



Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Τμήμα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Χρηματοοικονομική και Τραπεζική»

Διπλωματική Εργασία

ΠΟΙΑ ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΑΣΦΑΛΙΣΗΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΕΙ ΚΑΛΥΤΕΡΑ ;

ΣΥΝΤΑΚΤΗΣ : **ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΦΕΡΤΗΣ**

ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ: **ΜΧΡΗ2123**

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: **ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΜΙΧΑΗΛ ΑΝΘΡΩΠΕΛΟΣ**

ΕΠΙΤΡΟΠΗ : **ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΜΙΧΑΗΛ ΑΝΘΡΩΠΕΛΟΣ**

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΚΟΥΡΟΓΕΝΗΣ

ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΕΓΓΛΕΖΟΣ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2023

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου Μιχαήλ Ανθρωπέλο για την βοήθεια, την εμπιστοσύνη στις ικανότητες μου και τις χρήσιμες συμβουλές του κατά την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και όλους τους ανθρώπους που ήταν κοντά μου και με στήριζαν και πίστευαν σε όλη την διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία θα αναφέρουμε την έννοια και την χρησιμότητα πίσω από την ασφάλιση ενός χαρτοφυλακίου, όπως και τα πιθανά πλεονεκτήματα αλλά και τους περιορισμούς από την εφαρμογή ενός τέτοιου είδους στρατηγικής. Θα εξετάσουμε κάποιες από τις πλέον γνωστές στρατηγικές ασφάλισης και τον ορθό τρόπο εφαρμογής τους, όπως επίσης και κάποια βασικά στοιχεία τα οποία ένας επενδυτής πρέπει να γνωρίζει ώστε να είναι σε θέση να κατανοήσει το πως λειτουργεί και που βασίζεται η κάθε στρατηγική. Θα κατασκευαστεί ένα βέλτιστο χαρτοφυλάκιο σύμφωνα με την θεωρία χαρτοφυλακίου του Markowitz, στο οποίο θα εφαρμόσουμε ξεχωριστά τις προηγουμένως εξεταζόμενες στρατηγικές ασφάλισης. Αυτό θα πραγματοποιηθεί με πραγματικά δεδομένα από την 01/01/2022 – 16/12/2022, μία περίοδο όπου η χρηματιστηριακή αγορά σημείωσε μεγάλη πτωτική πορεία. Στην συνέχεια θα γίνει αξιολόγηση των αποτελεσμάτων/αποδόσεων από την εφαρμογή της κάθε στρατηγικής. Σύμφωνα με αυτά θα εξαχθούν συμπεράσματα ως προς το ποια στρατηγική ασφαρίζει την αξία του χαρτοφυλακίου αποτελεσματικότερα κάτω από παρόμοιες συνθήκες με αυτές της αγοράς του 2022 και θα αναφέρουμε κάποιους παράγοντες, οι οποίοι μπορούν να επηρεάσουν την αποτελεσματικότητα αυτών των στρατηγικών.

ABSTRACT

In this master thesis we will state the sense and usefulness of portfolio insurance. We will outline the potential advantages as well as limitations when deciding to implement such strategies. We will take a close look at some well known insurance strategies and how to properly implement them, as well as some basic facts that an investor should know in order to be able to understand how each strategy works. An optimal portfolio will be constructed according to Markowitz Portfolio theory, in which we will separately apply the previously analyzed insurance strategies. This will be accomplished with real data from 01/01/2022 – 16/12/2022, a time period where the stock market experienced a large downward trend. Afterwards, the results from the implementation of each strategy will be evaluated. According to them, we will draw some conclusions as to which strategy secures the value of the portfolio most effectively under similar economic conditions to those of the 2022 market and we will mention some factors, which can affect the effectiveness of these strategies.

Table of Contents

Ευχαριστίες	2
ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	3
ABSTRACT.....	4
Εισαγωγή.....	7
Κεφάλαιο 1 ^ο	8
1.1 Dynamic-Asset Allocation	8
1.2 Options	8
1.3 Futures Contracts	11
1.4 Value-at-Risk	12
1.5 Κυρτή και Κοίλη Συνάρτηση Αποδόσεων	13
Κεφάλαιο 2ο	16
Portfolio Insurances	16
Πίνακας 1.: Μηχανισμός της ασφάλισης χαρτοφυλακίου	17
2.2 Buy and Hold Strategies	18
2.3 Constant-Mix strategies	19
Πίνακας 2.: Rebalancing to a Constant Mix (60/40).	20
Payoff Diagram.....	20
Πίνακας 3: Constant-Mix Results with Market Volatility.....	21
2.4 Stop-Loss Portfolio Insurance Strategies	21
Stop-Loss Payoff Diagram: Case 1	22
Stop-Loss Payoff Diagram: Case 2	23
2.5 Option-Based Portfolio Insurance Strategies	23
OBPI results: Case 1	27
OBPI results: Case 2	28
2.5.2 Dynamic Replication of OBPI.	29
2.5.3 Dynamic Replication of OBPI using Futures.	30
Πίνακας 4: Profit or loss of expensive futures (\$510).....	31
Dynamic OBPI using Futures: case 1	33
Dynamic OBPI using Futures: case 2	34
2.6 Constant-Proportion Portfolio Strategies	35
CPPI: Case 1.....	37
CPPI Payoff Diagram 1.....	38
CPPI: Case 2.....	39
CPPI: Case 3.....	40
CPPI: Case 4.....	41

CPPI Payoff Diagram 2.....	42
2.7 VaR-based Portfolio Insurance Strategies.....	43
VBPI Case 1.....	46
VBPI Payoff Diagram 1	47
VBPI Case 2.....	48
VBPI and Variability Estimation 1.....	49
VBPI Case 3.....	50
VBPI Payoff Diagram 2	51
Κεφάλαιο 3 ^ο	52
3.1 Introduction.....	52
3.2 Calculation of a Z-score	52
Z-score.....	53
3.2 Selection of Final Companies.....	53
CVs.....	54
Index Model	55
Expected Returns of the Final Companies	56
3.3 Optimal Weights Selection	56
Final Portfolio Weights.....	58
Κεφάλαιο 4 ^ο	59
Basic Data for our underlying portfolio	59
Risk-free rates	59
4.1 Buy and Hold Strategy.....	60
4.2 Stop-Loss Portfolio Insurance	61
4.3.1 Static Option Based Portfolio Insurance.....	62
4.3.2 Dynamic Option Based Portfolio Insurance	63
4.4 Constant Proportion Portfolio Insurance	65
4.5 VaR-Based Portfolio Insurance	65
4.6 Conclusion and Results	66
Total Return from Each Strategy.....	66
Final Portfolio Value from Each Strategy	68
Exposure in Risky Asset.....	69
Market Performance through Insurance Period.....	69
4.7 Τελικά σχόλια βάση των αποτελεσμάτων	70
Βιβλιογραφικές Πηγές	73

Εισαγωγή

Η ασφάλιση χαρτοφυλακίου δεν είναι στην κυριολεξία μία μορφή ασφάλισης, όπου ένας επενδυτής πληρώνει κάποιο ποσό, περιοδικά ή εφάπαξ, σε έναν τρίτο για να διασφαλίσει την αξία, ή ένα μέρος αυτής, ενός χαρτοφυλακίου που έχει ήδη στην κατοχή του, ο οποίος με την σειρά του αποδέχεται αυτό το κίνδυνο και θα καλύψει οποιαδήποτε ζημία παρατηρηθεί από την στιγμή έναρξης της ασφάλισης έως την λήξη της. Στην πραγματικότητα πρόκειται για συγκεκριμένες στρατηγικές, που έχουν ως κύριο στόχο την προστασία της αξίας του χαρτοφυλακίου, του επενδυτή επιτρέποντας του να περιορίζει το κίνδυνο, από το ενδεχόμενο μίας καθοδικής/πτωτικής πορείας της αγοράς (δυσμενές ενδεχόμενο για την αξία του χαρτοφυλακίου). Παράλληλα του επιτρέπουν να συμμετέχει σε τυχόν κέρδη από μία ανοδική πορεία της αγοράς. Εναλλακτικά η ασφάλιση χαρτοφυλακίου αποτελείται από στατικές ή δυναμικές στρατηγικές κατανομής των περιουσιακών στοιχείων εντός ενός χαρτοφυλακίου ή αντιστάθμισης του κινδύνου, που επιτρέπουν στον επενδυτή να αλλάξει το μέγεθος του κινδύνου που είναι διατεθειμένος να ανεχτεί, εγκαταλείποντας ένα μέρος από την αναμενόμενη απόδοση της επένδυσής του.

Σε αυτή την εργασία θα αναλύσουμε κάποια βασικά στοιχεία για την λογική και τους στόχους πίσω από την γενική εικόνα των στρατηγικών ασφάλισης χαρτοφυλακίου και θα εξετάσουμε τον τρόπο λειτουργίας κάποιων δημοφιλών στρατηγικών όπως η απλή Stop-Loss, η Constant Proportion, η Option Based και η VaR-Based Portfolio Insurance με την χρήση παραδειγμάτων. Επίσης θα μελετηθεί και η επίδραση που θα είχαν αυτές οι στρατηγικές στην απόδοση ενός χαρτοφυλακίου, που θα κατασκευάσουμε με βάση την θεωρία χαρτοφυλακίου του Markowitz, στην επενδυτική περίοδο του 2022 που χαρακτηρίστηκε από οικονομική αστάθεια και μεγάλη πτώση της αγοράς του χρηματιστηρίου, σε σχέση με την πιο απλή και κλασική μορφή διαχείρισης χαρτοφυλακίου, την Buy-and-Hold.

Κεφάλαιο 1^ο

Θα ξεκινήσουμε με μία σύντομη ανάλυση των βασικότερων "εργαλείων" που θα μας χρειαστούν για να εκτελέσουμε τις στρατηγικές ασφάλισης χαρτοφυλακίου που θα εξετάσουμε.

1.1 Dynamic-Asset Allocation

Η dynamic asset allocation, σύμφωνα με τον Rubenstein, επιτρέπει στους επενδυτές να έχουν τους στόχους τους πιο στενά ευθυγραμμισμένους με τον τρόπο που οι ίδιοι έχουν στο μυαλό τους τον κίνδυνο. Έτσι αντί να μετράνε τον κίνδυνο σε όρους διακύμανσης, να τον μετράνε ως την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ζημία και του πόσο μεγάλη μπορεί να είναι αυτή η ζημία, όπως ακριβώς συμβαίνει στην πραγματικότητα, αφού οι περισσότεροι «λογικοί» επενδυτές δεν αντιμετωπίζουν την upside and downside μεταβλητότητα ή αν προτιμάτε την μεταβλητότητα των πιθανών κερδών και αυτή των πιθανών ζημιών, συμμετρικά. Αυτή η διάκριση δεν θα έπαιζε ρόλο εάν τα διαθέσιμα χαρτοφυλάκια είχαν συμμετρικά ανοδικά και καθοδικά αποτελέσματα στην τελική τους αξία, αλλά στην πράξη, μη-συμμετρικά αποτελέσματα είναι εύκολο να εξασφαλιστούν. Πιο συγκεκριμένα, κάτι τέτοιο μπορεί να εξασφαλιστεί μέσω χρήσης δικαιωμάτων, ή γενικά παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων και δυναμικών στρατηγικών διαχείρισης χαρτοφυλακίου. Οπότε αυτή η διάκριση έχει πρακτική σημασία. Επιπλέον, πολλοί επενδυτές μπορεί να ανησυχούν για άλλες πτυχές της κατανομής της πιθανότητας των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου τους, όπως για την πιθανότητα πραγματοποίησης μίας μεγάλης ζημίας που είναι πιθανό να προκαλέσει μια αναπροσαρμογή μεγάλου κόστους του χαρτοφυλακίου τους ή ακόμα και χρεοκοπία.

Ένα γενικό πρόβλημα είναι η απόκτηση της δυνατότητας ελέγχου για το ακριβές σχήμα της γραμμής αποδόσεων του χαρτοφυλακίου ή ισοδύναμα το σχήμα της κατανομής πιθανότητας των αποδόσεων, σε μία συγκεκριμένη ημερομηνία που θα έχει επιλεχθεί (payoff date). Με αυτό τον έλεγχο, ο επενδυτής θα μπορεί να ανταλλάσσει το ύψος της γραμμής των αποδόσεων για το επιθυμητό σχήμα/δομή της. Στην ουσία, ο επενδυτής ανταλλάσσει αναμενόμενη απόδοση (όπου καθορίζεται από το ύψος της κατανομής) για έναν γενικό τρόπο μέτρησης του κινδύνου (το σχήμα της κατανομής). Τα εργαλεία για να το φέρει εις πέρας είναι τα δικαιώματα (αγοράς, πώλησης), τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, οι δυναμικές στρατηγικές, είτε κάποιος συνδυασμός των προηγούμενων

1.2 Options

Τα δικαιώματα προαίρεσης αποτελούν κατηγορία των χρηματοοικονομικών παραγώγων, διαπραγματεύονται τόσο σε χρηματιστήρια όσο και σε εξωχρηματιστηριακές αγορές και βασίζονται πάντα σε άλλα υποκείμενα περιουσιακά στοιχεία. Αποτελούν μία συμφωνία, μεταξύ δύο αντισυμβαλλόμενων, του αγοραστή του δικαιώματος (long position), ο οποίος έχει την δυνατότητα αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει ή να πωλήσει το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο σε μία καθορισμένη τιμή, που ονομάζεται **τιμή εξάσκησης**, σε μία καθορισμένη μελλοντική ημερομηνία, που ονομάζεται **ημερομηνία λήξης** και τον πωλητή του δικαιώματος

(short position), ο οποίος έχει την υποχρέωση να πουλήσει ή να αγοράσει, αντίστοιχα, το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο σε μία καθορισμένη τιμή, σε μία καθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον. Για να αναλάβει αυτή την υποχρέωση ο πωλητής του δικαιώματος λαμβάνει από τον αγοραστή ένα ασφάλιστρο (premium), το οποίο ονομάζεται **τιμή δικαιώματος**.

Υπάρχουν δύο βασικές κατηγορίες δικαιωμάτων προαίρεσης:

1. **Δικαίωμα αγοράς (Call option)**, είναι μία συμφωνία που δίνει στον αγοραστή το δικαίωμα να αγοράσει το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο σε μία μελλοντική, καθορισμένη ημερομηνία, **T**, σε μία καθορισμένη τιμή, **K**. Το ασφάλιστρο που δίνει ο αγοραστής του δικαιώματος αγοράς στον πωλητή συμβολίζεται με **c**.
2. **Δικαίωμα πώλησης (Put option)**, είναι μία συμφωνία που δίνει στον αγοραστή το δικαίωμα να πουλήσει το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο σε μία μελλοντική, καθορισμένη ημερομηνία, **T**, σε μία καθορισμένη τιμή, **K**. Το ασφάλιστρο που δίνει ο αγοραστής του δικαιώματος πώλησης στον πωλητή συμβολίζεται με **p**.

Επίσης, μία ακόμη διάκριση είναι ο τύπος του δικαιώματος, όπου οι δύο βασικές κατηγορίες είναι **Ευρωπαϊκού και Αμερικάνικου τύπου**. Ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα μπορεί να εξασκηθεί από τον αγοραστή **μόνο στην ημερομηνία λήξης του δικαιώματος**, ενώ ένα Αμερικάνικο δικαίωμα μπορεί να εξασκηθεί **οποιαδήποτε στιγμή μέχρι την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος**.

Επομένως, μπορούμε να καταλάβουμε ότι υπάρχουν 4 βασικές θέσεις στα δικαιώματα προαίρεσης που μπορεί να πάρει ένας επενδυτής.

S(T): τιμή υποκείμενου τίτλου στη λήξη του δικαιώματος

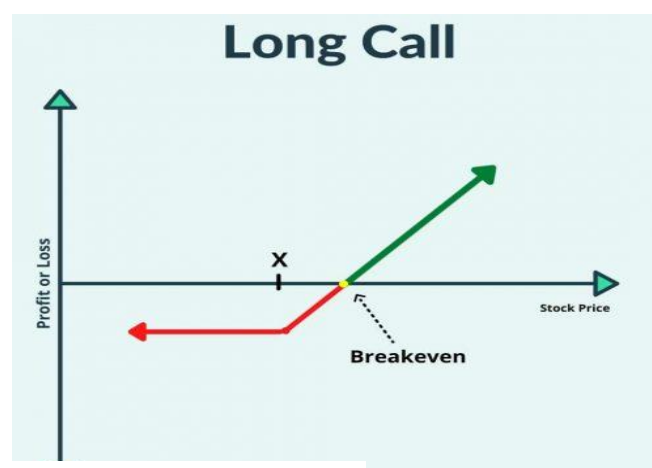
T: χρόνος λήξης του δικαιώματος

K ή X: τιμή εξάσκησης του δικαιώματος

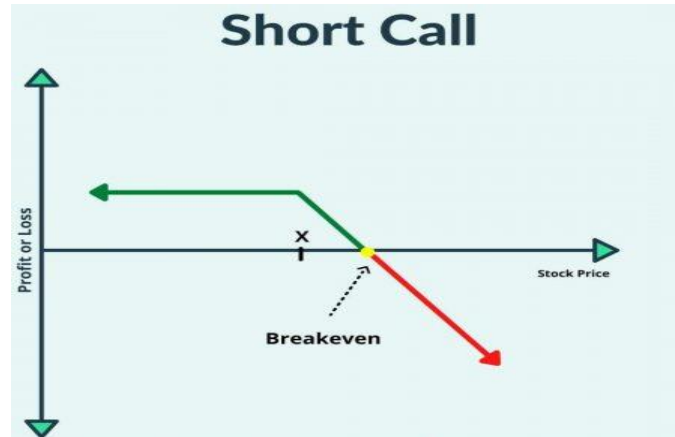
P: ασφάλιστρο δικαιώματος πώλησης

c: ασφάλιστρο δικαιώματος αγοράς

1. Long position σε ένα Δικαίωμα αγοράς, όπου η συνάρτηση κέρδους/ζημίας στην λήξη είναι: $(P/L) = -c + \max\{S(T) - K, 0\}$ και διαγραμματικά:

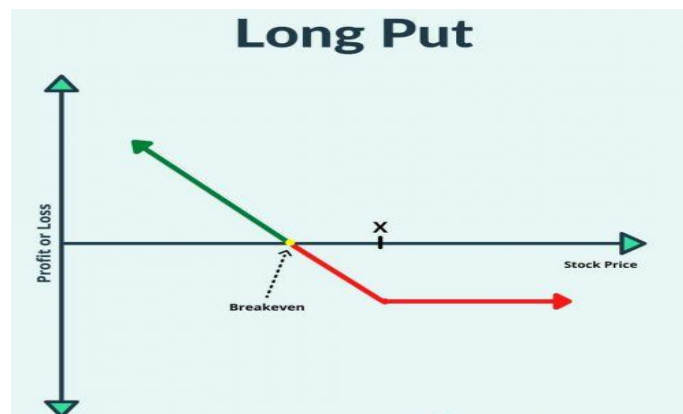


2. Short position σε ένα Δικαίωμα αγοράς, όπου η συνάρτηση κέρδους/ζημίας στην λήξη είναι: $(P/L) = c - \max\{S(T) - K, 0\}$ και **διαγραμματικά**



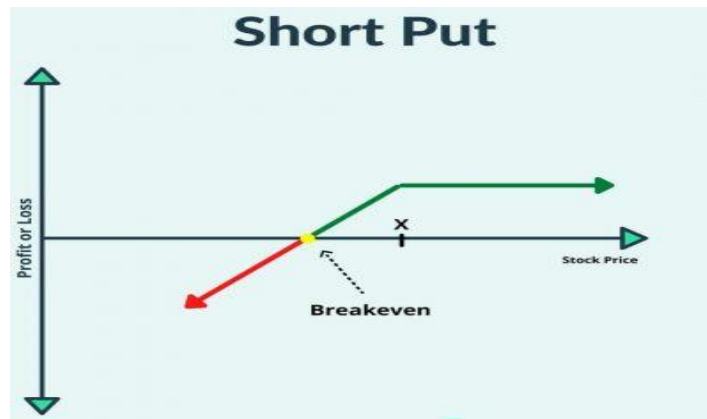
Source: Project finance.com

3. Long position σε ένα Δικαίωμα πώλησης, όπου η συνάρτηση κέρδους/ζημίας στην λήξη είναι: $(P/L) = -p + \max\{K - S(T), 0\}$ και **διαγραμματικά**:



Source: Project finance.com

4. Short position σε ένα Δικαίωμα πώλησης, όπου η συνάρτηση κέρδους/ζημίας στην λήξη είναι: $(P/L) = p - \max\{K - S(T), 0\}$ και **διαγραμματικά**:



Source: Project finance.com

Επίσης, αναφερόμαστε σε ένα δικαίωμα προαίρεσης με τον εξής τρόπο ανάλογα την τιμή εξάσκησης και την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου.

Moneyness	Call Option	Put Option
In-The-Money (ITM)	$S(t) > K$	$S(t) < K$
Out-The-Money (OTM)	$S(t) < K$	$S(t) > K$
At-The-Money (ATM)	$S(t) = K$	$S(t) = K$

Τέλος, ο πιο διαδεδομένος τρόπος τιμολόγησης των δικαιωμάτων είναι μέσω των εξισώσεων των Black&Scholes, χρησιμοποιώντας risk-neutral valuation:

$$c = S * e^{-q*T} * N(d1) - K * e^{-r*T} * N(d2) \quad d1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) * T}{\sigma * \sqrt{T}}$$

$$p = K * e^{-r*T} * N(-d2) - S * e^{-q*T} * N(-d1), \quad d2 = d1 - \sigma * \sqrt{T}$$

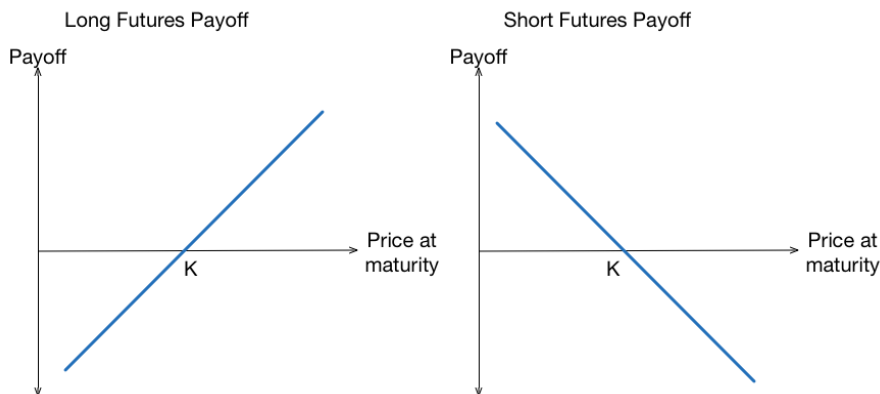
Όπου, σ : μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου, r : το risk free rate, q : η μερισματική απόδοση του υποκείμενου τίτλου και $N(\cdot)$: η αθροιστική κατανομή της τυπικής κανονικής κατανομής.

1.3 Futures Contracts

Τα Προθεσμιακά/Μελλοντικά συμβόλαια και αυτά με την σειρά τους αποτελούν κατηγορία των χρηματοοικονομικών παραγώγων προϊόντων. Είναι δεσμευτικές συμφωνίες για την αγορά ή την πώληση ενός περιουσιακού στοιχείου μεταξύ δύο αντισυμβαλλόμενων, του αγοραστή (long position) και του πωλητή (short position), όπου ο αγοραστής συμφωνεί να αγοράσει από τον πωλητή το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο σε μία συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή, T , η οποία ονομάζεται **ημερομηνία λήξης**, σε μία συγκεκριμένη τιμή, K , η οποία ονομάζεται **τιμή παράδοσης**. Πολύ σημαντικό στοιχείο των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης είναι ότι καμία συναλλαγή δεν πραγματοποιείται όταν υπογράφεται το συμβόλαιο, παρά μόνο στην λήξη του συμβολαίου και βασίζεται στην τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου στην ημερομηνία λήξης, $S(T)$.

Υπάρχουν δύο βασικές θέσεις αυτή του:

- Αγοραστή (long position), όπου η ανταμοιβή (payoff) της θέσης του είναι: $S(T) - K$.
- Πωλητή (short position), όπου η ανταμοιβή της θέσης του είναι $K - S(T)$



Source: Brilliant.org

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν ένας επενδυτής επιλέξει τη χρονική στιγμή t_1 να πάρει μία θέση αγοραστή (πωλητή) σε h συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης με ημερομηνία λήξης T , μπορεί ανά πάσα χρονική στιγμή να "κλείσει" την θέση του παίρνοντας την ακριβώς αντίθετη θέση, δηλαδή πωλητή (αγοραστή) πάλι στον ίδιο αριθμό h συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης με την ακριβώς ίδια ημερομηνία λήξης T . Έστω ότι αποφασίζει να κλείσει την ανοιχτή του θέση στα h συμβόλαια την χρονική στιγμή t_2 , τότε το κέρδος/ζημία από αυτή του την ενέργεια θα είναι η διαφορά των τιμών στα δύο συμβόλαια επί των αριθμό των συμβολαίων, δηλαδή ισχύει:

$$P/L = h * (F(t_1, T) - F(t_2, T)).$$

Πολλές φορές επενδυτές αναγκάζονται να κλείσουν την θέση τους νωρίτερα από την ημερομηνία λήξης των συμβολαίων τους επειδή έχουν πάρει μία θέση σε συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης με λήξη μεγαλύτερη από αυτή που ιδανικά θα επιθυμούσαν, αλλά πιθανώς δεν υπήρχε σε διαθέσιμα διαπραγματεύσιμα συμβόλαια. Ένα επιπλέον πρόβλημα είναι ότι είναι πολύ πιθανό να μην υπάρχουν διαπραγματεύσιμα συμβόλαια στο επιθυμητό περιουσιακό στοιχείο, π.χ. σε ένα συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο, τότε ενδείκνυται να πάρουν μία ανάλογη θέση σε συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης σε δείκτες αγοράς που είναι σε μεγάλο βαθμό συσχετισμένοι με το υποκείμενο χαρτοφυλάκιο κάνοντας χρήση του beta του ανάλογου χαρτοφυλακίου.

1.4 Value-at-Risk

Το Value-at-Risk (VaR) ή αλλιώς η Αξία σε Κίνδυνο είναι μία προσέγγιση ενός μέτρου για την ποσοτικοποίηση του συνολικού κινδύνου, το οποίο εφευρέθηκε από την τράπεζα J.P.Morgan (1994). Με βάση τον Hull (2012), μπορούμε να ορίσουμε αυτό τον όρο κάνοντας την ακόλουθη δήλωση : «Είμαστε βέβαιοι με πιθανότητα $\alpha\%$, ότι το μέγιστο ποσό που μπορεί να χαθεί κατά το χρόνο T είναι VaR_α », όπου το VaR_α έχει πάντα θετική τιμή, $VaR_\alpha > 0$, και μπορεί να εκφραστεί σε οποιαδήποτε νομισματική μονάδα. Επίσης μπορεί να παραφραστεί ως «Υπάρχει $(1-\alpha)\%$ πιθανότητα ότι η ζημία θα υπερβεί το VaR_α σε χρόνο T », όπου συνήθως αυτή η

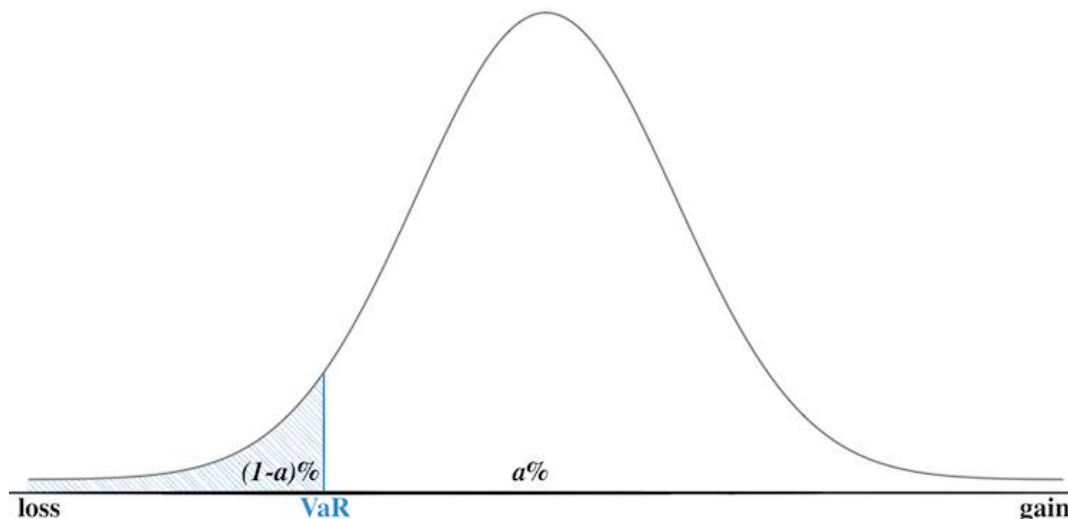
πιθανότητα $(1-\alpha)$ καλείται **shortfall probability** και το VaR_α ορίζεται ως το ποσό όπου ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη:

$$P(Z \leq VaR_\alpha) = 1-\alpha$$

Το VaR μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να εκτιμηθούν οι μέγιστες ζημίες που μπορούν να πραγματοποιηθούν στην αξία ενός χαρτοφυλακίου σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα και το οποίο είναι συνάρτηση του χρονικού διαστήματος, $[0, T]$, και του επιπέδου εμπιστοσύνης, α . Όσο υψηλότερο το επίπεδο εμπιστοσύνης, α , τόσο πιο μεγάλη θα είναι και η τιμή του VaR_α . Επίσης, στην πράξη, επειδή συχνά δεν υπάρχουν αρκετά δεδομένα για την ιστορική προσομοίωση του VaR για περισσότερες από μία ημέρες, χρησιμοποιείται η υπόθεση,

$$N\text{-day VaR} = VaR * \sqrt{N}.$$

Μία διαγραμματική απεικόνιση του VaR_α :



Source: quantpedia.com

Τέλος απλά αναφέρουμε ότι οι τρεις πιο δημοφιλείς προσεγγίσεις υπολογισμού του VaR είναι οι :

- Historical Method
- Variance-Covariance Method
- Monte Carlo Simulation

1.5 Κυρτή και Κοίλη Συνάρτηση Αποδόσεων

Το πρώτο βήμα για μία dynamic asset allocation είναι η δήλωση του στόχου του επενδυτή, ο οποίος στην πράξη είναι η μορφή της επιθυμητής γραμμής αποδόσεων (payoff line) ή εναλλακτικά η επιθυμητή κατανομή πιθανότητας των αποδόσεων. Σαν παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε την αγορά από έναν επενδυτή ενός αγοραίου χρηματιστηριακού δείκτη ως το υποκείμενο χαρτοφυλάκιό του με τρέχουσα τιμή, S , και έναν στοχευμένο χρόνο αποπληρωμής (time-to-payoff), T . Σημαντικός, επίσης, παράγοντας εκτός από τα προηγούμενα είναι η ετήσια απόδοση του risk-free,

r. Η επιθυμητή γραμμή αποδόσεων θα είναι μια προκαθορισμένη συνάρτηση της τιμής του υποκείμενου χαρτοφυλακίου στην ημέρα αποπληρωμής, S_T , και του ίδιου του χρόνου αποπληρωμής T , έστω, $V(S_T, T)$ η οποία καλείται συνάρτηση αποπληρωμής (payoff function).

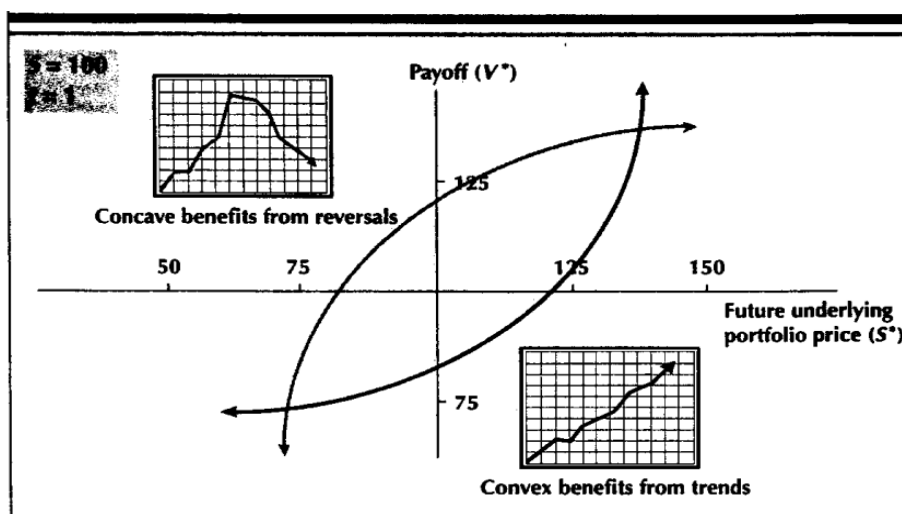
Το πρόβλημα είναι το πως θα αποκτήσουμε την επιθυμητή συνάρτηση V , ακολουθώντας μία αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική με την μικρότερη δυνατή αρχική επένδυση. Συνήθως το πιο δύσκολο βήμα στην δυναμική κατανομή περιουσιακών στοιχείων είναι το αρχικό, δηλαδή ο καθορισμός του στόχου. Βοηθητικό είναι να έχουμε στο μυαλό μας πως ο στόχος του «μέσου» επενδυτή κατά τον Markowitz είναι η γραμμή αποδόσεων που προκύπτει από την αγορά και κατοχή ενός χαρτοφυλακίου όλων των περιουσιακών στοιχείων της αγοράς, σταθμισμένο με βάση της αξία του κάθε ενός, όπου συχνά αναφέρεται ως το «**χαρτοφυλάκιο της αγοράς**» (market portfolio). Αν ένας επενδυτής επιθυμεί να διαχωριστεί ορθολογικά από αυτή στρατηγική, του χαρτοφυλακίου της αγοράς, θα πρέπει να ωφελείται με κάποιο τρόπο για την διαφοροποίηση του, η οποία μπορεί να είναι λόγω της πιθανής διαφοράς πλούτου, προβλέψεων ή προτιμήσεων κινδύνου.

