ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ & ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Ανάλυση των αναμενόμενων προεξοφλημένων συναρτήσεων ποινής των Gerber-Shiu για το ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου

Τσόρας Άγγελος

Διπλωματική εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη & Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς

Σεπτέμβριος 2022

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη & Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Ευστ. Χατζηκωνσταντινίδης – Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Δ. Αντζουλάκος – Αναπληρωτής Καθηγητής
- Μ. Κούτρας - Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

U N I V E R S I T Y O F P I R A E U S

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE & RISK MANAGEMENT

Analysis of the expected discounted penalty functions of Gerber-Shiu for the renewal model of risk theory

Tsoras Aggelos

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science & Risk Management

Piraeus, Greece

September 2022

Στην οικογένεια μου

Ευχαριστίες

Αρχικά, οφείλω να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή και επιβλέπων καθηγητή μου, κύριο Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη, για την βοήθεια και τη στήριξη που παρείχε πέραν της διπλωματικής μου εργασίας, αλλά και κατά τη φοίτηση μου στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων, με τις πολύτιμες συμβουλές και την καθοδήγηση του. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την στήριξη που μου παρείχαν σε περιόδους δύσκολες αλλά και εύκολες.

Περίληψη

Σε έναν ασφαλιστικό οργανισμό, όπου οι υπηρεσίες που παρέχει είναι οι καλύψεις έναντι κινδύνων υπάρχουν δυο πλευρές που απαρτίζουν την έννοια της ασφαλιστικής κάλυψης. Η μια πλευρά αφορά τα έσοδα του οργανισμού, δηλαδή τα ασφάλιστρα, ενώ η άλλη αφορά τα έξοδα, δηλαδή την παροχή αποζημιώσεων. Για την ομαλή λειτουργία του οργανισμού, θα πρέπει τα έσοδα να επαρκούν ώστε να καλύπτονται τα έξοδα, διότι το αντίθετο σημαίνει αθέτηση των υποχρεώσεων του οργανισμού, δηλαδή ανικανότητα παροχής αποζημιώσεων.

Η αναλογιστική επιστήμη ασχολείται με την μελέτη των ποσοτήτων αυτών και στην συγκεκριμένη εργασία ασχολούμαστε με ένα θέμα το οποίο είναι από τα σημαντικότερα στην επιστήμη αυτή. Το θέμα είναι η λεγόμενη «χρεοκοπία», δηλαδή η αθέτηση των υποχρεώσεων από τον ασφαλιστικό οργανισμό. Η μελέτη που γίνεται σε αυτή την εργασία αφορά στην παρουσίαση ενός πολύ χρήσιμου μαθηματικού εργαλείου και στον τρόπο που μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε ώστε να πάρουμε πολύτιμες πληροφορίες για ποσότητες οι οποίες είναι σχετικές με τη χρεοκοπία.

Πρόκειται για μια μαθηματική συνάρτηση η οποία έχει αρκετές παραμέτρους οι οποίες την καθιστούν τόσο πολύτιμη καθώς μπορούμε για συγκεκριμένες επιλογές των επιμέρους παραμέτρων να αντλήσουμε πλήθος πληροφοριών οι όποιες μας βοηθούν να κατανοήσουμε όσο το δυνατό καλύτερα το συμβάν της χρεοκοπίας. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται «συνάρτηση Gerber – Shiu» και πήρε το όνομα αυτό από τους Hans U. Gerber και Elias S.W. Shiu, οι οποίοι παρουσίασαν αυτό το πολύτιμο εργαλείο στο περιοδικό «The North American Actuarial Journal» τον Ιανουάριο του 1998 με τίτλο «On the time value of ruin».

Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε απαραίτητες γνώσεις που απαιτούνται για την κατανόηση του εργαλείου αυτού, ορισμένες περιπτώσεις για συγκεκριμένες παραμέτρους καθώς και την γενίκευση της συνάρτησης.

Abstract

In an insurance organization, where the services it provides are the coverage against risks, there are two aspects that make up the concept of insurance coverage. One side concerns the organization's revenue, i.e., insurance premiums, while the other concerns expenses, i.e., the provision of compensation. For the smooth operation of the organization, the revenue should be sufficient to cover the costs, because the opposite means a breach of the agency's obligations, i.e., inability to provide compensation.

Actuarial science deals with the study of these quantities and in this thesis, we deal with a subject that is one of the most important in this science. The issue is the so-called "ruin", that is, the default of obligations by the insurance organization. The study done in this paper concerns the presentation of a very useful mathematical tool and the way we can use it to get valuable information about quantities that are related to ruin.

It is a mathematical function that has several parameters that make it so valuable as we can derive a wealth of information for specific choices of individual parameters that help us to understand as best as possible the event of ruin. This function is called the "Gerber – Shiu function" and was named after Hans U. Gerber and Elias S. W. Shiu, who presented this valuable tool in "The North American Actuarial Journal" in January 1998 entitled "On the time value of ruin".

In this work we present necessary knowledge required to understand this tool, some cases for specific parameters as well as the generalization of the function.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : Εισαγωγή στη θεωρία κινδύνου 1

1.1. Εισαγωγή 1

1.2. Στοχαστικές ανελίξεις 2

1.3. Απαριθμήτριες ανελίξεις 3

1.4. Ανανεωτικές ανελίξεις 5

1.5. Μοντέλο συλλογικού κινδύνου 7

1.6. Η ανέλιξη του πλεονάσματος 8

1.7. Μετασχηματισμός Laplace 11

1.8. Ο τελεστής Dickson-Hipp 12

1.9. Η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg 15

1.10. Ο μετασχηματισμός Laplace μιας σημαντικής ολοκληρωτικής εξίσωσης 15

1.11. Ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις 16

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : Η κλασσική συνάρτηση των Gerber Shiu 21

2.1. Εισαγωγή 21

2.2. Η από κοινού πυκνότητα των $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{UT}-$ και $\boldsymbol{UT}$ 26

2.3. Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος 30

2.4. Ο χρόνος και το ύψος της πρώτης απαίτησης 42

2.5. Εφαρμογή στο κλασσικό μοντέλο Poisson 47

2.6. Εφαρμογή σε εκθετικά κατανεμημένα ύψη απαιτήσεων 54

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : Το ανανεωτικό μοντέλο με υστέρηση 61

3.1. Εισαγωγή 61

3.2. Εφαρμογή σε μια ειδική κλάση κατανομών $\boldsymbol{kdt}$ 63

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : Η γενικευμένη συνάρτηση των Gerber – Shiu 67

4.1. Εισαγωγή 67

4.2. Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος.. 71

4.3. Η από κοινού ελλειμματική προεξοφλημένη πυκνότητα των $\boldsymbol{U_{T-}}, |\boldsymbol{U_T}|, \boldsymbol{X_T}, \boldsymbol{R_{N_T-1}}$ 81

4.4. Ο χρόνος και το ύψος της πρώτης απαίτησης 86

4.5. Εφαρμογή στο κλασσικό μοντέλο Poisson 90

4.6. Εφαρμογή σε εκθετικά κατανεμημένα ύψη απαιτήσεων 98

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 : Συμπεράσματα... 109

Αριθμητική Εφαρμογή... 113

Βιβλιογραφία 121

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1 Η ανέλιξη του πλεονάσματος. *10*

Σχήμα 2 Μια τυχαία διαδρομή της ανέλιξης του πλεονάσματος Ut *και η πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό επίπεδο* *31*

Σχήμα 3 Μια τυχαία διαδρομή της ανέλιξης του πλεονάσματος Ut *που δείχνει τη χρεοκοπία όταν το αρχικό απόθεμα* $u = 0$ *31*

Σχήμα 4 Μια τυχαία διαδρομή της ανέλιξης του πλεονάσματος Ut *που δείχνει μια πτώση του πλεονάσματος να προκαλεί χρεοκοπία* *32*

Σχήμα 5 Περίπτωση 1 – Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος *34*

Σχήμα 6 Περίπτωση 2 – Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος *35*

Σχήμα 7 Περίπτωση 3 – Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος *36*

Σχήμα 8 Περίπτωση 4 – Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος *37*

Σχήμα 9 Περίπτωση 1 – Ο χρόνος και το ύψος της πρώτης απαίτησης *44*

Σχήμα 10 Περίπτωση 2 – Ο χρόνος και το ύψος της πρώτης απαίτησης *45*

Σχήμα 11 Απεικόνιση των $Y1s$ *και* $Y2s$ *για δ>0* *49*

Σχήμα 12 Απεικόνιση των $Y1s$ *και* $Y2s$ *για δ=0* *49*

Σχήμα 13 Απεικόνιση των $Y1t$ *και* $Y2t$ *για δ>0* *58*

Σχήμα 14 Απεικόνιση των $Y1t$ *και* $Y2t$ *για δ=0* *59*

Σχήμα 15 Περίπτωση 1 – Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος *73*

Σχήμα 16 Περίπτωση 2 – Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος *74*

Σχήμα 17 Περίπτωση 3 – Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος *75*

Σχήμα 18 Περίπτωση 4 – Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος *76*

Σχήμα 19 Περίπτωση 1 – Ο χρόνος και το ύψος της πρώτης απαίτησης *87*

Σχήμα 20 Περίπτωση 2 – Ο χρόνος και το ύψος της πρώτης απαίτησης *88*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : Εισαγωγή στη θεωρία κινδύνου

1.1. Εισαγωγή

Η θεωρία κινδύνου είναι ένας όρος ο οποίος χρησιμοποιείται για να περιγράψει γενικότερα την περιοχή ενασχόλησης των ασφαλιστικών στελεχών / αναλογιστών / διαχειριστών κινδύνου, για την χάραξη στρατηγικών σχετικά με τα έσοδα – έξοδα των ασφαλιστικών οργανισμών. Οι ασφαλιστικοί οργανισμοί έχουν ως κύρια ενασχόληση τη δημιουργία χαρτοφυλακίων κινδύνων. Οι κίνδυνοι αυτοί συνδέονται με τα έσοδα και τα έξοδα όπως αναφέραμε, ωστόσο μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου και ο σκοπός είναι η μεταξύ τους μεταβολή να είναι ελεγχόμενη, καθώς μπορεί να επηρεάσει την λειτουργία του οργανισμού άμεσα.

Για τον σκοπό αυτό, οι ασφαλιστικοί οργανισμοί μελετούν τα δεδομένα τους και εφαρμόζουν μοντέλα σε αυτά, ώστε να ελέγχουν την μεταβλητότητα των εσόδων-εξόδων, ώστε να μπορεί ο οργανισμός να μπορεί να εξασφαλίσει την φερεγγυότητα των χαρτοφυλακίων του, να επανεπενδύει τα κέρδη και να μπορεί να αναπτύσσεται με την πάροδο του χρόνου.

Αρχικά, μελετώνται οι κίνδυνοι του χαρτοφυλακίου συλλογικά, με βάση τα υπάρχοντα δεδομένα και εφαρμόζονται τα μοντέλα πρόβλεψης των απαιτήσεων και έπειτα εκτιμώνται σημαντικά μέτρα. Ένα μέτρο πολύ σημαντικό είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας το οποίο αποτελεί και βασικό θέμα της παρούσας. Αφορά ένα μέτρο που είναι αρκετά δύσκολο να υπολογιστεί και ταυτόχρονα πολύ σημαντικό για τους ασφαλιστικούς οργανισμούς καθώς σχετίζεται άμεσα με την φερεγγυότητα του οργανισμού, στο αν θα μπορέσει να εκπληρώσει τις υποχρεώσεις του που είναι η κάλυψη των απαιτήσεων του χαρτοφυλακίου κινδύνων.

Επομένως, αρχικά θα παρουσιαστούν κάποια βασικά εργαλεία τα οποία χρησιμοποιούνται στη θεωρία χρεοκοπίας, που αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα κομμάτια της θεωρίας κινδύνων.

1.2. Στοχαστικές ανελίξεις

Για να μπορούμε να μελετήσουμε τις ποσότητες έσοδα, έξοδα και το πως μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου, σε έναν ασφαλιστικό οργανισμό στην προκειμένη είναι απαραίτητο να παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο γίνεται αυτό. Οι ποσότητες που αναφέραμε βασίζονται στα παρακάτω. Σε έναν ασφαλιστικό οργανισμό, υπάρχουν χαρτοφυλάκια ασφαλιστηρίων συμβολαίων, για τα οποία ο οργανισμός εισπράττει ασφάλιστρα, έστω c, σταθερό στην πάροδο του χρόνου. Αυτό ανήκει στα έσοδα. Στα χαρτοφυλάκια του οργανισμού, εμφανίζονται και απαιτήσεις με την πάροδο του χρόνου, για τα οποία παρέχονται αποζημιώσεις, έστω X_i , $\mathrm{i} = 1,2,3 \dots$. Αυτές, ανήκουν στα έξοδα. Όπως αναφέραμε νωρίτερα, το ζητούμενο είναι η μεταξύ τους μεταβολή να είναι ελεγχόμενη. Οι ποσότητες αυτές όμως παρουσιάζουν μεταβλητότητα στην πάροδο του χρόνου και οι τιμές που παίρνουν είναι τυχαίες, για αυτό αποτελούν στοχαστικές ανελίξεις.

Ορισμός 1.1.1 Μια στοχαστική ανέλιξη είναι μια οικογένεια από τ.μ. $\{X_t, t \in T\}$, όπου T είναι ένα σύνολο. Το σύνολο αυτό δηλώνει τις τιμές της παραμέτρου t της στοχαστικής ανέλιξης. Αντί για $\{X_t, t \in T\}$, συνήθως χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\{X(t) : t \in T\}$ και η παράμετρος t συμβολίζει χρόνο.

Αν ο χρόνος αυτός παίρνει διακριτές τιμές (το σύνολο T είναι αριθμήσιμο) τότε μιλάμε για μια στοχαστική ανέλιξη σε διακριτό χρόνο. Αν ο χρόνος δεν παίρνει διακριτές τιμές (το σύνολο T είναι μη αριθμήσιμο) τότε μιλάμε για μια στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο.

Μια ακόμη διάκριση που γίνεται αφορά το πλήθος των τιμών των μεταβλητών X_t. Εάν το πλήθος των τιμών αυτών είναι αριθμήσιμο, τότε μιλάμε για μια ανέλιξη με διακριτές τιμές. Διαφορετικά μιλάμε για μια ανέλιξη με συνεχείς τιμές.

1.3. Απαριθμήτριες ανελίξεις

Μια στοχαστική ανέλιξη στο χρόνο, $\{N_t, t \geq 0\}$ ονομάζεται απαριθμήτρια ανέλιξη όταν απαριθμεί το πλήθος των εμφανίσεων ενός γεγονότος στο χρονικό διάστημα $[0, t]$. Με άλλα λόγια για κάθε $\mathrm{t} \geq 0$, η μεταβλητή N_t, δηλώνει πόσες φορές έχει εμφανιστεί ένα γεγονός που μας ενδιαφέρει έως τη χρονική στιγμή t. Για παράδειγμα, μια τέτοια ανέλιξη χρησιμοποιείται για να μοντελοποιήσουμε πόσες απαιτήσεις εμφανίζονται σε μια ασφαλιστική εταιρεία για αποζημιώσεις.

Ορισμός 1.1.2 Μια στοχαστική ανέλιξη $\{ N_t, t \geq 0 \}$ λέγεται ανέλιξη Poisson όταν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1) Η $\{\mathrm{N}(t), \mathrm{t} \geq 0\}$ είναι μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη με $\mathrm{N}(0) = 0$.

2) Σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα πλάτους h, μπορεί να συμβεί το πολύ ένα γεγονός και η πιθανότητα να συμβεί αυτό το γεγονός είναι ανάλογη με το πλάτος του διαστήματος. Αυτό εκφράζεται μαθηματικά ως εξής:

$$P(N(t+h) = n + k | N(t) = n) = \begin{cases} \lambda h + o(h), & k = 1 \\ 1 - \lambda h + o(h), & k = 0 \\ o(h), & k \geq 2 \end{cases} \qquad (1.3.1)$$

Εδώ το σύμβολο $o(h)$ δηλώνει μια ποσότητα που συγκλίνει στο μηδέν πιο γρήγορα από ότι το h, καθώς $\mathrm{h} \to 0$, για παράδειγμα h^2, $h^4 - 2h^3$ κλπ.

Το λ στην παραπάνω σχέση είναι μια θετική σταθερά η οποία ονομάζεται **ένταση** ή **ρυθμός** της ανέλιξης Poisson.

3) Για κάθε $t \leq s < u$, η τ.μ. $N(u) - N(s)$ είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής $N(t)$. Δηλαδή ο αριθμός των γεγονότων που συμβαίνουν σε ένα φραγμένο διάστημα μετά τη χρονική στιγμή t είναι ανεξάρτητος από τον αριθμό των γεγονότων που συνέβησαν έως τη χρονική αυτή στιγμή.

Η ιδιότητα 3. παραπάνω μπορεί να γενικευτεί λέγοντας πως για δυο χρονικά διαστήματα ξένα μεταξύ τους , οι τυχαίες μεταβλητές που παριστάνουν τον αριθμό των γεγονότων σε καθένα από αυτά είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Μια στοχαστική ανέλιξη Poisson, έχει δυο βασικές ιδιότητες:

1) Για κάθε t, η τ.μ. $N(t)$ ακολουθεί μια κατανομή Poisson με παράμετρο λt. Συμβολικά γράφουμε $N(t) \sim Poi(\lambda t)$.

2) Μια ανέλιξη Poisson, όπως και κάθε απαριθμήτρια ανέλιξη, ορίζει μια ακολουθία από τ.μ. Y_1, Y_2, Y_3,, που λέγεται ακολουθία των χρόνων άφιξης κάποιου γεγονότος το οποίο εξετάζουμε, ως εξής:

$$Y_1 = \inf\{t: N(t) = 1\}$$

$$Y_2 = \inf\{t: N(t) = 2\}$$

$$\dots$$

$$Y_k = \inf\{t: N(t) = k\}$$

δηλαδή, η συνεχής τ.μ. Y_k παριστάνει τον χρόνο πραγματοποίησης του k-γεγονότος.

Με βάση αυτή την ακολουθία μπορούμε να ορίσουμε μια νέα ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές $\{T_k: k = 1,2,3, \dots\}$ ως εξής:

$$T_1 = Y_1$$

$$T_2 = Y_2 - Y_1$$

$$\dots$$

$$T_k = Y_k - Y_{\kappa-1}$$

Η τυχαία μεταβλητή T_k που παριστάνει τον χρόνο που μεσολαβεί μεταξύ της εμφάνισης του $k-1$ και του k-γεγονότος το οποίο εξετάζουμε. Οι μεταβλητές

$T_1, T_2, \ldots$, ονομάζονται ενδιάμεσοι χρόνοι της στοχαστικής ανέλιξης $\{N(t)\}$. Παρατηρούμε πως ενώ η $\mathrm{N}(t)$ είναι διακριτή τ.μ., οι τυχαίες μεταβλητές Y_i, T_i είναι συνεχείς για κάθε $\mathrm{i} = 1,2, \ldots$.

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει η δεύτερη ιδιότητα της ανέλιξης Poisson.
Έστω $T_1, T_2, \ldots$, οι ενδιάμεσοι χρόνοι σε μια ανέλιξη Poisson. Τότε για κάθε $\mathrm{i} \neq j$ οι μεταβλητές T_i, T_j είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και καθεμία ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.
Η απόδειξη της παραπάνω ιδιότητας δεν αποτελεί αντικείμενο της μελέτης μας και παραλείπεται.

1.4. Ανανεωτικές ανελίξεις

Μια γενίκευση της ανέλιξης Poisson αποτελεί η ανανεωτική ανέλιξη. Αναφέραμε νωρίτερα πως σε μια ανέλιξη Poisson, οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ γεγονότων αποτελούν ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με την ίδια παράμετρο.

Ορισμός 1.1.3 Μια ανανεωτική ανέλιξη $\{\mathrm{N}(t), \mathrm{t} \geq 0\}$ είναι μια απαριθμήτρια ανέλιξη στην οποία οι ενδιάμεσοι χρόνοι $T_1, T_2, \ldots$, είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την ίδια κατανομή, όχι όμως απαραίτητα την εκθετική.
Έστω T_i ο χρόνος από την $\mathrm{i} - 1$ έως την i-αποζημίωση. Ισχύει ότι:

$$\mathrm{F}(t) = \Pr(T_i \leq t), \mathrm{i} = 1,2,$$

με $\mathrm{F}(0) = 0$.
Έστω τώρα, $\mathrm{Y_k} = T_1 + T_2 + \cdots + T_k$, να είναι ο χρόνος αναμονής έως ότου φτάσουμε στην k -αποζημίωση. Αν για κάθε $\mathrm{t} \geq 0$, η τ.μ. $N(t)$ είναι ο αριθμός των ανανεώσεων/γεγονότων στο διάστημα $[0, t]$, τότε η $\{\mathrm{N}(t), \mathrm{t} \geq 0\}$ είναι μια ανανεωτική ανέλιξη και ορίζεται ως:

$$N(t) = max\{k: Y_k \leq t\}$$

Σε μια ανέλιξη Poisson είδαμε ότι η κατανομή του αριθμού των γεγονότων $N(t)$ που συμβαίνουν εώς τη χρονική στιγμή t, ακολουθεί την κατανομή Poisson. Σε μια ανανεωτική ανέλιξη $\{\mathrm{N}(t), \mathrm{t} \geq 0\}$, δεν είναι εύκολο να υπολογισθεί η κατανομή του αριθμού των γεγονότων σε ένα διάστημα $[0, t]$. Για αυτό το λόγο, μελετάμε μια ποσότητα που ονομάζεται ανανεωτική συνάρτηση, συμβολίζεται με $\mathrm{m}(t)$ και ορίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mathrm{m}(t) = E[N(t)]$$

Η $\mathrm{m}(t)$ δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό γεγονότων στο διάστημα $[0, t]$.

Πρόταση 1.1 Έστω μια ανανεωτική ανέλιξη $\{\mathrm{N}(t), \mathrm{t} \geq 0\}$ στην οποία η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων είναι F και έστω $\mathrm{m}(t) = E[N(t)]$ η ανανεωτική συνάρτηση. Τότε για κάθε $\mathrm{t} \geq 0$ η $\mathrm{m}(t)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{*k}(t) \qquad (1.4.1)$$

όπου F^{*k} είναι η k-τάξης συνέλιξη της F με τον εαυτό της.

Πρόταση 1.2 Έστω F, G δυο συναρτήσεις κατανομής, τότε η συνέλιξη των F, G για $\mathrm{x} \geq 0$ συμβολίζεται με $(F \star G)$ και δίνεται από τη παρακάτω σχέση

$$(F \star G)(x) = \int_0^x F(x-t)dG(t) \qquad (1.4.2)$$

στην τελευταία σχέση το σύμβολο $\mathrm{dG}(t)$ είναι το διαφορικό της συνάρτησης G, το οποίο σε περίπτωση που η G έχει συνάρτηση πυκνότητας g μπορεί να αντικατασταθεί με $\mathrm{g}(t)\mathrm{dt}$ και η τελευταία σχέση μπορεί να γραφτεί

$$(F \star G)(x) = \int_0^x F(x-t)g(t)dt\,. \qquad (1.4.3)$$

Πρόταση 1.3 Η ανανεωτική συνάρτηση $\mathrm{m}(t)$ ικανοποιεί την παρακάτω ανανεωτική εξίσωση

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)dF(x), \quad t \geq 0\,. \qquad (1.4.4)$$

Πρόταση 1.4 Γενικά, μια εξίσωση ονομάζεται ανανεωτική εξίσωση όταν έχει την παρακάτω μορφή

$$Z(t) = g(t) + \varphi \int_0^t Z(t-x)dF(x), \quad t \geq 0\,. \qquad (1.4.5)$$

Στην παραπάνω σχέση το φ είναι μια σταθερά τέτοια ώστε $0 < \varphi \leq 1$, η g είναι μια φραγμένη συνάρτηση, η F είναι μια συνάρτηση κατανομής ενώ η Z είναι μια άγνωστη συνάρτηση. Σε μια ανανεωτική εξίσωση αυτό που έχει σημασία είναι πως ο «άγνωστος» είναι μια συνάρτηση και όχι πραγματικός αριθμός.
Οι ανανεωτικές εξισώσεις διακρίνονται σε:

a. *Ελλειμματικές (defective) όταν* $0 < \varphi < 1$
b. *Μη ελλειμματικές (non-defective) όταν* $\varphi = 1$.

1.5. Μοντέλο συλλογικού κινδύνου

Στη θεωρία κινδύνου τους αναφέραμε στην εισαγωγή τους ενδιαφέρει να μελετήσουμε τους παράγοντες έσοδα – έξοδα. Αυτή η μελέτη σε έναν ασφαλιστικό οργανισμό γίνεται σε επίπεδο χαρτοφυλακίου, επομένως οι εκτιμήσεις σε ένα χρονικό ορίζοντα προκαθορισμένο γίνονται συλλογικά. Τους είναι ο λόγος που είναι απαραίτητο ένα μοντέλο συλλογικού κινδύνου.

Οι εκτιμήσεις απαιτήσεων του χαρτοφυλακίου γίνονται με βάση ένα μοντέλο, το οποίο έχει μια κατανομή, έστω G, η οποία αποτελεί την κατανομή των συνολικών απαιτήσεων. Η κατανομή αυτή πρέπει να είναι κατάλληλη ώστε να μπορεί ταυτόχρονα να προσφέρει μια «καλή» εκτίμηση του ύψους των ζημιών, καθώς και του πλήθους των ζημιών. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε πως αναφερόμαστε σε μια σύνθετη κατανομή.

Έστω S να είναι το ύψος των συνολικών απαιτήσεων του χαρτοφυλακίου.
Αν,

- $X_1, X_2, X_3, \ldots$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους τυχαίες μεταβλητές που εκφράζουν τα μεγέθη των ζημιών
- N μια τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το συνολικό πλήθος των ζημιών

τότε, εφόσον οι $X_1, X_2, X_3, \ldots$, είναι ανεξάρτητες από την N, οι συνολικές απαιτήσεις του χαρτοφυλακίου δίνονται από τη παρακάτω σχέση

$$S = \begin{cases} X_1 + X_2 + \cdots + X_N = \sum_{i=1}^{N} X_i\,, & N = 1,2,\ldots \\ 0, & N = 0 \end{cases} \qquad (1.5.1)$$

1.6. Η ανέλιξη του πλεονάσματος

Στην προηγούμενη ενότητα παρουσιάσαμε το μοντέλο συλλογικού κινδύνου το οποίο αφορούσε μόνο στη μελέτη των απαιτήσεων, δηλαδή, το κομμάτι των εξόδων από του παράγοντες «έσοδα – έξοδα» που έχουμε αναφερθεί αρκετές φορές κατά τη μελέτη της. Στη συνέχεια θα η μελέτη της θα συμπεριλάβει και το κομμάτι των εσόδων. Της, ενώ προηγουμένως η μελέτη αφορούσε προκαθορισμένο χρονικό ορίζοντα, τώρα θα επεκταθούμε στη μελέτη ποσοτήτων που μεταβάλλονται στο χρόνο.

Οι αλλαγές που θα κάνουμε είναι οι παρακάτω:

- Στη θέση της τυχαίας μεταβλητής N που εκφράζει το συνολικό πλήθος των απαιτήσεων, θα χρησιμοποιούμε την απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη $\{\mathrm{N}(t), \mathrm{t} \geq 0\}$, η οποία θα απαριθμεί το συνολικό πλήθος απαιτήσεων στο χρόνο.
- Το μοντέλο συλλογικού κινδύνου που παρουσιάσαμε μετατρέπεται σε μια στοχαστική ανέλιξη $\{\mathrm{S}(t), \mathrm{t} \geq 0\}$.

Έτσι, οι συνολικές απαιτήσεις πλέον εκφράζονται στο χρόνο, από την παρακάτω στοχαστική ανέλιξη

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i\,, & N(t) \geq 1 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases} \tag{1.6.1}$$

η οποία λόγω του ότι η απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη $\mathrm{N}(t) \sim Poi(\lambda t)$, αποτελεί μια σύνθετη στοχαστική ανέλιξη Poisson.

Έστω μια συνάρτηση $\mathrm{P}(t)$ η οποία εκφράζει τα συνολικά ασφάλιστρα που εισπράττει η εταιρεία στο διάστημα $[0, t]$. Τα ασφάλιστρα είναι σταθερά στο χρόνο και η συνάρτηση δεν αποτελεί στοχαστική ανέλιξη. Στην μελέτη μας, η συνάρτηση των ασφαλίστρων αποτελεί μια γραμμική συνάρτηση $\mathrm{P}(t) = \mathrm{ct}$, όπου c είναι το ασφάλιστρο που εισπράττει η εταιρεία στο διάστημα $[0, t]$.

Επίσης, θα υποθέσουμε πως η εταιρεία για κάθε χαρτοφυλάκιο έχει ένα αποθεματικό έστω u, σε περίπτωση όπου κατά την έναρξη λειτουργίας του χαρτοφυλακίου να υπάρχει εξασφάλιση για κάποια πολύ μεγάλη απαίτηση.

Ορισμός 1.1.4 Η ανέλιξη του πλεονάσματος $\{\mathrm{U(t)}, \mathrm{t} \geq 0\}$ ορίζεται για κάθε $\mathrm{t} \geq 0$ από την παρακάτω σχέση

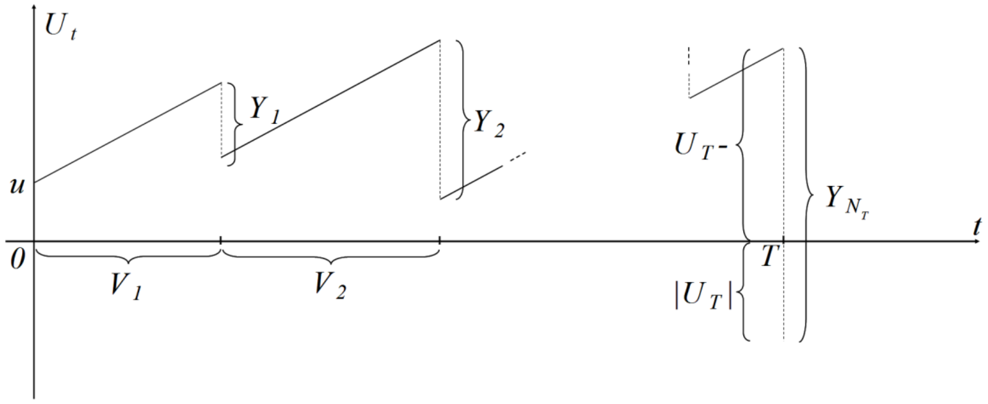
$$U(t) = u + P(t) + S(t) \tag{1.6.2}$$

όπου:

- u το αποθεματικό που διαθέτει η εταιρεία για το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο
- $\mathrm{P}(t)$ το συνολικό ασφάλιστρο που εισπράττει η εταιρεία στο διάστημα $[0, t]$
- $S(t)$ η σύνθετη ανέλιξη για επίσης συνολικές απαιτήσεις του χαρτοφυλακίου στο διάστημα $[0, t]$

Η ποσότητα $\mathrm{U}(t)$ ονομάζεται αποθεματικό ή πλεόνασμα κατά τη χρονική στιγμή t ενώ η ποσότητα $\mathrm{U}(0) = \mathrm{u}$ ονομάζεται αρχικό αποθεματικό ή αρχικό πλεόνασμα (initial surplus.

Η μελέτη επίσης αφορά επίσης ποσότητες έσοδα – έξοδα οι οποίες για επίσης είναι ασφάλιστρα και απαιτήσεις αντίστοιχα. Είσαγαμε την έννοια επίσης ανέλιξης του πλεονάσματος η οποία εκφράζει τα έσοδα και τα έξοδα που αναφέραμε προηγουμένως στο χρόνο. Επομένως επικεντρώνουμε την ανάλυση στην ποσότητα που λέγεται πλεόνασμα.Όταν η ποσότητα αυτή γίνει για πρώτη φορά στο χρόνο αρνητική, τότε λέμε ότι συμβαίνει χρεοκοπία. Στη θεωρία κινδύνου, η χρεοκοπία δεν είναι απόλυτη έννοια, αλλά αναφέρεται στην φερεγγυότητα του χαρτοφυλακίου κινδύνων που μελετάμε. Όταν συμβαίνει η χρεοκοπία το χαρτοφυλάκιο εξακολουθεί να υφίσταται ώστοσο η απώλεια που προκαλείται είναι αναγκαίο να αναπληρωθεί με επίσης διαθέσιμους πόρους του ασφαλιστικού οργανισμού. Ο σκοπός επίσηςι να επίσηςφευχθεί το συμβάν αυτό και να παραμένει το πλεόνασμα θετικό καθώς αυτό σημαίνει πως επιτυγχάνεται κερδοφορία.



Σχήμα 1 Η ανέλιξη του πλεονάσματος.

Να αναφέρουμε πως η απαίτηση που προκαλεί χρεοκοπία Y_{N_T} δίνεται από $U_{T-} + |U_T|$. Επίσης, υποθέτουμε πως το ασφάλιστρο c ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη του περιθωρίου ασφαλείας

$$cE[V] > E[Y] \tag{1.6.3}$$

έτσι ώστε η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u) < 1$ καθώς της συχνά θεωρούμε $c = (1+\theta)E[Y]/E[V], \theta > 0$.

1.7. Μετασχηματισμός Laplace

Στη μελέτη της θα χρησιμοποιήσουμε συχνά της μετασχηματισμούς Laplace που είναι απαραίτητοι για την λύση ορισμένων ανανεωτικών εξισώσεων.

Ορισμός 1.1.5 Για μια συνάρτηση κατανομής $\mathrm{F}(x)$, $\mathrm{x} \geq 0$ με $\mathrm{F}(0-) = 0$, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης ορίζεται ως:

$$\tilde{F}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x) \quad (1.7.1)$$

Αν η F είναι συνεχής συνάρτηση κατανομής με συνάρτηση πυκνότητας f, ή γενικά μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[0, \infty]$ τότε ο μετασχηματισμός Laplace δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \ , \ s \geq 0 \quad (1.7.2)$$

Πρόταση 1.5 Έστω F, G δυο συναρτήσεις κατανομής και $\tilde{F}(s), \tilde{G}(s)$ οι μετασχηματισμοί Laplace αντίστοιχα. Τότε, η συνέλιξη των F, G δίνεται από τη παρακάτω σχέση

$$(\widetilde{F \star G})(s) = \tilde{F}(s) \cdot \tilde{G}(s), s \geq 0 \ . \quad (1.7.3)$$

Επίσης, εάν οι f, g είναι δυο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[0, \infty]$, τότε ισχύει

$$(f \star g)(x) = \int_0^x f(x-y) g(y) dy \, , x \geq 0 \quad (1.7.4)$$

και ο μετασχηματισμός Laplace των τελευταίων δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$(\widetilde{f \star g})(s) = \tilde{f}(s) \cdot \tilde{g}(s), s \geq 0 \quad (1.7.5)$$

από την οποία μπορούμε να διαπιστώσουμε πως ο μετασχηματισμός Laplace μας συνέλιξης δυο συναρτήσεων πυκνότητας είναι ίσος με το γινόμενο των μετασχηματισμών Laplace των συναρτήσεων πυκνότητας.

1.8. Ο τελεστής Dickson-Hipp

Ο τελεστής Dickson – Hipp αποτελεί μια συνάρτηση η οποία μας βοηθάει στο να προσδιορίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace μας συνάρτησης Gerber-Shiu που θα δούμε παρακάτω στην μελέτη μας.

Ορισμός 1.1.6 Για μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $\mathrm{f}(x)$ και $\mathrm{r} \in R$ ο τελεστής Dickson-Hipp ορίζεται ως

$$T_r f(x) = e^{rx} \int_x^\infty e^{-ry} f(y) dy = \int_x^\infty e^{-r(x-y)} f(y) dy \qquad (1.8.1)$$

όπου: $\mathrm{r} : \left|\tilde{f}(r)\right| < \infty$

Οι βασικές ιδιότητες του τελεστή είναι:

1) Αν θέσουμε όπου $\mathrm{x} = 0$ τότε παίρνουμε : $T_r \mathrm{f}(0) = \int_0^\infty e^{-ry} \mathrm{f}(y) \mathrm{dy} = \tilde{f}(r)$

2) Αν θέσουμε όπου $\mathrm{r} = 0$ τότε παίρνουμε : $T_0 \mathrm{f}(x) = \int_x^\infty f(y) dy = \overline{F}(x)$

Από την πρώτη ιδιότητα μπορούμε να πούμε πως ο τελεστής Dickson-Hipp αποτελεί μια γενίκευση του μετασχηματισμού Laplace. Οι ιδιότητες του τελεστή αναλύονται λεπτομερώς στην μελέτη των *Li* και *Garrido 2004* και γίνεται κατανοητό γιατί είναι τόσο χρήσιμος στην ανάλυση της εξίσωσης των Gerber-Shiu.

Για του σκοπούς της μελέτης μας, θα χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή για να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace του ως εξής:

$$\int_0^\infty e^{-sx} T_r f(x) dx = \int_0^\infty e^{-sx} e^{rx} \int_x^\infty e^{-ry} f(y) dy dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-r)x} \int_x^\infty e^{-ry} f(y) dy dx \qquad (1.8.2)$$

Με αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης η τελευταία γράφεται ως εξής:

$$\int_0^\infty e^{-sx}\, T_r \mathrm{f}(x)\mathrm{dx} = \int_0^\infty e^{-ry}\left(\int_0^y e^{-(s-r)x}\, dx\right)\mathrm{f}(y)\mathrm{dy}$$
$$= \int_0^\infty e^{-ry}\left(\frac{1-e^{-(s-r)y}}{s-r}\right)\mathrm{f}(y)\mathrm{dy}$$
$$= \frac{\int_0^\infty e^{-ry} f(y)dy - \int_0^\infty e^{-sy} f(y)dy}{s-r} = \frac{\tilde{f}(r)-\tilde{f}(s)}{s-r}\ ,\ \mathrm{s} \neq r$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της $\bar{F}(x)$ υπολογίζεται μέσω της σχέσης 1.8.2 ($\int_0^\infty e^{-(s-r)x} \int_x^\infty e^{-ry} f(y)dydx$), εάν θέσουμε όπου $\mathrm{r} = 0$ ως εξής:

$$\int_0^\infty e^{-sx}\bar{F}(x)dx = \int_0^\infty e^{-sx}\big(T_0 f(x)\big)dx$$
$$= \frac{1-\tilde{f}(s)}{s}$$

(1.8.3)

Έστω τώρα η Υ να είναι μια τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\mathrm{f}(y) = F'(y)$ και $F_x(y) = \mathrm{F}(x+y)/\overline{F}(x)$ η συνάρτηση υπερβάλλουσας ζημίας. Για $\mathrm{r} \in R$ θεωρούμε την παρακάτω κατανομή στην οποία θα αναφερόμαστε ως η γενικευμένη κατανομή ισορροπίας της $\mathrm{F}(x)$

$$F_{ge}(y;r) = \frac{\int_0^\infty e^{-rx\overline{F}}(x)F_x(y)dx}{\int_0^\infty e^{-rx\overline{F}}(x)dx}$$

και αν θέσουμε το $\mathrm{r} = 0$ παίρνουμε

$$F_{ge}(y;0) = \frac{\int_0^\infty \overline{F}(x)F_x(y)dx}{\int_0^\infty \overline{F}(x)dx} = \frac{\int_0^\infty F(x+y)dx}{\int_0^\infty \overline{F}(x)dx} = \frac{\int_y^\infty F(x)dx}{E[Y]}$$

που είναι η κατανομή ισορροπίας της $\mathrm{F}(y)$.

Τώρα της ορίσουμε τη γενικευμένη πυκνότητα ισορροπίας της $\mathrm{f}(y)$ ως εξής:

$$f_{ge}(y;r) = F'_{ge}(y;r) \quad (1.8.4)$$

$$= \frac{e^{ry}\int_y^\infty e^{-rx}f(x)dx}{\int_0^\infty e^{-rx\overline{F}}(x)dx}$$

την οποία αν παρατηρήσουμε θα δούμε πως ο αριθμητής είναι ο τελεστής Dickson-Hipp της $\mathrm{f}(x)$ και ο παρονομαστής είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $\overline{F}(x)$. Έτσι, χρησιμοποιώντας τη σχέση 1.8.3 ($\int_0^\infty e^{-sx}\overline{F}(x)dx = \frac{1-\tilde{f}(s)}{s}$) παίρνουμε:

$$f_{ge}(y;r) = \frac{T_r f(y)}{\frac{1-\tilde{f}(r)}{r}}$$

και έπειτα παίρνουμε τον μετασχηματισμό Laplace από την παρακάτω σχέση

$$\tilde{f}_{ge}(s;r) = \frac{r}{s-r}\frac{\tilde{f}(r)-\tilde{f}(s)}{1-\tilde{f}(r)} \quad (1.8.5)$$

που είναι ένα χρήσιμο αποτέλεσμα που θα δούμε παρακάτω.

Τέλος, να αναφέρουμε πως ο μετασχηματισμός Dickson – Hipp είναι ένας γραμμικός τελεστής για σταθερές α_i και για διαφορίσιμες συναρτήσεις $f_i(x), i = 1,2,\dots,n$

$$T_r\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i T_r\big(f_i(x)\big) \quad (1.8.6)$$

1.9. Η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg

Έστω Y και V τυχαίες μεταβλητές με την Y να δηλώνει ύψος απαιτήσεων και η V να δηλώνει τους ενδιάμεσους χρόνους απαιτήσεων. Τότε η εξίσωση του Lundberg θα δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$1 - \left[e^{-sY-(\delta-cs)V}\right] = 0 \tag{1.9.1}$$

Αν οι παραπάνω τυχαίες μεταβλητές είναι και ανεξάρτητες τότε η τελευταία σχέση ισοδυναμεί με την παρακάτω

$$1 - \tilde{p}(s)\tilde{k}(\delta - cs) = 0 \tag{1.9.2}$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε πως εάν θέσουμε $\delta = 0$ τότε η $s = 0$ μια μη αρνητική λύση της εξίσωσης. Οι (θετικές) ρίζες της παραπάνω εξίσωσης παίζουν σημαντικό ρόλο στη σχέση με την ανάλυση της εξίσωσης των Gerber-Shiu όπως θα δούμε παρακάτω.

