ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΠΕΡΒΑΛΛΟΝΤΟΣ ΠΛΟΥΤΟΥ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Εμμανουήλ Π. Βερυκοκίδης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς
Σεπτέμβριος 2022

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Καθηγητής Μ. Κούτρας (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής Γ. Ψαρράκος
- Αναπληρωτής Καθηγητής Χ. Ευαγγελάρας

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

EXCESS WEALTH TRANSFORMATION AND APPLICATIONS

Emmanouil P. Verykokidis

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in actuarial science and risk management

Piraeus, Greece
September 2022

Στην οικογένειά μου

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ την οικογένεια μου που μου συμπαραστάθηκε σε αυτήν την πορεία καθώς και τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Κούτρα Μάρκο για την πολύτιμή συνεισφορά του κατά τη συγγραφή της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα παρουσιασθεί η έννοια του υπερβάλλοντος πλούτου. Αρχικά αφού γίνει μια εισαγωγή στην έννοια, όπως αυτή είναι γνωστή στον απλό κόσμο, θα παρουσιασθεί η σημασία της στην περιοχή των οικονομικών ως μέτρο οικονομικής ανισότητας. Θα γίνει παρουσίαση των καταλληλότερων κατανομών που μπορούν να περιγράψουν ακραίες τιμές παρατηρήσεων στην οικονομική και χρηματοοικονομική ανάλυση. Στη συνέχεια θα δοθεί η σχέση του υπερβάλλοντος πλούτου με το Shortfall VaR, το οποίο χρησιμοποιείται στη διαχείριση κινδύνου ως μέτρο περιγραφής του κινδύνου αγοράς ενός χαρτοφυλακίου περιουσιακών στοιχείων. Τέλος θα γίνει μια αναφορά στις στοχαστικές διατάξεις ενώ ταυτόχρονα θα παρουσιασθεί το μοντέλο του υπερβάλλοντος πλούτου με μερικές ιδιότητές του.

Abstract

In the present thesis the concept of excess wealth will be presented. Following an introduction to the concept, as it is commonly perceived in everyday language, its importance in the field of economics as a measure of economic inequality will be elucidated. The most appropriate distributions that can describe extreme values of observations in economic and financial analysis will be presented in some detail. It will then be correlated with Shortfall VaR, which is used in risk management as a measure to describe the market risk of a portfolio of assets. Finally, a short introduction to the stochastic ordering will be provided and at the same time the stochastic model of excess wealth will be presented with some of its properties.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Πινάκων

1

Οικονομική ανισότητα

1.1 Εισαγωγή

Για να ερμηνεύσουμε τον υπερβάλλοντα πλούτο σαν μια θεωρητική έννοια στα πλαίσια της οικονομικής επιστήμης, είναι απαραίτητο να κάνουμε πρώτα μια εισαγωγή στην οικονομική ανισότητα. Αν αναλογιστεί κανείς τα δύο συνθετικά του όρου, δηλαδή τη λέξη «υπερβάλλων» και τη λέξη πλούτος, είναι εύκολο να κατανοήσει γιατί είναι σημαντική η ανάλυση του φαινομένου. Η λέξη υπερβάλλων σχετίζεται άμεσα με την έννοια της ανισότητας καθώς σε μια υποθετική κοινωνία, όπου όλοι κατέχουν το ίδιο ποσοστό από το συνολικό πλούτο, δεν θα μπορούσε να υφίσταται ο όρος «υπερβάλλων πλούτος».

Η οικονομική ανισότητα δεν αποτελεί σύγχρονο φαινόμενο των κοινωνιών, αντιθέτως έχει ξεκινήσει να παρατηρείται πριν από μερικές χιλιετίες με την εμφάνιση της προσωπικής ιδιοκτησίας. Τι εννοούμε όμως με τον όρο οικονομική ανισότητα ;

Ο όρος «οικονομική ανισότητα» αναφέρεται είτε στην ανομοιόμορφη κατανομή πλούτου είτε στην ανομοιόμορφη κατανομή εισοδήματος στα μέλη μιας κοινωνίας.

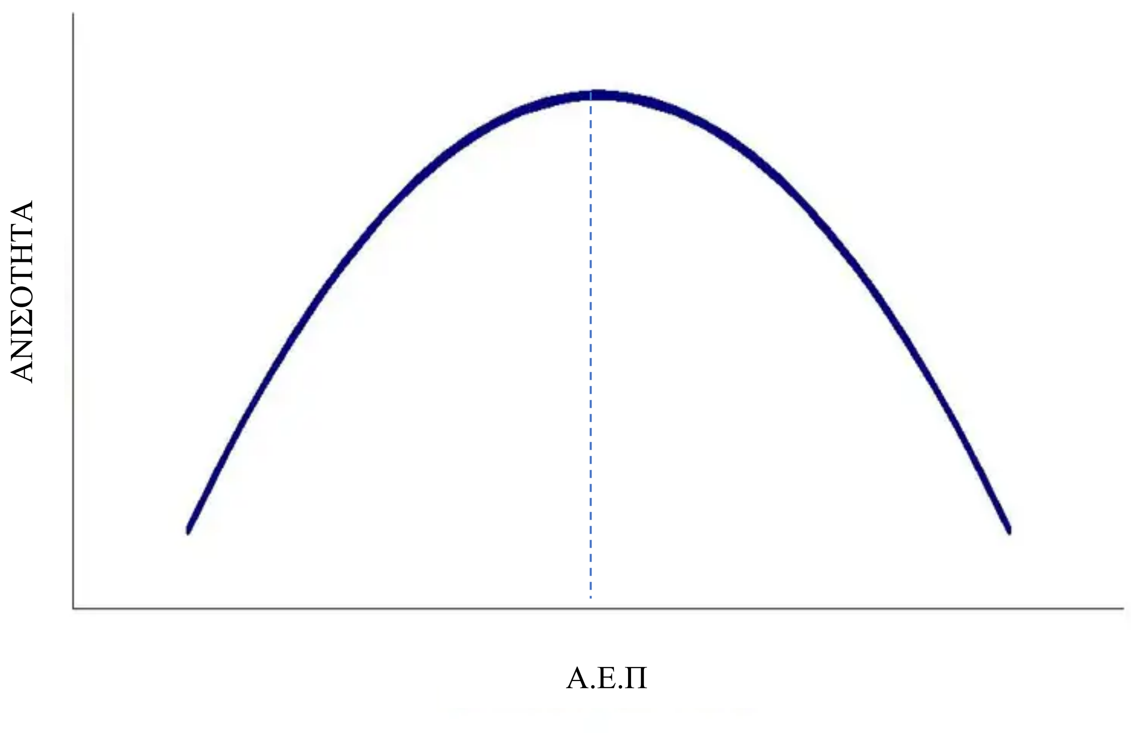
Όσο αφορά τη πρώτη περίπτωση, με τον όρο πλούτος συνήθως εννοούμε τις καταθέσεις και την ακίνητη περιουσία ενώ στις μέρες μας πλούτο μπορούν να αποτελούν και διάφορα χρεόγραφα όπως οι μετοχές ή άλλες χρηματιστηριακές αξίες. Με πιο απλά λόγια μπορούμε να ορίσουμε τη λέξη «πλούτος» ως το ενεργητικό μείον το παθητικό ενός κράτους, μιας οικονομικής οντότητας ή ενός νοικοκυριού. Μπορεί επίσης να αναφερόμαστε και μεμονωμένα για το κάθε άτομο μίας κοινωνίας ξεχωριστά. Ο κατανεμημένος πλούτος, με τη σειρά του, δημιουργεί εισοδήματα τα οποία προσφέρονται στα μέλη της κοινωνίας. Προφανώς και τα εισοδήματα αυτά δεν διανέμονται ισομερώς στα μέλη της κοινωνίας. Έτσι η ανομοιόμορφη κατανομή των εισοδημάτων ονομάζεται εισοδηματική ανισότητα.

Η οικονομική επιστήμη ασχολείται με την έννοια της ανισότητας εισοδήματος και πλούτου για να εξετάσει τα επίπεδα της κοινωνικής ευημερίας αλλά και της φτώχειας που επικρατούν σε μια κοινωνία η σε μία, πιο συγκεκριμένη, ομάδα ατόμων. Κατά καιρούς οι οικονομολόγοι εξετάζουν τη σχέση μεταξύ οικονομικής ανισότητας και ΑΕΠ (Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν) προσπαθώντας να κατανοήσουν πως οι δύο αυτές έννοιες συνδέονται.

1.2 Το υπόδειγμα του Kuznets

Ένα από τα πρώτα υποδείγματα που στόχευε στην ερμηνεία της σχέσης μεταξύ ανισότητας εισοδήματος και οικονομικής μεγέθυνσης ήταν αυτό του οικονομολόγου νομπελίστα Simon Kuznets. O Kuznets δημιούργησε κατά τη δεκαετία του 1950 ένα υπόδειγμα (Σχήμα 1.1) το οποίο αποτύπωνε μία κωδωνοειδή σχέση μεταξύ ανισότητας εισοδήματος και του κατά κεφαλήν ΑΕΠ. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας δεδομένα από ανεπτυγμένες χώρες εκείνης της εποχής κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η ανισότητα αυξάνεται στα πρώτα στάδια της οικονομικής ανάπτυξης, σταθεροποιείται κατά τη μετάβαση από αγροτική σε βιομηχανική οικονομία και τέλος αρχίζει να μειώνεται καθώς συνεχίζει η ανάπτυξη της οικονομίας.

ΣΧΗΜΑ 1.1. Σχέση εισοδηματικής ανισότητας και ΑΕΠ σύμφωνα με Kuznets (πηγή: https://www.greelane.com).



Στο Σχήμα 1.1 φαίνεται αυτή η σχέση, ότι δηλαδή η ανισότητα σε μια κοινωνία τείνει να αυξάνεται σε σχέση με το κατά κεφαλήν ΑΕΠ ενώ στη συνέχεια όταν φτάσει σε ένα ανώτατο σημείο η τάση αντιστρέφεται και η ανισότητα φθίνει. Το διάγραμμα αυτό αναφέρεται στην οικονομική βιβλιογραφία ως "καμπύλη Kuznets" ενώ έχει αποτελέσει αντικείμενο μελέτης από πολλούς οικονομολόγους

Πράγματι μια έρευνα που πραγματοποιήθηκε στις ΗΠΑ την περίοδο μεταξύ 1770 και 1970 έδειξε ότι αρχικά ο συνολικός πλούτος που αντιστοιχούσε στο 10% των πλουσιότερων ήταν 50% του συνολικού πλούτου. Το ποσοστό αυτό αυξήθηκε κοντά στο 75% το 1870 ενώ 100 χρόνια αργότερα (1970) ξανά επανήλθε στο αρχικό 50%. Η έρευνα αυτή επιβεβαίωσε στο μέγιστο βαθμό τη θεωρία του Kuznets.

1.3 Σύγχρονες τάσεις των εισοδηματικών ανισοτήτων

Τα τελευταία χρόνια η υπόθεση του Kuznets μάλλον μοιάζει πολύ αισιόδοξη, αφού από το 1970 και μετά η ανισότητα εισοδήματος τόσο στις ΗΠΑ όσο και σε άλλες αναπτυγμένες χώρες έχει παρουσιάσει μια αυξητική τάση. Παράλληλα αξιομνημόνευτη είναι η μείωση της ανισότητας σε χώρες της Ασίας όπως για παράδειγμα η Κίνα. Αυτή η απότομη αλλαγή δεδομένων τόσο σε παγκόσμιο όσο και σε εθνικό επίπεδο έχουν τροφοδοτήσει την επανέναρξη μιας σειράς ερευνών με σκοπό να απαντηθούν ερωτήματα σχετικά με το πως επηρεάζει η οικονομική ανισότητα την οικονομική ανάπτυξη, ποιοι είναι οι παράγοντες που προκαλούν την κλιμάκωση του φαινομένου, ποιες είναι οι δυνάμεις που επιδρούν πτωτικά και ποιες είναι οι επιπτώσεις που έχει σε μία κοινωνία.

Σημαντικό είναι να διευκρινιστεί ότι σχεδόν όλες οι μελέτες που έχουν γίνει έως σήμερα έχουν καταλήξει στο συμπέρασμα ότι τα υψηλά επίπεδα οικονομικής ανισότητας έχουν αρνητική επίδραση στην ανάπτυξη της οικονομίας.

Όσο αφορά τις αιτίες που τη δημιουργούν, κατά καιρούς διατυπώνονται διάφορες απόψεις σχετικά με το ποιοι είναι οι παράγοντες που δημιουργούν το φαινόμενο της οικονομικής ανισότητας. Ο Branko Milanovic, Αμερικάνος οικονομολόγος διεθνούς φήμης, είχε υποστηρίξει ότι η βιομηχανική επανάσταση οδήγησε σε αύξηση της οικονομικής ανισότητας μεταξύ των εθνών ενώ η παγκοσμιοποίηση και το διεθνές εμπόριο έδωσαν ακόμα μεγαλύτερη ώθηση στην κλιμάκωση του φαινομένου. Η αλήθεια είναι, ότι σε σύγκριση με παλαιότερες εποχές, το εισόδημα των φτωχότερων έχει αυξηθεί αλλά σε πολύ μικρότερο βαθμό από ότι αυτό των πλουσιότερων, διατηρώντας έτσι το μεγάλο χάσμα μεταξύ των δύο παραπάνω ομάδων. Μπορεί δηλαδή η φτώχεια να έχει μειωθεί αλλά η ανισότητα μεταξύ κάποιων κοινωνικών ομάδων έχει αυξηθεί. Αν βάλουμε στην εξίσωση και την ελάχιστη, σε ποσοστιαίες μονάδες, αύξηση του εισοδήματος των μεσαίων εισοδηματικά ομάδων, τα αποτελέσματα γίνονται ακόμα πιο ευδιάκριτα.

Σύμφωνα με αρκετούς οικονομολόγους, σημαντικό ρόλο έχει η ανάγκη για περισσότερη εξειδίκευση που τροφοδοτείται από τις ραγδαίες τεχνολογικές εξελίξεις των τελευταίων ετών αφού τα υψηλά εισοδήματα απαιτούν υψηλά επίπεδα ικανοτήτων και τεχνικών γνώσεων.

Επιπλέον, παράγοντες μπορεί να είναι το φύλο και οι φυλετικές διακρίσεις. Αυτές οι δύο αιτίες συνήθως δεν παρατηρούνται σε μεγάλη κλίμακα και συχνότητα σε αναπτυγμένες και εκσυγχρονισμένες κοινωνίες. Ιστορικά πάντως, το φαινόμενο της ανισότητας εισοδήματος παρατηρείται εντονότερα σε κοινωνίες υποανάπτυκτες η αναπτυσσόμενες όπως για παράδειγμα σε χώρες της Λατινικής Αμερικής, της Αφρικής και της Ασίας ενώ λιγότερα έντονο είναι σε χώρες της Ευρώπης και της Βόρειας Αμερικής.

Η δυσλειτουργία του φορολογικού συστήματος, απόρροια αναποτελεσματικών μακροοικονομικών πολιτικών που ακολουθούνται τις τελευταίες δεκαετίες, αποτελεί ακόμα ένα βασικό παράγοντα όξυνσης των εισοδηματικών ανισοτήτων.

Οι εισοδηματικές ανισότητες έχουν την τάση να δημιουργούν σημαντικά προβλήματα σε μια κοινωνία. Για παράδειγμα μπορούν να δημιουργήσουν νέες ανισότητες στην εκπαίδευση και στην υγεία. Έτσι ορισμένοι άνθρωποι δεν έχουν τη δυνατότητα να απολαύσουν τα ίδια επίπεδα εκπαίδευσης και νοσοκομειακής περίθαλψης σε σύγκριση με άλλους περισσότερο οικονομικά ευκατάστατους. Επίσης έρευνες έχουν δείξει ότι μειώνονται οι επενδυτικές ευκαιρίες, τα κίνητρα των δανειστών ενώ δημιουργείται μακροοικονομική μεταβλητότητα.

Υπάρχουν κάποιες «δυνάμεις» όμως που έχουν αρνητική επίδραση στο φαινόμενο της οικονομικής ανισότητας. Ο Milanovic (2016) χώρισε τις δυνάμεις αυτές σε δύο κατηγορίες, τις «κακοήθεις» και τις «καλοήθεις».

Με τον όρο «κακοήθεις» αναφερόμαστε σε παράγοντες οι οποίοι ναι μεν μπορεί να μειώνουν την ανισότητα άλλα επιβραδύνουν ή και μειώνουν την οικονομική ανάπτυξη. Παραδείγματα τέτοιου τύπου δυνάμεων είναι οι πόλεμοι, οι επιδημίες και διάφορες φυσικές καταστροφές.

Από την άλλη με τον όρο «καλοήθεις» αναφερόμαστε στις δυνάμεις οι οποίες όχι μόνο μειώνουν την οικονομική ανισότητα αλλά συνεισφέρουν με αποτελεσματικό τρόπο στην οικονομική και κοινωνική μεγέθυνση. Τέτοιες δυνάμεις αποτελούν η διεύρυνση πρόσβασης στην εκπαίδευση, η αύξηση των κοινωνικών μεταβιβάσεων και η προοδευτική φορολόγηση.

1.4 Η συγκέντρωση πλούτου

Μία ενδιαφέρουσα συνέπεια της εισοδηματικής ανισότητας, η οποία σχετίζεται με την έννοια του υπερβάλλοντος πλούτου και δεν αναφέρθηκε νωρίτερα, είναι η συγκέντρωση πλούτου. Όταν λέμε συγκέντρωση πλούτου εννοούμε το εισόδημα ή τον πλούτο που συσσωρεύεται σε ένα μικρό ποσοστό ατόμων μιας κοινωνίας .

Αυτό δημιουργείται από την εισοδηματική ανισότητα αφού τα πολύ υψηλά εισοδήματα δεν μπορούν εύκολα να καταναλωθούν και αυτό γιατί η οριακή ροπή για κατανάλωση φθίνει από ένα επίπεδο εισοδήματος και μετά, ενώ ταυτόχρονα η οριακή ροπή για αποταμίευση αυξάνεται. Έτσι κάποιος ο οποίος έχει ένα πολύ μεγάλο εισόδημα, το μεγαλύτερο μέρος του πιθανότατα δεν θα μπορέσει να το καταναλώσει αφού με ένα μικρό ποσοστό αυτού θα μπορέσει να ικανοποιήσει σχεδόν όλες του τις βασικές του ανάγκες. Έτσι το μέρος που δεν θα καταναλωθεί δεν θα αναδιανεμηθεί αποτελεσματικά στην κοινωνία αλλά θα συσσωρευτεί προσφέροντας στο άτομο αυτό ακόμα μεγαλύτερες ταμειακές ροές στο μέλλον μέσω πιθανών επενδύσεων. Συνεπώς ο πλούτος θα αυξάνεται με τη πάροδο του χρόνου. Αντιθέτως κάποιος με μικρό η μεσαίο σε μέγεθος εισόδημα δεν μπορεί να συσσωρεύσει πλούτο επειδή η οριακή ροπή για κατανάλωση είναι μεγάλη στα χαμηλά επίπεδα εισοδήματος. Γίνεται κατανοητό πως ο πλούσιος γίνεται πλουσιότερος και ο φτωχός μπορεί να μην γίνεται φτωχότερος αλλά η διαφορά του από τον πλούσιο μεγαλώνει.

Σε επίπεδο κρατών αξίζει να αναφέρουμε ότι έρευνες, σε διεθνές επίπεδο, έχουν δείξει ότι η Ευρώπη και η Βόρεια Αμερική, αν και ο συνολικός αριθμός των κατοίκων τους αποτελεί το 20% του παγκόσμιου πληθυσμού, στα εδάφη τους κατέχουν περίπου το 70% του συνολικού παγκόσμιου πλούτου. Αυτό το γεγονός μπορεί να μας δώσει μία πρώτη γεύση για το μέγεθος του φαινομένου. Κατανοούμε λοιπόν ότι το φαινόμενο δεν παρατηρείται έντονα μόνο μεταξύ νοικοκυριών αλλά και μεταξύ κρατών.

Τα τελευταία χρόνια οι αναπτυγμένες χώρες καταβάλουν προσπάθεια για να κατανοήσουν ποια είναι η πιο αποτελεσματική δημοσιονομική πολιτική που θα πρέπει να ακολουθήσουν ώστε να ανακατανεμηθεί αποτελεσματικά ο συσσωρευμένος πλούτος και να αμβλυνθεί το φαινόμενο της ανισότητας. Οι μακροοικονομικές πολιτικές αυτές θα πρέπει να εστιάζουν στη διαδικασία της φορολόγησης ώστε να δώσουν τις κατάλληλες λύσεις και να οδηγήσουν σε μια πιο ταχεία ανάπτυξη μέσω του περιορισμού των ανισοτήτων.

1.5 Η μέτρηση των οικονομικών ανισοτήτων

Για τον προσδιορισμό και την πιο ακριβή μέτρηση της ανισότητας δημιουργήθηκαν διάφοροι δείκτες ώστε να μπορούν οι ερευνητές να καταλήγουν σε αξιόπιστα συμπεράσματα που θα βοηθούν στο να δίνονται λύσεις στα προβλήματα που αναφέραμε στην προηγούμενη υπό-ενότητα. Μέτρα ευρέως υιοθετημένα, τα οποία χρησιμοποιούνται σήμερα, είναι

- ο δείκτης Gini (G)
- η μέση απόκλιση λογαρίθμων (L)
- ο δείκτης Theil (T)
- το τετράγωνο του συντελεστή μεταβλητότητας C^2
- ο δείκτης Atkinson

Οι δείκτες αυτοί έχουν τις απαραίτητες ιδιότητες ώστε να θεωρηθούν αξιόπιστοι. Οι πιο σημαντικές από αυτές είναι παρουσιάζονται παρακάτω.

α. Η ανεξαρτησία από τα προσωπικά χαρακτηριστικά, έτσι ο δείκτης θα πρέπει να εξαρτάται μόνο από τη κατανομή συχνότητας των εισοδημάτων.

β. Η ανεξαρτησία από το μέγεθος του πληθυσμού, δηλαδή αν μεταβληθεί ο αριθμός των ατόμων σε κάθε επίπεδο εισοδήματος με την ίδια αναλογία τότε ο δείκτης θα πρέπει να παραμείνει αμετάβλητος.

γ. Η ανεξαρτησία από τη μονάδα μέτρησης του εισοδήματος, δηλαδή αν μεταβληθούν όλα τα εισοδήματα με την ίδια αναλογία τότε ο δείκτης θα πρέπει να παραμείνει αμετάβλητος.

δ. Η αρχή της μεταβίβασης, η οποία αναφέρεται στο γεγονός ότι κάθε μεταβίβαση εισοδήματος μεταξύ δύο μελών του πληθυσμού μπορεί να οδηγήσει σε αύξηση η μείωση του δείκτη και εν συνεχεία σε αύξηση η μείωση της ανισότητας. Για παράδειγμα μια προοδευτική μεταβίβαση εισοδήματος (μεταβίβαση από πλούσιο σε φτωχό) θα οδηγούσε σε μείωση του δείκτη και κατά συνέπεια σε μείωση της ανισότητας.

Η καμπύλη Lorenz αποτελεί επίσης ένα μέτρο περιγραφής της κατανομής εισοδήματος, το οποίο αναπαριστά διαγραμματικά την εισοδηματική ανισότητα του πληθυσμού μιας κοινωνίας. Στο συγκεκριμένο μέτρο θα εμβαθύνουμε περισσότερο στο επόμενο κεφάλαιο καθώς θα μας βοηθήσει στον ορισμό του υπερβάλλοντα πλούτου.

1.6 Ο σκοπός της εργασίας

Η έννοια του υπερβάλλοντος πλούτου, σε οικονομικούς όρους, πηγάζει από την εισοδηματική ανισότητα που επικρατεί στις κοινωνίες. Παρ’ όλα αυτά χρησιμοποιείται σε αρκετές εφαρμογές τόσο στη διαχείριση κινδύνου όσο και στην αναλογιστική επιστήμη.

Έτσι στο δεύτερο κεφάλαιο με τη βοήθεια ενός μέτρου ανισότητας, της καμπύλης Lorenz, θα προσπαθήσουμε να δώσουμε ένα ορισμό για τον υπερβάλλον πλούτο και θα δούμε πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη της οικονομικής ανισότητας.

Στη συνέχεια, στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας, για την καλύτερη μελέτη των δεδομένων, που χρησιμοποιούνται τόσο στην οικονομική επιστήμη όσο και στη διαχείριση κινδύνου, θα αναλύσουμε κατανομές με βαριά ουρά, οι οποίες είναι οι πλέον κατάλληλες για τη περιγραφή μεταβλητών όπως το εισόδημα, οι αποδόσεις και οι ζημιές χαρτοφυλακίων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο της εργασίας θα δούμε την εφαρμογή της έννοιας του υπερβάλλοντος πλούτου στη διαχείριση κινδύνου μέσω της παρουσίασης ενός συνεκτικού μέτρου κινδύνου, του Expected Shortfall.

Τέλος θα αφιερώσουμε το πέμπτο και τελευταίο κεφαλαίο για να κάνουμε μια αναφορά στη χρήση της έννοιας του υπερβάλλοντος πλούτου στις στοχαστικές διατάξεις. Θα κάνουμε δηλαδή μια εισαγωγή στο στοχαστικό μοντέλο διάταξης του υπερβάλλοντος πλούτου, το οποίο μπορεί να μας δώσει σημαντικές πληροφορίες για τις ακραίες τιμές μιας μεταβλητής.

2

Εισαγωγή στον υπερβάλλοντα πλούτο

2.1 Εισαγωγικά

Οι οικονομολόγοι και οι κοινωνιολόγοι, θέλοντας να αξιολογήσουν την αποτελεσματικότητα της κατανομής των πόρων σε μια κοινωνία, χρειάστηκε να κατασκευάσουν μέτρα-δείκτες τα οποία θα μπορούσαν να περιγράψουν τόσο τη συγκέντρωση πλούτου όσο και την εισοδηματική ανισότητα.

Ένα από αυτά, η καμπύλη Lorenz, η οποία αναπτύχθηκε στις αρχές του 20^{ου} αιώνα και πήρε το όνομά της από τον Αμερικανό οικονομολόγο Max Otto Lorenz, αποτελεί εδώ και μερικές δεκαετίες ένα από τα πιο πολύ-μελετημένα μέτρα που αφορά την ανάλυση της εισοδηματικής ανισότητας και της συγκέντρωσης πλούτου σε μια κοινωνία. Το γεγονός ότι η χρήση της και η ερμηνεία των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από αυτή μπορούν να γίνουν κατανοητά με σχετική ευκολία, την καθιστά ένα πολύ χρήσιμο περιγραφικό εργαλείο. Με την έννοια «περιγραφικό εργαλείο» εννοείται ότι η χρήση της καμπύλης δεν μας βοηθάει να ανακαλύψουμε την πηγή από την οποία προκαλείται η ανισότητα αλλά μας επιτρέπει να μελετήσουμε το μέγεθος του φαινόμενου σε ένα πληθυσμό και να το συγκρίνουμε με το αντίστοιχο μέγεθος κάποιου άλλου πληθυσμού. Υπάρχουν διάφορα άλλα μέτρα ανισότητας τα οποία αποτελούν παράγωγα της καμπύλης Lorenz, όπως για παράδειγμα ο δείκτης Gini, κάτι το οποίο αποδεικνύει την πολυδιάστατη χρησιμότητά της. Μέσω της καμπύλης Lorenz μπορούμε να μελετήσουμε επίσης την οικονομική ευημερία και το επίπεδο φτώχιας, φαινόμενα τα οποία απορρέουν από τη συγκέντρωση πλούτου, που επικρατεί σε μια κοινωνία.

Οι Shaked and Shanthikumar (1998), χρησιμοποίησαν την καμπύλη Lorenz για να περιγράψουν μια νέα έννοια η οποία ονομάστηκε «υπερβάλλων πλούτος». Στο κεφάλαιο αυτό, αφού ορίσουμε τη καμπύλη Lorenz και αναφέρουμε μερικές από τις ιδιότητές της, θα έρθουμε σε μια πρώτη επαφή με την έννοια του υπερβάλλοντος πλούτου από τη σκοπιά της οικονομικής επιστήμης. Στη συνέχεια θα την ερμηνεύσουμε και θα δούμε με ποιον τρόπο μπορεί να εφαρμοστεί από τους οικονομολόγους για τη περιγραφή οικονομικών φαινομένων όπως η ανισότητα εισοδήματος, η συγκέντρωση πλούτου, η φτώχια και η οικονομική ευημερία.

2.2 Η καμπύλη Lorenz

Έστω X_i τα εισοδήματα των n ατόμων μιας κοινωνίας, όπου $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$. Διατάσσουμε τα εισοδήματα από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο έτσι ώστε να ισχύει

$$0 = X_{(0)} \leq X_{(1)} \leq \ldots\ldots \leq X_{(n)}.$$

Στη συνέχεια ορίζουμε ως $\sum_{i=1}^{n} X_i$ το συνολικό εισόδημα ή πλούτο που έχουν στη κατοχή τους τα n άτομα.

