

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**  
**Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής**



**Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ**  
**ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**Διαγράμματα Ελέγχου Ζωνών**

**Γεώργιος Α. Βασιλαντωνάκης**

**Διπλωματική Εργασία**

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και  
Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως  
μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του  
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην  
*Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς  
Δεκέμβριος 2022

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. 22/07.07.2021 συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αντζουλάκος Δημήτριος, Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Μπούτσικας Μιχαήλ, Αναπληρωτής Καθηγητής
- Τζαβελάς Γεώργιος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

**UNIVERSITY OF PIRAEUS**

**School of Finance and Statistics**



**Department of Statistics and Insurance Science**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN  
APPLIED STATISTICS**

## **Zone Control Charts**

By

**George A. Vasilantonakis**

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and  
Insurance Science of the University of Piraeus in partial  
fulfilment of the requirements for the degree of Master of  
Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece  
December 2022



## **Ευχαριστίες**

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα Καθηγητή μου, κ. Αντζουλάκο Δημήτριο, για την πολύτιμη, ουσιαστική και άμεση βοήθεια που μου παρείχε σε όλα τα στάδια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου και την αδερφή μου που με στηρίζουν συνεχώς και είναι δίπλα μου σε κάθε επιλογή μου.

## Περίληψη

Τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται ευρέως στην βιομηχανία για την παρακολούθηση της ποιότητας μιας παραγωγικής διεργασίας. Έχουν σαν στόχο να εντοπίζουν έγκαιρα αλλαγές της υπό μελέτη παραμέτρου ενός χαρακτηριστικού ποιότητας ενός προϊόντος. Το διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart είναι το πιο συχνά χρησιμοποιούμενο διάγραμμα ελέγχου στον στατιστικό έλεγχο ποιότητας λόγω της απλότητάς του. Ωστόσο, δεν είναι αποτελεσματικό όσον αφορά την ανίχνευση μετατοπίσεων μικρού μεγέθους. Σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι η παρουσίαση του διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος το οποίο χωρίζει το διάγραμμα ελέγχου σε περιοχές εκατέρωθεν την κεντρικής γραμμής. Όταν το διάγραμμα είναι χωρισμένο σε συνολικά 8 περιοχές τότε ονομάζεται διάγραμμα ελέγχου ζωνών.

Η διπλωματική εργασία που θα ακολουθήσει, χωρίζεται σε 3 κεφάλαια. Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζουμε συνοπτικά τη γενική θεωρία των διαγραμμάτων ελέγχου. Εστιάζουμε κυρίως στα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart για μεταβλητές. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε το διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος για τη Μέση Τιμή και στο Κεφάλαιο 3 το διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος για τη Διασπορά. Επιπλέον, παρουσιάζουμε τον τρόπο υπολογισμού του μέσου μήκους ροής και μέσω εφαρμογών συγκρίνουμε διαγράμματα ελέγχου και προτείνουμε ποιο διάγραμμα ελέγχου είναι το πιο κατάλληλο για την ανίχνευση μιας εκτός ελέγχου διεργασίας για διάφορες μετατοπίσεις της μέσης τιμής ή της τυπικής απόκλισης.

## **Abstract**

Control charts have been widely used in industry to monitor the quality of a manufacturing process. Control charts aim to detect in time shifts of the studied parameter of a quality characteristic of a product. The Shewhart-type control chart is the most commonly used control chart in Statistical Quality Control because of its simplicity. However, it is not effective in detecting small shifts. The purpose of this thesis is the presentation of the run sum control chart which divides the control chart into regions on either side of the center line. When the chart is divided into 8 regions then it is called a zone control chart.

The thesis that will follow is divided into 3 chapters. In Chapter 1 we briefly present the general theory of control charts. We mainly focus on Shewhart control charts for variables. In Chapter 2 we present the run sum control chart for the Mean and in Chapter 3 the run sum control chart for the Variance. Furthermore, we present how to calculate the average run length and through applications we compare control charts and suggest which control chart is most suitable for detecting an out-of-control process for various shifts of the mean or the standard deviation.

## Πίνακας Περιεχομένων

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Διαγράμματα Ελέγχου .....</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1 Εισαγωγή .....   | 1         |
| 1.2 Περιγραφή και χρήση ενός διαγράμματος ελέγχου.....   | 2         |
| 1.3 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I και Φάσης II.....  | 4         |
| 1.4 Ταξινόμηση διαγραμμάτων ελέγχου .....  | 5         |
| 1.5 Εκτίμηση της μέσης τιμής και της διασποράς.....  | 6         |
| 1.5.1 Η περίπτωση των μεμονωμένων παρατηρήσεων .....   | 6         |
| 1.5.2 Η περίπτωση των δειγμάτων .....  | 7         |
| 1.6 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart για τη μέση τιμή.....   | 8         |
| 1.6.1 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης II.....  | 8         |
| 1.6.2 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I .....  | 10        |
| 1.7 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart για τη διασπορά.....  | 11        |
| 1.7.1 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης II.....  | 11        |
| 1.7.2 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I .....  | 14        |
| 1.8 Μέσο μήκος ροής (ARL).....   | 15        |
| 1.9 Κανόνες ευαισθητοποίησης ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart .....  | 17        |
| <b>Διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος για τη μέση τιμή .....</b>   | <b>21</b> |
| 2.1 Εισαγωγή .....   | 21        |
| 2.2 Το $\bar{X}$ διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος.....   | 21        |
| 2.3 Ανάλυση του $\bar{X}$ διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος με χρήση Μαρκοβιανών αλυσίδων .....                                    | 27        |
| 2.4 Σύγκριση $\bar{X}$ διαγραμμάτων ελέγχου ροής αθροίσματος και $X$ διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart με κανόνες ροών .....         | 35        |
| 2.5 Σύγκριση $\bar{X}$ διαγραμμάτων ελέγχου ροής αθροίσματος με διαγράμματα ελέγχου CUSUM και EWMA.....                                | 46        |
| <b>Διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος για τη διασπορά .....</b>  | <b>57</b> |
| 3.1 Εισαγωγή .....   | 57        |
| 3.2 Το $S$ διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος .....  | 57        |
| 3.3 Ανάλυση του $S$ διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος με χρήση μαρκοβιανών αλυσίδων .....  | 64        |
| 3.4 Το $R$ διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος.....   | 71        |
| 3.5 Ανάλυση του $R$ διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος με χρήση Μαρκοβιανών αλυσίδων .....  | 75        |
| 3.6 Σύγκριση $S$ και $R$ διαγραμμάτων ελέγχου ροής αθροίσματος με $S$ και $R$ διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart με κανόνες ροών ..... | 86        |



|   |           |
|---|-----------|
| <b>Βιβλιογραφία.....</b>  | <b>95</b> |
| <b>Παράρτημα.....</b>   | <b>97</b> |
| Κ.1 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό των $ARL_1$ για το $\bar{X}$ διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος $RS_2[0,1,2 : 0,2,3, \infty]$ - Πίνακας 2.5. ....         | 97        |
| Κ.2 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό των $ARL_1$ για το $S$ διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος $RSS_8(0,2,3,8)$ - Πίνακας 3.4 ( $L = 1$ και $n = 9$ ) .....    | 98        |
| Κ.3 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό των $ARL_1$ για το $R$ διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος $RSR_8(0,2,4,8)$ - Πίνακας 3.9 ( $ARL_0 = 370.4, n = 9$ ) ..... | 99        |



## Κατάλογος Πινάκων

|  |    |
|--|----|
| Πίνακας 1.1. Τιμές των σταθερών $d_2$ , $d_3$ και $c_4$ .....  | 7  |
| Πίνακας 2.1. Δίπλευρο $\bar{X}$ διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος με $r + k + 2$ περιοχές.....  | 23 |
| Πίνακας 2.2. Δίπλευρο $\bar{X}$ διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος $RS_4[0,1,4 : 0,1,3, \infty]$ .....   | 25 |
| Πίνακας 2.3. Δειγματικός μέσος, σκορ και αθροιστικό σκορ 10 δειγμάτων για το δίπλευρο $\bar{X}$ διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος $RS_4[0,1,4 : 0,1,3, \infty]$ ..... | 25 |
| Πίνακας 2.4. Δίπλευρο $\bar{X}$ διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος $RS_2[0,1,2 : 0,2,3, \infty]$ .....   | 29 |
| Πίνακας 2.5. Τιμές ARL για το $\bar{X}$ διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος $RS_2[0,1,2 : 0,2,3, \infty]$ .....   | 30 |
| Πίνακας 2.6. Δίπλευρο $\bar{X}$ διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος $RS_4(0,1,2,4)$ .....   | 32 |
| Πίνακας 2.7. Τιμές ARL για το $\bar{X}$ διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος $RS_4(0,1,2,4)$ με $ARL_0 = 370.4$ .....  | 34 |
| Πίνακας 2.8. Διαγράμματα ελέγχου ροής αθροίσματος.....   | 37 |
| Πίνακας 2.9. Τιμές ARL διαγραμμάτων ελέγχου ροής αθροίσματος και διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart με συμπληρωματικούς κανόνες ροών.....                             | 37 |
| Πίνακας 2.10. Δίπλευρο $\bar{X}$ διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος $RS_{29}[3,5,12,29 : 0,1,2,3, \infty]$ .....   | 39 |
| Πίνακας 2.11. Πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης για το δίπλευρο $\bar{X}$ διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος $RS_{29}[3,5,12,29 : 0,1,2,3, \infty]$ .....                  | 40 |
| Πίνακας 2.12. Τιμές ARL για το $\bar{X}$ διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος $RS_{29}[3,5,12,29 : 0,1,2,3, \infty]$ .....   | 41 |
| Πίνακας 2.13. Τιμές ARL για το $\bar{X}$ διάγραμμα ελέγχου $C_{134}$ .....   | 42 |
| Πίνακας 2.14. Πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης για το δίπλευρο $\bar{X}$ διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος $RS_{22}(2,3,10,22)$ .....                                    | 44 |
| Πίνακας 2.15. Τιμές ARL για το $\bar{X}$ διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος $RS_{22}(2,3,10,22)$ με $ARL_0 = 465$ .....  | 45 |
| Πίνακας 2.16. Τιμές ARL για το $\bar{X}$ διάγραμμα ελέγχου $C_{123}$ με $ARL_0 = 465.01$ .....   | 46 |
| Πίνακας 2.17. Δίπλευρο $\bar{X}$ διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος $RS_4(0,1,4)$ .....  | 47 |
| Πίνακας 2.18. Τιμές ARL για το $\bar{X}$ διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος $RS_4(0,1,4)$ με $ARL_0 = 465.44351$ .....   | 48 |
| Πίνακας 2.19. Τιμές ARL για το $\bar{X}$ CUSUM διάγραμμα με $K = 0.5$ και $H = 5$ .....  | 49 |
| Πίνακας 2.20. Πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης για το δίπλευρο $\bar{X}$ διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος $RS_{26}(2,6,7,26)$ .....                                     | 52 |
| Πίνακας 2.21. Τιμές ARL για το $\bar{X}$ διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος $RS_{26}(2,6,7,26)$ με $ARL_0 = 464.669807$ .....  | 53 |
| Πίνακας 2.22. Τιμές ARL για το $\bar{X}$ EWMA διάγραμμα με $\lambda = 0.1333$ και $L = 2.856$ .....  | 53 |

|   |    |
|---|----|
| Πίνακας 2.23. Σύγκριση διαγραμμάτων ελέγχου με $ARL_0 = 465$ .....  | 56 |
| Πίνακας 3.1. Δίπλευρο S διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος<br>με $2k + 2$ περιοχές.....   | 59 |
| Πίνακας 3.2. Δίπλευρο S διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος $RSS_8(0,2,3,8)$ .....   | 61 |
| Πίνακας 3.3. Δειγματική τυπική απόκλιση, σκορ και αθροιστικό σκορ 7 δειγμάτων για<br>το δίπλευρο S διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος $RSS_8(0,2,3,8)$ με $L = 1$ ..... | 62 |
| Πίνακας 3.4. Τιμές ARL για το S διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος<br>$RSS_8(0,2,3,8)$ με $L = 1$ και $n = 9$ .....   | 66 |
| Πίνακας 3.5. Δίπλευρο S διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος $RSS_5(0,1,2,3)$ .....   | 68 |
| Πίνακας 3.6. Τιμές ARL για το S διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος<br>$RSS_5(0,1,2,3)$ με $ARL_0 = 200$ .....   | 70 |
| Πίνακας 3.7. Δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος<br>με $2k + 2$ περιοχές.....   | 72 |
| Πίνακας 3.8. Δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος $RSR_8(0,2,4,8)$ .....   | 76 |
| Πίνακας 3.9. Τιμές ARL για το R διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος<br>$RSR_8(0,2,4,8)$ ( $ARL_0 = 370.4$ , $n = 9$ ).....   | 78 |
| Πίνακας 3.10. Δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος $RSR_5(0,1,2,3)$ .....  | 81 |
| Πίνακας 3.11. Τιμές ARL για το R διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος<br>$RSR_5(0,1,2,3)$ ( $ARL_0 = 370.4$ , $n = 9$ ).....  | 82 |
| Πίνακας 3.12. Δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος<br>$RSR_8(0,2,4,8)$ με $SL_0 = -4$ και $SU_0 = 4$ .....   | 83 |
| Πίνακας 3.13. Τιμές ARL για το R διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος<br>$RSR_5(0,1,2,3)$ , με $SL_0 = -4$ και $SU_0 = 4$ , ( $ARL_0 = 370.4$ , $n = 9$ ).....            | 84 |
| Πίνακας 3.14. Τιμές ARL για το S διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος<br>$RSS_4(0,1,2,4)$ και το S διάγραμμα ελέγχου $C_{123}$ ( $ARL_0 = 200$ ).....                     | 89 |
| Πίνακας 3.15. Σύγκριση διαγραμμάτων ελέγχου ροής αθροίσματος S με<br>αντίστοιχα διαγράμματα με σύνθετους κανόνες ροών ( $ARL_0 = 200$ και $n = 5$ ).....                | 90 |
| Πίνακας 3.16. Δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος $RSR_8(0,2,4,8)$ .....  | 91 |
| Πίνακας 3.17. Τιμές ARL για το R διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος<br>$RSR_8(0,2,4,8)$ και το R διάγραμμα ελέγχου $C_{1234}$ ( $ARL_0 = 91.8$ , $n = 5$ ).....         | 93 |
| Πίνακας 3.18. Τιμές ARL για τα R διαγράμματα ελέγχου ροής αθροίσματος<br>$RSR_8(0,2,4,8)$ και $RSR_5(0,1,2,3)$ ( $ARL_0 = 132.95$ , $n = 10$ ).....                     | 93 |

## Κατάλογος Σχημάτων

|  |    |
|--|----|
| Σχήμα 1.1. Τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart.....  | 3  |
| Σχήμα 1.2. Μέσο μήκος ροής για $W \sim N(10, 0.25^2/n)$ για $n = 2,5$ .....  | 17 |
| Σχήμα 1.3. Προειδοποιητικά όρια ελέγχου.....   | 18 |
| Σχήμα 1.4. Western Electric Rules.....   | 19 |
| Σχήμα 2.1. Παράδειγμα δίπλευρου $\bar{X}$ διαγράμματος ελέγχου ροής<br>αθροίσματος $RS_4[0,1,4 : 0,1,3, \infty]$ .....   | 27 |
| Σχήμα 2.2. Καμπύλη $ARL$ του $\bar{X}$ διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος<br>$RS_2[0,1,2 : 0,2,3, \infty]$ .....  | 31 |
| Σχήμα 2.3. Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ροής του $\bar{X}$ διαγράμματος ελέγχου<br>ροής αθροίσματος $RS_2[0,1,2 : 0,2,3, \infty]$ για $d = 0, 0.2, 0.5$ .....          | 32 |
| Σχήμα 2.4. Διάγραμμα $ARL$ : $RS_4(0,1,2,4)$ και $\bar{X}$ διάγραμμα ελέγχου με όρια<br>ελέγχου $3\sigma$ .....  | 34 |
| Σχήμα 2.5. Διάγραμμα $ARL$ : $RS_4(0,1,4)$ και $CUSUM$ διάγραμμα ελέγχου<br>με $K = 0.5$ και $H = 5$ .....   | 50 |
| Σχήμα 2.6. Διάγραμμα $ARL$ : $RS_{26}(2,6,7,26)$ και $EWMA$ διαγράμματος ελέγχου<br>με $\lambda = 0.1333$ και $L = 2.856$ .....  | 54 |
| Σχήμα 3.1. Παράδειγμα δίπλευρου $S$ διαγράμματος ελέγχου ροής<br>αθροίσματος $RSS_8(0,2,3,8)$ με $L = 1$ .....   | 63 |
| Σχήμα 3.2. Καμπύλη $ARL$ του $S$ διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος<br>$RSS_8(0,2,3,8)$ με $L = 1$ και $n = 9$ .....  | 67 |
| Σχήμα 3.3. Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ροής $S$ διαγράμματος ελέγχου<br>ροής αθροίσματος $RSS_8(0,2,3,8)$ με $L = 1$ και $n = 9$ για $\tau = 1, 1.2, 1.5$ .....       | 68 |
| Σχήμα 3.4. Διάγραμμα $ARL$ : $RSS_5(0,1,2,3)$ και $S$ διάγραμμα ελέγχου<br>με ίσα όρια πιθανότητας ( $ARL_0 = 200$ ).....  | 71 |
| Σχήμα 3.5. Καμπύλη $ARL$ του $R$ διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος<br>$RSR_8(0,2,4,8)$ με $ARL_0 = 370.4$ και $n = 9$ .....  | 79 |
| Σχήμα 3.6. Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ροής $R$ διαγράμματος ελέγχου<br>ροής αθροίσματος $RSR_8(0,2,4,8)$ με $ARL_0 = 370.4$ , $n = 9$ για $\tau = 1, 1.2, 1.5$ ..... | 80 |
| Σχήμα 3.7. Διάγραμμα $ARL$ : $RSR_5(0,1,2,3)$ με και χωρίς FIR.....  | 85 |



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Διαγράμματα Ελέγχου

### 1.1 Εισαγωγή

Κάθε άνθρωπος που αποφασίζει να αγοράσει ένα προϊόν (ή υπηρεσία) αντιμετωπίζει το πρόβλημα της επιλογής ανάμεσα σε ομοειδή προϊόντα που ικανοποιούν την ίδια ανάγκη. Η επιλογή του προϊόντος από τον καταναλωτή καθορίζεται κυρίως από δύο παράγοντες, την ποιότητα και την τιμή του.

Η αναγνώριση αυτών των δύο κύριων παραγόντων οι οποίοι καθορίζουν τις αγοραστικές συνήθειες των καταναλωτών οδήγησε τις επιχειρήσεις στην αναζήτηση επιχειρηματικών τακτικών που θα οδηγήσουν στη βέλτιστη δυνατή ποιότητα των παραγόμενων προϊόντων με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Η αναζήτηση αυτή οδήγησε σε μια σειρά παρεμβάσεων στο επιχειρηματικό περιβάλλον οι οποίες τελικά διαμόρφωσαν νέα πλαίσια λειτουργίας και διοίκησης των επιχειρήσεων με τελικό στόχο και σκοπό τη διαρκή βελτίωση της ποιότητας. Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας αποτελεί την παλαιότερη, καθώς και γνωστότερη μέθοδο ελέγχου παραγωγικών διεργασιών για την βελτίωση της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων (ή υπηρεσιών). Αποτελείται από ένα σύνολο μεθόδων ανάλυσης στατιστικών δεδομένων. Το σύνολο αυτό μπορεί να χωριστεί σε τρία βασικά υποσύνολα που το καθένα περιέχει στατιστικές μεθόδους προσανατολισμένες σε διαφορετικές φάσεις της παραγωγικής διαδικασίας. Τα τρία αυτά υποσύνολα είναι τα εξής:

- **Σχεδιασμός και Ανάλυσης Πειραμάτων (Design of Experiments)**
- **Στατιστικό Έλεγχο Διεργασιών (Statistical Process Control)**
- **Δειγματοληψία Αποδοχής (Acceptance Sampling)**

Σε κάθε παραγωγική διεργασία, ανεξάρτητα από το πόσο καλά σχεδιασμένη είναι και το πόσο προσεκτικά επιβλέπεται και συντηρείται, θα υπάρχει πάντα μια μορφή **φυσικής μεταβλητότητας** που θα τη συνοδεύει. Έτσι, όσο καλά ρυθμισμένα και να είναι τα μηχανήματα, όσο ικανοί και να είναι οι χειριστές των μηχανημάτων, όσο ικανοποιητική και

να είναι η πρώτη ύλη, ποτέ δύο παραγόμενα προϊόντα ή υπηρεσίες δεν θα είναι τα ίδια. Αυτή η φυσική μεταβλητότητα αποτελεί τη συνισταμένη πολλών μικρών αιτιών οι οποίες αναφέρονται ως **κοινές ή τυχαίες αιτίες μεταβλητότητας** (*common or chance causes of variation*). Από την άλλη, μία διεργασία μπορεί να εμφανίσει και άλλες μορφές μεταβλητότητας, οι οποίες δεν οφείλονται σε τυχαίες αιτίες αλλά αφορούν αλλαγή στο επίπεδο κάποιου ή κάποιων παραγόντων που καθορίζουν την ποιότητα του προϊόντος, όπως είναι για παράδειγμα η λανθασμένη ρύθμιση των μηχανών ή η ελαττωματική πρώτη ύλη. Αυτές οι αιτίες ονομάζονται ειδικές αιτίες μεταβλητότητας. Μία διεργασία που λειτουργεί υπό την παρουσία τέτοιων αιτιών μεταβλητότητας οδηγεί συνήθως σε μη αποδεκτά επίπεδα λειτουργίας της παραγωγικής διεργασίας. Το κύριο αντικείμενο του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών είναι η έγκαιρη ανίχνευση της εμφάνισης ειδικών αιτιών μεταβλητότητας σε μία διεργασία έτσι ώστε να προχωρήσουμε σε έρευνα και να γίνουν άμεσα διορθωτικές ενέργειες προτού κατασκευαστούν αρκετά προϊόντα μη συμμορφούμενα (nonconforming) με τις προδιαγραφές. Τα διαγράμματα ελέγχου βρίσκουν εφαρμογή στον εντοπισμό διεργασιών όπου παρουσιάζεται ειδική αιτία μεταβλητότητας.

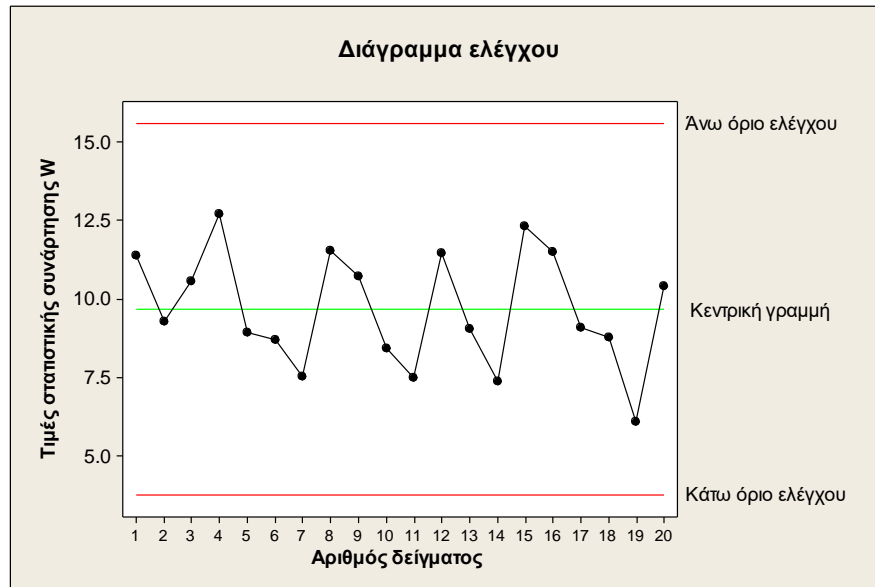
## 1.2 Περιγραφή και χρήση ενός διαγράμματος ελέγχου

Σε μία παραγωγική διεργασία μας ενδιαφέρει η παρακολούθηση της συμπεριφοράς μιας κρίσιμης ποσότητας ενός (μετρήσιμου) χαρακτηριστικού  $X$  (τυχαία μεταβλητή), δηλαδή ένα χαρακτηριστικό των προϊόντων που παράγονται. Η διαδικασία παρακολούθησης της κρίσιμης ποσότητας βασίζεται σε μετρήσεις του χαρακτηριστικού  $X$ , όπως προκύπτουν από την επιλογή τυχαίων δειγμάτων προϊόντων από την παραγωγή σε διαφορετικές χρονικές στιγμές στα οποία αντιστοιχούν τυχαία δείγματα τιμών του χαρακτηριστικού  $X$  έστω τα  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$ . Χρησιμοποιώντας τα τυχαία δείγματα  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$  υπολογίζουμε την τιμή  $W_i = g(\mathbf{X}_i)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) μιας κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης που εκτιμά (συνήθως αμερόληπτη εκτιμήτρια) την κρίσιμη ποσότητα που μας ενδιαφέρει. Έτσι, η (διαχρονική) παρακολούθηση της συμπεριφοράς της κρίσιμης ποσότητας επιτυγχάνεται με την παρακολούθηση των τιμών που λαμβάνει η στατιστική συνάρτηση  $W$  στα διάφορα δείγματα.

Ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε να παρακολουθήσουμε τη συμπεριφορά της μέσης τιμής  $\mu$  της διαμέτρου  $X$  των κυλίνδρων που παράγει μια μηχανή. Λαμβάνουμε τυχαία δείγματα μεγέθους  $n$  από την παραγωγή της μηχανής σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την στατιστική συνάρτηση  $W_i = g(\mathbf{X}_i) = (X_{i1} + X_{i2} + \dots +$



$X_{in})/n$  , η οποία είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του μέσου για την παρακολούθηση της συμπεριφοράς της μέσης τιμής. Ένα τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart είναι μια γραφική παράσταση με την ακόλουθη μορφή



**Σχήμα 1.1.** Τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart

όπου στο σχήμα, εκτός από τις διαδοχικές παρατηρούμενες τιμές της που έχουν παρασταθεί με σημεία (τετραγωνάκια) τα οποία έχουν συνδεθεί με μια τεθλασμένη γραμμή, έχουν σχεδιαστεί και άλλες τρεις γραμμές. Η κεντρική γραμμή (*center line, CL*) ή μέσο επίπεδο της διεργασίας παριστάνει συνήθως τη μέση τιμή (*mean value*) της στατιστικής συνάρτησης όπως προκύπτει από τη λειτουργία μιας εντός ελέγχου διεργασίας. Οι δύο ακραίες γραμμές που εμφανίζονται ονομάζονται άνω και κάτω όρια ελέγχου (*upper and lower control limits, UCL and LCL*). Όσο οι τιμές (σημεία, δεδομένα) της  $W$  εμφανίζονται εντός των ορίων ελέγχου και η συμπεριφορά τους είναι “τυχαία” μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου (για την ακρίβεια εντός στατιστικού ελέγχου) και δεν χρειάζεται να προβούμε σε κάποια διορθωτική ενέργεια. Επίσης, σε ένα διάγραμμα ελέγχου δεν ελέγχουμε μόνο αν τα σημεία είναι εντός των ορίων ελέγχου αλλά και την περίπτωση που όλα τα σημεία του διαγράμματος συμπεριφέρονται με ένα συστηματικό ή μη τυχαίο τρόπο. Ακόμη και σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου.

Για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου χρησιμοποιείται συνήθως το μοντέλο ορίων σίγμα (*sigma limits model*), το οποίο παρουσιάζεται στο παρακάτω πλαίσιο.

| <b>Μοντέλο ορίων L<br/>σίγμα</b> |
|----------------------------------|
| $UCL = \mu_W + L\sigma_W$        |
| $CL = \mu_W$                     |
| $LCL = \mu_W - L\sigma_W$        |

Όπου τα  $\mu_W$  και  $\sigma_W$  δηλώνουν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της στατιστικής συνάρτησης  $W$  που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου. Η ποσότητα  $L$  δηλώνει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Όταν το  $L = 3$  τότε αναφερόμαστε για όρια ελέγχου τριών σίγμα ( $3\sigma$ ). Για μεγάλες τιμές του  $L$  η απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή μεγαλώνει και έτσι μειώνεται ο κίνδυνος να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου για μια εντός ελέγχου διεργασία. Σε αναλογία με την ορολογία που χρησιμοποιείται στους ελέγχους στατιστικών υποθέσεων, λέμε ότι μειώνεται η πιθανότητα του σφάλματος τύπου I (ή ρίσκο  $\alpha$ ), αλλά ταυτόχρονα αυξάνεται η πιθανότητα του σφάλματος τύπου II (ή ρίσκο  $\beta$ ). Για μικρές τιμές του  $L$  έχουμε τα αντίθετα αποτελέσματα.

Εκτός από το μοντέλο ορίων σίγμα για την κατασκευή ορίων ελέγχου σε ένα διάγραμμα ελέγχου υπάρχει και το μοντέλο ορίων πιθανότητας που παρουσιάζεται στο ακόλουθο πλαίσιο για κανονική κατανομή (ή προσεγγιστικά κανονική) της  $W$  (με  $w_\alpha$  συμβολίζεται το άνω  $\alpha$ -ποσοστιαίο σημείο της  $W$ ).

| <b>Μοντέλο ορίων πιθανότητας <math>\alpha</math></b>  |
|---|
| $UCL = w_{\alpha/2} = \mu_W + z_{\alpha/2}\sigma_W$   |
| $CL = w_{\alpha/2} = \mu_W$                           |
| $LCL = w_{1-\alpha/2} = \mu_W - z_{\alpha/2}\sigma_W$ |

### 1.3 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I και Φάσης II

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν δύο φάσεις (phases) για τον έλεγχο μιας παραγωγικής διεργασίας με τη χρήση διαγραμμάτων ελέγχου, η Φάση I και η Φάση II.

**Φάση I (Phase I):** Σε αυτή τη φάση τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται αναδρομικά για να ελέγξουν αν η διεργασία ήταν εντός ή εκτός ελέγχου εξετάζοντας δείγματα που συλλέχθηκαν σε παρελθόντα χρόνο. Σε αυτή την φάση τα διαγράμματα ελέγχου βοηθούν τον διαχειριστή της διαδικασίας να φέρει τη διεργασία εντός στατιστικού ελέγχου.

Όταν αυτό επιτευχθεί τα διαγράμματα ελέγχου που προκύπτουν (κεντρική γραμμή και όρια ελέγχου) είναι κατάλληλα για την παρακολούθηση της μελλοντικής συμπεριφοράς της διεργασίας. Αυτή η χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου αναφέρεται και ως αναδρομική (*retrospective*). Γενικά πολύ περισσότερες δράσεις και σκέψεις εξελίσσονται κατά την διάρκεια αυτής της φάσης πλην της απλής διαγραμματοποίησης κάποιων δεδομένων. Ο διαχειριστής της διαδικασίας μελετά σε βάθος τη διεργασία και αυτό γιατί δεν είναι εύκολο να αποφασίσει αν η διεργασία ήταν εντός στατιστικού ή εκτός ελέγχου κατά τη χρονική περίοδο που τα δεδομένα συλλέχθηκαν.

**Φάση II (Phase II):** Σε αυτή τη φάση τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται προκειμένου να ελέγχουμε συνεχώς αν η διαδικασία παραμένει εντός ελέγχου. Στη φάση αυτή ο διαχειριστής έχει στα χέρια του ένα πολύτιμο εργαλείο μέσω του οποίου είναι δυνατόν να παρακολουθεί συνεχώς την παραγωγική διεργασία και να ανιχνεύει εγκαίρως μια πιθανή αλλαγή στο μέσο επίπεδο των χαρακτηριστικών που καθορίζουν την ποιότητα του παραγόμενου προϊόντος. Δηλαδή σε κάθε χρονική περίοδο που ένα δείγμα λαμβάνεται από την διεργασία ο διαχειριστής παίρνει μια απάντηση στο ερώτημα “παραμένει η διεργασία εντός ελέγχου;”. Σε αυτή την φάση ο διαχειριστής αδιαφορεί για τον τρόπο με τον οποίο το μέσο επίπεδο της διεργασίας είχε εκτιμηθεί, ή αν αυτό ήταν εκ των προτέρων γνωστό.

#### 1.4 Ταξινόμηση διαγραμμάτων ελέγχου

Τα διαγράμματα ελέγχου μπορούν να ταξινομηθούν σε πολλές κατηγορίες ανάλογα με ορισμένα χαρακτηριστικά τους. Έτσι έχουμε τις εξής βασικές κατηγορίες:

- 1) Ανάλογα με το είδος της μεταβλητής που περιγράφει το ποιοτικό χαρακτηριστικό έχουμε διαγράμματα ελέγχου για **μεταβλητές** (control charts for variables) και διαγράμματα ελέγχου για **ιδιότητες** (control charts for attributes).
- 2) Εάν το μέγεθος των δειγμάτων μετρήσεων είναι μεγαλύτερο της μονάδας αναφερόμαστε σε διαγράμματα ελέγχου για **δείγματα/υποομάδες** (control charts for rational subgroups), ενώ αν λαμβάνονται δείγματα μετρήσεων μεγέθους ένα τότε αναφερόμαστε σε διαγράμματα ελέγχου για **μεμονωμένες παρατηρήσεις** (control charts for individual observations).
- 3) Αν οι μετρήσεις που λαμβάνονται σε κάθε χρονική στιγμή  $t$  είναι εξαρτημένες από τις μετρήσεις που λαμβάνονται στο χρόνο  $t - 1$  αναφερόμαστε σε διαγράμματα ελέγχου για **αυτοσυσχετιζόμενες διεργασίες** (control charts for autocorrelated processes), ενώ αν οι

μετρήσεις που λαμβάνονται σε κάθε χρονική στιγμή  $t$  είναι ανεξάρτητες από τις μετρήσεις που λαμβάνονται στο χρόνο  $t - 1$  αναφερόμαστε σε διαγράμματα ελέγχου για **ασυσχέτιστες διεργασίες** (*control charts for uncorrelated processes*).

- 4) Αν οι μετρήσεις που λαμβάνονται αφορούν ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό αναφερόμαστε σε **μονομεταβλητά** διαγράμματα ελέγχου, ενώ αν οι μετρήσεις αναφέρονται σε περισσότερα χαρακτηριστικά αναφερόμαστε σε **πολυμεταβλητά** διαγράμματα ελέγχου.
- 5) Αν οι μετρήσεις που λαμβάνονται ακολουθούν μια γνωστή κατανομή τότε αναφερόμαστε σε **παραμετρικά** διαγράμματα ελέγχου, ενώ στην αντίθετη περίπτωση αναφερόμαστε σε **μη-παραμετρικά** διαγράμματα ελέγχου.

