

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Τμήμα Διδακτικής της Τεχνολογίας και Ψηφιακών Συστημάτων

ΨΗΦΙΑΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΧΩΡΙΚΗΣ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ
ΤΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ
ΣΕ ΑΣΥΡΜΑΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

Εμμανουήλ Θ. Μιχαηλίδης

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Επιβλέπων: Επίκουρος Καθηγητής, Α. Κανάτας

Πειραιάς, Σεπτέμβριος 2006

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑ

Αφιερώνεται στην οικογένεια μου

Περίληψη

Σκοπός της εργασίας αυτής ήταν η θεωρητική μελέτη, η σχεδίαση και η προσομοίωση διαφόρων ψηφιακών τεχνικών χωρικής διαμόρφωσης του διαγράμματος ακτινοβολίας. Οι τεχνικές αυτές χρησιμοποιούν τις μεθόδους της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος και μπορούν να εφαρμοστούν αποτελεσματικά στις στοιχειοκεραίες.

Συγκεκριμένα εξετάστηκαν εξελιγμένοι βέλτιστοι και προσαρμοστικοί αλγόριθμοι, οι οποίοι αυξάνουν την απόδοση των συστημάτων ασύρματων επικοινωνιών σε διαφορετικά περιβάλλοντα διάδοσης, καθώς και τεχνικές εκτίμησης της κατεύθυνσης άφιξης των εισερχομένων σημάτων. Οι ψηφιακές αυτές τεχνικές μελετήθηκαν και συγκρίθηκαν με κριτήριο την πολυπλοκότητα, την ταχύτητα επεξεργασίας και την ευρωστία τους.

Η εξέλιξη των προηγούμενων αλγορίθμων και τεχνικών οδηγεί στην περαιτέρω βελτίωση της τεχνολογίας των ευφών κεραιών, οι οποίες μπορούν να εφαρμόσουν αποτελεσματικά την τεχνική πολλαπλής πρόσβασης με διαίρεση χώρου. Έτσι επιτυγχάνονται μεγάλες τιμές χωρητικότητας, καταστέλλονται οι παρεμβολές, μειώνονται τα φαινόμενα διαλείψεων, λόγω της διάδοσης πολλαπλών δρόμων και βελτιώνεται η ποιότητα των παρεχόμενων υπηρεσιών.

Λέξεις Κλειδιά

Χωρική διαμόρφωση, διάγραμμα ακτινοβολίας, ψηφιακή επεξεργασία σήματος, στοιχειοκεραίες, προσαρμοστικοί αλγόριθμοι, ασύρματες επικοινωνίες, κατεύθυνση άφιξης, ευφείς κεραιές, πολλαπλή πρόσβαση με διαίρεση χώρου

Abstract

The aim of this thesis was the theoretical study, design and simulation of several digital beamforming techniques. These techniques use digital signal processing methods and can be effectively applied in antenna arrays.

Specifically, advanced optimal and adaptive algorithms as well as direction of arrival estimation techniques were examined which can boost wireless communication systems' performance in different propagation environments. The above digital techniques were studied and compared taking into account their complexity, their processing speed and their robustness.

The optimization of these algorithms and techniques leads to further improvement of smart antenna technology which can efficiently implement Space Division Multiple Access technique (SDMA) and offer capacity increment, interference suppression, multipath fading reduction and upgraded Quality of Service (QoS).

Keywords

Beamforming, digital signal processing, antenna arrays, adaptive algorithms, wireless communications, direction of arrival, smart antennas, SDMA

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω ξεχωριστές ευχαριστίες στον εισηγητή του θέματος της εργασίας αυτής και καθηγητή μου, Επίκουρο Καθηγητή Αθανάσιο Κανάτα για την επίβλεψη, την σωστή καθοδήγηση και την πολύτιμη βοήθειά του, καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας.

Παράλληλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα Παναγιώτη Θεοφιλάκο για την άψογη συνεργασία και τις χρήσιμες υποδείξεις και συμβουλές του. Ήταν παρών σε όλη την πορεία ανάπτυξης της εργασίας αυτής.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την οικογένειά μου για τη διαρκή υποστήριξή της σε όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου.

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	i
Περίληψη στην αγγλική γλώσσα (Abstract).....	ii
Ευχαριστίες.....	iii
Περιεχόμενα.....	iv
Κατάλογος πινάκων.....	viii
Κατάλογος σχημάτων.....	ix
Συντομογραφίες.....	xiii
1. Εισαγωγή.....	1
1.1. Η Εξέλιξη των Ασύρματων Συστημάτων Επικοινωνιών.....	1
1.2. Μελλοντικές Απαιτήσεις και Ανάγκες.....	3
1.3. Εισαγωγή στην Τεχνολογία των Στοιχειοκεραίων.....	5
1.4. Εισαγωγή στη Διαδικασία Beamforming.....	6
1.5. Η Τεχνολογία των Ευφών Κεραίων.....	8
1.5.1. Επίπεδα ευφύιας.....	9
1.5.2. Πλεονεκτήματα των ευφών κεραιών.....	11
1.5.3. Μειονεκτήματα των ευφών κεραιών.....	14
1.6. Δομή της Παρούσας Εργασίας.....	16
2. Δομή και Χαρακτηρισμός των Συστημάτων Ψηφιακού Beamforming.....	17
2.1. Εισαγωγή.....	17
2.2. Το Στάδιο της Αναλογικής Επεξεργασίας και Ψηφιοποίησης.....	17
2.3. Το Στάδιο της Ψηφιακής Διαμόρφωσης.....	19
2.4. Το Στάδιο της Ψηφιακής Επεξεργασίας και Αποδιαμόρφωσης.....	20
2.5. Το Σύστημα Ψηφιακού Beamforming Άνω Ζεύξης.....	22
2.6. Το Σύστημα Ψηφιακού Beamforming Κάτω Ζεύξης.....	23
2.7. Ψηφιακό Beamforming και Τεχνικές Πολλαπλής Πρόσβασης.....	24
2.7.1. Ψηφιακό Beamforming και τεχνική FDMA.....	25
2.7.2. Ψηφιακό Beamforming και τεχνική TDMA.....	27
2.7.3. Ψηφιακό Beamforming και τεχνική CDMA.....	32

3. Στοιχειοκεραίες και Επεξεργασία Σημάτων.....	36
3.1. Εισαγωγή.....	36
3.2. Γραμμική Επεξεργασία Σημάτων.....	36
3.3. Επεξεργασία Επίπεδων Κυμάτων.....	39
3.3.1. Ομοιόμορφες γραμμικές στοιχειοκεραίες.....	43
3.3.2. Εισαγωγή στον συμβατικό Beamformer.....	45
3.4. Επεξεργασία Σημάτων Στενής Ζώνης.....	46
3.4.1. Εισαγωγή στη θεώρηση των μιγαδικών βαρών.....	49
4. Χωρο-χρονικές Διαδικασίες και Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων.....	51
4.1. Εισαγωγή.....	51
4.2. Μοντέλα Στιγμιότυπων.....	51
4.2.1. Συχνотικά στιγμιότυπα.....	52
4.2.2. Χρονικά στιγμιότυπα.....	54
4.2.3. Δειγματοληψία σημάτων στις ομοιόμορφες γραμμικές στοιχειοκεραίες.....	55
4.3. Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων Στενής Ζώνης.....	56
4.3.1. Στατιστική επεξεργασία πολλαπλών πηγών σημάτων.....	58
4.3.2. Εφαρμογή της διάσπασης των ιδιοτιμών.....	61
4.3.3. Στατιστική επεξεργασία σημάτων στον συμβατικό beamformer..	62
4.3.4. Ο beamformer μηδενισμού των ανεπιθύμητων κατευθύνσεων....	65
5. Βέλτιστοι Beamformers.....	67
5.1. Εισαγωγή.....	67
5.2. Βέλτιστοι Beamformers Χωρίς Περιορισμούς.....	68
5.2.1. Ο beamformer ελαχίστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος (MMSE).....	69
5.2.2. Η βέλτιστη συνάρτηση κόστους και η αρχή της ορθογωνιότητας.....	71
5.3. Βέλτιστοι Beamformers με Περιορισμούς.....	72
5.3.1. Ο beamformer γραμμικών περιορισμών και ελάχιστης διακύμανσης (LCMV).....	72
5.3.2. Ο beamformer ελάχιστης διακύμανσης και μοναδιαίου κέρδους (MVDR).....	74

5.3.3. Ο beamformer γραμμικών περιορισμών και ελάχιστης ισχύος (LCMP).....	75
5.3.4. Ο beamformer ελάχιστης ισχύος και μοναδιαίου κέρδους (MPDR).....	77
5.3.5. Ο beamformer μεγιστοποίησης του σηματοθορυβικού λόγου (maxSNR).....	78
5.4. Σύγκριση των Βέλτιστων Beamformers.....	80
5.5. Στατιστική Επεξεργασία των Βέλτιστων Beamformers.....	87
5.5.1. Βέλτιστοι beamformers και πολλές πηγές παρεμβολών.....	92
5.6. Εύρωστοι Beamformers.....	94
5.6.1. Η μέθοδος του διαγώνιου φορτίου.....	95
6. Προσαρμοστικοί Beamformers.....	98
6.1 Εισαγωγή.....	98
6.2. Η Μέθοδος της Αντιστροφής του Πίνακα των Δειγμάτων (SMI).....	99
6.2.1. Σύγκλιση στη βέλτιστη λύση των beamformers χωρίς περιορισμούς.....	100
6.2.2. Σύγκλιση στη βέλτιστη λύση των beamformers με περιορισμούς.....	102
6.3. Ο Αλγόριθμος των Ελαχίστων Τετραγώνων (LS).....	103
6.4. Ο Αλγόριθμος των Αναδρομικών Ελαχίστων Τετραγώνων (RLS).....	104
6.4.1. Ο beamformer RLS με περιορισμούς.....	108
6.5. Ο Αλγόριθμος της Απότομης Καθόδου.....	109
6.6. Ο beamformer των Ελαχίστων Μέσων Τετραγώνων (LMS).....	113
6.6.1. Ο κανονικοποιημένος αλγόριθμος LMS	115
6.6.2. Ο beamformer LMS με περιορισμούς.....	116
6.7. Σύγκριση των αλγορίθμων LMS και RLS.....	118
7. Τεχνικές Εκτίμησης της Κατεύθυνσης Άφιξης.....	123
7.1. Εισαγωγή.....	123
7.2. Ο Αλγόριθμος Ταξινόμησης Πολλαπλών Σημάτων (MUSIC).....	125
7.2.1. Ο αλγόριθμος Spectral-MUSIC.....	125
7.2.2. Ο αλγόριθμος Root-MUSIC.....	128
7.2.3. Ο αλγόριθμος Smooth-MUSIC	130

7.2.4. Ο αλγόριθμος MUSIC με περιορισμούς.....	131
7.3. Η Μέθοδος της Ελαχίστης Νόρμας.....	131
7.4. Εκτίμηση των Παραμέτρων του Σήματος με Σταθερές Εναλλασσόμενες Τεχνικές (ESPRIT).....	132
7.5. Η Μέθοδος Matrix Pencil.....	135
7.6. Μέθοδοι Εκτίμησης του Αριθμού των Σημάτων.....	138
8. Προσομοίωση και Αποτελέσματα.....	140
8.1. Εισαγωγή.....	140
8.2. Μελέτη της Επίδοσης του Συμβατικού Beamformer.....	142
8.3. Μελέτη της Επίδοσης των Βέλτιστων Beamformers.....	143
8.3.1. Διαφορετικός αριθμός στοιχείων.....	143
8.3.2. Διαφορετικό SNR εισόδου.....	145
8.3.3. Διαφορετικό SIR εισόδου.....	146
8.3.4. Διαφορετική γωνία παρεμβολής.....	148
8.3.5. Διάγραμμα και πολικό διάγραμμα ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας.....	149
8.3.6. Επίδοση των βέλτιστων beamformers παρουσία σφαλμάτων.....	151
8.3.7. Επίδοση των βέλτιστων beamformers παρουσία πολλαπλών πηγών παρεμβολών.....	152
8.4. Μελέτη της Επίδοσης του Beamformer SMI.....	154
8.5. Μελέτη της Επίδοσης του Beamformer RLS.....	156
8.6. Μελέτη της Επίδοσης του Beamformer LMS.....	159
8.6.1. Μελέτη της επίδοσης του beamformer LMS με περιορισμούς.....	163
8.7. Μελέτη της Επίδοσης των Αλγορίθμων MUSIC και ESPRIT.....	165
9. Συμπεράσματα.....	169
9.1. Εισαγωγή.....	169
9.2. Συμπεράσματα της Προσομοίωσης.....	170
9.3. Προτάσεις για Περαιτέρω Μελέτη.....	171
Βιβλιογραφικές Αναφορές.....	173
Παράρτημα Α.....	176
Παράρτημα Β.....	179
Παράρτημα Γ.....	181

Κατάλογος Πινάκων

1.1. Τυπικές τιμές διασποράς φάσματος ανάλογα με το περιβάλλον διάδοσης.....	4
5.1. Συνοπτική παρουσίαση των Conventional και Null Steering beamformers.....	84
5.2. Συνοπτική παρουσίαση των βέλτιστων beamformers MMSE και MVDR.....	85
5.3. Συνοπτική παρουσίαση των βέλτιστων beamformers MPDR και maxSNR.....	86
6.1. Συνοπτική παρουσίαση της προσαρμοστικής μεθόδου SMI.....	121
6.2. Συνοπτική παρουσίαση του προσαρμοστικού αλγορίθμου RLS.....	122
6.3. Συνοπτική παρουσίαση του προσαρμοστικού αλγορίθμου LMS.....	122
8.1. Τυπικές παράμετροι προσομοίωσης της διαδικασίας ψηφιακού Beamforming σε ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία.....	141
8.2. Συμπεριφορά του αλγορίθμου RLS ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου λ	158
8.3. Συμπεριφορά του αλγορίθμου LMS ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου μ	162
8.4. Συμπεριφορά του αλγορίθμου LMS για $\mu = 0.05$ και διαφορετικό αριθμό συμβόλων εκπαίδευσης.....	162
8.5. Αποτελέσματα προσομοίωσης των αλγορίθμων MUSIC και ESPRIT για διαφορετικό SNR.....	166
8.6. Αποτελέσματα προσομοίωσης των αλγορίθμων MUSIC και ESPRIT για διαφορετικό αριθμό λαμβανόμενων συμβόλων.....	167

Κατάλογος Σχημάτων

1.1. Απλή αναπαράσταση της διαδικασίας Beamforming.....	7
1.2. Σύγκριση μεταξύ των ομοιοκατευθυντικών και των ευφών κεραιών.....	8
1.3. Τα τρία επίπεδα ευφυΐας των ευφών κεραιών.....	9
1.4. Απόσταση κυψελών με επαναχρησιμοποίηση συχνότητας (α) με χρήση συμβατικής κεραιάς και (β) με χρήση ευφούς κεραιάς.....	12
2.1. Το στάδιο της αναλογικής επεξεργασίας και ψηφιοποίησης.....	18
2.2. Το στάδιο της ψηφιακής διαμόρφωσης.....	19
2.3. Το στάδιο της ψηφιακής επεξεργασίας και αποδιαμόρφωσης.....	21
2.4. Διάταξη του συστήματος ψηφιακού Beamforming άνω ζεύξης.....	22
2.5. Διάταξη του συστήματος ψηφιακού Beamforming κάτω ζεύξης.....	24
2.6. Ψηφιακό Beamforming και τεχνική FDMA στην άνω ζεύξη.....	26
2.7. Ψηφιακό Beamforming και τεχνική FDMA στην κάτω ζεύξη.....	27
2.8. Ψηφιακό Beamforming και τεχνική TDMA στην άνω ζεύξη.....	28
2.9. Ψηφιακό Beamforming και τεχνική TDMA στην κάτω ζεύξη.....	29
2.10. Πολλαπλά συστήματα ψηφιακού Beamforming και τεχνική TDMA.....	31
2.11. Σύγχρονο σύστημα ψηφιακού Beamforming και τεχνικής CDMA στην άνω ζεύξη.....	33
2.12. Σύγχρονο σύστημα ψηφιακού Beamforming και τεχνικής CDMA στην κάτω ζεύξη.....	34
2.13. Ασύγχρονο σύστημα ψηφιακού Beamforming και τεχνικής CDMA στην (α) Άνω Ζεύξη (β) Κάτω Ζεύξη.....	35
3.1. Σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων.....	37
3.2. Στοιχειοκεραία N -στοιχείων.....	37
3.3. Γραμμική επεξεργασία σημάτων στην στοιχειοκεραία.....	39
3.4. Επίπεδο κύμα μακρινού πεδίου.....	40
3.5. Επίπεδο κύμα στην είσοδο στοιχειοκεραίας.....	41
3.6. Γραμμική στοιχειοκεραία κατά μήκος του άξονα z	44
3.7. Ο συμβατικός beamformer.....	45
3.8. Ο beamformer στενής ζώνης με ολισθητές φάσης.....	48

3.9. Μπλοκ διάγραμμα λειτουργίας των μιγαδικών βαρών.....	49
3.10. Επίδραση της πραγματικής και φανταστικής συνιστώσας των μιγαδικών βαρών στην επεξεργασία των σημάτων.....	50
3.11. Αναπαράσταση της διαδικασίας ψηφιακού Beamforming με μιγαδικά βάρη.....	50
5.1. Τμήμα από την δύο διαστάσεων επιφάνεια επίδοσης δευτέρου βαθμού..	69
5.2. Αναπαράσταση της λειτουργίας του beamformer MMSE σε γραμμική στοιχειοκεραία.....	70
5.3. Η σχέση της αρχής της ορθογωνιότητας με τη βέλτιστη συνάρτηση κόστους.....	72
5.4. Ο βέλτιστος beamformer ακύρωσης μίας πηγής παρεμβολής.....	88
5.5. Ο βέλτιστος beamformer ακύρωσης πολλαπλών πηγών παρεμβολών.....	93
5.6. Ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία με σφάλματα θέσης των αισθητήρων των στοιχείων.....	95
6.1. Απεικόνιση της λειτουργίας των προσαρμοστικών beamformers σε γραμμική στοιχειοκεραία.....	98
6.2. Δομή πλαισίου της τεχνικής TMDA.....	99
6.3. Διάγραμμα ροής του αλγορίθμου RLS.....	107
6.4. Μπλοκ διάγραμμα της λειτουργίας του αλγορίθμου MPDR-RLS.....	108
6.5. Η σχέση του διανύσματος κλίσης με την εφαπτομένη της καμπύλης κόστους.....	110
6.6. Διάγραμμα ροής του αλγορίθμου LMS.....	115
6.7. Η λειτουργία του αλγορίθμου LMS με περιορισμούς.....	117
7.1. Το πρόβλημα της εκτίμησης της κατεύθυνσης άφιξης των σημάτων.....	124
7.2. Απεικόνιση της λειτουργίας των beamformers με αλγόριθμο DoA.....	124
8.1. Εφαρμογή ψηφιακού Beamforming σε ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία.....	140
8.2. Το διάγραμμα ακτινοβολίας του συμβατικού beamformer.....	142
8.3. Το κέρδος κεραίας σε συνάρτηση με τον αριθμό των στοιχείων.....	143
8.4. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα σε συνάρτηση με τον αριθμό των στοιχείων.....	144
8.5. Το κέρδος κεραίας σε συνάρτηση με το SNR εισόδου.....	145

8.6. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα σε συνάρτηση με το SNR εισόδου.....	146
8.7. Το κέρδος κεραίας σε συνάρτηση με το SIR εισόδου.....	147
8.8. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα σε συνάρτηση με το SIR εισόδου.....	147
8.9. Το κέρδος κεραίας σε συνάρτηση με τη γωνία της παρεμβολής.....	148
8.10. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα σε συνάρτηση με τη γωνία της παρεμβολής.....	149
8.11. Το διάγραμμα ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας σε συνάρτηση με τη γωνία εισόδου των λαμβανόμενων σημάτων στην περίπτωση μιας πηγής παρεμβολής.....	150
8.12. Το πολικό διάγραμμα ακτινοβολίας στην περίπτωση μιας πηγής παρεμβολής.....	150
8.13. Σύγκριση του διαγράμματος ακτινοβολίας του beamformer MPDR πριν και μετά τη χρήση της μεθόδου του διαγώνιου φορτίου.....	151
8.14. Το διάγραμμα ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας σε συνάρτηση με τη γωνία εισόδου των λαμβανόμενων σημάτων στην περίπτωση τριών πηγών παρεμβολών.....	153
8.15. Το πολικό διάγραμμα ακτινοβολίας στην περίπτωση τριών πηγών παρεμβολών.....	154
8.16. Το τετραγωνικό σφάλμα στη διαδικασία εκμάθησης του beamformer SMI.....	155
8.17. Το τετραγωνικό σφάλμα μετά τη διαδικασία εκμάθησης του beamformer SMI.....	155
8.18. Απόκλιση του διαγράμματος ακτινοβολίας του beamformer SMI σε σχέση με το βέλτιστο.....	156
8.19. Το τετραγωνικό σφάλμα στη διαδικασία εκμάθησης του beamformer RLS για $\lambda = 0.99$, $\lambda = 0.95$ και $\lambda = 0.80$	157
8.20. Το τετραγωνικό σφάλμα μετά τη διαδικασία εκμάθησης του beamformer RLS για $\lambda = 0.99$, $\lambda = 0.95$ και $\lambda = 0.80$	158
8.21. Απόκλιση του διαγράμματος ακτινοβολίας του beamformer RLS σε σχέση με τον βέλτιστο για $\lambda = 0.99$, $\lambda = 0.95$ και $\lambda = 0.80$	159

8.22. Το τετραγωνικό σφάλμα στη διαδικασία εκμάθησης του beamformer LMS για $\mu = 0.15$, $\mu = 0.10$ και $\mu = 0.05$	160
8.23. Το τετραγωνικό σφάλμα μετά τη διαδικασία εκμάθησης του beamformer LMS για $\mu = 0.15$, $\mu = 0.10$ και $\mu = 0.05$	161
8.24. Απόκλιση του διαγράμματος ακτινοβολίας του beamformer LMS σε σχέση με το βέλτιστο για $\mu = 0.15$, $\mu = 0.10$ και $\mu = 0.05$	163
8.25. Σύγκριση της ταχύτητας σύγκλισης του beamformer LMS με περιορισμούς και του beamformer LMS χωρίς περιορισμούς για $\mu = 0.1$	164
8.26. Το τετραγωνικό σφάλμα μετά τη διαδικασία εκμάθησης του beamformer LMS με περιορισμούς και του beamformer LMS χωρίς περιορισμούς για $\mu = 0.1$	164
8.27. Απόκλιση του διαγράμματος ακτινοβολίας του beamformer LMS με περιορισμούς σε σχέση με το διάγραμμα ακτινοβολίας του beamformer LMS χωρίς περιορισμούς για $\mu = 0.1$	165
8.28. Σφάλμα εκτίμησης των γωνιών άφιξης των σημάτων των αλγορίθμων MUSIC και ESPRIT συναρτήσει του SNR.....	167
8.29. Σφάλμα εκτίμησης των γωνιών άφιξης των σημάτων των αλγορίθμων MUSIC και ESPRIT συναρτήσει του αριθμού των λαμβανόμενων συμβόλων.....	168

Συντομογραφίες

1G	1 st Generation
2G	2 nd Generation
3G	3 rd Generation
AA	Adaptive Array
ADC	Analog to Digital Converter
AIC	Akaiake Information Criterion
AMPS	American Mobile Phone System
AoA	Angle of Arrival
ASIC	Application Specific Integrated Circuit
AWGN	Additive White Gaussian Noise
BER	Bit Error Rate
BS	Base Station
CCI	Co-Channel Interference
CDMA	Code Division Multiple Access
DAC	Digital to Analog Converter
DECT	Digital Enhanced Cordless Telecommunications
DFT	Discrete Fourier Transform
DL	Diagonal Loading
DMI	Direct Matrix Inversion
DoA	Direction of Arrival
DPA	Dynamically Phased Array
DSP	Digital Signal Processing
EDGE	Enhanced Data Rates for Global Evolution
EIRP	Effective Isotropic Radiated Power
ESPRIT	Estimation of Signal Parameters using Rotational Invariance Techniques
ETSI	European Telecommunications Standards Institute
EVD	Eigenvalue Decomposition
FDD	Frequency Division Duplex

FDMA	Frequency Division Multiple Access
FIR	Finite Impulse Response
FM	Frequency Modulation
FPGA	Field Programmable Gate Array
GPRS	General Packet Radio Service
GSM	Global System for Mobile
IDFT	Inverse Discrete Fourier Transform
IF	Intermediate Frequency
INR	Interference-to-Noise Ratio
ISI	Inter-Symbol Interference
LCMP	Linear Constrained Minimum Power
LCMV	Linear Constrained Minimum Variance
LMDS	Local Multipoint Distribution System
LMS	Least Mean Squares
LNR	Load-to-Noise Ratio
LS	Least Square
MAI	Multiple Access Interference
MDL	Minimum Description Length
ML	Maximum Likelihood
MMSE	Minimum Mean Square Error
MPDR	Minimum Power Distortionless Response
MRA	Main Response Axis
MS	Mobile Station
MSE	Mean Square Error
MUSIC	MULTiple Signal Classification
MVDR	Minimum Variance Distortionless Response
NAMI	Noise Alone Matrix Inverse
NLMS	Normalized LMS
NMT	Nordic Mobile Telephone
NTT	Nippon Telephone and Telegraph
OISR	Output Interference-to-Signal Ratio
PCS	Personal Communication Service

PSD	Power Spectral Density
RF	Radio Frequency
RFID	RF Identification
RLS	Recursive Least Square
SDMA	Space Division Multiple Access
SINR	Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio
SIR	Signal-to-Interference Ratio
SL	Switched Lobe
SMI	Sample Matrix Inversion
SNR	Signal-to-Noise Ratio
SPNAMI	Signal Plus Noise Alone Matrix Inverse
SVD	Singular Value Decomposition
TDM	Time Division Multiplex
TDMA	Time Division Multiple Access
TLS	Total Least Squares
TTI	Telecom Trends International
ULA	Uniform Linear Array
UMTS	Universal Mobile Telecommunications System
QoS	Quality of Service
WARC	World Administrative Radio Conference
WCDMA	Wide Code Division Multiple Access
WLAN	Wireless Local Area Network
WPAN	Wireless Personal Area Network
WSN	Wireless Sensor Network
WSS	Wide Sense Stationary

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1. Η Εξέλιξη των Ασύρματων Συστημάτων Επικοινωνιών

Η θεμελίωση της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας από τον Maxwell το 1861 οδήγησε τον Marconi το 1895 στην πρώτη επίσημη ασύρματη μετάδοση με τη βοήθεια ενός δίπολου Hertz, που ουσιαστικά ήταν ο πρώτος ασύρματος τηλεγράφος. Από τότε ξεκίνησαν συστηματικές προσπάθειες ανάπτυξης του τομέα των ασύρματων επικοινωνιών, με σημαντικότερες από αυτές την εφεύρεση των ενισχυτικών λυχνιών και ταλαντωτών τη δεκαετία από το 1905 έως το 1915.

Τα πρώτα αναλογικά συστήματα κινητών επικοινωνιών χρησιμοποιήθηκαν από αστυνομικά τμήματα σε πόλεις των ΗΠΑ για λόγους δημόσιας ασφάλειας το 1934. Σταθμός στην πορεία των ασύρματων επικοινωνιών θεωρείται η χρησιμοποίηση της διαμόρφωσης συχνότητας (Frequency Modulation-FM) από τον Edwin Armstrong το 1935. Αργότερα το 1946 εγκαταστάθηκαν για πρώτη φορά συστήματα κινητών επικοινωνιών σε 25 πόλεις των ΗΠΑ.

Τη δεκαετία του 1960 η AT&T Bell Labs ανέπτυξε τις βασικές αρχές των κυψελωτών συστημάτων [1]. Σύμφωνα με τις αρχές αυτές η περιοχή κάλυψης χωρίζεται σε μικρές κυψέλες, κάθε μια από τις οποίες επαναχρησιμοποιεί διαύλους για να αυξηθεί η χωρητικότητα των συστημάτων. Το 1976 το WARC (World Administrative Radio Conference) ενέκρινε την απόδοση συχνοτήτων στην περιοχή των 800/900 MHz, θέτοντας έτσι την βάση για την ανάπτυξη των εμπορικών συστημάτων.

Το πρώτο παγκοσμίως κυψελωτό σύστημα λειτούργησε στην Ιαπωνία το 1979 από την Nippon Telephone and Telegraph (NTT). Το 1981 η Ericsson ανέπτυξε το πρώτο Ευρωπαϊκό κυψελωτό σύστημα, το NMT (Nordic Mobile Telephone) και το 1983 αναπτύχθηκε στην Αμερική από την AT&T το κυψελωτό σύστημα AMPS (American Mobile Phone System). Τα παραπάνω συστήματα αποτελούν κυψελωτά συστήματα 1^{ης} γενιάς (1G) και χαρακτηρίζονται από αναλογική

διαμόρφωση FM, τεχνική πολλαπλής πρόσβασης FDMA (Frequency Division Multiple Access) και τεχνική FDD (Frequency Division Duplex).

Η ανάπτυξη της ψηφιακών τεχνικών οδήγησε στην σχεδίαση των συστημάτων 2^{ης} γενιάς (2G). Ο Ευρωπαϊκός οργανισμός προτυποποίησης (European Telecommunications Standards Institute-ETSI) ξεκίνησε τη σχεδίαση του GSM (Global System for Mobile) το 1982. Το GSM άρχισε να λειτουργεί το 1992 και είναι σήμερα το πιο διαδεδομένο σύστημα παγκοσμίως [2]. Στηρίζεται στον συνδυασμό των τεχνολογιών TDMA (Time Division Multiple Access) με 200 KHz απόσταση φερόντων, FDMA και FDD. Οι συχνότητες λειτουργίας του είναι 890-915/935-960 MHz για το GSM900, 1710-1785/1805-1880 MHz για το GSM1800 και 1850-1910/1930-1990 MHz για το GSM1900.

Στις αρχές της νέας χιλιετίας η ανάγκη για υψηλότερους ρυθμούς μετάδοσης δεδομένων οδήγησε στην εξέλιξη των πρωτοκόλλων επικοινωνίας (συστήματα General Packet Radio Service-GPRS) και στη βελτίωση των μεθόδων διαμόρφωσης και κωδικοποίησης (συστήματα Enhanced Data Rates for Global Evolution-EDGE). Σήμερα τα συστήματα 3^{ης} γενιάς (3G) προσφέρουν αυξημένες ταχύτητες μετάδοσης δεδομένων και μεγάλο αριθμό παρεχόμενων υπηρεσιών στον ασύρματο χρήστη (υπηρεσίες τηλεειδοποίησης, διαδραστικά πολυμέσα (Interactive Multimedia), υψηλής ποιότητας τηλεδιάσκεψη (Teleconference) και πρόσβαση στο Internet). Η πλειοψηφία των συστημάτων αυτών στηρίζεται σε τεχνολογία πολλαπλής πρόσβασης με διαίρεση κώδικα (Code Division Multiple Access-CDMA) ευρείας ζώνης (WCDMA) και χαρακτηρίζονται ως συστήματα UMTS (Universal Mobile Telecommunications System) [3].

Εκτός από την περιοχή των κινητών τηλεπικοινωνιών, υπάρχουν στις μέρες μας πολυάριθμες άλλες ασύρματες εφαρμογές που περιλαμβάνουν τα συστήματα ασύρματης τηλεφωνίας (Digital Enhanced Cordless Telecommunications-DECT), την αναγνώριση με χρήση ραδιοσυχνοτήτων (RF Identification-RFID), τις δορυφορικές τηλεπικοινωνίες, τα ασύρματα τοπικά και προσωπικά δίκτυα (Wireless Local Area Networks-WLANs, Wireless Personal Area Networks-WPANs), τα ασύρματα δίκτυα αισθητήρων (Wireless Sensor Networks-WSNs) και τα συστήματα τοπικής διανομής πολλαπλών χρηστών (Local Multipoint Distribution Systems-LMDS).

1.2. Μελλοντικές Απαιτήσεις και Ανάγκες

Καθώς τα ασύρματα συστήματα επικοινωνιών εξελίσσονται, οι απαιτήσεις και οι ανάγκες πολλαπλασιάζονται. Σύμφωνα με έρευνα που δημοσίευσε η Telecom Trends International (TTI), ο αριθμός των κινητών τηλεφώνων πρόκειται να διπλασιαστεί μέχρι το 2012 και αναμένεται να φτάσει τα 1,7 δισεκατομμύρια μονάδες [4]. Η αύξηση αυτή θα οφείλεται τόσο στην ύπαρξη ολοένα και περισσότερων πολύ-λειτουργικών συσκευών (σύγκλιση τεχνολογιών), όσο και ειδικευμένων συσκευών (απόκλιση τεχνολογιών).

Η αναμενόμενη αυτή αύξηση του αριθμού των κινητών τερματικών, η απόδοση αποκλειστικών διαύλων για τη διάρκεια κλήσης στις εφαρμογές συνεχούς μετάδοσης φωνής και video και η ζήτηση για υπηρεσίες προσωπικών επικοινωνιών (Personal Communication Services-PCS) απαιτούν αύξηση της χωρητικότητας των διαύλων [5]. Γνωρίζουμε, όμως, ότι η διαθεσιμότητα φάσματος ραδιοσυχνοτήτων είναι περιορισμένη, οπότε απαιτείται η ανάπτυξη αποδοτικών τεχνικών κατανομής του φάσματος σε πολλούς ετερογενείς χρήστες.

Μέχρι σήμερα έχουν χρησιμοποιηθεί διάφορες ψηφιακές τεχνικές για τον διαμοιρασμό των τηλεπικοινωνιακών διαύλων σε διαφορετικά κινητά τερματικά, τεχνικές δηλαδή, για την κατανομή (διαίρεση) του εύρους ζώνης με απόδοση αποκλειστικών διαύλων. Η πολλαπλή πρόσβαση μπορεί να επιτευχθεί με διαίρεση Χρόνου (TDMA), με διαίρεση Συχνότητας (FDMA), με διαίρεση Κώδικα (CDMA), με διαίρεση Χώρου (Space Division Multiple Access-SDMA) ή με υβριδικό συνδυασμό αυτών [6]. Οι τεχνικές αυτές στηρίζονται στο θεμελιώδες αποτέλεσμα της θεωρίας των επικοινωνιών, ότι διαφορετικοί χρήστες μπορούν να μοιράζονται το ίδιο μέσο μετάδοσης, όταν τα σήματα τους είναι ορθογώνια μεταξύ τους (η ετεροσυσχέτιση τους, που δίνει το μέτρο της ομοιότητας τους, είναι μηδενική και έτσι είναι διαχωρίσιμα από τον δέκτη) [2].

Επιπλέον τα τωρινά συστήματα 3^{ης} γενιάς και τα μελλοντικά συστήματα 4^{ης} γενιάς (4G) θα απαιτούν περαιτέρω αναβάθμιση της ποιότητας των προσφερόμενων υπηρεσιών (Quality of Service-QoS) και πολύ υψηλό ρυθμό μετάδοσης της πληροφορίας (Data Rate) [3]. Γνωρίζουμε, όμως, ότι οι ασύρματες επικοινωνιακές συνδέσεις είναι εξαιρετικά ευμετάβλητες. Τα δύο σημαντικότερα

προβλήματα που εμφανίζονται είναι οι παρεμβολές μεταξύ ομοδιαυλικών τερματικών (Co-Channel Interference-CCI) και οι διαλείψεις λόγω της διάδοσης πολλαπλών δρόμων (Multipath Fading).

Το δεύτερο πρόβλημα οφείλεται στις ανακλάσεις (Reflections), διαθλάσεις (Diffractions) και στη σκέδαση (Scattering) από εμπόδια εντός του δρόμου μετάδοσης. Έτσι προκαλείται εξασθένιση των σημάτων και διασπορά του φάσματος [7]. Η χρονική διασπορά (Time-Delay Spread) οδηγεί σε διασυμβολικές παρεμβολές (Intersymbol Interferences-ISI), η συχνοτική διασπορά-μετάθεση συχνοτήτων (Frequency-Doppler Spread) μεταβάλλει χρονικά τα χαρακτηριστικά των διαύλων και η χωρική διασπορά (Spatial-Angle Spread) δυσχεραίνει την εκτίμηση της κατεύθυνσης άφιξης (Direction of Arrival-DoA) των σημάτων.

Ο υψηλός αυτός βαθμός μεταβλητότητας κάνει τις ασύρματες επικοινωνίες ριζικά διαφορετικές από τα υπόλοιπα τηλεπικοινωνιακά δίκτυα και δυσχεραίνει την εύρεση λύσεων για αύξηση της απόδοσης τους. Η βελτίωση των μεθόδων διαμόρφωσης και κωδικοποίησης καθώς και η ανάπτυξη νέων πρωτοκόλλων επικοινωνίας δεν επαρκούν και έτσι τα τελευταία χρόνια γίνονται προσπάθειες για την βελτίωση της τεχνολογίας των κεραιών.

Πίνακας 1.1.

Τυπικές τιμές διασποράς φάσματος ανάλογα με το περιβάλλον διάδοσης

Environment	Delay Spread	Angle Spread	Doppler Spread
Flat Rural (Macro)	0.5 μ sec	1 deg	190 Hz
Urban (Macro)	5 μ sec	20 deg	120 Hz
Hilly (Macro)	20 μ sec	30 deg	190 Hz
Microcell (Mall)	0.3 μ sec	120 deg	10 Hz
Picocell (Indoors)	0.1 μ sec	360 deg	5 Hz

1.3. Εισαγωγή στην Τεχνολογία των Στοιχειοκεραίων

Παρατηρούμε ότι τα παραπάνω προβλήματα, που παρουσιάζουν τα ασύρματα συστήματα επικοινωνιών, οφείλονται, κυρίως, στα διαφορετικά χωρικά χαρακτηριστικά των σημάτων. Οπότε η αξιοπιστία των συστημάτων μπορεί να εξασφαλιστεί αν εφαρμόσουμε κατάλληλες τεχνικές χωρικής διαφορικής λήψης (Spatial Diversity). Τέτοιες τεχνικές μπορούν, όμως, να υλοποιηθούν με κεραίες υψηλής κατευθυντικότητας.

Οι ομοιοκατευθυντικές κεραίες (Omnidirectional Antennas) παρουσιάζουν σχετικά χαμηλή κατευθυντικότητα. Η βελτίωση της κατευθυντικότητας των κεραιών μπορεί, θεωρητικά, να επιτευχθεί με την αύξηση των ηλεκτρικών διαστάσεων του ακτινοβολητή. Ωστόσο, αυτού του είδους η προσέγγιση παρουσιάζει όρια και μειονεκτήματα, όπως την εμφάνιση δευτερευόντων λοβών ή την υπερβολική αύξηση των διαστάσεων της κεραίας [8].

Ένας ιδιαίτερα αποδοτικός τρόπος για την κατασκευή κατευθυντικών συστημάτων ακτινοβολίας είναι η χρήση ενός αριθμού κεραιών-στοιχείων (Elements) με κατάλληλα ηλεκτρικά χαρακτηριστικά και σε συγκεκριμένη διάταξη. Η τοποθέτηση των στοιχείων πρέπει να γίνεται κατά τέτοιο τρόπο, ώστε τα επιμέρους πεδία κάθε κεραίας να παρουσιάζουν ενισχυτική υπέρθεση σε μια επιθυμητή κατεύθυνση και να αναιρούνται μεταξύ τους στον υπόλοιπο χώρο. Το σύστημα αυτό των στοιχείων ονομάζεται στοιχειοκεραία (Antenna Array) και η εξέλιξη της τεχνολογίας της μπορεί να επιφέρει ουσιαστική βελτίωση στην επίδοση των ασύρματων επικοινωνιακών συστημάτων.

Η μορφή του διαγράμματος ακτινοβολίας (Beam Pattern) μιας στοιχειοκεραίας, το οποίο καθορίζει και την απόδοση της, εξαρτάται από:

α) Τη συνολική γεωμετρική διάταξη των στοιχείων: Αν δηλαδή τα στοιχεία τοποθετούνται σε μια ευθεία (γραμμική), στην περιφέρεια ενός νοητού κύκλου (κυκλική), σφαίρας (σφαιρική) ή ορθογωνίου (ορθογωνική).

β) Τη σχετική θέση τοποθέτησης των στοιχείων: Οι στοιχειοκεραίες χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, στις χωρικά ομοιόμορφες (Uniform) και στις

χωρικά ανομοιόμορφες (Non Uniform). Στην πρώτη κατηγορία τα στοιχεία ισαπέχουν μεταξύ τους και το επιθυμητό διάγραμμα ακτινοβολίας ρυθμίζεται κυρίως μέσω του ρεύματος διέγερσης [9]. Στη δεύτερη κατηγορία οι κεραίες διαθέτουν κατά κανόνα μικρότερο αριθμό στοιχείων από αυτές της πρώτης κατηγορίας και καλούνται αραιές. Κριτήρια για την επιλογή της θέσης των αισθητήρων των στοιχείων έχουν προταθεί στο [10].

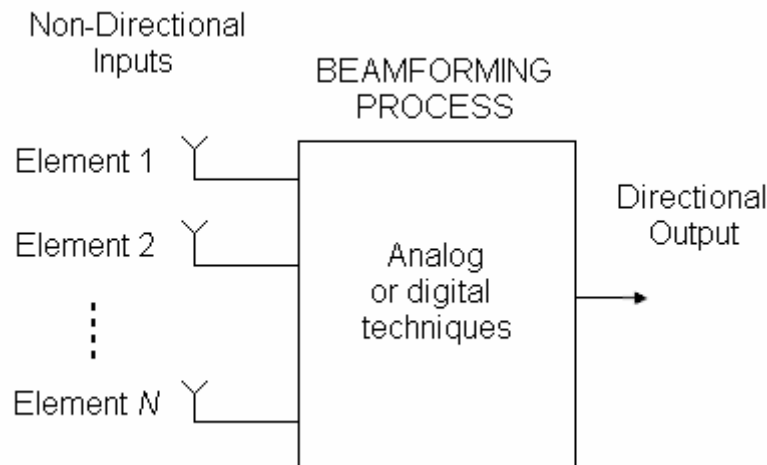
γ) Το διάγραμμα ακτινοβολίας των επιμέρους στοιχείων: Συνήθως, τα επιμέρους στοιχεία είναι κεραίες του ίδιου τύπου, ώστε να διευκολύνεται η σχεδίαση και έχουν παρόμοια διαγράμματα ακτινοβολίας (εκπομπή/λήψη). Το μήκος των στοιχείων μπορεί να είναι το ίδιο για όλα τα στοιχεία ή μπορεί να ακολουθεί κάποια γνωστή κατανομή, όπως η λογαριθμική ή η Rayleigh. Με την κατάλληλη διέγερση μπορούμε να πετύχουμε λοβούς ακτινοβολίας και μηδενισμούς (Nulls) στις επιθυμητές κατευθύνσεις.

δ) Το πλάτος και τη φάση της ρευματικής διέγερσης των επιμέρους στοιχείων: Το πλάτος (Amplitude) και η φάση (Phase) τροφοδοσίας μπορεί να είναι ίδια ή να διαφέρουν, όμως η συχνότητα εκπομπής είναι πάντοτε η ίδια για όλα τα στοιχεία.

1.4. Εισαγωγή στη Διαδικασία Beamforming

Προκειμένου να αυξηθεί η απόδοση των στοιχειοκεραιών, έχουν αναπτυχθεί διάφορες τεχνικές αναλογικές και ψηφιακές. Με αυτές τις τεχνικές επιθυμούμε να έχουμε τον βέλτιστο συνδυασμό των σημάτων RF που λαμβάνει το σύνολο των μη κατευθυντικών (Non-Directional) στοιχείων της στοιχειοκεραίας (σε αρκετές εφαρμογές χρησιμοποιούνται και κατευθυντικά στοιχεία) και τη δημιουργία μιας κατευθυντικής (Directional) κεραίας με επιθυμητό διάγραμμα ακτινοβολίας. Η διαδικασία εφαρμογής των τεχνικών αυτών, δηλαδή η χωρική διαμόρφωση του διαγράμματος ακτινοβολίας, ονομάζεται Beamforming. Ανάλογα με τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται, το Beamforming χωρίζεται σε αναλογικό και ψηφιακό. Το

συνολικό σύστημα που εφαρμόζει τις τεχνικές αυτές χαρακτηρίζεται ως beamformer. Στο σχήμα 1.1. παρουσιάζεται μια απλή αναπαράσταση της διαδικασίας Beamforming σε μια γραμμική στοιχειοκεραία N στοιχείων.



Σχήμα 1.1. Απλή αναπαράσταση της διαδικασίας Beamforming

Η εφαρμογή κατάλληλων τεχνικών Beamforming στις στοιχειοκεραίες επιτρέπει το φιλτράρισμα των σημάτων σε ένα χωρο-χρονικό πεδίο (Space-Time Field) [11]. Σε αυτή την περίπτωση οι στοιχειοκεραίες χαρακτηρίζονται ως χωρικά φίλτρα (Spatial Filters). Με το Beamforming μπορούν να επιτυγχάνονται ταυτοχρόνως πολλαπλοί επιθυμητοί στόχοι και καθίστανται πλέον περιττοί οι πολύπλοκοι μηχανισμοί μηχανικής περιστροφής των κεραιών προς την επιθυμητή κατεύθυνση. Επίσης, στην περίπτωση του ψηφιακού Beamforming, η δυνατότητα μεταβολής των κατευθυντικών χαρακτηριστικών της στοιχειοκεραίας εξαρτάται από την ταχύτητα επεξεργασίας των υπολογιστικών υποσυστημάτων.

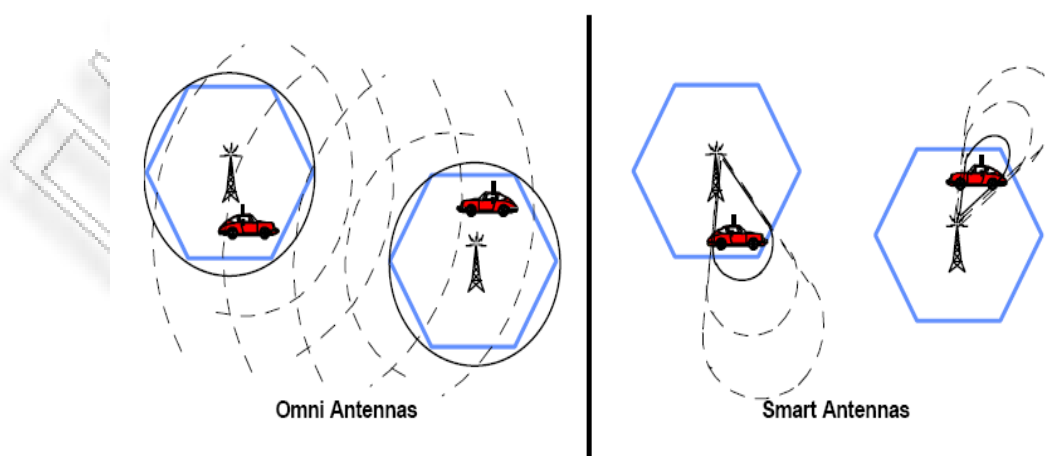
Στις πραγματικές εφαρμογές, όπου το περιβάλλον διάδοσης είναι μεταβαλλόμενο και συνυπάρχουν το επιθυμητό σήμα, ο θόρυβος και οι παρεμβολές, απαιτείται η κατευθυντική ευαισθησία της κεραίας να παρακολουθεί χωρο-χρονικά την επιθυμητή πηγή σήματος και να προσαρμόζεται δυναμικά σε οποιαδήποτε μεταβολή. Σε αυτή τη περίπτωση εφαρμόζεται προσαρμοστικό Beamforming, όπως θα δούμε και στη συνέχεια.

Οι τεχνικές Beamforming, εκτός από τα συστήματα των ασύρματων και κινητών επικοινωνιών, χρησιμοποιούνται επίσης και στα ηχοβολιστικά συστήματα υποθαλάσσιου ελέγχου (SONAR), στα συστήματα RADAR, στη γεωφυσική, στην αστροφυσική, στη βιοιατρική και στην ακουστική [11].

1.5. Η Τεχνολογία των Ευφυών Κεραιών

Τα τελευταία χρόνια η νέα τεχνολογία κεραιών που εισήχθη ονομάστηκε τεχνολογία των ευφυών κεραιών (Smart Antennas). Οι ευφυείς κεραίες είναι στην πραγματικότητα στοιχειοκεραίες που έχουν την ικανότητα, με χρήση τεχνικών Beamforming (αναλογικών ή ψηφιακών), να προσαρμόζονται στο περιβάλλον διάδοσης και να μεταβάλλουν δυναμικά το συνολικό διάγραμμα ακτινοβολίας εκπομπής ή/και λήψης [12]. Έτσι αυξάνεται χωρο-χρονικά η ευαισθησία της στοιχειοκεραίας προς την κατεύθυνση του επιθυμητού σήματος και ταυτόχρονα μειώνεται προς τις κατευθύνσεις, στις οποίες λαμβάνονται ανεπιθύμητα σήματα.

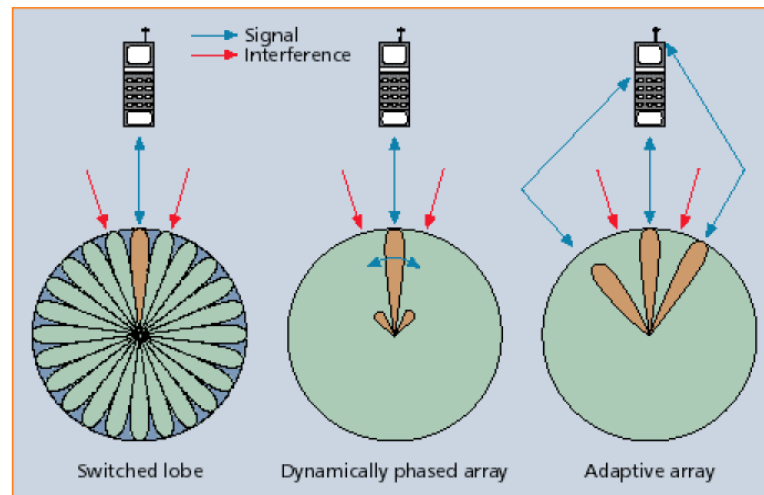
Όπως βλέπουμε στο επόμενο σχήμα, οι ομοιοκατευθυντικές κεραίες έχουν γωνιακό άνοιγμα 360° και ακτινοβολούν σε όλες τις κατευθύνσεις (ακόμα και σε κατευθύνσεις που δεν υπάρχουν κινητά τερματικά). Η τεχνολογία των ευφυών κεραιών επιτρέπει την εστίαση του ακτινοβολούμενου σήματος σε συγκεκριμένη κατεύθυνση στο χώρο (μόνο εκεί που υπάρχουν κινητά τερματικά).



Σχήμα 1.2. Σύγκριση μεταξύ των ομοιοκατευθυντικών και των ευφυών κεραιών

1.5.1. Επίπεδα ευφυΐας

Η επίδραση των ευφυνών κεραιών στα ασύρματα συστήματα επικοινωνιών καθορίζεται από τα επίπεδα ευφυΐας των κεραιών (Levels of Intelligence), τα οποία παρουσιάζονται στη συνέχεια [3].



Σχήμα 1.3. Τα τρία επίπεδα ευφυΐας των ευφυνών κεραιών

- **Στοιχειοκεραίες μεταβαλλόμενου λοβού**

Οι στοιχειοκεραίες μεταβαλλόμενου λοβού (Switched Lobe-SL) είναι η απλούστερη τεχνική και υλοποιείται με ένα πλέγμα από πολλαπλούς κατευθυντικούς λοβούς σε προκαθορισμένες κατευθύνσεις. Το σύστημα ανιχνεύει το λόγο του σήματος προς το θόρυβο (Signal to Noise Ratio-SNR) ή προς τη παρεμβολή (Signal to Interference Ratio-SIR) και επιλέγει να «κλειδώσει» σε έναν από τους προκαθορισμένους λοβούς. Επίσης μπορεί να αλλάζει από τον ένα λοβό στον άλλο καθώς ο χρήστης κινείται στο χώρο κάλυψης [13].

Η βελτίωση της επίδοσης των στοιχειοκεραιών μεταβαλλόμενου λοβού σε σχέση με τις απλές στοιχειοκεραίες είναι προφανής. Αντί για τη δημιουργία ενός σταθερού διαγράμματος ακτινοβολίας χρησιμοποιώντας απλά τις μεταλλικές ιδιότητες και τη φυσική διάταξη της στοιχειοκεραίας, τα συστήματα

μεταβαλλόμενου λοβού συνδυάζουν τα σήματα που λαμβάνουν τα επιμέρους στοιχεία, με αποτέλεσμα να σχηματίζουν ένα προσαρμοζόμενο διάγραμμα ακτινοβολίας με μεγαλύτερη χωρική επιλεκτικότητα και αυξημένη κατευθυντικότητα.

Τέτοιας τεχνολογίας στοιχειοκεραία χρησιμοποιεί αναλογικές τεχνικές Beamforming και είναι εύκολο να ενσωματωθεί στα υπάρχοντα κυψελωτά δίκτυα. Χαρακτηρίζεται, όμως, από μη ομοιόμορφο κέρδος (Scalloping) [12] και μέτρια απόδοση όταν παρουσιάζονται διαδόσεις πολλαπλών δρόμων και ισχυρές παρεμβολές στην ίδια κατεύθυνση με το επιθυμητό σήμα. Έτσι η βελτίωση, σε σχέση με τις πιο πολύπλοκες προσαρμοζόμενες κεραίες που περιγράφονται στη συνέχεια, είναι περιορισμένη [14].

- **Στοιχειοκεραίες δυναμικής μεταβολής φάσης**

Στις στοιχειοκεραίες δυναμικής μεταβολής φάσης (Dynamically Phased Arrays-DPA) χρησιμοποιούμε έναν αλγόριθμο εκτίμησης της DoA για το λαμβανόμενο σήμα από το κινητό τερματικό και έτσι είναι δυνατός ο συνεχής εντοπισμός του χρήστη [3]. Αυτή η τεχνική μπορεί να θεωρηθεί ως μια εξέλιξη της τεχνικής του μεταβαλλόμενου λοβού και εφαρμόζει ψηφιακό Beamforming. Μπορούμε με αυτόν τον τρόπο να έχουμε μεγιστοποίηση της λαμβανόμενης ισχύος, αφού όλα τα στοιχεία είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν για συνδυασμό διαφορεικής λήψης (Diversity Combine), αλλά δεν είναι δυνατή η αντιμετώπιση των παρεμβολών.

- **Προσαρμοστικές στοιχειοκεραίες**

Η τεχνολογία των προσαρμοστικών στοιχειοκεραιών (Adaptive Arrays-AA) είναι η πιο σύγχρονη κατηγορία των ευφυών κεραιών. Σε αυτή την περίπτωση, χρησιμοποιούνται προηγμένοι αλγόριθμοι εκτίμησης της DoA και τεχνικές χωρικής διαφορικής λήψης για τον εντοπισμό της κατεύθυνσης των πηγών των παρεμβολών και την προσαρμογή του διαγράμματος ακτινοβολίας, ανάλογα με το

περιβάλλον διάδοσης. Οι προσαρμοστικές στοιχειοκεραίες μπορούν έτσι να ελαχιστοποιούν τις παρεμβολές και ταυτόχρονα να μεγιστοποιούν το επιθυμητό λαμβανόμενο σήμα, άρα και το SIR [3]. Οι προσαρμοστικές στοιχειοκεραίες πραγματοποιούν προσαρμοστικό ψηφιακό Beamforming το οποίο στις μέρες μας μπορεί να εφαρμοστεί με επιτυχία, χάρη στην πρόοδο της τεχνολογίας των επεξεργαστών ψηφιακού σήματος.

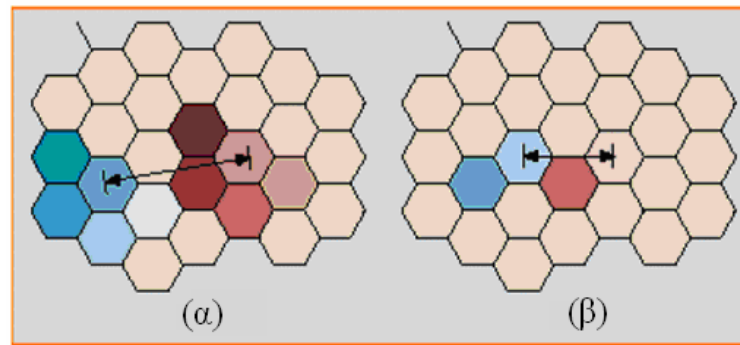
1.5.2. Πλεονεκτήματα των ευφών κεραιών

- **Καταστολή παρεμβολών και αύξηση χωρητικότητας**

Με την εφαρμογή των ευφών κεραιών στους σταθμούς βάσης (Base Stations) εκμεταλλευόμαστε την δυνατότητα χωρικού περιορισμού της ισχύος εκπομπής προς το κάθε κινητό τερματικό. Η χωρική διαφορική λήψη μειώνει τις παρεμβολές μεταξύ των ομοδιαυλικών κινητών, πρόβλημα το οποίο, ιδιαίτερα σε πυκνοκατοικημένες περιοχές, είναι η κύρια πηγή παραμόρφωσης των σημάτων. Παράλληλα η μείωση των παρεμβολών βελτιώνει το SIR, άρα και την ποιότητα του σήματος, λόγω της μείωσης του Bit Error Rate (BER).

Ουσιαστικά, με τις ευφείς κεραιές, μπορούμε να εφαρμόσουμε αποτελεσματικά την τεχνική πολλαπλής πρόσβασης με διαίρεση Χώρου (SDMA), η οποία επιτρέπει σε περισσότερα από ένα κινητά τερματικά να είναι κατανεμημένα στο ίδιο φυσικό δίαυλο επικοινωνιών και να διαχωρίζονται από την θέση και τη γωνία τους. Η τεχνική SDMA αν εφαρμοστεί ταυτόχρονα με άλλες τεχνικές πολλαπλής πρόσβασης βελτιστοποιεί τη χρήση του φάσματος των συχνοτήτων και αυξάνει σημαντικά τη χωρητικότητα του συστήματος [15].

Σε συστήματα που χρησιμοποιούν τις τεχνικές TDMA/FDMA (σύστημα GSM) η βελτίωση του SIR προσφέρει τη δυνατότητα μειωμένων αποστάσεων μεταξύ των κυψελών που χρησιμοποιούν την ίδια συχνότητα ή την ίδια χρονοσχισμή (Time Slot). Ένα παράδειγμα φαίνεται στο επόμενο σχήμα, όπου η παραδοσιακή ομαδοποίηση των επτά κυψελών έχει μειωθεί σε ομαδοποίηση των τριών κυψελών. Αυτό οδηγεί σε βελτίωση της χωρητικότητας κατά 7/3 [3].



Σχήμα 1.4. Απόσταση κυψελών με επαναχρησιμοποίηση συχνότητας (α) με χρήση συμβατικής κεραίας και (β) με χρήση ευφυούς κεραίας

Η μείωση των παρεμβολών με τη χρήση της τεχνικής SDMA μπορεί να βελτιώσει και τα συστήματα που βασίζονται σε τεχνικές CDMA (σύστημα UMTS). Σε αυτά τα συστήματα υπάρχει έντονο πρόβλημα παρεμβολών από άλλα κινητά τερματικά εξαιτίας του γεγονότος ότι οι κώδικες διασποράς (Spreading Codes) δεν είναι ιδανικά ορθογώνιοι. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται Παρεμβολή Πολλαπλής Πρόσβασης (Multiple Access Interference-MAI) και περιορίζει την χωρητικότητα του συστήματος.

- **Αύξηση κέρδους κεραίας και περιοχής ραδιοκάλυψης**

Στις αγροτικές και αραιοκατοικημένες περιοχές, όπου η πυκνότητα των κινητών τερματικών είναι χαμηλή, η αύξηση της περιοχής ραδιοκάλυψης παίζει πιο σημαντικό ρόλο σε σχέση με την αύξηση της χωρητικότητας του συστήματος. Με τις ομοιοκατευθυντικές κεραίες είχαμε σπατάλη ισχύος, αφού ακτινοβολούσαν ακόμα και σε κατευθύνσεις που δεν υπήρχαν κινητά τερματικά.

Η εφαρμογή των ευφώνων κεραίων στους σταθμούς βάσης προσφέρει αύξηση της μέσης ισχύος του σήματος, άρα και αυξημένο κέρδος κεραίας (Array Gain). Το γεγονός αυτό επιτρέπει την αύξηση της περιοχής ραδιοκάλυψης (Radio-Coverage) του σταθμού βάσης και την μεγιστοποίηση του βεληνεκούς. Οπότε οι

σταθμοί βάσης θα μπορούν να τοποθετηθούν πιο μακριά ο ένας από τον άλλο και επιπλέον θα απαιτείται για κάποια συγκεκριμένη περιοχή μειωμένος αριθμός σταθμών βάσης, άρα και μείωση του συνολικού κόστους του συστήματος, χωρίς υποβάθμιση της ποιότητας υπηρεσίας [7].

Ωστόσο μερικές φορές υπάρχουν περιορισμοί στη μέγιστη τιμή του EIRP (Effective Isotropic Radiated Power), οι οποίοι δεν επιτρέπουν το επιπλέον κέρδος κεραίας να χρησιμοποιείται για αύξηση της περιοχής ραδιοκάλυψης. Σε αυτήν την περίπτωση το επιπλέον κέρδος κεραίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να μειωθεί η ισχύς εκπομπής για το κινητό τερματικό. Έτσι απαιτούνται μπαταρίες μικρότερων δυνατοτήτων επιτρέποντας ελαφρύτερα και μικρότερα κινητά τερματικά και μεγαλύτερη διάρκεια-χρόνο ομιλίας με την ίδια μπαταρία.

- **Μείωση διαλείψεων και διάδοσης πολλαπλών δρόμων**

Το κέρδος κεραίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την ενίσχυση του συστήματος ενάντια στις διαλείψεις (Fades) και στη διάδοση πολλαπλών δρόμων. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί είτε στην πλευρά του δέκτη, είτε στην πλευρά του πομπού.

Στην πρώτη περίπτωση ο δέκτης συνδυάζει αντίγραφα του σήματος τα οποία έχουν διαδοθεί μέσω διαφορετικών, ανεξάρτητων διαδρομών, με αποτέλεσμα η πιθανότητα όλα τα αντίγραφα να έχουν υποστεί συνθήκες ισχυρής διάλειψης (Deep Fade) να ελαχιστοποιείται. Το προκύπτον σήμα στο δέκτη είναι σαφώς πιο σταθερό με μειωμένες διακυμάνσεις [16].

Ο χωρικός διαφορισμός στην πλευρά του πομπού μπορεί να επιτευχθεί με ή χωρίς τη γνώση του καναλιού, αρκεί να γίνει υιοθέτηση της χωρο-χρονικής κωδικοποίησης (Space-Time Coding) κατά τη διαδικασία της προ-επεξεργασίας του εκπεμπόμενου σήματος.

Αποτέλεσμα της αντιμετώπισης των παραπάνω προβλημάτων είναι η μείωση της διασποράς χρόνου και κατ' επέκταση η αύξηση των επιτρεπόμενων ρυθμών μετάδοσης χωρίς την παρουσία ισοσταθμιστή (Equalizer), αλλά και ο αποτελεσματικότερος έλεγχος ισχύος [3].

- **Νέες υπηρεσίες και ασφάλεια**

Η εισαγωγή των ευφών κεραιών θα ικανοποιήσει, όπως αναφέραμε, τις ανάγκες αύξησης χωρητικότητας, ρυθμού μετάδοσης και γενικότερα ποιότητας υπηρεσίας. Τις βελτιώσεις αυτές αναμένεται να τις εκμεταλλευτούν τα δίκτυα 3^{ης} και 4^{ης} γενιάς για την παροχή προηγμένων υπηρεσιών πολυμέσων και Internet.

Επιπλέον η χρήση ευφών κεραιών, θα δώσει στα δίκτυα την δυνατότητα να έχουν πρόσβαση σε χωρικές πληροφορίες των χρηστών. Αυτές οι πληροφορίες θα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό της θέσης των χρηστών με πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια από ότι στα υπάρχοντα δίκτυα και έτσι θα αυξηθεί η επίδοση των υπηρεσιών προσωπικών επικοινωνιών. Η υπηρεσία αυτή θα είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε κλήσεις έκτακτης ανάγκης [3].

Όσο αναφορά την ασφάλεια, η υποκλοπή συνδιάλεξης θα είναι πολύ δυσκολότερη όταν χρησιμοποιούνται ευφυείς κεραιές, αφού ο υποκλοπέας πρέπει να βρίσκεται στην ίδια κατεύθυνση με το κινητό τερματικό για συγκεκριμένο σταθμό βάσης.

1.5.3. Μειονεκτήματα των ευφών κεραιών

- **Πολυπλοκότητα πομποδέκτη**

Ένας πομποδέκτης που χρησιμοποιεί σύστημα ευφούς κεραιάς είναι πολύ πιο πολύπλοκος από ένα παραδοσιακό πομποδέκτη σταθμού βάσης. Η κεραιά θα χρειάζεται ξεχωριστές συνδέσεις με τον πομποδέκτη για κάθε ένα από τα στοιχεία καθώς και ακριβή ρύθμιση σε πραγματικό χρόνο.