Εισάγοντας το συμβολισμό

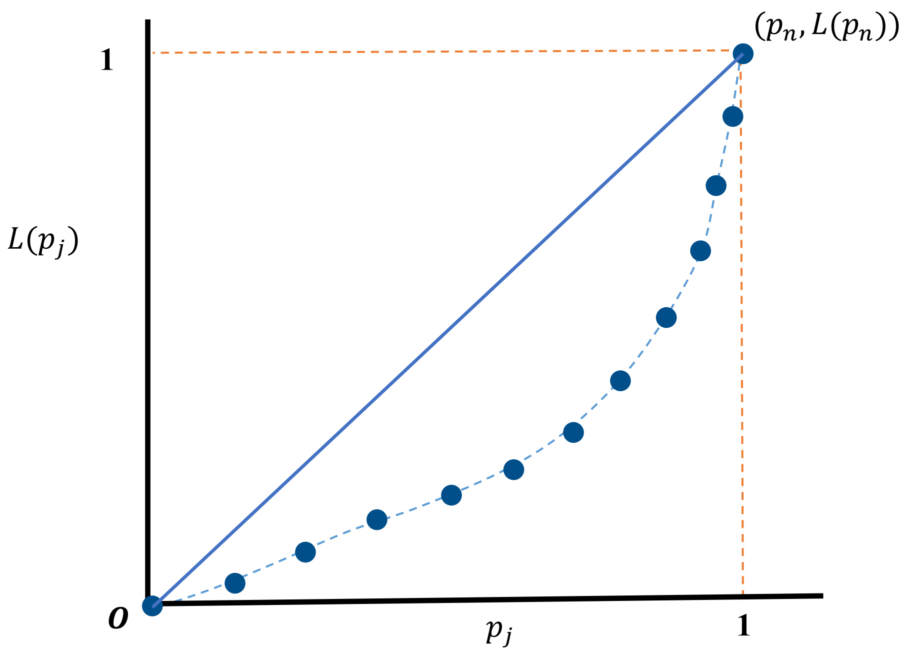
$$p_j = \frac{j}{n}, j = 1,2,\ldots,n,$$

το ποσοστό του συνολικού εισοδήματος το οποίο βρίσκεται στην κατοχή του $100 * p_j\%$ των φτωχότερων ατόμων και θα δίνεται από τον τύπο

$$L(p_j) = \frac{\sum_{i=1}^{j} X_{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} X_{(i)}} = \frac{\sum_{j=1}^{j} X_{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} X_i}. \tag{2.1}$$

Τοποθετώντας τα $L(p_j)$ στο κάθετο άξονα, Oy, και τα p_j στον οριζόντιο, Ox, έχουμε τα σημεία με συντεταγμένες $(p_j, L(p_j))$ τα οποία, αν τα ενώσουμε, δημιουργούν μία κυρτή καμπύλη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1.

ΣΧΗΜΑ 2.1. Διακριτή προσέγγιση της καμπύλης Lorenz



Στον οριζόντιο άξονα Ox έχουμε το ποσοστό των ατόμων μιας κοινωνίας τα οποία είναι τοποθετημένα με βάση τα εισοδηματικά τους κριτήρια, ξεκινώντας από τα μέλη με το χαμηλότερο και καταλήγοντας σε αυτά με το μεγαλύτερο εισόδημα. Στον άξονα Oy έχουμε το ποσοστό του εισοδήματος που κατέχουν τα άτομα αυτά. Για παράδειγμα, έστω ότι σε ένα δείγμα με $n = 10$ ισχύει ότι $L(0.2) = 0.1$. Αυτό σημαίνει ότι το 20% του φτωχότερου τμήματος του πληθυσμού, δηλαδή 2 άτομα, κατέχει το 10% του συνολικού εισοδήματος ή πλούτου. Η κυρτή καμπύλη που σχηματίζεται αν ενώσουμε όλα τα παραπάνω σημεία αποτελεί την καμπύλη Lorenz. Όσο μεγαλύτερη είναι η κυρτότητα της καμπύλης τόσο μεγαλύτερη είναι και η εισοδηματική ανισότητα που επικρατεί στο δείγμα.

Αν όλα τα σημεία ήταν πάνω στην καμπύλη $y = x$, με κλίση 45 μοίρες, τότε θα είχαμε την απόλυτα ομοιόμορφη εισοδηματικά κατανεμημένη οικονομία. Θα είχαμε δηλαδή τέλεια ισότητα μεταξύ των εισοδημάτων των μελών. Έτσι για οποιοδήποτε ποσοστό πληθυσμού θα αντιστοιχούσε το ίδιο ποσοστό του συνολικού εισοδήματος, $L(p) = p$.

Είναι περιττό να αναφέρουμε ότι, στις σημερινές κοινωνίες, είναι σχεδόν αδύνατο να ταυτίζεται η καμπύλη Lorenz με την διχοτόμο ευθεία $y = x$.

Το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της $y = x$ και της $L(p)$ χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του δείκτη Gini ο οποίος αποτελεί ένα από τα πιο αποτελεσματικά μέτρα ανισότητας και ενδείκνυται για συγκρίσεις όταν οι καμπύλες Lorenz δυο διαφορετικών πληθυσμών τέμνονται στο (0,1).

2.2.1 Η συνεχής συνάρτηση της καμπύλης Lorenz

Έστω ότι το εισοδήματα X είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή η οποία παίρνει τις τιμές $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k$, και ας συμβολίσουμε με π_i τη πιθανότητα $\pi_i = P(X = x_i)$, όπου $i = 1, 2, \ldots\ldots, k$.

Τότε για $p_j = j/k$ η (2.1) γράφεται

$$L(p_j) = \frac{\sum_{i=1}^{j} \pi_{(i)} * X_{(i)}}{\sum_{i=1}^{k} \pi_i * X_i} = \frac{\sum_{i=1}^{j} \pi_{(i)} * X_{(i)}}{E(X)} \qquad (2.2)$$

αφού ο παρονομαστής του κλάσματος $\sum_{i=1}^{k} \pi_{(i)} * x_{(i)} = E(X)$ εκφράζει τη μέση τιμή του εισοδήματος.

Έστω τώρα ότι το X (εισόδημα) είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή και ότι κάθε $x \in (0, \infty)$ έχει ένα βαθμό αβεβαιότητας για το αν θα πραγματοποιηθεί. Τότε για να ορίσουμε την $L(p)$ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$ της X και τη συνάρτηση κατανομής $F(x)$, η οποία εκφράζει την πιθανότητα η μεταβλητή X να πάρει τιμή μικρότερη του $x \geq 0$. Ως γνωστόν, έχουμε ότι

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(t)dt \ , \text{με } 0 \leq F(x) \leq 1$$

και ισχύει $E(X) = \int_0^\infty xf(x)dx$, όπου $E(X) = \mu$ είναι το μέσο εισόδημα. Τέλος έχουμε την αντίστροφη συνάρτηση της $F, F^{-1}(p)$, η οποία είναι καλά ορισμένη και αύξουσα στο $[0,1]$. Η αντίστροφη $F^{-1}(p) = sup\{x: F(x) \leq p\}$ αποτελεί τη συνάρτηση του p-ποσοστημορίου της κατανομής της F και περιγράφει το υψηλότερο εισόδημα του $p * 100\%$ φτωχότερου τμήματος του πληθυσμού.

Στη περίπτωση αυτή η καμπύλη Lorenz ($L_F(p)$) ορίζεται ως εξής

$$L_F(p) = \mu^{-1} \int_0^{F^{-1}(p)} xf(x)dx. \tag{2.3}$$

Αν θέσουμε όπου $x = F^{-1}(t)$ θα έχουμε $F(x) = t$ και $dt = f(x)dx$. Επίσης για $x = 0$ έχουμε $t = F(0) = 0$ και για $x = F^{-1}(p)$ έχουμε $t = F(F^{-1}(p)) = p$. Έτσι η (2.3) γράφεται

$$L_F(p) = \mu^{-1} \int_0^p F^{-1}(t)dt = \frac{\int_0^p F^{-1}(t)dt}{\int_0^1 F^{-1}(t)dt}. \tag{2.4}$$

όπου $\int_0^p F^{-1}(t)dt$ είναι το μέσο εισόδημα του $p * 100\%$ τμήματος του πληθυσμού και $\int_0^1 F^{-1}(t)dt$ είναι το μέσο εισόδημα του συνολικού πληθυσμού.

Στην συνεχή περίπτωση, σε αντίθεση με τη διακριτή που παρουσιάσαμε προηγουμένως, το διάγραμμα της καμπύλης Lorenz θα αποτελείται από μία συνεχή καμπύλη και όχι από σημεία.

Έτσι με τους δύο παραπάνω τύπους, αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση κατανομής ή τη συνάρτηση πυκνότητας της X, μπορούμε εύκολα να βρούμε τον τύπο της καμπύλης Lorenz.

Για παράδειγμα, έστω ότι τα εισοδήματα σε μια κοινωνία ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Τότε θα έχουμε

- Συνάρτηση Πυκνότητας : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$,
- Συνάρτηση κατανομής : $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$,
- Συνάρτηση για το p-ποσοστημόριο : $F^{-1}(p) = -ln(1-p)/\lambda$,
- $E(X) = 1/\lambda$.

Επομένως, χρησιμοποιώντας τη (2.3) έχουμε

$$L_F(p) = \lambda * \int_0^{F^{-1}(p)} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda^2 * \int_0^{F^{-1}(p)} xe^{-\lambda x}dx$$

$$= \lambda^2 * \int_0^{F^{-1}(p)} \left(\frac{xe^{-\lambda x}}{-\lambda}\right)' + \left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda^2}\right)' dx$$

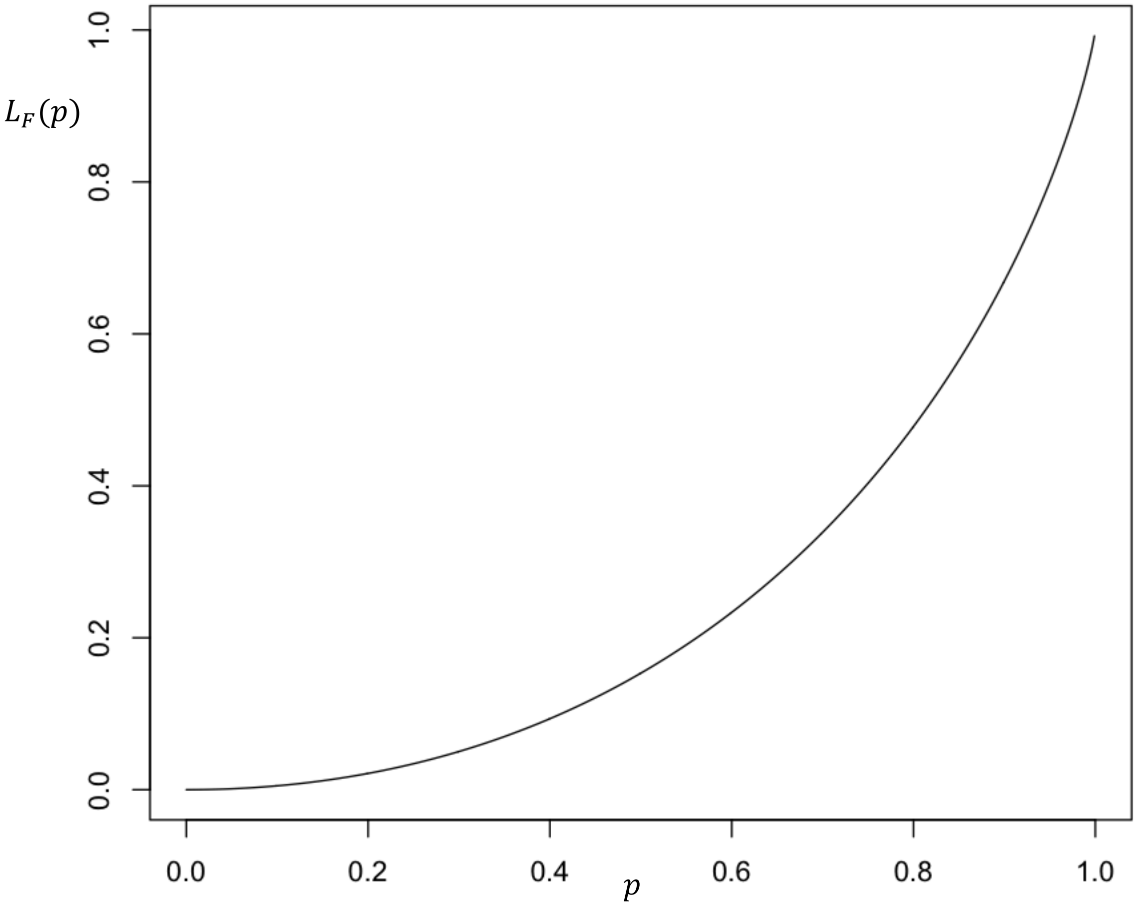
$$= \lambda^2 \left| \frac{xe^{-\lambda x}}{-\lambda} + \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda^2} \right|_0^{F^{-1}(p)} = \lambda^2 * \left(\frac{F^{-1}(p)e^{-\lambda F^{-1}(p)}}{-\lambda} + \frac{e^{-\lambda F^{-1}(p)}}{-\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Αντικαθιστώντας με $F^{-1}(p) = -ln(1-p)/\lambda$ παίρνουμε

$$L_F(p) = (1-p)ln(1-p) + p.$$

Στο Σχήμα 2.2 παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $L_F(p)$.

ΣΧΗΜΑ 2.2. Η καμπύλη Lorenz, $L_F(p) = (1-p)ln(1-p)+p$



Στον Πίνακα 2.1 παρουσιάζεται η συνάρτηση $L_F(p)$ για διάφορες κατανομές τις οποίες χρησιμοποιούμε συχνά στη περιγραφή εισοδηματικών δεδομένων.

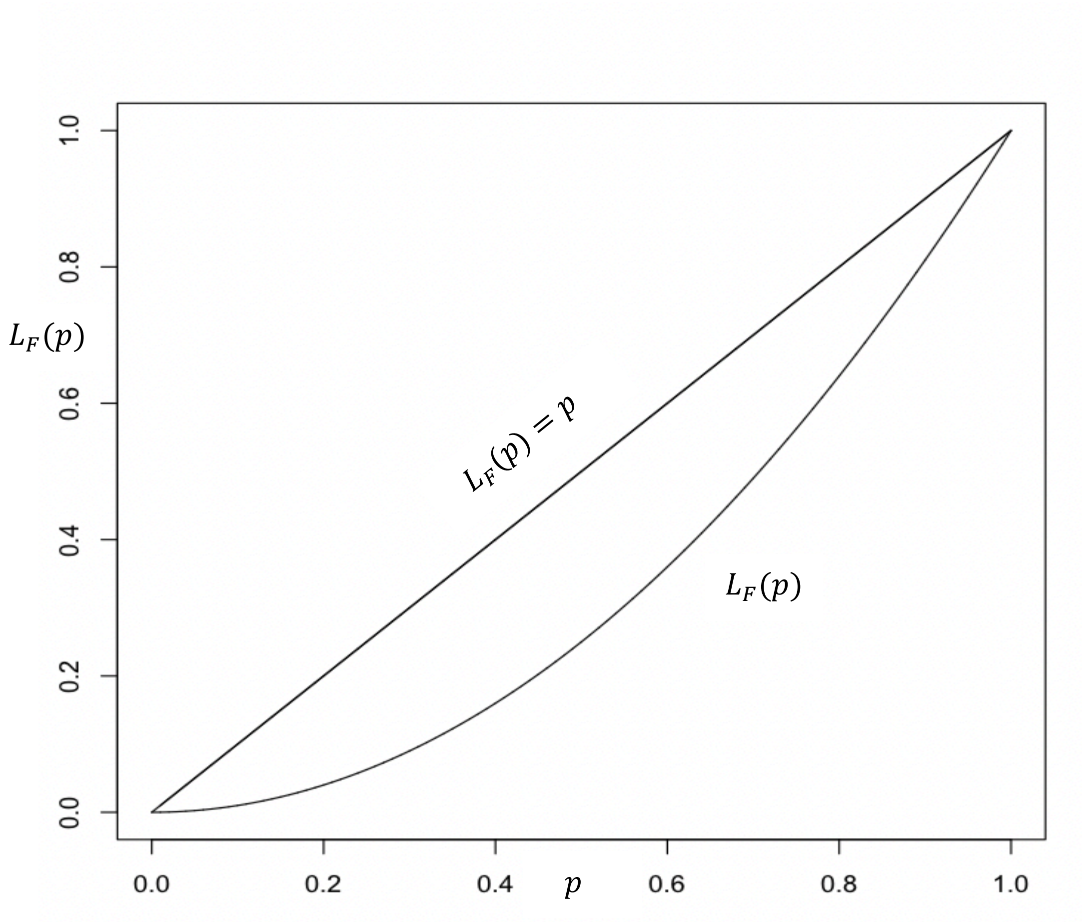
ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1

Συνάρτηση $L_F(p)$ για συνεχείς κατανομές της X

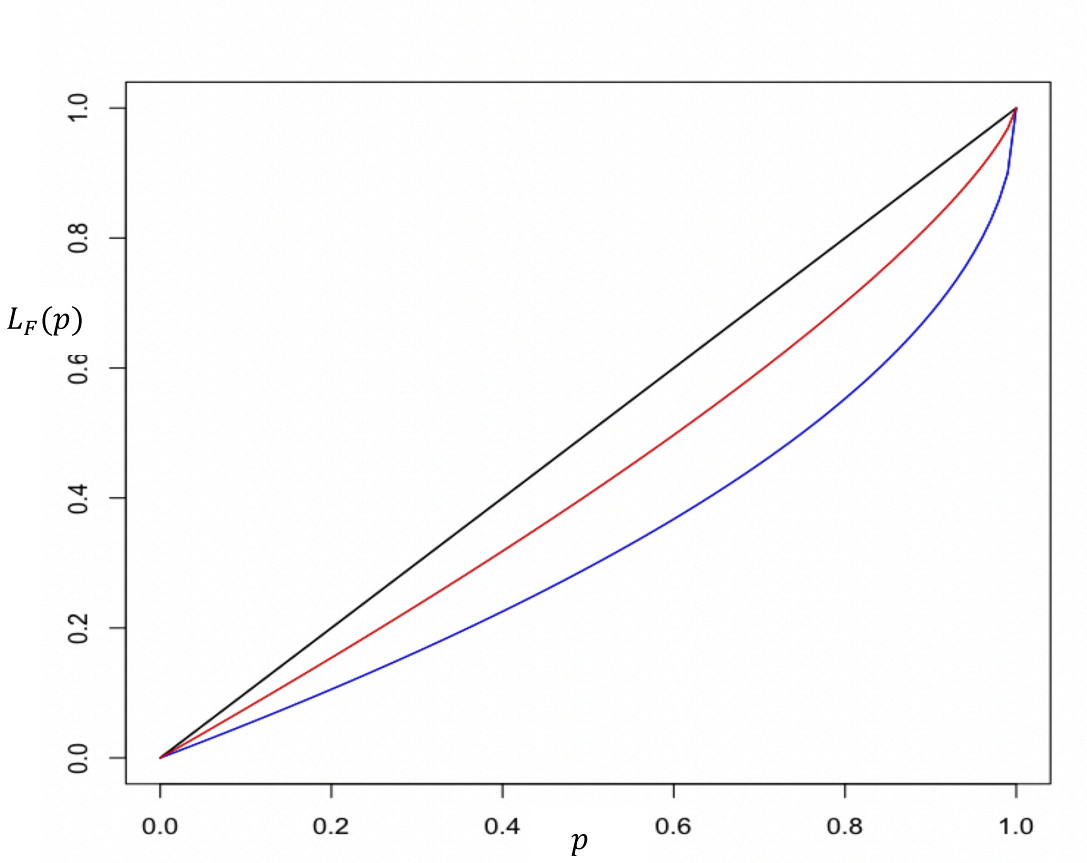
Κατανομή	Συνάρτηση Κατανομής F	Lorenz Curve $L_F(p)$
Εκφυλισμένη στο μ	$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \mu \\ 1, & x \geq \mu \end{cases}$	p
Εκθετική ($\lambda > 0$)	$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x > 0$	$(1-p)ln(1-p) + p$
Ομοιόμορφη στο διάστημα (α, β)	$F(x) = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, \alpha < x < \beta$	$\dfrac{\alpha p + (\beta-\alpha)p^2/2}{\alpha + (\beta-\alpha)/2}$
Pareto ($\alpha > 1$)	$F(x) = 1 - (\theta/x)^{\alpha}$ $x > \alpha$	$1 - (1-p)^{(\alpha-1)/\alpha}$

Οι παραπάνω τύποι αποδεικνύονται με τον ίδιο τρόπο, όπως στο παράδειγμα με την εκθετική, χρησιμοποιώντας είτε τη (2.3) είτε τη (2.4).

ΣΧΗΜΑ 2.3. Η καμπύλη Lorenz, $L_F(p) = p^2/2$, της ομοιόμορφης κατανομής με παραμέτρους (0,1).



ΣΧΗΜΑ 2.4. Καμπύλες Lorenz της κατανομής pareto με ($\alpha = 2$) $και$ ($\alpha = 4$).



Στο Σχήμα 2.4 παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της παραμέτρου α τόσο μεγαλύτερη είναι και η ανισότητα αφού η καμπύλη Lorenz παρουσιάζει μεγαλύτερη κυρτότητα.

2.1.2 Βασικές ιδιότητες της. καμπύλης Lorenz

Παρακάτω παρουσιάζονται μερικές ιδιότητες, οι οποίες ισχύουν για τη συνάρτηση $L(p)$ της καμπύλης Lorenz μόνο στη συνεχή περίπτωση και ανεξαρτήτως δείγματος και πληθυσμού.

- Η συνάρτηση $L(p)$, η οποία περιγράφει το ποσοστό εισοδήματος που αντιστοιχεί στο $p * 100\%$ των φτωχότερων νοικοκυριών, είναι συνεχής και παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1. Δηλαδή ισχύει ότι

  $$0 \leq L(p) \leq 1 \; \forall p \in [0,1]$$

  με

  $$L(0) = 0 \text{ και } L(1) = 1.$$

- Επειδή τα εισοδήματα είναι τοποθετημένα σε αύξουσα σειρά, η καμπύλη $L(p)$ θα είναι πάντα κυρτή και το ποσοστό του εισοδήματος, $L(p) * 100\%$, θα είναι πάντα μικρότερο ή ίσο από το ποσοστό των $p * 100\%$ φτωχότερων μελών, εκτός αν έχουμε ισοκατανομή εισοδημάτων. Για να ελέγξουμε αν η καμπύλη της $L(p)$ είναι κυρτή αρκεί να υπολογίσουμε τη δεύτερη παράγωγο της $L(p)$ και να αποδείξουμε ότι

$$\frac{\partial^2 L(p)}{\partial p^2} \geq 0 \text{ για } p \in [0,1].$$

- Για δύο καμπύλες $L_F(p)$ και $L_G(p)$, οι οποίες δεν τέμνονται στο $(0,1)$, ισχύει ότι αν η L_F παρουσιάζει μεγαλύτερη κυρτότητα από την L_G τότε η ανισότητα που εκφράζει η L_F θα είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη της L_G αφού για κάθε $p \in (0,1)$ θα ισχύει ότι $L_F(p) \leq L_G(p)$. Στην περίπτωση που οι καμπύλες τέμνονται, όσο μικρότερο είναι το εμβαδόν μεταξύ καμπύλης $L(p)$ και της $y = x$ τόσο μικρότερη είναι η ανισότητα, σύμφωνα με το δείκτη Gini.
- Όταν τα εισοδήματα κατανέμονται ισόποσα, σε όλα τα μέλη μιας κοινωνίας, ισχύει ότι $L(p) = p$ ενώ όταν παρουσιάζεται ανισότητα ισχύει $L(p) \leq p, \forall p \in [0,1]$.
- Η συνάρτηση $L(p)$ είναι γνησίως αύξουσα ,$\forall p \in [0,1]$. Επομένως αν $p_1 < p_2$,με $p_1, p_2 \in [0,1]$, τότε ισχύει $L(p1) < L(p2)$.
- Η κλίση της καμπύλης στη θέση p δίνεται από τη παράγωγο της $L(p)$ ως προς p και υπολογίζεται από τη σχέση

$$\frac{\partial L(p)}{\partial p} = \frac{F^{-1}(p)}{\mu}.$$

- Για κάθε $L_F(\mathrm{p})$ υπάρχει ένα p_0τέτοιο ώστε $p_0 - L_F(p_0) \geq p - L_F(p)$ για κάθε p στο διάστημα $[0,1]$. Το p_0 το οποίο μεγιστοποιεί την $p - L_F(p)$ ισούται με $F(\mu)$ και το $p_0 - L_F(p_0)$ ισούται με $\delta/(2\mu)$, όπου μ η μέση τιμή και δ η διάμεσος. Η διαφορά $p - L_F(p)$ εκφράζει το ποσοστό ελλείματος των $p * 100\%$ φτωχότερων μελών.

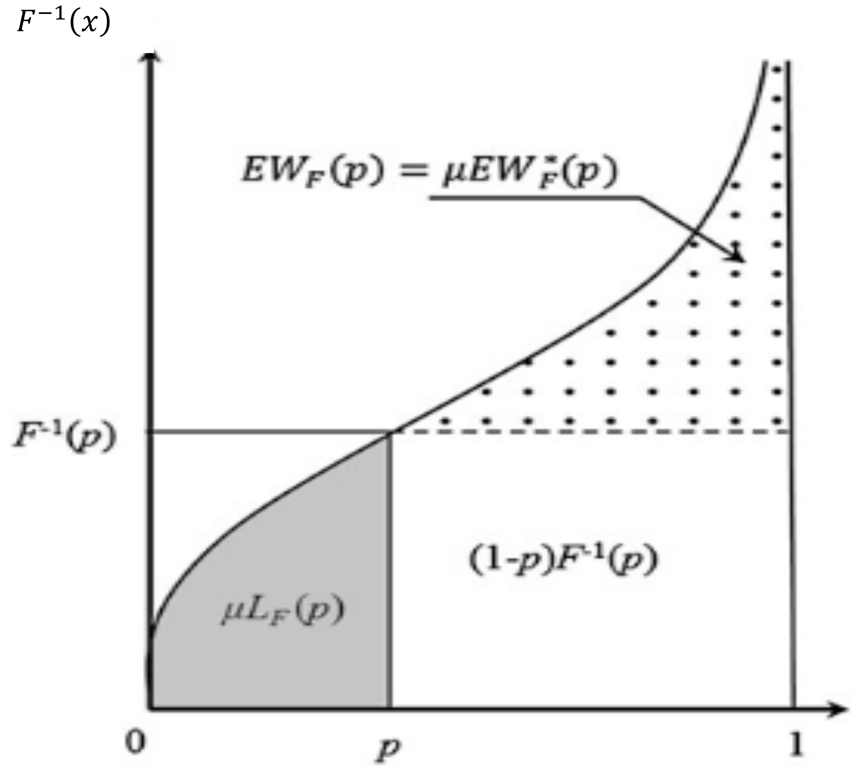
2.2 Ο υπερβάλλων πλούτος μέσω της καμπύλης Lorenz

Η έννοια του υπερβάλλοντος πλούτου πρωτοεμφανίστηκε από τους Shaked and Shanthikumar (1998) οι οποίοι ήθελαν να τη χρησιμοποιήσουν όχι ως μέτρο για την εισοδηματική ανισότητα αλλά ως μέτρο μεταβλητότητας στις στοχαστικές διαδικασίες.

Το Σχήμα 2.5, το οποίο προέρχεται από τους Singpurwalla and Gordon (2012), θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε και να ορίσουμε τον υπερβάλλοντα πλούτο.

ΣΧΗΜΑ 2.5. Διαγραμματική απεικόνιση του υπερβάλλοντος πλούτου

(πηγή: Singpurwalla and Gordon (2012)).



Στο παραπάνω διάγραμμα φαίνεται η σχέση εισοδήματος και ποσοστού συνολικών ατόμων, τα οποία όπως και προηγουμένως είναι τοποθετημένα σε αύξουσα σειρά βάσει εισοδήματος. Έτσι στον οριζόντιο άξονα, το p δηλώνει το ποσοστό των ασθενέστερων οικονομικά ενώ στον κάθετο άξονα το $F^{-1}(p)$ δηλώνει ότι $p * 100\%$ μέρος του συνολικού πληθυσμού έχει εισόδημα χαμηλότερο από $F^{-1}(p)$ μονάδες.

- Το εμβαδόν ολόκληρου του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $F^{-1}(x)$ και τον άξονα Ox ισούται με τη μέση τιμή του εισοδήματος και δίνεται από τον τύπο

$$\int_0^1 F^{-1}(x)dx = \mu. \tag{2.5}$$

- Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $F^{-1}(x)$ μέχρι το σημείο $F^{-1}(p)$ και τον άξονα x έως το σημείο p δηλώνει το εισόδημα του φτωχότερου $p * 100\%$ του πληθυσμού και υπολογίζεται ως

$$\int_0^p F^{-1}(x)dx = \mu * \mu^{-1} * \int_0^p F^{-1}(x)dx = \mu * L_F(p). \tag{2.6}$$

- Το υπόλοιπο χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη της αντίστροφης της F και τον οριζόντιο άξονα είναι το εισόδημα του $(1-p)*100\%$ του πληθυσμού, το οποίο χωρίζεται σε δύο κομμάτια :
    1. $F^{-1}(p)*(1-p)$: αυτό είναι το εισόδημα $F^{-1}(p)$ που αντιστοιχεί στο πλουσιότερο μέλος του φτωχότερου $p*100\%$ τμήματος.
    2. $EW_F(p)$: αυτό αποτελεί τον υπερβάλλοντα πλούτο δηλαδή το επιπλέον μέσο εισόδημα από το $F^{-1}(p)$ που λαμβάνει το $(1-p)*100\%$.