## 1.5 Εκτίμηση της μέσης τιμής και της διασποράς

### 1.5.1 Η περίπτωση των μεμονωμένων παρατηρήσεων

Έστω  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  είναι ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους  $n$  από ένα πληθυσμό με άγνωστη μέση τιμή  $\mu$  και άγνωστη διακύμανση  $\sigma^2$ . Μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της μέσης τιμής είναι ο δειγματικός μέσος:

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

και μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της διακύμανσης είναι η δειγματική διακύμανση

$$\sigma^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Αν υποθέσουμε τώρα ότι το τυχαίο δείγμα προέρχεται από κανονικό πληθυσμό  $N(\mu, \sigma^2)$ , μπορούμε να βρούμε τις ακόλουθες αμερόληπτες εκτιμήτριες της τυπικής απόκλισης  $\sigma$ ,

$$\hat{\sigma} = \frac{R}{d_2} = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{d_2}$$

και

$$\hat{\sigma} = \frac{S}{c_4} = \frac{\sqrt{S^2}}{c_4}.$$

Επίσης, για κανονικούς πληθυσμούς αποδεικνύονται τα ακόλουθα:

$$\mu_R = E(R) = \sigma d_2, \quad \sigma_R = \sqrt{V(R)} = \sigma d_3,$$

$$\mu_S = E(S) = \sigma c_4, \quad \sigma_S = \sqrt{V(S)} = \sigma \sqrt{(1 - c_4^2)}.$$

Οι ποσότητες  $d_2$ ,  $d_3$  και  $c_4$  είναι σταθερές που εξαρτώνται από το μέγεθος του δείγματος και οι τιμές των οποίων δίνονται στον ακόλουθο πίνακα για μέγεθος δείγματος  $n = 1, 2, \dots, 10$ .

**Πίνακας 1.1.** Τιμές των σταθερών  $d_2$ ,  $d_3$  και  $c_4$

| $n$ | $d_2$      | $d_3$      | $c_4$      |
|-----|------------|------------|------------|
| 2   | 1.12837917 | 0.85250247 | 0.79788456 |
| 3   | 1.69256875 | 0.88836800 | 0.88622693 |
| 4   | 2.05875075 | 0.87980820 | 0.92131773 |
| 5   | 2.32592895 | 0.86408194 | 0.93998560 |
| 6   | 2.53441272 | 0.84803969 | 0.95153286 |
| 7   | 2.70435675 | 0.83320534 | 0.95936879 |
| 8   | 2.84720061 | 0.81983110 | 0.96503046 |
| 9   | 2.97002632 | 0.80783427 | 0.96931070 |
| 10  | 3.07750546 | 0.79705067 | 0.97265927 |

### 1.5.2 Η περίπτωση των δειγμάτων

Έστω ότι έχουμε στη διάθεση μας  $m$  τυχαία δείγματα, τα  $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ , για  $1 \leq i \leq m$ , μεγέθους  $n$  το καθένα από τον κανονικό πληθυσμό  $N(\mu, \sigma^2)$  με άγνωστη μέση τιμή και διακύμανση.

- **Εκτίμηση της μέσης τιμής**

Έστω  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$ , οι δειγματικοί μέσοι των  $m$  δειγμάτων. Θέτουμε

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m}{m} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}}{mn}.$$

Η ποσότητα  $\bar{\bar{X}}$  ακολουθεί κατανομή  $N(\mu, \sigma^2/mn)$  και χρησιμοποιείται ως εκτιμήτρια της μέσης τιμής  $\mu$  (αμερόληπτη εκτιμήτρια του  $\mu$ ), δηλαδή

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}.$$

- **Εκτίμηση της τυπικής απόκλισης  $\sigma$  (μέθοδος  $R$ )**

Έστω  $R_1, R_2, \dots, R_m$  τα εύρη των  $m$  δειγμάτων, δηλαδή

$$R_i = X_{i(n)} - X_{i(1)}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Θέτοντας

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m}$$

καταλήγουμε ότι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του  $\sigma$  θα είναι η

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}.$$

- **Εκτίμηση της τυπικής απόκλισης  $\sigma$  (Μέθοδος  $S$ )**

Έστω  $S_i$  η δειγματική τυπική απόκλιση του  $i$  δείγματος, δηλαδή

$$S_i = \sqrt{S_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Θέτοντας

$$\bar{S} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_m}{m}$$

καταλήγουμε ότι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του  $\sigma$  θα είναι η

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4}.$$

- **Εκτίμηση της διακύμανσης  $\sigma$  (Μέθοδος  $S^2$ )**

Έστω  $S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2$  οι δειγματικές διασπορές των  $m$  δειγμάτων, δηλαδή

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Θέτοντας

$$\bar{S}^2 = \frac{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_m^2}{m}$$

έχουμε ότι μια εκτιμήτρια του  $\sigma$  είναι η

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\bar{S}^2}$$

η οποία αν και δεν είναι αμερόληπτη, χρησιμοποιείται αρκετές φορές λόγω του ότι έχει μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα από την  $\bar{S}/c_4$ .

## 1.6 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart για τη μέση τιμή

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart για τη μέση τιμή στην περίπτωση των δειγμάτων, τόσο στη Φάση I όσο και στη Φάση II.

### 1.6.1 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης II

Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού  $X$  των προϊόντων που παράγονται ακολουθεί κανονική κατανομή  $N(\mu, \sigma^2)$  με γνωστές παραμέτρους και έστω  $\mathbf{X}_i =$

$(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}), i \geq 1$ , τυχαία δείγματα μεγέθους  $n$  από το χαρακτηριστικό  $X$ . Ο δειγματικός μέσος

$$\bar{X}_i = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}}{n}, \quad i = 1, 2, \dots$$

ακολουθεί την κατανομή  $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ , και είναι αμερόληπτος εκτιμητής της μέσης τιμής  $\mu$  του χαρακτηριστικού  $X$ .

Το διάγραμμα ελέγχου, με όρια ελέγχου  $3\sigma$ , που χρησιμοποιείται για την παρακολούθηση του μέσου της διεργασίας είναι το  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου στο οποίο απεικονίζονται οι δειγματικές μέσες τιμές  $\bar{X}_i, i = 1, 2, \dots$ . Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο.

|  |
|--|
| <b><math>\bar{X}</math> διάγραμμα ελέγχου</b>      |
| <b>Φάση II - Όρια ελέγχου <math>3\sigma</math></b> |
| $UCL = \mu + A\sigma$                              |
| $CL = \mu$   |
| $LCL = \mu - A\sigma$                              |

όπου  $A = \frac{3}{\sqrt{n}}$ .

Στην περίπτωση όπου θέλουμε διάγραμμα ελέγχου με όρια διαφορετικά των  $3\sigma$  τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή δίνονται στο παρακάτω πλαίσιο.

|  |
|--|
| <b><math>\bar{X}</math> διάγραμμα ελέγχου</b>      |
| <b>Φάση II - Όρια ελέγχου <math>L\sigma</math></b> |
| $UCL = \mu + L \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$            |
| $CL = \mu$   |
| $LCL = \mu - L \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$            |

### 1.6.2 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I

Σε αυτή την περίπτωση η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του χαρακτηριστικού  $X$  είναι άγνωστες οπότε είναι απαραίτητο να εκτιμηθούν. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται  $m$  ανεξάρτητα προκαταρκτικά τυχαία δείγματα μεγέθους  $n$  το καθένα, τα  $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , για να εκτιμήσουμε τις ποσότητες  $\mu$  και  $\sigma$ , και γίνεται η υπόθεση ότι η επιλογή των προκαταρκτικών δειγμάτων συνέβη όταν η διεργασία ήταν εντός ελέγχου. Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων προκύπτουν συνήθως από 20 έως 25 προκαταρκτικά δείγματα μεγέθους 4 έως 6 το καθένα.

Ως εκτιμήτρια του  $\mu$  παίρνουμε τη στατιστική συνάρτηση

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$$

ενώ ως εκτίμηση της τυπικής απόκλισης  $\sigma$  μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις τρεις ακόλουθες στατιστικές συναρτήσεις

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4}, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\bar{S}^2}.$$

Συνεπώς, ανάλογα με την εκτίμηση που χρησιμοποιούμε για την τυπική απόκλιση προκύπτει διαφορετικό διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της μέσης τιμής. Σε κάθε περίπτωση στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζονται οι δειγματικές μέσες τιμές  $\bar{X}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Έτσι έχουμε τα τρία ακόλουθα διαγράμματα ελέγχου

|   |
|---|
| <b><math>\bar{X}</math> διάγραμμα ελέγχου</b> |
| <b>Φάση I - Όρια ελέγχου 3σ<br/>Μέθοδος R</b> |
| $UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R}$            |
| $CL = \bar{\bar{X}}$                          |
| $LCL = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R}$            |

|   |
|---|
| <b><math>\bar{X}</math> διάγραμμα ελέγχου</b> |
| <b>Φάση I - Όρια ελέγχου 3σ<br/>Μέθοδος S</b> |
| $UCL = \bar{\bar{X}} + A_3\bar{S}$            |



|   |
|---|
| $CL = \bar{\bar{X}}$ $LCL = \bar{\bar{X}} - A_3\bar{S}$ |
|---|

|  |
|--|
| <b><math>\bar{X}</math> διάγραμμα ελέγχου</b>  |
| <b>Φάση II - Όρια ελέγχου 3σ<br/>Μέθοδος <math>S^2</math></b>  |
| $UCL = \bar{\bar{X}} + A\sqrt{\bar{S}^2}$ $CL = \bar{\bar{X}}$ $LCL = \bar{\bar{X}} - A\sqrt{\bar{S}^2}$ |

όπου

$$A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}, \quad A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}}$$

## 1.7 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart για τη διασπορά

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart για τη διασπορά στην περίπτωση των δειγμάτων, τόσο στη Φάση I όσο και στη Φάση II.

### 1.7.1 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης II

Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού  $X$  των προϊόντων που παράγονται ακολουθεί κανονική κατανομή  $N(\mu, \sigma^2)$  με γνωστές παραμέτρους και έστω  $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ ,  $i \geq 1$ , τυχαία δείγματα μεγέθους  $n$  από το χαρακτηριστικό  $X$ . Για την παρακολούθηση της διασποράς έχουν προταθεί τρία διαφορετικά διαγράμματα ελέγχου ανάλογα με τη στατιστική συνάρτηση που απεικονίζεται στο διάγραμμα.

Το διάγραμμα ελέγχου για τη διασπορά του ποιοτικού χαρακτηριστικού  $X$  μπορεί να βασιστεί σε ένα διάγραμμα όπου η απεικονιζόμενη ποσότητα θα είναι το εύρος  $R_i$ .

Αρχικά θέτουμε

$$W_i = R_i = X_{i(n)} - X_{i(1)}, \quad i = 1, 2, \dots$$

είναι γνωστό ότι

$$\mu_{R_i} = E(R) = \sigma d_2 \text{ και } \sigma_{R_i} = \sqrt{V(R_t)} = \sigma d_3$$

όπου οι ποσότητες  $d_2$  και  $d_3$  εξαρτώνται από το μέγεθος  $n$  του δείγματος.

Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο.

|  |
|--|
| <b>R διάγραμμα ελέγχου</b>                         |
| <b>Φάση II - Όρια ελέγχου <math>3\sigma</math></b> |
| $UCL = D_2\sigma$                                  |
| $CL = d_2\sigma$                                   |
| $LCL = D_1\sigma$                                  |

όπου  $D_1 = d_2 - 3d_3$  και  $D_2 = d_2 + 3d_3$ . Επειδή  $D_1 < 0$  για  $n \leq 6$ , σε αυτές τις περιπτώσεις θέτουμε  $D_1 = 0$ .

Επίσης, το διάγραμμα ελέγχου για τη διασπορά του ποιοτικού χαρακτηριστικού  $X$  μπορεί να βασιστεί σε ένα διάγραμμα όπου η απεικονιζόμενη ποσότητα θα είναι οι τυπικές αποκλίσεις  $S_i$ .

Για την παρακολούθηση της διασποράς του χαρακτηριστικού  $X$  μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επίσης τη στατιστική συνάρτηση

$$W_i = S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

για την οποία ισχύει

$$\mu_{S_i} = E(S_i) = \sigma c_4, \quad \sigma_{S_i} = \sqrt{V(S_i)} = \sigma \sqrt{1 - c_4^2}.$$

Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο.

|  |
|--|
| <b>S διάγραμμα ελέγχου</b>                         |
| <b>Φάση II - Όρια ελέγχου <math>3\sigma</math></b> |
| $UCL = B_6\sigma$                                  |

|                                    |
|------------------------------------|
| $CL = c_4\sigma$ $LCL = B_5\sigma$ |
|------------------------------------|

όπου

$$B_5 = c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2}, \quad B_6 = c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2}$$

Επειδή  $B_5 < 0$  για  $n \leq 5$  σε αυτές τις περιπτώσεις θέτουμε  $B_5 = 0$ .

Το διάγραμμα ελέγχου για τη διασπορά του ποιοτικού χαρακτηριστικού  $X$  μπορεί να βασιστεί σε ένα διάγραμμα όπου η απεικονιζόμενη ποσότητα θα είναι η δειγματική διακύμανση  $S_i^2$ .

Το διάγραμμα χρησιμοποιεί τη στατιστική συνάρτηση

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, \quad i = 1, 2, \dots$$

Για την οποία ισχύει

$$E(S_i^2) = \sigma^2, \quad \frac{(n-1)S_i^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2,$$

οπότε

$$P\left(\frac{(n-1)S_i^2}{\sigma^2} \chi_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}^2 \leq S_i^2 \leq \frac{(n-1)S_i^2}{\sigma^2} \chi_{n-1; \alpha/2}^2\right) = 1 - \alpha$$

Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο.

|   |
|---|
| <b><math>S^2</math> διάγραμμα ελέγχου</b>   |
| <b>Φάση II - Όρια ελέγχου πιθανότητας <math>\alpha</math></b>   |
| $UCL = \frac{\sigma^2}{n-1} \chi_{n-1; \alpha/2}^2$ $CL = \sigma^2$ $LCL = \frac{\sigma^2}{n-1} \chi_{n-1; 1-\alpha/2}^2$ |

### 1.7.2 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I

Σε αυτή την περίπτωση η τυπική απόκλιση είναι άγνωστη οπότε πρέπει να εκτιμηθεί. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται  $m$  ανεξάρτητα προκαταρκτικά τυχαία δείγματα μεγέθους  $n$  το καθένα, τα  $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$   $i = 1, 2, \dots, m$  για να εκτιμήσουμε την τυπική απόκλιση  $\sigma$ , και γίνεται η υπόθεση ότι η επιλογή των προκαταρκτικών δειγμάτων συνέβη όταν η διεργασία ήταν εντός ελέγχου.

Για την εκτίμηση της τυπική απόκλισης έχουμε τις τρεις ακόλουθες στατιστικές συναρτήσεις

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4}, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\bar{S}^2}.$$

Συνεπώς, ανάλογα με την στατιστική συνάρτηση που χρησιμοποιούμε για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης και την αντίστοιχη στατιστική συνάρτηση που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου, προκύπτει διαφορετικό διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς. Έτσι έχουμε τα τρία ακόλουθα διαγράμματα ελέγχου

| <b>R διάγραμμα ελέγχου</b>      |
|---------------------------------|
| <b>Φάση I - Όρια ελέγχου 3σ</b> |
| $UCL = D_4 \bar{R}$             |
| $CL = \bar{R}$                  |
| $LCL = D_3 \bar{R}$             |

όπου

$$D_3 = 1 - 3 \frac{d_3}{d_2}, \quad D_4 = 1 + 3 \frac{d_3}{d_2}$$

Επειδή  $D_3 < 0$  για  $n \leq 6$ , σε αυτές τις περιπτώσεις θέτουμε  $D_3 = 0$ .

| <b>S διάγραμμα ελέγχου</b>      |
|---------------------------------|
| <b>Φάση I - Όρια ελέγχου 3σ</b> |
| $UCL = B_4 \bar{S}$             |
| $CL = \bar{S}$                  |
| $LCL = B_3 \bar{S}$             |

όπου

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}, \quad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}$$

Επειδή  $B_3 < 0$  για  $n \leq 5$ , σε αυτές τις περιπτώσεις θέτουμε  $B_3 = 0$ .

|  |
|--|
| <b><math>s^2</math> διάγραμμα ελέγχου</b>  |
| <b>Φάση I - Όρια ελέγχου πιθανότητας <math>\alpha</math></b>   |
| $UCL = \frac{\bar{S}^2}{(n-1)} \chi_{n-1; \alpha/2}^2$ $CL = \bar{S}$ $LCL = \frac{\bar{S}^2}{(n-1)} \chi_{n-1; 1-\alpha/2}^2$ |

### 1.8 Μέσο μήκος ροής (ARL)

Μια βασική έννοια που σχετίζεται με τα διαγράμματα ελέγχου είναι το μέσο μήκος ροής του διαγράμματος (average run length, ARL) που ορίζεται με τη σχέση

$$ARL = \frac{1}{p}$$

όπου  $p$  συμβολίζει την πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος ελέγχου εκτός των ορίων ελέγχου. Είναι γνωστό ότι αν μια μεταβλητή  $X$  ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή  $G(p)$ , τότε

$$P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

και

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad V(X) = \frac{1 - p}{p^2}.$$

Το μήκος ροής σε ένα διάγραμμα ελέγχου ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή καθώς δηλώνει τον αριθμό των σημείων που θα απεικονιστούν σε αυτό έως ότου εμφανιστεί το πρώτο σημείο εκτός των ορίων ελέγχου. Συνεπώς, το μέσο μήκος ροής δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό σημείων που πρέπει να σχεδιαστούν στο διάγραμμα ελέγχου μέχρι να εντοπιστεί το πρώτο σημείο εκτός των ορίων ελέγχου.

Έστω ότι έχουμε μια διεργασία εντός ελέγχου, όπου χρησιμοποιούμε 3σ όρια ελέγχου και κανονική κατανομή. Σε αυτή την περίπτωση γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να βρεθεί εκτός ελέγχου ένα σημείο είναι ίση με 0.0027, οπότε το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής  $ARL_0$  είναι ίσο με

$$ARL_0 = \frac{1}{0.0027} = 370$$

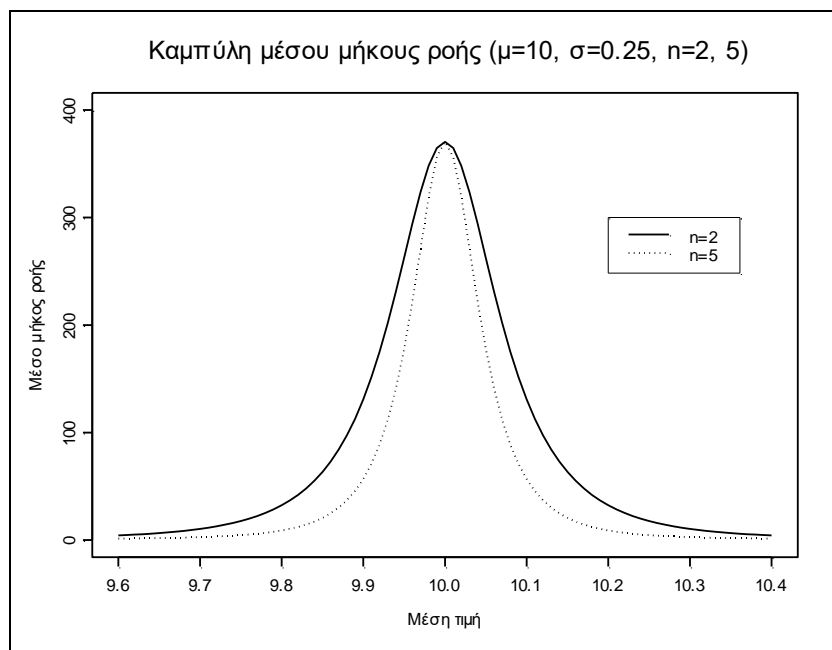
Σε περίπτωση που η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου, τότε το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής  $ARL_1$  είναι ίσο με

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}$$

όπου  $\beta$  είναι η πιθανότητα ένα σημείο του διαγράμματος να βρεθεί εντός του διαγράμματος ελέγχου σε αυτή την μετατόπιση (οπότε βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου με πιθανότητα  $1 - \beta$ ).

Για μια διεργασία που βρίσκεται εντός ελέγχου θέλουμε να έχουμε μεγάλη τιμή για το  $ARL_0$  έτσι ώστε να μειωθεί ο αριθμός των εσφαλμένων ενδείξεων εκτός ελέγχου διεργασίας, ενώ για μια διεργασία που βρίσκεται εκτός ελέγχου θέλουμε να έχουμε μικρή τιμή για το  $ARL_1$  έτσι ώστε να μειωθεί ο αριθμός των δειγμάτων με σκοπό να εντοπιστεί γρήγορα η μετατόπιση της διεργασίας.

Το ακόλουθο σχήμα δίνει το  $ARL_1$  στην περίπτωση που έχουμε 3σ όρια ελέγχου,  $W \sim N(10, 0.25^2)$ ,  $W = \bar{X}$  και  $n = 2,5$ . Από το σχήμα προκύπτει ότι το  $ARL_1$  δεν είναι καθόλου ικανοποιητικό για μικρές μετατοπίσεις του μέσου επιπέδου της διεργασίας. Για παράδειγμα αν το μέσο επίπεδο της διεργασίας από  $\mu = 10$  μετατοπιστεί στη θέση  $\mu^* = 10.1$  τότε  $\beta = 0.992359$  και  $ARL_1 \cong 130$ .



**Σχήμα 1.2.** Μέσο μήκος ροής για  $W \sim N(10, 0.25^2/n)$  για  $n = 2, 5$ .

Η χρήση του *ARL* ως μέτρου για την περιγραφή της απόδοσης μιας διεργασίας έχει υποστεί αρκετή κριτική τα τελευταία χρόνια γιατί το *ARL* που παρατηρείται στην πράξη διαφέρει συνήθως αρκετά από το “θεωρητικό” *ARL* (είτε είναι αρκετά μεγαλύτερο είτε είναι αρκετά μικρότερο). Αυτό συμβαίνει γιατί η κατανομή του μήκους ροής  $T$  είναι μια γεωμετρική κατανομή και συνεπώς η μέση τιμή της δεν μπορεί να θεωρηθεί ως αντιπροσωπευτικό μέτρο κεντρικής τάσης της κατανομής, ιδίως για μικρές τιμές του  $p$ , αφού σε αυτήν την περίπτωση η διακύμανση της γεωμετρικής κατανομής είναι αρκετά μεγάλη.

Στην πράξη, πέραν του μέσου μήκους ροής, χρησιμοποιείται αρκετά συχνά ο μέσος χρόνος σήματος *ATS* (average time to signal) που ορίζεται από τη σχέση

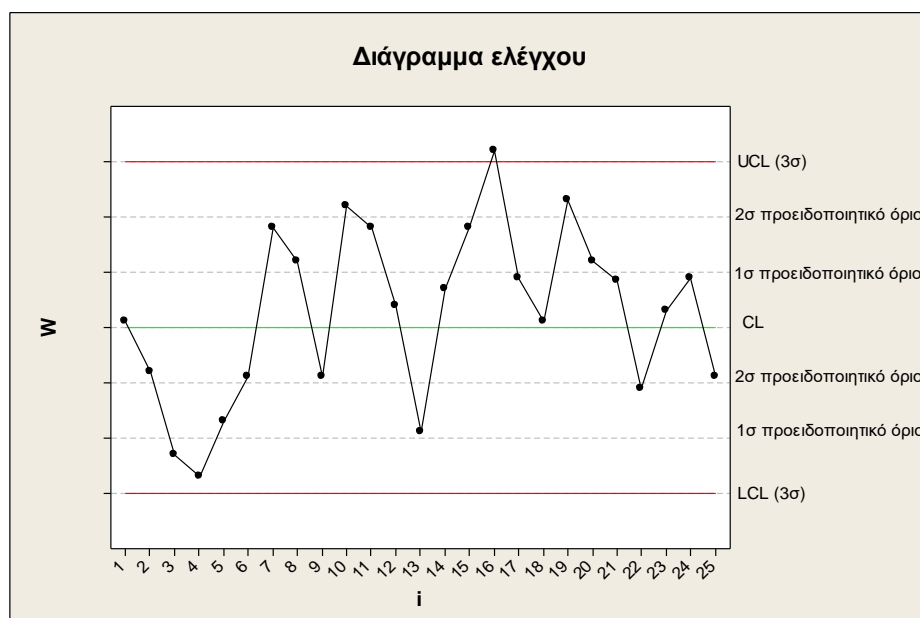
$$ATS = ARL \times h$$

όπου  $h$  συμβολίζει το χρόνο που μεσολαβεί για τη λήψη δύο διαδοχικών δειγμάτων (θεωρούμε ότι το  $h$  είναι σταθερό) και συνεπώς η ποσότητα *ATS* δηλώνει το μέσο χρόνο που απαιτείται για να δώσει το διάγραμμα ελέγχου ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας.

### 1.9 Κανόνες ευαισθητοποίησης ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart

Στόχος των διαγραμμάτων ελέγχου είναι να ανιχνεύσουν οποιαδήποτε μετατόπιση στην παραγωγική διεργασία όσο το δυνατόν πιο γρήγορα. Έχουν πραγματοποιηθεί διάφορες μελέτες στις οποίες έχει διαπιστωθεί ότι για μικρές μετατοπίσεις του μέσου (έως και  $1.5\sigma$ ) το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής  $ARL_1$  του διαγράμματος ελέγχου Shewhart δεν είναι

ικανοποιητικό (έχει μεγάλες τιμές). Για τον λόγο αυτό, εκτός από την σχεδίαση των ορίων ελέγχου (UCL και LCL) προτάθηκε να σχεδιάζονται και προειδοποιητικά όρια (warning limits) εσωτερικά των ορίων ελέγχου. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται ένα διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart με όρια ελέγχου  $3\sigma$  και προειδοποιητικά όρια.



**Σχήμα 1.3.** Προειδοποιητικά όρια ελέγχου

Τα προειδοποιητικά όρια χρησιμοποιούνται μαζί με κάποιους κανόνες ροών που περιγράφουν ενδεχόμενα που σχετίζονται με την εμφάνιση ειδικών μοτίβων σε ένα διάγραμμα ελέγχου. Στην περίπτωση που πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο που περιγράφει ο κανόνας ροών τότε υπάρχει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας.

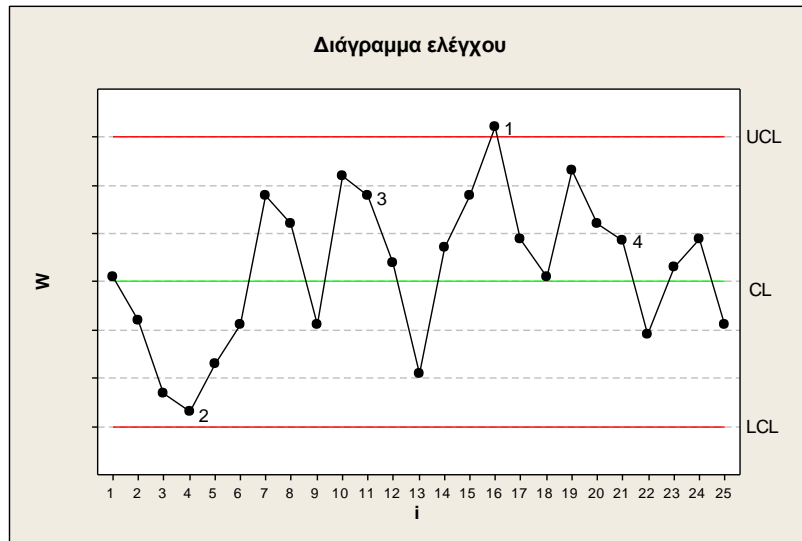
Μερικοί από τους σημαντικότερους κανόνες που χρησιμοποιούνται είναι οι ακόλουθοι:

1. Ένα ή περισσότερα σημεία εκτός των ορίων ελέγχου.
2. Δύο από τρία συνεχόμενα σημεία στη ζώνη A (σε μια από τις δύο ζώνες A).
3. Τέσσερα από πέντε συνεχόμενα σημεία πέραν της ζώνης Γ (σε μια από τις δύο περιοχές).
4. Οκτώ συνεχόμενα σημεία στην ίδια μεριά (επάνω ή κάτω) της κεντρικής γραμμής.
5. Έξι συνεχόμενα σημεία σε αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη.
6. Δεκαπέντε συνεχόμενα σημεία στην ολική ζώνη Γ.
7. Δεκατέσσερα συνεχόμενα σημεία σε εναλλασσόμενη μορφή “πάνω-κάτω”.
8. Οκτώ συνεχόμενα σημεία εκτός της ζώνης Γ.



9. Οποιαδήποτε ασυνήθιστη ή μη τυχαία ακολουθία σημείων.
10. Ένα ή περισσότερα σημεία κοντά στα προειδοποιητικά όρια ή τα όρια ελέγχου.

Οι πρώτοι τέσσερις κανόνες είναι γνωστοί και ως Western Electric Rules, ενώ οι υπόλοιποι έξι αναφέρονται από τον Montgomery (2005). Στο ακόλουθο διάγραμμα ελέγχου έχουν σημειωθεί τα σημεία που “χτυπούν” για πρώτη φορά ο καθένας από τους Western Electric Rules.



**Σχήμα 1.4.** Western Electric Rules

Έτσι, στο σημείο 4 χτύπησε ο Κανόνας 2, στο σημείο 11 χτύπησε ο Κανόνας 3, στο σημείο 16 χτύπησε ο Κανόνας 1 και στο σημείο 21 χτύπησε ο Κανόνας 4.

Οι περισσότεροι από τους παραπάνω κανόνες είναι διαθέσιμοι στα στατιστικά πακέτα και στοχεύουν στην αύξηση της ευαισθητοποίησης του διαγράμματος ελέγχου στον εντοπισμό μικρών μετατοπίσεων του μέσου της διεργασίας. Ωστόσο, η χρήση πολλών κανόνων ταυτόχρονα μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα στην παραγωγική διεργασία καθώς ο μεγάλος αριθμός ψευδών συναγερμών που προκύπτει διακόπτει πιο συχνά την παραγωγική διεργασία με αποτέλεσμα την αύξηση του κόστους παραγωγής.

Κλείνοντας το Κεφάλαιο 1 σημειώνουμε ότι οι περισσότερες έννοιες που παρουσιάστηκαν εδώ αναφέρονται στις σημειώσεις του κ. Δημήτριου Αντζουλάκου (2016).



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## Διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος για τη μέση τιμή

### 2.1 Εισαγωγή

Για την παρακολούθηση της μέσης τιμής μιας διεργασίας το δημοφιλέστερο διάγραμμα ελέγχου είναι το  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart στο οποίο όταν βρεθεί ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου (υψηλότερα του άνω ορίου ή χαμηλότερα του κάτω ορίου ελέγχου) έχουμε ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Γνωρίζουμε επίσης, ότι το  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart έχει μειωμένη απόδοση στον εντοπισμό εκτός ελέγχου διεργασιών όταν έχουμε μικρές μετατοπίσεις του μέσου. Για να βελτιωθεί η απόδοση του, προτάθηκε η χρησιμοποίηση επιπλέον κανόνων ευαισθητοποίησης βασισμένων σε κανόνες ροών. Ωστόσο, όπως ήδη έχουμε αναφέρει η χρήση πολλών κανόνων ταυτοχρόνως μπορεί να οδηγήσει στην συχνή διακοπή της διεργασίας και την αύξηση του κόστους παραγωγής λόγω του μεγάλου αριθμού ψευδών συναγερμών που μπορεί να προκύψουν.

Στο παρόν κεφάλαιο λοιπόν θα μελετήσουμε το  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος ( $\bar{X}$  run sum control chart) που παρουσιάστηκε από τον Roberts (1966) και το οποίο είναι ένα απλό στη χρήση διάγραμμα ελέγχου καθώς δεν χρειάζεται να γίνεται έλεγχος εμφάνισης ειδικών μοτίβων όπως στα διαγράμματα ελέγχου με κανόνες ροών. Επιπλέον θα παρουσιάσουμε εφαρμογές στις οποίες θα συγκρίνουμε την απόδοση  $\bar{X}$  διαγραμμάτων ελέγχου ροής αθροίσματος με αυτήν των διαγραμμάτων ελέγχου  $\bar{X}$  τύπου Shewhart,  $\bar{X}$  CUSUM και  $\bar{X}$  EWMA.

### 2.2 Το $\bar{X}$ διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος

Το διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος (run sum control chart) παρουσιάστηκε από τον Roberts (1966) και μελετήθηκε εκτενέστερα από τον Reynolds (1971), Jaehn (1987a,b,c, 1989,1991) Davis et al. (1990, 1994) και Champ & Ridgon (1997). Είναι ένα απλό και

αποτελεσματικό διάγραμμα για την παρακολούθηση της μέσης τιμής μιας παραγωγικής διεργασίας. Χωρίζει το διάγραμμα ελέγχου σε περιοχές εκατέρωθεν της κεντρικής γραμμής του  $CL = \mu_0$ . Η τιμή  $\mu_0$  είναι η μέση τιμή της κατανομής του χαρακτηριστικού  $X$  που παρακολουθούμε όταν η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου. Σε μια εκτός στατιστικού ελέγχου κατάσταση η μέση τιμή του χαρακτηριστικού  $X$  αλλάζει σε  $\mu_1 \neq \mu_0$ . Για την τυπική απόκλιση του χαρακτηριστικού  $X$  υποθέτουμε ότι παραμένει πάντα ίση με  $\sigma_0$ .

Οι περιοχές πάνω από την κεντρική γραμμή είναι διαστήματα της μορφής

$$[\mu_0 + A_j \sigma_0 / \sqrt{n}, \mu_0 + A_{j+1} \sigma_0 / \sqrt{n}) = [UCL_j, UCL_{j+1}) \quad j = 0, 1, \dots, k,$$

όπου  $0 = A_0 < A_1 < A_2 < \dots < A_k < A_{k+1} = \infty$  είναι σταθερές που καθορίζονται από τον χρήστη και  $n$  είναι το μέγεθος του δείγματος. Έτσι, δημιουργούνται  $k + 1$  περιοχές πάνω από την κεντρική γραμμή με την τελευταία να είναι της μορφής  $[\mu_0 + A_k \sigma_0 / \sqrt{n}, \infty)$ .

Όμοια, οι περιοχές κάτω από την κεντρική τιμή είναι διαστήματα της μορφής

$$[\mu_0 + B_{j+1} \sigma_0 / \sqrt{n}, \mu_0 + B_j \sigma_0 / \sqrt{n}) = [LCL_{j+1}, LCL_j) \quad j = 0, 1, \dots, r,$$

όπου  $0 = B_0 > B_1 > B_2 > \dots > B_r > B_{r+1} = -\infty$ . Έτσι, δημιουργούνται  $r + 1$  περιοχές κάτω από την κεντρική γραμμή με την τελευταία να είναι της μορφής  $(-\infty, \mu_0 + B_r \sigma_0 / \sqrt{n})$ .

Οι περιοχές πάνω από την κεντρική γραμμή συμβολίζονται ως  $1^+, 2^+, \dots, k^+, (k + 1)^+$  και οι περιοχές κάτω από την κεντρική γραμμή συμβολίζονται ως  $1^-, 2^-, \dots, r^-, (r + 1)^-$ . Συνήθως, οι περιοχές κάτω από την κεντρική γραμμή είναι συμμετρικές των περιοχών πάνω από την κεντρική γραμμή χωρίς όμως αυτό να είναι απαραίτητο. Σε κάθε περιοχή αντιστοιχεί ένα σκορ. Το σκορ  $\alpha_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k + 1$ ) που αντιστοιχεί στην περιοχή  $j^+$  είναι μη αρνητικό ( $\alpha_j \geq 0$ ), ενώ το σκορ  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, r + 1$ ) που αντιστοιχεί στην περιοχή  $j^-$  είναι μη θετικό ( $\beta_j \leq 0$ ).