Επίσης η διαδικασία τροποποίησης των λοβών ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας απαιτεί σημαντικό υπολογιστικό φόρτο, ειδικά για την περίπτωση των προσαρμοστικών κεραιών. Αυτό σημαίνει ότι ένας σταθμός βάσης που στηρίζεται στις ευφυείς κεραιές πρέπει να διαθέτει πολύ δυνατούς

επεξεργαστές και αξιόπιστα συστήματα ελέγχου, άρα θα είναι πολύ πιο ακριβή η υλοποίηση του, σε σχέση με τους τωρινούς σταθμούς βάσης.

- **Διαχείριση εξοπλισμού και κινητικότητας**

Αν και οι ευφυείς κεραιές στηρίζονται κυρίως στην τεχνολογία RF, απαιτούν βελτιωμένες λειτουργίες δικτύων, όπως η διαχείριση των πόρων (Resource Management) και της κινητικότητας (Mobility Management). Όταν μια νέα σύνδεση δημιουργείται ή μια υπάρχουσα σύνδεση ανατίθεται σε ένα νέο σταθμό βάσης καμία γωνιακή πληροφορία δεν είναι διαθέσιμη. Έτσι ο νέος σταθμός βάσης χρειάζεται κάποιο εναλλακτικό τρόπο για να εντοπίσει το χρήστη. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με τη συνεχή σάρωση της κυψέλης μέσω μίας δέσμης ανίχνευσης, η οποία θα μπορεί να εντοπίζει τις υποψήφιες νέες συνδέσεις ή αναθέσεις [3].

Μια άλλη δυνατότητα είναι η χρήση ενός εξωτερικού συστήματος για εντοπισμό θέσης, όπως το GPS. Σε περίπτωση που δύο χρήστες έχουν την ίδια ακριβώς γωνία, ένας από αυτούς πρέπει γρήγορα να μετακινηθεί σε άλλο κανάλι, ώστε η σύνδεση να μην διακοπεί. Αυτό σημαίνει ότι σε συστήματα που χρησιμοποιούν SDMA θα υπάρχουν πολύ περισσότερες μεταπομπές (μεταγωγές κυκλώματος) στην ίδια κυψέλη (Intracell Handovers) σε σχέση με τα παραδοσιακά συστήματα TDMA ή CDMA.

- **Αύξηση φυσικού μεγέθους της στοιχειοκεραίας**

Μια στοιχειοκεραία με μεγάλο αριθμό στοιχείων είναι αναγκαία ώστε να έχουμε αποδεκτό κέρδος. Τυπικές στοιχειοκεραίες που αποτελούνται από 6-10 οριζόντια διαχωριζόμενα στοιχεία έχουν προταθεί για εξωτερικά περιβάλλοντα κινητών επικοινωνιών. Η αναγκαία απόσταση μεταξύ των στοιχείων είναι 0.4-0.5 μήκη κύματος, όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια, άρα μια στοιχειοκεραία με οκτώ στοιχεία θα έχει μήκος περίπου 1.2 m στα 900 MHz και 60 cm στα 2 GHz.

1.6. Δομή της Παρούσας Εργασίας

Στο εισαγωγικό κεφάλαιο 1 αναφερθήκαμε στην εξέλιξη των ασύρματων συστημάτων επικοινωνιών. Τονίσαμε τις απαιτήσεις των σύγχρονων συστημάτων και κάναμε μια εισαγωγή στις τεχνικές Beamforming. Οι τεχνικές αυτές αν εφαρμοστούν στις στοιχειοκεραίες (υλοποίηση ευφυούς κεραίας) μπορούν να βελτιώσουν αισθητά τις επιδόσεις των παραπάνω συστημάτων.

Στο κεφάλαιο 2 θα ξεκινήσουμε την μελέτη των ψηφιακών τεχνικών Beamforming, που είναι το αντικείμενο της εργασίας αυτής. Σκοπός του συγκεκριμένου κεφαλαίου είναι ο χαρακτηρισμός των συστημάτων ψηφιακού Beamforming και η μελέτη της δομής τους και της εφαρμογής τους στα ασύρματα συστήματα επικοινωνιών πολλαπλής πρόσβασης.

Στη συνέχεια, στο κεφάλαιο 3, θα ασχοληθούμε με την επεξεργασία σήματος στις στοιχειοκεραίες, όταν στην είσοδο λαμβάνουμε αιτιοκρατικά σήματα και στο κεφάλαιο 4 θα μελετήσουμε την στατιστική επεξεργασία σημάτων, παρουσία θορύβου και παρεμβολών.

Το κεφάλαιο 5 είναι αφιερωμένο στην ανάλυση των τεχνικών, με τις οποίες έχουμε βέλτιστο ψηφιακό Beamforming. Κατόπιν, στο κεφάλαιο 6 θα μελετήσουμε την περίπτωση του προσαρμοστικού ψηφιακού Beamforming, το οποίο εφαρμόζεται στις προσαρμοστικές ευφυείς κεραίες και στο κεφάλαιο 7 θα επιμείνουμε στις μεθόδους εκτίμησης της κατεύθυνσης άφιξης των λαμβανόμενων σημάτων.

Έπειτα, στο κεφάλαιο 8 θα προσομοιώσουμε στο MATLAB τις ψηφιακές τεχνικές Beamforming, στην περίπτωση που η στοιχειοκεραία είναι ομοιόμορφη και γραμμική. Θα πειραματιστούμε για διαφορετικές τιμές των βασικών παραμέτρων των τεχνικών αυτών και θα σχολιάσουμε τα αποτελέσματα. Τέλος στο κεφάλαιο 9 θα εξάγουμε τα συμπεράσματα μας και θα τονίσουμε τις προοπτικές και τις δυνατότητες εξέλιξης και βελτίωσης των παραπάνω ψηφιακών τεχνικών Beamforming.

Στα παραρτήματα παρουσιάζονται κάποιες βασικές έννοιες κεραιών, μαθηματικών και στοχαστικών ανελίξεων, οι οποίες κρίνονται χρήσιμες για την κατανόηση της εργασίας αυτής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Δομή και Χαρακτηρισμός των Συστημάτων Ψηφιακού Beamforming

2.1. Εισαγωγή

Όπως αναφέραμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι στοιχειοκεραίες δυναμικής μεταβολής φάσης και οι προσαρμοστικές στοιχειοκεραίες πραγματοποιούν ψηφιακό Beamforming, σε αντίθεση με τις στοιχειοκεραίες μεταβαλλόμενου λοβού που πραγματοποιούν αναλογικό. Το ψηφιακό Beamforming, το οποίο αποτελεί αντικείμενο της εργασίας αυτής, παρουσιάζει σημαντικά αυξημένη απόδοση σε σχέση με το αναλογικό και συνδυάζει τις τεχνικές των στοιχειοκεραίων και της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τις βαθμίδες των συστημάτων ψηφιακού Beamforming, μέσα από τις οποίες διέρχονται τα σήματα, ώστε να μετασχηματιστούν, να ψηφιοποιηθούν και να επεξεργασθούν.

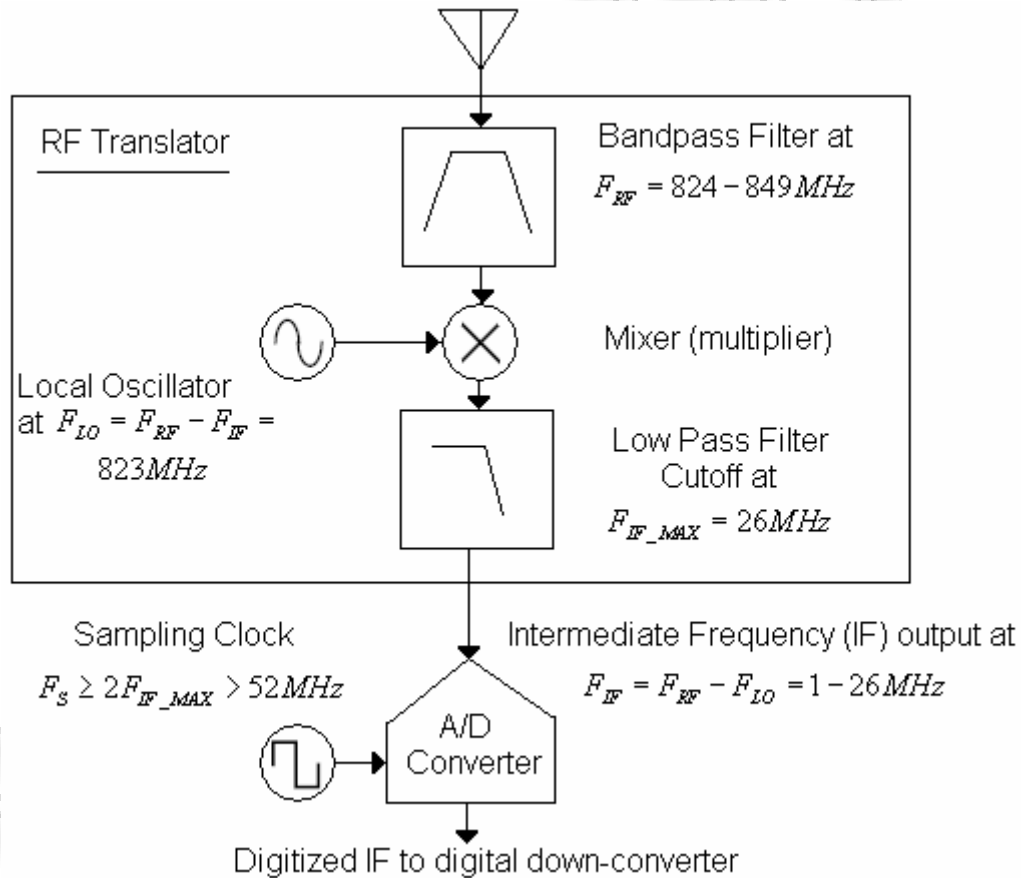
Θα αναφέρουμε επίσης τις διατάξεις των συστημάτων πολλαπλής πρόσβασης, στα οποία εφαρμόζεται ψηφιακό Beamforming και βελτιώνει σε μεγάλο βαθμό την απόδοσή τους.

2.2. Το Στάδιο της Αναλογικής Επεξεργασίας και Ψηφιοποίησης

Όταν πραγματοποιείται η άνω ζεύξη (Uplink), τα N στοιχεία της στοιχειοκεραίας λαμβάνουν σήματα RF. Λόγω του υψηλού κόστους ψηφιοποίησης σημάτων που υπερβαίνουν τα 30 MHz (συχνότητα των βραχέων σημάτων (Shortwaves)), οι δέκτες (Receivers) χρησιμοποιούν διατάξεις ραδιο-μεταφραστών (RF Translators), ώστε να μειωθεί η συχνότητα των σημάτων [17].

Οι διατάξεις των ραδιο-μεταφραστών περιλαμβάνουν, συνήθως, ταλαντωτές (Oscillators), ζωνοπερατά φίλτρα (Bandpass Filters), μείκτες-πολλαπλασιαστές (Mixers-Multipliers), βαθυπερατά φίλτρα (Lowpass Filters) και ενισχυτές χαμηλού θορύβου (Low-Noise Amplifiers). Τα σήματα που διέρχονται από τους ραδιο-μεταφραστές μετατρέπονται σε σήματα ενδιάμεσης συχνότητας (IF), τα οποία μπορούν εύκολα να ψηφιοποιηθούν.

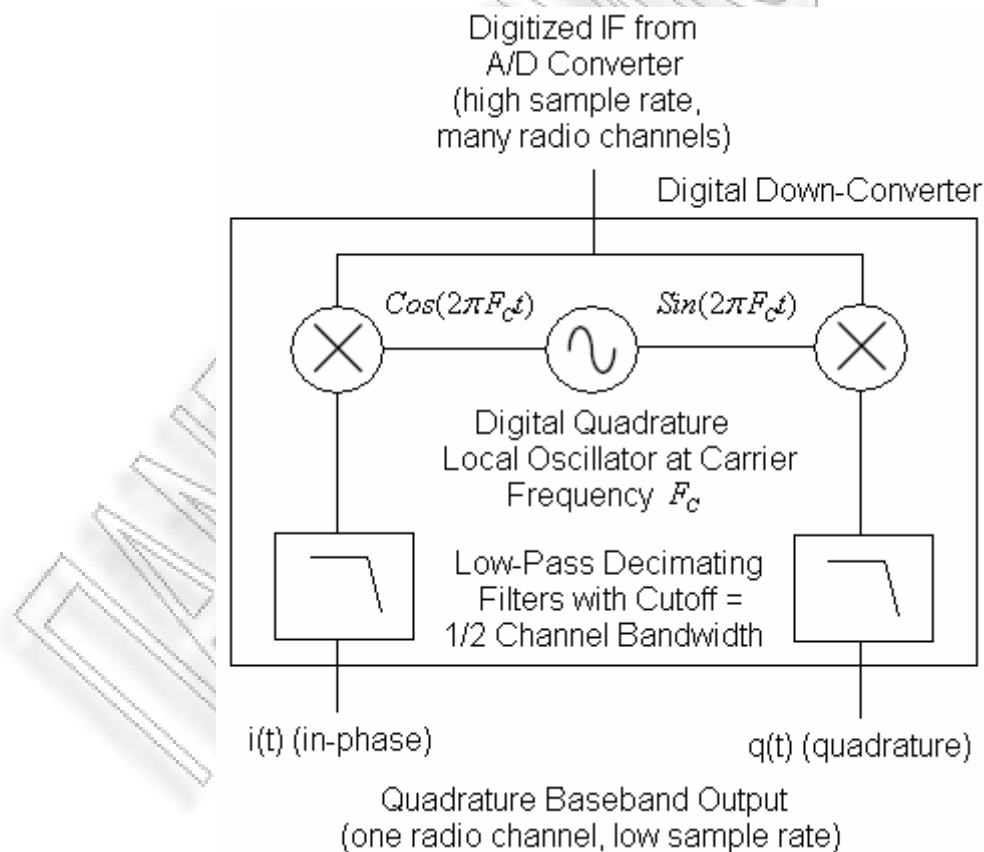
Στο επόμενο σχήμα βλέπουμε μία τυπική διάταξη ραδιο-μεταφραστή, ο οποίος μετατοπίζει τις συχνότητες της άνω ζεύξης του κυκλωτού συστήματος AMPS από τα 824-849 MHz στα 1-26 MHz.



Σχήμα 2.1. Το στάδιο της αναλογικής επεξεργασίας και ψηφιοποίησης

2.3. Το Στάδιο της Ψηφιακής Διαμόρφωσης

Αφού τα σήματα IF ψηφιοποιηθούν μέσω των μετατροπέων ADCs (Analog to Digital Converters), διέρχονται από τον ψηφιακό μετατροπέα-διαμορφωτή down-converter, ο οποίος μηδενίζει την κεντρική συχνότητα F_c του διαύλου και περιορίζει το εύρος ζώνης, ώστε να επαρκεί για ένα δίαυλο. Η διαμόρφωση οδηγεί στην παραγωγή ενός μιγαδικού σήματος εξόδου βασικής ζώνης (Baseband) της μορφής $s(t) = x(t) + j \cdot y(t)$, το οποίο αποτελείται από δύο συνιστώσες και χαρακτηρίζεται από χαμηλό ρυθμό δειγμάτων (Sample Rate). Η συνιστώσα $i(t)$ (in-phase), για την οποία ισχύει $x(t) = i(t)$, αντιπροσωπεύει το πραγματικό μέρος και η συνιστώσα $q(t)$ (quadrature), για την οποία ισχύει $y(t) = -q(t)$, αντιπροσωπεύει το μιγαδικό [17].



Σχήμα 2.2. Το στάδιο της ψηφιακής διαμόρφωσης

Οι συνιστώσες αυτές είναι ορθογωνικές, δηλαδή έχουν διαφορά φάσης 90° (Quadrature Baseband Output) και η δημιουργία τους είναι απαραίτητη για την αναπαράσταση τόσο των θετικών, όσο και των αρνητικών (σε σχέση με την μηδενική κεντρική συχνότητα του διαύλου) συχνοτήτων.

Το σύνολο των μιγαδικών σημάτων που λαμβάνουν τα στοιχεία μπορεί να παραστεί ως ένα μιγαδικό διάνυσμα (Complex Vector) $\mathbf{s}(t)$, οι τιμές του οποίου είναι της μορφής $s_n(t) = x_n(t) + j \cdot y_n(t)$, όπου $s_n(t)$ το σήμα που λαμβάνει το n -οστό ($n = 0, 1, \dots, N-1$) στοιχείο.

2.4. Το Στάδιο της Ψηφιακής Επεξεργασίας και Αποδιαμόρφωσης

Τα συστήματα ψηφιακού Beamforming περιλαμβάνουν ειδικά ψηφιακά φίλτρα επεξεργασίας σήματος. Σε αυτά πραγματοποιείται ο πολλαπλασιασμός των μιγαδικών διανυσματικών σημάτων με κατάλληλα μιγαδικά διανύσματα, τα οποία χαρακτηρίζουμε ως μιγαδικά βάρη (Complex Weights). Τα μιγαδικά βάρη μπορούν να είναι σταθερά ή προσαρμοζόμενα και μεταβαλλόμενα στο χρόνο και υπολογίζονται συνήθως με βάση κάποιο κριτήριο ή περιορισμό, όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια.

Ο προσδιορισμός των μιγαδικών βαρών πραγματοποιείται με κάποιον προηγμένο αλγόριθμο υλοποίησης ψηφιακού φίλτρου είτε υπό την μορφή λογισμικού (Software), είτε μέσω ειδικών συσκευών (Hardware). Υπάρχουν τέσσερις εναλλακτικές τεχνολογίες για την υλοποίηση ψηφιακών φίλτρων. Σε αυτές συμπεριλαμβάνονται οι προγραμματιζόμενες συσκευές FPGA, τα προγραμματιζόμενα DSPs, οι γενικής χρήσης μικροεπεξεργαστές και τα ολοκληρωμένα κυκλώματα ASICs.

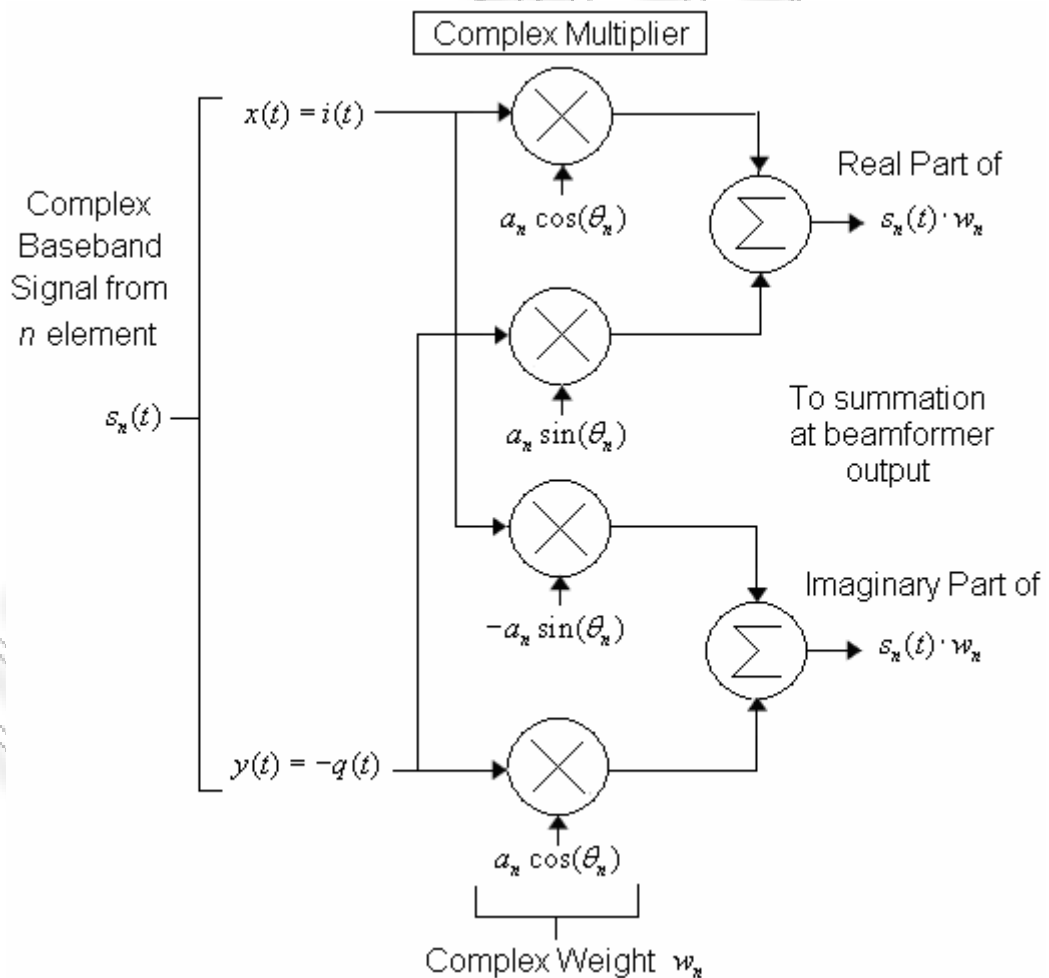
Το μιγαδικό βάρος του n -οστού στοιχείου είναι της μορφής:

$$w_n = a_n \cos(\theta_n) + j \cdot a_n \sin(\theta_n) = a_n e^{j \cdot \theta_n}$$

όπου a_n το πλάτος και θ_n η φάση αντίστοιχα. Το γινόμενο του μιγαδικού σήματος επί του μιγαδικού βάρους, δηλαδή το n -οστό ψηφιακά επεξεργασμένο σήμα, είναι της μορφής:

$$y_n = s_n(t) \cdot w_n = a_n \{ [x_n(t) \cos(\theta_n) - y_n(t) \sin(\theta_n)] + j [x_n(t) \sin(\theta_n) + y_n(t) \cos(\theta_n)] \}$$

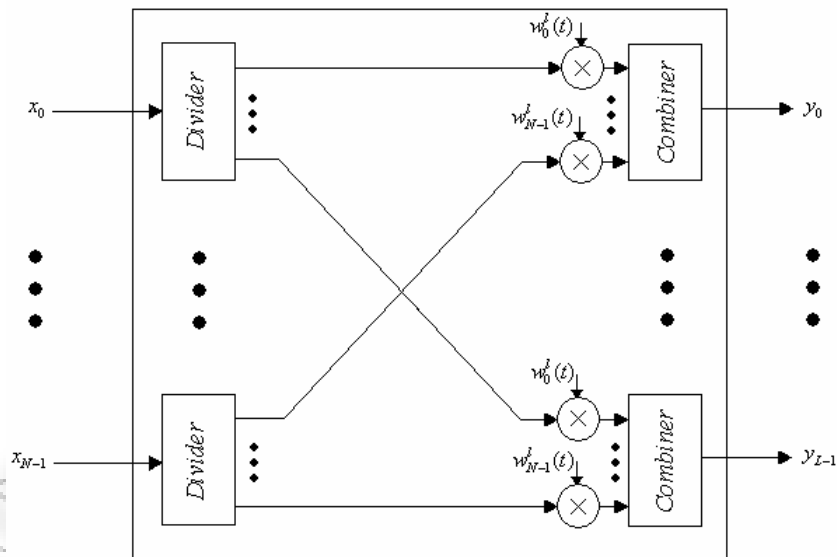
Το άθροισμα των γινομένων των μιγαδικών σημάτων έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία ενός σήματος βασικής ζώνης με κατευθυντικές ιδιότητες. Το σήμα αυτό διέρχεται από έναν αποδιαμορφωτή (Demodulator), μέσω του οποίου είναι δυνατή η ανάκτηση του σήματος RF [17]. Η παραπάνω διαδικασία ψηφιακού Beamforming ονομάζεται και Beamforming στο πεδίο των στοιχείων (Element-Space Beamforming).



Σχήμα 2.3. Το στάδιο της ψηφιακής επεξεργασίας και αποδιαμόρφωσης

2.5. Το Σύστημα Ψηφιακού Beamforming Άνω Ζεύξης

Στην περίπτωση της άνω ζεύξης (Uplink) θεωρούμε ότι L χρήστες χρησιμοποιούν τον ίδιο συχνοτικό (ή χρονικό) δίαυλο. Τα L σήματα των χρηστών λαμβάνονται ταυτόχρονα στην ίδια συχνότητα φέροντος (Carrier Frequency) από τα N στοιχεία της στοιχειοκεραίας. Προκειμένου να διαχωριστούν τα σήματα των χρηστών, πρέπει να δημιουργηθούν ταυτόχρονα L δέσμες ακτινοβολίας άνω ζεύξης στην ίδια συχνότητα [5]. Για να πραγματοποιηθεί η διαδικασία του ψηφιακού Beamforming, κάθε ένα από τα N σήματα των στοιχείων διαιρείται σε L κλάδους. Οι έξοδοι των N διαιρετών (Dividers) οργανώνονται σε L ομάδες, κάθε μία από τις οποίες περιέχει εξόδους από κάθε διαιρέτη.



Σχήμα 2.4. Διάταξη του συστήματος ψηφιακού Beamforming άνω ζεύξης

Κάθε ομάδα πολλαπλασιάζεται με ένα σύνολο μιγαδικών βαρών $w_n^l(t)$ (το μιγαδικό βάρος $w_n^l(t)$ αντιστοιχεί την l -οστή δέσμη ακτινοβολίας, $l = 0, 1, \dots, L-1$). Στην ιδανική περίπτωση, το σύνολο των L μιγαδικών διανυσματικών βαρών πρέπει να παρουσιάζει αμοιβαία ορθογωνιότητα

$\left((\mathbf{w}^k)^H \mathbf{w}^l = 0 \right)$, έτσι ώστε να ελαχιστοποιούνται οι παρεμβολές μεταξύ των L σημάτων των χρηστών. Το l -οστό σήμα εξόδου μπορεί να εκφραστεί ως:

$$y_l(t) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n^l(t) x_n(t)$$

και πρέπει να επεξεργαστεί περαιτέρω (διαδικασία αποδιαμόρφωσης), προκειμένου να εξαχθούν πληροφορίες σχετικά με το αρχικό σήμα RF.

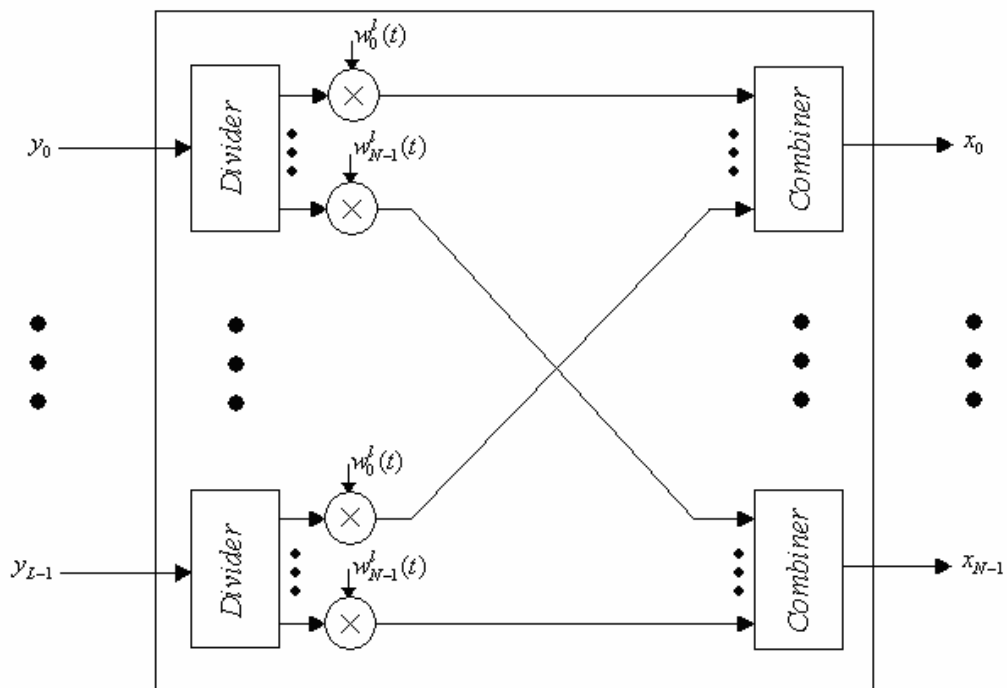
Όπως βλέπουμε στο προηγούμενο σχήμα, τα βάρη εκφράζονται ως χρονικά εξαρτημένες συναρτήσεις. Αυτό συμβαίνει, είτε γιατί οι χρήστες κινούνται κατά την διάρκεια μιας κλήσης, είτε γιατί το περιβάλλον διάδοσης μεταβάλλεται χρονικά. Αν το σύστημα του ψηφιακού Beamforming έχει επαρκή επεξεργαστική ισχύ, τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε χρονική πολυπλεξία (Time Multiplex). Σε αυτή την περίπτωση κάθε επεξεργαστής ψηφιακού Beamforming χρησιμοποιείται για έναν αριθμό FDMA συχνοτήτων. Αν χρησιμοποιούμε TDMA πρέπει και πάλι τα βάρη να είναι χρονικά εξαρτημένες συναρτήσεις, έτσι ώστε να συγχρονίζονται με τα αντίστοιχα χρονικά πλαίσια.

2.6. Το Σύστημα Ψηφιακού Beamforming Κάτω Ζεύξης

Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι πρέπει να σταλούν L σήματα σε L κινητούς χρήστες, στην ίδια συχνότητα φέροντος. Οπότε πρέπει να δημιουργηθούν ταυτόχρονα L δέσμες ακτινοβολίας κάτω ζεύξης ίδιας συχνότητας [5]. Για να πραγματοποιηθεί η διαδικασία Beamforming, κάθε ένα από τα L σήματα διαιρείται σε N κλάδους, οι οποίοι πολλαπλασιάζονται με ένα σύνολο μιγαδικών βαρών $w_n^l(t)$. Είναι και πάλι επιθυμητό το σύνολο των L μιγαδικών διανυσματικών βαρών να παρουσιάζει αμοιβαία ορθογωνιότητα $\left((\mathbf{w}^k)^H \mathbf{w}^l = 0 \right)$, έτσι ώστε να ελαχιστοποιούνται οι παρεμβολές μεταξύ των L σημάτων που

πρόκειται να εκπεμφθούν. Τα βάρη χωρίζονται σε ομάδες και συνδυάζονται με τον τρόπο που βλέπουμε στο επόμενο σχήμα. Το σήμα εξόδου του n -οστού συνδυαστή (Combiner), το οποίο θα διαμορφωθεί και θα οδηγηθεί στο n -οστό στοιχείο, προκειμένου να εκπεμφθεί, μπορεί να εκφραστεί ως:

$$x_n(t) = \sum_{l=1}^{L-1} w_n^l(t) y_l(t)$$



Σχήμα 2.5. Διάταξη του συστήματος ψηφιακού Beamforming κάτω ζεύξης

2.7. Ψηφιακό Beamforming και Τεχνικές Πολλαπλής Πρόσβασης

Σε ένα ασύρματο σύστημα επικοινωνιών είναι απαραίτητη η εφαρμογή κάποιας τεχνικής πολλαπλής πρόσβασης ή συνδυασμός τεχνικών, προκειμένου να διαμοιράζεται στους χρήστες ο περιορισμένος αριθμός διαύλων. Στις επόμενες

σελίδες θα ασχοληθούμε με την εφαρμογή του ψηφιακού Beamforming στα συστήματα FDMA, TDMA και CDMA και θα περιγράψουμε τις αντίστοιχες διατάξεις [5].

2.7.1. Ψηφιακό Beamforming και τεχνική FDMA

Στα συστήματα FDMA το διαθέσιμο φάσμα συχνοτήτων διαιρείται σε σχισμές (Slots), κάθε μία από τις οποίες αποδίδεται σε έναν χρήστη. Τα συστήματα ψηφιακού Beamforming πρέπει να βρίσκονται μετά από τους αποπολυπλέκτες (Demultiplexers) στην άνω ζεύξη και πριν από τους αποπολυπλέκτες στην κάτω ζεύξη.

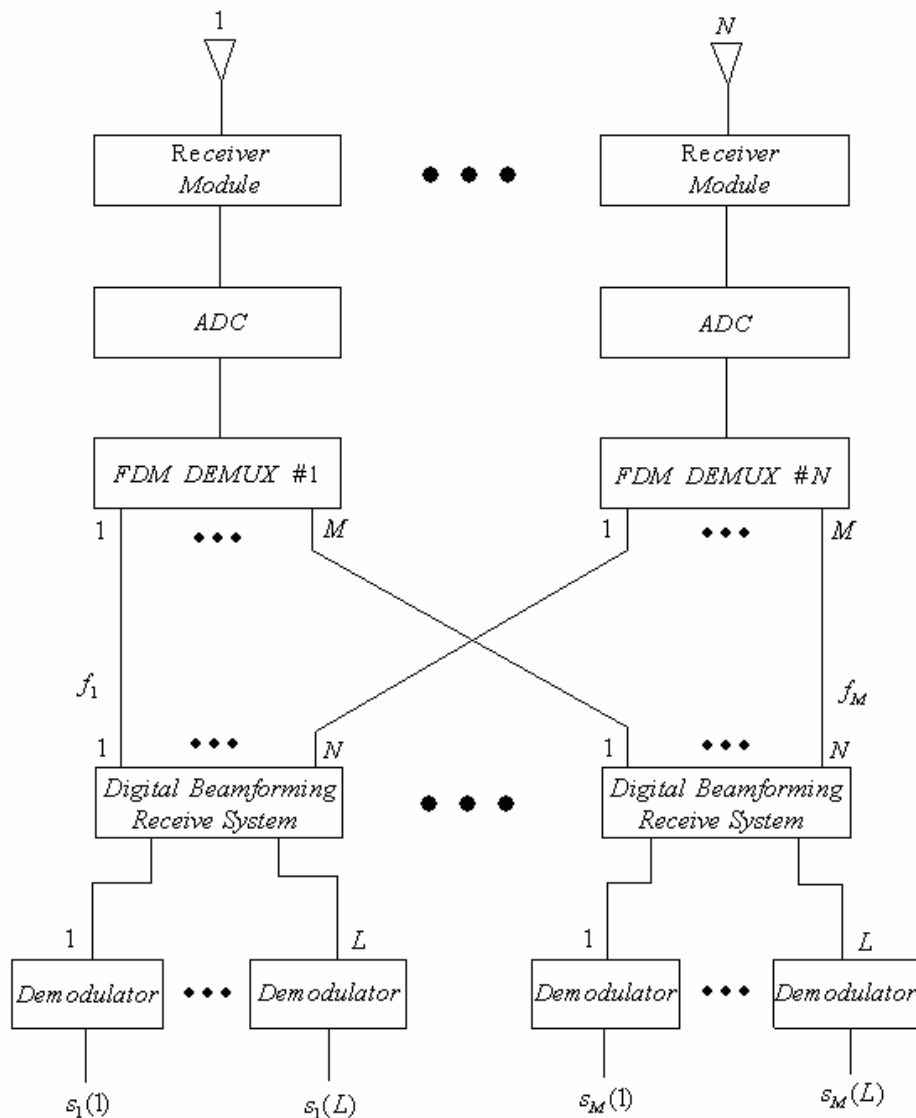
Όπως βλέπουμε στα σχήματα που ακολουθούν, χρησιμοποιούνται M συχνοτικοί δίαυλοι, κάθε ένας από τους οποίους χρησιμοποιείται για L χρήστες, δηλαδή το σύστημα μπορεί, θεωρητικά, να διαχειριστεί ταυτόχρονα $M \times L$ χρήστες. Το συνολικό σύστημα αποτελείται (αντίστοιχα για την άνω και κάτω ζεύξη) από μια στοιχειοκεραία N στοιχείων, N δέκτες (ή πομπούς), N μετατροπείς ADCs (ή DACs), N ψηφιακούς αποπολυπλέκτες (ή πολυπλέκτες), M συστήματα λήψης (ή εκπομπής) ψηφιακού Beamforming και $M \times L$ ψηφιακούς αποδιαμορφωτές (ή διαμορφωτές).

Στην περίπτωση της άνω ζεύξης το ψηφιακό Beamforming εφαρμόζεται στα σήματα όλων των συχνοτικών δίαυλων και σε διατάξεις, όπως αυτές που αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα. Αν κάθε σύστημα ψηφιακού Beamforming παράγει L δέσμες ακτινοβολίας, μετά την αποδιαμόρφωση θα ανακτηθούν $M \times L$ σήματα [5].

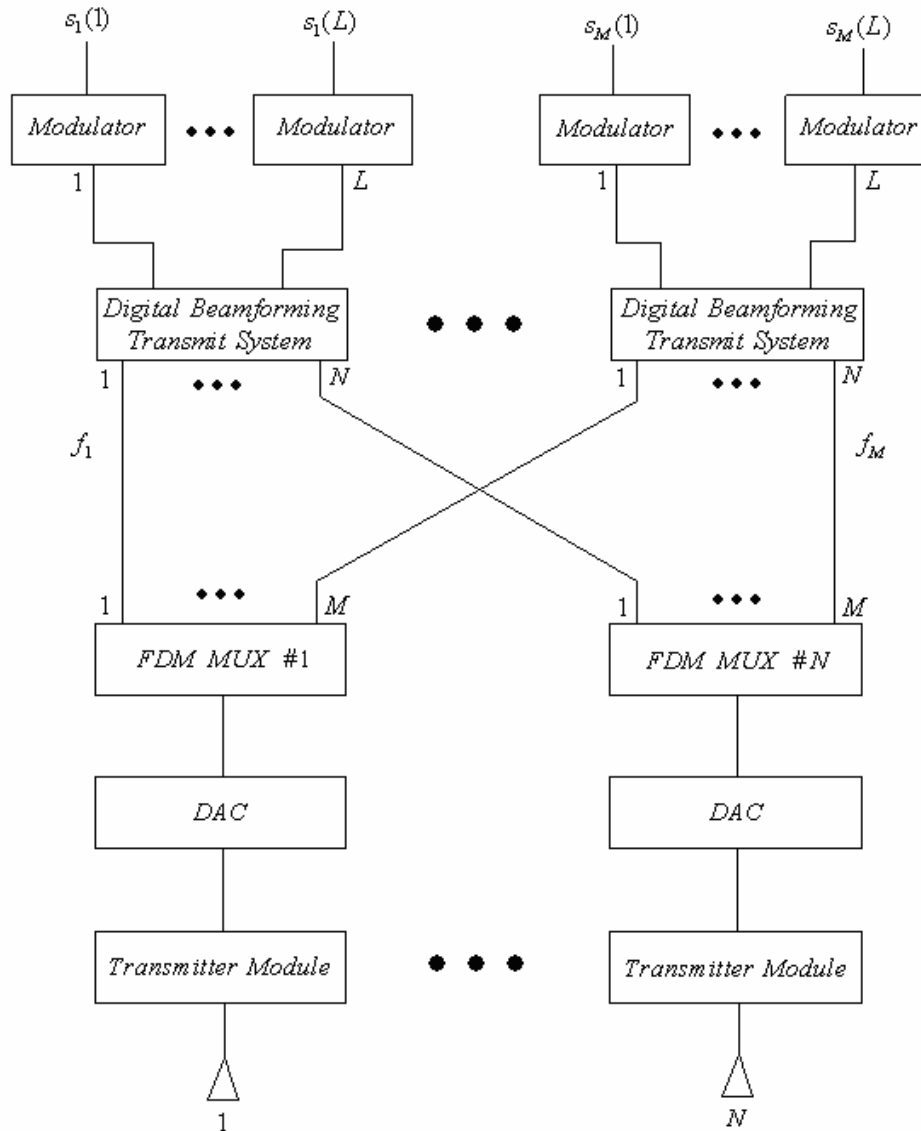
Στην κάτω ζεύξη πραγματοποιείται η αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή το ψηφιακό Beamforming εφαρμόζεται στα διαμορφωμένα σήματα. Στα σήματα εξόδου των συστημάτων ψηφιακού Beamforming εφαρμόζεται πολυπλεξία με διαίρεση συχνότητας (Frequency Division Multiplex-FDM) πριν από την εκπομπή τους. Οι μετατροπείς ADCs τοποθετούνται αμέσως μετά τους δέκτες και οι μετατροπείς DACs τοποθετούνται πριν τους πομπούς και έτσι απαιτείται μόνο N αριθμός μετατροπέων σε κάθε περίπτωση. Έτσι δεν παρατηρείται μείωση του

SNR, όπως θα συνέβαινε στην περίπτωση μετατροπής αναλογικών σημάτων σε ψηφιακά. Απαιτούνται βέβαια μετατροπείς υψηλής ταχύτητας και ψηφιακοί επεξεργαστές υψηλής απόδοσης για την πολυπλεξία-αποπολυπλεξία των συχνοτήτων.

Αν δεν μπορούν να ικανοποιηθούν οι παραπάνω απαιτήσεις, τότε πρέπει αρχικά να χρησιμοποιηθούν μετατροπείς DACs, έπειτα να εφαρμοστεί αναλογική πολυπλεξία-αποπολυπλεξία και τέλος να χρησιμοποιηθούν μετατροπείς ADCs. Τότε, όμως, απαιτούνται $N \times M$ μετατροπείς ADCs και η αναλογική πολυπλεξία-αποπολυπλεξία πιθανότατα θα μειώσει το SNR των σημάτων.



Σχήμα 2.6. Ψηφιακό Beamforming και τεχνική FDMA στην άνω ζεύξη



Σχήμα 2.7. Ψηφιακό Beamforming και τεχνική FDMA στην κάτω ζεύξη

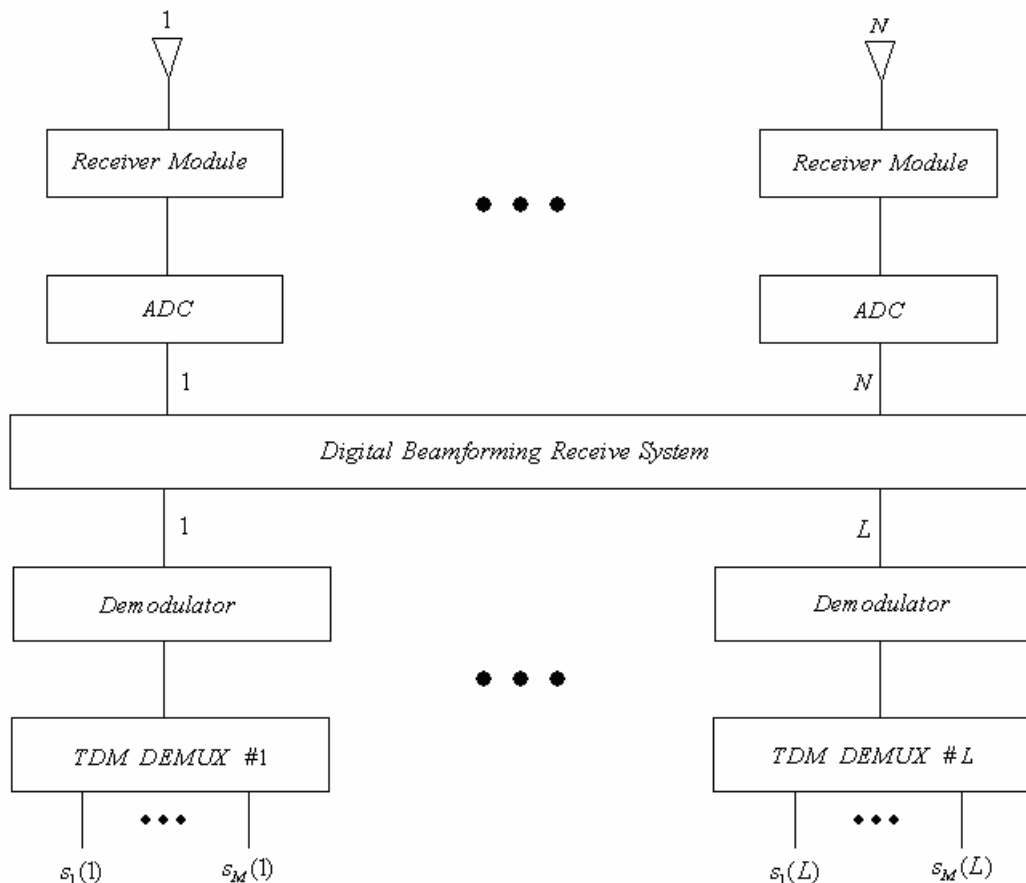
2.7.2. Ψηφιακό Beamforming και τεχνική TDMA

Στα συστήματα TDMA κάθε χρήστης χρησιμοποιεί ένα διάλυο ευρείας ζώνης περιοδικά και για ένα σύντομο χρονικό διάστημα. Οι εκπομπές σήματος των χρηστών είναι συνεπώς διακοπτόμενες και έτσι το σύστημα πρέπει να χρησιμοποιεί ψηφιακή τεχνολογία, ώστε ο πομπός να αποθηκεύει τα δεδομένα

και η διαδικασία εκπομπής δεδομένων να γίνεται γρηγορότερα από τη διαδικασία δημιουργίας δεδομένων. Στην περίπτωση της τεχνικής TDMA το ψηφιακό Beamforming εφαρμόζεται σε όλη την ζώνη συχνοτήτων.

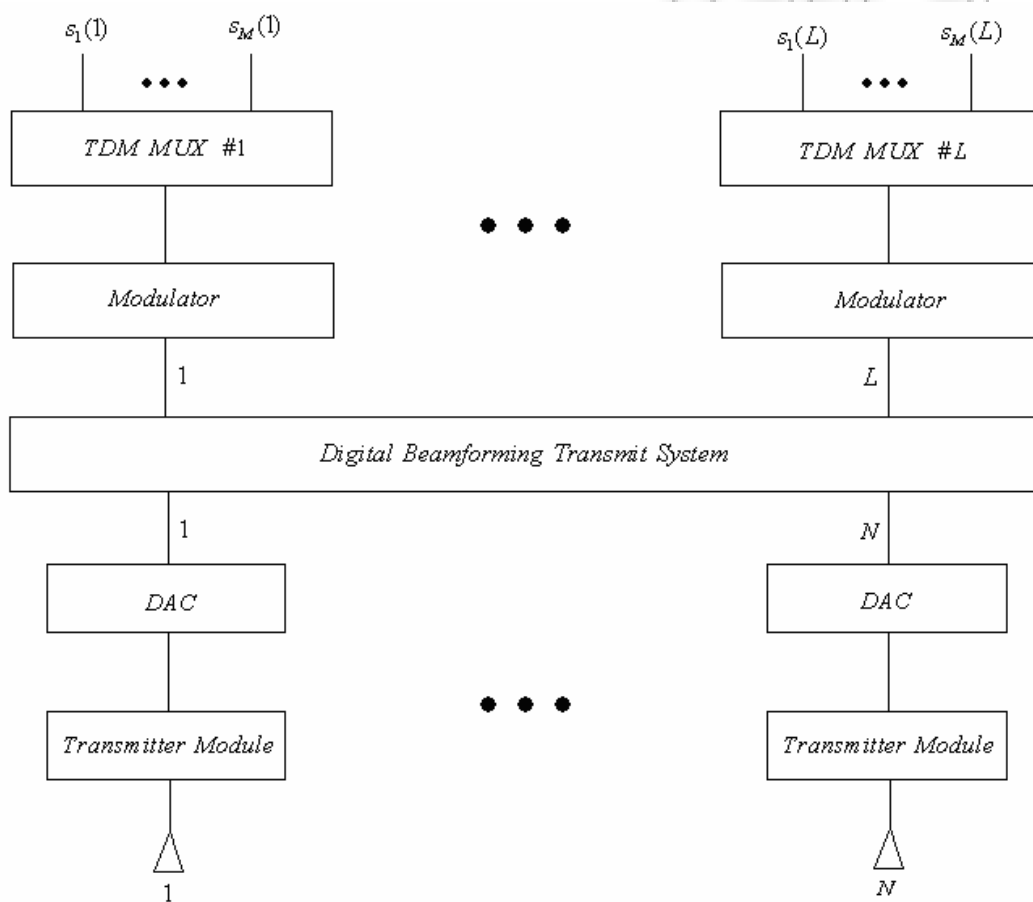
Το συνολικό σύστημα αποτελείται (αντίστοιχα για την άνω και κάτω ζεύξη) από μια στοιχειοκεραία N στοιχείων, N δέκτες (ή πομπούς), N μετατροπείς ADCs (ή DACs), L ψηφιακούς αποπολυπλέκτες (ή πολυπλέκτες), ένα σύστημα λήψης (ή εκπομπής) ψηφιακού Beamforming και L ψηφιακούς αποδιαμορφωτές.

Στην περίπτωση της άνω ζεύξης το ψηφιακό Beamforming εφαρμόζεται στα λαμβανόμενα σήματα των N στοιχείων, ώστε να παραχθούν L δέσμες ακτινοβολίας άνω ζεύξης. Κάθε δέσμη ακτινοβολίας θα αποδιαμορφωθεί και θα αποπολυπλεχθεί χρονικά σε M σήματα. Άρα ο μέγιστος αριθμός χρηστών που μπορεί να υποστηρίξει ταυτόχρονα το σύστημα είναι $M \times L$.



Σχήμα 2.8. Ψηφιακό Beamforming και τεχνική TDMA στην άνω ζεύξη

Στην κάτω ζεύξη τα $M \times L$ σήματα που πρόκειται να εκπεμφθούν χωρίζονται σε L ομάδες. Τα M σήματα κάθε ομάδας πολυπλέκονται χρονικά, ώστε να δημιουργηθούν χρονικά διαιρεμένα πολυπλεγμένα (Time Division Multiplex-TDM) ψηφιακά σήματα. Κατόπιν τα L σήματα διαμορφώνονται και εφαρμόζεται σε αυτά ψηφιακό Beamforming [5]. Οι ψηφιακοί έξοδοι του συστήματος ψηφιακού Beamforming μετατρέπονται σε αναλογικά σήματα για να εκπεμφθούν από τα στοιχεία.



Σχήμα 2.9. Ψηφιακό Beamforming και τεχνική TDMA στην κάτω ζεύξη

Όπως και στα συστήματα FDMA, έτσι και εδώ οι μετατροπείς ADCs τοποθετούνται αμέσως μετά τους δέκτες και οι μετατροπείς DACs τοποθετούνται πριν τους πομπούς και έτσι απαιτείται μόνο N αριθμός μετατροπέων σε κάθε

περίπτωση. Οπότε δεν παρατηρείται μείωση του SNR μετά από τις μετατροπές. Απαιτούνται βέβαια μετατροπείς υψηλής ταχύτητας. Σε διαφορετική περίπτωση πρέπει να τοποθετηθούν μετά από τους αποδιαμορφωτές, οι μετατροπείς ADCs και το σύστημα ψηφιακού Beamforming λήψης. Ομοίως, τους διαμορφωτές, που είναι τοποθετημένοι πριν τους πομπούς, πρέπει να ακολουθούν το σύστημα ψηφιακού Beamforming εκπομπής και οι μετατροπείς DACs.

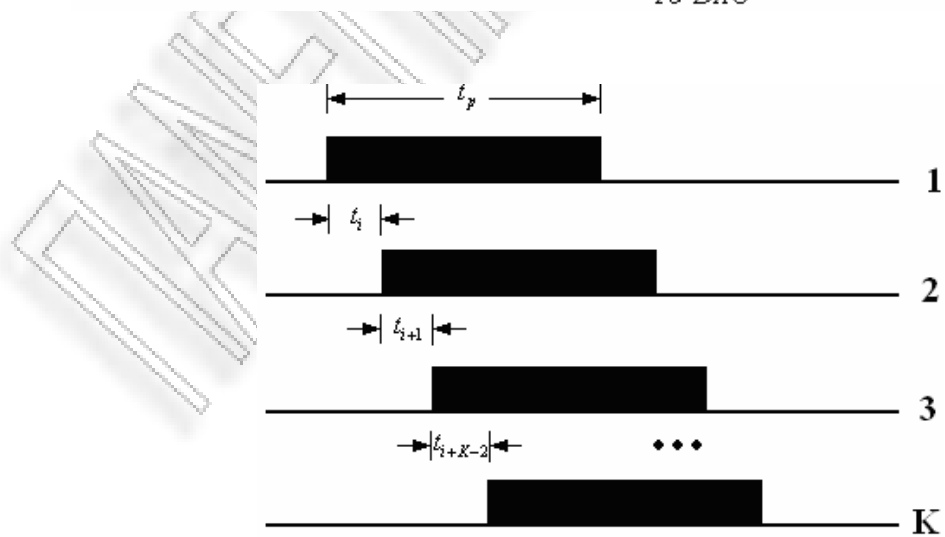
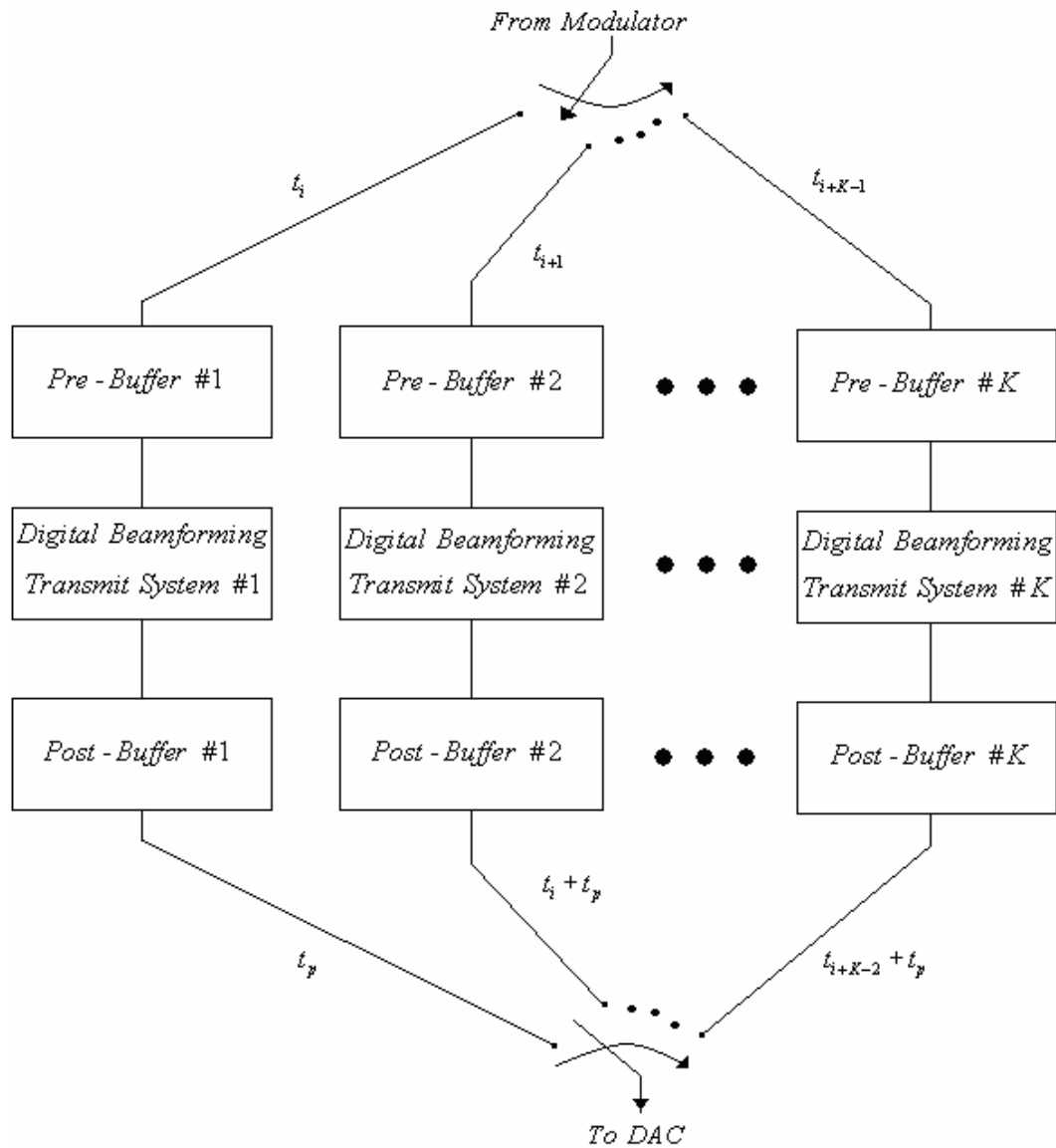
Ωστόσο η παραπάνω εναλλακτική διάταξη απαιτεί οι διαδικασίες αποδιαμόρφωσης και διαμόρφωσης να είναι γραμμικές και να λειτουργούν συγχρονισμένα, ώστε να διαφυλάξουμε τις πληροφορίες σχετικά με τη τιμή της φάσης, που θα χρησιμοποιηθούν στη διαδικασία ψηφιακού Beamforming.

Το σύστημα ψηφιακού Beamforming πρέπει να επεξεργάζεται τα σήματα διαδοχικά (ανά πλαίσιο). Για την περίπτωση της κάτω ζεύξης θεωρούμε ότι στο χρονικό πλαίσιο t_1 παράγονται L δέσμες ακτινοβολίας για τα L σήματα $\{s_1(0), s_1(1), \dots, s_1(L-1)\}$.

Αντίστοιχα στο χρονικό πλαίσιο t_2 παράγονται L δέσμες ακτινοβολίας για τα L σήματα $\{s_2(0), s_2(1), \dots, s_2(L-1)\}$ και ούτω καθεξής. Σε κάθε περίπτωση πρέπει ο χρόνος επεξεργασίας των σημάτων του συστήματος ψηφιακού Beamforming να είναι μικρότερος από το χρόνο του πλαισίου του συστήματος TDMA. Πρέπει, δηλαδή, το σύστημα ψηφιακού Beamforming να είναι πολύ γρήγορο.

Εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια γραμμική σειρά συστημάτων ψηφιακού Beamforming χαμηλής σχετικά ταχύτητας και τοποθετημένα κοντά το ένα με το άλλο. Τότε, όμως απαιτούνται συσκευές προσωρινής αποθήκευσης των δεδομένων (Buffers) και λογισμικό για τον έλεγχο του συγχρονισμού.

Όπως βλέπουμε και στο επόμενο σχήμα, στην αρχή του χρονικού πλαισίου t_i ο πάνω διακόπτης τοποθετείται στην θέση 1, ώστε να φορτώσει τα σήματα $\{s_i(0), s_i(1), \dots, s_i(L-1)\}$ στον Pre-Buffer #1. Έπειτα στην αρχή του χρονικού πλαισίου t_{i+1} ο πάνω διακόπτης τοποθετείται στην θέση 2, ώστε να φορτώσει τα σήματα $\{s_{i+1}(0), s_{i+1}(1), \dots, s_{i+1}(L-1)\}$ στον Pre-Buffer #2 και ούτω καθεξής [5].



Σχήμα 2.10. Πολλαπλά συστήματα ψηφιακού Beamforming και τεχνική TDMA

Αντίστοιχα ο κάτω διακόπτης τοποθετείται στην θέση 1 μετά από χρόνο επεξεργασίας t_p και σε σχέση με την έναρξη του χρονικού πλαισίου t_i για να στείλει τα N επεξεργασμένα σήματα στον μετατροπέα DAC. Έπειτα ο κάτω διακόπτης τοποθετείται στην θέση 2, μετά από χρόνο επεξεργασίας t_p και σε σχέση με την έναρξη του χρονικού πλαισίου t_{i+1} και ούτω καθεξής.

2.7.3. Ψηφιακό Beamforming και τεχνική CDMA

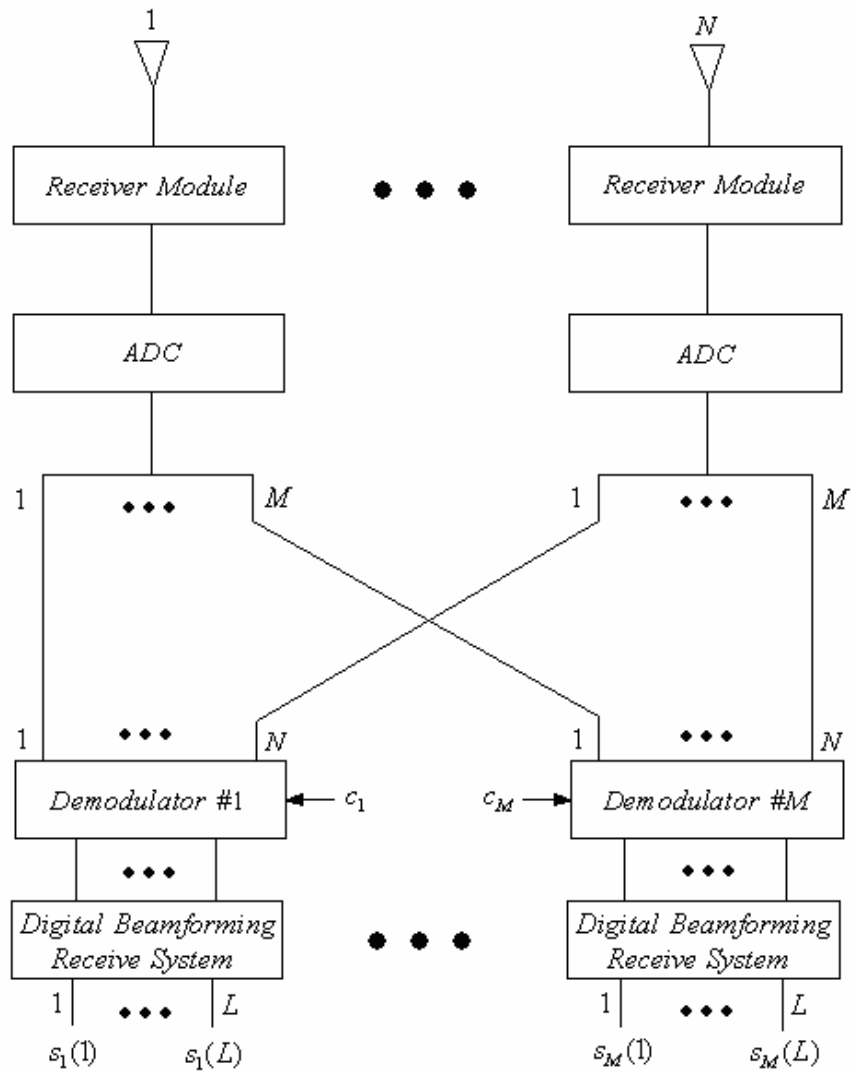
Τα συστήματα CDMA πραγματοποιούν διαμόρφωση με διασπορά φάσματος (Spread Spectrum Modulation), δηλαδή οι ψηφιακές κυματομορφές των χρηστών διασπείρονται σε ολόκληρο το φάσμα συχνοτήτων του δικτύου. Κάθε εκπεμπόμενο σήμα διαμορφώνεται με βάση ένα μοναδικό κωδικό, που αντιστοιχεί στον αποστολέα (κωδικός ταυτοποίησης). Οπότε ο δέκτης χρησιμοποιεί τον κατάλληλο κωδικό για να διαλέξει το επιθυμητό σήμα. Στην περίπτωση της τεχνικής CDMA το ψηφιακό Beamforming εφαρμόζεται συνεχώς σε όλη την ζώνη συχνοτήτων του CDMA. Οπότε η διάταξη του συστήματος εξαρτάται από το αν το CDMA είναι σύγχρονο ή ασύγχρονο.

Σε ένα σύγχρονο σύστημα CDMA τα bit που μας πληροφορούν για τη διάρκεια κάθε σήματος των χρηστών είναι συγχρονισμένα στον σταθμό βάσης. Η διάταξη των συστημάτων των σταθμών βάσης που συνδυάζουν την τεχνική CDMA και το ψηφιακό Beamforming παρουσιάζεται στα επόμενα σχήματα.

Το σύστημα αποτελείται (για την άνω και κάτω ζεύξη αντίστοιχα) από μια στοιχειοκεραία N στοιχείων, N δέκτες (ή πομπούς), N μετατροπείς ADCs (ή DACs), M σειρές ψηφιακών αποδιαμορφωτών (ή διαμορφωτών), ο κάθε ένας από τους οποίους αποτελείται από N συσχετιστές και δειγματολήπτες και N συστήματα λήψης (ή εκπομπής) ψηφιακού Beamforming [5].

