ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Στοχαστικά Μοντέλα Συνεχούς Χρόνου για την Αποτίμηση Αξιογράφων που ενέχουν Πιστωτικό Κίνδυνο

Παπαϊωάννου Γεώργιος

Μ.Α.Ε 19006

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου*

Πειραιάς,

Σεπτέμβριος 2022

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη συνέλευση του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ΄αριθμ…… συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αναπληρωτής Καθηγητής, Μπούτσικας Μιχαήλ (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής, Πολίτης Κωνσταντίνος
- Καθηγητής, Κούτρας Μάρκος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS & INSURANCE SCIENCE
POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE & RISK MANAGEMENT

CONTINUOUS TIME STOCHASTIC MODELS FOR DEFAULTABLE SECURITIES

Papaioannou Georgios

M.A.E 19006

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

Piraeus, Greece

September 2022

Στην οικογένειά μου
και στον παππού Χαρίλαο

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της μεταπτυχιακής μου εργασίας κ. Μιχαήλ Μπούτσικα τόσο για την στήριξη και την συνεχή βοήθειά του όσο και για την συμπαράσταση και την πολύτιμη καθοδήγηση του καθ' όλη την διάρκεια της παρούσας εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής κ. Κωνσταντίνο Πολίτη και τον κ. Μάρκο Κούτρα για την προσοχή που υπέδειξαν καθώς και τις ουσιαστικές τους παρατηρήσεις.

Δεν θα μπορούσα να παραλείψω τις ευχαριστίες μου στο σύνολο των καθηγητών του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη & Διοικητική Κινδύνου για τις γνώσεις που μου προσέφεραν.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την ηθική στήριξη και συμπαράσταση σε όλη την διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα πραγματοποιηθεί μια επισκόπηση των κυριότερων μεθόδων αποτίμησης αξιογράφων που ενέχουν πιστωτικό κίνδυνο όπως π.χ ομόλογα οντοτήτων που ενέχουν κίνδυνο αθέτησης, δηλαδή υφίσταται ενδεχόμενο αδυναμίας εκπλήρωσης των δανειακών τους υποχρεώσεων. Γενικά τα μοντέλα πιστωτικού κινδύνου κατατάσσονται σε δύο κύριες κατηγορίες : Στα Δομικά Μοντέλα (Structural Models) καθώς και στα Μοντέλα Μειωμένης Μορφής (Reduced Form Models ή Hazard Rate Models). Στην εργασία αυτή θα χρησιμοποιηθούν κυρίως τα Μοντέλα Μειωμένης Μορφής και θα παρουσιαστούν επίσης διαδικασίες αντιστάθμισης του πιστωτικού κινδύνου μέσω κατάλληλων πιστωτικών παραγώγων. Τέλος θα παρουσιαστεί ένα αριθμητικό παράδειγμα εκτίμησης της πιθανότητας αθέτησης υποχρεώσεων διαφόρων μεγάλων εταιρειών χρησιμοποιώντας κατάλληλο λογισμικό (Python) και δεδομένα από την αγορά.

Abstract

In this MSc thesis, we first present an overview of the main methods of evaluating securities that involve credit risk, such as bonds of entities that involve a risk of default, i.e. there exists possibility of inability to fulfil their loan obligations. In general, credit risk models are classified into two main categories: Structural Models and Reduced Form Models or Hazard Rate Models. In this thesis Reduced Form Models will mainly be used and credit risk hedging procedures through appropriate credit derivatives will also be presented. Finally, a numerical example of estimating the probability of default of various large firms will be presented using the computational software Python® and market data.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Πινάκων

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η κατανόηση της τιμολόγησης του κινδύνου αθέτησης ή του πιστωτικού κινδύνου είναι μείζονος σημασίας, καθώς κάθε χρηματοοικονομικός τίτλος επηρεάζεται από συγκεκριμένα είδη πιστωτικού κινδύνου. Τις τελευταίες δεκαετίες ο χρηματοπιστωτικός κλάδος έχει έρθει αντιμέτωπος με μία ολοένα και αυξανόμενη πίεση να κατανοήσει και να ποσοτικοποιήσει αυτό το είδος κινδύνου, λόγω της ανάπτυξης των χρηματοοικονομικών αγορών που εμπορεύονται προϊόντα ευαίσθητα στον πιστωτικό κίνδυνο, λόγω του αυξανόμενου ελέγχου από τις ρυθμιστικές αρχές αλλά και φυσικά λόγω των παγκόσμιων οικονομικών κρίσεων που έχουν λάβει χώρα. Ως αποτέλεσμα η ακαδημαϊκή βιβλιογραφία σχετικά με την μοντελοποίηση του πιστωτικού κινδύνου έχει αναπτυχθεί ραγδαία. Επί του παρόντος, υπάρχουν δύο κύριες προσεγγίσεις για την μοντελοποίηση του πιστωτικού κινδύνου. Η πρώτη ονομάζεται Δομική προσέγγιση, και αναπτύχθηκε πρώτη φορά από τον Merton (1974). Τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται σε αυτή την προσέγγιση βασίζονται στην αξία της επιχείρησης. Σε αυτά η αθέτηση πληρωμών θεωρείται ως μια ενδογενής απόφαση που συνήθως λαμβάνεται από τους μετόχους της εταιρείας. Η δεύτερη προσέγγιση ονομάζεται προσέγγιση Μειωμένης Μορφής. Θεωρεί την χρεοκοπία τόσο ως ένα τυχαίο όσο και ως ένα εξωγενές γεγονός. Αυτή η προσέγγιση βασίζεται σε στοχαστικές διαδικασίες παρόμοιες με εκείνες που χρησιμοποιούνται στη μοντελοποίηση της δομής των άνευ κινδύνου επιτοκίων για να μοντελοποιήσουν την πιθανότητα αθέτησης (βλ. π.χ Madan & Unal (1994) και Duffie & Singleton (1999)). Τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται σε αυτήν την προσέγγιση έχουν αποδειχθεί σχετικά ευκολότερα στη χρήση για πρακτικές εφαρμογές.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα παρουσιασθούν και οι δύο προσεγγίσεις για την μοντελοποίηση του κινδύνου αθέτησης πληρωμών αλλά θα δοθεί έμφαση στα Μοντέλα Μειωμένης Μορφής. Πιο συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο1, γίνεται μια εισαγωγή στην Στοχαστική Ανάλυση και σε κάποιους βασικούς όρους της Χρηματοοικονομικής Θεωρίας. Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται αναφορά στα Στοχαστικά Επιτόκια και παρουσιάζονται δύο υποδείγματα, αυτό του Vasicek καθώς και το υπόδειγμα Ho-Lee. Στη συνέχεια, στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται και αναλύονται τα Μοντέλα Πιστωτικού Κινδύνου. Στο Κεφάλαιο 4, θα παρουσιασθεί μία εφαρμογή των αποτελεσμάτων του Κεφαλαίου 3. Πιο συγκεκριμένα αφού πρώτα εισαχθούν οι έννοιες των Προθεσμιακών Επιτοκίων και του LIBOR και έχοντας συλλέξει από την αγορά τις τιμές των πιστωτικών περιθωρίων (Credit Spreads) για 11 διαφορετικές εταιρείες σε 2 διαφορετικά έτη, το 2015 και 2020, υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις θα προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε εμμέσως (μέσω βαθμονόμησης) την πιθανότητα αθέτησης πληρωμών των παραπάνω επιχειρήσεων για διάφορες χρονικές περιόδους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Αρχικά θα ορίσουμε κάποιες βασικές έννοιες οι οποίες είναι απαραίτητες για την κατανόηση πιο σύνθετων εννοιών.

1.1 Στοχαστικές Ανελίξεις, Βασικά στοιχεία Στοχαστικών Ανελίξεων

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.1: Στοχαστική ανέλιξη ή στοχαστική διαδικασία ονομάζουμε μια συλλογή από τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας οι οποίες είναι, γενικά, εξαρτημένες μεταξύ τους. Συμβολικά $X = (X_t\,, t \geq 0)$.

Ανάλογα με την φύση του χρόνου και το είδος τιμών που παίρνουν διακρίνονται σε

- Διαδικασίες διακριτού ή συνεχούς χρόνου,
- Διαδικασίες διακριτού ή συνεχούς πεδίου τιμών.

(βλέπε π.χ. Medhi J. (2012)). Ανάλογα με τις ιδιότητες που τις χαρακτηρίζουν διακρίνονται σε:

Μαρκοβιανές ανελίξεις, στοιχηματικές ανελίξεις (Martingales), απαριθμήτριες ανελίξεις, ανανεωτικές ανελίξεις, τυχαίος περίπατος, ανελίξεις Levy, ανελίξεις Itô, ανελίξεις Poisson, κλπ.

Για να εκφράσουμε τον χρόνο χρησιμοποιούμε κατάλληλο (ολικά διατεταγμένο) σύνολο, έστω T. Συνήθως $T = \{0,1,2,3, \ldots, k\}, \mathbb{N}, \mathbb{R}^+, \mathbb{Z}$ κ.ο.κ.

Οι στοχαστικές ανελίξεις χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την χρονική εξέλιξη ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού, έστω X, το οποίο παίρνει τιμές σε ένα σύνολο, έστω S, (π.χ. $\mathbb{R}$) το οποίο σχετίζεται με ένα στοχαστικό φαινόμενο (π.χ. η τιμή ενός αξιογράφου στη διάρκεια του χρόνου).

- Ως Ω ορίζουμε το σύνολο των δυνατών εξελίξεων (σεναρίων) σε όλο το T του στοχαστικού φαινομένου που μας ενδιαφέρει.

- Ως $\mathcal{F}$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των δυνατών ενδεχομένων του Ω**.** Το $\mathcal{F}$ είναι μια σ-άλγεβρα (υποσυνόλων του Ω).

- Σε κάθε ενδεχόμενο $A \in \mathcal{F}$ αντιστοιχεί μία πιθανότητα $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$ (σύμφωνα με τα αξιώματα Kolmogorov) που εκφράζει πόσο πιθανό είναι να πραγματοποιηθεί κάθε εξέλιξη (σενάριο) ή σύνολο σεναρίων.

- Σε κάθε δυνατή εξέλιξη (σενάριο) ω ∈ Ω αντιστοιχίζουμε μία συνάρτηση του χρόνου t : $\omega \rightarrow X(\omega) = (X_t(\omega), t \in T)$ που εκφράζει την ανέλιξη (εκτύλιξη) της τιμής του ποσοτικού χαρακτηριστικού που μας ενδιαφέρει σε όλο το χρονικό διάστημα T.

- Η συνάρτηση $(X_t(\omega), t \in T)$ ονομάζεται διαδρομή ή τροχιά της στοχαστικής ανέλιξης που αντιστοιχεί στο σενάριο ω.

- Η X είναι μια απεικόνιση από το σύνολο Ω στο χώρο των συναρτήσεων (με πεδίο ορισμού T και σύνολο τιμών S) και συνεπώς είναι μια τυχαία συνάρτηση.

- Η απεικόνιση X θα ονομάζεται στοχαστική ανέλιξη ή στοχαστική διαδικασία**.**

- Αν θεωρήσουμε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, $t \in T$, η X_t είναι μια απεικόνιση από το Ω στο S ($\omega \rightarrow X_t(\omega)$) δηλαδή είναι μια τυχαία μεταβλητή που εκφράζει την τιμή του χαρακτηριστικού που μελετάμε (π.χ. τιμή μιας μετοχής) στο χρόνο t.

- Ισοδύναμα, μια στοχαστική ανέλιξη μπορεί απλά να γραφεί ως $X = (X_t, t \in T)$, θεωρώντας ότι είναι μια συλλογή από τυχαίες μεταβλητές (γενικά εξαρτημένες μεταξύ τους) οι οποίες εκφράζουν την τιμή του χαρακτηριστικού που μας ενδιαφέρει σε κάθε χρονική στιγμή $t \in T$.

Μια άλλη βασική έννοια στην Στοχαστική Ανάλυση είναι η έννοια της μελλοντικής πληροφορίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.2 : *Μελλοντική πληροφορία* ονομάζεται το σύνολο $\sigma(X_i, i \in I)$ που περιέχει όλα τα ενδεχόμενα της μορφής $[X_i \in B_i], i \in I$, καθώς και όλες τις τομές, τις ενώσεις και τα συμπληρώματά τους. (Υπενθυμίζεται ότι $[X \in B] = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$).

Αυστηρά το $\sigma(X_i, i \in I)$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα δυνατά ενδεχόμενα που αφορούν τις τυχαίες μεταβλητές $X_i, i \in I$ που μελετάμε. Δηλαδή η $\sigma(X_i, i \in I)$ είναι η πληροφορία που θα έχουμε όταν θα γνωρίζουμε τις τιμές των $X_i, i \in I$. Γενικά ως πληροφορία *D* θεωρείται οποιαδήποτε σ-άλγεβρα. Υπενθυμίζεται ότι σ-άλγεβρα $\mathcal{D}$ ενός συνόλου Ω ονομάζεται μια κλάση υποσυνόλων του Ω με τις εξής ιδιότητες (για περισσότερες πληροφορίες βλέπε π.χ. Α. Ν. Γιαννακόπουλος (2003)):

1) $\Omega \in \mathcal{D}$, 2) Αν $A \in \mathcal{D} \implies A^c \in \mathcal{D}$, 3) Αν $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{D} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.3 : *Μετρησιμότητα* : Έστω $\mathcal{D}$ μια σ-άλγεβρα. Μια τυχαία μεταβλητή X θα ονομάζεται $\mathcal{D}$ -μετρήσιμη όταν όλα τα ενδεχόμενα της μορφής $[X \in B]$ ανήκουν στην $\mathcal{D}$. Εναλλακτικά θα λέμε ότι η τιμή της X περιέχεται στην πληροφορία *D*.

Αν μια τυχαία μεταβλητή Y είναι $\mathcal{D} = \sigma(X_i,\ i \in I)$-μετρήσιμη τότε στην περίπτωση που οι τιμές των τυχαίων μεταβλητών $X_i, i \in I$ είναι γνωστές τότε θα είναι γνωστή και η τιμή της Y, δηλαδή $Y = f(X_i, i \in I)$ για κάποια κατάλληλη συνάρτηση f.

Δηλαδή μια τυχαία μεταβλητή X ονομάζεται $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη εάν η γνώση της τιμής της X εξαρτάται μόνο από την πληροφορία που θα έχουμε μέχρι και τον χρόνο t. Παραδείγματος χάριν, αν t = σήμερα τότε :

- η ημερομηνία του επόμενου τυφώνα στην Αμερική δεν είναι $\mathcal{F}_t$ - μετρήσιμη γιατί δεν είναι γνωστή στο χρόνο t (σήμερα).
- η ημερομηνία έναρξης των πανελληνίων εξετάσεων του προηγούμενου έτους είναι $\mathcal{F}_t$ -μετρήσιμη γιατί αφορά ένα παρελθοντικό γεγονός (οπότε είναι γνωστό σήμερα).
- η ημερομηνία λήξης T ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος προαίρεσης (option) είναι $\mathcal{F}_t$ -μετρήσιμη για κάθε $t \in \mathbb{R}^+$ διότι έχει προκαθοριστεί από την χρονική στιγμή $t = 0$.

- η ημερομηνία εξάσκησης ενός Αμερικάνικου δικαιώματος προαίρεσης δεν είναι $\mathcal{F}_t$ - μετρήσιμη γιατί αφορά ένα τυχαίο γεγονός που θα συμβεί στο μέλλον.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η τιμή της τυχαίας μεταβλητής X_t, μπορεί να εξαρτάται και από «γνωστά» μελλοντικά δεδομένα, π.χ. από μια προκαθορισμένη μελλοντική χρονική στιγμή (όπως ο χρόνος ωρίμανσης ενός ομολόγου $T > t$), αρκεί η τιμή της να είναι γνωστή στο χρόνο t.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.4 : *Διήθηση ή φιλτράρισμα* ονομάζεται μια οικογένεια σ-αλγεβρών (πληροφοριών) $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ με την ιδιότητα ότι $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_s, \ \forall\, k \leq s$.

Συνήθως η $\mathcal{F}_t$ θα είναι η πληροφορία που θα έχουμε σε κάποια μελλοντική χρονική στιγμή t, οπότε αν $t_1 \leq t_2$τότε $F_{t_1} \subseteq F_{t_2}$. Με άλλα λόγια η πληροφορία που αποκτάμε (π.χ. για τις τιμές των μετοχών στην αγορά) μεγαλώνει με την πάροδο του χρόνου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.5 : Μια στοχαστική ανέλιξη $X = (X_t, t \geq 0)$ θα ονομάζεται προσαρμοσμένη σε μια διήθηση $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ αν ισχύει ότι η τυχαία μεταβλητή X_t είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη, $\forall\, t \geq 0$.

Η τυχαία μεταβλητή X_i είναι $\mathcal{F}_i$-μετρήσιμη εάν η τιμή της είναι γνωστή δοθείσης της πληροφορίας $\mathcal{F}_i$, δηλαδή αν η τιμή της είναι γνωστή την χρονική στιγμή t_i.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.6 : Χρόνος διακοπής (stopping time) αναφορικά σε μια διήθηση $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή τ, $\tau : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ για την οποία ισχύει : $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, για κάθε $t \geq 0$ (βλέπε π.χ. Jean-François Le Gall (2013)).

Η σχετιζόμενη με τον χρόνο διακοπής σ-άλγεβρα ορίζεται ως εξής :

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}, \text{για κάθε } t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

και εκφράζει την πληροφορία που είναι διαθέσιμη μέχρι τον τυχαίο χρόνο τ.

Ο παραπάνω ορισμός εννοεί ότι η γνώση του γεγονότος $\{\tau \leq t\}$ εξαρτάται μόνο από την πληροφορία $\mathcal{F}_\tau$ που θα έχουμε μέχρι τον χρόνο t, δηλαδή από την γνώση της πραγματοποίησης της στοχαστικής ανέλιξης $(X_s, 0 \leq s \leq t)$.

Με άλλα λόγια ένα γεγονός συμβαίνει σε χρόνο διακοπής τ εάν σε κάθε χρονική στιγμή t γνωρίζουμε εάν το γεγονός έχει ήδη πραγματοποιηθεί $(\tau \leq t)$ ή όχι $(\tau > t)$με βάση την πληροφορία που παράγεται από την $(X_s, s \geq 0)$ εώς και το χρόνο t.

Για παράδειγμα η μέρα που αγόρασε κάποιος το πρώτο του αυτοκίνητο είναι ένας χρόνος διακοπής διότι πάντα μπορεί να απαντήσει στην ερώτηση «αγόρασα ποτέ αυτοκίνητο;» ενώ η μέρα που θα αγοράσει το τελευταίο του αμάξι μπορεί να μην είναι χρόνος διακοπής, διότι μπορεί να μην είναι σε θέση να απαντήσει στην ερώτηση «θα αγοράσω ποτέ άλλο αμάξι;».

1.2 Δεσμευμένη Μέση Τιμή, Martingales, Μαρκοβιανή Ιδιότητα

Μία απαραίτητη για την Στοχαστική Ανάλυση έννοια είναι αυτή της δεσμευμένης μέσης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής δοθείσης της πληροφορίας που θα έχουμε μέχρι κάποια χρονική στιγμή t.

Έστω ένας χώρος πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, μια τυχαία μεταβλητή $X: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ με $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$ και μια σ-άλγεβρα (πληροφορία) $\mathcal{D} = \sigma(Y_i, i \in I) \subseteq \mathcal{F}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.1 : Μια τυχαία μεταβλητή N, όπου $N: \Omega \to \mathbb{R}$, θα ονομάζεται δεσμευμένη μέση τιμή της X δεδομένης της πληροφορίας $\mathcal{D}$ και θα συμβολίζεται με $N = \mathbb{E}(X|\mathcal{D})$ εάν ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις :

1) Η τυχαία μεταβλητή N είναι $\mathcal{D}$ -μετρήσιμη, δηλαδή αφενός όταν γνωρίζω την πληροφορία $\mathcal{D}$ θα είναι γνωστή η τιμή της N, και αφετέρου υπάρχει η $\mathbb{E}(N)$ (δηλαδή $\mathbb{E}(N) < \infty$).
2) Η τυχαία μεταβλητή N ικανοποιεί την σχέση $\mathbb{E}(X \cdot 1_K) = \mathbb{E}(N \cdot 1_K)$, $\forall K \in \mathcal{D}$ όπου 1_K είναι η δείκτρια συνάρτηση του ενδεχομένου K(δηλαδή $1_K = 1$ όταν πραγματοποιείται το Kκαι $1_K = 0$ όταν δεν πραγματοποιείται το K).

Αντί να γράφουμε $\mathbb{E}(X|\sigma(Y_i, i \in I))$ θα γράφουμε απλούστερα $\mathbb{E}(X|Y_i, i \in I)$.

Διαισθητικά η $\mathbb{E}(X|\mathcal{D})$ αναπαριστά την καλύτερη δυνατή εκτίμηση(σε όρους μέσης τετραγωνικής απόστασης) της τυχαίας μεταβλητής X δοθείσης της πληροφορίας που περιέχεται στην $\mathcal{D}$.

Ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής

Θεωρούμε έναν χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, τις σ-άλγεβρες $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}, \mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}$ και τις τυχαίες μεταβλητές X, Y με $\mathbb{E}(X) < \infty$ και $\mathbb{E}(Y) < \infty$.

1) $\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{D})\big) = \mathbb{E}(X)$,
2) $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(X)$, όπου $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$: η κενή πληροφορία. Δηλαδή υποθέτουμε ότι την χρονική στιγμή $t = 0$ η ποσότητα της πληροφορίας που κατέχουμε είναι μηδενική,
3) Εάν η X είναι $\mathcal{D}$-μετρήσιμη τότε : $\mathbb{E}(X|\mathcal{D}) = X$,
4) $\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{D}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{D}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{D})$, όπου a, b σταθερές (γραμμικότητα της δεσμευμένης μέσης τιμής),
5) Αν $X = k$ (σταθερά) τότε $\mathbb{E}(X|\mathcal{D}) = k$ με πιθανότητα 1,
6) Αν η Y είναι $\mathcal{D}$-μετρήσιμη τότε $\mathbb{E}(X \cdot Y|\mathcal{D}) = Y \cdot \mathbb{E}(X|\mathcal{D}))$ με πιθανότητα 1, (εφόσον $\mathbb{E}(|X \cdot Y|), \mathbb{E}(|Y|) < \infty$),
7) Αν $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$, τότε $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{D}_2)|\mathcal{D}_1) = \mathbb{E}(X|\mathcal{D}_1)$ με πιθανότητα 1.

Δηλαδή όταν έχουμε δέσμευση ως προς δύο «πληροφορίες» αυτή είναι ισοδύναμη με την δέσμευση ως προς την «μικρότερη» πληροφορία. Αυτή η σημαντική ιδιότητα είναι γνωστή ως «tower property» και μας δείχνει ουσιαστικά ότι η στοχαστική ανέλιξη των δεσμευμένων μέσων τιμών, $i = 0,1,2,\ldots$ είναι martingale (μια έννοια που θα δούμε παρακάτω) ως προς το μέτρο πιθανότητας που υπολογίζονται οι μέσες τιμές.

Ορίζουμε τώρα το δίκαιο τυχερό παίγνιο που θα μας βοηθήσει στην κατανόηση των Martingales, μιας έννοιας κομβικής για την τιμολόγηση χρηματοοικονομικών προϊόντων.

Δίκαιο τυχερό παίγνιο είναι ένα παίγνιο στο οποίο το αναμενόμενο κέρδος μας μεταξύ δύο οποιονδήποτε χρονικών στιγμών t και k με $t < k$, εφόσον βρισκόμαστε στο χρόνο t, ισούται με το μηδέν. Ονομάζεται δίκαιο διότι αν π.χ. το αναμενόμενο κέρδος μας ήταν θετικό, για κάποιους άλλους παίκτες του παιγνίου θα ήταν αρνητικό, οπότε και δεν θα τους συνέφερε να συμμετάσχουν σε αυτό. Συμβολικά : $\mathbb{E}(X_k - X_t|\mathcal{F}_t) = 0$.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω θα ορίσουμε τώρα την έννοια του Martingale.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.2 : Μια στοχαστική ανέλιξη $(X_t, t \geq 0)$ όπου $X: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ θα καλείται $\mathbb{P}$-martingale ως προς μια διήθηση $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ όταν ικανοποιούνται οι παρακάτω τρεις προϋποθέσεις :

- Η στοχαστική ανέλιξη είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση,
- $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty, \forall t \geq 0$ και
- $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_k) = X_k, \forall\ 0 \leq k \leq t.$

Δηλαδή martingale είναι μια στοχαστική διαδικασία που η τιμή της την μελλοντική χρονική στιγμή t μπορεί να εκτιμηθεί χρησιμοποιώντας δεσμευμένη μέση τιμή δοθείσης της τιμής της την παρούσα χρονική στιγμή k, δηλαδή κάνοντας χρήση της X_k.

Αν στην εξίσωση $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_0) = X_0$ όπου $(X_t, t \geq 0)$ είναι μια Στοχαστική Ανέλιξη Martingale, πάρουμε μέσες τιμές και στα δύο μέλη τότε προκύπτει άμεσα ότι :

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0), \forall t \geq 0.$$

- Εάν ισχύει ότι $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_k) \geq X_k, \forall\ 0 \leq k \leq t$, τότε η Στοχαστική Ανέλιξη καλείται submartingale.
- Εάν ισχύει ότι $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_k) \leq X_k, \forall\ 0 \leq k \leq t$, τότε η Στοχαστική Ανέλιξη ονομάζεται supermartingale**.**

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.3 : Θεωρούμε μια στοχαστική ανέλιξη $(X_t, t \geq 0)$ σε ένα χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, F, \mathbb{P})$ με τιμές σε ένα χώρο S (με σύνολο ενδεχομένων $\mathcal{S}$).Τότε αυτή έχει την Μαρκοβιανή Ιδιότητα αν για κάθε ενδεχόμενο $A \in \mathcal{S}$ ισχύει ότι (για περισσότερες πληροφορίες βλέπε π.χ. Howard and Karlin (1994)) :

$$P\big(X_{y+t} \in A | X_y = x_y, X_s = x_s, s < y\big) = P(X_{y+t} \in A | X_y = x_y)$$

$$\forall\ y \in T, \qquad y + t\ \in T, t \geq 0.$$

Ουσιαστικά μια στοχαστική ανέλιξη $(X_t, t \geq 0)$ έχει την Μαρκοβιανή Ιδιότητα αν, δεδομένου του παρόντος δηλαδή του X_y (υποθέτοντας ότι το παρόν είναι η χρονική στιγμή y), οι μελλοντικές της τιμές $\left(X_{y+t}, t > 0\right)$ είναι ανεξάρτητες από τις παρελθοντικές τιμές $(X_s, s < y, s \in T)$. Οπότε οι μελλοντικές της τιμές εξαρτώνται μόνο από το παρόν και όχι από το παρελθόν.

- Μια στοχαστική ανέλιξη που έχει την παραπάνω ιδιότητα ονομάζεται *Μαρκοβιανή Αλυσίδα* ή *Μαρκοβιανή Ανέλιξη*.

Η έννοια της *Μαρκοβιανής* Ιδιότητας μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα κάνοντας χρήση δεσμευμένων μέσων τιμών. Πιο συγκεκριμένα :

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.4 : Μία στοχαστική ανέλιξη $(\mathrm{X_t}, \mathrm{t} \geq 0)$ προσαρμοσμένη σε μία διήθηση $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ έχει την Μαρκοβιανή Ιδιότητα αν για κάθε φραγμένη και μετρήσιμη συνάρτηση f και για κάθε $s \leq t$, ισχύει ότι :

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(f(X_t)|X_s)$$

1.3 Κίνηση Brown

Μια ιδιαίτερα σημαντική στοχαστική ανέλιξη είναι η κίνηση Brown η οποία ιστορικά προέρχεται από τον Άγγλο βοτανολόγο Robert Brown όταν το 1827 προσπάθησε να περιγράψει την «τυχαία» κίνηση ενός σωματιδίου μέσα σε ένα υγρό. Αποτελεί τον πυρήνα των περισσότερων χρηματοοικονομικών μοντέλων, είτε μελετάμε μετοχές, συνάλλαγμα ή επιτόκια.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3.1 : Έστω ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Μια στοχαστική διαδικασία $(B_t, t \geq 0)$ από $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ θα ονομάζεται κίνηση Brown (Brownian Motion) $BM(\mu, \sigma)$ με παραμέτρους $\mu \in \mathbb{R}$ (τάση-drift parameter) και $\sigma > 0$ (μεταβλητότητα-volatility) αν $\forall t \geq 0, k > 0$ ισχύει:

1) Η αρχική τιμή της ανέλιξης B_0 είναι γνωστή (π.χ. $B_0 = 0$),
2) Οι τροχιές (πραγματοποιήσεις) $t \to B_t$ είναι συνεχείς,

3) Οι προσαυξήσεις $B_{t+k} - B_t$ είναι ανεξάρτητες σε ξένα (μη αλληλοκαλυπτόμενα) χρονικά διαστήματα,

4) Οι προσαυξήσεις $B_{t+k} - B_t$ ακολουθούν την κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu \cdot k$ και $\sigma^2 \cdot k$, δηλαδή $B_{t+k} - B_t \sim \mathrm{N}(\mu k, \sigma^2 k)$ όπου k είναι το μήκος του χρονικού διαστήματος μεταξύ των προσαυξήσεων.

Παρατηρήσεις :

1) Η παράμετρος μ εκφράζει την τάση της στοχαστικής διαδικασίας. Συγκεκριμένα αν $\mu > 0$ η B_t έχει ανοδική τάση, ενώ αν $\mu < 0$ έχει καθοδική τάση. Η παράμετρος σ εκφράζει την μεταβλητότητα της στοχαστικής ανέλιξης,

2) Αν $\mu = 0, \sigma = 1$ και $B_0 = 0$ τότε η στοχαστική διαδικασία ονομάζεται *τυπική κίνηση Brown* $BM(0,1)$ και θα την συμβολίζουμε με $W = (W_t, t \geq 0)$. Από την συνθήκη 3 θα έχουμε ότι : $\mathbb{E}(W_t - W_s) = 0$ και $\mathrm{Var}(W_t - W_s) = t - s,\ 0 \leq s \leq t$. Άμεση συνέπεια αυτών είναι ότι $\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] = t - s$.

3) Αν η στοχαστική ανέλιξη $(W_t, t \geq 0) \sim BM(0,1)$ τότε η

$$B_t = \mu \cdot t + \sigma \cdot W_t \ \sim \ BM(\mu, \sigma).$$

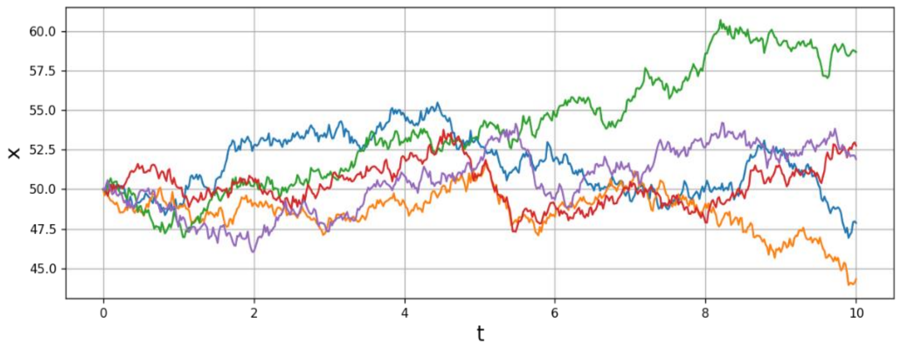
4) Γενικά ισχύει ότι αν η στοχαστική διαδικασία $B = (B_t, t \geq 0) \sim BM(\mu, \sigma)$ τότε η $Y = (Y_t, t \geq 0)$ με $Y_t = a \cdot t + b \cdot B_t \sim BM(a + b\mu,\ |b|\sigma)$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$,

5) Η συνθήκη 3 μας λέει ότι η $B_{t+k} - B_t$ είναι ανεξάρτητη από όλες τις προσαυξήσεις που πραγματοποιήθηκαν πριν την χρονική στιγμή t, με άλλα λόγια είναι ανεξάρτητη από όλη την «ιστορία» της κίνησης Brown μέχρι και την χρονική στιγμή t, δηλαδή ουσιαστικά η προσαύξηση $B_{t+k} - B_t$ δεν εξαρτάται από το παρελθόν (πληροφορία) $\mathcal{F}_s = \sigma(B_s, s \leq t)$.Δηλαδή η κίνηση Brown είναι μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα.

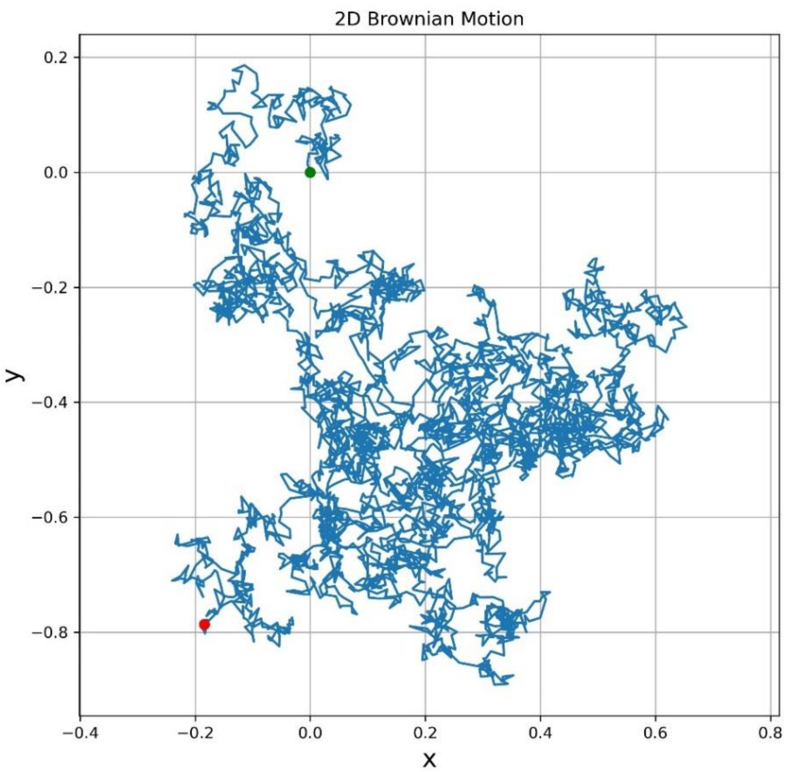
6) Εάν $s \leq t$, τότε οι προσαυξήσεις $X_t - X_s$ *και* $X_{t-s} - X_0$ έχουν την ίδια κατανομή, δηλαδή οι προσαυξήσεις της κίνησης Brown είναι στάσιμες.

7) Η στοχαστική ανέλιξη $(e^{W_t}, t \geq 0)$ ονομάζεται Γεωμετρική Κίνηση Brown και χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση των τιμών των μετοχών.