Μια σημαντική διαφορά των επενδυτών έχει σχέση με το εάν η επιθυμητή συνάρτηση αποδόσεων θα είναι κοίλη (με αρνητική δεύτερη μερική παράγωγο $\partial^2 V / \partial S < 0$) ή κυρτή (με θετική δεύτερη μερική παράγωγο $\partial^2 V / \partial S > 0$). Τώρα, θεωρώντας τον αρχικό πλούτο ενός επενδυτή μοιρασμένο (όχι απαραίτητα ισοδύναμα) εν μέρει στον προαναφερθέν χρηματιστηριακό δείκτη και εν μέρει στο risk-free asset, ισχύει ότι:

- Ο επενδυτής που θα επιλέξει μία **κοίλη (concave) συνάρτηση αποδόσεων** θα είναι κάποιος που σχετικά ταυτίζεται με τον «μέσο» επενδυτή και πιστεύει πως **οι αποδόσεις του δείκτη που έχει επιλέξει ως υποκείμενο χαρτοφυλάκιο θα έχουν μικρότερη μεταβλητότητα ή αλλιώς θα έχουν μεγαλύτερη «επιστροφή στη μέση τιμή του» (mean-reversion)**. Εναλλακτικά, σε σχέση με τον «μέσο» επενδυτή, είναι κάποιος που επιθυμεί λιγότερο κίνδυνο όσο ο πλούτος του αυξάνεται, κάτι που διακρίνεται από την γραμμή αποδόσεων, αφού η κλίση της μειώνεται όταν αυξάνεται η τιμή του υποκείμενου χαρτοφυλακίου. Μία τέτοια συνάρτηση μπορεί να δημιουργηθεί πουλώντας ένα μερίδιο της επένδυσης του χρηματιστηριακό δείκτη όταν η τιμή του αυξάνεται και επενδύοντας τα έσοδα στο risk-free asset και αγοράζοντας αντίστοιχα ένα μερίδιο του όταν η τιμή του πέφτει, χρησιμοποιώντας μέρος της επένδυσης από το risk-free asset. Με αυτό τον τρόπο η κατανομή πιθανότητας θα είναι **αρνητικά ασυμμετρική (negatively skewed)** σε σχέση με αυτή του «μέσου» επενδυτή, αφού η πώληση σε υψηλές τιμές του δείκτη μειώνει την πιθανότητα μίας πολύ υψηλής απόδοσης και η αγορά του σε μικρές τιμές αυξάνει την πιθανότητα μίας μικρής αρνητικής απόδοσης.
- Ο επενδυτής που θα επιλέξει μία **κυρτή (convex) συνάρτηση αποδόσεων** θα είναι κάποιος που δεν ταυτίζεται με τον «μέσο» επενδυτή και πιστεύει πως **οι αποδόσεις του δείκτη που έχει επιλέξει ως υποκείμενο χαρτοφυλάκιο θα έχουν μεγαλύτερη μεταβλητότητα ή θα έχουν μικρότερη «επιστροφή στη μέση τιμή του» (mean-reversion)**. Εναλλακτικά, σε αντίθεση με τον

«μέσο» επενδυτή είναι κάποιος που επιθυμεί περισσότερο κίνδυνο όσο ο πλούτος του αυξάνεται, κάτι που διακρίνεται από την γραμμή αποδόσεων, αφού η κλίση της αυξάνεται όσο αυξάνεται η τιμή του υποκείμενου χαρτοφυλακίου. Μία τέτοια συνάρτηση μπορεί να δημιουργηθεί αγοράζοντας ένα μερίδιο της επένδυσης στον χρηματιστηριακό δείκτη όταν η τιμή του αυξάνεται, χρησιμοποιώντας μέρος της επένδυσης από το risk-free asset και πουλώντας ένα μερίδιο όταν η τιμή του πέφτει, και επενδύοντας τα έσοδα στο risk-free asset. Με αυτό τον τρόπο η κατανομή πιθανότητας θα είναι **θετικά ασυμμετρική (positively skewed)** σε σχέση με αυτή του «μέσου» επενδυτή, αφού η αγορά σε υψηλές τιμές του δείκτη αυξάνει την πιθανότητα μία πολύ υψηλής απόδοσης και η πώληση του σε μικρές τιμές μειώνει την πιθανότητα μίας μικρής αρνητικής απόδοσης.

Concave vs Convex payoff functions



Source: Rubinstein on Derivatives

Το παραπάνω διάγραμμα απεικονίζει δύο συναρτήσεις αποπληρωμής (payoff functions), όπου όσο αυξάνεται η μελλοντική τιμή του υποκείμενου χαρτοφυλακίου, τόσο αυξάνεται και το μέγεθος της αποπληρωμής. Όπως παρατηρούμε η κοίλη (concave) συνάρτηση έχει καλύτερη απόδοση όσο η τιμή του υποκείμενου χαρτοφυλακίου καταλήξει κοντά στην τρέχουσα τιμή του, $S=100$, ενώ η κυρτή (convex) συνάρτηση τα πάει καλύτερα όταν η τιμή του χαρτοφυλακίου μεταβάλλεται σε μεγάλο βαθμό προς οποιαδήποτε κατεύθυνση της αγοράς και αφού κάτι τέτοιο είναι πιθανότερο να συμβεί όταν υπάρχει μεγάλη μεταβλητότητα στην αγορά, οι επενδυτές που αναμένουν μεγαλύτερη μεταβλητότητα θα επιθυμούν λογικά μία κυρτή συνάρτηση αποπληρωμής.

Κεφάλαιο 2ο

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφέρουμε τους γενικούς σκοπούς των στρατηγικών ασφάλισης χαρτοφυλακίου αλλά και τις ιδιαιτερότητες της καθεμιά στρατηγικής, σε ποιους απευθύνονται και θα περιγράψουμε με παραδείγματα τον τρόπο λειτουργίας κάποιων σημαντικών στρατηγικών ασφάλισης.

Portfolio Insurances

Η Ασφάλιση Χαρτοφυλακίου (Portfolio Insurance) είναι ένα δημοφιλές παράδειγμα του dynamic asset allocation. Απευθύνεται κυρίως σε επενδυτές που (σε σχέση με άλλους) δεν μπορούν ή δεν θέλουν να "ανεχτούν" ζημίες πέρα από ένα ποσό, αλλά παρά όλα αυτά θα ήθελαν να επενδύσουν σε αξιόγραφα που ενέχουν κίνδυνο αφού έλκονται από τις υψηλές αναμενόμενες αποδόσεις τους. Σύμφωνα με τους Pain and Rand (2008), τα προϊόντα της ασφάλισης χαρτοφυλακίου είναι πιο διαδεδομένα στην Ευρώπη παρά στην Αμερική. Η πρώτη προτεραιότητα και στόχος στη διαχείριση ενός «ασφαλισμένου» χαρτοφυλακίου είναι να βεβαιωθεί ότι η αξία του δεν θα καταλήξει κάτω από κάποιο ελάχιστο επίπεδο σε μία στοχευμένη ημερομηνία πληρωμής, **T**. Αυτό το ελάχιστο επίπεδο συνήθως αναφέρεται ως **Floor**. Σε σύγκριση με την αποκλειστική επένδυση στο υποκείμενο χαρτοφυλάκιο, στην κακή εκδοχή, όπου η τιμή του χαρτοφυλακίου είναι μικρότερη από αυτή του Floor στην στοχευμένη ημερομηνία πληρωμής, **T**, (**$S_T < \text{Floor}$**), ένα «ασφαλισμένο» χαρτοφυλάκιο θα υποφέρει μικρές έως καθόλου ζημίες. Πολύ συχνά ως Floor χρησιμοποιείται η τρέχουσα αξία του υποκείμενου χαρτοφυλακίου, **V₀**, κατά την έναρξη της στρατηγικής ασφάλισης. Με αυτό τον τρόπο η στρατηγική παρέχει την εγγύηση ότι δεν θα πραγματοποιηθούν ζημίες σε σχέση με την αρχική αξία του χαρτοφυλακίου, **V_T ≥ V₀**. Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, σύμφωνα με τον Rubenstein (1999), πρέπει να σημειωθεί ότι παρά το όνομα, στην πράξη, το «ασφαλισμένο» χαρτοφυλάκιο δεν είναι στην κυριολεξία διασφαλισμένο από κάποιον, αλλά η ορολογία εννοεί πως αν όλα δουλέψουν όπως αναμένεται, τα αποτελέσματα θα είναι πανομοιότυπα με ένα στην πράξη ασφαλισμένο χαρτοφυλάκιο.

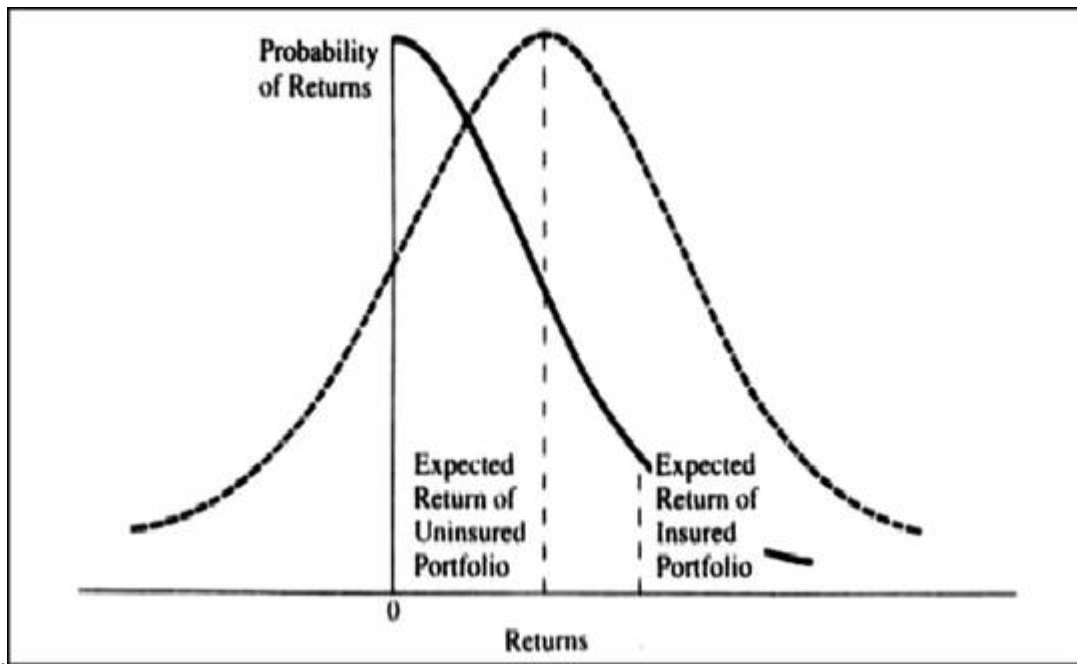
Επειδή ένα «ασφαλισμένο» χαρτοφυλάκιο θα πρέπει να αποδίδει καλύτερα από το υποκείμενο χαρτοφυλάκιο όταν τα πράγματα κινηθούν δυσμενώς για την αξία του (on the downside), θα πρέπει να αποδίδει χειρότερα στην καλή εκδοχή (on the upside), διαφορετικά θα κυριαρχούσε του υποκείμενου χαρτοφυλακίου. Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ένα πολύ απλό παράδειγμα για το πως η ασφάλιση χαρτοφυλακίου δουλεύει, με το υποκείμενο χαρτοφυλάκιο να αγοράζετε έναντι **\$95** και **\$5** να ξοδεύονται στην ασφάλιση του, έτσι ώστε το ελάχιστο ποσό που να μπορεί ο επενδυτής να πραγματοποιήσει να είναι τα \$95, ενώ η αξία του υποκείμενου χαρτοφυλακίου μπορεί να μειωθεί έως και στα \$75 αν η αγορά πέσει. Ενώ αν η αξία του χαρτοφυλακίου αυξηθεί, τότε και αξία του ασφαλισμένου χαρτοφυλακίου θα αυξηθεί αλλά σε μικρότερο βαθμό.

Πίνακας 1.: Μηχανισμός της ασφάλισης χαρτοφυλακίου

Initial investment	\$100
Cost of portfolio insurance	-\$ 5
Amount of investment going toward securities	\$ 95
Amount invested	\$100

Value of Portfolio	Return on Uninsured	Value of Insured	Net Return on Insured
at year end (\$)	Portfolio (%)	Portfolio (\$)	Portfolio (%)
75	-25	95	-5
80	-20	95	-5
85	-15	95	-5
90	-10	95	-5
95	-5	95	-5
100	0	95	-5
105	5	100	0
110	10	105	5
115	15	110	10
120	20	115	15
125	25	120	20.

Με άλλα λόγια, η ασφάλιση χαρτοφυλακίου επιτρέπει στους συμμετέχοντες στην αγορά να αλλάξουν την κατανομή της απόδοσης τους έτσι ώστε να ανταποκρίνεται στις ανάγκες και τις προτιμήσεις των επενδυτών σε σχέση με τον κίνδυνο που είναι διατεθειμένοι να ανεχτούν. Το παρακάτω σχήμα δείχνει την βέλτιστη αν και όχι τόσο συχνά παρατηρούμενη επίδραση της ασφάλισης στις αναμενόμενες αποδόσεις ενός χαρτοφυλακίου.

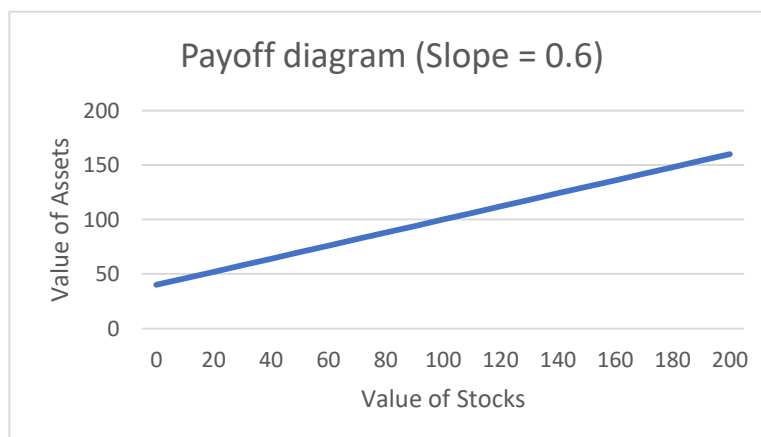


Source: Handbook of Quantitative Finance

Παρατηρούμε ότι η αναμενόμενη απόδοση του ανασφάλιστου χαρτοφυλακίου είναι μεγαλύτερη από την αναμενόμενη απόδοση του ασφαλισμένου χαρτοφυλακίου, όπως αναφέραμε και προηγουμένως. Το ανασφάλιστο χαρτοφυλάκιο έχει μεγαλύτερες προοπτικές αποδόσεων καθώς και μεγαλύτερο κίνδυνο σε μία καθοδική πορεία της αγοράς, ενώ το ασφαλισμένο χαρτοφυλάκιο περιορίζει την ενδεχόμενη ζημία στο κόστος της αντιστάθμισης. Το δυναμικό κέρδος του ασφαλισμένου χαρτοφυλακίου είναι πάντα χαμηλότερο από αυτό του ανασφάλιστου χαρτοφυλακίου. Το κόστος της ασφάλισης είναι αυτό που προκαλεί η χαμηλότερη απόδοση για το ασφαλισμένο χαρτοφυλάκιο σε περίπτωση αύξησης των τιμών.

2.2 Buy and Hold Strategies

Μια στρατηγική Buy-and-Hold χαρακτηρίζεται από ένα αρχικό μείγμα (π.χ. 60/40 χαρτοφυλάκιο μετοχών/λογαριασμών καταθέσεων) που αγοράζεται και στη συνέχεια διακρατάται έως την λήξη της επενδυτικής περιόδου. Είναι μία στρατηγική όπου έχει την λογική του οτιδήποτε και να συμβεί με τις σχετικές αξίες των επενδύσεων δεν θα πραγματοποιηθεί καμία αναπροσαρμογή στα βάρη των αντίστοιχων επενδύσεων. Το επόμενο διάγραμμα δείχνει το διάγραμμα αποπληρωμής για μια στρατηγική αγοράς και διακράτησης με ένα μείγμα 60/40 χαρτοφυλακίου μετοχών και καταθέσεων αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι το χαρτοφυλάκιο του επενδυτή αξίζει $V_0 = \$100$ και ότι το τρέχον επίπεδο της χρηματιστηριακής αγοράς του χαρτοφυλακίου των μετοχών είναι και αυτό $\$100$.



Το παραπάνω διάγραμμα απεικονίζει ορισμένα γενικά χαρακτηριστικά τέτοιων στρατηγικών:

- Η αξία του συνολικού χαρτοφυλακίου σχετίζεται γραμμικά με αυτή του χαρτοφυλακίου μετοχών και κατά συνέπεια της αγοράς.
- Η αξία του χαρτοφυλακίου αυξάνεται ως συνάρτηση της χρηματιστηριακής αξίας των μετοχών, με κλίση ίση με την αναλογία του χαρτοφυλακίου των μετοχών στο αρχικό μείγμα. Στο δικό μας παράδειγμα, κάθε δολάριο πρόσθετης αξίας αυξάνει την αξία του χαρτοφυλακίου του επενδυτή κατά 60 σεντς.
- Η αξία του χαρτοφυλακίου δεν θα πέσει ποτέ κάτω από την αξία της αρχικής επένδυσης σε καταθέσεις.
- Το δυναμικό κέρδος είναι απεριόριστο
- Όσο μεγαλύτερο είναι το αρχικό ποσοστό που έχει επενδύσει στις μετοχές, τόσο καλύτερη είναι η απόδοση μιας στρατηγικής αγοράς και δια κράτησης όταν οι μετοχές έχουν καλύτερη απόδοση έναντι των λογαριασμών καταθέσεων και τόσο χειρότερη είναι η απόδοση όταν οι μετοχές υποαποδίδουν σε σχέση με τους λογαριασμούς καταθέσεων.

Τα διαγράμματα αποπληρωμής άλλων στρατηγικών αγοράς και δια κράτησης θα διαφέρουν από το παραπάνω σχήμα μόνο ως προς την τομή (το σημείο στο οποίο η γραμμή χτυπά τον κατακόρυφο άξονα) και την κλίση (slope).

2.3 Constant-Mix strategies

Οι Constant-Mix όπως ίσως προιδεάζει το όνομα τους είναι στρατηγικές όπου από την αρχή της επένδυσης αποφασίζεται από τον επενδυτή ένα σταθερό καταμερισμός του πλούτου του, μεταξύ επένδυσης σε αξιόγραφα που ενέχουν κίνδυνο, έστω χαρτοφυλάκιο μετοχών, και επένδυσης στο risk-free, έστω λογαριασμών καταθέσεων. Αυτός ο καταμερισμός σαν ποσοστό του πλούτου, μεταξύ μετοχών και καταθέσεων δεν θα αλλάξει ανεξάρτητα των κινήσεων της αγοράς (ανοδική ή καθοδική). Προφανώς μετά από μία κίνηση των τιμών των μετοχών προς οποιαδήποτε κατεύθυνση τα ποσοστά των επενδύσεων θα μεταβάλλονται ανάλογα το μέγεθος της μεταβολής. Τότε ο επενδυτής πρέπει να κάνει τις απαραίτητες ενέργειες έτσι ώστε να διατηρηθεί η αρχική αναλογία στις δύο επενδύσεις. Οι Constant-Mix στρατηγικές είναι δυναμικές προσεγγίσεις στη λήψη επενδυτικών αποφάσεων σε αντίθεση με τις προαναφερθείσες, στατικές, buy-and-hold στρατηγικές. Κάθε φορά που αλλάζουν οι σχετικές αξίες των περιουσιακών στοιχείων, απαιτείται από τον επενδυτή να πραγματοποιήσει αγοροπωλησίες για να επιστρέψει στο επιθυμητό μείγμα.

Έστω ένας επενδυτής που επενδύει \$60 σε ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών που έχει **beta = 1**, δηλαδή κινείται ακριβώς όπως η αγορά, και \$40 σε λογαριασμούς καταθέσεων και επιθυμεί να διατηρήσει ένα **σταθερό μείγμα 60/40** καθ' όλη την διάρκεια της επένδυσης του. Και έστω ότι η χρηματιστηριακή αγορά μειώνεται κατά **10%**. Οι μετοχές του επενδυτή θα αξίζουν πλέον **\$54** ($0.9 \cdot 60$), διαμορφώνοντας έτσι

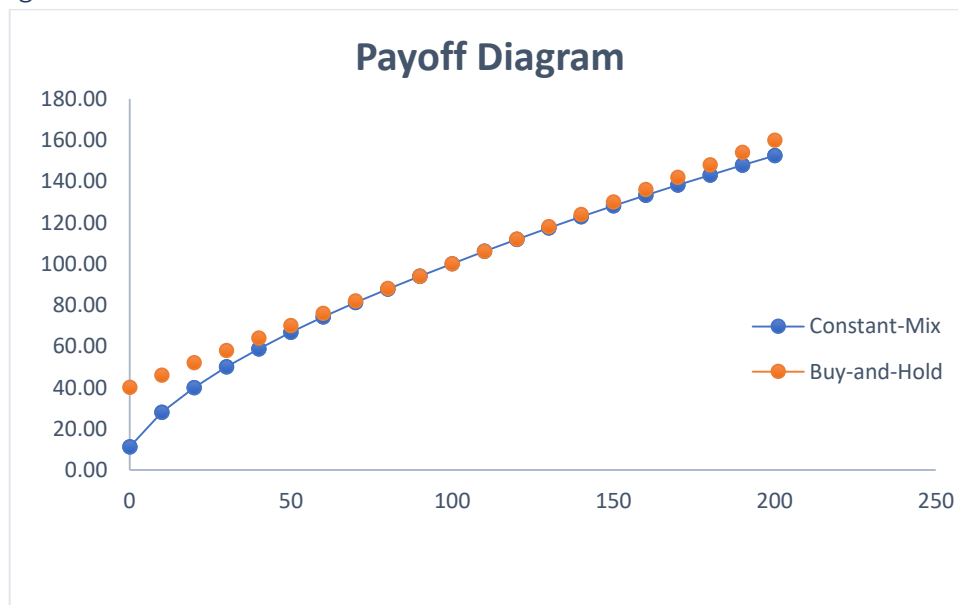
την συνολική αξία του χαρτοφυλακίου **\$94** (\$54 + \$40). Σε αυτό το σημείο, η αναλογία μετοχών στο συνολικό χαρτοφυλάκιο είναι **54/94**, ή **57,4%**, δηλαδή μικρότερη από το επιθυμητό, σταθερό επίπεδο του 60%. Για να επιτευχθεί το επιθυμητό επίπεδο, το χαρτοφυλάκιο πρέπει να έχει το 60% των \$94, ή **\$56,40**, σε μετοχές. Έτσι, ο επενδυτής πρέπει να επενδύσει επιπλέον **\$2,4** (\$56,40 - \$54,00) στις μετοχές, χρησιμοποιώντας τα χρήματα της επένδυσης των καταθέσεων.

Πίνακας 2.: Rebalancing to a Constant Mix (60/40).

Case	Stock Market	Value of Stock	Value of Bills	Value of Assets	Stocks Percentage
Initial	100	60.00	40.00	100.00	60.0%
After change	90	54.00	40.00	94.00	57.4%
After rebalancing	90	56.40	37.60	94.00	60.0%

Σε αυτό το σημείο αξίζει να τονιστεί πως, η εφαρμογή οποιασδήποτε δυναμικής στρατηγικής απαιτεί έναν κανόνα-όριο σχετικά με τις συνθήκες υπό τις οποίες θα πραγματοποιείται μία αναπροσαρμογή (rebalancing) του συνολικού χαρτοφυλακίου. Οι τυπικές προσεγγίσεις αποφεύγουν τις συναλλαγές έως ότου είτε η αξία του χαρτοφυλακίου είτε ένα τμήμα του (π.χ. αξία μετοχών) μεταβληθεί κατά τουλάχιστον ένα δεδομένο ποσοστό. Ας δούμε ένα παράδειγμα από μονότονες κινήσεις της αγοράς και τα αποτελέσματα που θα είχαν στο χαρτοφυλάκιο του παραπάνω επενδυτή ανάλογα την στρατηγική που θα επέλεγε να ακολουθήσει.

Payoff Diagram



Στα προηγούμενα παραδείγματα, μόλις η αγορά άρχισε να κινείται συνέχισε να κινείται προς την ίδια κατεύθυνση. Αλλά στην πραγματικότητα η αγορά είναι απολύτως ικανή να αντιστραφεί. Τέτοιες αντιστροφές ευνοούν τις Constant-Mix στρατηγικές έναντι των προσεγγίσεων Buy-and-Hold. Έστω η απλή περίπτωση όπου οι τιμές των μετοχών που έχουν επενδυθεί πέφτουν από \$100 σε \$90 και την επόμενη περίοδο επιστρέφουν στα \$100. Η αγορά είναι επίπεδη (flat), με την έννοια ότι καταλήγει εκεί που ξεκίνησε, ενδιάμεσα όμως υπήρξαν μεταβολές. Σε μια τέτοια

περίπτωση κάποιος που ακολουθεί μια στρατηγική Buy-and-Hold θα καταλήξει με τον ίδιο πλούτο που είχε στην αρχή, σε αντίθεση με κάποιον που ακολουθεί μία στρατηγική Constant-Mix.

Πίνακας 3: Constant-Mix Results with Market Volatility.

Case	Stock Market	Value of Stock	Value of Bills	Value of Assets	Percentage in Stocks
Initial	100	60.00	40.00	100.00	60.0%
After change	90	54.00	40.00	94.00	57.4%
After rebalancing	90	56.40	37.60	94.00	60.0%
After change	100	62.67	37.60	100.27	62.5%
After rebalancing	100	60.16	40.11	100.27	60.0%

Ανάλογα το μοτίβο των μεταβολών των τιμών θα εξαρτηθεί το ποια στρατηγική θα αποδώσει καλύτερα. Σε περιπτώσεις όπου η αγορά καταλήγει κοντά στην τιμή από όπου ξεκίνησε πιθανότατα, θα ευνοούν την Constant-Mix στρατηγική, ενώ σε αυτές, όπου η αγορά καταλήγει σε τιμή που διαφέρει αρκετά από αυτή που ξεκίνησε θα ευνοούν την Buy-and-Hold. Εναλλακτικά μία Constant-Mix στρατηγική ευνοείται από **reversals των τιμών της αγοράς**, ενώ η απλή Buy-and-Hold από τις τάσεις (trends).

2.4 Stop-Loss Portfolio Insurance Strategies

Πρόκειται ίσως για την πρώτη και πιο απλή μορφή στρατηγικής ασφάλισης χαρτοφυλακίου που θα εξετάσουμε. Ο στόχος της είναι η εξασφάλιση ενός ελάχιστου ποσού (**Floor**), ορισμένο από τον επενδυτή, στο τέλος της επενδυτικής περιόδου ή αλλιώς στην προκαθορισμένη ημερομηνία αποπληρωμής (payoff-date), **T**, ενώ παράλληλα προσπαθεί να εκμεταλλευτεί κάθε πιθανό κέρδος από το μέρος της επένδυσης στο περιουσιακό στοιχείο που ενέχει κίνδυνο.

Ακολουθώντας μία Stop-Loss στρατηγική, ένας επενδυτής ορίζει ένα ισοδύναμο με μία **εντολή stop-loss**, η οποία είναι μία εντολή ρευστοποίησης της επένδυσης του υποκείμενου χαρτοφυλακίου και ταυτόχρονης επένδυσης των εσόδων στο risk free (λογαριασμούς καταθέσεων) αν η τιμή/αξία του υποκείμενου χαρτοφυλακίου πέσει κάτω από ένα δεδομένο επίπεδο. Εναλλακτικά, ένας επενδυτής, ο οποίος κατανέμει το συνολικό αρχικό του πλούτο, V_0 , στο υποκείμενο χαρτοφυλάκιο, βάζει ένα φράγμα στις πιθανές ζημιές σε ένα προκαθορισμένο σημείο στην περίπτωση καθοδικής κίνησης της αγοράς, ενώ ταυτόχρονα επιτρέπει τα κέρδη από μία πιθανή ανοδική αγορά. Το προκαθορισμένο σημείο που πραγματοποιείται η "εναλλαγή" της επένδυσης είναι το χρονικό σημείο όπου η **Παρούσα Αξία του Floor, προ εξοφλημένη με το risk free rate, είναι μεγαλύτερη από την τρέχουσα αξία του υποκείμενου χαρτοφυλακίου, $PV_t(\text{Floor}) \geq V_t$** . Κάτι που είναι απόλυτα λογικό, διαφορετικά, αν επιλεγόταν ένα σημείο μικρότερης αξίας, η στρατηγική δεν θα μπορούσε να εξασφαλίσει στον επενδυτή το ελάχιστο ποσό που έχει θέσει προς εξασφάλιση, Floor, στην μέρα αποπληρωμής T. Επομένως η έκθεση του επενδυτή στο risky asset σε συνάρτηση του πλούτου του την χρονική στιγμή t, W_t , θα είναι:

- W_t , if $V_t > PV_t(\text{Floor})$
- 0 , if $V_t \leq PV_t(\text{Floor})$

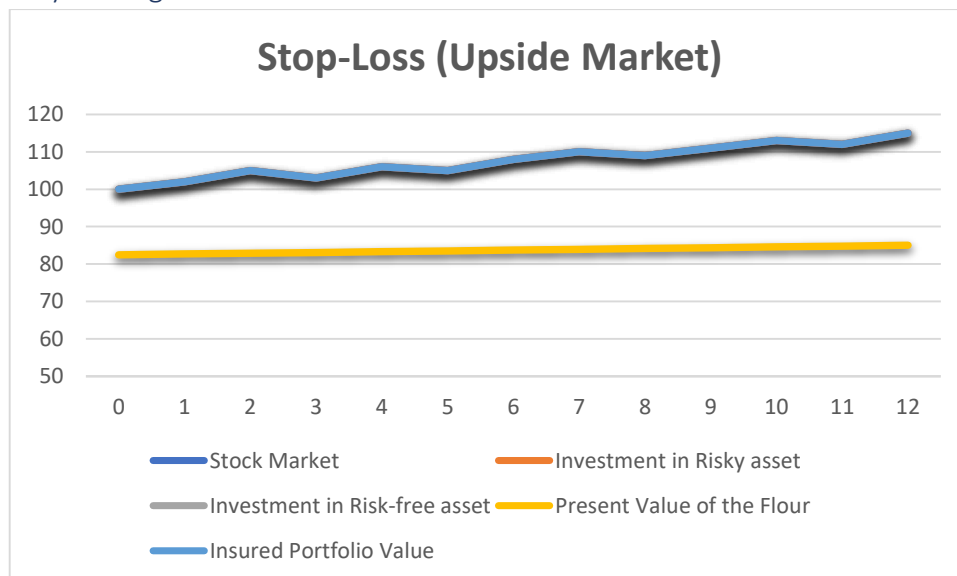
Δηλαδή, ο επενδυτής είτε θα είναι 100% επενδυμένος στο υποκείμενο χαρτοφυλάκιο είτε 100% στο risk-free.

Ας δούμε δύο εκδοχές της πορείας μιας Stop-Loss Portfolio Insurance σε μία (κατά γενική εικόνα) ανοδική και μία καθοδική πορεία της αγοράς. Η επένδυση είναι σε ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών όπου κινείται σε ακριβή αναλογία με την αγορά ($\beta=1$), του οποίου η αρχική αξία είναι $S_0 = V_0 = \$100$ και ορίζεται ως $\text{Floor} = \$85$. Ο χρόνος επένδυσης ορίζεται ως $T = 1 \text{ έτος}$ και για ευκολία θα γίνεται μηνιαία αξιολόγηση της επένδυσης για τυχόν αναπροσαρμογή (rebalancing) του «ασφαλισμένου» χαρτοφυλακίου. Επίσης υποθέτουμε ότι η απόδοση των λογαριασμών καταθέσεων είναι σταθερή και ίση με $r = 3\%$.

1^η Περίπτωση, Ανοδική αγορά.

Παρατηρούμε ότι σε μία τέτοια περίπτωση η Αξία του υποκείμενου χαρτοφυλακίου δεν πέφτει ποτέ κάτω από το κρίσιμο σημείο (παρούσα αξία του floor) και ταυτίζεται με την αξία του «ασφαλισμένου» χαρτοφυλακίου δίνοντας έτσι την δυνατότητα στον επενδυτή να συμμετέχει σε κάθε κέρδος που πραγματοποιήσει το υποκείμενο χαρτοφυλάκιο κατά την διάρκεια της περιόδου επένδυσης καταλήγοντας στην τελική αξία των **\$115**.

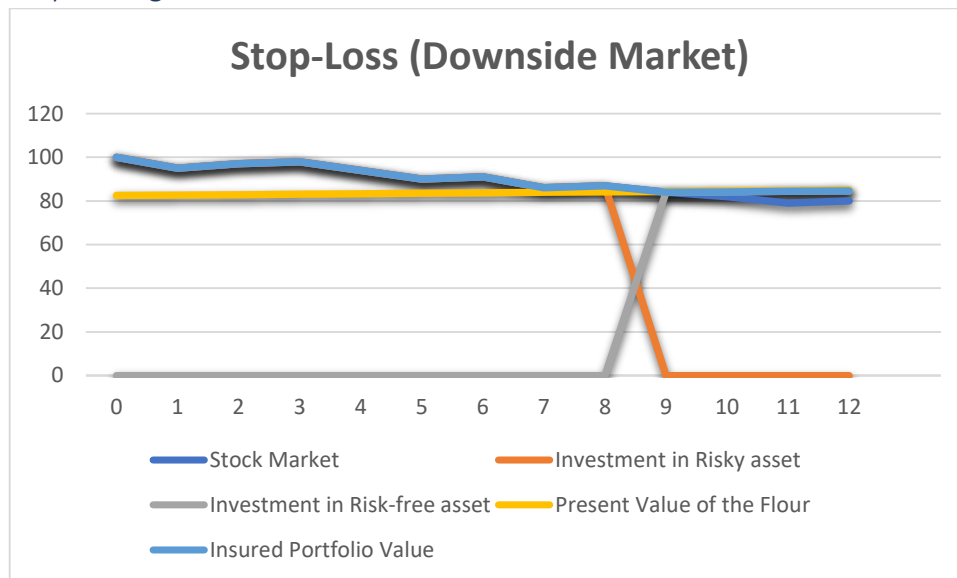
Stop-Loss Payoff Diagram: Case 1



2^η Περίπτωση, Καθοδική αγορά.

