ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

Οι Διαδικασίες Lévy στην Τιμολόγηση Προκαθορισμένων Πιστωτικών Παραγώγων

Παύλος Κουλμάς

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων.

Πειραιάς

Οκτώβριος 2022

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη Συνέλευση του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή της, σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Καθηγητής Κούτρας Μάρκος
- Αναπλ. Καθηγητής Τζαβελάς Γεώργιος
- Αναπλ. Καθηγητής Σεβρόγλου Βασίλειος (Επιβλέπων)

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Statistics

Department of Statistics and Insurance Science

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

The Lévy Processes in Pricing of Credit Default Swaps

By

Pavlos Koulmas

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

Piraeus, Greece

October 2022

Στην οικογένεια μου

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας, κ. Σεβρόγλου Βασίλειο Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση του που μου έδειξε όλο αυτό το διάστημα κατά την εκπόνηση της διπλωματικής μου.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της επιτροπής, τον κ. Κούτρα Μάρκο και τον κ. Τζαβελά Γεώργιο, για τις εύστοχες παρατηρήσεις τους που μου υπέδειξαν.

Τέλος, είμαι ευγνώμων για την αμέριστη υποστήριξη που είχα από την οικογένεια μου και τους δικούς μου ανθρώπους, καθ' όλη αυτή την έντονη περίοδο της συγγραφής μου.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, θα ασχοληθούμε με την τιμολόγηση των προκαθορισμένων πιστωτικών παραγώγων, υπό τη θεώρηση ενός στοχαστικού μοντέλου, το οποίο θα βασίζεται στην ανέλιξη Variance Gamma. Συγκεκριμένα, θα διαπιστώσουμε ότι ένα τέτοιο μοντέλο, που ανήκει στην οικογένεια των δομικών μοντέλων, θα δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα, λόγω εμπειρικών μελετών που έχουν πραγματοποιηθεί όλα αυτά τα χρόνια. Επιπροσθέτως έχει παρατηρηθεί ότι η εμπειρική κατανομή των λογαριθμικών αποδόσεων έχει υπερβολική κυρτότητα και αρνητική λοξότητα, κάτι που έως τώρα θεωρούταν ότι ακολουθούσαν την κανονική κατανομή και κατ' επέκταση η τιμολόγηση γινόταν υπό την γεωμετρική κίνηση Brown. Το εν λόγω μοντέλο έχει λάβει υπόψη τα προηγούμενα εμπόδια και επιτυγχάνει να επιλύσει τις περιπτώσεις όπου οι αθετήσεις προκύπτουν κατόπιν απότομων κραδασμών (shocks), μέσω της εισαγωγής αλμάτων στο μοντέλο, κάτι που η κίνηση Brown αδυνατεί να επιτύχει, λόγω των συνεχών μονοπατιών της. Τέλος, δίνονται χρήσιμα συμπεράσματα και εφαρμογές.

Abstract

In this thesis, we will deal with the pricing of Credit Default Swaps, under the consideration of stochastic model, which will be based on the Variance Gamma process. In particular, we will find that such a model, which belongs to the family of structural models, will give satisfactory results, due to empirical studies that have been carried out throughout the years. Further, it has been observed that the empirical distribution of logarithmic returns has excessive kurtosis and negative skewness, which it had been assumed that the logarithmic returns follow the normal distribution and in addition the pricing was done under Geometric Brownian Motion. Also, the model has taken into account the previous obstacles and it succeeds in solving the cases where defaults arise after sudden shocks, by introducing jumps into the model, which the Brownian motion cannot achieve, due to its continuous paths. Finally, useful conclusions and applications are given.

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα Εικόνων

Περιεχόμενα Πινάκων

Συντομογραφίες

χ.μ. = χώρος μέτρου

χ.π. = χώρος πιθανότητας

σ.π.π. = συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

σ.κ. = συνάρτηση κατανομής

σ.ε. = συνάρτηση επιβίωσης

σ.α. = στοχαστική ανέλιξη / σ.δ. = στοχαστική διαδικασία

Σύμβολα

$\mathbb{N}$ το σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων $\{0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{N}^{+}$το σύνολο των θετικών ακεραίων $\{1, 2, \dots\}$

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών

$\mathbb{R}^{*} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών χωρίς το 0

$\mathbb{C} = \{x + yi : x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$ το σύνολο όλων των μιγαδικών αριθμών

Για A , B σύνολα, όπου $A \subset B$: Το A είναι υποσύνολο του B (όχι απαραίτητα γνήσιο)

Για A , B σύνολα, $A \backslash B \coloneqq \{x \in A : x \notin B\}$

Το δυναμοσύνολο ενός συνόλου X είναι:

$\mathcal{P}(X) \coloneqq \{A : A \subset X\}$ και έχει 2^n το πλήθος στοιχεία, n στοιχείων

Το c πάνω σε κάποιο σύνολο ορίζει το συμπληρωματικό αυτού του συνόλου

Το Ω καλείται δειγματικός χώρος , συντομογραφία δ.χ.

Το $\emptyset$ καλείται κενό σύνολο και ισχύει $(\emptyset)^c = \Omega \backslash \emptyset = \Omega$

Για μετρικό χώρο X, ορίζεται:

$\mathcal{B}(X)$: Η σ-άλγευρα των Borel υποσυνόλων του X

Η τριάδα $(X, \mathcal{F}, \mu)$ καλείται χώρος μέτρου

Η τριάδα $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ καλείται χώρος πιθανότητας με μέτρο πιθανότητας P

Εισαγωγή

Τα τελευταία 30 χρόνια έχει υπάρξει μια εκρηκτική αύξηση στο ενδιαφέρον των πιστωτικών παραγώγων. Το γεγονός αυτό δημιουργήθηκε από την ανάγκη να μπορέσει να «ελεγχθεί» από τις εταιρείες ο Πιστωτικός Κίνδυνος. Είχαν προηγηθεί αρκετά χρηματοοικονομικά εργαλεία για την αντιμετώπιση κινδύνων, όπως για παράδειγμα, του κινδύνου της αγοράς, όπου και μπορεί να αντισταθμιστεί από παράγωγα, όπως τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης και διάφορες στρατηγικές χρησιμοποιώντας τα συμβόλαια προαίρεσης. Όλα τα προηγούμενα αδυνατούσαν να προστατεύσουν τους επενδυτές από μια ενδεχόμενη αθέτηση των υποχρεώσεων που θα μπορούσε να είχε ένα περιουσιακό στοιχείο που κατείχαν. Έτσι ήταν επόμενο όχι μόνο να χάσουν κέρδη, αλλά να προκληθούν και αντίστοιχες ζημιές στους ίδιους, προκαλώντας τυχόν αλυσιδωτές αθετήσεις των οικονομικών υποσχέσεων που είχαν και οι ίδιες.

Εισάγοντας, τέτοια λοιπόν χρηματοοικονομικά εργαλεία όπως τις συμβάσεις ανταλλαγής κινδύνου αθέτησης ή CDS, ο κάτοχος θα ήταν καλυμμένος απέναντι στον κίνδυνο που θα προκαλούνταν από την αθέτηση του περιουσιακού στοιχείου που κατείχε, είτε αυτό είναι μετοχή, είτε κρατικό ομόλογο. Ιδιαίτερα, το συγκεκριμένο χρηματοοικονομικό εργαλείο, έχει την λογική της ασφάλισης, όπου ο κάτοχος του κάνει περιοδικές πληρωμές στον πωλητή του συμβολαίου και ο πωλητής της, στην περίπτωση που υπάρξει αθέτηση θα πληρώσει στον αγοραστή το ποσό της συμφωνίας, μείον το ποσό επανάκτησης, όπου είναι το ποσό της συμφωνίας πολλαπλασιασμένο με το μέσο ποσοστό επανάκτησης, η οποία τιμή του έχει υπολογισθεί εκτενώς με στατιστικά στοιχεία από μεγάλους οίκους αξιολόγησης (π.χ. Moody's rating), συνήθως περί το 40%.

Ακόμη, υπό την Βασιλεία II, επετράπησαν στις τράπεζες να δημιουργήσουν εσωτερικά (in-house) μοντέλα για την εκτίμηση του πιστωτικού τους κινδύνου. Σε αυτό, έδωσε λύση ο τομέας των χρηματοοικονομικών μαθηματικών όπου και αναπτύχθηκαν περίπλοκα μοντέλα για την εκτίμηση της πιθανότητας αθέτησης. Μοντέλα, όπως του Merton και το $CreditGrades^{TM}$ της εταιρείας RiskMetrics Group ήταν πρωτοποριακά για την εκείνη την εποχή, οι οποίες έκαναν χρήση της γεωμετρικής κίνησης Brown. Όμως σύμφωνα με πολλές εμπειρικές μελέτες που διεξήχθησαν με την πάροδο των ετών (π.χ. του Cont), έδειξαν ότι η κατανομή των λογαριθμικών αποδόσεων, δεν ακολουθούσε κανονική κατανομή, καθώς τα δεδομένα έχουν θετική υπερβολική κύρτωση και αρνητική λοξότητα ή ασυμμετρία. Σύμφωνα με αυτό το γεγονός, τα μοντέλα που μόλις προαναφέραμε δεν θα μπορούσαν να αποτυπώσουν τις ιδιαιτερότητες αυτές και οι εκτιμήσεις θα ήταν αναμενόμενο να ήταν αναξιόπιστες.

Μολονότι ότι όπως προ είπαμε, για την μη κανονικότητα των δεδομένων μας, αναπτύχθηκαν και μοντέλα που δεν βασίζονται στην κανονικότητα (η γεωμετρική κίνηση Brown και το μοντέλο Black and Scholes), αλλά ήταν πιο ευέλικτα στο να συμπεριλαμβάνουν αρνητική λοξότητα και μεγάλη θετική κυρτότητα. Συνεπώς, τα μοντέλα με διάχυση, αντικαταστάθηκαν από μια άλλη σ.α., ονόματι Lévy. Οι διαδικασίες αυτές, θεώρησαν ότι τα περιουσιακά στοιχεία μοντελοποιούνται σύμφωνα με την εκθετική ανέλιξη Lévy, η οποία οδηγείται εξολοκλήρου από άλματα. Ακόμη, τα άλματα αυτά μπορούν να ερμηνεύσουν το γεγονός ότι οι αθετήσεις προκαλούνται από απότομους κραδασμούς, το οποίο μας επιβεβαιώνει και πάλι ότι οι ανελίξεις Lévy μπορούν να προσαρμοστούν καλύτερα.

Ο σκοπός της διπλωματικής, είναι να τιμολογηθούν τα «ασφάλιστρα» των προκαθορισμένων πιστωτικών παραγώγων, δηλαδή καλούμενων με αυτό τον τρόπο των CDS, δηλώνοντας ότι το φράγμα που θα χρησιμοποιήσουμε θα είναι εξαρχής προκαθορισμένο και να συγκριθούν οι εκτιμήσεις του μοντέλου οι οποίες είναι βασισμένες σε μια ανέλιξη Lévy, με άλλα πιστωτικά μοντέλα της βιβλιογραφίας. Ειδικότερα, το μοντέλο μας, ανήκει στην κατηγορία των δομικών μοντέλων, όπου το πιστωτικό γεγονός συμβαίνει, εάν η τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου πέσει κάτω από ένα προκαθορισμένο και ντετερμινιστικό φράγμα. Έτσι υπολογίζοντας την πιθανότητα αθέτησης και αντικαθιστώντας τις παραμέτρους (της συνάρτησης) του spread, θα την υπολογίζουμε για διάφορες χρονικές περιόδους. Ο υπολογισμός θα γίνει μέσω προσομοίωσης, αν και στο άρθρο [18] των Cariboni & Schoutens, χρησιμοποιείται ο ακριβής υπολογισμός, μέσω προχωρημένων μεθόδων αριθμητικής ανάλυσης. Τέλος, η εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου γίνεται μέσω βαθμονόμησης, της μεθόδου Nelder – Mead simplex.

Αναλυτικότερα, η δομή της διπλωματικής διαρθρώνεται ως εξής. Στο 1^{o} κεφάλαιο θα επικεντρωθούμε στις βασικές μαθηματικές έννοιες από τον χώρο των πιθανοτήτων και της στατιστικής, ώστε να εισάγουμε τον αναγνώστη, στις έννοιες που είναι αναγκαίες για την παρουσίαση του μοντέλου. Συνεχίζοντας, στο 2^{o} κεφάλαιο, θα μιλήσουμε για τις στοχαστικές ανελίξεις γενικά, όπως την κίνηση Brown, γεωμετρική κίνηση Brown, Martingales και θα κάνουμε μια εισαγωγή στις ανελίξεις Lévy, αναφέροντας κάποιες ιδιότητες της αλλά και παραδείγματα. Ακόμη στο 3^{o} κεφάλαιο, το οποίο είναι πιο θεωρητικό από τα προηγούμενα, θα αναφέρουμε τα βασικά χρηματοοικονομικά εργαλεία και τις διαφορές τους, αλλά και θα παρουσιάσουμε ιστορικά δεδομένα που έχουν να κάνουν με τις πιθανότητες μετάβασης αθέτησης από χώρα σε χώρα, αλλά και από τομέα σε τομέα. Με βάση αυτά, θα εξάγουμε κάποιες παρατηρήσεις για τις ιστορικές κρίσεις όπως του 2007, στις οποίες ορισμένοι επενδυτές χρησιμοποίησαν κάποια πιστωτικά παράγωγα, τα οποία θα αναφέρουμε. Τέλος, στο 4^{o} και τελευταίο κεφάλαιο, θα εισαχθούμε πιο συγκεκριμένα στο μοντέλο μας, με μια μικρή εισαγωγή σε άλλα μοντέλα, στις (μη-) πλήρεις αγορές και στην τιμολόγηση του, υπό το μέτρο ουδέτερου κινδύνου. Θα υπάρξει εκτίμηση των spreads από πραγματικές τιμές της αγοράς, μέσω προσομοίωσης, δεδομένου ότι οι παράμετροι βρέθηκαν μέσω βαθμονόμησης και έπειτα τα ακόλουθα συμπεράσματα που θα προκύψουν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βασικές Μαθηματικές Έννοιες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα καλυφθούν κάποιες βασικές μαθηματικές έννοιες από τον χώρο των πιθανοτήτων και της στατιστικής οι οποίες είναι αναγκαίες για να εισαχθεί ο αναγνώστης ομαλά στην ροή των υπόλοιπων κεφαλαίων, όπου και θα αναπτυχθούν κάποια στοχαστικά μοντέλα για την τιμολόγηση των πιστωτικών παραγώγων. Συγκεκριμένα θα παρουσιαστούν κάποια γνωστά-θεμελιώδη αποτελέσματα από τον χώρο των πιθανοτήτων όπως για παράδειγμα τι είναι ο χώρος πιθανότητας, σ- άλγεβρα, ανεξαρτησία, υπό συνθήκη μέση τιμή, χαρακτηριστικές και οι ιδιότητες αυτών κ.α. Θα δοθεί πλήθος παραδειγμάτων σε κάποιες από τις παρακάτω έννοιες για την καλύτερη κατανόηση του αναγνώστη.

1.1. Βασικές Έννοιες Θεωρίας Πιθανοτήτων

Η Θεωρία Πιθανοτήτων πρόκειται για ένα κλάδο των μαθηματικών, ο οποίος αναπτύχθηκε σχετικά πρόσφατα και το κύριο αντικείμενο του είναι η μελέτη τυχαίων φαινομένων για τα οποία αδυνατούμε να περιγράψουμε τη συμπεριφορά τους με συγκεκριμένους νόμους, δηλαδή αδυνατούμε να προσδιορίσουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα του. Η μελέτη αυτών χρησιμοποιείται ως όρος **πείραμα τύχης**. Υπάρχει πληθώρα παραδειγμάτων, με μερικά από αυτά να είναι, η κίνηση των αστεριών, το αποτέλεσμα της ρίψης ενός νομίσματος και η κίνηση των μετοχών.

Προχωρώντας τώρα, σε πιο βασικές έννοιες και θεωρήματα της Θεωρίας Πιθανοτήτων οι οποίες είναι αναγκαίες για την ομαλή εισαγωγή στις στοχαστικές ανελίξεις που χρειάζονται για να «προβλέψουμε» τις τιμές των Πιστωτικών Παραγώγων όπου και βασίζεται η παρούσα εργασία.

1.1.1. Σ-άλγεβρα

Αρχικά, θα ονομάζουμε ως **δειγματικό χώρο** (συντ. δ.χ.) Ω ενός πειράματος τύχης, το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων που μπορούν να εμφανισθούν κατά τη εκτέλεση ενός πειράματος. Με τα στοιχεία του Ω να ονομάζονται δειγματικά σημεία και επιπλέον τα υποσύνολα του δ.χ. Ω θα λέγονται ενδεχόμενα.

Παράδειγμα 1.1.1: Ρίχνεται ένα κανονικό ζάρι που έχει έξι πλευρές και καταγράφεται η ένδειξη του αποτελέσματος.

Φυσικά ο δ.χ. είναι $\Omega = \{ 1, 2 ,3 ,4 ,5 ,6 \}$ διότι αυτά είναι τα όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος, με τα δειγματικά σημεία να είναι, αν τα συμβολίσουμε με

$$B_i = \{i\} \; \forall \; i = 1,2,3,4,5,6$$

και συνεπώς ένα ενδεχόμενο θα μπορούσε να είναι το $Z = \{1 ,2 ,3\}$ όπου ισχύει $Z \subset \Omega$.

Παράδειγμα 1.1.2: Θεωρείται ότι κατασκευάζονται ηλεκτρικοί λαμπτήρες μέχρι να παραχθούν 8 ελλαττωματικοί, όπου παρατηρείτε μόνο ο αριθμός των παραγόμενων λαμπτήρων.

Έπεται ότι το Ω= $\{8, 9, 10\ , ...\}$

και τα δειγματικά σημεία είναι $A_i = \{i\}\ \forall\ i = 8\ , 9\ ,10\ ...$

Παράδειγμα 1.1.3: Σε ένα εργοστάσιο παραγωγής ηλεκτρικών λαμπτήρων προκειμένου να ελεγχθεί η ποιότητα αυτών, παίρνουμε έναν τυχαία από την παραγωγή και τον συνδέουμε με ρεύμα. Από εκεί και πέρα καταγράφουμε τον ακριβή χρόνο λειτουργείας του (συνήθως σε ώρες) μέχρις ότου πάψει να λειτουργεί.

Συνεπώς, έπεται ότι:

Ω= $\{t\ :\ t \geq 0\} = [0, +\infty)$

Και θεωρώ ενδεχόμενο $A = \{t\ :\ 0 \leq t \leq 1000\}$ δηλαδή «ο χρόνος του λαμπτήρα να είναι το πολύ 1000 ώρες».

Στο παράδειγμα 1.1.1 έχουμε ότι το πλήθος των δειγματικών σημείων είναι πεπερασμένο, συνεπώς έπεται ότι οι δ.χ. οι οποίοι περιέχουν πεπερασμένο το πλήθος στοιχεία, λέγονται **πεπερασμένοι** δ.χ. Συνεχίζοντας στο επόμενο παράδειγμα 1.1.2. βλέπουμε ο δ.χ. είναι **απείρως αριθμήσιμος**, δηλαδή έχει τον ίδιο πληθικό αριθμό με το σύνολο των φυσικών αριθμών. Τέλος στο παράδειγμα 1.1.3 ο δ.χ. είναι **άπειρος μη αριθμήσιμος** ή συνεχής λόγω του άπειρου των πλήθος σημείων αλλά όχι αριθμήσιμο.

Σε αυτό το σημείο εισάγεται η έννοια της σ-άλγεβρας για να ορίσουμε μαθηματικά την έννοια του γεγονότος ή της συλλογής των γεγονότων που μελετάμε. Στην Θεωρία Πιθανοτήτων η σ-άλγεβρα χρησιμοποιείται για να «κωδικοποιήσει» την πληροφορία του πειράματος.

Ορισμός 1.1.1 [1]: Έστω μια σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ επάνω σε ένα σύνολο Ω, τότε θα είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του Ω με τις εξής ιδιότητες:

(Σ1) $\Omega\ \in\ \mathcal{F}$
(Σ2) Αν $A \in \mathcal{F}$, τότε και $A^c =\ \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$
(Σ3) Αν $A_n \in \mathcal{F}, n = 1\ , 2\ , ...$, τότε και $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Έπεται από τον ορισμό ότι ισχύει και άλλη μια ιδιότητα:

(Σ4) $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = (\cup_{i=1}^{\infty} A_i^c)^c\ \in \mathcal{F}$

Τέλος από την (Σ1) και (Σ2) συνεπάγεται ότι $\emptyset\ \in\ \mathcal{F}$

Παράδειγμα 1.1.4: Ρίχνουμε ένα ζάρι, με δ.χ. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, η σ-άλγεβρα που δημιουργείται αν η ένδειξη είναι άρτιος ή περιττός είναι:

$$A = \{1,3,5\}\ συνεπάγεται\ ότι\ A^c = \Omega \backslash A = \{2,4,6\}$$

Οπότε από τον ορισμό 1.1.2 έπεται ότι η σ-άλγεβρα είναι,

$$\mathcal{F}_1\ = \{\emptyset\ , \Omega\ , \{1,3,5\}, \{2,4,6\}\}$$

(Ισχύουν οι (Σ1)-(Σ4))

Επιπλέον σημειώνεται ότι η σ-άλγεβρα του πειράματος, είναι το δυναμοσύνολο του Ω Δηλαδή $\mathcal{F}$=$\mathcal{P}$(Ω)[1]

Παράδειγμα 1.1.5: Έστω ένας δ.χ. $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, τότε για μια σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_1$ που ορίζεται, ως, $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}\}$, έπεται ότι δεν είναι μια σ-άλγεβρα, διότι δεν περιέχει το υποσύνολο {2,3,4}.

Ορισμός 1.1.2 [1]: Η ελάχιστη σ-άλγεβρα που μπορεί να παραχθεί από ένα σύνολο $A \subset \Omega$, καλείται η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει το σύνολο A και συμβολίζεται με $\sigma(A)$.

Δηλαδή, για ένα δ.χ. Ω, η ελάχιστη σ-άλγεβρα που θα περιέχει το ενδεχόμενο A, είναι η

$$\sigma(A) = \{\emptyset\ , \Omega, A, A^c\}$$

Πρόταση 1.1.1: Η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχεται σε κάθε σ-άλγεβρα, είναι η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_0 \coloneqq \{\emptyset\ , \Omega\}$ η οποία είναι τετριμμένη.

Απόδειξη: Προφανής από τον ορισμό 1.1.2

Ορισμός 1.1.3 [43]: Μια σ-άλγεβρα Borel σε ένα τοπολογικό χώρο $\boldsymbol{S}$, είναι μια σ-άλγεβρα παραγόμενη από μια οικογένεια ανοιχτών υποσυνόλων του $\boldsymbol{S}$ και τα στοιχεία της λέγονται σύνολα Borel. Συμβολίζεται ως $\mathcal{B}(\boldsymbol{S})$.

Η $\mathcal{B}(\boldsymbol{S})$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοιχτά υποσύνολα του $\boldsymbol{S}$.

Πρακτικά η $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, με τοπολογικό χώρο $\boldsymbol{S} = \mathbb{R}^d$, περιέχει όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$.

Αρκετές είναι οι φορές που χρησιμοποιούνται οι σ-άλγεβρες Borel, οι οποίες παράγονται διαστήματα του $\mathbb{R}$ ή του $\mathbb{R}^d$. Αν είμαστε στην πρώτη διάσταση $(d = 1)$ και το διάστημα $[\alpha, \beta] \in \mathbb{R}$, τότε η σ-άλγεβρα που παράγεται από αυτό το διάστημα θα συμβολίζεται με $\mathcal{B}([\alpha, \beta])$. Προφανώς ισχύει κατ' αντιστοιχία και για περισσότερες διαστάσεις $(d = 2,3, \dots)$.

1.1.2. Μέτρο Πιθανότητας

Σε αυτή την παράγραφο θα προχωρήσουμε από το πλαίσιο του γεγονότος και θα αντιμετωπισθεί το ερώτημα του κατά πόσο εύκολα μπορεί να συμβεί κάποιο γεγονός. Ακόμη θα εισαχθεί η έννοια των συναρτήσεων, οι οποίες «παίρνουν» ένα σύνολο και το αντιστοιχούν σε κάποιον αριθμό. Αυτές οι συναρτήσεις λέγονται μέτρα και το μέτρο πιθανότητας είναι μια ειδική περίπτωση αυτών.

---

[1] Το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}$(Ω) είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του Ω , δηλαδή $\mathcal{P}(X) \coloneqq \{A : A \subset X\}$ είναι η μέγιστη δυνατή σ-άλγευρα στο Χ.

Ορισμός 1.1.4 [9]**:** Έστω X ένα σύνολο και μια σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ στο X, τότε ένα μέτρο στον χώρο $(X, \mathcal{F})$, θα λέμε τη συνάρτηση $\mu : \mathcal{F} \to [0\,,\infty]$ η οποία, ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$

(M2) Αν $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία, ξένων ανά δύο, τότε:

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Από το πάνω ορισμό ονομάζουμε το ζεύγος $(X, \mathcal{F})$ ως μετρήσιμο χώρο.

Επιπλέον η τριάδα $(X, \mathcal{F}, \mu)$ καλείται χώρος μέτρου και τα στοιχεία της σ-άλγεβρας $\mathcal{F}$ καλούνται μετρήσιμα σύνολα. Η ιδιότητα (M2) του ορισμού καλείται αριθμήσιμη προσθετικότητα.

Παράδειγμα 1.1.6 [1]**:** Θεωρούμε στο παράδειγμα ότι X=$\mathbb{R}$ και $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Το μέτρο $\mu_L([a,b]) = b - a$, στο χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, όπου $[a,b] \in \mathbb{R}$ κάποιο διάστημα, καλείται μέτρο Lebesgue.

Παράδειγμα 1.1.7 [4],[9]**:** Έστω ένα σύνολο X, με σ-άλγεβρα $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$ και $x \in X$ ένα δεδομένο σημείο του X. Τότε ορίζουμε το μέτρο δ_x ως εξής :

$\delta_x(A) = \begin{cases} 1\,, \alpha\nu\ x \in A \\ 0\,, \alpha\nu\ x \in X \backslash A \end{cases}$, για κάθε $A \in \mathcal{F}$.

Το μέτρο δ_x ονομάζεται μέτρο Dirac στο σημείο x.

Ορισμός 1.1.5 [9],[28]**:** Για ένα μέτρο μ (όπως ορίσθηκε παραπάνω) σε έναν μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{F})$, αν $\mu(X) < \infty$, τότε θα καλείται πεπερασμένο και για $\mu(X) = 1$, θα ονομάζεται μέτρο πιθανότητας.

Κατ' αντιστοιχία ο χ.μ. $(X, \mathcal{F}, \mu)$ καλείται χώρος πεπερασμένου μέτρου ή χώρος πιθανότητας με τον χώρο πιθανότητας να συμβολίζεται ως $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, όπου το P να είναι το μέτρο πιθανότητας.

Ο πάνω ορισμός καλείται ως αξιωματικός ορισμός του Kolmogorov, στην περίπτωση του χώρου πιθανότητας.

Κάποιες ιδιότητες [28] του μέτρου πιθανότητας είναι οι παρακάτω οι οποίες απορρέουν από τον ορισμό 1.3.1:

i. $P(A) \geq 0$ για όλα τα $A \in \mathcal{F}$
ii. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
iii. $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$, (ανισότητα του Boole)
iv. $P(A^c) = 1 - P(A)$
v. $0 \leq P(A) \leq 1$
vi. $A_1 \subset A_2 \subset \ldots\ \mu\varepsilon\ A_n \in \mathcal{F}\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

Από το παράδειγμα 1.1.6 αν ορίσουμε το χώρο μέτρου ως $\big(X, \mathcal{B}(X)\big)$, όπου $X = [0,1]$ τότε το μέτρο Lebesgue είναι ένα μέτρο πιθανότητας σύμφωνα με τον πάνω ορισμό, δηλαδή $\mu_L([0,1]) = 1 - 0 = 1$.

Παράδειγμα 1.1.8: Στρίβουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα, οπότε το πείραμα τύχης είναι το νόμισμα που στρίψαμε, σημειώνεται ως κορόνα «Κ» και γράμματα το «Γ».

Ο δειγματικός χώρος εδώ είναι $\Omega = \{K\ , \Gamma\}$ και η συλλογή όλων υποσυνόλων του Ω είναι η σ-άλγευρα $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, K, \Gamma\}$.

Θεωρούμε ένα μέτρο πιθανότητας $P: \mathcal{F} \to [0,1]$ (μέτρο απαρίθμησης στην $\mathcal{F}$)

Συνεπώς:

$$P(\emptyset) = 0\ , P(\Omega) = P(\{K, \Gamma\}) = 1\ , P(K) = \frac{1}{2}\ , P(\Gamma) = \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 1.1.9 [9]: Έστω ένα αριθμήσιμο σύνολο Ω και μια σ-άλγεβρα $\mathcal{F} \coloneqq \mathcal{P}(\Omega)$,

επιπλέον υποθέτουμε ότι μια συνάρτηση $f\ :\ \Omega\ \to\ [0, \infty)$ με $\sum_{x\in\Omega} f(x) = 1$

Για κάποιο στοιχείο $A \in \mathcal{F}$ ορίζουμε, $P(A) \coloneqq\ \sum_{x\in A} f(x)$.

Συνεπώς βλέπουμε ότι το P είναι μέτρο πιθανότητας στο Ω (ισχύουν οι Μ1-Μ2 και $P(\Omega) = \sum_{x\in\Omega} f(x) = 1$). Έπεται ότι σε κάθε σημείο $x \in \Omega$ δίνει μάζα πιθανότητας $f(x)$, το οποίο μπορούμε να πούμε ότι είναι μια γενίκευση του μέτρου Dirac (το οποίο εναλλακτικά ονομάζεται διακριτό μέτρο) που είδαμε στο παράδειγμα 1.1.7, καθώς περισσότερα από ένα σημεία παίρνουν ένα τμήμα της συνολικής μάζας που είναι 1.

Παράδειγμα 1.1.10: Έστω δύο ενδεχόμενα $A\ , B$ που ανήκουν στην σ-άλγευρα $\mathcal{F}$ ενός δ.χ. Ω και θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα της ένωσής τους, δηλαδή έχουμε:

$P(A \cup B) = P(AB^c \cup B)$, είναι η ένωση ξένων ενδεχομένων

και ισχύει ότι $P(AB^c) = P(A) - P(AB)$

Συνεπώς , $P(AB^c \cup B) = P(AB^c) + P(B)$ λόγω ξένων ενδεχομένων

Τελικά βγαίνει ότι:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, όπου είναι η πιθανότητα της ένωσης των δύο ενδεχομένων $A\ , B$ (ιδιότητα *iii*).

Στο παράδειγμα 1.1.10 βρήκαμε την ένωση των δύο ενδεχομένων, τώρα για την ένωση n ενδεχομένων υπάρχει τύπος και είναι γνωστός ως ο τύπος του Poincare ή αρχή εγκλεισμού αποκλεισμού. Παραπέμπονται οι αναγνώστες σε κάποιο βιβλίο πιθανοτήτων.

1.1.3. Ανεξαρτησία Ενδεχομένων

Σε αντίθεση με την προηγούμενη παράγραφο της δεσμευμένης πιθανότητας, όπου εάν είχαμε τη γνώση ότι, αν συνέβη είτε δεν συνέβη κάποιο γεγονός, δεν θα έδινε κάποια πληροφορία για την εμφάνιση ή μη του ενδεχομένου A. Δηλαδή, στην περίπτωση που η γνώση εάν συνέβη ή δεν συνέβη ένα ενδεχόμενο, δεν δίνει καμία πληροφορία για την εμφάνιση κάποιου άλλου γεγονότος A, θα καλούνται ανεξάρτητα γεγονότα.

Ορισμός 1.1.6 [9]: Έστω μια ακολουθία ενδεχομένων $(A_i)_{i \in I}$ στοιχεία της σ-άλγεβρας $\mathcal{F}$. Για κάθε πεπερασμένο σύνολο $J \subset I$, τα $(A_i)_{i \in I}$ λέγονται ανεξάρτητα αν ισχύει ότι:

$$P\left(\cap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$$

Πιο απλά μπορούμε να πούμε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B στοιχεία της σ-άλγεβρας θα λέγονται ανεξάρτητα αν ισχύει ότι: $P(AB) = P(A)P(B)$ και εξαρτημένα αν δεν ισχύει η ισότητα.

Συνέπεια του ορισμού της ανεξαρτησίας των ενδεχομένων και της δεσμευμένης πιθανότητας, για δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα A και B στοιχεία της σ-άλγευρας έπεται ότι $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$, κάτι αναμενόμενο όπως εξηγήθηκε και παραπάνω.

Πρόταση 1.1.2: Για δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα A και B στοιχεία της σ-άλγεβρας, τότε είναι ανεξάρτητα και τα επόμενα:

i. A και B^c
ii. A^c και B
iii. A^c και B^c

Απόδειξη: Προκύπτει από τον πάνω ορισμό συνδυαστικά με την μεθοδολογία του παραδείγματος 1.1.10.

Παράδειγμα 1.1.11 [3]: Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ζάρι ρίχνοντας το δύο φορές, ορίζουμε τα ενδεχόμενα :

$A =$ Την πρώτη φορά έφερε την ένδειξη «6»

$B =$ Την δεύτερη φορά έφερε την ένδειξη «6»

$\Gamma =$ Το ενδεχόμενο να είναι «εξάρες»

Ισχύει ότι : $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{6}$ και $P(\Gamma) = P(\{6{,}6\}) = \frac{1}{36}$

Το Γ γράφεται $\Gamma = A \cap B$ δηλαδή να φέρει την 1η και 2η φορά την ένδειξη «6»

Οπότε $P(A)P(B) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{36} = P(A \cap B)$

και $P(A \cap \Gamma) = P(\Gamma) = \frac{1}{36} \neq P(A)P(\Gamma) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{36}\right)$

συνεπώς βλέπουμε ότι μόνο τα A , B είναι ανεξάρτητα.

1.2. Τυχαίες Μεταβλητές και Ολοκλήρωση

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα εισαχθούν οι βασικές έννοιες που χρειάζονται για να ορίσουμε τις τυχαίες μεταβλητές (συντ. τ.μ.), καθώς θα παρουσιαστούν βασικά αποτελέσματα και έννοιες ολοκλήρωσης που θα χρησιμοποιηθούν για να ορίσουμε τις (αθροιστικές) συναρτήσεις πιθανότητας.

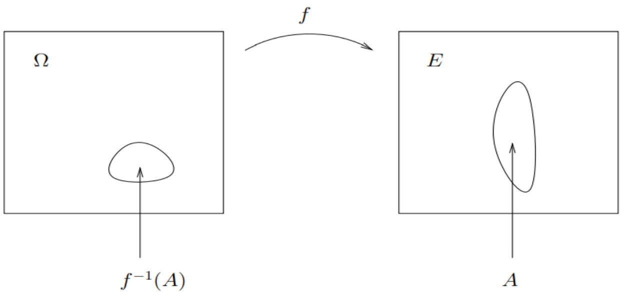
1.2.1. Μετρήσιμες Συναρτήσεις

Ορισμός 1.2.1 [9]: Έστω δύο μετρήσιμοι χώροι $(\Omega, \mathcal{F}), (E, \mathcal{E})$, τότε για μια συνάρτηση $f : \Omega \to E$ θα λέγεται $\mathcal{F}/\mathcal{E}$-μετρήσιμη αν ισχύει:

$$f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A\} \in \mathcal{F} \text{ για κάθε σύνολο } A \in \mathcal{E}$$

και το σύνολο $f^{-1}(\mathcal{E}) = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}\} \subset \mathcal{F}$.

Σχηματικά μπορούμε να δούμε τον ορισμό στην εικόνα 1 του [9].



Εικόνα 1: Διαισθητικό Γράφημα Μετρήσιμης Συνάρτησης

Σχολιασμός:

Μια συνάρτηση f, $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ - μετρήσιμη θα καλείται απλώς μετρήσιμη αν γνωρίζουμε ποια είναι η σ-άλγεβρα που δεν αναφέρεται.

1.2.2. Τυχαίες Μεταβλητές και Σύνολο Τιμών

Σε αυτή την παράγραφο θα εισαχθεί η έννοια της τ.μ., όμως όπως είναι λογικό κάποιος θα αναρωτιόταν γιατί μας είναι απαραίτητη η εισαγωγή αυτής της έννοιας; Όπως είδαμε και πιο πάνω στην παράγραφο που εισάχθηκαν οι έννοιες των ενδεχομένων, διαπιστώσαμε πως σε μερικές περιπτώσεις είναι αρκετά χρονοβόρα η λεπτομερής στοιχείο προς στοιχείο περιγραφή του πλήρως δ.χ. Ω, πόσο μάλλον σε αρκετά πιο περίπλοκα υποδείγματα. Για αυτό το λόγω θα ήταν σκόπιμο να ορίσουμε την έννοια των τ.μ., που σε πιο σύνθετα μοντέλα στατιστικής και πιθανοτήτων θα μας φανούν εξαιρετικά χρήσιμες.

Ορισμός 1.2.2 [9],[28]: Έστω ένας χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, τότε μια συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ καλείται τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) του πειράματος αν είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση.

Γενικά αν θεωρήσουμε ότι $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ τότε η τ.μ. X καλείται τυχαίο διάνυσμα, όπου $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$.

Επιπλέον για το σύνολο $X^{-1}(A) \coloneqq \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$ θα χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\{X \in A\}$ και θα είναι υποσύνολο της σ-άλγεβρας $\mathcal{F}$.

Από εδώ και στο εξής, αυτές τις συναρτήσεις (τ.μ.) για να τις ξεχωρίζουμε, θα τις συμβολίζουμε με κεφαλαία.

Παράδειγμα 1.2.1: Έστω $\omega \in \Omega$ και ένας χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, τότε η συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$, η οποία ορίζεται ως:

$$X(\omega) = 1_A = \begin{cases} 1\,, \alpha\nu\ \omega \in A \\ 0\,, \alpha\nu\ \omega \notin A \end{cases}$$

είναι μια τ.μ. αν το σύνολο $A \subset \Omega$ είναι ένα γεγονός όπου $A \in \mathcal{F}$.

Συγκεκριμένα αυτή η τ.μ. καλείται δείκτρια συνάρτηση και είναι διακριτή τ.μ. διότι παίρνει ακέραιες τιμές. Σε αντίθετη περίπτωση αν οι τιμές της ανήκαν σε κάποιο υποσύνολο του R (αντί του $\mathbb{N}$), θα ήταν μια συνεχής τ.μ.

Πρόταση 1.2.1 [5]: Αν μια πραγματική συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια τ.μ. $X: \Omega \to \mathbb{R}$ τότε η σύνθεση τους $g \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$ θα αποτελεί μια νέα τ.μ. με την προϋπόθεση ότι ισχύει η συνθήκη στον ορισμό 1.2.2 (δηλαδή αν είναι μετρήσιμη συνάρτηση).

Πρόταση 1.2.2: Έστω δύο τ.μ. $X_1: \Omega \to \mathbb{R}$, $X_2: \Omega \to \mathbb{R}$ ορισμένες στον ίδιο δ.χ. Ω τότε:

1. $\alpha X_1 + \beta X_2$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2. $X_1 X_2$
3. $\frac{X_1}{X_2}$ με $X_2 \neq 0$ αντίστοιχα $\frac{X_2}{X_1}$ με $X_1 \neq 0$
4. $\log(X_1)\, e^{\frac{X_2\sqrt{\pi}}{X_1}}$, με $X_1 > 0$

κτλ...

όλες οι παραπάνω είναι νέες τ.μ. στον ίδιο δειγματικό χώρο.

Απόδειξη: Έπεται από την πρόταση 1.2.1

Δηλαδή γενικά για n τ.μ. όπου $X_i: \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1,2, \dots, n$ και για μια πραγματική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, θα ισχύει ότι:

$f(X_1, X_2, \dots, X_n)$, είναι επίσης μια τ.μ., σύμφωνα με τις προτάσεις που αναφέρθηκαν.

Ορισμός 1.2.3 [9]: Έστω μια συνάρτηση $f: \Omega \to \mathbb{R}$, τότε θα καλείται απλή αν η εικόνα της είναι ένα πεπερασμένο σύνολο.

Αν οι $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι οι διαφορετικές τιμές που παίρνει μια απλή συνάρτηση f και ορίζουμε τα ενδεχόμενα $\{A_i\}_{1 \le i \le n}$ με $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\})$, τότε τα $\{A_i\}_{1 \le i \le n}$ είναι η διαμέριση του δ.χ. Ω και γράφεται ως:

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i\, 1_{A_i}$$

Όπου 1_{A_i} ορίσθηκε στο παράδειγμα 1.2.1 (δείκτρια συνάρτηση).

Αν τα σύνολα $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ είναι μετρήσιμα τότε έπεται ότι η απλή συνάρτηση f είναι μετρήσιμη, οπότε ισοδύναμα από τον ορισμό, θα λέγαμε ότι η μετρήσιμη συνάρτηση $f: \Omega \to \mathbb{R}$ θα λέγεται απλή, αρκεί το σύνολο τιμών της να είναι πεπερασμένο. Επιπλέον σημειώνεται ότι η απλή συνάρτηση f γράφεται μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός από δείκτριες συναρτήσεις, αν τα $\{A_i, i = 1,2, \dots, n\}$ είναι διαμέριση του Ω και τα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους , τότε από απλή συνάρτηση θα την λέμε κανονική μορφή της f.

1.2.3. Σ-άλγεβρα Παραγόμενη από Τυχαίες Μεταβλητές

Ορισμός 1.2.4 [9],[28]: Έστω ένα σύνολο Ω, τότε κάθε τ.μ. $X: \Omega \to \mathbb{R}$, ορίζεται μια σ-άλγεβρα:

$$\sigma(X) \coloneqq X^{-1}\big(\mathcal{B}(\mathbb{R})\big) = \{X^{-1}(A): A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

η οποία ονομάζεται σ-άλγεβρα παραγόμενη από την τ.μ. X και επιπλέον είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα για την οποία η τ.μ. X είναι μετρήσιμη.

Παράδειγμα 1.2.2 [28]: Μια σταθερή $X(\omega) = c$, ορίζει την τετριμμένη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

Παράδειγμα 1.2.3: Θεωρείται μια τ.μ. X όπως ορίστηκε στο παράδειγμα 1.2.1, δηλαδή είναι η δείκτρια συνάρτηση. Τότε η σ-άλγεβρα που παράγεται από αυτήν την τ.μ. $X = 1_A$, είναι η $\{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$.

1.2.4. Ολοκλήρωση Lebesgue

Σε αυτή την παράγραφο θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα οποιασδήποτε μετρήσιμης συνάρτησης ώστε να προχωρήσουμε στην κατανομή των τυχαίων μεταβλητών που θα εξετάσουμε στη συνέχεια. Χωρίζουμε την διαδικασία σε τρία βήματα. Αρχικά ορίζουμε το ολοκλήρωμα για $f \geq 0$ απλή μετρήσιμη συνάρτηση, έπειτα για $f \geq 0$ μετρήσιμη συνάρτηση και τέλος για μια μετρήσιμη συνάρτηση f με τιμές στο $\mathbb{R}$.

Πριν αρχίσουμε με τους ορισμούς που θα ορίσουν τα ολοκληρώματα πάνω σε μετρήσιμες συναρτήσεις, θεωρούμε εξαρχής έναν χώρο μέτρου $(\Upsilon, \mathcal{F}, \mu)$.

Ορισμός 1.2.5 [4],[9]: Έστω μια απλή μετρήσιμη συνάρτηση $f: \Upsilon \to [0, \infty]$ με κανονική μορφή (όπως ορίσθηκε στον ορισμό 1.2.3) , δηλαδή $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \, 1_{A_i}$.

Το ολοκλήρωμα Lebesgue της f ως προς το μέτρο μ, ορίζεται ως:

$$\int f \, d\mu \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mu(A_i)$$

με σύμβαση $0 \cdot \infty = 0$ και με το ολοκλήρωμα να έχει πεδίο τιμών στο $[0, \infty]$.