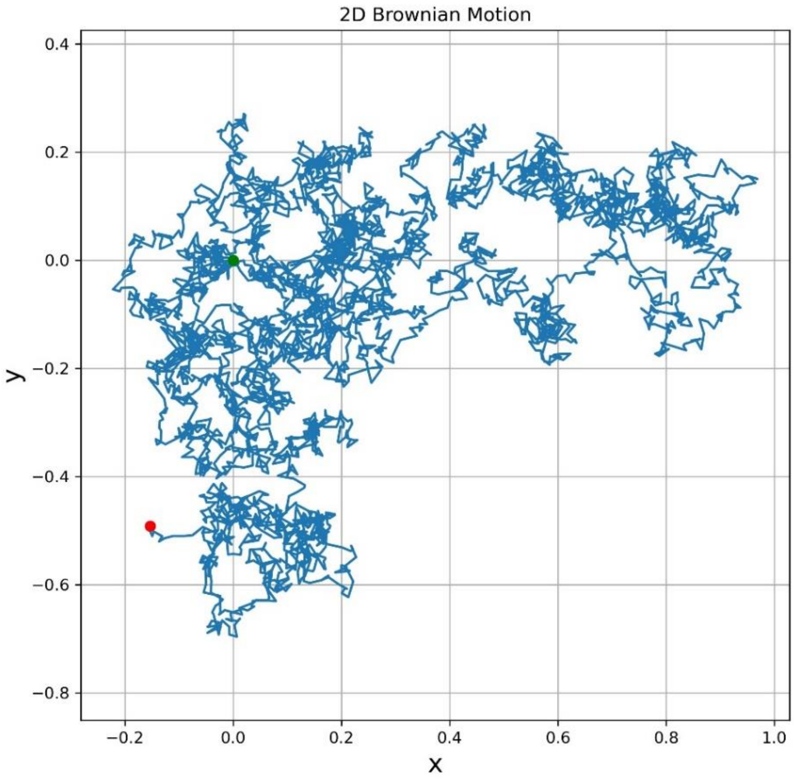
Παρακάτω δίνονται 5 τυχαίες τροχιές μιας μονοδιάστατης κίνησης Brown με αρχική τιμή $X_0 = 50$ στο χρονικό διάστημα [0,10] καθώς και τα διαγράμματα από δύο τυχαίες τροχιές μιας δισδιάστατης κίνησης Brown.



Εικόνα 1.3.1 : *Τυχαίες πραγματοποιήσεις μιας μονοδιάστατης κίνησης Brown*



Εικόνα 1.3.2 : *Τυχαία πραγματοποίηση μιας δισδιάστατης κίνησης Brown*



__Εικόνα 1.3.3 :__ Τυχαία πραγματοποίηση μιας δισδιάστατης κίνησης Brown

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3.2 : Μια στοχαστική ανέλιξη $(B_t, t \geq 0)$ θα ονομάζεται $\mathcal{F}_\mathrm{t} - \mathrm{BM}(\mu, \sigma)$ ως προς μια διήθηση $(\mathcal{F}_\mathrm{t}, t \geq 0)$, εάν ισχύουν τα παρακάτω :

1. Είναι $BM(\mu, \sigma)$,
2. Είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ και
3. Κάθε προσαύξηση $B_{t+k} - B_k$ είναι ανεξάρτητη της πληροφορίας που έχουμε στο χρόνο s, $\mathcal{F}_\mathrm{s}$, όπου $s \leq t$.

Προφανώς κάθε στοχαστική ανέλιξη $B = (B_t, t \geq 0) \sim BM(\mu, \sigma)$ είναι και $\mathcal{F}_\mathrm{t} - BM(\mu, \sigma)$ ως προς την διήθηση $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$, η οποία ονομάζεται «φυσική» διήθηση της B.

Γενικά, κάθε στοχαστική ανέλιξη $X = (X_t, t \geq 0)$ είναι πάντα προσαρμοσμένη στην φυσική της διήθηση $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t), t \geq 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1 : Για μία τυπική κίνηση Brown $\{W_t, t \geq 0\}$ ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των W_t $και$ W_{t+s}, $s > 0$ δίνεται από τον τύπο

$$\rho(t, t+s) = \sqrt{\frac{t}{t+s}}\,, \qquad t \geq 0$$

Για την απόδειξη του παραπάνω αποτελέσματος π.χ. βλ. Kijima Masaaki (2013), σελ. 204.

Παρακάτω δίνονται κάποια παραδείγματα Στοχαστικών Ανελίξεων που είναι Martingales :

- Αν η στοχαστική ανέλιξη $W = (W_t, t \geq 0) \sim \mathcal{F}_t - BM(0,1)$ τότε είναι και $\mathcal{F}_t$-martingale, δηλαδή martingale ως προς την διήθηση $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$.

- **:** Ακόμα αν $W = (W_t, t \geq 0) \sim \mathcal{F}_t - BM(0,1)$ τότε οι στοχαστικές ανελίξεις

  $$(W_t^2 - t,\ t \geq 0) \text{ και } \left(\exp\left[\sigma W_t - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right) t\right], t \geq 0\right)$$

  είναι $\mathcal{F}_t$-martingales. Αποδείξεις των παραπάνω προτάσεων βρίσκονται π.χ. στο βιβλίο Lamberton and Lapeyre (2011).

1.4 Γεωμετρική Κίνηση Brown

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4.1 : Έστω $X = (X_t, t \geq 0)$ μια κίνηση Brown με τάση μ και μεταβλητότητα σ και έστω ακόμα $S = (S_t = e^{X_t}, t \geq 0)$. Τότε η στοχαστική διαδικασία $S = (S_t, t \geq 0)$ ονομάζεται Γεωμετρική Κίνηση Brown με τάση μ και μεταβλητότητα σ. Επειδή η στοχαστική ανέλιξη $(\log(S_t), t \geq 0)$ είναι κίνηση Brown και ισχύει ότι $\log(S_{y+t}) - \log(S_y) = \log\left(\frac{S_{y+t}}{S_y}\right)$, συνεπάγεται από τον ορισμό της κίνησης Brown ότι για κάθε $y \geq 0, t > 0$ η τυχαία μεταβλητή $\log\left(\frac{S_{y+t}}{S_y}\right)$ είναι ανεξάρτητη από τις τιμές της διαδικασίας έως και το χρόνο y και ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μt και διακύμανση $\sigma^2 t$.

Η Γεωμετρική κίνηση Brown χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση των τιμών των μετοχών (μοντέλο Black-Scholes , βλέπε π.χ. Ross Sheldon M. (2011)).

1.5 Ολοκλήρωμα Itô

Θα ορίσουμε τώρα το ολοκλήρωμα Itô ως προς μία τυπική κίνηση Brown $W \sim BM(0,1)$. Θεωρούμε έναν χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ εφοδιασμένο με μία διήθηση $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ και έστω $W = (W_t, t \geq 0)$ μία $\mathcal{F}_t - BM(0,1)$. Έστω ακόμα μία στοχαστική ανέλιξη $(H_t, t \in [0, T])$, προσαρμοσμένη στην διήθηση $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ και η οποία είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, δηλαδή :

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t H_x^2 \cdot dx\right) < \infty, \qquad \forall\, t \in [0, \mathrm{T}]$$

Θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα : $\int_0^t H_x \cdot dW_x$, με $t \in [0, T]$.

Αρχικά θα περιοριστούμε στην περίπτωση όπου η ανέλιξη H_t είναι «απλή» και στη συνέχεια θα επεκτείνουμε τον ορισμό για οποιαδήποτε στοχαστική ανέλιξη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5.1 : Έστω μία διαμέριση $K = \{t_0, t_1, t_2, \ldots . t_n\}$ του διαστήματος $[0, T]$, όπου $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$. Μία στοχαστική ανέλιξη $(H_t, t \in [0, T])$, θα καλείται απλή (ως προς την διαμέριση K) αν ισχύουν οι παρακάτω τρεις συνθήκες :

1. Είναι $(\mathcal{F}_t, t \in [0, T])$-προσαρμοσμένη,
2. Είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη και
3. Είναι σταθερή σε κάθε χρονικό διάστημα $[t_{i-1}, t_i)$

Κάθε απλή στοχαστική ανέλιξη μπορεί να γραφεί στη μορφή, για κάθε διαδρομή (σενάριο) $\omega \in \Omega$:

$$H_t(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i\,(\omega) \cdot 1_{[t_{i-1}, t_i)}(t)$$

όπου $\delta_i = H_{t_{i-1}}$ είναι μία $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$- μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή και $1_A(t) = 1\ \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ t \in A\ \kappa\alpha\iota\ 1_A(t) = 0\ \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ t \notin A$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5.2 : Ονομάζουμε στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô μιας απλής στοχαστικής ανέλιξης $(\mathrm{H_t}, \mathrm{t} \in [0, \mathrm{T}])$ ως προς την τυπική κίνηση Brown $(W_t, t \in [0, T])$ στο διάστημα $[0, t]$, την τυχαία μεταβλητή :

$$I_t = \int_0^t H_t \cdot dW_x = \sum_{i=0}^{k-1} H_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + H_{t_k}(W_t - W_{t_k})$$

όπου k τέτοιο ώστε $t_k < t \leq t_{k+1}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5.3 : Ορίζουμε ακόμα ως $\int_{t_1}^{t_2} H_x \cdot dW_x := \int_0^\infty 1_{[t_1, t_2]} H_x dW_x$.

Συγκεκριμένα έχουμε ότι : $\int_0^\infty 1_{[a,b]} (t) dW_t = W_b - W_a, \ 0 \leq a \leq b$ και

$$\int_\alpha^b dW_t = W_b - W_a, \qquad 0 \leq a \leq b$$

- Το στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô εκφράζει το εμβαδό κάτω από την απλή στοχαστική ανέλιξη $(H_x, x \in [0, t])$ το οποίο υπολογίζεται σε κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σύμφωνα με τον κανόνα : προσαύξηση της στοχαστικής ανέλιξης $W = (W_x, x \in [0, t])$ στην βάση επί το ύψος (τιμή της $(H_x, x \in [0, t])$).
- Η στοχαστική ανέλιξη $(I_t, t \in [0, T])$ παρουσιάζει συνεχείς διαδρομές (διότι και η κίνηση Brown παρουσιάζει συνεχείς διαδρομές).

Θα επεκτείνουμε τώρα τα παραπάνω και για μη απλές στοχαστικές ανελίξεις.

Θεωρούμε και πάλι στοχαστικές ανελίξεις $H = (H_t, t \in [0, T])$ οι οποίες είναι προσαρμοσμένες στην διήθηση $(\mathcal{F}_t, t \in [0, T])$ και είναι και τετραγωνικά ολοκληρώσιμες.

Αποδεικνύεται ότι για κάθε στοχαστική ανέλιξη υπάρχει μια ακολουθία από απλές συναρτήσεις $H^{(j)} = \left(H_t^{(j)}, t \in [0, T]\right), j = 1,2,3, \dots$ οι οποίες συγκλίνουν στην H έτσι ώστε να ισχύει ότι :

$$\lim_{j \to \infty} \mathbb{E}(\int_0^T (H_t - H_t^{(j)})^2 dt) = 0$$

- Μπορούμε να ορίσουμε την $H^{(j)}$με τον ακόλουθο τρόπο :

1. Χωρίζουμε το χρονικό διάστημα $[0, T]$ σε $n = 2^j$ ίσα διαστήματα, θεωρώντας την διαμέριση :

$$t_0 = 0,\ \ t_1 = h,\ t_2 = 2h,\ t_3 = 3h, \dots, t_n\ = nh = T,\ \text{με}\ h = \frac{T}{2^j}$$

2. Παίρνουμε την $H^{(j)}$ σταθερή σε κάθε χρονικό διάστημα $[t_i, t_{i+1})$ και ίση με $H_{t_i}, i = 0,1,2, \dots, n.$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5.4 : Ορίζουμε ως στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô της στοχαστικής ανέλιξης $H = (H_t, t \in [O, T])$ ως προς την τυπική κίνηση Brown $(W_t, t \in [0, T])$ στο διάστημα [0,t] την τυχαία μεταβλητή :

$$\int_0^t H_x\, dW_x = \lim_{j \to \infty} \int_0^t H_x^{(j)}\, dW_x$$

όπου $H^{(j)} = \left(H_t^{(j)}, t \in [0, T]\right),\ j = 1,2,3, \dots$ είναι μία ακολουθία απλών στοχαστικών ανελίξεων οι οποίες συγκλίνουν στην ανέλιξη $H.$Αποδεικνύεται ότι το όριο του παραπάνω ορισμού υπάρχει και είναι πάντοτε καλά ορισμένο (ανεξάρτητο από την ακολουθία των απλών ανελίξεων).

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5.5 : Διαφορικό Itô : Εάν υπάρχει το ολοκλήρωμα Itô, $I_t = \int_0^t H_t \cdot dW_x$, τότε μπορεί να γραφεί σε διαφορική μορφή ως $dI_t = H_t \cdot dW_t$ το οποίο ονομάζεται διαφορικό Itô.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ Itô

Το στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô, επί μιας στοχαστικής ανέλιξης $(H_x, x \in [0, t])$, έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

1. Η τυχαία μεταβλητή $I_t = \int_0^t H_x \cdot dW_x$ είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη (δηλαδή στον χρόνο t είναι γνωστή η τιμή της).

2. Γραμμικότητα του ολοκληρώματος Itô. Αν H, N στοχαστικές ανελίξεις και $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει ότι :

$$\int_0^t (\mathrm{a}H_x + \mathrm{b}\, N_x) \cdot dW_x = \mathrm{a} \int_0^t H_x dW_x + \mathrm{b} \int_0^t N_x\, dW_x$$

3. Για κάθε $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq T$, ισχύει ότι :

$$\int_{t_1}^{t_3} H_x\, dW_x = \int_{t_1}^{t_2} H_x\, dW_x + \int_{t_2}^{t_3} H_x\, dW_x \text{ (ισότητα Chasles)}$$

4. Ισομετρία Itô. Ισχύει ότι :

$$\mathbb{E}(I_t^2) = \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t H_x dW_x\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t H_x^2\, dx\right), t \in [0, T]$$

Η απόδειξη της παραπάνω ιδιότητας βρίσκεται π.χ. στο βιβλίο Privault,Nicolas (2013),σελ. 73.

5. Η στοχαστική ανέλιξη των ολοκληρωμάτων Itô ($I_t = \int_0^t H_x\, dW_x, t \in [0, T]$) είναι martingale ως προς την διήθηση $(\mathcal{F}_t, t \in [0, T])$.

Από τις παραπάνω ιδιότητες προκύπτει ότι το ολοκλήρωμα Itô είναι μια τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή :

$$\mathbb{E}(I_t) = \mathbb{E}(I_0) = \int_0^0 H_x dW_x = 0$$

(λόγω του ότι είναι martingale, (ιδιότητα 5)) και διακύμανση :

$$Var(I_t) = \mathbb{E}(I_t^2) - \left(\mathbb{E}(I_t)\right)^2 = \mathbb{E}(I_t^2) - 0 = \mathbb{E}(\int_0^t H_x^2\, dx)$$

(από την ισομετρία Itô, (ιδιότητα 4)).

- Στην περίπτωση που η τετραγωνικά ολοκληρώσιμη $H = (H_x, x \in [0, T])$ είναι ντετερμινιστική συνάρτηση, το ολοκλήρωμα Itô ονομάζεται στοχαστικό ολοκλήρωμα του **Wiener**.

- Στην περίπτωση του ολοκληρώματος Wiener, ισχύει ότι

$$I_t = \int_0^t H_x dW_x \sim N\left(0, \int_0^t H_x^2\, dx\right)$$

1.6 Διαφορική μορφή στοχαστικών ολοκληρωτικών εξισώσεων

Εξισώσεις οι οποίες περιέχουν ολοκληρώματα Itô ονομάζονται στοχαστικές ολοκληρωτικές εξισώσεις. Για παράδειγμα η εξίσωση :

$$2\int_0^t W_x\, dW_x = W_t^2 - t,\ t \geq 0$$

είναι μία στοχαστική ολοκληρωτική εξίσωση λόγω του ολοκληρώματος Itô, $\int_0^t W_x\, dW_x$. Η ισοδύναμη διαφορική μορφή είναι:

$$2W_x dW_x = d(W_x^2) - dx,\ x \geq 0$$

η οποία είναι η αντίστοιχη στοχαστική διαφορική εξίσωση (ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της από 0 έως t παίρνουμε την αρχική στοχαστική ολοκληρωτική εξίσωση).

Οι στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις είναι πολύ σημαντικές διότι περιγράφουν πολλά μοντέλα στα στοχαστικά χρηματοοικονομικά. Ουσιαστικά δείχνουν την δυναμική σχέση που έχουν μεταξύ τους οι στοχαστικές ανελίξεις που εμπεριέχονται στις εξισώσεις αυτές.

Οι τύποι όμως που ισχύουν στην κλασσική ανάλυση τόσο στον Ολοκληρωτικό όσο και στον Διαφορικό λογισμό δεν ισχύουν στην Στοχαστική Ανάλυση Itô. Για παράδειγμα, αν

$$(W_t, t \in [0,T]) \sim BM(0,1)$$

τότε γενικά:

$$\int_0^t f'(W_x) \cdot dW_x \neq f(W_t) - f(W_0) \text{ και αντιστοίχως } d\big(f(W_t)\big) \neq f'(W_t) \cdot dW_t$$

Ο λόγος για τον οποίο δεν ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις, οφείλεται στο γεγονός ότι η κίνηση Brown έχει μη-μηδενική τετραγωνική κύμανση. Για τον ορισμό της τετραγωνικής κύμανσης βλέπε π.χ. Kijima Masaaki (2013) σελ. 228.

Αντίθετα, στην περίπτωση όπου η f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση τότε έχει μηδενική τετραγωνική κύμανση δηλαδή ισχύει ότι $(df(t))^2 = (f'(t))^2 \cdot (dt)^2 = 0$. Για την κίνηση Brown όμως, αποδεικνύεται ότι: $(dW_t)^2 = dt \text{ όπου } dW_t = W_{t+dt} - W_t$. Αποδεικνύεται ακόμα ότι : $dW_t \cdot dt = 0 \text{ και } (dt)^2 = 0$. Για μια δικαιολόγηση των παραπάνω π.χ. βλ. Μπούτσικας Μ. (2019) σελ. 22.

1.7 Τύπος του Itô

Παρακάτω παραθέτουμε τον τύπο του Itô τόσο σε ολοκληρωτική όσο και σε διαφορική μορφή, για διαφορετικούς τύπους συναρτήσεων, ο οποίος είναι απαραίτητος στην επίλυση στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

Θεώρημα 1 : Τύπος του Itô για συναρτήσεις της μορφής $f(W_t)$:

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με συνεχή πρώτη και δεύτερη παράγωγο και έστω ακόμα μια στοχαστική ανέλιξη $W \sim BM(0,1)$.Τότε για κάθε $t \geq 0$ θα ισχύει ότι :

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'\,(W_x) \cdot dW_x + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_x) \cdot dx$$

ή σε διαφορική μορφή :

$$d\big(f(W_t)\big) = f'(W_t) \cdot dW_t + \tfrac{1}{2} f''(W_t) \cdot dt$$

Θεώρημα 2 : Τύπος του Itô για συναρτήσεις της μορφής $f(t, W_t)$:

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους τάξης $i + j$:

$$\frac{\vartheta^{i+j}}{\vartheta t^i \vartheta x^j} f \equiv f^{(i,j)}, \ i, j = 0,1,2,3 \dots$$

και έστω επίσης μια στοχαστική ανέλιξη $W \sim BM(0,1)$. Τότε για κάθε $t \geq 0$:

$$f(t, W_t) - f(0, W_0) = \int_0^t f^{(0,1)}(x, W_x) dW_x + \int_0^t f^{(1,0)}\,(x, W_x) dx + \frac{1}{2}\int_0^t f^{(0,2)}\,(x, W_x) dx$$

ή σε διαφορική μορφή :

$$d(f(t, W_t) = f^{(0,1)}(t, W_t) dW_t + f^{(1,0)}(t, W_t) dt + \frac{1}{2} f^{(2,0)}(t, W_t) dt$$

Μία σημαντική κατηγορία στοχαστικών ανελίξεων είναι οι ανελίξεις Itô. Παρακάτω δίνεται ο ορισμός τους.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7.1 : Μία στοχαστική ανέλιξη $X = (X_t, t \geq 0)$ ονομάζεται ανέλιξη Itô εάν μπορεί να γραφεί με την ακόλουθη μορφή :

$$X_t = X_0 + \int_0^t G_s \cdot dW_s + \int_0^t K_s \cdot ds$$

όπου η $(W_t, t \geq 0)$ είναι μια $\mathcal{F}_t$ −τυπική κίνηση Brown δηλαδή $W \sim \mathcal{F}_t - BM(0,1)$ και οι $G = (G_t, t \geq 0), K = (K_t, t \geq 0)$ είναι στοχαστικές ανελίξεις προσαρμοσμένες στην διήθηση $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$. Εναλλακτικά σε διαφορική μορφή η παραπάνω σχέση γράφεται :

$$dX_t = G_t \cdot dW_t + K_t \cdot dt$$

Ακολούθως ορίζουμε το ολοκλήρωμα Itô μιας στοχαστικής ανέλιξης ως προς μία ανέλιξη Itô $(X_t, t \geq 0)$:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7.2: Το ολοκλήρωμα Itô ως προς μία στοχαστική ανέλιξη Itô ορίζεται ως:

$$\int_0^t H_s \cdot dX_s \coloneqq \int_0^t H_s \cdot (G_s dW_s + K_s ds) = \int_0^t H_s \cdot G_s dW_s + \int_0^t H_s \cdot K_s ds$$

Παραπάνω διατυπώσαμε τον τύπο του Itô για συναρτήσεις της τυπικής κίνησης Brown $(W_t, t \geq 0)$. Ομοίως εφαρμόζεται ο τύπος αυτός για συναρτήσεις στοχαστικών ανελίξεων Itô :

Θεώρημα 3 : Τύπος του Itô για συναρτήσεις της μορφής $f(t, X_t)$:

Έστω $f(t,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης και $(X_t, t \geq 0)$ μία ανέλιξη Itô με $dX_s = G_s \cdot dW_s + K_s \cdot ds$. Τότε θα ισχύει ότι :

$$d\big(f(t, X_t)\big) = f^{(0,1)}(t, X_t) dX_t + f^{(1,0)}(t, X_t) dt + \tfrac{1}{2} f^{(2,0)}(t, X_t)(dX_t)^2$$

Όπου

$$(dX_t)^2 = (G_t \cdot dW_t + K_t \cdot dt)^2$$

$$= G_t^2 \cdot (dW_t)^2 + 2G_tK_t(dW_tdt) + K_t^2(dt)^2$$
$$= G_t^2 \cdot dt + 2G_tK_t \cdot 0 + K_t^2 \cdot 0 = G_t^2 \cdot dt$$

Θεώρημα 4 : Τύπος του Itô για συναρτήσεις της μορφής $f(X_t, Y_t)$. Είναι ο γενικότερος τύπος, που περιλαμβάνει όλες τις μορφές του τύπου του Itô που αναφέραμε παραπάνω :

Έστω $f(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης και $(X_t, t \geq 0)$, $(Y_t, t \geq 0)$ δύο ανελίξεις Itô. Τότε ισχύει ότι :

$$d(f(X_t, Y_t) = f^{(0,1)}(X_t, Y_t)dY_t + f^{(1,0)}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f^{(0,2)}(X_t, Y_t)(dY_t)^2$$
$$+ f^{(1,1)}(X_t, Y_t)dX_tdY_t + \frac{1}{2}f^{(2,0)}(X_t, Y_t)(dX_t)^2.$$

Θέτοντας όπου $f(x,y) = x \cdot y$ στον παραπάνω τύπο παίρνουμε τον πολλαπλασιαστικό κανόνα του Itô :

$$d(X_t \cdot Y_t) = X_t \cdot dY_t + Y_t \cdot dX_t + dX_t \cdot dY_t$$

όπου X_t, Y_t είναι δύο ανελίξεις Itô.

1.8. Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις

Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$X_t = Z + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s. \qquad (1a)$$

ή συνηθέστερα με την ισοδύναμη διαφορική μορφή

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

όπου X είναι μια ανέλιξη Itô, χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση των περισσότερων χρηματοοικονομικών προϊόντων, όπως στοχαστικές ανελίξεις μετοχών ή επιτοκίων.

Η λύση μιας τέτοιας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης καλείται ανέλιξη «διάχυσης» (diffusion process).

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8.1 : Θεωρούμε ένα χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ εφοδιασμένο με μία διήθηση $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$.Έστω επίσης οι συναρτήσεις μ: $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, σ: $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ και Z μία $\mathcal{F}_0$-μετρήσιμη (δηλ. γνωστή στο χρόνο 0) τυχαία μεταβλητή Z(αρχική συνθήκη). Τέλος, έστω μια $\mathcal{F}_t$-τυπική κίνηση Brown $(W_t, t \geq 0)$. Μία λύση της εξίσωσης $(1a)$είναι μια $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη συνεχής στοχαστική ανέλιξη Itô $(Y_t, t \geq 0)$ η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες :

1. Για κάθε $t \geq 0$ τα ολοκληρώματα $\int_0^t \mu(s, Y_s)ds$ και $\int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$ υπάρχουν, δηλαδή :

$$\int_0^t \mu(s, Y_s)ds < +\infty \text{ και } \int_0^t \sigma(s, Y_s)dW_s < +\infty.$$

2. Η $(Y_t, t \geq 0)$ ικανοποιεί την εξίσωση (1), δηλαδή :

$$\forall t \geq 0 \,, \;\; Y_t = Z + \int_0^t \mu(s, Y_s)ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s)dW_s$$

Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει τις ικανές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι συναρτήσεις μ, σ ώστε να διασφαλίζεται η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης της εξίσωσης $(1a)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.8.2 : Εάν μ και σ είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις και εάν υπάρχει $K < +\infty$ τέτοιο ώστε :

1. $|\mu(t,x) - \mu(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|$
2. $|\mu(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq K(1+|x|)$
3. $\mathbb{E}(Z^2) < +\infty$

τότε για κάθε $T \geq 0$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση στο διάστημα $[0, T]$.

Με τον όρο μοναδικότητα της λύσης εννοούμε ότι αν $(X_t, t \geq 0)$, $(Y_t, t \geq 0)$ είναι δύο λύσεις της εξίσωσης (1), τότε $X_t = Y_t$, $\forall\, 0 \leq t \leq T$ με πιθανότητα 1.

Αποδεικνύεται ακόμα ότι αν υπάρχει λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης $(1a)$ και έστω $(Y_t, t \in [0,T])$ αυτή, τότε αυτή είναι Μαρκοβιανή Ανέλιξη (Markov process), δηλαδή :

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(f(X_t)|X_t).$$

για κάθε $s \leq t$ και f φραγμένη συνάρτηση.

1.9 Βασικές Χρηματοοικονομικές έννοιες

Παραθέτουμε μερικές βασικές έννοιες των Χρηματοοικονομικών οι οποίες είναι α-παραίτητες για την κατανόηση των επόμενων κεφαλαίων. Το μεγαλύτερο μέρος από τα παρακάτω βασίζεται στις σημειώσεις του Μπούτσικα , Μ. (2019).

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9.1 : Χρηματιστηριακός τίτλος ή Αξιόγραφο είναι ένα μεταβιβάσιμο (φυσικό ή αποϋλοποιημένο) έγγραφο το οποίο εξασφαλίζει συγκεκριμένα δικαιώματα στον κάτοχό του και συνεπώς ενσωματώνει μία συγκεκριμένη αξία.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9.2 : Χρηματοοικονομική Αγορά ονομάζεται ένα σύνολο χρηματιστηριακών τίτλων (αξιογράφων) οι οποίοι είναι διαπραγματεύσιμοι από ένα σύνολο επενδυτών μέσα σε ένα χρονικό διάστημα $[0,T]$. Ο χρόνος t θα μετριέται σε έτη και μπορεί να είναι διακριτός $(t = 0, k, 2k, \dots . nk = T)]$ ή συνεχής $(t \in [0,T])$. Ως Ω συμβολίζουμε το σύνολο των δυνατών καταστάσεων στις οποίες μπορεί να βρεθεί η αγορά.

Κάθε ενδεχόμενο $\omega \in \Omega$ περιγράφει την κατάσταση της αγοράς δηλαδή τις τιμές των χρηματιστηριακών τίτλων σε όλους τους χρόνους $0, k, 2k, \dots, nk$ ή σε όλο το χρονικό διάστημα $[0,T]$.

Θεωρούμε ακόμα και ένα σύνολο ενδεχομένων $\mathcal{F}$ στο Ω το οποίο θα ενσωματώνει την πληροφορία που έχουμε για την αγορά μέχρι κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t.

Ορίζουμε ακόμα ως $\mathbb{P}$ το μέτρο πιθανότητας που ισχύει στην αγορά το οποίο αντιστοιχεί σε κάθε ενδεχόμενο μία πιθανότητα.

Επίσης ως μετοχή ορίζουμε ένα μερίδιο του κεφαλαίου μιας ανώνυμης εταιρείας.

Σε μία αγορά υπάρχουν τρία είδη Αξιογράφων :

- Χωρίς κίνδυνο (riskless assets) (π.χ. ομόλογα οικονομικά εύρωστων κρατών ή βραχυπρόθεσμα δάνεια μεταξύ μεγάλων τραπεζών)
- Με κίνδυνο (risky assets) (π.χ. μετοχές επιχειρήσεων)
- Παράγωγα προϊόντα (derivatives, π.χ. δικαιώματα αγοράς)

Παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν ονομάζεται μία σύμβαση ή ένα συμβόλαιο που συνάπτεται σήμερα (δηλαδή την χρονική στιγμή $t = 0$) μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων και αναφέρεται σε μια αγοραπωλησία συγκεκριμένου αγαθού το οποίο ονομάζεται υποκείμενο αγαθό (underlying asset) και μπορεί να είναι μετοχές, ομόλογα (υψηλού κινδύνου), συνάλλαγμα ή και εμπορεύματα (πετρέλαιο, χρυσός, σιτάρι κλπ) η οποία θα πραγματοποιηθεί στο μέλλον (χρόνος εξάσκησης – exercise date) μέχρι και κάποιο χρόνο T ο οποίος ονομάζεται χρόνος λήξης (maturity) του προϊόντος.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9.3 : Arbitrage ή εξισορροπητική κερδοσκοπία ονομάζεται μια επενδυτική στρατηγική η οποία οδηγεί σε σίγουρο κέρδος χωρίς την παράλληλη ανάληψη κινδύνου.

Θα λέμε ότι μια αγορά βρίσκεται σε ισορροπία αν δεν υπάρχει ευκαιρία για Arbitrage σε αυτήν.

Οι βασικές κινήσεις των συναλλασσόμενων σε μία χρηματοοικονομική αγορά ταξινομούνται σε τρεις κατηγορίες :

1. Κερδοσκοπία (speculation) : Επενδυτική στρατηγική με επιδίωξη το κέρδος με παράλληλη ανάληψη κινδύνου.
2. Αντιστάθμιση κινδύνου (hedging) : Επενδυτική στρατηγική που έχει ως στόχο την μείωση του κινδύνου.
3. Εξισορροπητική κερδοσκοπία (Arbitrage).

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9.4 : Ένα παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν το οποίο έχει αξία στη λήξη του D_T ονομάζεται αναπαραγόμενο ή αντισταθμίσιμο (hedgeable) αν μπορεί να κατασκευαστεί ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από ομόλογα, μετοχές το οποίο θα έχει τελική αξία ίση με D_T.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9.5 : Μία αγορά καλείται **πλήρης** (complete) αν κάθε παράγωγο προϊόν που υπάρχει σε αυτήν είναι αντισταθμίσιμο .

Μία αγορά την οποία θεωρούμε σε ένα χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$ καλείται δίκαιη όταν όλες οι επενδυτικές στρατηγικές σε αυτήν έχουν το ίδιο αναμενόμενο κέρδος (μηδενικό).

Πιο αυστηρά :

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9.6 : Μία αγορά σε ένα χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$ ονομάζεται **δίκαιη** αν η παρούσα αξία κάθε Αξιογράφου είναι $\mathbb{P}^*$-martingale.

Μία απαραίτητη έννοια που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα κεφάλαια για την εύρεση της δίκαιης τιμής αξιογράφων, είναι αυτή του μέτρου πιθανότητας ουδετέρου κινδύνου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9.7 : Ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}^*$ σε μία αγορά (το οποίο είναι ισοδύναμο με το πραγματικό μέτρο $\mathbb{P}$ της αγοράς) ονομάζεται *μέτρο ουδέτερου κινδύνου* (*risk neutral probability measure*) όταν υπό το μέτρο αυτό η αναμενόμενη απόδοση των Αξιογράφων με κίνδυνο είναι ίδια με αυτήν των Αξιογράφων χωρίς κίνδυνο. Ισοδύναμα, ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}^*$ αποτελεί μέτρο ουδέτερου κινδύνου όταν οι παρούσες αξίες των αναμενόμενων αποδόσεων όλων των αξιογράφων υπό το μέτρο αυτό είναι $\mathbb{P}^*$-martingales.

Κάτι τέτοιο δεν ισχύει γενικά σε μια αγορά διότι κατά κανόνα τα risky assets αναμένεται να έχουν μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση από τα riskless assets, έτσι ώστε να είναι ελκυστικά προς τους επενδυτές. Ένα τέτοιο γεγονός θα συνέβαινε μόνο σε μία αγορά όπου οι επενδυτές της είναι ουδέτεροι απέναντι στον κίνδυνο δηλαδή αναλαμβάνουν κίνδυνο χωρίς να απαιτούν μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση. Από εκεί προήλθε και το όνομα του μέτρου αυτού.

Γι΄ αυτό το λόγο το $\mathbb{P}^*$ δεν είναι γενικά ίδιο με το πραγματικό μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ που ισχύει σε μια αγορά. Και μπορεί ακόμα να μην είναι και μοναδικό,στην περίπτωση βέβαια που υφίσταται σε μία αγορά. Η παρακάτω πρόταση εξασφαλίζει την μοναδικότητά του.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.9.8 : Αν σε μια πλήρη αγορά υπάρχει μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου, τότε αυτό είναι μοναδικό.

Το παρακάτω θεμελιώδες αποτέλεσμα μας επιτρέπει την εύρεση της δίκαιης τιμής ενός παραγώγου χρηματοοικονομικού προϊόντος και γι΄ αυτό ονομάζεται **Risk Neutral Pricing Formula :**

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.9.9 : Αν μία αγορά είναι πλήρης και υπάρχει μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου $\mathbb{P}^*$ σε αυτή,τότε η δίκαιη (no arbitrage) αξία, D_t^*, κάθε παραγώγου χρηματοοικονομικού προϊόντος την χρονική στιγμή t θα ισούται με :

$$D_t^* = e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^*(D_T|\mathcal{F}_t), t \in [0,T] \qquad (1)$$

όπου T ο χρόνος λήξης του παραγώγου, r ο άνευ κινδύνου ρυθμός επιτοκίου (risk free interest rate) π.χ. το επιτόκιο διατραπεζικού δανεισμού ίσης διάρκειας με το παράγωγο και $\mathbb{E}^*$ η αναμενόμενη τιμή υπό το μέτρο ουδέτερου κινδύνου $\mathbb{P}^*$.