Για τον υπολογισμό του $EW_F(p)$ αρκεί να συνδυάσουμε τις σχέσεις (2.5) και (2.6). Έτσι θα έχουμε

$$EW_F(p) \ = \mu - \mu * L_F(p) - F^{-1}(p) * (1-p) \ \Leftrightarrow$$

$$EW_F(p) = \int_0^1 F^{-1}(x)dx - \int_0^p F^{-1}(x)dx - F^{-1}(p) * (1-p) \Leftrightarrow$$

$$EW(p) = \int_p^1 F^{-1}(x)dx - F^{-1}(p) * (1-p). \tag{2.7}$$

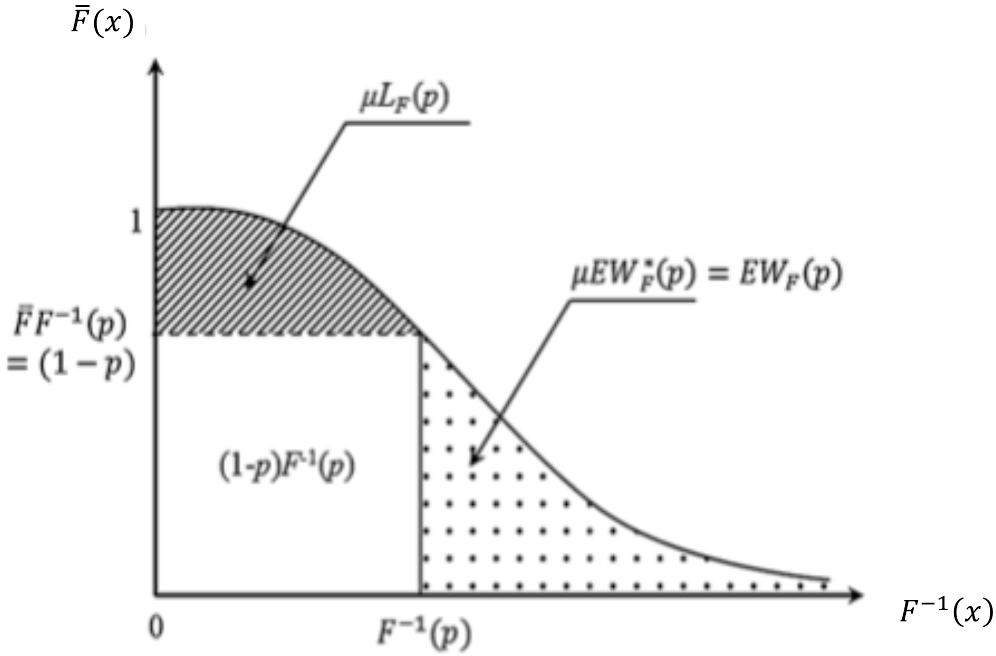
Αν εισάγουμε το συμβολισμό $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ για τη συνάρτηση επιβίωσης ή τη συνάρτηση δεξιάς ουράς της F όπου $0 \leq \bar{F}(x) \leq 1$, μπορούμε να ορίσουμε τον υπερβάλλοντα πλούτο ως

$$EW(p) = \int_{F^{-1}(p)}^1 \bar{F}(x)dx. \tag{2.8}$$

Η (2.8) απεικονίζεται στο Σχήμα 2.6 το οποίο δείχνει τη σχέση μεταξύ συνάρτησης επιβίωσης $\bar{F}(x)$ και της συνάρτησης p -ποσοστημορίου $F^{-1}(p)$.

ΣΧΗΜΑ 2.6. Υπερβάλλον πλούτος και συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}$

(πηγή: Singpurwalla and Gordon (2012)).



Έτσι λοιπόν στα πλαίσια της οικονομικής επιστήμης θα μπορούσαμε να ορίσουμε τον υπερβάλλοντα πλούτο, σε ένα πληθυσμό, ως το μέρος του εισοδήματος των $(1-p)*100\%$. πλουσιότερων που υπερβαίνει το μέγιστο εισόδημα των $p*100\%$ φτωχότερων.

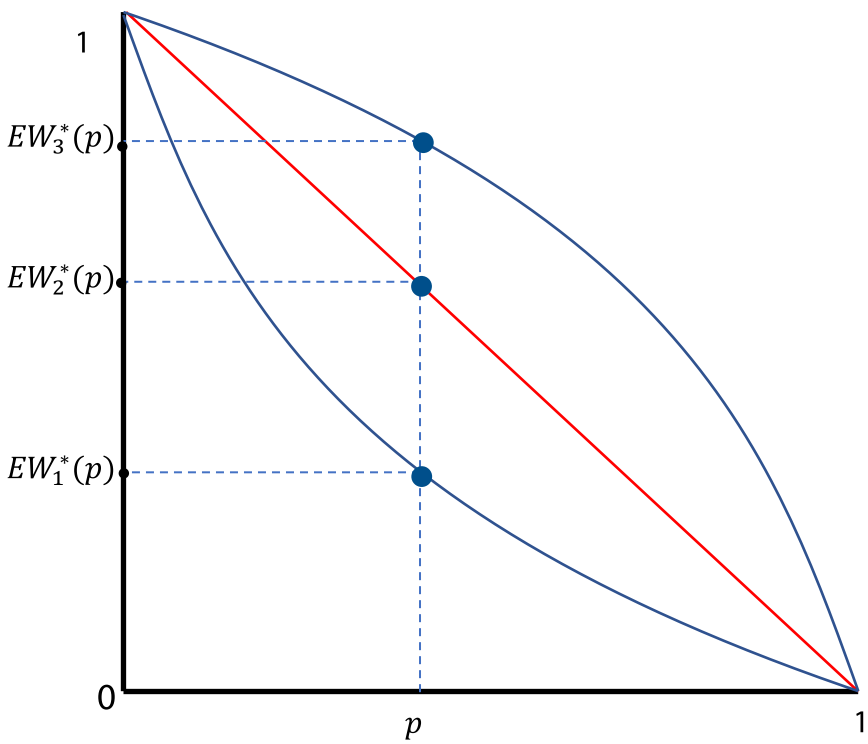
2.2.1 Ο υπερβάλλων πλούτος ως μέτρο εισοδηματικής ανισότητας

Η συνάρτηση EW η οποία περιγράψαμε στη (2.8) μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τους οικονομολόγους ως περιγραφικό μέτρο της ανισότητας. Όπως και στη περίπτωση της καμπύλης Lorenz, αν διαιρέσουμε τον υπερβάλλοντα πλούτο με τη μέση τιμή (μ) του εισοδήματος, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα νέο μέτρο ανισότητας, κανονικοποιώντας τη συνάρτηση $EW(p)$. Έτσι έχουμε

$$EW^*(p) = \frac{EW(p)}{\mu}. \tag{2.9}$$

Η σχέση αυτή μας δίνει τον υπερβάλλοντα πλούτο ως ποσοστό του εισοδήματος μ. Χρησιμοποιώντας τη (2.9) μπορούμε να κατασκευάσουμε διάφορες καμπύλες, ανάλογα με την κατανομή που ακολουθούν τα εισοδήματα.

ΣΧΗΜΑ 2.7. Καμπύλες της κανονικοποιημένης $EW(p)$.



Στο Σχήμα 2.7 παρουσιάζονται τρεις διαφορετικές καμπύλες των συναρτήσεων υπερβάλλοντος πλούτου $EW_1^*(p)$, $EW_2^*(p)$ και $EW_3^*(p)$ ως προς p, για τις οποίες ισχύει ότι

$$EW_1^*(p) \leq EW_2^*(p) \leq EW_3^*(p) \text{ , για κάθε } p \in [0,1].$$

Η διαγώνια γραμμή $EW_2^*(p) = 1 - p$ αποτελεί τη συνάρτηση υπερβάλλοντος πλούτου της εκθετικής κατανομής με παράμετρο $\lambda > 0$, αφού έχουμε

$$E(X) = \mu = 1/\lambda, F^{-1}(p) = -ln(1-p)/\lambda, L_F(p) = ln(1-p)(1-p) + p .$$

Επομένως η (2.7) γράφεται

$$EW(p) = 1/\lambda - 1/\lambda * [ln(1-p)(1-p) + p] + (1-p)ln(1-p)/\lambda \Leftrightarrow$$

$$EW(p) = \frac{1-p}{\lambda}.$$

Διαιρούμε με το $\mu = 1/\lambda$ και έχουμε

$$EW^*(p) = EW(p)/\mu = \frac{(1-p)/\lambda}{1/\lambda} = 1 - p, \text{ για κάθε } \lambda > 0.$$

Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι η διαγώνια ευθεία $EW_2^*(p) = 1 - p$ δεν έχει σχέση με τη διχοτόμο $L_F(p) = p$. Στην περίπτωση όπου όλα τα εισοδήματα των ατόμων του πληθυσμού είναι ίσα, τότε για τον υπερβάλλοντα πλούτο θα έχουμε $EW^*(p) = 0$.

Επομένως ισχύει ότι

$$L_F(p) = p, \forall p \in [0,1] \implies EW^*(p) = 0, \forall p \in [0,1].$$

Παρατηρούμε επίσης ότι η καμπύλη EW_1^* είναι κυρτή στο $(0,1)$ ενώ η $EW_2^*(p)$ είναι κοίλη. Αυτό σημαίνει ότι, στην περίπτωση της κατανομής του πρώτου δείγματος, για κάθε ποσοστό, $p \in [0,1]$, των ασθενέστερων οικονομικά το $(1-p) * 100\%$ ποσοστό πλουσιότερων έχει χαμηλότερο ποσοστό υπερβάλλοντος πλούτου, σε σύγκριση με το τρίτο δείγμα.

Επιπλέον οι δύο καμπύλες $EW_1^*(p)$ και $EW_3^*(p)$ είναι τυχαίες και κατασκευάστηκαν προσεγγιστικά για την καλύτερη επεξήγηση της έννοιας του υπερβάλλοντος πλούτου.

Για να κατανοήσουμε καλύτερη τη μορφή των καμπυλών της $EW^*(p)$, στα παραδείγματα που ακολουθούν θα παρουσιαστούν οι συναρτήσεις του υπερβάλλοντος πλούτου για δύο κατανομές.

Έστω λοιπόν ότι η συνεχής τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή με παραμέτρους $\alpha = 0$ και $\beta = 2$. Τότε θα έχουμε

$$F(x) = x/2, \; F^{-1}(p) = 2p, \; E(X) = 1.$$

Επίσης από την (2.7) θα έχουμε

$$EW(p) = p^2 - 2p + 1.$$

Διαιρούμε με τη μέση τιμή και παίρνουμε

$$EW^*(p) = EW(p)/\mu = p^2 - 2p + 1.$$

Τέλος βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο

$$\frac{\partial^2 EW^*(p)}{\partial p^2} = 2 > 0, \forall p \in (0,1).$$

Συνεπώς η καμπύλη της $EW^*(p)$ για την ομοιόμορφη κατανομή θα είναι κυρτή στο διάστημα $(0,1)$

Ομοίως, αν μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Pareto(θ, α), θα έχουμε

$$F(x) = 1 - [1 + \tfrac{x-\mu}{\theta}]^{-\alpha}, \; F^{-1}(p) = \theta * [\,(1-\mathrm{p}) - 1/\alpha - 1\,] + \mu, E(X) = \frac{\theta}{\alpha-1} + \mu,$$

όπου $\mu = \frac{\alpha\theta}{\alpha-1} = 2.$

Για την $EW(p)$, από τη (2.7) ισχύει

$$EW(p) = \frac{\theta(1-p)^{1-\alpha^{-1}}}{\alpha-1}, p \in [0,1].$$

Διαιρούμε με $E(X)$και έχουμε

$$EW^*(p) = \frac{\theta}{\mu(\alpha-1)+\theta}(1-p)^{1-\alpha^{-1}}, p \in [0,1].$$

Αντικαθιστώντας με $\theta = 1$ και $\alpha = 2$ η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$EW^*(p) = \frac{1}{2+1}(1-p)^{1-2^{-1}} = \frac{1}{3}\sqrt{(1-p)}.$$

Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο

$$\frac{\partial EW^*(p)}{\partial p} = -\frac{1}{6\sqrt{(1-p)}},$$

και ξανά παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$\frac{\partial^2 EW^*(p)}{\partial^2 p} = \frac{-1}{12(1-p)^{3/2}} < 0, \forall p \in (0,1).$$

Επομένως η $EW^*(p)$ για την κατανομή Pareto(1,2) είναι κοίλη στο διάστημα $(0,1)$.

Τέλος είναι σημαντικό να πούμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της συνάρτησης $EW^*(p)$ τόσο μεγαλύτερη είναι η εισοδηματική ανισότητα που επικρατεί στον πληθυσμό. Αφού η μεγέθυνση της τιμής του πλεονάσματος που δημιουργείται πάνω από ένα επίπεδο εισοδήματος προκαλείται από μια αντίστοιχη αύξηση της διαφοράς των εισοδημάτων των ατόμων που βρίσκονται κάτω και των ατόμων που βρίσκονται πάνω από το επίπεδο αυτό.

2.2.2 Ιδιότητες της κανονικοποιημένης συνάρτησης

Από το Σχήμα 2.7 μπορούμε να διακρίνουμε τις ιδιότητες της $EW^*(p)$. Παρακάτω αναφέρουμε ορισμένες από αυτές και δίνουμε τις σχετικές ερμηνείες.

- Όταν το $p = 0$ τότε ο υπερβάλλων πλούτος ισούται με τη μέση τιμή (μ) ενώ για την κανονικοποιημένη μορφή θα ισχύει

  $EW^*(0) = \frac{\mu}{\mu} = 1$, για όλες τις κατανομές εισοδήματος.

- Ο υπερβάλλων πλούτος του 100% τμήματος του πληθυσμού ισούται με 0 δηλαδή $\mathrm{EW}(1) = 0$, αφού δεν υπάρχει εισόδημα μεγαλύτερο του $F^{-1}(p)\ για\ p = 1$. Έτσι ισχύει

  $EW^*(1) = \frac{EW(1)}{\mu} = 0/\mu = 0$, για όλες τις κατανομές εισοδήματος.

- Σε μια κοινωνία που δεν υπάρχει εισοδηματική ανισότητα ισχύει ότι

  $EW^*(p) = 0$, για κάθε $p \in [0,1]$.

- Σε αντίθεση με τη συνάρτηση $L_F(p)$, η οποία είναι πάντα κυρτή, η $EW^*(p)$ μπορεί να είναι είτε κυρτή είτε κοίλη, κάτι το οποίο καθορίζεται από το τύπο της κατανομής.
- Η $EW^*(p)$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο $[0,1]$ δηλαδή για κάθε $p_1, p_2 \in [0,1]$ με $p_1 < p_2$, ισχύει $EW^*(p_1) > EW^*(p_2)$. Η συγκεκριμένη ιδιότητα γίνεται

εύκολα κατανοητή, αφού όταν αυξάνει το τμήμα του πληθυσμού το οποίο εξετάζουμε ταυτόχρονα θα αυξάνει και το εισόδημα του $p * 100\%$ πλουσιότερου ατόμου άρα θα μειώνεται και η διαφορά από το πλουσιότερο $(1-p) * 100\%$.

2.2.3 Οι συνέπειες του υπερβάλλοντος πλούτου

Η δημιουργία υπερβάλλοντος πλούτου σε μια οικονομικά άνιση κοινωνία καθορίζει πολλές φορές το επίπεδο φτώχιας και οικονομικής ευημερίας των ατόμων που ζουν σε αυτή.

Έστω p το ποσοστό τον φτωχότερων μελών μιας κοινωνίας. Με τον όρο ευημερία εννοούμε τον πλούτο που υπερβαίνει το μέσο εισόδημα και συγκεντρώνεται από το $(1-p)100\%$ τμήμα των πιο οικονομικά ευκατάστατων ατόμων του πληθυσμού ενώ με τον όρο φτώχια εννοείται το έλλειμα που παρουσιάζεται στο $p * 100\%$ τμήμα των πιο οικονομικά ασθενέστερων. Αναλυτικότερα από τη (2.7) έχουμε

$$EW(p) = \mu - \mu L_F(p) - F^{-1}(p)(1-p).$$

Αποσυνθέτοντας την παραπάνω σχέση μπορούμε να πούμε τα εξής :

- Το $\mu L_F(p)$ εκφράζει το εισόδημα των $p100\%$ φτωχότερων ατόμων σε μία άνιση εισοδηματικά κατανεμημένη οικονομία ενώ το μp το εισόδημα των $p100\%$ φτωχότερων ατόμων σε μια οικονομία όπου το εισόδημα διανέμεται ισόποσα σε όλα τα μέλη της. Έτσι συμβολίζουμε το επίπεδο φτώχιας του p ποσοστού με

$$D(p) = \mu p - \mu L_F(p).$$

- Από τη σχέση

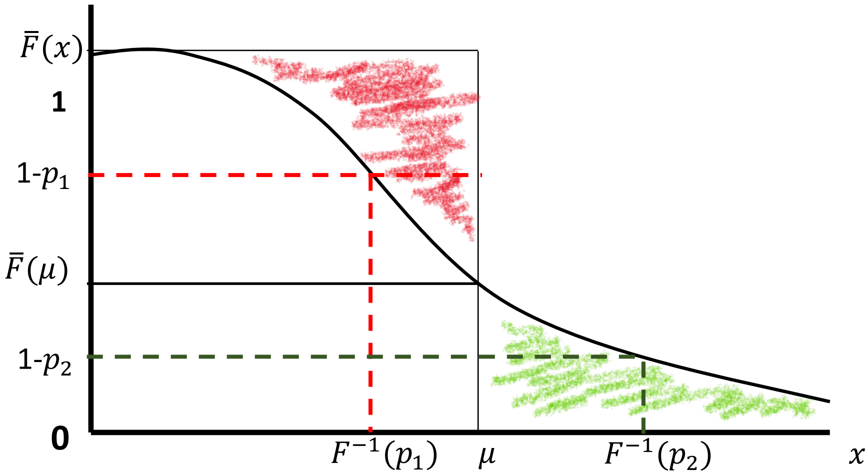
$$EW(p) + F^{-1}(p)(1-p) = \mu(1 - L_F(p))$$

υπολογίζεται το εισόδημα του $1-\mathrm{p}$ ποσοστού των πλουσιότερων σε μια άνιση κοινωνία. Αν η υπήρχε τέλεια ισότητα θα είχαμε $(1-p)\mu$. Οπότε συμβολίζουμε το επίπεδο ευημερίας του $1-p$ με

$$S(p) = \mu(1 - L_F(p)) - (1-p)\mu.$$

Στη συνέχεια Σχήμα 2.8 θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε καλύτερα τις δύο παραπάνω εξισώσεις

ΣΧΗΜΑ 2.8. Επίπεδο φτώχιας και οικονομικής ευημερίας.



Στον άξονα Oy έχουμε τη συνάρτηση επιβίωσης της μεταβλητής X ενώ στον άξονα Ox έχουμε τοποθετήσει τα εισοδήματα. Η οικονομική ευημερία (πράσινη περιοχή) παρατηρείται σε άτομα που έχουν εισόδημα μεγαλύτερο της μέσης τιμής (μ) ενώ η φτώχια σε άτομα που έχουν εισόδημα μικρότερο της μέσης τιμής (μ).

Έστω p_1 το ποσοστό των φτωχότερων ατόμων που έχουν εισόδημα $F^{-1}(p_1)$, μικρότερο του (μ). Τότε το έλλειμα θα είναι η κόκκινη περιοχή πάνω από το $1-p_1$, δηλαδή θα έχουμε

$$D(p_1) = \mu p_1 - \mu L_F(p_1).$$

Έστω τώρα $1-p_2$ το ποσοστό των πλουσιότερων ατόμων που έχουν εισόδημα μεγαλύτερο της μέσης τιμής (μ). Τότε η οικονομική ευημερία θα είναι το πλεόνασμα του πλούτου των ατόμων πάνω από τη μέση τιμή (μ). Έτσι θα έχουμε

$$S(p_2) = \mu(1 - L_F(p_2)) - \mu(1 - p_2).$$

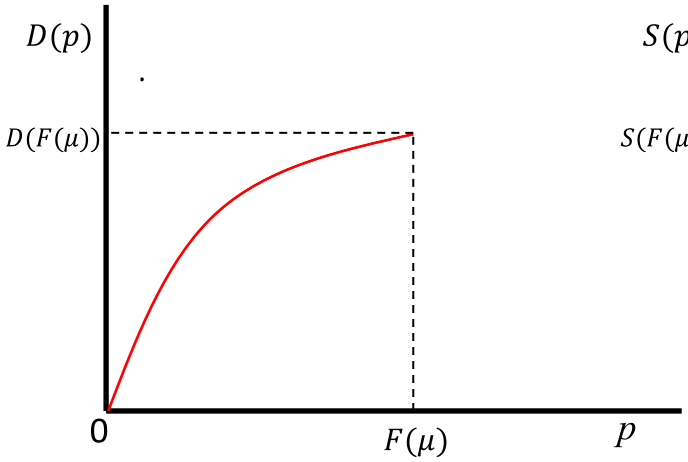
Στο Σχήμα 2.8 παρατηρούμε ότι το έλλειμα (κόκκινη περιοχή) και το πλεόνασμα (πράσινη περιοχή) των πλουσιότερων μεγιστοποιούνται στο $\bar{F}(\mu)$, όπου $p = F(\mu)$.

Η έννοια του ελλείματος έχει νόημα μόνο για άτομα με εισόδημα μικρότερο του μ όποτε για $p > F(\mu)$ ισχύει ότι $D(p) = 0$. Από την άλλη μεριά, η έννοια της ευημερίας έχει νόημα για άτομα με εισόδημα μεγαλύτερο του μ επομένως για $p < F(\mu)$ ισχύει ότι $S(p) = 0$.

Τα Σχήματα 2.9 και 2.10 απεικονίζουν τη σχέση μεταξύ $D(p)$ και $S(p)$ με το ποσοστό p των φτωχότερων ατόμων καθώς και τις ιδιότητες που αναφέραμε.

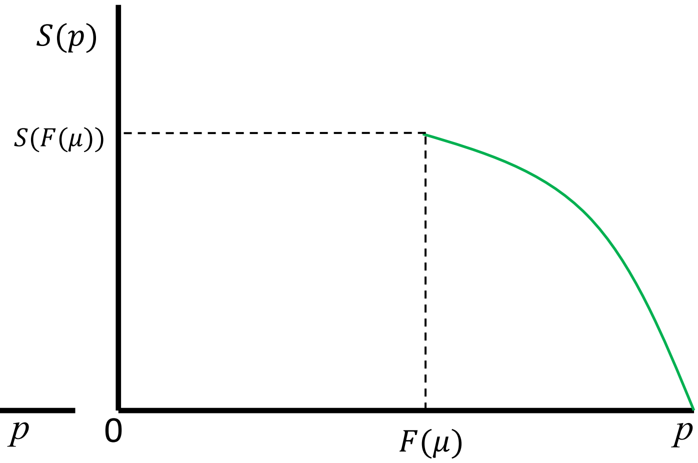
ΣΧΗΜΑ 2.9.

Γραφική απεικόνιση της $D(p)$.



ΣΧΗΜΑ 2.10.

Γραφική απεικόνιση της $S(p)$.



Για παράδειγμα, έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Τότε θα έχουμε

$$\mu = E(X) = 1/\lambda, L_F(p) = ln(1-p)(1-p) + p.$$

Επομένως οι συναρτήσεις $D(p)$ και $S(p)$ διαμορφώνονται ως εξής

$D(p) = 1/\lambda * p - (ln(1-p)(1-p) + p) * 1/\lambda \ = -ln(1-p)(1-p)/\lambda, \forall p \leq F(\mu),$

$S(p) = 1/\lambda * p - (ln(1-p)(1-p) + p) * 1/\lambda \ = -ln(1-p)(1-p)/\lambda, \forall p \geq F(\mu).$

Έστω ότι $\lambda = 2$ τότε οι παραπάνω σχέσεις γράφονται

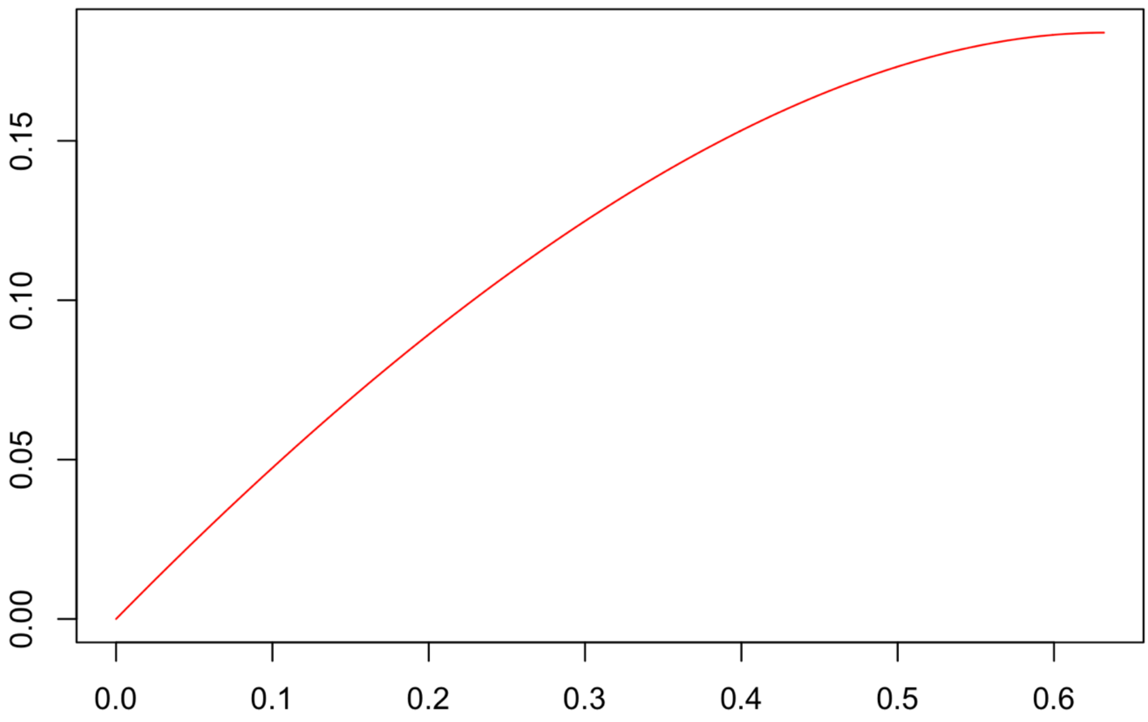
$$\mu = E(X) = 1/2$$

$D(p) = 1/2 * p - (ln(1-p)(1-p) + p) * 1/2 \ = -ln(1-p)(1-p)/2 , \forall p \leq 1 - e^{-1},$

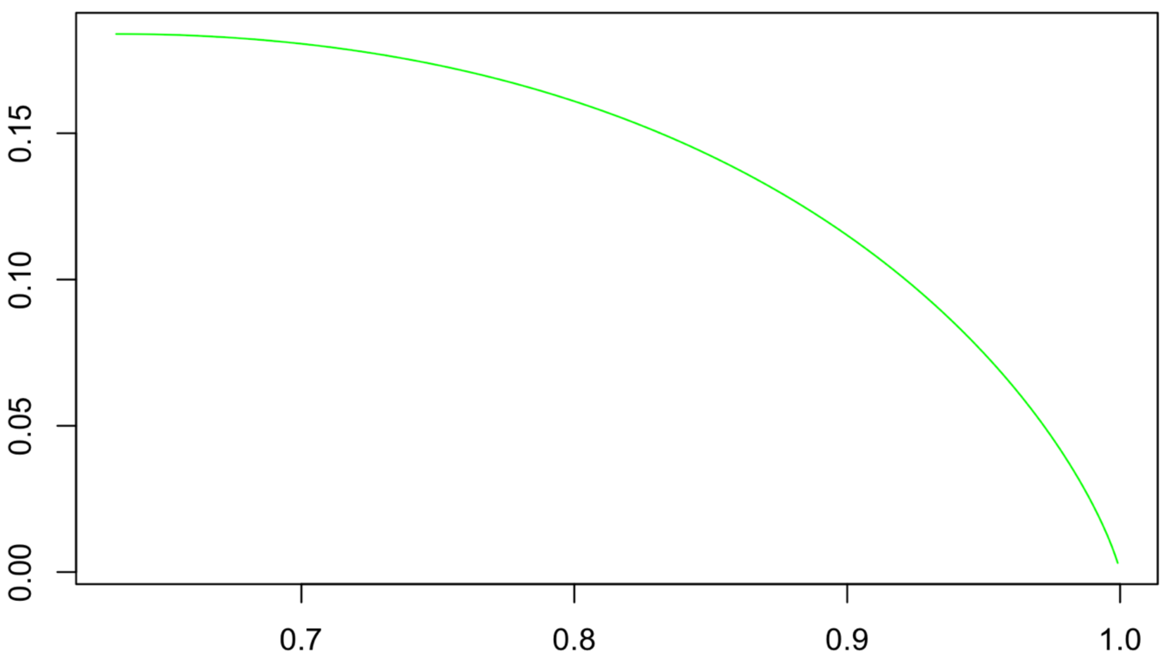
$S(p) = 1/2 * p - (ln(1-p)(1-p) + p) * 1/2 \ = -ln(1-p)(1-p)/2, \forall p \geq 1 - e^{-1}.$

Στα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζονται οι παραπάνω συναρτήσεις για $\lambda = 2$.

ΣΧΗΜΑ 2.11. Γραφική αναπαράσταση της $\boldsymbol{D(p)}$ **για** $\boldsymbol{\lambda = 2}$



ΣΧΗΜΑ 2.12. Γραφική αναπαράσταση της $\boldsymbol{S(p)}$ **για** $\boldsymbol{\lambda = 2}$



3

Περιγραφή δεδομένων εισοδήματος και ζημιών

3.1 Ο υπερβάλλων πλούτος και η συνάρτηση επιβίωσης

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ορίσαμε τον υπερβάλλοντα πλούτο για μια συνεχή τυχαία μεταβλητή X με τη συνάρτηση

$$EW(F,p) = \int_{F^{-1}(p)}^{1} \bar{F}(x)dx.$$

Η συνάρτηση αυτή έχει αρκετές εφαρμογές τόσο στην Οικονομική Επιστήμη για τη περιγραφή της εισοδηματικής ανισότητας και της συγκέντρωσης πλούτου όσο και στη Διαχείριση Κινδύνου για τη περιγραφή ακραίων ζημιών σε χαρτοφυλάκια περιουσιακών στοιχείων.

Παρατηρώντας τη παραπάνω σχέση, βλέπουμε ότι η έννοια υπερβάλλων πλούτος επικεντρώνεται σε παρατηρήσεις πάνω από κάποιο εκατοστημόριο $F^{-1}(p)$ δίνοντας έτσι ιδιαίτερη έμφαση σε μεγάλες παρατηρήσεις είτε αφορά το εισόδημα των πολιτών μιας κοινωνίας είτε τις ζημίες ενός χαρτοφυλακίου επενδυτικών προϊόντων.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα επικεντρωθούμε στη δεξιά ουρά κατανομών, οι οποίες είναι κατάλληλες για τη περιγραφή οικονομικών και αναλογιστικών μεγεθών, δίνοντας έτσι έμφαση στη συνάρτηση επιβίωσης των κατανομών $\bar{F}(x)$.