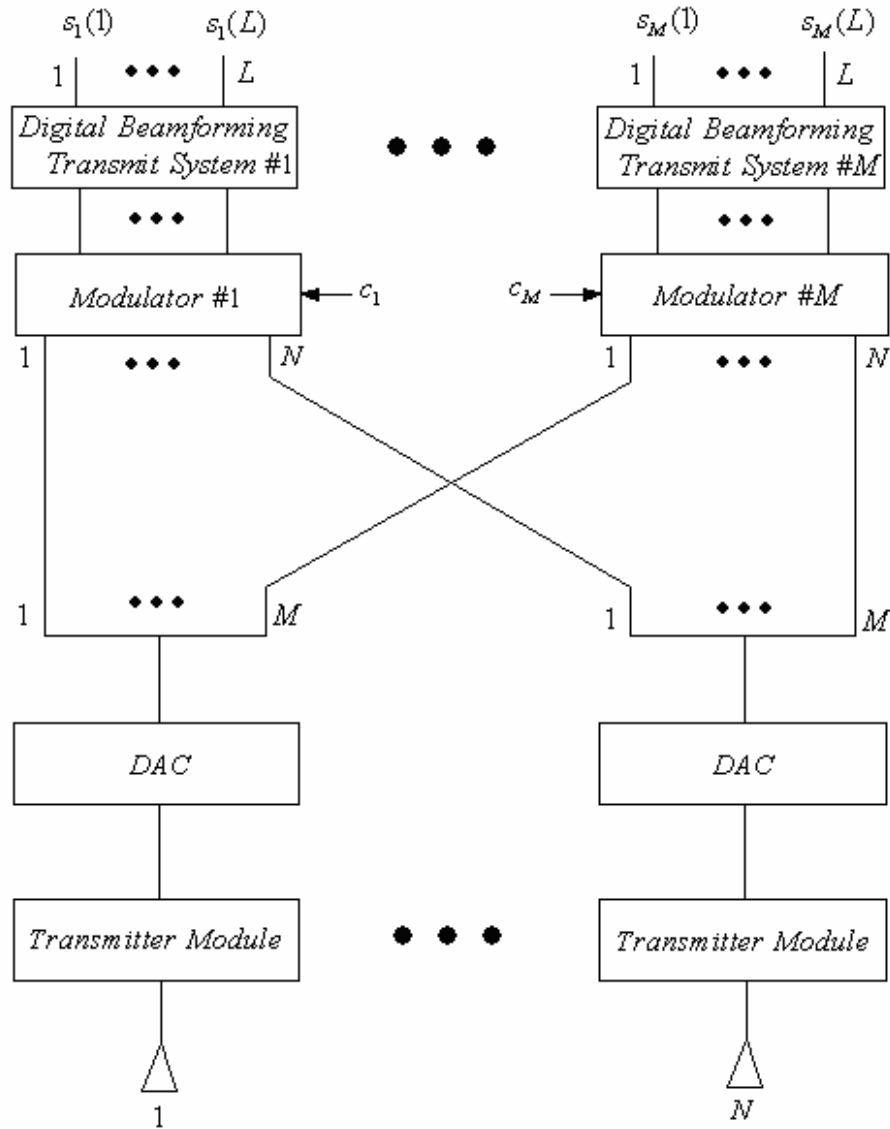
Στην άνω ζεύξη όταν τα σήματα των χρηστών χρησιμοποιούν κωδικό ταυτοποίησης, το σύστημα ψηφιακού Beamforming τοποθετείται μετά τους αποδιαμορφωτές (ή τις συσκευές φιλτραρίσματος των κωδικών). Αν κάθε σύστημα ψηφιακού Beamforming παράγει στην έξοδο L δέσμες ακτινοβολίας,

τότε αριθμός των χρηστών που μπορεί να υποστηριχθεί την ίδια χρονική στιγμή είναι $M \times L$.



Σχήμα 2.11. Σύγχρονο σύστημα ψηφιακού Beamforming και τεχνικής CDMA στην άνω ζεύξη

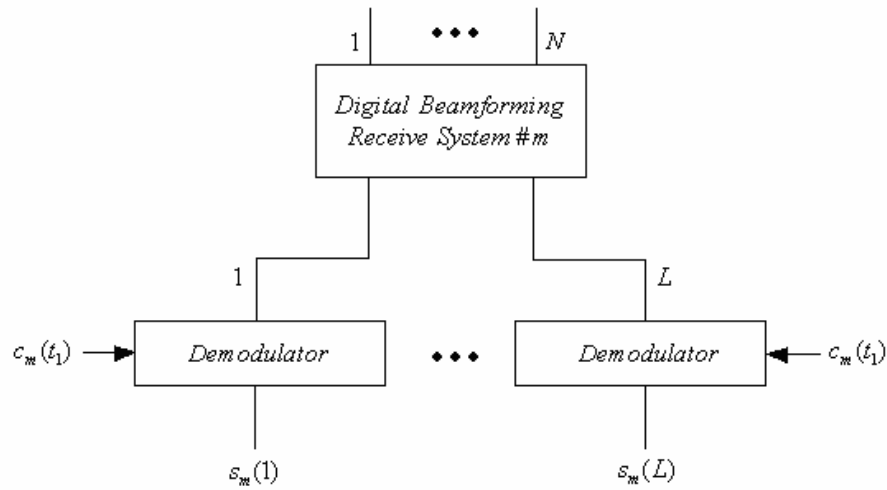
Στην κάτω ζεύξη τα $M \times L$ σήματα που πρόκειται να εκπεμφθούν, χωρίζονται σε M ομάδες. Το ψηφιακό Beamforming εφαρμόζεται στα L σήματα κάθε ομάδας και στην έξοδο πραγματοποιείται διασπορά κωδικών. Έπειτα τα πολυπλεγμένα σήματα συνδυάζονται και μετατρέπονται σε αναλογικά σήματα για να εκπεμφθούν από τα στοιχεία.



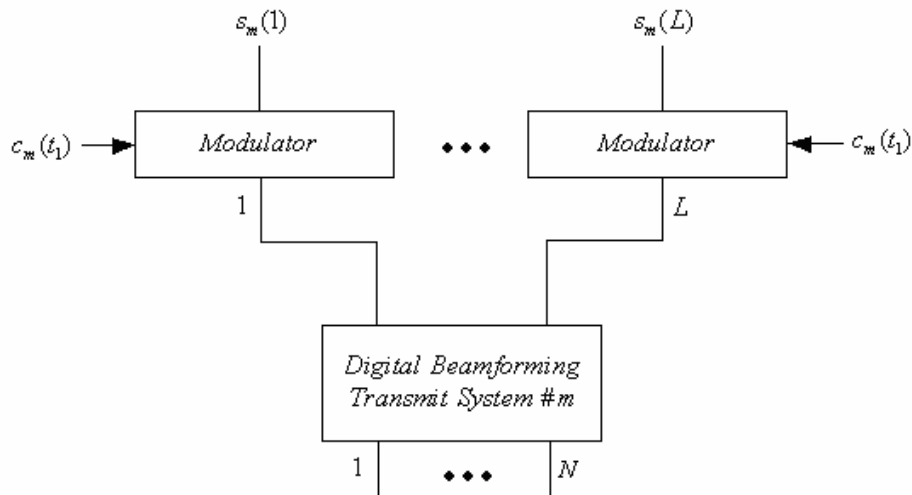
Σχήμα 2.12. Σύγχρονο σύστημα ψηφιακού Beamforming και τεχνικής CDMA στην κάτω ζεύξη

Στην περίπτωση του ασύγχρονου συστήματος CDMA τα συστήματα λήψης ψηφιακού Beamforming πρέπει να τοποθετούνται πριν τους αποδιαμορφωτές και τα συστήματα εκπομπής ψηφιακού Beamforming πρέπει να τοποθετούνται μετά τους διαμορφωτές. Το σύστημα αποτελείται (για την άνω και κάτω ζεύξη αντίστοιχα) από μια στοιχειοκεραία N στοιχείων, N δέκτες (ή πομπούς), N μετατροπείς ADCs (ή DACs), $M \times L$ ψηφιακούς αποδιαμορφωτές (ή διαμορφωτές), ο κάθε ένας από τους οποίους αποτελείται από N συσχετιστές και

δειγματολήπτες και N συστήματα λήψης (ή εκπομπής) ψηφιακού Beamforming. Παρατηρούμε ότι ο χρονικός δείκτης t_l για τον κωδικό c_m υποδηλώνει πως δεν απαιτείται συγχρονισμός των bit που μας πληροφορούν για τη διάρκεια κάθε σήματος και επιπλέον οι διαμορφώσεις-αποδιαμορφώσεις δεν χρειάζεται να είναι γραμμικές και συγχρονισμένες [5].



(α)



(β)

Σχήμα 2.13. Ασύγχρονο σύστημα ψηφιακού Beamforming και τεχνικής CDMA στην (α) Άνω Ζεύξη (β) Κάτω Ζεύξη

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Στοιχειοκεραίες και Επεξεργασία Σημάτων

3.1. Εισαγωγή

Από το κεφάλαιο αυτό θα αρχίσουμε να μελετάμε την λειτουργία των συστημάτων ψηφιακού Beamforming, καθώς και τον τρόπο επεξεργασίας των σημάτων. Όπως αναφέραμε και στα προηγούμενα κεφάλαια, μία από τις τεχνολογίες, στις οποίες βασίζονται τα συστήματα αυτά, είναι η τεχνολογία των στοιχειοκεραιών. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα θεωρήσουμε ότι η στοιχειοκεραία λαμβάνει αιτιοκρατικά σήματα (σταθερής χρονικής μεταβολής) και θα εξετάσουμε την επεξεργασία των σημάτων αυτών, καθώς και την απόκριση της στοιχειοκεραίας (σήμα εξόδου), χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη τον θόρυβο και τις πιθανές παρεμβολές.

3.2. Γραμμική Επεξεργασία Σημάτων

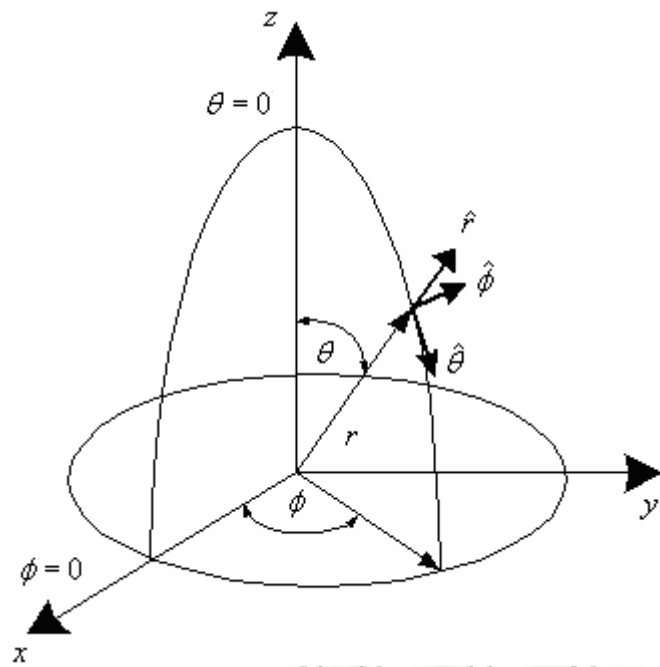
Θεωρούμε ότι τα στοιχεία της στοιχειοκεραίας είναι τοποθετημένα σε σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων. Για τις συντεταγμένες ισχύει ότι:

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \hat{\phi}$$

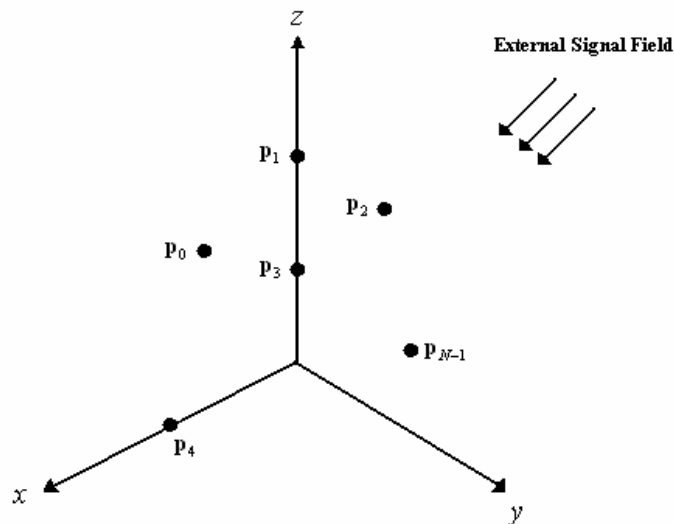
$$z = r \cos \hat{\theta}$$

Υποθέτουμε ότι τα στοιχεία της στοιχειοκεραίας είναι ιστροπικά, δηλαδή ακτινοβολούν εξίσου προς όλες τις κατευθύνσεις του χώρου.



Σχήμα 3.1. Σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

Τα στοιχεία είναι τοποθετημένα στις θέσεις $\mathbf{p}_n : n = 0, 1, \dots, N-1$, όπου N ο αριθμός των στοιχείων [18].



Σχήμα 3.2. Στοιχειοκεραία N -στοιχείων

Οι αισθητήρες των στοιχείων πραγματοποιούν χωρική δειγματοληψία του σήματος $f(t, \mathbf{p}_n)$ στις θέσεις που ορίζει το διάνυσμα $\mathbf{p}_n = [p_{x_n}, p_{y_n}, p_{z_n}]^T$. Αν θεωρήσουμε το διάνυσμα $\mathbf{p} = [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{N-1}]^T$, τότε το σύνολο των σημάτων που λαμβάνουν τα στοιχεία αποδίδεται μέσω του διανύσματος:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} f(t, \mathbf{p}_0) \\ f(t, \mathbf{p}_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(t, \mathbf{p}_{N-1}) \end{bmatrix}$$

Το σήμα της εξόδου των αισθητήρων κάθε στοιχείου θεωρούμε ότι διέρχεται από ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο (Γ.Χ.Α.) φίλτρο με κρουστική απόκριση $h_n(\tau)$, το οποίο προσθέτει τα σήματα αυτά, ώστε να δημιουργηθεί η συνολική έξοδος της στοιχειοκεραίας $y(t)$. Η έξοδος μπορεί να γραφτεί ως συνελκτικό ολοκλήρωμα:

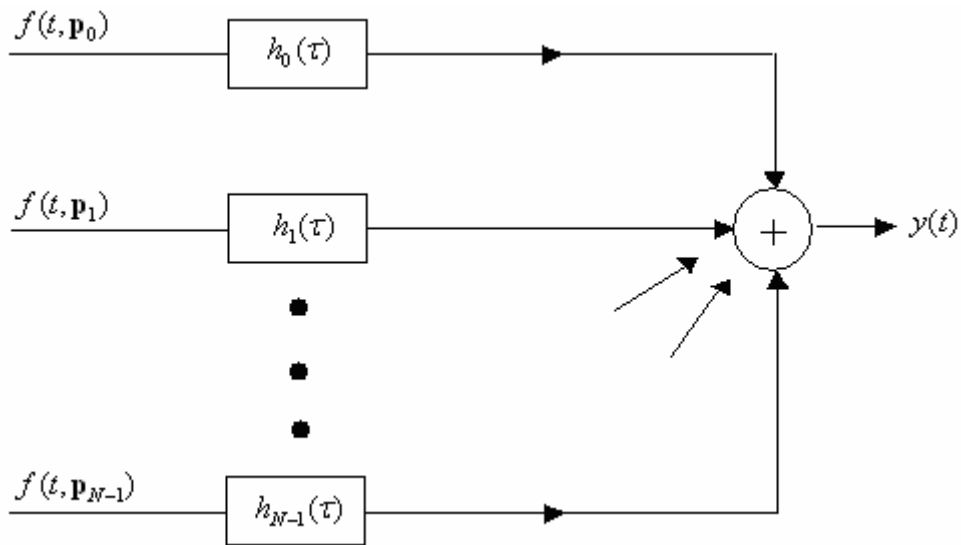
$$y(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(t-\tau) f(t, \mathbf{p}_n) d\tau$$

Αν χρησιμοποιήσουμε διανύσματα η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί ως:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}^T(t-\tau) \mathbf{f}(t, \mathbf{p}) d\tau$$

όπου:

$$\mathbf{h}(\tau) = \begin{bmatrix} h_0(\tau) \\ h_1(\tau) \\ \vdots \\ \vdots \\ h_{N-1}(\tau) \end{bmatrix}$$



Σχήμα 3.3. Γραμμική επεξεργασία σημάτων στην στοιχειοκεραία.

Η $y(t)$, αν μετασχηματιστεί στο πεδίο της συχνότητας (μετασχηματισμός Fourier), μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt = \mathbf{H}^T(\omega)\mathbf{F}(\omega)$$

όπου:

$$\mathbf{H}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(t) e^{-j\omega t} dt$$

και:

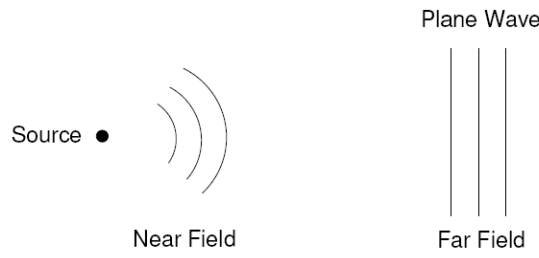
$$\mathbf{F}(\omega, \mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(t, \mathbf{p}) e^{-j\omega t} dt$$

3.3. Επεξεργασία Επίπεδων Κυμάτων

Υποθέτουμε ότι το σήμα που λαμβάνει η στοιχειοκεραία βρίσκεται στο μακρινό πεδίο. Θεωρούμε ότι πρόκειται για επίπεδο ημιτονοειδές κύμα, χρονικής

συχνότητας ω , το οποίο διαδίδεται στην κατεύθυνση \mathbf{a} , όπου \mathbf{a} μοναδιαίο διάνυσμα ίσο με:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta \sin \phi \\ -\cos \theta \end{bmatrix}$$



Σχήμα 3.4. Επίπεδο κύμα μακρινού πεδίου

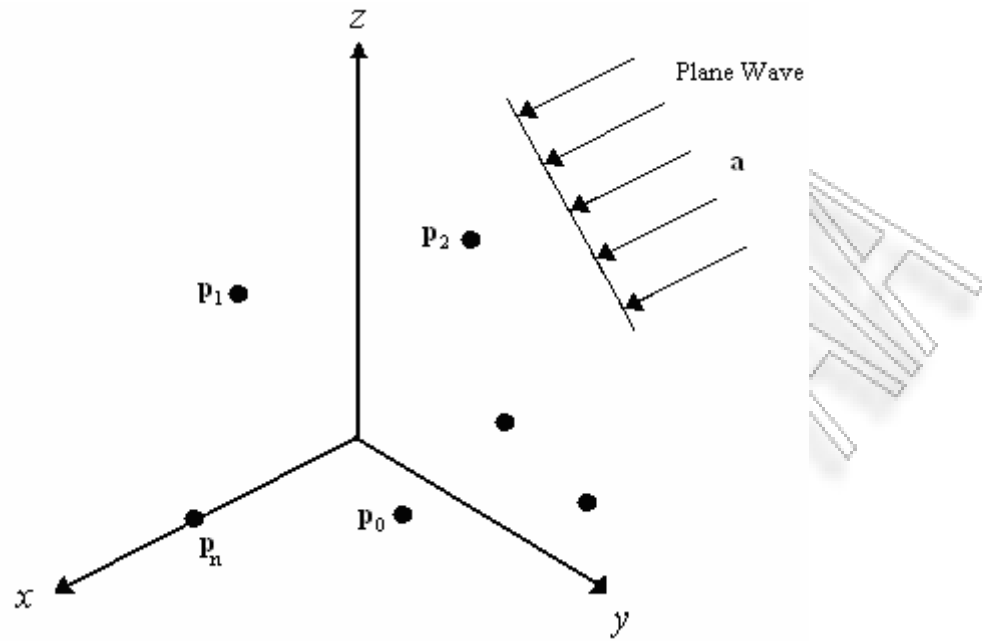
Το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στην κατεύθυνση του \mathbf{a} . Αν $f(t, \mathbf{p})$ είναι το σήμα που λαμβάνεται στην αρχή των συντεταγμένων τότε ισχύει:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} f(t - \tau_0) \\ f(t - \tau_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ f(t - \tau_{N-1}) \end{bmatrix}$$

όπου τ_n η καθυστέρηση μετάδοσης σήματος σε κάθε στοιχείο της στοιχειοκεραίας, η οποία ισούται με:

$$\tau_n = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{p}_n}{c} = -\frac{1}{c} \left[\sin \theta \cos \phi \cdot p_{x_n} + \sin \theta \sin \phi \cdot p_{y_n} + \cos \theta \cdot p_{z_n} \right]$$

όπου c η ταχύτητα μετάδοσης.



Σχήμα 3.5. Επίπεδο κύμα στην είσοδο στοιχειοκεραίας

Θεωρούμε διάνυσμα \mathbf{u} , το οποίο καθορίζει την κατεύθυνση του κύματος:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

Οι τιμές για κάθε άξονα είναι ίσες αντίστοιχα με:

$$u_x = \sin \theta \cos \phi$$

$$u_y = \sin \theta \sin \phi$$

$$u_z = \cos \theta$$

Άρα θα ισχύει για το διάνυσμα \mathbf{u} η σχέση $\mathbf{u} = -\mathbf{a}$. Οπότε:

$$\tau_n = -\frac{1}{c} \left[u_x \cdot p_{x_n} + u_y \cdot p_{y_n} + u_z \cdot p_{z_n} \right] = -\frac{\mathbf{u}^T \mathbf{p}_n}{c}$$

Η n -οστή συνιστώσα του σήματος στο πεδίο της συχνότητας γράφεται:

$$F_n(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau_n) e^{-j\omega t} dt = F(\omega) e^{-j\omega \tau_n}$$

όπου:

$$\omega \tau_n = \frac{\omega}{c} \mathbf{a}^T \mathbf{p}_n$$

Για επίπεδα κύματα που διαδίδονται σε ομοιογενές μέσο μπορούμε να ορίσουμε το κυμαάνυσμα (Wavevector) \mathbf{k} , για το οποίο ισχύει:

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{a} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{a} = -\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{u} = -\frac{2\pi}{\lambda} \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

και έχει πλάτος (Magnitude):

$$|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Βλέπουμε ότι η τιμή του \mathbf{k} αλλάζει μόνο αν αλλάξει η κατεύθυνση του κύματος. Από τις δύο τελευταίες σχέσεις μπορούμε να πούμε ότι ισχύει $\omega \tau_n = \mathbf{k}^T \mathbf{p}_n$. Έτσι ορίζουμε το διάνυσμα πολλαπλότητας της στοιχειοκεραίας (Array manifold vector), το οποίο εμπεριέχει όλα τα χωρικά χαρακτηριστικά της στοιχειοκεραίας, δηλαδή τις αποκρίσεις όλων των στοιχείων και είναι ίσο με:

$$\mathbf{v}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{p}_0} \\ e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{p}_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{p}_{N-1}} \end{bmatrix}$$

Τότε θα έχουμε ότι:

$$\mathbf{F}(\omega) = F(\omega)\mathbf{v}(\mathbf{k})$$

Αν στην είσοδο έχουμε μοναδιαίου πλάτους επίπεδο κύμα τότε για το n -οστό σήμα θα ισχύει ότι:

$$f_n(t, \mathbf{p}_n) = e^{j\omega t} e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{p}_n}$$

Η παραπάνω σχέση ισοδυναμεί με:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{p}) = e^{j\omega t} \mathbf{v}(\mathbf{k})$$

Η απόκριση της στοιχειοκεραίας θα είναι τότε:

$$y(t, \mathbf{k}) = \mathbf{H}^T(\omega)\mathbf{v}(\mathbf{k})e^{j\omega t}$$

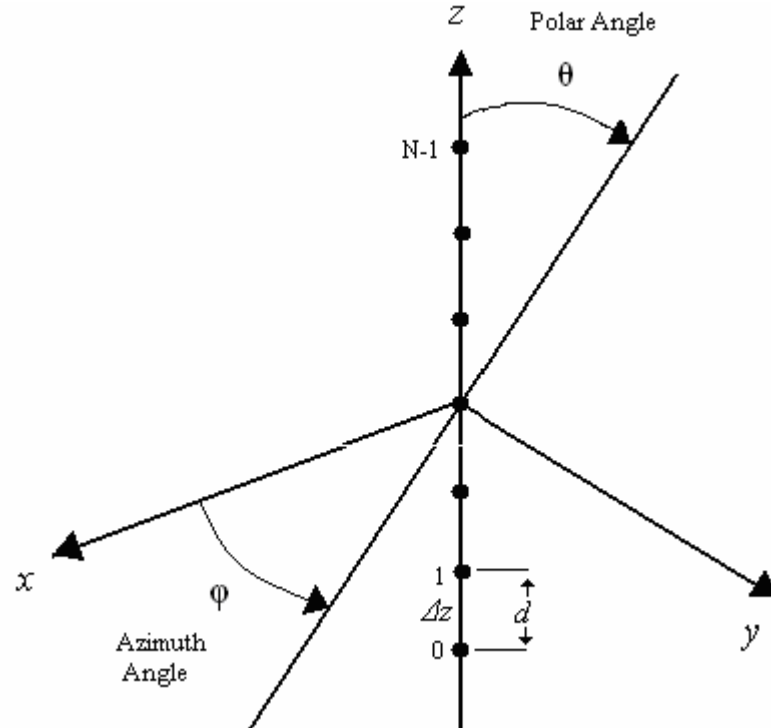
και ισοδύναμα στο πεδίο της συχνότητας η απόκριση θα είναι ίση με:

$$Y(\omega, \mathbf{k}) = \mathbf{H}^T(\omega)\mathbf{v}(\mathbf{k})$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται συνάρτηση απόκρισης συχνότητας-κυματανύσματος (Frequency-Wavenumber Response Function) [18].

3.3.1. Ομοιόμορφες γραμμικές στοιχειοκεραίες

Η ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία (Uniform Linear Array-ULA) χρησιμοποιείται πολύ συχνά στα ασύρματα συστήματα επικοινωνιών. Αποτελείται από N στοιχεία τοποθετημένα σε μια νοητή ευθεία (άξονας z) και σε σταθερή απόσταση d μεταξύ τους (ή αποστάσεις ίσες με ακέραια πολλαπλάσια της d). Θεωρούμε ότι το κέντρο της στοιχειοκεραίας είναι στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων.



Σχήμα 3.6. Γραμμική στοιχειοκεραία κατά μήκος του άξονα z

Η θέση των στοιχείων καθορίζεται από τον συντελεστή p_{z_n} , για τον οποίο ισχύει:

$$p_{z_n} = \left(n - \frac{N-1}{2} \right) d$$

και επιπλέον ισχύει $p_{x_n} = p_{y_n} = 0$. Το διάνυσμα πολλαπλότητας της στοιχειοκεραίας είναι ίσο με:

$$\mathbf{v}(k_z) = \begin{bmatrix} e^{j\left(\frac{N-1}{2}\right)k_z d} \\ e^{j\left(\frac{N-1}{2}-1\right)k_z d} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)k_z d} \end{bmatrix}$$

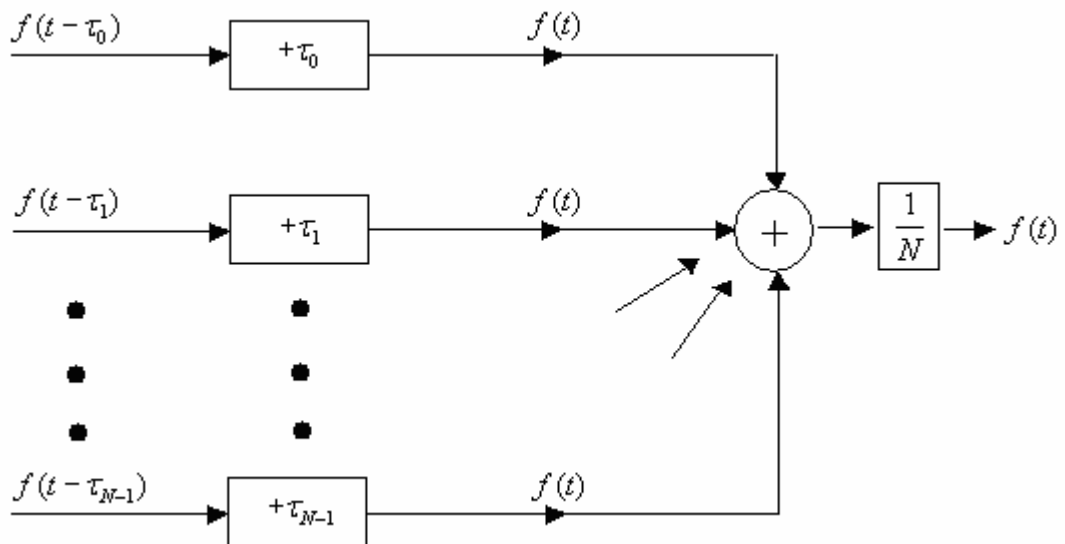
όπου k_z είναι ο κυματαριθμός (Wavenumber), ο οποίος ισούται με:

$$k_z = -\frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta = -k_0 \cos \theta$$

3.3.2. Εισαγωγή στον συμβατικό Beamformer

Προκειμένου τα σήματα να ευθυγραμμιστούν χρονικά και οι λειτουργίες να είναι πραγματοποιήσιμες πρέπει να αλλάξουμε τις εισόδους κάθε στοιχείου προσθέτοντας χρονική καθυστέρηση τ_n και κατόπιν να τα προσθέσουμε. Η λειτουργία αυτή παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα, όπου έχουμε συμπεριλάβει τον παράγοντα κανονικοποίησης $1/N$. Έχουμε ότι:

$$h_n(\tau) = \frac{1}{N} \delta(\tau + t_n)$$



Σχήμα 3.7. Ο συμβατικός beamformer

Αν μετασχηματίσουμε την παραπάνω σχέση σε μορφή πινάκων στο πεδίο της συχνότητας θα έχουμε:

$$\mathbf{H}^T = \frac{1}{N} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s)$$

Στο προηγούμενο σχήμα απεικονίζεται ο beamformer καθυστέρησης-και-αθροίσματος (Delay-and-Sum beamformer) ή απλά ο συμβατικός beamformer (Conventional beamformer) [18, 19].

3.4. Επεξεργασία Σημάτων Στενής Ζώνης

Στη συνέχεια της μελέτης θεωρούμε ότι τα σήματα $f_n(t, \mathbf{p}_n)$ είναι ζωνοπερατά (Bandpass) και ότι η ανάλυση γίνεται στην βασική ζώνη (Base Band), δηλαδή ισχύει:

$$f(t, \mathbf{p}_n) = \sqrt{2} \Re \{ \tilde{f}(t, \mathbf{p}_n) e^{j\omega_c t} \}$$

όπου ω_c είναι η συχνότητα φέροντος (Carrier Frequency) και $\tilde{f}(t, \mathbf{p}_n)$ είναι η μιγαδική περιβάλλουσα (Complex Envelope). Υποθέτουμε ότι η ζώνη της μιγαδικής περιβάλλουσας περιορίζεται από τη σχέση:

$$|\omega_L| \leq 2\pi B_s / 2$$

όπου:

$$\omega_L \triangleq \omega - \omega_c$$

και πB_s είναι μία σταθερά που καθορίζει το μέγιστο εύρος ζώνης της μιγαδικής περιβάλλουσας [18]. Στην περίπτωση επίπεδου κύματος θα έχουμε ότι:

$$f(t, \mathbf{p}_n) = \sqrt{2} \Re \{ \tilde{f}(t - \tau_n) e^{j\omega_c(t - \tau_n)} \}$$

Θα εξετάσουμε τον χρόνο $\Delta T_{n,m}(u)$, κατά τον οποίον ένα ημιτονοειδές επίπεδο κύμα κατεύθυνσης \mathbf{u} διέρχεται μεταξύ δύο στοιχείων n και m μιας στοιχειοκεραίας. Η μέγιστη τιμή του χρόνου αυτού θα είναι ίση με:

$$\Delta T_{\max} \triangleq \max_{n,m=0,1,\dots,N-1} \{\Delta T_{n,m}(u)\}$$

Υποθέτουμε ότι η αρχή των συντεταγμένων είναι στο κέντρο της στοιχειοκεραίας. Έτσι ισχύει ότι:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{p}_n = 0$$

και όλες οι μεταβλητές τ_n ικανοποιούν την σχέση:

$$\tau_n \leq \Delta T_{\max}$$

Στις περισσότερες περιπτώσεις το εύρος ζώνης της μιγαδικής περιβάλλουσας είναι αρκετά μικρό, έτσι ώστε:

$$\tilde{f}(t - \tau_n) \approx \tilde{f}(t)$$

Για να είναι σωστή αυτή η εκτίμηση πρέπει να ισχύει επίσης και:

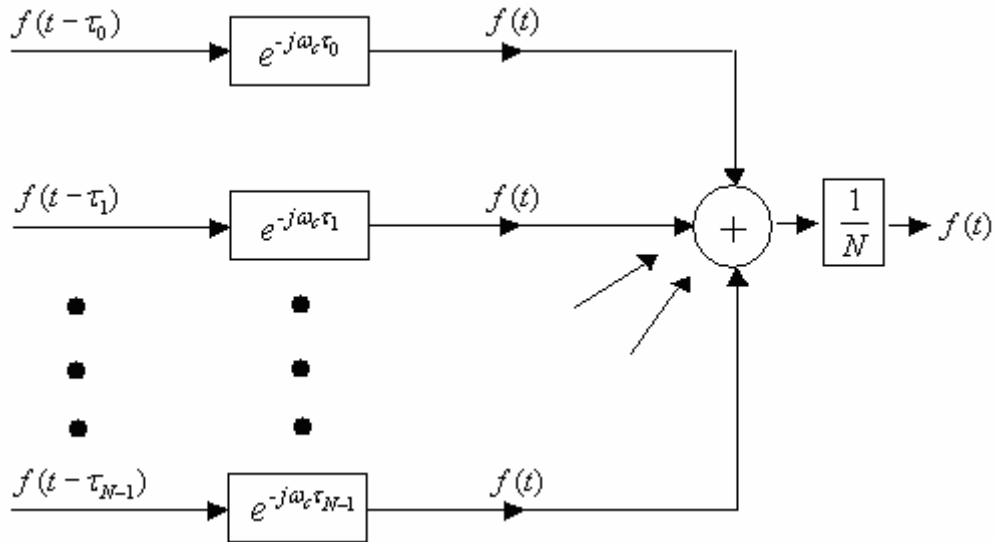
$$B_s \cdot \Delta T_{\max} \ll 1$$

Τα ζωνοπερατά σήματα, των οποίων οι μιγαδικές περιβάλλουσες ικανοποιούν την παραπάνω σχέση ονομάζονται σήματα στενής ζώνης (Narrowband Signals) [19]. Στην περίπτωση των σημάτων αυτών ισχύει ότι:

$$f(t, \mathbf{p}_n) = \sqrt{2} \Re \{ \tilde{f}(t) e^{-j\omega_c \tau_n} e^{j\omega_c t} \}$$

και η χρονική καθυστέρηση καθορίζεται με τη μεταβολή της φάσης (Phase Shift).

Τότε ο συμβατικός beamformer μπορεί να υλοποιηθεί με ένα σύνολο μεταβολών φάσης και η υλοποίηση ονομάζεται στοιχειοκεραία με ολισθητές φάσης (Phased Array) [5].

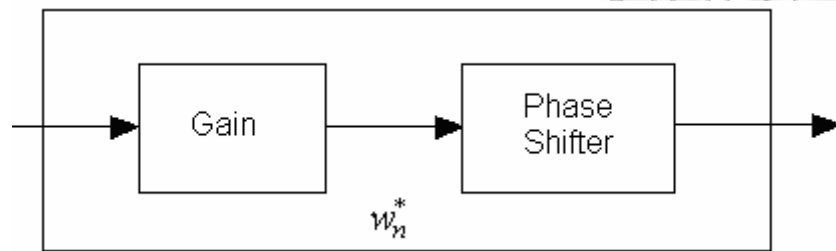


Σχήμα 3.8. Ο beamformer στενής ζώνης με ολισθητές φάσης

Η τεχνική εισαγωγής χρονικής καθυστέρησης (Time Delay) ή αλλαγής φάσης (Phase Shift) στα κύματα στενής ζώνης, ώστε να οδηγήσουμε αποτελεσματικά τον κύριο άξονα απόκρισης (Main Response Axis-MRA) της στοιχειοκεραίας σε προκαθορισμένη κατεύθυνση (Look Direction), ονομάζεται τεχνική ηλεκτρονικής οδήγησης (Electronic Steering). Η μεγάλη ταχύτητα των σύγχρονων επεξεργαστών ψηφιακού σήματος και η δυνατότητα στιγμιαίας τροποποίησης της συνάρτησης απόκρισης έχουν οδηγήσει στην επικράτηση της τεχνικής αυτής σε βάρος της τεχνικής μηχανικής οδήγησης (Mechanical Steering). Η τελευταία αναφέρεται στην αλλαγή της θέσης των αισθητήρων των στοιχείων, έτσι ώστε ο άξονας να είναι κάθετος στην επιθυμητή κατεύθυνση οδήγησης. Στην περίπτωση αυτή περιοριζόμαστε από τις μεγάλες φυσικές διαστάσεις της στοιχειοκεραίας κατά την λειτουργία με σήματα μεγάλου μήκους κύματος και από την ανάγκη επαναρρύθμισης και ελέγχου των αισθητήρων μετά από την αλλαγή της θέσης τους. Σε μερικές εφαρμογές έχουμε, βέβαια, συνδυασμό των τεχνικών οδήγησης.

3.4.1. Εισαγωγή στη θεώρηση των μιγαδικών βαρών

Θεωρούμε ότι για τον συμβατικό beamformer η απόκριση του ψηφιακού φίλτρου στο πεδίο της συχνότητας είναι ίση με ένα διάνυσμα σταθερών μιγαδικών αριθμών w_n^* , τους οποίους χαρακτηρίζουμε ως βάρη (Weights), χαρακτηρισμό τον οποίο είχαμε αναφέρει και στο προηγούμενο κεφάλαιο.



Σχήμα 3.9. Μπλοκ διάγραμμα λειτουργίας των μιγαδικών βαρών

Το μιγαδικό διάνυσμα των βαρών (Weight vector) θα είναι ίσο με:

$$\mathbf{w}^H = \mathbf{H}^T(\omega_c) = [w_0^*, w_1^*, \dots, w_{N-1}^*]$$

και η απόκριση της στοιχειοκεραίας σε μοναδιαίου πλάτους επίπεδο κύμα στενής ζώνης στο πεδίο του χρόνου είναι ίση με:

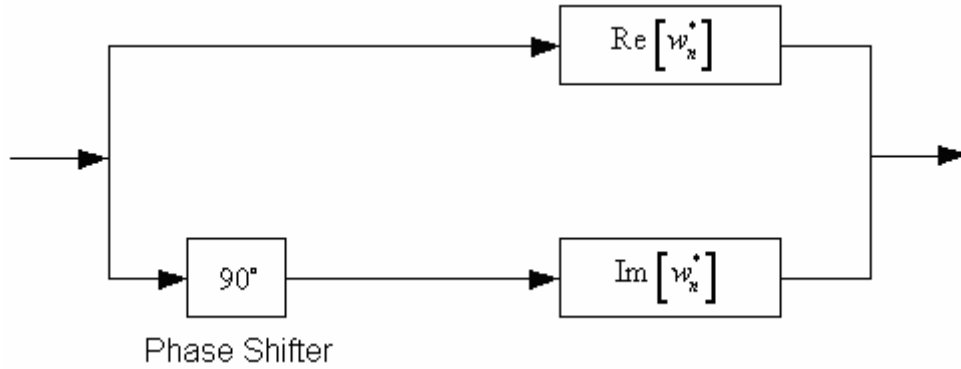
$$y(t, \mathbf{k}) = \mathbf{w}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}) e^{j\omega t}$$

και ισοδύναμα στο πεδίο των συχνοτήτων είναι ίση με:

$$Y(\omega, \mathbf{k}) = \mathbf{w}^H \mathbf{v}(\mathbf{k})$$

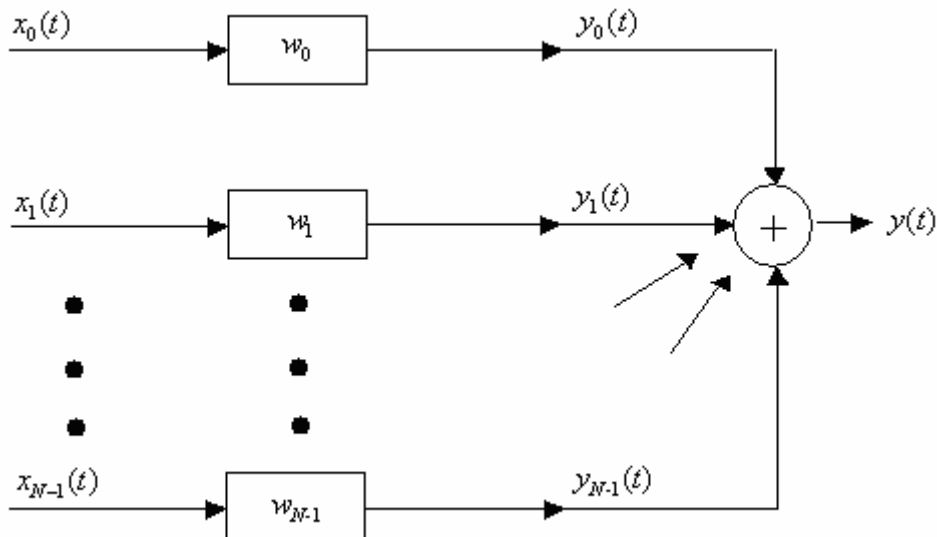
Ο βέλτιστος προσδιορισμός των μιγαδικών βαρών οδηγεί στην κατάλληλη μεταβολή πλάτους (Πραγματικό μέρος) και φάσης (Φανταστικό μέρος) και το

άθροισμα των επεξεργασμένων ψηφιακών σημάτων στην έξοδο της στοιχειοκεραίας δίνει την επιθυμητή απόκριση [11, 15, 18, 19].



Σχήμα 3.10. Επίδραση της πραγματικής και φανταστικής συνιστώσας των μιγαδικών βαρών στην επεξεργασία των σημάτων

Παρακάτω βλέπουμε την διαδικασία ψηφιακού Beamforming αν στην είσοδο της στοιχειοκεραίας έρχεται σήμα $\mathbf{x}(t) = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]$.



Σχήμα 3.11. Αναπαράσταση της διαδικασίας ψηφιακού Beamforming με μιγαδικά βάρη

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Χωρο-χρονικές Διαδικασίες και Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων

4.1. Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο θεωρήσαμε ότι το σήμα εισόδου της στοιχειοκεραίας είναι ένα επίπεδο κύμα ημιτονοειδούς χρονικής μεταβολής, το οποίο χαρακτηρίζεται από τη συχνότητα ω και το κυματόνισμα του \mathbf{k} , ή τη συχνότητα ω και την κατεύθυνση άφιξης \mathbf{a} . Θεωρήσαμε επίσης ότι είχαμε μία συχνότητα διάδοσης και ότι τα μιγαδικά βάρη του συμβατικού beamformer ήταν σταθεροί μιγαδικοί αριθμοί.

Στη στατιστική, όμως, επεξεργασία σημάτων, στην είσοδο της στοιχειοκεραίας συνυπάρχουν, τόσο το επιθυμητό σήμα, όσο και οι παρεμβολές και ο θόρυβος και τα στατιστικά χαρακτηριστικά τους μεταβάλλονται στο χρόνο. Αυτά τα σήματα μπορούν να μοντελοποιηθούν ως υλοποιήσεις χωρο-χρονικών στοχαστικών διαδικασιών και θα τα εξετάσουμε στο κεφάλαιο αυτό.

4.2. Μοντέλα Στιγμιότυπων

Στις περισσότερες εφαρμογές και στην πλειοψηφία της ερευνητικής βιβλιογραφίας αναφέρεται μια εναλλακτική προσέγγιση της δειγματοληψίας των λαμβανόμενων σημάτων [18]. Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση, στην έξοδο των αισθητήρων των στοιχείων πραγματοποιείται μία χωρο-χρονική διαδικασία παραγωγής δειγμάτων. Τα δείγματα αυτά αποτελούν μια σειρά από μιγαδικά διανύσματα και κάθε στοιχείο της σειράς ονομάζεται στιγμιότυπο (Snapshot).

4.2.1 Συχνотικά στιγμιότυπα

Όταν το Beamforming υλοποιείται στο πεδίο της συχνότητας, το σήμα εισόδου μετασχηματίζεται από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο των συχνοτήτων με μετασχηματισμό Fourier σε M συχνότητες. Δημιουργείται έτσι ένα σύνολο μιγαδικών διανυσμάτων, τα οποία μπορούν με την κατάλληλη επεξεργασία να σχηματίσουν το επιθυμητό σήμα. Αυτά τα διανύσματα ονομάζονται στιγμιότυπα του πεδίου των συχνοτήτων. Η δημιουργία τους μπορεί να γίνει με την διαίρεση του ολικού διαστήματος παρατήρησης T σε K ίσα διαστήματα ΔT , τα οποία καταχωρούνται και συμβολίζονται ως k , δηλαδή:

$$\begin{array}{ll}
 k = 1 & 0 \leq t \leq \Delta T \\
 k = 2 & \Delta T \leq t \leq 2\Delta T \\
 \cdot & \\
 \cdot & \\
 \cdot & \\
 k = k & (k-1)\Delta T \leq t < k\Delta T \\
 \cdot & \\
 \cdot & \\
 \cdot & \\
 k = K & (K-1)\Delta T \leq t \leq K\Delta T
 \end{array}$$

Ο χρόνος ΔT πρέπει να είναι σημαντικά μεγαλύτερος από τον χρόνο διάδοσης του κύματος κατά μήκος της στοιχειοκεραίας και καθορίζεται από το εύρος των σημάτων εισόδου και από τη μορφή του προσωρινού τους φάσματος. Ισχύει ότι:

$$\Delta T_{\max} \triangleq \max_{d=0,1,\dots,D} \left\{ \max_{i,j} [\Delta T_{ij}^{(d)}] \right\}$$

όπου $\Delta T_{ij}^{(d)}$ είναι ο χρόνος μετάδοσης του d -οστού κύματος από το στοιχείο i στο στοιχείο j . Στην περίπτωση των γραμμικών στοιχειοκεραιών ο μέγιστος χρόνος μετάδοσης ενός σήματος κατά μήκος όλης της στοιχειοκεραίας είναι ίσος με το λόγο του μήκους της στοιχειοκεραίας προς την ταχύτητα της μετάδοσης.

Τότε θα απαιτούμε ότι:

$$\Delta T \gg \Delta T_{\max}$$

Υποθέτουμε ότι το διανυσματικό σήμα εισόδου $\mathbf{x}(t)$ είναι ζωνοπερατό με μηδενική μέση τιμή και συχνότητα φέροντος ω_c . Θεωρούμε το διάστημα $(0, \Delta T)$ και ορίζουμε το μετασχηματισμένο σήμα στο πεδίο της συχνότητας ως:

$$X_{\Delta T}(\omega_m, k) \triangleq \frac{1}{\sqrt{\Delta T}} \int_0^{\Delta T} \mathbf{x}(t) e^{-j(\omega_c + m\omega_\Delta)t} dt$$

όπου:

$$m = -\frac{M-1}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{M-1}{2}$$

αν M μονός αριθμός και:

$$m = -M/2, \dots, 0, \dots, \frac{M}{2}-1$$

αν M ζυγός αριθμός. Η m -οστή συχνότητα Fourier είναι:

$$\omega_m = \omega_c + m\omega_\Delta$$

όπου:

$$\omega_\Delta = \frac{2\pi}{\Delta T}$$

Τα διανύσματα του πεδίου των συχνοτήτων επεξεργάζονται κατάλληλα, ώστε να δημιουργηθεί μία βαθμωτή συνάρτηση, η οποία θα μετατραπεί έπειτα σε βαθμωτή κυματομορφή του πεδίου του χρόνου με αντίστροφο διακριτό μετασχηματισμό Fourier (Inverse Discrete Fourier Transform-IDFT), ώστε να ανακτηθεί το σήμα εξόδου [18].

Στην περίπτωση των επίπεδων κυμάτων που το επιθυμητό σήμα $f(t)$ είναι αιτιοκρατικό ή στοχαστικό, οι τιμές του λαμβανόμενου σήματος σε κάθε στοιχείο συγκεντρώνονται στο μιγαδικό διάνυσμα $\mathbf{x}(t)$ διαστάσεων $N \times 1$:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{n}(t) = f(t)\mathbf{v}_k(\mathbf{k}_s) + \mathbf{n}(t)$$

Το διάνυσμα $\mathbf{x}_s(t)$ αναπαριστά τις τιμές του ωφέλιμου σήματος και το διάνυσμα $\mathbf{n}(t)$ αναπαριστά τις τιμές του θορύβου. Τα συχνοτικά στιγμιότυπα δίνονται τότε από τη σχέση:

$$X_{\Delta T}(\omega_m, k) = X_{s, \Delta T}(\omega_m, k) + N_{\Delta T}(\omega_m, k)$$

όπου $m = 0, 1, \dots, M-1$ και $k = 1, 2, \dots, K$.

4.2.2. Χρονικά στιγμιότυπα

Θεωρούμε επίπεδο κύμα στενής ζώνης για το οποίο ισχύει, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι:

$$f(t, \mathbf{p}_n) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ \tilde{f}(t) e^{-j\omega_c t_n} e^{j\omega_c t} \}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε το διάνυσμα πολλαπλότητας της στοιχειοκεραίας τότε το μιγαδικό διάνυσμα εξόδου της στοιχειοκεραίας θα είναι ίσο με:

$$\tilde{\mathbf{f}}(t) = \tilde{f}(t) \mathbf{v}(\mathbf{k})$$

όπου $\tilde{f}(t)$ είναι μια βαθμωτή μιγαδική Gaussian τυχαία διαδικασία με μηδενική μέση τιμή. Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης (Autocorrelation Matrix) του λαμβανόμενου σήματος τη χρονική στιγμή t είναι ίσος με:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{f}}}(0) &= E \left\{ \tilde{\mathbf{f}}(t) \tilde{\mathbf{f}}^H(t) \right\} = E \left\{ \tilde{f}(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}) \tilde{f}^*(t) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}) \right\} = \\ &= \mathbf{v}(\mathbf{k}) E \left\{ |\tilde{f}(t)|^2 \right\} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}) = \sigma_s^2 \mathbf{v}(\mathbf{k}) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

όπου σ_s^2 η ισχύς του λαμβανόμενου σήματος [18]. Αν έχουμε D αριθμό σημάτων και προσθέσουμε λευκό θόρυβο τότε:

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}(0) = \mathbf{V}(\mathbf{k})\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{f}}}(0)\mathbf{V}^H(\mathbf{k}) + \sigma_n^2 B_s \mathbf{I}$$

όπου ο παράγοντας B_s είναι αποτέλεσμα της διέλευσης του θορύβου μέσα από το φίλτρο στην αποδιαμόρφωση και σ_n^2 είναι η ισχύς του θορύβου. Αν θεωρήσουμε ότι το εύρος του $\tilde{f}(t)$ περιορίζεται από τη σχέση $-B_s/2 \leq f \leq B_s/2$, τότε η δειγματοληψία του $\mathbf{x}(t)$ πραγματοποιείται κάθε $1/B_s$ δευτερόλεπτα. Κάθε τέτοιο δείγμα το ονομάζουμε στιγμιότυπο του χρονικού πεδίου. Τα στιγμιότυπα της μιγαδικής περιβάλλουσας είναι ίσα με:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k), k = 1, 2, \dots, K$$

Τότε θα έχουμε ότι:

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}(k) \triangleq E\{\tilde{\mathbf{x}}(k)\tilde{\mathbf{x}}^H(k)\} = \mathbf{V}(\mathbf{k})\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{f}}}(0)\mathbf{V}^H(\mathbf{k}) + \sigma_n^2 B_s \mathbf{I}$$

Πρέπει να τονίσουμε ότι τα χωρικά χαρακτηριστικά τόσο των στιγμιότυπων του πεδίου του χρόνου, όσο και των στιγμιότυπων του πεδίου της συχνότητας είναι πανομοιότυπα. Οπότε οι beamformers που λειτουργούν, είτε με την πρώτη κατηγορία στιγμιότυπων, είτε με την δεύτερη, είναι πανομοιότυποι.

4.2.3. Δειγματοληψία σημάτων στις ομοιόμορφες γραμμικές στοιχειοκεραίες

Θεωρούμε ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία, η οποία πραγματοποιεί δειγματοληψία σημάτων σε ένα χωρο-χρονικό πεδίο, ανά χωρικά διαστήματα d , όπου d είναι η απόσταση μεταξύ των στοιχείων. Το εύρος του χωρο-χρονικού πεδίου περιορίζεται στο χώρο που ορίζει ο κυματαριθμός:

$$|k_z| = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ radians / meter} = \frac{1}{\lambda} \text{ cycles / meter}$$

Ο κυματαριθμός και η θέση είναι συζυγείς μεταβλητές του μετασχηματισμού Fourier. Άρα προκειμένου να είναι δυνατή η αναδόμηση της χωρο-χρονικής διαδικασίας χωρίς χωρικές αλλοιώσεις (Spatial Aliasing), η δειγματοληψία πρέπει να πραγματοποιείται για:

$$d \leq \frac{1}{2\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{\lambda}{2}$$

4.3. Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων Στενής Ζώνης

Υποθέτουμε ότι οι αισθητήρες των στοιχείων της στοιχειοκεραίας λαμβάνουν στην είσοδο επίπεδα κύματα στενής ζώνης $x_n(t)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, τα οποία πολλαπλασιάζουν με κάποιο μιγαδικό βάρος w_n^* και κατόπιν τα προσθέτουν [19]. Τότε σχηματίζεται το σήμα εξόδου, το οποίο είναι ίσο με:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n^* x_n(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)$$

όπου:

$$\mathbf{w} = [w_0, w_1, \dots, w_{N-1}]^T$$

και:

$$\mathbf{x}(t) = [x_0(t), x_1(t), \dots, x_{N-1}(t)]^T$$

Η ισχύς εξόδου θα είναι ίση με:

$$P_{out}(t) = |y(t)|^2 = y(t)y^*(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t) \mathbf{w}$$

Αν οι συνιστώσες του διανύσματος εισόδου είναι στοχαστικές διαδικασίες με μηδενική μέση τιμή, τότε για δεδομένο διάνυσμα βαρών \mathbf{w} θα ισχύει ότι:

$$P_{out}(t) = E \{ \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t) \mathbf{w} \} = \mathbf{w}^H E \{ \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t) \} \mathbf{w} = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w}$$

όπου \mathbf{R}_x ο πίνακας αυτοσυσχέτισης του ληφθέντος σήματος. Αν στο σήμα εισόδου συνυπάρχουν το επιθυμητό σήμα, ένα σήμα παρεμβολής και θόρυβος, τότε οι αντίστοιχες συνιστώσες του σήματος εξόδου θα είναι:

$$y_s(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}_s(t)$$

$$y_l(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}_l(t)$$

$$y_n(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}_n(t)$$

και οι αντίστοιχοι πίνακες αυτοσυσχέτισης θα είναι:

$$\mathbf{R}_{x_s} = E \{ \mathbf{x}_s(t) \mathbf{x}_s^H(t) \}$$

$$\mathbf{R}_{x_l} = E \{ \mathbf{x}_l(t) \mathbf{x}_l^H(t) \}$$

$$\mathbf{R}_{x_n} = E \{ \mathbf{x}_n(t) \mathbf{x}_n^H(t) \}$$

Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης του ληφθέντος σήματος θα είναι τότε ίσος με:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{x_s} + \mathbf{R}_{x_l} + \mathbf{R}_{x_n}$$

Η μέση ισχύς εξόδου κάθε συνιστώσας στην έξοδο θα είναι:

$$P_s(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{x_s} \mathbf{w}$$

$$P_l(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{x_l} \mathbf{w}$$

$$P_n(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{x_n} \mathbf{w}$$

Η ισχύς όλων των ανεπιθύμητων συνιστωσών θα είναι ίση με:

$$P_N(t) = P_I(t) + P_n(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{x_I} \mathbf{w} + \mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w} = \mathbf{w}^H (\mathbf{R}_{x_I} + \mathbf{R}_n) \mathbf{w} = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_N \mathbf{w}$$

Ο λόγος του σήματος προς την παρεμβολή και τον θόρυβο στην έξοδο (Signal to Interference plus Noise Ratio-SINR) θα είναι ίσος με:

$$\text{SINR} = \frac{P_s}{P_N} = \frac{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{x_s} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_N \mathbf{w}}$$

Παρατηρούμε ότι η απόδοση του συστήματος καθορίζεται από τα μιγαδικά βάρη. Η επιλογή των μιγαδικών βαρών εξαρτάται άμεσα από την εφαρμογή και έτσι προκύπτουν διάφοροι τύποι Beamforming ανάλογα με την περίπτωση.

4.3.1. Στατιστική επεξεργασία πολλαπλών πηγών σημάτων

Θεωρούμε γραμμική στοιχειοκεραία αποτελούμενη από N αριθμό στοιχείων και M πηγές σημάτων. Οι βαθμοί ελευθερίας της στοιχειοκεραίας είναι $N-1$, που ισοδυναμεί με τον συνολικό αριθμό των σημάτων που μπορεί να επεξεργαστεί, δηλαδή $M_{\max} = N-1$. Ένας από τους βαθμούς ελευθερίας χρησιμοποιείται για να κατευθύνει την στοιχειοκεραία στο επιθυμητό σήμα, άρα απομένουν $N-2$ βαθμοί για την ακύρωση των παρεμβολών. Οπότε μόνο $N-2$ σήματα παρεμβολών μπορούν να ακυρωθούν [20, 21].

Στα συστήματα, όμως, κινητών επικοινωνιών, λόγω της διάδοσης πολλαπλών δρόμων, οι συνιστώσες που καταφθάνουν στο δέκτη είναι πολύ περισσότερες. Αποδεικνύεται [12], όμως, ότι δεν απαιτείται ακύρωση όλων των συνιστωσών, προκειμένου να πετύχουμε μερικά dB κέρδος στο SNR εξόδου και να αυξήσουμε την χωρητικότητα του συστήματος με την τεχνική SDMA.

Το σήμα εισόδου στο n -οστό στοιχείο είναι ίσο με:

$$x_n(t) = \sum_{m=1}^M f_m(t) e^{-j\mathbf{k}_m^T \mathbf{p}_n} + n_n(t)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε πίνακες η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^M f_m(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_m) + \mathbf{n}(t)$$

Θεωρούμε ότι ο τυχαίος θόρυβος $n_n(t)$ είναι AWGN (Additive White Gaussian Noise). Είναι, δηλαδή, αθροιστικός, χρονικά και χωρικά λευκός, παρουσιάζει Gaussian κατανομή και μηδενική μέση τιμή. Η φασματική πυκνότητα ισχύος (Power Spectral Density-PSD) του θορύβου είναι ίση με $N_0/2$ Watt/Hz και η διακύμανση του θορύβου (Noise Standard Variation) είναι ίση με $\sigma_n = \sqrt{N_0/2}$. Για τον θόρυβο ισχύει ότι:

$$E\{n_k(t)n_n^*(t)\} = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \sigma_n^2 & k = n \end{cases}$$

Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης του θορύβου είναι ίσος με:

$$\mathbf{R}_n = E\{\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t)\} = \sigma_n^2 \mathbf{I}_N$$

Επιπλέον η ετεροσυσχέτιση του σήματος και του θορύβου είναι μηδενική, δηλαδή:

$$E\{f_m(t)n_n^*(t)\} = E\{f_m^*(t)n_n(t)\} = 0$$

Το σήμα εξόδου θα είναι ίσο με:

$$y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^M f_m(t) \mathbf{w}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_m) + \mathbf{w}^H \mathbf{n}(t)$$

Ο όρος $\mathbf{w}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_m)$ συμβολίζει την απόκριση του φίλτρου στη m -οστή πηγή και πολλαπλασιάζει τη μιγαδική περιβάλλουσα κάθε πηγής. Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης \mathbf{R} μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= E \{ \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t) \} = E \left\{ \left(\sum_{m=1}^M f_m(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_m) + \mathbf{n}(t) \right) \left(\sum_{l=1}^M f_l(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_l) + \mathbf{n}(t) \right)^H \right\} = \\ &E \left\{ \left(\sum_{m=1}^M f_m(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_m) + \mathbf{n}(t) \right) \left(\sum_{l=1}^M f_l(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_l) \right)^H + \mathbf{n}^H(t) \right\} = \\ &E \left\{ \left(\sum_{m=1}^M f_m(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_m) \right) \left(\sum_{l=1}^M f_l(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_l) \right)^H \right\} + E \{ \mathbf{n}(t) \mathbf{n}^H(t) \} + \\ &E \left\{ \left(\sum_{m=1}^M f_m(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_m) \right) \mathbf{n}^H(t) \right\} + E \left\{ \left(\sum_{l=1}^M f_l(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_l) \right) \mathbf{n}(t) \right\} \end{aligned}$$

Όμως ο πρώτος όρος απλοποιείται ως εξής:

$$E \left\{ \left(\sum_{m=1}^M f_m(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_m) \right) \left(\sum_{l=1}^M f_l(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_l) \right)^H \right\} = \sum_{m,l=1}^M E \{ f_m(t) f_l^*(t) \} \mathbf{v}(\mathbf{k}_m) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_l)$$

Αν οι πηγές είναι ασυσχέτιστες τότε:

$$E \{ f_m(t) f_l^*(t) \} = \begin{cases} 0 & m \neq l \\ p_m & m = l \end{cases}$$

όπου p_m η ισχύς της m -οστής πηγής, όπως αυτή μετρείται σε ένα στοιχείο. Είναι επιπλέον ίση με τη διασπορά της μιγαδικής περιβάλλουσας της πηγής, όταν αυτή μοντελοποιείται ως στοχαστική διαδικασία μηδενικής μέσης τιμής. Άρα:

$$E \left\{ \left(\sum_{m=1}^M f_m(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_m) \right) \left(\sum_{l=1}^M f_l(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_l) \right)^H \right\} = \sum_{m,l=1}^M p_m \mathbf{v}(\mathbf{k}_m) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_l)$$

Η ετεροσυσχέτιση του σήματος και του θορύβου είναι μηδενική άρα:

$$E \left\{ \left(\sum_{m=1}^M f_m(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_m) \right) \mathbf{n}^H(t) \right\} = E \left\{ \left(\sum_{l=1}^M f_l(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_l) \right) \mathbf{n}(t) \right\} = 0$$

Οπότε:

$$\mathbf{R} = \sum_{m,l=1}^M p_m \mathbf{v}(\mathbf{k}_m) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_l) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_N = \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{A}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_N$$

Ο πίνακας \mathbf{A} είναι διάστασης $N \times M$ και ισούται με:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{v}(\mathbf{k}_1), \mathbf{v}(\mathbf{k}_2), \dots, \mathbf{v}(\mathbf{k}_M)]$$

και ο πίνακας \mathbf{S} είναι διαγώνιος ($M \times M$) με στοιχεία:

$$S_{ml} = \begin{cases} 0 & m \neq l \\ p_m & m = l \end{cases}$$

4.3.2. Εφαρμογή της διάσπασης των ιδιοτιμών

Αν γνωρίζουμε τον πίνακα αυτοσυσχέτισης μπορούμε εύκολα να εφαρμόσουμε την διάσπαση των ιδιοτιμών (Eigenvalue Decomposition-EVD), ώστε να προκύψουν οι ιδιοτιμές (eigenvalues) και τα ιδιοδιανύσματα (eigenvectors). Οι ιδιοτιμές χωρίζονται σε δύο ομάδες για την περίπτωση όπου έχουμε λιγότερες πηγές (ασυσχέτιστες) από στοιχεία και ασυσχέτιστο λευκό θόρυβο. Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει $(N-M)$ ιδιοτιμές που παίρνουν την ίδια τιμή, ίση με σ_n^2 . Η δεύτερη ομάδα περιλαμβάνει M ιδιοτιμές, που είναι συναρτήσεις των χαρακτηριστικών κάθε πηγής [19].

Αν συμβολίσουμε τις ιδιοτιμές ως λ_n και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα ως \mathbf{u}_n έχουμε ότι:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^H$$

Ο πίνακας $\mathbf{\Lambda}$ είναι διαγώνιος και τα στοιχεία του είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα \mathbf{R} (πάντα θετικές και πραγματικές), δηλαδή:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

Οι πίνακες \mathbf{Q} και \mathbf{Q}^H είναι οι ορθομοναδιαίοι (Unitary) πίνακες του μετασχηματισμού (ισχύει: $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^H = \mathbf{I}$ και $\mathbf{Q}^H\mathbf{Q} = \mathbf{I}$) και αποτελούνται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του πίνακα \mathbf{R} , δηλαδή:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N]$$

Οπότε έχουμε ότι:

$$\mathbf{R} = \sum_{m=1}^M \lambda_m \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_N$$

4.3.3. Στατιστική επεξεργασία σημάτων στον συμβατικό beamformer

Στην περίπτωση του συμβατικού beamformer το διάνυσμα των βαρών είναι σταθερό και επιλέγεται έτσι, ώστε το διάγραμμα ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας να στραφεί σε προκαθορισμένη κατεύθυνση που ορίζει το κυμαάνυσμα \mathbf{k}_s [19, 21]. Ισχύει ότι:

$$\mathbf{w}_c = \frac{1}{N} [e^{j\omega\tau_0} \ e^{j\omega\tau_1} \ \dots \ e^{j\omega\tau_{N-1}}] = \frac{1}{N} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)$$

Η απόκριση του συμβατικού beamformer είναι ίση με:

$$Y(\omega, \mathbf{k}) = \mathbf{w}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) = \frac{1}{N} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)$$

Αν θεωρήσουμε ότι υπάρχει πηγή $f(t)$ στην κατεύθυνση \mathbf{k}_s , τότε:

$$\mathbf{x}(t) = f(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)$$

και η έξοδος θα είναι ίση με:

$$y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) = f(t) \frac{1}{N} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) = f(t)$$

Η μέση λαμβανόμενη ισχύς στην έξοδο είναι ίση με:

$$P(w) = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} = \mathbf{w}^H p_s \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{w} = p_s \frac{1}{N} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \frac{1}{N} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) = p_s$$

Αν υποθέσουμε ότι στην είσοδο υπάρχει μόνο σήμα παρεμβολής στην κατεύθυνση \mathbf{k}_l , δηλαδή:

$$\mathbf{x}(t) = f_l(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_l)$$

Η έξοδος θα είναι ίση με:

$$y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) = \frac{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}(\mathbf{k}_l)}{N} f_l(t)$$

όπου το πηλίκο καθορίζει πόσο τμήμα της παρεμβολής εισέρχεται στο σύστημα.