Το παραπάνω θεώρημα ουσιαστικά μας υποδηλώνει ότι η δίκαιη τιμή κάθε παράγωγου χρηματοοικονομικού προϊόντος είναι ίση με την παρούσα αξία του αναμενόμενου κέρδους από την χρήση του.

Αξίζει εδώ να σημειώσουμε ότι με την Risk Neutral Pricing Formula δεν αποτιμούμε ένα παράγωγο προϊόν θεωρώντας ότι η αγορά στην οποία αναφερόμαστε είναι δίκαιη, αλλά το αποτιμούμε θεωρώντας ότι η αγορά βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας (no arbitrage). Όμως για να μην υφίσταται arbitrage θα πρέπει η αξία του να είναι ίση με την αξία που θα είχε σε μία δίκαιη αγορά

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ

Τα υποδείγματα επιτοκίων χρησιμοποιούνται κυρίως για την τιμολόγηση και την αντιστάθμιση των ομολόγων, αλλά και των δικαιωμάτων προαίρεσης του επιτοκίου. Από τις τελευταίες δεκαετίες έως και σήμερα, η έρευνα σε αυτόν τον τομέα έχει γίνει πολύ ενεργή εξαιτίας των ολοένα και περισσότερων μοντέλων και τεχνικών (Βλέπε π.χ. McNeil A. J., Frey R. & Embrechts P. (2015) καθώς και Lamberton D. & Lapeyre B. (2011)). Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα κύρια χαρακτηριστικά της μοντελοποίησης των επιτοκίων και εξετάζονται ορισμένα από τα πιο ευρέως χρησιμοποιούμενα υποδείγματα.

2.1. Η καμπύλη απόδοσης

Στα περισσότερα από τα υποδείγματα που έχουν ήδη μελετηθεί, το επιτόκιο θεωρήθηκε σταθερό. Στον πραγματικό κόσμο, είναι γνωστό ότι το επιτόκιο ενός δανείου εξαρτάται τόσο από την ημερομηνία t της έκδοσης του δανείου όσο και από την ημερομηνία T της λήξης του. Για παράδειγμα, κάποιος που δανείζεται ένα ευρώ τη στιγμή t, μέχρι τη λήξη T, θα πρέπει να επιστρέψει ένα ποσό $F(t,T)$ τη χρονική στιγμή T, το οποίο ισοδυναμεί με ένα μέσο επιτόκιο $R(t,T)$. Το επιτόκιο αυτό δίνεται από την παρακάτω εξίσωση.

$$F(t,T) = e^{(T-t)R(t,T)}$$

Σε περίπτωση που το μέλλον θεωρηθεί ως βέβαιο, δηλαδή υποθέτοντας ότι όλα τα επιτόκια $(R(t,T))_{t\leq T}$ είναι γνωστά την χρονική στιγμή t έκδοσης του δανείου τότε, σε έναν κόσμο χωρίς εξισορροπητική κερδοσκοπία (arbitrage), η συνάρτηση F πρέπει να ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση

$$\forall t < u < s,\ F(t,s) = F(t,u)F(u,s)$$

Όταν δεν ισχύει αυτή η ισότητα, είναι εύκολο να εξαχθούν στρατηγικές εξισορροπητικής κερδοσκοπίας. Επομένως, μέσω της παραπάνω σχέσης αλλά και της ισότητας

$F(t,t) = 1$, προκύπτει ότι, εάν η F είναι ομαλή, τότε υπάρχει μια συνάρτηση $r(t)$ τέτοια, ώστε

$$F(t,T) = \exp\left(\int_t^T r_s\, ds\right),\ 0 \le t < T$$

και συνεπώς

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T r_s\, ds$$

Αν και η συνάρτηση $r(s)$ ερμηνεύεται ως το στιγμιαίο επιτόκιο, σε έναν αβέβαιο κόσμο, αυτή η λογική δεν ισχύει. Τη χρονική στιγμή t, τα μελλοντικά επιτόκια $R(u,T)$ για $T > u > t$, δεν είναι γνωστά. Ωστόσο, διαισθητικά, η ύπαρξη ορισμένων σχέσεων μεταξύ των διαφορετικών επιτοκίων, μπορεί να θεωρηθεί λογική. Στόχος λοιπόν της μοντελοποίησης, είναι ο προσδιορισμός αυτών των σχέσεων.

Το πρώτο σημαντικό ζήτημα είναι η τιμή των ομολόγων. Ένα ομόλογο μηδενικού κουπονιού, ορίζεται ως μια μορφή εγγύησης που αποπληρώνει ένα ευρώ κατά την ημερομηνία λήξης T. Η αξία αυτού του ομόλογου, τη στιγμή t, συμβολίζεται ως $P(t,T)$. Επομένως, $P(T,T) = 1$, ενώ σε έναν κόσμο όπου το μέλλον θεωρείται βέβαιο, η αξία του δίνεται από την εξίσωση

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T r_s ds} \qquad (2)$$

2.2. Καμπύλη απόδοσης για ένα αβέβαιο μέλλον

Σε ένα αβέβαιο μέλλον, πρέπει κανείς να σκεφτεί το στιγμιαίο επιτόκιο, ως μια στοχαστική διαδικασία: μεταξύ των χρόνων t και $t + dt$ είναι δυνατός ο δανεισμός με το επιτόκιο r_t (στην πράξη, αυτό αντιστοιχεί σε ένα βραχυχρόνιο επιτόκιο π.χ. το ημερήσιο-overnight-επιτόκιο). Σε αυτήν την περίπτωση, η μαθηματική μοντελοποίηση καθορίζεται εισάγοντας ένα φιλτραρισμένο χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le \bar{T}})$ όπου $\mathbb{P}$ είναι το πραγματικό μέτρο πιθανότητας της αγοράς. Ωστόσο, πρέπει να σημειωθεί, ότι εδώ, ο πεπερασμένος ορίζοντας συμβολίζεται με $\bar{T}$ και οι διάφορες χρονικές λήξεις T,ικανοποιούν την $0 \le T \le \bar{T}$. Επομένως, εκλαμβάνεται ως υπόθεση, ότι η διήθηση της αγοράς $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le \bar{T}}$ είναι η φυσική διήθηση μιας τυπικής κίνησης Brown $(W_t)_{0\le t\le \bar{T}}$ και ότι $\mathcal{F}_{\bar{T}} = \mathcal{F}$. Όπως και στα υποδείγματα που αναφέρθηκαν προηγουμένως, εισάγεται (χωρίς κίνδυνο) ένα περιουσιακό στοιχείο, του οποίου η τιμή, τη χρονική στιγμή t, δίνεται από την εξίσωση

$$S_t = e^{\int_0^t r_s ds},$$

όπου $(r_s, 0 \le s \le T)$ είναι μια προσαρμοσμένη στοχαστική ανέλιξη που ικανοποιεί (σχεδόν σίγουρα) τη σχέση $\int_0^{\bar{T}} |r_t| dt < \infty$. Στη προκειμένη περίπτωση, τα ριψοκίνδυνα περιουσιακά στοιχεία, είναι τα ομόλογα του μηδενικού τοκομεριδίου, τα οποία έχουν διάρκεια μικρότερη ή ίση με τον ορίζοντα $\bar{T}$. Για δεδομένη διάρκεια $T \in [0, \bar{T}]$, η τιμή στο χρόνο t $(0 \le t \le T)$, του ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου με διάρκεια T, συμβολίζεται με $P(t,T)$. Επίσης, πρέπει να σημειωθεί ότι $P(T,T) = 1$ και ότι η στοχαστική διαδικασία της τιμής $(P(t,T))_{0\le t\le T}$, είναι κατάλληλα προσαρμοσμένη στη φυσική διήθηση της αγοράς

Σύμφωνα με τον Privault N. (2013) το σημείο εκκίνησης αυτής της μοντελοποίησης βασίζεται στην ακόλουθη υπόθεση: Έστω ότι υπάρχει, στον ίδιο χώρο πιθανότητας ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}^*$ που είναι ισοδύναμο με το $\mathbb{P}$. Υπό το μέτρο αυτό και για όλους τους χρόνους ωρίμανσης $T \in [0, \bar{T}]$, η στοχαστική διαδικασία $(\tilde{P}(t,T))_{0\le t\le T}$ που ορίζεται από την εξίσωση

$$\tilde{P}(t,T) = P(t,T) e^{-\int_0^t r_s ds}$$

είναι ένα martingale. Σύμφωνα με την θεωρία της εξισορροπητικής κερδοσκοπίας, arbitrage, αυτό θα ισχύει σε μια δίκαιη αγορά. Αυτή η υπόθεση έχει μερικές ενδιαφέρουσες συνέπειες. Πράγματι, το χαρακτηριστικό της στοχαστικής διαδικασίας υπό το $\mathbb{P}^*$ αλλά και η ισότητα $P(T,T) = 1$, αποδίδουν

$$\tilde{P}(t,T) = \mathbb{E}^*\big(\tilde{P}(T,T) \mid \mathcal{F}_t\big) = \mathbb{E}^*\left(e^{-\int_0^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t\right)$$

και εξαλείφοντας την προεξόφληση προκύπτει ότι

$$P(t,T) = \mathbb{E}^*\left(e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t\right) \qquad (3)$$

Η εξίσωση (3) δίνει την δίκαιη (no arbitrage) αξία του ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου.

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις 2 και3, φαίνεται ότι οι τιμές $P(t,T)$ εξαρτώνται μόνο από τη συμπεριφορά της στοχαστικής διαδικασίας $(r_s, 0 \leq s \leq T)$, υπό το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}^*$. Έτσι, η προηγούμενη υπόθεση για τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq \bar{T}}$, επιτρέπει την έκφραση της πυκνότητας (της πιθανότητας $\mathbb{P}^*$), ως προς το $\mathbb{P}$. Αυτή η πυκνότητα υποδηλώνεται με $L_{\bar{T}}$. Επιπρόσθετα και για οποιαδήποτε μη αρνητική, τυχαία μεταβλητή X, προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}^*(X) = \mathbb{E}(XL_T).$$

όπου $\mathbb{E}^*$ είναι η μέση τιμή υπό το μέτρο $\mathbb{P}^*$. Επίσης, αν μια τ.μ. X είναι $\mathcal{F}_t$ μετρήσιμη, τότε $\mathbb{E}^*(X) = \mathbb{E}(XL_t)$, όπου $L_t = \mathbb{E}(L_T \mid \mathcal{F}_t)$. Επομένως, η τυχαία μεταβλητή L_t είναι η πυκνότητα του μέτρου $\mathbb{P}^*$, η οποία περιορίζεται στο $\mathcal{F}_t$ σε σχέση με το $\mathbb{P}$.

Πρόταση 1. Υπάρχει μια προσαρμοσμένη διαδικασία $(q_t)_{0\leq t\leq \bar{T}}$ τέτοια ώστε, για όλες τις $t \in [0,\bar{T}]$, να ισχύει η ακόλουθη εξίσωση

$$L_t = \exp\left(\int_0^t q_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t q_s^2 ds\right) \tag{4}$$

Απόδειξη. (Η παρακάτω απόδειξη δίνεται και από τους σε Lamberton, D., & Lapeyre, B. (2011) σελ.151). Η διαδικασία $(L_t)_{0\leq t\leq \bar{T}}$ είναι ένα Martingale σε σχέση με την $(\mathcal{F}_t)$, η οποία είναι η φυσική διήθηση της κίνησης Brown. Αυτό συνεπάγεται (από το Θεώρημα Αναπαράστασης Martingale) ότι υπάρχει μια προσαρμοσμένη ανέλιξη $(H_t)_{0\leq t\leq \bar{T}}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $\int_0^{\bar{T}} H_t^2 dt < \infty$, και για όλα τα $t \in [0,\bar{T}]$,

$$L_t = L_0 + \int_0^t H_s dW_s.$$

Εφόσον η $L_{\bar{T}}$ είναι μια πυκνότητα πιθανότητας, ισχύει ότι $\mathbb{E}(L_{\bar{T}}) = 1 = L_0$. Επιπλέον, λόγω του ότι το $\mathbb{P}^*$ είναι ισοδύναμο με το $\mathbb{P}$, προκύπτει ότι $L_{\bar{T}} > 0$ και γενικότερα, ότι $\mathbb{P}(L_t > 0) = 1$ για οποιαδήποτε t. Όμως, για να μπορέσει να ληφθεί η Εξίσωση 3, πρέπει πρώτα να εφαρμοστεί ο τύπος του Itô (Itô's lemma) με την αντίστοιχη λογαριθμική συνάρτηση. Αρχικά, πρέπει να ελεγχθεί ότι

$$\mathbb{P}\left(\forall t \in [0,\bar{T}], L_0 + \int_0^t H_s dW_s > 0\right) = 1$$

Η απόδειξη αυτής της σχέσης βασίζεται στην ιδιότητα Martingale. Στη συνέχεια, ο τύπος του Itô αποδίδει την εξίσωση

$$\log(L_t) = \int_0^t \frac{1}{L_s} H_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{L_s^2} H_s^2 ds$$

η οποία οδηγεί στην Εξίσωση 4 με $q_t = H_t / L_t$.

Πόρισμα. Η τιμή, τη χρονική στιγμή t του ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου, με διάρκεια $T \geq t$, μπορεί να εκφραστεί ως

$$P(t,T) = \mathbb{E}\left(\exp\left(-\int_t^T r_s ds + \int_t^T q_s dW_s - \frac{1}{2}\int_t^T q_s^2 ds\right) \mid \mathcal{F}_t\right) \tag{5}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα, μέσω της Πρότασης 1 και από τον ακόλουθο τύπο, ο οποίος είναι εύκολο να εξαχθεί για οποιαδήποτε μη αρνητική, τυχαία μεταβλητή X

$$\mathbb{E}^*(X \mid \mathcal{F}_t) = \frac{\mathbb{E}(X L_{\bar{T}} \mid \mathcal{F}_t)}{L_t} \tag{6}$$

Η ακόλουθη πρόταση προτείνει μια οικονομική ερμηνεία για τη διαδικασία $(q(t))$ (βλ. Παρατήρηση 1 παρακάτω).

Πρόταση 2. Για κάθε διάρκεια T, υπάρχει μια προσαρμοσμένη διαδικασία $(\sigma_t^T)_{0 \leq t \leq T}$, έτσι ώστε

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = (r_t - \sigma_t^T q_t))dt + \sigma_t^T dW_t,\ 0 \leq t \leq T \tag{7}$$

Απόδειξη. Η διαδικασία $(\tilde{P}(t,T))_{0 \leq t \leq T}$ είναι ένα Martingale υπό την πιθανότητα $\mathbb{P}^*$. Επιπλέον, ισχύει ότι $\tilde{P}(t,T)L_t > 0$, για όλες τις $t \in [0,T]$. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την ίδια λογική όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 1, φαίνεται ότι υπάρχει μια προσαρμοσμένη διαδικασία $(\theta_t^T)_{0\le t\le T}$, τέτοια ώστε $\int_0^T (\theta_t^T)^2 dt < \infty$ και

$$\tilde{P}(t,T)L_t = \tilde{P}(0,T)e^{\int_0^t \theta_s^T dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t (\theta_s^T)^2 ds}$$

Ως εκ τούτου, χρησιμοποιώντας την σαφή έκφραση (εξίσωση 3) για την L_t και έχοντας απαλλαχθεί από τον παράγοντα προεξόφλησης, προκύπτει η παρακάτω εξίσωση

$$\begin{aligned} P(t,T) = \quad & P(0,T)\exp\left(\int_0^t r_s ds + \int_0^t (\theta_s^T - q_s))dW_s \right. \\ & \left. -\frac{1}{2}\int_0^t ((\theta_s^T)^2 - q_s^2)ds\right) \end{aligned}$$

Τέλος, εφαρμόζοντας τον μαθηματικό τύπο του Itô για την εκθετική συνάρτηση, προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση

$$\begin{aligned} \frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = \quad & r_t dt + (\theta_t^T - q_t))dW_t - \frac{1}{2}((\theta_t^T)^2 - q_t^2)dt \\ & + \frac{1}{2}(\theta_t^T - q_t)^2 dt \\ = \quad & (r_t + q_t^2 - \theta_t^T)dt + (\theta_t^T - q_t)dW_t \end{aligned}$$

η οποία δίνει το αποτέλεσμα της Εξίσωσης 7 με $\sigma_t^u = \theta_t^u - q_t$.

Παρατήρηση 1. Ο τύπος της Εξίσωσης 7 συσχετίζεται με την ισότητα $dS_t = r_t S_t dt$, η οποία ικανοποιείται από το λεγόμενο «περιουσιακό στοιχείο χωρίς κίνδυνο» (riskless asset). Ειδικότερα, ο όρος dW_t κάνει το ομόλογο πιο επικίνδυνο, ενώ ο όρος $r_t - \sigma_t^T q_t$ αντιστοιχεί διαισθητικά, στη μέση απόδοση (δηλαδή στην προσδοκία). Τέλος, ο όρος $-\sigma_t^T q_t$ είναι η διαφορά μεταξύ της μέσης απόδοσης του ομολόγου και του άνευ κινδύνου επιτοκίου, εξ ου και η ερμηνεία του $-q_t$ ως ασφάλιστρο κινδύνου. Χάρη στο μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}^*$, η διαδικασία $(\tilde{W}_t)$ που ορίζεται από την $\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t q_s ds$, είναι μια τυπική κίνηση Brown (από το Θεώρημα Girsanov) από την οποία προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r_t dt + \sigma_t^T d\tilde{W}_t \tag{8}$$

Επομένως, υπό το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}^*$, το αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης των ομολόγων, είναι ίσο με το άνευ κινδύνου επιτόκιο. Για το λόγο αυτό, το μέτρο $\mathbb{P}^*$ ονομάζεται μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου (risk neutral probability measure). Μία αγορά μάλιστα όπου η ύπαρξη τέτοιου μέτρου πιθανότητας είναι μοναδική καλείται πλήρης αγορά (complete market).Αξίζει επίσης να αναφερθεί, ότι επιλύοντας την Εξίσωση 7, προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση

$$P(t,T) = P(0,T)e^{\int_0^t r_s ds} \exp\left(\int_0^t \sigma_s^T d\tilde{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^t (\sigma_s^T)^2 ds\right) \tag{9}$$

2.3. Κλασσικά υποδείγματα

Σε αντίθεση με την μοντελοποίηση των τιμών των μετοχών όπου επικρατεί το υπόδειγμα της Γεωμετρικής κίνησης Brown (Geometric Brownian motion), στην περίπτωση των στοχαστικών επιτοκίων δεν υπάρχει κάτι αντίστοιχο. Έχουν προταθεί κατά καιρούς διάφορα υποδείγματα αλλά δεν έχει επικρατήσει ξεκάθαρα κάποιο. Έχει παρατηρηθεί ότι οι ανελίξεις του ρυθμού επιτοκίου έχουν δύο βασικές ιδιότητες. Η πρώτη είναι αυτή της στασιμότητας (stationary stochastic process). Υπενθυμίζεται ότι μία στοχαστική ανέλιξη $(X_t, t \geq 0)$ ονομάζεται στάσιμη όταν για κάθε συλλογή χρονικών δεικτών $0 \leq t_1 < t_2 <..< t_m$ η από κοινού κατανομή (joint distribution) των $(X_{t_1}, X_{t_2}, .., X_{t_m})$ είναι ίδια με αυτήν των $\left(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, .., X_{t_m+h}\right)$ για κάθε $h \geq 0$. Η δεύτερη ιδιότητα που τις χαρακτηρίζει είναι ότι έχουν την τάση να επανέρχονται σε ένα μέσο (mean reverting processes) ο οποίος είναι σταθερός σε συγκεκριμένες χρονικές περιόδους. Δηλαδή αν κάποιος ρυθμός επιτοκίου r_t ξεπεράσει αυτό τον μέσο τότε έχει την τάση να μειωθεί, ενώ αντίστοιχα αν βρεθεί κάτω από την τιμή αυτή τότε έχει την τάση να αυξηθεί.

2.3.1 Το υπόδειγμα Vasicek

Σε αυτό το υπόδειγμα, εκλαμβάνεται ως υπόθεση ότι η ανέλιξη του ρυθμού επιτοκίου $(r_t, t \geq 0)$ ικανοποιεί την ακόλουθη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t \qquad (10)$$

όπου τα a, b, σ είναι μη αρνητικές σταθερές. Ομοίως, η διαδικασία $q(t)$ θεωρείται ως σταθερά $q(t) = -\lambda$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Έπειτα, προκύπτει η εξίσωση

$$dr_t = a(b^* - r_t)dt + \sigma d\tilde{W}_t \qquad (11)$$

όπου $b^* = b - \lambda\sigma/a$ και $\tilde{W}_t = W_t + \lambda t$. Ωστόσο, σύμφωνα με αυτό το υπόδειγμα και πριν τον υπολογισμό της τιμής των ομολόγων, προκύπτουν μερικές συνέπειες από την Εξίσωση 9. Εάν οριστεί

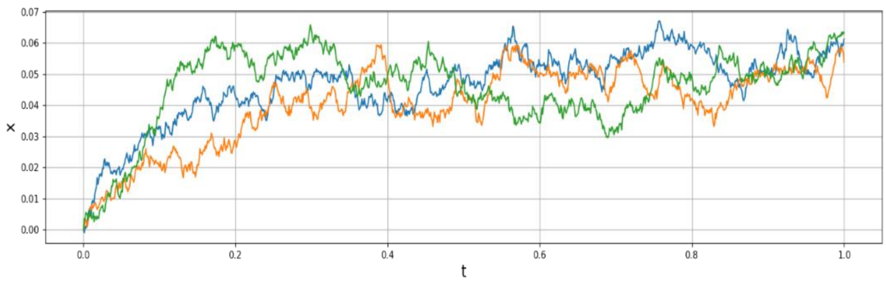
$$X_t = r_t - b$$

προκύπτει ότι η στοχαστική διαδικασία $(X_t, t \geq 0)$ είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma dW_t$$

Αυτό σημαίνει, ότι η $(X_t, t \geq 0)$ είναι μια στοχαστική διαδικασία τύπου Ornstein-Uhlenbeck (Βλέπε π.χ. Barndorff-Nielsen, O. E. & Shephard N. (2001)).

Παρακάτω δίνονται 3 τυχαίες τροχιές της ανέλιξης Ornstein-Uhlenbeck με παραμέτρους $b = 0.05, \sigma = 0.04$ και drift parameter $a = 10$, από όπου φαίνεται καθαρά η τάση επιστροφής στο μέσο $b = 0.05$.



Εικόνα 2.3.1 : Τυχαίες πραγματοποιήσεις της ανέλιξης Ornstein-Uhlenbeck

Επομένως, επιλύοντας την παραπάνω στοχαστική διαφορική εξίσωση μέσω του τύπου του Ito αποδεικνύεται ότι το r_t μπορεί να γραφτεί ως

$$r_t = b + (r_0 - b)e^{-at} + +\sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s \qquad (12)$$

και ως γραμμικός μετασχηματισμός του ολοκληρώματος του Wiener το r_t κατανέμεται κανονικά, με μέση τιμή και διακύμανση που δίνονται από την εξίσωση

$$E(r_t) = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}), \quad \mathrm{Var}(r_t) = \frac{\sigma^2(1 - e^{-2at})}{2a}$$

Επομένως, το r_t μπορεί να είναι αρνητικό αλλά με θετική πιθανότητα. Βέβαια, από πρακτική άποψη, αυτό το γεγονός δεν είναι πολύ ικανοποιητικό (εκτός αν αυτή η πιθανότητα είναι πάντα πολύ μικρή). Πρέπει επίσης να σημειωθεί, ότι όταν το t τείνει προς το άπειρο, τότε, το r_t συγκλίνει κατά κατανομή (convergence in distribution), σε μια κανονική κατανομή, με μέσο b και διακύμανση $\sigma^2/2a$. Έτσι, προκειμένου να υπολογισθεί η τιμή των ομολόγων (μηδενικού τοκομεριδίου), θεωρούμε ότι η στοχαστική διαδικασία εξελίσσεται σύμφωνα με την πιθανότητα $\mathbb{P}^*$ και χρησιμοποιούμε την Εξίσωση 10. Με βάση την Εξίσωση 2, του προηγούμενου κεφαλαίου, προκύπτει η παρακάτω εξίσωση

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \mathbb{E}^*\left(e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t\right) \\ &= e^{-b^*(T-t)} \mathbb{E}^*\left(e^{-\int_t^T X_s^* ds} \mid \mathcal{F}_t\right) \end{aligned} \qquad (13)$$

όπου $X_t^* = r_t - b^*$. Όμως, επειδή το (X_t^*) είναι η λύση της εξίσωσης της διάχυσης, σύμφωνα με τους παρακάτω συντελεστές (είναι ανεξάρτητοι από τον χρόνο)

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma d\tilde{W}_t \qquad (14)$$

προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση

$$\mathbb{E}^*\left(e^{-\int_t^T X_s^* ds} \mid \mathcal{F}_t\right) = F(T - t, X_t^*) = F(T - t, r_t - b^*) \qquad (15)$$

όπου F είναι η συνάρτηση που ορίζεται από την $F(\theta,x)=\mathbb{E}^*\left(e^{-\int_0^\theta X_s^x ds}\right)$ και (X_t^x) είναι η μοναδική λύση της Εξίσωσης 13, η οποία ικανοποιεί την $X_0^x=x$. Η διαδικασία (X_t^x) είναι τύπου Gaussian (βλέπε π.χ. Lamberton & Lapeyre (2011)), με συνεχείς διαδρομές. Βάσει αυτού, προκύπτει ότι η $\int_0^\theta X_s^x ds$ είναι μια κανονική, τυχαία μεταβλητή (δεδομένου ότι το ολοκλήρωμα, είναι το όριο των αθροισμάτων Riemann, που είναι τύπου Gaussian). Έτσι, σύμφωνα με την έκφραση του μετασχηματισμού Laplace μιας κανονικής τ.μ., προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}^*\left(e^{-\int_0^\theta X_s^x ds}\right)=\exp\left(-\mathbb{E}^*\left(\int_0^\theta X_s^x ds\right)+\frac{1}{2}\mathrm{Var}\left(\int_0^\theta X_s^x ds\right)\right)$$

Μέσω της ισότητας $\mathbb{E}^*(X_s^x)=xe^{-as}$ συμπεραίνεται ότι

$$\mathbb{E}^*\left(\int_0^\theta X_s^x ds\right)=x\frac{1-e^{-a\theta}}{a}$$

Για τον υπολογισμό της διακύμανσης, η ακόλουθη εξίσωση μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(\int_0^\theta X_s^x ds\right)&=\mathrm{Cov}\left(\int_0^\theta X_s^x ds,\int_0^\theta X_s^x ds\right)\\&=\int_0^\theta\int_0^\theta \mathrm{Cov}(X_t^x,X_u^x)dudt\end{aligned}\qquad(16)$$

Επειδή $X_t^x=xe^{-at}+\sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}d\tilde{W}_s$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\,(X_t^x,X_u^x)&=\sigma^2e^{-a(t+u)}\mathbb{E}^*\left(\int_0^t e^{as}d\tilde{W}_s\int_0^u e^{as}d\tilde{W}_s\right)\\&=\sigma^2e^{-a(t+u)}\int_0^{t\wedge u}e^{2as}ds\\&=\sigma^2e^{-a(t+u)}\frac{\left(e^{2a(t\wedge u)}-1\right)}{2a}\end{aligned}$$

έτσι ώστε, επιστρέφοντας στην Εξίσωση 16, να προκύψει η ακόλουθη εξίσωση

$$\mathrm{Var}\left(\int_0^\theta X_s^x ds\right)=\frac{\sigma^2\theta}{a^2}-\frac{\sigma^2}{a^3}\left(1-e^{-a\theta}\right)-\frac{\sigma^2}{2a^3}\left(1-e^{-a\theta}\right)^2$$

Στη συνέχεια συνδυάζοντας τις εξισώσεις 13 και 1 προκύπτει ο ακόλουθος τύπος

$$P(t,T) = \exp\left[-(T-t)R(T-t,r_t)\right]$$

όπου το $R(T-t,r_t)$, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως το μέσο επιτόκιο για την περίοδο $[t,T]$, δίνεται από την σχέση

$$R(\theta,r) = R_\infty - \frac{1}{a\theta}\left[(R_\infty - r)\left(1-e^{-a\theta}\right) - \frac{\sigma^2}{4a^2}\left(1-e^{-a\theta}\right)^2\right]$$

με $R_\infty = \lim_{\theta\to\infty} R(\theta,r) = b^* - \sigma^2/(2a^2)$ (για την αναλυτική απόδειξη των παραπάνω βλέπε π.χ Privault, N. (2012), Chapter 4) Η απόδοση R_∞ μπορεί να ερμηνευτεί ως ένα μακροπρόθεσμο επιτόκιο αλλά δεν εξαρτάται από το «στιγμιαίο επιτόκιο» r. Αυτή η τελευταία ιδιότητα, θεωρείται από τους επαγγελματίες ως ένα πολύ σημαντικό μειονέκτημα του υποδείγματος.

Στο υπόδειγμα Vasicek, οι μεταβλητότητες των ομολόγων, ενός μηδενικού τοκομεριδίου, είναι ντετερμινιστικές. Αυτό συμβαίνει έτσι ώστε να μπορούν να προκύπτουν διάφοροι τύποι (κλειστής μορφής), για την τιμολόγηση και την αντιστάθμιση των δικαιωμάτων προαίρεσης.

Παρατήρηση 2. Στην πράξη, πρέπει να εκτιμηθούν σωστά οι παράμετροι και να επιλεγεί μια τιμή για το r. Για την τιμή του r, μπορεί να επιλεγεί ένα μικρό επιτόκιο (για παράδειγμα, το επιτόκιο μίας ημέρας). Σε αυτήν την περίπτωση, οι παράμετροι a, b, σ μπορούν να εκτιμηθούν με στατιστικές μεθόδους (από ιστορικά δεδομένα) για τον στιγμιαίο ρυθμό. Τέλος, το λ μπορεί να προσδιοριστεί από τα δεδομένα της αγοράς, αντιστρέφοντας τον τύπο Vasicek. Στην ουσία, αυτό που κάνουν οι επαγγελματίες, είναι να προσδιορίζουν τις παραμέτρους (συμπεριλαμβανομένου του r), προσαρμόζοντας τον τύπο του Vasicek στα δεδομένα της αγοράς (calibration).

2.3.2. Το υπόδειγμα Ho-Lee

Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο, η ανέλιξη του ρυθμού επιτοκίου ικανοποιεί την παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dr_t = \theta(t)dt + \sigma dW_t, t \geq 0 \qquad (17)$$

όπου $\theta(t)$ είναι μία ντετερμινιστική συνάρτηση του χρόνου και W μία τυπική κίνηση Brown, $W \sim BM(0,1)$.

Από τον τύπο του Ito ισχύει ότι

$$d(xr_x) = r_x dx + xdr_x$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση στο διάστημα από t έως T

$$[xr_x]_t^T = \int_t^T r_x\, dx + \int_t^T xdr_x$$

ή ισοδύναμα

$$Tr_T - tr_t = \int_t^T r_x\, dx + \int_t^T xdr_x \tag{18}$$

Προσθαφαιρώντας το γινόμενο Tr_t στο πρώτο μέλος της (18) και κάνοντας ομαδοποίηση εν συνεχεία, προκύπτει ότι

$$Tr_T - tr_t = (r_T - r_t)T + (T-t)r_t = T\int_t^T dr_x + (T-t)r_t \tag{19}$$

Αντικαθιστώντας την (19) στην (18) και λύνοντας ως προς $\int_t^T r_x\, dx$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\int_t^T r_x\, dx &= (T-t)r_t + \int_t^T Td\, r_x - \int_t^T xdr_x = (T-t)r_t + \int_t^T (T-x)dr_x \\ &= (T-t)r_t + \int_t^T (T-x)(\,\theta(x)dx + \sigma dW_x) \\ &= (T-t)r_t + k(t,T) + \sigma\int_t^T (T-x)dW_x\end{aligned}$$

όπου $k(t,T) := \int_t^T (T-x)\theta(x)dx$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεδομένης της πληροφορίας μέχρι τον χρόνο t,$\mathcal{F}_t$, η τυχαία μεταβλητή $\int_t^T r_x\, dx$ ακολουθεί κανονική κατανομή, ως γραμμικός μετασχηματισμός του ολοκληρώματος του Wiener, με μέση τιμή

$$\mathbb{E}^*\left(\int_t^T r_x\, dx|\mathcal{F}_t\right) = (T-t)r_t + k(t,T) + \sigma\mathbb{E}^*\left(\int_t^T (T-x)dW_x\right)$$
$$= (T-\tau)r_t + k(t,T)$$

και διακύμανση

$$Var^*\left(\int_t^T r_x\, dx|\mathcal{F}_t\right) = Var^*\left(\sigma\int_t^T (T-x)dW_x\right) = \sigma^2\left(\mathbb{E}^*\left(\int_t^T (T-x)dW_x\right)^2\right)$$
$$= \sigma^2\mathbb{E}^*\left(\int_t^T (T-x)^2\, dx\right) = \sigma^2\left[\frac{(T-x)^3}{3}\right]_T^t = \frac{\sigma^2(T-t)^3}{3}$$

χρησιμοποιώντας την ισομετρία Itô για το ολοκλήρωμα Wiener.

Άρα η δίκαιη αξία του ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου υπό το μοντέλο Ho-Lee θα είναι

$$P(t,T) = \mathbb{E}^*\left(e^{-\int_t^T r_x dx}\,|\mathcal{F}_t\right) = e^{-(T-t)r_t - k(t,T) + \frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3}$$

διότι η τυχαία μεταβλητή $e^{-\int_t^T r_x dx}$ ακολουθεί λογαριθμοκανονική (lognormal) κατανομή.

Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι το υπόδειγμα Ho-Lee είναι ειδική περίπτωση μιας κατηγορίας στοχαστικών μοντέλων βραχυπρόθεσμων επιτοκίων που ονομάζονται affine models. Σε αυτά η ανέλιξη του επιτοκίου ικανοποιεί την παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dr_t = (\kappa(t) + \lambda(t)r_t)dt + \sqrt{\delta(t) + \gamma(t)r_t}dW_t$$

όπου $\kappa(t), \lambda(t), \delta(t)\ και\ \gamma(t)$ ντετερμινιστικές συναρτήσεις του χρόνου t. Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε π.χ. Kijima Masaaki (2013) σελ. 276.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΟΝΤΕΛΑ ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

Τα μοντέλα Πιστωτικού Κινδύνου χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, στα δομικά (**structural**) ή αξίας επιχείρησης (**firm-value**) μοντέλα και στα μειωμένης μορφής (**reduced-form)** μοντέλα τα οποία θα αναλυθούν και εκτενέστερα. Στα πρώτα ο χρόνος αθέτησης των υποχρεώσεων (default time) ορίζεται ως ένας χρόνος διακοπής ως προς την διήθηση της αξίας της επιχείρησης και το πιστωτικό γεγονός εμφανίζεται μόλις η τιμή της στοχαστικής διαδικασίας (ενεργητικό μείον υποχρεώσεις) γίνει μικρότερη από ένα προκαθορισμένο κατώφλι. Τα μοντέλα μειωμένης μορφής στηρίζονται στον χρόνο αθέτησης των υποχρεώσεων χωρίς όμως να είναι γνωστός ο ακριβής μηχανισμός που καθορίζει τον χρόνο αυτό εμφάνισης του πιστωτικού γεγονότος. Τον μοντελοποιούν σαν μία μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή της οποίας η κατανομή τυπικά εξαρτάται από κάποιες οικονομικές συμμεταβλητές και τον θεωρούν σαν ένα εξωγενή τυχαίο χρόνο που χαρακτηρίζεται από τον ρυθμό αθέτησής του (hazard rate).