1.10. Ο μετασχηματισμός Laplace μιας σημαντικής ολοκληρωτικής εξίσωσης

Συχνά στην ανάλυση μας για την εξίσωση των Gerber-Shiu θα συναντάμε μια εξίσωση της παρακάτω μορφής

$$\eta_\delta(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\omega_t(u + ct)k(t)dt \tag{1.10.1}$$

της οποίας μας ενδιαφέρει ο μετασχηματισμός Laplace που δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\tilde{\eta}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-su}\left(\int_0^\infty e^{-\delta t}\omega_t(u + ct)k(t)dt\right)du$$

$$= \int_0^\infty e^{-(\delta-cs)t}\left(\int_0^\infty e^{-s(u+ct)}\omega_t(u + ct)du\right)k(t)dt =$$

$$\int_0^\infty e^{-(\delta-cs)t}\left(\widetilde{\omega}_t(s) - \int_0^{ct} e^{-sx}\omega_t(x)dx\right)k(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(\delta-cs)t}\widetilde{\omega}_t(s)k(t)dt - \widetilde{\omega}_\delta^*(\delta - cs)$$

(1.10.2)

όπου:

$$\widetilde{\omega}_\delta^*(s) = \int_0^\infty \int_0^{ct} e^{-\frac{1}{c}\delta x + s(ct-x)}\omega_t(x)k(t)dxdt$$

(1.10.3)

Εάν αντί για τη συνάρτηση $\omega_t(x)$ χρησιμοποιήσουμε μια συνάρτηση $\omega(x)$, δηλαδή ανεξάρτητη του χρόνου t, τότε η σχέση 1.10.2 ($\tilde{\eta}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-(\delta-cs)t}\widetilde{\omega}_t(s)k(t)dt - \widetilde{\omega}_\delta^*(\delta - cs)$)γράφεται ως:

$$\tilde{\eta}_\delta(s) = \widetilde{\omega}(s)\,\tilde{k}(\delta - cs) - \widetilde{\omega}_\delta^*(\delta - cs) \qquad (1.10.4)$$

όπου:

$$\widetilde{\omega}_\delta^*(s) = \int_0^\infty \int_0^{ct} e^{-\frac{1}{c}\delta x + s(ct-x)}\omega(x)k(t)dxdt$$

1.11. Ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις

Νωρίτερα αναφερθήκαμε στις ανανεωτικές εξισώσεις και τις διακρίσεις τους. Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με την μια εκ των δυο και θα τη λύσουμε στην περίπτωση όπου συγκεκριμένη κατανομή.

Ας υποθέσουμε πως η $m(x)$ ικανοποίει την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$m(x) = \varphi \int_0^x m(x-y)f(y)dy + u(x), x \geq 0 \qquad (1.11.1)$$

όπου $\varphi \in (0,1)$ και $f(y) = F'(y)$ μια συνάρτηση πυκνότητας με $F(0) = 0$. Υποθέτουμε επίσης πως η $u(x)$ είναι μια τοπικά φραγμένη συνάρτηση, για παράδειγμα $|u(x)| <$ για $x < \infty$.

Για να βρούμε μια λύση για την $m(x)$, ξεκινάμε υπολογίζοντας τον μετασχηματισμό Laplace της σχέσης 1.11.1.

$$\widetilde{m}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} m(x)dx = \int_0^\infty e^{-sx} \left(\varphi \int_0^x m(x-y) f(y) dy + u(x) \right) dx$$
$$= \varphi \int_0^\infty e^{-sx} \int_0^x m(x-y) f(y) dy dx + \int_0^\infty e^{-sx} u(x) dx$$
$$= \varphi \int_0^\infty e^{-sx} \int_0^x m(x-y) f(y) dy dx + \tilde{u}(x)$$

(1.11.2)

στην τελευταία, αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης και θέτοντας όπου $\mathrm{x - y = z}$, αφού $0 \leq x < \infty$ και $0 \leq y \leq x$ θα πάρουμε

$$= \varphi \int_0^\infty e^{-sy} f(y) \int_0^\infty e^{-sz} m(z) dz dy + \tilde{u}(x)$$
$$= \varphi\, \widetilde{m}(s) \tilde{f}(s) + \tilde{u}(s)$$

την οποία αν λύσουμε ως προς $\widetilde{m}(s)$ θα πάρουμε την σχέση

$$\widetilde{m}(s) = \frac{\tilde{u}(s)}{1 - \varphi \tilde{f}(s)}$$

(1.11.3)

Έστω μια σύνθετη γεωμετρική κατανομή όπου η μια τ.μ. έχει μια συνάρτηση πυκνότητας $\mathrm{f}(x)$ και μια γεωμετρική με παράμετρο φ (GEO(φ)). Έχει μάζα πιθανότητας στο 0 ίση με $1 - \varphi$ και για $\mathrm{x} > 0$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\varphi)(\varphi)^n f^{*n}(x)$$

(1.11.4)

όπου: $f^{*n}(x)$ η n-οστή συνέλιξη της $\mathrm{f}(x)$ με τον εαυτό της.

Η συνάρτηση κατανομής της σύνθετης γεωμετρικής, μπορεί να γραφτεί με βάση τα παραπάνω ως εξής:

$$G(y) = 1 - \overline{G}(y) = 1 - \varphi + \int_0^y g(x)dx$$

(1.11.5)

Θεωρούμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της $\mathrm{g}(x) = -G'(x)$ δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\tilde{g}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} g(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\varphi)(\varphi)^n \{\tilde{f}(s)\}^n = \frac{1-\varphi}{1-\varphi\,\tilde{f}(s)} - (1-\varphi)$$

(1.11.6)

αφού χρησιμοποιηθούν οι ιδιότητες της γεωμετρικής σειράς.

Λύνοντας την τελευταία ως προς $\tilde{f}(s)$ παίρνουμε:

$$\tilde{f}(s) = \frac{\tilde{g}(s)}{\big(1-\varphi+\tilde{g}(s)\big)\,\varphi}$$

Αντικαθιστώντας την στην σχέση 1.11.3 ($\widetilde{m}(s) = \frac{\tilde{u}(s)}{1-\varphi\,\tilde{f}(s)}$) παίρνουμε:

$$\widetilde{m}(s) = \frac{\tilde{u}(s)}{1 - \varphi\,\dfrac{\tilde{g}(s)}{\big(1-\varphi+\tilde{g}(s)\big)\,\varphi}}$$

$$= \frac{\tilde{u}(s)}{1-\varphi}\big(1-\varphi+\tilde{g}(s)\big)$$

$$= \tilde{u}(s) + \frac{1}{1-\varphi}\tilde{u}(s)\tilde{g}(s)$$

και αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό Laplace της τελευταίας παίρνουμε:

$$m(x) = u(x) + \frac{1}{1-\varphi}\int_0^x u(y)g(x-y)dy$$

(1.11.7)

η οποία αποτελεί μια γενική λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης 1.11.1 ($m(x) = \varphi\int_0^x m(x-y)f(y)dy + u(x), x \geq 0$).

Βλέπουμε λοιπόν ότι η σύνθετη γεωμετρική κατανομή $\mathrm{G}(x)$ σχετίζεται με τις ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις.

Υποθέτουμε τώρα πως η $\mathrm{u}(x)$ είναι διαφορίσιμη και υπενθυμίζουμε πως $\overline{G}(0) =$ από τη σχέση 1.11.5 ($G(y) = 1 - \overline{G}(y) = 1 - \varphi + \int_0^y g(x)dx$). Τότε αν πάρουμε το ολοκλήρωμα από τη σχέση 1.11.7 ($m(x) = u(x) + \frac{1}{1-\varphi}\int_0^x u(y)g(x-y)dy$) και εφαρμόσουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες θα πάρουμε:

$$\int_0^x u(y)g(x-y)dy$$

$$= \mathrm{u}(y)\overline{G}(x-y)\Big|_{y=0}^{x} - \int_0^{\mathrm{x}} \overline{G}(x-y)u'(y)dy$$

$$= \varphi\, \mathrm{u}(x) - \mathrm{u}(0)\overline{G}(x) - \int_0^x \overline{G}(x-y)u'(y)dy$$

και αντικαθιστώντας την τελευταία στη σχέση 1.11.7 ($m(x) = u(x) + \frac{1}{1-\varphi}\int_0^x u(y)g(x-y)dy$) παίρνουμε:

$$m(x) = u(x) + \frac{1}{1-\varphi}\left(\varphi\, u(x) - u(0)\overline{G}(x) - \int_0^x \overline{G}(x-y)u'(y)dy\right)$$
$$= \frac{1}{1-\varphi}\left(u(x) - u(0)\overline{G}(x) - \int_0^x \overline{G}(x-y)u'(y)dy\right) \tag{1.11.8}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση 1.11.6 ($\tilde{g}(s) = \frac{1-\varphi}{1-\varphi\,\tilde{f}(s)} - (1-\varphi)$) ο μετασχηματισμός Laplace της $\tilde{G}(x) = \varphi - \int_0^x g(y)dy$ (σχέση 1.11.5) δίνεται από την παρακάτω

$$\tilde{\overline{G}}(s) = \frac{\varphi}{s} - \frac{\tilde{g}(s)}{s}$$

$$= \frac{\varphi}{s} - \frac{1}{s}\left(\frac{1-\varphi}{1-\varphi\tilde{f}(s)} - (1-\varphi)\right)$$

$$= \frac{1}{s}\left(1 - \frac{1-\varphi}{1-\varphi\tilde{f}(s)}\right)$$

$$= \frac{1}{s}\left(\frac{1-\varphi\tilde{f}(s) - (1-\varphi)}{1-\varphi\tilde{f}(s)}\right)$$

$$= \frac{\varphi}{s}\frac{1-\tilde{f}(s)}{1-\varphi\tilde{f}(s)}$$

η οποία ισοδυναμεί με την παρακάτω

$$\left(1-\varphi\tilde{f}(s)\right)\tilde{\tilde{\overline{G}}}(s)=\varphi\frac{1-\tilde{f}(s)}{s}$$

ή αλλιώς

$$\tilde{\tilde{\overline{G}}}(s)=\varphi\tilde{\tilde{\overline{G}}}(s)\tilde{f}(s)+\varphi\frac{1-\tilde{f}(s)}{s}$$

στην οποία αν αντιστρέψουμε τους μετασχηματισμούς τελικά θα πάρουμε την παρακάτω σχέση

$$\overline{G}(x)=\varphi\int_0^x\overline{G}(x-y)f(y)dy+\varphi\overline{F}(x),\ \ x\geq 0$$

(1.11.9)

έτσι, βλέπουμε πως η ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που δίνεται από τη σχέση 1.11.9. Μπορούμε να γράψουμε την $\overline{\mathrm{G}}(\mathrm{x})$ επίσης ως

$$\overline{\mathrm{G}}(\mathrm{x})=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\varphi)(\varphi)^n\overline{F}^{*n}(x)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : Η κλασσική συνάρτηση των Gerber Shiu

2.1. Εισαγωγή

Από τη στιγμή που μας ενδιαφέρει να αναγνωρίσουμε και να μελετήσουμε διάφορες ποσότητες που συνδέονται με τη χρεοκοπία, ώστε να κατανοήσουμε καλύτερα τον κίνδυνο χρεοκοπίας, εστιάζουμε στη μελέτη της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber – Shiu [Gerber – Shiu (1998)], που δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$m_{\delta,12}(u) = E\left[e^{-\delta T}\omega_{12}(U_{T^-}|U_T|)I(T<\infty)\middle|U_0=u\right] \tag{2.1.1}$$

Η τελευταία είναι μια συνάρτηση του u, όπου $\delta \geq 0$ είναι συνήθως η ένταση ανατοκισμού. Η συνάρτηση ποινής $\omega_{12}(x,y)$, υποθέτουμε πως είναι ολοκληρώσιμη για $\mathrm{x}>0,\ \mathrm{y}>0$.

Ορίζουμε τη δείκτρια συνάρτηση: $\mathrm{I}(A) = \begin{cases} 1, & \textit{όταν συμβαίνει το } A \\ 0, & \textit{αλλίως} \end{cases}$

Έτσι, αφού συμπεριλαμβάνουμε τον όρο $\mathrm{I}(T<\infty)$ στην σχέση 2.1.1, μας ενδιαφέρουν γενικότερα περιπτώσεις που η χρεοκοπία είναι αναπόφευκτη.

Με συγκεκριμένες επιλογές της συνάρτησης ποινής $\omega_{12}(x,y)$ και τις τιμές του δ, η συνάρτηση των Gerber – Shiu μεταμορφώνεται σε μια εξίσωση για διάφορες, σχετικές με τη χρεοκοπία ποσότητες που ενδιαφερόμαστε, όπως για παράδειγμα:

- *Ροπές*
- *Συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας*
- *Μετασχηματισμοί Laplace πυκνοτήτων που μας ενδιαφέρουν*
- *Πιθανότητα χρεοκοπίας κ.α.*

Κάποιες ειδικές περιπτώσεις της συνάρτησης Gerber – Shiu καθώς και οι ποσότητες που χρησιμοποιούνται ως συναρτήσεις ποινής και οι διάφορες τιμές του δ δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

ΡΟΠΕΣ		
$\omega_{12}(x,y)$	δ	$m_{\delta,12}(u)$
$x^j y^k$	0	$E\left[(U_{T-})^j(\lvert U_T\rvert)^k I(T<\infty)\middle\vert U_0=u\right]$, από κοινού j-ροπή του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και k-ροπή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας
x^j	0	$E\left[(U_{T-})^j I(T<\infty)\middle\vert U_0=u\right]$, j-ροπή του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία
y^k	0	$E[(\lvert U_T\rvert)^k I(T<\infty)\vert U_0=u]$, k-ροπή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας
y^k	>0	$E\left[e^{-\delta T}(\lvert U_T\rvert)^k I(T<\infty)\middle\vert U_0=u\right]$, προεξοφλημένη k-ροπή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας
$(x+y)^j$	0	$E\left[(U_{T-}+\lvert U_T\rvert)^j I(T<\infty)\middle\vert U_0=u\right]$, j-ροπή της απαίτησης που προκαλεί χρεοκοπία

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ		
$\omega_{12}(x,y)$	δ	$m_{\delta,12}(u)$
$\mathrm{I}(X \leq x, Y \leq y)$	0	$\mathrm{E}[I(U_{T-} \leq x,\ \lvert U_T\rvert \ \leq y)\ I(T<\infty)\ \lvert U_0 = u]$, από κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας
$\mathrm{I}(Y \leq y)$	0	$\mathrm{E}[I(\lvert U_T\rvert \ \leq y)\ I(T<\infty)\ \lvert U_0 = u]$, συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας
$\mathrm{I}(X \leq x)$	0	$\mathrm{E}[I(U_{T-} \leq x)\ I(T<\infty)\ \lvert U_0 = u]$, συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία
$\mathrm{I}(X + Y \leq z)$	0	$\mathrm{E}[I(U_{T-} + \ \lvert U_T\rvert \ \leq z)\ I(T<\infty)\ \lvert U_0 = u]$, συνάρτηση κατανομής της αποζημίωσης που προκαλεί χρεοκοπία

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LAPLACE ΠΥΚΝΟΤΗΤΩΝ		
$\omega_{12}(x,y)$	δ	$m_{\delta,12}(u)$
$e^{-s_1 x - s_2 y}$	>0	$\mathrm{E}\left[e^{-\delta T - s_1 U_{T-} - s_2 \lvert U_T\rvert} I(T<\infty)\middle\vert U_0 = \ u\right]$, μετασχηματισμός Laplace της από κοινού πυκνότητας του χρόνου χρεοκοπίας του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία
$e^{-s(x+y)}$	0	$\mathrm{E}\left[e^{-s(U_{T-} + \lvert U_T\rvert)} I(T<\infty)\middle\vert U_0 = \ u\right]$, μετασχηματισμός Laplace της πυκνότητας της αποζημίωσης που προκαλεί χρεοκοπία
1	>0	$\mathrm{E}\left[e^{\delta T} I(T<\infty)\middle\vert U_0 = \ u\right]$, μετασχηματισμός Laplace της πυκνότητας του χρόνου χρεοκοπίας

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ		
$\omega_{12}(x,y)$	δ	$m_{\delta,12}(u)$
1	0	$\mathrm{E}[I(T<\infty)\vert U_0 = u] = \psi(u)$, πιθανότητα χρεοκοπίας

Από τη στιγμή που η συνάρτηση $m_{\delta,12}(u)$ μπορεί να πάρει διάφορες μορφές για ποσότητες σχετικές με τη χρεοκοπία που μας ενδιαφέρουν, αναλόγως τις επιλογές μας για τη συνάρτηση ποινής είναι εύκολο να διαπιστώσουμε πως η συνάρτηση των Gerber – Shiu είναι ένα πολύτιμο εργαλείο ανάλυσης ώστε να κατανοήσουμε το γεγονός της χρεοκοπίας και λειτουργεί ως ένα συγκεντρωτικό μέσο για να μελετήσουμε ποσότητες σχετικές με τη χρεοκοπία.

Στην περίπτωση όπου επιλέξουμε $\omega_{12}(x,y)=1$ και $\delta>0$, τότε η $m_{\delta,12}(u)$ που προκύπτει είναι ο μετασχηματισμός Laplace της πυκνότητας του χρόνου χρεοκοπίας. Θα δείξουμε αργότερα πως σε αυτή την περίπτωση η $m_{\delta,12}(u)$ ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση και ισούται επίσης με την ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής τυχαίας μεταβλητής. Υπολογίζοντας την πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας Τ αντιστρέφοντας αυτή την ειδική περίπτωση της συνάρτησης των Gerber – Shiu, καθίσταται δυνατό να υπολογίσουμε πεπερασμένες πιθανότητες χρεοκοπίας, για παράδειγμα $\Pr(T\le t\vert U_0=u)$, για $\mathrm{t}>0$. Στην ανάλυση των [Dickson and Willmot (2005)], υπολογίζεται μια αναλυτική έκφραση για την πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας χρησιμοποιώντας την παραπάνω μέθοδο στο κλασσικό μοντέλο Poisson, όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι κατανέμονται εκθετικά και υπολογίζονται πεπερασμένες πιθανότητες χρεοκοπίας για αποζημιώσεις που κατανέμονται με μίξεις από Erlang. Ο υπολογισμός μιας αναλυτικής εξίσωσης για την πυκνότητα αυτή δεν είναι εύκολος ακόμη και στην περίπτωση του κλασσικού μοντέλου Poisson, και είναι πέρα από τα όρια της εργασίας αυτής.

Υπό συγκεκριμένες υποθέσεις για την $\mathrm{p}(y)$ ή/και την $\mathrm{k}(t)$ (όπως και στο κλασσικό μοντέλο Poisson όπου η $\mathrm{k}(t)$ υποθέτουμε πως κατανέμεται εκθετικά), μπορούμε να ορίσουμε αναλυτικά την συνάρτηση $m_{\delta,12}(u)$ για γνωστές ποσότητες. Σε άλλες περιπτώσεις, για την $\mathrm{p}(y)$ ή/και την $\mathrm{k}(t)$ η συνάρτηση $m_{\delta,12}(u)$ μπορεί να οριστεί αναλυτικά μόνο για συγκεκριμένες επιλογές της συνάρτησης ποινής.

Για να καταλήξουμε σε εξισώσεις οι οποίες ικανοποιούν την συνάρτηση $m_{\delta,12}(u)$ κάνουμε συγκεκριμένες υποθέσεις. Γενικώς δεσμεύουμε την πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από την αρχική τιμή u (αρχικό απόθεμα) ή/και στον χρόνο και το ύψος της πρώτης απαίτησης. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε την από κοινού πυκνότητα των $(T, U_{T-}, |U_T|)$ και θα μελετήσουμε περιπτώσεις που μπορούμε να καταλήξουμε σε αναλυτικές εκφράσεις για την συνάρτηση $m_{\delta,12}(u)$.

2.2. Η από κοινού πυκνότητα των T, U_{T-} και $|U_T|$

Ας θεωρήσουμε την από κοινού πυκνότητα των μεταβλητών $(T, U_{T-}, |U_T|)$ ως $h_{12}(t, x, y|u)$. Ο δείκτης «1» θα εκφράζει μια ποσότητα που σχετίζεται με την μεταβλητή U_{T-} ενώ ο δείκτης «2» θα εκφράζει μια ποσότητα που σχετίζεται με την μεταβλητή $|U_T|$. Επίσης, να αναφέρουμε πως από τη στιγμή που θεωρούμε πως η χρεοκοπία συμβαίνει, δηλαδή ο χρόνος χρεοκοπίας $\mathrm{T} < \infty$, οι από κοινού και περιθώριες πυκνότητες των T, U_{T-} και $|U_T|$ ολοκληρώνοντας δίνουν την πιθανότητα χρεοκοπίας, μια ποσότητα που είναι μικρότερη της μονάδας, έτσι αποτελούν ελλειμματικές πυκνότητες.

Αρχικά, θεωρούμε πως το πλεόνασμα αμέσως πριν τη χρεοκοπία και ο χρόνος χρεοκοπίας δίνονται και είναι ίσα με x και t αντίστοιχα. Έτσι, για να εξασφαλίσουμε πως η χρεοκοπία συμβαίνει με το πλεόνασμα να είναι ίσο με x στο χρόνο t, αυτό ισοδυναμεί με μια απαίτηση να ξεπερνάει αμέσως το x με το που προκύπτει η απαίτηση και αυτό με μια πιθανότητα που ισούται με $\overline{P}(x)$. Πιο συγκεκριμένα, αν θέλουμε και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι ίσο με y, τότε η απαίτηση που αναφερόμαστε θα πρέπει να είναι ίση με $\mathrm{x} + \mathrm{y}$ η οποία έχει πυκνότητα $\mathrm{p}(x + y)$. Τότε, δοθέντος ότι $U_{T-} = \mathrm{x}$ και $\mathrm{T} = \mathrm{t}$ η δεσμευμένη πυκνότητα της $|U_T|$ θα δίνεται από τη παρακάτω σχέση

$$p_x(y) = \frac{p(x + y)}{\overline{P}(x)}, \ y > 0, x > 0 \tag{2.2.1}$$

η οποία είναι η συνάρτηση πυκνότητας της υπερβάλλουσας ζημίας της $\mathrm{p}(y)$ και δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή του χρόνου χρεοκοπίας $\mathrm{T} = \mathrm{t}$.

Τώρα ας υποθέσουμε πως η χρεοκοπία συμβαίνει με την πρώτη απαίτηση που εμφανίζεται. Εάν ένας ασφαλιστής ξεκινάει με ένα αρχικό αποθεματικό ίσο με u και εισπράττει ασφάλιστρο ύψους c έως τον χρόνο t όπου εμφανίζεται η πρώτη απαίτηση και προκαλεί χρεοκοπία, τότε το πλεόνασμα αμέσως πριν τη χρεοκοπία είναι $\mathrm{x} = \mathrm{u} + \mathrm{ct}$. Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να πούμε πως η χρεοκοπία συμβαίνει στο χρόνο $\mathrm{t} = \frac{x-u}{c}$. Το έλλειμμα ύψους y προκύπτει όταν η πρώτη απαίτηση ισούται με $\mathrm{x} + \mathrm{y}$. Τότε η από κοινού κατανομή των $(T, U_{T-}, |U_T|)$ στο σημείο (t, x, y) για χρεοκοπία που συμβαίνει με την πρώτη απαίτηση είναι $\mathrm{k}(t)\mathrm{p}(x+y)$ όπου $\mathrm{t} = \frac{x-u}{c}$. Έτσι, η από κοινού ελλειμματική συνάρτηση πυκνότητας θα δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$h_{12}^{*}(x, y|u) = \frac{1}{c} k\left(\frac{x-u}{c}\right) p(x+y) \tag{2.2.2}$$

όπου $\mathrm{t} = \frac{x-u}{c}$, $\mathrm{x} > \mathrm{u}$ και $\mathrm{y} > 0$. Ο συμβολισμός με το * που χρησιμοποιείται παραπάνω στην συνάρτηση πυκνότητας h, είναι για να δείξουμε πως η χρεοκοπία συμβαίνει με την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης. Από τη στιγμή που ορίσαμε νωρίτερα την δεσμευμένη πυκνότητα $p_x(y)$ της $|U_T|$ δοθέντος ότι $U_{T-} = \mathrm{x}$ και του χρόνου χρεοκοπίας, μπορούμε να γράψουμε την τελευταία σχέση ως

$$h_{12}^{*}(x, y|u) = h_{1}^{*}(x|u) p_x(y) \tag{2.2.3}$$

χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 2.2.1 ($p_x(y) = \frac{p(x+y)}{\overline{P}(x)}$) και 2.2.2, $h_1^{*}(x|u) = \frac{1}{c}\mathrm{k}\left(\frac{x-u}{c}\right)\overline{P}(x)$ που είναι η περιθώρια ελλειμματική πυκνότητα της U_{T-} για χρεοκοπία που συμβαίνει με την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης.

Στη συνέχεια ας θεωρήσουμε πως η χρεοκοπία συμβαίνει σε απαιτήσεις μεταγενέστερες της πρώτης απαίτησης. Τότε, δεν υπάρχει άμεση σχέση μεταξύ των t, x και y. Γνωρίζουμε μόνο πως θα πρέπει να ισχύει $\mathrm{x} < \mathrm{u} + \mathrm{ct}$. Ας συμβολίσουμε με $h_{12}^{**}(t, x, y|u)$ την από κοινού ελλειμματική συνάρτηση πυκνότητας των $(T, U_{T-}, |U_T|)$ δοθέντος ότι η χρεοκοπία συμβαίνει σε απαιτήσεις μεταγενέστερες της πρώτης απαίτησης. Ο συμβολισμός με το ** που χρησιμοποιείται παραπάνω στην συνάρτηση πυκνότητας h, είναι για να δείξουμε πως η χρεοκοπία συμβαίνει με την εμφάνιση απαιτήσεων μεταγενέστερων της πρώτης απαίτησης.

Τότε, η από κοινού ελλειμματική πυκνότητα των $(T, U_{T-}, |U_T|)$ την οποία συμβολίσαμε με $h_{12}(t, x, y|u)$, ορίζεται διαφορετικά αναλόγως με το αν η χρεοκοπία συμβαίνει με την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης, δηλαδή όταν $\mathrm{x} = \mathrm{u} + \mathrm{ct}$ ή κατά την εμφάνιση μεταγενέστερων απαιτήσεων, δηλαδή όταν $\mathrm{x} < \mathrm{u} + \mathrm{ct}$ και συνοψίζεται στην παρακάτω σχέση

$$h_{12}(t, x, y|u) = \begin{cases} h_{12}^*(x, y|u) = \frac{1}{c} k\left(\frac{x-u}{c}\right) p(x+y), & t = \frac{x-u}{c}, x > u, y > 0 \\ h_{12}^{**}(t, x, y|u), & t > 0, 0 < x < u + ct, y > 0. \end{cases}$$

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μια σειρά από πυκνότητες στις οποίες αναφερόμαστε ως προεξοφλημένες πυκνότητες επειδή ουσιαστικά προεξοφλούμε την πυκνότητα των $(T, U_{T-}, |U_T|)$, από τον χρόνο χρεοκοπίας χρησιμοποιώντας το δ.
Αυτές οι προεξοφλημένες πυκνότητες δεν ερμηνεύουν κάτι που να έχει νόημα στη γλώσσα των πιθανοτήτων και στην πραγματικότητα για να τις ερμηνεύσουμε, συχνά θέτουμε το $\delta = 0$. Ωστόσο, θα μας φανούν πολύ χρήσιμες στην μελέτη μας.

Αρχικά, χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.2.2 $\left(h_{12}^*(x, y|u) = \frac{1}{c} k\left(\frac{x-u}{c}\right) p(x+y)\right)$ και τη σχέση 2.2.3 $(h_{12}^*(x, y|u) = h_1^*(x|u) p_x(y))$ βλέπουμε πως η από κοινού ελλειμματική προεξοφλημένη πυκνότητα του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, για χρεοκοπία που προκύπτει από την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$h_{\delta,12}^*(x, y|u) = e^{-\delta \frac{x-u}{c}} h_{12}^*(x, y|u) = e^{-\delta \frac{x-u}{c}} \frac{1}{c} k\left(\frac{x-u}{c}\right) p(x+y) = h_{\delta,1}^*(x|u) p_x(y) \tag{2.2.4}$$

όπου: $h_{\delta,1}^*(x|u) = e^{-\delta \frac{x-u}{c}} \frac{1}{c} \mathrm{k}\left(\frac{x-u}{c}\right) \overline{P}(x)$, η ελλειμματική προεξοφλημένη περιθώρια πυκνότητα της U_{T-} για χρεοκοπία που προκύπτει με την εμφάνιση της πρώτης αποζημίωσης. Ο δείκτης δ που εμφανίζεται στις συναρτήσεις πυκνότητας “ h ”, υποδεικνύει πως αναφερόμαστε σε μια προεξοφλημένη πυκνότητα. Επίσης, ας θεωρήσουμε πως η από κοινού ελλειμματική προεξοφλημένη πυκνότητα του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας, για χρεοκοπία που προκύπτει από απαιτήσεις που εμφανίζονται μετά την πρώτη απαίτηση δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$h^{**}_{\delta,12}(x,y|u) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} h^{**}_{12}(t,x,y|u)dt$$

(2.2.5)

Επίσης, όπως και στη σχέση 2.2.3 ($h^{*}_{12}(x,y|u) = h^{*}_{1}(x|u)p_x(y)$) έχουμε ότι

$$h^{**}_{12}(t,x,y|u) = h^{**}_{1}(t,x|u)p_x(y)$$

(2.2.6)

όπου: $h^{**}_{1}(t,x|u)$ είναι η από κοινού ελλειμματική πυκνότητα των Τ και U_{T-} για απαιτήσεις μεταγενέστερες της πρώτης. Τότε, χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.2.5 παίρνουμε

$$h^{**}_{\delta,12}(x,y|u) = h^{**}_{\delta,1}(t,x|u)p_x(y)$$

όπου: $h^{**}_{\delta,1}(x|u) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} h^{**}_{1}(t,x|u)dt$ είναι η περιθώρια ελλειμματική προεξοφλημένη πυκνότητα της U_{T-} για χρεοκοπία που προκύπτει από απαιτήσεις μεταγενέστερες της πρώτης απαίτησης.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 2.2.3 ($h^{*}_{12}(x,y|u) = h^{*}_{1}(x|u)p_x(y)$) και 2.2.6 ας θεωρήσουμε πως η από κοινού ελλειμματική προεξοφλημένη πυκνότητα των $(U_{T-},|U_T|)$ δίνεται από τη παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned} h_{\delta,12}(x,y|u) &= h^{*}_{\delta,12}(x,y|u) + h^{**}_{\delta,12}(x,y|u) \\ &= h^{*}_{\delta,1}(x|u)p_x(y) + h^{**}_{\delta,1}(x|u)p_x(y) \end{aligned}$$

(2.2.7)

$$h_{\delta,12}(x,y|u) = h_{\delta,1}(x|u)p_x(y)$$

(2.2.8)

όπου: $h_{\delta,1}(x|u) = h^{*}_{\delta,1}(x|u) + h^{**}_{\delta,1}(x|u)$ είναι η περιθώρια ελλειμματική προεξοφλημένη πυκνότητα της U_{T-}.

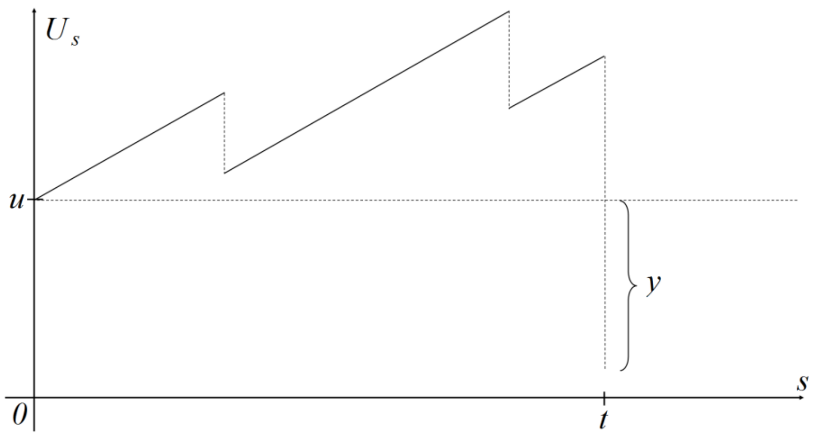
Από τη στιγμή που η συνάρτηση των Gerber – Shiu, $m_{\delta,12}(u)$ που δίνεται από τη σχέση 2.1.1 ($m_{\delta,12}(u) = E\left[e^{-\delta T}\omega_{12}(U_{T^-}|U_T|)I(T < \infty)\middle|U_0 = u\right]$) είναι ουσιαστικά η μέση τιμή της ποσότητας $e^{-\delta T}\omega_{12}(U_{T^-}, |U_T|)\mathrm{I}(T < \infty)$ μπορούμε να γράψουμε την $m_{\delta,12}(u)$ ως ένα άθροισμα από όρους, δηλαδή, για χρεοκοπία με την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης $\left(t = \frac{x-u}{c}, x > u, y > 0\right)$, χρεοκοπία από εμφάνιση απαιτήσεων μεταγενέστερων της πρώτης απαίτησης $(t > 0, 0 < x < u + ct, y > 0)$ και 0 σε άλλη περίπτωση όπως φαίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned} m_{\delta,12}(u) = &\int_0^\infty \int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)} \omega_{12}(x,y) h^{*}_{12}(x,y|u)dxdy \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{u+ct} e^{-\delta t}\omega_{12}(x,y)h^{**}_{12}(x,y|u)dxdydt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \omega_{12}(x,y)\left(h^{*}_{\delta,12}(x,y|u) + h^{**}_{\delta,12}(x,y|u)\right)dxdy \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \omega_{12}(x,y)h_{\delta,12}(x,y|u)dxdy \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 2.2.4 ($h^{*}_{\delta,12}(x,y|u) = h^{*}_{\delta,1}(x|u)p_x(y)$) , 2.2.5 ($h^{**}_{\delta,12}(x,y|u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}h^{**}_{12}(t,x,y|u)dt$) και 2.2.7 ($h_{\delta,12}(x,y|u) = h^{*}_{\delta,1}(x|u)p_x(y) + h^{**}_{\delta,1}(x|u)p_x(y)$).

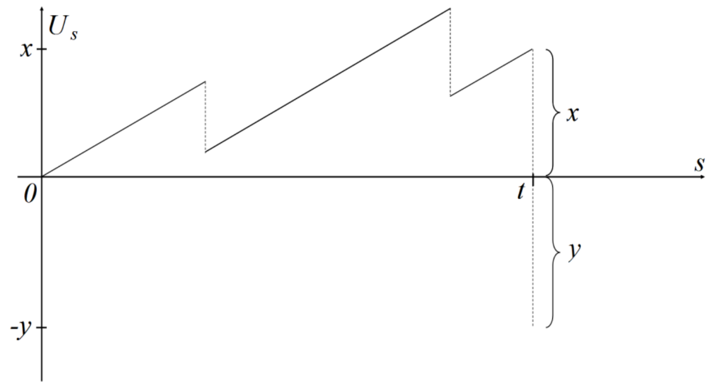
2.3. Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος

Δεσμεύοντας ότι η πρώτη πτώση του πλεονάσματος θα είναι κάτω του αρχικού του επιπέδου, δηλαδή του αρχικού αποθέματος u, θα καταλήξουμε σε μια σημαντική εξίσωση που ικανοποιείται από την $m_{\delta,12}(u)$. Ας θεωρήσουμε ότι μια ανέλιξη πλεονάσματος έχει ένα αρχικό απόθεμα ίσο με u και η πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό του επίπεδο είναι ίση με y και συμβαίνει τη χρονική στιγμή t και ότι η διαδρομή της ανέλιξης αυτής παρουσιάζεται στο παρακάτω γράφημα.



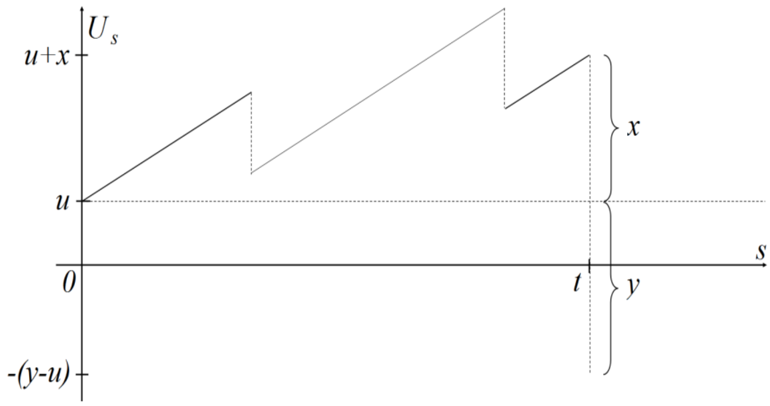
Σχήμα 2 Μια τυχαία διαδρομή της ανέλιξης του πλεονάσματος U_t και η πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό επίπεδο

Για ευκολία, θα αναφερόμαστε στην πτώση του πλεονάσματος κάτω του αρχικού του επιπέδου απλώς ως πτώση του πλεονάσματος. Ας υποθέσουμε πως $h_{12}(t,x,y|u)$ είναι η από κοινού πυκνότητα των $(T, U_{T-}, |U_T|)$ στο σημείο (t,x,y) και θέτουμε το $\mathrm{u}=0$. Τότε με $h_{12}(t,x,y|0)$ συμβολίζεται η πυκνότητα μιας ανέλιξης πλεονάσματος η οποία ξεκινάει με αρχικό απόθεμα $\mathrm{u}=0$, βρίσκεται σε επίπεδο x πάνω από το 0 τη χρονική στιγμή t χωρίς να έχει συμβεί χρεοκοπία και έπειτα μια απαίτηση ύψους $\mathrm{x}+\mathrm{y}$ προκαλεί την χρεοκοπία με ένα έλλειμμα ίσο με y και πλεόνασμα αμέσως πριν τη χρεοκοπία ίσο με x. Μια γραφική απεικόνιση της παραπάνω περιγραφής παρουσιάζεται στο παρακάτω γράφημα.



Σχήμα 3 Μια τυχαία διαδρομή της ανέλιξης του πλεονάσματος U_t που δείχνει τη χρεοκοπία όταν το αρχικό απόθεμα $\mathrm{u}=0$

Τώρα ας θεωρήσουμε μια παρόμοια περίπτωση όπου η ανέλιξη του πλεονάσματος αρχίζει με απόθεμα u και βρίσκεται σε σημείο x πάνω από το u τη χρονική στιγμή t χωρίς να έχει προηγηθεί πτώση του πλεονάσματος και έπειτα εμφανίζεται μια απαίτηση ύψους $\mathrm{x}+\mathrm{y}$ έτσι ώστε η πρώτη πτώση του πλεονάσματος να συμβεί και να είναι ίση με y και το πλεόνασμα αμέσως πριν από την πτώση να είναι ίσο με $\mathrm{u}+\mathrm{x}$. Εάν το $\mathrm{x}=\mathrm{u}+\mathrm{ct}$, τότε η πρώτη πτώση του πλεονάσματος συμβαίνει με την πρώτη απαίτηση, ενώ αν $\mathrm{x}<\mathrm{u}+\mathrm{ct}$ τότε η πρώτη πτώση συμβαίνει σε μεταγενέστερες απαιτήσεις. Μια γραφική απεικόνιση της παραπάνω περιγραφής παρουσιάζεται στο παρακάτω γράφημα.



Σχήμα 4 Μια τυχαία διαδρομή της ανέλιξης του πλεονάσματος U_t που δείχνει μια πτώση του πλεονάσματος να προκαλεί χρεοκοπία

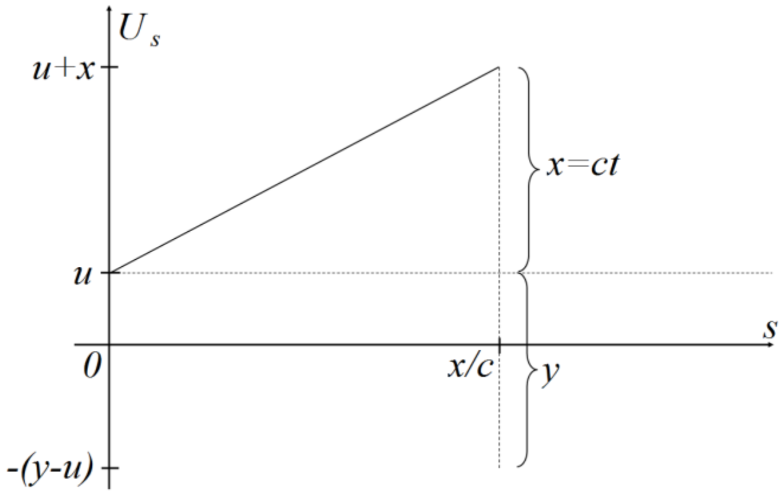
Αναφορικά με τα δυο τελευταία γραφήματα πρέπει να παρατηρήσουμε πως ουσιαστικά είναι δυο ίδια γραφήματα με τη μόνη διαφορά πως, στο σχήμα 3, το αρχικό απόθεμα είναι $\mathrm{u}=0$ ενώ στο σχήμα 4 το αρχικό απόθεμα είναι u, όποτε είναι λογικό και οι δυο υποθέσεις να έχουν την ίδια πυκνότητα, όπως αναφέραμε και νωρίτερα $h_{12}(t,x,y|0)$, η οποία στην περίπτωση όπου το αρχικό απόθεμα είναι u θα είναι η πυκνότητα της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος ύψους y ενώ προηγουμένως το πλεόνασμα ήταν ίσο με $\mathrm{u}+\mathrm{x}$ κατά τη χρονική στιγμή t. Επίσης, αναλόγως την τιμή του y (πόσο μεγάλη ήταν η πτώση), θα συνέβαινε χρεοκοπία εάν $\mathrm{y}>\mathrm{u}$ και δεν θα συνέβαινε χρεοκοπία εάν $\mathrm{y}<\mathrm{u}$.
Ακολούθως, θα μελετήσουμε τέσσερις περιπτώσεις ώστε να καταλήξουμε σε εκφράσεις για την $m_{\delta,12}(u)$ αναλόγως με τη πρώτη πτώση του πλεονάσματος.