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να διακρίνουμε πως σταδιακά, η αγορά και ανάλογα η αξία του ασφαλισμένου χαρτοφυλακίου μειώνονται, έως ότου η αξία του υποκείμενου χαρτοφυλακίου γίνει μικρότερη της $PV(\text{Floor})$ στον 9^ο μήνα (10^η περίοδο στο γράφημα), **\$84** έναντι **\$84,36** αντίστοιχα, όπου τότε η επένδυση ρευστοποιείται και άμεσα επενδύεται στο risk free μέχρι την λήξη της. Καταλήγοντας έτσι στην τελική αξία των **\$84,63** έναντι της τελικής αξίας των \$80 του υποκείμενου χαρτοφυλακίου.

Stop-Loss Payoff Diagram: Case 2



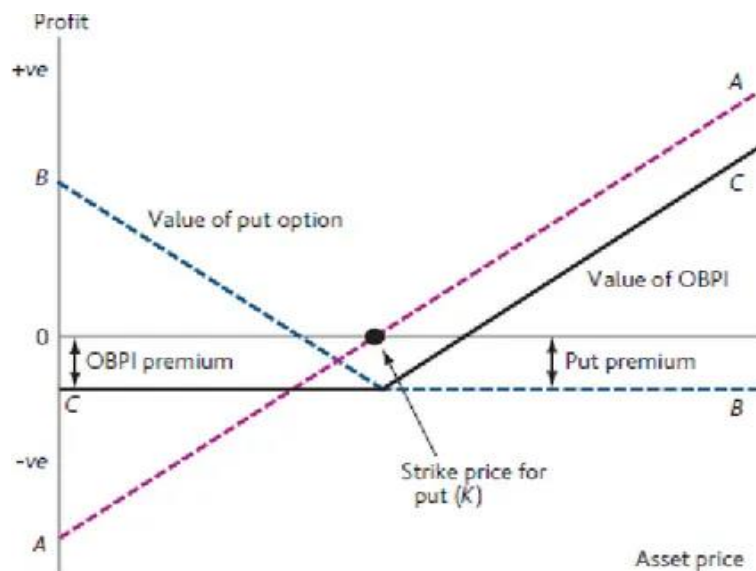
Από τα παραπάνω μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ένα κύριο πρόβλημα με αυτή τη στρατηγική είναι η **άμεση εξάρτησή της από την "πορεία της διαδρομής" που θα πραγματοποιήσει η αγορά κατά την επενδυτική περίοδο**, αφού όταν η τιμή του χαρτοφυλακίου πέσει κάτω από το προκαθορισμένο επίπεδο, $PV(\text{Floor})$, το χαρτοφυλάκιο πωλείται και μετατρέπεται σε επένδυση στο risk-free, η οποία διακρατείται μέχρι τη λήξη της. Έτσι, εκτός και αν ο επενδυτής αποφασίσει να ξαναγοράσει το χαρτοφυλάκιο, **υπάρχει ανεξαρτησία της επένδυσης με τις μελλοντικές κινήσεις της αγοράς μέχρι τη λήξη**. Η χειρότερη εξέλιξη που θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί είναι μία ανάκαμψη της αγοράς αμέσως μετά την εκτέλεση της εντολής stop-loss και την πώληση του υποκείμενου χαρτοφυλακίου. Επίσης αν πραγματοποιηθεί μία μεγάλη πτώση της αγοράς και ανάλογα της αξίας του υποκείμενου χαρτοφυλακίου, με αποτέλεσμα η αξία του να μειωθεί σημαντικά από την Παρούσα αξία του Floor, η συγκεκριμένη στρατηγική θα αποτύχει όσο αναφορά την εξασφάλιση του ελάχιστου ποσού στην τέλος της επενδυτικής περιόδου

2.5 Option-Based Portfolio Insurance Strategies

Οι **OBPI** στρατηγικές έχουν ως στόχο να διαμορφώσουν την συνάρτηση αποπληρωμής (payoff function) μίας επένδυσης ενός περιουσιακού στοιχείου που ενέχει κίνδυνο, έστω ενός χαρτοφυλακίου μετοχών, σε μία στοχευμένη χρονική στιγμή αποπληρωμής, T , ως την ανάλογη ενός δικαιώματος προαίρεσης. Έτσι το «ασφαλισμένο» χαρτοφυλάκιο θα έχει δημιουργήσει ένα φράγμα στις πιθανές ζημιές από μία καθοδική κίνηση της αγοράς, ενώ παράλληλα θα συμμετέχει στα πιθανά κέρδη από μία ανοδική πορεία, αλλά σε μικρότερο βαθμό. Μία απλή OBPI στρατηγική μπορεί να εφαρμοστεί σε μία ήδη υπάρχουσα επένδυση σε ένα χρηματιστηριακό δείκτη (ή θα απαιτεί την επένδυση σε έναν) συν την αγορά ενός δικαιώματος πώλησης γραμμένο σε αυτόν τον δείκτη. Αυτή η στρατηγική επιτρέπει στον επενδυτή να ορίσει ένα κατώτατο επίπεδο που θα επιτρέψει την αξία της

επένδυσης να φτάσει στην λήξη της, το λεγόμενο **Floor**, το οποίο θα είναι ίσο ή μικρότερο της τρέχουσας αξίας της επένδυσης και θα πρέπει να ίσο με την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος πώλησης, **K**.

Ακολουθώντας αυτή την διαδικασία θα προκύψει το παρακάτω διάγραμμα που περιγράφει το προφίλ της καθαρής αποπληρωμής (net-payoff profile) για έναν επενδυτή από μία στατική ΟΒΠΙ θέση στην λήξη, που θέτει ως Floor (και ανάλογα την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος πώλησης) την αρχική αξία της επένδυσης, **Floor = $S_0 = K$** .



Source: Pain and Rand

Η γραμμή **AA** αναπαριστά το **pay-off του επενδυτή από την κατοχή του δείκτη**, σε διαφορετικές τιμές του. Αν η τιμή του δείκτη στην λήξη, **S_T** , είναι μικρότερη από την αρχική του αξία (ή το κόστος αγοράς), **S_0** , ο επενδυτής θα υποστεί ζημία. Η γραμμή **BB** δείχνει το **net-payoff από την κατοχή ενός δικαιώματος πώλησης για τον συγκεκριμένο χρηματιστηριακό δείκτη με τιμή εξάσκησης την αρχική τιμή αγοράς του, $K = S_0$** . Αν στην λήξη του δικαιώματος, η αξία του υποκείμενου δείκτη είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης, **$S_T < K$** , τότε ο επενδυτής μπορεί να βγάλει κέρδος αγοράζοντας το asset από την αγορά και πουλώντας το στον πωλητή του δικαιώματος στην προσυμφωνημένη τιμή **K** (μείον το ασφάλιστρο που έχει πληρωθεί για να αγοράσει εξ αρχής το δικαίωμα). Διαφορετικά, αν η τιμή του δείκτη είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης στη λήξη, **$S_T > K$** , ο επενδυτής δεν εξασκεί το δικαίωμα του και το αφήνει να λήξει. Συνδυάζοντας αυτές τις δύο επενδύσεις σε μία στρατηγική, η ΟΒΠΙ δίνει την δυνατότητα στον επενδυτή να αποκτήσει την γραμμή αποπληρωμής **CC**, η οποία είναι παρόμοια με αυτή ενός δικαιώματος αγοράς γραμμένο στον συγκεκριμένο δείκτη δίνοντας έτσι την δυνατότητα στον επενδυτή να περιορίζει τον πιθανό κίνδυνο από μία πτωτική κίνηση της αγοράς, ενώ παράλληλα του επιτρέπει να συμμετάσχει σε οποιοδήποτε πιθανό κέρδος, μείον το αρχικό ασφάλιστρο (put premium).

Τις περισσότερες φορές όμως στην πράξη, οι επενδυτές δεν θα έχουν στην κατοχή τους μία επένδυση σε κάποιο δείκτη, αλλά σε ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών, το οποίο

ναι μεν θα κινείται ανάλογα με την αγορά αλλά όχι, τις περισσότερες φορές, με τον ίδιο ακριβώς ρυθμό. Επομένως, εφαρμόζοντας την παραπάνω στρατηγική, μια τέλεια αντιστάθμιση δεν θα είναι δυνατή αφού η συσχέτιση μεταξύ του δείκτη αγοράς και του υποκείμενου χαρτοφυλακίου μπορεί να μην είναι τέλεια. Αυτό ονομάζεται **tracking problem**. Όσο υψηλότερη είναι η συσχέτιση μεταξύ του υποκείμενου χαρτοφυλακίου και του δείκτη της αγοράς, $|\rho_{x,m}| \approx 1$, τόσο πιο αποτελεσματική είναι η αντιστάθμιση. Όσο χαμηλότερη είναι η συσχέτιση, τόσο λιγότερο αποτελεσματική είναι η αντιστάθμιση και ανάλογα η στρατηγική ασφάλισης χαρτοφυλακίου. Στο προηγούμενο παράδειγμα, υποθέσαμε ότι ο συντελεστής **beta** ήταν ίσος με **1**, αφού το υποκείμενο χαρτοφυλάκιο ήταν ο ίδιος ο δείκτης της αγοράς. Εάν το **beta** στην πραγματικότητα **δεν ήταν** ίσο με **1**, θα χρειαζόνταν περισσότερα ή λιγότερα συμβόλαια δικαιώματος πώλησης για την ασφάλιση του υποκείμενου χαρτοφυλακίου. Για ένα **beta** < 1 , θα χρειαζόνταν να αγοραστούν λιγότερα συμβόλαια πώλησης, ενώ για ένα **beta** > 1 θα χρειαζόνταν περισσότερα συμβόλαια.

Για παράδειγμα, εάν το χαρτοφυλάκιο είχε **beta** = **1,2** θα χρειαζόταν να αγοραστούν **20% περισσότερα δικαιώματα πώλησης ώστε να αντισταθμιστεί πλήρως το χαρτοφυλάκιο**. Η μεταβολή της τιμής του δείκτη της αγοράς και η αξία του χαρτοφυλακίου, καθώς και η μεταβολή της τιμής του δικαιώματος πώλησης στον δείκτη (ασφάλιστρο), σχετίζονται άμεσα. Η επιτυχία μιας στρατηγικής ασφάλισης χαρτοφυλακίου εξαρτάται από τον σωστό προσδιορισμό του δείκτη αντιστάθμισης (hedge ratio). Ο αριθμός των συμβολαίων δικαιωμάτων που απαιτούνται, είναι ίσος με τον συντελεστή beta του χαρτοφυλακίου σε σχέση με την αγορά, επί την αξία του χαρτοφυλακίου, ως προς την αξία του δείκτη επί τον πολλαπλασιαστή συμβολαίων μετοχών του δείκτη:

$$N = \text{beta} * \frac{S_t}{M_t * m},$$

Όπου, **S_t**: αξία χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή t,

M_t: αξία δείκτη αγοράς την χρονική στιγμή t και m: πολλαπλότητας συμβολαίων μετοχών.

Ας δούμε ένα παράδειγμα των παραπάνω υποθέτοντας ότι ένας επενδυτής κατέχει ένα χαρτοφυλάκιο αξίας **S₀ = \$1.000.000**, και θέλει να διασφαλίσει πως η αξία του δεν θα μειωθεί πέρα από τις **Floor = \$900.000** ή αλλιώς πέρα από το **90% της τρέχουσας αξίας του**, στους επόμενους 6 μήνες. Έστω το χαρτοφυλάκιο έχει συντελεστή **beta** = **1,4**, όπου συντελεστής βήτα είναι το μέτρο που περιγράφει την αναμενόμενη μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου σε σχέση με τις μεταβολές του δείκτη της αγοράς. Επίσης, υποθέτουμε πως η αξία του δείκτη είναι **M₀ = 2000 μονάδες**, ο πολλαπλασιαστής συμβολαίων για μετοχές είναι **m = 100** φορές ο δείκτης. Τέλος, υποθέτουμε ότι το ετήσιο risk-free rate είναι σταθερό ίσο με **r = 5%**, η ετήσια μερισματική απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι ίση με αυτή του δείκτη **D = 3%** και η αναμενόμενη μεταβλητότητα του δείκτη για την συγκεκριμένη περίοδο είναι ίση με **σ = 20%**. Για να εξασφαλίσουμε λοιπόν ότι το χαρτοφυλάκιο θα έχει αξία τουλάχιστον \$900.000 στην λήξη της επενδυτικής περιόδου των 6 μηνών θα πρέπει να αγοράσουμε δικαιώματα πώλησης στον δείκτη της αγοράς με τιμή εξάσκησης **K = \$1857** $((1-0.9)/1.4*2000)$ και λήξη σε **6 μήνες**. Κάνοντας χρήση του τύπου τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης του μοντέλου Black-Scholes έχουμε ότι:

$$p = K * e^{-r*T} * N(-d2) - S * e^{-q*T} * N(-d1)$$

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) * T}{\sigma * \sqrt{T}}, \quad d2 = d1 - \sigma * \sqrt{T}$$

Η τιμή/ασφάλιστρο του ζητούμενου δικαιώματος πώλησης ($S_0=2000$, $K=1857$, $q=3\%$, $r=5\%$, $T=1/2$ έτη) θα είναι:

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{2000}{1857}\right) + \left(0.05 - 0.03 + \frac{0.2^2}{2}\right) * 0.5}{0.2 * \sqrt{0.5}} = 0.666, \quad d2 = 0.666 - 0.2 * \sqrt{0.5} = 0.5245$$

$$N(-d1) = 1 - N(d1) = 1 - 0.7473 = 0.257, \quad N(-d2) = 1 - N(d2) = 1 - 0.70 = 0.30$$

$$p = 1857 * e^{-0.05*0.5} * 0.30 - 2000 * e^{-0.03*0.5} * 0.257 = \$45,34$$

Επομένως το επιθυμητό δικαίωμα πώλησης θα κοστίζει **\$45.34** και για να υπολογίσουμε πόσα δικαιώματα θα πρέπει να αγοράσουμε, ώστε να ασφαλίσουμε το χαρτοφυλάκιο μας θα κάνουμε τον παρακάτω υπολογισμό:

$$N = \text{beta} * \frac{S_0}{M_0 * m} = 1.4 * \frac{1000000}{2000 * 100} = 7.$$

Άρα θα χρειαστούμε 7 δικαιώματα πώλησης.

Από την αγορά των δικαιωμάτων τα αποτελέσματα των πιθανών εξελίξεων ποικίλουν ανάλογα την κίνηση της αγοράς στην επιλεγμένη επενδυτική περίοδο. Κάποια πιθανά αποτελέσματα είναι τα ακόλουθα:

Συνολική Απόδοση Δείκτη = (Απόδοση Δείκτη – Μερίσματα που αφορούν τον Δείκτη).

Συνολική Αναμενόμενη Απόδοση Χαρτοφυλακίου = (beta * Απόδοση Δείκτη).

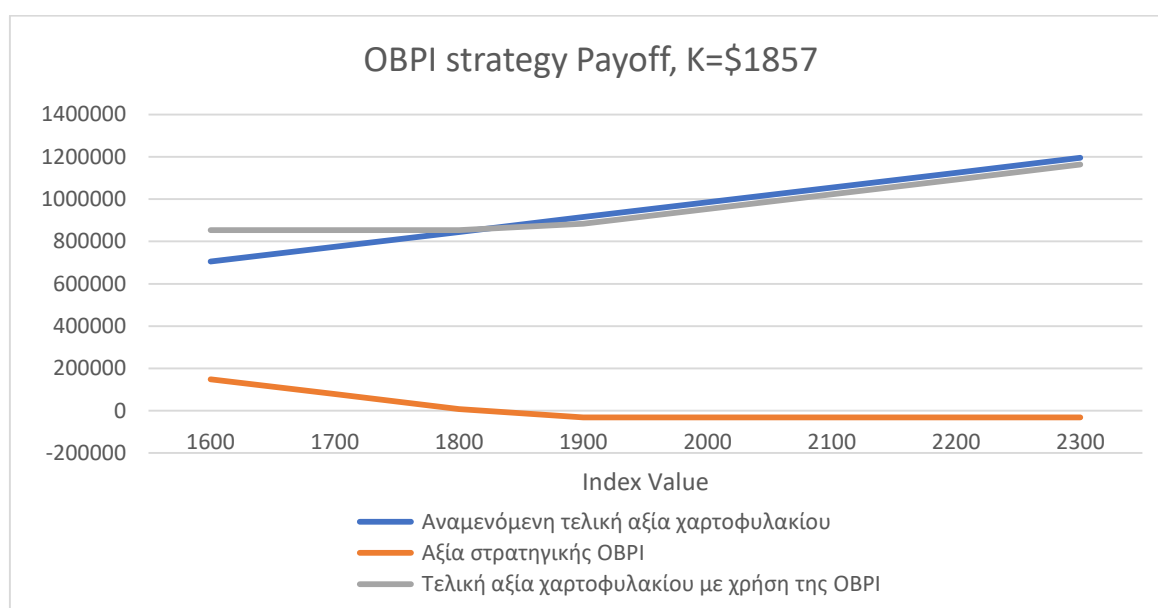
Αναμενόμενη Αύξηση Αξίας Χαρτοφυλακίου = (Συνολική Αναμενόμενη Απόδοση Χαρτοφυλακίου – Μερίσματα Χαρτοφυλακίου).

Αξία στρατηγικής ΟΒΡΙ = N * m * (-p + max(K – M_T, 0)).

Τελική Αξία Χαρτοφυλακίου = Αναμενόμενη Τελική Αξία Χαρτοφυλακίου + Αξία στρατηγικής ΟΒΡΙ.

OBPI results: Case 1

Αξία δείκτη σε 6 μήνες	Απόδοση δείκτη	Μερίσματα που αφορούν το δείκτη	Συνολική απόδοση δείκτη	Συνολική αναμενόμενη απόδοση χαρτοφυλακίου	Μερίσματα χαρτοφυλακίου	Αναμενόμενη αύξηση αξίας χαρτοφυλακίου	Αναμενόμενη τελική αξία χαρτοφυλακίου	Αξία στρατηγικής OBPI	Τελική αξία χαρτοφυλακίου με χρήση της OBPI
1600	-20%	1.5%	-18.5%	-28.0%	1.5%	-29.5%	705000	148157.47	853157.47
1700	-15%	1.5%	-13.5%	-21.0%	1.5%	-22.5%	775000	78157.47	853157.47
1800	-10%	1.5%	-8.5%	-14.0%	1.5%	-15.5%	845000	8157.47	853157.47
1900	-5%	1.5%	-3.5%	-7.0%	1.5%	-8.5%	915000	-31742.53	883257.47
2000	0%	1.5%	1.5%	0.0%	1.5%	-1.5%	985000	-31742.53	953257.47
2100	5%	1.5%	6.5%	7.0%	1.5%	5.5%	1055000	-31742.53	1023257.47
2200	10%	1.5%	11.5%	14.0%	1.5%	12.5%	1125000	-31742.53	1093257.47
2300	15%	1.5%	16.5%	21.0%	1.5%	19.5%	1195000	-31742.53	1163257.47



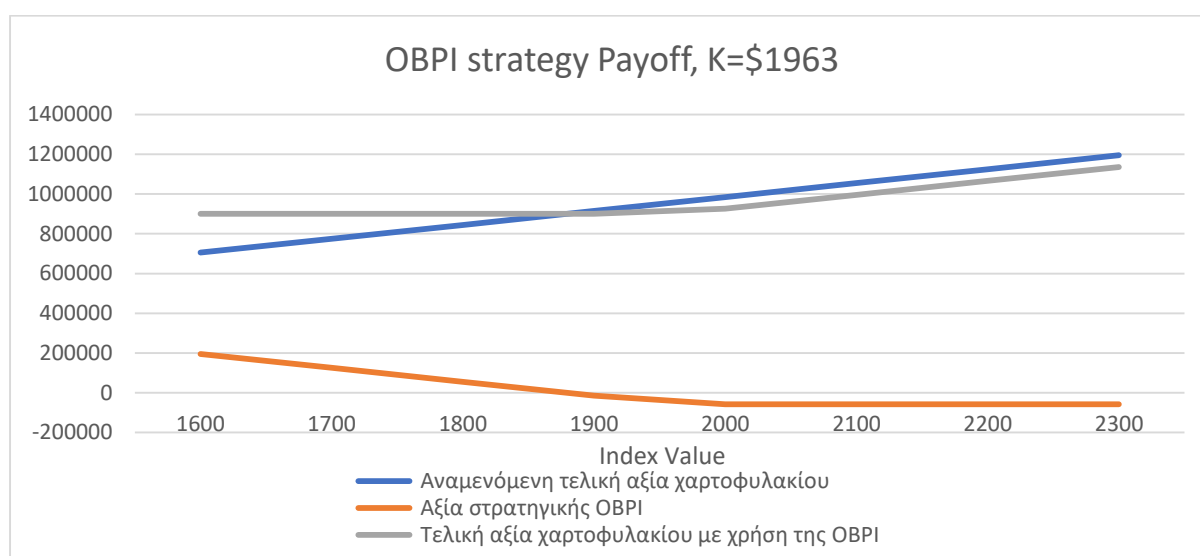
Παρατηρούμε πως πράγματι σε μια ανοδική πορεία της αγοράς η Τελική Αξία του χαρτοφυλακίου μας μειώνεται κατά το κόστος της εφαρμογής την στρατηγικής OBPI, δηλαδή το κόστος αγοράς των απαραίτητων δικαιωμάτων πώλησης. Ενώ σε μία καθοδική πορεία, η Τελική αξία του χαρτοφυλακίου μας αυξάνεται κατά το κέρδος από την ύπαρξη των δικαιωμάτων πώλησης. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα δεν καταφέρνει επαρκώς να διατηρηθεί το ζητούμενο **floor = \$900.000**, καθώς η τελική αξία μπορεί να πέσει έως και τα **$V_T = \$853.157,5$** . Για να αποφευχθεί κάτι τέτοιο θα έπρεπε να αγοράσουμε δικαιώματα με μεγαλύτερη τιμή εξάσκησης, κάτι που θα προκαλούσε μεγαλύτερη διαφορά κέρδους στην περίπτωση μίας ανοδικής αγοράς, καθώς το κόστος της στρατηγικής θα ήταν μεγαλύτερο λόγω των υψηλότερων τιμών των δικαιωμάτων πώλησης.

Αν ακολουθούσαμε ακριβώς την ίδια διαδικασία αλλά αγοράζαμε δικαιώματα πώλησης με τιμή εξάσκησης **K = \$1963**, όπου σύμφωνα με την μέθοδο τιμολόγησης Black-Scholes το κάθε ένα θα κόστιζε **p = \$83.9**, θα είχαμε τα ακόλουθα αποτελέσματα, όπου όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε καταφέρνουμε να διατηρήσουμε το “υποσχόμενο” floor με μία εμφανή μείωση των πιθανών κερδών, η οποία θα είναι μεγαλύτερη όσο υψηλότερη είναι η εσωτερική μεταβλητότητα (implied volatility) του υποκείμενου δείκτη (έχουμε υποθέσει ότι $\sigma=20\%$), το οποίο θα

μεταφράζεται σε αύξηση του ασφαλιστρου του δικαιώματος και ανάλογα στο κόστος της στρατηγικής OBPI.

OBPI results: Case 2

Αξία δείκτη σε 6 μήνες	Απόδοση δείκτη	Μερίσματα που αφορούν το δείκτη	Συνολική απόδοση δείκτη	Συνολική αναμενόμενη απόδοση χαρτοφυλακίου	Μερίσματα χαρτοφυλακίου	Αναμενόμενη αύξηση αξίας χαρτοφυλακίου	Αναμενόμενη τελική αξία χαρτοφυλακίου	Αξία στρατηγικής OBPI	Τελική αξία χαρτοφυλακίου με χρήση της OBPI
1600	-20%	1.5%	-18.5%	-28.0%	1.5%	-29.5%	705000	195377.40	900377.40
1700	-15%	1.5%	-13.5%	-21.0%	1.5%	-22.5%	775000	125377.40	900377.40
1800	-10%	1.5%	-8.5%	-14.0%	1.5%	-15.5%	845000	55377.40	900377.40
1900	-5%	1.5%	-3.5%	-7.0%	1.5%	-8.5%	915000	-14622.60	900377.40
2000	0%	1.5%	1.5%	0.0%	1.5%	-1.5%	985000	-58722.60	926277.40
2100	5%	1.5%	6.5%	7.0%	1.5%	5.5%	1055000	-58722.60	996277.40
2200	10%	1.5%	11.5%	14.0%	1.5%	12.5%	1125000	-58722.60	1066277.40
2300	15%	1.5%	16.5%	21.0%	1.5%	19.5%	1195000	-58722.60	1136277.40



Σύμφωνα με τους Rubinstein και Leland (1981), υπάρχει μια σειρά προβλημάτων με τη χρήση δικαιωμάτων πώλησης σε χρηματιστηριακούς δείκτες για την ασφάλιση χαρτοφυλακίου.

1. Επειδή τα δικαιώματα σε δείκτες έχουν διάρκεια ζωής το πολύ εννέα μηνών για δείκτες σε κάποια χρηματιστήρια, ένας επενδυτής μπορεί να χρειαστεί να αγοράσει αυτές τις βραχυπρόθεσμες επιλογές, παρόλο που ο ορίζοντας προγραμματισμού μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερος. Αυτές οι σωρευτικές αγορές πωλήσεων θα οδηγούσαν σε πολύ μεγαλύτερο κόστος από μια πιο μακροπρόθεσμη επιλογή.
2. Ο αγοραστής της ασφάλισης χαρτοφυλακίου δεν ενδιαφέρεται να ασκήσει το δικαίωμα προαίρεσης νωρίς, διότι αυτό θα άφηνε το χαρτοφυλάκιο ανασφάλιστο. Έτσι ο αγοραστής της ασφάλισης θα προτιμούσε τα δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου από τα αντίστοιχα Αμερικάνικα, επειδή δεν ενδιαφέρεται για το προσφερόμενο χαρακτηριστικό της πρόωρης εξάσκησης, το οποίο αυξάνει το κόστος της ασφάλισης.
3. Πολλές φορές είναι αρκετά μεγάλο το κόστος ασφάλισης λόγω των υψηλών τιμών των ασφαλιστρων που απαιτούνται για να αποκτηθούν τα επιθυμητά δικαιώματα.

2.5.2 Dynamic Replication of OBPI.

Σύμφωνα με τον Rubenstein, χρησιμοποιώντας το μοντέλο των Black-Scholes είναι δυνατό για έναν επενδυτή να αναπαραστήσει το pay-off ενός δικαιώματος δημιουργώντας μία δυναμική στρατηγική με το υποκείμενο χαρτοφυλάκιο και την επένδυση χωρίς κίνδυνο (καταθέσεις), προσαρμόζοντας την κατοχή του υποκείμενου χαρτοφυλακίου σε σχέση με τις μεταβολές στην τιμή του καθ' όλη την διάρκεια της επενδυτικής περιόδου. Πιο συγκεκριμένα έχουμε δει ότι η τιμή ενός δικαιώματος πώλησης την στιγμή t δίνεται ως:

$$p_t = K * e^{-r*(T-t)} * N(-d2) - S_t * e^{-q*(T-t)} * N(-d1), \quad (1)$$

Αλλά ισχύει ότι, για ένα δικαίωμα πώλησης ο ρυθμός μεταβολής της τιμής του σε σχέση με την τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, ή αλλιώς το **delta** του είναι ίσο με:

$$\Delta_t = e^{-q*(T-t)} * N(-d1), \quad (2)$$

Οπότε συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$p_t = K * e^{-r*(T-t)} * N(-d2) * \Delta_t * S_t \quad (3)$$

Χρησιμοποιώντας την (1.3) μπορούμε να αναπαράγουμε δυναμικά την στατική στρατηγική protective put αφού,

$$\begin{aligned} S_t + p_t &= S_t + (K * e^{-r*(T-t)} * N(-d2) * \Delta_t * S_t) \\ &= K * e^{-r*(T-t)} * N(-d2) + (1 + \Delta_t) * S_t \end{aligned}$$

Άρα μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι η OBPI σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t εμπεριέχει μία long position στο risk-free asset (καταθέσεις) με αξία:

$$B_t = K * e^{-r*(T-t)} * N(-d2)$$

και άλλη μία long position στο υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο (χαρτοφυλάκιο) με αξία:

$$E_t = (1 + \Delta_t) * S_t = N(d1) * S_t$$

(Σημαντική παρατήρηση είναι ότι πάντα το delta ενός δικαιώματος πώλησης είναι $\Delta_t < 0$)

Άρα ένας επενδυτής θα πρέπει να πουλήσει μία ποσότητα $-\Delta_t$ της αρχικής επένδυσης στο υποκείμενου χαρτοφυλακίου και να επενδύσει μία ποσότητα $K * e^{-r*(T-t)} * N(-d2)$ σε λογαριασμούς καταθέσεων για να δημιουργήσει ένα synthetic put. Ωστόσο, το delta ενός δικαιώματος αλλάζει κατά την διάρκεια του χρόνου, οπότε μετά από μία μεταβολή στην τιμή του υποκείμενου χαρτοφυλακίου από S_t σε S_{t+1} πρέπει να υπολογιστεί το νέο delta, Δ_{t+1} , όπως και η διαφορά του σε σχέση με το προηγούμενο, $\Delta_{t+1} - \Delta_t$, για να υπολογιστεί η νέα αναλογία μεταξύ του risk-free asset και του υποκείμενου χαρτοφυλακίου, ώστε το χαρτοφυλάκιο να παραμείνει ασφαλισμένο.

- Όταν η τιμή του χαρτοφυλακίου S_t αυξάνεται, το $d1$ μεγαλώνει, οδηγώντας σε μία αύξηση του $N(d1)$ και του Δ_t . Ισοδύναμα το $-\Delta_t$ ή, η ποσότητα του υποκείμενου χαρτοφυλακίου που πρέπει να πουληθεί μειώνεται. Και άρα ο επενδυτής πρέπει να αγοράσει ένα μέρος του υποκείμενου χαρτοφυλακίου.
- Ανάλογα, όταν η τιμή του χαρτοφυλακίου S_t μειώνεται, το $d1$ μειώνεται, οδηγώντας σε μία μείωση του $N(d1)$ και του Δ_t . Ισοδύναμα το $-\Delta_t$ ή, η ποσότητα του υποκείμενου χαρτοφυλακίου που πρέπει να πουληθεί αυξάνεται. Και άρα ο επενδυτής πρέπει να πουλήσει ένα επιπλέον μέρος του υποκείμενου χαρτοφυλακίου.

Αυτό είναι ένα ακριβές παράδειγμα του κανόνα “buy high, sell low”.

2.5.3 Dynamic Replication of OBPI using Futures.

Ένας διαχειριστής χαρτοφυλακίου αντί να αγοράζει, να πουλάει ή να κάνει short μετοχές, μπορεί να ανταλλάσσει (αγοράζει ή πουλάει) συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης σε δείκτη μετοχών για να προσαρμόσει την έκθεση στον κίνδυνο ενός χαρτοφυλακίου. **Τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης προσφέρουν την ίδια έκθεση με τον υποκείμενο δείκτη που βασίζονται.** Εάν η αγορά πέφτει, ο διαχειριστής πουλάει (short position) συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης έτσι ώστε να μειώσει αποτελεσματικά τη θέση στο χαρτοφυλάκιο. Η πώληση συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης σε χρηματιστηριακούς δείκτες έχει την ίδια επίδραση στο χαρτοφυλάκιο με την πώληση μετοχών και την επένδυση σε περιουσιακό στοιχείο χωρίς κίνδυνο. Όταν η αγορά αντιστρέφεται και αρχίζει να ανεβαίνει σε αξία, ο διαχειριστής χαρτοφυλακίου αγοράζει (long position) συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης για να καλύψει τη θέση πώλησης, που είναι ανάλογο με την ρευστοποίηση της επένδυσης του περιουσιακού στοιχείου χωρίς κίνδυνο και αγορά μετοχών με αυτό το ποσό. Το εάν και κατά πόσο λειτουργεί εξαρτάται από τον βαθμό συσχέτισης μεταξύ της αξίας των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης στον δείκτη και της αξίας του υποκείμενου χαρτοφυλακίου.

Έστω ότι ένας διαχειριστής χαρτοφυλακίου επιθυμεί να ασφαλίσει ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών με αξία S_0 , όπου το β του χαρτοφυλακίου είναι $\beta = 1,4$ σε σχέση με τον δείκτη S&P 500. (Αυτό σημαίνει ότι αν ο S&P 500 ανέβει ή πέσει κατά 1% , η αλλαγή στην αξία του χαρτοφυλακίου αναμένεται να είναι 1,4%) Εάν ο διαχειριστής χαρτοφυλακίου ανησυχεί για πτώση της αγοράς, μπορεί να ασφαλίσει το χαρτοφυλάκιο του πουλώντας συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης του δείκτη S&P 500. Με την πώληση συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης, η πτώση της αξίας του χαρτοφυλακίου θα αντισταθμιζόταν από τα κέρδη της πώλησης συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης. Η στρατηγική της ασφάλισης της αξίας του χαρτοφυλακίου που ενσωματώνει το β , για τον προσδιορισμό του απαραίτητου αριθμού συμβάσεων προσδιορίζεται ως:

$$N = \beta * \frac{A_0}{F(0, T) * M}$$

A_0 είναι η αξία του χαρτοφυλακίου που θα πρέπει να πουληθεί σύμφωνα με το Delta.