Στο διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος απεικονίζεται στο διάγραμμα ο δειγματικός μέσος  $\bar{X}$  κάθε δείγματος. Η πιθανότητα ένα σημείο του διαγράμματος να βρεθεί στην περιοχή  $j^+$  πάνω από την κεντρική γραμμή θα συμβολίζεται με  $p_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k + 1$ ), ενώ η πιθανότητα ένα σημείο του διαγράμματος να βρεθεί στην περιοχή  $j^-$  κάτω από την κεντρική γραμμή θα συμβολίζεται  $q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, r + 1$ ).

Θέτοντας  $LCL_0 = CL = \mu_0$  και  $LCL_{r+1} = -\infty$  έχουμε το γενικό τύπο

$$q_j = F_{\bar{X}}(LCL_{j-1}) - F_{\bar{X}}(LCL_j), \quad j = 1, 2, \dots, r + 1,$$

όπου  $F_{\bar{X}}$  είναι η συνάρτηση κατανομής της απεικονιζόμενης στατιστικής συνάρτησης  $\bar{X}$  στο διάγραμμα ελέγχου.

Επίσης, θέτοντας  $UCL_0 = CL = \mu_0$  και  $UCL_{k+1} = \infty$  έχουμε το γενικό τύπο

$$p_j = F_{\bar{X}}(UCL_j) - F_{\bar{X}}(UCL_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots, k + 1.$$

Όλα τα παραπάνω συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα.

**Πίνακας 2.1.** Δίπλευρο  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος με  $r + k + 2$  περιοχές

| Περιοχή     | Διάστημα                 | Πιθανότητα | Σκορ           |
|-------------|--------------------------|------------|----------------|
| $(r + 1)^-$ | $(-\infty, LCL_r)$       | $q_{r+1}$  | $\beta_{r+1}$  |
| $r^-$       | $[LCL_r, LCL_{r-1})$     | $q_r$      | $\beta_r$      |
| $(r - 1)^-$ | $[LCL_{r-1}, LCL_{r-2})$ | $q_{r-1}$  | $\beta_{r-1}$  |
| $\vdots$    | $\vdots$                 | $\vdots$   | $\vdots$       |
| $2^-$       | $[LCL_2, LCL_1)$         | $q_2$      | $\beta_2$      |
| $1^-$       | $[LCL_1, CL)$            | $q_1$      | $\beta_1$      |
| $1^+$       | $[CL, UCL_1)$            | $p_1$      | $\alpha_1$     |
| $2^+$       | $[UCL_1, UCL_2)$         | $p_2$      | $\alpha_2$     |
| $\vdots$    | $\vdots$                 | $\vdots$   | $\vdots$       |
| $(k - 1)^+$ | $[UCL_{k-2}, UCL_{k-1})$ | $p_{k-1}$  | $\alpha_{k-1}$ |
| $k^+$       | $[UCL_{k-1}, UCL_k)$     | $p_k$      | $\alpha_k$     |
| $(k + 1)^+$ | $[UCL_k, \infty)$        | $p_{k+1}$  | $\alpha_{k+1}$ |

Σε κάθε δείγμα μεγέθους  $n$  που συλλέγεται από την παραγωγική διεργασία αντιστοιχεί ένα σκορ ανάλογα με την περιοχή στην οποία ανήκει η (δειγματική) μέση τιμή του. Η γενική ιδέα λειτουργίας του διαγράμματος ροής αθροίσματος είναι να προσθέτουμε στο αθροιστικό σκορ του προηγούμενου δείγματος το ατομικό σκορ του νέου δείγματος. Ωστόσο, στην περίπτωση που η μέση τιμή του τρέχοντος δείγματος πέσει στην άλλη πλευρά της κεντρικής γραμμής σε σχέση με το προηγούμενο δείγμα, τότε η διαδικασία σχηματισμού του αθροιστικού σκορ ξεκινάει εκ νέου με αρχικό σκορ εκείνο που αντιστοιχεί στο τρέχων δείγμα. Το αθροιστικό σκορ συνήθως ξεκινάει από την τιμή 0 και αθροίζει τα διαδοχικά σκορ μέχρις ότου είτε

- (1) η τιμή που θα πάρει να είναι ίση ή μεγαλύτερη από μια θετική κρίσιμη τιμή  $a$ , είτε
- (2) η τιμή που θα πάρει να είναι ίση ή μικρότερη από μια αρνητική κρίσιμη τιμή  $\beta$ .

Όταν το αθροιστικό σκορ πάρει τιμή μεγαλύτερη ή ίση με  $a$ , είτε μικρότερη ή ίση του  $\beta$ , τότε υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός στατιστικού ελέγχου.

Η τιμή  $C_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , της ροής αθροίσματος που σχηματίζεται με τη λήψη του  $i$  δείγματος είναι η μη μηδενική τιμή μεταξύ των στατιστικών συναρτήσεων  $CU_i$  και  $CL_i$  που δίνονται από τις σχέσεις

$$CU_i = \begin{cases} CU_{i-1} + \alpha_{j+1}, & \text{αν } UCL_j \leq \bar{X}_i < UCL_{j+1} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

για  $j = 0, 1, 2, \dots, k$ , και

$$CL_i = \begin{cases} CL_{i-1} + \beta_{j+1}, & \text{αν } LCL_{j+1} \leq \bar{X}_i < LCL_j \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

για  $j = 0, 1, 2, \dots, r$ .

Οι αρχικές τιμές  $CU_0$  και  $CL_0$  συνήθως είναι ίσες με μηδέν, οπότε και  $C_0 = 0$ . Ωστόσο μπορούν να πάρουν μη μηδενική τιμή και τότε αναφερόμαστε στην τεχνική της άμεσης αρχικής αντίδρασης (FIR). Σύμφωνα με τα παραπάνω, το δίπλευρο  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος δίνει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας όταν  $CU_i \geq a$  ( $CL_i \leq \beta$ ), όπου  $a$  ( $\beta$ ) κατάλληλη θετική (αρνητική) κρίσιμη τιμή.

Το δίπλευρο  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος που μόλις περιγράψαμε συμβολίζεται με το σύνθετο συμβολισμό ως

$$RS_\alpha[0, (\alpha_1), A_1, (\alpha_2), A_2, (\alpha_3), A_3, \dots, A_{k-1}, (\alpha_k), A_k, (\alpha_{k+1}), \infty]$$

και

$$RS_\beta[-\infty, (\beta_{r+1}), B_r, (\beta_r), B_{r-1}, (\beta_{r-1}), B_{r-2}, \dots, B_2, (\beta_2), B_1, (\beta_1), 0]$$

Ένα μονόπλευρο διάγραμμα ροής αθροίσματος προτείνεται να χρησιμοποιείται αν είναι γνωστό ότι το μέσο επίπεδο της διεργασίας μετατοπίζεται μόνο σε υψηλότερο ή μόνο σε χαμηλότερο επίπεδο. Το άνω (κάτω) μονόπλευρο διάγραμμα για τον έλεγχο μετατόπισης του μέσου σε υψηλότερο (χαμηλότερο) επίπεδο αθροίζει τα σκορ  $\alpha_j$  ( $\beta_j$ ) αν η τιμή της μέσης τιμής  $\bar{X}$  ανήκει στην περιοχή  $j^+$  ( $j^-$ ). Αν  $\bar{X} < \mu_0$  ( $\bar{X} > \mu_0$ ), τότε η τιμή της στατιστικής συνάρτησης της ροής αθροίσματος παίρνει την τιμή 0. Όταν το αθροιστικό σκορ πάρει τιμή μεγαλύτερη (μικρότερη) ή ίση του  $a$  ( $\beta$ ) το διάγραμμα δίνει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας.

Τα δίπλευρα  $\bar{X}$  διαγράμματα ελέγχου ροής αθροίσματος που θα μας απασχολήσουν στην παρούσα εργασία ανήκουν στην επονομαζόμενη συμμετρική περίπτωση. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι  $k = r$ , οι περιοχές  $j^+$  και  $j^-$  έχουν το ίδιο πλάτος (οπότε  $A_j = -B_j$ ), για τα σκορ έχουμε ότι  $\alpha_j = -\beta_j$ , και  $a = -\beta = H > 0$ . Επίσης θα ασχοληθούμε μόνο με περιπτώσεις όπου ότι οι τιμές των σκορ και του  $H$  είναι πάντα ακέραιοι αριθμοί. Ένα τέτοιο διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος θα το συμβολίζουμε πολύ απλά ως

$$RS_H[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1} : 0, A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, A_k, \infty].$$

Στην ειδική περίπτωση που  $A_j = jL$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ), όπου  $L$  ένας θετικός πραγματικός αριθμός, θα χρησιμοποιούμε τον απλούστερο συμβολισμό

$$RS_H(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}).$$

### Παράδειγμα

Ως ένα παράδειγμα θα παρουσιαστεί η μελέτη του  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος

$$RS_4[0, 1, 4 : 0, 1, 3, \infty].$$

Έστω ότι η (εντός στατιστικού ελέγχου) κατανομή του χαρακτηριστικού  $X$  που εξετάζουμε ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(10, 1)$  και ότι από την παραγωγή εξετάζονται σε τακτά χρονικά διαστήματα δείγματα μεγέθους  $n = 9$ . Η βασική λειτουργία του διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_4[0, 1, 4 : 0, 1, 3, \infty]$  δίνεται στον ακόλουθο πίνακα

**Πίνακας 2.2.** Δίπλευρο  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_4[0, 1, 4 : 0, 1, 3, \infty]$ .

| Περιοχή | Διάστημα   | p     | Σκορ |
|---------|--|-------|------|
| $3^-$   | $(-\infty, LCL_2) = \left(-\infty, \mu_0 - 3\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) = (-\infty, 9)$                           | $q_3$ | -4   |
| $2^-$   | $[LCL_2, LCL_1] = \left[\mu_0 - 3\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0 - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) = [9, 9.66667)$   | $q_2$ | -1   |
| $1^-$   | $[LCL_1, CL] = \left[\mu_0 - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0\right) = [9.66667, 10)$                                  | $q_1$ | -0   |
| $1^+$   | $[CL, UCL_1] = \left[\mu_0, \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) = [10, 10.33333)$                                 | $p_1$ | +0   |
| $2^+$   | $[UCL_1, UCL_2] = \left[\mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0 + 3\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) = [10.33333, 11)$ | $p_2$ | +1   |
| $3^+$   | $[UCL_2, UCL_3] = \left[\mu_0 + 3\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \infty\right) = [11, \infty)$                              | $p_3$ | +4   |

Έστω ότι συλλέχθηκαν 10 δείγματα, των οποίων δίνεται ο (δειγματικός) μέσος, το σκορ αλλά και το αθροιστικό σκορ στον παρακάτω πίνακα.

**Πίνακας 2.3.** Δειγματικός μέσος, σκορ και αθροιστικό σκορ 10 δειγμάτων για το δίπλευρο  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_4[0, 1, 4 : 0, 1, 3, \infty]$ .

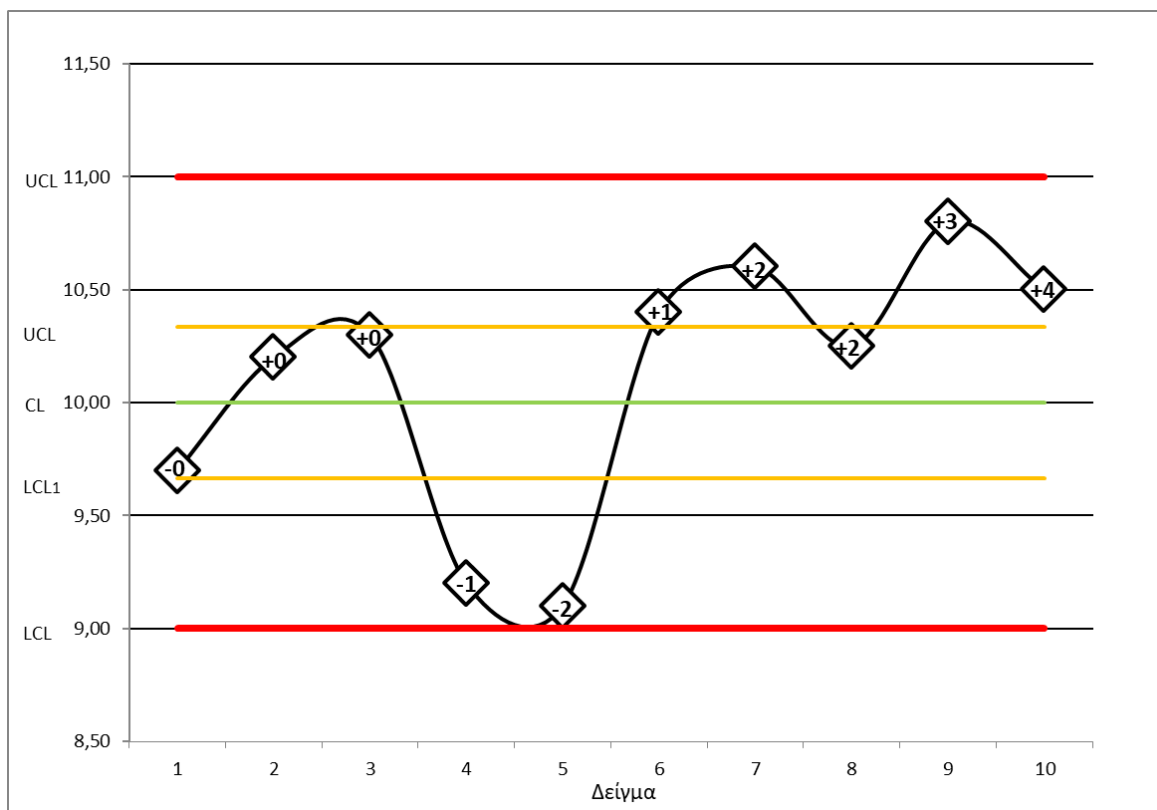
| Δείγμα $i$ | $\bar{X}_i$ | Σκορ | Αθροιστικό σκορ |
|------------|-------------|------|-----------------|
| 1          | 9.7         | -0   | -0              |
| 2          | 10.2        | +0   | +0              |

|    |       |    |    |
|----|-------|----|----|
| 3  | 10.3  | +0 | +0 |
| 4  | 9.2   | -1 | -1 |
| 5  | 9.1   | -1 | -2 |
| 6  | 10.4  | +1 | +1 |
| 7  | 10.6  | +1 | +2 |
| 8  | 10.25 | +0 | +2 |
| 9  | 10.8  | +1 | +3 |
| 10 | 10.5  | +1 | +4 |

Το διάγραμμα ελέγχου δίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στο 1<sup>ο</sup> δείγμα η τιμή του δειγματικού μέσου είναι  $\bar{X}_1 = 9.7$ , τιμή που ανήκει στην περιοχή 1<sup>-</sup>. Άρα, το σκορ που του αντιστοιχεί είναι  $CL_1 = -0$  και το αθροιστικό σκορ παίρνει την τιμή  $C_1 = -0$ . Στο 2<sup>ο</sup> δείγμα η τιμή του δειγματικού μέσου είναι  $\bar{X}_2 = 10.2$  τιμή που ανήκει στην περιοχή 1<sup>+</sup>. Άρα, το σκορ που του αντιστοιχεί είναι  $CU_2 = +0$  και το αθροιστικό σκορ παίρνει την τιμή  $C_2 = +0$ . Στο 3<sup>ο</sup> δείγμα η τιμή του δειγματικού μέσου είναι  $\bar{X}_3 = 10.3$  τιμή που ανήκει στην ίδια περιοχή (1<sup>+</sup>). Άρα, το σκορ που του αντιστοιχεί είναι  $CU_3 = +0$  και το αθροιστικό σκορ παίρνει την τιμή  $C_3 = C_2 + 0 = +0$ . Στο 4<sup>ο</sup> δείγμα η τιμή του δειγματικού μέσου είναι  $\bar{X}_4 = 9.2$  τιμή που ανήκει στην περιοχή 2<sup>-</sup>. Άρα, το σκορ που του αντιστοιχεί είναι  $CL_4 = -1$  και το αθροιστικό σκορ παίρνει την τιμή  $C_4 = -1$ . Στο 5<sup>ο</sup> δείγμα η τιμή του δειγματικού μέσου είναι  $\bar{X}_5 = 9.1$  τιμή που ανήκει στην ίδια περιοχή (2<sup>-</sup>). Άρα, το σκορ που του αντιστοιχεί είναι  $CL_5 = -1$  και το αθροιστικό σκορ παίρνει την τιμή  $C_5 = C_4 - 1 = -2$ . Στο 6<sup>ο</sup> δείγμα η τιμή του δειγματικού μέσου είναι  $\bar{X}_6 = 10.4$  τιμή που ανήκει στην περιοχή 2<sup>+</sup>. Άρα, το σκορ που του αντιστοιχεί είναι  $CU_6 = +1$  και το αθροιστικό σκορ παίρνει την τιμή  $C_6 = +1$ . Στο 7<sup>ο</sup> δείγμα η τιμή του δειγματικού μέσου είναι  $\bar{X}_7 = 10.6$  τιμή που ανήκει στην ίδια περιοχή (2<sup>+</sup>). Άρα, το σκορ που του αντιστοιχεί είναι  $CU_7 = +1$  και το αθροιστικό σκορ παίρνει την τιμή  $C_7 = C_6 + 1 = +2$ . Στο 8<sup>ο</sup> δείγμα η τιμή του δειγματικού μέσου είναι  $\bar{X}_8 = 10.25$  τιμή που ανήκει στην περιοχή 1<sup>+</sup>. Άρα, το σκορ που του αντιστοιχεί είναι  $CU_8 = +0$  και το αθροιστικό σκορ παίρνει την τιμή  $C_8 = C_7 + 0 = +2$ . Στο 9<sup>ο</sup> δείγμα η τιμή του δειγματικού μέσου είναι  $\bar{X}_9 = 10.8$  τιμή που ανήκει στην περιοχή 2<sup>+</sup>. Άρα, το σκορ που του αντιστοιχεί είναι  $CU_9 = +1$  και το αθροιστικό σκορ παίρνει την τιμή  $C_9 = C_8 + 1 = +3$ . Στο 10<sup>ο</sup> δείγμα η τιμή του δειγματικού μέσου είναι  $\bar{X}_{10} = 10.5$  τιμή που ανήκει στην ίδια περιοχή (2<sup>+</sup>). Άρα, το σκορ που του αντιστοιχεί είναι  $CU_{10} = +1$  και το αθροιστικό σκορ παίρνει την τιμή  $C_{10} = C_9 + 1 = +4$ . Στο 10<sup>ο</sup> δείγμα υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός στατιστικού ελέγχου καθώς το αθροιστικό σκορ παίρνει την τιμή  $H = 4$ . Αξίζει να αναφέρουμε ότι στο



κλασικό  $\bar{X}$  διάγραμμα με  $3\sigma$  όρια ελέγχου δεν θα λαμβάναμε ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός στατιστικού ελέγχου καθώς κανένα σημείο του διαγράμματος δεν βρέθηκε εκτός των ορίων ελέγχου ( $[LCL, UCL] = [9,11]$ ).



**Σχήμα 2.1.** Παράδειγμα δίπλευρου  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_4[0,1,4 : 0,1,3, \infty]$ .

### 2.3 Ανάλυση του $\bar{X}$ διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος με χρήση Μαρκοβιανών αλυσίδων

Μια απλή μέθοδος που χρησιμοποιείται ευρέως στο Στατιστικό Έλεγχο Διεργασιών για την ανάλυση της κατανομής του μήκους ροής ενός διαγράμματος ελέγχου είναι η μέθοδος των μαρκοβιανών αλυσίδων με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε αρκετές ποσότητες που αφορούν το διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος, όπως την κατανομή του μήκους ροής, το μέσο μήκος ροής ( $ARL$ ), τα ποσοστημόρια της κατανομής του μήκους ροής, κ.ά.

Το πρώτο βήμα αυτής της μεθόδου είναι να κατασκευαστεί μια μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{Y_t, t \geq 1\}$  με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων  $\Omega = T \cup C$ , όπου το σύνολο  $T$  περιέχει τις

μεταβατικές καταστάσεις της αλυσίδας και το σύνολο  $C = \{c\}$  περιλαμβάνει τη μοναδική απορροφητική κατάσταση. Κάθε κατάσταση του συνόλου  $T$  παριστάνει μια πιθανή τιμή του αθροιστικού σκορ  $CU$  ή  $CL$ , προτού δοθεί σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας, και επομένως η γενική μορφή του είναι

$$T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(H-1)\}.$$

Οι ακριβείς καταστάσεις του συνόλου  $T$  εξαρτώνται από τις τιμές των σκορ του  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος καθώς επίσης και από την κρίσιμη τιμή  $H$ . Η είσοδος της αλυσίδας στην κατάσταση απορρόφησης δηλώνει ότι έχουμε σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας και αντιστοιχεί σε τιμές  $CU \geq H$  ή  $CL \leq -H$ .

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης  $P$  της μαρκοβιανής αλυσίδας μπορεί να γραφτεί στη γενική μορφή

$$P = \begin{pmatrix} Q & (I - Q)\mathbf{1}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

όπου  $Q$  είναι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης που αντιστοιχεί στις μεταβατικές καταστάσεις,  $I$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας, και  $\mathbf{1}$  είναι ένα διάνυσμα – γραμμή που όλα τα στοιχεία του έχουν την τιμή 1.

Για την εύρεση της κατανομής του μήκους ροής  $N$  του διαγράμματος, δηλαδή της τυχαίας μεταβλητής που δηλώνει σε ποιο δείγμα δίνεται για πρώτη φορά σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας, χρησιμοποιείται η σχέση

$$P(N = n) = \mathbf{a}Q^{n-1}(I - Q)\mathbf{1}', \quad n = 1, 2, \dots$$

ενώ το μέσο μήκος ροής ( $ARL$ ) του διαγράμματος υπολογίζεται από το γενικό τύπο

$$ARL = E(N) = \mathbf{a}(I - Q)^{-1}\mathbf{1}'$$

όπου  $\mathbf{a}$  είναι το διάνυσμα των αρχικών πιθανοτήτων. Όταν  $CL_0 = CU_0 = 0$  έχουμε ότι  $\mathbf{a} = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots, 0)$  όπου η συνιστώσα που είναι ίση με 1 (ένα) αντιστοιχεί στη μεταβατική κατάσταση 0.

Στη συνέχεια θα δοθούν δύο εφαρμογές της μεθόδου των μαρκοβιανών αλυσίδων στη μελέτη του  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος. Και στις δύο εφαρμογές υποθέτουμε ως συνήθως ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού  $X$  που εξετάζουμε (για εντός στατιστικού ελέγχου διεργασία) ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(\mu_0, \sigma_0^2)$  με γνωστή μέση τιμή  $\mu_0$  και γνωστή τυπική απόκλιση  $\sigma_0$ . Από τη διεργασία λαμβάνονται δείγματα μεγέθους  $n$  και υπολογίζεται ο δειγματικός μέσος τους  $\bar{X}$ . Στην περίπτωση που η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου έχουμε ότι  $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n})$ . Αν ο εντός ελέγχου μέσος  $\mu_0$  μετατοπιστεί στη

θέση  $\mu_1 = \mu_0 + d \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$  έχουμε ότι  $\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_0^2}{n})$ . Σε κάθε περίπτωση η συνάρτηση κατανομής του δειγματικού μέσου  $\bar{X}$  θα συμβολίζεται με  $F_{\bar{X}}$ .

• **Εφαρμογή 1**

Σαν πρώτη εφαρμογή θα παρουσιαστεί η μελέτη του  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος

$$RS_2[0,1,2 : 0,2,3, \infty].$$

Έστω ότι η (εντός στατιστικού ελέγχου) κατανομή του χαρακτηριστικού  $X$  που εξετάζουμε ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(20, 4)$  και ότι από την παραγωγή εξετάζονται σε τακτά χρονικά διαστήματα δείγματα μεγέθους  $n = 9$ . Η βασική λειτουργία του διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_2[0,1,2 : 0,2,3, \infty]$  δίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

**Πίνακας 2.4.** Δίπλευρο  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_2[0,1,2 : 0,2,3, \infty]$ .

| Περιοχή        | Διάστημα  | p     | Σκορ |
|----------------|---|-------|------|
| 3 <sup>-</sup> | $(-\infty, LCL_2) = \left(-\infty, \mu_0 - 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) = (-\infty, 18)$                            | $q_3$ | -2   |
| 2 <sup>-</sup> | $[LCL_2, LCL_1] = \left[\mu_0 - 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0 - 2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) = [18, 18.66667)$ | $q_2$ | -1   |
| 1 <sup>-</sup> | $[LCL_1, CL) = \left[\mu_0 - 2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0\right) = [18.66667, 20)$                                  | $q_1$ | -0   |
| 1 <sup>+</sup> | $[CL, UCL_1) = \left[\mu_0, \mu_0 + 2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) = [20, 21.33333)$                                  | $p_1$ | +0   |
| 2 <sup>+</sup> | $[UCL_1, UCL_2) = \left[\mu_0 + 2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0 + 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) = [21.33333, 22)$ | $p_2$ | +1   |
| 3 <sup>+</sup> | $[UCL_2, UCL_3) = \left[\mu_0 + 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \infty\right) = [22, \infty)$                                | $p_3$ | +2   |

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των μαρκοβιανών αλυσίδων έχουμε ότι  $T = \{0, \pm 1\}$  και η μορφή του πίνακα  $\mathbf{P}$  είναι η ακόλουθη

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{1}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & c \\ -1 & q_1 & p_1 & p_2 & q_2 + q_3 + p_3 \\ 0 & q_2 & q_1 + p_1 & p_2 & q_3 + p_3 \\ 1 & q_2 & q_1 & p_1 & q_3 + p_2 + p_3 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Για την πιθανότητα  $p_j$  ( $q_j$ ), που δηλώνει την πιθανότητα να είναι εντός της περιοχής  $j^+$  ( $j^-$ ) του διαγράμματος ( $j = 1,2,3$ ) η τιμή μιας δειγματικής μέσης τιμής  $\bar{X}$ , έχουμε τους γνωστούς τύπους

$$p_j = F_{\bar{X}}(UCL_j) - F_{\bar{X}}(UCL_{j-1}), \quad j = 1, 2, 3,$$

$$q_j = F_{\bar{X}}(LCL_{j-1}) - F_{\bar{X}}(LCL_j), \quad j = 1, 2, 3.$$

Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση που η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου έχουμε ότι  $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n})$  και τότε είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι

$$q_1 = p_1 = \Phi(2) - 0.5 = 0.4772499,$$

$$q_2 = p_2 = \Phi(3) - \Phi(2) = 0.02140023,$$

$$q_3 = p_3 = 1 - \Phi(3) = 0.001349898.$$

Από τη στιγμή που τα όρια ελέγχου είναι γνωστά μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής  $ARL_1$  για διάφορες μετατοπίσεις της μέσης τιμής του χαρακτηριστικού  $X$  από την τιμή  $\mu_0$  στη θέση  $\mu_1 = \mu_0 + d \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$ . Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται ενδεικτικές τιμές του  $ARL$  συναρτήσει του  $d$ .

**Πίνακας 2.5.** Τιμές  $ARL$  για το  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος

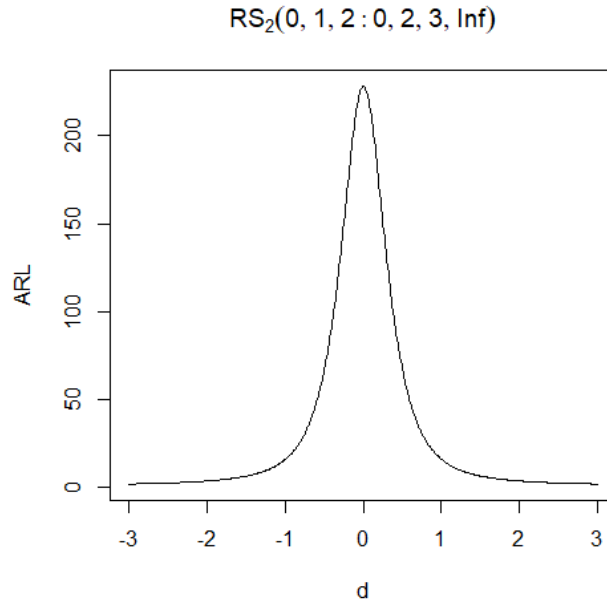
$$RS_2[0,1,2 : 0,2,3, \infty].$$

| $d$  | $ARL_1$    |
|------|------------|
| -3.0 | 1.671107   |
| -2.5 | 2.251074   |
| -2.0 | 3.407184   |
| -1.5 | 6.191757   |
| -1.0 | 15.738728  |
| -0.5 | 67.040576  |
| 0.0  | 228.151938 |
| 0.5  | 67.040576  |
| 1.0  | 15.738728  |
| 1.5  | 6.191757   |
| 2.0  | 3.407184   |
| 2.5  | 2.251074   |
| 3.0  | 1.671107   |

Για τον υπολογισμό του  $ARL$  χρησιμοποιήθηκε ο τύπος

$$ARL = E(N) = (0,1,0)(I - \mathbf{Q})^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται η καμπύλη  $ARL$  του  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_2[0,1,2 : 0,2,3, \infty]$ .



**Σχήμα 2.2.** Καμπύλη  $ARL$  του  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_2[0,1,2 : 0,2,3, \infty]$

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται η συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ροής  $N$  του  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_2[0,1,2 : 0,2,3, \infty]$  για τρεις διαφορετικές μετατοπίσεις της μέσης τιμής. Εξετάζονται οι περιπτώσεις

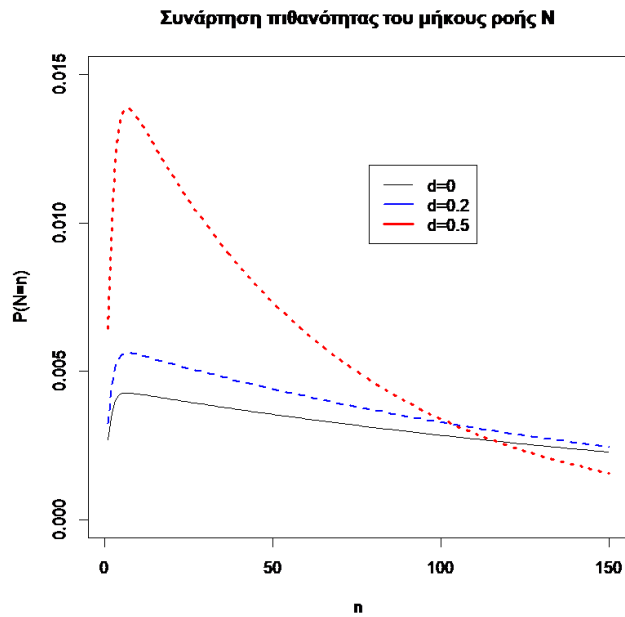
$$d = 0 : \mu_1 = 20 + 0 \left( \frac{2}{3} \right) = 20,$$

$$d = 0.2 : \mu_1 = 20 + 0.2 \left( \frac{2}{3} \right) = 20.13333,$$

$$d = 0.5 : \mu_1 = 20 + 0.5 \left( \frac{2}{3} \right) = 20.33333.$$

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας  $P(N = n)$  χρησιμοποιήθηκε ο τύπος

$$P(N = n) = (0,1,0)\mathbf{Q}^{n-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$



**Σχήμα 2.3.** Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ροής του  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_2[0,1,2 : 0,2,3, \infty]$  για  $d = 0, 0.2, 0.5$

• **Εφαρμογή 2**

Ως μια δεύτερη εφαρμογή θα παρουσιαστεί αναλυτικά η μελέτη του δίπλευρου  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_4(0,1,2,4)$  για το οποίο θέλουμε να ισχύει ότι  $ARL_0 = 370.4$ . Το διάγραμμα  $RS_4(0,1,2,4)$  ονομάστηκε διάγραμμα ελέγχου ζωνών και παρουσιάστηκε από τους Davis, Homer & Woodall (1990). Έστω ότι η (εντός στατιστικού ελέγχου) κατανομή του χαρακτηριστικού  $X$  που εξετάζουμε ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(10, 4)$  και ότι από την παραγωγή εξετάζονται σε τακτά χρονικά διαστήματα δείγματα μεγέθους  $n = 9$ . Η βασική λειτουργία του διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_4(0,1,2,4)$  δίνεται στον ακόλουθο πίνακα

**Πίνακας 2.6.** Δίπλευρο  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_4(0,1,2,4)$ .

| Περιοχή | Διάστημα   | p     | Σκορ |
|---------|--|-------|------|
| $4^-$   | $(-\infty, LCL_3) = \left(-\infty, \mu_0 - 3L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$                            | $q_4$ | -4   |
| $3^-$   | $[LCL_3, LCL_2) = \left[\mu_0 - 3L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0 - 2L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$ | $q_3$ | -2   |
| $2^-$   | $[LCL_2, LCL_1) = \left[\mu_0 - 2L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0 - L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$  | $q_2$ | -1   |

|                |  |       |    |
|----------------|--|-------|----|
| 1 <sup>-</sup> | $[LCL_1, CL) = \left[ \mu_0 - L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0 \right)$                                    | $q_1$ | -0 |
| 1 <sup>+</sup> | $[CL, UCL_1) = \left[ \mu_0, \mu_0 + L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right)$                                    | $p_1$ | +0 |
| 2 <sup>+</sup> | $[UCL_1, UCL_2) = \left[ \mu_0 + L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0 + 2L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right)$  | $p_2$ | +1 |
| 3 <sup>+</sup> | $[UCL_2, UCL_3) = \left[ \mu_0 + 2L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0 + 3L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right)$ | $p_3$ | +2 |
| 4 <sup>+</sup> | $[UCL_3, \infty) = \left[ \mu_0 + 3L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \infty \right)$                              | $p_4$ | +4 |

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των μαρκοβιανών αλυσίδων έχουμε ότι  $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$  και η μορφή του πίνακα  $\mathbf{P}$  είναι η ακόλουθη

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{1}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & c \\ -3 & q_1 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & 0 & q_2 + q_3 + q_4 + p_4 \\ -2 & q_2 & q_1 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & 0 & q_3 + q_4 + p_4 \\ -1 & q_3 & q_2 & q_1 & p_1 & p_2 & p_3 & 0 & q_4 + p_4 \\ 0 & 0 & q_3 & q_2 & q_1 + p_1 & p_2 & p_3 & 0 & q_4 + p_4 \\ 1 & 0 & q_3 & q_2 & q_1 & p_1 & p_2 & p_3 & q_4 + p_4 \\ 2 & 0 & q_3 & q_2 & q_1 & 0 & p_1 & p_2 & q_4 + p_3 + p_4 \\ 3 & 0 & q_3 & q_2 & q_1 & 0 & 0 & p_1 & q_4 + p_2 + p_3 + p_4 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Για τις εντός στατιστικού ελέγχου πιθανότητες  $p_j$  ( $q_j$ ) ισχύει ότι

$$q_1 = p_1 = \Phi(L) - 0.5$$

$$q_2 = p_2 = \Phi(2L) - \Phi(L)$$

$$q_3 = p_3 = \Phi(3L) - \Phi(2L)$$

$$q_4 = p_4 = 1 - \Phi(3L)$$

αφού  $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n})$ . Από την εξίσωση

$$ARL_0 = \mathbf{a}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{1}' = 370.4$$

όπου  $\mathbf{a} = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ , προκύπτει ότι  $L = 1.200989$ . Συνεπώς

$$LCL_1 = 9.199341, \quad LCL_2 = 8.398682, \quad LCL_3 = 7.598023$$

$$UCL_1 = 10.80066, \quad UCL_2 = 11.60132, \quad UCL_3 = 12.40198$$

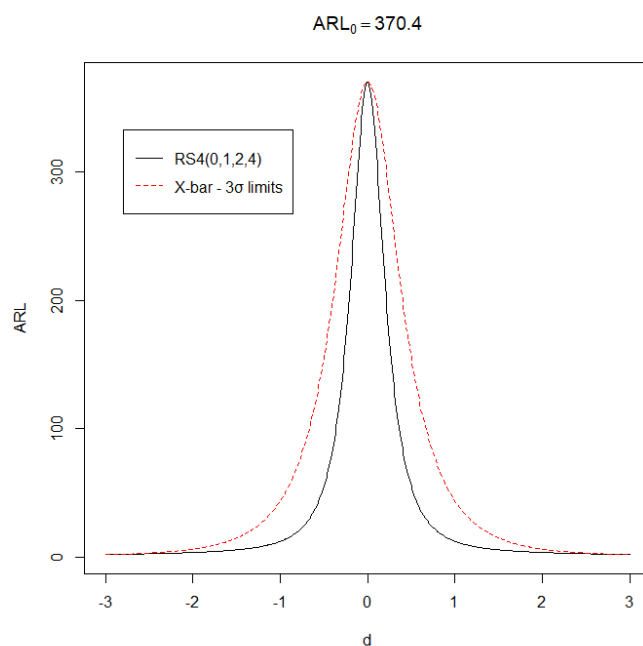
Από τη στιγμή που τα όρια ελέγχου είναι γνωστά μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής  $ARL_1$  για διάφορες μετατοπίσεις της

μέσης τιμής του χαρακτηριστικού  $X$  από την τιμή  $\mu_0$  στη θέση  $\mu_1 = \mu_0 + d \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$ . Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται ενδεικτικές τιμές του  $ARL$  συναρτήσει του  $d$ .