Οι περιπτώσεις που θα μελετήσουμε είναι οι εξής:

> Περίπτωση 1: Η πρώτη πτώση συμβαίνει με την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης και προκαλεί χρεοκοπία.
> Περίπτωση 2: Η πρώτη πτώση συμβαίνει με την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης και δεν προκαλεί χρεοκοπία.
> Περίπτωση 3: Η πρώτη πτώση συμβαίνει με την εμφάνιση μεταγενέστερης της πρώτης απαίτησης και προκαλεί χρεοκοπία.
> Περίπτωση 4: Η πρώτη πτώση συμβαίνει με την εμφάνιση μεταγενέστερης της πρώτης απαίτησης και δεν προκαλεί χρεοκοπία.

Περίπτωση 1: Η πρώτη πτώση συμβαίνει με την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης και προκαλεί χρεοκοπία.

Η πρώτη πτώση συμβαίνει με την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης και προκαλεί χρεοκοπία όταν η ανέλιξη του πλεονάσματος, ξεκινάει με αρχικό απόθεμα u, αυξάνεται με ρυθμό c μέχρι να φτάσει σε ένα σημείο όπου $\mathrm{x} = \mathrm{ct}$ πάνω από το u όπου και εμφανίζεται η πρώτη απαίτηση στον χρόνο $\mathrm{t} = \frac{x}{c}$ και προκαλεί μια πτώση του πλεονάσματος κάτω από το u ίση με y, όπου για να συμβεί χρεοκοπία θα πρέπει το $\mathrm{y} > \mathrm{u}$. Τότε το πλεόνασμα αμέσως πριν τη χρεοκοπία θα είναι ίσο με $\mathrm{u} + \mathrm{x}$ και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας θα είναι ίσο με $\mathrm{y} - \mathrm{u}$. Η περίπτωση που μόλις περιγράψαμε απεικονίζεται στο παρακάτω γράφημα.



Σχήμα 5 Περίπτωση 1 – Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος

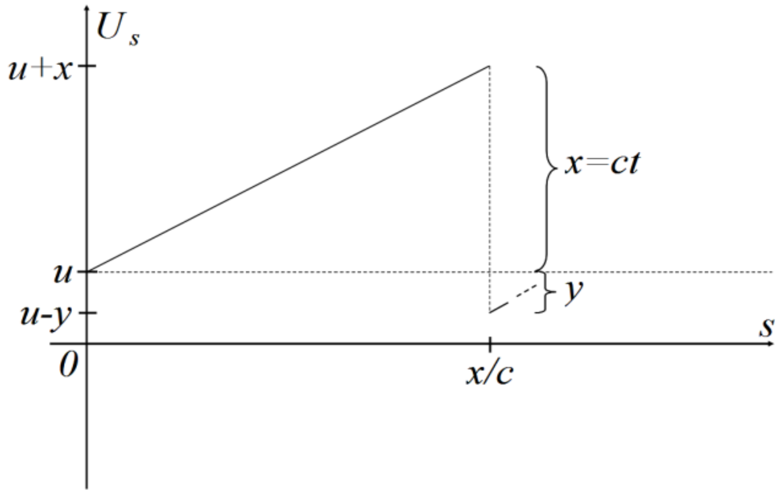
Το παραπάνω παράδειγμα προκύπτει με συνάρτηση πυκνότητας $h_{12}^{*}(x,y|0)$ όπου $\mathrm{x} > 0$ και $\mathrm{y} > \mathrm{u}$. Έτσι, κάνοντας χρήση της σχέσης 2.2.4 ($h_{\delta,12}^{*}(x,y|u) = h_{\delta,1}^{*}(x|u)p_x(y)$) η περίπτωση που μελετάμε εκφράζεται ως ο παρακάτω όρος στην συνάρτηση $m_{\delta,12}(u)$

$$= \int_{u}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-\delta\frac{x}{c}}\omega_{12}(u+x,y-u)h_{12}^{*}(x,y|0)dxdy$$
$$= \int_{u}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \omega_{12}(u+x,y-u)h_{\delta,12}^{*}(x,y|0)dxdy$$

(2.3.1)

Περίπτωση 2: Η πρώτη πτώση συμβαίνει με την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης και δεν προκαλεί χρεοκοπία.

Αυτή η περίπτωση περιγράφεται ακριβώς όπως η περίπτωση 1 με τη μόνη διαφορά ότι η πτώση ύψους y του πλεονάσματος κάτω από u, πρέπει να είναι μικρότερη από u ώστε να μη συμβεί η χρεοκοπία, δηλαδή θα πρέπει $\mathrm{y} < \mathrm{u}$. Το παραπάνω παράδειγμα επίσης προκύπτει με συνάρτηση πυκνότητας $h_{12}^{*}(x,y|0)$ όπου $\mathrm{x} > 0$ αλλά $\mathrm{y} < \mathrm{u}$. Από τη στιγμή που δε συμβαίνει χρεοκοπία και επειδή έχουμε υποθέσει πως η διαδικασία του πλεονάσματος ανανεώνεται έπειτα από κάθε απαίτηση, η διαδικασία λέμε πως ανανεώνεται με ένα αρχικό πλεόνασμα ύψους $\mathrm{u} - \mathrm{y}$ καθώς έχει περάσει χρόνος $\mathrm{t} = \frac{x}{c}$. Η περίπτωση που μόλις περιγράψαμε απεικονίζεται στο παρακάτω γράφημα.



Σχήμα 6 Περίπτωση 2 – Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος

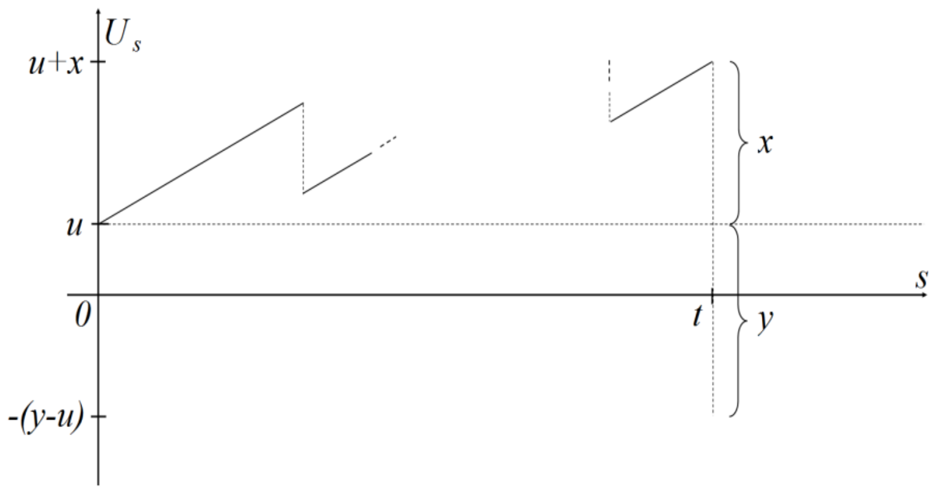
Κάνοντας ξανά χρήση της σχέσης 2.2.4 ($h^*_{\delta,12}(x,y|u) = h^*_{\delta,1}(x|u)p_x(y)$) η περίπτωση που μόλις αναλύσαμε εκφράζεται ως ο παρακάτω όρος στην συνάρτηση $m_{\delta,12}(u)$

$$= \int_0^u \int_0^\infty e^{-\delta\frac{x}{c}} m_{\delta,12}(u-y) h^*_{12}(x,y|0)dxdy$$

$$= \int_0^u m_{\delta,12}(u-y) \left(\int_0^\infty h^*_{\delta,12}(x,y|0)dx \right) dy \tag{2.3.2}$$

Περίπτωση 3: Η πρώτη πτώση συμβαίνει με την εμφάνιση μεταγενέστερης της πρώτης απαίτησης και προκαλεί χρεοκοπία.

Η πρώτη πτώση συμβαίνει σε μια μεταγενέστερη απαίτηση από την πρώτη και προκαλεί χρεοκοπία όταν η ανέλιξη του πλεονάσματος ξεκινάει με αρχικό απόθεμα u, βρίσκεται σε επίπεδο x πάνω από το u στο χρόνο t όταν μια απαίτηση, όχι η πρώτη, προκαλεί μια πτώση στο πλεόνασμα για πρώτη φορά, ύψους $\mathrm{y} > \mathrm{u}$ ώστε να συμβεί η χρεοκοπία. Πάλι, σε αυτή την περίπτωση το πλεόνασμα αμέσως πριν τη χρεοκοπία ισούται με $u + x$ και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας ισούται με $y - u$. Η περίπτωση που μόλις περιγράψαμε απεικονίζεται στο παρακάτω γράφημα.



Σχήμα 7 Περίπτωση 3 – Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος

Η παραπάνω περίπτωση προκύπτει με πυκνότητα $h_{12}^{**}(t,x,y|0)$ όπου $t > 0$, $x > 0$ και $y > u$. Έτσι, χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.2.5 ($h_{\delta,12}^{**}(x,y|u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} h_{12}^{**}(t,x,y|u)dt$), η παραπάνω περίπτωση ως όρος στη συνάρτηση $m_{\delta,12}(u)$ γράφεται

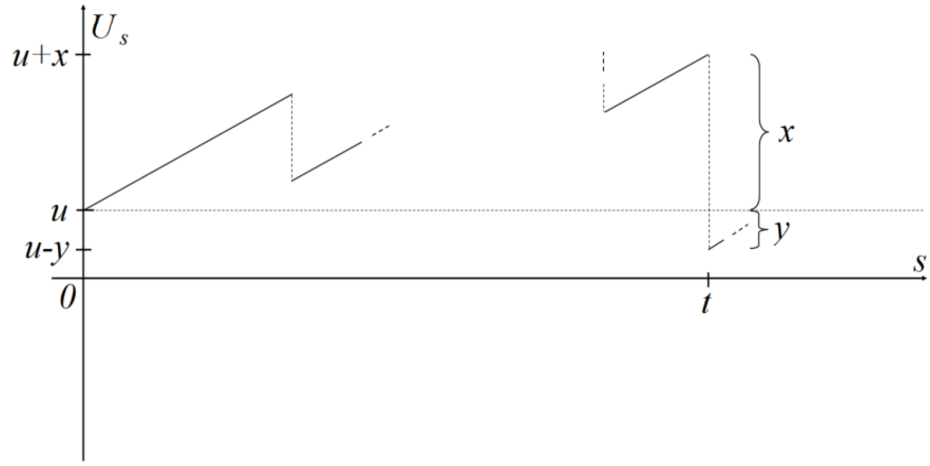
$$= \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} \omega_{12}(u+x, y-u) h_{12}^{**}(t,x,y|0) dt dx dy$$

$$= \int_u^\infty \int_0^\infty \omega_{12}(u+x, y-u) h_{\delta,12}^{**}(x,y|0) dx dy$$

(2.3.3)

Περίπτωση 4: Η πρώτη πτώση συμβαίνει με την εμφάνιση μεταγενέστερης της πρώτης απαίτησης και δεν προκαλεί χρεοκοπία.

Αυτή η περίπτωση περιγράφεται ακριβώς όπως η περίπτωση 3 με τη μόνη διαφορά πως η πτώση του πλεονάσματος κάτω από το u, ύψους y, πρέπει να είναι μικρότερη του u, δηλαδή θα πρέπει να ισχύει $y < u$, ώστε να μη συμβεί η χρεοκοπία. Αυτό συμβαίνει επίσης με πυκνότητα $h_{12}^{**}(t,x,y|0)$ όπου $\mathrm{t}>0$, $\mathrm{x}>0$ αλλά $\mathrm{y}<\mathrm{u}$. Η ανέλιξη ανανεώνεται με αρχικό πλεόνασμα $\mathrm{u}-\mathrm{y}$ όπου έχει παρέλθει χρόνος t.



Σχήμα 8 Περίπτωση 4 – Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος

Κάνοντας ξανά χρήση της σχέσης 2.2.5 ($h_{\delta,12}^{**}(x,y|u)=\int_0^\infty e^{-\delta t}h_{12}^{**}(t,x,y|u)dt$) η περίπτωση που μόλις αναλύσαμε εκφράζεται ως ο παρακάτω όρος στην συνάρτηση $m_{\delta,12}(u)$

$$
\begin{aligned}
&=\int_0^u\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\delta t}\,m_{\delta,12}(u-y)h_{12}^{**}(t,x,y|0)dtdxdy\\
&=\int_0^u m_{\delta,12}(u-y)\left(\int_0^\infty h_{\delta,12}^{**}(x,y|0)dx\right)dy
\end{aligned}
$$

(2.3.4)

Σε αυτό το σημείο να υπενθυμίσουμε πως η συνάρτηση Gerber – Shiu $m_{\delta,12}(u)$ είναι η μέση τιμή μιας συνάρτησης που περιέχει τον όρο $e^{-\delta T}$, πράγμα το οποίο εξηγεί γιατί πολλαπλασιάσαμε με $e^{-\delta\frac{x}{c}}$ και με $e^{-\delta t}$ τις σχέσεις 2.3.2 ($\int_0^u m_{\delta,12}(u-y)\left(\int_0^\infty h_{\delta,12}^{*}(x,y|0)dx\right)dy$) και 2.3.4 αντίστοιχα, και πως χρησιμεύουν στο να λάβουμε υπόψη το χρόνο που πέρασε μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας. Αθροίζοντας όλους τους παραπάνω όρους που είδαμε για την συνάρτηση $m_{\delta,12}(u)$ από τις σχέσεις 2.3.1 ($\int_u^\infty\int_0^\infty \omega_{12}(u+x,y-u)h_{\delta,12}^{*}(x,y|0)dxdy$), 2.3.2 ($\int_0^u m_{\delta,12}(u-$

$y)\left(\int_0^\infty h^*_{\delta,12}(x,y|0)dx\right)dy)$, 2.3.3 $(\int_u^\infty \int_0^\infty \omega_{12}(u+x,y-u)h^{**}_{\delta,12}(x,y|0)dxdy)$, 2.3.4 $(\int_0^u m_{\delta,12}(u-y)\left(\int_0^\infty h^{**}_{\delta,12}(x,y|0)dx\right)dy)$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.2.7 $(h_{\delta,12}(x,y|u) = h^*_{\delta,1}(x|u)p_x(y) + h^{**}_{\delta,1}(x|u)p_x(y))$ παίρνουμε την παρακάτω σχέση

$$m_{\delta,12}(u) = \int_0^u m_{\delta,12}(u-y)\left\{\int_0^\infty h^*_{\delta,12}(x,y|0)dx + \int_0^\infty h^{**}_{\delta,12}(x,y|0)dx\right\}dy$$

$$+\int_u^\infty \int_0^\infty \omega_{12}(u+x,y-u)\left\{h^*_{\delta,12}(x,y|0) + h^{**}_{\delta,12}(x,y|0)\right\}dxdy$$

$$= \int_0^u m_{\delta,12}(u-y)\left\{\int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)dx\right\}dy$$

$$+\int_u^\infty \int_0^\infty \omega_{12}(u+x,y-u)h_{\delta,12}(x,y|0)dxdy$$

(2.3.5)

Στη συνέχεια, ας ορίσουμε τη θετική σταθερά

$$\varphi_\delta = \int_0^\infty \int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)\, dxdy = \int_0^\infty h_{\delta,1}(x|0)\left(\int_0^\infty p_x(y)dy\right)dx$$

$$= \int_0^\infty h_{\delta,1}(x|0)dx$$

(2.3.6)

$$\varphi_\delta = \int_0^\infty h_{\delta,1}(x|0)dx$$

(2.3.7)

χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.2.8 $(h_{\delta,12}(x,y|u) = h_{\delta,1}(x|u)p_x(y))$.

Εάν θέσουμε στη σχέση 2.2.9 $(m_{\delta,12}(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \omega_{12}(x,y)h_{\delta,12}(x,y|u)dxdy)$, $u = 0$ και $\omega_{12}(x,y) = 1$, τότε παίρνουμε $m_{\delta,12}(0) = \varphi_\delta$. Τότε, χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.1.1 $(m_{\delta,12}(u) = E\left[e^{-\delta T}\omega_{12}(U_{T^-}|U_T|)I(T<\infty)\middle|U_0 = u\right])$, έχουμε,

$$0 < \varphi_\delta = E\left[e^{-\delta T} I(T<\infty)\middle|U_0 = 0\right] \leq E[I(T<\infty)|U_0 = 0]$$

$$= Pr(T<\infty|U_0 = 0) = \psi(0) \leq 1$$

(2.3.8)

Επίσης, εάν θέσουμε $\delta = 0$, τότε $\varphi_0 = \psi(0)$ που είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, όταν το αρχικό απόθεμα $u = 0$ και μπορεί να ερμηνευτεί και ως η πιθανότητα για μια πτώση στο πλεόνασμα.

Στη συνέχεια ορίζουμε το κλιμακωτό ύψος ως

$$f_\delta(y) = \frac{1}{\varphi_\delta}\int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)dx\,, \qquad y > 0$$

(2.3.9)

που αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση 2.3.6 ($\varphi_\delta = \int_0^\infty h_{\delta,1}(x|0)dx$), αποτελεί μια συνάρτηση πυκνότητας. Με χρήση της σχέσης 2.2.8 ($h_{\delta,12}(x,y|u) = h_{\delta,1}(x|u)p_x(y)$) στην τελευταία, παίρνουμε,

$$f_\delta(y) = \int_0^\infty p_x(y)\left\{\frac{h_{\delta,1}(x|0)}{\varphi_\delta}\right\}dx$$

(2.3.10)

και έτσι το κλιμακωτό ύψος είναι μια μείξη της πυκνότητας $p_x(y)$ με βάρη μείξης $\frac{h_{\delta,1}(x|0)}{\varphi_\delta}$. Επομένως, σε πολλές περιπτώσεις η $f_\delta(y)$ ανήκει στην ίδια οικογένεια κατανομών της $p(y)$, για παράδειγμα ένα τα ύψη απαιτήσεων ακολουθούν μια μεικτή Erlang, τότε και η κατανομή της $f_\delta(y)$ θα είναι μια διαφορετική μείξη των ίδιων Erlang.

Στη σχέση 2.3.10, αν θέσουμε $\delta = 0$, τότε η $f_0(y)$ μπορεί να ερμηνευτεί ως η πυκνότητα του ύψους της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος, δοθέντος ότι η πτώση θα συμβεί.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 2.3.5 ($m_{\delta,12}(u) = \int_0^u m_{\delta,12}(u-y)\{\int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)dx\}dy + \int_u^\infty \int_0^\infty \omega_{12}(u+x,y-u)h_{\delta,12}(x,y|0)dxdy$) και 2.3.9 μπορούμε να γράψουμε τη συνάρτηση $m_{\delta,12}(u)$ ως μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned} m_{\delta,12}(u) &= \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,12}(u-y)f_\delta(y)dy \\ &+ \int_u^\infty \int_0^\infty \omega_{12}(u+x,y-u)h_{\delta,12}(x,y|0)dxdy \\ &= \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,12}(u-y)f_\delta(y)dy + \upsilon_{\delta,12}(u) \end{aligned}$$

(2.3.11)

όπου:

$$v_{\delta,12}(u) = \int_u^{\infty} \int_0^{\infty} \omega_{12}(u+x, y-u) h_{\delta,12}(x,y|0) dx dy$$

(2.3.12)

Υπενθυμίζουμε σε αυτό το σημείο μια γενική λύση της $m_{\delta,12}(u)$ που είχαμε δείξει στη σχέση 1.11.7 ($\mathrm{m}(x) = \mathrm{u}(x) + \frac{1}{1-\varphi}\int_0^x u(y)g(x-y)dy$), η οποία μπορεί να γραφτεί ως

$$m_{\delta,12}(u) = v_{\delta,12}(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u v_{\delta,12}(y) g_\delta(u-y) dy$$

(2.3.13)

όπου

$$g_\delta(u) = -\overline{G}'_\delta(u) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\varphi_\delta)(\varphi_\delta)^n f_\delta^{*n}(u)$$

(2.3.14)

είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας σύνθετης γεωμετρικής τυχαίας μεταβλητής για $\mathrm{u} > 0$ όπου το φ_δ ορίζεται από τη σχέση 2.3.6 ($\varphi_\delta = \int_0^\infty h_{\delta,1}(x|0)dx$) και $f_\delta^{*n}(y)$ είναι η n-οστη συνέλιξη της $f_\delta(y)$ που ορίζεται από τη σχέση 2.3.9 ($f_\delta(y) = \frac{1}{\varphi_\delta}\int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)dx$) με τον εαυτό της.

Μπορούμε να απλοποιήσουμε τη σχέση $m_{\delta,12}(u)$ χρησιμοποιώντας ειδικές περιπτώσεις για την συνάρτηση ποινής $\omega_{12}(x,y)$. Για παράδειγμα, εάν θέσουμε $\omega_{12}(x,y) = \omega_2(y)$, τότε η σχέση 2.3.11 απλοποιείται στην παρακάτω σχέση

$$m_{\delta,2}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,2}(u-y) f_\delta(y) dy + v_{\delta,2}(u)$$

(2.3.15)

όπου χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 2.3.12 και 2.3.9 ($f_\delta(y) = \frac{1}{\varphi_\delta}\int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)dx$)

$$v_{\delta,2}(u) = \int_u^{\infty}\int_0^{\infty} \omega_2(y-u) h_{\delta,12}(x,y|0) dx dy$$
$$= \varphi_\delta \int_u^{\infty} \omega_2(y-u) f_\delta(y) dy$$

(2.3.16)

η απλοποίηση που παίρνουμε είναι αρκετά σημαντική, από τη στιγμή που η $\upsilon_{\delta,2}(u)$ είναι μια συνάρτηση του φ_δ και του κλιμακωτού ύψους $f_\delta(y)$ και δεν εξαρτάται από την $h_{\delta,12}(x,y|0)$, σε αντίθεση με την $\upsilon_{\delta,12}(u)$. Επίσης, χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.3.13 ($m_{\delta,12}(u) = \upsilon_{\delta,12}(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u \upsilon_{\delta,12}(y) g_\delta(u-y)dy$), η γενική λύση της $m_{\delta,12}(u)$, απλοποιείται στην παρακάτω σχέση

$$m_{\delta,2}(u) = \upsilon_{\delta,2}(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u \upsilon_{\delta,2}(y) g_\delta(u-y)dy$$

(2.3.17)

όπου η $g_\delta(y)$ δίνεται από τη σχέση 2.3.14 ($g_\delta(u) = -\overline{G}'_\delta(u) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\varphi_\delta)(\varphi_\delta)^n f_\delta^{*n}(u)$).

Τώρα, έστω $\omega_{12}(x,y) = \omega_2(y) = 1$.

Τότε η συνάρτηση $m_{\delta,12}(u) = \mathrm{E}\left[e^{-\delta T} I(T<\infty)\middle|U_0 = 0\right]$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.3.16, η συνάρτηση $\upsilon_{\delta,2}(u)$ απλοποιείται σε $\varphi_\delta \overline{F}_\delta(u)$, όπου $\overline{F}_\delta(u) = \int_u^\infty f_\delta(y)dy$. Τότε, από τη σχέση 1.11.9 ($\overline{\mathrm{G}}(\mathrm{x}) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\varphi)(\varphi)^n \overline{F}^{*n}(x)$) είδαμε πως η συνάρτηση $m_{\delta,12}(u)$ σχετίζεται με την ουρά μιας γεωμετρικής κατανομής και έτσι παίρνουμε

$$\overline{\mathrm{G}}_\delta(u) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\varphi_\delta)(\varphi_\delta)^n \overline{F}^{*n}(u)$$

όπου $\overline{F}_\delta^{*n}(u) = \int_u^\infty f_\delta^{*n}(y)dy$. Έτσι, η σχέση 2.3.15 ($m_{\delta,2}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,2}(u-y) f_\delta(y)dy + \upsilon_{\delta,2}(u)$) απλοποιείται στην παρακάτω σχέση

$$\overline{G}_\delta(u) = \varphi_\delta \int_0^u \overline{G}_\delta(u-y) f_\delta(y)dy + \varphi \overline{F}_\delta(u)$$

(2.3.18)

Από τη στιγμή που $\overline{\mathrm{G}}_\delta(u) = \mathrm{E}\left[e^{-\delta T} I(T<\infty)\middle|U_0 = 0\right]$, για $\delta = 0$, $\overline{\mathrm{G}}_0(u) = \psi(u)$. Επίσης, χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.3.8 ($0 < \varphi_\delta = Pr(T<\infty|U_0 = 0) = \psi(0) \leq 1$), είναι $\varphi_\delta = \mathrm{E}\left[e^{-\delta T} I(T<\infty)\middle|U_0 = 0\right] = \overline{\mathrm{G}}_\delta(0)$.

Θέλουμε να καταλήξουμε σε μια σχέση μεταξύ των αγνώστων ποσοτήτων $h_{\delta,12}(x,y|0), \varphi_\delta$ και $f_\delta(y)$ στη λύση που καταλήξαμε για την $m_{\delta,12}(u)$ στη σχέση

2.3.13 ($m_{\delta,12}(u) = \upsilon_{\delta,12}(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u \upsilon_{\delta,12}(y) g_\delta(u-y)dy$), με την πυκνότητα των ενδιάμεσων χρόνων $\mathrm{k}(t)$ και την πυκνότητα του ύψους των απαιτήσεων $\mathrm{p}(y)$ ώστε να μπορούμε να λύσουμε την συνάρτηση Gerber – Shiu $m_{\delta,12}(u)$ σε μια πλήρη γενίκευση. Ωστόσο, στην ανάλυση που έχουμε κάνει ως τώρα δεν συμπεριλάβαμε αυτή τη σχέση, εκτός από τη σχέση 2.2.2 ($h_{12}^*(x,y|u) = \frac{1}{c} k\left(\frac{x-u}{c}\right) p(x+y)$). Για να αποκτήσουμε γνώση σχετικά με τη σύνδεση των παραπάνω ποσοτήτων, θα πρέπει να μελετήσουμε το χρόνο και τα ύψη των απαιτήσεων, δεσμεύοντας ως προς αυτά, ώστε να καταλήξουμε σε μια ολοκληρωτική εξίσωση που να ικανοποιείται από την συνάρτηση $m_{\delta,12}(u)$ και να είναι συνάρτηση των $\mathrm{k}(t)$ και $\mathrm{p}(y)$.

2.4. Ο χρόνος και το ύψος της πρώτης απαίτησης

Ο σκοπός μας είναι να καταλήξουμε σε μια σύνδεση μεταξύ της συνάρτησης $m_{\delta,12}(u)$ και των πυκνοτήτων $\mathrm{k}(t)$ και $\mathrm{p}(y)$ των ενδιάμεσων χρόνων και του ύψους των απαιτήσεων αντίστοιχα. Για να καταφέρουμε τη σύνδεση αυτή, δεσμεύουμε ως προς το χρόνο και το ύψος της πρώτης απαίτησης, θέτουμε τη συνάρτηση ποινής $\omega_{12}(x,y) = 1$ ώστε να πάρουμε την $\overline{\mathrm{G}}_\delta(u)$, όπως δείξαμε νωρίτερα και χρησιμοποιώντας την σχέση 2.3.18 ($\overline{G}_\delta(u) = \varphi_\delta \int_0^u \overline{G}_\delta(u-y) f_\delta(y)dy + \varphi \overline{F}_\delta(u)$) και είμαστε σε θέση να πάρουμε λύσεις για τις φ_δ και $f_\delta(y)$ ώστε να μπορέσουμε να λύσουμε την $m_{\delta,2}(u)$ όπως δίνεται από την σχέση 2.3.17 ($m_{\delta,2}(u) = \upsilon_{\delta,2}(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u \upsilon_{\delta,2}(y) g_\delta(u-y)dy$).

Έτσι λοιπόν βλέπουμε ότι μπορούμε να αναλύσουμε την $m_{\delta,12}(u)$ υπό συνθήκες, ωστόσο δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε μια αναλυτική λύση η οποία να είναι και συνάρτηση των γνωστών ανά περίπτωση σε εμάς πυκνοτήτων $\mathrm{k}(t)$ και $\mathrm{p}(y)$. Επίσης, είναι σημαντικό να αναφέρουμε πως παρόλο που οι $m_{\delta,12}(u)$, $m_{\delta,2}(u)$ είναι και οι δυο συναρτήσεις του u, πρέπει να μπορούμε να αναγνωρίσουμε την $h_{\delta,12}(x,y|0)$ και τότε μπορούμε χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 2.3.6 ($\varphi_\delta = \int_0^\infty h_{\delta,1}(x|0)dx$) και 2.3.9 ($f_\delta(y) =$

$\frac{1}{\varphi_\delta}\int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)dx)$ να βρούμε τις φ_δ και $f_\delta(y)$ και έπειτα να βρούμε γενικευμένες λύσεις για τις συναρτήσεις $m_{\delta,12}(u)$ και $m_{\delta,2}(u)$.

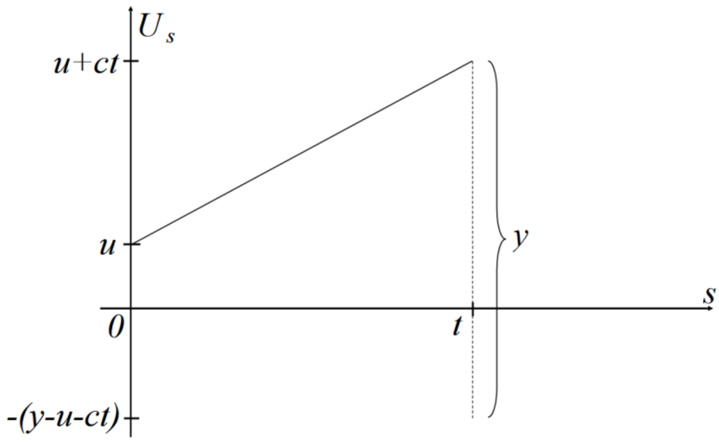
Στη συνέχεια θέλουμε να καταλήξουμε αναλύοντας δυο περιπτώσεις σε μια ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιείται από την συνάρτηση $m_{\delta,12}(u)$ δεσμεύοντας ως προς τον χρόνο και το ύψος της πρώτης απαίτησης t και y αντίστοιχα. Για να μπορέσουμε να το κάνουμε αυτό διακρίνουμε τις δυο εξής περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: Η πρώτη απαίτηση προκαλεί χρεοκοπία.
Περίπτωση 1: Η πρώτη απαίτηση δεν προκαλεί χρεοκοπία.

Όπως δείξαμε και στην προηγούμενη ενότητα με την ανάλυση των περιπτώσεων, θέλουμε να βρούμε πως συνεισφέρουν οι παραπάνω περιπτώσεις στην συνάρτηση $m_{\delta,12}(u)$ αντιπροσωπεύοντας η κάθε περίπτωση έναν όρο στην συνάρτηση αυτή. Θεωρούμε πως η πρώτη απαίτηση είναι ύψους y, συμβαίνει στο χρόνο t και έχει πυκνότητα $\mathrm{p}(y)\mathrm{k}(t)$.

Περίπτωση 1: Η πρώτη απαίτηση προκαλεί χρεοκοπία.

Στην περίπτωση αυτή, όπου η πρώτη απαίτηση προκαλεί χρεοκοπία, θεωρούμε πως ο ασφαλιστής με ένα αρχικό αποθεματικό u, εισπράττει ασφάλιστρο c στο χρόνο t, όπου εμφανίζεται η πρώτη απαίτηση έτσι ώστε το πλεόνασμα αμέσως πριν την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης να ισούται με $\mathrm{u}+\mathrm{ct}$. Για να συμβεί η χρεοκοπία όταν εμφανίζεται η πρώτη απαίτηση, θα πρέπει, το ύψος της πρώτης απαίτησης y να υπερβεί την ποσότητα $\mathrm{u}+\mathrm{ct}$, ώστε το πλεόνασμα να πέσει κάτω από το 0 και να συμβεί η χρεοκοπία. Έτσι, η χρεοκοπία συμβαίνει στο χρόνο t, το πλεόνασμα αμέσως πριν τη χρεοκοπία είναι ίσο με $\mathrm{u}+\mathrm{ct}$ και το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι ίσο με $\mathrm{y}-\mathrm{u}-\mathrm{ct}$. Παρακάτω απεικονίζουμε την περίπτωση που περιγράψαμε.



Σχήμα 9 Περίπτωση 1 – Ο χρόνος και το ύψος της πρώτης απαίτησης

Επομένως, η παραπάνω περίπτωση εκφράζεται ως ο παρακάτω όρος στη συνάρτηση $m_{\delta,12}(u)$, τον οποίο συμβολίζουμε με $\beta_{\delta,12}(u)$

$$\beta_{\delta,12}(u) = \int_0^\infty \int_{u+ct}^\infty e^{-\delta t}\omega_{12}(u+ct, y-u-ct)p(y)k(t)dydt$$
$$= \int_0^\infty e^{-\delta t}\alpha_{12}(u+ct)k(t)dt$$

(2.4.1)

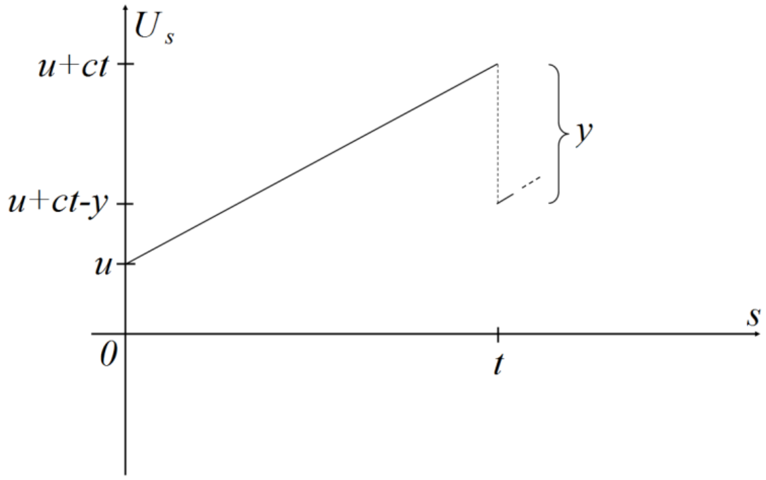
όπου

$$\alpha_{12}(x) = \int_x^\infty \omega_{12}(x, y-x)p(y)dy$$

(2.4.2)

Περίπτωση 2: Η πρώτη απαίτηση δεν προκαλεί χρεοκοπία.

Στην περίπτωση που η πρώτη απαίτηση δεν προκαλεί χρεοκοπία, υπενθυμίζουμε από την περίπτωση 1 ότι το πλεόνασμα αμέσως πριν την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης είναι ίσο με $\mathrm{u+ct}$. Έτσι, για να μην συμβεί η χρεοκοπία με την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης, θα πρέπει η πρώτη απαίτηση που είναι ύψους y να είναι μικρότερη της ποσότητας $\mathrm{u+ct}$, ώστε το πλεόνασμα να μην πέσει κάτω από το 0. Η διαδικασία ανανεώνεται με ένα αρχικό απόθεμα $\mathrm{u+ct-y}$, έχοντας περάσει χρόνος t. Παρακάτω απεικονίζουμε την περίπτωση που περιγράψαμε.



Σχήμα 10 Περίπτωση 2 – Ο χρόνος και το ύψος της πρώτης απαίτησης

Επομένως, η παραπάνω περίπτωση εκφράζεται ως ο παρακάτω όρος στη συνάρτηση $m_{\delta,12}(u)$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{u+ct} e^{-\delta t} m_{\delta,12}(u+ct-y)p(y)k(t)dydt$$
$$= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \sigma_{\delta,12}(u+ct)k(t)dt$$

(2.4.3)

όπου

$$\sigma_{\delta,12}(x) = \int_0^{x} m_{\delta,12}(x-y)p(y)dy$$

(2.4.4)

Παρατηρούμε πως στη σχέση 2.4.4 η $\sigma_{\delta,12}(x)$ είναι η συνέλιξη της $m_{\delta,12}(u)$ και της $p(x)$, επομένως ο μετασχηματισμός Laplace θα δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\tilde{\sigma}_{\delta,12}(s) = \tilde{m}_{\delta,12}(s)\tilde{p}(s)$$

(2.4.5)

Αθροίζοντας τους όρους των δυο περιπτώσεων που αναλύσαμε παραπάνω, δηλαδή, τις σχέσεις 2.4.1 ($\beta_{\delta,12}(u) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \alpha_{12}(u+ct)k(t)dt$) και 2.4.3 παίρνουμε την παρακάτω σχέση

$$m_{\delta,12}(u) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\sigma_{\delta,12}(u+ct)k(t)dt \ + \beta_{\delta,12}(u)$$

(2.4.6)

Παρατηρούμε πως το πρώτο μέρος του παραπάνω αθροίσματος είναι της μορφής ($\eta_\delta(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\omega_t(u+ct)k(t)dt$) (σχέση 1.10.1) με τη διαφορά ότι η συνάρτηση $\omega_t(x)$ έχει αντικατασταθεί από τη συνάρτηση $\sigma_{\delta,12}(x)$ και έτσι από τη στιγμή που η συνάρτηση $\sigma_{\delta,12}(x)$ δεν είναι μια συνάρτηση του t, χρησιμοποιώντας την σχέση 1.10.4 ($\tilde{\eta}_\delta(s) = \tilde{\omega}(s)\,\tilde{k}(\delta - cs) - \tilde{\omega}^*_\delta(\delta - cs)$), και τη σχέση 2.4.5 ($\tilde{\sigma}_{\delta,12}(s) = \tilde{m}_{\delta,12}(s)\tilde{p}(s)$), ο μετασχηματισμός Laplace δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\int_0^{\infty} e^{-su}\int_0^{\infty} e^{-\delta t}\sigma_{\delta,12}(u+ct)k(t)dtdu$$

(2.4.7)

$$= \tilde{\sigma}_{\delta,12}(s)\tilde{k}(\delta - cs) - \tilde{\sigma}^*_{\delta,12}(\delta - cs)$$

$$= \tilde{m}_{\delta,12}(s)\tilde{p}(s)\tilde{k}(\delta - cs) - \tilde{\sigma}^*_{\delta,12}(\delta - cs)$$

(2.4.8)

όπου

$$\tilde{\sigma}^*_{\delta,12}(s) = \int_0^{\infty}\int_0^{ct} e^{-\frac{1}{c}\{\delta x + s(ct-x)\}}\sigma_{\delta,12}(x)k(t)dxdt$$

(2.4.9)

Επομένως, ο μετασχηματισμός Laplace της σχέσης 2.4.6 δίνεται από την παρακάτω

$$\tilde{m}_{\delta,12}(s) = \tilde{m}_{\delta,12}(s)\tilde{p}(s)\tilde{k}(\delta - cs) - \tilde{\sigma}^*_{\delta,12}(\delta - cs) \ + \tilde{\beta}_{\delta,12}(s)$$

η οποία λύνοντας ως προς $\tilde{m}_{\delta,12}(s)$ μας δίνει

$$\left(1 - \tilde{p}(s)\tilde{k}(\delta - cs)\right)\tilde{m}_{\delta,12}(s) \ = \tilde{\beta}_{\delta,12}(s) \ - \ \tilde{\sigma}^*_{\delta,12}(\delta - cs)$$

(2.4.10)

Να αναφέρουμε ότι ο συντελεστής της $\tilde{m}_{\delta,12}(s)$ είναι ίσος με 0 όταν $s = \rho_\delta$, όπου ρ_δ είναι ρίζα της εξίσωσης του Lundberg, με βάση την σχέση 1.9.2 ($1 - \tilde{p}(s)\tilde{k}(\delta - cs) = 0$). Αν θέσουμε στην τελευταία τη ρίζα ρ_δ, τότε παίρνουμε

$$\tilde{\sigma}^{*}_{\delta,12}(\delta - c\rho_\delta) = \tilde{\beta}_{\delta,12}(\rho_\delta) \tag{2.4.11}$$

και από τη στιγμή που η $\tilde{\beta}_{\delta,12}(\rho_\delta)$ είναι μια γνωστή ποσότητα σε όρους των $p(y)$ και $k(t)$, η παραπάνω σχέση μας επιτρέπει να κατανοήσουμε άγνωστες ποσότητες σχετικές με τη συνάρτηση $\tilde{\sigma}^{*}_{\delta,12}(\delta - cs)$ που μας χρειάζεται γενικότερα για να αντιστρέψουμε την $\tilde{m}_{\delta,12}(s)$ χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.4.10 υπό προϋποθέσεις για τις πυκνότητες $p(y)$ ή/και $k(t)$.

2.5. Εφαρμογή στο κλασσικό μοντέλο Poisson

Το κλασσικό μοντέλο Poisson είναι γνωστό και ως το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι εκθετικά κατανεμημένοι. Αφορά ένα ανανεωτικό μοντέλο στο οποίο η κατανομή του ύψους των απαιτήσεων $p(y)$ μπορεί να είναι οποιαδήποτε. [Willmot, G.E. (2011)]. Θεωρούμε επομένως πως η πυκνότητα των ενδιάμεσων χρόνων είναι $k(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ και υπολογίζοντας τον μετασχηματισμό Laplace της πυκνότητας αυτής παίρνουμε $\tilde{k}(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$. Έπειτα χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Laplace της πυκνότητας των ενδιάμεσων χρόνων στη σχέση 2.4.9 ($\tilde{\sigma}^{*}_{\delta,12}(s) = \int_0^\infty \int_0^{ct} e^{-\frac{1}{c}\{\delta x + s(ct-x)\}} \sigma_{\delta,12}(x) k(t)\, dx dt$) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}^{*}_{\delta,12}(s) &= \int_0^\infty \int_0^{ct} e^{-\frac{1}{c}\{\delta x + s(ct-x)\}} \sigma_{\delta,12}(x) \lambda e^{-\lambda t}\, dx dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\frac{1}{c}(\delta - s)x} \sigma_{\delta,12}(x) \left(\int_{\frac{x}{c}}^\infty \lambda e^{-(\lambda+s)t} dt \right) dx \\
&= \int_0^\infty e^{-\frac{1}{c}(\delta - s)x} \sigma_{\delta,12}(x) \frac{\lambda}{\lambda+s} e^{-\frac{1}{c}(\lambda+s)x} dx \\
&= \frac{\lambda}{\lambda+s} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)x} \sigma_{\delta,12}(x)\, dx \\
&= \frac{\lambda}{\lambda+s} \tilde{\sigma}_{\delta,12}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)
\end{aligned} \tag{2.5.1}$$

$$(2.5.2)$$

Τότε η σχέση 2.4.10 ($\left(1 - \tilde{p}(s)\tilde{k}(\delta - cs)\right)\widetilde{m}_{\delta,12}(s) = \tilde{\beta}_{\delta,12}(s) - \tilde{\sigma}^{*}_{\delta,12}(\delta - cs)$) γράφεται ως

$$\left(1 - \tilde{p}(s)\frac{\lambda}{\lambda + \delta - cs}\right)\widetilde{m}_{\delta,12}(s)$$
$$= \tilde{\beta}_{\delta,12}(s) - \frac{\lambda}{\lambda + \delta - cs}\tilde{\sigma}_{\delta,12}\left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right) \quad (2.5.3)$$

Θεώρημα 1.