Η μέση ισχύς στην έξοδο είναι ίση με:

$$P(w) = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_l \mathbf{w} = \mathbf{w}^H p_l \mathbf{v}(\mathbf{k}_l) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_l) \mathbf{w} =$$

$$p_I \frac{1}{N} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}(\mathbf{k}_I) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_I) \frac{1}{N} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) = p_I (1 - p)$$

όπου:

$$p = 1 - \frac{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}(\mathbf{k}_I) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_I) \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}{N^2}$$

Αν υποθέσουμε ότι στην είσοδο υπάρχει μόνο θόρυβος, δηλαδή $\mathbf{x}(t) = \mathbf{n}(t)$, τότε η έξοδος θα είναι ίση με:

$$y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) = \frac{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{n}(t)}{N}$$

Η μέση ισχύς στην έξοδο είναι ίση με:

$$P(w) = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w} = \mathbf{w}^H \sigma_n^2 \mathbf{I} \mathbf{w} = \sigma_n^2 \frac{1}{N} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \frac{1}{N} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) = \frac{\sigma_n^2}{N}$$

Βλέπουμε ότι ο θόρυβος στην έξοδο είναι N φορές μικρότερος από ότι στην είσοδο κάθε στοιχείου [19]. Αν υποθέσουμε ότι στην είσοδο υπάρχει το σήμα, η παρεμβολή και ο θόρυβος, τότε:

$$\mathbf{x}(t) = f(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) + f_I(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_I) + \mathbf{n}(t)$$

Η έξοδος θα είναι ίση με:

$$y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) = \frac{1}{N} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) [f(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) + f_I(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_I) + \mathbf{n}(t)]$$

Ο πίνακας συσχέτισης είναι ίσος με:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{x_s} + \mathbf{R}_{x_I} + \mathbf{R}_n = p_s \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) + p_I \mathbf{v}(\mathbf{k}_I) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_I) + \sigma_n^2 \mathbf{I}$$

Η μέση ισχύς στην έξοδο είναι ίση με:

$$P(w) = \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} = p_s + p_l(1-p) + \frac{\sigma_n^2}{N}$$

Ο λόγος του σήματος προς τον θόρυβο και την παρεμβολή είναι ίσος:

$$\text{SINR}_{out} = \frac{P_s}{P_N} = \frac{p_s}{p_l(1-p) + \frac{\sigma_n^2}{N}}$$

και όταν έχουμε απουσία παρεμβολής:

$$\text{SNR}_{out} = N \frac{P_s}{\sigma_n^2} = N(\text{SNR}_{in})$$

Το κέρδος κεραίας (Array-beamforming gain) ισούται με:

$$G = \frac{\text{SNR}_{out}}{\text{SNR}_{in}} = \frac{N \frac{P_s}{\sigma_n^2}}{\frac{P_s}{\sigma_n^2}} = N$$

4.3.4. Ο beamformer μηδενισμού των ανεπιθύμητων κατευθύνσεων

Ο beamformer μηδενισμού των ανεπιθύμητων κατευθύνσεων (Null Steering beamformer) χρησιμοποιείται όταν είναι επιθυμητή η λήψη ενός σήματος σε κατεύθυνση \mathbf{k}_s ($\mathbf{w}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) = 1$) και η ακύρωση άλλων σημάτων από γνωστές κατευθύνσεις \mathbf{k}_i , $i = 1, 2, \dots, K$ ($\mathbf{w}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_i) = 0$). Έτσι παράγει ένα μηδενικό στην κατεύθυνση άφιξης του ανεπιθύμητου σήματος. Η διαδικασία αυτή είναι πολύ αποδοτική όταν θέλουμε να απορρίψουμε δυνατές παρεμβολές και μπορεί να επαναληφθεί για πολλαπλές παρεμβολές. Έχουμε ότι [19, 21, 22]:

$$\mathbf{w}^H \mathbf{A} = \mathbf{e}_1^T = [1, 0, \dots, 0]$$

όπου:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{v}(\mathbf{k}_s), \mathbf{v}(\mathbf{k}_1), \dots, \mathbf{v}(\mathbf{k}_K)]$$

Αν $i = N-1$, τότε ο πίνακας \mathbf{A} είναι τετραγωνικός. Αν υπάρχει ο αντίστροφος του, δηλαδή οι στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, η λύση είναι η εξής:

$$\mathbf{w}_{ns}^H = \mathbf{e}_1^T \mathbf{A}^{-1}$$

Διαφορετικά, αν ο πίνακας \mathbf{A} είναι μη αντιστρέψιμος, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον ψευδοαντίστροφο (Pseudo Inverse) του.

Αν $i < N-1$, ο πίνακας \mathbf{A} δεν είναι τετραγωνικός και η λύση είναι η εξής [19]:

$$\mathbf{w}_{ns}^H = \mathbf{e}_1^T (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H$$

Ο Freidlander [22] με μια διαδικασία δύο βημάτων εκτίμησε αρχικά την κατεύθυνση άφιξης όλων των σημάτων, κατόπιν υπολόγισε τα βάρη που προσθέτουν μηδενικά στις κατευθύνσεις που επιθυμούμε και προσδιόρισε τον λόγο της παρεμβολής προς το σήμα στην έξοδο (Output Interference to Signal Ratio-OISR) ως μια ασυμπτωτική συνάρτηση της γωνίας άφιξης και του αριθμού των στοιχείων:

$$E\{\text{OISR}\} \approx \frac{360\sigma_n^2}{TP^{(d)}(N^2-1)(N^2-4)c^4(\sin\theta_d - \sin\theta_l)}$$

όπου σ_n^2 η ισχύς του θορύβου, $P^{(d)}$ η ισχύς του επιθυμητού σήματος, N ο αριθμός των στοιχείων, T ο αριθμός των παρατηρήσεων και $c = 2\pi d / \lambda$. Για $\theta_d \neq \theta_l$ υπάρχει μείωση στο OISR και παράλληλα αύξηση της απόδοσης σε σχέση με τον συμβατικό beamformer. Παρόλα αυτά δεν μπορεί να γίνει ελαχιστοποίηση του ασυσχέτιστου θορύβου στην έξοδο της στοιχειοκεραίας, άρα και βελτιστοποίηση του SNR.

Το πρόβλημα αντιμετώπισης του ασυσχέτιστου θορύβου το ξεπερνάμε με τους βέλτιστους Beamformers, τους οποίους θα μελετήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Βέλτιστοι Beamformers

5.1. Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τους beamformers με τους οποίους μπορούμε να έχουμε βέλτιστο (Optimum) Beamforming παρουσία θορύβου και παρεμβολών, δηλαδή την ιδανική περίπτωση εκτίμησης και σχηματισμού του επιθυμητού σήματος στην έξοδο του συστήματος, παρουσία ανεπιθύμητων σημάτων.

Αν M είναι ο συνολικός αριθμός ων σημάτων που λαμβάνει η στοιχειοκεραία, τότε ορίζουμε ως $f_s(t)$ το λαμβανόμενο επιθυμητό σήμα, $f_i(t)$ τα $I = M - 1$ λαμβανόμενα σήματα παρεμβολών ($i = 1, 2, \dots, I$) και $d(t)$ το επιθυμητό σήμα (Desired Signal) ή σήμα αναφοράς (Reference Signal), το οποίο θεωρούμε ίσο με το σήμα $f_s(t)$. Η πραγματική απόκριση της στοιχειοκεραίας είναι ίση με:

$$y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)$$

όπου \mathbf{w} το διάνυσμα των μιγαδικών βαρών και $\mathbf{x}(t)$ το διάνυσμα του συνολικού λαμβανόμενου σήματος εισόδου, για το οποίο ισχύει:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_{I_{total}}(t) + \mathbf{n}(t) = \mathbf{x}_s(t) + \sum_{i=1}^I \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{n}(t) = \\ &f_s(t)\mathbf{v}(\mathbf{k}_s) + \sum_{i=1}^I f_i(t)\mathbf{v}(\mathbf{k}_i) + \mathbf{n}(t) \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{x}_s(t)$ το διάνυσμα του ωφέλιμου σήματος, $\mathbf{x}_{I_{total}}(t)$ το διάνυσμα που περιέχει τα I διανύσματα των σημάτων παρεμβολών, $\mathbf{n}(t)$ το διάνυσμα του

θορύβου, \mathbf{k}_s το κυματόνισμα του επιθυμητού σήματος και \mathbf{k}_i τα κυματόνισμα των σημάτων των παρεμβολών.

Στην ανάλυση των βέλτιστων beamformers θα υποθέσουμε ότι τα στατιστικά χαρακτηριστικά 2^{ης} τάξης (πίνακες αυτοσυσχέτισης και διάνυσμα ετεροσυσχέτισης) παραμένουν σταθερά με το πέρασμα του χρόνου, δηλαδή οι διαδικασίες είναι στατικές ή στατικές με την ευρεία έννοια. Στην πράξη κάτι τέτοιο δεν υφίσταται, λόγω της μεταβλητότητας του περιβάλλοντος διάδοσης. Επίσης θα θεωρήσουμε ότι γνωρίζουμε εξ αρχής τις κατευθύνσεις των σημάτων.

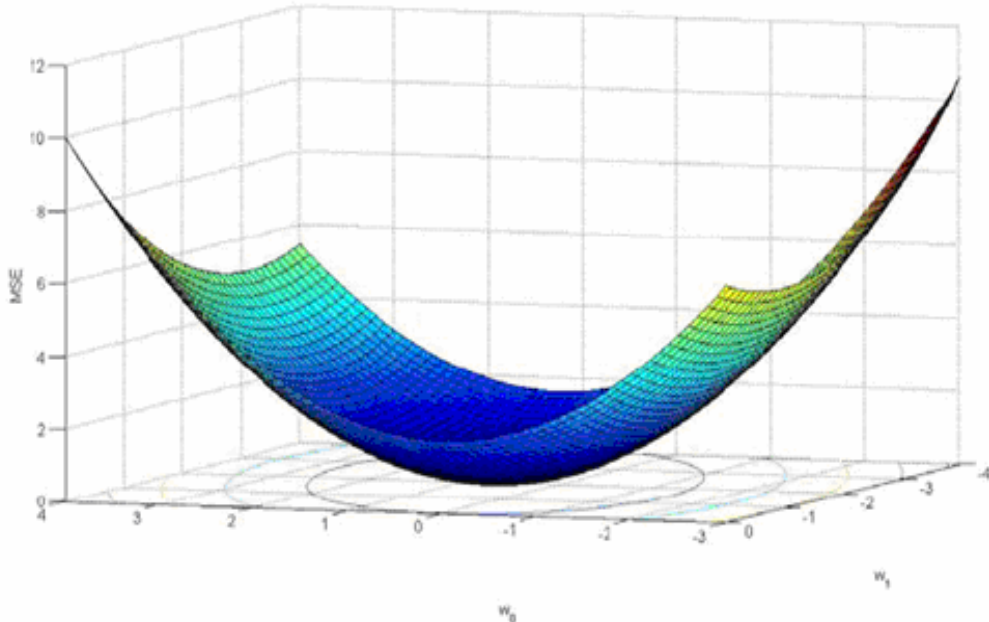
Η μελέτη των βέλτιστων beamformers θα μας βοηθήσει να προσδιορίσουμε τις βέλτιστες τιμές όλων των συνιστωσών της διαδικασίας Beamforming και έτσι θα έχουμε ένα μέτρο σύγκρισης, όταν θα μελετήσουμε τους προσαρμοστικούς beamformers στο επόμενο κεφάλαιο.

5.2. Βέλτιστοι Beamformers Χωρίς Περιορισμούς

Οι βέλτιστοι beamformers χωρίς περιορισμούς (Unconstrained beamformers) βασίζονται στη θεωρία των φίλτρων Wiener-Hopf, που αναπτύχθηκε για διακριτού χρόνου ή χώρου συστήματα και έτσι είναι δυνατή η υλοποίησή τους με ψηφιακές τεχνικές [23, 24]. Τα φίλτρα αυτά ελαχιστοποιούν τη μέση τετραγωνική τιμή του σφάλματος και παρέχουν στην έξοδο τους μια εκτίμηση της επιθυμητής απόκρισης, με δεδομένο ένα διάνυσμα εισόδου. Έτσι παρέχεται δευτέρου βαθμού εξάρτηση της συνάρτησης κόστους από τις άγνωστες παραμέτρους στην κρουστική απόκριση του φίλτρου. Δηλαδή αν αναπτύξουμε τη συνάρτηση, τα στοιχεία του διανύσματος \mathbf{w} θα είναι είτε πρώτου, είτε δευτέρου βαθμού.

Στο επόμενο σχήμα βλέπουμε μια τυπική συνάρτηση μέσου τετραγωνικού σφάλματος (Mean Square Error-MSE) δύο διαστάσεων (2-D). Η παραβολοειδής επιφάνεια ονομάζεται επιφάνεια επίδοσης. Η συνάρτηση πρέπει να είναι κοίλη προς τα πάνω, διαφορετικά θα υπήρχαν βάρη τα οποία θα έδιναν αρνητική τιμή στην συνάρτηση, γεγονός αδύνατο για πραγματικά, φυσικά σήματα. Η συνάρτηση κόστους έχει ένα διακριτό ελάχιστο, το οποίο καθορίζει μοναδικά τη βέλτιστη

στατιστική σχεδίαση του φίλτρου και ονομάζεται σημείο ελαχίστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος (Minimum Mean Square Error- MMSE).



Σχήμα 5.1. Τμήμα από την δύο διαστάσεων επιφάνεια επίδοσης δευτέρου βαθμού

5.2.1. Ο beamformer ελαχίστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος (MMSE)

Ο beamformer του ελαχίστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος (MMSE) ελαχιστοποιεί το σφάλμα και υπολογίζει τις βέλτιστες τιμές του διανύσματος των μιγαδικών βαρών \mathbf{w} , λαμβάνοντας υπόψη τη τιμή ενός σήματος αναφοράς $d(t)$. Το σφάλμα, δηλαδή η απόκλιση της πραγματικής απόκρισης σε σχέση με το σήμα αναφοράς, είναι ίσο με:

$$e(t) = d(t) - y(t) = d(t) - \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)$$

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (συνάρτηση κόστους) είναι ίσο με [5, 21]:

$$MSE = E \{ |e(t)|^2 \} = E \{ |d(t) - \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)|^2 \} =$$

$$E \{ (d(t) - \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t))(d^*(t) - \mathbf{x}^H(t)\mathbf{w}) \} =$$

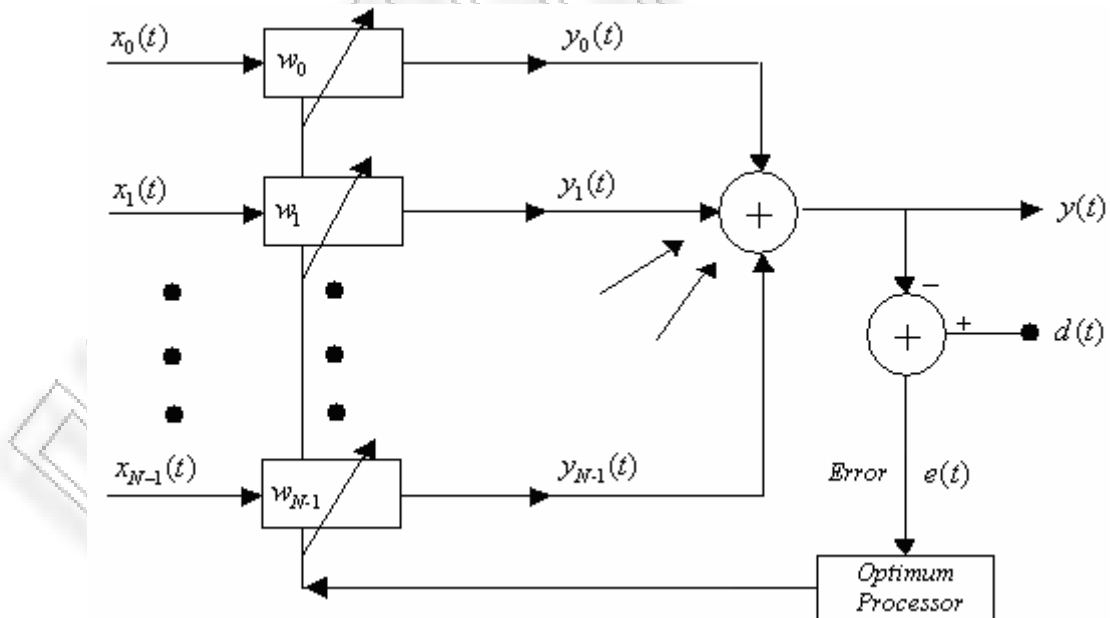
$$E\{d(t)d^*(t)\} - E\{d(t)\mathbf{x}^H(t)\}\mathbf{w} - \mathbf{w}^H E\{d^*(t)\mathbf{x}(t)\} + \mathbf{w}^H E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\}\mathbf{w} =$$

$$E\{d(t)d^*(t)\} - \mathbf{r}_{dx}^H \mathbf{w} - \mathbf{w}^H \mathbf{r}_{dx} + \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w}$$

όπου $\mathbf{r}_{dx} = E\{\mathbf{x}(t)d^*(t)\}$ το διάνυσμα ετεροσυσχέτισης (Cross Correlation Vector) μεταξύ του συνολικά λαμβανόμενου σήματος και του σήματος αναφοράς. Για να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση την παραγωγίζουμε ως προς \mathbf{w}^H και την μηδενίζουμε. Οπότε έχουμε ότι:

$$\frac{\partial MSE}{\partial \mathbf{w}^H} = 0 \Rightarrow -\mathbf{r}_{dx} + \mathbf{R}_x \mathbf{w} = 0 \Rightarrow \mathbf{w}_{MMSE} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{r}_{dx}$$

Όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα ο beamformer MMSE απαιτεί γνώση ενός σήματος αναφοράς, αλλά δεν απαιτεί τη γνώση της κατεύθυνσης του λαμβανόμενου σήματος [11, 18, 23, 24].



Σχήμα 5.2. Αναπαράσταση της λειτουργίας του beamformer MMSE σε γραμμική στοιχειοκεραία

5.2.2. Η βέλτιστη συνάρτηση κόστους και η αρχή της ορθογωνιότητας

Το βέλτιστο σφάλμα είναι ίσο με:

$$e_{opt}(t) = d(t) - y_{opt}(t)$$

Άρα το βέλτιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα (συνάρτηση κόστους) είναι ίσο με:

$$\begin{aligned} MMSE &= E \left\{ |e_{opt}(t)|^2 \right\} = E \left\{ |d(t) - y_{opt}(t)|^2 \right\} = \\ &= E \left\{ (d(t) - \mathbf{w}_{opt}^H \mathbf{x}(t)) (d^*(t) - \mathbf{x}^H(t) \mathbf{w}_{opt}) \right\} = \\ &= E \left\{ d(t) d^*(t) \right\} - E \left\{ d(t) \mathbf{x}^H(t) \right\} \mathbf{w}_{opt} - \mathbf{w}_{opt}^H E \left\{ d^*(t) \mathbf{x}(t) \right\} + \mathbf{w}_{opt}^H E \left\{ \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t) \right\} \mathbf{w}_{opt} = \\ &= E \left\{ |d(t)|^2 \right\} - \mathbf{r}_{dx}^H \mathbf{w}_{opt} - \mathbf{w}_{opt}^H \mathbf{r}_{dx} + \mathbf{w}_{opt}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w}_{opt} = \\ &= E \left\{ |d(t)|^2 \right\} - \mathbf{r}_{dx}^H \mathbf{w}_{opt} - \mathbf{w}_{opt}^H \mathbf{r}_{dx} + \mathbf{w}_{opt}^H \mathbf{R}_x \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{r}_{dx} = \\ &= E \left\{ |d(t)|^2 \right\} - \mathbf{r}_{dx}^H \mathbf{w}_{opt} \end{aligned}$$

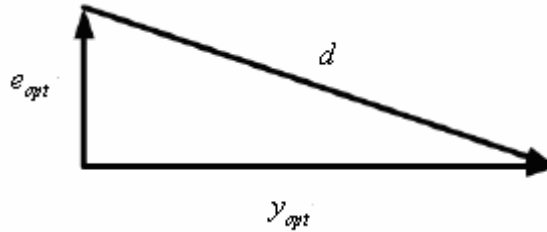
Η εκτιμώμενη ισχύς της επιθυμητής απόκρισης είναι ίση με:

$$\begin{aligned} E \left\{ |y_{opt}(t)|^2 \right\} &= E \left\{ |\mathbf{w}_{opt}^H \mathbf{x}(t)|^2 \right\} = \mathbf{w}_{opt}^H E \left\{ \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t) \right\} \mathbf{w}_{opt} = \\ &= \mathbf{w}_{opt}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w}_{opt} = \mathbf{r}_{dx}^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{R}_x \mathbf{w}_{opt} = \mathbf{r}_{dx}^H \mathbf{w}_{opt} \end{aligned}$$

Οπότε το ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα (συνάρτηση κόστους) είναι ίσο με:

$$MMSE = E \left\{ |d(t)|^2 \right\} - E \left\{ |y_{opt}(t)|^2 \right\}$$

Αποδείξαμε ότι η σχέση βελτιστοποίησης της συνάρτησης κόστους είναι ισοδύναμη με την αρχή της ορθογωνιότητας, δηλαδή αναγκαία και ικανή συνθήκη για ελαχιστοποίηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος είναι η απαίτηση το σφάλμα να είναι ορθογώνιο σε κάθε δείγμα της εισόδου [24]. Αν το φίλτρο έχει βελτιστοποιηθεί, τότε η έξοδος και το αντίστοιχο σφάλμα είναι ορθογώνια.



Σχήμα 5.3. Η σχέση της αρχής της ορθογωνιότητας με τη βέλτιστη συνάρτηση κόστους

5.3. Βέλτιστοι Beamformers με Περιορισμούς

Στους βέλτιστους beamformers με περιορισμούς (Constrained Beamformers) θεωρούμε ότι τα βέλτιστα βάρη υπολογίζονται βάση κάποιων συγκεκριμένων, γραμμικών κυρίως, περιορισμών, οι οποίοι έχουν σχέση με χωρικά, συχνοτικά, ενεργειακά ή ποιοτικά χαρακτηριστικά της απόκρισης.

5.3.1. Ο beamformer γραμμικών περιορισμών και ελάχιστης διακύμανσης (LCMV)

Θεωρούμε σταθερή απόκριση της στοιχειοκεραίας στο κυματόνυσμα \mathbf{k}_s . Δηλαδή ισχύει ότι:

$$\mathbf{w}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) = g$$

όπου g σταθερός μιγαδικός αριθμός, που αντιστοιχεί στο κέρδος της στοιχειοκεραίας παρουσία θορύβου [19]. Παράλληλα θέλουμε να ελαχιστοποιείται η διακύμανση (Minimum Variance) της μέσης ισχύος εξόδου. Η απόκριση της στοιχειοκεραίας αν θεωρήσουμε ότι δεν έχουμε παρεμβολές είναι ίση με:

$$y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) = \mathbf{w}^H (\mathbf{x}_s(t) + \mathbf{n}(t)) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{w}^H \mathbf{n}(t) = y_s(t) + y_n(t)$$

Για να ελαχιστοποιηθεί η διακύμανση της μέσης ισχύος εξόδου πρέπει να ελαχιστοποιηθεί η μέση ισχύς του θορύβου. Προκύπτει έτσι ένα πρόβλημα με γραμμικούς περιορισμούς (Linear Constraints), την λύση του οποίου δίνει ο beamformer γραμμικών περιορισμών και ελάχιστης διακύμανσης (Linear Constrained Minimum Variance-LCMV). Η εκτιμώμενη ισχύς του θορύβου είναι ίση με:

$$E \{ |y_n(t)|^2 \} = E \{ |\mathbf{w}^H \mathbf{n}(t)|^2 \} = E \{ (\mathbf{w}^H \mathbf{n}(t)) (\mathbf{n}^H(t) \mathbf{w}) \} = \mathbf{w}^H E \{ \mathbf{n}(t) \mathbf{n}^H(t) \} \mathbf{w} = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w}$$

και ο περιορισμός που τίθεται είναι ο εξής:

$$\mathbf{w}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) - g = 0$$

Για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος γραμμικών περιορισμών θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange. Ορίζουμε:

$$J(\mathbf{w}; \lambda) = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w} + \lambda (\mathbf{w}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) - g) = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w} + \lambda \mathbf{w}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) - \lambda g$$

Για να ελαχιστοποιήσουμε την $J(\mathbf{w}; \lambda)$ ως προς \mathbf{w}^H θα την παραγωγίσουμε και θα μηδενίσουμε την παράγωγο. Έχουμε ότι:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}^H} = 0 \Rightarrow \mathbf{R}_n \mathbf{w} + \lambda \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) = \mathbf{0}$$

Οπότε:

$$\mathbf{w} = -\lambda \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)$$

Αντικαθιστούμε την παραπάνω σχέση στον περιορισμό και βρίσκουμε ότι:

$$\lambda = -g^* \left[\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \right]^{-1}$$

Επομένως το βέλτιστο διάνυσμα βαρών που δίνει ο beamformer LCMV είναι:

$$\mathbf{w}_{LCMV} = g^* \frac{\mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}$$

5.3.2. Ο beamformer ελάχιστης διακύμανσης και μοναδιαίου κέρδους (MVDR)

Αν στον beamformer LCMV θέσουμε $g=1$, τότε προκύπτει ο beamformer ελάχιστης διακύμανσης και απόκρισης χωρίς παραμορφώσεις (Minimum Variance Distortionless Response-MVDR), γνωστός και ως Capon beamformer [18, 25]. Ο beamformer αυτός βελτιστοποιεί τα βάρη, έτσι ώστε να έχουμε σταθερό κέρδος ίσο με τη μονάδα στην επιθυμητή κατεύθυνση και ελάχιστη διακύμανση της ισχύος εξόδου.

Σύμφωνα με τα παραπάνω το βέλτιστο διάνυσμα βαρών που δίνει ο beamformer MVDR είναι:

$$\mathbf{w}_{MVDR} = \frac{\mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)} = \Lambda_1 \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)$$

όπου Λ_1 σταθερός αριθμός ίσος με:

$$\Lambda_1 = \frac{1}{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}$$

Παρατηρούμε ότι ο beamformer MVDR απαιτεί γνώση της κατεύθυνσης του σήματος, καθώς και της αυτοσυσχέτισης του θορύβου. Επίσης, για τον καθορισμό των βαρών απαιτείται ο αντίστροφος πίνακας αυτοσυσχέτισης του θορύβου. Για αυτό ο επεξεργαστής ονομάζεται NAMI (Noise Alone Matrix Inverse) [19]. Στην περίπτωση αυτή, όμως, που θεωρούμε μόνο ασυσχέτιστο θόρυβο ($\mathbf{R}_n = \sigma_n^2 \mathbf{I}$) το βέλτιστο διάνυσμα των βαρών γίνεται:

$$\mathbf{w}_{MVDR} = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \sigma_n^2 \mathbf{I}}{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \sigma_n^2 \mathbf{I} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)} = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}{N}$$

Δηλαδή προκύπτουν τα ίδια βάρη με τον συμβατικό beamformer, οπότε ο συμβατικός beamformer είναι βέλτιστος.

Αν εκτός από θόρυβο έχουμε και παρεμβολές τότε χρησιμοποιείται ο πίνακας συσχέτισης $\mathbf{R}_N = \mathbf{R}_n + \mathbf{R}_I$, όπου \mathbf{R}_I ο πίνακας αυτοσυσχέτισης των παρεμβολών. Τότε το βέλτιστο διάνυσμα είναι ίσο με:

$$\mathbf{w}_{MVDR} = \Lambda_1 \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)$$

και ο beamformer MVDR χαρακτηρίζεται ως φίλτρο μέγιστης πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood-ML), επειδή βρίσκει την εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας της ισχύος του επιθυμητού σήματος, θεωρώντας όλες τις πηγές ως παρεμβολές.

5.3.3. Ο beamformer γραμμικών περιορισμών και ελάχιστης ισχύος (LCMP)

Σε πολλές περιπτώσεις ο πίνακας αυτοσυσχέτισης του θορύβου δεν είναι γνωστός. Τότε χρησιμοποιούμε τον πίνακα αυτοσυσχέτισης \mathbf{R}_x (συνολικό λαμβανόμενο σήμα). Ο περιορισμός που απαιτούμε είναι, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, το κέρδος στην κατεύθυνση \mathbf{k}_s του επιθυμητού κύματος να είναι σταθερό, δηλαδή:

$$\mathbf{w}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) = g$$

Θέλουμε, όμως, να ελαχιστοποιείται η συνολική μέση ισχύς εξόδου (λόγω της χρήσης του πίνακα \mathbf{R}_x), άρα και η μέση ισχύς του θορύβου [18, 19]. Προκύπτει έτσι ένα πρόβλημα με γραμμικούς περιορισμούς, του οποίου την λύση δίνει ο beamformer γραμμικών περιορισμών και ελάχιστης ισχύος (Linear Constrained Minimum Power-LCMP). Η εκτιμώμενη ισχύς του σήματος είναι ίση με:

$$E\{|y(t)|^2\} = E\{|\mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)|^2\} = E\{(\mathbf{w}^H \mathbf{x}(t))(\mathbf{x}^H(t)\mathbf{w})\} =$$

$$\mathbf{w}^H E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\} \mathbf{w} = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w}$$

και ο περιορισμός είναι ο:

$$\mathbf{w}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) - g = 0$$

Για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος γραμμικών περιορισμών θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange. Ορίζουμε:

$$J'(\mathbf{w}; \lambda) = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} + \lambda (\mathbf{w}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) - g) = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} + \lambda \mathbf{w}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) - \lambda g$$

Για να ελαχιστοποιήσουμε την $J'(\mathbf{w}; \lambda)$ την παραγωγίζουμε ως προς \mathbf{w}^H και μηδενίζουμε την παράγωγο:

$$\frac{\partial J'}{\partial \mathbf{w}^H} = 0 \Rightarrow \mathbf{R}_x \mathbf{w} + \lambda \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) = \mathbf{0}$$

Οπότε έχουμε ότι:

$$\mathbf{w} = -\lambda \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)$$

Αντικαθιστούμε την παραπάνω σχέση στον περιορισμό και βρίσκουμε ότι:

$$\lambda = -g^* \left[\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \right]^{-1}$$

Επομένως το βέλτιστο διάνυσμα βαρών που δίνει ο beamformer LCMP είναι:

$$\mathbf{w}_{LCMP} = g^* \frac{\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}$$

5.3.4. Ο beamformer ελάχιστης ισχύος και μοναδιαίου κέρδους (MPDR)

Αν στον beamformer LCMP θέσουμε $g=1$, τότε προκύπτει ο beamformer ελάχιστης ισχύος και απόκρισης χωρίς παραμορφώσεις (Minimum Power Distortionless Response-MPDR) [18]. Ο beamformer αυτός βελτιστοποιεί τα βάρη, έτσι ώστε να έχουμε μοναδιαίο κέρδος στην κατεύθυνση που ορίζει το κυματόνυσμα \mathbf{k}_s και ελάχιστη μέση ισχύ στην έξοδο. Οι περιορισμοί αυτοί εξασφαλίζουν την ελαχιστοποίηση της μέσης ισχύος του θορύβου, άρα και την μεγιστοποίηση του SNR. Το βέλτιστο διάνυσμα βαρών που δίνει ο beamformer MPDR είναι:

$$\mathbf{w}_{MPDR} = \frac{\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)} = \Lambda_2 \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)$$

όπου Λ_2 σταθερός αριθμός ίσος με:

$$\Lambda_2 = \frac{1}{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}$$

Παρατηρούμε ότι ο beamformer MPDR απαιτεί τη γνώση της κατεύθυνσης του επιθυμητού σήματος, καθώς και της αυτοσυσχέτισης του συνολικού λαμβανόμενου σήματος, δηλαδή τον πίνακα \mathbf{R}_x . Ο επεξεργαστής αυτός

ονομάζεται SPNAMI (Signal Plus Noise Alone Matrix Inverse) και είναι ισοδύναμος με τον επεξεργαστή NAMI, όπως θα αποδείξουμε στη συνέχεια.

5.3.5. Ο beamformer μεγιστοποίησης του σηματοθορυβικού λόγου (maxSNR)

Στον beamformer μεγιστοποίησης του σηματοθορυβικού λόγου (maxSNR beamformer), που πρότεινε ο Applebaum [26], τα μιγαδικά βάρη επιλέγονται έτσι, ώστε να μεγιστοποιούν το SNR, δηλαδή τον λόγο της ισχύος του ωφέλιμου σήματος σ_s^2 προς την ισχύ του θορύβου σ_n^2 απουσία παρεμβολών:

$$\text{SNR} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2}$$

Το SNR, αν υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τον πίνακα αυτοσυσχέτισης του ωφέλιμου σήματος και τον πίνακα αυτοσυσχέτισης του θορύβου, είναι ίσο με [5]:

$$\begin{aligned} \text{SNR} &= \frac{E\left\{\left|\mathbf{w}^H \mathbf{x}_s(t)\right|^2\right\}}{E\left\{\left|\mathbf{w}^H \mathbf{n}(t)\right|^2\right\}} = \frac{E\left\{\left(\mathbf{w}^H \mathbf{x}_s(t)\right)\left(\mathbf{x}_s^H(t) \mathbf{w}\right)\right\}}{E\left\{\left(\mathbf{w}^H \mathbf{n}(t)\right)\left(\mathbf{n}^H(t) \mathbf{w}\right)\right\}} = \\ &= \frac{\mathbf{w}^H E\left\{\mathbf{x}_s(t) \mathbf{x}_s^H(t)\right\} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H E\left\{\mathbf{n}(t) \mathbf{n}^H(t)\right\} \mathbf{w}} = \frac{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{x_s} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w}} \end{aligned}$$

Αν παραγωγίσουμε το SNR ως προς \mathbf{w}^H και μηδενίσουμε την παράγωγο βρίσκουμε ότι:

$$\frac{\partial \text{SNR}}{\partial \mathbf{w}^H} = 0 \Rightarrow \frac{\mathbf{R}_n \mathbf{w} \left[\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{x_s} \mathbf{w} \right] - \mathbf{R}_{x_s} \mathbf{w} \left[\mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w} \right]}{\left[\mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w} \right]^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\mathbf{R}_n \mathbf{w} \left[\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{x_s} \mathbf{w} \right]}{\left[\mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w} \right]^2} = \frac{\mathbf{R}_{x_s} \mathbf{w} \left[\mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w} \right]}{\left[\mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w} \right]^2} \Rightarrow$$

$$\mathbf{R}_{x_s} \mathbf{w} = \frac{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{x_s} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w}} \mathbf{R}_n \mathbf{w}$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί ένα συνδυαστικό πρόβλημα ιδιοτιμών [5]. Ο λόγος:

$$\text{SNR} = \frac{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{x_s} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w}}$$

περιορίζεται από τις ελάχιστες και μέγιστες ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα $\mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{R}_{x_s}$. Η μέγιστη ιδιοτιμή λ_{\max} που ικανοποιεί την σχέση:

$$\mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{R}_{x_s} \mathbf{w} = \lambda_{\max} \mathbf{w}$$

είναι η βέλτιστη τιμή του SNR ($\text{SNR} = \lambda_{\max}$). Αντίστοιχα υπάρχει ένα βέλτιστο ιδιοδιάνυσμα \mathbf{w}_{opt} που αναπαριστά το βέλτιστο διάνυσμα των μιγαδικών βαρών. Οπότε έχουμε ότι:

$$\mathbf{R}_{x_s} \mathbf{w}_{opt} = \text{SNR} \mathbf{R}_n \mathbf{w}_{opt} \Rightarrow \mathbf{w}_{opt} = \mathbf{R}_n^{-1} \frac{\mathbf{R}_{x_s} \mathbf{w}_{opt}}{\text{SNR}}$$

Όμως στην περίπτωση του κύματος στενής ζώνης ισχύει για τον πίνακα αυτοσυσχέτισης του ωφέλιμου σήματος ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{x_s} &= E \{ \mathbf{x}_s(t) \mathbf{x}_s^H(t) \} = E \{ f_s(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) f_s^*(t) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \} = \\ &E \{ |f_s(t)|^2 \} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) = \sigma_s^2 \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \end{aligned}$$

Οπότε έχουμε ότι:

$$\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{R}_n^{-1} \frac{\sigma_s^2 \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{w}_{opt}}{\text{SNR}} = \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \frac{\sigma_s^2}{\text{SNR}} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{w}_{opt} \Rightarrow$$

$$\mathbf{w}_{\max SNR} = \Lambda_3 \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)$$

όπου Λ_3 σταθερός αριθμός ίσος με:

$$\begin{aligned} \Lambda_3 &= \frac{\sigma_s^2}{\text{SNR}} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{w}_{\max SNR} = \frac{\sigma_s^2}{\frac{\mathbf{w}_{\max SNR}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w}_{\max SNR}}{\mathbf{w}_{\max SNR}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w}_{\max SNR}}} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{w}_{\max SNR} = \\ &= \frac{\sigma_s^2}{\frac{\mathbf{w}_{\max SNR}^H \sigma_s^2 \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{w}_{\max SNR}}{\mathbf{w}_{\max SNR}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w}_{\max SNR}}} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{w}_{\max SNR} = \frac{\mathbf{w}_{\max SNR}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w}_{\max SNR}}{\mathbf{w}_{\max SNR}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{w}_{\max SNR}} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{w}_{\max SNR} = \\ &= \frac{\mathbf{w}_{\max SNR}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w}_{\max SNR}}{\mathbf{w}_{\max SNR}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)} \end{aligned}$$

Με αυτό τον τρόπο έχουμε πραγματική μεγιστοποίηση του λόγου του σήματος προς τον θόρυβο. Απαιτείται, όμως, η γνώση των πινάκων αυτοσυσχέτισης \mathbf{R}_x , \mathbf{R}_n και η επίλυση ενός προβλήματος ιδιοτιμών.

5.4. Σύγκριση των Βέλτιστων Beamformers

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε ότι όλοι οι beamformers είναι ισοδύναμοι και δίνουν πρακτικά τα ίδια βέλτιστα βάρη, άρα και το ίδιο βέλτιστο SNR. Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης του λαμβανόμενου σήματος παρουσία θορύβου και απουσία παρεμβολών είναι ίσος με:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= E \{ \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t) \} = E \{ (f_s(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) + \mathbf{n}(t)) (f_s^*(t) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) + \mathbf{n}^H(t)) \} = \\ &= E \{ f_s(t) f_s^*(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) + f_s(t) \mathbf{n}^H(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) + f_s^*(t) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{n}(t) + \mathbf{n}(t) \mathbf{n}^H(t) \} \end{aligned}$$

Η ετεροσυσχέτιση του σήματος και του θορύβου είναι μηδενική, άρα ισοδύναμα έχουμε ότι:

$$\mathbf{R}_x = E \{ f_s(t) f_s^*(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) + \mathbf{n}(t) \mathbf{n}^H(t) \} = \sigma_s^2 \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) + E \{ \mathbf{n}(t) \mathbf{n}^H(t) \} \Rightarrow$$

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{R}_n + \sigma_s^2 \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s)$$

Σύμφωνα με το λήμμα αντιστροφής πινάκων (Matrix Inversion Lemma) των Sherman-Morrison ισχύει ότι:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{x} \mathbf{x}^H)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{x} \mathbf{x}^H \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{x}^H \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}}$$

Άρα αν εφαρμόσουμε την ταυτότητα αυτή στην περίπτωση μας υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbf{R}_x^{-1} = [\mathbf{R}_n + \sigma_s^2 \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s)]^{-1} \Rightarrow$$

$$\mathbf{R}_x^{-1} = \mathbf{R}_n^{-1} - \frac{\sigma_s^2 \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n^{-1}}{1 + \sigma_s^2 \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)} \Rightarrow$$

$$\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) = \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) - \frac{\sigma_s^2 \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}{1 + \sigma_s^2 \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)} =$$

$$\frac{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) (1 + \sigma_s^2 \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)) - \sigma_s^2 (\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s))^2}{1 + \sigma_s^2 \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)} =$$

$$\frac{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}{1 + \sigma_s^2 \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)} \Rightarrow$$

$$\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) = \frac{\mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}{1 + \sigma_s^2 \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}$$

Το βέλτιστο διάνυσμα βαρών που δίνει ο beamformer MPDR είναι ίσο με:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{MPDR} &= \frac{\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)} = \frac{\frac{\mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}{\mathbf{1} + \sigma_s^2 \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}}{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \frac{\mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}{\mathbf{1} + \sigma_s^2 \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}} = \\ &= \frac{\mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)} = \mathbf{w}_{MVDR} \end{aligned}$$

Δηλαδή ο beamformer MPDR είναι ισοδύναμος με τον beamformer MVDR.

Για το διάνυσμα ετεροσυσχέτισης \mathbf{r}_{dx} ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{dx} &= E \{ \mathbf{x}(t) d^*(t) \} = E \{ (f(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) + \mathbf{n}(t)) d^*(t) \} = \\ &= E \{ f(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) d^*(t) + \mathbf{n}(t) d^*(t) \} \end{aligned}$$

Η ετεροσυσχέτιση του σήματος και του θορύβου είναι μηδενική άρα:

$$\mathbf{r}_{dx} = E \{ f(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) d^*(t) \} = E \{ f(t) d^*(t) \} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) = \sigma_s^2 \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)$$

Οπότε το βέλτιστο βάρος που δίνει ο beamformer MMSE είναι ίσο με:

$$\mathbf{w}_{MMSE} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{r}_{dx} = \sigma_s^2 \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)$$

Το βέλτιστο SNR του beamformer MMSE είναι ίσο με:

$$\text{SNR}_{MMSE} = \frac{\mathbf{w}_{MMSE}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w}_{MMSE}}{\mathbf{w}_{MMSE}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w}_{MMSE}} = \frac{\sigma_s^2 \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_x \sigma_s^2 \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}{\sigma_s^2 \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n \sigma_s^2 \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)} =$$

$$\frac{\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_x \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}{\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)} = \frac{\Lambda_2 \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_x \Lambda_2 \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}{\Lambda_2 \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n \Lambda_2 \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)} =$$

$$\frac{\mathbf{w}_{MPDR}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w}_{MPDR}}{\mathbf{w}_{MPDR}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w}_{MPDR}} = \text{SNR}_{MPDR}$$

Άρα ο beamformer MMSE είναι ισοδύναμος με τον beamformer MPDR, άρα και με τον beamformer MVDR (αφού ο beamformer MPDR είναι ισοδύναμος με τον beamformer MVDR).

Το βέλτιστο SNR του beamformer maxSNR είναι ίσο με:

$$\text{SNR}_{\max \text{SNR}} = \frac{\mathbf{w}_{\max \text{SNR}}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w}_{\max \text{SNR}}}{\mathbf{w}_{\max \text{SNR}}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w}_{\max \text{SNR}}} = \frac{\Lambda_3 \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_x \Lambda_3 \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}{\Lambda_3 \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n \Lambda_3 \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)} =$$

$$\frac{\mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_x \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}{\mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)} = \frac{\Lambda_1 \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_x \Lambda_1 \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}{\Lambda_1 \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n \Lambda_1 \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)} =$$

$$\frac{\mathbf{w}_{MVDR}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w}_{MVDR}}{\mathbf{w}_{MVDR}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w}_{MVDR}} = \text{SNR}_{MVDR}$$

Άρα ο beamformer maxSNR είναι ισοδύναμος με τον beamformer MVDR, άρα και με όλους τους άλλους. Η επιλογή, επομένως, ενός συγκεκριμένου κριτηρίου, άρα και συγκεκριμένου beamformer, δεν επηρεάζει την απόδοση του συστήματος.

Ο Winters [27] αναφέρει ότι τα φίλτρα Wiener, δηλαδή ο beamformer MMSE για υψηλό SNR αποδίδει καλύτερα από τους άλλους βέλτιστους beamformers. Το κόστος αυτό εξηγείται από την απαίτηση των άλλων beamformers για σταθερό κέρδος και απόκριση χωρίς παραμορφώσεις. Όταν έχουμε, όμως, χαμηλό SNR τότε ο beamformer MMSE μπορεί να δώσει στην έξοδο παραμορφωμένο σήμα.

Οι beamformers και τα χαρακτηριστικά τους παρουσιάζονται συνοπτικά στους επόμενους πίνακες.

Πίνακας 5.1.

Συνοπτική παρουσίαση των Conventional και Null Steering beamformers

ΤΥΠΟΣ	CONVENTIONAL	NULL STEERING
Ορισμοί	$f_s(t)$ - Επιθυμητό σήμα $\mathbf{x}(t)$ - Λαμβανόμενο σήμα $y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)$ - Έξοδος $\mathbf{v}(\mathbf{k}_s)$ - Διάνυσμα πολλαπλότητας	$f_s(t)$ - Επιθυμητό σήμα $f_i(t), i = 1, \dots, K$ - Σήματα παρεμβολών $\mathbf{x}(t)$ - Λαμβανόμενο σήμα $y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)$ - Έξοδος $\mathbf{A} = [\mathbf{v}(\mathbf{k}_s), \mathbf{v}(\mathbf{k}_1), \dots, \mathbf{v}(\mathbf{k}_K)]$ $\mathbf{e}_i^T = [1, 0, \dots, 0]$
Κριτήρια	-	-
Περιορισμός	-	-
Βέλτιστα βάρη	$\mathbf{w}_c = \frac{1}{N} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)$	$\mathbf{w}_{ns}^H = \mathbf{e}_i^T \mathbf{A}^{-1} \text{ ή } \mathbf{w}_{ns}^H = \mathbf{e}_i^T (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H$
Πλεονεκτήματα	Παρέχει μέγιστο SNR παρουσία ασυσχέτιστου θορύβου και απουσία παρεμβολών	Ακυρώνει τα ανεπιθύμητα σήματα των ομοδιαδικτικών παρεμβολών και της διασυμβολικής παρεμβολής
Μειονεκτήματα	Όχι καλή απόδοση παρουσία συσχετισμένου θορύβου Απαιτείται γνώση της κατεύθυνσης του σήματος	Απαιτείται εκτίμηση της της κατεύθυνσης των σημάτων Δεν μεγιστοποιεί το SNR εξόδου

Πίνακας 5.2.

Συνοπτική παρουσίαση των βέλτιστων beamformers MMSE και MVDR

ΤΥΠΟΣ	MMSE	MVDR
Ορισμοί	$f_s(t)$ - Επιθυμητό σήμα $f_I(t)$ - Σήμα παρεμβολής $\mathbf{x}(t)$ - Λαμβανόμενο σήμα $d(t)$ - Σήμα αναφοράς $y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)$ - Έξοδος $e(t) = d(t) - y(t)$ - Σφάλμα $\mathbf{R}_x = E \{ \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t) \}$ $\mathbf{r}_{dx} = E \{ \mathbf{x}(t) d^*(t) \}$	$f_s(t)$ - Επιθυμητό σήμα $f_I(t)$ - Σήμα παρεμβολής $\mathbf{x}(t)$ - Λαμβανόμενο σήμα $y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)$ - Έξοδος $y_n(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{n}(t)$ - Απόκριση θορύβου $\mathbf{v}(\mathbf{k}_s)$ - Διάνυσμα πολλαπλότητας $\mathbf{R}_n = E \{ \mathbf{n}(t) \mathbf{n}^H(t) \}$
Κριτήρια	$\min_{\mathbf{w}} E \{ e(t) ^2 \}$	$\min_{\mathbf{w}} E \{ y_n(t) ^2 \}$
Περιορισμός	-	$\mathbf{w}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) = 1$
Βέλτιστα βάρη	$\mathbf{w}_{MMSE} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{r}_{dx}$	$\mathbf{w}_{MVDR} = \Lambda_1 \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)$, $\Lambda_1 = \frac{1}{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}$
Πλεονεκτήματα	Δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε την κατεύθυνση του επιθυμητού σήματος	Ευέλικτοι και γενικοί περιορισμοί Μέγιστο SNR και ακύρωση παρεμβολών
Μειονεκτήματα	Απαιτείται σήμα αναφοράς Παραμόρφωση σήματος για χαμηλό SNR	Ακύρωση μόνο $N-2$ πηγών παρεμβολών Απαιτείται γνώση της κατεύθυνσης του σήματος

Πίνακας 5.3.

Συνοπτική παρουσίαση των βέλτιστων beamformers MPDR και maxSNR

Τύπος	MPDR	maxSNR
Ορισμοί	$f_s(t)$ - Επιθυμητό σήμα $f_l(t)$ - Σήμα παρεμβολής $\mathbf{x}(t)$ - Λαμβανόμενο σήμα $y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)$ - Έξοδος $\mathbf{v}(\mathbf{k}_s)$ - Διάνυσμα πολλαπλότητας $\mathbf{R}_x = E \{ \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t) \}$	$f_s(t)$ - Επιθυμητό σήμα $\mathbf{n}(t)$ - Σήμα θορύβου $\mathbf{x}(t)$ - Λαμβανόμενο σήμα $y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)$ - Έξοδος $\mathbf{v}(\mathbf{k}_s)$ - Διάνυσμα πολλαπλότητας $\mathbf{R}_{x_s} = E \{ \mathbf{x}_s(t) \mathbf{x}_s^H(t) \}$ $\mathbf{R}_n = E \{ \mathbf{n}(t) \mathbf{n}^H(t) \}$
Κριτήρια	$\min_{\mathbf{w}} E \{ y(t) ^2 \}$	$\max SNR = \max \frac{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{x_s} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w}}$
Περιορισμός	$\mathbf{w}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) = 1$	-
Βέλτιστα βάρη	$\mathbf{w}_{MPDR} = \Lambda_2 \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)$ $\Lambda_2 = \frac{1}{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}$	$\mathbf{w}_{\max SNR} = \Lambda_3 \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)$ $\Lambda_3 = \frac{\mathbf{w}_{\max SNR}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w}_{\max SNR}}{\mathbf{w}_{\max SNR}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}$
Πλεονεκτήματα	Ευέλικτοι και γενικοί περιορισμοί Μέγιστο SNR και ακύρωση παρεμβολών	Πραγματική μεγιστοποίηση του SNR
Μειονεκτήματα	Ακύρωση μόνο $N-2$ πηγών παρεμβολών Απαιτείται γνώση της κατεύθυνσης του σήματος	Απαιτείται γνώση των \mathbf{R}_{x_s} και \mathbf{R}_n Επίλυση προβλήματος ιδιοτιμών

5.5. Στατιστική Επεξεργασία των Βέλτιστων Beamformers

Θεωρούμε ότι η κεραία λαμβάνει επιθυμητό σήμα με ισχύ $p_s = \sigma_s^2 = E\{|f_s|^2\}$ στην κατεύθυνση \mathbf{k}_s και σήμα παρεμβολής με ισχύ $p_I = E\{|f_I|^2\}$ στην κατεύθυνση \mathbf{k}_I . Το επιθυμητό σήμα υποθέτουμε ότι είναι ασυσχέτιστο, τόσο με την παρεμβολή, όσο και με τον θόρυβο, ο οποίος έχει ισχύ σ_n^2 . Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης της παρεμβολής δίνεται από τη σχέση [18]:

$$\mathbf{R}_I = p_I \mathbf{v}(\mathbf{k}_I) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_I)$$

και ο πίνακας αυτοσυσχέτισης του θορύβου δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{R}_n = \sigma_n^2 \mathbf{I}_N$$

Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης των ανεπιθύμητων σημάτων ισούται με:

$$\mathbf{R}_N = \mathbf{R}_I + \mathbf{R}_n = p_I \mathbf{v}(\mathbf{k}_I) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_I) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_N$$

Αν εφαρμόσουμε το λήμμα αντιστροφής πινάκων βρίσκουμε ότι:

$$\mathbf{R}_N^{-1} = \frac{1}{\sigma_n^2} \left[\mathbf{I} - \frac{p_I}{\sigma_n^2 + \mathbf{v}(\mathbf{k}_I) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_I) p_I} \mathbf{v}(\mathbf{k}_I) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_I) \right] =$$

$$\frac{1}{\sigma_n^2} \left[\mathbf{I} - \frac{p_I}{\sigma_n^2 + N p_I} \mathbf{v}(\mathbf{k}_I) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_I) \right]$$

Παρατηρούμε ότι $\mathbf{R}_N^{-1} = (\mathbf{R}_N^{-1})^H$. Αφού αποδείξαμε ότι όλοι οι beamformers είναι ισοδύναμοι θα χρησιμοποιήσουμε το βέλτιστο διάνυσμα βαρών που δίνει ο beamformer MVDR. Έχουμε ότι:

$$\mathbf{w}_{optimal}^H = \Lambda_1 \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) (\mathbf{R}_N^{-1})^H = \Lambda_1 \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_N^{-1} =$$

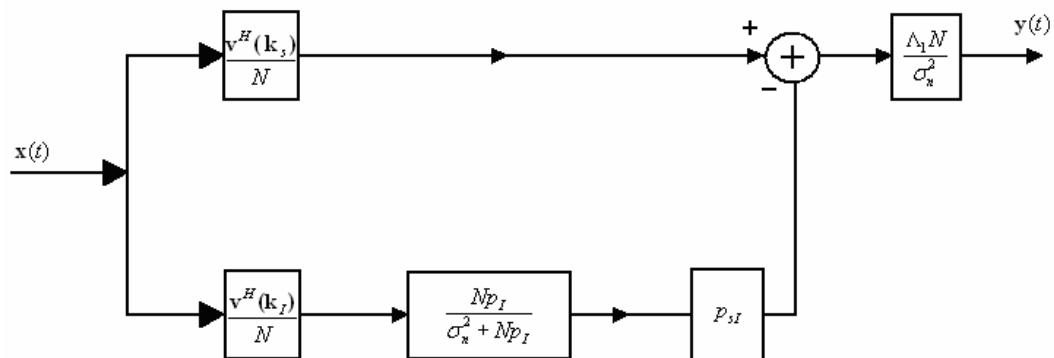
$$\frac{\Lambda_1}{\sigma_n^2} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \left[\mathbf{I} - \frac{p_I}{\sigma_n^2 + Np_I} \mathbf{v}(\mathbf{k}_I) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_I) \right]$$

Ορίζουμε ως p_{sI} τον συντελεστή χωρικής συσχέτισης (Spatial Correlation Coefficient) ανάμεσα στο επιθυμητό σήμα και στο σήμα παρεμβολής:

$$p_{sI} = \frac{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}(\mathbf{k}_I)}{N}$$

Οπότε έχουμε ότι:

$$\mathbf{w}_{optimal}^H = \frac{\Lambda_1 N}{\sigma_n^2} \left[\frac{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s)}{N} - \frac{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_I)}{N} \frac{Np_I}{\sigma_n^2 + Np_I} p_{sI} \right]$$



Σχήμα 5.4. Ο βέλτιστος beamformer ακύρωσης μίας πηγής παρεμβολής

Ο βέλτιστος beamformer ακύρωσης μίας πηγής παρεμβολής παρατηρούμε ότι αποτελείται από δύο διαφορετικούς «χωρικούς» επεξεργαστές, έναν για το επιθυμητό σήμα και έναν για το σήμα παρεμβολής. Κάθε επεξεργαστής είναι ουσιαστικά ένας συμβατικός beamformer. Τα χωρικά χαρακτηριστικά που προσδίδουν οι επεξεργαστές συνδυάζονται βέλτιστα, ώστε να έχουμε την επιθυμητή απόκριση.

Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης \mathbf{R} , ο οποίος περιλαμβάνει το ωφέλιμο σήμα, τον θόρυβο και τις παρεμβολές δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{x_s} + \mathbf{R}_I + \mathbf{R}_n = p_s \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) + p_I \mathbf{v}(\mathbf{k}_I) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_I) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_N$$

Η συνολική βέλτιστη μέση ισχύς εξόδου είναι ίση με:

$$\tilde{P} = \tilde{\mathbf{w}}_{optimal}^H \mathbf{R} \tilde{\mathbf{w}}_{optimal}$$

Η βέλτιστη μέση ισχύς εξόδου του επιθυμητού σήματος είναι ίση με:

$$\tilde{P}_s = \tilde{\mathbf{w}}_{optimal}^H \mathbf{R}_{x_s} \tilde{\mathbf{w}}_{optimal} = p_s \tilde{\mathbf{w}}_{optimal}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \tilde{\mathbf{w}}_{optimal} =$$

$$p_s \left(\tilde{\mathbf{w}}_{optimal}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \right)^2 = p_s \Lambda_1^2 \left(\mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \right)^2$$

Η βέλτιστη μέση ισχύς εξόδου της παρεμβολής είναι ίση με:

$$\tilde{P}_I = \tilde{\mathbf{w}}_{optimal}^H \mathbf{R}_I \tilde{\mathbf{w}}_{optimal} = p_I \tilde{\mathbf{w}}_{optimal}^H \mathbf{v}_k(\mathbf{k}_I) \mathbf{v}_k^H(\mathbf{k}_I) \tilde{\mathbf{w}}_{optimal} = \tilde{\mathbf{w}}_{optimal}^H \mathbf{R}_I \tilde{\mathbf{w}}_{optimal} =$$

$$\mathbf{R}_I \left(\tilde{\mathbf{w}}_{optimal} \right)^2 = \Lambda_1^2 \mathbf{R}_I \left(\mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_N^{-1} \right)^2 = \Lambda_1^2 \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \left(\mathbf{R}_N^{-1} \right)^H \mathbf{R}_I \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{v}_k(\mathbf{k}_s) =$$

$$\Lambda_1^2 \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{R}_I \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{v}_k(\mathbf{k}_s)$$

Η βέλτιστη μέση ισχύς εξόδου του θορύβου είναι ίση με:

$$\tilde{P}_n = \tilde{\mathbf{w}}_{optimal}^H \mathbf{R}_n \tilde{\mathbf{w}}_{optimal} = \sigma_n^2 \tilde{\mathbf{w}}_{optimal}^H \tilde{\mathbf{w}}_{optimal} = \sigma_n^2 \left(\tilde{\mathbf{w}}_{optimal} \right)^2 = \sigma_n^2 \left(\Lambda_1 \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_N^{-1} \right)^2 =$$

$$\sigma_n^2 \Lambda_1^2 \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) (\mathbf{R}_N^{-1})^H \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) = \sigma_n^2 \Lambda_1^2 \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) =$$

$$\sigma_n^2 \Lambda_1^2 \beta \left(\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \right)^2 = \sigma_n^2 \beta$$

όπου β είναι ο λόγος της ισχύος του ασυσχέτιστου θορύβου στην έξοδο προς την ισχύ του ασυσχέτιστου θορύβου στην είσοδο του beamformer και είναι ίσος με:

$$\beta = \frac{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}{\left(\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \right)^2}$$

Η συνολική ανεπιθύμητη μέση ισχύς εξόδου δίνεται από τη σχέση:

$$\tilde{P}_N = \tilde{P}_I + \tilde{P}_n = \Lambda_1^2 \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{R}_I \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) + \sigma_n^2 \Lambda_1^2 \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) =$$

$$\Lambda_1^2 \left(\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{R}_I \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) + \sigma_n^2 \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \right) =$$

$$\Lambda_1^2 \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_N^{-1} \left(\mathbf{R}_I + \sigma_n^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) = \Lambda_1^2 \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) =$$

$$\Lambda_1^2 \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)$$

Ο βέλτιστος λόγος του σήματος προς τον θόρυβο και την παρεμβολή είναι ίσος με:

$$\text{SINR}_{\text{optimal,out}} = \tilde{a} = \frac{\tilde{P}_s}{\tilde{P}_N} = \frac{p_s \Lambda_1^2 \left(\mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \right)^2}{\Lambda_1^2 \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)} = p_s \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s)$$

Το βέλτιστο κέρδος της στοιχειοκεραίας είναι ίσο με:

$$\tilde{G}_{optimal} = \frac{\text{SINR}_{optimal,out}}{\text{SINR}_{in}} = \frac{\tilde{a}}{\frac{p_s}{p_N}} = \frac{p_s \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s)}{\frac{p_s}{p_N}} = p_N \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) = \frac{p_N}{\tilde{P}_N}$$

Όμως ο πίνακας \mathbf{R}_N^{-1} είναι ίσος με:

$$\mathbf{R}_N^{-1} = \frac{1}{\sigma_n^2} \left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{k}_I) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_I)}{\frac{\sigma_n^2}{p_I} + 1} \right]$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\text{SINR}_{optimal,out} = \tilde{a} = \frac{\tilde{P}_s}{\sigma_n^2} N = \frac{p + \frac{\sigma_n^2}{p_I N}}{1 + \frac{\sigma_n^2}{p_I N}}$$

όπου:

$$p = 1 - \frac{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}(\mathbf{k}_I) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_I) \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}{N^2}$$

και:

$$\tilde{G}_{optimal} = \frac{\text{SINR}_{out}}{\text{SINR}_{in}} = \frac{p_I}{\sigma_n^2} N \frac{\left(1 + \frac{\sigma_n^2}{p_I}\right) \left(p + \frac{\sigma_n^2}{p_I}\right)}{1 + \frac{\sigma_n^2}{p_I N}}$$

Αν αντικαταστήσουμε στην παράμετρο p τα βάρη του βέλτιστου beamformer \mathbf{w}_c , τότε:

$$p = 1 - \mathbf{w}_c^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_I) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_I) \mathbf{w}_c$$

Άρα η απόδοση των βέλτιστων beamformer, ως προς τη δυνατότητα ακύρωσης παρεμβολών, εξαρτάται από την απόκριση του συμβατικού beamformer στις παρεμβολές.

5.5.1. Βέλτιστοι beamformers και πολλές πηγές παρεμβολών

Θεωρούμε ότι η κεραία λαμβάνει $I = M - 1$ σήματα παρεμβολής στις κατευθύνσεις \mathbf{k}_i με ισχύ p_i ($i = 1, 2, \dots, I$). Το επιθυμητό σήμα υποθέτουμε ότι είναι στατιστικά ανεξάρτητο με τις παρεμβολές. Επιπλέον ο θόρυβος έχει ισχύ σ_n^2 . Ορίζουμε τον πίνακα \mathbf{V}_I διαστάσεων $N \times I$:

$$\mathbf{V}_I = [\mathbf{v}(\mathbf{k}_1), \mathbf{v}(\mathbf{k}_2), \dots, \mathbf{v}(\mathbf{k}_I)]$$

και εμπεριέχει όλα τα διανύσματα πολλαπλότητας των παρεμβολών. Επίσης ορίζουμε τον πίνακα \mathbf{P}_I διαστάσεων $I \times I$, ο οποίος εμπεριέχει το σύνολο των αυτοσυσχετίσεων και των ετεροσυσχετίσεων των σημάτων των παρεμβολών:

$$\mathbf{P}_I = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & \cdots \\ P_{12} & P_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & P_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & P_{21} & \cdots \\ P_{12} & p_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & p_I \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης των παρεμβολών δίνεται από τη σχέση [18]:

$$\mathbf{R}_{I_{total}} = \mathbf{V}_I \mathbf{P}_I \mathbf{V}_I^H$$

και ο πίνακας αυτοσυσχέτισης του θορύβου δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{R}_n = \sigma_n^2 \mathbf{I}_N$$

Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης των συνολικών ανεπιθύμητων σημάτων ισούται με:

$$\mathbf{R}_{N_{total}} = \mathbf{R}_n + \mathbf{R}_{I_{total}} + \mathbf{R}_n = \mathbf{V}_I \mathbf{P}_I \mathbf{V}_I^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_N$$

Αν εφαρμόσουμε το λήμμα αντιστροφής πινάκων βρίσκουμε ότι:

$$\mathbf{R}_{N_{total}}^{-1} = \frac{1}{\sigma_n^2} \mathbf{I} - \frac{1}{\sigma_n^2} \mathbf{V}_1 \left(\mathbf{I} + \mathbf{P}_1 \mathbf{V}_1^H \frac{1}{\sigma_n^2} \mathbf{V}_1 \right)^{-1} \mathbf{P}_1 \mathbf{V}_1^H \frac{1}{\sigma_n^2} =$$

$$\frac{1}{\sigma_n^2} \left[\mathbf{I} - \mathbf{V}_1 \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{P}_1}{\sigma_n^2} \mathbf{V}_1^H \mathbf{V}_1 \right)^{-1} \frac{\mathbf{P}_1}{\sigma_n^2} \mathbf{V}_1^H \right]$$

Το βέλτιστο διάνυσμα βαρών γίνεται:

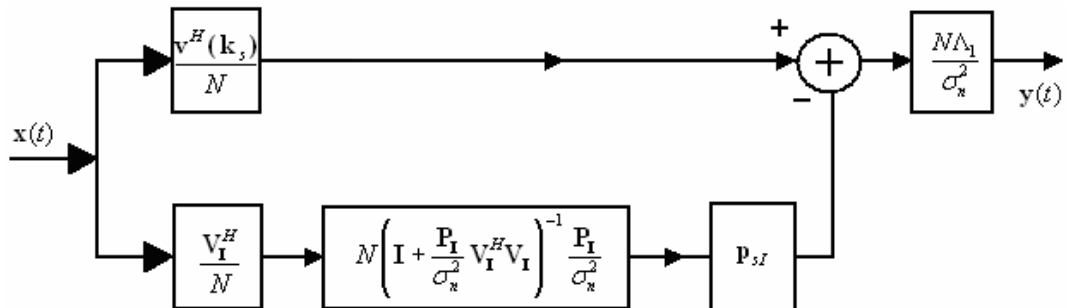
$$\mathbf{w}_{optimal}^H = \Lambda_1 \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{R}_{N_{total}}^{-1} = \frac{\Lambda_1}{\sigma_n^2} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \left[\mathbf{I} - \mathbf{V}_1 \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{P}_1}{\sigma_n^2} \mathbf{V}_1^H \mathbf{V}_1 \right)^{-1} \frac{\mathbf{P}_1}{\sigma_n^2} \mathbf{V}_1^H \right]$$

Ορίζουμε ως \mathbf{p}_{sI} τον πίνακα χωρικής συσχέτισης διαστάσεων $1 \times I$ ανάμεσα στο επιθυμητό σήμα και στα σήματα παρεμβολών. Θα ισχύει ότι:

$$\mathbf{p}_{sI} = \frac{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{V}_1}{N}$$

Οπότε το βέλτιστο διάνυσμα μιγαδικών βαρών είναι ίσο με:

$$\mathbf{w}_{optimal}^H = \frac{N\Lambda_1}{\sigma_n^2} \left[\frac{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s)}{N} - \frac{\mathbf{V}_1^H}{N} N \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{P}_1}{\sigma_n^2} \mathbf{V}_1^H \mathbf{V}_1 \right)^{-1} \frac{\mathbf{P}_1}{\sigma_n^2} \mathbf{p}_{sI} \right]$$



Σχήμα 5.5. Ο βέλτιστος beamformer ακύρωσης πολλαπλών πηγών παρεμβολών

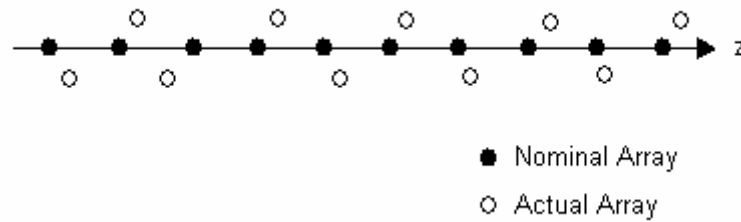
5.6. Εύρωστοι Beamformers

Κατά την πρακτική εφαρμογή της διαδικασίας Beamforming σε σήματα του χώρου που ορίζεται από τις γωνίες θ και φ , οι τιμές του διανύσματος πολλαπλότητας ανανεώνονται με διακριτά βήματα (βήματα της δειγματοληψίας), έτσι ώστε να εξασφαλιστεί ο ορθός προσδιορισμός τους με βάση τη θέση των λαμβανόμενων σημάτων.