**Πίνακας 2.7.** Τιμές  $ARL$  για το  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_4(0,1,2,4)$  με  $ARL_0 = 370.4$ .

| $d$  | $ARL_1$    |
|------|------------|
| -3.0 | 2.102195   |
| -2.5 | 2.711805   |
| -2.0 | 3.691001   |
| -1.5 | 5.744748   |
| -1.0 | 12.385679  |
| -0.5 | 55.099014  |
| 0.0  | 370.400000 |
| 0.5  | 55.099014  |
| 1.0  | 12.385679  |
| 1.5  | 5.744748   |
| 2.0  | 3.691001   |
| 2.5  | 2.711805   |
| 3.0  | 2.102195   |

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται η καμπύλη  $ARL$  του  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_4(0,1,2,4)$  με  $ARL_0 = 370.4$ , μαζί με την αντίστοιχη καμπύλη του κλασικού  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου Shewhart με  $3\sigma$  όρια ελέγχου.



**Σχήμα 2.4.** Διάγραμμα  $ARL$ :  $RS_4(0,1,2,4)$  και  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου με όρια ελέγχου  $3\sigma$



Είναι εμφανής η ανωτερότητα του διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_4(0,1,2,4)$  σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων της μέσης τιμής έναντι του κλασικού  $\bar{X}$  διαγράμματος με  $3\sigma$  όρια ελέγχου.

## 2.4 Σύγκριση $\bar{X}$ διαγραμμάτων ελέγχου ροής αθροίσματος και $\bar{X}$ διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart με κανόνες ροών

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει το  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart έχει μειωμένη απόδοση στον εντοπισμό εκτός ελέγχου διεργασιών που οφείλονται σε μικρές μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας. Προκειμένου να ξεπεραστεί αυτό το μειονέκτημα προτάθηκε από αρκετούς συγγραφείς η χρησιμοποίηση συμπληρωματικών κανόνων ροών. Ενδεικτικά άρθρα είναι αυτά των Champ & Woodall (1987), Klein (2000), Khoo & Ariffin (2006) και Antzoulakos & Rakitzis (2008b). Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν κάποια αποτελέσματα από το άρθρο των Champ & Woodall (1987) σχετικά με την χρήση ροών και σχηματισμών για την ευαισθητοποίηση ενός διαγράμματος ελέγχου τύπου Shewhart.

Υποθέτουμε ότι από μια τυχαία μεταβλητή  $X$  που δηλώνει την ποιότητα ενός προϊόντος έχουμε στη διάθεσή μας ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους  $n$  το καθένα, τα  $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ ,  $i \geq 1$ . Υπολογίζουμε τους διαδοχικούς ανεξάρτητους δειγματικούς μέσους  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots$ , για τους οποίους υποθέτουμε ότι  $\bar{X}_i \sim N(\mu_i, \sigma^2/n)$ , για  $i = 1, 2, \dots$ , όπου το  $\sigma^2$  είναι γνωστό και παραμένει σταθερό στο χρόνο. Θεωρώντας ότι  $\mu_i = \mu$  ( $i \geq 1$ ), θα εξεταστεί αν ισχύει η συνθήκη  $\mu = \mu_0$  (το  $\mu_0$  παριστάνει την εντός ελέγχου μέση τιμή της  $X$ ).

Μας διευκολύνει να εξετάσουμε τη συμπεριφορά των τυποποιημένων δειγμάτων

$$Z_i = \frac{(\bar{X}_i - \mu_0)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, \quad i \geq 1.$$

Είναι γνωστό ότι τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart βασίζονται στους τρέχοντας δειγματικούς μέσους (διαγράμματα ελέγχου χωρίς μνήμη), και ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας προκύπτει στο στάδιο  $t$  όταν  $|Z_t| > L$ , όπου συνήθως το  $L = 3$ . Αυτή η διαδικασία έχει το μειονέκτημα ότι δεν είναι ευαίσθητη σε μικρές μετατοπίσεις του μέσου. Ένας τρόπος να βελτιώσουμε την ευαισθησία στις μικρές μετατοπίσεις του μέσου είναι να προσθέσουμε περισσότερους κανόνες για να έχουμε ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας.

Οι βασικοί κανόνες ροών ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart στο οποίο απεικονίζεται μια στατιστική συνάρτηση με εντός ελέγχου μέσο  $\mu_0$  και τυπική απόκλιση  $\sigma$  ( $LCL = \mu_0 - L\sigma$ ,  $UCL = \mu_0 + L\sigma$ ) μπορούν να κωδικοποιηθούν με τον ακόλουθο τρόπο σύμφωνα με τους Champ & Woodall (1987). Ο συμβολισμός  $T(k, m, a, b)$  θα δηλώνει ότι  $k$  από  $m$  διαδοχικά σημεία του διαγράμματος βρίσκονται στο διάστημα  $(\mu_0 + a\sigma, \mu_0 + b\sigma)$ ,  $a < b$ . Έτσι, στο σύνηθες διάγραμμα ελέγχου Shewhart ( $L = 3$ ) ο Κανόνας 1 της Παραγράφου 1.9, που είναι ο κλασικός κανόνας λήψης ένδειξης εκτός ελέγχου διεργασίας, μπορεί να γραφεί στη μορφή:  $C_1 = \{T(1,1, -\infty, -3), T(1,1, 3, \infty)\}$ , και ο Κανόνας 2 μπορεί να γραφεί ως  $C_2 = \{T(2,3, -3, -2), T(2,3, 2, 3)\}$ .

Οι κανόνες ευαισθητοποίησης που μελέτησαν οι Champ & Woodall (1987) είναι οι εξής:

$$\text{Κανόνας 1: } C_1 = \{T(1,1, -\infty, -3), T(1,1, 3, \infty)\}$$

$$\text{Κανόνας 2: } C_2 = \{T(2,3, -3, -2), T(2,3, 2, 3)\}$$

$$\text{Κανόνας 3: } C_3 = \{T(4,5, -3, -1), T(4,5, 1, 3)\}$$

$$\text{Κανόνας 4: } C_4 = \{T(8,8, -3,0), T(8,8, 0, 3)\}$$

$$\text{Κανόνας 5: } C_5 = \{T(2,2, -3, -2), T(2,2, 2, 3)\}$$

$$\text{Κανόνας 6: } C_6 = \{T(5,5, -3, -1), T(5,5, 1, 3)\}$$

$$\text{Κανόνας 7: } C_7 = \{T(1,1, -\infty, -3.09), T(1,1, 3.09, \infty)\}$$

$$\text{Κανόνας 8: } C_8 = \{T(2,3, -3.09, -1.96), T(2,3, -1.96, 3.09)\}$$

$$\text{Κανόνας 9: } C_9 = \{T(8,8, -3.09,0), T(8,8, 0, 3.09)\}$$

Με τον συμβολισμό  $C_{ij\dots k} = C_i \cup C_j \cup \dots \cup C_k$  δηλώνεται το διάγραμμα ελέγχου το οποίο δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν συμβεί τουλάχιστον ένα ενδεχόμενο από αυτά που περιγράφουν οι κανόνες  $C_i, C_j, \dots, C_k$ . Ο κανόνας  $C_{ij\dots k}$  ονομάζεται σύνθετος κανόνας. Για παράδειγμα ο σύνθετος κανόνας  $C_{134}$  μπορεί να γραφεί ως

$$C_{134} = \{T(1,1, -\infty, -3), T(4,5, -3, -1), T(8,8, -3, 0), T(8,8, 0, 3), T(4,5, 1, 3), T(1,1, 3, \infty)\}.$$

Ο πιο σύνηθες τρόπος για τη σύγκριση διαγραμμάτων ελέγχου είναι να συγκρίνουμε το μέσο μήκος ροής ( $ARL$ ) τους. Με αυτήν την τεχνική σύγκρισης ένα διάγραμμα θεωρείται ανώτερο εάν έχει μικρότερη τιμή  $ARL$ . Οι Champ & Woodall (1987) για να μελετήσουν το διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart με συμπληρωματικούς κανόνες ροών χρησιμοποίησαν τη μεθοδολογία των μαρκοβιανών αλυσίδων για να βρουν την κατανομή του μήκους ροής και παρουσίασαν πίνακες με τιμές  $ARL$  για δεδομένη μετατόπιση της μέσης τιμής.

Στη συνέχεια θα συγκρίνουμε τα διαγράμματα ελέγχου

$$C_1, \quad C_{12}, \quad C_{13}, \quad C_{14}, \quad C_{123}, \quad C_{124}, \quad C_{134}, \quad C_{1234},$$

με αντίστοιχα διαγράμματα ελέγχου ροής αθροίσματος

$$C^*, \quad C_{12}^*, \quad C_{13}^*, \quad C_{14}^*, \quad C_{123}^*, \quad C_{124}^*, \quad C_{134}^*, \quad C_{1234}^*,$$

που έχουν το ίδιο εντός ελέγχου μέσου μήκος ροής (εκτός από το  $C^*$ ). Τα τελευταία παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα.

**Πίνακας 2.8.** Διαγράμματα ελέγχου ροής αθροίσματος

|              |   |
|--------------|---|
| $C^*$        | $RS_4[0, (0), 1, (1), 2, (2), 3, (4), \infty]$ και<br>$RS_{-4}[-\infty, (-4), -3, (-2), -2, (-1), -1, (-0), 0]$         |
| $C_{12}^*$   | $RS_2[0, (0), 2, (1), 3, (2), \infty]$ και $RS_{-2}[-\infty, (-2), -3, (-1), -2, (-0), 0]$                              |
| $C_{13}^*$   | $RS_4[0, (0), 1, (1), 3, (4), \infty]$ και $RS_{-4}[-\infty, (-4), -3, (-1), -1, (-0), 0]$                              |
| $C_{14}^*$   | $RS_8[0, (1), 3, (8), \infty]$ και $RS_{-8}[-\infty, (-8), -3, (-1), 0]$  |
| $C_{123}^*$  | $RS_{22}[0, (2), 1, (3), 2, (10), 3, (22), \infty]$ και<br>$RS_{-22}[-\infty, (-22), -3, (-10), -2, (-3), -1, (-2), 0]$ |
| $C_{124}^*$  | $RS_{26}[0, (2), 1, (6), 2, (7), 3, (26), \infty]$ και<br>$RS_{-26}[-\infty, (-26), -3, (-7), -2, (-6), -1, (-2), 0]$   |
| $C_{134}^*$  | $RS_{29}[0, (3), 1, (5), 2, (12), 3, (29), \infty]$ και<br>$RS_{-29}[-\infty, (-29), -3, (-12), -2, (-5), -1, (-3), 0]$ |
| $C_{1234}^*$ | $RS_{26}[0, (3), 1, (4), 2, (12), 3, (26), \infty]$ και<br>$RS_{-26}[-\infty, (-26), -3, (-12), -2, (-4), -1, (-3), 0]$ |

Παρατηρούμε ότι οι τιμές του μέσου μήκους ροής των  $\bar{X}$  διαγραμμάτων ελέγχου ροής αθροίσματος είναι σημαντικά μικρότερες απ' ότι των αντίστοιχων διαγραμμάτων ελέγχου  $\bar{X}$  τύπου Shewhart με συμπληρωματικούς κανόνες ροών για μικρές και μεσαίες μετατοπίσεις του μέσου.

**Πίνακας 2.9.** Τιμές ARL διαγραμμάτων ελέγχου ροής αθροίσματος και διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart με συμπληρωματικούς κανόνες ροών.

| $d$ | $C^*$ | $C_{12}^*$ | $C_{13}^*$ | $C_{14}^*$ | $C_{123}^*$ | $C_{124}^*$ | $C_{134}^*$ | $C_{1234}^*$ |
|-----|-------|------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|--------------|
| 0.0 | 95.05 | 228.16     | 167.43     | 152.14     | 133.00      | 122.24      | 105.82      | 91.73        |
| 0.2 | 67.63 | 172.35     | 113.59     | 110.37     | 92.05       | 84.19       | 74.40       | 66.14        |
| 0.4 | 35.54 | 93.67      | 55.12      | 59.74      | 46.74       | 43.04       | 39.10       | 35.96        |
| 0.6 | 19.52 | 48.34      | 28.25      | 33.63      | 25.16       | 23.63       | 21.87       | 20.56        |
| 0.8 | 12.01 | 26.40      | 16.25      | 21.07      | 15.28       | 14.71       | 13.75       | 13.10        |
| 1.0 | 8.19  | 15.74      | 10.89      | 14.58      | 10.33       | 10.19       | 9.57        | 9.18         |
| 1.2 | 6.06  | 10.26      | 7.90       | 10.90      | 7.58        | 7.66        | 7.17        | 6.92         |
| 1.4 | 4.76  | 7.21       | 6.15       | 8.60       | 5.90        | 6.11        | 5.70        | 5.50         |
| 1.6 | 3.91  | 5.38       | 5.02       | 7.03       | 4.48        | 5.06        | 4.69        | 4.54         |

|          |                      |                       |                       |                       |                        |                        |                        |                         |
|----------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|
| 1.8      | 3.31                 | 4.21                  | 4.23                  | 5.85                  | 3.98                   | 4.30                   | 3.95                   | 3.84                    |
| 2.0      | 2.86                 | 3.41                  | 3.64                  | 4.89                  | 3.38                   | 3.71                   | 3.38                   | 3.31                    |
| 2.2      | 2.51                 | 2.84                  | 3.17                  | 4.08                  | 2.95                   | 3.22                   | 2.93                   | 2.88                    |
| 2.4      | 2.23                 | 2.42                  | 2.77                  | 3.38                  | 2.54                   | 2.81                   | 2.57                   | 2.53                    |
| 2.6      | 2.00                 | 2.10                  | 2.43                  | 2.81                  | 2.24                   | 2.45                   | 2.26                   | 2.24                    |
| 2.8      | 1.81                 | 1.86                  | 2.14                  | 2.35                  | 1.99                   | 2.15                   | 2.01                   | 1.99                    |
| 3.0      | 1.65                 | 1.67                  | 1.89                  | 1.99                  | 1.79                   | 1.89                   | 1.79                   | 1.79                    |
| <b>d</b> | <b>C<sub>1</sub></b> | <b>C<sub>12</sub></b> | <b>C<sub>13</sub></b> | <b>C<sub>14</sub></b> | <b>C<sub>123</sub></b> | <b>C<sub>124</sub></b> | <b>C<sub>134</sub></b> | <b>C<sub>1234</sub></b> |
| 0.0      | 370.40               | 225.44                | 166.05                | 152.73                | 132.89                 | 122.05                 | 105.78                 | 91.75                   |
| 0.2      | 308.43               | 177.56                | 120.70                | 110.52                | 97.86                  | 89.14                  | 76.01                  | 66.80                   |
| 0.4      | 200.08               | 104.46                | 63.88                 | 59.76                 | 52.93                  | 48.71                  | 40.95                  | 36.61                   |
| 0.6      | 119.67               | 57.92                 | 33.99                 | 33.64                 | 28.70                  | 27.49                  | 23.15                  | 20.90                   |
| 0.8      | 71.55                | 33.12                 | 19.78                 | 21.07                 | 16.93                  | 17.14                  | 14.62                  | 13.25                   |
| 1.0      | 43.89                | 20.01                 | 12.66                 | 14.58                 | 10.95                  | 11.73                  | 10.19                  | 9.22                    |
| 1.2      | 27.82                | 12.81                 | 8.84                  | 10.90                 | 7.68                   | 8.61                   | 7.66                   | 6.89                    |
| 1.4      | 18.25                | 8.69                  | 6.62                  | 8.60                  | 5.75                   | 6.63                   | 6.08                   | 5.41                    |
| 1.6      | 12.38                | 6.32                  | 5.24                  | 7.03                  | 4.54                   | 5.27                   | 5.01                   | 4.41                    |
| 1.8      | 8.69                 | 4.66                  | 4.33                  | 5.85                  | 3.73                   | 4.27                   | 4.24                   | 3.68                    |
| 2.0      | 6.30                 | 3.65                  | 3.68                  | 4.89                  | 3.14                   | 3.50                   | 3.65                   | 3.13                    |
| 2.2      | 4.72                 | 2.96                  | 3.18                  | 4.08                  | 2.70                   | 2.91                   | 3.17                   | 2.70                    |
| 2.4      | 3.65                 | 2.48                  | 2.78                  | 3.38                  | 2.35                   | 2.47                   | 2.77                   | 2.35                    |
| 2.6      | 2.90                 | 2.13                  | 2.43                  | 2.81                  | 2.07                   | 2.13                   | 2.43                   | 2.07                    |
| 2.8      | 2.38                 | 1.87                  | 2.14                  | 2.35                  | 1.85                   | 1.87                   | 2.14                   | 1.85                    |
| 3.0      | 2.00                 | 1.68                  | 1.89                  | 1.99                  | 1.67                   | 1.68                   | 1.89                   | 1.67                    |

Στη συνέχεια θα δοθούν δύο εφαρμογές μέσω των οποίων θα συγκρίνουμε διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart με συμπληρωματικούς κανόνες ροών και διαγράμματα ελέγχου ροής αθροίσματος. Και στις δύο εφαρμογές υποθέτουμε ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού  $X$  που εξετάζουμε (για εντός στατιστικού ελέγχου διεργασία) ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(\mu_0, \sigma_0^2)$  με γνωστή μέση τιμή  $\mu_0$  και γνωστή τυπική απόκλιση  $\sigma_0$ . Από τη διεργασία λαμβάνονται δείγματα μεγέθους  $n$  και υπολογίζεται ο δειγματικός μέσος τους  $\bar{X}$ . Στην περίπτωση που η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου έχουμε ότι  $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n})$ . Αν ο εντός ελέγχου μέσος  $\mu_0$  μετατοπιστεί στη θέση  $\mu_1 = \mu_0 + d \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$  έχουμε ότι  $\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_0^2}{n})$ . Σε κάθε περίπτωση η συνάρτηση κατανομής του δειγματικού μέσου  $\bar{X}$  θα συμβολίζεται με  $F_{\bar{X}}$ .

• **Εφαρμογή 3**

Στην πρώτη εφαρμογή θα παρουσιαστεί αναλυτικά η μελέτη του δίπλευρου  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_{29}[3,5,12,29 : 0,1,2,3, \infty]$  και θα γίνει σύγκριση του με το δίπλευρο  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου Shewhart στο οποίο εφαρμόζεται ο σύνθετος κανόνας

$$C_{134} = \{T(1,1, -\infty, -3), T(4,5, -3, -1), T(8,8, -3, 0), T(8,8,0,3), T(4,5,1,3), T(1,1,3, \infty)\}.$$

Έστω ότι η (εντός στατιστικού ελέγχου) κατανομή του χαρακτηριστικού  $X$  που εξετάζουμε ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(16,4)$  και ότι από την παραγωγή εξετάζονται σε τακτά χρονικά διαστήματα δείγματα μεγέθους  $n = 16$ . Η βασική λειτουργία του διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_{29}[3,5,12,29 : 0,1,2,3, \infty]$  δίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

**Πίνακας 2.10.** Δίπλευρο  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_{29}[3,5,12,29 : 0,1,2,3, \infty]$ .

| Περιοχή        | Διάστημα  | p     | Σκορ |
|----------------|---|-------|------|
| 4 <sup>-</sup> | $(-\infty, LCL_3) = \left(-\infty, \mu_0 - 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) = (-\infty, 14.5)$                      | $q_4$ | -29  |
| 3 <sup>-</sup> | $[LCL_3, LCL_2) = \left[\mu_0 - 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0 - 2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) = [14.5, 15)$ | $q_3$ | -12  |
| 2 <sup>-</sup> | $[LCL_2, LCL_1) = \left[\mu_0 - 2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0 - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) = [15, 15.5)$   | $q_2$ | -5   |
| 1 <sup>-</sup> | $[LCL_1, CL) = \left[\mu_0 - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0\right) = [15.5, 16)$                                    | $q_1$ | -3   |
| 1 <sup>+</sup> | $[CL, UCL_1) = \left[\mu_0, \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) = [16, 16.5)$                                    | $p_1$ | +3   |
| 2 <sup>+</sup> | $[UCL_1, UCL_2) = \left[\mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0 + 2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) = [16.5, 17)$   | $p_2$ | +5   |
| 3 <sup>+</sup> | $[UCL_2, UCL_3) = \left[\mu_0 + 2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0 + 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) = [17, 17.5)$ | $p_3$ | +12  |
| 4 <sup>+</sup> | $[UCL_3, \infty) = \left[\mu_0 + 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \infty\right) = [17.5, \infty)$                         | $p_4$ | +29  |

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των μαρκοβιανών αλυσίδων έχουμε ότι  $T = \{\pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 8, \pm 9, \dots, \pm 27, \pm 28\}$ . Ο πίνακας  $P$  παρουσιάζεται στην επόμενη σελίδα και η μορφή του είναι η ακόλουθη

$$P = \begin{pmatrix} Q & (I - Q)\mathbf{1}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} =$$



Για την πιθανότητα  $p_j$  ( $q_j$ ), που δηλώνει την πιθανότητα να είναι εντός της περιοχής  $j^+$  ( $j^-$ ) του διαγράμματος ( $j = 1,2,3,4$ ) η τιμή μιας δειγματικής μέσης τιμής  $\bar{X}$ , έχουμε τους γνωστούς τύπους

$$p_j = F_{\bar{X}}(UCL_j) - F_{\bar{X}}(UCL_{j-1}), \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$q_j = F_{\bar{X}}(LCL_{j-1}) - F_{\bar{X}}(LCL_j), \quad j = 1, 2, 3, 4$$

Στην περίπτωση που η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου έχουμε ότι  $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n})$  και τότε

$$q_1 = p_1 = \Phi(1) - 0.5 = 0.3413447,$$

$$q_2 = p_2 = \Phi(2) - \Phi(1) = 0.1359051,$$

$$q_3 = p_3 = \Phi(3) - \Phi(2) = 0.02140023,$$

$$q_4 = p_4 = 1 - \Phi(3) = 0.001349898.$$

Από τη στιγμή που τα όρια ελέγχου είναι γνωστά μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής  $ARL_1$  για διάφορες μετατοπίσεις της μέσης τιμής του χαρακτηριστικού  $X$  από την τιμή  $\mu_0$  στη θέση  $\mu_1 = \mu_0 + d \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$ . Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται τιμές του  $ARL$  συναρτήσεως ενδεικτικών τιμών του  $d$ .

**Πίνακας 2.12.** Τιμές  $ARL$  για το  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_{29}[3,5,12,29 : 0,1,2,3, \infty]$ .

| $d$ | $ARL_1$    |
|-----|------------|
| 0.0 | 105.823544 |
| 0.2 | 74.397013  |
| 0.4 | 39.099662  |
| 0.6 | 21.868480  |
| 0.8 | 13.754182  |
| 1.0 | 9.570168   |
| 1.2 | 7.185885   |
| 1.4 | 5.695921   |
| 1.6 | 4.685034   |
| 1.8 | 3.949574   |
| 2.0 | 3.384603   |
| 2.2 | 2.933847   |
| 2.4 | 2.565645   |
| 2.6 | 2.260848   |
| 2.8 | 2.006779   |
| 3.0 | 1.794479   |

Για τον υπολογισμό του  $ARL$  χρησιμοποιήθηκε ο τύπος

$$ARL = E(N) = \mathbf{a}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{1}'.$$

όπου  $\mathbf{a}$  είναι το διάνυσμα γραμμή διάστασης  $1 \times 49$  και όλα τα στοιχεία του είναι 0 εκτός από την  $25^{\text{η}}$  συνιστώσα που παίρνει την τιμή 1 και αντιστοιχεί στη μεταβατική κατάσταση 0.

Το διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart εφοδιασμένο με τους Κανόνες 1,3 και 4, δηλαδή το διάγραμμα  $C_{134}$  που μελέτησαν οι Champ & Woodall (1987) έχει σχεδόν την ίδια τιμή  $ARL_0$  με το διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος

$$RS_{29}[3,5,12,29 : 0,1,2,3, \infty].$$

Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται τιμές του  $ARL$  συναρτήσει ενδεικτικών τιμών του  $d$  για το διάγραμμα

$$C_{134} = \{T(1,1, -\infty, -3), T(4,5, -3, -1), T(8,8, -3, 0), T(8,8,0,3), T(4,5,1,3), T(1,1,3, \infty)\}$$

**Πίνακας 2.13.** Τιμές  $ARL$  για το  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου  $C_{134}$

| $d$ | $ARL_1$ |
|-----|---------|
| 0.0 | 105.78  |
| 0.2 | 76.01   |
| 0.4 | 40.95   |
| 0.6 | 23.15   |
| 0.8 | 14.62   |
| 1.0 | 10.19   |
| 1.2 | 7.66    |
| 1.4 | 6.08    |
| 1.6 | 5.01    |
| 1.8 | 4.24    |
| 2.0 | 3.65    |
| 2.2 | 3.17    |
| 2.4 | 2.77    |
| 2.6 | 2.43    |
| 2.8 | 2.14    |
| 3.0 | 1.89    |

Παρατηρούμε ότι σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων της μέσης τιμής, το διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_{29}[3,5,12,29 : 0,1,2,3, \infty]$  παρουσιάζει μικρότερες τιμές  $ARL$  έναντι του διαγράμματος ελέγχου τύπου Shewhart με τους συμπληρωματικούς Κανόνες 1,3 και 4 ( $C_{134}$ ).

- **Εφαρμογή 4**

Ως μια δεύτερη εφαρμογή θα παρουσιαστεί αναλυτικά η μελέτη του δίπλευρου  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_{22}(2,3,10,22)$  με  $ARL_0 = 465$  και θα γίνει



σύγκριση του με το δίπλευρο  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου Shewhart στο οποίο εφαρμόζεται ο σύνθετος κανόνας

$$C_{123} = \{T(1,1, -\infty, -3), T(2,3, -3, -2), T(4,5, -3, -1), T(4,5,1,3), T(2,3,2,3), T(1,1,3, \infty)\}.$$

Έστω ότι η (εντός στατιστικού ελέγχου) κατανομή του χαρακτηριστικού  $X$  που εξετάζουμε ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(10, 4)$  και ότι από την παραγωγή εξετάζονται σε τακτά χρονικά διαστήματα δείγματα μεγέθους  $n = 9$ . Η βασική λειτουργία του διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_{22}(2,3,10,22)$  είναι όπως στον Πίνακα 2.6 αλλά με τροποποιημένη κατάλληλα την τελευταία στήλη με τα σκορ.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των μαρκοβιανών αλυσίδων έχουμε ότι  $T = \{\pm 2, \pm 3, \dots, \pm 20, \pm 21\}$  και η μορφή του πίνακα  $\mathbf{P}$  παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα. Για τις εντός στατιστικού ελέγχου πιθανότητες  $p_j$  ( $q_j$ ) ισχύει ότι

$$\begin{aligned} q_1 &= p_1 = \Phi(L) - 0.5 \\ q_2 &= p_2 = \Phi(2L) - \Phi(L) \\ q_3 &= p_3 = \Phi(3L) - \Phi(2L) \\ q_4 &= p_4 = 1 - \Phi(3L) \end{aligned}$$

αφού  $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n})$ . Από την εξίσωση

$$ARL_0 = \mathbf{a}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{1}' = 465$$

όπου  $\mathbf{a}$  είναι το διάνυσμα γραμμή διάστασης  $1 \times 41$  και όλα τα στοιχεία του είναι 0 εκτός από την  $21^{\text{η}}$  συνιστώσα που παίρνει την τιμή 1 και αντιστοιχεί στη μεταβατική κατάσταση 0 προκύπτει ότι  $L = 1.224849$ . Συνεπώς

$$\begin{aligned} LCL_1 &= 9.183434, \quad LCL_2 = 8.366868, \quad LCL_3 = 7.550302 \\ UCL_1 &= 10.816566, \quad UCL_2 = 11.633132, \quad UCL_3 = 12.449698. \end{aligned}$$



Από τη στιγμή που τα όρια ελέγχου είναι γνωστά μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής  $ARL_1$  για διάφορες μετατοπίσεις της μέσης τιμής του χαρακτηριστικού  $X$  από την τιμή  $\mu_0$  στη θέση  $\mu_1 = \mu_0 + d \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$ . Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται τιμές του  $ARL$  συναρτήσει ενδεικτικών τιμών του  $d$ .

**Πίνακας 2.15.** Τιμές  $ARL$  για το  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος

$RS_{22}(2,3,10,22)$  με  $ARL_0 = 465$ .

| $d$  | $ARL_1$    |
|------|------------|
| 0.0  | 465        |
| 0.25 | 201.607982 |
| 0.50 | 66.304039  |
| 0.75 | 28.789421  |
| 1.00 | 15.905242  |
| 1.50 | 7.619547   |
| 2.00 | 4.850185   |
| 2.50 | 3.404571   |
| 3.00 | 2.518826   |
| 4.00 | 1.515074   |
| 5.00 | 1.101077   |

Το διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart εφοδιασμένο με τους Κανόνες 1,2 και 3, δηλαδή το διάγραμμα  $C_{123}$  που μελέτησαν οι Champ & Woodall (1987) παρουσιάζει σχεδόν την ίδια τιμή εντός μέσου μήκους ροής ( $ARL_0$ ) με το διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_{22}[2,3,10,22 : 0,1,2,3, \infty]$ .

Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται ενδεικτικές τιμές του  $ARL$  συναρτήσει του  $d$  για το διάγραμμα

$$C_{123} = \{T(1,1, -\infty, -3), T(2,3, -3, -2), T(4,5, -3, -1), T(4,5,1,3), T(2,3,2,3), T(1,1,3, \infty)\}$$

έτσι ώστε το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ( $ARL_0$ ) του διαγράμματος να είναι  $ARL_0 = 465.01$ . Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των Πινάκων 2.16 και 2.17 παρατηρούμε ότι το διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_{22}(2,3,10,22)$  αποδίδει καλύτερα σε μικρές έως και μεσαίες μετατοπίσεις (έως  $d = 1$ ) ενώ το διάγραμμα ελέγχου  $C_{123}$  αποδίδει καλύτερα στις μεγαλύτερες μετατοπίσεις, δηλαδή για  $d \geq 1.5$ .

**Πίνακας 2.16.** Τιμές  $ARL$  για το  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου  $C_{123}$  με  $ARL_0 = 465.01$

| $d$  | $ARL_1$ |
|------|---------|
| 0.0  | 465.01  |
| 0.25 | 244.85  |
| 0.50 | 88.09   |
| 0.75 | 36.54   |
| 1.00 | 18.22   |
| 1.50 | 7.11    |
| 2.00 | 4.10    |
| 2.50 | 2.82    |
| 3.00 | 2.08    |
| 4.00 | 1.33    |
| 5.00 | 1.07    |

Συμπεραίνουμε ότι τα διαγράμματα ελέγχου ροής αθροίσματος έχουν καλύτερη απόδοση για μικρές έως και μέτριες μετατοπίσεις του μέσου. Επίσης, τα διαγράμματα ελέγχου ροής αθροίσματος είναι πιο απλά στην χρήση καθώς δεν χρειάζεται να γίνεται έλεγχος εμφάνισης ειδικών μοτίβων στο διάγραμμα ελέγχου.

## **2.5 Σύγκριση $\bar{X}$ διαγραμμάτων ελέγχου ροής αθροίσματος με διαγράμματα ελέγχου CUSUM και EWMA**

Στην προηγούμενη παράγραφο συγκρίναμε την απόδοση διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart εφοδιασμένα με κανόνες ροών τα οποία είναι διαγράμματα ελέγχου χωρίς μνήμη με διαγράμματα ελέγχου ροής αθροίσματος τα οποία είναι διαγράμματα ελέγχου με μνήμη. Γνωρίζουμε ότι το διάγραμμα ελέγχου CUSUM (Cumulative Sum) που προτάθηκε για πρώτη φορά από τον Page το 1954 και μελετήθηκε εκτενέστερα από τους Ewan & Kemp (1960) καθώς και το διάγραμμα ελέγχου EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) το οποίο προτάθηκε από τον Roberts (1959) και μελετήθηκε εκτενέστερα από τους Hunter (1986), Crowder (1987) και Lucas & Saccucci (1990) είναι διαγράμματα ελέγχου με μνήμη τα οποία είναι πιο αποτελεσματικά από τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων της υπό παρακολούθηση παραμέτρου της διεργασίας.

Στη συνέχεια θα δοθούν δύο εφαρμογές μέσω των οποίων θα συγκρίνουμε διαγράμματα ελέγχου EWMA και CUSUM με διαγράμματα ελέγχου ροής αθροίσματος. Και στις δύο εφαρμογές υποθέτουμε, ως συνήθως, ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού  $X$  που

εξετάζουμε (για εντός στατιστικού ελέγχου διεργασία) ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(\mu_0, \sigma_0^2)$  με γνωστή μέση τιμή  $\mu_0$  και γνωστή τυπική απόκλιση  $\sigma_0$ . Από τη διεργασία λαμβάνονται δείγματα μεγέθους  $n$  και υπολογίζεται ο δειγματικός μέσος τους  $\bar{X}$ . Στην περίπτωση που η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου έχουμε ότι  $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n})$ . Αν ο εντός ελέγχου μέσος  $\mu_0$  μετατοπιστεί στη θέση  $\mu_1 = \mu_0 + d \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$  έχουμε ότι  $\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_0^2}{n})$ . Σε κάθε περίπτωση η συνάρτηση κατανομής του δειγματικού μέσου  $\bar{X}$  θα συμβολίζεται με  $F_{\bar{X}}$ .

- **Εφαρμογή 5**

Για πρώτη εφαρμογή θα παρουσιαστεί αναλυτικά η μελέτη του δίπλευρου  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_4(0,1,4)$  με  $ARL_0 = 465.44351$  και θα γίνει σύγκριση του με το δίπλευρο  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου CUSUM με τιμή αναφοράς  $K = 0.5$  και διάστημα απόφασης  $H = 5$  όπου και αυτό έχει  $ARL_0 = 465.44351$ .