Για $\delta > 0$, υπάρχει μια πραγματική θετική ρίζα $s = \rho_{\delta}$ για την εξίσωση του Lundberg που δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$1 - \tilde{p}(s)\frac{\lambda}{\lambda + \delta - cs} = 0 \quad (2.5.4)$$

όπου αν το $\delta = 0$, τότε $s = \rho_0 = 0$ είναι η μοναδική πραγματική και μη – αρνητική ρίζα της εξίσωσης.

Απόδειξη.

Η εξίσωση του Lundberg όπως δόθηκε στη σχέση 2.5.4 μπορεί να ξαναγραφτεί ως εξής:

$$\lambda + \delta - cs = \lambda\tilde{p}(s) \quad (2.5.5)$$

Αν θεωρήσουμε,

$$Y_1(s) = \lambda + \delta - cs \Rightarrow Y_1(0) = \lambda + \delta$$
$$Y_1'(0) = -c < 0$$

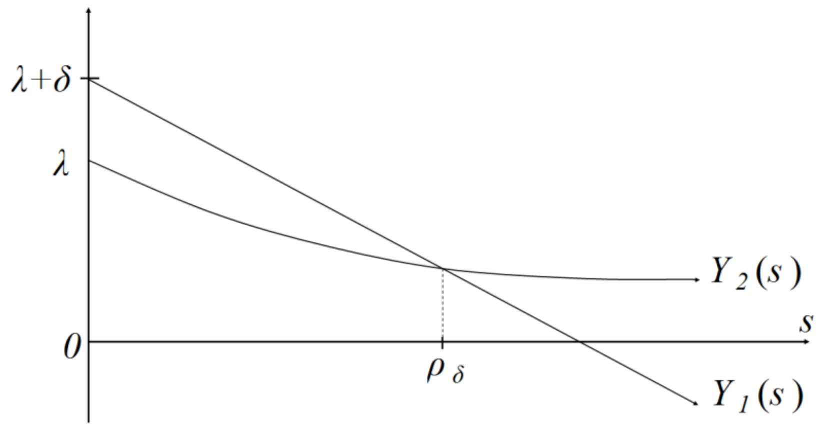
Βλέπουμε πως η $Y_1(s)$ είναι μια φθίνουσα γραμμική συνάρτηση του s. Επίσης, αν θεωρήσουμε,

$$Y_2(s) = \lambda\tilde{p}(s) = \lambda E[e^{-sY}] \Rightarrow Y_2(0) = \lambda\tilde{p}(0) = \lambda$$
$$Y_2'(s) = -\lambda E[Ye^{-sY}] < 0 \Rightarrow Y_2'(0) = -\lambda E[Y]$$
$$Y_2''(s) = \lambda E[Y^2 e^{-sY}] > 0$$

Βλέπουμε επίσης πως η $Y_2(s)$ είναι μια φθίνουσα γραμμική συνάρτηση του s. Τότε η σχέση 2.5.5 είναι ανάλογη της

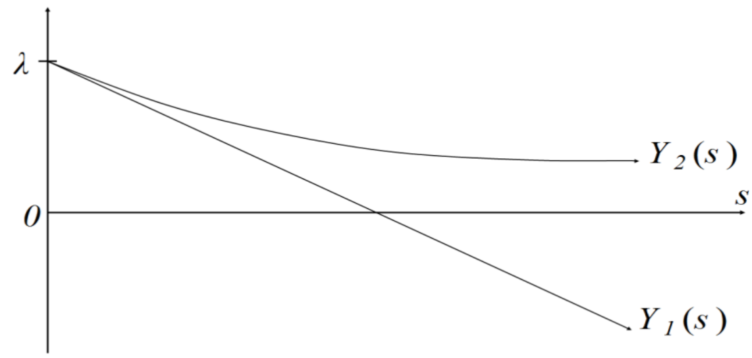
$$Y_1(s) = Y_2(s)$$

Για $\delta > 0$ βλέπουμε παρακάτω σε γράφημα την απεικόνιση των $Y_1(s)$ και $Y_2(s)$.



Σχήμα 11 Απεικόνιση των $Y_1(s)$ και $Y_2(s)$ για δ>0

Είναι φανερό από το παραπάνω γράφημα πως για $\delta > 0$ υπάρχει μόνο μια πραγματική και θετική λύση στην εξίσωση του Lundberg, $s = \rho_\delta$. Τώρα, ας θεωρήσουμε ότι $\delta = 0$. Από τη στιγμή που $c\frac{1}{\lambda} > E[Y] \Rightarrow c > \lambda E[Y]$, όπως αναφέραμε στη σχέση 1.6.3 ($cE[V] > E[Y]$), η $Y_1'(0) = -c$ είναι πιο αρνητική από την $Y_2'(0) = -\lambda E[Y]$. Επομένως, η $Y_1(s)$ έχει μεγαλύτερη αρνητική κλίση από τη $Y_2(s)$ στο σημείο $s = 0$. Όταν είναι και το $\delta = 0$, βλέπουμε την γραφική απεικόνιση των δυο συναρτήσεων παρακάτω



Σχήμα 12 Απεικόνιση των $Y_1(s)$ και $Y_2(s)$ για δ=0

Από το παραπάνω γράφημα είναι φανερό πως για $\delta = 0$, η $s = \rho_0 = 0$ είναι η μοναδική μη – αρνητική λύση στην εξίσωση του Lundberg.

■

Τότε, από τη σχέση 2.4.11 ($\tilde{\sigma}^*_{\delta,12}(\delta - c\rho_\delta) = \tilde{\beta}_{\delta,12}(\rho_\delta)$) και χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.5.2 ($\tilde{\sigma}^*_{\delta,12}(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}\tilde{\sigma}_{\delta,12}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)$), παίρνουμε

$$\frac{\lambda}{\lambda+\delta-c\rho_\delta}\tilde{\sigma}_{\delta,12}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right) = \tilde{\beta}_{\delta,12}(\rho_\delta)$$

όπου ρ_δ είναι η μοναδική και μη – αρνητική ρίζα της εξίσωσης του Lundberg και αφού ξαναγράψουμε την τελευταία, παίρνουμε

$$\tilde{\sigma}_{\delta,12}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right) = \frac{\lambda+\delta-c\rho_\delta}{\lambda}\tilde{\beta}_{\delta,12}(\rho_\delta)$$

την οποία αν την αντικαταστήσουμε στη σχέση 2.5.3 ($\left(1-\tilde{p}(s)\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)\tilde{m}_{\delta,12}(s) = \tilde{\beta}_{\delta,12}(s) - \frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\tilde{\sigma}_{\delta,12}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)$) θα πάρουμε

$$\left(1-\tilde{p}(s)\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)\tilde{m}_{\delta,12}(s) = \tilde{\beta}_{\delta,12}(s) - \frac{\lambda+\delta-c\rho_\delta}{\lambda+\delta-cs}\tilde{\beta}_{\delta,12}(\rho_\delta)$$

και πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη με $-\left(\frac{\lambda+\delta-cs}{c}\right)$, παίρνουμε

$$\left(s-\frac{\lambda+\delta}{c}+\frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s)\right)\tilde{m}_{\delta,12}(s)$$

$$= \frac{1}{c}\Big((\lambda+\delta-c\rho_\delta)\tilde{\beta}_{\delta,12}(\rho_\delta) - (\lambda+\delta-cs)\tilde{\beta}_{\delta,12}(s)\Big) \tag{2.5.6}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.4.1 ($\beta_{\delta,12}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\alpha_{12}(u+ct)k(t)dt$), ο μετασχηματισμός Laplace της $\beta_{\delta,12}(u)$, δίνεται από την παρακάτω

$$\tilde{\beta}_{\delta,12}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\int_0^\infty e^{-\delta t}\alpha_{12}(u+ct)\lambda e^{-\lambda t}dtdu$$

και αναγνωρίζουμε την παραπάνω εξίσωση ως την 2.4.7 ($\int_0^\infty e^{-su}\int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_{\delta,12}(u+ct)k(t)dtdu = \tilde{m}_{\delta,12}(s)\tilde{p}(s)\tilde{k}(\delta-cs) - \tilde{\sigma}^*_{\delta,12}(\delta-cs)$), με τη διαφορά ότι, έχουμε αντικαταστήσει την $\sigma_{\delta,12}(x)$ με την $\alpha_{12}(x)$ και την $k(t)$ με $\lambda e^{-\lambda t}$. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τις σχέσεις 2.4.8 ($\int_0^\infty e^{-su}\int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_{\delta,12}(u+ct)k(t)dtdu =$

$\tilde{m}_{\delta,12}(s)\tilde{p}(s)\tilde{k}(\delta - cs) - \tilde{\sigma}^*_{\delta,12}(\delta - cs)$) και 2.4.9 ($\tilde{\sigma}^*_{\delta,12}(s) = \int_0^\infty \int_0^{ct} e^{-\frac{1}{c}\{\delta x + s(ct-x)\}} \sigma_{\delta,12}(x) k(t) dxdt$) για να πάρουμε την παρακάτω σχέση

$$\tilde{\beta}_{\delta,12}(s) = \tilde{\alpha}_{12}(s)\frac{\lambda}{\lambda + \delta - cs} - \tilde{\alpha}^*_{\delta,12}(\delta - cs) \tag{2.5.7}$$

όπου

$$\tilde{\alpha}^*_{\delta,12}(s) = \int_0^\infty \int_0^{ct} e^{-\frac{1}{c}\{\delta x + s(ct-x)\}} \alpha_{12}(x) \lambda e^{-\lambda t}\, dxdt$$

η οποία είναι της μορφής 2.5.1 ($\tilde{\sigma}^*_{\delta,12}(s) = \int_0^\infty \int_0^{ct} e^{-\frac{1}{c}\{\delta x + s(ct-x)\}} \sigma_{\delta,12}(x) \lambda e^{-\lambda t}\, dxdt$) με τη διαφορά ότι έχουμε αντικαταστήσει την $\sigma_{\delta,12}(x)$ με την $\alpha_{12}(x)$ και επομένως έχουμε ότι

$$\tilde{\alpha}^*_{\delta,12}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}\tilde{\alpha}_{12}\left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right)$$

Έπειτα, χρησιμοποιούμε τη σχέση 2.5.7 ($\tilde{\beta}_{\delta,12}(s) = \tilde{\alpha}_{12}(s)\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs} - \tilde{\alpha}^*_{\delta,12}(\delta - cs)$) και παίρνουμε

$$\tilde{\beta}_{\delta,12}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + \delta - cs}\left(\tilde{\alpha}_{12}(s) - \tilde{\alpha}_{12}\left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right)\right)$$

ή ισοδύναμα,

$$(\lambda + \delta - cs)\tilde{\beta}_{\delta,12}(s) = \lambda\left(\tilde{\alpha}_{12}(s) - \tilde{\alpha}_{12}\left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right)\right)$$

και έτσι βλέπουμε πως το δεξί μέλος της σχέσης 2.5.6 ($\left(s - \frac{\lambda+\delta}{c} + \frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s)\right)\tilde{m}_{\delta,12}(s) = \frac{1}{c}\left((\lambda + \delta - c\rho_\delta)\tilde{\beta}_{\delta,12}(\rho_\delta) - (\lambda + \delta - cs)\tilde{\beta}_{\delta,12}(s)\right)$), δίνεται από την παρακάτω

$$\frac{1}{c}\left((\lambda + \delta - c\rho_\delta)\tilde{\beta}_{\delta,12}(\rho_\delta) - (\lambda + \delta - cs)\tilde{\beta}_{\delta,12}(s)\right)$$
$$= \frac{\lambda}{c}\left(\tilde{\alpha}_{12}(\rho_\delta) - \tilde{\alpha}_{12}\left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right) - \tilde{\alpha}_{12}(s) - \tilde{\alpha}_{12}\left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right)\right)$$

$$= \frac{\lambda}{c}\big(\tilde{\alpha}_{12}(\rho_\delta) - \tilde{\alpha}_{12}(s)\big)$$

(2.5.8)

Τώρα ας θυμηθούμε την εξίσωση του Lundberg που είδαμε στη σχέση 2.5.4 ($1 - \tilde{p}(s)\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs} = 0$), θέτοντας $s = \rho_\delta$ θα πάρουμε,

$$1 - \tilde{p}(\rho_\delta)\frac{\lambda}{\lambda + \delta - c\rho_\delta} = 0$$

και τώρα αφού την λύσουμε ως προς $\lambda + \delta$ και διαιρέσουμε με c και τα δυο μέλη την ξαναγράφουμε ως,

$$\frac{\lambda + \delta}{c} = \rho_\delta + \frac{\lambda}{c}\tilde{p}(\rho_\delta)$$

στη συνέχεια παίρνουμε τον συντελεστή της συνάρτησης $\widetilde{m}_{\delta,12}(s)$ από το αριστερό μέλος της σχέσης 2.5.6 ($\left(s - \frac{\lambda+\delta}{c} + \frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s)\right)\widetilde{m}_{\delta,12}(s) = \frac{1}{c}\Big((\lambda + \delta - c\rho_\delta)\widetilde{\beta}_{\delta,12}(\rho_\delta) - (\lambda + \delta - cs)\widetilde{\beta}_{\delta,12}(s)\Big)$) και χρησιμοποιούμε την τελευταία για να τον ξαναγράψουμε ως

$$\begin{aligned} s - \frac{\lambda + \delta}{c} + \frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s) &= s - \rho_\delta + \frac{\lambda}{c}\tilde{p}(\rho_\delta) + \frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s) \\ &= (s - \rho_\delta)\left(1 - \frac{\lambda}{c}\frac{\tilde{p}(\rho_\delta) - \tilde{p}(s)}{s - \rho_\delta}\right) \\ &= (s - \rho_\delta)\left(1 - \left\{\frac{\lambda}{c}\frac{1 - \tilde{p}(\rho_\delta)}{\rho_\delta}\right\}\left\{\frac{\rho_\delta}{s - \rho_\delta}\frac{\tilde{p}(\rho_\delta) - \tilde{p}(s)}{1 - \tilde{p}(\rho_\delta)}\right\}\right) \end{aligned}$$

(2.5.9)

Έστω,

$$\varphi_\delta = \frac{\lambda}{c}\frac{1 - \tilde{p}(\rho_\delta)}{\rho_\delta} = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-\rho_\delta y}\overline{P}\,(y)dy$$

(2.5.10)

και αφού γνωρίζουμε πως $\int_0^\infty \overline{P}\,(y)dy = E[Y]$, είναι προφανές πως $\int_0^\infty e^{-\rho_\delta y}\overline{P}\,(y)dy < E[Y]$ και επομένως $\varphi_\delta < \frac{\lambda}{c}E[Y]$ που είναι μια ποσότητα μικρότερη από 1 από τη συνθήκη του περιθωρίου ασφαλείας που είδαμε στη σχέση 1.6.3 ($cE[V] > E[Y]$).

Έστω επίσης,

$$\tilde{f}_\delta(s) = \frac{\rho_\delta}{s-\rho_\delta}\frac{\tilde{p}(\rho_\delta)-\tilde{p}(s)}{1-\tilde{p}(\rho_\delta)}$$

σχέση, η οποία αν κάνουμε χρήση της σχέσης 1.8.5 ($\tilde{f}_{ge}(s;r) = \frac{r}{s-r}\frac{\tilde{f}(r)-\tilde{f}(s)}{1-\tilde{f}(r)}$) βλέπουμε πως είναι ο μετασχηματισμός Laplace της κατανομής ισορροπίας της $p(y)$.

Χρησιμοποιώντας την 1.8.4 ($f_{ge}(y;r) = \frac{e^{ry}\int_y^\infty e^{-rx}f(x)dx}{\int_0^\infty e^{-rx}\overline{F}(x)dx}$) παίρνουμε,

$$f_\delta(y) = \frac{e^{\rho_\delta y}\int_y^\infty e^{-\rho_\delta x}p(x)dx}{\int_0^\infty e^{-\rho_\delta x}\overline{P}(x)dx} \tag{2.5.11}$$

Εάν θέσουμε $\delta = 0$, έχουμε $\rho_0 = 0$ και $f_0(y) = \overline{P}(y)/\mathrm{E}[Y]$ που είναι η πυκνότητα ισορροπίας της $p(y)$. Κάνοντας χρήση της σχέσης 2.5.9 ($\mathrm{s} - \frac{\lambda+\delta}{\mathrm{c}} + \frac{\lambda}{\mathrm{c}}\tilde{\mathrm{p}}(\mathrm{s}) = (s-\rho_\delta)\left(1 - \left\{\frac{\lambda}{c}\frac{1-\tilde{p}(\rho_\delta)}{\rho_\delta}\right\}\left\{\frac{\rho_\delta}{s-\rho_\delta}\frac{\tilde{p}(\rho_\delta)-\tilde{p}(s)}{1-\tilde{p}(\rho_\delta)}\right\}\right)$), παίρνουμε,

$$s - \frac{\lambda+\delta}{c} + \frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s) = (s-\rho_\delta)\left(1-\varphi_\delta\tilde{f}_\delta(s)\right) \tag{2.5.12}$$

την οποία αν τη χρησιμοποιήσουμε μαζί με τη σχέση 2.5.8 ($\frac{1}{c}\left((\lambda+\delta-c\rho_\delta)\tilde{\beta}_{\delta,12}(\rho_\delta) - (\lambda+\delta-cs)\tilde{\beta}_{\delta,12}(s)\right) = \frac{\lambda}{c}\left(\tilde{\alpha}_{12}(\rho_\delta)-\tilde{\alpha}_{12}(s)\right)$), μπορούμε να γράψουμε την σχέση 2.5.6 ($\left(s-\frac{\lambda+\delta}{c}+\frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s)\right)\tilde{m}_{\delta,12}(s) = \frac{1}{c}\left((\lambda+\delta-c\rho_\delta)\tilde{\beta}_{\delta,12}(\rho_\delta) - (\lambda+\delta-cs)\tilde{\beta}_{\delta,12}(s)\right)$), ως,

$$(s-\rho_\delta)\left(1-\varphi_\delta\tilde{f}_\delta(s)\right)\tilde{m}_{\delta,12}(s) = \frac{\lambda}{c}\left(\tilde{\alpha}_{12}(\rho_\delta)-\tilde{\alpha}_{12}(s)\right)$$

την οποία ξαναγράφουμε ως,

$$\tilde{m}_{\delta,12}(s) = \varphi_\delta\tilde{m}_{\delta,12}(s)\tilde{f}_\delta(s) + \frac{\lambda}{c}\frac{\tilde{\alpha}_{12}(\rho_\delta)-\tilde{\alpha}_{12}(s)}{s-\rho_\delta}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση 1.8.2 ($\int_0^\infty e^{-sx}\,T_r f(x)dx = \int_0^\infty e^{-(s-r)x}\int_x^\infty e^{-ry}\,f(y)dydx$) και αντιστρέφοντας, οδηγούμαστε στην παρακάτω,

$$m_{\delta,12}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,12}(u-y) f_\delta(y)dy + \frac{\lambda}{c} T_{\rho_\delta} \alpha_{12}(u)$$

που είναι μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση και ικανοποιεί την $m_{\delta,12}(u)$ και έτσι, χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.3.13 ($m_{\delta,12}(u) = \upsilon_{\delta,12}(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta} \int_0^u \upsilon_{\delta,12}(y) g_\delta(u-y)dy$) η γενική λύση δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$m_{\delta,12}(u) = \frac{\lambda}{c} T_{\rho_\delta} \alpha_{12}(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta} \int_0^u \frac{\lambda}{c} T_{\rho_\delta} \alpha_{12}(y) g_\delta(u-y)dy$$

όπου:

$$g_\delta(y) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\varphi_\delta)(\varphi_\delta)^n f_\delta^{*n}(y) \tag{2.5.13}$$

καθώς οι φ_δ και $f_\delta(y)$ δίνονται από τις σχέσεις 2.5.10 ($\varphi_\delta = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{-\rho_\delta y} \overline{P}(y)dy$) και 2.5.11 ($f_\delta(y) = \frac{e^{\rho_\delta y} \int_y^\infty e^{-\rho_\delta x} p(x)dx}{\int_0^\infty e^{-\rho_\delta x} \overline{P}(x)dx}$) αντίστοιχα. Καταλήγουμε στο ότι όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι κατανέμονται εκθετικά, χρειάζεται να δουλέψουμε με τη δέσμευση του χρόνου και του ύψους της πρώτης απαίτησης ώστε να βρούμε μια γενική λύση για την συνάρτηση $m_{\delta,12}(u)$.

2.6. Εφαρμογή σε εκθετικά κατανεμημένα ύψη απαιτήσεων

Στην περίπτωση αυτή, δεν υποθέτουμε πως οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν κάποια συγκεκριμένη κατανομή, παρά μονάχα ότι τα ύψη των απαιτήσεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή. [Willmot, G.E. (2011)]. Όποτε, έστω ότι η πυκνότητα των απαιτήσεων είναι $p(y) = \beta e^{-\beta y}$ και $\tilde{p}(s) = \frac{\beta}{\beta+s}$ ο μετασχηματισμός Laplace της πυκνότητας των απαιτήσεων, καθώς και ότι η πυκνότητα υπερβάλλουσας ζημίας δίνεται από την παρακάτω,

$$p_x(y) = \frac{p(x+y)}{\overline{P}(x)} = \frac{\beta e^{-\beta(x+y)}}{e^{-\beta x}} = \beta e^{-\beta y}$$

(2.6.1)

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 2.3.7 ($\varphi_\delta = \int_0^\infty h_{\delta,1}(x|0)dx$) και 2.3.10 ($f_\delta(y) = \int_0^\infty p_x(y)\left\{\frac{h_{\delta,1}(x|0)}{\varphi_\delta}\right\}dx$) που είδαμε νωρίτερα, το κλιμακωτό ύψος δίνεται από την παρακάτω πυκνότητα,

$$f_\delta(y) = \int_0^\infty \beta e^{-\beta y}\left\{\frac{h_{\delta,1}(x|0)}{\varphi_\delta}\right\}dx$$

$$= \beta e^{-\beta y}\int_0^\infty \left\{\frac{h_{\delta,1}(x|0)}{\varphi_\delta}\right\}dx = \beta e^{-\beta y}$$

(2.6.2)

που διαπιστώνουμε πως έχει επίσης την εκθετική κατανομή.

Να αναφέρουμε σε αυτό το σημείο πως, όταν $\omega_{12}(x,y) = 1$, η $m_{\delta,12}(u)$ βρέθηκε να είναι η $\overline{G}_\delta(y)$, η ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής, η οποία με χρήση των σχέσεων 2.3.18 () και 2.6.2 ικανοποίει την παρακάτω,

$$\overline{G}_\delta(u) = \varphi_\delta \int_0^u \overline{G}_\delta(u-y)\,\beta e^{-\beta y}dy + \varphi_\delta e^{-\beta u}$$

(2.6.3)

υπολογίζοντας τον μετασχηματισμό Laplace της τελευταίας, παίρνουμε,

$$\tilde{\tilde{\overline{G_\delta}}}(s) = \varphi_\delta \tilde{\tilde{\overline{G_\delta}}}(s)\frac{\beta}{\beta+s} + \frac{\varphi_\delta}{\beta+s}$$

λύνοντας ως προς $\tilde{\tilde{\overline{G_\delta}}}(s)$ παίρνουμε,

$$\tilde{\tilde{\overline{G_\delta}}}(s) = \frac{\varphi_\delta}{\beta(1-\varphi_\delta)+s}$$

και τέλος αντιστρέφουμε τον μετασχηματισμό για να καταλήξουμε στην παρακάτω,

$$\overline{G}_\delta(u) = \varphi_\delta\, e^{-\beta(1-\varphi_\delta)u}$$

(2.6.4)

Για να βρούμε το φ_δ, θεωρούμε την παρακάτω συνάρτηση που είδαμε κατά την ανάλυση του χρόνου και του ύψους της πρώτης απαίτησης, και πιο συγκεκριμένα τη σχέση 2.4.6 ($m_{\delta,12}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_{\delta,12}(u+ct)k(t)dt\ + \beta_{\delta,12}(u)$). Εάν θέσουμε $\omega_{12}(x,y) = 1$

έτσι ώστε η $m_{\delta,12}(u)$ να είναι η $\overline{G}_\delta(y)$, τότε η σχέση 2.4.4 ($\sigma_{\delta,12}(x) = \int_0^x m_{\delta,12}(x - y)p(y)dy$) γίνεται,

$$\sigma_{\delta,12}(x) = \int_0^x \overline{G}_\delta(x-y)\beta e^{-\beta y} dy$$

και η σχέση 2.4.2 ($\alpha_{12}(x) = \int_x^\infty \omega_{12}(x, y - x)p(y)dy$) γίνεται,

$$\alpha_{12}(x) = \int_x^\infty \beta e^{-\beta y} dy = e^{-\beta x}$$

Τότε, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 2.4.6 ($m_{\delta,12}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \sigma_{\delta,12}(u + ct)k(t)dt + \beta_{\delta,12}(u)$) και 2.4.1 ($\beta_{\delta,12}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \alpha_{12}(u + ct)k(t)dt$), έχουμε,

$$\overline{G}_\delta(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \left\{ \int_0^{u+ct} \overline{G}_\delta(u+ct-y)\beta e^{-\beta y} dy + e^{-\beta(u+ct)} \right\} k(t)dt \tag{2.6.5}$$

Στη συνέχεια θέτουμε στη σχέση 2.6.3 ($\overline{G}_\delta(u) = \varphi_\delta \int_0^u \overline{G}_\delta(u-y)\, \beta e^{-\beta y} dy + \varphi_\delta e^{-\beta u}$), όπου $u = u + ct$ και διαιρούμε και τα δυο μέλη με φ_δ και η 2.6.3 γράφεται ως,

$$\int_0^{u+ct} \overline{G}_\delta(u+ct-y)\beta e^{-\beta y} dy + e^{-\beta(u+ct)} = \frac{\overline{G}_\delta(u+ct)}{\varphi_\delta}$$

Φαίνεται πως το αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης, είναι η έκφραση μέσα στις αγκύλες στη σχέση 2.6.5, και αντικαθιστώντας το ισοδύναμο της τελευταίας στη σχέση 2.6.5, παίρνουμε,

$$\varphi_\delta \overline{G}_\delta(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \overline{G}_\delta(u+ct)k(t)dt \tag{2.6.6}$$

Χρησιμοποιούμε τώρα τη σχέση 2.6.4 ($\overline{G}_\delta(u) = \varphi_\delta\, e^{-\beta(1-\varphi_\delta)u}$), θέτοντας και σε αυτή όπου $u = u + ct$ για να πάρουμε,

$$\overline{G}_\delta(u+ct) = \varphi_\delta\, e^{-\beta(1-\varphi_\delta)(u+ct)} = \overline{G}_\delta(u)\, e^{-\beta(1-\varphi_\delta)ct}$$

μια έκφραση την οποία αν την αντικαταστήσουμε στη σχέση 2.6.6 θα πάρουμε,

$$\varphi_\delta \overline{G}_\delta(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \overline{G}_\delta(u)\, e^{-\beta(1-\varphi_\delta)ct} k(t)dt$$

που είναι φανερό πως ο όρος $\overline{G}_\delta(u)$ μέσα στο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητος από την μεταβλητή t και μπορούμε να διαιρέσουμε και τα δυο μέλη με $\overline{G}_\delta(u)$ ώστε να πάρουμε,

$$\varphi_\delta = \int_0^\infty e^{-\delta t}\, e^{-\beta(1-\varphi_\delta)ct} k(t)dt = \int_0^\infty e^{-(\delta+c\beta(1-\varphi_\delta))t} k(t)dt$$

όπου είναι προφανές πως,

$$\varphi_\delta = \tilde{k}\big(\delta + c\beta(1-\varphi_\delta)\big) \tag{2.6.7}$$

υπενθυμίζουμε από τη σχέση 2.3.8 $(0 < \varphi_\delta = Pr(T < \infty | U_0 = 0) = \psi(0) \leq 1)$ πως $0 < \varphi_\delta < 1$.

Θεώρημα 2.

Υπάρχει μόνο μια πραγματική ρίζα $x = \varphi_\delta \in (0,1)$ για την εξίσωση

$$x = \tilde{k}\big(\delta + c\beta(1-x)\big) \tag{2.6.8}$$

και στην πραγματικότητα, $0 < \varphi_\delta < \tilde{k}(\delta)$.

Απόδειξη.

Αρχικά κάνουμε αλλαγή μεταβλητής, θέτοντας $t = \beta(1-x)$, τότε η 2.6.8 γίνεται,

$$1 - \frac{t}{\beta} = \tilde{k}(\delta + ct) \tag{2.6.9}$$

Από τη στιγμή που $x = 1 - \frac{t}{\beta}$ και $x \in (0,1)$, θα πρέπει $t \in (0, \beta)$. Επικεντρωνόμαστε επομένως μόνο σε τιμές που $t \in (0, \beta)$ και ικανοποιούν την σχέση 2.6.9.

Έστω τώρα $Y_1(t) = 1 - \frac{t}{\beta}$ και $Y_2(t) = \tilde{k}(\delta + ct) = E\left[e^{\{-(\delta+ct)V\}}\right]$ και έτσι η 2.6.9 είναι ανάλογη με $Y_1(t) = Y_2(t)$. Είναι προφανές πως η $Y_1(t)$ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση.

Έστω τώρα ότι,

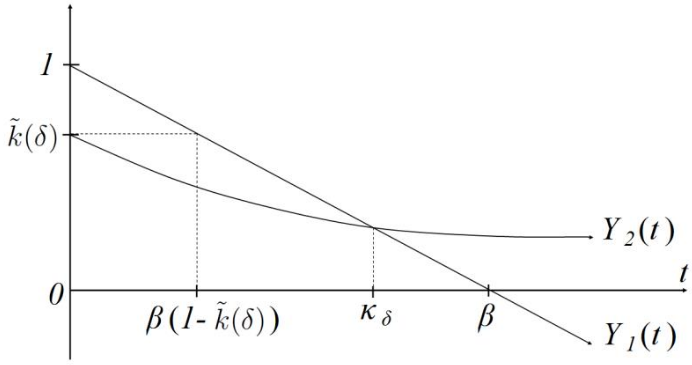
$$Y_2(t) > 0$$
$$Y_2'(t) = -cE\left[Ve^{-(\delta+ct)V}\right] < 0$$
$$Y_2''(t) = c^2E\left[V^2e^{-(\delta+ct)V}\right] < 0$$

βλέπουμε πως η $Y_2(t)$ είναι μια θετική, φθίνουσα και κοίλη συνάρτηση.

Έστω επίσης, $t = \beta\left(1 - \tilde{k}(\delta)\right)$, τότε,

$$Y_1\left(\beta\left(1 - \tilde{k}(\delta)\right)\right) = 1 - \frac{\beta\left(1 - \tilde{k}(\delta)\right)}{\beta} = \tilde{k}(\delta)$$

Για $\delta > 0$ ας θεωρήσουμε τη γραφική αναπαράσταση των $Y_1(t)$ και $Y_2(t)$ όπου $t = \kappa_\delta$ η ρίζα της εξίσωσης $Y_1(t) = Y_2(t)$.



Σχήμα 13 Απεικόνιση των $Y_1(t)$ και $Y_2(t)$ για δ>0

Θεωρούμε τώρα ότι $\delta = 0$, τότε

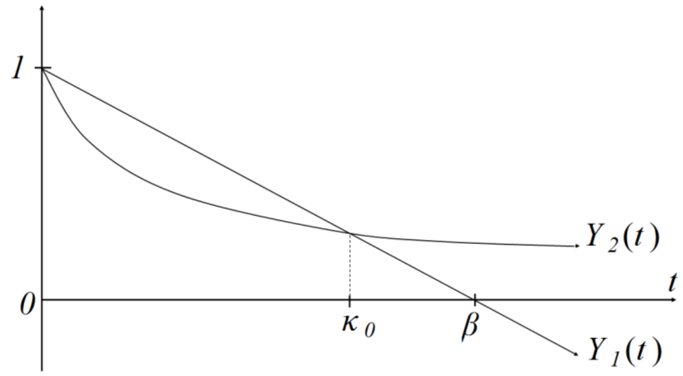
$$Y_1(0) = Y_2(0) = 1$$

$$Y_2(t) = \tilde{k}(ct) = E[e^{-ctV}] \Rightarrow Y_2'(0) = -cE[V]$$

$$Y_1(t) = 1 - \frac{t}{\beta} \Rightarrow Y_1'(0) = -\frac{1}{\beta} = -E[Y]$$

και από τη στιγμή που $cE[V] > E[Y]$ από τη συνθήκη του περιθωρίου ασφαλείας, $Y_2'(0) < Y_1'(0)$ που μας δείχνει ότι η $Y_2(t)$ έχει πιο απότομη αρνητική κλίση από ότι η $Y_1(t)$ στο σημείο $t = 0$.

Παρακάτω ας θεωρήσουμε τη γραφική αναπαράσταση των $Y_1(t)$ και $Y_2(t)$ όπου $t = \kappa_0$ η ρίζα της εξίσωσης $Y_1(t) = Y_2(t)$, $0 < \kappa_0 < \beta$.



Σχήμα 14 Απεικόνιση των $Y_1(t)$ και $Y_2(t)$ για δ=0

Είναι προφανές από το σχήμα 13 και το σχήμα 14 πως για $\delta \geq 0$, υπάρχει μόνο μια πραγματική και θετική ρίζα $t = \kappa_\delta$ για τη σχέση 2.6.9 και $\beta\left(1 - \tilde{k}(\delta)\right) < \kappa_\delta < \beta$. Έτσι, η 2.6.9 γράφεται,

$$1 - \frac{\kappa_\delta}{\beta} = \tilde{k}(\delta + c\kappa_\delta)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\beta}{\beta - \kappa_\delta}\tilde{k}(\delta + c\kappa_\delta) = 1 \tag{2.6.10}$$

Σε αυτό το σημείο να υπενθυμίσουμε την εξίσωση του Lundberg από τη σχέση 1.9.2 $(1 - \tilde{p}(s)\tilde{k}(\delta - cs) = 0)$ για $p(y) = \beta e^{-\beta y}$ την οποία ξαναγράφουμε ως εξής,

$$\frac{\beta}{\beta + s}\tilde{k}(\delta - cs) = 1 \tag{2.6.11}$$

και συγκρίνοντας τις σχέσεις 2.6.10 και 2.6.11, παρατηρούμε πως η διαφορά είναι πως έχουμε όπου $s = -\kappa_\delta$, που αποτελεί τη μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης του Lundberg. Σε αυτό το σημείο να υπενθυμίσουμε πως είχαμε αρχικά κάνει αλλαγή μεταβλητών και τις αντιστρέφουμε θέτοντας $\kappa_\delta = \beta(1 - \varphi_\delta)$. Έτσι, προκύπτει ότι υπάρχει μόνο μια πραγματική ρίζα $x = \varphi_\delta \in (0,1)$ για την εξίσωση της σχέσης 2.6.8 $(x = \tilde{k}(\delta + c\beta(1 - x)))$ και από τη στιγμή που $\beta\left(1 - \tilde{k}(\delta)\right) < \kappa_\delta < \beta$, τότε $0 < \varphi_\delta < \tilde{k}(\delta)$.

■

Χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.3.11 ($m_{\delta,12}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,12}(u-y) f_\delta(y) dy + \upsilon_{\delta,12}(u)$), η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για την $m_{\delta,12}(u)$ όταν τα ύψη των απαιτήσεων κατανέμονται εκθετικά δίνεται από την παρακάτω σχέση,

$$m_{\delta,12}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,12}(u-y) \beta\, e^{-\beta y} dy + \upsilon_{\delta,12}(u) \tag{2.6.12}$$

όπου με χρήση των σχέσεων 2.3.12 ($\upsilon_{\delta,12}(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty \omega_{12}(u+x, y-u) h_{\delta,12}(x,y|0) dxdy$) και 2.2.8 ($h_{\delta,12}(x,y|u) = h_{\delta,1}(x|u) p_x(y)$) προκύπτει η παρακάτω,

$$\upsilon_{\delta,12}(u) = \int_u^\infty \beta\, e^{-\beta y} \int_0^\infty \omega_{12}(u+x, y-u) h_{\delta,1}(x|0) dxdy$$

και τελικώς προκύπτει η γενική λύση της $m_{\delta,12}(u)$ παρακάτω,

$$m_{\delta,12}(u) = \upsilon_{\delta,12}(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta} \int_0^u \upsilon_{\delta,12}(y) g_\delta(u-y) dy$$

όπου από τη σχέση 2.6.4 ($\overline{G}_\delta(u) = \varphi_\delta\, e^{-\beta(1-\varphi_\delta)u}$) είναι,

$$g_\delta(u) = -\overline{G}'_\delta(u) = \beta\varphi_\delta(1-\varphi_\delta) e^{-\beta(1-\varphi_\delta)u}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : Το ανανεωτικό μοντέλο με υστέρηση

3.1. Εισαγωγή

Στο μοντέλο που παρουσιάσαμε, την ανέλιξη του πλεονάσματος, που θα το αποκαλούμε κλασικό μοντέλο, είχαμε κάνει μια παραδοχή πως μια απαίτηση εμφανίζεται στο χρόνο 0. Για να αποφύγουμε την παραδοχή αυτή, χρησιμοποιούμε το ανανεωτικό μοντέλο με υστέρηση, στο οποίο αυτό που συμβαίνει είναι πως οι ενδιάμεσοι χρόνοι δεν έχουν όλοι την ίδια κατανομή. Πιο συγκεκριμένα, ο χρόνος της πρώτης απαίτησης V_1, μπορεί να έχει μια διαφορετική κατανομή με μια πυκνότητα $k_d(t)$, εκτός της κοινής πυκνότητας $k(t)$ που μπορεί να έχουν οι ενδιάμεσοι χρόνοι των υπόλοιπων απαιτήσεων $\{V_2, V_3, \dots\}$. Κατά τα άλλα, τα μοντέλα μεταξύ τους δεν διαφέρουν και η $\{V_2, V_3, \dots\}$ εξακολουθεί να είναι μια ακολουθία από θετικές ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, με κοινή πυκνότητα $k(t)$, καθώς επίσης και η V_1 είναι ανεξάρτητη της ακολουθίας αλλά έχει πυκνότητα $k_d(t)$.

Ορίζουμε την T_d ως τον χρόνο της χρεοκοπίας και θεωρούμε την ίδια ανέλιξη του πλεονάσματος όπως κάναμε στη σχέση 1.6.2 ($U(t) = u + P(t) + S(t)$) στο ανανεωτικό μοντέλο με υστέρηση. Η συνάρτηση των Gerber – Shiu πλέον ορίζεται ως:

$$m_{\delta,12}^{d}(u) = E\left[e^{-\delta T_d}\omega_{12}\left(U_{T_d-}, \left|U_{T_d}\right|\right)I(T_d < \infty)|U_0 = u\right]$$

όπου U_{T_d-} και $\left|U_{T_d}\right|$ είναι το πλεόνασμα αμέσως πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας στο ανανεωτικό μοντέλο με υστέρηση, αντίστοιχα. Πέρα από αυτή τη νέα παραδοχή που κάναμε όλες οι υπόλοιπες υποθέσεις για την συνάρτηση Gerber – Shiu εξακολουθούν να ισχύουν όπως για παράδειγμα, $\delta \geq 0$, $=u \geq 0$ και η συνάρτηση ποινής $\omega_{12}(x, y)$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση για $x > 0$ και $y > 0$.