Για περισσότερες πληροφορίες πάνω στα μοντέλα Πιστωτικού Κινδύνου ο αναγνώστης παραπέμπεται π.χ. στην 2η έκδοση των Brigo and Mercurio (2006), στους Jarrow and Yu (2001) και Bielecki and Rutkowski (2002). Επίσης οι Duffie and Lando (2001) απέδειξαν μία σχέση μεταξύ των δύο παραπάνω μοντέλων σε συνεχή χρόνο. Ουσιαστικά έδειξαν ότι από την οπτική των επενδυτών με ελλιπείς λογιστικές πληροφορίες (π.χ. ελλιπείς πληροφορίες σχετικά με τα περιουσιακά στοιχεία ή τις υποχρεώσεις μίας επιχείρησης) ένα δομικό μοντέλο μετατρέπεται σε μοντέλο μειωμένης μορφής.

Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου θα παρουσιασθούν τα δομικά μοντέλα, στο δεύτερο θα αναλυθούν τα μοντέλα μειωμένης μορφής και στο τρίτο θα περιγραφούν και αποτιμηθούν οι συμβάσεις ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου (**Credit Default Swaps, CDS**).

Με τον όρο «πιστωτικός κίνδυνος» εννοούμε το ενδεχόμενο εμφάνισης πιστωτικού γεγονότος, δηλαδή την ολική ή μερική αδυναμία εκπλήρωσης των υποχρεώσεων μίας οντότητας π.χ. μίας επιχείρησης, ενός κράτους.

Για τον επίσημο χαρακτηρισμό ενός γεγονότος ως «πιστωτικού» αποφασίζει ο Διεθνής Οργανισμός Χρηματοοικονομικών Συναλλαγών, International Swaps and Derivatives Association (**ISDA**),σύμφωνα με προκαθορισμένους κανόνες, ενεργοποιώντας ταυτόχρονα όλες τις συνέπειες που προβλέπονται.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο υπολογίσαμε την δίκαιη αξία ενός ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου υπό το υπόδειγμα επιτοκίου του Vasicek και των Ho-Lee, υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει πιστωτικός κίνδυνος, δηλαδή ότι ο εκδότης του ομολόγου αποπληρώνει πάντοτε και στο ακέραιο τον δανειστή στο χρόνο ωρίμανσης T όπως π.χ. συμβαίνει στην περίπτωση των κρατικών ομολόγων οικονομικά εύρωστων κρατών και των βραχυπρόθεσμων διατραπεζικών δανείων. Στην αγορά όμως διατίθενται και ομόλογα οντοτήτων (π.χ. επιχειρήσεων) τα οποία εμπεριέχουν κίνδυνο αθέτησης και συνεπώς ο κάτοχος του ομολόγου διατρέχει πιστωτικό κίνδυνο.

3.1 Δομικά Μοντέλα

Ένα μοντέλο Πιστωτικού Κινδύνου χαρακτηρίζεται ως Δομικό (**structural**) ή μοντέλο Αξίας – Επιχείρησης (**firm -value**) όταν προσπαθεί να εξηγήσει τον μηχανισμό με τον οποίο προκύπτει το πιστωτικό γεγονός, σχετίζοντάς το με την αξία (value) της επιχείρησης.

3.1.1 Μοντέλο του Merton

Το μοντέλο του Merton (1974) είναι ο πρόγονος όλων των δομικών μοντέλων. Αν και πολλές επεκτάσεις αυτού έχουν αναπτυχθεί με την πάροδο των χρόνων, το αρχικό μοντέλο παραμένει σημείο αναφοράς στην ανάλυση του πιστωτικού κινδύνου.

Θεωρούμε μια επιχείρηση όπου η αξία των περιουσιακών της στοιχείων ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία $(V_t, t \geq 0)$. Η επιχείρηση αυτοχρηματοδοτείται από τα ίδια κεφάλαια της (π.χ. εκδίδοντας μετοχές) και μέσω χρέους (π.χ. εκδίδοντας ομόλογα). Στο μοντέλο του Merton η $(V_t, t \geq 0)$ ακολουθεί Γεωμετρική κίνηση Brown δηλαδή :

$$V_t = V_0 e^{\mu_V t + \sigma_V W_t}, \ 0 \leq t \leq T \qquad (20)$$

όπου μ_V, σ_V σταθερές με $\mu_V \in \mathbb{R}, \sigma_V > 0$ και $(W_t, t \geq 0) \sim BM(0,1)$.

Το χρέος αποτελείται από ένα ομόλογο μηδενικού τοκομεριδίου με χρόνο ωρίμανσης T και ονομαστική αξία (face value) K. Ακόμα υποθέτουμε ότι η επιχείρηση δεν πληρώνει μερίσματα ή δεν μπορεί να εκδώσει νέο χρέος. Το πιστωτικό γεγονός συμβαίνει μόλις η επιχείρηση αθετήσει μια πληρωμή τους τους κατόχους του χρέους, το οποίο μπορεί να συμβεί μόνο στο χρόνο λήξης T του ομολόγου στο εν λόγω μοντέλο.

Στο χρόνο ωρίμανσης, T, του ομολόγου διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις :

1. $V_T \geq K$: η αξία των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης καλύπτει πλήρως τις υποχρεώσεις της. Τότε οι κάτοχοι του χρέους (ομολογιούχοι) λαμβάνουν ποσό K και δεν έχουμε πιστωτικό γεγονός.
2. $V_T < K$: η αξία των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης είναι μικρότερη από τις υποχρεώσεις της, αδυνατώντας να τις καλύψει. Σε αυτήν την περίπτωση οι κάτοχοι του χρέους παίρνουν τον έλεγχο της επιχείρησης ρευστοποιώντας τα περιουσιακά της στοιχεία και λαμβάνοντας ποσό V_T ίσο με την αξία των περιουσιακών της στοιχείων στην λήξη του ομολόγου.

Θέτοντας στην (19) όπου $t = T$ και στην συνέχεια διαιρώντας την εξίσωση που προκύπτει με την (19) παίρνουμε ότι :

$$V_T = V_t e^{\mu_V (T-t) + \sigma_V (W_T - W_t)} \qquad (21)$$

Επειδή όμως οι προσαυξήσεις της κίνησης Brown ακολουθούν κανονική κατανομή θα ισχύει ότι $W_T - W_t \sim N(0, \sqrt{T-t})$ και θεωρώντας μια τυχαία μεταβλητή $Z \sim N(0,1)$ η εξίσωση (20) μετασχηματίζεται ως εξής :

$$V_T = V_t e^{\mu_V (T-t) + \sigma_V \sqrt{T-t}\, Z} \qquad (22)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (21) μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα εμφάνισης πιστωτικού γεγονότος την χρονική στιγμή T ωρίμανσης του ομολόγου, δεδομένου ότι βρισκόμαστε στο χρόνο t :

$$\Pr(V_T < K | V_t = v) = \Pr(Z < d) = \Phi(d)$$

όπου $d = \frac{\ln\left(\frac{K}{v}\right) - \mu_V(T-t)}{\sigma_V\sqrt{T-t}}$ και Φ η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής.

Η παραπάνω πιθανότητα ονομάζεται Αναμενόμενη Συχνότητα Αθέτησης (Expected Default Frequency) και παρατηρούμε ότι είναι αύξουσα συνάρτηση του χρέους K ενώ είναι φθίνουσα συνάρτηση τόσο του μ_V όσο και της αξίας $v = V_t$ που έχουν τα περιουσιακά στοιχεία της επιχείρησης την χρονική στιγμή που εξετάζουμε την πιθανότητα αθέτησης.

Πρακτικά βέβαια ο υπολογισμός της παραπάνω πιθανότητας είναι δύσκολος διότι δεν είναι εφικτό να παρακολουθούμε την στοχαστική ανέλιξη $(V_t, t \in [0, T])$ της αξίας των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης ώστε να μπορέσουμε να υπολογίσουμε της παραμέτρους της μ_V, σ_V. Ακόμη η επιλογή της κίνησης Brown ως πηγή θορύβου της αξίας των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης ίσως δεν είναι η πλέον κατάλληλη γιατί συνήθως το ενεργητικό μιας εταιρείας παρουσιάζει βαριές ουρές, οπότε θα ήταν πιο κοντά στην πραγματικότητα να επιλέξουμε τις μεταβολές του λογαρίθμου της V να εκφράζονται από μία άλλη κατανομή με βαριά ουρά και όχι από την κανονική.

Το μοντέλο του Merton είναι μια απλοποιημένη περιγραφή της εμφάνισης πιστωτικού γεγονότος. Αφενός διότι η δομή του χρέους μιας επιχείρησης είναι πολύ πιο πολύπλοκη έτσι ώστε η αθέτηση μπορεί να συμβεί σε πολλές διαφορετικές χρονικές στιγμές. Αφετέρου γιατί σύμφωνα με τον σύγχρονο κώδικα χρεοκοπίας, αθέτηση υποχρεώσεων δεν σημαίνει απαραίτητα και χρεοκοπία της επιχείρησης δηλαδή ρευστοποίηση των περιουσιακών της στοιχείων.

Παρόλα αυτά το μοντέλο αυτό, είναι ένα βασικό σημείο εκκίνησης για την μελέτη του πιστωτικού κινδύνου και για την τιμολόγηση αξιογράφων που ενέχουν κίνδυνο αθέτησης.

3.2 Μοντέλα Μειωμένης Μορφής

Τα μοντέλα μειωμένης μορφής υιοθετούν μια εξωγενή στοχαστική διαδικασία ρυθμού αθέτησης, η οποία εκφράζει το πόσο πιθανό είναι να συμβεί μια απροσδόκητη αθέτηση υποχρεώσεων από μέρους μιας εταιρείας. Στηρίζονται στο χρόνο αθέτησης χωρίς όμως να είναι γνωστός ο ακριβής μηχανισμός που καθορίζει τον χρόνο αυτό και οδηγεί σε πιστωτικό γεγονός.

Έστω τ μία συνεχής μη-αρνητική πραγματική τυχαία μεταβλητή που συμβολίζει τον χρόνο αθέτησης υποχρεώσεων (default time) μιας επιχείρησης και έστω ακόμα F η συνάρτηση κατανομής της. Υποθέτουμε ότι $\Pr(\tau > 0) = 1$ και $\Pr(\tau > t) > 0 \;\; \forall t > 0$.

Η πιθανότητα να συμβεί πιστωτικό γεγονός στο χρονικό διάστημα $(t, t + h], h > 0$ δεδομένου ότι δεν έχει συμβεί μέχρι και τον χρόνο t, θα ισούται με :

$$\Pr(\tau \in (t, t + h] | \tau > t) = \frac{\Pr\,(t < \tau \leq t + h)}{\Pr\,(\tau > t)} = \frac{F(t + h) - F(t)}{S(t)}$$

όπου $S(t) = 1 - F(t)$ η συνάρτηση επιβίωσης της τυχαίας μεταβλητής τ.

Διαιρώντας την παραπάνω σχέση με h και παίρνοντας το όριο για $h \to 0$ προκύπτει ότι :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Pr(\tau \in (t, t + h] | \tau > t)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{F(t + h) - F(t)}{h} \frac{1}{S(t)} \right) = \frac{dF(t)}{dt} \frac{1}{S(t)} = \frac{f(t)}{S(t)}$$

με $t \geq 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένταση ή ρυθμός αθέτησης $\boldsymbol{\lambda}$ (hazard rate) μίας οντότητας (π.χ. μιας επιχείρησης, ενός κράτους) στο χρόνο t ονομάζεται το πηλίκο :

$$\lambda(t) \coloneqq \frac{f(t)}{S(t)}, t \geq 0$$

Δηλαδή ο ρυθμός αθέτησης είναι η τάση να συμβεί πιστωτικό γεγονός την επόμενη στιγμή δεδομένου ότι δεν έχει συμβεί μέχρι τώρα.

Επειδή $f(t) = -(S(t))'$ από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι :

$$\lambda(t) = -\frac{\big(S(t)\big)'}{S(t)} = -(\ln\ S(t))'$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη από την χρονική στιγμή 0 έως t :

$$\int_0^t \lambda(u)du = -\int_0^t (\ln\ S(u))'du = -ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) = -ln(S(t))$$

διότι $S(0) = \Pr(\tau \geq 0) = 1$. Τελικά λύνοντας ως προς $S(t)$:

$$S(t) = \Pr(\tau > t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)du\right), t \geq 0 \qquad (23)$$

Στην περίπτωση όπου ο ρυθμός αθέτησης είναι σταθερός ως προς το χρόνο δηλαδή $\lambda(t) = \lambda > 0$ τότε από την εξίσωση (22) προκύπτει ότι :

$$\Pr(\tau > t) = e^{-\int_0^t \lambda du} = e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

δηλαδή ο χρόνος αθέτησης τ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή όταν ο χρόνος αθέτησης υποχρεώσεων ακολουθεί εκθετική κατανομή τότε ο ρυθμός αθέτησης είναι σταθερός συναρτήσει του χρόνου.

3.2.1 Στοχαστικός ρυθμός αθέτησης

Στην πράξη ο ρυθμός αθέτησης είναι στοχαστικός και όχι ντετερμινιστικός. Θεωρώντας ένα χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, όπου $\mathbb{P}$ το μέτρο πιθανότητας που ισχύει στην αγορά και $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ η χωρίς αθέτηση (default free) διήθηση της τελευταίας δηλαδή η πληροφορία που είναι διαθέσιμη στους επενδυτές σε μία αγορά όπου δεν υπάρχει κίνδυνος αθέτησης υποχρεώσεων. Θεωρούμε ότι η στοχαστική διαδικασία του ρυθμού αθέτησης $\lambda = (\lambda_t, t \geq 0)$ είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση $\mathcal{F}$ δηλαδή οι τιμές $\lambda_u, u \leq t$ θα είναι γνωστές. Τότε από την εξίσωση (23) θα έχουμε ότι :

$$\Pr(\tau > t|\mathcal{F}_t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_u du\right), t \geq 0 \qquad (24)$$

Θέτοντας $t = T$ στην παραπάνω σχέση και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα tower property της δεσμευμένης μέσης τιμής έχουμε ότι :

$$\begin{aligned}\Pr(\tau > T|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}\big(1_{[\tau>T]}|\mathcal{F}_t\big) = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big(1_{[\tau>T]}|\mathcal{F}_T\big)|\mathcal{F}_t\big] = \mathbb{E}[\Pr(\tau > T|\mathcal{F}_T)\,|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^T \lambda_u du}|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^t \lambda_u du}e^{-\int_t^T \lambda_u du}|\mathcal{F}_t\right] \\ &= e^{-\int_0^t \lambda_u du}\mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T \lambda_u du}|\mathcal{F}_t\right]\end{aligned}$$

Δηλαδή :

$$\Pr(\tau > T|\mathcal{F}_t) = e^{-\int_0^t \lambda_u du}\mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T \lambda_u du}|\mathcal{F}_t\right] \qquad (25)$$

Ο χρόνος αθέτησης τ δεν είναι χρόνος διακοπής ως προς την διήθηση $\mathcal{F}_t$. Θεωρούμε μία καινούρια διήθηση $\mathcal{G}_t, t \geq 0$ η οποία ορίζεται ως εξής :

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \cup \sigma([\tau \leq s], 0 \leq s \leq t)$$

και ως προς την οποία η τυχαία μεταβλητή τ αποτελεί, προφανώς, χρόνο διακοπής. Ουσιαστικά η $\mathcal{G}_t$ είναι η φυσική (χωρίς κίνδυνο) διήθηση της αγοράς εφοδιασμένη με την επιπλέον πληροφορία που αφορά τον χρόνο εμφάνισης πιστωτικού γεγονότος (αν $\tau \leq t$ βέβαια), δηλαδή αποτελεί την συνολική πληροφορία που είναι διαθέσιμη στους επενδυτές την χρονική στιγμή t.

Συνεπώς και το ενδεχόμενο $[\tau > t] \in \mathcal{G}_t$ και θα ισχύει ότι :

$$\Pr(\tau > t|\mathcal{G}_t) = \mathbb{E}\big(1_{[\tau>t]}|\mathcal{G}_t\big) = 1_{[\tau>t]}, t \geq 0$$

διότι η τυχαία μεταβλητή $1_{[\tau>t]}$ είναι $\mathcal{G}_t$-μετρήσιμη.

Παραπάνω υπολογίσαμε την $\Pr(\tau > T|\mathcal{F}_t)$ όπου T ο χρόνος λήξης μιας υποχρέωσης, πιο πολύ όμως μας ενδιαφέρει η $\Pr\,(\tau > T|\mathcal{G}_t)$ δηλαδή η πιθανότητα μη αθέτησης μέχρι τον χρόνο T όταν θα βρισκόμαστε στη χρονική στιγμή t, όπου $0 \leq t \leq T$.

Η $\Pr\,(\tau > T|\mathcal{G}_t)$ είναι μία $\mathcal{G}_t$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή η οποία παίρνει την τιμή μηδέν αν $\tau \leq t$, ενώ αν $\tau > t$ τότε θα ισούται με :

$$\Pr(\tau > T|\mathcal{F}_t, \tau > t) = \frac{Pr\big((\tau > T) \cap (\tau > t)|\mathcal{F}_t\big)}{\Pr\,(\tau > t|\mathcal{F}_t)} = \frac{\Pr\,(\tau > T|\mathcal{F}_t)}{\Pr\,(\tau > t|\mathcal{F}_t)}$$

Και χρησιμοποιώντας τις (24) και (25) :

$$\Pr(\tau > T|\mathcal{F}_t, \tau > t) = \frac{e^{-\int_0^t \lambda_u du}\mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T \lambda_u du}|\mathcal{F}_t\right]}{e^{-\int_0^t \lambda_u du}} = \mathbb{E}\left(e^{-\int_t^T \lambda_u du}|\mathcal{F}_t\right)$$

όπου με $\Pr(A|\mathcal{F}_t, B)$ συμβολίζουμε την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου A δεδομένου του ενδεχομένου B όταν θα βρισκόμαστε στην χρονική στιγμή t κατέχοντας πληροφορία $\mathcal{F}_t$. Συνοψίζοντας :

$$\Pr(\tau > T|\mathcal{G}_t) = 1_{[\tau>t]}\mathbb{E}\left(e^{-\int_t^T \lambda_u du}|\mathcal{F}_t\right) \ , 0 \leq t \leq T.$$

Η παραπάνω ισότητα μας δείχνει ότι ο υπολογισμός της $\Pr(\tau > T|\mathcal{G}_t)$ είναι παρόμοιος με την αποτίμηση ενός ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου, με ονομαστική αξία $F = 1$ και χρόνο λήξης T, εφόσον θεωρήσουμε ότι ο ρυθμός αθέτησης $\lambda(t)$ είναι ένας εικονικός βραχυπρόθεσμος ρυθμός επιτοκίου (βλ. εξίσωση (2) Κεφάλαιο 2).

Η επόμενη πρόταση μας δίνει την σχέση με την οποία η εύρεση της δεσμευμένης μέσης τιμής δεδομένης της διήθησης $\mathcal{G}_t$ ανάγεται στον υπολογισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής δεδομένης της διήθησης $\mathcal{F}_t$.

ΠΡΟΤΑΣΗ : Αν X είναι μια $\mathcal{F}_T$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή και $0 \leq t \leq T$, τότε θα ισχύει ότι :

$$\mathbb{E}\big(X\ 1_{[\tau>T]}\big|\mathcal{G}_t\big) = 1_{[\tau>t]}\mathbb{E}\left(X\ e^{-\int_t^T \lambda_u du}|\mathcal{F}_t\right)$$

Απόδειξη (π.χ. βλ. Μπούτσικας Μ. (2019)) **:** Θέτω $Y = X\ 1_{[\tau>T]}$ και

$$K = 1_{[\tau>t]}\mathbb{E}\left(X\ e^{-\int_t^T \lambda_u du}|\mathcal{F}_t\right).$$

Τότε για να ισχύει η ζητούμενη σχέση δηλαδή η $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}_t) = K$, σύμφωνα με τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής θα πρέπει :

- Η τυχαία μεταβλητή K να είναι $\mathcal{G}_t$-μετρήσιμη, το οποίο προφανώς ισχύει διότι $\mathcal{G}_t \supset \mathcal{F}_t$.
- $\mathbb{E}(Y\ 1_G) = \mathbb{E}(K\ 1_G) \Leftrightarrow \mathbb{E}\big(X\ 1_{[\tau>T]}\ 1_G\big) = \mathbb{E}\left[1_{[\tau>t]}\mathbb{E}\left(X\ e^{-\int_t^T \lambda_u du}|\mathcal{F}_t\right)\ 1_G\right]$, $\forall G \in \mathcal{G}_t$.

Από τον ορισμό της διήθησης $\mathcal{G}_t$ αρκεί να θεωρήσουμε ότι κάθε ενδεχόμενο $G \in \mathcal{G}_t$ θα έχει την μορφή $G = [\tau \leq s] \cap A, s \in [0, t] \cup \{+\infty\}, A \in \mathcal{F}_t$.

Αν $s \in [0, t]$ τότε :

$$\mathbb{E}\left(X\, 1_{[\tau>T]}\, 1_{[\tau\leq s]\cap A}\right) = 0 \;\text{ και }\; \mathbb{E}\left[1_{[\tau>t]}\, 1_{[\tau\leq s]\cap A}\, \mathbb{E}\left(X\, e^{-\int_t^T \lambda_u du} | \mathcal{F}_t\right)\right] = 0.$$

Αν $s = +\infty$ τότε $G = A$ και επίσης $1_G = 1_A$ και άρα αρκεί να δειχθεί ότι

$$\mathbb{E}\left(X\, 1_{[\tau>T]}\, 1_A\right) = \mathbb{E}\left[1_{[\tau>t]} \mathbb{E}\left(X\, e^{-\int_t^T \lambda_u du} | \mathcal{F}_t\right)\, 1_A\right], A \in \mathcal{F}_t$$

Πράγματι :

$$\mathbb{E}\left(X\, 1_{[\tau>T]}\, 1_A\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(X\, 1_{[\tau>T]}\, 1_A | \mathcal{F}_T\right)\right] = \mathbb{E}\left[1_A\, X\, \mathbb{E}\left(1_{[\tau>T]}\, | \mathcal{F}_T\right)\right]$$
$$= \mathbb{E}[1_A\, X\, \Pr\left(\tau > T | \mathcal{F}_T\right] = \mathbb{E}\left(1_A\, X\, e^{-\int_0^T \lambda_u du}\right)$$

Και :

$$\mathbb{E}\left[1_{[\tau>t]} \mathbb{E}\left(X\, e^{-\int_t^T \lambda_u du} | \mathcal{F}_t\right)\, 1_A\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(1_{[\tau>t]}\, 1_A \mathbb{E}\left(X\, e^{-\int_t^T \lambda_u du} | \mathcal{F}_t\right) | \mathcal{F}_t\right)\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\, 1_A \mathbb{E}\left(1_{[\tau>t]} | \mathcal{F}_t\right) \mathbb{E}\left(X\, e^{-\int_t^T \lambda_u du} | \mathcal{F}_t\right)\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[1_A \Pr(\tau > t | \mathcal{F}_t)\, \mathbb{E}\left(X\, e^{-\int_t^T \lambda_u du} | \mathcal{F}_t\right)\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[1_A e^{-\int_0^t \lambda(u) du} \mathbb{E}\left(X\, e^{-\int_t^T \lambda_u du} | \mathcal{F}_t\right)\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[1_A \mathbb{E}\left(X e^{-\int_0^t \lambda(u) du}\, e^{-\int_t^T \lambda_u du} | \mathcal{F}_t\right)\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[1_A\, \mathbb{E}\left(X e^{-\int_0^T \lambda_u du} | \mathcal{F}_t\right)\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(1_A\, X e^{-\int_0^T \lambda_u du} | \mathcal{F}_t\right)\right] = \mathbb{E}\left(1_A\, X e^{-\int_0^T \lambda_u du}\right).$$

3.2.2 Αξία ομολόγων μηδενικού τοκομεριδίου που ενέχουν πιστωτικό κίνδυνο

Έστω $\mathcal{F}_t, t \geq 0$ η χωρίς αθέτηση (default free) διήθηση της αγοράς και $\mathcal{G}_t, t \geq 0$ η διήθηση που εμπεριέχει και τον κίνδυνο αθέτησης υποχρεώσεων. Τυπικά η $\mathcal{F}_t$ ενσωματώνει την ιστορία των ρυθμών επιτοκίου. Είναι προφανές ότι οι τιμές των περιουσιακών στοιχείων με κίνδυνο (risky assets) που μπορεί να επηρεαστούν από την εμφάνιση πιστωτικού γεγονότος είναι προσαρμοσμένες στην διήθηση $\mathcal{G}_t$.

Θεωρούμε ακόμα το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου $\mathbb{P}^*$, το οποίο είναι ισοδύναμο με το πραγματικό μέτρο πιθανότητας της αγοράς και υπό το οποίο οι παρούσες αξίες όλων των περιουσιακών στοιχείων είναι $\mathcal{G}_t$-martingales.

Ένα ομόλογο το οποίο αποδίδει 1 νομισματική μονάδα στο χρόνο λήξης του T (εφόσον δεν συμβεί πιστωτικό γεγονός) και τίποτα στην περίπτωση που συμβεί, το οποίο εκδίδεται από μία οντότητα (π.χ. επιχείρηση) η οποία έχει χρόνο χρεοκοπίας τ ονομάζεται **risky zero coupon bond.**

Η απόδοση ενός τέτοιου ομολόγου στον χρόνο ωρίμανσης T, θα είναι $1_{[\tau>T]}$ και η δίκαιη αξία του την χρονική στιγμή t όπου $0 \leq t \leq T$, σύμφωνα με την Risk Neutral Pricing Formula (Κεφάλαιο 1 εξίσωση (1)) :

$$P_\lambda(t,T) = \mathbb{E}^*\left(1_{[\tau>T]}e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{G}_t\right), 0 \leq t \leq T$$

Θέτοντας όπου $X = e^{-\int_t^T r_s ds}$ στην Πρόταση της παραγράφου 3.2.1 λαμβάνουμε ότι:

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2.3 : Η δίκαιη (no arbitrage) αξία την χρονική στιγμή t ενός risky zero coupon bond με ονομαστική αξία $F = 1$ χρηματική μονάδα και χρόνο ωρίμανσης T το οποίο εκδίδεται από μία οντότητα που έχει χρόνο αθέτησης (χρεοκοπίας) τ και ρυθμό αθέτησης $\lambda(s), s \geq 0$, ισούται με :

$$P_\lambda(t,T) = \mathbb{E}^*\left(1_{[\tau>T]}e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{G}_t\right) = 1_{[\tau>t]}\ \mathbb{E}^*\left(e^{-\int_t^T r_s ds}e^{-\int_t^T \lambda_s ds} | \mathcal{F}_t\right), 0 \leq t \leq T$$

όπου $(r_s, s \geq 0)$ είναι ο ρυθμός επιτοκίου χωρίς κίνδυνο (default free interest rate).

Από τον παραπάνω τύπο παρατηρούμε ότι ουσιαστικά η επίδραση της παρουσίας του χρόνου αθέτησης τ είναι να μειώσει την αξία του «επικίνδυνου» ομολόγου, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως μια αύξηση του ρυθμού επιτοκίου r_s κατά την ποσότητα λ_s.

Εάν υποθέσουμε ότι σε περίπτωση αθέτησης το ομόλογο στην λήξη του T αντί για μηδέν χρηματικές μονάδες αποδίδει ποσό $1 - R < 1$ τότε στον παραπάνω πρόταση αντικαθιστούμε τον παράγοντα $1_{[\tau>T]}$ με $R1_{[\tau>T]} + (1 - R)$. Το ποσό R ονομάζεται ποσοστό ανάκτησης (recovery rate) του ομολόγου.

Γνωρίζουμε ότι η τιμή στο χρόνο $t \in [0, T]$ ενός ομολόγου χωρίς κίνδυνο με ονομαστική αξία 1 χρηματική μονάδα δίνεται από τον τύπο :

$$P(t,T) = \mathbb{E}^* \left(e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t \right).$$

ΠΟΡΙΣΜΑ : Εάν οι στοχαστικές διαδικασίες $(\lambda_s, s \geq 0), (r_s, s \geq 0)$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους ή εάν μία από τις δύο είναι ντετερμινιστική τότε η δίκαιη αξίας του risky zero coupon bond την χρονική στιγμή $t \in [0, T]$ θα δίνεται από τον τύπο :

$$P_\lambda(t,T) = 1_{[\tau > t]} \, \mathbb{E}^* \left(e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t \right) \mathbb{E}^* \left(e^{-\int_t^T \lambda_s ds} | \mathcal{F}_t \right) = 1_{[\tau > t]} \, P(t,T) Q(t,T)$$

όπου η πιθανότητα $Q(t,T) = \mathbb{E}^* \left(e^{-\int_t^T \lambda_s ds} | \mathcal{F}_t \right) = \Pr(\tau > T | \mathcal{F}_t, \tau > t)$ εκφράζει την συνάρτηση επιβίωσης του χρόνου αθέτησης τ την χρονική στιγμή t (δηλαδή κατέχοντας πληροφορία $\mathcal{F}_t$), δεδομένου ότι η οντότητα δεν έχει αθετήσει ακόμα της υποχρεώσεις της.

3.3 Αντιστάθμιση πιστωτικού κινδύνου

Η αγορά των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων που χρησιμοποιούνται για αντιστάθμιση πιστωτικού κινδύνου αναπτύχθηκε ραγδαία από το συνέδριο του Διεθνούς Οργανισμού Χρηματοοικονομικών Συναλλαγών (ISDA) το οποίο πραγματοποιήθηκε το 1992.

Έκτοτε η βιβλιογραφία πάνω στα πιστωτικά παράγωγα πολλαπλασιάστηκε. Για παράδειγμα οι Longstaff and Schwartz (1995a) υπολόγισαν το credit spread χρησιμοποιώντας μια στοχαστική διαφορική εξίσωση, οι David and Mavroidis (1997) πρότειναν ένα μοντέλο τυχαίου περιπάτου (random walk) για την αποτίμηση ενός CDS, ενώ ο Duffie (1998) εξέδωσε μία έρευνα για την τιμολόγηση ενός CDS.

Για περισσότερες λεπτομέρειες πάνω στα παράγωγα προϊόντα αντιστάθμισης πιστωτικού κινδύνου βλέπε π.χ. Bielecki and Rutkowski (2002) και Schönbucher (2003).

3.3.1 Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα έναντι αθέτησης υποχρέωσης

Θεωρούμε ένα απλό χρηματοοικονομικό προϊόν αντιστάθμισης πιστωτικού κινδύνου, το οποίο εκδίδεται συνήθως από ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα, το οποίο αποδίδει στον αγοραστή του 1 χρηματική μονάδα μόλις μια συγκεκριμένη οντότητα (π.χ. μια επιχείρηση Ε) αθετήσει της υποχρεώσεις της μέσα στο χρονικό διάστημα $[0, T]$.

Ο αγοραστής του προϊόντος αυτού μπορεί να είναι είτε κάτοχος ομολόγων (με χρόνο ωρίμανσης T) της επιχείρησης Ε οπότε το αγοράζει για προστασία (αντιστάθμιση κινδύνου-hedging) είτε όχι οπότε το αγοράζει για κερδοσκοπία (speculation).

Η επιχείρηση Ε δεν εμπλέκεται στην δημιουργία του προϊόντος αυτού και ονομάζεται οντότητα αναφοράς.

Η παρούσα αξία την χρονική στιγμή $t = 0$ του παραγώγου αυτού προϊόντος θα ισούται με :

$$D_T = 1_{[\tau \leq T]} e^{-\int_0^\tau r_s ds}$$

Από την risk neutral pricing formula, η δίκαιη (no arbitrage) αξία του στο χρόνο 0 θα είναι :

$$D(0, T) = \mathbb{E}^*(1_{[\tau \leq T]} e^{-\int_0^\tau r_s ds}) \qquad (26)$$

όπου η αναμενόμενη τιμή $\mathbb{E}^*$ υπολογίζεται υπό το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου $\mathbb{P}^*$ και $(r_s, s \geq 0)$ ο ρυθμός επιτοκίου χωρίς κίνδυνο.

Ανάλογα με το είδος των διαδικασιών του ρυθμού επιτοκίου και αθέτησης, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις ντετερμινιστικού και στοχαστικού ρυθμού αθέτησης.

3.3.2 Ντετερμινιστικός ρυθμός αθέτησης και επιτοκίου

Υποθέτουμε ότι ο χρόνος αθέτησης υποχρεώσεων τ είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση επιβίωσης

$$S(t) = Pr(\tau > t) = e^{-\int_0^t \lambda_s ds}, t \geq 0$$

και η οποία έχει ρυθμό αθέτησης κάποια ντετερμινιστική συνάρτηση $\lambda_s, s \geq 0$.