Έστω ότι η (εντός στατιστικού ελέγχου) κατανομή του χαρακτηριστικού  $X$  που εξετάζουμε ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(10,1)$  και ότι από την παραγωγή εξετάζονται σε τακτά χρονικά διαστήματα δείγματα μεγέθους  $n = 9$ . Η βασική λειτουργία του διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_4(0,1,4)$  δίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

**Πίνακας 2.17.** Δίπλευρο  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_4(0,1,4)$ .

| Περιοχή        | Διάστημα  | p     | Σκορ |
|----------------|---|-------|------|
| 3 <sup>-</sup> | $(-\infty, LCL_2) = \left(-\infty, \mu_0 - 3L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$                           | $q_3$ | -4   |
| 2 <sup>-</sup> | $[LCL_2, LCL_1) = \left[\mu_0 - 3L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0 - L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$ | $q_2$ | -1   |
| 1 <sup>-</sup> | $[LCL_1, CL) = \left[\mu_0 - L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0\right)$                                   | $q_1$ | -0   |
| 1 <sup>+</sup> | $[CL, UCL_1) = \left[\mu_0, \mu_0 + L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$                                   | $p_1$ | +0   |
| 2 <sup>+</sup> | $[UCL_1, UCL_2) = \left[\mu_0 + L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0 + 3L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$ | $p_2$ | +1   |
| 3 <sup>+</sup> | $[UCL_2, UCL_3) = \left[\mu_0 + 3L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \infty\right)$                              | $p_3$ | +4   |

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των μαρκοβιανών αλυσίδων έχουμε ότι  $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$  και η μορφή του πίνακα  $\mathbf{P}$  είναι η ακόλουθη

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{1}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & c \\ -3 & q_1 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & 0 & 0 & p_3 + q_2 + q_3 \\ -2 & q_2 & q_1 & 0 & p_1 & p_2 & 0 & 0 & p_3 + q_3 \\ -1 & 0 & q_2 & q_1 & p_1 & p_2 & 0 & 0 & p_3 + q_3 \\ 0 & 0 & 0 & q_2 & q_1 + p_1 & p_2 & 0 & 0 & p_3 + q_3 \\ 1 & 0 & 0 & q_2 & q_1 & p_1 & p_2 & 0 & p_3 + q_3 \\ 2 & 0 & 0 & q_2 & q_1 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 + q_3 \\ 3 & 0 & 0 & q_2 & q_1 & 0 & 0 & p_1 & q_3 + p_2 + p_3 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για τις εντός στατιστικού ελέγχου πιθανότητες  $p_j$  ( $q_j$ ) ισχύει ότι

$$\begin{aligned} q_1 &= p_1 = \Phi(L) - 0.5 \\ q_2 &= p_2 = \Phi(3L) - \Phi(L) \\ q_3 &= p_3 = 1 - \Phi(3L) \end{aligned}$$

αφού  $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n})$ . Από την εξίσωση

$$ARL_0 = \mathbf{a}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{1}' = 465.44351$$

όπου  $\mathbf{a} = (0,0,0,1,0,0,0)$ , προκύπτει ότι  $L = 1.150286$ . Συνεπώς

$$LCL_1 = 9.61657, \quad LCL_2 = 8.84971$$

$$UCL_1 = 10.38343, \quad UCL_2 = 11.1503.$$

Από τη στιγμή που τα όρια ελέγχου είναι γνωστά μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής  $ARL_1$  για διάφορες μετατοπίσεις της μέσης τιμής του χαρακτηριστικού  $X$  από την τιμή  $\mu_0$  στη θέση  $\mu_1 = \mu_0 + d \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$ . Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται ενδεικτικές τιμές του  $ARL$  συναρτήσει του  $d$ .

**Πίνακας 2.18.** Τιμές  $ARL$  για το  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_4(0,1,4)$  με  $ARL_0 = 465.44351$ .

| $d$  | $ARL_1$    |
|------|------------|
| -3.0 | 2.475353   |
| -2.5 | 3.318896   |
| -2.0 | 4.478887   |
| -1.5 | 6.768520   |
| -1.0 | 14.376767  |
| -0.5 | 65.829332  |
| 0.0  | 465.443510 |

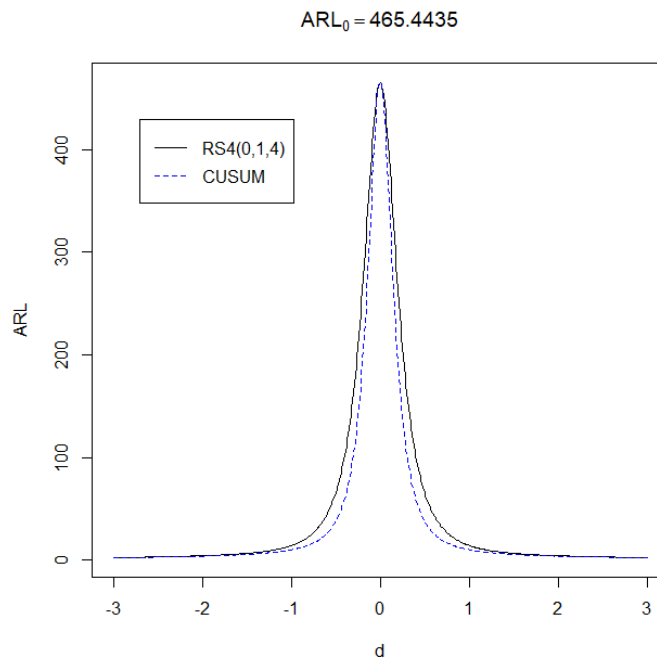
|     |           |
|-----|-----------|
| 0.5 | 65.829332 |
| 1.0 | 14.376767 |
| 1.5 | 6.768520  |
| 2.0 | 4.478887  |
| 2.5 | 3.318896  |
| 3.0 | 2.475353  |

Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζονται επίσης και τιμές του  $ARL$  για το υπό μελέτη διάγραμμα CUSUM.

**Πίνακας 2.19.** Τιμές  $ARL$  για το  $\bar{X}$  CUSUM διάγραμμα με  $K = 0.5$  και  $H = 5$ .

| $d$  | $ARL_1$    |
|------|------------|
| -3.0 | 2.573252   |
| -2.5 | 3.113688   |
| -2.0 | 4.008871   |
| -1.5 | 5.747218   |
| -1.0 | 10.375970  |
| -0.5 | 37.996143  |
| 0.0  | 465.443510 |
| 0.5  | 37.996143  |
| 1.0  | 10.375970  |
| 1.5  | 5.747218   |
| 2.0  | 4.008871   |
| 2.5  | 3.113688   |
| 3.0  | 2.573252   |

Στο επόμενο σχήμα δίνεται η καμπύλη  $ARL$  του  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_4(0,1,4)$  με  $ARL_0 = 465.44351$ , μαζί με την αντίστοιχη καμπύλη του διαγράμματος  $\bar{X}$  CUSUM με  $K = 0.5$  και  $H = 5$ .



**Σχήμα 2.5.** Διάγραμμα  $ARL$ :  $RS_4(0,1,4)$  και  $CUSUM$  διάγραμμα ελέγχου  
με  $K = 0.5$  και  $H = 5$

Παρατηρούμε ότι σχεδόν σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων της μέσης τιμής (εκτός από  $d = 3$ ) το διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_4(0,1,4)$  παρουσιάζει μεγαλύτερες τιμές  $ARL$  έναντι του διαγράμματος  $CUSUM$  με  $K = 0.5$  και  $H = 5$ .

- **Εφαρμογή 6**

Ως μια δεύτερη εφαρμογή θα παρουσιαστεί αναλυτικά η μελέτη του δίπλευρου  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_{26}(2,6,7,26)$  με  $ARL_0 = 464.669807$  και θα γίνει σύγκριση του με το δίπλευρο  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου EWMA με παραμέτρους  $\lambda = 0.1333$  και  $L = 2.856$  όπου και αυτό έχει  $ARL_0 = 464.669807$ .

Έστω ότι η (εντός στατιστικού ελέγχου) κατανομή του χαρακτηριστικού  $X$  που εξετάζουμε ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(15, 3)$  και ότι από την παραγωγή εξετάζονται σε τακτά χρονικά διαστήματα δείγματα μεγέθους  $n = 16$ . Η βασική λειτουργία του διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_{26}(2,6,7,26)$  είναι όπως στον Πίνακα 2.6 αλλά με τροποποιημένη κατάλληλα την τελευταία στήλη με τα σκορ.



Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των μαρκοβιανών αλυσίδων έχουμε ότι  $T = \{\pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 7, \dots, \pm 24, \pm 25\}$  και η μορφή του πίνακα  $\mathbf{P}$  παρουσιάζεται στον Πίνακα 2.20. Για τις εντός στατιστικού ελέγχου πιθανότητες  $p_j$  ( $q_j$ ) ισχύει ότι

$$\begin{aligned}q_1 &= p_1 = \Phi(L) - 0.5 \\q_2 &= p_2 = \Phi(2L) - \Phi(L) \\q_3 &= p_3 = \Phi(3L) - \Phi(2L) \\q_4 &= p_4 = 1 - \Phi(3L)\end{aligned}$$

αφού  $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n})$ . Από την εξίσωση

$$ARL_0 = \mathbf{a}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{1}' = 464.669807$$

όπου  $\mathbf{a}$  είναι το διάνυσμα γραμμή διάστασης  $1 \times 45$  και όλα τα στοιχεία του είναι 0 εκτός από την  $23^{\text{η}}$  συνιστώσα που παίρνει την τιμή 1 και αντιστοιχεί στη μεταβατική κατάσταση 0, προκύπτει ότι  $L = 1.348227$ .



Συνεπώς

$$LCL_1 = 14.416200, LCL_2 = 13.832401, LCL_3 = 13.248601$$

$$UCL_1 = 15.583800, UCL_2 = 16.167599, UCL_3 = 16.751399.$$

Από τη στιγμή που τα όρια ελέγχου είναι γνωστά μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής  $ARL_1$  για διάφορες μετατοπίσεις της μέσης τιμής του χαρακτηριστικού  $X$  από την τιμή  $\mu_0$  στη θέση  $\mu_1 = \mu_0 + d \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$ . Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται ενδεικτικές τιμές του  $ARL$  συναρτήσει του  $d$ .

**Πίνακας 2.21.** Τιμές  $ARL$  για το  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_{26}(2,6,7,26)$  με  $ARL_0 = 464.669807$ .

| $d$  | $ARL_1$    |
|------|------------|
| -3.0 | 3.407157   |
| -2.5 | 4.320499   |
| -2.0 | 5.498335   |
| -1.5 | 7.808186   |
| -1.0 | 15.226966  |
| -0.5 | 61.221219  |
| 0.0  | 464.669807 |
| 0.5  | 61.221219  |
| 1.0  | 15.226966  |
| 1.5  | 7.808186   |
| 2.0  | 5.498335   |
| 2.5  | 4.320499   |
| 3.0  | 3.407157   |

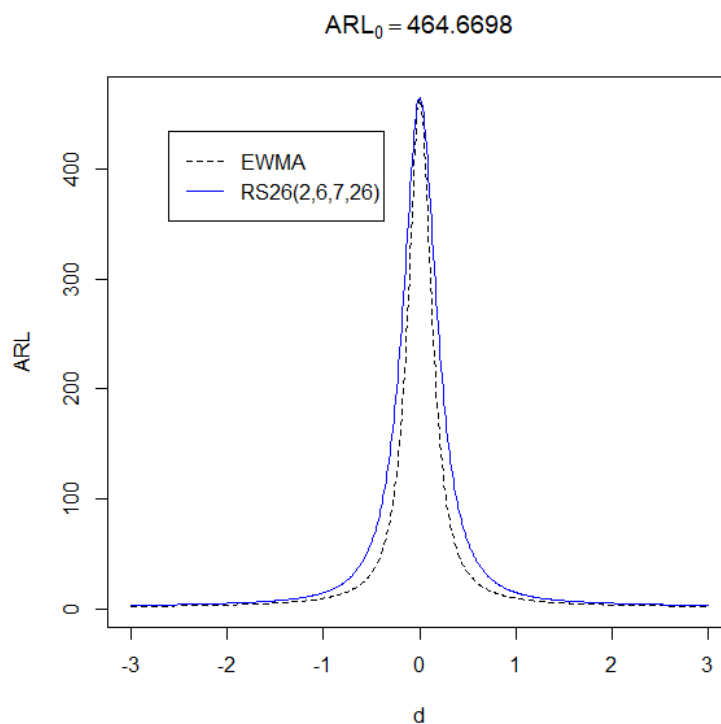
Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζονται επίσης και τιμές του  $ARL$  για το υπό μελέτη διάγραμμα EWMA.

**Πίνακας 2.22.** Τιμές  $ARL$  για το  $\bar{X}$  EWMA διάγραμμα με  $\lambda = 0.1333$  και  $L = 2.856$ .

| $d$  | $ARL_1$    |
|------|------------|
| -3.0 | 2.620529   |
| -2.5 | 3.157073   |
| -2.0 | 4.032407   |
| -1.5 | 5.709941   |
| -1.0 | 10.051164  |
| -0.5 | 33.309041  |
| 0.0  | 464.669807 |

|     |           |
|-----|-----------|
| 0.5 | 33.309041 |
| 1.0 | 10.051164 |
| 1.5 | 5.709941  |
| 2.0 | 4.032407  |
| 2.5 | 3.157073  |
| 3.0 | 2.620529  |

Στο επόμενο σχήμα δίνεται η καμπύλη  $ARL$  του  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_{26}(2,6,7,26)$  με  $ARL_0 = 464.669807$ , μαζί με την αντίστοιχη καμπύλη του  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου  $EWMA$  με  $\lambda = 0.1333$  και  $L = 2.856$ .



**Σχήμα 2.6.** Διάγραμμα  $ARL$ :  $RS_{26}(2,6,7,26)$  και  $EWMA$  διαγράμματος ελέγχου με  $\lambda = 0.1333$  και  $L = 2.856$

Είναι εμφανής η ανωτερότητα του διαγράμματος ελέγχου  $EWMA$  σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων της μέσης τιμής έναντι του διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_{26}(2,6,7,26)$ .

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα διαγράμματα  $CUSUM$  και  $EWMA$  αποδίδουν καλύτερα σε μικρές και μεσαίες μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας. Ωστόσο, μπορούμε να χωρίσουμε σε περισσότερες περιοχές εκατέρωθεν της κεντρικής γραμμής ( $CL = \mu_0$ ) τα

διαγράμματα ελέγχου ροής αθροίσματος. Έτσι, θα έχουμε ως αποτέλεσμα να βελτιωθεί η απόδοση τους και να γίνουν πιο ανταγωνιστικά ενώ θα διατηρήσουν την απλότητά τους.

Για περισσότερες συγκρίσεις μεταξύ των  $\bar{X}$  διαγραμμάτων ελέγχου ροής αθροίσματος με διαγράμματα ελέγχου CUSUM και EWMA ο αναγνώστης παραπέμπεται στην εργασία των Champ & Ridgon (1997). Ενδεικτικά δίνουμε τον κάτωθι πίνακα συγκρίσεων.

Πίνακας 2.23. Σύγκριση διαγραμμάτων ελέγχου με  $ARL_0 = 465$

|       | $C_1$  | $C^*$  | $C_{12}$ | $C_{12}^*$ | $C_{13}$ | $C_{13}^*$ | $C_{123}$ | $C_{123}^*$ | $C_{14}^*$ | $C_{124}^*$ | $C_{134}^*$ | $C_{1234}^*$ | EWMA               | CUSUM     |
|-------|--------|--------|----------|------------|----------|------------|-----------|-------------|------------|-------------|-------------|--------------|--------------------|-----------|
| $a =$ | *      | 1.023  | *        | 1.093      | 1.140    | 1.150      | 1.163     | 1.225       | 1.189      | 1.349       | 1.469       | 1.850        | $L = 2.856$        | $h = 5$   |
| $b =$ | *      | 2.045  | 2.149    | 2.187      | *        | 2.301      | 2.326     | 2.450       | 2.378      | 2.697       | 2.938       | 3.701        | $\lambda = 0.1333$ | $k = 0.5$ |
| $c =$ | 3.069  | 3.069  | 3.224    | 3.280      | 3.420    | 3.451      | 3.489     | 3.675       | 3.567      | 4.045       | 4.407       | 5.552        |                    |           |
| $d$   | ARL    |        |          |            |          |            |           |             |            |             |             |              |                    |           |
| 0.00  | 465.03 | 465.02 | 465.15   | 465.00     | 465.33   | 465.02     | 465.01    | 465.00      | 465.02     | 465.00      | 465.00      | 465.00       | 465.00             | 465.00    |
| 0.25  | 349.20 | 348.94 | 308.44   | 209.65     | 247.30   | 207.32     | 244.85    | 201.61      | 193.39     | 189.86      | 201.95      | 214.48       | 116.00             | 139.00    |
| 0.50  | 189.24 | 186.42 | 139.11   | 66.87      | 90.01    | 65.68      | 88.09     | 66.30       | 61.01      | 61.24       | 68.10       | 75.75        | 33.30              | 38.00     |
| 0.75  | 97.33  | 88.28  | 62.65    | 27.81      | 37.76    | 26.96      | 36.54     | 28.79       | 25.96      | 26.92       | 30.44       | 34.75        | 16.00              | 17.00     |
| 1.00  | 51.78  | 40.30  | 30.71    | 14.98      | 19.04    | 14.32      | 18.22     | 15.91       | 14.29      | 15.23       | 17.26       | 20.12        | 10.10              | 10.40     |
| 1.50  | 17.13  | 12.34  | 9.88     | 7.10       | 7.64     | 6.71       | 7.11      | 7.62        | 7.00       | 7.81        | 8.76        | 10.69        | 5.75               | 5.75      |
| 2.00  | 7.01   | 5.97   | 4.49     | 4.57       | 4.58     | 4.40       | 4.10      | 4.85        | 4.70       | 5.50        | 6.03        | 7.76         | 4.04               | 4.01      |
| 2.50  | 3.51   | 3.38   | 2.65     | 3.21       | 3.28     | 3.22       | 2.82      | 3.40        | 3.51       | 4.32        | 4.54        | 6.20         | 3.16               | 3.11      |
| 3.00  | 2.12   | 2.11   | 1.87     | 2.28       | 2.43     | 2.38       | 2.08      | 2.52        | 2.65       | 3.41        | 3.50        | 5.05         | 2.62               | 2.57      |
| 4.00  | 1.21   | 1.21   | 1.23     | 1.30       | 1.38     | 1.39       | 1.33      | 1.52        | 1.48       | 1.93        | 2.14        | 3.28         | 2.05               | 2.01      |
| 5.00  | 1.03   | 1.03   | 1.04     | 1.04       | 1.06     | 1.06       | 1.07      | 1.10        | 1.08       | 1.20        | 1.35        | 2.23         | 1.77               | 1.69      |

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## Διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος για τη διασπορά

### 3.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε τα διαγράμματα ελέγχου ροής αθροίσματος για τη μέση τιμή. Ο στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι η παρουσίαση των  $S$  και  $R$  διαγραμμάτων ελέγχου ροής αθροίσματος ( $S$  and  $R$  run sum control charts). Επιπλέον, θα τα συγκρίνουμε με διαγράμματα τύπου Shewhart με και χωρίς συμπληρωματικούς κανόνες ροών. Για να κάνουμε αυτή τη σύγκριση θα χρησιμοποιήσουμε ως μέτρο σύγκρισης το μέσο μήκος ροής (ARL). Στα διαγράμματα που θα παρουσιάσουμε λοιπόν, θα προσαρμόσουμε τις περιοχές του διαγράμματος ελέγχου μέσω κατάλληλης παραμέτρου ώστε να έχουν το ίδιο εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ( $ARL_0$ ) με τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart και μέσα από εφαρμογές θα συγκρίνουμε την απόδοση τους για διάφορες μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης.

### 3.2 Το $S$ διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος

Το  $S$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος ( $S$  run sum control chart) παρουσιάστηκε από τους Rakitzis & Antzoulakos (2016). Βασίζόμενοι σε άρθρα των Acosta-Meija & Pignatiello (2010) και Acosta-Meija (2003) παρουσίασαν τη βασική λειτουργία του διαγράμματος. Ως συνήθως το χαρακτηριστικό  $X$  που παρακολουθούμε με δείγματα μεγέθους  $n$  έχει εντός στατιστικού ελέγχου κατανομή κανονική με τυπική απόκλιση  $\sigma_0$ . Στο  $S$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος απεικονίζονται οι τιμές της δειγματικής τυπικής απόκλισης  $S$ .

Σε μια εκτός στατιστικού ελέγχου κατάσταση η τυπική απόκλιση του χαρακτηριστικού  $X$  αλλάζει σε  $\sigma_1 = \tau\sigma_0$  ( $\tau > 0$ ). Μια αύξηση στην τυπική απόκλιση της διεργασίας αντιστοιχεί σε τιμές  $\tau > 1$ , ενώ μια μείωση σε τιμές  $0 < \tau < 1$ . Για  $\tau = 1$ , προφανώς η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου. Για την μέση τιμή του χαρακτηριστικού  $X$  υποθέτουμε ότι παραμένει πάντα ίση με  $\mu_0$ .

Η κεντρική γραμμή (MDL, median line) του διαγράμματος, έστω συμπίπτει με τη διάμεσο της τυπικής απόκλισης  $S$ , δηλαδή

$$P(S \leq MDL) = 0.5$$

Συνεπώς

$$MDL = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1;0.5}^2}{n-1}}$$

όπου με  $\chi_{n,a}^2$  συμβολίζουμε το άνω  $a$  ποσοστιαίο σημείο της κατανομής χι τετράγωνο με  $n$  βαθμούς ελευθερίας.

Το  $S$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος χρησιμοποιεί  $2k + 2$  ζώνες. Οι  $k + 1$  περιοχές πάνω από την κεντρική γραμμή είναι διαστήματα της μορφής

$$[UCL_j, UCL_{j+1}) = \left[ \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1;1-\Phi(jL)}^2}{n-1}}, \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1;1-\Phi((j+1)L)}^2}{n-1}} \right), \quad j = 0, 1, \dots, k,$$

όπου  $\Phi(\cdot)$  δηλώνει την αθροιστική συνάρτηση της τυπικής κανονικής κατανομής και  $L$  είναι η τιμή που δίνεται από τον χρήστη ώστε να επιτευχθεί το επιθυμητό εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ( $ARL_0$ ). Ειδικότερα η τελευταία περιοχή είναι η

$$[UCL_k, UCL_{k+1}) = \left[ \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1;1-\Phi(kL)}^2}{n-1}}, \infty \right),$$

ενώ  $UCL_0 = MDL$ .

Ομοίως, οι  $k + 1$  περιοχές κάτω από την κεντρική γραμμή είναι διαστήματα της μορφής

$$[LCL_{j+1}, LCL_j) = \left[ \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1;\Phi(jL)}^2}{n-1}}, \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1;\Phi((j+1)L)}^2}{n-1}} \right), \quad j = 0, 1, \dots, k.$$

Ειδικότερα η πρώτη περιοχή είναι η

$$[LCL_{k+1}, LCL_k) = \left[ 0, \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1;\Phi(kL)}^2}{n-1}} \right)$$

ενώ  $LCL_0 = MDL$ .

Για  $L = 1$  και  $k = 3$  οι πιθανότητες που αντιστοιχούν στις περιοχές του  $S$  διαγράμματος ελέγχου ροής είναι οι ίδιες με αυτές του  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου ροής όταν έχουν τα ίδια σκορ και κρίσιμη τιμή.

Οι περιοχές πάνω από την κεντρική γραμμή συμβολίζονται ως  $1^+, 2^+, \dots, k^+, (k+1)^+$  και οι περιοχές κάτω από την κεντρική γραμμή συμβολίζονται ως  $1^-, 2^-, \dots, k^-, (k+1)^-$ .



Συνήθως, οι περιοχές κάτω από την κεντρική γραμμή είναι συμμετρικές των περιοχών πάνω από την κεντρική γραμμή χωρίς όμως αυτό να είναι απαραίτητο. Σε κάθε περιοχή αντιστοιχεί ένα σκορ. Το σκορ  $\alpha_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k + 1$ ) που αντιστοιχεί στην περιοχή  $j^+$  είναι μη αρνητικό ( $\alpha_j \geq 0$ ), ενώ το σκορ  $-a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k + 1$ ) που αντιστοιχεί στην περιοχή  $j^-$  είναι μη θετικό ( $-a_j \leq 0$ ).

Στο διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος απεικονίζεται η δειγματική τυπική απόκλιση  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) κάθε δείγματος. Η πιθανότητα ένα σημείο του διαγράμματος να βρεθεί στην περιοχή  $j^+$  πάνω από την κεντρική γραμμή θα συμβολίζεται με

$$p_{k+2+j} = P(UCL_j \leq S_i < UCL_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, k,$$

και δίνεται από τον τύπο

$$p_{k+2+j} = F_{n-1} \left( \frac{(n-1)UCL_{j+1}^2}{(\tau\sigma_0)^2} \right) - F_{n-1} \left( \frac{(n-1)UCL_j^2}{(\tau\sigma_0)^2} \right)$$

όπου  $F_{n-1}(\cdot)$  η αθροιστική συνάρτηση της κατανομής  $\chi^2$  τετράγωνο με  $n - 1$  βαθμούς ελευθερίας. Η πιθανότητα ένα σημείο του διαγράμματος να βρεθεί στην περιοχή  $j^-$  κάτω από την κεντρική γραμμή θα συμβολίζεται με

$$p_{k+1-j} = P(LCL_{j+1} \leq S_i < LCL_j), \quad j = 0, 1, \dots, k,$$

και θα δίνεται από τον τύπο

$$p_{k+1-j} = F_{n-1} \left( \frac{(n-1)LCL_j^2}{(\tau\sigma_0)^2} \right) - F_{n-1} \left( \frac{(n-1)LCL_{j+1}^2}{(\tau\sigma_0)^2} \right).$$

Όλα τα παραπάνω, μαζί με τα σκορ κάθε περιοχής, συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα.

**Πίνακας 3.1.** Δίπλευρο  $S$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος με  $2k + 2$  περιοχές

| Περιοχή     | Διάστημα                 | Πιθανότητα | Σκορ       |
|-------------|--------------------------|------------|------------|
| $(k + 1)^-$ | $(0, LCL_k)$             | $p_1$      | $-a_{k+1}$ |
| $k^-$       | $[LCL_k, LCL_{k-1})$     | $p_2$      | $-a_k$     |
| $(k - 1)^-$ | $[LCL_{k-1}, LCL_{k-2})$ | $p_3$      | $-a_{k-1}$ |
| $\vdots$    | $\vdots$                 | $\vdots$   | $\vdots$   |
| $2^-$       | $[LCL_2, LCL_1)$         | $p_k$      | $-a_2$     |
| $1^-$       | $[LCL_1, MDL)$           | $p_{k+1}$  | $-a_1$     |
| $1^+$       | $[MDL, UCL_1)$           | $p_{k+2}$  | $\alpha_1$ |
| $2^+$       | $[UCL_1, UCL_2)$         | $p_{k+3}$  | $\alpha_2$ |
| $\vdots$    | $\vdots$                 | $\vdots$   | $\vdots$   |

|             |                          |            |                |
|-------------|--------------------------|------------|----------------|
| $(k - 1)^+$ | $[UCL_{k-2}, UCL_{k-1})$ | $p_{2k}$   | $\alpha_{k-1}$ |
| $k^+$       | $[UCL_{k-1}, UCL_k)$     | $p_{2k-1}$ | $\alpha_k$     |
| $(k + 1)^+$ | $[UCL_k, \infty)$        | $p_{2k+2}$ | $\alpha_{k+1}$ |

Σε κάθε δείγμα μεγέθους  $n$  που συλλέγεται από την παραγωγική διεργασία αντιστοιχεί ένα σκορ ανάλογο με την περιοχή στην οποία ανήκει η (δειγματική) τυπική απόκλισή του. Η γενική ιδέα λειτουργίας του διαγράμματος ροής αθροίσματος είναι να προσθέτουμε στο αθροιστικό σκορ του προηγούμενου δείγματος το ατομικό σκορ του νέου δείγματος. Ωστόσο, στην περίπτωση που η τυπική απόκλιση του τρέχοντος δείγματος πέσει στην άλλη πλευρά της κεντρικής γραμμής σε σχέση με το προηγούμενο δείγμα, τότε η διαδικασία σχηματισμού του αθροιστικού σκορ ξεκινάει εκ νέου με αρχικό σκορ εκείνο που αντιστοιχεί στο τρέχων δείγμα. Το αθροιστικό σκορ συνήθως ξεκινάει από την τιμή 0 και αθροίζει τα διαδοχικά σκορ μέχρις ότου είτε

(1) η τιμή που θα πάρει να είναι ίση ή μεγαλύτερη από μια θετική κρίσιμη τιμή  $H$ , είτε

(2) η τιμή που θα πάρει να είναι ίση ή μικρότερη από μια αρνητική κρίσιμη τιμή  $-H$ .

Όταν το αθροιστικό σκορ πάρει τιμή μεγαλύτερη ή ίση με  $H$ , είτε μικρότερη ή ίση του  $-H$ , τότε υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός στατιστικού ελέγχου.

Η τιμή  $C_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , της ροής αθροίσματος που σχηματίζεται με τη λήψη του  $i$  δείγματος είναι η μη μηδενική τιμή μεταξύ των στατιστικών συναρτήσεων  $CU_i$  και  $CL_i$  που δίνονται από τις σχέσεις

$$CU_i = \begin{cases} CU_{i-1} + \alpha_{j+1}, & \text{αν } UCL_j \leq S_i < UCL_{j+1} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

για  $j = 0, 1, 2, \dots, k$ , και

$$CL_i = \begin{cases} CL_{i-1} - \alpha_{j+1}, & \text{αν } LCL_{j+1} \leq S_i < LCL_j \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

για  $i = 1, 2, \dots$  και  $j = 0, 1, 2, \dots, k$ .

Οι αρχικές τιμές  $CU_0$  και  $CL_0$  συνήθως είναι ίσες με μηδέν, οπότε και  $C_0 = 0$ . Ωστόσο μπορούν να πάρουν μη μηδενική τιμή και τότε αναφερόμαστε στην τεχνική της άμεσης αρχικής αντίδρασης (FIR). Σύμφωνα με τα παραπάνω, το δίπλευρο  $S$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος δίνει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας όταν  $CU_i \geq H$  ( $CL_i \leq -H$ ), όπου  $H$  ( $-H$ ) κατάλληλη θετική (αρνητική) κρίσιμη τιμή.

Ένα μονόπλευρο διάγραμμα ροής αθροίσματος προτείνεται να χρησιμοποιείται αν είναι γνωστό ότι η διακύμανση της διεργασίας μετατοπίζεται μόνο σε υψηλότερο ή μόνο σε

χαμηλότερο επίπεδο. Το άνω (κάτω) μονόπλευρο διάγραμμα για τον έλεγχο μετατόπισης της διακύμανσης σε υψηλότερο (χαμηλότερο) επίπεδο αθροίζει τα σκορ  $\alpha_j$  ( $-\alpha_j$ ) αν η τιμή της τυπικής απόκλισης  $S_i$  ανήκει στην περιοχή  $j^+$  ( $j^-$ ). Αν  $S_i < MDL$  ( $S_i > MDL$ ), τότε η τιμή της στατιστικής συνάρτησης της ροής αθροίσματος παίρνει την τιμή 0. Όταν το αθροιστικό σκορ πάρει τιμή μεγαλύτερη (μικρότερη) ή ίση του  $H$  ( $-H$ ) το διάγραμμα δίνει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας.

Στην συνέχεια, θα παρουσιάσουμε διαγράμματα ελέγχου ροής αθροίσματος με 4 περιοχές εκατέρωθεν της κεντρικής γραμμής (δηλαδή για  $k = 3$ ) με αντίθετα σκορ, τα οποία έχουν μελετηθεί περισσότερο στη βιβλιογραφία και ονομάζονται διαγράμματα ελέγχου ζωνών. Επίσης, θα ασχοληθούμε μόνο με περιπτώσεις όπου οι τιμές των σκορ και του  $H$  είναι πάντα ακέραιοι αριθμοί. Ένα τέτοιο διάγραμμα ελέγχου ζωνών θα το συμβολίζουμε πολύ απλά ως

$$RSS_H(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

όπου  $H$  η κατάλληλη κρίσιμη τιμή και  $a_1, a_2, a_3, a_4$  τα μη αρνητικά σκορ.

### Παράδειγμα

Ως ένα παράδειγμα θα παρουσιαστεί η μελέτη του  $S$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSS_8(0,2,3,8)$  με  $L = 1$ . Έστω ότι η (εντός στατιστικού ελέγχου) κατανομή του χαρακτηριστικού  $X$  που εξετάζουμε ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(10,1)$  και ότι από την παραγωγή εξετάζονται σε τακτά χρονικά διαστήματα δείγματα μεγέθους  $n = 9$ . Η βασική λειτουργία του διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSS_8(0,2,3,8)$  δίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

**Πίνακας 3.2.** Δίπλευρο  $S$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSS_8(0,2,3,8)$ .

| Περιοχή | Διάστημα  | $p$   | Σκορ |
|---------|---|-------|------|
| $4^-$   | $[0, LCL_3) = \left[ 0, \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; \Phi(3L)}^2}{n-1}} \right) = [0, 0.34106)$  | $p_1$ | -8   |
| $3^-$   | $[LCL_3, LCL_2) = \left[ \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; \Phi(3L)}^2}{n-1}}, \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; \Phi(2L)}^2}{n-1}} \right) = [0.34106, 0.51429)$ | $p_2$ | -3   |
| $2^-$   | $[LCL_2, LCL_1) = \left[ \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; \Phi(2L)}^2}{n-1}}, \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; \Phi(L)}^2}{n-1}} \right) = [0.51429, 0.72209)$  | $p_3$ | -2   |

|                |   |       |    |
|----------------|---|-------|----|
| 1 <sup>-</sup> | $[LCL_1, MDL) = \left[ \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; \Phi(L)}^2}{n-1}}, \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; 0.5}^2}{n-1}} \right) = [0.72209, 0.95813)$             | $p_4$ | -0 |
| 1 <sup>+</sup> | $[MDL, UCL_1) = \left[ \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; 0.5}^2}{n-1}}, \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; 1-\Phi(L)}^2}{n-1}} \right) = [0.95813, 1.21637)$           | $p_5$ | +0 |
| 2 <sup>+</sup> | $[UCL_1, UCL_2) = \left[ \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; 1-\Phi(L)}^2}{n-1}}, \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; 1-\Phi(2L)}^2}{n-1}} \right) = [1.21637, 1.49178)$  | $p_6$ | +2 |
| 3 <sup>+</sup> | $[UCL_2, UCL_3) = \left[ \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; 1-\Phi(2L)}^2}{n-1}}, \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; 1-\Phi(3L)}^2}{n-1}} \right) = [1.49178, 1.78049)$ | $p_7$ | +3 |
| 4 <sup>+</sup> | $[UCL_3, \infty) = \left[ \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; 1-\Phi(3L)}^2}{n-1}}, \infty \right) = [1.78049, \infty)$   | $p_8$ | +8 |

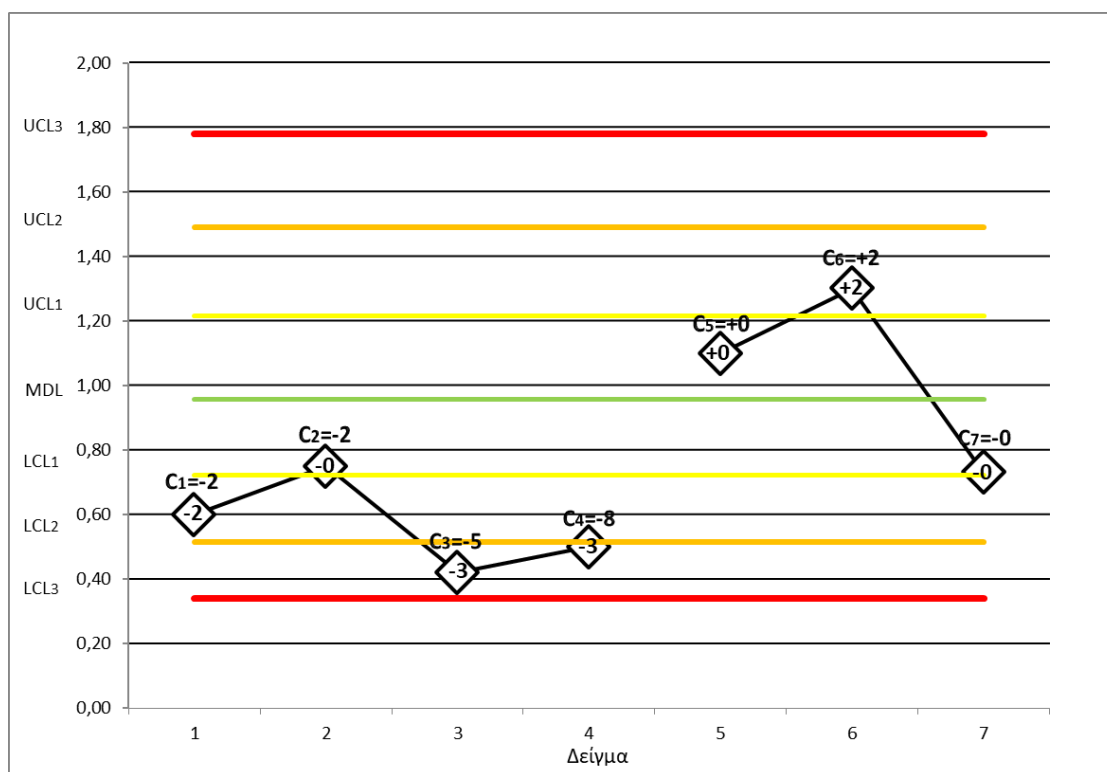
Έστω ότι συλλέχθηκαν 7 δείγματα, των οποίων δίνεται η (δειγματική) τυπική απόκλιση, το σκορ αλλά και το αθροιστικό σκορ στον παρακάτω πίνακα.