Σε πολλές εφαρμογές η μείωση του βήματος μπορεί να αυξήσει την αξιοπιστία και να μειώσει τα προβλήματα εσφαλμένης απόκρισης (Mismatch), αλλά παράλληλα αυξάνει τον χρόνο σάρωσης μιας περιοχής. Οι βασικοί λόγοι εμφάνισης προβλήματος εσφαλμένης απόκρισης είναι οι παρακάτω [18, 21, 25]:

- Η συχνότητα ω έχει μετρηθεί εσφαλμένα.
- Η ταχύτητα διάδοσης c έχει μετρηθεί εσφαλμένα.
- Οι συντεταγμένες (γωνίες άφιξης) είναι εσφαλμένες.
- Διαφοροποίηση των χαρακτηριστικών και της γεωμετρίας της στοιχειοκεραίας (Array Perturbation), δηλαδή σφάλμα κέρδους ή/και φάσης ή/και εσφαλμένη θέση των αισθητήρων [19].
- Οι εκτιμήσεις των πινάκων αυτοσυσχέτισης δεν είναι ακριβείς λόγω της πεπερασμένης χρονικής διάρκειας της δειγματοληψίας.

Οι βέλτιστοι beamformers που παρουσιάζουν καλή απόδοση παρουσία εσφαλμένης απόκρισης της στοιχειοκεραίας χαρακτηρίζονται εύρωστοι (Robust) και η απόδοσή τους είναι τουλάχιστον ίδια με αυτή των συμβατικών.



Σχήμα 5.6. Ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία με σφάλματα θέσης των αισθητήρων των στοιχείων

Οι beamformers MVDR και MPDR είναι ιδιαίτερα ευαίσθητοι σε θέματα εσφαλμένης απόκρισης. Συγκεκριμένα ο MPDR θεωρεί σε αυτή την περίπτωση το επιθυμητό σήμα ως παρεμβολή, ιδιαίτερα σε συνθήκες υψηλού SNR. Τότε ακόμα και ένα μικρό σφάλμα απόκρισης, προκαλεί μεγάλη πτώση της απόδοσης.

Έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι για την αύξηση της ευρωστίας των beamformers αυτών. Σε αυτές περιλαμβάνονται οι περιορισμοί δευτέρου βαθμού (Quadratically Constraints) που οδηγούν σε μια διαδικασία γνωστή ως διαγώνιο φορτίο (Diagonal Loading-DL) [11] και η Bayesian προσέγγιση, στην οποία η βελτίωση των προβλημάτων εσφαλμένης απόκρισης έχει ως κόστος την μειωμένη ικανότητα αντιμετώπισης των παρεμβολών και του θορύβου [28].

5.6.1. Η μέθοδος του διαγώνιου φορτίου

Σύμφωνα με τον Harry L. Van Trees [18] η ευαισθησία του beamformer MPDR σε παράγοντες που προκαλούν προβλήματα εσφαλμένης απόκρισης αυξάνει, όσο αυξάνει το τετράγωνο της νόρμας του διανύσματος των βαρών ($\|\mathbf{w}\|^2$), όπου $\|\mathbf{w}\| = (\mathbf{w}^H \mathbf{w})^{1/2}$. Έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω τετραγωνικό περιορισμό:

$$\|\mathbf{w}\|^2 \leq T_o$$

όπου T_o είναι μία παράμετρος σχεδίασης, για την οποία ισχύει [18]:

$$T_o \geq \frac{1}{N}$$

Ο παραπάνω τετραγωνικός περιορισμός οδηγεί σε μια διαδικασία που ονομάζεται διαγώνιο φορτίο.

Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την εκτιμώμενη ισχύ του σήματος $E\{|y(t)|^2\} = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w}$ σύμφωνα με τον περιορισμό $\mathbf{w}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) - 1 = 0$ και τον τετραγωνικό προορισμό $\mathbf{w}^H \mathbf{w} = T_o$. Για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος γραμμικών περιορισμών θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange. Ορίζουμε:

$$J(\mathbf{w}; \lambda) = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} + \lambda_1 (\mathbf{w}^H \mathbf{w} - T_o) + \lambda_2 (\mathbf{w}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) - 1) + \lambda_2^* (\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{w} - 1)$$

Για να ελαχιστοποιήσουμε την $J(\mathbf{w}; \lambda)$ την παραγωγίζουμε ως προς \mathbf{w} και μηδενίζουμε την παράγωγο:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x + \lambda_1 \mathbf{w}^H + \lambda_2^* \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) = \mathbf{0}$$

Οπότε έχουμε ότι:

$$\mathbf{w}^H (\mathbf{R}_x + \lambda_1 \mathbf{I}) = -\lambda_2^* \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \Rightarrow \mathbf{w}^H = -\lambda_2^* \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) [\mathbf{R}_x + \lambda_1 \mathbf{I}]^{-1}$$

Αντικαθιστούμε την παραπάνω σχέση στον περιορισμό και βρίσκουμε ότι:

$$-\lambda_2^* = \left[\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) [\mathbf{R}_x + \lambda_1 \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \right]^{-1}$$

Επομένως έχουμε ότι:

$$\mathbf{w}^H = \frac{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) [\mathbf{R}_x + \lambda_1 \mathbf{I}]^{-1}}{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) [\mathbf{R}_x + \lambda_1 \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)} = \frac{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) [\mathbf{R}_x + \sigma_L^2 \mathbf{I}]^{-1}}{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) [\mathbf{R}_x + \sigma_L^2 \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)} =$$

$$\frac{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \left[\mathbf{I} + \frac{\mathbf{R}_x}{\sigma_L^2} \right]^{-1}}{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \left[\mathbf{I} + \frac{\mathbf{R}_x}{\sigma_L^2} \right]^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}$$

Παρατηρούμε ότι λόγω του τετραγωνικού περιορισμού προστίθεται στον πίνακα αυτοσυσχέτισης ένας διαγώνιος πίνακας, δηλαδή το διάνυσμα των βαρών σχεδιάζεται για μεγαλύτερο επίπεδο λευκού θορύβου, από ότι υπάρχει στην πραγματικότητα. Όσο αυξάνει το σ_L^2 και προσεγγίζει το άπειρο ο εύρωστος beamformer προσεγγίζει τον συμβατικό beamformer [18]. Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης είναι ίσος με:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{x_s} + \mathbf{R}_1 + (\sigma_n^2 + \sigma_L^2) \mathbf{I}$$

Μπορούμε να ορίσουμε τον λόγο του φορτίου προς το θόρυβο (Load to Noise Ratio-LNR) ως εξής:

$$\text{LNR} = \frac{\sigma_L^2}{\sigma_n^2}$$

Η απόδοση εξαρτάται άμεσα από τον παραπάνω λόγο. Για δεδομένο SNR και δεδομένο λόγο παρεμβολής προς θόρυβο (Interference to Noise Ratio- INR), αλλάζοντας το LNR μπορούμε να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος της κεραίας. Ένας γενικός κανόνας είναι ο εξής:

$$\text{SNR} + 10\text{dB} \leq \text{LNR} \leq \text{INR}$$

Αν $\text{LNR} > \text{INR}$, η παρεμβολή δεν ακυρώνεται ικανοποιητικά. Επίσης αν $\text{LNR} < \text{SNR} + 10\text{dB}$ η επίδραση της μεθόδου του διαγώνιου φορτίου είναι μικρή και τα προβλήματα της εσφαλμένης απόκρισης δεν διορθώνονται επαρκώς [18].

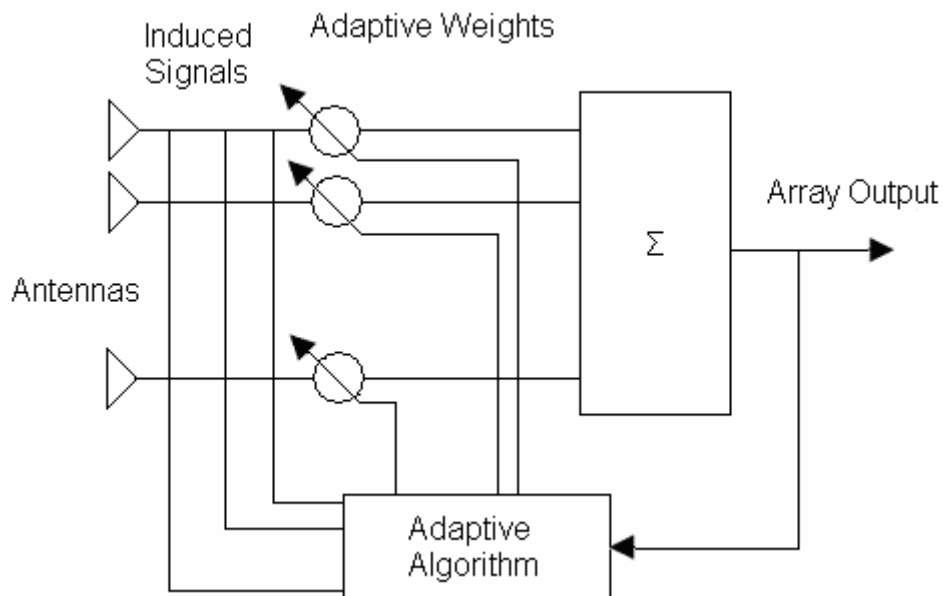
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Προσαρμοστικοί Beamformers

6.1 Εισαγωγή

Οι βέλτιστοι beamformers που εξετάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο θεωρούν ότι οι διαδικασίες είναι στατικές ή τουλάχιστον στατικές με την ευρεία έννοια (WSS), δηλαδή τα στατιστικά τους χαρακτηριστικά παραμένουν σταθερά στο πέρασμα του χρόνου και έτσι οι πίνακες αυτοσυσχέτισης και το διάνυσμα ετεροσυσχέτισης θεωρούνταν δεδομένα.

Πρακτικά είναι αδύνατο να υλοποιήσουμε εξαρχής κάποιον βέλτιστο αλγόριθμο, αφού τα παραπάνω μεγέθη είναι άγνωστα και πρέπει να τα εκτιμήσουμε. Ουσιαστικά οι διαδικασίες που περιγράψαμε είναι μη στατικές, αφού είτε η είσοδος, είτε το ίδιο το σύστημα ή οι πηγές θορύβου και παρεμβολών είναι χρονικά μεταβαλλόμενα μεγέθη [5, 18, 19].

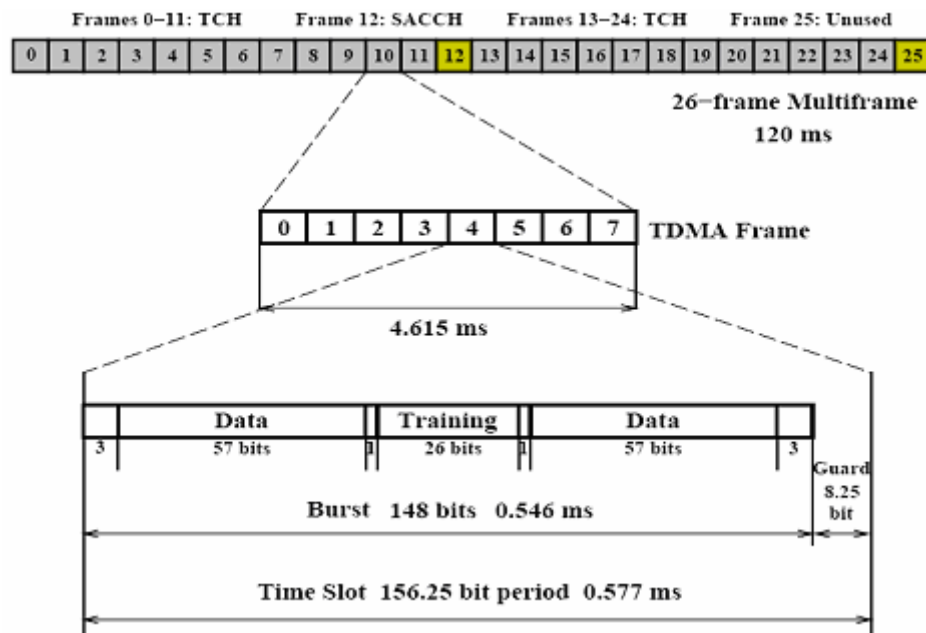


Σχήμα 6.1. Απεικόνιση της λειτουργίας των προσαρμοστικών beamformers σε γραμμική στοιχειοκεραία

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τους beamformers, οι οποίοι υλοποιούν αλγορίθμους που προσαρμόζονται στις αλλαγές της εισόδου και παρακολουθούν τις στατιστικές της ιδιότητες με το πέρασμα του χρόνου. Σε κάθε περίπτωση προσπαθούμε να προσεγγίσουμε τις στατιστικά βέλτιστες τιμές του μιγαδικού διανύσματος των βαρών $w_{optimal}$, έτσι ώστε να έχουμε ελάχιστο σφάλμα, όσο το δυνατό πιο γρήγορα και με το λιγότερο δυνατό κόστος. Άρα η επιλογή του κατάλληλου προσαρμοστικού αλγόριθμου παίζει ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο, μια και έχει άμεση σχέση με την ταχύτητα σύγκλισης στην βέλτιστη λύση και την πολυπλοκότητα-ανάγκη επεξεργαστικής ισχύος του εκάστοτε συστήματος.

6.2. Η Μέθοδος της Αντιστροφής του Πίνακα των Δειγμάτων (SMI)

Στα ασύρματα συστήματα επικοινωνιών που στηρίζονται στην τεχνική TDMA, τα δεδομένα μεταδίδονται σε ριπές (Bursts) και σε κάθε ριπή πραγματοποιείται διαδικασία εκμάθησης (Training Sequence) του συστήματος [6].



Σχήμα 6.2. Δομή πλαισίου της τεχνικής TDMA

Στο σύστημα GSM χρησιμοποιούνται 26 γνωστά bits εκπαίδευσης, τα οποία συγκρίνονται με νέα λαμβανόμενα bits και ανανεώνονται, ώστε να συγχρονιστούν στα νέα δεδομένα. Η διαδικασία εκμάθησης σχεδιάζεται, έτσι ώστε να έχουμε καλές τιμές αυτοσυσχέτισης και ετεροσυσχέτισης για τον συγχρονισμό και την αναγνώριση των ριπών, καθώς και την ισοστάθμιση πολλαπλών δρόμων (Multipath Equalization).

Ωστόσο όταν υπάρχουν ομοδιαυλικές παρεμβολές οι τιμές αυτοσυσχέτισης και ετεροσυσχέτισης δεν είναι ικανοποιητικές. Η χρήση ενός κατευθυντικού συστήματος ευφυούς κεραίας μπορεί να βελτιώσει την απόδοση του συστήματος. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να χρησιμοποιηθεί προσαρμοστικό ψηφιακό beamforming, με παρόμοιες διαδικασίες εκμάθησης. Τις διαδικασίες εκμάθησης υλοποιεί η μέθοδος της αντιστροφής του πίνακα των δειγμάτων (Sample Matrix Inversion-SMI) που θα εξετάσουμε παρακάτω [5, 11, 23]. Η μέθοδος αυτή αναφέρεται στην βιβλιογραφία και ως μέθοδος ευθείας αντιστροφής πίνακα (Direct Matrix Inversion-DMI) [18]. Οι προσαρμοστικοί beamformers που εφαρμόζουν την μέθοδο αυτή εντάσσονται στην κατηγορία των Block Adaptive beamformers.

6.2.1. Σύγκλιση στη βέλτιστη λύση των beamformers χωρίς περιορισμούς

Ο υπολογισμός του διανύσματος των βαρών \mathbf{w} στην περίπτωση των beamformers χωρίς περιορισμούς απαιτεί τον προσδιορισμό του πίνακα αυτοσυσχέτισης του λαμβανόμενου σήματος και του διανύσματος ετεροσυσχέτισης μεταξύ του λαμβανόμενου σήματος και του σήματος αναφοράς ($\tilde{\mathbf{w}}_{MMSE} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{r}_{dx}$). Η μέθοδος SMI επιτρέπει την εκτίμηση των τιμών του πίνακα αυτοσυσχέτισης \mathbf{R}_x και του διανύσματος ετεροσυσχέτισης \mathbf{r}_{dx} μέσα από ένα μπλοκ k γνωστών λαμβανόμενων δειγμάτων (στιγμιότυπων), τα οποία ανανεώνονται συνεχώς. Έτσι έχουμε επανεκτίμηση των παραπάνω στατιστικών χαρακτηριστικών, κάθε φορά που λαμβάνονται νέα δείγματα. Η ορθότητα της λύσης εξαρτάται από τον αριθμό των λαμβανόμενων δειγμάτων κατά την διαδικασία εκμάθησης [19].

Αν η παρεμβολή δεν αλλάζει σημαντικά σε σχέση με το χρόνο που διαρκεί η συγκεκριμένη τεχνική τότε μπορούμε να κάνουμε μια αμερόληπτη εκτίμηση του πίνακα \mathbf{R}_x :

$$\tilde{\mathbf{R}}_x(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbf{x}(i) \mathbf{x}^H(i)$$

όπου k είναι ο συνολικός αριθμός των δειγμάτων που έλαβε το σύστημα στο συγκεκριμένο χρόνο και $\mathbf{x}(i)$ το διάνυσμα του σήματος εισόδου του i -οστού μεταδιδόμενου δείγματος. Ο τρόπος που ανανεώνονται οι τιμές του πίνακα αυτοσυσχέτισης παρουσιάζεται παρακάτω:

$$\tilde{\mathbf{R}}_x(i+1) = \frac{i\tilde{\mathbf{R}}_x(i) + \mathbf{x}(i+1)\mathbf{x}^H(i+1)}{i+1}$$

Ομοίως για το διάνυσμα ετεροσυσχέτισης \mathbf{r}_{dx} μπορούμε να κάνουμε μια αμερόληπτη εκτίμηση ότι είναι ίσο με:

$$\tilde{\mathbf{r}}_{dx}(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k d^*(i) \mathbf{x}(i)$$

Ο τρόπος που ανανεώνονται οι τιμές του διανύσματος ετεροσυσχέτισης φαίνεται παρακάτω:

$$\tilde{\mathbf{r}}_{dx}(i+1) = \frac{i\tilde{\mathbf{r}}_{dx}(i) + d^*(i+1)\mathbf{x}^H(i+1)}{i+1}$$

Πραγματοποιείται έτσι συνολικά μία καινούρια εκτίμηση του μιγαδικού διανύσματος των βαρών $\mathbf{w}(i+1)$ κάθε $i+1$ χρονική στιγμή, η οποία συνοδεύεται από τον υπολογισμό του αντίστροφου πίνακα αυτοσυσχέτισης. Η μέθοδος SMI χαρακτηρίζεται από κυβική πολυπλοκότητα $O(p^3)$ και έτσι απαιτεί μεγάλο υπολογιστικό φόρτο (δύσκολη η υλοποίηση της) και επιπλέον παρουσιάζει αριθμητική αστάθεια λόγω της πεπερασμένης αριθμητικής εκτίμησης. Ο

αλγόριθμος αυτός έχει πρακτική εφαρμογή μόνο σε μικρού μεγέθους στοιχειοκεραίες [18] και έτσι χρησιμοποιούνται συχνότερα οι προσαρμοστικοί αλγόριθμοι που θα εξετάσουμε στη συνέχεια.

Η τιμή της ισχύος εξόδου την i -οστή χρονική στιγμή είναι ίση με:

$$P(i) = \mathbf{w}^H(i)\mathbf{x}(i)\mathbf{x}^H(i)\mathbf{w}(i)$$

Θεωρούμε ότι είναι k ο αριθμός των δειγμάτων, N ο αριθμός των στοιχείων και $M = N - 1$ οι βαθμοί ελευθερίας της στοιχειοκεραίας. Τότε έχουμε ότι [19]:

$$E\{P(i)\} = \frac{k-M}{k} \tilde{P}$$

όπου \tilde{P} η μέση ισχύς εξόδου των βέλτιστων beamformers, που είναι ίση με:

$$\tilde{P} = \tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{R}}_x \tilde{\mathbf{w}}$$

Ο παράγοντας $(k-M)/k$ αντιπροσωπεύει τις απώλειες ισχύος και καθορίζει το πόσο γρήγορα η μέση ισχύς συγκλίνει στην βέλτιστη. Αποδεικνύεται επίσης [29] ότι πρέπει $k > 2N$, ώστε το SNR να μην παρεκκλίνει πάνω από 3dB από το βέλτιστο.

6.2.2. Σύγκλιση στη βέλτιστη λύση των beamformers με περιορισμούς

Η αμερόληπτη εκτίμηση του πίνακα αυτοσυσχέτισης \mathbf{R}_x , επιτρέπει την σύγκλιση στη βέλτιστη λύση του beamformer MPDR. Επίσης σε μερικές εφαρμογές μπορούμε να παρατηρήσουμε την είσοδο χωρίς την παρουσία του σήματος [30] και να εκτιμήσουμε αμερόληπτα τον πίνακα αυτοσυσχέτισης του θορύβου $\tilde{\mathbf{R}}_n$.

Έχουμε ότι :

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{n}}(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbf{n}(i) \mathbf{n}^H(i)$$

Τότε είναι δυνατή η σύγκλιση στη βέλτιστη λύση που δίνει ο beamformer MVDR και ο beamformer max SNR. Αν, όμως, έχουμε παρουσία σήματος οι beamformers αυτοί υποθέτουν ότι όλα τα σήματα στην αλληλουχία εκμάθησης είναι παρεμβολές και προσπαθούν να τα μηδενίσουν και να τα μεγιστοποιήσουν ταυτόχρονα στην κατεύθυνση του επιθυμητού σήματος. Έχουμε, δηλαδή, αλλοίωση των δειγμάτων και μικρότερο SNR.

6.3. Ο Αλγόριθμος των Ελαχίστων Τετραγώνων (LS)

Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε το σήμα εισόδου $\mathbf{x}(n)$ και το σήμα επιθυμητής εξόδου $d(n)$ στο διάστημα $n \in [M_1, M_2]$. Θέλουμε να υπολογίσουμε το διάνυσμα βαρών \mathbf{w} , ώστε να ελαχιστοποιείται το ολικό τετραγωνικό σφάλμα, μεταξύ της πραγματικής εξόδου $y(n)$ και της επιθυμητής εξόδου $d(n)$ στο παραπάνω διάστημα μόνο, χωρίς να είναι γνωστές οι τιμές του σήματος εισόδου τις προηγούμενες χρονικές στιγμές [24].

Ο αλγόριθμος των ελαχίστων τετραγώνων (Least Square Algorithm-LS) είναι, λοιπόν, μια αιτιοκρατική διαδικασία υπολογισμού του επιθυμητού διανύσματος βαρών με ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους, η οποία ισούται με το άθροισμα των τετραγωνικών σφαλμάτων που αντιστοιχούν στους διακριτούς χρόνους του συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος και είναι ίση με:

$$J(\mathbf{w}) = \sum_{n=M_1}^{M_2} |e(n)|^2$$

6.4. Ο Αλγόριθμος των Αναδρομικών Ελαχίστων Τετραγώνων (RLS)

Ο αλγόριθμος των αναδρομικών ελαχίστων τετραγώνων (Recursive Least Square-RLS) στηρίζεται στον αλγόριθμο LS και ελαχιστοποιεί το σφάλμα, όχι μόνο του n -οστού λαμβανόμενου δείγματος δεδομένων αλλά και τα σφάλματα των δειγμάτων που έχουν προηγηθεί [24]. Δηλαδή για τη συνάρτηση κόστους έχουμε ότι:

$$J(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} |e(i)|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} |d(i) - \mathbf{w}^H(i)\mathbf{x}(i)|^2$$

όπου η παράμετρος λ λειτουργεί ως μνήμη που καταχωρεί τα δείγματα. Γενικά παίρνει θετικές τιμές μικρότερες του 1, οπότε το σφάλμα αλλάζει εκθετικά σε σχέση με τα λαμβανόμενα δείγματα δεδομένων. Ο εκθετικός αυτός παράγοντας αποτελεί βάρος για το σφάλμα, έτσι ώστε να μειώνεται η σημασία προηγούμενων σφαλμάτων, όσο αυξάνεται η απόσταση από το παρόν δείγμα n . Τυπικές τιμές του λ είναι κοντά στην μονάδα. Αν $\lambda = 1$ τότε έχουμε υλοποίηση μεγέθυνσης της μνήμης, καθώς διατηρούνται όλα τα δείγματα. Ουσιαστικά ο αλγόριθμος RLS είναι μια υλοποίηση κυλιόμενου παραθύρου (Sliding Window) του αλγορίθμου MMSE (beamformer χωρίς περιορισμούς), την οποία θα εξετάσουμε αρχικά.

Ο εκτιμώμενος πίνακας αυτοσυσχέτισης $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}$ στο n -οστό δείγμα είναι ίσος με:

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{x}(i)\mathbf{x}^H(i)$$

και το εκτιμώμενο διάνυσμα ετεροσυσχέτισης είναι ίσο με:

$$\tilde{\mathbf{r}}_{\mathbf{d}\mathbf{x}}(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{x}(i)d^*(i)$$

Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης του λαμβανόμενου σήματος μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{R}}_x(n) &= \lambda^{n-1} \mathbf{x}(1) \mathbf{x}^H(1) + \lambda^{n-2} \mathbf{x}(2) \mathbf{x}^H(2) + \dots + \lambda^{n-(n-1)} \mathbf{x}(n-1) \mathbf{x}^H(n-1) + \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) = \\ &\lambda \left[\lambda^{(n-1)-1} \mathbf{x}(1) \mathbf{x}^H(1) + \lambda^{(n-1)-2} \mathbf{x}(2) \mathbf{x}^H(2) + \dots + \mathbf{x}(n-1) \mathbf{x}^H(n-1) \right] + \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) = \\ &\lambda \tilde{\mathbf{R}}_x(n-1) + \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n)\end{aligned}$$

Για να προσεγγίσουμε την βέλτιστη λύση των φίλτρων Wiener, απαιτείται η αντιστροφή του πίνακα $\tilde{\mathbf{R}}_x(n)$, γεγονός που οδηγεί σε υπερβολικά πολλούς υπολογισμούς, αφού πραγματοποιείται η επίλυση της εξίσωσης κάθε φορά που λαμβάνουμε κάποιο νέο δείγμα.

Αν χρησιμοποιήσουμε το λήμμα αντιστροφής πινάκων μπορούμε να μειώσουμε αρκετά τον υπολογιστικό φόρτο [5, 18, 19]. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n) &= \left[\lambda \tilde{\mathbf{R}}_x(n-1) + \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) \right]^{-1} = \\ &\lambda^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) - \frac{\lambda^{-2} \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1)}{1 + \lambda^{-1} \mathbf{x}^H(n) \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) \mathbf{x}(n)} = \\ &\lambda^{-1} \left[\tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) - \frac{\lambda^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) \mathbf{x}(n)}{1 + \lambda^{-1} \mathbf{x}^H(n) \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) \mathbf{x}(n)} \mathbf{x}^H(n) \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) \right] = \\ &\lambda^{-1} \left[\tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) - \mathbf{q}(n) \mathbf{x}^H(n) \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) \right]\end{aligned}$$

όπου $\mathbf{q}(n)$ είναι ο παράγοντας (ή διάνυσμα) κέρδους (Gain Factor-Vector) που ισούται με:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(n) &= \frac{\lambda^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) \mathbf{x}(n)}{1 + \lambda^{-1} \mathbf{x}^H(n) \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) \mathbf{x}(n)} \Rightarrow \\ \mathbf{q}(n) &= \lambda^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) \mathbf{x}(n) - \lambda^{-1} \mathbf{q}(n) \mathbf{x}^H(n) \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) \mathbf{x}(n) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\mathbf{q}(n) = \left[\lambda^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) - \lambda^{-1} \mathbf{q}(n) \mathbf{x}^H(n) \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) \right] \mathbf{x}(n) \Rightarrow$$

$$\mathbf{q}(n) = \lambda^{-1} \left[\tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) - \mathbf{q}(n) \mathbf{x}^H(n) \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) \right] \mathbf{x}(n) \Rightarrow \mathbf{q}(n) = \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n) \mathbf{x}(n)$$

Αντίστοιχα με τον πίνακα αυτοσυσχέτισης το διάνυσμα ετεροσυσχέτισης μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\tilde{\mathbf{r}}_{dx}(n) = \lambda \tilde{\mathbf{r}}_{dx}(n-1) + d^*(n) \mathbf{x}(n)$$

Οπότε η εξίσωση ανανέωσης του μιγαδικού διανύσματος βαρών του αλγορίθμου RLS δίνεται από τη σχέση:

$$\tilde{\mathbf{w}}(n) = \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n) \tilde{\mathbf{r}}_{dx}(n) \Rightarrow$$

$$\tilde{\mathbf{w}}(n) = \lambda \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n) \tilde{\mathbf{r}}_{dx}(n-1) + \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n) d^*(n) \mathbf{x}(n) \Rightarrow$$

$$\tilde{\mathbf{w}}(n) = \lambda \lambda^{-1} \left[\tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) - \mathbf{q}(n) \mathbf{x}^H(n) \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) \right] \tilde{\mathbf{r}}_{dx}(n-1) + \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n) d^*(n) \mathbf{x}(n) \Rightarrow$$

$$\tilde{\mathbf{w}}(n) = \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) \tilde{\mathbf{r}}_{dx}(n-1) - \mathbf{q}(n) \mathbf{x}^H(n) \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) \tilde{\mathbf{r}}_{dx}(n-1) + \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n) d^*(n) \mathbf{x}(n) \Rightarrow$$

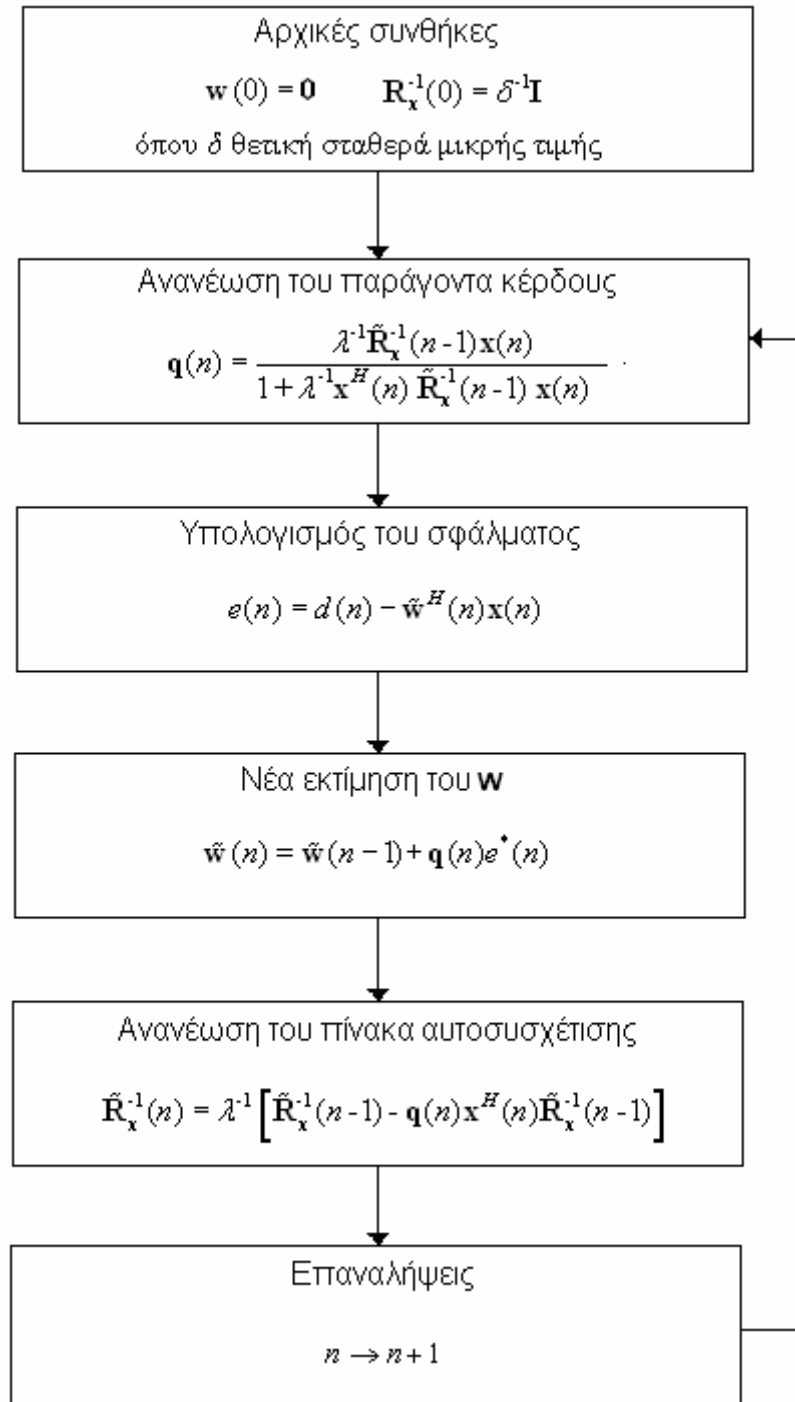
$$\tilde{\mathbf{w}}(n) = \tilde{\mathbf{w}}(n-1) - \mathbf{q}(n) \mathbf{x}^H(n) \tilde{\mathbf{w}}(n-1) + \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n) d^*(n) \mathbf{x}(n) \Rightarrow$$

$$\tilde{\mathbf{w}}(n) = \tilde{\mathbf{w}}(n-1) - \mathbf{q}(n) \mathbf{x}^H(n) \tilde{\mathbf{w}}(n-1) + \mathbf{q}(n) d^*(n) \Rightarrow$$

$$\tilde{\mathbf{w}}(n) = \tilde{\mathbf{w}}(n-1) + \mathbf{q}(n) \left[d^*(n) - \mathbf{x}^H(n) \tilde{\mathbf{w}}(n-1) \right] \Rightarrow$$

$$\tilde{\mathbf{w}}(n) = \tilde{\mathbf{w}}(n-1) + \mathbf{q}(n) e^*(n)$$

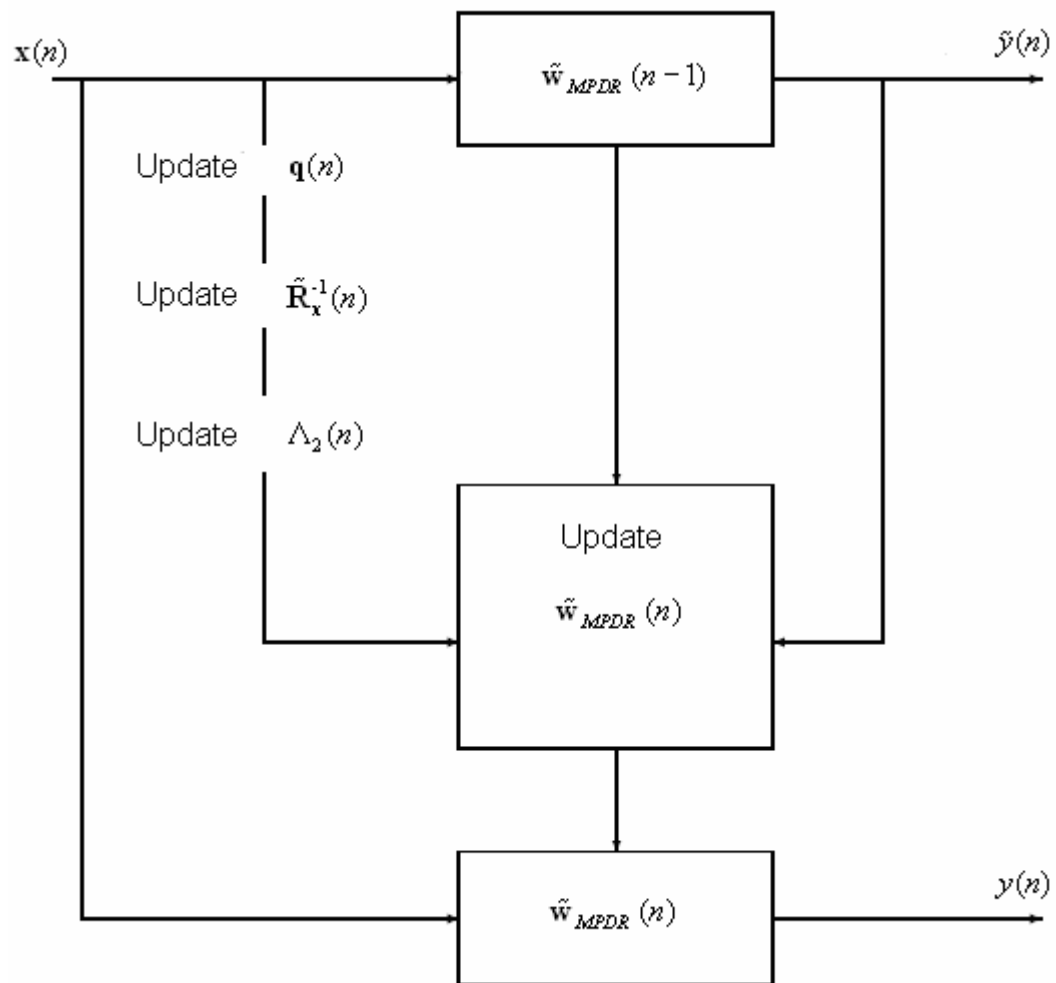
Οι beamformers που υλοποιούν τον αλγόριθμο RLS ανήκουν στην κατηγορία των block adaptive beamformers. Το διάγραμμα ροής του αλγορίθμου RLS παρουσιάζεται παρακάτω:



Σχήμα 6.3. Διάγραμμα ροής του αλγορίθμου RLS

6.4.1. Ο beamformer RLS με περιορισμούς

Η αμερόληπτη εκτίμηση του αντίστροφου πίνακα αυτοσυσχέτισης του συνολικού λαμβανόμενου σήματος και της σταθεράς Λ_2 σε κάθε επανάληψη (για κάθε n) επιτρέπει την σύγκλιση στη βέλτιστη λύση του beamformer MPDR (μοναδιαίο κέρδος στην επιθυμητή κατεύθυνση και ελάχιστη ισχύ), δηλαδή στον βέλτιστο προσδιορισμό του n -οστού μιγαδικού διανύσματος των βαρών, που δίνει ο beamformer αυτός [18].



Σχήμα 6.4. Μπλοκ διάγραμμα της λειτουργίας του αλγορίθμου MPDR-RLS

Στον αλγόριθμο MPDR-RLS έχουμε ανανέωση του αντίστροφου του πίνακα αυτοσυσχέτισης και της σταθεράς Λ_2 σε κάθε επανάληψη. Δηλαδή έχουμε ότι [18]:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{w}}_{MPDR}(n) &= \Lambda_2(n) \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n) \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) = \\ &= \frac{\Lambda_2(n)}{\lambda} \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) [\mathbf{I} - \mathbf{q}(n) \mathbf{x}^H(n)] = \\ &= \frac{\Lambda_2(n)}{\lambda \Lambda_2(n-1)} [\mathbf{I} - \mathbf{q}(n) \mathbf{x}^H(n)] \tilde{\mathbf{w}}_{MPDR}(n-1)\end{aligned}$$

όπου:

$$\Lambda_2(n) = \frac{1}{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n) \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}$$

6.5. Ο Αλγόριθμος της Απότομης Καθόδου

Ο αλγόριθμος της απότομης καθόδου (Steepest Descent) είναι μια αιτιοκρατική επαναληπτική διαδικασία (όχι προσαρμοστική), κατά την οποία αναζητείται η βέλτιστη λύση, η ορθότητα της οποίας εξαρτάται από τον αριθμό των επαναλήψεων. Ουσιαστικά η μέθοδος αυτή περιγράφει ένα αιτιοκρατικό σύστημα ανάδρασης (Feedback), το οποίο μπορεί να υπολογίσει την ελάχιστη τιμή μιας συνάρτησης, χωρίς να γνωρίζει την ίδια την συνάρτηση [24]. Στην περίπτωση που επιθυμούμε σύγκλιση στη βέλτιστη λύση του beamformer MMSE ζητούμενο είναι η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους, η οποία ισούται με:

$$f(\mathbf{w}) = E \left\{ |e(t)|^2 \right\} = E \left\{ |d(t) - y(t)|^2 \right\} = E \left\{ |d(t) - \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)|^2 \right\}$$

Υποθέτουμε ότι στην k -οστή επανάληψη έχουμε μια εκτίμηση του διανύσματος απόκρισης του φίλτρου $\mathbf{w}(k)$.

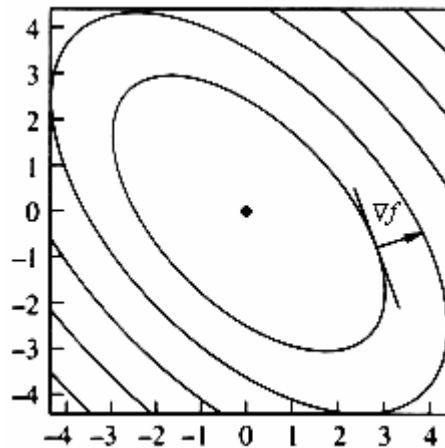
Θεωρούμε ότι η επόμενη λύση θα είναι ίση με:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \Delta \mathbf{w}$$

όπου $\Delta \mathbf{w}$ είναι οι διορθώσεις.

Η συνάρτηση κόστους είναι δευτέρου βαθμού, άρα είναι κοίλη και μάλιστα έχει στραμμένα τα κοίλα προς τα άνω, όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο. Γνωρίζουμε ότι η τιμή μιας οποιασδήποτε συνάρτησης αυξάνεται με μεγαλύτερο ρυθμό στην κατεύθυνση του διανύσματος κλίσης (διάνυσμα των μερικών παραγώγων της $f(\mathbf{w})$ ως προς τα στοιχεία του διανύσματος) και μειώνεται με μεγαλύτερο ρυθμό στην αντίθετη κατεύθυνση.

Όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα, το διάνυσμα κλίσης για κάθε διάνυσμα $\mathbf{w}(k)$ είναι κάθετο στην εφαπτομένη της καμπύλης σφάλματος στο σημείο $\mathbf{w}(k)$. Μάλιστα, επειδή, το διάνυσμα κλίσης δείχνει προς την κατεύθυνση της μέγιστης ανόδου, η κατεύθυνση της μέγιστης καθόδου θα είναι η αντίθετη της διεύθυνσής του. Άρα οι διορθώσεις ($\Delta \mathbf{w}$) για να είναι επιτυχείς πρέπει να γίνονται σε κατεύθυνση αντίθετη προς το διάνυσμα κλίσης (ανάδελτα).



Σχήμα 6.5. Η σχέση του διανύσματος κλίσης με την εφαπτομένη της καμπύλης κόστους

Έτσι, τελικά η εξίσωση ανανέωσης των συντελεστών γίνεται $\Delta \mathbf{w} = -\mu \nabla f$ ($\mu > 0$, όπου μ το μέγεθος του βήματος). Οπότε στο $(k+1)$ -οστό βήμα έχουμε ότι:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) - \mu \nabla f$$

Όμως:

$$\nabla f(\mathbf{w}) = \frac{E\{|e(t)|^2\}}{\partial \mathbf{w}^H} = \mathbf{R}_x \mathbf{w} - \mathbf{r}_{dx}$$

άρα έχουμε ότι:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \mu(\mathbf{r}_{dx} - \mathbf{R}_x \mathbf{w}(k))$$

Ένα ορατό πρόβλημα-ερώτημα που προκύπτει είναι η επιλογή της τιμής του βήματος μ . Μια μεγάλη τιμή θα οδηγούσε πιθανότατα σε γρήγορη εύρεση λύσης, αλλά λόγω του ότι ο αλγόριθμος αυτός είναι μια διαδικασία ανάδρασης, μια υπερβολικά μεγάλη τιμή του μ θα έκανε τις επαναλήψεις ασταθείς.

Ορίζουμε το διάνυσμα σφάλματος των βαρών (Weight-Error Vector) [24]:

$$\mathbf{c}(k) = \mathbf{w}(k) - \mathbf{w}_0$$

Οπότε ισοδύναμα έχουμε ότι:

$$\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}_0 = \mathbf{w}(k) - \mathbf{w}_0 + \mu(\mathbf{r}_{dx} - \mathbf{R}_x \mathbf{w}(k)) \Rightarrow$$

$$\mathbf{c}(k+1) = \mathbf{c}(k) + \mu(\mathbf{R}_x \mathbf{w}_0 - \mathbf{R}_x \mathbf{w}(k)) \Rightarrow$$

$$\mathbf{c}(k+1) = \mathbf{c}(k) - \mu \mathbf{R}_x \mathbf{c}(k) \Rightarrow$$

$$\mathbf{c}(k+1) = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}_x) \mathbf{c}(k)$$

Συμπεραίνουμε, δηλαδή, ότι ο αλγόριθμος εξαρτάται αποκλειστικά από τις τιμές των μ και \mathbf{R}_x . Ο πίνακας \mathbf{R}_x , αν χρησιμοποιήσουμε τις ιδιοτιμές του και τα ιδιοδιανύσματα του, μπορεί να μετασχηματιστεί ως $\mathbf{R}_x = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^H$. Οπότε έχουμε ότι:

$$\mathbf{c}(k+1) = (\mathbf{I} - \mu\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^H)\mathbf{c}(k) \Rightarrow$$

$$\mathbf{Q}^H\mathbf{c}(k+1) = (\mathbf{I} - \mu\mathbf{\Lambda})\mathbf{Q}^H\mathbf{c}(k)$$

Θέτουμε:

$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{Q}^H\mathbf{c}(k) = \mathbf{Q}^H(\mathbf{w}(k) - \mathbf{w})$$

Άρα θα ισχύει ότι $\mathbf{v}(k+1) = (\mathbf{I} - \mu\mathbf{\Lambda})\mathbf{v}(k)$. Το n -οστό στοιχείο του πίνακα $\mathbf{\Lambda}$ μπορεί να γραφτεί ως:

$$v_n(k+1) = (1 - \mu\lambda_n)v_n(k)$$

Η προηγούμενη εξίσωση είναι μια ομογενής διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού. Υποθέτουμε ότι το $v_n(k)$ έχει αρχική τιμή $v_n(0)$ οπότε η λύση της εξίσωσης είναι:

$$v_n(k) = (1 - \mu\lambda_n)^k v_n(0)$$

Προκειμένου ο αλγόριθμος της απότομης καθόδου να παρουσιάζει σταθερότητα ή συγκλίνει στην βέλτιστη λύση πρέπει:

$$-1 < 1 - \mu\lambda_n < 1$$

Άρα θα συγκλίνει στην βέλτιστη λύση για:

$$0 < \mu < \frac{2}{\lambda_n}$$

Η παραπάνω ανισότητα πρέπει να επαληθεύεται για κάθε τιμή του n , οπότε η ανισότητα που πρέπει να ικανοποιεί το μ είναι η:

$$0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{\max}}$$

Οπότε συμπεραίνουμε ότι η υψηλότερη τιμή που μπορεί να λάβει το μ καθορίζεται από τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα \mathbf{R}_x .

Η εξίσωση ανανέωσης των συντελεστών προϋποθέτει τη γνώση των πινάκων αυτοσυσχέτισης και του διανύσματος ετεροσυσχέτισης. Ωστόσο, αυτά τα στατιστικά δεύτερης τάξης σπάνια μας είναι γνωστά και θα πρέπει να υπολογίζονται από τα ίδια τα δεδομένα. Συμπερασματικά ο αλγόριθμος της μέγιστης καθόδου παρουσιάζει μόνο θεωρητικό ενδιαφέρον και σπάνια χρησιμοποιείται σε πραγματικές εφαρμογές. Αποτελεί, όμως, συστατικό στοιχείο του προσαρμοστικού αλγόριθμου των ελαχίστων μέσων τετραγώνων που θα εξετάσουμε στη συνέχεια.

6.6. Ο beamformer των Ελαχίστων Μέσων Τετραγώνων (LMS)

Αν χρησιμοποιήσουμε μόνο ένα δείγμα για την εκτίμηση της στατιστικής ποσότητας της αυτοσυσχέτισης και της ετροσυσχέτισης, δηλαδή αν αντικαταστήσουμε τον πίνακα \mathbf{R}_x και το διάνυσμα \mathbf{r}_{dx} με τις στιγμιαίες τιμές τους θα έχουμε $\tilde{\mathbf{R}}_x(n) = \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)$ και $\tilde{\mathbf{r}}_{dx}(n) = \mathbf{x}(n)d^*(n)$, όπου το διάνυσμα $\mathbf{x}(n)$ αναπαριστά το n -οστό λαμβανόμενο δείγμα δεδομένων (αποφεύγουμε τη χρησιμοποίηση του k -οστού λαμβανόμενου δείγματος για να μην παρερμηνευτεί ο αλγόριθμος ως επαναληπτικός) στα N στοιχεία [5, 18, 19, 23].

Οπότε η εξίσωση ανανέωσης των συντελεστών του φίλτρου, για την περίπτωση που θέλουμε σύγκλιση στη βέλτιστη λύση του beamformer MMSE, θα δίνεται από τη σχέση:

$$\tilde{\mathbf{w}}(n) = \tilde{\mathbf{w}}(n-1) + \mu(\tilde{\mathbf{r}}_{dx}(n) - \tilde{\mathbf{R}}_x(n)\tilde{\mathbf{w}}(n-1)) \Rightarrow$$

$$\tilde{\mathbf{w}}(n) = \tilde{\mathbf{w}}(n-1) + \mu(\mathbf{x}(n)\mathbf{d}^*(n) - \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\tilde{\mathbf{w}}(n-1)) \Rightarrow$$

$$\tilde{\mathbf{w}}(n) = \tilde{\mathbf{w}}(n-1) + \mu\mathbf{x}(n)(\mathbf{d}^*(n) - \mathbf{x}^H(n)\tilde{\mathbf{w}}(n-1)) \Rightarrow$$

$$\tilde{\mathbf{w}}(n) = \tilde{\mathbf{w}}(n-1) + \mu\mathbf{x}(n)(\mathbf{d}^*(n) - y^*(n)) \Rightarrow$$

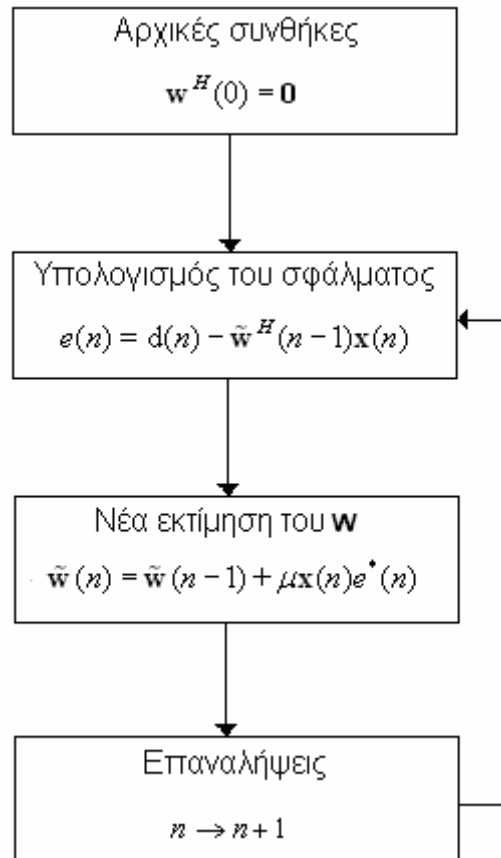
$$\tilde{\mathbf{w}}(n) = \tilde{\mathbf{w}}(n-1) + \mu\mathbf{x}(n)e^*(n)$$

Η προηγούμενη εξίσωση ανανέωσης του μιγαδικού διανύσματος βαρών χαρακτηρίζει τον αλγόριθμο των Ελαχίστων Μέσων Τετραγώνων (Least Mean Squares-LMS), τον οποίο πρότεινε ο Widrow [31] και είναι μια στοχαστική προσαρμογή του αλγορίθμου της απότομης καθόδου. Ο beamformer LMS, που υλοποιεί τον αλγόριθμο αυτόν, ανήκει στην κατηγορία των Sample-by-Sample Adaptive beamformers.

Αν και ο αλγόριθμος LMS βασίζεται σε μια πολύ «χοντροειδή» εκτίμηση των στατιστικών ποσοτήτων, έχει πολύ καλή απόδοση σε ένα μεγάλο αριθμό εφαρμογών. Ουσιαστικά πρόκειται για έναν αναδρομικό αλγόριθμο που παράγει μια ακολουθία διανυσμάτων $\tilde{\mathbf{w}}(n)$ και καλείται να προσεγγίσει (για την περίπτωση των στάσιμων διαδικασιών) τη βέλτιστη λύση του beamformer MMSE υπό την έννοια της μέσης τιμής. Επιθυμούμε δηλαδή η μέση τιμή της ακολουθίας $\tilde{\mathbf{w}}(n)$ να συγκλίνει στη βέλτιστη λύση.

Προκειμένου να συγκλίνει ο αλγόριθμος LMS, θα πρέπει η παράμετρος μ να παίρνει τιμές ανάλογες των τιμών που εξασφάλισαν σύγκλιση και στον αλγόριθμο της απότομης καθόδου. Θα πρέπει, δηλαδή, αρχικά να γνωρίζουμε εξαρχής τις τιμές του πίνακα αυτοσυσχέτισης $\tilde{\mathbf{R}}_x$, να έχουμε βρει τις ιδιοτιμές του και να επιλέξουμε τη μεγαλύτερη από αυτές. Ωστόσο, αυτές οι πληροφορίες σπάνια μας είναι διαθέσιμες εξαρχής και απαιτείται διαδικασία εκμάθησης, ώστε να έχουμε σύγκλιση. Στην πράξη, η παράμετρος μ συνήθως επιλέγεται να είναι κατά μια τάξη μικρότερη από το άνω φράγμα που θέτει η ανισότητα υπολογισμού του, ώστε να εξασφαλίσουμε όσο το δυνατό καλύτερη σύγκλιση του αλγορίθμου.

Επιπλέον δεν αποκλείεται το ενδεχόμενο, μετά από αρκετές επαναλήψεις του αλγορίθμου, ενώ η μέση τιμή της ακολουθίας των συντελεστών να έχει πράγματι συγκλίνει στη βέλτιστη λύση, η διασπορά της να είναι αρκετά μεγάλη γύρω από τη βέλτιστη μέση τιμή [24]. Παρακάτω βλέπουμε το διάγραμμα ροής του αλγορίθμου LMS.



Σχήμα 6.6. Διάγραμμα ροής του αλγορίθμου LMS

6.6.1. Ο κανονικοποιημένος αλγόριθμος LMS

Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται μια παράμετρος μ που εξαρτάται από το λαμβανόμενο σήμα, δηλαδή ανανεώνεται όταν ληφθούν νέα δεδομένα.

Στην n -οστή επανάληψη η παράμετρος μ θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mu(n) = \frac{\mu_0}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{x}(n)}$$

όπου μ_0 σταθερά. Με τη χρήση του κανονικοποιημένου αλγορίθμου LMS (Normalized LMS-NLMS) δεν χρειάζεται να εκτιμήσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα αυτοσυσχέτισης. Επιπλέον δεν είναι κρίσιμη η επιλογή της μέγιστης επιτρεπόμενης τιμής της παραμέτρου μ .

Ο αλγόριθμος αυτός παρουσιάζει μεγαλύτερη απόδοση όσο αναφορά την ταχύτητα σύγκλισης στην βέλτιστη λύση και χαμηλότερη ευαισθησία σήματος σε σχέση με τον τυπικό αλγόριθμο LMS [19].

6.6.2. Ο beamformer LMS με περιορισμούς

Οι beamformers με περιορισμούς απαιτούν, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, σταθερό κέρδος στην κατεύθυνση \mathbf{k}_s . Στην περίπτωση του αλγορίθμου LMS οι beamformers πρέπει να έχουν σταθερό κέρδος σε κάθε επανάληψη (για κάθε n). Ο Frost προσδιόρισε την εξίσωση ανανέωσης του μιγαδικού διανύσματος βαρών όταν υπάρχουν γραμμικοί περιορισμοί ως εξής [32]:

$$\tilde{\mathbf{w}}(n) = \mathbf{P} \{ \tilde{\mathbf{w}}(n-1) + \mu \mathbf{x}(n) e^*(n) \} + \mathbf{w}_q$$

όπου \mathbf{P} είναι ένας τελεστής προβολής (Projection Operator) ίσος με:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \left(\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \right)^{-1} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s)$$

και:

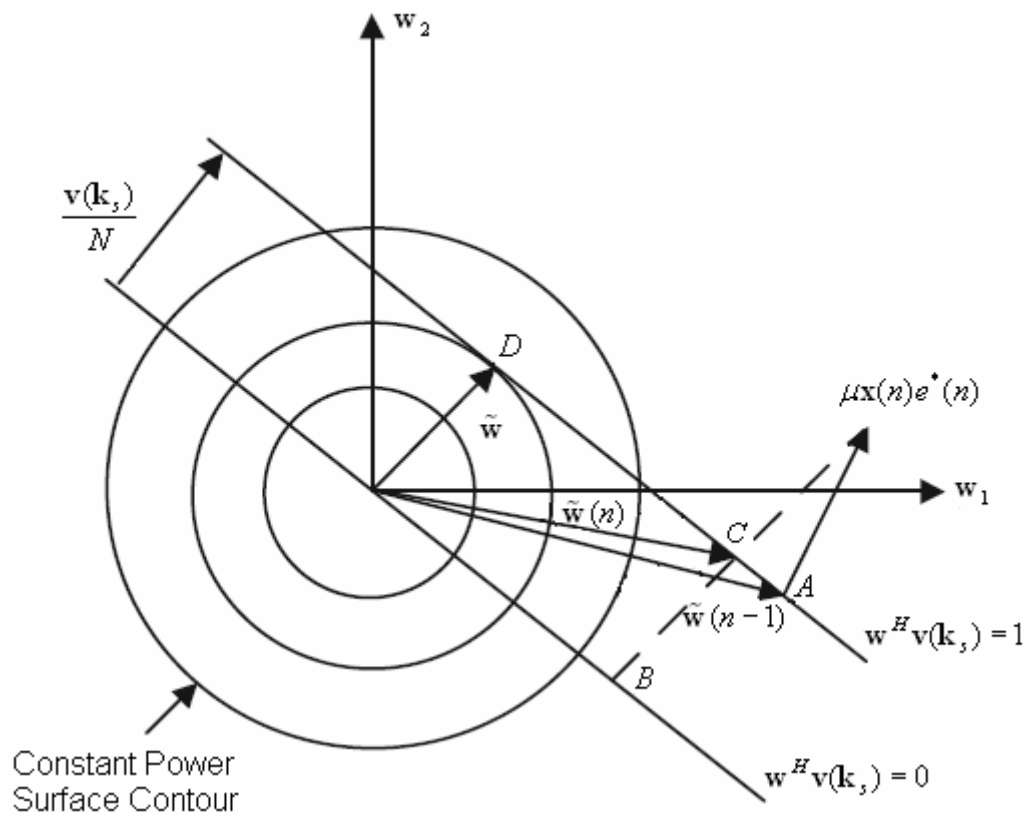
$$\mathbf{w}_q = \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \left(\mathbf{v}(\mathbf{k}_s) \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \right)^{-1} g$$

Αν θέλουμε να έχουμε μοναδιαίο κέρδος στην επιθυμητή κατεύθυνση τότε:

$$\mathbf{w}_g = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}{N}$$

Οπότε η εξίσωση ανανέωσης του μιγαδικού διανύσματος βαρών γίνεται [21]:

$$\tilde{\mathbf{w}}(n) = \mathbf{P} \left\{ \tilde{\mathbf{w}}(n-1) + \mu \mathbf{x}(n) e^*(n) \right\} + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}{N}$$



Σχήμα 6.7. Η λειτουργία του αλγορίθμου LMS με περιορισμούς

Στο σχήμα απεικονίζεται η λειτουργία του αλγορίθμου LMS με περιορισμούς (για $g=1$) μέσα από ένα διάγραμμα επιφανειών σταθερής ισχύος (Constant

Power Surface). Βλέπουμε ότι το σημείο A δείχνει την θέση του διανύσματος \mathbf{w} μετά από $n-1$ επαναλήψεις. Τότε έχουμε μοναδιαίο κέρδος στην επιθυμητή κατεύθυνση ($\mathbf{w}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) = 1$).

Έπειτα προστίθεται στο διάνυσμα των βαρών \mathbf{w} η μικρή ποσότητα $\mu \mathbf{x}(n) e^*(n)$ και μέσω του τελεστή προβολής το κέρδος στην επιθυμητή κατεύθυνση μηδενίζεται (θέση B), γιατί προβάλλεται το διάνυσμα \mathbf{w} ορθογωνικά σε σχέση με το διάνυσμα $\mathbf{v}(\mathbf{k}_s)$. Ισχύει επίσης ότι $\mathbf{P}\mathbf{v}(\mathbf{k}_s) = \mathbf{0}$. Το διάνυσμα $\frac{\mathbf{v}(\mathbf{k}_s)}{N}$ προστίθεται για να επαναφέρει τον περιορισμό. Το σημείο C δείχνει την θέση της νέας εκτίμησης του διανύσματος των βαρών. Η διαδικασία συνεχίζεται, ώστε να μετακινηθεί το εκτιμώμενο διάνυσμα των βαρών στην θέση D , που αντιστοιχεί στην βέλτιστη λύση [19].

6.7. Σύγκριση των αλγορίθμων LMS και RLS

Οι αλγόριθμοι LMS και RLS υλοποιούν φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR) και παρουσιάζουν πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Στην ενότητα αυτή θα συγκρίνουμε τους παραπάνω αλγόριθμους με βάση της απόδοσή τους σε συγκεκριμένους τομείς, οι οποίοι παρουσιάζονται παρακάτω [18, 24]:

- **Ταχύτητα σύγκλισης (Convergence Rate):** Η ταχύτητα σύγκλισης του αλγορίθμου LMS εξαρτάται από τις ιδιοτιμές του πίνακα αυτοσυσχέτισης. Ο λόγος σύγκλισης δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{(r-1)^2}{(r+1)^2}$$

όπου r είναι ο λόγος της μεγαλύτερης προς τη μικρότερη ιδιοτιμή ($r = \lambda_{\max} / \lambda_{\min}$). Όταν ο πίνακας αυτοσυσχέτισης χαρακτηρίζεται από

μεγάλη διασπορά ιδιοτιμών, όπως στην περίπτωση της διάδοσης πολλαπλών δρόμων, η ταχύτητα σύγκλισης στη βέλτιστη λύση είναι πολύ χαμηλή.

