωση**, όπου οι παράμετροι λ_j είναι ίσες, για $j = 1,2, \dots, n$, προκύπτει ότι:

- Όλες οι ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg είναι ξεχωριστές μεταξύ τους (οπότε $m = n$).
- Η πολλαπλότητα των ριζών $h_j = 1$ για όλα τα $j = 1,2, \dots, n$

Ο μετασχηματισμός Laplace $\psi_\delta(u)$ απλοποιείται:

$$\psi_\delta(u) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1} \prod_{i=1, i\neq j}^{n} \left(\rho_j - \frac{\delta}{c}\right)}{\left[\prod_{i=1}^{j-1} (\rho_j - \rho_i)\right]\left[\prod_{i=j+1}^{n} (\rho_i - \rho_j)\right]} e^{-\rho_j u}$$

5.6 Αριθμητικά αποτελέσματα

Για τα αριθμητικά αποτελέσματα, γίνονται οι παρακάτω εξής υποθέσεις:

- Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X, είναι η εκθετική κατανομή $f_X(x) = e^{-x}$
- Η κατανομή του χρόνου των αφίξεων είναι η γενικευμένη κατανομή $Erlang - 3$ με παραμέτρους $\lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = 25,\ \lambda_3 = 32$
- Η σταθερά των εξόδων $c = 1$
- Η παράμετρος του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας $\delta = 0$

Αντικαθιστώντας στην γενικευμένη εξίσωση του Lundberg τα παραπάνω δεδομένα, προκύπτει η εξίσωση της μορφης:

$$\left(1-\frac{s}{9}\right)\left(1-\frac{s}{25}\right)\left(1-\frac{s}{32}\right)=\frac{1}{1+s}$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι 4^{ου} βαθμού, με μια μηδενική ρίζα, μια ρίζα $s_1 = 7$ με πολλαπλότητα 1, και μια ρίζα $s_2 = 29$ με πολλαπλότητα 2.

Για $\delta = 0$, η πιθανότητα χρεοκοπίας για θετικό αρχικό αποθεματικό είναι της μορφής:

$$\psi_0(u) = r_1 e^{-7u} + (r_{2,0} + r_{2,1}u)e^{-29u}$$

Οι συντελεστές $r_{j,k}$ βρίσκονται λύνοντας την εξίσωση (5.8) και ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{gathered} r_1 + r_{2,0} = 1 \\ 7r_1 + 29r_{2,0} - r_{2,1} = 0 \\ 49r_1 + 841r_{2,0} - 58r_{2,1} = 0 \end{gathered}$$

Λύνοντας το παρακάτω σύστημα έχουμε:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{841}{484} \\ r_{2,0} &= -\frac{357}{484} \\ r_{2,1} &= -\frac{203}{22} \end{aligned}$$

Και τελικά, η πιθανότητα χρεοκοπίας για θετικό αρχικό αποθεματικό:

$$\psi_0(u) = \frac{841}{484}e^{-7u} - \frac{357+4466u}{484}e^{-29u}$$

Παρατήρηση

Θέτοντας στην παραπάνω συνάρτηση $u = 0$, προκύπτει ότι $\psi_0(0) = 1$. Αυτό συμβαίνει επειδή η διαδικασία έχει ένα σταθερό όρο εξόδων ct. Όταν ξεκινάει η στοχαστική διαδικασία από το σημείο $u = 0$, στο απειροστά μικρό χρονικό διάστημα $(0, dt)$, το πλεόνασμα για μικρό χρονικό διάστημα θα είναι $U(t) < 0$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

(1) David C.M. Dickson & Christian Hipp, (1998). Ruin Probabilities for Erlang(2) risk processes.

(2) David Landriault & Gordon E. Willmot, (2009). On the Joint Distributions of the Time to Ruin, the Surplus Prior to Ruin, and the Deficit at Ruin in the Classical Risk Model.

(3) Stathis Chadjiconstantinidis & Spyridon Vrontos, (2014). On a renewal risk process with dependence under a Farlie–Gumbel–Morgenstern copula.

(4) Hansjörg Albrecher & Onno J. Boxma, (2005). On the discounted penalty function in a Markov-dependent risk model.

(5) Franck Adékambi & Essodina Takouda, (2022). On the Discounted Penalty Function in a Perturbed Erlang Renewal Risk Model with Dependence

(6) Chen Yang & Kristina P. Sendova, (2013). The ruin time under the Sparre-Andersen dual model

(7) Jinxia Zhu & Hailiang Yang, (2008). Ruin Probabilities of a Dual Markov-Modulated Risk Model

Markov Chains: https://brilliant.org/wiki/markov-chains/)

(8) Susan M. Pitts (2006). *The fast Fourier transform algorithm in ruin theory for the classical risk model*

(9) Asmussen S. &Albrecher H. (2011) *Ruin Probabilities.* World Scientific (2nd edition).

(10) Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A. & Nesbitt C.J., (1997). *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries, Illinois, USA.

(11) Dickson, D.C.M., (2005). *Insurance Risk and Ruin*. Cambridge University Press, Cambridge.

(12) Gray, R. and Pitts, S.M., (2012). *Risk Modelling in General Insurance: From Principles to Practice* (International Series on Actuarial Science). The institute of Actuaries.

(13) Rolski T., Schmidli H., Schmidt V. & Teugels J., (1999). *Stochastic Processes for insurance and finance*. Wiley.

(14) Willmot G. E. & Lin X.S., (2001). *Lundberg Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications*. Springer.

Ελληνική Βιβλιογραφία

(15) Κουτσόπουλος Κ., (1999). *Αναλογιστικά Μαθηματικά. Μέρος Α: η θεωρία των κινδύνων*.

(16) Κωνσταντινίδης Δ., (2011). *Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου*. Μέρος Α.

(17) Πολίτης Κ., (2017). *Εισαγωγή στη θεωρία συλλογικού κινδύνου: το συλλογικό πρότυπο και θεωρία χρεοκοπίας*. 2η έκδοση.