Από τον ορισμό του ρυθμού αθέτησης, $\lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου αθέτησης τ θα είναι ίση με :

$$f_\tau(t) = \lambda_t e^{-\int_0^t \lambda_s ds}, t \geq 0$$

Θεωρώντας ακόμα ότι ο ρυθμός επιτοκίου χωρίς κίνδυνο $r_t, t \geq 0$ είναι ντετερμινιστική συνάρτηση του χρόνου, θα έχω για την δίκαιη αξία του παράγωγου χρηματοοικονομικού προϊόντος :

$$D(0,T) = \mathbb{E}^*\left(1_{[\tau \leq T]} e^{-\int_0^\tau r_s ds}\right) = \int_0^\infty 1_{[\tau \leq T]} e^{-\int_0^\tau r_s ds} f_\tau(t) dt = \int_0^T \lambda_t e^{-\int_0^t (\lambda_s + r_s) ds} dt$$

3.3.3 Στοχαστικός ρυθμός αθέτησης και επιτοκίου

Θεωρούμε τώρα ότι τα λ_t, r_t , $t \geq 0$ είναι στοχαστικές διαδικασίες. Αν στην αγορά υπάρχει μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου, $\mathbb{P}^*$, τότε ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση : Η δίκαιη (no arbitrage) αξία ενός παράγωγου χρηματοοικονομικού προϊόντος το οποίο αποδίδει 1 χρηματική μονάδα μόλις υπάρξει αθέτηση υποχρεώσεων από μέρους μίας οντότητας Ε στο χρονικό διάστημα $[0, T]$ ισούται με:

$$D(0,T) = \mathbb{E}^*\left(\int_0^T \lambda_t e^{-\int_0^t (\lambda_s + r_s) ds} dt\right)$$

Απόδειξη : (π.χ. βλ. Μπούτσικας Μ. (2019)). Στο χρόνο λήξης T όπου θα έχουμε την πληροφορία $\mathcal{F}_T$, οι τιμές των $\lambda_t, r_t, t \in [0, T]$ θα είναι γνωστές δηλαδή τα λ_t, r_t είναι $\mathcal{F}_T$-μετρήσιμα. Συνεπώς ομοίως με την ντετερμινιστική περίπτωση που εξετάσαμε παραπάνω

$$\mathbb{E}^*\left(1_{[\tau \leq T]} e^{-\int_0^\tau r_s ds} \middle| F_T\right) = \int_0^T \lambda_t e^{-\int_0^t (\lambda_s + r_s) ds} dt$$

Οπότε, σύμφωνα με την risk neutral pricing formula, η δίκαιη αξία του προϊόντος αυτού θα δίνεται από την εξίσωση :

$$D(0,T) = \mathbb{E}^* \left[\mathbb{E}^* \left(1_{[\tau \le T]} e^{-\int_0^\tau r_s ds} \middle| F_T \right) \right] = \mathbb{E}^* \left[\int_0^T \lambda_t e^{-\int_0^t (\lambda_s + r_s) ds} \, dt \right].$$

Στην ειδική περίπτωση όπου οι στοχαστικές ανελίξεις $(\lambda_t, t \ge 0), (r_t, t \ge 0)$ είναι α-νεξάρτητες μεταξύ τους

$$D(0,T) = \int_0^T \mathbb{E}^* (e^{-\int_0^\tau r_s ds}) \, \mathbb{E}^* \left(\lambda_t e^{-\int_0^t \lambda_s ds} \right) dt = - \int_0^T P(0,t) dQ(0,t)$$

αφού

$$\frac{d}{dt} Q(0,t) = \frac{d}{dt} \, \mathbb{E}^* \left(e^{-\int_0^t \lambda_s ds} | \mathcal{F}_0 \right) = \mathbb{E}^* \left[\frac{d}{dt} \left(e^{-\int_0^t \lambda_s ds} \right) \right]$$
$$= \mathbb{E}^* \left(-\lambda_t e^{-\int_0^t \lambda_s ds} \right) = - \, \mathbb{E}^* \left(\lambda_t e^{-\int_0^t \lambda_s ds} \right)$$

όπου $P(0,t)$ εκφράζει την δίκαιη αξία την χρονική στιγμή 0 ενός non-risky zero coupon bond ονομαστικής αξίας 1 χρηματικής μονάδας και χρόνο ωρίμανσης t και ο όρος $Q(0,t) = \Pr\left(\tau > t | \mathcal{F}_0, \tau > 0\right)$ είναι η συνάρτηση επιβίωσης του χρόνου αθέτησης τ την χρονική στιγμή 0, δηλαδή έχοντας την μηδενική (κενή) πληροφορία $\mathcal{F}_0$, δεδομένου ότι η εταιρεία δεν έχει αθετήσει ακόμα τις υποχρεώσεις της (στο χρόνο 0).

3.3.4 Συμβάσεις ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου (Credit Default Swaps -CDS)

Τα παράγωγα πιστωτικού κινδύνου είναι εξωχρηματιστηριακές συμβάσεις συνεπώς οι ακριβείς προδιαγραφές της απόδοσής τους ενδέχεται να διαφέρουν αρκετά μεταξύ συμβολαίων παρόμοιου είδους. Παρόλα αυτά χάρις στις προσπάθειες οργανισμών όπως ο Διεθνής Οργανισμός Χρηματιστηριακών Συναλλαγών (ISDA) τα τελευταία χρόνια έχει επιτευχθεί κάποια τυποποίηση.

Οι Συμβάσεις ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου (CDS) αποτελούν την κινητήριο δύναμη της αγοράς παραγώγων πιστωτικού κινδύνου. Σύμφωνα με μία έρευνα του Patel (2002) το έτος 2002 το μερίδιο αγοράς των CDS στην αγορά παραγώγων πιστωτικού κινδύνου ήταν περίπου 67%. Συνεπώς η αγορά των CDS που αφορούν μεγάλες επιχειρήσεις είναι έντονα ρευστή. Επιπλέον, σε αντίθεση με τα εταιρικά ομόλογα, η κερδοφορία των CDS επηρεάζεται ελάχιστα από φορολογικά θέματα. Για τους παραπάνω λόγους τα CDS είναι το κύριο υποκείμενο αξιόγραφο σε πολλά άλλα πιο πολύπλοκα παράγωγα προϊόντα αντιστάθμισης πιστωτικού κινδύνου.

Τα CDS είναι μια εξωχρηματιστηριακή σύμβαση μεταξύ δύο αντισυμβαλλόμενων μερών, του αγοραστή προστασίας και του πωλητή προστασίας που αφορά την αθέτηση υποχρεώσεων κάποιας οντότητας (συνήθως μιας επιχείρησης ή ενός κράτους) η οποία ονομάζεται οντότητα αναφοράς. Πρέπει να τονισθεί εδώ ότι η οντότητα αναφοράς δηλαδή ο εκδότης του ομολόγου δεν αναμιγνύεται στην παραπάνω σύμβαση.

Σύμφωνα με την σύμβαση αυτή :

- Ο αγοραστής της προστασίας υποχρεούται να καταβάλλει προκαθορισμένα ασφάλιστρα προς τον πωλητή για ένα προκαθορισμένο χρονικό διάστημα $[0, T]$ σε τακτά χρονικά διαστήματα $T_0 = 0, T_1, T_2, \dots, T_n = T$ (συνήθως ανά τρίμηνο ή ανά εξάμηνο).Η διάρκεια της σύμβασης δηλαδή το T παίρνει τιμές τυπικά από 1 έως και 10 έτη. Οι πληρωμές του αγοραστή λαμβάνουν χώρα είτε μέχρι την λήξη T της σύμβασης είτε μέχρι την εμφάνιση πιστωτικού γεγονότος από μέρους της οντότητας αναφοράς (όποιο προκύψει πρώτο). Επίσης δεν υπάρχει αρχική πληρωμή (στον χρόνο $T_0 = 0$ όπου συνάπτεται το CDS).Το ποσό των ασφαλίστρων παρατίθεται στην μορφή ενός ετήσιου ποσοστού S_0 της ονομαστικής αξίας του αξιογράφου (ομολόγου) πάνω στο οποίο αγοράζεται η προστασία. Το S_0 ονομάζεται spread (πιστωτικό περιθώριο) του CDS και είναι ουσιαστικά το ποσό που καταβάλλει ο αγοραστής ετησίως (σε k δόσεις ανά έτος, όπου συνήθως $k = 4$ ή $k = 2$) προς την ονομαστική αξία του υποκείμενου αξιογράφου της οντότητας αναφοράς. Εκφράζεται σε μονάδες βάσεις (basis points- bp) όπου $1\ bp = 1/10000$ (συνεπώς οι 100 μονάδες βάσης ισούται με ποσοστό 1%).
- Ο πωλητής της προστασίας υποχρεούται να καταβάλλει εφάπαξ αποζημίωση στον αγοραστή στην περίπτωση που υπάρξει πιστωτικό γεγονός (το οποίο πιστοποιείται από τον ISDA) από μέρους της οντότητας αναφοράς. Το ποσό της αποζημίωσης καθορίζεται κατά την σύναψη της σύμβασης και συνήθως ισούται με $N(1 - R)$ όπου N είναι η ονομαστική αξία του αξιογράφου(ομολόγου) του οποίου εκδότης είναι η οντότητα αναφοράς και R είναι το ποσοστό ανάκτησης(recovery rate).

Προφανώς όσο μεγαλύτερος είναι ο κίνδυνος αθέτησης της οντότητας αναφοράς τόσο μεγαλύτερο θα είναι και το spread S_0 του CDS. Αλλά και αντιστρόφως επειδή το spread καθορίζεται από τα αντισυμβαλλόμενα μέρη με βάση τις πληροφορίες που έχουν στα χέρια τους από την αγορά, μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί ένα δείκτη της πιθανότητας αθέτησης.

Επειδή το CDS είναι εξωχρηματιστηριακή σύμβαση δεν υπάρχει διασφάλιση από κάποιο γραφείο συμψηφισμού (clearing house). Αυτό σημαίνει ότι σε περίπτωση όπου ο πωλητής της προστασίας, ο οποίος είναι κάποιο χρηματοπιστωτικό ίδρυμα, αθετήσει ο ίδιος τις υποχρεώσεις του πριν την λήξη του συμβολαίου, η προστασία που έχει αποκτηθεί από τον αγοραστή γίνεται άνευ αξίας.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο αγοραστής της προστασίας δεν είναι υποχρεωμένος να είναι κάτοχος του ομολόγου υπέρ του οποίου αγοράζει προστασία, οπότε σε αυτήν την περίπτωση αποζημιώνεται χωρίς όμως να έχει υποστεί ζημιά. Σε αυτή την περίπτωση μιλάμε για γυμνό CDS (naked CDS) και δεν πρόκειται πλέον περί αντιστάθμισης κινδύνου (hedging) αλλά περί κερδοσκοπίας (speculation). Αυτή είναι και η βασική διαφορά του CDS με τα κλασσικά ασφαλιστήρια συμβόλαια (στα οποία γίνεται καταβολή ασφαλίστρων με στόχο την αποζημίωση σε περίπτωση και μόνο ζημίας) μαζί με το γεγονός ότι ο πωλητής του CDS διέπεται από διαφορετικούς κανόνες από τις ασφαλιστικές εταιρείες.

Στα παρακάτω υποθέτουμε ότι στην αγορά υπάρχει μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου, $\mathbb{P}^*$.

Οι χρηματοροές που πραγματοποιούνται από τον αγοραστή της προστασίας και από τον πωλητή, καθορίζονται αντίστοιχα από το σκέλος ασφαλίστρων (Premium Leg) και από το σκέλος αποζημίωσης (Protection Leg) :

- Σκέλος προστασίας : $S_0\, N(T_i - T_{i-1})\, 1_{[\tau > T_i]}, i = 1,2,\dots,n$ όπου N η ονομαστική αξία (nominal value) του CDS. Η παρούσα αξία στο χρόνο $T_0 = 0$ των πληρωμών αυτών θα ισούται με :

$$PV_{premium} = \mathbb{E}^* \left(\sum_{i=1}^{n} S_0\, N(T_i - T_{i-1})\, 1_{[\tau > T_i]} e^{-\int_0^{T_i} r_s ds} \right)$$

Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι παραλείπουμε την λεγόμενη δεδουλευμένη πληρωμή ασφαλίστρων $S_0\, N\big(\tau - T_{\gamma(\tau)}\big)$ η οποία αντιστοιχεί στο ασφάλιστρο για την περίοδο από την τελευταία πληρωμή πριν την αθέτηση έως την αθέτηση ($\gamma(\tau) = i - 1$ εάν $T_{\iota-1} \leq \tau < T_i$). Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε Brigo and Mercurio (2006) ή Overhaus κ.α. (2007).

Θεωρώντας ότι οι καταβολές των ασφαλίστρων γίνονται σε συνεχή χρόνο :

$$PV_{premium} = \mathbb{E}^*\left(\int_0^T S_0\, N\, 1_{[\tau>t]} e^{-\int_0^t r_s ds} dt\right)$$

$$= S_0\, N\, \left(\int_0^T \mathbb{E}^*\left(1_{[\tau>t]} e^{-\int_0^t r_s ds}\right) dt\right)$$

Χρησιμοποιώντας την πρόταση 3.2.3 της παραγράφου 3.2.2 παίρνουμε τελικά :

$$PV_{premium} = S_0\, N\, \int_0^T \mathbb{E}^*\left(\, e^{-\int_0^t \lambda_s ds} e^{-\int_0^t r_s ds}\right) dt = S_0\, N \int_0^T P_\lambda\,(0,t) dt$$

- Σκέλος αποζημίωσης : $N(1-R)\, 1_{[\tau\leq T]}$ στον χρόνο αθέτησης τ.

Η παρούσα αξία του την χρονική στιγμή $T_0 = 0$ θα είναι :

$$PV_{ptotection} = \mathbb{E}^*\left(N(1-R)\, 1_{[\tau\leq T]} e^{-\int_0^\tau r_s ds}\right) = N(1-R)\, \mathbb{E}^*\left(1_{[\tau\leq T]} e^{-\int_0^\tau r_s ds}\right)$$

$$= N(1-R)\, D(0,T)$$

$$= N(1-R)\mathbb{E}^*\left(\int_0^T \lambda_t e^{-\int_0^t (\lambda_s + r_s) ds}\, dt\right)$$

Επειδή την χρονική στιγμή $T_0 = 0$ σύναψης της σύμβασης δεν καταβάλλεται κάποιο χρηματικό ποσό από τον αγοραστή του CDS στον πωλητή ούτε το αντίθετο, οι δύο προαναφερθείσες παρούσες αξίες θα πρέπει να είναι ίσες. Εξισώνοντας τις τελευταίες προκύπτει και η δίκαιη αξία του spread S_0 :

$$PV_{premium} = PV_{ptotection} \Leftrightarrow S_0\, N \int_0^T \mathbb{E}^* \left(e^{-\int_0^t \lambda_s ds} e^{-\int_0^t r_s ds} \right) dt \Big)$$

$$= N(1-R)\mathbb{E}^* \left(\int_0^T \lambda_t e^{-\int_0^t (\lambda_s + r_s) ds}\, dt \right) \Leftrightarrow$$

$$S_0 = \frac{(1-R)\left(\int_0^T \mathbb{E}^* \left(\lambda_t e^{-\int_0^t (\lambda_s + r_s) ds} \right) dt \right)}{\int_0^T \mathbb{E}^* \left(e^{-\int_0^t (\lambda_s + r_s) ds} \right) dt}.$$

Στην περίπτωση που οι στοχαστικές διαδικασίες του ρυθμού αθέτησης $(\lambda_t, t \geq 0)$ και του χωρίς κίνδυνο ρυθμού επιτοκίου $(r_t, t \geq 0)$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους ο παραπάνω τύπος γίνεται :

$$S_0 = -\frac{(1-R)\int_0^T P(0,t)\, dQ(0,t)}{\int_0^T P(0,t)\;\; Q(0,t) dt} \qquad (27)$$

Στην απλή περίπτωση όπου υποθέσουμε ότι ο ρυθμός αθέτησης της οντότητας αναφοράς είναι σταθερός δηλαδή ότι $\lambda(t) = \lambda\,, t \geq 0$, με άλλα λόγια ότι ο χρόνος αθέτησης τ ακολουθεί την εκθετική κατανομή τότε $Q(0,t) = e^{-\lambda t}$ τότε η παραπάνω εξίσωση δίνει ότι :

$$S_0 = -\frac{(1-R)\int_0^T P(0,t)\,(-\lambda) e^{-\lambda t} dt}{\int_0^T P(0,t)\, e^{-\lambda t}\, dt} \Leftrightarrow S_0 = (1-R)\lambda$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι γνωστή ως **πιστωτικό τρίγωνο** (credit triangle) λόγω του ότι δείχνει την σχέση τριών ποσοτήτων. Οπότε εφόσον οι πληρωμές των ασφαλίστρων είναι αρκετά συχνές (ώστε να μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο χρόνος είναι συνεχής) και ο ρυθμός αθέτησης είναι περίπου σταθερός τότε το spread είναι περίπου ίσο με το ποσοστό ανάκτησης επί τον ρυθμό αθέτησης.

Στην πράξη η παραπάνω σχέση χρησιμοποιείται για να εξαχθεί μια πρώτη προσέγγιση του spread .

Λόγω του ότι τα CDS είναι τα πιο ρευστά παράγωγα προϊόντα αντιστάθμισης πιστωτικού κινδύνου, συχνά χρησιμοποιούνται για λόγους βαθμονόμησης (calibration). Πρακτικά τα spreads των CDS με διαφορετικούς χρόνους λήξης T_n , όπου συνήθως

$n = 1,2,3 \ldots .10$ έτη χρησιμοποιούνται για να εξάγουμε τις υπονοούμενες πιθανότητες αθέτησης, $Pr^*(\tau > T_i)$, $i = 1,2, .. , n$, της οντότητας αναφοράς που μας ενδιαφέρει και συνεπώς να εκτιμήσουμε τον ρυθμό αθέτησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΡΥΘΜΟΥ ΑΘΕΤΗΣΗΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο χρησιμοποιώντας τιμές των πιστωτικών περιθωρίων (Credit Spreads) από την αγορά των συμβάσεων ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου (Credit Default Swaps) για διάφορους χρόνους λήξης, θα προσεγγίσουμε τον ρυθμό αθέτησης ορισμένων γνωστών εταιρειών, υποθέτοντας ότι ο τελευταίος είναι ντετερμινιστικός και πιο συγκεκριμένα ότι είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου.

Αρχικά θα ορίσουμε την έννοια των προθεσμιακών επιτοκίων (forward interest rates) καθώς και του LIBOR.

4.1 Προθεσμιακά επιτόκια

ΟΡΙΣΜΟΣ : Ένα Συμβόλαιο Προθεσμιακού Επιτοκίου (Forward Interest Rate Contract) ονομάζεται μια σύμβαση η οποία συνάπτεται την παρούσα χρονική στιγμή t και η οποία θα δώσει στον κάτοχό της δάνειο με διάρκεια αποπληρωμής την μελλοντική χρονική περίοδο $[S, T]$ και με σταθερό προκαθορισμένο επιτόκιο που συμβολίζεται $R(t, S, T)$, $t \leq S \leq T$.

Θεωρώντας ότι το $R(t, S, T)$, το οποίο καθορίζεται την χρονική στιγμή t σύναψης του συμβολαίου και συνεπώς είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμο, είναι σύνθετο επιτόκιο (**compound interest rate**) συνεχούς ανατοκισμού, το ποσό που θα πρέπει να επιστρέψει ο δανειολήπτης στην λήξη του δανείου T θα πρέπει να ισούται με :

$$e^{R(t,S,T)(T-S)}$$

Για να βρούμε την δίκαιη (no-arbitrage) τιμή του $R(t, S, T)$ θα χρησιμοποιήσουμε από την αγορά ομολόγων τα ομόλογα μηδενικού τοκομεριδίου με τιμή $P(t, S)$ για διάφορους χρόνους λήξης $S > t$.

Το δάνειο μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας τα ομόλογα που είναι διαθέσιμα στην αγορά σε δύο βήματα :

1. Στον χρόνο t δανειζόμαστε ποσό $P(t,T)$ κάνοντας ανοικτή πώληση (shortselling , τακτική με την οποία πουλάω ένα αξιόγραφο το οποίο έχω δανειστεί και του οποίου δεν είμαι κάτοχος) μίας μονάδας ομολόγου με χρόνο ωρίμανσης T το οποίο σημαίνει ότι θα πρέπει να επιστρέψουμε 1 χρηματική μονάδα την χρονική στιγμή T.
2. Δεδομένου ότι χρειαζόμαστε τα χρήματα την χρονική στιγμή S (χρόνος έναρξης του δανείου) , επενδύουμε το ποσό $P(t,T)$ για χρονική περίοδο $[t,S]$ αγοράζοντας $P(t,T)/P(t,S)$ το πλήθος ομόλογα μηδενικού τοκομεριδίου με χρόνο ωρίμανσης S και τιμή $P(t,S)$.Τότε στο χρόνο S θα λάβουμε ποσό ίσο με :

$$1 \cdot \frac{P(t,T)}{P(t,S)}$$

Αφού λοιπόν θα λάβουμε χρηματικό ποσό $P(t,T)/P(t,S)$ την χρονική στιγμή S και πρέπει να αποπληρώσουμε 1 χρηματική μονάδα στον χρόνο T θα πρέπει να ισχύει ότι :

$$\frac{P(t,T)}{P(t,S)} e^{R(t,S,T)(T-S)} = 1 \Leftrightarrow R(t,S,T) = \frac{\ln P(t,S) - \ln\, P(t,T)}{T-S} \quad ,0 \le t \le S \le T$$

Στην περίπτωση όπου $S = t$, δηλαδή όταν το δάνειο λαμβάνεται μόλις συνάπτεται το συμβόλαιο, ο παραπάνω τύπος δίνει :

$$R(t,t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t} = R(t,T) \qquad (28)$$

το οποίο θα συμβολίζουμε απλούστερα ως $R(t,T)$ και θα το ονομάζουμε προθεσμιακό επιτόκιο άμεσου δανεισμού στο χρονικό διάστημα $[t,T]$.

Λύνοντας ως προς $P(t,T)$ την τελευταία σχέση προκύπτει η αξία την χρονική στιγμή t ενός ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου με χρόνο λήξης T σαν συνάρτηση του προθεσμιακού επιτοκίου άμεσου δανεισμού για την περίοδο $\{t,T]$:

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \tag{29}$$

4.2 LIBOR

Το επιτόκιο LIBOR (London Inter-Bank Offer Rate) είναι το πιο συχνά χρησιμοποιούμενο επιτόκιο στις διεθνείς χρηματοοικονομικές αγορές., Προσφέρεται από τις μεγάλες εμπορικές τράπεζες για βραχυπρόθεσμο δανεισμό μεταξύ τους, έτσι ώστε να αντικατοπτρίζει τον πιστωτικό κίνδυνο και είναι απλό επιτόκιο (**simple interest rate**: επιτόκιο γραμμικού τόκου). Παρόλα αυτά στην πράξη το LIBOR χρησιμοποιείται ως επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (default-free) .

Χρησιμοποιώντας το LIBOR σε ένα προθεσμιακό συμβόλαιο επιτοκίου που συνάπτεται την χρονική στιγμή t και αφορά δάνειο (μίας συγκεκριμένης νομισματικής μονάδας π.χ. δολαρίου) με διάρκεια αποπληρωμής $[S,T]$, συμβολίζοντάς το με $L(t,S,T)$, θα πρέπει να ισχύει η σχέση :

$$1 + L(t,S,T)(T-S) = \frac{P(t,S)}{P(t,T)}$$

Δουλεύοντας όπως και στην περίπτωση δανείου με προθεσμιακό επιτόκιο $R(t,S,T)$ καταλήγουμε στην εξίσωση :

$$\frac{P(t,T)}{P(t,S)}\left(1 + L(t,S,T)(T-S)\right) = 1 \Leftrightarrow L(t,S,T) = \frac{1}{T-S}\left(\frac{P(t,S)}{P(t,T)} - 1\right)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $S = t$ παίρνουμε το LIBOR άμεσου δανεισμού που αφορά την χρονική περίοδο $[t,T]$ το οποίο θα συμβολίζουμε για απλότητα με $L(t,T)$ και το οποίο θα δίνεται από την σχέση (για δάνειο $P(t,S)$ μίας νομισματικής μονάδας) :

$$L(t,T) = \frac{1}{T-t}\left(\frac{1}{P(t,T)} - 1\right)$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς $P(t,T)$ βρίσκουμε την αξία στο χρόνο t ενός ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου με χρόνο ωρίμανσης T συναρτήσει του LIBOR για την περίοδο $[t,T]$:

$$P(t,T) = \frac{1}{1 + L(t,T)(T-t)} \qquad (30)$$

Εξισώνοντας τα πρώτα μέλη των εξισώσεων (29) και (30) βρίσκουμε την σχέση που συνδέει το προθεσμιακό επιτόκιο άμεσου δανεισμού για την περίοδο $[t,T]$ με το LIBOR της ίδιας περιόδου :

$$e^{-R(t,T)(T-t)} = \frac{1}{1 + L(t,T)(T-t)} \Leftrightarrow R(t,T) = \frac{\ln(1 + L(t,T)(T-t))}{T-t} \qquad (31)$$

4.3 Εκτίμηση της καμπύλης επιτοκίων από k τιμές του LIBOR μέσω βαθμονόμησης (calibration)

Στο παράδειγμα μας υποθέτουμε ότι το προθεσμιακό επιτόκιο άμεσου δανεισμού δανείου χωρίς κίνδυνο για την χρονική περίοδο $[t,T]$ έχει την μορφή :

$$R(t,T) = r_t + \frac{a}{2}(T-t)$$

όπου r_t είναι ο βραχυχρόνιος ρυθμός επιτοκίου (spot rate). Δηλαδή υποθέτουμε για απλότητα ότι αποτελεί γραμμική συνάρτηση του χρόνου θεωρώντας μια παράμετρο a.

Θέτοντας $t = 0$ (παρούσα χρονική στιγμή) ο παραπάνω τύπος δίνει :

$$R(0,T) = r_0 + \frac{a}{2}T \qquad (32)$$

Αντιστοίχως θέτοντας $t = 0$ στην εξίσωση (27) προκύπτει ότι το θεωρητικό επιτόκιο άμεσου δανεισμού για την χρονική περίοδο $[0, T]$ είναι :

$$R(0,T) = -\frac{\ln P(0,T)}{T} \qquad (33)$$

Θέλουμε να εκτιμήσουμε την τιμή της παραμέτρου a η οποία εξασφαλίζει ότι τα επιτόκια της αγοράς $\hat{R}_i = \hat{R}(0,T_i), i = 1,2,3,\dots,n$ για διάφορες χρονικές περιόδους $[0, T_i]$ προσαρμόζονται ικανοποιητικά στην θεωρητική καμπύλη επιτοκίων και δίνεται από την εξίσωση (32).

Πιο ειδικά , αν από την αγορά καταγράψουμε το επιτόκιο LIBOR δολαρίου για k χρόνους $T_0 = 0, T_1, T_2, \dots, T_{k-1}$ (π.χ overnight , μηνιαίο , τριμηνιαίο, ετήσιο κλπ) και καταγράψουμε αντίστοιχα τις τιμές $\hat{L}_0, \hat{L}_1, \hat{L}_2, \dots, \hat{L}_{k-1}$, τότε από την εξίσωση (30) με $t = 0$, θα πρέπει να ισχύει ότι :

$$\hat{R}_i = \frac{\ln\left(1 + \hat{L}_i T_i\right)}{T_i}, \qquad i = 1,2,\dots,k-1, \qquad \hat{R}_0 = \hat{r}_0 = \hat{L}_0$$

όπου $\hat{R}_i = \hat{R}(0,T_i)$,$\hat{L}_i = \hat{L}(0,T_i)$ και $\hat{R}_0 = \hat{r}_0 = \hat{L}_0$ συμβολίζει το overnight LIBOR της αγοράς .

Για την εκτίμηση της παραμέτρου a του μοντέλου μας βασιζόμαστε στην εκτιμήτρια ελαχίστων τετραγώνων. Συγκεκριμένα, θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε ως προς a το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών μεταξύ των παρατηρούμενων και των προβλεπόμενων από το μοντέλο τιμών των επιτοκίων,

$$\sum_{i=1}^{k-1} \left(\hat{R}_i - R(0,T_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{k-1} \left[\hat{R}_i - \left(\hat{r}_0 + \frac{a}{2} T_i\right)\right]^2$$

Θεωρώντας την συνάρτηση

$$g(a) = \left[\hat{R}_i - \left(\hat{r}_0 + \frac{a}{2} T_i\right)\right]^2$$

και παίρνοντας την πρώτη της παράγωγο ως προς a, θα πρέπει

$$g'(a) = -T_i\left(\hat{R}_i - \left(\hat{r}_0 + \frac{a}{2}T_i\right)\right)$$

ίση με το μηδέν προκειμένου να βρούμε την θέση ολικού ελαχίστου, εύκολα προκύπτει ότι :

$$\hat{a} = \frac{2\ \sum_{i=1}^{k-1} T_i(\hat{R}_i - \hat{r}_0)}{\sum_{i=1}^{k-1} T_i^{\,2}} \tag{34}$$

4.4. Υπολογισμός του πιστωτικού περιθωρίου (spread) σε ένα CDS επί μιας οντότητας που έχει γραμμικά αύξουσα συνάρτηση ρυθμού αθέτησης.

Στην συνέχεια, και πάλι για απλότητα θεωρούμε ότι και ο ρυθμός αθέτησης $\lambda_t\ t \geq 0$ μιας εταιρείας είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου,

$$\lambda_t = \lambda_0 + bt$$

για κατάλληλη παράμετρο b . Με βάση τις παραπάνω υποθέσεις (την γραμμικότητα του προθεσμιακού επιτοκίου και του ρυθμού αθέτησης ως προς τον χρόνο) θα επιχειρήσουμε να εκτιμήσουμε την παράμετρο b και συνεπώς την πιθανότητα αποτυχίας της συγκεκριμένης εταιρείας για κάθε χρόνο t. Αρχικά θα βρεθεί το spread S_0 ενός CDS επί της εταιρείας αυτής. Η τιμή την χρονική στιγμή t ενός risk-free ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου (ονομαστικής αξίας 1 χρηματικής μονάδας) με χρόνο ωρίμανσης T χρησιμοποιώντας το προθεσμιακό επιτόκιο άμεσου δανεισμού θα ισούται με :

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)} = e^{-\left(r_t + \frac{a}{2}(T-t)\right)(T-t)}$$

από όπου προκύπτει ότι $P(0,t) = e^{-\left(r_0 t + \frac{a}{2}t^2\right)}$.

Για την συνάρτηση επιβίωσης του χρόνου αθέτησης τ την χρονική στιγμή 0 θα έχω ότι (δεδομένου ότι ο ρυθμός αθέτησης είναι ντετερμινιστικός) :

$$Q(0,t) = \Pr(\tau > t) = e^{-\int_0^t \lambda_s ds} = e^{-\int_0^t (\lambda_0 + bs) ds} = e^{-\lambda_0 t - \frac{b}{2}t^2}\ , t \geq 0.$$

Εφόσον η $(\lambda_t, t \geq 0)$ είναι ντετερμινιστική θα είναι και ανεξάρτητη της $(r_t, t \geq 0)$ οπότε από την εξίσωση (27) του προηγούμενου κεφαλαίου προκύπτει ότι :

$$S_0 = -\frac{(1-R)\int_0^T P(0,t)\, dQ(0,t)}{\int_0^T P(0,t)\ Q(0,t)dt} = -\frac{(1-R)\int_0^T e^{-\left(r_0 t+\frac{a}{2}t^2\right)}(-\lambda_0 - bt)\, e^{-\lambda_0 t-\frac{b}{2}t^2}dt}{\int_0^T e^{-\left(r_0 t+\frac{a}{2}t^2\right)}\ e^{-\lambda_0 t-\frac{b}{2}t^2}dt}$$

$$= -\frac{(1-R)\int_0^T(-\lambda_0 - bt)e^{-(r_0+\lambda_0)t-\frac{a+b}{2}t^2}dt}{\int_0^T e^{-(r_0+\lambda_0)t-\frac{a+b}{2}t^2}dt}$$

Θέτω $r_0 + \lambda_0 = c$ και $a + b = k$ οπότε :

$$S_0 = -\frac{(1-R)\int_0^T(-\lambda_0 - bt)e^{-\left(ct+\frac{k}{2}t^2\right)}dt}{\int_0^T e^{-\left(ct+\frac{k}{2}t^2\right)}dt}$$

Εφαρμόζοντας την μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου για την αλγεβρική παράσταση $ct + \frac{k}{2}t^2$,παίρνουμε:

$$ct + \frac{k}{2}t^2 = \frac{\left[t - \left(-\frac{c}{k}\right)\right]^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2} - \frac{c^2}{2k}$$

Συνεπώς ο παρονομαστής γίνεται :

$$\int_0^T e^{-\left(ct+\frac{k}{2}t^2\right)}dt = e^{\frac{c^2}{2k}}\sqrt{\frac{2\pi}{k}}\left(\int_{-\infty}^T \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{k}}}e^{-\frac{\left[t-\left(-\frac{c}{k}\right)\right]^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2}}dt - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{k}}}e^{-\frac{\left[t-\left(-\frac{c}{k}\right)\right]^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2}}dt\right)$$

Παρατηρώντας ότι τα παραπάνω ολοκληρώματα μπορούν να εκφραστούν μέσω της συνάρτησης κατανομής της κανονικής κατανομής με $\mu = -\frac{c}{k}$ και $\sigma = \frac{1}{\sqrt{k}}$) παίρνουμε ότι (θεωρώντας ότι $X\sim N(\mu,\sigma)$):

$$\int_0^T e^{-\left(ct+\frac{k}{2}t^2\right)}dt = e^{\frac{c^2}{2k}}\sqrt{\frac{2\pi}{k}}\big(P(X \le T) - P(X \le 0)\big)$$

$$= e^{\frac{c^2}{2k}}\sqrt{\frac{2\pi}{k}}\left(P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{T-\mu}{\sigma}\right) - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

Και τελικά,

$$\int_0^T e^{-\left(ct+\frac{k}{2}t^2\right)}dt = e^{\frac{c^2}{2k}}\sqrt{\frac{2\pi}{k}}\left(\Phi\left(\frac{kT+c}{\sqrt{k}}\right) - \Phi\left(\frac{c}{\sqrt{k}}\right)\right)$$

όπου Φ η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής $N(0,1)$.

Επίσης για τον αριθμητή της παραπάνω έκφρασης για το S_0 ισχύει ότι

$$\int_0^T te^{-\left(ct+\frac{k}{2}t^2\right)}dt = e^{\frac{c^2}{2k}}\int_0^T te^{-\frac{k}{2}\left(t+\frac{c}{k}\right)^2}dt$$

και αλλάζοντας μεταβλητή ολοκλήρωσης, θέτοντας $x=\sqrt{k}\,\left(t+\frac{c}{k}\right)$, το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται (για συντομία θεωρούμε $\alpha = \frac{c}{\sqrt{k}}, \beta = \frac{kT+c}{\sqrt{k}}$)

$$e^{\frac{c^2}{2k}}\int_\alpha^\beta \left(\frac{x}{\sqrt{k}}-\frac{c}{k}\right)e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{k}} = e^{\frac{c^2}{2k}}\frac{1}{k}\int_\alpha^\beta xe^{-\frac{x^2}{2}}dx - e^{\frac{c^2}{2k}}\frac{c}{k^{3/2}}\int_\alpha^\beta e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

Για το πρώτο παραπάνω ολοκλήρωμα παρατηρούμε ότι $\int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = -e^{-\frac{x^2}{2}}$, ενώ το δεύτερο το εκφράζουμε μέσω της σ.κ. Φ της τυπικής κανονικής. Συνεπώς τελικά,

$$\int_0^T te^{-\left(ct+\frac{k}{2}t^2\right)}dt = -e^{\frac{c^2}{2k}}\frac{1}{k}\left(e^{-\frac{\beta^2}{2}}-e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\right) - e^{\frac{c^2}{2k}}\frac{c\sqrt{2\pi}}{k^{\frac{3}{2}}}\big(\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)\big)$$

Συνδυάζοντας λοιπόν τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\frac{S_0}{1-R} &= \frac{\lambda_0\int_0^T e^{-\left(ct+\frac{k}{2}t^2\right)}dt + b\int_0^T te^{-\left(ct+\frac{k}{2}t^2\right)}dt}{\int_0^T e^{-\left(ct+\frac{k}{2}t^2\right)}dt} \\ &= \lambda_0 - b\frac{\frac{1}{k}\left(e^{-\frac{\beta^2}{2}}-e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\right)+\frac{c\sqrt{2\pi}}{k^{\frac{3}{2}}}\big(\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)\big)}{\sqrt{\frac{2\pi}{k}}\,\big(\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)\big)} \\ &= \lambda_0 + b\frac{e^{-\frac{c^2}{2k}}-e^{-\frac{(kT+c)^2}{2k}}}{\sqrt{2\pi k}\,\left(\Phi\left(\frac{kT+c}{\sqrt{k}}\right)-\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{k}}\right)\right)} - b\frac{c}{k}\end{aligned}$$

Όπου $r_0+\lambda_0=c$ και $a+b=k$ και άρα τελικά, το spread που αντιστοιχεί σε χρονικό ορίζοντα T ετών είναι

$$S_0(T) = (1-R)\left(\lambda_0 - b\frac{c}{k} + \frac{b\left(e^{-\frac{c^2}{2k}}-e^{-\frac{(kT+c)^2}{2k}}\right)}{\sqrt{2\pi k}\,\left(\Phi\left(\frac{kT+c}{\sqrt{k}}\right)-\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{k}}\right)\right)}\right) \tag{35}$$

4.5. Εκτίμηση του γραμμικού ρυθμού αθέτησης μιας οντότητας από τις αγοραίες τιμές των πιστωτικών περιθωρίων CDS επί της συγκεκριμένης οντότητας

Ο τύπος (35) για το πιστωτικό περιθώριο που προέκυψε στην προηγούμενη παράγραφο μπορεί εμμέσως τώρα να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση των άγνωστων ποσοτήτων λ_0 και b μέσω και πάλι βαθμονόμησης.