Πριν όμως προχωρήσουμε στις επόμενες υπό-ενότητες θα αναφέρουμε μερικές ιδιότητες της $\bar{F}(x)$. Έτσι λοιπόν για την κάθε συνάρτηση επιβίωσης μια συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X έχουμε

- $\bar{F}(x) = Pr(X > x) = 1 - F(x)$
- $0 \leq \bar{F}(x) \leq 1$, για κάθε τιμή του x
- Η συνάρτηση $\bar{F}(x)$ είναι φθίνουσα
- Η συνάρτηση $\bar{F}(x)$ είναι συνεχής
- Ισχύει ότι $lim_{x \to -\infty}\bar{F}(x) = 1$ και $lim_{x \to \infty}\bar{F}(x) = 0$

3.2 Περιγραφή οικονομικών δεδομένων

Η εποχή μας χαρακτηρίζεται από την πληθώρα πληροφοριών σε πολλούς τομείς της καθημερινότητας. Κατά τη διαδικασία λήψης ιδιαίτερα σημαντικών αποφάσεων, στα πλαίσια της διακυβέρνησης ενός κράτους ή μίας οικονομικής οντότητας, απαιτείται η ποσοτική ανάλυση αριθμητικών πληροφοριών.

Πιο συγκεκριμένα, στα οικονομικά για τη μελέτη πολλών μικροοικονομικών και μακροοικονομικών φαινομένων απαιτείται η επεξεργασία μεγάλου όγκου δεδομένων. Η χρήση των κατάλληλων κατανομών μπορεί να μας βοηθήσει και να κάνει τη διαδικασία αυτή ευκολότερη αφού μέσω αυτών μας παρέχονται χρήσιμες πληροφορίες για τη συμπεριφορά των μεταβλητών, όπως για παράδειγμα το εισόδημα. Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε πόσο σημαντικό είναι να γνωρίζουμε την κατανομή μιας μεταβλητής για τον προσδιορισμό της καμπύλης Lorenz και εν συνεχεία του επιπέδου ανισότητας και συγκέντρωσης πλούτου σε μια γεωγραφική περιοχή.

Ποιες είναι όμως οι συναρτήσεις κατανομής που μπορούν να περιγράψουν με τον ακριβέστερο δυνατό τρόπο οικονομικά δεδομένα όπως το εισόδημα και ο πλούτος ; Αυτό το ερώτημα απασχόλησε στο παρελθόν πλήθος οικονομολόγων και είναι κάτι που θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε σε αυτή την ενότητα του κεφαλαίου δίνοντας έμφαση στη συνάρτηση επιβίωσης των κατανομών αυτών αφού το ενδιαφέρον μας θα στραφεί σε μη αναμενόμενες τιμές οι οποίες παρουσιάζονται με χαμηλή συχνότητα σε ένα δείγμα ή σε ένα πληθυσμό δεδομένων.

3.2.1 Οι κατανομές νόμου δύναμης

Πολλά οικονομικά δεδομένα όπως το εισόδημα και ο πλούτος είναι δύσκολο να τα περιγράψουμε με τη κανονική κατανομή αφού οι τιμές των μεταβλητών δεν συγκεντρώνονται γύρω από τη μέση τιμή τους όπως γίνεται με άλλες μεταβλητές οι οποίες, για παράδειγμα, μπορεί να περιγράφουν τα πληθυσμιακά χαρακτηριστικά. Αντιθέτως υπάρχουν αρκετές παρατηρήσεις οι οποίες είναι πολύ μεγαλύτερες σε μέγεθος από τη μέση τιμή με αποτέλεσμα οι κατανομές που ακολουθούν να εμφανίζουν μεγαλύτερη ασσυμετρία και να σχηματίζουν πιο βαριές ουρές.

Η Κατανομή Νόμου Δύναμης (Power Law Distribution) αποτελεί μια οικογένεια κατανομών οι οποίες μπορούν να περιγράψουν δεδομένα όπως το εισόδημα στα οικονομικά, Barabasi (2015). Ουσιαστικά πρόκειται για μια συναρτησιακή σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών (ποσοτήτων) εκ των οποίων η μία μεταβάλλεται ως δύναμη της άλλης.

α. Κατανομή Pareto

Ένα παράδειγμα κατανομής νόμου δύναμης είναι η κατανομή pareto, η οποία πήρε το όνομα της από τον Ιταλό οικονομολόγο Vilfredo Pareto βασιζόμενη στο συσχετισμό 80-20 ο οποίος αποτελεί αξίωμα σε πολλούς τομείς των οικονομικών, όπως για παράδειγμα τη φορολογία και τη διοίκηση των επιχειρήσεων. Σύμφωνα με τον κανόνα 80-20 το 80% των αποτελεσμάτων προέρχονται από το 20% των αιτίων. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα, πάνω στο οποίο βασίστηκε και ο Vilfredo Pareto για να στηρίξει τη θεωρία του, ήταν ότι στην Ιταλία στο 20% του πληθυσμού κατείχε το 80% του συνολικού πλούτου.

Έστω τώρα ότι θ είναι η ελάχιστη τιμή που παίρνει μια μεταβλητή X η οποία ακολουθεί την κατανομή Pareto. Τότε θα έχουμε για τη συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{\alpha\theta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} \text{ για } x \geq \theta \geq 0..$$

Από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ προκύπτει η παρακάτω συνάρτηση δεξιάς ουράς

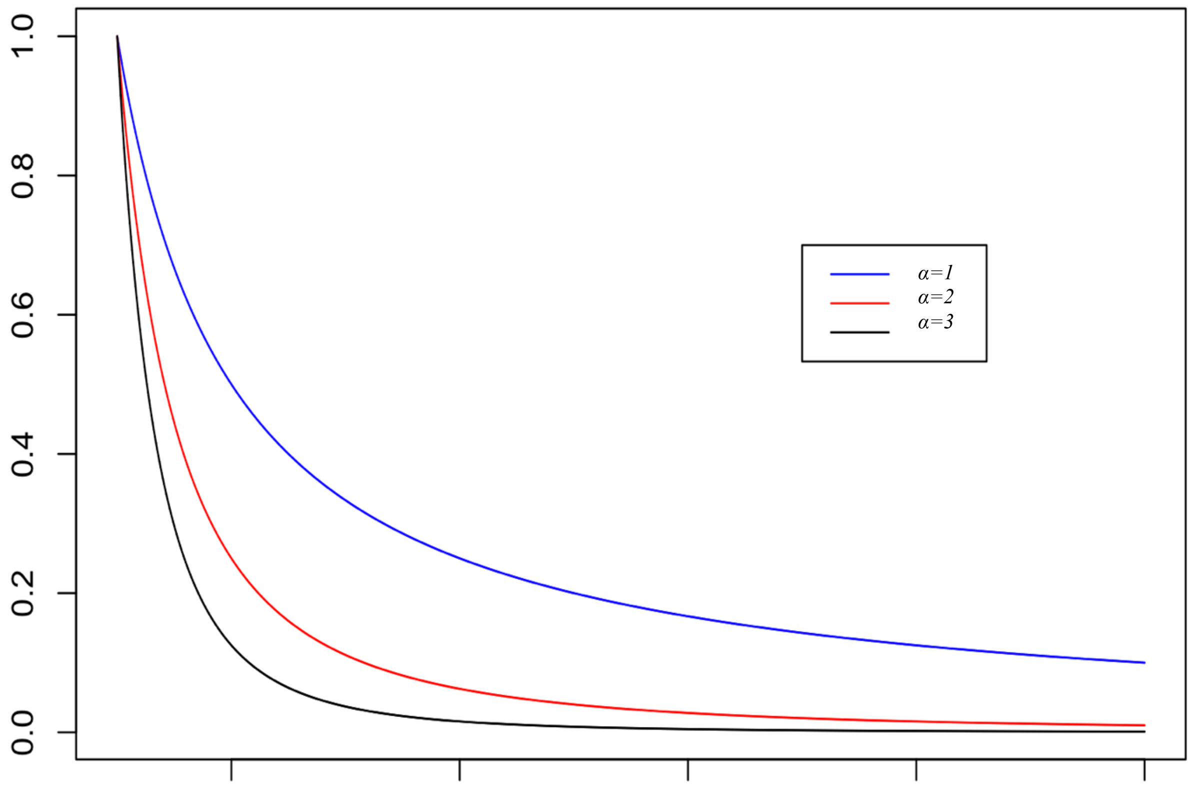
$$\bar{F}(x) = \frac{\theta^{\alpha}}{x^{\alpha}} \text{ ,για } x \geq \theta \geq 0.$$

- Το α είναι μεγαλύτερο του 1 έτσι ώστε να υπάρχει η μέση τιμή, η οποία θα δίνεται από τον τύπο : $E(X) = \frac{\alpha\theta}{\alpha-1}$.
- Το θ είναι σημείο η ελάχιστη τιμή του X.

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι η παράμετρος α προσδιορίζει το πόσο βαριά είναι η ουρά της κατανομής, αποτελεί δηλαδή τη δείκτρια ουράς. Πιο συγκεκριμένα, όσο μικρότερη είναι η παράμετρος α τόσο μεγαλύτερη τιμή λαμβάνει η $\bar{F}(x)$, για συγκεκριμένο x, άρα τόσο βαρύτερη είναι η ουρά της κατανομής.

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 3.1 απεικονίζονται οι συναρτήσεις επιβιώσεις $\bar{F}(x)$ για την κατανομή Pareto με $\alpha = 1,2,3$.

ΣΧΗΜΑ 3.1. Συνάρτηση επιβίωσης της Pareto για $\alpha = (1,2,3)$



Στο διάγραμμα παρατηρούμε ότι για $\alpha = 1$ έχουμε τη βαρύτερη ούρα ενώ για $\alpha = 3$ την ελαφρύτερη.

Άρα αν ανάγουμε αυτή την ιδιότητα στη συνάρτηση του υπερβάλλοντος πλούτου θα ισχύει ότι για μικρότερο α θα έχουμε μεγαλύτερο $\bar{F}(x)$. Επομένως ο υπερβάλλων πλούτος θα είναι μεγαλύτερος για εισοδήματα που ακολουθούν την Pareto με μικρότερο α. Ισχύει και το αντίστροφο.

Έτσι λοιπόν για κατανομή pareto με παραμέτρους (α, θ) και μέση τιμή

$$E(x) = \frac{\alpha\theta}{\alpha - 1},$$

η συνάρτηση ποσοστημορίου ορίζεται

$$F^{-1}(p) = \theta(1-p)^{-1/\alpha}.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τη (2.7) θα καταλήξουμε στη συνάρτηση μετασχηματισμού υπερβάλλοντος πλούτου της Pareto

$$EW(F,p) = \frac{\theta(1-p)^{1-\alpha^{-1}}}{\alpha-1},\ p \in [0,1].$$

Αν διαιρέσουμε τη συνάρτηση μετασχηματισμού υπερβάλλοντος πλούτου με $E(X)$ τότε θα έχουμε

$$EW^*(p) = \frac{(1-p)^{1-\alpha^{-1}}}{\alpha}, p \in [0,1].$$

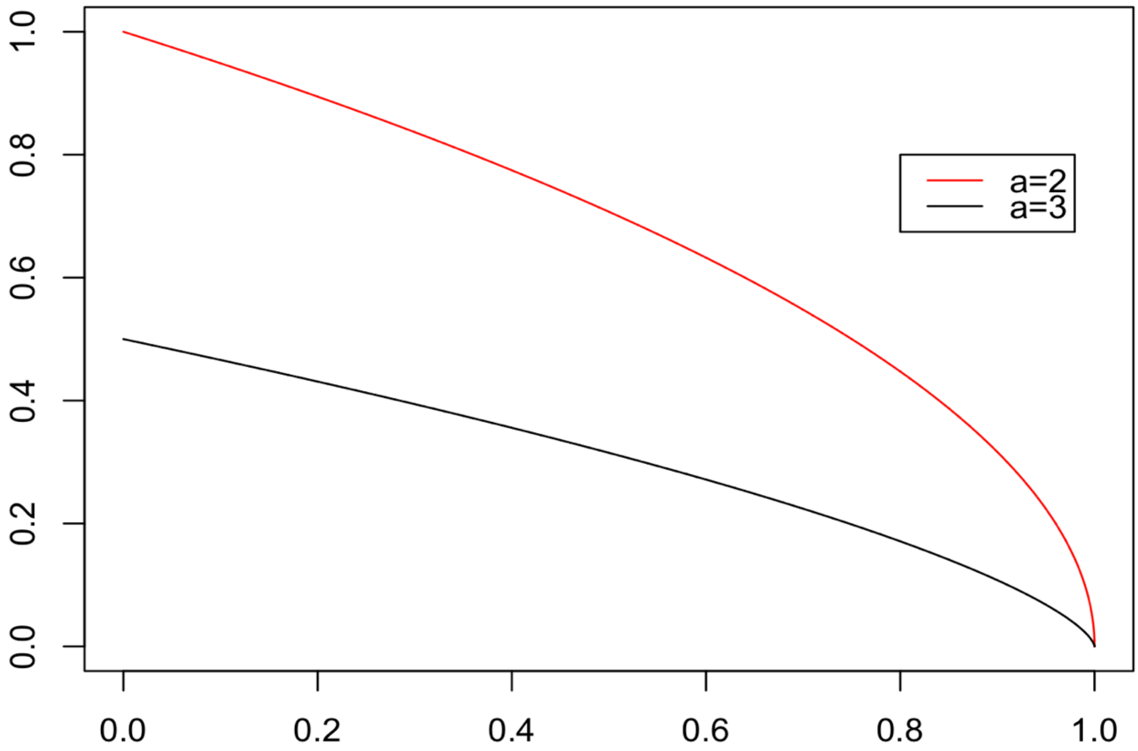
Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι συναρτήσεις $EW(p)$ και $EW^*(p)$ για τις τιμές των παραμέτρων α που χρησιμοποιήσαμε και στο πορηγούμενο σχήμα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1. Συναρτήσεις $EW(p)$ & $EW^*(p)$

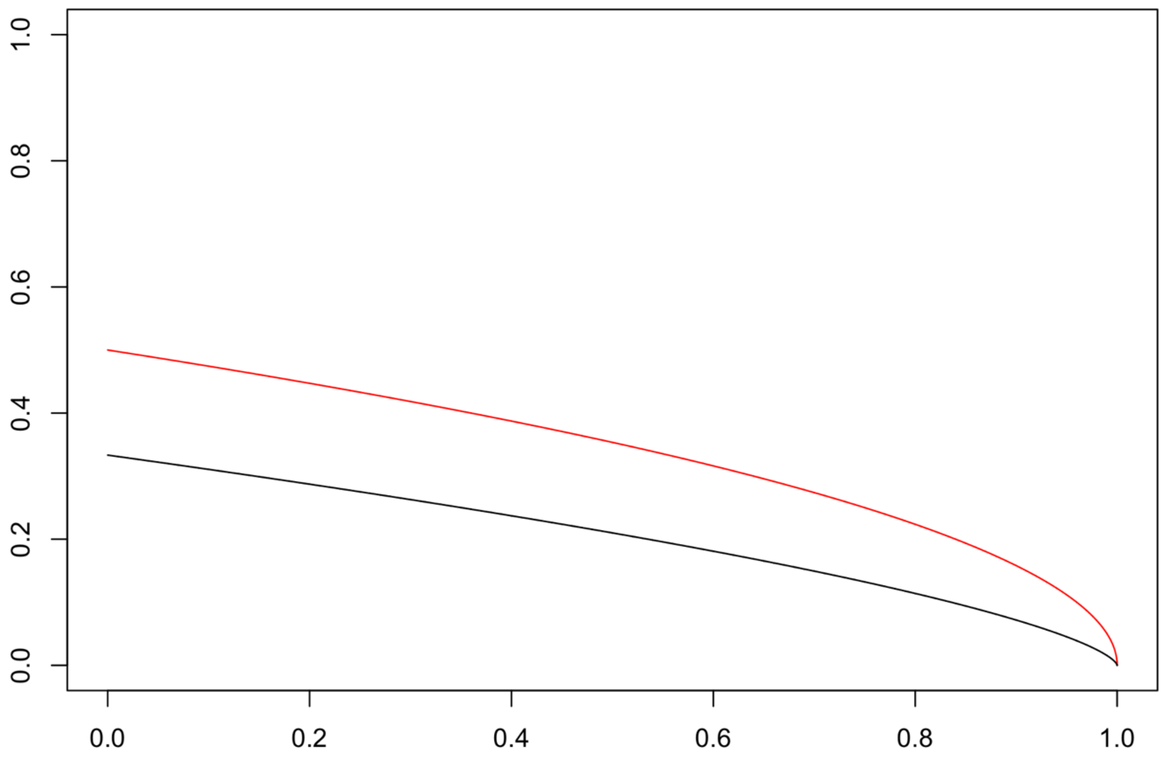
	$\boldsymbol{\bar{F}(x)}$	$\boldsymbol{EW(p)}$	$\boldsymbol{EW^*(p)}$
$\boldsymbol{\alpha = 2}$ **& θ= 1**	$\frac{1}{\chi^2}$	$\sqrt{1-p}$	$\frac{\sqrt{1-p}}{2}$
$\boldsymbol{\alpha = 3}$ **& θ= 1**	$\frac{1}{\chi^3}$	$\frac{(1-p)^{2/3}}{2}$	$\frac{(1-p)^{2/3}}{3}$

Στις δύο παραπάνω σχέσεις παρατηρούμε ότι υπάρχει αντιστρόφως ανάλογη σχέση μεταξύ της παραμέτρου α και του μεγέθους του EW, όπως δηλαδή προαναφέραμε. Αυτή η αντίστροφη σχέση απεικονίζεται και στο Σχήμα 3.2.

ΣΧΗΜΑ 3.2. Συναρτήσεις $EW(p)$ της Pareto για $\alpha = (2,3)$



ΣΧΗΜΑ 3.3. Συναρτήσεις $EW^{*}(p)$ της Pareto για $\alpha = (2,3)$



β. Άλλοι τύποι της κατανομής Pareto

Pareto Type II

Μια παραλλαγή της κατανομής Pareto, η οποία προτάθηκε από τον Vilfredo Pareto, είναι η κατανομή Pareto τύπου II. Ο συγκεκριμένος τύπος της κατανομής Pareto περιέχει τρεις παραμέτρους και η συνάρτηση επιβίωσης της έχει τη μορφή

$$\bar{F}(x) = \left[1 + \frac{x-\mu}{\theta}\right]^{-\alpha} \text{ για } x > \mu \text{ και } \theta, \alpha > 0.$$

Για την αντίστροφη της $F(x) = 1 - \bar{F}(x)$ έχουμε

$$F^{-1}(p; \mu, \theta, \alpha) = \theta[(1-p)^{-1/\alpha} - 1] + \mu,$$

ενώ για $\alpha > 1$ ισχύει

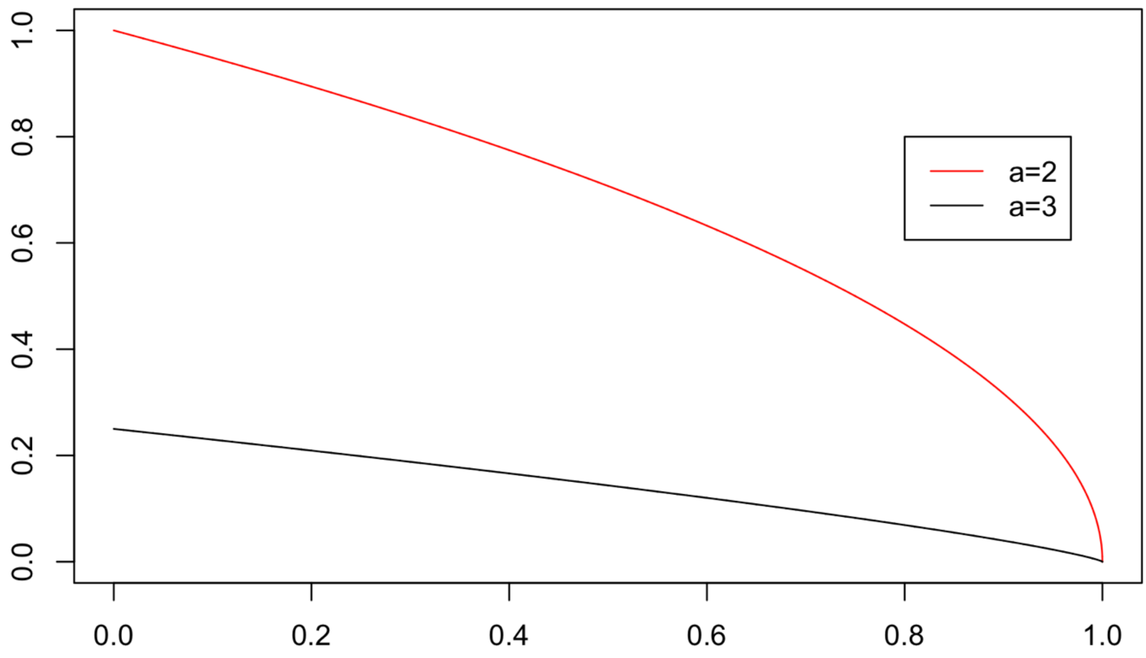
$$E(X) = \frac{\theta}{\alpha - 1} + \mu.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω με τη σχέση (2.7) έχουμε τις παρακάτω συναρτήσεις μετασχηματισμού του υπερβάλλοντος πλούτου (EW)

$$EW(p) = \frac{\theta(1-p)^{1-\alpha^{-1}}}{\alpha - 1}, \; p \in [0,1]$$

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η διαφορά στην καμπύλη του υπερβάλλοντος πλούτου για διαφορετικό α.

ΣΧΗΜΑ 3.4. Συνάρτηση $EW(p)$ της Pareto II για $\alpha = (2,5)$



ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2. Συναρτήσεις υπερβάλλοντος πλούτου της Pareto II

	$\boldsymbol{EW(p)}$
$\boldsymbol{\alpha = 2}$ **& θ= 1**	$\sqrt{1-p}$
$\boldsymbol{\alpha = 5}$ **& θ= 1**	$\frac{(1-p)^{4/5}}{4}$

Ο Πίνακας 3.2 παρουσιάζει τις συναρτήσεις υπερβάλλοντος πλούτου που απεικονίζει το Σχήμα 3.2. Οι τιμές είναι τυχαίες και χρησιμοποιούνται ως παράδειγμα για να μπορέσουμε να κάνουμε συγκρίσεις και να καταλήξουμε σε χρήσιμα συμπεράσματα σχετικά με τις παραμέτρους της κατανομής.

Έτσι, κοιτώντας το Σχήμα 3.2 καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για μικρότερη τιμή του α η συνάρτηση $EW(p)$ λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές. Αυτό συμβαίνει γιατί όσο μικρότερη είναι η τιμή του α τόσο μεγαλύτερη είναι η ανισότητα, όπως δείξαμε και στο Σχήμα 3.1.

Για την κανονικοποιημένη μορφή της EW(p) ισχύει ότι

$$EW^*(p) = \frac{\theta}{\mu(\alpha-1)+\theta}(1-p)^{1-\alpha^{-1}}, p \in [0,1]$$

Pareto Type III

Αν εισάγουμε μια επιπλέον παράμετρο γ ,η οποία θα αποτελεί δείκτη ανισότητας έχουμε τον παρακάτω τύπο III με συνάρτηση επιβίωσης

$$\bar{F}(x) = [1 + (\frac{x-\mu}{\theta})^{1/\gamma}]^{-1}, x > \mu \ \text{ και } \theta, \gamma > 0.$$

Για την αντίστροφη της $F(x) = 1 - \bar{F}(x)$ έχουμε

$$F^{-1}(p; \mu, \theta, \gamma) = \theta[(1-p)^{-1} - 1]^{\gamma} + \mu.$$

Για $0 < \gamma < 1$ ισχύει

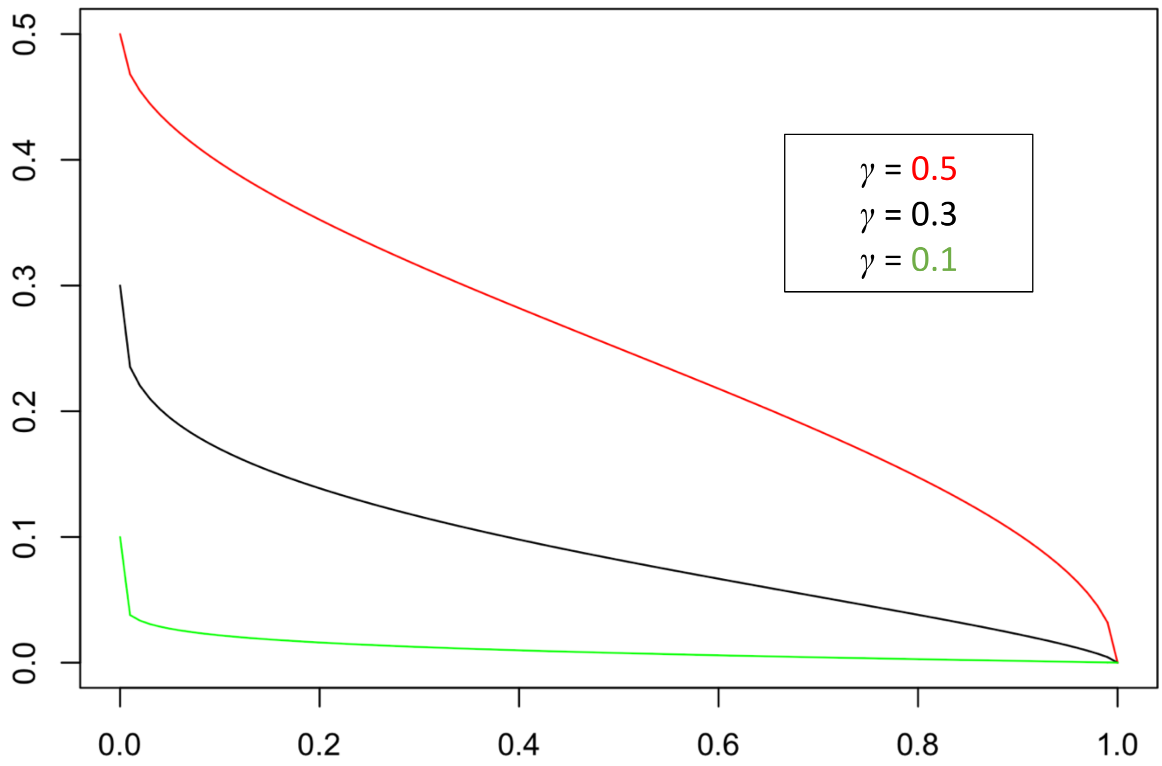
$$E(X) = \Gamma(1+\gamma)\Gamma(1-\gamma) + \mu,$$

όπου Γ η συνάρτηση Γάμμα.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω με τη (2.7) έχουμε τις παρακάτω συναρτήσεις μετασχηματισμού υπερβάλλοντος πλούτου

$$EW(p) = \theta\gamma B(1-p; 1-\gamma, \gamma), p \in [0,1],$$

ΣΧΗΜΑ 3.5. Συνάρτηση $EW(p)$ της Pareto III για $\gamma = (0.5, 0.3, 0.1)$



Όπως παρατηρούμε στο παραπάνω σχήμα όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της παραμέτρου γ τόσο μεγαλύτερη είναι η συνάρτηση $EW(p)$.

Αντίστοιχα η κανονικοποιημένη μορφή της EW(p) περιγράφεται από τη σχέση

$$EW^*(p) = \frac{\theta}{\theta B(1-\gamma,\gamma) + \mu/\gamma} B(1-p;\ 1-\gamma,\gamma)^1, p \in [0,1],$$

όπου $B(x;\alpha,\beta)$ συμβολίζουμε τη συνάρτηση κατανομής Βήτα με παραμέτρους α και β.