$F(0, T)$ είναι η τιμή του συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης με λήξη το χρόνο T.

M είναι ο πολλαπλασιαστής των συμβολαίων.

Το αποτέλεσμα μιας τέλειαν αντιστάθμισης εξαρτάται από δύο κρίσιμες υποθέσεις:

1. Η σχέση της μεταβλητότητας του χαρτοφυλακίου με τη μεταβλητότητα του δείκτη παραμένει η ίδια ή ισοδύναμα το beta του χαρτοφυλακίου δεν αλλάζει.
2. Η μεταβολή της τιμής του συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης βρίσκεται σε ακριβή αναλογία με την μεταβολή της τιμής του δείκτη, συσχετίζονται απόλυτα.

Στην πράξη μπορεί να υπάρχει κάποιο πλεονέκτημα ή μειονέκτημα που σχετίζεται με την τιμή των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης σε μια δυναμική στρατηγική αντιστάθμισης κινδύνου λόγω "εσφαλμένης" τιμολόγησης των συμβολαίων, αφού στην αγορά των παραγώγων η τιμή τους ουσιαστικά καθορίζεται από την προσφορά και την ζήτηση που υπάρχει για αυτά. Όταν ένας διαχειριστής μπαίνει σε μία short position σε συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης για σκοπούς αντιστάθμισης κινδύνου, ελπίζει ότι τα συμβόλαια αυτά πωλούνται σε κάποιο premium. Αφού πουλώντας συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης όταν είναι «ακριβά» και αγοράζοντας τα πίσω (κλείνοντας την θέση σου) σε χαμηλότερη τιμή, προκύπτει κέρδος στον αντισταθμιστή. Από την άλλη πλευρά, θα προκύψουν ζημίες στην αντιστάθμιση εάν πωληθούν «φθηνά» συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης. Ας υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής κατέχει ένα χαρτοφυλάκιο αξίας **\$500** και συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης στο ίδιο χαρτοφυλάκιο που είναι αξίας **\$510**. Η βάση είναι **basis = \$500-\$510 = -\$10**, αλλά λόγω του ότι η βάση είναι ίση με μηδέν κατά τη λήξη, η αρνητική βάση θα πρέπει να αυξηθεί. Σε αυτό το παράδειγμα, ο επενδυτής πραγματοποιεί κέρδος **\$10** στην αντιστάθμιση, ανεξάρτητα από την απόδοση του χαρτοφυλακίου του. Αυτό το κέρδος είναι αποτέλεσμα της πώλησης «ακριβών» συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης και της αναμονής για αύξηση της βάσης. Αντίθετα, αν υποθέσουμε ότι η τιμή για τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης είναι **\$495**, όπου η βάση είναι **\$500-\$495 = 5**. Εδώ, η βάση μειώνεται και προκύπτουν ζημίες για τον αντισταθμιστή. Τα «φθηνά» συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης θα αυξήσουν το κόστος εφαρμογής μιας δυναμικής στρατηγικής αντιστάθμισης κινδύνου και τα «ακριβά» συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης θα μειώσουν το κόστος.

Πίνακας 4: Profit or loss of expensive futures (\$510)

Value of stock at expiration of futures	Value of futures at expiration	Profit or loss on stock	Profit or loss on futures	Profit or loss
520	520	+20	-10	+10
480	480	-20	+30	+10

Profit or loss of cheap futures (\$495)

Value of stock at expiration of futures	Value of futures at expiration	Profit or loss on stock	Profit or loss on futures	Profit or loss
520	520	+20	-25	-5
480	480	-20	+15	-5

Κατά την εφαρμογή μιας δυναμικής στρατηγικής αντιστάθμισης κινδύνου, οι υποκείμενες μετοχές δεν αγοράζονται ούτε πωλούνται, παρά μόνο τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης σε δείκτες της αγοράς ανταλλάσσονται με σκοπό να δημιουργηθεί ένα payoff ανάλογο με ένα δικαίωμα πώλησης στο χαρτοφυλάκιο.

Σε συνέχεια προηγούμενου παραδείγματος όπου ένας επενδυτής κατέχει ένα χαρτοφυλάκιο αξίας $S_0 = \$1.000.000$, και επιθυμεί να εξασφαλίσει πως η αξία του δεν θα μειωθεί πέρα από τις $\$900.000$ (Floor) ή αλλιώς πέρα από το **90% της τρέχουσας αξίας του**, στους επόμενους 6 μήνες. Έστω ο συντελεστής $\beta = 1,4$, όπου συντελεστής βήτα είναι το μέτρο που περιγράφει την αναμενόμενη μεταβολή του χαρτοφυλακίου σε σχέση με τις μεταβολές του δείκτη της αγοράς. Επίσης, έστω πως η τρέχουσα αξία του δείκτη είναι $M_0 = 2.000$ μονάδες, ο πολλαπλασιαστής συμβολαίων είναι $m = 50$ φορές για κάθε μία μονάδα του δείκτη και η αναμενόμενη μεταβλητότητα του δείκτη για την συγκεκριμένη περίοδο είναι ίση με $\sigma = 20\%$. Τέλος, υποθέτουμε ότι το risk-free rate είναι ίσο και σταθερό με $r = 5\%$ και η μερισματική απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι ίση με αυτή του δείκτη $q = 3\%$. Επομένως η τιμή του 6μηνιαίου συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης στο δείκτη πρέπει να είναι ίση με:

$$F\left(0, \frac{1}{2}\right) = M_0 * e^{\left(r - q\left(0, \frac{1}{2}\right)\right) * \left(\frac{1}{2}\right)} = 2.000 * e^{(0,05 - 0,03) * \frac{1}{2}} = 2.020,1$$

Το $\Delta_0 = e^{q * (0,5 - 0)} * N(-d1) = 0,185$ και άρα θα πρέπει να μπορούμε short σε τόσα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης ώστε να αντισταθμίσουν το 18.5% της αξίας του χαρτοφυλακίου, που αυτό είναι ισοδύναμο με το ποσό $A_0 = \$18.500$. Και ο αριθμός των συμβολαίων που απαιτείται για να το επιτύχουμε αυτό είναι:

$$N = \beta * \frac{A_0}{F\left(0, \frac{1}{2}\right) * m} = 1,4 * \frac{18.500}{2035,31 * 50} \approx 3 \text{ συμβόλαια}$$

Οπότε ξεκινάμε την στρατηγική μπαίνοντας short σε 3 συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης του δείκτη με λήξη σε 6 μήνες (26 εβδομάδες) με τιμή πώλησης **2.020,1**. Για να γίνει καλή αναπαραστάση αυτής της στρατηγικής θα ελέγχουμε το χαρτοφυλάκιο για τυχόν αναπροσαρμογές στον αριθμό μελλοντικών συμβολαίων κάθε 2 βδομάδες. Καθώς η τιμή του δείκτη μεταβάλλεται έτσι αλλάζει και το Δ_t και μαζί με αυτό το ποσό που πρέπει να πουληθεί από το χαρτοφυλάκιο ή στην περίπτωση μας ο αριθμός των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης που έχουμε μπει short. Στο παράδειγμα μας η πρώτη κίνηση πραγματοποιείται την **6^η εβδομάδα**, όπου μπαίνουμε short σε επιπλέον 1 συμβόλαιο του δείκτη με την ίδια λήξη, πλέον 20 εβδομάδες, αλλά με τιμή πώλησης **1.985,2**. Η επόμενη τροποποίηση γίνεται την **12^η εβδομάδα**, όπου πάλι μπαίνουμε short σε επιπλέον 1 συμβόλαιο με τιμή πώλησης **1.915,3** με την ίδια ημ/νία λήξης, πλέον 14 εβδομάδες. Την **16^η εβδομάδα** απαιτείται να πάρουμε ακόμα μία θέση short σε δύο ακόμα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης με τιμή πώλησης **1.849,1** με ίδια λήξη, πλέον 10 εβδομάδες. Την 20^η επίσης μπαίνουμε short σε ένα επιπλέον συμβόλαιο με τιμή πώλησης **1.834,2**, αλλά δύο εβδομάδες μετά παίρνουμε μία θέση long σε ένα συμβόλαιο με τιμή αγοράς **1.852,8**. Τέλος, την 24^η εβδομάδα παίρνουμε ακόμα μία

θέση short σύμφωνα με την στρατηγική σε δύο συμβόλαια με την τιμή πώλησης πλέον να είναι **1.801,4** και να απομένουν μόλις 2 εβδομάδες για την λήξη τους.

Dynamic OBPI using Futures: case 1

		Index Price	Portfolio Value	Δt	Future Contract Price	Amount that must be Shotred	Futures Contacts Shorted	Index's Return	Risky asset's Return	Total Portfolio Value
26		2000	1000000	-0.249	2020.1	248947.1	3			
25	1 week	2015	1010500	-0.230	2034.5	232529.6	3	0.75%	1.05%	
24	2 week	2005	1003479	-0.239	2023.6	239393.8	3	-0.50%	-0.69%	
23	3 week	2008	1005581	-0.232	2025.8	233723.0	3	0.15%	0.21%	
22	4 week	1996	997168	-0.244	2013.0	242882.6	3	-0.60%	-0.84%	
21	5 week	1982	987376.1	-0.258	1998.1	254797.2	4	-0.70%	-0.98%	
20	6 week	1970	979006.9	-0.271	1985.2	265324.4	4	-0.61%	-0.85%	
19	7 week	1975	982485.6	-0.261	1989.5	256733.0	4	0.25%	0.36%	
18	8 week	1962	973431.8	-0.276	1975.6	269014.0	4	-0.66%	-0.92%	
17	9 week	1944	960929	-0.300	1956.8	288670.6	4	-0.92%	-1.28%	
16	10 week	1950	965081.1	-0.288	1962.0	277944.7	4	0.31%	0.43%	
15	11 week	1926	948452.1	-0.325	1937.1	307863.9	4	-1.23%	-1.72%	
14	12 week	1905	933974.1	-0.360	1915.3	336570.3	5	-1.09%	-1.53%	
13	13 week	1880	916814.5	-0.409	1889.4	374660.3	6	-1.31%	-1.84%	
12	14 week	1894	926372.8	-0.379	1902.8	351016.4	5	0.74%	1.04%	
11	15 week	1865	906514.9	-0.442	1872.9	400699.5	6	-1.53%	-2.14%	
10	16 week	1842	890863.6	-0.499	1849.1	444553.6	7	-1.23%	-1.73%	
9	17 week	1826	880030.1	-0.545	1832.3	479242.5	7	-0.87%	-1.22%	
8	18 week	1834	885427.8	-0.530	1839.7	468923.0	7	0.44%	0.61%	
7	19 week	1815	872585.8	-0.592	1819.9	516406.2	8	-1.04%	-1.45%	
6	20 week	1830	882681.8	-0.557	1834.2	491442.3	8	0.83%	1.16%	
5	21 week	1845	892810.9	-0.515	1848.6	460215.5	7	0.82%	1.15%	
4	22 week	1850	896198.3	-0.504	1852.8	451565.8	7	0.27%	0.38%	
3	23 week	1820	875852.2	-0.644	1822.1	563640.7	9	-1.62%	-2.27%	
2	24 week	1800	862377.5	-0.774	1801.4	667620.2	10	-1.10%	-1.54%	
1	25 week	1780	848962.8	-0.933	1780.7	791698.5	12	-1.11%	-1.56%	
0	26 week	1768	840950.1	-1.000	1768.0		0	-0.67%	-0.94%	907507.3
	Total Retu	-11.6%	-15.9%							-9.2%

Με αυτές τις ενέργειες και εφόσον η τιμή του δείκτη της αγοράς έχει μεταβληθεί από **2000 μονάδες** στην αρχή της επενδυτικής περιόδου σε **1768** στο τέλος των 6 μηνών, δηλαδή μία **συνολική απόδοση -11.6%** του δείκτη και ανάλογα η τιμή του χαρτοφυλακίου θα είχε μεταβληθεί από **\$1.000.000** σε μόλις **\$840.950,07**, δηλαδή μία απόδοση **-15.9%**. Λόγω όμως των κερδών από την στρατηγική αντιστάθμισης που χρησιμοποιήσαμε, που είναι ίσα με:

$$\begin{aligned}
 \text{Profits} &= 3 * 50 * (2.020,1 - 1.768) + 50 * (1.985,2 - 1.768) + 50 \\
 &* (1.915,3 - 1.768) + 2 * 50 * (1.849,1 - 1.768) + 50 \\
 &* (1.834,2 - 1.852,8) + 2 * 50 * (1.801,4 - 1768) = \$66.557,3
 \end{aligned}$$

η τελική αξία του «ασφαλισμένου» χαρτοφυλακίου στο τέλος της επενδυτικής περιόδου θα είναι **\$907.507,3**, δηλαδή θα καταφέρει να καλύψει το αρχικά ορισμένο κατώτατο επίπεδο των **\$900.000**.

Ανάλογα σε μία ανοδική πορεία της αγοράς η χρήση αυτής της στρατηγικής μας εξασφαλίζει ένα καλό ποσοστό συμμετοχής στα κέρδη. Πιο συγκεκριμένα, αν η αγορά ακολουθούσε την παρακάτω υποθετική διαδρομή κατά την οποία η τιμή του δείκτη της αγοράς έχει μεταβληθεί από **2.000 μονάδες** στην αρχή της επενδυτικής περιόδου σε **2.215 στο τέλος των 6 μηνών**, δηλαδή μία συνολική απόδοση **10.8%**

του δείκτη και ανάλογα η τιμή του χαρτοφυλακίου χωρίς την εφαρμογή της στρατηγικής θα είχε μεταβληθεί από **\$1.000.000** σε **\$1.153.069,6**, δηλαδή μία απόδοση **15.3%**, με την χρήση της δυναμικής στρατηγικής λόγω του τελικού κόστους της από τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης που μπήκαμε short αλλά στο πέρασμα του χρόνου απαιτήθηκε να κλείσουμε την θέση μας καθώς η τιμή του δείκτη ανέβαινε, που είναι ίσο με:

$$50 * (1.985,2 - 1.998,8) + 50 * (2.020,1 - 2.043,4) + 50 * (2.020,1 - 2.102,5) + 50 * (2.020,1 - 2.140,9) = -\$12.054$$

η τελική αξία του «ασφαλισμένου» χαρτοφυλακίου στο τέλος της επενδυτικής περιόδου θα είναι **\$1.141.015.3**, δηλαδή θα έχει σημειώσει **απόδοση 14.1%**. Αναλυτικά, η στρατηγική στην έναρξη της απαιτούσε να πάρουμε μία θέση short σε 3 συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, όπου η τρέχουσα τιμή του κάθε συμβολαίου ήταν **2.020,1**. Την 6^η εβδομάδα χρειάστηκε να πάρουμε επιπλέον μία θέση short σε ένα συμβόλαιο με τιμή **1.985,2**, ενώ στις βδομάδες **8, 14, 18 και 20** η στρατηγική απαιτούσε να πάρουμε μία θέση long σε ένα συμβόλαιο κάθε φορά, με τιμές **1.998,8, 2.043,4, 2.102,5 και 2.140,9** αντίστοιχα. Κλείνοντας έτσι ολοκληρωτικά την θέση μας ουσιαστικά την 20^η εβδομάδα.

Dynamic OBPI using Futures: case 2

	Index Price	Portfolio Value	Δt	Future Contract Price	Amount that must be Shorted	Futures Contracts Shorted	Index's Return	Risky asset's Return	Total Portfolio Value
	2000	1000000	-0.249	2020.1	248947.1	3			
1 week	2015	1010500	-0.230	2034.5	232529.6	3	0.75%	1.05%	
2 week	2005	1003479.2	-0.239	2023.6	239393.8	3	-0.50%	-0.69%	
3 week	2008	1005581.2	-0.232	2025.8	233723.0	3	0.15%	0.21%	
4 week	1996	997167.98	-0.244	2013.0	242882.6	3	-0.60%	-0.84%	
5 week	1982	987376.15	-0.258	1998.1	254797.2	4	-0.70%	-0.98%	
6 week	1970	979006.87	-0.271	1985.2	265324.4	4	-0.61%	-0.85%	
7 week	1975	982485.57	-0.261	1989.5	256733.0	4	0.25%	0.36%	
8 week	1986	990146.47	-0.243	1999.8	240661.3	3	0.56%	0.78%	
9 week	1980	985958.54	-0.247	1993.0	243865.2	3	-0.30%	-0.42%	
10 week	1995	996415.68	-0.222	2007.3	221643.6	3	0.76%	1.06%	
11 week	2004	1002708.8	-0.205	2015.6	205838.6	3	0.45%	0.63%	
12 week	2000	999906.85	-0.205	2010.8	204816.1	3	-0.20%	-0.28%	
13 week	2020	1013905.5	-0.172	2030.1	174358.9	2	1.00%	1.40%	
14 week	2034	1023743.4	-0.147	2043.4	150792.6	2	0.69%	0.97%	
15 week	2028	1019515.6	-0.146	2036.6	148870.6	2	-0.29%	-0.41%	
16 week	2040	1027961.3	-0.122	2047.9	125876.6	2	0.59%	0.83%	
17 week	2068	1047714.3	-0.084	2075.2	87878.4	1	1.37%	1.92%	
18 week	2096	1067574.2	-0.052	2102.5	55710.9	1	1.35%	1.90%	
19 week	2090	1063295.8	-0.046	2095.6	48790.3	1	-0.29%	-0.40%	
20 week	2136	1096059.5	-0.017	2140.9	18194.0	0	2.20%	3.08%	
21 week	2165	1116892.9	-0.006	2169.2	6235.5	0	1.36%	1.90%	
22 week	2158	1111837.2	-0.003	2161.3	3170.8	0	-0.32%	-0.45%	
23 week	2186	1132033.7	0.000	2188.5	324.5	0	1.30%	1.82%	
24 week	2200	1142183.7	0.000	2201.7	7.4	0	0.64%	0.90%	
25 week	2194	1137822.6	0.000	2194.8	0.0	0	-0.27%	-0.38%	
26 week	2215	1153069.6	-1.000	2215.0		0	0.96%	1.34%	1141015.3
Total Return	10.8%	15.3%							14.1%

2.6 Constant-Proportion Portfolio Strategies

Εισήχθη από τους Black και Jones (1987) και τους Black and Perold (1992), η CPPI είναι μια στρατηγική ασφάλισης χαρτοφυλακίου που επιτρέπει τη διατήρηση μιας έκθεσης, στην περίπτωση ανοδικής πορείας ενός περιουσιακού στοιχείου που ενέχει κίνδυνο, ενώ παρέχει μία εγγύηση, έναντι του κινδύνου από μία δυσμενή πορεία για την αξία του. Η βασική ιδέα της στρατηγικής CPPI, είναι να οριστεί ένα προκαθορισμένο ελάχιστο επίπεδο (Floor) για την αξία ενός χαρτοφυλακίου στο τέλος μίας επιλεγμένης επενδυτικής περιόδου. Αυτό προσπαθεί να επιτευχθεί μέσω μίας δυναμικής στρατηγικής διαχείρισης του επενδυτικού μείγματος του χαρτοφυλακίου, μεταξύ μίας επένδυσης σε ένα περιουσιακό στοιχείο που ενέχει κίνδυνο (έστω ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών) και μίας επένδυσης στο risk-free (έστω λογαριασμοί καταθέσεων), σύμφωνα με έναν διακριτό κανόνα.

Κάθε περίοδο υπολογίζεται η προ εξοφλημένη με το risk-free rate, r , αξία του Floor, $PV_t(F_T) = F_t$, ή αλλιώς το ποσό που χρειάζεται να επενδυθεί στο risk-free asset έτσι ώστε στο τέλος της επενδυτικής περιόδου να μπορεί να εξασφαλιστεί το Floor, F_t , όπως επίσης και η διαφορά της με την συνολική αξία του χαρτοφυλακίου, το οποίο καλείται **Cushion**, C_t .

$$C_t = V_t - F_t.$$

Επιπλέον από την αρχή της επενδυτικής περιόδου ορίζεται ένα σταθερό multiple (πολλαπλάσιο), m , το οποίο εφαρμόζεται στο Cushion για να καθοριστεί με αυτό τον τρόπο το ποσό επένδυσης στο υποκείμενο χαρτοφυλάκιο (ή οποιοδήποτε περιουσιακό στοιχείο που ενέχει κίνδυνο) σε κάθε περίοδο.

$$E_t = m * C_t.$$

Ανάλογα, το ποσό επένδυσης στο risk-free (καταθέσεις), ορίζεται ως η διαφορά της αξίας του συνολικού χαρτοφυλακίου V_t και του ποσού επένδυσης στο υποκείμενο χαρτοφυλάκιο, E_t .

$$D_t = V_t - E_t.$$

Η επιλογή του multiple γίνεται με τρόπο ώστε να αντικατοπτρίζει την αναμενόμενη επίδοση του χαρτοφυλακίου των μετοχών από τον επενδυτή αλλά και την ανοχή του στον κίνδυνο. Προφανώς ένα **multiple = 0** ισοδυναμεί με μία επένδυση αποκλειστικά στο risk-free και ένα **m = 1** ισοδυναμεί με μία Buy-and-Hold strategy. **Όσο μεγαλύτερο το multiplier τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η συμμετοχή του επενδυτή στα πιθανά κέρδη** αλλά και η πιθανότητα απαίτησης δανεισμού, ενώ ταυτόχρονα, **τόσο πιο εκτεθειμένος θα είναι σε πιθανές ζημίες**. Οι αναπροσαρμογές των βαρών της κάθε επένδυσης στο συνολικό, «ασφαλισμένο» χαρτοφυλάκιο γίνονται κάθε περίοδο, όπου ως περίοδο ο διαχειριστής μπορεί να επιλέξει ημερήσια, εβδομαδιαία, μηνιαία ή οποιαδήποτε θεωρεί ο ίδιος κατάλληλη. Προφανώς, όσο πιο συχνές είναι οι στιγμές αναπροσαρμογής, τόσο πιο ακριβή στον στόχο της, την διατήρηση του Floor, F_t , θα είναι η στρατηγική αλλά και ανάλογα θα είναι υψηλότερα τα κόστη συναλλαγών, τα οποία από ένα επίπεδο και μετά μπορεί να παίξουν καθοριστικό ρόλο στην κάλυψη ή μη του Floor.

Μία ακόμη σημαντική έννοια της CPPI είναι το **tolerance rate**, τ , το οποίο μπορεί να χρησιμοποιείται αντί για τις συγκεκριμένες/ορισμένες χρονικές περιόδους αναπροσαρμογής του συνολικού χαρτοφυλακίου και ορίζεται ως η ποσοστιαία κίνηση στην αξία του υποκείμενου χαρτοφυλακίου, που θα ενεργοποιήσει μία απαίτηση εξισορρόπησης των βαρών των επενδύσεων, $w_1 = E_t/V_t$ και $w_2 = D_t/V_t$, στο ασφαλισμένο χαρτοφυλάκιο. Στην πράξη, ένας διαχειριστής μπορεί να επιτρέψει στο tolerance rate να διαφέρει για τις ανοδικές σε σχέση με τις καθοδικές μεταβολές της αξίας του υποκείμενου χαρτοφυλακίου, όπως και να το χρησιμοποιεί ταυτόχρονα με τις αρχικά ορισμένες περιόδους αναπροσαρμογής. Σύμφωνα με τον ορισμό του tolerance rate μία εξισορρόπηση θα πραγματοποιείται όταν:

$$(E_{t+1} - E_t) / E_t \geq |\tau|$$

E_t : Ποσό επένδυσης στο περιουσιακό στοιχείο που ενέχει κίνδυνο την χρονική περίοδο t .

Επιπλέον, μπορεί να τοποθετηθεί κάποιος περιορισμός σχετικά με το ελάχιστο επίπεδο επένδυσης στο περιουσιακό στοιχείο που ενέχει κίνδυνο, $\min\{E_t\}$, έτσι ώστε σε περίπτωση που η αξία της συγκεκριμένης επένδυσης μειωθεί αρκετά, να αποφευχθεί ένα πιθανό cash out από την επένδυση. Βέβαια σε περίπτωση που χρειαστεί να ενεργοποιηθεί αυτός ο μηχανισμός μπορεί να επηρεάσει άμεσα τον στόχο διατήρησης του Floor, F_t , στο τέλος της επενδυτικής περιόδου. Ανάλογα, μπορεί να οριστεί και ένα μέγιστο επίπεδο επένδυσης, $\max\{E_t\}$, με σκοπό να κάνει λίγο πιο συντηρητική την στρατηγική, σε περίπτωση που η αξία του υποκείμενου χαρτοφυλακίου αυξηθεί αρκετά και να περιορίζει την έκθεση σε αυτό και ανάλογα τον κίνδυνο πέρα από ένα συγκεκριμένο επίπεδο.

Ακόμα ένα χαρακτηριστικό της στρατηγικής είναι ότι τα κέρδη που έχουν πραγματοποιηθεί από μία αύξηση της τιμής του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου μπορούν να χαθούν αν η πορεία της τιμής/αξίας του ξαφνικά αντιστραφεί και μειωθεί αρκετά. Μια ρύθμιση που μπορεί να γίνει ώστε να περιοριστεί αυτός ο κίνδυνος, είναι πως αν το Cushion ξεπεράσει κάποιο συγκεκριμένο επίπεδο, που αυτό συνήθως ορίζεται ως ένα ποσοστό της υψηλότερης τιμής του χαρτοφυλακίου, $C_t > p * \max\{V_t\}$, τότε το επίπεδο του Floor, F_t , αυξάνεται, έτσι ώστε να "κλειδώσει" ένα μερίδιο από αυτά τα κέρδη.

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω, καταλαβαίνουμε ότι το Floor, F_t και το Cushion, C_t , επηρεάζονται άμεσα από το επίπεδο του επιτοκίου, r_t . Όσο τα επιτόκια πέφτουν, τόσο το Floor ή ακριβέστερα, η Παρούσα Αξία του θα αυξάνεται και ανάλογα η επένδυση στο υποκείμενο χαρτοφυλάκιο θα μειώνεται και αντιστρόφως, όσο τα επιτόκια αυξάνονται η Παρούσα Αξία του Floor θα μειώνεται και η επένδυση στο υποκείμενο χαρτοφυλάκιο θα αυξάνεται. Τέλος αξίζει να αναφέρουμε ότι κάποια προϊόντα της στρατηγικής CPPI επιτρέπουν στον multiplier, m , να μεταβάλλεται διαχρονικά σε σχέση με την πραγματοποιημένη μεταβλητότητα του υποκείμενου χαρτοφυλακίου, σ ή της αγοράς, σ_m , ώστε να αντικατοπτρίζει καλύτερα την ανοχή του επενδυτή για ρίσκο.

Τα παρακάτω παραδείγματα παρουσιάζουν τον μηχανισμό πίσω από μια στρατηγική CPPI που εφαρμόζεται για να ασφαλίσει ένα καλά διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο

μετοχών αξίας $S_0 = V_0 = \$1.000.000$ για μία περίοδο $T = 6$ μηνών, όπου ως Floor ορίζεται το ποσό των $F_T = \$900.000$ με το risk-free rate να ισούται με $r_f = 5\%$. Η περίοδοι αναπροσαρμογής είναι μηνιαίοι και επιπλέον ορίζεται ένα tolerance rate $|\pi| = 5\%$ για εβδομαδιαίες αποδόσεις του υποκείμενου χαρτοφυλακίου. Επομένως, ο υπολογισμός του Cushion και οι κατ' ακόλουθες προσαρμογές στα ποσά επενδύσεων γίνονται κάθε φορά που η, σε απόλυτο βαθμό, εβδομαδιαία απόδοση του υποκείμενου χαρτοφυλακίου είναι μεγαλύτερη του tolerance rate ή με χρονική απόσταση 1^{ος} μήνα από την προηγούμενη. Θα εξαιρεθούν τα κόστη συναλλαγών για ευκολία και γίνεται η υπόθεση ότι μπορούμε να επενδύουμε οποιοδήποτε ποσό στο υποκείμενο χαρτοφυλάκιο.

1^η Περίπτωση, $m=2$ και πτώση της αγοράς.

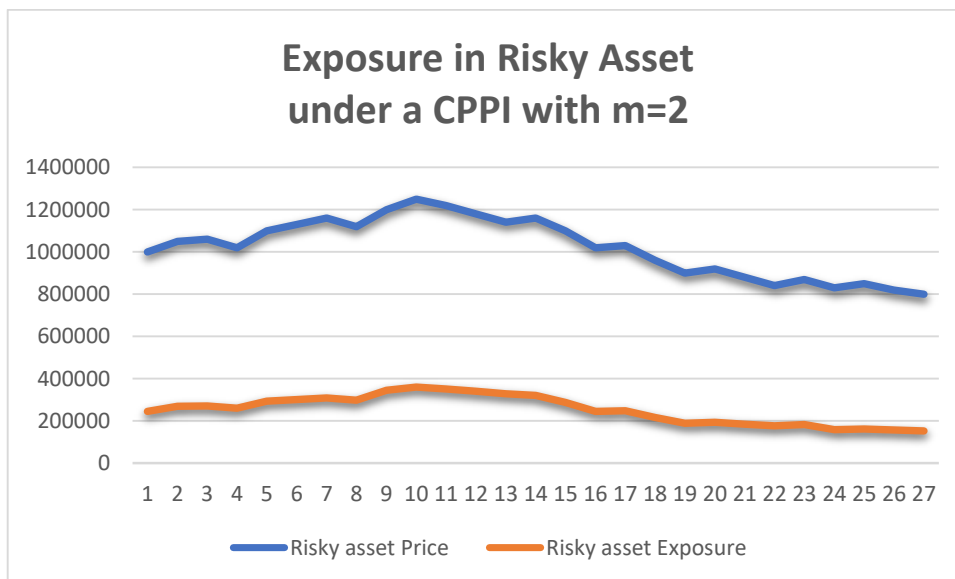
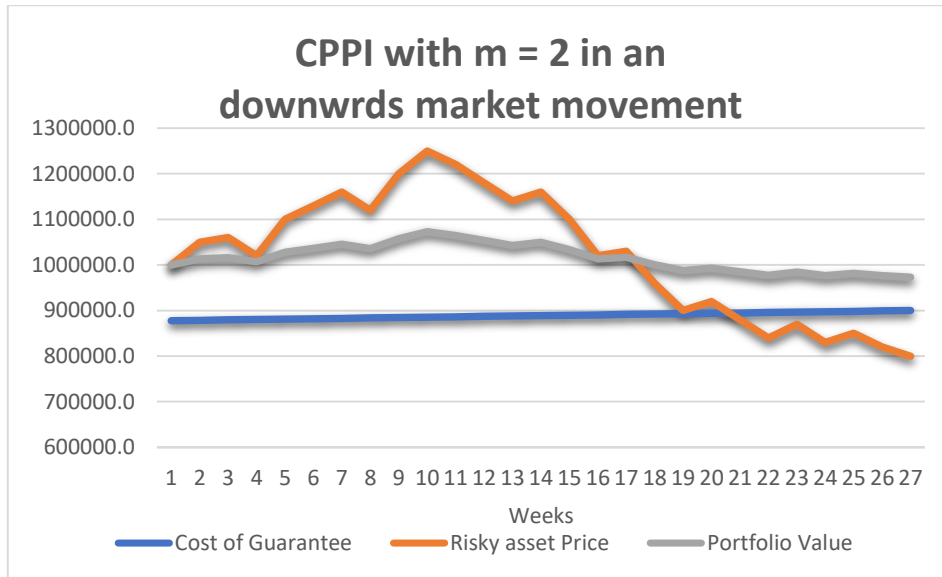
CPPI: Case 1

	Cost of Guarantee	Risky asset Price	Cushion	Risky asset Exposure	Risk-free asset Exposure	Portfolio Value	Risky Return(%)
	877778.9	1000000	122221.1	244442.2	755557.8	1000000.0	
1 week	878623.3	1050000	134325.6	268651.2	744297.7	1012949.0	5.0%
2 week	879468.6	1060000		271209.8	745013.7	1016223.6	1.0%
3 week	880314.6	1020000		260975.5	745730.5	1006705.9	-3.8%
4 week	881161.5	1100000	146730.5	293461.0	734431.0	1027892.0	7.8%
5 week	882009.2	1130000		301464.5	735137.5	1036602.0	2.7%
6 week	882857.7	1160000		309467.9	735844.7	1045312.7	2.7%
7 week	883707.0	1120000		298796.6	736552.6	1035349.2	-3.4%
8 week	884557.1	1200000	172843.3	345686.6	711713.8	1057400.4	7.1%
9 week	885408.0	1250000		360090.3	712398.4	1072488.7	4.2%
10 week	886259.8	1220000		351448.1	713083.8	1064531.9	-2.4%
11 week	887112.4	1180000		339925.2	713769.8	1053695.0	-3.3%
12 week	887965.8	1140000		328402.3	714456.4	1042858.7	-3.4%
13 week	888820.0	1160000	160487.5	320974.9	728332.6	1049307.5	1.8%
14 week	889675.1	1100000	143730.9	287461.8	745944.1	1033406.0	-5.2%
15 week	890530.9	1020000	122686.3	245372.7	767844.6	1013217.3	-7.3%
16 week	891387.6	1030000		247778.3	768583.3	1016361.5	1.0%
17 week	892245.1	960000	108016.5	216033.0	784228.7	1000261.6	-6.8%
18 week	893103.5	900000	94410.5	188821.0	798693.0	987514.0	-6.3%
19 week	893962.6	920000		193017.0	799461.3	992478.4	2.2%
20 week	894822.6	880000		184625.0	800230.4	984855.4	-4.3%
21 week	895683.5	840000		176233.0	801000.2	977233.2	-4.5%
22 week	896545.1	870000		182527.0	801770.8	984297.8	3.6%
23 week	897407.6	830000	79269.4	158538.9	818138.1	976677.0	-4.6%
24 week	898270.9	850000		162359.1	818925.2	981284.3	2.4%
25 week	899135.0	820000		156628.8	819713.0	976341.8	-3.5%
26 week	900000.0	800000		152808.6	820501.6	973310.1	-2.4%
Total Return		-20%				-2.67%	

Σύμφωνα με αυτήν την υποθετική πτωτική πορεία της αγοράς, οι αναπροσαρμογές στις επενδύσεις του χαρτοφυλακίου πραγματοποιούνται την 1^η, την 4^η, την 8^η, την 13^η- 15^η βδομάδα συνεχόμενα, την 17^η και 18^η και τέλος την 23^η εβδομάδα της επενδυτικής περιόδου. Η αξία του υποκείμενου χαρτοφυλακίου μεταβλήθηκε από $S_0 = \$1.000.000$ σε $S_{6/12} = \$800.000$ ή διαφορετικά είχε **συνολική απόδοση -20%**, με αυξομειώσεις κατά την διάρκεια της επενδυτικής περιόδου, όμως η αξία του «ασφαλισμένου» χαρτοφυλακίου μεταβλήθηκε από $V_0 = \$1.000.000$ σε μόλις $V_{1/2} =$

\$973.310 ή διαφορετικά σημείωσε **συνολική απόδοση -2.67%**. Οπότε με την χρήση του συντηρητικού multiplier, **m = 2** που ορίστηκε και την εναλλασσόμενη πορεία της αγοράς, όχι μόνο διατήρησε το απαιτούμενο Floor αλλά περιόρισε την ζημία κατά **\$173.310 ή 17.3%**. Στην πραγματικότητα η αξία του θα ήταν μικρότερη, λόγω των κοστών συναλλαγών.