Η εξίσωση ανανέωσης του διανύσματος των βαρών για τον αλγόριθμο LMS δίνεται από τη σχέση:

$$\tilde{\mathbf{w}}_{LMS}(n) = \tilde{\mathbf{w}}(n-1) + \mu \mathbf{x}(n) e^*(n) \Rightarrow$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_{LMS}(n) = \tilde{\mathbf{w}}(n-1) + \mu \mathbf{x}(n) \left(d^*(n) - \mathbf{x}^H(n) \tilde{\mathbf{w}}(n-1) \right)$$

Η εξίσωση ανανέωσης του διανύσματος των βαρών για τον αλγόριθμο RLS δίνεται από τη σχέση:

$$\tilde{\mathbf{w}}_{RLS}(n) = \tilde{\mathbf{w}}(n-1) + \mathbf{q}(n) e^*(n) \Rightarrow$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_{RLS}(n) = \tilde{\mathbf{w}}(n-1) + \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n) \mathbf{x}(n) \left(d^*(n) - \mathbf{x}^H(n) \tilde{\mathbf{w}}(n-1) \right)$$

Παρατηρούμε ότι η διαφορά ανάμεσα στους δύο αλγορίθμους είναι ότι ο παράγοντας σφάλματος πολλαπλασιάζεται με τον παράγοντα $\mu \mathbf{I}$ στον αλγόριθμο LMS και με τον αντίστροφο του πίνακα αυτοσυσχέτισης του λαμβανόμενου σήματος στον αλγόριθμο RLS. Ο πολλαπλασιασμός με τον πίνακα $\tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n)$ οδηγεί στην αποσυσχέτιση (De-correlation) και στην αυτοορθογωνιοποίηση (Self-orthogonalization) των διαδοχικών σημάτων της εισόδου και έτσι η ταχύτητα σύγκλισης του αλγορίθμου RLS δεν περιορίζεται από τη διασπορά των ιδιοτιμών του πίνακα αυτοσυσχέτισης [18, 19].

Ο αλγόριθμος LMS απαιτεί περίπου $20p$ επαναλήψεις για να συγκλίνει στην βέλτιστη λύση, όπου p είναι ο αριθμός των συντελεστών του φίλτρου σε ένα φίλτρο p -τάξης, ενώ ο αλγόριθμος RLS απαιτεί μόνο $2p$ επαναλήψεις.

Συμπεραίνουμε, ότι η ταχύτητα σύγκλισης του αλγορίθμου RLS σε στατικό περιβάλλον διάδοσης είναι πολύ μεγαλύτερη από την ταχύτητα σύγκλισης του αλγορίθμου LMS, αρκεί να έχουμε υψηλό SNR [24].

- **Υπολογιστικές απαιτήσεις και πολυπλοκότητα (Computational requirements and complexity):** Ο αλγόριθμος LMS είναι εύκολα υλοποιήσιμος και έχει επικρατήσει στις περισσότερες προσαρμοστικές εφαρμογές, είτε στην πρωτότυπη εκδοχή του, είτε σε διάφορες παραλλαγές του. Η απλότητα του αλγορίθμου έγκειται στο γεγονός ότι απαιτεί $2p$ πολλαπλασιασμούς, δηλαδή έχει γραμμική πολυπλοκότητα $O(p)$ ανά επανάληψη (δείγμα) σε ένα φίλτρο p -τάξης.

Ο αλγόριθμος RLS επιβαρύνεται από τον υπολογισμό του πίνακα $\mathbf{R}_x^{-1}(n)$. Έτσι απαιτεί $4p^2 + 4p + 2$ πολλαπλασιασμούς και έχει τετραγωνική πολυπλοκότητα $O(p^2)$ ανά επανάληψη (δείγμα) σε ένα φίλτρο p -τάξης [11]. Οπότε ο αλγόριθμος RLS απαιτεί σημαντικά αυξημένο υπολογιστικό φόρτο και ισχυρότερους επεξεργαστές ψηφιακού σήματος για να υλοποιηθεί, σε σχέση με τον αλγόριθμο LMS.

- **Αποκλίσεις (Misadjustments):** Στον αλγόριθμο RLS, σε αντίθεση με τον αλγόριθμο LMS, δεν πραγματοποιούνται στρωγγυλοποιήσεις στις τιμές που παράγει. Καθώς ο αριθμός των επαναλήψεων αυξάνεται και προσεγγίζει το άπειρο, οι εκτιμώμενες τιμές (διάνυσμα βαρών και σφάλμα) προσεγγίζουν τις βέλτιστες τιμές των φίλτρων Wiener [24].

Αυτό σημαίνει ότι ο αλγόριθμος RLS παρουσιάζει, θεωρητικά (αν η μνήμη είναι άπειρη, δηλαδή αν $\lambda = 1$), μηδενικές αποκλίσεις και μηδενικό μέσο τετραγωνικό σφάλμα, σε αντίθεση με τον αλγόριθμο LMS, ο οποίος πάντα παρουσιάζει αποκλίσεις. Οι αποκλίσεις αυτές μπορούν να ελαττωθούν αν μειώσουμε την τιμή της παραμέτρου μ . Τότε, όμως, θα ελαττωθεί περαιτέρω η ταχύτητα σύγκλισης.

- **Ευρωστία (Robustness):** Ο αλγόριθμος LMS είναι πιο εύρωστος σε σχέση με τον αλγόριθμο RLS, αφού λειτουργεί καλύτερα σε μη στατικά (Non-stationary) περιβάλλοντα διάδοσης, στα οποία ο συνεκτικός χρόνος (Coherence Time) είναι μικρός. Σε τέτοια περιβάλλοντα η κατευθυντικότητα της επιφάνειας λάθους μεταβάλλεται συνεχώς με το χρόνο και ο αλγόριθμος έχει την ευθύνη της συνεχούς παρακολούθησης (Tracking) των στατιστικών του περιβάλλοντος και του ελαχίστου της επιφάνειας [33].

Η προσαρμοστική μέθοδος SMI και οι προσαρμοστικοί αλγόριθμοι RLS και LMS παρουσιάζονται συνοπτικά στους επόμενους πίνακες.

Πίνακας 6.1.

Συνοπτική παρουσίαση της προσαρμοστικής μεθόδου SMI

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SMI	
Χαρακτηριστικά	Αντικαθιστά τον πίνακα αυτοσυσχέτισης με τον εκτιμώμενο του. Πραγματοποιεί νέες εκτιμήσεις του \mathbf{w} , με κάθε νέες αφίξεις σημάτων
Εξισώσεις ανανέωσης του διανύσματος \mathbf{w}	$\tilde{\mathbf{R}}_x(i+1) = \frac{i\tilde{\mathbf{R}}_x(i) + \mathbf{x}(i+1)\mathbf{x}^H(i+1)}{i+1} \quad \tilde{\mathbf{r}}_{dx} = \frac{i\tilde{\mathbf{r}}_{dx}(i) + d^*(i+1)\mathbf{x}^H(i+1)}{i+1}$ $\tilde{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_{dx}$
Πλεονεκτήματα	Εξαιρετικά γρήγορος και ανεξάρτητος από την ισχύ των σημάτων
Μειονεκτήματα	Πολύπλοκος λόγω της αντιστροφής του πίνακα αυτοσυσχέτισης

Πίνακας 6.2.

Συνοπτική παρουσίαση του προσαρμοστικού αλγορίθμου RLS

Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ RLS	
Χαρακτηριστικά	Χρησιμοποιεί τις τιμές των μεγεθών τις προηγούμενες χρονικές στιγμές για να εκτιμήσει το διάνυσμα \mathbf{w} σε κάθε επανάληψη.
	$\tilde{\mathbf{w}}(n) = \tilde{\mathbf{w}}(n-1) + \mathbf{q}(n)e^*(n)$
Εξισώσεις ανανέωσης του διανύσματος \mathbf{w}	$\tilde{\mathbf{q}}(n) = \frac{\lambda^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) \mathbf{x}(n)}{\mathbf{1} + \lambda^{-1} \mathbf{x}^H(n) \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) \mathbf{x}(n)}$
	$\tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n) = \lambda^{-1} \left[\tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) - \mathbf{q}(n) \mathbf{x}^H(n) \tilde{\mathbf{R}}_x^{-1}(n-1) \right]$
	$e(n) = d(n) - \tilde{\mathbf{w}}^H(n-1) \mathbf{x}(n)$
Πλεονεκτήματα	Πολύ γρήγορος - Πάντα έχουμε σύγκλιση στη βέλτιστη λύση. Ανεξάρτητος από τη διασπορά των ιδιοτιμών του πίνακα αυτοσυσχέτισης.
Μειονεκτήματα	Απαιτεί σήμα αναφοράς. Πολύπλοκος, ασταθής σε μη στατικό περιβάλλον διάδοσης.

Πίνακας 6.3.

Συνοπτική παρουσίαση του προσαρμοστικού αλγορίθμου LMS

Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ LMS	
Χαρακτηριστικά	Κάτω από κατάλληλες συνθήκες και με κατάλληλη επιλογή της παραμέτρου μ έχουμε σύγκλιση στη στατιστικά βέλτιστη λύση των βέλτιστων αλγορίθμων.
Εξισώσεις ανανέωσης του διανύσματος \mathbf{w}	$\tilde{\mathbf{w}}(n) = \tilde{\mathbf{w}}(n-1) + \mu \mathbf{x}(n) e^*(n)$
	$e(n) = d(n) - \tilde{\mathbf{w}}^H(n-1) \mathbf{x}(n)$
Πλεονεκτήματα	Απλός και εύρωστος - Πάντα έχουμε σύγκλιση στη βέλτιστη λύση.
Μειονεκτήματα	Απαιτεί σήμα αναφοράς. Η απόδοση εξαρτάται από τη διασπορά των ιδιοτιμών του πίνακα αυτοσυσχέτισης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Τεχνικές Εκτίμησης της Κατεύθυνσης Αφίξης

7.1. Εισαγωγή

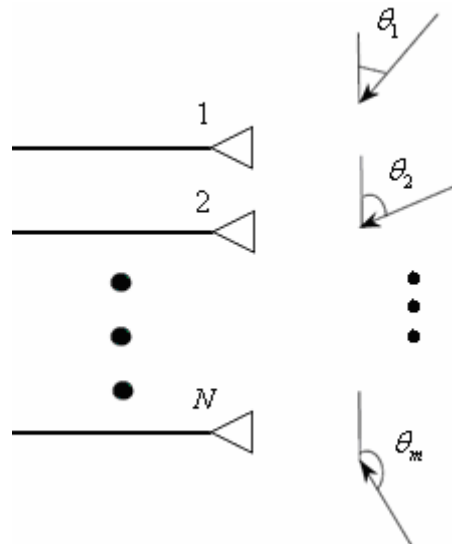
Σε ένα ασύρματο σύστημα επικοινωνιών οι κινητοί σταθμοί (Mobile Stations-MSs) παρέχουν στους σταθμούς βάσης (Base Stations-BSs) τις απαραίτητες πληροφορίες σχετικά με την κατεύθυνση άφιξης ή το κυματόνισμα των λαμβανόμενων σημάτων. Έτσι μπορεί να πραγματοποιηθεί αποτελεσματικός έλεγχος της κατευθυντικότητας των στοιχειοκεραιών και σωστή εφαρμογή της τεχνικής SDMA.

Στην πράξη δεν γνωρίζουμε την κατεύθυνση άφιξης όλων των λαμβανόμενων σημάτων. Αυτό συμβαίνει σε περιπτώσεις εισόδου στο σύστημα σημάτων παρεμβολών μεταβαλλόμενων κατευθύνσεων ή χωρικά διεσπαρμένων (Spatially Spread) σημάτων γύρω από την αρχική κατεύθυνση άφιξης τους (λόγω της διάδοσης πολλαπλών δρόμων) [34].

Ακόμα και αν η χωρική διασπορά των σημάτων έχει μικρή έκταση, η μείωση της απόδοσης των συστημάτων μπορεί να είναι αρκετά μεγάλη. Η διάσπαση του σήματος σε πολλαπλές συνιστώσες και η απομάκρυνση των ασθενέστερων συνιστωσών από την προκαθορισμένη κατεύθυνση που είχε οδηγηθεί ο κύριος άξονας απόκρισης της στοιχειοκεραίας μπορεί να επιφέρει σημαντική μείωση του κέρδους. Επιπλέον οι χωρικά διεσπαρμένες συνιστώσες πολλές φορές λαμβάνονται ως παρεμβολές από το σύστημα και ακυρώνονται, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις υψηλού SNR. Έτσι είναι αναγκαία η χρήση ειδικών τεχνικών εκτίμησης της κατεύθυνσης άφιξης των σημάτων (Direction of Arrival Estimation Techniques).

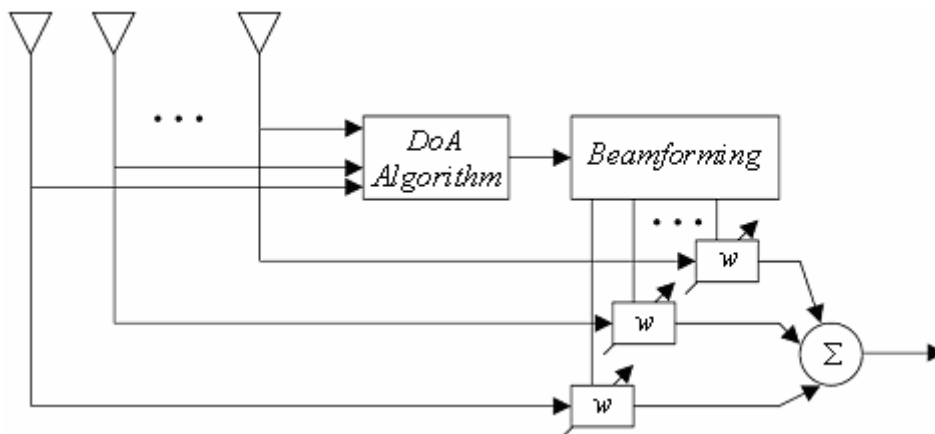
Η εκτίμηση της κατεύθυνσης άφιξης ισοδυναμεί με την εκτίμηση της γωνίας άφιξης (Angle of Arrival-AoA). Η ορθότητα της προσδιοριζόμενης γωνίας θ_m υπό την οποία εισέρχεται το m -οστο σήμα εξαρτάται από τον συνολικό αριθμό M

των σημάτων (επιθυμητό σήμα και όλες οι πολλαπλών δρόμων συνιστώσες του, σήματα παρεμβολής).



Σχήμα 7.1. Το πρόβλημα της εκτίμησης της κατεύθυνσης άφιξης των σημάτων

Έχουν αναπτυχθεί διάφορες τεχνικές εκτίμησης της κατεύθυνσης άφιξης των λαμβανόμενων σημάτων, οι οποίες χρησιμοποιούνται πριν από τις τεχνικές Beamforming, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 7.2. Απεικόνιση της λειτουργίας των beamformers με αλγόριθμο DoA

Στην βιβλιογραφία, μεταξύ άλλων, αναφέρονται τεχνικές εκτίμησης της κατεύθυνσης άφιξης που λειτουργούν σωστά και είναι εύρωστες παρουσία μόνο μίας χωρικά διεσπαρμένης πηγής σήματος [35]. Τέτοια τεχνική είναι ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood Estimator), ο οποίος εκτιμά την κατεύθυνση άφιξης του επιθυμητού σήματος, θεωρώντας όλες τις άλλες πηγές ως παρεμβολές [19, 21]. Στην πράξη η ασύρματη επικοινωνία πραγματοποιείται παρουσία πολλαπλών πηγών σημάτων (επιθυμητά σήματα και παρεμβολές). Έτσι κρίνεται σκόπιμο να εξεταστούν τεχνικές με μεγαλύτερη πρακτική σημασία και εφαρμογή, τις οποίες παρουσιάζουμε παρακάτω.

7.2. Ο Αλγόριθμος Ταξινόμησης Πολλαπλών Σημάτων (MUSIC)

Ο αλγόριθμος ταξινόμησης πολλαπλών σημάτων (Multiple Signal Classification-MUSIC) είναι μία σχετικά απλή και αποδοτική μέθοδος εκτίμησης που στηρίζεται στην ιδιοδομή (Eigenstructure) των πινάκων αυτοσυσχέτισης [36]. Οι κατηγορίες του αλγορίθμου αυτού παρουσιάζονται παρακάτω.

7.2.1. Ο αλγόριθμος Spectral-MUSIC

Θεωρούμε γραμμική στοιχειοκεραία N στοιχείων, η οποία εντοπίζει M ασυσχέτιστα μεταξύ τους σήματα, η κατεύθυνση των οποίων είναι άγνωστη. Το διάνυσμα που περιέχει το συνολικό αριθμό των λαμβανόμενων σημάτων μαζί με τον θόρυβο είναι της μορφής:

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{f} + \mathbf{n}$$

όπου:

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}(\theta_1), \mathbf{v}(\theta_2), \dots, \mathbf{v}(\theta_M)]$$

και:

$$\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_M]^T$$

Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης κάθε λαμβανόμενου σήματος, θεωρώντας ότι τα διαφορετικά σήματα είναι ασυσχέτιστα (μηδενική ετεροσυσχέτιση), είναι ίσος με:

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{xx}^H\} = E\{\mathbf{Vff}^H\mathbf{V}^H\} + E\{\mathbf{nn}^H\} = \mathbf{V}\mathbf{F}\mathbf{V}^H + \sigma_n^2\mathbf{I} = \mathbf{R}_s + \sigma_n^2\mathbf{I}$$

όπου:

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{V}\mathbf{F}\mathbf{V}^H$$

και:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} E\{|f_1|^2\} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E\{|f_2|^2\} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & E\{|f_M|^2\} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας \mathbf{R}_s είναι διαστάσεων $N \times N$ και τάξης M . Έχει επίσης $N - M$ ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε μηδενική ιδιοτιμή. Αν \mathbf{q}_m είναι το m -οστό ιδιοδιάνυσμα θα ισχύει ότι:

$$\mathbf{R}_s \mathbf{q}_m = \mathbf{V}\mathbf{F}\mathbf{V}^H \mathbf{q}_m = 0 \Rightarrow \mathbf{q}_m^H \mathbf{V}\mathbf{F}\mathbf{V}^H \mathbf{q}_m = 0 \Rightarrow \mathbf{V}^H \mathbf{q}_m = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι αληθής γιατί ο πίνακας \mathbf{V} παίρνει θετικές τιμές. Από την εξίσωση αυτή συνεπάγεται ότι όλα τα $N - M$ ιδιοδιανύσματα είναι ορθογωνικά σε σχέση με τα M διανύσματα πολλαπλότητας.

Θεωρούμε τον πίνακα \mathbf{Q}_n διαστάσεων $N \times (N - M)$ ο οποίος περιέχει αυτά τα ιδιοδιανύσματα. Το ψευδοφάσμα του αλγορίθμου φασματικής ταξινόμησης πολλαπλών σημάτων (Spectral-MUSIC) δίνεται από τη σχέση [19, 21]:

$$P_{MUSIC}(\theta_m) = \frac{1}{\sum_{m=1}^{N-M} |\mathbf{v}^H(\theta_m) \mathbf{q}_m|^2} = \frac{1}{\mathbf{v}^H(\theta_m) \mathbf{Q}_n \mathbf{Q}_n^H \mathbf{v}(\theta_m)} = \frac{1}{\|\mathbf{Q}_n^H \mathbf{v}(\theta_m)\|^2}$$

Λόγω της ορθογωνιότητας ο παρανομαστής μηδενίζεται αν η γωνία που ορίζει το κυματόνυσμα είναι η γωνία υπό την οποία εισέρχεται το λαμβανόμενο σήμα.

Επιπλέον οι εκτιμώμενες κατευθύνσεις των σημάτων είναι οι M μεγαλύτερες κορυφές του ψευδοφάσματος.

Στην πράξη ο πίνακας \mathbf{R}_s δεν είναι διαθέσιμος. Ο πίνακας \mathbf{R} μπορεί, όμως, να εκτιμηθεί και τα ιδιοδιανύσματα \mathbf{Q}_n μπορούν να προσδιοριστούν από τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα \mathbf{R} . Για κάθε ιδιοδιάνυσμα \mathbf{q}_m ισχύει ότι:

$$\mathbf{R}_s \mathbf{q}_m = \lambda \mathbf{q}_m$$

Οπότε:

$$\mathbf{R} \mathbf{q}_m = \mathbf{R}_s \mathbf{q}_m + \sigma_n^2 \mathbf{I} \mathbf{q}_m \Rightarrow \mathbf{R} \mathbf{q}_m = (\lambda_m + \sigma_n^2) \mathbf{q}_m$$

Δηλαδή κάθε ιδιοδιάνυσμα του πίνακα \mathbf{R} είναι και ιδιοδιάνυσμα του πίνακα \mathbf{R}_s με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\lambda_m + \sigma_n^2$. Αν εφαρμοστεί διάσπαση ιδιοτιμών στον πίνακα \mathbf{R} , τότε θα ισχύει ότι $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^H$ και αντίστοιχα για τον πίνακα \mathbf{R}_s θα ισχύει ότι:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} [\mathbf{\Lambda} + \sigma_n^2 \mathbf{I}] \mathbf{Q}^H =$$

$$\mathbf{Q} \begin{bmatrix} \lambda_1 + \sigma_n^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 + \sigma_n^2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_M + \sigma_n^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_n^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^H$$

Μπορούμε να χωρίσουμε τον πίνακα των ιδιοδιανυσμάτων \mathbf{Q} σε ένα πίνακα σημάτων \mathbf{Q}_s με M στήλες που αντιστοιχεί στις M ιδιοτιμές των σημάτων και σε ένα πίνακα \mathbf{Q}_n με $N - M$ στήλες που αντιστοιχεί στις ιδιοτιμές του θορύβου. Ο πίνακας \mathbf{Q}_s ορίζει τον υποχώρο των σημάτων (Signal Subspace) και ο πίνακας \mathbf{Q}_n ορίζει τον υποχώρο του θορύβου (Noise Subspace). Επιπλέον ισχύει ότι

$\mathbf{Q}_s \perp \mathbf{Q}_n$. Οι μικρότερες ιδιοτιμές του πίνακα \mathbf{Q} είναι αυτές του θορύβου και είναι όλες συναρτήσεις του σ_n^2 . Το ψευδοφάσμα του αλγορίθμου MUSIC δίνεται ισοδύναμα από τη σχέση:

$$P_{MUSIC}(\theta_m) = \frac{1}{\sum_{m=M+1}^N |\mathbf{q}_m^H \mathbf{v}(\theta_m)|^2} = \frac{1}{\mathbf{v}^H(\theta_m) \mathbf{Q}_n \mathbf{Q}_n^H \mathbf{v}(\theta_m)}$$

όπου \mathbf{q}_m είναι ένα από τα $N - M$ ιδιοδιανύσματα του θορύβου. Αν η γωνία θ_m αντιστοιχεί σε κάποιο λαμβανόμενο σήμα, τότε $\mathbf{v}(\theta_m) \perp \mathbf{q}_m$ και ο παρονομαστής μηδενίζεται. Ο αλγόριθμος MUSIC αναγνωρίζει ως κατευθύνσεις των σημάτων τις μέγιστες τιμές της συνάρτησης $P_{MUSIC}(\theta_m)$.

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ο πίνακας \mathbf{R} δεν είναι γνωστός και πρέπει να εκτιμηθεί με κάποιον προηγμένο αλγόριθμο (όπως η μέθοδος SMI). Τότε, όμως, οι ιδιοτιμές του θορύβου μεταβάλλονται και δεν είναι ευδιάκριτη η διαφοροποίηση μεταξύ των ιδιοτιμών του θορύβου και των σημάτων, ιδιαίτερα αν ο αριθμός των σημάτων είναι άγνωστος.

7.2.2. Ο αλγόριθμος Root-MUSIC

Η ακρίβεια του αλγορίθμου MUSIC περιορίζεται από την ευχέρεια εκτίμησης και εκμετάλλευσης της συνάρτησης $P_{MUSIC}(\theta_m)$. Απαιτείται, δηλαδή, ανθρώπινη παρέμβαση ή ένας επιπλέον ειδικευμένος αλγόριθμος για τον προσδιορισμό των M μεγίστων τιμών της συνάρτησης. Στην δεύτερη περίπτωση ο υπολογιστικός φόρτος είναι ιδιαίτερα μεγάλος.

Ο αλγόριθμος ταξινόμησης πολλαπλών σημάτων με υπολογισμό των ριζών (Root-MUSIC) υπολογίζει κατευθείαν τις αριθμητικές τιμές που αντιστοιχούν στην κατεύθυνση των σημάτων και εφαρμόζεται μόνο σε ομοιόμορφες γραμμικές στοιχειοκεραίες. Σε αντίθεση με τον συμβατικό αλγόριθμο MUSIC, ο αλγόριθμος Root-MUSIC δεν είναι μία τεχνική φασματικής εκτίμησης, αλλά μία τεχνική βασισμένη σε παραμέτρους και μοντέλα. Χρησιμοποιείται, δηλαδή, ως μοντέλο

το διάνυσμα πολλαπλότητας και ως παράμετρος η γωνία θ . Η αξιοπιστία τέτοιου είδους αλγορίθμων εξασφαλίζεται, μόνο όταν τα μοντέλα είναι αξιόπιστα. Ορίζουμε τον πίνακα $\mathbf{C} = \mathbf{Q}_n \mathbf{Q}_n^H$. Τότε θα έχουμε ότι:

$$P_{MUSIC}^{-1}(\theta_m) = \mathbf{v}^H(\theta_m) \mathbf{C} \mathbf{v}(\theta_m)$$

Στην γραμμική ομοιόμορφη στοιχειοκεραία ισχύει ότι:

$$\mathbf{v}(k_z) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n(k_z) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\frac{2\pi}{\lambda}\cos\theta d}$$

Άρα:

$$\mathbf{q}_m^H \mathbf{v}(\theta_m) = \sum_{n=0}^{N-1} q_{mn} v_n(k_z)$$

και ισοδύναμα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} P_{MUSIC}^{-1}(\theta_m) &= \mathbf{v}^H(\theta_m) \mathbf{C} \mathbf{v}(\theta_m) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} v_n(k_z) C_{mn} v_m^*(k_z) = \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\frac{2\pi}{\lambda}\cos\theta d} C_{mn} e^{-j\left(m-\frac{N-1}{2}\right)\frac{2\pi}{\lambda}\cos\theta d} = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(n-m)\frac{2\pi}{\lambda}\cos\theta d} C_{mn} \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $l = n - m$, όπου το εύρος του l ρυθμίζεται από τα όρια των n, m δηλαδή $-(N-1) \leq l \leq (N-1)$, θα έχουμε ότι:

$$P_{MUSIC}^{-1}(\theta_m) = \sum_{l=-(N-1)}^{(N-1)} C_l e^{j(l)\frac{2\pi}{\lambda}\cos\theta d}$$

όπου:

$$C_l = \sum_{n-m=l} C_{mn}$$

Ο όρος C_l αντιπροσωπεύει το άθροισμα των στοιχείων της n -οστής διαγωνίου του πίνακα \mathbf{C} . Η τελευταία εξίσωση ορίζει ένα πολυώνυμο $(2N-2)$ βαθμού με $(2N-2)$ λύσεις. Αν ένας τυχαίος αριθμός r είναι η λύση του πολυωνύμου, τότε και ο αριθμός $1/r^*$ είναι λύση. Δηλαδή οι λύσεις του πολυωνύμου εμφανίζονται ανά ζεύγος και έτσι υπάρχουν $(N-1)$ ζευγάρια λύσεων. Κάθε ζευγάρι έχει την ίδια φάση και αντίθετη τιμή πλάτους. Ο προσδιορισμός, όμως, της κατεύθυνσης των σημάτων πραγματοποιείται με την εύρεση της φάσης, άρα όλες οι λύσεις περιέχουν επιθυμητή πληροφορία.

Συνολικά ο αλγόριθμος Root-MUSIC παρουσιάζει αυξημένη απόδοση σε σχέση με τον αλγόριθμο Spectral-MUSIC, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις χαμηλού SNR [19].

7.2.3. Ο αλγόριθμος Smooth-MUSIC

Ο αλγόριθμος MUSIC θεωρεί ότι όλα τα εισερχόμενα σήματα είναι ασυσχέτιστα. Σε ένα πρακτικό ασύρματο σύστημα επικοινωνιών, το οποίο χαρακτηρίζεται από διαλείψεις, υπάρχουν πολλές συνιστώσες πολλαπλών δρόμων από διάφορες κατευθύνσεις, οι οποίες συσχετίζονται μεταξύ τους [19]. Ο συσχετισμός αυτός μειώνει τον βαθμό (Rank) του πίνακα \mathbf{R}_s και δημιουργεί περισσότερες από $(N-M)$ ιδιοτιμές θορύβου.

Στον αλγόριθμο ομαλοποιημένης ταξινόμησης πολλαπλών σημάτων (Smooth-MUSIC) τα N στοιχεία της στοιχειοκεραίας χωρίζονται σε L επικαλυπτόμενες υποστοιχειοκεραίες (Sub-arrays), η κάθε μια από τις οποίες θεωρούμε ότι έχει P στοιχεία, έτσι ώστε να ισχύει $L = N - P + 1$. Τα δεδομένα που λαμβάνει κάθε υποστοιχειοκεραία καταχωρούνται σε έναν πίνακα αυτοσυσχέτισης διαστάσεων $P \times P$. Ο αλγόριθμος Smooth-MUSIC υπολογίζει τον ομαλοποιημένο πίνακα αυτοσυσχέτισης \mathbf{R}_L , ο οποίος είναι ίσος με:

$$\mathbf{R}_L = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{R}_l$$

Έτσι ο πίνακας \mathbf{R}_L αποκτά τον αρχικό βαθμό του και έτσι μπορεί να προσδιοριστεί η κατεύθυνση άφιξης μέχρι και $L - 1$ συσχετισμένων σημάτων.

7.2.4. Ο αλγόριθμος MUSIC με περιορισμούς

Σε αυτή την περίπτωση ο αλγόριθμος γνωρίζει μερικές κατευθύνσεις και προσπαθεί να εκτιμήσει κάποιες άλλες άγνωστες. Έτσι αφαιρούνται από τον πίνακα των λαμβανόμενων δεδομένων οι συνιστώσες των σημάτων, οι κατευθύνσεις των οποίων είναι γνωστές και χρησιμοποιείται ο τροποποιημένος πίνακας αυτοσυσχέτισης για την εκτίμηση των κατευθύνσεων άφιξης των υπόλοιπων σημάτων [19].

Η εκτίμηση πραγματοποιείται με την προβολή του πίνακα των δεδομένων σε ένα χώρο ορθογωνικά συμπληρωματικό του χώρου που ρυθμίζεται από τα διανύσματα πολλαπλότητας, τα οποία αντιστοιχούν στις γνωστές κατευθύνσεις.

7.3. Η Μέθοδος της Ελαχίστης Νόρμας

Η μέθοδος της ελαχίστης νόρμας (Minimum Norm Method) είναι εφαρμόσιμη σε γραμμικές ομοιόμορφες στοιχειοκεραίες και εμφανίζει πολλές ομοιότητες με την τεχνική Root-MUSIC. Η εκτίμηση των κατευθύνσεων των σημάτων πραγματοποιείται με τον εύρεση των μεγίστων τιμών του φάσματος:

$$P_{MN}(\theta) = \frac{1}{|\mathbf{w}^H \mathbf{v}(\theta)|^2}$$

όπου \mathbf{w} είναι ένα διάνυσμα των βαρών, το οποίο είναι ορθογωνικό σε σχέση με τον υπόχωρο των σημάτων, άρα περιορίζεται στον υπόχωρο του θορύβου. Τα πρώτο στοιχείο του διανύσματος αυτού είναι η μονάδα.

Ο προσδιορισμός του \mathbf{w} πραγματοποιείται με την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης:

$$\min \mathbf{w}^H \mathbf{w}$$

με βάση τους περιορισμούς:

$$\mathbf{V}_s^H \mathbf{w} = 0$$

και:

$$\mathbf{w}^H \mathbf{e}_1 = 1$$

όπου \mathbf{V}_s είναι ένας πίνακας που περιέχει τα ιδιοδιανύσματα του υπόχωρου των σημάτων και \mathbf{e}_1 είναι ένα διάνυσμα του οποίου η πρώτη τιμή είναι ίση με τη μονάδα και οι υπόλοιπες είναι μηδενικές. Έτσι αν \mathbf{V}_n είναι ένας πίνακας που περιέχει τα ιδιοδιανύσματα του υπόχωρου του θορύβου έχουμε ισοδύναμα ότι [19, 21]:

$$P_{MN}(\theta) = \frac{1}{|\mathbf{v}^H(\theta) \mathbf{V}_n \mathbf{V}_n^H \mathbf{e}_1|^2}$$

7.4. Εκτίμηση των Παραμέτρων του Σήματος με Σταθερές Εναλλασσόμενες Τεχνικές (ESPRIT)

Σε αυτή την περίπτωση η τεχνική είναι βασισμένη στην διαφορά φάσης που εντοπίζεται κατά την άφιξη του ίδιου σήματος σε διαφορετικό στοιχείο της στοιχειοκεραίας. Θεωρούμε ότι για το m -οστό σήμα που λαμβάνεται από το n -οστό στοιχείο ισχύει ότι:

$$v_m(n) = e^{j\left(n - \frac{N-1}{2}\right) \frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta_m d}$$

και ορίζουμε τον πίνακα \mathbf{V} που περιέχει τις τιμές των διανυσμάτων πολλαπλότητας όλων των λαμβανόμενων σημάτων, δηλαδή ισχύει ότι:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1(0) & v_2(0) & \cdots & v_M(0) \\ v_1(1) & v_2(1) & \cdots & v_M(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1(N-2) & v_2(N-2) & \cdots & v_M(N-2) \\ v_1(N-1) & v_2(N-1) & \cdots & v_M(N-1) \end{bmatrix}$$

Με βάση τον προηγούμενο πίνακα ορίζουμε δύο νέους πίνακες, τον πίνακα \mathbf{V}_0 και τον πίνακα \mathbf{V}_1 για τους οποίους ισχύει:

$$\mathbf{V}_0 = \begin{bmatrix} v_1(0) & v_2(0) & \cdots & v_M(0) \\ v_1(1) & v_2(1) & \cdots & v_M(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1(N-2) & v_2(N-2) & \cdots & v_M(N-2) \end{bmatrix}$$

και:

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} v_1(1) & v_2(1) & \cdots & v_M(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1(N-2) & v_2(N-2) & \cdots & v_M(N-2) \\ v_1(N-1) & v_2(N-1) & \cdots & v_M(N-1) \end{bmatrix}$$

Ορίζουμε επίσης τον διαγώνιο πίνακα $\mathbf{\Phi}$ διαστάσεων $M \times M$, του οποίου οι τιμές αντιστοιχούν στην μεταβολή φάσης του στοιχείου 1 λόγω της αλλαγής σήματος. Ο πίνακας $\mathbf{\Phi}$ είναι ίσος με:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} v_1(1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_2(1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_M(1) \end{bmatrix}$$

και ισχύει ότι:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_0 \mathbf{\Phi}$$

Αν μπορέσουμε να εκτιμήσουμε τον πίνακα $\mathbf{\Phi}$, τότε θα μπορέσουμε να εκτιμήσουμε και την κατεύθυνση άφιξης όλων των σημάτων. Επιπλέον αν

γνωρίζουμε τους πίνακες \mathbf{V}_0 και \mathbf{V}_1 , τότε ο υπολογισμός του πίνακα Φ είναι εύκολος. Οι πίνακες, όμως αυτοί είναι άγνωστοι, αλλά μπορούν να προσδιοριστούν μέσω του αλγορίθμου εκτίμησης των παραμέτρων του σήματος με σταθερές εναλλασσόμενες τεχνικές (Estimation of Signal Parameters using Rotational Invariance Techniques-ESPRIT) [19, 21].

Τα διανύσματα πολλαπλότητας που περιέχονται στον πίνακα \mathbf{V} εκτείνονται στον ίδιο υποχώρο με τα ιδιοδιανύσματα των σημάτων που περιέχονται στον πίνακα \mathbf{Q}_s . Άρα υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας \mathbf{C} , για τον οποίο ισχύει ότι:

$$\mathbf{Q}_s = \mathbf{V}\mathbf{C}$$

Ορίζουμε τους πίνακες \mathbf{Q}_0 και \mathbf{Q}_1 με τον ίδιο τρόπο όπως προηγουμένως, οπότε θα έχουμε ότι:

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{V}_0\mathbf{C}$$

και:

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{V}_1\mathbf{C} = \mathbf{V}_0\Phi\mathbf{C}$$

Ισχύει ότι:

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{C}^{-1}\Phi^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{V}_0\Phi\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}\Phi^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{V}_0\mathbf{C} = \mathbf{Q}_0$$

Ορίζουμε:

$$\Psi^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\Phi^{-1}\mathbf{C}$$

Οπότε θα έχουμε ότι:

$$\mathbf{Q}_1\Psi^{-1} = \mathbf{Q}_0 \Rightarrow \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_0\Psi$$

όπου ο πίνακας Ψ διαστάσεων $M \times M$ είναι ίσος με:

$$\Psi = \mathbf{C}^{-1}\Phi\mathbf{C}$$

Ο πίνακας Φ είναι διαγώνιος και περιέχει τις ιδιοτιμές του πίνακα Ψ , από τις οποίες μπορούμε να εκτιμήσουμε την κατεύθυνση των σημάτων. Ο πίνακας Ψ μπορεί να υπολογιστεί με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Ο αλγόριθμος ESPRIT έχει μεγαλύτερες επεξεργαστικές απαιτήσεις από τον αλγόριθμο MUSIC. Αυτό συμβαίνει λόγω της διάσπασης των ιδιοτιμών του πίνακα \mathbf{R} και του πίνακα Ψ , καθώς και της επίλυσης του προβλήματος των ελαχίστων τετραγώνων για την εκτίμηση του πίνακα Ψ . Είναι, όμως, γρηγορότερος και πιο εύρωστος, αλλά δεν μπορεί να διαχειριστεί συσχετισμένες πηγές σημάτων.

7.5. Η Μέθοδος Matrix Pencil

Οι αλγόριθμοι που εξετάσαμε μέχρι τώρα απαιτούν την εκτίμηση του πίνακα αυτοσυσχέτισης \mathbf{R} . Η διαδικασία εκτίμησης απαιτεί σημαντικό αριθμό υπολογιστικών πράξεων, αφού χρειάζονται τουλάχιστον K δείγματα δεδομένων \mathbf{x} (K στιγμιότυπα), όπου $K > 2N$. Απαιτούνται δηλαδή ισχυροί επεξεργαστές ψηφιακού σήματος και έτσι αυξάνεται το κόστος του συστήματος. Υποθέσαμε επίσης ότι όλα τα δείγματα ήταν στατιστικά ομογενή. Σε ένα περιβάλλον, όμως, όπου τα χαρακτηριστικά διάδοσης μεταβάλλονται συνεχώς, η εκτίμηση της αυτοσυσχέτισης των δεδομένων είναι δύσκολη.

Έτσι αναπτύχθηκε μία μη στατιστική τεχνική, η οποία στηρίζεται άμεσα στα λαμβανόμενα δεδομένα (Direct Data Domain). Η τεχνική αυτή ονομάζεται Matrix Pencil και αρχικά χρησιμοποιήθηκε για την εκτίμηση των πόλων των συστημάτων. Σύμφωνα με την τεχνική αυτή τα λαμβανόμενα δεδομένα την χρονική στιγμή n δίνονται από τη σχέση:

$$x_n = \sum_{m=1}^M f_m v_m(n) + n(n) = \sum_{m=1}^M f_m e^{j\left(n - \frac{N-1}{2}\right) \frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta_m d} + n(n)$$

Θεωρούμε του πίνακες \mathbf{X}_0 και \mathbf{X}_1 για τους οποίους ισχύει [37]:

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{L-1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N-L-1} & x_{N-L} & \cdots & x_{N-2} \end{bmatrix}$$

και:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_L \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N-L} & x_{N-L+1} & \cdots & x_{N-1} \end{bmatrix}$$

όπου L είναι μία παράμετρος του αλγορίθμου, για την οποία αν το N είναι άρτιος ισχύει ότι:

$$M \leq L \leq N - L$$

και αν το N είναι περιττός ισχύει ότι:

$$M \leq L \leq N - L + 1$$

Άρα ο μέγιστος αριθμός κατευθύνσεων άφιξης που μπορεί να εκτιμήσει η μέθοδος Matrix Pencil είναι $N/2$ για N άρτιο και $(N+1)/2$ για N περιττό. Οι προηγούμενοι πίνακες μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{V}_1 \mathbf{A} \mathbf{V}_2$$

και:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{V}_1 \mathbf{A} \mathbf{\Phi} \mathbf{V}_2$$

όπου ο πίνακας $\mathbf{\Phi}$ είναι ο διαγώνιος πίνακας, τον οποίο πρέπει να εκτιμήσουμε, όπως και στην τεχνική ESPRIT. Για τους υπόλοιπους πίνακες ισχύει ότι:

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} v_1(0) & v_2(0) & \cdots & v_M(0) \\ v_1(1) & v_2(1) & \cdots & v_M(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1(N-L-1) & v_2(N-L-1) & \cdots & v_M(N-L-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} v_1(0) & v_1(1) & \cdots & v_1(L-1) \\ v_2(0) & v_2(1) & \cdots & v_2(L-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_M(0) & v_M(1) & \cdots & v_M(L-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_M \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε τυχαίο λ για το οποίο ισχύει:

$$\mathbf{X}_1 - \lambda \mathbf{X}_0 = \mathbf{V}_1 \mathbf{A} \Phi \mathbf{V}_2 - \lambda \mathbf{V}_1 \mathbf{A} \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 \mathbf{A} [\Phi - \lambda \mathbf{I}] \mathbf{V}_2$$

Απουσία θορύβου οι εκτιμήσεις του $v_m(n)$ είναι οι γενικευμένες ιδιοτιμές του ζεύγους πινάκων $[\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1]$, δηλαδή:

$$\mathbf{X}_1 \mathbf{q} = \lambda \mathbf{X}_0 \mathbf{q}$$

όπου \mathbf{q} το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα, το οποίο δεν έχει καμία συγγένεια με τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα αυτοσυσχέτισης. Οι γωνίες άφιξης των σημάτων θα υπολογίζονται ως εξής:

$$\theta_m = \cos^{-1} \left[\frac{\Im[\ln(v_m(n))]}{d} \right]$$

όπου $\Im[v_m(n)]$ είναι το φανταστικό μέρος του $v_m(n)$.

Παρουσία θορύβου πρέπει να εφαρμοστεί η μέθοδος των ολικών ελαχίστων τετραγώνων (Total Least Squares-TLS) [37]. Αφού η μέθοδος Matrix Pencil χρησιμοποιεί μόνο ένα δείγμα ο πίνακας δεδομένων είναι ο επόμενος πίνακας διαστάσεων $(N-L) \times (L+1)$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_L \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N-L-1} & x_{N-L} & \cdots & x_N \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζουμε στον πίνακα \mathbf{X} ιδιάζουσα διάσπαση τιμών (Singular Value Decomposition-SVD) και έχουμε ότι:

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H$$

Μόνο οι M από τις ιδιάζουσες τιμές του πίνακα αντιστοιχούν στα σήματα, ενώ οι υπόλοιπες αντιστοιχούν στον θόρυβο. Θεωρούμε μία νέα εκδοχή του πίνακα \mathbf{X} , έτσι ώστε να ισχύει:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{U}'\mathbf{\Sigma}'\mathbf{V}'^T$$

όπου \mathbf{U}' είναι οι πρώτες M αριστερές ιδιάζουσες τιμές, \mathbf{V}' είναι οι πρώτες M δεξιές ιδιάζουσες τιμές και $\mathbf{\Sigma}'$ είναι οι πρώτες M ιδιάζουσες τιμές του σήματος. Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο Matrix Pencil, όπως και προηγουμένως, θεωρώντας τους πίνακες \mathbf{X}_0' (περιέχει τις πρώτες L στήλες του πίνακα \mathbf{X}') και \mathbf{X}_1' (περιέχει τις τελευταίες L στήλες του πίνακα \mathbf{X}').

7.6. Μέθοδοι Εκτίμησης του Αριθμού των Σημάτων

Μέχρι τώρα είχαμε υποθέσει ότι ο συνολικός αριθμός των σημάτων που λαμβάνει η στοιχειοκεραία είναι M . Βάση αυτού του αριθμού πραγματοποιήθηκε η διαίρεση των πινάκων αυτοσυσχέτισης στους αλγορίθμους MUSIC και ESPRIT, καθώς και ο προσδιορισμός του αριθμού των διανυσμάτων στην περίπτωση της τεχνικής TLS Matrix Pencil. Αν και ο σταθμός βάσης ελέγχει τον αριθμό των χρηστών που εισέρχονται στο σύστημα, πολλές φορές εμφανίζονται εξωτερικές (εκτός συστήματος) πηγές παρεμβολών. Ο αριθμός M περιλαμβάνει τα σήματα αυτά, άρα ο καθορισμός του είναι απαραίτητος.

Έχουν προταθεί δύο κριτήρια για την εκτίμηση του αριθμού των σημάτων. Το πρώτο ονομάζεται κριτήριο πληροφορίας του Akaiake (Akaiake Information Criterion-AIC) και το δεύτερο ονομάζεται κριτήριο του ελάχιστου μήκους περιγραφής του Rissanen (Minimum Description Length-MDL) [19]. Αν N είναι ο αριθμός των στοιχείων και K είναι ο αριθμός των στιγμιότυπων που απαιτούνται για την εκτίμηση του πίνακα αυτοσυσχέτισης, τότε ο συνολικός αριθμός των ιδιοτιμών του θορύβου είναι $N - M$. Πρέπει να βρούμε τέτοιες ιδιοτιμές $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, N$ του πίνακα \mathbf{R} , ώστε $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$. Ο συνολικός αριθμός των σημάτων μπορεί να υπολογισθεί αν ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση που ισοδυναμεί με τον βαθμό συγγένειας των ιδιοτιμών του θορύβου:

$$\min_M K(N - M) \log \left\{ \frac{f_1(M)}{f_2(M)} \right\} + f_3(M, K)$$

όπου:

$$f_1(M) = \frac{1}{N - M} \sum_{i=M+1}^N \lambda_i$$

$$f_2(M) = \left[\prod_{i=M+1}^N \lambda_i \right]^{1/(N-M)}$$

και:

$$f_3(M, K) = \begin{cases} M(2N - M) & \text{για το κριτήριο AIC} \\ \frac{1}{2} M(2N - M) \log K & \text{για το κριτήριο MDL} \end{cases}$$

Ο αριθμός M , που ελαχιστοποιεί το βαθμό συγγένειας των ιδιοτιμών του θορύβου, αντιστοιχεί στον πραγματικό αριθμό των σημάτων.

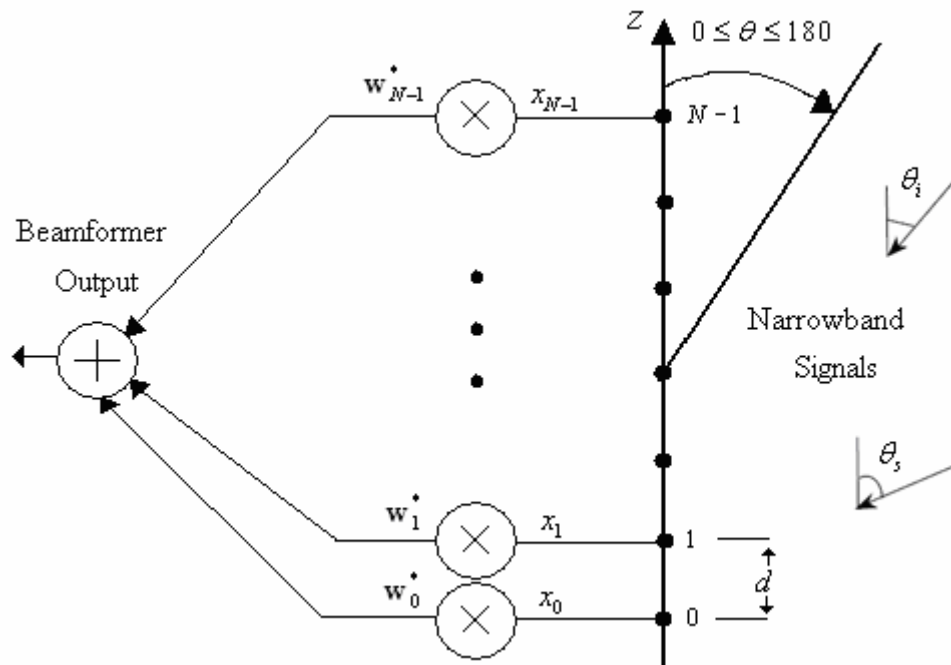
Οι δύο αυτές τεχνικές πολλές φορές δεν δίνουν τα ίδια αποτελέσματα. Η τεχνική MDL δίνει μια αμερόληπτη εκτίμηση του αριθμού των σημάτων, σε αντίθεση με την τεχνική AIC, άρα είναι προτιμότερη η χρήση της πρώτης τεχνικής σε πολλές εφαρμογές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Προσομοίωση και Αποτελέσματα

8.1. Εισαγωγή

Θεωρούμε ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία αποτελούμενη από $N=10$ στοιχεία τα οποία απέχουν μεταξύ τους απόσταση d . Υποθέτουμε ότι η στοιχειοκεραία λαμβάνει στενής ζώνης επίπεδα κύματα με μήκος κύματος $\lambda = 0.2$ m. Έτσι, αν χρησιμοποιήσουμε την σχέση $\frac{d}{\lambda} \leq \frac{1}{2}$, ορίζουμε την απόσταση μεταξύ των στοιχείων ίση με $d = \lambda/2 = 0.1$ m. Οι αισθητήρες των στοιχείων υποθέτουμε ότι λαμβάνουν επιθυμητό στοχαστικό σήμα RF, το οποίο έρχεται υπό γωνία $\theta_s = 30^\circ$ σε σχέση με τον γραμμικό άξονα z που σχηματίζουν τα στοιχεία και στοχαστικό σήμα RF παρεμβολής, το οποίο έρχεται υπό γωνία $\theta_i = 10^\circ$ ως προς τον ίδιο άξονα.



Σχήμα 8.1. Εφαρμογή ψηφιακού Beamforming σε ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία

Τα στοχαστικά σήματα εισόδου μετατρέπονται σε ψηφιακά μέσω ειδικών μετατροπέων και έτσι παράγονται αντίστοιχα τυχαία σύμβολα. Στα ψηφιακά σήματα εφαρμόζουμε ψηφιακή διαμόρφωση 4-PSK, ώστε να μετατραπούν σε ισοδύναμα σήματα βασικής ζώνης (μιαδικά σήματα). Η ισχύς του επιθυμητού σήματος θεωρούμε ότι είναι ίση με 0 dBw. Επιπλέον υποθέτουμε ότι στο σήμα εισόδου προστίθεται μιαδικός θόρυβος AWGN. Θεωρούμε ότι το SNR εισόδου είναι ίσο με 20 dB και το SIR εισόδου είναι ίσο με 10 dB, δηλαδή η ισχύς του θορύβου είναι -20 dB και η ισχύς της παρεμβολής είναι -10 dB σε σχέση με την ισχύ του επιθυμητού σήματος. Η προσομοίωση θα πραγματοποιηθεί στο MATLAB και οι τυπικές παράμετροι που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

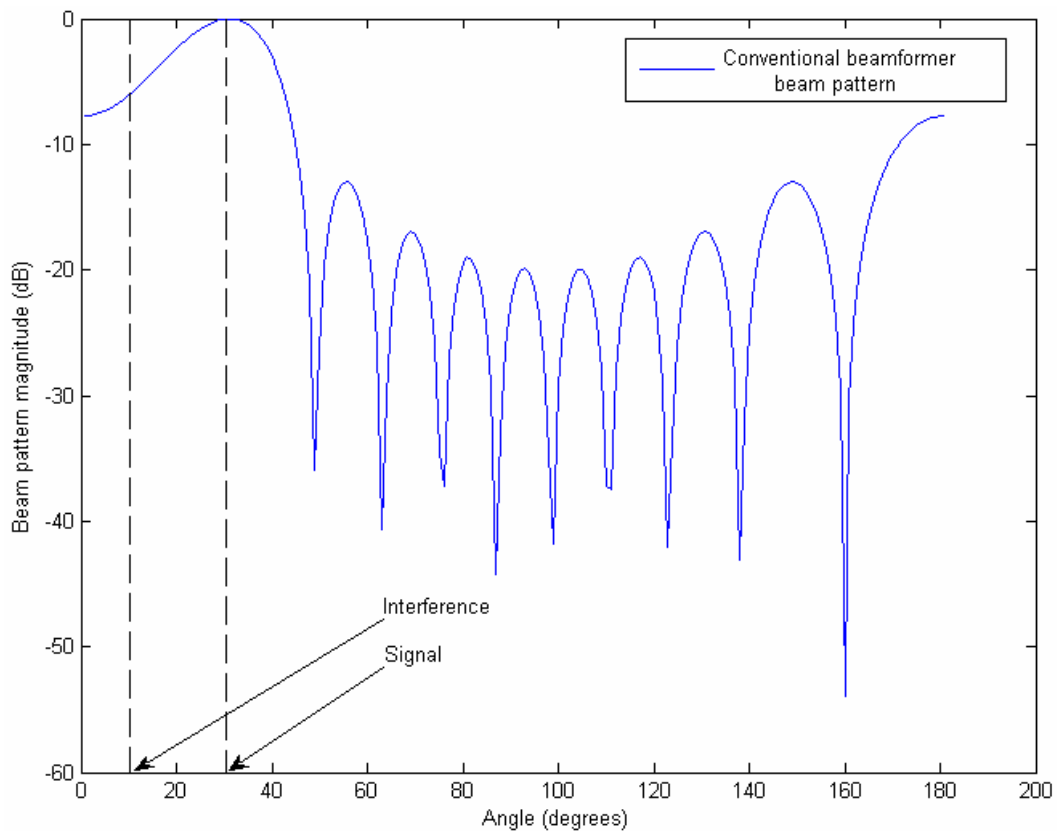
Πίνακας 8.1.

Τυπικές παράμετροι προσομοίωσης της διαδικασίας ψηφιακού Beamforming σε ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία

Παράμετροι	Τιμές
Συχνότητα φέροντος RF	$f_{RF} = 1.5 \text{ GHz}$
Μήκος κύματος	$\lambda = 0.2 \text{ m}$
Ψηφιακή διαμόρφωση	4-PSK
Αριθμός στοιχείων	$N = 10$
Απόσταση μεταξύ των στοιχείων	$d = \lambda / 2 = 0.1 \text{ m}$
Γωνία άφιξης επιθυμητού σήματος	$\theta_s = 30^\circ$
Γωνία άφιξης σήματος παρεμβολής	$\theta_i = 10^\circ$
SNR εισόδου	20 dB
SIR εισόδου	10 dB
INR εισόδου	10 dB
SINR εισόδου	9.5861 dB

8.2. Μελέτη της Επίδοσης του Συμβατικού Beamformer

Αρχικά θα μελετήσουμε την επίδοση του συμβατικού beamformer. Παρακάτω παρουσιάζεται το διάγραμμα ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας, μετά τη διαδικασία προσομοίωσης. Παρατηρούμε ότι, ενώ το κέρδος στην κατεύθυνση του επιθυμητού σήματος είναι μέγιστο (0 dB), ο συμβατικός beamformer δεν έχει καλή απόδοση παρουσία παρεμβολών και θορύβου και δεν καταστέλλει ικανοποιητικά την παρεμβολή. Επιπλέον σύμφωνα με την προσομοίωση στο MATLAB το κέρδος κεραίας είναι ίσο με 6.0739 dB και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι ίσο με 0.0276. Τα παραπάνω μεγέθη δεν είναι ικανοποιητικά σε σχέση με αυτά των βέλτιστων beamformers που θα δούμε στη συνέχεια και επαληθεύουν τις αρχικές παρατηρήσεις μας. Επιπλέον στη περίπτωση πολλαπλών παρεμβολών η μείωση της απόδοσης θα είναι ακόμα μεγαλύτερη. Στις επόμενες ενότητες θα προσομοιώσουμε τους βέλτιστους και τους προσαρμοστικούς beamformers, οι οποίοι παρουσιάζουν καλύτερα χαρακτηριστικά.



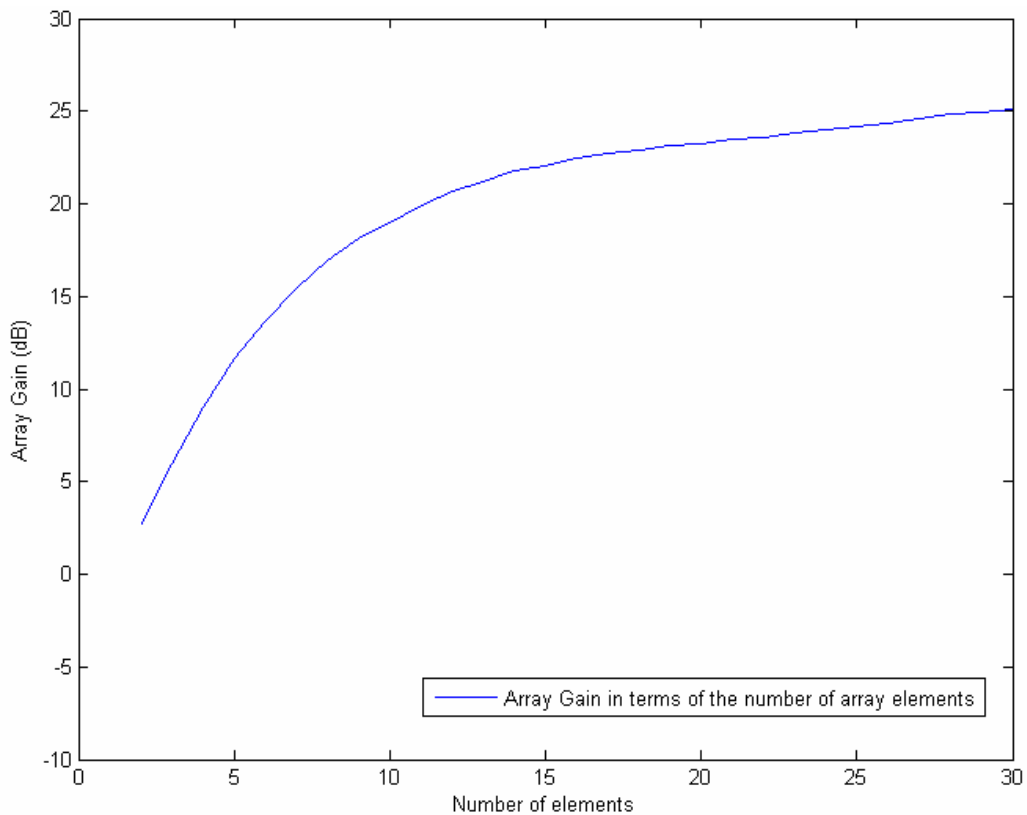
Σχήμα 8.2. Το διάγραμμα ακτινοβολίας του συμβατικού beamformer

8.3. Μελέτη της Επίδοσης των Βέλτιστων Beamformers

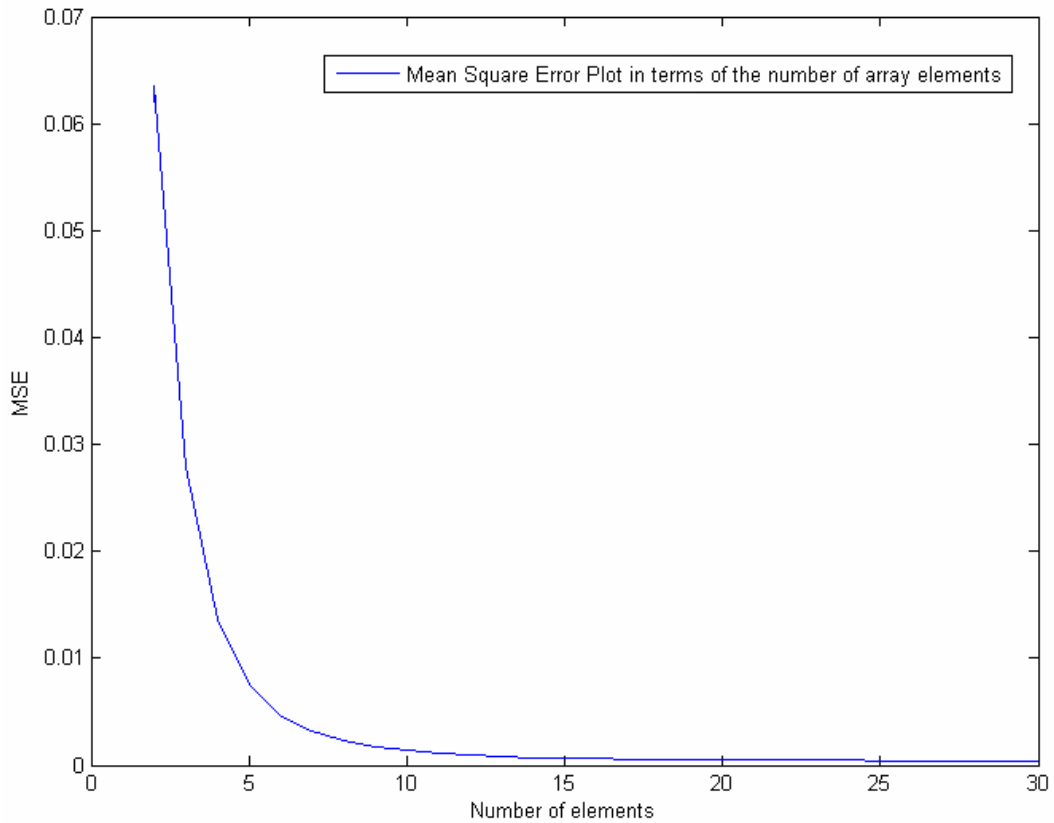
Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την επίδοση των βέλτιστων beamformers, αν μεταβληθούν οι βασικές παράμετροί τους. Στο κεφάλαιο 5 αποδείξαμε ότι όλοι οι βέλτιστοι beamformers είναι ισοδύναμοι και έτσι θα επιλέξουμε τυχαία τον beamformer MVDR για την προσομοίωση των συστημάτων.

8.3.1. Διαφορετικός αριθμός στοιχείων

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την επίδοση του συστήματος για διαφορετικό αριθμό στοιχείων. Θεωρούμε ότι ο αριθμός των στοιχείων μεταβάλλεται και παίρνει τιμές από 2 έως 30. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι καμπύλες απόδοσης μετά από την προσομοίωση που πραγματοποιήσαμε.



Σχήμα 8.3. Το κέρδος κεραίας σε συνάρτηση με τον αριθμό των στοιχείων



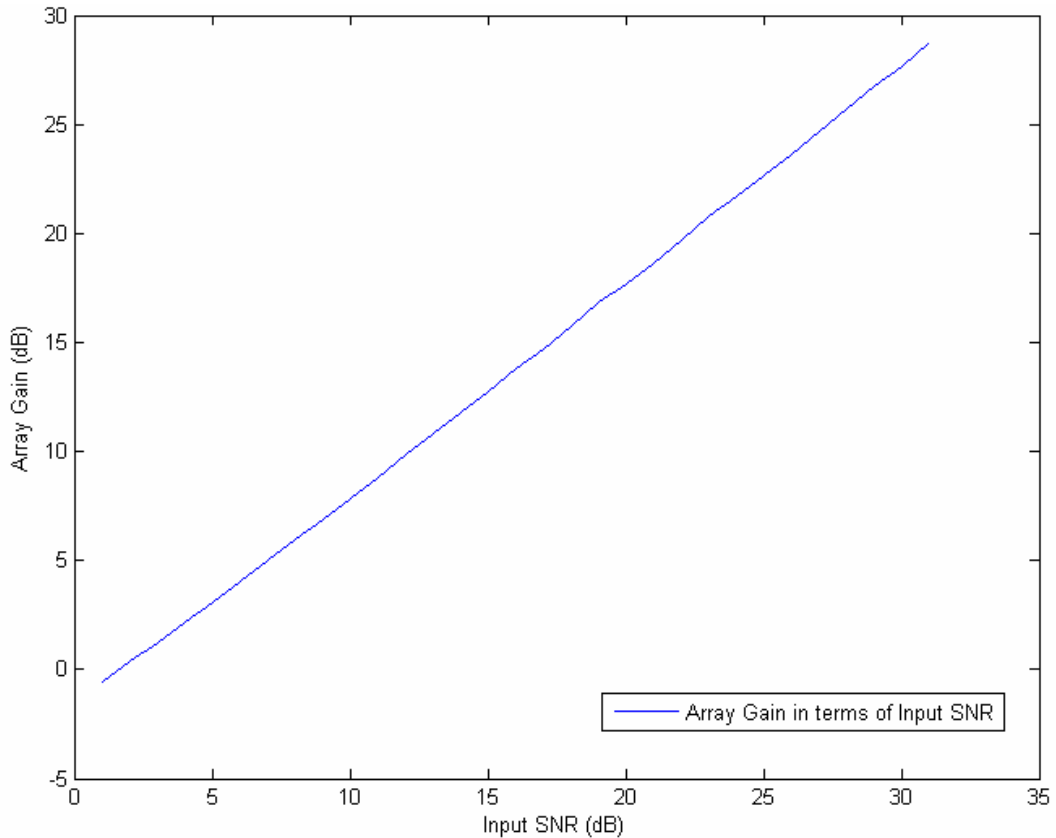
Σχήμα 8.4. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα σε συνάρτηση με τον αριθμό των στοιχείων

Παρατηρούμε ότι η απόδοση της στοιχειοκεραίας βελτιώνεται εκθετικά με την αύξηση του αριθμού των στοιχείων. Για $N > 10$ η βελτίωση της απόδοσης είναι μικρή και έτσι δεν προτείνεται μεγαλύτερος αριθμός στοιχείων σε πρακτικές εφαρμογές, αφού θα μπορούσε να ανεβάσει σημαντικά το κόστος υλοποίησης και θα απαιτούσε μεγάλου μήκους στοιχειοκεραίες.