Από τη στιγμή που το ανανεωτικό μοντέλο με υστέρηση και το κλασικό μοντέλο διαφέρουν μονάχα στο πως κατανέμεται ο ενδιάμεσος χρόνος V_1 της πρώτης απαίτησης, είναι εύκολο να δούμε πως από τη χρονική στιγμή που θα εμφανιστεί η πρώτη απαίτηση, το ανανεωτικό μοντέλο με υστέρηση, μετατρέπεται στο κλασικό μοντέλο της ανέλιξης πλεονάσματος. Έτσι, η ομοιότητα των δυο μοντέλων μας βοηθάει στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων όπως θα κάναμε στο κλασικό μοντέλο. Όταν η μελέτη μας επικεντρώνεται στο ανανεωτικό μοντέλο με υστέρηση, ενδιαφερόμαστε επομένως κυρίως στο πως θα βρούμε τη σύνδεση μεταξύ των δυο μοντέλων για διάφορες υποθέσεις κατανομών για τον χρόνο εμφάνισης της πρώτης απαίτησης, $k_d(t)$, έτσι ώστε να μπορούμε στη συνέχεια να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα που έχουμε για το κλασικό μοντέλο στο ανανεωτικό μοντέλο με υστέρηση. Για να βρούμε τη σχέση μεταξύ των $m^d_{\delta,12}(u)$ και $m_{\delta,12}(u)$, αρχικά θα μελετήσουμε το χρόνο και το ύψος της πρώτης απαίτησης. Υπενθυμίζουμε από τις σχέσεις 2.4.1 ($\beta_{\delta,12}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\alpha_{12}(u+ct)k(t)dt$) και 2.4.6 ($m_{\delta,12}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_{\delta,12}(u+ct)k(t)dt + \beta_{\delta,12}(u)$) που μελετήσαμε στο κλασικό μοντέλο πως,

$$\begin{aligned} m_{\delta,12}(u) &= \int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_{\delta,12}(u+ct)k(t)dt \ + \beta_{\delta,12}(u) \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t}\{\sigma_{\delta,12}(u+ct) + \alpha_{12}(u+ct)\}k(t)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t}\gamma_\delta(u+ct)k(t)dt \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

όπου

$$\gamma_\delta(x) = \sigma_{\delta,12}(x) + \alpha_{12}(x) \tag{3.1.2}$$

Από τη στιγμή που η ανανεωτική διαδικασία με υστέρηση μετατρέπεται σε κλασσική ανέλιξη του πλεονάσματος μετά την πρώτη απαίτηση, θα πρέπει μόνο να αντικαταστήσουμε με $k_d(t)$ την $k(t)$ στη σχέση 3.1.1 για να πάρουμε μια σχέση για την $m^d_{\delta,12}(u)$ η οποία θα είναι

$$m^d_{\delta,12}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\gamma_\delta(u+ct)k_d(t)dt$$

η οποία με αλλαγή μεταβλητής, όπου $t = \frac{t-u}{c}$, μπορεί να γραφτεί ως

$$m^d_{\delta,12}(u) = \frac{1}{c}\int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{t-u}{c}\right)}\gamma_\delta(t)k_d\left(\frac{t-u}{c}\right)dt \tag{3.1.3}$$

την οποία αν παραγωγίσουμε θα πάρουμε

$$m'^{d}_{\delta,12}(u) = \frac{\delta}{c} m^{d}_{\delta,12}(u) - \frac{k_d(0)}{c}\gamma_\delta(u) - \frac{1}{c^2}\int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{t-u}{c}\right)}\gamma_\delta(t) k'_d\left(\frac{t-u}{c}\right)dt$$

(3.1.4)

3.2. Εφαρμογή σε μια ειδική κλάση κατανομών $k_d(t)$

Σε αυτή την περίπτωση θα αναλύσουμε την συνάρτηση $m^d_{\delta,12}(u)$ όταν η πυκνότητα του πρώτου ενδιάμεσου χρόνου $k_d(t)$ είναι μια στάθμιση μιας γενικευμένης πυκνότητας ισορροπίας της $k(t)$ όπως στη σχέση 1.8.4 ($f_{ge}(y;r) = \frac{e^{ry}\int_y^\infty e^{-rx} f(x)dx}{\int_0^\infty e^{-rx}\bar{F}(x)dx}$) και μιας εκθετικής κατανομής. [Willmot, G.E. (2004b)]. Η πυκνότητα δηλαδή, θα έχει την παρακάτω μορφή,

$$k_d(t) = q\frac{e^{-rt}\int_t^\infty e^{ry}k(y)dy}{\int_0^\infty e^{ry}\overline{K}(y)dy} + (1-q)re^{-rt}, \quad t \geq 0$$

(3.2.1)

όπου το r είναι τέτοιο ώστε $\tilde{k}(r) < \infty$ και αν $0 \leq q < 1$ τότε $r > 0$, ενώ αν $q = 1$ τότε $-\infty < r < \infty$.

Να αναφέρουμε επίσης πως όταν $q = 1, r = 0$ τότε $k_d(t) = k_e(t)$ και η ανανεωτική διαδικασία με υστέρηση μετατρέπεται σε μια στάσιμη διαδικασία. Επίσης, όταν $q = 0$ η $k_d(t)$ είναι μια πυκνότητα εκθετικής.

Θέτουμε όπου $t = 0$ στη σχέση 3.2.1 για να πάρουμε,

$$k_d(0) = q\frac{1 + r\int_0^\infty e^{ry}\overline{K}(y)dy}{\int_0^\infty e^{ry}\overline{K}(y)dy} + (1-q)r$$

$$= r + \frac{q}{\int_0^\infty e^{ry}\overline{K}(y)dy}$$

έτσι ώστε η $k_d(t)$ να μπορεί να ξαναγραφτεί ως,

$$k_d(t) = (k_d(0) - r)e^{-rt}\int_t^\infty e^{ry}k(y)dy + (1-q)re^{-rt}$$

(3.2.2)

η οποία με παραγώγιση θα μας δώσει

$$k_d'(t) = \big(r - k_d(0)\big)k(t) - rk_d(t)$$
(3.2.3)

που είναι ένα χρήσιμο αποτέλεσμα και θα το χρησιμοποιήσουμε παρακάτω.

Έστω τώρα το μέλος με το ολοκλήρωμα από τη σχέση 3.1.4 ($m'^{d}_{\delta,12}(u) = \frac{\delta}{c} m^{d}_{\delta,12}(u) - \frac{k_d(0)}{c}\gamma_\delta(u) - \frac{1}{c^2}\int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{t-u}{c}\right)}\gamma_\delta(t)k_d'\left(\frac{t-u}{c}\right)dt$), στο οποίο αν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις 3.2.3, 3.1.1 ($\mathrm{m}_{\delta,12}(\mathrm{u}) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\gamma_\delta(u+ct)k(t)dt$) και 3.1.3 ($m^{d}_{\delta,12}(u) = \frac{1}{c}\int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{t-u}{c}\right)}\gamma_\delta(t)k_d\left(\frac{t-u}{c}\right)dt$), θα πάρουμε,

$$\frac{1}{c^2}\int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{t-u}{c}\right)}\gamma_\delta(t)k_d'\left(\frac{t-u}{c}\right)dt$$
$$= \frac{1}{c^2}\int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{t-u}{c}\right)}\gamma_\delta(t)\left[\big(r-k_d(0)\big)k\left(\frac{t-u}{c}\right) - rk_d\left(\frac{t-u}{c}\right)\right]dt$$
$$= \frac{1}{c^2}\left[\int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{t-u}{c}\right)}\gamma_\delta(t)\big(r-k_d(0)\big)k\left(\frac{t-u}{c}\right)dt - \int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{t-u}{c}\right)}\gamma_\delta(t)rk_d\left(\frac{t-u}{c}\right)dt\right]$$
$$= \frac{\big(r-k_d(0)\big)}{c}m_{\delta,12}(u) - \frac{r}{c}m^{d}_{\delta,12}(u)$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την παραπάνω και την σχέση 3.1.2 ($\gamma_\delta(x) = \sigma_{\delta,12}(x) + \alpha_{12}(x)$), η σχέση 3.1.4 ($m'^{d}_{\delta,12}(u) = \frac{\delta}{c} m^{d}_{\delta,12}(u) - \frac{k_d(0)}{c}\gamma_\delta(u) - \frac{1}{c^2}\int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{t-u}{c}\right)}\gamma_\delta(t)k_d'\left(\frac{t-u}{c}\right)dt$) θα γραφτεί ως

$$m'^{d}_{\delta,12}(u) = \frac{\delta}{c}m^{d}_{\delta,12}(u) - \frac{k_d(0)}{c}\gamma_\delta(u) - \frac{\big(r-k_d(0)\big)}{c}m_{\delta,12}(u) + \frac{r}{c}m^{d}_{\delta,12}(u)$$
$$= \frac{r+\delta}{c}m^{d}_{\delta,12}(u) - \frac{r}{c}m_{\delta,12}(u) - \frac{k_d(0)}{c}\alpha_{12}(u) + \frac{k_d(0)}{c}\Big(m_{\delta,12}(u) - \sigma_{\delta,12}(u)\Big)$$
(3.2.4)

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της σχέσης 3.2.4. Αρχικά, θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace του τελευταίου όρου αυτής και χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.4.5 ($\tilde{\sigma}_{\delta,12}(s) = \tilde{m}_{\delta,12}(s)\tilde{p}(s)$) θα πάρουμε,

$$\frac{k_d(0)}{c}\Big(\tilde{m}_{\delta,12}(s) - \tilde{\sigma}_{\delta,12}(s)\Big) = \frac{k_d(0)}{c}\tilde{m}_{\delta,12}(s)\big(1-\tilde{p}(s)\big)$$
(3.2.5)

Τώρα έστω η παρακάτω συνάρτηση,

$$\sigma^{e}_{\delta,12}(u)=\int_0^u m_{\delta,12}(u-y)p_e(y)dy$$

(3.2.6)

όπου $p_e(y)=\overline{P}(y)/E[Y]$ η κατανομή ισορροπίας της $p(y)$.

Υπολογίζοντας τον μετασχηματισμό Laplace της 3.2.6 παίρνουμε,

$$\tilde{\sigma}^{e}_{\delta,12}(s)=\widetilde{m}_{\delta,12}(s)\frac{1-\tilde{p}(s)}{sE[Y]}$$

(3.2.7)

Επομένως, χρησιμοποιώντας τις 3.2.5 και 3.2.7 ο μετασχηματισμός Laplace της σχέσης 3.2.4 ($m'^{d}_{\delta,12}(u)==\frac{r+\delta}{c}m^{d}_{\delta,12}(u)-\frac{r}{c}m_{\delta,12}(u)-\frac{k_d(0)}{c}\alpha_{12}(u)+\frac{k_d(0)}{c}\Big(m_{\delta,12}(u)-\sigma_{\delta,12}(u)\Big)$), δίνεται από την παρακάτω

$$s\widetilde{m}^{d}_{\delta,12}(s)\ -\ m^{d}_{\delta,12}(0)\ =\ \frac{r+\delta}{c}\ \widetilde{m}^{d}_{\delta,12}(s)-\frac{r}{c}\widetilde{m}_{\delta,12}(s)-\frac{k_d(0)}{c}\widetilde{\alpha}_{12}(s)+\frac{k_d(0)E[Y]}{c}s\widetilde{\sigma}^{e}_{\delta,12}(s)$$

την οποία θα ξαναγράψουμε ως

$$\left(s-\frac{r+\delta}{c}\right)\widetilde{m}^{d}_{\delta,12}(s)=m^{d}_{\delta,12}(0)-\frac{r}{c}\widetilde{m}_{\delta,12}(s)-\frac{k_d(0)}{c}\tilde{\alpha}_{12}(s)+\frac{k_d(0)E[Y]}{c}s\tilde{\sigma}^{e}_{\delta,12}(s)$$

(3.2.8)

Αν θέσουμε $s=\frac{r+\delta}{c}$, τότε το αριστερό μέλος γίνεται 0 και η παραπάνω γράφεται ως

$$m^{d}_{\delta,12}(0)=\frac{r}{c}\widetilde{m}_{\delta,12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)-\frac{k_d(0)}{c}\widetilde{\alpha}_{12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)+\frac{k_d(0)E[Y]}{c}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)\widetilde{\sigma}^{e}_{\delta,12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)$$

και αντικαθιστώντας την τελευταία στη σχέση 3.2.8 θα πάρουμε,

$$\left(s-\frac{r+\delta}{c}\right)\widetilde{m}^{d}_{\delta,12}(s)=\frac{r}{c}\left[\widetilde{m}_{\delta,12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)-\widetilde{m}_{\delta,12}(s)\right]+\frac{k_d(0)}{c}\left[\tilde{\alpha}_{12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)-\tilde{\alpha}_{12}(s)\right]$$
$$-\frac{k_d(0)E[Y]}{c}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)\left[\tilde{\sigma}^{e}_{\delta,12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)-\tilde{\sigma}^{e}_{\delta,12}(s)\right]+\frac{k_d(0)E[Y]}{c}\left(s-\frac{r+\delta}{c}\right)\tilde{\sigma}^{e}_{\delta,12}(s)$$

Στη συνέχεια, διαιρούμε και τις δυο πλευρές με $\left(s-\frac{r+\delta}{c}\right)$ και ξαναγράφουμε την τελευταία ως

$$\widetilde{m}^{d}_{\delta,12}(s)=\frac{k_d(0)E[Y]}{c}\ \tilde{\sigma}^{e}_{\delta,12}(s)\ +\frac{r}{c}\ \left[\frac{\widetilde{m}_{\delta,12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)-\widetilde{m}_{\delta,12}(s)}{s-\frac{r+\delta}{c}}\right]$$

$$+\frac{k_d(0)}{c}\left[\frac{\tilde{\alpha}_{12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)-\tilde{\alpha}_{12}(s)}{s-\frac{r+\delta}{c}}\right]-\frac{k_d(0)E[Y]}{c}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)\left[\frac{\tilde{\sigma}^e_{\delta,12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)-\tilde{\sigma}^e_{\delta,12}(s)}{s-\frac{r+\delta}{c}}\right]$$

(3.2.9)

Αν θυμηθούμε τη μορφή των μετασχηματισμών Laplace με χρήση του τελεστή Dickson – Hipp από τη σχέση 1.8.2 ($\int_0^\infty e^{-sx}\, T_r f(x)dx = \int_0^\infty e^{-(s-r)x} \int_x^\infty e^{-ry} f(y)dydx$) και χρησιμοποιώντας τη σχέση 3.2.6, μπορούμε να αντιστρέψουμε την σχέση 3.2.9 για να πάρουμε

$$m^d_{\delta,12}(u)=\frac{k_d(0)E[Y]}{c}\int_0^u m_{\delta,12}(u-y)p_e(y)dy+\upsilon^d_{\delta,12}(u)$$

(3.2.10)

όπου $p_e(y)=\overline{P}(y)/E[Y]$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση 1.8.6 παίρνουμε

$$\upsilon^d_{\delta,12}(u)=T_{\frac{r+\delta}{c}}\left(\frac{r}{c}m_{\delta,12}(u)+\frac{k_d(0)}{c}\alpha_{12}(u)-\frac{k_d(0)E[Y]}{c}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)\sigma^e_{\delta,12}(u)\right)$$

(3.2.11)

Να αναφέρουμε πως η σχέση 3.2.10 παρουσιάζει την ολοκληρωτική σχέση μεταξύ των $m^d_{\delta,12}(u)$ και $m_{\delta,12}(u)$ όπως θέλαμε. Όπως αναφέραμε νωρίτερα ενδιαφερόμαστε για την στάσιμη διαδικασία όπου $k_d(t)=k_e(t)$ η κατανομή ισορροπίας της $k(t)$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση 3.2.2 ($k_d(t)=(k_d(0)-r)e^{-rt}\int_t^\infty e^{ry}k(y)dy+(1-q)re^{-rt}$), εάν $k_d(0)=1/E[V]$ και $r=0$, τότε η $k_d(t)=k_e(t)$ και η 3.2.10 απλοποιείται ως εξής

$$m^s_{\delta,12}(u)=\frac{1}{1+\theta}\int_0^u m_{\delta,12}(u-y)p_e(y)dy+\upsilon^s_{\delta,12}(u)$$

όπου χρησιμοποιώντας τη σχέση 3.2.11 παίρνουμε,

$$\upsilon^s_{\delta,12}(u)=T_{\frac{\delta}{c}}\left(\frac{1}{cE[V]}\alpha_{12}(u)-\frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\delta}{c}\right)\sigma^e_{\delta,12}(u)\right)$$

και τέλος χρησιμοποιώντας τη συνθήκη του περιθωρίου ασφαλείας από τη σχέση 1.6.3 $cE[V]=(1+\theta)E[Y]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : Η γενικευμένη συνάρτηση των Gerber – Shiu

4.1. Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την γενίκευση της συνάρτησης των Gerber – Shiu [Cheung et al. (2010a)] και θα ξεκινήσουμε με δυο τυχαίες μεταβλητές που εστιάζουμε το ενδιαφέρον μας. Αρχικά θα ορίσουμε τη μεταβλητή X_t ως το ελάχιστο επίπεδο του πλεονάσματος πριν τη χρονική στιγμή t, που ορίζεται ως $X_t = inf_{0\leq s<t}\, U_s$. Επομένως, X_T είναι το ελάχιστο επίπεδο του πλεονάσματος προτού συμβεί χρεοκοπία. Με το να συμπεριλάβουμε την X_T στην ανάλυση μας, μπορούμε να μελετήσουμε το τελευταίο κλιμακωτό ύψος που δίνεται από την $X_T + |U_T|$. Εάν η χρεοκοπία συμβεί με την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης, τότε $X_T = u$. Στη συνέχεια θα ορίσουμε τη μεταβλητή $R_n = u + \sum_{i=1}^{n}(cV_i - Y_i)$, για $n = 1,2, \ldots$ και $R_0 = u$. Τότε, για $n \geq 1$ είναι εύκολο να δούμε πως R_n είναι το επίπεδο του πλεονάσματος αμέσως πριν την n-οστη απαίτηση. Να αναφέρουμε πως η $(N_T - 1)$-οστη απαίτηση είναι η απαίτηση που προηγείται της απαίτησης η οποία προκαλεί χρεοκοπία, στην οποία θα αναφερόμαστε ως η προτελευταία απαίτηση πριν τη χρεοκοπία. Επομένως, R_{N_T-1} είναι το πλεόνασμα αμέσως πριν την εμφάνιση της προτελευταίας απαίτησης πριν τη χρεοκοπία, και συμπεριλαμβάνοντας τη μεταβλητή αυτή στην μελέτη μας, είναι εφικτό να μελετήσουμε τον τελευταίο ενδιάμεσο χρόνο που δίνεται από την $\left(U_{T-} - R_{N_T-1}\right)/c$. Οπότε, μια γενικευμένη συνάρτηση Gerber – Shiu, που θα συμπεριλαμβάνει τις δυο τυχαίες μεταβλητές, X_T και R_{N_T-1} θα μας επιτρέψει να δούμε σημαντικότερα αποτελέσματα στη διαδικασία του πλεονάσματος και έτσι μια καλύτερη κατανόηση στο γεγονός της χρεοκοπίας. Ορίζουμε επομένως την γενικευμένη συνάρτηση Gerber – Shiu ως εξής

$$m_\delta(u) = E\left[e^{-\delta T}\omega\left(U_{T-}, |U_T|, X_T, R_{N_T-1}\right)I(T < \infty)\middle|U_0 = u\right] \tag{4.1.1}$$

η οποία είναι ακριβώς ίδια με τη σχέση 2.1.1 ($m_{\delta,12}(u) = E\left[e^{-\delta T}\omega_{12}(U_{T^-}|U_T|)I(T<\infty)\middle|U_0=u\right]$) με τη μόνη διαφορά ότι προστέθηκαν οι μεταβλητές X_T και R_{N_T-1} στην ανάλυση μας και επομένως επεκτείνουμε την συνάρτηση ποινής $\omega_{12}(x,y)$ δυο μεταβλητών σε μια συνάρτηση ποινής τεσσάρων μεταβλητών $\omega(x,y,z,\upsilon)$, όπου $\omega(x,y,z,\upsilon)$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση για $x>0, y>0, z>0$ και $\upsilon>0$. Όπως και η $m_{\delta,12}(u)$, η γενικευμένη συνάρτηση Gerber – Shiu μπορεί να γραφτεί ως μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση όπως θα δούμε στη συνέχεια. Όμως, πριν από αυτό θα δούμε την από κοινού ελλειμματική πυκνότητα των $\left(T, U_{T-}, |U_T|, R_{N_T-1}\right)$ στα σημεία (t,x,y,υ) καθώς και άλλες χρήσιμες πυκνότητες. Η μεθοδολογία με την οποία θα προχωρήσουμε βασίζεται στην μεθοδολογία του κεφαλαίου 2 με τις διαφορές στη συνάρτηση Gerber – Shiu που παρουσιάσαμε νωρίτερα. . Ο δείκτης «3» θα εκφράζει μια ποσότητα που σχετίζεται με την μεταβλητή X_T ενώ ο δείκτης «4» θα εκφράζει μια ποσότητα που σχετίζεται με την μεταβλητή R_{N_T-1}.

Τώρα ας υποθέσουμε πως η Y δεν είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής V, δηλαδή για παράδειγμα, το ύψος μιας απαίτησης τώρα εξαρτάται από τον ενδιάμεσο χρόνο της απαίτησης προτού εμφανιστεί η απαίτηση. Έστω η $P(y|t) = Pr(Y \le y|V=t)$ να είναι η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής του ύψους της απαίτησης δοθέντος του ενδιάμεσου χρόνου που προηγείται της απαίτησης να είναι t. Ορίζουμε την από κοινού πυκνότητα των (V_i, Y_i) για $i = 1,2,\dots$ ως $p(y|t)k(t)$, όπου $p(y|t) = P'(y|t)$ καθώς επίσης υποθέτουμε πως τα ζεύγη $\{(V_i, Y_i); i = 1,2,\dots\}$ είναι ανεξάρτητα και ισόνομα ώστε να διατηρούνται όλες οι ιδιότητες του κλασσικού μοντέλου της ανέλιξης του πλεονάσματος.

Αρχικά, όταν η χρεοκοπία συμβαίνει με την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης, έχουμε $N_T = 1$ και $R_{N_T-1} = R_0 = u$. Χρησιμοποιώντας τις ίδιες παραδοχές με τις οποίες καταλήξαμε στη σχέση 2.2.2 ($h_{12}^*(x,y|u) = \frac{1}{c}k\left(\frac{x-u}{c}\right)p(x+y)$), όταν η χρεοκοπία συμβαίνει με την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης, γνωρίζουμε πως $t = \frac{x-u}{c}$. Επομένως, η από κοινού ελλειμματική πυκνότητα των $\left(T, U_{T-}, |U_T|, R_{N_T-1}\right)$ στα σημεία (t,x,y,υ)

όταν η χρεοκοπία συμβαίνει με την πρώτη απαίτηση, είναι ίδια με την σχέση 2.2.2 ($h_{12}^*(x,y|u) = \frac{1}{c}k\left(\frac{x-u}{c}\right)p(x+y)$), με τη μόνη διαφορά ότι η $p(y)$ αντικαθίσταται από την $p(y|t)$ και παίρνουμε,

$$h_{12}^*(x,y|u) = \frac{1}{c}k\left(\frac{x-u}{c}\right)p\left(x+y\middle|\frac{x-u}{c}\right) \tag{4.1.2}$$

όπου $t = \frac{x-u}{c}, x > u, y > 0$ και $\upsilon = u$.

Διαφορετικά, εάν η χρεοκοπία συμβεί σε απαιτήσεις μεταγενέστερες της πρώτης απαίτησης, δεν υπάρχει άμεση σχέση μεταξύ των t, x, y και υ. Γνωρίζουμε μονάχα πως $x < u + ct$ και πως $\upsilon < x$ από τη στιγμή που η ανέλιξη του πλεονάσματος αυξάνεται από υ σε x με ένα ρυθμό c κατά την διάρκεια του τελευταίου ενδιάμεσου χρόνου. Ας συμβολίσουμε την από κοινού ελλειμματική πυκνότητα των $\left(T, U_{T-}, |U_T|, R_{N_T-1}\right)$ στα σημεία (t,x,y,υ) δοθέντος ότι η χρεοκοπία συμβαίνει με την εμφάνιση απαιτήσεων μεταγενέστερων της πρώτης με $h_{124}^{**}(t,x,y,\upsilon|u)$. Οπότε, η από κοινού ελλειμματική πυκνότητα $h_{124}(t,x,y,\upsilon|u)$ των $\left(T, U_{T-}, |U_T|, R_{N_T-1}\right)$ στα σημεία (t,x,y,υ) μπορεί να συνοψιστεί στην παρακάτω σχέση

$$h_{124}(t,x,y,\upsilon|u) = \begin{cases} h_{12}^*(x,y|u), & t = \dfrac{x-u}{c}, x > u, y > 0, \upsilon = u \\ h_{124}^{**}(t,x,y,\upsilon|u), & t > 0, \upsilon < x < u + ct,\ y > 0,\ \upsilon > 0 \end{cases} \tag{4.1.3}$$

και πάλι, υπάρχει διαφορετική πυκνότητα για το αν η χρεοκοπία συμβεί με την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης ($t = \frac{x-u}{c}, x > u, y > 0, \upsilon = u$) ή από την εμφάνιση μεταγενέστερων απαιτήσεων ($t > 0, \upsilon < x < u + ct,\ y > 0,\ \upsilon > 0$).

Να υπενθυμίσουμε από τη σχέση 2.2.4 ($h_{\delta,12}^*(x,y|u) = e^{-\delta\frac{x-u}{c}}\frac{1}{c}k\left(\frac{x-u}{c}\right)p(x+y)$) με αντικατάσταση της $p(y)$ από την $p(y|t)$ πως

$$h_{\delta,12}^*(x,y|u) = e^{-\delta\frac{x-u}{c}}h_{12}^*(x,y|u) = e^{-\delta\frac{x-u}{c}}\frac{1}{c}k\left(\frac{x-u}{c}\right)p\left(x+y\middle|\frac{x-u}{c}\right) \tag{4.1.4}$$

παρομοίως και με τη σχέση 2.2.5 ($h_{\delta,12}^{**}(x,y|u)=\int_0^\infty e^{-\delta t}h_{12}^{**}(t,x,y|u)dt$), έχουμε

$$h_{\delta,124}^{**}(x,y,v|u)=\int_0^\infty e^{-\delta t}h_{124}^{**}(t,x,y,v|u)dt$$

(4.1.5)

Τότε, η προεξοφλημένη από κοινού πυκνότητα των ($U_{T-},|U_T|$) θα δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$h_{\delta,12}(x,y|u)=h_{\delta,12}^{*}(x,y|u)+\int_0^x h_{\delta,124}^{**}(x,y,v|u)\,dv$$

(4.1.6)

Όπως κάναμε και στην περίπτωση της κλασσικής ανέλιξης πλεονάσματος, θέτουμε

$$\varphi_\delta=\int_0^\infty\int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)\,dxdy$$

(4.1.7)

και

$$f_\delta(y)=\frac{1}{\varphi_\delta}\int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)\,dx$$

(4.1.8)

Στην περίπτωση που συμπεριλαμβάνουμε την ανεξαρτησία στις υποθέσεις μας, δηλαδή αν θεωρήσουμε ότι η Y είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής V, δηλαδή για παράδειγμα, το ύψος μιας απαίτησης δεν εξαρτάται από τον ενδιάμεσο χρόνο της απαίτησης προτού εμφανιστεί η απαίτηση, τότε $p(y|t)=p(y)$ και από τη σχέση 2.2.1 ($p_x(y)=\frac{p(x+y)}{\overline{P}(x)}$), η πυκνότητα της $|U_T|$ στο y δοθέντος ότι $U_{T-}=x$ είναι $p_x(y)$. Τότε, από τη σχέση 4.1.4 ($h_{\delta,12}^{*}(x,y|u)=\frac{1}{c}k\left(\frac{x-u}{c}\right)p\left(x+y\middle|\frac{x-u}{c}\right)$) συμπεραίνουμε πως

$$h_{\delta,12}^{*}(x,y|u)=h_{\delta,1}^{*}(x|u)p_x(y)$$

όπου

$$h_{\delta,1}^{*}(x|u)=e^{-\delta\frac{x-u}{c}}\frac{1}{c}\mathrm{k}\left(\frac{x-u}{c}\right)\overline{P}(x)$$

είναι η περιθώρια ελλειμματική προεξοφλημένη πυκνότητα της $U_{T-}=x$ για χρεοκοπία που συμβαίνει με την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης. Από τη σχέση 4.1.5, έχουμε

$$h_{\delta,124}^{**}(x,y,v|u)=h_{\delta,14}^{**}(x,v|u)p_x(y)$$

(4.1.9)

όπου $h^{**}_{\delta,14}(x,\upsilon|u)=\int_0^{\infty}e^{-\delta t}h^{**}_{14}(t,x,\upsilon|u)dt$ και $h^{**}_{14}(t,x,\upsilon|u)$ η από κοινού ελλειμματική πυκνότητα των $\left(T,U_{T-},R_{N_T-1}\right)$ στα (t,x,υ) για χρεοκοπία που συμβαίνει από μεταγενέστερες απαιτήσεις της πρώτης. Έτσι, από την 4.1.6 ($h_{\delta,12}(x,y|u)=h^{*}_{\delta,12}(x,y|u)+\int_0^{x}h^{**}_{\delta,124}(x,y,\upsilon|u)\,d\upsilon$), έχουμε

$$h_{\delta,12}(x,y|u)=h_{\delta,1}(x|u)p_x(y) \tag{4.1.10}$$

όπου $h_{\delta,1}(x|u)=h^{*}_{\delta,1}(x|u)+\int_0^{x}h^{**}_{\delta,14}(x,\upsilon|u)\,d\upsilon$ η περιθώρια ελλειμματική προεξοφλημένη πυκνότητα της U_{T-}.

Χρησιμοποιώντας τις πυκνότητες και τις σχετικές ποσότητες που δείξαμε και θέτοντας $u=0$, μπορούμε να δεσμεύσουμε ως προς την πρώτη πτώση του πλεονάσματος για να καταλήξουμε σε μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιείται από την $m_\delta(u)$ όπως κάναμε στην κλασσική περίπτωση για την $m_{\delta,12}(u)$.

4.2. Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος

Η μελέτη μας για την πρώτη πτώση του πλεονάσματος ξεκίνησε αρχικά στην παράγραφο 2.3, όπου καταφέραμε να βρούμε την πυκνότητα για μια πτώση στο πλεόνασμα κάτω του αρχικού του επιπέδου, η οποία ήταν $h_{12}(t,x,y|u)$ και θέτοντας σε αυτή $u=0$. Έστω τώρα μια ανέλιξη πλεονάσματος η οποία ξεκινάει με ένα αρχικό απόθεμα u και πέφτει στο σημείο $u+\upsilon$ αμέσως μετά την εμφάνιση της απαίτησης που προηγείται από την απαίτηση η οποία προκαλεί την πρώτη πτώση του πλεονάσματος. Εάν στη συνέχεια η ανέλιξη βρεθεί στο σημείο x πάνω από το u τη χρονική στιγμή t όταν μια απαίτηση ύψους $x+y$ εμφανίζεται και προκαλεί την πρώτη πτώση στο πλεόνασμα, τότε με βάση τη λογική που αναπτύξαμε στην παράγραφο 2.3, η περίπτωση που μόλις περιγράψαμε θα συμβαίνει με μια πυκνότητα $h_{124}(t,x,y,\upsilon|0)$ η οποία δίνεται από τη σχέση 4.1.3

$$(\quad h_{124}(t,x,y,v|u) = \begin{cases} h_{12}^{*}(x,y|u), & t = \frac{x-u}{c}, x > u, y > 0, v = u \\ h_{124}^{**}(t,x,y,v|u), & t > 0, v < x < u + ct,\ y > 0,\ v > 0 \end{cases} \quad).$$

Ακόμη, αν $t = \frac{x}{c}$ τότε είναι $v = u$, τότε η πρώτη πτώση του πλεονάσματος συμβαίνει με την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης και είναι $h_{124}(t,x,y,v|0) = h_{12}^{*}(x,y|0) = \frac{1}{c}k\left(\frac{x}{c}\right)p\left(x+y\middle|\frac{x}{c}\right)$. Διαφορετικά, εάν $t > \frac{x}{c}$, τότε $v < x$, τότε η πρώτη πτώση του πλεονάσματος συμβαίνει με την εμφάνιση μιας απαίτησης μεταγενέστερης της πρώτης και είναι $h_{124}(t,x,y,v|0) = h_{12}^{**}(t,x,y,v|0)$.

Όπως θα δούμε παρόλο που η συνάρτηση $m_{\delta}(u)$ περιέχει την συνάρτηση ποινής που συμπεριλαμβάνει την τυχαία μεταβλητή X_T, χρειαζόμαστε μόνο την από κοινού ελλειμματική προεξοφλημένη πυκνότητα των $\left(U_{T-}, |U_T|, R_{N_T-1}\right)$, η οποία είναι ανεξάρτητη της X_T για να βρούμε μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για την $m_{\delta}(u)$. Για να γράψουμε την $m_{\delta}(u)$ ως μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση θα μελετήσουμε την πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω του αρχικού αποθεματικού ίσο με u. Η διαδικασία είναι ακριβώς ίδια με αυτή στην παράγραφο 2.3 που διακρίναμε τις παρακάτω 4 περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: Η πρώτη πτώση συμβαίνει με την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης και προκαλεί χρεοκοπία.

Περίπτωση 2: Η πρώτη πτώση συμβαίνει με την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης και δεν προκαλεί χρεοκοπία.

Περίπτωση 3: Η πρώτη πτώση συμβαίνει με την εμφάνιση μεταγενέστερης της πρώτης απαίτησης και προκαλεί χρεοκοπία.

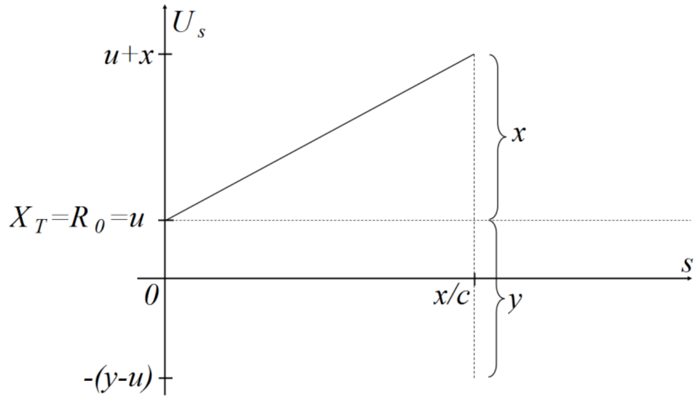
Περίπτωση 4: Η πρώτη πτώση συμβαίνει με την εμφάνιση μεταγενέστερης της πρώτης απαίτησης και δεν προκαλεί χρεοκοπία.

Για να προσαρμόσουμε την μελέτη μας τώρα στις αλλαγές που έχουμε κάνει, θα κάνουμε μερικές αλλαγές στις σχέσεις 2.3.1 ($\int_u^{\infty}\int_0^{\infty}\omega_{12}(u+x,y-u)h_{\delta,12}^{*}(x,y|0)dxdy$), 2.3.2

($\int_0^u m_{\delta,12}(u-y)\left(\int_0^\infty h^*_{\delta,12}(x,y|0)dx\right)dy$), 2.3.3 ($\int_u^\infty \int_0^\infty \omega_{12}(u+x,y-u)h^{**}_{\delta,12}(x,y|0)dxdy$) και 2.3.4 ($\int_0^u m_{\delta,12}(u-y)\left(\int_0^\infty h^{**}_{\delta,12}(x,y|0)dx\right)dy$), που είναι οι όροι της συνάρτησης $m_{\delta,12}(u)$ για κάθε περίπτωση που αναλύουμε, έτσι ώστε να συμπεριλάβουμε τις νέες τυχαίες μεταβλητές X_T και R_{N_T-1} που υπάρχουν πλέον στη συνάρτηση $m_\delta(u)$.

Περίπτωση 1: Η πρώτη πτώση συμβαίνει με την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης και προκαλεί χρεοκοπία.

Στην περίπτωση αυτή όταν συμβαίνει η πρώτη πτώση του πλεονάσματος με την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης και συμβαίνει η χρεοκοπία, είναι $N_T=1$ και $R_{N_T-1}=R_0=u$. Επίσης, το ελάχιστο επίπεδο του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι $X_T=u$. Η περίπτωση που μόλις περιγράψαμε απεικονίζεται στο παρακάτω γράφημα.



Σχήμα 15 Περίπτωση 1 – Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος

Έτσι, προσαρμόζοντας τη σχέση 2.3.1 ($\int_u^\infty \int_0^\infty \omega_{12}(u+x,y-u)h^*_{\delta,12}(x,y|0)dxdy$) , ο όρος της παραπάνω περίπτωσης στη συνάρτηση $m_\delta(u)$ γράφεται ως

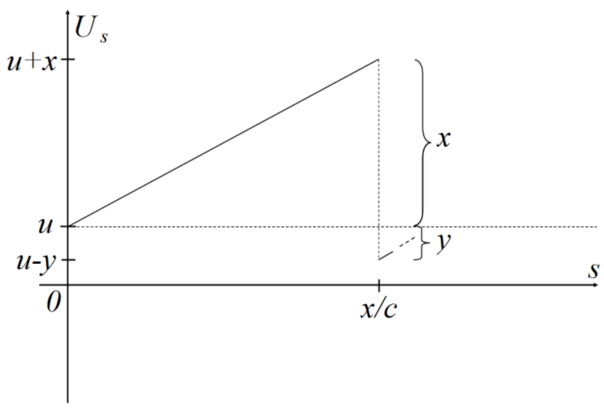
$$=\int_u^\infty \int_0^\infty e^{-\delta\frac{x}{c}}\omega(u+x,y-u,u,u)h^*_{12}(x,y|0)dxdy$$

$$=\int_u^\infty \int_0^\infty \omega(u+x,y-u,u,u)h^*_{\delta,12}(x,y|0)dxdy$$

(4.2.1)

Περίπτωση 2: Η πρώτη πτώση συμβαίνει με την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης και δεν προκαλεί χρεοκοπία.

Όταν η πρώτη πτώση μεγέθους y εμφανίζεται με την πρώτη απαίτηση αλλά δεν συμβαίνει χρεοκοπία, τότε $y < u$ και λέμε ότι η ανέλιξη του πλεονάσματος ανανεώνεται με ένα αρχικό πλεόνασμα ύψους $u - y$. Η περίπτωση που μόλις περιγράψαμε απεικονίζεται στο παρακάτω γράφημα.



Σχήμα 16 Περίπτωση 2 – Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος

Έτσι, με βάση την παραπάνω περιγραφή ο όρος της συνάρτησης $m_\delta(u)$ για την περίπτωση αυτή είναι ουσιαστικά ίδιος με τη σχέση 2.3.2 ($\int_0^u m_{\delta,12}(u - y)\big(\int_0^\infty h^*_{\delta,12}(x,y|0)dx\big)dy$) και είναι

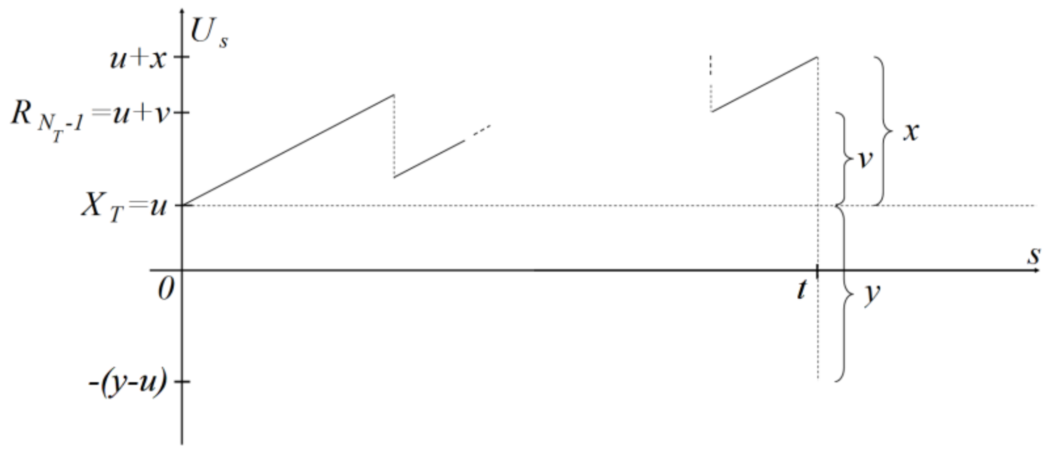
$$= \int_0^u \int_0^\infty e^{-\delta\frac{x}{c}} m_\delta(u-y) h^*_{12}(x,y|0)dxdy$$

$$= \int_0^u m_\delta(u-y)\left(\int_0^\infty h^*_{\delta,12}(x,y|0)dx\right)dy$$

(4.2.2)

Περίπτωση 3: Η πρώτη πτώση συμβαίνει με την εμφάνιση μεταγενέστερης της πρώτης απαίτησης και προκαλεί χρεοκοπία.

Όταν η πρώτη πτώση συμβαίνει σε μια μεταγενέστερη απαίτηση και προκαλεί χρεοκοπία τότε το ελάχιστο επίπεδο του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι u και το πλεόνασμα αμέσως μετά την προτελευταία απαίτηση πριν την χρεοκοπία θα πρέπει να είναι πάνω από το u κατά ένα μέγεθος, έστω υ, όπου $\upsilon < x$. Η περίπτωση που μόλις περιγράψαμε απεικονίζεται στο παρακάτω γράφημα.



Σχήμα 17 Περίπτωση 3 – Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος

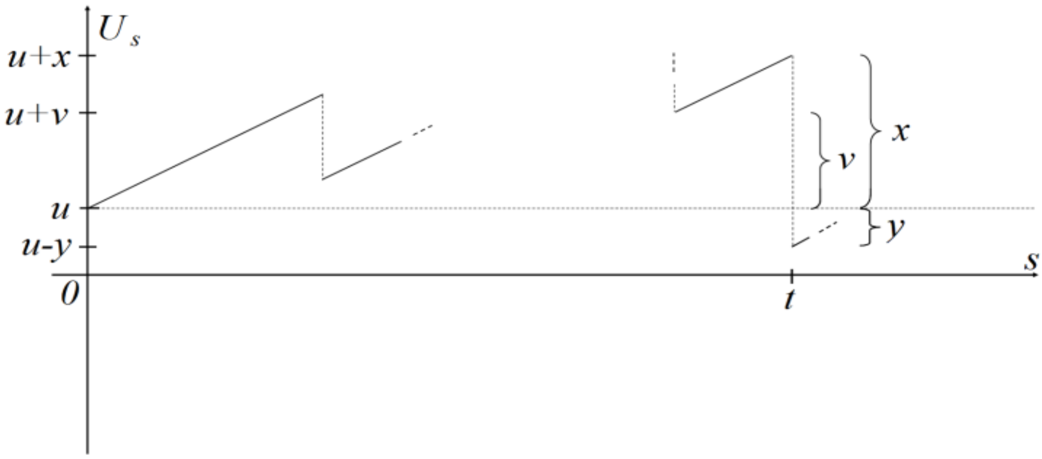
Έτσι, προσαρμόζοντας τη σχέση 2.3.3 ($\int_u^\infty \int_0^\infty \omega_{12}(u+x, y-u) h_{\delta,12}^{**}(x, y|0) dxdy$), ο όρος της παραπάνω περίπτωσης στη συνάρτηση $m_\delta(u)$ γράφεται ως

$$= \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^x \int_0^\infty e^{-\delta t} \omega(u+x, y-u, u, u+\upsilon) h_{124}^{**}(t, x, y, \upsilon|0) dt d\upsilon dx dy$$

$$= \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^x \omega(u+x, y-u, u, u+\upsilon) h_{\delta,124}^{**}(x, y, \upsilon|0) d\upsilon dx dy \tag{4.2.3}$$

Περίπτωση 4: Η πρώτη πτώση συμβαίνει με την εμφάνιση μεταγενέστερης της πρώτης απαίτησης και δεν προκαλεί χρεοκοπία.