Ορισμός 1.2.6 [4],[9]**:** Έστω μια μετρήσιμη (μη-αρνητική) συνάρτηση $f: Y \to [0, \infty]$, τότε ορίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue της f ως προς το μέτρο μ, ως:

$$\int f\, d\mu \coloneqq \sup\left\{ \int s\, d\mu : s \text{ απλή , μετρήσιμη } \mu\varepsilon\ 0 \leq s \leq f \right\}$$

Αν η f είναι απλή τότε έχουμε τον ορισμό 1.2.5.

Ορισμός 1.2.7 [4],[9]**:** Έστω μια μετρήσιμη συνάρτηση $f: Y \to [-\infty, \infty]$, τότε ορίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue της f ως προς το μέτρο μ, ως:

$$\int f\, d\mu \coloneqq \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu$$

Υπό την προϋπόθεση που δεν εμφανίζεται απροσδιοριστία $(\infty - \infty)$ στην δεξιά πλευρά της ισότητας και το ολοκλήρωμα είναι πραγματικός αριθμός, η συνάρτηση f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη.

Παρατηρήσεις [9] πάνω στους ορισμούς:

i. Τα ολοκληρώματα $\int f^+\, d\mu$ και $\int f^-\, d\mu$ ορίζονται και αυτά από τον ορισμό 1.2.6.
ii. Το ολοκλήρωμα μιας μετρήσιμης συνάρτησης, είναι στοιχείο του $[-\infty, \infty]$
iii. Μια μετρήσιμη συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν τα $\int f^+\, d\mu < \infty$ και $\int f^-\, d\mu < \infty$ (πεπερασμένα).
iv. Θεωρούμε την (αύξουσα) ακολουθία $(f_n)_{n\geq 1}$ απλών συναρτήσεων, με $f \geq 0$ να είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση, όπου αποδεικνύεται ότι (θεώρημα μονότονης σύγκλισης)
$$\int \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$$

Ο πάνω συμβολισμός, επιλέχθηκε για να τονισθεί η επιλογή ενός μέτρου Lebesgue μ, για τον αυστηρό μαθηματικό ορισμό του ολοκληρώματος, ωστόσο για ευκολία το ολοκλήρωμα μπορεί γραφτεί εναλλακτικά ως $\int f(x)dx$ ή πιο απλά $\int f$ πάνω στον R^d.

Συνεχίζοντας τώρα με μια παρατήρηση, δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι το ολοκλήρωμα Lebesgue ορίσθηκε (στην γενική περίπτωση) πάνω σε ένα χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ από μια f μετρήσιμη συνάρτηση. Όμως στην περίπτωση που αντί για ένα χώρο μέτρου, είχαμε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, θα ήταν το ολοκλήρωμα μιας τ.μ. X και όπου θα το ονομάσουμε έπειτα μέση τιμή της τ.μ. X.

Πρόταση 1.2.3 [4],[41]**:** Έστω δύο μετρήσιμες συναρτήσεις $f, g: X \to [0, \infty]$, τότε:

i. $\int(\alpha\, f + \beta\, g)d\mu = \alpha \int f\, d\mu + \beta \int g\, d\mu$, όπου $\alpha, \beta \geq 0$
ii. Αν $0 \leq f \leq g$, τότε $\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$
iii. Αν $A \subset B$, τότε $\int_A f\, d\mu \leq \int_B f\, d\mu$, όπου $A, B \in \mathcal{F}$
iv. Αν $\mu(A) = 0$ ή αν $f \equiv 0$ στο A, τότε $\int_A f\, d\mu = 0$
v. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε $f(x) < \infty$ για κάθε σχεδόν x
vi. Αν η g είναι ολοκληρώσιμη και $0 \leq f \leq g$, τότε και η f είναι ολοκληρώσιμη

Παράδειγμα 1.2.4 [4]: Έστω ένα σύνολο X, με μια σ-άλγεβρα που είναι ίση με το δυναμοσύνολο του συνόλου X, δηλαδή $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$.

Ορίζουμε ένα μέτρο,

$$\mu(A) \coloneqq \begin{cases} n\,, & \alpha\nu\ \tau o\ A\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \alpha\kappa\rho\iota\beta\acute{\omega}\varsigma\ n\ \sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\alpha \\ +\infty, & \alpha\nu\ \tau o\ A\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \acute{\alpha}\pi\varepsilon\iota\rho o\ \sigma\acute{\upsilon}\nu o\lambda o \end{cases}, \qquad \text{για κάθε } A \in \mathcal{F}$$

Με το μ να καλείται αριθμητικό μέτρο.

Συνεχίζοντας στο παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ότι $X = \mathbb{N}$ και μια συνάρτηση $f: \mathbb{N} \to [0, \infty]$, τότε από τον ορισμό 1.2.6, θα έχουμε

$$\int f\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

διότι η $f = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\ 1_{\{n\}}$ και σύμφωνα με το αριθμητικό μέτρο που ορίστηκε ισχύει ότι, $\mu(\{n\}) = 1$, όπου $A = \{n\}$ και $1_{\{n\}} = 1$

Τελειώνοντας, τώρα με την σύντομή εισαγωγή της παραγράφου, στην συνέχεια θα δούμε ένα θεώρημα που προέρχεται από την πραγματική ανάλυση, το οποίο συνδέει υπό κάποια προϋπόθεση το γνωστό ολοκλήρωμα κατά Reimann, με το ολοκλήρωμα Lebesgue.

Θεώρημα 1.2.1 [39],[41]:

i. Το ολοκλήρωμα κατά Riemann, υπάρχει για ένα σύνολο σημείων x μέσα στο διάστημα ολοκλήρωσης $[a, b]$ αν και μόνο αν η f δεν είναι συνεχής και έχει μέτρο Lebesgue μηδέν.
ii. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση και ισχύει ότι:

$$(Reimann)\int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} f(x)dx = (Lebesgue)\int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} f(x)dx$$

Συνεπώς καταλαβαίνουμε ότι το ολοκλήρωμα Lebesgue γενικεύει το ολοκλήρωμα Riemann και από το θεώρημα βλέπουμε ότι αν υπάρχει μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε αυτή η συνάρτηση είναι και μετρήσιμη, καθώς και τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα [9].

Συνεχίζοντας την σκέψη, αν η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann σε κάθε κλειστό υποδιάστημα και φραγμένο στο R, όντας θετική ή το γενικευμένο της ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο, τότε η f θα είναι μετρήσιμη και θα ισχύει:

$$(Reimann)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = (Lebesgue)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Κλείνοντας, αναφέρεται ότι σε πολλές εφαρμογές υπάρχει η ανάγκη της εναλλαγής ολοκληρωμάτων-σειρών, ώστε να συγκλίνουν στην ίδια ποσότητα. Επισημαίνεται ότι κάτι τέτοιο είναι εφικτό να γίνει, και μάλιστα είναι γνωστό ως το θεώρημα Beppo-Levi, όπου αποδεικνύεται ορίζοντας αρχικά, το θεώρημα της μονότονης σύγκλισης (βλ. «παρατηρήσεις πάνω στους ορισμούς» (iv)), έπειτα συνεχίζοντας για να είναι πεπερασμένη (συγκλίνει) η ποσότητα, με το γνωστό λήμμα Fatou και τέλος από το θεώρημα της κυριαρχημένης σύγκλισης. Αντίστοιχο θεώρημα για την εναλλαγή ολοκληρωμάτων, επιτυγχάνεται μέσω του θεωρήματος του Fubini.

1.2.5. Κατανομή Μιας Τυχαίας Μεταβλητής

Οι τυχαίες μεταβλητές ορίσθηκαν παραπάνω διότι, μας δίνουν τη δυνατότητα να περιγράψουμε με ευκολία τα ενδεχόμενα που μας ενδιαφέρουν σε έναν δ.χ. Ω και στη συνέχεια να υπολογίζουμε τις αντίστοιχες πιθανότητες. Συνεπώς, αν έχουμε μια τ.μ. N που μετράει τον αριθμό των αποζημιώσεων σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο, τότε για παράδειγμα αν θέλουμε να ορίσουμε την πιθανότητα ο αριθμός των αποζημιώσεων να μην υπερβαίνει τις ν θα έχουμε $P(N \leq \nu)$. Πώς όμως θα υπολογισθεί αυτή η πιθανότητα στην διακριτή περίπτωση που είναι τώρα αλλά και στη συνεχή περίπτωση; Για αυτό το λόγω εισάγονται οι παρακάτω ορισμοί κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής, καθώς και στη γενική περίπτωση των περισσοτέρων μεταβλητών.

Ορισμός 1.2.8 [5],[9]: Έστω μια τ.μ. X , ορισμένη σε ένα δ.χ. Ω με μέτρο πιθανότητας P στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Η πραγματική συνάρτηση $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ δίνεται από τον τύπο:

$$F(t) = P(X \leq t) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}), \qquad t \in \mathbb{R}$$

αυτή η συνάρτηση ονομάζεται αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X, υπό το μέτρο πιθανότητας P.

Ιδιότητες:

1. Η F είναι μη φθίνουσα συνάρτηση, δηλαδή, αν $t_1 < t_2$ τότε $F(t_1) \leq F(t_2)$
2. $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$ και $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$
3. Η $F(t)$ είναι δεξιά συνεχής, δηλαδή για κάθε φθίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{t_n\}_{n\geq 1}$ με $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} F(t_n) = F(t)$
4. Αφού οι τιμές $F(t)$ της συνάρτησης F είναι πιθανότητες, θα ισχύει ότι $0 \leq F(t) \leq 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 1.2.4 [5]: Έστω ένας χ.π. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$ και δυο πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$,

τότε $P(\alpha < X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

Απόδειξη: Ορίζουμε τα ενδεχόμενα $A = \{X \leq \alpha\}\, \kappa\alpha\iota\, B = \{X \leq \beta\}$. Από το $\alpha < \beta$ ισχύει ότι $A \subseteq B$, συνεπώς για το ενδεχόμενο $\{\alpha < X \leq \beta\} = B - A = BA^c$ (δηλαδή είναι να συμβεί το ενδεχόμενο B χωρίς να συμβεί το A, για αυτό το λόγω παίρνουμε το συμπληρωματικό του, αλλιώτικα παίρνουμε το σύνολο B και αφαιρούμε την μεταξύ τους τομή AB).

Συνεπώς έχουμε ,

$$P(\alpha < X \leq \beta) = P(BA^c) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A) = P(X \leq \beta) - P(X \leq \alpha)$$
$$= F(\alpha) - F(\beta)$$

Ορισμός 1.2.9 [5]: Μια τ.μ. X ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, θα λέγεται διακριτή, αν το σύνολο των τιμών της (R_x) είναι είτε πεπερασμένο, είτε απείρως αριθμήσιμο.

Ορισμός 1.2.10 [5]: Για μια τ.μ. $X: \Omega \to \mathbb{R}$ (όπως ορίστηκε στον ορισμό 1.2.2) που μετασχηματίζει τον δ.χ. Ω σε ένα υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών, δηλαδή $\{x \in \mathbb{R}: X(\omega) = x$ για κάποιο $\omega \in \Omega\}$, το σύνολο αυτό θα ονομάζεται σύνολο τιμών ή πεδίο τιμών της τ.μ. X, συμβολίζοντας το R_x.

Ορισμός 1.2.11 [3]: Έστω μια τ.μ. $X: \Omega \to \mathbb{R}$ η οποία έχει σύνολο τιμών την R_x. Τότε δεδομένου κάποιου μέτρου πιθανότητας P στο Ω, η πυκνότητα της X, θα ορίζεται ως:

$$P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}) \text{ , για κάθε } x \in R_x$$

Αντίστοιχα, αν είχαμε την τ.μ. $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ με σύνολο τιμών $R_{X_1, X_2, \dots, X_n} \subseteq R_{X_1} \times R_{X_2} \times \dots \times R_{X_n}$, τότε:

$$P(X_1 = x, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = P(\{\omega \in \Omega: X_1(\omega) = x_1, X_2(\omega) = x_2, \dots, X_n(\omega) = x_n\})$$

όπου $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_{X_1, X_2, \dots, X_n}$

και καλείται από κοινού συνάρτηση πιθανότητας της n-διάστατης τ.μ. $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$

Εν συντομία, μπορούσε σε κάθε διακριτή τ.μ. X, να αντικαταστήσουμε μια πραγματική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο πλέον $f(x) = P(X = x)$, για κάθε $x \in R_x$.

Πρόταση 1.2.5 [5]: Θα δούμε τώρα κάποιες ιδιότητες της συνάρτησης πυκνότητας f μιας διακριτής τ.μ. X, με σύνολο τιμών $R_x = \{x_1, x_2, \dots\}$ που ικανοποιούνται από τον πάνω ορισμό.

i. $f(x) = 0$ για κάθε $x \notin R_x$
ii. $f(x_i) \geq 0$ για όλα τα $i = 1, 2, \dots$
iii. $f(x_1) + f(x_2) + \dots = \sum_{x \in R_x} f(x) = 1$
iv. $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in R_x$
v. Έστω ένα υποσύνολο $A \subset R_x$, τότε $P(X \in A) = \sum_{x \in A} f(x)$

Σημειώνεται ότι ισχύει και το αντίστροφο αυτής της πρότασης, δηλαδή αν ισχύουν οι συνθήκες (i) έως (iii) τότε η πρόταση μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ορισμός μιας συνάρτησης πιθανότητας.

Κατ' αντιστοιχία, ισχύουν οι ίδιες ιδιότητες και στην περίπτωση της πολυδιάστατης συνάρτησης πυκνότητας $f(\boldsymbol{x})$, όπου $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ το n −διάστατο διάνυσμα τιμών.

Συνδυάζοντας τώρα, τους ορισμός 1.2.11 και 1.2.8, μαζί με την πρόταση 1.2.5, συνειδητοποιούμε ότι η σ.κ. F μια διακριτής τ.μ. θα μπορεί να γραφτεί με την βοήθεια της συνάρτηση πιθανότητας f, κλαδωτά. Αντίθετα, αν θέλαμε να εκφράσουμε την f ως προς την σ.κ. F, θα παίρναμε τις διαφορές των σ.κ. για τις τιμές που υπάρχει η πυκνότητα.

Με απλά λόγια, θα ισχύει ότι $F(x) = \sum_{y \in R_x : y \leq x} f(y)$, όπου R_x το σύνολο τιμών της τ.μ. X και $f(x_r) = F(x_r) - F(x_{r-1}),\ r = 2, 3, \dots$

Παράδειγμα 1.2.5: Θεωρούμε ότι σε ένα δρόμο που συνδέει δύο μεγάλες πόλεις, η πιθανότητα να συμβεί ατύχημα σε ένα συγκεκριμένο σημείου του δρόμου είναι $p = 0.0005$ και έστω ο αριθμός διέλευσης των οχημάτων κατά μέσο όρο καθημερινός είναι 1000. Τότε θα ήταν σκόπιμο κάποιος να αναλογιστεί την πιθανότητα για παράδειγμα να συμβούν πάνω από 4 ατυχήματα.

Συνεπώς,

Θεωρούμε ότι το κάθε αμάξι που διέρχεται είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα και ότι έχουν την ίδια πιθανότητα p ατυχήματος στο συγκεκριμένο σημείο.

Αν μια τ.μ. $X =$ ο αριθμός των ατυχημάτων καθημερινός

δηλαδή, καταλαβαίνουμε ότι για $n = 1000$ ανεξάρτητες (η ανεξαρτησία και η ισονομία τ.μ. εξηγείται στην παράγραφο 1.2.6) επαναλήψεις του πειράματος με την ίδια πιθανότητα, η τ.μ. $X \sim B(n, p)$ από τη θεωρία, όπου και καλείται Διωνυμική κατανομή (βλ. Παράρτημα Α)

άρα $f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},\ \ x = 0, 1, \dots, n$

με βάση τις προτάσεις 1.2.4 και 1.2.5, η πιθανότητα

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$$

$$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)]$$

όπου υπολογίζεται αν αντικαταστήσουμε την $f(x) = P(X = x)$ για τις τιμές $x = 0, 1, 2, 3, 4$.

Παρατηρούμε, όμως ότι αυτός ο τύπος δεν είναι εύχρηστος για τον υπολογισμό αυτής της πιθανότητας, λόγω υπολογισμού του διωνυμικού συντελεστή. Για αυτό το λόγω θα χρησιμοποιήσουμε την χρήση της προσέγγισης από μια κατανομή Poisson.

Ειδικότερα, για μια Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p, αν ισχύουν :

i. Ο αριθμός των δοκιμών $n \to \infty$
ii. Η πιθανότητα επιτυχίας $p \to 0$
iii. Ο μέσος αριθμός των επιτυχιών στις n δοκιμές να συγκλίνει σε έναν αριθμό λ , δηλαδή $np \to \lambda$

Τότε:

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \approx \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

Οπότε στο παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα αποτυχίας είναι αρκετά μικρή $p = 0.0005$, ο αριθμός των δοκιμών είναι $n = 1000$ και ισχύει $np \to 0.5 = \lambda$ (ισχύουν (i), (ii) και (iii)).

Άρα η αντίστοιχη πιθανότητα που δεν μπορέσαμε να υπολογίσουμε προηγούμενος, γίνεται τώρα,

$$P(X = 0) = e^{-0.5}\,, \qquad P(X = 1) = e^{-0.5} 0.5$$

$$P(X=2)=\frac{e^{-0.5}0.5^2}{2}\ , \qquad P(X=3)=\frac{e^{-0.5}0.5^3}{6}$$

$$P(X=4)=\frac{e^{-0.5}0.5^4}{24}$$

Τελικός έχουμε $P(X>4)$ =0.0001721156 (αρκετά μικρή πιθανότητα).

Ορισμός 1.2.12 [5],[9]: Έστω μια τ.μ. X ορισμένη σε ένα δ.χ. Ω και έστω ότι υπάρχει μια (μη-αρνητική) πραγματική συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to[0,\infty)$ η οποία είναι Borel-μετρήσιμη, δηλαδή για κάθε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$, να μπορεί να γραφτεί ως η ένωση ενός πεπερασμένου ή απείρως αριθμήσιμου πλήθους διαστημάτων, τότε θα ισχύει ότι:

$$P(X\in A)=\int_A f(x)dx$$

τότε η τ.μ. X είναι απόλυτα συνεχής και η f ονομάζεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π)

Ανάλογα, αποτελέσματα θα ισχύουν και για την πολυμεταβλητή περίπτωση, που για μια $n-$διάστατη τ.μ. $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ ορισμένη στον ίδιο δ.χ. Ω, με μια μη αρνητική συνάρτηση n μεταβλητών $f\colon \mathbb{R}^n\to[0,\infty)$, θα ισχύει:

$$P\big((X_1,X_2,\dots,X_n)\in \Gamma\big)=\int_\Gamma \dots \int f(x_1,x_2,\dots,x_n)dx_1dx_2\dots dx_n\ , \qquad \acute{o}\pi o\upsilon\ \Gamma\subseteq\mathbb{R}^n$$

και η συνάρτηση f θα καλείται από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των n τ.μ. $X_1,X_2,\dots,X_n$.

Τέλος, σημειώνεται ότι τα πάνω ολοκλήρωμα είναι κατά Reimann.

Πρόταση 1.2.6 [3]: Θα δούμε τώρα κάποιες ιδιότητες της σ.π.π. f στην συνεχή περίπτωση, όπου η X είναι συνεχής τ.μ.

i. $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
ii. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$
iii. Το σύνολο τιμών R_x της συνεχούς τ.μ. X μπορεί να εκφραστεί ως ένωση ενός πεπερασμένου πλήθους (μη-τετριμμένων) διαστημάτων πραγματικών αριθμών και ορίζεται ως $R_x=\{x\in\mathbb{R}: f(x)>0\}$
iv. Για οποιαδήποτε $\alpha\leq\beta$, η πιθανότητα της τ.μ. X να πάρει κάποια τιμή στο διάστημα $A=[\alpha,\beta]$ εκφράζεται ως :
$$P(X\in A)=P(\alpha\leq X\leq\beta)=P(\alpha<X<\beta)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$$
v. Για κάθε τιμή $\alpha\in\mathbb{R}$, η πιθανότητα η συνεχής τ.μ. X να ισούται ακριβώς με το α είναι μηδενική, δηλαδή $P(X=\alpha)=0$ για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

Αναφέρεται ακόμη, ότι για την πολυδιάστατη περίπτωση τα αποτελέσματα είναι παρόμοια.

Απόδειξη: Άμεσα από τον ορισμό 1.2.12

Παρατηρήσεις:

- Σύμφωνα με το [3] ένας ισοδύναμος ορισμός της σ.π.π. θα ήταν αν είχαν αναφερθεί οι (ii), (iii) και (iv).
- Εναλλακτικά σύμφωνα με το [5] ένας ισοδύναμος ορισμός της σ.π.π. θα ήταν αν ίσχυαν οι (i) και (ii) για μια πραγματική συνάρτηση f.
- Ο λόγος για τον οποίο στο (iii) χρησιμοποιήθηκε η έννοια «μη-τετριμμένη» ήταν διότι θέλουμε να αποκλείσουμε το ενδεχόμενο το σύνολο τιμών της συνεχούς τ.μ. X να μην είναι της μορφής $[\alpha, \alpha] = \{\alpha\}$, δηλαδή να αποτελούνται από ένα μόνο στοιχείο.

Πρόταση 1.2.7: Έστω μια συνεχής τ.μ. X με συνάρτηση κατανομής F και σ.π.π f. Τότε ισχύουν:

i. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$, αφού $A = [-\infty, x]$ και $P(X \in A) = F(x)$
ii. $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Με την πολυδιάστατη περίπτωση, ισχύουν ανάλογες σχέσεις.

Στο σημείο αυτό, για λόγους πληρότητας αναφέρεται ότι εκτός από διακριτές και απόλυτα συνεχείς τ.μ., υπάρχει και μια κατηγορία που ονομάζονται ιδιάζουσες (ή μεικτές) τ.μ., που είναι ο συνδυασμός αυτών.

Είναι σημαντικό το γεγονός ότι,

Αν έχουμε μια σ.κ. F (βλ. ορισμό 1.2.8), τότε μπορεί να γραφτεί μοναδικά ως,

$$F = p_1 F_{\Sigma} + p_2 F_{\Delta} + p_3 F_{IZ}$$

όπου , $0 \leq p_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3$ και $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, με F_{Σ} να είναι η σ.κ. της απόλυτα συνεχής, η σ.κ. F_{Δ} της διακριτής και η σ.κ. F_{IZ} της ιδιάζουσας περίπτωσης.

Παράδειγμα 1.2.6: Έστω μια συνεχής τ.μ. X με σ.π.π. $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$ και θέλαμε να βρούμε την πιθανότητα $P(X > 2)$, με $\lambda = 2$ τότε:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F_X(2) = 1 - \int_0^2 f(x)\,dx = 1 - \int_0^2 2e^{-2x}dx$$
$$= 1 - [-e^{-2x}]_0^2 = 1 - (1 - e^{-4}) = e^{-4}$$

Η οποία πιθανότητα, είναι η συμπληρωματική της σ.κ., ονομάζεται ως συνάρτηση επιβίωσης (σ.ε) ή συνάρτηση δεξιάς ουράς.

1.2.6. Στοχαστική Ανεξαρτησία και Ισονομία Τυχαίων Μεταβλητών

Σε αυτή την παράγραφο θα αντιμετωπίσουμε την ανεξαρτησία των τ.μ. καθώς και την ισονομία αυτών.

Ένα απλούστατο παράδειγμα ανεξαρτησίας (στην διακριτή περίπτωση) είναι αν ρίξουμε ένα αμερόληπτο ζάρι και ένα νόμισμα. Προφανώς, το αποτέλεσμα της ρίψης του ζαριού δεν επηρεάζεται από το αποτέλεσμα της ρίψης του νομίσματος και φυσικά αν ξανακάνουμε το πείραμα θα ήταν λογικό να είχαμε π.χ. τις τ.μ. $X =$ αν το ζάρι φέρει την τιμή 6 και $Y =$ το νόμισμα φέρει Κορόνα. Οι πιθανότητες στο 1ο και 2ο πείραμα (με την επανάληψη του πειράματος να είναι ίδια) θα ήταν αντίστοιχα ίδιες $\frac{1}{6}$ & $\frac{1}{2}$. Όμως υπάρχουν περιπτώσεις στην πράξη που δεν είναι σαφές αν υπάρχει ανεξαρτησία ή/και ισονομία μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών.

Θεώρημα 1.2.2 [9]: Αν έχουμε δύο μέτρα πιθανότητας P και Q στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ με την ίδια σ.κ., τότε θα είναι ίσα $P = Q$.

Απόδειξη: Η απόδειξη του πάνω θεωρήματος είναι αρκετά τεχνική και παραπέμπεται ο αναγνώστης στο θεώρημα 4.10 του [9].

Από το πάνω θεώρημα, αν δύο τυχαίες μεταβλητές $X: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ και $Y: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ έχουν την ίδια κατανομή, τότε για οποιαδήποτε σύνολο Borel A, έχουμε $P(X \in A) = P(Y \in A)$.

Ορισμός 1.2.13 [9]: Για δύο τ.μ. X και Y που παίρνουν τιμές σε κοινό χ.μ. $(\Omega, \mathcal{F})$ λέγονται ισόνομες αν έχουν την ίδια κατανομή. Δηλαδή τα μέτρα P^X, P^Y ταυτίζονται στον $(\Omega, \mathcal{F})$.

Συγκεκριμένα, είναι ειδική περίπτωση των προαναφερθέντων όπου $X, Y: \Omega \rightarrow E$ με $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ (ορισμένων στον ίδιο χώρο) και $P(X = Y) = 1$.

Ορισμός 1.2.14 [28]: Έστω μια $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ οικογένεια σ-υπό άλγεβρες της $\mathcal{F}$ (δηλαδή για κάθε $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F},\ i \in I$). Η οικογένεια $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ λέγεται ανεξάρτητη αν για κάθε πεπερασμένο σύνολο $J \subset I$ και $A_i \in \mathcal{F}_i$ όπου $i \in J$, ισχύει ο ορισμός 1.1.7.

Επίσης μια οικογένεια ενδεχομένων $\{A_i\}_{i \in I}$ είναι ανεξάρτητη, αν οι σ-άλγεβρες $\mathcal{F}_i = \{\emptyset, \Omega, A_i, A_i^c\},\ i \in I$ είναι ανεξάρτητες.

Παράδειγμα 1.2.7: Έστω ενας δ.χ. $\Omega = \{1,2,3,4\}$, τότε οι σ-άλγεβρες:

$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{1,2\}, \{3,4\}\}$ και $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1,3\}, \{2,4\}\}$ είναι ανεξάρτητες.

Ορισμός 1.2.15 [9],[28]: Έστω οι χ.μ. $\{(E_i, \mathcal{E}_i): i \in I\}$ και μια οικογένεια τ.μ. $\{X_i\}_{i \in I}$ με $X_i: \Omega \rightarrow E_i$ για κάθε $i \in I$. Τότε η οικογένεια των τ.μ $\{X_i\}_{i \in I}$ λέγονται ανεξάρτητες τ.μ. αν η οικογένεια των σ-αλγεβρών $\{\sigma(X_i)\}_{i \in I} \subset \mathcal{F}$ είναι ανεξάρτητη.

Πρόταση 1.2.8 [9]: Από τους ορισμούς 1.2.14 & 1.2.15 έπεται ότι :

$$P\left(X_{i_1} \in A_{i_1}, X_{i_2} \in A_{i_2} \ldots, X_{i_n} \in A_{i_n}\right) = P\left(X_{i_1} \in A_{i_1}\right) P\left(X_{i_2} \in A_{i_2}\right) \ldots P\left(X_{i_n} \in A_{i_n}\right)$$

για κάθε $n \geq 2$ στοιχείων, με διαφορετικούς συνδυασμούς επιλογής δεικτών $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ και το κάθε $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, A_{i_2} \in \mathcal{E}_{i_2}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$.

Έπειτα από την πάνω πρόταση είναι εύκολο κανείς να δείξει την ανεξαρτησία της συναρτήσεις κατανομής και πιθανότητας, αρκεί να ορίσει κατάλληλα τα ενδεχόμενα A_i. Ισχύουν οι ίδιες σχέσεις όπως στην πάνω πρόταση, απλός αντικαθιστώντας με την κάθε συνάρτηση που μας ενδιαφέρει π.χ. τη συνάρτησης πιθανότητας f ή την συνάρτηση κατανομής F.

Θεώρημα 1.2.3 [9]**:** Για μια διαμέριση του συνόλου των δεικτών $I = \{I_j : j \in J\}$, θεωρούμε τις $\{X_i\}_{i\in I}$ ανεξάρτητες τ.μ. και τις μετρήσιμες συναρτήσεις $f_j: \mathbb{R}^{I_j} \to \mathbb{R}$, για κάθε $j \in J$. Συνεπώς, θεωρώντας την συνάρτηση $Y_j \coloneqq f_j((X_i)_{i\in I_j})$, όπου $Y_j: \Omega \to \mathbb{R}$ για κάθε $j \in J$, τότε θα έπεται ότι οι τ.μ. $\{Y_j\}_{j\in J}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Πιο απλά το πάνω θεώρημα διατυπώνει πώς αν έχουμε μια οικογένεια τ.μ. $\{X_i\}_{i\in I}$ για κάποιο σύνολο δεικτών I, τότε οποιεσδήποτε συνδυασμός από αυτές θα είναι ανεξάρτητος.

Παράδειγμα 1.2.8: Έστω οι ανεξάρτητες τ.μ. $X_i > 0,\ i = 1,2,3$, τότε με βάσει το πάνω θεώρημα οι τ.μ. $Y_1 = \log{(X1 + X_2)}$ και $Y_2 = e^{-X_3}$ είναι και αυτές ανεξάρτητες μεταξύ τους. Σε αντίθετη περίπτωση αν ήταν το $Y_2 = \frac{e^{-X_3}}{X_2}$, τότε δεν θα ήταν ανεξάρτητες μεταξύ τους οι Y_1 και Y_2.

1.3. Ροπές, Διακυμάνσεις, Συνδιακυμάνσεις και Δεσμευμένη Μέση Τιμή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισάγουμε τις έννοιες της μέσης τιμής, διακύμανσης και συνδιακύμανσης των κατανομών που θα αφορά είτε τη συνεχή, είτε τη διακριτή περίπτωση. Αυτές οι έννοιες, μας είναι χρήσιμες διότι θέλουμε να μελετήσουμε περισσότερο την συμπεριφορά των κατανομών (βλ. Παράρτημα Α) και να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για την μορφή τους

1.3.1. Ροπές Τυχαίων Μεταβλητών

Ορισμός 1.3.1 [5],[39]**:** Για μια διακριτή τ.μ. X με σύνολο τιμών R_X και συνάρτηση πιθανότητας f, τότε η μέση της τιμή, θα ορίζεται ως:

$$E(X) = \sum_{x\in R_X} xP(X = x) = \sum_{x\in R_X} xf(x)$$

με την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει απόλυτα, δηλαδή να ισχύει $E(X) < \infty$ (η τ.μ. X έχει πεπερασμένη μέση τιμή) και το P είναι το μέτρο πιθανότητας της.

Στην γενική της περίπτωση μπορούμε να την ορίσουμε ως,

$$E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega)$$

όπου φυσικά η τ.μ. X είναι ορισμένη, πάνω σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Πρόταση 1.3.1 [5]**:** Για μια διακριτή τ.μ. X με σύνολο τιμών R_X και συνάρτηση πιθανότητας f, έχουμε ότι η μέση τιμή της νέας τ.μ. $Y = g(X)$, όπου g είναι πραγματική συνάρτηση, θα ορίζεται ως :

$$E(Y) = E\big(g(X)\big) = \sum_{x\in R_X} g(x)f(x)$$

Από την πάνω πρόταση αν θέσουμε την τ.μ. $Y = g(X) = X^k$, όπου $k = 1, 2, 3, \dots$ τότε η μέση τιμή της τ.μ. Y δίνει τις k -ροπές της τ.μ. X, δηλαδή

$$E(X^k) = \sum_{x \in R_X} x^k f(x) \;, \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

Πρόταση 1.3.2: Για δύο διακριτές τ.μ. X , Y με μέση τιμή $E(X), E(Y)$ θα ισχύουν τα κάτωθι:

i. Αν α , β $\in \mathbb{R}$ και μια πραγματική συνάρτηση g τότε ,
$$E(\alpha + \beta g(X)) = \alpha + \beta E(g(X))$$

ii. Αν ισχύει $P(X = c) = 1$ όπου $c \in \mathbb{R}$, τότε
$$E(X) = c$$

iii. Αν $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ πεπερασμένο σύνολο τιμών, τότε
$$\sum_{x \in R_X} \big(x - E(X)\big) f(x) = 0$$

iv. Αν α , β $\in \mathbb{R}$ και δύο πραγματικές συναρτήσεις g_1, g_2 τότε ,
$$E(\alpha g_1(X) + \beta g_2(Y)) = \alpha E(g_1(X)) + \beta E(g_2(Y))$$

v. Αν οι τ.μ. . X , Y είναι ανεξάρτητες και ισόνομες μεταξύ τους, τότε
$$E(XY) = E(X)E(Y) = E(X)E(X) = [E(X)]^2$$

Απόδειξη: Προκύπτει από τον ορισμό 1.3.1 και την πρόταση 1.3.1.

Σημειώνεται όμως ότι στο (ii) η κατανομή ονομάζεται εκφυλισμένη στο σημείο c και η συνάρτηση πιθανότητας της ορίζεται ως :

$$P(X = x) = \begin{cases} 1 \;, \alpha\nu \; x = c \\ 0 \;, \alpha\nu \; x \neq c \end{cases}$$

Επιπλέον η (iii) ισχύει πάντα διότι η τ.μ. X έχει πεπερασμένο αριθμό άθροισης.

Παράδειγμα 1.3.1: Έστω μια τ.μ. K η οποία είναι εκφυλισμένη στο σημείο $a \in \mathbb{N}$, θέλοντας να βρούμε την n −οστή ροπή της, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E(K^n) &= \sum\nolimits_{k \in \mathbb{N}} k^n P(K = k) = 0^n P(K = 0) + 1^n P(K = 1) + \cdots + a^n P(K = a) + \cdots \\ &= 0 + 0 + \cdots + a^n + \cdots = a^n \end{aligned}$$

Ορισμός 1.3.2 [5],[39]: Για μια συνεχή τ.μ. X με σ.π.π. f, η μέση της τιμή θα ορίζεται ως:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει απόλυτα, δηλαδή να ισχύει $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$.

Σημειώνεται ότι το ολοκλήρωμα υπολογίζεται κατά Reimann, όπου απορρέει από το θεώρημα 1.2.1 που αναπτύχθηκε στην παράγραφο της ολοκλήρωσης κατά Lebesgue.

Στην γενική της περίπτωση, ως μέση τιμή μιας συνεχούς τ.μ. X, ορίζουμε:

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega)\, dP(\omega)$$

όπου η τ.μ. X είναι ορισμένη πάνω σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Αντίστοιχα, ισχύουν οι τύπου που παρουσιάστηκαν στις προτάσεις 1.3.1 και 1.3.2 και στην συνεχή περίπτωση, οπότε τα αθροίσματα αντικαθίστανται με ολοκληρώματα. Επιπλέον στην πρόταση 1.3.2 η (ii) είναι ίση με το 0 λόγω της συνεχούς περίπτωσης (βλ. πρόταση 1.2.6 (v)).

Παράδειγμα 1.3.2: Έστω μια τ.μ. $X \sim Exp(\lambda)$ και θέλοντας να υπολογίσουμε την μέση τιμή της $E\big(g(X)\big), όπου\ \ g(X) = e^{-sX}$, με $s > 0$ θα έχουμε:

$$E\big(g(X)\big) = \int_0^{\infty} g(x)f(x)dx = \int_0^{\infty} (e^{-sx})\big(\lambda e^{-\lambda x}\big)dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+s)x}dx = \lambda \left[\frac{-e^{-(\lambda+s)x}}{(\lambda+s)}\right]_0^{\infty}$$
$$= \frac{\lambda}{\lambda+s}[1-0] = \frac{\lambda}{\lambda+s}$$

Η οποία ποσότητα ονομάζεται μετασχηματισμός Laplace μιας εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ.

1.3.2. Διακύμανση, Συνδιακύμανση και Συσχέτιση

Ορισμός 1.3.3 [5]: Έστω μια τ.μ. X για την οποία υπάρχει η μέση τιμή της $(E(X) < \infty)$, τότε ορίζουμε την ποσότητα:

$$Var(X) = E\left[\big(X - E(X)\big)^2\right] = E(X^2) - E(X)^2$$

η οποία ονομάζεται διακύμανση της τ.μ. X, συνήθως θέτουμε $\mu = E(X)$.

- Στην περίπτωση που η τ.μ. X είναι διακριτή ισχύει ότι :
$$Var(X) = \sum_{x \in R_X} (x-\mu)^2 f(x)$$
- Στην περίπτωση που η τ.μ. X είναι συνεχής ισχύει ότι :
$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

Πρόταση 1.3.3: Έστω δύο τ.μ. X, Y που έχουν πεπερασμένες μέσες τιμές, δηλαδή $E(X), E(Y) < \infty$, τότε θα ισχύουν τα κάτωθι:

i. $Var(X) \geq 0$
ii. $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
iii. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ισχύει $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$
iv. Αν η τ.μ. X είναι διακριτή, όπου $P(X = c) = 1$, τότε $Var(X) = 0$
v. Για δύο ανεξάρτητες τ.μ. X, Y και για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ισχύει
$$Var(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 Var(X) + \beta^2 Var(Y)$$

Απόδειξη: Συνέπεια του ορισμού 1.3.3. Ακόμη στην (i) για την απόδειξή της χρησιμοποιήθηκε η ανισότητα Jensen με την βοήθεια της (ii).

Ορισμός 1.3.4: Έστω δύο τ.μ. X, Y για τις οποίες υπάρχουν οι μέσες τιμές της $(E(X), E(Y) < \infty)$, τότε ορίζουμε την ποσότητα ,

$$Cov(X,Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

η οποία ονομάζεται συνδιακύμανση των τ.μ. X, Y, όπου $\mu_X = E(X)$ και $\mu_Y = E(Y)$.

Πρόταση 1.3.4: : Για δύο τ.μ. X , Y που έχουν πεπερασμένες μέσες τιμές, ισχύουν τα κάτωθι:

i. $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
ii. $Cov(X,X) = Var(X)$ και $Cov(Y,Y) = Var(Y)$
iii. $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
iv. Αν οι τ.μ. X , Y είναι ανεξάρτητες , τότε $Cov(X,Y) = 0$
v. Αν οι τ.μ. X , Y είναι μη ανεξάρτητες και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε

$$Var(\alpha X + \beta Y) = a^2 Var(X) + \beta^2 Var(Y) + 2\alpha\beta Cov(X,Y)$$

vi. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ τότε , $Cov(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \alpha\gamma Cov(X,Y)$
vii. Αν έχουμε τις τ.μ. X , Y, Z τότε $Cov(X + Y, Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$

Απόδειξη: Έπεται άμεσα από τον πάνω ορισμό της συνδιακύμανσης.

Συμπληρώνοντας, εάν στην περίπτωση που έχουμε δυο μη ανεξάρτητες τ.μ. X , Y ισχύει $Cov(X,Y) = 0$, τότε θα σημαίνει ότι οι τ.μ. X , Y είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους αλλά **όχι** ανεξάρτητες. Στην (iv) ισχύει ότι αν είναι ανεξάρτητες τότε είναι και ασυσχέτιστες.

Ένα ερώτημα του τίθεται τώρα, είναι ότι αν ισχύει $Cov(X,Y) \neq 0$, θα θέλαμε να δούμε το κατά πόσο είναι συσχετισμένες αυτές οι τ.μ. X , Y , οπότε θα χρειαστεί να ορίσουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.3.5 [5]: Έστω δύο τ.μ. X, Y με $\sigma_{XY} = Cov(X,Y)$ και $\sigma_X^2 = Var(X)$, $\sigma_Y^2 = Var(Y)$ τότε ορίζουμε την ποσότητα:

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

η οποία ονομάζεται συντελεστής συσχέτισης των δύο τ.μ. X, Y.

Η ποσότητα $\rho_{X,Y}$ αποτελεί ένα μέτρο του βαθμού εξάρτησης μεταξύ των τ.μ. X, Y.

Πρόταση 1.3.5: Για δύο τ.μ. X, Y μη ανεξάρτητες ισχύουν τα κάτωθι:

i. $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$
ii. Αν $\rho_{X,Y} = 1$, τότε $Y = \alpha X + \beta$ για κάποιο $\alpha > 0$ και $\beta \in \mathbb{R}$
iii. Αν $\rho_{X,Y} = -1$, τότε $Y = \alpha X + \beta$ για κάποιο $\alpha < 0$ και $\beta \in \mathbb{R}$
iv. Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\alpha\gamma > 0$, τότε $\rho_{\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta} = \rho_{X,Y}$

Απόδειξη: Προκύπτει εύκολα από τον ορισμό 1.3.5.

Σημειώνεται ότι στο (ii) σημαίνει ότι υπάρχει τέλεια θετική συσχέτιση. Επιπλέον στην περίπτωση που η $\rho_{X,Y} = 0$ σημαίνει ότι $Cov(X,Y) = 0$ είτε λόγω ασυσχέτισης είτε λόγω ανεξαρτησίας των τ.μ. X, Y.

Παράδειγμα 1.3.3: Ας θεωρήσουμε μια τ.μ. $Y = X + 5$, με την X να είναι τ.μ. με $E(X) = 2$ και $Var(X) = 9$.

Τότε, για να υπολογισθεί ο συντελεστής συσχέτισης $\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$

Θα πρέπει να βρεθεί, πρώτα ο αριθμητής:

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = E[X(X+5)] - E(X)(E(X)+5) \\
&= E(X^2) + 5E(X) - E(X)^2 - 5E(X) = (9 + 2^2) - (2)^2 = 9
\end{aligned}
$$

Ύστερα, βρίσκοντας τον παρανομαστή:

$$\sqrt{Var(X)Var(Y)} = \sqrt{(9)(9)} = 9$$

Άρα,

$$\rho_{X,Y} = \frac{9}{9} = 1$$

Δηλαδή, έχουμε μια τέλεια θετική συσχέτιση. Το οποίο ήταν αναμενόμενο, μιας που η τ.μ. Y ήταν ο γραμμικός συνδυασμός της τ.μ. X.

1.3.3. Δεσμευμένη Μέση Τιμή

Σε αυτή τη παράγραφο θα κάνουμε μια αναφορά στις δεσμευμένες μέσες τιμές, οι οποίες θα μας είναι αρκετά χρήσιμες να τις έχουμε ορίσει, καθώς στο επόμενο κεφάλαιο έπεται ο ορισμός μια πολύ σημαντικής στοχαστικής ανέλιξης, των martingale, η οποία έχει αμέτρητες εφαρμογές στα αναλογιστικά και τα χρηματοοικονομικά.

Ορισμός 1.3.6 [1]: Έστω ένας χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, μια σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ και μια τ.μ. $X \in \mathcal{F}$ με $E[X] < \infty$ (ολοκληρώσιμη), τότε ορίζουμε την νέα τ.μ. $Y \coloneqq E[X|\mathcal{F}_0]$ με τις εξής ιδιότητες:

i. $Y \in \mathcal{F}_0$ ή ισοδύναμα $\mathcal{F}_0$- μετρήσιμη
ii. $\int_A X\, dP = \int_A Y\, dP$, για κάθε $A \in \mathcal{F}_0$

τότε η τ.μ. Y καλείται υπο συνθήκη μέση τιμή της τ.μ. X ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_0$

Αξίζει να αναφερθεί ότι στην απλή περίπτωση, η δεσμευμένη ποσότητα που αναπτύχθηκε στον πάνω ορισμό, μπορεί να εκφραστεί (όχι αυστηρά μαθηματικά) στην μορφή:

$$E[X|Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x|y) dy$$

όπου X, Y είναι τ.μ. (η X είναι συνεχής) και $f(x|y)$ είναι η σ.π.π. της δέσμευσης. Για την διακριτή περίπτωση θα έχουμε άθροισμα. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη για τον αυστηρό ορισμό της σε κάποιο βιβλίο στοχαστικής ανάλυσης.

Τώρα θα δούμε κάποιες ιδιότητες του ορισμού.