Pareto Type IV

Τέλος έχουμε τον πιο γενικό τύπο της κατανομής Pareto, ο οποίος εμπεριέχει και τη παράμετρο γ και την α. Εδώ έχουμε τη συνάρτηση επιβίωσης

$$\bar{F}(x) = [1 + (\frac{x-\mu}{\theta})^{1/\gamma}]^{-\alpha},\ x > \mu \ \text{και}\ \theta, \alpha, \gamma > 0.$$

Για την αντίστροφη της $F(x) = 1 - \bar{F}(x)$ έχουμε

$$F^{-1}(p;\mu,\theta,\gamma) = \theta[(1-p)^{-1/\alpha} - 1]^{\gamma} + \mu.$$

Για $0 < \gamma < 1$ και $\alpha > 1$ σχύει

$$E(X) = \theta\Gamma(1+\gamma)\Gamma(1-\gamma) \,/\, \Gamma(\alpha) + \mu.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω με τη σχέση (2.7) έχουμε τις παρακάτω συναρτήσεις μετασχηματισμού υπερβάλλοντος πλούτου

$$EW(p) = \theta\gamma B((1-p)^{1/\alpha}, \alpha-\gamma, \gamma),\ p \in [0,1]$$

και

$$EW^*(p) = \frac{\theta}{\theta B(\alpha-\gamma,\gamma)+\mu/\gamma} B\left((1-p)^{1/\alpha}; \alpha-\gamma, \gamma\right)^1, p \in [0,1].$$

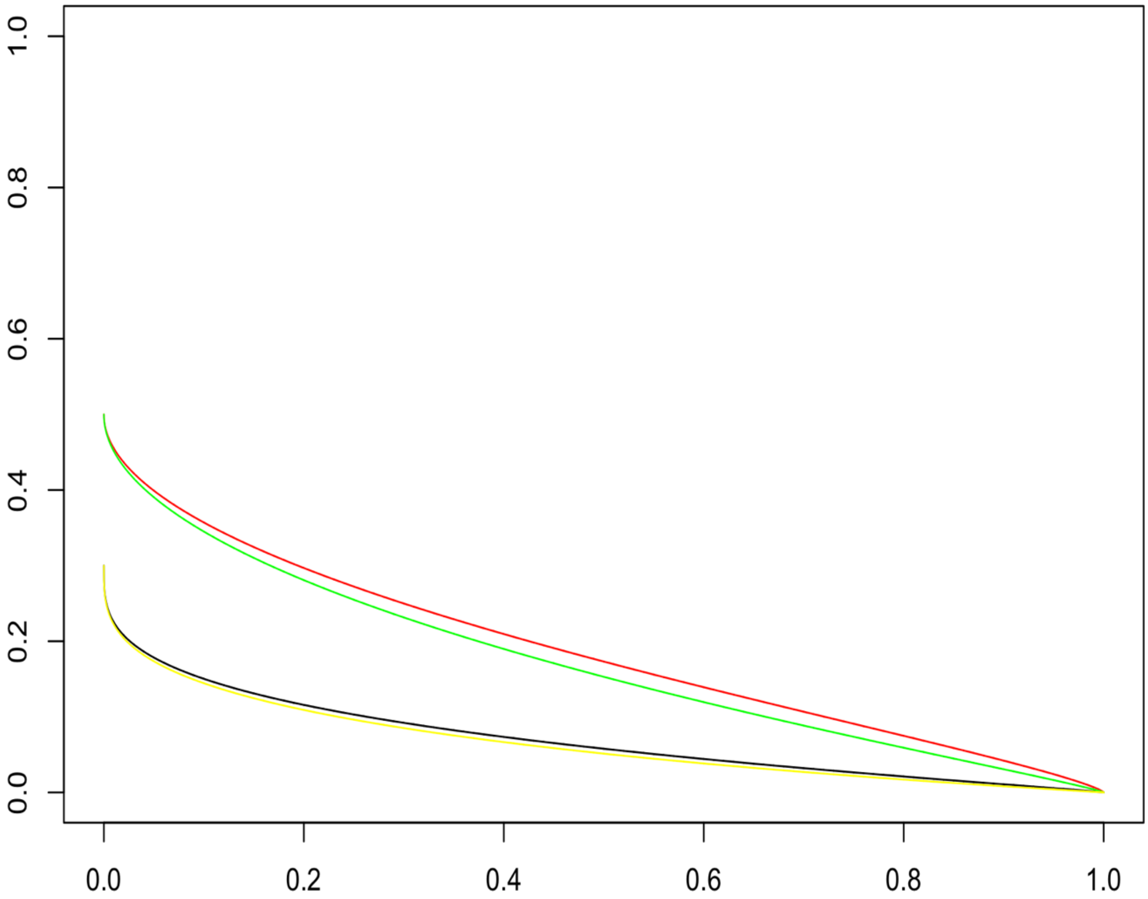
ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3. Συναρτήσεις $EW(p)$ της Pareto IV

	$\boldsymbol{EW(p)}$
$\boldsymbol{\theta = 1, \alpha = 2, \gamma = 0.5}$	$0.5B((1-p)^{\frac{1}{2}}, 1.5, 0.5)$
$\boldsymbol{\theta = 1, \alpha = 2, \gamma = 0.3}$	$0.3B((1-p)^{\frac{1}{2}}, 1.7, 0.3)$
$\boldsymbol{\theta = 1, \alpha = 3, \gamma = 0.5}$	$0.5B((1-p)^{\frac{1}{3}}, 2.5, 0.5)$
$\boldsymbol{\theta = 1, \alpha = 3, \gamma = 0.5}$	$0.5B((1-p)^{\frac{1}{3}}, 2.7, 0.3)$

Στον παραπάνω πίνακα παρουσιάζονται οι συναρτήσεις υπερβάλλοντος πλούτου για διάφορες τιμές των παραμέτρων α και γ της Pareto IV ενώ στο Σχήμα 3.5 δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τους.

Από το παρακάτω σχήμα είναι πασιφανές η αντίστροφη σχέση της συνάρτησης του υπερβάλλοντος πλούτου με την παράμετρο α καθώς και η ανάλογη σχέση με τη παράμετρο γ. Παρατηρούμε επίσης ότι η τιμή της παραμέτρου γ μας δίνει τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης του υπερβάλλοντος πλούτου.

ΣΧΗΜΑ 3.6. Γραφική αναπαράσταση των $EW(p)$ του Πίνακα 3.3



3.2.2 Κατανομή Lognormal

Μια από τις πιο πολύ χρησιμοποιημένες κατανομές για την περιγραφή δεδομένων εισοδήματος και πλούτου είναι λογαριθμοκανονική κατανομή. Η χρησιμότητα της κατανομής αυτής επεκτείνεται καθώς βρίσκει πεδίο εφαρμογής και στα χρηματοοικονομικά. Πιο συγκεκριμένα στο μοντέλο Black and Scholes, το οποίο χρησιμοποιείται για την εύρεση της δίκαιης τιμής (fair value) ενός δικαιώματος προαίρεσης (option), αφού οι λογαριθμικές μεταβολές των επιτοκίων, των τιμών και των δεικτών ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Η κατανομή log-normal αντιστοιχεί σε μια συνεχή τυχαία μεταβλητή της οποίας ο λογάριθμος κατανέμεται κανονικά. Δηλαδή, έστω μια θετική τυχαία μεταβλητή X η οποία ακολουθεί τη λογαριθμοκανονική κατανομή με μέση τιμή (μ) και τυπική απόκλιση (σ). Τότε τυχαία μεταβλητή $ln(X)$ θα ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους μ και σ. Για τη συνάρτηση κατανομής της λογαριθμοκανονικής κατανομής έχουμε

$$F(X) = \Phi[\frac{ln(x) - \mu}{\sigma}], x \in (0, \infty)$$

και η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας θα δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} e^{-\frac{[ln(x)-\mu]^2}{2\sigma^2}}, x \in (0, \infty).$$

Η χρήση της λογαριθμοκανονικής έχει αμφισβητηθεί από αρκετούς οικονομολόγους και μαθηματικούς τόσο για την εφαρμογή της στα εισοδηματικά δεδομένα (Kalecki 1945, Gastwirth & Smith 1972), αφού δεν μπορεί να περιγράψει με ακρίβεια εισοδήματα που κατανέμονται σε ποσοστό μεγαλύτερο από το 97-99% του πληθυσμού, όσο και στα χρηματοοικονομικά.

Σε γενικές γραμμές η κατανομή Lognormal, αν και χρησιμοποιείται αρκετές φορές, δεν θεωρείται ιδιαίτερα χρήσιμη στη μελέτη και στη περιγραφή των οικονομικών δεδομένων (πλούτος, εισόδημα) και ασφαλιστικών δεδομένων (ζημιές) καθώς υποεκτιμά τις μεγάλες τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή. Έτσι και εμείς δεν θα ασχοληθούμε περαιτέρω με τη συγκεκριμένη κατανομή καθώς όπως έχουμε αναφέρει η έννοια του υπερβάλλοντος πλούτου εστιάζει στην δεξιά ουρά μιας κατανομής.

3.2.3Κατανομή Βήτα

Η κατανομή Βήτα έχει υιοθετηθεί στο παρελθόν, αρκετές φορές, ως περιγραφικό μοντέλο για την κατανομή εισοδήματος. Πιο συγκεκριμένα, ο Thurow (1949) χρησιμοποίησε την κατανομή Βήτα για να περιγράψει το εισόδημα των νοικοκυριών στις ΗΠΑ.

Αναλυτικότερα, η κατανομή ορίζεται στο [0,1] και για παραμέτρους $\alpha, \beta > 0$ ισχύει ότι

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, x \in [0,1].$$

Η συνάρτηση $B(\alpha, \beta)$ ορίζεται ως

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Αντίστοιχα για τη συνάρτηση κατανομής της Βήτα έχουμε

$$F(x; \alpha, \beta) = I_x(\alpha, \beta) = \frac{B(x; \alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)}$$

Παρ' όλο που η συγκεκριμένη κατανομή έχει χρησιμοποιηθεί σε αρκετές μελέτες στην περιγραφή του πλούτου και του εισοδήματος, η χρήση της δεν ενδείκνυται για τον υπολογισμό του υπερβάλλοντος πλούτου καθώς οι δυνατότητες περιγραφής της περιορίζονται σε εισοδήματα χαμηλής κλίμακας.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι η χρήση της γενικευμένης κατανομής Βήτα, της οποίας η συνάρτηση πυκνότητας ορίζεται ως

$$f(x) = \frac{\alpha x^{\delta\alpha-1}}{\beta^{\delta\alpha}B(\delta,\gamma)[1+(x/\beta)^{\alpha}]^{\gamma+\delta}} \text{ με } x > 0,$$

αποτελεί όχι μόνο μια αρκετά καλή επιλογή για τη μοντελοποίηση των εισοδημάτων μιας κοινωνίας αλλά μέσω αυτής και των κατάλληλων παραμέτρων της μπορούμε να ορίσουμε ιδιαίτερα σημαντικές κατανομές που χρησιμοποιούνται στη περιγραφή τέτοιων δεδομένων, όπως η κατανομή Singh-Madala και η κατανομή Dagum, ενώ αρκετοί δείκτες μέτρησης της ανισότητας ορίζονται μέσω της γενικευμένης της μορφής.

α. Κατανομή Singh-Maddala

Ο MacDonald (1984) παρουσίασε μια γενικευμένη μορφή της κατανομής Βήτα με τη χρήση τεσσάρων παραμέτρων έτσι ώστε να είναι ευέλικτη και να χρησιμοποιείται ευρέως στη περιγραφή δεδομένων που αφορούν το εισόδημα και τον πλούτο. Η κατανομή αυτή αποτελεί τον πυρήνα της κατανομής Singh-Maddala, η οποία είναι μέλος τη οικογένειας κατανομών Βήτα.

Αρχικά ορίζουμε την συνάρτηση πυκνότητας, της γενικευμένης μορφής της Βήτα με τέσσερις θετικές παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ως

$$f(x) = \frac{\alpha x^{\delta\alpha-1}}{\beta^{\delta\alpha}B(\delta,\gamma)[1+(x/\beta)^{\alpha}]^{\gamma+\delta}}, \mu\varepsilon\ x > 0.$$

Έτσι για την συνάρτηση πυκνότητας της Singh-Madala με τρεις παραμέτρους θα έχουμε

$$f(x) = \alpha\gamma\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}[1+(x/\beta)^{\alpha}]^{-(\gamma+1)}, x > 0, \alpha, \beta, \gamma > 0.$$

Για τις συναρτήσεις κατανομής και δεξιάς ουράς της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X έχουμε

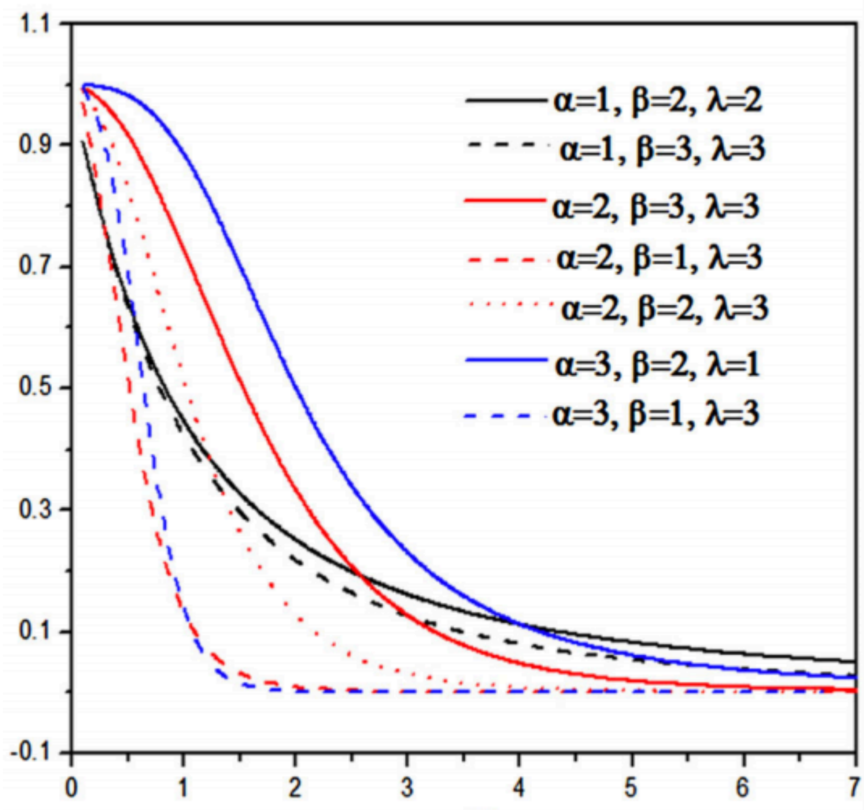
$$F(x) = 1 - [1+(x/\beta)^{\alpha}]^{-\gamma}, x > 0$$

και

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = [1+(x/\beta)^{\alpha}]^{-\gamma}, x > 0.$$

Στο Σχήμα 3.4 απεικονίζονται μερικές συναρτήσεις της δεξιάς ουράς της X για διάφορες τιμές των παραμέτρων της.

ΣΧΗΜΑ 3.7. Συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής Singh-Maddala (πηγή: Devendra Kumar (2017)).



Η συνάρτηση ποσοστημορίου $F^{-1}(p)$ βρίσκεται ίση με

$$F^{-1}(p) = x_p = \beta[(1-p)^{1/\delta} - 1]^{1/\alpha}, \gamma\iota\alpha\ 0 < p < 1.$$

Οι παράμετροι α και γ είναι παράμετροι σχήματος ενώ η β παράμετρος κλίμακας.

Συνδιάζοντας τα παραπάνω με την (2.6) παίρνουμε τη συνάρτηση του υπερβάλλοντος πλούτου

$$EW(F,p) = \int_{F^{-1}(p)}^{1} \bar{F}(x)dx = \int_{\beta[(1-p)^{1/\delta}-1]^{1/\alpha}}^{1} [1 + (x/\beta)^{\alpha}]^{-\gamma} dx.$$

Για παράδειγμα, έστω οι παράμετροι $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 1$ και $\delta = 2$. Η συνάρτηση του υπερβάλλοντος πλούτου θα γράφεται

$$EW(F,p) = \int_{2[(1-p)^{1/2}-1]^{1/1}}^{1} [1 + (x/2)^{1}]^{-1} dx = 2\int_{2\sqrt{1-p}-2}^{1} \frac{1}{2+x} dx =$$

$$= 2 * \int_{2\sqrt{1-p}-2}^{1} (ln(2+x))' dx = 2|ln(2+x)|_{2\sqrt{1-p}-2}^{1} = 2ln3 - 2ln(2\sqrt{1-p} - 2) =$$

$$= 2ln\frac{3}{2\sqrt{1-p}-2}, για\ 0 < p < 1.$$

β. Κατανομή Dagum

Η κατανομή Dagum έχει πάρει το όνομά της από τον Camilo Dagum τη δεκαετία του 70', ο οποίος την εισήγαγε. Η συγκεκριμένη κατανομή είναι μία από τις καταλληλότερες για την περιγραφή εισοδηματικών δεδομένων καθώς παρουσιάζει σημαντικά πλεονεκτήματα σε σύγκριση με άλλες αντίστοιχες κατανομές όπως η Pareto και η Lognormal. Για παράδειγμα, η ελαστικότητά της ως μοντέλο στις βαριές και η εσωτερική λειτουργία αποτέλεσαν συγκριτικό πλεονέκτημα έναντι των υπολοίπων αντίστοιχων κατανομών, ο οποίες δεν μπορούσαν να συνδυάσουν αυτά τα χαρακτηριστικά.

Στη στατιστική βιβλιογραφία, για τη μελέτη των οικονομικών δεδομένων, όπως το εισόδημα, συνήθως χρησιμοποιούνται δύο τύποι κατανομών Degum. Η Dagum τύπου I, η οποία ορίζεται μέσω τριών παραμέτρων, και η Dagum τύπου II, η οποία ορίζεται με τέσσερις παραμέτρους.

Η κατανομή Dagum αποτελεί και αυτή μια ειδική περίπτωση της γενικευμένης κατανομής, αν ορίσουμε την παράμετρο $\delta = 1$, ενώ συνδέεται επίσης και με την κατανομή Singh-Maddala.

Έστω μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X, η οποία ακολουθεί την κατανομή Dagum με παραμέτρους σχήματος $\alpha, \gamma > 0$ και παράμετρο κλίμακας $\beta > 0$. Τότε για τη μεταβλητή αυτή η συνάρτηση πυκνότητας θα έχει τη μορφή

$$f(x) = \frac{\alpha\gamma x^{\alpha\gamma-1}}{\beta^{\alpha\gamma}[1+(x/\beta)^{\alpha}]^{\gamma+1}}, x > 0.$$

Αντίστοιχα, για τη συνάρτηση κατανομής και τη συνάρτηση επιβίωσης θα έχουμε

$$F(x) = [1+(x/\beta)^{-\alpha}]^{-\gamma}, x > 0$$

και

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = 1 - [1+(x/\beta)^{-\alpha}]^{-\gamma}, x > 0.$$

Επιπλέον, η συνάρτηση ποσοστημορίου δίνεται από τον τύπο

$$F^{-1}(p) = x_p = \beta[(p)^{-1/\gamma} - 1]^{-1/\alpha}, για\ 0 < p < 1$$

ενώ για τη μέση τιμή της X έχουμε

$$E(X) = \frac{\beta\Gamma(p+1/\alpha)\Gamma(1-1/\alpha)}{\Gamma(p)}.$$

Από τα παραπάνω γίνεται εύκολα κατανοητό ότι αν η μεταβλητή X ακολουθεί τη κατανομή Dagum με παραμέτρους α, β, γ τότε η $1/X$ θα ακολουθεί τη κατανομή Singh-Maddala με παραμέτρους $\alpha, 1/\beta, \gamma$ αντίστοιχα. Δηλαδή ισχύει ότι

$$X \sim D(\alpha, \beta, \gamma) \Leftrightarrow \frac{1}{X} \sim SM(\alpha, 1/\beta, \gamma).$$

Παρακάτω παρουσιάζονται δύο μέτρα ανισότητας όταν τα εισοδηματικά δεδομένα ακολουθούν την κατανομή Dagum. Έτσι έχουμε την καμπύλη Lorenz, για την οποία μέσω της συνάρτησης ποσοστημορίου ισχύει

$$L(p) = I_{1/\gamma}(p + 1/\alpha, 1 - 1/\alpha), 0 \leq p \leq 1,$$

και το δείκτη Gini

$$G(p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(2p + 1/\alpha)}{\Gamma(2p)\Gamma(p + 1/\alpha)} - 1.$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τα παραπάνω και σε συνδυασμό με την (2.6) παίρνουμε τη συνάρτηση του υπερβάλλοντος πλούτου

$$EW(p) = E(X)\big(1 - L(p)\big) - (1 - p)F^{-1}(p) =$$

$$= \frac{\beta\Gamma(p + 1/\alpha)\Gamma(1 - 1/\alpha)}{\Gamma(p)}[1 - I_{1/\gamma}(p + 1/\alpha, 1 - 1/\alpha)] - (1 - p)\beta[(p)^{-1/\gamma} - 1]^{-1/\alpha}.$$

Η κατανομή Dagum έχει χρησιμοποιηθεί σε αρκετές μελέτες σχετικά με την κατανομή εισοδήματος και πλούτου σε διάφορους πληθυσμούς. Στις περισσότερες περιπτώσεις, η κατανομή Dagum τύπου Ι με τις τρείς παραμέτρους, έχει δείξει ότι υπερτερεί έναντι άλλων κατανομών στη περιγραφή του πλούτου και του εισοδήματος, εκτός από την γενικευμένη κατανομή τύπου ΙΙ. Χαρακτηριστικές μελέτες πάνω σε εισοδηματικά δεδομένα είναι των McDonald and Xu (1995), Bordley,McDonald and Mantrala (1996) και Azzalini, Dal Capello and Kotz (2003).

3.2.4 Τροποποιημένη κατανομή Gauss

Μια ακόμα κατανομή, η οποία χρησιμοποιήθηκε από τους Guo and Gao (2012) για την περιγραφή των εισοδημάτων στην Κίνα, είναι η τροποποιημένη κατανομή Gauss (Modified Gaussian Distribution-MG).

Η συγκεκριμένη κατανομή, με παραμέτρους μ και σ, έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x; \mu, \sigma) = \begin{cases} K(x - \mu)e^{-1/2(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}, & x \geq \mu \\ 0, & x < \mu \end{cases}$$

όπου $\mu, \sigma > 0$ και $K = 1/\sigma^2$.

Για την συνάρτηση κατανομής της X ισχύει

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-1/2(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}, & x \geq \mu \\ 0, & x < \mu \end{cases}$$

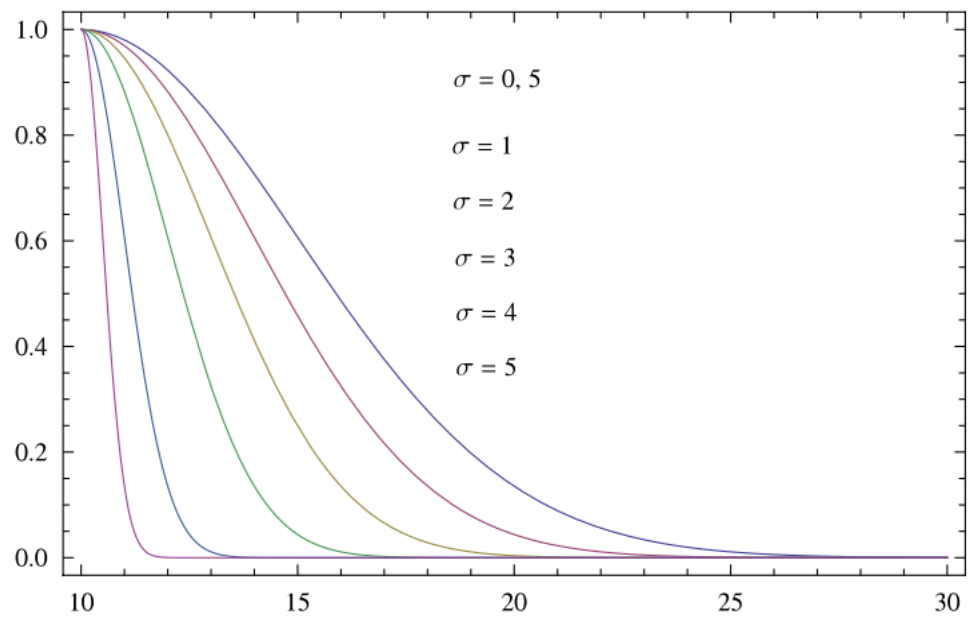
ενώ για τη συνάρτηση δεξιάς ουράς ισχύει

$$\bar{F}(x) = P(X > x) = \begin{cases} e^{-1/2(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}, & x \geq \mu \\ 1, & x < \mu \end{cases}$$

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.5, για δεδομένη μέση τιμή ($\mu = 10$) όσο μεγαλύτερη είναι η τυπική απόκλιση της X τόσο βαρύτερη είναι η δεξιά ουρά άρα τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η τιμή του υπερβάλλοντος πλούτου.

ΣΧΗΜΑ 3.8.. Συναρτήσεις επιβίωσης της X για $\mu = 10$

(πηγή: Sarabia,Prieto,Trueba and Jorda (2013)).



Για την συνάρτηση ποσοστημορίου της τροποποιημένης X_p έχουμε

$$X_p = inf\{x: F_X(x) \geq p\}$$

με συνάρτηση

$$F^{-1}(p) = \mu + \sigma[-2log(1-p)]^{1/2}.$$

Επίσης η μέση τιμή είναι ίση με

$$E(X) = \mu + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma.$$

Η δυνατότητα περιγραφής εισοδηματικών δεδομένων μέσω της τροποποιημένης κατανομής Gauss μας επιτρέπει τη χρήση της στον προσδιορισμό της καμπύλης Lorenz. Έτσι αν χρησιμοποιήσουμε την (2.4) και τους παραπάνω τύπους, έχουμε

$$L(p) = \frac{\mu p + \sigma\sqrt{2}\gamma(-log(1-p), 3/2)}{\mu + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma}, \text{για } 0 \leq p \leq 1.$$

Η συνάρτηση $\gamma(x, \alpha)$ είναι η μη πλήρης συνάρτηση Γάμμα και δίνεται από τον τύπο

$$\gamma(x, \alpha) = \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Μέσω της (2.6) μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση του υπερβάλλοντος πλούτου.

3.3 Κατανομές κατάλληλες για την περιγραφή ζημιών

Στον αναλογισμό είναι ιδιαίτερα σημαντικό να διαθέτουμε κατάλληλες κατανομές για την περιγραφή των ζημιών, καθώς έτσι οι ασφαλιστικές και οι αντασφαλιστικές εταιρίες μπορούν να προβλέψουν το εκάστοτε μελλοντικό κόστος. Γνωρίζοντας το κόστος, θα μπορούν να καθορίσουν τα ασφάλιστρα των συμβολαίων καθώς και τις σχετικές απαλλαγές (αφαιρετέο ποσό) ώστε να διασφαλίζεται η μακροχρόνια βιωσιμότητά τους.

Οι Benktander and Segerdahl (1960) περιέγραψαν μία έννοια η οποία συσχετίζεται άμεσα με αυτή του υπερβάλλοντος πλούτου. Η έννοια αυτή παρουσιάζεται στην αναλογιστική βιβλιογραφία ως μέση υπερβάλλουσα αποζημίωση και ορίζεται για μια τυχαία μεταβλητή X ως η δεσμευμένη μέση τιμή

$$e(x) = E(X - x | X > x) = \frac{\int_x^\infty (t-x) dF(t)}{\int_x^\infty dF(t)} = \frac{\int_x^\infty \bar{F}(t) dt}{\bar{F}(x)}, x > 0. \quad (3.1)$$

Έστω τώρα ότι ισχύει $F(x) = p$. Τότε για την αντίστροφη της F θα έχουμε

$$F^{-1}(p) = x.$$

Έτσι για τη μέση υπερβάλλουσα αποζημίωση θα έχουμε

$$e(x) = E(X - F^{-1}(p) | X > F^{-1}(p)) = \frac{\int_{F^{-1}(p)}^\infty \bar{F}(t) dt}{\bar{F}(F^{-1}(p))} = \frac{EW(p)}{\bar{F}(F^{-1}(p))}, 0 \leq p \leq 1. \quad (3.2)$$

Στην (3.2) βλέπουμε την άμεση σχέση της έννοιας που περιέγραψαν οι Benktander and Segerdahl (1960) με αυτή των Shaked and Shanthikumar (1998).

Πρακτικά η (3.2) θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στην αντασφάλιση, κατά την οποία μεγάλες αποζημιώσεις ενεργοποιούνται πάνω από κάποιο όριο ζημιάς. Έτσι μελετάμε την ζημιά αποκλειστικά πάνω από το όριο αυτό για να προσδιορίσουμε και το σχετικό κόστος. Σε αυτό το σημείο, για να προσδιορίσουμε την υπερβάλλουσα ζημιά, χρειαζόμαστε την συνάρτηση του υπερβάλλοντος πλούτου.

Για την σωστή διατύπωση της μέσης υπερβάλλουσας ζημιάς είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε την κατανομή που ακολουθούν οι παρατηρήσεις ώστε να προσδιορίζουμε την συνάρτηση δεξιάς ουράς. Τα περισσότερα δεδομένα ζημιών στις ασφαλιστικές τείνουν να παρουσιάζουν μια θετική ασυμμετρία δημιουργώντας βαριές δεξιές ουρές. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι οι περισσότερες ζημιές είναι μικρότερες από τη διάμεσο και τη μέση τιμή, η οποία επηρεάζεται έντονα από τις ακραίες παρατηρήσεις που εμφανίζονται με σχετικά μικρή συχνότητα.

Πολλές από τις κατανομές που αναλύσαμε στη προηγούμενη υπό-ενότητα χρησιμοποιούνται συχνά τόσο στην αναλογιστική επιστήμη όσο και στη διαχείριση κινδύνου για τη περιγραφή τόσο των ασφαλιστικών ζημιών όσο και των χρηματοοικονομικών. Για παράδειγμα:

- Η κατανομή Pareto έχοντας το κατάλληλο πλήθος παραμέτρων, αρκετό για μια επαρκή περιγραφή αλλά ταυτόχρονα εύκολο στη χρήση, χρησιμοποιείται πολλές φορές με αποτελεσματικό τρόπο στον προσδιορισμό του κόστους στα συμβόλαια πυρός.
- Η λογαριθμοκανονική κατανομή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην περιγραφή ζημιών οι οποίες σχετίζονται με τις ασφαλίσεις υγείας, οι οποίες περιορίζονται σε χαμηλά επίπεδα λόγω των απαλλαγών και των ανωτάτων ορίων που οριοθετούνται από την εκάστοτε ασφαλιστική.
- Η κατανομή Dagum, όπως και η Pareto, έχει χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν για την περιγραφή ζημιών από περιστατικά φωτιάς από τον Cummins (1990).
- Η κατανομή Singh-Maddala παρουσιάζει ακόμα καλύτερη προσαρμογή σε δεδομένα ζημιών από ότι η κατανομή Dagum. Παρ’ όλα αυτά ο μεγάλος αριθμός παραμέτρων της δεν την καθιστά πάντα την καταλληλότερη. Σύμφωνα με δημοσιεύσεις των Hogg and Klugman (1984), περιγραφικά μοντέλα της Weibull και της log-normal τείνουν να παρουσιάζουν καλύτερη προσαρμογή σε ζημιές που προέρχονται κυρίως από ακραία καιρικά φαινόμενα.

Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις επιβίωσης των παραπάνω κατανομών μπορούμε να προσδιορίσουμε τη μέση υπερβάλλουσα ζημιά.

Γίνεται λοιπόν κατανοητό ότι για τη περιγραφή πολλών δεδομένων στις ασφαλίσεις ζημιών, λόγω του ότι μπορεί να παρουσιαστούν ακραίες παρατηρήσεις, χρειάζεται να μελετήσουμε κατανομές οι οποίες θα μπορούν να δίνουν ακριβείς εκτιμήσεις για μελλοντικές ζημίες που υπερβαίνουν κατά πολύ κάποια όρια. Οι κατανομές αυτές για τη μη υπό-εκτίμηση των ζημιών αυτών θα πρέπει να παρουσιάζουν βαριά δεξιά ουρά.

4

Ο υπερβάλλων πλούτος ως μέτρο κινδύνου

4.1 Η έννοια του κινδύνου

Στις μέρες μας, η οικονομική αποτελεσματικότητα και αποδοτικότητα των χρηματοπιστωτικών οντοτήτων προϋποθέτει τη συνεχή επίτευξη στόχων μέσα από τη χάραξη κατάλληλης στρατηγικής. Μέρος της στρατηγικής αυτής αποτελεί και η αποτελεσματική διαχείριση της αβεβαιότητας, αφού η αβεβαιότητα είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την οικονομική δραστηριότητα και μπορεί να συμβάλει στη δημιουργία σημαντικών αποκλίσεων από τους οριοθετημένους στόχους.