**Πίνακας 3.3.** Δειγματική τυπική απόκλιση, σκορ και αθροιστικό σκορ 7 δειγμάτων για το δίπλευρο  $S$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSS_8(0,2,3,8)$  με  $L = 1$ .

| Δείγμα $i$ | $S_i$ | Σκορ | Αθροιστικό σκορ |
|------------|-------|------|-----------------|
| 1          | 0.6   | -2   | -2              |
| 2          | 0.75  | -0   | -2              |
| 3          | 0.42  | -3   | -5              |
| 4          | 0.5   | -3   | -8              |
| 5          | 1.1   | +0   | +0              |
| 6          | 1.3   | +2   | +2              |
| 7          | 0.73  | -0   | -0              |

Τα σκορ ανά σημείο  $S_i$  μαζί με τις ζώνες του αθροιστικού διαγράμματος δίνονται στο Σχήμα 3.1. Στο 1<sup>ο</sup> δείγμα η τιμή της δειγματικής τυπικής απόκλισης είναι  $S_1 = 0.6$ , τιμή που ανήκει στην περιοχή 2<sup>-</sup>. Άρα, το σκορ που του αντιστοιχεί είναι  $CL_1 = -2$  και το αθροιστικό σκορ παίρνει την τιμή  $C_1 = -2$ . Στο 2<sup>ο</sup> δείγμα η τιμή της δειγματικής τυπικής απόκλισης είναι  $S_2 = 0.75$ , τιμή που ανήκει στην περιοχή 1<sup>-</sup>. Άρα, το σκορ που του αντιστοιχεί είναι

$CL_2 = -0$  και το αθροιστικό σκορ παίρνει την τιμή  $C_2 = -2 - 0 = -2$ . Στο 3<sup>ο</sup> δείγμα η τιμή της δειγματικής τυπικής απόκλισης είναι  $S_3 = 0.42$ , τιμή που ανήκει στην περιοχή 3<sup>-</sup>. Άρα, το σκορ που του αντιστοιχεί είναι  $CL_3 = -3$  και το αθροιστικό σκορ παίρνει την τιμή  $C_3 = -2 - 3 = -5$ . Στο 4<sup>ο</sup> δείγμα η τιμή της δειγματικής τυπικής απόκλισης είναι  $S_4 = 0.5$ , τιμή που ανήκει στην περιοχή 3<sup>-</sup>. Άρα, το σκορ που του αντιστοιχεί είναι  $CL_4 = -3$  και το αθροιστικό σκορ παίρνει την τιμή  $C_4 = -5 - 3 = -8$ . Στο 4<sup>ο</sup> δείγμα λοιπόν, έχουμε ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας και γι' αυτό στο διάγραμμα ελέγχου δεν ενώνονται με γραμμή το 4<sup>ο</sup> με το 5<sup>ο</sup> δείγμα. Η διαδικασία σχηματισμού του αθροιστικού σκορ στο 5<sup>ο</sup> δείγμα ξεκινάει από την αρχή. Στο 5<sup>ο</sup> δείγμα η τιμή της δειγματικής τυπικής απόκλισης είναι  $S_5 = 1.1$ , τιμή που ανήκει στην περιοχή 1<sup>+</sup>. Άρα, το σκορ που του αντιστοιχεί είναι  $CL_5 = +0$  και το αθροιστικό σκορ παίρνει την τιμή  $C_5 = +0$ . Στο 6<sup>ο</sup> δείγμα η τιμή της δειγματικής τυπικής απόκλισης είναι  $S_6 = 1.3$ , τιμή που ανήκει στην περιοχή 2<sup>+</sup>. Άρα, το σκορ που του αντιστοιχεί είναι  $CL_6 = +2$  και το αθροιστικό σκορ παίρνει την τιμή  $C_6 = +0 + 2 = +2$ . Στο τελευταίο δείγμα η τιμή της δειγματικής τυπικής απόκλισης είναι  $S_7 = 0.73$ , τιμή που ανήκει στην περιοχή 1<sup>-</sup>. Άρα, το σκορ που του αντιστοιχεί είναι  $CL_7 = -0$  και το αθροιστικό σκορ παίρνει την τιμή  $C_7 = -0$ .



**Σχήμα 3.1.** Παράδειγμα δίπλευρου S διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSS_8(0,2,3,8)$  με  $L = 1$ .

### 3.3 Ανάλυση του $S$ διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος με χρήση μαρκοβιανών αλυσίδων

Στο προηγούμενο κεφάλαιο στην Παράγραφο 2.3 παρουσιάσαμε τη μέθοδο μέσω της οποίας μπορούμε να μελετήσουμε την κατανομή του μήκους ροής ενός  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος και κατ' επέκταση να υπολογίσουμε το μέσο μήκος ροής για δεδομένη μετατόπιση του μέσου μιας παραγωγικής διεργασίας. Αυτή τη μέθοδο που έχει χρησιμοποιηθεί από πολλούς συγγραφείς όπως οι Champ & Ridgon (1997), Acosta-Meija & Pignatiello (2010) και Khoo et al. (2013), βασίστηκαν και οι Rakitzis & Antzoulakos (2016) για τη μελέτη του  $S$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος. Επομένως, η μεθοδολογία είναι ίδια για τα διαγράμματα ελέγχου ροής αθροίσματος είτε αφορά το μέσο είτε τη διασπορά της παραγωγικής διεργασίας.

Στη συνέχεια θα δοθούν δύο εφαρμογές της μεθόδου μαρκοβιανών αλυσίδων στη μελέτη του  $S$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος. Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού  $X$  που εξετάζουμε (για εντός στατιστικού ελέγχου διεργασία) ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(\mu_0, \sigma_0^2)$  με γνωστή μέση τιμή  $\mu_0$  και γνωστή τυπική απόκλιση  $\sigma_0$ . Από τη διεργασία λαμβάνονται δείγματα μεγέθους  $n$  και υπολογίζεται η δειγματική τυπική απόκλιση  $S_i$ . Ας υποθέσουμε ότι η εντός ελέγχου κατανομή άλλαξε λόγω μετατόπισης της τυπικής απόκλισης από την (εντός ελέγχου) τιμή  $\sigma_0$  στην (εκτός ελέγχου) τιμή  $\sigma_1 = \tau\sigma_0$  ( $\tau > 0$ ), δηλαδή η εκτός ελέγχου κατανομή είναι η  $N(\mu_0, \sigma_1^2)$  (ή ισοδύναμα  $N(\mu_0, (\tau\sigma_0)^2)$ ).

- **Εφαρμογή 1**

Σαν πρώτη εφαρμογή θα παρουσιαστεί η μελέτη του  $S$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSS_8(0,2,3,8)$  με  $L = 1$  και  $n = 9$  το οποίο παρουσιάστηκε στο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των μαρκοβιανών αλυσίδων έχουμε ότι  $T = \{0, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm 7\}$  και η μορφή του πίνακα  $\mathbf{P}$  είναι η ακόλουθη

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{1}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} & -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & c \\ -7 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_5 & p_6 & p_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_8 + p_3 + p_2 + p_1 \\ -6 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_5 & p_6 & p_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_8 + p_3 + p_2 + p_1 \\ -5 & p_3 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & p_5 & p_6 & p_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_8 + p_2 + p_1 \\ -4 & p_2 & p_3 & 0 & p_4 & 0 & 0 & p_5 & p_6 & p_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_8 + p_1 \\ -3 & 0 & p_2 & p_3 & 0 & p_4 & 0 & p_5 & p_6 & p_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_8 + p_1 \\ -2 & 0 & 0 & p_2 & p_3 & 0 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_8 + p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & p_3 & p_5 + p_4 & p_6 & p_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_8 + p_1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & 0 & p_6 & p_7 & 0 & 0 & p_8 + p_1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & p_5 & 0 & p_6 & p_7 & 0 & p_8 + p_1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & 0 & p_5 & 0 & p_6 & p_7 & p_8 + p_1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & 0 & 0 & p_5 & 0 & p_6 & p_1 + p_7 + p_8 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_5 & 0 & p_1 + p_6 + p_7 + p_8 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_5 & p_1 + p_6 + p_7 + p_8 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για την πιθανότητα  $p_j$  ( $j = 1,2,3,4$ ) που δηλώνει την πιθανότητα να είναι εντός της περιοχής  $j^-$  του διαγράμματος η τιμή μιας δειγματικής τυπικής απόκλισης  $S_i$ , έχουμε τον τύπο

$$p_j = F_{n-1} \left( \frac{(n-1)LCL_{4-j}^2}{(\tau\sigma_0)^2} \right) - F_{n-1} \left( \frac{(n-1)LCL_{5-j}^2}{(\tau\sigma_0)^2} \right).$$

Ενώ για την πιθανότητα  $p_j$  ( $j = 5,6,7,8$ ) που δηλώνει την πιθανότητα να είναι εντός της περιοχής  $j^+$  του διαγράμματος η τιμή μιας δειγματικής τυπικής απόκλισης  $S_i$ , έχουμε τον τύπο

$$p_j = F_{n-1} \left( \frac{(n-1)UCL_{4-j}^2}{(\tau\sigma_0)^2} \right) - F_{n-1} \left( \frac{(n-1)UCL_{5-j}^2}{(\tau\sigma_0)^2} \right).$$

Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση που η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου ( $\tau = 1$ ) για τις παραπάνω πιθανότητες έχουμε:

$$p_1 = p_8 = 0.00135$$

$$p_2 = p_7 = 0.02140$$

$$p_3 = p_6 = 0.13591$$

$$p_4 = p_5 = 0.34134$$

Από τη στιγμή που τα όρια ελέγχου είναι γνωστά μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής  $ARL_1$  για διάφορες μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης του χαρακτηριστικού  $X$  από την τιμή  $\sigma_0$  στη θέση  $\sigma_1 = \tau\sigma_0$ . Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται ενδεικτικές τιμές του  $ARL$  συναρτήσει του  $\tau$ .

**Πίνακας 3.4.** Τιμές  $ARL$  για το  $S$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος

$RSS_8(0,2,3,8)$  με  $L = 1$  και  $n = 9$

| $\tau$ | $ARL_1$    |
|--------|------------|
| 0.2    | 1.003050   |
| 0.4    | 2.134413   |
| 0.6    | 4.187004   |
| 0.8    | 15.943794  |
| 1.0    | 153.815769 |
| 1.2    | 14.940658  |
| 1.4    | 4.991004   |
| 1.6    | 2.868676   |
| 1.8    | 2.015962   |
| 2.0    | 1.587073   |
| 2.2    | 1.351715   |
| 2.4    | 1.216658   |
| 2.6    | 1.136676   |
| 2.8    | 1.088050   |
| 3.0    | 1.057798   |

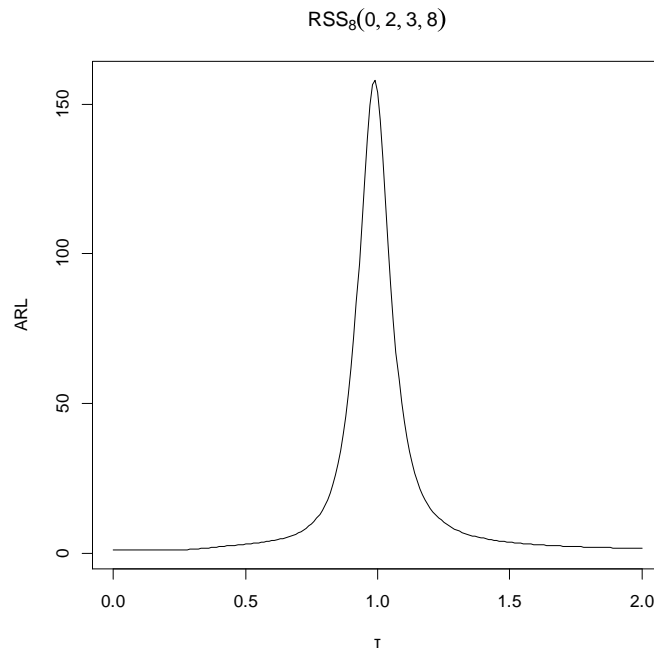
Για τον υπολογισμό του  $ARL$  χρησιμοποιήθηκε ο τύπος

$$ARL = E(N) = \mathbf{a}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{1}'$$

όπου  $\mathbf{a}$  είναι το διάνυσμα γραμμή διάστασης  $1 \times 13$  και όλα τα στοιχεία του είναι 0 εκτός από την 7<sup>η</sup> συνιστώσα που παίρνει την τιμή 1 και αντιστοιχεί στη μεταβατική κατάσταση 0.

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται η καμπύλη  $ARL$  του  $S$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSS_8(0,2,3,8)$  με  $L = 1$  και  $n = 9$ .





**Σχήμα 3.2.** Καμπύλη  $ARL$  του  $S$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSS_8(0,2,3,8)$  με  $L = 1$  και  $n = 9$

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται η συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ροής  $N$  του  $S$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSS_8(0,2,3,8)$  με  $L = 1$  και  $n = 9$  για τρεις διαφορετικές μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης. Εξετάζονται οι περιπτώσεις

$$\tau = 1 : \sigma_1 = 1 \cdot 1 = 1$$

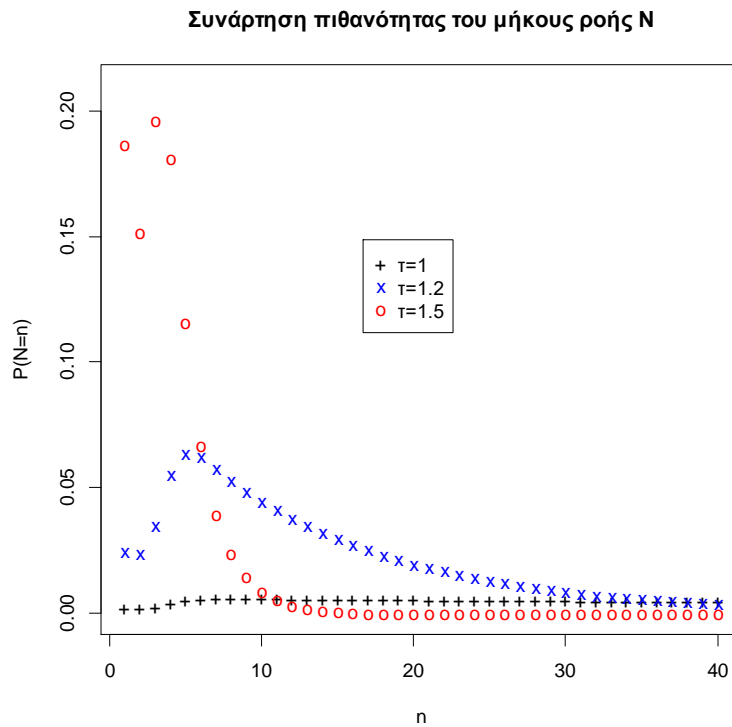
$$\tau = 1.2 : \sigma_1 = 1 \cdot 1.2 = 1.2$$

$$\tau = 1.5 : \sigma_1 = 1 \cdot 1.5 = 1.5$$

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας  $P(N = n)$  χρησιμοποιήθηκε ο τύπος

$$P(N = n) = \mathbf{aQ}^{n-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{1}', \quad n = 1, 2, \dots$$

όπου  $\mathbf{a}$  είναι το διάνυσμα γραμμή διάστασης  $1 \times 13$  και όλα τα στοιχεία του είναι 0 εκτός από την 7<sup>η</sup> συνιστώσα που παίρνει την τιμή 1 και αντιστοιχεί στη μεταβατική κατάσταση 0.



**Σχήμα 3.3.** Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ροής  $S$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSS_8(0,2,3,8)$  με  $L = 1$  και  $n = 9$  για  $\tau = 1, 1.2, 1.5$

- **Εφαρμογή 2**

Ως μια δεύτερη εφαρμογή θα παρουσιαστεί αναλυτικά η μελέτη του δίπλευρου  $S$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSS_5(0,1,2,3)$  το οποίο παρουσιάστηκε από τον Reynolds (1971) και για το οποίο θέλουμε να ισχύει ότι  $ARL_0 = 200$ . Έστω ότι η (εντός στατιστικού ελέγχου) κατανομή του χαρακτηριστικού  $X$  που εξετάζουμε ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(10, 1)$  και ότι από την παραγωγή εξετάζονται σε τακτά χρονικά διαστήματα δείγματα μεγέθους  $n = 5$ . Η βασική λειτουργία του διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSS_5(0,1,2,3)$  δίνεται στον ακόλουθο πίνακα

**Πίνακας 3.5.** Δίπλευρο  $S$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSS_5(0,1,2,3)$

| Περιοχή | Διάστημα  | $p$   | Σκορ |
|---------|---|-------|------|
| $4^-$   | $[0, LCL_3) = \left[ 0, \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; \Phi(3L)}^2}{n-1}} \right)$ | $p_1$ | -3   |

|       |  |       |      |
|-------|--|-------|------|
| $3^-$ | $[LCL_3, LCL_2) = \left[ \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; \Phi(3L)}^2}{n-1}}, \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; \Phi(2L)}^2}{n-1}} \right)$     | $p_2$ | $-2$ |
| $2^-$ | $[LCL_2, LCL_1) = \left[ \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; \Phi(2L)}^2}{n-1}}, \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; \Phi(L)}^2}{n-1}} \right)$      | $p_3$ | $-1$ |
| $1^-$ | $[LCL_1, MDL) = \left[ \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; \Phi(L)}^2}{n-1}}, \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; 0.5}^2}{n-1}} \right)$             | $p_4$ | $-0$ |
| $1^+$ | $[MDL, UCL_1) = \left[ \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; 0.5}^2}{n-1}}, \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; 1-\Phi(L)}^2}{n-1}} \right)$           | $p_5$ | $+0$ |
| $2^+$ | $[UCL_1, UCL_2) = \left[ \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; 1-\Phi(L)}^2}{n-1}}, \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; 1-\Phi(2L)}^2}{n-1}} \right)$  | $p_6$ | $+1$ |
| $3^+$ | $[UCL_2, UCL_3) = \left[ \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; 1-\Phi(2L)}^2}{n-1}}, \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; 1-\Phi(3L)}^2}{n-1}} \right)$ | $p_7$ | $+2$ |
| $4^+$ | $[UCL_3, \infty) = \left[ \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; 1-\Phi(3L)}^2}{n-1}}, \infty \right)$  | $p_8$ | $+3$ |

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των μαρκοβιανών αλυσίδων έχουμε ότι  $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$  και η μορφή του πίνακα  $\mathbf{P}$  είναι η ακόλουθη

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{1}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & c \\ -4 & p_4 & 0 & 0 & 0 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & 0 & p_3 + p_2 + p_1 \\ -3 & p_3 & p_4 & 0 & 0 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & 0 & p_2 + p_1 \\ -2 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & 0 & p_1 \\ -1 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_5 + p_4 & p_6 & p_7 & p_8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & 0 \\ 2 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 \\ 3 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & 0 & p_5 & p_6 & p_7 + p_8 \\ 4 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & 0 & 0 & p_5 & p_6 + p_7 + p_8 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Για την πιθανότητα  $p_j$  ( $j = 1,2,3,4$ ) που δηλώνει την πιθανότητα να είναι εντός της περιοχής  $j^-$  του διαγράμματος η τιμή μιας δειγματικής τυπικής απόκλισης  $S_i$ , έχουμε τον τύπο

$$p_j = F_{n-1} \left( \frac{(n-1)LCL_{4-j}^2}{(\tau\sigma_0)^2} \right) - F_{n-1} \left( \frac{(n-1)LCL_{5-j}^2}{(\tau\sigma_0)^2} \right).$$

Ενώ για την πιθανότητα  $p_j$  ( $j = 5,6,7,8$ ) που δηλώνει την πιθανότητα να είναι εντός της περιοχής  $j^+$  του διαγράμματος η τιμή μιας δειγματικής τυπικής απόκλισης  $S_i$ , έχουμε τον τύπο

$$p_j = F_{n-1} \left( \frac{(n-1)UCL_{4-j}^2}{(\tau\sigma_0)^2} \right) - F_{n-1} \left( \frac{(n-1)UCL_{5-j}^2}{(\tau\sigma_0)^2} \right).$$

Από την εξίσωση

$$ARL_0 = \mathbf{a}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{1}' = 200$$

όπου  $\mathbf{a} = (0,0,0,0,1,0,0,0)$ , προκύπτει ότι  $L = 0.9252704$ . Συνεπώς

$$LCL_1 = 0.617018, \quad LCL_2 = 0.372646, \quad LCL_3 = 0.195071$$

$$UCL_1 = 1.255616, \quad UCL_2 = 1.624023, \quad UCL_3 = 2.012917$$

Από τη στιγμή που τα όρια ελέγχου είναι γνωστά μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής  $ARL_1$  για διάφορες μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης του χαρακτηριστικού  $X$  από την τιμή  $\sigma_0$  στη θέση  $\sigma_1 = \tau\sigma_0$ . Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται ενδεικτικές τιμές του  $ARL$  συναρτήσει του  $\tau$ .

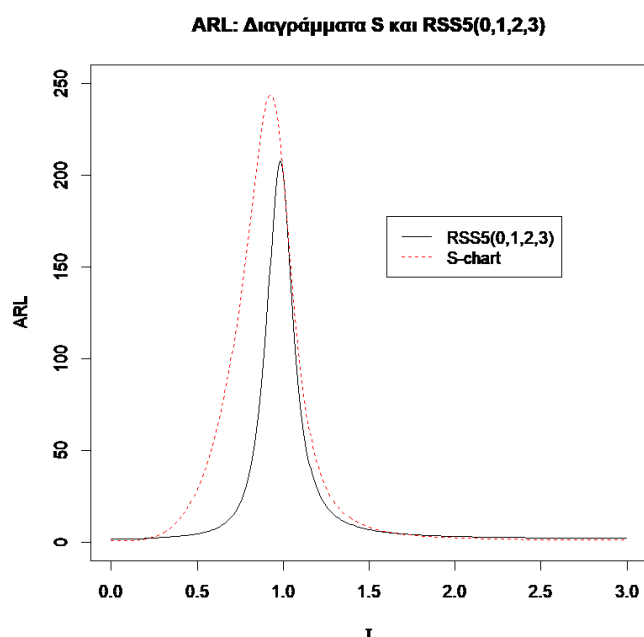
**Πίνακας 3.6.** Τιμές  $ARL$  για το  $S$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος

$RSS_5(0,1,2,3)$  με  $ARL_0 = 200$ .

| $\tau$ | $ARL_1$   |
|--------|-----------|
| 0.2    | 2.196257  |
| 0.4    | 3.508972  |
| 0.6    | 7.201874  |
| 0.8    | 36.624408 |
| 1.0    | 200       |
| 1.2    | 28.315417 |
| 1.4    | 9.527874  |
| 1.6    | 5.538469  |
| 1.8    | 4.051801  |
| 2.0    | 3.324552  |
| 2.2    | 2.911577  |

|     |          |
|-----|----------|
| 2.4 | 2.654776 |
| 2.6 | 2.485188 |
| 2.8 | 2.368299 |
| 3.0 | 2.285094 |

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται η καμπύλη  $ARL$  του  $S$  διαγράμματος ελέγχου ρόης αθροίσματος  $RSS_5(0,1,2,3)$  με  $ARL_0 = 200$ , μαζί με την αντίστοιχη καμπύλη του  $S$  διαγράμματος ελέγχου με ίσα όρια πιθανότητας.



**Σχήμα 3.4.** Διάγραμμα  $ARL$ :  $RSS_5(0,1,2,3)$  και  $S$  διάγραμμα ελέγχου με ίσα όρια πιθανότητας ( $ARL_0 = 200$ ).

Είναι εμφανής η ανωτερότητα του διαγράμματος ελέγχου ρόης αθροίσματος  $RSS_5(0,1,2,3)$  σχεδόν σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων της τυπικής απόκλισης (εκτός των τιμών  $\tau > 1.7$  και  $\tau < 0.3$ ) έναντι του  $S$  διαγράμματος με ίσα όρια πιθανότητας.

### 3.4 Το $R$ διάγραμμα ελέγχου ρόης αθροίσματος

Το  $R$  διάγραμμα ελέγχου ρόης αθροίσματος ( $R$  run sum control chart) παρουσιάστηκε από τους Aguirre-Torres & Reyes-Lopez (1999) και μελετήθηκε εκτενέστερα από τους Acosta-Meija & Pignatiello (2010).

Ως συνήθως το χαρακτηριστικό  $X$  που παρακολουθούμε με δείγματα μεγέθους  $n$  έχει (εντός στατιστικού ελέγχου) κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση  $\sigma_0$ . Στο  $R$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος απεικονίζονται οι τιμές του δειγματικού εύρους  $R$ . Σε μια εκτός στατιστικού ελέγχου κατάσταση η τυπική απόκλιση του χαρακτηριστικού  $X$  αλλάζει σε  $\sigma_1 = \tau\sigma_0$  ( $\tau > 0$ ). Μια αύξηση στην τυπική απόκλιση της διεργασίας αντιστοιχεί σε τιμές  $\tau > 1$ , ενώ μια μείωση σε τιμές  $0 < \tau < 1$ . Για  $\tau = 1$ , προφανώς η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου. Για την μέση τιμή του χαρακτηριστικού  $X$  υποθέτουμε ότι παραμένει πάντα ίση με  $\mu_0$ .

Το διάγραμμα ελέγχου χωρίζεται σε περιοχές εκατέρωθεν της κεντρικής γραμμής που είναι η γραμμή της διαμέσου

$$MDL = F_{n,R}^{-1}(0.5)$$

όπου  $F_{n,R}(\cdot)$  είναι η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής  $R$ .

Οι περιοχές πάνω από την κεντρική γραμμή συμβολίζονται ως  $1^+, 2^+, \dots, k^+, (k+1)^+$  και οι περιοχές κάτω από την κεντρική γραμμή συμβολίζονται ως  $1^-, 2^-, \dots, k^-, (k+1)^-$ . Συνήθως, οι περιοχές κάτω από την κεντρική γραμμή δεν είναι συμμετρικές των περιοχών πάνω από την κεντρική γραμμή. Σε κάθε περιοχή αντιστοιχεί ένα σκορ. Το σκορ  $q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k+1$ ) που αντιστοιχεί στην περιοχή  $j^+$  είναι μη αρνητικό ( $q_j \geq 0$ ), ενώ το σκορ  $-q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k+1$ ) που αντιστοιχεί στην περιοχή  $j^-$  είναι μη θετικό ( $-q_j \leq 0$ ).

Όλα τα παραπάνω συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα

**Πίνακας 3.7.** Δίπλευρο  $R$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος με  $2k + 2$  περιοχές

| Περιοχή   | Διάστημα                   | Πιθανότητα | Σκορ       |
|-----------|----------------------------|------------|------------|
| $(k+1)^-$ | $(0, l_{kd})$              | $p_1$      | $-q_{k+1}$ |
| $k^-$     | $[l_{kd}, l_{(k-1)d})$     | $p_2$      | $-q_k$     |
| $(k-1)^-$ | $[l_{(k-1)d}, l_{(k-2)d})$ | $p_3$      | $-q_{k-1}$ |
| $\vdots$  | $\vdots$                   | $\vdots$   | $\vdots$   |
| $2^-$     | $[l_{2d}, l_{1d})$         | $p_k$      | $-q_2$     |
| $1^-$     | $[l_{1d}, l_0)$            | $p_{k+1}$  | $-q_1$     |
| $1^+$     | $[l_0, l_{1u})$            | $p_{k+2}$  | $q_1$      |
| $2^+$     | $[l_{1u}, l_{2u})$         | $p_{k+3}$  | $q_2$      |
| $\vdots$  | $\vdots$                   | $\vdots$   | $\vdots$   |
| $(k-1)^+$ | $[l_{(k-2)u}, l_{(k-1)u})$ | $p_{2k}$   | $q_{k-1}$  |
| $k^+$     | $[l_{(k-1)u}, l_{ku})$     | $p_{2k-1}$ | $q_k$      |

|           |                    |            |           |
|-----------|--------------------|------------|-----------|
| $(k+1)^+$ | $[l_{ku}, \infty)$ | $p_{2k+2}$ | $q_{k+1}$ |
|-----------|--------------------|------------|-----------|

Σε κάθε δείγμα μεγέθους  $n$  που συλλέγεται από την παραγωγική διεργασία αντιστοιχεί ένα σκορ ανάλογα με την περιοχή στην οποία ανήκει το (δειγματικό) εύρος του. Η γενική ιδέα λειτουργίας του διαγράμματος ροής αθροίσματος όπως έχουμε αναφέρει είναι να προσθέτουμε στο αθροιστικό σκορ του προηγούμενου δείγματος το ατομικό σκορ του νέου δείγματος. Ωστόσο, στην περίπτωση που το εύρος του τρέχοντος δείγματος πέσει στην άλλη πλευρά της κεντρικής γραμμής σε σχέση με το προηγούμενο δείγμα, τότε η διαδικασία σχηματισμού του αθροιστικού σκορ ξεκινάει εκ νέου με αρχικό σκορ εκείνο που αντιστοιχεί στο τρέχων δείγμα. Το αθροιστικό σκορ συνήθως ξεκινάει από την τιμή 0 και αθροίζει τα διαδοχικά σκορ μέχρις ότου είτε

- (1) η τιμή που θα πάρει να είναι ίση ή μεγαλύτερη από μια θετική κρίσιμη τιμή  $L$ , είτε
- (2) η τιμή που θα πάρει να είναι ίση ή μικρότερη από μια αρνητική κρίσιμη τιμή  $-L$ .

Όταν το αθροιστικό σκορ πάρει τιμή μεγαλύτερη ή ίση με  $L$ , είτε μικρότερη ή ίση του  $-L$ , τότε υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός στατιστικού ελέγχου.

Η τιμή  $S_t$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , της ροής αθροίσματος που σχηματίζεται με τη λήψη του  $t$  δείγματος δίνεται από τον τύπο

$$S_t = \max\{SU_t, -SL_t\}$$

όπου

$$SU_t = \begin{cases} SU_{t-1} + q_j, & \text{αν } l_{(j-1)u} \leq R_t < l_{ju} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

για  $j = 1, 2, \dots, k+1$ , και

$$SL_t = \begin{cases} SL_{t-1} - q_j, & \text{αν } l_{jd} \leq R_t < l_{(j-1)d} \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

για  $j = 1, 2, \dots, k+1$ .

Οι αρχικές τιμές  $SU_0$  και  $SL_0$  συνήθως είναι ίσες με μηδέν, οπότε και  $S_0 = 0$ . Ωστόσο μπορούν να πάρουν μη μηδενική τιμή και τότε αναφερόμαστε στην τεχνική της άμεσης αρχικής αντίδρασης (FIR). Σύμφωνα με τα παραπάνω, το δίπλευρο  $R$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος δίνει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας όταν  $SU_i \geq L$  ( $SL_i \leq -L$ ), όπου  $L$  ( $-L$ ) κατάλληλη θετική (αρνητική) κρίσιμη τιμή.

Ένα μονόπλευρο διάγραμμα ροής αθροίσματος προτείνεται να χρησιμοποιείται αν είναι γνωστό ότι η διακύμανση της διεργασίας μετατοπίζεται μόνο σε υψηλότερο ή μόνο σε χαμηλότερο επίπεδο. Το άνω (κάτω) μονόπλευρο διάγραμμα για τον έλεγχο μετατόπισης της

διακύμανσης σε υψηλότερο (χαμηλότερο) επίπεδο αθροίζει τα σκορ  $q_j$  ( $-q_j$ ) αν η τιμή του εύρους  $R_i$  ανήκει στην περιοχή  $j^+$  ( $j^-$ ). Αν  $R_i < MDL$  ( $R_i > MDL$ ), τότε η τιμή της στατιστικής συνάρτησης της ροής αθροίσματος παίρνει την τιμή 0. Όταν το αθροιστικό σκορ πάρει τιμή μεγαλύτερη (μικρότερη) ή ίση του  $L$  ( $-L$ ) το διάγραμμα δίνει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας.

Για την κατασκευή του  $R$  διαγράμματος ροής αθροίσματος, και ειδικότερα για την εύρεση των διαστημάτων του Πίνακα 3.7 έτσι ώστε να υπάρχει δεδομένο εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής,  $ARL_0$  οι Acosta-Meija & Pignatiello (2010) πρότειναν την εξής διαδικασία: Αρχικά υλοποιείται ένα αντίστοιχο  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος, όταν η διεργασία βρίσκεται εντός στατιστικού ελέγχου, με το ίδιο πλήθος διαστημάτων, τα ίδια σκορ, την ίδια κρίσιμη τιμή και το ίδιο εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής,  $ARL_0$ . Έτσι υπολογίζονται οι (εντός ελέγχου) πιθανότητες  $p_{10}, p_{20}, \dots, p_{(2k+2)0}$  που είναι, αντίστοιχα, οι πιθανότητες να ανήκει η στατιστική συνάρτηση  $\bar{X}$  στην περιοχή  $(k+1)^-, k^-, \dots, 1^-, 1^+, \dots, k^+, (k+1)^+$ . Τότε, τα όρια των περιοχών του  $R$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος υπολογίζονται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε οι περιοχές του να έχουν τις ίδιες πιθανότητες ( $p_{10}, p_{20}, \dots, p_{(2k+2)0}$ ).