Αρχικά εκτιμούμε το r_0 και το a που εμφανίζονται στον παραπάνω τύπο και αφορούν το προθεσμιακό επιτόκιο άμεσου δανεισμού, $R(0,T) = r_0 + \frac{a}{2}T$. Η εκτίμησή τους γίνεται με τον τρόπο που περιγράφεται στην Παράγραφο4.3. Συγκεκριμένα, αφού καταγράψουμε από την αγορά k τιμές του LIBOR δολαρίου, έστω $\hat{L}_0, \hat{L}_1, \hat{L}_2, \dots, \hat{L}_{k-1}$, που αντιστοιχούν στους χρόνους $T_0 = 0, T_1, T_2, \dots., T_{k-1}$ (έτη), προκύπτει ότι (βλ. σχέση (34)) η εκτίμηση του a θα είναι

$$\hat{a} = \frac{2\ \sum_{i=1}^{k-1} T_i(\hat{R}_i - \hat{r}_0)}{\sum_{i=1}^{k-1} {T_i}^2}, \qquad \hat{R}_i = \frac{\ln\left(1 + \hat{L}_i T_i\right)}{T_i}$$

όπου $\hat{r}_0 = \hat{R}_0 = \hat{L}_0$ είναι το overnight επιτόκιο LIBOR δολαρίου της αγοράς.

Στη συνέχεια καταγράφουμε από την αγορά n τιμές του πιστωτικού περιθωρίου (spread), έστω $S_1^A, S_2^A, \dots, S_n^A$, που αντιστοιχούν σε n CDS επί μιας συγκεκριμένης οντότητας αναφοράς A, διάρκειας $t_1, t_2, \dots, t_n$ έτη αντίστοιχα (π.χ. 1,2,3,4,5 έτη). Με βάση αυτές τις αγοραίες τιμές θα εκτιμήσουμε τώρα τα λ_0, b μέσω βαθμονόμησης. Συγκεκριμένα θα εκτιμήσουμε τις τιμές των παραμέτρων λ_0, b οι οποίες εξασφαλίζουν ότι τα spreads από την αγορά προσαρμόζονται ικανοποιητικά στην θεωρητική τιμή του που δίνεται από την εξίσωση (35). Θα πρέπει τώρα να ελαχιστοποιήσουμε ως προς λ_0, b το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών μεταξύ των παρατηρούμενων και των προβλεπόμενων από το μοντέλο τιμών των spreads, δηλαδή το

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\ S_i^A\ - S_0(t_i)\right)^2 \tag{36}$$

Η ελαχιστοποίηση της παραπάνω ποσότητας ως προς λ_0, b (που περιέχονται στα $S_0(t_i)$) δεν είναι τώρα εύκολο να γίνει αναλυτικά διότι οι μερικές παράγωγοι είναι συναρτήσεις πεπλεγμένης μορφής ως προς τις παραμέτρους. Συνεπώς η ελαχιστοποίηση γίνεται χρησιμοποιώντας κατάλληλους αλγορίθμους αριθμητικής ανάλυσης.

Αν $\hat{\lambda}_0, \hat{b}$ οι παραπάνω εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων τότε η εκτίμηση του γραμμικού ρυθμού αθέτησης της οντότητας Α είναι

$$\hat{\lambda}_t = \hat{\lambda}_0 + \hat{b}t, \qquad t \geq 0,$$

αρκεί η προσαρμογή των παρατηρούμενων Spreads στην θεωρητική καμπύλη (δηλ. η βαθμονόμηση) να είναι ικανοποιητική, διαφορετικά δεν μπορεί να ισχύει το παραπάνω γραμμικό μοντέλο.

Συνεπώς, αν υπάρχει καλή προσαρμογή, η εκτίμηση της πιθανότητας αθέτησης της οντότητας Α μέχρι το χρόνο t είναι

$$\hat{p}_t = 1 - e^{-\int_0^t \hat{\lambda}_s ds} = 1 - e^{-\hat{\lambda}_0 t - \frac{\hat{b}}{2}t^2}, \qquad t \geq 0$$

η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένας δείκτης αξιολόγησης της πιστοληπτικής ικανότητας της οντότητας Α.

4.6. Αριθμητικό Παράδειγμα

Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τις παραπάνω τεχνικές για τον υπολογισμό του γραμμικού ρυθμού αθέτησης διαφόρων εταιρειών λαμβάνοντας τιμές από την αγορά. Ενδεικτικά, καταγράφουμε ότι το Libor δολαρίου για την 5-1-2015 είναι

$$\hat{L}_0 = 0.134\%, \hat{L}_1 = 0.201\%, \hat{L}_2 = 0.257\%, \hat{L}_3 = 0.316\%, \hat{L}_4 = 0.485\%, \hat{L}_5 = 0.794\%$$

για δανεισμό 0 (overnight), 1,2,3,6 και 12 μήνες αντίστοιχα, δηλαδή

$$T_0 = 0,\ \ T_1 = \frac{1}{12},\ \ T_2 = \frac{2}{12},\ \ T_3 = \frac{3}{12},\ \ T_4 = \frac{6}{12},\ \ T_5 = \frac{12}{12}$$

Αφού υπολογίσουμε τα $\hat{R}_i = \frac{\ln(1+\hat{L}_i T_i)}{T_i}$ και θέσουμε $\hat{r}_0 = 0.134\%$ εκτιμούμε ότι

$$\hat{a} = \frac{2\ \sum_{i=1}^{k-1} T_i(\hat{R}_i - \hat{r}_0)}{\sum_{i=1}^{k-1} {T_i}^2} \approx 0.013414$$

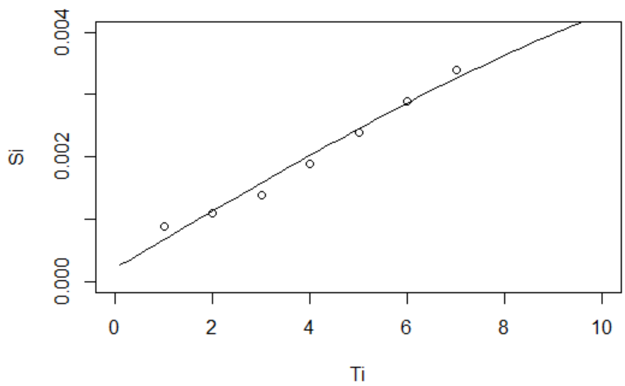
Επιλέγουμε αρχικά να μελετήσουμε τον ρυθμό αθέτησης της εταιρείας Apple. Καταγράφουμε ότι κατά τον χρόνο 5-1-2015 οι αγοραίες τιμές των spreads των CDS επί της οντότητας αναφοράς Α είναι

$$S_1^A = \frac{9.535}{10000}, \quad S_2^A = \frac{12.8}{10000}, \quad S_3^A = \frac{14.89}{10000}, \quad S_4^A = \frac{19.415}{10000},$$

$$S_5^A = \frac{27.29}{10000}, \quad S_6^A = \frac{36.52}{10000}, \quad S_7^A = \frac{41.86}{10000}$$

για $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, t_4 = 4, t_5 = 5, t_6 = 6, t_7 = 7$ έτη. Οι αντίστοιχες εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων (που ελαχιστοποιούν το άθροισμα των τετραγώνων (36)) υπολογίζονται αριθμητικά ότι είναι

$\hat{\lambda}_0 = 0.000019$, $\hat{b} = 0.001995$. Η σύγκριση των παρατηρούμενων τιμών των spreads με την προβλεπόμενη καμπύλη (35) για τις παραπάνω τιμές των παραμέτρων φαίνεται στο παρακάτω γράφημα



Παρατηρούμε ικανοποιητική την παραπάνω καμπύλη βαθμονόμησης και συνεπώς η πιθανότητα αθέτησης της οντότητας A μέσα στα επόμενα t έτη εκτιμάται ότι είναι

$$\hat{p}_t = 1 - e^{-0.000019\, t - \frac{0.001995}{2} t^2}$$

Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται για τις ακόλουθες οντότητες που εμφανίζονται στους παρακάτω πίνακες (με βάση τα δεδομένα από 05-01-2015)

Πίνακας 4.6.1 : Τιμές πιστωτικών περιθωρίων και βέλτιστες παράμετροι $\hat{\lambda}_0$ και $\hat{b}$ για 05-01-2015

	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$	$T = 5$	$T = 6$	$T = 7$	$\hat{\lambda}_0$	$\hat{b}$
Apple	9.535	12.8	14.89	19.415	27.29	36.52	41.86	0.000019	0.00199
Adidas	22.53	30.205	39.615	51,27	62.25	68.565	73.555	0.002014	0.003268
Allianz	11.71	17.105	23.615	30.41	34.585	40.305	44.38	0.00097	0.001995
Intel	5.93	9.985	18.105	25.23	31.15	38.57	44.26	0.000446	0.00392
Microsoft	4.425	7.98	14.08	19.175	27.345	49.145	75.595	0.002834	0.00392
Texas Instr.	5.93	11.495	20.79	28.915	37.795	45.15	52.435	0.000708	0.002873
Amazon	9.61	19.54	31.63	41.385	49.42	63.025	74.4	0.000519	0.003854
Astra-Zeneca	7.84	11.625	18.145	26.9	30.78	40.38	47.135	0.00028	0.002405
Deutsche Bank	31.86	42.505	53.01	68.435	77.685	86.98	93.505	0.003376	0.003881
National Bank of Gr	627.115	698.57	743.65	823.795	861.025	877.105	884.59	0.089506	0.017561
Morgan Stanley	28.985	43.28	59.05	70.46	84.555	94.9	104.835	0.002694	0.004643

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για την 03-04-2020, καταγράφουμε τιμές Libor δολαρίου

$$\hat{L}_0 = 0.366\%, \hat{L}_1 = 0.516\%, \hat{L}_2 = 0.596\%, \hat{L}_3 = 0.650\%, \hat{L}_4 = 0.686\%, \hat{L}_5 = 0.766\%$$

για δανεισμό 0 (overnight), 1,2,3,6 και 12 μήνες αντίστοιχα, δηλαδή

$$T_0 = 0, \;\; T_1 = \frac{1}{12}, \;\; T_2 = \frac{2}{12}, \;\; T_3 = \frac{3}{12}, \;\; T_4 = \frac{6}{12}, \;\; T_5 = \frac{12}{12}$$

Υπολογίζουμε πάλι τα $\hat{R}_i = \frac{\ln(1+\hat{L}_i T_i)}{T_i}$ και θέτουμε $\hat{r}_0 = 0.366\%$ εκτιμώντας τώρα ότι

$$\hat{a} = \frac{2 \sum_{i=1}^{k-1} T_i(\hat{R}_i - \hat{r}_0)}{\sum_{i=1}^{k-1} {T_i}^2} \approx 0.01006738$$

Επιλέγουμε και πάλι να μελετήσουμε αρχικά τον ρυθμό αθέτησης της εταιρείας Apple. Καταγράφουμε ότι κατά τον χρόνο 3-4-2020 οι αγοραίες τιμές των spreads των CDS επί της οντότητας αναφοράς A είναι

$$S_1^A = \frac{8.2279}{10000}, \qquad S_2^A = \frac{11.4655}{10000}, \qquad S_3^A = \frac{15.9185}{10000}, \qquad S_4^A = \frac{21.2111}{10000},$$

$$S_5^A = \frac{27.4553}{10000}, \qquad S_6^A = \frac{33.2293}{10000}, \qquad S_7^A = \frac{37.9969}{10000}$$

για $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, t_4 = 4, t_5 = 5, t_6 = 6, t_7 = 7$ έτη. Οι αντίστοιχες εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων (που ελαχιστοποιούν το άθροισμα των τετραγώνων (36)) υπολογίζονται αριθμητικά ότι είναι

$$\hat{\lambda}_0 = 0.000169, \qquad \hat{b} = 0.001821$$

Παρατηρούμε και πάλι ικανοποιητική την καμπύλη βαθμονόμησης (βλέπε παρακάτω τα γραφήματα καλής προσαρμογής) και συνεπώς η πιθανότητα αθέτησης της οντότητας Α μέσα στα επόμενα t έτη εκτιμάται ότι είναι

$$\hat{p}_t = 1 - e^{-0.000169\, t - \frac{0.001821}{2} t^2}$$

Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται και πάλι για τις ακόλουθες οντότητες που εμφανίζονται στους παρακάτω πίνακες (με βάση τα δεδομένα από 03-04-2020)

Πίνακας 4.6.2 : Τιμές πιστωτικών περιθωρίων και βέλτιστες παράμετροι $\hat{\lambda}_0$ και $\hat{b}$ για 03-04-2020

	$T=1$	$T=2$	$T=3$	$T=4$	$T=5$	$T=6$	$T=7$	$\hat{\lambda}_0$	$\hat{b}$
Apple	8.2279	11.4655	15.9185	21.2111	27.4553	33.2293	37.9969	0.000169	0.001821
Adidas	20.6615	35.3243	52.0802	71.9202	83.2799	90.8237	95.9887	0.001569	0.00475
Allianz	26.0941	33.5633	42.3248	50.6744	57.267	63.4781	67.8151	0.003193	0.002547
Intel	13.3239	20.1122	30.2199	43.8206	54.6808	62.0696	67.4864	0.00027	0.003454
Microsoft	8.1634	13.7228	20.7845	29.8926	39.2437	46.2031	51.1189	0.000235	0.002692
Texas Instr.	25.0126	39.5577	59.4077	78.6061	97.34	108.9527	117.675	0.00124	0.005881
Amazon	17.8565	24.3509	32.2644	40.2795	47.8089	54.1384	59.5668	0.001651	0.002544
Astra-Zeneca	10.2551	14.3104	19.461	25.486	31.8489	38.0733	43.3086	0.000454	0.002009
Deutsche Bank	169.031	176.109	172.9023	171.7498	171.143	172.4665	173.418	0.028621	0.000052
National Bank of Gr	577.2164	616.3368	617.7103	591.8162	570.798	561.0494	558.5277	59.546615	83.359715
Morgan Stanley	102.9481	110.6208	116.6159	123.3761	129.028	133.1663	136.1424	0.016329	0.002006

Με βάση τις παραπάνω εκτιμήσεις κατασκευάζουμε τώρα τους ακόλουθους πίνακες και γραφήματα (καμπύλες βαθμονόμησης για κάθε περίπτωση). Οι εκτιμήσεις και τα γραφήματα έγιναν μέσω της γλώσσας python, οι αντίστοιχοι κώδικες παρατίθενται στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.

Πίνακας 4.6.3 : Εκτιμώμενες Πιθανότητες Αθέτησης με βάση τα δεδομένα από 05-01-2015

Εταιρεία	T = 1	T = 2	T = 3	T = 4	T = 5
Apple	0.001016	0.004019	0.008993	0.015908	0.024722
Adidas	0.003641	0.010507	0.020532	0.033619	0.049642
Allianz	0.001966	0.005912	0.011816	0.019642	0.029344
Intel	0.000740	0.003846	0.009294	0.017048	0.027052
Microsoft	-0.000875*	0.002169	0.009097	0.019826	0.034232
Texas Instr.	0.000728	0.004321	0.010746	0.019950	0.031850
Amazon	0.001407	0.006648	0.015663	0.028348	0.044560
AstraZeneca	0.000922	0.004241	0.009933	0.017957	0.028256
Deutsche Bank	0.005303	0.014410	0.027217	0.043577	0.063305
National Bank of Gr	0.093611	0.192759	0.293577	0.392565	0.486774
Morgan Stanley	0.005003	0.014567	0.028560	0.046791	0.069013

* Στην περίπτωση της εταιρείας Microsoft, όπως φαίνεται και από το αντίστοιχο γράφημα καλής προσαρμογής παρακάτω, δεν έχουμε καλή προσαρμογή και γι΄ αυτό το λόγο το μοντέλο μας προβλέπει αρνητική πιθανότητα αθέτησης για χρονικό ορίζοντα ενός έτους (σε αυτή την περίπτωση μπορεί να θεωρηθεί 0).

Πίνακας 4.6.4 : Εκτιμώμενες Πιθανότητες Αθέτησης με βάση τα δεδομένα από 03-04-2020

Εταιρεία	T = 1	T = 2	T = 3	T = 4	T = 5
Apple	0.001079	0.003972	0.008663	0.015127	0.023328
Adidas	0.003939	0.012562	0.025748	0.043311	0.065009
Allianz	0.004457	0.011417	0.020825	0.032611	0.046687
Intel	0.001995	0.007420	0.016219	0.028302	0.043545
Microsoft	0.001111	0.004903	0.011345	0.020385	0.031952
Texas Instr.	0.004176	0.014147	0.029738	0.050680	0.076613
Amazon	0.002920	0.008357	0.016271	0.026602	0.039272
AstraZeneca	0.001458	0.004915	0.01035	0.017732	0.027015
Deutsche Bank*	0.028241	0.055733	0.082495	0.108544	0.133899
National Bank of Gr**	1.0	----	----	----	----
Morgan Stanley	0.017182	0.036005	0.056363	0.078142	0.101223

* Για την Deutsche Bank δεν έχουμε καλή προσαρμογή διότι οι τιμές των πιστωτικών περιθωρίων αυξομειώνονται και δεν αυξάνονται περίπου γραμμικά όπως υποθέτει το μοντέλο μας, συνεπώς οι πιθανότητες αθέτησης που υπολογίζουμε,

αν και λογικές, δεν είναι αξιόπιστες. Ο λόγος αυτής της αυξομείωσης των τιμών των πιστωτικών περιθωρίων πιθανόν να οφείλεται στην πανδημία και στην αβεβαιότητα της αγοράς ως προς την διατήρηση της πιστωτικής φερεγγυότητας του εν λόγω χρηματοπιστωτικού ιδρύματος.

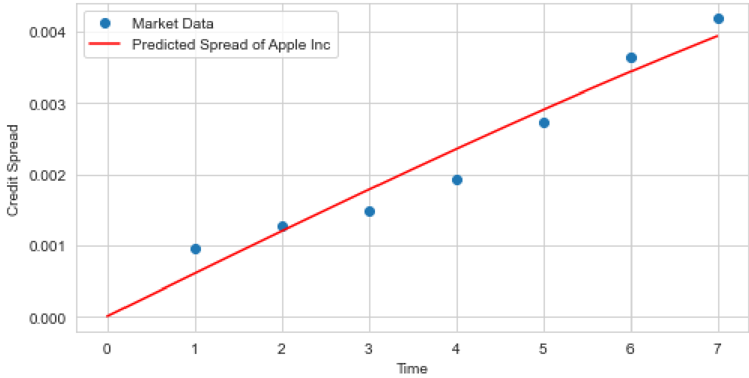
** Στην περίπτωση της Εθνικής Τράπεζας της Ελλάδος το μοντέλο μας αποτυγχάνει να δώσει πρόβλεψη για οποιονδήποτε χρονικό ορίζοντα διότι παρατηρώντας τις τιμές των πιστωτικών περιθωρίων βλέπουμε ότι οι τελευταίες αυξάνονται για χρόνο λήξης έως τα τρία πρώτα έτη και μετά μειώνονται απότομα. Συνεπώς δεν αυξάνονται περίπου γραμμικά συναρτήσει του χρόνου λήξης όπως υποθέτει το μοντέλο μας. Ένας πιθανός λόγος γι΄αυτήν την παράδοξη συμπεριφορά των τιμών των πιστωτικών περιθωρίων είναι ότι λόγω του πέρατος του μνημονίου στην Ελλάδα, συνδυαστικά με το ξεκίνημα της πανδημίας σε παγκόσμιο επίπεδο, η αγορά μάλλον προέβλεπε ότι αν το εν λόγω πιστωτικό ίδρυμα δεν πτωχεύσει στα τρία πρώτα έτη τότε θα έχει ξεπεράσει τον κίνδυνο αθέτησης υποχρεώσεων.

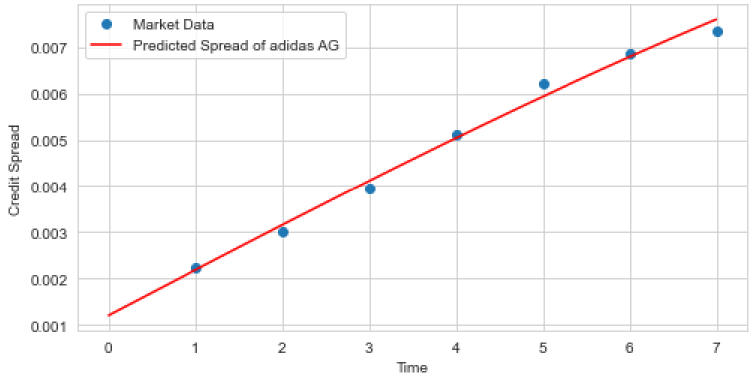
Πίνακας 4.6.5 : Λόγος πιθανοτήτων αθέτησης για χρονικό ορίζοντα 5 ετών

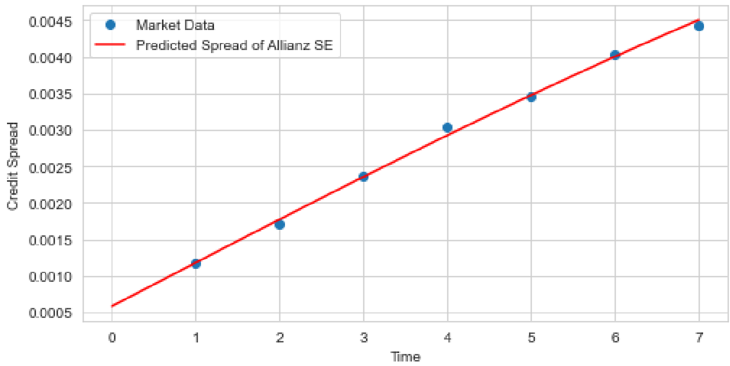
Εταιρεία	$\boldsymbol{P_{2015}}$ **T = 5 (2015)**	$\boldsymbol{P_{2020}}$ **T = 5 (2020)**	$\boldsymbol{P_{2020}/P_{2015}}$
Apple	0.024722	0.023328	**0.94**
Adidas	0.049642	0.065009	**1.31**
Allianz	0.029344	0.046687	**1.59**
Intel	0.027052	0.043545	**1.61**
Microsoft	0.034232	0.031952	**0.93**
Texas Instr.	0.031850	0.076613	**2.41**
Amazon	0.044560	0.039272	**0.88**
AstraZeneca	0.028256	0.027015	**0.96**
Deutsche Bank	0.063305	0.133899	**2.12**
Morgan Stanley	0.069013	0.101223	**1.47**

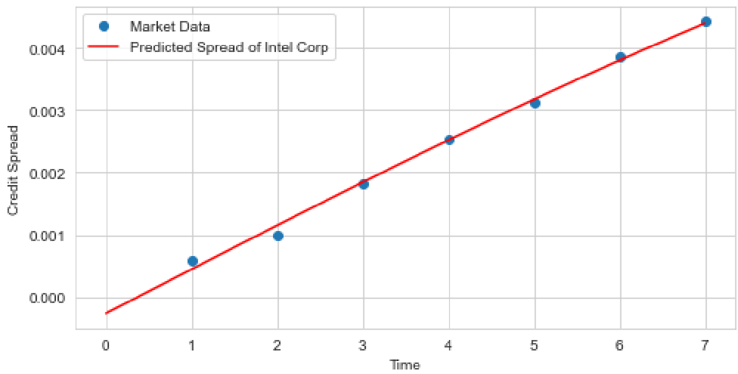
Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι για τις ισχυρές εταιρείες Apple, Microsoft, Amazon καθώς και για την φαρμακευτική AstraZeneca η πιθανότητα χρεοκοπίας με την έναρξη της πανδημίας όχι μόνο δεν αυξήθηκε αλλά ελαττώθηκε κιόλας συγκρινόμενη με αυτήν του 2015. Αντίθετα οι υπόλοιπες επιχειρήσεις και τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα επλήγησαν σοβαρά από την υγειονομική κρίση με τις πιθανότητες αθέτησής τους να γίνονται μιάμιση έως και δυόμιση φορές μεγαλύτερες σε σχέση με τις αντίστοιχες του έτους 2015.

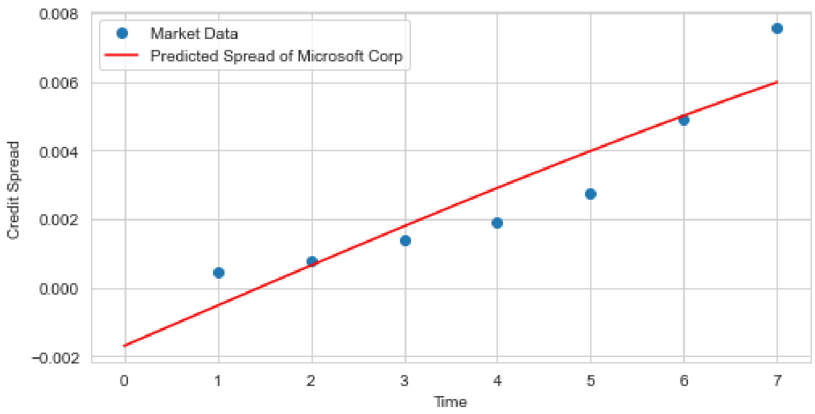
Γραφήματα καλής προσαρμογής σύμφωνα με τα δεδομένα της αγοράς από της 05-01-2015



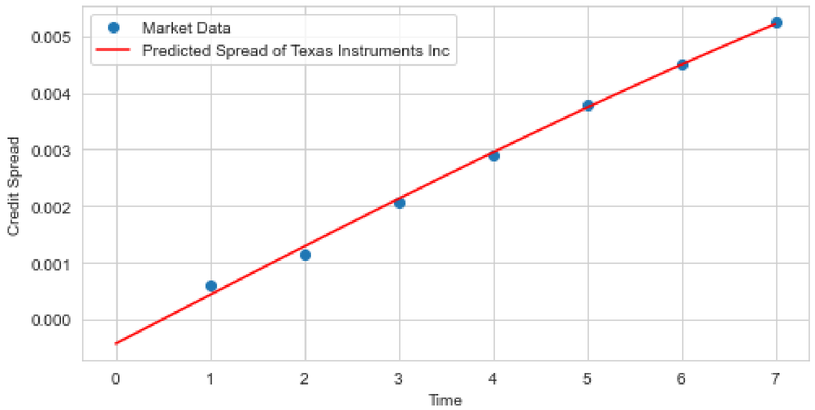




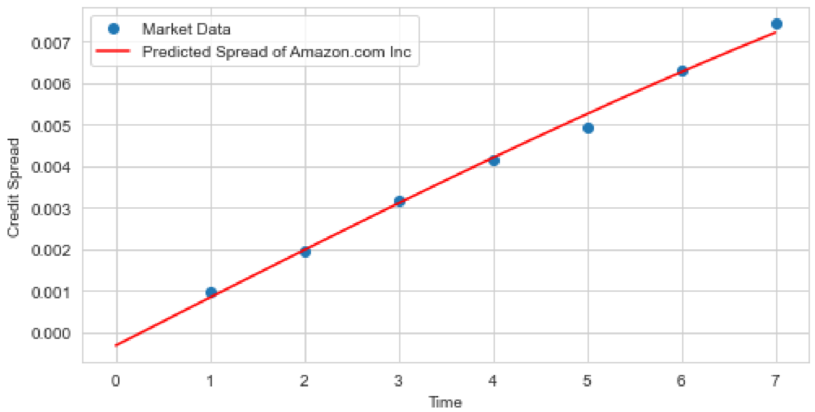




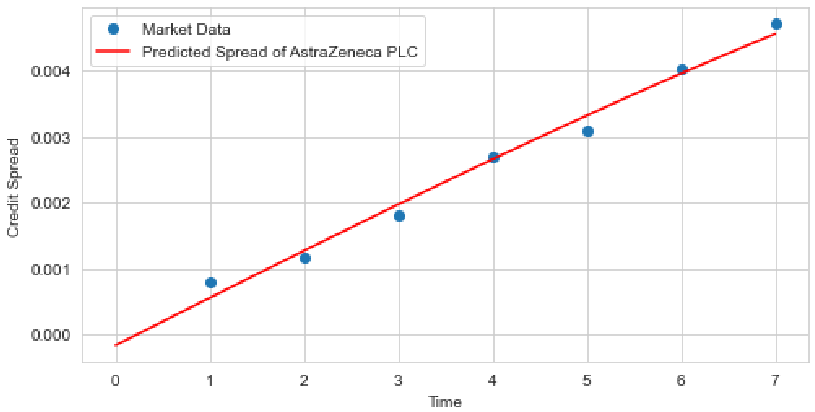
Market Data
Predicted Spread of Microsoft Corp
Credit Spread
Time
0.008
0.006
0.004
0.002
0.000
−0.002
0
1
2
3
4
5
6
7



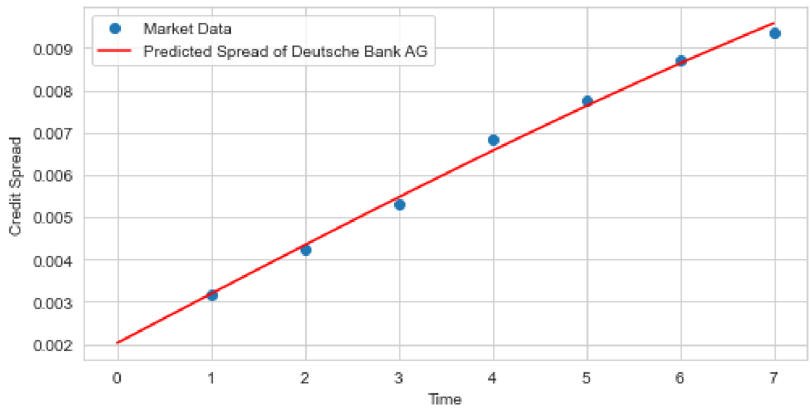
Market Data
Predicted Spread of Texas Instruments Inc
Credit Spread
Time
0.005
0.004
0.003
0.002
0.001
0.000
0
1
2
3
4
5
6
7



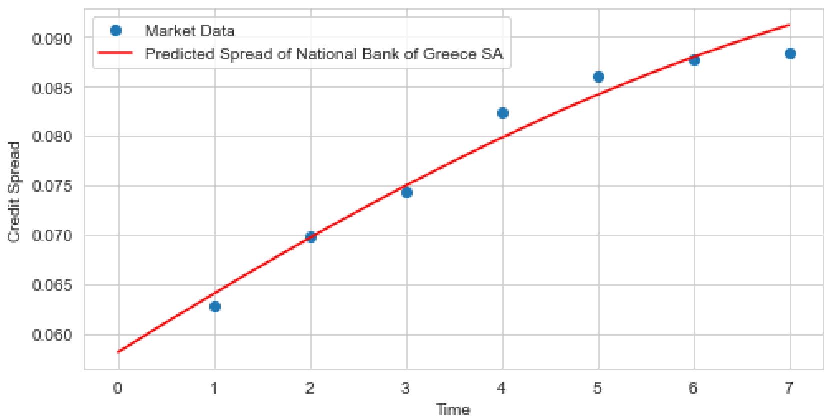
Market Data
Predicted Spread of Amazon.com Inc
Credit Spread
Time
0.007
0.006
0.005
0.004
0.003
0.002
0.001
0.000
0
1
2
3
4
5
6
7



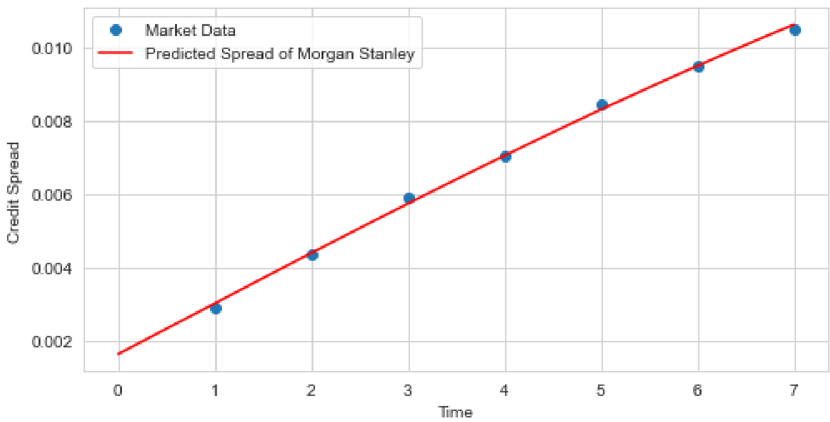
Market Data
Predicted Spread of AstraZeneca PLC
Credit Spread
Time
0.004
0.003
0.002
0.001
0.000
0
1
2
3
4
5
6
7