Ιδιότητες [1]:

i. Αν $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ είναι η τετριμμένη σ-άλγεβρα τότε $E[X|\mathcal{F}_0] = E[X]$
ii. Αν $\mathcal{F}_0 = \sigma(X)$ τότε $E[X|\mathcal{F}_0] = X$
iii. $E\big[E[X|\mathcal{F}_0]\big] = E[X]$ (νόμος ολικής πιθανότητας)
iv. Αν $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ τότε
$$E[E[X|\mathcal{F}_1]|\,\mathcal{F}_2] = E[X|\mathcal{F}_1]$$
και
$$E[E[X|\mathcal{F}_2]|\,\mathcal{F}_1] = E[X|\mathcal{F}_1]$$
v. Αν $A \in \mathcal{F}_\varepsilon$ και $E[Y] < \infty$ τότε
$$E[Y\,\mathbf{1}_{\boldsymbol{A}}|\mathcal{F}_\varepsilon] = \mathbf{1}_{\boldsymbol{A}}\,E[X|\mathcal{F}_\varepsilon]$$
vi. Αν $X \in \mathcal{F}_\varepsilon$ και $E[|Y|], E[XY] < \infty$ τότε
$$E[XY|\mathcal{F}_\varepsilon] = X\,E[Y|\mathcal{F}_\varepsilon]$$
vii. Αν μια τ.μ. X είναι ανεξάρτητη από τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ τότε
$$E[X|\mathcal{F}] = E[X]$$

Οι αποδείξεις παραλείπονται, καθώς προκύπτουν από τον ορισμό που δώσαμε. Για μια λεπτομερή απόδειξη, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [1].

1.4. Χαρακτηριστικές Συναρτήσεις

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετηθούν οι συναρτήσεις από τις οποίες μπορούμε να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για την κατανομή των τ.μ., μιας που ορίζουν (υπό προϋποθέσεις) μονοσήμαντα την κατανομή τους. Επιπροσθέτως η χρήση των συναρτήσεων αυτών, έρχεται να μας «λύσει» τα χέρια σε περιπτώσεις που η σ.π.π μιας τ.μ. X είναι σε δυσνόητη μορφή, αποφεύγοντας έτσι άλλους πιο χρονοβόρους τρόπους όπως αυτής της συνέλιξης για κάποιο άθροισμα τ.μ. που το πλήθος αθροίσματος αυτών θα μπορούσε να ήταν είτε τυχαίο, είτε γνωστό. Τέτοιες συναρτήσεις είναι οι ροπογεννήτριες, οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις και οι λογαριθμικές χαρακτηριστικές συναρτήσεις των τυχαίων μεταβλητών που μελετάμε.

1.4.1. Μετασχηματισμός Fourier και Χαρακτηριστικές Συναρτήσεις

Ορισμός 1.4.1 [9]: Μετασχηματισμό Fourier του μέτρου πιθανότητας μ στον $\big(\mathbb{R}\,,\mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$, ονομάζουμε την συνάρτηση $\hat{\mu}:\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}$, η οποία ορίζεται ως:

$$\hat{\mu}(t) \coloneqq \int e^{itx}\,d\mu(x)\,, \qquad \text{για κάθε } t\in\mathbb{R}$$

και με i να είναι ο φανταστικός αριθμός.

Ορισμός 1.4.2 [9],[15]: Χαρακτηριστική συνάρτηση της τ.μ. X σε ένα χ.π. $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ονομάζεται η συνάρτηση $\varphi_X:\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}$, όπου:

$$\varphi_X(t) = E\big(e^{itX}\big) = \int e^{itx}\,dP(x)$$

Αν η $f(x)$ είναι μια σ.π.π της τ.μ. X, τότε η πάνω ποσότητα μπορεί να γραφτεί πιο απλά στην μορφή,

$$\varphi_X(t) = E\big(e^{itX}\big) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,f(x)dx$$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση έχει το πλεονέκτημα ότι ορίζεται πάντα, διότι το εκθετικό της κομμάτι είναι φραγμένο. Επιπλέον καθορίζει μοναδικά ένα μέτρο πιθανότητας, όπου η μοναδικότητα της, προκύπτει από την μοναδικότητα του μετασχηματισμού Fourier. Για περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [26], συγκεκριμένα στο θεώρημα 14.1.

Πρόταση 1.4.1: Για δύο τ.μ. X,Y στον $(\Omega,\mathcal{F},P)$ που έχουν χαρακτηριστικές συναρτήσεις φ_X,φ_Y αντίστοιχα, ισχύουν τα κάτωθι:

i. $\varphi_X(0) = 1$
ii. $\varphi_{\alpha X+\beta}(t) = E\big(e^{it(\alpha X+\beta)}\big) = e^{it\beta}\,E\big(e^{it\alpha X}\big) = e^{it\beta}\varphi_X(at)$, όπου $a\in\mathbb{R}$
iii. Αν X,Y ανεξάρτητα, τότε $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$

Απόδειξη: Είναι προφανής από τον ορισμό 1.4.2.

Φυσικά αν είχαμε πάνω από δύο ανεξάρτητες τ.μ., τότε θα ίσχυε αντίστοιχα το ίδιο αποτέλεσμα όπως στο (ii) της πάνω πρότασης.

Παράδειγμα 1.4.1: Έστω μια τ.μ. $X \sim Exp(\beta)$, τότε

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx = \int_0^{\infty} e^{itx} \beta e^{-\beta x} dx = \beta \int_0^{\infty} e^{-x(\beta - it)} dx = \beta \left[\frac{e^{-x(\beta - it)}}{-(\beta - it)} \right]_0^{\infty}$$
$$= \frac{\beta}{\beta - it}$$

Τέλος θα δείξουμε την σύνδεση που υπάρχει με τις υπόλοιπες συναρτήσεις, οι οποίες χρησιμοποιούνται εκτεταμένα στην θεωρία των πιθανοτήτων.

Έστω μια τ.μ. X, τότε:

- Η ροπογεννήτρια συνάρτηση μπορεί να εκφρασθεί ως,

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \varphi_X(-it)$$

- Η σωρευτική χαρακτηριστική συνάρτηση ή λογαριθμική χαρακτηριστική συνάρτηση, εκφράζεται ως,

$$\psi_X(t) = \log E\left[e^{itX}\right] = \log \varphi_X(t) \Leftrightarrow \varphi(t) = e^{\psi(t)}$$

Κεφάλαιο 2ο

Οι Στοχαστικές Ανελίξεις Lévy

Σε αυτό το κεφάλαιο θα κάνουμε μια εισαγωγή στις σ.α. γενικά, επικεντρώνοντας το ενδιαφέρον στις σ.α. Lévy, τις ιδιότητες που τις διέπουν, καθώς και την σύνδεση τους με την τιμολόγηση των πιστωτικών παραγώγων. Ο σκοπός που εισάγεται αυτό το κεφάλαιο είναι διότι, έχει βρεθεί από εμπειρικές μελέτες ότι παραβιάζεται η συνθήκη της κανονικότητας του λογαρίθμου των αποδόσεων, των υποκείμενων αγαθών. Συνεπώς χρησιμοποιώντας τις κλασσικές υποθέσεις, για παράδειγμα οι λογαριθμικές αποδόσεις να ακολουθούν την κανονική κατανομή, αποτυγχάνουν να προβλέψουν με ακρίβεια την αληθινή τους τιμή δυναμικά. Μάλιστα βγήκαν στο συμπέρασμα [3] ότι η κατανομή αυτών έχει αρνητική λοξότητα και θετική υπερβολική κύρτωση[2] (positive excess kurtosis). Για να ξεπερασθεί το εν λόγω πρόβλημα, θα ήταν σκόπιμο να εισαχθούν οι στοχαστικές διαδικασίες Lévy οι οποίες μπορούν να περιέχουν άλματα, να λαμβάνουν υπόψιν την ασυμμετρία και να έχουν παχιά ουρά, όπου και παρουσιάζουν οι εμπειρικές κατανομές των δεδομένων.

2.1. Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελίξεις

Η θεωρία των στοχαστικών ανελίξεων (σ.α.) ή αλλιώς των στοχαστικών διαδικασιών (σ.δ.) αναπτύχθηκε για να δώσει λύση αλλά και να προβλέψει αβέβαια γεγονότα. Ένα απτό παράδειγμα θα μπορούσε να είναι η πρόβλεψη του καιρού. Ειδικότερα στην μετεωρολογία όπου οι στοχαστικές ανελίξεις χρησιμοποιούνται για να μοντελοποιήσουν κάποια ακραία γεγονότα που είναι να λάβουν χώρα, καθώς και για τις καθημερινές μας καιρικές προβλέψεις, οι οποίες επιτυγχάνονται με τις διακριτού χρόνου σ.α. και καλούνται χρονοσειρές (Time Series). Τώρα ένα άλλο παράδειγμα, είναι στην οικονομία όπου και εφαρμόζονται οι στοχαστικές ανελίξεις με ιδιαίτερη επιτυχία σε πληθώρα μοντέλα μακροοικονομίας και πολλών άλλων τομέων της οικονομικής επιστήμης, καθώς όπως αντιλαμβανόμαστε, η εξέλιξη της οικονομίας υπόκειντο σε μεγάλη αβεβαιότητα δυναμικά. Αβεβαιότητα, έχει και ο χρηματοοικονομικός τομέας, στην πρόβλεψη της τιμής κάποιων χρηματοοικονομικών παραγώγων, όπου αυτός είναι και ο σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Στη συνέχεια, θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό των σ.α. και έπειτα θα παρουσιαστούν κάποιες θεμελιώδης και ευρέως γνωστές ανελίξεις που χρησιμοποιούνται εκτενώς σε αρκετά πεδία.

Ορισμός 2.1.1 [1]**:** Μια στοχαστική ανέλιξη (σ.α.) είναι μια συλλογή από τ.μ. $\{X_t\}_{t\in T}$, ορισμένες σε ένα χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ οι οποίες παίρνουν τιμές στο $\mathbb{R}^d$.

Σε μια σ.α. μπορεί να μεταβληθεί η κάθε τ.μ, καθώς και ο χρόνος ο οποίος βρίσκεται σε εξέλιξη το πείραμα μας, άρα:

[2] Η κατανομή έχει πιο «παχιές» ουρές από την κανονική κατανομή, παίρνοντας έτσι μεγαλύτερες πιθανότητες σε ακραίες παρατηρήσεις, σε σχέση με μια συμμετρική, όπως η κανονική κατανομή.

- Αν για κάθε $t \in T$ σταθερό, τότε έχουμε μια τ.μ. η οποία μεταβάλλεται σύμφωνα με τα ενδεχόμενα της,

$$\omega \to X_t(\omega)\,, όπου\ \omega \in \Omega.$$

- Αντίστοιχα αν κρατήσουμε σταθερό το $\omega \in \Omega$ τότε θα έχουμε την συνάρτηση ως προς t με σταθερό το ενδεχόμενο ω, ως

$$t \to X_t(\omega)\,, όπου\ t \in T$$

η οποία καλείται τροχιά της X_t.

Καταλαβαίνουμε ότι το σύνολο όλων των δυνατών τιμών των τ.μ. συμβολίζοντάς το με S, μπορεί να είναι είτε διακριτής, είτε συνεχής κατάστασης, όπως φυσικά και ο χρόνος του πειράματος. Οπότε για τις διάφορες περιπτώσεις των χώρων S και T διακρίνονται τέσσερις καταστάσεις για την σ.α., τις οποίες θα δούμε σε παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.1.1: Ρίχνετε ένα κέρμα διαδοχικά, με το αποτέλεσμα της i-ρίψης να είναι ω_i. Αν θεωρήσουμε ότι οι τ.μ. X_i παίρνουν τις τιμές,

$$X_i(\omega) = \begin{cases} 1\,, & αν\ \omega_i = K \\ 0\,, & αν\ \omega_i = \Gamma \end{cases}$$

Έχουμε ότι ο χώρος καταστάσεων είναι διακριτός, καθώς το ίδιο και ο χρόνος.

Παράδειγμα 2.1.2: Έστω X_n οι εισπράξεις μια πολύ μεγάλης ασφαλιστικής εταιρείας σε n-εβδομάδες. Συνεπώς οι $X_n \in (0\,,+\infty)$ για κάθε $n \in N^+ = T$ είναι μια σ.α. με διακριτό χρόνο και με συνεχή χώρο καταστάσεων.

Παράδειγμα 2.1.3: Έστω ότι, τα τηλεφωνήματα που δέχεται ένα τηλεφωνικό κέντρο σε ένα χρονικό διάστημα $t \in [0, h]$ μοντελοποιούνται από τις τ.μ. X_t που δείχνουν τα πόσα τηλεφωνήματα έλαβε το τηλεφωνικό κέντρο σε αυτό το χρονικό διάστημα. Άρα τώρα έχουμε ένα διακριτό χώρο καταστάσεων, σε συνεχή χρόνο.

Παράδειγμα 2.1.4: Είναι γνωστό, ότι στο χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης γίνονται καθημερινά αρκετές αγοροπωλησίες μετοχών, αν υποθέσουμε ότι η τ.μ. X_t δείχνει το ποσό των μετοχών που αγοράστηκε σε ένα χρονικό διάστημα $t \in [0, h]$ της μιας μέρας κανονικής λειτουργίας του χρηματιστηρίου, τότε ο σ.α. είναι συνεχής με συνεχή χρόνο και χώρο καταστάσεων.

Στην συνέχεια ορίζουμε μια αρκετά δημοφιλή στοχαστική ανέλιξη, την σ.α. Poisson. Χρησιμοποιείται κυρίως για την μοντελοποίηση τυχαίων φαινομένων που συμβαίνουν σε ένα χρονικό διάστημα. Παραδείγματα αποτελούν, τα τηλεφωνήματα που φτάνουν σε ένα τηλεφωνικό κέντρο, ο αριθμός ζημιών που φτάνουν σε μια ασφαλιστική εταιρεία και πολλά άλλα, μέσα σε ένα καθορισμένο χρονικό διάστημα.

Ορισμός 2.1.2 [10]: Η στοχαστική ανέλιξη $\{X_t\}_{t\geq 0}$ καλείται Poisson εάν,

i. $X(0) = 0$
ii. $P(X(h) = 1) = \lambda h + o(h)\ και\ P(X(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)\ για\ h \to 0$
iii. $X(t + h) - X(h) \sim Pois(\lambda t)\ και$ είναι ανεξάρτητη της $X(t)$

Σημειώνεται ότι η συνάρτηση $o(h)$ είναι μια ποσότητα που συγκλίνει στο μηδέν πιο γρήγορα από ότι το h, καθώς το $h \to 0$. Ουσιαστικά ο ορισμός μας λέει ότι η σ.α. ξεκινάει από το μηδέν, έχει ανεξάρτητες και χρονικά ομογενείς προσαυξήσεις και ότι σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα πλάτους h, μπορεί να συμβεί το πολύ ένα γεγονός και η πιθανότητα να συμβεί αυτό το γεγονός είναι ανάλογη με το πλάτος του διαστήματος.

2.1.1. Κίνηση Brown

Μια άλλη συνεχής σ.α. είναι η γνωστή κίνηση Brown, ιστορικά ο Άγγλος Βοτανολόγος Brown το 1828 παρατήρησε ότι ένα μόριο όταν βυθιστεί σε ένα υγρό-αέριο κινείται «άτακτα»[3] στο χώρο. Παρατηρώντας το γεγονός, αρκετοί μαθηματικοί προσπάθησαν να μοντελοποιήσουν την κίνηση αυτή και τελικά το 1923 ο μαθηματικός Weiner γενίκευσε την εργασία του Einstein που είχε προηγηθεί στην επεξήγηση αυτού του φαινομένου. Όπως ήταν αναμενόμενο, η κίνηση αυτή ονομάστηκε Brown ή Wiener αν μιλάμε για την τυποποίηση της σ.α. αυτής.

Στην συνέχεια θα θεωρήσουμε, ότι οι σ.α. ορίζονται σε ένα χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Ορισμός 2.1.3 [8]: Μια σ.α. $\{B_t\}_{t\geq 0}$ που παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$ (μονοδιάστατη περίπτωση) καλείται ανέλιξη Brown εάν,

i. Για $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ οι τ.μ. $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ είναι ανεξάρτητες , όπου $n \geq 1$
ii. Για κάθε $0 \leq s < t$,

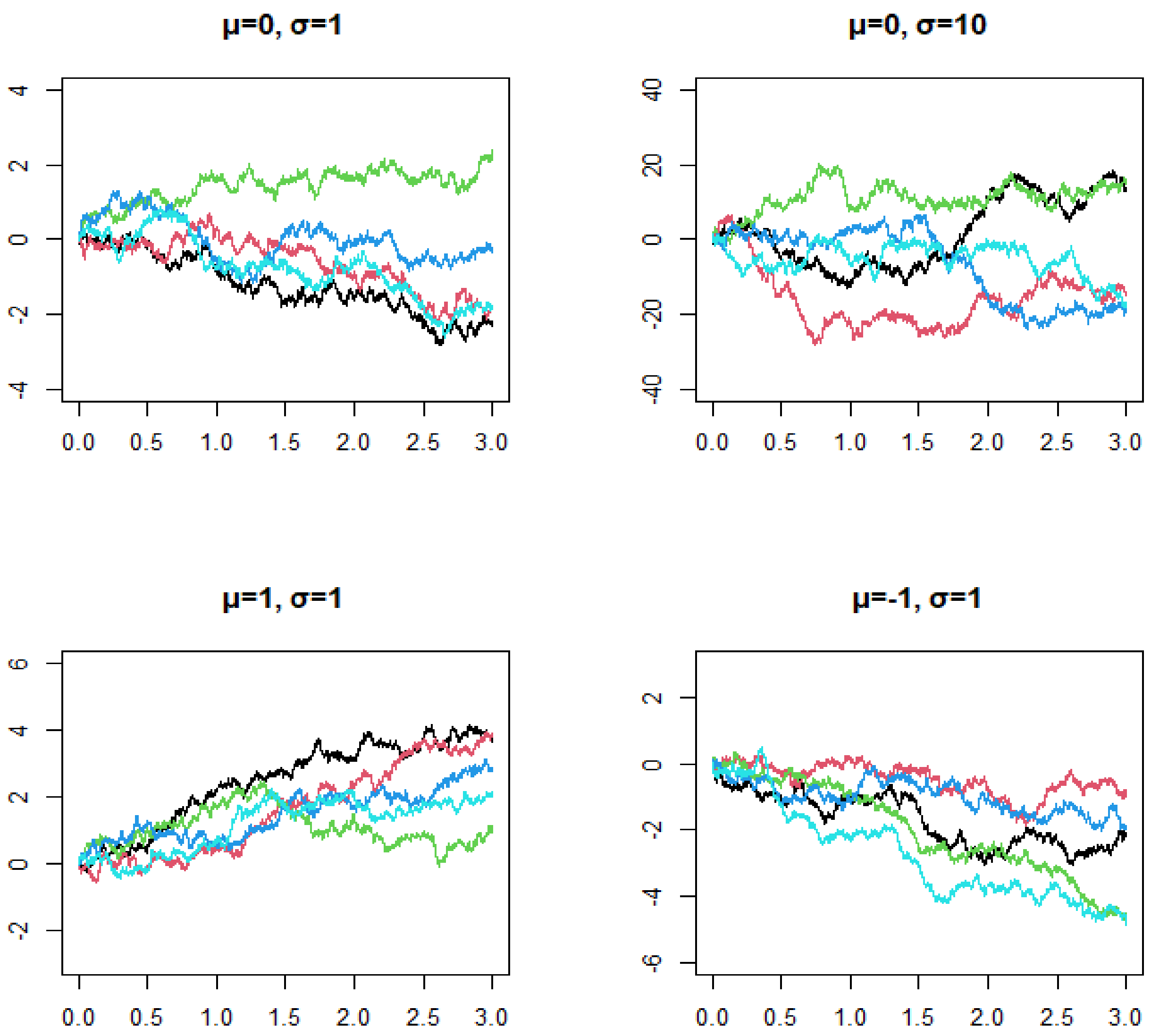
$$B_t - B_s \sim N(0, t - s)$$

iii. Με πιθανότητα 1, η συνάρτηση $t \to B_t$ είναι συνεχής, δηλαδή οι τροχιές της κίνησης Brown είναι συνεχείς.

Εάν στο πάνω ορισμό είχαμε ότι $B_0 = B(0) = 0$, τότε μια τέτοια ανέλιξη λέγεται τυπική κίνηση Brown ή αλλιώς κίνηση Wiener. Επίσης, στα (i & ii) εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι έχει ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις.

Παρακάτω, μπορούμε να δούμε γραφικά (εικόνα 2), μέσω προσομοίωσης τις τροχιές μιας (τυπικής και μη) κίνησης Brown για διάφορες τιμές των παραμέτρων της. Η μέθοδος προσομοίωσης της διατίθεται στο Παράρτημα Γ1.

[3] Με τυχαίο τρόπο



Εικόνα 2: Προσομοίωση Κίνησης Brown

Ενδεικτικά αναφέρεται ότι μια τυπική κίνηση Brown μπορεί να προσεγγιστεί από ένα άθροισμα ανεξάρτητων διωνυμικών τυχαίων μεταβλητών. Επιπλέον δεν είναι διαφορίσιμη σε κανένα σημείο με πιθανότητα 1, όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε και από το πάνω γράφημα.

Στο σημείο αυτό, θα δείξουμε ότι όλες οι κινήσεις Brown παράγονται από την τυπική κίνηση Brown μέσω μιας πρότασης.

Πρόταση 2.1.1 [8]**:** Για μια B_t τυπική κίνηση Brown και μια τ.μ. X ορισμένη στον ίδιο δ.χ. ανεξάρτητη της B_t και με κατανομή μ, τότε η ανέλιξη:

$$W_t := X + B_t$$

είναι κίνηση Brown με αρχική κατανομή μ, για κάθε $t \geq 0$.

Παράδειγμα 2.1.5: Έστω ότι έχουμε την κίνηση Brown, θα βρούμε τη διασπορά της προσαύξησης $B_{t+h} - B_t$, όπου $h > 0$:

$$Var(B_{t+h} - B_t) = (t + h) - t = h$$

λόγω ανεξάρτητων προσαυξήσεων.

Τέλος, μια άλλη σ.α. η οποία παράγεται από την κίνηση Brown και χρησιμοποιείται ευρέως στον χρηματοοικονομικό κλάδο μοντελοποιόντας τις μετοχές του χρηματιστηρίου, είναι η γεωμετρική κίνηση Brown. Από αυτή τη σ.α. προκύπτει το γνωστό μοντέλο των Black & Scholes.

Ειδικότερα, για μια κίνηση Brown $\{B_t\}_{t\geq 0}$, ο εκθετικός μετασχηματισμός της σ.α. $\{S_t\}_{t\geq 0} = \{e^{B_t}\}_{t\geq 0}$, θα καλείται γεωμετρική κίνηση Brown, με τις αντίστοιχες παραμέτρους της κίνησης.

2.1.2. Martingales

Μια άλλη εξίσου πολύ σημαντική κατηγορία σ.α. είναι οι martingales, οι οποίες έχουν αμέτρητες εφαρμογές κυρίως στα μαθηματικά υποδείγματα της χρηματοοικονομικής επιστήμης. Η προέλευση της ορολογίας martingale είναι από τον 18^{o} αιώνα στην Γαλλία που αναφέρεται σε κλάση στρατηγικών οι οποίες ήταν αρκετά δημοφιλής. Συγκεκριμένα, η απλούστερη στρατηγική που χρησιμοποιούνταν ήταν, όταν κάποιος χάνει σε μια παρτίδα ενός τυχερού παιχνιδιού, τότε διπλασίαζε το ποντάρισμα στην επόμενη παρτίδα με σκοπό της πρώτης νίκης του, να επανακτήσει τα χρήματα που είχε χάσει συν το κέρδος του από το ποντάρισμα. Στην θεωρία πιθανοτήτων εισήχθησαν από τον Paul Lévy το 1934, ωστόσο τα περισσότερα αποτελέσματα στην θεωρία έγιναν από τον Αμερικανό πιθανοθεωρητικό Joseph Leo Doob.

Για να ορισθεί επαρκώς η σ.α. martingale, θα πρέπει πρώτα να εισαχθεί η έννοια της διήθησης (filtrations). Φυσικά ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ εννοείται.

Ορισμός 2.1.4 [8]: Μια αύξουσα ακολουθία από σ-άλγεβρες $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ όπου η κάθε μια από τις οποίες είναι υποσύνολο $\mathcal{F}$, δηλαδή για $s \leq t \;\Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ θα καλείται διήθηση.

Ορισμός 2.1.5 [8]: Για μια οικογένεια τ.μ. $\{X_n\}_{n\geq 0}$ αν για κάθε $n \geq 0$, η X_n είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη, τότε θα λέμε ότι η $\{X_n\}_{n\geq 0}$ είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$.

Η ερμηνεία του πάνω ορισμού μας δείχνει, ότι η πληροφορία για την τ.μ. X_t μέχρι τη χρονική στιγμή t περιέχεται στην σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_t$.

Τώρα έχοντας ορίσει τις πάνω έννοιες, προχωράμε στις σ.α. martingale, supermartingale και submartingale τις οποίες θα ορίσουμε στη συνέχεια. Αξίζει να αναφερθεί ότι αυτές οι σ.α. είναι ιδιαίτερα χρήσιμες σε προβλήματα κυρίως χρηματοοικονομικών.

Ορισμός 2.1.6 [1]**:** Έστω μια ακολουθία τ.μ $\{X_n\}_{n\geq 0}$, αν είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ και $E(X_n) < \infty$ για κάθε $n \geq 0$ (δηλαδή ολοκληρώσιμες) τότε:

i. Η ακολουθία $\{X_n\}_{n\geq 0}$ είναι μια martingale αν

$$E[X_n|\mathcal{F}_s] = X_s \quad \sigma.\beta.\ s \leq n$$

ii. Η ακολουθία $\{X_n\}_{n\geq 0}$ είναι μια supermartingale αν

$$E[X_n|\mathcal{F}_s] \leq X_s \quad \sigma.\beta.\ s \leq n$$

iii. Η ακολουθία $\{X_n\}_{n\geq 0}$ είναι μια submartingale αν

$$E[X_n|\mathcal{F}_s] \geq X_s \quad \sigma.\beta.\ s \leq n$$

Σημειώνεται ότι ο δείκτης n μπορεί να είναι είτε συνεχής, είτε διακριτός

Πρόταση 2.1.2 [1]**:** Για μια martingale ανέλιξη X_n, θα ισχύει:

i. $E[X_n] = E[X_0]$
ii. $E[X_n - X_k] = 0$

Απόδειξη: Προκύπτει από της ιδιότητες που αναφέρθηκαν της υπό συνθήκης μέσης τιμής στη παράγραφο 1.2.3. Επιπλέον ισχύουν τα ανάλογα αποτελέσματα για submartingales και supermartingales.

Παράδειγμα 2.1.6: Έστω μια ανέλιξη Brown $\{B_t\}_{t\geq 0}$ και μια σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$, θα δείξουμε ότι οι παρακάτω ποσότητες είναι martingale ως προς την διήθηση $\mathcal{F}_s$:

(α) Η ποσότητα $E[|B_t|] < \infty$ τότε για $0 \leq s < t$,

$$E[B_t|\mathcal{F}_s] = E[B_t \pm B_s|\mathcal{F}_s] = E[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] + E[B_s|\mathcal{F}_s] = E[B_t - B_s] + B_s = B_s$$

Η 3η ισότητα προκύπτει από τις ανεξάρτητες προσαυξήσεις, όπου δηλαδή είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας $\mathcal{F}_s$ η οποία είναι το δυναμοσύνολο όλων των κινήσεων Brown μέχρι την στιγμή s και η B_s είναι $\mathcal{F}_s$ – μετρήσιμη (βλ. ιδιότητες δεσμευμένης μέσης τιμής). Οπότε η ανέλιξη (κίνηση Brown) $\{B_t\}_{t\geq 0}$ είναι martingale.

(β) Για $0 \leq s < t$,

$$\begin{aligned} E[B_t^2 - t|\mathcal{F}_s] &= E[(B_t \pm B_s)^2 - t|\mathcal{F}_s] \\ &= E[(B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s] + E[B_s^2|\mathcal{F}_s] + 2\,E[B_s(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] - t \\ &= E[B_t - B_s]^2 + B_s^2 + 2B_sE[B_t - B_s] - t = (t-s) + B_s^2 + 2\,B_s\,(0) - t \\ &= B_s^2 - t \end{aligned}$$

Συνεπώς αποδείξαμε ότι η ανέλιξη $\{B_t^2 - t\}_{t\geq 0}$ είναι martingale. Στην απόδειξη χρησιμοποιήθηκαν οι ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής και της κίνησης Brown.

(γ) Για $0 \leq s < t$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά,

$$\begin{aligned} E\left[e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}}\middle|\mathcal{F}_s\right] &= E\left[e^{\lambda B_t \pm B_s - \frac{\lambda^2 t}{2}}\middle|\mathcal{F}_s\right] = E\left[e^{\lambda(B_t - B_s)}\middle|\mathcal{F}_s\right] E\left[e^{\lambda B_s}\middle|\mathcal{F}_s\right] e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} \\ &= E\left[e^{\lambda(B_t - B_s)}\right]\ e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 t}{2}} = \left(e^{(0)\lambda + \frac{\lambda^2(t-s)}{2}}\right)\left(e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 t}{2}}\right) = e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}} \end{aligned}$$

Οπότε αποδείχθηκε ότι η ανέλιξη $\left\{e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}}\right\}_{t\geq 0}$ είναι martingale. Η απόδειξη βασίστηκε στις ιδιότητες της κίνησης Brown και της δεσμευμένης μέσης τιμής, όμως στην προτελευταία ισότητα αντί να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα αντικαταστάθηκε με την ροπογεννήτρια μιας κανονικής με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση $(t-s)$. Τέλος, κοιτάζοντας προσεκτικά την σ.α. που αποδείξαμε ότι ανήκει στην οικογένεια των ανελίξεων martingale, δεν είναι παρά μόνο μια γεωμετρική κίνηση Brown, με παραμέτρους $\mu = 0 \; και \; \sigma = \lambda$.

2.2. Εισαγωγή στην Ανέλιξη Lévy

Ορισμός 2.2.1 [29]: Έστω μια σ.α. $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ορισμένη σε ένα χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Καλείται ανέλιξη Lévy εάν ισχύουν τα κάτωθι:

i. Τα μονοπάτια της $\{X_t\}_{t\geq 0}$ είναι P- σ.β.[4] δεξιά συνεχείς με αριστερά όρια
ii. $P(X_0 = 0) = 1$
iii. Για $0 \leq s \leq t,\; X_t - X_s \sim X_{t-s}$
iv. Για $0 \leq s \leq t,\; X_t - X_s$ είναι ανεξάρτητη της $\{X_u\}_{u\leq s}$

Στον ορισμό που δόθηκε, το (i) μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα ότι αυτή η διαδικασία έχει την Càdlàg ιδιότητα που δηλώνει ακριβώς αυτό. Επιπλέον, στα (ii) και (iii) ισοδύναμα θα μπορούσαμε να είχαμε αναφέρει, ότι η ανέλιξη έχει ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις.

Στη συνέχεια θα δώσουμε έναν αλλιώτικο ορισμό για αυτή τη διαδικασία, ώστε να τονίσουμε την σπουδαιότητα της αλλά και τον «εύκολο» χειρισμό της. Πρώτα όμως πρέπει να ορίσουμε την έννοια των άπειρων διαιρουμένων κατανομών και την σχέση τους με αυτές τις στοχαστικές ανελίξεις.

Ορισμός 2.2.2 [29]: Έστω μια τ.μ. X, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ υπάρχει μια ακολουθία από $i.i.d$[5]. τ.μ. $X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n}$ τέτοια ώστε:

$X =^d X_{1,n}, + X_{2,n} + \cdots + \; X_{n,n}$

τότε καλείτε ότι έχει άπειρη διαιρετή κατανομή.

Το σύμβολο $=^d$ δηλώνει ότι οι κατανομές είναι ίσες (ισόνομες) των τυχαίων μεταβλητών.

Ισοδύναμα ο πάνω ορισμός μπορεί να εκφραστεί ως,

Αν θεωρήσουμε μια τ.μ. X με χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_X(t)$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, η $\varphi_X(t)$ είναι επίσης η n-δύναμη της χαρακτηριστικής συνάρτησης [36].

Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

$$X = Y_{1,n} + Y_{2,n} + \cdots + Y_{n,n}$$

όπου $Y_{i,n}$, $i = 1,2, \dots, n$ είναι $i.i.d.$ τ.μ. με χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_X(t)^{\frac{1}{n}}$.

[4] Μια σ.δ $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ θα συγκλίνει σ.β. σε μια τ.μ. X, αν $P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1$

[5] Ανεξάρτητων και Ισόνομων κατανομών (independent – identically distribution)

Παράδειγμα 2.2.1: Έστω μια τ.μ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, με $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ (σταθερές) θα έχει χαρακτηριστική συνάρτηση,

$$\varphi_X(t) \coloneqq E\left(e^{itX}\right) = M_X(it) = e^{\left(it\mu + \frac{i^2 t^2 \sigma^2}{2}\right)} = e^{\left(\frac{it\mu}{n}\right)^n} e^{\left(-\frac{t^2\sigma^2}{2n}\right)^n} = [\varphi_Y(t)]^n$$

όπου $\varphi_Y(t)$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της τ.μ. $Y \sim N(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n})$, που σύμφωνα με την θεωρία έχουμε ότι η τ.μ. $X = Y_1 + \cdots + Y_n$ και οι Y_i, $i = 1,2,\ldots,n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με την τ.μ. Y. Επιπροσθέτως μπορεί κανείς να το δει και αντίστροφα, από τις ιδιότητες της χαρακτηριστικής συνάρτησης που ισχύει $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) \ldots \varphi_Y(t) = [\varphi_Y(t)]^n$.

Προχωρώντας τώρα, θα εισαχθεί ένα θεώρημα που θα συνδέει τις απείρως διαιρεμένες κατανομές με την διαδικασία Lévy. Η απόδειξη αποφεύγεται και ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [34] για το τεχνικό κομμάτι της.

Θεώρημα 2.2.1 [21]: Έστω μια ανέλιξη Levy $\{X_t\}_{t\geq 0}$, τότε για κάθε t, η X_t έχει απείρως διαιρούμενη κατανομή. Αντιστρόφως αν η F είναι απείρως διαιρούμενη κατανομή, τότε υπάρχει μια ανέλιξη Lévy που η κατανομή της X_1 είναι η F.

Πρόταση 2.2.1 [21]: Για μια ανέλιξη Lévy $\{X_t\}_{t\geq 0}$ στον $\mathbb{R}^d$, υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση ψ: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ η οποία καλείται λογαριθμική χαρακτηριστική συνάρτηση του X, έτσι ώστε:

$$\varphi_{X_t}(u) = E\left[e^{iuX_t}\right] = e^{t\psi(u)}, \qquad u \in \mathbb{R}^d$$

Η πάνω πρόταση, αποτελεί μια απλή εφαρμογή του ορισμού 2.2.2 και του ορισμού της λογαριθμικής χαρακτηριστικής συνάρτησης.

Θεώρημα 2.2.2 [36]: Θεωρούμε ότι η λογαριθμική χαρακτηριστική συνάρτηση $\psi(u)$ της ανέλιξης Lévy, ικανοποιεί την,

$$\psi(u) = i\gamma u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 - \int_{\mathbb{R}} \left(1 - e^{iux} + iux\, \mathbf{1}_{|x|<1}\right) \Pi(dx)$$

για κάθε $u \in \mathbb{R}$, όπου $\gamma \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}$ και το Π είναι ένα μέτρο στο $\mathbb{R}^*$ τέτοιο ώστε $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) \Pi(dx) < \infty$.

Η πάνω φόρμουλα προκύπτει από τη γνωστή σχέση Lévy–Khintchine[6], η οποία ορίζεται ως,

$$E\left[e^{iuX_t}\right] = \varphi(u) = e^{\psi(u)}$$

που τότε και μόνο τότε αν υπάρχει μια τριπλέτα (a, σ, Π) (η οποία καλείται τριπλέτα Lévy) θα ισχύει το θεώρημα 2.2.2. και θα είναι μοναδική, με το μέτρο Π να λέγεται, μέτρο Lévy το οποίο μας υπαγορεύει το πως γίνονται αυτά τα άλματα της ανέλιξης.

Στη συνέχεια, παρατηρούμε από το θεώρημα ότι η ανέλιξη Lévy αποτελείται από τρία ανεξάρτητα μέρη: το γραμμικό ντετερμινιστικό, τη κίνηση Brown και το καθαρό άλμα αντίστοιχα. Συνεπώς συμπεραίνουμε από την φόρμουλα ότι η κίνηση Brown είναι ανέλιξη Levy και από το παράδειγμα 2.2.1 είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η τριπλέτα είναι η $[\mu, \sigma^2, 0]$.

[6] Στο βιβλίο [29] ορίζεται με τη αρνητική λογαριθμική συνάρτηση

2.3. Παραδείγματα Ανέλιξης Lévy

Θα δούμε κάποια επιλεγμένα παραδείγματα στοχαστικών ανελίξεων που ανήκουν στις ανελίξεις Lévy, καθώς και την γραφική τους παράσταση μέσω προσομοίωσης, δυναμικά. Σημειώνεται ότι για τους ορισμούς ακολουθήθηκε το σκεπτικό των [29, 36] καθώς και για μερικές αποδείξεις του [6].

2.3.1. Ανέλιξη Poisson

Την ανέλιξη αυτή, την αναλύσαμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο (βλ. ορισμό 2.1.2). Όμως τώρα, θα αποδείξουμε ότι είναι μια απείρως διαιρούμενη κατανομή και εν συνεχεία, ανήκει στην οικογένεια των σ.α. Lévy. Γενικά είναι η πιο απλή σ.α., με αυξανόμενα καθαρά άλματα της διαδικασίας Lévy και το μέγεθος των αλμάτων να ισούται με 1. Βασίζεται στην κατανομή Poisson, η οποία εξαρτάται από μια θετική παράμετρο λ.

Έχει χαρακτηριστική συνάρτηση,

$$\varphi_{N_t}(u) = E\left[e^{iuN_t}\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{iun}\left(\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}\right) = e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\lambda t e^{iu}\right)^n}{n!} = \left(e^{-\lambda t}\right)\left(e^{\lambda t e^{iu}}\right)$$
$$= e^{\lambda t\left(e^{iu}-1\right)} = \left[e^{\frac{\lambda}{n}t\left(e^{iu}-1\right)}\right]^n$$

Συνεπώς η λογαριθμική χαρακτηριστική συνάρτηση της είναι,

$$\psi_{N_t}(u) = \frac{1}{t}\log\varphi_{N_t}(u) = \lambda\left(e^{iu}-1\right),\ \ \textit{όπου}\ N_t \sim Poisson(\lambda t)$$

Οπότε συγκρίνοντας το αποτέλεσμα αυτό με το θεώρημα 2.2.2, θα έχουμε ότι

$\gamma = \sigma^2 = 0$ και το μέτρο Lévy είναι $\Pi(dx) = \lambda\,\delta_1$, όπου δ_1[7] είναι το μέτρο Dirac στο σημείο 1.

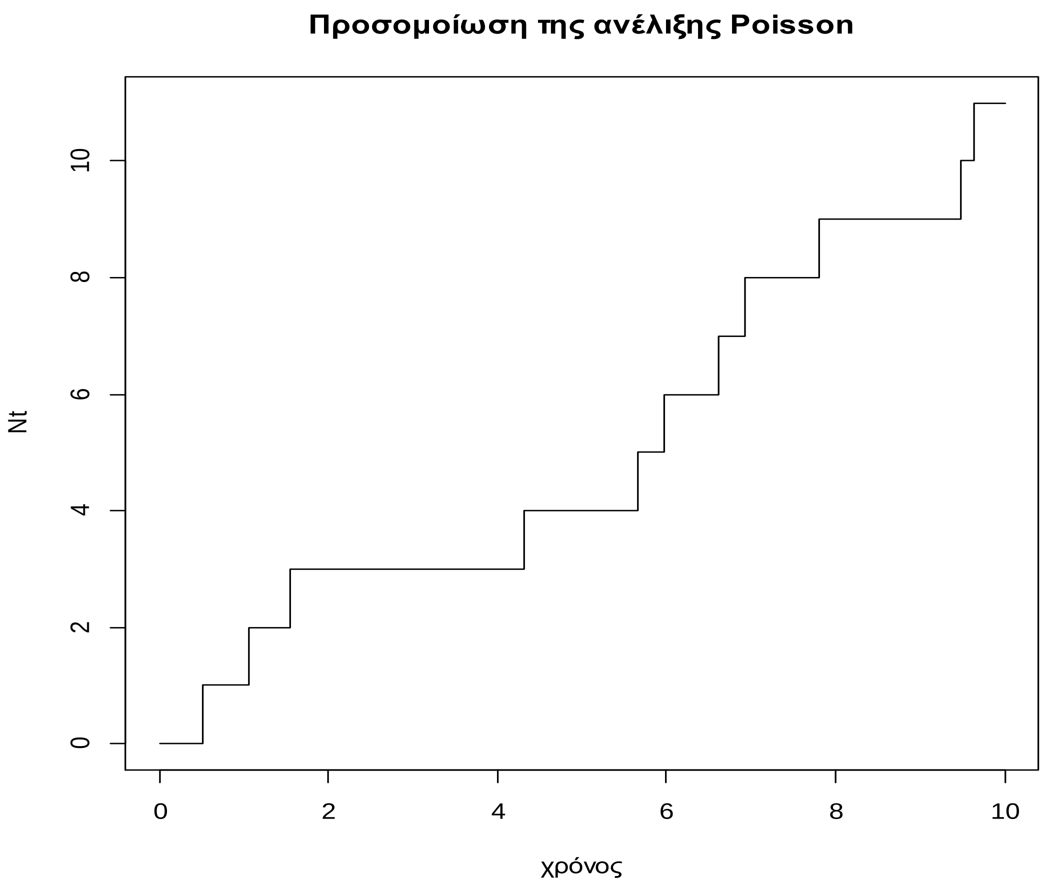
Το οποίο διαπιστώνεται από το θεώρημα ότι,

$$\psi(u) = 0 + 0 - \int_{\mathbb{R}}\left(1 - e^{iux} + iux\,\mathbf{1}_{|x|<1}\right)\lambda\delta_1(dx)$$
$$= -\int_{\mathbb{R}}\left(1 - e^{iux} + iux\,\mathbf{1}_{|x|<1}\right)\lambda\delta_1(dx) = \lambda\left(e^{iu}-1\right)$$

Άρα έχει Lévy τριπλέτα $[0, 0, \lambda\,\delta_1]$.

Στην εικόνα 3 βλέπουμε την προσομοίωσης μιας ανέλιξης Poisson (βλ. Παράρτημα Γ2 για την μέθοδο προσομοίωσης) με παράμετρο $\lambda = 0.5$. Παρατηρούμε ότι τα άλματα της ισούται με 1 όπως έχουμε ήδη αναφέρει. Γενικότερα, μια ανέλιξη Poisson δηλώνει την εμφάνιση των γεγονότων (αφίξεων) σε ένα διάστημα και οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης της ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.

[7] Υπενθυμίζεται ότι το μέτρο Dirac σε ένα σημείο x, ορίζεται: $\delta_x(A) = \begin{cases} 1, \alpha\nu\ x \in A \\ 0, \alpha\nu\ x \in X \setminus A \end{cases}$, γ.κ. $A \in \mathcal{F}$ και το έχουμε δει στο παράδειγμα 1.1.7.



Εικόνα 3: Προσομοίωση Ανέλιξης Poisson

2.3.2. Σύνθετη ανέλιξη Poisson

Ορισμός 2.3.1 [36]**:** Μια σύνθετη ανέλιξη Poisson με ένταση λ και μέγεθος άλματος κατανομής F είναι μια σ.α. $\{X_t\}_{t\geq 0}$ η οποία ορίζεται ως,

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k\,, \qquad t \geq 0$$

όπου το μέγεθος των αλμάτων είναι τ.μ. Z_k που είναι $i.i.d.$ με την κατανομή F και η N_t είναι μια σ.α. Poisson με ένταση λ, ανεξάρτητη των Z_k για κάθε $\kappa \geq 1$.