CPPI Payoff Diagram 1



2^η Περίπτωση, m=4 και πτώση της αγοράς.

CPPI: Case 2

	Cost of Guarantee	Risky asset Price	Cushion	Risky asset Exposure	Risk-free asset Exposure	Portfolio Value	Risky Return(%)
	877778.9	1000000	122221.1	488884.3	511115.7	1000000.0	
1 week	878623.3	1050000	146312.6	585250.3	439685.7	1024935.9	5.0%
2 week	879468.6	1060000		590824.1	440108.6	1030932.7	1.0%
3 week	880314.6	1020000		568528.8	440532.0	1009060.8	-3.8%
4 week	881161.5	1100000	172913.6	691654.5	362420.6	1054075.1	7.8%
5 week	882009.2	1130000		710517.8	362769.3	1073287.1	2.7%
6 week	882857.7	1160000		729381.1	363118.2	1092499.4	2.7%
7 week	883707.0	1120000		704230.1	363467.6	1067697.6	-3.4%
8 week	884557.1	1200000	233792.3	935169.3	183180.2	1118349.4	7.1%
9 week	885408.0	1250000		974134.6	183356.4	1157491.0	4.2%
10 week	886259.8	1220000		950755.4	183532.8	1134288.2	-2.4%
11 week	887112.4	1180000		919583.1	183709.3	1103292.4	-3.3%
12 week	887965.8	1140000		888410.8	183886.1	1072296.9	-3.4%
13 week	888820.0	1160000	199239.9	796959.5	291100.4	1088059.9	1.8%
14 week	889675.1	1100000	157442.8	629771.3	417346.6	1047117.9	-5.2%
15 week	890530.9	1020000	111186.9	444747.6	556970.2	1001717.8	-7.3%
16 week	891387.6	1030000		449107.9	557506.0	1006613.9	1.0%
17 week	892245.1	960000	84383.2	337532.8	639095.6	976628.3	-6.8%
18 week	893103.5	900000	63043.9	252175.5	703971.9	956147.3	-6.3%
19 week	893962.6	920000		257779.4	704649.1	962428.5	2.2%
20 week	894822.6	880000		246571.6	705327.0	951898.5	-4.3%
21 week	895683.5	840000		235363.8	706005.5	941369.3	-4.5%
22 week	896545.1	870000		243769.6	706684.7	950454.3	3.6%
23 week	897407.6	830000	42518.7	170075.0	769851.4	939926.3	-4.6%
24 week	898270.9	850000		174173.2	770592.0	944765.1	2.4%
25 week	899135.0	820000		168025.9	771333.3	939359.1	-3.5%
26 week	900000.0	800000		163927.7	772075.3	936003.0	-2.4%
Total Return		-20%				-6.4%	

Το μόνο διαφορετικό σε αυτή την περίπτωση με το μεγαλύτερο multiplier είναι η τελική αξία του ασφαλισμένου χαρτοφυλακίου που είναι ίση με $V_{1/2} = \$936.003$, μικρότερη κατά **\$37.701** από την προηγούμενη περίπτωση και η συνολική απόδοση είναι ίση με **-6.4%**, μικρότερη κατά **3.73%**, αλλά και πάλι το ζητούμενο Floor διατηρήθηκε και με το παραπάνω. Αυτά τα αποτελέσματα είναι πολύ λογικά, αφού με ένα μεγαλύτερο multiplier η ανοχή στον κίνδυνο και η προσδοκία του επενδυτή για την εξέλιξη της αγοράς είναι μεγαλύτερες. Κάτι που αντικατοπτρίζεται στην αυξημένη έκθεση στο χαρτοφυλάκιο μετοχών σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση.

3^η Περίπτωση, $m = 2$ και άνοδος της αγοράς.

CPPI: Case 3

	Cost of Guarantee	Risky asset Price	Cushion	Risky asset Exposure	Risk-free asset Exposure	Portfolio Value	Risky Return(%)
	877778.9	1000000	122221.1	244442.2	755557.8	1000000.0	
1 week	878623.3	1040000		254219.8	756284.7	1010504.5	4.0%
2 week	879468.6	1020000		249331.0	757012.2	1006343.2	-1.9%
3 week	880314.6	980000		239553.3	757740.5	997293.8	-3.9%
4 week	881161.5	960000		234664.5	758469.4	993133.9	-2.0%
5 week	882009.2	990000	119187.6	238375.3	762821.5	1001196.8	3.1%
6 week	882857.7	950000		228744.0	763555.4	992299.3	-4.0%
7 week	883707.0	970000		233559.6	764289.9	997849.5	2.1%
8 week	884557.1	940000		226336.1	765025.2	991361.3	-3.1%
9 week	885408.0	990000	118728.3	237456.7	766679.7	1004136.4	5.3%
10 week	886259.8	1020000		244652.3	767417.2	1012069.6	3.0%
11 week	887112.4	1090000	142485.3	284970.7	744627.1	1029597.7	6.9%
12 week	887965.8	1100000		287585.1	745343.4	1032928.5	0.9%
13 week	888820.0	1030000	126524.6	253049.2	762295.4	1015344.6	-6.4%
14 week	889675.1	1040000		255506.0	763028.8	1018534.7	1.0%
15 week	890530.9	1070000		262876.3	763762.8	1026639.1	2.9%
16 week	891387.6	1100000		270246.7	764497.5	1034744.2	2.8%
17 week	892245.1	1060000		260419.6	765233.0	1025652.5	-3.6%
18 week	893103.5	1130000	150482.7	300965.4	742620.8	1043586.2	6.6%
19 week	893962.6	1110000		295638.6	743335.2	1038973.8	-1.8%
20 week	894822.6	1120000		298302.0	744050.3	1042352.3	0.9%
21 week	895683.5	1160000		308955.7	744766.0	1053721.7	3.6%
22 week	896545.1	1240000	179200.3	358400.7	717344.8	1075745.5	6.9%
23 week	897407.6	1210000		349729.7	718034.8	1067764.6	-2.4%
24 week	898270.9	1180000		341058.7	718725.6	1059784.3	-2.5%
25 week	899135.0	1170000		338168.4	719417.0	1057585.4	-0.8%
26 week	900000.0	1200000		346839.4	720109.1	1066948.5	2.6%
Total Return		20%				6.7%	

Σε με αυτήν την υποθετική ανοδική πορεία της αγοράς, όπου η αξία του υποκείμενου χαρτοφυλακίου μεταβλήθηκε από $S_0 = \$1.000.000$ σε $S_{6/12} = \$1.200.000$ ή διαφορετικά είχε **συνολική απόδοση 20%**, με αυξομειώσεις κατά την διάρκεια της επενδυτικής περιόδου, η αξία του «ασφαλισμένου» χαρτοφυλακίου μεταβλήθηκε από $V_0 = \$1.000.000$ σε μόλις $V_{1/2} = \$1.066.978.5$ ή διαφορετικά σημείωσε **συνολική απόδοση 6.7%**. Αυτή η σχετικά μεγάλη διαφορά οφείλεται στην χρήση του συντηρητικού multiplier, $m = 2$ που ορίστηκε, με αποτέλεσμα η διαφορά των κερδών με την χρήση της CPPI ήταν **-\$133.051,5** ή **-12.7%** σε σχέση με την αξία του υποκείμενου χαρτοφυλακίου χωρίς την εφαρμογή της. Στην πραγματικότητα η αξία του θα ήταν ακόμα μικρότερη λόγω των κοστών συναλλαγών.

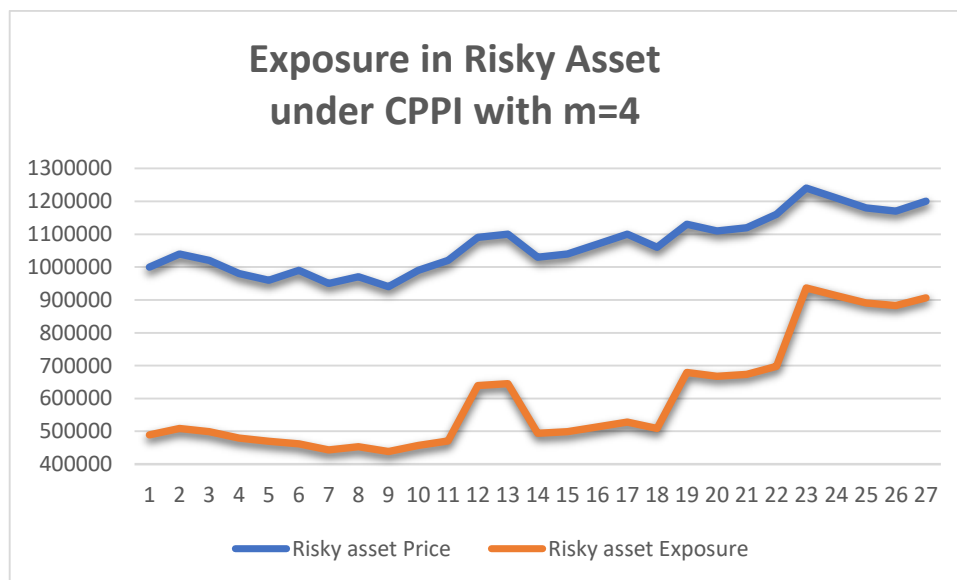
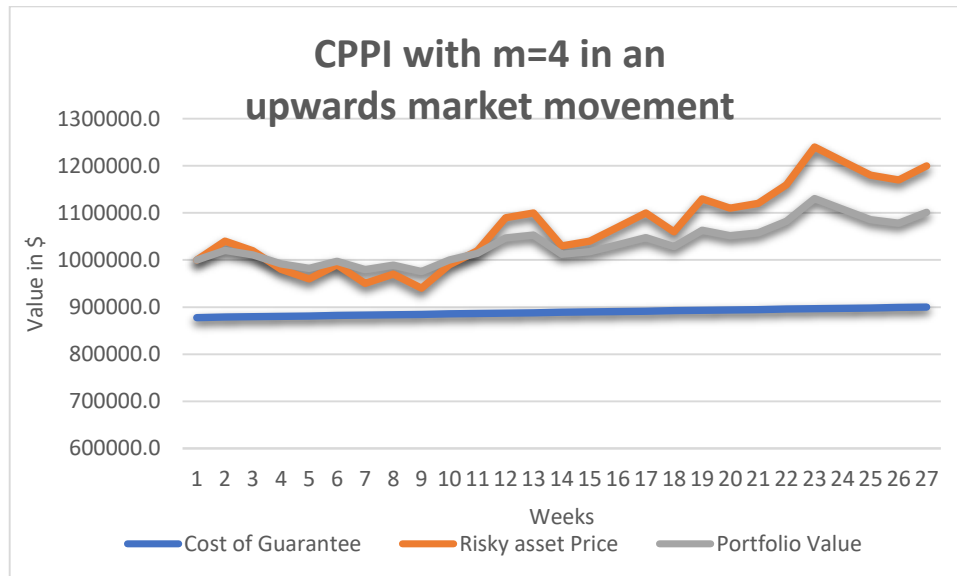
4^η Περίπτωση, m = 4 και άνοδος της αγοράς.

CPPI: Case 4

	Cost of Guarantee	Risky asset Price	Cushion	Risky asset Exposure	Risk-free asset Exposure	Portfolio Value	Risky Return(%)
	877778.9	1000000	122221.1	488884.3	511115.7	1000000.0	
1 week	878623.3	1040000		508439.7	511607.4	1020047.1	4.0%
2 week	879468.6	1020000		498662.0	512099.5	1010761.5	-1.9%
3 week	880314.6	980000		479106.6	512592.2	991698.8	-3.9%
4 week	881161.5	960000		469328.9	513085.3	982414.2	-2.0%
5 week	882009.2	990000	115565.2	462260.8	535313.6	997574.4	3.1%
6 week	882857.7	950000		443583.5	535828.6	979412.1	-4.0%
7 week	883707.0	970000		452922.1	536344.0	989266.2	2.1%
8 week	884557.1	940000		438914.2	536860.0	975774.3	-3.1%
9 week	885408.0	990000	114229.2	456916.7	542720.5	999637.2	5.3%
10 week	886259.8	1020000		470762.7	543242.6	1014005.3	3.0%
11 week	887112.4	1090000	159722.7	638890.9	407944.2	1046835.1	6.9%
12 week	887965.8	1100000		644752.3	408336.6	1053089.0	0.9%
13 week	888820.0	1030000	123632.1	494528.2	517923.8	1012452.1	-6.4%
14 week	889675.1	1040000		499329.5	518422.1	1017751.6	1.0%
15 week	890530.9	1070000		513733.2	518920.8	1032654.0	2.9%
16 week	891387.6	1100000		528136.9	519420.0	1047557.0	2.8%
17 week	892245.1	1060000		508932.0	519919.7	1028851.7	-3.6%
18 week	893103.5	1130000	169857.1	679428.2	383532.3	1062960.5	6.6%
19 week	893962.6	1110000		667403.0	383901.3	1051304.2	-1.8%
20 week	894822.6	1120000		673415.6	384270.6	1057686.2	0.9%
21 week	895683.5	1160000		697466.2	384640.2	1082106.4	3.6%
22 week	896545.1	1240000	234032.4	936129.7	194447.8	1130577.5	6.9%
23 week	897407.6	1210000		913481.4	194634.9	1108116.3	-2.4%
24 week	898270.9	1180000		890833.1	194822.1	1085655.2	-2.5%
25 week	899135.0	1170000		883283.7	195009.5	1078293.2	-0.8%
26 week	900000.0	1200000		905932.0	195197.1	1101129.1	2.6%
Total Return		20%				10.1%	

Σε αυτή την περίπτωση που γίνεται χρήση ενός μεγαλύτερου multiplier αντικατοπτρίζοντας έτσι μία μεγαλύτερη προσδοκία για την απόδοση του υποκείμενου χαρτοφυλακίου αλλά και ανοχή του κινδύνου, η τελική αξία του ασφαλισμένου χαρτοφυλακίου είναι $V_{1/2} = \$1.101.129$, μεγαλύτερη κατά **\$34.180** από την προηγούμενη περίπτωση και η συνολική απόδοση είναι ίση με **10.1%**, μεγαλύτερη κατά **3.31%**, αλλά και πάλι υπάρχει διαφορά από την τελική αξία και απόδοση του υποκείμενου χαρτοφυλακίου χωρίς την εφαρμογή της στρατηγικής ασφάλισης.

CPPI Payoff Diagram 2



Συγκεντρωτικά, σύμφωνα με μια στρατηγική CPPI, το χαρτοφυλάκιο θα τα πάει τουλάχιστον εξίσου καλά με το κατώτατο όριο, ακόμη και σε μια σοβαρή πτωτική αγορά. Το μόνο σενάριο, θεωρητικά, στο οποίο η αξία του χαρτοφυλακίου μπορεί να πέσει κάτω από το Floor είναι εάν η αγορά πέσει απότομα προτού κάποιος είχε την ευκαιρία να κάνει αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου. Το πόσο απότομη πρέπει να είναι η πτώση εξαρτάται από τον πολλαπλασιαστή, m . Γενικότερα, η αγορά μπορεί να πέσει έως και $1/m$ χωρίς αναπροσαρμογή πριν τεθεί σε κίνδυνο το Floor

Τέλος, έχει προταθεί μία προσέγγιση από τους Bertrand και Prigent, η οποία υποστηρίζει πως η στρατηγική OBPI είναι ισοδύναμη με μια δυναμική CPPI άμα γίνει χρήση του πολλαπλασιαστή:

$$m_{OBPI} = \frac{St \cdot N(d1)}{C(t, St, K)}$$

Όπου, S_t : η τιμή του υποκείμενου χαρτοφυλακίου/δείκτη, K : η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος, $C(t, S_t, K)$: το ασφάλιστρο για ένα δικαίωμα αγοράς του υποκείμενου χαρτοφυλακίου/δείκτη με τιμή εξάσκησης K στο χρόνο t .

Επομένως, σύμφωνα τον Mazzoni (2019), χρησιμοποιώντας μία στρατηγική CPPI με τον συγκεκριμένο δυναμικό πολλαπλασιαστή είμαστε σε θέση να αναπαράγουμε την απόδοση μίας στρατηγικής OBPI με τα παραπάνω χαρακτηριστικά.

2.7 VaR-based Portfolio Insurance Strategies

Κάθε στρατηγική ασφάλισης χαρτοφυλακίου όπως έχουμε δει θέτει ένα κατώτατο επίπεδο για την αξία του «ασφαλισμένου» χαρτοφυλακίου, το λεγόμενο Floor, στο τέλος της περιόδου ασφάλισης. Όμως το αν θα καταφέρει να το εξασφαλίσει στην πράξη εξαρτάται από αρκετούς παράγοντες, όπως από τις κινήσεις και την πορεία της αγοράς κατά την συγκεκριμένη περίοδο, τις τιμές των παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων που σχετίζονται άμεσα ή έμμεσα (χρηματοοικονομικοί δείκτες) με το υποκείμενο χαρτοφυλάκιο, την συχνότητα των αναπροσαρμογών του χαρτοφυλακίου από τον διαχειριστή και τα κόστη συναλλαγής, ιδιαίτερα αν οι αναπροσαρμογές γίνονται σε συχνές χρονικές περιόδους. Οπότε, σε τέτοιες στρατηγικές, ο κίνδυνος η αξία του «ασφαλισμένου» χαρτοφυλακίου να πέσει κάτω από το Floor στην λήξη της περιόδου ασφάλισης είναι γνωστός ως **Gap Risk**.

Αν το **Gap Risk** είναι σχετικά μεγάλο, ίσως να μην είναι η καλύτερη επιλογή η εφαρμογή μίας στρατηγικής ασφάλισης. Με σκοπό να ποσοτικοποιηθεί αυτός ο κίνδυνος, προτάθηκε από τους Chow και Kritzman (2001) η εφαρμογή των βασικών αρχών του Value-at-Risk στην διαδικασία της δυναμικής αναπροσαρμογής του υποκείμενου ασφαλισμένου χαρτοφυλακίου.

Σύμφωνα με την στρατηγική VaR-based Portfolio Insurance, η αξία ή τα κεφάλαια του «ασφαλισμένου» χαρτοφυλακίου κατανέμονται μεταξύ περιουσιακών στοιχείων που ενέχουν κίνδυνο και του risk-asset με βάση τις κατανομές αποδόσεων τους. Πραγματοποιούνται δυναμικά αναπροσαρμογές στις αναλογίες των δύο επενδύσεων έτσι ώστε στην χειρότερη περίπτωση, οι πιθανές ζημιές στην αξία του σε σχέση με την ασφαλισμένη τιμή, F_t , να είναι ίσες με VaR_α σε ένα δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης α . Το VaR μπορεί να υπολογιστεί για διαφορετικά επίπεδα εμπιστοσύνης και ασφαλισμένες αξίες που ορίζονται από τους επενδυτές και αντικατοπτρίζουν την ανοχή τους στον κίνδυνο.

Για να αναπτύξουμε αυτή την προσέγγιση, υποθέτουμε ότι η στρατηγική εφαρμόζεται μόνο σε ένα risky asset, ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών για παράδειγμα, και το risk-free asset, λογαριασμούς καταθέσεων. Η τιμή του risk-free asset, B_t , ακολουθεί την διαδικασία:

$$dB_t = r * B_t * dt$$

όπου η αρχική αξία του risk-free asset είναι $B_0 > 0$ και r είναι το risk-free rate που υποθέτουμε ότι είναι **σταθερό**. Η τιμή του risky asset, S_t , ακολουθεί μία Γεωμετρική κίνηση Brown:

$$dS_t = \mu * S_t * dt + \sigma * S_t * dW_t$$

όπου, η αρχική αξία του risky asset είναι $S_0 > 0$, μ και σ είναι η στιγμιαία αναμενόμενη απόδοση και μεταβλητότητα του risky asset αντίστοιχα και W_t είναι η τυπική κίνηση Brown, όπου $W_t \sim N(0, 1)$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι $\mu > r$ και $\sigma > 0$

Έστω V_0 η αρχική αξία του συνολικού χαρτοφυλακίου και F_T το ασφαλισμένο ποσό στην ημερομηνία λήξης T . Αν το βάρος της επένδυσης στο risk-free asset στο χαρτοφυλάκιο είναι w , τότε $1 - w$ θα είναι το ποσοστό επένδυσης στο περιουσιακό στοιχείο που ενέχει κίνδυνο. Τότε, ο αριθμός των χρηματικών μονάδων στο risk-free asset θα είναι $\beta = \frac{w \cdot V_0}{B_0}$ και ισοδύναμα ο αριθμός των χρηματικών μονάδων στη επένδυση του περιουσιακού στοιχείου που ενέχει κίνδυνο θα είναι $\eta = \frac{(1-w) \cdot V_0}{S_0}$.

Με την υπόθεση ότι δεν γίνεται καμία προσαρμογή κατά την διάρκεια της περιόδου επένδυσης $[0, T]$ στο χαρτοφυλάκιο, η τελική του αξία θα δίνεται από την:

$$V_T = \beta \cdot B_T + \eta \cdot S_T = w \cdot V_0 \cdot e^{r \cdot T} + (1 - w) \cdot V_0 \cdot e^{((\mu - 0.5 \cdot \sigma^2) \cdot T + \sigma \cdot W_T)} \quad (4)$$

Η αναμενόμενη τιμή του χαρτοφυλακίου στο τέλος της επενδυτικής περιόδου είναι:

$$E(V_T) = w \cdot V_0 \cdot e^{r \cdot T} + (1 - w) \cdot V_0 \cdot e^{\mu \cdot T} \quad (5)$$

όπου $E(e^{((\mu - 0.5 \cdot \sigma^2) \cdot T + \sigma \cdot W_T)}) = e^{\mu \cdot T}$.

Το VaR για ένα δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης α είναι ίσο (στα πλαίσια της VBPI) με την διαφορά της αναμενόμενης τιμής του χαρτοφυλακίου και του ασφαλισμένου ποσού F_T στην λήξη της επένδυσης. Οπότε ισχύει ότι:

$$VaR_\alpha = (E(V_T) - F_T) = w \cdot V_0 \cdot e^{r \cdot T} + (1 - w) \cdot V_0 \cdot e^{\mu \cdot T} - F_T \quad (6)$$

και λύνοντας ως προς w (δηλαδή το ποσοστό της επένδυσης στο risk-free asset), προκύπτει ότι:

$$w = \frac{(F + VaR_\alpha - V_0 \cdot e^{\mu \cdot T})}{V_0 \cdot (e^{r \cdot T} - e^{\mu \cdot T})} \quad (7)$$

Αυτή η εξίσωση μας υποδεικνύει ότι όσο μεγαλύτερο είναι το VaR_α του επενδυτή, τόσο μικρότερο ποσό θα επενδυθεί στο risk-free asset και τόσο μεγαλύτερο στο risky asset. Από την στιγμή που το ασφαλισμένο χαρτοφυλάκιο περιλαμβάνει αποκλειστικά το risky και το risk-free asset και η απόδοση του δεύτερου θεωρείται γνωστή και σταθερή, η μόνη πηγή κινδύνου στο χαρτοφυλάκιο προέρχεται από το risky asset. Οπότε το VaR του χαρτοφυλακίου είναι ίσο με αυτό του risky asset και άρα ισχύει πως:

$$VaR_\alpha = (1 - w) \cdot V_0 \cdot e^{\mu \cdot T} - (1 - w) \cdot V_0 \cdot e^{((\mu - 0.5 \cdot \sigma^2) \cdot T + \sigma \cdot z_\alpha \cdot \sqrt{T})} \quad (8)$$

(βλέπε C. Jiang, σελ. 187) όπου z_α είναι το α -ποσοστιμόριο της τυπικής κανονικής κατανομής, δηλαδή $N(z_\alpha) = \alpha$, $N(-)$ είναι η αθροιστική τυπική κανονική κατανομή και α είναι το επίπεδο εμπιστοσύνης.

Συνδυάζοντας την εξίσωση (7) με την (8) προκύπτει ότι:

$$w = \frac{F + (1 - w) \cdot V_0 \cdot e^{\mu \cdot T} - (1 - w) \cdot V_0 \cdot e^{(\mu - 0.5 \cdot \sigma^2) \cdot T + \sigma \cdot z_\alpha \cdot \sqrt{T}} - V_0 \cdot e^{\mu \cdot T}}{V_0 \cdot (e^{r \cdot T} - e^{\mu \cdot T})}$$

$$w = \frac{F - V_0 * e^{(\mu - 0.5 * \sigma^2) * T * \sigma * Z_\alpha * \sqrt{T}}}{V_0 * e^{r * T} - V_0 * e^{(\mu - 0.5 * \sigma^2) * T * \sigma * Z_\alpha * \sqrt{T}}}$$

Όπου $z_\alpha = N^{-1}(\alpha)$. Από την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι δύο παράμετροι που χρειάζονται για να επιλεγθούν είναι το Floor, F και το επίπεδο εμπιστοσύνης, α . Η επιλογή αυτών των μεταβλητών έχει σημαντικές συνέπειες για την στρατηγική. Ειδικότερα, ένα χαμηλό F ή/και α συνεπάγεται με μία πιο «επικίνδυνη» στρατηγική, καθώς η έκθεση στο risky asset, $(1-w)$, θα είναι μεγαλύτερη σ' αυτή την περίπτωση. Ενδιαφέρον είναι ότι ο υπολογισμός του ποσοστού που θα επενδυθεί στο risk-free, w , δεν εξαρτάται ρητά από το VaR_α , υποδεικνύοντας ότι αυτή η στρατηγική υιοθετεί τις αρχές του Value-at-Risk αλλά δεν απαιτείται η εκτίμηση των πιθανών ζημιών όταν κατασκευάζεται το χαρτοφυλάκιο.

Αν το συνολικό χαρτοφυλάκιο δεν υποστεί καμία προσαρμογή έως το τέλος της περιόδου ασφάλισης από την στιγμή κατασκευής του, τότε καλείται στατική στρατηγική VBPI. Η δυναμική στρατηγική από την άλλη, συχνά κάνει προσαρμογές στις αναλογίες του χαρτοφυλακίου βασιζόμενη είτε σε κινήσεις της αγοράς, (έχουμε ήδη αναφέρει τον ορισμό του tolerance rate προηγουμένως), είτε σε προκαθορισμένα χρονικά διαστήματα έτσι ώστε να μπορεί να εξασφαλίσει μεγαλύτερες πιθανές αποδόσεις σε μία ανοδική αγορά και να περιορίσει τις αρνητικές αποδόσεις σε μία καθοδική/πτωτική αγορά. Να σημειωθεί πως το VaR_α του επενδυτή μεταβάλλεται μετά από μία αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου σε μία τέτοια δυναμική στρατηγική. Τώρα έστω ότι η δυναμική στρατηγική εφαρμόζεται, και στο χρόνο t το χαρτοφυλάκιο χρειάζεται να αναπροσαρμοστεί σύμφωνα με ένα επιλεγμένο κριτήριο. Σε αυτή την περίπτωση το ποσοστό επένδυσης στο risk-free asset πρέπει να αναθεωρηθεί ως:

$$w = \frac{F - V_t * e^{(\mu - 0.5 * \sigma^2) * (T-t) * \sigma * Z_\alpha * \sqrt{(T-t)}}}{V_t * e^{r * (T-t)} - V_t * e^{(\mu - 0.5 * \sigma^2) * (T-t) * \sigma * Z_\alpha * \sqrt{(T-t)}}$$

Όπου σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση η ποσότητα που επενδύεται στο risk-free asset είναι μία φθίνουσα συνάρτηση της αγοραίας τιμής του υποκείμενου χαρτοφυλακίου V_t που αντικατοπτρίζει τις συνθήκες της αγοράς. Αναλυτικότερα, όταν η αγορά είναι σε άνοδο, ένα υψηλό V_t υποδηλώνει μικρότερο μέρος επένδυσης στο risk-free και μεγαλύτερο στο risky asset. Άμα η τιμή του χαρτοφυλακίου αυξηθεί πέρα από ένα συγκεκριμένο επίπεδο, η στρατηγική απαιτεί δανεισμό στο risk-free rate, r , αλλά για λόγους ρεαλιστικότητας ο δανεισμός δεν επιτρέπεται. Αντίθετα, σε μία καθοδική αγορά, η βέλτιστη στρατηγική απαιτεί την αύξηση του w_t , έτσι ώστε να εγγυηθεί το ποσό ασφάλισης, F_t , σε ένα δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης α .

Ας εξετάσουμε τώρα ένα παράδειγμα για την εφαρμογή της VBPI που καλείται να ασφαλίσει ένα καλά διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο μετοχών αξίας $S_0 = V_0 = \$1000000$ για μία περίοδο $T = 6$ μηνών, όπου ως Floor ορίζεται το ποσό των $F_T = \$900000$ με το risk-free rate να ισούται με $r_f = 5\%$. Η περίοδοι αναπροσαρμογής είναι μηνιαίοι και ορίζεται επιπλέον ένα tolerance rate $|T| = 5\%$ για εβδομαδιαίες αποδόσεις του υποκείμενου χαρτοφυλακίου. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι $\mu = 12\%$, η τυπική απόκλιση των αποδόσεων είναι $\sigma = 25\%$. Επομένως, η αναπροσαρμογή των βαρών της κάθε

επένδυσης και οι κατ' ακόλουθες προσαρμογές στα ποσά επενδύσεων γίνονται κάθε φορά που η ,σε απόλυτο βαθμό, εβδομαδιαία απόδοση του υποκείμενου χαρτοφυλακίου είναι μεγαλύτερη του tolerance rate ή με χρονική απόσταση 1^{ος} μήνα από την προηγούμενη .Θα εξαιρεθούν τα κόστη συναλλαγών για ευκολία και υποθέτουμε ότι μπορούμε να επενδύουμε οποιοδήποτε ποσό στο υποκείμενο χαρτοφυλάκιο των μετοχών.

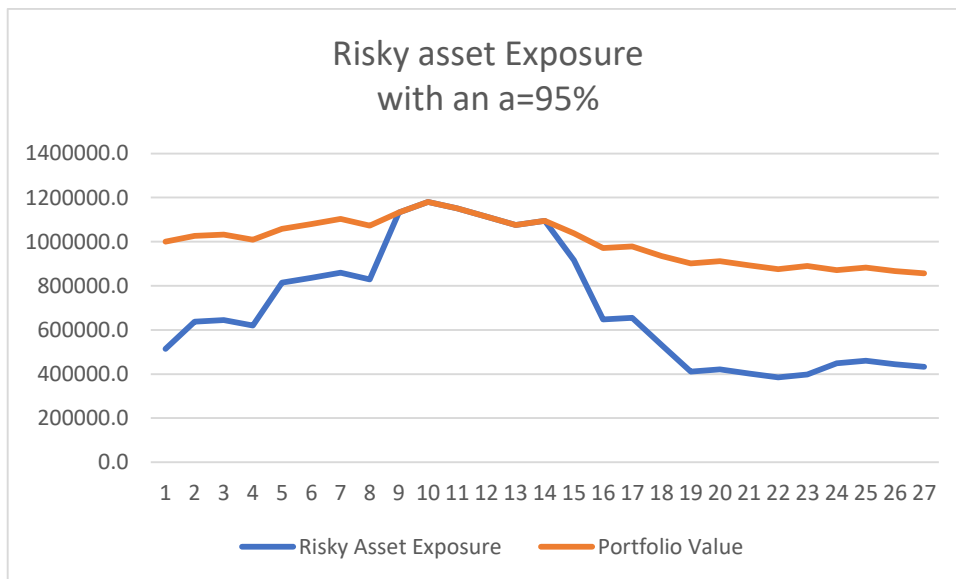
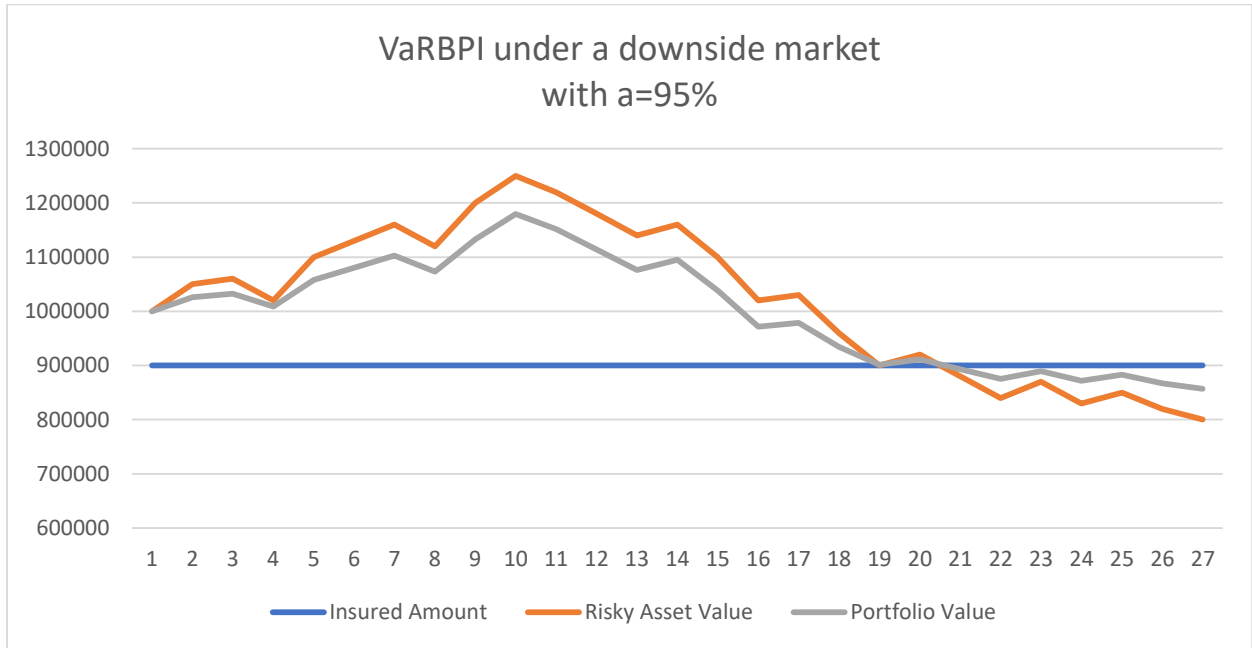
1^η Περίπτωση, $\alpha=95\%$ και πτώση της αγοράς.