Για παράδειγμα, για την περιοχή  $(k-1)^-$ , απαιτούμε να ισχύει

$$P(l_{(k-1)d} \leq R < l_{(k-2)d}) = p_{30}.$$

Ειδικότερα, για τον ακριβή υπολογισμό του ορίου  $l_{(k-2)d}$ , έχουμε ότι

$$P(R < l_{(k-2)d}) = p_{10} + p_{20} + p_{30} = p.$$

Συνεπώς

$$l_{(k-2)d} = F_{n,R}^{-1}(p) = \sigma_0 F_{n,W}^{-1}(p) = \sigma_0 W_{n,p}$$

όπου η τυχαία μεταβλητή  $W = R/\sigma_0$  είναι γνωστή με το όνομα τυποποιημένο εύρος (standardised range),  $F_{n,w}(\cdot)$  είναι η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής  $W$ , και  $W_{n,p}$  το  $p$ -ποσοστιαίο σημείο της  $W$ . Με ανάλογο τρόπο μπορούν να βρεθούν όλα τα όρια των διαστημάτων του Πίνακα 3.7.

Στην συνέχεια, θα παρουσιάσουμε, ως συνήθως, διαγράμματα ελέγχου ροής αθροίσματος με 4 περιοχές εκατέρωθεν της κεντρικής γραμμής, δηλαδή για  $k=3$ , τα οποία έχουν μελετηθεί περισσότερο στη βιβλιογραφία και ονομάζονται διαγράμματα ελέγχου ζωνών. Επίσης, θα ασχοληθούμε μόνο με περιπτώσεις όπου οι τιμές των σκορ και του  $L$  είναι πάντα ακέραιοι αριθμοί. Ένα τέτοιο διάγραμμα ελέγχου ζωνών θα το συμβολίζουμε πολύ απλά ως

$$RSR_L(q_1, q_2, q_3, q_4).$$



### 3.5 Ανάλυση του $R$ διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος με χρήση Μαρκοβιανών αλυσίδων

Στην Παράγραφο 2.3 παρουσιάσαμε τη μέθοδο μέσω της οποίας μπορούμε να μελετήσουμε την κατανομή του μήκους ροής ενός διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος και κατ' επέκταση να υπολογίσουμε το μέσο μήκος ροής για δεδομένη μετατόπιση του μέσου μιας παραγωγικής διεργασίας. Σε αυτήν την μέθοδο, η οποία αρχικά χρησιμοποιήθηκε από τους Champ & Ridgon (1997), βασίστηκαν και οι Acosta-Meija & Pignatiello (2010) για τη μελέτη του  $R$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος. Στη συνέχεια θα δοθούν δύο εφαρμογές αυτής της μεθόδου στην περίπτωση του  $R$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος.

Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού  $X$  που εξετάζουμε (για εντός στατιστικού ελέγχου διεργασία) ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(\mu_0, \sigma_0^2)$  με γνωστή μέση τιμή  $\mu_0$  και γνωστή τυπική απόκλιση  $\sigma_0$ . Από τη διεργασία λαμβάνονται δείγματα μεγέθους  $n$  και υπολογίζεται το δειγματικό εύρος  $R_i$ . Ας υποθέσουμε ότι η εντός ελέγχου κατανομή άλλαξε λόγω μετατόπισης της τυπικής απόκλισης από την (εντός ελέγχου) τιμή  $\sigma_0$  στην (εκτός ελέγχου) τιμή  $\sigma_1 = \tau\sigma_0$  ( $\tau > 0$ ), δηλαδή η εκτός ελέγχου κατανομή είναι η  $N(\mu_0, \sigma_1^2)$  (ή ισοδύναμα  $N(\mu_0, (\tau\sigma_0)^2)$ ).

#### • Εφαρμογή 3

Σαν πρώτη εφαρμογή θα παρουσιαστεί η μελέτη του  $R$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSR_8(0,2,4,8)$  και για το οποίο θέλουμε να ισχύει ότι  $ARL_0 = 370.4$ . Έστω ότι η (εντός στατιστικού ελέγχου) κατανομή του χαρακτηριστικού  $X$  που εξετάζουμε ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(0, 1)$  και ότι από την παραγωγή εξετάζονται σε τακτά χρονικά διαστήματα δείγματα μεγέθους  $n = 9$ .

Υλοποιώντας το αντίστοιχο  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος παίρνουμε ότι

$$p_{10} = p_{80} = 0.000157$$

$$p_{20} = p_{70} = 0.007996$$

$$p_{30} = p_{60} = 0.106724$$

$$p_{40} = p_{50} = 0.385122.$$

Έτσι η βασική λειτουργία του διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSR_8(0,2,4,8)$  δίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

**Πίνακας 3.8.** Δίπλευρο  $R$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSR_8(0,2,4,8)$

| Περιοχή | Διάστημα   | $p$   | Σκορ |
|---------|--|-------|------|
| $4^-$   | $[0, l_{3d}) = [0, W_{n,p_{10}}) = [0, 0.752398)$  | $p_1$ | -8   |
| $3^-$   | $[l_{3d}, l_{2d}) = [W_{n,p_{10}}, W_{n,p_{10}+p_{20}})$<br>$= [0.752398, 1.302795)$                                     | $p_2$ | -4   |
| $2^-$   | $[l_{2d}, l_{1d}) = [W_{n,p_{10}+p_{20}}, W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}})$<br>$= [1.302795, 2.027142)$                       | $p_3$ | -2   |
| $1^-$   | $[l_{1d}, l_0) = [W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}}, W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}})$<br>$= [2.027143, 2.915438)$            | $p_4$ | -0   |
| $1^+$   | $[l_0, l_{1u})$<br>$= [W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}}, W_{n,p_{10}+p_{20}+\dots+p_{50}})$<br>$= [2.915438, 3.961367)$ | $p_5$ | +0   |
| $2^+$   | $[l_{1u}, l_{2u}) = [W_{n,p_{10}+p_{20}+\dots+p_{50}}, W_{n,p_{10}+p_{20}+\dots+p_{60}})$<br>$= [3.961367, 5.156917)$    | $p_6$ | +2   |
| $3^+$   | $[l_{2u}, l_{3u}) = [W_{n,p_{10}+p_{20}+\dots+p_{60}}, W_{n,p_{10}+p_{20}+\dots+p_{70}})$<br>$= [5.156917, 6.483974)$    | $p_7$ | +4   |
| $4^+$   | $[l_{3u}, \infty) = [W_{n,p_{10}+p_{20}+\dots+p_{70}}, \infty)$<br>$= [6.483974, \infty)$                                | $p_8$ | +8   |

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των μαρκοβιανών αλυσίδων έχουμε ότι  $T = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6\}$  και η μορφή του πίνακα  $P$  είναι η ακόλουθη

$$P = \begin{pmatrix} Q & (I-Q)\mathbf{1}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 6 & c \\ -6 & p_4 & 0 & 0 & p_5 & p_6 & p_7 & 0 & p_1 + p_2 + p_3 + p_8 \\ -4 & p_3 & p_4 & 0 & p_5 & p_6 & p_7 & 0 & p_1 + p_2 + p_8 \\ -2 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & 0 & p_1 + p_8 \\ 0 & 0 & p_2 & p_3 & p_4 + p_5 & p_6 & p_7 & 0 & p_1 + p_8 \\ 2 & 0 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_1 + p_8 \\ 4 & 0 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & p_5 & p_6 & p_1 + p_7 + p_8 \\ 6 & 0 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & 0 & p_5 & p_1 + p_6 + p_7 + p_8 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για τις πιθανότητες  $p_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 8$ ) έχουμε τους τύπους:

$$p_1 = P[R < l_{3d}] = P\left[W < \frac{1}{\delta} l_{3d}\right] = F_{n,w}\left(\frac{1}{\delta} W_{n,p_{10}}\right)$$

$$p_2 = P[l_{3d} < R < l_{2d}] = P\left[\frac{1}{\delta} l_{3d} < W < \frac{1}{\delta} l_{2d}\right] = F_{n,w}\left(\frac{1}{\delta} W_{n,p_{10}+p_{20}}\right) - F_{n,w}\left(\frac{1}{\delta} W_{n,p_{10}}\right)$$

$$\begin{aligned} p_3 &= P[l_{2d} < R < l_{1d}] = P\left[\frac{1}{\delta} l_{2d} < W < \frac{1}{\delta} l_{1d}\right] \\ &= F_{n,w}\left(\frac{1}{\delta} W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}}\right) - F_{n,w}\left(\frac{1}{\delta} W_{n,p_{10}+p_{20}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_4 &= P[l_{1d} < R < l_0] = P\left[\frac{1}{\delta} l_{1d} < W < \frac{1}{\delta} l_0\right] \\ &= F_{n,w}\left(\frac{1}{\delta} W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}}\right) - F_{n,w}\left(\frac{1}{\delta} W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_5 &= P[l_0 < R < l_{1u}] = P\left[\frac{1}{\delta} l_0 < W < \frac{1}{\delta} l_{1u}\right] \\ &= F_{n,w}\left(\frac{1}{\delta} W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}+p_{50}}\right) - F_{n,w}\left(\frac{1}{\delta} W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_6 &= P[l_{1u} < R < l_{2u}] = P\left[\frac{1}{\delta} l_{1u} < W < \frac{1}{\delta} l_{2u}\right] \\ &= F_{n,w}\left(\frac{1}{\delta} W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}+p_{50}+p_{60}}\right) - F_{n,w}\left(\frac{1}{\delta} W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}+p_{50}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_7 &= P[l_{2u} < R < l_{3u}] = P\left[\frac{1}{\delta} l_{2u} < W < \frac{1}{\delta} l_{3u}\right] \\ &= F_{n,w}\left(\frac{1}{\delta} W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}+p_{50}+p_{60}+p_{70}}\right) \\ &\quad - F_{n,w}\left(\frac{1}{\delta} W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}+p_{50}+p_{60}}\right) \end{aligned}$$

$$p_8 = P[R > l_{3u}] = P\left[W > \frac{1}{\delta} l_{3u}\right] = 1 - F_{n,w}\left(\frac{1}{\delta} W_{n,1-p_{80}}\right).$$

Έτσι μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής  $ARL_1$  για διάφορες μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης του χαρακτηριστικού  $X$  από την τιμή  $\sigma_0$  στη θέση  $\sigma_1 = \tau\sigma_0$ . Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται ενδεικτικές τιμές του  $ARL$  συναρτήσει του  $\tau$ .

**Πίνακας 3.9.** Τιμές  $ARL$  για το  $R$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSR_8(0,2,4,8)$ , ( $ARL_0 = 370.4, n = 9$ )

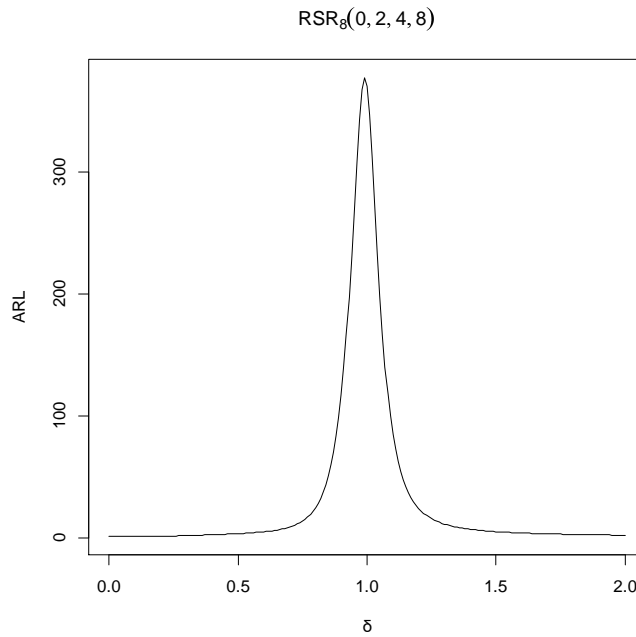
| $\tau$ | $ARL_1$    |
|--------|------------|
| 0.2    | 1.162331   |
| 0.4    | 2.487521   |
| 0.6    | 4.903317   |
| 0.8    | 24.671524  |
| 1.0    | 370.400054 |
| 1.2    | 23.987314  |
| 1.4    | 6.896761   |
| 1.6    | 3.864688   |
| 1.8    | 2.711392   |
| 2.0    | 2.105108   |
| 2.2    | 1.738472   |
| 2.4    | 1.502898   |
| 2.6    | 1.347023   |
| 2.8    | 1.242037   |
| 3.0    | 1.170405   |

Για τον υπολογισμό του  $ARL$  χρησιμοποιήθηκε ο τύπος

$$ARL = E(N) = \mathbf{a}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{1}'.$$

όπου  $\mathbf{a}$  είναι το διάνυσμα γραμμή διάστασης  $1 \times 7$  και όλα τα στοιχεία του είναι 0 εκτός από την 4<sup>η</sup> συνιστώσα που παίρνει την τιμή 1 και αντιστοιχεί στη μεταβατική κατάσταση 0.

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται η καμπύλη  $ARL$  του  $R$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSR_8(0,2,4,8)$  με  $ARL_0 = 370.4$  και  $n = 9$



**Σχήμα 3.5.** Καμπύλη  $ARL$  του  $R$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSR_8(0,2,4,8)$  με  $ARL_0 = 370.4$  και  $n = 9$

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται η συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ροής  $N$  του  $R$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSR_8(0,2,4,8)$  με  $ARL_0 = 370.4$  και  $n = 9$  για τρεις διαφορετικές μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης. Εξετάζονται οι περιπτώσεις

$$\tau = 1 : \sigma_1 = 1 \cdot 1 = 1$$

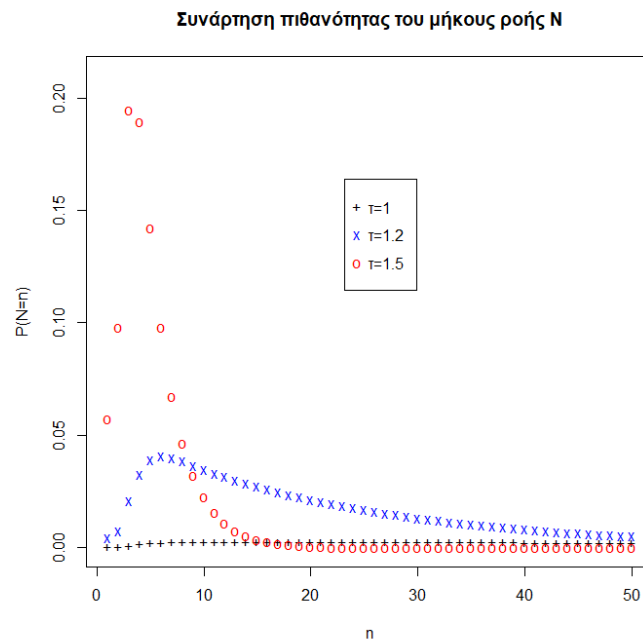
$$\tau = 1.2 : \sigma_1 = 1 \cdot 1.2 = 1.2$$

$$\tau = 1.5 : \sigma_1 = 1 \cdot 1.5 = 1.5$$

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας  $P(N = n)$  χρησιμοποιήθηκε ο τύπος

$$P(N = n) = \mathbf{aQ}^{n-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{1}', \quad n = 1, 2, \dots$$

όπου  $\mathbf{a}$  είναι το διάνυσμα γραμμή διάστασης  $1 \times 7$  και όλα τα στοιχεία του είναι 0 εκτός από την 4<sup>η</sup> συνιστώσα που παίρνει την τιμή 1 και αντιστοιχεί στη μεταβατική κατάσταση 0.



**Σχήμα 3.6.** Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ροής  $R$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSR_8(0,2,4,8)$  με  $ARL_0 = 370.4$ ,  $n = 9$  για  $\tau = 1, 1.2, 1.5$

- **Εφαρμογή 4**

Ως μια δεύτερη εφαρμογή θα παρουσιαστεί αναλυτικά η μελέτη του δίπλευρου  $R$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSR_5(0,1,2,3)$  το οποίο παρουσιάστηκε από τον Reynolds (1971) και για το οποίο θέλουμε να ισχύει ότι  $ARL_0 = 370.4$ . Επιπλέον, θα παρουσιαστεί στο ίδιο διάγραμμα η τεχνική της άμεσης αρχικής αντίδρασης με  $SL_0 = -4$  και  $SU_0 = 4$ . Η τεχνική της άμεσης αρχικής αντίδρασης παρουσιάστηκε από τους Lucas & Crosier (1982) για τα διαγράμματα ελέγχου CUSUM (Cumulative Sum).

Έστω ότι η (εντός στατιστικού ελέγχου) κατανομή του χαρακτηριστικού  $X$  που εξετάζουμε ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(0,1)$  και ότι από την παραγωγή εξετάζονται σε τακτά χρονικά διαστήματα δείγματα μεγέθους  $n = 9$ .

Υλοποιώντας το αντίστοιχο  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος παίρνουμε ότι

$$p_{10} = p_{80} = 0.001232$$

$$p_{20} = p_{70} = 0.020540$$

$$p_{30} = p_{60} = 0.134662$$

$$p_{40} = p_{50} = 0.343565.$$

Έτσι η βασική λειτουργία του διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSR_5(0,1,2,3)$  δίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

**Πίνακας 3.10.** Δίπλευρο  $R$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSR_5(0,1,2,3)$

| Περιοχή | Διάστημα  | $p$   | Σκορ |
|---------|---|-------|------|
| $4^-$   | $[0, l_{3d}) = [0, \sigma_0 W_{n,p_{10}}) = [0, 0.993758)$  | $p_1$ | -3   |
| $3^-$   | $[l_{3d}, l_{2d}) = [W_{n,p_{10}}, W_{n,p_{10}+p_{20}}) = [0.993758, 1.515719)$   | $p_2$ | -2   |
| $2^-$   | $[l_{2d}, l_{1d}) = [W_{n,p_{10}+p_{20}}, W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}})$<br>$= [1.515719, 2.158198)$  | $p_3$ | -1   |
| $1^-$   | $[l_{1d}, l_0) = [W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}}, W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}})$<br>$= [2.158198, 2.915438)$   | $p_4$ | -0   |
| $1^+$   | $[l_0, l_{1u}) = [W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}}, W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}+p_{50}})$<br>$= [2.915438, 3.784012)$                                     | $p_5$ | +0   |
| $2^+$   | $[l_{1u}, l_{2u})$<br>$= [W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}+p_{50}}, W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}+p_{50}+p_{60}})$<br>$= [3.784012, 4.759735)$               | $p_6$ | +1   |
| $3^+$   | $[l_{2u}, l_{3u})$<br>$= [W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}+p_{50}+p_{60}}, W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}+p_{50}+p_{60}+p_{70}})$<br>$= [4.759735, 5.833415)$ | $p_7$ | +2   |
| $4^+$   | $[l_{3u}, \infty) = [W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}+p_{50}+p_{60}+p_{70}}, \infty)$<br>$= [5.833415, \infty)$   | $p_8$ | +3   |

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των μαρκοβιανών αλυσίδων έχουμε ότι  $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$  και η μορφή του πίνακα  $\mathbf{P}$  είναι η ακόλουθη

$$P = \begin{pmatrix} Q & (I-Q)1' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & c \\ -4 & p_4 & 0 & 0 & 0 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & 0 & p_3 + p_2 + p_1 \\ -3 & p_3 & p_4 & 0 & 0 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & 0 & p_2 + p_1 \\ -2 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & 0 & p_1 \\ -1 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_5 + p_4 & p_6 & p_7 & p_8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & 0 \\ 2 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 \\ 3 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & 0 & p_5 & p_6 & p_7 + p_8 \\ 4 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & 0 & 0 & p_5 & p_6 + p_7 + p_8 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων  $p_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 8$ ) χρησιμοποιούνται οι τύποι υπολογισμού που δόθηκαν στην προηγούμενη εφαρμογή.

Έτσι, στον ακόλουθο πίνακα δίνονται ενδεικτικές τιμές του  $ARL$  για διάφορες μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης του χαρακτηριστικού  $X$  από την τιμή  $\sigma_0$  στη θέση  $\sigma_1 = \tau\sigma_0$ .

**Πίνακας 3.11.** Τιμές  $ARL$  για το  $R$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSR_5(0,1,2,3)$ , ( $ARL_0 = 370.4$ ,  $n = 9$ )

| $\tau$ | $ARL_1$    |
|--------|------------|
| 0.2    | 2.000179   |
| 0.4    | 2.645274   |
| 0.6    | 4.836415   |
| 0.8    | 22.410177  |
| 1.0    | 370.399997 |
| 1.2    | 23.505005  |
| 1.4    | 7.111821   |
| 1.6    | 4.216386   |
| 1.8    | 3.176130   |
| 2.0    | 2.677302   |
| 2.2    | 2.405316   |
| 2.4    | 2.248129   |
| 2.6    | 2.154670   |
| 2.8    | 2.098097   |
| 3.0    | 2.063311   |

Για τον υπολογισμό του  $ARL$  χρησιμοποιήθηκε ο τύπος



$$ARL = E(N) = \mathbf{a}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{1}'.$$

όπου  $\mathbf{a}$  είναι το διάνυσμα γραμμή διάστασης  $1 \times 9$  και όλα τα στοιχεία του είναι 0 εκτός από την 5<sup>η</sup> συνιστώσα που παίρνει την τιμή 1 και αντιστοιχεί στη μεταβατική κατάσταση 0.

Στην περίπτωση που χρησιμοποιείται η τεχνική της άμεσης αρχικής αντίδρασης με  $SL_0 = -4$  και  $SU_0 = 4$  και υλοποιώντας το αντίστοιχο  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος παίρνουμε ότι

$$p_{10} = p_{80} = 0.0005801$$

$$p_{20} = p_{70} = 0.0145897$$

$$p_{30} = p_{60} = 0.1242758$$

$$p_{40} = p_{50} = 0.3605544.$$

Έτσι, η βασική λειτουργία του διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSR_5(0,1,2,3)$  με  $SL_0 = -4$  και  $SU_0 = 4$ , δίνεται στον ακόλουθο πίνακα

**Πίνακας 3.12.** Δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος

$RSR_8(0,2,4,8)$  με  $SL_0 = -4$  και  $SU_0 = 4$ .

| Περιοχή        | Διάστημα   | p     | Σκορ |
|----------------|--|-------|------|
| 4 <sup>-</sup> | $[0, l_{3d}) = [0, \sigma_0 W_{n,p_{10}}) = [0, 0.896255)$   | $p_1$ | -3   |
| 3 <sup>-</sup> | $[l_{3d}, l_{2d}) = [W_{n,p_{10}}, W_{n,p_{10}+p_{20}}) = [0.896255, 1.431927)$  | $p_2$ | -2   |
| 2 <sup>-</sup> | $[l_{2d}, l_{1d}) = [W_{n,p_{10}+p_{20}}, W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}})$<br>$= [1.431927, 2.107413)$   | $p_3$ | -1   |
| 1 <sup>-</sup> | $[l_{1d}, l_0) = [W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}}, W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}})$<br>$= [2.107413, 2.915438)$                                | $p_4$ | -0   |
| 1 <sup>+</sup> | $[l_0, l_{1u}) = [W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}}, W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}+p_{50}})$<br>$= [2.915438, 3.851617)$                  | $p_5$ | +0   |
| 2 <sup>+</sup> | $[l_{1u}, l_{2u}) = [W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}+p_{50}}, W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}+p_{50}+p_{60}})$<br>$= [3.851617, 4.910516)$ | $p_6$ | +1   |

|                |   |       |    |
|----------------|---|-------|----|
| 3 <sup>+</sup> | $[l_{2u}, l_{3u})$<br>$= [W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}+p_{50}+p_{60}}, W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}+p_{50}+p_{60}+p_{70}})$<br>$= [4.910516, 6.080018)$ | $p_7$ | +2 |
| 4 <sup>+</sup> | $[l_{3u}, \infty) = [W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}+p_{50}+p_{60}+p_{70}}, \infty)$<br>$= [6.080018, \infty)$   | $p_8$ | +3 |

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των μαρκοβιανών αλυσίδων έχουμε ότι  $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, (+4, -4)\}$  και η μορφή του πίνακα  $\mathbf{P}$  είναι η ακόλουθη

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{1}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & (-4,4) & c & \\ -4 & p_4 & 0 & 0 & 0 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & 0 & 0 & p_3 + p_2 + p_1 & \\ -3 & p_3 & p_4 & 0 & 0 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & 0 & 0 & p_2 + p_1 & \\ -2 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & 0 & 0 & p_1 & \\ -1 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_5 + p_4 & p_6 & p_7 & p_8 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & 0 & 0 & \\ 2 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & p_5 & p_6 & p_7 & 0 & p_8 & \\ 3 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & 0 & p_5 & p_6 & 0 & p_7 + p_8 & \\ 4 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & 0 & 0 & p_5 & 0 & p_6 + p_7 + p_8 & \\ (-4,4) & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_5 & 0 & p_1 + p_2 + p_3 + p_6 + p_7 + p_8 & \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix}$$

Για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων  $p_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 8$ ) χρησιμοποιούνται οι τύποι υπολογισμού που δόθηκαν στην προηγούμενη εφαρμογή.

Έτσι, στον ακόλουθο πίνακα δίνονται ενδεικτικές τιμές του  $ARL$  για διάφορες μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης του χαρακτηριστικού  $X$  από την τιμή  $\sigma_0$  στη θέση  $\sigma_1 = \tau\sigma_0$ .

**Πίνακας 3.13.** Τιμές  $ARL$  για το  $R$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος

$RSR_5(0,1,2,3)$ , με  $SL_0 = -4$  και  $SU_0 = 4$ , ( $ARL_0 = 370.4, n = 9$ )

| $\tau$ | $ARL_1$    |
|--------|------------|
| 0.2    | 1.000000   |
| 0.4    | 1.006134   |
| 0.6    | 1.402715   |
| 0.8    | 11.008935  |
| 1.0    | 370.399986 |
| 1.2    | 12.004125  |
| 1.4    | 2.682100   |
| 1.6    | 1.556752   |
| 1.8    | 1.244237   |

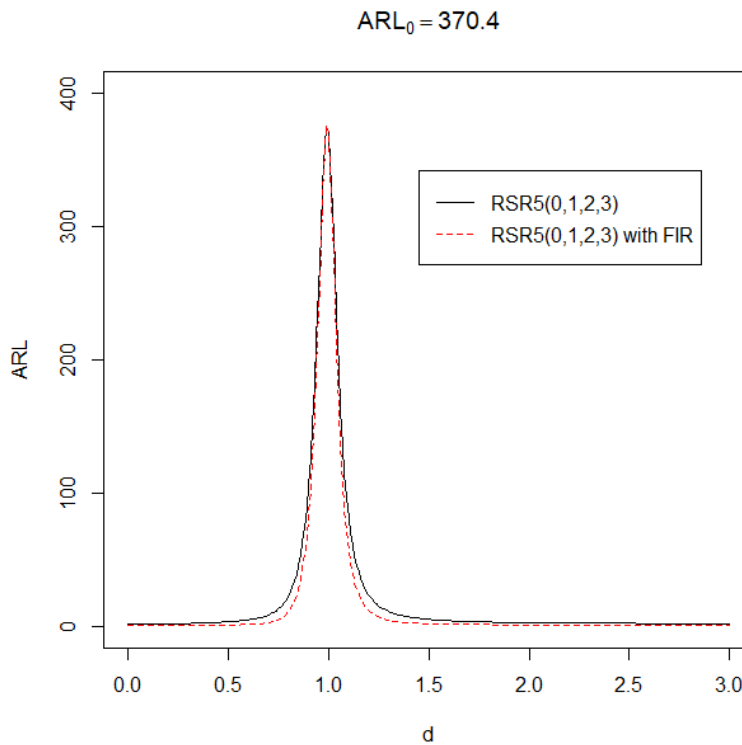
|     |          |
|-----|----------|
| 2.0 | 1.122193 |
| 2.2 | 1.065925 |
| 2.4 | 1.037418 |
| 2.6 | 1.022063 |
| 2.8 | 1.013419 |
| 3.0 | 1.008381 |

Για τον υπολογισμό του  $ARL$  χρησιμοποιήθηκε ο τύπος

$$ARL = E(N) = \mathbf{a}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{1}'.$$

όπου  $\mathbf{a}$  είναι το διάνυσμα γραμμή διάστασης  $1 \times 10$  και όλα τα στοιχεία του είναι 0 εκτός από την  $10^{\text{η}}$  συνιστώσα που παίρνει την τιμή 1 και αντιστοιχεί στη μεταβατική κατάσταση  $(-4, +4)$ .

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται η καμπύλη  $ARL$  του  $R$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSR_5(0,1,2,3)$ , μαζί με την αντίστοιχη καμπύλη του  $R$  διαγράμματος ελέγχου  $RSR_5(0,1,2,3)$  με  $SL_0 = -4$  και  $SU_0 = 4$  για  $ARL_0 = 370.4$  και  $n = 9$ .



**Σχήμα 3.7.** Διάγραμμα  $ARL$ :  $RSR_5(0,1,2,3)$  με και χωρίς FIR.

Είναι εμφανές ότι με την χρήση της τεχνικής άμεσης αντίδρασης (FIR) το διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSR_5(0,1,2,3)$  γίνεται πιο ευαίσθητό στον εντοπισμό εκτός ελέγχου διεργασίας σε όλο το εύρος μετατοπίσεων της τυπικής απόκλισης.

### 3.6 Σύγκριση $S$ και $R$ διαγραμμάτων ελέγχου ροής αθροίσματος με $S$ και $R$ διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart με κανόνες ροών

Στο προηγούμενο κεφάλαιο στην Παράγραφο 2.4 παρουσιάσαμε κανόνες ροών για το  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart με στόχο την αύξηση της ευαισθητοποίησης του για μικρές μετατοπίσεις του μέσου. Έτσι, και στα διαγράμματα  $S$  και  $R$  τύπου Shewhart προτάθηκαν κανόνες ροών καθώς και αυτά παρουσιάζουν μειωμένη απόδοση στον εντοπισμό εκτός ελέγχου διεργασιών που οφείλονται σε μικρές μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης της διεργασίας. Η Western Electric Company (1956) πρότεινε κανόνες ροών για το  $S$  και  $R$  διάγραμμα ελέγχου. Επίσης, ο Nelson (1990) πρότεινε κανόνες ροών για το  $R$  διάγραμμα ελέγχου με στόχο την αύξηση της ευαισθητοποίησής του για μετατοπίσεις της διακύμανσης σε μικρότερο επίπεδο.

Οι Lowry et al. (1995) κωδικοποίησαν με τον ακόλουθο τρόπο βασικούς κανόνες ροών. Ο συμβολισμός  $T(r, m, UCL_{h_1}, UCL_{h_2})$  (αντίστοιχα  $T(r, m, LCL_{h_2}, UCL_{h_1})$ ) θα δηλώνει ότι  $r$  από  $m$  τελευταία σημεία του διαγράμματος βρίσκονται στο διάστημα  $(UCL_{h_1}, UCL_{h_2})$  (αντίστοιχα  $(LCL_{h_2}, LCL_{h_1})$ ) με  $h_1 \in \{0,1,2,3\}$ ,  $h_2 = 3$  και  $h_1 < h_2$ . Έτσι, ο κλασικός κανόνας λήψης ένδειξης εκτός ελέγχου διεργασίας, μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$RR_1 = (1,1, UCL_3, +\infty) \cup (1,1,0, LCL_3).$$

Οι κανόνες ευαισθητοποίησης που μελέτησαν οι Lowry et al. (1995) και θα εξετάσουμε την χρήση τους είναι οι εξής:

$$\text{Κανόνας 1: } RR_1 = T(1,1, UCL_3, +\infty) \cup T(1,1,0, LCL_3).$$

$$\text{Κανόνας 2: } RR_2 = T(2,3, UCL_2, UCL_3) \cup T(2,3, LCL_3, LCL_2)$$

$$\text{Κανόνας 3: } RR_3 = T(4,5, UCL_1, UCL_3) \cup T(4,5, LCL_3, LCL_1)$$

$$\text{Κανόνας 4: } RR_4 = T(8,8, MDL, UCL_3) \cup T(1,1, LCL_3, MDL)$$

Με τον συμβολισμό  $C_{ij\dots k} = RR_i \cup RR_j \cup \dots \cup RR_k$  δηλώνεται το διάγραμμα ελέγχου το οποίο δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν συμβεί τουλάχιστον ένα ενδεχόμενο από

αυτά που περιγράφουν οι κανόνες  $RR_i, RR_j, \dots, RR_k$ . Για παράδειγμα ο σύνθετος κανόνας  $C_{12}$  μπορεί να γραφεί ως

$$C_{12} = \{T(1,1, UCL_3, +\infty), T(2,3, UCL_2, UCL_3), T(2,3, LCL_3, LCL_2), T(1,1,0, LCL_3)\}.$$

Στη συνέχεια θα δοθεί μία εφαρμογή της μεθόδου μέσω της οποίας θα συγκρίνουμε διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart με συμπληρωματικούς κανόνες ροών και διαγράμματα ελέγχου ροής αθροίσματος. Υποθέτουμε, ως συνήθως, ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού  $X$  που εξετάζουμε (για εντός στατιστικού ελέγχου διεργασία) ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(\mu_0, \sigma_0^2)$  με γνωστή μέση τιμή  $\mu_0$  και γνωστή τυπική απόκλιση  $\sigma_0$ . Από τη διεργασία λαμβάνονται δείγματα μεγέθους  $n$  και υπολογίζεται η δειγματική τυπική απόκλιση  $S_i$  ή το δειγματικό εύρος  $R_i$ . Ας υποθέσουμε ότι η εντός ελέγχου κατανομή άλλαξε λόγω μετατόπισης της τυπικής απόκλισης από την (εντός ελέγχου) τιμή  $\sigma_0$  στην (εκτός ελέγχου) τιμή  $\sigma_1 = \tau\sigma_0$  ( $\tau > 0$ ), δηλαδή η εκτός ελέγχου κατανομή είναι η  $N(\mu_0, \sigma_1^2)$  (ή ισοδύναμα  $N(\mu_0, (\tau\sigma_0)^2)$ ).