Έχει χαρακτηριστική συνάρτηση,

$$\varphi_{X_t}(u) = E\left[e^{iuX_t}\right] = E\left[E\left[e^{iuX_t}\middle|N_t = n\right]\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[e^{iuX_t}\middle|N_t = n\right] P[N_t = n]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[e^{iuZ_1} * \dots * e^{iuZ_k}\middle|N_t = n\right] P[N_t = n] = \sum_{n=0}^{\infty}\left(E\left[e^{iuZ_1}\right]\right)^n P[N_t = n]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\varphi_Z(u)\right)^n \left(\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}\right) = e^{\lambda t(\varphi_Z(u)-1)} = \left[e^{\frac{\lambda}{n}t(\varphi_Z(u)-1)}\right]^n$$

Η οποία βλέπουμε ότι είναι μια απείρως διαιρούμενη κατανομή.   .

Για το λόγω του αληθές, θα δείξουμε ότι ανήκει στην οικογένεια ανελίξεων Lévy.

Από το θεώρημα 2.2.2 και για παραμέτρους $\gamma = \lambda \int_{|x|<1} x\, F(dx)\,, \sigma = 0$ και για το μέτρο Lévy είναι $\Pi(dx) = \lambda F(dx) < \infty$,

$$\begin{aligned}
\psi(u) = iu\lambda \int_{|x|<1} x\, F(dx) + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{iux} - 1 - iux\, 1_{|x|<1}\right) \lambda F(dx) \\
= \int_{|x|<1} iux\, \lambda\, F(dx) + \int_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)} \left(e^{iux} - 1\right)\lambda\, F(dx) \\
+ \int_{|x|<1} \left(e^{iux} - 1 - iux\right)\lambda\, F(dx) \\
= \int_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)} \left(e^{iux} - 1\right)\lambda\, F(dx) + \int_{|x|<1} \left(e^{iux} - 1\right)\lambda\, F(dx)
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\psi(u) = \int_{\mathbb{R}} \left(e^{iux} - 1\right)\lambda\, F(dx) = \frac{1}{t} \log \varphi_{X_t}$$

Αποδείχθηκε ότι η συγκεκριμένη σ.α. είναι μια ανέλιξη Lévy με τριπλέτα $\left[\lambda \int_{|x|<1} x\, F(dx)\,, 0, \lambda F(dx)\right]$ με βάση τον (θετικό) λογάριθμο της χαρακτηριστικής συνάρτησης. Αν έχουμε ότι η κατανομή F είναι εκφυλισμένη στο σημείο 1, τότε θα είχαμε την σ.α. Poisson.

2.3.3. Ανέλιξη Γάμμα (Gamma)

Για κάποιες παραμέτρους $a, b > 0$, ορίζουμε την σ.π.π. Gamma ως,

$$f(x; a, b) = \frac{a^b}{\Gamma(a)} x^{b-1} e^{-ax}, \qquad x > 0$$

όπου $\Gamma(x)$[8] είναι η συνάρτηση Γάμμα.

Και χαρακτηριστική συνάρτηση θα δίνεται από τη,

$$\varphi_X(u; a, b) = \left(\frac{b}{b - iu}\right)^a = \left[\left(\frac{b}{b - iu}\right)^{\frac{a}{n}}\right]^n$$

Είναι φανερό ότι η κατανομή Gamma είναι μια απείρως διαιρούμενη κατανομή. Οπότε από το θεώρημα 2.2.1 έπεται ο κάτωθι ορισμός.

---

[8] Η συνάρτηση Γάμμα ισούται με, $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \;\; , x \geq 0$.

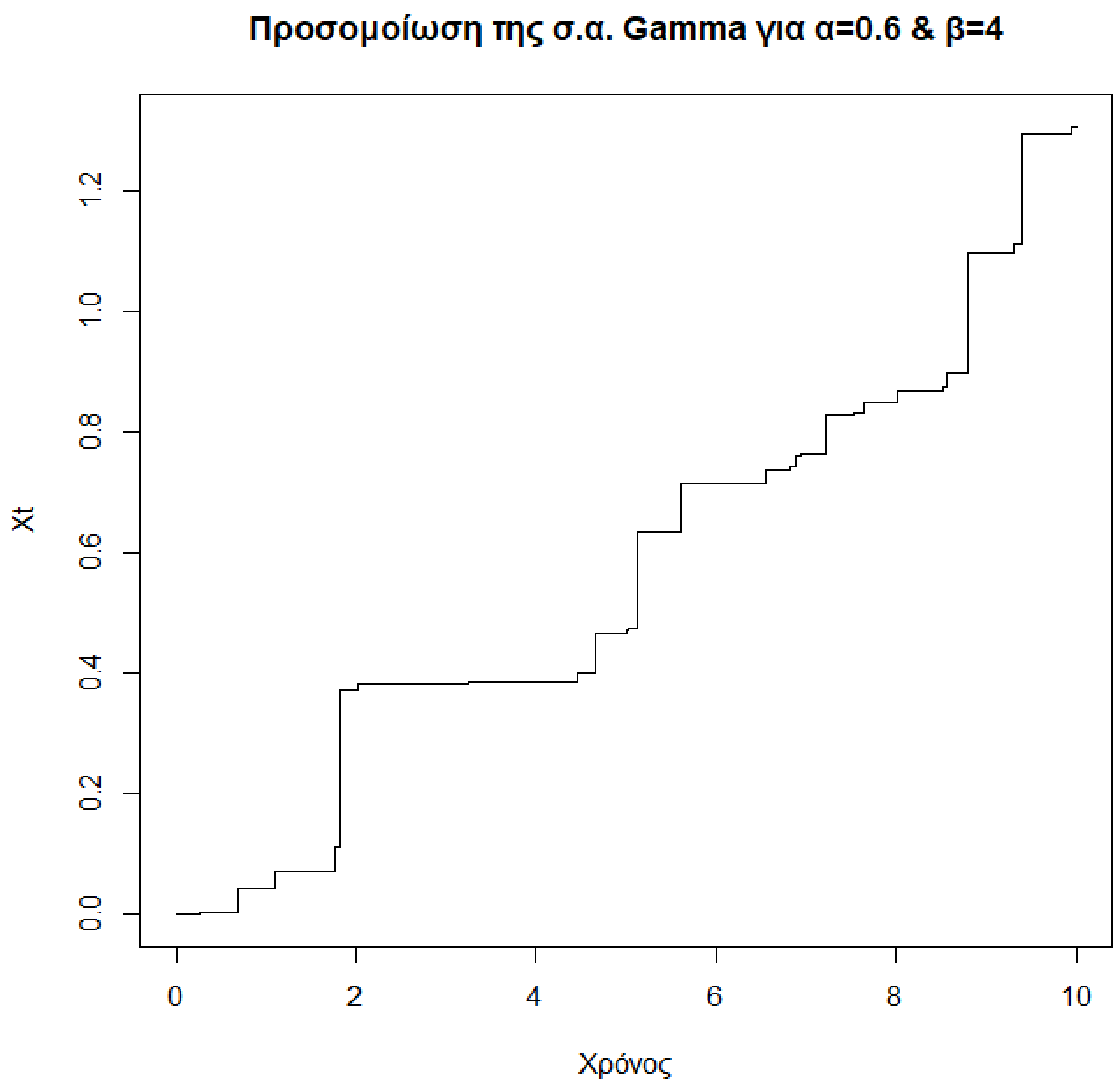
Ορισμός 2.3.2 [29]: Έστω μια σ.α. $\{X_t\}_{t\geq 0}$ με παραμέτρους $a, b > 0$, η οποία είναι μια σ.α. Gamma. Τότε θα ισχύουν τα κάτωθι:

i. $X_0 = 0$
ii. Η $\{X_t\}_{t\geq 0}$ έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις
iii. Για $s < t$ η τ.μ. $X_t - X_s \sim Gamma(a(t-s), b)$

Με τη σ.α. Gamma είναι μια μη-φθίνουσα ανέλιξη Lévy. Ακόμη, κάνοντας χρήση του θεωρήματος 2.2.2 και έπειτα από υπολογισμούς, έχουμε ότι η τριπλέτα Lévy θα είναι $\left[\frac{a(1-e^{-b})}{b}, 0\,, a\frac{e^{-bx}}{x}1_{x>0}\,dx\right]$.

Για την απόδειξη, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [29].

Παρακάτω στην εικόνα 4 προσομοιώνεται μια διαδρομή της σ.α. Gamma (βλ. Παράρτημα Γ3) που αναπτύξαμε. Όπως βλέπουμε αυτή η ανέλιξη είναι μη-φθίνουσα και τα άλματα της δεν είναι αναγκαστικά ίσα με 1 όπως στην περίπτωση της ανέλιξης Poisson.



Εικόνα 4: Προσομοίωση Ανέλιξης Gamma

2.3.4. Ανέλιξη Variance Gamma

Η κλάση αυτών των κατανομών εισάχθηκε στην επιστήμη των χρηματοοικονομικών από τους Madan και Seneta το 1987 (άρθρο [31]) για να μοντελοποιήσει τις αποδόσεις των μετοχών.

Η σ.π.π. δίνεται από,

$$f(x;C,G,M) = \frac{(GM)^C}{\sqrt{\pi}\Gamma(C)}\, e^{\frac{(G-M)x}{2}} \left(\frac{|x|}{G+M}\right)^{C-\frac{1}{2}} K_{C-\frac{1}{2}}\left(\frac{(G+M)|x|}{2}\right), \qquad x \in \mathbb{R}$$

όπου $C, G, M > 0$ παράμετροι, η $K_\nu(x)$ είναι η τροποποιημένη συνάρτηση του Bessel με δείκτη ν και $\Gamma(x)$ είναι η συνάρτηση Γάμμα.

Η χαρακτηριστική της συνάρτηση δίνεται έτοιμη διότι είναι αρκετά περίπλοκη να υπολογισθεί, συνεπώς,

$$\varphi(u;C,G,M) = \left(\frac{GM}{GM + (M-G)iu + u^2}\right)^C$$

Σημειώνεται ότι η ανέλιξη είναι μια απείρως διαιρούμενη κατανομή και ορίζεται τις περισσότερες φορές με διαφορετικές παραμέτρους, όπως ν, σ^2 και θ που συνδέονται με τις προαναφερθείσες ως,

$$\nu = \frac{1}{C}$$

$$\sigma^2 = \frac{2C}{MG}$$

$$\theta = \frac{C(G-M)}{MG}$$

και η χαρακτηριστική συνάρτηση γίνεται ισοδύναμα ως:

$$\varphi(u;\sigma,\nu,\theta) = \left(1 - iu\theta\nu + \frac{\sigma^2 \nu u^2}{2}\right)^{-\frac{t}{\nu}}$$

Επίσης, αναφέρεται ότι η κατανομή είναι συμμετρική όταν $\theta = 0$ (ή $G = M$ αντίστοιχα), για $\theta < 0$ (ή $G < M$) έχει αρνητική ασυμμετρία και για $\theta > 0$ (ή $G > M$) έχει θετική ασυμμετρία. Ακόμη η παράμετρος ν (ή C) ελέγχει την κύρτωση της κατανομής.

Στην συνέχεια θα δοθεί ο ορισμός της ανέλιξης Variance Gamma (VG).

Ορισμός 2.3.3 [37]: Έστω μια σ.α. $\{X_t\}_{t\geq 0}$, θα λέμε ότι είναι μια ανέλιξη VG εάν ισχύουν τα κάτωθι:

i. $X_0 = 0$
ii. Η $\{X_t\}_{t\geq 0}$ έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις
iii. Στο διάστημα $[s, s+t]$ η τ.μ. $X_{s+t} - X_s \sim VG(\sigma\sqrt{t}, \nu/t\,, t\theta)$ ή $VG(Ct, G, M)$

Εν συνεχεία, η ανέλιξη VG μπορεί να κατασκευαστεί με δύο τρόπους, είτε με την διαφορά δύο ανελίξεων Gamma, είτε μέσω μιας Gamma χρονικά αλλαγμένης κίνησης Brown ανέλιξης με κάποια τάση (drift).

Συγκριμένα έχουμε,

a) Έστω δυο ανεξάρτητες ανελίξεις Gamma, η $\left\{G_t^{(1)}\right\}_{t\geq 0}$ με παραμέτρους $a_1 = C$, $b_1 = M$ και η $\left\{G_t^{(2)}\right\}_{t\geq 0}$ με παραμέτρους $a_2 = C$, $b_2 = G$, τότε ορίζουμε:

$$X_t^{VG} = G_t^{(1)} - G_t^{(2)}$$

όπου $\{X_t^{VG}\}_{t\geq 0}$ είναι μια ανέλιξη VG. Με βάση αυτή την διαφορά μπορούμε να βρούμε ότι το μέτρο Lévy μπορεί να προσδιορισθεί από,

$$\Pi(dx) = \begin{cases} Ce^{Gx}|x|^{-1}\,dx, & x < 0 \\ C\,e^{-Mx}x^{-1}\,dx, & x > 0 \end{cases}$$

το οποίο, διαφαίνεται και διαισθητικά σύμφωνα με το μέτρο Lévy μιας ανέλιξης Gamma. Για την απόδειξη θα μπορούσε ο αναγνώστης να ανατρέξει στο άρθρο [30].

Επιπλέον το μέτρο Lévy έχει άπειρη μάζα, το οποίο δηλώνει ότι η ανέλιξη έχει άπειρα το πλήθος άλματα σε κάθε πεπερασμένο διάστημα του χρόνου. Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, το γεγονός ότι ισχύει $\int_{\mathbb{R}}|x|\Pi(dx) < \infty$ σημαίνει ότι η ανέλιξη έχει μονοπάτια με πεπερασμένη μεταβλητότητα.

Η Levy τριπλέτα αποδεικνύεται ότι είναι $[\gamma, 0\,, \Pi(dx)]$,

όπου η $\Pi(dx)$ δόθηκε παραπάνω και το γ θα είναι ίσο με,

$$\gamma = \frac{-C(Ge^{-M} - 1) - M(e^{-G} - 1)}{MG}$$

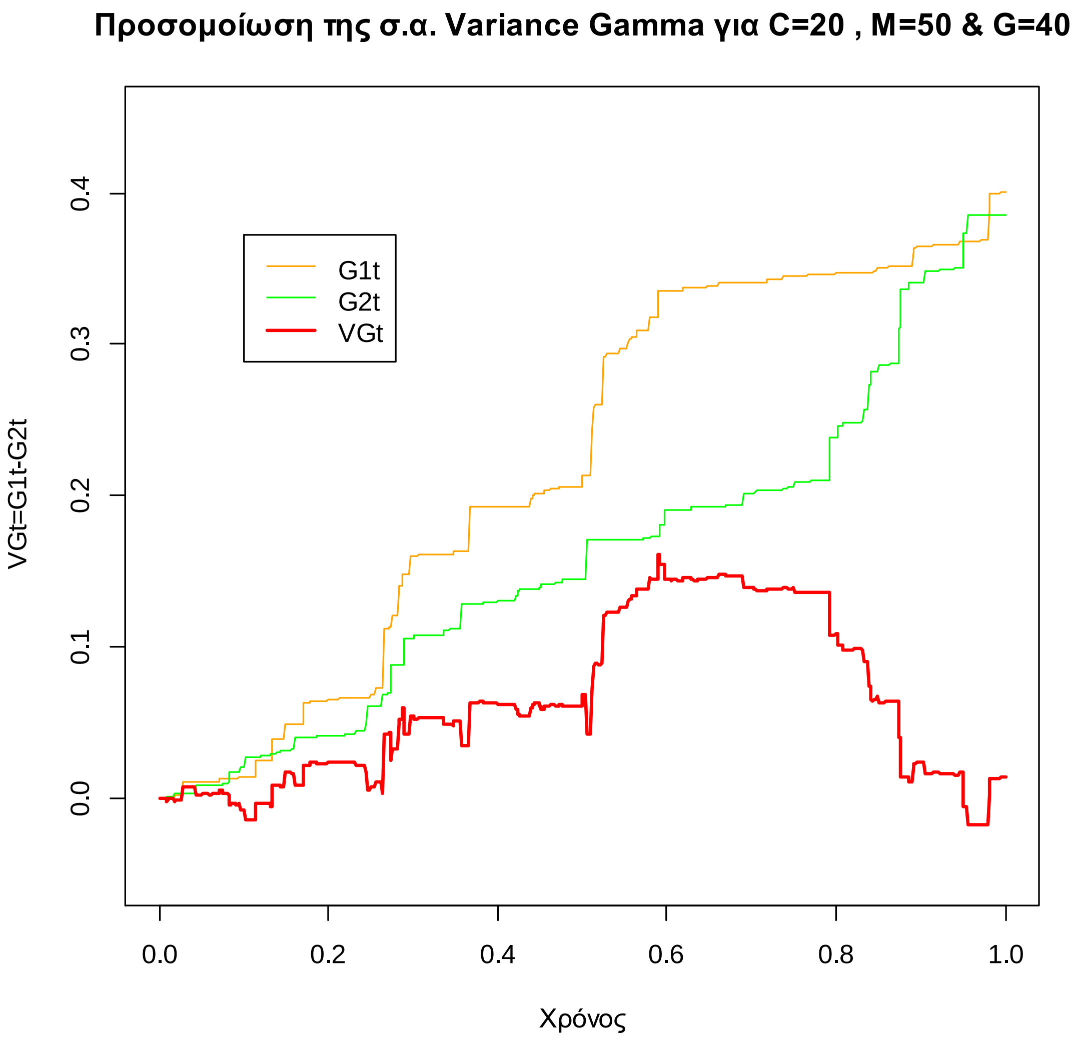
καθότι βρίσκουμε ότι η VG ανέλιξη δεν έχει το κομμάτι της κίνησης Brown.

b) Ορίζοντας τώρα την $VG(s, \nu, \theta)$ με τον 2ο τρόπο, θεωρούμε μια ανέλιξη Gamma χρονικά αλλαγμένη της κίνηση Brown (Gamma time-changed) με κάποια τάση, ως,

$$X_t^{VG} = \theta X_t^{Gamma} + \sigma W_{X_t^{Gamma}}$$

όπου $\{X_t^{Gamma}\}_{t\geq 0}$ είναι μια ανέλιξη Gamma με παραμέτρους $a = b = \frac{1}{\nu}$ και η W είναι μια τυπική κίνηση Brown.

Παρακάτω στην εικόνα 5 προσομοιώνεται μια τροχιά της ανέλιξης Variance Gamma (βλ. Παράρτημα Γ4) και χρησιμοποιείτε το γεγονός ότι είναι η διαφορά δύο ανελίξεων Gamma οι οποίες αναφέρθηκαν παραπάνω. Να σημειωθεί ότι όσο «ανεβαίνει» η ανέλιξη της δεύτερης Gamma και δημιουργείται κενό (gap) τόσο απότομα θα μειώνεται η ανέλιξη Variance Gamma και αντίστοιχα αν αυξάνεται περισσότερο η ανέλιξη της πρώτης Gamma (κάτι που φαίνεται από το συγκεκριμένο γράφημα), τόσο θα αυξάνεται η ανέλιξή μας.



Εικόνα 5: Προσομοίωση Ανέλιξης Variance Gamma

Τέλος αναφέρθηκαν οι κυριότερες ανελίξεις που θα χρησιμοποιηθούν σε αυτή την διπλωματική. Όμως τα παραδείγματα των ανελίξεων Lévy είναι πολλά περισσότερα, για παράδειγμα δεν αναφέρθηκαν οι ανελίξεις Inverse Gaussian, Stable, truncated Stable, generalised hyperbolic και η CMY που είναι η γενική περίπτωση υπό προϋποθέσεις μιας Inverse Gaussian και μιας Gamma ανέλιξης. Ο αναγνώστης παραπέμπεται για την βασική βιβλιογραφία στα [19, 23, 30] και [37].

Για λόγους πληρότητας, αναφέρουμε ότι υπάρχουν και πιο σύνθετα στοχαστικά μοντέλα, τα οποία είναι στην ουσία μια μείξη σ.α. με μια σ.α. Lévy. Συνήθως αυτές χρησιμοποιούνται για να μοντελοποιήσουν την μεταβλητότητα των μετοχών. Μερικά παραδείγματα αυτών είναι η OU - ανέλιξη ο οποία οδηγείται από μια Lévy ανέλιξη. Εισάχθηκε από τους Barndorff-Nielsen and Shephard για να περιγράψουν την μεταβλητότητα στα χρηματοοικονομικά. Βασικές παραπομπές για αυτή την ανέλιξη, θα βρεθούν στα [13] και [35].

2.4. Εισαγωγικές-Επιλεγμένες Μαθηματικές Ιδιότητες Ανελίξεως Lévy

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε περιληπτικά κάποιες μαθηματικές ιδιότητες που έχει η ανέλιξη Lévy.

Μια αρχική παρατήρηση, είναι ότι από την 2.2 παράγραφο δεν επεξηγήσαμε ακριβώς, πως από το θεώρημα 2.2.2, δηλαδή από μια λογαριθμική χαρακτηριστική συνάρτηση ψ, που ανήκει σε μια απείρως διαιρετέα κατανομή, θα υπάρχει μια ανέλιξη Lévy με την ίδια λογαριθμική χαρακτηριστική συνάρτηση. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα, είναι μέσο του Lévy-Itô διαχωρισμού, ο οποίος περιγράφει τη δομή μιας γενικής ανέλιξης Lévy να χωρίζεται σε τρείς διαφορετικές συνιστώσες.

Για αυτό το λόγω θα δοθεί ένα θεώρημα που θα δείχνει ότι για μια ανέλιξη Lévy, $\{X_t\}_{t\geq 0}$ να μπορεί να διαχωρισθεί σε τρείς ανεξάρτητες ανελίξεις.

Θεώρημα 2.4.1 [29]: Δοθέντος τις σταθερές $\gamma \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}$ και ένα μέτρο Π στο $\mathbb{R}^*$, που θα ικανοποιεί την σχέση:

$$\int_{\mathbb{R}} \min(1, x^2)\, \Pi(dx) < \infty$$

τότε υπάρχει ένας χώρος πιθανότητας στον οποίο υπάρχουν τρείς ανεξάρτητες ανελίξεις Lévy $X^{(1)}, X^{(2)}$ και $X^{(3)}$. Με τη $X^{(1)}$να είναι μια γραμμική-κίνηση-Brown[9], η δεύτερη $X^{(2)}$ να είναι μια σύνθετη ανέλιξη Poisson και η $X^{(3)}$ να είναι μια τετράγωνη – ολοκληρώσιμη martingale με σ.β. αριθμήσιμα σε αριθμό άλματα, σε κάθε χρονικά πεπερασμένο διάστημα.

Δηλαδή, μια ανέλιξη Lévy , $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$, μπορεί να διασπαστεί σε ανεξάρτητες Lévy ανελίξεις,

$$X = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}$$

ή ισοδύναμα,

$$\psi = \psi^{(1)} + \psi^{(2)} + \psi^{(3)}$$

Η απόδειξη είναι αρκετά τεχνική και ο αναγνώστης παραπέμπεται παραδείγματος χάριν στο [29] και στο [21]. Επιπλέον μπορεί να δει τα τυχαία μέτρα Poisson (Poisson random measures) και την τετραγωνική – ολοκληρώσιμη martingale (square integrable martingale) τα οποία αναλύονται εις βάθος.

Επίσης αναφέρεται ότι, από τον Lévy- Itô διαχωρισμό, η ύπαρξη της σ.α. $X^{(1)}$ η οποία είναι μια γραμμική-κίνηση-Brown, υποδηλώνει ότι τα μονοπάτια της ανέλιξης Lévy έχουν μη-φραγμένη διακύμανση (unbounded variation). Όμως αν η σταθερά $\sigma = 0$, τότε η ανέλιξη μπορεί να έχει είτε φραγμένη, είτε μη-φραγμένη διακύμανση. Η σ.α. $X^{(2)}$ που είναι μια σύνθετη ανέλιξη Poisson έχει μόνο φραγμένη διακύμανση, συνεπώς το πρόβλημα είναι για την σ.α. $X^{(3)}$, για το αν θα έχει φραγμένη διακύμανση η ανέλιξη Lévy, οπότε αναφέρεται το παρακάτω λήμμα που το προσδιορίζει.

[9] Είναι η σ.α. $X_t = sB_t + \gamma t,\ t \geq 0$, όπου B_t η κίνηση Brown, η οποία έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις, με συνεχή μονοπάτια, λόγω της κίνησης Brown.

Λήμμα 2.4.1 [29]: Για μια ανέλιξη Lévy με την λογαριθμική χαρακτηριστική συνάρτηση της Lévy –Khintchine και μια τριπλέτα $(\gamma\ ,\sigma, \Pi)$, έχει μονοπάτια φραγμένης διακύμανσης αν και μόνο αν,

$$\sigma = 0\ \kappa\alpha\iota\ \int_{\mathbb{R}} \min(1, |x|\,)\, \Pi(dx) < \infty$$

Με βάση το λήμμα που εισηγήθηκε, μπορούμε να γράψουμε εναλλακτικά το θεώρημα 2.2.2, δηλαδή η λογαριθμική χαρακτηριστική συνάρτηση των Lévy – Khintchine γίνεται:

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= i\gamma u - \int_{\mathbb{R}} \left(1 - e^{iux} + iux\, \mathbf{1}_{|x|<1}\right) \Pi(dx) \\
&= i\gamma u - \int_{\mathbb{R}} \left(1 - e^{iux}\right) \Pi(dx) - \int_{|x|<1} iux\, \Pi(dx) \\
&= iu\left(\gamma - \int_{|x|<1} x\, \Pi(dx)\right) - \int_{\mathbb{R}} \left(1 - e^{iux}\right) \Pi(dx) \\
&= iu\delta - \int_{\mathbb{R}} \left(1 - e^{iux}\right) \Pi(dx)
\end{aligned}$$

Όπου $\delta = \gamma - \int_{|x|<1} x\, \Pi(dx) \in\ \mathbb{R}$ σταθερά.

Σημειώνεται ότι στο [29] η σταθερά δ, η οποία καλείται και ως τάση (drift), ορίζεται διαφορετικά, διότι έχει χρησιμοποιηθεί ο αρνητικός λογάριθμος της χαρακτηριστικής συνάρτησης.

Σε αυτό το σημείο, αξίζει να αναφέρουμε ότι κάποιες ανελίξεις Lévy, όπως για παράδειγμα η ανέλιξη Gamma και η αντίστροφη Gauss (IG), οι οποίες δεν εμπεριέχουν το κομμάτι της κίνησης Brown, η τάση (drift) τους είναι μη-αρνητική[10] και έχουν μόνο θετικές αυξήσεις. Εάν κατέχουν τις παραπάνω ιδιότητες τότε θα λέμε ότι αυτή η ανέλιξη Lévy θα είναι subordinator. Φυσικά λόγω αυτών των ιδιοτήτων, η ανέλιξη θα είναι μια μη-φθίνουσα και θα έχει πάντα πεπερασμένη διακύμανση.

Ορισμός 2.4.1 [29]: Έστω μια ανέλιξη Lévy, θα καλείται subordinator αν και μόνον αν, $\Pi(-\infty, 0) = 0\,, \int_0^\infty \min(1, x)\, \Pi(dx) < \infty\,, \sigma = 0$ και το $\delta \geq 0$, δηλαδή,

$$\psi(u) = iu\delta - \int_0^\infty \left(1 - e^{iux}\right) \Pi(dx)$$

Αναφέρεται ότι στο [29] και πάλι η $\psi(u)$ έχει ορισθεί διαφορετικά, διότι έχει επιλεχθεί ο αρνητικός λογάριθμος της χαρακτηριστικής συνάρτησης.

Είναι σαφές, ότι αυτές οι ανελίξεις έχουν μονόπλευρα άλματα, μη-αρνητικά για την ανέλιξη X.

Τέλος, πριν κλείσουμε την ενότητα, αξίζει να αναφέρουμε ότι μια ανέλιξη Lévy κατέχει την ισχυρή ιδιότητα Markov.

[10] Μη αρνητική, δεν συνεπάγεται «αυτόματα» ότι είναι γνησίως θετική

Ενδεικτικά αναφέρεται, ότι μια σ.α. $\{X_t\}_{t\geq 0}$ έχει την ιδιότητα Markov, εάν για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $s, t \geq 0$:

$$P(X_{t+s} \in B \,|\mathcal{F}_t) = P\big(X_{t+s} \in B \,|\sigma(X_t)\big)$$

ή πιο απλά,

$$P(X_{t+s} = x_{t+s}|X_0 = x_0, \dots, X_t = x_t) = P(X_{t+s} = x_{t+s}|X_t = x_t)$$

Η ισχυρή ιδιότητα Markov για την ανέλιξη Lévy μπορεί να αποδειχθεί με την βοήθεια των τ.μ. χρόνων διακοπής (stopping times). Για τον αναγνώστη, μπορεί να ψάξει μεταξύ άλλων, στο [29], καθώς και των πιο εξειδικευμένων όπως [11, 14, 34], που εμπεριέχουν την μέθοδο απόδειξης, της ισχυρής ιδιότητας Markov καθώς και κάποιες περεταίρω ιδιότητες για τις ανελίξεις Lévy που δεν αναφέρθηκαν.

Κεφάλαιο 3ο

Πιστωτικός Κίνδυνος & Παράγωγα

3.1. Εισαγωγή στα Χρηματοοικονομικά Παράγωγα

Είναι βασικό, τώρα να αναλύσουμε τα κύρια είδη χρηματοοικονομικών παραγώγων και συμβολαίων που υπάρχουν στην αγορά, ώστε να αποτελέσει μια ήπια εισαγωγή για αυτά που θα μιλήσουμε αργότερα. Σημειώνεται δε ότι, οι περισσότερες πληροφορίες αντλήθηκαν από το [25] και το [36].

3.1.1. Προθεσμιακά Συμβόλαια – Forwards

Αρχικά θα ορίσουμε τα προθεσμιακά συμβόλαια ή Forward, όπως καλούνται στην διεθνή βιβλιογραφία.

Ορισμός 3.1.1 [25]**:** Το συμβόλαιο Forward, είναι μια συμφωνία αγοράς ή πώλησης ενός περιουσιακού στοιχείου (asset), σε μια ορισμένη μελλοντική στιγμή, για μια συγκεκριμένη τιμή.

Συνήθως αυτά, τα συμβόλαια διαπραγματεύονται έξω από τη χρηματιστηριακή αγορά, μεταξύ δύο χρηματοοικονομικών ιδρυμάτων ή μεταξύ ενός χρηματοοικονομικού ιδρύματος με έναν από τους πελάτες της. Επιπλέον, ένα από τα συμβαλλόμενα μέρη σε ένα συμβόλαιο Forward, αναλαμβάνει θέση “long” και συμφωνεί να αγοράσει το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο σε μια καθορισμένη μελλοντική ημερομηνία για την τιμή που έχει καθορισθεί. Το άλλο συμβαλλόμενο μέρος, αναλαμβάνει μια θέση “short” και συμφωνεί να πουλήσει το περιουσιακό στοιχείο στην ίδια ημερομηνία για την ίδια τιμή που έχει συμφωνηθεί.

Οι αποδοχές αυτών των συμβολαίων, υποθέτοντας ένα μόνο περιουσιακό στοιχείο προς διαπραγμάτευση, είναι:

- Για θέση long,

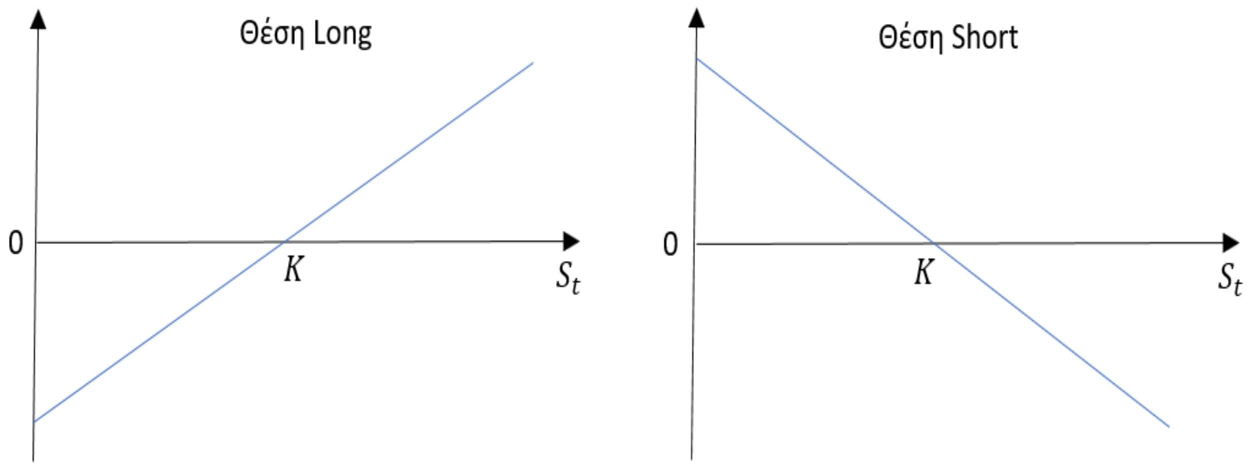
$$S_T - K$$

- Για θέση short

$$K - S_T$$

Όπου και στις δύο περιπτώσεις, το S_T είναι η τιμή του περιουσιακού στοιχείου στην λήξη, χρόνος T και το K είναι η τιμή που συμφωνήθηκε στο συμβόλαιο. Φυσικά καταλαβαίνουμε ότι για παράδειγμα, αν η τιμή K είναι μεγαλύτερη από την τιμή S_T, το μέρος που είναι από την θέση long, δηλαδή του αγοραστή θα χάσει την διαφορά και αντίστροφά για τον πωλητή που θα έχει κέρδος από αυτή την συναλλαγή.

Στην εικόνα 6 παρουσιάζονται γραφικά, αυτά που αναφέρθηκαν, όπου στο αριστερό είναι για την θέση long και στο δεξί γράφημα είναι για την θέση short.



Εικόνα 6: Θέση Long - Short

3.1.2. Συμβόλαια Μελλοντική Εκπλήρωσης – Futures

Τώρα, θα παρουσιασθούν τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης ή Futures. Τα συμβόλαια αυτά, έχουν αρκετές ομοιότητες με τα προηγούμενα που αναπτύξαμε και κάποιος μπορεί να μην καταλάβει εντελώς την διαφορά. Δίνεται αρχικά ο ορισμός και στην συνέχεια θα «ξεδιαλυθεί το τοπίο».

Ορισμός 3.1.2 [25]: Τα Future συμβόλαια, είναι μια συμφωνία μεταξύ δύο μερών για αγορά ή πώληση ενός περιουσιακού στοιχείου σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή στο μέλλον, σε προκαθορισμένη τιμή.

Αν παρατηρήσουμε, οι δύο ορισμοί του κεφαλαίου είναι ισοδύναμοι, οπότε πια η διαφορά;

Σε αντίθεση με τα Forward συμβόλαια, τα Future εμποροδιαπραγματεύονται στο χρηματιστήριο. Όμως για να είναι εφικτή η συναλλαγή τους, το χρηματιστήριο είναι αυτό που καθορίζει τα ορισμένα χαρακτηριστικά της σύμβασης, καθώς είναι και ο εγγυητής αυτής της συμφωνίας.

3.1.3. Δικαιώματα Προαίρεσης – Options

Μια επόμενη κατηγορία συμβολαίων, είναι τα δικαιώματα προαίρεσης ή Options, τα οποία διαπραγματεύονται εντός και εκτός του χρηματιστήριου.

Ορισμός 3.1.3 [25]: Τα συμβόλαια options, είναι μια συμφωνία μεταξύ δύο μερών που δίνει το δικαίωμα για αγορά ή πώληση ενός περιουσιακού στοιχείου σε μια μελλοντική χρονική στιγμή και στην τιμή που έχει συμφωνηθεί.

Αυτά τα συμβόλαια, χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Στα call options που δίνουν το δικαίωμα (αλλά όχι την υποχρέωση) στον αγοραστή ή αλλιώς holder, να αγοράσει το συγκεκριμένο περιουσιακό στοιχείο, σε μια προκαθορισμένη τιμή και στην ημερομηνία που έχει καθοριστεί. Ενώ στα short options, δίνουν στον holder το δικαίωμα να πουλήσει το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο, σε μια προκαθορισμένη τιμή, την ημερομηνία που έχει καθοριστεί. Σημειώνεται δε, ότι τα Αμερικάνικα options μπορούν να ασκηθούν ανά πάσα στιγμή μέχρι την ημερομηνία λήξης τους, σε αντίθεση με τα Ευρωπαϊκά που ασκούνται μόνο στην ημερομηνία λήξης τους. Επιπλέον σε αντίθεση με τα προηγούμενα συμβόλαια που αναφέρθηκαν, στα οποία δεν υπήρχε κόστος απόκτησης τους, τα options αποκτούνται έναντι μιας τιμής C η οποία προκαθορίζεται.

Υπάρχουν πολλά είδη των options, όπως για παράδειγμα τα Vanilla που μεταξύ άλλων είναι τα κλασσικά long-call, short call, long put και short put options. Επιπλέον υπάρχουν τα Exotic και τα Asian options, όμως σε αυτή την διπλωματική δεν θα κάνουμε κάποια αναφορά σε αυτές τις κατηγορίες. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη να διαβάσει ενδεικτικά τα βιβλία του [25] το οποίο θεωρείται ένα βιβλίο textbook στην Αμερική και το βιβλίο [42] που δείχνει τον χειρισμό αυτών των options, αντισταθμίζοντας έτσι τους κινδύνους π.χ. για ένα χαρτοφυλάκιο.

3.1.4. Συμβάσεις Ανταλλαγής – Swaps

Μια άλλη κατηγορία εμπορεύσιμων συμβολαίων, είναι οι λεγόμενες συμβάσεις ανταλλαγής ή swaps. Η ιστορία τους ξεκινάει από το ’81, όπου η εταιρεία IBM διαπραγματευόταν εξωχρηματιστηριακά την αλλαγή συναλλαγμάτων με την Παγκόσμια Τράπεζα. Συγκεκριμένα, τότε η Παγκόσμια Τράπεζα έχει δανεισμούς σε Αμερικάνικα δολάρια, ενώ στην απέναντι πλευρά η εταιρεία IBM είχε δανεισμούς σε Γερμανικά μάρκα και Ελβετικά φράγκα. Οπότε η συμφωνία που έγινε, έλεγε ότι η Παγκόσμια Τράπεζα θα πλήρωνε τους τόκους των δάνειων της IBM, ενώ η IBM θα πλήρωνε κατά αντιστοιχία τους τόκους των δανείων της Παγκόσμιας Τράπεζας.

Εκ τότε η αγορά των Swaps αναπτύχθηκε σε τεράστιο βαθμό, συγκεκριμένα μια στατιστική μελέτη υπό την Τράπεζα για τους Διεθνείς Διακανονισμούς, δείχνει ότι περίπου το 58.5% όλων των εξωχρηματιστηριακών παραγώγων, είναι συμβάσεις ανταλλαγής επιτοκίων και άλλο ένα 4% είναι συμβάσεις ανταλλαγής νομισμάτων.

Ορισμός 3.1.4 [25]: Ένα συμβόλαιο Swap, είναι μια εξωχρηματιστηριακή συμφωνία, μεταξύ δύο εταιρειών για την ανταλλαγή των ταμιακών τους ροών στο μέλλον. Η συμφωνία ορίζει τις ημερομηνίες που πρέπει να πληρωθούν οι ταμιακές ροές και τον τρόπο με τον οποίο θα υπολογισθούν.

Συνήθως ο υπολογισμός των ταμειακών ροών, εμπεριέχει τη μελλοντική αξία ενός επιτοκίου, μιας συναλλαγματικής ισοτιμίας ή άλλης μεταβλητής της αγοράς.

Ακόμη μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα Future συμβόλαιο είναι ένα απλό παράδειγμα Swap. Για παράδειγμα, αν η εταιρεία Α κάνει ένα συμβόλαιο Future με την εταιρεία Β, την 24/06/2022 όπου αγοράζει 100 ουγκιές χρυσό στην τιμή των 1500 € σε ένα χρόνο (σημειώνεται ότι η τιμή του χρυσού αυτή την ημερομηνία είναι 1733.35 €, συνεπώς ο αγοραστής προβλέπει ότι θα ανεβεί η τιμή του χρυσού και ο πωλητής ότι θα κατέβει). Οπότε η εταιρεία Β μπορεί να πουλήσει το χρυσό σε ένα έτος μόλις το παραλάβει. Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε ότι αυτό το συμβόλαιο είναι ισοδύναμο με ένα Swap, όπου η εταιρεία συμφωνεί να το πουλήσει $150\,000€$ και θα πάρει $(100 \cdot S)$ το επόμενο έτος 24/06/2023, όπου το S είναι η τιμή αγοράς της 1 ουγκιάς χρυσού εκείνη την ημερομηνία. Ωστόσο, σε ένα Future συμβόλαιο, η ταμειακή ροή του αλλάζει μόνο μια φορά σε μια μελλοντική ημερομηνία, σε αντίθεση με ένα Swap που μπορεί να αλλάξει αρκετές φορές.

Αξίζει να αναφερθεί ότι, υπάρχουν αρκετά είδη Swap, αναφορικά έχουμε τα Swaps μετοχικού κεφαλαίου (Equity), των εμπορευμάτων (commodities), μεταβλητότητας των τιμών (Volatility) και τα πιστωτικά (Credit Default). Ανάμεσα σε αυτά, τα πιο δημοφιλή Swaps είναι του επιτοκίου και του νομίσματος. Στα Swaps του επιτοκίου έχουμε το δημοφιλές LIBOR[11] όπου ανταλλάσσεται με ένα σταθερό επιτόκιο, όπου και κατά την αποτίμηση αυτού του Swap απαιτείται ένα «ακίνδυνο επιτόκιο» ή αλλιώς "risk-free" επιτόκιο για τον υπολογισμό των ταμειακών ροών. Το γεγονός αυτό απλοποιεί αρκετά την αποτίμηση του Swap επιτοκίου, διότι το προεξοφλητικό επιτόκιο είναι το ίδιο με το επιτόκιο αναφοράς στο Swap. Μας βάζει σε σκέψεις αυτό που αναφέραμε, διότι τι θα γινόταν σε μεγάλες μεταβολές (υφέσεις) και «ίσως» θα αναγνωρίσουμε το πρόβλημα αυτό σε επόμενη παράγραφο, αναφέροντας σαν παράδειγμα την μεγάλη κρίση περί του 2007 στην Αμερικανική αγορά.

3.2. Πιστωτικός Κίνδυνος – Ιστορία και Εξέλιξη

Στην περασμένη παράγραφο, είδαμε κάποια παράγωγα που αφορούσαν για τον κίνδυνο της αγοράς. Εδώ θα επεκταθούμε και στον πιστωτικό κίνδυνο.
Γενικότερα, ο πιστωτικός κίνδυνος μπορούμε να πούμε ότι είναι παρόν στην καθημερινή μας ζωή, ενδεικτικό παράδειγμα αποτελεί ένα άτομο που κάνει αίτηση για δάνειο από μια τράπεζα για την αγορά του σπιτιού του, υπό την προϋπόθεση ότι η τράπεζα του εγκρίνει το δάνειο, διότι διαθέτει τις προϋποθέσεις που θέτει η τράπεζα, πληρώνοντας τις δώσεις του σύμφωνα με τα κριτήρια που έχει θέσει. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα, δηλαδή η τράπεζα εκθέτεται σε ένα κίνδυνο, ο οποίος είναι να πάρει πίσω μέρος ή όχι του δανείου που έχει δώσει στο άτομο αυτό. Αυτός ακριβώς ο κίνδυνος καλείται πιστωτικός.
Συνεπώς, πιο αυστηρά μπορούμε να πούμε ότι, ο πιστωτικός κίνδυνος αναφέρεται σε ένα κίνδυνο που έχει μια συγκεκριμένη ομάδα αναφοράς η οποία δεν εκπληρώνει τις πιστωτικές υποχρεώσεις της, μέσα σε ένα καθορισμένο χρονικό ορίζοντα T. Σε αυτή την περίπτωση θα συμβεί αθέτηση (default). Κατά αντιστοιχία με το παράδειγμα έχουμε ότι, η συγκεκριμένη ομάδα αναφοράς είναι το άτομο και η αθέτηση συμβαίνει την ημέρα που δεν είχε να πληρώσει τις δώσεις του δανείου του ή δήλωσε ότι δεν μπορούσε να το πληρώσει. Επιπλέον, ο κίνδυνος απλώνεται σε ένα καθορισμένο χρονικό μήκος, όπως αναφέραμε $[0\,,T]$, όπου το T καλείται χρόνος που «ωριμάζει» το πιστωτικό γεγονός ή αλλιώς χρονικός ορίζοντας.