Στην περίπτωση αυτή όταν η πρώτη πτώση ύψους y συμβαίνει σε μεταγενέστερη της πρώτης απαίτησης και δεν προκαλεί χρεοκοπία, τότε $y < u$ και η ανέλιξη του πλεονάσματος ανανεώνεται με ένα αρχικό πλεόνασμα ύψους $u-y$. Το πλεόνασμα αμέσως μετά την προτελευταία απαίτηση πριν τη χρεοκοπία θα πρέπει να είναι πάνω από το u κατά ένα μέγεθος, ας πούμε υ, όπου $\upsilon < x$. Η περίπτωση που μόλις περιγράψαμε απεικονίζεται στο παρακάτω γράφημα.



Σχήμα 18 Περίπτωση 4 – Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος

Έτσι, προσαρμόζοντας τη σχέση 2.3.4 ($\int_0^u m_{\delta,12}(u-y)\big(\int_0^\infty h^{**}_{\delta,12}(x,y|0)dx\big)dy$), ο όρος της παραπάνω περίπτωσης στη συνάρτηση $m_\delta(u)$ γράφεται ως

$$= \int_0^u \int_0^\infty \int_0^x \int_0^\infty e^{-\delta t}\, m_\delta(u-y) h^{**}_{124}(t,x,y,\upsilon|0)dtd\upsilon dxdy$$

$$= \int_0^u m_\delta(u-y) \int_0^\infty \int_0^x h^{**}_{\delta,124}(x,y,\upsilon|0)d\upsilon dxdy \tag{4.2.4}$$

Αθροίζοντας τους όρους που αναλύσαμε στις παραπάνω τέσσερις περιπτώσεις, δηλαδή τις σχέσεις 4.2.1 ($\int_u^\infty \int_0^\infty \omega(u+x,y-u,u,u)h^{*}_{\delta,12}(x,y|0)dxdy$), 4.2.2 ($\int_0^u m_\delta(u-y)\big(\int_0^\infty h^{*}_{\delta,12}(x,y|0)dx\big)dy$), 4.2.3 ($\int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^x \omega(u+x,y-u,u,u+\upsilon)h^{**}_{\delta,124}(x,y,\upsilon|0)d\upsilon dxdy$) και 4.2.4 καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση

$$m_\delta(u)=\int_0^u m_\delta(u-y)\left\{\begin{array}{c}\int_0^\infty h^*_{\delta,12}(x,y|0)dx\\+\int_0^\infty\int_0^x h^{**}_{\delta,124}(x,y,v|0)dvdx\end{array}\right\}dy+v_\delta(u)$$

(4.2.5)

όπου χρησιμοποιώντας τη σχέση 4.1.4 ($h^*_{\delta,12}(x,y|u)=e^{-\delta\frac{x-u}{c}}\frac{1}{c}k\left(\frac{x-u}{c}\right)p\left(x+y\middle|\frac{x-u}{c}\right)$) και αλλάζοντας μεταβλητές είναι,

$$v_\delta(u)=\int_u^\infty\int_0^\infty \omega(u+x,y-u,u,u)h^*_{\delta,12}(x,y|0)dxdy$$

$$+\int_u^\infty\int_0^\infty\int_0^x \omega(u+x,y-u,u,u+v)h^{**}_{\delta,124}(x,y,v|0)dvdxdy$$

(4.2.6)

$$=\int_0^\infty e^{-\delta t}\left(\int_0^\infty \omega(u+ct,y,u,u)p(u+ct+y|t)dy\right)k(t)dt$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^x \omega(u+x,y,u,u+v)h^{**}_{\delta,124}(x,u+y,v|0)dvdxdy$$

(4.2.7)

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη σχέση 4.1.6 ($h_{\delta,12}(x,y|u)=h^*_{\delta,12}(x,y|u)+\int_0^x h^{**}_{\delta,124}(x,y,v|u)\,dv$) η σχέση 4.2.5 μπορεί να γραφτεί ως,

$$m_\delta(u)=\int_0^u m_\delta(u-y)\left\{\int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)dx\right\}dy+v_\delta(u)$$

και επομένως, με χρήση των 4.1.7 ($\varphi_\delta=\int_0^\infty\int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)\,dxdy$) και 4.1.8 ($f_\delta(y)=\frac{1}{\varphi_\delta}\int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)\,dx$) μπορούμε να γράψουμε την $m_\delta(u)$ ως την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση,

$$m_\delta(u)=\varphi_\delta\int_0^u m_\delta(u-y)f_\delta(y)dy+v_\delta(u)$$

(4.2.8)

Συνεπάγεται επομένως από την 1.11.7 ($m(x)=u(x)+\frac{1}{1-\varphi}\int_0^x u(y)g(x-y)dy$) ότι μια γενική λύση για την συνάρτηση $m_\delta(u)$ αποτελεί η παρακάτω

$$m_\delta(u) = \upsilon_\delta(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta} \int_0^u \upsilon_\delta(y) g_\delta(u-y) dy$$

(4.2.9)

όπου χρησιμοποιώντας την σχέση 1.11.4 ($g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\varphi)(\varphi)^n f^{*n}(x)$), $g_\delta(u) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\varphi_\delta)(\varphi_\delta)^n f_\delta^{*n}(u)$ με τις φ_δ και $f_\delta(y)$ να δίνονται από τις σχέσεις 4.1.7 ($\varphi_\delta = \int_0^\infty \int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)\, dxdy$) και 4.1.8 ($f_\delta(y) = \frac{1}{\varphi_\delta}\int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)\, dx$) αντίστοιχα. Παρά το γεγονός πως η συνάρτηση $m_\delta(u)$ είναι μια συνάρτηση του u και περιέχει μια συνάρτηση ποινής τεσσάρων μεταβλητών που συμπεριλαμβάνει την X_T, η γενική της λύση εξαρτάται μονάχα από την από κοινού ελλειμματική προεξοφλημένη πυκνότητα των τριών μεταβλητών, $U_{T-}, |U_T|$ και R_{N_T-1} δοθέντος ότι $u=0$.

Ας δούμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις της συνάρτησης $m_\delta(u)$ για διάφορες συναρτήσεις ποινής. Εάν $\omega(x,y,z,v) = \omega_{124}(x,y,v)$, τότε η 4.2.8 γίνεται

$$m_{\delta,124}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,124}(u-y) f_\delta(y) dy + \upsilon_{\delta,124}(u)$$

όπου χρησιμοποιώντας τη σχέση 4.2.6 ($\upsilon_\delta(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty \omega(u+x, y-u, u, u) h_{\delta,12}^*(x,y|0) dxdy + \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^x \omega(u+x, y-u, u, u+v) h_{\delta,124}^{**}(x,y,v|0) dvdxdy$),

$$\upsilon_{\delta,124}(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty \omega_{124}(u+x, y-u, u) h_{\delta,12}^*(x,y|0) dxdy$$
$$+ \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^x \omega_{124}(u+x, y-u, u+v) h_{\delta,124}^{**}(x,y,v|0) dvdxdy$$

(4.2.10)

Εάν τώρα, $\omega(x,y,z,v) = \omega_3(z)\omega_{124}(x,y,v)$, τότε η 4.2.8 γίνεται,

$$m_{\delta,3,124}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,3,124}(u-y) f_\delta(y) dy + \upsilon_{\delta,3,124}(u)$$

(4.2.11)

όπου χρησιμοποιώντας τις 4.2.6 και 4.2.10,

$$\upsilon_{\delta,3,124}(u) = \omega_3(u)\upsilon_{\delta,124}(u)$$

(4.2.12)

Εάν θέσουμε $\omega(x,y,z,v) = \omega_{123}(x,y,z)$, τότε η 4.2.8 γίνεται,

$$m_{\delta,123}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,123}(u-y) f_\delta(y)dy + \upsilon_{\delta,123}(u)$$

(4.2.13)

όπου χρησιμοποιώντας τις 4.2.6 ($\upsilon_\delta(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty \omega(u+x, y-u, u, u) h^*_{\delta,12}(x,y|0)dxdy + \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^x \omega(u+x, y-u, u, u+\upsilon) h^{**}_{\delta,124}(x,y,\upsilon|0)d\upsilon dxdy$) και 4.1.6 ($h_{\delta,12}(x,y|u) = h^*_{\delta,12}(x,y|u) + \int_0^x h^{**}_{\delta,124}(x,y,\upsilon|u)\, d\upsilon$) έχουμε ότι

$$\upsilon_{\delta,123}(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty \omega_{123}(u+x, y-u, u) \begin{Bmatrix} h^*_{\delta,12}(x,y|0) \\ + \int_0^x h^{**}_{\delta,124}(x,y,\upsilon|0)d\upsilon \end{Bmatrix} dxdy$$

$$= \int_u^\infty \int_0^\infty \omega_{123}(u+x, y-u, u) h_{\delta,12}(x,y|0)dxdy$$

(4.2.14)

που είναι μια σημαντική απλοποίηση αν λάβουμε υπόψη ότι δεν εξαρτάται πλέον από την $h^{**}_{\delta,124}(x,y,\upsilon|0)$ που είναι πολύ δύσκολο να υπολογιστεί σε όρους των $p(y)$ και $k(t)$. Αντιθέτως, η $\upsilon_{\delta,123}(u)$ εξαρτάται μόνο από την $h_{\delta,12}(x,y|0)$, την από κοινού ελλειμματική προεξοφλημένη πυκνότητα του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας δεδομένου ενός αρχικού πλεονάσματος ίσο με 0, η οποία υπό συγκεκριμένες υποθέσεις για την $k(t)$ ή/και την $p(y)$ μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την κλασσική συνάρτηση Gerber – Shiu $m_{\delta,12}(0)$ όταν $\omega_{12}(x,y) = e^{-s_1 x - s_2 y}$. Από τη στιγμή που έχει υπολογιστεί η $h_{\delta,12}(x,y|0)$, χρησιμοποιώντας την 4.1.7 ($\varphi_\delta = \int_0^\infty \int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)\, dxdy$) και την 4.1.8 ($f_\delta(y) = \frac{1}{\varphi_\delta}\int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)\, dx$), η συνάρτηση $m_{\delta,123}(u)$ μπορεί να λυθεί σε πλήρη γενίκευση.

Έστω τώρα $\omega(x,y,z,\upsilon) = \omega_{23}(y,z)$, όπου κάνοντας αυτή την υπόθεση μπορούμε να μελετήσουμε το τελευταίο κλιμακωτό ύψος $X_T + |U_T|$. Τότε, η 4.2.13 γράφεται,

$$m_{\delta,23}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,23}(u-y) f_\delta(y)dy + \upsilon_{\delta,23}(u)$$

(4.2.15)

όπου χρησιμοποιώντας την 4.1.7 ($\varphi_\delta = \int_0^\infty \int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)\,dxdy$) και την 4.1.8 ($f_\delta(y) = \frac{1}{\varphi_\delta}\int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)\,dx$), η σχέση 4.2.14 γράφεται ως

$$\begin{aligned} v_{\delta,123}(u) &= \int_u^\infty \omega_{23}(y-u,u)\left(\int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)dx\right)dy \\ &= \varphi_\delta \int_u^\infty \omega_{23}(y-u,u) f_\delta(y)dy \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

η οποία εξαρτάται μόνο από τη φ_δ και τη $f_\delta(y)$.

Ακόμη, εάν θέσουμε $\omega(x,y,z,v) = \omega_{23}(y,z) = \omega_5(y+z)$, μια συνάρτηση του τελευταίου κλιμακωτού ύψους για παράδειγμα, η σχέση 4.2.15 γράφεται ως,

$$m_{\delta,5}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,5}(u-y) f_\delta(y)dy + v_{\delta,5}(u) \tag{4.2.17}$$

όπου χρησιμοποιώντας τη σχέση 4.2.16 έχουμε ότι,

$$v_{\delta,5}(u) = \varphi_\delta \int_u^\infty \omega_5(y-u,u) f_\delta(y)dy \tag{4.2.18}$$

Τέλος, να αναφέρουμε πως όταν $\omega(x,y,z,v) = \omega_2(y)$ καταλήγουμε στη σχέση 2.3.15 ($m_{\delta,2}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,2}(u-y) f_\delta(y)dy + v_{\delta,2}(u)$) και εάν θέσουμε $\omega(x,y,z,v) = 1$ τότε παίρνουμε τη σχέση 2.3.18 ($\overline{G}_\delta(u) = \varphi_\delta \int_0^u \overline{G}_\delta(u-y) f_\delta(y)dy + \varphi \overline{F}_\delta(u)$) από την παράγραφο 2.3. Από τη στιγμή που οι ειδικές περιπτώσεις της $m_\delta(u)$ που δείξαμε στις σχέσεις 4.2.8 ($m_\delta(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_\delta(u-y) f_\delta(y)dy + v_\delta(u)$), 4.2.11 ($m_{\delta,3,124}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,3,124}(u-y) f_\delta(y)dy + v_{\delta,3,124}(u)$), 4.2.13 ($m_{\delta,123}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,123}(u-y) f_\delta(y)dy + v_{\delta,123}(u)$), 4.2.15 ($m_{\delta,23}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,23}(u-y) f_\delta(y)dy + v_{\delta,23}(u)$), 4.2.17 ικανοποιούν ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις, είμαστε σε θέση να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση 1.11.7 ($m(x) = u(x) + \frac{1}{1-\varphi}\int_0^x u(y) g(x-y)dy$) για να βρούμε γενικές λύσεις για τις περιπτώσεις αυτές.

4.3. Η από κοινού ελλειμματική προεξοφλημένη πυκνότητα των $\boldsymbol{U_{T-}, |U_T|, X_T, R_{N_T-1}}$

Για να μπορέσουμε να βρούμε την από κοινού ελλειμματική προεξοφλημένη πυκνότητα των $\left(U_{T-}, |U_T|, X_T, R_{N_T-1}\right)$ από την $m_\delta(u)$, επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε μια κατάλληλη συνάρτηση ποινής η οποία είναι, $\omega(x,y,z,\upsilon) = e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 z - s_4 \upsilon}$, την οποία μπορούμε να γράψουμε ως $\omega(x,y,z,\upsilon) = \omega_3(z)\omega_{124}(x,y,\upsilon)$, όπου θα είναι $\omega_3(z) = e^{-s_3 z}$ και $\omega_{124}(x,y,\upsilon) = e^{-s_1 x - s_2 y - s_4 \upsilon}$. Έτσι, η $m_\delta(u)$ ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που δόθηκε μέσω της σχέσης 4.2.11 ($m_{\delta,3,124}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,3,124}(u-y) f_\delta(y)dy + \upsilon_{\delta,3,124}(u)$) και από την 4.2.12 ($\upsilon_{\delta,3,124}(u) = \omega_3(u)\upsilon_{\delta,124}(u)$) παίρνουμε πως $\upsilon_{\delta,3,124}(u) = e^{-s_3 u}\upsilon_{\delta,124}(u)$ και έπειτα χρησιμοποιώντας τη σχέση 4.2.10 ($\upsilon_{\delta,124}(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty \omega_{124}(u+x, y-u, u) h^*_{\delta,12}(x,y|0)dxdy + + \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^x \omega_{124}(u+x, y-u, u+\upsilon) h^{**}_{\delta,124}(x,y,\upsilon|0)d\upsilon dxdy$) παίρνουμε,

$$\upsilon_{\delta,124}(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty e^{-s_1(u+x) - s_2(y-u) - s_4 \upsilon} h^*_{\delta,12}(x,y|0)dxdy$$
$$+ \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^x e^{-s_1(u+x) - s_2(y-u) - s_4(u+\upsilon)} h^{**}_{\delta,124}(x,y,\upsilon|0)d\upsilon dxdy$$

όπου αλλάζοντας τις μεταβλητές με $x = x-u$, $y = u+y$ και $\upsilon = \upsilon - u$ συνεπάγεται ότι

$$\upsilon_{\delta,124}(u) = \int_0^\infty \int_u^\infty e^{-s_1 x - s_2 y - s_4 \upsilon} h^*_{\delta,12}(x-u, u+y|0)dxdy$$
$$+ \int_0^\infty \int_u^\infty \int_u^x e^{-s_1 x - s_2 y - s_4 \upsilon} h^{**}_{\delta,124}(x-u, u+y, \upsilon-u|0)d\upsilon dxdy \tag{4.3.1}$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τη σχέση 4.2.9 ($m_\delta(u) = \upsilon_\delta(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta} \int_0^u \upsilon_\delta(y) g_\delta(u-y)dy$) η γενική λύση της $m_\delta(u)$ όταν $\omega(x,y,z,\upsilon) = e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 z - s_4 \upsilon}$ δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$m_{\delta,3,124}(u) = e^{-s_3 u}\upsilon_{\delta,124}(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u e^{-s_3 z}\upsilon_{\delta,124}(z) g_\delta(u-z)dz$$

όπου αν αντικαταστήσουμε τη σχέση 4.3.1 θα πάρουμε την παρακάτω,

$$\begin{aligned} m_{\delta,3,124}(u) &= \int_0^\infty \int_u^\infty e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 u - s_4 u} h^*_{\delta,12}(x-u, u+y|0)dxdy \\ &+ \int_0^\infty \int_u^\infty \int_u^x e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 u - s_4 \upsilon} h^{**}_{\delta,124}(x-u, u+y, \upsilon-u|0)d\upsilon dxdy \\ &+ \int_0^u \int_0^\infty \int_z^\infty e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 z - s_4 z} \left(h^*_{\delta,12}(x-z, z+y|0)\frac{g_\delta(u-z)}{1-\varphi_\delta}\right)dxdydz \\ &+ \int_0^u \int_0^\infty \int_z^\infty \int_z^x e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 z - s_4 \upsilon} \left(h^{**}_{\delta,124}(x-z, z+y, \upsilon-z|0)\frac{g_\delta(u-z)}{1-\varphi_\delta}\right)d\upsilon dxdydz \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση ποινής $\omega(x,y,z,\upsilon) = e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 z - s_4 \upsilon}$, στη σχέση 4.1.1 ($m_\delta(u) = E\left[e^{-\delta T}\omega\left(U_{T-}, |U_T|, X_T, R_{N_T-1}\right)I(T<\infty)\middle|U_0 = u\right]$), τότε η $m_\delta(u)$ θα δίνεται από,

$$\begin{aligned} m_{\delta,3,124}(u) &= E\left[e^{-\delta T} e^{-s_1 U_{T-} - s_2 |U_T| - s_3 X_T - s_4 R_{N_T-1}} I(T<\infty)\middle|U_0 = u\right] \\ &= E\left[e^{-\delta T - s_1 U_{T-} - s_2 |U_T| - s_3 X_T - s_4 R_{N_T-1}} I(T<\infty)\middle|U_0 = u\right] \end{aligned}$$

που ουσιαστικά είναι ο μετασχηματισμός Laplace της από κοινού ελλειμματική προεξοφλημένης πυκνότητας των $\left(U_{T-}, |U_T|, X_T, R_{N_T-1}\right)$. Για παράδειγμα αν, $h_\delta(x,y,z,\upsilon|u)$ είναι η από κοινού ελλειμματική προεξοφλημένη πυκνότητα των $\left(U_{T-}, |U_T|, X_T, R_{N_T-1}\right)$ στα (x,y,z,υ), τότε η $m_{\delta,3,124}(u)$ γίνεται

$$m_{\delta,3,124}(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^u \int_0^x e^{-s_1x - s_2y - s_3z - s_4v}\, h_\delta(x,y,z,v|u)\, dvdzdydx$$

όπου χρησιμοποιώντας τη μοναδικότητα των μετασχηματισμών Laplace, μπορούμε να υπολογίσουμε την $h_\delta(x,y,z,v|u)$ από τη σχέση 4.3.2.

Παρακάτω συνοψίζουμε την από κοινού ελλειμματική προεξοφλημένη πυκνότητα των $\left(U_{T-}, |U_T|, X_T, R_{N_T-1}\right)$.

$$h_\delta(x,y,z,v|u) = \begin{cases} h^*_{\delta,12}(x-u, u+y|0) & \begin{array}{c} x > u,\ y > 0, z = u,\ v = u \\ \textit{Αντιστοιχεί σε χρεοκοπία} \\ \textit{από την πρώτη απαίτηση} \end{array} \\[2ex] h^{**}_{\delta,124}(x-u, u+y, v-u|0) & \begin{array}{c} x > u, y > 0, z = u, u < v < x \\ \textit{Αντιστοιχεί σε χρεοκοπία από} \\ \textit{την πρώτη πτώση στο πλεόνασμα} \\ \textit{από απαίτηση μεταγενέστερη της} \\ \textit{πρώτης απαίτησης} \end{array} \\[2ex] h^*_{\delta,12}(x-z, z+y|0) & \begin{array}{c} x > z, y > 0{,}0 < z < v,\ v = z \\ \textit{Αντιστοιχεί σε πτώση στο πλεόνασμα} \\ \textit{στο κατώτερο επίπεδο z χωρίς να} \\ \textit{συμβεί χρεοκοπία, η οποία συμβαίνει} \\ \textit{από την επόμενη απαίτηση} \end{array} \\[2ex] h^{**}_{\delta,124}(x-z, z+y, v-z|0) & \begin{array}{c} z < v < x, y > 0{,}0 < z < u \\ \textit{Αντιστοιχεί σε πτώση στο πλεόνασμα} \\ \textit{στο κατώτερο επίπεδο z χωρίς να} \\ \textit{συμβεί χρεοκοπία, η οποία συμβαίνει} \\ \textit{όχι όμως από την επόμενη απαίτηση} \end{array} \end{cases}$$

Να αναφέρουμε πως όταν θέσουμε $\delta = 0$, μπορούμε να ερμηνεύσουμε την $g_0(u-z)/1-\varphi_0$ ως την πυκνότητα της ανέλιξης του πλεονάσματος που πέφτει στο χαμηλότερο επίπεδο z χωρίς να συμβεί αρχικά χρεοκοπία αλλά να συμβεί σε επόμενες απαιτήσεις.

Έστω τώρα η περίπτωση που η συνάρτηση ποινής είναι $\omega(x,y,z,\upsilon) = \omega_{123}(x,y,z) = e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 z}$, τότε η $m_\delta(u)$ ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που δίνεται από τη σχέση 4.2.13 ($m_{\delta,123}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,123}(u-y) f_\delta(y)dy + \upsilon_{\delta,123}(u)$) και από την 4.2.14 ($\upsilon_{\delta,123}(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty \omega_{123}(u+x, y-u, u) h_{\delta,12}(x,y|0)dxdy$) έχουμε,

$$\upsilon_{\delta,123}(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty e^{-s_1(u+x) - s_2(y-u) - s_3 u} \; h_{\delta,12}(x,y|0)dxdy$$

$$= \int_0^\infty \int_u^\infty e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 u} \; h_{\delta,12}(x-u, u+y|0)dxdy$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση 4.2.9 ($m_\delta(u) = \upsilon_\delta(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta} \int_0^u \upsilon_\delta(y) g_\delta(u-y)dy$), με αντικατάσταση στη γενική λύση για την $m_{\delta,123}(u)$ παίρνουμε,

$$m_{\delta,123}(u) = \upsilon_{\delta,123}(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta} \int_0^u \upsilon_{\delta,123}(z) g_\delta(u-z)dz$$

$$= \int_0^\infty \int_u^\infty e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 u} \; h_{\delta,12}(x-u, u+y|0)dxdy$$

$$+ \int_0^u \int_0^\infty \int_z^\infty e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 z} \left(h_{\delta,12}(x-z, z+y|0) \frac{g_\delta(u-z)}{1-\varphi_\delta} \right) dxdydz$$

όπου και πάλι χρησιμοποιώντας τη μοναδικότητα των μετασχηματισμών Laplace μπορούμε να βρούμε λύση για την $h_{\delta,123}(x,y,z|u)$, την από κοινού ελλειμματική προεξοφλημένη πυκνότητα των $(U_{T-}, |U_T|, X_T)$ στα (x,y,z), η οποία συνοψίζεται παρακάτω

$$h_{\delta,123}(x,y,z|u)=\begin{cases} h_{\delta,12}(x-u,u+y|0) & x>u, y>0, z=u \\ & \textit{Αντιστοιχεί σε χρεοκοπία με την πρώτη πτώση κάτω από u} \\ h_{\delta,12}(x-z,z+y|0)\dfrac{g_\delta(u-z)}{1-\varphi_\delta} & x>z, y>0, 0<z<u \\ & \textit{Αντιστοιχεί σε χρεοκοπία που δεν συμβαίνει με την πρώτη πτώση του πλεονάσματος} \end{cases}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ίδια μεθοδολογία για να βρούμε την πυκνότητα του τελευταίου κλιμακωτού ύψους $X_T+|U_T|$ επιλέγοντας ως κατάλληλη συνάρτηση ποινής την $\omega(x,y,z,\upsilon)=\omega_5(y+z)=e^{-s_5(y+z)}$ και έπειτα να χρησιμοποιήσουμε την σχέση 4.2.18 ($\upsilon_{\delta,5}(u)=\varphi_\delta\int_u^\infty \omega_5(y-u,u)f_\delta(y)dy$). Τότε, αφού η 4.2.18 είναι διαφορίσιμη χρησιμοποιούμε τη σχέση 1.11.8 ($m(x)=\frac{1}{1-\varphi}\left(u(x)-u(0)\overline{G}(x)-\int_0^x \overline{G}(x-y)u'(y)dy\right)$) η οποία γράφεται

$$m_\delta(u)=\frac{1}{1-\varphi_\delta}\left\{\varphi_\delta\int_u^\infty e^{-s_5 y}f_\delta(y)dy-\left(\varphi_\delta\int_0^\infty e^{-s_5 y}f_\delta(y)dy\right)\overline{G}_\delta(u)\right.$$
$$\left.+\int_0^u \overline{G}_\delta(u-y)\varphi_\delta e^{-s_5 y}f_\delta(y)dy\right\}$$

$$\frac{\varphi_\delta}{1-\varphi_\delta}\left\{\int_u^\infty e^{-s_5 y}\left[1-\overline{G}_\delta(u)\right]f_\delta(y)dy\ +\ \int_0^u e^{-s_5 y}\left[\overline{G}_\delta(u-y)-\overline{G}_\delta(u)\right]f_\delta(y)dy\right\}$$

όπου πάλι χρησιμοποιώντας την μοναδικότητα των μετασχηματισμών Laplace το τελευταίο κλιμακωτό ύψος έχει μια ελλειμματική προεξοφλημένη πυκνότητα που δίνεται από την παρακάτω,

$$f_\delta(u,y)=\begin{cases}\dfrac{\varphi_\delta}{1-\varphi_\delta}\left[\overline{G}_\delta(u-y)-\overline{G}_\delta(u)\right]f_\delta(y), & y<u \\ \dfrac{\varphi_\delta}{1-\varphi_\delta}\left[1-\overline{G}_\delta(u)\right]f_\delta(y), & y>u\end{cases}$$

4.4. Ο χρόνος και το ύψος της πρώτης απαίτησης

Για να βρούμε μια εξίσωση που ικανοποιείται από την $m_{\delta,124}(u)$ δεσμεύοντας ως προς τον χρόνο t και το ύψος y της πρώτης απαίτησης, χρησιμοποιούμε παρόμοια μεθοδολογία με της παραγράφου 2.4 για την $m_{\delta,12}(u)$. Θεωρούμε επομένως τις εξής δυο περιπτώσεις:

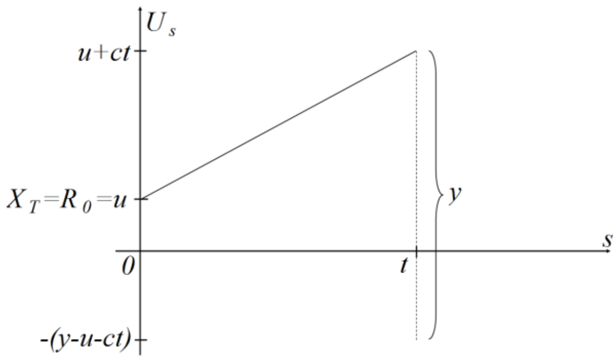
Περίπτωση 1: Η πρώτη απαίτηση προκαλεί χρεοκοπία.

Περίπτωση 1: Η πρώτη απαίτηση δεν προκαλεί χρεοκοπία.

Έτσι, γενικεύουμε την σχέση 2.4.6 ($m_{\delta,12}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_{\delta,12}(u+ct)k(t)dt + \beta_{\delta,12}(u)$) κάνοντας κάποιες προσαρμογές στις σχέσεις 2.4.1 ($\beta_{\delta,12}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\alpha_{12}(u+ct)k(t)dt$) και 2.4.3 ($\int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_{\delta,12}(u+ct)k(t)dt$), δηλαδή τους όρους της συνάρτησης $m_{\delta,12}(u)$, ώστε να συμπεριλάβουμε την εξάρτηση μεταξύ των V, Y καθώς και την επιπλέον μεταβλητή που συμπεριλαμβάνεται τώρα στην συνάρτηση ποινής, R_{N_T-1}. Στη συνέχεια θα αναλύσουμε τις δυο περιπτώσεις και θα εξάγουμε για κάθε μια τον όρο που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $m_{\delta,124}(u)$.

Περίπτωση 1: Η πρώτη απαίτηση προκαλεί χρεοκοπία.

Εάν η χρεοκοπία συμβαίνει με την πρώτη απαίτηση, τότε είναι $N_T = 1$ και $R_{N_T-1} = R_0 = u$ και όπως αναλύσαμε στην παράγραφο 2.4 το ύψος της πρώτης απαίτηση y είναι μεγαλύτερο από $u + ct$, με το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία να ισούται με $u + ct$ και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι ίσο με $u + ct - y$. Παρακάτω απεικονίζουμε την περίπτωση που περιγράψαμε.



Σχήμα 19 Περίπτωση 1 – Ο χρόνος και το ύψος της πρώτης απαίτησης

Επομένως, η παραπάνω περίπτωση εκφράζεται ως ο παρακάτω όρος στη συνάρτηση $m_{\delta,124}(u)$, τον οποίο συμβολίζουμε με $\beta_{\delta,124}(u)$

$$\beta_{\delta,124}(u) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \alpha_{t,124}(u+ct,u)k(t)dt \tag{4.4.1}$$

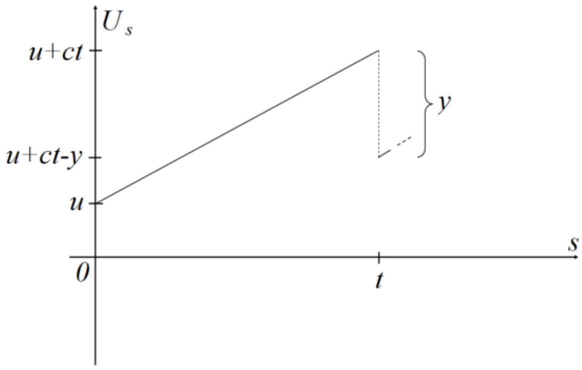
$$= \frac{1}{c}\int_u^{\infty} e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)} \alpha_{t,124}(x,u)k\left(\frac{x-u}{c}\right)dx \tag{4.4.2}$$

όπου

$$\alpha_{t,124}(x,u) = \int_x^{\infty} \omega_{124}(x,y-x,u)p(y|t)dy \tag{4.4.3}$$

Περίπτωση 2: Η πρώτη απαίτηση προκαλεί χρεοκοπία

Εάν η χρεοκοπία δεν συμβεί με την πρώτη απαίτηση, τότε το ύψος της πρώτης απαίτησης y είναι μικρότερο από $u+ct$ και η διαδικασία ανανεώνεται με ένα πλεόνασμα ίσο με $u+ct-y$ δοθέντος ότι έχει περάσει χρόνος t. Παρακάτω απεικονίζουμε την περίπτωση που περιγράψαμε.



Σχήμα 20 Περίπτωση 2 – Ο χρόνος και το ύψος της πρώτης απαίτησης

Επομένως, η παραπάνω περίπτωση εκφράζεται ως ο παρακάτω όρος στη συνάρτηση $m_{\delta,124}(u)$, δηλαδή, γενικεύοντας τη σχέση 2.4.3 ($\int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_{\delta,12}(u+ct)k(t)dt$) παίρνουμε,

$$= \int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_{t,\delta,124}(u+ct)k(t)dt \tag{4.4.4}$$

όπου

$$\sigma_{t,\delta,124}(u+ct) = \int_0^x m_{\delta,124}(x-y)p(y|t)dy \tag{4.4.5}$$

Επομένως χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 4.4.2 και 4.4.4, δηλαδή τους όρους της συνάρτησης $m_{\delta,124}(u)$, παίρνουμε,

$$m_{\delta,124}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_{t,\delta,124}(u+ct)k(t)dt \; + \; \beta_{\delta,124}(u) \tag{4.4.6}$$

η οποία είναι ουσιαστικά ίδιου τύπου με την 2.4.6 ($m_{\delta,12}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_{\delta,12}(u+ct)k(t)dt \; + \beta_{\delta,12}(u)$) μόνο που έχουμε αντικαταστήσει την $\sigma_{\delta,12}(x)$ με την $\sigma_{t,\delta,124}(u+ct)$ και την $\alpha_{12}(x)$ με την $\alpha_{t,124}(x,u)$. Για να πάρουμε τον μετασχηματισμό Laplace του πρώτου όρου της σχέσης 4.4.6, χρησιμοποιούμε τη σχέση 1.10.2 ($\tilde{\eta}_\delta(s) =$

$\int_0^\infty e^{-su}\left(\int_0^\infty e^{-\delta t}\omega_t(u+ct)k(t)dt\right)du = \int_0^\infty e^{-(\delta-cs)t}\tilde{\omega}_t(s)k(t)dt - \tilde{\omega}_\delta^*(\delta-cs))$ για να πάρουμε,

$$\int_0^\infty e^{-su} \int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_{t,\delta,124}(u+ct)k(t)dt\,du$$

$$= \int_0^\infty e^{-(\delta-cs)t}\,\tilde{\sigma}_{t,\delta,124}(s)k(t)dt \;-\; \tilde{\sigma}^*_{\delta,124}\,(\delta-cs)$$

όπου χρησιμοποιώντας τη σχέση 1.10.3 ($\tilde{\omega}_\delta^*(s) = \int_0^\infty \int_0^{ct} e^{-\frac{1}{c}\delta x + s(ct-x)}\omega_t(x)k(t)dxdt$) παίρνουμε,

$$\tilde{\sigma}^*_{\delta,124}\,(s) = \int_0^\infty \int_0^{ct} e^{-\frac{1}{c}\{\delta x + s(ct-x)\}}\sigma_{t,\delta,124}(x)k(t)dxdt \tag{4.4.7}$$

Από τη στιγμή που $\tilde{\sigma}_{t,\delta,124}(s) = \tilde{m}_{\delta,124}(s)\tilde{p}(s|t)$, ο μετασχηματισμός Laplace της σχέσης 4.4.6 δίνεται από την

$$\tilde{m}_{\delta,124}(s) = \tilde{m}_{\delta,124}(s)\int_0^\infty e^{-(\delta-cs)t}\tilde{p}(s|t)k(t)dt \;-\; \tilde{\sigma}^*_{\delta,124}\,(\delta-cs) + \tilde{\beta}_{\delta,124}(s) \tag{4.4.8}$$

και επειδή $\int_0^\infty e^{-(\delta-cs)t}\tilde{p}(s|t)k(t)dt = E\left[e^{-sY-(\delta-cs)Y}\right]$, μπορούμε να την ξαναγράψουμε για να πάρουμε

$$\left(1 - E\left[e^{-sY-(\delta-cs)Y}\right]\right)\tilde{m}_{\delta,124}(s) = \tilde{\beta}_{\delta,124}(s) - \tilde{\sigma}^*_{\delta,124}\,(\delta-cs) \tag{4.4.9}$$

όπου και πάλι, όταν $s=\rho_\delta$, το αριστερό μέλος της σχέσης 4.4.9 γίνεται 0, με την ρ_δ να είναι μια θετική πραγματική ρίζα της εξίσωσης του Lundberg, τότε χρησιμοποιώντας την ρίζα αυτή μπορούμε να βρούμε λύσεις σε αγνώστους στην $\tilde{\sigma}^*_{\delta,124}\,(\delta-cs)$ χρησιμοποιώντας την παρακάτω,

$$\tilde{\sigma}^*_{\delta,124}\,(\delta-c\rho_\delta) = \tilde{\beta}_{\delta,124}(\rho_\delta)$$

πράγμα το οποίο είναι απαραίτητο για να αντιστρέψουμε τον μετασχηματισμό Laplace της $\tilde{m}_{\delta,124}(s)$ υπό συγκεκριμένες υποθέσεις για τις $k(t)$ ή/και την $p(y)$.

Αναφερθήκαμε νωρίτερα στο γεγονός ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι και τα ύψη των απαιτήσεων ήταν εξαρτημένα μεταξύ τους, και αρκετά μοντέλα έχουν αναπτυχθεί για το ζεύγος (V, Y), για παράδειγμα σε μελέτες των [Willmot and Woo (2011)], [Woo, J.K. (2011)], κ.α. Ωστόσο για τις εφαρμογές που θα δούμε στη συνέχεια θα υποθέσουμε πως οι ενδιάμεσοι χρόνοι και τα ύψη των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους τυχαίες μεταβλητές και επομένως θα αντικαταστήσουμε και την δεσμευμένη πυκνότητα $p(y|t)$ με $p(y)$, έτσι ώστε η σχέση 4.4.6 να γράφεται ως

$$m_{\delta,124}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_{\delta,124}(u+ct)k(t)dt \; + \; \beta_{\delta,124}(u)$$

όπου $\sigma_{\delta,124}(x) = \sigma_{t,\delta,124}(x)$, αφού αντικαταστήσαμε την $p(y|t)$ με $p(y)$.

4.5. Εφαρμογή στο κλασσικό μοντέλο Poisson

Στο δεύτερο κεφάλαιο κάναμε εφαρμογή στο κλασσικό μοντέλο Poisson, δηλαδή το μοντέλο στο οποίο υποθέτουμε πως οι ενδιάμεσοι χρόνοι κατανέμονται εκθετικά. Στην παράγραφο 4.2 είδαμε πως παρόλο που η συνάρτηση ποινής που χρησιμοποιούμε στη γενικευμένη συνάρτηση Gerber – Shiu είναι μια συνάρτηση τεσσάρων μεταβλητών η οποία περιέχει και την X_T, μπορέσαμε να εκφράσουμε την $m_\delta(u)$ με τρόπο ώστε η από κοινού ελλειμματική προεξοφλημένη πυκνότητα των $\left(U_{T-}, |U_T|, R_{N_T-1}\right)$ να είναι ανεξάρτητη της X_T. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε πως $\omega(x, y, z, v) = \omega_{124}(x, y, v)$.