Η έννοια του κινδύνου συνδέεται άμεσα με αυτή της αβεβαιότητας. Πρόκειται, ουσιαστικά, για την πιθανότητα τα αποτελέσματα μιας οικονομικής οντότητας να διαφέρουν από τα προσδοκόμενα και από αυτά που έχουν ορίσει το διοικητικό συμβούλιο, οι μέτοχοι και άλλες ομάδες ενδιαφερομένων επιφέροντάς τους απώλειες από τα κεφάλαιά τους.

Μετά τη χρηματοοικονομική κρίση του 2008, η διαχείριση κινδύνου έχει αναδειχθεί ως την πιο σημαντική διαδικασία που πρέπει να αναπτύξει, κατά κύριο λόγο, ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα για την εύρυθμη λειτουργία του. Η τάση αυτή φαίνεται να έχει πυροδοτηθεί από μία σειρά παγκόσμιων οικονομικών εξελίξεων, όπως οι αυξημένες εποπτικές απαιτήσεις και η μεγαλύτερη περιπλοκότητα που παρουσιάζουν οι χρηματοπιστωτικές αγορές. Κατά τη διαδικασία διαχείρισης των κινδύνων, ένας πιστωτικός οργανισμός προσπαθεί να αναγνωρίσει τους κινδύνους έτσι ώστε να μπορεί να τους μετρήσει, να τους ελαχιστοποιήσει και γενικότερα να τους ελέγχει με απώτερο σκοπό τη μακροχρόνια επιβίωσή του. Για παράδειγμα, τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα πρέπει να μετρούν τους κινδύνους ώστε εξασφαλίζουν τα απαραίτητα κεφάλαια για τη διατήρηση της φερεγγυότητας τους έναντι των εποπτικών αρχών.

Οι κύριοι κίνδυνοι με τους οποίους έρχεται αντιμέτωπη μια τράπεζα, μια ασφαλιστική εταιρία ή γενικότερα μια οντότητα είναι :

- Ο επιτοκιακός κίνδυνος, δηλαδή η πιθανότητα να αλλάξει η αξία μιας επένδυσης εξαιτίας της μεταβολής των επιτοκίων.
- Ο πιστωτικός κίνδυνος, ο οποίος αναφέρεται στη πιθανότητα ο δανειολήπτης να αθετήσει την υποχρέωσή του προς το δανειοδότη.

- Ο κίνδυνος ρευστότητας, δηλαδή η αδυναμία ενός επενδυτή να αντλήσει τα απαραίτητα κεφάλαια ώστε να χρηματοδοτήσει τις υποχρεώσεις του ή να προχωρήσει στη πραγματοποίηση κάποιας επένδυσης
- Ο συναλλαγματικός κίνδυνος, ο οποίος παρουσιάζεται όταν κάποια επένδυση έχει πραγματοποιηθεί με ξένο συνάλλαγμα. Έτσι υπάρχει πιθανότητα, εξαιτίας της μεταβολής των ισοτιμιών, να μεταβληθεί η αξία της επένδυσης.
- Ο κίνδυνος αγοράς, ο οποίος εκφράζει τη πιθανότητα να μεταβληθεί η αξία ενός χαρτοφυλακίου εξαιτίας των μεταβολών των συνθηκών που επικρατούν στην αγορά.
- Ο λειτουργικός κίνδυνος, ο οποίος αναφέρεται στην πιθανότητα μια οντότητα να υποστεί ζημιά λόγω της ανεπάρκειας των διοικητικών και λειτουργικών συστημάτων της.

Οι παραπάνω κίνδυνοι δεν είναι οι μόνοι με τους οποίους έρχεται αντιμέτωπη μια χρηματοπιστωτική οντότητα. Μερικοί ακόμα, οι οποίοι μπορεί να αποτελούν και υποκατηγορίες των παραπάνω, είναι ο επιχειρηματικός, ο πολιτικός, ο νομικός, ο κίνδυνος αντισυμβαλλομένου και ο κίνδυνος πληθωρισμού.

Για να αντιμετωπιστούν οι κίνδυνοι, το διοικητικό συμβούλιο της εκάστοτε χρηματοοικονομικής οντότητας θα πρέπει να αναπτύξει κατάλληλες πολιτικές διαχείρισης, να διανέμει τα διαθέσιμα κεφάλαια ανάλογα με το μέγεθος των κινδύνων και τέλος να εξασφαλίσει την ικανότητα προσαρμογής της οντότητας στις συνέχεις εξωτερικές μεταβολές.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι το μέγεθος και η συχνότητα των κινδύνων καθορίζει και την αντίστοιχη απόδοση που προσδοκά ένας επενδυτής. Όσο περισσότεροι και μεγαλύτεροι είναι οι παραπάνω κίνδυνοι τόσο μεγαλύτερη είναι και η προσδοκώμενη απόδοση, η οποία αποτελεί κίνητρο για την ανάληψή τους.

Στο κεφάλαιο αυτό αφού αναφέραμε και περιγράψαμε την έννοια του κινδύνου, θα επικεντρωθούμε στον κίνδυνο αγοράς, τα μέτρα που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση του ενώ θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια του υπερβάλλοντος πλούτου για να ορίσουμε ένα νέο μέτρο που χρησιμοποιείται στη διαδικασία διαχείρισης του κινδύνου, το οποίο είναι γνωστό ως expected shortfall.

Τα τελευταία χρόνια η πολυπλοκότητα των χρηματοοικονομικών προϊόντων αλλά και η σύνθεση του ενεργητικού-παθητικού των πιστωτικών ιδρυμάτων, η οποία αποτελείται από άμεσα ρευστοποιήσιμα περιουσιακά στοιχεία και βραχυχρόνιες υποχρεώσεις, έχουν συνθέσει μια νέα πραγματικότητα. Η αβεβαιότητα είναι ακόμα μεγαλύτερη σε σχέση με τα προηγούμενα χρόνια όσο αφορά τις αποδόσεις αφού η αξία των περιουσιακών στοιχείων, τα οποία τροφοδοτούν μακροχρόνιες και βραχυχρόνιες υποχρεώσεις, μεταβάλλεται συνεχώς οδηγώντας σε δυνητικές τεραστίου μεγέθους απώλειες.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο κίνδυνος αγοράς (market risk) αναφέρεται στις ανεπιθύμητες μεταβολές της αξίας ενός χαρτοφυλακίου. Οι μεταβολές αυτές προκύπτουν από αλλαγές στα επιτόκια, στις συναλλαγματικές ισοτιμίες, στις αγοραίες τιμές των μετοχών και γενικότερα αλλαγές σε ένα ευρύ φάσμα μικροοικονομικών και μακροοικονομικών παραμέτρων. Έτσι θα μπορούσαμε με απλά λόγια να πούμε ότι ο κίνδυνος μετοχών, επιτοκίου και συναλλάγματος αποτελούν ένα υποσύνολο του κινδύνου αγοράς.

Είναι πασιφανές ότι η αναποτελεσματική διαχείριση του κινδύνου αγοράς μπορεί να οδηγήσει μια τράπεζα η μία ασφαλιστική σε πτώχευση καθώς η έκθεση στον κίνδυνο μπορεί να είναι πολύ μεγάλη. Αν ανατρέξουμε στο παρελθόν μπορούμε να εντοπίσουμε αρκετά παραδείγματα αναποτελεσματικής διαχείρισης κινδύνου που οδήγησαν σε καταστροφικά αποτελέσματα. Ένα παράδειγμα είναι αυτό της βρετανικής τράπεζας Barings (1995), η οποία λόγω της έκθεσής της σε συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (futures) πραγματοποίησε μεγάλες απώλειες και τελικά οδηγήθηκε σε πτώχευση.

4.2 Μέτρα Κινδύνου

Για να μπορέσουν οι οντότητες να διαχειριστούν τους κινδύνους πρέπει πρώτα να τους ποσοτικοποιήσουν. Η ανάγκη αυτή οδήγησε στη δημιουργία των μέτρων κινδύνου.

Γενικά ένα μέτρο κινδύνου χρησιμοποιείται για να μετρήσει τον κίνδυνο και εν συνεχεία να καθορίσει τα αποθεματικά ή τα περιουσιακά στοιχεία τα οποία θα πρέπει να έχει στην κατοχή του ένα πιστωτικό ίδρυμα για να μπορέσει να τον αντιμετωπίσει. Το κάθε μέτρο κινδύνου χρησιμοποιείται για να αναλύσουμε μια συγκεκριμένη πτυχή του κινδύνου. Αυτό οδηγεί στη διάκριση των μέτρων σε κατηγορίες, οι οποίες αναλύονται παρακάτω.

Τα μέτρα κινδύνου διακρίνονται σε έξι κατηγορίες, οι οποίες είναι οι εξής :

1. Τα στατιστικά μέτρα, τα οποία μας δίνουν σημαντικές πληροφορίες μέσω της κατανομής που ακολουθούν τα δεδομένα. Τέτοια μέτρα είναι η τυπική απόκλιση, η μεταβλητότητα, το Value at Risk κ.α.
2. Οι συντελεστές ευαισθησίας, όπως είναι για παράδειγμα το duration και το convexity. Ο συγκεκριμένος τύπος μέτρων εκφράζει την μεταβολή στη τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου που προκαλείται από τη μεταβολή, κατά μία μονάδα, στο επίπεδο των επιτοκίων.

3. Τα σεναριακά μέτρα κινδύνου, όπως για παράδειγμα το stress testing, αποτελούν μια τεχνική που αναλύει κατά πόσο μπορεί να επηρεαστεί ένα χαρτοφυλάκιο από την εμφάνιση διάφορων οικονομικών σεναρίων. Κατά το stress testing χρησιμοποιούνται είτε ιστορικά δεδομένα είτε γίνονται υποθέσεις για την εξέλιξη της οικονομίας.
4. Τα μέτρα απόδοσης προσαρμοσμένα στον κίνδυνο ορίζουν τη σχέση μεταξύ απόδοσης και κινδύνου που παρουσιάζει ένα χαρτοφυλάκιο. Τέτοια μέτρα είναι, για παράδειγμα, το CAPM και το sharpe ratio.
5. Τα μέτρα κατερχόμενου κινδύνου αποτελούν άλλη μια κατηγορία μέτρων που προσδιορίζουν τον κίνδυνο σε μια καθοδική τάση της αγοράς.
6. Τα μέτρα υπερβάλλοντος κίνδυνου, όπως για παράδειγμα το tracking error.

4.2.1 Ο μαθηματικός ορισμός ενός μέτρου κινδύνου και οι ιδιότητές του

Έστω ότι έχουμε ένα κίνδυνο, ο οποίος συμβολίζεται με X και αποτελεί μια τυχαία μη-αρνητική μεταβλητή. Τότε ένα μέτρο κινδύνου θα ορίζεται από μία συνάρτηση $\rho[X]$, η οποία θα αντιστοιχεί ένα μη-αρνητικό πραγματικό αριθμό σε ένα κίνδυνο. Η συνάρτηση αυτή εικανοποιεί τα εξής αξιώματα (ιδιότητες) :

1. Μονοτονία (Monotonicity) : Έστω δύο κίνδυνοι οι οποίοι περιγράφονται από τις μεταβλητές X_1 και X_2 με $X_1 \leq X_2$, δηλαδή η τυχαία μεταβλητή X_2 που περιγράφει έναν κίνδυνο λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές από την τυχαία μεταβητή X_1 η οποία περιγράφει κάποιον άλλο. Βάσει των παραπάνω θα ισχύει
$$\rho[X_1] \leq \rho[X_2].$$
Δηλαδή όσο μεγαλύτερος είναι ένας κίνδυνος τόσο μεγαλύτερη θα είναι η επικινδυνότητα, που εκφράζει το αντίστοιχο μέτρο κινδύνου.
2. Μη υπερβολικό περιθώριο ασφάλειας (Non-excessive loading): Για κάθε μέτρο κινδύνου πρέπει να ισχύει ότι
$$\rho[\chi] \leq max[X] = F_X^{-1}(1), \text{ για κάθε τυχαίο μη αρνητικό } \chi.$$
Αυτό σημαίνει ότι η τιμή ενός μέτρου κινδύνου είναι μικρότερη από τη μέγιστη τιμή του κινδύνου.
3. Μη αρνητικό περιθώριο ασφαλείας (Non-negative loading) : Η τιμή ενός μέτρου κινδύνου θα πρέπει μακροχρόνια να υπερβαίνει τη μέση ζημιά. Έτσι για κάθε αρνητικό μη τυχαίο κίνδυνο X θα ισχύει

$$\rho[X] \geq E[X].$$

4. Προσθετικότητα ως προς σταθερά (translativity) : Για αυτό το αξίωμα ισχύει

$$\rho[\chi + \alpha] = \rho[\chi] + \alpha, \text{ για κάθε } \chi \text{ στο πεδίο ορισμού της τμ } X$$

5. Υποπροσθετικότητα (subaddictivity) : Η ιδιότητα αυτή αναφέρεται στη διαφοροποίηση του κινδύνου. Όταν για παράδειγμα συγχωνεύσουμε δύο χαρτοφυλάκια, ο κίνδυνος μπορεί να μειωθεί λόγω της συσχέτισης των χαρτοφυλακίων. Έτσι έχουμε

$$\rho[X + Y] \leq \rho[X] + \rho[Y], \text{ για κάθε τ.μ } X, Y.$$

   Η ιδιότητα αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τις κεφαλαιακές απαιτήσεις στα πιστωτικά ιδρύματα. Αν το μέτρο κινδύνου που χρησιμοποιούν ικανοποιεί την ιδιότητα αυτή τότε οι εποπτικές αρχές μπορούν να είναι βέβαιες για τη φερεγγυότητα του ιδρύματος, αν αυτό διατηρεί κεφαλαιακές απαιτήσεις οι οποίες καλύπτουν τον κάθε κίνδυνο ξεχωριστά.

6. Συμμοτονική προσθετικότητα (Comonotonic addictivity) : Όταν δύο κίνδυνοι έχουν τη μεγαλύτερη δυνατή θετική εξάρτηση τότε ισχύει

$$\rho[X + Y] = \rho[X] + \rho[Y], \text{ για κάθε τ.μ } X, Y.$$

7. Επαναληψιμότητα (Iterativity) : Η ιδιότητα της επαναληψιμότητας για δύο μεταβλητές X, Y ορίζεται ως

$$\rho[X] = \rho[\rho[X|Y]], \text{ για κάθε } X, Y.$$

8. Θετική ομοιογένεια (positive homogeneity) : Για ένα κίνδυνο X και μία σταθερά α ισχύει ότι

$$\rho[\alpha X] = \alpha\rho[X].$$

9. Αντικειμενικότητα (objectivity) : Η $\rho[X]$ εξαρτάται από το X μόνο μέσω της κατανομής του X , η οποία εμπεριέχει όλες τις απαραίτητες πληροφορίες για το προσδιορισμό της επικινδυνότητας του κινδύνου X . Ισχύει δηλαδή

$$X =_d Y \Longrightarrow \rho[X] = \rho[Y].$$

10. Συνέχεια στη σύγκλιση κατά κατανομή : Για μια ακολουθία κινδύνων, $\{X_n, n = 1,2,\dots\}$ η οποία συγκλίνει κατά κατανομή στην $X(\, X_n \to_d X, n \to \infty)$, δηλαδή αν ισχύει

$$lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

    συνεπάγεται ότι

$$lim_{n\to\infty} \rho[X_n] = \rho[X].$$

11. Σταθερότητα (Constancy) : Αν έχουμε μια σταθερά α τότε η τιμή του μέτρου του κινδύνου θα υπολογίζεται ως

$$\rho[\alpha] = \alpha, \text{ για κάθε σταθερά } \alpha.$$

Αν όμως ισχύει ότι $\alpha = 0$ τότε έχουμε

$$\rho[0] = 0.$$

το οποίο είναι λογικό αφού όταν ο κίνδυνος είναι μηδενικός τότε και το μέτρο του θα παίρνει την τιμή 0.

Όταν ένα μέτρο ικανοποιεί τις ιδιότητες της μονοτονίας, της υπό-προσθετικότητας, της θετικής ομοιογένειας και της προσθετικότητας ως προς τη σταθερά, ονομάζεται συνεκτικό μέτρο κινδύνου σύμφωνα με τους Artzner et al. (1999).

4.3 Η αξία σε κίνδυνο

Η αναγκαιότητα για τον προσδιορισμό του κινδύνου αγοράς αλλά και των κεφαλαιακών διαθεσίμων οδήγησε στην κατασκευή ενός μέτρου που θα μπορούσε να προσδιορίσει τη μέγιστη δυνητική ζημιά ενός χαρτοφυλακίου.

Η αξία σε κίνδυνο (Value at Risk,VaR) αποτελεί ένα απλό στατιστικό μέτρο των πιθανών απωλειών που μπορεί να υποστεί ένα χαρτοφυλάκιο περιουσιακών στοιχείων ενός πιστωτικού οργανισμού και η εκτίμηση του γίνεται με βάση ένα διάστημα εμπιστοσύνης το οποίο σχετίζεται με την πιθανότητα οι απώλειες του χαρτοφυλακίου να μην υπερβούν το εκτιμώμενο VaR.

Η αξία σε κίνδυνο καθίσταται απαραίτητο “εργαλείο” για την ανάλυση αλλά και την αντιστάθμιση του κινδύνου της αγοράς, καθώς θεωρείται ένα συνεπές μέτρο του κινδύνου, το οποίο δίνει τη δυνατότητα σύγκρισης μεταξύ δύο διαφορετικών χαρτοφυλακίων. Επίσης κατά τον υπολογισμό του λαμβάνει υπόψιν κάθε πιθανή διαφοροποίηση και αντιστάθμιση στον κίνδυνο, η οποία μπορεί να έχει γίνει στο χαρτοφυλάκιο που βρίσκεται υπό εξέταση.

Για τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο πρέπει πρώτα να ορίσουμε δύο βασικές παραμέτρους. Αυτές είναι το επίπεδο εμπιστοσύνης και η περίοδος πρόβλεψης. Το επίπεδο εμπιστοσύνης καθορίζει την πιθανότητα η ζημία ενός χαρτοφυλακίου να μην υπερβεί ένα συγκεκριμένο επίπεδο VaR. Για παράδειγμα αν το διάστημα εμπιστοσύνης οριστεί στο 99%, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει 1% πιθανότητα μια ζημιά, που θα υποστεί το χαρτοφυλάκιο, να ξεπεράσει το εκτιμώμενο VaR. Όσο αφορά την περίοδο πρόβλεψης, συνήθως χρησιμοποιείται η μία ημέρα. Έτσι εκτιμάται η μέγιστη δυνητική ζημιά που μπορεί να υποστεί το χαρτοφυλάκιο κατά τη διάρκεια της επόμενης ημέρας.

4.3.1 Ο ορισμός του Value at Risk

Για ένα κίνδυνο X και επίπεδο σημαντικότητας $\alpha \in [0,1]$, το VaR συμβολίζεται με $VaR[X, \alpha]$ και ορίζεται από τη σχέση

$$VaR[X, \alpha] = F^{-1}(\alpha),$$

όπου $F^{-1}(\alpha)$ η αντίστροφη συνάρτηση κατανομής του X, δηλαδή

$$F^{-1}(\alpha) = inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq \alpha\} = sup\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) < \alpha\}.$$

4.3.2 Μέθοδοι υπολογισμού της αξίας σε κίνδυνο

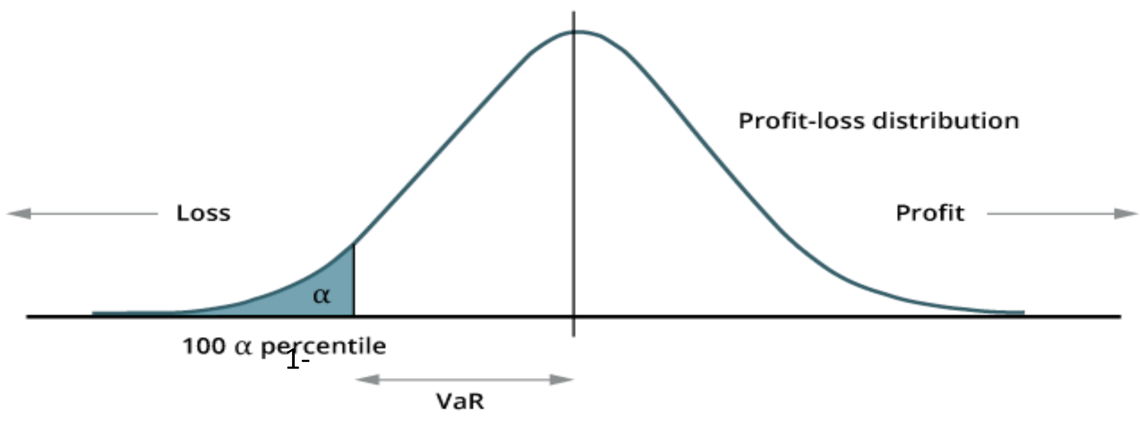
Ο υπολογισμός της αξίας σε κίνδυνο γίνεται με διάφορες εναλλακτικές μεθόδους. Έτσι το εκάστοτε πιστωτικό ίδρυμα ανάλογα και με τη δομή του αποφασίζει τη κατάλληλη για τον προσδιορισμό του VaR.

Σήμερα οι πιο επικρατούσες μέθοδοι υπολογισμού είναι οι εξής :

- Μέθοδος διακύμανσης – συνδιακύμανσης
- Ιστορική προσομοίωση
- Προσομοίωση Monte Carlo

Για τη μέθοδο της διακύμανσης-συνδιακύμανσης, αφού υποθέσουμε ότι οι αποδόσεις ακολουθούν την κανονική κατανομή, χρησιμοποιούμε ιστορικά δεδομένα για να παράγουμε εκτιμήσεις σχετικά με τη μεταβλητότητα και τους συντελεστές συσχέτισης και εν συνεχεία υπολογίζουμε τη μέγιστη αξία σε κίνδυνο για επίπεδο εμπιστοσύνης α.

ΣΧΗΜΑ 4.1. Η αξία σε κίνδυνο όταν οι αποδόσεις ακολουθούν την κανονική κατανομή (πηγή: bmeclearing.es).



Στο Σχήμα 4.1 παρατηρούμε ότι οι ζημιές βρίσκονται στο αριστερό μέρος του άξονα καθώς στη κατανομή του δείγματος έχουμε συνυπολογίσει και τις θετικές αποδόσεις. Στις περισσότερες περιπτώσεις όμως επειδή το δείγμα μας αποτελείται μόνο από ζημιές μας ενδιαφέρει η δεξιά ουρά.

Στη μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης χρησιμοποιούμε τις ιστορικές αποδόσεις και με βάσει αυτές υπολογίζουμε τη μέγιστη δυνητική ζημιά. Υποθέτουμε δηλαδή ότι οι αποδόσεις των προηγούμενων χρόνων θα επαναληφθούν και στο μέλλον. Η συγκεκριμένη μέθοδος χρησιμοποιείται ευρέως καθώς είναι σχετικά απλή, δεν υποθέτει ότι οι αποδόσεις ακολουθούν κανονική κατανομή και δεν απαιτεί την εκτίμηση συντελεστών συσχέτισης και τυπικών αποκλίσεων.

Τέλος η μέθοδος Monte Carlo, μέσω μιας στοχαστικής διαδικασίας, παράγει τιμές οι οποίες προσομοιώνουν τα περιουσιακά στοιχεία του χαρτοφυλακίου. Για να παράγει τις τιμές αυτές χρησιμοποιεί υποθετικές τιμές, οι οποίες με τη σειρά τους παράγονται από μια στατιστική κατανομή. Η τεχνική αυτή παρουσιάζει αρκετά πλεονεκτήματα. Ένα από αυτά είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε όλες τις κατηγορίες χρεογράφων, πράγμα που την καθιστά ευέλικτη. Επίσης η χρήση της ενδείκνυται για εκτιμήσεις αποδόσεων που προκύπτουν από την εμφάνιση ακραίων σεναρίων. Παρ’ όλα αυτά η πολυπλοκότητα και το μεγάλο χρονικό διάστημα, που απαιτείται για την κατασκευή του μοντέλου, παραμένουν δύο από τα βασικότερα μειονεκτήματά.

4.3.3 Εφαρμογές του μοντέλου Value at Risk

Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά της αξίας σε κίνδυνο είναι η πληθώρα εφαρμογών που μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Μερικές από αυτές είναι :

- Το μοντέλο του VaR μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον καθορισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων για την εξασφάλιση του πιστωτικού ιδρύματος έναντι στον κίνδυνο αγοράς.
- Ο καθορισμός ορίων κατά τη διαδικασία της διαπραγμάτευσης και ανάληψης κινδύνων. Έτσι τα στελέχη του τμήματος της διαχείρισης κινδύνου μπορούν να αξιολογούν ποια μονάδα του πιστωτικού οργανισμού έχει τη μεγαλύτερη έκθεση και σε ποιον κίνδυνο.
- Η απλότητα του VaR το κάνει εύκολα κατανοητό από όλες τις ομάδες ενδιαφερόμενων μελών. Έτσι μπορούν να λαμβάνουν ευκολότερα αποφάσεις σχετικά με την ανάληψη ενός κινδύνου.

- Το VaR βοηθάει στην αξιολόγηση της αποτελεσματικότητας της διαφοροποίησης ενός χαρτοφυλακίου.
- Η εκτίμηση της ημερήσιας μεταβλητότητας των εσόδων.
- Η δημοσίευση εκθέσεων σχετικά με τον υπολογισμό του VaR βοηθά τις ρυθμιστικές αρχές να καθορίσουν τα εποπτικά κεφάλαια του πιστωτικού ιδρύματος. Επίσης βοηθά τα ιδρύματα αξιολόγησης της πιστοληπτικής ικανότητας να αξιολογήσουν τα επίπεδα πιστοληπτικής ικανότητας του οργανισμού.

4.4 Expected Shortfall

Στο μεγαλύτερο μέρος της βιβλιογραφίας για τη διαχείριση κινδύνου αναφέρεται ότι το VaR αποτελεί ένα ευρέως αποδεκτό μέτρο κινδύνου το οποίο χαρακτηρίζεται από την απλότητα του και την υιοθέτησή του τόσο από τα πιστωτικά ιδρύματα όσο και από τις ρυθμιστικές αρχές. Παρ’ όλα αυτά το VaR δεν αποτελεί ένα συνεκτικό μέτρο κινδύνου καθώς δεν ικανοποιεί το αξίωμα της υποπροσθετικότητας. Το γεγονός αυτό καθιστά την έννοια του συνεκτικού μέτρου, στα μάτια πολλών, ως ένα φανταστικό σενάριο σε ένα τέλειο κόσμο. Έτσι για πολλά χρόνια, επαγγελματίες στον τομέα της διαχείρισης κινδύνου έψαχναν για ένα εναλλακτικό μέτρο κινδύνου από αυτό της αξίας σε κίνδυνο, το οποίο να ικανοποιεί την ιδιότητα της υπό-προσθετικότητας.

Η έννοια της υποπροσθετικότητας σχετίζεται με το ότι ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από δύο υπό-χαρτοφυλάκια έχει το πολύ τον ίδιο κίνδυνο με το άθροισμα των κινδύνων των δύο χαρτοφυλακίων χωριστά. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν συμβούν δύο γεγονότα ταυτόχρονα ώστε να επηρεάσουν και τα δύο χαρτοφυλάκια στον ίδιο βαθμό. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις ο κίνδυνος θα είναι μικρότερος καθώς θα έχουμε την επίδραση της διαφοροποίησης.

Η ιδιότητα της υπό-προσθετικότητας είναι επίσης πολύ σημαντική στον καθορισμό της επάρκειας των εποπτικών κεφαλαίων από τις ρυθμιστικές αρχές. Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε δύο καταστήματα τραπεζών. Αν τα αποθεματικά καλύπτουν τον κίνδυνο της κάθε μιας ξεχωριστά τότε η εποπτική αρχή θα μπορεί να είναι σίγουρη για την κεφαλαιακή επάρκεια και των δύο ως σύνολο.

Το γεγονός ότι το VaR δεν ικανοποιούσε μια τόσο σημαντική ιδιότητα έδωσε το έναυσμα για την κατασκευή του μέτρου του αναμενόμενου ελλείματος (expected shortfall). Το μέτρο αυτό, όπως θα δούμε και στη συνέχεια της ενότητας, έχει άμεση σχέση με την έννοια του υπερβάλλοντος πλούτου.

4.4.1 Κατασκευάζοντας το μοντέλο του expected shortfall

Έστω ότι έχουμε μια μεταβλητή X η οποία περιγράφει τη ζημιά ενός χαρτοφυλακίου σε ένα δεδομένο χρονικό ορίζοντα T από σήμερα. Επίσης έχουμε την παράμετρο $p \in [0,1]$, η οποία αναφέρεται στο ποσοστό των χειρότερων παρατηρήσεων, δηλαδή των μεγαλύτερων ζημιών, $100p\%$.

Βάσει των παραπάνω έχουμε

$$x_p = sup\{x|P[X \leq x] \leq p\}, \text{ όπου } x_p \text{ η συνάρτηση ποσοστημορίου,}$$

ενώ για το VaR ισχύει ότι

$$VaR = x_p.$$

Είναι πασιφανές, από τον ορισμό του VaR, ότι σαν μέτρο είναι ελλιπές καθώς υπολογίζει την ελάχιστη ζημιά στο $1-p$ των μεγαλύτερων ζημιών. Αυτό μπορεί από μόνο του να οδηγήσει σε εσφαλμένα συμπεράσματα σχετικά με την επικινδυνότητα ενός χαρτοφυλακίου αφού απαξιώνονται τα μεγέθη των μεγαλύτερων ζημιών που μπορεί να συμβούν σε ακραίες καταστάσεις, οι λεγόμενοι μαύροι κύκνοι (black swans).