#### • Εφαρμογή 5

Ως μια εφαρμογή θα παρουσιαστεί αναλυτικά η μελέτη του δίπλευρου  $S$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSS_4(0,1,2,4)$  το οποίο παρουσιάστηκε από τους Davis, Homer & Woodall (1990) και για το οποίο θέλουμε να ισχύει ότι  $ARL_0 = 200$ . Στη συνέχεια θα γίνει σύγκρισή του με το δίπλευρο  $S$  διάγραμμα ελέγχου Shewhart στο οποίο εφαρμόζεται ο σύνθετος κανόνας

$$C_{123} = \left\{ \begin{array}{l} T(1,1, UCL_3, +\infty), T(2,3, UCL_2, UCL_3), T(4,5, UCL_1, UCL_3), \\ T(4,5, LCL_3, LCL_1), T(2,3, LCL_3, LCL_2), T(1,1,0, LCL_3) \end{array} \right\}.$$

Έστω ότι η (εντός στατιστικού ελέγχου) κατανομή του χαρακτηριστικού  $X$  που εξετάζουμε ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(10,1)$  και ότι από την παραγωγή εξετάζονται σε τακτά χρονικά διαστήματα δείγματα μεγέθους  $n = 5$ . Η βασική λειτουργία του διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSS_4(0,1,2,4)$  είναι όπως στον Πίνακα 3.5 αλλά με τροποποιημένη κατάλληλα την τελευταία στήλη με τα νέα σκορ.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των μαρκοβιανών αλυσίδων έχουμε ότι  $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$  και η μορφή του πίνακα  $\mathbf{P}$  είναι η ακόλουθη

$$P = \begin{pmatrix} Q & (I-Q)\mathbf{1}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & c \\ -3 & p_4 & 0 & 0 & p_5 & p_6 & p_7 & 0 & p_3 + p_2 + p_1 + p_8 \\ -2 & p_3 & p_4 & 0 & p_5 & p_6 & p_7 & 0 & p_2 + p_1 + p_8 \\ -1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & 0 & p_1 + p_8 \\ 0 & 0 & p_2 & p_3 & p_4 + p_5 & p_6 & p_7 & 0 & p_1 + p_8 \\ 1 & 0 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_1 + p_8 \\ 2 & 0 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & p_5 & p_6 & p_1 + p_7 + p_8 \\ 3 & 0 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & 0 & p_5 & p_1 + p_6 + p_7 + p_8 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Για την πιθανότητα  $p_j$  ( $j = 1,2,3,4$ ) που δηλώνει την πιθανότητα να είναι εντός της περιοχής  $j^-$  του διαγράμματος η τιμή μιας δειγματικής τυπικής απόκλισης  $S_i$ , έχουμε τον τύπο

$$p_j = F_{n-1} \left( \frac{(n-1)LCL_{4-j}^2}{(\tau\sigma_0)^2} \right) - F_{n-1} \left( \frac{(n-1)LCL_{5-j}^2}{(\tau\sigma_0)^2} \right).$$

Ενώ για την πιθανότητα  $p_j$  ( $j = 5,6,7,8$ ) που δηλώνει την πιθανότητα να είναι εντός της περιοχής  $j^+$  του διαγράμματος η τιμή μιας δειγματικής τυπικής απόκλισης  $S_i$ , έχουμε τον τύπο

$$p_j = F_{n-1} \left( \frac{(n-1)UCL_{4-j}^2}{(\tau\sigma_0)^2} \right) - F_{n-1} \left( \frac{(n-1)UCL_{5-j}^2}{(\tau\sigma_0)^2} \right).$$

Από την εξίσωση

$$ARL_0 = \mathbf{a}(I-Q)^{-1}\mathbf{1}' = 200$$

όπου  $\mathbf{a} = (0,0,0,1,0,0,0)$ , προκύπτει ότι  $L = 1.11205$ . Συνεπώς

$$LCL_1 = 0.56282, \quad LCL_2 = 0.29249, \quad LCL_3 = 0.12132$$

$$UCL_1 = 1.32797, \quad UCL_2 = 1.77893, \quad UCL_3 = 2.25875$$

Από τη στιγμή που τα όρια ελέγχου είναι γνωστά μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής  $ARL_1$  για διάφορες μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης του χαρακτηριστικού  $X$  από την τιμή  $\sigma_0$  στη θέση  $\sigma_1 = \tau\sigma_0$ . Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται ενδεικτικές τιμές του  $ARL$  συναρτήσει του  $\tau$ . Επίσης δίνονται οι αντίστοιχες τιμές του  $S$  διαγράμματος ελέγχου Shewhart στο οποίο εφαρμόζεται ο σύνθετος κανόνας  $C_{123}$  (δείτε Rakitzis & Antzoulakos (2016)).

**Πίνακας 3.14.** Τιμές  $ARL$  για το  $S$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSS_4(0,1,2,4)$  και το  $S$  διάγραμμα ελέγχου  $C_{123}$  ( $ARL_0 = 200$ ).

| $\tau$ | $RSS_4(0,1,2,4)$ | $C_{123}$ |
|--------|------------------|-----------|
| 0.3    | 2.691816         | 2.74      |
| 0.4    | 3.505662         | 3.77      |
| 0.5    | 4.835926         | 5.60      |
| 0.6    | 7.659155         | 10.81     |
| 0.7    | 15.491691        | 25.16     |
| 0.8    | 41.563285        | 63.60     |
| 0.9    | 127.357323       | 161.71    |
| 1.0    | 200              | 198.73    |
| 1.1    | 73.731426        | 81.31     |
| 1.2    | 27.768284        | 31.40     |
| 1.3    | 14.192314        | 15.79     |
| 1.4    | 8.910413         | 9.56      |
| 1.5    | 6.352076         | 6.59      |
| 1.6    | 4.907663         | 5.05      |
| 1.7    | 3.999442         | 4.01      |
| 1.8    | 3.382651         | 3.36      |
| 1.9    | 2.939631         | 2.91      |
| 2.0    | 2.607956         | 2.62      |

Είναι εμφανής η ανωτερότητα του διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSS_4(0,1,2,4)$  σχεδόν σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων της τυπικής απόκλισης (εκτός των τιμών  $\tau > 1.8$ ) έναντι του  $S$  διαγράμματος ελέγχου Shewhart στο οποίο εφαρμόζεται ο σύνθετος κανόνας  $C_{123}$ .

Για περισσότερες συγκρίσεις μεταξύ των  $S$  διαγραμμάτων ελέγχου ροής αθροίσματος με  $S$  διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart με συμπληρωματικούς κανόνες ροών ο αναγνώστης παραπέμπεται στην εργασία των Rakitzis & Antzoulakos (2016). Ενδεικτικά δίνουμε τον κάτωθι πίνακα συγκρίσεων, όπου

- $S_3$ :  $RSS_{12}(0,1,6,12)$ ,
- $S_4$ :  $RSS_{12}(0,3,4,12)$ ,
- $S_6$ :  $RSS_{14}(1,2,7,14)$ .

Τα παραπάνω διαγράμματα προτάθηκαν από τους David et al. (1994) για το  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος.

Πίνακας 3.15. Σύγκριση διαγραμμάτων ελέγχου ροής αθροίσματος  $S$  με αντίστοιχα διαγράμματα με σύνθετους κανόνες ροών ( $ARL_0 = 200$  και  $n = 5$ )

| $\tau$  | $S$    | $S_3$  | $S_4$  | $S_6$  | $C_{12}$ | $C_{13}$ | $C_{14}$ |
|---------|--------|--------|--------|--------|----------|----------|----------|
| 0.3     | 5.18   | 2.45   | 3.27   | 2.86   | 2.39     | 3.48     | 6.62     |
| 0.4     | 13.12  | 4.12   | 4.01   | 4.29   | 4.01     | 4.11     | 7.49     |
| 0.5     | 28.83  | 6.72   | 5.16   | 5.90   | 8.24     | 5.77     | 8.09     |
| 0.6     | 56.43  | 12.11  | 7.83   | 8.73   | 18.37    | 10.62    | 10.11    |
| 0.7     | 100.93 | 29.12  | 15.51  | 16.37  | 41.52    | 24.28    | 16.73    |
| 0.8     | 167.27 | 83.55  | 41.79  | 41.61  | 91.72    | 62.64    | 38.25    |
| 0.9     | 237.63 | 191.25 | 129.56 | 126.38 | 183.49   | 157.15   | 110.76   |
| 1.00    | 200    | 200    | 200    | 200    | 200      | 200      | 200      |
| 1.10    | 95.15  | 81.53  | 79.20  | 76.85  | 89.84    | 83.66    | 102.40   |
| 1.20    | 42.39  | 31.73  | 30.90  | 29.62  | 37.79    | 33.47    | 45.19    |
| 1.30    | 21.58  | 15.60  | 15.87  | 15.18  | 19.39    | 16.98    | 24.10    |
| 1.40    | 12.61  | 9.33   | 9.90   | 9.47   | 11.83    | 10.38    | 14.96    |
| 1.50    | 8.24   | 6.38   | 6.98   | 6.67   | 8.18     | 7.20     | 10.29    |
| 1.60    | 5.86   | 4.77   | 5.32   | 5.09   | 6.19     | 5.44     | 7.59     |
| 1.70    | 4.46   | 3.79   | 4.28   | 4.10   | 4.98     | 4.34     | 5.87     |
| 1.80    | 3.56   | 3.15   | 3.57   | 3.42   | 4.19     | 3.61     | 4.71     |
| 1.90    | 2.97   | 2.71   | 3.06   | 2.94   | 3.65     | 3.09     | 3.89     |
| 2.00    | 2.55   | 2.39   | 2.68   | 2.59   | 3.26     | 2.71     | 3.29     |
| $L$     |        | 0.9862 | 1.0265 | 1.0593 | 1.787    | 1.025    | 1.087    |
| $UCL_3$ | 2.0263 | 2.0916 | 2.1440 | 2.1868 | 3.1660   | 2.1427   | 2.2232   |
| $UCL_2$ |        | 1.6742 | 1.7076 | 1.7349 | 1.5980   |          |          |
| $UCL_1$ |        | 1.2791 | 1.2947 | 1.3074 |          | 1.2943   |          |
| $MDL$   | 0.9161 | 0.9161 | 0.9161 | 0.9161 | 0.9161   | 0.9161   | 0.9161   |
| $LCL_1$ |        | 0.5991 | 0.5874 | 0.5779 |          | 0.5876   |          |
| $LCL_2$ |        | 0.3453 | 0.3278 | 0.3140 | 0.3874   |          |          |
| $LCL_3$ | 0.1903 | 0.1683 | 0.1521 | 0.1397 | 0.0120   | 0.1524   | 0.1298   |



• **Εφαρμογή 6**

Ως μια δεύτερη εφαρμογή θα παρουσιαστεί αναλυτικά η μελέτη του δίπλευρου  $R$  διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSR_8(0,2,4,8)$  για το οποίο θέλουμε να ισχύει ότι  $ARL_0 = 91.80$  και θα γίνει σύγκριση του με το δίπλευρο  $R$  διάγραμμα ελέγχου Shewhart με συμπληρωματικούς κανόνες που θα παρουσιάσουμε παρακάτω.

Έστω ότι η (εντός στατιστικού ελέγχου) κατανομή του χαρακτηριστικού  $X$  που εξετάζουμε ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(0,1)$  και ότι από την παραγωγή εξετάζονται σε τακτά χρονικά διαστήματα δείγματα μεγέθους  $n = 5$ .

Υλοποιώντας το αντίστοιχο  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος παίρνουμε ότι

$$p_{10} = p_{80} = 0.001423$$

$$p_{20} = p_{70} = 0.021915$$

$$p_{30} = p_{60} = 0.136625$$

$$p_{40} = p_{50} = 0.340037.$$

Έτσι η βασική λειτουργία του διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSR_5(0,1,2,3)$  δίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

**Πίνακας 3.16.** Δίπλευρο  $R$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSR_8(0,2,4,8)$

| Περιοχή        | Διάστημα  | $p$   | Σκορ |
|----------------|---|-------|------|
| 4 <sup>-</sup> | $[0, l_{3d}) = [0, \sigma_0 W_{n,p_{10}}) = [0, 0.401906)$  | $p_1$ | -8   |
| 3 <sup>-</sup> | $[l_{3d}, l_{2d}) = [W_{n,p_{10}}, W_{n,p_{10}+p_{20}}) = [0.401906, 0.833931)$   | $p_2$ | -4   |
| 2 <sup>-</sup> | $[l_{2d}, l_{1d}) = [W_{n,p_{10}+p_{20}}, W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}})$<br>$= [0.833931, 1.461146)$                          | $p_3$ | -2   |
| 1 <sup>-</sup> | $[l_{1d}, l_0) = [W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}}, W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}})$<br>$= [1.461146, 2.256882)$               | $p_4$ | -0   |
| 1 <sup>+</sup> | $[l_0, l_{1u}) = [W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}}, W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}+p_{50}})$<br>$= [2.256882, 3.188272)$ | $p_5$ | +0   |

|                |   |       |    |
|----------------|---|-------|----|
| 2 <sup>+</sup> | $[l_{1u}, l_{2u})$<br>$= [W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}+p_{50}}, W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}+p_{50}+p_{60}})$<br>$= [3.188272, 4.228998)$               | $p_6$ | +2 |
| 3 <sup>+</sup> | $[l_{2u}, l_{3u})$<br>$= [W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}+p_{50}+p_{60}}, W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}+p_{50}+p_{60}+p_{70}})$<br>$= [4.228998, 5.358437)$ | $p_7$ | +4 |
| 4 <sup>+</sup> | $[l_{3u}, \infty) = [W_{n,p_{10}+p_{20}+p_{30}+p_{40}+p_{50}+p_{60}+p_{70}}, \infty)$<br>$= [5.358437, \infty)$   | $p_8$ | +8 |

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των μαρκοβιανών αλυσίδων έχουμε ότι  $T = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6\}$  και η μορφή του πίνακα  $P$  είναι η ακόλουθη

$$P = \begin{pmatrix} Q & (I-Q)1' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 6 & C \\ -6 & p_4 & 0 & 0 & p_5 & p_6 & p_7 & 0 & p_1 + p_2 + p_3 + p_8 \\ -4 & p_3 & p_4 & 0 & p_5 & p_6 & p_7 & 0 & p_1 + p_2 + p_8 \\ -2 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & 0 & p_1 + p_8 \\ 0 & 0 & p_2 & p_3 & p_4 + p_5 & p_6 & p_7 & 0 & p_1 + p_8 \\ 2 & 0 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_1 + p_8 \\ 4 & 0 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & p_5 & p_6 & p_1 + p_7 + p_8 \\ 6 & 0 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & 0 & p_5 & p_1 + p_6 + p_7 + p_8 \\ C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων  $p_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 8$ ) χρησιμοποιούνται οι τύποι υπολογισμού που δόθηκαν στην Εφαρμογή 3.

Από τη στιγμή που τα όρια ελέγχου είναι γνωστά μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής  $ARL_1$  για διάφορες μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης του χαρακτηριστικού  $X$  από την τιμή  $\sigma_0$  στη θέση  $\sigma_1 = \tau\sigma_0$ .

Επίσης, οι κανόνες ευαισθητοποίησης που πρότειναν οι Lowry et al. (1995) να χρησιμοποιούνται ταυτοχρόνως για το  $R$  διάγραμμα στην περίπτωση που  $n = 5$  είναι οι ακόλουθοι

Κανόνας 1:  $RR_1 = T(1, 1, -\infty, -2.23310) \cup T(1, 1, 3.53206, \infty)$ .

Κανόνας 2:  $RR_2 = T(2, 3, -2.23310, -1.73414) \cup T(2, 3, 2.21759, 3.53206)$

Κανόνας 3:  $RR_3 = T(4, 5, -2.23341, -1.00527) \cup T(4, 5, 1.00405, 3.53206)$

Κανόνας 4:  $RR_4 = T(8, 8, -2.2331, -0.07986) \cup T(8, 8, -0.07986, 3.53206)$

Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται τιμές του  $ARL$  για το  $R$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSR_8(0,2,4,8)$  και για το  $R$  διάγραμμα ελέγχου εφοδιασμένο με τον σύνθετο κανόνα ροών  $C_{1234}$  των Lowry et al. (1995).

**Πίνακας 3.17.** Τιμές  $ARL$  για το  $R$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSR_8(0,2,4,8)$  και το  $R$  διάγραμμα ελέγχου  $C_{1234}$  ( $ARL_0 = 91.8$  και  $n = 5$ ).

| $\tau$ | $RSR_8(0,2,4,8)$ | $C_{1234}$ |
|--------|------------------|------------|
| 1.0    | 91.800023        | 91.80      |
| 1.1    | 43.557839        | 47.07      |
| 1.2    | 19.866056        | 22.15      |
| 1.3    | 11.233825        | 12.60      |
| 1.4    | 7.463238         | 8.33       |
| 1.5    | 5.505271         | 6.08       |
| 1.6    | 4.349505         | 4.75       |
| 1.7    | 3.600953         | 3.88       |
| 1.8    | 3.082223         | 3.28       |
| 1.9    | 2.704353         | 2.85       |
| 2.0    | 2.418605         | 2.52       |

Είναι εμφανής η ανωτερότητα του διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSR_8(0,2,4,8)$  σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων της τυπικής απόκλισης έναντι του  $R$  διαγράμματος με τον σύνθετο κανόνα ροών  $C_{1234}$ .

Για περισσότερες συγκρίσεις μεταξύ των  $R$  διαγραμμάτων ελέγχου ροής αθροίσματος με  $R$  διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart με συμπληρωματικούς κανόνες ροών ο αναγνώστης παραπέμπεται στην εργασία των Acosta-Meiya & Pignatiello (2010). Ενδεικτικά δίνουμε τον κάτωθι πίνακα συγκρίσεων.

**Πίνακας 3.18.** Τιμές  $ARL$  για τα  $R$  διαγράμματα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSR_8(0,2,4,8)$  και  $RSR_5(0,1,2,3)$  ( $ARL_0 = 132.95$ ,  $n = 10$ )

| $\tau$ | $C_{123}$ | $RSR_8(0,2,4,8)$<br>$S_0 = 0$ | $RSR_5(0,1,2,3)$<br>$S_0 = \pm 4$ |
|--------|-----------|-------------------------------|-----------------------------------|
| 1.0    | 132.96    | 132.95                        | 132.95                            |
| 0.9    | 67.59     | 53.11                         | 35.52                             |
| 0.8    | 19.93     | 14.53                         | 6.30                              |
| 0.7    | 7.67      | 6.25                          | 2.08                              |
| 0.6    | 4.10      | 3.75                          | 1.24                              |
| 0.5    | 2.64      | 2.62                          | 1.04                              |
| 0.4    | 1.73      | 1.86                          | 1.00                              |
|        | $l_{3u}$  | 6.045                         | 5.756                             |

|          |       |       |
|----------|-------|-------|
| $l_{2u}$ | 4.928 | 4.752 |
| $l_{1u}$ | 3.918 | 3.839 |
| $l_{1d}$ | 2.249 | 2.309 |
| $l_{2d}$ | 1.591 | 1.693 |
| $l_{3d}$ | 1.056 | 1.178 |

## Βιβλιογραφία

### Ελληνική

- [1] Αντζουλάκος, Δ. (2016). Πανεπιστημιακές σημειώσεις: Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Μ.Δ.Ε Εφαρμοσμένη Στατιστική.

### Ξένη

- [2] Acosta – Meija, C.A., & Pignatiello, J.J. Jr. (2010). “The run sum R chart with fast initial response”. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 39, pp. 921-932.
- [3] Aguirre-Torres, V., & Reyes-Lopez, D. (1999). “Run sum charts for both  $\bar{X}$  and R”. *Quality Engineering*, 12, pp. 7-12.
- [4] Antzoulakos, D.L., & Rakitzis, A.C. (2016). “Run sum control charts for the monitoring of process variability”. *Quality Technology & Quantitative Management*, 13, pp. 58-77.
- [5] Champ, C.W., & Woodall, W.H. (1987). “Exact results for Shewhart control charts with supplementary runs rules”. *Technometrics*, 29, pp. 393-399.
- [6] Champ, C.W., & Ridgon, S.E. (1997). “An analysis of the run sum control chart”. *Journal of Quality Technology*, 29, pp. 407-417.
- [7] Davis, R.B., Homer, A., & Woodall, W.H. (1990). “Performance of the zone control chart”. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 19, pp. 1581-1587.
- [8] Davis, R.B., Chun, J., & Guo, Y. (1994). Improving the performance of the zone control chart”. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 23, pp. 3557-3565.
- [9] Hunter, J.S. (1986). “The Exponentially Weighted Moving Average”. *Journal of Quality*, 18, pp. 203-210
- [10] Jaehn, A.H. (1987a). “Improving QC efficiency with zone control charts”. *ASQC Chemical and Process Industries Division News* 4, pp. 1-2
- [11] Jaehn, A.H. (1987b). “Zone control charts – SPC made easy”. *Quality*, pp.51-53
- [12] Jaehn, A.H. (1987c). “Zone control charts: A new tool for quality control”. *Tappi Journal*, 70, pp. 159-161.
- [13] Jaehn, A.H. (1989). “Zone control charts find new applications”. *ASQC Quality Congress Transactions*, pp. 890-895.
- [14] Jaehn, A.H. (1991). “The zone control chart”. *Quality Progress*, 24, pp. 65-68.
- [15] Lowry, C.A., Champ, C.W., & Woodall, W.H. (1995). “The performance of control charts for monitoring process variation”. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 24, pp. 409-437.
- [16] Lucas, J.M. & Crosier, R.B. (1982). “Fast Initial Response for CUSUM quality control schemes”. *Technometrics*, 24, pp. 199-205.
- [17] Montgomery, D. C. (2005). “Introduction to Statistical Quality Control”. 5th ed. New York: John Wiley.

- [18] Nelson, L.S. (1990). "Monitoring reduction in variation with a range chart". *Journal of Quality Technology*, 22, pp. 163-165.
- [19] Reynolds J.H. (1971). "The run sum control chart procedure". *Journal of Quality Technology*, 3, pp. 23-27.
- [20] Roberts, S.W.(1966). "A comparison of some control chart procedures". *Technometrics*, 8, pp. 411-430.
- [21] Western Electric Company (1956). "Statistical quality control handbook". American Telephone and Telegraph Company, Chicago.

## Παράρτημα

### Κ. Κώδικες για τα διαγράμματα ελέγχου ροής αθροίσματος

**Κ.1 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό των  $ARL_1$  για το  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RS_2[0, 1, 2 : 0, 2, 3, \infty]$  - Πίνακας 2.5.**

```
> n=9 #μέγεθος δείγματος
> m0=20 #εντός ελέγχου μέση τιμή
> s0=2 #εντός ελέγχου τυπική απόκλιση
> ## Όρια Ελέγχου##
> UCL0=LCL0=m0
> UCL1=m0+2*s0/sqrt(n)
> UCL2=m0+3*s0/sqrt(n)
> LCL1=m0-2*s0/sqrt(n)
> LCL2=m0-3*s0/sqrt(n)
> ##Κώδικας υπολογισμού του μέσου μήκους ροής##
> FUN <- function(d){
+   m1=m0+d*s0/sqrt(n)
+   p1=pnorm(UCL1,m1,s0/sqrt(n))-pnorm(UCL0,m1,s0/sqrt(n))
+   p2=pnorm(UCL2,m1,s0/sqrt(n))-pnorm(UCL1,m1,s0/sqrt(n))
+   p3=1-pnorm(UCL2,m1,s0/sqrt(n))
+   q1=pnorm(LCL0,m1,s0/sqrt(n))-pnorm(LCL1,m1,s0/sqrt(n))
+   q2=pnorm(LCL1,m1,s0/sqrt(n))-pnorm(LCL2,m1,s0/sqrt(n))
+   q3=pnorm(LCL2,m1,s0/sqrt(n))
+   r1 <- c(q1,p1,p2)
+   r2 <- c(q2,q1+p1,p2)
+   r3 <- c(q2,q1,p1)
+   Q <- rbind(r1,r2,r3)
+   I <- diag(nrow(Q))
+   u <- c(0,1,0)
+   U <- rep(1, times=nrow(Q))
+   return(u%%solve(I-Q)%%U)
+ }
> ##Πίνακας τιμών ARL##
> ARL <- c()
> d <- seq(-3,3,0.5)
> for (i in 1:length(d)) ARL[i] <- FUN(d[i])
> mat <- cbind(d,ARL)
> rownames(mat) <- rep("",nrow(mat))
> mat
  d   ARL
-3.0 1.671107
-2.5 2.251074
-2.0 3.407184
-1.5 6.191757
```

```

-1.0 15.738728
-0.5 67.040576
0.0 228.151938
0.5 67.040576
1.0 15.738728
1.5 6.191757
2.0 3.407184
2.5 2.251074
3.0 1.671107

```

**Κ.2 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό των  $ARL_1$  για το  $S$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSS_8(0, 2, 3, 8)$  - Πίνακας 3.4 ( $L = 1$  και  $n = 9$ )**

```

> s0=1 #εντός ελέγχου τυπική απόκλιση
> L=1
> n=9 #μέγεθος δείγματος
> ## Όρια ελέγχου##
> MDL<- s0*sqrt(qchisq(0.5, n-1)/(n-1))
> LCL1<- s0*sqrt(qchisq(1-pnorm(L, mean=0, sd=1),n-1)/(n-1))
> LCL2<- s0*sqrt(qchisq(1-pnorm(2*L, mean=0, sd=1),n-1)/(n-1))
> LCL3<- s0*sqrt(qchisq(1-pnorm(3*L, mean=0, sd=1),n-1)/(n-1))
> UCL1<- s0*sqrt(qchisq(pnorm(L, mean=0, sd=1),n-1)/(n-1))
> UCL2<- s0*sqrt(qchisq(pnorm(2*L, mean=0, sd=1),n-1)/(n-1))
> UCL3<- s0*sqrt(qchisq(pnorm(3*L, mean=0, sd=1),n-1)/(n-1))
> ##Υπολογισμός του μέσου μήκους ροής##
> FUN <- function(t){
+ s1<- t*s0
+ p1<- pchisq(((n-1)*LCL3^2)/(s1)^2, n-1)
+ p2<- pchisq(((n-1)*LCL2^2)/(s1)^2, n-1)- pchisq(((n-1)*LCL3^2)/(s1)^2, n-1)
+ p3<- pchisq(((n-1)*LCL1^2)/(s1)^2, n-1)- pchisq(((n-1)*LCL2^2)/(s1)^2, n-1)
+ p4<- pchisq(((n-1)*MDL^2)/(s1)^2, n-1)- pchisq(((n-1)*LCL1^2)/(s1)^2, n-1)
+ p5<- pchisq(((n-1)*UCL1^2)/(s1)^2, n-1)- pchisq(((n-1)*MDL^2)/(s1)^2, n-1)
+ p6<- pchisq(((n-1)*UCL2^2)/(s1)^2, n-1)- pchisq(((n-1)*UCL1^2)/(s1)^2, n-1)
+ p7<- pchisq(((n-1)*UCL3^2)/(s1)^2, n-1)- pchisq(((n-1)*UCL2^2)/(s1)^2, n-1)
+ p8<- 1-pchisq(((n-1)*UCL3^2)/(s1)^2, n-1)
+ r1<- c(p4,0,0,0,0,p5,p6,p7,0,0,0,0)
+ r2<- c(0,p4,0,0,0,0,p5,p6,p7,0,0,0,0)
+ r3<- c(p3,0,p4,0,0,0,p5,p6,p7,0,0,0,0)
+ r4<- c(p2,p3,0,p4,0,0,p5,p6,p7,0,0,0,0)
+ r5<- c(0,p2,p3,0,p4,0,p5,p6,p7,0,0,0,0)
+ r6<- c(0,0,p2,p3,0,p4,p5,p6,p7,0,0,0,0)
+ r7<- c(0,0,0,0,p2,p3,p5+p4,p6,p7,0,0,0,0)
+ r8<- c(0,0,0,0,p2,p3,p4,p5,0,p6,p7,0,0)
+ r9<- c(0,0,0,0,p2,p3,p4,0,p5,0,p6,p7,0)
+ r10<- c(0,0,0,0,p2,p3,p4,0,0,p5,0,p6,p7)
+ r11<- c(0,0,0,0,p2,p3,p4,0,0,0,p5,0,p6)
+ r12<- c(0,0,0,0,p2,p3,p4,0,0,0,0,p5,0)
+ r13<- c(0,0,0,0,p2,p3,p4,0,0,0,0,0,p5)

```



```

+ Q <- rbind(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,
+           r11,r12,r13)
+ I <- diag(nrow(Q))
+ u <- rep(0,13); u<- replace(u,7,1)
+ U <- rep(1, times=nrow(Q))
+ return(u%%solve(I-Q)%%U)
+ }
> ##Πίνακας τιμών ARL##
> ARL <- c()
> t <- seq(0.2,3,0.2)
> for (i in 1:length(t)) ARL[i] <- FUN(t[i])
> mat <- cbind(t,ARL)
> rownames(mat) <- rep("",nrow(mat))
> mat
  t    ARL
0.2 1.003050
0.4 2.134413
0.6 4.187004
0.8 15.943794
1.0 153.815769
1.2 14.940658
1.4 4.991004
1.6 2.868676
1.8 2.015962
2.0 1.587073
2.2 1.351715
2.4 1.216658
2.6 1.136676
2.8 1.088050
3.0 1.057798

```

**Κ.3 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό των  $ARL_1$  για το  $R$  διάγραμμα ελέγχου ροής αθροίσματος  $RSR_g(0, 2, 4, 8)$  – Πίνακας 3.9 ( $ARL_0 = 370.4, n = 9$ )**

```

> #Υλοποίηση του αντίστοιχου X-bar διαγράμματος ελέγχου ροής αθροίσματος
> s0=1 #εντός ελέγχου τυπική απόκλιση
> m0=0 #εντός ελέγχου μέση τιμή
> n=9 #μέγεθος δείγματος
> ARLIN <- 370.4
> d=0
> #Υπολογισμός σταθεράς L ώστε  $ARL_0=370.4$ 
> FUN <- function(L) {
+   m1 <- m0+d*s0/sqrt(n)
+   UCL0=LCL0=m0
+   UCL1=m0+1*L*s0/sqrt(n)
+   UCL2=m0+2*L*s0/sqrt(n)
+   UCL3=m0+3*L*s0/sqrt(n)
+   LCL1=m0-1*L*s0/sqrt(n)

```

```

+ LCL2=m0-2*L*s0/sqrt(n)
+ LCL3=m0-3*L*s0/sqrt(n)
+ p5=pnorm(UCL1,m1,s0/sqrt(n))-pnorm(UCL0,m1,s0/sqrt(n))
+ p6=pnorm(UCL2,m1,s0/sqrt(n))-pnorm(UCL1,m1,s0/sqrt(n))
+ p7=pnorm(UCL3,m1,s0/sqrt(n))-pnorm(UCL2,m1,s0/sqrt(n))
+ p8=1-pnorm(UCL3,m1,s0/sqrt(n))
+ p4=pnorm(LCL0,m1,s0/sqrt(n))-pnorm(LCL1,m1,s0/sqrt(n))
+ p3=pnorm(LCL1,m1,s0/sqrt(n))-pnorm(LCL2,m1,s0/sqrt(n))
+ p2=pnorm(LCL2,m1,s0/sqrt(n))-pnorm(LCL3,m1,s0/sqrt(n))
+ p1=pnorm(LCL3,m1,s0/sqrt(n))
+ r1 <- c(p4,0,0,p5,p6,p7,0)
+ r2 <- c(p3,p4,0,p5,p6,p7,0)
+ r3 <- c(p2,p3,p4,p5,p6,p7,0)
+ r4 <- c(0,p2,p3,p4+p5,p6,p7,0)
+ r5 <- c(0,p2,p3,p4,p5,p6,p7)
+ r6 <- c(0,p2,p3,p4,0,p5,p6)
+ r7 <- c(0,p2,p3,p4,0,0,p5)
+ Q <- rbind(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7)
+ I <- diag(nrow(Q))
+ u <- c(0,0,0,1,0,0,0)
+ U <- rep(1, times=nrow(Q))
+ return(ARLIN-u%%solve(I-Q)%%U)
+ }
> library(pracma)
> b1 <- bisect(FUN, 0.5, 1.5)
> L <- b1$root
> cat("The value of L is:", L, "\n")
The value of L is: 1.200989
> ## Όρια ελέγχου και εντός ελέγχου πιθανότητες για το X-bar διάγραμμα ελέγχου ροής
αθροίσματος ώστε ARL0=370.4##
> UCL0=LCL0=m0
> UCL1=m0+1*L*s0/sqrt(n)
> UCL2=m0+2*L*s0/sqrt(n)
> UCL3=m0+3*L*s0/sqrt(n)
> LCL1=m0-1*L*s0/sqrt(n)
> LCL2=m0-2*L*s0/sqrt(n)
> LCL3=m0-3*L*s0/sqrt(n)
> m1 = m0
> p5=pnorm(UCL1,m1,s0/sqrt(n))-pnorm(UCL0,m1,s0/sqrt(n))
> p6=pnorm(UCL2,m1,s0/sqrt(n))-pnorm(UCL1,m1,s0/sqrt(n))
> p7=pnorm(UCL3,m1,s0/sqrt(n))-pnorm(UCL2,m1,s0/sqrt(n))
> p8=1-pnorm(UCL3,m1,s0/sqrt(n))
> p4=pnorm(LCL0,m1,s0/sqrt(n))-pnorm(LCL1,m1,s0/sqrt(n))
> p3=pnorm(LCL1,m1,s0/sqrt(n))-pnorm(LCL2,m1,s0/sqrt(n))
> p2=pnorm(LCL2,m1,s0/sqrt(n))-pnorm(LCL3,m1,s0/sqrt(n))
> p1=pnorm(LCL3,m1,s0/sqrt(n))
> ## Όρια ελέγχου του R διαγράμματος ροής ελέγχου##
> n=9

```

```

> L3D <- qtukekey(p1, n, Inf)
> L2D <- qtukekey(p1+p2, n, Inf)
> L1D <- qtukekey(p1+p2+p3, n, Inf)
> L0 <- qtukekey(0.5, n, Inf)
> L1U <- qtukekey(p1+p2+p3+p4+p5, n, Inf)
> L2U <- qtukekey(p1+p2+p3+p4+p5+p6, n, Inf)
> L3U <- qtukekey(p1+p2+p3+p4+p5+p6+p7, n, Inf)
> ##Υπολογισμός του μέσου μήκους ροής##
> FUN <- function(t){
+ (p1=ptukekey(L3D/t, n, Inf))
+ (p2=ptukekey(L2D/t, n, Inf) - ptukekey(L3D/t, n, Inf))
+ (p3=ptukekey(L1D/t, n, Inf) - ptukekey(L2D/t, n, Inf))
+ (p4=ptukekey(L0/t, n, Inf) - ptukekey(L1D/t, n, Inf))
+ (p5=ptukekey(L1U/t, n, Inf) - ptukekey(L0/t, n, Inf))
+ (p6=ptukekey(L2U/t, n, Inf) - ptukekey(L1U/t, n, Inf))
+ (p7=ptukekey(L3U/t, n, Inf) - ptukekey(L2U/t, n, Inf))
+ (p8=1-ptukekey(L3U/t, n, Inf))
+ r1 <- c(p4,0,0,p5,p6,p7,0)
+ r2 <- c(p3,p4,0,p5,p6,p7,0)
+ r3 <- c(p2,p3,p4,p5,p6,p7,0)
+ r4 <- c(0,p2,p3,p4+p5,p6,p7,0)
+ r5 <- c(0,p2,p3,p4,p5,p6,p7)
+ r6 <- c(0,p2,p3,p4,0,p5,p6)
+ r7 <- c(0,p2,p3,p4,0,0,p5)
+ Q <- rbind(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7)
+ I <- diag(nrow(Q))
+ u <- c(0,0,0,1,0,0,0)
+ U <- rep(1, times=nrow(Q))
+ return(u%%solve(I-Q)%%U)
+ }
> ##Πίνακας τιμών ARL##
> ARL <- c()
> t <- seq(0.2,3,0.2)
> for (i in 1:length(t)) ARL[i] <- FUN(t[i])
> mat <- cbind(t,ARL)
> rownames(mat) <- rep("",nrow(mat))
> mat
  t    ARL
0.2 1.162331
0.4 2.487521
0.6 4.903317
0.8 24.671524
1.0 370.400054
1.2 23.987314
1.4 6.896761
1.6 3.864688
1.8 2.711392
2.0 2.105108

```

2.2 1.738472  
2.4 1.502898  
2.6 1.347023  
2.8 1.242037  
3.0 1.170405