[11] London Inter-Bank Offered Rate (LIBOR), είναι ένας μέσος όρος επιτοκίου που υπολογίζεται από τις εκτιμήσεις που υποβλήθηκαν από τις κορυφαίες τράπεζες του Λονδίνου, με τον οποίο οι μεγάλες παγκόσμιες τράπεζες δανείζουν η μια την άλλη, με βραχυπρόθεσμα δάνεια (short-term loans). Οι περίοδοι δανεισμού δεν ξεπερνάνε τον 1 χρόνο. Κατ' αντιστοιχία, είναι το EURIBOR όπου υπολογίζεται από τις τράπεζες της Ευρωζώνης.

Έχοντας μπει περισσότερο τώρα στο κλίμα, μας γεννιούνται απορίες για το πώς στο παράδειγμα μας η τράπεζα αποφασίζει για το αν θα δώσει το δάνειο στον άνθρωπο ή όχι. Είναι λογικό το κάθε πιστωτικό ίδρυμα να θέλει να περιορίσει τον πιστωτικό κίνδυνό του, συνεπώς η τράπεζα συλλέγει πληροφορίες για το άτομο, το οποίο ζήτησε δάνειο, επεξεργάζοντας έτσι τα στοιχείου του με βάση το εκάστοτε μοντέλο που χρησιμοποιεί (in house), εκτιμά την πιθανότητα για την οποία θα αθετήσει τις υποχρεώσεις του και με αυτό τον τρόπο αποφασίζει για την χορήγηση του. Τέλος, αν υποθέσουμε ότι αν συμβεί το πιστωτικό γεγονός, δεν θα ξέρουμε παρόλα αυτά το χρονικό διάστημα που θα γίνει, καθώς και το μέγεθος της ζημιάς που θα προκληθεί θα είναι αόριστο.
Όπως είναι λογικό, η αθέτηση των υποχρεώσεων μιας ομάδας αναφοράς (πρέπει)[12] να είναι ένα σπάνιο γεγονός, αλλά στην περίπτωση που συμβεί, μπορεί να έχει ένα αρκετά ισχυρό αντίκτυπο στην χρηματοοικονομική αγορά. Μπορεί να επηρεάσει αρκετά τα κέρδη και τις ζημιές πολλών επενδυμένων κεφαλαίων σε καθημερινή βάση, π.χ. στα χρηματοοικονομικά χαρτοφυλάκια[13]. Επιπροσθέτως θα μπορούσε μια αθέτηση πληρωμών, να συντελέσει σε αλυσιδωτές αθετήσεις και πιθανότατα χρεοκοπίες[14] εντός του ίδιου χρονικού ορίζοντα T. Φυσικά, η πολλαπλή αθέτηση είναι εξαιρετικά πιο σπάνια, η οποία μπορεί να συμβεί, από φυσικές καταστροφές, (παγκόσμιους) πολέμους, πολιτικά γεγονότα και λόγω της περίπλοκης δομής της αγοράς που εξαρτάται αρκετά από κάποιο πιστωτικό συμβάν.
Αναφέρεται ότι υπάρχουν διάφοροι οίκοι αξιολόγησης, με τους πιο γνωστούς να είναι η Moody's, S&P και η Fitch οι οποίοι παρέχουν αξιολογήσεις που περιγράφουν την πιστοληπτική ικανότητα εταιρικών και κρατικών ομολόγων. Η λογική της κατάταξης αυτών των εταιρειών είναι ίδια, αλλά αλλάζουν οι κλίμακες διαβάθμισης της εκάστοτε εταιρείας. Φυσικά όσο η βαθμολογία της εταιρείας είναι πιο ψηλά (προς τα πάνω), έχει καλύτερη πιστοληπτική ικανότητα, με την τελευταία γραμμή να είναι η χειρότερη βαθμολογία πριν την αθέτηση. Ακόμη σημειώνεται ότι μια αλλαγή στην αξιολόγηση αυτών των εταιρειών θα επηρεάσει ουσιαστικά το spread της εταιρικής μετοχής. Στο Παράρτημα Β παρατίθενται οι πίνακες πιστοληπτικής βαθμολόγησης των οίκων αυτών.

3.3. Ιστορικές και Κινδυνοουδέτερες Πιθανότητες

Με σκοπό να κατασκευάσουμε προηγμένα μοντέλα για την τιμολόγηση χρηματοοικονομικών προϊόντων που σχετίζονται, με την πιθανότητα να συμβεί ένα πιστωτικό γεγονός, δηλαδή χρεοκοπία μέσα σε χρονικό $t \in [0, T]$, με το T να θεωρείται ο χρόνος λήξης του συμβολαίου, για μια συγκεκριμένη ομάδα ή ομάδες αναφοράς, θα εισάγουμε στη συνέχεια κάποιες βασικές έννοιες για τον λόγω αυτό.

[12] Καθίσταται απίθανο σε περιπτώσεις πολιτικό-στρατιωτικών συμπράξεων, ακόμα και αν δεν ισχύει το δεύτερο.

[13] Χαρτοφυλάκιο είναι μια συλλογή χρηματοοικονομικών επενδύσεων, όπως μετοχές, ομόλογα, εμπορεύματα, μετρητά και πολλά άλλα χρηματοοικονομικά προϊόντα. Ειδικές περιπτώσεις αυτών, περιλαμβάνουν, ακίνητα, έργα τέχνης και ιδιωτικές επενδύσεις.

[14] Χρεοκοπία είναι η νομική διαδικασία όπου στην ουσία παύει να υφίσταται η εταιρεία. Σε αντίθεση με την αθέτηση, γίνεται εκκαθαρισμός των περιουσιακών στοιχείων της και το όποιο χρέος της εταιρείας πληρώνεται από την ρευστοποίηση των περιουσιακών στοιχείων της. Να σημειωθεί ότι μια αθέτηση πληρωμών δεν τερματίζει την λειτουργεία της εταιρείας (δηλαδή, χρεοκοπεί), αλλά μια μαζική και χρόνια αθέτηση των υποχρεώσεων της μπορεί να την χρεοκοπήσει.

Στον τομέα των μαθηματικών της χρηματοοικονομικής επιστήμης (Mathematical Finance), υπάρχουν δύο πολύ σημαντικά μέτρα πιθανότητας, οι ιστορικές και οι κινδυνοουδέτερες πιθανότητες. Οι ιστορικές πιθανότητες ενός γεγονότος, είναι η πιθανότητα αθέτησης που έχει προκύψει από στατιστικές μελέτες μεγάλων οίκων του εξωτερικού και αφορά τις πραγματικές πιθανότητες, δηλαδή αυτές που έχουν προκύψει στον «Αληθινό Κόσμο» (Real World probabilities). Μερικοί οίκοι αξιολόγησης είναι, η Moody's , S&P και Fitch, καθώς βαθμολογούν ομόλογα κρατών και μετοχές κολοσσών εταιρειών. Αντίθετα, οι κινδυνοουδέτερες πιθανότητες είναι ένα τεχνητό μέτρο, όπου η πιθανότητα αυτή για ένα γεγονός χρησιμοποιείται για να αποτιμήσει συμβόλαια παραγώγων ανάλογα με το γεγονός.

Συγκεκριμένα στα συμβόλαια πιστωτικών παραγώγων, θα υποθέσουμε ότι το επιτόκιο αυτών, θα αντικατασταθεί από το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο για την αποτίμηση τους, οπότε η τιμή του παραγώγου δίνεται από την αναμενόμενη τιμή κάτω από το μέτρο ουδέτερου κινδύνου (Q- μέτρο ουδέτερου κινδύνου) της προεξοφλημένης απόδοσης ή (ΠΑ).

Δηλαδή,

$$Τιμή = E_Q[\text{ΠΑ}]$$

και φυσικά το μέτρο ουδέτερου κινδύνου πρέπει να καθοριστεί ώστε να υπολογισθούν τα αντίστοιχα παράγωγα.
Η πιθανότητα αθέτησης τώρα, υπό το μέτρο ουδέτερου κινδύνου Q, ορίζεται ως,

$$P_{Surv}(t) = Να\ μην\ συμβεί\ αθέτηση\ στο\ διάστημα\ [0, t]$$

και

$$P_{Def}(t) = Να\ συμβεί\ αθέτηση\ στο\ διάστημα\ [0, t]$$

$$με\ P_{Def}(t) = 1 - P_{Surv}(t)$$

Στην πολυμεταβλητή περίπτωση, δηλαδή που θα συμβαίνουν περισσότερα πιστωτικά γεγονότα σε ένα καθορισμένο ορίζοντα, για παράδειγμα σε δύο οφειλέτες (i, j), θα έχουμε:

$$P_{Surv}^{i,j}(t) = \ Η\ πιθανότητα\ ότι\ και\ οι\ δύο\ οφειλέτες\ i, j\ δεν\ θα\ αθετήσουν\ στο\ \ [0, t]$$

Με πλήρη αντιστοιχία όπως και πριν για την πιθανότητα αθέτησης των δύο οφειλετών,

$$P_{Def}^{i,j}(t) = 1 - P_{Surv}^{i,j}(t)$$

Αξίζει να αναφερθεί, ότι στην περίπτωση που είναι ανεξάρτητοι οι οφειλέτες, θα έχουμε,

$$P_{Surv}^{i,j}(t) = P_{Surv}^{i}(t)\ P_{Surv}^{j}(t)$$
$$P_{Def}^{i,j}(t) = P_{Def}^{i}(t)\ P_{Def}^{j}(t)$$

Κάτι που όπως καταλαβαίνουμε είναι καθαρά υποθετικό, μιας που κάποιες αγορές έχουν υψηλή συσχέτιση μεταξύ τους. Ίσως, αν είχαμε ένα διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο (diversified portfolio) στο οποίο να περιλαμβάνονταν αγορές όχι τόσο συσχετισμένες.

3.4. Στατιστικά Στοιχεία και Πίνακες των Ιστορικών Πιθανοτήτων Αθέτησης της S&P

Λαμβάνοντας υπόψιν τώρα όλα αυτά που αναφέραμε, είναι σκόπιμο να παρουσιαστούν κάποιοι στατιστικοί πίνακες που αφορά τις ιστορικές πιθανότητες αθέτησης και το πώς αυτές επηρεάζονται ανά τομέα. Θα δούμε ότι πολλοί κάδοι τις οικονομίας (αν όχι όλοι), υπόκειντο σε πιστωτικό κίνδυνο, ο οποίος παράγοντας μπορεί σε πολλές περιπτώσεις να είναι σφοδρότερος σε αντίθεση με άλλους κινδύνους όπου και υπόκειντο οι υπόλοιποι τομείς. Οι πίνακες της ενότητας που παρουσιάζονται, αντλήθηκαν από την [40] η οποία ήταν η ετήσια μελέτη του οίκου S&P για το έτος 2021, όπου και δημοσιεύθηκε τον Απρίλιο του 2022.

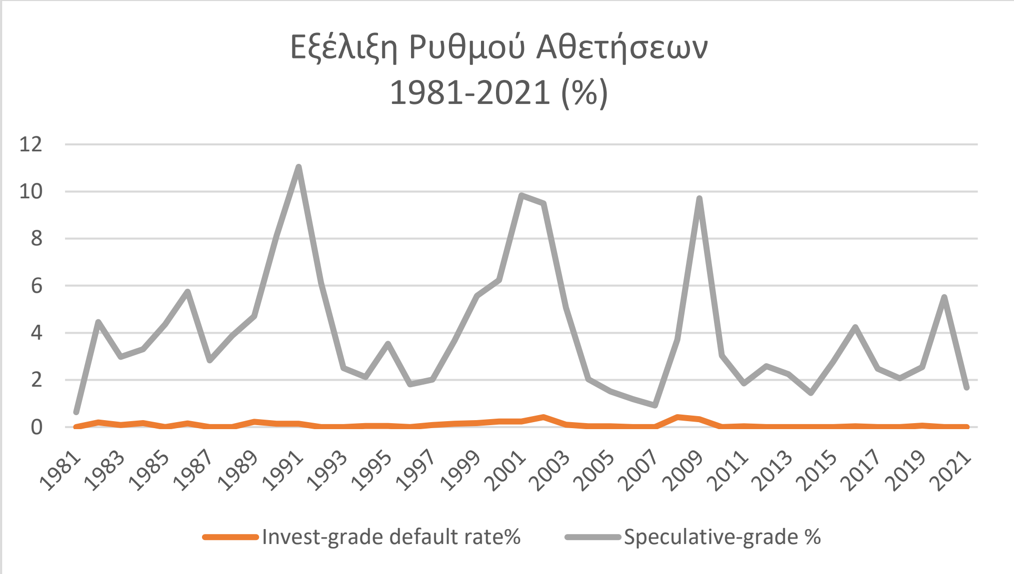
Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι η κλίμακα αξιολογήσεων της S&P, κυμαίνεται από τη άριστη AAA μέχρι την D που είναι η βαθμολογία αθέτησης η οποία συνδέεται άμεσα με την πιθανότητα αθέτησης της κάθε κατηγορίας. Ο αναγνώστης παραπέμπεται στο Παράρτημα Β, που μπορεί να δει με λεπτομέρεια όλες τις κλίμακες αξιολόγησης, μαζί και των άλλων οίκων αξιολόγησης που έχουν αναφερθεί.

Αρχικά, παρουσιάζεται ο πίνακας 1, ο οποίος δείχνει ξεκάθαρα τον σταθμισμένο ρυθμό αθέτησης κάθε έτους. Το δείγμα που έχει μαζευτεί είναι 41 χρόνων, δηλαδή από το 1981 μέχρι το 2021 και αφορά τις επιχειρήσεις σε παγκόσμιο επίπεδο.

Χρον.	Συν. Αθετ.	Σταθμ. Ποσοστό Αθετ. (%)	Χρον.	Συν. Αθετ.	Σταθμ. Ποσοστό Αθετ. (%)	Χρον.	Συν. Αθετ.	Σταθμ. Ποσοστό Αθετ. (%)
1981	2	0.15	1995	35	1.05	2009	268	4.17
1982	18	1.22	1996	20	0.51	2010	83	1.21
1983	12	0.77	1997	23	0.63	2011	53	0.80
1984	14	0.93	1998	56	1.28	2012	83	1.14
1985	19	1.13	1999	109	2.15	2013	81	1.03
1986	34	1.74	2000	136	2.48	2014	60	0.69
1987	19	0.95	2001	229	3.77	2015	113	1.36
1988	32	1.39	2002	226	3.60	2016	163	2.09
1989	44	1.79	2003	119	1.93	2017	95	1.21
1990	70	2.74	2004	56	0.78	2018	82	1.02
1991	93	3.26	2005	40	0.6	2019	118	1.30
1992	39	1.50	2006	30	0.48	2020	226	2.75
1993	26	0.60	2007	24	0.37	2021	72	0.84
1994	21	0.63	2008	127	1.80			

Πίνακας 1: Δεδομένα από το 1981-2021 που δείχνουν πως εξελίσσεται ο ρυθμός αθετήσεων

Παρατηρούμε δε, ότι ο σταθμισμένος ρυθμός αθέτησης (δηλαδή οι επιχειρήσεις στις οποίες έχει επέλθει το πιστωτικό γεγονός ως προς τον συνολικό αριθμό των επιχειρήσεων), αυξάνεται απότομα σε αρκετά υψηλά επίπεδα από 0.37% το 2007, σε 1.80% και 4.17% για τα έτη 2008 και 2009 αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, η εικόνα 7 προκύπτει από τον διαχωρισμό των δεδομένων του πίνακα 1, ο οποίος μας δείχνει ξεκάθαρα την εξέλιξη των σταθμισμένων ρυθμών της επενδυτικής (investment – grade) και της κερδοσκοπικής (speculative – grade) κλίμακας.



Εικόνα 7: Εξέλιξη Ρυθμού Αθετήσεων (%) 1981-2021

Μπορούμε να δώσουμε διάφορες εκδοχές και εξηγήσεις για το πώς κορυφώθηκαν οι τιμές των αθετήσεων σε σχέση με την υπόλοιπη οικονομία. Κλασσικό παράδειγμα αποτελεί η χρηματοπιστωτική και τραπεζική κρίση τα έτη 2007-2008[15] που υπέστη όλη η υφήλιος, η οποία άρχισε από την Ηνωμένες Πολιτείες, με το 2009 να εντείνεται περισσότερο το γεγονός των αθετήσεων, λόγω της διάδοσης της κρίσης, κάτι που φαίνεται διαισθητικά από την εικόνα 7. Φυσικά, κάποιες χώρες επλήγησαν λιγότερο από κάποιες άλλες, αλλά όπως αναφέραμε οι διάφορες αγορές της υφηλίου είναι αλληλένδετες. Ανάλογες εξηγήσεις για τις υφέσεις που διαφαίνονται από το πίνακα, μπορούν να ερμηνευτούν με τον ίδιο τρόπο σκεπτόμενοι πολέμους και κρατικούς περιορισμούς που εφαρμόσθηκαν αυτά τα χρόνια. Λογικά σκεπτόμενοι, θα αναμένουμε εξίσου μια αύξηση στο ρυθμό αθέτησης για το έτος 2022, λόγω «πολέμων» και ενεργειακών κυρώσεων που μαίνονται μεταξύ οικονομικά δυνατών χωρών. Καθώς και πιθανός το Brexit που έγινε το 2020, μαζί με τα συνεχόμενα lockdown λόγω της πανδημίας του COVID-19, εξηγεί την σημαντική αύξηση. Στο πίνακα 2 βλέπουμε καθαρά αυτές τις παρατηρήσεις που μόλις επισημάναμε, μέσω της βαθμολόγησης που έκανε η S&P.

%	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C
2007	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	0.25	15.24
2008	0.00	0.38	0.39	0.49	0.81	4.11	27.27
2009	0.00	0.00	0.22	0.55	0.75	10.93	49.46
2010	0.00	0.00	0.00	0.00	0.58	0.87	22.83
				…			
2019	0.00	0.00	0.00	0.11	0.00	1.49	29.76
2020	0.00	0.00	0.00	0.00	0.94	3.53	47.68
2021	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.52	10.99

Πίνακας 2: Δεδομένα 2007-2021 Κλίμακας Αξιολόγησης S&P με την Πάροδο του Χρόνου

[15] Στην Ελλάδα η χρηματοπιστωτική κρίση άρχισε να συμβαίνει από το 2009, διότι οι θεσμοί και οι επενδυτές άρχισαν να μην εμπιστεύονται αγορές με υψηλό ρίσκο (παρόλο που υπήρχαν υψηλές αποδόσεις), έπειτα από την χρεοκοπία της Lehman Brothers, η οποία κατέστησε την άποψη ότι ακόμη και η πιο «υγιείς» εταιρεία μπορεί να εκτεθεί στον κίνδυνο χρεοκοπίας, πόσο μάλλον οι λιγότερο «υγιείς».

Επιπλέον παρατηρούμε ότι, η πιθανότητα αθέτησης αυξήθηκε το 2008 για τις εταιρείες τύπου Lehman Brothers που είχαν υψηλή βαθμολογία και στην δεύτερη περίπτωση το 2020 η πιθανότητα αθέτησης αυξήθηκε για τις εταιρείες που είχαν βαθμολογία CCC/C (ομαδοποιήθηκαν). Πιθανός έκλεισαν αρκετές εταιρείες, όχι και τόσο φερέγγυες από τα συνεχόμενα lockdowns που υπήρξαν έντονα παγκοσμίως εκείνη την περίοδο.

Είναι λογικό να σκεφτούμε τώρα, το πώς κυμάνθηκαν οι κλίμακες αξιολογήσεων για την κάθε ήπειρο ξεχωριστά, που και πάλι θα βρίσκαμε τις απαραίτητες εξηγήσεις με τον ίδιο τρόπο. Για την περεταίρω εμβάθυνση του αναγνώστη σε αυτό το θέμα, παραπέμπετε στην έρευνα που αναφέρθηκε στην αρχή της υπό ενότητας. Όμως θα ήταν καλό να αναφερθούμε σε κάποιους τομείς της οικονομίας που επλήγησαν διαχρονικά και θα συμπεράνουμε ότι πλέον «σχεδόν» κανένας τομέας της οικονομίας δεν μείνει αλώβητος από τον πιστωτικό κίνδυνο.

Ο κάτω πίνακας 3, δείχνει τους κύριους τομείς της οικονομίας από την αρχή των μετρήσεων της S&P, δηλαδή από το 1981 (original rating ή αρχική βαθμολογία) μέχρι το 2021, κατά το πόσο εμπεριέχουν το πιστωτικό κίνδυνο, μετρώντας τον εμπειρικά, φυσικά από τα δεδομένα των περασμένων ετών. Εντύπωση κάνει ο τομέας των ασφαλιστικών εταιρειών, όπου υπήρξαν αθετήσεις ασφαλιστικών εταιρειών, παρόλο που είχαν αρκετά υψηλή βαθμολογία.

(%)	Διάμεση αρχική βαθμολογία (Αθετημένων)	Διάμεση αρχική βαθμολογία (κλάδου)	Αθετήσεις	Μέσος όρος ετών από την αρχική βαθμολογία	Διάμεσα έτη από την αρχική βαθμολογία	Τυπικές αποκλίσεις ετών από την αρχική βαθμολογία
Αεροδιαστημική / αυτοκίνητα / κεφαλαιουχικά αγαθά / μέταλλα	B+	BB-	411	6.5	4.5	5.8
Καταναλωτικά/υπηρεσίες	B+	B+	615	6.7	4.7	6.4
Ενέργεια και φυσικές πηγές	B+	B+	438	4.6	3.3	4.8
Χρηματοπιστωτικά ιδρύματα	BB-	BBB	237	5.7	3.7	5.9
Δασικά και οικοδομικά προϊόντα/κατασκευαστές κατοικιών	B+	B+	173	6.5	4.7	5.5
Υγειονομική περίθαλψη/χημικά	B+	B+	178	5.8	3.8	5.7
Υψηλή τεχνολογία / υπολογιστές / εξοπλισμός γραφείου	B+	B+	105	5.3	3.9	4.7
Ασφαλιστική	BBB	A-	77	7.8	6.6	6.3
Ψυχαγωγία/media	B	B+	416	5.8	4.0	5.4
Ακίνητα	B+	BBB-	63	4.4	3.1	3.8
Τηλεπικοινωνίες	B	B+	195	4.0	3.1	3.9
Μεταφορές	B+	BB	171	6.4	4.2	6.4

Διανομείς Παροχών (Ηλεκτρικής ενέργειας, Παροχής Νερού, Φυσικού Αερίου κτλ)	B++	BBB+	91	6.6	4.3	6.6
Σύνολο	B+	BB-	3170	5.9	4.0	5.7

Πίνακας 3: Βαθμολογούμενοι Τομείς τις Οικονομίας

Να σημειωθεί ότι, πολλοί τομείς της οικονομίας που παρουσιάζονται στον πίνακα 3, κάνουν κύκλους ως προς την αύξηση ή την μείωση της αθέτησής τους. Ακλόνητο παράδειγμα, αποτελεί ο τομέας της τεχνολογίας (high tech) και των τηλεπικοινωνιών (telecommunications), όπου και οι δύο τομείς κατέληξαν σε μια τεχνολογική «φούσκα» (tech bubble), τον Ιούνιο του 2002. Όμως άλλοι τομείς, όπως για παράδειγμα των καταναλωτικών υπηρεσιών (consumer service), ο κύκλος τους είναι πιο συχνός αλλά και πιθανότατα λιγότερο έντονος από τους υπόλοιπους τομείς.

Στον πίνακα 4, μπορούμε να δούμε τις μεταβολές που υπήρξαν τα έτη 2020 – 2021. Τρανταχτό παράδειγμα αποτελεί την περίοδο κυρίως το 2020 αλλά και το 2021 που οι περιορισμοί ως προς την μετακίνηση και τον εγκλεισμό, συνέβαλλαν στην μερική «καταστροφή» αυτού του κλάδου της οικονομίας, όσον μάλιστα δεν μπορούσαν να προσαρμοστούν στις συνθήκες.

(%)	2021	2020	Σταθμισμένος μέσος όρος (1981-2021)	Διάμεσος	Τυπική απόκλιση	Ελάχιστο	Μέγιστο
Αεροδιαστημική / αυτοκίνητα / κεφαλαιουχικά αγαθά / μέταλλα	0.61	1.54	2.00	1.39	1.95	0.00	9.59
Καταναλωτικά/υπηρεσίες	1.66	6.44	2.42	1.81	1.64	0.00	6.44
Ενέργεια και φυσικές πηγές	2.31	9.74	3.40	1.90	3.05	0.00	14.18
Χρηματοπιστωτικά ιδρύματα	0.22	0.30	0.62	0.33	0.70	0.00	2.77
Δασικά και οικοδομικά προϊόντα/κατασκευαστές κατοικιών	1.13	1.18	2.35	1.41	2.87	0.00	14.87
Υγειονομική περίθαλψη/χημικά	0.58	2.39	1.39	0.88	1.26	0.00	4.65
Υψηλή τεχνολογία / υπολογιστές / εξοπλισμός γραφείου	0.30	2.08	1.20	1.00	1.48	0.00	5.03
Ασφαλιστική	0.00	0.12	0.27	0.17	0.89	0.00	4.76
Ψυχαγωγία/media	1.23	6.36	3.26	2.10	3.17	0.00	16.77
Ακίνητα	1.35	2.28	0.79	0.00	2.63	0.00	12.00
Τηλεπικοινωνίες	1.44	2.87	2.48	0.92	3.59	0.00	17.94

Μεταφορές	2.53	3.72	2.02	1.86	1.59	0.00	6.12
Διανομείς Παροχών (Ηλεκτρικής ενέργειας, Παροχή Νερού, Φυσικού Αερίου κτλ)	0.16	0.48	0.43	0.17	0.74	0.00	4.43

Πίνακας 4: Στατιστικά Χαρακτηριστικά από Τομείς τις Οικονομίας

Γίνεται πλέον ξεκάθαρο ότι πολλοί τομείς της οικονομίας θα πρέπει να διαχειριστούν τον πιστωτικό τους κίνδυνο που ενδέχεται να έχουν. Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα μπορεί να έχουν μικρές πιθανότητες αθέτησης, όπως είναι λογικό φυσικά, αλλά με μια ενδεχόμενη κρίση οι συνέπειες θα μπορούσαν να είναι καταστροφικές σε σχέση με τους υπόλοιπους τομείς της οικονομίας. Όμως θα πρέπει να διαχειρίζονται αυτόν τον επερχόμενο κίνδυνο, βρίσκοντας τρόπους αντιστάθμισης αυτού, ώστε να μην είναι καταστροφικός για τις ίδιες αλλά και για την οικονομία. Άλλωστε οι οικονομίες των χωρών είναι αλληλένδετες ως ένα βαθμό μεταξύ τους, πλην κάποιων εξαιρέσεων[16]. Στα εργαλεία διαχείρισης του πιστωτικού κινδύνου, θα αναφερθούμε παρακάτω, καθώς είναι ο ακρογωνιαίος λίθος αυτής της διπλωματικής.

Τέλος πριν κλείσουμε το κεφάλαιο, αξίζει να αναφερθούμε σε μια παρατήρηση. Σύμφωνα με μια μελέτη του 2021, της εταιρείας Statista όπου χρησιμοποιήθηκαν τα δεδομένα του δείκτη S&P[17] 500 Index, η μέση διάρκεια ζωής μιας εταιρείας έχει πέσει από τα 32 χρόνια το 1965, στα 21 χρόνια το 2020, συνεχίζοντας με πτωτική τάση και με αρκετές μελέτες να το εκτιμάνε ακόμα και στα 10 χρόνια. Μην ξεχνάμε, ότι ο συγκεκριμένος δείκτης δείχνει την απόδοση των πρώτων 500 εταιρειών, σε μια χειρότερη περίπτωση όπως του πίνακα 3, η μέση διάρκεια ζωής μιας εταιρείας, είναι κατά γενικό μέσο όρο περίπου 6 χρόνια. Ακόμη σύμφωνα με την Eurostat, μελέτη του 2021 έδειξε ότι η αναμενόμενη διάρκεια εργασιακού βίου είναι 36 χρόνια για τον πληθυσμό, (με 38.2 για τους άντρες και 33.7 χρόνια για τις γυναίκες), πράγμα που δείχνει ότι ξεπερνάει κατά πολύ την μέση διάρκεια ζωής μιας εταιρείας. Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να αναλογιστούμε, θα έχει κάποια επίπτωση στην οικονομία και στον Χρηματοοικονομικό κλάδο; Η συνεχής αλλαγή των επαγγελμάτων ή και του τομέα που ενδέχεται να αλλάξουν οι εργαζόμενοι, θα είναι συνεπείς με την οικονομία; Ή η οικονομία θα «βρει τον δρόμο της» για να ανταπεξέλθει την τεράστια προσφορά των εργαζομένων που ενδεχομένως να δημιουργηθεί τα επόμενα χρόνια, δημιουργώντας νέους τομείς ενδιαφέροντος και καταρτίζοντας τους νέους εργαζόμενους σε αυτούς τους τομείς; Τα ερωτήματα αυτά, είναι ρητορικά και φυσικά δεν υπάρχουν εμφανείς και μοναδικές λύσεις. Πάντως διαισθητικά, ένα πράγμα διαφαίνεται, ότι εταιρείες που δεν αναπτύσσονται ή και ο κλάδος τους είναι «συντηρητικός»[18] κάποια στιγμή αργά ή γρήγορα, θα βιώσουν χρεοκοπία. Ίσως ένα καθοριστικός παράγοντας να είναι η επερχόμενη 4η βιομηχανική επανάσταση, όπου οι εταιρείες βρίσκουν εναλλακτικούς τρόπους συναλλάγματος και ψηφιοποιούν τα συστήματα τους. Θα ήταν λογικό να συμπεράνουμε από αυτή τη σκοπιά, ότι λόγω των

---

[16] Εξαιρέσεις θα μπορούσαν να θεωρηθούν, οικονομίες οι οποίες είναι «κλειστές» ή δεν είναι τόσο «εκτεθειμένες» στην παγκόσμια οικονομία. Ακόμη, και αν δεν ίσχυαν αυτά που αναφέραμε, θα ήταν δυνατόν δύο (ή περισσότερες) οικονομίες μεταξύ τους να μην εξαρτώνται, λόγω γεωγραφικών περιορισμών και περιορισμένων επενδύσεων μεταξύ αυτών των οικονομιών.

[17] Το S&P 500 είναι ένας χρηματιστηριακός δείκτης που παρακολουθεί την απόδοση των 500 μεγάλων εταιρικών μετοχών που είναι εισηγμένες σε χρηματιστήρια στις Ηνωμένες Πολιτείες.

[18] Δεν εξελίσσεται τεχνολογικά και παραμένει αμιγής, χωρίς να εισάγει νέες μεθοδολογίες και στρατηγικές

γρήγορων εξελίξεων που συμβαίνουν στην τεχνολογία αλλά και το πολιτικό-οικονομικό περιβάλλον, κάποιες εταιρείες εδραιώνονται, σε σχέση με τις υπόλοιπες που, είτε δεν μπορούν παρακολουθήσουν τις εξελίξεις, είτε αδυνατούν να καλύψουν το κόστος αναβάθμισης τους, συνεπώς εξασθενούν με τάση την χρεοκοπία. Το γεγονός αυτό, εξηγεί τη μια διάσταση που προσεγγίζουμε εμείς.

3.5. Πίνακες Μετάβασης Πιθανοτήτων Αθέτησης

Είναι σημαντικό να εισάγουμε τις πιθανότητες μετάβασης, των πιθανοτήτων αθέτησης μεταξύ των κλιμάκων αξιολογήσεων του [40], διότι θα βγάλουμε κάποια αρκετά χρήσιμα συμπεράσματα που ισχύουν για τις εταιρείες όλων των βαθμίδων.

Συγκεκριμένα παραθέτοντας δύο πίνακες μετάβασης, όπου ο 1^{ος} (πίνακας 5) αφορά την μετάβαση για το πρώτο έτος και ο 2^{ος} (πίνακας 6) για το πέμπτο έτος, αφορούν τις μέσες τιμές μετάβασης από τα έτη 1981-2021 της S&P. Αναφέρεται ότι η τελευταία στήλη NR[19] δεν έχει συμπεληφθεί και τα ποσοστά αθροίζουν στο 100% της κάθε γραμμής.

Από/Σε **1-έτος**	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C	D
AAA	87.09	9.05	0.53	0.05	0.11	0.03	0.05	0.00
AA	0.48	87.32	7.72	0.46	0.05	0.06	0.02	0.02
A	0.02	1.56	88.73	4.97	0.25	0.11	0.01	0.05
BBB	0.00	0.08	3.19	86.72	3.48	0.42	0.09	0.15
BB	0.01	0.02	0.10	4.52	78.12	6.66	0.53	0.60
B	0.00	0.02	0.06	0.15	4.54	74.73	4.81	3.18
CCC/C	0.00	0.00	0.09	0.16	0.49	13.42	43.91	26.56

Πίνακας 5: Πίνακας Μετάβασης Πιθανοτήτων Αθέτησης 1-έτους

Από/Σε **5-ετή**	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C	D
AAA	49.52	28.83	4.75	0.80	0.34	0.16	0.08	0.34
AA	1.37	52.56	23.97	3.38	0.53	0.35	0.04	0.30
A	0.06	4.70	57.80	14.39	1.80	0.60	0.13	0.46
BBB	0.02	0.37	10.14	53.82	7.50	1.94	0.34	1.58
BB	0.01	0.07	0.86	12.27	33.54	11.15	1.15	6.51
B	0.01	0.02	0.20	1.26	9.59	25.75	3.21	17.40
CCC/C	0.00	0.00	0.09	0.68	2.49	12.34	2.70	46.35

Πίνακας 6: Πίνακας Μετάβασης Πιθανοτήτων Αθέτησης 5-ετών

Για να καταλάβουμε τι μας πληροφορούν οι πίνακες, θα εισάγουμε ένα παράδειγμα. Έστω ότι μια εταιρεία βαθμολογείται ως ‘AA’, τότε έχει πιθανότητα να ξανά βαθμολογηθεί του χρόνου ‘AA’ ίση με 87.32%, ενώ μετά από πέντε χρόνια από τώρα, είναι ίση με 52.56% να πάρει την ίδια βαθμολογία. Εάν υποθέσουμε μια άλλη εταιρεία με τωρινή βαθμολογία ‘CCC/C’ τότε η πιθανότητα να αθετήσει του χρόνου είναι 26.56% και να βαθμολογηθεί το ίδιο είναι 43.91%, ενώ να αθετήσει μετά από πέντε χρόνια είναι 46.35% και 2.70% να πάρει την ίδια βαθμολογία.

[19] Δεν έχει βαθμολογηθεί (Not Rated).

Είναι προφανές ότι βλέπουμε ήδη κάτι αντιφατικό, δηλαδή μια εταιρεία που έχει την καλύτερη βαθμολογία, με τον καιρό παρατηρούμε ότι για να «διατηρηθεί» η βαθμολογία της, η πιθανότητα συντήρησης της πέφτει με τα χρόνια και αυξάνεται η πιθανότητα να αθετήσει. Αντίθετα, μια άλλη εταιρεία που βρίσκεται στην «χειρότερη» βαθμίδα αξιολόγησης, έχει του χρόνου μεγάλη μεν πιθανότητα να «διατηρηθεί» αλλά και αυξάνεται απότομα η πιθανότητα αθέτησης της. Το παράδοξο είναι ότι αν δεν αθετήσει για κάποιο χρονικό διάστημα στο μέλλον, συνήθως τα πρώτα ένα με δύο χρόνια, τότε έχει πλέον μεγαλύτερη πιθανότητα να αλλάξει προς το καλύτερο η βαθμολογία της, ενώ τα πρώτα χρόνια θα είναι κρίσιμα για να «διατηρηθεί». Στον πίνακα 7, τα όσα αναφέρθηκαν κάποιος μπορεί να τα δει και διαισθητικά. Συγκεκριμένα δείχνει τις μέσες αθροιστικές τιμές μετάβασης της ίδιας βαθμολογίας σε βάθος 20 χρόνων, με τις ενδιάμεσες βαθμολογίες να είναι περισσότερο διατηρήσιμες στο χρόνο.

% Βαθμολόγηση	1	2	3	5	7	10	15	20
AAA	87.09	75.76	65.54	49.52	38.00	24.91	12.26	4.99
AA	87.32	76.39	67.26	52.56	41.59	29.32	17.51	10.09
A	88.73	78.92	70.68	57.80	48.48	38.10	26.88	19.85
BBB	86.72	75.69	66.78	53.82	45.08	35.90	25.80	19.23
BB	78.12	61.43	49.13	33.54	24.71	16.98	10.07	5.75
B	74.73	56.00	42.39	25.75	17.07	9.95	4.68	2.49
CCC/C	43.91	20.23	9.73	2.70	2.05	0.41	0.18	0.00

Πίνακας 7: Πίνακας Μετάβασης Πιθανοτήτων Αθετήσεων για 20 χρόνια

Τέλος θα αναφερθούμε σε ένα μέτρο που χρησιμεύει και συμπεριλαμβάνεται στα μοντέλα των πιστωτικών παραγώγων, το οποίο καλείται ποσοστό επανάκτησης. Το ποσοστό επανάκτησης (Recovery Rate), είναι ο βαθμός στον οποίο μπορεί να επανακτηθεί το κεφάλαιο μέσω ομολογιών, μαζί με τους δεδουλευμένους τόκους, εκφρασμένο ως ποσοστό της ονομαστικής του αξίας. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου και γίνεται εκκαθάριση της εταιρείας ώστε να επανακτηθεί μέρος (ή το ολικό) ποσό, πουλώντας τις μετοχές και τα οποιαδήποτε περιουσιακά στοιχεία της. Κατατίθεται ο πίνακας 8 του [25], με τα ποσοστά επανάκτησης με το κάθε είδος ομολογιών, που έχουν εκτιμηθεί από ιστορικά στοιχεία της Moody's.

Είδος	Μέσο Ποσοστό Επανάκτησης (%)	Είδος	Μέσο Ποσοστό Επανάκτησης (%)
Ανώτερο εγγυημένο ομόλογο	51.6	Ομόλογο μειωμένης εξασφάλισης	31.5
Ανώτερο μη εγγυημένο ομόλογο	37.0	Κατώτερο ομόλογο μειωμένης εξασφάλισης	24.7
Ανώτερο ομόλογο μειωμένης εξασφάλισης	30.9		

Πίνακας 8: Πίνακας Ποσοστού Επανάκτησης

3.6. Περιουσιακά Στοιχεία Χωρίς Κίνδυνο – Risk Free Assets

Στην ανάλυση μας, κάνοντας την τιμολόγηση των πιστωτικών παραγώγων που θα αναφερθούμε στην συνέχεια, με τον προεξοφλητικό παράγοντα να υποθέτουμε ότι βασίζεται σε ένα επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, το οποίο θα τοκίζεται μέχρι ένα προκαθορισμένο σημείο του χρόνο, έστω T.

Ειδικότερα,

Αν υποθέσουμε μια σ.α. $\{B_t\}_{0\le t\le T}$ σε ένα χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ που μοντελοποιεί την τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου χωρίς κίνδυνο, το οποίο ακολουθεί την δυναμική:

$$dB_t = r_t B_t dt$$

η οποία είναι μια στοχαστική διαφορική εξίσωση και το $\{r_t\}_{0\le t\le T}$ καλείται ένταση ανατοκισμού, το οποίο είναι είτε σ.α. προσαρμοσμένη σε κάποια διήθηση, είτε είναι μια ντετερμινιστική συνάρτηση του χρόνου.

Συνεπώς, ορίζουμε την συνάρτηση,

$$D(t,T) = E\left(\frac{B_t}{B_T}\right) = E\left(e^{-\int_t^T r_s\, ds}\right)$$

η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως η τιμή ενός ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου (zero-coupon bond) χωρίς ρίσκο, με χρόνο ωρίμανσης T και με ονομαστική αξία ίση με 1.

Στην περίπτωση που η $\{r_t\}_{0\le t\le T}$ είναι ντετερμινιστική και μάλιστα η ένταση ανατοκισμού θεωρηθεί σταθερή, έστω r τότε η συνάρτηση γίνεται,

$$D(t,T) = e^{-\int_t^T r\, ds} = e^{-r(T-t)}$$

και θα καλείται προεξοφλητικός παράγοντας στον χρόνο t.

Η πάνω υπόθεση έγινε διότι, εάν το περιουσιακό στοιχείο χωρίς κίνδυνο, θεωρηθεί ότι είναι ένας τραπεζικός λογαριασμός, τότε είναι λογικό να ισχυριστούμε ότι ο ανατοκισμός θα είναι σταθερός σε κάθε περίοδο, μέχρι να αποσυρθεί το χρηματικό ποσό, δηλαδή να λήξη η επένδυση.

Τέλος για λόγους πληρότητας, αξίζει να αναφερθεί ότι το πρώτο ολοκλήρωμα που παρουσιάστηκε με την στοχαστική ένταση ανατοκισμού, δεν έγκειται στα γενικά ντετερμινιστικά ολοκληρώματα, αλλά καλούνται στοχαστικά ολοκληρώματα Itô. Κατά την διάρκεια της διπλωματική δεν θα μπούμε σε λεπτομέρειες του ορισμού και των ιδιοτήτων του, όμως ο αναγνώστης παραπέμπεται μεταξύ άλλων στο [39] το οποίο καλύπτει τα κύρια θέματα της στοχαστικής ανάλυσης που εμείς αναφέραμε ονομαστικά, με εμπεριστατωμένο τρόπο και με εφαρμογές στην χρηματοοικονομική επιστήμη.

3.7. Πιστωτικά Παράγωγα

Μέχρι τώρα, έχουμε μιλήσει για τα κύρια χρηματοοικονομικά παράγωγα, όπως options, futures, forwards και τα swaps. Επιπλέον αναφέρθηκε και αναλύθηκε ο πιστωτικός κίνδυνος που κάποιος θα μπορούσε να πει ότι επηρεάζει όλους τους κλάδους της οικονομίας, με τα περισσότερα καταστροφικά γεγονότα να είναι ο χρηματοοικονομικός τομέας (βλ. παράγραφο 3.4.). Ένα εύλογο ερώτημα θα ήταν, «υπάρχουν τρόποι και χρηματοοικονομικά προϊόντα που έχουν δημιουργηθεί για την σωστή διαχείριση του πιστωτικού κινδύνου από οποιαδήποτε τομέα της οικονομίας;». Η απάντηση σε αυτή την ερώτηση είναι καταφατική, συγκεκριμένα έχουν δημιουργηθεί τα τελευταία χρόνια χρηματοοικονομικά προϊόντα τα οποία είναι κατασκευασμένα για αυτό το σκοπό. Υπενθυμίζεται ότι τα χρηματοοικονομικά παράγωγα που αναπτύχθηκαν στη 3.1 παράγραφο, σκοπεύουν να διαχειριστούν τον κίνδυνο της αγοράς ως επί τον πλείστων. Οπότε είναι η ώρα να εισαχθούμε στην λογική των πιστωτικών παραγώγων όπου και φυσικά διαχειρίζονται τον πιστωτικό κίνδυνο.

Αρχικά, η αγορά των πιστωτικών παραγώγων ξεκίνησε περίπου στην αρχή της δεκαετίας του 1990 στο Λονδίνου και της Νέας Υόρκης. Έκτοτε η αγορά αυτών των παραγώγων έχει διευρυνθεί, καθώς στις μέρες μας υπάρχουν ποίκιλα και πιο σύνθετα προϊόντα.

Αναλυτικότερα, τα πιστωτικά παράγωγα, είναι εκείνα τα παράγωγα των οποίων οι αποδόσεις τους επηρεάζονται από την αθέτηση των υποχρεώσεων μιας ή περισσοτέρων ομάδων αναφοράς. Όπως αναφέρθηκε, αυτά τα παράγωγα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αντισταθμίσουν, διαχειριστούν ή και να μεταφέρουν τον πιστωτικό κίνδυνο μιας εταιρείας ή ενός χαρτοφυλακίου, π.χ. ένα δανειακό χαρτοφυλάκιο τραπέζης.

Σε μια τέτοια συμφωνία, εμπλέκονται δύο αντισυμβαλλόμενοι, από την μία ο αγοραστής αυτής της «προστασίας» και από την άλλη ο πωλητής της, οι οποίοι καθορίζουν την σύμβαση με το ποσό της αθέτησης των υποχρεώσεων, για μια συγκεκριμένη ομάδα αναφοράς ή περισσότερες αυτών. Οι κύριοι συμμετέχοντες στην αγορά τους είναι τράπεζες, hedge funds[20], ασφαλιστικές εταιρείες και συνταξιοδοτικά ταμεία (pension funds).