Στην προσομοίωση θεωρούμε ως τυπική τιμή του αριθμού των στοιχείων την τιμή 10, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε στις επόμενες προσομοιώσεις. Τότε το βέλτιστο κέρδος κεραίας είναι ίσο με 19.5702 dB και το βέλτιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι ίσο με 0.0014.

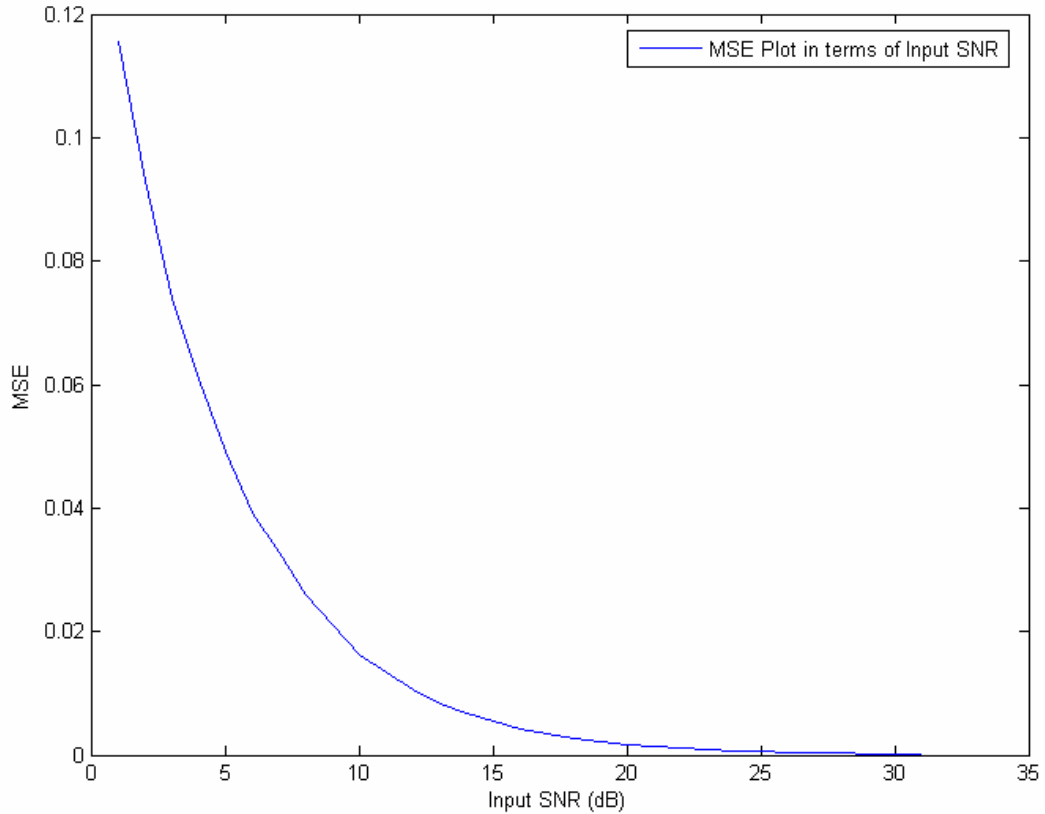
8.3.2. Διαφορετικό SNR εισόδου

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την επίδοση του συστήματος για διαφορετικό SNR εισόδου.



Σχήμα 8.5. Το κέρδος κεραίας σε συνάρτηση με το SNR εισόδου

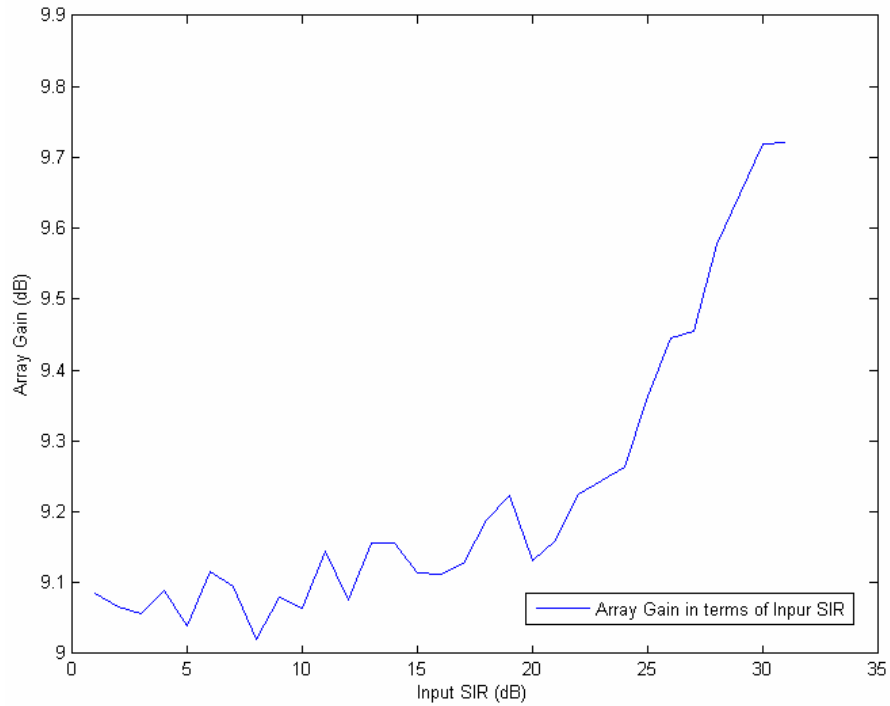
Όπως βλέπουμε στις καμπύλες απόδοσης, η αύξηση του SNR αυξάνει γραμμικά το κέρδος κεραίας του βέλτιστου beamformer και ελαττώνει εκθετικά το μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Η επιλογή, οπότε, του κατάλληλου SNR στην προσομοίωση είναι ιδιαίτερα κρίσιμη και μεταβάλλει σημαντικά την απόδοση. Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, θεωρούμε τυπική τιμή του SNR τα 20 dB.



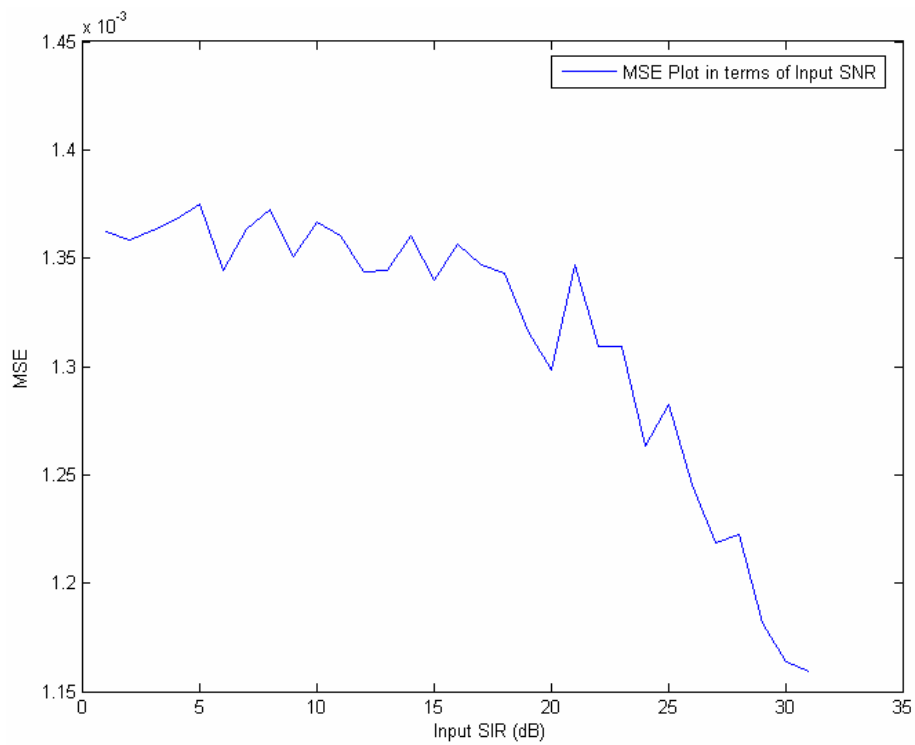
Σχήμα 8.6. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα σε συνάρτηση με το SNR εισόδου

8.3.3. Διαφορετικό SIR εισόδου

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την επίδοση του συστήματος για διαφορετικό SIR εισόδου. Θεωρούμε ότι το SIR αυξάνεται γραμμικά και φτάνει μέχρι τη τιμή των 20 dB. Παρακάτω παρουσιάζονται οι καμπύλες απόδοσης. Παρατηρούμε ότι το SIR δεν επηρεάζει σημαντικά την απόδοση του βέλτιστου beamformer, αφού η διαφορά στις επιδόσεις είναι πολύ μικρή. Έτσι συμπεραίνουμε ότι οι βέλτιστοι beamformers καταστέλλουν αποτελεσματικά τις παρεμβολές και η επιλογή του κατάλληλου SIR στην προσομοίωση δεν είναι ιδιαίτερα κρίσιμη. Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, θεωρούμε τυπική τιμή του SIR τα 10 dB.



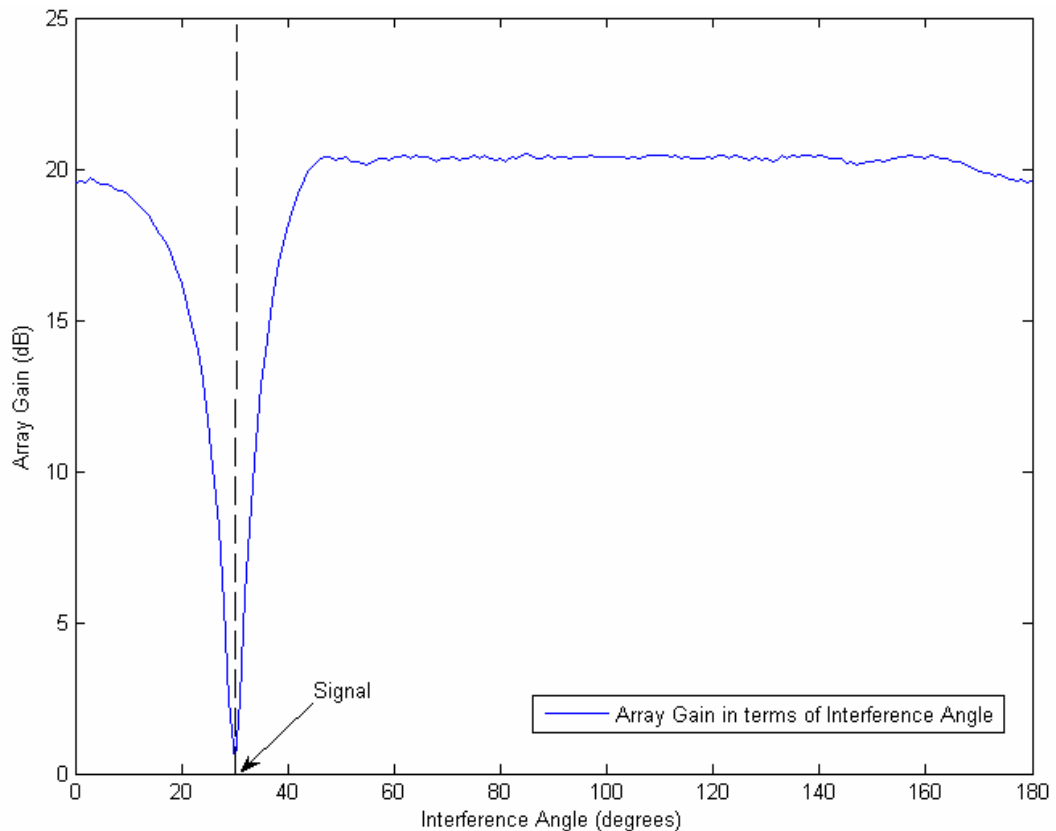
Σχήμα 8.7. Το κέρδος κεραίας σε συνάρτηση με το SIR εισόδου



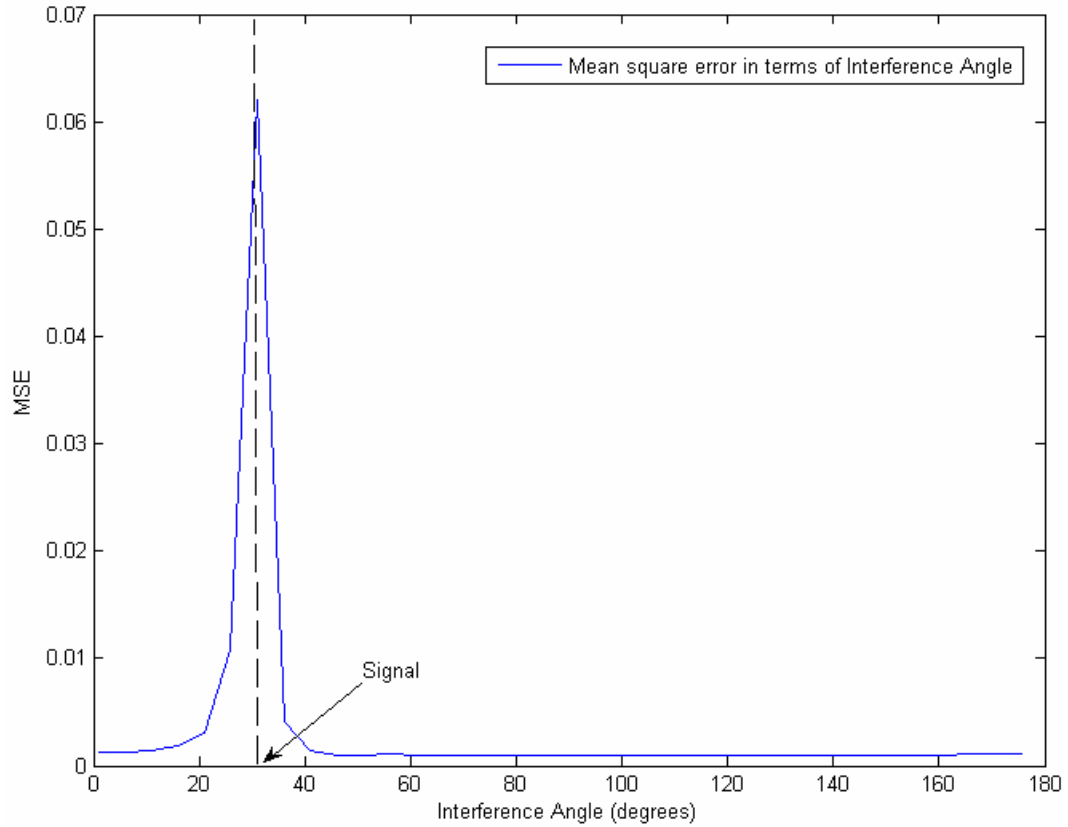
Σχήμα 8.8. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα σε συνάρτηση με το SIR εισόδου

8.3.4. Διαφορετική γωνία παρεμβολής

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την επίδοση του συστήματος όταν αλλάζει η γωνία της παρεμβολής. Παρακάτω παρουσιάζονται οι καμπύλες απόδοσης. Παρατηρούμε ότι όταν η γωνία παρεμβολής γίνει ίση με τη γωνία του σήματος ($\Delta\theta = 0$) το κέρδος κεραίας ελαχιστοποιείται και αντίστοιχα το μέσο τετραγωνικό σφάλμα μεγιστοποιείται.



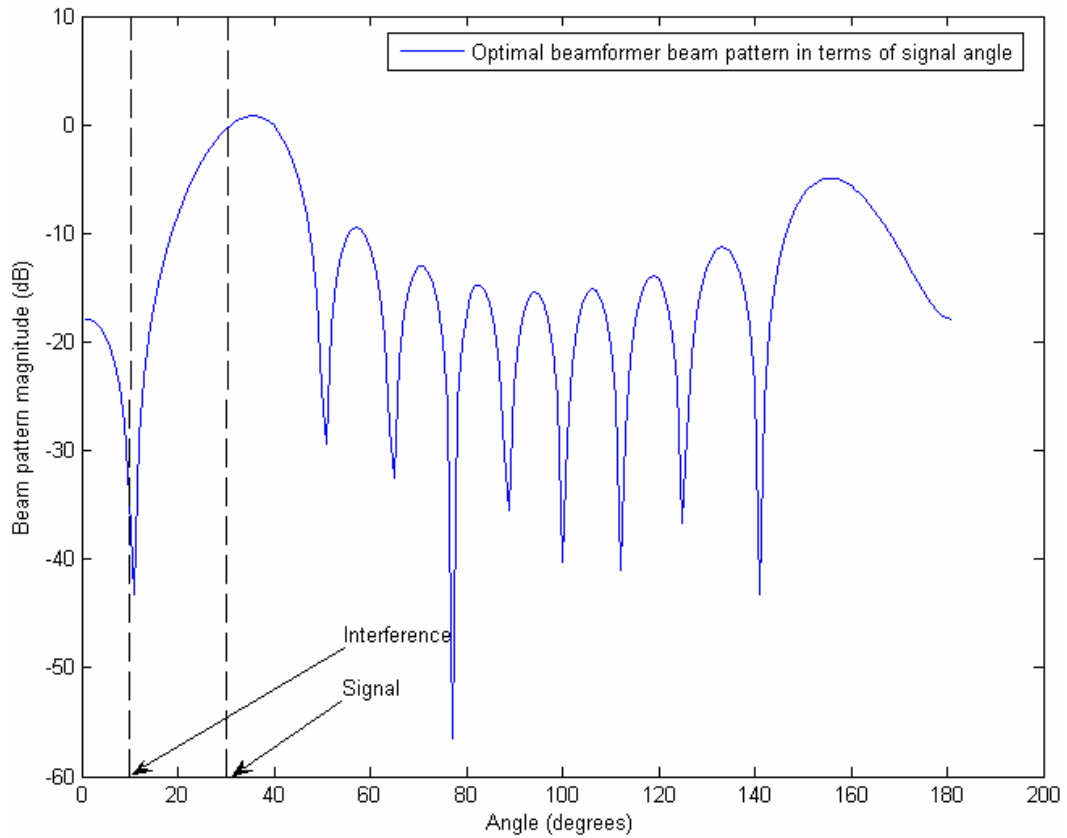
Σχήμα 8.9. Το κέρδος κεραίας σε συνάρτηση με τη γωνία της παρεμβολής



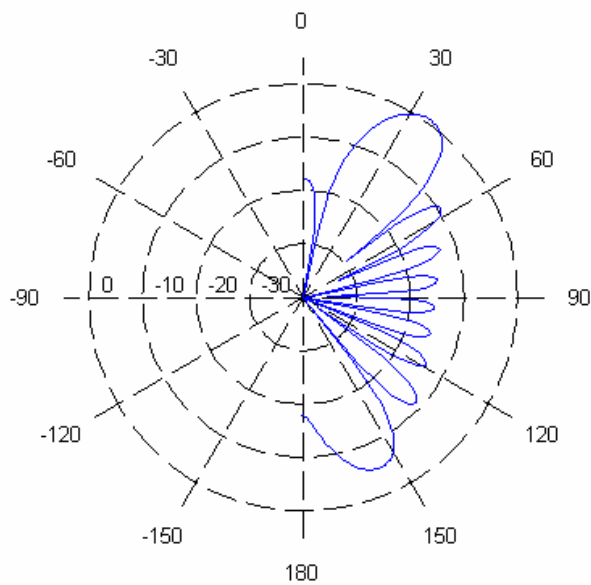
Σχήμα 8.10. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα σε συνάρτηση με τη γωνία της παρεμβολής

8.3.5. Διάγραμμα και πολικό διάγραμμα ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας

Παρακάτω παρουσιάζονται η καμπύλη του διαγράμματος ακτινοβολίας σε συνάρτηση με τη γωνία εισόδου των λαμβανόμενων σημάτων, καθώς και το πολικό διάγραμμα ακτινοβολίας. Παρατηρούμε ότι ο βέλτιστος beamformer παρουσιάζει μέγιστο κέρδος (0 dB) στη γωνία $\theta_s = 30^\circ$ του σήματος (λοβός) και ελάχιστο κέρδος (-43 dB) στη γωνία $\theta_i = 10^\circ$ της παρεμβολής (μηδενισμός).



Σχήμα 8.11. Το διάγραμμα ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας σε συνάρτηση με τη γωνία εισόδου των λαμβανόμενων σημάτων στην περίπτωση μιας πηγής παρεμβολής

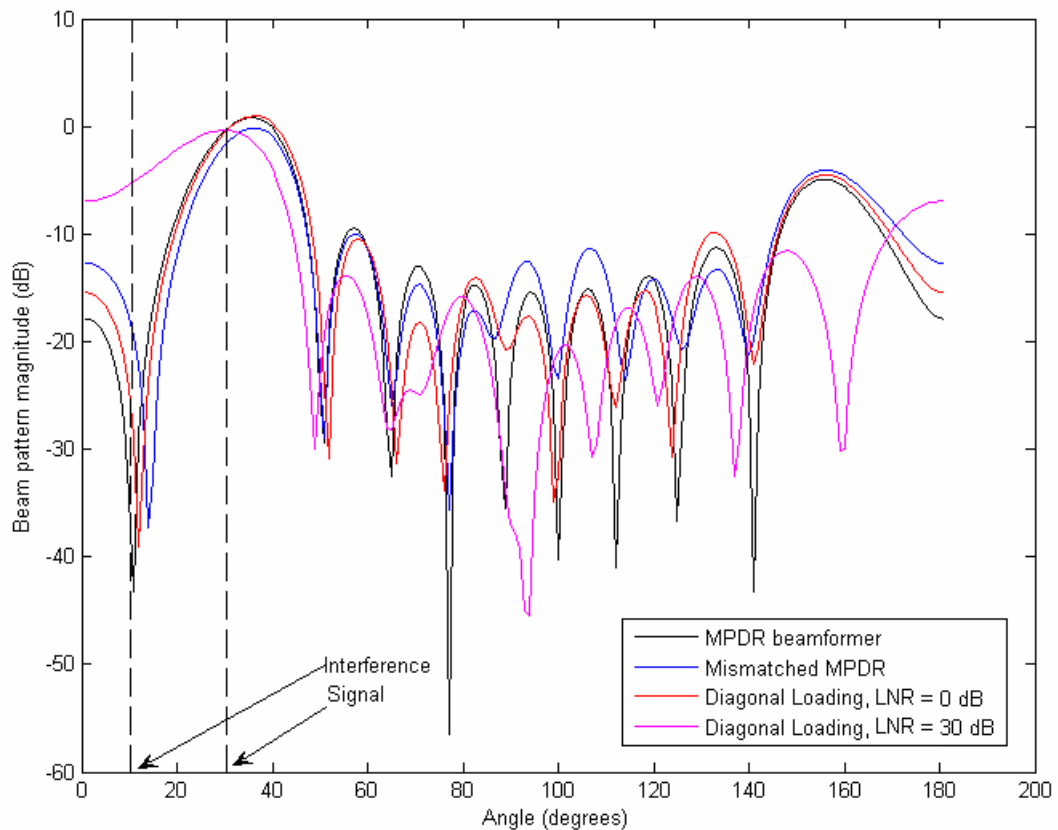


Σχήμα 8.12. Το πολικό διάγραμμα ακτινοβολίας στην περίπτωση μιας πηγής παρεμβολής

8.3.6. Επίδοση των βέλτιστων beamformers παρουσία σφαλμάτων

Θεωρούμε ότι υπάρχει διαφοροποίηση στα χαρακτηριστικά και τη γεωμετρία της στοιχειοκεραίας, δηλαδή σφάλμα κέρδους ή/και φάσης ή/και εσφαλμένη θέση των αισθητήρων, τα οποία αλλοιώνουν τη βέλτιστη λύση που δίνει ο beamformer MPDR, δηλαδή το διάνυσμα των βαρών δεν είναι το σωστό και έτσι έχουμε μειωμένη απόδοση. Οι διαταραχές της στοιχειοκεραίας θεωρούμε ότι είναι σταθερές κατά την διάρκεια της δειγματοληψίας και ότι έχουν Gaussian κατανομή με μηδενική μέση τιμή και απόκλιση (Deviation) $\sigma_p = 0.02$.

Προκειμένου ο beamformer να γίνει εύρωστος θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο του διαγώνιου φορτίου για $\sigma_L = 0.1$ και θα προσομοιώσουμε το σύστημα.



Σχήμα 8.13. Σύγκριση του διαγράμματος ακτινοβολίας του beamformer MPDR πριν και μετά τη χρήση της μεθόδου του διαγώνιου φορτίου

Στο διάγραμμα ακτινοβολίας παρατηρούμε ότι όταν το LNR είναι ίσο με 0 dB τότε $LNR < INR$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε αποτελεσματικότερη καταστολή της παρεμβολής και προσεγγίζουμε ικανοποιητικά τον βέλτιστο MPDR beamformer. Παρουσία σφαλμάτων το κέρδος κεραίας είναι ίσο με 9.3352 dB και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι ίσο με 0.0156, ενώ μετά την εφαρμογή της μεθόδου του διαγώνιου φορτίου το κέρδος κεραίας γίνεται ίσο με 16.3352 dB και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα γίνεται ίσο με 0.0026.

Αν το LNR γίνει ίσο με 30 dB, τότε $LNR = SNR + 10dB$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μικρότερα σφάλματα απόκρισης (0 dB κέρδος στην κατεύθυνση του επιθυμητού σήματος), αλλά δεν καταστέλλεται ικανοποιητικά η παρεμβολή με αποτέλεσμα το κέρδος της κεραίας να είναι ίσο με 7.6884 dB και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα να είναι ίσο με 0.0270 (επίδοση παρόμοια με αυτή του συμβατικού beamformer).

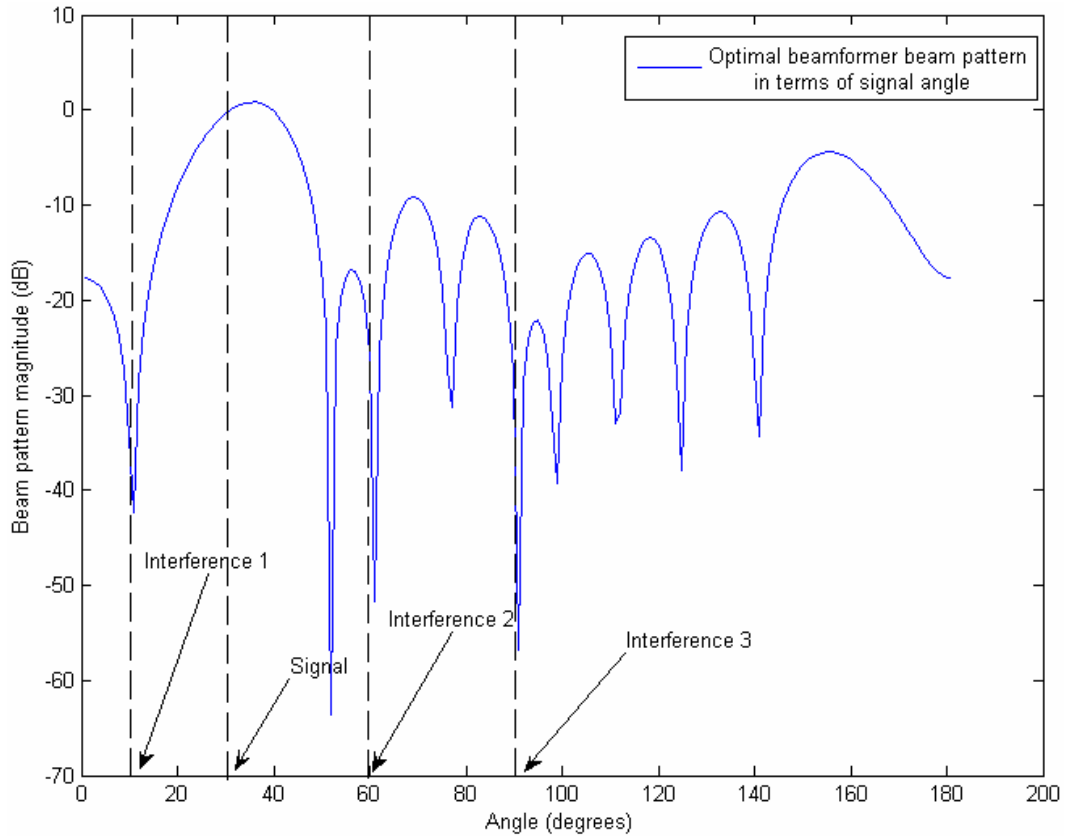
8.3.7. Επίδοση των βέλτιστων beamformers παρουσία πολλαπλών πηγών παρεμβολών

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι οι αισθητήρες των στοιχείων λαμβάνουν επιθυμητό στοχαστικό σήμα RF, το οποίο έρχεται υπό γωνία $\theta_s = 30^\circ$ σε σχέση με τον γραμμικό άξονα z που σχηματίζουν τα στοιχεία και τρία στοχαστικά σήματα RF παρεμβολών, τα οποία έρχονται υπό γωνία $\theta_{i1} = 10^\circ$, $\theta_{i2} = 60^\circ$ και $\theta_{i3} = 90^\circ$ ως προς τον ίδιο άξονα αντίστοιχα.

Όπως και στις προηγούμενες προσομοιώσεις θεωρούμε ότι η ισχύς του θορύβου είναι -20 dB και η ισχύς κάθε παρεμβολής είναι -10 dB σε σχέση με την ισχύ του επιθυμητού σήματος, δηλαδή το SNR είναι ίσο με 20 dB και το SIR είναι ίσο σε αυτή την περίπτωση με 5.2288 dB. Επίσης το SINR εισόδου είναι ίσο με 5.0864 dB.

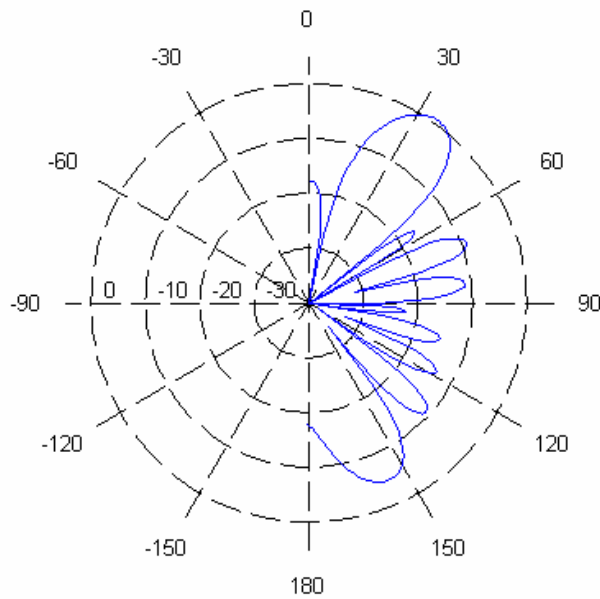
Όπως βλέπουμε στην καμπύλη του διαγράμματος ακτινοβολίας σε συνάρτηση με τη γωνία εισόδου των λαμβανόμενων σημάτων, ο βέλτιστος beamformer

παρουσιάζει μέγιστο κέρδος (0 dB) στη γωνία $\theta_s = 30^\circ$ του σήματος (λοβός) και ελάχιστο κέρδος (-43 , -64 και -57 dB) στις γωνίες $\theta_{i1} = 10^\circ$, $\theta_{i2} = 60^\circ$ και $\theta_{i3} = 90^\circ$ που αντιστοιχούν στα σήματα των παρεμβολών (μηδενισμοί).



Σχήμα 8.14. Το διάγραμμα ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας σε συνάρτηση με τη γωνία εισόδου των λαμβανόμενων σημάτων στην περίπτωση τριών πηγών παρεμβολών

Επιπλέον το βέλτιστο SINR εξόδου είναι ίσο με 28.4430 dB , το βέλτιστο κέρδος κεραίας είναι ίσο με 23.3566 dB και το βέλτιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι ίσο με 0.0014 . Στη συνέχεια παρουσιάζεται το πολικό διάγραμμα ακτινοβολίας.

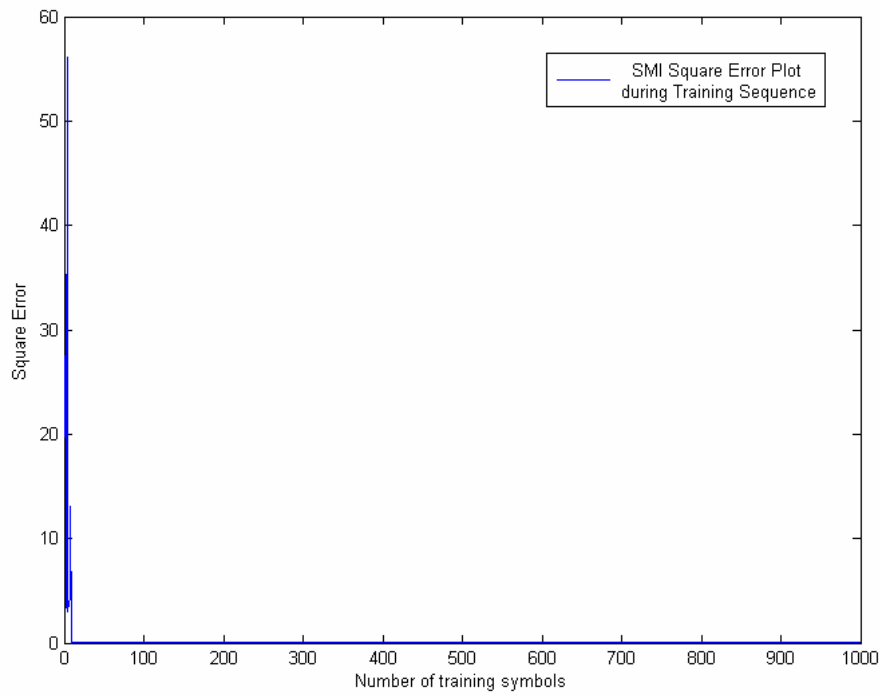


Σχήμα 8.15. Το πολικό διάγραμμα ακτινοβολίας στην περίπτωση τριών πηγών παρεμβολών

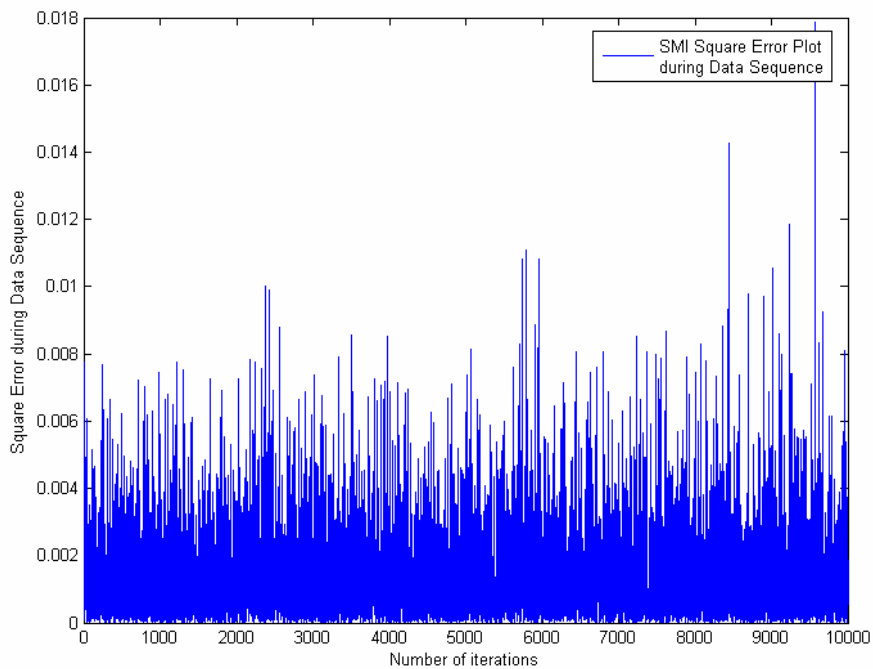
8.4. Μελέτη της Επίδοσης του Beamformer SMI

Ο πρώτος προσαρμοστικός beamformer που θα προσομοιώσουμε είναι ο beamformer SMI. Μας ενδιαφέρει η απόκλιση που παρουσιάζει σε σχέση με τους βέλτιστους. Στην διαδικασία εκμάθησης χρησιμοποιούμε 2000 σύμβολα εκπαίδευσης.

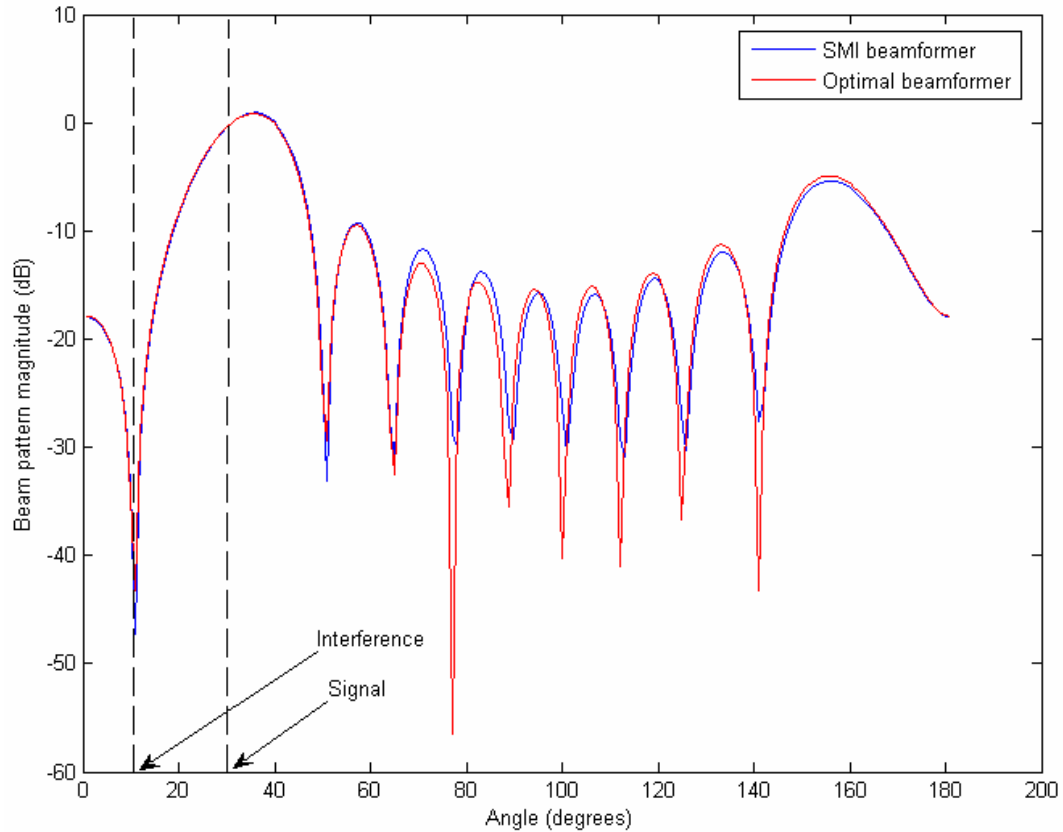
Παρακάτω απεικονίζονται τα γραφήματα του τετραγωνικού σφάλματος πριν και μετά την διαδικασία εκπαίδευσης. Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος είναι πολύ γρήγορος, μια και συγκλίνει στη βέλτιστη λύση για ελάχιστο αριθμό συμβόλων εκπαίδευσης. Επίσης μετά τη διαδικασία εκπαίδευσης το τετραγωνικό σφάλμα είναι ιδιαίτερα μικρό και το διάγραμμα ακτινοβολίας είναι πανομοιότυπο με αυτό των βέλτιστων beamformers. Επιπλέον το κέρδος κεραίας είναι ίσο με 19.0949 dB και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι ίσο με 0.0014. Όπως αναφέραμε, όμως, στο κεφάλαιο 6, ο αλγόριθμος αυτός υλοποιείται πολύ δύσκολα και έτσι έχει μικρή πρακτική εφαρμογή.



Σχήμα 8.16. Το τετραγωνικό σφάλμα στη διαδικασία εκμάθησης του *beamformer SMI*



Σχήμα 8.17. Το τετραγωνικό σφάλμα μετά τη διαδικασία εκμάθησης του *beamformer SMI*

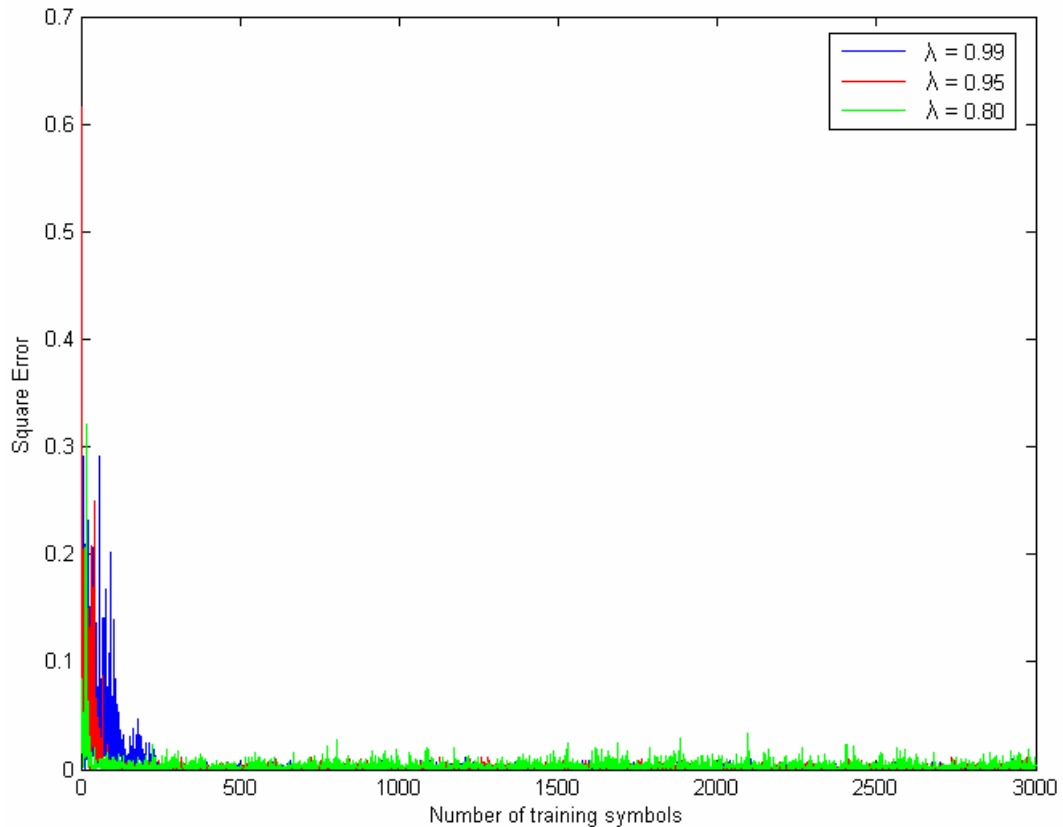


Σχήμα 8.18. Απόκλιση του διαγράμματος ακτινοβολίας του *beamformer* SMI σε σχέση με το βέλτιστο

8.5. Μελέτη της Επίδοσης του Beamformer RLS

Στη συνέχεια της προσομοίωσης θα μελετήσουμε διάφορες περιπτώσεις αλλαγής των βασικών παραμέτρων στον προσαρμοστικό beamformer RLS. Συγκεκριμένα θα εξετάσουμε την ταχύτητα σύγκλισης του αλγορίθμου και τις αποκλίσεις που παρουσιάζει σε σχέση με τους βέλτιστους beamformers.

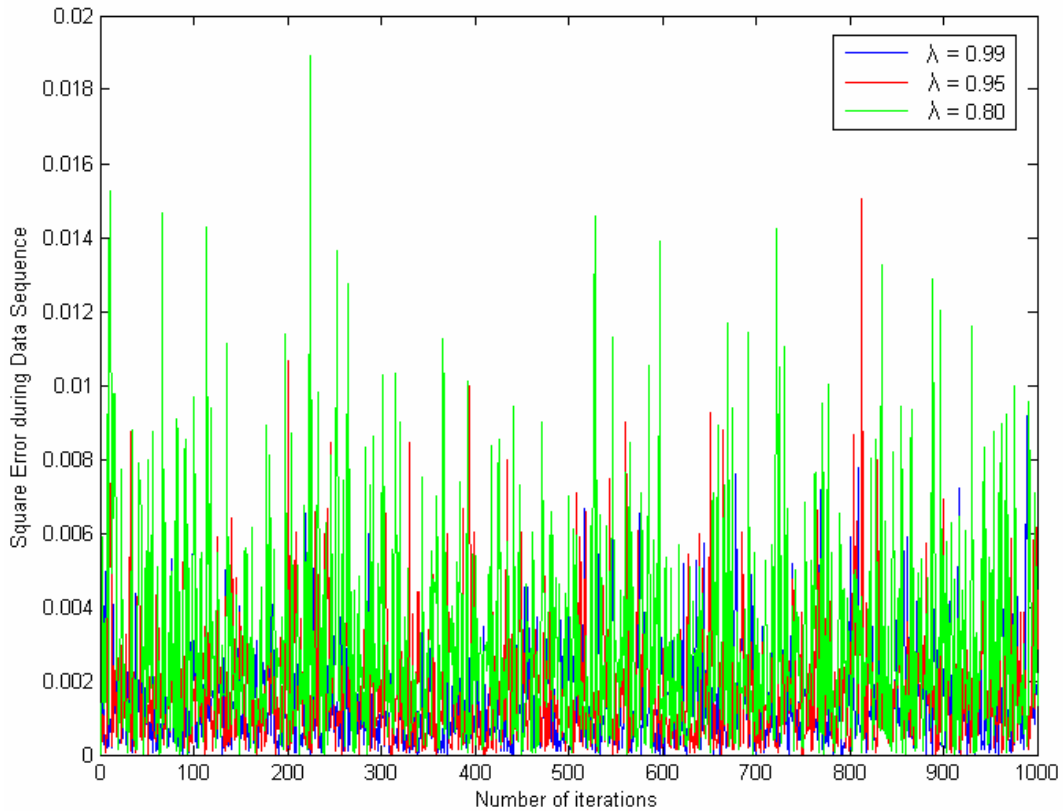
Στην προσομοίωση χρησιμοποιούμε 3000 σύμβολα εκπαίδευσης και προσομοιώνουμε το σύστημα για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου μνήμης λ . Παρακάτω απεικονίζονται τα γραφήματα του τετραγωνικού σφάλματος σε συνάρτηση με τον αριθμό των επαναλήψεων στην διαδικασία εκμάθησης για $\lambda = 0.99$, $\lambda = 0.95$ και $\lambda = 0.80$.



Σχήμα 8.19. Το τετραγωνικό σφάλμα στη διαδικασία εκμάθησης του *beamformer* RLS για $\lambda = 0.99$, $\lambda = 0.95$ και $\lambda = 0.80$

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει η τιμή της μνήμης λ η ταχύτητα σύγκλισης μειώνεται. Αυτό συμβαίνει γιατί κρατούνται στη μνήμη όλα τα λαμβανόμενα δεδομένα και έτσι αργεί η όλη διαδικασία. Βέβαια όσο μεγαλύτερο είναι το λ , τόσο πιο σταθερός και αξιόπιστος είναι ο αλγόριθμος, δηλαδή ελαχιστοποιείται ομαλότερα το τετραγωνικό σφάλμα και παρουσιάζονται λιγότερες διακυμάνσεις. Όταν $\lambda = 0.99$ έχουμε υλοποίηση μέγιστης μνήμης και διατηρούνται σχεδόν όλα τα δεδομένα.

Έτσι ο αλγόριθμος γίνεται ιδιαίτερα αργός αλλά παρουσιάζει μικρότερο σφάλμα (Excess Error), όπως φαίνεται παρακάτω στα διαγράμματα του τετραγωνικού σφάλματος μετά την διαδικασία εκμάθησης (διαδικασία λήψης δειγμάτων-συμβόλων) για τις 3 τιμές του λ και για 1,000 λαμβανόμενα σύμβολα.



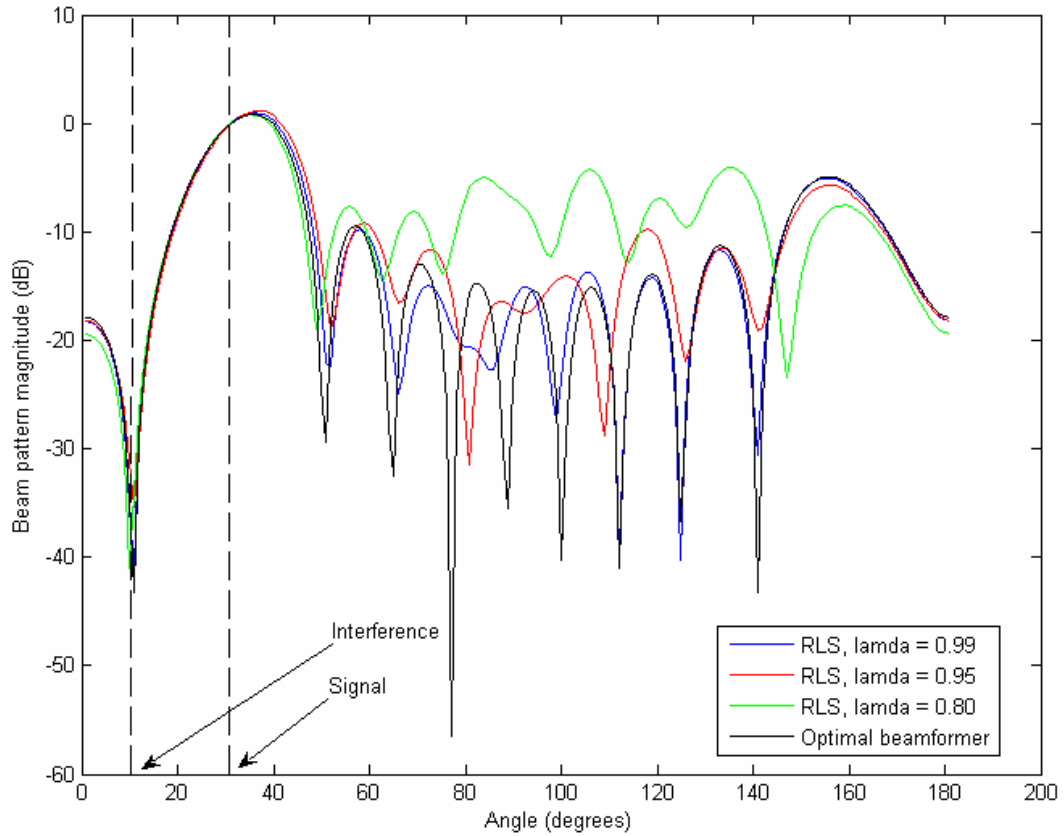
Σχήμα 8.20. Το τετραγωνικό σφάλμα μετά τη διαδικασία εκμάθησης του beamformer RLS για $\lambda = 0.99$, $\lambda = 0.95$ και $\lambda = 0.80$

Στον επόμενο πίνακα βλέπουμε τις τιμές του κέρδους κεραίας, τις τιμές του μέσου τετραγωνικού σφάλματος, τον αριθμό των εσφαλμένων συμβόλων και την πιθανότητα εμφάνισης εσφαλμένου συμβόλου στα 10,000,000 λαμβανόμενα σύμβολα.

Πίνακας 8.2.

Συμπεριφορά του αλγορίθμου RLS ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου λ

Τιμή της παραμέτρου λ	Κέρδος κεραίας	MSE	Εσφαλμένα σύμβολα	Πιθανότητα εμφάνισης εσφαλμένου συμβόλου
0.99	18.5879	0.0015	10	0,000001 ή 0,0001 %
0.95	18.3611	0.0016	30	0,000003 ή 0,0003 %
0.80	16.6065	0.0024	210	0,000021 ή 0,0021 %



Σχήμα 8.21. Απόκλιση του διαγράμματος ακτινοβολίας του *beamformer* RLS σε σχέση με τον βέλτιστο για $\lambda = 0.99$, $\lambda = 0.95$ και $\lambda = 0.80$

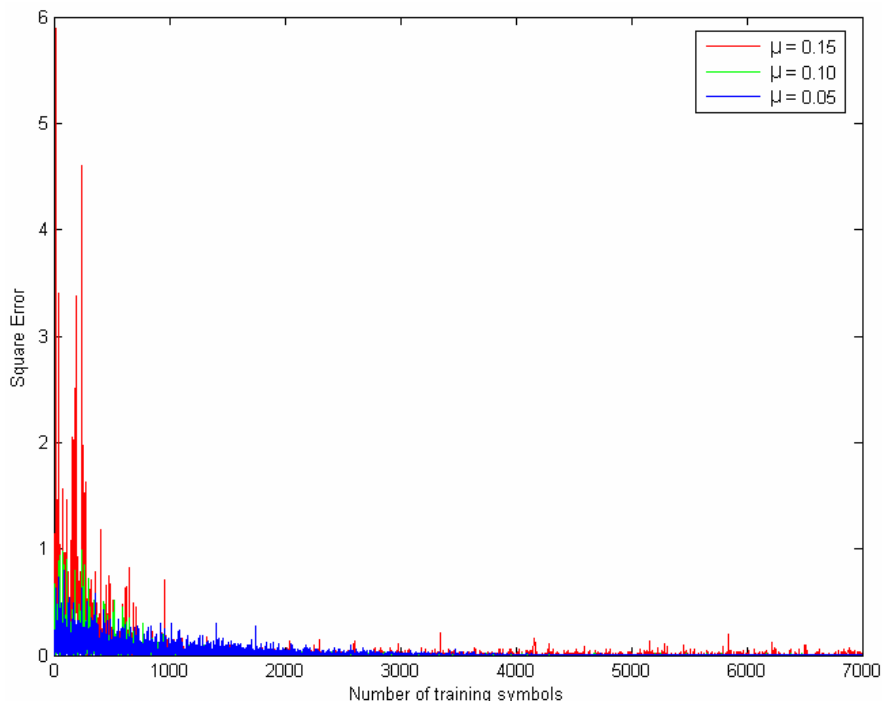
Όπως βλέπουμε στα διαγράμματα ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας για τις 3 τιμές της παραμέτρου, καλύτερη συμπεριφορά και μικρότερη απόκλιση έχουμε όταν $\lambda = 0.99$. Τότε, όμως, απαιτείται μεγάλη μνήμη αποθήκευσης όλων των λαμβανόμενων δεδομένων.

8.6. Μελέτη της Επίδοσης του Beamformer LMS

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε την ταχύτητα σύγκλισης του προσαρμοστικού beamformer LMS και τις αποκλίσεις που παρουσιάζει σε σχέση με τους βέλτιστους. Στην διαδικασία εκμάθησης χρησιμοποιούμε 9000 σύμβολα

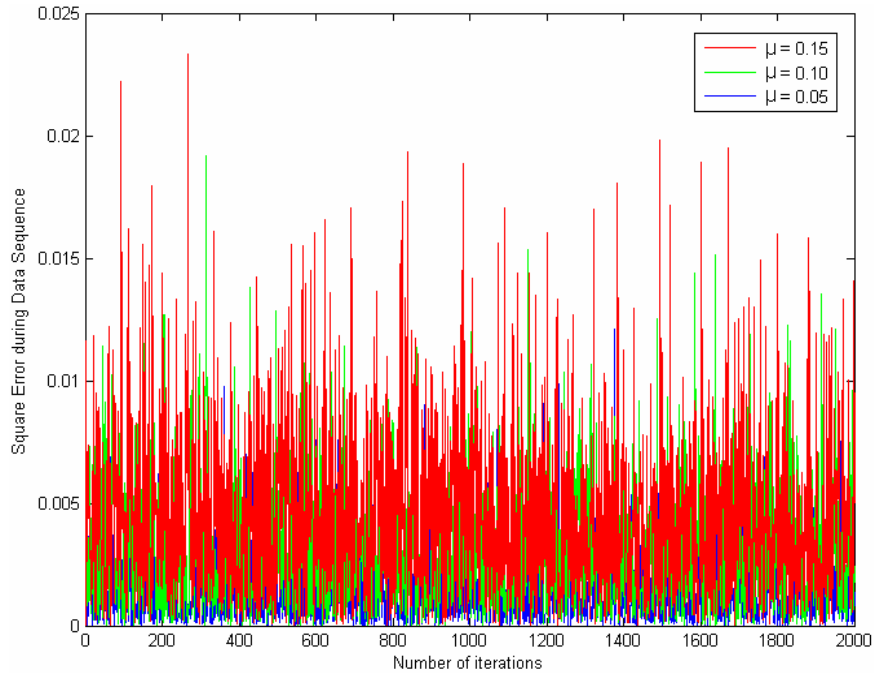
εκπαίδευσης και προσομοιώνουμε το σύστημα για διάφορες τιμές του βήματος μ . Η συμπεριφορά του beamformer LMS εξαρτάται από τις τιμές του πίνακα αυτοσυσχέτισης των λαμβανόμενων δεδομένων. Πρέπει να ισχύει $0 < \mu < 2/\lambda_{\max}$, όπου λ_{\max} η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα αυτοσυσχέτισης. Υπολογίζουμε στο MATLAB (εντολή eig) ότι $\lambda_{\max} = 10.2965$, άρα πρέπει $0 < \mu < 0.1942$.

Παρακάτω απεικονίζονται τα γραφήματα του τετραγωνικού σφάλματος σε συνάρτηση με τον αριθμό των συμβόλων εκπαίδευσης για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου μ . Ειδικότερα προσομοιώνουμε το σύστημα για $\mu = 0.15$, $\mu = 0.10$ και $\mu = 0.05$. Παρατηρούμε ότι για $\mu = 0.15$ το τετραγωνικό σφάλμα είναι σημαντικά μεγαλύτερο. Όσο το μ μειώνεται, ελαχιστοποιείται ομαλότερα το τετραγωνικό σφάλμα και ο αλγόριθμος γίνεται πιο σταθερός, παρουσιάζοντας λιγότερες διακυμάνσεις. Έτσι επαληθεύουμε ότι η μείωση της τιμής του βήματος μ μειώνει την ταχύτητα σύγκλισης, αλλά αυξάνει την σταθερότητα και την αξιοπιστία του αλγορίθμου.



Σχήμα 8.22. Το τετραγωνικό σφάλμα στη διαδικασία εκμάθησης του beamformer LMS για $\mu = 0.15$, $\mu = 0.10$ και $\mu = 0.05$

Κατόπιν παρουσιάζονται τα γραφήματα του τετραγωνικού σφάλματος μετά την εκπαίδευση (διαδικασία λήψης δειγμάτων-συμβόλων) για τις 3 τιμές του μ και για 7,000 λαμβανόμενα σύμβολα. Παρατηρούμε ότι όσο μειώνεται το μ , τόσο ελαχιστοποιείται το τετραγωνικό σφάλμα (Excess Error).



Σχήμα 8.23. Το τετραγωνικό σφάλμα μετά τη διαδικασία εκμάθησης του beamformer LMS για $\mu = 0.15$, $\mu = 0.10$ και $\mu = 0.05$

Επιπλέον στο ψηφιακό Beamforming ιδιαίτερη σημασία έχει ο αριθμός των εσφαλμένων συμβόλων (ή bits), δηλαδή η διαφορά του επιθυμητού αποδιαμορφωμένου σήματος από το αποδιαμορφωμένο σήμα εξόδου της στοιχειοκεραίας. Συγκεκριμένα μας ενδιαφέρει η πιθανότητα εμφάνισης εσφαλμένων συμβόλων (Symbol Error Probability), η οποία είναι ίση με:

$$P(\text{errsym}) = \frac{\# \text{ error symbols}}{\text{total symbols}}$$

Στον επόμενο πίνακα βλέπουμε τις τιμές του κέρδους κεραίας, τις τιμές του μέσου τετραγωνικού σφάλματος, τον αριθμό των εσφαλμένων συμβόλων και την πιθανότητα εμφάνισης εσφαλμένου συμβόλου στα 10,000,000 λαμβανόμενα σύμβολα.

Πίνακας 8.3.

Συμπεριφορά του αλγορίθμου LMS ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου μ

Τιμή της παραμέτρου μ	Κέρδος κεραίας	MSE	Εσφαλμένα σύμβολα	Πιθανότητα εμφάνισης εσφαλμένου συμβόλου
0.15	12.0005	0.0069	130	0,000013 ή 0,0013 %
0.10	15.1428	0.0034	70	0,000007 ή 0,0007 %
0.05	17.0964	0.0021	30	0,000003 ή 0,0003 %

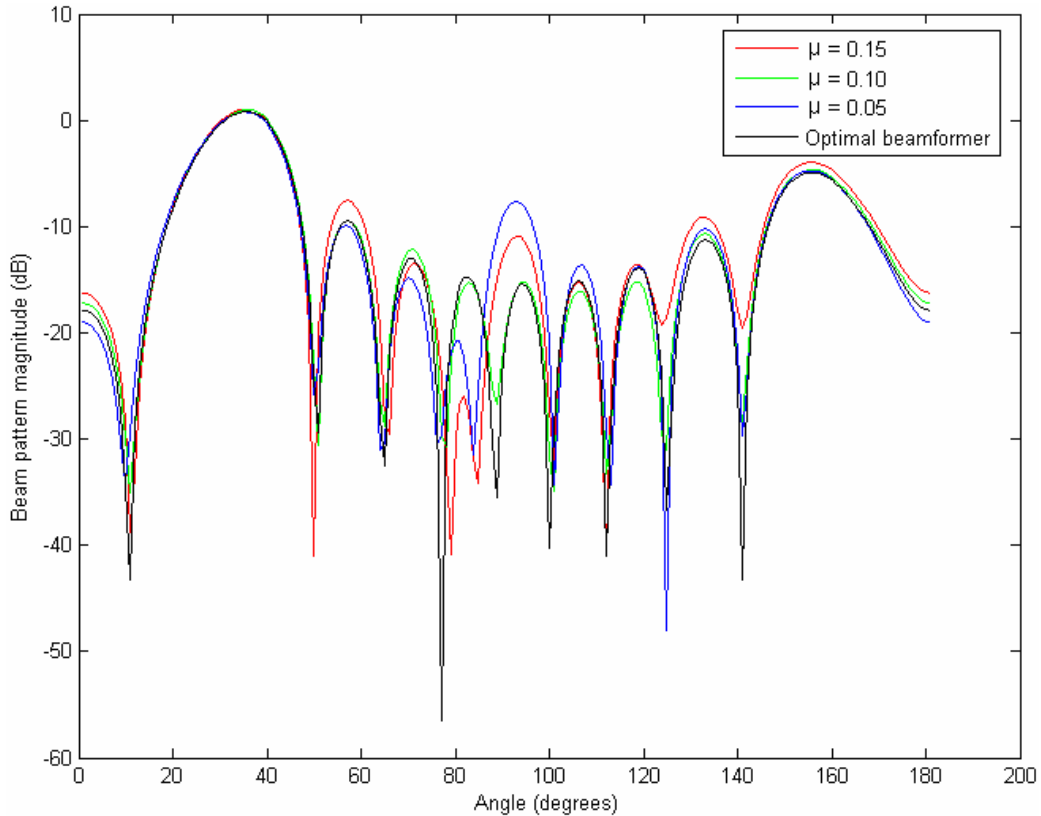
Πρέπει να τονίσουμε ότι για κάθε παράμετρο μ απαιτείται ικανοποιητικός αριθμός λαμβανόμενων συμβόλων εκπαίδευσης, διαφορετικά δεν επιτυγχάνεται σύγκλιση στη βέλτιστη λύση. Παρακάτω βλέπουμε την συμπεριφορά του αλγορίθμου LMS στην περίπτωση που γίνεται ιδιαίτερα αργός, δηλαδή αν $\mu = 0.05$ και για διάφορες τιμές λαμβανόμενων συμβόλων εκπαίδευσης.

Πίνακας 8.4.