Market Data
Predicted Spread of Deutsche Bank AG
Credit Spread
Time

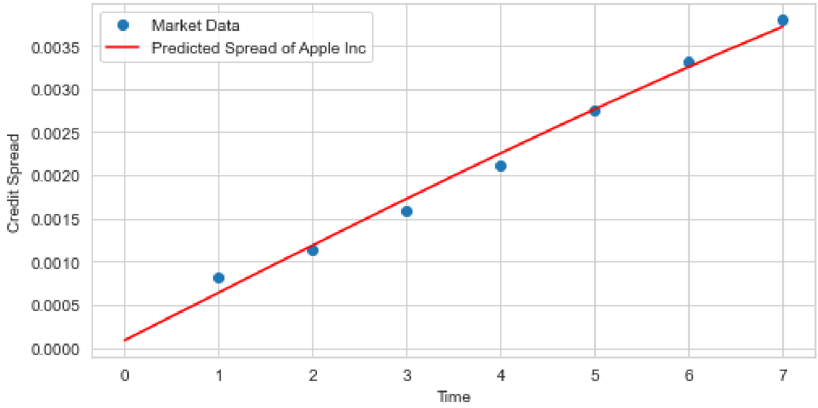


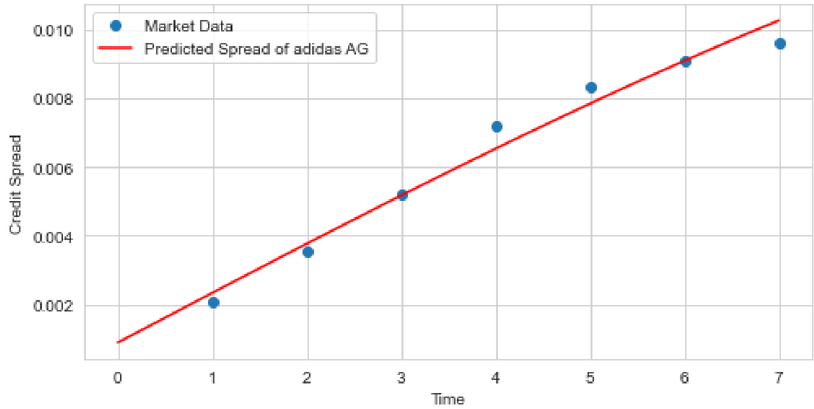
Market Data
Predicted Spread of National Bank of Greece SA
Credit Spread
Time

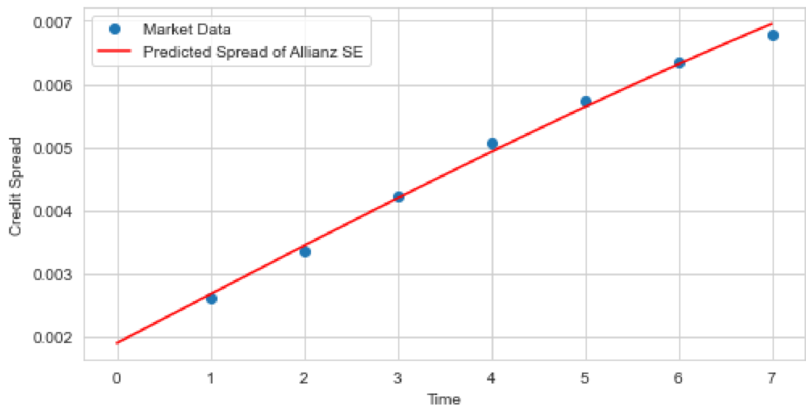


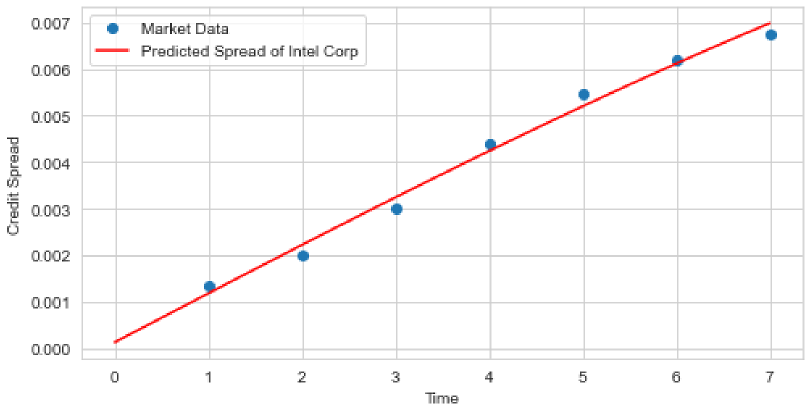
Market Data
Predicted Spread of Morgan Stanley
Credit Spread
Time

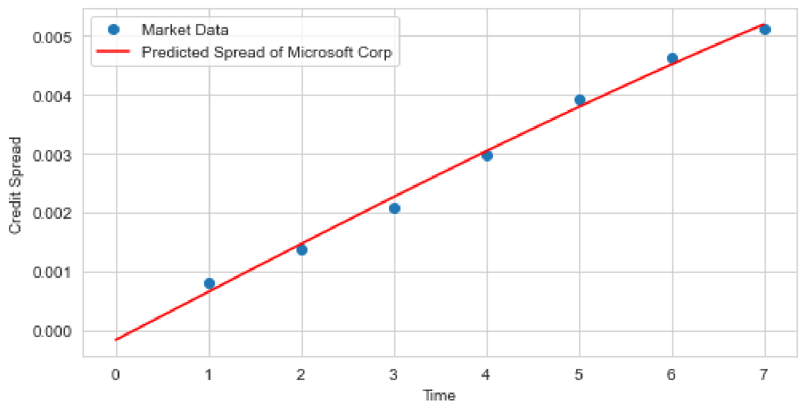
Γραφήματα καλής προσαρμογής σύμφωνα με τα δεδομένα της αγοράς από της 03-04-2020

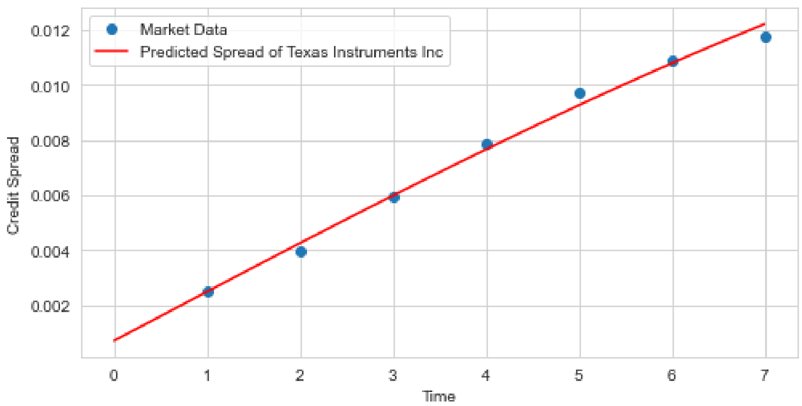


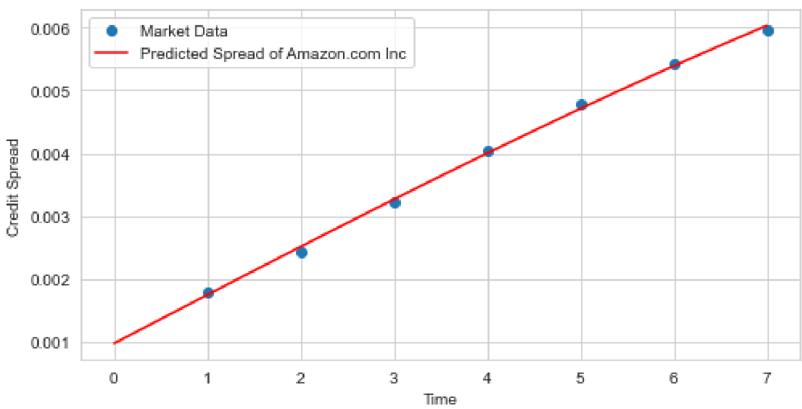


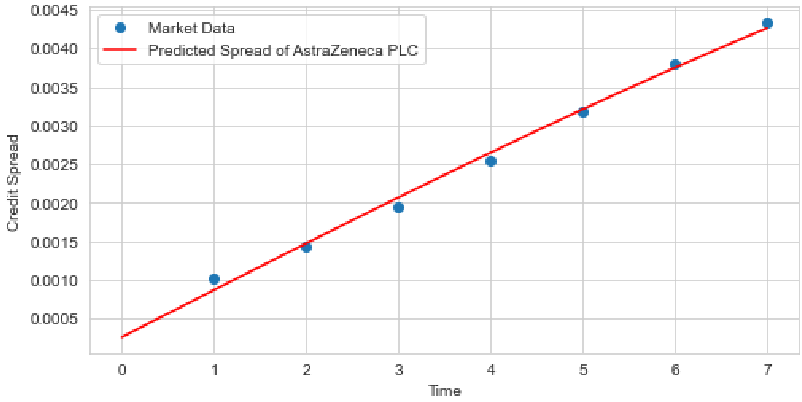



Market Data
Predicted Spread of Intel Corp
Credit Spread
Time

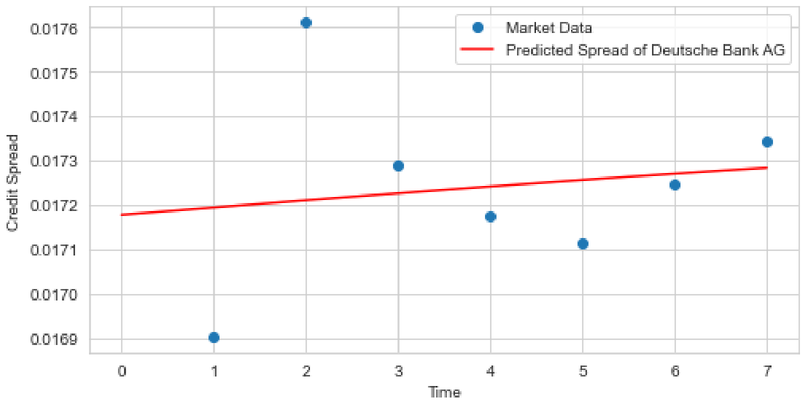

Market Data
Predicted Spread of Microsoft Corp
Credit Spread
Time


Market Data
Predicted Spread of Texas Instruments Inc
Credit Spread
Time

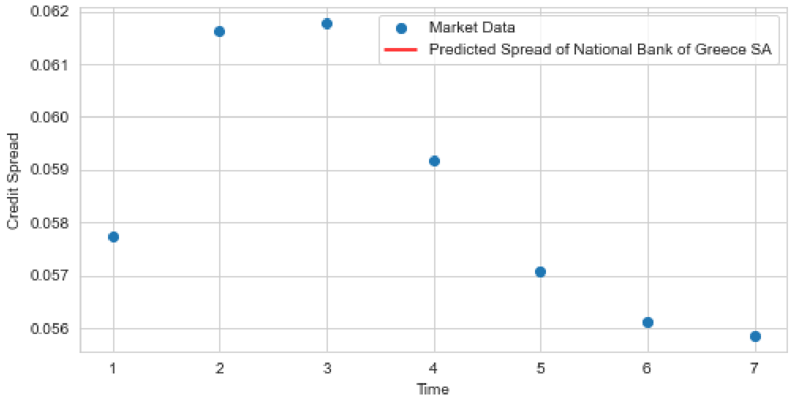

Market Data
Predicted Spread of Amazon.com Inc
Credit Spread
Time



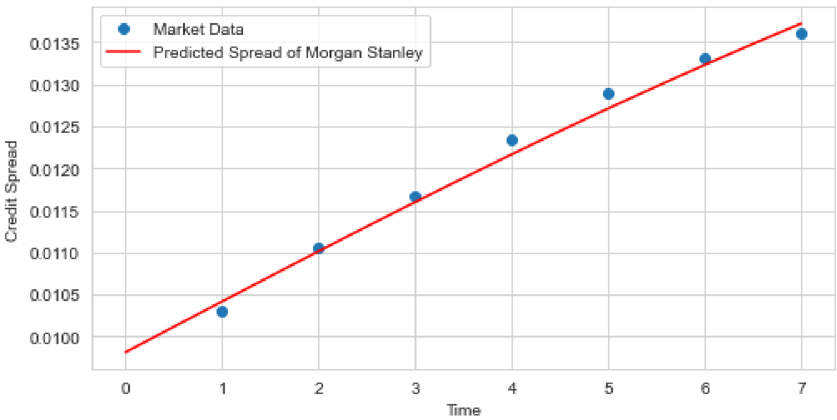
Market Data
Predicted Spread of AstraZeneca PLC
Credit Spread
Time



Market Data
Predicted Spread of Deutsche Bank AG
Credit Spread
Time

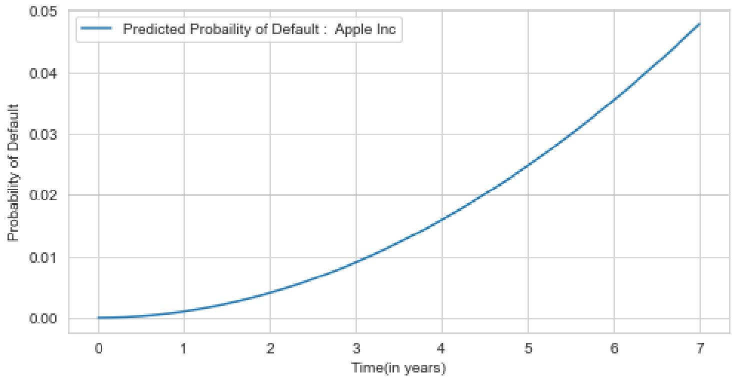


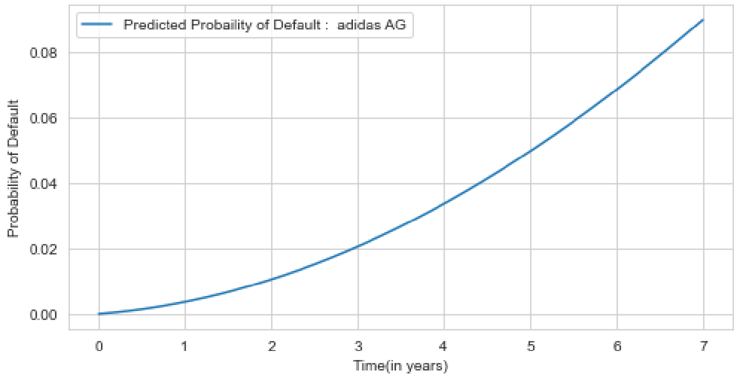
Market Data
Predicted Spread of National Bank of Greece SA
Credit Spread
Time

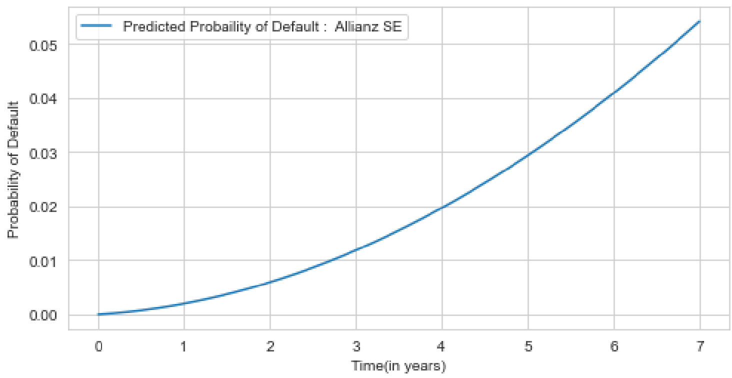


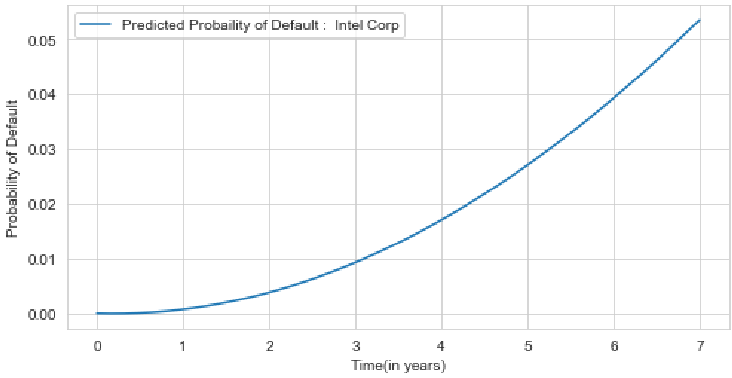
Market Data
Predicted Spread of Morgan Stanley
Credit Spread
Time

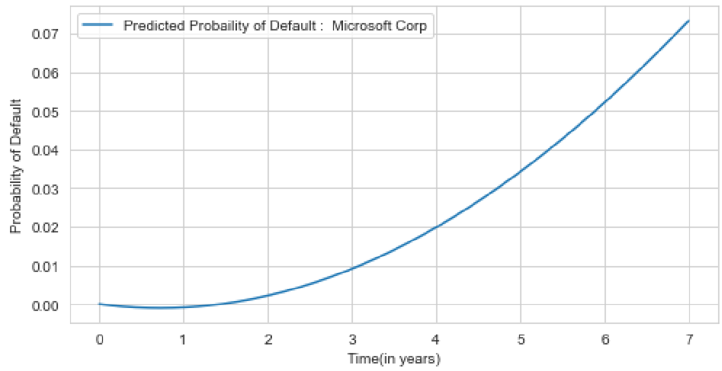
Γραφήματα εκτιμώμενης πιθανότητας αθέτησης, με βάση τα δεδομένα από της 05-01-2015



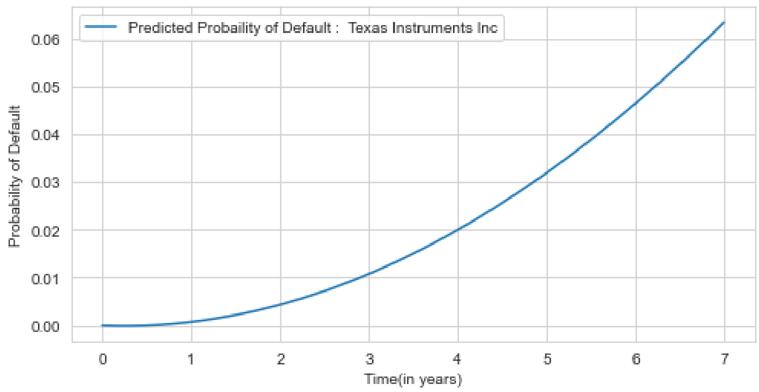


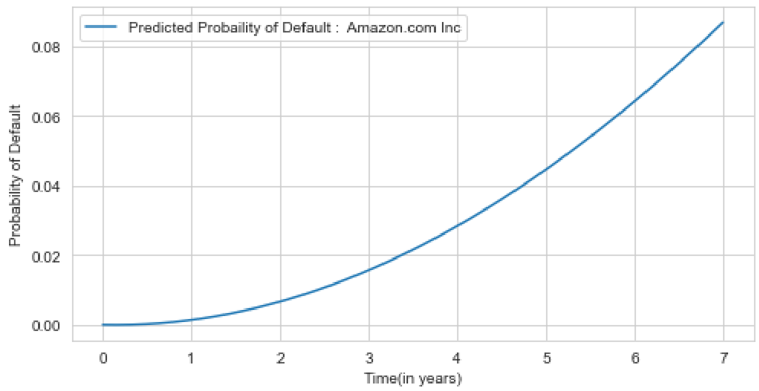


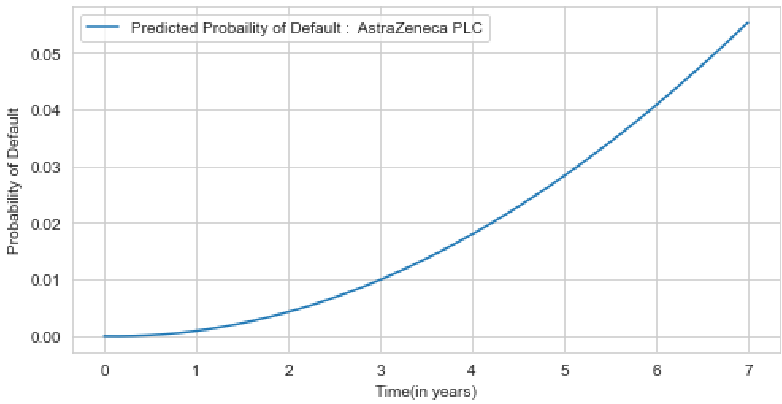


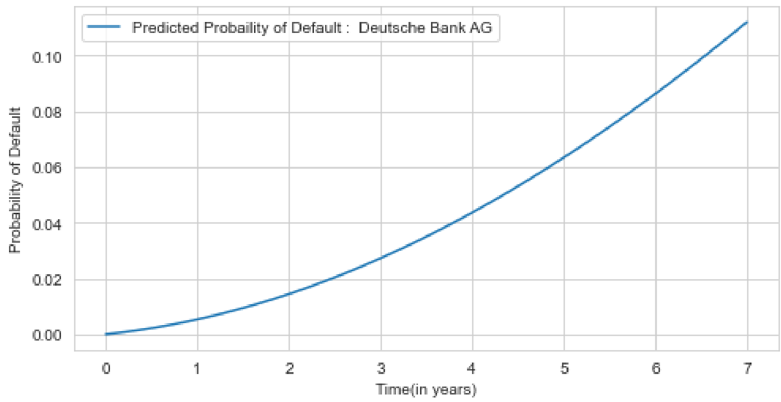


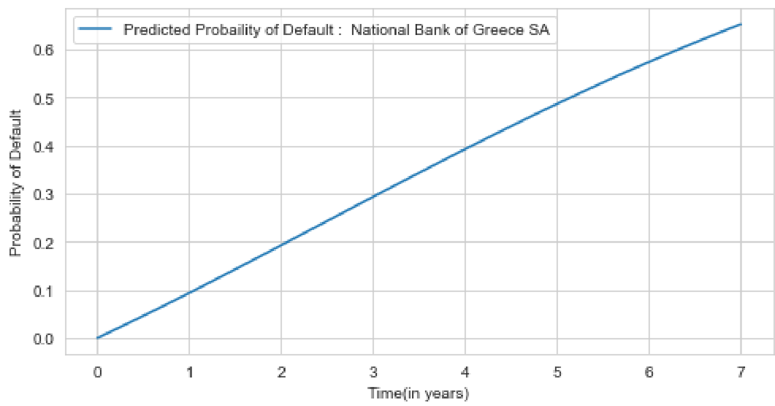
Σχόλιο : Στο παραπάνω γράφημα η εκτιμώμενη πιθανότητα αθέτησης για χρονικό ορίζοντα ενός έτους επειδή είναι αρνητική, θεωρείται ίση με το μηδέν. Αυτό το παρατηρήσαμε και παραπάνω λόγω της μη καλής προσαρμογής του μοντέλου μας.

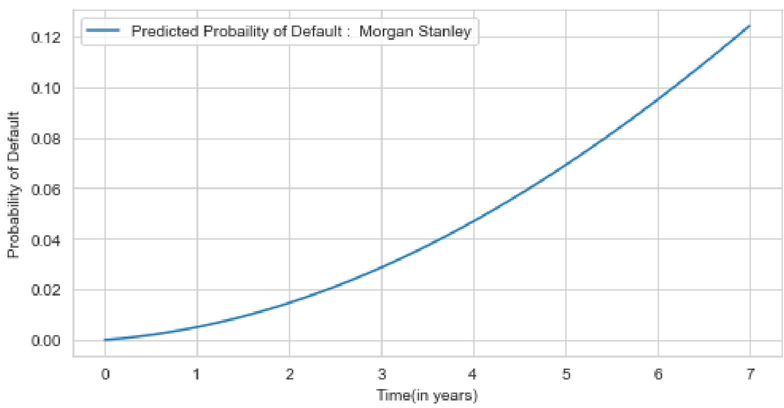




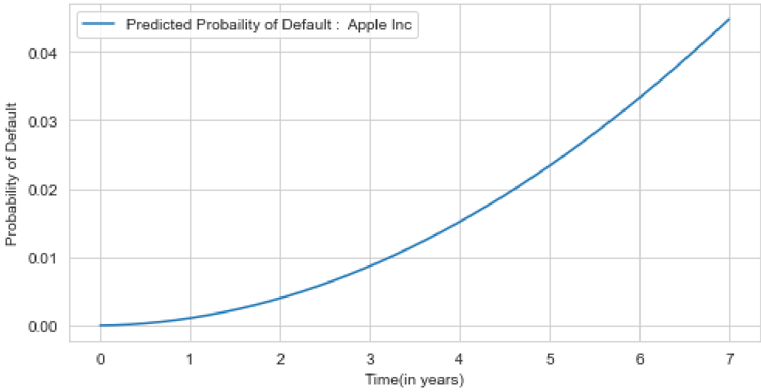

Predicted Probaility of Default : AstraZeneca PLC
Probability of Default
Time(in years)

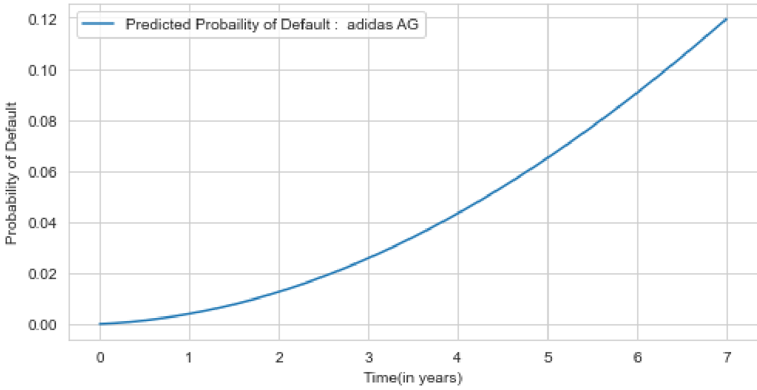

Predicted Probaility of Default : Deutsche Bank AG
Probability of Default
Time(in years)

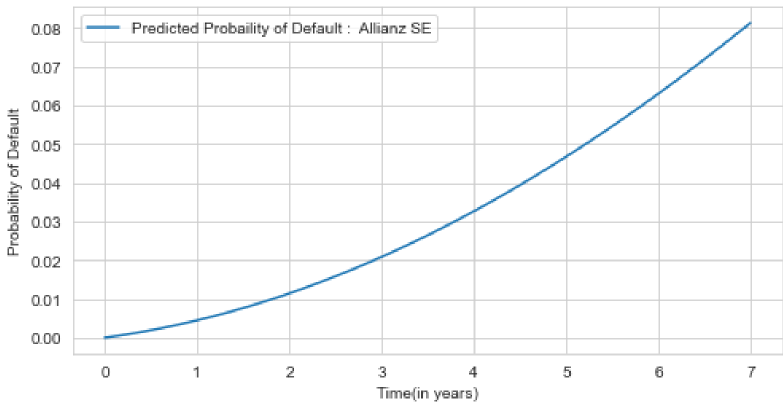

Predicted Probaility of Default : National Bank of Greece SA
Probability of Default
Time(in years)

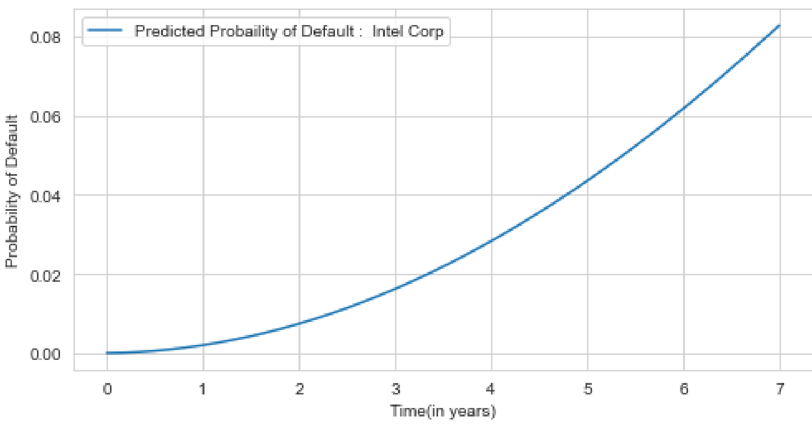

Predicted Probaility of Default : Morgan Stanley
Probability of Default
Time(in years)

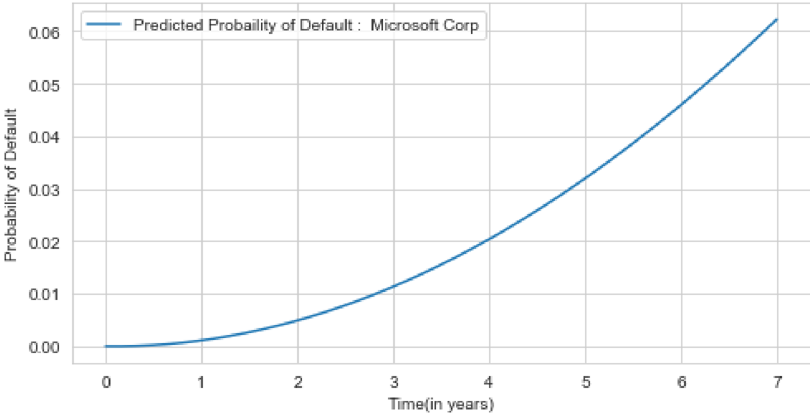
Γραφήματα εκτιμώμενης πιθανότητας αθέτησης, με βάση τα δεδομένα από της 03-04-2020

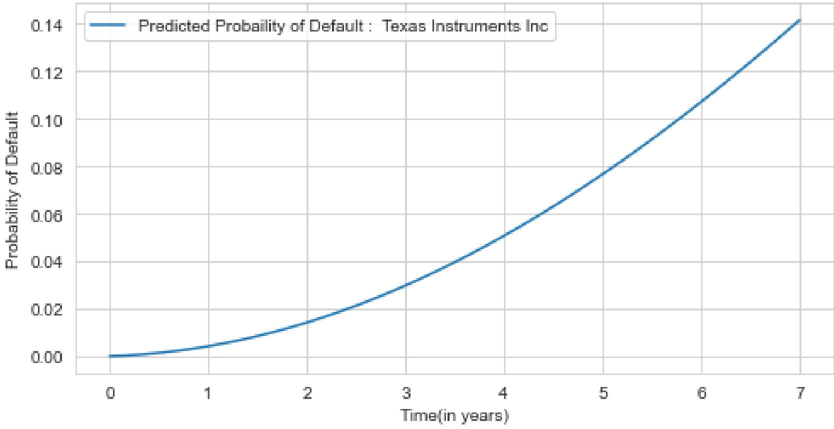


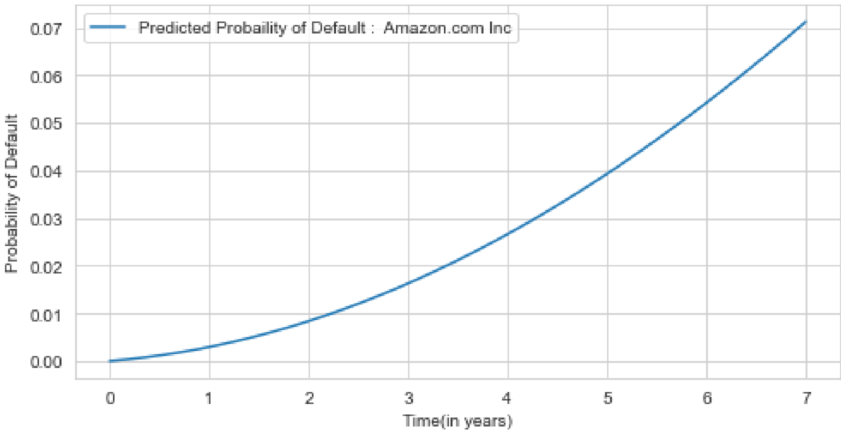


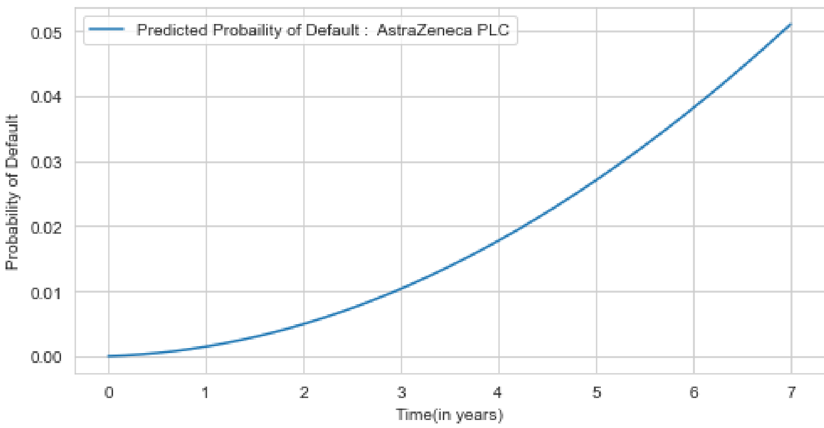


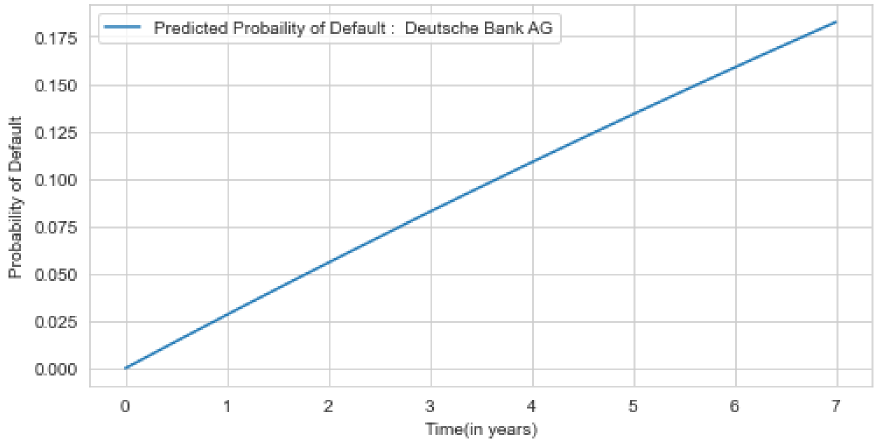


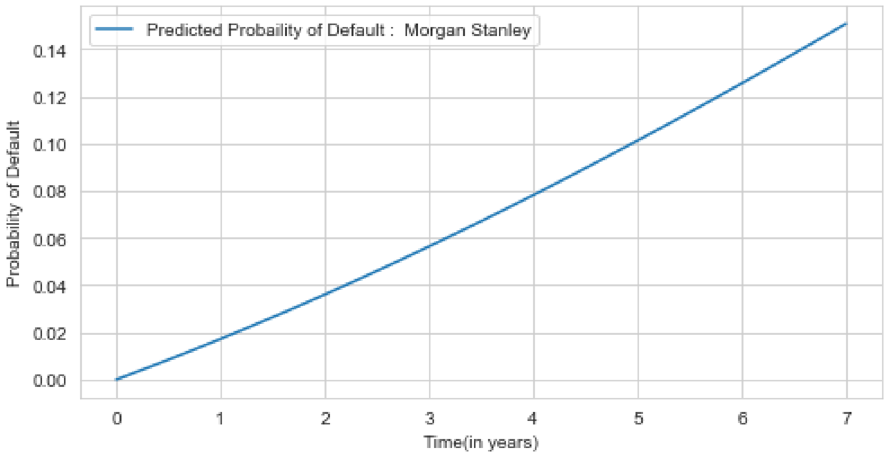

Predicted Probaility of Default : Microsoft Corp
Probability of Default
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0
1
2
3
4
5
6
7
Time(in years)


Predicted Probaility of Default : Texas Instruments Inc
Probability of Default
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0
1
2
3
4
5
6
7
Time(in years)


Predicted Probaility of Default : Amazon.com Inc
Probability of Default
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
0
1
2
3
4
5
6
7
Time(in years)


Predicted Probaility of Default : AstraZeneca PLC
Probability of Default
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0
1
2
3
4
5
6
7
Time(in years)


Predicted Probaility of Default : Deutsche Bank AG
0.175
0.150
0.125
0.100
0.075
0.050
0.025
0.000
Probability of Default
0
1
2
3
4
5
6
7
Time(in years)


Predicted Probaility of Default : Morgan Stanley
0.14
0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
Probability of Default
0
1
2
3
4
5
6
7
Time(in years)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5.1 Αποτελέσματα

Από τα αποτελέσματα της εφαρμογής του υποδείγματος (Κεφάλαιο4) βλέπουμε ότι παρόλο που χρησιμοποιήσαμε ένα απλό μοντέλο τόσο για τα προθεσμιακά επιτόκια όσο και για τον ρυθμό αθέτησης, θεωρώντας ότι ο τελευταίος είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου, στις περισσότερες εταιρείες είχαμε αρκετά καλή σύγκλιση του θεωρητικού μοντέλου με τα δεδομένα της αγοράς. Από τους πίνακες της εκτιμώμενης πιθανότητας αθέτησης αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι στις ισχυρότερες εταιρείες η πανδημία που επικρατούσε στις αρχές του έτους 2020 (3-4-2020) δεν επηρέασε σε μεγάλο βαθμό την πιστοληπτική τους ικανότητα αυξάνοντας σε μικρό ποσοστό τις εν λόγω πιθανότητες. Κάτι τέτοιο βέβαια δεν μπορεί να ειπωθεί για τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα που εξετάσαμε, όπου εκεί οι πιθανότητες αθέτησης τριπλασιάστηκαν έως και τετραπλασιάστηκαν, ιδίως σε βραχυπρόθεσμο ορίζοντα (1 έτος). Στην περίπτωση δε της Εθνικής Τράπεζας της Ελλάδος για το έτος 2020 το μοντέλο μας απέτυχε να κάνει πρόβλεψη διότι όπως παρατηρούμε από τα εμπειρικά δεδομένα οι τιμές των Credit Spread όχι μόνο δεν αυξάνονται γραμμικά αλλά μετά το τρίτο έτος ακολουθούν έντονη πτωτική πορεία, γεγονός το οποίο δεν είναι φυσιολογικό και υποδηλώνει την αστάθεια που επικρατούσε στην αγορά αναφορικά με την πτώχευση του συγκεκριμένου ιδρύματος.