Η βασική τους διάκριση, μπορεί να γίνει ως προς την ομάδα αναφοράς τους. Για παράδειγμα, υπάρχουν παράγωγα τα οποία έχουν μια ομάδα αναφοράς (single-name) και άλλα που βασίζονται σε περισσότερες ομάδες αναφοράς (multi-name). Κάποια από τα προϊόντα της πρώτης κατηγορίας είναι η **σύμβαση ανταλλαγής κινδύνου αθέτησης** (**Credit Default Swaps – CDS**) καθώς και τα options – futures συμβόλαια αυτών και ο κίνδυνος πιστωτικού περιθωρίου (Credit Spread Options – CSO). Η ομάδα αναφοράς αυτών μπορεί να είναι ένα κρατικό ομόλογο, μια μετοχή, ακόμη και ένα συνάλλαγμα. Στην δεύτερη κατηγορία ανήκουν τα **εγγυημένα δανειακά ομόλογα** (**Collateralized Debt Obligations – CDO's**) και τα προϊόντα εξασφαλισμένων δανειακών υποχρεώσεων (Collateralized Loan Obligations – CLO), τα οποία αφορούν αθετήσεις πολλαπλών ομάδων, όπως για παράδειγμα ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από διαφορετικά CDS.

[20] Είναι επενδυτικά κεφάλαια τα οποία εμπεριέχουν μια ευρύτερη γκάμα επενδύσεων και χρηματοοικονομικών προϊόντων, τα οποία συχνά αναφέρονται και ως εναλλακτικές επενδύσεις και έχουν συχνά μεγάλες αποδόσεις. Οι εταιρείες που χρησιμοποιούν τα hedge funds είναι: Ιδρύματα, Κληροδοτήματα, Ασφαλιστικά ταμεία, Συνταξιοδοτικά ταμεία και επενδυτές με αρκετό μεγάλο κεφάλαιο προς επένδυση.

Τα προϊόντα αυτά μπορούν να βρεθούν σε εξειδικευμένα βιβλία αναλυτικότερα από ότι παρουσιάσθηκαν, καθώς υπάρχουν και άλλα πιστωτικά προϊόντα που δεν αναφέρθηκαν, ένα καλό παράδειγμα για την αναζήτηση αυτών είναι το [25].

3.8. CDS vs CDO's

Στο σημείο αυτό, είναι σκόπιμο να δούμε πιο αναλυτικά τα προϊόντα **συμβάσεων ανταλλαγής κινδύνου αθέτησης ή CDS**, καθώς και τα **εγγυημένα δανειακά ομόλογα ή CDO's** περισσότερο για λόγους σύγκρισης, διότι ο στόχος της διπλωματικής είναι η τιμολόγηση των προϊόντων CDS με προκαθορισμένο φράγμα, τα οποία ανήκουν στην κατηγορία των προκαθορισμένων πιστωτικών παραγώγων.

Τα CDS είναι από τα πιο περιζήτητα στην αγορά των πιστωτικών παραγώγων, ειδικότερα αυτά τα προϊόντα είναι μια διμερής συμφωνία όπου ο αγοραστής του μεταβιβάζει τον πιστωτικό κίνδυνο μιας προσυμφωνημένης οντότητας αναφοράς στον πωλητή της, για ένα προκαθορισμένο χρονικό διάστημα T. Όμως ως αντάλλαγμα αυτής της συμφωνίας ο αγοραστής της, υποχρεούνται να κάνει τις περιοδικές πληρωμές που είχαν προ συμφωνηθεί στον πωλητή. Οι πληρωμές γίνονται μέχρι το τέλος της περιόδου που διαρκεί το συμβόλαιο, δηλαδή μέχρι την τιμή T ή μέχρις ότου συμβεί το πιστωτικό γεγονός, ότι συμβεί πρώτο. Εάν δεν συμβεί το πιστωτικό γεγονός, απλά δεν συμβαίνει τίποτα και το συμβόλαιο λήγει στον χρόνο ωρίμανσης T. Όμως αν συμβεί το πιστωτικό γεγονός σε αυτή την προσυμφωνημένη οντότητα αναφοράς, ο πωλητής του CDS θα πρέπει να πληρώσει τον αγοραστή αυτής της προστασίας το συμφωνηθέν ποσό. Τέλος το «ασφάλιστρο» που υποχρεούται να πληρώνει ο αγοραστής του CDS για να μπει σε αυτή την συμφωνία, θα καλείται spread και είναι το συνολικό ποσό που καταβάλλει ανά έτος, εκφραζόμενο ως ποσοστό του πλασματικού κεφαλαίου, το οποίο δείχνει άμεσα την πιστωτική επικινδυνότητα που έχει η οντότητα αναφοράς.

Παράδειγμα 3.8.1: Έστω ότι έχουμε δύο αντισυμβαλλόμενους, να συνάπτουν μια σύμβαση την 01 Ιουλίου του 2022, ανταλλαγής πιστωτικής αθέτησης 5 ετών (5-year CDS), δηλαδή ο χρόνος ωρίμανσης να είναι τα $T = 5$ έτη. Υποθέτοντας φυσικά ότι το πλασματικό-πραγματικό κεφάλαιο να είναι περί το 1 εκατομμύριο ευρώ και ο αγοραστής να δέχεται να κάνει ληξιπρόθεσμες πληρωμές κάθε τρίμηνο, στο σύνολο 90 bps[21] (δηλαδή, το ετήσιο spread του CDS) για προστασία έναντι αθέτησης των υποχρεώσεων από την οντότητα αναφοράς[22], που στην περίπτωση μας θα το θεωρήσουμε ένα σύνολο κρατικού ομολόγων με τα χαρακτηριστικά τους να είναι ακριβώς τα ίδια.

Εάν δεν υπάρξει αθέτηση από την οντότητα αναφοράς, δηλαδή της χώρας που αγοράστηκε το ομόλογο, ο αγοραστής του CDS δεν λαμβάνει κάτι και θα πληρώνει $\frac{90}{4} = 22.5$ bps

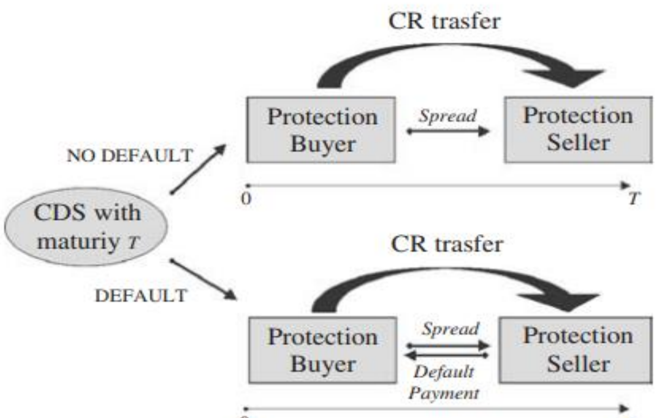
[21] Τα bps ή αλλιώς basis points είναι μια μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιείται στα χρηματοοικονομικά για να περιγράψει την ποσοστιαία μεταβολή στην αξία των χρηματοοικονομικών εργαλείων ή την μεταβολή του επιτοκίου ή άλλο δείκτη αναφοράς. Η μετατροπή είναι ότι για 1 bps ισούται με 0.01% π.χ. του αρχικού κεφαλαίου.

[22] Μπορεί να είναι μετοχές, ομόλογα, επενδυμένο ποσό, δανειακό χαρτοφυλάκιο κτλ.

βασισμένο στο 1 εκ ευρώ, δηλαδή $2.250\ ευρώ\ (= 0{,}00225 \times 1.000.000)$ κάθε τρίμηνο μέχρι το τέλος της 5-τιας, την 01 Ιουλίου του 2027.

Στην αντίθετη περίπτωση που υπάρξει πιστωτικό γεγονός, δηλαδή η χώρα αθετεί τις υποχρεώσεις της στην αρχή του 8ο τριμήνου, τότε ο αγοραστής θα έχει ήδη πληρώσει για 7 συνεχή τρίμηνα τα 2.250 ευρώ ανά τρίμηνο. Αντίθετα ο πωλητής του CDS θα πληρώσει το ποσό, αν το ποσοστό ανάκτησης του είναι $R = 40\%$, η πληρωμή του θα είναι $N \times (1 - R) = 1.000.000 \times (1 - 0.40) = 600.000$ ευρώ, όπου $N = 1.000.000$ ευρώ το πλασματικό κεφάλαιο. Είναι προφανές ότι δεν θα γίνονται πλέον πληρωμές έπειτα από το συμβάν, διότι η χώρα δεν θα μπορεί για παράδειγμα να ανταπεξέλθει των υποχρεώσεων της και το συμβόλαιο δεν υφίσταται πλέον.

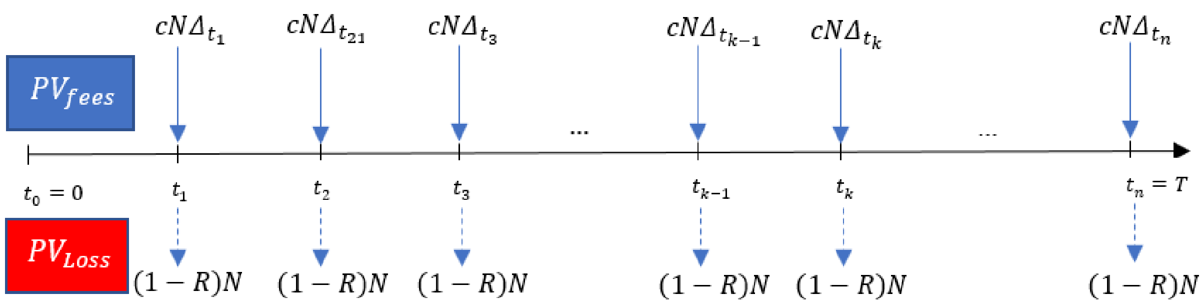
Το σχήμα που παρουσιάζεται (εικόνα 8) στη συνέχεια αντλήθηκε από το [36] και μας παρουσιάζει διαισθητικά τι γίνεται καθ' όλο αυτό τον κύκλο. Με τις αντιστοιχίες να είναι spread= $90\ bps$ ετησίως και το default payment να είναι περί της 600.000 ευρώ.



Εικόνα 8: Διαισθητική Εικόνα υπολογισμού των CDS

Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με την τιμολόγηση αυτού του πιστωτικού παραγώγου.

Ορίζουμε, ως T τον χρόνο ωρίμανσης, c το ετήσιο spread, N το πλασματικό κεφάλαιο, R το ποσοστό επανάκτησης και θα υποθέσουμε αρχικά για ευκολία ότι οι πληρωμές γίνονται ληξιπρόθεσμα σε διακριτούς χρόνους, π.χ. τρίμηνα, δηλαδή $t_i, i = 1, 2, \dots, n$ με $t_0 = 0$ και $t_n = T$.



Εικόνα 9: Παρούσα Αξία Πληρωμών Αγοραστή και Πωλητή ενός CDS

Τότε η παρούσα αξία των πληρωμών του αγοραστή του CDS θα είναι:

$$PV_{fees} = cN\,A(0,T) = cN \sum_{i=1}^{n} D(0,t_i)\,P_{Surv}(t_i)\,\Delta t_i$$

όπου το $A(0,T)$ καλείται ράντα «κινδύνου» του CDS (CDS risk annuity), $D(0,t_i)$ το είχαμε δει στη παράγραφο 3.6 και εδώ δηλώνει τον προεξοφλητικό παράγοντα στο χρόνο 0 με ωρίμανση $t_i = t_i - 0$. Η πιθανότητα $P_{Surv}(t_i)$ δηλώνει την πιθανότητα επιβίωσης μέχρι τον χρόνο t_i (βλ. παράγραφο 3.3) και το $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ είναι η μεταβολή των δύο πληρωμών στους χρόνους t_{i-1} και t_i.

Η απόδειξη αυτής της παρούσας αξίας μπορεί να δειχθεί εύκολα, ορίζοντας ως ${}_tp_0$ την πιθανότητα να επιβιώσει μια εταιρεία (εξεταζόμενης ηλικίας 0) από την χρονική στιγμή μηδέν, μέχρι την χρονική στιγμή t. Οπότε για μια πληρωμή σε διάστημα Δt_k πληρώνεται ποσό ίσο με $(cN)\cdot\Delta t_k$ (βλ. εικόνα 9), το οποίο προϋποθέτει ότι έχει «επιβιώσει» μέχρι π.χ. την k-οστή πληρωμή, δηλαδή ${}_{t_k}p_0$ η οποία, θα έχει παρούσα αξία στην σύναψη του συμβολαίου ίση με $(c)(N)(\Delta t_k)\left({}_{t_k}p_0\right)\left(D(0,t_k)\right)$, όπου το $D(0,t_k)$ είναι ο παράγοντας προεξόφλησης για την k-οστή πληρωμή. Αλλά, όπως βλέπουμε έχουμε μια ράντα πληρωμών, συνεπώς η συνολική παρούσα αξία των πληρωμών θα είναι ίση με την πάνω φόρμουλα (άθροιση όλων πληρωμών). Κατά αντιστοιχία η πιθανότητα ${}_tp_0$, είναι η πιθανότητα $P_{Surv}(t)$ που έχουμε ορίσει.

Τώρα, σχετικά με το ποσό που πληρώνεται από τον πωλητή σε περίπτωση αθέτησης πληρωμών, η παρούσα αξία του θα είναι:

$$PV_{loss} = (1-R)N \sum_{i=1}^{n} D(0,t_i)\left(P_{Surv}(t_{i-1}) - P_{Surv}(t_i)\right)$$

Με τον ίδιο τρόπο σκεπτόμενοι, βγαίνει ο πάνω τύπος, δηλαδή θεωρώντας την πιθανότητα ${}_tp_0$ να επιβιώσει στο διάστημα $[0,t]$ και η συμπληρωματική πιθανότητα ${}_tq_0 = 1 - {}_tp_0$ να μην επιβιώσει (αθετήσει) στο διάστημα $[0,t]$, τότε ο πωλητής του CDS θα πληρώσει ποσό $(1-R)N$ την χρονική στιγμή t_k, εάν ο αγοραστής του CDS έχει επιβιώσει μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή ${}_{t_k}p_0$ και αθετήσει την επόμενη ακριβώς q_{t_k}. Το οποίο συνεπάγεται σε παρούσα αξία ίση με $(1-R)(N)\left(D(0,t_k)\right)\left({}_{t_k}p_0 \cdot q_{t_k}\right)$ και η ποσότητα ${}_{t_k}p_0 \cdot q_{t_k}$ είναι ισοδύναμη με την ${}_{t_k}p_0 - {}_{t_{k+1}}p_0$. Άρα αθροίζοντας όλες τις πιθανές τιμές, η παρούσα αξίας που πληρώνεται από τον πωλητή δίνεται από την πάνω φόρμουλα.

Συνεπώς, η τιμή ενός CDS θα είναι ίση με,

$$\begin{aligned} CDS = \text{Έσοδα} - \text{Έξοδα} &= PV_{loss} - PV_{fees} \\ &= (1-R)N \sum_{i=1}^{n} D(0,t_i)(-1)\left(P_{Surv}(t_i) - P_{Surv}(t_{i-1})\right) \\ &\quad - cN \sum_{i=1}^{n} D(0,t_i)\,P_{Surv}(t_i)\,\Delta t_i \end{aligned}$$

Και το spread θα υπολογισθεί αν υποθέσουμε ότι $PV_{loss} = PV_{fees}$, Λύνοντας ως προς c, θα έχουμε

$$PV_{loss} - PV_{fees} = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$$

$$c = -\frac{(1-R)\sum_{i=1}^{n} D(0,t_i)\big(P_{Surv}(t_i) - P_{Surv}(t_{i-1})\big)}{\sum_{i=1}^{n} D(0,t_i)\, P_{Surv}(t_i)\, \Delta t_i}$$

και προχωρώντας προς την συνεχή περίπτωση, δηλαδή συνεχείς πληρωμές, το ετήσιο (σταθερό) spread θα είναι:

$$c = \frac{-(1-R)\int_0^T D(0,s) dP_{Surv}(s)}{\int_0^T D(0,s) P_{Surv}(s) ds} = \frac{-(1-R)\int_0^T e^{-rs} dP_{Surv}(s)}{\int_0^T e^{-rs} P_{Surv}(s) ds}$$

όπου υποθέσαμε ότι το risk-free επιτόκιο είναι σταθερό, $D(0,s) = e^{-rs}$.

Παράδειγμα 3.8.2: Αν υποθέσουμε ότι ο χρόνος τ μέχρι να συμβεί ένα πιστωτικό γεγονός, ακολουθεί την εκθετική κατανομή, με παράμετρο λ και risk-free επιτόκιο να είναι r σταθερό.

Τότε η πιθανότητα επιβίωσης μέχρι τον χρόνο t, θα είναι:

$$P_{Surv}(t) = P(\tau > t) = \int_t^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0$$

και το spread, έπειτα από πράξεις και την χρήση της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, θα είναι ίσο με:

$$c = \lambda\,(1-R)$$

Οπότε αν υποθέσουμε ότι ένα CDS εμπορεύεται στις 90 bps για μια οντότητα αναφοράς, με το ποσοστό ανάκτησης να είναι ίσο με R = 40%, θα εκτιμούσαμε την πιθανότητα να αθετήσει τις υποχρεώσεις της η εταιρεία σε 5 χρόνια, με τον εξής τρόπο:

$$c = \lambda\,(1-R) \Leftrightarrow \lambda = \frac{c}{1-R} = \frac{0.9\%}{1-0.40} = 0.015$$

και

$$P_{Def}(t) = 1 - P_{Surv}(t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0.015t}$$

Η αθέτηση συμβαίνει μέσα στα 5 χρόνια, άρα $t = 5$,

$$P_{Def}(5) = 1 - e^{-0.075} = 7.23\%$$

Είδαμε στο παράδειγμα μας, ότι η τιμολόγηση ήταν αρκετά εύκολη, αλλά δυστυχώς όπως έχουμε δει και από την στατιστική ανάλυση που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 3.4, η αγορά φαίνεται να κάνει κύκλους, αναλόγως τον τομέα φυσικά αλλάζει η συχνότητα και η σφοδρότητα αυτών των αγορών, άρα εφόσον το έχουμε αφομοιώσει ότι ο «κόσμος» μας είναι και εδώ απρόβλεπτος, είναι άτοπο να χρησιμοποιήσουμε την εκθετική κατανομή καθ' όλη την διάρκεια του κύκλου ενός CDS. Στη συνέχεια θα εισαχθούμε σε στοχαστικά μοντέλα που μοντελοποιούν όσο μπορούν καλύτερα αυτό το φαινόμενο του τυχαίου γεγονότος, ιδιαίτερα όπως θα δούμε τα μοντέλα που βασίζονται στις στοχαστικές ανελίξεις Lévy.

Πρώτα όμως θα δούμε τον πίνακα 9 του [47], οποίος δείχνει τις τιμές των κρατικών CDS και κατά πόσο μεταβάλλονται, δείχνοντας με τον τρόπο μας ότι η κίνηση της αγορά υπόκειντο στον τυχαίο παράγοντα. Οι τιμές πάρθηκαν την 12η Ιουλίου του 2022, με ποσοστό επανάκτησης 40%.

Χώρα	S&P βαθμ.	5-Ετή CDS	Μεταβολή 1-μήνα	Μεταβολή 6-μηνών	Πιθ. Αθέτησης (PD)	Χρονολογία
Δανία	AAA	12.63	4.81%	0.00%	0.21%	12 Ιουλίου
Ολλανδία	AAA	13.00	21.50%	30.00%	0.22%	12 Ιουλίου
Αυστρία	AA+	13.47	9.60%	61.32%	0.22%	12 Ιουλίου
Νορβηγία	AAA	14.30	20.17%	43.00%	0.24%	12 Ιουλίου
Σουηδία	AAA	14.92	-2,86%	60.43%	0.25%	12 Ιουλίου
ΗΒ	AA	15.47	40.13%	54.70%	0.26%	12 Ιουλίου
Γερμανία	AAA	15.70	25.60%	84.71%	0.26%	12 Ιουλίου
Βέλγιο	AA	17.10	23.91%	48.70%	0.29%	12 Ιουλίου
Ιρλανδία	AA-	18.90	9.88%	31.25%	0.32%	12 Ιουλίου
ΗΠΑ	AA+	19.70	22.36%	68.38%	0.33%	12 Ιουλίου
Φιλανδία	AA+	23.13	1.94%	132.00%	0.39%	12 Ιουλίου
Νέα Ζηλανδία	AA+	24.20	15.24%	70.42%	0.40%	12 Ιουλίου
Γαλλία	AA	26.20	18.02%	30.35%	0.44%	12 Ιουλίου
Χόνγκ Κόνγκ	AA+	26.40	-24,14%	1.15%	0.44%	12 Ιουλίου
…	…	…	…	…	…	…
Ιταλία	BBB	139.50	-1,62%	54.83%	2.33%	12 Ιουλίου
Ινδονησία	BBB	147.98	23.72%	88.82%	2.47%	12 Ιουλίου
Ελλάδα	BB+	173.50	-3,45%	59.91%	2.89%	12 Ιουλίου
Μεξικό	BBB	174.24	20.58%	83.28%	2.90%	12 Ιουλίου
Βραζιλία	BB-	295.20	16.22%	41.18%	4.92%	12 Ιουλίου
Τουρκία	B+	857.79	7.37%	47.52%	14.30%	12 Ιουλίου

Πίνακας 9: Αξία των CDS ανά κράτος και οι διαβαθμίσεις τους

Κάποιος μπορεί να καταλαβαίνει ότι η όσο πιο «φουσκωμένη» είναι η πιθανότητα αθέτησης (PD), τόσο μεγαλύτερη αναμένεται να είναι η τιμή του CDS.

Τέλος, λίγο πριν προχωρήσουμε πιο βαθιά στην ανάλυση μας, θα ήταν ενδιαφέρον να δούμε και ένα άλλο αρκετά δημοφιλές από πολλούς πιστωτικό παράγωγο. Το λεγόμενο CDO's ή τα εγγυημένα δανειακά ομόλογα, τα οποία είναι στην κατηγορία των σύνθετων πολυμεταβλητών πιστωτικών παραγώγων (multi-name). Ειδικότερα το CDO's είναι ένα σύνθετο χρηματοοικονομικό προϊόν, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από μια ομάδα δανείων και άλλων περιουσιακών στοιχείων, όπως ομολόγων και μετοχών, όπου και πωλείται σε θεσμικούς επενδυτές. Μεταφέρουν τον πιστωτικό κίνδυνο από το υποκείμενο χαρτοφυλάκιο των περιουσιακών στοιχείων τους, τμηματοποιόντας τα δάνεια, ανάλογα με την παλαιότητά τους. Οι ζημιές εφαρμόζονται αντίστροφα από την παλαιότητα, δηλαδή θα επηρεάσουν πρώτα το χαμηλότερο τμήμα, το οποίο συχνά ονομάζεται ως η δόση των ιδίων κεφαλαίων (equity tranche), μετά τις μεσαίες (mezzanine tranches) και τέλος τις παλαιότερες δόσεις (senior tranches). Το κάθε τμήμα, λαμβάνει μια περιοδική πληρωμή, όπου οι χαμηλότερες δόσεις προσφέρουν μεγαλύτερα σε αξία κουπόνια (coupons) για την αντιστάθμιση του κινδύνου τους αθέτησης και ανεβαίνοντας η αξία των κουπονιών μειώνεται, λόγω του χαμηλού κινδύνου που εμπεριέχουν τα πάνω στρώματα.

Επίσης, υπάρχουν διάφορα είδη CDO's, όπως τα cash CDO's το οποίο περιλαμβάνει ένα χαρτοφυλάκιο μετρητών, δανείων, εταιρικών ομολόγων, τίτλους που καλύπτονται από περιουσιακά στοιχεία π.χ. Ακίνητα ή τίτλους με υποθήκη. Ακόμη στα σύνθετα (synthetic) CDO's τα οποία δεν διαθέτουν ομόλογα και δάνεια όπως πριν, οι κάτοχοι τους δεν χρειάζεται να έχουν επενδύσει κάποιο αρχικό κεφάλαιο έτσι ώστε να τους ανήκουν ομόλογα, εταιρικές μετοχές και δάνεια. Το χαρτοφυλάκιο αυτό, αποτελείται από πολλά swaps όπως τα CDS, και options. Τέλος μια μείξη αυτών των δύο μπορεί να είναι εφικτή και ονομάζεται υβριδικό CDO (hybrid CDO).

Για την τιμολόγηση ενός τέτοιου σύνθετου πιστωτικού παραγώγου, θα πρέπει να λάβουμε υπόψιν μας την πιθανότητα αθέτησης για το κάθε CDS, το ποσοστό επανάκτησης, το επιτόκιο και φυσικά την εξάρτηση της αθέτησης, δηλαδή την συσχέτιση μεταξύ των περιουσιακών στοιχείων στο χαρτοφυλάκιο. Τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται για την τιμολόγηση αυτού του πιστωτικού παραγώγου, είναι ενδιαφέρον ο αναγνώστης να ρίξει μια ματιά στο [36], καθώς κάποιος θα μπορούσε να τα θεωρήσει ως εξέλιξη των μοντέλων που θα παρουσιασθούν στη συνέχεια της διπλωματικής, σε πολυμεταβλητό επίπεδο τώρα.

Τέλος, πριν κλείσουμε το κεφάλαιο, θα ήταν σκόπιμο να αναφέρουμε ότι, τα συγκεκριμένα παράγωγα, συνείσφεραν στο να γίνει η χρηματοπιστωτική κρίση του 2007 στην Αμερική. Καθώς, επειδή κοκκίνιζαν μαζικά τα νεοσύστατα δάνεια, τα οποία εμπεριέχονταν σε ένα τέτοιο σύνθετο πιστωτικό παράγωγο, έκανε την κερδοφορία τους να ζημιωθεί αρκετά και έτσι ώστε η τράπεζα να επωμισθεί τις αλυσιδωτές αθετήσεις των δανειοληπτών της, κάνοντας αρκετές τράπεζες να έρθουν στο χείλος της χρεοκοπίας, με μερικές από αυτές να χρεοκοπήσουν.

Κεφάλαιο 4ο

Το Πιστωτικό Μοντέλο Lévy και η Εφαρμογή του

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε αρχικά ότι το μοντέλο αποτίμησης των περιουσιακών στοιχείων Black-Scholes δεν φαίνεται να είναι η καλύτερη επιλογή για την αγορά παραγώγων και η αντικατάσταση τους από κάποιο άλλο μοντέλο θα ήταν αναγκαία. Ειδικότερα, έχει αποδειχθεί από εμπειρικές μελέτες ότι τα δεδομένα δεν κατανέμονται κανονικά, το γεγονός αυτό παραβιάζει την συνθήκη του μοντέλου των Black & Scholes. Επίσης, θα δούμε τις πλήρεις και μη πλήρεις αγορές καθώς και την τιμολόγηση τους υπό το μέτρο ουδέτερου κινδύνου. Τέλος θα παρουσιασθεί το μοντέλο που είναι ο στόχος της διπλωματικής, με τη τιμολόγηση και τη προσομοίωση του, απορρέοντας έτσι χρήσιμα συμπεράσματα.

4.1. Ανάλυση του Μοντέλου Black-Scholes και η Μη-Τέλεια Εφαρμογή του στα Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα

Αρχικά θα αναφέρουμε ότι το μοντέλο των B-S βασίζεται σε μια γεωμετρική κίνηση Brown, η οποία ορίζεται ως:

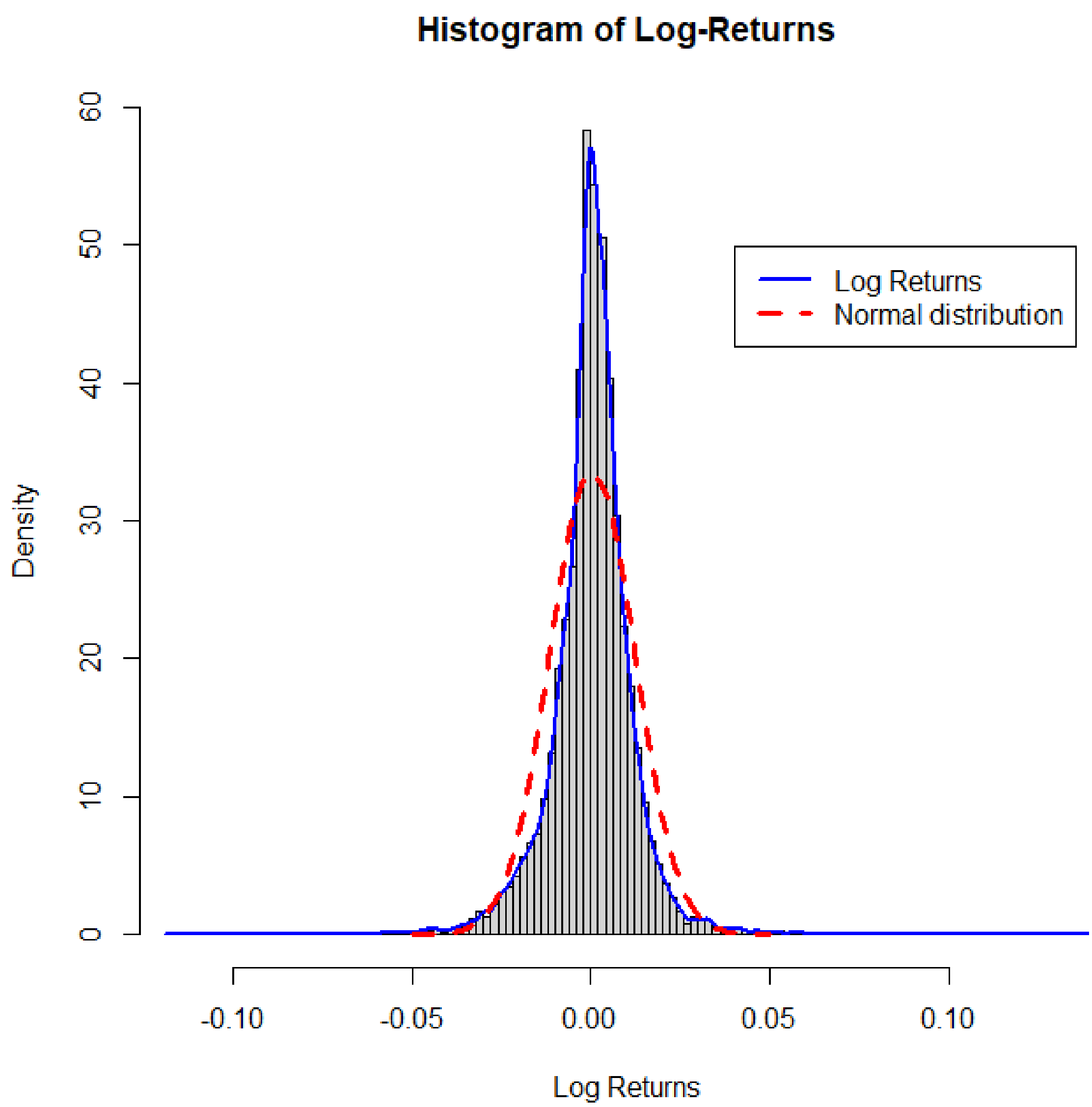
$$S_t = S_0\, e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}, \qquad t \geq 0$$

όπου $\{W_t\}_{t\geq 0}$ είναι μια τυπική κίνηση Brown, το μ καλείται τάση (drift), το σ είναι η παράμετρος μεταβλητότητας (volatility parameter), το S_0 είναι η τιμή της μετοχής στην αρχική αγορά της (σταθερή) και η $\{S_t\}_{t\geq 0}$ η στοχαστική ανέλιξη της τιμής της μετοχής.

Γενικά το μοντέλο B-S είναι ένα αρκετά δημοφιλές μοντέλο ακόμη και στις μέρες μας, αλλά σύμφωνα με αρκετές εμπειρικές μελέτες οι οποίες έδειξαν ότι το μοντέλο έχει κάποιες ελλείψεις και για αυτό το λόγω αποτυγχάνει να προβλέψει με μεγάλη ακρίβεια τις τιμές των χρηματοοικονομικών παραγώγων. Ειδικότερα η εμπειρική μελέτη [20] με τίτλο "Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues" δημοσιευμένη το 2001 υπό τον Cont, βγήκε στο συμπέρασμα ότι τα περιουσιακά στοιχεία που διαπραγματεύονται στη αγορά, δεν ακολουθούν κάποια κανονική κατανομή και αναφέροντας δε, ότι τα τότε «σύγχρονα» μοντέλα που δεν μπορούσαν να αναπαράγουν όλα αυτά τα στατιστικά χαρακτηριστικά (λοξότητα και κυρτότητα), τα έκανε αρκετά περιοριστικά, λόγω της υπόθεσης της κανονικότητας. Επιβεβαιώνεται το γεγονός ότι τα δεδομένα έχουν βαριά ουρά σε σχέση με την κανονική κατανομή.

Παρακάτω (εικόνα 10), παρατίθεται η εμπειρική γραφική παράσταση των λογαριθμικών αποδόσεων[23], μαζί με την καμπύλη της κανονικής κατανομής που αποδεικνύει διαισθητικά τα όσα προαναφέραμε. Το δείγμα ($\nu = 7416$) πάρθηκε από το yahoo-finance του δείκτη S&P500 (SPY), για την περίοδο 29/01/1993 – 13/07/2022.

[23] Οι λογαριθμικές αποδόσεις ορίζονται ως, $\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$ όπου t είναι ο χρόνος και το S_t είναι η τιμή του περιουσιακού στοιχείου στο χρόνο t. Συχνά υποθέτετε ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή.



Εικόνα 10: Εκτίμηση μέσω kernel της Κατανομής των λογάριθμο-αποδόσεων

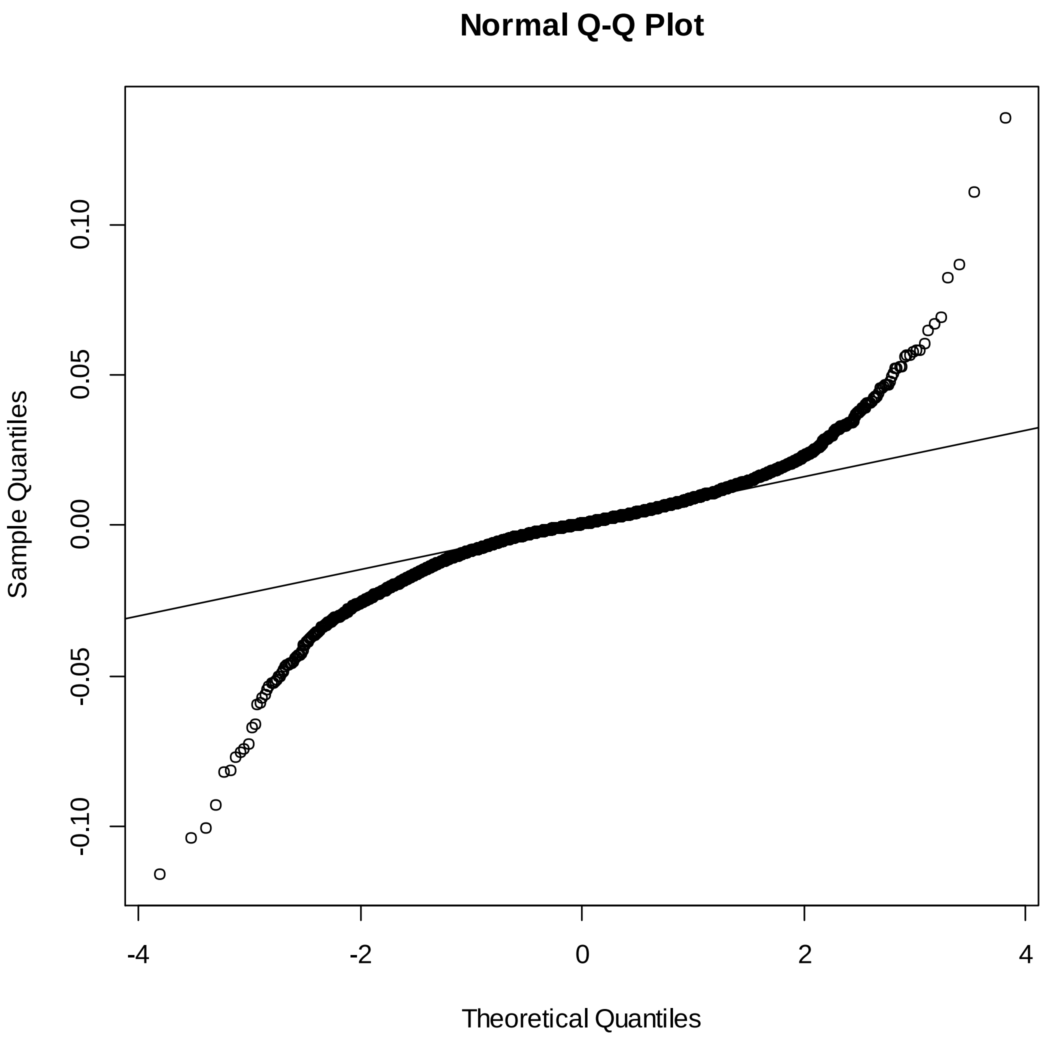
Να σημειωθεί ότι για την εκτίμηση της πιθανότητας των περιουσιακών στοιχείων, χρησιμοποιήθηκε ο εκτιμητής Kernel[24]. Για την ολοκλήρωση του συλλογισμού μας παραθέτουμε και το QQ-Plot, κάτι που επιβεβαιώνει και πάλι[25] τον ισχυρισμό μας.

---

[24] Είναι η εκτίμηση της σ.π.π. της $f(x)$ μιας τ.μ. Χ, μέσω της μη-παραμετρικής στατιστικής. Ειδικότερα, για $x_1, \dots, x_n$ ανεξάρτητες παρατηρήσεις του Χ, η εκτίμηση kernel για την $f(x)$, στο σημείο x, θα είναι ίση με:

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x_i - x}{h}\right)$$

Η οποία $K(x)$ καλείται συνάρτηση kernel, n είναι το μέγεθος των παρατηρήσεων και το h είναι το εύρος. Τέλος η συνάρτηση kernel έχει πολλά είδη συναρτήσεων, με την πιο γνωστή να είναι η Gaussian Kernel function.



Εικόνα 11: Διάγραμμα Q-Q plot, Δεδομένων με την Κανονική Κατανομή

Συνεπώς συμπεραίνουμε ότι η υπόθεση της κανονικότητας, των λογαριθμικών αποδόσεων (log-returns) υπό το μοντέλο του B-S δεν συμβαδίζει με τα εμπειρικά δεδομένα. Ακόμη, τα δεδομένα αυτά έχουν δείξει αρνητική λοξότητα[26] (negative skewness) και υπερβολική κύρτωση[27] (excess kurtosis-fat tail). Συνεπώς η κανονική κατανομή αδυνατεί να

---

[25] Επαληθεύτηκε και στατιστικά μέσω του ελέγχου κανονικότητας του Kolmogorov-Smirnov (και Anderson-Darling αντίστοιχα) ότι το $p_{value} \approx 2.2 \cdot 10^{-16}$ ήταν τρομερά μικρό και έτσι φυσικά απορρίπτεται η κανονικότητα των δεδομένων σε «σχεδόν οποιοδήποτε» επίπεδο σημαντικότητας.

[26] Η λοξότητα ή ασυμμετρία μετράει τον βαθμό που η κατανομή της τ.μ. X είναι συμμετρική. Ορίζεται από το μέγεθος: $Skew(X) = \frac{E\left[(X-E(X))^3\right]}{Var(X)^{\frac{3}{2}}}$ και ισχύει ότι αν πάρει τιμή μηδέν θεωρείται συμμετρική, αν είναι μικρότερη του μηδενός θα έχει αρνητική ασυμμετρία και μεγαλύτερη, θετική ασυμμετρία αντίστοιχα.

[27] Η κύρτωση δείχνει το σχήμα της κατανομής (τ.μ. X) και ορίζεται ως: $Kurt(X) = \frac{E\left[(X-E(X))^4\right]}{Var(X)^2}$, όπου αν πάρει την τιμή 3 καλείται μεσόκυρτη (π.χ. η κανονική κατανομή), αν είναι μικρότερη του 3 λέγεται πλατύκυρτη (φλατ κορυφή) και για μεγαλύτερη του 3 λέγεται λεπτόκυρτη («αγκαθωτή» κορυφή).

μοντελοποιήσει αυτά τα περιουσιακά στοιχεία, διότι δεν έχει βαριά ουρά και είναι συμμετρική, κατ' επέκταση το μοντέλο B-S δεν φαίνεται να είναι το κατάλληλο μοντέλο, ιδιαίτερα όταν υπάρχουν και ακραία γεγονότα (extreme events), διότι δεν περιέχει άλματα που να μπορούν να μοντελοποιήσουν την ύπαρξη ξαφνικών γεγονότων, όπως π.χ. αθέτηση, ή κάποια ξαφνική μεταβολή στην τιμή των περιουσιακών στοιχείων.

Παρατίθεται ο πίνακας 10, με τα δεδομένα να έχουν συλλεχθεί από διάφορους χρηματιστηριακούς δείκτες, όπως του NASDAQ και του S&P500. Το δείγμα διαφέρει διότι πάρθηκαν διάφοροι χρονικοί περίοδοι, για τις λογαριθμικές αποδόσεις.

Συνολικός Πίνακας

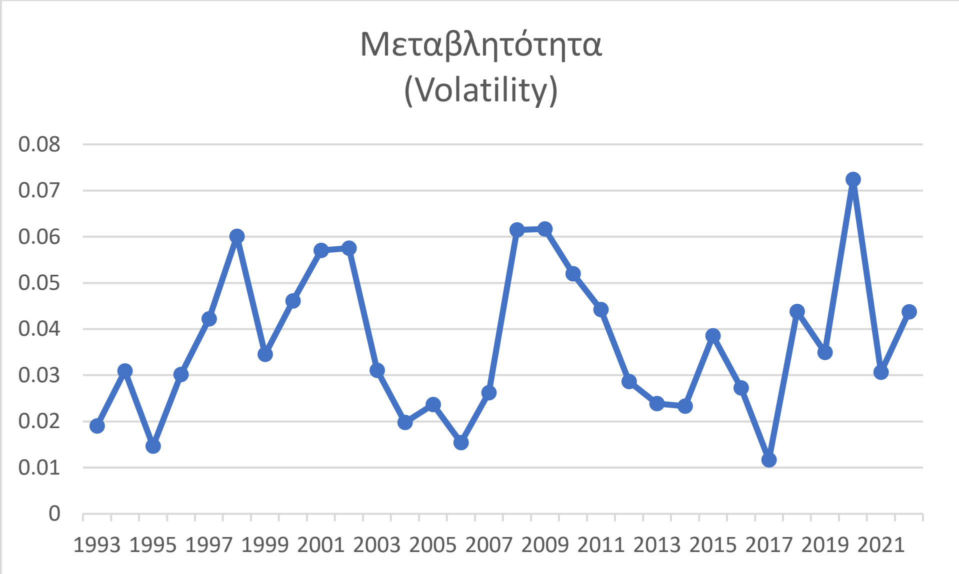
	Μέση Τιμή	Διασπορά	Λοξότητα	Κύρτωση
S&P 500 (1993-2022)	0.00029	0.01190	-0.30092	14.18214
S&P 500 (1993-2006)	0.00033	0.01072	-0.12228	7.07039
S&P 500 (2010-2022)	0.00039	0.01100	-0.81029	15.36146
Nasdaq (1971-2022)	0.00036	0.01264	-0.38994	12.83106

Πίνακας 10: Κύρια Στατιστικά Μέτρα Δεδομένων

Από την περιγραφική μας ανάλυση, βλέπουμε ακριβώς αυτό που αναφέραμε, δηλαδή υπερβολική κύρτωση και αρνητική λοξότητα στις διάφορες περιόδους.

Ένα άλλο πρόβλημα που προκύπτει είναι η παράμετρος μεταβλητότητας, η οποία στο μοντέλο των B-S θεωρείται σταθερή. Έχει παρατηρηθεί το φαινόμενο ότι η μεταβλητότητα δεν παραμένει σταθερή, δηλαδή αλλάζει στοχαστικά με την πάροδο του χρόνου και με τις τιμές τις να ομαδοποιούνται.