Συμπεριφορά του αλγορίθμου LMS για $\mu = 0.05$
και διαφορετικό αριθμό συμβόλων εκπαίδευσης

Σύμβολα εκπαίδευσης	Κέρδος κεραίας	MSE	Εσφαλμένα σύμβολα	Πιθανότητα εμφάνισης εσφαλμένου συμβόλου
2000	5.5010	0.0310	330	0,000033 ή 0,0033 %
4000	12.2654	0.0043	190	0,000019 ή 0,0019 %
6000	15.3531	0.0029	70	0,000003 ή 0,0003 %

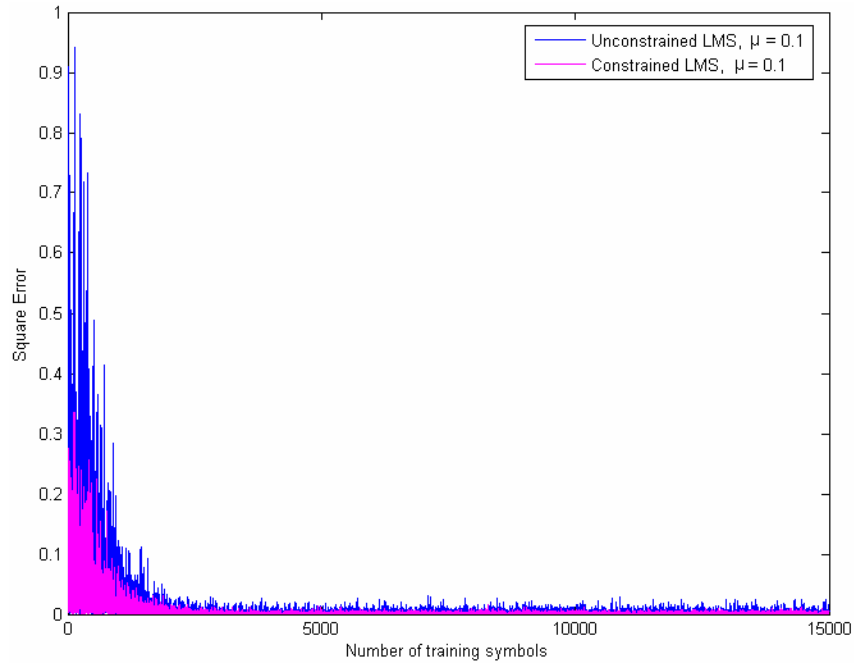
Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα διαγράμματα ακτινοβολίας για τις 3 τιμές της παραμέτρου μ και συγκρίνονται με αυτά του βέλτιστου beamformer. Καλύτερη συμπεριφορά και μικρότερη απόκλιση έχουμε, όπως ήταν αναμενόμενο, όταν $\mu = 0.05$.



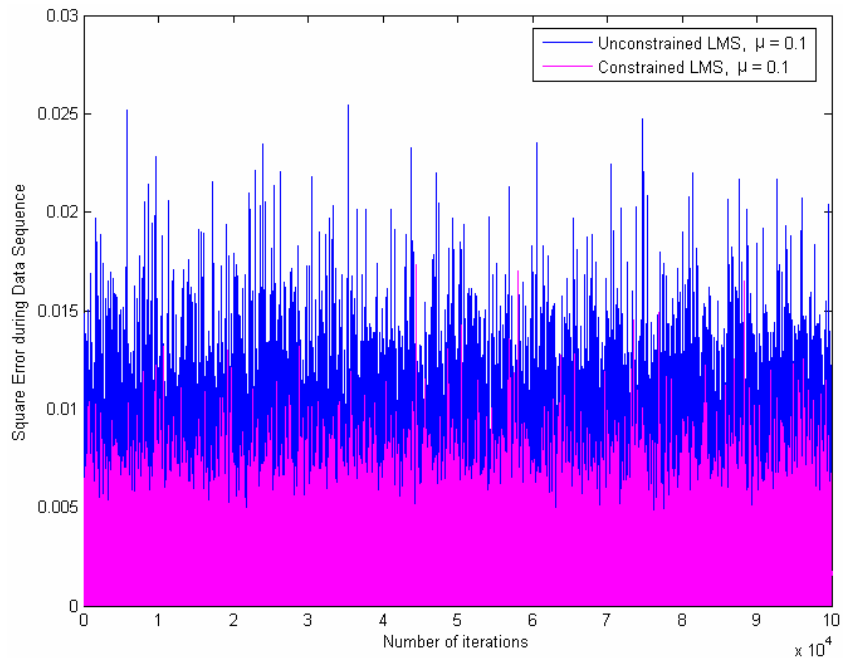
Σχήμα 8.24. Απόκλιση του διαγράμματος ακτινοβολίας του beamformer LMS σε σχέση με το βέλτιστο για $\mu = 0.15$, $\mu = 0.10$ και $\mu = 0.05$

8.6.1. Μελέτη της επίδοσης του beamformer LMS με περιορισμούς

Ο beamformer LMS με περιορισμούς απαιτεί σταθερό κέρδος σε κάθε επανάληψη (σε κάθε λήψη νέου συμβόλου). Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται το διάγραμμα ακτινοβολίας του beamformer αυτού στην περίπτωση που το κέρδος είναι ίσο με 1. Παρατηρούμε ότι ο beamformer LMS με περιορισμούς παρουσιάζει σημαντικά καλύτερη επίδοση και προσεγγίζει τις επιδόσεις των βέλτιστων beamformers.

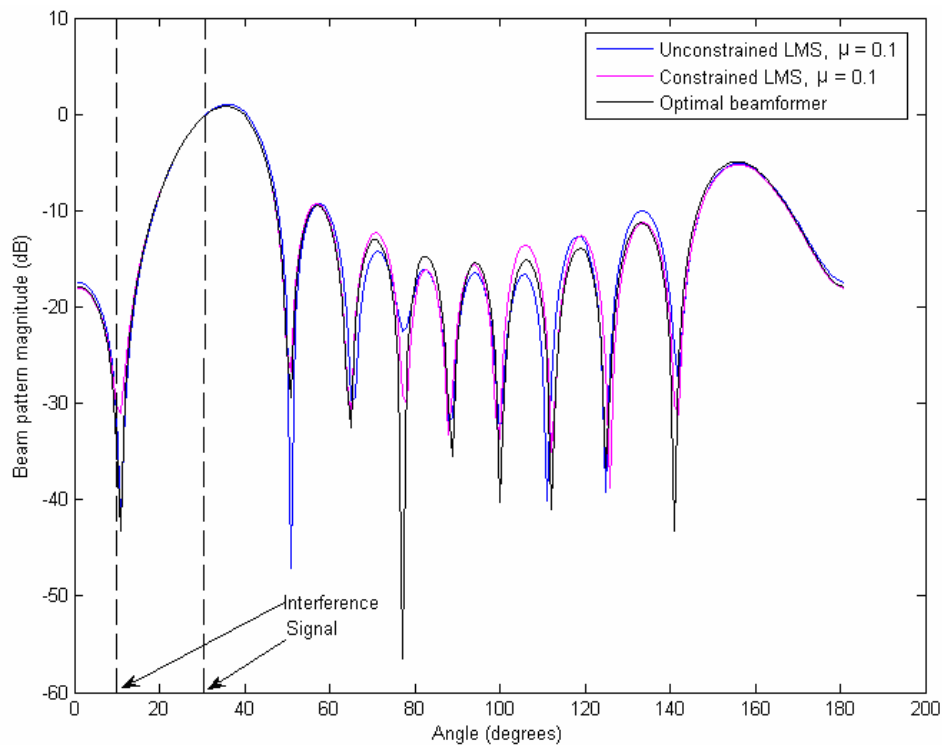


Σχήμα 8.25. Σύγκριση της ταχύτητας σύγκλισης του *beamformer LMS* με περιορισμούς και του *beamformer LMS* χωρίς περιορισμούς για $\mu = 0.1$



Σχήμα 8.26. Το τετραγωνικό σφάλμα μετά τη διαδικασία εκμάθησης του *beamformer LMS* με περιορισμούς και του *beamformer LMS* χωρίς περιορισμούς για $\mu = 0.1$

Επιπλέον κέρδος κεραίας είναι ίσο με 18.8666 και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι ίσο με 0.0014. Επίσης παρουσιάζεται η σύγκριση της ταχύτητας σύγκλισης του beamformer LMS με περιορισμούς και του beamformer LMS χωρίς περιορισμούς για $\mu = 0.1$. Παρατηρούμε ότι ο beamformer LMS με περιορισμούς παρουσιάζει μικρότερο σφάλμα και μεγαλύτερη ταχύτητα σύγκλισης.



Σχήμα 8.27. Απόκλιση του διαγράμματος ακτινοβολίας του beamformer LMS με περιορισμούς σε σχέση με το διάγραμμα ακτινοβολίας του beamformer LMS χωρίς περιορισμούς για $\mu = 0.1$

8.7. Μελέτη της Επίδοσης των Αλγορίθμων MUSIC και ESPRIT

Στην ενότητα αυτή θα προσομοιάσουμε τους αλγόριθμους MUSIC (Root-MUSIC λόγω θεώρησης στοιχειοκεραίας ULA) και ESPRIT και θα εξετάσουμε την απόδοσή τους, δηλαδή την ακρίβεια προσδιορισμού της γωνίας άφιξης των

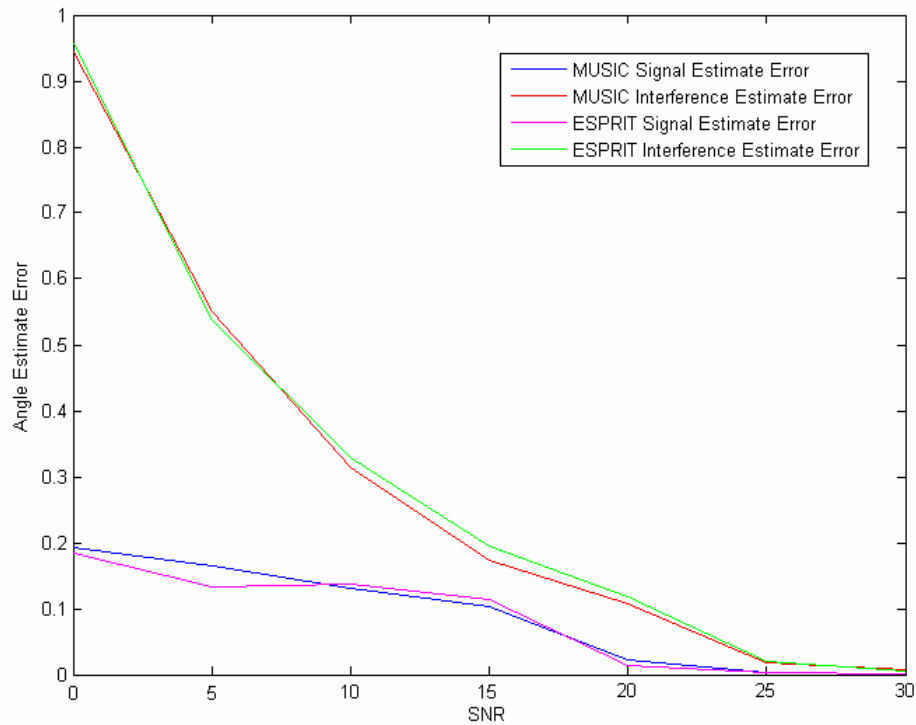
λαμβανόμενων σημάτων. Αρχικά υποθέτουμε ότι η στοιχειοκεραία λαμβάνει ένα επιθυμητό σήμα και ένα σήμα παρεμβολής. Οι ονομαστικές τιμές των γωνιών άφιξης κάθε σήματος είναι 30° και 10° αντίστοιχα. Στους επόμενους πίνακες παρουσιάζεται η επίδοση των αλγορίθμων για διαφορετικό SNR (3,000 λαμβανόμενα σύμβολα) και για διαφορετικό αριθμό λαμβανόμενων συμβόλων (20 dB σταθερό SNR) στην διαδικασία εκτίμησης του πίνακα αυτοσυσχέτισης \mathbf{R} . Στις γραφικές που ακολουθούν απεικονίζεται το σφάλμα συναρτήσεως του SNR.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, οι αλγόριθμοι MUSIC και ESPRIT εμφανίζουν παρόμοια απόδοση και λειτουργούν ικανοποιητικά, όταν το SNR και ο αριθμός των λαμβανόμενων συμβόλων προσδιορισμού του πίνακα αυτοσυσχέτισης έχουν σχετικά μεγάλες τιμές. Η αύξηση, δηλαδή, του SNR και του αριθμού των λαμβανόμενων συμβόλων οδηγεί σε ακριβέστερες εκτιμήσεις των γωνιών άφιξης των σημάτων και ιδιαίτερα της γωνίας άφιξης του σήματος παρεμβολής. Απαιτείται, όμως, σε κάθε περίπτωση ο συνολικός αριθμός των σημάτων να είναι μικρότερος από τον αριθμό των στοιχείων (στην περίπτωση μας μικρότερος από 10).

Πίνακας 8.5.

Αποτελέσματα προσομοίωσης των αλγορίθμων MUSIC και ESPRIT για διαφορετικό SNR

SNR	MUSIC		ESPRIT	
	Εκτιμώμενη γωνία σήματος	Εκτιμώμενη γωνία παρεμβολής	Εκτιμώμενη γωνία σήματος	Εκτιμώμενη γωνία παρεμβολής
0	29.8074	10.9430	29.8154	10.9566
5	30.1648	9.4498	29.8675	9.4626
10	29.8684	10.3148	30.1365	9.6714
15	29.8970	10.1729	29.8856	10.1957
20	29.9782	9.8923	30.0128	9.8817
25	30.0035	9.9828	30.0026	10.0210
30	29.9992	9.9936	30.0005	9.9945

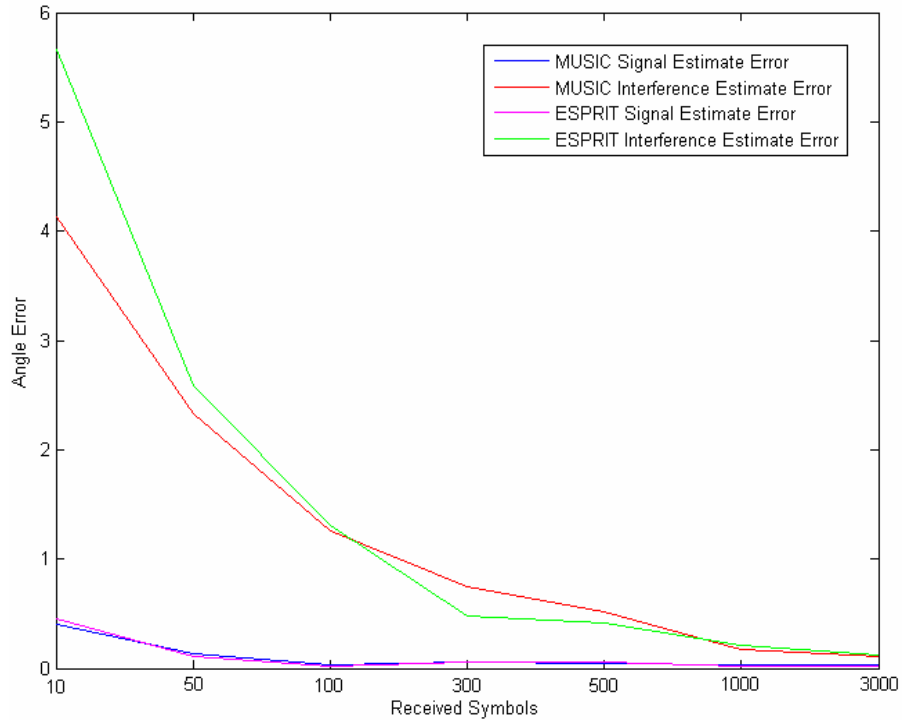


Σχήμα 8.28. Σφάλμα εκτίμησης των γωνιών άφιξης των σημάτων των αλγορίθμων MUSIC και ESPRIT συναρτήσει του SNR

Πίνακας 8.6.

Αποτελέσματα προσομοίωσης των αλγορίθμων MUSIC και ESPRIT για διαφορετικό αριθμό λαμβανόμενων συμβόλων

Λαμβανόμενα Σύμβολα	MUSIC		ESPRIT	
	Εκτιμώμενη γωνία σήματος	Εκτιμώμενη γωνία παρεμβολής	Εκτιμώμενη γωνία σήματος	Εκτιμώμενη γωνία παρεμβολής
10	29.5993	5.8673	29.5444	4.3346
50	30.1386	7.6697	30.1072	7.4134
100	30.0321	8.7396	30.0139	8.6944
300	29.9407	9.2548	29.9418	9.5266
500	29.9521	10.5112	29.9441	10.4113
1000	29.9634	9.8308	29.9749	9.7954
3000	30.0282	10.1123	30.0128	10.1217



Σχήμα 8.29. Σφάλμα εκτίμησης των γωνιών άφιξης των σημάτων των αλγορίθμων *MUSIC* και *ESPRIT* συναρτήσει του αριθμού των λαμβανόμενων συμβόλων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Συμπεράσματα

9.1. Εισαγωγή

Σκοπός της διπλωματικής αυτής εργασίας ήταν η θεωρητική, σε βάθος μελέτη και προσομοίωση των ψηφιακών τεχνικών χωρικής διαμόρφωσης του διαγράμματος ακτινοβολίας των στοιχειοκεραιών στα ασύρματα συστήματα επικοινωνιών.

Ειδικότερα, εξηγήσαμε πως η εξέλιξη των τεχνικών αυτών μπορεί να ικανοποιήσει τις ανάγκες των σύγχρονων συστημάτων για αυξημένη χωρητικότητα και βελτιωμένη ποιότητα των παρεχόμενων υπηρεσιών. Επιπλέον οι τεχνικές μπορούν να προάγουν την πολλά υποσχόμενη τεχνολογία των ευφών κεραιών.

Αρχικά μελετήσαμε τη δομή, το σχεδιασμό και την λειτουργία των συστημάτων ψηφιακού Beamforming και εξηγήσαμε τον τρόπο, με τον οποίο μπορούν να χρησιμοποιηθούν, ώστε να εφαρμοστούν αποτελεσματικά οι τεχνολογίες πολλαπλής πρόσβασης και ιδιαίτερα η τεχνική SDMA. Όπως είδαμε, τα συστήματα αυτά απαιτούν την συνύπαρξη τόσο ψηφιακών, όσο και αναλογικών βαθμίδων.

Επιπλέον οι ψηφιακές τεχνικές Beamforming στηρίζονται, όπως αναφέραμε στις τεχνικές της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος και στην τεχνολογία των στοιχειοκεραιών. Ειδικότερα είναι επιθυμητή η βελτίωση της βαθμίδας των ψηφιακών φίλτρων, τα οποία υλοποιούν προηγμένους αλγόριθμους. Στην εργασία αυτή εξετάσαμε σε πρώτη φάση τους βέλτιστους ψηφιακούς χωρικούς διαμορφωτές (MMSE, MVDR, MPDR), οι οποίοι θεωρούν ότι το περιβάλλον διάδοσης είναι γνωστό και μη μεταβαλλόμενο.

Αν και οι βέλτιστοι beamformers δεν παρουσιάζουν πρακτική σημασία, λόγω της παρουσίας διαλείψεων και μεταβαλλόμενων παρεμβολών σε ένα πραγματικό ασύρματο σύστημα επικοινωνιών, η μελέτη τους μας βοήθησε, ώστε να θέσουμε ένα άνω όριο στην μέγιστη επίδοση των συστημάτων και να το

χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια στους προσαρμοστικούς αλγόριθμους. Τους αλγόριθμους αυτούς τους συγκρίναμε με βάση τη ταχύτητα σύγκλισης στη βέλτιστη λύση, τις υπολογιστικές απαιτήσεις, την πολυπλοκότητα, τις αποκλίσεις και την ευρωστία τους.

Τέλος ασχοληθήκαμε με τους αλγόριθμους εκτίμησης της κατεύθυνσης άφιξης των εισερχομένων σημάτων και τους αλγόριθμους εκτίμησης του αριθμού των σημάτων, οι οποίοι σε πραγματικές συνθήκες μας βοηθούν να αποκτήσουμε πληροφορίες σχετικά με τα συνολικά σήματα που λαμβάνει η στοιχειοκεραία.

9.2 Συμπεράσματα της προσομοίωσης

Η εξέταση των συστημάτων ψηφιακού Beamforming έγινε, όπως είδαμε τόσο σε θεωρητικό επίπεδο, όσο και σε επίπεδο μοντελοποίησης και προσομοίωσης του όλου συστήματος. Το εργαλείο προσομοίωσης που χρησιμοποιήθηκε ήταν το MATLAB, το οποίο μας έδωσε την δυνατότητα μοντελοποίησης πολλών διαφορετικών συνιστωσών που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και συνθέτουν το συνολικό ασύρματο σύστημα επικοινωνιών, συμβάλλοντας στην τελική επίδοση του.

Για την αξιολόγηση της συμπεριφοράς των συστημάτων στην μεταβολή των συνθηκών διάδοσης του σήματος η προσομοίωση πραγματοποιήθηκε για διάφορες συνθήκες περιβάλλοντος. Σε πρώτη φάση λάβαμε υπόψη την επίδραση του λευκού προσθετικού θορύβου και μίας πηγής παρεμβολής. Σε αρχικό επίπεδο παρατηρήθηκε απόλυτη συμφωνία των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης με τα θεωρητικά, επιβεβαιώνοντας την σωστή σχεδίαση και ρύθμιση των παραμέτρων λειτουργίας του συστήματος. Διαπιστώσαμε ότι η αύξηση του αριθμού των στοιχείων της στοιχειοκεραίας αυξάνει εκθετικά την επίδοση. Επιπλέον συμπεράναμε ότι το SNR εισόδου έχει μεγάλη σημασία, σε αντίθεση με το SIR. Αυτό σημαίνει ότι οι βέλτιστοι beamformers καταστέλλουν αποτελεσματικά την πηγή παρεμβολής. Στα ίδια συμπεράσματα καταλήξαμε όταν προσομοιώσαμε το σύστημα, λαμβάνοντας υπόψη τρεις πηγές παρεμβολών.

Στην περίπτωση που έχουμε παρουσία σφαλμάτων, η προσομοίωση μας οδήγησε στο συμπέρασμα ότι η εφαρμογή κάποιας ειδικής μεθόδου διόρθωσης και ελάττωσης του σφάλματος μπορεί να επιφέρει είτε ικανοποιητική καταστολή των παρεμβολών, είτε μικρότερα σφάλματα απόκρισης. Είναι δηλαδή πρακτικά αδύνατη η πλήρης προσαρμογή του διαγράμματος ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας, ιδιαίτερα παρουσία μεγάλου αριθμού σφαλμάτων.

Στη συνέχεια προσομοιώσαμε και εξετάσαμε λεπτομερώς τους προσαρμοστικούς αλγορίθμους SMI, RLS και LMS. Ο αλγόριθμος SMI είναι ιδιαίτερα απαιτητικός σε υπολογιστική ισχύ, αλλά παρουσιάζει τα καλύτερα αποτελέσματα, συγκρινόμενος με τους άλλους δύο. Η απόκλιση του διαγράμματος ακτινοβολίας του σε σχέση με αυτό του βέλτιστου beamformer είναι αμελητέα και η ταχύτητα σύγκλισης είναι πολύ μεγάλη, αφού απαιτείται ελάχιστος αριθμός δειγμάτων εκπαίδευσης. Ο αλγόριθμος RLS ξεχωρίζει για την ταχύτητα του, τον μικρό αριθμό σφαλμάτων και την μικρή πιθανότητα εμφάνισης εσφαλμένου συμβόλου, ενώ ο αλγόριθμος LMS διακρίνεται για την απλότητα του, τις μειωμένες υπολογιστικές απαιτήσεις, αλλά παρουσιάζει έντονη εξάρτηση από τις ιδιοτιμές του πίνακα αυτοσυσχέτισης. Βελτιωμένη απόδοση παρουσιάζει ο αλγόριθμος LMS με περιορισμούς, όπως είδαμε στην προσομοίωση.

Στην προσομοίωση των αλγορίθμων εκτίμησης της κατεύθυνση άφιξης των σημάτων MUSIC και ESPRIT δείξαμε ότι οι αλγόριθμοι αυτοί λειτουργούν ικανοποιητικά όταν ο αριθμός των λαμβανόμενων σημάτων είναι μικρότερος του αριθμού των στοιχείων, το SNR είναι σχετικά μεγάλο και ο αριθμός των δειγμάτων προσδιορισμού του πίνακα αυτοσυσχέτισης είναι ικανοποιητικός.

9.3. Προτάσεις για περαιτέρω μελέτη

Οι προτάσεις για περαιτέρω μελέτη και έρευνα περιλαμβάνουν την επέκταση των προσομοιώσεων, των μοντελοποιήσεων και των πειραματισμών σε συστήματα με διαφορετικές ψηφιακές διαμορφώσεις, διαφορετικά είδη σημάτων και διαφορετικά περιβάλλοντα διάδοσης. Είναι, δηλαδή, σημαντικό να εξεταστεί

η συμπεριφορά των αλγορίθμων σε πραγματικά περιβάλλοντα διάδοσης, όπου ο αριθμός και η κατεύθυνση άφιξης των παρεμβολών μεταβάλλεται και το επιθυμητό σήμα είναι χωρικά διεσπαρμένο. Σε αυτή την περίπτωση ο συνολικός αριθμός των λαμβανόμενων σημάτων μπορεί να υπερβεί τον αριθμό $N-1$ που μπορεί να διαχειριστεί και να ελέγξει ικανοποιητικά η στοιχειοκεραία. Τότε είναι απαραίτητη η χρήση περισσότερο προηγμένων και πολύπλοκων αλγορίθμων και μοντέλων εκτίμησης του φάσματος, όπως είναι τα αυτοπαλίνδρομα (Auto Regressive-AR) μοντέλα χωρικής και φασματικής εκτίμησης, τα μοντέλα κινούμενου μέσου (Moving Average-MA) και ο συνδυασμός αυτών (Auto Regressive Moving Average-ARMA).

Προτείνεται επιπλέον η μελέτη περισσότερων μεθόδων διόρθωσης των σφαλμάτων απόκρισης, ώστε να βελτιωθεί η ευρωστία των βέλτιστων και προσαρμοστικών beamformers, καθώς και η μελέτη της συμπεριφοράς συστημάτων, τα οποία συνδυάζουν διάφορους τύπους προσαρμοστικών αλγορίθμων. Στην δεύτερη περίπτωση αλληλοκαλύπτονται οι αδυναμίες και τα μειονεκτήματα κάθε προσαρμοστικού αλγορίθμου και προάγονται τα πλεονεκτήματα του.

Επίσης είναι πολύ ενδιαφέρουσα η μελέτη αλγορίθμων και αρχιτεκτονικών που λειτουργούν παράλληλα και αλληλοσυμπληρώνονται. Όπως είδαμε τα προσαρμοστικά φίλτρα είναι ιδιαίτερα απαιτητικά σε υπολογιστική ισχύ και συνήθως το υπολογιστικό φορτίο περιορίζει την πρακτική εφαρμογή τους. Αν και η πρόοδος της τεχνολογίας έχει συμβάλλει στην αύξηση της ταχύτητας των επεξεργαστών ψηφιακού σήματος των σύγχρονων υπολογιστικών συστημάτων, είναι ακόμα επιθυμητή, για οικονομικούς και πρακτικούς λόγους, η χρήση παράλληλων δομών και λειτουργιών, ώστε το υπολογιστικό φορτίο να κατανέμεται σε ένα σύνολο επεξεργαστών μικρής σχετικά ισχύος, οι οποίοι μπορούν να λειτουργούν ταυτόχρονα, αποδίδοντας συνολικά καλύτερα.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- [1] Arogyaswami Paulraj, Rohit Nabar & Dhananjay Gore, “*Introduction to Space-Time Wireless Communications*”, Cambridge University Press, Cambridge, 2003
- [2] Α. Κανάτας, “*Συστήματα Κινητών Ραδιοεπικοινωνιών*”, Σημειώσεις του αντίστοιχου μαθήματος του τμήματος Διδακτικής της τεχνολογίας και Ψηφιακών Συστημάτων του Πανεπιστημίου Πειραιώς, Πειραιάς, Μάρτιος 2005
- [3] M.Tentzeris, “*3G/4G Wireless Systems: Challenges of the Future*”, Pyrforos Review of National Technical University of Athens, November 2001.
- [4] Telecom Trend International, “*The Market for Next-Generation Mobile Networks*”, από World Wide Web: <http://telecomtrends.net>
- [5] John Litva & Titus Kwok-Yeung Lo, “*Digital Beamforming in Wireless Communications*”, Artech House, Boston, 1996
- [6] Theodore S. Rappaport, “*Wireless Communications, Principles and Practice*”, Prentice Hall, New Jersey, Second Edition, 2002
- [7] A. J. Paulraj, D. Gesbert & C. Papadias, “*Smart Antennas for Mobile Communications*”, Encyclopedia for Electrical Engineering, John Wiley Publishing, 2000
- [8] Σαββαΐδης Στυλιανός, “*Κεραίες*”, Κεφάλαιο 3, Σημειώσεις του αντίστοιχου μαθήματος του τμήματος Ηλεκτρονικής του ΤΕΙ Πειραιά, Πειραιάς, 2002
- [9] Π. Κωπτής & Χ. Καυάλης, “*Κεραίες και Ασύρματες Ζεύξεις*”, Εκδόσεις Τζιόλα, Αθήνα, 2003
- [10] Adham Sleiman & Athanassios Manikas, “*The Impact of Sensor Positioning on the Array Manifold*”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol.51, No.9, September 2003
- [11] Barry D. Van Veen & Kevin M. Buckley, “*Beamforming: A versatile approach to spatial filtering*”, IEEE ASSP Magazine, April 1988
- [12] Winters J.H., “*Smart Antennas for Wireless Systems*”, IEEE Personal Communications, Vol.5, Issue 1, pp.23-27, February 1998
- [13] Martin Cooper & Marc Goldburg, “*Intelligent Antennas: Spatial Division Multiple Access*”, Annual Review of Communications, 1996

- [14] Liberty J.C. & Rappaport T.S., “*Smart Antennas for Wireless Communications: IS-95 and Third Generation CDMA Applications*”, Prentice Hall, 1999
- [15] Lal Chand Godara, “*Applications of Antenna Arrays to Mobile Communications, Part I: Performance Improvement, Feasibility and System Considerations*”, IEEE Proceedings, Vol.85, No.7, pp.1031-1060, July 1997
- [16] G.V. Tsoulos, “*Smart antennas for mobile communication systems: benefits and challenges*”, Electronics and Communication Engineering Journal, Vol.11, No.22, pp.84-94, April 1999
- [17] Toby Haynes, “*A Primer on Digital Beamforming*”, Spectrum Signal Processing, March 26, 1998, από World Wide Web: <http://www.spectrumsignal.com>
- [18] Harry L. Van Trees, “*Optimum Array Processing*”, John Wiley & Sons, 2002
- [19] Lal Chand Godara, “*Smart Antennas*”, CRC Press, Boca Raton, 2004
- [20] Foschini G. F., “*Layered space-time architecture for wireless communications in a fading environment when using multi-element antennas*”, Bell Labs Technical Journal, pp.41-59, Autumn 1996
- [21] Lal Chand Godara, “*Application of antenna arrays to mobile communications Part II: Beamforming and direction-of-arrival considerations*”, Proceedings of the IEEE , Vol.85, No.8, pp.1195 -1245, August 1997
- [22] B. Friedlander & B. Porat, B., “*Performance analysis of a null-steering algorithm based on direction-of-arrival estimation*”, Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol.37, No.4, pp.461-466, April 1989
- [23] Hiroyuki Tsuji & Mitsuhiro Mizuno, “*Applications of Adaptive Array Antennas in Mobile Communications*”, Electronics and Communications in Japan, Part 3, Vol.83, No.12, pp.38-50, 2000
- [24] Simon Haykin, “*Adaptive filter theory*”, Prentice Hall, 4th Edition, 2004
- [25] Robert G. Lorenz & Stephen P. Boyd, “*Robust Minimum Variance Beamforming*”, IEEE Transactions on signal processing, Vol.53, No.5, pp.1684-1696, May 2005
- [26] P. Applebaum & D. J. Chapman, “*Adaptive arrays with main beam constraints*”, IEEE Transactions: Antennas propagation, Vol.24, pp.650-662, 1976
- [27] J. H. Winters & J. Salz, “*Upper bounds on the bit-error rate of optimum combining in wireless systems*”, IEEE Transactions on Communications, Vol.46, No.12, pp.1619-1624, December 1998

- [28] Kristine L. Bell, Yariv Ephraim & Harry L. Van Trees, “*A Bayesian Approach to Robust Adaptive Beamforming*”, IEEE Transactions on signal processing, Vol.48, No.2, pp.386-398, February 2000
- [29] I. S. Reed, J. Mallett, and L. Brennan, “*Rapid convergence rate in adaptive arrays*”, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol.10, No.6, pp.853–863, 1974
- [30] I. Psaromiligkos and S. Batalama, “*Interference-plus-noise covariance matrix estimation for adaptive space-time processing of DS/CDMA signals*”, In IEEE Fall Vehicular Technology Conference, pp.2197–2204, 2000
- [31] B. Widrow et al., “*Stationary and nonstationary learning characteristics of the LMS adaptive filter*,” Proceedings of the IEEE, Vol.64, pp.1151-1162, 1976
- [32] O. Frost, “*An algorithm for linearly constrained adaptive array processing*”, Proceedings of the IEEE, Vol.60, pp.926-935, August 1972
- [33] Paul C. Wei, Jun Han, James R. Zeidler & Walter H. Ku, “*Comparative Tracking Performance of the LMS and RLS Algorithms for Chirped Narrowband Signal Recovery*”, IEEE Transactions on signal processing, Vol.50, No.7, pp.1602-1609, July 2002
- [34] K. L. Bell & H. L. Van Trees, “*Robust Adaptive Beamforming for Spatially Spread Sources*”, Proceedings of Ninth IEEE Signal Processing Workshop on Statistical Signal and Array Processing, (Portland, OR), pp.1-4, September 1998
- [35] Mounir Ghogho, Olivier Besson & Ananthram Swami, “*Estimation of Directions of Arrival of Multiple Scattered Sources*”, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol.49, No.11, pp.2467-2480, November 2001
- [36] D. Astely, B. Ottersten, “*The effects of local scattering on direction of arrival estimation with MUSIC*”, IEEE Transactions on signal processing, Vol.47, No.12, pp.3220-3234, December 1999
- [37] C. K. E. Lau, R. S. Adve, T. K. Sarkar, “*Combined CDMA and Matrix Pencil Direction of Arrival Estimation*”, 2002 Proceedings IEEE 56th Vehicular Technology Conference, VTC.2002-Fall, pp.496-499, 2002
- [38] Hiroshi Sawada Ryo Mukai & Shoji Makino, “*Direction of arrival estimation for multiple source signals using independent component analysis*”, Proc. Intern. Symposium on Signal Processing and its Applications, pp.411–414, 2003
- [39] T.K Moon & W.C. Stirling, “*Mathematical Methods and Algorithms for Signal Processing*,” Prentice-Hall, 2000
- [40] Simon Haykin, “*Communication Systems*”, John Wiley & sons, 3th Edition, 1995

Παράρτημα Α

Βασικές Έννοιες Κεραιών

Οι κεραιές αποτελούν το βασικό τμήμα των συστημάτων που χρησιμοποιούν τον ελεύθερο χώρο σαν μέσο διάδοσης. Σε αυτές γίνεται εκπομπή ή λήψη ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Η ίδια κεραία μπορεί είτε να λαμβάνει είτε να εκπέμπει Η/Μ κύματα (θεώρημα αμοιβαιότητας). Ιδανική κεραία εκπομπής θεωρείται αυτή που μπορεί να ακτινοβολήσει όλη την ισχύ που δέχεται προς κάποια επιθυμητή διεύθυνση και με τη σωστή πόλωση. Αντίστοιχα η ιδανική κεραία λήψης μπορεί να λαμβάνει το μέγιστο δυνατό ποσοστό του Η/Μ κύματος από τον περιβάλλοντα χώρο με τον ελάχιστο θόρυβο.

Υπάρχουν πολλοί τύποι κεραιών και καθένας από αυτούς έχει σχεδιαστεί κατά τέτοιο τρόπο ώστε να εκπέμπει ή να λαμβάνει ένα συγκεκριμένο είδος ακτινοβολίας. Η γραφική αναπαράσταση του τρόπου ακτινοβολίας μιας κεραιάς, καθώς μεταβάλλεται το σημείο παρατήρησης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, ονομάζεται διάγραμμα ακτινοβολίας (Radiation Pattern) της κεραιάς [9].

Το τμήμα του διαγράμματος ακτινοβολίας, που οριοθετείται από περιοχές πολύ ασθενούς, συνήθως μηδενικής έντασης ακτινοβολίας, ονομάζεται λοβός ακτινοβολίας (Lobe). Κύριος λοβός (Main Lobe) ονομάζεται αυτός που περιέχει τη διεύθυνση μέγιστης ακτινοβολίας. Σε αρκετές περιπτώσεις κεραιών προκύπτουν περισσότεροι του ενός κύριοι λοβοί οι οποίοι πάντως, είναι ανεπιθύμητοι και πρέπει να αποφεύγονται με κατάλληλη σχεδίαση.

Δευτερεύων λοβός (Secondary Lobe) είναι κάθε λοβός ακτινοβολίας που δεν είναι κύριος. Ως πλευρικοί λοβοί (Side Lobes) χαρακτηρίζονται οι λοβοί που δεν περιέχουν τη διεύθυνση ενδιαφέροντος της κεραιάς, ενώ με τον όρο οπίσθιος λοβός (Back Lobe) εννοείται ο λοβός που περιλαμβάνει τη διεύθυνση που είναι αντίθετη αυτής του κυρίου λοβού. Οι δευτερεύοντες λοβοί αντιπροσωπεύουν ακτινοβολία προς ανεπιθύμητες κατευθύνσεις και συνεπώς πρέπει να ελαχιστοποιούνται. Η ελαχιστοποίηση των πλευρικών λοβών είναι ιδιαίτερης σημασίας σε αρκετές περιπτώσεις εφαρμογών για την αποφυγή παρεμβολών.

Μία κεραία μπορεί να περιγραφεί από ένα αριθμό ιδιοτήτων-παραμέτρων, των οποίων οι τιμές ποικίλλουν, ανάλογα με την εφαρμογή. Οι κυριότερες από αυτές είναι [9]:

- **Συχνότητα:** Είναι η συχνότητα του εκπεμπόμενου κύματος, καθορίζεται από την συχνότητα της τροφοδοτούμενης τάσης και σχετίζεται με το μήκος κύματος λ και την ταχύτητα του φωτός c ($3 \cdot 10^8$ m/sec) μέσω της σχέσης $f = c/\lambda$.
- **Απολαβή:** Αφορά κεραίες εκπομπής και σχετίζεται με την κατευθυντικότητάς τους δηλαδή την ικανότητα τους να στέλνουν την εκπεμπόμενη ακτινοβολία προς συγκεκριμένη κατεύθυνση.
- **Ενεργός διατομή λήψης:** Αφορά τις κεραίες λήψης και σχετίζεται με την ικανότητα της κεραίας να λαμβάνει ισχύ από το χώρο γύρω της.
- **Εμπέδηση:** Είναι η σύνθετη αντίσταση της κεραίας που εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της (αυτοεμπέδηση), τη συχνότητα, τον αριθμό και την απόσταση άλλων κοντινών κεραιών (αμοιβαία εμπέδηση). Για καλή προσαρμογή της κεραίας σε μια γραμμή μεταφοράς είναι απαραίτητο να υπάρχει μικρή τιμή ανάδρασης (φανταστικό μέρος εμπέδησης) και ωμική αντίσταση όμοια με αυτή της γραμμής μεταφοράς (προσαρμογή κεραίας).
- **Πόλωση:** Η πόλωση της κεραίας καθορίζει την πόλωση των εκπεμπόμενων Η/Μ κυμάτων και επηρεάζει τη λήψη.
- **Εύρος ζώνης συχνοτήτων:** Είναι η περιοχή συχνοτήτων που η κεραία λειτουργεί ικανοποιητικά. Πρέπει να καλύπτει τουλάχιστον την ζώνη συχνοτήτων των εκπεμπόμενων ή λαμβανόμενων σημάτων.

- **Περιοχή ακτινοβολίας:** Είναι ο χώρος που περιβάλλει μια κεραία και διακρίνεται σε τρεις περιοχές, με βάση τη διαφορετική συμπεριφορά του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που δημιουργεί η κεραία:

α) Η περιοχή κοντινού πεδίου (Near Field): Είναι η περιοχή όπου το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο εμφανίζει άεργη συμπεριφορά, δηλαδή δεν ακτινοβολείται ηλεκτρομαγνητική ενέργεια. Η περιοχή αυτή περιορίζεται χωρικά στο εσωτερικό σφαίρας με ακτίνα:

$$R_1 = 0.62 \left(\frac{D^3}{\lambda} \right)^{1/2}$$

που περιβάλλει την κεραία. Στην παραπάνω σχέση D είναι η μέγιστη διάσταση της κεραίας και λ το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στη συχνότητα λειτουργίας.

β) Η περιοχή μακρινού πεδίου (Far Field): Έχει ως χαρακτηριστικό την ανεξαρτησία των εγκάρσιων συνιστωσών του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου από την ακτινική συνιστώσα. Η περιοχή αυτή εκτείνεται συνήθως σε αποστάσεις από την κεραία μεγαλύτερες από R_2 , όπου:

$$R_2 = \frac{2D^2}{\lambda}$$

γ) Η περιοχή Fresnel (Fresnel Field): Είναι η ενδιάμεση μεταξύ της περιοχής κοντινού και της περιοχής μακρινού πεδίου μιας κεραίας. Στην περιοχή αυτή, το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο εμφανίζει συμπεριφορά ακτινοβολίας αλλά οι εγκάρσιες συνιστώσες του διατηρούν και ακτινική εξάρτηση. Η περιοχή Fresnel εκτείνεται στο χώρο που περιορίζεται από τις σφαίρες με ακτίνες R_1 και R_2 που περιβάλλουν την κεραία. Στην περίπτωση κεραιών με μικρές διαστάσεις σε σχέση με το μήκος κύματος λειτουργίας, η περιοχή Fresnel δεν υπάρχει.

Παράρτημα Β

Βελτιστοποίηση Συναρτήσεων με Περιορισμούς

Έστω συνάρτηση $f(\mathbf{x})$ με $f: C^n \rightarrow C$, όπου \mathbf{x} είναι μιγαδικό διάνυσμα της μορφής $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$. Ζητείται η βελτιστοποίηση (ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση) της συνάρτησης $f(\mathbf{x})$.

α) Εξισωτικοί περιορισμοί: Θεωρούμε την περίπτωση να έχουμε k εξισωτικούς περιορισμούς, για τους οποίους ισχύει:

$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{x}) &= 0 \\ h_2(\mathbf{x}) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ h_k(\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned}$$

Ορίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = [h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_k(\mathbf{x})]^T$, οπότε αρκεί $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Θεωρούμε τη Lagrangian συνάρτηση [39]:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{h}^H(\mathbf{x})\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}^H \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

όπου $\boldsymbol{\lambda} \in C^k$ είναι οι πολλαπλασιαστές Lagrange. Πλέον έχουμε μετασηματίσει το αρχικό πρόβλημα με περιορισμούς σε ένα δυικό πρόβλημα χωρίς περιορισμούς. Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε/ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$. Λύνουμε την εξίσωση:

$$\left. \frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = 0$$

από την οποία λαμβάνουμε μια λύση $\mathbf{x}_0(\boldsymbol{\lambda})$. Για να απαλείψουμε το $\boldsymbol{\lambda}$, λύνουμε ως προς $\boldsymbol{\lambda}$ την εξίσωση $\mathbf{h}(\mathbf{x}_0(\boldsymbol{\lambda})) = \mathbf{0}$ και έτσι έχουμε βρει το ζητούμενο ακρότατο \mathbf{x}_0 της συνάρτησης $f(\mathbf{x})$, υπό τους περιορισμούς $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

β) Γραμμικοί εξισωτικοί περιορισμοί: Θεωρούμε την περίπτωση να έχουμε k εξισωτικούς περιορισμούς, για τους οποίους ισχύει [39]:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι οι περιορισμοί μας είναι k γραμμικές εξισώσεις, οι οποίες μπορούν να ξαναγραφτούν στη μορφή:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^H \mathbf{x} &= b_1 \\ \mathbf{a}_2^H \mathbf{x} &= b_2 \\ \dots & \\ \mathbf{a}_k^H \mathbf{x} &= b_k \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{a}_i = [a_{i1}^*, a_{i2}^*, \dots, a_{in}^*]^T$ για $i=1, 2, \dots, k$. Οι παραπάνω περιορισμοί μπορούν να γραφτούν ακόμα πιο συνοπτικά ως $\mathbf{A}^H \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ή $\mathbf{A}^H \mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$, όπου $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k]^T$ και $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_k]^T$. Ορίζουμε τη Lagrangian συνάρτηση:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + (\mathbf{x}^H \mathbf{A} - \mathbf{b}^H) \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}^H (\mathbf{A}^H \mathbf{x} - \mathbf{b})$$

όπου το διάνυσμα $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]^T$ περιλαμβάνει τους πολλαπλασιαστές Lagrange. Πρέπει να βρούμε κατάλληλο \mathbf{x}_0 τέτοιο ώστε:

$$\left. \frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = 0$$

Η λύση θα είναι της μορφής $\mathbf{x}_0(\boldsymbol{\lambda})$. Αν προσδιορίσουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{\lambda}$, θα έχουμε βρει και τη βέλτιστη λύση \mathbf{x}_0 . Αρκεί, δηλαδή, να λύσουμε ως προς $\boldsymbol{\lambda}$ την εξίσωση:

$$\mathbf{A}^H \mathbf{x}_0(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{b}$$

Παράρτημα Γ

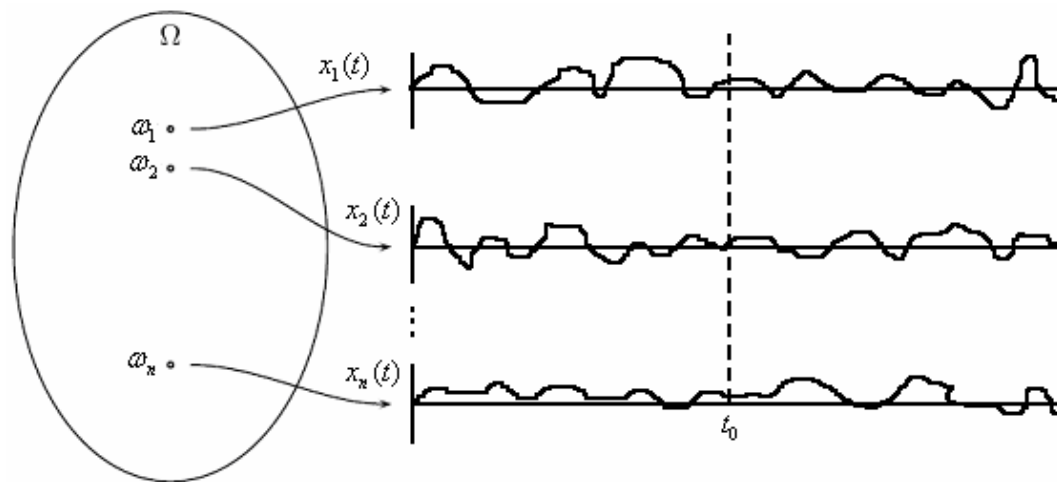
Βασικές Έννοιες Στοχαστικών Ανελίξεων

- **Η έννοια της στοχαστικής ανέλιξης**

Τα σήματα ταξινομούνται σε δύο ευρείες κατηγορίες, στα αιτιοκρατικά (Deterministic) που αναπαράγονται με ίδιες επαναλαμβανόμενες διαδικασίες (π.χ. το μοναδιαίο βήμα και το κρουστικό σήμα) και στα τυχαία (Random) που δεν επαναλαμβάνονται με τον ίδιο προβλέψιμο τρόπο. Ένα βασικό μέλημα στη στατιστική ανάλυση των συστημάτων επικοινωνιών είναι ο χαρακτηρισμός των τυχαίων σημάτων, όπως είναι τα σήματα φωνής, τηλεόρασης, τηλεγραφίας, τα ψηφιακά δεδομένα και ο ηλεκτρικός θόρυβος. Τα σήματα αυτά είναι χρονικές συναρτήσεις, που ορίζονται σε κάποιο διάστημα παρατήρησης και είναι τυχαία με την έννοια ότι πριν την διενέργεια ενός πειράματος δεν είναι δυνατό να περιγράψουμε τις κυματομορφές που θα παρατηρηθούν. Επομένως, περιγράφοντας τυχαία σήματα βρίσκουμε ότι κάθε δείγμα στο χώρο δειγμάτων (Sample Space) είναι μια χρονική συνάρτηση. Το σύνολο που περιλαμβάνει τις χρονικές αυτές συναρτήσεις ονομάζεται τυχαία διαδικασία ή στοχαστική ανέλιξη (Random or Stochastic Process) [40].

Σαν σημαντικό μέρος αυτής της έννοιας, θεωρούμε την ύπαρξη συνάρτησης κατανομής που ορίζεται σε μια κατάλληλη κατηγορία συνόλων στο χώρο δειγμάτων, ώστε να μπορούμε να μιλάμε με βεβαιότητα για την πιθανότητα των διάφορων γεγονότων. Οπότε ουσιαστικά μια στοχαστική ανέλιξη είναι ένα σύνολο χρονικών συναρτήσεων μαζί με ένα πιθανοτικό κανόνα που αποδίδει μια πιθανότητα σε κάθε σημαντικό γεγονός συνδεδεμένο με την παρατήρηση μιας από αυτές τις συναρτήσεις. Μια στοχαστική ανέλιξη ονομάζεται συνεχούς χρόνου t αν ορίζεται σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, ενώ αν ορίζεται μονό σε διακριτές στιγμές, ονομάζεται στοχαστική ανέλιξη διακριτού χρόνου n .

Θεωρούμε μια στοχαστική ανέλιξη διακριτού χρόνου $X(t)$ που παριστάνεται, όπως βλέπουμε και στο παρακάτω σχήμα, από το σύνολο των συναρτήσεων δειγμάτων (Sample Functions) $\{x_j(t)\}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Η συνάρτηση δείγμα ή κυματομορφή $x_1(t)$ με πιθανότητα εμφάνισης $P(\omega_1)$ αντιστοιχεί στο δείγμα ω_1 του χώρου δειγμάτων Ω και το ίδιο ισχύει αντίστοιχα για τις άλλες συναρτήσεις δειγμάτων.



Η δημιουργία μιας στοχαστικής ανέλιξης

Υποθέτουμε ότι παρατηρούμε το σύνολο των κυματομορφών ταυτόχρονα σε κάποια χρονική στιγμή $t = t_0$. Καθώς κάθε δείγμα ω_j έχει συνδεδεμένο με αυτό τον αριθμό και μια πιθανότητα $P(\omega_j)$, βρίσκουμε ότι το προκύπτον σύνολο αριθμών $\{x_j(t_0)\}$, ($j = 1, 2, \dots, n$), αποτελεί μια τυχαία μεταβλητή (Random Variable). Συμβολίζουμε αυτή τη τυχαία μεταβλητή με $X(t_0)$. Το σύνολο των κυματομορφών ορίζει μια διαφορετική τυχαία μεταβλητή για κάθε επιλογή της στιγμής παρατήρησης.

Η διαφορά μεταξύ μιας τυχαίας μεταβλητής και μια στοχαστικής ανέλιξης είναι ότι για μια τυχαία μεταβλητή η έκβαση ενός πειράματος απεικονίζεται με έναν αριθμό, ενώ μια για μια στοχαστική ανέλιξη απεικονίζεται με μια κυματομορφή που είναι χρονική συνάρτηση.

- **Τυχαία διανύσματα λαμβανόμενα από στοχαστικές ανελίξεις**

Μια στοχαστική ανελίξη αντιστοιχεί σε ένα άπειρο αριθμό τυχαίων μεταβλητών, μίας για κάθε τιμή του t στο διάστημα $-\infty < t < \infty$. Έτσι μπορούμε να μιλάμε για τη συνάρτηση κατανομής $F_{X(t)}(x_1)$ της τυχαίας μεταβλητής X_{t_1} που λαμβάνεται από την παρατήρηση της στοχαστικής ανελίξης $X(t)$ τη χρονική στιγμή t_1 . Για k χρονικές στιγμές t_1, t_2, \dots, t_k ορίζουμε τις k τυχαίες μεταβλητές $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)$ αντίστοιχα και εκφράζουμε την από κοινού συνάρτηση κατανομής τους (Joint Distribution Function) σαν την πιθανότητα του συνδυασμένου γεγονότος $X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_k) \leq x_k$, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$F_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)}(x_1, x_2, \dots, x_k) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_k) \leq x_k)$$

Για απλούστευση του συμβολισμού χρησιμοποιούμε την από κοινού συνάρτηση κατανομής απλά ως $F_{X(t)}(\mathbf{x})$, όπου το τυχαίο διάνυσμα (Random Vector) $\mathbf{X}(t)$ ισούται με:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X(t_i) \end{bmatrix}$$

και το διάνυσμα \mathbf{x} ισούται με:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_i \end{bmatrix}$$

Για ένα συγκεκριμένο δείγμα ω_j , οι συνιστώσες του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ παριστάνουν τις τιμές των συναρτήσεων δειγμάτων $x_j(t)$ που παρατηρούνται τις χρονικές στιγμές t_1, t_2, \dots, t_k . Η από κοινού συνάρτηση κατανομής $F_{\mathbf{X}(\mathbf{t})}(\mathbf{x})$ εξαρτάται από τη στοχαστική ανέλιξη $X(t)$ και το σύνολο των τιμών $\{t_j\}$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ ισούται με:

$$f_{\mathbf{X}(\mathbf{t})}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^k}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_k} F_{\mathbf{X}(\mathbf{t})}(\mathbf{x})$$

Αυτή η συνάρτηση είναι πάντα μη αρνητική με συνολικό όγκο ίσο ένα.

- **Στατιστικές ιδιότητες πρώτης και δεύτερης τάξης**

Προτού μελετήσουμε τις στατιστικές ιδιότητες πρώτης και δεύτερης τάξης μιας στοχαστικής ανέλιξης θα ήταν χρήσιμο, να εξηγήσουμε την έννοια του τελεστή E . Ο τελεστής E μας δίνει τη μέση ή αναμενόμενη τιμή (Mean or Expected Value) μιας τυχαίας μεταβλητής [40]. Αν υποθέσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή x είναι διακριτή και αποκτά τιμή x_k με πιθανότητα $P\{x = x_k\}$, τότε ορίζουμε:

$$E\{x\} = \sum_k x_k \cdot P\{x = x_k\}$$

Αν εκφράσουμε την προηγούμενη σχέση ως προς την πυκνότητα πιθανότητας, τότε προκύπτει η επόμενη σχέση, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην περίπτωση των συνεχών μεταβλητών:

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx$$

Μια στοχαστική ανέλιξη μπορεί να θεωρηθεί ως μια ακολουθία τυχαίων διακριτών μεταβλητών. Σε αυτήν την ακολουθία, θέλουμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή κάθε μεταβλητής και να δημιουργήσουμε την ακολουθία της μέσης τιμής (Mean Value):

$$m_x(t) = E\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{x(t)}(x) dx$$

Κατά παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε και τη διασπορά (Variance) κάθε τυχαίας μεταβλητής, ως την ακολουθία:

$$\sigma_x^2(t) = E\{|x(t) - m_x(t)|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\{x(t)\})^2 f_{x(t)}(x) dx$$

Η μέση τιμή και η διασπορά μιας τυχαίας διαδικασίας αποτελούν τα στατιστικά πρώτης τάξης και στη γενική περίπτωση εξαρτώνται από τη χρονική στιγμή t .

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μιας στοχαστικής διαδικασίας ανήκει στις στατιστικές ιδιότητες δεύτερης τάξης. Η συνάρτηση αυτή μας παρέχει πληροφορίες για τη στατιστική σχέση που έχουν δύο τυχαίες μεταβλητές μέσα στην ίδια διαδικασία.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την πραγματική στοχαστική διαδικασία $x(t)$ και κάποιες συγκεκριμένες χρονικές στιγμές t_1 και t_2 . Στόχος μας είναι να δούμε ποια είναι η σχέση ανάμεσα στις τυχαίες μεταβλητές $x(t_1)$ και $x(t_2)$. Αυτό εκφράζεται μέσα από τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (Autocorrelation Function):

$$R_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1) x(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1) x(t_2) f_{x(t_1), x(t_2)}(x(t_1), x(t_2)) dx(t_1) dx(t_2)$$

Σε περιπτώσεις που εμφανίζονται περισσότερες από μία στοχαστικές διαδικασίες, είναι συχνά χρήσιμο να γνωρίζουμε τη στατιστική σχέση ανάμεσα σε μια τυχαία μεταβλητή της μιας διαδικασίας, έστω $x(t_1)$, και την τυχαία μεταβλητή μιας άλλης διαδικασίας, έστω $y(t_2)$.

Η σχέση αυτή μας δίνεται από τη συνάρτηση ετεροσυσχέτισης (Cross-Correlation Function) των δύο διαδικασιών, η οποία ορίζεται ως:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)y(t_2)\}$$

- **Στατικότητα**

Σε πολλές εφαρμογές επεξεργασίας σημάτων, οι στατιστικές ιδιότητες που περιγράψαμε παραπάνω είναι ανεξάρτητες του χρόνου. Για παράδειγμα, ο θόρυβος κβαντισμού που εισάγεται σε ένα DSP με αριθμητική σταθερής υποδιαστολής, λόγω της πεπερασμένης αριθμητικής ακρίβειας, συνήθως έχει σταθερή μέση τιμή και διασπορά. Γενικά, θεωρούμε για τον θόρυβο κβαντισμού ότι τα στατιστικά πρώτης και δεύτερης τάξης είναι χρονικά αμετάβλητα. Αυτές οι συνθήκες αποτελούν παραδείγματα “στατιστικής χρονικής σταθερότητας” ή “στασιμότητας” (Stationarity) [40].

Θεωρούμε ένα σύνολο χρονικών στιγμών t_1, t_2, \dots, t_k στο διάστημα ορισμού της στοχαστικής ανέλιξης $X(t)$. Η στοχαστική ανέλιξη $X(t)$ χαρακτηρίζεται ως αυστηρά στατική (Strictly Stationary) ή στατική με την στενή έννοια (Stationary in the Strict Sense) αν η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας παραμένει αμετάβλητη σε μετατοπίσεις της αρχής του χρόνου, δηλαδή αν $f_{\mathbf{x}(t)}(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{x}(t+T)}(\mathbf{x})$ για κάθε πεπερασμένο σύνολο χρονικών στιγμών t_1, t_2, \dots, t_k και για κάθε χρονική μετατόπιση T και διάνυσμα \mathbf{x} .

Επειδή η ισχυρή στασιμότητα είναι πολύ αυστηρή συνθήκη και σπάνια ακολουθείται από φυσικές διαδικασίες, συνήθως χρησιμοποιείται ένας χαλαρότερος ορισμός της στασιμότητας, σύμφωνα με τον οποίο οι χρονικές ανελίξεις καλούνται στατικές με την ευρεία έννοια (Wide Sense Stationary-WSS). Αυτό συμβαίνει αν η μέση τιμή είναι ανεξάρτητη του χρόνου, δηλαδή $m_x(t) = m_x$ και αν η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{xx}(t_m, t_n)$ εξαρτάται μόνο από τη χρονική

διαφορά $t_m - t_n$ και όχι από τις συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, t_m και t_n , δηλαδή

$$R_x(t_m, t_n) = R_x(t_m - t_n).$$

- **Εργοδικότητα**

Η μέση τιμή και η αυτοσυσχέτιση μιας τυχαίας διαδικασίας αποτελούν στατιστικές ιδιότητες, οι οποίες προκύπτουν χρησιμοποιώντας όλα τα σήματα διακριτού χρόνου που αποτελούν τη διαδικασία. Ωστόσο, σε πολλά προβλήματα, αν και χρειαζόμαστε τα παραπάνω στατιστικά, δεν τα γνωρίζουμε εξ αρχής, αλλά θα πρέπει να τα εκτιμήσουμε από τα δεδομένα. Ας υποθέσουμε λοιπόν, ότι έχουμε μια στοχαστική ανέλιξη διακριτού χρόνου $X(n)$ και έχουμε μια τεράστια συλλογή L από συναρτήσεις δειγμάτων, δηλαδή από σήματα διακριτού χρόνου. Στην περίπτωση αυτή, θα μπορούσαμε να κάνουμε μια εκτίμηση της μέσης τιμής, ως του χρονικού μέσου όρου:

$$\hat{m}_x(n) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L x_j(n)$$

Όμως, στις περισσότερες εφαρμογές, δεν έχουμε διαθέσιμες όλες αυτές τις συναρτήσεις δειγμάτων της $X(n)$, αλλά μόνο μια, δηλαδή ένα μόνο σήμα διακριτού χρόνου. Αν όλες οι στατιστικές ιδιότητες μιας στοχαστικής ανέλιξης μπορούν να καθοριστούν (με πιθανότητα ένα) από μια συνάρτηση δείγμα, τότε η στοχαστική ανέλιξη ονομάζεται εργοδική. Είναι απαραίτητο για μια στοχαστική ανέλιξη να είναι στατική με την στενή έννοια για να είναι εργοδική, ωστόσο το αντίθετο δεν είναι πάντα αληθές [40].

- **Μετάδοση στοχαστικής ανέλιξης μέσω γραμμικού φίλτρου**

Τα γραμμικά, χρονικά σταθερά φίλτρα χρησιμοποιούνται σε μια πληθώρα εφαρμογών για να εκτελέσουν κάποια επεξεργασία πάνω σε μια στοχαστική διαδικασία. Για αυτό το λόγο, μας ενδιαφέρει να δούμε τι γίνεται στην περίπτωση

που μια στοχαστική διαδικασία περάσει μέσα από ένα φίλτρο. Επιθυμούμε να καθορίσουμε στο πεδίο του χρόνου τη μορφή των σχέσεων εισόδου-εξόδου του φίλτρου, ώστε να ορίσουμε τη μέση τιμή και τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής ανέλιξης εξόδου συναρτήσει εκείνων της εισόδου, θεωρώντας ότι η στοχαστική διαδικασία είναι στατική με την ευρεία έννοια.

Έστω λοιπόν, η WSS στοχαστική διαδικασία $X(n)$ με μέση τιμή m_x και συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_x(k)$. Αν η διαδικασία αυτή φιλτραριστεί από ένα γραμμικό, χρονικά σταθερό φίλτρο με κρουστική απόκριση $h(n)$, τότε η έξοδος $Y(n)$ θα είναι επίσης μια στοχαστική διαδικασία με μέση τιμή:

$$E\{y(n)\} = m_x H(e^{j0}) = m_y$$

Διαπιστώνουμε ότι η $Y(n)$ έχει σταθερή μέση τιμή, m_y , ίση με τη μέση τιμή της $X(n)$ πολλαπλασιασμένη με την τιμή της απόκρισης συχνότητας του φίλτρου στη συχνότητα $\omega = 0$. Η αυτοσυσχέτιση της εξόδου είναι ίση με:

$$R_Y(k) = R_X(k) * h(k) * h^*(-k)$$

όπου το σύμβολο $*$ δηλώνει συνέλιξη. Από τις προηγούμενες εξισώσεις προκύπτει ότι αν η $X(n)$ είναι WSS, τότε και η $Y(n)$ είναι WSS, αν βέβαια το φίλτρο είναι ευσταθές. Επίσης, προκύπτει ότι οι δύο διαδικασίες είναι και από κοινού WSS (Jointly WSS).

- **Πυκνότητα Φάσματος Ισχύος**

Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier παίζει ένα σημαντικό ρόλο για την περιγραφή και την ανάλυση ντετερμινιστικών σημάτων διακριτού χρόνου. Αντίστοιχα, είναι εξίσου σημαντικός και στην περίπτωση των στοχαστικών σημάτων. Ωστόσο, επειδή μια στοχαστική ανέλιξη είναι μια συλλογή σημάτων διακριτού χρόνου, δε μπορούμε να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier της

ίδιας της διαδικασίας. Έτσι, θα πρέπει να ορίσουμε το μετασχηματισμό Fourier βασιζόμενοι σε στατιστικά χαρακτηριστικά.

Υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης παρέχει μια περιγραφή των στατιστικών δεύτερης τάξης της διαδικασίας στο πεδίο του χρόνου. Εφόσον η αυτοσυσχέτιση $R_x(k)$ είναι μια ντετερμινιστική ακολουθία, μπορούμε να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier της ως εξής:

$$P_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x(k) e^{-jk\omega}$$

ο οποίος καλείται φάσμα ισχύος (Power Spectrum) ή πυκνότητα φάσματος ισχύος (Power Spectral Density-PSD) μιας WSS διαδικασίας [40].

Έτσι, όμως, ορίζεται το φάσμα ισχύος μιας τυχαίας διαδικασίας και όχι μιας πραγματικής εφαρμογής. Αν έχουμε μια εργοδική στοχαστική ανέλιξη, το φάσμα ισχύος της μπορεί να βρεθεί ως:

$$\hat{P}_x(\omega, N) = \frac{1}{N} |X(\omega)|^2$$

Τέλος, στην περίπτωση του φιλτραρίσματος μιας τυχαίας διαδικασίας $X(n)$ με ένα φίλτρο $h(n)$, το φάσμα ισχύος της εξόδου του φίλτρου $Y(n)$ θα δίνεται από τη σχέση:

$$P_Y(\omega) = P_X(\omega) |H(\omega)|^2$$

όπου $H(\omega)$ η απόκριση συχνότητας του φίλτρου.