Αρχικά, να αναφέρουμε πως η $\tilde{\sigma}^*_{\delta,124}(s)$ που δίνεται από τη σχέση 4.4.7 είναι ίση με την $\tilde{\sigma}^*_{\delta,12}(s)$ που δίνεται από τη σχέση 2.5.1, με την $\sigma_{\delta,12}(x)$ να αντικαθίσταται από την $\sigma_{t,\delta,124}(x)$, η οποία δεδομένου ότι αναφέραμε νωρίτερα πως οι V, Y θα είναι ανεξάρτητες στις εφαρμογές μας ισούται με $\sigma_{\delta,124}(x)$. Επομένως, χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.5.2 ($\tilde{\sigma}^*_{\delta,12}(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}\tilde{\sigma}_{\delta,12}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)$) παίρνουμε,

$$\tilde{\sigma}_{\delta,124}(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}\tilde{\sigma}_{\delta,124}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)$$

την οποία αν την αντικαταστήσουμε στη σχέση 4.4.9 θα πάρουμε,

$$\left\{1 - \tilde{p}(s)\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right\}\tilde{m}_{\delta,124}(s) = \tilde{\beta}_{\delta,124}(s) - \frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\tilde{\sigma}_{\delta,124}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)$$

(4.5.1)

όπου χρησιμοποιώντας τη σχέση 4.4.2,

$$\beta_{\delta,124}(u) = \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{-\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)(x-u)} \alpha_{t,124}(x,u)dx$$

(4.5.2)

όπου η $\alpha_{t,124}(x,u)$ και η $\sigma_{\delta,124}(s)$ δίνονται από τις σχέσεις 4.4.3 και 4.4.5 αντίστοιχα, με την $p(y|t)$ να έχει αντικατασταθεί με $p(y)$. Από τη στιγμή που η 4.5.1 είναι ίση με την 2.5.3 ($\left(1-\tilde{p}(s)\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)\tilde{m}_{\delta,12}(s) = \tilde{\beta}_{\delta,12}(s) - \frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\tilde{\sigma}_{\delta,12}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)$) αν αντικαταστήσουμε την $\tilde{\beta}_{\delta,12}(s)$ με $\tilde{\beta}_{\delta,124}(s)$, την $\tilde{m}_{\delta,12}(s)$ με $\tilde{m}_{\delta,124}(s)$ και την $\tilde{\sigma}^*_{\delta,12}(s)$ με $\tilde{\sigma}^*_{\delta,124}(s)$, συνεπάγεται από την 2.5.6 ($\left(s-\frac{\lambda+\delta}{c}+\frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s)\right)\tilde{m}_{\delta,12}(s) = \frac{1}{c}\left((\lambda+\delta-c\rho_\delta)\tilde{\beta}_{\delta,12}(\rho_\delta) - (\lambda+\delta-cs)\tilde{\beta}_{\delta,12}(s)\right)$) πως

$$\begin{aligned}\left\{s-\frac{\lambda+\delta}{c}+\frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s)\right\}\tilde{m}_{\delta,124}(s) &= \frac{1}{c}\{(\lambda+\delta-c\rho_\delta)\tilde{\beta}_{\delta,124}(\rho_\delta) - (\lambda+\delta-cs)\tilde{\beta}_{\delta,124}(s)\} \\ &= \left(\frac{\lambda+\delta}{c}-\rho_\delta\right)\tilde{\beta}_{\delta,124}(\rho_\delta) - \left(\frac{\lambda+\delta}{c}-s\right)\tilde{\beta}_{\delta,124}(s) \\ &= (s-\rho_\delta)\,\tilde{\beta}_{\delta,124}(s) + \left(\tilde{\beta}_{\delta,124}(\rho_\delta) - \tilde{\beta}_{\delta,124}(s)\right)\left(\frac{\lambda+\delta}{c}-\rho_\delta\right)\end{aligned}$$

όπου στο θεώρημα 1 στην εφαρμογή της παραγράφου 2.4, δείξαμε πως η ρ_δ είναι η μοναδική πραγματική και θετική ρίζα της εξίσωσης του Lundberg. Χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.5.12 ($s-\frac{\lambda+\delta}{c}+\frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s) = (s-\rho_\delta)\left(1-\varphi_\delta\tilde{f}_\delta(s)\right)$) μπορούμε να εκφράσουμε την παραπάνω εξίσωση ως

$$(s-\rho_\delta)\left(1-\varphi_\delta\tilde{f}_\delta(s)\right)\tilde{m}_{\delta,124}(s) = (s-\rho_\delta)\,\tilde{\beta}_{\delta,124}(s) + \left(\tilde{\beta}_{\delta,124}(\rho_\delta) - \tilde{\beta}_{\delta,124}(s)\right)\left(\frac{\lambda+\delta}{c}-\rho_\delta\right)$$

όπου οι φ_δ και $f_\delta(y)$ δίνονται από τις σχέσεις 2.5.10 ($\varphi_\delta = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-\rho_\delta y}\overline{P}(y)dy$) και 2.5.11 ($f_\delta(y) = \frac{e^{\rho_\delta y}\int_y^\infty e^{-\rho_\delta x}p(x)dx}{\int_0^\infty e^{-\rho_\delta x}\overline{P}(x)dx}$) αντίστοιχα. Ξαναγράφοντας την τελευταία παίρνουμε,

$$\widetilde{m}_{\delta,124}(s) = \varphi_\delta \widetilde{m}_{\delta,124}(s)\tilde{f}_\delta(s) + \tilde{\beta}_{\delta,124}(s) + \left(\frac{\lambda+\delta}{c} - \rho_\delta\right)\frac{\tilde{\beta}_{\delta,124}(\rho_\delta) - \tilde{\beta}_{\delta,124}(s)}{s-\rho_\delta}$$

Αντιστρέφοντας την παραπάνω σχέση παίρνουμε την ακόλουθη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση,

$$m_{\delta,124}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,124}(u-y)f_\delta(y)dy + \upsilon_{\delta,124}(\mathrm{u})$$

όπου χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 1.8.1 ($T_r f(x) = e^{rx}\int_x^\infty e^{-ry} f(y)dy = \int_x^\infty e^{-r(x-y)} f(y)dy$) και 1.8.2 ($\int_0^\infty e^{-sx}\, T_r f(x)dx = \int_0^\infty e^{-(s-r)x}\int_x^\infty e^{-ry} f(y)dydx$) η $\upsilon_{\delta,124}(\mathrm{u})$ δίνεται από την παρακάτω

$$\upsilon_{\delta,124}(u) = \beta_{\delta,124}(u) + \left(\frac{\lambda+\delta}{c} - \rho_\delta\right)\int_u^\infty e^{-\rho_\delta(v-u)}\beta_{\delta,124}(v)dv \tag{4.5.3}$$

Τότε η γενική λύση της $m_{\delta,124}(u)$ δίνεται από την

$$m_{\delta,124}(u) = \upsilon_{\delta,124}(\mathrm{u}) + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u \upsilon_{\delta,124}(v)\, g_\delta(u-v)dv$$

όπου η $g_\delta(y)$ δίνεται από τη σχέση 2.5.13 ($g_\delta(y) = \sum_{n=1}^\infty (1-\varphi_\delta)(\varphi_\delta)^n f_\delta^{*n}(y)$) και με αντικατάσταση της σχέσης 4.5.3 θα πάρουμε,

$$\begin{aligned} m_{\delta,124}(u) &= \beta_{\delta,124}(u) + \left(\frac{\lambda+\delta}{c} - \rho_\delta\right)\int_u^\infty e^{-\rho_\delta(v-u)}\beta_{\delta,124}(v)dv \\ &+ \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u \beta_{\delta,124}(u)g_\delta(u-v)dv \\ &+ \frac{1}{1-\varphi_\delta}\left(\frac{\lambda+\delta}{c} - \rho_\delta\right)\int_0^u \left(\int_v^\infty e^{-\rho_\delta(t-v)}\beta_{\delta,124}(t)dt\right) g_\delta(u-v)dv \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης και κάνοντας πράξεις στο τελευταίο ολοκλήρωμα της σχέσης 4.5.4 έχουμε ότι,

$$\int_0^u \left(\int_\upsilon^\infty e^{-\rho_\delta (t-\upsilon)} \beta_{\delta,124}(t)dt\right) g_\delta(u-\upsilon)d\upsilon$$

$$= \int_0^u \beta_{\delta,124}(t) \int_0^t e^{-\rho_\delta (t-\upsilon)} g_\delta(u-\upsilon)d\upsilon dt + \int_u^\infty \beta_{\delta,124}(t) \int_0^u e^{-\rho_\delta (t-\upsilon)} g_\delta(u-\upsilon)d\upsilon dt$$

στη τελευταία σχέση κάνουμε αντικατάσταση του υ με t και του t με υ και παίρνουμε

$$= \int_0^u \beta_{\delta,124}(\upsilon) \int_0^\upsilon e^{-\rho_\delta (\upsilon-t)} g_\delta(u-t)dt d\upsilon + \int_u^\infty \beta_{\delta,124}(\upsilon) \int_0^u e^{-\rho_\delta (\upsilon-t)} g_\delta(u-t)dt d\upsilon$$

και επομένως με αντικατάσταση στην σχέση 4.5.4 παίρνουμε

$$m_{\delta,124}(u) = \beta_{\delta,124}(u)$$

$$+ \frac{1}{1-\varphi_\delta} \int_0^u \beta_{\delta,124}(\upsilon) \begin{Bmatrix} g_\delta(u-\upsilon) \\ + \left(\frac{\lambda+\delta}{c} - \rho_\delta\right) \int_0^\upsilon e^{-\rho_\delta(\upsilon-t)} g_\delta(u-t)dt \end{Bmatrix} d\upsilon$$

$$+ \left(\frac{\lambda+\delta}{c} - \rho_\delta\right) \int_u^\infty \beta_{\delta,124}(\upsilon) \left\{ e^{-\rho_\delta(\upsilon-u)} + \frac{1}{1-\varphi_\delta} \int_0^u e^{-\rho_\delta(\upsilon-t)} g_\delta(u-t)dt \right\} d\upsilon$$

$$= \beta_{\delta,124}(u) + \int_0^\infty \beta_{\delta,124}(\upsilon)\, \tau_\delta(u,\upsilon)d\upsilon \tag{4.5.5}$$

όπου

$$\tau_\delta(u,\upsilon) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\varphi_\delta} \left\{ g_\delta(u-\upsilon) + \left(\dfrac{\lambda+\delta}{c} - \rho_\delta\right) \displaystyle\int_0^\upsilon e^{-\rho_\delta(\upsilon-t)} g_\delta(u-t)dt \right\}, & \upsilon < u \\ \left(\dfrac{\lambda+\delta}{c} - \rho_\delta\right) \left\{ e^{-\rho_\delta(\upsilon-u)} + \dfrac{1}{1-\varphi_\delta} \displaystyle\int_0^u e^{-\rho_\delta(\upsilon-t)} g_\delta(u-t)dt \right\}, & \upsilon > u \end{cases} \tag{4.5.6}$$

Όπως είδαμε και στην εφαρμογή της παραγράφου 2.5, αν θέσουμε $\delta = 0$, τότε $\rho_0 = 0$ και $g_0(u) = -\overline{G}_0'(u) = -\psi'(u)$ και $\varphi_0 = \overline{G}_0(0) = \psi(0)$. Οπότε, η σχέση 4.5.6 αν θέσουμε $\delta = 0$ γίνεται,

$$\tau_0(u,v) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\psi(0)}\left\{\dfrac{\lambda}{c}[\psi(u-v)-\psi(u)] - \psi'(u-v)\right\}, & v < u \\ \dfrac{\lambda}{c}\dfrac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)}, & v > u \end{cases}$$

(4.5.7)

Έστω τώρα ότι $\omega_{124}(x,y,v) = e^{-s_1x - s_2y - s_4v}$, έτσι ώστε,

$$m_{\delta,124}(u) = E\left[e^{-\delta T - s_1U_{T-} - s_2|U_T| - s_4R_{N_T-1}}I(T<\infty)\middle|U_0 = u\right]$$

(4.5.8)

που είναι ουσιαστικά ο μετασχηματισμός Laplace της $h_{\delta,124}(x,y,v|u)$, της από κοινού προεξοφλημένης πυκνότητας των $\left(U_{T-},|U_T|,R_{N_T-1}\right)$. Τότε, χρησιμοποιώντας τη σχέση 4.4.3 ($\alpha_{t,124}(x,u) = \int_x^\infty \omega_{124}(x,y-x,u)p(y|t)dy$) και αντικαθιστώντας την $p(y|t)$ με $p(y)$, η $\alpha_{124}(x,u)$ γίνεται

$$\alpha_{124}(x,u) = \int_x^\infty e^{-s_1x - s_2(y-x) - s_4u}p(y)dy$$

$$= e^{-s_1x - s_4u}\int_0^\infty e^{-s_2y}p(x+y)dy$$

(4.5.9)

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη σχέση 4.1.2 ($h_{12}^*(x,y|u) = \frac{1}{c}k\left(\frac{x-u}{c}\right)p\left(x+y\middle|\frac{x-u}{c}\right)$) και αντικαθιστώντας την $p(y|t)$ με $p(y)$ η σχέση 4.5.2 ($\beta_{\delta,124}(u) = \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{-\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)(x-u)}\alpha_{t,124}(x,u)dx$) γράφεται ως

$$\beta_{\delta,124}(u) = \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{-\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)(x-u)}\, e^{-s_1x - s_4u}\int_0^\infty e^{-s_2y}p(x+y)dy\,dx$$

$$= \int_u^\infty\int_0^\infty e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right) - s_1x - s_2y - s_4u}\left(\frac{\lambda}{c}e^{-\lambda\left(\frac{x-u}{c}\right)}p(x+y)\right)dy\,dx$$

$$= \int_u^\infty\int_0^\infty e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right) - s_1x - s_2y - s_4u}h_{12}^*(x,y|u)dy\,dx$$

(4.5.10)

Από τη σχέση 4.5.8, συνεπάγεται πως η $m_{\delta,124}(u)$ είναι ουσιαστικά μια μέση τιμή της συνάρτησης $e^{-\delta T - s_1 U_{T-} - s_2|U_T| - s_4 R_{N_T-1}} I(T<\infty)$.

Μπορούμε να εκφράσουμε την $m_{\delta,124}(u)$ ως δυο όρους με τον πρώτο να εκφράζει την χρεοκοπία με την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης, όπου $\left(t = \frac{x-u}{c}, x>u, y>0, R_{N_T-1} = R_0 = u\right)$ και με τον δεύτερο να εκφράζει την χρεοκοπία με απαίτηση μεταγενέστερη της πρώτης απαίτησης, όπου $(t>0, \upsilon<x<u+ct, y>0, \upsilon>0)$.

Κάνοντας χρήση της πυκνότητας των $\left(T, U_{T-}, |U_T|, R_{N_T-1}\right)$, όπως συνοψίζεται στη σχέση 4.1.3

$$\left(h_{124}(t,x,y,\upsilon|u) = \begin{cases} h_{12}^{*}(x,y|u), & t=\frac{x-u}{c}, x>u, y>0, \upsilon=u \\ h_{124}^{**}(t,x,y,\upsilon|u), & t>0, \upsilon<x<u+ct,\ y>0,\ \upsilon>0 \end{cases}\right),$$

η συνάρτηση $m_{\delta,124}(u)$ μπορεί να γραφτεί ως εξής, χρησιμοποιώντας και τις σχέσεις 4.1.5 ($h_{\delta,124}^{**}(x,y,\upsilon|u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} h_{124}^{**}(t,x,y,\upsilon|u)dt$) και 4.5.10

$$\begin{aligned} m_{\delta,124}(u) = & \int_u^\infty \int_0^\infty e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right) - s_1 x - s_2 y - s_4 u} h_{12}^{*}(x,y|u)dy\,dx \\ & + \int_0^\infty \int_0^x \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t - s_1 x - s_2 y - s_4 \upsilon} h_{124}^{**}(t,x,y,\upsilon|u)dtdydvdx \\ = & \beta_{\delta,124}(u) + \int_0^\infty \int_0^x \int_0^\infty e^{-\delta t - s_1 x - s_2 y - s_4 \upsilon} h_{\delta,124}^{**}(x,y,\upsilon|u)dydvdx \end{aligned} \tag{4.5.11}$$

Ξαναγράφουμε την τελευταία, λύνοντας ως προς το ολοκλήρωμα και χρησιμοποιούμε τη σχέση 4.5.5 για να πάρουμε,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^x \int_0^\infty e^{-\delta t - s_1 x - s_2 y - s_4 \upsilon} h_{\delta,124}^{**}(x,y,\upsilon|u)dydvdx = m_{\delta,124}(u) - \beta_{\delta,124}(u) \\ & = \int_0^\infty \beta_{\delta,124}(\upsilon)\, \tau_\delta(u,\upsilon)d\upsilon \\ & = \int_0^\infty \tau_\delta(u,\upsilon) \int_u^\infty \int_0^\infty e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right) - s_1 x - s_2 y - s_4 u} h_{12}^{*}(x,y|u)dy\,dx\,d\upsilon \end{aligned}$$

Στην τελευταία σχέση, χρησιμοποιούμε την σχέση 4.1.4 ($h^*_{\delta,12}(x,y|u) = e^{-\delta\frac{x-u}{c}}\frac{1}{c}k\left(\frac{x-u}{c}\right)p\left(x+y\middle|\frac{x-u}{c}\right)$), αφού αντικαταστήσουμε την $p(y|t)$ με $p(y)$ και παίρνουμε

$$\int_0^\infty \tau_\delta(u,\upsilon)\int_u^\infty\int_0^\infty e^{-s_1x-s_2y-s_4u}h^*_{\delta,12}(x,y|\upsilon)dy\,dx\,d\upsilon$$

όπου αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης τελικώς συνεπάγεται ότι

$$\int_0^\infty\int_0^x\int_0^\infty e^{-\delta t-s_1x-s_2y-s_4\upsilon}h^{**}_{\delta,124}(x,y,\upsilon|u)dyd\upsilon dx$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^x e^{-s_1x-s_2y-s_4u}\left(\tau_\delta(u,\upsilon)h^*_{\delta,12}(x,y|\upsilon)\right)d\upsilon dydx \tag{4.5.12}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση 4.5.11, τις σχέσεις 4.5.10 και 4.5.12, θα πάρουμε

$$m_{\delta,124}(u)=\int_u^\infty\int_0^\infty e^{-s_1x-s_2y-s_4u}h^*_{\delta,12}(x,y|\upsilon)dy\,dx$$
$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^x e^{-s_1x-s_2y-s_4u}\left(\tau_\delta(u,\upsilon)h^*_{\delta,12}(x,y|\upsilon)\right)d\upsilon dydx$$

οπού χρησιμοποιώντας την μοναδικότητα των μετασχηματισμών Laplace, η από κοινού ελλειμματική προεξοφλημένη πυκνότητα των $\left(U_{T-},|U_T|,R_{N_T-1}\right)$ στα (x,y,υ), δίνεται από την παρακάτω,

$$h_{\delta,124}(x,y,\upsilon|u)=\begin{cases} h^*_{\delta,12}(x,y|u), & x>\upsilon,\ y>0,\ \upsilon=u\\ \tau_\delta(u,\upsilon)h^*_{\delta,12}(x,y|\upsilon), & x>\upsilon,\ y>0,\ \upsilon\neq u\end{cases}$$

όπου $h^*_{\delta,12}(x,y|u)=\frac{\lambda}{c}\,e^{-\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)(x-u)}p(x+y)$ και η $\tau_\delta(u,\upsilon)$ δίνεται από τη σχέση 4.5.6. [Cheung et al. (2010b)]

Στη συνέχεια θέλουμε να προσδιορίσουμε και την από κοινού πυκνότητα του τελευταίου ενδιάμεσου χρόνου πριν τη χρεοκοπία V_{N_T} και της αποζημίωσης που προκαλεί τη χρεοκοπία Y_{N_T}. Από τη στιγμή που $V_{N_T}=\left(U_{T-}-R_{N_T-1}\right)/c$ και $Y_{N_T}=U_{T-}+|U_T|$, τότε

$$e^{-zV_{N_T}-sY_{N_T}}=e^{-\left(s+\frac{z}{c}\right)U_{T-}-s|U_T|+\frac{z}{c}R_{N_T-1}}$$

Επομένως, η $m_{\delta,124}(u)$ ισούται με $E\left[e^{-zV_{N_T}-sY_{N_T}}I(T<\infty)\middle|U_0=u\right]$ εάν θέσουμε $s_1=\left(s+\frac{z}{c}\right)$, $s_2=s$, $s_4=-\frac{z}{c}$ και $\delta=0$. Τότε, η σχέση 4.5.9 γίνεται,

$$\alpha_{124}(x,u)=e^{-\left(s+\frac{z}{c}\right)x+\frac{z}{c}u}\int_0^\infty e^{-sy}p(x+y)dy$$
$$=\mathrm{e}^{-\frac{z}{c}(x-u)}\int_x^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{sy}}\mathrm{p(y)dy}$$

Επίσης, η σχέση 4.5.2 ($\beta_{\delta,124}(u)=\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{-\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)(x-u)}\alpha_{t,124}(x,u)dx$), θέτοντας $\delta=0$ αντικαθιστώντας την τελευταία και αλλάζοντας μεταβλητή, γίνεται,

$$\beta_{0,124}(u)=\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{-\left(\frac{\lambda}{c}\right)(x-u)}\alpha_{t,124}(x,u)dx$$
$$=\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{-\left(\frac{\lambda+z}{c}\right)(x-u)}\int_x^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{sy}}\mathrm{p(y)dy}dx$$
$$=\lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda+z)t}\int_{u+ct}^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{sy}}\mathrm{p(y)dy}dt$$
$$=\int_0^\infty\int_{u+ct}^\infty e^{-zt-sy}\left(\lambda e^{-\lambda t}p(y)\right)dydt$$

Η σχέση 4.5.5

$(m_{\delta,124}(u)=\beta_{\delta,124}(u)$

$+\frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u\beta_{\delta,124}(v)\begin{Bmatrix} g_\delta(u-v) \\ +\left(\frac{\lambda+\delta}{c}-\rho_\delta\right)\int_0^v e^{-\rho_\delta(v-t)}g_\delta(u-t)dt\end{Bmatrix}dv)$

, για δ=0 γράφεται,

$$m_{0,124}(u)=\beta_{0,124}(u)+\int_0^\infty\beta_{0,124}(v)\,\tau_0(u,v)dv$$

όπου αντικαθιστώντας την τελευταία, παίρνουμε,

$$m_{0,124}(u)=E\left[e^{-zV_{N_T}-sY_{N_T}}I(T<\infty)\middle|U_0=u\right]$$
$$=\int_0^\infty\int_{u+ct}^\infty e^{-zt-sy}\left(\lambda e^{-\lambda t}p(y)\right)dydt$$

$$+\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\int_{u+ct}^\infty e^{-zt-sy}\left(\lambda e^{-\lambda t}p(y)\right)dydt\right)\tau_0(u,\upsilon)d\upsilon$$

$$=\int_0^\infty\int_{u+ct}^\infty e^{-zt-sy}\left(\lambda e^{-\lambda t}p(y)\right)dydt$$

$$+\int_0^\infty\int_{ct}^\infty e^{-zt-sy}\left(\lambda e^{-\lambda t}p(y)\int_0^{\mathrm{y-ct}}\tau_0(u,\upsilon)d\upsilon\right)dydt$$

και έτσι από την μοναδικότητα των μετασχηματισμών Laplace, συνεπάγεται ότι η από κοινού πυκνότητα του τελευταίου ενδιάμεσου χρόνου και της απαίτησης που προκαλεί χρεοκοπία $\left(V_{N_T},Y_{N_T}\right)$, δίνεται από την παρακάτω,

$$h_6(t,y|u)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}p(y)\left(1+\int_0^{\mathrm{y-ct}}\tau_0(u,\upsilon)d\upsilon\right), & y>u+ct\\ \lambda e^{-\lambda t}p(y)\int_0^{\mathrm{y-ct}}\tau_0(u,\upsilon)d\upsilon, & ct<y<u+ct\\ 0, & y>ct\end{cases}$$

όπου η $\tau_0(u,\upsilon)$ δίνεται από τη σχέση 4.5.7

$$\left(\tau_0(u,\upsilon)=\begin{cases}\frac{1}{1-\psi(0)}\left\{\frac{\lambda}{c}[\psi(u-\upsilon)-\psi(u)]-\psi'(u-\upsilon)\right\}, & \upsilon<u\\ \frac{\lambda}{c}\frac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)}, & \upsilon>u\end{cases}\right).$$

4.6. Εφαρμογή σε εκθετικά κατανεμημένα ύψη απαιτήσεων

Η υπόθεση που κάναμε για την ανεξαρτησία των μεταβλητών V,Y εξακολουθεί να ισχύει και σε αυτή την εφαρμογή, δηλαδή υποθέτουμε πως η $p(y|t)=p(y)$ και πως η κατανομή των απαιτήσεων είναι η εκθετική, οπότε, έχουμε ότι $p(y)=\beta e^{-\beta y}$.

Οι ίδιες υποθέσεις είχαν γίνει και στην εφαρμογή της παραγράφου 2.6, μόνο που εκεί είχαμε μια συνάρτηση ποινής δυο μεταβλητών ενώ τώρα έχουμε προσθέσει δυο ακόμη, δηλαδή η συνάρτηση ποινής είναι $\omega(x,y,z,\upsilon)$ και πιο συγκεκριμένα θέτουμε $\omega(x,y,z,\upsilon)=e^{-s_1x-s_2y-s_3z-s_4\upsilon}$, και η $m_\delta(u)$ γίνεται,

$$m_\delta(u)=E\left[e^{-\delta T}e^{-s_1U_{T-}-s_2|U_T|-s_3X_T-s_4R_{N_T-1}}I(T<\infty)\middle|U_0=u\right] \tag{4.6.1}$$

μια σχέση η οποία όπως αναφέραμε νωρίτερα είναι ο μετασχηματισμός Laplace της από κοινού ελλειμματικής προεξοφλημένης πυκνότητας των $\left(U_{T-}, |U_T|, X_T, R_{N_T-1}\right)$.

Χρησιμοποιώντας την σχέση 4.1.9 έχουμε ότι,

$$h_{\delta,124}^{**}(x, u+y, \upsilon|0) = h_{\delta,14}^{**}(x, \upsilon|0) p_x(u+y)$$

όπου αν αντικαταστήσουμε τη σχέση 2.6.1 ($p_x(y) = \frac{p(x+y)}{\overline{P}(x)} = \frac{\beta e^{-\beta(x+y)}}{e^{-\beta x}} = \beta e^{-\beta y}$), θα πάρουμε,

$$h_{\delta,124}^{**}(x, u+y, \upsilon|0) = h_{\delta,14}^{**}(x, \upsilon|0) \beta e^{-\beta(u+y)}$$

και στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τη σχέση 4.2.7 ($\upsilon_\delta(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\left(\int_0^\infty \omega(u+ct, y, u, u) p(u+ct+y|t) dy\right) k(t) dt + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^x \omega(u+x, y, u, u+\upsilon) h_{\delta,124}^{**}(x, u+y, \upsilon|0) d\upsilon dx dy$), για να πάρουμε,

$$\upsilon_\delta(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\left(\int_0^\infty e^{-s_1(u+ct) - s_2 y - s_3 u - s_4 u}\, \beta e^{-\beta(u+ct+y)} dy\right) k(t) dt$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^x e^{-s_1(u+x) - s_2 y - s_3 u - s_4(u+\upsilon)}\, \beta e^{-\beta(u+y)} h_{\delta,14}^{**}(x, \upsilon|0) d\upsilon dx dy$$

$$= e^{-(\beta+s_1+s_3+s_4)u}\left(\int_0^\infty \beta e^{-(\beta+s_2)y} dy\right)$$

$$\times \left(\int_0^\infty e^{-(\delta+cs_1+c\beta)t} k(t) dt + \int_0^\infty \int_0^x e^{-s_1 x - s_4 \upsilon} h_{\delta,14}^{**}(x, \upsilon|0)\, d\upsilon dx\right)$$

$$= \frac{\beta e^{-(\beta+s_1+s_3+s_4)u}}{\beta+s_2}\left(\tilde{k}(\delta+cs_1+c\beta) + \tilde{h}_{\delta,14}^{**}(s_1, s_4|0)\right)$$

όπου $\tilde{h}_{\delta,14}^{**}(s_1, s_4|0)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $h_{\delta,14}^{**}(x, \upsilon|0)$. Θέτουμε $\xi_\delta(s_1, s_4) = \tilde{k}(\delta+cs_1+c\beta) + \tilde{h}_{\delta,14}^{**}(s_1, s_4|0)$, έτσι ώστε,

$$\upsilon_\delta(u) = \frac{\beta \xi_\delta(s_1, s_4)}{\beta+s_2} e^{-(\beta+s_1+s_3+s_4)u} \tag{4.6.2}$$

Από τη στιγμή που η πυκνότητα του κλιμακωτού ύψους $f_\delta(y)$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή που κάνουμε για την συνάρτηση ποινής, από την σχέση 2.6.2 ($f_\delta(y) = \beta e^{-\beta y} \int_0^\infty \left\{\frac{h_{\delta,1}(x|0)}{\varphi_\delta}\right\} dx = \beta e^{-\beta y}$), προκύπτει ότι $f_\delta(y) = \beta e^{-\beta y}$. Επίσης, η $m_\delta(u)$, γνωρίζουμε πως ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, τότε, χρησιμοποιώντας την σχέση 4.2.8 ($m_\delta(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_\delta(u-y) f_\delta(y) dy + \upsilon_\delta(u)$), έχουμε ότι

$$m_\delta(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_\delta(u-y) \beta e^{-\beta y} dy + \upsilon_\delta(u)$$

όπου η $\upsilon_\delta(u)$ δίνεται από τη σχέση 4.6.2. Από το Θεώρημα 2 που δείξαμε στην παράγραφο 2.6, έχουμε ότι η φ_δ είναι η μοναδική πραγματική ρίζα $\in (0,1)$ και ικανοποιεί την 2.6.7 ($\varphi_\delta = \tilde{k}\big(\delta + c\beta(1-\varphi_\delta)\big)$). Επομένως, υπολογίζοντας τον μετασχηματισμό Laplace της τελευταίας, έχουμε ότι

$$\widetilde{m}_\delta(z) = \varphi_\delta \widetilde{m}_\delta(z) \frac{\beta}{\beta + z} + \frac{\beta \xi_\delta(s_1, s_4)}{\beta + s_2} (\beta + s_1 + s_3 + s_4 + z)^{-1}$$

την οποία λύνουμε ως προς $\widetilde{m}_\delta(z)$ για να πάρουμε,

$$\widetilde{m}_\delta(z) = \frac{\beta \xi_\delta(s_1, s_4)}{\beta + s_2} \frac{(\beta + s_1 + s_3 + s_4 + z)^{-1}}{1 - \varphi_\delta \beta (\beta + z)^{-1}}$$

$$= \frac{\beta \xi_\delta(s_1, s_4)}{(\beta + s_2)(\varphi_\delta \beta + s_1 + s_3 + s_4)} \left\{ \frac{s_1 + s_3 + s_4}{\beta + s_1 + s_3 + s_4 + z} + \frac{\varphi_\delta \beta}{\beta(1 - \varphi_\delta) + z} \right\}$$

την οποία αντιστρέφουμε και χρησιμοποιούμε τη σχέση 2.6.4 ($\overline{G}_\delta(u) = \varphi_\delta\, e^{-\beta(1-\varphi_\delta)u}$), για να πάρουμε,

$$m_\delta(u) = \frac{\beta \xi_\delta(s_1, s_4)}{(\beta + s_2)(\varphi_\delta \beta + s_1 + s_3 + s_4)} \left\{ (s_1 + s_3 + s_4) e^{-(\beta + s_1 + s_3 + s_4)u} + \beta \overline{G}_\delta(u) \right\} \tag{4.6.3}$$

Για να μπορέσουμε να εκφράσουμε την $\xi_\delta(s_1, s_4)$ συναρτήσει του $\tilde{k}(s)$, θεωρούμε την σχέση 4.4.6 ($m_{\delta,124}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \sigma_{t,\delta,124}(u + ct) k(t) dt + \beta_{\delta,124}(u)$) που χρησιμοποιήσαμε όταν δεσμεύσαμε ως προς το ύψος και τον χρόνο της πρώτης απαίτησης. Ακόμη, αφού η $\xi_\delta(s_1, s_4)$ είναι ανεξάρτητη από τις s_2, s_3, θέτουμε $s_2 = s_3 = 0$ και επομένως η σχέση 4.6.3, απλοποιείται ως εξής

$$m_{\delta,14}(u) = \frac{\xi_\delta(s_1, s_4)}{\varphi_\delta \beta + s_1 + s_4} \left\{ (s_1 + s_4) e^{-(\beta + s_1 + s_4)u} + \beta \overline{G}_\delta(u) \right\} \tag{4.6.4}$$

έπειτα, η σχέση 4.4.6 ($m_{\delta,124}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_{t,\delta,124}(u+ct)k(t)dt + \beta_{\delta,124}(u)$) απλοποιείται σε

$$m_{\delta,14}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_{\delta,14}(u+ct)k(t)dt + \beta_{\delta,14}(u)$$

(4.6.5)

όπου από τις σχέσεις 4.4.1 ($\beta_{\delta,124}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\alpha_{t,124}(u+ct,u)k(t)dt$) και 4.4.3 ($\alpha_{t,124}(x,u) = \int_x^\infty \omega_{124}(x,y-x,u)p(y|t)dy$) η $\beta_{\delta,14}(u)$ γίνεται,

$$\beta_{\delta,14}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\alpha_{t,14}(u+ct,u)k(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\delta t}\left(\int_{u+ct}^\infty e^{-s_1(u+ct)}\beta e^{-\beta y}dy\right)k(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\delta t-(\beta+s_1)(u+ct)-s_4 u}k(t)dt = e^{-(\beta+s_1+s_4)u}\tilde{k}(\delta+c\beta+cs_1)$$

(4.6.6)

Έπειτα, προσαρμόζουμε την σχέση 4.4.5 ($\sigma_{t,\delta,124}(u+ct) = \int_0^x m_{\delta,124}(x-y)p(y|t)dy$), αντικαθιστούμε σε αυτή την σχέση 4.6.4 για να πάρουμε,

$$\sigma_{\delta,14}(x) = \int_0^x m_{\delta,14}(x-y)\beta e^{-\beta y}dy$$

$$= \frac{\xi_\delta(s_1,s_4)}{\varphi_\delta\beta+s_1+s_4}\left\{(s_1+s_4)\int_0^x e^{-(\beta+s_1+s_4)(x-y)}\beta e^{-\beta y}dy + \beta\int_0^x \overline{G}_\delta(x-y)\beta e^{-\beta y}dy\right\}$$

Από τη σχέση 2.6.3 ($\overline{G}_\delta(u) = \varphi_\delta\int_0^u \overline{G}_\delta(u-y)\,\beta e^{-\beta y}dy + \varphi_\delta e^{-\beta u}$) έχουμε ότι,

$$\frac{\overline{G}_\delta(x)}{\varphi_\delta} - e^{-\beta x} = \int_0^x \overline{G}_\delta(x-y)\,\beta e^{-\beta y}dy$$

επομένως, η $\sigma_{\delta,14}(x)$ ξαναγράφεται ως

$$\sigma_{\delta,14}(x) = \frac{\beta\xi_\delta(s_1,s_4)}{\varphi_\delta\beta+s_1+s_4}\left\{e^{-\beta x}\left(1-e^{-(s_1+s_4)x}\right) + \left(\frac{\overline{G}_\delta(x)}{\varphi_\delta} - e^{-\beta x}\right)\right\}$$

$$= \frac{\beta \xi_\delta(s_1, s_4)}{\varphi_\delta \beta + s_1 + s_4} \left\{ \frac{\overline{G}_\delta(x)}{\varphi_\delta} - e^{-(\beta + s_1 + s_4)x} \right\}$$

(4.6.7)

Συνεπώς, αν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις 4.6.6, 4.6.7 και 2.6.6 ($\varphi_\delta \overline{G}_\delta(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \overline{G}_\delta(u + ct) k(t) dt$), η σχέση 4.6.5 γράφεται,

$$m_{\delta,14}(u) = \frac{\beta \xi_\delta(s_1, s_4)}{\varphi_\delta \beta + s_1 + s_4} \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{\varphi_\delta} \int_0^\infty e^{-\delta t} \overline{G}_\delta(u + ct) k(t) dt \\ - \int_0^\infty e^{-\delta t - (\beta + s_1 + s_4)(u + ct)} k(t) dt \end{array} \right\}$$

$$+ e^{-(\beta + s_1 + s_4)u} \tilde{k}(\delta + c\beta + cs_1)$$

$$= \frac{\beta \xi_\delta(s_1, s_4)}{\varphi_\delta \beta + s_1 + s_4} \left\{ \overline{G}_\delta(u) - e^{-(\beta + s_1 + s_4)u} \tilde{k}(\delta + c\beta + cs_1 + cs_4) \right\}$$

$$+ e^{-(\beta + s_1 + s_4)u} \tilde{k}(\delta + c\beta + cs_1)$$

(4.6.8)

Αν στη συνέχεια εξισώσουμε τις σχέσεις 4.6.4 και 4.6.8, απαλείφονται οι όροι που περιέχουν την $\overline{G}_\delta(u)$ και αφού διαιρέσουμε και τα δυο μέλη με $e^{-(\beta + s_1 + s_4)u}$, παίρνουμε,

$$\frac{\xi_\delta(s_1, s_4)}{\varphi_\delta \beta + s_1 + s_4} (s_1 + s_4)$$

$$= \tilde{k}(\delta + c\beta + cs_1) - \frac{\beta \xi_\delta(s_1, s_4)}{\varphi_\delta \beta + s_1 + s_4} \tilde{k}(\delta + c\beta + cs_1 + cs_4)$$

που αν λύσουμε ως προς $\xi_\delta(s_1, s_4)$ θα πάρουμε,

$$\xi_\delta(s_1, s_4) = \frac{(\varphi_\delta \beta + s_1 + s_4) \tilde{k}(\delta + c\beta + cs_1)}{s_1 + s_4 + \beta \tilde{k}(\delta + c\beta + cs_1 + cs_4)}$$

η οποία είναι ένα από τα ζητούμενα, δηλαδή μια συνάρτηση του $\tilde{k}(s)$. Στη συνέχεια με χρήση της σχέσης 4.6.3 έχουμε ότι,

$$m_\delta(u) = C_\delta(s_1, s_2, s_3, s_4) \left\{ (s_1 + s_3 + s_4) e^{-(\beta + s_1 + s_3 + s_4)u} + \beta \overline{G}_\delta(u) \right\}$$

(4.6.9)

όπου

$$C_\delta(s_1,s_2,s_3,s_4)=\frac{\beta(\varphi_\delta\beta+s_1+s_4)\,\tilde{k}(\delta+c\beta+cs_1)}{(\beta+s_2)(\varphi_\delta\beta+s_1+s_3+s_4)\left(s_1+s_4+\beta\,\tilde{k}(\delta+c\beta+cs_1+cs_4)\right)}$$

και η $\overline{G}_\delta(u)$ δίνεται από τη σχέση 2.6.4 ($\overline{G}_\delta(u)=\varphi_\delta\, e^{-\beta(1-\varphi_\delta)u}$).

Αναφέραμε νωρίτερα πως εάν θέλουμε να μελετήσουμε την πυκνότητα του τελευταίου ενδιάμεσου χρόνου πριν τη χρεοκοπία που δίνεται από την $V_{N_T}=\left(U_{T-}-R_{N_T-1}\right)/c$, τότε, επιλέγουμε για συνάρτηση ποινής την $\omega(x,y,z,v)=e^{-s\left(\frac{x-v}{c}\right)}=e^{-\frac{s}{c}x+\frac{s}{c}v}$. Επομένως, αν συμβολίσουμε την πυκνότητα του τελευταίου ενδιάμεσου χρόνου πριν τη χρεοκοπία με $k_T(t|u)=-\overline{K}_T'(t|u)$, ο μετασχηματισμός Laplace της $k_T(t|u)$ θα δίνεται από την $E\left[e^{-sV_{N_T}}I(T<\infty)\middle|U_0=u\right]$, η οποία μπορεί να βρεθεί μέσω της σχέσης 4.6.9, αφού θέσουμε $\delta=0, s_1=s/c, s_2=s_3=0$ και $s_4=-s/c$. Επίσης, αν λάβουμε υπόψη πως $\overline{G}_0(u)=\psi(u)$, θα πάρουμε,

$$E\left[e^{-sV_{N_T}}I(T<\infty)\middle|U_0=u\right]=\frac{\tilde{k}(c\beta+s)}{\tilde{k}(c\beta)}\psi(u)$$

την οποία αντιστρέφουμε για να πάρουμε

$$k_T(t|u)=\frac{e^{-c\beta t}k(t)}{\tilde{k}(c\beta)}\psi(u)$$

Η κατανομή της $V_{N_T}|T<\infty$, δίνεται από την

$$\frac{k_T(t|u)}{\psi(u)}=\frac{e^{-c\beta t}k(t)}{\tilde{k}(c\beta)}$$

η οποία δεν εξαρτάται από το αρχικό απόθεμα u και μπορεί να υπολογιστεί για αρκετές περιπτώσεις της $k(t)$.

Έστω τώρα $s_3=s_4=0$, ώστε η $m_\delta(u)$ να απλοποιηθεί σε $m_{\delta,12}(u)$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση 4.6.9 θα πάρουμε

$$m_\delta(u)=\frac{\beta\,\tilde{k}(\delta+c\beta+cs_1)}{(\beta+s_2)\left(s_1+\beta\,\tilde{k}(\delta+c\beta+cs_1)\right)}\left\{s_1e^{-(\beta+s_1)u}+\beta\overline{G}_\delta(u)\right\}$$

(4.6.10)

η οποία αποτελεί λύση της σχέσης 2.6.12 ($m_{\delta,12}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,12}(u-y)\beta\, e^{-\beta y}dy + \upsilon_{\delta,12}(u)$) συναρτήσει της $\tilde{k}(s)$ όταν $\omega_{12}(x,y) = e^{-s_1 x - s_2 y}$.

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε την $h_{\delta,12}(x,y|u)$, την από κοινού ελλειμματική προεξοφλημένη πυκνότητα του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας [Willmot, G.E. (2011)]. Από τη στιγμή που έχουμε ότι $h_{\delta,12}(x,y|u) = h_{\delta,1}(x|u)\beta e^{-\beta y}$ από τη σχέση 4.1.10 ($h_{\delta,12}(x,y|u) = h_{\delta,1}(x|u)p_x(y)$), όπου $h_{\delta,1}(x|u)$ είναι η ελλειμματική προεξοφλημένη πυκνότητα του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρεοκοπία, αρκεί να επικεντρωθούμε στον προσδιορισμό της ώστε τελικώς να καταλήξουμε στην $h_{\delta,12}(x,y|u)$. Έτσι, θέτουμε $s_2 = s_3 = s_4 = 0$, ώστε η σχέση 4.6.1

$$\left(m_\delta(u) = E\left[e^{-\delta T} e^{-s_1 U_{T-} - s_2|U_T| - s_3 X_T - s_4 R_{N_T - 1}} I(T<\infty)\middle| U_0 = u\right]\right)$$

να γίνει,

$$m_\delta(u) = E\left[e^{-\delta T - s_1 U_{T-}} I(T<\infty)\middle| U_0 = u\right] = \tilde{h}_{\delta,1}(s_1|u)$$

όπου $\tilde{h}_{\delta,1}(s_1|u)$ ο μετασχηματισμός Laplace της $h_{\delta,1}(x|u)$. Στη συνέχεια θέτουμε $s_2 = 0$ στη σχέση 4.6.10 και παίρνουμε,

$$m_\delta(u) = \tilde{h}_{\delta,1}(s_1|u) = \frac{\tilde{k}(\delta + c\beta + cs_1)}{s_1 + \beta\,\tilde{k}(\delta + c\beta + cs_1)}\left\{s_1 e^{-(\beta+s_1)u} + \beta\overline{G}_\delta(u)\right\}$$

Έπειτα, αφού θέσουμε $u = 0$

$$\tilde{h}_{\delta,1}(s_1|0) = \frac{\tilde{k}(\delta + c\beta + cs_1)}{s_1 + \beta\,\tilde{k}(\delta + c\beta + cs_1)}(s_1 + \beta\varphi_\delta) \tag{4.6.11}$$

επομένως μπορούμε να γράψουμε την $\tilde{h}_{\delta,1}(s_1|u)$ ως εξής αν αντικαταστήσουμε την 4.6.11

$$\tilde{h}_{\delta,1}(s_1|u) = \frac{\tilde{h}_{\delta,1}(s_1|0)}{s_1 + \beta\varphi_\delta}\left\{s_1 e^{-(\beta+s_1)u} + \beta\overline{G}_\delta(u)\right\}$$

Προσθέτουμε και αφαιρούμε στην τελευταία τον όρο $\beta\varphi_\delta e^{-(\beta+s_1)u}$ και παίρνουμε,

$$\tilde{h}_{\delta,1}(s_1|u) = \frac{\tilde{h}_{\delta,1}(s_1|0)}{s_1 + \beta\varphi_\delta}\left\{(s_1 + \beta\varphi_\delta)e^{-(\beta+s_1)u} + \beta\overline{G}_\delta(u) - \beta\varphi_\delta e^{-(\beta+s_1)u}\right\}$$

$$= \tilde{h}_{\delta,1}(s_1|0)e^{-(\beta+s_1)u} + \frac{\beta\tilde{h}_{\delta,1}(s_1|0)}{s_1+\beta\varphi_\delta}\left(\overline{G}_\delta(u) - \varphi_\delta e^{-(\beta+s_1)u}\right)$$

(4.6.12)

Για μια οποιαδήποτε συνάρτηση $h(x)$ και μια σταθερά α, ας θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό Laplace $e^{-\alpha s}\tilde{h}(s)$ που δίνεται από την παρακάτω σχέση,

$$e^{-\alpha s}\tilde{h}(s) = e^{-\alpha s}\int_0^\infty e^{-sx}h(x)dx = \int_0^\infty e^{-(x+\alpha)s}h(x)dx = \int_\alpha^\infty e^{-sx}h(x-\alpha)dx$$

επομένως $e^{-\alpha s}\tilde{h}(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $h(x-\alpha)I(x>\alpha)$.