Συγκεκριμένα, παρουσιάζοντας το και γραφικά (εικόνα 12), ισχύει ότι η μεταβλητότητα στο χρόνο δεν παραμένει σταθερή (οριζόντια ευθεία), αλλά μεταβάλλεται αρκετά. Αναφέρεται δε ότι οι αποκλίσεις των λογαριθμικών τιμών του δείγματος από την S&P500, ομαδοποιήθηκαν ανά έτος, με την παρατήρηση ότι στο έτος 2022, οι τιμές ομαδοποιήθηκαν σε εξαμηνιαία βάση, μιας που το δείγμα φτάνει μέχρι την 13 Ιουλίου 2022 αρχίζοντας την 29 Γενάρη του 1993.



Εικόνα 12: Μεταβλητότητα Ομαδοποιημένων Δεδομένων από το 1993 έως 2022 (1/2) ανά έτος

Οπότε βασιζόμενοι σε αυτές τις παρατηρήσεις καταλαβαίνουμε ότι το μοντέλο των B-S εκτός από τις ελλείψεις που παρουσιάζει, αδυνατεί να προβλέψει με ακρίβεια τις τιμές των περιουσιακών στοιχείων, σε διάστημα χρόνου, παραβιάζοντας την υπόθεση της κανονικότητας και της σταθερής μεταβλητότητας. Χρειαζόμαστε όμως ένα στοχαστικό μοντέλο που να έχει το ελάχιστο τέσσερις παραμέτρους, όπως η παράμετρος θέσης, μεταβλητότητας, λοξότητας και κύρτωσης που να μπορεί να μοντελοποιεί επαρκώς την «πτώση» των ουρών (decay of the tails) της κατανομής. Το πρόβλημα αυτό, έρχονται να καλύψουν τα μοντέλα που βασίζονται στις στοχαστικές ανελίξεις Lévy. Για ακρίβεια αυτές οι ανελίξεις έχουν μεγάλη ευελιξία στην αλλαγή της λοξότητας και της κύρτωσης τους, πράγμα που σημαίνει ότι μπορούν να «προβλέψουν» με ακόμη μεγαλύτερη ρεαλιστικότητα την πιθανότητα των ακραίων γεγονότων. Μπορούν να περιλαμβάνουν άλματα και να στοχαστικοποιήσουν την μεταβλητότητα που έχουν τα περιουσιακά στοιχεία. Μερικά μοντέλα θα τα δούμε στην συνέχεια, όμως έχει προκύπτει ένα πρόβλημα στο οποίο θα πρέπει να αναφερθούμε στη συνέχεια. Δεν είναι παρά να εισάγουμε τις έννοιες της πλήρης και της μη-πλήρης αγοράς.

4.2. Πλήρης και Μη Πλήρης Αγορά

Με σκοπό να εισαχθούμε ομαλά στις πλήρεις και μη πλήρεις αγορές, είναι σκόπιμο να αναφέρουμε προηγουμένως, μια στρατηγική που είναι μεν σπάνια με μικρή διάρκεια στην χρηματοοικονομική αγορά που μας ενδιαφέρει, αλλά μεν μπορεί να αποφέρει σίγουρο κέρδος στον επενδυτή που την χρησιμοποιεί.

Συγκεκριμένα, η στρατηγική καλούμενη και ως arbitrage[28], αφορά μια αγοροπωλησία ενός συγκεκριμένου περιουσιακού στοιχείου, (πιθανόν) σε διαφορετικές αγορές, με σκοπό να βγει

[28] Αναρωτιόμαστε γιατί αναφέραμε ότι το arbitrage συμβαίνει για ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Σε αυτό το ερώτημα, μας απαντάει η οικονομική θεωρία, ότι αν η ζήτηση είναι πολύ μικρή (προσφορά ίδια) σε ένα αγαθό σε μια συγκεκριμένη αγορά, τότε η τιμή του αγαθού θα συρρικνωθεί, σε σχέση με την τιμή του ίδιου αγαθού και με τα ίδια χαρακτηριστικά σε μια άλλη αγορά, όπου η ζήτηση είναι μεγαλύτερη. Συνεπώς, για να υπάρξει ισορροπία η αυξημένη ζήτηση του άλλου αγαθού, θα μετατοπισθεί στην άλλη αγορά, μέχρις ότου

ένα σίγουρο κέρδος, από την διαφορά της πώλησης – αγοράς. Το γεγονός αυτό συμβαίνει λόγω της αναποτελεσματικότητας της αγοράς, συνεπώς ο επενδυτής είναι λογικό να εκμεταλλευτεί αυτή την σύντομη χρονική στιγμή την ευκαιρία ώστε να αγοράσει φθηνά και να πουλήσει ακριβά ενδεχομένως σε κάποια άλλη αγορά.

Όπως αναφέραμε το arbitrage συμβαίνει αρκετά σπάνια, οπότε η αγορά κατά γενικό τρόπο βρίσκεται σε ισορροπία. Υποθέτουμε ότι η αγορά είναι μια Arbitrage – free, συνεπώς δεν συμβαίνουν ευκαιρίες arbitrage και η τιμολόγηση των περιουσιακών προϊόντων γίνεται υπό την υπόθεση αυτή.

Ακόμη για να τιμολογήσουμε ένα περιουσιακό στοιχείο (asset), υποθέτουμε ότι η αγορά είναι πλήρης, το οποίο σημαίνει ότι έχει ένα μοναδικό αντίστοιχο μέτρο martingale (σε συνεχή χρόνο) για να τιμολογηθεί, χωρίς να υπάρξει η περίπτωση arbitrage. Σε αντίθετη περίπτωση, για την τιμολόγηση δεν θα μπορούσε να υπάρχει ένα και μοναδικό μέτρο martingale και η αγορά θα ήταν μη-πλήρης.

Συγκεκριμένα η πλήρης αγορά στην χρηματοοικονομική επιστήμη, θα μπορούσε να οριστεί απλά[29] ως εξής:

- Εάν υπάρχουν αμελητέα κόστη στις συναλλαγές
- Τέλεια πληροφόρηση μεταξύ των επενδυτών
- Η κάθε τιμή του περιουσιακού στοιχείου θα μπορούσε να καλυφθεί από τον οποιοδήποτε στον κόσμο

Στην αντίθετη περίπτωση, η αγορά δεν είναι πλήρης.

Εν συνεχεία θα αναφερθούμε στα ισοδύναμα μέτρα martingale που χρησιμοποιούνται για την τιμολόγηση των περιουσιακών στοιχείων, καθώς και την σχέση τους με τις πλήρεις και μη πλήρεις αγορές.

Ορισμός 4.2.1 [17],[37]: Έστω ένας χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, τότε ένα ισοδύναμο μέτρο martingale Q είναι αυτό που:

i. P και Q είναι ισοδύναμα μέτρα
ii. Η ανέλιξη της τιμής $\{S_t\}_{0\le t\le T}$ ενός περιουσιακού στοιχείου, προεξοφλημένο από την συνάρτηση $D(0,t)$ είναι martingale υπό το μέτρο Q

Τότε το μέτρο Q, θα καλείται ισοδύναμο μέτρο martingale (Equivalent Martingale Measure).

Από τον ορισμό βλέπουμε ότι θα πρέπει να ισχύει,

$$E_Q(S_t|\mathcal{F}_0) = e^{rt}S_0$$

εξισορροπηθεί η τιμή και στις δύο αγορές. Συνεπώς τίθενται διάφορα θέμα όπως αυτής της πληροφόρησης, του γεωγραφικού κόστους κτλ. Ο χρόνος του arbitrage είναι συναρτήσει αυτών που αναφέραμε, αλλά σε μια χρηματιστηριακή αγορά τα περισσότερα προϊόντα είναι άμεσα ρευστοποιήσιμα πράγμα που σημαίνει ότι οι αγοροπωλησίες μπορεί να γίνουν κατά εκατοντάδες σε ελάχιστο χρόνο, μειώνοντας έτσι τον χρόνο απόκρισης των ενδιαφερομένων να αγοράσουν στη μια και να πωλήσουν στη άλλη αγορά.

[29] Φυσικά θα μπορούσαν να υπήρχαν και άλλες υποθέσεις για μια πλήρη αγορά, όπως να μην υπάρχουν τριβές μεταξύ των αγοραστών και των πωλητών, φορολογίες, καθυστερήσεις συναλλαγών κτλ.

όπου E_Q, P_Q και E, P είναι η μέση τιμή και το μέτρο πιθανότητας κάτω από το μέτρο Q (συχνά καλείται κινδυνοουδέτερο μέτρο) και υπό το μέτρο P αντίστοιχα.

Έχοντας τώρα ξεκαθαριστεί το «τοπίο», όπου η μοναδικότητα του ισοδύναμου μέτρου martingale σχετίζεται με το αν η αγορά είναι πλήρης ή όχι στην αντίθετη περίπτωση, έχει αποδειχθεί ότι το μοντέλο των Black & Scholes αφορά μια πλήρη αγορά και κατ' επέκταση έχει μοναδικό ισοδύναμο μέτρο martingale. Μάλιστα μέσω του θεωρήματος του Girsanov η τιμή του περιουσιακού στοιχείου θα ακολουθεί και πάλι μια γεωμετρική κίνηση Brown. Αυτή η κατάσταση που μεταφερόμαστε από τον πραγματικό κόσμο, στον κινδυνοουδέτερο κόσμο μέσω της μέσης τιμής (risk-neutral world), δηλαδή από το μέτρο P στο ισοδύναμο μέτρο martingale Q ονομάζεται ως «μέση διορθωτική προσέγγιση» (mean correcting approach).

Αντίθετα τα μοντέλα υπό την στοχαστική ανέλιξη Lévy, δεν έχουν μοναδικό ισοδύναμο μέτρο martingale, το οποίο συνεπάγεται ότι η αγορά είναι μη πλήρης. Η συνήθης πρακτική επιλογής αυτού του μέτρου, είναι να δούμε το πως συμπεριφέρεται η αγορά ως προς τον κίνδυνο, δηλαδή παρατηρώντας το πώς οι τιμές εμπορεύονται στην αγορά, κάτι που υποδηλώνει ότι «η αγορά αποφασίζει» το ισοδύναμο μέτρο martingale που θα χρησιμοποιηθεί για την τιμολόγηση οποιοδήποτε αξιών. Στην παρούσα διπλωματική, θα ακολουθηθεί ο τρόπος της «μέσης διορθωτικής προσέγγισης» που αναπτύξαμε προηγούμενος, λαμβάνοντας υπόψιν ότι υπάρχουν και διάφορα άλλα ισοδύναμα μέτρα martingale, όπως ο μετασχηματισμός του Esscher και πολλά άλλα, που ο αναγνώστης μπορεί να ψάξει μεταξύ άλλων στο [22] και το [38].

4.3. Πιστωτικά Μοντέλα

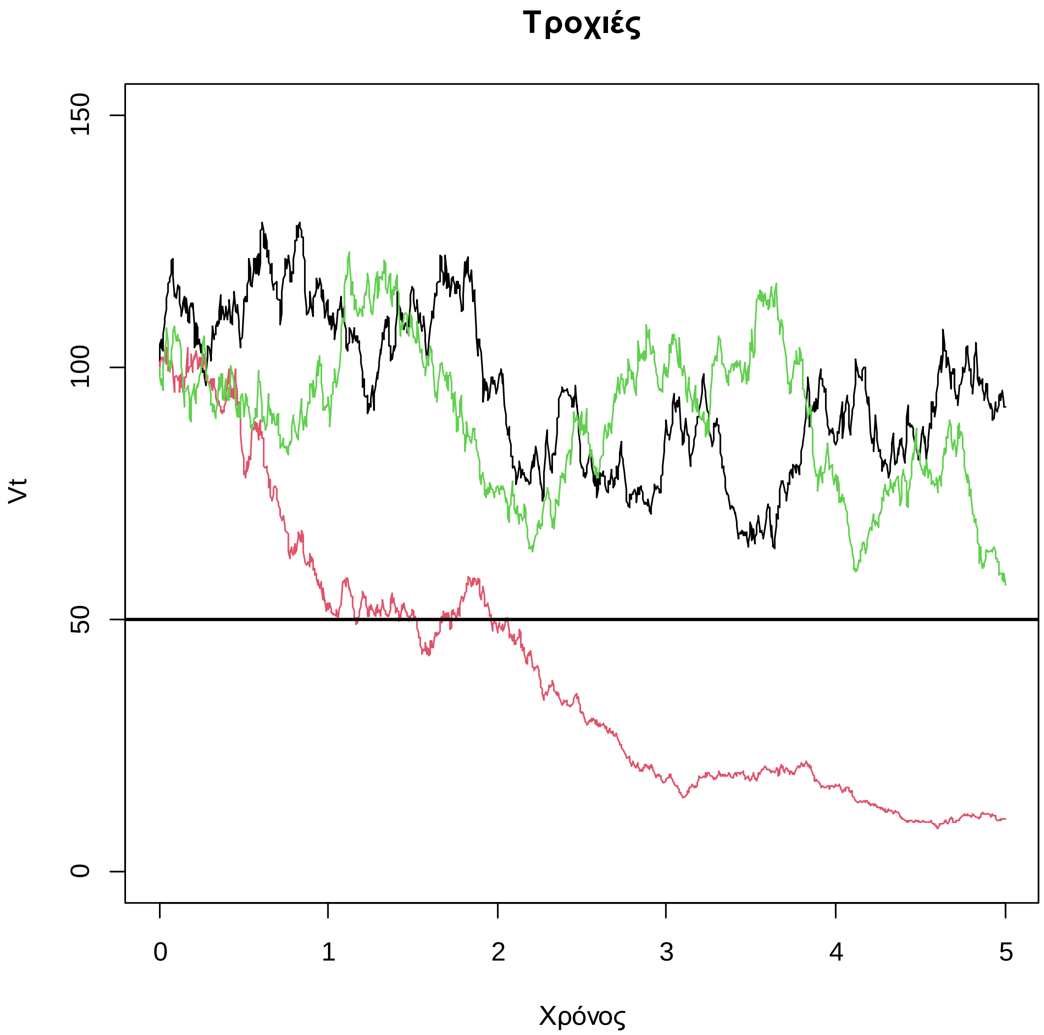
Τα πιστωτικά μοντέλα δημιουργήθηκαν για να προβλέψουν την πιθανότητα αθέτησης για διάφορες μελλοντικές χρονικές στιγμές. Αναλυτικότερα, αυτά τα μοντέλα χωρίζονται σε δύο κύριες κατηγορίες: στα δομικά μοντέλα (structural models) και αυτά που βασίζονται στην ένταση αθέτησης (intensity-based models).

4.3.1. Δομικά Μοντέλα

Ξεκινώντας με τα απλά δομικά μοντέλα ή αλλιώς μοντέλα εταιρικής αξίας (firm-value models), συνδέουν ένα πιστωτικό γεγονός με την αξία των χρηματοοικονομικών περιουσιακών[30] στοιχείων της επιχείρησης. Δηλαδή, εάν συμβολίσουμε την αξία μιας οντότητας αναφοράς περιουσιακού στοιχείου της επιχείρησης με $\{V_t\}_{t\geq 0}$ (δηλαδή είναι μια στοχαστική ανέλιξη), τότε η αθέτηση θα συνέβαινε αν αυτό το περιουσιακό στοιχείο «έπεφτε» κάτω από ένα σημείο L (θα καλείται φράγμα – Barrier), σε κάποιο σημείο του χρονικού ορίζοντα, το οποίο θα σήμαινε ότι πέρα από αυτό το σημείο L, η εταιρεία δεν θα είχε την δυνατότητα αποπληρωμής των υποχρεώσεων της. Αξίζει να τονισθεί ότι αυτό το φράγμα L, που αναφέρθηκε είναι προκαθορισμένο εξ αρχής και μπορεί να είναι είτε ντετερμινιστικό (σταθερό), είτε στοχαστικό. Παρακάτω δείχνεται διαισθητικά στην εικόνα

[30] Τα περιουσιακά της στοιχεία, μπορεί να είναι για παράδειγμα η τιμή της μετοχής της.

13, η προσομοίωση τριών τροχιών μιας γεωμετρικής κίνησης Brown. Βλέπουμε ότι η τροχιά με το κόκκινο χρώμα πέφτει κάποια στιγμή κάτω του αυθαίρετου φράγματος το οποίο ορίσθηκε ίσο με $L = 50$ ν.μ., δηλαδή στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής της «πέσει» κάτω από το φράγμα των 50 ν.μ. θα υπάρξει πιστωτικό γεγονός. Το μοντέλο που επιλέχθηκε για την προσομοίωση ήταν το μοντέλο του Merton, το οποίο θα εξηγηθεί στην συνέχεια (βλέπε Παράρτημα Γ5 για την μέθοδο προσομοίωσης).



Εικόνα 13: Προσομοίωση με τρείς τροχιές και ένα φράγμα υπό το μοντέλο του Merton

Κλασσικό παράδειγμα με ντετερμινιστικό φράγμα L είναι το μοντέλο που θα αναλύσουμε στην συνέχεια της διπλωματικής, το VG-μοντέλο και αντίστοιχα ένα άλλο μοντέλο με στοχαστικό φράγμα είναι το γνωστό σε πολλούς $CreditGrades^{TM}$model.

Τα κυριότερα δομικά μοντέλα που αναφέρονται στην βιβλιογραφία είναι:

- Του Merton (σχετική βιβλιογραφία [32]) που υπέθεσε ότι η τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου του ενεργητικού V_t (asset value of the equity) μοντελοποιείται σύμφωνα με το μοντέλο των Black & Scholes, το οποίο είναι το άθροισμα της μετοχικής αξίας E_t (equity value) και της αξίας ενός ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου z_t^T (value of a zero-coupon bond, δηλαδή $V_t = E_t + z_t^T$. Η αθέτηση συμβαίνει στην περίπτωση που η τιμή στο χρόνο ωρίμανσης του πέσει κάτω από ένα (ντετερμινιστικό) όριο L, το οποίο ήταν η ονομαστική αξία μιας απαίτησης. Κάτι που καταλαβαίνουμε από προηγούμενη συζήτηση (παράγραφος 4.1), το μοντέλο αναμένεται να μην είναι πλέον ένα αξιόλογο εργαλείο για την πρόβλεψη της πιθανότητας αθέτησης. Τα κυριότερα μειονεκτήματα του μοντέλου, ήταν η απλότητά του, το οποίο υπέθετε ότι το πιστωτικό γεγονός συμβαίνει μόνο στο χρόνο ωρίμανσης, το risk-free r θεωρούταν σταθερό και δεν «έπιανε» τις ακραίες αλλαγές, διότι βασίζεται σε μια διαδικασία διάχυσης που δεν έχει άλματα.

- Το μοντέλο Black-Cox (σχετική βιβλιογραφία [16]) με σταθερό όριο, το οποίο αποτελεί επέκταση του Merton μοντέλου. Παρόμοια και εδώ το V_t μοντελοποιείται σύμφωνα με το μοντέλο των Black & Scholes, αλλά το πιστωτικό γεγονός συμβαίνει την πρώτη στιγμή που το $V_t \leq L$, δηλαδή σε αντίθεση με πριν, η αθέτηση συμβαίνει στο χρόνο t και όχι απαραίτητα στο χρόνο ωρίμανσης. Παρόλο που τα μειονεκτήματα είναι εμφανή, έχουν υπάρξει και άλλα μοντέλα πάνω σε αυτό το πνεύμα, για παράδειγμα κάνοντας το επιτόκιο στοχαστικό (stochastic interest rates) ή\και το φράγμα στοχαστικό (stochastic default barrier).

- Το γνωστό $CreditGrades^{TM}$ (σχετική βιβλιογραφία [33]) μοντέλο που αναφέρθηκε παραπάνω, δημιουργήθηκε το 2002 από την RiskMetrics, το οποίο υποθέτει και αυτό, ότι η τιμή του περιουσιακού του στοιχείου V_t μοντελοποιείται σύμφωνα με την γεωμετρική κίνηση Brown (geometric Brownian motion), με τάση ίση με το μηδέν και η αθέτηση θα συμβεί αν $V_t \leq H_t$, όπου $\{H_t\}_{t\geq 0}$ είναι μια στοχαστική ανέλιξη η οποία δείχνει το ποσό επανάκτησης της εταιρείας. Το ποσό επανάκτησης αναλύεται ως $H_t = R_t\, D$, το οποίο D είναι το χρέος της εταιρείας ανά μετοχή (firm's debt-per-share) ή οι υποχρεώσεις τις εταιρίας και το R_t είναι στοχαστική ανέλιξη που δηλώνει το ποσοστό επανάκτησης και θεωρείται ότι ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή (lognormal distribution). Επιπλέον το μοντέλο για να έχει κλειστό τύπο ώστε να είναι πιο εύκολο στους υπολογισμούς, προσεγγίσθηκε από μια σ.α. που ακολουθούσε κίνηση Brown, με τάση $-\frac{\sigma^2}{2}$ και διακύμανση σ^2. Τέλος αν και το μοντέλο ήταν πιο εξελιγμένο από τα προηγούμενα που αναφέρθηκαν, λόγω του γεγονότος ότι το ποσό επανάκτησης είναι σ.α., πράγμα που μπορεί να μοντελοποιήσει τις ξαφνικές αθετήσεις, τα αποτελέσματα του δεν δίνουν αρκετά ικανοποιητικές τιμές για την τιμολόγηση των CDS που βασίζονται στην πιθανότητα αθέτησης, κάτι που το έχει δειχτεί στην ερευνητική εργασία [17].

4.3.2. Μοντέλα Έντασης Αθέτησης

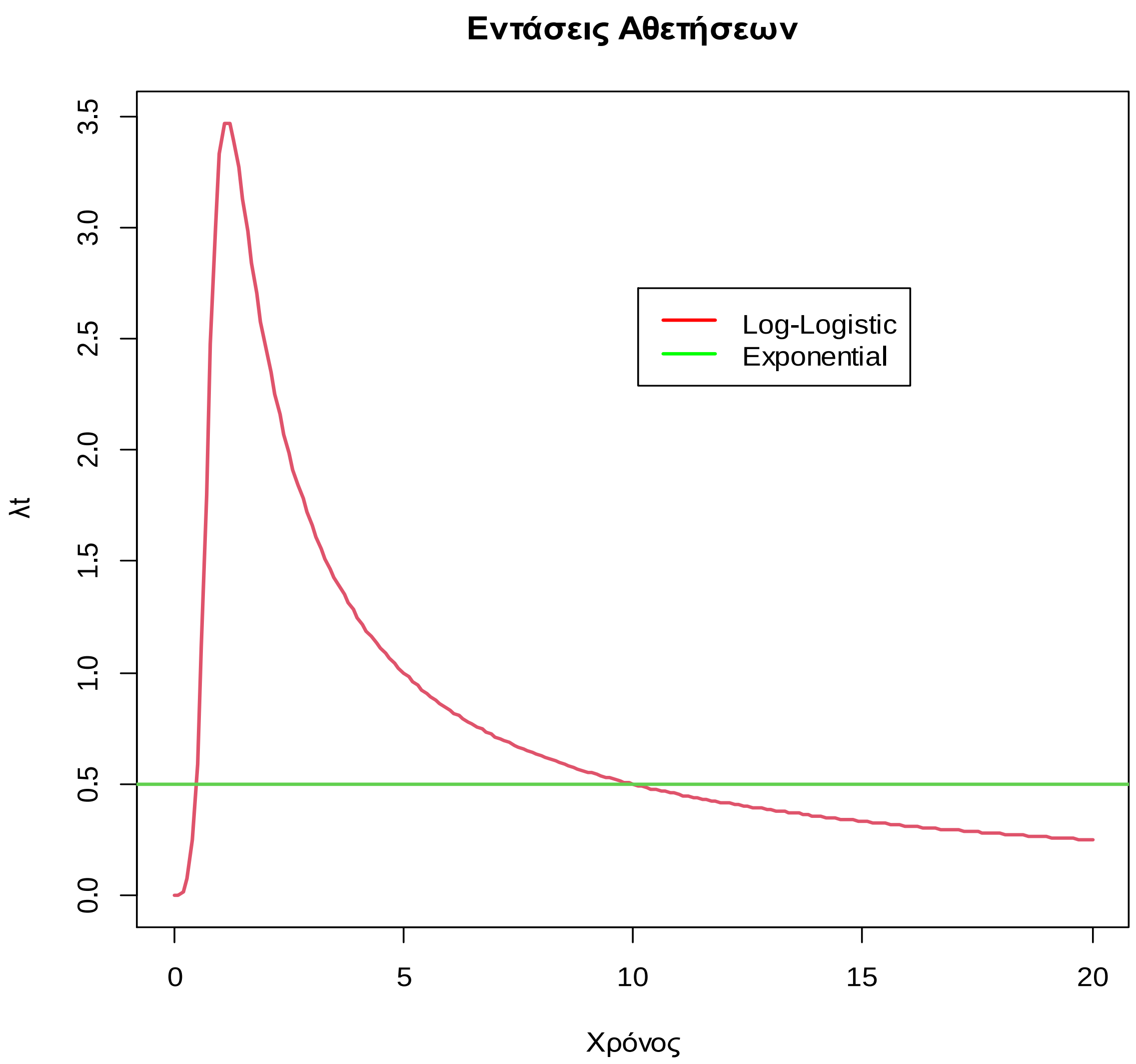
Συνεχίζοντας στα μοντέλα έντασης αθέτησης ή hazard rate models, έχουμε ότι αυτά τα μοντέλα προσπαθούν να εστιάσουν απευθείας στην μοντελοποίηση της πιθανότητας αθέτησης, σε αντίθεση με πριν. Η λογική είναι ότι ανά πάσα στιγμή υπάρχει η πιθανότητα να αθετήσει ο οφειλέτης, η οποία σε αυτά μοντέλα μοντελοποιείται σύμφωνα με την πρώτη πτώση μιας απαριθμήτριας[31] ανέλιξης $\{N_t\}_{t\geq 0}$ με ένταση[32] αθέτησης $\lambda = \{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ (ή αλλιώς

[31] Κλασσικό παράδειγμα αποτελεί η ομογενής ανέλιξη Poisson.

[32] Η ένταση αθέτησης μπορεί να ορισθεί ως: $\lambda_t = \lim_{h\to 0} \frac{P(t<\tau\leq t+h|\tau>t)}{h}$ ή *ισοδύναμα* , $\lambda_t = \frac{f(t)}{1-F(t)}$ το οποίο τ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι χρόνος διακοπής, με σ.π.π $f(t)$ και σ.κ. $F(t)$.

ένταση θνησιμότητας, αν κάνουμε τις αντιστοιχίες). Ειδικότερα, όσο υψηλή ένταση αθέτησης έχουμε, τόσο υψηλή θα είναι η πιθανότητα να υπάρξει το πιστωτικό γεγονός και το αντίστροφο. Φυσικά η ένταση μπορεί να είναι είτε ντετερμινιστική είτε στοχαστική.

Παραθέτοντας και σχηματικά δύο εντάσεις αθέτησης, όπου η μια είναι υπό την Log-Logistic κατανομή και η δεύτερη υπό την Εκθετική κατανομή. Με βάση αυτά που αναπτύξαμε προηγουμένως, έχουμε ότι όσο μεγάλη είναι η ένταση αθέτησης, τόσο θα αυξάνεται και η πιθανότητα αθέτησης της, το αντίστροφο ισχύει στην αντίθετη περίπτωση. Συγκεκριμένα η 1η ένταση αθέτησης (κόκκινη γραμμή) δείχνει ότι αυξάνεται αρκετά η πιθανότητα αθέτησης τα πρώτα 5 χρόνια λειτουργίας μιας επιχείρησης, κάτι που είναι αρκετά λογικό και ρεαλιστικό, σε αντίθεση με την εκθετική ένταση αθέτησης (πράσινη γραμμή) η οποία είναι σταθερή καθ' όλη τη διάρκεια λειτουργίας της. Περισσότερη βιβλιογραφία για τα μοντέλα επιβίωσης και έντασης «θνησιμότητας» μπορεί να βρεθεί στο [2].



Εικόνα 14: Εντάσεις Αθέτησης

Τα βασικότερα μοντέλα έντασης αθέτησης που υπάρχουν είναι:

- Το μοντέλο Jarrow – Turnbull (σχετική βιβλιογραφία [27]), το οποίο θεωρεί ως απαριθμήτρια ανέλιξη την ομογενή ανέλιξη Poisson, όπου η ένταση σε αυτή την περίπτωση είναι σταθερή και ντετερμινιστική ίση με λ. Το μοντέλο εισάχθηκε από τους Jarrow – Turnbull το 1995 και είναι αρκετά απλό, συγκεκριμένα η πιθανότητα μη αθέτησης σε διάστημα $[0, t]$, είναι ίση με $P_{Surv}(t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$, δηλαδή είναι ίση με την πιθανότητα να μην κάνει άλμα (ή να μην έρθει απαίτηση), με τον αναμενόμενο χρόνο αθέτησης να είναι $\tau = \frac{1}{\lambda}$. Υπάρχει μια σύνδεση μεταξύ της απαριθμήτριας ανέλιξης και με τον χρόνο που συμβαίνει το γεγονός, οποίος στην συγκεκριμένη περίπτωση ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Συμπληρώνοντας, μπορούμε να υποθέσουμε μια μη-ομογενή ανέλιξη Poisson αντί για μια ομοιογενή. Η ανάλυση θα ήταν αντίστοιχη με πριν αλλά η ένταση από σταθερή που ήταν, θα γίνει τώρα μια ντετερμινιστική συνάρτηση εξαρτώμενη από τον χρόνο. Συγκεκριμένα, η πιθανότητα επιβίωσης της στο διάστημα $[0, t]$, θα είναι $P_{Surv}(t) = e^{-\int_0^t \lambda_s ds}$, με το $\{\lambda_t\}_{0 \le t \le T}$ να είναι η ντετερμινιστική συνάρτηση της έντασης αθέτησης.

- Τα μοντέλα Cox, θεωρούν ότι η ένταση θα πρέπει να αλλάζει στον χρόνο στοχαστικά και όχι ντετερμινιστικά. Το γεγονός, ερμηνεύεται λόγω της μελλοντικής αβεβαιότητας των ακραίων καταστάσεων που μπορεί να υπάρξουν για ένα περιουσιακό στοιχείο δυναμικά. Παραδείγματα αυτών είναι αν έχουμε ως απαριθμήτρια ανέλιξη μια σύνθετη Poisson, τότε η πιθανότητα επιβίωσης της στο $[0, t]$, θα υπολογιζόταν ως $P_{Surv}(t) = P(\tau > t) = E\left[e^{-\int_0^t \lambda_s ds}\right]$, όπου η ένταση είναι σ.α. $\{\lambda_t\}_{t \ge 0}$. Αν υποθέταμε ότι η ανέλιξη έντασης χρεοκοπίας $\{\lambda_t\}_{t \ge 0}$, ακολουθούσε μια γεωμετρική κίνηση Brown, τότε η μελέτη του θα ήταν εκθετικά πιο περίπλοκη να αναλυθεί, αλλά ίσως πιο ρεαλιστική, σε σύγκριση με το προηγούμενο μοντέλο.

- Τελευταία κατηγορία είναι τα μοντέλα όπου η ένταση αθέτησης ακολουθεί τις ανελίξεις Gamma-OU ή την IG-OU. Αυτές οι σ.α. εμπεριέχουν άλματα στην «συμπεριφορά» τους, κάτι που τις κάνει αρκετά ακριβείς στην μοντελοποίηση της πιθανότητας αθέτησης, δηλαδή το ένα κομμάτι της διαδικασίας βασίζεται σε ανέλιξη Lévy, όπως δηλώνουν και τα ονόματα Gamma και IG. Ο χρόνος μέχρι να συμβεί το πιστωτικό γεγονός ορίζεται ως $\tau = \inf\{t \in (0, +\infty) | \, N_t > 0\}$ και με βάση αυτόν η πιθανότητα επιβίωσης γίνεται $P_{Surv}(t) = P(\tau > t)$ όπου ο τύπος της και στις δύο περιπτώσεις είναι σε κλειστή μορφή, με την βοήθεια της χαρακτηριστικής τους συνάρτησης. Τέλος αξίζει να αναφέρουμε ότι, και τα δύο μοντέλα δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα.

4.4. Εφαρμογή του Μοντέλου Variance Gamma στην τιμολόγηση των CDS

Σε αυτό το υπό κεφάλαιο θα αναπτυχθεί το στοχαστικό μοντέλο υπό την ανέλιξη Variance Gamma (ανήκει στην οικογένεια της ανέλιξης Lévy) που αποσκοπεί στην τιμολόγηση του προκαθορισμένου πιστωτικού παραγώγου CDS. Πρόκειται για το κύριο μοντέλο και είναι ο σκοπός της συγκεκριμένης διπλωματικής.

Αναφέρεται ότι το μοντέλο χρησιμοποιήθηκε από τους Cariboni & Schoutens το 2007 ώστε να μοντελοποιήσει τις τιμές των προκαθορισμένων πιστωτικών παραγώγων CDS. Ανήκει στην κατηγορία των δομικών μοντέλων, έχοντας ένα προκαθορισμένο φράγμα όπου και παρουσιάστηκε στη παράγραφο 4.3.1, με κάποια παραδείγματα βασικών μοντέλων της βιβλιογραφίας.

Όπως είδαμε παραπάνω, οι λογαριθμικές αποδόσεις απέκλιναν από την κανονική κατανομή, καθώς και είχαν αρνητική λοξότητα και υπερβολική κύρτωση. Συνεπώς ήταν σκόπιμο να εισαχθεί ένα νέο μοντέλο που να μπορεί να προσαρμόζεται στην λοξότητα και την κύρτωση που δημιουργείτε. Επιπλέον τα παραπάνω μοντέλα δεν μπορούσαν να μοντελοποιήσουν τα εξαιρετικά σπάνια γεγονότα της αγοράς (απότομη αθέτηση), κάτι που ξεπερνιέται από το μοντέλο μας, εισάγοντας άλματα στην διαδικασία. Είναι επίσης σημαντικό να αναφέρουμε ότι το μοντέλο μας δεν εμπεριέχει το συστατικό της κίνησης Brown, αλλά οδηγείται εξ ολοκλήρου από άλματα, δηλαδή υποθέτετε ότι η κίνηση του περιουσιακού στοιχείου δεν υπάγεται σε μικρές «αναταράξεις» αλλά είναι πιο πιθανό να έχει ακραία σκαμπανεβάσματα από ότι προηγουμένως και έτσι η πιθανότητα αθέτησης δεν υποεκτιμάται σε περιπτώσεις ακραίων γεγονότων.

4.4.1. Τιμολόγηση υπό το Μέτρο Ουδέτερου Κινδύνου - Q

Αναλύοντας το μοντέλο μας, έχουμε τις εξής υποθέσεις:

- Έστω ένα κινδυνοουδέτερο ομόλογο (ή αντίστοιχα να καταθέσουμε τα κεφάλαια μας, σε έναν λογαριασμό τραπέζης) με ένα συνεχές ανατοκιζόμενο επιτόκιο r, η ανέλιξη του ομολόγου στο χρόνο θα είναι $\{B_t\}_{t\geq 0} = \{e^{rt}\}_{t\geq 0}$ (ντετερμινιστική)

- Και έστω ένα άλλο περιουσιακό στοιχείο που υποθέτει ρίσκο επένδυσης, με τιμή $\{S_t\}_{t\geq 0}$ (στοχαστικό) στο χρόνο και θα έχει μερίσματα ίσα με q, τα οποία πληρώνονται σε συνεχή χρόνο.

Υπό αυτές τις προϋποθέσεις, θα πρέπει να ισχύει ότι, $E[B_t] = E[S_t]$, (όπου $E[B_t] = B_t$) για να είναι ισοδύναμες οι επενδύσεις, αλλιώτικα δεν θα υπήρχε νόημα.

Πράγματι, αν η κινδυνοουδέτερη δυναμική της $\{S_t\}_{t\geq 0}$, δηλαδή υπό το μέτρο ουδέτερου κινδύνου Q, είναι ίση με:

$$S_t = S_0 e^{(r-q)t+X_t+\omega t}, \qquad \mu\varepsilon\ \omega = v^{-1} \ln\left(1 - \frac{\sigma^2 v}{2} - \theta v\right)$$

Τότε,

$$E[S_t] = E\left[S_0 e^{(r-q)t+X_t+\omega t}\right] = \left(S_0 e^{(r-q)t}\right)\left(e^{\omega t}\right)E\left[e^{X_t}\right] = \left(S_0 e^{(r-q)t}\right)\left(e^{\omega t}\right)\varphi_{X_t}(-i)$$

$$= \left(S_0 e^{(r-q)t}\right) e^{ln\left(1-\frac{\sigma^2 v}{2}-\theta v\right)^{\frac{t}{v}}} \left(1 - i(-i)\theta v - \frac{\sigma^2 v}{2}\right)^{-\frac{t}{v}}$$

$$= \left(S_0 e^{(r-q)t}\right)\left(1 - \frac{\sigma^2 v}{2} - \theta v\right)^{\frac{t}{v}}\left(1 - \frac{\sigma^2 v}{2} - \theta v\right)^{-\left(\frac{t}{v}\right)}$$

⇨ $E[S_t] = S_0 e^{(r-q)t}$

Δηλαδή δείξαμε ότι η μέση τιμή του περιουσιακού στοιχείου που ενέχει κίνδυνο, είναι ίση με το ακίνδυνο ομόλογο με συνεχή επιτόκιο $r - q$. (βλ. ορισμό 4.2.1)

Στην απόδειξη χρησιμοποιήθηκε η χαρακτηριστική συνάρτηση της VG που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 2.3.4. Η X_t είναι μια ανέλιξη VG με παραμέτρους σ, v και θ καθώς και η S_0 είναι μια γνωστή αρχική τιμή του περιουσιακού στοιχείου (συνήθως τρέχουσα τιμή).

4.4.2. Μοντελοποίηση Μοντέλου Variance Gamma

Προχωρώντας, υπενθυμίζουμε από τα δομικά μοντέλα, ότι για να συμβεί αθέτηση θα πρέπει η αξία του περιουσιακού στοιχείου μιας εταιρείας να πέσει κάτω από ένα προκαθορισμένο φράγμα. Σε αυτό το μοντέλο θα θεωρήσουμε ότι το φράγμα είναι σταθερό στο χρόνο, δηλαδή ντετερμινιστικό και δεν αλλάζει στοχαστικά στο χρόνο όπως είχαμε δει στο μοντέλο $CreditGrades^{TM}$. Έχοντας ορίσει ως σ.α $\{S_t\}_{t\geq 0}$την τιμή του συγκεκριμένου περιουσιακού στοιχείου και ως L την τιμή του φράγματος, την στιγμή του πιστωτικού γεγονότος, θα πρέπει υπό το μέτρο P, η συνθήκη για να υπάρξει αθέτηση, να ορίζεται ως:

$$S_t \leq L \Leftrightarrow S_0 e^{X_t} \leq L \Leftrightarrow X_t \leq \ln\left(\frac{L}{S_0}\right)$$

Και η κινδυνοουδέτερη πιθανότητα (δηλαδή υπό το ισοδύναμο μέτρο martingale) μη-αθέτησης από το 0 μέχρι την χρονική στιγμή t, έχει ορισθεί ως:

$$P^Q_{Surv}(t) = P_Q(S_\tau > L, για\ όλα\ τα\ 0 \leq \tau \leq t) = P_Q\left(X_\tau > \ln\left(\frac{L}{S_0}\right), για\ όλα\ τα\ 0 \leq \tau \leq t\right)$$

$$= P_Q\left(\min_{0\leq\tau\leq t} X_\tau > \ln\left(\frac{L}{S_0}\right)\right) = E_Q\left[1_{\min\limits_{0\leq\tau\leq t} X_\tau > \ln\left(\frac{L}{S_0}\right)}\right] = E_Q\left[1_{\min\limits_{0\leq\tau\leq t} S_\tau > L}\right]$$

Στην 3η ισότητα χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι η τομή όλων ενδεχομένων ισούται με την μικρότερη τομή. Επιπροσθέτως χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα της δείκτριας συνάρτησης, δηλαδή $E(1_A) = 1 \cdot P(X \in A) + 0 \cdot P(X \notin A) = P(X \in A)$. Ακόμη σημειώνεται ότι η δυναμική της S_t θα δίνεται τώρα υπό το μέτρο Q, την οποία είδαμε στο 4.4.1.

Τώρα για να υπολογίσουμε την τιμή του ετήσιου spread, θα πρέπει υπολογισθεί πρώτα η πιθανότητα μη-αθέτησης και ύστερα αντικαθιστώντας την τιμή στον τύπο που καταλήξαμε στην Ενότητα 3.8.

Τέλος, μια διαφορετική προσέγγιση της τιμολόγησης του spread, είναι αν υποθέσουμε ότι: πληρώνεται 1 ν.μ. στην λήξη (χρόνος ωρίμανσης) T ενός συμβολαίου, εάν δεν ξεπεράσει καθ' όλη την διάρκεια ζωής του συμβολαίου η τιμή S_t ένα ποσό L. Συνεπώς η τ.μ. που «κωδικοποιεί» τις συνθήκες που ορίσαμε, είναι:

$$Z = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ S_t > L\ \gamma\iota\alpha\ \acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ t \in [0,T] \\ 0, & \alpha\nu\ S_t \leq L\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\pi o\iota o\ t \in [0,T] \end{cases}$$

Παίρνοντας μέσες τιμές υπό το μέτρο Q και προεξοφλώντας την στο σημείο μηδέν, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E_Q(e^{-rT}Z) = e^{-rT}E_Q(Z) &= e^{-rT}\left[1 \cdot P_Q(Z=1) + 0 \cdot P_Q(Z=0)\right] \\ &= e^{-rT}P_Q(S_t > L\ \gamma\iota\alpha\ \acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ t \in [0,T]) = e^{-rT}P^Q_{Surv}(T) \\ &= e^{-rT}E_Q\left[1_{\min\limits_{0\leq\tau\leq T} S_\tau > L}\right] \end{aligned}$$

Άρα, ορίζοντας την ποσότητα:

$$BDOB(T,L) = e^{-rT}E_Q\left[1_{\min\limits_{0\leq\tau\leq T} S_\tau > L}\right] = e^{-rT}P^Q_{Surv}(T)$$

Η οποία, είναι η τιμή ενός δυαδικού option κάτω και έξω φράγματος (Binary Down and Out Barrier) με χρόνο ωρίμασης T και τιμή φράγματος L. Το option αυτό ανήκει στα εξωτικά παράγωγα (exotic derivatives) και πληρώνει αν η τιμή του περιουσιακού στοιχείου S_t δεν ξεπεράσει το φράγμα L καθ'όλη την διάρκεια «ζωής» του, αλλιώτικα δεν θα πληρώσει τίποτα, αξία μηδέν.

Η αξία του spread θα γίνει αντίστοιχα ως:

$$\begin{aligned} c = \frac{-(1-R)\int_0^T e^{-rs} dP^Q_{Surv}(s)}{\int_0^T e^{-rs}P^Q_{Surv}(s)ds} &= \frac{(1-R)\left(1 - e^{-rT}P^Q_{Surv}(T) - r\int_0^T e^{-rs}P^Q_{Surv}(s)ds\right)}{\int_0^T e^{-rs}P^Q_{Surv}(s)ds} \\ &= \frac{(1-R)\left(1 - BDOB(T,L) - r\int_0^T BDOB(s,L)ds\right)}{\int_0^T BDOB(s,L)ds} \end{aligned}$$

και η 2η ισότητα προέκυψε έπειτα από πράξεις, χρησιμοποιώντας την «τακτική» του απειροστικού λογισμού, ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

4.4.3. Η Μαθηματική Μοντελοποίηση

Μέσω της εισαγωγής του $BDOB$ option μπορούμε πλέον να τιμολογήσουμε το spread, υπολογίζοντας μόνο το $BDOB$. Ειδικότερα, θα πρέπει να λυθεί μια μερική ολόκληρο-διαφορική εξίσωση με αριθμητικές μεθόδους, η οποία όπως θα δούμε, προϋποθέτει την γνώση εξειδικευμένων αριθμητικών μεθόδων, πράγμα που θα αποφύγουμε να αναπτύξουμε λεπτομερώς σε αυτή την διπλωματική.

Αρχικά, θεωρούμε έναν χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και μια διήθηση στο χώρο $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ παραγόμενη από την σ.α. $\{S_t\}_{t\geq 0}$, η οποία θα θεωρήσουμε ότι είναι η σ.α. που πληρώνει 1 ν.μ. όταν $S_T < L$ και 0 ν.μ. αλλιώς, με χρόνο λήξης συμβολαίου T.