Για να προσδιορίσουμε το μέγεθος της αναμενόμενης ζημιάς στο $1-p$ των μεγαλύτερων ζημιών χρησιμοποιούμε την ποσότητα TCE (Tail Conditional Expectation)

$$TCE(X) = E(X|X > x_p), \text{ όπου } X \text{ η ζημιά ενός χαρτοφυλακίου.} \quad (4.1)$$

Η (4.1) μπορεί επίσης να γραφτεί και ως

$$TCE(X) = E(X|X > VaR(X)). \quad (4.2)$$

Σε αυτό το σημείο χρειάζεται να δώσουμε ιδιαίτερη προσοχή γιατί υπάρχει περίπτωση η παραπάνω σχέση να μην ταιριάζει με την κατανομή και έτσι η πιθανότητα του $\{X > x_p\}$ να είναι μεγαλύτερη παραβιάζοντας την ιδιότητα της υπό-προσθετικότητας. Αυτό συμβαίνει κυρίως σε διακριτές κατανομές.

Έστω τώρα ότι έχουμε ένα πλήθος n ζημιών οι οποίες διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά έτσι ώστε

$$0 = X_{(0)} \leq X_{(1)} \leq \ldots\ldots \leq X_{(n).}$$

Έτσι για το $100p\%$ των παρατηρήσεων έχουμε ότι

$$x_p = X_{(pn)}.$$

Βάσει των παραπάνω μπορούμε να δώσουμε ένα απλό τύπο για τον υπολογισμό του expected shortfall για μια ζημιά X ως

$$ES_p(X) = \frac{\sum_{i=pn}^{n} X_{(i)}}{n-np}, \quad (4.3)$$

υπολογίζουμε δηλαδή τον μέσο όρο των μεγαλύτερων $n(1-p)$ ζημιών ενός χαρτοφυλακίου.

Επίσης για τη συνάρτηση προσδιορισμού της μέσης τιμής της δεξιάς ουράς $TCE(X)$ έχουμε

$$TCE(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{(i)} I_{\{(X_{(i)} \geq X_{(p*n)}\}}}{\sum_{i=1}^{n} I_{\{X_{(i)} \geq X_{(p*n)}\}}} \tag{4.4}$$

όπου η $I\{\cdot\}$ ορίζεται ως εξής

$$I\{συνθήκη\} = \begin{cases} 1, & \text{αν η συνθήκη είναι σωστή} \\ 0, & \text{αν η συνθήκη είναι λάθος} \end{cases}$$

Για την συνάρτηση του expected shortfall είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι ισχύει η ιδιότητα της υπό-προσθετικότητας. Έτσι έστω ότι έχουμε άλλη μια μεταβλητή Y, η οποία περιγράφει τις ζημιές από ένα χαρτοφυλάκιο Β, ομοίως με αυτή της X η οποία περιγράφει τη ζημία ενός χαρτοφυλακίου Α. Έτσι διατάσσουμε το άθροισμα των ζημιών, $X + Y$, σε αύξουσα σειρά ώστε να ισχύει

$$0 = (X+Y)_{(0)} \leq (X+Y)_{(1)} \leq \ldots\ldots \leq (X+Y)_{(n)}.$$

Τότε θα έχουμε

$$ES_p(X+Y) = \frac{\sum_{i=p*n}^{n}(X+Y)_{(i)}}{n-n*p} \leq \frac{\sum_{i=pn}^{n}(X_{(i)}+Y_{(i)})}{n-np} = ES_p(X) + ES_p(Y)$$

$$\Leftrightarrow ES_p(X+Y) \leq ES_p(X) + ES_p(Y).$$

4.4.2 Ο ορισμός του expected shortfall

Για μια ζημιά X ενός χαρτοφυλακίου, το expected shortfall με συντελεστή εμπιστοσύνης $\alpha \in (0,1)$ ορίζεται ως εξής

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}[E(X|X \geq x_\alpha) + \alpha(1-\alpha-Pr(X \geq x_\alpha))]. \tag{4.5}$$

Η (4.5) αυτή παρουσιάζει ένα απόλυτα συνεκτικό μέτρο κινδύνου το οποίο ικανοποιεί το αξίωμα της υπό-προσθετικότητας.

Αν αποδομήσουμε την (4.5) έχουμε τα παρακάτω μέρη της εξίσωσης :

- $x_\alpha(1-\alpha-Pr(X \geq x_\alpha))$, παρουσιάζει το υπερβάλλον μέρος το οποίο θα χρειαστεί να προστεθεί στην $E(X|X \geq x_\alpha)$ όταν η συνθήκη $\{X > x_\alpha\}$ εμφανίζει πιθανότητα μεγαλύτερη του $1-\alpha$.
- $Pr(X \geq x_\alpha)$, για το οποίο ισχύει ότι, όταν έχουμε $Pr(X \geq x_\alpha) = 1-\alpha$, η (4.5) μετατρέπεται στην (4.2).

Αν τώρα η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή τότε το expected shortfall θα δίνεται από τον τύπο

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 F^{-1}(p)dp, \quad (4.6)$$

όπου η F_X^{-1} η αντίστροφη της συνάρτησης κατανομής της ζημιάς X.

Η (4.6) μπορεί να γραφτεί εύκολα και ως

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{F^{-1}(\alpha)}^1 tf(t)dt \quad (4.7)$$

η αλλιώς ως

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_p(X)dp \quad (4.8)$$

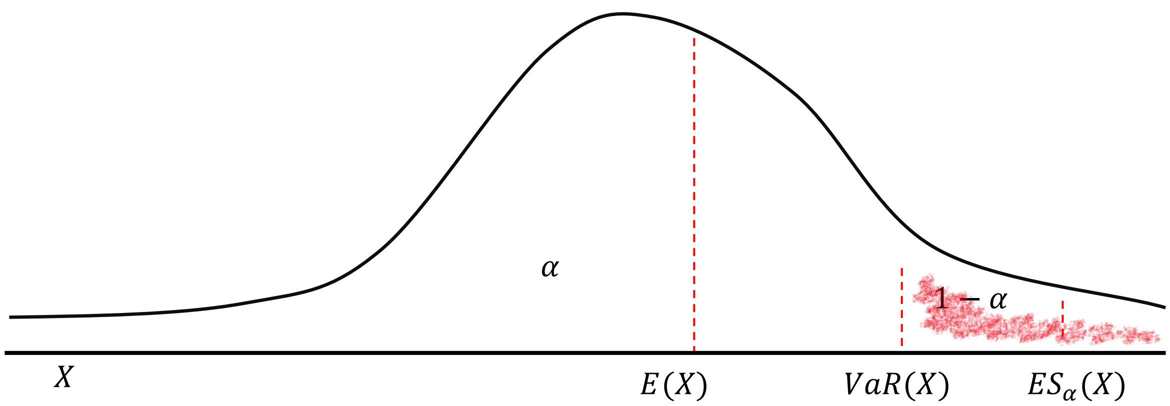
Σε αυτό το σημείο μπορούμε να δούμε τη σύνδεση της έννοιας του expected shortfall με αυτή του υπερβάλλοντος πλούτου. Οι δύο σχέσεις είναι σχεδόν ταυτόσημες καθώς η (4.6) μπορεί να αποτυπωθεί και ως

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{F^{-1}(\alpha)}^1 \bar{F}(x)dp \Leftrightarrow ES_\alpha(X) = \frac{EW(\alpha)}{1-\alpha} \quad (4.9)$$

Η (4.9) παρουσιάζει την έννοια του υπερβάλλοντος πλούτου ως ένα μέτρο κινδύνου το οποίο έχει εφαρμογή στην διαχείριση κινδύνου. Πιο συγκεκριμένα μέσω της συνάρτησης του υπερβάλλοντος πλούτου μπορούμε να μελετήσουμε την υπερβάλλουσα ζημιά ενός χαρτοφυλακίου και να προσδιορίσουμε το expected shortfall.

Στο Σχήμα 4.2 φαίνεται το expected shortfall σε σύγκριση με το VaR αλλά και την αναμενόμενη ζημιά

ΣΧΗΜΑ 4.2. Γραφική αναπαράσταση του expected shortfall.



Εξετάζοντας το Σχήμα 4.2, και όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το expected shortfall αναφέρεται στην περιοχή του $1-\alpha$, στην οποία βρίσκονται οι μεγαλύτερες παρατηρήσεις (ζημιές), ενώ το VaR αποτελεί το ελάχιστο αυτής της περιοχής.

4.4.3 Οι ιδιότητες του expected shortfall

Ένα συνεκτικό μέτρο κινδύνου όπως το expected shortfall εμφανίζει τις ακόλουθες ιδιότητες

1. Η ιδιότητα της προσθετικότητας προς μία σταθερά (translativity). Έστω μια ζημιά Xκαι μια σταθερά c, για το expected shortfall έχουμε
$$ES_{\alpha}(X+c)=E(X+c|X\geq x_{\alpha}).$$
Τότε από τις ιδιότητες της μέσης τιμής θα ισχύει
$$E(X+c|X\geq x_{\alpha})=E(X|X\geq x_{\alpha})+c=ES_{\alpha}(X)+c.$$
Επομένως για το expected shortfall ισχύει το αξίωμα της προσθετικότητας προς μια σταθερά.
2. Έστω ότι έχουμε δύο μεταβλητές X_1και X_2 οι οποίες περιγράφουν τις ζημιές ενός χαρτοφυλακίου Α και ενός Β αντίστοιχα. Τότε για $X_1\leq X_2$ έχουμε
$$VaR(X_1)\leq VaR(X_2).$$
Επομένως από την (4.8) έχουμε
$$VaR(X_1)\leq VaR(X_2)\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1}VaR_p(X_1)dp\leq \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1}VaR_p(X_2)dp$$
$$\Leftrightarrow ES_{\alpha}(X_1)\leq ES_{\alpha}(X_2)$$
Έτσι το expected shortfall ικανοποιεί και την ιδιότητα της μονοτονίας.
3. Αν πολλαπλασιάσουμε τη ζημιά με μια σταθερά c , όπως αποδείξαμε και στη πρώτη ιδιότητα, έχουμε
$$ES_{\alpha}(cX)=E(cX|X\geq x_{\alpha}).$$
Τότε από τις ιδιότητες της μέσης τιμής θα ισχύει
$$E(cX|X\geq x_{\alpha})=cE(X|X\geq x_{\alpha})=cES_{\alpha}(X).$$
Επομένως για το expected shortfall ισχύει το αξίωμα της θετικής ομοιογένειας.
4. Τελευταία ιδιότητα είναι αυτή η οποία αποτέλεσαι και κινητήριο δύναμη για την δημιουργία αυτού του μέτρου, ο λόγος είναι για την ιδιότητα της υπό-προσθετικότητας. Έτσι για δύο ζημιές X_1και X_2 δύο χαρτοφυλακίων Α και Β ισχύει ότι
$$ES_{\alpha}(X_1+X_2)=E\big(X_1+X_2\big|X_1+X_2\geq VaR(X_1+X_2)\big).$$
Από τις ιδιότητες της $E(X)$ έχουμε
$$ES_{\alpha}(X_1+X_2)=$$
$$=E\big(X_1\big|X_1+X_2\geq VaR(X_1+X_2)\big)+E\big(X_1\big|X_1+X_2\geq VaR(X_1+X_2)\big)$$
$$\leq E\big(X_1\big|X_1\geq VaR(X_1)\big)+E\big(X_2\big|X_2\geq VaR(X_2)\big)=ES_{\alpha}(X_1)+ES_{\alpha}(X_2).$$

4.4.4 Σύγκριση Value at Risk με Expected Shortfall

Αφού αναλύσαμε την έννοια του value at risk και του expected shortfall, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα δύο αυτά μέτρα παρουσιάζουν μερικές διαφορές, οι οποίες εκφράζονται παρακάτω ως πλεονεκτήματα η μειονεκτήματα του ενός έναντι του άλλου.

α. Πλεονεκτήματα του Expected Shortfall έναντι του Value at Risk

- Το expected shortfall λαμβάνει υπόψιν τη δεξιά ουρά της κατανομής των ζημιών ενώ το value at risk όχι. Όπως προ-είπαμε το value at risk αναφέρεται σε μια υψηλότερη παρατήρηση σε ένα διάστημα εμπιστοσύνης. Αντιθέτως το expected shortfall δίνει έμφαση σε ακραία γεγονότα τα οποία μπορεί να συγκεντρώνουν λίγες πιθανότητες όπως για παράδειγμα οι μαύροι κύκνοι. Τα ακραία γεγονότα δεν θα πρέπει να θεωρούνται ασήμαντα λόγω της σπανιότητας τους καθώς η εμφάνιση τους μπορεί να προκαλέσει τεράστιες ζημιές σε ένα πιστωτικό ίδρυμα, το κόστος των οποίων θα είναι αρκετά μεγάλο αφού μπορούν να το οδηγήσουν έως και την πτώχευση.
- Το value at risk δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας ενώ το expected shortfall το ικανοποιεί . Έτσι κατά το VaR δεν δίνεται η απαραίτητη έμφαση στην διαφοροποίηση η οποία είναι μια πολύ σημαντική ιδιότητα στα χρηματοοικονομικά και στις επενδύσεις.
- Λόγω της προηγούμενης διαφοράς, το expected shortfall αποτελεί συνεκτικό μέτρο κινδύνου ενώ το VaR όχι.

β. Μειονεκτήματα του Expected Shortfall έναντι του Value at Risk

- Συνήθως είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε το value at risk από το expected shortfall.
- Ο υπολογισμός του expected shortfall απαιτεί τη σωστή μοντελοποίηση της δεξιάς ουράς της κατανομής των ζημιών καθώς μια μικρή απόκλιση μπορεί να προκαλέσει λανθασμένα συμπεράσματα. Στο μοντέλο του value at risk τα πράγματα είναι πιο απλά και κάτι τέτοιο δεν ισχύει.
- Το expected shortfall στερείται της ευστάθειας, η οποία αναφέρεται στην προσαρμογή του μοντέλου σε τυχόν αλλαγές στα δεδομένα, ως διαδικασία μέτρησης του κινδύνου. Αυτό συμβαίνει λόγω της σύγκρουσης που υπάρχει μεταξύ της ιδιότητας της υπό-προσθετικότητας και της ιδιότητας της ευστάθειας.

- Το expected shortfall απαιτεί αρκετά μεγάλο όγκο δεδομένων ώστε να δώσει αξιόπιστα και ακριβή αποτελέσματα.
- Το value at risk, σε αντίθεση με το expected shortfall, χρησιμοποιείται ευρέως από τις ρυθμιστικές αρχές για τον καθορισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων για τη φερεγγυότητα των ιδρυμάτων. Εδώ όμως χρειάζεται να πούμε ότι τελευταία παρατηρείται ολοένα και περισσότερο η υιοθέτηση του expected shortfall έναντι του του value at risk.

Καταλήγοντας, το μέτρο του expected shortfall παρά τα μερικά μειονεκτήματα, που μπορεί να εμφανίζει έναντι του VaR, αποτελεί ένα ισχυρότερο εργαλείο για τη μέτρηση του κινδύνου της αγοράς. Το expected shortfall, το οποίο πολλές φορές αναφέρεται ως conditional value at risk, αποτελεί μέτρο κινδύνου της ουράς μιας κατανομής ζημιών.

Τέλος, όσο αφορά τις επενδύσεις, η χρήση του expected shortfall, έναντι του μέτρου VaR, θα πρέπει να θεωρείται δεδομένη ιδιαίτερα όταν αναφερόμαστε σε χρηματιστηριακές αξίες χαμηλής κεφαλαιοποίησης, όπου η διακύμανση και οι πιθανότητες υπερβάσης του αντίστοιχου VaR είναι σχετικά μεγάλες.

4.5 Εφαρμογή του Expected Shortfall

Στην υπό-ενότητα αυτή θα προσπαθήσουμε μέσω ενός πρακτικού θέματος να παρουσιάσουμε την συσχέτιση μεταξύ της έννοιας του υπερβάλλοντος πλούτου και του Expected Shortfall. Στο παρακάτω παράδειγμα χρησιμοποιήθηκαν πραγματικές αποδόσεις ενώ οι υπολογισμοί έγιναν μέσω του προγράμματος, Microsoft Excel.

Έστω ότι επενδύουμε 100.000 δολάρια σε μερίδια του τεχνολογικού δείκτη Nasdaq και πρέπει να εξετάσουμε τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου μας.

Αρχικά μέσω της μεθόδου της ιστορικής προσομείωσης θα υπολογίσουμε το VaR καθώς και το Expected Shortfall. Για να το κάνουμε αυτό θα χρειαστούμε τις παρελθοντικές τιμές κλεισίματος του εν λόγω δείκτη, τουλάχιστον των προηγούμενων δύο ετών.

Ξεκινώντας χρησιμοποιώντας τις παρελθοντικές τιμές θα υπολογίσουμε τις αντίστοιχες λογαριθμικές παρελθοντικές αποδόσεις των προηγούμενων δύο ετών. Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι χρησιμοποιούμε τις λογαριθμικές αποδόσεις καθώς είναι συμμετρικές. Ενώ στη συνέχεια θα τις ταξινομήσουμε σε φθίνουσα σειρά και θα υπολογίσουμε το αντίστοιχο P/L (Profit & Loss). Έτσι βάσει των δεδομένων, το μέγιστο κέρδος διαμορφώνεται στα 4.312,69 δολάρια ενώ η μέγιστη ζημιά στα 5.194,48 δολάρια.

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το VaR, της επόμενης ημέρας, με επίπεδο εμπιστοσύνης 95%. Τότε θα πρέπει να βρούμε την $25^{η}$ χειρότερη απόδοση η αλλιώς την $25^{η}$ μεγαλύτερη ζημιά, βάσει των παρελθοντικών αποδόσεων. Έτσι σύμφωνα με τον Πίνακα 4.1 η $25^{η}$ μεγαλύτερη ζημιά είναι περίπου 2.838,53 δολάρια. Άρα η μέγιστη δυνητική ζημιά της επόμενης ημέρας θα είναι μικρότερη των 2.838,53 δολαρίων και αυτό το σενάριο θα ισχύσει με 95% βεβαιότητα.

Αν το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο αφορούσε κάποιο χρηματοπιστωτικό ίδρυμα τότε το εν λόγο ίδρυμα θα έπρεπε να διαθέτει τα αντίστοιχα αποθεματικά ώστε να είναι φερέγγυο και αξιόπιστο έναντι των εποπτικών αρχών αλλά και των πελατών του.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1. Οι 25 μεγαλύτερες ζημιές.

	Top 25 Losses
1	$ 5.194,48
2	$ 5.192,90
3	$ 4.710,85
4	$ 4.571,23
5	$ 4.309,79
6	$ 4.182,64
7	$ 4.104,20
8	$ 4.066,36
9	$ 4.012,47
10	$ 3.945,14
11	$ 3.818,60
12	$ 3.627,43
13	$ 3.626,23
14	$ 3.206,86
15	$ 3.180,08
16	$ 3.169,85
17	$ 3.133,73
18	$ 3.120,47
19	$ 3.112,12
20	$ 3.002,09
21	$ 2.959,49
22	$ 2.926,18
23	$ 2.899,41
24	$ 2.868,20
25	$ 2.838,53

Στην ενότητα αυτή έχουμε αναφέρει πολλές φορές πως το VaR αγνοεί, σαν μέτρο κινδύνου, τις μεγαλύτερες ζημιές οι οποίες μπορούν να έχουν σημαντική επίδραση σε ένα χαρτοφυλάκιο και ακόμα σημαντικότερη στον κάτοχό του.

Έτσι στο παραπάνω χαρτοφυλάκιο από τις 25 χειρότερες ζημιές αγνοούμε τις 24 μεγαλύτερες. Το expected shortfall είναι η μέση τιμή των $(1-\alpha) * 100\%$ ζημιών. Άρα στη συγκεκριμένη περίπτωση αποτελεί το μέσο όρο του 5% των μεγαλύτερων ζημιών δηλαδή αυτών όπου το VaR που υπολογίσαμε αγνοεί. Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα το expected shortfall ισούται με 3.705,87 δολάρια.

Τέλος χρησιμοποιώντας την Σχέση 4.9 μπορούμε πολύ εύκολα να υπολογίσουμε και την τιμή του υπερβάλλοντος πλούτου, η οποία ισούται με 185,29 δολάρια.

5

Το στοχαστικό μοντέλο διάταξης του υπερβάλλοντος πλούτου

5.1 Εισαγωγή στις στοχαστικές διατάξεις

Η έννοια των διατάξεων συναντάται παντού στην επιστήμη των μαθηματικών καθώς η σύγκριση τιμών και μεταβλητών αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της. Βέβαια οι διατάξεις μπορούν να παρατηρηθούν και σε άλλους συναφείς τομείς όπως η επιστήμη των υπολογιστών ενώ αποτελούν χρήσιμο εργαλείο στο επιστημονικό πεδίο έρευνας των οικονομικών.

Ξεκινώντας θα ήταν χρήσιμο να δώσουμε τον ορισμό της μερικής διάταξης. Ως μερική διάταξη λοιπόν ορίζεται η διμελής σχέση $\prec$ σε ένα σύνολο S αν πληρούνται οι παρακάτω προϋποθέσεις

1. Ανακλαστικότητα (reflexivity) : $x \prec x \;\; \forall x \in S$
2. Μεταβατικότητα (transitivity) : αν $x \prec y$ και $y \prec z$ τότε $x \prec z$
3. Αντισυμμετρία (antisymmentry) : αν $x \prec y$ και $y \prec x$ τότε $x = y$

Στη στατιστική πολλές φορές θέλουμε να συγκρίνουμε δύο τυχαίες μεταβλητές ή διανύσματα που αναπαριστούν κάποιες ποσότητες. Για παράδειγμα θέλουμε να συγκρίνουμε το βάρος και το ύψος των γυναικών με το αντίστοιχο των ανδρών.

Αρχικά η σύγκριση αυτή θα μπορούσε να γίνει μεταξύ δύο πραγματικών τιμών όπως η μέση τιμή ή η διακύμανση των πληθυσμών. Σε αυτό όμως το σημείο μπορεί να δημιουργηθούν δύο σημαντικά προβλήματα.

I. Οι μέσες τιμές και οι διακυμάνσεις των πληθυσμών προς σύγκριση μπορεί να είναι ίσες, ενώ οι μεταβλητές να είναι εντελώς διαφορετικές ως προς τη στοχαστική τους συμπεριφορά.
II. Μια μεταβλητή μπορεί να μην έχει πεπερασμένο μέσο όρο ή διακύμανση.

Τα παραπάνω προβλήματα σε συνδυασμό με την ανάγκη να αξιοποιηθούν περισσότερες πληροφορίες που μπορεί να μας παρέχουν τα εκάστοτε δεδομένα οδήγησαν στην ανάπτυξη της θεωρίας των στοχαστικών διατάξεων, όπου η σύγκριση των μεταβλητών γίνεται μέσω της σύγκρισης των κατανομών. Συγκρίνουμε δηλαδή συναρτήσεις της κατανομής όπως η συνάρτηση κατανομής $F(x)$, η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$ και η συνάρτηση ποσοστημορίου

$F^{-1}(p)$. Έτσι γίνεται κατανοητό ότι η σύγκριση διατεταγμένων, σε αύξουσα σειρά, δεδομένων αποτελεί ένα από τα βασικότερα πεδία εφαρμογής των στοχαστικών διατάξεων.

Στον αναλογισμό η χρήση στοχαστικών διατάξεων επικεντρώνεται στη μελέτη της επικινδυνότητας δύο τυχαίων μεταβλητών. Έτσι έστω ότι έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y. Η X θεωρείται μικρότερη της Y ως προς τη στοχαστική διάταξη, και θα συμβολίζεται ως

$$X \leq_{st} Y$$

αν ισχύει ότι

$$F_X(t) \geq F_Y(t) \Leftrightarrow$$
$$1 - F_X(t) \leq 1 - F_Y(t) \Leftrightarrow$$
$$\bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t),$$

για κάθε $t > 0$.

Η παραπάνω σχέση δηλώνει ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να πάρει τιμές μικρότερες από αυτές που παίρνει η τυχαία μεταβλητή Y. Η συνάρτηση $F_X(t)$ και η $F_Y(t)$ αποτελούν τις συναρτήσεις κατανομής των δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y. Επίσης η διάταξη $\leq_{st}$ ονομάζεται συνήθης στοχαστική διάταξη ενώ στην οικονομική βιβλιογραφία συχνά αναφέρεται και ως διάταξη πρώτης στοχαστικής κυριαρχίας με συμβολισμό $\leq_{fsd}$ (first order stochastic dominance-FSD).

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι για τη μελέτη και την σύγκριση δύο μεταβλητών έχουν κατασκευαστεί αρκετά μοντέλα στοχαστικών διατάξεων. Ένα από αυτά είναι το μοντέλο του υπερβάλλοντος πλούτου το οποίο επικεντρώνεται στις τιμές μιας μεταβλητής και τη σύγκριση με μία άλλη αντίστοιχη πάνω από ένα ποσοστημόριο.

Αρχικά στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε μερικές ιδιότητες των στοχαστικών διατάξεων και θα αναφέρουμε μερικά βασικά μοντέλα στοχαστικών διατάξεων. Στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε στη μελέτη του μοντέλου του υπερβάλλοντος πλούτου ενώ θα παραθέσουμε μερικές ιδιότητες και θα δούμε κάποιες εφαρμογές του.

5.2 Ιδιότητες στοχαστικών διατάξεων

Στις στοχαστικές διατάξεις, για δύο μεταβλητές X και Y ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

1. Αν $X \leq_{st} Y$ και η $h(\cdot)$ αύξουσα συνάρτηση τότε ισχύει ότι $h(X) \leq_{st} h(Y)$.
2. Αν $X \leq_{st} Y$ ισχύει ότι $E(X) \leq_{st} E(Y)$.
3. Αν X_i και Y_i, όπου $i = 1,2, \dots . n$, είναι τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες σύμφωνα με τη στοχαστική διάταξη έχουμε

$$X_i \leq_{st} Y_i \text{ για κάθε } i,$$

τότε θα ισχύει και ότι

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \leq_{st} \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

4. Αν $X_i \leq_{st} Y_i$ για $\forall i$, τότε για κάθε αύξουσα συνάρτηση $\Phi: R^n \to R$ θα ισχύει ότι

$$\Phi(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n) \leq_{st} \Phi(Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n) \Leftrightarrow \Phi(X_i) \leq \Phi(Y_i).$$

5. Αν $X_i \leq_{st} Y_i$ για κάθε i και έχουμε $X_i \to_d X$, $Y_i \to_d Y$ τότε θα ισχύει

$$X \leq_{st} Y.$$

6. Αν $X \leq_{st} Y$ και ισχύει ότι $E(X) \leq_{st} E(Y)$ τότε οι τυχαίες μεταβλητές X και Y ακολουθούν την ίδια κατανομή.

7. Έστω Θ μία τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε $(X|\Theta = \theta) \leq_{st} (Y|\Theta = \theta)\ \forall \theta \in \Omega_\Theta$ τότε θα ισχύει ότι

$$X \leq_{st} Y.$$

8. Ισχύει ότι $X \leq_{st} Y$ μόνο αν υπάρχουν μεταβλητές $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$ τέτοιες ώστε να ισχύει

$$X =_d \tilde{X}, Y =_d \tilde{Y} \text{ και } Pr(\tilde{X} \leq \tilde{Y}) = 1.$$

5.3 Μερικά μοντέλα στοχαστικών διατάξεων

Στις επόμενες ενότητες θα αναλύσουμε μερικά μοντέλα στοχαστικών διατάξεων τα οποία χρησιμοποιούνται στον αναλογισμό για την σύγκριση της επικινδυνότητας ενώ στο τέλος κάποια από αυτά θα χρησιμοποιηθούν σε μερικές ιδιότητες της στοχαστικής διάταξης του υπερβάλλοντος πλούτου.

5.3.1 Η στοχαστική διάταξη του υπολειπόμενου χρόνου ζωής

Είναι γνωστό ότι στις ασφαλίσεις ζωής η προσέγγιση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής ενός υποψηφίου ασφαλισμένου αποτελεί κύριο αντικείμενο μελέτης του εκάστοτε αναλογιστή. Αυτό συμβαίνει διότι είναι πολύ σημαντικό για την ασφαλιστική να μπορέσει να καθορίσει τα κατάλληλα ασφάλιστρα και όρους των συμβολαίων καθώς και να χρησιμοποιήσει τα απαραίτητα εργαλεία (π.χ αντασφάλιση) για την αντιστάθμιση των συσχετιζόμενων κινδύνων.

Αναλυτικότερα, αν έχουμε άτομο ηλικίας x, συμβολίζουμε τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής με την τυχαία μεταβλητή T_χ. Έτσι για την αναμενόμενη ή μέση τιμή του υπολειπόμενου χρόνου ζωής, η οποία συμβολίζεται με $e_X(t)$, έχουμε

$$e_X(t) = \frac{\int_t^{\infty}[1 - F_X(y)]dy}{1 - F_X(t)}.$$

Μια τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη ($\leq_{mrl}$) από την τυχαία μεταβλητή Y, ως προς τη στοχαστική διάταξη του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής (mean remaining life time order), όταν ισχύει η παρακάτω σχέση

$$X \leq_{mrl} Y \Leftrightarrow e_X(t) \leq e_Y(t) \text{ για κάθε } t \geq 0.$$

Σημαντικό και χρήσιμο για τη συνέχεια είναι το γεγονός ότι οι μεταβλητές διακρίνονται σε DMRL και IMRL. Για μια τυχαία μεταβλητή X χρησιμοποιούμε τον όρο DMRL (decreasing mean residual life) όταν η μέση υπολειπόμενη ζωή, $e_X(t) = \frac{\int_t^{\infty}[1-F_X(y)]dy}{1-F_X(t)}$, είναι φθίνουσα ως προς t. Εν αντιθέσει χρησιμοποιούμε τον όρο IMRL (increasing mean residual life) όταν η μέση υπολειπόμενη ζωή, $e_X(t)$, είναι αύξουσα.

Η αναφορά στην εν λόγω διάταξη γίνεται διότι στη συνέχεια θα παρουσιαστούν κάποιες σχέσεις μεταξύ της στοχαστικής διάταξης του υπερβάλλοντος πλούτου και της στοχαστικής διάταξης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

5.3.2 Κυρτές και κοίλες στοχαστικές διατάξεις

Μια στοχαστική διάταξη στην οποία θα γίνει αναφορά παρακάτω είναι η κυρτή διάταξη. Η διάταξη αυτή βοηθάει στη σύγκριση μεταβλητών που αναπαριστούν κινδύνους επενδύσεων μέσω σύγκρισης της μεταβλητότητάς τους.