5.2 Συμπεράσματα

Τα μοντέλο μειωμένης μορφής που χρησιμοποιήσαμε στην εν λόγω διπλωματική εργασία κατάφερε να προσαρμοστεί αρκετά καλά με τα δεδομένα της αγοράς και να προβλέψει την πιθανότητα αθέτησης υποχρεώσεων για κάποιες γνωστές και ισχυρές επιχειρήσεις. Βέβαια δεν λαμβάνει καθόλου υπόψη τον ισολογισμό των εν λόγω εταιρειών, ούτε μπορεί να εξηγήσει με οικονομικούς όρους τον λόγο για τον οποίο θα προκύψει αθέτηση υποχρεώσεων καθώς την αντιμετωπίζει σαν ένα εξωγενές τυχαίο γεγονός. Αυτά είναι και τα μειονεκτήματα των μοντέλων μειωμένης μορφής σε σχέση με τα δομικά μοντέλα. Παρόλα αυτά είναι λιγότερο πολύπλοκα και απαιτητικά σε υπολογισμούς, γεγονός που τα καθιστά πιο εφαρμόσιμα στην πράξη.

Στην σημερινή εποχή όπου το παγκόσμιο οικονομικό περιβάλλον είναι ασταθές και αλλάζει συνεχώς λόγω πολλών παραγόντων όπως η ενεργειακή κρίση, υγειονομική κρίση, συγκρούσεις κρατών, η πρόβλεψη χρεοκοπίας ισχυρών επιχειρήσεων και χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων αποκτά μείζονα στρατηγική σημασία ώστε να αντισταθμιστούν οι κίνδυνοι καταστροφικών γεγονότων όπως π.χ η παγκόσμια οικονομική κρίση του 2008.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Κώδικες Python®

1) Η Κίνηση Brown

Κώδικας κατασκευής μίας τυχαίας πραγματοποίησης της τυχαίας μεταβλητής $X_t, t \in [0,10]$ με παραμέτρους $(\mu, \sigma) = (0,2)$ & αρχική τιμή $X_0 = 50$ σε Python®

```
from math import sqrt
from scipy.stats import norm
import numpy as np


def brownian(x0, n , dt , delta, out=None):


  """
  Generate an instance of Brownian Motion (i.e the Wiener process):

    X(t)=X(0) + N(0,delta**2 * t; 0, t)

   where N(a,b; t0 , t1) is a normally distributed random variable with mean a and variance b
  .The parameters t0 and t1 make explicit the statistical independence of N on different time
  intervals; that is,if [t0, t1) and [t2, t3) are disjoint  intervals ,then N(a,b; t0, t1) and N(a,b; t2,
  t3) are independent.

  Written as an iteration scheme ,

    X(t+dt) = X(t) + N(0, delta**2 * dt; t, t+dt)

   If x0 is an array (or array-like), each value in 'x0' is treated as an initial condition ,and the
  value returned is a numpy array with one more dimension than 'x0'.

  Arguments:
  ---------
   x0 : float or numpy array(or something that can be converted to a numpy array) using
  numpy.asarray(x0).The initial condition (i.e position(s)) of the Brownian motion.

  n : int
     The number of steps to take.
  dt: float
     The time step.
  delta : float
      delta determines the 'speed' of the Brownian motion. The random variable of the posi-
  tion  at time t ,X(t) has a normal distribution whose mean is the position at time t=0 and
  whose variance is delta**2 * t .
  out : numpy array or None
      If out is not None , it specifies the array in which to put the result .If 'out' is None , a new
numpy array is created and returned.
  Returns:
```

```
-------
A numpy array of floats with shape 'x0.shape + (n,)'.
Note that the initial value 'x0' is not included in the returned array .
"""



x0 = np.asarray(x0)

# For each element of x0 , generate a sample of numbers from a normal distribution.

r = norm.rvs(size=x0.shape + (n,), scale = delta*sqrt(dt))

# If 'out' was not given ,create an output array .

if out is None :
   out = np.empty(r.shape)
# This computes the Brownian motion by forming the cumulative sum of the random sam-
ples.
np.cumsum(r,axis=-1, out = out)
# Add the initial condition .
out+=np.expand_dims(x0, axis=-1)

return out
```

Κώδικας κατασκευής 5 τυχαίων πραγματοποιήσεων της τυχαίας μεταβλητής $X_t, t \in [0,10]$ με παραμέτρους $(\mu, \sigma) = (0,2)$ & αρχική τιμή $X_0 = 50$ σε Python®

```
from pylab import plot,show,grid,xlabel,ylabel
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
import seaborn as sns
plt.figure(figsize=(12,4))
# The Wiener process parameter.
delta = 2
# Total time.
T = 10.0
# Number of steps
N = 500
# Time step size
dt = T/N
# Number of realizations to generate.
m = 5
# Create an empty array to store the realizations.
x = np.empty((m,N+1))
# Initial values of x.
x[:,0] = 50
brownian(x[:,0], N , dt , delta , out = x[:,1:])
t  = np.linspace(0.0, N*dt, N+1)
for k in range(m):
   plot(t, x[k],label = 'Path'+ str(k+1) )
xlabel('t', fontsize=16)
ylabel('x', fontsize=16)
grid(True)
plt.savefig('brownian1.png',dpi=120)
plt.legend()
```

Κώδικας κατασκευής μιας πραγματοποίησης μιας δισδιάστατης κίνησης Brown στο χρονικό διάστημα $[0,15]$ με παραμέτρους $(\mu,\sigma)=(0,0.25)$ και $\boldsymbol{X}_0=(0,0)$.

```
import numpy as np
from pylab import plot, show,grid,axis,xlabel,ylabel,title
plt.figure(figsize=(8,8))
# The Wiener process parameter.
delta = 0.25
# Total time.
T = 15.0
# Number of steps.
N = 5000
# Time step size.
dt = T/N
# Initial values of x.
x = np.empty((2,N+1))
x[:,0] = 0.0
brownian(x[:,0] , N , dt , delta , out = x[:,1:])

# Plot the 2D trajectory
plot(x[0],x[1])
# Mark the start and end points.
plt.plot(x[0,0],x[1,0],'go')
plt.plot(x[0,-1],x[1,-1],'ro')
# More plot decorations
title('2D Brownian Motion')
xlabel('x',fontsize=16)
ylabel('y',fontsize=16)
axis('equal')
grid(True)
plt.savefig('2Dbrownian2.jpg',dpi=300)
plt.savefig('2Dbrownian2.jpg',dpi=300)
```

2) Στοχαστική διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck

Κώδικας κατασκευής 3 τυχαίων πραγματοποιήσεων μίας στοχαστικής ανέλιξης Ornstein-Uhlenbeck στο χρονικό διάστημα $[0,1]$ με παραμέτρους $a = 10, b = 0.05$, $\sigma = 0.04$ σε Python®.

```
# the import of the libraries
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
import seaborn as sns
from pylab import plot,show,grid,xlabel,ylabel
plt.figure(figsize=(18,5))

# define model parameters
t_0 = 0
t_end = 1
length = 1000
alpha = 10.0
beta = 0.05
sigma = 0.04
# number of realizations
ntrials = 3

# define time axis
t = np.linspace(t_0,t_end,length)
dt = np.mean(np.diff(t))
# define x as an array with dimensions (3,1000) ,3 rows x 1000 columns
x = np.zeros((ntrials,length))
# initial condition
x0 = 0.0
# define drift term
drift = lambda x,t: alpha*(beta-x)
# define diffusion term
diffusion = lambda x,t: sigma
#define noise process
noise = np.random.randn(3,1000)*np.sqrt(dt)
# solve SDE
for j in range(ntrials):

for i in range(1,length):
x[j,i] = x[j,i-1] + drift(x[j,i-1],i*dt)*dt + diffusion(x[j,i-1],i*dt)*noise[j,i]

for k in range(ntrials):

    plt.plot(t,x[k],label='Path'+str(k+1))

xlabel('t',fontsize=16)
ylabel('x',fontsize=16)
grid(True)
plt.savefig('ou.png',dpi=140)
plt.legend()
```

3) Κώδικας για την εκτίμηση της παραμέτρου a του μοντέλου προθεσμιακών επιτοκίων, με βάση τα Libor Rates του έτους 2015, σε Python®

```
import numpy as np
import math
# The arrays for the average LIBOR rates for the year 2015 and for the respected maturity times
L = np.array([0.201,0.257,0.316,0.485,0.794])/100
T = np.array([1/12,2/12,3/12,6/12,12/12])

# Calculation of the forward rates (rounded to 6 decimal places) and the respected array
R = []
for i in range(5):
    R_i =round(math.log(1+L[i]*T[i])/T[i],6)
    R.append(R_i)
R = np.array(R)

# The average overnight LIBOR rate for the year 2015
r_0 = 0.00134

# estimation of the parameter a

a_estim = 2*np.sum((R-r_0)*T)/np.sum(T**2)
print("The parameter a estimate is", a_estim)
```

Output: The parameter a estimate is 0.01341489

4) Κώδικας για την εκτίμηση της παραμέτρου a του μοντέλου προθεσμιακών επιτοκίων, με βάση τα Libor Rates του έτους 2020, σε Python®

```
import numpy as np
import math
# The arrays for the average LIBOR rates for the year 2020 and for the respected maturity times
L = np.array([0.516,0.596,0.650,0.686,0.766])/100
T = np.array([1/12,2/12,3/12,6/12,12/12])

# Calculation of the forward rates (rounded to 6 decimal places) and the respected array
R = []
for i in range(5):
    R_i =round(math.log(1+L[i]*T[i])/T[i],6)
    R.append(R_i)
R = np.array(R)

# The average overnight LIBOR rate for the year 2020
r_0 = 0.00366

# estimation of the parameter a
a_estim = 2*np.sum((R-r_0)*T)/np.sum(T**2)
print("The parameter a estimate is", np.round(a_estim,8))
```

Output : The parameter a estimate is 0.01006738

5) Κώδικας για την βαθμονόμηση των παραμέτρων λ_0 και b του ρυθμού αθέτησης, για το έτος 2015, μέσω της μεθόδου Ελαχίστων Τετραγώνων σε Python®

```
# Best Parameters estimation and Hazard Rate function

# Importing the libraries
import pandas as pd
import numpy as np
from scipy.stats import norm
from scipy.optimize import minimize

# Reading the csv file with the spread values
cds = pd.read_csv('cds.csv')

#Theoretical Spread values for all companies from 05-01-2015
def spread_func(l_b):
        T = x_data
        l_0 , b = l_b
        r_0 = 0.00134
        a = 0.01341445
        R = 0.4
        predicted_spread =(1-R)*b*(1-np.exp(-
0.5*T*((a+b)*T+2*(r_0+l_0))))/(np.sqrt(2*np.pi*(a+b))*np.exp((r_0+l_0)**2/2*(a+b))*(norm(loc=0,sca
le=1).cdf(((a+b)*T+r_0+l_0)/np.sqrt(a+b))-norm(loc=0,scale=1).cdf((r_0+l_0)/np.sqrt((a+b)))))-(1-
R)*(b*r_0-a*l_0)/(a+b)
        error = y_data - predicted_spread
        return np.sum(error**2)

# Creating Loop for the 11 companies

for i in [3496,29952,58678,493053,641013,973731,67895,103842,287201,366795,639266]:
    s_i = cds.loc[i]
    y_data = np.array(s_i[3:10])/10000
    x_data = np.array([1,2,3,4,5,6,7])

# The hazard rate function for each of the 11 companies
    min_parameters = minimize(spread_func,[0.001,0.001])
    best_l , best_b = min_parameters.x
    print(f'The hazard rate for {s_i[2]} estimated in {s_i[0]} is : \n   λ(t) = {round(best_l,6)} +
{round(best_b,6)}*t')
```

Output :

```
The hazard rate for Apple Inc estimated in 2015-01-05 is :
  λ(t) = 1.9e-05 + 0.001995*t
The hazard rate for adidas AG estimated in 2015-01-05 is :
  λ(t) = 0.002014 + 0.003268*t
The hazard rate for Allianz SE estimated in 2015-01-05 is :
  λ(t) = 0.00097 + 0.001995*t
The hazard rate for Intel Corp estimated in 2015-01-05 is :
  λ(t) = -0.000446 + 0.002372*t
The hazard rate for Microsoft Corp estimated in 2015-01-05 is :
  λ(t) = -0.002834 + 0.00392*t
The hazard rate for Texas Instruments Inc estimated in 2015-01-05 is :
  λ(t) = -0.000708 + 0.002873*t
```

The hazard rate for Amazon.com Inc estimated in 2015-03-02 is :
  λ(t) = -0.000519 + 0.003854*t
The hazard rate for AstraZeneca PLC estimated in 2015-01-05 is :
  λ(t) = -0.00028 + 0.002405*t
The hazard rate for Deutsche Bank AG estimated in 2015-01-05 is :
  λ(t) = 0.003376 + 0.003881*t
The hazard rate for National Bank of Greece SA estimated in 2015-01-05 is :
  λ(t) = 0.089506 + 0.017561*t
The hazard rate for Morgan Stanley estimated in 2015-01-05 is :
  λ(t) = 0.002694 + 0.004643*t

6) Κώδικας για την βαθμονόμηση των παραμέτρων λ_0 και b του ρυθμού αθέτησης, για το έτος 2020, μέσω της μεθόδου Ελαχίστων Τετραγώνων σε Python

```
# Best Parameters estimation and Hazard Rate function

# Importing the libraries
import pandas as pd
import numpy as np
from scipy.stats import norm
from scipy.optimize import minimize


# Reading the csv file with the spread values
cds = pd.read_csv('cds.csv')
#Spread values for all companies from 01-04-2020

def spread_func(l_b):
        T = x_data
        l_0 , b = l_b
        r_0 = 0.00366
        a = 0.01006738
        R = 0.4
        predicted_spread =(1-R)*b*(1-np.exp(-
0.5*T*((a+b)*T+2*(r_0+l_0))))/(np.sqrt(2*np.pi*(a+b))*np.exp((r_0+l_0)**2/2*(a+b))*(norm(loc=0,sca
le=1).cdf(((a+b)*T+r_0+l_0)/np.sqrt(a+b))-norm(loc=0,scale=1).cdf((r_0+l_0)/np.sqrt((a+b)))))-(1-
R)*(b*r_0-a*l_0)/(a+b)
        error = y_data - predicted_spread
        return np.sum(error**2)

# Creating Loop for the 11 companies

for i in [4865,31321,60047,494422,642382,975100,69224,105211,288570,368164,640635]:
    s_i = cds.loc[i]
    y_data = np.array(s_i[3:10])/10000
    x_data = np.array([1,2,3,4,5,6,7])

    min_parameters = minimize(spread_func,[0,0])
    best_l , best_b = min_parameters.x
```

```
        print(f'The hazard rate for {s_i[2]} estimated in {s_i[0]} is : \n   λ(t) = {round(best_l,6)} +
{round(best_b,6)}*t')
```

Output :

```
The hazard rate for Apple Inc estimated in 2020-04-03 is :
  λ(t) = 0.000169 + 0.001821*t
The hazard rate for adidas AG estimated in 2020-04-03 is :
  λ(t) = 0.001569 + 0.00475*t
The hazard rate for Allianz SE estimated in 2020-04-03 is :
  λ(t) = 0.003193 + 0.002547*t
The hazard rate for Intel Corp estimated in 2020-04-03 is :
  λ(t) = 0.00027 + 0.003454*t
The hazard rate for Microsoft Corp estimated in 2020-04-03 is :
  λ(t) = -0.000235 + 0.002692*t
The hazard rate for Texas Instruments Inc estimated in 2020-04-03 is :
  λ(t) = 0.00124 + 0.005881*t
The hazard rate for Amazon.com Inc estimated in 2020-04-03 is :
  λ(t) = 0.001651 + 0.002544*t
The hazard rate for AstraZeneca PLC estimated in 2020-04-03 is :
  λ(t) = 0.000454 + 0.002009*t
The hazard rate for Deutsche Bank AG estimated in 2020-04-03 is :
  λ(t) = 0.028621 + 5.2e-05*t
The hazard rate for National Bank of Greece SA estimated in 2020-04-03 is :
  λ(t) = 59.546615 + -83.359715*t
The hazard rate for Morgan Stanley estimated in 2020-04-03 is :
  λ(t) = 0.016329 + 0.002006*t
```

7) Κώδικας για την κατασκευή του γραφήματος καλής προσαρμογής των τιμών από την αγορά και των θεωρητικών τιμών , για το έτος 2015, σε Python®

```
# Fitting Graphs
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
import seaborn as sns
from scipy.stats import norm
from scipy.optimize import minimize

def S_0(T,l_0,b):

   r_0 = 0.00134
   R = 0.4
   a = 0.01341445
   return (1-R)*b*(1-np.exp(-
0.5*T*((a+b)*T+2*(r_0+l_0))))/(np.sqrt(2*np.pi*(a+b))*np.exp((r_0+l_0)**2/2*(a+b))*(norm(loc=0,sca
le=1).cdf(((a+b)*T+r_0+l_0)/np.sqrt(a+b))-norm(loc=0,scale=1).cdf((r_0+l_0)/np.sqrt((a+b)))))-(1-
R)*(b*r_0-a*l_0)/(a+b)

for i in [3496,29952,58678,493053,641013,973731,67895,103842,287201,366795,639266]:
      s_i = cds.loc[i]
      y_data = np.array(s_i[3:10])/10000
      x_data = np.array([1,2,3,4,5,6,7])


      min_parameters = minimize(spread_func,[0.001,0.001])
      best_l , best_b = min_parameters.x


   S = y_data
      T1 = np.arange(0,7,0.001)
      T2 = np.array([1,2,3,4,5,6,7])
      example_i = S_0(T1,best_l,best_b)
      sns.set_style('whitegrid')
      plt.figure(figsize=(12,6))
      plt.plot(T2,S,'o',label='Market Data')
      plt.plot(T1,example_i,color='red',label=f'Predicted Spread of {s_i[2]}')
      plt.xlabel('Time')
      plt.ylabel('Credit Spread')
      plt.legend(loc='best',fontsize='medium')
```

8) Κώδικας για την κατασκευή του γραφήματος καλής προσαρμογής των τιμών από την αγορά και των θεωρητικών τιμών , για το έτος 2020, σε Python®

```
# Fitting Graphs

import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
import seaborn as sns
from scipy.stats import norm
from scipy.optimize import minimize

def S_0(T,l_0,b):
   r_0 = 0.00134
   R = 0.4
   a = 0.01341445
   return (1-R)*b*(1-np.exp(-
0.5*T*((a+b)*T+2*(r_0+l_0))))/(np.sqrt(2*np.pi*(a+b))*np.exp((r_0+l_0)**2/2*(a+b))*(norm(loc=0,sca
le=1).cdf(((a+b)*T+r_0+l_0)/np.sqrt(a+b))-norm(loc=0,scale=1).cdf((r_0+l_0)/np.sqrt((a+b)))))-(1-
R)*(b*r_0-a*l_0)/(a+b)
for i in [4865,31321,60047,494422,642382,975100,69224,105211,288570,368164,640635]:
      s_i = cds.loc[i]
      y_data = np.array(s_i[3:10])/10000
      x_data = np.array([1,2,3,4,5,6,7])
      min_parameters = minimize(spread_func,[0.001,0.001])
      best_l , best_b = min_parameters.x

   S = y_data
      T1 = np.arange(0,7,0.001)
      T2 = np.array([1,2,3,4,5,6,7])
      example_i = S_0(T1,best_l,best_b)
      sns.set_style('whitegrid')
      plt.figure(figsize=(8,4))
      plt.plot(T2,S,'o',label='Market Data')
      plt.plot(T1,example_i,color='red',label=f'Predicted Spread of {s_i[2]}')
      plt.xlabel('Time')
      plt.ylabel('Credit Spread')
      plt.legend(loc='best',fontsize='medium')
```

9) Κώδικας για το γράφημα της εκτιμώμενης πιθανότητας αθέτησης ,με βάση τα δεδομένα του έτους 2015 ,σε Python®

```
# Probability of Default Graphs

def prob_default(t,l_0,b):
        return 1-np.exp(-(l_0*t+b/2*t**2))

for i in [3496,29952,58678,493053,641013,973731,67895,103842,287201,366795,639266]:
    s_i = cds.loc[i]
    y_data = np.array(s_i[3:10])/10000
    x_data = np.array([1,2,3,4,5,6,7])

    min_parameters = minimize(spread_func,[0.001,0.001])
    best_l , best_b = min_parameters.x
    t = np.arange(0,7,0.001)
    fun = prob_default(t,best_l,best_b)
    sns.set_style('whitegrid')
    plt.figure(figsize=(8,4))
    plt.plot(t,fun,label=f'Predicted Probaility of Default :  {s_i[2]}')
    plt.xlabel('Time(in years)')
    plt.ylabel('Probability of Default')
    plt.legend(loc='best',fontsize='medium')
```

10) Κώδικας για το γράφημα της εκτιμώμενης πιθανότητας αθέτησης, με βάση τα δεδομένα του 2020, σε Python

```
# Probability of Default Graphs

def prob_default(t,l_0,b):
        return 1-np.exp(-(l_0*t+b/2*t**2))

for i in [4865,31321,60047,494422,642382,975100,69224,105211,288570,368164,640635]:
    s_i = cds.loc[i]
    y_data = np.array(s_i[3:10])/10000
    x_data = np.array([1,2,3,4,5,6,7])

    min_parameters = minimize(spread_func,[0.001,0.001])
    best_l , best_b = min_parameters.x
    t = np.arange(0,7,0.001)
    fun = prob_default(t,best_l,best_b)
    sns.set_style('whitegrid')
    plt.figure(figsize=(8,4))
    plt.plot(t,fun,label=f'Predicted Probaility of Default :  {s_i[2]}')
    plt.xlabel('Time(in years)')
    plt.ylabel('Probability of Default')
    plt.legend(loc='best',fontsize='medium')
```

11) Κώδικας για τις εκτιμώμενες πιθανότητες αθέτησης στους χρόνους $T = 1, 2, 3, 4, 5$, με βάση τα δεδομένα του 2015, σε Python®

```
# Probability of Default Values for T = 1,2,3,4,5 years estimated in 05-01-2015
def prob_default(t,l_0,b):
	return 1-np.exp(-(l_0*t+b/2*t**2))
lst = []

for i in [3496,29952,58678,493053,641013,973731,67895,103842,287201,366795,639266]:
		s_i = cds.loc[i]
		y_data = np.array(s_i[3:10])/10000
		T = np.array([1,2,3,4,5])
		min_parameters = minimize(spread_func,[0.001,0.001])
		best_l , best_b = min_parameters.x

		for j in T :
			prob_i = round(prob_default(j,best_l,best_b),6)
			lst.append(prob_i)
			lst1 = lst[0:5]
			lst2 = lst[5:10]
			lst3 = lst[10:15]
			lst4 = lst[15:20]
			lst5 = lst[20:25]
			lst6 = lst[25:30]
			lst7 = lst[30:35]
			lst8 = lst[35:40]
			lst9 = lst[40:45]
			lst10 = lst[45:50]
			lst11 = lst[50:55]
print(f'Probabilities of default for {cds.loc[3496][2]} estimated in {s_i[0]} is : {lst1}')
print(f'Probabilities of default for {cds.loc[29952][2]} estimated in {s_i[0]} is : {lst2}')
print(f'Probabilities of default for {cds.loc[58678][2]} estimated in {s_i[0]} is : {lst3}')
print(f'Probabilities of default for {cds.loc[493053][2]} estimated in {s_i[0]} is : {lst4}')
print(f'Probabilities of default for {cds.loc[641013][2]} estimated in {s_i[0]} is : {lst5}')
print(f'Probabilities of default for {cds.loc[973731][2]} estimated in {s_i[0]} is : {lst6}')
print(f'Probabilities of default for {cds.loc[67895][2]} estimated in {s_i[0]} is : {lst7}')
print(f'Probabilities of default for {cds.loc[103842][2]} estimated in {s_i[0]} is : {lst8}')
print(f'Probabilities of default for {cds.loc[287201][2]} estimated in {s_i[0]} is : {lst9}')
print(f'Probabilities of default for {cds.loc[366795][2]} estimated in {s_i[0]} is : {lst10}')
print(f'Probabilities of default for {cds.loc[639266][2]} estimated in {s_i[0]} is : {lst11}')
```

Output :
Probabilities of default for Apple Inc estimated in 2015-01-05 is : [0.001016, 0.004019, 0.008993, 0.015908, 0.024722]

Probabilities of default for adidas AG estimated in 2015-01-05 is : [0.003641, 0.010507, 0.020532, 0.033619, 0.049642]

Probabilities of default for Allianz SE estimated in 2015-01-05 is : [0.001966, 0.005912, 0.011816, 0.019642, 0.029344]

Probabilities of default for Intel Corp estimated in 2015-01-05 is : [0.00074, 0.003846, 0.009294, 0.017048, 0.027052]

Probabilities of default for Microsoft Corp estimated in 2015-01-05 is : [-0.000875, 0.002169, 0.009097, 0.019826, 0.034232]

Probabilities of default for Texas Instruments Inc estimated in 2015-01-05 is : [0.000728, 0.004321, 0.010746, 0.01995, 0.031853]

Probabilities of default for Amazon.com Inc estimated in 2015-01-05 is : [0.001407, 0.006648, 0.015663, 0.028348, 0.04456]

Probabilities of default for AstraZeneca PLC estimated in 2015-01-05 is : [0.000922, 0.004241, 0.009933, 0.017957, 0.028256]

Probabilities of default for Deutsche Bank AG estimated in 2015-01-05 is : [0.005303, 0.01441, 0.027217, 0.043577, 0.063305]

Probabilities of default for National Bank of Greece SA estimated in 2015-01-05 is : [0.093611, 0.192759, 0.293577, 0.392565, 0.486774]
Probabilities of default for Morgan Stanley estimated in 2015-01-05 is : [0.005003, 0.014567, 0.02856, 0.046791, 0.069013]

12) Κώδικας για τις εκτιμώμενες πιθανότητες αθέτησης στους χρόνους $T = 1, 2, 3, 4, 5$, με βάση τα δεδομένα του 2020, σε Python®

```
# Probability of Default Values for T = 1,2,3,4,5 years estimated in 03-04-2020
def prob_default(t,l_0,b):
        return 1-np.exp(-(l_0*t+b/2*t**2))
lst = []
for i in [4865,31321,60047,494422,642382,975100,69224,105211,288570,368164,640635]:
                s_i = cds.loc[i]
                y_data = np.array(s_i[3:10])/10000
                T = np.array([1,2,3,4,5])
                min_parameters = minimize(spread_func,[0.001,0.001])
                best_l , best_b = min_parameters.x

                for j in T :

                    prob_i = round(prob_default(j,best_l,best_b),6)
                    lst.append(prob_i)

                    lst1 = lst[0:5]
                    lst2 = lst[5:10]
                    lst3 = lst[10:15]
                    lst4 = lst[15:20]
                    lst5 = lst[20:25]
                    lst6 = lst[25:30]
                    lst7 = lst[30:35]
                    lst8 = lst[35:40]
                    lst9 = lst[40:45]
                    lst10 = lst[45:50]
                    lst11 = lst[50:55]

print(f'Probabilities of default for {cds.loc[4865][2]} estimated in {s_i[0]} is : {lst1}')
print(f'Probabilities of default for {cds.loc[31321][2]} estimated in {s_i[0]} is : {lst2}')
print(f'Probabilities of default for {cds.loc[60047][2]} estimated in {s_i[0]} is : {lst3}')
print(f'Probabilities of default for {cds.loc[494422][2]} estimated in {s_i[0]} is : {lst4}')
print(f'Probabilities of default for {cds.loc[642382][2]} estimated in {s_i[0]} is : {lst5}')
print(f'Probabilities of default for {cds.loc[975100][2]} estimated in {s_i[0]} is : {lst6}')
print(f'Probabilities of default for {cds.loc[69224][2]} estimated in {s_i[0]} is : {lst7}')
print(f'Probabilities of default for {cds.loc[105211][2]} estimated in {s_i[0]} is : {lst8}')
print(f'Probabilities of default for {cds.loc[288570][2]} estimated in {s_i[0]} is : {lst9}')
print(f'Probabilities of default for {cds.loc[368166][2]} estimated in {s_i[0]} is : {lst10}')
print(f'Probabilities of default for {cds.loc[640637][2]} estimated in {s_i[0]} is : {lst11}')
```

Output :

Probabilities of default for Apple Inc estimated in 2020-04-03 is : [0.001079, 0.003972, 0.008663, 0.015127, 0.023328]

Probabilities of default for adidas AG estimated in 2020-04-03 is : [0.003939, 0.012562, 0.025748, 0.043311, 0.065009]

Probabilities of default for Allianz SE estimated in 2020-04-03 is : [0.004457, 0.011417, 0.020825, 0.032611, 0.046687]

Probabilities of default for Intel Corp estimated in 2020-04-03 is : [0.001995, 0.00742, 0.016219, 0.028302, 0.043545]

Probabilities of default for Microsoft Corp estimated in 2020-04-03 is : [0.001111, 0.004903, 0.011345, 0.020385, 0.031952]

Probabilities of default for Texas Instruments Inc estimated in 2020-04-03 is : [0.004176, 0.014147, 0.029738, 0.05068, 0.076613]

Probabilities of default for Amazon.com Inc estimated in 2020-04-03 is : [0.00292, 0.008357, 0.016271, 0.026602, 0.039272]

Probabilities of default for AstraZeneca PLC estimated in 2020-04-03 is : [0.001458, 0.004915, 0.01035, 0.017732, 0.027015]

Probabilities of default for Deutsche Bank AG estimated in 2020-04-03 is : [0.028241, 0.055733, 0.082495, 0.108544, 0.133899]

Probabilities of default for National Bank of Greece SA estimated in 2020-04-03 is : [1.0, -2.563520929412457e+17, -5.244808825620054e+75, -1.2635876294246134e+167, -3.584792117188002e+291]

Probabilities of default for Morgan Stanley estimated in 2020-04-3 is : [0.017182, 0.036005, 0.056363, 0.078142, 0.101223]

Ιστοσελίδες

- Ιστοσελίδα για την βάση δεδομένων των τιμών των Credit Spread : https://www.kaggle.com/datasets/debashish311601/credit-default-swap-cds-prices?resource=download
- Ιστοσελίδα για τις τιμές των US Libor rates

  https://www.global-rates.com/en/interest-rates/libor/american-dollar/american-dollar.aspx

Βιβλιογραφία

Ελληνική

- Γιαννακόπουλος Α. Ν. (2003). *Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική*. Σάμος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου.
- Μπούτσικας, Μ. (2019). *Στοχαστικές Διαδικασίες στη Διαχείριση Κινδύνων*. Πειραιάς, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Ξένη

- Barndorff-Nielsen, O. E., & Shephard, N. (2001). *Non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics.* Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology), 63(2), 167-241.
- Bielecki, T.R. and Rutkowski, M. (2002) *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging.* Springer, Berlin.
- Brigo, D. and Mercurio, F. (2006) *Interest Rate Models—Theory and Practice*. Springer Verlag, Berlin.
- David, M. and Mavroidis, T. (1997) *Valuation and Potential Exposure of Default Swaps.* Technical Note.
- Duffie D. (1998), *Defaultable Term Structure Models with Fractional Recovery of Par*. Stanford University.
- Duffie, D. and Lando, D. (2001) *Term Structure of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information*. Econometrica, 69, 633-664.
- Duffie, D. and Singleton, K. (1999) *Modeling Term Structures of Defaultable Bonds.* Review of Financial Studies, 12, 687-720.
- Howard , Karlin (1994), *An Introduction to Stochastic Modelling*. Academic Press.
- Jarrow, R.A. and Yu, F. (2001) *Counterparty Risk and The Pricing of defaultable Securities.* Journal of Finance, 56, 1765-1799.

- Jean-François Le Gall (2013), *Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus).* Springer International Publishing.
- Kijima, Masaaki (2013) *Stochastic processes with applications to finance*. CRC Press.
- Lamberton, D., & Lapeyre, B. (2011). *Introduction to stochastic calculus applied to finance*. CRC press.
- Longstaff, F. A., & Schwartz, E. S. (1995) *A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt*. Journal of Finance, 50, 789-819.
- Madan, D.B. and Unal, H. (1998) *Pricing the Risks of Default*. Review of Derivatives Research, 2, 121-160.
- McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2015). *Quantitative risk management: concepts, techniques and tools-revised edition*. Princeton university press.
- Medhi J. (2012), *Stochastic Processes*. New Age International Publishers.
- Overhaus, M., Bermudez, A., Buehler, H., Ferraris, A., Jordinson, C., Lamnouar, A. (2007) *Equity Hybrid Derivatives*. Wiley Finance.
- Privault, N. (2012), *An elementary Introduction to Stochastic Interest Rate Modelling.* World Scientific.
- Privault, N. (2013). *Stochastic finance: An introduction with market examples*. CRC Press.
- Ross Sheldon M. (2011), *An Elementary Introduction to Mathematical Finance.* Cambridge University Press.
- Schönbucher, Philipp J. (2003) *Credit Derivatives Pricing Models: Models, Pricing and Implementation.* Wiley Finance.