Οπότε, βλέποντας την σ.α. V_t σαν συνάρτηση του περιουσιακού στοιχείου S_t και το χρόνο t, θα έχουμε:

$$V(S_t, t) = e^{-rt} E_Q\left[1_{S_T<L} \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

Χωρίς να μπούμε σε πολλές τεχνικές λεπτομέρειες, ενδεικτικά, θα αναφέρουμε ότι η προεξοφλημένη τιμή του Ευρωπαϊκού option, είναι διαδικασία martingale και μέσω της απειροελάχιστης γεννήτριας (infinitesimal generator)[33] $\mathcal{L}$, θα ισχύει ότι :

$$\mathcal{L}\left(e^{-rt} V(S_t, t)\right) = 0$$

Το οποίο αποδεικνύεται ότι θα ισούται με ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[V(S_{t-}e^x, t) - V\left(S_{t\_}, t\right) - \frac{\partial V}{\partial S}\left(S_{t\_}, t\right) S_{t\_}(e^x - 1)\right] \Pi(dx)$$
$$+ \frac{\partial V}{\partial t}(S_t, t) + (r - q) S_t \frac{\partial V}{\partial S}(S_t, t) - rV\left(S_t, t\right) = 0$$

με το $\Pi(dx)$ να είναι το μέτρο Lévy.

Η συνέχεια θα είναι να λυθεί η πάνω μερική ολόκληρο-διαφορική εξίσωση και που για την λύση της χρησιμοποιούνται εξειδικευμένες αριθμητικές μέθοδοι. Ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [18], καθώς και του [24] για την τιμολόγηση των Αμερικανικών options υπό το ίδιο μοντέλο, όπου δίνεται η λύση της πάνω εξίσωσης με λεπτομέρειες.

4.4.4. Η Προσομοίωση του Μοντέλου

Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με τον τρόπο προσομοίωσης του μοντέλου. Είδαμε από την προηγούμενη παράγραφο, ότι θα πρέπει να λυθεί η μερική ολόκληρο-διαφορική εξίσωση ώστε να τιμολογηθεί το spread του πιστωτικού παραγώγου. Κάτι τέτοιο θα ήταν αρκετά δύσκολο, διότι πρέπει να διατρέξουμε σε αριθμητικές μεθόδους για να το επιτύχουμε. Παρόλο που στο άρθρο [18] οι τιμές των spread υπολογίζονται με τον τρόπο της προηγούμενης παραγράφου (4.4.3), εμείς εδώ θα δούμε πιο απλά τον υπολογισμό αυτό, μέσω προσομοίωσης.

Ειδικότερα, όπως έχουμε ήδη αναφέρει από το 2ο κεφάλαιο, η σ.α. Variance Gamma, είναι η διαφορά δύο ανελίξεων Gamma με παραμέτρους $C, G\ και\ M$.

[33] Απειροελάχιστη γεννήτρια μιας ανέλιξης Markov $\{V_t\}_{t\geq 0}$ δείχνει πολλές πληροφορίες για την ανέλιξη. Ο ορισμός της είναι περίπλοκος και πρέπει να ορισθούν πιο σύνθετες μαθηματικές έννοιες από τον απειροστικό και τον στοχαστικό λογισμό.

Συνεπώς, μπορεί να προσεγγισθεί από την διαφορά δύο ανελίξεων Gamma, όπου:

$$X_t = G_t^{(1)} - G_t^{(2)}$$

όπου η $\{G_t^1\}_{t\geq 0}$ έχει παραμέτρους $\alpha = C, \beta_1 = M$ και η $\{G_t^2\}_{t\geq 0}$ έχει παραμέτρους $\alpha = C, \beta_2 = G$.

Τα βήματα που ακολουθούνται είναι τα εξής:

Βήμα 1ο : Θέτουμε τις παραμέτρους $\alpha, \beta_1, \beta_2, S_0$, τον αριθμό των προσομοιώσεων k, τον ορίζοντα T και τον αριθμό βημάτων $n = 252 \cdot T$

Βήμα 2ο : Προσομοιώνουμε n τιμές από την κατανομή $Gamma_1$ και $Gamma_2$, όπου $x_i^{(1)} \sim G(\alpha h, \beta_1)\ και\ x_i^{(2)} \sim G(\alpha h, \beta_2)$, με $h = \frac{T}{n}$

Βήμα 3ο : Θέτουμε $G_0^{(1)} = 0,\ G_{ih}^{(1)} = G_{(i-1)h}^{(1)} + x_i^{(1)}\ \ με\ i = 1,2, \dots, n$

Βήμα 4ο : Θέτουμε $G_0^{(2)} = 0,\ G_{ih}^{(2)} = G_{(i-1)h}^{(2)} + x_i^{(2)}\ \ με\ i = 1,2, \dots, n$

Βήμα 5ο : Θέτουμε την ανέλιξη $X_{ih} = G_{ih}^{(1)} - G_{ih}^{(2)}$, για κάθε $i = 1,2, \dots, n$

Βήμα 6ο : Θέτουμε $S_{ih} = S_0 e^{(r-q)ih + X_{ih} + \omega ih}$, με $\omega = v^{-1} \ln\left(1 - \frac{\sigma^2 v}{2} - \theta v\right)$, $v = \frac{1}{C}$, $\sigma^2 = \frac{2C}{MG}$ και $\theta = \frac{C(G-M)}{MG}$

Βήμα 7ο : Ορίζουμε το option $BDIB_t$[34] $= e^{-r(T-t)}\left(1_{\min\limits_{1\leq u\leq t} S_u < L}\right)$ σε κάθε μια από τις k προσομοιώσεις, παίρνοντας έπειτα τον μέσο όρο αυτών. Εναλλακτικά, τιμολογούμε το $BDOB$ αντίστοιχα όπως δείξαμε στην παράγραφο 4.4.2.

Βήμα 8ο : Τέλος αντικαθιστούμε τις ποσότητες που βρήκαμε στην συνάρτηση του spread (όπως ορίσθηκε στο 4.4.2) και βγάζουμε το αποτέλεσμα.

Παρατηρήσεις:

i. Στο βήμα 1, θέσαμε $n = 252 \cdot T$, διότι υποθέτουμε ότι 252 είναι οι εργάσιμες ημέρες και άρα για χρονικό ορίζοντα $T = 3$, θα κάνει $n = (252)(3) = 756$ βήματα η ανέλιξη, δηλαδή θα αλλάξει n φορές η τιμή του.
ii. Τα βήματα 2-7 είναι μέσα στο βρόγχο της προσομοίωσης, k τον αριθμό.
iii. Εναλλακτικός τρόπος προσομοίωσης των βημάτων 2-5 παρουσιάζεται στο [12].
iv. Στο βήμα 6 η τιμή S, ορίζεται υπό το μέτρο ουδέτερου κινδύνου Q

[34] Είναι το συμπληρωματικό option του $BDOB$, το οποίο $BDIB$ – (Binary Down and in Barrier) πληρώνει αν η τιμή του περιουσιακού στοιχείου V_t πέσει κάτω από φράγμα L κάποια στιγμή, μέχρι τον χρόνο ωρίμανσης του συμβολαίου T. Δηλαδή, ορίζεται ως : $BDIB_t(T, L) = e^{-r(T-t)} E_Q\left[1_{\min\limits_{0\leq\tau\leq t} S_\tau < L}\right]$, για κάθε t. Η σύνδεση της με το option $BDOB(T, L) = e^{-rT} - BDIB(T, L)$.

4.4.5. Αριθμητικά Πειράματα

Θα παρουσιάσουμε κάποια αρχικά αριθμητικά πειράματα. Για ακρίβεια θα ορίσουμε την αρχική αξία ενός περιουσιακού στοιχείου ίσο με $S_0 = 100$, το φράγμα $L = 50$, το επιτόκιο $r = 0.0421$, χωρίς να υπάρχει συνεχές μέρισμα ($q = 0$) και σε χρόνο ωρίμανσης $T = 1$ έτος. Επιπλέον, οι παράμετροι που ορίζονται μιας VG ανέλιξης θα είναι ίσοι με: $\sigma = 0.20722$, $\nu = 0.50215$ και το $\theta = -0.22898$. Ακόμη αναφέρεται ότι θα έχουμε $n = 252$ μονοπάτια (δηλαδή να μπορεί να αλλάξει η τιμή, υποθέτοντας ότι είναι ο μέσος αριθμός ημερών στον οποίο το χρηματιστήριο παραμένει ενεργό, δηλαδή χωρίς τις αργίες και τα Σαββατοκύριακα).

Αριθμός Προσομοιώσεων	BDIB	BDOB	spread (bps)
$\mathrm{k} = 10^4$	0.023778	0.934996	123.9522
$\mathrm{k} = 10^5$	0.025638	0.933136	133.7909

Πίνακας 11: Αριθμητικό Παράδειγμα

Φυσικά, η μέθοδος της προσομοίωσης είναι μια προσεγγιστική μέθοδος για να βρεθεί το αποτέλεσμα μας και όσο το δυνατόν περισσότερες επαναλήψεις του πειράματος συμβαίνουν, τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια θα έχει το αποτέλεσμα μας. Δυστυχώς στο μοντέλο μας, είναι αδύνατον να υπάρξουν πάρα πολλές επαναλήψεις, διότι είναι αρκετά χρονοβόρες. Για αυτό το λόγω θα περιορισθούμε στις $k = 10^4$ επαναλήψεις, έχοντας κατά νου, το γεγονός ότι το αποτέλεσμα να ένα ποσοστό σφάλματος το οποίο υπόκειντο στην προσομοίωση, παρά στου μοντέλου. Το άρθρο [18], κάνει χρήση της μεθόδου με την διακριτοποίηση της μερικής ολόκληρο – διαφορικής εξίσωσης, όπου και δίνει «καλύτερα» αποτελέσματα, εξαλείφοντας το πρόβλημα της προσομοίωσης.

4.4.6. Βαθμονόμηση Μοντέλου – Calibration

Η μέθοδος της βαθμονόμησης χρησιμοποιείται για να δείξουμε κατά πόσο το μοντέλο μας μπορεί είναι ικανό να προσαρμοστεί στα χαρακτηριστικά τις αγοράς. Ειδικότερα θα λάβουμε δείγμα των τρεχόντων spreads (όχι ιστορικά στοιχεία) από την αγορά και με βάση αυτό το δείγμα θα προσπαθήσουμε να ελαχιστοποιήσουμε μια (μη-γραμμική) συνάρτηση του μοντέλου μας ώστε να βρούμε τις βέλτιστες παραμέτρους που ελαχιστοποιούν την συνάρτηση αυτή και να τις χρησιμοποιήσουμε για να εκτιμήσουμε την τιμή των spreads.

Η συνάρτηση που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί είναι η ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (Root Mean Square Error), δηλαδή:

$$rmse = \sqrt{\sum_{\text{Αριθμός } CDS} \frac{(\text{Τιμές Αγοράς των } CDS - \text{Τιμές Μοντέλου των } CDS)^2}{\text{Αριθμός Τιμών των } CDS}}$$

όπου οι τιμές των CDS αναφέρονται σε μόνο μια συγκεκριμένη οντότητα αναφοράς και με διαφορετικούς φυσικά χρόνους ωρίμανσης.

Οι παράμετροι που προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση της πάνω συνάρτησης, είναι για την τιμολόγηση των τρεχόντων spreads και δεν μπορούν να ξαναχρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση των spreads σε μελλοντικό χρόνο, μιας που η αγορά όπως έχουμε αναφέρει συχνά υπόκειντο σε αβεβαιότητα, καθώς και η χρησιμοποίηση τους σε άλλη οντότητα αναφοράς είναι άστοχη, μιας που αλλάζει η πιθανότητα αθέτησης π.χ. από εταιρεία σε εταιρεία, ακόμη και για τον ίδιο κλάδο, κάτι που έχουμε δει στην παράγραφο 3.4 και 3.5.

Τέλος, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικές συναρτήσεις για την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου, τέτοιες είναι το μέσο απόλυτο σφάλμα (Average Absolute Error) και το μέσο σχετικό ποσοστό (Average Relative Percentage). Στην εκτίμηση μας θα χρησιμοποιήσουμε τη ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος που αναφέραμε αρχικά.

4.4.7. Αποτελέσματα

Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για να ελαχιστοποιηθεί η πάνω συνάρτηση μεταξύ του μοντέλου και των τιμών της αγοράς των CDS, δηλαδή η ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος ώστε να βρεθούν οι παράμετροι, είναι η Nelder – Mead simplex. Συγκεκριμένα, παρατίθεται ο πίνακας 12 του [18], όπου εκτιμήθηκαν οι παράμετροι, ενός δείγματος εταιρειών μέσω αυτής της μεθόδου, με επιτόκιο ίσο $r = 0.021$ και ποσοστό επανάκτησης $R = 40\%$.

Εταιρείες	σ	ν	θ	rmse
Mbna Insurance	0.1141	2.2507	-0.0517	2.3354
Wells Fargo	0.0182	2.2513	-0.0609	3.7621
Wal-Mart	0.0465	0.4199	-0.1697	2.1339
Merrill Lynch	0.1446	2.9404	-0.0008	2.1524
American Express	0.0825	0.5637	-0.1221	2.6209
Mcdonald's	0.1043	1.2914	-0.04	2.3291
General Motors	0.0828	1.4488	-0.15	13.49
Whirlpool	0.0428	1.1204	-0.1241	8.5203
Walt Disney	0.14	0.8057	-0.0453	1.1744
Bombardier	0.3553	2.8132	-0.0824	10.6213

Πίνακας 12: Εκτίμηση Παραμέτρων Μέσω Βαθμονόμησης

Ο πίνακας 12, περιλαμβάνει τις εκτιμήσεις των παραμέτρων για κάθε εταιρεία, μέσω της μεθόδου της βελτιστοποίησης. Ακόμη, η τελευταία στήλη του πίνακα 12, δηλώνει ότι για τις δεδομένες παραμέτρους της κάθε γραμμής, η συνάρτηση $rmse$, θα πάρει την ελάχιστη τιμή της.

Οπότε αντικαθιστώντας τις παραμέτρους που βγήκαν από την βελτιστοποίηση της συνάρτησης $rmse$, μπορούμε να εκτιμήσουμε τις τιμές των CDS.

Στον πίνακα 13 βλέπουμε, τις εκτιμήσεις του μοντέλου συγκρίνοντάς τες με τις πραγματικές τιμές τις αγοράς [18]. Να σημειωθεί δε, ότι ο κώδικας γράφτηκε στο πρόγραμμα της R και οι τιμές τις αγοράς που πάρθηκαν, ήταν της χρονολογίας 26 Οκτωβρίου του 2004, με το δείγμα των εταιρειών αριθμεί σε δέκα.

Εταιρείες	Κλίμακα Αξιολόγησης Moody's	Τύπος	1-έτος	3-έτη	5-έτη	7-έτη	10-έτη	rmse
Mbna Insurance	Aaa	Αγοράς	21	36	46	51	61	2.292235
		Μοντέλου	19.64837	38.06631	48.24724	49.64577	57.35430	
Wells Fargo	Aa1	Αγοράς	3	10	20	23	32	5.547449
		Μοντέλου	2.96548	9.11957	14.54687	17.93330	22.11635	
Wal-Mart	Aa2	Αγοράς	1	9	17	22	32	1.338936
		Μοντέλου	1.29510	8.09176	16.70451	20.78272	29.45389	
Merrill Lynch	Aa3	Αγοράς	11	20	31	36	47	2.329029
		Μοντέλου	13.21683	20.73047	30.82143	36.66048	42.39502	
American Express	A1	Αγοράς	2	12	22	26	36	2.844838
		Μοντέλου	2.506935	13.37433	23.69268	27.30531	30.19046	
Mcdonald's	A2	Αγοράς	3	10	19	23	24	3.196208
		Μοντέλου	3.106336	9.70815	15.95066	18.13363	19.7571	
General Motors	A3	Αγοράς	86	157	207	229	242	23.89568
		Μοντέλου	87.66267	131.9473	188.8698	190.1062	222.4249	
Whirlpool	Baa1	Αγοράς	16	36	66	73	86	20.2445
		Μοντέλου	17.4235	36.13955	46.79924	50.12845	52.00918	
Walt Disney	Baa2	Αγοράς	6	21	36	45	56	1.091068
		Μοντέλου	6.664745	21.52495	36.38654	45.48971	53.79876	
Bombardier	Baa3	Αγοράς	320	405	425	425	425	21.5353
		Μοντέλου	357.6964	410.8285	425.1528	422.7544	395.6949	

Πίνακας 13: Εκτίμηση του Spread

Όπως παρατηρούμε, υπάρχει κάποια απόκλιση, μικρή βέβαια. Η όποια απόκλιση του μοντέλου, οφείλεται κατά κύριο λόγω, στο ότι η τιμή του $rmse$, ήταν αρκετά υψηλή. Παράδειγμα θεωρείται η τιμή του Bombardier, ($rmse \approx 10.62$) όπου δεν έχει και τόσο καλή προσαρμογή. Πιθανότατα, το γεγονός αυτό θα οφείλεται στο, ότι η κλίμακα αξιολόγησης του είναι “Baa3”, κάτι που υποδουλώνει μεγαλύτερη πιθανότητα αθέτησης, σε σχέση με τις υπόλοιπες, το οποίο φυσικά έχει να κάνει με την κάθε εταιρεία. Επίσης, μην ξεχνάμε ότι για αυτή την απόκλιση ένα άλλο μέρος της οφείλεται στον μικρό αριθμό των προσομοιώσεων, αν και στον πάνω πίνακα χρησιμοποιήθηκαν $k = 10^4$ επαναλήψεις, ο οποίος φαινομενικά είναι μεγάλος αριθμός. Δυστυχώς, η προσομοίωση του μοντέλου, ήταν αρκετά χρονοβόρα, ιδιαίτερα καθώς αυξάνεται ο ορίζοντας πρόβλεψης, η οποία θα θεωρηθεί ότι ήταν επαρκής. Φυσικά, δεν μπορούμε να αρνηθούμε ότι δεν είναι ένα ικανοποιητικό μοντέλο πρόβλεψης των spread. Εάν είχαμε λύσει την μερική ολόκληρο-διαφορική εξίσωση, τότε θα εξαλείφαμε το σφάλμα της προσομοίωσης, μιας που ο τύπος θα ήταν ακριβής και τα αποτελέσματα θα ήταν ακόμα πιο κοντά στα «αληθινά» όπως έχει δειχθεί στα [17,18]. Επιπροσθέτως στην διατριβή της Cariboni φαίνεται ξεκάθαρα, ότι τα κλασσικά μοντέλα των $CreditGrades^{TM}$ και Merton αδυνατούν να προβλέψουν τις παραπάνω τιμές αποτελεσματικά, σε σύγκριση με το μοντέλο που αναπτύξαμε (στην διατριβή [17] λύνεται το σύστημα της μερικής-διαφορικής εξίσωσης).

4.5. Συμπεράσματα

Στη διπλωματική αυτή, μελετήθηκαν στο 1ο κεφάλαιο τα βασικά στοιχεία των πιθανοτήτων και της στατιστικής. Παρουσιάσθηκαν αρκετές ιδιότητες αυτών και εφαρμογές που χρησιμοποιήθηκαν σε όλα τα κεφάλαια. Έπειτα στο 2ο κεφάλαιο, εισήχθησαν αρχικά οι βασικές στοχαστικές ανελίξεις και στη συνέχεια, οι ανελίξεις Lévy, βλέποντας παραδείγματα, ιδιαιτερότητες και ιδιότητες αυτών. Στο 3ο κεφάλαιο εισήχθησαν κάποιες βασικές χρηματοοικονομικές έννοιες, κάνοντας επιπλέον κάποιες ιστορικές αναδρομές για να εξηγήσουμε κάποια πολύ μεγάλα πιστωτικά γεγονότα, όπως την κρίση του 2007. Τελικώς, στο 4ο κεφάλαιο, προχωρήσαμε και εμείς στο συμπέρασμα ότι, μέσα από την εμπειρική κατανομή των λογαριθμικών αποδόσεων, τα κλασσικά μοντέλα, όπως για παράδειγμα του Black & Scholes αδυνατούσαν να ερμηνεύσουν τα δεδομένα μας, μιας που η εμπειρική κατανομή τους έχει υπερβολική κύρτωση και αρνητική λοξότητα.

Συνεπώς καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι οι ανελίξεις Lévy μπορούν να «πιάσουν» αυτά τα χαρακτηριστικά, καθώς και να προβλέψουν τις απότομες πτώσεις, μέσω της εισαγωγής αλμάτων που έχει η διαδικασία.

Στο μοντέλο, τώρα χρησιμοποιήθηκαν τα δεδομένα της εκτίμησης των παραμέτρων, μέσω βαθμονόμησης και διαπιστώθηκε υπό τη μέθοδο της προσομοίωσης, ότι οι εκτιμήσεις ήταν αρκετά ικανοποιητικές. Φυσικά, λόγω του μικρού μεγέθους προσομοιώσεων που έγιναν ($k = 10^4$) ήταν λογικό να μην εκτιμούν σωστά οι τιμές των spread, κάτι που δεν υπόκειντο σε πρόβλημα του μοντέλου, αλλά του μεγέθους της προσομοίωσης. Δυστυχώς δεν ήταν εφικτό να γίνουν περισσότερες προσομοιώσεις, λόγω της σοβαρής καθυστέρησης του υπολογιστικού όγκου του συστήματος. Αλλά, το μοντέλο εφόσον υπολογισθεί με την ακριβή μέθοδο, δηλαδή λύνοντας την μερική ολόκληρο-διαφορική εξίσωση μέσω αριθμητικής ανάλυσης στο [18], θα δώσει σχεδόν άριστα αποτελέσματα, μιας που έχει εξαλειφθεί ο παράγοντας προσομοίωση και σε αρκετά μικρότερο χρόνο. Το υπόδειγμα που αναπτύχθηκε, μπορεί να τιμολογήσει σύνθετα πιστωτικά παράγωγα, στα οποία η τιμή τους είναι άγνωστη, όπου είναι συνάρτηση του spread.

Κλείνοντας, θα ήταν βασικό να αναφερθεί, ότι υπάρχουν και πιο σύνθετα μοντέλα που θα μπορούσαν να δώσουν ενδεχομένως μια ακόμη καλύτερη προσαρμογή, εισάγοντας για παράδειγμα νέες παραμέτρους στο μοντέλο [37], θεωρώντας τες είτε ντετερμινιστικές (σταθερές), είτε στοχαστικές. Ή ακόμα, υποθέτοντας το ποσοστό επανάκτησης και το επιτόκιο στοχαστικό. Φυσικά, τα μοντέλα αυτά, είναι αναμενόμενο να είναι αρκετά πιο πολύπλοκα και ίσως μην βελτιώνεται αισθητά η πρόβλεψη αυτών, σε σύγκριση με κάποιων λιγότερο περίπλοκων.

Παράρτημα Α : Κύριες Κατανομές

Κατανομές	σ.π.	$\boldsymbol{E(X)}$	$\boldsymbol{Var(X)}$	$\boldsymbol{\varphi_X(u)}$
Bernoulli $b(1,p)$	$p^x(1-p)^{1-x}$, $x=0,1\ \&\ p\in(0,1)$	p	$p(1-p)$	$pe^{iu}+1-p$
Διωνυμική $b(n,p)$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$, $x=0,1,\dots,n$	np	$np(1-p)$	$\left(pe^{iu}+1-p\right)^n$
Γεωμετρική $Geo(p)$	$p(1-p)^{x-1}$, $x=1,2,\dots\ \&\ p\in(0,1)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^{iu}}{1-(1-p)e^{iu}}$
Poisson $Pois(\lambda)$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x=0,1,\dots\ \&\ \lambda>0$	λ	λ	$e^{\lambda(e^{iu}-1)}$
Διακριτή Ομοιόμορφη	$\frac{1}{k}$, $x=1,2,\dots,k$	$\frac{k+1}{2}$	$\frac{k^2-1}{12}$	$\sum_x \frac{e^{iux}}{k}$

Εικόνα 15: Κύριες Διακριτές Κατανομές

Κατανομές	**σ.π.π**	$\boldsymbol{E(X)}$	$\boldsymbol{Var(X)}$	$\boldsymbol{\varphi_X(u)}$
Ομοιόμορφη $U(a,b)$	$\frac{1}{b-a}$, $x \in [a,b]$ & $b > a$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{iub}-e^{iua}}{iu(b-a)}$
Εκθετική $Exp(b)$	be^{-bx}, $x > 0$ & $b > 0$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{b^2}$	$\frac{b}{b-iu}$
Γάμμα $G(a,b)$	$\frac{b^a x^{a-1} e^{-bx}}{\Gamma(a)}$, $a > 0$ & $b > 0$ & $x > 0$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b^2}$	$\left(\frac{b}{b-iu}\right)^a$
Normal $N(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $\mu \in \mathbb{R}$ & $\sigma > 0$ & $x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2	$e^{\mu i u - \frac{\sigma^2 u^2}{2}}$
Log-Normal $LN(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $\mu \in \mathbb{R}$ & $\sigma > 0$ & $x > 0$	$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2\mu+\sigma^2} \cdot \left(e^{\sigma^2}-1\right)$	Υπάρχει, αλλά δεν είναι σε κλειστή μορφή
Variance Gamma $VG(C,G,M)$	$\frac{(GM)^C}{\sqrt{\pi}\Gamma(C)} e^{\frac{(G-M)x}{2}} \cdot \left(\frac{\|x\|}{G+M}\right)^{C-\frac{1}{2}} \cdot \cdot K_{C-\frac{1}{2}}\left(\frac{(G+M)\|x\|}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}, C, M, G > 0$	$\frac{C(G-M)}{MG}$	$\frac{C(G^2+M^2)}{(MG)^2}$	$\left(\frac{GM}{GM+(M-G)iu+u^2}\right)^C$

Εικόνα 16: Κύριες Συνεχείς Κατανομές

Παράρτημα Β : Πίνακες Κλίμακας Αξιολόγησης

S&P	Moody's	Fitch
AAA	Aaa	AAA
AA	Aa	AA
A	A	A
BBB	Baa	BBB
BB	Ba	BB
B	B	B
CCC	Caa	CCC
CC	Ca	CC
C	C	C
D	C	D ή F

Πίνακας 14: Πίνακες Αξιολόγησης S&P, Moody's κ Fitch

Βαθμός Κατηγορίας		Moody's
Επενδυτικός (Investment)	Aaa	Βαθμολογία με την υψηλότερη ποιότητα και με τον χαμηλότερο πιστωτικό κίνδυνο
	Aa	Βαθμολογία με υψηλή ποιότητα και με χαμηλό πιστωτικό κίνδυνο
	A	Βαθμολογία με υψηλότερη του μεσαίου βαθμού και με χαμηλού πιστωτικού κινδύνου
	Baa	Βαθμολογία μεσαίου βαθμού και με μέτριο πιστωτικό κίνδυνο που μπορεί να εμπεριέχει κερδοσκοπικά χαρακτηριστικά
Κερδοσκοπικός (Speculative)	Ba	Κρίνεται ότι έχουν κερδοσκοπικά στοιχεία και υπόκεινται σε σημαντικό πιστωτικό κίνδυνο
	B	Θεωρούνται κερδοσκοπικές και υπόκεινται σε υψηλό πιστωτικό κίνδυνο
	Caa	Κρίνονται κακής ποιότητας και υπόκεινται σε πολύ υψηλό πιστωτικό κίνδυνο
	Ca	Είναι άκρως κερδοσκοπικές και είναι αρκετά πιθανόν να αθετήσουν, με κάποια προοπτική ανάκαμψης κεφαλαίου και τόκων
	C	Είναι η κατηγορία με τη χαμηλότερη αξιολόγηση και συνήθως είναι σε αθέτηση, με μικρή προοπτική ανάκτησης κεφαλαίου και τόκων

Πίνακας 15: Λεπτομερής Πίνακας Αξιολόγησης Moody's

Βαθμός Κατηγορίας		S&P
Επενδυτικός (Investment)	AAA	Εξαιρετικά ισχυρή ικανότητα εκπλήρωσης οικονομικών δεσμεύσεων
	AA	Πολύ ισχυρή ικανότητα εκπλήρωσης οικονομικών δεσμεύσεων
	A	Ισχυρή ικανότητα να ανταποκριθεί στις οικονομικές δεσμεύσεις, αλλά κάπως επιρρεπής στις οικονομικές συνθήκες και τις αλλαγές των συνθηκών
	BBB	Επαρκής ικανότητα για την εκπλήρωση των οικονομικών δεσμεύσεων, αλλά περισσότερο επηρεάζεται από τις δυσμενείς οικονομικές συνθήκες
Κερδοσκοπικός (Speculative)	BB	Είναι λιγότερο ευάλωτη βραχυπρόθεσμα, αλλά αντιμετωπίζει μεγάλες συνεχιζόμενες αβεβαιότητες δυναμικά σε δυσμενείς επιχειρηματικές, χρηματοοικονομικές και οικονομικές συνθήκες
	B	Είναι πιο ευάλωτη σε δυσμενείς επιχειρηματικές, χρηματοοικονομικές και οικονομικές συνθήκες, αλλά έχει την ικανότητα να ανταποκριθεί στις οικονομικές δεσμεύσεις
	CCC	Προσωρινά είναι ευάλωτη και εξαρτάται από ευνοϊκές επιχειρηματικές, χρηματοοικονομικές και οικονομικές συνθήκες για την εκπλήρωση οικονομικών δεσμεύσεων της
	CC	Εξαιρετικά ευάλωτη, άλλα χωρίς να έχει προκύψει το πιστωτικό γεγονός
	C	Εξαιρετικά ευάλωτη στο να μην πληρώσεις τις υποχρεώσεις τις και η τελική ανάκτηση αναμένεται να είναι μικρότερη από εκείνη των υποχρεώσεων της υψηλότερης κλίμακας
	D	Είναι να συμβεί (ή είναι ήδη) σε κατάσταση αθέτησης

Πίνακας 16: Λεπτομερής Πίνακας Αξιολόγησης S&P

Παρατηρήσεις:

1. Αξίζει να αναφερθεί ότι οι πάνω πίνακες δείχνουν τις κλίμακες αξιολόγησης μακροπρόθεσμου χρέους για πάνω από ενός έτους (Long Term Dept Ratings). Στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή για χρόνο μικρότερο του έτους (Short Term Dept Ratings) υπάρχουν άλλες διαβαθμίσεις.
2. Ο αναλυτικός πίνακας κλίμακας αξιολόγησης της Fitch δεν εισάχθηκε, διότι είναι σε μεγάλο βαθμό ανάλογος με αυτόν της S&P. Ακόμη στην τελευταία κλίμακα του, η βαθμολογία αθέτησης της επιχείρησης, αναφέρεται συνήθως ως F (Failed).
3. Ακόμη αναφέρεται ότι υπάρχουν περισσότερες ενδιάμεσες διαβαθμίσεις μεταξύ των κλάσεων Aaa και των Caa, όπως για παράδειγμα Aaa1, Baa2, κ.τ.λ. Αντίστοιχα και για την S&P υπάρχουν ενδιάμεσες διαβαθμίσεις προσθέτοντας κάποιο «+» ή «-» έπειτα από την κλίμακα βαθμολόγησης.
4. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις διαβαθμίσεις και όσων είπαμε, ο αναγνώστης παραπέμπεται στα [44-46].

Παράρτημα Γ : Μέθοδοι Προσομοίωσης

Παρακάτω, θα δούμε την τεχνική προσομοίωσης, η οποία ακολουθήθηκε στην παρούσα διπλωματική. Θα την αναπτύξουμε βήμα – βήμα ώστε να είναι κατανοητή η μεθοδολογία προσομοίωσης, με σκοπό να μπορεί να πραγματοποιηθεί σε οποιοδήποτε πρόγραμμα το οποίο εμπεριέχει βιβλιοθήκες προσομοίωσης.

Γ1. Προσομοίωση Κίνησης Brown

Βήμα 1ο : Θέτουμε την μέση τιμή μ, την διακύμανση σ, τον αριθμό των προσομοιώσεων n και τον ορίζοντα T

Βήμα 2ο : Προσομοιώνουμε n τιμές από την τυπική κανονική κατανομή, όπου $e_i \sim N(0,1)$, με $h = \frac{T}{n}$

Βήμα 3ο : Θέτουμε $B_0 = x_0,\ B_{ih} = B_{(i-1)h} + \mu h + \left(\sigma\sqrt{h}\right)e_i,\ \mu\varepsilon\ \ i = 1,2,\dots,n$

Παρατηρήσεις:

i. Σε περίπτωση που θα θέλαμε μια ανέλιξη Wiener, τότε πολύ απλά θα θέταμε $B_0 = 0$, δηλαδή $x_0 = 0$.
ii. Θεωρητικά το $x_0 \in \mathbb{R}$ και δηλώνει από που ξεκινάει η ανέλιξη Brown.
iii. Σημειώνεται ότι οι παράμετροι $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma > 0$.
iv. Για περισσότερες τροχιές, θα επαναλάβουμε την διαδικασία για $\kappa \geq 2$ (τροχιές).

Γ2. Προσομοίωση Ανέλιξης Poisson

Βήμα 1ο : Θέτουμε την παράμετρο λ και τον ορίζοντα T

Βήμα 2ο : Προσομοιώνουμε n τιμές από την ομοιόμορφη κατανομή, όπου $x_i \sim U(0,1)$, με $h = \frac{T}{n}$

Βήμα 3ο : Μέσω της σχέσης $y_n = -\frac{\log(1-x_n)}{\lambda}$, παράγονται n τιμές από την εκθετική κατανομή, με παράμετρο λ

Βήμα 4ο : Θέτουμε $sum_0 = 0,\ \ sum_i = sum_{i-1} + y_i,\ i = 1,2,\dots$

Βήμα 5ο : Θέτουμε $N_0 = 0$ και $N_{ih} = \sup(k\colon sum_k \leq ih)\,,\ i = 1,2,\dots$

Παρατηρήσεις:

i. Η σχέση y_n, προέκυψε από την μέθοδο της αντιστροφής, δηλαδή λύνοντας την $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = y$ ως προς y.
ii. Να σημειωθεί, ότι το βήμα 4, στην γλώσσα προγραμματισμού R μπορεί να επιτευχθεί εύκολα μέσω της συνάρτησης “cumsum”.
iii. Οι τιμές $sum_i, i = 1,2,\dots$ δεν είναι τίποτα άλλο από το χρόνο άφιξης του i γεγονότος.

Γ3. Προσομοίωση Ανέλιξης Gamma

Βήμα 1ο : Θέτουμε τις παραμέτρους α, β, τον αριθμό των προσομοιώσεων n και τον ορίζοντα T

Βήμα 2ο : Προσομοιώνουμε n τιμές από την κατανομή Gamma, όπου $x_i \sim G(\alpha h, \beta)$, με $h = \frac{T}{n}$

Βήμα 3ο : Θέτουμε $G_0 = 0,\ G_{ih} = G_{(i-1)h} + x_i\ \ \mu\varepsilon\ i = 1,2, \dots, n$

Παρατήρηση:

i. Εναλλακτικός τρόπος προσομοίωσης της ανέλιξη Gamma, μπορεί να βρεθεί στο [12].

Γ4. Προσομοίωση Ανέλιξης Variance Gamma

Βήμα 1ο : Θέτουμε τις παραμέτρους α, β_1, β_2, τον αριθμό των προσομοιώσεων n και τον ορίζοντα T

Βήμα 2ο : Προσομοιώνουμε δύο ανελίξεις Gamma, με $\left\{G_t^{(1)}\right\}_{t\geq 1}$να έχει παραμέτρους α, β_1 και τη $\left\{G_t^{(2)}\right\}_{t\geq 1}$να έχει παραμέτρους α, β_2 (βλ. **Γ3**)

Βήμα 3ο : Θέτουμε την ανέλιξη $\{VG_t\}_{t\geq 1} = \left\{G_t^{(1)} - G_t^{(2)}\right\}_{t\geq 1}$

Παρατηρήσεις:

i. Μια ανέλιξη Variance Gamma, έχει παραμέτρους C, M και G. Οι παράμετροι τις αντιστοιχίζονται με τις πάνω παραμέτρους που επιλέχθηκαν α, β_1, β_2 κατ' αντιστοιχία
ii. Για εναλλακτικό τρόπο προσομοίωσης ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [12].

Γ5. Προσομοίωση Μοντέλου Merton ή Black & Scholes

Βήμα 1ο : Θέτουμε την μέση τιμή μ, την διακύμανση σ, τον αριθμό των προσομοιώσεων n και τον ορίζοντα T

Βήμα 2ο : Προσομοιώνουμε n τιμές από την τυπική κανονική κατανομή, όπου $e_i \sim N(0,1)$, με $h = \frac{T}{n}$

Βήμα 3ο : Θέτουμε $GB_0 = b_0,\ GB_{ih} = GB_{(i-1)h} e^{\mu h + (\sigma\sqrt{h}) e_i},\ \mu\varepsilon\ \ i = 1,2, \dots, n$

Παρατηρήσεις:

i. Η αρχική τιμή της γεωμετρικής κίνησης Brown, δεν μπορεί να είναι 0, δηλαδή $b_0 \neq 0$ διότι είναι ο εκθετικός μετασχηματισμός μιας κίνησης Brown ($GB_t = e^{B_t}$).
ii. Αν η μέση τιμή (drift) $\mu \to -\infty$, δηλαδή η τροχιά της κίνησης Brown να τείνει στο $-\infty$, ο εκθετικός μετασχηματισμός της θα πάρει τιμές πολύ κοντά στο μηδέν. Αντίθετα, αν η τροχιά της κίνησης Brown έχει αυξητική τάση, τόσο θα αυξάνεται ο εκθετικός της μετασχηματισμός εκθετικά.

Βιβλιογραφία

Ελληνική

[1] Γιαννακόπουλος Α. Ν., *Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στην Χρηματοοικονομική*. Τόμος Ι*: Στοχαστική Ανάλυση,* Εκδόσεις: Πανεπιστημίου Αιγαίου, 2003.

[2] Καρώνη Χ., *Μοντέλα Αξιοπιστίας και Επιβίωσης*, Αθήνα: Εκδόσεις Συμεών, 2009.

[3] Κοντογιάννης Γ. και Τουμπής Σ., *Στοιχεία Πιθανοτήτων με Εφαρμογές στη Στατιστική και την Πληροφορική*, Αθήνα: Κάλλιπος, 2015.

[4] Κουμουλλής Γ. και Νεγρεπόντης Σ., *Θεωρία Μέτρου*, Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία, 2005.

[5] Κούτρας Μ. Β., *Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές* , 2η Έκδοση, Εκδόσεις Σταμούλη Α.Ε., 2016.

[6] Μίχας Ι. Δ., «Ανελίξεις Lévy: Θεωρία & Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά», «Διπλωματική Εργασία», Πανεπιστήμιο Πειραιώς, 2008.

[7] Τσίμπος Κ. και Γεωργιακώδης Φ., *Περιγραφική & Διερευνητική Στατιστική Ανάλυση Δεδομένων*, Τόμος Α, Αθήνα: Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης, 2010.

[8] Χελιώτης Δ., *Εισαγωγή στον στοχαστικό λογισμό*, Αθήνα: Κάλλιπος, 2015.

[9] Χελιώτης Δ., '*Ενα δεύτερο μάθημα στις πιθανότητες*, Αθήνα: Κάλλιπος, 2015.

[10] Χρυσαφίνου Ο., *Εισαγωγή Στις Στοχαστικές Ανελίξεις,* 2η Έκδοση, Εκδόσεις: Σοφία, 2016.

Ξενόγλωσση

[11] Applebaum D., *Lévy Process and Stochastic Calculus*, 2nd Edition, Cambridge University Press, 2009.

[12] Avramidis A. N., Ecuyer P. L. και Tremblay P.-A., "Efficient Simulation of Gamma and Variance-Gamma Processes", Proceedings of the 2003 Winter Simulation Conference Chick S., Sánchez P. J., Ferrin D., and Morrice D. J., eds, 2003.

[13] Barndorff-Nielsen O. E. and Shephard N., "Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics", *Journal of the Royal Statistical Society B* 63, 2001a, pp. 167-241.

[14] Bertoin J., *Lévy Processes*, Cambridge Tracts in Mathematics 121, Cambridge University Press, 1996.

[15] Billingsley P., *Probability and Measure*, 3rd Edition, Wiley, 1995.

[16] Black F. and Cox J., "Valuing corporate securities: some effects on bond indenture provisions", *Journal of Finance* 31, 1976, pp. 351–367.

[17] Cariboni J., "Credit Derivatives Pricing under Lévy Models", Phd Thesis, Leuven: Katholieke Universiteit Leuven, 2007.

[18] Cariboni J. and Schoutens W., “Pricing credit default swaps under Lévy models”, *Journal of Computational Finance* 10, 2007.

[19] Carr P., Geman H., Madan D. H. and Yor M., “The fine structure of asset returns: an empirical investigation”, *Journal of Business* 75, 2002, pp. 305-332.

[20] Cont R., "Empirical properties of asset returns: Stylized facts and statistical issues", *Quantitative Finance,* Volume I, 2001, pp. 223-236.

[21] Cont R. and Tankov P., *Financial modelling with jump processes,* Chapman and Hall / CRC, 2004.

[22] Gerber H. and Schiu E., “Option pricing by esscher transform”, *Transactions of the Society of Actuaries* 46, 1994, pp. 99–191.

[23] Halgreen C., “Self-decomposability of the generalized inverse Gaussian and hyperbolic distributions”, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* 47, pp. 13-18, 1979.

[24] Hirsa A. and Madan D., “Pricing american options under variance gamma”, *Journal of Computational Finance* 7, 2003.

[25] Hull J. C., Options, *Futures and Other Derivatives*, 9th Edition, Pearson, 2015.

[26] Jacod J. and Protter P., Probability essentials, 2nd Edition, Universitext, Springer-Verlag, 2003.

[27] Jarrow R. and Turnbull S., “Pricing derivative on financial securities subject to credit risk”, *Journal of Finance* 50, 1995, pp. 53–86.

[28] Knill O., *Probability and Stochastic Processes with Aplications*, Overseas Press, 2009.

[29] Kyprianou A. E., *Fluctuations of Lévy Process with Applications,* Springer, 2013.

[30] Madan D.B., Carr P., and Chang E.C., “The variance gamma process and option pricing”, *European Finance Review,* art. 2, 1998, pp.79–105.

[31] Madan D. and Seneta E., “Chebyshev polynomial approximations and characteristic function estimation”, *Journal of the Royal Statistical Society Series B* 49, 1987, pp. 163–169.

[32] Merton R., “On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates”, *Journal of Finance* 29, 1974, pp. 449–470.

[33] RiskMetrics, CreditGrates™, Technical Document, RiskMetrics Group, Inc, 2002.

[34] Sato K., *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, 1999.

[35] Sato K., Watanabe T. and Yamazato M., “Recurrence conditions for multidimensional processes of Ornstein-Uhlenbeck type”, Journal of the Mathematical Society of Japan 46, 1994, pp. 245-265.

[36] Schoutens W. and Cariboni J., *Lévy Processes in Credit Risk*, Wiley Finance, 2009.

[37] Schoutens W., *Lévy Processes in Finance, Pricing Financial Derivatives*, Willey, 2003.

[38] Schweizer M.,“On the minimal martingale measure and the föllmer-schweizer decomposition”, *Stochastic Analysis and Application* 13, 1995, pp. 573–599.

[39] Shreve S. E., *Stochastic Calculus for Finance II , Continuous - Time Models*, Springer, 2010.

[40] Standard & Poor's Global, "2021 Annual Global Corporate Default and Rating", Transition Study, S&P Global Rating, 2022.

[41] Stein E. M., Shakarchi R., *Real Analysis, Measure Theory, Integration, & Hilbert Spaces*, Princeton University Press, 2005

[42] Taleb N., *Dynamic Hedging, Managing Vanilla and Exotic Options*, Wiley, 1996.

[43] Williams D., *Probability with martingales*, Cambridge Mathematical Textbooks, Cambridge University Press, 1991.

Διαδικτυακοί Ιστότοποι

[44] https://ratings.moodys.io/ratings

[45] https://www.fitchratings.com/products/rating-definitions#about-rating-definitions

[46] https://www.spglobal.com/ratings/en/about/intro-to-credit-ratings

[47] Sovereing CDS (worldgovernmentbonds.com)