VBPI Case 1

	Insured Amount	Risky Asset Value	Risky Asset Exposure	Risk-free asset Exposure	Portfolio Value	w	1-w	Risky Asset Return (%)
	900000	1000000	514212.3	485787.7	1000000.0	0.486	0.514	
1 week		1050000	637894.9	388283.0	1026177.9	0.378	0.622	5.0%
2 week		1060000	643970.1	388656.6	1032626.7			1.0%
3 week		1020000	619669.3	389030.5	1008699.8			-3.8%
4 week		1100000	814590.2	243085.4	1057675.6	0.230	0.770	7.8%
5 week		1130000	836806.3	243319.2	1080125.5			2.7%
6 week		1160000	859022.4	243553.3	1102575.7			2.7%
7 week		1120000	829400.9	243787.6	1073188.5			-3.4%
8 week		1200000	1132665.9	0.0	1132665.9	0.000	1.000	7.1%
9 week		1250000	1179860.4	0.0	1179860.4			4.2%
10 week		1220000	1151543.7	0.0	1151543.7			-2.4%
11 week		1180000	1113788.2	0.0	1113788.2			-3.3%
12 week		1140000	1076032.7	0.0	1076032.7			-3.4%
13 week		1160000	1094910.4	0.0	1094910.4	0.000	1.000	1.8%
14 week		1100000	916704.8	121572.4	1038277.1	0.117	0.883	-5.2%
15 week		1020000	648212.4	323512.2	971724.6	0.333	0.667	-7.3%
16 week		1030000	654567.5	323823.4	978390.9			1.0%
17 week		960000	531326.5	402890.8	934217.2	0.431	0.569	-6.8%
18 week		900000	411619.5	489777.4	901396.9	0.543	0.457	-6.3%
19 week		920000	420766.6	490248.5	911015.2			2.2%
20 week		880000	402472.4	490720.2	893192.6			-4.3%
21 week		840000	384178.2	491192.2	875370.5			-4.5%
22 week		870000	397898.9	491664.8	889563.6			3.6%
23 week		830000	449287.3	422455.1	871742.4	0.485	0.515	-4.6%
24 week		850000	460113.5	422861.5	882975.0			2.4%
25 week		820000	443874.2	423268.3	867142.5			-3.5%
26 week		800000	433048.0	423675.5	856723.5			-2.4%
Total Return		-20%			-14.3%			

Σύμφωνα με αυτήν την υποθετική πτωτική πορεία της αγοράς όπου η αξία του υποκείμενου χαρτοφυλακίου μεταβλήθηκε από $S_0 = \$1.000.000$ σε $S_{6/12} = \$800.000$ ή διαφορετικά είχε **συνολική απόδοση -20%**, με αυξομειώσεις κατά την διάρκεια της επενδυτικής περιόδου και μία απότομη πτώση από την 14^η εβδομάδα έως το τέλος της επενδυτικής περιόδου. Αυτό συνέβη μετά από μία γενικά ευνοϊκή πορεία της αγοράς για την αξία του υποκείμενου χαρτοφυλάκιο, η οποία είχε οδηγήσει από την 8^η – 13^η εβδομάδα σε ολική επένδυση στο χαρτοφυλάκιο των μετοχών. Σε αυτή την περίοδο η αξία του «ασφαλισμένου» χαρτοφυλακίου μεταβλήθηκε από $V_0 = \$1.000.000$ σε μόλις $V_{1/2} = \$856.723,5$ ή διαφορετικά σημείωσε **συνολική απόδοση -14.3%**. Οπότε με την χρήση του όχι και τόσο αυστηρού επιπέδου εμπιστοσύνης $\alpha=95\%$ που ορίστηκε, οι ζημίες περιορίστηκαν κατά **$\$56.723$ ή 5.7%**, αλλά το Floor δεν κατάφερε να διατηρηθεί, πιθανώς λόγω της πολύ υψηλής μεταβλητότητας που πραγματοποιήθηκε στην πράξη. Στην πραγματικότητα η αξία του χαρτοφυλακίου θα ήταν ακόμη μικρότερη λόγω των κοστών συναλλαγών.

VBPI Payoff Diagram 1



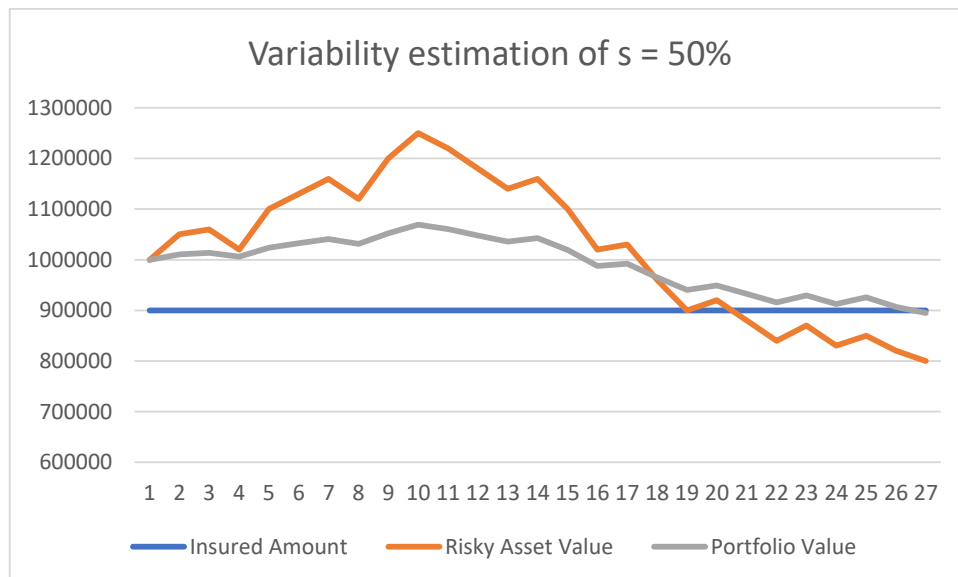
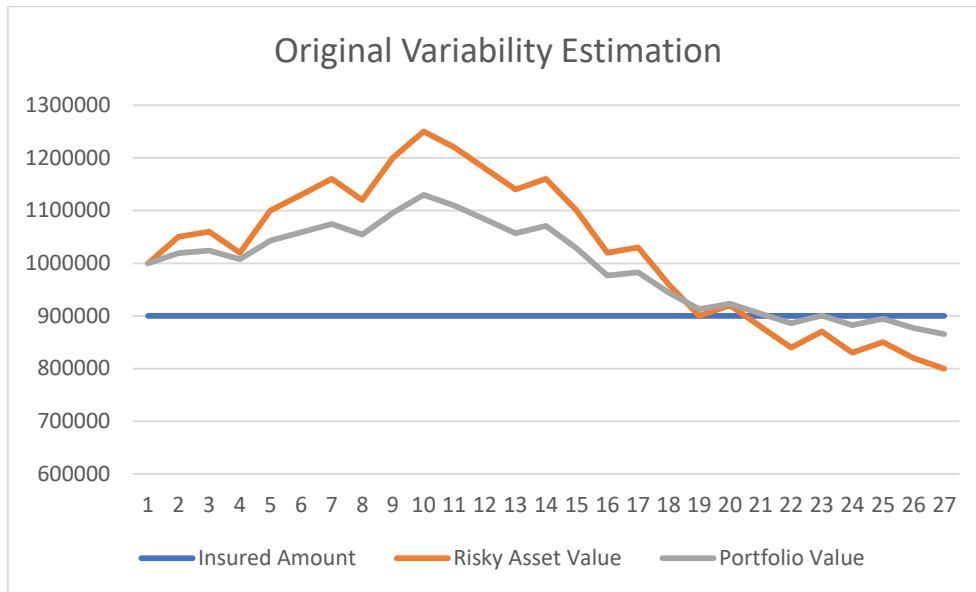
2^η Περίπτωση, $\alpha=99\%$ και πτώση της αγοράς.

VBPI Case 2

	Insured Amount	Risky Asset Value	Risky Asset Exposure	Risk-free asset Exposure	Portfolio Value	w	1-w	Risky Asset Return (%)
	900000	1000000	376984.2	623015.8	1000000.0	0.623	0.377	
1 week		1050000	450693.4	568755.2	1019448.6	0.558	0.442	5.0%
2 week		1060000	454985.7	569302.3	1024288.0			1.0%
3 week		1020000	437816.4	569850.0	1007666.4			-3.8%
4 week		1100000	566878.2	475675.0	1042553.1	0.456	0.544	7.8%
5 week		1130000	582338.5	476132.6	1058471.1			2.7%
6 week		1160000	597798.8	476590.6	1074389.4			2.7%
7 week		1120000	577185.1	477049.1	1054234.1			-3.4%
8 week		1200000	804357.6	291563.0	1095920.6	0.266	0.734	7.1%
9 week		1250000	837872.5	291843.5	1129716.0			4.2%
10 week		1220000	817763.5	292124.2	1109887.8			-2.4%
11 week		1180000	790951.6	292405.3	1083356.9			-3.3%
12 week		1140000	764139.7	292686.5	1056826.2			-3.4%
13 week		1160000	826691.7	243822.0	1070513.8	0.228	0.772	1.8%
14 week		1100000	710142.2	317846.2	1027988.4	0.309	0.691	-5.2%
15 week		1020000	563787.9	412859.6	976647.5	0.423	0.577	-7.3%
16 week		1030000	569315.2	413256.8	982572.0			1.0%
17 week		960000	505729.7	438548.6	944278.2	0.464	0.536	-6.8%
18 week		900000	427190.9	485901.1	913092.0	0.532	0.468	-6.3%
19 week		920000	436684.0	486368.5	923052.6			2.2%
20 week		880000	417697.8	486836.4	904534.2			-4.3%
21 week		840000	398711.5	487304.8	886016.3			-4.5%
22 week		870000	412951.2	487773.5	900724.7			3.6%
23 week		830000	499414.9	382792.8	882207.7	0.434	0.566	-4.6%
24 week		850000	511449.0	383161.1	894610.1			2.4%
25 week		820000	493397.9	383529.7	876927.5			-3.5%
26 week		800000	481363.8	383898.6	865262.4			-2.4%
Total Return		-20.0%			-13.5%			

Η μόνη διαφορά σε αυτή την περίπτωση είναι η τελική αξία του ασφαλισμένου χαρτοφυλακίου που είναι ίση με $V_{1/2} = \$865.262,4$, ελαφρώς μεγαλύτερη από την προηγούμενη ($\$856.723,5$) περίπτωση και η συνολική απόδοση είναι ίση με -13.5% , μεγαλύτερη κατά 0.8% . Αυτά τα αποτελέσματα είναι λογικά, αφού έγινε αύξηση του επιπέδου εμπιστοσύνης κάτι που κάνει την στρατηγική πιο συντηρητική, αλλά και πάλι το ζητούμενο Floor δεν κατάφερε να διατηρηθεί. Αυτό έχει παρατηρηθεί και στις δύο περιπτώσεις και όπως αναφέρθηκε και πιο πριν πιθανώς οφείλεται στο ότι η εκτίμηση για την μεταβλητότητα που χρησιμοποιήθηκε $\sigma = 25\%$ είναι πολύ μικρότερη από την πραγματοποιούμενη στην περίοδο ασφάλισης. Αν κατά την αρχή ή ακόμα και στην διάρκεια αλλάζαμε την εκτίμηση μας για την μεταβλητότητα του χαρτοφυλακίου των μετοχών η στρατηγική θα απέδιδε αρκετά καλύτερα. Αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα της εξάρτησης της VBPI από τις εκτιμήσεις για την αναμενόμενη μέση τιμή και την μεταβλητότητα του περιουσιακού στοιχείου που ενέχει κίνδυνο.

VBPI and Variability Estimation 1



3^η Περίπτωση, $\alpha=95\%$ και άνοδος της αγοράς.

VBPI Case 3

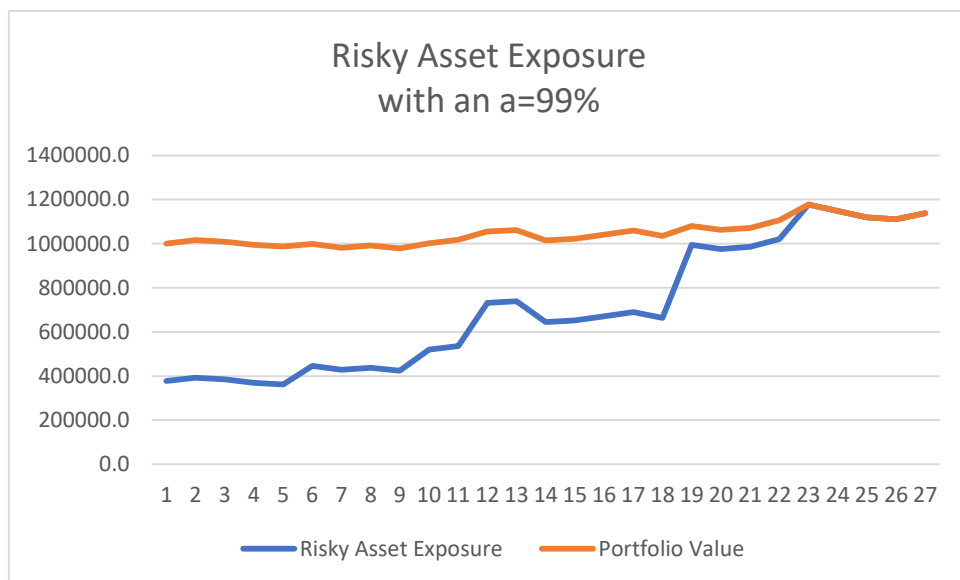
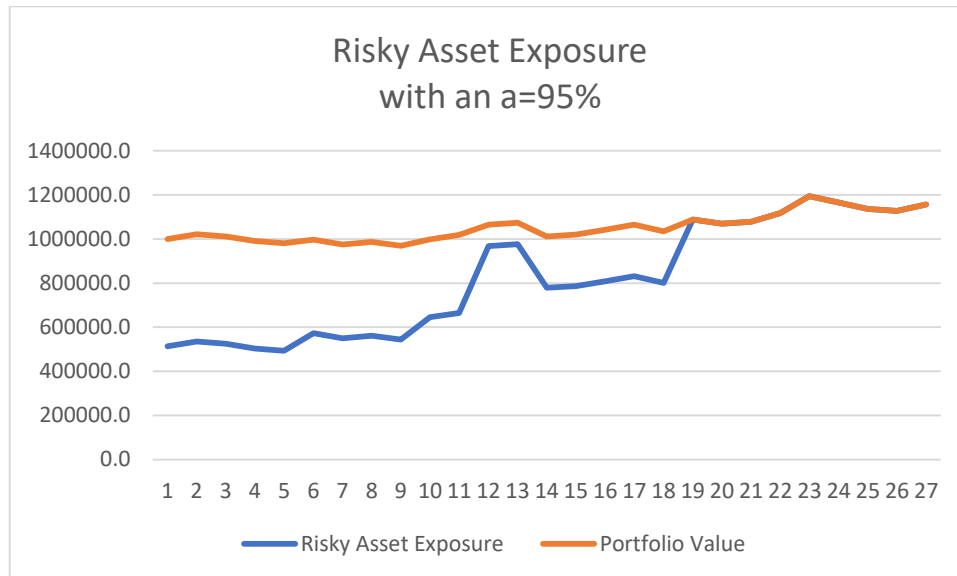
	Insured Amount	Risky Asset Value	Risky Asset Exposure	Risk-free asset Exposure	Portfolio Value	w	1-w	Risky Asset Return (%)
	900000	1000000	514212.3	485787.7	1000000	0.486	0.514	
1 week		1040000	534780.8	486255.1	1021035.82			4.0%
2 week		1020000	524496.5	486722.8	1011219.35			-1.9%
3 week		980000	503928.0	487191.1	991119.088			-3.9%
4 week		960000	493643.8	487659.7	981303.521			-2.0%
5 week		990000	573029.6	424169.5	997199.018	0.425	0.575	3.1%
6 week		950000	549876.8	424577.5	974454.361			-4.0%
7 week		970000	561453.2	424986.0	986439.159			2.1%
8 week		940000	544088.7	425394.8	969483.464			-3.1%
9 week		990000	645477.3	353356.3	998833.581	0.354	0.646	5.3%
10 week		1020000	665037.2	353696.2	1018733.43			3.0%
11 week		1090000	967154.9	97558.6	1064713.49	0.092	0.908	6.9%
12 week		1100000	976027.9	97652.5	1073680.33			0.9%
13 week		1030000	778418.9	233244.5	1011663.4	0.231	0.769	-6.4%
14 week		1040000	785976.4	233468.9	1019445.25			1.0%
15 week		1070000	808648.8	233693.5	1042342.24			2.9%
16 week		1100000	831321.2	233918.3	1065239.45			2.8%
17 week		1060000	801091.3	234143.3	1035234.62			-3.6%
18 week		1130000	1088362.1	0.0	1088362.13	0.000	1.000	6.6%
19 week		1110000	1069099.1	0.0	1069099.08			-1.8%
20 week		1120000	1078730.6	0.0	1078730.6			0.9%
21 week		1160000	1117256.7	0.0	1117256.69			3.6%
22 week		1240000	1194308.9	0.0	1194308.88	0.000	1.000	6.9%
23 week		1210000	1165414.3	0.0	1165414.31			-2.4%
24 week		1180000	1136519.7	0.0	1136519.74			-2.5%
25 week		1170000	1126888.2	0.0	1126888.22			-0.8%
26 week		1200000	1155782.8	0.0	1155782.79			2.6%
Total Reutn		20.0%			15.6%			

Σε με αυτήν την υποθετική ανοδική πορεία της αγοράς όπου η αξία του υποκείμενου χαρτοφυλακίου μεταβλήθηκε από $S_0 = \$1.000.000$ σε $S_{6/12} = \$1.200.000$ ή διαφορετικά είχε **συνολική απόδοση 20%**, με αυξομειώσεις κατά την διάρκεια της επενδυτικής περιόδου, η αξία του «ασφαλισμένου» χαρτοφυλακίου μεταβλήθηκε από $V_0 = \$1.000.000$ σε μόλις $V_{1/2} = \$1.155.782,8$ ή διαφορετικά σημείωσε **συνολική απόδοση 15.6%**. Οπότε με την χρήση του επιπέδου εμπιστοσύνης $\alpha=95\%$ που ορίστηκε, η διαφορά των κερδών με την χρήση της VBPI ήταν **-\$44318 ή -4.4%** σε σχέση με την αξία του υποκείμενου χαρτοφυλακίου. Να τονιστεί ότι σε κάποια περίπτωση η στρατηγική απαιτούσε δανεισμό στο risk-free rate, συγκεκριμένα από την 18^η εβδομάδα και ύστερα, όπου δεν επιτράπηκε και απλά έγινε ολική επένδυση του χαρτοφυλακίου στο risky asset. Στην πραγματικότητα η αξία του θα ήταν μικρότερη αλλά όχι κατά μεγάλο βαθμό, λόγω των κοστών συναλλαγών.

4^η Περίπτωση, $\alpha=99\%$ και άνοδος της αγοράς.

Σε αυτή την περίπτωση η μονή διαφορά είναι ότι λόγω του αυξημένου επιπέδου εμπιστοσύνης η στρατηγική γίνεται λίγο πιο συντηρητική που αντικατοπτρίζεται στην έκθεση του χαρτοφυλακίου στο risky asset, αλλά και πάλι υπάρχει μεγάλο μερίδιο συμμετοχής στα κέρδη από την άνοδο της αγοράς.

VBPI Payoff Diagram 2



Συγκεντρωτικά, η VaR-based Portfolio Insurance είναι μία στρατηγική η οποία αναπροσαρμόζει το ασφαλισμένο χαρτοφυλάκιο συχνά, έτσι ώστε η τελική αξία να υπερβαίνει το ασφαλισμένο ποσό κατά ένα δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης, το οποίο όσο αυξάνεται, αυξάνεται και η αυστηρότητα της στρατηγικής ως προς την έκθεση της στο περιουσιακό στοιχείο που ενέχει κίνδυνο. Μπορεί να θεωρηθεί ως μία γενικευμένη CPPI, αλλά σε αντίθεση με αυτή και τις τυπικές στρατηγικές ασφάλισης, υποδεικνύει ξεκάθαρα το Gap Risk που αντιμετωπίζουν οι επενδυτές που τη χρησιμοποιούν και η αποτελεσματικότητά της αυξάνεται κατά κόρον με σωστές εκτιμήσεις για την αναμενόμενη μέση απόδοση και την μεταβλητότητα των αποδόσεων του περιουσιακού στοιχείου που ενέχει κίνδυνο. Από αυτή την άποψη, η στρατηγική CPPI είναι πιο εύκολο να εφαρμοστεί από τον κοινό επενδυτή. Ωστόσο, η στρατηγική VBPI υποδεικνύει ξεκάθαρα το Gap Risk που αντιμετωπίζουν οι επενδυτές και τους δίνει την δυνατότητα να προϋπολογίζουν δυναμικά τον κίνδυνο με βάση τόσο την τιμή του περιουσιακού στοιχείου όσο και την αξία του χαρτοφυλακίου.

Κεφάλαιο 3^ο

Σε αυτό το κεφάλαιο θα κατασκευάσουμε ένα βέλτιστο χαρτοφυλάκιο, σύμφωνα με την θεωρία χαρτοφυλακίου του Markowitz, από μετοχές που ανήκουν στο χρηματιστηριακό δείκτη S&P 500 με πραγματικά δεδομένα από την 01/01/2015 μέχρι της 12/31/2021 για την κάθε εταιρία που υπάρχει στον δείκτη.

3.1 Introduction

Ο Standard and Poor 500 ή αλλιώς S&P 500 είναι ένας χρηματιστηριακός δείκτης, ο οποίος αποτελείται από τις 500 (503 αυτή την στιγμή) μεγαλύτερες, σε όρους κεφαλαιοποίησης εταιρίες του Αμερικάνικου χρηματιστηρίου, ανεξαρτήτως κλάδου δραστηριοποίησης. Η Θεωρία Χαρτοφυλακίου είναι μια πρακτική μέθοδος για την επιλογή επενδύσεων και την ενσωμάτωσή τους σε ένα χαρτοφυλάκιο με σκοπό την μεγιστοποίηση των συνολικών αποδόσεων τους εντός ενός αποδεκτού επιπέδου κινδύνου. Βασικό συστατικό της Θεωρίας Χαρτοφυλακίου είναι η τεχνική της διαφοροποίησης, η οποία μειώνει τον κίνδυνο του συνολικού χαρτοφυλακίου κατανέμοντας επενδύσεις σε διάφορα χρηματοοικονομικά όργανα, βιομηχανίες και άλλες κατηγορίες. Με άλλα λόγια, στοχεύει στη μεγιστοποίηση των αποδόσεων επενδύοντας σε διαφορετικούς τομείς που ο καθένας θα αντιδρούσε διαφορετικά στο ίδιο γεγονός. Σύμφωνα με τον Markowitz οι επενδυτές θα μπορούσαν να επιτύχουν τα καλύτερα αποτελέσματα για αυτούς επιλέγοντας ένα βέλτιστο μείγμα ανάμεσα σε επενδύσεις υψηλής απόδοσης που εμπεριέχουν μεγάλο κίνδυνο και σε επενδύσεις μικρής απόδοσης που εμπεριέχουν λίγο ή και καθόλου κίνδυνο με βάση την αξιολόγηση της ατομικής τους ανοχής στον κίνδυνο. Αυτό το βέλτιστο μείγμα είναι ονομάζεται βέλτιστο χαρτοφυλάκιο.

3.2 Calculation of a Z-score

Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για τις εταιρίες αντλήθηκαν μέσω της Data stream για την περίοδο 01/01/2015 – 12/31/2022. Το Z-score χρησιμοποιείται για να προσδιορίσουμε εάν πρέπει να αγοράσουμε μια μετοχή, σχετικά με την οικονομική ισχύ της υποκείμενης εταιρείας. Είναι το αποτέλεσμα ενός ελέγχου πολλών χαρακτηριστικών της εταιρίας, όπως της κερδοφορίας, της ρευστότητας, του δανεισμού και άλλων στοιχείων, που βασίζεται σε χρηματοοικονομικούς δείκτες που έχουν δημοσιευτεί από την αυτή στις ετήσιες λογιστικές καταστάσεις της. Για την κατασκευή του ακόλουθου Z-score χρησιμοποιήθηκαν οι δείκτες Dividend Yield (D/Y), Price to Earnings (P/E) και συγκεκριμένα το αντίστροφο του, δηλαδή (E/P), ο Earnings Per Share (EPS), όλοι σταθμισμένοι από το Market Value (MV) της κάθε εταιρίας ως προς το άθροισμα των κεφαλαιοποιήσεων όλων των εταιριών του δείκτη. Τέλος αθροίστηκαν οι σταθμισμένοι αυτοί δείκτες και δημιουργήθηκε το Z-score, όπου οι 50 εταιρίες με το μεγαλύτερο, είναι οι ακόλουθες:

Z-score

	Company	Z-score		Company	Z-score
1	MICROSOFT	0.256839	26	MCDONALDS	0.050865
2	APPLE	0.213155	27	CITIGROUP	0.050194
3	BOOKING HOLDINGS - MARKET VALUE	0.167181	28	MASTERCARD	0.050096
4	BERKSHIRE HATHAWAY 'B'	0.166165	29	INTEL	0.04912
5	JP MORGAN CHASE & CO.	0.156757	30	3M	0.047602
6	UNITEDHEALTH GROUP	0.121512	31	PFIZER	0.046875
7	JOHNSON & JOHNSON	0.115774	32	BOEING	0.045311
8	META PLATFORMS A	0.111191	33	ABBVIE	0.044387
9	HOME DEPOT	0.104304	34	WALT DISNEY	0.044172
10	BLACKROCK	0.089986	35	THERMO FISHER SCIENTIFIC	0.043851
11	GOLDMAN SACHS GP.	0.087824	36	VISA 'A'	0.041891
12	EXXON MOBIL	0.085381	37	MERCK & COMPANY	0.041717
13	NVR	0.07864	38	BIOGEN	0.04123
14	WALMART	0.072456	39	BANK OF AMERICA	0.041182
15	PROCTER & GAMBLE	0.071325	40	ALPHABET 'C'	0.040713
16	INTERNATIONAL BUS.MCHS.	0.071263	41	ACCENTURE CLASS A	0.040272
17	VERIZON COMMUNICATIONS	0.071011	42	UNION PACIFIC	0.039427
18	LOCKHEED MARTIN	0.070692	43	ELEVANCE HEALTH	0.039261
19	CHEVRON	0.064555	44	COSTCO WHOLESALE	0.039232
20	AMGEN	0.064086	45	REGENERON PHARMS.	0.039156
21	AT&T	0.062655	46	COCA COLA	0.038389
22	PEPSICO	0.05562	47	HONEYWELL INTL.	0.0381
23	WELLS FARGO & CO	0.054782	48	CISCO SYSTEMS	0.038058
24	AUTOZONE	0.054479	49	BROADCOM	0.037925
25	PHILIP MORRIS INTL.	0.052487	50	ALPHABET A	0.037858

3.2 Selection of Final Companies

Στην συνέχεια υπολογίστηκαν οι μέσες εβδομαδιαίες αποδώσεις των 50 επιλεγμένων μετοχών των ανάλογων εταιριών, οι διακυμάνσεις των αποδόσεων τους (και ανάλογα οι τυπικές αποκλίσεις τους), όπου είναι το κλασικό μέτρο κινδύνου της κάθε μετοχής και ο συντελεστής μεταβλητότητας των αποδόσεων της κάθε εταιρίας, όπου είναι το πηλίκο της τυπικής απόκλισης των αποδόσεων ως προς την μέση απόδοση της κάθε μετοχής, $CV = sd(R) / E(R)$, όπου επιτρέπει στους επενδυτές να προσδιορίσουν πόση μεταβλητότητα ή κίνδυνο αναλαμβάνουν σε σύγκριση με την αναμενόμενη απόδοση από τις επενδύσεις που αναλαμβάνουν. Στην ιδανική περίπτωση, ένας τέτοιος συντελεστής μεταβλητότητας (CV) θα πρέπει να έχει ως αποτέλεσμα έναν χαμηλό ρυθμό της τυπικής απόκλισης προς τη μέση απόδοση, και έτσι τόσο καλύτερη θα είναι η ανταλλαγή κινδύνου-απόδοσης.

Έπειτα δημιουργούμε τον πίνακα συσχέτισης των 50 επιλεγμένων, σύμφωνα με το Z-score, μετοχών. Η συσχέτιση είναι ένα στατιστικό μέτρο που υποδεικνύει την κατεύθυνση αλλά και τον βαθμό της σχέσης μεταξύ των αποδόσεων δύο περιουσιακών στοιχείων, όπου $-1 \leq \rho_{1,2} < 1$. Όσο πιο κοντά κατά απόλυτη τιμή είναι η τιμή της συσχέτισης στην μονάδα, τόσο πιο ισχυρή σχέση υπάρχει μεταξύ των αποδόσεων των δύο αξιολογούμενων. Οι τύποι που υπολογίζουν τη συσχέτιση έχουν τη δυνατότητα να προβλέψουν πώς δύο μετοχές ενδέχεται να αποδίδουν η μία σε σχέση με την άλλη στο μέλλον. Επιλέγοντας μετοχές με μικρό βαθμό συσχέτισης ή

ακόμα καλύτερα, αρνητικό, μπορεί να βοηθήσει στη μείωση του συνολικού κινδύνου και στην αύξηση της συνολικής πιθανής απόδοσης ενός χαρτοφυλακίου. Επομένως, για μία καλή διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου πρέπει να επιλέγονται μετοχές με την ελάχιστη δυνατή συσχέτιση έτσι ώστε να πετύχουμε μία καλή αντιστάθμιση.