Έτσι, αν έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y, λέμε ότι η X είναι μικρότερη από την Y ως προς τη κυρτή διάταξη, $X \leq_{cx} Y$, αν ισχύει ότι

$$Ef(X) \leq Ef(Y),$$

για κάθε πραγματική κυρτή συνάρτηση f.

Αντίστοιχα το ίδιο θα ισχύει αν η f είναι μια πραγματική κοίλη συνάρτηση. Δηλαδή θα έχουμε $X \leq_{cv} Y$, αν ισχύει ότι

$$Ef(X) \leq Ef(Y).$$

Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι μια συνάρτηση f είναι κυρτή όταν ισχύει

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \text{ για κάθε } x \text{ και } y \text{ με } 0 < \alpha < 1.$$

Αντίστοιχα μια συνάρτηση f είναι κοίλη όταν ισχύει

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \text{ για κάθε } x \text{ και } y \text{ με } 0 < \alpha < 1.$$

Έτσι λοιπόν, γίνεται εύκολα κατανοητό ότι αν μια πραγματική συνάρτηση f είναι κοίλη τότε η -f είναι κυρτή, ισχύει και αντίστροφα.

Στην περίπτωση που η f είναι αύξουσα κυρτή συνάρτηση, αν ισχύει $Ef(X) \leq Ef(Y)$ τότε θα έχουμε ότι

$$X \leq_{icx} Y,$$

ως προς την αύξουσα κυρτή διάταξη.

Αν η f είναι αύξουσα κοίλη συνάρτηση και ισχύει $Ef(X) \leq Ef(Y)$ τότε θα έχουμε ότι

$$X \leq_{icv} Y,$$

ως προς την αύξουσα κοίλη διάταξη.

Στον αναλογισμό χρησιμοποιείται συχνά η αύξουσα κυρτή στοχαστική διάταξη (increasing convex order- icv) η οποία τις περισσότερες φορές αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως διάταξη ανακοπής ζημιάς (stop loss order) και γράφεται

$$\pi_X(t) = E(X-t)_+ = E[max\{X-t, 0\}] = \int_t^{\infty} \bar{F}_X(s)ds\,, t \in \mathbb{R}.$$

Πρακτικά, αν ισχύει ότι $X \leq_{icx} Y$, σημαίνει ότι ένας επενδυτής που αποστρέφεται τον κίνδυνο (risk averser) θα προτιμήσει μια επένδυση με ρίσκο το οποίο περιγράφεται από τη μεταβλητή X παρά μια άλλη της οποίας το ρίσκο περιγράφεται από τη Y.

Αντίστοιχα η αύξουσα κοίλη διάταξη χρησιμοποιείται στην περίπτωση που οι μεταβλητές μας περιγράφουν αποδόσεις και όχι ζημιές, όπως στην περίπτωση της αύξουσας κυρτής διάταξης. Τη συγκεκριμένη διάταξη στην οικονομική βιβλιογραφία την συναντάμε και ως διάταξη δεύτερης στοχαστικής κυριαρχίας (second stochastic dominance order-SSD).

Έτσι, ομοίως με πριν, ένας επενδυτής ο οποίος αποστρέφεται τον κίνδυνο, αν ισχύει ότι $X \leq_{icv} Y$, θα προτιμήσει την επένδυση της οποία η απόδοση περιγράφεται από την μεταβλητή Y.

5.3.3 Σκεδαστικές διατάξεις

Σύμφωνα με την σκεδαστική διάταξη (Dispersive Order), η οποία διατυπώθηκε από τον Doksum (1969), μια τυχαία μεταβλητή X, με συνάρτηση κατανομής F_X, είναι μικρότερη από μία τυχαία μεταβλητή Y, με συνάρτηση κατανομής G_Y, αν ισχύει ότι

$$F_X^{-1}(\beta) - F_X^{-1}(\alpha) < G_Y^{-1}(\beta) - G_Y^{-1}(\alpha) \quad \text{για } 0 < \alpha < \beta < 1.$$

Έτσι αν ισχύει η παραπάνω σχέση έχουμε $X \leq_{dis} Y$ ή $F \leq_{dis} G$.

Φαίνεται ξεκάθαρα ότι η σκεδαστική στοχαστική διάταξη επικεντρώνεται στη μεταβλητότητα της μεταβλητής αφού εξ ορισμού εξετάζει και συγκρίνει τις διαφορές ποσοστημορίων δύο μεταβλητών X και Y.

5.4 Η στοχαστική διάταξη total time on test

Πριν αναλύσουμε το μοντέλο του υπερβάλλοντος πλούτου θα κάνουμε μια μικρή αναφορά στην έννοια του total time on test (TTT).

Η έννοια αυτή εισάχθηκε από τους Kochar et al. (2002) με σκοπό τη σύγκριση δύο μη-αρνητικών τυχαίων μεταβλητών και αποτελεί ένα πολύ διαδεδομένο εργαλείο στην ανάλυση βιομετρικών και άλλων τύπων δεδομένων πάνω στα οικονομικά και στην αξιολόγηση των κινδύνων.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε μια συνάρτηση κατανομής $F(x)$ μιας τυχαίας μη αρνητικής μεταβλητής X. Ορίζουμε με $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ τη συνάρτηση επιβίωσης και με $F^{-1}(p)$ τη συνάρτηση ποσοστημορίου για την οποία ισχύει ότι

$$\bar{F}^{-1}(p) = F^{-1}(1-p), \text{όπου } p \in (0,1).$$

Η συνάρτηση total time on test $T_X(p)$, για μια τυχαία μη αρνητική μεταβλητή X, ορίζεται από τον τύπο

$$T_X(p) = \int_0^{F^{-1}(p)} \bar{F}(x)\,dx, \qquad p \in (0,1).$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή σχετίζεται με την μη κανονικοποιημένη συνάρτηση της καμπύλη Lorenz (βλ. Κεφάλαιο 2).

Οι Hu et al. (2012) επαναπροσδιόρισαν το μετασχηματισμού total time on test για μια μεταβλητή με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να μην χρησιμοποιούνται μόνο μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές. Έτσι ορίστηκε ο ακόλουθος μετασχηματισμός, για μια τυχαία μεταβλητή X με πεπερασμένη μέση τιμή $E(X)$,

$$T_X(p) = E[min\{X, F^{-1}(p)\}] = E(X) - \int_{F^{-1}(p)}^{+\infty} \bar{F}(x)\,dx.$$

Σε περίπτωση που υπάρχει κάποιο κάτω άκρο στήριξης α η συνάρτηση μετασχηματισμού γράφεται ως

$$T_X(p) = \int_\alpha^{F^{-1}(p)} \bar{F}(x)\,dx, p \in (0,1).$$

Για $\alpha = 0$ έχουμε τη συνάρτηση μετασχηματισμού Total Time on Test του X όπως ακριβώς ορίστηκε από τους Kochar et al. (2002).

Έτσι για δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y, με πεπερασμένες μέσες τιμές και συναρτήσεις κατανομής F_X και G_Y αντίστοιχα, στα πλαίσια του στοχαστικού μοντέλου διάταξης total time on test θα έχουμε

$$X \leq_{ttt} Y$$

αν ισχύει ότι

$$T_X(p) \leq T_Y(p)\ \forall p \in (0,1).$$

Για τη διάταξη $\leq_{ttt}$ και την συνήθη στοχαστική διάταξη $\leq_{st}$ ισχύει ότι

$$X \leq_{st} Y \Rightarrow X \leq_{ttt} Y.$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει αφού η συνήθης στοχαστική διάταξη είναι ισχυρότερη της διάταξης total time on test.

5.5 Η στοχαστική διάταξη του υπερβάλλοντος πλούτου

Η έννοια του υπερβάλλοντος πλούτου, όπως είπαμε και στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας, εισάχθηκε από τους Shaked and Shanthikumar (1998). Η συνάρτηση του υπερβάλλοντος πλούτου, η οποία έχει άμεση συσχέτιση με την καμπύλη Lorenz αλλά και τη συνάρτηση toatal time on test, για μια τυχαία μεταβλητή X δίνεται από τη σχέση

$$EW(p) = \int_{F^{-1}(p)}^{1} \bar{F}(x)dx.$$

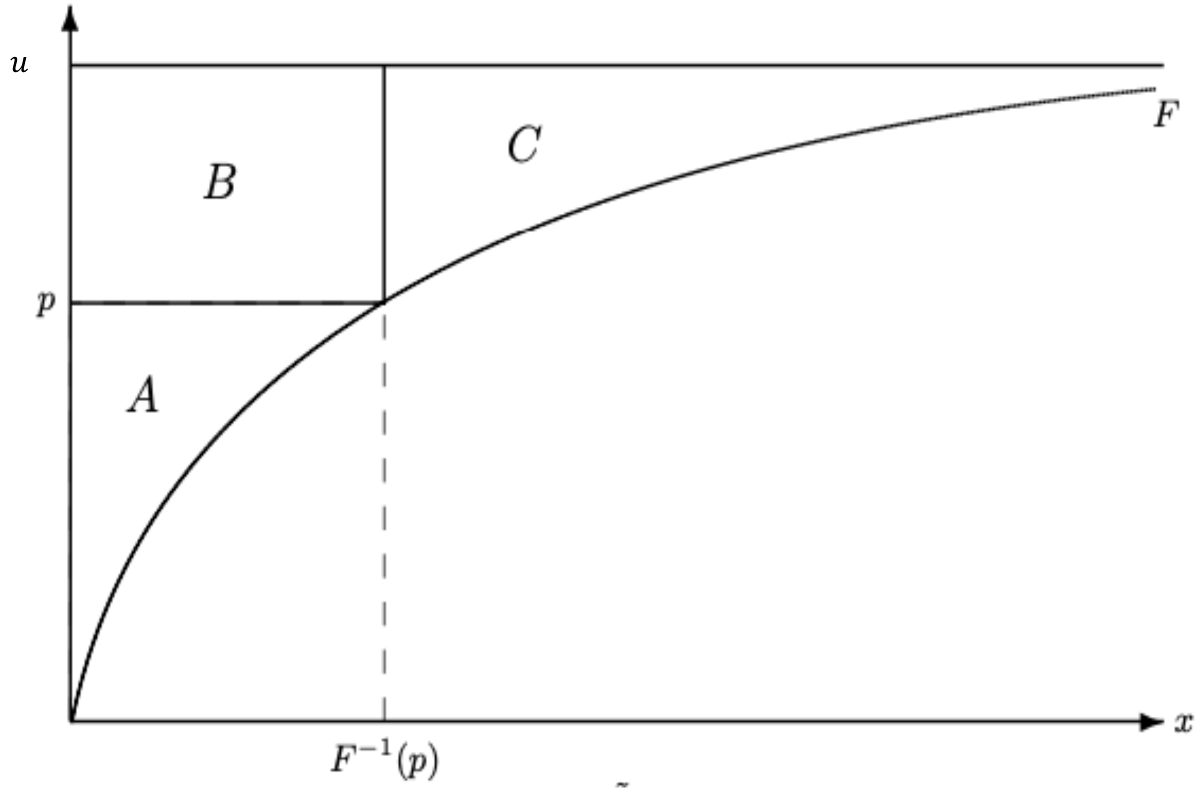
Στη βιβλιογραφία, οι Shaked and Shanthikumar συμβολίζουν τη συνάρτηση του υπερβάλλοντος πλούτου για μια τυχαία μεταβλητή X με $W_X(p)$. Έτσι και εμείς σε αυτό το κεφάλαιο όταν αναφερόμαστε στον υπερβάλλοντα πλούτο θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό αυτό. Όπότε έχουμε

$$W_X(p) = \int_{F^{-1}(p)}^{1} \bar{F}(x)dx\ \forall p \in (0,1). \tag{5.1}$$

Η (5.1) δεν ισχύει μόνο για μη αρνητικές μεταβλητές, και αυτή είναι μια ιδιότητα που την καθιστά ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο στις στοχαστικές διατάξεις.

ΣΧΗΜΑ 5.1. Γραφική αναπαράσταση των $T_X(p)$ και $W_X(p)$

(πηγή: Shaked and Shanthikumar (2007)).



Στο Σχήμα 5.1 επικεντρωνόμαστε, για τον προσδιορισμό του υπερβάλλοντος πλούτου, στη περιοχή C. Η περιοχή αυτή, για μια τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής F, μπορεί να οριστεί ως

$$C_F := \{(x,u): u \in (p,1), x \in (F^{-1}(p), F^{-1}(u))\}$$
$$= \{(x,u): x \in (t,\infty), u \in (F(x),1)\}.$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα μας ενδιαφέρουν οι παρατηρήσεις πάνω από το σημείο $(p, F^{-1}(p))$. Έτσι η συνάρτηση υπερβάλλοντος πλούτου μπορεί να οριστεί για μια τυχαία μεταβλητή και ως

$$W_X(p) = E\{(X - F^{-1}(p))_+\} = \int_p^1 (F^{-1}(q) - F^{-1}(p))dq \;\; \forall p \in (0,1). \qquad (5.2)$$

Προφανώς ισχύει θα ότι $(X - F^{-1}(p))_+ = 0$ αν $X - F^{-1}(p) < 0$ και $X - F^{-1}(p))_+ = X - F^{-1}(p)$ αν $X - F^{-1}(p) \geq 0$.

Τα χωρία που σχηματίζονται πριν το σημείο αυτό, A και B, σχετίζονται με τη διάταξη total time on test και ισχύει

$$T_X(p) := \{A_F(p) U B_F(p)\}.$$

Ενώ η ένωση όλων των χωρίων αποτελεί τη μέση τιμή της X, έτσι έχουμε

$$E(X) = \{A_F U B_F U C_F\}.$$

Έστω ότι έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές, X και Y, με πεπερασμένες μέσες τιμές $E(X)$ και $E(Y)$ αντίστοιχα. Λέμε ότι η μεταβλητή X είναι μικρότερη της Y ως προς τη στοχαστική διάταξη excess wealth, συμβολικά

$$X \leq_{ew} Y,$$

αν ισχύει

$$W_X(p) \leq W_Y(p) \Leftrightarrow \int_{F^{-1}(p)}^{1} \bar{F}(u)du \leq \int_{G^{-1}(p)}^{1} \bar{G}(u)du \ \forall p \in (0,1).$$

Η συνάρτηση $\bar{F}(x)$ αποτελεί τη συνάρτηση επιβίωσης της X και η $\bar{G}(x)$ τη συνάρτηση επιβίωσης της Y.

Αν αντί της (5.1) χρησιμοποιήσουμε την (5.2) για τον ορισμό της στοχαστικής διάταξης θα έχουμε

$$\int_{p}^{1} (F^{-1}(q) - F^{-1}(p))dq \leq \int_{p}^{1} (G^{-1}(q) - G^{-1}(p))dq \quad \forall p \in (0,1).$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι

$$X \leq_{ew} Y$$

αν και μόνο αν

$$G^{-1}(p) - F^{-1}(p) \leq \frac{1}{1-p}\int_{p}^{1} (G^{-1}(q) - F^{-1}(q))dq \,, \forall p \in (0,1).$$

Το δεύτερο μέρος της ανισότητας,

$$\frac{1}{1-p}\int_{p}^{1} (G^{-1}(q) - F^{-1}(q))dq$$

αποτελεί αύξουσα συνάρτηση στο $p \in (0,1)$.

5.6 Ιδιότητες της στοχαστικής διάταξης του υπερβάλλοντος πλούτου

Η στοχαστική διάταξη του υπερβάλλοντος πλούτου εμφανίζει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Από το Σχήμα 5.1 φαίνεται ότι η διάταξη του υπερβάλλοντος πλούτου είναι location independent. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει

  $$X \leq_{ew} Y \Rightarrow X + \alpha \leq_{ew} Y.$$

- Αν οι δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν τέτοιες μέσες τιμές ώστε να ισχύει

  $$E(X) = E(Y),$$

  τότε θα έχουμε ότι

  $$X \leq_{ew} Y \Rightarrow X \leq_{cx} Y,$$

  όπου με $\leq_{cx}$ συμβολίζουμε την κυρτή στοχαστική διάταξη.

- Για το Var ισχύει ότι

$$X \leq_{ew} Y \Rightarrow Var(X) \leq Var(Y) \text{ με } Var(Y) < \infty.$$

- Έστω ότι έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y. Τότε για να ισχύει ότι $X \leq_{ew} Y$ πρέπει για όλες τις κυρτές συναρτήσεις φ και h να ισχύει ότι η φ και η $\psi(\cdot) \equiv h(\varphi(\cdot))$ είναι ενσωματωμένες σε σχέση με την κατανομή της Y. Επίσης για κάθε πραγματικό αριθμό c θα έχουμε

$$E[\varphi(X-c)] \leq E[\varphi(Y)] \Rightarrow E[\psi(X-c)] \leq E[\psi(Y)].$$

Σημαντικό είναι να αναφέρουμε πώς για να ισχύει η σχέση $\psi(\cdot) \equiv h(\varphi(\cdot))$ για αύξουσα και κυρτή συνάρτηση h θα πρέπει να ισχύει, για τις κυρτές συναρτήσεις φ και ψ ότι

$$\varphi''(\cdot)/\varphi'(\cdot) \leq \psi''(\cdot)/\psi'(\cdot).$$

- Έστω ότι έχουμε μια συλλογή τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \dots.$ και μια άλλη αντίστοιχη $Y_1, Y_2, \dots.$. Αν N είναι μια ακέραια τυχαία μεταβλητή, ανεξάρτητη από τις μεταβλητές X_i και Y_i, τότε αν ισχύει η ανισότητα $X_1 \leq_{ew} Y_1$, στα πλαίσια της στοχαστικής διάταξης του υπερβάλλοντος πλούτου, θα έχουμε

$$max\{X_1, X_2, \dots, X_N\} \leq_{ew} max\{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\}.$$

- Έστω ότι έχουμε μια τυχαία μεταβλητή X με πεπερασμένο αριστερό σημείο στήριξης (ελάχιστο) l_X. Τότε η μεταβλητή X θα είναι DMRL (Decreasing in Mean Residual Life) είτε ως IMRL (Increasing in Mean Residual Life), αν και μόνο αν ικανοποιείται μία από τις παρακάτω συνθήκες
  1) $[X-t|X>t] \geq_{ew} [X-t'|X>t']$ για $t' \geq t \geq l_X$ (DMRL).
  2) $[X-t|X>t] \leq_{ew} [X-t'|X>t']$ για $t' \geq t \geq l_X$ (IMRL).
  3) $X \geq_{ew} [X-t|X>t]$ για $t \geq l_X$ όταν ισχύει $l_X = 0$ (DMRL).
  4) $X \leq_{ew} [X-t|X>t]$ για $t \geq l_X$ όταν ισχύει $l_X = 0$ (IMRL).
- Αν μια μεταβλητή X είναι IFR τότε ικανοποιεί τη σχέση

$$X \leq_{ew} X + Y \text{ για κάθε τυχαία μεταβλητή } Y.$$

- Έστω ότι έχουμε μια τυχαία μεταβλητή S η οποία είναι ανεξάρτητη από τις μεταβλητές X και Y ενώ είναι IFR. Τότε αν ισχύει ότι $X \leq_{disp} Y$ θα έχουμε

$$X + S \leq_{ew} Y + S.$$

Εδώ να σημειωθεί ότι μια τυχαία μεταβλητή X έχει την ιδιότητα IFR (Increasing Failure Rate) αν η βαθμίδα αποτυχίας της (failure rate) $r_X(t)$, η οποία ορίζεται ως

$$r_X(t) = \frac{f_X(t)}{\bar{F}_X(t)} \text{ για } t \geq 0,$$

είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς t.

- Έστω ότι έχουμε δύο συλλογές τυχαίων μεταβλητών (IID), $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ και $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ αντίστοιχα, τότε αν όλες οι μεταβλητές X_i και Y_i έχουν την ιδιότητα IFR και αν ισχύει ότι $X_i \leq_{disp} Y_i$ θα έχουμε
$$\sum_{i=1}^{n} X_i \leq_{ew} \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$
- Έστω ότι έχουμε ζευγάρια ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών (X_i, Y_i), $i = 1,2, \ldots\ldots, n$, τέτοια ώστε μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών να ισχύει $X_i \leq_{ew} Y_i$. Αν όλες οι μεταβλητές X_i, Y_i έχουν λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις πυκνότητας $f_X(x)$ εκτός από μία τυχαία μεταβλητή X_m και μια Y_k, με $m \neq k$, τότε ως προς τη στοχαστική διάταξη του υπερβάλλοντος πλούτου θα ισχύει
$$\sum_{i=1}^{n} X_i \leq_{ew} \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$
- Έστω ότι έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y οι οποίες έχουν συναρτήσεις κατανομής F και G αντίστοιχα με πεπερασμένους μέσους όρους. Επίσης παρουσιάζουν πεπερασμένα σημεία στήριξης l_X και l_Y. Αν ισχύει ότι $X \leq_{mrl} Y$, ως προς τη στοχαστική διάταξη του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής (mean residual life), και αν οι μεταβλητές X και Y έχουν την ιδιότητα IMRL, όπως αυτή αναφέρεται στην υπό-ενότητα (5.3), τότε θα έχουμε
$$X \leq_{ew} Y.$$

6

Σύνοψη εργασίας

Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάσαμε την έννοια του υπερβάλλοντος πλούτου και την χρησιμότητά της στη διαχείριση κινδύνου.

Αρχικά κάναμε μια μικρή εισαγωγή στην καθημερινή σημασία της έννοιας, μέσω μιας σύντομης ιστορικής αναδρομής, για να κατανοήσουμε καλύτερα τον όρο του υπερβάλλοντος πλούτου καθώς και το πως προκύπτει.

Στη συνέχεια, στο Κεφάλαιο 2, αναφερθήκαμε στη καμπύλη Lorenz και μέσω αυτής ορίσαμε τον υπερβάλλοντα πλούτο ως μέτρο εισοδηματικής ανισότητας. Αφού παρουσιάσαμε και αποδείξαμε μερικές ιδιότητες του με τη χρήση κατάλληλων κατανομών, δόθηκαν αρκετά παραδείγματα για ακόμα μεγαλύτερη εμβάθυνση και καλύτερη κατανόηση. Σε γενικές γραμμές, υπό το πρίσμα της οικονομικής επιστήμης, είδαμε πως σχετίζεται ο υπερβάλλον πλούτος με την εισοδηματική ανισότητα, τα επίπεδα ευημερίας και φτώχιας σε μια κοινωνία και πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει τη σφοδρότητα των παραπάνω φαινομένων.

Ιδιαίτερη αναφορά έγινε, στο Κεφάλαιο 3, σε μερικές κατανομές οι οποίες όπως είπαμε χρησιμοποιούνται στην περιγραφή δεδομένων που παρουσιάζουν ακραίες τιμές, τόσο στα χρηματοοικονομικά όσο και στο κλάδο της ασφάλισης. Στο κεφάλαιο αυτό έγινε χρησιμοποιήθηκαν πίνακες και διαγράμματα, κυρίως για την κατανομή Pareto, για να κατανοήσουμε, μέσω συγκρίσεων, την επίδραση των τιμών των παραμέτρων της κάθε κατανομής στην συνάρτηση του υπερβάλλοντος πλούτου.

Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάσαμε το expected shortfall, ενός μέτρου κινδύνου το οποίο αποδείξαμε ότι αποτελεί συνώνυμο του υπερβάλλοντος πλούτου. Παρουσιάσαμε ιδιότητες ενώ το συγκρίναμε και με το ευρέως γνωστό μέτρο κινδύνου VaR. Η τελευταία υπό-ενότητα του κεφαλαίου εμπεριείχε το πρακτικό σκέλος του κεφαλαίου καθώς με τη χρήση ρεαλιστικών δεδομένων υπολογίσαμε το VaR, το expected shortfall και τον υπερβάλλοντα πλούτο ενός χαρτοφυλακίου.

Στο τελευταίο κεφάλαιο έγινε μια μικρή αναφορά στις στοχαστικές διατάξεις και παρουσιάσθηκε εν συντομία το μοντέλο του υπερβάλλοντος πλούτου με μερικές ιδιότητες.

Ένα γενικό συμπέρασμα από όλη την εργασία είναι ότι ο υπερβάλλων πλούτος αποτελεί ένα ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο στην ερμηνεία και την μέτρηση φαινομένων σε ένα ευρύ φάσμα επιστημών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

[1] Κιόχος, Π. , Κιόχος, Α., Παπανικολάου, Γ. (2011), *Μακροοικονομική Ανάλυση, Θεωρία και Εφαρμογές*, Εκδόσεις Κιόχου Ε., Αθήνα.

[2] Σαπουντζόγλου, Γ., Πεντότης, Χ. (2017), *Τραπεζική Οικονομική*, Εκδόσεις Μπένου Ε., Αθήνα

Ξένη

[3] Acerbi, C. and Tasche D. (2001), Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk*, Economic Notes: Review of Banking, Finance and Monetary Economics*, **31** (2), 197-388.

[4] Aghion, P., Caroli, E. and Garcia-Penalosa, C. (1999), Inequality and Economic Growth: The Perspective of the New Growth Theories, *Journal of Economic Literature*, **37**, 1615– 1660.

[5] Ahluwalia, M. (1976), Inequality, Poverty and Development, *Journal of Development Economics*, **3**, 307–342.

[6] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M. and Heath, D. (1999), Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance*, **9**, 203-228.

[7] Atkinson, A. B. and A. Brandolini (2010), On analyzing the world distribution of income. *The World Bank Economic Review,* **24**, 1–37

[8] Azzalini, A., dal Cappello, T., and Kotz, S. (2003), Log-skew-normal and log-skew-t distributions as models for family income data, *Journal of Income Distribution*, **11**, 12–20.

[9] Bauerle, N. (2005), Stohastic Orders and Risk Measures: Consistency and Bounds, *Insurance: Mathematics and Economics*, **38**, 132-148.

[10] Belzunce, F. and Riquelme, C. (2014), Some results for the comparison of generalized in the total time on test and excess wealth, *Statistical Papers*, **56**, 1175-1190.

[11] Benktander, G. and Segerdahl, C. (1960). On the Analytical Representation of Claim Distributions with Special Reference to Excess of Loss Reinsurance. *16th International Congress of Actuaries, Brussels,* 626–646.

[12] Bordley, R. F., McDonald, J. B. and Mantrala A. (1996), Something new,something old: Parametric models for the size distribution of income. *Journal of Income Distribution*, **6**, 91–103.

[13] Dagum, C. (1977), A new model of personal income distribution: Specification and estimation, *Economie Appliquée*, **30**, 413–436.

[14] Dagum, C. (1980), Generating Systems and Properties of Income Distribution Models, *Metron*, **38**, 3-26.

[15] Dagum, C. (1999), A study of the distributions of income, wealth and human capital. *Revue Européenne des Sciences Sociales,* **37**(113), 231–268.

[16] Gastwirth, J. L. (1971), A General Definition of the Lorenz Curve, *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, **39**, 1037- 1039.

[17] Gastwirth, J. L. (1972), The Estimation of Lorenz Curve and the Gini index, *The review of Economics and Statistics*, 306-316.

[18] Gastwirth, J.L. and Smith, J.T. (1972), A New Goodness of Fit Test. *Business and Economics Statistics Section Proceedings of the Meeting of the American Statistical Association*, 320-322.

[19] Guo, Q., & Gao, L. (2012), Distribution of individual incomes in China between 1992 and 2009. *Physica A-statistical Mechanics and Its Applications*, **391**, 5139-5145.

[20] Hogg, R. V. and Klugman S. A. (1984), *Loss Distributions.* Wiley J. & Sons, Inc.: New York.

[21] Kleiber, C. and Kotz S. (2003), Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences, Wiley J. & Sons, Inc.: New Jersey.

[21] Klugman, S. A., Panjer, H. H. and Willmot, G. (1998), *Loss Models: From Data to Decisions.* Wiley J. & Sons, Inc.: New York.

[22] Kalecki M. (1945), On the Gibrat Distribution, *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, **12**(2), 161-170.

[23] Kochar, S., Li, X. and Shaked, M. (2002), The total time on test transform and the excess wealth stochastic orders of distribution, *Advances in Applied Probability,* **34**(4), 826-845.

[24] Kumar, D. (2017), The Singh-Maddala distribution: properties and estimation, Department of Statistics, *International Journal of System Assurance Engineering and Management,* **8**, 1297–131.

[25] McDonald, J.B. (1984) Some Generalized Functions for the Size Distribution of Income, *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, **52**, 647-663.

[26] McDonald, J.B. and Xu, Y.J. (1995) A Generalization of the Beta Distribution with Applications, *Journal of Econometrics*, **66**, 133-152.

[27] Milanovic, B. (2016) *Global Inequality: A New Approach for the Age of Globalization.* Boston and London: Harvard University Press.

[28] Milanovic, B. (2019), Income, Inequality and poverty during the Transition from planned to Market Economy, The World Bank, Washington.

[29] Moothathu, T. S. K. (1985), Sampling Distributions of Lorenz Curve and Gini Index of the Pareto Distribution, The Indian Journal of Statistics, **47**(2), 247-258.

[30] Sarabia, J. M. , Prieto, F., Trueba, C. and Jorda, V. (2013), About the modified Gaussian family of income distributions with applications to individuals incomes, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **392**, 1398- 1408.

[31] Shaked, M. (1982), Dispersive ordering of distributions, *Journal of Applied Probability*, **19**, 310- 320.

[32] Shaked, M., & Shanthikumar, J. (1998), Two Variability Orders. *Probability in the Engineering and Informational Sciences, **12***(1), 1-23.

[33] Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (2007), *Stochastic Orders*, Springer, New York.

[34] Singpurwalla, N. D. and Gordon, A. S. (2012), *Auditing Shaked and Shanthikumar's "excess wealth"*, *Annals of Operations Research*, **212**, 3-19.

[35] Sordo, M. A. (2009), Comparing tail variabilities of risks by means of the excess wealth order. *Insurance: Mathematics & Economics*, **45**(3), 466–469.

[36] Thurow, L. (1949), Analyzing the American Income Distribution, *American Economic Review*, **60**(2), 261-269.

Διαδικτυακοί Τόποι:

https://en.wikipedia.org

https://www.investopedia.com