Αντιστρέφοντας τη σχέση 4.6.12 παίρνουμε,

$$h_{\delta,1}(x|u) = e^{-\beta u}h_{\delta,1}(x-u|0)I(x>u) + \beta\overline{G}_\delta(u)\int_0^x e^{-\beta\varphi_\delta(x-y)}h_{\delta,1}(y|0)dy$$

$$+e^{-\beta u}\beta\varphi_\delta\int_0^{x-u} e^{-\beta\varphi_\delta(x-u-y)}h_{\delta,1}(y|0)dy\, I(x>u)$$

(4.6.13)

η οποία αποτελεί μια συνάρτηση για την $h_{\delta,1}(x|u)$ συναρτήσει της $h_{\delta,1}(x|0)$. Επομένως, μπορούμε να επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας στον υπολογισμό της ποσότητας $h_{\delta,1}(x|0)$.

Θέτοντας όπου $s_1 = s$ στη σχέση 4.6.11, θα πάρουμε,

$$\tilde{h}_{\delta,1}(s|0) = \frac{\tilde{k}(\delta+c\beta+cs)}{s+\beta\,\tilde{k}(\delta+c\beta+cs)}(s+\beta\varphi_\delta)$$

$$= \frac{\tilde{k}(\delta+c\beta+cs)}{s+\beta-\beta\left(1-\tilde{k}(\delta+c\beta+cs)\right)}(s+\beta-\beta(1-\varphi_\delta))$$

όπου από την εφαρμογή της παραγράφου 2.6, είδαμε πως, αν θέσουμε $\kappa_\delta = \beta(1-\varphi_\delta)$, δείξαμε πως $-\kappa_\delta$ είναι η μοναδική και θετική ρίζα στην εξίσωση του Lundberg και ικανοποιεί την $\kappa_\delta = \beta\left(1-\tilde{k}(\delta+c\kappa_\delta)\right)$. Στη συνέχεια, αν προσθέσουμε και αφαιρέσουμε κ_δ παίρνουμε,

$$\tilde{h}_{\delta,1}(s-\beta|0) = \frac{\tilde{k}(\delta+cs)}{s-\beta\left(1-\tilde{k}(\delta+cs)\right)}(s-\kappa_\delta)$$

$$= \frac{\tilde{k}(\delta + cs)}{s - \kappa_\delta - \beta\left(1 - \tilde{k}(\delta + cs)\right) + \beta\left(1 - \tilde{k}(\delta + c\kappa_\delta)\right)}(s - \kappa_\delta)$$

$$= \frac{\tilde{k}(\delta + cs)}{1 - \beta\left\{\frac{\tilde{k}(\delta + c\kappa_\delta) - \tilde{k}(\delta + cs)}{s - \kappa_\delta}\right\}}$$

(4.6.14)

Ορίζουμε την παρακάτω πυκνότητα,

$$n_\delta(t) = \frac{e^{-\delta\frac{t}{c}}k\left(\frac{t}{c}\right)}{c\tilde{k}(\delta)}$$

(4.6.15)

με μετασχηματισμό Laplace που δίνεται από τη σχέση,

$$\tilde{n}_\delta(s) = \frac{\tilde{k}(\delta + cs)}{\tilde{k}(\delta)}$$

Τότε, η σχέση 4.6.14 γίνεται,

$$\tilde{h}_{\delta,1}(s - \beta|0) = \frac{\tilde{k}(\delta)\tilde{n}_\delta(s)}{1 - \beta\tilde{k}(\delta)\left\{\frac{\tilde{n}_\delta(\kappa_\delta) - \tilde{n}_\delta(s)}{s - \kappa_\delta}\right\}}$$

και από τη στιγμή που $\kappa_\delta = \beta\left(1 - \tilde{k}(\delta + c\kappa_\delta)\right) \Rightarrow \beta = \kappa_\delta/1 - \tilde{k}(\delta + c\kappa_\delta)$, αν το αντικαταστήσουμε στην $\tilde{h}_{\delta,1}(s - \beta|0)$ θα πάρουμε,

$$\tilde{h}_{\delta,1}(s - \beta|0) = \frac{\tilde{k}(\delta)\tilde{n}_\delta(s)}{1 - \frac{\kappa_\delta}{1 - \tilde{k}(\delta + c\kappa_\delta)}\tilde{k}(\delta)\left\{\frac{\tilde{n}_\delta(\kappa_\delta) - \tilde{n}_\delta(s)}{s - \kappa_\delta}\right\}}$$

$$= \frac{\tilde{k}(\delta)\tilde{n}_\delta(s)}{1 - \frac{\tilde{k}(\delta)}{1 - \tilde{k}(\delta + c\kappa_\delta)}\left(1 - \tilde{n}_\delta(\kappa_\delta)\right)\left\{\frac{\kappa_\delta}{s - \kappa_\delta}\frac{\tilde{n}_\delta(\kappa_\delta) - \tilde{n}_\delta(s)}{1 - \tilde{n}_\delta(\kappa_\delta)}\right\}} = \frac{\tilde{v}_\delta^*(s)}{1 - \varphi_\delta^*\tilde{f}_\delta^*(s)}$$

(4.6.16)

όπου

$$\tilde{v}_\delta^*(s) = \tilde{k}(\delta)\tilde{n}_\delta(s)$$

$$\varphi_\delta^* = \frac{\tilde{k}(\delta)}{1 - \tilde{k}(\delta + c\kappa_\delta)}\left(1 - \tilde{n}_\delta(\kappa_\delta)\right) = \frac{\tilde{k}(\delta) - \tilde{k}(\delta + c\kappa_\delta)}{1 - \tilde{k}(\delta + c\kappa_\delta)}$$

Μπορούμε να διαπιστώσουμε πως $\varphi_\delta^* \in (0,1)$ για $\delta > 0$ και $\varphi_0^* = 1$ και έχουμε επίσης ότι

$$\tilde{f}_\delta^*(s) = \frac{\kappa_\delta}{s-\kappa_\delta}\frac{\tilde{n}_\delta(\kappa_\delta) - \tilde{n}_\delta(s)}{1-\tilde{n}_\delta(\kappa_\delta)}$$

(4.6.17)

Από τη σχέση 1.8.5 ($\tilde{f}_{ge}(s;r) = \frac{r}{s-r}\frac{\tilde{f}(r)-\tilde{f}(s)}{1-\tilde{f}(r)}$), προκύπτει πως η σχέση 4.6.17 είναι ο μετασχηματισμός Laplace της γενικευμένης πυκνότητας ισορροπίας της $n_\delta(y)$ και επομένως, χρησιμοποιώντας τη σχέση 1.8.4 ($f_{ge}(y;r) = \frac{e^{ry}\int_y^\infty e^{-rx}f(x)dx}{\int_0^\infty e^{-rx}\bar{F}(x)dx}$), τελικώς συνεπάγεται πως,

$$f_\delta^*(y) = \frac{e^{\kappa_\delta y}\int_y^\infty e^{-\kappa_\delta x}\ n_\delta(x)dx}{\int_0^\infty e^{-\kappa_\delta y}\ \overline{N}_\delta(y)dy}$$

όπου από τη σχέση 1.8.1 ($T_r f(x) = e^{rx}\int_x^\infty e^{-ry} f(y)dy = \int_x^\infty e^{-r(x-y)} f(y)dy$) προκύπτει πως,

$$\overline{N}_\delta(y) = \int_y^\infty n_\delta(x)dx = \int_y^\infty \frac{e^{-\delta\frac{x}{c}}k\left(\frac{x}{c}\right)}{c\tilde{k}(\delta)}\,dx$$

$$= \frac{e^{-\delta\frac{y}{c}}T_\delta k\left(\frac{y}{c}\right)}{\tilde{k}(\delta)}$$

Στη συνέχεια, ξαναγράφουμε τη σχέση 4.6.16, για να πάρουμε,

$$\tilde{h}_{\delta,1}(s-\beta|0) = \varphi_\delta^*\ \tilde{h}_{\delta,1}(s-\beta|0)\ \tilde{f}_\delta^*(s)\ + \tilde{\upsilon}_\delta^*(s)$$

η οποία αντιστρέφοντας τη θα μας δώσει,

$$e^{\beta x}h_{\delta,1}(x|0) = \varphi_\delta^* \int_0^x e^{-\beta(x-y)}h_{\delta,1}(x-y|0)f_\delta^*(y)\,dy + \tilde{k}(\delta)n_\delta(x)$$

που αποτελεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για την ποσότητα $e^{\beta x}h_{\delta,1}(x|0)$ για $\delta > 0$. Έτσι, αν κάνουμε χρήση της σχέσης, 1.11.7, η γενική λύση της παραπάνω ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης για $\delta > 0$ δίνεται από,

$$e^{\beta x}h_{\delta,1}(x|0) = \tilde{k}(\delta)n_\delta(x) + \frac{1}{1-\varphi_\delta^*}\int_0^x \tilde{k}(\delta)n_\delta(y)\,g_\delta^*(x-y)dy$$

(4.6.18)

όπου, αν $\left(f_\delta^*(y)\right)^{*n}$ η n-οστη συνέλιξη της $f_\delta^*(y)$ με τον εαυτό της, τότε,

$$g_\delta^*(y) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\varphi_\delta^*)(\varphi_\delta^*)^n\left(f_\delta^*(y)\right)^{*n}$$

Έπειτα, αν πολλαπλασιάσουμε τα δυο μέλη της σχέσης 4.6.18 με $e^{-\beta x}$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση 4.6.15 παίρνουμε την παρακάτω συνάρτηση για τη $h_{\delta,1}(x|0)$

$$h_{\delta,1}(x|0) = e^{\beta x}\left\{\tilde{k}(\delta)n_\delta(x) + \frac{\tilde{k}(\delta)}{1-\varphi_\delta^*}\int_0^x n_\delta(y)g_\delta^*(x-y)dy\right\}$$

$$= e^{\beta x}\left\{\frac{e^{-\delta\frac{x}{c}}\tilde{k}\left(\frac{x}{c}\right)}{c} + \frac{1}{c\left(1-\varphi_\delta^*\right)}\int_0^x e^{-\delta\frac{y}{c}}k\left(\frac{y}{c}\right)g_\delta^*(x-y)dy\right\}$$

Τελικώς, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 4.6.13 ($h_{\delta,1}(x|u) = e^{-\beta u}h_{\delta,1}(x-u|0)I(x > u) + \beta\overline{G}_\delta(u)\int_0^x e^{-\beta\varphi_\delta(x-y)}h_{\delta,1}(y|0)dy$
$+e^{-\beta u}\beta\varphi_\delta\int_0^{x-u} e^{-\beta\varphi_\delta(x-u-y)}h_{\delta,1}(y|0)dy\, I(x>u)$), 4.1.10 ($h_{\delta,12}(x,y|u) = h_{\delta,1}(x|u)p_x(y)$) και 2.6.1 ($p_x(y) = \frac{p(x+y)}{\overline{P}(x)} = \frac{\beta e^{-\beta(x+y)}}{e^{-\beta x}} = \beta e^{-\beta y}$), μπορούμε να υπολογίσουμε την $h_{\delta,12}(x,y|u)$, δηλαδή την από κοινού ελλειμματική προεξοφλημένη πυκνότητα των $U_{T-}, |U_T|$ όταν τα ύψη των απαιτήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 :Συμπεράσματα

Στο πρώτο κεφάλαιο:

- Παρουσιάσαμε τα βασικά εργαλεία που απαιτούνται για την κατανόηση του θέματος που αναλύουμε στην παρούσα εργασία.

Στο δεύτερο κεφάλαιο:

- Παρουσιάσαμε την συνάρτηση των Gerber – Shiu ως ένα μαθηματικό εργαλείο, το οποίο με χρήση συγκεκριμένων ανά περίπτωση παραμέτρων μπορεί να μας δώσει πλήθος πληροφοριών για ποσότητες σχετικές με τη χρεοκοπία.
- Παρουσιάσαμε την από κοινού ελλειμματική πυκνότητα των $(T, U_{T-}, |U_T|)$, δηλαδή, του χρόνου χρεοκοπίας, του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρεοκοπία και του ελλείματος κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας αντίστοιχα. Η πυκνότητα αυτή ορίστηκε για την περίπτωση όπου η χρεοκοπία συμβαίνει με την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης αλλά και με την εμφάνιση μεταγενέστερων απαιτήσεων. Ακόμη παρουσιάσαμε τις προεξοφλημένες πυκνότητες που παρόλο που δεν έχουν νόημα από πλευράς πιθανοτήτων είναι πολύ χρήσιμες για την μελέτη μας.
- Διακρίναμε περιπτώσεις για το πότε έχουμε πτώσεις στο πλεόνασμα και δείξαμε πως η συνάρτηση Gerber – Shiu ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, γεγονός που μας βοηθά να κατανοήσουμε πως λειτουργεί η συνάρτηση αλλά και τη δομή της γενικότερα. Δείξαμε επίσης πως με χρήση κατάλληλων παραμέτρων μια γενική λύση της συνάρτησης μας είναι συνδεδεμένη με μια σύνθετη γεωμετρική κατανομή. Ακόμη, δείξαμε πως η ουρά αυτής της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής που ισούται με τον μετασχηματισμό Laplace της πυκνότητας του χρόνου χρεοκοπίας για $\omega_{12}(x, y) = 1$, ικανοποιεί επίσης μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.
- Όταν $\omega_{12}(x, y) = \omega_2(y)$ η συνάρτηση $m_{\delta,12}(u)$ απλοποιείται σημαντικά σε $m_{\delta,2}(u)$, καθώς σε αντίθεση με την $m_{\delta,12}(u)$, εξαρτάται μόνο από την φ_δ και την πυκνότητα των κλιμακωτών υψών $f_\delta(y)$ και δεν εξαρτάται από την $h_{\delta,12}(x, y|0)$ που συχνά είναι πολύ δύσκολο να υπολογιστεί. Ακόμη, δείξαμε πως ενώ η

$m_{\delta,12}(u)$ και η $m_{\delta,2}(u)$ είναι και οι δυο συναρτήσεις του u, αν μπορούμε να υπολογίσουμε την $h_{\delta,12}(x,y|0)$ (για παράδειγμα μέσω της $m_{\delta,12}(0)$), τότε μπορούμε να βρούμε γενικευμένες λύσεις και για την $m_{\delta,12}(u)$ και την $m_{\delta,2}(u)$.

- Για να βρούμε μια σχέση μεταξύ της συνάρτησης $m_{\delta,12}(u)$ και των πυκνοτήτων του ύψους των απαιτήσεων και των ενδιάμεσων χρόνων, $p(y), k(t)$ αντίστοιχα, ασχοληθήκαμε στην μια περίπτωση με τον χρόνο και το ύψος της πρώτης απαίτησης, ώστε να καταλήξουμε σε μια ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιείται από την $m_{\delta,12}(u)$. Στη συνέχεια δείξαμε πως οι ρίζες της εξίσωσης του Lundberg, μας βοηθούν στο να αναγνωρίσουμε άγνωστες ποσότητες ώστε τελικώς να αντιστρέψουμε την $m_{\delta,12}(u)$ και να πάρουμε λύσεις υπό προϋποθέσεις για τις πυκνότητες $p(y), k(t)$.
- Παρουσιάσαμε δυο εφαρμογές μια στην περίπτωση που έχουμε το κλασικό μοντέλο Poisson, δηλαδή, την περίπτωση όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι κατανέμονται εκθετικά και τα ύψη των απαιτήσεων έχουν οποιαδήποτε κατανομή, καθώς και την περίπτωση όπου τα ύψη των απαιτήσεων κατανέμονται εκθετικά, ενώ οι ενδιάμεσοι χρόνοι έχουν οποιαδήποτε κατανομή.

Στο τρίτο κεφάλαιο:

- Παρουσιάσαμε το ανανεωτικό μοντέλο με υστέρηση στο οποίο ουσιαστικά, έχουμε ότι η κατανομή του ενδιάμεσου χρόνου της πρώτης απαίτησης πιθανώς να έχει μια διαφορετική κατανομή, από την κατανομή που έχουν οι μεταγενέστεροι ενδιάμεσοι χρόνοι.
- Καταλήξαμε στην σύνδεση της συνάρτησης $m_{\delta,12}(u)$ και $m^{d}_{\delta,12}(u)$, δηλαδή της κλασικής συνάρτησης Gerber – Shiu και της συνάρτησης Gerber – Shiu σε μοντέλο με υστέρηση, υπό συγκεκριμένες υποθέσεις με χρήση διαφορικών συναρτήσεων και μετασχηματισμών Laplace.

Στο τέταρτο κεφάλαιο:

- Παρουσιάσαμε την γενικευμένη συνάρτηση Gerber – Shiu όπου συμπεριλάβαμε δυο επιπλέον τυχαίες μεταβλητές στη συνάρτηση ποινής: το ελάχιστο επίπεδο πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία X_T και το πλεόνασμα αμέσως μετά την προτελευταία απαίτηση πριν τη χρεοκοπία R_{N_T-1} στο μοντέλο της κλασικής ανέλιξης του πλεονάσματος με εξάρτηση. Με την προσθήκη αυτή μπορούμε να αποκτήσουμε πληροφορίες για τον τελευταίο ενδιάμεσο χρόνο καθώς και το τελευταίο κλιμακωτό ύψος, που δεν θα μπορούσαν να μελετηθούν με την κλασική συνάρτηση Gerber – Shiu.

- Όπως και στο δεύτερο κεφάλαιο μελετήσαμε την από κοινού ελλειμματική πυκνότητα των $\left(T, U_{T-}, |U_T|, R_{N_T-1}\right)$, την οποία ορίσαμε διαφορετικά για την περίπτωση όπου η χρεοκοπία συμβαίνει με την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης, ή με την εμφάνιση μεταγενέστερων της πρώτης απαίτησης. Είδαμε επίσης και στην περίπτωση της γενικευμένης συνάρτησης, προεξοφλημένες πυκνότητες. Παρόλο που πλέον είχαμε μια συνάρτηση ποινής τεσσάρων τυχαίων μεταβλητών, μπορέσαμε να δείξουμε πως η $m_\delta(u)$ ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, η οποία εξαρτάται μόνο από τις $U_{T-}, |U_T|, R_{N_T-1}$ και όχι από την X_T. Ακόμη, είδαμε πως αναλόγως με την επιλογή που κάνουμε στη συνάρτηση ποινής η συνάρτηση Gerber – Shiu απλοποιείται αντίστοιχα.
- Χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα της μοναδικότητας των μετασχηματισμών Laplace και την γενική λύση της $m_\delta(u)$, για να αναγνωρίσουμε την από κοινού ελλειμματική προεξοφλημένη πυκνότητα των $\left(T, U_{T-}, |U_T|, X_T, R_{N_T-1}\right)$ και $(T, U_{T-}, |U_T|, X_T)$.
- Είδαμε πως όπως και στο δεύτερο κεφάλαιο μπορούμε να πάρουμε πληροφορία για την δομή της συνάρτησης Gerber – Shiu, δεσμεύοντας ως προς τον χρόνο και το ύψος της πρώτης απαίτησης, ωστόσο δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πληροφορία αυτή για να συνδέσουμε την συνάρτηση μας με τις πυκνότητες του ύψους των απαιτήσεων και των ενδιάμεσων χρόνων, καθώς εμπλέκεται και η τυχαία μεταβλητή X_T στη συνάρτηση ποινής και δεν είναι εύκολο να εφαρμοστεί η παραπάνω προσέγγιση. Για τον λόγο αυτό, εκφράσαμε την συνάρτηση $m_\delta(u)$ συναρτήσει της από κοινού ελλειμματικής προεξοφλημένης πυκνότητας των $\left(T, U_{T-}, |U_T|, R_{N_T-1}\right)$ δοθέντος ότι το $u = 0$, που μετατρέπει τη συνάρτηση μας

σε ανεξάρτητη της X_T και έπειτα μπορούμε να ακολουθήσουμε την παραπάνω προσέγγιση. Όπως και στο δεύτερο κεφάλαιο, με χρήση των λύσεων της εξίσωσης του Lundberg, και τελικώς αναγνωρίσαμε άγνωστες ποσότητες αντιστρέφοντας την συνάρτηση $m_\delta(u)$ και υπό συγκεκριμένες υποθέσεις για τις $p(y), k(t)$.

- Εφαρμόσαμε όπως και στο δεύτερο κεφάλαιο συγκεκριμένες κατανομές, στην πρώτη περίπτωση για τους ενδιάμεσους χρόνους και στη δεύτερη για τα ύψη των απαιτήσεων, καθώς επίσης υποθέσαμε πως υπάρχει ανεξαρτησία στο μοντέλο μας και μπορέσαμε να ορίσουμε την από κοινού ελλειμματική προεξοφλημένη πυκνότητα των $\left(T, U_{T-}, |U_T|, R_{N_T-1}\right)$ και την από κοινού ελλειμματική πυκνότητα του τελευταίου κλιμακωτού ύψους πριν τη χρεοκοπία καθώς και της απαίτησης που προκαλεί χρεοκοπία. Ακόμη, με χρήση κατάλληλης συνάρτησης ποινής, και την υπόθεση ότι τα ύψη των απαιτήσεων κατανέμονται εκθετικά, καταλήξαμε πως η $m_\delta(u)$ μετατρέπεται στον μετασχηματισμό Laplace της από κοινού ελλειμματικής προεξοφλημένης πυκνότητας των $\left(T, U_{T-}, |U_T|, X_T, R_{N_T-1}\right)$. Χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα αυτή ώστε να υπολογίσουμε την πυκνότητα του τελευταίου ενδιάμεσου χρόνου καθώς επίσης και την από κοινού ελλειμματική προεξοφλημένη πυκνότητα των $(U_{T-}, |U_T|)$.

Αριθμητική Εφαρμογή

Σε αυτή την ενότητα θα κάνουμε μια αριθμητική εφαρμογή, κάνοντας κάποιες επιλογές παραμέτρων στην συνάρτηση Gerber – Shiu, ώστε να μελετήσουμε κάποιο αποτέλεσμα.

Παρακάτω θα παραθέσουμε την επιλογή των παραμέτρων που θα κάνουμε από ένα πλήθος παραμέτρων που είδαμε στην αρχή του δεύτερου κεφαλαίου της παρούσας.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ		
$\omega_{12}(x,y)$	δ	$m_{\delta,12}(u)$
$\mathrm{I}(X \leq x)$	0	$\mathrm{E}[I(U_{T-} \leq x)\, I(T < \infty)\, \lvert U_0 = u]$, συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία

Επιλέγοντας ως συνάρτηση ποινής την $\omega_{12}(x,y) = \mathrm{I}(X \leq x)$ και θέτοντας την ένταση ανατοκισμού ίση με μηδέν, η συνάρτηση Gerber – Shiu γίνεται:

$$m_{\delta,12}(u) = \mathrm{E}[I(U_{T-} \leq x)\, I(T < \infty)\, |U_0 = u]$$

Η τελευταία είναι η συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία.

Θα θεωρήσουμε την ανέλιξη του πλεονάσματος κάνοντας αρχικά κάποιες υποθέσεις για την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων καθώς και για την κατανομή του ύψους των απαιτήσεων. Έπειτα, αφού θα έχουμε καταλήξει σε μια έκφραση για την συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρεοκοπία, κάνοντας διάφορες επιλογές για κάποιες από τις παραμέτρους που απαιτούνται, θα παραθέσουμε μια σειρά από διάφορες μορφές της συνάρτησης κατανομής καθώς και τους αντίστοιχους πίνακες με τις πιθανότητες για κάποιες τιμές.

Έστω λοιπόν η ανέλιξη του πλεονάσματος:

$$U(t) = u + ct + S(t)$$

όπου:

- u το αρχικό αποθεματικό

- c το ασφάλιστρο που εισπράττει η εταιρεία
- $S(t)$ η σύνθετη ανέλιξη για τις συνολικές απαιτήσεις του χαρτοφυλακίου στο διάστημα $[0, t]$

Η ανέλιξη των συνολικών απαιτήσεων θεωρούμε πως είναι μια σύνθετη Poisson με παράμετρο λ. Επομένως, η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων θα είναι η εκθετική με παράμετρο επίσης λ.

Η κατανομή του ύψους των απαιτήσεων θα θεωρήσουμε πως είναι η εκθετική με παράμετρο β.

Επομένως, η συνάρτηση κατανομής του ύψους των απαιτήσεων θα είναι:

$$P(x) = 1 - e^{-\beta x}, \quad \beta > 0, x > 0, \qquad P(0) = 0$$

Η συνάρτηση πυκνότητας θα είναι $p(x)$ και τη μέση τιμή θα τη συμβολίσουμε με μ_1.

Από τα παραπάνω είναι προφανές πως αναφερόμαστε στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, με την επιπλέον υπόθεση της κατανομής του ύψους των απαιτήσεων, η οποία είναι η εκθετική.

Ωστόσο θα αναφέρουμε μια ακόμη υπόθεση που κάνουμε συνήθως στο κλασικό μοντέλο η οποία είναι ότι:

$$c > \lambda \, \mu_1$$

Επίσης να αναφέρουμε πως, αν ισχύει η παραπάνω σχέση:

- Η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u) < 1$ για κάθε $u \geq 0$, διαφορετικά $\psi(u) = 1$.

Ακόμη, υποθέτουμε πως το περιθώριο ασφαλείας θ, είναι:

$$\theta = \frac{c}{\lambda \mu_1} - 1$$

Όποτε, οι παράμετροι που θα δίνουμε διάφορες τιμές για να δούμε πως αλλάζει η συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρεοκοπία είναι:

1. Η παράμετρος $\boldsymbol{\lambda}$ της κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων
2. Η παράμετρος $\boldsymbol{\beta}$ της κατανομής του ύψους των απαιτήσεων
3. Η παράμετρος $\boldsymbol{\theta}$ του περιθωρίου ασφαλείας
4. Η παράμετρος $\boldsymbol{u}$ του αρχικού αποθέματος

Γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση των εκθετικά κατανεμημένων απαιτήσεων η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση :

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-Ru}$$

Επίσης, από τη συνθήκη του περιθωρίου ασφαλείας αν κάνουμε πράξεις, έχουμε ότι:

$$1+\theta = \frac{\lambda}{c\beta}$$

Στην περίπτωση των εκθετικά κατανεμημένων απαιτήσεων γνωρίζουμε επίσης ότι ο συντελεστής προσαρμογής R δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{R} = \beta - \frac{\lambda}{\mathrm{c}}$$

Επομένως, η πιθανότητα χρεοκοπίας γράφεται :

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c\beta} e^{-\left(\beta - \frac{\lambda}{\mathrm{c}}\right)u}$$

Όπου αν θέσουμε την ποσότητα $\frac{\lambda}{\mathrm{c}} = \alpha$ τότε παίρνουμε:

$$\psi(u) = \frac{\alpha}{\beta} e^{-(\beta - \alpha)u}$$

Παρακάτω θα δούμε κάποιες σχέσεις οι οποίες θα μας βοηθήσουν να υλοποιήσουμε την εφαρμογή αυτή. Η συνάρτηση $\mathrm{G}(u,x)$ θα δηλώνει την πιθανότητα να συμβεί η χρεοκοπία με αρχικό απόθεμα u και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι μικρότερο από x. Η συνάρτηση $F(u,x)$ θα δηλώνει την πιθανότητα να συμβεί η χρεοκοπία με αρχικό απόθεμα u και το πλεόνασμα αμέσως πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι μικρότερο από x. Η συνάρτηση αυτή για $x \to \infty$ ισούται με $\psi(u)$. [Dickson (1992)]

Τότε, με βάση τις παραδοχές που έχουμε κάνει θα έχουμε:

$$G(u,x) = \psi(u)\left(1 - e^{-\beta x}\right)$$

και

$$F(u,x)=\begin{cases}\left(1+\frac{\alpha}{R}e^{-\beta x}\right)\frac{\alpha}{\beta}e^{-Ru}-\frac{\alpha}{R}e^{-\beta x} & x>u\\ \frac{\alpha}{\beta}e^{-Ru}\left(1+\frac{\alpha}{R}e^{-\beta x}-\frac{\beta}{R}e^{-\alpha x}\right) & x\le u\end{cases}$$

Αν παραγωγίσουμε την παραπάνω σχέση θα πάρουμε:

$$\mathrm{f}(u,x)=\begin{cases}\left(\frac{\alpha}{R}e^{-\beta x}\right)(\beta-\alpha e^{-Ru}) & x>u\\ \frac{\alpha^2}{\beta}e^{-Ru}\left(e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}\right) & x<u\end{cases}$$

Η απόδειξη των παραπάνω σχέσεων παραλείπεται καθώς δεν αποτελεί αντικείμενο μελέτης της παρούσας.

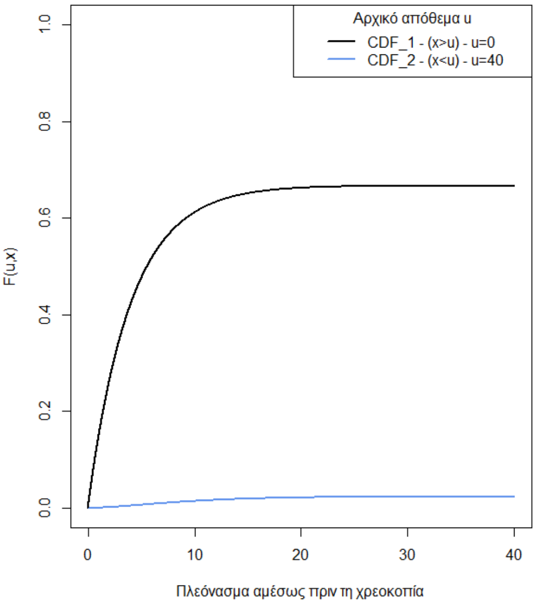
Ωστόσο, όπως έχουμε αναφέρει νωρίτερα, η πυκνότητα του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρεοκοπία, δεδομένου ότι συμβαίνει χρεοκοπία, αποτελεί ελλειμματική πυκνότητα. Επομένως, ολοκληρώνοντας τη θα μας δώσει την πιθανότητα χρεοκοπίας,

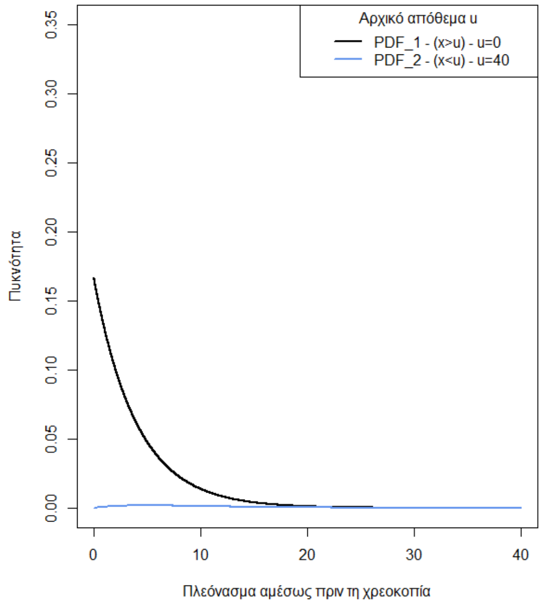
Στην πρώτη περίπτωση θα επιλέξουμε ως παραμέτρους τις παρακάτω:

- $\lambda = 1$
- $\beta = 0.25$
- $\theta = 0.5$

Υπολογίζονται από τα παραπάνω οι εξής παράμετροι:

- $c = 6$
- $\alpha = 0.1666666666667$
- $\mu_1 = 4$
- $R = 0.0833333333333$





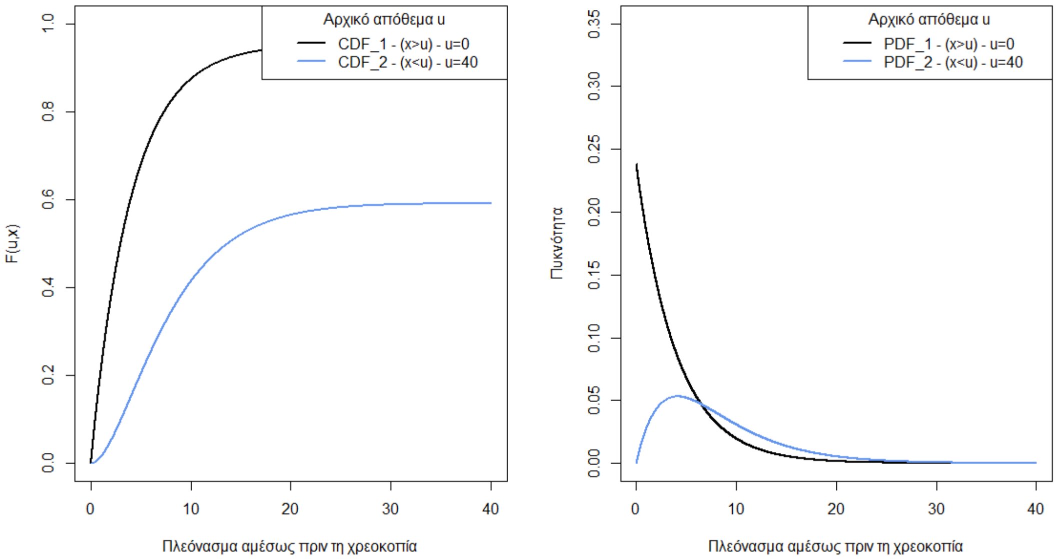
Από τα παραπάνω γραφήματα μπορούμε να δούμε πως στην περίπτωση που το αρχικό απόθεμα είναι μηδενικό, μπορούμε να έχουμε ένα πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία με αρκετά μεγάλη πιθανότητα η οποία όσο αυξάνουμε το πλεόνασμα μειώνεται.

Στην δεύτερη περίπτωση θα επιλέξουμε ως παραμέτρους τις παρακάτω:

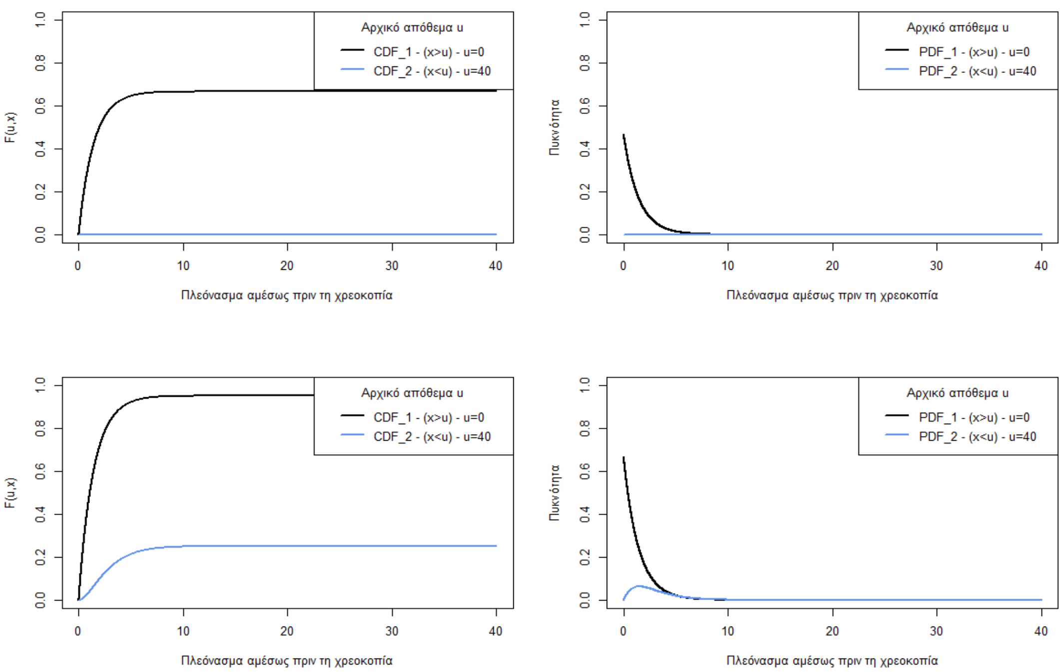
- $\lambda = 1$
- $\beta = 0.25$
- $\theta = 0.05$

Υπολογίζονται από τα παραπάνω οι εξής παράμετροι:

- $c = 4.2$
- $\alpha = 0.2380952380952$
- $\mu_1 = 4$
- $R = 0.0119047619047$



Σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση βλέπουμε πως αφού υπο – δεκαπλασιάσαμε το περιθώριο ασφαλείας η συνάρτηση κατανομής παρουσιάζει περισσότερη ομοιότητα ανεξάρτητα με το ποσο είναι το αρχικό απόθεμα, ενώ η συνάρτηση πυκνότητας βλέπουμε ότι παρουσιάζει αρκετά μεγαλύτερη μάζα στις μικρές τιμές του πλεονάσματος σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση.



Στην τελευταία περίπτωση, αλλάξαμε την παράμετρο $\lambda = 0.7$ αντι 0.25 που ήταν και στις δυο ανωτέρω περιπτώσεις, ενώ εφαρμόσαμε τις υπόλοιπες τιμές των παράμετρων της πρώτης περίπτωσης στο ζεύγος της πρώτης γραμμής, ενώ τις τιμές των παραμέτρων της δεύτερης περίπτωσης στο ζεύγος της πρώτης γραμμής. Μπορούμε να παρατηρήσουμε πως η παράμετρος του ύψους των αποζημιώσεων επηρεάζει πολύ τη συμπεριφορά της κατανομής του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρεοκοπία όταν το αποθεματικό είναι μεγαλύτερο.

Τα παραπάνω παραδείγματα υλοποιήθηκαν με το πρόγραμμα R και ο κώδικας είναι ο παρακάτω:

```
### START ###

library("data.table")

lambda=1

beta=0.25

theta=0.5

m1=1/beta

c=(1+theta)*lambda*m1

alpha=lambda/c

R=beta-alpha

c>(lambda/beta)

x <- seq(0.0000000000001, 39.999999999999, by=0.0001)

u1=0

PDF_1=(alpha/R)*(exp(-beta*x))*(beta-alpha*exp(-R*u1))        ### x>u ###

u2=40

PDF_2=((alpha^2)/R)*(exp(-R*u2))*(exp(-alpha*x)-exp(-beta*x))   ### x<u ###

results_1 <- as.data.table(cbind(PDF_1,PDF_2))

cols <- c("black", "cornflowerblue")

matplot(x, results_1, col=cols, type="l", lty=1, lwd=2, xlab="Πλεόνασμα αμέσως πριν τη χρεοκοπία",
ylab="Πυκνότητα",ylim = c(0,0.35))

legend("topright", legend=c("PDF_1 - (x>u) - u=0","PDF_2 - (x<u) - u=40"), title="Αρχικό απόθεμα u", lwd=2,
col=cols)

x <- seq(0.0000000000001, 39.999999999999, by=0.0001)
```

```
u1=0

CDF_1=(1+(alpha/R)*exp(-beta*x))*(alpha/beta)*(exp(-R*u1))-(alpha/R)*(exp(-beta*x))      ### x>u ###

u2=40

CDF_2=((alpha/beta)*(exp(-R*u2)))*(1+(alpha/R)*(exp(-beta*x))-(beta/R)*(exp(-alpha*x)))  ### x<u ###

results <- as.data.table(cbind(CDF_1,CDF_2))

cols <- c("black", "cornflowerblue")

matplot(x, results, col=cols, type="l", lty=1, lwd=2, xlab="Πλεόνασμα αμέσως πριν τη χρεοκοπία",
ylab="Πυκνότητα",ylim = c(0,1))

legend("topright", legend=c("CDF_1 - (x>u) - u=0","CDF_2 - (x<u) - u=40"), title="Αρχικό απόθεμα u", lwd=2,
col=cols)

### END ###
```

Βιβλιογραφία

- Γ. Ψαρράκος (2018) – Θεωρία Χρεοκοπίας, Σημειώσεις Παραδόσεων, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς
- Ε. Χατζηκωνσταντινίδης (2016) – Αναλογιστικά Μαθηματικά, Σημειώσεις Παραδόσεων, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς
- Κ. Πολίτης (2012) – Εισαγωγή στη θεωρία συλλογικού κινδύνου, Εκδόσεις Σταμούλης
- [Cheung et al. (2010a)] Cheung, E.C.K., Landriault D., Willmot, G.E., and Woo, J.K., 2010a. Structural properties of Gerber-Shiu functions in dependent Sparre Andersen models, Insurance: Mathematics and Economics
- [Cheung et al. (2010b)] Cheung, E.C.K., Landriault D., Willmot, G.E., and Woo, J.K., 2010b. Gerber-Shiu analysis with a generalized penalty function, Scandinavian Actuarial Journal
- [Dickson and Willmot (2005)] Dickson, D.C.M., Willmot, G.E., 2005. The density of the time to ruin in the classical Poisson model, ASTIN Bulletin International Actuarial Association
- [Dickson (1992)] Dickson, D.C.M., On the distribution of the surplus prior to ruin, Insurance: Mathematics and Economics
- [Gerber and Shiu (1998)] Gerber, H., Shiu, E.S.W., 1998. On the time value of ruin, North American Actuarial Journal
- [Willmot, G.E. (2004b)] Willmot, G.E., 2004b. A note on a class of delayed renewal risk processes, Insurance: Mathematics and Economics
- [Willmot, G.E. (2007)] Willmot, G.E., 2007. On the discounted penalty function in the renewal risk model with general interclaim times, Insurance: Mathematics and Economics
- [Willmot and Woo (2011)] Willmot, G.E., Woo, J.K., 2011. On the analysis of a general class of dependent risk processes, In Press.