CVs

	Companies	CV		Companies	CV
1	MICROSOFT	5.319133	26	UNION PACIFIC	13.36278
2	THERMO FISHER SCIENTIFIC	6.084427	27	PFIZER	13.38091
3	APPLE	6.235408	28	LOCKHEED MARTIN	13.80629
4	ALPHABET 'C'	6.293076	29	ABBVIE	14.02042
5	ALPHABET A	6.347091	30	JOHNSON & JOHNSON	14.37667
6	ACCENTURE CLASS A	6.41525	31	BOOKING HOLDINGS	14.4818
7	COSTCO WHOLESALE	6.609256	32	GOLDMAN SACHS GP.	14.96417
8	UNITEDHEALTH GROUP	7.082665	33	WALMART	15.50914
9	BROADCOM	7.221951	34	WALT DISNEY	17.30953
10	MASTERCARD	7.494139	35	BOEING	19.76182
11	HOME DEPOT	7.664116	36	COCA COLA	20.07358
12	MCDONALDS	7.840575	37	REGENERON PHARMS.	20.3334
13	VISA 'A'	7.969763	38	MERCK & COMPANY	20.8309
14	META PLATFORMS A	8.047673	39	AMGEN	22.05008
15	NVR	8.077985	40	INTEL	22.40234
16	AUTOZONE	8.268782	41	CITIGROUP	32.29138
17	ELEVANCE HEALTH	9.281308	42	PHILIP MORRIS INTL.	34.53447
18	BLACKROCK	10.75859	43	VERIZON COMMUNICATIONS	40.4441
19	BERKSHIRE HATHAWAY 'B'	11.4333	44	CHEVRON	42.44576
20	PEPSICO	11.44755	45	3M	45.02008
21	JP MORGAN CHASE & CO.	11.48693	46	BIOGEN	60.14361
22	HONEYWELL INTL.	11.66669	47	WELLS FARGO & CO	67.31723
23	CISCO SYSTEMS	11.69523	48	INTERNATIONAL BUS.MCHS.	157.7292
24	PROCTER & GAMBLE	12.47955	49	AT&T	-58.8161
25	BANK OF AMERICA	12.59974	50	EXXON MOBIL	-84.7293

Με βάση όλα τα παραπάνω κριτήρια αλλά και κάποιων ποιοτικών χαρακτηριστικών που εξετάστηκαν για την κάθε εταιρία για τους μελλοντικούς τους στόχους αλλά και τον τρόπο λειτουργίας τους, επιλέχθηκαν οι ακόλουθες 16 τελικές μετοχές με τα εξής ιστορικά χαρακτηριστικά:

	Companies	AVERAGE	VARIANCE	STDEV
1	APPLE	0.00577	0.001294	0.035979
2	MICROSOFT	0.005972	0.001009	0.031766
3	WALMART	0.001779	0.000761	0.027587
4	UNITEDHEALTH GROUP	0.005047	0.001278	0.035747
5	HOME DEPOT	0.004279	0.001075	0.032794
6	PROCTER & GAMBLE	0.001866	0.000542	0.023285
7	CHEVRON	0.000967	0.001683	0.041027
8	AUTOZONE	0.003835	0.001005	0.031708
9	MCDONALDS	0.003188	0.000625	0.024999
10	MASTERCARD	0.004511	0.001143	0.033805
11	PFIZER	0.002368	0.001004	0.031682
12	THERMO FISHER SCIENTIFIC	0.005057	0.000947	0.030771
13	VISA 'A'	0.003746	0.000891	0.029853
14	COSTCO WHOLESALE	0.004174	0.000761	0.027585
15	REGENERON PHARMS.	0.00237	0.002323	0.048197
16	BROADCOM	0.00618	0.001992	0.044631

Έπειτα υπολογίσουμε – εκτιμούμε το κατάλληλο Index Model για κάθε μία από τις 16 παραπάνω μετοχές. Το Index Model μας παρουσιάζει μία γραμμική σχέση μεταξύ των αποδόσεων της συγκεκριμένης μετοχής και του δείκτη της αγοράς S&P 500. Ως εξαρτημένη μεταβλητή σε κάθε παλινδρόμηση χρησιμοποιούμε την πραγματοποιημένη απόδοση της εκάστοτε μετοχής και ως ανεξάρτητη την απόδοση του χρηματιστηριακού δείκτη S&P500. Τα αποτελέσματα ήταν τα ακόλουθα:

Index Model

<i>Companies</i>	Intercept	Beta
<i>APPLE</i>	0.003179	1.011256
<i>MICROSOFT</i>	0.003326	1.032672
<i>UNITEDHEALTH GROUP</i>	0.002464	1.008476
<i>WALMART</i>	0.000884	0.34911
<i>CHEVRON</i>	-0.00207	1.187264
<i>VERIZON COMMUNICATIONS</i>	-0.00056	0.434236
<i>MASTERCARD</i>	0.001445	1.196587
<i>PFIZER</i>	0.000679	0.659196
<i>COSTCO WHOLESALE</i>	0.002523	0.644486
<i>MCDONALDS</i>	0.001414	0.692672
<i>THERMO FISHER SCIENTIFIC</i>	0.002689	0.924364
<i>BROADCOM</i>	0.003082	1.209092
<i>HOME DEPOT</i>	0.001518	1.07764
<i>AUTOZONE</i>	0.002252	0.61797
<i>PROCTER & GAMBLE</i>	0.000713	0.45017
<i>REGENERON PHARMS.</i>	0.000899	0.574437

Υπενθυμίζουμε ότι ο συντελεστής beta είναι ένα μέτρο της μεταβλητότητας ή του συστηματικού κινδύνου ενός αξιόγραφου σε σχέση με τον δείκτη της αγοράς (στην συγκεκριμένη περίπτωση τον δείκτη S&P 500) και για ένα αξιόγραφο i προκύπτει ως:

$$Beta = \frac{Covariance(R_i, R_M)}{Variance(R_M)}$$

Όπου R_i η απόδοση του i αξιογράφου, R_M η απόδοση του δείκτη S&P 500 και $Var(R_M)$ η διακύμανση του S&P 500.

Το intercept από την εξίσωση της παλινδρόμησης αναπαριστά την αναμενόμενη απόδοση για την συγκεκριμένη εταιρία όταν η απόδοση του δείκτη της αγοράς είναι ίση με μηδέν.

Σύμφωνα με τα εκτιμημένα Index Models για την κάθε μετοχή αλλά και την πρόβλεψη ειδικών για την απόδοση του δείκτη της αγοράς στο τέλος του 2022, η οποία ,σύμφωνα με την New York Times, με την συναίνεση της Wall Street ήταν ότι ο S&P 500 θα έφτανε τις **4825 μονάδες στο τέλος του 2022**. Δηλαδή μια μέτρια αύξηση από την τελική του τιμή το 2021 που ήταν 4778 μονάδες, υποδηλώνοντας έτσι μία εκτιμώμενη απόδοση της τάξης του **0,098%**. Με τα παραπάνω στοιχεία εκτιμούμε τις αναμενόμενες ετήσιες αποδώσεις των παραπάνω μετοχών.

Expected Returns of the Final Companies

<i>Companies</i>	Intercept	Beta	Expected Return
<i>APPLE</i>	0.003179	1.011256	1.35%
<i>MICROSOFT</i>	0.003326	1.032672	1.39%
<i>UNITEDHEALTH GROUP</i>	0.002464	1.008476	1.28%
<i>WALMART</i>	0.000884	0.34911	0.45%
<i>CHEVRON</i>	-0.00207	1.187264	1.01%
<i>VERIZON COMMUNICATIONS</i>	-0.00056	0.434236	0.39%
<i>MASTERCARD</i>	0.001445	1.196587	1.37%
<i>PFIZER</i>	0.000679	0.659196	0.74%
<i>COSTCO WHOLESALE</i>	0.002523	0.644486	0.91%
<i>MCDONALDS</i>	0.001414	0.692672	0.85%
<i>THERMO FISHER SCIENTIFIC</i>	0.002689	0.924364	1.21%
<i>BROADCOM</i>	0.003082	1.209092	1.54%
<i>HOME DEPOT</i>	0.001518	1.07764	1.25%
<i>AUTOZONE</i>	0.002252	0.61797	0.86%
<i>PROCTER & GAMBLE</i>	0.000713	0.45017	0.53%
<i>REGENERON PHARMS.</i>	0.000899	0.574437	0.68%

3.3 Optimal Weights Selection

Η μεθοδολογία που επιλέχθηκε για την επιλογή των βαρών της κάθε μετοχής στο συνολικό χαρτοφυλάκιο είναι η μεγιστοποίηση του Sharpe Ratio. Το Sharpe ratio είναι μία από τις ευρέως χρησιμοποιούμενες μεθόδους για τον υπολογισμό της προσαρμοσμένης στον κίνδυνο απόδοσης. Η προσθήκη διαφοροποίησης πρέπει να αυξάνει το Sharpe ratio σε σύγκριση με παρόμοια χαρτοφυλάκια με χαμηλότερο επίπεδο ή καθόλου διαφοροποίησης. Για να ισχύει αυτό, οι επενδυτές πρέπει να

αποδεχτούν την υπόθεση ότι ο κίνδυνος είναι ίσος με τη μεταβλητότητα, κάτι που δεν είναι παράλογο, αλλά μπορεί να είναι πολύ περιοριστικό για να εφαρμοστεί σε όλες τις επενδύσεις. Γενικά, ένας επενδυτής θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου και το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο για τον υπολογισμό μίας εκτίμησης του Sharpe ratio:

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{E(R) - r_f}{sd(R)}$$

Όπου **E(R)** είναι η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου, **r_f** το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (risk-free rate) και **sd(R)** η τυπική απόκλιση των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου. Το Sharpe ratio επίσης μπορεί να βοηθήσει στην εξήγηση εάν οι "υπερβολικές" αποδόσεις (excess returns) ενός χαρτοφυλακίου οφείλονται σε έξυπνες επενδυτικές αποφάσεις ή είναι αποτέλεσμα υπερβολικού κινδύνου. Αν και ένα χαρτοφυλάκιο ή ένα αμοιβαίο κεφάλαιο μπορεί να έχει υψηλότερες αναμενόμενες αποδόσεις από άλλα παρόμοια, είναι μια καλή επένδυση μόνο εάν αυτές οι υψηλότερες αποδόσεις δεν συνοδεύονται από υπερβολικό πρόσθετο κίνδυνο. Όσο μεγαλύτερος είναι ο Sharpe ratio ενός χαρτοφυλακίου, τόσο καλύτερη είναι η, προσαρμοσμένη στον κίνδυνο, επίδοση του. Εάν η ανάλυση καταλήξει σε αρνητικό Sharpe ratio, σημαίνει είτε ότι το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο είναι μεγαλύτερο από την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου είτε ότι η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι αρνητική. Και στις δύο περιπτώσεις, ένας αρνητικός Sharpe ratio δεν αποδίδει κανένα χρήσιμο σημάδι για την επίδοση του χαρτοφυλακίου.

Το τριμηνιαίο επιτόκιο των γραμματίων του Δημοσίου των ΗΠΑ (T-Bill) χρησιμοποιείται συχνά ως το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο για επενδυτές που εδρεύουν στις ΗΠΑ και όχι μόνο και είναι αυτό που θα χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση μας.

Οι επενδυτικές προμήθειες (investment fees) είναι ένας από τους σημαντικότερους καθοριστικούς παράγοντες της απόδοσης μίας επένδυσης και είναι κάτι στο οποίο κάθε επενδυτής πρέπει να επικεντρωθεί λόγω της επίδρασής του στις καθαρές αποδόσεις. Κατά μία χρηματοοικονομική έννοια, τα κόστη συναλλαγής (transaction costs) περιλαμβάνουν τις προμήθειες και τα spreads των dealers, τα οποία είναι ο διαφοράς μεταξύ της τιμής που πλήρωσε ο dealer για ένα αξιόγραφο και της τιμής που πληρώνει ο τελικός αγοραστής. Τα κόστη συναλλαγής μειώνουν τις αποδόσεις και με την πάροδο του χρόνου, υψηλά κόστη συναλλαγής μπορεί να αντικατοπτρίζουν ζημίες χιλιάδων δολαρίων, όχι μόνο από το ίδιο το κόστος, αλλά και επειδή αυτά τα κόστη μειώνουν το ποσό του διαθέσιμου κεφαλαίου για επανεπενδύσεις. Υπολογίζονται πολλαπλασιάζοντας το ποσό της επένδυσης με το ποσοστό του κόστους συναλλαγής (rate of transaction costs).

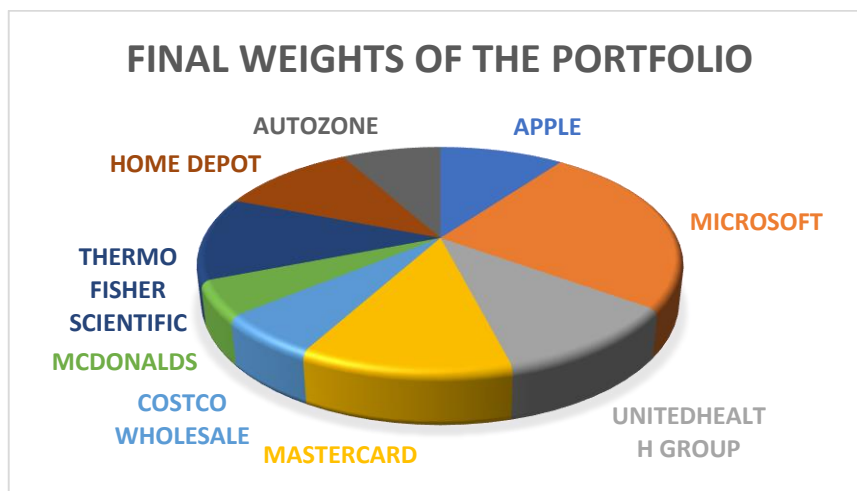
Τέλος να αναφέρουμε ότι, μερικές φορές θέτουμε πρόσθετους περιορισμούς στην διαδικασία εύρεσης των βέλτιστων βαρών, ώστε να μην επενδύσουμε το μεγαλύτερο μέρος του κεφαλαίου μας σε μια ή δύο συγκεκριμένες μετοχές, με στόχο να επιτευχθεί έτσι όσο δυνατόν καλύτερη διαφοροποίηση. Αφού εισαχθούν και αυτοί οι περιορισμοί, εξάγουμε από τον Solver (με χρήση του Excel) τις επιθυμητές αναλογίες κατανομής κεφαλαίου και σχέσης κινδύνου-απόδοσης.

Αφού ακολουθήσαμε την διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω, αλλά και υπολογίζοντας τον πίνακα διακυμάνσεων/συνδιακυμάνσεων των επιλεγμένων μετοχών και του δείκτη αγοράς S&P 500 καταλήξαμε στο ακόλουθο χαρτοφυλάκιο:

Final Portfolio Weights

Name of the Company	Weight	Beta
APPLE	0.1	1.011256
MICROSOFT	0.25	1.032672
UNITED HEALTH	0.11	1.008476
MASTERCARD	0.12	1.196587
COSCTO	0.06	0.644486
THERMO FISHER	0.12	0.924364
AUTOZONE	0.08	0.61797
HOME DEPOT	0.11	1.07764
MCDONALDS	0.05	0.692672

Όπου ο συντελεστής beta του συνολικού χαρτοφυλακίου είναι ίσος με **Beta = 0.966**. Ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο εμπεριέχει ετήσια αναμενόμενη απόδοση ίση με 1.184% και τυπική απόκλιση 2.344%



VARIANCE	0.000549
STDEV	2.344%
ExpReturn	1.184%
Sharpe Ratio	0.403
CV	1.98

Κεφάλαιο 4^ο

Σε αυτό το κεφάλαιο θα συγκρίνουμε την πορεία και την τελική απόδοση του χαρτοφυλακίου που δημιουργήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, εφαρμόζοντας ξεχωριστά και αξιολογώντας κάθε μία από της προαναφερθείσες στρατηγικές ασφάλισης του Κεφαλαίου 2. Θα γίνει χρήση των πραγματικών δεδομένων που παρατηρήθηκαν την περίοδο 12/31/2021 – 12/14/2022. Τα δεδομένα συλλέχθηκαν από την DataStream. Σημαντική υπόθεση είναι ότι μπορεί να επενδυθεί οποιοδήποτε ποσό στο υποκείμενο χαρτοφυλάκιο.

Τα δεδομένα και οι απαιτήσεις που θα χρειαστούν για να πραγματοποιήσουμε την ρεαλιστική αναπαράσταση και να αξιολογήσουμε τα αποτελέσματα της κάθε στρατηγικής παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Basic Data for our underlying portfolio

Initial Wealth	\$10000000
Floor	\$9300000
Expected Return of the Portfolio	1.184%
Standard Deviation	2.345%
Beta of the Portfolio	0.966
S&P 500 Index Initial Price	4776 units
S&P 500 Index, Options Multiplier	100
S&P 500 Index, Future Contract Multiplier	50

Ως risk-free rate χρησιμοποιείται το 3-month US-Treasury Bill rate το οποίο έχει τις ακόλουθες τιμές και μεταβάλλεται ανά χρονικό διάστημα της επενδυτικής περιόδου:

Risk-free rates

1/31/2022 – 2/27/2022	0.0024 ή 0.24%
2/28/2022 – 3/30/2022	0.0037 ή 0.37%
3/31/2022 – 4/28/2022	0.0051 ή 0.51%
4/29/2022 – 5/30/2022	0.0083 ή 0.83%
5/31/2022 - 6/29/2022	0.0113 ή 1.13%
6/30/2022 - 7/28/2022	0.0166 ή 1.66%
7/29/2022 - 8/30/2022	0.0234 ή 2.34%
8/31/2022 - 9/29/2022	0.0287 ή 2.87%

9/30/2022 – 10/30/2022	0.0322 ή 3.22%
10/31/2022 – 11/29/2022	0.0406 ή 4.06%
11/30/2022 – 12/14/2022	0.0422 ή 4.22%

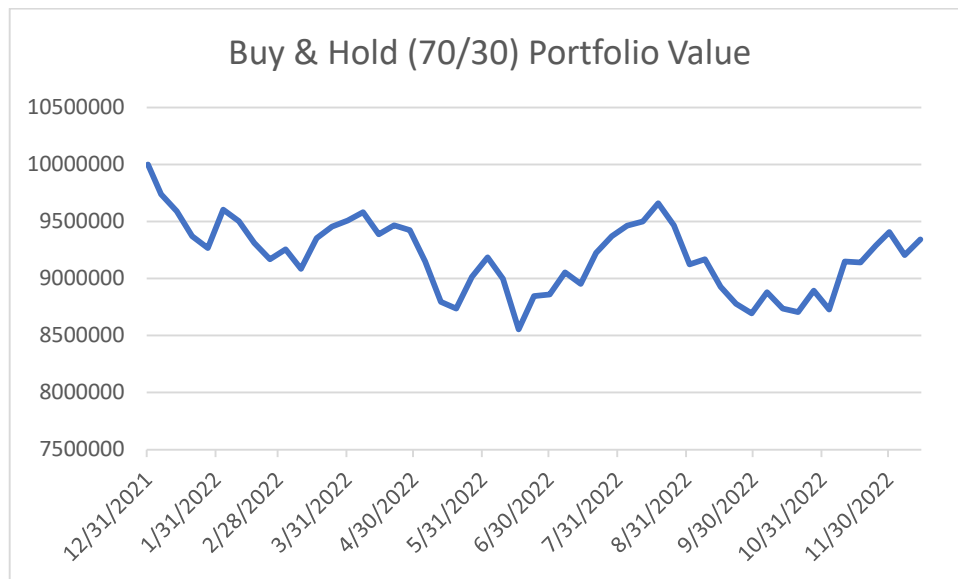
Ως μεταβλητότητα χρησιμοποιήθηκε η realized volatility – πραγματοποιημένη μεταβλητότητα του δείκτη αγοράς S&P 500, η οποία παρουσίασε τις ακόλουθες τιμές:

Effective Date	S&P 500 1-Month Realized Volatility	Effective Date	S&P 500 1-Month Realized Volatility
12/31/2021	16.82%	6/23/2022	29.13%
1/6/2022	15.32%	6/30/2022	29.60%
1/13/2022	15.41%	7/7/2022	28.93%
1/20/2022	15.35%	7/14/2022	21.91%
1/27/2022	15%	7/21/2022	20.20%
2/3/2022	20.46%	7/28/2022	19.03%
2/10/2022	20.94%	8/4/2022	19.92%
2/17/2022	22.15%	8/11/2022	19.93%
2/24/2022	22.35%	8/18/2022	17.20%
3/3/2022	22.62%	8/25/2022	16.70%
3/10/2022	24.82%	9/1/2022	19.28%
3/17/2022	25.17%	9/8/2022	20.73%
3/24/2022	24.34%	9/15/2022	25.12%
3/31/2022	22.31%	9/22/2022	24.87%
4/7/2022	18.37%	9/29/2022	24.15%
4/14/2022	16.29%	10/6/2022	27.33%
4/21/2022	16.52%	10/13/2022	25.58%
4/28/2022	21.73%	10/20/2022	27.48%
5/5/2022	29.02%	10/27/2022	27.86%
5/12/2022	30.93%	11/3/2022	26%
5/19/2022	34.90%	11/10/2022	31.50%
5/26/2022	33.16%	11/17/2022	27.93%
6/2/2022	31.32%	11/24/2022	26.25%
6/9/2022	26.74%	11/30/2022	27.22%
6/16/2022	31.87%	12/7/2022	26.09%

4.1 Buy and Hold Strategy

Όπως έχουμε αναφέρει οι Buy and Hold είναι η πιο απλή μορφή στρατηγικής που μπορεί να εφαρμοστεί για την διαχείριση ενός χαρτοφυλακίου, καθώς από την αρχική επιλογή των βαρών κάθε επένδυσης, στο υποκείμενο χαρτοφυλάκιο και στους λογαριασμούς καταθέσεων, δεν πραγματοποιείται καμία τροποποίηση μέχρι το τέλος της επενδυτικής περιόδου. Τα αποτελέσματα για το δικό μας χαρτοφυλάκιο,

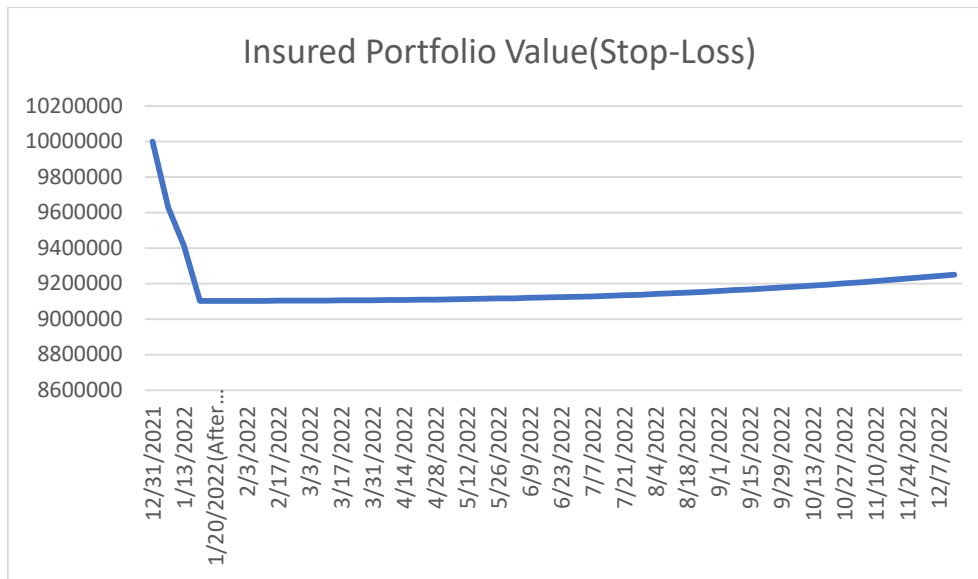
όπου το 70% του αρχικού πλούτου ή αλλιώς \$7000000 επενδύθηκαν στο υποκείμενο χαρτοφυλάκιο και το υπόλοιπο 30% ή 3000000 σε λογαριασμούς καταθέσεων ήταν τα εξής:



Η αξία του συνολικού χαρτοφυλακίου σημείωσε αρκετές μεταβολές μέχρι να φτάσει στην τελική αξία των $V_T = \$9.342.601$, έχοντας μία συνολική απόδοση $R_{Final} = -6.57\%$. Η χαμηλότερη τιμή του χαρτοφυλακίου παρατηρήθηκε στις **16/6/2022**, όπου ήταν ίση με **\$8.554.294**, ενώ η υψηλότερη ήταν η αρχική του αξία καθώς σε καμία χρονική περίοδο το χαρτοφυλάκιο δεν ξεπέρασε την αρχική τιμή των **\$10.000.000**. Από πλευράς αποδόσεων οι μεγαλύτερες εβδομαδιαίες αποδόσεις που πραγματοποιήθηκαν ήταν **7.39%** την περίοδο **3/11/2022 - 10/11/2022**, **5,37%** την βδομάδα **27/1/2022 - 3/2/2022** και **5,26%** την **16/6/2022 - 23/6/2022**, ενώ οι μικρότερες ήταν **-7.41%** την **9/6/2022 - 16/6/2022**, **-5,75%** την **5/5/2022 - 12/5/2022** και **-5.32%** την βδομάδα **25/8/2022 - 1/9/2022**.

4.2 Stop-Loss Portfolio Insurance

Για την εκτέλεση της στρατηγικής Stop-Loss όλο το ποσό επένδυσης τοποθετείται στο υποκείμενο χαρτοφυλάκιο έως ότου η παρούσα αξία του ασφαλισμένου ποσού ή αλλιώς του Floor είναι μεγαλύτερη από την αξία του χαρτοφυλακίου. Τότε όλο το ποσό επένδυσης μεταφέρεται στους λογαριασμούς καταθέσεων και μένει εκεί μέχρι το τέλος της επενδυτικής περιόδου. Τα αποτελέσματα της στρατηγικής ήταν τα εξής:



Όπως παρατηρούμε στις 20/1/2022, ούτε ένα μήνα έπειτα από την έναρξη της επενδυτικής περιόδου η αξία του χαρτοφυλακίου είναι ίση με **\$9.101.607** που είναι μικρότερη από την ανάλογη παρούσα αξία του Floor, που ισούται με **\$9.279.848,02** και το χαρτοφυλάκιο ρευστοποιείται. Οπότε τα έσοδα μείον τα κόστη συναλλαγών, **\$9.010.591**, επενδύονται στο risk-free. Η τελική αξία του χαρτοφυλακίου είναι ίση με $V_T = \$9.157.734$ πραγματοποιώντας μία συνολική απόδοση $R_{Final} = -8.4\%$.

4.3.1 Static Option Based Portfolio Insurance

Για την στατική ΟΒΠΙ χρησιμοποιήθηκαν δικαιώματα πώλησης στον δείκτη αγοράς S&P 500 όπου η αξία του στην αρχή της επενδυτικής περιόδου 31/12/2021 ήταν 4776 μονάδες. Συγκεκριμένα αγοράστηκαν:

$$N = \text{beta} * \frac{V_0}{M_0 * m} = \frac{10000000}{4776 * 100} = 20.26 \approx 20 \text{ contracts}$$

Σαν τιμή εξάσκησης των συμβολαίων δικαιωμάτων πώλησης σε σχέση με την αρχική τιμή του δείκτη επιλέχθηκε η ίδια αναλογία με αυτή της αρχικής αξίας του χαρτοφυλακίου και του ποσού που θέλουμε να ασφαλίσουμε, δηλαδή $\frac{\text{Initial Portfolio Value}}{\text{Floor}} = \frac{10000000}{9300000} = 0.93$, οπότε ισχύει ότι:

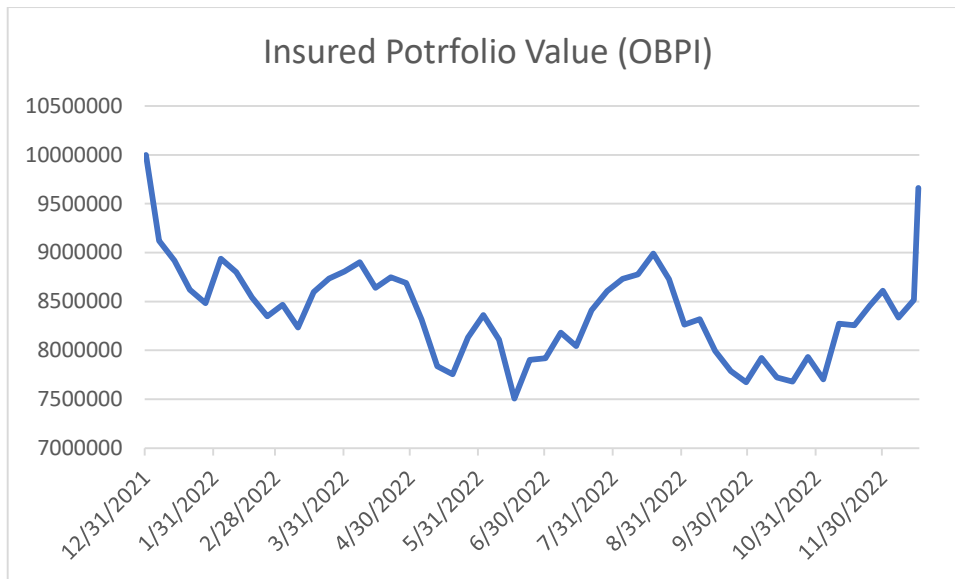
$$K = M_0 * 0.93 = 4776 * 0.93 = 4432 \approx 4425 \text{ units}$$

Η τιμή / ασφάλιστρο για κάθε δικαίωμα πώλησης με τιμή εξάσκησης 4425 μονάδες ήταν ίση με **p = \$263,72**.

Επομένως το αρχικό κόστος της εφαρμογής της static Option Based Portfolio Insurance είναι ίσο με:

$$\text{Cost} = p * M * N = 263.72 * 100 * 20 = \$527.440.$$

Με την χρήση αυτής της στρατηγικής η αξία του συνολικού χαρτοφυλακίου μεταβάλλεται ως εξής:



Όπως βλέπουμε ουσιαστικά όλο το αρχικό ποσό μείον το κόστος της στρατηγικής,

$$\text{Initial Wealth} - \text{Cost} = 10.000.000 - 527.440 = \$9.472.560$$

επενδύεται στο υποκείμενο χαρτοφυλάκιο που έχουμε δημιουργήσει και αφήνεται χωρίς καμία τροποποίηση. Στο τέλος της περιόδου επένδυσης 14/12/2022 η αξία του συνολικού χαρτοφυλακίου είναι ίση με **\$8.516.341**, σημειώνοντας μία απόδοση **R = -10.1%**, αλλά μετά από δύο μέρες, στις 16/12/2022 που είναι η ημερομηνία λήξης των δικαιωμάτων πώλησης που έχουμε αγοράσει και εξασκώντας τα δικαιώματα, αφού η τρέχουσα τιμή του δείκτη S&P 500 είναι **MT = 3852,36 μονάδες** σημειώνουμε κέρδος ίσο με:

$$\begin{aligned} \text{Profit} &= \max(K - MT, 0) * N * M = \max(4425 - 3852, 0) * 20 * 100 \\ &= \$1.1452.80 \end{aligned}$$

Επομένως, η τελική αξία του ασφαλισμένου χαρτοφυλακίου είναι ίση με:

$$\begin{aligned} \text{Insured Portfolio Value} &= \text{Portfolio Value} + \text{Profit From OBPI} \\ &= \$8.516.341 + \$1.145.280 = \$9.661.621 \end{aligned}$$

Πραγματοποιώντας έτσι μία συνολική απόδοση **R_{Final} = -3.38%** και καταφέρνοντας να διατηρήσει το αρχικό ασφαλισμένο ποσό, **Floor = \$9.300.000**.

4.3.2 Dynamic Option Based Portfolio Insurance

Για την εκτέλεση μίας δυναμικής OBPI θα χρησιμοποιηθούν συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης στο δείκτη αγοράς S&P 500, τα οποία όπως αναφέραμε θα αγοράζονται ή θα πωλούνται σε μηνιαία βάση, ανάλογα τις μεταβολές στην τιμή του κατά την διάρκεια της περιόδου ασφάλισης, έτσι ώστε να μιμηθούμε την γραμμή αποδόσεων κανονικών δικαιωμάτων πώλησης στον δείκτη με την ίδια τιμή εξάσκησης **K = \$4432 (=4776 * 0.93)**. Κατά την έναρξη της στρατηγικής υπολογίσουμε με την βοήθεια των τύπων Black and Scholes την τιμή του d_1 , του $N(d_1)$ που θα χρειαστούν για τον υπολογισμό του Δt , όπου σύμφωνα με αυτό καθορίζεται ο αριθμός των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης που πρέπει να πάρουμε μία θέση short. Αυτή η διαδικασία θα επαναλαμβάνεται σε μηνιαία βάση

και με αυτό τον τρόπο θα καθορίζεται ο αριθμός των συμβολαίων που θα πρέπει επιπλέον να πουληθούν ή να αγοραστούν. Ενδεικτικά, στην έναρξη της στρατηγικής έχουμε πως:

$$d1 = \frac{\left[\ln\left(\frac{Mo}{K}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) * T \right]}{\sigma * \sqrt{T}}$$

$$d1 = \left[\ln\left(\frac{4766}{4432}\right) + \left(0.0024 - 0.015 + \frac{0.1682^2}{2}\right) * \left(\frac{50}{52}\right) \right] / (0.1682 * \sqrt{\frac{50}{52}}) = 0.449$$

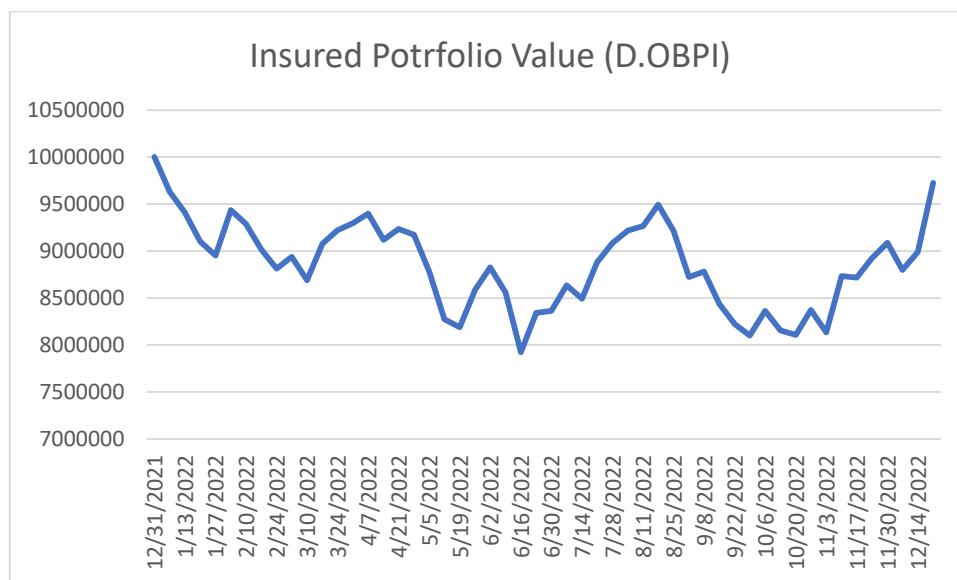
$$N(d1) = N(0.449) = 0.6733$$

$$\Delta o = e^{-q*T} * (N(d1) - 1) = e^{-0.015 * \frac{50}{52}} * (0.6763 - 1) = -0.322$$

Και άρα πρέπει να αντισταθίσουμε το 32.2% του συνολικού ποσού της επένδυσης, αξίας \$10.000.000, σε συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, το οποίο αντιστοιχεί σε **\$3.220.338**. Οπότε πρέπει να πουλήσουμε:

$$N = \text{beta} * \left(\frac{\text{Amount that must be shorted}}{Mo * m} \right) = 0.966 * \frac{3220338}{4776 * 50} = 13 \text{ contracts}$$

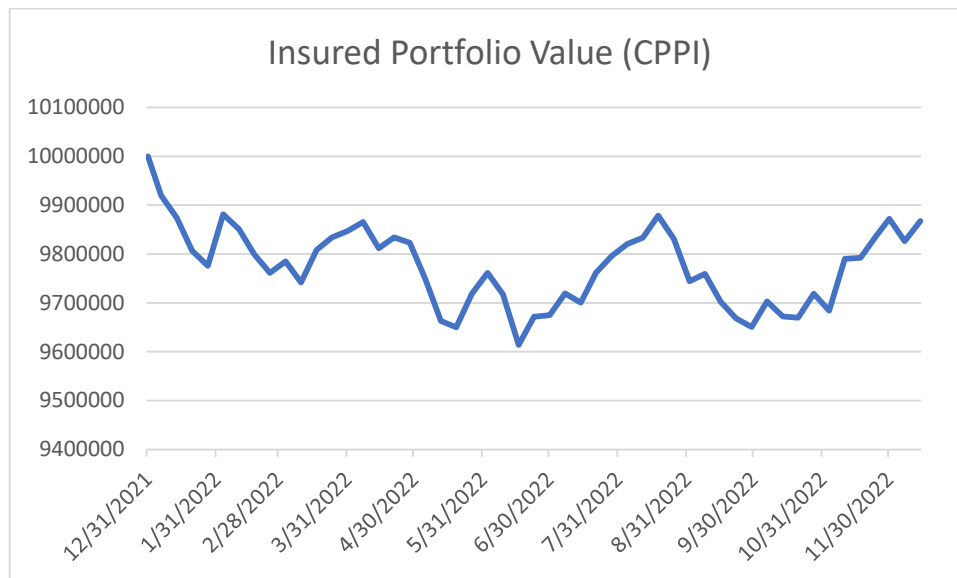
Με την χρήση αυτής της στρατηγικής ουσιαστικά επενδύουμε όλο το ποσό στο υποκείμενο χαρτοφυλάκιο που έχουμε κατασκευάσει ενώ παράλληλα αγοράζουμε και πωλούμε των απαραίτητο αριθμό συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης έτσι ώστε να μιμηθούμε την στατική ΟΒΠΙ και τα αποτελέσματα ήταν τα εξής:



Στο τέλος της περιόδου επένδυσης 14/12/2022 η αξία του συνολικού χαρτοφυλακίου είναι ίση με **\$8.990.537**, σημειώνοντας μία απόδοση **R = -10.1%**, αλλά μετά από δύο μέρες, 16/12/2022 που είναι η ημερομηνία λήξης των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης που έχουμε πουλήσει και αφού η τρέχουσα τιμή του δείκτη S&P 500 είναι **M_T = 3852,36 μονάδες** σημειώνουμε συνολικό κέρδος ίσο με **\$734.915**. Επομένως η συνολική αξία του ασφαλισμένου χαρτοφυλακίου είναι ίση με **\$9.725.452**, πραγματοποιώντας έτσι με συνολική απόδοση **R_{Final} = -2.75%**.

4.4 Constant Proportion Portfolio Insurance

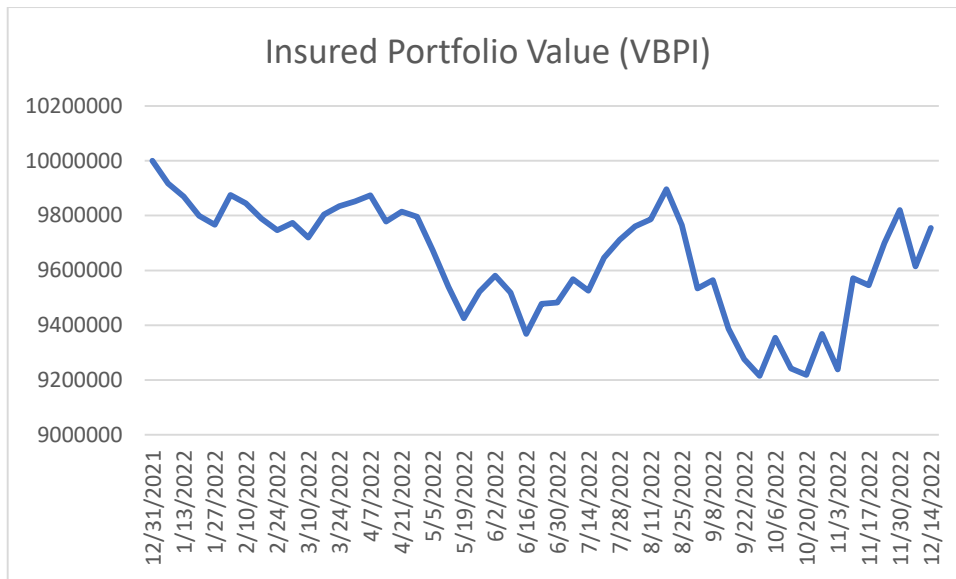
Για την χρήση της CPPI χρησιμοποιήθηκε multiplier ίσος με $m = 3$, οι περίοδοι προσαρμογής των αναλογιών του ασφαλισμένου χαρτοφυλακίου είναι μηνιαίες, ώστε να αποφευχθούν μεγάλες ζημιές από κόστη συναλλαγών και τέθηκε $|tolerance\ rate| = 5\%$ ώστε να περιοριστούν τυχόν μεγάλες ζημιές από ξαφνικές μεγάλες αρνητικές αποδόσεις του χαρτοφυλακίου και να επωφεληθούμε από τυχόν μεγάλες θετικές αποδόσεις σε κάποιες περιόδους. Τα αποτελέσματα της στρατηγικής ήταν τα εξής:



Στο τέλος της περιόδου επένδυσης η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου είναι ίση με $V_T = \$9.867.736$, πραγματοποιώντας έτσι μία συνολική απόδοση $R_{Final} = -1.32\%$. Λόγω της συντηρητικής φύσης της στρατηγικής αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η αξία του χαρτοφυλακίου δεν έπεσε ποτέ κάτω από τα $\$9.613.816$. Το μεγαλύτερο ποσό που επενδύθηκε στο υποκείμενο χαρτοφυλάκιο κατά την διάρκεια της στρατηγικής ήταν $\$2.164.310$ στην αρχή της περιόδου επένδυσης και το μικρότερο ήταν, στις **16/6/2022** μετά από την μεγαλύτερη αρνητική εβδομαδιαία απόδοση - **7.41%**, $\$1.098.638$.

4.5 VaR-Based Portfolio Insurance

Για την χρήση της VBPI χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές από την realized volatility του S&P 500, η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου αλλά και μία αναθεωρημένη αναμενόμενη απόδοση για την περίοδο **3/2/2022 – 31/9/2022** ίση με **-5%**. Τέθηκε επίπεδο εμπιστοσύνης $\alpha = 99\%$, οι στιγμές προσαρμογής των αναλογιών του ασφαλισμένου χαρτοφυλακίου είναι μηνιαίες ώστε να αποφευχθούν μεγάλες ζημιές από κόστη συναλλαγών και τέθηκε $|tolerance\ rate| = 5\%$ ώστε να περιοριστούν τυχόν μεγάλες ζημιές από ξαφνικές μεγάλες αρνητικές αποδόσεις του χαρτοφυλακίου και να επωφεληθούμε από τυχόν μεγάλες θετικές αποδόσεις σε κάποιες περιόδους. Τα αποτελέσματα της στρατηγικής ήταν τα εξής:

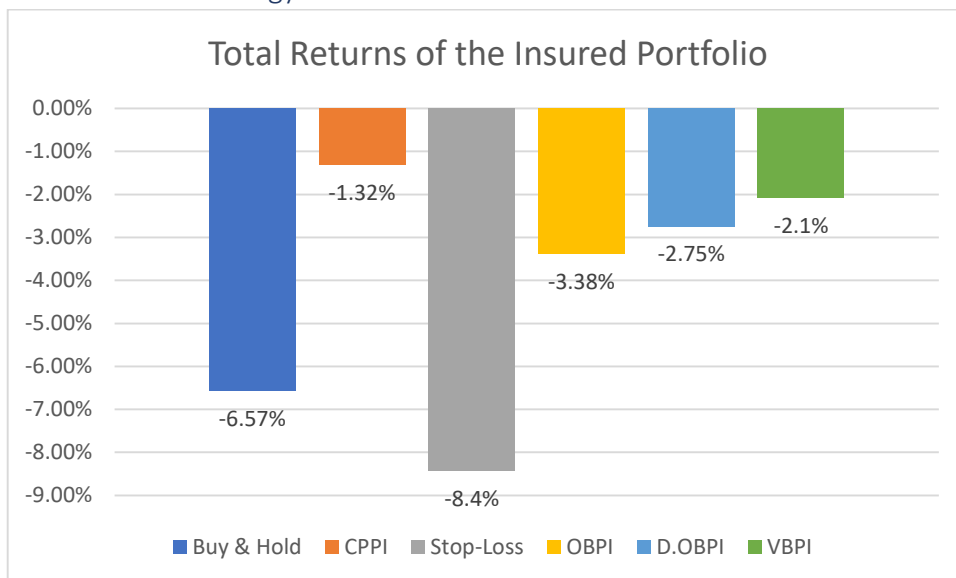


Στο τέλος της περιόδου επένδυσης η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου είναι ίση με $V_T = \$9.792.051$, πραγματοποιώντας έτσι μία συνολική απόδοση $R_{Final} = -2.1\%$. Όπως και η CPPI λόγω της συντηρητικής φύσης της στρατηγικής είχε ως αποτέλεσμα το αισθητά μεγαλύτερο μέρος την συνολικής επένδυσης να επενδύεται στους λογαριασμούς καταθέσεων, οδηγώντας έτσι την αξία του χαρτοφυλακίου σε σχετικά υψηλά, σχετικά με την αξία του υποκείμενου χαρτοφυλακίου από μόνου του, επίπεδα, συγκεκριμένα η αξία του "ασφαλισμένου" χαρτοφυλακίου δεν έπεσε ποτέ κάτω από τα **\$9.247.466**.

4.6 Conclusion and Results

Συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα κάθε στρατηγικής όσο αναφορά την τελική αξία και απόδοση του ασφαλισμένου χαρτοφυλακίου ήταν τα εξής:

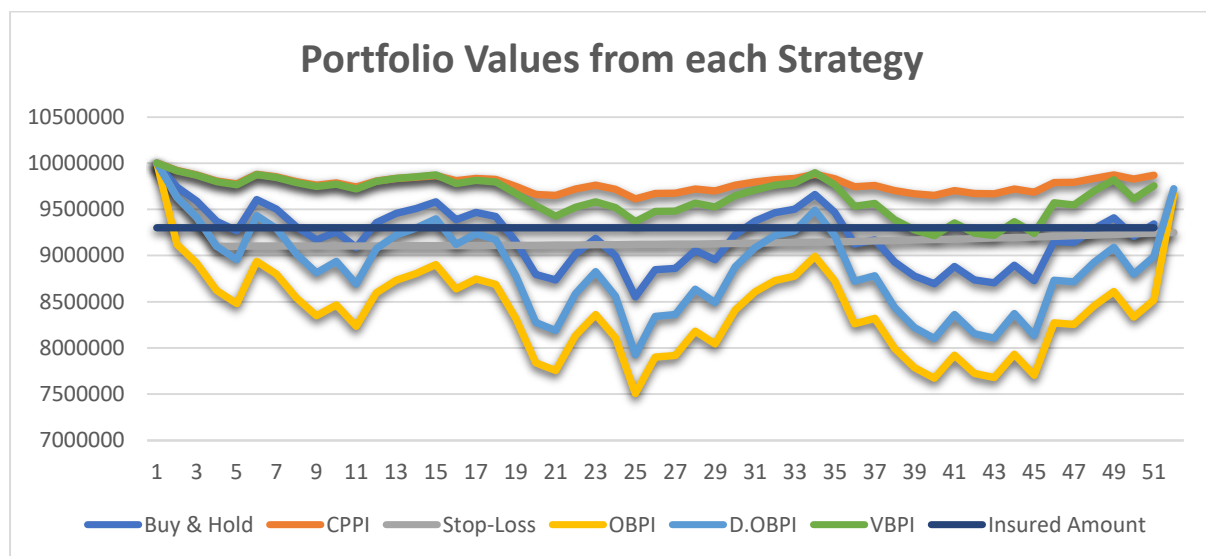
Total Return from Each Strategy



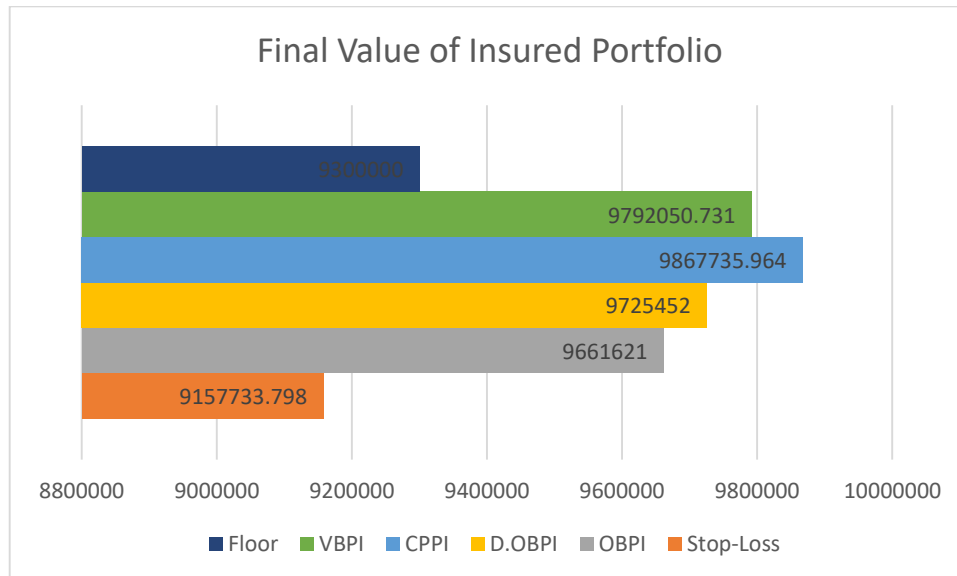
Η μικρότερη αρνητική απόδοση εξασφαλίστηκε με την χρήση της Constant Proportion Portfolio Insurance ακολουθούμενη από την VaR-Based Portfolio Insurance. Όμως και με την στατική και η δυναμική Option Based Portfolio Insurance

εξασφαλίστηκαν καλά αποτελέσματα ως προς τον περιορισμό των ζημιών και την εξασφάλιση και με το παραπάνω του αρχικά ορισμένου κατώτατου επιπέδου των \$9.300.000. Καθοριστικό ρόλο σε αυτό έπαιξε το γεγονός ότι το υποκείμενο χαρτοφυλάκιο που κατασκευάστηκε στο Κεφάλαιο 3 στην επενδυτική περίοδο, 31/12/2021 – 14/12/2022, σημείωσε μία συνολική απόδοση $R_{Und.Port} = -10.1\%$ ενώ ο δείκτης της αγοράς S&P 500, που χρησιμοποιήθηκε για την ασφάλιση ενός μέρους της αξίας του χαρτοφυλακίου την περίοδο 31/12/2021 – 16/12/2022 (16/12 αντί για 14/12 επειδή τότε ήταν η ημερομηνία λήξης των δικαιωμάτων πώλησης και συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης που χρησιμοποιήθηκαν) σημείωσε συνολική απόδοση $R_M = -19.2\%$, κάτι που έκανε τα "κέρδη" από την ασφάλιση μεγαλύτερα από όσα περιμέναμε αφού ο συντελεστής beta του υποκείμενου χαρτοφυλακίου είναι **0.966** υποδεικνύοντας έτσι ότι οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου θα είναι σχεδόν ανάλογες του δείκτη αγοράς. Σε αντίθεση με τις προηγούμενες, η στρατηγική Stop-Loss δεν σημείωσε ικανοποιητικά αποτελέσματα και εξασφάλισε την μικρότερη απόδοση από όλες τις στρατηγικές.

Όσο αναφορά το κεντρικό στόχο των στρατηγικών ασφάλισης, ο οποίος δεν είναι άλλος από την διατήρηση του Floor, που είχε τεθεί ίσο με **\$9.300000** ή αλλιώς το 93% του αρχικού ποσού επένδυσης των \$10.000.000, τα αποτελέσματα των στρατηγικών ήταν τα ακόλουθα.

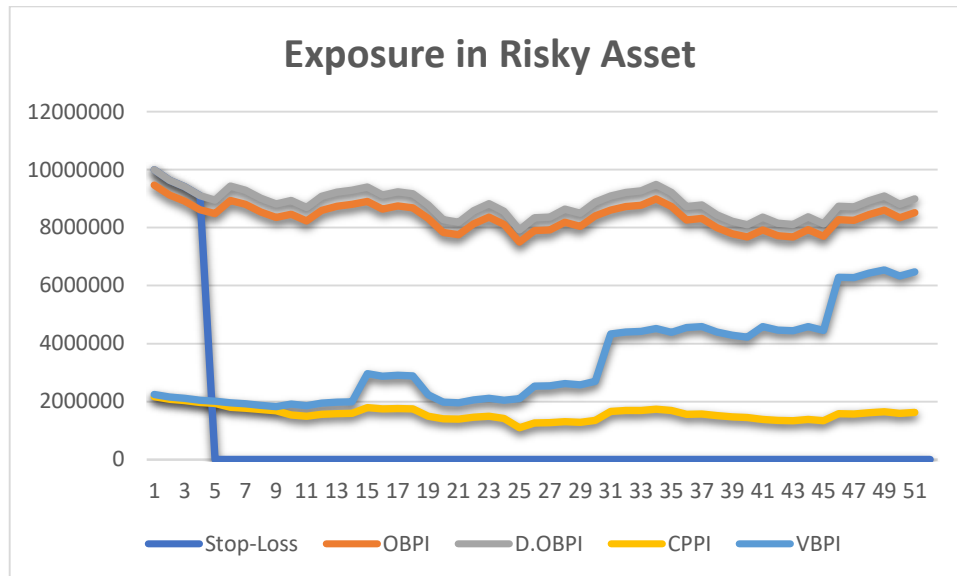


Final Portfolio Value from Each Strategy



Όλες οι στρατηγικές που εφαρμόστηκαν κατάφεραν να διατηρήσουν το ασφαλισμένο ποσό με μεγάλη επιτυχία εκτός από την Stop-Loss η οποία λόγω των αρχικών μεγάλων ζημιών δεν κατάφερε να της καλύψει μετά την ρευστοποίηση της και επένδυση στο risk-free rate παρά τις συνεχόμενες αυξήσεις του κατά την διάρκεια του επενδυτικού ορίζοντα. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως οι κυρίαρχες στρατηγικές βάση των αποτελεσμάτων ήταν η Constant Proportion και η VaR-Based, οι οποίες λόγω της φύσης του και των συντηρητικών multiplier και επιπέδου εμπιστοσύνης που τέθηκαν ανάλογα, περιορίζουν άμεσα την έκθεση του ασφαλισμένου χαρτοφυλακίου στο υποκείμενο χαρτοφυλάκιο που ενέχει κίνδυνο, με αποτέλεσμα να μην «απορροφούν» μεγάλο μέρος των ζημιών από τις πολλές συνεχόμενες αρνητικές εβδομαδιαίες αποδόσεις που παρατηρήθηκαν στην περίοδο επένδυσης. Ένα επιπλέον στοιχείο που ευνόησε τις δύο αυτές στρατηγικές ήταν ότι δεν παρατηρήθηκαν πολλές αναστροφές τιμών (reversals). Τα reversals βλάπτουν τις δυναμικές στρατηγικές CPPI και VBPI επειδή πραγματοποιείται πώληση ενός μέρους του περιουσιακού στοιχείου που ενέχει κίνδυνο σε μία πτώση της αγοράς αλλά αμέσως μετά γίνεται ανάκαμψη της αγοράς με αποτέλεσμα η στρατηγική να απαιτεί την αγορά ενός μεριδίου του ίδιου περιουσιακού στοιχείου μόνο και μόνο για να δουν την αγορά να αποδυναμώνεται ξανά. Κάτι τέτοιο προφανώς επηρεάζει αρνητικά την αξία του συνολικού χαρτοφυλακίου αφού το χαρτοφυλάκιο συμμετέχει περισσότερο στις αποδόσεις της αγοράς όταν αυτή πέφτει και λιγότερο όταν παρουσιάζει άνοδο συν φυσικά τα επικείμενα κόστη συναλλαγών που πραγματοποιούνται.

Exposure in Risky Asset



Market Performance through Insurance Period.

Time Period	S&P500 Index Price	Index Return
12/31/2021	4766.18	
1/6/2022	4696.05	-1.47%
1/13/2022	4659.03	-0.79%
1/20/2022	4482.73	-3.78%
1/27/2022	4326.51	-3.48%
2/3/2022	4477.44	3.49%
2/10/2022	4504.08	0.59%
2/17/2022	4380.26	-2.75%
2/24/2022	4288.7	-2.09%
3/3/2022	4363.49	1.74%
3/10/2022	4259.52	-2.38%
3/17/2022	4411.67	3.57%
3/24/2022	4520.16	2.46%
3/31/2022	4530.41	0.23%
4/7/2022	4500.21	-0.67%
4/14/2022	4392.59	-2.39%

4/21/2022	4393.66	0.02%
4/28/2022	4287.5	-2.42%
5/5/2022	4146.87	-3.28%
5/12/2022	3930.08	-5.23%
5/19/2022	3900.79	-0.75%
5/26/2022	4057.84	4.03%
6/2/2022	4176.82	2.93%
6/9/2022	4017.82	-3.81%
6/16/2022	3666.77	-8.74%
6/23/2022	3795.73	3.52%
6/30/2022	3785.38	-0.27%
7/7/2022	3902.62	3.10%
7/14/2022	3790.38	-2.88%
7/21/2022	3998.95	5.50%
7/28/2022	4072.43	1.84%
8/4/2022	4151.94	1.95%
8/11/2022	4207.27	1.33%
8/18/2022	4283.74	1.82%
8/25/2022	4199.12	-1.98%
9/1/2022	3966.85	-5.53%
9/8/2022	4006.18	0.99%
9/15/2022	3901.35	-2.62%
9/22/2022	3757.99	-3.67%
9/29/2022	3640.47	-3.13%
10/6/2022	3744.52	2.86%
10/13/2022	3669.91	-1.99%
10/20/2022	3665.78	-0.11%
10/27/2022	3807.3	3.86%
11/3/2022	3719.89	-2.30%
11/10/2022	3956.37	6.36%
11/17/2022	3946.56	-0.25%
11/24/2022	4027.26	2.04%
11/30/2022	4080.11	1.31%
12/7/2022	3933.92	-3.58%
12/14/2022	3995.32	1.56%
12/16/2022	3852.36	-3.58%

4.7 Τελικά σχόλια βάση των αποτελεσμάτων

Σύμφωνα με την ανάλυση που πραγματοποιήσαμε αλλά και κάποια γενικά στοιχεία για την δομή της κάθε στρατηγικής μπορούμε να εξάγουμε κάποια σημαντικά συμπεράσματα. Σε μία καθαρά πτωτική αγορά χωρίς πολλές αναστροφές τιμών/αποδόσεων όπως αυτή του 2022, όπου ο δείκτης αγοράς S&P 500 σημείωσε απόδοση περίπου -20%, η Constant Proportion που είναι και η πιο απλή σε εφαρμογή στρατηγική, είναι ίσως η πιο αποτελεσματική στρατηγική ασφάλισης με την προϋπόθεση ότι θα επιλεγθεί ένας συντηρητικός multiplier (στην εφαρμογή που

παρουσιάστηκε είχε επιλεγθεί $m = 3$) και δεν θα υπάρχουν πολύ συχνές στιγμές προσαρμογής των βαρών του ασφαλισμένου χαρτοφυλακίου που θα οδηγήσουν σε υψηλά κόστη συναλλαγών.

Η VaR-Based Portfolio Insurance είναι επίσης μία στρατηγική που είχε μεγάλη αποτελεσματικότητα όχι μόνο στην διατήρηση του Floor αλλά και γενικά στον περιορισμό των ζημιών με την προϋπόθεση ότι επιλέγεται ένα μεγάλο επίπεδο εμπιστοσύνης για να υποδεικνύει μία συντηρητικότητα της στρατηγικής (στην εφαρμογή επιλέχθηκε $\alpha = 99\%$). Όπως και για την CPPI για τον multiplier, έτσι και στην VBPI η επιλογή του επιπέδου εμπιστοσύνης παίζει κομβικό ρόλο στην απόδοση της στρατηγικής. Η VBPI είναι παρόμοια στρατηγική με την CPPI ή θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μία γενίκευση της, έχει μεγάλο πλεονέκτημα στο ότι υποδεικνύει ξεκάθαρα το Gap Risk που αντιμετωπίζει ο επενδυτής και του δίνει την δυνατότητα να προϋπολογίζει δυναμικά τον κίνδυνο. Όμως είναι μία στρατηγική που βασίζεται σε πολύ μεγάλο βαθμό από τις εκτιμήσεις για την αναμενόμενη απόδοση και την μεταβλητότητα του χαρτοφυλακίου, όσο καλύτερες αυτές οι εκτιμήσεις τόσο καλύτερη θα είναι και η απόδοση της συγκεκριμένης στρατηγικής. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή, πάρα την αρχική εκτίμηση της αναμενόμενης απόδοσης, κατά την περίοδο Φεβρουαρίου έως και Σεπτεμβρίου έγινε επανεκτίμηση της ώστε να αντικατοπτρίζει καλύτερα τα δεδομένα της τρέχουσας αγοράς και ως μεταβλητότητα χρησιμοποιήθηκε δυναμικά η πραγματοποιημένη μεταβλητότητα του δείκτη της αγοράς για τον ίδιο ακριβώς λόγο.

Επίσης καλό είναι οι περίοδοι προσαρμογής των βαρών του ασφαλισμένου χαρτοφυλακίου να μην είναι πολύ μικρές για να αποφευχθούν πολλές επιπλέον ζημίες από τα κόστη συναλλαγών.

Η στατική Option Based έχει ένα βασικό μειονέκτημα το γεγονός ότι το κόστος εφαρμογής της, τα ασφάλιστρα για την αγορά των δικαιωμάτων, καταβάλλονται κατά την έναρξη της στρατηγικής και αφαιρούνται από το αρχικό ποσό επένδυσης, κάτι που μπορεί να έχει μία μικρή επίδραση στην τελική αξία του ασφαλισμένου χαρτοφυλακίου. Όπως παρατηρήθηκε και από την εφαρμογή μας και η OBPI απέδωσε αρκετά καλά στον περιορισμό των ζημιών και μπορεί να θεωρηθεί από τις ασφαλέστερες στρατηγικές όσο αναφορά την διατήρηση του ασφαλισμένου ποσού, καθώς πέρα από την επιλογή της κατάλληλης τιμής εξάσκησης των δικαιωμάτων δεν απαιτεί κάποια ιδιαίτερη μεταχείριση και μπορεί να εξασφαλίσει ένα μεγάλο μέρος της αξίας ακόμα και σε ακραίες αρνητικά εξελίξεις για την αξία του υποκείμενου χαρτοφυλακίου και γενικότερα της αγοράς.

Δεν ισχύουν τα ίδια όσο αναφορά με την δυναμική OBPI, όπου δεν απαιτείται κανένα αρχικό κόστος για την εφαρμογή της, αλλά απαιτεί παρακολούθηση ανά τακτά χρονικά διαστήματα και άμεση αντίδραση (επιπλέον πώληση ή επαναγορά κάποιου αριθμού συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης) σε τυχόν αλλαγές στην τιμή του δείκτη της αγοράς για να είναι αποτελεσματική η συγκεκριμένη στρατηγική. Επίσης, σε αντίθεση με την στατική OBPI αλλά παρόμοια με την CPPI και την VBPI (για την αξία/τιμή του υποκείμενου χαρτοφυλακίου), η δυναμική OBPI είναι μία στρατηγική που εν μέρει η αποτελεσματικότητά της επηρεάζεται από την εξέλιξη και την πορεία της τιμής του δείκτη και πιο συγκεκριμένα δεν ευνοείται από συχνές αντιστροφές των

τιμών του γιατί κάτι τέτοιο θα απαιτεί αγορά συμβολαίων όταν οι τιμές τους πρόκειται να μειωθούν και πώληση όταν οι τιμές τους πρόκειται να αυξηθούν.

Σημαντικό ρόλο στην απόδοση της στατικής αλλά και της δυναμικής ΟΒΡΙ παίζουν οι προβλέψεις των επενδυτών για την εξέλιξη της αγοράς, καθώς άμα οι πληθώρα των επενδυτών πιστεύει σε μία άνοδο της αγοράς οι τιμές των δικαιωμάτων πώλησης θα είναι μικρότερες, κάτι που θα κάνει το αρχικό κόστος της ασφάλισης μικρότερο και οι τιμές των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης θα είναι μεγαλύτερες, κάτι που θα ευνοήσει την απόδοση της στρατηγικής αν πραγματοποιηθεί το αντίθετο σενάριο, δηλαδή πτώση της αγοράς σαν την περίπτωση που εξετάζουμε. Ενώ αν υπάρχει μία γενική εικόνα για μία επερχόμενη πτώση της αγοράς οι τιμές των δικαιωμάτων πώλησης θα είναι ακριβότερες κάνοντας το αρχικό κόστος της στρατηγικής μεγαλύτερο, ενώ τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης φθηνότερα κάτι που δεν θα ευνοήσει την απόδοση της στρατηγικής. Ακόμα ένας παράγοντας που θα επηρεάσει το αποτέλεσμα των δύο αυτών στρατηγικών είναι συσχέτιση της τελικής απόδοσης του υποκείμενου χαρτοφυλακίου και της τελικής απόδοσης του δείκτη της αγοράς και κατά πόσο συμβαδίζει με τον συντελεστή β του υποκείμενου χαρτοφυλακίου. Στην δική μας εφαρμογή είδαμε πως σύμφωνα με το β του χαρτοφυλακίου οι αποδόσεις του θα έπρεπε να ήταν αρκετά μικρότερες από ότι προέκυψαν στην πράξη, κάτι τέτοιο ώθησε τις στρατηγικές σε επιπλέον κέρδη από αυτά που προβλέπαμε όταν ασφαλίσαμε το χαρτοφυλάκιο και για αυτό οι τελικές αξίες του ασφαλισμένου χαρτοφυλακίου ήταν αρκετά μεγαλύτερες του ασφαλισμένου ποσού των \$9300000. Αντίθετα, αν το υποκείμενο χαρτοφυλάκιο πραγματοποιούσε μικρότερη συνολική απόδοση από αυτή που προέβλεπε το β του, τότε οι τελικές αξίες του ασφαλισμένου χαρτοφυλακίου θα ήταν μικρότερες από το ασφαλισμένο ποσό καθώς τα κέρδη από την ασφάλιση δεν θα ήταν αρκετά για να καλύψουν τις απροσδόκητες επιπλέον ζημίες από το υποκείμενο χαρτοφυλάκιο.

Βιβλιογραφικές Πηγές

- 1) Asay, M. & Edelsburg, C. (1986). Can a Dynamic Strategy Replicate the Returns of an Option. *Journal of Futures Markets*, 6, 63–70.
- 2) Bajoux-Besnainou, Isabelle, James V. Jordan, Roland Portait (2003). Dynamic Asset Allocation for Stocks, Bonds, and Cash. *The Journal of Business*, 263-287.
- 3) Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(03), 637-654.
- 4) Black, F. & Jones, R. (1987). Simplifying portfolio insurance. *The Journal of Portfolio Management*, 48-51.
- 5) Black, F. & Perold, A.R. (1992). Theory of constant proportion portfolio insurance. *The Journal of Economics, Dynamics and Control*, 16, 403-426.
- 6) Benninga & Blume M. (1985). On the Optimality of Portfolio Insurance. *The Journal of Finance*, 40, 1341–1352.
- 7) Bertrand, P., & Prigent, J-L. (2002). Portfolio insurance: the extreme value approach to the CPPI method, *Finance*, 23, 69-86.
- 8) Bouyé, Eric (2009). Portfolio Insurance: A Short Introduction.
- 9) Gaspar, Raquel M. & Silva, Paulo M. (2019). Investors' Perspective on Portfolio Insurance.
- 10) Grossman, Sanford J. (1995). Dynamic Asset Allocation and the Informational Efficiency of Markets. *The Journal of Finance*, 773-787.
- 11) Ho, L.C. (2012). Portfolio Insurance Strategies. In C. F. Lee, and A. C. Lee (eds.), *Encyclopedia Finance*, 2nd ed. New York: Springer, Forthcoming.
- 12) Ho, L.C. & Cadle, J. & Theobald, M. (2010). Portfolio Insurance Strategies: Review of Theory and Empirical Studies. In C. F. Lee, A. C. Lee, and J. Lee (eds.), *Handbook of Quantitative Finance and Risk Management*. New York: Springer, 319–332.
- 13) Hull, John C. (2017) *Options, Futures, and Other Derivatives*, 10th Edition.
- 14) Jiang, C, & Yongkai Maa and Yunbi An (2009). The effectiveness of the VaR-based portfolio insurance strategy: An empirical analysis.
- 15) Lee, C. F. & Lee, John C. (2020), *Handbook of Financial Econometrics, Mathematics, Statistics and Machine Learning*.
- 16) Mangram, Myles E. (2013). A Simplified Perspective of the Markowitz Portfolio Theory. *Global Journal of Business Research*, 59-70.
- 17) Markowitz, Harry M. (1991). Foundations of Portfolio Theory. *The Journal of Finance*, 469-477.
- 18) Pain and Rand (2008), *Recent Developments in Portfolio Insurance*.
- 19) Perold, A. R. & Sharpe, W. F. (1988). Dynamic Strategies for Asset Allocation. *Financial Analysts Journal*, 44(1), 16–27.
- 20) Rubinstein, M. (1999), *Rubinstein on Derivatives*.
- 21) Rubinstein, M. & Leland, H. (1981). Replicating Options with Positions in Stock and Cash. *Financial Analysts Journal*, 37, 63–72.
- 22) Sharpe, W. (1994). The Sharpe Ratio. *The Journal of Portfolio Management*, 21, 49-58.

- 23) Zhu, Y. & Kavee, R. C. (1988). Performance of Portfolio Insurance Strategies. Journal of Portfolio Management, 14(3), 48–54
- 24) Zhao, Y. & Ziemba, W. T. (2000). A dynamic asset allocation model with downside risk control. Journal of Risk, 03(01), 91-113.

Διαδικτυακές Πηγές

<https://www.repository.utl.pt/bitstream/10400.5/16515/1/TD-PJMJS-2018.pdf>

<http://dspace.unive.it/bitstream/handle/10579/10799/861160-1216623.pdf?sequence>

<https://www.projectfinance.com/>

<https://slideplayer.com/slide/8244146/>

<https://brilliant.org/wiki/futures-contract/>